
物理学原論・ループ量子重力

執筆中

佐藤 悠大

まえがき

- 内容
 - 古典物理学，量子力学，素粒子物理学の基本原理
 - ループ量子重力 [1-3]
- 構成 要点と途中計算を分離

表1 大まかな内容構成

	非相対論	特殊相対論	一般相対論
古典論	—	—	第I部
量子論	第II部	第III部	第IV部

本稿の他に，理論物理学の各種ノート (PDF) を以下のページで公開している。

<http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/>

「まえがき」の原稿

本稿は「物理学原論」と題して、古典物理学，量子力学，素粒子物理学の基本原理を手際良く説明する試みであり，現代物理学を一通り学ぶための時間と労力，延いては焦りを軽減することを目指す．それはある意味では横着のようであるが，他方で理論物理の知識を自分の頭の中で再構成するという知的実践でもある．そのためには扱う題材(とりわけ具体的な応用)を厳選・省略する必要がある，本稿もまた多かれ少なかれ内容の偏りは免れない．

そこで本稿の今一つのテーマである「ループ量子重力」を目標に据えることが，題材を取捨選択する際の1つの指針になる．ループ量子重力は重力の量子論に対する1つの有力候補でありながら，私の知る限り現況では，この分野は充実した親切な入門書に乏しい．そこでループ量子重力の主要な教科書 [1-3] の断片的な記述を推理力の許す限り解読し，第IV部にまとめる．ここに本稿を執筆した1つの意義があると思う．

なお本稿では扱いきれなかった内容を補完する意味も兼ねて，本稿の他にも理論物理学の各種ノートを以下のページで公開している．

<http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/>

ノートには誤りや筆者の勘違いが潜んでいるかもしれないことを告白しておく．至らぬ点は，筆者の勉強不足である．

内容

大まかな内容構成は表1に示した通りである。

まず第I部では古典物理学について説明する。古典的には自然は粒子(物質)と場(電磁場と重力場)から成る。それらのダイナミクスは最小作用原理を用いて定式化でき、この観点からは場と粒子に対する作用はある意味、古典的な“万物の理論”を定義していると見なせる。一般相対性理論に対する明快な説明と洞察を与えることも、第I部の主要な目的の1つである。

次に第II部では素粒子論と量子重力の準備を兼ねて、量子力学の基礎について簡潔にまとめる。題材は非相対論的量子力学に限るものの、量子力学とは任意の古典系——相対論的であれ非相対論的であれ——を量子化する一般的な枠組みである。

第III部では経路積分の手法を中心に場の量子論を概観する。Yang-Mills理論を導入し、その特例として量子色力学(QCD)と電弱統一理論を説明する。これらは合わせて素粒子標準理論(標準模型)を定義する。

第IV部ではループ量子重力を取り上げる。いわゆる“万物の理論”の有力候補として弦理論が有名である一方で、ループ量子重力は一般相対性理論の背景独立性のアイデアを正面から受け止め、重力を量子化するアプローチである。ループ量子重力の描像では時空はPlanckスケールで離散的な構造を持ち、したがって理論は紫外発散を生じない。

構成

本稿は大まかには要点のみを示したスライドと、式の導出などの詳細を記したスライド(および原稿のスライド)の繰り返しから成っており、要点と途中計算を分離した見通しの良い構成を目指した。一度、式を導出できれば、基本的に細かい計算の過程は忘れて、理論の前提と結果(あるいはその物理的解釈)のみを覚えれば良いということ自体は、既に物理学の標準的な学習方針として広く認識されているように見受けられる。しかしながら実際にこのような見識を反映して、要点と途中計算を分離した形で提示している教科書は、思うに限られている。そこで本稿の記述スタイルはオリジナリティの1つに数え入れられる。

想定読者

本稿では目安としては学部程度の理論物理学の予備知識を、読者は既にある程度習得していると仮定した。ただし直ちに付け加えると、「物理学科の学部の水準」といった慣習的な言い回しは確かに便利ではあるが、実のところ私はこのような表現が正直あまり好きではない。何故ならそれは大学に通い、規定のカリキュラムに従って学習を進めることを暗黙の前提としており、他方では自分で勉強する自由という発想を妨げ、抑圧しているように、少なくとも私には感じられるからである。そこで本稿は潜在的には、物理学に興味を持つあらゆる人々に開かれているということも、申し添えておきたい。

目次

第I部	古典物理学	12
1	序論	13
2	古典物理学の枠組み	18
2.1	力学	18
2.1.1	時間のない力学	18
2.1.2	伝統的な力学の再現	31
2.2	幾何学	37
2.2.1	テンソル	37
2.2.2	微分形式	65
2.2.3	Riemann 幾何学	76
2.2.4	$3 + 1$ 分解と外部曲率	123
2.2.5	特殊相対性理論の運動学	156
3	最小作用原理と運動方程式	175
3.1	物理量の定義	175

3.1.1	電磁場テンソル, 電流密度, エネルギー・運動量テンソル	175
3.1.2	汎関数微分	201
3.2	最小作用原理	212
3.2.1	物質のエネルギー・運動量テンソル	217
3.2.2	運動方程式	241
3.2.3	Hamilton形式の電磁気学	290
4	一般相対性理論の応用	315
4.1	Schwarzschild時空	315
4.2	宇宙論	363
4.2.1	Friedmann–Robertson–Walker計量	363
4.2.2	Friedmann方程式	376
第II部 量子力学の基礎		399
5	量子力学の関係的解釈	403
6	数学的準備	410
6.1	有用な数学公式	410

6.2	混合状態を含む量子力学の数学的定式化	432
6.2.1	純粋状態に対する伝統的な定式化	432
6.2.2	混合状態と密度演算子	436
6.2.3	量子エンタングルメント	447
6.3	情報量	455
6.3.1	Shannon 情報量と相互情報量	455
6.3.2	von Neumann 情報量	480
6.4	群論	486
6.4.1	群と表現	486
6.4.2	直交関係式	496
6.4.3	Lie 群	505
7	運動量	527
8	角運動量	543
8.1	一般論の復習	543
8.1.1	回転および角運動量の交換関係	543
8.1.2	角運動量の固有値と固有状態	557
8.2	スピン角運動量	569
8.2.1	スピン $1/2$ の系と $SU(2)$ 群	569

8.2.2	SU(2) 表現とスピノル	599
8.3	Wigner 行列とその周辺	620
8.3.1	Wigner 行列	620
8.3.2	角運動量を表す Schwinger の振動子モデル	628
8.3.3	Haar 測度と Peter–Weyl 定理, 群上の調和解析	648
8.3.4	SU(2) コヒーレント状態	659
8.4	角運動量の合成とその周辺	672
8.4.1	角運動量の合成	672
8.4.2	Wigner の $3j$ 記号と不変テンソル	696
9	量子ダイナミクス	734
9.1	時間的发展と Schrödinger 方程式	734
9.2	Schrödinger 描像, Heisenberg 描像, 相互作用描像	750
9.3	Feynman の経路積分と古典的極限	762
9.3.1	Feynman の経路積分	762
9.3.2	古典的極限	778
10	熱力学・統計力学	789
10.1	量子統計力学	789
10.2	情報熱力学	813

10.3	熱力学と因果律——流体系を例に	834

第III部	場の量子論	843

11	序論	844

12	数学的準備	850

12.1	場の Lorentz 変換とスピノル	850

12.2	スピノルと幾何学	864

12.3	Grassmann 代数と Grassmann 場	886

12.4	経路積分 (汎関数積分)	901

13	Dirac 場と電磁場	909

13.1	自由な Dirac 場	909

13.2	QED のラグランジアン密度	933

14	経路積分による QED	948

14.1	正準形式と経路積分形式	948

14.1.1	遷移振幅と Green 関数, および境界形式	948

14.1.2	Dirac 場の経路積分	961

14.2	QEDのGreen関数と生成汎関数	976
14.2.1	正準形式と経路積分形式での定義	976
14.2.2	自由場の生成汎関数	989
14.2.3	Green関数の摂動論	1009
14.2.4	S行列要素(LSZ簡約公式)	1034
14.3	繰り込み	1047
14.3.1	輻射補正	1050
14.3.2	正則化	1056
14.3.3	繰り込み	1076
15	素粒子標準模型	1082
15.1	Yang-Mills理論	1082
15.2	QCD (量子色力学)	1115
15.3	電弱統一理論	1124
15.3.1	弱い相互作用のゲージ理論	1124
15.3.2	自発的な対称性の破れ	1150
15.4	標準模型	1191

16	序論	1197
16.1	現代物理学の諸問題	1204
16.2	古典的GRの背景独立性	1211
16.3	弦理論	1224
16.4	量子化された幾何学	1232
16.4.1	Bronstein にならった思考実験	1232
16.4.2	紫外切断	1239
16.4.3	スピン・ネットワークとスピン・フォーム	1243
16.5	三角形分割	1267
16.5.1	四面体の Euclid 幾何学	1268
16.5.2	閉包拘束	1279
17	一般相対性理論の再定式化	1285
17.1	テトラード	1285
17.2	Einstein–Hilbert 作用	1313
17.3	Holst 作用とその周辺	1335
17.3.1	Holst 作用と Barbero–Immirzi 結合定数	1335
第V部	付録：Spinoza 描像	1343

第I部

古典物理学

1 序論

古典的な自然 = 粒子(物質) + 場(電磁場, 重力場(=時空))

最小作用原理(粒子・場に対する古典的な“万物の理論”)

$$S = - \sum mc \int ds - \sum \frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu - \frac{1}{16\pi c} \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \\ - \frac{c^3}{16\pi G} \int G^* \sqrt{-g} d^4x. \quad (\text{作用の式(188)})$$

↓

- 粒子の運動方程式(211) → 場と相互作用する粒子の運動
- Maxwell方程式(220) → 電磁気学
- Einstein方程式(221) → 重力場のダイナミクス
 - ★ Einstein方程式は粒子と電磁場の運動方程式と独立でない(3.2.2項)
 - ★ 熱力学は系の詳細に依らないという意味で, より普遍的

■表記法など 第I部では基本的に以下の約束に従う.

- 断りのない限り,
 - 時空4成分0, 1, 2, 3をとる添字 → ギリシア文字 $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots$
 - 空間成分1, 2, 3のみをとる添字 → ラテン文字 $i, j, k, \dots$
- 慣性系での計量テンソル(Minkowski計量)は

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

($\eta_{\mu\nu}$ を逆符号に採る流儀も一般的である.)

- 任意の4元反変ベクトルを

$$a = a^\mu = (a^0, \boldsymbol{a})$$

のように書く. ただし a^0 は時間成分, $\boldsymbol{a}$ は空間成分であり, ここでは a^μ は全成分 $a = \{a^\mu\}$ を表す(抽象添字記法) [1, p.23].

- 電磁気学の単位系として **Gauss 単位系** を採用する.
 - Heaviside 単位系との相違 [4, pp.77–78]. 自由電磁場の作用 (188)

$$S_f = a \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^4x, \quad a = \begin{cases} -1/16\pi & (\text{Gauss 単位系}) \\ -1/4 & (\text{Heaviside 単位系}) \end{cases}$$

- * Gauss 単位系では Maxwell 方程式 $\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$ が 4π を含む
代わりに Coulomb の法則 $F = \frac{e^2}{r^2}$ が簡単になる*¹.
- * Heaviside 単位系では Maxwell 方程式 $\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{1}{c} j^\mu$ が簡単になる
代わりに Coulomb の法則 $F = \frac{e^2}{4\pi r^2}$ が 4π を含む.
- Gauss 単位系では, 磁場 $\mathbf{H}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ は等しい*².

*¹ Biot-Savart の法則や遅延ポテンシャルの表式も同様に 4π を含まない.

*² 実際, 国際単位系における磁場と磁束密度をそれぞれ $\mathbf{H}_{\text{SI}}, \mathbf{B}_{\text{SI}}$ とすると,

$$\mathbf{B} = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} \mathbf{B}_{\text{SI}} = \sqrt{4\pi\mu_0} \mathbf{H}_{\text{SI}} = \mathbf{H}. \quad (\mu_0 \text{ は真空の透磁率})$$

ただし曲がった時空では, $\mathbf{B}$ と $\mathbf{H}$ は一般に異なる [4, pp.286–287].

第1章の原稿

古典物理学は最小作用原理を出発点として定式化できる．この観点からは原理として物理系の作用を与えることが，理論を定義することに相当する．そこで2.1節では最小作用原理を含め，古典論を定式化する数学的に等価な一連の力学的枠組みを概観する．

しかるに古典的には，物理的自然は粒子(物質)と場(電磁場と重力場)から成るとされる．ここで一般相対性理論によれば，重力場は時空の歪みとして理解できる．他方で概念的には逆に，時空が重力場から現れると解釈することも可能である．少なくとも古典物理学の水準ではいずれの解釈も等価であり，どちらの立場が優れているかを断言することはできない [2, p.77]．しかしながら量子重力を論じる際には，重力場を時空よりも基本的な存在とする見方がより有益であることを，後に主張する予定である．この観点からは時空も含め，物理的世界は場(と物質)から成ることになる [2, p.367]．また日常用語としての無重力とは平坦な重力場に他ならず，世界から重力場を除くと時空すら残らない．

いずれにせよ重力場を含む系を(完全に)記述するには，一般相対性理論が不可欠である．そこで2.2節では準備として，曲がった時空の数学を導入する．

第3章ではいよいよ，粒子と場の複合系に対する作用を原理として提示する．この章は第I部の最も重要な部分の1つに位置付けられる．実にこのとき原理的には，粒子と場のダイナミクスは完全に決定されることになる．この意味で完全な作用積分は古典的な“万物の理論”と呼び得る．ただし正確性を期すため直ちに付け加えると，我々の議論

では熱力学を考慮していない．熱力学は要素還元論的に力学や場の古典論から再現し得る2次的な分野というよりも，むしろ対象系の詳細に依らないという意味で，力学や場の古典論よりも普遍的な上位の体系と見なし得る．実際，古典論の水準に限らず，熱力学は物理において微妙な役割を演じている．物理学全体において熱力学がどのように位置付けられるかという問題には，本稿では情報熱力学(第II部)とブラックホール・エントロピー(第IV部)を論じる際に触れる機会がある．

次いで我々は最小作用原理から粒子と場の運動方程式を導く(3.2.2節)．もっとも本稿では形の上で一般相対性理論における運動方程式を与えてはいるものの，電磁気学の基礎方程式に関しては専ら興味の持たれる，重力場の強度がゼロの場合しか扱っていない．運動方程式から，与えられた場の下での粒子の運動や，与えられた物質分布が作る場を求めることができる．ただし一般には場と粒子は相互作用しながら，双方とも発展する．

最後に第4章では一般相対性理論の主要な応用として，静的なSchwarzschild時空と動的な一様等方宇宙モデルを取り上げる．

なお第I部では時空添字をギリシア文字で，空間添字をラテン文字で表す．また計量の符号系を $(+ - - -)$ とする流儀を採用する．さらに電磁気学の単位系として，Gauss単位系を採用する．

2 古典物理学の枠組み

2.1 力学

2.1.1 時間のない力学

GRの文脈では系のダイナミクスを“時間”発展として記述できない

→ 不完全観測量 $x = \{x^a\}$ の間の関係として記述
(時間発展は $x^0 = t$ が時間変数の場合)

$$\text{例：} \quad a(\tau) = A \sin(\tau + \phi_a), \quad b(\tau) = B \sin(\tau + \phi_b) \quad (\text{図1}) \quad (2)$$

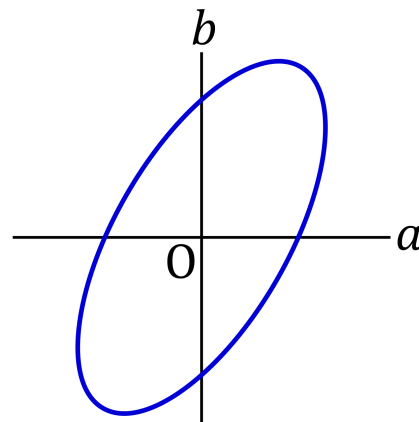


図1 τ でパラメトライズされた拡大配位空間 (a, b) における楕円軌道(式(2)). 不完全観測量 a, b のいずれも時間変数の役割を演じない.

拡大配位空間 $\mathcal{C}_{\text{ext}}$ の軌道 $\gamma : x^a = x^a(\tau)$, 速度 $\dot{x}^a \equiv \frac{dx^a}{d\tau}$ に対して,
ラグランジアン $\mathcal{L}(x, \dot{x})$ で記述される系を考えると, 作用と運動量は

$$S[\gamma] \equiv \int_{\gamma} d\tau \mathcal{L}(x, \dot{x}), \quad p_a \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^a}. \quad (3)$$

ゲージ・パラメータ τ の付け替えの下での作用の不変性から,

$$\text{“ハミルトニアン拘束” } C(p, x) \sim p_a \dot{x}^a - \mathcal{L} = 0 \quad (4)$$

が帰結する (ゲージ不変性に伴う保存則) [1, p.46]*³.

拘束条件 (4) の下で作用 (3) は “相空間” (p, x) 上の積分

$$S[\tilde{\gamma}] = \int_{\tilde{\gamma}} p_a dx^a \quad (5)$$

に書き換えられる [2, p.120].

*³ 以降, 繰り返された添字に関しては適切な範囲で和をとるものと約束し, いちいち断らない.

- 変分原理

C_{ext} への制限 γ が2点 x_1^a, x_2^a を繋ぐような, “相空間” (p, x) の超曲面 (4):

$C(p, x) = 0$ 上の曲線 $\tilde{\gamma}$ のうち, 物理的運動は作用 (5): の極値を与える [2, p.198]

→ 運動方程式 (6), あるいは式 (7), (8).

★ 変分原理は目的論的自然観に与しない.

- Lagrange 形式 (Euler–Lagrange 方程式)

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^a} = 0. \quad (6)$$

- Hamilton 形式

$$C(p, x) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{dx^a}{d\tau} = N \frac{\partial C(p, x)}{\partial p_a}, \quad \frac{dp_a}{d\tau} = -N \frac{\partial C(p, x)}{\partial x^a}. \quad (8)$$

ここに “ラプス関数 (Lapse function)” $N(\tau) > 0$ はパラメータ τ の任意性に
応じた乗数である [2, pp.111–112].

- 発展の生成

式(8)より，相空間のあらゆる関数 $A(p, x)$ の軌道に沿う変化率は，Poisson 括弧

$$\frac{dA}{d\tau} = N \sum_a \left(\frac{\partial A}{\partial x^a} \frac{\partial C}{\partial p_a} - \frac{\partial A}{\partial p_a} \frac{\partial C}{\partial x^a} \right) \equiv N\{A, C\} \quad (9)$$

で与えられる．

- Hamilton–Jacobi 形式

積分路を現実の軌道に選んで評価した，始点 x_0 と終点 x の関数としての作用 $S(x, x_0)$ を **Hamilton (主)関数** と呼ぶ．その微分は

$$\text{終運動量 } p_a = \frac{\partial S(x, x_0)}{\partial x^a}, \quad \text{始運動量 } p_{0a} = -\frac{\partial S(x, x_0)}{\partial x_0^a} \quad (10)$$

を満たす．これを拘束条件(4)に代入すると，Hamilton–Jacobi 方程式

$$C\left(\frac{\partial S}{\partial x}, x\right) = 0 \quad (11)$$

を得る．

2.1.1 項の式の導出など

■拘束条件(4): $C(p, x) = 0$ の導出 (着想は文献 [5, p.169])

作用(3)がパラメータの付け替え $\tau \rightarrow \tau(\tau')$ の下で不変に留まることを要求すると、ラグランジアンの変換性

$$\mathcal{L}(x(\tau), \dot{x}(\tau)) = \frac{d\tau}{d\tau'} \mathcal{L}(x(\tau'), \dot{x}(\tau')) \quad (12)$$

が見出される。ここで引数は

$$x(\tau') \equiv x(\tau(\tau')), \quad \dot{x}(\tau') \equiv \frac{dx(\tau')}{d\tau'} = \frac{d\tau}{d\tau'} \frac{dx(\tau(\tau'))}{d\tau} = \frac{d\tau}{d\tau'} \dot{x}(\tau)$$

を意味する。よって引数 $\dot{x}(\tau)$ を全て $k \equiv \frac{d\tau}{d\tau'}$ 倍すると、ラグランジアンは k 倍になる：

$$\mathcal{L}(x(\tau), k\dot{x}(\tau)) = k\mathcal{L}(x(\tau), \dot{x}(\tau)).$$

これは $\mathcal{L}$ が $\dot{x}$ の1次の同次関数であることを意味するので、同次関数についてのEulerの定理より

$$\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^a} \dot{x}^a = p_a \dot{x}^a \quad \text{i.e.} \quad \text{正準ハミルトニアン } \mathcal{H} \equiv p_a \dot{x}^a - \mathcal{L} = 0.$$

またこの構成から $\mathcal{H}(\tau) \equiv \mathcal{H}(p(\tau), x(\tau))$ は上記のパラメータ付け替えで k 倍されることを踏まえ、 H に比例する拘束量 C を定義できる。

■ Euler–Lagrange 方程式 (6) の導出

最小作用原理に基づき，軌道の変分 δx^a に伴う作用 (3) の変分

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^a} \delta x^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^a} \delta \dot{x}^a \right) d\tau \\ &= \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^a} \delta x^a \right| + \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^a} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^a} \right) \delta x^a d\tau\end{aligned}\tag{13}$$

をゼロとおこう．ただし第2の等号では $\delta \dot{x}^a = \frac{d}{d\tau} \delta x^a$ に注意して部分積分を行った^{*4}．変分原理の境界条件 $\delta x^a = 0$ より最右辺の境界項は落ちる．そこで任意の変分 δx^a に対して最右辺の被積分関数がゼロとなることを要求すると，Euler–Lagrange 方程式 (6) を得る．

^{*4} 軌道上の点 $x(\tau)$ の変分に伴う移動先 $x'(\tau)$ を指定すると $\delta x^a = x'^a - x^a$ であり，

$$\frac{d}{d\tau} \delta x^a = \frac{d}{d\tau} (x'^a - x^a) = \delta \dot{x}^a.$$

このように微分の線形性より，微分と変分の順序を入れ替えられる．

■Hamilton系(7),(8)の導出

Lagrange乗数 N を導入して作用を

$$S = \int d\tau \left(p_a \frac{dx^a}{d\tau} - NC(p_a, x^a) \right) \quad (14)$$

と書き, $N(\tau), x^a(\tau), p_a(\tau)$ に関する変分をとると

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left(\delta p_a \cdot dx^a + p_a d(\delta x^a) - N \left(\frac{\partial C}{\partial x^a} \delta x^a + \frac{\partial C}{\partial p_a} \delta p_a \right) d\tau + \delta N \cdot C d\tau \right) \\ &= p_a \delta x^a \Big| \\ &\quad + \int \left(\left(dx^a - N \frac{\partial C}{\partial p_a} d\tau \right) \delta p_a - \left(dp_a + N \frac{\partial C}{\partial x^a} d\tau \right) \delta x^a + C \delta N \cdot d\tau \right). \quad (15) \end{aligned}$$

ただし最右辺の第1項は部分積分から生じる境界項であり^{*5}, 端点の座標 x_1^a, x_2^a を固定した変分に対してはゼロになる. よって変分原理に基づき, Hamilton系(7),(8)を得る.

^{*5} $dx^a = \overrightarrow{AB}$ だけ隔たる軌道上の2点 A, B について, 変分後の移動先 A', B' を指定すると,

$$\delta dx^a = \overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{AA'} = d\delta x^a$$

が恒等的に成り立つことに注意する. 部分積分は Leibniz 則 $d(fg) = f dg + g df$ に基づく.

2.1.1 項の原稿

伝統的な力学は時間に対して物理系の発展を記述することを主眼とする．時間は時計を用いて測ることができる．ただしこれには難点がある．実際 Galilei は自分の脈拍を用いて、振り子の周期性を確かめたという．この逸話の悩ましい点は、単にそれが作り話だということだけでなく、後に医者が振り子を用いて患者の脈拍を測るようになったということにある．ここから理解されるように、一般にどのような時計に“正確な時計”の資格があるのかは自明でない．そこで Newton は絶対時間の存在を仮定し、我々はいかなる時計を用いても絶対時間を間接的に近似できるに過ぎないとした [2, pp.29–30]．

しかしながら物理系の発展は必ずしも単一の時間変数に対する発展——いわゆる時間発展——として記述できるとは限らない．実際、一般相対性理論 (GR) では空間座標の異なる点では固有時間の流れ方が異なり [4, p.264]、他方で大域的な座標時間はもはやゲージ・パラメータに過ぎない．そこで物理系の発展は一般には時間発展としてではなく、系を特徴付ける一連の物理量 $x = \{x^a\}$ の間の関係 (相関) として記述されることになる．このことは世界に発展がないことや変化がないことを意味しない．それは現実世界の発展と変化が、単一の変数における発展として上手く表現するには、あまりに複雑であることを意味している．言うなれば、時を刻むのはあるときにはフロントガラスのワイパーであり、あるときには人の歩みであり、またあるときには心臓の鼓動である．重力場のダイナミクスを無視できる場合には、その固定された配位を用いて時間変数を定義できる [1, pp.49–50]．

特に1つの物理量 x^0 が時間変数 t に選出されるとき，系の発展は時間発展に帰着する．このとき x は配位変数 $q = \{q^i\}$ と時刻 t を同等に扱った変数にあたるので，通常の観測量 q と区別して不完全観測量 (partial observables) と呼ばれる．不完全観測量は系の自由度 (配位変数 q の個数) に比べて余分な量を含んでいるという意味で“不完全 (partial)”と形容される．なお不完全観測量 x の空間を拡大配位空間と呼ぶ [1, p.45].
ただし時間変数に同定し得る物理量を常に見出せるとは限らない．実際，ある種の宇宙論的なモデルでは a を“宇宙の半径”， b を宇宙に満ちる一様な“場”とすると，これら2つの不完全観測量は図1のように a, b 空間に楕円を描く*⁶．ここで楕円の式(2)における τ は時間ではなく単なるパラメータであり，変数 a, b の発展は時間に対してではなく互いに対してのみ定義され，ダイナミクスは2変数 a, b の関係に他ならない．言わば a の振動が刻む“時間”に対して b の発展が記述され，その逆も然りである．正確には a, b はいずれも有界なので，伝統的な意味での時間変数 t の役割を演じない．実際，拡大配位空間 (q, t) における運動は t について単調なので，軌道は閉曲線になり得ない [2, p.109] [1, pp.53–54].

これを踏まえ，時間変数がない場合にも適用できる力学の一般的な枠組みを定式化しよ

*⁶ 直交する2方向の単振動が式(2)のように共通の振動数を持つとき，それらを重合せた運動は楕円軌道を成す．文献 [4, pp.130–131] では電磁波の楕円偏光を論じる際に複素ベクトルを利用して，このことをエレガントに証明している．

う．実にこれから展開する時間のない力学の定式化には，量子重力の基礎という1つの重要な応用例が伴っている．まず不完全観測量 x^a の関係を求めることは，拡大配位空間における軌道 γ を決定することと等価である．軌道は $x = x(\tau)$ とパラメトライズできる．ここで τ はあくまで単なる軌道のパラメータであり，時間変数と混同してはならない．とは言え τ に関する微分として“速度” $\dot{x} = \{\dot{x}^a\}$ を定義し，系を記述するラグランジアン $\mathcal{L}(x, \dot{x})$ を導入できる．ただし単なるゲージ・パラメータ τ に陽に依存するラグランジアンを考える必要はなく，またラグランジアンが物理的な時間 t に陽に依存する場合は，1つの不完全観測量 x^0 が時間変数 t である場合として原理的に含まれている [5, p.168]．さて，引き続き τ をあたかも時間変数であるかのように見なすと，系の作用積分 S と運動量 $p = \{p_a\}$ は通常 of 力学と同様の式 (3) で定義できる．ただし τ は我々が任意に選べるゲージ・パラメータなので，その付け替えの下で作用は不変に留まらねばならない．ここから拘束条件 (4) が帰結する (導出スライド参照)．拘束量 C はハミルトニアン拘束とも呼ばれ [1, p.43]，ゲージ対称性に付随する保存量と見なせる (その値はゼロであるにしても^{*7}) [3, p.49]．ただし正準ハミルトニアン $\mathcal{H}$ ないしハミルトニアン拘束 C はもはや速度 $\dot{x}$ の代わりに，運動量 p を変数とする関数と見なす．実際，速度と運動量が1対1に対応するか否かに関わらず，Legendre変換を通じてハミルトニアンを座標 x と運動量 p の関数と見なすこと自体は常に可能である (詳しくは3.2.3項の式 (254) の箇所を見よ) [5, p.210]．運動量はLagrange形式の力学では式 (3) で定義され

^{*7} 保存量からその一定値を引けば，一般性を失うことなく常に値がゼロの保存量が得られる．

るのに対し，Hamilton形式の力学では座標 x と合わせて独立な力学変数として扱われる．拘束条件(4)の下では，作用(3)は“相空間” (p, x) の軌道 $\tilde{\gamma}$ に沿う積分(5)へと書き換えられる．

次に運動を決定する変分原理として，最小作用原理を提示する．現実の物理的な運動は拡大配位空間 $\mathcal{C}_{\text{ext}}$ における曲線 γ で表される．他方で作用(5)はハミルトニアン拘束(4): $C(p, x) = 0$ で表される，“相空間” (p, x) の超曲面 Σ 上の曲線 $\tilde{\gamma}$ に沿って評価される．そこで拡大配位空間 $\mathcal{C}_{\text{ext}}$ への制限が $\mathcal{C}_{\text{ext}}$ 上で与えられた始・終点 x_1^a, x_2^a を繋ぐ曲線 γ を成すような一連の曲線 $\tilde{\gamma}$ を考えよう．このとき式(5)の作用の極値(停留値)を与える曲線 γ が，物理的に実現する運動に対応する．

ここで変分原理は決して目的論的自然観に与しないことに注意を促しておきたい．一見すると最小作用原理は粒子や場を擬人化し，作用を最小にするという目的を持って振舞う存在として捉えているような印象を与え得る．しかし例えば粒子は，終点に辿り着くという最小作用原理で課される境界条件を実現するような初期条件を自らが満たしているかを知らないから，このような解釈は不適當である．実際，最小作用原理から導かれる運動方程式は，粒子や場が目的因ではなく古典的・機械論的因果律に従って時間変化することを意味している．

拘束条件(4)の下では式(5)より，作用は拡大配位空間の軌道に沿うラグランジ안의積分(3)に戻る．したがって最小作用原理から運動方程式として， τ を発展パラメータとするEuler–Lagrange方程式(6)が導かれる(導出スライド参照)．

他方で相空間上の積分(5)に直接基づけば、変分原理からは運動方程式として、通常のHamilton方程式とよく似た方程式(8)が導かれる。導出もまた通常のHamilton方程式の場合とよく似た方法で行える(導出スライド参照)。ただし $N(\tau)$ はパラメータ τ の任意性に応じた乗数であり、“ラプス関数(Lapse function)”と呼ばれる。逆に言えば $N(\tau)$ の異なる選択は、運動に沿う異なるパラメータ τ を定める。単調なパラメータ付けを得るには $N(\tau) > 0$ が必要である。特に $N(\tau) = 1$ となるパラメータ付けはLapse = 1ゲージと呼ばれ、しばしば便利であるものの、物理的な観点からは、それは特別でない。

Hamilton系の式(8)から、拘束量 C はハミルトニアンに対応物であることが見て取れる。ハミルトニアン拘束 C が消える系は完全拘束系と呼ばれる [3, p.58]。しかし正準ハミルトニアン $\mathcal{H}(\sim C)$ が消えることは、何らダイナミクスが“凍結する”といった不条理を意味しない。実際、パラメータ τ に関するゲージ不変性に伴う保存量 C は式(9)に従い、パラメータ τ における発展を生成する [1, p.43]。ただし式(9)では全ての不完全観測量にわたるPoisson括弧を定義した。これは伝統的な力学において、通常のハミルトニアンが時間発展の生成子となることとアナログであり [6, pp.553–554, p.557]、この意味でハミルトニアン拘束 C はダイナミクスを規定していると言える。なお超曲面 $C = 0$ 上の点においても、Poisson括弧の定義に現れる相空間の座標軸方向の微分は、一般には超曲面 $C = 0$ から飛び出す方向への微分なので、Poisson括弧はノンゼロとなり得ることに注意しよう [7, pp.501–502]。

さて、変分原理では与えられた始・終点を結ぶ任意の曲線に沿って作用積分を評価し、したがって作用を曲線の汎関数と見なしてきた。次に作用の積分路を運動方程式に従って実現される物理的な軌道に限定し、作用を始・終点の座標の関数 $S(x, x_0)$ と見なそう。ここで x_0 が始点、 x が終点を表す。この場合の作用 $S(x, x_0)$ は Hamilton 関数ないし Hamilton の主関数と呼ばれる (ハミルトニアンとの混同に注意せよ) [1, pp.30–31] [5, p.184]。Hamilton 関数に対して作用の変分 (13), (15) は、運動方程式より現実の軌道に沿う積分が消えるので、境界項のみが生き残る。ここから境界の座標による Hamilton 関数の微分公式 (10) が見出される (p_{0a} は始運動量の第 a 成分)。このように端点微分の公式 (10) と最小作用原理は表裏一体である。(翻って作用 (5) は微分係数 (10) を線積分した形をしている。) これを拘束条件 (4) に代入すると、Hamilton 関数に対する支配方程式として Hamilton–Jacobi 方程式 (11) が得られる。Hamilton 関数を終点 x ごとに値が定まる場と見なせば、Hamilton–Jacobi 方程式は言わば Hamilton 関数に対する場の方程式である。この Hamilton–Jacobi 形式の力学においても、拘束量 C がダイナミクスを規定している。実際、与えられた拘束量 C に対して Hamilton–Jacobi 方程式 (11) から Hamilton 関数 $S(x, x_0)$ を求めると、式 (10) の第 2 式は固定された初期値 p_0, x_0 に対して、不完全観測量の終状態における値 $x = \{x^a\}$ の間の関係を予言することになる [1, p.46]。

以上で見てきた時間のない力学は伝統的な力学の一般化となっており、力学にとってはある意味、時間のない世界の方が自然なのではないかという印象を受けるほどに、エレガントである。

2.1.2 伝統的な力学の再現

x^0 を時間変数 t に選び $x = (t, q)$ とおくと,

$$\text{拡大配位空間} \quad \mathcal{C}_{\text{ext}} = \mathbb{R} \times \mathcal{C} \quad (16)$$

$$\text{ハミルトニアン拘束} \quad C(t, q, p_t, p_q) = p_t + H(p_q, q, t) \quad (17)$$

と分離する [2, p.101]. ここに $p = (p_t, p_q)$,

$$\text{ラグランジアン} : L\left(t, q, \frac{dq}{dt}\right), \quad \text{ハミルトニアン} : H(p_q, q, t) \equiv p_i \frac{dq^i}{dt} - L. \quad (18)$$

- Hamilton 形式

式(17): $p_t = -H$ を考慮すると, 作用(5)は拡大相空間 (p_q, q, t) 上の積分

$$S = \int (p_i dq^i - H dt) \quad (19)$$

に帰着する. 最小作用原理を適用から Hamilton 方程式 (正準方程式)

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad (20)$$

が導かれる [8, pp.177–178]. (一般的な式(8)からも改めて導出できる.)

- Lagrange形式

作用(3),(19)は拡大配位空間 (t, q) 上の積分

$$S = \int L dt$$

に書き換えられる．最小作用原理から Euler–Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad (21)$$

が導かれる(以降ドットは時間微分) [8, pp.2–4]. あるいは Legendre 変換(18)を通じて正準方程式(20)を焼き直すと [8, pp.166–168],

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q^i}, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}. \quad (22)$$

- Hamilton–Jacobi形式 [8, pp.176–176, pp.186–187]

ハミルトニアン拘束(17)より, Hamilton関数 $S(q, t)$ を終点 (q, t) の関数として

$$\text{Hamilton関数の微分(10)} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H, \quad \frac{\partial S}{\partial q^i} = p_i,$$

$$\text{Hamilton-Jacobi方程式(11)} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) = 0.$$

2.1.2項の式の導出など

■ハミルトニアン拘束(17): $C = p_t + H$ の導出

$x = (t, q)$ としたときラグランジアンは一般に $L\left(t, q, \frac{dq}{dt}\right)$ の形をとると仮定する.
これは $x = x(\tau)$ とパラメトライズした場合のラグランジアン $\mathcal{L}$ と, 式(12):

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = L\left(t, q, \frac{dq}{dt}\right) \frac{dt}{d\tau}$$

で関係付けられる. またハミルトニアン拘束(4)の導出時に定義した,
任意のパラメータ τ を用いた場合の正準ハミルトニアンはこのとき

$$(0 =) \mathcal{H} = p_a \dot{x}^a - \mathcal{L} = \left(p_t + p_i \frac{dq^i}{dt} - L \right) \frac{dt}{d\tau} = (p_t + H) \frac{dt}{d\tau}$$

となるので, ハミルトニアン拘束(17)を得る.

注意 正確にはハミルトニアン拘束(17)には式全体を定数倍する任意性がある.
ただしその場合にも以降の結果に変わりはない*⁸.

*⁸ とりわけすぐ後の正準方程式(20)の導出過程では, ハミルトニアン拘束 C を定数 k 倍すると, 同時に
ラプス N が逆数 $1/k$ 倍されて得られるため, 得られる式(20)に変わりはないことが見て取れる.

■ ラグランジアン の微分係数 (22) の導出

L と H は Legendre 変換 (18) で関係付けられるので,

$$\begin{aligned} dL &= d(p_i \dot{q}^i - H) = \dot{q}^i dp_i + p_i d\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i - \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ &= p_i d\dot{q}^i + \dot{p}_i dq^i - \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (\because \text{正準方程式 (20)}) \end{aligned}$$

を得る. ここからラグランジアン の微分係数は式 (22) のように同定される.

2.1.2項の原稿

2.1.1項で展開した時間のない力学が特別な場合として，伝統的な力学を含んでいることを確かめよう．それはある意味，伝統的な力学の導出となる．まず不完全観測量の1つ x^0 を時間変数 t に選び出して $x = (t, q)$ とおくと，拡大配位空間は直積(16)に分離する [2, p.101]．ここに実軸 $\mathbb{R}$ は時間軸を表し，また $\mathcal{C}$ は一般(化)座標 $q = \{q^i\}$ から成る配位空間である．またハミルトニアン拘束は時間成分 p_t の分離した形(17)を持つ(導出スライド参照) [2, p.101]．ここに p_t を除いた運動量をまとめて $p_q \equiv \{p_i\}$ と書いており，また H は Legendre 変換(18)で定義される通常ハミルトニアンである．

ハミルトニアン拘束(17): $p_t = -H$ を考慮すると，作用(5)は見慣れた拡大相空間 (p_q, q, t) の軌道に沿う積分(19)に帰着する．式(19)の作用に対して，2.1.1項で提示した最小作用原理を適用しよう．ただしここでは拡大配位空間 (t, q) で見た軌道 $q(t)$ として，時間に逆行しない曲線のみを考える必要がある．このとき運動方程式として，Hamilton 方程式ないし正準方程式(20)が導かれる．これは伝統的な力学でよく知られている結果であり，証明は時間のない力学における Hamilton 方程式(8)の導出とよく似た手順で行える [8, pp.177–178]．Hamilton 方程式(8)は正準方程式(20)の一般化にあたり，逆に一般的な式(8)から改めて直接，導出できる．実際ハミルトニアン拘束(17)を代入すると，式(8)第1式の第0成分はラプス $N = \frac{dt}{d\tau}$ を与える．すると第2式はハミルトニアン拘束の下で自明な関係 $\frac{dp_t}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial t}$ を与えるに過ぎず，2式の $a = i$ 番目の成分がそれぞれ正準方程式(20)になる．

Legendre変換(18)を代入すると、作用(19)はラグランジアン¹の時間積分に書き換えられる。この結果は作用(3)のゲージ不変性からも直接理解できる。改めて最小作用原理を適用すると、Euler–Lagrange方程式(21)が導かれる。これは系の自由度と同じ個数の一般化座標 q に対する運動方程式を与える。導出は時間のない力学における

Euler–Lagrange方程式(6)の場合と同様に行える [8, pp.2–4]。等価的にLegendre変換(18)を通じて、正準方程式(20)をLagrange形式に焼き直しても良い。するとラグランジアン²の微分係数は式(22)のように同定される (導出スライド参照) [8, pp.166–168]。第1式はLagrange形式における運動量の定義であり、式(3)とアナログである。この下で第2式はLagrange方程式(21)に他ならない。

最後に現実の軌道に沿って評価した作用積分としてHamilton関数を定義しよう。軌道の始点を固定すると、Hamilton関数は終点の座標 (q, t) の関数 $S(q, t)$ となる。ここで再びハミルトニアン拘束(17)を考慮すると、このときHamilton関数の微分公式(10)とHamilton–Jacobi方程式(11)はそれぞれ見慣れた形に帰着する [8, pp.176–176, pp.186–187]。

以上のように、単に不完全観測量 x^a の1つを時間変数 t に選び出しさえすれば、Lagrange形式、Hamilton形式、Hamilton–Jacobi形式のいずれに関しても、時間のないバージョンから伝統的な対応物が再現されることになる。真の困難は時間のない力学そのものを理解することよりも、むしろ日常的な時間変数 t が選び出される機構を説明し、時間のある物理とのギャップを埋めることにある。

2.2 幾何学

2.2.1 テンソル

図2の多様体 M (座標 $x = \{x^a\}$ を持つ) の点 x における曲線 c に沿った方向微分

$$\frac{df(x(t))}{dt} = \dot{x}^a \partial_a f \quad \left(\dot{x}^a \equiv \frac{dx^a}{dt}, \partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial x^a} \right) \quad (23)$$

→ 方向微分作用素 $v \equiv \dot{x}^a \partial_a$ は座標系に依らない速度ベクトル [5, pp.40–43].

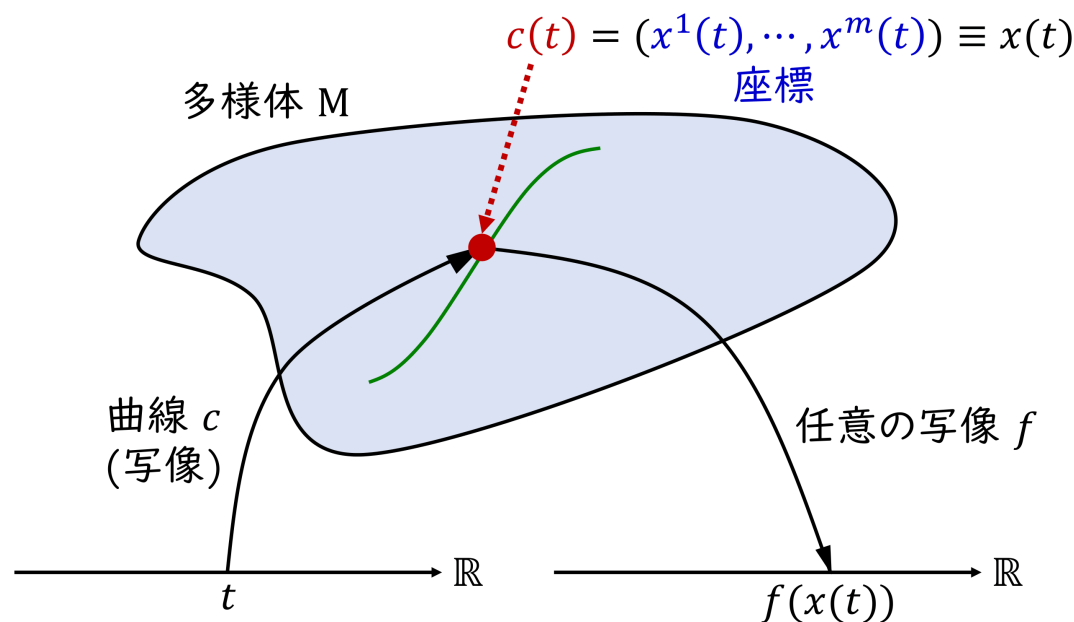


図2 合成写像 $t \in \mathbb{R} \mapsto c(t) \in M \mapsto f \circ c(t) \equiv f(c(t)) \in \mathbb{R}$

実際，以下の量は数学的に変換則が定まっている [5, pp.26–27].

$$\text{座標の微分 } dx^a \text{ は反変ベクトル : } dx'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} dx^b \quad \Leftarrow \quad \text{全微分} \quad (24)$$

$$\text{微分演算子 } \partial_a \text{ は共変ベクトル : } \partial'_a = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} \partial_b \quad \Leftarrow \quad \text{合成関数の微分} \quad (25)$$

よって $v = \dot{x}'^a \partial'_a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} \frac{\partial x^c}{\partial x'^a} \dot{x}^b \partial_c = \dot{x}^b \partial_b$ は不変. Euclid 空間のベクトルの回転を含め，定数係数による線形変換 $x'^a = A^a_b x^b$ は式 (24) のように書ける*⁹.

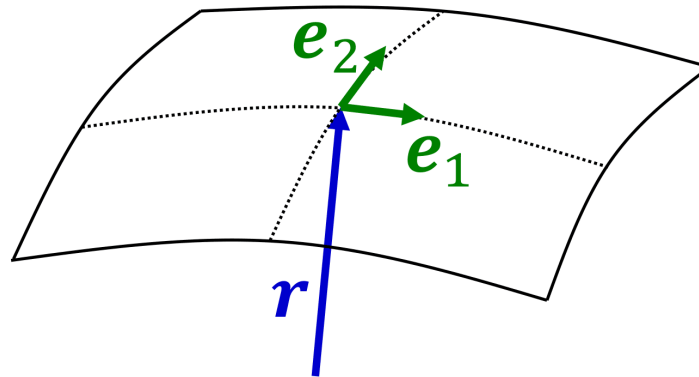


図3 曲面 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^a)$ の接平面の基底 $\mathbf{e}_a = \partial_a \mathbf{r}$ と動点の速度 $\mathbf{v} = \dot{x}^a \partial_a \mathbf{r}$ から形式的に $\mathbf{r}$ を除くと，多様体の接ベクトルとして微分演算子が得られる [5, pp.43–44]

*⁹ 実際，両辺を x^c で微分すると，変換係数 $A^a_c = \frac{\partial x'^a}{\partial x^c}$ は Jacobi 行列要素となる.

- p 階反変 q 階共変テンソル $((p, q)$ テンソル) $T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q}$
時空に固定した点の座標が $x \rightarrow x'$ と変わる座標変換で、成分が $T^{\cdots} \rightarrow T'^{\cdots}$,

$$T'^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} T^{\rho_1 \cdots \rho_p}_{\sigma_1 \cdots \sigma_q} \quad (26)$$

と変化する量と定義 [4, pp.256–257] [9, pp.126–127].

- Kroneckerのデルタ δ^μ_ν は、混合テンソルとすれば不変テンソル [9, p.51] :

$$\delta^\mu_{\nu'} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \delta^{\rho}_{\sigma} = \delta^{\mu}_{\nu}. \quad (27)$$

- 物理法則の共変性

両辺が同じ種類のテンソルから成る方程式

$$T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} = U^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q}$$

は、テンソルの定義(26)より座標変換に対して不変(共变的) [9, pp.53–54, p.127] :

$$\begin{aligned} T'^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} T^{\rho_1 \cdots \rho_p}_{\sigma_1 \cdots \sigma_q} \\ &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} U^{\rho_1 \cdots \rho_p}_{\sigma_1 \cdots \sigma_q} = U'^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q}. \end{aligned}$$

- テンソルの和，積，縮約から新たなテンソルが作られること [9, pp.54–56,p.127]
 テンソルを定義する変換則(26)より，
 – (p, q) テンソルの和は (p, q) テンソル

$$A^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} \equiv T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} + U^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q}. \quad (28)$$

- (p, q) テンソルと (r, s) テンソルの積は $(p + r, q + s)$ テンソル

$$B^{\mu_1 \cdots \mu_p \rho_1 \cdots \rho_r}_{\nu_1 \cdots \nu_q \sigma_1 \cdots \sigma_s} \equiv T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} U^{\rho_1 \cdots \rho_r}_{\sigma_1 \cdots \sigma_s}. \quad (29)$$

- (p, q) テンソル $T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q}$ の添字 μ_i, ν_j に関する縮約は $(p - 1, q - 1)$ テンソル

$$C^{\mu_1 \cdots \mu_{i-1} \mu_{i+1} \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_{j-1} \nu_{j+1} \cdots \nu_q} \equiv T^{\mu_1 \cdots \mu_{i-1} \lambda \mu_{i+1} \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_{j-1} \lambda \nu_{j+1} \cdots \nu_q}. \quad (30)$$

- 商の定理 [10, p.24]
 逆に，例えば反変ベクトル A^λ との縮約

$$Q_{\mu\nu} = A^\lambda P_{\lambda\mu\nu} \quad (31)$$

が2階共変テンソルとなるとき， $P_{\lambda\mu\nu}$ は3階共変テンソルと言える。

- 添字について(反)対称な量(テンソルに限らない)に関する恒等式

– 2つの添字を持つ量 $a_{\mu\nu}$ は対称部分 $a_{\mu\nu}^{(S)}$ と反対称部分 $a_{\mu\nu}^{(A)}$ の和に分解できる^{*10} :

$$a_{\mu\nu}^{(S)} \equiv \frac{1}{2}(a_{\mu\nu} + a_{\nu\mu}) = a_{\nu\mu}^{(S)}, \quad a_{\mu\nu}^{(A)} \equiv \frac{1}{2}(a_{\mu\nu} - a_{\nu\mu}) = -a_{\nu\mu}^{(A)}. \quad (32)$$

– 添字について対称な量 $S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}$ と反対称な量 $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$ の縮約は

$$\begin{aligned} S^{\mu\nu} A_{\mu\nu} &= \sum_{\mu>\nu} (S^{\mu\nu} A_{\mu\nu} + S^{\nu\mu} A_{\nu\mu}) \quad (\mu = \nu \text{ に対し } A_{\mu\nu} = 0) \\ &= \sum_{\mu>\nu} S^{\mu\nu} (A_{\mu\nu} - A_{\mu\nu}) = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

– 反対称な変分 $\delta A_{\mu\nu} = -\delta A_{\nu\mu}$ に対して

$$0 = X^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu} = \sum_{\mu>\nu} (X^{\mu\nu} - X^{\nu\mu}) \delta A_{\mu\nu} \quad (34)$$

のとき, 係数 $X^{\mu\nu}$ の反対称部分をゼロと置く [13, p.356,p.370]^{*11}.

^{*10} 対称部分 $S_{\mu\nu} \equiv a_{\mu\nu}^{(S)}$ は, $S \equiv S_{\mu\mu}$ をトレース, $D \equiv \delta_{\mu\mu}$ を時空次元として, さらに単位行列に比例する部分 $\frac{1}{D} \delta_{\mu\nu} S$ とトレースレスの部分 $S'_{\mu\nu} \equiv S_{\mu\nu} - \frac{1}{D} \delta_{\mu\nu} S$ の和に分解できる [11, pp.320–321] [12, p.286].

^{*11} 同様に対称な変分に対しては $X^{\mu\nu}$ の対称部分(対角成分を含む)をゼロと置く.

- 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ [4, pp.257–258]

時空の2点の世界間隔 ds (不変量) と, それを座標で測った値 dx^μ の関係を

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (35)$$

と書いて計量 $g_{\mu\nu}$ を定義すると, $g_{\mu\nu}$ は2階共変テンソルでなければならない.

- 反変計量テンソル $g^{\mu\nu}$ を $g_{\mu\nu}$ の逆テンソルとして定義する:

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu. \quad (36)$$

- テンソルの添字を上げ下げした量は計量テンソルとの縮約で定義する^{*12}:

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu, \quad A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \quad (37)$$

- 局所的平坦性定理 [14, pp.186–187]

適当な座標系 $\{x^\alpha\}$ をとれば, 点Pの座標を x_0^α として

$$g_{\mu\nu}(x^\alpha) = \eta_{\mu\nu} + O((x^\alpha - x_0^\alpha)^2) \quad (38)$$

とできる. このような座標系 $\{x^\alpha\}$ を点Pにおける局所慣性系と呼ぶ.

^{*12} このとき $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$ に逆行列 $g^{\lambda\mu}$ を縮約すると A^λ に戻るため, 添字の上げ下げは良く定義された操作となる.

- 座標範囲 d^4x に対応する固有体積要素 $d^4X \rightarrow \frac{\partial(X)}{\partial(x)} d^4x = \sqrt{-g} d^4x$
局所慣性系 $\{X^\mu\}$ との間の Jacobian $J \equiv \frac{\partial(X)}{\partial(x)}$ は、計量テンソルの変換則

$$(g_{\mu\nu}) = \left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \right)^T (\eta_{\alpha\beta}) \left(\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} \right), \quad \therefore g \equiv \det(g_{\mu\nu}) = -J^2 < 0 \quad (39)$$

より^{*13}, $J = \sqrt{-g}$ と表される [14, pp.188–190].

– Jacobian $\sqrt{-g(x)} = \frac{\partial(X)}{\partial(x)}$ のように変換する量をスカラー密度と呼ぶ^{*14}.

* 計量の行列式の平方根 $\sqrt{-g}$ の n 乗 (とスカラーの積) を,
“加重度 (density of weight)” $+n$ を持つ量と称する [3, pp.43–44].

^{*13} 例えば $\left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \right)$ は $\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}$ を (α, μ) 成分に持つ行列であり、逆行列を持つから、その行列式は $J \neq 0$ で

ある. 転置行列 $\left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \right)^T$ は $\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}$ を (μ, α) 成分に持つ.

^{*14} 擬スカラーとも呼ぶ. S をスカラー場とすると、スカラー密度 $S\sqrt{-g}$ の積分 $\int S\sqrt{-g} d^4x$ が不変量となることが「スカラー密度」という名称の由来である [9, p.130] [10, p.82]. ここから直ちにデルタ関数はスカラー密度となる [9, p.164]:

$$1 = \int \delta^4(x') d^4x' = \int \delta^4(x) d^4x = \int \delta^4(x) \frac{\partial(x)}{\partial(x')} d^4x', \quad \therefore \delta^4(x') = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \delta^4(x).$$

- 式(26)の右辺に Jacobian が掛かった変換則

$$\tilde{T}'^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\nu_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} \tilde{T}^{\rho_1 \cdots \rho_p}_{\sigma_1 \cdots \sigma_q} \quad (40)$$

に従う量 $\tilde{T}^{\cdots}$ をテンソル密度 (擬テンソル) と呼ぶ [9, pp.60–62, pp.127–128].

- 完全反対称 Levi-Civita 記号 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ ($\varepsilon^{0123} = +1$)
 - 擬テンソルの変換則

$$\varepsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\delta}} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (41)$$

に従うとき, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ の値は全座標系で共通 [4, pp.258–259] [9, pp.62–63].

- Kronecker のデルタ との関係 (Minkowski 時空で $\varepsilon_{0123} = -1$) [4, p.20]

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} &= - \begin{vmatrix} \delta_{\alpha}^{\mu} & \delta_{\beta}^{\mu} & \delta_{\gamma}^{\mu} & \delta_{\delta}^{\mu} \\ \delta_{\alpha}^{\nu} & \delta_{\beta}^{\nu} & \delta_{\gamma}^{\nu} & \delta_{\delta}^{\nu} \\ \delta_{\alpha}^{\rho} & \delta_{\beta}^{\rho} & \delta_{\gamma}^{\rho} & \delta_{\delta}^{\rho} \\ \delta_{\alpha}^{\sigma} & \delta_{\beta}^{\sigma} & \delta_{\gamma}^{\sigma} & \delta_{\delta}^{\sigma} \end{vmatrix}, & \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma} &= - \begin{vmatrix} \delta_{\alpha}^{\mu} & \delta_{\beta}^{\mu} & \delta_{\gamma}^{\mu} \\ \delta_{\alpha}^{\nu} & \delta_{\beta}^{\nu} & \delta_{\gamma}^{\nu} \\ \delta_{\alpha}^{\rho} & \delta_{\beta}^{\rho} & \delta_{\gamma}^{\rho} \end{vmatrix}, \\ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} &= -2 \left(\delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} - \delta_{\beta}^{\mu} \delta_{\alpha}^{\nu} \right), & \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} &= -6 \delta_{\alpha}^{\mu}, \\ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= -24. \end{aligned} \quad (42)$$

- 反対称な共変テンソル $A_\mu, f_{\mu\nu}, T_{\mu\nu\rho}$ に
双対な(対偶な ; dual)テンソル密度 [9, pp.62–64]

$$A^{*\mu\nu\rho} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\sigma, \quad f^{*\mu\nu} = \frac{1}{2!} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\rho\sigma}, \quad T^{*\mu} = \frac{1}{3!} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} T_{\nu\rho\sigma}. \quad (43)$$

公式(42)を用いて逆に解くと, 例えば $f_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} f^{*\mu\nu}$.

2.2.1 項の式の導出など

■直交変換

3次元Euclid空間において、基底 $\{e_i\}, \{e_i'\}$ と持ち原点を共有する2つの直交座標系を見た、共通の位置ベクトル x の座標をそれぞれ x_i, x_i' と書く．このとき座標 x_i と基底 $\{e_i\}$ は共通の定数係数 $a_{ij} \equiv e_i' \cdot e_j$ で

$$x_i' = \sum_j a_{ij} x_j, \quad e_i' = \sum_j a_{ij} e_j \quad (44)$$

と変換する．実際、

$$\begin{aligned} e_i' &= \sum_j (e_i' \cdot e_j) e_j = \sum_j a_{ij} e_j, \\ x &= \sum_j x_j e_j = \sum_{i,j} x_j (e_j \cdot e_i') e_i', \quad \therefore x_i' = \sum_j (e_j \cdot e_i') x_j = \sum_j a_{ij} x_j. \end{aligned}$$

式(44)第1式より変換係数 $a_{ij} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j}$ はJacobi行列であり、2つの座標系の役割を入れ替えた式と合わせると

$$\frac{\partial x_j'}{\partial x_i} = e_j' \cdot e_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_j'} \quad (45)$$

が得られる．これは $a = (a_{ij})$ が直交行列であること $a^T = a^{-1}$ を意味する．したがって $x = \sum_i x_i e_i$ において x_i を列ベクトルと見なすことに応じて， e_i を行ベクトルと見て式(44)第2式を

$$e_i = \sum_j e_j (a^{-T})_{ji} = \sum_j e_j (a^{-1})_{ji}$$

と書けば，これは座標と“逆の”変換となっている(このため $x = \sum_i x_i e_i$ は不変)．これは能動的な変換と受動的な変換の関係の反映と解釈できる．すなわち座標系の基底にある変換を施すと，座標系に固定された視点からは空間に固定したベクトルが逆の変換で移されて見える．

また式(45)は反変ベクトル成分と共変ベクトル成分の変換則は一致することを意味する．したがって Newton の運動方程式

$$m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

は，左辺が反変ベクトル成分であるのに対し，右辺は共変ベクトル成分であるにも関わらず，直交座標系の間の変換に対しては共変的となる．

■商の定理(式(31)の箇所)の証明

反変ベクトル A^λ に対して式(31): $Q_{\mu\nu} = A^\lambda P_{\lambda\mu\nu}$ が2階共変テンソルとなるとき, $P_{\lambda\mu\nu}$ は3階共変テンソルであることが次のように示される [10, p.24]. 仮定により

$$\begin{aligned} A^\alpha P_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} A'^\lambda P'_{\lambda\mu\nu} \quad (\because Q_{\beta\gamma} \text{の変換則}) \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} \left(\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} A^\alpha \right) P'_{\lambda\mu\nu} \quad (\because A^\lambda \text{の変換則}) \end{aligned}$$

である. これが A^α のすべての値に対して成り立つことを要求して, 最左辺と最右辺の A^α の係数を等置すると

$$P_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} P'_{\lambda\mu\nu}.$$

これは $P_{\lambda\mu\nu}$ が3階共変テンソルであることを意味している.

■局所的平坦性定理(式(38)の箇所)の証明 [14, pp.190–192]

任意の座標系 $\{x^\mu\}$ から座標系 $x' \equiv \{x'^\mu\}$ に移り, 時空の与えられた点 P の座標を $x'_0 \equiv \{x'_0{}^\mu\}$ として計量テンソルを

$$g_{\alpha\beta}(x') = \eta_{\alpha\beta} + O((x'^\mu - x'_0{}^\mu)^2)$$

とできることを示す. 座標系 x^μ, x'^μ での任意の点の計量テンソルをそれぞれ座標 x' の関数として $f_{\alpha\beta}(x'), g_{\alpha\beta}(x')$ と書く. $\Lambda^\gamma{}_\alpha \equiv \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha}, \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x'^\mu}$ と略記し $g_{\alpha\beta}(x')$ を点 P の周りに Taylor 展開すると,

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}(x') &= \Lambda^\gamma{}_\alpha(x') \Lambda^\delta{}_\beta(x') f_{\gamma\delta}(x') \\ &= \left[\Lambda^\gamma{}_\alpha(x'_0) + (\partial_\lambda \Lambda^\gamma{}_\alpha)_0 (x'^\lambda - x'_0{}^\lambda) + \frac{1}{2} (\partial_\lambda \partial_\mu \Lambda^\gamma{}_\alpha)_0 (x'^\lambda - x'_0{}^\lambda)(x'^\mu - x'_0{}^\mu) + \cdots \right] \\ &\times \left[\Lambda^\delta{}_\beta(x'_0) + (\partial_\nu \Lambda^\delta{}_\beta)_0 (x'^\nu - x'_0{}^\nu) + \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\rho \Lambda^\delta{}_\beta)_0 (x'^\nu - x'_0{}^\nu)(x'^\rho - x'_0{}^\rho) + \cdots \right] \\ &\times \left[f_{\gamma\delta}(x'_0) + (\partial_\sigma f_{\gamma\delta})_0 (x'^\sigma - x'_0{}^\sigma) + \frac{1}{2} (\partial_\sigma \partial_\tau f_{\gamma\delta})_0 (x'^\sigma - x'_0{}^\sigma)(x'^\tau - x'_0{}^\tau) + \cdots \right]. \end{aligned}$$

すると

$$g_{\alpha\beta}(x') = g_{\alpha\beta}(x'_0) + (\partial_\lambda g_{\alpha\beta})_0(x'^\lambda - x'^\lambda_0) + \frac{1}{2}(\partial_\lambda \partial_\mu g_{\alpha\beta})_0(x'^\lambda - x'^\lambda_0)(x'^\mu - x'^\mu_0) + \dots$$

において

$$g_{\alpha\beta}(x'_0) = (\Lambda^\gamma_\alpha \Lambda^\delta_\beta f_{\gamma\delta})_0, \quad (46)$$

$$(\partial_\lambda g_{\alpha\beta})_0 = [(\partial_\lambda f_{\gamma\delta}) \Lambda^\gamma_\alpha \Lambda^\delta_\beta + (\partial_\lambda \Lambda^\gamma_\alpha) \Lambda^\delta_\beta f_{\gamma\delta} + (\partial_\lambda \Lambda^\delta_\beta) \Lambda^\gamma_\alpha f_{\gamma\delta}]_0, \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\partial_\lambda \partial_\mu g_{\alpha\beta})_0 = & \left[(\partial_\lambda \Lambda^\gamma_\alpha)(\partial_\mu \Lambda^\delta_\beta) f_{\gamma\delta} + (\partial_\lambda \Lambda^\delta_\beta)(\partial_\mu f_{\gamma\delta}) \Lambda^\gamma_\alpha + (\partial_\lambda f_{\gamma\delta})(\partial_\mu \Lambda^\gamma_\alpha) \Lambda^\delta_\beta \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(\partial_\lambda \partial_\mu \Lambda^\gamma_\alpha) \Lambda^\delta_\beta f_{\gamma\delta} + \frac{1}{2}(\partial_\lambda \partial_\mu \Lambda^\delta_\beta) \Lambda^\gamma_\alpha f_{\gamma\delta} + \frac{1}{2}(\partial_\lambda \partial_\mu f_{\gamma\delta}) \Lambda^\gamma_\alpha \Lambda^\delta_\beta \right]_0 \end{aligned} \quad (48)$$

と同定される．ただし添字のゼロは点Pでの値を意味する．さて座標系 $\{x'^\mu\}$ を適当に選び

$$g_{\alpha\beta}(x'_0) = \eta_{\alpha\beta}, \quad (\partial_\lambda g_{\alpha\beta})_0 = 0, \quad (\partial_\lambda \partial_\mu g_{\alpha\beta})_0 = 0$$

とできるか考えよう．座標系 $\{x'^\mu\}$ を選ぶことは $\Lambda^\gamma_\alpha = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha}$ を，したがって $(\Lambda^\gamma_\alpha)_0, (\partial_\lambda \Lambda^\gamma_\alpha)_0, (\partial_\lambda \partial_\mu \Lambda^\gamma_\alpha)_0, \dots$ を選ぶことに対応する．

それぞれについて独立にとれるものの個数は以下になる.

- $(\Lambda^\gamma_\alpha)_0 = \left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \right)_0 \dots\dots 16$ 個
- $(\partial_\lambda \Lambda^\gamma_\alpha)_0 = \left(\frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x'^\lambda \partial x'^\alpha} \right)_0 \dots\dots 40$ 個
 - 対称な添字 λ, α の選び方が10通りだから
- $(\partial_\lambda \partial_\mu \Lambda^\gamma_\alpha)_0 = \left(\frac{\partial^3 x^\gamma}{\partial x'^\lambda \partial x'^\mu \partial x'^\alpha} \right)_0 \dots\dots 80$ 個
 - 対称な添字 λ, μ, α の選び方は以下の合計20通りだから

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda, \mu, \alpha \text{ が相異なるもの} & \frac{4 \times 3 \times 2}{3!} = 4 \text{通り} \\ \text{ちょうど2つの添字が等しいもの} & 4 \times 3 = 12 \text{通り} \\ \text{全ての添字が等しいもの} & 4 \text{通り} \end{array} \right.$$

よって次のように局所的平坦性定理が示される.

- $g_{\alpha\beta}(x'_0) = \eta_{\alpha\beta}$ は10個の独立な条件式
(対称な添字 α, β の選び方が10通りだから).
 $\Leftarrow g_{\alpha\beta}(x'_0)$ の式(46)で16個の独立な $(\Lambda^\gamma_\alpha)_0$ を適当に選べば満たされる^{*15}.
- $(\partial_\lambda g_{\alpha\beta})_0 = 0$ は40個の独立な条件式
(対称な添字 α, β の選び方が10通りだから).
 $\Leftarrow (\partial_\lambda g_{\alpha\beta})_0$ の式(47)で40個の独立な $(\partial_\lambda \Lambda^\gamma_\alpha)_0$ を適当に選べば満たされる.
- $(\partial_\lambda \partial_\mu g_{\alpha\beta})_0 = 0$ は100個の独立な条件式
(対称な添字 α, β および λ, μ の選び方がそれぞれ10通りだから).
 $\Leftarrow (\partial_\lambda \partial_\mu g_{\alpha\beta})_0$ の式(48)における $(\partial_\lambda \partial_\mu \Lambda^\gamma_\alpha)_0$ のうち,
独立に選べるものは80個だから一般には満たされない.

^{*15} 余分な6個の自由度は正確に局所慣性系の間での Lorentz 変換の自由度に対応している. (実際, 線形変換 $x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu$ が Lorentz 変換となるには16個の係数 a^μ_ν は10個の条件 $\eta_{\mu\nu} = (a^{-1})^\rho_\mu (a^{-1})^\sigma_\nu \eta_{\rho\sigma}$ を満たさねばならないので, Lorentz 変換の自由度は6である [9, p.38]. これは直観的には ${}_4C_2 = 6$ 通りの平面 xy, yz, zx, tx, ty, tz 内の回転に対応する [4, p.11].)

■ Levi-Civita 記号を不変に留める変換則 (41)

擬テンソルの変換則 (41) は Levi-Civita 記号の不変性

$$\begin{aligned}\varepsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\delta}} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \frac{\partial(x'^{\mu}, x'^{\nu}, x'^{\rho}, x'^{\sigma})}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \\ &= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \frac{\partial(x')}{\partial(x)} \\ &= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\end{aligned}$$

を保証する．ただし第2の等号は行列式の定義による．また第3の等号では，第3辺の後ろの行列式が Jacobian の行を入れ換えたものであり，また行列式は行を入れ換えると符号が変わるため

$$\frac{\partial(x'^{\mu}, x'^{\nu}, x'^{\rho}, x'^{\sigma})}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial(x')}{\partial(x)}$$

と書けることを用いた．

■ Levi-Civita 記号と Kronecker のデルタの関係 (42) の理由

まず第1式

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = - \begin{vmatrix} \delta_{\alpha}^{\mu} & \delta_{\beta}^{\mu} & \delta_{\gamma}^{\mu} & \delta_{\delta}^{\mu} \\ \delta_{\alpha}^{\nu} & \delta_{\beta}^{\nu} & \delta_{\gamma}^{\nu} & \delta_{\delta}^{\nu} \\ \delta_{\alpha}^{\rho} & \delta_{\beta}^{\rho} & \delta_{\gamma}^{\rho} & \delta_{\delta}^{\rho} \\ \delta_{\alpha}^{\sigma} & \delta_{\beta}^{\sigma} & \delta_{\gamma}^{\sigma} & \delta_{\delta}^{\sigma} \end{vmatrix}$$

を説明する．上式は両辺が添字の組 μ, ν, ρ, σ および $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ のそれぞれについて同じ反対称性を持ち， $(\mu, \nu, \rho, \sigma) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0, 1, 2, 3)$ のとき等しい値 (-1) をとるため，常に成り立つ．あるいは4次の単位行列の行列式は1であり，行列式は行や列を入れ替えるたびに符号が変化するので，上式が成り立つと考えても良い．次いで第1式右辺の行列式を展開して，逐次，添字を縮約すると一連の公式(42)が導かれる．

- 第2式をあからさまに展開すると

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma} = - \left(\delta_{\alpha}^{\mu}\delta_{\beta}^{\nu}\delta_{\gamma}^{\rho} + \delta_{\beta}^{\mu}\delta_{\gamma}^{\nu}\delta_{\alpha}^{\rho} + \delta_{\gamma}^{\mu}\delta_{\alpha}^{\nu}\delta_{\beta}^{\rho} - \delta_{\gamma}^{\mu}\delta_{\beta}^{\nu}\delta_{\alpha}^{\rho} - \delta_{\beta}^{\mu}\delta_{\alpha}^{\nu}\delta_{\gamma}^{\rho} - \delta_{\alpha}^{\mu}\delta_{\gamma}^{\nu}\delta_{\beta}^{\rho} \right)$$

となる．すなわち下付き添字を順番に α, β, γ と並べて巡回置換した3つの項と，後ろから γ, β, α と並べて巡回置換した3つの項に逆符号を割り当てれば良い．

- 最後の式 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -24$ はそれ自体で理解できる．実際 ε の反対称性より，和に寄与するのは相異なる添字 μ, ν, ρ, σ の組に関する $4!$ 通りの項である．それらの項は μ, ν, ρ, σ が $0, 1, 2, 3$ の偶置換または奇置換であり，いずれも $\varepsilon^{0123}\varepsilon_{0123} = -1$ に等しいので， $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 4! \cdot (-1) = -24$ ．

2.2節の原稿(序文)

2.2節では一般相対性理論の数学的準備として、Riemann幾何学を説明する。Riemann幾何学は曲がった空間の記述に用いられる。

2.2.1項の原稿

時空多様体の各点に我々は任意に座標 x を割り当てることができる。しかるに物理学の指導原理として、どのような座標系を用いても物理法則は同じ形の方程式で記述されることが要請される。そこで2.2.1項では座標変換に対する成分の変換則でテンソルを定義する。このとき両辺が同じ種類のテンソルから成る方程式は座標変換の下で不変に留まるため、共変性の要請を満たす。

テンソルの導入を動機付けるため、まずは座標系に依らない幾何学的な対象として、多様体に接ベクトルを導入するところから始めよう。多様体とは平たく言えば、どの点の周りにも局所的には座標を書き込むことができ、また異なる座標系の間の座標変換が滑らかとなる空間のことである [5, pp.37–38]。多様体 M の次元を m とすると、多様体 M は(少なくとも局所的には) m 個の任意の座標 x^a ($a = 1, \dots, m$)でパラメトライズできる。これは解析力学で言うところの一般(化)座標である。ここで図2のように多様体上の各点ごとに値が定義された場 $f(x)$ と、多様体上の動点 $x(t)$ を考えよう。このとき動点の位置 $x(t)$ で評価した場の値の時間変化率(23)は、動点が描く曲線 c の方向に沿った

f の方向微分と呼ばれる^{*16}。このように定義すると，方向微分作用素 $v = \dot{x}^a \partial_a$ は座標系に依らないことが保証される。

実際，座標の微分と微分演算子は式(24),(25)のように変換することが数学的に定まっており，これらはそれぞれ反変ベクトルと共変ベクトルを定義する成分の変換則となっている。したがって座標 x^a がベクトルとして変換しない場合でさえ，その微分 dx^a は常に反変ベクトルとして変換することになる。また共変ベクトルと反変ベクトルの縮約に他ならない v は不変に留まることが，各々の変換則から直ちに確かめられる。そこで v を多様体上の速度ベクトルと見なすことが動機付けられる。 $c(t)$ に応じて(つまり動点の運動に応じて) $\{\partial_a\}$ を基底とする様々な速度 $\{\dot{x}^a\}$ を持つベクトル v が得られ，その全体が接空間を張る [5, pp.40–43]。

言い換えると基底 $\{\partial_a\}$ が式(25)に従って変換するとき，ベクトル v そのものが不変に留まるには，ベクトル成分は式(24)のように変換しなければならない。このことは通常の Euclid 空間において，ベクトルが矢印で表される幾何学的対象であるならば，直交座標系の基底を回転した新しい座標系に移ると，ベクトル成分は適当な回転行列で変換されて見えるのと同じ事情である^{*17}。実際，定数行列による線形変換では変換係数は

^{*16} 通常の方法と異なり，内積において向きを指定するベクトル $\dot{x}^a$ は単位ベクトルとは限らないことに注意する。ここでの方向微分は流体力学では物質微分ないし Lagrange 微分と呼ばれる。

^{*17} なお座標系を固定して物理系(ここではベクトル)に回転などの操作を施すことを能動的変換，対照的

Jacobi行列に他ならないので、この場合のベクトル成分の変換則はまさに式(24)の形に書ける．そこで一般の場合にも変換則(24)でベクトル成分を定義することは理に適っている．なお直交行列による線形変換では反変ベクトルと共変ベクトルは変換則が一致するため、それらを区別する必要はなくなる(導出スライド参照)．

他方でベクトル v 自体が微分演算子で与えられるのは、初見では奇妙に感じられるかもしれない．そこで図3のように、3次元Euclid空間に埋め込まれた2次元の曲面を考えよう．曲面は2つの座標 $x^a = (x^1, x^2)$ でパラメトライズできる．曲面上の点 (x^1, x^2) の3次元Euclid空間で見た位置ベクトルを r と書くと、接ベクトル $e_a = \partial_a r$ を曲面の接平面の基底ベクトルに採ることができる．この座標基底は明らかに変換則(25)に従う．また曲面上の動点の速度ベクトルは、速度成分による基底の線形結合 $v = \dot{x}^a \partial_a r$ で表される．ところが任意の多様体、とりわけ我々に興味のある時空多様体に対しては、それを超曲面として内に含むところの高次元空間の存在は保証されない．そこで曲面から突き出すベクトル r を速度の表式から形式的に取り除くと、多様体の接ベクトルとして微分演算子 $v = \dot{x}^a \partial_a$ が得られる．同様に基底の表式 $e_a = \partial_a r$ から r を除いた微分演算子を、一般に多様体の接空間の基底と見なすことが動機付けられる [5, pp.43–44]．

次にベクトルの変換則(24),(25)を一般化してテンソル成分を定義しよ

に物理系を固定して座標系に操作を施すことを受動的変換と呼ぶ．いわゆる座標変換は受動的変換を指すのに対し、能動的変換は座標系に依拠せずに定義できることに注意しよう [2, pp.62–63]．

う [4, pp.256–257] [9, pp.126–127]. ただし以下では4次元の時空多様体を念頭に、添字をギリシア文字で表す.

(受動的な)座標変換に伴い時空に固定した点の座標が $x \rightarrow x'$ と変化するとき、成分が式(26)のように、 p 個の上付き添字については反変ベクトルのように変換し、 q 個の下付き添字については共変ベクトルのように変換する量 $T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q}$ を p 階反変 q 階共変テンソル、あるいは単に (p, q) テンソル(の成分)と呼ぶ^{*18}. このとき特に反変ベクトルは $(1, 0)$ テンソル、共変ベクトルは $(0, 1)$ テンソルである. またスカラーは座標変換に対して不変な量として定義され、 $(0, 0)$ テンソルと見なされる. さらにKroneckerのデルタを混合テンソル($(1, 1)$ テンソル)と定義すれば、その成分は式(27)のように任意の座標系で同じ値を持つことが保証される [9, p.51]. なおKroneckerのデルタは対称テンソルなので、上下の添字を縦に並べて δ^μ_ν と表記しても差支えない.

ここまでは個々の量の不変性を論じてきた. 次に物理量の間の関係式の不変性を考えよう. 両辺が同じ種類のテンソルで書かれた方程式(テンソル方程式)の形に物理法則を表せば、テンソルの定義(26)により両辺は同じように変換されるので、方程式は座標変換に対して形を変えず、共変性の要請を満たす [9, pp.53–54]. また再びテンソルの変換則(26)によれば、新しい座標系での成分は古い座標系での成分の線形結合で与えられ

^{*18} ここで改めて確認すると、変換則(26)右辺において繰り返し現れる時空添字については0から3までの和をとるものと約束する. これをEinsteinの規約という. 和をとられる添字はダミー添字と呼ばれ、式変形の途中で別の適当な文字に置き換えても式の意味は変わらず、また計算結果に生き残らない.

る．よってある座標系で全ての成分がゼロであるテンソルは，あらゆる座標系で全ての成分がゼロである．したがって特に「(テンソル) = 0」という方程式は共変的である．

すると物理法則の共変性を示すためには，考えている物理量がどのような種類のテンソルであるか，あるいはそもそもテンソルではないかを判別することが重要となる．その際に有用な基本事項として，2つのテンソルから新たなテンソルを作る演算を見ておこう [9, pp.54–56, p.127]．まず同じ種類のテンソルに対しては和が定義される．そして2つの (p, q) テンソルの和 (28) もまた (p, q) テンソルとなる．次に (p, q) テンソルと (r, s) テンソルの積 (29) は $(p + r, q + s)$ テンソルとなる．さらにテンソルの上付き添字と下付き添字を1つずつダミー添字にして和をとる操作を縮約と呼ぶ．1対のダミー添字に関する (p, q) テンソルの縮約 (30) は $(p - 1, q - 1)$ テンソルとなる．これらの事実はテンソルを定義する変換則 (26) から直ちに示される．我々は既に特例として共変ベクトルと反変ベクトルの縮約がスカラーとなることを見ており，一般のテンソル (30) に対する証明も全く同様に行える．このとき以上の方法で新たに作られたテンソルの種類は，上下の添字の個数から期待される通りのものとなる．したがってテンソルを対象とする限り，その種類は添字の表記の見た目から正しく判断できることになる．ただし複数の添字を持つ量が常にテンソルであるとは限らない．

例えば反変ベクトル A^λ と3階共変テンソル $P_{\lambda\mu\nu}$ を式 (31) のように縮約すると，2階共変テンソル $Q_{\mu\nu}$ が得られることを我々は学んだ．逆に反変ベクトル A^λ との縮約 (31) が2階共変テンソルとなるためには， $P_{\lambda\mu\nu}$ は3階共変テンソルでなければならないことま

で言うことができる(導出スライド参照). これは商の定理と呼ばれ, A, Q が他の勝手な種類のテンソルである場合にも, 同様の論法を適用できる [10, p.24].

ここで添字について(反)対称な量に対する恒等式を紹介しておく. ここで考える複数の添字を持つ量は, 必ずしもテンソルでなくとも良い. まず2つの添字を持つ任意の量 $a_{\mu\nu}$ は必ず, 式(32)で定義される対称部分と反対称部分の和に分解できる. 次に添字に関して対称な量と反対称な量の縮約は, 式(33)のようにゼロになる. 式(33)を視覚的に把握するには, 和をとられる項を行列のように並べれば良い. すると対角成分はゼロであり, 上三角部分と下三角部分は逆符号なので相殺する. 最後に反対称な変分との縮約(34)がゼロになるとき, 変分の係数 X そのものを安直にゼロとおいてはならない. 実際2つの変分 $\delta A_{\mu\nu}$ と $\delta A_{\nu\mu}$ を独立には選べないことに注意して式(34)の最右辺を見ると, X の反対称部分をゼロと措かねばならないことが分かる. これは係数 X の対称部分が縮約(34)に寄与しないことから, 直観的に納得のいく結論となっている.

ここで重要なテンソルとして計量テンソルを導入する [4, pp.257–258]. 時空には無限に近い2点の世界間隔 ds が定義される. ds は値が用いている座標系に依らずに時空の幾何学だけで決まる量, 従ってスカラーである. これは座標系 x^μ で測った2点の座標の差 dx^μ の2次形式(35)で表される^{*19}. 座標の微分 dx^μ は反変ベクトルだから ds がス

^{*19} ds そのものは式(35)の平方根 $ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$ で与えられる.

カラーとなるためには、 $g_{\mu\nu}$ は2階共変テンソルでなければならない。 $g_{\mu\nu}$ を計量テンソルと呼ぶ。仮に計量テンソル $g_{\mu\nu}$ が反対称部分を持つとしても、それは2次形式(35)に寄与を持たないから、 $g_{\mu\nu}$ は対称テンソルとして定義すれば充分である。

反変計量テンソル $g^{\mu\nu}$ を式(36)のように、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の逆テンソルとして定義する。ここで式(36)右辺のKroneckerのデルタは単位行列の成分に他ならない。またテンソルの添字を上げ下げした量は式(37)のように、計量テンソルとの縮約で定義する。このとき計量テンソルとの縮約の結果得られた量も添字の位置から期待される種類のテンソルとなる。

ここで局所的平坦性定理を紹介しておく [14, pp.186–187]。時空の与えられた点Pの近くで式(38)のように、計量テンソルが式(1)のMinkowski計量 $\eta_{\mu\nu}$ に一致するような座標系を採ることが常に可能である。これは局所的平坦性定理と呼ばれ、式(38)の課す条件数と座標変換の自由度を勘定することで証明できる ([導出スライド参照](#))。この定理自体は純粹に数学的事実であるものの、その物理的含意にここで触れておこう。これから見るように計量の1階微分は重力場の強度に対応し、計量の2階微分は時空の曲率に関係する。したがって計量の1階微分が消えることは、局所的に重力場の強度がゼロになる座標系を時空の与えられた点の周りに採ることができることを意味する。そのような座標系を局所慣性系(ないし局所Lorentz系)と呼ぶ。例えば地上の一様な重力場 g を考えると、重力加速度 g で自由落下するエレベータの中には重力が現れない^{*20}。しかるに

^{*20} 関連して重力加速度 g は値としては落体の加速度に一致するものの、本来、概念的には地上の重力場に

エレベータに固定した座標系を慣性系と見なせば，重力の現れる地上に固定した座標系は地面からの力で支えられた加速系となる．これを踏まえると，加速系に現れる非慣性力は，少なくとも力学的な方法では重力場と区別できない．この等価原理を反映して，一般には基準系の占める空間領域において重力場を一様と見なせる限りで，したがって充分小さい空間領域と短い時間の中でのみ重力場を消去できる [4, pp.251–252] [14, p.148]．他方で一般には計量の2階微分を消せないことは，時空が曲率を持つことが座標系の選択に依らない幾何学的性質であることと整合している．

任意の曲線座標系で座標の微小範囲 dx^μ に対応する時空の体積要素は，一般に座標体積 d^4x に一致しない．実際，座標体積 d^4x は長さの4乗の次元を持つ保証すらない．しかし局所慣性系 $\{X^\mu\}$ では座標体積 d^4X は対応する領域の真の体積に一致する．そこでこれを Jacobian $J \equiv \frac{\partial(X)}{\partial(x)}$ で変換すれば，真の体積を任意の座標で表した表式 Jd^4x が得られる．ここで2階共変テンソルの変換則に従って Minkowski 計量を変換すると，任意の座標系における計量テンソル $g_{\mu\nu}$ が得られることから，Jacobian は計量の行列式 g の平方根で与えられることが判明する (式(39)の箇所を見よ)．以上より任意の座標系で，座標の微小範囲 dx^μ に対応する時空の真の体積は $\sqrt{-g}d^4x$ と表される．これを固有体積要素と呼ぶ [14, pp.188–190]．

計量の行列式の平方根 $\sqrt{-g}$ は Jacobian に他ならないので，スカラー密度の変換則に従

他ならない：質量 m の物体は重力場 g から重力 $m\mathbf{g}$ を受ける．

う [9, p.130] [10, p.82]. スカラー密度の今一つの重要な例はデルタ関数である. またテンソル $T^{\dots}$ とスカラー密度 $\sqrt{-g}$ の積 $T^{\dots}\sqrt{-g}$ 式(40)のように変換する量 $\tilde{T}$ をテンソル密度(または擬テンソル)と呼ぶ [9, pp.60–62, pp.127–128]. その変換則(40)をテンソルの変換則(26)と比較すると, 右辺にさらに Jacobian が掛かっている. このため空間反転を含まない純粋な空間回転では, 擬テンソルは通常のテンソルと同様に変換するのに対し, 空間反転を含む直交変換では擬テンソルは符号を変える.

擬テンソルの重要な例として Levi-Civita 記号 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ が挙げられる. $\varepsilon^{0123} = +1$ と約束すると, 完全反対称性より Levi-Civita 記号の全ての成分が定まる. これが全ての座標系で同じ値を持つためには, Levi-Civita 記号は擬テンソルとして変換すれば良い(導出スライド参照).

ここからは議論を確定させるために, Minkowski 時空での値を考えよう. (任意の座標系での値を得るには局所 Lorentz 系からの座標変換を施せばよい.) このとき下付き添字の Levi-Civita 記号 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ を得るには, Minkowski 計量との縮約で添字を下ろせば良く, $\varepsilon_{0123} = -1$ となる. このとき2種類の不変テンソルである Levi-Civita 記号と Kronecker のデルタの間には, 恒等的に式(42)の関係が成り立つ(導出スライド参照)*21.

最後に, 添字に関して反対称な共変テンソルに対しては, Levi-Civita 記号との縮約(43)で双対な(対偶な; dual)テンソル密度が定義される. 実際, 対称テンソルは Levi-Civita

*21 Kronecker のデルタと添字に同じ記号 δ を用いているが, 誤解の恐れはあるまい.

記号との縮約に寄与を持たないので、定義式(43)は反対称テンソルに対してのみ意味を成す。また反対称性より、 $n(=1, 2, 3)$ 個の添字の縮約から得られる $n!$ 個の項は全て等しい。そこで式(43)右辺では重複を除くために式全体を $n!$ で割って双対テンソルを定義している。式(43)をもとの共変テンソルについて逆に解くには、Levi-Civita記号の縮約公式(42)を用いれば良い。

2.2.2 微分形式

- 座標系に依らない幾何学的な言語
- 本稿では単なる速記術

(抽象的)ベクトル空間 V の基底 $\{e_a\}$, 元 $u_{(a)} = u_{(a)}^b e_b$.

- p ベクトル ω^p [5, p.66]

p 個のベクトル $u_{(1)}, \dots, u_{(p)}$ を実数 $\omega^p[u_{(1)}, \dots, u_{(p)}]$ に対応させる写像で,

p 重線形: $\omega^p[\dots, \alpha u_{(a)} + \beta v_{(a)}, \dots] = \alpha \omega^p[\dots, u_{(a)}, \dots] + \beta \omega^p[\dots, v_{(a)}, \dots],$

歪対称: $\omega^p[\dots, u_{(a)}, \dots, u_{(b)}, \dots] = -\omega^p[\dots, u_{(b)}, \dots, u_{(a)}, \dots].$

– 例えば1ベクトルは線形写像 $\omega : u \in V \mapsto \omega[u] \in \mathbb{R}$.

– 特にベクトル $u = u^b e_b$ の第 a 成分 u^a を取り出す写像として, 1ベクトル ε^a ,

$$\varepsilon^a[u^b e_b] = u^a \tag{49}$$

を定義しておく.

p 個の1ベクトル $\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(p)}$ から p ベクトルを構成しよう.

- テンソル積 $\omega_{(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{(p)}$ [5, p.71]

$$(\omega_{(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{(p)})[u_{(1)}, \dots, u_{(p)}] = \omega_{(1)}[u_{(1)}] \dots \omega_{(p)}[u_{(p)}]. \quad (50)$$

- 外積 $\omega_{(1)} \wedge \dots \wedge \omega_{(p)}$ [5, p.75]
テンソル積を歪対称化して,

$$\omega_{(1)} \wedge \dots \wedge \omega_{(p)} = \varepsilon^{a_1 \dots a_p} \omega_{(a_1)} \otimes \dots \otimes \omega_{(a_p)}, \quad (51)$$

$$\begin{aligned} (\omega_{(1)} \wedge \dots \wedge \omega_{(p)})[u_{(1)}, \dots, u_{(p)}] &= \begin{vmatrix} \omega_{(1)}[u_{(1)}] & \dots & \omega_{(1)}[u_{(p)}] \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_{(p)}[u_{(1)}] & \dots & \omega_{(p)}[u_{(p)}] \end{vmatrix} \\ &= \varepsilon^{a_1 \dots a_p} (\omega_{(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{(p)})[u_{(a_1)}, \dots, u_{(a_p)}]. \end{aligned} \quad (52)$$

任意の p ベクトルは

$$\omega^p = \sum' \omega_{a_1 \dots a_p} \varepsilon^{a_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{a_p} \quad (53)$$

と展開される (ただし $\sum'$ は $1 \leq a_1 < \dots < a_p \leq \dim V$ の和) [5, p.75].

特にベクトル空間 V として多様体 (座標 x^a) の接空間を考える.

- 微分 df [5, pp.79–81]

接ベクトル $v = v^a \partial_a$ に作用して方向微分 $v^a \partial_a f$ を与える 1 ベクトル

$$df[v] = v^a \partial_a f = (\partial_a f) \varepsilon^a[v], \quad \therefore df = (\partial_a f) \varepsilon^a. \quad (54)$$

関数 f として $x^b(x) = x^b$ で定義される座標関数 x^b を採ると, $dx^b = \varepsilon^b$ を得る^{*22}.

$$p \text{ ベクトル (53)} \quad \rightarrow \quad \omega^p = \sum' \omega_{a_1 \dots a_p}(x) dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}. \quad (55)$$

- p (次微分) 形式 [5, pp.86–87]

多様体の各点 P ごとに定まる p ベクトル $(\omega^p)_P$ を与える “場” (55).

– 全微分 $df = (\partial_a f) dx^a$

式 (54) の微分 $(df)_P$ の “場” (1 形式) [5, p.82].

すると座標関数の微分 $dx'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} dx^b$ は反変ベクトルなので,

係数 $\omega_{a_1 \dots a_p}$ を共変テンソルとすれば微分形式 (55) は座標系に依らない.

^{*22} 一般式 (54) の $\partial_a f$ における f は, 引数を明示すれば位置 x で評価した値 $f(x) = x^b(x) = x^b$ であり, 最右辺は座標関数ではなく座標そのものとなることに注意すると, $\partial_a f = \delta_a^b$ と計算できることによる.

- 外微分 [5, pp.88-89]

p 形式(55)の係数 $\omega_{a_1 \dots a_p}$ を全微分 $d\omega_{a_1 \dots a_p}$ (1形式) に置き換えた $(p + 1)$ 形式

$$d\omega^p = \sum' d\omega_{a_1 \dots a_p} \wedge dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}. \quad (56)$$

- 外微分の公式 [5, pp.90-91]

ω^p, σ^p を p 形式, f をスカラー関数とすると,
外微分の定義より以下の公式が成り立つ.

$$d(\omega^p + \sigma^p) = d\omega^p + d\sigma^p, \quad (57)$$

$$d(f\omega^p) = df \wedge \omega^p + f d\omega^p, \quad (58)$$

$$d(df) = 0, \quad (59)$$

$$d(\omega^p \wedge \sigma^q) = d\omega^p \wedge \sigma^q + (-1)^p \omega^p \wedge d\sigma^q. \quad (60)$$

- 微分形式の積分 [5, pp.93–95]

$\omega^p[u_{(1)}, \dots, u_{(p)}] \equiv \langle \omega^p | u_{(1)}, \dots, u_{(p)} \rangle$ と表記する.

多様体の領域 A (座標 $(\xi^1, \dots, \xi^p)$) にわたる p 形式 (55) の積分は

$$\begin{aligned} \int_A \omega^p &\equiv \int_A \left\langle \omega^p \left| \frac{\partial}{\partial \xi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi^p} \right. \right\rangle d\xi^1 \dots d\xi^p \\ &= \int_A \sum' \omega_{a_1 \dots a_p} \frac{\partial(x^{a_1}, \dots, x^{a_p})}{\partial(\xi^1, \dots, \xi^p)} d\xi^1 \dots d\xi^p. \end{aligned} \quad (61)$$

- 積分はパラメータ ξ^a の選択に依らない : $\frac{\partial(x)}{\partial(\xi)} d^p \xi = \frac{\partial(x)}{\partial(\xi)} \frac{\partial(\xi)}{\partial(\xi')} d^p \xi' = \frac{\partial(x)}{\partial(\xi')} d^p \xi'$.
- 座標 x^a そのものを積分変数に選んだ場合,

$$dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p} \rightarrow \frac{\partial(x^{a_1}, \dots, x^{a_p})}{\partial(x^1, \dots, x^p)} d^p x = \varepsilon^{a_1 \dots a_p} d^p x.$$

- パラメータ ξ^b の変化に伴う変位 $d^{(b)} x^a = \frac{\partial x^a}{\partial \xi^b} d\xi^b$ (b で和をとらない) たちの張る体積要素

$$\frac{\partial(x^{a_1}, \dots, x^{a_p})}{\partial(\xi^1, \dots, \xi^p)} d\xi^1 \dots d\xi^p = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^{a_1}}{\partial \xi^1} d\xi^1 & \dots & \frac{\partial x^{a_1}}{\partial \xi^p} d\xi^p \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x^{a_p}}{\partial \xi^1} d\xi^1 & \dots & \frac{\partial x^{a_p}}{\partial \xi^p} d\xi^p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d^{(1)} x^{a_1} & \dots & d^{(p)} x^{a_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ d^{(1)} x^{a_p} & \dots & d^{(p)} x^{a_p} \end{vmatrix}.$$

2.2.2項の式の導出など

■ p ベクトルを式(53)のように展開できることの証明

$\omega_{a_1 \dots a_p} \equiv \omega^p[e_{a_1}, \dots, e_{a_p}]$ とおくと, これは添字に関して反対称である.

$$\begin{aligned}\omega^p[u_{(1)}, \dots, u_{(p)}] &= \omega^p[e_{a_1}, \dots, e_{a_p}] u_{(1)}^{a_1} \dots u_{(p)}^{a_p} && (\omega^p \text{の線形性}) \\ &= \omega_{a_1 \dots a_p} \varepsilon^{a_1}[u_{(1)}] \dots \varepsilon^{a_p}[u_{(p)}] \\ &= \omega_{a_1 \dots a_p} \varepsilon^{a_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{a_p} [u_{(1)}, \dots, u_{(p)}]\end{aligned}$$

より $\omega^p = \omega_{a_1 \dots a_p} \varepsilon^{a_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{a_p}$ と書けるので,

$$\begin{aligned}\omega^p &= \sum' \sum_{\pi} \omega_{\pi a_1 \dots \pi a_p} \varepsilon^{\pi a_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{\pi a_p} \\ &= \sum' \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) \omega_{a_1 \dots a_p} \varepsilon^{\pi a_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{\pi a_p} && (\omega_{a_1 \dots a_p} \text{の反対称性}) \\ &= \sum' \omega_{a_1 \dots a_p} \varepsilon^{a_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{a_p} : (53).\end{aligned}$$

ただし第2辺では和 $\sum'$ で $1 \leq a_1 < \dots < a_p \leq \dim V$ と大小関係を指定する代わりに,

置換 $\pi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \\ \pi a_1 & \pi a_2 & \dots & \pi a_p \end{pmatrix}$ で順序を混ぜている.

■ 外微分の公式 (57)–(60) の証明 [5, pp.90–91] 式 (57–58) はほぼ自明. 次に

$$d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x^b} dx^b\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^a \partial x^b} dx^a \wedge dx^b = 0 : (59). \quad (\because \text{式 (33)})$$

最後に式 (60) について, 任意の微分形式は

$$\omega^p = f dx^{a_1} \wedge dx^{a_2} \wedge \cdots \wedge dx^{a_p}, \quad \omega^q = g dx^{b_1} \wedge dx^{b_2} \wedge \cdots \wedge dx^{b_q}$$

という形の項の線形結合で書ける. ところが α, β を定数として, 外積は線形性

$$\begin{aligned} (\alpha \omega^p + \beta \sigma^p) \wedge \omega^q &= \alpha(\omega^p \wedge \omega^q) + \beta(\sigma^p \wedge \omega^q), \\ \omega^p \wedge (\alpha \omega^q + \beta \sigma^q) &= \alpha(\omega^p \wedge \omega^q) + \beta(\omega^p \wedge \sigma^q) \end{aligned}$$

を満たすから, 上記の単項式に対して式 (60) を示せば十分である. すると

$$\begin{aligned} d(\omega^p \wedge \omega^q) &= d\{fg(dx^{a_1} \wedge dx^{a_2} \wedge \cdots \wedge dx^{a_p}) \wedge (dx^{b_1} \wedge dx^{b_2} \wedge \cdots \wedge dx^{b_q})\} \\ &= \{(df)g + f(dg)\} \wedge (dx^{a_1} \wedge dx^{a_2} \wedge \cdots \wedge dx^{a_p}) \wedge (dx^{b_1} \wedge dx^{b_2} \wedge \cdots \wedge dx^{b_q}) \end{aligned}$$

であり, 最右辺において dg と $dx^{a_1}, \dots, dx^{a_p}$ の外積を次々と反交換してゆくと符号 $(-1)^p$ が出るので, 式 (60) が得られる.

■微分形式の積分 (61) の最右辺への書き換え

$$\frac{\partial}{\partial \xi^b} = \frac{\partial x^c}{\partial \xi^b} \frac{\partial}{\partial x^c}, \quad \therefore dx^a \left[\frac{\partial}{\partial \xi^b} \right] = \varepsilon^a \left[\frac{\partial x^c}{\partial \xi^b} \frac{\partial}{\partial x^c} \right] = \frac{\partial x^a}{\partial \xi^b}$$

なので, 式 (55) の p 形式 ω^p に対して

$$\begin{aligned} \left\langle \omega^p \left| \frac{\partial}{\partial \xi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi^p} \right. \right\rangle &= \sum' \omega_{a_1 \dots a_p} \left\langle dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p} \left| \frac{\partial}{\partial \xi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi^p} \right. \right\rangle \\ &= \sum' \omega_{a_1 \dots a_p} \begin{vmatrix} dx^{a_1} [\partial/\partial \xi^1] & \dots & dx^{a_1} [\partial/\partial \xi^p] \\ \dots & \dots & \dots \\ dx^{a_p} [\partial/\partial \xi^1] & \dots & dx^{a_p} [\partial/\partial \xi^p] \end{vmatrix} \\ &= \sum' \omega_{a_1 \dots a_p} \frac{\partial(x^{a_1}, \dots, x^{a_p})}{\partial(\xi^1, \dots, \xi^p)} \end{aligned}$$

と書き換えられることによる.

2.2.2項の原稿

2.2.1項ではテンソルの座標成分をあからさまに用いて，テンソル方程式の座標変換に対する共変性を説明した．これに対し2.2.2項では座標系に依拠せず，それ故に共変性があらかじめ明白な幾何学的言語として，微分形式を導入する．もっとも本稿の予定ではループ量子重力に適した一般相対性理論の定式化を論じる際，あくまで微分形式を速記術的に利用するに過ぎない．それを等価なテンソル成分の計算に書き直して提示することは常に可能である．

微分形式とは多様体上のベクトルに対する，ある種の写像である．そこでまずは多様体の接空間に限らず，抽象的ベクトル空間 V に対して p ベクトルを導入するところから始める． p 個のベクトル $u_{(1)}, \dots, u_{(p)}$ を実数に対応させる写像のうち，引数となるベクトルについて p 重線形かつ歪対称 (反対称) な写像 ω^p を p ベクトルという^{*23}．例えば1ベクトル ω は1個のベクトル u を実数 $\omega[u] \in \mathbb{C}$ に対応付ける線形写像である．特にベクトル u から第 a 成分 u^a を取り出す写像として，式(49)の1ベクトル ε^a を定義しておく．

さて，ここで p 個の1ベクトル $\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(p)}$ から p ベクトルを構成することを考えよう．準備として，それらのテンソル積を式(50)で定義する．次に(51)のように，テンソル積における p 個の1ベクトル $\omega_{(a)}$ を Levi-Civita 記号 $\varepsilon^{a_1 \dots a_p}$ で歪対称化して，外積を

^{*23} 歪対称性について，どの2つのベクトル $u_{(a)}$ と $u_{(b)}$ を入れ替える操作も常に奇置換であることに注意する．

定義する．するとベクトル $u_{(1)}, \dots, u_{(p)}$ への外積の作用は行列式 (52) であり，したがって p 個のベクトル $u_{(a)}$ について歪対称なので，外積は p ベクトルである．任意の p ベクトル ω^p は，式 (49) で定義した 1 ベクトル ε^a の外積を基底として，式 (53) のように展開できる (導出スライドを参照)．ここで展開係数 $\omega_{a_1 \dots a_p}$ もまた反対称である*24．

ここでベクトル空間 V として多様体の接空間を考えよう．多様体の接ベクトル $v = v^a \partial_a$ に作用して，式 (23) の方向微分を与える 1 ベクトル (54) として，微分 df を導入する．特に考えている多様体の点 x の座標 x^b そのものを返す座標関数 $f(x) = x^b(x)$ に対して，その微分は式 (49) の 1 ベクトル ε^b に一致する [5, pp.79–81]．よって p ベクトル (53) は，座標関数の微分の外積を基底とした展開 (55) の形に書ける．ところで p ベクトル ω^p は多様体の接ベクトルに作用する写像であり，厳密にはあくまで多様体の特定の 1 点でのみ定義されている．これに対し式 (55) を，多様体の各点 P ごとに定まる p ベクトル $(\omega^p)_P$ を与える “場” と見なすとき， ω^p は p 次微分形式あるいは単に p 形式と呼ばれる [5, pp.86–87]．特に式 (54) の微分に対する “場” を成す 1 形式 df を全微分と呼ぶ [5, p.82]．この定義より座標関数の全微分は反変ベクトル成分の変換則に従うため， p 形式 (55) が座標系に依らない意味を持つには，係数 $\omega_{a_1 \dots a_p}$ は p 階共変テンソルの変換則に従わなければならない [5, p.83]．

*24 仮に対称部分があっても，反対称な外積との “縮約” (53) には寄与しない．

また p 形式 (55) の係数 $\omega_{a_1 \dots a_p}$ を全微分 $d\omega_{a_1 \dots a_p}$ (したがって 1 形式) に置き換え, $(p+1)$ 形式 (56) を作る操作を, ω^p の外微分と呼ぶ. 特にスカラー関数 f の外微分は全微分 df で定義される [5, pp.88-89]. 外微分の定義より, 通常の微分と似た公式 (57)–(60) が成り立つ (導出スライド参照). 特に式 (58), (60) は Leibniz ルールの対応物であるものの, 式 (60) のように微分形式の次数に応じた符号因子を考慮する必要があることに注意する.

最後に微分形式の積分を定義しよう. 多様体上の積分領域 A をパラメトライズする座標 $(\xi^1, \dots, \xi^p)$ を積分変数に採ると, パラメータ ξ^a に関する基底 $\partial/\partial\xi_a$ に式 (55) の p 形式 ω^p を作用させた値を被積分関数として, ω^p の積分は式 (61) のように定義される (最右辺への書き換えは導出スライド参照). この定義により, 積分はパラメータ ξ^a の付け替えに対して不変である. したがって式 (61) 最左辺のように積分変数に関する測度を書かずとも, 表記上の破綻は生じない. なお式 (61) 最右辺の積分測度の因子は, 各パラメータ ξ^b の微小変化に対応する無限小ベクトル $d^{(b)}x$ たちの張る体積要素となっている.

2.2.3 Riemann 幾何学

異なる2点 $x, x + dx$ のベクトルは異なる変換係数 $\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$ で変換し、ベクトル V^{μ} の微分はテンソルとならない：

$$\partial_{\beta}' V'^{\alpha} = \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \partial_{\mu} \right) \left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu} \right) = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \partial_{\mu} V^{\nu} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \left(\partial_{\mu} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \right) V^{\nu}. \quad (62)$$

■ベクトルの平行移動と共変微分 [4, pp.264–267] [9, pp.140–144]

そこで $V^{\mu}(x)$ を近くの点 $x + dx$ に “平行移動” したベクトル $V_{\parallel}^{\mu}(x + dx)$ を考え、

$$\delta V^{\mu}(x + dx) \equiv V_{\parallel}^{\mu}(x + dx) - V^{\mu}(x) = -\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}(x) V^{\nu}(x) dx^{\rho} \quad (63)$$

とおく．接続 (Christoffel 記号) $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$ は平行移動を定義する．

- Christoffel 記号は局所慣性系で全成分がゼロ $\rightarrow$ テンソルでない．
- 計量との縮約で第1添字の上げ下げを定義：

$$\Gamma_{\mu,\nu\rho} \equiv g_{\mu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho}, \quad \therefore \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = g^{\mu\sigma} \gamma_{\sigma,\nu\rho} \quad (64)$$

移動先の点 $x + dx$ でベクトルの差をとると

$$\begin{aligned} DV^\mu(x + dx) &\equiv V^\mu(x + dx) - V_{\parallel}^\mu(x + dx) \\ &= V^\mu(x + dx) - (V^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\nu\rho}(x)V^\nu(x)dx^\rho) \\ &= (D_\rho V^\mu)(x)dx^\rho, \end{aligned} \tag{65}$$

$$D_\rho V^\mu = \partial_\rho V^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} V^\nu. \tag{66}$$

$V_{\parallel}^\mu(x + dx)$ がベクトル，微分係数(66)がテンソルとなるよう， $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ を定義する．
このときの微分係数(66)をベクトル V^μ の共変微分と呼ぶ^{*25*26}．

- 条件1：対称性

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \Gamma^\mu_{\rho\nu}, \quad \therefore \Gamma_{\mu,\nu\rho} = \Gamma_{\mu,\rho\nu}. \tag{67}$$

- 条件2：ベクトルの大きさの不変性

$$g_{\mu\nu}(x)V^\mu(x)V^\nu(x) = g_{\mu\nu}(x + dx)V_{\parallel}^\mu(x + dx)V_{\parallel}^\nu(x + dx). \tag{68}$$

^{*25} 共変微分はしばしば $\nabla_\rho V^\mu$ とも表される．また通常の微分 $\partial_\rho V^\mu$ をコロン $V^\mu_{,\rho}$ で，共変微分 $D_\mu V^\rho$ をセミコロン $V^\mu_{;\rho}$ で表す記法も一般的である．

^{*26} なお式(65)の最左辺は移動先の点 $x + dx$ で評価されている．しかし最右辺は既に dx の1次の微小量なので，ベクトルの差を評価する点をもとの位置 x に置き換えた際の誤差は dx の2次の微小量となり，微分係数 $D_\rho V^\mu$ には影響しない．

このとき Christoffel 記号は計量の1階微分

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu,\nu\lambda} + \Gamma_{\nu,\mu\lambda}, \quad (69)$$

$$\therefore \Gamma_{\lambda,\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \quad (70)$$

で表される (局所慣性系で $\Gamma_{\lambda,\mu\nu} = 0$). これは変換則

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \quad (71)$$

に従う (テンソルでない) [5, p.29].

(注意) 計量テンソルの変分に伴う Christoffel 記号の変分はテンソル [4, p.307] :

1. ベクトルの平行移動に伴う変化 (63): $\delta V^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} V^{\nu} dx^{\rho}$ はベクトル
2. 計量の変分前後での δV^{μ} の差 $-\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} \cdot V^{\nu} dx^{\rho}$ もまたベクトル
3. Christoffel 記号の変分 $\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$ はテンソル

上式 (71) の変分をとると右辺第2項が落ちることからも直接分かる.

変換則 (62), (71) より式 (66) の共変微分 $D_{\nu} V^{\mu}$ はテンソルになる.

(ゆえに $V_{\parallel}$ はベクトル.)

共変ベクトル A_μ の平行移動による変化

反変ベクトル B^μ のスカラー積は

平行移動に対して不変であることを要請： $\delta(A_\mu B^\mu) = 0$.

$$\begin{aligned} B^\mu \delta A_\mu &= -A_\mu \delta B^\mu = A_\mu \cdot \Gamma^\mu_{\nu\rho} B^\nu dx^\rho \quad (\because \text{式(63)}) \\ &= B^\mu \cdot \Gamma^\nu_{\mu\rho} A_\nu dx^\rho \end{aligned} \quad (72)$$

より，共変ベクトル A_μ の平行移動に伴う変化量は

$$\delta A_\mu = \Gamma^\nu_{\mu\rho} A_\nu dx^\rho. \quad (73)$$

そこで

$$\begin{aligned} DA^\mu &= A_\mu(x + dx) - (A_\mu + \delta A_\mu)(x) \equiv (D_\rho A_\mu) dx^\rho, \\ D_\rho A_\mu &= \partial_\rho A_\mu - \Gamma^\nu_{\mu\rho} A_\nu \end{aligned} \quad (74)$$

と書いて共変ベクトルの共変微分 $D_\rho A_\mu$ を定義する.

■時空を超曲面として考察 [10, pp.28–34]

便宜的に時空を平坦な高次元空間(座標 z^a , 計量 h_{ab} : 定数)に埋め込まれた超曲面 $z^a = z^a(x^\mu)$ と見なし, 接空間の基底 $e_\mu^a = \partial_\mu z^a$ ($\mu = 0, \dots, 3$) を採る.

超曲面上の変位と対応する不変距離 ds

$$dz^a = (\partial_\mu z^a) dx^\mu = e_\mu^a dx^\mu, \quad \therefore ds^2 = h_{ab} dz^a dz^b = (e_\mu^a e_\nu^b h_{ab}) dx^\mu dx^\nu \quad (75)$$

$$\rightarrow \text{超曲面に誘導された計量 } g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b h_{ab}. \quad (76)$$

超曲面の点 x の接ベクトル V^μ を高次元空間で見た成分は, 上式(75)に従い

$$V^a = e_\mu^a V^\mu. \quad (77)$$

これを一定に保ち超曲面上の点 $x + dx$ に平行移動すると, 移動先で

$$V^a = V_\parallel^a + V_\perp^a. \quad (78)$$

と分解される(図4). ただし

- 法線成分 $V_\perp^a$ は直交性 $h_{ab} V_\perp^a e_\mu^b (x + dx) = 0$ で定義される.
- 時空座標成分 $V_\parallel^\mu$ は式(77)と同じ形 $V_\parallel^a = e_\mu^a (x + dx) V_\parallel^\mu$ で定義される.

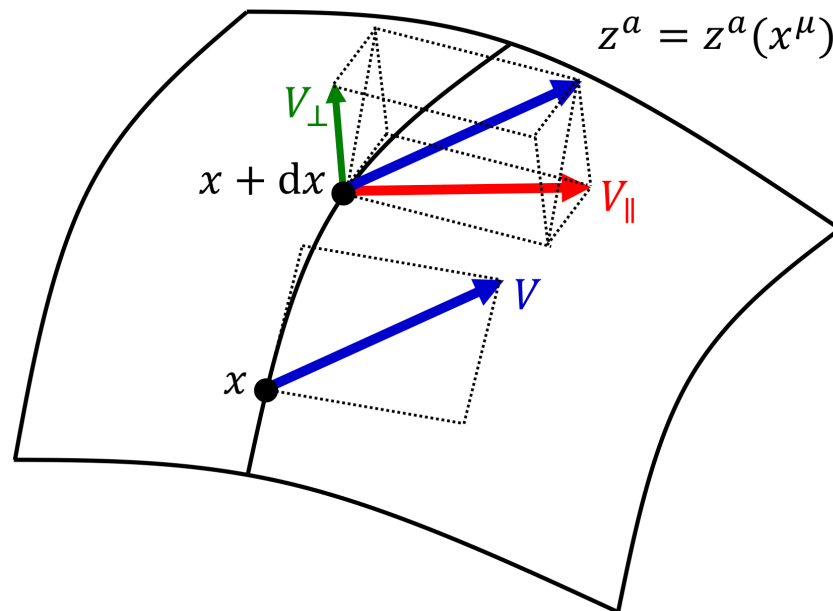


図4 平坦な高次元空間内でベクトル V をそのまま平行移動し，超曲面から突き出す法線成分 $V_{\perp}$ を切り捨てると，曲がった空間で平行移動したベクトル $V_{\parallel}$ を得る [5, p.34]

このとき共変ベクトルの平行移動に伴う変化は式(73)と同じ形

$$V_{\parallel\mu}(x + dx) - V_{\mu}(x) = \Gamma_{\nu,\mu\rho}(x) V^{\nu}(x) dx^{\rho}, \quad \Gamma_{\nu,\mu\rho} \equiv h_{ab} e_{\nu}^a \partial_{\rho} e_{\mu}^b \quad (79)$$

で表され，ここで導入した接続 $\Gamma_{\nu,\mu\rho}$ はChristoffel記号(70)に一致する．

ベクトルの大きさ $V \cdot V \equiv h_{ab} V^a V^b$ は変位 dx の1次では

$$V \cdot V = (V_{\parallel} + V_{\perp}) \cdot (V_{\parallel} + V_{\perp}) = V_{\parallel} \cdot V_{\parallel} \quad (\because V_{\parallel} \cdot V_{\perp} = 0, V_{\perp} = O(dx)) \quad (80)$$

のように接線成分 $V_{\parallel}$ で与えられるから，平行移動で変わらない [10, p.36].

図5の例では

$$\text{変位 } dx = a\phi, \quad |V_{\perp}| = |V| \sin \phi = O(dx), \quad |V_{\parallel}| = |V| \cos \phi = |V| + O(dx^2).$$

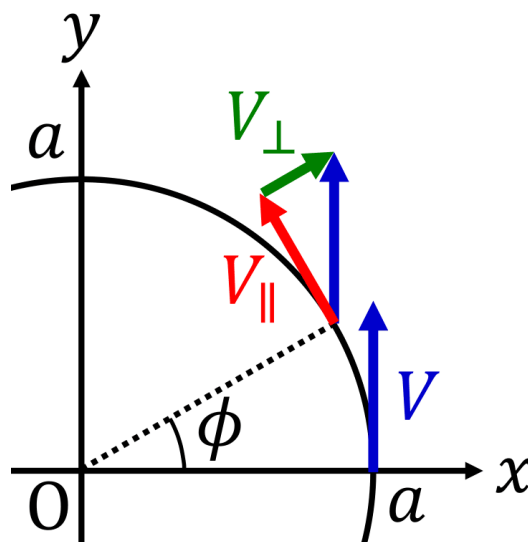


図5 簡単な例(着想は文献 [10, p.31])

■測地線 [10, pp.38–44] [14, pp.199–200]

- 曲がった空間に “可能な限りまっすぐに” 描いた曲線 $x = x(\lambda)$.
曲線上の点 $x^{(i)}$ の接ベクトル $U^{(i)}$ を, 曲線上の隣接する点 $x^{(i+1)} = x^{(i)} + U^{(i)} d\lambda$ に平行移動したベクトルを, 点 $x^{(i+1)}$ の接ベクトル $U^{(i+1)}$ とすれば良い.
→ 接ベクトル $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ をそれ自身に沿って平行移動したベクトルが, 移動先での接ベクトルに一致.
- 測地線の方程式
 $V^\mu \rightarrow U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$, $dx^\nu = U^\nu d\lambda$ として,
移動先のベクトルの差 (65) をゼロとおくと^{*27},

$$0 = \frac{DU^\mu}{d\lambda} = (\partial_\nu U^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} U^\rho) U^\nu = \frac{dU^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} U^\nu U^\rho. \quad (81)$$

- 直観的に期待されるように, 測地線は2点を結ぶ(局所的)最短曲線

^{*27} 式(81)における微分係数 $DU^\mu/d\lambda$ はもちろん, 曲線上で $d\lambda$ だけ隔たる2点のベクトルを平行移動により同一点で比べた差 DU^μ を与える変化率である. (文献 [4, p.286] の表記にならった.)

■ (p, q) テンソルの共変微分 [9, p.143] [4, pp.267–268]

1. スカラー S の共変微分は $S_{;\mu} \equiv \partial_\mu S$
2. テンソル $A^{\dots}, B^{\dots}$ の積に対する Leibniz ルール

$$(A^{\dots} B^{\dots})_{;\mu} = (A^{\dots}_{;\mu}) B^{\dots} + A^{\dots} (B^{\dots}_{;\mu}).$$

これらを要請すると, (p, q) テンソル $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ の共変微分は

$$\begin{aligned} T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q; \lambda} = & \partial_\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} + \sum_{k=1}^p T^{\mu_1 \dots \mu_{k-1} \alpha \mu_{k+1} \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} \Gamma^{\mu_k}_{\alpha \lambda} \\ & - \sum_{k=1}^q T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_{k-1} \alpha \nu_{k+1} \dots \nu_q} \Gamma^{\alpha}_{\nu_k \lambda} \end{aligned} \quad (82)$$

と表され, $(p, q+1)$ テンソルであることが分かる.

計量テンソルとの縮約により反変導関数

$$V_{\mu}{}^{;\nu} = g^{\nu\rho} V_{\mu;\rho}, \quad V^{\mu;\nu} = g^{\nu\rho} V^{\mu}_{;\rho} \quad (83)$$

を定義すると, これはテンソルである.

■ Christoffel記号と計量テンソルの公式 [4, pp.270–273]

- 共変微分の公式(82)より, 式(69)は

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0 \quad (84)$$

を意味する [9, p.145]. すると $0 = (g^{\mu\nu} g_{\nu\rho})_{;\lambda} = g_{\nu\rho} g^{\mu\nu}_{;\lambda}$ なので,

$$g^{\mu\nu}_{;\lambda} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \partial_\lambda g^{\mu\nu} = -\Gamma^\mu_{\rho\lambda} g^{\rho\nu} - \Gamma^\nu_{\rho\lambda} g^{\mu\rho}. \quad (85)$$

- 行列式 $g \equiv |g_{\mu\nu}|$ に対する恒等式

$$dg = g g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu}, \quad (86)$$

$$\Gamma^\mu_{\nu\mu} = \frac{\partial_\nu g}{2g}, \quad (87)$$

$$g^{\nu\lambda} \Gamma^\mu_{\nu\lambda} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}). \quad (88)$$

- 式(87)より，反変ベクトル A^μ ，反対称テンソル $A^{\mu\nu}(= -A^{\nu\mu})$ の発散は

$$A^\mu{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} A^\mu), \quad (89)$$

$$A^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} A^{\mu\nu}). \quad (90)$$

上式(89)から

$$\int A^\mu{}_{;\mu} \sqrt{-g} d^4x = \int \partial_\mu (A^\mu \sqrt{-g}) d^4x$$

が得られる．左辺は不変量となっており，
右辺は発散定理により3次元の表面積分に書き直せる．

■ 曲率テンソル

計量 $g_{\mu\nu}$ ($\leftrightarrow$ 重力ポテンシャル)

- 局所慣性系で $\eta_{\mu\nu}$
- 適当な座標系での計量から、幾何学(座標系によらない真の距離 ds の関係)が分かる



Christoffel記号(接続) $\Gamma_{\lambda,\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu})$ ($\leftrightarrow$ 重力場の強さ)

計量(重力ポテンシャル)の1階微分までを含み、局所慣性系で 0 ($\leftrightarrow$ テンソルではない)



曲率テンソル $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\rho} \Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\sigma} \Gamma^\alpha{}_{\nu\rho}$

- 計量の2階微分までを含み、一般には局所慣性系で $\neq 0$
 - テンソルなので、全成分がゼロか否かは座標系によらない
- $\leftrightarrow$ 時空が曲がっているか否かという、座標系によらない幾何学的性質を特徴付ける

図6 一般相対性理論の基礎概念(まとめ)

曲がった時空では閉曲線に沿ってベクトルを平行移動し1周させると、
一般にはもとのベクトルに一致しない [4, pp.288–289] [14, pp.197–198].

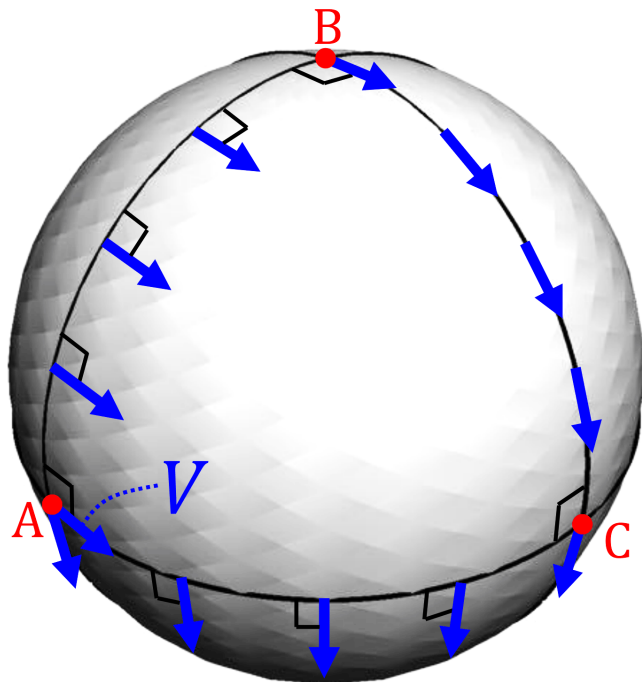


図7 球面上での平行移動

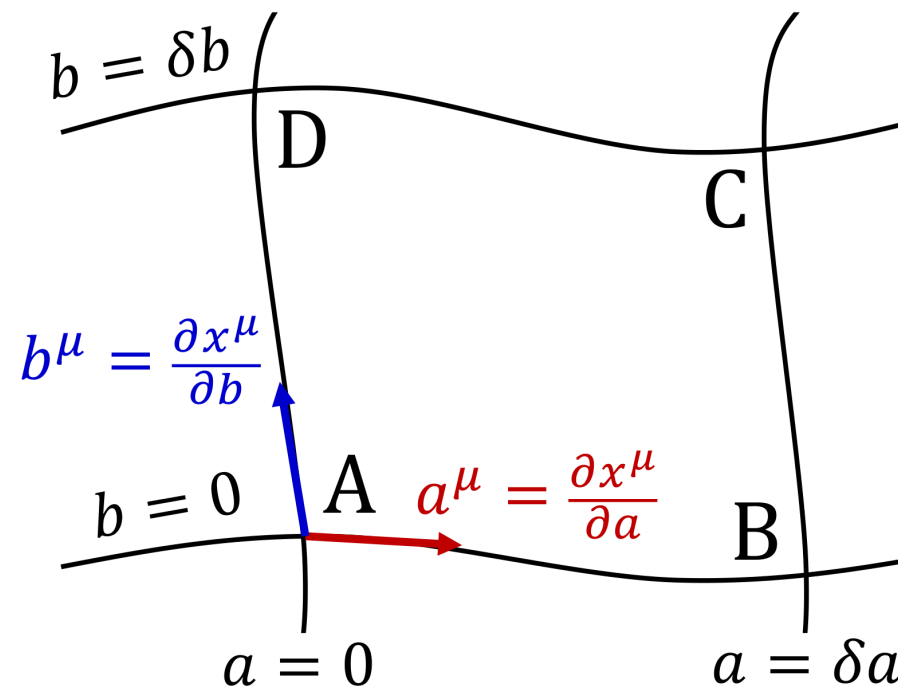


図8 微小な閉路 $A \rightarrow B \rightarrow \dots \rightarrow A$

図8の閉路に沿ってベクトル V を平行移動したときの変化量 [14, p.203]

$$\delta V^\mu = V^\nu (a^\sigma \delta a) (b^\rho \delta b) R^\mu_{\nu\rho\sigma}, \quad (91)$$

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} \equiv \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho} + \Gamma^\mu_{\alpha\rho} \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} \Gamma^\alpha_{\nu\rho}. \quad (92)$$

曲率テンソルの性質 [4, pp.291–293]

共変曲率テンソル

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv g_{\mu\alpha} R^{\alpha}{}_{\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_{\rho} \partial_{\nu} g_{\mu\sigma} + \partial_{\sigma} \partial_{\mu} g_{\nu\rho} - \partial_{\sigma} \partial_{\nu} g_{\mu\rho} - \partial_{\rho} \partial_{\mu} g_{\nu\sigma}) \\ + g_{\alpha\beta} (\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\rho} \Gamma^{\beta}{}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\sigma} \Gamma^{\beta}{}_{\mu\rho}), \quad (93)$$

Ricci テンソル $R_{\mu\nu} \equiv R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} = \partial_{\rho} \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \partial_{\nu} \Gamma^{\rho}{}_{\mu\rho} + \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\rho} \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\nu} \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\rho}, \quad (94)$

スカラー曲率 $R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (95)$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}$$

図9 曲率テンソル(93)の(反)対称性 $R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho}$

Ricci テンソルの対称性 $R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\rho\mu\sigma\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\sigma\nu\rho\mu} = R_{\nu\mu}. \quad (96)$

Bianchi の恒等式

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\rho\sigma\nu} + R_{\mu\sigma\nu\rho} = 0, \quad (97)$$

$$R^\lambda{}_{\mu\nu\rho;\sigma} + R^\lambda{}_{\mu\sigma\nu;\rho} + R^\lambda{}_{\mu\rho\sigma;\nu} = 0. \quad (98)$$

- 第1恒等式(97)は

$$\varepsilon^{\alpha\mu\nu\rho} R_{\beta\mu\nu\rho} = 0 \quad (99)$$

を含意する (着想は文献 [1, p.79])*²⁸.

- 第2恒等式(98)は Einstein テンソル

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (100)$$

に対する式

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad (101)$$

に書き換えられる [14, p.210].

*²⁸ 例えば $\varepsilon^{0\mu\nu\rho} R_{0\mu\nu\rho} = (R_{0123} + R_{0312} + R_{0231}) + (R_{0321} + R_{0132} + R_{0213}) = 0$.

2.2.3項の式の導出など

■ Christoffel記号を計量で表した式(69),(70)の導出

式(63): $V_{||}^{\mu}(x + dx) = V^{\mu} - \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} V^{\nu} dx^{\rho}$ (もとの点を表す引数 x は省略) を代入すると, dx の1次近似で

$$\begin{aligned} & g_{\mu\nu}(x + dx) V_{||}^{\mu}(x + dx) V_{||}^{\nu}(x + dx) \\ &= (g_{\mu\nu} + \partial_{\lambda} g_{\mu\nu} \cdot dx^{\lambda}) (V^{\mu} - \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} V^{\rho} dx^{\sigma}) (V^{\nu} - \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} V^{\alpha} dx^{\beta}) \\ &= g_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu} + (\partial_{\lambda} g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu,\nu\lambda} - \Gamma_{\nu,\mu\lambda}) V^{\mu} V^{\nu} dx^{\lambda}. \end{aligned}$$

任意のベクトル V^{μ} に対してノルムの不変性(68)に基づき, これを $g_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu}$ と等置すると式(69): $\partial_{\lambda} g_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu,\nu\lambda} + \Gamma_{\nu,\mu\lambda}$ を得る. さらに添字を巡回置換した2式

$$\partial_{\mu} g_{\nu\lambda} = \Gamma_{\nu,\lambda\mu} + \Gamma_{\lambda,\nu\mu}, \quad \partial_{\nu} g_{\lambda\mu} = \Gamma_{\lambda,\mu\nu} + \Gamma_{\mu,\lambda\nu}$$

の和からもとの式を引き, Christoffel記号の対称性(67): $\Gamma_{\lambda,\mu\nu} = \Gamma_{\lambda,\nu\mu}$ を利用すると, 式(70): $\Gamma_{\lambda,\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_{\mu} g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu} g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda} g_{\mu\nu})$ が得られる^{*29}.

^{*29} なお式(70)は, 左辺と同じ添字の並びを持つ右辺第3項を最初に書き下し, 添字の巡回置換により得られる残りの2項と逆符号で足せば良いと覚えると見通しが良い.

■ Christoffel記号の変換則(71)の導出 [5, p.29]

式(70): $\Gamma'_{\lambda,\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_{\mu}'g'_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}'g'_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}'g'_{\mu\nu})$ において

$$\begin{aligned}\partial_{\lambda}'g'_{\mu\nu} &= \partial_{\lambda}' \left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}} g_{\beta\gamma} \right) \\ &= \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}} \left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \partial_{\alpha} g_{\beta\gamma} \right) \quad \left(\because \partial_{\lambda}' = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \partial_{\alpha} \right) \\ &\quad + g_{\beta\gamma} \left(\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda} \partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}} + \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\lambda} \partial x'^{\nu}} \right) = A_{\lambda\mu\nu} + B_{\lambda\mu,\nu} + B_{\lambda\nu,\mu},\end{aligned}$$

$$A_{\lambda\mu\nu} \equiv \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}} \partial_{\alpha} g_{\beta\gamma},$$

$$\therefore A_{\mu\nu\lambda} = \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \partial_{\alpha} g_{\beta\gamma} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}} \partial_{\beta} g_{\gamma\alpha}$$

(第2の等号でダミー添字を $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma, \gamma \rightarrow \alpha$ と巡回置換した),

$$A_{\nu\lambda\mu} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}} \partial_{\alpha} g_{\beta\gamma} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}} \partial_{\gamma} g_{\alpha\beta}$$

(第2の等号でダミー添字を $\alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \alpha, \gamma \rightarrow \beta$ と巡回置換した),

$$B_{\lambda\mu,\nu} \equiv g_{\beta\gamma} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\lambda \partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} = B_{\mu\lambda,\nu}, \quad \therefore g_{\beta\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x'^\lambda \partial x'^\nu} = B_{\lambda\nu,\mu}.$$

これらを用いると上記の Christoffel 記号は

$$\begin{aligned} \Gamma'_{\lambda,\mu\nu} &= \frac{1}{2} (A_{\mu\nu\lambda} + A_{\nu\lambda\mu} - A_{\lambda\mu\nu}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ (B_{\mu\nu,\lambda} + B_{\mu\lambda,\nu}) + (B_{\nu\lambda,\mu} + B_{\nu\mu,\lambda}) - (B_{\lambda\mu,\nu} + B_{\lambda\nu,\mu}) \} \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \cdot \frac{1}{2} (\partial_\beta g_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma}) + B_{\mu\nu,\lambda} \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\alpha,\beta\gamma} + g_{\beta\gamma} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\lambda}, \\ \therefore \Gamma'^\lambda_{\mu\nu} &= g'^{\lambda\rho} \Gamma'_{\rho,\mu\nu} = \left(g^{\sigma\tau} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\tau} \right) \Gamma'_{\rho,\mu\nu} \\ &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \Gamma^\sigma_{\beta\gamma} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} : (71). \\ \left(\because g^{\sigma\tau} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\rho} \Gamma_{\alpha,\beta\gamma} &= g^{\sigma\tau} \delta^\alpha_\tau \Gamma_{\alpha,\beta\gamma} = \Gamma^\sigma_{\beta\gamma}, \quad g^{\sigma\tau} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\rho} g_{\beta\gamma} = g^{\sigma\tau} \delta^\gamma_\tau g_{\beta\gamma} = \delta^\sigma_\beta. \right) \end{aligned}$$

■ベクトルの共変微分(66)がテンソルとして変換することの確認 [5, pp.31–32]

ベクトルの微分とChristoffel記号の変換則(62),(71)より, 共変微分

(66): $D_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} V^\rho$ の各項はそれぞれ

$$\partial_\nu' V'^\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} \partial_\alpha V^\beta + \left(\partial_\nu' \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \right) V^\alpha, \quad (102)$$

$$\Gamma'^\mu_{\nu\rho} V'^\rho = \left(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\rho} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\nu \partial x'^\rho} \right) \left(\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\delta} V^\delta \right) \quad (103)$$

と変換する. ここで第2式(103)の第2項は

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\nu \partial x'^\rho} = \cancel{\partial_\nu' \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\rho} \right)} - \left(\partial_\nu' \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\rho}$$

と書き換えられるので [9, p.152], 第1式(102)の第2項と正確に相殺する. また式(103)第1項において $\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\rho} \left(\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\delta} V^\delta \right) = V^\beta$ とまとめられるので, 2式(102),(103)を足すとテンソルの変換則

$$\partial_\nu' V'^\mu + \Gamma'^\mu_{\nu\rho} V'^\rho = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} (\partial_\alpha V^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} V^\gamma)$$

を得る.

■共変ベクトルの平行移動に伴う変化(79)の導出 [10, pp.32–33]

式(78): $V^a = V_{\parallel}^a + V_{\perp}^a$ と移動先での接ベクトル $e_{\mu}^b(x + dx)$ の(計量 h_{ab} に関する)内積を作ると

$$\begin{aligned} h_{ab} V^a e_{\mu}^b(x + dx) &= h_{ab} V_{\parallel}^a e_{\mu}^b(x + dx) \quad (\because \text{直交性 } h_{ab} V_{\perp}^a e_{\mu}^b(x + dx) = 0) \\ &= [h_{ab} e_{\mu}^a(x + dx) e_{\nu}^b(x + dx)] V_{\parallel}^{\mu} \quad (\text{式(77)} : V_{\parallel}^a = e_{\mu}^a(x + dx) V_{\parallel}^{\mu}) \\ &= g_{\mu\nu}(x + dx) V_{\parallel}^{\mu} = V_{\parallel\mu}(x + dx) \end{aligned}$$

を得る．ところが最左辺は dx の1次までで

$$h_{ab} V^a e_{\mu}^b(x + dx) = h_{ab} V^a [e_{\mu}^b(x) + (\partial_{\nu} e_{\mu}^b(x)) dx^{\nu}] = V_{\mu}(x) + V^{\nu} [h_{ab} (e_{\nu}^a \partial_{\rho} e_{\mu}^b)(x)] dx^{\rho}$$

と書けるので，式(79)を得る．

■式(79)で導入した接続 $\Gamma_{\nu,\mu\rho}$ がChristoffel記号(70)に一致することの確認 [10, pp.34]

$e_\mu^a \equiv \partial_\mu z^a$ を考慮して計量(76): $g_{\mu\nu} = h_{ab}e_\mu^a e_\nu^b$ を微分すると,

$$\begin{aligned}\partial_\rho g_{\mu\nu} &= h_{ab}(e_\nu^b \partial_\mu \partial_\rho z^a + e_\mu^a \partial_\nu \partial_\rho z^b), \\ \therefore \partial_\mu g_{\rho\nu} &= h_{ab}(e_\nu^b \partial_\mu \partial_\rho z^a + e_\rho^a \partial_\mu \partial_\nu z^b), \\ \partial_\nu g_{\mu\rho} &= h_{ab}(e_\rho^b \partial_\mu \partial_\nu z^a + e_\mu^a \partial_\nu \partial_\rho z^b).\end{aligned}$$

すると式(70)のChristoffel記号は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\nu g_{\mu\rho}) &= h_{ab}e_\nu^b \partial_\mu \partial_\rho z^a \\ &= h_{ab}e_\nu^a \partial_\rho e_\mu^b \quad (\because h_{ab} = h_{ba})\end{aligned}$$

となり, 最右辺は式(79)で導入した接続 $\Gamma_{\nu,\mu\rho}$ に一致している.

■ (p, q) テンソルの共変微分の公式 (82) と, それが $(p, q + 1)$ テンソルであることの証明

スカラーの共変微分が通常の微分に一致すること, また共変微分に対しても Leibniz ルールが成り立つことを要請しよう. すると準備として, 共変ベクトルの共変微分の公式 (74) が得られる. 我々は既に等価な考えでこの公式を示しているので, ここでは導出を繰り返さない.

次に $A^{\nu_1}, \dots, A^{\nu_q}$ を反変ベクトル, $B_{\mu_1}, \dots, B_{\mu_p}$ を共変ベクトルとすると, (p, q) テンソル $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ に対して上記の要請から

$$\begin{aligned} \partial_\lambda (A^{\nu_1} \dots A^{\nu_q} B_{\mu_1} \dots B_{\mu_p} T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}) &= (A^{\nu_1} \dots A^{\nu_q} B_{\mu_1} \dots B_{\mu_p} T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q})_{;\lambda} \\ &= A^{\nu_1} \dots A^{\nu_q} B_{\mu_1} \dots B_{\mu_p} T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q; \lambda} \\ &\quad + \sum_{k=1}^q A^{\nu_1} \dots A^{\nu_{k-1}} A^{\nu_{k+1}} \dots A^{\nu_q} B_{\mu_1} \dots B_{\mu_p} T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} A^{\nu_k}_{;\lambda} \\ &\quad + \sum_{k=1}^p A^{\nu_1} \dots A^{\nu_q} B_{\mu_1} \dots B_{\mu_{k-1}} B_{\mu_{k+1}} \dots B_{\mu_p} T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} B_{\mu_k; \lambda} \end{aligned}$$

となる. これまでに $A^{\nu_k}_{;\lambda}$, $B_{\mu_k; \lambda}$ はそれぞれ $(1,1)$ テンソル, $(0,2)$ テンソルであることが分かっているから, 最右辺の第2項, 第3項および最左辺は共変ベクトルである.

よって $T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q; \lambda}$ は $(p, q+1)$ テンソルでなければならない．ベクトルの共変微分の式(66), (74)を用い, 最右辺を

$$\begin{aligned}
T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} A^{\nu_k}_{; \lambda} &= T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} (\partial_\lambda A^{\nu_k} + A^\rho \Gamma^{\nu_k}_{\rho \lambda}) \\
&= T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} \partial_\lambda A^{\nu_k} + T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_{k-1} \rho \nu_{k+1} \cdots \nu_q} A^{\nu_k} \Gamma^\rho_{\nu_k \lambda} \\
&\quad (\text{第2項でダミー添字を } \rho \leftrightarrow \nu_k \text{ と入れ換えた}), \\
T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} B_{\mu_k; \lambda} &= T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} (\partial_\lambda B_{\mu_k} - B_\rho \Gamma^\rho_{\nu_k \lambda}) \\
&= T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} \partial_\lambda B_{\mu_k} - T^{\mu_1 \cdots \mu_{k-1} \rho \mu_{k+1} \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} B_{\mu_k} \Gamma^{\mu_k}_{\rho \lambda} \\
&\quad (\text{第2項でダミー添字を } \rho \leftrightarrow \nu_k \text{ と入れ換えた})
\end{aligned}$$

と書き換えて最左辺と比較すると

$$\begin{aligned}
&A^{\nu_1} \cdots A^{\nu_q} B_{\mu_1} \cdots B_{\mu_p} \left\{ T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q; \lambda} - \left(\partial_\lambda T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{k=1}^p T^{\mu_1 \cdots \mu_{k-1} \rho \mu_{k+1} \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} \Gamma^{\mu_k}_{\rho \lambda} - \sum_{k=1}^q T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_{k-1} \rho \nu_{k+1} \cdots \nu_q} \Gamma^\rho_{\nu_k \lambda} \right) \right\} = 0
\end{aligned}$$

となる．よって (p, q) テンソル $T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q}$ の共変微分の式(82)を得る．

■行列式 $g \equiv |g_{\mu\nu}|$ に対する恒等式(86)の導出 [4, p.270]

2.2.1項で定義した任意の座標系で $\varepsilon^{0123} = 1$ となる完全反対称テンソル密度 $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ を用いて、行列 $(g_{\mu\nu})$ の行列式 g と余因子 $\Delta^{\mu\nu}$ の定義は

$$\begin{aligned} g &\equiv \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} g_{0\mu} g_{1\nu} g_{2\lambda} g_{3\rho}, & \Delta^{0\lambda} &= \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} g_{1\mu} g_{2\nu} g_{3\rho}, & \Delta^{1\mu} &= \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} g_{0\lambda} g_{2\nu} g_{3\rho}, \\ & & \Delta^{2\nu} &= \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} g_{0\lambda} g_{1\mu} g_{3\rho}, & \Delta^{3\rho} &= \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} g_{0\lambda} g_{1\mu} g_{2\nu} \end{aligned}$$

と書き表されるから、

$$dg = \Delta^{0\lambda} dg_{0\lambda} + \Delta^{1\mu} dg_{1\mu} + \Delta^{2\nu} dg_{2\nu} + \Delta^{3\rho} dg_{3\rho} = \Delta^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}$$

と書ける．ここで $(g_{\mu\nu})$ の逆行列は $(g^{\mu\nu}) = \frac{(\Delta^{\mu\nu})^T}{g}$ なので $\Delta^{\mu\nu} = gg^{\nu\mu} = gg^{\mu\nu}$ となる．これを上式に代入して $dg = gg^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}$ を得る．さらに

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \delta^\mu_\mu = 4, \quad \therefore g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu}$$

を用いると式(86):

$$dg = gg^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = -gg_{\mu\nu} dg^{\mu\nu}$$

を得る．

■式(87): $\Gamma^\mu_{\nu\mu} = \frac{\partial_\nu g}{2g}$ の導出 [4, p.271]

Christoffel記号を計量テンソルで表した式(70)より

$$\Gamma^\mu_{\nu\mu} = g^{\mu\rho}\Gamma_{\rho,\nu\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\{\partial_\nu g_{\mu\rho} + (\partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\nu\mu})\} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\partial_\nu g_{\mu\rho}.$$

ここで添字 μ, ρ について $g^{\mu\rho}$ は対称, $\partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\nu\mu}$ は反対称なので, 式(33)により $g^{\mu\rho}(\partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\nu\mu}) = 0$ となることを用いた. さらに座標 x^ν の変化 dx^ν に伴う $g, g_{\mu\rho}$ の変化 $dg, dg_{\mu\rho}$ に対して式(86): $dg = gg^{\mu\rho}dg_{\mu\rho}$ を適用して最右辺を書き換えると, 式(87): $\Gamma^\mu_{\nu\mu} = \frac{\partial_\nu g}{2g}$ を得る.

■式(88): $g^{\nu\lambda}\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})$ の導出

式(88)左辺は

$$\begin{aligned} g^{\nu\lambda}\Gamma^\mu_{\nu\lambda} &= g^{\nu\lambda}g^{\mu\rho}\Gamma_{\rho,\nu\lambda} \\ &= \frac{1}{2}g^{\nu\lambda}g^{\mu\rho}(\partial_\nu g_{\lambda\rho} + \partial_\lambda g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\nu\lambda}) \\ &\quad (\because \text{式(70). 括弧内第1項はダミ一添字の入れ換え } \nu \leftrightarrow \lambda \text{ により第2項に一致}) \\ &= g^{\nu\lambda}g^{\mu\rho} \left(\partial_\lambda g_{\rho\nu} - \frac{1}{2}\partial_\rho g_{\nu\lambda} \right) \end{aligned} \tag{104}$$

と変形できる.

一方, 式(88)右辺は

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu \left(\frac{-\partial_\lambda g}{2\sqrt{-g}}g^{\mu\lambda} + \sqrt{-g}\partial_\lambda g^{\mu\lambda} \right) = -\frac{\partial_\nu g}{2g}g^{\mu\nu} - \partial_\nu g^{\mu\nu} \tag{105}$$

となる. ここで座標 x^ν の変化 dx^ν に伴う $g, g_{\lambda\rho}$ の変化 $dg, dg_{\lambda\rho}$ に対して

式(86): $dg = gg^{\lambda\rho}dg_{\lambda\rho}$ を適用して上式(105)最右辺第1項を書き換えると,

$$-\frac{\partial_\nu g}{2g}g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}\partial_\nu g_{\lambda\rho} = -\frac{1}{2}g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda}\partial_\rho g_{\nu\lambda}$$

となる(ダミー添字を $\nu \leftrightarrow \rho$ と入れ換えた). また $g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda$ の両辺を x^ρ で微分して得られる $-(\partial_\rho g^{\mu\nu})g_{\nu\lambda} = g^{\mu\nu}\partial_\rho g_{\nu\lambda}$ の両辺にさらに $g^{\lambda\rho}$ をかけて λ で和をとると, 上式(105)第2項は

$$-\partial_\nu g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}\partial_\rho g_{\nu\lambda} = g^{\mu\rho}g^{\lambda\nu}\partial_\lambda g_{\rho\nu}$$

となる(ダミー添字を $\nu \rightarrow \rho, \rho \rightarrow \lambda, \lambda \rightarrow \nu$ と巡回置換した). 以上より式(105)は式(104)に一致するから, 式(88)が示された.

■反変ベクトル A^μ , 反対称テンソル $A^{\mu\nu}$ の発散の式(89), (90)の導出

共変微分の式 $A^\mu_{;\mu} = \partial_\mu A^\mu + A^\nu \Gamma^\mu_{\nu\mu}$ の右辺第2項に式(87): $\Gamma^\mu_{\nu\mu} = \frac{\partial_\nu g}{2g}$ を代入すると式(89):

$$A^\mu_{;\mu} = \partial_\mu A^\mu + A^\nu \frac{\partial_\nu g}{2g} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} A^\mu)$$

を得る.

共変微分の式 $A^{\mu\nu}_{;\nu} = \partial_\nu A^{\mu\nu} + A^{\rho\nu} \Gamma^\mu_{\rho\nu} + A^{\mu\rho} \Gamma^\nu_{\rho\nu}$ の右辺第2項は添字 ρ, ν について反対称な $A^{\rho\nu}$ と対称な $\Gamma^\mu_{\rho\nu}$ から成るので, 式(33)により消える. また右辺第3項に式(87): $\Gamma^\nu_{\rho\nu} = \frac{\partial_\rho g}{2g}$ を代入すると式(90):

$$A^{\mu\nu}_{;\nu} = \partial_\nu A^{\mu\nu} + A^{\mu\rho} \frac{\partial_\rho g}{2g} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} A^{\mu\nu})$$

を得る.

■ベクトルの閉曲線に沿う平行移動に伴う成分変化(91),(92)の導出 [14, pp.201–202]

図8の閉曲線に沿う平行移動に伴うベクトル成分 V^μ の変化率は、式(63)より

$$\text{経路 AB 上の点で経路に沿って} \quad a^\nu \partial_\nu V^\mu = -a^\nu V^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu},$$

$$\text{経路 BC 上の点で経路に沿って} \quad b^\nu \partial_\nu V^\mu = -b^\nu V^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu},$$

$$\text{経路 DC 上の点で経路に沿って} \quad a^\nu \partial_\nu V^\mu = -a^\nu V^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu},$$

$$\text{経路 AD 上の点で経路に沿って} \quad b^\nu \partial_\nu V^\mu = -b^\nu V^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu}.$$

ただし各量は経路上の考えている点での値をとる． よって1周での成分変化は

$$\begin{aligned} \delta V^\mu &= - \int_{AB} a^\nu V^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu} da - \int_{BC} b^\nu V^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu} db - \int_{CD} a^\nu V^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu} da - \int_{DA} b^\nu V^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu} db \\ &= - \left(\int_{BC} - \int_{AD} \right) b^\nu V^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu} db + \left(\int_{DC} - \int_{AB} \right) a^\nu V^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu} da \\ &\simeq - \int_{AD} \delta a \frac{\partial}{\partial a} (b^\nu V^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu}) db + \int_{AB} \delta b \frac{\partial}{\partial b} (a^\nu V^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu}) da \\ &\simeq \delta a \delta b \left\{ - \frac{\partial}{\partial a} (b^\nu V^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu}) + \frac{\partial}{\partial b} (a^\nu V^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu}) \right\} \end{aligned}$$

と書ける．ここで再びベクトル成分の変化率の式(63):

$$\begin{aligned}\frac{\partial b^\nu}{\partial a} &= a^\rho \partial_\rho b^\nu = -a^\rho b^\sigma \Gamma^\nu_{\sigma\rho}, & \frac{\partial V^\lambda}{\partial a} &= a^\rho \partial_\rho V^\lambda = -a^\rho V^\sigma \Gamma^\lambda_{\sigma\rho}, \\ \frac{\partial a^\nu}{\partial b} &= b^\rho \partial_\rho a^\nu = -b^\rho a^\sigma \Gamma^\nu_{\sigma\rho}, & \frac{\partial V^\lambda}{\partial b} &= b^\rho \partial_\rho V^\lambda = -b^\rho V^\sigma \Gamma^\lambda_{\sigma\rho}\end{aligned}$$

を用いると

$$\begin{aligned}\delta V^\mu &= \delta a \delta b V^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \Gamma^\nu_{\sigma\rho} (a^\rho b^\sigma - a^\sigma b^\rho) \\ &\quad + \delta a \delta b a^\rho b^\nu V^\sigma (\Gamma^\lambda_{\sigma\rho} \Gamma^\mu_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} \Gamma^\mu_{\lambda\rho} - \partial_\rho \Gamma^\mu_{\sigma\nu} + \partial_\nu \Gamma^\mu_{\sigma\rho}) \\ &= V^\sigma (a^\rho \delta a) (b^\nu \delta b) R^\mu_{\sigma\nu\rho}\end{aligned}$$

となる．ただし第2辺で添字 σ, ρ に関して対称な量 $\Gamma^\nu_{\sigma\rho}$ と反対称な量 $a^\rho b^\sigma - a^\sigma b^\rho$ の“縮約”は消えることを考慮した(式(33))．上式は V の1周したときの成分変化の式(91)に他ならない．

■共変曲率テンソルの式(93)の導出

曲率テンソルの式(92):

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} \equiv \partial_\rho \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\rho} \Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\sigma} \Gamma^\alpha{}_{\nu\rho}$$

より,

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv g_{\mu\alpha} R^\alpha{}_{\nu\rho\sigma} = g_{\mu\alpha} \{ (\partial_\rho \Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\rho} \Gamma^\beta{}_{\nu\sigma}) - (\rho \leftrightarrow \sigma) \}$$

となる. ただし $(\rho \leftrightarrow \sigma)$ は添字 ρ, σ を入れ替えた項を表す. ここで

$$\begin{aligned} \partial_\rho \Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma} &= \partial_\rho (g^{\alpha\beta} \Gamma_{\beta,\nu\sigma}) = (\partial_\rho g^{\alpha\beta}) \Gamma_{\beta,\nu\sigma} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\rho \partial_\sigma g_{\beta\nu} + \partial_\rho \partial_\nu g_{\beta\sigma} - \partial_\rho \partial_\beta g_{\nu\sigma}), \\ \therefore g_{\mu\alpha} \{ \partial_\rho \Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma} - (\rho \leftrightarrow \sigma) \} \\ &= g_{\mu\alpha} \{ (\partial_\rho g^{\alpha\gamma}) \Gamma_{\gamma,\nu\sigma} - (\rho \leftrightarrow \sigma) \} + \frac{1}{2} \delta^\beta{}_\mu \{ (\partial_\rho \partial_\nu g_{\beta\sigma} - \partial_\rho \partial_\beta g_{\nu\sigma}) - (\rho \leftrightarrow \sigma) \} \\ &= g_{\mu\alpha} g_{\beta\gamma} \{ (\partial_\rho g^{\alpha\gamma}) \Gamma^\beta{}_{\nu\sigma} - (\rho \leftrightarrow \sigma) \} + \frac{1}{2} \{ (\partial_\rho \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\rho \partial_\mu g_{\nu\sigma}) - (\rho \leftrightarrow \sigma) \} \end{aligned}$$

なので,

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} \{ (\partial_\rho \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\rho \partial_\mu g_{\nu\sigma}) - (\rho \leftrightarrow \sigma) \} \\ + g_{\mu\alpha} \left[\{ g_{\beta\gamma} (\partial_\rho g^{\alpha\gamma}) + \Gamma^\alpha_{\beta\rho} \} \Gamma^\beta_{\nu\sigma} - (\rho \leftrightarrow \sigma) \right]$$

を得る. 右辺の2行目について, $g_{\beta\gamma} g^{\alpha\gamma} = \delta^\alpha_\beta$ を微分して得られる関係

$$g_{\beta\gamma} (\partial_\rho g^{\alpha\gamma}) = -(\partial_\rho g_{\beta\gamma}) g^{\alpha\gamma}$$

を用いると,

$$g_{\mu\alpha} \{ g_{\beta\gamma} (\partial_\rho g^{\alpha\gamma}) + \Gamma^\alpha_{\beta\rho} \} = -\partial_\rho g_{\mu\beta} + \Gamma_{\mu,\beta\rho} = -\Gamma_{\beta,\mu\rho} = -g_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha_{\mu\rho}$$

と書き換えられる(第2の等号は式(69)による). これを上式に戻すと, 式(93):

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} \{ (\partial_\rho \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\rho \partial_\mu g_{\nu\sigma}) - (\rho \leftrightarrow \sigma) \} - g_{\alpha\beta} \{ \Gamma^\alpha_{\mu\rho} \Gamma^\beta_{\nu\sigma} - (\rho \leftrightarrow \sigma) \}, \\ = \frac{1}{2} (\partial_\rho \partial_\nu g_{\mu\sigma} + \partial_\sigma \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho \partial_\mu g_{\nu\sigma}) + g_{\alpha\beta} (\Gamma^\alpha_{\nu\rho} \Gamma^\beta_{\mu\sigma} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} \Gamma^\beta_{\mu\rho})$$

が得られる.

■ Bianchi の恒等式 (97), (98) の導出

まず第1恒等式 (98) について，曲率テンソル (93) の後ろ3つの添字を巡回置換した項を実際に書き下せば，それらの和が相殺することを見て取るのは困難ではない：

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{1}{2}(\partial_\rho\partial_\nu g_{\mu\sigma} + \partial_\sigma\partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\sigma\partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho\partial_\mu g_{\nu\sigma}) + g_{\alpha\beta}(\Gamma^\alpha_{\nu\rho}\Gamma^\beta_{\mu\sigma} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma}\Gamma^\beta_{\mu\rho}), \\ R_{\mu\rho\sigma\nu} &= \frac{1}{2}(\partial_\sigma\partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\nu\partial_\mu g_{\rho\sigma} - \partial_\nu\partial_\rho g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma\partial_\mu g_{\rho\nu}) + g_{\alpha\beta}(\Gamma^\alpha_{\rho\sigma}\Gamma^\beta_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\rho\nu}\Gamma^\beta_{\mu\sigma}), \\ R_{\mu\sigma\nu\rho} &= \frac{1}{2}(\partial_\nu\partial_\sigma g_{\mu\rho} + \partial_\rho\partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\rho\partial_\sigma g_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\mu g_{\sigma\rho}) + g_{\alpha\beta}(\Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\beta_{\mu\rho} - \Gamma^\alpha_{\sigma\rho}\Gamma^\beta_{\mu\nu}). \end{aligned}$$

次に第2恒等式 (98):

$$R^\lambda_{\mu\nu\rho;\sigma} + R^\lambda_{\mu\sigma\nu;\rho} + R^\lambda_{\mu\rho\sigma;\nu} = 0$$

はテンソルの関係式となっているから，ある座標系で成立すれば任意の座標系で成立する^{*30}．よって局所慣性系でこれが成り立つことを示せば十分である．局所慣性系では

^{*30} この論法は強力である．一般的な方策として述べると，ある座標系で成り立つ式をテンソルの関係式として表現できれば，その関係は直ちに全ての座標系で成り立つことが保証される．もっとも言わば“問題の難しさの保存則”がやはりあり，ここでは特定の座標系で与えられた式に帰着するテンソル方程式を見出す閃きを要する過程に，問題の難しさがしわ寄せされる．

Christoffel記号がゼロになるので(他方でその微分がゼロになる保証はない),

$$\begin{aligned} R^\lambda_{\mu\nu\rho;\sigma} &= \partial_\sigma R^\lambda_{\mu\nu\rho} = \partial_\sigma (\partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} - \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} \Gamma^\alpha_{\mu\rho} - \Gamma^\lambda_{\alpha\rho} \Gamma^\alpha_{\mu\nu}) \\ &= \partial_\sigma \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} - \partial_\sigma \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \end{aligned}$$

である. これと添字を入れ替えた式

$$\begin{aligned} R^\lambda_{\mu\sigma\nu;\rho} &= \partial_\rho \partial_\sigma \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\rho \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}, \\ R^\lambda_{\mu\rho\sigma;\nu} &= \partial_\nu \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma \Gamma^\lambda_{\mu\rho} \end{aligned}$$

と辺々足すと, Bianchiの恒等式(98)が得られる.

■ Einstein テンソルに対する Bianchi の恒等式 (101) の導出

Bianchi の恒等式 (98):

$$R^\lambda_{\mu\nu\rho;\sigma} + R^\lambda_{\mu\sigma\nu;\rho} + R^\lambda_{\mu\rho\sigma;\nu} = 0$$

の添字 λ, ρ を縮約し, さらに添字 μ, ν についても縮約する (すなわち $g^{\mu\nu}$ をかけて μ, ν について和をとる). このとき計量テンソルの共変微分はゼロになることと, 曲率テンソルの添字に関する (反)対称性 (図9) を思い出すと, 各項は

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} R^\lambda_{\mu\nu\lambda;\sigma} &= -g^{\mu\nu} R^\lambda_{\mu\lambda\nu;\sigma} = -g^{\mu\nu} R_{\mu\nu;\sigma} = -R_{;\sigma} (= -\partial_\sigma R), \\ g^{\mu\nu} R^\lambda_{\mu\sigma\nu;\lambda} &= g^{\mu\nu} g^{\lambda\alpha} R_{\alpha\mu\sigma\nu;\lambda} = g^{\mu\nu} g^{\lambda\alpha} R_{\mu\alpha\nu\sigma;\lambda} = g^{\lambda\alpha} R_{\alpha\sigma;\lambda} = R^\lambda_{\sigma;\lambda}, \\ g^{\mu\nu} R^\lambda_{\mu\lambda\sigma;\nu} &= g^{\mu\nu} R_{\mu\sigma;\nu} = R^\nu_{\sigma;\nu} \end{aligned}$$

となる. よって

$$R^\nu_{\sigma;\nu} = \frac{1}{2} R_{;\sigma}, \quad \therefore G^{\mu\nu}_{;\nu} = \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right)_{;\nu} = 0 : (101)$$

を得る.

2.2.3項の原稿

ここからはRiemann幾何学，すなわち計量テンソル $g_{\mu\nu}$ で記述される曲がった空間(時空)の幾何学を詳しく説明する．

はじめにベクトルの微分を取り上げる．2.2.1項ではテンソルの積からテンソルが作られることを見た．しかしながら微分演算子 ∂_α そのものは依然として共変ベクトルとして変換するにも関わらず，曲線座標系では反変ベクトル V^α の微分 $\partial_\beta V^\alpha$ を単に共変ベクトル ∂_β との積と見て，これを $(1, 1)$ テンソルと結論付けることはできない．これは微分の操作で比較される2点 $x, x + dx$ のベクトルが異なる変換係数 $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$ で変換するため，それらの差はもはやベクトルとならないことに起因している．実際，微分 $\partial_\beta V^\alpha$ の変換則(62)には，変換係数 $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$ が位置 x に依るために，テンソルの変換則と比べて付加的な項が現れている．そこで点 x のベクトルを無限小だけ隔たる点 $x + dx$ へと何らかの方法で“平行移動”して，同一点 $x + dx$ でのベクトルの差をとることを考える．この平行移動はベクトルの差がベクトルとなり，したがってテンソルとして変換する微分係数を与え，また計量が一定となる直線的な座標系で通常の微分に帰着するように定義しなければならない [4, pp.264–265] [9, p.140]．

ここで我々の時空に関しては，それを超曲面として内に含む高次元空間の存在が保証されないことを思い出そう．そこでまず以下では，時空の内部で定義される概念のみを用いて，ベクトルの平行移動を導入する．次にその結果に直観的な洞察を与える種明かしとして，便宜的に時空を高次元空間に埋め込まれた超曲面と見なして，ベクトルの平行

移動を改めて論じる．すると再び平行移動の等価な定義が再現されるため，最終的な結果自体は高次元空間を引き合いに出さずとも良く定義された形となることが判明する．時空の内部での考察から始めよう．時空点 x のベクトル $V^\mu(x)$ を近くの点 $x + dx$ に平行移動したベクトルを $V_{||}^\mu(x + dx)$ と書こう．平行移動に伴うベクトルの変化は dx の1次までで式(63)のように，もとのベクトル成分に関しても1次式で表され则认为．式(63)で導入した係数 $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ は接続ないし Christoffel 記号と呼ばれ，ベクトルの平行移動を定義する量である．局所慣性系では Christoffel 記号は全てゼロとならねばならない．この時点で Christoffel 記号はテンソルではあり得ない．実際，テンソルの変換則(26)に従って変換する量は局所慣性系で全成分がゼロであるならば，任意の曲線座標系でも全成分はゼロとなり，ノンゼロの値をとり得ないからである．なお Christoffel 記号の第1添字は式(64)のように，計量テンソルの縮約で上げ下げするものと約束する [4, pp.265–266] [9, pp.140–143].

さて，式(65)のように平行移動したベクトル $V_{||}^\mu(x + dx)$ と，点 $x + dx$ にもとからあるベクトル $V^\mu(x + dx)$ との差をとり，微分係数(66)を定義する．我々の目標は平行移動したベクトル $V^\mu(x + dx)$ が，したがって差 DV^μ が移動先でのベクトルとなるように，言い換えれば微分係数 $D_\rho V^\mu$ がテンソルとなるように，平行移動を定義することである．このときテンソルとして変換する微分係数(66)はベクトルの共変微分と呼ばれる [4, p.267] [9, p.142]

平行移動を，したがって Christoffel 記号を定めるにあたり，あらかじめ Christoffel 記号

の後ろ2つの添字に関する対称性(67)を仮定すると議論を簡略化できる．これは数学的には接続の反対称部分で定義される“ねじれ(torsion)”と呼ばれる量をゼロと置いて [2, p.46] [15, p.21], Cartan幾何学を Riemann幾何学に帰着させることに対応する(17.1節の式(1176)の箇所を参照)．裏を返せばノンゼロの反対称部分を持つ接続を仮定すると, Riemann幾何学よりも幅広い幾何学を定義することになる．しかしそれは今のところ物理的応用で直接中心的な役割を担ったことはない [27, pp.54–55]．そこで Christoffel記号の対称性を仮定した上で, 今一つの条件として, 式(68)のようにベクトルの大きさ(ノルム)は平行移動の下で不変に留まることを要求しよう．

ノルムの条件(68)に式(63)を代入すると, Christoffel記号は計量の1階微分で表した式(69),(70)が導かれる(導出スライド参照)．ただし第1式(69)から第2式(70)を導く際に初めて, Christoffel記号の対称性(67)を利用しており, その結果として表式(70)は実際に対称性(67)をあからさまに満たしている [9, pp.143–144]．また局所的平坦性定理(2.2.1項)より, 局所慣性系では計量の1階微分が消えるので, Christoffel記号(70)がゼロになることも見て取れる．計量は重力ポテンシャルに, その1階微分である Christoffel記号は重力場の強度に対応することを, 3.2.2項で見る予定である．

このときベクトルの共変微分(66)がテンソルとなることを確認しよう．まず式(70)に基づき, Christoffel記号の変換則を直接調べると式(71)のようになる(導出スライド参照) [5, p.29]．これは確かに付加的な右辺第2項があるため, 予告通りテンソルの変換則に一致しない．ただし Christoffel記号はテンソルでないものの, 計量テンソルの変分

に伴う Christoffel 記号の変分はテンソルとなる．実際このこてや変換則 (71) の変分をとると，右辺第2項が落ちることから直接分かる．あるいは次のように考えても良い．まずベクトルの平行移動に伴う変化 (63): $\delta V^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\rho} V^\nu dx^\rho$ はベクトルであることが既に保証されている．したがって計量の変分前後での δV^μ の差 $-\delta\Gamma^\mu_{\nu\rho} \cdot V^\nu dx^\rho$ もまたベクトルなので，Christoffel 記号の変分 $\delta\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ はテンソルとなる [4, p.307]．さて，ベクトルの微分と Christoffel 記号の変換則 (62), (71) を用いると，ベクトルの共変微分 (66) はテンソルとして変換することが直接確かめられる (導出スライド参照) [9, p.142] [5, pp.31–32]．

ここで共変ベクトル A_μ の平行移動による変化も調べておこう [4, p.267]．そのために反変ベクトル B^μ とのスカラー積は，平行移動によって変化しないことを要請する*³¹．すると平行移動に伴う変化は，式 (72) のように計算できる．これが任意の B^μ に対して成り立つことから，共変ベクトルの平行移動に伴う変化量 (73) が見出される．ところが反変ベクトルの平行移動による変化 δB^μ はベクトルであることが既に保証されているので，上式 (72) 第2辺はスカラーであり，したがって最右辺における δA_μ は共変ベクトルでなければならない．すると再び式 (74) で共変ベクトルの共変微分 $D_\rho A_\mu$ を定義す

*³¹ 言い換えれば移動先の点でのスカラーはもとの値と変わらないので，2点のスカラー場の値を移動先の点で比べることは，単に2点のスカラー場の値をそのまま比較することに他ならない．したがって，これはスカラー場の共変微分が通常の微分に一致することを意味する．

れば、これはテンソルとなる。

ここまでで時空の内部で理解できる概念だけを用いて、ベクトルの平行移動と共変微分を適切に定義した。しかしその手順はいくぶん形式的・抽象的で、必ずしも直観的なイメージが容易とはいえない。そこで便宜的に時空を高次元(例えば $N(> 4)$ 次元)の平坦な空間に埋め込まれた超曲面と見なして、ベクトルの平行移動を再考しよう

[10, pp.28–34]. 高次元空間に直線的な座標 $z = \{z^a\}$ ($a = 1, \dots, N$) を設定し、この座標に関する計量を定数 h_{ab} とする。我々の時空はその座標 $x = \{x^\mu\}$ ($\mu = 0, \dots, 3$) でパラメトライズされた超曲面 $z = z(x)$ として記述でき、このとき4通りの μ に応じた4つの接ベクトル $e_\mu^a = \partial_\mu z^a$ を接空間の基底ベクトルに選ぶことができる。すると時空座標の変化 dx^μ に伴う超曲面上の変位と対応する不変距離(の2乗)はそれぞれ式(75)で表される。ここから時空の計量を、超曲面に誘導された計量を式(76)に同定できる。上式(76)は計量 h_{ab} の e_μ^a による“引き戻し”ないし“射影”であり、共変テンソルの変換則と類似した形をしている。また超曲面の点 x における接ベクトル V^μ を高次元空間で見た成分は、上式(75)と同様の式(77)で表される。高次元空間で見た成分(77)を変えないように、これを超曲面上の点 $x + dx$ に平行移動しよう。すると移動先ではベクトルは式(78)のように、超曲面に接する成分 $V_\parallel^a$ と直交する成分 $V_\perp^a$ を持つ。ただし法線成分 $V_\perp^a$ は計量 h_{ab} での内積に関する、移動先での接ベクトル $e_\mu^b(x + dx)$ との直交性 $h_{ab} V_\perp^a e_\mu^b(x + dx) = 0$ で定義される。また式(77)と同じ形 $V_\parallel^a = e_\mu^a(x + dx) V_\parallel^\mu$ で接線成分 $V_\parallel^a$ の時空座標成分 $V_\parallel^\mu$ を定義する。

このとき共変ベクトルの平行移動に伴う変化は式(73)と同じ形の式(79)で表される(導出スライド参照). こうして平行移動によるベクトルの変化を, もとのベクトル成分の1次式(63)の形に仮定したことが正当化される. また式(79)で導入した接続 $\Gamma_{\nu,\mu\rho}$ はChristoffel記号(70)に一致することが, 計量の表式(76)から確かめられる(導出スライド参照). すると最終的には平行移動は高次元空間に依拠せずに, 時空の計量 $g_{\mu\nu}$ を用いて定義できることになる. また, ここからChristoffel記号の対称性(67)をあらかじめ仮定したことも正当化される. 以上よりChristoffel記号(70)で定義されるベクトルの平行移動式(73)とは結局, 平坦な高次元空間の中でベクトルを通常通りに平行移動し, 超曲面から飛び出す法線成分を切り捨てる操作として理解できる [5, p.34].

変位 dx の1次までの近似では, 法線成分を切り捨ててもベクトルの長さが変わらないことは, 幾何学的には次のように理解できる. すなわち式(78)の法線成分 $V_{\perp}^a$ は一般に dx の1次の無限小と期待される. するとベクトルの大きさ $V \cdot V \equiv h_{ab}V^aV^b$ は変位 dx の1次では式(80)のように接線成分 $V_{\parallel}$ で与えられるから, 法線成分を落としてもベクトルの長さは変わらない [10, p.36]. 実際, 簡単な例として図5のように xy 平面上の原点を中心とする半径 a の円周上で, 点 $(a, 0)$ のベクトル V を $(a \cos \phi, a \sin \phi)$ に平行移動することを考えよう. 平行移動後のベクトル V の法線成分 $V \sin \phi$ は変位 $a\phi$ の1次のオーダーである. また円周成分 $V \cos \phi$ を残すと, 変位 $a\phi$ の1次では確かに長さは不変である. したがってベクトルの平行移動は, 超曲面の内部だけで理解できる: 単にベクトルに見立てた棒を同じ向き(例えば進行方向の正面)に保持したまま, 面上を歩いて行

きさえすれば良い。

ベクトルの平行移動に関連して、測地線についてもここで見及しておくのが適切だろう [10, pp.38–44] [14, pp.199–200].

測地線とは平たく言えば、曲がった空間に“可能な限りまっすぐに”描いた曲線であり、厳密には以下のように定義できる。まず始点 $x^{(0)}$ において与えられたベクトル $U^{(0)}$ と曲線のパラメータ λ を考える。すると曲線上の隣接した点として、 $U^{(0)}$ の向きに $d\lambda$ だけ変位した位置 $x^{(1)} = x^{(0)} + U^{(0)}d\lambda$ をとることができる。次に $U^{(0)}$ を点 $x^{(1)}$ まで平行移動し、これを点 $x^{(1)}$ での曲線の接ベクトル $U^{(1)}$ とする。同様に曲線上の新たな点 $x^{(2)} = x^{(1)} + U^{(1)}d\lambda$ をとり、 $U^{(1)}$ をこの点に平行移動して接ベクトル $U^{(2)}$ とする。以上の手順を繰り返して曲線上の点を逐次定めれば曲線全体が得られ、同時に曲線に割り当てられる λ の値も決まる。このようにして作られる曲線 $x = x(\lambda)$ は測地線と呼ばれる。まとめると測地線は、接ベクトルをそれ自身に沿って平行移動したベクトルが、移動先での接ベクトルに一致するような曲線として定義できる。

したがって測地線の接ベクトルに対しては、平行移動した先の点でのベクトルの差 (65) がゼロになる。そこで公式 (65) で、 V^μ を接ベクトル $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ に選び、また曲線に沿った変位 $dx^\nu = U^\nu d\lambda$ をとると、測地線の方程式 (81) が得られる。

なお直観的に期待されるように、測地線は2点を結ぶ局所的 shortest 曲線となる。実際、3.2.2項で見るように与えられた2点を結ぶ曲線の固有の長さ $\int ds$ が停留値をとる条件として、測地線の方程式が得られる (比例係数の違いを除いて、粒子の作用は粒子の世

界線に沿う固有の長さ $\int ds$ で与えられ、最小作用原理から得られる粒子の運動方程式 (211) は測地線の方程式となっている^{*32}。なお“局所的”と断ったのは次の事情による [5, p.23]。例えば3次元 Euclid 空間に埋め込まれた2次元球面を考えると、その測地線は大円に沿った弧である。ところが与えられた2点を通る大円は一般に2点によって、短い弧と長い弧に分けられるので、測地線が2点を結ぶ最短曲線と言えるのは、充分狭い範囲を考える場合に限られる。

共変微分の公式に戻ろう。任意のテンソルの共変微分の公式を求めるには、スカラーの共変微分が通常の微分に一致すること、また共変微分に対しても Leibniz ルールが成り立つことを要請すれば充分である。このとき (p, q) テンソル $T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q}$ の共変微分は式 (82) のように表されることを証明でき、同時にこれは $(p, q + 1)$ テンソル成分であることが判明する (導出スライド参照)。我々は既に式 (82) の特例として、共変ベクトルの共変微分の公式 (74) を等価的な考えで得ている。一般的な共変微分の公式 (82) における、通常の微分に対する一連の付加的な項は次の手順で書き下せる。すなわちテンソルの上付き (または下付き) 添字を1つずつ選んでダミー添字に置き換え、Christoffel 記号の下付き (または上付き) 添字と縮約し、正号 (または負号) を充てる。Christoffel 記号は後ろ2つの添字に関して対称であることを踏まえると、このとき Christoffel 記号に充て

^{*32} ただし零 (ヌル)・測地線、すなわち曲線全体で線要素の世界間隔が $ds = 0$ であるような測地線に対しては、この証明は適用できない。

ねばならない残り2つの添字は，両辺の上下の添字のバランスから一意的に定まる．なお共変微分と計量テンソルの縮約(83)で「反変導関数」を定義すると，これはテンソルとなる．

次の話題に進む前に，この後で有用となる Christoffel 記号と計量テンソルに関する公式を列挙しておく [4, pp.270–273]．まず共変計量テンソル $g_{\mu\nu}$ と反変計量テンソル $g^{\mu\nu}$ のいずれの共変微分も，式(84),(85)のように消える．したがって共変微分の際，計量テンソルはあたかも定数のように扱える．また計量 $g_{\mu\nu}$ とその行列式 $g \equiv |g_{\mu\nu}|$ の変化量は式(86)で関係付けられることから，有用な公式(87),(88)が得られる．

さらに4元発散は曲線座標では式(89),(90)のように一般化される(以上，導出スライドを参照)．テンソル方程式に現れるのは共変微分であるのに対し，3次元超曲面の積分に置き換わる4元発散は通常の微分で与えられ，発散公式(89)はそれらを関係付ける役割を演じていると言える．

2.2.1項で見た局所的平坦性定理によれば，時空の与えられた点Pにおいて局所慣性系をとると，点Pの近くで計量テンソルがMinkowski計量 $\eta_{\mu\nu}$ に一致し，また計量の1階微分にあたる全ての Christoffel 記号をゼロにできる．これは時空が曲がっているという本来座標系に依らない事実を特徴付けるのに，Christoffel 記号は十分でないことを意味する．これに対し計量テンソルの2階導関数は，局所慣性系を用いた場合にも曲がった

時空ではゼロでない成分を持つ．実に以下で導入する曲率テンソルは計量テンソルの2階導関数を含み，時空の曲がりの特徴付けることができる．時空が平坦であるか曲がっているかは，曲率テンソル(の全成分)がゼロであるか否かによって判定される．しかも曲率テンソルはその名の通りテンソルなので，このとき曲率の有無は座標系の選択に依らない幾何学的な性質である(図6を見よ) [4, pp.290–291] [10, pp.53–54]．

曲率テンソルを定義するにあたって次のことに注目する．すなわち曲がった時空では閉曲線に沿ってベクトルを平行移動し1周させると，元のベクトルに一致しなくなる．4次元の曲がった時空の代わりに平坦な3次元空間の中の2次元の球面を考えるとこのことを理解しやすい^{*33}．図7のように球面上に赤道上で90度離れた2点A, Cと北極点Bをとる．そしてAにおいて赤道に平行なベクトル V を球面内で，すなわち V が球面に接した状態で弧AB，弧BC，弧CAに沿って平行移動させてAに戻することを考える．これら3つの弧はいずれも大円に沿う測地線であるとしよう．測地線の接ベクトルは測地線に沿って平行移動させると，移動先の点での接ベクトルに一致する．しかるに2つのベクトルが平行移動するときそれらの間の角度は変化しない^{*34}．このためベクトル V を測地線に沿って平行移動するとき，測地線の接ベクトル，したがって測地線との成す

^{*33} もっとも繰り返しになるが，球面と異なり我々の時空の場合には，それを超曲面として含む高次元の空間の存在は保証されない．しかし2次元球面での考察は曲がった空間に対する正しい洞察を与える．

^{*34} 平行移動に際してベクトルの大きさと2つのベクトルのスカラー積は変化しないことによる．

角は一定に保たれる．すると V は図7のように，弧 AB に沿って平行移動する間は弧 AB と直角を保ち，次いで弧 BC に沿って平行移動する間は常に弧 BC に接し，最後に弧 CA に沿って平行移動する間は弧 CA と直角を保つため， A に戻ったとき元のベクトルに比べて90度回転している [4, pp.288–289] [14, pp.197–198].

図8のように時空の中の曲面を a, b でパラメトライズし，曲線 $a = 0, \delta a$ および $b = 0, \delta b$ から作られる微小な閉曲線に沿ってベクトル V を $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ と平行移動させることを考える．ベクトル成分の変化率の式(63)を用いて V を1周させたときの A での成分の変化 δV^μ を計算すると，式(91),(92)を得る．ここに V^ν は平行移動する前のベクトル成分，また $a^\sigma \equiv \partial x^\sigma / \partial a$, $b^\rho \equiv \partial x^\rho / \partial b$ は点 A での接ベクトルである(導出スライド参照) [14, p.203]. 式(92)で定義した $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$ は曲率テンソルと呼ばれ，接続(Christoffel記号) Γ の微分と接続の2次の項から成る——この後で繰り返し見る予定であるが，曲率とはそういうものである．したがって $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$ はChristoffel記号の1階導関数を，したがって計量テンソルの2階導関数を含んでおり，これが曲がった時空を特徴付ける量として求めていたものである．曲率テンソル $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$ が実際にテンソルであることは，式(92)の右辺におけるChristoffel記号や単なる微分がテンソルではないことを踏まえると非自明である．しかしながら式(91)左辺の δV^μ は反変ベクトル成分だから， $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$ は(1,3)テンソル成分でなければならないと結論付けられる．なお曲率は計量テンソルで表されているので，時空の内部で理解・定義できる量となっていることにも注意しよう．

曲率テンソル(92)から，共変曲率テンソル(93)，さらに添字の縮約により Ricci テンソル(94)とスカラー曲率(95)が作られる．(式(92)最右辺への変形は[導出スライドを参照せよ](#)．) R はスカラーだから，時空が曲がっているという座標系に依らない幾何学的な性質を，座標系に依らない値として表した量である．

式(93)から曲率テンソルは，図9に示した添字に関する(反)対称性を持つことが読み取れる．すると曲率テンソルの添字を縮約して得られる2階のテンソルは，符号の違いを除けば Ricci テンソル(94)以外にあり得ないことが分かる．さらに Ricci テンソル $R_{\mu\nu}$ もまた式(96)のように，添字に関して対称である．

最後に以降で有用となる Bianchi の恒等式に言及しておく．まず式(97)のように，曲率テンソルの後ろ3つの添字を巡回置換して得られる3つの成分を足すとゼロになる．また曲率テンソルの共変微分に関しても第2式(98)のように，後ろ3つの添字を巡回置換して得られる3つの成分を足すとゼロになる([導出スライド参照](#))．第1恒等式(97)は，曲率テンソルの後ろ3つの添字と Levi-Civita 記号の縮約(99)がゼロになることを意味する．何故なら縮約の中で巡回置換項の和がとられるからである(着想は文献 [1, p.79])．また重力場の方程式の中で曲率テンソルは，Einstein テンソル(100)の形で現れる．しかるに Bianchi の第2恒等式(98)は，Einstein テンソルに対する式(101)に書き換えられる([導出スライド参照](#)) [14, p.210]．これを用いると直ちに Einstein 方程式からエネルギー・運動量保存則を導ける(3.2.2項)．

2.2.4 $3 + 1$ 分解と外部曲率

空間を超曲面として内に含む高次元空間から見た曲率.

超曲面の法線の空間的な変化率で特徴付けられる [18, p.40] [14, p.196].

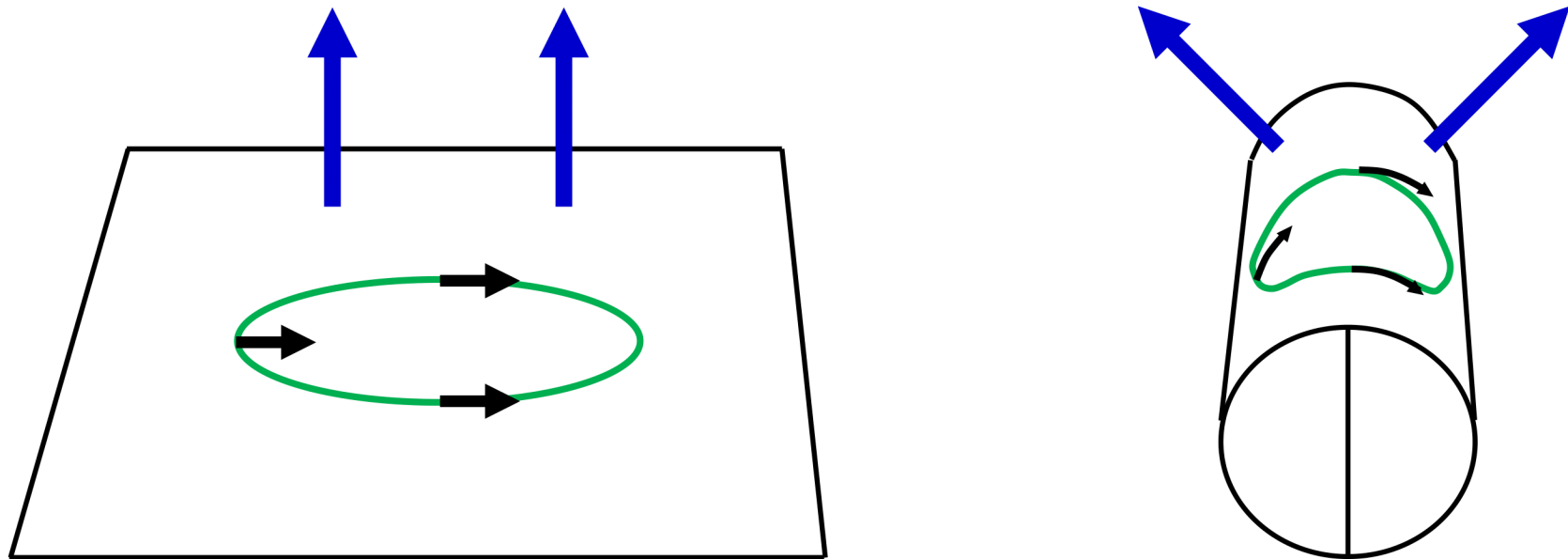


図10 円筒面は内(部)曲率を持たず, 外(部)曲率を持つ

■ 3 + 1 分解 (ADM 形式) [3, pp.39–41] [1, p.68] ^{*35}

空間座標が一定の線 $x^i = \text{const.}$ に沿う時間方向 $t^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial x^\mu}{\partial t}$ は一般に,
座標時間 $t = \text{const.}$ の超曲面 Σ の法単位ベクトル $n_\mu \sim \partial_\mu t$ ($n_\mu n^\mu = 1$) に一致せず

$$t^\mu = N n^\mu + N^\mu \quad (106)$$

と分解できる. ここに N^μ は Σ に平行な成分である (図 11).

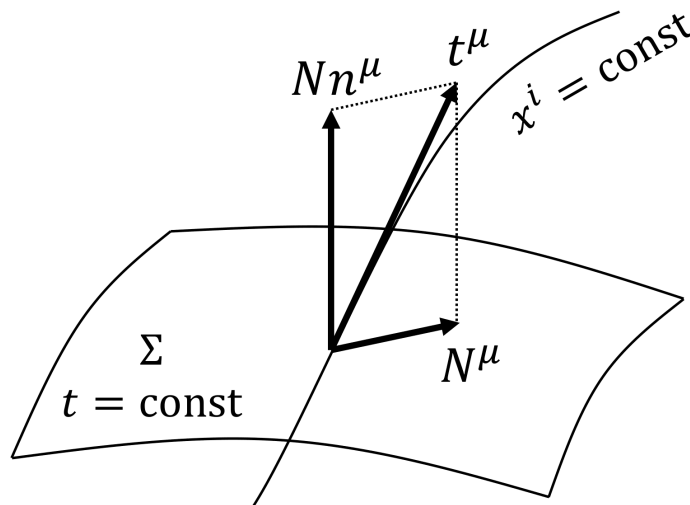


図 11 ラプス (経時) N とシフト (変位) ベクトル N^μ

^{*35} ADM 形式の呼称は Arnowitt, Deser, Misner の 3 名の頭文字に因む [15, p.59].

座標 τ^i ($i = 1, 2, 3$) でパラメトライズされた超曲面 $\Sigma : x^\mu = x^\mu(\tau^i)$ 上の線要素と誘導計量は, $e_i^\mu \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau^i}$ を接ベクトルとして, 式(75),(76)の箇所と同様に

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau^j} d\tau^i d\tau^j \equiv -q_{ij} d\tau^i d\tau^j, \quad q_{ij} \equiv -e_i^\mu e_j^\nu g_{\mu\nu}. \quad (107)$$

逆行列 $e_\mu^i = \frac{\partial \tau^i}{\partial x^\mu}$ を用いて, シフトの座標 τ^i 成分 $N^i \equiv e_\mu^i N^\mu$ を定義しておく. 特に Σ の座標 τ^i を時空座標の空間成分 x^i そのものにした場合, 単に $e_i^\mu = \delta_i^\mu, e_\mu^i = \delta_\mu^i, \therefore N^i = N^{\mu=i}$ となり,

$$ds^2 = (N^2 - N_i N^i) c^2 dt^2 - 2N_i c dt dx^i - q_{ij} dx^i dx^j, \quad (N_i \equiv q_{ij} N^j) \quad (108)$$

$$\therefore q_{ij} = -g_{ij}, \quad g_{0i} = -N_i, \quad g_{00} = (N^2 - N_i N^i) \quad (109)$$

を与える逆テンソルは

$$g^{00} = \frac{1}{N^2}, \quad g^{0i} = -\frac{N^i}{N^2}, \quad g^{ij} = -\left(q^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2}\right) \quad (110)$$

で与えられ, ここに q^{ij} は q_{ij} の逆テンソルである ($q^{ik} q_{kj} = \delta_j^i$). ここから

$$\sqrt{-\det(g)} = N \sqrt{\det(q)}. \quad (111)$$

■超曲面への射影テンソル [15, pp.26–28] 超曲面 Σ への射影テンソル

$$P_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu, \quad P_\nu^\mu \equiv g^{\mu\rho} P_{\rho\nu} = \delta_\nu^\mu - n^\mu n_\nu, \quad P^{\mu\nu} \equiv g^{\nu\rho} P_\rho^\mu = g^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu \quad (112)$$

を定義すると, これは

$$\text{射影子の性質} \quad P_\rho^\mu P_\nu^\rho = (\delta_\rho^\mu - n^\mu n_\rho)(\delta_\nu^\rho - n^\rho n_\nu) = P_\nu^\mu - n^\mu n_\nu = P_\nu^\mu, \quad (113)$$

$$\text{直交性} \quad P_\nu^\mu n_\mu = 0 \quad (114)$$

を満たす. これを用いて任意のベクトル A^μ を超曲面 Σ に射影した成分と垂直な成分に分解できる:

$$P_\nu^\mu A^\nu = A^\mu - (n_\nu A^\nu) n^\mu, \quad \therefore A^\mu = P_\nu^\mu A^\nu + (n_\nu A^\nu) n^\mu. \quad (115)$$

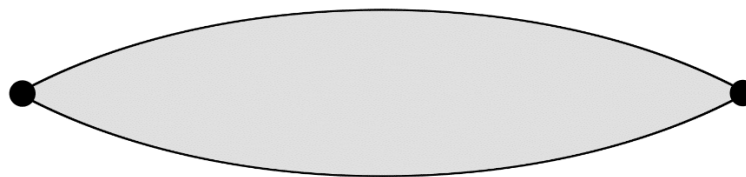


図12 空間的な境界とコーナー(黒丸)を持つレンズ型の時空領域 [1, p.214]

ここで時空の任意の線要素 $d\bar{x}^\mu$ に一般公式(115)を適用して

$$d\bar{x}^\mu = dx^\mu + n^\mu dy, \quad dx^\mu \equiv P_\nu^\mu d\bar{x}^\nu, \quad dy \equiv n_\nu dx^\nu \quad (116)$$

と分解し, 再び直交性(114)に注意すると

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (P_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu)(dx^\mu + n^\mu dy)(dx^\nu + n^\nu dy) \\ &= P_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2 \quad \rightarrow \quad P_{\mu\nu} \text{は超曲面の誘導計量.} \end{aligned} \quad (117)$$

“直交座標”に関する空間計量 $-P_{ij} = -g_{ij} + n_i n_j$ はもちろん,
“斜交座標” (t, x^i) に関する空間計量 $q_{ij} = -g_{ij}$ と一致しない ($n_i \neq 0$ のとき).

■外部曲率の定義

超曲面 $\Sigma : x^\mu = x^\mu(\tau^i)$ の外部曲率を Σ に沿う法単位ベクトル場 n_μ の変化率

$$k_{ij} \equiv D_i n_j \equiv e_i^\mu e_j^\nu D_\mu n_\nu \quad (118)$$

で定義すると，これは Σ 上のテンソルとなることが保証されるので^{*36}， Σ 内の共変微分の定義として適正である^{*37}．外部曲率(118)は，添字の対称性が明白な形

$$k_{ij} = \frac{1}{2}(D_i n_j + D_j n_i) \equiv \frac{1}{2}D_{(i} n_{j)} \quad (119)$$

に書き換えられる^{*38}．さらに外部曲率のトレースは [15, p.52]

$$k \equiv q^{ij} k_{ij} = (q^{ij} e_i^\mu e_j^\nu) D_\mu n_\nu = g^{\mu\nu} D_\mu n_\nu = D_\mu n^\mu. \quad (120)$$

^{*36} 例えば時空の共変ベクトル A_μ に対して $A_i \equiv e_i^\mu A_\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau^i} A_\mu$ は Σ 上の共変ベクトル：

$$A'_i = \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau^j} \frac{\partial \tau^j}{\partial \tau'^i} \right) \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} A_\rho \right) = \frac{\partial \tau^j}{\partial \tau'^i} A_j.$$

^{*37} 本来 Σ の接ベクトル $e_i^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau^i}$ の代わりに，射影テンソル(112)を用いるのが一般的である [15, p.29].

^{*38} ここでは丸括弧による対称化の表記を，係数 $1/2$ を含めずに定義する．

■ Lie微分 任意の多様体におけるベクトル場 v^a の積分曲線 [5, p.49], すなわち

$$dx^a/dt = v^a(x) \quad (121)$$

の解曲線 $x^a(t)$ 上に2点 $P(x(0)), P'(x(t))$ を採る. 点 P における v^a に沿う Lie微分 :

- スカラー場 $f(x)$ に対して方向微分 (式(23)) [5, p.53]

$$\mathcal{L}_v(f) \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x(t)) - f(x(0))}{t} = v^a \partial_a f. \quad (122)$$

- ベクトル場 u^a に対しては [5, pp.53–56], ベクトル $u^a(P')$ を,
 P' の座標が $x(t) \rightarrow x(0)$ となる受動的な座標変換

$$(\varphi_{-t*}u)^a(P) \equiv \frac{\partial x^a(0)}{\partial x^b(t)} u^b(P') = u^a(P) + t(v^b \partial_b u^a - u^b \partial_b v^a)(P) + O(t^2) \quad (123)$$

により点 P のベクトルとして [15, pp.69–70],

$$\mathcal{L}_v u^a(P) \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_{-t*}u)^a(P) - u^a(P)}{t} = (v^b \partial_b u^a - u^b \partial_b v^a)(P), \quad (124)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v(u) &= \{ (v^b \partial_b u^a) - (u^b \partial_b v^a) \} \partial_a = (v^b \partial_b)(u^a \partial_a) - (u^b \partial_b)(v^a \partial_a) \\ &= (vu - uv) \equiv [v, u]. \quad (v = v^a \partial_a, u = u^a \partial_a) \end{aligned} \quad (125)$$

Lie 微分に対して Leibniz ルール

$$\mathcal{L}_V(T^{\cdots} \cdots S^{\cdots} \cdots) = (\mathcal{L}_V T^{\cdots} \cdots) S^{\cdots} \cdots + T^{\cdots} \cdots (\mathcal{L}_V S^{\cdots} \cdots) \quad (126)$$

が成り立つことを要求すると, (k, l) テンソル $T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l}$ の Lie 微分の公式

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_V T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \\ &= V^\lambda \partial_\lambda T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \\ & \quad - (\partial_\lambda V^{\mu_1}) T^{\lambda \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} - (\partial_\lambda V^{\mu_2}) T^{\mu_1 \lambda \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} - \cdots \\ & \quad + (\partial_{\nu_1} V^\lambda) T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\lambda \nu_2 \cdots \nu_l} + (\partial_{\nu_2} V^\lambda) T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \lambda \cdots \nu_l} + \cdots \end{aligned} \quad (127)$$

が得られる [3, p.39]. 公式 (127) は共変性が明白な形

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_V T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \\ &= V^\lambda D_\lambda T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \\ & \quad - (D_\lambda V^{\mu_1}) T^{\lambda \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} - \cdots - (D_\lambda V^{\mu_k}) T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \lambda}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \\ & \quad + (D_{\nu_1} V^\lambda) T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\lambda \nu_2 \cdots \nu_l} + \cdots + (D_{\nu_l} V^\lambda) T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \lambda} \end{aligned} \quad (128)$$

に書き換えられる (D_μ は共変微分) [16, pp.137–138].

■時間変化率 $\dot{q}_{ij}$ としての外部曲率

3 + 1 分解と Lie 微分の公式を総動員すると，外部曲率は

$$k_{ij} = -\frac{1}{2N} \left(\frac{1}{c} \dot{q}_{ij} + D_{(i} N_{j)} \right) \quad (129)$$

のように誘導計量の時間微分 $\dot{q}_{ij}$ に関係付けられる [1, p.68].

2.2.4 項の式の導出など

■式(106): $t^\mu = Nn^\mu + N^\mu$ の説明

座標時間 $t(x^\mu) = \text{const.}$ の超曲面 Σ 上での変位 δx^μ は、両辺の微分をとると

$$(\delta x^\mu) \partial_\mu t = 0$$

を満たすので、 $\partial_\mu t$ と直交する (計量 $g_{\mu\nu}$ による内積の意味で). よって Σ の法単位ベクトルは勾配 $n_\mu \sim \partial_\mu t$ で与えられる. これには規格化条件 $n^\mu n_\mu = +1$ が課せられる. 次に空間座標が一定の線 $x^i = \text{const.}$ に沿う時間的な接ベクトル $t^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^0} = \frac{1}{c} \frac{\partial x^\mu}{\partial t}$ を導入する. 一般に時間方向 t^μ は超曲面 Σ に直交しているとは限らない, すなわち必ずしも法線 n^μ の向きとは一致しない. そこで t^μ の n^μ 方向成分 $N \equiv +n_\mu t^\mu$ として “経時 (ラプス)” を定義する. ここに $n_\mu = \text{const} \times \partial_\mu t$ を代入して規格化定数を定めると,

$$N = n_\mu t^\mu = \text{const} \times \frac{1}{c} \frac{\partial t}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial t} = \frac{1}{c} \times \text{const}, \quad \therefore n_\mu = +cN \partial_\mu t \quad (130)$$

と表せる. 次いで $t^\mu = Nn^\mu + N^\mu$: (106) と書いて “変位 (シフト) ベクトル” N^μ を定義する. このときシフト N^μ は法線 n^μ に直交する, t^μ の Σ に接する成分になる. 実際, 上式と n_μ の内積をとって定義式 $N \equiv +n_\mu t^\mu$ を考慮すると, $N^\mu n_\mu = 0$ を得る. なお本稿では N, N^μ が無次元となるように光速 c を補った (長さの次元を持つ座標 x^μ に対して).

■ 3 + 1 分解の線要素 (108) の導出

時空の任意の無限小ベクトルは

$$\begin{aligned} dx^\mu &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau^i} d\tau^i = t^\mu c dt + e_i^\mu d\tau^i \\ &= N n^\mu c dt + e_i^\mu (N^i c dt + d\tau^i) \quad (\because \text{式 (106)}) \end{aligned} \quad (131)$$

という形をとる．最右辺において， Σ の法線ベクトルと接線ベクトルが直交すること

$$n_\mu e_i^\mu = cN \frac{\partial t}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau^i} = cN \frac{\partial t}{\partial \tau^i} = 0 \quad (\because \text{式 (130)})$$

に注意すると， q_{ij} の定義式 (107) とより

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = N^2 c^2 dt^2 - q_{ij} (N^i c dt + d\tau^i) (N^j c dt + d\tau^j) \\ &= (N^2 - N_i N^i) c^2 dt^2 - 2N_i c dt d\tau^i - q_{ij} d\tau^i d\tau^j \quad (N_i \equiv q_{ij} N^j) \end{aligned}$$

を得る．ここで Σ の座標 τ^i を時空座標の空間成分 x^i そのものにとると，単に $e_i^\mu = \delta_i^\mu$, $e_\mu^i = \delta_\mu^i$, $\therefore N^i = N^{\mu=i}$ となり，以上の結果は式 (108) を与える．

参考 [1, p.68]

上式(131)からラプス N とシフト N^i の幾何学的意味を明快に解釈できる．座標の任意の変化 $dt, d\tau^i$ に伴う変位(131)において，接線 e_i^μ の項は法線 n^μ に直交する．よって第1項 $Nn^\mu cdt$ を，2つの面 $t, t + dt$ を繋ぐ法線方向の線要素に同定できる．対応する固有時間(の2乗)は

$$\frac{ds^2}{c^2} = N^2 dt^2$$

である．他方で座標位置 τ^i に静止した点の描く世界線に沿った変位は， $d\tau^i = 0$ より

$$dx^\mu = t^\mu cdt = (Nn^\mu + N^\mu)cdt$$

と表される．シフト N^μ の項は移動先の時刻 $t + dt$ における点の，法線に沿って進んだ点 $y^\mu = x^\mu + Nn^\mu cdt$ からのズレを与えている(再び図11を見よ)．したがって N^μ をシフトと呼ぶのは理に適っている．

■ $g^{\mu\nu}$ の表式 (109) の確認

ここでは空間成分を表すダミー添字に文字 $a, b, \dots$ をする. するとブロック行列の積を計算することにより,

$$\begin{aligned}
 & (g_{\mu\rho})(g^{\rho\nu}) \\
 &= \begin{pmatrix} N^2 - q_{ab}N^aN^b & -q_{ai}N^a \\ -q_{ai}N^a & -q_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{N^2} & -\frac{N^i}{N^2} \\ -\frac{N^i}{N^2} & -\left(q^{ij} - \frac{N^iN^j}{N^2}\right) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \left(N^2 - \cancel{q_{ab}N^aN^b}\right) \frac{1}{N^2} + \cancel{q_{ai}N^a} \frac{N^i}{N^2} & \left(\cancel{N^2 - q_{ab}N^aN^b}\right) \left(-\frac{N^i}{N^2}\right) + q_{aj}N^a \left(\cancel{q^{ij} - \frac{N^iN^j}{N^2}}\right) \\ -\cancel{q_{ai}N^a} \frac{1}{N^2} + \cancel{q_{ij} \frac{N^j}{N^2}} & \cancel{q_{ai}N^a} \frac{N^j}{N^2} + q_{ik} \left(\cancel{q^{kj} - \frac{N^kN^j}{N^2}}\right) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_i^j \end{pmatrix} = (\delta_\mu^\nu), \\
 & (g^{\mu\rho})(g_{\rho\nu}) \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{N^2} & -\frac{N^i}{N^2} \\ -\frac{N^i}{N^2} & -\left(q^{ij} - \frac{N^iN^j}{N^2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N^2 - q_{ab}N^aN^b & -q_{ai}N^a \\ -q_{ai}N^a & -q_{ij} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{N^2} \left(N^2 - \cancel{q_{ab} N^a N^b} \right) + \cancel{\frac{N^i}{N^2} q_{ai} N^a} & \cancel{-\frac{1}{N^2} q_{aj} N^a + \frac{N^i}{N^2} q_{ji}} \\ -\frac{N^i}{N^2} \left(\cancel{N^2 - q_{ab} N^a N^b} \right) + \left(\cancel{q^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2}} \right) q_{aj} N^a & \cancel{\frac{N^i}{N^2} q_{aj} N^a} + \left(\cancel{q^{ik} - \frac{N^i N^k}{N^2}} \right) q_{kj} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_j^i \end{pmatrix} = (\delta_\nu^\mu).
\end{aligned}$$

■式(111): $\sqrt{-\det(g)} = N\sqrt{\det(q)}$ の導出
($g_{\mu\nu}$) の逆行列成分 g^{00} は, g_{00} の余因子 $-\det(q)$ を用いて

$$g^{00} = -\frac{\det(q)}{\det(g)}$$

で与えられる. ところが $g^{00} = 1/N^2$ だから,

$$-\det(g) = N^2\det(q), \quad \therefore \sqrt{-\det(g)} = N\sqrt{\det(q)}$$

が見出される.

■外部曲率の添字に関する対称性が明白な表式(119)への書き換え

$n_\mu Y^\mu = n_\mu Z^\mu = 0$ を満たす2つの任意の空間的なベクトル Y^μ, Z^μ に対し,

$$Y^\mu Z^\nu (D_\nu n_\mu - D_\mu n_\nu) = Y^\mu Z^\nu D_\nu n_\mu - Y^\nu Z^\mu D_\nu n_\mu = n_\mu (Y^\nu D_\nu Z^\mu - Z^\nu D_\nu Y^\mu) = 0$$

が恒等的に成り立つ. ただし

- 第2の等号では $D_\nu (n_\mu Y^\mu) = 0, \therefore Y^\mu D_\nu n_\mu = -n_\mu D_\nu Y^\mu$,
同様に $Z^\mu D_\nu n_\mu = -n_\mu D_\nu Z^\mu$ とした.

- 最後の等号では, 空間的なベクトル Y^μ, Z^μ の“交換子”

$[Y, Z]^\mu \equiv Y^\nu D_\nu Z^\mu - Z^\nu D_\nu Y^\mu$ もまた空間的なベクトルであることを用いた*39.

すると最左辺において

$$D_\nu n_\mu = D_\mu n_\nu \tag{132}$$

でなければならない [18, p.170]. そこで式(118)において $D_\mu n_\nu = \frac{1}{2}D_{(\mu}n_{\nu)}$ と書き換えると, 対称な表式(119)を得る.

*39 空間 Σ 内のベクトル Z^μ の空間方向への微分 $Y^\nu D_\nu Z^\mu$ もまた Σ 内のベクトルと考えられる.

■外部曲率のトレース(120)における第3の等号の理由

まず超曲面 $x^\mu = x^\mu(\tau^i)$ の接ベクトル $e_i^\mu \equiv \partial x^\mu / \partial \tau^i$ の逆行列 $e_\mu^i \equiv \partial \tau^i / \partial x^\mu$ を用いて、誘導計量 $q_{ij} = e_i^\mu e_j^\nu g_{\mu\nu}$ の逆行列は $q^{ij} = e_\mu^i e_\nu^j g^{\mu\nu}$ と書ける：

$$q^{ik} q_{kj} = (e_\mu^i e_\nu^k g^{\mu\nu})(e_k^\rho e_j^\sigma g_{\rho\sigma}) = \delta_j^i. \quad (\because e_\nu^k e_k^\rho = \delta_\nu^\rho, g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta_\sigma^\mu, e_\mu^i e_j^\mu = \delta_j^i)$$

よって式(120)第3の等号 $q^{ij} e_i^\mu e_j^\nu = g^{\mu\nu}$ が成り立つ。

■ベクトルの微分写像(123)第2の等号の確認 [5, p.55]

$x^a(t) = x^a(0) + tv^a(0) + O(t^2)$ より

$$u^b(t) = u^b(0) + t(v^c \partial_c u^b)(0) + O(t^2),$$

$$\frac{\partial x^a(0)}{\partial x^b(t)} = \delta^a_b - t \frac{\partial v^a(0)}{\partial x^b(t)} + O(t^2) = \delta^a_b - t(\partial_b v^a)(0) + O(t^2)$$

なので,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^a(0)}{\partial x^b(t)} u^b(t) &= \{ \delta^a_b - t(\partial_b v^a)(0) \} \{ u^b(0) + t(v^c \partial_c u^b)(0) \} + O(t^2) \\ &= u^a(0) + t \{ (v^c \partial_c u^a) - (u^c \partial_c v^a) \} (0) + O(t^2). \end{aligned}$$

■ Lie微分の一般公式(127)の導出

例えば共変ベクトル ω_μ のLie微分の公式を調べるには，反変ベクトル U^μ との縮約によって得られるスカラー $\omega_\mu U^\mu$ のLie微分を計算するのが有効である．すると

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V(\omega_\mu U^\mu) &= V^\nu \partial_\nu (\omega_\mu U^\mu) \quad (\because \text{式(122)}) \\ &= V^\nu (\partial_\nu \omega_\mu) U^\mu + V^\nu \omega_\mu (\partial_\nu U^\mu)\end{aligned}$$

となる．他方，Leibnizルールを適用すると

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V(\omega_\mu U^\mu) &= (\mathcal{L}_V \omega)_\mu U^\mu + \omega_\mu (\mathcal{L}_V U)^\mu \\ &= (\mathcal{L}_V \omega)_\mu U^\mu + \omega_\mu V^\nu \partial_\nu U^\mu - \omega_\mu U^\nu \partial_\nu V^\mu \quad (\because \text{式(124)})\end{aligned}$$

と計算できる．これらを等置すると

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_V \omega)_\mu U^\mu &= V^\nu (\partial_\nu \omega_\mu) U^\mu + \cancel{V^\nu \omega_\mu (\partial_\nu U^\mu)} - \cancel{\omega_\mu V^\nu \partial_\nu U^\mu} + \omega_\mu U^\nu \partial_\nu V^\mu \\ &= (V^\nu \partial_\nu \omega_\mu + \omega_\nu \partial_\mu V^\nu) U^\mu\end{aligned}$$

を得る．これが任意の U^μ に対して成り立つことを要求すると，共変ベクトル ω_μ のLie微分の公式

$$\mathcal{L}_V \omega_\mu = V^\nu \partial_\nu \omega_\mu + \omega_\nu \partial_\mu V^\nu \quad (133)$$

が導かれる.

同様の手続きで, (k, l) テンソル $T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l}$ の Lie 微分の公式 (127) も導ける [16, p.137]. 以下でその確認を行う. (k, l) テンソル $T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l}$ を共変ベクトルたち $A_{\mu_1}, B_{\mu_2}, \dots, C_{\mu_k}$ および反変ベクトルたち $X^{\nu_1}, Y^{\nu_2}, \dots, Z^{\nu_l}$ と縮約して得られるスカラーの Lie 微分を考える. すると

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_V (A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l}) \\
&= V^\lambda \partial_\lambda (A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l}) \quad (\because \text{式 (122)}) \\
&= A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} (V^\lambda \partial_\lambda T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l}) \\
&\quad + (V^\lambda \partial_\lambda A_{\mu_1}) B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots (V^\lambda \partial_\lambda C_{\mu_k}) X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \\
&\quad + A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} (V^\lambda \partial_\lambda X^{\nu_1}) Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots (V^\lambda \partial_\lambda Z^{\nu_l}) T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l}
\end{aligned}$$

となる. 他方, Leibniz ルールを適用すると

$$\mathcal{L}_V (A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l})$$

$$\begin{aligned}
&= A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} (\mathcal{L}_V T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l}) \\
&\quad + (V^\lambda \partial_\lambda A_{\mu_1} + A_\lambda \partial_{\mu_1} V^\lambda) B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots (V^\lambda \partial_\lambda C_{\mu_k} + C_\lambda \partial_{\mu_k} V^\lambda) X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \\
&\quad + A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} (V^\lambda \partial_\lambda X^{\nu_1} - X^\lambda \partial_\lambda V^{\nu_1}) Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \\
&\quad \cdots \\
&\quad + A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots (V^\lambda \partial_\lambda Z^{\nu_l} - Z^\lambda \partial_\lambda V^{\nu_l}) T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l}
\end{aligned}$$

と計算できる(式(124), 式(133)を用いた). これらを等置し, 相殺する項を省いて整理すると

$$\begin{aligned}
&A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} (\mathcal{L}_V T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l}) \\
&= A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} (V^\lambda \partial_\lambda T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l}) \\
&\quad - (A_\lambda \partial_{\mu_1} V^\lambda) B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \quad [\lambda \leftrightarrow \mu_1] \\
&\quad - \cdots \\
&\quad - A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots (C_\lambda \partial_{\mu_k} V^\lambda) X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \quad [\lambda \leftrightarrow \mu_k] \\
&\quad + A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} (X^\lambda \partial_\lambda V^{\nu_1}) Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \quad [\lambda \leftrightarrow \nu_1] \\
&\quad + \cdots
\end{aligned}$$

$$+ A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots (Z^\lambda \partial_\lambda V^{\nu_l}) T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \quad [\lambda \leftrightarrow \nu_l]$$

を得る．ここで右辺の各行に $[\cdots]$ で書き添えたダミー添字の入れ替え $\lambda \leftrightarrow \mu_1, \text{etc.}$ を施すと，右辺の各項を積 $A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l}$ に比例する形に書き換えられる．この等式が任意の $A_{\mu_1}, B_{\mu_2}, \cdots, C_{\mu_k}, X^{\nu_1}, Y^{\nu_2}, \cdots, Z^{\nu_l}$ に対して成り立つことを要求すると，式(127):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} &= V^\lambda \partial_\lambda T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \\ &\quad - (\partial_\lambda V^{\mu_1}) T^{\lambda \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} - \cdots - (\partial_\lambda V^{\mu_k}) T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \lambda}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \\ &\quad + (\partial_{\nu_1} V^\lambda) T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\lambda \nu_2 \cdots \nu_l} + \cdots + (\partial_{\nu_l} V^\lambda) T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \lambda} \end{aligned}$$

が導かれる．

■ Lie微分の公式の共変性が明白な形(128)への書き換え

共変微分の公式

$$D_\lambda T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l} = \partial_\lambda T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l} + \Gamma^{\mu_1}_{\lambda \sigma} T^{\sigma \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l} + \cdots + \Gamma^{\mu_k}_{\lambda \sigma} T^{\mu_1 \cdots \sigma}_{\nu_1 \cdots \nu_l} \\ - \Gamma^\sigma_{\lambda \nu_1} T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\sigma \cdots \nu_l} - \cdots - \Gamma^\sigma_{\lambda \nu_l} T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \sigma}$$

を思い出すと、式(127)右辺を式(128)に置き換えた際に現れる付加的な項は

$$V^\lambda (\Gamma^{\mu_1}_{\lambda \sigma} T^{\sigma \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l} + \cdots + \Gamma^{\mu_k}_{\lambda \sigma} T^{\mu_1 \cdots \sigma}_{\nu_1 \cdots \nu_l} \\ - \Gamma^\sigma_{\lambda \nu_1} T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\sigma \cdots \nu_l} - \cdots - \Gamma^\sigma_{\lambda \nu_l} T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \sigma}) \\ - (\Gamma^{\mu_1}_{\lambda \sigma} V^\sigma) T^{\lambda \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l} - \cdots - (\Gamma^{\mu_k}_{\lambda \sigma} V^\sigma) T^{\mu_1 \cdots \lambda}_{\nu_1 \cdots \nu_l} \\ + (\Gamma^\lambda_{\nu_1 \sigma} V^\sigma) T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\lambda \cdots \nu_l} + \cdots + (\Gamma^\lambda_{\nu_l \sigma} V^\sigma) T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \lambda} = 0$$

となって、正確に打ち消し合うことが見て取れる。

■外部曲率を $\dot{q}_{ij}$ で表した式(129)の導出

計量 $g_{\mu\nu}$ の共変微分はゼロなので、任意のベクトル X^μ 方向に沿う Lie 微分は、公式(128)より

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X g_{\mu\nu} &= X^\alpha D_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu} D_\mu X^\alpha + g_{\mu\alpha} D_\nu X^\alpha \\ &= D_\mu X_\nu + D_\nu X_\mu \equiv D_{(\mu} X_{\nu)}\end{aligned}$$

と簡略化される [18, pp.173–174]. すると外部曲率(118)は法線 n^μ 方向の Lie 微分

$$\mathcal{L}_n g_{\mu\nu} = D_{(\mu} n_{\nu)} = 2D_\mu n_\nu$$

(再び式(132): $D_\nu n_\mu = D_\mu n_\nu$ を考慮した)と

$$2k_{ij} = 2D_i n_j = e_i^\mu e_j^\nu \mathcal{L}_n g_{\mu\nu}$$

で関係付けられる.

他方で時間方向の単位ベクトルは $t^\mu = N n^\mu + N^\mu$: (106) と分解されることを思い出すと、 t^μ 方向の Lie 微分は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t g_{\mu\nu} &= D_{(\mu} t_{\nu)} = n_{(\nu} \partial_{\mu)} N + N D_{(\mu} n_{\nu)} + D_{(\mu} N_{\nu)} \\ &= n_{(\nu} \partial_{\mu)} N + N \mathcal{L}_n g_{\mu\nu} + \mathcal{L}_N g_{\mu\nu}\end{aligned}\tag{134}$$

と書ける．ところでLie微分はその公式(127)より，微分の向きを指定するベクトルに関する線形性

$\mathcal{L}_t = \mathcal{L}_{Nn} + \mathcal{L}_N$, $\mathcal{L}_{Nn}$: 法線 Nn^μ に沿う Lie 微分, $\mathcal{L}_N$: シフト N^μ に沿う Lie 微分

を持つ [18, pp.170–171]. これを踏まえると，上式(134)の第1項 $n_{(\nu} \partial_{\mu)} N$ は $\mathcal{L}_{Nn}$ を $N\mathcal{L}_n$ に置き換えたときのおつりの項であることが見て取れる．(そのことは直接の計算によっても確かめられる．) 上式(134)の1行目に $e_i^\mu e_j^\nu$ を縮約して直交性 $e_i^\mu n_\mu = 0$ を考慮すると，第1項の寄与は落ち，

$$e_i^\mu e_j^\nu \mathcal{L}_t g_{\mu\nu} = 2Nk_{ij} + D_{(i} N_{j)}$$

を得る．左辺を書き換えよう． $t^\lambda \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^0} = (1, 0, 0, 0)$ より $t^\lambda \partial_\lambda = \frac{\partial}{\partial x^0}$, $\partial_\mu t^\lambda = 0$ に注意すると

$$\mathcal{L}_t g_{\mu\nu} = t^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} + (\partial_\mu t^\lambda) g_{\lambda\nu} + (\partial_\nu t^\lambda) g_{\mu\lambda} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} g_{\mu\nu}$$

である．ところが接ベクトル e_i^μ は

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} e_i^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau^i} = \frac{\partial}{\partial \tau^i} \delta_0^\mu = 0$$

より時間微分をすり抜けるので、 $e_i^\mu e_j^\nu$ を縮約すると最右辺は誘導計量
(107): $q_{ij} = -e_i^\mu e_j^\nu g_{\mu\nu}$ の時間微分となる． 以上より

$$\frac{1}{c}\dot{q}_{ij} = -\left(2Nk_{ij} + D_{(i}N_{j)}\right)$$

となるので，式(129)を得る [3, p.41] [18, pp.171–172].

2.2.4 項の原稿

ここまでは時空の内部だけで理解・定義できる形で幾何学を論じてきた．この意味で式(92)の曲率は内(部)曲率(ないし内在的曲率)と呼ばれる．他方で高次元空間に埋め込まれた超曲面，とりわけ我々の4次元時空に超曲面として含まれる3次元空間に対しては，外(部)曲率(ないし外在的曲率)を導入できる．まずは概念的・定性的な水準で外部曲率を導入するところから始めよう．

外部曲率の概念の導入を動機付ける簡単な例として，(3次元Euclid空間に埋め込まれた)2次元の円筒面を考える(図10右)．円筒面では，それを切り開いて得られる平坦な面(図10左)の場合と同様に，面上の閉曲線に沿って1周，平行移動したベクトルが変化しないので，内部曲率を持たない．実際，円筒面とそれを切り開いた平面とでは，2点間の距離は変わらず，したがって幾何学は変わらない．他方で平面とは対照的に，円筒面では全ての位置の法線ベクトルが平行とはならないことが，視覚的に見て取れる．そこで超曲面の法線の空間的な変化率を用いて外部曲率を特徴付けることができる [18, p.40] [14, p.196]．

次に外部曲率を定量的に定義するための準備として，座標時間が一定の3次元超曲面の数学的な取り扱いを説明する [3, pp.39–41] [1, p.68] [15, pp.59–60]．Hamilton形式を利用して一般相対性理論を定式化する際にも，時間と空間の人為的な区別を持ち込む必要がある．これを3 + 1分解またはADM形式という．

まず座標時間 $t(x^\mu) = \text{const.}$ の超曲面 Σ の法線方向は勾配 $n_\mu \sim \partial_\mu t$ で与えられる．法

単位ベクトル n_μ には規格化条件 $n^\mu n_\mu = +1$ が課せられる．次に空間座標が一定の線 $x^i = \text{const.}$ に沿う時間的な接ベクトル t^μ を導入する．一般に時間方向 t^μ は超曲面 Σ に直交しているとは限らない，すなわち必ずしも法線 n^μ の向きとは一致しない．そこで t^μ の n^μ 方向成分として“経時(ラプス)” $N \equiv n_\mu t^\mu$ を定義する．このとき t^μ を式(106)のように分解して“変位(シフト)ベクトル” N^μ を定義すると，シフト N^μ は法線 n^μ に直交する， t^μ の Σ に接する成分になる (導出スライド参照)．こうしてベクトル t^μ の分解は図11のように描画できる．

さて，超曲面 Σ は3つの座標 $\tau = (\tau^1, \tau^2, \tau^3)$ を用いて $x^\mu = x^\mu(\tau^i)$ とパラメトライズできる．このとき Σ 上の線要素は式(75),(76)の箇所と同様にと書けるので，接ベクトル $e_i^\mu \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau^i}$ を用いて Σ に誘導された計量は式(107)のように同定される．誘導計量がしばしば文字 q で表されるのは，伝統的ないわゆるADM変数を用いた重力の正準理論において誘導計量が配位変数にあたるためと推察される．また逆行列 $e_\mu^i = \frac{\partial \tau^i}{\partial x^\mu}$ を用いて，シフトの座標 τ^i 成分 $N^i \equiv e_\mu^i N^\mu$ を定義しておく．ところが Σ の座標 τ^i として，時空座標の空間成分 x^i そのものを用いることもできる．この場合は単に $e_i^\mu = \delta_i^\mu, e_\mu^i = \delta_\mu^i, \therefore N^i = N^{\mu=i}$ であり，線要素は式(108)のように表される (導出スライド)*40．

*40 特にゲージ条件 $N = 1, N^i = 0$ を満たす座標付けの下で空間計量が平坦な値 $q_{ij} = \delta_{ij}$ をとる場合，Minkowski空間の線要素 $ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2$ が再現される．

式(108)から読み取られる計量テンソル(109)の逆テンソルは式(110)で与えられる(導出スライド参照). ここから2つのJacobian $\sqrt{-\det(g)}$ と $\sqrt{\det(q)}$ の関係(111)が見出される(導出スライド参照). 式(111)は時空の固有体積要素 $\sqrt{-\det(g)}d^4x$ が, 空間の固有体積要素 $\sqrt{\det(q)}d^3x$ とラプスの因子 $Ncdt$ (法線方向の固有時間)の積で与えられることを意味する.

ここまでは時空の線要素として特に超曲面上の線要素を考えることで, 超曲面に計量(109)が自然に誘導されることを見た. これに対し以下で説明するように, 超曲面への射影テンソルを誘導計量に採ることも可能である.

引き続き4次元時空に埋め込まれた3次元超曲面 Σ を考えよう. とりわけ興味のある場合として, ここでは簡単のために法線ベクトル n^μ が全ての場所で時間的であるような, 空間的超曲面のみを考える. 実際, 素朴には時空の有限領域を考える場合にも, 図12のように, それを2枚の空間的な3次元超曲面で囲むことは可能であると想像される. ただし2枚の面の繋がる角(corner)を削って丸みを持たせると, 面に局所的に時間的な部分が生じるため, 尖った角の存在は避けられない.

さて超曲面 Σ への射影テンソルを式(112)で定義すると, これはその名の通り射影子の性質(113)を満たし, また式(114)の意味で法線ベクトル n^μ と直交する. そこで射影テンソルを任意のベクトル A^μ に作用させると式(115)を得る. 式(115)第2式は右辺第1項が式(114)より法線 n^μ に直交し, 第2項は法線 n^μ に平行である. したがって式(115)はベクトル A^μ の超曲面 Σ に射影した成分と垂直な成分への分解を与えている. ここか

ら式(112)を超曲面 Σ への射影テンソルと呼ぶことが動機付けられる.

ここで時空の任意の線要素 $d\bar{x}^\mu$ に一般公式(115)を適用して, その点において n^μ に平行な成分 $dx^\mu \equiv P^\mu_\nu d\bar{x}^\nu$ と垂直な成分 $dy \equiv n_\nu d\bar{x}^\nu$ に分解すると, 式(116)のように書ける. 再び式(114)より n^μ は $P_{\mu\nu}$ と, したがって超曲面内の成分 dx^μ と直交することに注意すると, 対応する世界間隔の2乗は式(117)で表される. ここから $P_{\mu\nu}$ は超曲面 Σ に誘導された計量となっていることが見て取れる.

これを3 + 1分解で見た誘導計量(109): $q_{ij} = -g_{ij}$ と混同してはならない. 図11の箇所で見たように空間座標が一定の線によって定義される時間方向 t^μ は一般に, 時刻 $t = \text{const.}$ の超曲面の法線方向 $n^\mu \sim \partial_\mu t$ と一般に異なっていることを思い出そう. このとき空間計量 $-P_{ij} = -g_{ij} + n_i n_j$ は“直交座標”に関する成分であるのに対し, 計量 $q_{ij} = -g_{ij}$ は“斜交座標” (t, x^i) に関する成分と言うことができ, それらが一致しないのは当然である.

これを踏まえ外部曲率を定量的に定義しよう. 一般に超曲面 $\Sigma: x^\mu = x^\mu(\tau^i)$ の法単位ベクトル n_μ を用いて, 外部曲率を Σ 上の移動に伴うベクトル場 n_μ の変化率(118)で定義する. 外部曲率の定義には本来, Σ の接ベクトル $e_i^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau^i}$ の代わりに射影テンソル(112)を用いるのが一般的である [15, p.29]. しかしここではADM形式に興味があるので, 最右辺のように接ベクトル e_i^μ との内積で Σ 内の共変微分を定義している. 実際, 一般に共変微分は導関数がテンソルとなるように定義される. ところが時空のテンソル

と接ベクトルの内積(118)は超曲面上のテンソルとして変換することを保証するので、共変微分の表式として適正である。(なお座標の選択 $\tau^i = x^i$ の下では $e_i^\mu = \delta_i^\mu$ なので、式(118)は単に共変微分 $D_\mu n_\nu$ の空間成分をとることに帰着する。)

外部曲率(118)は、添字に関する対称性が明白な形(119)に書き換えられる(導出スライド参照)。さらに外部曲率のトレースは式(120)のように表される(第3の等号を導出スライドで説明) [15, p.52].

実は外部曲率 k_{ij} は誘導計量 q_{ij} の時間変化率に関係する。このため q_{ij} を配位変数と見なせば、素朴には k_{ij} はその運動量共役に相当することが示唆される。このことは後で見る Gibbons–Hawking–York 境界項(235)の箇所でより明瞭になる。ここでは外部曲率の変形を説明するための数学的手法として Lie 微分を導入する。本稿では Lie 微分の知識は正準ループ量子重力において、運動量拘束ないしベクトル拘束が微分同相写像を生成することを理解する際にも必要となる。

任意の多様体を考え、その点 P におけるベクトル v^a に沿ったテンソルの変化率として Lie 微分を定義したい。そこで v^a を多様体上のベクトル場とし、その点 P を通る積分曲線 $x^a(t)$ を考える。積分曲線とはベクトル場 v^a に導かれて運動する動点の軌跡、すなわち式(121)の解 $x^a(t)$ が表す曲線である。平たく言えば、積分曲線はベクトルを滑らかに繋いで得られる曲線であり、例えば流体の速度場の積分曲線は流線、電場の積分曲線は電気力線である [5, p.49]。さて、点 P を積分曲線の始点 $x(0)$ に選び、そこから曲線に沿って微小時間 t だけ進んだ点 P' (座標 $x(t)$) を採ろう。微分を定義するためには、適

切な方法で2点 P, P' でのテンソルの値を比較すれば良い.

例えば多様体上のスカラー場 $f(x)$ に対しては, 単にそのまま2点での値の差をとり, Lie微分を式(122)で定義すれば良い. これは既に式(23)で定義した, ベクトル v^a に沿ったスカラー場の方向微分に他ならない [5, p.53]. 次にベクトル場 u^a のベクトル v^a に沿う Lie微分を考える. 繰り返しになるが, 多様体上の異なる2点 P, P' におけるベクトル成分は一般に異なる変換係数を持つため, それらの和や差はベクトル成分とならず, 意味を成さない [5, p.30]. そこで共変微分を定義する際には, 一方の点のベクトルを他方の点へ平行移動することで2点のベクトルを比較した. これに対し Lie微分では移動先の点 P' のベクトル $u^a(P')$ を, P' の座標が $x(t) \rightarrow x(0)$ となるような受動的な座標変換(123)により点 P のベクトルとする(第2の等号は[導出スライドを見よ](#)). ただし座標変換によりベクトルの成分は変化するものの, ベクトルそのものは不変であるため, 式(123)は依然としてもとの点 P' のベクトルを表すと考えられる [15, pp.69–70]. そこで式(123)を点 P のベクトル $u^a(P)$ と比較すると, ベクトルの Lie微分の公式(124)が得られる. これはベクトル $v = v^a \partial_a, u = u^a \partial_a$ そのものを用いて式(125)のように書くこともでき, 最右辺の交換子は Lie括弧と呼ばれる [5, pp.53–56].

一般のテンソルの Lie微分も同様に受動的な座標変換を利用して定義できる. (翻ってスカラー場は座標変換で値を変えないので, 式(122)のように2点での値を直接比較すれば充分だったのである.) しかしながらテンソルの Lie微分の一般公式を見出すには, 共変微分の場合と同様, Lie微分に対して Leibnizルール(126)が成り立つことを要求す

るのが容易である．ただし以下では時空多様体を念頭にテンソルの添字をギリシア文字で表す．すると一般に (k, l) テンソル $T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l}$ のLie微分の公式(127)が得られる(導出スライド参照) [3, p.39]．これは確かにスカラーや反変ベクトルのLie微分の公式(122),(124)を含んでいる．なお，公式(127)は共変性が明白な形(128)に書き換えられる(導出スライド参照) [16, pp.137–138]．テンソルの単なる微分は一般にテンソルではないが，テンソルの共変微分はテンソルだから，式(128)は両辺が同種のテンソルであり，座標変換に対して共变的となる．

ここで予告通り外部曲率へと話を戻す． $3 + 1$ 分解とLie微分の公式を総動員すると，外部曲率は式(129)のように，誘導計量の時間微分 $\dot{q}_{ij}$ に関係付けられる(導出スライド参照)．

2.2.5 特殊相対性理論の運動学

特殊相対性理論は相対性原理と光速度不変の原理の上に成立 [4, pp.1-4].

- 相対性原理 = 物理法則の共変性 (慣性系の間での Lorentz 変換に対して)
- 光速度不変の原理 ($\leftrightarrow$ 世界間隔 ds の不変性 [4, pp.4-6])
 - 相互作用 (信号) の伝播速度は座標系に依らない最大値 c (光速度) を持つ^{*41*42}.
- 粒子の変位 (cdt, dx^i) と対応する世界間隔 ds に対して固有時間は [4, pp.8-10].

$$d\tau = \frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} (\leq dt). \quad \left(v^i = \frac{dx^i}{dt} \right) \quad (135)$$

- GR でも, 空間座標が一定の点 (の目印の粒子) の固有時間は $d\tau = \frac{ds}{c}$.
- 粒子の4元速度と4元加速度 (GR でも) [4, p.25, p.273].

$$u^\mu = \frac{1}{c} \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad a^\mu = \frac{du^\mu}{ds} = \frac{d^2 x^\mu}{ds^2}. \quad (136)$$

^{*41} 他方で非相対論的力学におけるポテンシャル・エネルギー $U(\mathbf{r})$ は粒子の座標 $\mathbf{r} \equiv \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots\}$ の関数であり, これは粒子間相互作用が瞬時に伝播することを含意している.

^{*42} 相互作用の伝播速度の最大値 c は, 電磁場の波動方程式における波 (光) の伝播速度となる.

Lorentz ブースト [4, pp.10–12]

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi \\ \sinh \psi & \cosh \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}, \quad \tanh \psi = -\frac{V}{c}, \quad (137)$$

$$\text{i.e.} \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad ct' = \frac{ct - (V/c)x}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}. \quad (138)$$

図13の棒はK系で見て $L\sqrt{1 - (V/c)^2}$ に Lorentz 収縮し，物置に収まる．
他方 K' 系で見ると，出入り口のシャッターの閉まる時刻は

$$t'_{\text{入口}} = \frac{t}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad t'_{\text{出口}} = \frac{t - Vl/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} (< t'_{\text{入口}}). \quad (139)$$

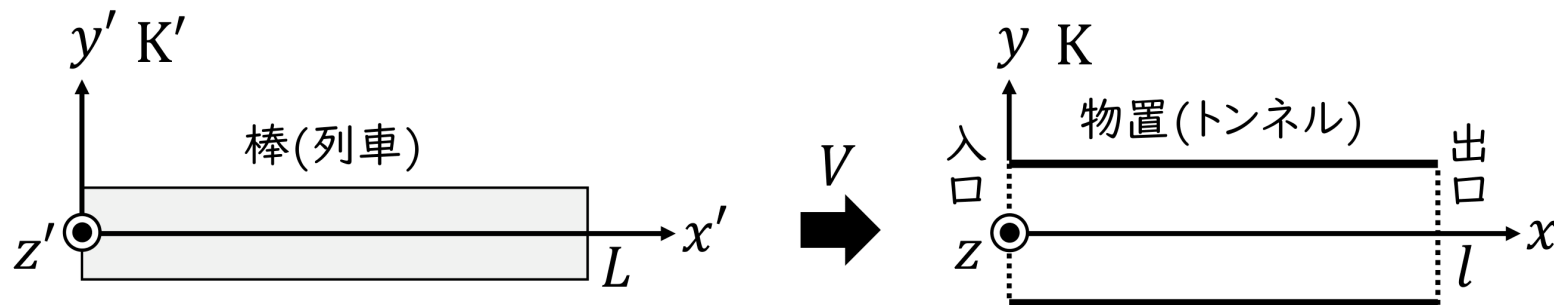


図13 棒と物置 (pole in the barn) のパラドックス [3, p.22]

無限小 Lorentz 変換は無限小パラメータ $\varepsilon^{\mu\nu} (= -\varepsilon^{\nu\mu})$ で表される [4, pp.45–46] :

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad \delta x^\mu = x_\nu \varepsilon^{\mu\nu}. \quad (140)$$

- x^1 方向の Lorentz ブースト (138) の変換係数は, $\beta \equiv V/c \ll 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \equiv (\delta^\mu{}_\nu) + (\varepsilon^\mu{}_\nu) \quad (141)$$

となるので*43, $\varepsilon^{10} = -\varepsilon^{01} = \beta$, その他の $\varepsilon^{\mu\nu} = 0$ と同定される.

$\tanh \psi = -\beta$: (137) なる有限の “回転角” ψ を持つ Lorentz 変換は

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & \psi \\ \psi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi \\ \sinh \psi & \cosh \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}. \quad (142)$$

- $x^1 x^2$ 面内の無限小回転では $\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = -\theta$, その他の $\varepsilon^{\mu\nu} = 0$ と同定される.
逆に有限の回転角 θ の回転行列は

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (143)$$

*43 つまらない $\mu, \nu = 2, 3$ 成分は省略した. また $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2} = 1 + O(\beta^2)$, $\beta\gamma = \beta + O(\beta^3)$ に注意し, β の 1 次まで考慮した.

相対論的な等加速度運動 [4, pp.25–26] [1, p.209]

粒子と瞬間的に共動する慣性系で測った加速度が常に一定値

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = a, \quad \therefore a^\mu = \frac{d^2x^\mu}{ds^2} = \left(0, \frac{a}{c^2}, 0, 0\right) \quad (144)$$

となるような“等加速度運動”では、粒子はMinkowski時空に双曲線軌道

$$x^2 - (ct)^2 = l^2, \quad l \equiv \frac{c^2}{a} \quad (145)$$

を描いて光速での運動 $x = ct$ に移行する (図14). そこで軌道を

$$x = l \cosh \eta, \quad ct = l \sinh \eta \quad (146)$$

とパラメトライズすると,

$$\eta = \frac{a\tau}{c} = \frac{c\tau}{l}, \quad \text{i.e.} \quad \tau = \frac{l}{c}\eta \quad (147)$$

と同定される. これは粒子の運動 $(0, l) \rightarrow (t(\eta), x(\eta))$ が受動的な変換の結果 (137):

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & \sinh \eta \\ \sinh \eta & \cosh \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix}$$

に一致するようなブースト角 η が存在することを意味する.

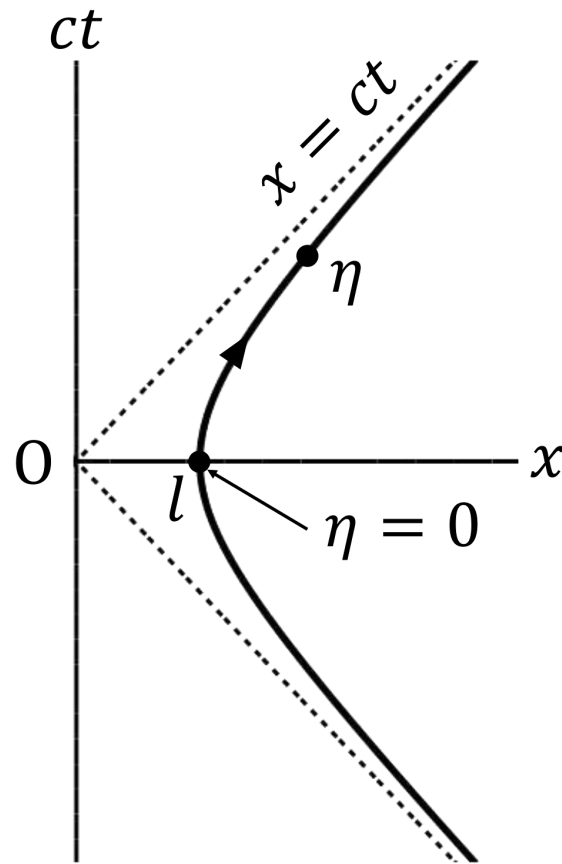


図14 相対論的な等加速度運動の双曲線軌道(145),(146)

- 粒子と原点の(世界)距離 l は一定.
- ヌルの線 $x = ct$ はこの粒子の地平(horizon).

2.2.5 項の式の導出など

■ Lorentz 変換 (140) における無限小パラメータの反対称性 [4, pp.45–46]

無限小 Lorentz 変換 (140) に対して

$$\begin{aligned}x'_{\mu}x'^{\mu} &= \eta_{\mu\nu}x'^{\nu}x'^{\mu} \\&= \eta_{\mu\nu}(x^{\mu} + x_{\rho}\varepsilon^{\mu\rho})(x^{\nu} + x_{\sigma}\varepsilon^{\nu\sigma}) \\&\simeq x_{\mu}x^{\mu} + \eta_{\mu\nu}x^{\mu}x_{\sigma}\varepsilon^{\nu\sigma} + \eta_{\mu\nu}x^{\nu}x_{\rho}\varepsilon^{\mu\rho} \\&= x_{\mu}x^{\mu} + x_{\nu}x_{\sigma}\varepsilon^{\nu\sigma} + x_{\mu}x_{\rho}\varepsilon^{\mu\rho} \\&= x_{\mu}x^{\mu} + 2x_{\mu}x_{\rho}\varepsilon^{\mu\rho}\end{aligned}$$

であり, Lorentz 変換では 4 元動径ベクトルの長さ $x_{\mu}x^{\mu}$ は不変に留まらねばならないから,

$$x_{\mu}x_{\rho}\varepsilon^{\mu\rho} = 0$$

を得る. これが恒等的に成り立つには $\varepsilon^{\mu\rho}$ の対称部分がゼロであれば良い.

■無限小変換を合成した指数(142),(143)について

一般に有限パラメータ α_k での変換行列(演算子)は, 無限小パラメータ α_k/N (ただし $N \gg 1$) による変換行列を N 回合成することで

$$\left(1 + \frac{\alpha_k X_k}{N}\right)^N \rightarrow \exp(\alpha_k X_k) \quad (N \rightarrow \infty) \quad (148)$$

と表される [11, p.64] [38, p.45]. 実際, X が値か演算子かに関わらず $N \rightarrow \infty$ のとき

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{X}{N}\right)^N &= \sum_{n=0}^N \frac{X^n}{n!} \frac{N!}{(N-n)!N^n} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} \\ &\left(\because \frac{N!}{(N-n)!N^n} = \frac{N}{N} \cdot \frac{N-1}{N} \cdots \frac{N-n+1}{N} \rightarrow 1 \right) \end{aligned}$$

となる. 演算子 X に対しても $\exp(X)$ を級数展開の形で定義したことにより

$\left(1 + \frac{X}{N}\right)^N \rightarrow e^X$ である. $X = 1$ とすると, これは e の定義式になる. 直観的には

$$e^X = \left(e^{\frac{X}{N}}\right)^N \simeq \left(1 + \frac{X}{N}\right)^N. \quad (N \gg 1)$$

■双曲線軌道(145)とブースト角(147)の導出 [4, pp.25–26]

粒子の共動座標系に関する4元加速度の成分(144)は

$$a^\mu a_\mu = -\frac{a^2}{c^4}$$

を満たす．ところがこの関係自体は，両辺が Lorentz スカラーなので任意の座標系で成立する．そこで粒子が速度 v を持つような空間固定系に関する成分

$$a^\mu = \frac{1}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, 0, 0 \right) = \frac{1}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} \left(\frac{v}{c} \frac{dv}{dt}, \frac{dv}{dt}, 0, 0 \right)$$

を代入すると，

$$-\frac{a^2}{c^4} = (a^0)^2 - (a^1)^2 = -\frac{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}{c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3}, \quad \therefore \frac{dv}{dt} = a \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

となる．(速度が小さいうちは加速度は近似的に a となっており，また $v \rightarrow c$ で(加速度) $\rightarrow 0$ となることが見て取れる．)

これを変数分離して積分すると,

$$v = \frac{at}{\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2}} \quad \left(\frac{v}{c} = \sin \theta \text{ と置換}\right)$$

を得る ($t = 0$ で $v = 0$ となるように時間の原点を選んだ). $t \rightarrow 0$ で $v \rightarrow at$ であり, 速度 v は非相対論的な場合の $v = at$ の $1/\sqrt{1 + (at/c)^2}$ 倍に遅れて, $t \rightarrow \infty$ で $v \rightarrow c$ となることが読み取れる.

これをもう1度積分すると,

$$x = \int_0^t v dt = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2} - 1 \right) \quad \left(\frac{at}{c} = \tan \theta \text{ と置換}\right)$$

が得られる ($t = 0$ で $x = 0$ となるように座標原点を選んだ). $t \rightarrow 0$ を想定して平方根を展開すると, 非相対論的表式 $x \simeq \frac{1}{2}at^2$ が再現される. xt 平面上の軌道は双曲線

$$\left(\frac{x}{c^2/a} + 1\right)^2 - \left(\frac{at}{c}\right)^2 = 1$$

で与えられ, $t \rightarrow \infty$ で $x \sim ct$ に漸近する (光速での運動に対応). x 座標の原点を改めて $x + \frac{c^2}{a} \rightarrow x$ と再定義すると, 双曲線の表式は式(145)へと簡略化される.

最後に粒子の固有時間は

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2}} = \frac{c}{a} \sinh^{-1} \frac{at}{c} \quad \left(\frac{at}{c} = \sinh \theta \text{ と置換} \right) \quad (149)$$

と計算される. $\tau \rightarrow \infty$ では

$$t = \frac{c}{a} \sinh \frac{a\tau}{c} \simeq \frac{c}{2a} e^{a\tau/c}, \quad \therefore \tau = \frac{c}{a} \ln \frac{2at}{c}$$

であり, 固有時間 τ は t に比べてゆっくりと増大する (宇宙船が亜光速飛行に至るには長い時間を要する). 上式 (149): $ct = \frac{c^2}{a} \sinh \frac{a\tau}{c}$ を式 (146): $ct = l \sinh \eta$ と比較すると, η は式 (147) のように同定される.

参考 固有時間を求める積分 (149) は

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin \theta}{1-\sin \theta} + \text{const.} \quad (x \equiv \tan \theta)$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \phi + \text{const.} \quad (x \equiv \sinh \phi)$$

の2通りに解ける.

$$\frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + \sin \theta)^2}{\cos^2 \theta} = \ln \left(\tan \theta + \frac{1}{\cos \theta} \right) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}),$$

$$\phi = \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

より, これらの結果は等価である.

2.2.5 項の原稿

特殊相対性理論についてもダイナミクス以前の運動学に関しては，この場で簡単に復習しておくのが適切だろう．ただし本稿では基本的に，特殊相対性理論，およびその枠組みの範囲内で展開される力学と電磁気学を，読者は既に心得ていると仮定する．そこで以下では専ら，本稿の議論で重要となる話題をいくらか取り上げるに留める．

特殊相対性理論は平坦な Minkowski 時空における理論，言い換えれば重力場の強度がゼロである場合の理論である．ただし我々は空間が重力場から生起するという解釈を採用しているため，これを“重力のない場合の理論”と言い表すのは差し控える．宇宙から重力場を取り除くと平坦な空間が残るのではなく，空間すら残らない．さて，平坦な時空では全ての時空点で大域的に計量テンソルが式(1)の Minkowski 計量 $\eta_{\mu\nu}$ となるような慣性系 (Lorentz 系) をとることができる．慣性系の座標 $(x^0, \dots, x^1)$ の第0成分 $x^0 = ct$ は時間座標 (の c 倍)，また残りの x^i ($i = 1, 2, 3$) は空間の Descartes 座標と解釈され，ここに c は本来，相互作用の伝播速度の最大値の意味として定義される．実際，背理的に理解できるように，信号の伝播速度が有限ならば何らかの最大値を持つ．ところがこの最大値 c を用いて電磁場の波動方程式を導くと， c は電磁波の伝播速度に一致することが判明するため，結果的に c は光速に他ならない．

特殊相対性理論は相対性原理と光速度不変の原理の上に成り立っている [4, pp.1–4]．まず相対性原理とは物理法則の共変性のことであり，特殊相対性理論の文脈では物理法則が全ての慣性基準系 (Lorentz 系) で同じ形をとることを指す．慣性系の間の座標変換

は Lorentz 変換と呼ばれ，物理法則はこの Lorentz 変換の下で不変に留まらねばならない．あらゆる慣性系は Minkowski 計量を持つので，慣性系の間の Lorentz 変換は計量 $\eta_{\mu\nu}$ の値をテンソルの変換則の下で不変に留める変換である．あるいは Lorentz 変換は，Minkowski 計量 $\eta_{\mu\nu}$ を用いて計算される世界間隔 ds^2 を不変に保つ変換と言っても良い．次に光速度不変の原理によれば，相互作用の伝播速度の最大値ないし光速 c は，任意の慣性基準系で共通の値をとる．光速度不変の原理は，世界間隔 ds を不変量として導入したことから保証されている．実際，時空において無限に近接した2事象をそれぞれ光(信号)の送信と受信にとると，2つの慣性基準系で測った光速度がともに c であることは，各々の座標と Minkowski 計量を用いて計算した2事象の世界間隔 ds, ds' が，いずれもゼロになることを意味する．この要請は世界間隔の不変性 $ds = ds'$ によって満たされている．逆に光速度が一定であることは，数学的には世界間隔の不変性 $ds = ds'$ として表されることも説明できる [4, pp.4–6]．世界間隔 ds は不変量なので，2つの事象が起きる時空点の隔たりが空間的か時間的であるか，すなわち一方の点が他方の点における光(円)錐の外側にあるか内側にあるかの区別も，座標系に依らない意味を持つ．空間的(または時間的)に隔たる2事象に対しては，それらの時間座標(または空間座標)が同一となる座標系を採ることができる [4, pp.6–8]．

ここで特殊相対性理論の文脈で物体の固有時間と4元速度を導入しよう．運動する物体に固定された時計の示す時間 τ を，その物体の固有時間という．固有時間はその定義によりスカラーである．実際，固有時間は瞬間的に粒子とともに動く慣性系で見た時間であり，この共動座標系 K' では粒子の空間座標の変化はゼロなので，固有時間の経過 $d\tau$

は対応する粒子の変位の世界間隔 ds と、また任意の慣性基準系 K で見た変位 (dt, dx^i) と、式(135)で関係付けられる．ここで $v^i = dx^i/dt$ は座標で測った粒子の速度である．よって $d\tau$ は確かに ds と同様にスカラーとなる．また基準系 K に対して動いている時計の読み $d\tau$ は、静止系 K の時計の読み dt に比べて遅れることが読み取れる．ただしこのとき K' 系の動いている時計は、それがすれ違う K 系に固定された2地点の時計と比較されることになり、この操作はもとより2つの基準系 K, K' に関して非対称であることに注意しよう．したがって、同じ理由で逆に K' 系の時計に対して K 系の時計が遅れることに矛盾はない [4, pp.8–10]．なおいわゆる双子のパラドックスでは、地球を発したロケットが地球に向けて折り返す際に瞬間的に加速するため、ロケット固定系には(ノンゼロの)重力場が現れる．これが地球とロケットの時計の非対称性の起源であり、実に折り返しの際に現れる重力場がロケット側の時計の遅れをもたらす [9, pp.20–27]．次に粒子の固有時間 τ を用いて、粒子の4元速度と4元加速度をそれぞれ式(136)で定義する．ただし本稿では4元速度 u^μ を光速 c で無次元化して定義していることに注意する [4, p.25]．ここで粒子の変位 dx^μ は座標の微分なので反変ベクトル成分であり、対応する固有時間 $d\tau$ はスカラーだから、4元速度 u^μ は反変ベクトル成分であり、したがって4元加速度 a^μ も反変ベクトル成分となる [9, p.89, p.91]．これに対して座標時間 t で測った速度 $\frac{dx^i}{dt}$ や加速度 $\frac{d^2x^i}{dt^2}$ は一般にベクトル成分ではない [9, p.92]．一般相対性理論 (GR) においても、粒子の固有時間 $d\tau = ds/c$ はスカラーなので、局所慣性系から任意の曲線座標に移っても値は変わらない．そこで引き続きその値を固有時

間と定義できる．また空間の各点(すなわち空間座標が一定の位置)においても，その点での時間の流れとして固有時間 τ を定義できる．これはその点での現象または時計の進み方を特徴付けるため，座標時間とは対照的に“真の”時間と呼べる．もっとも空間の点を特定・識別するには何らかの目印が必要である [2, pp.68–70]．これを踏まえると空間のある点の固有時間とは，目印として注目している点に置いた粒子の固有時間に他ならない．また一般相対性理論においても粒子の4元速度と4元加速度を固有時間による微分 $u^\mu = \frac{1}{c} \frac{dx^\mu}{d\tau}$, $a^\mu = \frac{du^\mu}{ds} = \frac{d^2x^\mu}{ds^2}$ で定義できる [4, p.273]．

ここで Lorentz 変換の1つの興味ある具体例として，ある基準系 K 系から見て今一つの基準系 K' が， x 軸方向に速度 V で推進(ブースト)している場合を考える．ただしはじめ2つの座標系の空間軸 x, y, z と x', y', z' は一致しているものとし，この瞬間をそれぞれの座標系の時間 t, t' の原点にとる．このとき同一の事象を K 系と K' 系で見た座標 (ct, x, y, z) と (ct', x', y', z') は， tx 平面内の“回転” (137)，すなわちよく知られた Lorentz 変換の公式 (138) で与えられる [4, pp.10–12]．実際，

- 式 (137) は線形変換であるため，逆変換も同じ形となり，相対性原理を満たす．
- また式 (137) は確かに世界間隔 $c^2t^2 - x^2$ を不変とするため，光速度一定の条件を満たす．

上式 (138) の変換はしばしば x 方向への Lorentz ブーストと呼ばれ，非相対論的極限 $V \ll c$ で Galilei 変換に帰着することが見て取れる．また2つの基準系の空間座標の原点

は時間が経つと離れていくものの、時空図では2つの基準系は原点を共有しており、Lorentz変換(138)は原点の並進を伴わない。

Lorentz変換の式(138)から改めて、動いている時計の遅れを説明できる。また同時の相対性やLorentz収縮といった興味深い帰結が引き出される [9, pp.16–20]。これらに対する理解を深めるために、ここでは棒と物置のパラドックスを取り上げよう [3, p.22]。ここでは棒と物置をそれぞれ代わりに列車とトンネルと呼び、図13のように列車がトンネルに差し掛かる場合を考える。地面に固定した座標系Kでトンネルは長さ l の範囲 $0 \leq x \leq l$ を占めており、列車固定系K'で列車は長さ L の範囲 $0 \leq x' \leq L$ を占めているとする。列車の方がトンネルよりも固有長さが大きい $L > l$ の場合にも、地面に対する列車の速度 V が充分大きければ、地面固定系Kから見て列車は長さ $L\sqrt{1 - (V/c)^2}$ にLorentz収縮するので、その全長がトンネルに収まり得る。そこで適当な時刻 t にトンネルの入口 $x = 0$ と出口 $x = l$ のシャッターを同時に下ろせば、列車をトンネルの中に閉じ込められるはずである。他方で列車固定系K'で見れば、列車より短いトンネルの方がさらにLorentz収縮を起こすので、列車全体はトンネルに収まり得ず、一見すると矛盾が生じる。このパラドックスを解消する鍵は、K'系の座標時間で測ると、トンネルの入口と出口のシャッターが閉まる時刻が同時ではないことである。実際Lorentz変換の式(138)の第4式より、出入り口のシャッターの閉まる時刻は式(139)で与えられるため、出口のシャッターが閉まった後に入口のシャッターが閉まることになる。話を明確にするために、K系で同時に下ろしたシャッターはその直後に開いて、列車を通過させるものとする。このときK'系で見ると、列車の前方で出口のシャッターが一度閉まる

ものの、再びシャッターが開くため列車は出口から抜け出せる。そして列車の末尾がトンネルの入口を通過した後になってから、ようやく列車の背後で入口のシャッターが下ろされる。したがって K' 系で列車がトンネルに閉じ込められることはないという主張もまた実際に正しく、矛盾は生じない。ここでは同時刻の相対性がパラドックスを解消する上で中心的な役割を演じている。改めて確認すれば特殊相対性理論における同時性は慣性系ごとに、各々の座標時間を用いて大域的に定義できる。

今一つの重要な例として、無限小 Lorentz 変換を取り上げる。Lorentz 変換は4元動径ベクトルの長さ $x_\mu x^\mu$ を不変にするような時空内の回転と見なせる。これを踏まえると無限小の Lorentz 変換は、反対称な無限小パラメータ $\varepsilon^{\mu\nu} (= -\varepsilon^{\nu\mu})$ を用いて式(140)のように表される(導出スライド参照) [4, pp.45–46] [17, pp.39–40].

例えば x^1 方向の Lorentz ブースト (138) において、無次元化した相対速度のパラメータが極めて小さい $\beta \equiv V/c \ll 1$ の場合を考えよう。すると変換係数は式(141)のように単位行列と β の1次の項に分離される。これは無限小パラメータ $\varepsilon^\mu{}_\nu$ を $\varepsilon^0{}_1 = \varepsilon^1{}_0 = -\beta$, その他の $\varepsilon^\mu{}_\nu = 0$ と選んだ場合に対応している。添字を上げると $\varepsilon^{10} = -\varepsilon^{01} = \beta$, その他の $\varepsilon^{\mu\nu} = 0$ となる。逆に無限小 Lorentz ブーストの合成として有限の Lorentz ブーストを生成するには、式(137): $\tanh \psi = -\beta$ の ψ を“回転角”として式(142)のように行列を指数化すれば良い(導出スライド参照)。実際、式(142)最左辺における行列の指数は Taylor 展開の形で定義されており、そこで正直に行列の級数を計算しさえすれば良い。なおここでは有限の Lorentz ブーストを生成する方法をあくまで発見的な方法で説明し

ており、 β の1次近似では ψ と β は区別できないので、この回転角の選択は必ずしも自明でないことに注意する。

同様に x^1x^2 面内での回転角 $\theta \ll 1$ での無限小回転に対する無限小パラメータは $\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = -\theta$ ，その他の $\varepsilon^{\mu\nu} = 0$ と同定される。逆に無限小変換の行列の指数をとると、有限の回転角 θ の回転行列(143)が得られる。

ここからはブラックホールの地平面付近に静止した観測者を考察する準備として、特殊相対性理論における等加速度運動を調べておく [4, pp.25–26]。特殊相対性理論では、空間に固定した慣性系で測って、粒子が常に一定の加速度 $d^2x/dt^2 = a$ を持つような直線運動は不可能である(速度 $v \sim at$ がいずれ光速を超えるから)。そこで瞬間的に粒子と同じ速度で運動する慣性系で測った粒子の加速度が、どの瞬間にも与えられた一定値(144)をとるような直線運動を考える。このとき背景のMinkowski時空に固定した基準系で見た粒子の軌道は双曲線(145)で与えられ、粒子は双曲線の漸近線 $x = ct$ に対応する光速での運動に移行する。そこで軌道を式(146)のようにパラメトライズすると、ブースト角 η は式(147)のように同定される。これは粒子の運動 $(0, l) \rightarrow (t(\eta), x(\eta))$ が受動的な座標変換の結果(137)に一致するようなブースト角 η が存在することを意味する。

ここで式(145),(147)の双曲線軌道を図14に示す。粒子と原点の(世界)距離 l は常に一定である。また $t = 0$ に $x < 0$ を発した信号は光速を超えないため、漸近線 $x = ct$ を横

切って粒子の双曲線軌道に達することはなく，この意味でヌルの線 $x = ct$ は地平と呼べる．これらの結果は4.1節で，ブラックホールの地平面から一定距離に静止する粒子を考察する上で，アナロジーとして有用となる．

3 最小作用原理と運動方程式

3.1 物理量の定義

3.1.1 電磁場テンソル，電流密度，エネルギー・運動量テンソル

■電磁場 [4, pp.285–287] 電磁ポテンシャル A_μ に対し電磁場テンソル(場の強度)は

$$F_{\mu\nu} \equiv A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu (= -F_{\nu\mu}). \quad (150)$$

適切な3次元空間の計量 γ_{ij} (逆行列 γ^{ij} , 行列式 $\gamma \equiv |\gamma_{ij}|$) に対し [4, pp.261–263], 電場 $\mathbf{E} = (E^1, E^2, E^3)$ と磁束密度 $\mathbf{B} = (B^1, B^2, B^3)$ は

$$E^i = \gamma^{ij} E_j, \quad E_i = F_{0i}, \quad B^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk} B_{jk}, \quad B_{ij} = F_{ij} \quad (151)$$

で定義される ($\epsilon^{ijk} \equiv \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\epsilon^{ijk}$, $\epsilon^{123} = 1$). 平坦な空間 ($\gamma_{ij} = \delta_{ij}$) では [4, p.54, p.68]

$$F^{01} = -F^{10} = -E^1, \quad F^{23} = -F^{32} = -B^2, \quad \text{etc.} \quad (152)$$

$$\text{i.e.} \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (A^\mu \equiv (\phi, \mathbf{A})) \quad (153)$$

場の強度 (150) (と場の方程式) を不変に留めるゲージ変換 [4, p.56]

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu \equiv A_\mu + \partial_\mu f. \quad (154)$$

電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ は Bianchi の恒等式 (98) とよく似た恒等式

$$F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\lambda\mu;\nu} + F_{\nu\lambda;\mu} = \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \quad (155)$$

を満たす [4, p.285]. Minkowski 時空で双対テンソル (式 (43))

$$F^{*\mu\nu} \equiv \frac{1}{2!} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad \text{i.e.} \quad F^{*01} = -B_x, F^{*12} = E_z, \text{ etc.} \quad (156)$$

を導入すると, 式 (155) は

$$\partial_\nu F^{*\mu\nu} = 0, \quad (157)$$

$$\text{i.e.} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (158)$$

と書き換えられる [9, p.71]. これは電磁場が電磁ポテンシャルから導かれること

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad \text{i.e.} \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (159)$$

から自動的に満たされる [4, pp.74–75].

式 (155) は局所慣性系で成り立つテンソル方程式となるため, 直ちに任意の座標系で成り立つことが保証される.

■場の不変量 [4, pp.71–72] Minkowski時空の理論を考えよう.

電磁場の強度 $F_{\mu\nu}$ から2つの不変量

$$B^2 - E^2 = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \text{inv}, \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{4} F^{*\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{8} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = \text{inv}. \quad (160)$$

が作られる (inv. は不変量 invariant の略). 第2式は4元発散

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = 4 \partial_\mu (\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu \partial_\rho A_\sigma) \quad (161)$$

なのでラグランジアン密度から除外できる (擬スカラーゆえではなく) [4, p.77].

複素ベクトル $\mathbf{F} \equiv \mathbf{E} + i\mathbf{B}$ は x 方向への Lorentz ブースト (138) の下で,

$\tanh \phi \equiv \frac{V}{c}$ に対して yz 面内の虚数角の回転

$$F_x = F'_x, \quad F_y = F'_y \cos i\phi - F'_z \sin i\phi, \quad F_z = F'_z \cos i\phi + F'_y \sin i\phi \quad (162)$$

を受ける. Lorentz 変換は $\mathbf{F}$ の3次元空間での回転と等価であり (いずれも自由度6),

$\mathbf{F}$ の回転の下での不変量は

$$\mathbf{F}^2 = (E^2 - B^2) + 2i\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \quad (163)$$

したがって式(160)のみである.

■4元電流(密度) [4, pp.285–286]

第 a 粒子の電荷 e_a , 座標 $x_a^\mu = (x_a^0, \mathbf{r}_a)$, 固有時間 τ_a に対し, 電流密度は

$$j^\mu(x) = \sum_a \frac{e_a c}{\sqrt{-g(x)}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \frac{dx_a^\mu}{dx^0} \quad (164)$$

$$= \sum_a \frac{e_a c}{\sqrt{-g(x)}} \int \delta^4(x - x_a) \frac{dx_a^\mu}{d\tau_a} d\tau_a : \text{反変ベクトル}. \quad (165)$$

式(164)はMinkowski時空では, 見慣れた電流密度 $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$ の表式

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \quad (166)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \quad \mathbf{v}_a \equiv \frac{d\mathbf{r}_a}{dt} \quad (167)$$

を再現し, これらは自動的に連続の式

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (168)$$

を満たす [4, pp.81–82] [19, p.195].

したがって曲がった時空では

$$0 = j^\mu{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} j^\mu) \quad (\because \text{発散公式 (89)}) \quad (169)$$

が成り立ち、保存する流れの密度はベクトル密度 $\tilde{j}^\mu \equiv \sqrt{-g} j^\mu$ に同定される。

■エネルギー・運動量テンソル [4, pp.301–304]

無限小の座標変換

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu \quad (170)$$

を考える。このとき変換前後で座標が同一の値 x の点 (時空の同一点ではなく) で、計量テンソルは

$$g'^{\mu\nu}(x) = g^{\mu\nu}(x) + \delta g^{\mu\nu}(x), \quad \delta g^{\mu\nu} = \xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu} \quad (171)$$

と変換する。

参考 式(171)の $\delta g^{\mu\nu}$ はその構成により、ベクトル $-\xi^\mu$ に沿う計量の Lie 微分 $\mathcal{L}_{-\xi} g^{\mu\nu}$ (式(128)) に他ならない [15, p.70].
 $\xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu} = 0$ を満たし、したがって計量を不変に留める ξ^μ を **Killingベクトル** という [4, p.302,425] [20, p.60].

ここで物質(電磁場を含む)の作用

$$S = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x = \frac{1}{c} \int \tilde{\mathcal{L}} d^4x \quad (\tilde{\mathcal{L}} \equiv \mathcal{L} \sqrt{-g}) \quad (172)$$

が無限小変換(170)に対して不変であることを要求すると, この対称性から保存則

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2c}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right\} (= T_{\nu\mu}), \quad T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad (173)$$

が導かれる. ただし汎関数微分 $\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}$ は $g^{\mu\nu}, g^{\nu\mu}$ を独立に扱い評価する. この $T_{\mu\nu}$ は平坦な時空の粒子系と自由電磁場の正しいエネルギー・運動量テンソルを与える.

注意 [4, p.313] [10, p.95] 式(173): $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ は厳密な意味での保存則ではない:

チャージ $\int T^{\mu 0} \sqrt{-g} d^3x$ が保存するためのカレントに対する連続の式は通常の変分 $\partial_\nu (\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) = 0$ であって, 共変微分(173)ではない(発散公式(89)による).

- 重力場を除く物理系のみのものであるエネルギー・運動量保存則は近似的にすぎない.
- GRでは時間の定義, 延いてはエネルギーの定義に曖昧さがある.

3.1.1 項の式の導出など

■電磁場テンソルの恒等式(155)第1の等号の確認 共変微分

$$F_{\mu\nu;\lambda} = \partial_\lambda F_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} F_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} F_{\alpha\mu},$$

$$F_{\lambda\mu;\nu} = \partial_\nu F_{\lambda\mu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu} F_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} F_{\lambda\alpha},$$

$$F_{\nu\lambda;\mu} = \partial_\mu F_{\nu\lambda} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} F_{\alpha\lambda} - \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} F_{\nu\alpha}$$

を辺々足すと Christoffel 記号を含む付加的な項は相殺することによる.

■ 双対テンソルの成分 (156) の確認 [13, p.435]

$$F^{*0i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{0i\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon^{0ijk} F_{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{jk}, \quad \therefore F^{*01} = -B_x, \text{etc.}$$

$$F^{*ij} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ij\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \varepsilon^{ij0k} F_{0k} = \varepsilon^{ijk} F_{0k}, \quad \therefore F^{*12} = E_z, \text{etc.}$$

■式(155)が式(157): $\partial_\nu F^{*\mu\nu} = 0$ に書き換えられることの確認

$$\begin{aligned}\partial_\nu F^{*\mu\nu} &= \frac{1}{2!} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = \frac{1}{3!} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\nu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\nu} + \partial_\sigma F_{\nu\rho}) \\ &= \frac{1}{3!} (\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} + \varepsilon^{\mu\sigma\nu\rho} + \varepsilon^{\mu\rho\sigma\nu}) \partial_\nu F_{\rho\sigma}.\end{aligned}$$

■場の不変量(160)第1の等号の確認

まず第1式について, $F^{0i} = -E_i$, $F^{ij} = -\varepsilon_{ijk} B_k$ より,

$$F_{ij} F^{ij} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijl} B_k B_l = 2\delta_{kl} B_k B_l = 2B^2, \quad F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2F_{0i} F^{0i} + F_{ij} F^{ij} = 2(B^2 - E^2)$$

となる. 第2式の確認に移ろう. 双対テンソル $F^{*\mu\nu} \equiv \frac{1}{2!} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ の成分(156):

$F^{*01} = -B_x$, $F^{*12} = E_z$, etc. を思い出すと,

$$F^{*\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2F^{*0i} F_{0i} + F^{*ij} F_{ij}$$

において右辺第1項は $F^{*0i} F_{0i} = (-\mathbf{B}) \cdot \mathbf{E}$ となり, 右辺第2項は

$$F^{*ij} F_{ij} = 2(F^{*12} F_{12} + F^{*23} F_{23} + F^{*31} F_{31}) = -2\mathbf{E} \cdot \mathbf{B},$$

$$\text{or } F^{*ij} F_{ij} = (\varepsilon_{ijk} E_k)(-\varepsilon_{ijl} B_l) = -2\delta_{kl} E_k B_l = -2\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

と計算できる. 以上をまとめると

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = 2F^{*\mu\nu} F_{\mu\nu} = -8\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}.$$

■式(161): $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = 4\partial_\mu (\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu \partial_\rho A_\sigma)$ の確認

式(161)左辺において

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = (\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} - \varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma}) \partial_\mu A_\nu = 2\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu A_\nu$$

と書き換えられる．同様の変形を繰り返すと

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = 4\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu A_\nu) (\partial_\rho A_\sigma)$$

を得る．これを式(161)の右辺に置き換えたときのおつりの項 $4\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu \partial_i \partial_\rho A_\sigma$ は，添字 μ, ρ について対称な量と反対称な量の縮約となっているのでゼロである．よって式(161)が成立する．

■場の強度の変換則(162)の確認 [4, pp.69–70]

x 方向への Lorentz ブースト (138) に対して電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ の変換則を書き下すと,

$$(a^\mu{}_\nu) \equiv \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta \equiv \frac{V}{c}, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$E_y = F_{02} = \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} F'_{\mu\nu} = a^0{}_0 a^2{}_2 F'_{02} + a^1{}_0 a^2{}_2 F'_{12} = \gamma \{E'_y - \beta(-B'_z)\}, \text{ etc.}$$

$$\therefore E_x = E'_x, \quad E_y = \gamma(E'_y + \beta B'_z), \quad E_z = \gamma(E'_z - \beta B'_y),$$

$$B_x = B'_x, \quad B_y = \gamma(B'_y - \beta E'_z), \quad B_z = \gamma(B'_z + \beta E'_y).$$

ここで $\tanh \phi = \beta$ とおくと $\cosh \phi = \gamma$, $\sinh \phi = \beta\gamma$ となるので (値域 $\cosh \phi \geq 0$ に注意), 式(162):

$$\begin{aligned} F_y = E_y + iB_y &= \gamma \{ (E'_y + iB'_y) - i\beta(E'_z + iB'_z) \} = F'_y \cosh \phi - iF'_z \sinh \phi \\ &= F'_y \cos i\phi - F'_z \sin i\phi, \text{ etc.} \end{aligned}$$

を得る.

■4元電流密度の式(165)への書き換えと、それが反変ベクトルであることの証明 [9, p.164]

a 番目の粒子の座標 $x_a^\mu = (x_a^0, \mathbf{r}_a)$ を単に x_a , また固有時間を τ_a と書くと、電流密度の4元ベクトル(164)は

$$\begin{aligned} j^\mu(x) &= \sum_a \frac{e_a c}{\sqrt{-g(x)}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \frac{dx_a^\mu}{dx^0} \\ &= \sum_a \frac{e_a c}{\sqrt{-g(x)}} \int \delta^4(x - x_a) \frac{dx_a^\mu}{dx_a^0} dx_a^0 \\ &= \sum_a \frac{e_a c}{\sqrt{-g(x)}} \int \delta^4(x - x_a) \frac{dx_a^\mu}{d\tau_a} d\tau_a : (165) \end{aligned}$$

と書き換えられる．最右辺において $d\tau_a$ はスカラーであり， $dx_a^\mu/d\tau_a$ は4元反変ベクトルである．デルタ関数の下でその変換係数は粒子ごとに異なる位置 x_a ではなく，場 $j^\mu(x)$ を評価する観測点 x での値 $\partial x'^\mu/\partial x$ に置き換えられる．また2.2.1項で説明したように，デルタ関数と Jacobian 因子 $\sqrt{-g(x)}$ はスカラー密度の変換則に従うため，分母の $\sqrt{-g(x)}$ はデルタ関数の変換性を打ち消す．以上より4元電流密度(164)は全体として反変ベクトルになっていることが分かる．

■粒子系の電荷・電流密度が恒等的に連続の式(168)を満たすことの確認
 電荷密度・電流密度の式(166),(167)が連続の式(168): $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ を自動的に満たすことは,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) &= \sum_a e_a \frac{\partial}{\partial t} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) = \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_a(t)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \\ &= - \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \\ \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \partial_i j^i(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a v_a^i(t) \partial_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \\ &= \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))\end{aligned}$$

を辺々足して確かめられる [4, pp.81–82] [19, p.195].

参考——電荷密度(166)の引数 $(t, \mathbf{r})$ 依存性 位置 $\mathbf{r}$ は場の値を評価する観測点の位置であるのに対し, $\mathbf{r}_a$ は粒子の位置であり, その引数 t が場 $\rho(\mathbf{r}, t)$ の時間依存性となっている. これは荷電粒子の運動が電荷分布の時間変化を引き起こすという, 当然の事実を表している. (曲がった時空では因子 $\sqrt{-g}$ も $x = (ct, \mathbf{r})$ 依存性を担う.)

■無限小座標変換に対する計量の変換則(171)の導出 [4, p.302]

まず無限小変換(170): $x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}$ に対する計量テンソルの変換則を調べる.

$\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} = \delta^{\alpha}_{\mu} + \partial_{\mu}\xi^{\alpha}$ に注意すると, ξ^{α} の1次までの近似で

$$g'^{\alpha\beta} = (\delta^{\alpha}_{\mu} + \partial_{\mu}\xi^{\alpha})(\delta^{\beta}_{\nu} + \partial_{\nu}\xi^{\beta})g^{\mu\nu} \simeq g^{\alpha\beta} + \partial^{\alpha}\xi^{\beta} + \partial^{\beta}\xi^{\alpha}$$

となる. ここで一般にテンソル場に対して変換則(26)は, 与えられた時空点における場の値の変化を規定していることを思い出そう. 上式の右辺は座標 x の関数であるのに対し, 左辺は同一の点を表す新しい座標 x' の関数 $g'^{\alpha\beta}(x')$ である. 引数を x にそろえるために, 左辺を

$$g'^{\alpha\beta}(x') = g'^{\alpha\beta}(x + \xi) \simeq g'^{\alpha\beta}(x) + \xi^{\gamma}\partial_{\gamma}g'^{\alpha\beta}(x) \simeq g'^{\alpha\beta}(x) + \xi^{\gamma}\partial_{\gamma}g^{\alpha\beta}(x)$$

と書き直す(最後の等号では第2項において, $g'^{\alpha\beta}$ を $g^{\alpha\beta}$ に置き換えたときの差が ξ^{α} の2次の微小量であることを考慮した). すると

$$g'^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - \xi^{\gamma}\partial_{\gamma}g^{\alpha\beta} + \partial^{\alpha}\xi^{\beta} + \partial^{\beta}\xi^{\alpha}$$

を得る(両辺の各項の引数はいずれも x).

右辺の後ろ3つの項は $\xi^{\alpha;\beta} + \xi^{\beta;\alpha}$ とまとめられる．実際，

$$\begin{aligned}
& \xi^{\alpha;\beta} + \xi^{\beta;\alpha} \\
&= g^{\beta\delta} \xi^{\alpha}_{;\delta} + g^{\alpha\delta} \xi^{\beta}_{;\delta} \quad (\because \text{反変導関数の定義 (83)}) \\
&= g^{\beta\delta} (\partial_{\delta} \xi^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\delta} \xi^{\gamma}) + g^{\alpha\delta} (\partial_{\delta} \xi^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\gamma\delta} \xi^{\gamma}) \quad (\because \text{共変微分の公式 (82)}) \\
&= \partial^{\beta} \xi^{\alpha} + \partial^{\alpha} \xi^{\beta} + (g^{\beta\delta} \Gamma^{\alpha}_{\gamma\delta} + g^{\alpha\delta} \Gamma^{\beta}_{\gamma\delta} \xi^{\gamma}) \xi^{\gamma} \\
&= \partial^{\beta} \xi^{\alpha} + \partial^{\alpha} \xi^{\beta} - (\partial_{\gamma} g^{\alpha\beta}) \xi^{\gamma}. \quad (\because \text{式 (85)})
\end{aligned}$$

以上より計量テンソルは式(171):

$$g'^{\alpha\beta}(x) = g^{\alpha\beta}(x) + \delta g^{\alpha\beta}(x), \quad \delta g^{\alpha\beta} = \xi^{\alpha;\beta} + \xi^{\beta;\alpha}$$

に従って変換する．なお，これは共変成分の変換則

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}, \quad \delta g_{\alpha\beta} = -\xi_{\alpha;\beta} - \xi_{\beta;\alpha}$$

を含意する(このとき今考えている ξ^{α} の1次までの近似で， $g'^{\alpha\gamma} g'_{\gamma\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$ が満たされる)．

■エネルギー・運動量保存則(173)の導出 [4, pp.302–304]

さて、無限小の一般座標変換(170)に対する作用(172)の不変性を要求しよう。座標変換に伴って、計量テンソル $g^{\mu\nu}$ とそれ以外の力学変数 q はともに変化する。これによる作用 S の変分は微小変化の1次近似で、 $g^{\mu\nu}$ だけが変化したときの変分 $\delta_g S$ と q だけが変化したときの変分 $\delta_q S$ の和 $\delta S = \delta_g S + \delta_q S$ である。ところが変数 q に関する運動方程式により $\delta_q S$ はゼロになるから^{*44}、作用の不変性として $\delta_g S = 0$ を要求すれば充分である。

$$\begin{aligned} 0 = \delta_g S &= \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \delta (\partial_\lambda g^{\mu\nu}) \right\} d^4 x \\ &= \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right\} (\delta g^{\mu\nu}) d^4 x \equiv \frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4 x. \end{aligned}$$

ただしここで $g^{\mu\nu}, \partial_\lambda g^{\mu\nu}$ による微分は $g^{\nu\mu}, \partial_\lambda g^{\nu\mu}$ と独立に行っていることになる。

^{*44} 作用 S が力学変数 $g^{\mu\nu}(x)$ を記述する項(重力場項)を含んでいるとすると、同じ理由で $\delta_g S = 0$ となり、非自明な結果は得られない。

変分 $\delta g^{\mu\nu}$ として座標変換に伴う変化(171)を考えているから，上式はさらに

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} (\xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu}) \sqrt{-g} d^4x \\
 &= \frac{1}{c} \int T_{\nu\mu} \xi^{\mu;\nu} \sqrt{-g} d^4x \quad (T_{\mu\nu} \text{の対称性}) \\
 &= \frac{1}{c} \int T^\nu{}_\mu \xi^\mu{}_{;\nu} \sqrt{-g} d^4x \\
 &= \frac{1}{c} \int (T^\nu{}_\mu \xi^\mu)_{;\nu} \sqrt{-g} d^4x - \frac{1}{c} \int T^\nu{}_{\mu;\nu} \xi^\mu \sqrt{-g} d^4x \\
 &= \frac{1}{c} \int \partial_\nu (\sqrt{-g} T^\nu{}_\mu \xi^\mu) d^4x - \frac{1}{c} \int T^\nu{}_{\mu;\nu} \xi^\mu \sqrt{-g} d^4x \quad (\because \text{公式(89)}) \\
 &= - \frac{1}{c} \int T^\nu{}_{\mu;\nu} \xi^\mu \sqrt{-g} d^4x
 \end{aligned}$$

と書き換えられる．最右辺において ξ^μ は任意なので， $T^\nu{}_{\mu;\nu} = 0$ を得る．計量テンソルの共変微分はゼロになること(式(85))に注意して添字を上げると，式(173): $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ が導かれる．

3.1節の原稿(序文)

我々は今や場と粒子の古典的なダイナミクスを具体的に論じることができる段階に達した．まずは物理量を定義するところから始めよう．

3.1.1項の原稿

古典的には自然は粒子と電磁場，重力場から成る．重力場の強度はChristoffel記号に対応することが，まもなく示される．ここでは電磁場を導入する．

共変4元ベクトル A_μ を電磁ポテンシャルとして，場の強度は反対称テンソル(150)で定義される．ただし第2の等号では公式(82)より，共変微分を通常の微分に置き換えた際の付加的な項が相殺することに注意した．式(150)は電磁場テンソルとも呼ばれる．曲がった空間では γ_{ij} を適切に定義した3次元空間の計量， γ^{ij} をその逆行列，また

$\gamma \equiv |\gamma_{ij}|$ を行列式とすると [4, pp.261–263]，電磁場テンソル成分は電場

$\mathbf{E} = (E^1, E^2, E^3)$ および磁束密度 $\mathbf{B} = (B^1, B^2, B^3)$ と式(151)で関係付けられ

る [4, pp.285–287]．ここに $\epsilon^{ijk} \equiv \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \varepsilon^{ijk}$ は局所Descartes座標系における3次元の反対称Levi-Civita記号 ε^{ijk} (ただし $\varepsilon^{123} = 1$) を反変テンソルとして変換した量であり，式(41)とは対照的に座標系によって値が変化し得る [4, pp.258–259]．また平坦な空間では計量は単なる単位行列 $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$ になる．もっともここでは電磁場 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ の定義式(151)は形式的に示しているに過ぎない．実際，本稿では曲がった時空における電磁気

学を本格的に扱う予定はないため、ひとまず2式(151)が平坦な時空において、見慣れた場の強度の表式(152),(153) [4, p.54,p.68]に帰着することを納得しておけば充分である。いずれにせよ電場と磁場は合わせてテンソル成分 $F_{\mu\nu}$ として変換する。場の強度 E, B は物理的実体であるのに対し、同一の電磁場成分 $F_{\mu\nu}$ を与える電磁ポテンシャル A_μ は無数に存在する。実際ある電磁ポテンシャル A_μ に対して、任意のゲージ関数 f の勾配を付け加えるゲージ変換(154) [4, p.56]を施しても、場の強度(150)は明らかに変わらない。ところが以降で見るように電磁ポテンシャル A_μ は運動方程式に電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ の形でのみ現れるので、ゲージ変換は単に場の強度を不変に保つというだけでなく、理論(運動方程式)をも不変に留める。そして本稿では詳しく取り上げないものの、古典電磁気学の水準でもゲージ不変性はやはり、電荷保存則と表裏一体となっているのである [4, p.56,pp.82–83].

電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ は Bianchi の恒等式(98)とよく似た恒等式(155)を満たす [4, p.285]. 実際 Yang–Mills 理論は幾何学の構造を持ち、ゲージ場の強度は数学的には曲率に相当するので、このことは偶然ではない [23, p.143]. 式(155)第1の等号のように共変微分を通常の微分に置き換えられることは、共変微分の公式から直接確かめられる(導出スライド参照). 第2の等号を示すには、電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ が添字に関して反対称であることを踏まえて、Minkowski時空において式(43)で定義した双対テンソル(156)を導入すると見通しが良い。成分計算は導出スライドを見よ；なるほど、もとのテンソル $F_{\mu\nu}$ と比べると、(符号の違いを除けば)電場と磁場が入れ替わっている。する

と式(155)第2の等号は式(157)のように書き換えられる(導出スライド参照) [9, p.71]. 双対テンソル $F^{*\mu\nu}$ の成分(156)を正直に代入すると, 式(157)の時間成分($\mu = 0$)と空間成分($\mu = i$)はそれぞれ順に, 源を含まないMaxwell方程式(158)を与えることが確かめられる. 言い換えれば式(157)は源を含まないMaxwell方程式(158)をLorentz変換に対する共変性が明白なテンソル方程式として書いた関係に他ならない. そして式(158)は, したがって式(157)は, 電磁場が式(159)のように電磁ポテンシャルから導かれることから自動的に満たされる [4, pp.74–75]. このため場の強度はポテンシャルから電磁場テンソルとして導かれると宣言すれば, 源を含まないMaxwell方程式のことは忘れて, 電磁気学の原理としては源を含むMaxwell方程式を書き下せば充分である. こうして冒頭の式(155)は局所慣性系で成り立つテンソル方程式となるため, 直ちに任意の座標系で成り立つことが保証される.

Minkowski時空の理論を考えよう. 電磁場の強度から2つの不変量(160)を作ることができる(第1の等号は導出スライド参照). この後で見るように, 自由電磁場のラグランジアン密度に用いられるのは不変量(160)の第1式であるのに対し, 第2式は擬スカラーとなっている. ただし第2式がラグランジアン密度から除外されるのは, それが擬スカラーだからではなく, むしろ運動方程式に影響しない4元発散(161)となっているからである(導出スライド参照) [4, p.77].

Lorentz変換の下での場の不変量は, 式(160)に示した2つに限られる. ここではその数学的に厳密な証明のスケッチを通じて, 直観的な説明を与えよう. 電場と磁場をそれぞ

れ実部と虚部に持つ複素ベクトル $F \equiv E + iB$ を導入すると、これは x 方向への Lorentz ブースト (138) の下で、3次元空間における虚数角の回転 (162) を被る ([導出スライド参照](#))。このように x 方向への Lorentz ブーストすなわち tx 面内の“回転”は、 yz 面内の虚数角の回転 (162) で表される。他方で式 (162) で回転角を実数に選ぶと、これは単に yz 面内の電場ベクトルと磁場ベクトルの回転を表すに過ぎない。よって Lorentz 変換における6通りの平面 tx, ty, tz, xy, yz, zx 内の回転は、3つの複素数の回転角で指定される3次元空間における複素ベクトル F の回転と、自由度が正確に一致する(いずれも自由度は6である)。ここから Minkowski 時空での Lorentz 変換の総体は、3次元系の回転の総体と等価であると考えられる。ところがベクトル F の回転に対する不変量は、ベクトルの2乗 (163) のみである。その実部と虚部はそれぞれ式 (160) の2つの不変量を与えるので、場の不変量は式 (160) のみである。

次に物質が点状の粒子から成る場合を考え、 a 番目の粒子の電荷を e_a 、座標を $x_a^\mu = (x_a^0, \mathbf{r}_a)$ と書こう。このとき電流密度の4元ベクトルは式 (164) で定義できる。ただしここでは空間座標をまとめて $\mathbf{r} \equiv (x^1, x^2, x^3)$ と表し、デルタ関数を $\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3) \equiv \delta(\mathbf{r})$ と書いている(曲線座標系において $\mathbf{r}$ は位置ベクトルではない)。式 (164) は粒子の固有時間 τ_a に関する積分 (165) に書き換えることができる；式 (165) はデルタ関数と分母の $\sqrt{-g}$ がともにスカラー密度として変換するため、変換から生じる Jacobian が相殺し、反変ベクトルとして変換することが明白である ([導出スライド参照](#))。他方でもとの式 (164) は Minkowski 時空では、見慣れた電流密度 $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$

の表式(166),(167)を再現する．実際，第1式(166)の ρ はある空間領域 V にわたる積分が領域 V 内部の電荷の総和を与えるため，電荷密度と解釈できる [4, pp.78–79]．また第2式(167)の j は電荷密度(166)と合わせて連続の式(168)を自動的に満たす(導出スライド参照) [4, pp.81–82] [19, p.195]．ここから j は電流密度(電荷の流れの密度)を表していることが裏付けられ，また j^μ を4元電流密度と呼ぶことが正当化される^{*45}．そして連続の式(168)が成り立つことは，系が生成・消滅しない点電荷で構成されていることを電荷密度・電流密度の式(166),(167)が適切に表現しているため，電荷保存則が自動的に成立することを反映していると解釈できる．他方で周知のように，電荷密度・電流密度の具体的な構成に依らず，電荷保存則(168)は既にMaxwell方程式に含意されている．この事情は一般相対性理論においても変わらないことを，3.2.2項で説明する予定である．

翻って電流密度の定義式(164)はMinkowski時空の電流密度の，曲がった時空への自然な一般化と理解できる．これを用いて連続の式は，微分を共変微分に置き換えた式(169)が成り立つ．実際，式(169)は局所慣性系で成り立つことが示されたテンソル方程式だから，任意の座標系で満たされる．そして最右辺の4元発散の表式より，保存す

^{*45} なお4元電流 j^μ の時間成分と空間成分の次元は等しい： $[c\rho] = [j]$ ．時間成分は電荷密度 ρ に c が掛かり，電流密度の次元になっている．ベクトルの成分はLorentz変換の際に無次元の係数で足し合わされるので，全ての成分の次元は等しい必要がある．

る流れの密度となるのはその名の通り, j^μ に $\sqrt{-g}$ を乗じて得られるベクトル密度 $\tilde{j}^\mu \equiv \sqrt{-g}j^\mu$ である.

エネルギー・運動量テンソルの定義に移ろう. 曲がった時空はもはや一般に大域的な Poincaré 対称性, すなわち並進と回転 (Lorentz 変換) に関する対称性を持たない [1, p.5]. そこで一般相対性理論の文脈で, 系の対称性と付随する保存則の関係を改めて考察しよう. まず無限小の座標変換 (170) を考える. このとき変換前後で座標が同一の値 x の点 (時空の同一点ではなく) において, 計量テンソルは式 (171) のように変換する (導出スライド参照)*46.

次に, 物質の作用は一般に固有体積要素 $\sqrt{-g}d^4x$ に関する積分 (172) の形をとる. ただし一般相対論的な語法では, “物質” とは重力場以外のあらゆる力学的対象を指し [2, p.37], したがって通常物質だけでなく電磁場も含まれる [4, p.308]. ここで作用がスカラーであり, 無限小変換 (170) に対して不変であることを要求しよう*47. すると保存則 (173) が導かれる (導出スライド参照). ただし $T_{\mu\nu}$ の定義式 (173) における $\delta S/\delta g^{\mu\nu}$ は作用の汎関数微分であり [21, p.25], $g^{\mu\nu}$ と $g^{\nu\mu}$ をあたかも独立な変数と見

*46 したがって計量を不変に留めるには $\xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu} = 0$ を満たす無限小ベクトル ξ^μ を採れば良い. そのような ξ^μ を **Killing ベクトル** という [4, p.302,425] [20, p.60].

*47 この条件は最小作用原理から導かれる運動方程式が, 任意の座標系で成り立つことを, あくまで十分条件として保証する.

なして評価する。(汎関数微分の定義と性質については3.1.2項に改めてまとめる。) 最右辺の $g^{\mu\nu}, \partial_\lambda g^{\mu\nu}$ に関する微分も同様である^{*48}.

保存則(173)は一般座標変換(170)に関する対称性から導かれており、またこれは並進対称性の一般化のように見なせることを踏まえると、上式(173)の $T_{\mu\nu}$ は物質のエネルギー・運動量テンソルを与えると期待できる^{*49}. この解釈を正当化するために、我々はMinkowski時空における粒子系と自由電磁場に対して式(173)を適用し、適正なエネルギー・運動量テンソルが得られることを3.2.1項で示す予定である.

公式(173)にはエネルギー・運動量テンソルが最初から対称な形で得られるという利点がある. また平坦な時空でもエネルギー・運動量テンソルを計算するのに、形式的に計量の変分を考えて公式(173)を利用できる.

上式(173): $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ は厳密な意味での保存則ではない. と言うのも、チャージ

$\int T^{\mu 0} \sqrt{-g} d^3x$ が保存するためのカレントに対する連続の式は通常の微分

$\partial_\nu (\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) = 0$ であって、共変微分(173)ではない(発散公式(89)による). これは重力場もエネルギーと運動量を担うため、重力場を除く物理系のエネルギー・運動量保存

^{*48} 実際には例えば $g_{\mu\nu}$ による微分には $g_{\nu\mu}$ も寄与するので、正しい微分係数はこれらを独立に扱った場合の2倍の値をとる. これを踏まえて $T_{\mu\nu}$ の定義式(173)には数係数2を含めてあるものと推察される. (関連して式(34)の箇所も見よ.) また分母の $\sqrt{-g}$ はラグランジアン密度 $\tilde{\mathcal{L}}$ の加重度を取り除く働きをしている.

^{*49} 定数係数や付加定数の違いはあり得るにしても.

則は近似的にしか成り立たないことに関係しており，電荷保存則(169)が正確に成り立つのとは対照的である [4, p.313] [10, p.95]. このことはまた時間の定義の曖昧さを反映して，一般相対性理論において物質のエネルギーの定義に任意性・不定性があることにも関係していると想像される．実際，ここではあくまで平坦な空間で正しいエネルギー・運動量テンソルに帰着する量として $T_{\mu\nu}$ を定義しているに過ぎない．実に我々はブラックホールの Frodden–Ghosh–Perez エネルギーを紹介する際に，再びこの問題に直面することになる．

3.1.2 汎関数微分

D 次元空間(時空)における場 $\phi_r(x)$ の“関数” $F[\phi]$ を汎関数という ($\phi \equiv \{\phi_r\}$).
場 $\phi_r(x)$ の変化 $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$ に伴う汎関数 $F[\phi]$ の1次の変化を

$$\delta F[\phi] = \int d^D x \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi_r(x)} \delta \phi_r(x) \quad (r \text{ で和をとる}) \quad (174)$$

と書いて汎関数微分 $\frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi_r(x)}$ を定義する [22, pp.132–134].

- 汎関数微分 $\frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi_r(x)}$ の次元は $\frac{1}{L^D} \times \frac{[F]}{[\phi]}$ である (L は長さ).
- 特に汎関数 F が場 ϕ_r の時空点 y での値 $\phi_r(y)$ を与えるような“関数”
 $F[\phi] = \phi_r(y)$ の場合を考えると, 上式(174)より

$$\delta \phi_r(y) = \int d^D x \frac{\delta \phi_r(y)}{\delta \phi_s(x)} \delta \phi_s(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta \phi_r(y)}{\delta \phi_s(x)} = \delta_{rs} \delta^D(x - y) \quad (175)$$

が見出される [22, p.134].

以下では $D = 4$ 次元の空間(時空)における単一の場 $\phi(x)$ の汎関数 F, G を考える.
定義式(174)に基づき, 一連の有用な公式

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)} \{aF[\phi] + bG[\phi]\} = a \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} + b \frac{\delta G[\phi]}{\delta\phi(x)}, \quad (a, b \text{ は定数}) \quad (176)$$

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)} F[\phi]G[\phi] = \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} G[\phi] + F[\phi] \frac{\delta G[\phi]}{\delta\phi(x)}, \quad (177)$$

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)} \{f(F[\phi])\} = \frac{\partial f}{\partial F} \frac{\delta F}{\delta\phi(x)}, \quad (178)$$

$$\frac{\delta F[G_x[\phi]]}{\delta\phi(z)} = \int d^4y \frac{\delta F[G_x[\phi]]}{\delta G_y[\phi]} \frac{\delta G_y[\phi]}{\delta\phi(z)} \quad (179)$$

が示される. また特に場の量 $f(\phi)$ の空間積分

$$F[\phi] \equiv \int d^4x f\{\phi(x)\} \quad (180)$$

の形の汎関数に対しては,

$$\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} = \frac{\partial f\{\phi(x)\}}{\partial\phi(x)} \quad (181)$$

が成り立つ [22, pp.314–315].

■場の理論の Poisson 括弧 ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ の定義式

$$L = \int \mathcal{L} dV \quad \left(\text{作用は } S \equiv \int L dt = \int \mathcal{L} dV dt = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} d^4x \right) \quad (182)$$

から、格子点 x のセル ΔV に含まれる場のラグランジアンを $\mathcal{L}\Delta V$ に同定できる。
格子点 x (番号 j でラベル) における場の値 $\phi_r(j, t)$ を力学変数と見ると、
セル ΔV に含まれる共役な場の運動量は $\partial(\mathcal{L}\Delta V)/\partial\dot{\phi}_r$

$$\rightarrow \quad \text{運動量密度 } \pi_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_r}, \quad \text{ハミルトニアン密度 } \mathcal{H} = \sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_r} \dot{\phi}_r. \quad (183)$$

力学変数 ϕ_r と共役な運動量 $\pi_r \Delta V$ の間の基本的な Poisson 括弧は

$$\{\phi_r(j, t), \pi_s(j', t) \Delta V\} = i\hbar \delta_{rs} \delta_{jj'}, \quad \text{etc.} \quad (184)$$

連続極限 $\Delta V \rightarrow 0$ で

$$\frac{\delta_{jj'}}{\Delta V} \rightarrow \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (185)$$

より、上式(184)は場の理論の Poisson 括弧に移行する [17, p.35] :

$$\{\phi_r(\mathbf{x}, t), \pi_s(\mathbf{x}', t)\} = \delta_{rs} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad \text{etc.} \quad (186)$$

そこで場の理論 Poisson 括弧を

$$\{F[\phi, \pi], G[\phi, \pi]\} \equiv \int d^3x \sum_r \left\{ \frac{\delta F[\phi, \pi]}{\delta \phi_r(x)} \frac{\delta G[\phi, \pi]}{\delta \pi_r(x)} - \frac{\delta F[\phi, \pi]}{\delta \pi_r(x)} \frac{\delta G[\phi, \pi]}{\delta \phi_r(x)} \right\} \quad (187)$$

と定義すれば [28, p.183],

$$\begin{aligned} \{\phi_r(x), \pi_s(y)\} &= \int d^3z \sum_p \left\{ \frac{\delta \phi_r(x)}{\delta \phi_p(z)} \frac{\delta \pi_s(y)}{\delta \pi_p(z)} - \frac{\delta \phi_r(x)}{\delta \pi_p(z)} \frac{\delta \pi_s(y)}{\delta \phi_p(z)} \right\} \quad (x^0 = y^0 = z^0) \\ &= \int d^3z \sum_p \delta_{rp} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \delta_{sp} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \quad (\because \text{式(175)}) \\ &= \delta_{rs} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) : (186) \end{aligned}$$

が満たされる.

3.1.2 項の式の導出など

■ 汎関数微分の性質 (176)–(181) の証明

式 (176) の証明から始めよう．定数 a, b に対して，汎関数微分の定義より

$$\begin{aligned}\delta\{aF[\phi] + bG[\phi]\} &= \int d^4x \frac{\delta\{aF[\phi] + bG[\phi]\}}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x), \\ a\delta F[\phi] + b\delta G[\phi] &= a \int d^4x \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x) + b \int d^4x \frac{\delta G[\phi]}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x) \\ &= \int d^4x \left(a \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} + b \frac{\delta G[\phi]}{\delta\phi(x)} \right) \delta\phi(x) \quad (\because \text{積分の線形性})\end{aligned}$$

であり，左辺の変分の線形性より 2 式を等置し，被積分関数における $\delta\phi(x)$ の係数を比較すると，式 (176) を得る．

続いて式 (177) を示す．積 $F[\phi]G[\phi]$ の変化は，場の変分 $\delta\phi(x)$ の 1 次までの近似で

$$\begin{aligned}\delta(F[\phi]G[\phi]) &\equiv F[\phi + \delta\phi]G[\phi + \delta\phi] - F[\phi]G[\phi] \\ &= (F[\phi + \delta\phi] - F[\phi])G[\phi + \delta\phi] - F[\phi](G[\phi + \delta\phi] - G[\phi]) \\ &\simeq G[\phi]\delta F[\phi] + F[\phi]\delta G[\phi]\end{aligned}$$

となる．両辺にそれぞれ汎関数微分の定義

$$\delta(F[\phi]G[\phi]) = \int d^4x \frac{\delta(F[\phi]G[\phi])}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x),$$

$$\begin{aligned} G[\phi]\delta F[\phi] + F[\phi]\delta G[\phi] &= G[\phi] \int d^4x \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x) + F[\phi] \int d^4x \frac{\delta G[\phi]}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x) \\ &= \int d^4x \left(G[\phi] \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} + F[\phi] \frac{\delta G[\phi]}{\delta\phi(x)} \right) \delta\phi(x) \\ &\quad (\because F[\phi], G[\phi] \text{ は } x \text{ に依らない}) \end{aligned}$$

を代入し，再び被積分関数における $\delta\phi(x)$ の係数を比較すると，式(177)を得る．式(178)の証明も同様に行える．場の変分 $\delta\phi(x)$ に伴う1次の変化量

$$\delta f(F[\phi]) = f(F[\phi + \delta\phi]) - f(F[\phi]) = f(F[\phi] + \delta F[\phi]) - f(F[\phi]) \simeq \frac{\partial f(F[\phi])}{\partial F[\phi]} \delta F[\phi]$$

の両辺に，汎関数微分の定義

$$\delta f(F[\phi]) = \int d^4x \frac{\delta f(F[\phi])}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x),$$

$$\frac{\partial f}{\partial F} \delta F[\phi] = \frac{\partial f}{\partial F} \left(\int d^4x \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x) \right) = \int d^4x \frac{\partial f}{\partial F} \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x) \quad \left(\because \frac{\partial f}{\partial F} \text{ は } x \text{ に依らない} \right)$$

を代入し，やはり被積分関数における $\delta\phi(x)$ の係数を比較すると，式(178)を得る．
 続いて式(179)を証明する．通常関数と同じ意味で変数 x (特定の時空点) にも依存する場 ϕ の汎関数 $G_x[\phi]$ を考える．汎関数微分の定義より

$$\begin{aligned}\delta F[G_x[\phi]] &= \int d^4z \frac{\delta F[G_x[\phi]]}{\delta\phi(z)} \delta\phi(z), \\ \delta F[G_x[\phi]] &= \int d^4y \frac{\delta F[G_x[\phi]]}{\delta G_y[\phi]} \delta G_y[\phi] = \int d^4y \frac{\delta F[G_x[\phi]]}{\delta G_y[\phi]} \left(\int d^4z \frac{\delta G_y[\phi]}{\delta\phi(z)} \delta\phi(z) \right) \\ &= \int d^4z \left(\int d^4y \frac{\delta F[G_x[\phi]]}{\delta G_y[\phi]} \frac{\delta G_y[\phi]}{\delta\phi(z)} \right) \delta\phi(z)\end{aligned}$$

であり，2式を比較すると式(179)が得られる．

最後に式(180): $F[\phi] \equiv \int d^4x f\{\phi(x)\}$ の形の汎関数に対して

$$\begin{aligned}F[\phi + \delta\phi] &= \int d^4x f\{\phi(x) + \delta\phi(x)\} = \int d^4x \left[f\{\phi(x)\} + \frac{\partial f\{\phi(x)\}}{\partial\phi(x)} \delta\phi(x) \right] \\ &= F[\phi] + \int d^4x \frac{\partial f\{\phi(x)\}}{\partial\phi(x)} \delta\phi(x), \quad \therefore \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} = \frac{\partial f\{\phi(x)\}}{\partial\phi(x)} : (181)\end{aligned}$$

を得る [22, p.314].

■連続極限の公式(185): $\delta_{jj'}/\Delta V \rightarrow \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$ の説明

各格子点 j で定義された量 f_j が連続極限で場の量 $f(\boldsymbol{x})$ に移行するものとする、恒等式

$$f_j = \sum_{j'} f_{j'} \delta_{jj'}$$

は式(185): $\delta_{jj'}/\Delta V \rightarrow \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$ の下で、デルタ関数を定義付ける正しい式

$$f(\boldsymbol{x}) = \int f(\boldsymbol{x}') \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') d^3x'$$

に移行する．ここから公式(185)が正当化される．なおデルタ関数は引数の逆数の次元を持つため、式(185)は確かに両辺の次元が一致していることにも注意しよう．

3.1.2項の原稿

ここで汎関数微分を導入・復習しておこう． D 次元の空間(または時空)における場 $\phi \equiv \{\phi_r\}$ ないし座標 x の関数 $\phi_r(x)$ を考える．ここに r は場の種類をラベルする添字である．このとき ϕ の汎関数 $F[\phi]$ とは平たく言えば，関数 $\phi(x)$ の“関数”のことである．また場 $\phi_r(x)$ の変化 $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$ に伴う汎関数 $F[\phi]$ の1次の変化を式(174)のように書いて汎関数微分 $\delta F/\delta\phi_r$ を定義する．定義式(174)より，汎関数微分 $\delta F/\delta\phi_r$ は表記の見かけ通りに F を ϕ_r で割った次元を持つのではなく，それをさらに長さ L の D 乗で割った次元 $\frac{1}{L^D} \times \frac{[F]}{[\phi]}$ を持つことに注意しよう．ここで特に汎関数 F が場 ϕ_r の時空点 y での値 $\phi_r(y)$ を与えるような“関数”である場合を考えよう．このとき $F[\phi] = \phi_r(y)$ なので，上式(174)から有用な公式(175)が見出される [22, pp.132–134].

さらに汎関数微分の有用な公式を列挙する．ただし簡単のため以下では $D = 4$ 次元の空間(時空)における単一の場 $\phi(x)$ の汎関数 F, G を考える．定義式(174)に基づき，汎関数微分は線形性(176)，Leibniz則(177)，連鎖律(178),(179)を満たすことを証明できる．また特に場の量 $f(\phi)$ の空間積分(180)の形の汎関数に対しては，汎関数微分を微分に置き換える公式(181)が成り立つ(以上，導出スライド参照) [22, pp.314–315].

最後に，場の理論では微分の代わりに汎関数微分を用いて Poisson 括弧を定義するのが自然であることを，ここで説明しておこう．引き続き平坦な時空上の場 $\phi = \{\phi_r\}$ に対する理論を考える(添字 r は場の種類のラベル)．場の理論では系のラグランジアンを体

積積分(182)の形に書いてラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ が定義される．このとき便宜的に格子点 x を中心とする体積 ΔV のセル(胞)の集まりへと空間を分割すると，言わば体積要素 ΔV の持つ場のラグランジアンを $\mathcal{L}\Delta V$ と見なしていることになる．さらに空間の各格子点 x における場の値 ϕ_r を力学変数と見ると，1つの格子点の占める体積 ΔV のセルに含まれる場の運動量は $\partial(\mathcal{L}\Delta V)/\partial\dot{\phi}_r$ と表されるため，場の運動量密度は式(183)の π_r に同定できる．これらの解釈の下で，言わば単位体積当たりのハミルトニアンとして，ハミルトニアン密度を式(183)の $\mathcal{H}$ で定義することが動機付けられる．さらに格子点 x, x' を中心に持つセルをそれぞれ番号 j, j' でラベルすると，力学変数 ϕ_r と共役な運動量 $\pi_r\Delta V$ の間の基本的なPoisson括弧は式(184)のように書ける．ただし ϕ どうしや π どうしのPoisson括弧はゼロである．また共役な変数は同時刻 t で評価することに注意しよう．ここで各セルに共通の体積を $\Delta V \rightarrow 0$ とする連続極限をとる．このとき公式(185)が成り立つ(導出スライド参照)，したがって式(186)は場の理論のPoisson括弧(186)に移行する [17, p.35].

ここまでの形式的な議論で，場の理論のPoisson括弧は式(186)を満たさねばならないことが判明した．この要請を満たすには，汎関数微分を用いて，場の理論Poisson括弧を式(187)で定義すれば良い [28, p.183]．実際このとき正準変数間のPoisson括弧は式(186)を満たすことが確かめられる．ただしここでは全ての場が同時刻で評価されており，したがって汎関数微分は3次元空間の場に関して実行されていることに注意せよ．なお定義式(187)に含まれる空間積分は，改めて離散的な格子場の描像に戻れば，全て

の格子点の力学変数にわたる和に由来する操作として理解できる.

3.2 最小作用原理

粒子(質量 m , 電荷 e)と場の発展は作用 [4, p.304, pp.306–308, p.397] [10, pp.115–116]

$$S = - \sum mc \int ds - \sum \frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu - \frac{1}{16\pi c} \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \\ - \frac{c^3}{16\pi G} \int (G^* + 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x. \quad (G : \text{万有引力定数}, \Lambda : \text{宇宙定数}) \quad (188)$$

の下で, 最小作用原理から決まる (古典的な “万物の理論”). ここに

$$G^* \equiv g^{\mu\nu} (\Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\sigma\rho}). \quad (189)$$

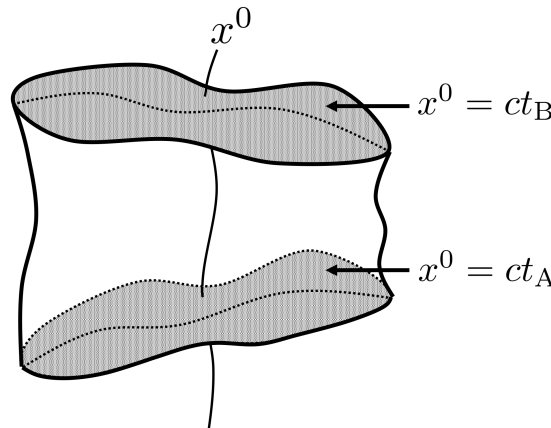


図15 作用(188)の積分範囲

式(164)で定義した電流密度 j^μ を用いると，電磁場と粒子の相互作用項は

$$S_{\text{mf}} \equiv - \sum \frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu = - \frac{1}{c^2} \int j^\mu A_\mu \sqrt{-g} d^4x. \quad (190)$$

等価的に純粋な重力場に対して Einstein–Hilbert 作用

$$S_{\text{EH}} = - \frac{c^3}{16\pi G} \int (R + 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x \quad (191)$$

を用いても良い．他方で G^* は

- R と対照的にスカラーではないものの，
- 自由電磁場項 $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ と同様に場の強度 Γ の2次であり，ポテンシャル $g_{\mu\nu}$ の1階微分までを含む
→ 場の方程式は2階の微分方程式 ($\leftrightarrow$ 古典的因果律).

3.2節の式の導出など

■場を基調とした電磁場と粒子の相互作用項(190)の導出
電流密度の定義式(164):

$$j^\mu(x) = \sum_a \frac{e_a c}{\sqrt{-g(x)}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \frac{dx_a^\mu}{dx^0}$$

を用いると(a は粒子番号),

$$\begin{aligned} S_{\text{mf}} &\equiv - \sum_a \frac{e_a}{c} \int A_\mu(x_a^\mu) \frac{dx_a^\mu}{dx^0} dx^0 \\ &= - \frac{1}{c^2} \int \left(\sum_a \frac{e_a c}{\sqrt{-g(x)}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \frac{dx_a^\mu}{dx^0} \right) A_\mu(x) \sqrt{-g(x)} d^4x \\ &= - \frac{1}{c^2} \int j^\mu(x) A_\mu(x) \sqrt{-g(x)} d^4x : (190). \end{aligned}$$

3.2節の原稿

これだけの準備をして，古典的な“万物の理論”を原理として提示する．古典物理学において自然界は粒子と場（電磁場と重力場）から成り，粒子と場は相互作用しながら決定論的に発展する．原理的には系の発展は最小作用原理から決定され，したがって自然の振舞いは，作用 S の表式に完全に含まれていると言える．作用 S は式(188)で与えられる [4, p.304, pp.306–308] [10, pp.115–116]．ただし電磁気学の単位系として Gauss 単位系を用いている．また作用(188)右辺第1,2項の積分は与えられた座標時間 $t = t_A, t_B$ の間の粒子の軌道に沿って行う．さらに質量 m や電荷 e の値は一般に粒子ごとに異なり， $\sum$ は粒子ごとに定義された表式の全粒子にわたる和を表し，右辺第2項の A_μ は粒子の位置で評価するものと約束する．（この理解の下で，しばしば煩わしい粒子番号の表記を省くのが便利である．）右辺第3,4項の積分は図15の時刻 $t = t_A, t_B$ に挟まれた“円柱状の”領域に渡って行う．“円柱”の“側面”は空間の無限遠にあり，ここでは場の値はゼロになるものと仮定する．第4項は純粋な重力場の項であり，その被積分関数 G^* は場の強度 Γ の2次の量(189)として定義される．

式(164)で定義した電流密度の4元ベクトル j^μ を用いると，電磁場と粒子の相互作用項は場を基調とした表現(190)に書き換えられる ([導出スライド参照](#))．

さて，作用 S の表式(188)の段階で理論の共変性を考察することができる．作用の自由粒子に対する項における世界距離 ds ，相互作用項における内積 $A_\mu dx^\mu$ ，自由電磁場の項における $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ はいずれもスカラーであり，固有体積要素 $\sqrt{-g}d^4x$ もまた不変量で

ある．他方で第4項の重力場項における G^* そのものはスカラーではない．しかし後で見ると、重力場の作用 S_g として G^* をスカラー曲率 R に置き換えた Einstein–Hilbert 作用 (191) を用いても、計量テンソルの変化に伴う変分 δS_g は変わらない^{*50}．すると作用の変分は座標系に依らない量となるので、最小作用原理は座標系に依らない意味を持ち、また作用が極値(停留値)をとる条件に他ならない運動方程式も座標系の変更によって形を変えない．実際、後で導く場と粒子の運動方程式は共変なテンソル方程式となっていることが明白に見て取れる．

そこで Einstein–Hilbert 作用 (191) の代わりに、 G^* の積分 (188) を第1義的な作用に採用する動機を説明する．確かに Einstein–Hilbert 作用とは対照的に、 G^* の積分は作用の重力場項そのものがスカラーとなることを保証しない．ただし R は $g_{\mu\nu}$ の2階導関数を含む．これに対し G^* は場 $g_{\mu\nu}$ とその1階導関数だけを含むことになり、自由電磁場のラグランジアン密度 $-\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ が場 A_μ の1階導関数だけを含むこととの類似性が確保される．しかもこのとき場の方程式は時間に関して2階の微分方程式となる．このため場とその時間変化率の初期値が与えられれば、その後の場の時間発展が完全に決まり、古典的因果律が明確に保証される^{*51}．

^{*50} そして粒子の座標や電磁場の変化に伴う変分はもちろん、 $\delta S_g = 0$ である．

^{*51} 厳密には古典的因果律が満たされるには、さらに加速度を座標と速度について解いて状態の時間発展を逐次的に求められる必要がある．例えば Lagrange 方程式に従う有限自由度の力学系では、一般化加速度に掛かるラグランジアン の Hesse 行列が逆行列を持てば良い (3.2.3 項の導出スライド) [5, p.105]．

3.2.1 物質のエネルギー・運動量テンソル

作用(188)における粒子系と自由電磁場のラグランジアン密度は

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}_{\text{m}}(x) &= \int \left\{ - \sum_a \left(m_a c^2 \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu(a) \dot{x}^\nu(a)} + e_a A_\mu(x) \dot{x}^\mu(a) \right) \delta^4(x - x(a)) \right\} d\tau_a, \\ \tilde{\mathcal{L}}_{\text{f}}(x) &= - \frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta}(x) F_{\gamma\delta}(x) g^{\alpha\gamma}(x) g^{\beta\delta}(x) \sqrt{-g(x)}. \end{aligned} \quad (192)$$

一般公式(173)を適用すると、エネルギー・運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu}^{(\text{m})}(x) = \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \sum_a m_a c \int \dot{x}_\mu(a) \dot{x}_\nu(a) \delta^4(x - x(a)) d\tau_a, \quad (193)$$

$$T_{\mu\nu}^{(\text{f})}(x) = \frac{1}{4\pi} \left(-F_{\mu\alpha}(x) F_\nu{}^\alpha(x) + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta}(x) F^{\alpha\beta}(x) g_{\mu\nu}(x) \right). \quad (194)$$

■ 粒子系のエネルギー・運動量テンソル

式(193)は2階共変テンソルとなっており、Minkowski時空では

$$T^{(\text{m})\mu\nu}(x) = \sum_a m_a \dot{x}^\mu(a) \dot{x}^\nu(a) \sqrt{1 - \left(\frac{v_a}{c}\right)^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)). \quad (195)$$

相対論的な粒子のエネルギーと運動量の表式 $\mathcal{E}_a = \frac{m_a c^2}{\sqrt{1-(v_a/c)^2}}$, $\mathbf{p}_a = \frac{m \mathbf{v}_a}{\sqrt{1-(v_a/c)^2}}$ を
思い出すと，式(195)の時間-時間成分

$$T^{(\text{m})00}(x) = \sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{1-(v_a/c)^2}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))$$

は粒子系のエネルギー密度と解釈でき，また時間-空間成分

$$T^{(\text{m})0i} = \sum_a \frac{m_a c v_a^i}{\sqrt{1-(v_a/c)^2}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))$$

は一般的な関係

$$T^{0i} = c \times (\text{運動量密度})^i = \frac{1}{c} \times (\text{エネルギー流束})^i \quad (196)$$

を満たす．最後に空間-空間成分

$$T^{(\text{m})ij} = \sum_a \frac{m_a v_a^i v_a^j}{\sqrt{1-(v_a/c)^2}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))$$

は“運動学的”応力となっている(粒子間相互作用の寄与はない).

■電磁場のエネルギー・運動量テンソル [4, p.91–92]

$T_{\mu\nu}^{(f)}$ の式(194)はMinkowski時空($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$)では, 古典電磁気学でよく知られた表式に帰着し, その成分はエネルギーの密度と流束

$$\begin{aligned} T^{(f)00} &= W \equiv \frac{E^2 + B^2}{8\pi}, \\ cT^{(f)0i} &= S^i \equiv \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i : \text{Poyntingベクトル}, \end{aligned} \quad (197)$$

およびMaxwellの応力テンソル

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left\{ -E_i E_j - B_i B_j + \frac{1}{2} \delta_{ij} (E^2 + B^2) \right\} \quad (198)$$

を与える.

■位置エネルギー $\sum e\phi$ の考察

$$T^{00} = T^{(f)00} + T^{(p)00} = \sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - (v_a/c)^2}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) + \frac{E^2 + B^2}{8\pi}$$

には見かけ上、位置エネルギー $\sum e\phi$ が含まれず、静電場に対しては

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV &= -\frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \cdot \nabla \phi dV = \frac{1}{8\pi} \int \phi \nabla \cdot \mathbf{E} dV \quad (\text{部分積分した}) \\ &= \frac{1}{2} \int \rho \phi dV = \frac{1}{2} \sum_a e_a \phi(\mathbf{r}_a) \quad (\because \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho) \end{aligned} \quad (199)$$

の関係を通じて、静電場のエネルギーとも見なし得る [4, pp.101–102].

一般に作用(188)に対応するラグランジアンは $L = L_m + L_{mf} + L_f$,

$$\begin{aligned} L_m &\equiv - \sum mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, & L_{mf} &\equiv \sum \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - \sum e\phi, \\ L_f &\equiv \int \mathcal{L}_f d^3x, & \mathcal{L}_f &\equiv -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (200)$$

粒子の正準運動量 $\boldsymbol{P}$ とハミルトニアン $H \equiv \mathcal{H}_m + \mathcal{H}_{mf}$ は [4, pp.51–52,p.69]

$$\boldsymbol{P} \equiv \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \boldsymbol{p} + \frac{e}{c} \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{p} \equiv \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} : \text{力学的運動量}, \quad (201)$$

$$H = \sum (\mathcal{E} + e\phi), \quad \mathcal{E} \equiv \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}, \quad (202)$$

$$P^\mu = \left(\frac{H}{c}, \boldsymbol{P} \right) = p^\mu + \frac{e}{c} A^\mu, \quad p^\mu \equiv \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \boldsymbol{p} \right). \quad (203)$$

力学的なエネルギー・運動量 p^μ は，電磁場がない場合と比べて

$$p^\mu = P^\mu \quad \rightarrow \quad p^\mu = P^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \quad (204)$$

と変化する．次に電磁場の運動量密度とハミルトニアンは

$$\pi^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial \dot{A}_\mu} = -\frac{1}{4\pi c} F^{0\mu}, \quad (205)$$

$$\mathcal{H}_f = \int dV \pi^\mu \dot{A}_\mu - L_f = \int dV \frac{E^2 + B^2}{8\pi} - \sum e\phi. \quad (206)$$

位置エネルギー $\sum e\phi$ は場のエネルギー (206) から差し引かれ, 全エネルギー

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_m + \mathcal{H}_{mf} + \mathcal{H}_f = \sum \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + \int dV \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \quad (207)$$

には (見かけ上) 現れない.

3.2.1 項の式の導出など

■物質系のラグランジアン密度(192)の導出

a 番目の粒子の世界線に沿う線要素の世界間隔は

$$ds_a = \sqrt{g_{\mu\nu}(x(a))dx^\mu(a)dx^\nu(a)} = \sqrt{g_{\mu\nu}(x(a))\dot{x}^\mu(a)\dot{x}^\nu(a)}d\tau_a$$

なので、作用(188)における粒子の項は

$$S_m \equiv - \sum_a m_a c \int ds_a = \frac{1}{c} \int \tilde{\mathcal{L}}_m d^4x,$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_m \equiv - \sum_a m_a c^2 \int \sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu(a)\dot{x}^\nu(a)}\delta^4(x - x(a))d\tau_a$$

となる.

次に $F^{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}F_{\gamma\delta}$ と書くと、作用(188)における電磁場の項は

$$S_f \equiv -\frac{1}{16\pi c} \int F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\sqrt{-g}d^4x = \frac{1}{c} \int \tilde{\mathcal{L}}_f d^4x, \quad \tilde{\mathcal{L}}_f \equiv -\frac{1}{16\pi}g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}\sqrt{-g}$$

となる.

■粒子と電磁場に対するエネルギー・運動量テンソル(193),(194)の導出

準備：計量テンソルの変分に対する公式

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda, \quad \therefore g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\lambda} = -g_{\nu\lambda} \delta g^{\mu\nu}$$

の両辺に $g_{\mu\alpha}$ をかけて μ で和をとると

$$\delta g_{\alpha\lambda} = -g_{\nu\lambda} g_{\mu\alpha} \delta g^{\mu\nu}, \quad \therefore \delta g_{\mu\nu} = -g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \delta g^{\alpha\beta}$$

を得る．ただし $\alpha \rightarrow \mu, \lambda \rightarrow \nu$ とし，ダミー添字を $\mu \rightarrow \alpha, \nu \rightarrow \beta$ と改めた [9, p.146].

ここで計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の任意の関数 $f(g_{\mu\nu})$ を考えると，これは上式より $g_{\mu\nu}$ の変分 $\delta g_{\mu\nu}$ に伴い

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = \frac{\partial f}{\partial g_{\mu\nu}} (-g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu}) \delta g^{\alpha\beta}$$

だけ変化する．一方 $g_{\mu\nu}$ の変分 $\delta g_{\mu\nu}$ に伴い $g^{\alpha\beta}$ が $\delta g^{\alpha\beta}$ だけ変化したとすると，これは $\delta f = \frac{\partial f}{\partial g^{\alpha\beta}} \delta g^{\alpha\beta}$ とも書けるので，これらを等置して

$$\frac{\partial f}{\partial g^{\alpha\beta}} = -g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \frac{\partial f}{\partial g_{\mu\nu}} \quad (208)$$

を得る.

さて、式(192)の $\tilde{\mathcal{L}}_{\text{m}}$ は計量の微分 $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$ を含まないので、

$$T_{\mu\nu}^{(\text{m})} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_{\text{m}}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_{\text{m}}}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right\} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_{\text{m}}}{\partial g^{\mu\nu}}.$$

ここで一般公式(173)の約束に従い $g_{\alpha\beta}$ と $g_{\beta\alpha}$ を独立に扱うと

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_{\text{m}}}{\partial g_{\alpha\beta}} &= - \sum_a m_a c^2 \int \frac{\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu \dot{x}^\mu(a) \dot{x}^\nu(a)}{2 \sqrt{g_{\rho\sigma}(x) \dot{x}^\rho(a) \dot{x}^\sigma(a)}} \delta^4(x - x(a)) d\tau_a \\ &= - \frac{1}{2} \sum_a m_a c \int \dot{x}^\alpha(a) \dot{x}^\beta(a) \delta^4(x - x(a)) d\tau_a. \end{aligned}$$

ただし $\delta^4(x - x(a))$ があるので、 $\sqrt{g_{\rho\sigma}(x) \dot{x}^\rho(a) \dot{x}^\sigma(a)} \rightarrow \sqrt{g_{\rho\sigma}(x(a)) \dot{x}^\rho(a) \dot{x}^\sigma(a)} = c$ とできることに注意した。すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_{\text{m}}}{\partial g^{\mu\nu}} &= - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_{\text{m}}}{\partial g_{\alpha\beta}} \quad (\because \text{式(208)}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_a m_a c \int \dot{x}_\mu(a) \dot{x}_\nu(a) \delta^4(x - x(a)) d\tau_a \end{aligned}$$

なので

$$T_{\mu\nu}^{(m)} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_m}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_a m_a c \int \dot{x}_\mu(a) \dot{x}_\nu(a) \delta^4(x - x(a)) d\tau_a$$

を得る.

次に電磁場のエネルギー・運動量密度

$$T_{\mu\nu}^{(f)} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_f}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_f}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right\} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_f}{\partial g^{\mu\nu}}$$

を考える. 再び $g^{\mu\nu}$ による微分が $g^{\nu\mu}$ を固定して行われることに注意すると

$$F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \sqrt{-g} \frac{\partial g^{\alpha\gamma}}{\partial g^{\mu\nu}} g^{\beta\delta} = F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \sqrt{-g} \delta^\alpha_\mu \delta^\gamma_\nu g^{\beta\delta} = F_{\mu\beta} F_\nu{}^\beta \sqrt{-g},$$

$$F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \sqrt{-g} g^{\alpha\gamma} \frac{\partial g^{\beta\delta}}{\partial g^{\mu\nu}} = F_{\alpha\mu} F^\alpha_\nu \sqrt{-g} = F_{\mu\alpha} F_\nu{}^\alpha \sqrt{-g}$$

$$(\because F_{\alpha\mu} = -F_{\mu\alpha}, F^\alpha_\nu = g^{\alpha\beta} F_{\beta\nu} = -g^{\alpha\beta} F_{\nu\beta} = -F_\nu{}^\alpha),$$

$$F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} = F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \left(-\frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\sqrt{-g}}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}(-gg_{\lambda\rho}\delta^\lambda_\mu\delta^\rho_\nu) \\
&\quad (\because \text{式(86)} : dg = -gg_{\lambda\rho}dg^{\lambda\rho}) \\
&= -\frac{\sqrt{-g}}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

なので

$$T_{\mu\nu}^{(f)} = \frac{1}{4\pi} \left(-F_{\mu\alpha}F_\nu{}^\alpha + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g_{\mu\nu} \right)$$

となる.

注意：相互作用項の寄与 最小作用原理から Einstein 方程式を導出する手順に従えば、電磁場を含む物質系の全エネルギー・運動量テンソルには相互作用項 (190): $S_{\text{mf}} = -\sum \frac{e}{m} \int A_\mu dx^\mu$ の寄与も含めねばならない(これ自体は誤りではない [2, p.38]). ところが電磁ポテンシャルは第1義的には共変ベクトル A_μ であって、 $A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu$ は事後的・副次的に定義される量と考えれば*52, 対応するラグランジア

*52 このことはたとえ場の古典論の範囲では正当化し得ずとも、Yang-Mills理論, 例えば量子電磁力学ではゲージ場 A_μ が共変微分 $D_\mu = \partial_\mu - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu$ (e は素電荷)における接続として導入されることから強く動機付けられる [17, p.82] [23, pp.140–142]. またこの措置と整合して、我々は $T_{\mu\nu}^{(f)}$ を計算する際に $F_{\mu\nu}$ における A_μ の計量依存性をあえて考慮していない.

ン密度は計量に依らないので*⁵³，結果的にエネルギー・運動量テンソルの寄与はゼロになる．したがって物質系の全エネルギー・運動量テンソルは単なる和

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(m)} + T_{\mu\nu}^{(f)} \quad (209)$$

である [9, p.165]．この結論は概念的にも納得がいく．

*⁵³ 式(190)最右辺から読み取られるラグランジアン密度 $\tilde{\mathcal{L}}_{\text{em}} \equiv -\frac{1}{c} j^\mu A_\mu \sqrt{-g}$ を採用した場合にも， $\sqrt{-g}$ の因子は j^μ の表式における分母のそれと相殺する．

■粒子系のエネルギー・運動量テンソル(195)の導出

Minkowski時空で $\sqrt{-g} = 1$, また座標で測った粒子の速度を $v_a = dx^a/dt$ とすると固有時間は $d\tau_a = \sqrt{1 - (v_a/c)^2}dt$ と表されるので, 物質のエネルギー・運動量テンソル(193)は

$$\begin{aligned} T^{(m)\mu\nu}(x) &= \sum_a m_a c \int \dot{x}^\mu(a) \dot{x}^\nu(a) \delta^4(x - x(a)) d\tau_a \\ &= \sum_a m_a c \int \dot{x}^\mu(a) \frac{dx^\nu(a)}{dx^0(a)} \delta^4(x - x(a)) dx^0(a) \\ &= \sum_a m_a \dot{x}^\mu(a) \frac{dx^\nu(a)}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \\ &= \sum_a m_a \dot{x}^\mu(a) \dot{x}^\nu(a) \sqrt{1 - \left(\frac{v_a}{c}\right)^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) : (195) \end{aligned}$$

と書き換えられる.

■エネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ の物理的な意味(式(196)) [4, pp.90–91]

T^{00} をエネルギー密度, $\frac{1}{c}T^{i0}$ を運動量密度と解釈すると,
保存則 $\partial_\alpha T^{\mu\alpha} = 0$ はこのとき

$$\partial_\alpha T^{0\alpha} = 0 \quad \rightarrow \quad cT^{0i} : \text{エネルギー流束},$$

$$\partial_\alpha T^{i\alpha} = 0 \quad \rightarrow \quad T^{ij} : \text{応力テンソル} \quad (i : \text{力の向き}, j : \text{面})$$

を意味する^{*54}. よって一般的な関係(196):

$$T^{0i} = c \times (\text{運動量密度})^i = \frac{1}{c} \times (\text{エネルギー流束})^i$$

が見出される.

^{*54} 保存則 $\partial_\alpha T^{i\alpha} = 0$ から分かるように, 応力 $T^{ij} \equiv \sigma^{ij}$ は x^j 軸に垂直な単位面積を介して, x^j 座標の小さい側から大きい側へ及ぼす力の第 i 成分である. このとき例えば流体を想定すると, 圧力は $\sigma^{ij} = p\delta^{ij}$ であり, 右辺に負号は現れない. 有限の領域 V に働く力は, 発散定理

$$\int_V (-\partial_j \sigma^{ij}) dV = \int_S (-\sigma^{ij} n_j) dS$$

(n_j は面の法単位ベクトル)が意味するように, V の表面 S に働く応力によってもたらされる.

■エネルギー・運動量テンソル(194)のMinkowski時空での成分(197),(198)の導出
電磁場のエネルギー・運動量テンソル(194)はMinkowski時空($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$)では、古典電磁気学でよく知られた表式

$$T^{(f)\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(-F^{\mu\rho} F^{\nu}_{\rho} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) \quad (210)$$

に帰着する．ここで $F^{0i} = -E_i$, $F^{ij} = \varepsilon_{ijk} B_k$ を思い出そう^{*55}．このとき

$$F_{ij} F^{ij} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijl} B_k B_l = 2\delta_{kl} B_k B_l = 2B^2, \quad F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 2F_{0i} F^{0i} + F_{ij} F^{ij} = 2(B^2 - E^2)$$

の関係があることに注意しておく．

するとエネルギー・運動量テンソル式(210)の時間-時間成分は、

$$-F^0_{\alpha} F^{0\alpha} = F^{0i} F^{0i} = E^2 \text{ より}$$

$$T^{(f)00} = \frac{1}{4\pi} (-F^0_{\alpha} F^{0\alpha}) + \frac{1}{8\pi} (B^2 - E^2) = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2)$$

^{*55} これはもはや共変な関係ではないので、両辺の添字の上下の不一致は許容される． $F^{\mu\nu}$ の空間添字 $i, j, \dots$ をMinkowski計量で上げ下げするさいには負号が変化するのに対し、電磁場成分 E_i, B_i は単に平坦な計量 δ_{ij}, δ^{ij} で上げ下げして良い．

と計算される．これはよく知られた電磁場のエネルギー密度の表式となっている．また

$$T^{(f)0i} = -\frac{1}{4\pi} F^{0\alpha} F^i_{\alpha} = \frac{1}{4\pi} F^{0j} F^{ij} = \frac{1}{4\pi} E_j \varepsilon_{ijk} B_k = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_i$$

は電磁場のエネルギー流束成分(の $1/c$ 倍)となっている．以上で式(197)が示された．

注意 対称な形に直す前のエネルギー・運動量テンソル [4, p.92]

$$T^{(f)\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \partial^\mu A^\rho F^\nu_{\rho} + \frac{1}{16\pi} \eta^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$$

に対しては，同じ結果は得られない．

さらにエネルギー・運動量テンソル(210)の空間-空間成分は

$$\begin{aligned} T^{(f)ij} &= \frac{1}{4\pi} \left(-F^{i\alpha} F^j_{\alpha} + \frac{1}{4} \eta^{ij} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ -F^{i0} F^{j0} + F^{ik} F^{jk} - \frac{1}{2} \delta_{ij} (B^2 - E^2) \right\} \end{aligned}$$

となる．ここに

$$F^{i0} F^{j0} = E_i E_j, \quad F^{ik} F^{jk} = \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jkm} B_l B_m = (\delta_{ij} \delta_{lm} - \delta_{im} \delta_{lj}) B_l B_m = \delta_{ij} B^2 - B_i B_j$$

を代入すると,

$$T^{(\text{f})ij} = \frac{1}{4\pi} \left\{ -E_i E_j - B_i B_j + \frac{1}{2} \delta_{ij} (E^2 + B^2) \right\} : (198).$$

■ハミルトニアン(202)の導出

求めるハミルトニアンをひとまず速度 $\boldsymbol{v}$ によって表すと,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_m + \mathcal{H}_{mf} &= \sum \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v} - (L_m + L_{mf}) \\ &= \sum \left(\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + \frac{e}{c} \boldsymbol{A} \right) \cdot \boldsymbol{v} + \sum mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - \sum \left(\frac{e}{c} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v} - e\phi \right) \\ &= \sum \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + e\phi \right)\end{aligned}$$

となる．ここで粒子の力学的運動量の表式 $\boldsymbol{p} \equiv \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$ を粒子の速度について逆に

解くと $\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{p^2}{m^2c^2 + p^2}$ となるので，ハミルトニアンは運動量 $\boldsymbol{p}$ を用いて式(202):

$$\mathcal{H}_m + \mathcal{H}_{mf} = \sum \left(\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} + e\phi \right)$$

のように書き換えられる．

■電磁場の運動量密度(205): $\pi^\mu = -\frac{1}{4\pi c} F^{0\mu}$ の導出

$\mathcal{L}_f \equiv -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, $\pi^\lambda \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial \dot{A}_\lambda} = -\frac{1}{16\pi c} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ において

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} F^{\mu\nu} &= F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}) \\ &= (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu}) \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} F_{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} F_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

に注意すると,

$$\begin{aligned} \pi^\lambda &= -2 \times \frac{1}{16\pi c} \left\{ \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} F_{\mu\nu} \right\} F^{\mu\nu} \\ &= -2 \times \frac{1}{16\pi c} \left\{ \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \right\} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= -2 \times \frac{1}{16\pi c} (\delta^0_\mu \delta^\lambda_\nu - \delta^0_\nu \delta^\lambda_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= -\frac{1}{4\pi c} (\partial^0 A^\lambda - \partial^\lambda A^0) = -\frac{1}{4\pi c} F^{0\lambda} : (205). \end{aligned}$$

■ ハミルトニアン (206) の導出

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_f &= \int dV \pi^\mu \dot{A}_\mu - L_f \\ &= \frac{1}{4\pi} \int dV \left(F^{\mu 0} \partial_0 A_\mu + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \quad \left(\because \pi^\mu = \frac{1}{4\pi c} F^{\mu 0} : (205) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int dV \left(\frac{E^2 + B^2}{2} + \mathbf{E} \cdot \nabla \phi \right) \\ &\quad \left(\because F^{\mu 0} \partial_0 A_\mu = E_i (-\partial_0 A_i) = \mathbf{E} \cdot (\mathbf{E} + \nabla \phi), F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(B^2 - E^2) \right) \\ &= \int dV \frac{E^2 + B^2}{8\pi} - \sum e\phi : (206).\end{aligned}$$

ただし最後の等号では部分積分により $\mathbf{E} \cdot \nabla \phi \rightarrow -(\nabla \cdot \mathbf{E})\phi = -4\pi\rho$ とした.

3.2.1 項の原稿

最小作用原理から導かれる運動方程式の説明に取り掛かる前に、3.1項で予告したように式(188)の作用に一般公式(173)を適用し、物質のエネルギー・運動量テンソルを具体的に求めよう。作用(188)の粒子に対する項と自由電磁場の項に対して、式(172)で定義した(密度化した)ラグランジアン密度 $\tilde{\mathcal{L}}$ を読み取ると、それぞれ順に式(192)のようになる(導出スライド参照) [9, p.163]。ただしここでは a 番目の粒子の座標を $x^\mu(a)$ 、固有時間 τ_a による微分を $\dot{x}^\mu(a) \equiv \frac{dx^\mu(a)}{d\tau_a}$ と表記している。これらに物質系のエネルギー・運動量テンソルの一般公式(173)を適用すると、粒子系と電磁場のエネルギー・運動量テンソルはそれぞれ式(193),(194)のように求まる(導出スライド参照) [9, p.165]。特に粒子系のエネルギー・運動量テンソル(193)は、4元電流密度(164)が反変ベクトルであるのと同じ理由で、2階共変テンソルとなっていることが見て取れる。またMinkowski時空では式(193)を式(195)のように書き換えると(導出スライド参照)。その物理的な意味を解釈するのが容易となる。

実際、相対論的な粒子のエネルギーと運動量の表式を思い出すと、式(195)の時間-時間成分 $T^{(m)00}$ は粒子系のエネルギー密度となっていることが明白である。また時間-空間成分 $T^{(m)0i}$ は、エネルギー流束の第 i 成分の $1/c$ 倍とも、運動量密度の第 i 成分の c 倍とも解釈できる。このように、エネルギー・運動量テンソルを意味付ける関係(196)は常

に一般論として成り立つものの(導出スライド参照), 粒子系に対しては見易い^{*56}. 最後に空間-空間成分 $T^{(m)ij}$ は応力と解釈できる. 実際この $T^{(m)ij}$ は運動量の流束となっている. ところが単位時間における単位体積への運動量の流入は, 巨視的には応力による運動量変化として捉えられるから, $T^{(m)ij}$ は応力テンソルを与える [14, pp.116–119]. 実にこれは一般論(196)の導出スライドで(暗に)用いた論法である. また一般に空間に固定した領域内に含まれる流体の運動量変化は, 周りの流体から受ける力積と, 流入する流体が持つ運動量によってもたらされる. これらに応じて応力は, 粒子間相互作用の寄与と運動論的応力に分離される. 平衡状態では理想気体の状態方程式で記述される圧力は運動論的応力に起因し [24, pp.117–120], 粒子間相互作用は状態方程式に対する補正を与えるのに対し, 例えば粉体系では粒子配置の変化に乏しい場合, 粒子間の接触応力が主要な寄与となる [25, pp.48–53,p.68]. さらに粒子系がゼロでない流体力学的な平均速度を持つ場合に現れる, 速度勾配に起因する粘性応力もまた, ミクロには粒子の拡散に伴う運動量の流入に起源を持つ. 実際, 濃度勾配のある粒子系では拡散に伴い, 正味では高密度側から低密度側に粒子が移動する. このアイデアを定量的に表現すると, 粒子の流れの密度は濃度勾配に比例することが導かれる. 全く同様に粒子が流体の速度に馴染んだ運動量を運ぶと考えれば, 粘性応力は速度勾配に比例することが導かれ, 流体の歪速度と応力のマクロな関係が再現される [26, pp.45–49]. ここでは場を介

^{*56} 同じ関係が場に対しても一般に成り立つことは, 場が粒子から構成されていることを示唆していると言えることもできる.

した粒子間相互作用を考慮していないので，応力は純粋に運動学的応力となっている．

次に電磁場のエネルギー・運動量テンソル(194)はMinkowski時空($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$)では，古典電磁気学でよく知られた表式に帰着する；その時間-時間成分と時間-空間成分は電磁場のエネルギーの密度と流束(197)を与える．ここにエネルギー流束 $S = \{S^i\}$ は Poynting ベクトルと呼ばれる [4, p.86]．また空間-空間成分はMaxwellの応力テンソル(198)になる (導出スライド参照)．これは電荷がなくとも，電磁場を持つ空間の体積要素の間には応力が作用していることを意味する．

ところで全エネルギー・運動量テンソル(209)の時間-時間成分には見かけ上，位置エネルギー $\sum e\phi$ の密度が含まれない．これは一見すると疑問である．関連して悩ましいことに，静電場においては位置エネルギー $\sum e\phi$ は式(199)の関係を通じて，静電場のエネルギーとも見なし得る [4, pp.101–102]．このことは粒子と場のエネルギーの概念的な線引きが人為的であることを示唆している．

この点を明快にするために，一般に(Minkowski時空において)粒子と場のエネルギーをハミルトニアンとして改めて計算しよう．作用(188)からラグランジアンを読み取ると，式(200)のようになる．

したがって粒子の正準運動量は式(201)のように計算され，力学的な運動量に対して付加的な場の寄与を伴う．次いでハミルトニアンを計算しよう．手始めに自由電磁場の項

を無視すると、ラグランジアン $L_m + L_{mf}$ の Legendre 変換によって得られる荷電粒子のハミルトニアンは式(202)のように求まる (導出スライド参照). ここに $\mathcal{E}$ は個々の粒子の(運動)エネルギーである. これらは運動量4元ベクトル(203)にまとめられる [4, p.69]. したがって電磁場と相互作用する単一の粒子の力学的なエネルギー・運動量 p^μ は, 電磁場がない場合と比べて式(204)のように変化する [4, pp.51–52]. 次に自由電磁場の項を含めた完全な理論を考える. 粒子に対するラグランジアン $L_m + L_{mf}$ は電磁場の配位変数の時間微分 $\dot{A}_\mu$ を含まないので(ドットは時間 t による微分), 場の運動量密度に寄与しない. よって自由電磁場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}_f$ を用いて, 電磁場の運動量密度は式(205)のように計算できる (導出スライド参照). すると全ハミルトニアン $\mathcal{H}$ には, 付加的な場の項(206)が現れる (導出スライド参照). これは位置エネルギー $\sum e\phi$ を粒子の担うエネルギーと見なして式(202)に含めるならば, 同じ量を場のエネルギーからは差し引かねばならないことを意味している.

このため粒子と場の全エネルギーの表式(207)の中で粒子の“位置エネルギー” $\sum e\phi$ は相殺し, (見かけ上)現れない. またハミルトニアン(207)は期待されるように, 冒頭のエネルギー密度 T^{00} の空間積分となっている.

3.2.2 運動方程式

■粒子の運動方程式

作用(188)に対する変分原理より, 運動方程式は [4, p.286]

$$mc \frac{Du^\mu}{ds} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu \quad \text{i.e.} \quad m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -m \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} + \frac{e}{c} F^{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{d\tau}. \quad (211)$$

Du^μ は粒子の4元速度ベクトル(136): $u^\mu \equiv \frac{1}{c} \frac{dx^\mu}{ds}$ に対し式(65),(66)で定義される.

● $F^{\mu\nu} = 0$ のとき

– 式(211)は $S_m \equiv -mc \int ds$ の停留値を与える測地線の方程式(81)になる.

– Christoffel記号 $\leftrightarrow$ 重力場の強度, 計量 $\leftrightarrow$ 重力ポテンシャル ϕ

* 弱い重力場(背景の Minkowski 時空上の場)

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (212)$$

* 非相対論的極限 $\phi/c^2 \ll 1, v/c \ll 1$ で粒子の運動方程式は

$$\dot{v} = -\nabla\phi \quad (213)$$

と表される [4, p.252].

そこで同じ極限で

$$S_m \rightarrow S = \sum \int dt \left(-mc^2 + \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 - m\phi \right) \quad (214)$$

を要求すると,

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} \quad (215)$$

が見出される [4, p.275].

- Minkowski時空では, 運動方程式(211)は

$$m \frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{d\tau}, \quad \therefore m \frac{dp^\mu}{dt} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{dt} \quad (216)$$

と書き換えられ [4, p.68], ここに $p^\mu \equiv m \frac{dx^\mu}{d\tau}$ は粒子の4元運動量である.

– 式(216)の空間成分は

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e \left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B} \right) \quad (217)$$

を与え [4, p.54], 非相対論的極限 $\boldsymbol{p} = m \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \rightarrow m\boldsymbol{v}$ で

Newtonの運動方程式に移行する.

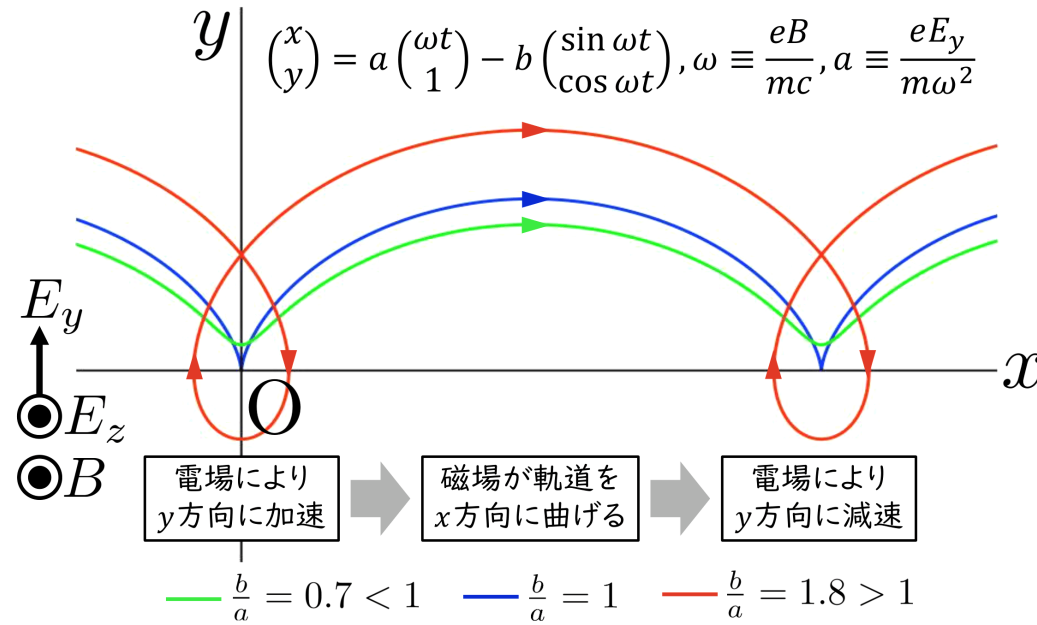


図16 一様不変な電磁場中の荷電粒子のトロコイド運動 [4, pp.63–64] [19, pp.134–136]

– 粒子の運動エネルギー –

$$\mathcal{E}_{\text{kin}} \equiv cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \left(= \sqrt{(mc^2)^2 + (cp)^2} \right) \quad (218)$$

に対し，式(216)の時間成分は仕事とエネルギーの関係になる [4, pp.54–55]：

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{kin}}}{dt} = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}. \quad (219)$$

■ Maxwell 方程式 作用(188)に対する変分原理より, 場の方程式は [4, p.286]

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -\frac{4\pi}{c}j^\mu. \quad (220)$$

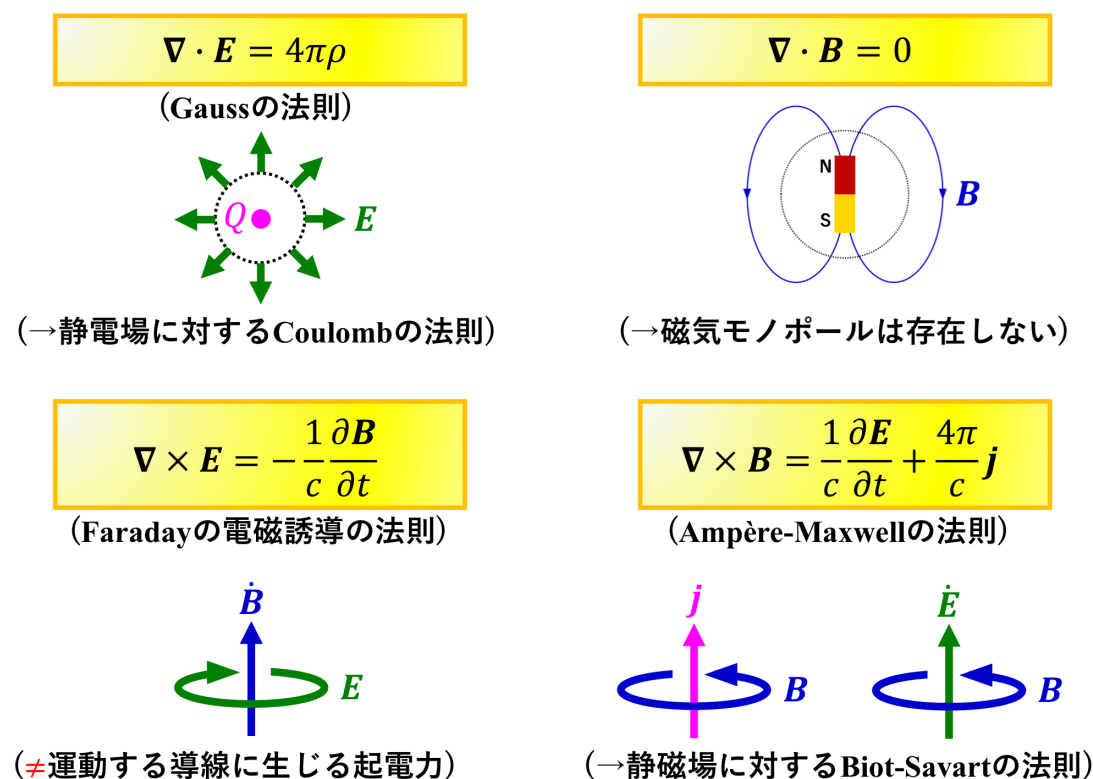
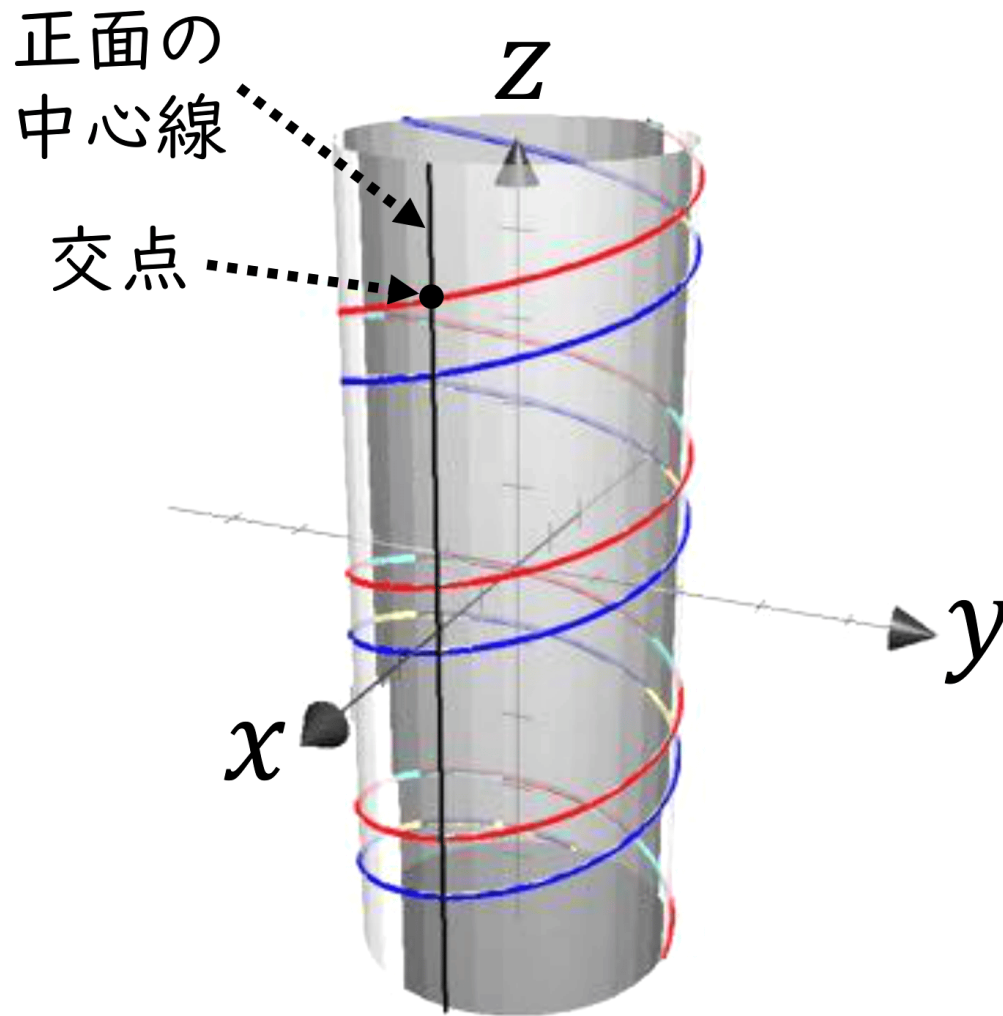


図17 Maxwell 方程式 $\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c}j^\mu$, $\partial_\nu F^{*\mu\nu} = 0$



円偏光において z 軸上の電場と磁束密度

$$\mathbf{E} = a \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t) \\ \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = a \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

は水平面 $z = \text{const.}$ 内で回転し、先端は常螺旋を描く. 方位角 $\phi = 0$ の正面の中心線と螺旋の交点(左図)の高さ z , すなわち位相

$kz - \omega t = 0, \quad kz - \omega t + \frac{\pi}{2} = 0$
を満たす高さ z は, 位相速度

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} (= c)$$

で上昇する. この様子は床屋のサインポールに似ている.

図18 円偏光と床屋のサインポール [4, pp.130–131]

■ Einstein 方程式 [4, pp.306–309,p.397]

作用(188)に対する変分原理より, Einstein 方程式

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad \left(G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R : (100) \right) \quad (221)$$

- $T_{\mu\nu}$ は電磁場を含む物質のエネルギー・運動量テンソル(209)
- $\Lambda \sim 10^{-56} \text{cm}^{-2}$ は宇宙定数 [27, p.68] [1, p.58]
暗黒エネルギーに関係付けて解釈する必要はない [27, p.69] [1, p.4, pp.58–69]

Einstein 方程式 ($\Lambda = 0$) は重力の弱い極限で Newton の重力理論

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho, \quad \therefore \phi = -\frac{Gm}{r} \quad (222)$$

を含んでいる (ρ は局所慣性系での質量密度) [4, pp.329–330] [9, pp.174–175].

Bianchi の恒等式 (101): $G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ より, Einstein 方程式 (221)

→ 物質系の (近似的な) エネルギー・運動量保存則 (173): $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$.

したがって一連の運動方程式は独立ではない [4, p.309] [10, p.117].

実際，局所慣性系で運動方程式

$$m_a \ddot{x}^\mu(a) = \frac{e_a}{c} F^{\mu\nu}(x(a)) \dot{x}_\nu(a), \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (223)$$

からエネルギー・運動量保存則

$$\partial_\nu \left(T^{(f)\mu\nu} + T^{(m)\mu\nu} \right) = 0 \quad (224)$$

が導かれる [4, pp.93–94] [9, p.107]. 導出過程で得られる

$$\partial_\nu T^{(f)\mu\nu} = -\frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu, \quad (225)$$

$$\partial_\nu T^{(m)\mu\nu} = +\frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu \quad (226)$$

の第1式(225)の，時間成分($\mu = 0$)と空間成分($\mu = i$)はそれぞれ順に

$$\partial_t \left(\frac{E^2 + B^2}{8\pi} \right) = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \nabla \cdot \mathbf{S}, \quad (227)$$

$$\partial_t \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_i = -\partial_j \sigma_{ij} - \left(\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right)_i \quad (228)$$

を与える [9, pp.72–76].

■重力場の作用の境界項 [1, p.67] [15, pp.52–53]

Einstein–Hilbert 作用 S_{EH} の変分

$$\begin{aligned}\delta S_{\text{EH}} = & -\frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \\ & -\frac{c^3}{16\pi G} \int \partial_\rho \left[(g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\rho_{\mu\nu} - g^{\mu\rho} \delta \Gamma^\nu_{\mu\nu}) \sqrt{-g} \right] d^4x\end{aligned}\quad (229)$$

(ただし $\Lambda = 0$) の最右辺の第2項は、境界の3次元超曲面 Σ にわたる表面積分

$$\delta S_\Sigma = -\frac{c^3}{16\pi G} \int_\Sigma \left[(g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\rho_{\mu\nu} - g^{\mu\rho} \delta \Gamma^\nu_{\mu\nu}) \sqrt{-g} \right] n_\rho dS\quad (230)$$

に書き換えられる (n_ρ は Σ の法単位ベクトル, dS は Σ の面積要素 [14, p.195]).

変分原理の境界条件 $\delta g^{\mu\nu} = 0$ の下では計量の1階微分 $\delta \Gamma^\rho_{\mu\nu} = 0$ が保証されないため、よく定義された変分原理を得るには適当な境界項を加えて作用を修正する必要がある。

アナロジーとして自由粒子系を考える [1, p.35]. 例えば2階微分 $\ddot{q}$ を含む作用

$$S = -\frac{m}{2} \int q \ddot{q} dt \left(= -\frac{m}{2} q \dot{q} \Big|_{\text{boundary}} + \int \frac{m}{2} \dot{q}^2 dt \right) \quad (231)$$

を採れば, その変分は

$$\delta S = -\frac{m}{2} (q \delta \dot{q} - \dot{q} \delta q) \Big|_{\text{boundary}} - m \int \ddot{q} \delta q dt \quad (232)$$

のように $\delta \dot{q}$ を含む境界項を持つ. そこであらかじめ作用に境界項

$$S_{\text{boundary}} = \frac{m}{2} q \dot{q} \Big|_{\text{boundary}} = \frac{1}{2} p q \Big|_{\text{boundary}} \quad (233)$$

を含めておくと, 全作用の変分

$$\delta(S + S_{\text{boundary}}) = m \dot{q} \delta q \Big|_{\text{boundary}} - m \int \ddot{q} \delta q dt \quad (234)$$

には境界項に $\delta \dot{q}$ が現れず, 自由粒子の運動方程式 $\ddot{q} = 0$ が得られる.
作用(231)に対してHamilton関数は $S = 0$ となる^{*57}.

^{*57} 同様に源 $T^{\mu\nu} = 0$, 宇宙定数 $\Lambda = 0$ とおいた Einstein 方程式 $R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2} \delta^{\mu}_{\nu} R = 0$ で $\mu = \nu$ として縮約をとるとスカラー曲率は $R = 0$ なので, Hamilton関数としての Einstein-Hilbert作用は $S_{\text{EH}} = 0$.

そこで Gibbons–Hawking–York 境界項

$$S_{\text{GHY}} = +\frac{c^3}{8\pi G} \int_{\Sigma} k^{ij} q_{ij} \sqrt{q} d^3x \quad (q \equiv \det(q_{ij})) \quad (235)$$

を導入すると、その変分は $\delta S_{\text{GHY}} = -\delta S_{\Sigma}$ となり、Einstein–Hilbert 作用の変分から現れる境界項(230)を正確に相殺する。

ところで計量の1階微分までを含む、場の強度に関して2次の量の積分(188): $S_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int (G^* + 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x$ は部分積分により、Einstein-Hilbert 作用と

$$S_g = S_{\text{EH}} + S_{\text{boundary}}, \quad W^{\mu} \equiv g^{\nu\rho} \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} - g^{\rho\mu} \Gamma^{\nu}_{\rho\nu}$$

$$S_{\text{boundary}} \equiv \frac{c^3}{16\pi G} \int \partial_{\mu} (W^{\mu} \sqrt{-g}) d^4x = \frac{c^3}{16\pi G} \int W^{\mu} \sqrt{-g} n_{\mu} dS \quad (236)$$

で関係付けられる(式(237)). 境界項(236)の変分もまた $\delta S_{\text{boundary}} = -\delta S_{\Sigma}$ であるものの^{*58}, $S_{\text{GHY}} = S_{\text{boundary}}$ までは必ずしも保証されない。

^{*58} 実際、境界上で計量は変分されず $\delta W^{\mu} = g^{\nu\rho} \delta \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} - g^{\rho\mu} \delta \Gamma^{\nu}_{\rho\nu} \equiv w^{\mu}$ となるため、

$$\delta S_{\text{boundary}} = \frac{c^3}{16\pi G} \int w^{\mu} \sqrt{-g} n_{\mu} dS = -\delta S_{\Sigma}.$$

3.2.2項の式の導出など

最小作用原理から運動方程式を導くにあたり，ここではEuler-Lagrange方程式を利用する代わりに，作用(188)の変分を直接計算する方法を採ることにする．作用(188)の各項を

$$\begin{aligned} S &= S_{\text{m}} + S_{\text{mf}} + S_{\text{f}} + S_{\text{g}}, \\ S_{\text{m}} &\equiv - \sum mc \int ds, \quad S_{\text{mf}} \equiv - \sum \frac{e}{c} \int A_{\mu} dx^{\mu}, \\ S_{\text{f}} &\equiv - \frac{1}{16\pi c} \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \quad S_{\text{g}} \equiv - \frac{c^3}{16\pi G} \int (G^* + 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x \end{aligned}$$

とおく．また重力を除く物質の作用をまとめて $S'_{\text{m}} \equiv S_{\text{m}} + S_{\text{mf}} + S_{\text{f}}$ とおく．

■粒子の運動方程式(211)の導出

時空における粒子の実際の軌道は作用(188)の停留値(極値)を与えることから、粒子の軌道の変分に伴い

$$0 = \delta S = \delta S_m + \delta S_{mf}.$$

ここで変分 δS_m は次のように書き表せる [4, p.276].

$$2ds\delta(ds) = \delta(ds^2) = \delta(g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu) = dx^\mu dx^\nu (\partial_\lambda g_{\mu\nu})\delta x^\lambda + 2g_{\mu\nu}dx^\mu \delta(dx^\nu)$$

($\because g_{\mu\nu}$ は粒子の時空位置で評価している.

$$g_{\mu\nu}dx^\nu \delta(dx^\mu) = g_{\nu\mu}dx^\mu \delta(dx^\nu) = g_{\mu\nu}dx^\mu \delta(dx^\nu)),$$

$$\begin{aligned}\therefore \delta S_m &= - \sum mc \int \delta(ds) \\ &= - \sum mc \int \left\{ \frac{1}{2} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} (\partial_\lambda g_{\mu\nu}) \delta x^\lambda + g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \delta \left(\frac{dx^\nu}{ds} \right) \right\} ds \\ &= - \sum mc \int \left\{ \frac{1}{2} u^\mu u^\nu (\partial_\lambda g_{\mu\nu}) - \frac{d}{ds} (g_{\mu\lambda} u^\mu) \right\} \delta x^\lambda ds \\ &\quad \left(\frac{dx^\mu}{ds} \equiv u^\mu \text{と改め, 境界で} \delta x^\nu = 0 \text{に注意して部分積分し,} \right.\end{aligned}$$

第2項のダミ一添字を $\nu \rightarrow \lambda$ と改めた

$$\begin{aligned}
&= \sum mc \int \left\{ g_{\mu\lambda} \frac{du^\mu}{ds} + \frac{1}{2} u^\mu u^\nu (\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \right\} \delta x^\lambda ds \\
&\quad \left(\because u^\mu \frac{d}{ds} g_{\mu\lambda} = u^\mu u^\nu \partial_\nu g_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} u^\mu u^\nu (\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\nu\lambda}) \right) \\
&= \sum mc \int \left(g_{\mu\lambda} \frac{du^\mu}{ds} + u^\mu u^\nu \Gamma_{\lambda,\mu\nu} \right) \delta x^\lambda ds \\
&\equiv \sum mc \int \frac{Du_\lambda}{ds} \delta x^\lambda ds. \quad (\because \text{式(70)})
\end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}
Du_\lambda &\equiv \left(g_{\mu\lambda} \frac{du^\mu}{ds} + u^\alpha u^\beta \Gamma_{\lambda,\alpha\beta} \right) ds \\
&= g_{\mu\lambda} (\partial_\beta u^\mu + u^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\mu) u^\beta ds \quad \left(\because \Gamma_{\lambda,\alpha\beta} = g_{\mu\lambda} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu, \frac{du^\mu}{ds} = u^\beta \partial_\beta u^\mu \right) \\
&= g_{\mu\lambda} u^\mu_{;\beta} dx^\beta = g_{\mu\lambda} Du^\mu
\end{aligned}$$

は Du^μ を共変ベクトルにしたものである． Du^μ は粒子の世界線上で ds だけ隔たる2点

での4元速度ベクトル(136): $u^\mu \equiv \frac{1}{c} \frac{dx^\mu}{ds}$ を, 平行移動により同一点で比べた差(65),(66):

$$Du^\mu = u^\mu{}_{;\nu} dx^\nu = (\partial_\nu u^\mu + u^\rho \Gamma^\mu_{\rho\nu}) dx^\nu$$

である. これを代入し $u^\nu \partial_\nu u^\mu = \frac{du^\mu}{ds}$ に注意すると, 式(211)第1式は第2式へと書き換えられる.

また特殊相対性理論における計算 [4, pp.67–68] を一般化して, 変分 δS_{mf} を次のように書き表せる.

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{mf}} &= - \sum \frac{e}{c} \int \{ A_\mu \delta(dx^\mu) + (\delta A_\mu) dx^\mu \} \\ &= - \sum \frac{e}{c} \int \{ (-dA_\mu) \delta x^\mu + (\delta A_\nu) dx^\nu \} \\ &\quad (\text{境界で } \delta x^\mu = 0 \text{ に注意して部分積分した}) \\ &= - \sum \frac{e}{c} \int \{ (-\partial_\nu A_\mu) dx^\nu \delta x^\mu + (\partial_\mu A_\nu) \delta x^\mu dx^\nu \} \\ &\quad (\text{場 } A_\mu \text{ は粒子の時空位置で評価している}) \\ &= - \sum \frac{e}{c} \int F_{\mu\nu} u^\nu \delta x^\mu ds. \end{aligned}$$

以上より

$$\sum \int \left(mc \frac{Du_\mu}{ds} - \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu \right) \delta x^\mu ds = 0$$

となり, これが任意の変分 δx^μ に対して成り立つことから粒子の運動方程式(211):

$$mc \frac{Du^\mu}{ds} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu$$

を得る.

■Newton極限の g_{00} の式(215)の導出

作用(214):

$$S = \int L dt, \quad L \equiv \sum \left(-mc^2 + \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - m\phi \right)$$

はMinkowski時空の自由粒子の作用 $S = -\sum mc^2 \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$ に対する非相対論的極限 ($v \ll c$) と位置エネルギー $-m\phi$ の項から成り, Lagrange方程式(21)は非相対論的な粒子の運動方程式

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = m\dot{\mathbf{v}} + m\nabla\phi, \quad \therefore \dot{\mathbf{v}} = -\nabla\phi : (213)$$

を再現する.

非相対論的極限 $\phi/c^2 \ll 1, v/c \ll 1$ で作用 $S = S_m = -\sum mc \int ds$ が式(214)に移行するためには

$$ds = cdt \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \right)^2 + \frac{\phi}{c^2} \right\},$$
$$\therefore ds^2 = (cdt)^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \right)^2 + \frac{2\phi}{c^2} + O \left(\left(\frac{\mathbf{v}}{c} \right)^4, \left(\frac{\phi}{c^2} \right)^2, \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \right)^2 \frac{\phi}{c^2} \right) \right\}$$

$$\simeq \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) (cdt)^2 - d\boldsymbol{r}^2$$

であれば良いから，式(215): $g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$ を得る [4, p.275].

■荷電粒子の運動方程式(216)の空間成分(217)と時間成分(219)の導出

運動方程式(216): $\frac{dp^\mu}{dt} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{dt}$ の空間成分をとると

$$\begin{aligned}\frac{dp^i}{dt} &= \frac{e}{c} F^{i\nu} \frac{dx_\nu}{dt} = e F^{i0} - \frac{e}{c} F^{ij} \frac{dx^j}{dt} \\ &= e E^i + \frac{e}{c} \varepsilon^{kij} B^k \frac{dx^j}{dt} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)^i : (217).\end{aligned}$$

また式(216)の両辺の時間成分はそれぞれ

$$\frac{dp^0}{dt} = \frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}_{\text{kin}}}{dt}, \quad \frac{e}{c} F^{0i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{e}{c} (-E^i) \left(-\frac{dx^i}{dt} \right) = \frac{e}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$$

と書き換えられる．これらを等置すると仕事と運動エネルギー変化の関係
(217): $\frac{d\mathcal{E}_{\text{kin}}}{dt} = e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$ が導かれる．

なお恒等的に

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{kin}}}{dt} = \frac{m\boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}}}{(1 - (v/c)^2)^{3/2}},$$
$$\boldsymbol{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{v} \cdot \left(\frac{m\dot{\boldsymbol{v}}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + \frac{m(\boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}})\boldsymbol{v}/c^2}{(1 - (v/c)^2)^{3/2}} \right) = \frac{m\boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}}}{(1 - (v/c)^2)^{3/2}}$$

が一致することに注意すると，運動方程式の空間成分(217)から時間成分(219)が導かれる：

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{kin}}}{dt} = \boldsymbol{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e\boldsymbol{v} \cdot \left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B} \right) = e\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v}.$$

■ Maxwell方程式(220)の導出

作用の相互作用項を電流密度 j^μ で表した式(190):

$$S_{\text{mf}} = -\frac{1}{c^2} \int j^\mu A_\mu \sqrt{-g} d^4x$$

の形に書いておくと便利である．また場 A_μ の変分に伴う $g_{\mu\nu}$ の変分は $\delta g_{\mu\nu} = 0$ なので

$$F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = F^{\mu\nu} \delta(g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} F^{\rho\sigma}) = (F^{\mu\nu} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma}) \delta F^{\rho\sigma} = F_{\rho\sigma} \delta F^{\rho\sigma} = F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu}$$

となる．

これらを踏まえると，場 A_μ の現実の発展は作用(188)の停留値(極値)を与えることから，場 A_μ の変分に伴う作用の変分は次式で表される．

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \delta(S_{\text{mf}} + S_{\text{f}}) \\ &= -\frac{1}{c} \int \left(\frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} d^4x \\ &= -\frac{1}{c} \int \left\{ \frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) \right\} \sqrt{-g} d^4x \\ &= -\frac{1}{c} \int \left\{ \left(\frac{1}{c} j^\mu - \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \partial_\nu \right) \delta A_\mu \right\} \sqrt{-g} d^4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\because F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu = F^{\nu\mu} \partial_\nu \delta A_\mu = -F^{\mu\nu} \partial_\nu \delta A_\mu) \\
& = -\frac{1}{c} \int \left\{ \frac{1}{c} j^\mu \sqrt{-g} + \frac{1}{4\pi} \partial_\nu (F^{\mu\nu} \sqrt{-g}) \right\} \delta A_\mu d^4x \\
& \quad (\text{境界で } \delta A_\mu = 0 \text{ に注意して部分積分した}) \\
& = -\frac{1}{c} \int \left(\frac{1}{c} j^\mu + \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu}{}_{;\nu} \right) \delta A_\mu \sqrt{-g} d^4x \\
& \quad (\because \text{式(90)} : \partial_\nu (F^{\mu\nu} \sqrt{-g}) = \sqrt{-g} F^{\mu\nu}{}_{;\nu}).
\end{aligned}$$

(ここでの式変形は特殊相対性理論における計算 [4, p.83] を参考にした.) 上式が任意の変分 δA_μ に対して成り立つことから, 重力場中の Maxwell 方程式(220):

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$$

を得る.

■ Maxwell 方程式から連続の式 (169) の導出 [10, p.93]

Maxwell 方程式 (220): $F^{\mu\nu}_{;\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$, および反対称テンソル $A_{\mu\nu}$ の4元発散に対する一般公式 (90):

$$A^{\mu\nu}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (A^{\mu\nu} \sqrt{-g})$$

を用いると,

$$\partial_\mu (j^\mu \sqrt{-g}) = -\frac{c}{4\pi} \partial_\mu (F^{\mu\nu}_{;\nu} \sqrt{-g}) = -\frac{c}{4\pi} \partial_\mu \partial_\nu (F^{\mu\nu} \sqrt{-g}) = 0 : (169)$$

となる. 最後の等号では添字 μ, ν について対称な因子 $\partial_\mu \partial_\nu$ と反対称な因子 $F^{\mu\nu} \sqrt{-g}$ の“縮約”が消えることを用いた (式 (33) の箇所を見よ).

■ Einstein 方程式 (221) の導出

計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の現実の発展は作用の停留値 (極値) を与えることから, 場 $g_{\mu\nu}$ の変分に伴い

$$0 = \delta S = \delta(S'_m + S_g), \quad S'_m \equiv S_m + S_{mf} + S_f.$$

ここで3.2節で述べたように, 作用の重力場項 $S_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int (G^* + 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x$ の変分は Einstein-Hilbert 作用 (191) の変分に一致することを示す.

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}R &= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\partial_\rho\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\rho} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\sigma}) \quad (\because \text{定義式 (94), (95)}) \\ &= \partial_\rho(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\nu}) - \partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\rho}) - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\partial_\rho(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) + \Gamma^\rho_{\mu\rho}\partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) \\ &\quad + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\sigma}) \end{aligned}$$

において

$$\begin{aligned} \Gamma^\rho_{\mu\nu}\partial_\rho(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) &= \Gamma^\rho_{\mu\nu} \left(\frac{-\partial_\rho g}{2\sqrt{-g}} g^{\mu\mu} + \sqrt{-g}\partial_\rho g^{\mu\nu} \right) \\ &= \Gamma^\rho_{\mu\nu}\sqrt{-g}(\Gamma^\sigma_{\rho\sigma}g^{\mu\nu} - \Gamma^\mu_{\sigma\rho}g^{\sigma\nu} - \Gamma^\nu_{\sigma\rho}g^{\mu\sigma}) \\ &\quad (\text{第1項に対して式 (87) を, 第2項に対して式 (85) を用いた}) \\ &= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} - 2\Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\sigma\nu}) \end{aligned}$$

(第2項でダミー添字を $\mu \leftrightarrow \sigma$ と入れ換え,

第3項でダミー添字を $\rho \rightarrow \sigma, \sigma \rightarrow \nu, \nu \rightarrow \rho$ と巡回置換した),

$$\begin{aligned}\Gamma^\rho_{\mu\rho}\partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) &= -\sqrt{-g}g^{\nu\sigma}\Gamma^\mu_{\nu\sigma}\Gamma^\rho_{\mu\rho} \quad (\because \text{式(88)}) \\ &= -\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma}\end{aligned}$$

(ダミー添字を $\mu \rightarrow \rho, \rho \rightarrow \sigma, \sigma \rightarrow \nu, \nu \rightarrow \mu$ と巡回置換した)

なので,

$$\sqrt{-g}R = \partial_\mu(\sqrt{-g}W^\mu) + \sqrt{-g}G^*, \quad \begin{cases} W^\mu \equiv g^{\nu\rho}\Gamma^\mu_{\nu\rho} - g^{\rho\mu}\Gamma^\nu_{\rho\nu} \\ G^* \equiv g^{\mu\nu}(\Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma}) \end{cases} \quad (237)$$

を得る.

4元発散 $\partial_\mu(\sqrt{-g}W^\mu)$ の積分は境界上の積分に置き換わる. 最小作用原理において境界での場の値は与えられているため, これは変分をとると落ちる. 以上より

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi G}\delta \int (G^* + 2\Lambda)\sqrt{-g}d^4x = -\frac{c^3}{16\pi G}\delta \int (R + 2\Lambda)\sqrt{-g}d^4x$$

が示された.

そこで δS_g を次のように計算する.

$$\begin{aligned}
& \delta \int R \sqrt{-g} d^4x \\
&= \int (R_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \delta \sqrt{-g} + g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu}) d^4x \\
& \quad (\because R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \\
&= \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x + \int g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4x \\
& \quad \left(\because \text{式(86)} : dg = -g g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} \text{より} \delta \sqrt{-g} = -\frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right).
\end{aligned}$$

最右辺第2項を考える．局所慣性系では $\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = 0, \partial_\lambda g^{\mu\nu} = 0$ だから(式(38)の箇所を見よ),

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} (\partial_\lambda \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda}) \\
&= \partial_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma^\nu_{\mu\nu}) \\
& \quad (\text{第2項でダミ一添字を}\nu \leftrightarrow \lambda\text{と入れ換えた}) \\
&\equiv \partial_\lambda w^\lambda.
\end{aligned}$$

ここで2.2.3項で指摘したように $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ はテンソルではないものの、変分 $\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ は(1,2)テンソルであることに注意すると、 w^λ は反変ベクトルとなる．局所慣性系で $\partial_\lambda w^\lambda = w^\lambda_{;\lambda}$ なので $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = w^\lambda_{;\lambda}$ となる．これは両辺がともにスカラーだから任意の座標系でも成り立つ関係式である．式(89): $w^\mu_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}w^\mu)$ より

$$\int g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\nu})\sqrt{-g}d^4x = \int \partial_\mu(\sqrt{-g}w^\mu)d^4x$$

となり，これは境界上の積分に置き換わる．ここで w^μ は場の変分を含んでおり，場の変分は境界上でゼロだから，この境界上の積分は消える．

また宇宙定数項の変分は，再び $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$ に注意すると，

$$-\frac{c^3}{16\pi G}\delta \int 2\Lambda\sqrt{-g}d^4x = -\frac{c^3}{16\pi G} \int (-\Lambda g_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}d^4x.$$

一方 $S'_m = \frac{1}{c} \int \tilde{\mathcal{L}}d^4x$ と書くと，変分 $g^{\mu\nu}$ に伴う S'_m の変化は

$$\begin{aligned} \delta S'_m &= \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \delta (\partial_\lambda g^{\mu\nu}) \right\} d^4x \\ &= \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right\} \delta g^{\mu\nu} d^4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{(境界で } \delta g^{\mu\nu} = 0 \text{ に注意して部分積分した)} \\
 & \equiv \frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (\because \text{式(173)})
 \end{aligned}$$

以上より

$$0 = \delta S_g + \delta S'_m = -\frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} - \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x$$

となり，これが任意の変分 $\delta g^{\mu\nu}$ に対して成り立つことから Einstein 方程式 (221):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

を得る．

■弱い重力に対する Newton 理論 (222) の導出

Einstein 方程式が重力場の弱い極限で Newton の万有引力の法則 (222) を再現することは次のように確かめられる [4, pp.329–330] [9, pp.174–175]. Einstein 方程式 (221): $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$ は両辺に $g^{\mu\nu}$ をかけて μ, ν について和をとると $R = -\frac{8\pi G}{c^4}T, T \equiv g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ となるので ($g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \delta^\mu_\mu = 4$ だから),

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) \quad (238)$$

と書き換えられる^{*59}. この式の $(0, 0)$ 成分を考えよう. $R_{\mu\nu}$ の定義式 (94) より

$$R_{00} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{00} - \partial_0 \Gamma^\alpha_{0\alpha} + \Gamma^\alpha_{00} \Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \Gamma^\alpha_{0\beta} \Gamma^\beta_{0\alpha}.$$

重力場が弱い場合を考えて時空の各点で計量テンソルが

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon \varphi_{\mu\nu}, \quad 0 \leq \varepsilon \ll 1$$

^{*59} スカラー曲率 R よりもエネルギー・運動量テンソルのトレース T を計算する方が容易な場合には, この表式 (238) の方が便利である.

となる座標系を用いると $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \varepsilon\varphi^{\mu\nu} + O(\varepsilon^2)$, $\varphi^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\varphi_{\alpha\beta}$ となる． 実際 $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \varepsilon\varphi^{\mu\nu}$ とおくと

$$g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = (\eta^{\mu\lambda} - \varepsilon\varphi^{\mu\lambda})(\eta_{\lambda\nu} + \varepsilon\varphi_{\lambda\nu}) = \delta^\mu_\nu + \varepsilon(\eta^{\mu\lambda}\varphi_{\lambda\nu} - \eta_{\lambda\nu}\varphi^{\mu\lambda}) + O(\varepsilon^2)$$

において ε の1次の項が消えるので $g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu$ が ε の1次の範囲で満たされる．
よって

$$\begin{aligned}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (\because \text{式(70)}) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon\eta^{\lambda\rho}(\partial_\nu \varphi_{\rho\mu} + \partial_\mu \varphi_{\rho\nu} - \partial_\rho \varphi_{\mu\nu}) + O(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

となり，これは ε の1次の量だから

$$R_{00} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{00} - \partial_0 \Gamma^\alpha_{0\alpha} + O(\varepsilon^2)$$

と書ける． さらに重力場が不変である， すなわち $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0, \partial_0 \varphi_{\mu\nu} = 0$ とすると

$$\begin{aligned}\Gamma^\alpha_{00} &= \frac{1}{2}\varepsilon\eta^{\alpha\beta}(\partial_0 \varphi_{\beta 0} + \partial_0 \varphi_{\beta 0} - \partial_\beta \varphi_{00}) + O(\varepsilon^2) = -\frac{1}{2}\varepsilon\eta^{\alpha i}\partial_i \varphi_{00} + O(\varepsilon^2), \\ \partial_0 \Gamma^\alpha_{0\alpha} &= \frac{1}{2}\varepsilon\eta^{\alpha\beta}\partial_0(\partial_\alpha \varphi_{\beta 0} + \partial_0 \varphi_{\beta\alpha} - \partial_\beta \varphi_{0\alpha}) + O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

なので

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\varepsilon\eta^{\alpha i}\partial_\alpha\partial_i\varphi_{00} + O(\varepsilon^2) = \frac{1}{2}\Delta(\varepsilon\varphi_{00}) + O(\varepsilon^2), \quad \Delta \equiv \partial_i\partial_i$$

となる．一方，電氣的に中性な物質に対しては電磁場の寄与を除いたエネルギー・運動量テンソルを考えれば充分である．物体が巨視的に静止しているとき，運動量流束と運動学的応力はゼロであり，また重力が弱いという仮定の下で静止エネルギーは局所慣性系の質量密度 ϱ で表されるから，

$$T_{\mu\nu} = \begin{cases} \varrho c^2 : & \mu = \nu = 0 \\ 0 : & \text{その他の成分} \end{cases}$$

とおける．よって

$$T = g^{00}T_{00}, \quad \frac{8\pi k}{c^4} \left(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T \right) = \frac{8\pi k}{c^4} \times \varrho c^2 \left(1 - \frac{1}{2}g_{00}g^{00} \right) = \frac{4\pi k}{c^2} \varrho + O(\varepsilon^2)$$

$$(\because \varphi^{00} = \varphi_{00}, \quad g_{00}g^{00} = (1 + \varepsilon\varphi_{00})(1 - \varepsilon\varphi^{00}) + O(\varepsilon^2) = 1 + O(\varepsilon^2))$$

を得る．以上より Einstein 方程式(238)の $(0,0)$ 成分 $R_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} (T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T)$ を書き下すと， ε の2次以上を無視する近似で $\frac{1}{2}\Delta(\varepsilon\varphi_{00}) = \frac{4\pi G}{c^2}\varrho$ となる^{*60}．弱い重力場がも

^{*60} 左辺が ε を含んでいるのに対し，右辺も万有引力定数 G を含んでいるので微小な量と見なされる．

たらず g_{00} への補正 $\varepsilon\varphi_{00}$ は重力ポテンシャル ϕ を用いた式(215): $g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$ より $\frac{2\phi}{c^2}$ だから, これは Poisson 方程式(222):

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho$$

になる. これが第2式 $\phi = -\frac{Gm}{r}$ を解に持つことは周知の通りである.

■粒子と電磁場の運動方程式からエネルギー・運動量保存則(224)を導出
 まずMaxwell方程式を用いて, 式(225): $\partial_\nu T^{(f)\mu\nu} = -\frac{1}{c}F^{\mu\nu}j_\nu$ を示そう [4, pp.93–94].
 $T^{(f)\mu\nu}$ の式(210)を微分すると,

$$\begin{aligned}\partial_\nu T^{(f)\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi} g_{\mu\lambda} \partial_\nu \left(\frac{1}{4} g^{\lambda\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} - F^{\lambda\rho} F^\nu{}_\rho \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} \delta_\mu{}^\nu F^{\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} - F^\nu{}_\rho \partial_\nu F_\mu{}^\rho - F_\mu{}^\rho \partial_\nu F^\nu{}_\rho \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} F^{\rho\sigma} \partial_\mu F_{\rho\sigma} - F^{\nu\rho} \partial_\nu F_{\mu\rho} - F_{\mu\rho} \partial_\nu F^{\nu\rho} \right).\end{aligned}$$

ここにMaxwell方程式(220),(155):

$$\partial_\mu F_{\rho\sigma} = -\partial_\rho F_{\sigma\mu} - \partial_\sigma F_{\mu\rho}, \quad \partial_\nu F^{\nu\rho} = \frac{4\pi}{c} j^\rho$$

を代入すると,

$$\partial_\nu T^{(f)\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{1}{2} F^{\rho\sigma} \partial_\rho F_{\sigma\mu} - \frac{1}{2} F^{\rho\sigma} \partial_\sigma F_{\mu\rho} - F^{\nu\rho} \partial_\nu F_{\mu\rho} - \frac{4\pi}{c} F_{\mu\rho} j^\rho \right)$$

が得られる．右辺の括弧内で，第1項に対し $\sigma \rightarrow \rho, \rho \rightarrow \nu$ ，第2項に対し $\sigma \rightarrow \nu$ と添字を書き直せば，最初の3項は打ち消し合うことが分かる．こうして式(225):

$$\partial_\nu T^{(f)\mu\nu} = -\frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu$$

に到達する．

次に粒子の運動方程式を用いて，式(226): $\partial_\nu T^{(m)\mu\nu} = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu$ を示そう [9, p.107]．粒子系のエネルギー・運動量テンソルを，式(193)の形

$$T^{(m)\mu\nu}(x) = \sum_a m_a c \int \dot{x}^\mu(a) \dot{x}^\nu(a) \delta^4(x - x(a)) d\tau_a$$

に書いておくのが便利である．これを微分すると

$$\begin{aligned} \partial_\nu T^{(m)\mu\nu} &= \sum_a m_a c \int \dot{x}^\mu(a) \dot{x}^\nu(a) \{ \partial_\nu \delta^4(x - x(a)) \} d\tau_a \\ &= - \sum_a m_a c \int \dot{x}^\mu(a) \dot{x}^\nu(a) \frac{\partial}{\partial x^\nu(a)} \delta^4(x - x(a)) d\tau_a \\ &= - \sum_a m_a c \int \dot{x}^\mu(a) \frac{d}{d\tau_a} \delta^4(x - x(a)) d\tau_a \end{aligned}$$

$$= \sum_a m_a c \int \ddot{x}^\mu(a) \delta^4(x - x(a)) d\tau_a$$

となる．最右辺に粒子の運動方程式(216):

$$m_a \ddot{x}^\mu(a) = \frac{e_a}{c} F^{\mu\nu}(x(a)) \dot{x}_\nu(a)$$

を代入し，被積分関数のデルタ関数 $\delta^4(x - x(a))$ の下で場の強度を $F^{\mu\nu}(x(a)) \rightarrow F^{\mu\nu}(x)$ と置き換え，粒子の和の外に出すと，

$$\partial_\nu T^{(m)\mu\nu} = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} \left[\sum_a e_a \int \dot{x}_\nu(a) \delta^4(x - x(a)) d\tau_a \right] = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu : (226)$$

を得る(最後の等号は4元電流密度の表式(165)による)．

以上の式(225), 式(226)を辺々足すと，粒子と電磁場の系に対するエネルギー・運動量保存則(224):

$$\partial_\nu \left(T^{(f)\mu\nu} + T^{(m)\mu\nu} \right) = 0$$

が導かれる．

■ Gibbons–Hawking–York 境界項 (235) の変分 $\delta S_{\text{GHY}} = -\delta S_{\Sigma}$ の確認 [15, pp.52–54]

変分原理の仮定より境界 Σ 上で計量の変分は $\delta g^{\mu\nu} = 0$ なので, 表面積分 (230) は

$$\begin{aligned} & g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - g^{\mu\rho} \delta \Gamma^{\nu}_{\mu\nu} \\ &= g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \delta \Gamma_{\sigma, \mu\nu} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \delta \Gamma_{\sigma, \mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} [g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \delta (\partial_{\mu} g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu} g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}) - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \delta (\partial_{\mu} g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu} g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu})] \\ &= g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} (\partial_{\mu} \delta g_{\sigma\nu} - \partial_{\sigma} \delta g_{\mu\nu}), \quad ([\dots] \text{内の第2項でダミー添字を } \mu \leftrightarrow \sigma \text{ と入れ替えた}) \\ \therefore n_{\rho} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - g^{\mu\rho} \delta \Gamma^{\nu}_{\mu\nu}) \\ &= n^{\sigma} (P^{\mu\nu} + n^{\mu} n^{\nu}) (\partial_{\mu} \delta g_{\sigma\nu} - \partial_{\sigma} \delta g_{\mu\nu}) \quad (P^{\mu\nu} \text{の定義式 (112)}) \\ &= n^{\sigma} P^{\mu\nu} (\partial_{\mu} \delta g_{\sigma\nu} - \partial_{\sigma} \delta g_{\mu\nu}) \quad (\mu, \sigma \text{ に関して対称な } n^{\mu} n^{\sigma} \text{ と反対称な } (\dots) \text{ の縮約はゼロ}) \\ &= -n^{\sigma} P^{\mu\nu} \partial_{\sigma} \delta g_{\mu\nu} \quad (\text{境界上での } \delta g_{\mu\nu} = 0 \text{ の微分はゼロなので } P^{\mu\nu} \partial_{\mu} \delta g_{\sigma\nu} = 0) \\ \therefore \delta S_{\Sigma} &= + \frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Sigma} n^{\sigma} P^{\mu\nu} \partial_{\sigma} \delta g_{\mu\nu} \cdot \sqrt{-g} dS \end{aligned}$$

と計算できる.

他方で $0 = D_\nu(n^\mu n_\mu) = 2n^\mu D_\nu n_\mu$ に注意すると，外部曲率のトレース (120) は

$$\begin{aligned} k &= D_\mu n^\mu = g^{\mu\nu} D_\nu n_\mu = (P^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu) D_\nu n_\mu = P^{\mu\nu} D_\nu n_\mu = P^{\mu\nu} (\partial_\nu n_\mu - \Gamma^\rho_{\mu\nu} n_\rho) \\ &= P^{\mu\nu} (\partial_\nu n_\mu - \Gamma_{\rho,\mu\nu} n^\rho) \end{aligned}$$

と書き換えられる．ここで境界上で $\delta g^{\mu\nu} = 0$ であり，また背景の座標空間に固定された領域は，したがって法線 n^ρ は一定であること ($\delta n^\rho = 0$) を考え合わせると， $\delta P^{\mu\nu} = 0$ である．よって k の変分は

$$\delta k = P^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\rho,\mu\nu} \cdot n^\rho = \frac{1}{2} P^{\mu\nu} (\partial_\nu \delta g_{\rho\mu} + \partial_\mu \delta g_{\rho\nu} - \partial_\rho \delta g_{\mu\nu}) n^\rho = -\frac{1}{2} n^\rho P^{\mu\nu} \partial_\rho \delta g_{\mu\nu}$$

と書ける．ただし特に最後の等号では再び境界上での変分 $\delta g_{\mu\nu} = 0$ の微分が $P^{\mu\nu} \partial_\nu \delta g_{\rho\mu} = 0$, $P^{\mu\nu} \partial_\mu \delta g_{\rho\nu} = 0$ となることを用いた．したがって Einstein–Hilbert 作用に Gibbons–Hawking–York 境界項

$$S_{\text{GHY}} = -\frac{c^3}{8\pi G} \int_\Sigma k \sqrt{-g} dS \quad (239)$$

を加えて重力場の全作用を定義すれば，境界項の変分は $\delta S_{\text{GHY}} = -\delta S_\Sigma$ となり， δS_Σ を正確に相殺できる．

上式 (239) を境界の量で表したい．発散定理における面積要素の構成により [9, pp.130–134] [5, pp.95–96]，積分測度は単に境界の座標体積 $dS = d^3x$ と考えら

れる．また Jacobian は式 (117) の計量に対しては $\sqrt{-g} = \sqrt{\det(P_{ab})}$ なので，法線要素は $n_\rho dS \sqrt{-g} = -d^3x \sqrt{\det(p_{ij})} n_\rho$ と書ける (同文献 [15, p.53])^{*61}．他方で 3 + 1 分解における誘導計量 q_{ij} を用いる場合，式 (111): $\sqrt{-g} = N \sqrt{q}$ である ($q = \det(q_{ij})$)．さらに式 (120): $k = k_{ij} q^{ij}$ より，境界項 (239) は

$$S_{\text{GHY}} = + \frac{c^3}{8\pi G} \int_{\Sigma} k_{ij} q^{ij} N \sqrt{q} d^3x$$

となり，正確には式 (235) の被積分関数はラプス N を含むと考えられる．これと比べると文献 [1, p.67,69] ではラプス N が明示されていない．

^{*61} 負号は Σ 上の 3 つの無限小ベクトル $d^{(1)}x^\mu, d^{(2)}x^\mu, d^{(3)}x^\mu$ の張る面積要素を

$$dS_\rho = n_\rho dS \equiv \frac{1}{3!} \varepsilon_{\rho\lambda\mu\nu} \begin{vmatrix} d^{(1)}x^\lambda & d^{(2)}x^\lambda & d^{(3)}x^\lambda \\ d^{(1)}x^\mu & d^{(2)}x^\mu & d^{(3)}x^\mu \\ d^{(1)}x^\nu & d^{(2)}x^\nu & d^{(3)}x^\nu \end{vmatrix} \quad (\varepsilon_{0123} = -\varepsilon^{0123} = -1)$$

と定義すれば現れる．

3.2.2項の原稿

式(188)の作用に最小作用原理を適用し，粒子と場に対する一連の運動方程式を導く [10, pp.115–116].

はじめに実際の粒子の軌道が作用を極小にすることから，粒子の運動方程式(211)が導かれる (導出スライド参照). 微分係数 $\frac{Du^\mu}{ds}$ は粒子の世界線上で ds だけ隔たる2点での4元速度ベクトル(136): $u^\mu \equiv \frac{1}{c} \frac{dx^\mu}{ds}$ を，平行移動により同一点で比べた差 Du^μ を与える変化率(65),(66)である. 特に電磁場の強度が $F^{\mu\nu} = 0$ のとき，式(211)は測地線の方程式(81)となる. それは粒子の世界線に沿う固有の長さ $\int ds$ に他ならない作用積分の停留値を与える条件から導かれているから，2.2.3項で予告したように，測地線は2点間の(局所的)最短曲線である. 粒子の現実の軌道が作用を最小化することは，等価的に軌道に沿う固有時間を最大化すると言い換えても良い.

ここで運動方程式(211)右辺のChristoffel記号の項を粒子に働く重力と見なせば，これは重力が粒子の4元速度 $\frac{1}{c} \frac{dx^\mu}{ds}$ を変化させることを表していると解釈できる. またこれに依じて左辺の質量 m を慣性質量，右辺の質量 m を重力質量と解釈すれば，これらの質量の値 m は共通だから，重力場の中の粒子の運動は粒子の質量に依らないことが見て取れる. ここでChristoffel記号は計量テンソルの導関数で決まるから(式(70)参照)，Christoffel記号が重力場の“強さ”に相当し，計量テンソルは重力ポテンシャルに対応するという解釈が促される [4, pp.273–274] [9, p.122].

このことは重力場の弱い非相対論的ないしNewton的な場合の運動方程式との対応を考

えるとより明確になる．このとき時空の各点で計量テンソルの Minkowski 計量からのズレ $h_{\mu\nu}$ が小さく，式(212)が成り立つ座標系をとれる．話を進める前に，弱い重力場の取り扱い(212)について簡単に論じておく．座標変換を行うと計量も変化するものの，新しい座標系でも条件(212)が満たされるような一連の座標変換が存在し，それらの座標系の変換が弱い重力場のゲージ変換を成す．本稿では詳しく説明しないものの，そこで電磁場に対する Lorenz 条件と類似の h に対する Lorenz ゲージ条件を課すと， h に関して線形化された場の方程式 (Einstein 方程式) は (源の項を伴う非斉次の) 波動方程式に簡略化される [14, pp.244–250]．ここから重力波の存在が予言される．重力波の解では計量 $h_{\mu\nu}$ が振動し，したがって座標が一定の2点間の物理的な真の距離が伸び縮みする [14, pp.263–268]．式(212)はまた，重力場を背景の Minkowski 時空上の場 $h_{\mu\nu}$ と見なす捉え方を採用することを，暗に含意している．Minkowski 時空は第1項の $\eta_{\mu\nu}$ で定義され，位置と因果関係を規定する．伝統的な場の量子論においても式(212)を通じて重力場を摂動 $h_{\mu\nu}$ として扱う戦略が採られる^{*62}．しかし結果として得られる理論は繰り込み不可能である (すなわち理論から現れる発散の全てを有限個のパラメータに吸収させることはできない)．何より式(212)のように重力場を時空から分離することは，一般相対性理論の背景独立性の教訓と鋭く対立する [2, p.12]．この点については量子重力を論じる際に改めて説明する予定である．

^{*62} さらに弦理論においても特定の閉弦の量子状態を1重力子状態に同定する際，重力場に対する伝統的な場の量子論の結果が援用される [12, pp.206–209, pp.284–287]．

さて、条件(212)が満たされる座標系で測った粒子の速度 $\dot{r}$ を v と書くと(ドットは座標時間 t による微分)、重力場が弱いため粒子は速度が光速に比べて小さい範囲 $v/c \ll 1$ に留まることが可能である。このような非相対論的極限では ϕ を重力ポテンシャルとして、粒子の運動方程式は式(213)で与えられる [4, p.252].

そこで粒子系の作用 $S_m = - \sum mc \int ds$ が非相対論的極限 $\phi/c^2 \ll 1, v/c \ll 1$ で、運動方程式(213)を再現する作用のうち、式(214)の作用に移行することを要求すると、式(215)の関係が見出される(導出スライド参照) [4, p.275]. こうして計量テンソルは確かに、重力ポテンシャル ϕ と具体的に関係付けられる.

ここまでは電磁場がゼロである場合を考えてきた。他方で平坦なMinkowski時空では、粒子の運動方程式(211)は式(216)のように書き換えられ [4, p.68], ここに $p^\mu \equiv m \frac{dx^\mu}{d\tau}$ は粒子の4元運動量である.

式(216)の空間成分は式(217)のように書ける(導出スライド参照) [4, p.54]. 粒子が磁場から受ける力の項 $e \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$ はLorentz力と呼ばれ、粒子の速度 $\mathbf{v}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ の両方に垂直である*⁶³. 非相対論的極限 $\mathbf{p} = m\mathbf{v} / \sqrt{1 - (v/c)^2} \rightarrow m\mathbf{v}$ でこれはNewtonの運動方程式に移行する.

これを用いると与えられた電磁場中での荷電粒子の運動を調べることができる。ただし

*⁶³ 右辺全体をLorentz力と呼ぶ流儀もある.

荷電粒子は場をかき乱さない微小な試験電荷とする．それはあくまで力学の具体的応用であり，本稿では詳しく取り上げない．代わりに非相対論的な運動の簡単な例として，一様不変な電磁場中の荷電粒子のトロコイド運動の様子を図16に示すに留める [4, pp.63–64] [19, pp.134–136]. トロコイドとは直線上を円盤が滑らずに転がるとき，円盤に固定された点が描く軌跡であり，特に円周上の点の軌跡はサイクロイドと呼ばれる．いずれにせよ古典物理学では自然は粒子と場から成る2元的世界であることを反映して，力の起源を説明する場の理論と，与えられた力の場の下での運動を決定する力学とで“役割分担”が成されている．

次に個々の粒子の運動エネルギーを式(218)で定義すると^{*64}，式(216)の時間成分は仕事と運動エネルギー変化の関係(219)を与える．右辺は電場の粒子に対する仕事率であり，また磁場が粒子に及ぼす Lorentz 力は速度に垂直なので仕事をしない．なお式(219)は運動方程式(217)から改めて導出できる (以上，導出スライド参照) [4, pp.54–55].

次に電磁場に対する運動方程式ないし場の方程式の説明に移ろう．電磁場 A_μ の実際の発展が作用(188)を極小にすることから，電磁場に対する運動方程式(220)が導かれる (導出スライド参照)．平坦な Minkowski 時空では直ちに，式(220)は見慣れた Maxwell 方程式 $\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$ に帰着する．実際これが Lorentz 変換に対する共変性が明白な

^{*64} これは v/c のべきに展開すると静止エネルギー mc^2 を含む一方で，スカラー・ポテンシャル $A_0 = \phi$ に関する位置エネルギー $e\phi$ を含まない．

形に書いた Maxwell 方程式であること，ここから古典電磁気学がどのように展開・再現されるかを読者は既に心得ていると仮定し，本稿では改めて電磁気学を論じない．ただし重力の正準理論の準備として，3.2.3 項では電磁気学の Hamilton 形式による定式化を説明する予定である．ここでは電磁場 E, B で書き表した Maxwell 方程式 [4, p.74, p.84] とその含意を図 17 に要約しておくに留める．また，いくつかの要点に関しては，この場で簡単に言及しておこう：

- まず Lorenz ゲージの下で定常的な場に対する方程式は Poisson 方程式に帰着し，静電場に対する Coulomb の法則と静磁場に対する Biot–Savart の法則に分離する [4, pp.100–101, pp.116—117] [19, pp.220–223].
- また源となる電荷のない場合の場の方程式は伝播速度 c の波動方程式となり，そこから導かれる電磁波は光に他ならない [4, pp.123–124].
 - したがって電磁場は力を記述する単なる数学的な道具に留まらず，物質が存在しない場合にも電場と磁場はお互いを生み出しながら，波として空間を伝播する物理的実在である [19, pp.272–273].
 - 平面波解は一般に楕円偏光であり，波の伝播方向を z 軸に採ると，特に円偏光では z 軸上に分布する電場ベクトルと磁場ベクトルの先端は常螺旋を描き，各ベクトルは高さ z が一定の面内で回転しているだけでありながら，床屋のサインポールの回転する縞模様が上昇するのと同様に，例えば螺旋と zx 平面の交点は位相速度 c で z 軸方向に上昇していく [4, pp.129–131].

- 任意の運動を行う電荷分布の作る場は時間遅れを伴う遅延ポテンシャルで表され [4, pp.178–180] [19, pp.287–288], ここから電荷が加速するときに放射する電磁波を調べることができる.
- 最後に, 幾何光学は波動光学の短波長極限として含まれている [4, pp.146–149].

Maxwell 方程式の説明を終える前に, 3.1.1 項で約束したように電荷保存則 (169) が Maxwell 方程式 (220) に含まれていることを証明しておく ([導出スライド参照](#)).

これまでに我々は粒子と電磁場の運動方程式を得た. 最後に重力場の運動方程式を調べよう. 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の実際の発展が作用 (188) を極小にすることから, 重力場に対する運動方程式として Einstein 方程式 (221) が導かれる ([導出スライド参照](#)). ただし右辺の $T_{\mu\nu}$ は電磁場を含む物質のエネルギー・運動量テンソル (209) である. また宇宙定数は (長さ) $^{-2}$ の次元を持ち, そのオーダーは 10^{-56}cm^{-2} 程度に小さいことが宇宙論的な観測から判明している [27, p.68] [1, p.58]. (座標が長さの次元を持つ場合, 曲率もまた (長さ) $^{-2}$ の次元を持つことに注意しよう.) そこで宇宙定数項はしばしば省略され, その場合の Einstein 方程式の左辺を式 (100) のようにまとめて Einstein テンソル $G_{\mu\nu}$ と呼ぶ.

実に宇宙定数はしばしば基礎定数としては不自然に小さい印象を与える. そこで素粒子論の専門家をはじめとする物理学者の中には, 宇宙定数 Λ のノンゼロの値が輻射補正による量子効果として得られると考える人が一定数いる. この観点から宇宙論研究者ら

は、Einstein 方程式の宇宙項をエネルギー・運動量テンソルへの付加的な寄与と見なして、その時間-時間成分を暗黒エネルギーと呼ぶ [14, pp.465–466]. しかしそれは電子の電荷をその輻射補正と混同するようなものであり、宇宙定数 Λ は単なる基礎定数の 1 つにすぎないとして、 Λ を真空のエネルギーに関係付けて解釈することに C. Rovelli は批判的な立場を示している [27, p.69] [1, p.58]; 真の謎は暗黒エネルギーよりも、むしろ暗黒物質 (ダーク・マター) である [1, p.4]. 実に “大きい” あるいは “小さい” というのは言うまでもなく相対的な概念であり、宇宙定数が小さいというのは今の場合、あくまで人間的な日常感覚に即して言われているに過ぎない. ところが歴史的には例えば Avogadro 数もまた、現実的には “大きすぎる” ことが原子論を退ける根拠に挙げられたものの、このような推論は誤りであることが判明している [1, p.59]. これを踏まえると、必ずしも宇宙定数に特別に神秘性を見出す積極的な理由はない.

ここで Einstein 方程式が重力の弱い極限で Newton の重力理論を含んでいることを説明する. ある座標系に対して静止している物体の作る不変な重力場を考えよう. また宇宙定数 Λ をゼロとおく. 重力場が弱ければ物体静止系のうち、計量テンソルがほぼ Minkowski 計量となる条件 (212): $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, |h_{\mu\nu}| \ll 1$ を満たす基準系が採れる. このとき Einstein 方程式から近似的に、重力ポテンシャル ϕ に対する Newton の万有引力の法則 (222) が導かれる. ただし Poisson 方程式の右辺における ρ は局所慣性系に関する物質の質量密度であり^{*65}, また第 2 式分母の r は質量 m と場 ϕ の観測点の Euclid 的

^{*65} 電荷密度 ρ と表記を区別した

な座標距離である(導出スライド参照). [4, pp.329–330] [9, pp.174–175].
ところで Bianchi の恒等式(101): $G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ を思い出すと, Einstein 方程式(221)から直ちに物質系の(近似的な)エネルギー・運動量保存則(173): $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ が帰結する. 宇宙定数項がある場合にも, 式(84),(85)のように計量テンソルの共変微分はゼロになるので, この結論に変わりはない. したがって重力場の方程式(Einstein 方程式)は, 物質粒子と電磁場の運動方程式をも含んでいることになる [4, p.309]. 正確にはこれは Einstein 方程式から, 粒子と電磁場の運動方程式を個別に導けるという意味ではない. 実際, 電磁場を含む物質系に対する単一のエネルギー・運動量保存則から, 2つの運動方程式を導くことはできない. むしろ Einstein 方程式が物質系のエネルギー・運動量保存則を含んでいることは, 一連の運動方程式が独立ではないことを意味するのである [10, p.117].

これを見るために, 粒子と電磁場の運動方程式(211),(220)から物質系のエネルギー・運動量保存則 $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ が導かれることを示そう. ただし証明は局所慣性系で行えば充分である, 何故なら局所慣性系で成り立つ関係式をテンソル方程式に置き換えれば, それらは任意の座標系で成り立つことが直ちに保証されるからである. そこで Minkowski 時空の運動方程式(223)から, 保存則(224)が導かれることを確かめる. 具体的には粒子の運動方程式と Maxwell 方程式を用いて, 式(225),(226)を導く(これらを辺々足すと上式(224)が得られる; 導出スライド参照) [4, pp.93–94] [9, p.107]. この導出過程の中にも, 物理的な意味を見て取ることができる. すなわち式(225)の時間成分($\mu = 0$)は,

電磁気学でよく知られたエネルギー方程式(227)を再現する [4, pp.85–86]. これは単位時間において単位体積中の場のエネルギーが，粒子の場にした仕事 $(-j \cdot E)$ と，流入した場のエネルギー $(-\nabla \cdot S)$ の分だけ増大することを表している．また式(225)の空間成分 $(\mu = i)$ は式(228)を与える．これは単位時間において単位体積中の場の運動量が，空間の隣接する領域から受ける場の応力と，単位体積中の電荷に場の及ぼす力(力積)の反作用だけ増大することを表していることが明確に見て取れる．そして式(226)は場の得たエネルギー・運動量と正確に等しいエネルギー・運動量を粒子が失うことを意味している [9, pp.72–76].

次の話題に移る前にやや発展的な内容として，ここで重力場の作用の境界項について説明しておくのが適切だろう．Einstein 方程式(221)の導出過程では計量の変分に伴う重力場の作用の変分を，Einstein–Hilbert 作用 S_{EH} の変分(229)として計算した．式(229)最右辺の第2項は発散定理により，境界の3次元超曲面 Σ にわたる表面積分(230)に書き換えられる．ただし n_ρ は超曲面の法単位ベクトル， dS は超曲面の面積要素である [14, p.195]. またここでは境界項に関与しない宇宙定数の項は省略した．Einstein 方程式(221)を導出した際には，境界上で Christoffel 記号の変分が $\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} = 0$ となることをややナイーブに仮定して，この境界にわたる表面積分(230)を落とした．しかしながら Christoffel 記号は計量だけでなく，その1階微分を含むため，このとき場の変分のみを $\delta g^{\mu\nu} = 0$ と仮定する本来の変分原理の境界条件よりも強い条件を課していることになる．そこで通常の境界条件の下で変分原理から Einstein 方程式を導けるような，よく

定義された変分原理を得るには、厳密には適当な境界項を加えて作用を修正する必要がある。

この事情を簡単な例で説明しよう。配位変数 q の2階微分 $\ddot{q}$ を含む作用積分を部分積分すると、速度の変分 $\delta\dot{q}$ を含む境界項が得られる。よって変分原理の境界条件 $\delta q = 0$ の下で境界項が消えるためには、 $\delta\dot{q}$ の項を相殺する境界項を作用にあらかじめ含めておく必要がある。例えば自由粒子の作用として2階微分 $\ddot{q}$ を含む作用(231)を採ることを考えよう。(実際これは運動エネルギーを用いた通常的作用と、式(231)最右辺のように関係付けられる。)ところが作用(231)の変分は部分積分を繰り返すと式(232)のように表される。そこで境界項として座標と運動量の積(233)を加えると、全作用の変分(234)には境界項に $\delta\dot{q}$ が現れず、変分原理から自由粒子の運動方程式 $\ddot{q} = 0$ が得られる。よって作用(231)を現実の運動に対して評価したHamilton関数はゼロとなる [1, p.35]. 重力場に対する Einstein–Hilbert 作用もまた計量の2階微分を含むため、よく定義された変分原理を得るには同じ理由で、作用に適切な境界項を付け加える必要がある。しかも物質のエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu} = 0$ かつ宇宙定数 $\Lambda = 0$ の場合には、Einstein 方程式よりスカラー曲率は $R = 0$ となる。すると著しいことに Einstein–Hilbert 作用は消え、現実の重力場の発展に関して評価したHamilton関数としての作用は境界項そのもので与えられることになる。このため境界項は量子重力の遷移振幅に対する経路積分の位相が移行しなければならない古典的極限という重要性を持つ [1, p.67].

重力場の作用に対する適切な境界項は Gibbons–Hawking–York 境界項 (235) で与えられる．ただし q_{ij} は誘導計量 (107)，また k^{ij} は外部曲率 (118) の添字を誘導計量で上げた量である．実際この境界項の変分は $\delta S_{\text{GHY}} = -\delta S_{\Sigma}$ となり，Einstein–Hilbert 作用の変分から現れる境界項 (230) を正確に相殺する ([導出スライド参照](#))．境界項 (235) は Einstein–Hilbert 作用と比べて，4次元時空の計量と内部曲率が，3次元超曲面の誘導計量と外部曲率に置き換わっている．また外部曲率が誘導計量の運動量共役にあたることを思い出せば，これは自由粒子に対する境界項 (233) とアナログな形をしている．あるいは Hamilton 関数の表式 (235) から，外部曲率を誘導計量の運動量共役を見なすことはもっともらしいとも言える，

ただしこの説明では境界項 (235) はいささか人為的に導入されている印象がある．ところが重力場の作用としては計量の2階微分までを含む Einstein–Hilbert 作用 (191) よりも，計量の1階微分までを含む，場の強度に関して2次の量の積分 (188) を採るのが自然であることを我々は知っている．Einstein 方程式 (221) の導出過程における式 (237) の箇所で見たように，これらは部分積分 (236) で関係付けられる [4, pp.298–300]．ここで境界項は $t = \text{const}$ の2枚の3次元超曲面にわたり，その積分測度 $dS = d^3x$ は座標体積である [4, pp.22–23, pp.271–273]．このとき Einstein–Hilbert 作用の代わりに自然な作用 S_g を採用すれば，境界項 (235) は人為的に導入せずとも，部分積分から自動的に得られると予想することは自然である．

しかしながら Gibbons–Hawking–York 項の変分 $\delta S_{\text{GHY}} = -\delta S_{\Sigma}$ の計算を見直して言えることは，あくまで式 (236) の境界項もまた変分が $\delta S_{\text{boundary}} = -\delta S_{\Sigma}$ となり，

Einstein–Hilbert 作用から現れる境界項の変分 δS_Σ を相殺するため、境界項の資格を持つということだけである。変分が $\delta S_{\text{GHY}} = \delta S_{\text{boundary}}$ であっても、2つの境界項 $S_{\text{GHY}}, S_{\text{boundary}}$ そのものが一致している保証はない。

3.2.3 Hamilton形式の電磁気学

$$\text{運動量} \quad p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}^i} \quad (240)$$

を速度 $\dot{q}$ について一意的に解ける条件は, Hesse 行列

$$A = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right) \quad (241)$$

が正則であること (ラグランジアンが正則という).

$\det A \neq 0$ ($\text{rank} A = N - r < N$: 配位空間の次元) のとき, **1次拘束条件**

$$\phi^m(q, p, t) = 0 \quad (m = 1, \dots, r; \phi^m : 1\text{次拘束量}) \quad (242)$$

が帰結する [7, pp.498–499] [3, pp.50–51]. 全ハミルトニアン

$$H' = H + \sum_{m=1}^r \lambda_m \phi^m. \quad (243)$$

の下での解 $(q(t), p(t))$ は未定乗数 $\{\lambda_m\}$ に応じた不定性を持つ.

$\leftrightarrow$ 同一の物理的状态を表す相空間の無数の点,

拘束量 ϕ^m はそれらの間のゲージ変換を生成 [7, pp.521–523].

簡単な場合

L がある $\dot{q}^i$ に依らない $\rightarrow p_i = 0$ (1次拘束条件, p を $\dot{q}$ について解けない例)
1次拘束量 p_i の生成する座標のゲージ変換(未定乗数 λ)

$$\delta q^i = \{q^i, \lambda p_i\} = \lambda \quad (244)$$

$\rightarrow$ 座標そのものが未定乗数.

整合性の条件 $\frac{d^k}{dt^k} \phi^m(q(t), p(t)) = 0$ を課すと, $k = 1, 2, 3, \dots$ から順次,
未定乗数 $\{\lambda_m\}$ の一部を決定する式と, 2次拘束条件が得られる [7, pp.501–509].
例えば $k = 1$ の整合性の条件は

$$\frac{d\phi^m}{dt} = \frac{\partial \phi^m}{\partial t} + \{\phi^m, H\} + \sum_{n=1}^r \{\phi^m, \phi^n\} \lambda_n = 0. \quad (245)$$

■自由電磁場に対する Maxwell 理論 [3, pp.51–56]

ラグランジアン密度 (200): $\mathcal{L}_f = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ は, 場 A_0 の時間微分を含まない

$\rightarrow$ 運動量密度 $\pi^0 = 0$ (1次拘束条件).

また運動量密度 (205): $\pi^\mu = -\frac{1}{4\pi c} F^{0\mu}$ の空間成分 $\pi^i = \frac{1}{4\pi c} E^i$ は電場.

任意関数 $\mu(x)$ により不鮮明化した (smeared) 拘束量

$$\pi(\mu) \equiv \int d^3x \mu(x) \pi^0(x) \quad (\mu \text{ と } \pi^0 \text{ は同時刻}) \quad (246)$$

の生成する $A_0(x)$ の変化は、式 (244) と同様に

$$\begin{aligned} \{A_0(x), \pi(\mu)\} &= \int d^3x' \mu(x') \{A_0(x), \pi^0(x')\} \\ &= \mu(x) \quad (\because \{A_0(x), \pi^0(x')\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \end{aligned} \quad (247)$$

となるので、 $A_0(x)$ は Lagrange の未定乗数と見なせる．次にハミルトニアン (206):

$$H = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \frac{1}{2} (E^i E^j \delta_{ij} + B^i B^j \delta_{ij}) - A_0 \partial_i E^i \right\} d^3x \quad (248)$$

に対して

$$\dot{\pi}^0 = \{\pi^0, H\} = \frac{1}{4\pi} \partial_i E^i \quad (249)$$

となるので、整合性の条件 $\dot{\pi}^0 = 0$ は 2 次拘束条件として Gauss の法則 $\partial_i E^i = 0$ を与える^{*66}．

^{*66} 正確には全ハミルトニアン $H' = H + \pi(\mu)$ を用いる (その場合にも結果は変わらない)．これ以上、新たな拘束条件は現れない．

不鮮明化した2次拘束量

$$G(\lambda) \equiv \int d^3x \lambda \partial_i E^i \quad (250)$$

は $\{G(\lambda), H'\} \approx 0$ を満たし^{*67}, また正しい電磁場のゲージ変換を生成する :

$$\{E^i, G(\lambda)\} = 0, \quad \{A_i, G(\lambda)\} = -4\pi c \partial_i \lambda. \quad (251)$$

運動方程式(正準方程式)は

$$\dot{A}_i = \{A_i, H'\} \Leftrightarrow \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (252)$$

$$\dot{E}^i = \{E^i, H'\} \Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (253)$$

^{*67} 弱い等号「 $\approx$ 」はここでは Gauss 拘束 $G(\lambda) = 0$ の下で (あるいは “超曲面” 上で) 成り立つ関係を表す.

3.2.3項の式の導出など

■Hesse 行列 $A = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right)$ が正則 $\leftrightarrow p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}^i}$ を $\dot{q}^i$ について一意的に解ける

Legendre 変換

$$dH = d(p_i \dot{q}^i - L) = -p_i dq^i + \dot{q}^i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (254)$$

で定義されるハミルトニアン H が最右辺より q と p の関数であること自体は，ラグランジアンの正則性を仮定せずとも言える．ただし以下で見るように，ラグランジアンが正則でなければ，全ての p_i が独立とはならない．さて，

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \phi_i(q, \dot{q}, t), \quad L(q, \dot{q}, t) = \phi_i(q, \dot{q}, t) \dot{q}^i - H(q, \phi(q, \dot{q}, t), t)$$

と書いて，ラグランジアンを $\dot{q}^i$ で微分すると

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \phi_i + \frac{\partial \phi_j}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^j - \frac{\partial H}{\partial \phi_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial \dot{q}^i} = \phi_i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \left(\dot{q}^j - \frac{\partial H}{\partial \phi_j} \right), \quad \therefore \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \left(\dot{q}^j - \frac{\partial H}{\partial \phi_j} \right) = 0$$

を得る．よってラグランジアンが正則であれば

$$\dot{q}_j = \frac{\partial}{\partial \phi_j} H(q, \phi(q, \dot{q}, t), t) \equiv \psi_j(q, p, t).$$

さらに q, t をパラメータとして固定すると, $\dot{q}$ の微小変化 $\delta\dot{q}$ に伴う運動量 $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ の変化は, Hesse 行列要素を変換係数とする線形変換

$$\delta p_i = \frac{\partial^2 L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \delta \dot{q}^j = A_{ij} \delta \dot{q}^j$$

で与えられる. よって状態空間から相空間への写像 $(q, \dot{q}) \mapsto (q, p = \partial L / \partial \dot{q})$ による像は, 相空間の中の $N + (N - r) = 2N - r$ 次元の超曲面 (242):

$$\phi^m(q, p, t) = 0 \quad (m = 1, \dots, r)$$

を成す. また N 個の p_i のうち $(N - r)$ 個だけが独立となる.

■ Hesse 行列 $A = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right)$ が正則 $\leftrightarrow$ 古典的因果律 [5, p.105]

Hesse 行列 (241): $A = (A_{ij}) = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right)$ が正則であるとき, Lagrange 方程式

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^i}$$

に逆行列要素 $(A^{-1})^{ki}$ を掛けて i で和をとると,

$\ddot{q}_k = (A^{-1})^{ki} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} \dot{q}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial t} \right)$ のように, 加速度について解ける. このとき $q, \dot{q}$ の初期値を与えると, その後の時間発展は逐次的に決定される (図 19 参照).

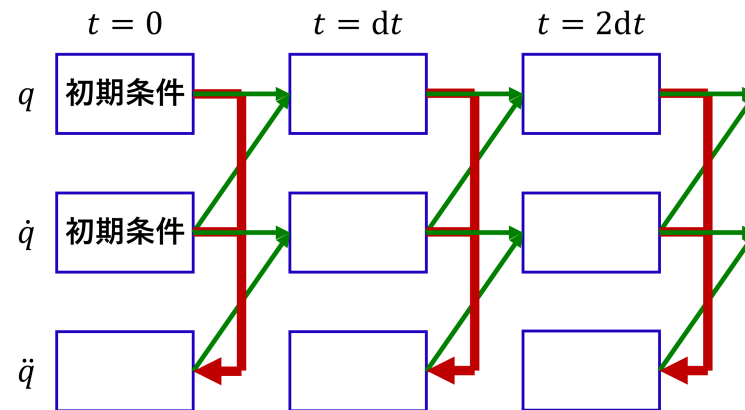


図 19 古典的因果律 (力学系の時間追跡の模式図)

■拘束量 ϕ^m がゲージ変換を生成すること [7, pp.522–523]

整合性の条件の下でなお，不定のまま残る乗数を w_σ ，対になる拘束量を ϕ^σ と書こう． w_σ の2通りの値 w_σ^1, w_σ^2 に応じた力学量 $F(t) \equiv F(q(t), p(t), t)$ の微小時間 δt 後の値は，初期値を $F(t_0)$ として

$$F^i \approx F(t_0) + \delta t \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \{F(t_0), H' + w_\sigma^i \phi^\sigma(t_0)\} \right]. \quad (i = 1, 2)$$

よって拘束量 ϕ^σ は，同一の物理的状态に対応する F^1, F^2 の間のゲージ変換を生成する：

$$F^1 - F^2 \approx \delta t (w_\sigma^1(t_0) - w_\sigma^2(t_0)) \{F(t_0), \phi^\sigma(t_0)\}.$$

■運動方程式(249): $\dot{\pi}^0 = \{\pi^0, H\} = \frac{1}{4\pi} \partial_i E^i$ の確認
 H の代わりに全ハミルトニアン $H' = H + \pi(\mu)$ を用いて

$$\dot{\pi}^0(x) = \{\pi^0(x), H'\}$$

とするのが正確である．ただし付加的な項 $\pi(\mu) \equiv \int d^3x' \mu(x') \pi^0(x')$ は右辺の Poisson 括弧に寄与せず，

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^0(x) = \{\pi^0(x), H'\} &= -\frac{1}{4\pi} \int d^3x' \{\pi^0(x), A_0(x') \partial_i' E^i(x')\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3x' (\partial_i' E^i(x')) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi} \partial_i E^i(x) \end{aligned}$$

となる．

■式(249)の他にさらに2次拘束条件が現れないことの確認

$\dot{\pi}^0 = \frac{1}{4\pi} \partial_i E^i = c \partial_i \pi^i$ の時間微分

$$\ddot{\pi}^0(x) \sim \{\partial_i \pi^i(x), H'\}$$

を計算しよう． H' において Poisson 括弧に寄与するのは磁場の2乗の項だけであり，

$$\{\partial_i \pi^i(x), H'\} = \delta_{jk} \partial_i \int d^3 x' \{E^i(x), B^j(x')\} B^k(x')$$

において

$$\begin{aligned} \{E^i(x), B^j(x')\} &= -\frac{1}{2} \varepsilon^{jkl} \{E^i(x), F_{kl}(x')\} \\ &= -\frac{1}{2} \varepsilon^{jkl} [\partial_k' \{E^i(x), A_l(x')\} - \partial_l' \{E^i(x), A_k(x')\}] \\ &= 4\pi c \varepsilon^{jki} \partial_k' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \sim \varepsilon^{jki} \partial_k' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}
\{\partial_i \pi^i(x), H'\} &\sim \delta_{kl} \partial_i \int d^3 x' \varepsilon^{kli} \{\partial_l' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\} B^c(x') \\
&= -\varepsilon^{kli} \partial_i \int d^3 x' \{\partial_l' B^j(x')\} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
&= -\varepsilon^{kli} \partial_i \partial_l B^j = 0
\end{aligned}$$

となる．最後の等号は対称な量と反対称な量の縮約がゼロになることによる．よって整合性の条件 $\ddot{\pi}^0 = 0$ は自明な関係 $0 = 0$ を与えるだけであり，これ以上新たな拘束条件は現れない．

なお，たった今得られた関係

$$\int d^3 x' \{\partial_i \pi^i(x), \mathbf{B}^2(x')\} = 0 \tag{255}$$

は， $F_{ij} F^{ij} = -2\mathbf{B}^2$ に注意すると次のように示すこともできる．

$$\begin{aligned}
&\int d^3 y \{\partial_i \pi^i(x), \mathbf{B}^2(y)\} \\
&= -\frac{1}{2} \partial_i \int d^3 y \{\pi^i(x), F_{jk}(y) F^{jk}(y)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\partial_i \int d^3y \left(\{ \pi^i(x), F_{jk}(y) \} F^{jk}(y) + F_{jk}(y) \{ \pi^i(x), F^{jk}(y) \} \right) \\
&= -\partial_i \int d^3y \{ \pi^i(x), F_{jk}(y) \} F^{jk}(y) \\
&= -\partial_i \int d^3y \left(\{ \pi^i(x), \partial_j A_k(y) \} F^{jk}(y) - \{ \pi^i(x), \partial_k A_j(y) \} F^{jk}(y) \right) \\
&= \partial_i \int d^3y \left(\{ \pi^i(x), A_k(y) \} \partial_j F^{jk}(y) - \{ \pi^i(x), A_j(y) \} \partial_k F^{jk}(y) \right) \quad (\text{部分積分した}) \\
&\sim -\partial_i \int d^3y \left(\delta^i_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \partial_j F^{jk}(y) - \delta^i_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \partial_k F^{jk}(y) \right) \\
&= -\partial_i (\partial_j F^{ji}(x) - \partial_k F^{ik}(x)) = \partial_i \partial_j F^{ji}(x) = 0.
\end{aligned}$$

■ $\{G(\lambda), H'\} = 0$ の証明

ハミルトニアン (248):

$$H = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \frac{1}{2} (E^i E^j \delta_{ij} + B^i B^j \delta_{ij}) - A_0 \partial_i E^i \right\} d^3x$$

の第1項 (E^2 の項) との Poisson 括弧は,

$$\{E^j(x'), E^i(x)\} = 0, \quad \therefore \{G(\lambda), E^i(x)\} = \int d^3x' \partial_{j'} \lambda(x') \{E^j(x'), E^i(x)\} = 0$$

である. 第2項 (B^2 の項) との Poisson 括弧は,

式 (255) で既に見たように $\sim \int d^3x' \{\partial_i E^i(x), B^2(x')\} = 0$. 同様に第3項 ($-A_0 \partial_a E^a$ の項) の Poisson 括弧への寄与もゼロである. 以上より $\{G(\lambda), H\} = 0$ である.

最後に $\pi(\mu)$ との Poisson 括弧は

$$\begin{aligned} \{G(\lambda), \pi(\mu)\} &= \int d^3x d^3x' \lambda(x) \mu(x') \partial_i E^i(x) \{A_0(x), \pi^0(x')\} \\ &= \int d^3x \lambda(x) \mu(x) \partial_i E^i(x) = G(\lambda\mu) \end{aligned}$$

となるので, Gauss拘束 $G(\lambda\mu) = 0$ の下で全ハミルトニアン $H' = H + \pi(\mu)$ との Poisson 括弧も $\{G(\lambda), H'\} = 0$ となる.

参考 ハミルトニアン H との Poisson 括弧がゼロになる, 時間に陽に依らない観測量 O は, 正準方程式

$$\frac{dO}{dt} = \frac{\partial O}{\partial t} + \{O, H\} = 0$$

より保存量となる. これは量子力学で Heisenberg 方程式より, 運動の定数 O が $[H, O] = 0$ を満たすことに対応している.

■ $G(\lambda)$ が電磁場の正しいゲージ変換を生成すること (251) の確認
第1式は直ちに

$$\{G(\lambda), E^i(x)\} = \int d^3x' \lambda(x') \partial_j' \{E^j(x'), E^i(x)\} = 0$$

と確かめられる。これは場の強度のゲージ不変性を意味する。

また $\{E_j(x'), A^i(x)\} = -4\pi c \delta_j^i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ より

$$\begin{aligned} \{G(\lambda), A_i(x)\} &= \int d^3x' \lambda(x') \partial_b' \{E^j(x'), A_i(x)\} \\ &= - \int d^3x' \{\partial_j' \lambda(x')\} \{E^j(x'), A_i(x)\} \\ &= 4\pi c \partial_i \lambda(x). \quad \text{i.e.} \quad \{A_i(x), G(\lambda)\} = -4\pi c \partial_i \lambda(x). \end{aligned}$$

これは λ につまらない係数を含めた $\tilde{\lambda} \equiv 4\pi c \lambda$ をゲージ関数とする, 正しい場のゲージ変換 (154): $A_i \rightarrow A_i - \partial_i \tilde{\lambda}$ になっている。

■ A_i の運動方程式 (252) の導出

Poisson 括弧 $\{A_i(x), H\}$ に対するハミルトニアン (248):

$$H = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \frac{1}{2} (E^i E^j \delta_{ij} + B^i B^j \delta_{ij}) - A_0 \partial_i E^i \right\} d^3x$$

の第1項 (E^2 の項) の寄与は

$$\begin{aligned} \{A_i(x), E^j(x') E^k(x')\} \delta_{jk} &= 2E^j(x') \{A_i(x), E^k(x')\} \delta_{jk} = 2 \cdot 4\pi c E^j(x') \delta_i^k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta_{jk} \\ &= 2 \cdot 4\pi c E_i(x') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned}$$

より,

$$\frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{1}{2} \{A_i(x), E^j(x') E^k(x')\} \delta_{jk} = c E_i(x),$$

第2項 (B^2 の項) の寄与は

$$\{A_i(x), B^j(x')\} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{jkl} \{A_i(x), F_{kl}(x')\} = -\varepsilon^{jkl} \partial_k' \{A_i(x), A_l(x')\} = 0$$

よりゼロ，第3項の寄与は

$$\begin{aligned}
 \{A_i(x), A_0(x')\partial_j' E^j(x')\} &= A_0(x')\partial_j'\{A_i(x), E^j(x')\} \\
 &\rightarrow -4\pi c\{\partial_j' A_0(x')\}\delta_i^j\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\mathbf{x}' \text{の空間積分の下で}) \\
 &= -4\pi c\{\partial_i' A_0(x')\}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')
 \end{aligned}$$

より

$$-\frac{1}{4\pi} \int d^3x' \{A_i(x), A_0(x')\partial_j' E^j(x')\} = c\partial_i A_0(x)$$

なので，

$$(-\dot{A}^i =)\dot{A}_i = \{A_i(x), H\} = c(E_i + \partial_i A_0) \quad \text{i.e.} \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} : (252)$$

を得る．全ハミルトニアン $H' = H + \pi(\mu)$ を用いても結果は同じである．

■ E^i の運動方程式 (253) の導出

Poisson 括弧 $\{E^i, H\}$ に対するハミルトニアン (248):

$$H = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \frac{1}{2} (E^i E^j \delta_{ij} + B^i B^j \delta_{ij}) - A_0 \partial_i E^i \right\} d^3x$$

の第1項 (E^2 の項) の寄与はゼロ, 第2項 (B^2 の項) の寄与は

$$\{E^i(x), B^j(x') B^k(x')\} \delta_{jk} = 2B^j(x') \{E^i(x), B^k(x')\} \delta_{jk} = 2B_j(x') \{E^i(x), B^j(x')\},$$

$$\begin{aligned} \{E^i(x), B^j(x')\} &= -\frac{1}{2} \varepsilon^{jkl} \{E^i(x), F_{kl}(x')\} = -\varepsilon^{jkl} \partial_k' \{E^i(x), A_l(x')\} \\ &= 4\pi c \varepsilon^{jki} \partial_k' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \{E^i(x), B^j(x') B^k(x')\} \delta_{jk} &= 2 \cdot 4\pi c B_j(x') \varepsilon^{jki} \partial_k' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &\rightarrow -2 \cdot 4\pi c \varepsilon^{ijk} \{\partial_k' B_j(x')\} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &\quad (\mathbf{x}' \text{ の空間積分の下で}) \\ &= 2 \cdot 4\pi c \varepsilon^{ijk} \{\partial_j' B_k(x')\} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned}$$

より

$$\frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{1}{2} \{E^i(x), B^j(x') B^k(x')\} \delta_{jk} = c \varepsilon^{ijk} \partial_j B_k(x),$$

第3項の寄与は

$$\{E^i(x), A_0(x')\partial_j' E^j(x')\} \rightarrow A_0(x')\partial_j'\{E^i(x), E^j(x')\} = 0$$

よりゼロ。以上より

$$\dot{E}^i = \{E^i, H\} = c\varepsilon^{ijk}\partial_j B_k \quad \text{i.e.} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} : (253)$$

を得る。

3.2.3項の原稿

2.1.1項では時間がゲージ・パラメータであることを反映して正準ハミルトニアンがゼロになる，完全拘束系の説明を行った．重力の正準理論に取り組む準備としては，さらに拘束系の正準力学の予備知識が必要となる．拘束系をHamilton形式の力学で扱う手続きは，既にDiracによって入念に整備されている [7, ch.10]．しかし本稿ではその煩瑣な一般論を網羅的に説明するよりも，具体例として自由電磁場のMaxwell理論に焦点を当てるのが教育的であると考え，何故ならこの後で見る予定の正準ループ量子重力におけるAshtekar変数 A は $SU(2)$ Yang-Mills理論のゲージ場のように振舞うのに対し，Maxwell理論はまさにYang-Mills理論のひな形に他ならず，したがってAshtekar変数による一般相対性理論の定式化を理解する上でアナロジーとして役に立つからである．

まずは有限自由度の力学系から始めよう．運動量の定義式(240)を速度 $\dot{q}$ について一意的に解けるための条件は，ラグランジアンが正則，すなわちHesse行列(241)が逆行列を持つことである．もしラグランジアンが正則でなければ，速度と運動量は1対1には対応せず，線形代数で知られているように，状態空間から相空間への写像 $(q, \dot{q}) \mapsto (q, p = \partial L / \partial \dot{q})$ は相空間の中の超曲面(242)を定義する(以上，導出スライド参照)．そしてこのようにラグランジアン構成に由来する拘束条件(242)を1次拘束条件，また関数 ϕ^m を1次の拘束量という [7, pp.498–499] [3, pp.50–51]．

このことを別の角度から検討しよう．超曲面上で拘束量 ϕ^m たちがゼロであるならば，Lagrangeの未定乗数 $\{\lambda_m\}$ を導入して，その1次結合をハミルトニアンに付け加えて全

ハミルトニアン(243)を定義することが許される．これは超曲面(242)上で同じハミルトニアンを与える，相空間全体で定義された全ハミルトニアンが無数に考えられることを意味している [7, p.501] [3, pp.49–50]．すると全ハミルトニアンによって生成される正準変数 (q, p) の時間発展は未定乗数を含み，一意的には定まらない．同じことは与えられた初期条件に対して Lagrange 方程式が一意的な解を持つ条件が，ラグランジアンの正則性で与えられることから納得できる (導出スライド参照)．

しかしながら他方で，物理的に意味のある量はもちろん，初期条件から完全に決定されるはずである．したがって未定乗数に応じて得られる様々な (q, p) はすべて同一の物理的状态を表していると考えられる．これは同一の物理的状态を表す相空間の点がいくつも存在することを意味している．そしてこのとき未定乗数 λ_m を割り当てられた拘束量 ϕ^m の生成する変換は，同一の物理的状态の間のゲージ変換を生成することが判明する [7, pp.521–523] (導出スライド参照)^{*68}．翻って拘束量 ϕ^m はゲージ不変性に付随する保存量と解釈できる (その値はゼロであるにしても) [3, p.49]．

1次拘束条件の簡単な例として，ラグランジアン L がある速度 $\dot{q}_i$ に依らない場合が挙げられる [3, p.50]．このとき対応する運動量はゼロになる．これはその運動量が1次拘束

^{*68} 正確を期すために付け加えると，1次拘束量とペアになる未定乗数の一部は，この後で見る整合性の条件により決定できる．そして整合性の条件の下でなお未定のまま残る乗数が，ゲージ変換の自由度に対応することになる．

量であることを意味しており，運動量がゼロになるというのは，運動量を速度について解けない場合の簡単な例となっている．また拘束量としての運動量が生成するゲージ変換は式(244)のように，座標を未定乗数 λ だけ変化させるため，この場合には座標 q そのものを未定乗数のように見なすことができる．

ここまでは1次拘束条件により，系の運動が相空間の超曲面(242)に制限されることを見てきた．次に超曲面上の動点が，時間が経っても超曲面から外に出ないという条件から，新たな拘束条件が生じ得ることを説明する．何故そのようなことが起こり得るのかを理解するには，具体的な計算を見てみるのが分かりやすい．相空間上の動点は常に超曲面上にあるため，動点の位置 (q, p) で評価した ϕ^m の値は時刻 t によらず，常にゼロになる．したがって ϕ^m を時間で任意の階数，微分した量もまたゼロでなければならない．これを整合性の条件という．ところで ϕ^m の時間変化率はPoisson括弧を用いて，式(245)のように計算される．ここで超曲面上で ϕ^m がゼロであっても， ϕ^m とのPoisson括弧がゼロになるとは限らないことに注意しよう．と言うのも，このPoisson括弧を計算する際に必要な， p 軸や q 軸方向への ϕ^m の微分は，一般には超曲面から飛び出す方向への微分なので，ゼロにならないからである．すると ϕ^m の時間微分がゼロになる条件は自動的に満たされない．こうして ϕ^m の $k = 1, 2, 3, \dots$ 階微分に関する一連の整合性の条件からは，一般に新たな条件が順次得られる．それらは未定乗数の一部を決定する式と，新たな拘束条件に分かれる．新たな拘束条件は2次拘束条件と呼ばれ，これにより超曲面はさらに低次元の空間へと制限される．とは言え，このような手順から拘束条件が際限なく生じることはない．と言うのも，相空間の次元は有限なので，超

曲面の次元を拘束条件によっていくらでも落とすことはできないからである．実際この手続きを繰り返してゆけば，いずれは新しい拘束条件が得られなくなり，そこで話は終わる．このとき乗数の一部は未定のまま残る [7, pp.501–509]．これがゲージ変換の自由度に対応していることは，既に述べた通りである．

ここからは冒頭で予告したように，自由電磁場に対する Maxwell 理論に取り組む．式 (200) で定義した自由電磁場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}_f = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ は，場 A_0 の時間微分を含まない．このため共役な運動量密度 π^0 は恒等的にゼロになります．そのことは運動量密度の表式 (205) からも見えて取れる．運動量密度がゼロになるという関係は，正準変数の関数がゼロになるという拘束条件となっている．このように電磁場の Maxwell 理論は，Hamilton 形式の枠組みでは拘束条件を伴う系となる [3, pp.51–52]．また式 (205) より，残る空間成分 A_i に共役な運動量密度 $\pi^i = \frac{1}{4\pi c} E^i$ は，つまらない係数の違いを除き電場となることにも注意しよう．

また有限自由度の系の場合と同じ理由で，このとき配位変数 A_0 は Lagrange の未定乗数となる．実際，ここでの拘束量 $\pi^0(x)$ は位置の関数であることを踏まえ，適当な位置の関数 $\mu(x)$ を用いて不鮮明化した (smeared) 拘束量 (246) を定義しよう．これは不鮮明化関数 $\mu(x)$ の汎関数であり，運動量密度 $\pi^0(x)$ が任意の位置でゼロになることは，任意の関数 $\mu(x)$ に対して不鮮明化した拘束量 (246) がゼロになることと等価である．さて，このとき式 (247) のように， $\pi(\mu)$ は $A_0(x)$ に任意関数 $\mu(x)$ を付け加える尺度変更を生成する．ただし左辺における場の理論の Poisson 括弧は，式 (187) で既に導入したように，

正準共役な場 A_μ, π^μ に関する汎関数微分で定義される．このため，やはり A_0 を未定乗数と呼ぶことが正当化される [3, p.56].

次に整合性の条件を調べよう．1次拘束量 π^0 の時間変化を評価するには，式(206)で求めたハミルトニアン(248)とのPoisson括弧を計算すれば良い*69．すると π^0 の時間微分は，電場の発散(249)を与えることが見出される(導出スライド参照)．したがって整合性の条件は2次の拘束条件として，Gaussの法則 $\partial_i E^i = 0$ を与えることになる．なるほど，Gaussの法則は，電場がわき出さないという拘束条件と言える．また2次の拘束条件はこれだけであり，時間の2階以上の微分に関する整合性の条件から，追加の拘束条件は現れない(導出スライド参照) [3, p.54].

ここでも2次拘束量を不鮮明化した量(250)を導入すると便利である．すると Gauss 拘束量(250)とハミルトニアンとのPoisson括弧はゼロになる(導出スライド参照) [3, pp.54–55]. 既に注意したように， $G(\lambda)$ がゼロであっても， $G(\lambda)$ とのPoisson括弧がゼロになるとは限らないため，これは非自明な主張であり，このとき $G(\lambda)$ は保存量となる．

また $G(\lambda)$ が生成するゲージ変換は式(251)のように， λ をゲージ関数とする電磁場 A の正しいゲージ変換を与え，場の強度をゲージ不変に留める(導出スライド参照) [3, p.55].

*69 正確には全ハミルトニアン $H' = H + \pi(\mu)$ を用いる(その場合にも結果は変わらない).

最後に正準方程式を書き下すと，配位変数 A の運動方程式は式(252)のように，電場の定義式を再現する (導出スライド参照)．これは運動量の定義式がHamilton形式の力学において，配位変数 q に対する運動方程式として得られるのと同じ事情である．また運動量密度にあたる電場の運動方程式は式(253)のように，いわゆる Ampère-Maxwell の法則になる (導出スライド参照) [3, p.56]．これは拘束条件としての Gauss の法則と合わせて，Maxwell 方程式の非自明な組を再現する．このように正準形式の力学による Maxwell 理論の定式化は，見事に上手くいく．

4 一般相対性理論の応用

4.1 Schwarzschild時空

■球対称時空 [14, pp.335–337] 球対称時空に球座標 $x^\mu = (ct, r, \theta, \phi)$ を導入する。
2次元球面 $r, t = \text{const}$ 上の線要素は

$$dl^2 = r^2 d\Omega^2, \quad d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (256)$$

x^μ 方向の接ベクトル e_μ を局所慣性系 (座標 X^I) に関する成分 $e_\mu^I = \frac{\partial X^I}{\partial x^\mu}$ で定義すると,

$$e_\mu \cdot e_\nu \equiv \eta_{IJ} e_\mu^I e_\nu^J = \eta_{IJ} \frac{\partial X^I}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^J}{\partial x^\nu} = g_{\mu\nu}. \quad (257)$$

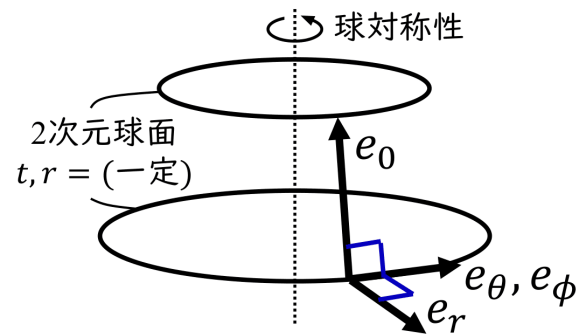


図20 球対称時空では e_r, e_0 は e_θ, e_ϕ と直交するが, 直交性 $e_0 \cdot e_r = 0$ は課されない

図20の直交性 $g_{r\theta} = e_r \cdot e_\theta = 0$, $g_{r\phi} = e_r \cdot e_\phi = 0$, $g_{0\theta} = e_0 \cdot e_\theta = 0$, $g_{0\phi} = e_0 \cdot e_\phi = 0$ より, 球対称時空の一般的な計量の形は

$$ds^2 = g_{00}(c^2 dt^2) + g_{rr}dr^2 + 2g_{0r}(cdt)dr + r^2 d\Omega^2. \quad (258)$$

■ 静的な球対称時空——Schwarzschild 解

- (i) 計量が座標時間 t に依らない $\rightarrow$ 定常
- (ii) さらに時間反転 $t \rightarrow -t$ の下で幾何学が不変 ($\because g_{0i} = 0$) $\rightarrow$ 静的

よって静的な球対称時空の計量の一般的な形は [14, pp.337–338]

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - e^\lambda dr^2. \quad (259)$$

未知関数 $\lambda(r), \nu(r)$ を Einstein 方程式から定めると Schwarzschild 解

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} \quad (260)$$

が得られ [4, pp.334–336], ここに場の中心に位置する重力源の質量を m として

$$r_g \equiv \frac{2Gm}{c^2} : \text{Schwarzschild 半径}. \quad (261)$$

■空間の歪み [4, p.336,p.339] $r > r_g$, 赤道面 $\theta = \pi/2$ で,
円周 $r = \text{const}$ の長さは $2\pi r$, 動径 $\phi = \text{const}$ 上の2点 $r = r_1, r_2 (> r_1)$ の距離は

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - (r_g/r)}} (> r_2 - r_1). \quad (262)$$

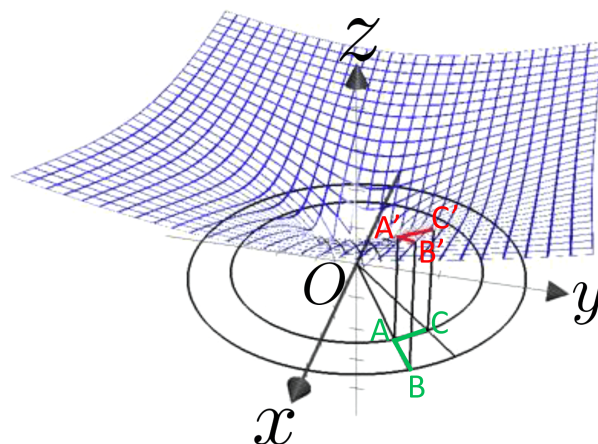


図21 座標距離 $AB = dr$, $AC = r d\phi$ の真上の線要素が対応する真の長さ $A'B' = \frac{dr}{\sqrt{1 - (r_g/r)}}$, $A'C' = r d\phi$ を与える回転面 (263)

$$\text{図21の回転面} \quad z = \pm 2\sqrt{r_g(r - r_g)} + \text{const}. \quad (263)$$

■時間の遅れ [4, pp.277–279,p.336]

光の振動に要する座標時間は光線上で共通である．他方で座標時間 dt のうちに経過する“真の”時間(固有時間)は

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} dt \quad (264)$$

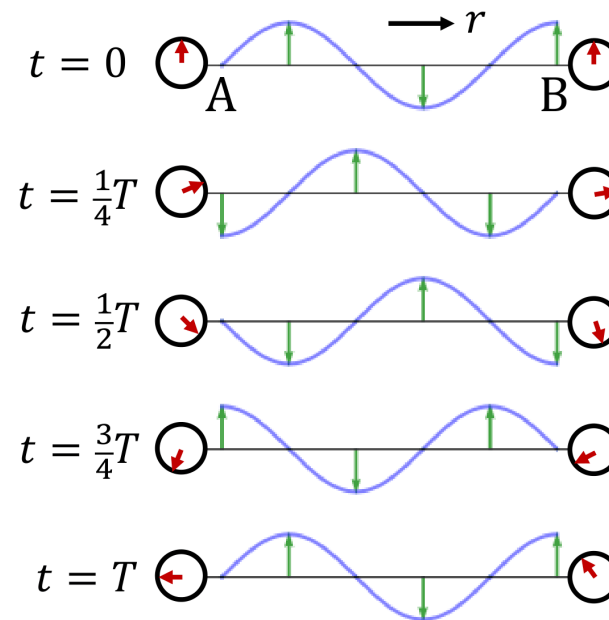


図22 光波の振動で測られる座標時間 t と，各点の時計が示す固有時間 τ

■ 「時空の歪みに沿った」粒子の運動 現実の軌道は次式の固有時間を最大化する.

$$\tau = \int \frac{ds}{c} = \frac{1}{c} \int \sqrt{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (cdt)^2 - (rd\phi)^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}}. \quad (265)$$

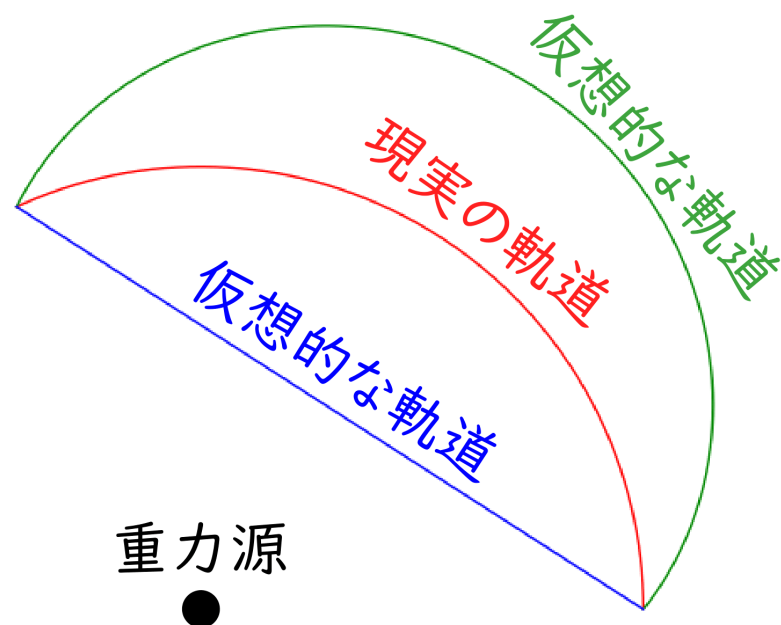


図23 Schwarzschild時空の赤道面における粒子の軌道の概念図. 時空ではなく空間の軌道を描いていることに注意せよ.

■ブラックホール

Schwarzschild 半径の内側 $r < r_g$ の計量は, $\varepsilon \equiv r_g - r (> 0)$ とおくと

$$ds^2 = \frac{r_g - \varepsilon}{\varepsilon} d\varepsilon^2 - \frac{\varepsilon}{r_g - \varepsilon} c^2 dt^2 - (r_g - \varepsilon)^2 d\Omega^2. \quad (266)$$

粒子の世界線に沿って時間的座標 r は絶えず減少する. $r = r_g$ は地平面, 内部の領域 $r < r_g$ はブラックホールと呼ばれる [14, pp.392–393].

$r = 0$ はスカラー曲率

$$R \sim \frac{r_g}{r^3} \sim \frac{Gm}{c^2 r^3} \quad (267)$$

が発散する曲率特異点である. 実際には曲率 (267) が Planck スケール L_P^{-2} 程度 ($L_P = \sqrt{G\hbar/c^3} \sim 10^{-33}\text{cm}$ は Planck 長さ) となる半径

$$r \sim \sqrt[3]{L_P^2 r_g} \sim \sqrt[3]{\frac{G^2 \hbar m}{c^5}} \quad (268)$$

に達すると, 古典的な一般相対性理論は破綻すると考えられる [27, p.140].

■Kruskal–Szekeres 座標とホイトホール [14, pp.394–398] [15, pp.132–136]

Kruskal–Szekeres (クルスカルスゼッケル) 座標

$$(u, v) = \begin{cases} \left(\frac{r}{r_g} - 1\right)^{1/2} e^{r/2r_g} \left(\cosh \frac{ct}{2r_g}, \sinh \frac{ct}{2r_g}\right) & (r > r_g) \\ \left(1 - \frac{r}{r_g}\right)^{1/2} e^{r/2r_g} \left(\sinh \frac{ct}{2r_g}, \cosh \frac{ct}{2r_g}\right) & (r < r_g) \end{cases} \quad (269)$$

を用いると, Schwarzschild 時空の計量は

$$ds^2 = \frac{4r_g^3}{r} e^{-r/r_g} (dv^2 - du^2) - r^2 d\Omega^2, \quad (270)$$

$$\text{with } \left(\frac{r}{r_g} - 1\right) e^{r/r_g} = u^2 - v^2. \quad (271)$$

動径方向に進む光の軌道に沿って

$$ds^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad dv = \pm du \quad (272)$$

となるので, 局所的な光円錐の傾きは $dv/du = \pm 1$ となる.

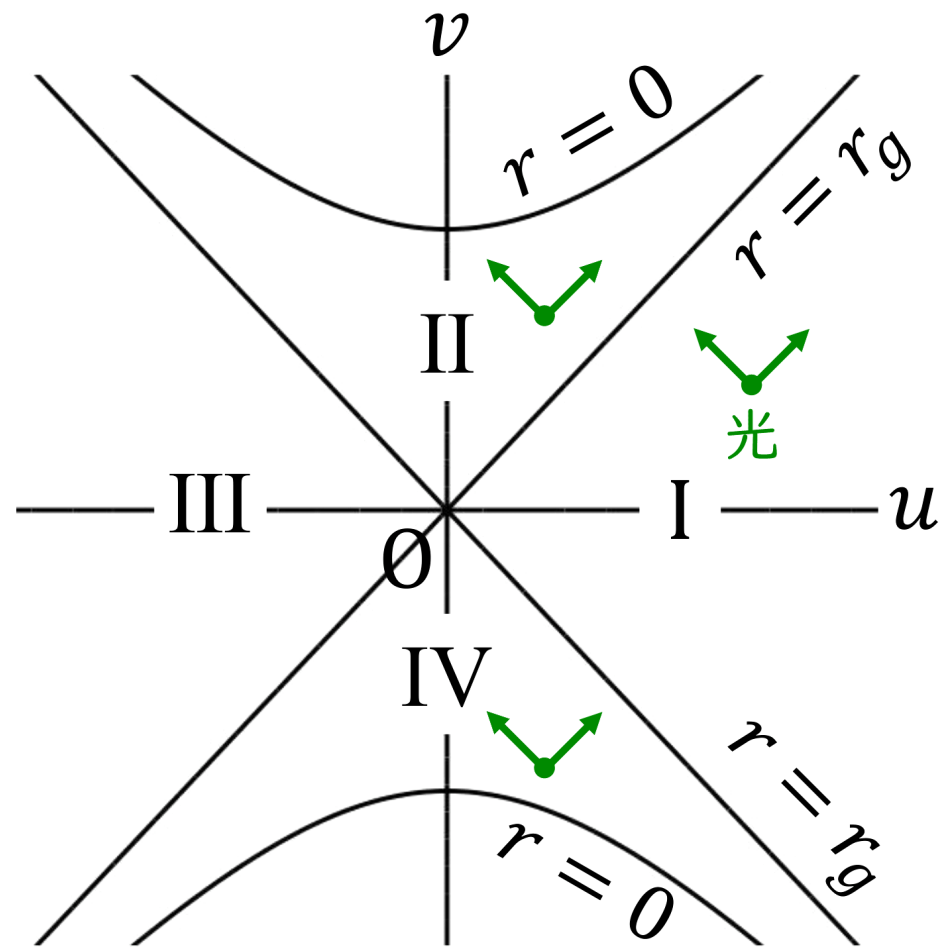


図24 Kruskal時空図. 2直線 $v = \pm u$ は地平面 $r = r_g$, 双曲線 $v^2 - u^2 = 1$ は特異点 $r = 0$, 領域IIはブラックホール, 領域IVはホワイトホールを表す.

■地平面付近に静止する粒子の加速度 [1, p.209] [27, pp.143–144]

粒子の4元加速度を式(136): $a^\mu = \frac{du^\mu}{ds}$ の代わりに、ベクトルとして変換する量

$$a^\mu = \frac{Du^\mu}{ds} = u^\nu D_\nu u^\mu \quad (273)$$

で定義すると、ノルム $a \equiv \sqrt{-g_{\mu\nu} a^\mu a^\nu}$ は不変量である。

一定の Schwarzschild 座標 (r, θ, ϕ) に静止した粒子は、加速度

$$a^\mu = \left(0, \frac{r_g}{2r^2}, 0, 0\right), \quad a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} \frac{r_g}{2r^2}. \quad (274)$$

を持つ(自由落下する局所慣性系に対して加速)。

特に地平面の近く $r = r_g + \varepsilon$ ($0 < \varepsilon \ll r_g$) を考えると、Minkowski 時空における等加速度運動(2.2.5項)の場合と同様、加速度は地平面からの真の距離

$$l = \int_{r_g}^{r_g + \varepsilon} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} \simeq 2\sqrt{r_g \varepsilon} \quad (275)$$

の逆数 $a = 1/l$ で表される。

4.1 節の式の導出など

Schwarzschild 解 (260) の導出

以下では座標を $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \phi)$ とおき, $x^1 = r$ による微分をプライムで, $x^0 = ct$ による微分をドットで表す. ds^2 の表式 (259) から計量テンソルを読み取ると

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad \therefore (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

となる. ここで指数 λ, ν は無次元量であることに注意すると, 以降の計算を進めていく上で, 検算に役立つ.

ここでは文献 [4, pp.334–336] にならって未知関数 $\lambda(r, t), \nu(r, t)$ が座標時間 t に依存し得るとしても, 結果的に Schwarzschild 解 (260) が導かれることを示す. あらかじめ λ, ν が t に依らない静的な解を仮定すれば, それらの時間微分の項は落ちるため, 以下の計算は大幅に簡略化できる.

さて, 未知関数 $\lambda(r, t), \nu(r, t)$ を Einstein 方程式から定めれば, 時空の幾何学が決定される. そこで Einstein 方程式に現れる Ricci テンソルやスカラー曲率を, 未知関数 $\lambda(r, t), \nu(r, t)$ を用いて表すことを考える.

■ Christoffel記号の計算 まず $\lambda(r, t), \nu(r, t)$ を用いて Christoffel記号を表そう. $(g_{\mu\nu})$ の非対角成分はゼロだから, Christoffel記号 (64), (70):

$$\Gamma^\alpha_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}(\partial_\nu g_{\lambda\mu} + \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\lambda})$$

の α, ν, λ が相異なるものはゼロになる. よってゼロでない Christoffel記号 $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ は, 対称な添字 ν, λ が (i) 等しいものと (ii) 異なるものに分類すると

$$(i) \quad \Gamma^\mu_{\nu\nu} = -\frac{1}{2}g^{\mu\mu}\partial_\mu g_{\nu\nu} \quad (\mu, \nu \text{ で和をとらない}) \quad (276)$$

$$(ii) \quad \Gamma^\mu_{\nu\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\mu}\partial_\nu g_{\mu\mu} (= \Gamma^\mu_{\mu\nu}) \quad (\mu \neq \nu, \mu \text{ で和をとらない}) \quad (277)$$

に限られる.

式 (276) の形の Christoffel記号は以下の 16 個である.

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}e^{-\nu}\partial_0 e^\nu = \frac{\dot{\nu}}{2},$$

$$\Gamma^0_{11} = \frac{1}{2}e^{-\nu}\partial_0 e^\lambda = \frac{1}{2}\dot{\lambda}e^{\lambda-\nu},$$

$$\Gamma^0_{22} = \frac{1}{2}e^{-\nu}\partial_0 r^2 = 0,$$

$$\Gamma^0_{33} = \frac{1}{2}e^{-\nu}\partial_0 (r^2 \sin^2 \theta) = 0,$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}(-e^{-\lambda})(-e^\nu)' = \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda},$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}(-e^{-\lambda})(e^{-\lambda})' = \frac{\lambda'}{2},$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}(-e^{-\lambda})(-r^2)' = -re^{-\lambda},$$

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{33} &= \frac{1}{2}(-e^{-\lambda})(-r^2 \sin^2 \theta)' \\ &= -re^{-\lambda} \sin^2 \theta,\end{aligned}$$

$$\Gamma^2_{00} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \partial_\theta e^\nu = 0,$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \partial_\theta e^{-\lambda} = 0,$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \partial_\theta(-r^2) = 0,$$

$$\begin{aligned}\Gamma^2_{33} &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \partial_\theta(-r^2 \sin^2 \theta) \\ &= -\sin \theta \cos \theta,\end{aligned}$$

$$\Gamma^3_{00} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_\phi e^\nu = 0,$$

$$\Gamma^3_{11} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_\phi(-e^\lambda) = 0,$$

$$\Gamma^3_{22} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_\phi(-r^2) = 0,$$

$$\Gamma^3_{33} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_\phi(-r^2 \sin^2 \theta) = 0.$$

式(277)左辺の形のChristoffel記号は以下の12個である.

$$\Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}e^{-\nu} \partial_r e^\nu = \frac{\nu'}{2},$$

$$\Gamma^0_{20} = \frac{1}{2}e^{-\nu} \partial_\theta e^\nu = 0,$$

$$\Gamma^0_{30} = \frac{1}{2}e^{-\nu} \partial_\phi e^\nu = 0,$$

$$\Gamma^1_{01} = \frac{1}{2}(-e^{-\lambda}) \partial_0(-e^\lambda) = \frac{\dot{\lambda}}{2},$$

$$\Gamma^1_{21} = \frac{1}{2}(-e^{-\lambda}) \partial_\theta(-e^\lambda) = 0,$$

$$\Gamma^1_{31} = \frac{1}{2}(-e^{-\lambda}) \partial_\phi(-e^\lambda) = 0,$$

$$\Gamma^2_{02} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \partial_\theta(-r^2) = 0,$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \partial_r(-r^2) = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma^2_{32} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \partial_\phi(-r^2) = 0,$$

$$\Gamma^3_{03} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_0(-r^2 \sin^2 \theta) = 0,$$

$$\begin{aligned} \Gamma^3_{13} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_r(-r^2 \sin^2 \theta) \\ &= \frac{1}{r}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^3_{23} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_\theta(-r^2 \sin^2 \theta) \\ &= \frac{1}{\tan \theta}. \end{aligned}$$

その他の Christoffel 記号はゼロである.

■ Ricci テンソル, スカラー曲率の計算 先に求めた Christoffel 記号に対して, 曲率テンソル, Ricci テンソル, およびスカラー曲率を定義式 (92), (94), (95):

$$R^\lambda_{\mu\nu\rho} \equiv \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} - \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\rho} - \Gamma^\lambda_{\sigma\rho} \Gamma^\sigma_{\mu\nu},$$

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\lambda_{\mu\lambda\nu}, \quad R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

に従って計算する. その際,

$$\text{対称性} \quad R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \quad \Rightarrow \quad R^\mu_{\nu} = g^{\mu\lambda} R_{\lambda\nu} = g^{\mu\lambda} R_{\nu\lambda} = R_{\nu}^{\mu}$$

にも注意する.

R_{00} の計算 $R_{00} = R^\mu_{0\mu 0} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{00} - \partial_0 \Gamma^\mu_{0\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{00} - \Gamma^\mu_{0\nu} \Gamma^\nu_{0\mu}$ の
最右辺について,

- 第1項の Γ^μ_{00} , 第2項の $\Gamma^\mu_{0\mu}$ がゼロでない値を持つのはいずれも $\mu = 0, 1$ のとき.
- 第3項の Γ^ν_{00} がゼロでない値を持つのは $\nu = 0, 1$ のときであり,
 - $\nu = 0$ に対して $\Gamma^\mu_{\mu\nu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu = 0, 1$ のとき,
 - $\nu = 1$ に対して $\Gamma^\mu_{\mu\nu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu = 0, 1, 2, 3$ のとき.
- 第4項の $\Gamma^\mu_{0\nu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu, \nu) = (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ のとき.

よって

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= \cancel{\partial_0 \frac{\dot{\nu}}{2}} + \partial_1 \left(\frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} \right) \quad \Leftarrow \quad \partial_\mu \Gamma^\mu_{00} \\
 &\quad \cancel{-\partial_0 \frac{\dot{\nu}}{2}} - \partial_0 \frac{\dot{\lambda}}{2} \quad \Leftarrow \quad -\partial_0 \Gamma^\mu_{0\mu} \\
 &\quad \cancel{+ \left(\frac{\dot{\nu}}{2} \right)^2} + \frac{\dot{\lambda}}{2} \frac{\dot{\nu}}{2} + \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} \times 2 \right) \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} \quad \Leftarrow \quad \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{00} \\
 &\quad -2 \times \frac{\nu'}{2} \cdot \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} \cancel{- \left(\frac{\dot{\nu}}{2} \right)^2} - \left(\frac{\dot{\lambda}}{2} \right)^2 \quad \Leftarrow \quad -\Gamma^\mu_{0\nu} \Gamma^\nu_{0\mu}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} \right)' - \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} - \frac{\nu'^2}{4} e^{\nu-\lambda} + \left(\frac{\lambda'}{2} + \frac{2}{r} \right) \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \\
&= \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right) e^{\nu-\lambda} - \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4}.
\end{aligned}$$

R_{01} の計算 $R_{01} = R^\mu_{0\mu 1} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{01} - \partial_1 \Gamma^\mu_{0\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{01} - \Gamma^\mu_{1\nu} \Gamma^\nu_{0\mu}$ の最右辺について,

- 第1項の Γ^μ_{01} , 第2項の $\Gamma^\mu_{0\mu}$ がゼロでない値を持つのはいずれも $\mu = 0, 1$ のとき.
- 第3項の Γ^ν_{01} がゼロでない値を持つのは $\nu = 0, 1$ のときであり,
 - $\nu = 0$ に対して $\Gamma^\mu_{\mu\nu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu = 0, 1$ のとき,
 - $\nu = 1$ に対して $\Gamma^\mu_{\mu\nu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu = 0, 1, 2, 3$ のとき.
- 第4項の $\Gamma^\nu_{0\mu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu, \nu) = (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ のとき.

よって

$$\begin{aligned}
R_{01} &= \cancel{\partial_0 \frac{\nu'}{2}} + \cancel{\partial_1 \frac{\dot{\lambda}}{2}} \Leftarrow \partial_\mu \Gamma^\mu_{01} \\
&\quad - \cancel{\partial_1 \frac{\dot{\nu}}{2}} - \cancel{\partial_1 \frac{\dot{\lambda}}{2}} \Leftarrow -\partial_1 \Gamma^\mu_{0\mu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\cancel{\frac{\dot{\nu}}{2}} + \cancel{\frac{\dot{\lambda}}{2}} \right) \frac{\nu'}{2} + \left(\cancel{\frac{\nu'}{2}} + \cancel{\frac{\lambda'}{2}} + \frac{1}{r} \times 2 \right) \frac{\dot{\lambda}}{2} \quad \Leftarrow \quad \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{01} \\
& - \cancel{\frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda}} - \cancel{\frac{\nu'}{2} \frac{\dot{\nu}}{2}} - \cancel{\frac{\dot{\lambda}}{2} \frac{\nu'}{2}} - \cancel{\frac{\lambda'}{2} \frac{\dot{\lambda}}{2}} \quad \Leftarrow \quad -\Gamma^\mu_{1\nu} \Gamma^\nu_{0\mu} \\
& = \frac{\dot{\lambda}}{r} (= R_{10}).
\end{aligned}$$

R_{02} の計算 $R_{02} = R^\mu_{0\mu 2} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{02} - \partial_2 \Gamma^\mu_{0\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{02} - \Gamma^\mu_{2\nu} \Gamma^\nu_{0\mu}$ の最右辺について,

- 第1項における Γ^μ_{02} , 第3項における Γ^ν_{02} の形の Christoffel 記号は全てゼロ.
- 第2項について, $x^2 = \theta$ 依存性を持つ Christoffel 記号は $\Gamma^2_{33}, \Gamma^3_{23}, \Gamma^1_{33}$ のみであり, いずれも $\Gamma^\mu_{0\mu}$ の形ではない.
- 第4項の $\Gamma^\mu_{2\nu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu, \nu) = (1, 2), (2, 1), (3, 3)$ のときであり, いずれに対しても $\Gamma^\nu_{0\mu} = 0$ となる.

よって

$$R_{02} = 0 (= R_{20}).$$

R_{03} の計算 $R_{03} = R^\mu_{0\mu 3} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{03} - \partial_3 \Gamma^\mu_{0\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{03} - \Gamma^\mu_{3\nu} \Gamma^\nu_{0\mu}$ の最右辺について,

- 第1項における Γ^μ_{03} , 第3項における Γ^ν_{03} の形の Christoffel 記号は全てゼロ.
- 第2項は, $x^3 = \phi$ 依存性を持つ Christoffel 記号が存在しないからゼロ.
- 第4項の $\Gamma^\mu_{3\nu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu, \nu) = (1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2)$ のときであり, いずれに対しても $\Gamma^\nu_{0\mu} = 0$ となる.

よって

$$R_{03} = 0 (= R_{30}).$$

R_{11} の計算 $R_{11} = R^\mu_{1\mu 1} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{11} - \partial_1 \Gamma^\mu_{1\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{11} - \Gamma^\mu_{1\nu} \Gamma^\nu_{1\mu}$ の最右辺について,

- 第1項の Γ^μ_{11} がゼロでない値を持つのは $\mu = 0, 1$ のとき.
- 第3項の Γ^ν_{11} がゼロでない値を持つのは $\nu = 0, 1$ のときであり,
 - $\nu = 0$ に対して $\Gamma^\mu_{\mu\nu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu = 0, 1$ のとき,
 - $\nu = 1$ に対して $\Gamma^\mu_{\mu\nu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu = 0, 1, 2, 3$ のとき.
- 第4項の $\Gamma^\mu_{1\nu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu, \nu) = (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)$ のとき.

よって

$$R_{11} = \partial_0 \left(\frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} \right) + \cancel{\partial_1 \frac{\lambda}{2}} \Leftarrow \partial_\mu \Gamma^\mu_{11}$$

$$\begin{aligned}
& -\partial_1 \left(\cancel{\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2}} + \frac{1}{r} \times 2 \right) \Leftarrow -\partial_1 \Gamma^\mu_{1\mu} \\
& + \left(\frac{\dot{\nu}}{2} + \frac{\dot{\lambda}}{2} \right) \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} + \left(\cancel{\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2}} + \frac{1}{r} \times 2 \right) \frac{\lambda'}{2} \Leftarrow \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{11} \\
& - \cancel{\left(\frac{\lambda'}{2} \right)^2} - \left(\frac{\nu'}{2} \right)^2 - \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} \frac{\dot{\lambda}}{2} \times 2 - \left(\frac{1}{r} \right)^2 \times 2 \Leftarrow -\Gamma^\mu_{1\nu} \Gamma^\nu_{1\mu} \\
& = \partial_0 \left(\frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} \right) - \cancel{\frac{\nu''}{2} + \frac{2}{r^2}} + \frac{\dot{\nu}}{2} \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} + \underbrace{\left(\frac{\dot{\lambda}}{2} \right)^2 e^{\lambda-\nu}} \\
& + \frac{\lambda' \nu'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \underbrace{\left(\frac{\nu'}{2} \right)^2 - \cancel{\frac{2}{r^2}} - 2 \left(\frac{\dot{\lambda}}{2} \right)^2 e^{\lambda-\nu}} \\
& = \partial_0 \left(\frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} \right) + \frac{\dot{\lambda}}{2} \left(\frac{\dot{\nu}}{2} - \frac{\dot{\lambda}}{2} \right) e^{\lambda-\nu} - \frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda' \nu'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'^2}{4} \\
& = \left\{ \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}}{4} (\dot{\lambda} - \dot{\nu}) \right\} e^{\lambda-\nu} - \frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda' \nu'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'^2}{4}.
\end{aligned}$$

R_{12} の計算 $R_{12} = R^\mu_{1\mu 2} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{12} - \partial_2 \Gamma^\mu_{1\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{12} - \Gamma^\mu_{2\nu} \Gamma^\nu_{1\mu}$ の

最右辺について,

- 第1項の Γ^μ_{12} がゼロでない値を持つのは $\mu = 2$ のとき.
ところが $\mu = 2$ のとき, $\partial_\mu \Gamma^\mu_{12} = \partial_2 \frac{1}{r} = 0$ となる.
- 第2項について, $x^2 = \theta$ 依存性を持つ Christoffel 記号は $\Gamma^2_{33}, \Gamma^3_{23}, \Gamma^1_{33}$ のみであり, いずれも $\Gamma^\mu_{1\mu}$ の形ではない.
- 第3項の Γ^ν_{12} がゼロでない値を持つのは $\nu = 2$ のときであり, $\nu = 2$ に対して $\Gamma^\mu_{\mu\nu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu = 3$ のとき.
(μ, ν) = (3, 2) のとき, $\Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{12} = \frac{\cot \theta}{r}$ となる.
- 第4項の $\Gamma^\mu_{2\nu}$ がゼロでない値を持つのは (μ, ν) = (1, 2), (2, 1), (3, 3) のときであり, (μ, ν) = (1, 2), (2, 1) に対しては $\Gamma^\nu_{1\mu} = 0$ となる. (μ, ν) = (3, 3) のとき, $-\Gamma^\mu_{2\nu} \Gamma^\nu_{1\mu} = -\frac{\cot \theta}{r}$ となる.

よって

$$R_{12} = \frac{\cot \theta}{r} - \frac{\cot \theta}{r} = 0 (= R_{21}).$$

R_{13} の計算 $R_{13} = R^\mu_{1\mu 3} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{13} - \partial_3 \Gamma^\mu_{1\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{13} - \Gamma^\mu_{3\nu} \Gamma^\nu_{1\mu}$ の最右辺について,

- 第1項の Γ^μ_{13} がゼロでない値を持つのは $\mu = 3$ のとき.
ところが $\mu = 3$ のとき, $\partial_\mu \Gamma^\mu_{13} = \partial_3 \frac{1}{r} = 0$ となる.

- 第2項は, $x^3 = \phi$ 依存性を持つ Christoffel 記号が存在しないからゼロ.
- 第3項の Γ^ν_{13} がゼロでない値を持つのは $\nu = 3$ のときであり,
 $\nu = 3$ に対して $\Gamma^\mu_{\mu\nu} = 0$ となる.
- 第4項の $\Gamma^\mu_{3\nu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu, \nu) = (1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2)$ のとき
 であり, いずれに対しても $\Gamma^\nu_{1\mu} = 0$ となる.

よって

$$R_{13} = 0 (= R_{31}).$$

R_{22} の計算 $R_{22} = R^\mu_{2\mu 2} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{22} - \partial_2 \Gamma^\mu_{2\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{22} - \Gamma^\mu_{2\nu} \Gamma^\nu_{2\mu}$ の
 最右辺について,

- 第1項の Γ^μ_{22} がゼロでない値を持つのは $\mu = 1$ のとき.
- 第2項の $\Gamma^\mu_{2\mu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu = 3$ のとき.
- 第3項の Γ^ν_{22} がゼロでない値を持つのは $\nu = 1$ のとき.
- 第4項の $\Gamma^\mu_{2\nu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu, \nu) = (1, 2), (2, 1), (3, 3)$ のとき.

よって

$$\begin{aligned} R_{22} = \partial_1(-re^{-\lambda}) &\Leftarrow \partial_\mu \Gamma^\mu_{22} \\ -\partial_2(\cot \theta) &\Leftarrow -\partial_2 \Gamma^\mu_{2\mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} \times 2 \right) (-re^{-\lambda}) \quad \Leftarrow \quad \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{22} \\
& \cancel{-(-re^{-\lambda}) \frac{1}{r} - \frac{1}{r} (-re^{-\lambda})} - \cot^2 \theta \quad \Leftarrow \quad -\Gamma^\mu_{2\nu} \Gamma^\nu_{2\mu} \\
& = \partial_1(-re^{-\lambda}) + \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} \right) (-re^{-\lambda}) - \partial_2(\cot \theta) - \cot^2 \theta \\
& = \left\{ -1 + r \left(\frac{\lambda'}{2} - \frac{\nu'}{2} \right) \right\} e^{-\lambda} + 1. \quad \left(\because -\partial_2(\cot \theta) - \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = 1 \right)
\end{aligned}$$

R_{23} の計算 $R_{23} = R^\mu_{2\mu 3} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{23} - \partial_3 \Gamma^\mu_{2\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{23} - \Gamma^\mu_{3\nu} \Gamma^\nu_{2\mu}$ の最右辺について,

- 第1項の Γ^μ_{23} がゼロでない値を持つのは $\mu = 3$ のとき.
ところが $\mu = 3$ のとき, $\partial_\mu \Gamma^\mu_{23} = \partial_3 \cot \theta = 0$ となる.
- 第2項は, $x^3 = \phi$ 依存性を持つ Christoffel 記号が存在しないからゼロ.
- 第3項の Γ^ν_{23} がゼロでない値を持つのは $\nu = 3$ のときであり,
 $\nu = 3$ に対して $\Gamma^\mu_{\mu\nu} = 0$ となる.
- 第4項の $\Gamma^\nu_{2\mu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu, \nu) = (1, 2), (2, 1), (3, 3)$ のときであり, いずれに対しても $\Gamma^\mu_{3\nu} = 0$ となる.

よって

$$R_{23} = 0 (= R_{32}).$$

R_{33} の計算 $R_{33} = R^\mu_{3\mu 3} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{33} - \partial_3 \Gamma^\mu_{3\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{33} - \Gamma^\mu_{3\nu} \Gamma^\nu_{3\mu}$ の最右辺について,

- 第1項の Γ^μ_{33} がゼロでない値を持つのは $\mu = 1, 2$ のとき.
- 第2項は, $x^3 = \phi$ 依存性を持つ Christoffel 記号が存在しないからゼロ.
- 第3項の Γ^ν_{33} がゼロでない値を持つのは $\nu = 1, 2$ のときであり,
 - $\nu = 1$ に対して $\Gamma^\mu_{\mu\nu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu = 0, 1, 2, 3$ のとき,
 - $\nu = 2$ に対して $\Gamma^\mu_{\mu\nu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu = 3$ のとき.
- 第4項の $\Gamma^\mu_{3\nu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu, \nu) = (1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2)$ のとき.

よって

$$\begin{aligned} R_{33} &= \partial_1(-r \sin^2 \theta e^{-\lambda}) + \partial_2(-\sin \theta \cos \theta) \quad \Leftarrow \quad \partial_\mu \Gamma^\mu_{33} \\ &+ \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \cancel{\frac{1}{r} \times 2} \right) (-r \sin^2 \theta e^{-\lambda}) + \underbrace{\cot \theta (-\sin \theta \cos \theta)}_{-\cos^2 \theta} \quad \Leftarrow \quad \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{33} \\ &\underbrace{-(-\sin \theta \cos \theta) \cot \theta \times 2}_{2 \cos^2 \theta} - \cancel{\left(-r \sin^2 \theta e^{-\lambda} \right) \frac{1}{r} \times 2} \quad \Leftarrow \quad -\Gamma^\mu_{3\nu} \Gamma^\nu_{3\mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \partial_1(-r \sin^2 \theta e^{-\lambda}) + \partial_2(-\sin \theta \cos \theta) + \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} \right) (-r \sin^2 \theta e^{-\lambda}) + \cos^2 \theta \\
&= -e^{-\lambda} \sin^2 \theta \left\{ 1 + r \left(\frac{\nu'}{2} - \frac{\lambda'}{2} \right) \right\} + \sin^2 \theta.
\end{aligned}$$

Ricci テンソルの全成分

以上で Ricci テンソルの全成分が得られたことになる．これを混合テンソル R^μ_ν の形に書き換え，以下にまとめる．その際 $(g^{\mu\nu})$ は対角的なので，例えば

$$R^0_0 = g^{0\mu} R_{\mu 0} = g^{00} R_{00}$$

のように計算できることに注意すれば良い．すると，

$$R^0_0 = g^{00} R_{00} = e^{-\nu} R_{00}, \quad R_{00} = \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu' \lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right) e^{\nu-\lambda} - \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4},$$

$$R^0_1 = g^{00} R_{01} = e^{-\nu} \frac{\dot{\lambda}}{r}, \quad R^0_2 = g^{00} R_{02} = 0, \quad R^0_3 = g^{00} R_{03} = 0,$$

$$R^1_0 = g^{11} R_{10} = -e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r},$$

$$R^1_1 = g^{11} R_{11} = -e^{-\lambda} R_{11}, \quad R_{11} = \left\{ \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}}{4} (\dot{\lambda} - \dot{\nu}) \right\} e^{\lambda-\nu} - \frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda' \nu'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'^2}{4},$$

$$\begin{aligned}
R^1_2 = g^{11} R_{12} &= 0, & R^1_3 = g^{11} R_{13} &= 0, & R^2_0 = g^{22} R_{20} &= 0, & R^2_1 = g^{22} R_{21} &= 0, \\
R^2_2 = g^{22} R_{22} &= -\frac{1}{r^2} R_{22}, & R_{22} &= \left\{ -1 + r \left(\frac{\lambda'}{2} - \frac{\nu'}{2} \right) \right\} e^{-\lambda} + 1, \\
R^2_3 = g^{22} R_{23} &= 0, & R^3_0 = g^{33} R_{30} &= 0, & R^3_1 = g^{33} R_{31} &= 0, & R^3_2 = g^{33} R_{32} &= 0, \\
R^3_3 = g^{33} R_{33} &= -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} R_{33}, & R_{33} &= -e^{-\lambda} \sin^2 \theta \left\{ 1 + r \left(\frac{\nu'}{2} - \frac{\lambda'}{2} \right) \right\} + \sin^2 \theta.
\end{aligned}$$

スカラー曲率 R の計算 以上よりスカラー曲率 R は

$$\begin{aligned}
R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} &= \sum_{\mu=0}^3 g^{\mu\mu} R_{\mu\mu} \\
&= e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right) + e^{-\nu} \left(-\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \right) \Leftarrow g^{00} R_{00} \\
&+ e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\lambda'}{r} \right) + e^{-\nu} \left(-\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \right) \Leftarrow g^{11} R_{11} \\
&+ e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{2r} - \frac{\lambda'}{2r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \Leftarrow g^{22} R_{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{2r} - \frac{\lambda'}{2r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \quad \Leftarrow \quad g^{33} R_{33} \\
& = e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu' \lambda'}{2} + 2 \frac{\nu'}{r} - 2 \frac{\lambda'}{r} + \frac{2}{r^2} \right) + e^{-\nu} \left(-\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{2} \right) - \frac{2}{r^2}.
\end{aligned}$$

Einstein テンソル Einstein 方程式の左辺 (Einstein テンソル)

$$R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\nu R \equiv G^\mu{}_\nu$$

は $\mu \neq \nu$ に対して $G^\mu{}_\nu = R^\mu{}_\nu$ となる. このうちゼロでない成分は, 上記のように $R^0{}_1$ と $R^1{}_0$ がある. これ以外のゼロでない Einstein テンソル $G^\mu{}_\nu$ の成分として, $\mu = \nu$ の成分を計算する. まず,

$$\begin{aligned}
G^0{}_0 &= e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu' \lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right) + e^{-\nu} \left(-\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \right) \quad \Leftarrow \quad R^0{}_0 \\
&+ e^{-\lambda} \left(-\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' \lambda'}{4} - \frac{\nu'}{r} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \\
&+ e^{-\nu} \left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{4} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \right) + \frac{1}{r^2} \quad \Leftarrow \quad -\frac{1}{2} \delta^0{}_0 R
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \\
G^1_1 &= \cancel{e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\lambda'}{r} \right)} + \cancel{e^{-\nu} \left(-\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \right)} \Leftarrow R^1_1 \\
&\quad + e^{-\lambda} \left(\cancel{-\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2}} \right) \\
&\quad + \cancel{e^{-\nu} \left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \right)} + \frac{1}{r^2} \Leftarrow -\frac{1}{2}\delta^1_1 R \\
&= -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}
\end{aligned}$$

である．次に

$$\begin{aligned}
R^2_2 &= -\frac{1}{r^2} \left[\left\{ -1 + r \left(\frac{\lambda'}{2} - \frac{\nu'}{2} \right) \right\} e^{-\lambda} + 1 \right] \\
&= -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left[\left\{ -1 + r \left(\frac{\lambda'}{2} - \frac{\nu'}{2} \right) \right\} e^{-\lambda} \sin^2 \theta + \sin^2 \theta \right] = R^3_3
\end{aligned}$$

に注意すると,

$$\begin{aligned}
 G^2_2 &= G^3_3 \\
 &= e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{2r} - \frac{\lambda'}{2r} + \cancel{\frac{1}{r^2}} \right) - \cancel{\frac{1}{r^2}} \Leftrightarrow R^2_2 = R^3_3 \\
 &\quad + e^{-\lambda} \left(-\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} - \cancel{\frac{1}{r^2}} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'}{r} + \frac{\nu'\lambda'}{4} \right) \\
 &\quad + e^{-\nu} \left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} \right) + \cancel{\frac{1}{r^2}} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\delta^2_2 R = -\frac{1}{2}\delta^3_3 R \\
 &= -\frac{1}{2}e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2} \right) + \frac{1}{2}e^{-\nu} \left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2} \right).
 \end{aligned}$$

■Einstein 方程式, Schwarzschild 解

以上より Einstein 方程式 (221): $R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R = \frac{8\pi G}{c^4}T^\mu_\nu$ (ただし宇宙定数 $\Lambda = 0$) は, 未知関数 $\lambda(r, t), \nu(r, t)$ に対する式

$$\frac{8\pi G}{c^4}T^1_1 = -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (278)$$

$$\begin{aligned} \frac{8\pi G}{c^4} T^2_2 = \frac{8\pi G}{c^4} T^3_3 = & -\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu' \lambda'}{2} \right) \\ & + \frac{1}{2} e^{-\nu} \left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{2} \right), \end{aligned} \quad (279)$$

$$\frac{8\pi G}{c^4} T^0_0 = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (280)$$

$$\frac{8\pi G}{c^4} T^1_0 = -e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r} \quad (281)$$

になる．真空中，すなわち，場の源となる質量の外側を考え $T^\mu_\nu = 0$ とおくと，

$$\text{式(278)} \quad \Rightarrow \quad e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0, \quad (282)$$

$$\text{式(280)} \quad \Rightarrow \quad e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (283)$$

$$\text{式(281)} \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda} = 0 \quad (284)$$

が得られる．式(282)と式(283)を辺々足すと， $f(t)$ を時間だけの関数として

$$\lambda' + \nu' = 0, \quad \therefore \lambda + \nu = f(t) \quad (285)$$

となる.

ところで ds^2 の表式(259)の形を壊すことなく, 時間に $t = f(t')$ という形の任意の変換を施すことができる. これは ν に任意の時間の関数を加えることと同等である. この任意性を利用すると, 一般性を失うことなく

$$\lambda + \nu = 0$$

とおくことができる. ここで式(284)より λ は時間に依らないから $\nu = -\lambda$ も時間に依らず, 重力場は必然的に静的となることが帰結する.

式(283)は

$$1 = e^{-\lambda}(1 - r\lambda') = (re^{-\lambda})', \quad \therefore e^{-\lambda} = 1 - \frac{r_g}{r}$$

と積分される(r_g は積分定数). こうしてSchwarzschild解(260)が得られる. 重力源となる星の質量を m とすると, 重力場が弱いときの式(215): $g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$ における重力ポテンシャル ϕ に対してNewtonの万有引力の法則(222): $\phi = -\frac{Gm}{r}$ が満たされるためには $r_g = \frac{2Gm}{c^2}$ ととれば良い^{*70}. 定数 r_g は長さの次元を持ち, 重力半径(Schwarzschild半径)と呼ばれる.

^{*70} ここで ds^2 の表式(259)における極座標 r を, Newtonの万有引力の法則(222): $\phi = -\frac{Gm}{r}$ における r と同一視した.

回転面の方程式(263)の導出

Schwarzschild時空における空間の歪みを視覚化した図21の回転面 $z = f(r)$ の方程式を求めるには、線分A'B'の長さ $\sqrt{1 + f'^2}dr$ が $dr/\sqrt{1 - (r_g/r)}$ になることを要求し

$$f' = \pm \sqrt{\frac{r_g}{r - r_g}}, \quad \therefore f = \pm 2\sqrt{r_g(r - r_g)} + \text{const}$$

とすれば良い [4, p.339]. (複号に応じた2つの曲面が得られるのは理に合っている.)

■ Kruskal-Szekeres 座標での計量 (270) の確認

$r > r_g$ のとき式 (269) より

$$\begin{aligned} du &= \frac{e^{r/2r_g}}{2r_g} \left\{ \frac{r/r_g}{\sqrt{(r/r_g) - 1}} \cosh(ct/2r_g) dr + \sqrt{(r/r_g) - 1} \sinh(ct/2r_g) c dt \right\}, \\ dv &= \frac{e^{r/2r_g}}{2r_g} \left\{ \frac{r/r_g}{\sqrt{(r/r_g) - 1}} \sinh(ct/2r_g) dr + \sqrt{(r/r_g) - 1} \cosh(ct/2r_g) c dt \right\} \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} du^2 - dv^2 &= \frac{e^{r/r_g}}{(2r_g)^2} \left[\frac{(r/r_g)^2}{(r/r_g) - 1} dr^2 - \{(r/r_g) - 1\} c^2 dt^2 \right] \\ &= \frac{e^{r/r_g}}{(2r_g)^2} \frac{r}{r_g} \left[\frac{dr^2}{1 - (r_g/r)} - \{1 - (r_g/r)\} c^2 dt^2 \right] \end{aligned}$$

を得る. 一方, $r < r_g$ のとき式 (269) より

$$du = \frac{e^{r/2r_g}}{2r_g} \left\{ -\frac{r/r_g}{\sqrt{1 - (r/r_g)}} \sinh(ct/2r_g) dr + \sqrt{1 - (r/r_g)} \cosh(ct/2r_g) c dt \right\},$$

$$dv = \frac{e^{r/2r_g}}{2r_g} \left\{ -\frac{r/r_g}{\sqrt{1-(r/r_g)}} \cosh(ct/2r_g) dr + \sqrt{1-(r/r_g)} \sinh(ct/2r_g) c dt \right\}$$

なので

$$\begin{aligned} du^2 - dv^2 &= \frac{e^{r/r_g}}{(2r_g)^2} \left[-\frac{(r/r_g)^2}{1-(r/r_g)} dr^2 + \{1-(r/r_g)\} c^2 dt^2 \right] \\ &= \frac{e^{r/r_g}}{(2r_g)^2} \frac{r}{r_g} \left[\frac{dr^2}{1-(r_g/r)} - \{1-(r_g/r)\} c^2 dt^2 \right] \end{aligned}$$

を得る．以上より $r \geq r_g$ のいずれに対しても Schwarzschild 計量は，Kruskal–Szekeres 座標 u, v を用いた式 (270) に書き換えられる．

参考 Kruskal–Szekeres 座標 (269) を半ば発見的な方法で説明する．

Schwarzschild 時空で動径方向に進む光の軌道は

$$\begin{aligned} 0 = ds^2 &= \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad \therefore c \frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}, \\ \therefore ct + \text{const} &= \pm \int \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}} = \pm \int \left(1 + \frac{r_g}{r - r_g}\right) dr = \pm r^*, \quad r^* \equiv r + r_g \ln \left| \frac{r - r_g}{r_g} \right| \end{aligned}$$

で表される．ただし本稿では $r < r_g$ の場合も念頭に，対数の真数に絶対値を付けて

「亀座標」 r^* を定義した^{*71}. よって新しい座標 $U = ct - r^*$, $V = ct + r^*$ を導入すると, $U = \text{const.}$ は外向きの光の軌道を, $V = \text{const.}$ は内向きの光の軌道を表す [15, p.131]. さらに座標変換

$$u = \frac{1}{2}(e^{V/2r_g} + e^{-U/2r_g}) = e^{r^*/2r_g} \cosh \frac{ct}{2r_g},$$

$$v = \frac{1}{2}(e^{V/2r_g} - e^{-U/2r_g}) = e^{r^*/2r_g} \sinh \frac{ct}{2r_g} \quad \left(e^{r^*/2r_g} = e^{r/2r_g} \left| \frac{r - r_g}{r_g} \right|^{1/2} \right)$$

を施すと Kruskal–Szekeres 座標 (269) を得る.

^{*71} 不定積分を用いる代わりに定積分の上限として r 依存性を明示した (単なる積分変数 r との混同に注意). また当然ながら積分結果を意識的に, 真数が無次元となることが保証される形に書いていることにも注意しよう.

■ 静止した粒子の加速度 (274) の導出

Schwarzschild 時空において空間座標の一定位置 (r, θ, ϕ) に静止した粒子の4元速度は $u^\mu = (u^0, \mathbf{0})$ とおける. $u^\mu \equiv \frac{du^\mu}{ds}$ は定義より

$$1 = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (u^0)^2$$

と規格化されていることから, $u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}}$ と定まる. このとき粒子の4元加速度は

$$a^\mu = u^\nu D_\nu u^\mu = u^\nu (\partial_\nu u^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} u^\rho) = (u^0)^2 \Gamma^\mu_{00}.$$

ところが Schwarzschild 解の導出過程で見たように [4, p.334], ノンゼロの Γ^μ_{00} は Γ^1_{00} のみであり ($x^1 = r$), その値は

$$\Gamma^1_{00} = g^{1\mu} \Gamma_{\mu 00} = g^{11} \Gamma_{100}, \quad \Gamma_{100} = \frac{1}{2} (\partial_0 g_{01} + \partial_0 g_{10} - \partial_1 g_{00}) = -\frac{1}{2} \partial_1 g_{00} = -\frac{r_g}{2r^2}.$$

以上より粒子はゼロでない加速度成分 $a^1 = r_g/2r^2$ を持ち, その(不変な)ノルムは

$$a \equiv \sqrt{-g_{\mu\nu} a^\mu a^\nu} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} \frac{r_g}{2r^2} : (274).$$

■地平面付近の加速度 $a = 1/l$ の導出

地平面の近く $r = r_g + \varepsilon$ ($0 < \varepsilon \ll r_g$) を考えると、式(274)の加速度 a は

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} = \sqrt{\frac{r_g + \varepsilon}{\varepsilon}} \simeq \sqrt{\frac{r_g}{\varepsilon}}, \quad \therefore a \simeq \sqrt{\frac{r_g}{\varepsilon}} \frac{1}{2r_g} = \frac{1}{2\sqrt{r_g \varepsilon}}.$$

他方で地平面からの真の距離は

$$l = \int_{r_g}^{r_g + \varepsilon} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} = \int_0^\varepsilon d\rho \sqrt{\frac{r_g + \rho}{\rho}} \simeq \int_0^\varepsilon d\rho \sqrt{\frac{r_g}{\rho}} = 2\sqrt{r_g \varepsilon}. \quad (\rho \equiv r - r_g)$$

なおこれと同じ結果を線要素の表式 $\frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}}$ から直接読み取るには、 $dr \rightarrow \varepsilon$ とおくと同時に、分母の r を線要素の中央 $r_g + (\varepsilon/2)$ で評価すれば良い。するとここでも加速度は $a = 1/l$ と書ける。

第4章の原稿(序文)

量子重力の準備も兼ねて、一般相対性理論の簡単な具体的応用を調べて古典物理学を締め括ろう。静的な系として Schwarzschild 時空を、ダイナミクスを伴う系として一様等方宇宙モデルを取り上げる。

4.1 節の原稿

まずは球対称時空に球座標 $x^\mu = (ct, r, \theta, \phi)$ を導入し、計量の一般的な形を定めよう。ここで球座標は、座標時間 t と動径座標 r が一定の2次元球面上で、線要素の真の長さ dl が式(256)で与えられるように定義される。言い換えれば2次元球面上では線要素の真の長さは座標長さに一致し、したがって $\theta = \pi/2$ の“赤道”の円周は $2\pi r$ 、球面の表面積は $4\pi r^2$ で与えられる [14, pp.335–336]。なお式(256)で導入した記法 $d\Omega^2$ を立体角 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ の2乗と混同しないように注意せよ。

ここで一般に時空多様体に座標 x^μ を導入すると、各時空点の接空間における基底ベクトルとして、座標曲線に沿う接ベクトル e_μ が定義されることに注意しよう。ここに添字 μ はベクトル成分ではなく、ベクトルの種類を表すラベルである。これに対し、ここでは(量子重力理論の慣習に従い)大文字のラテン文字 $I, J, \dots$ を用いて、局所慣性系の座標を X^I と表すと、接ベクトル e_μ は局所慣性系で見た成分 $e_\mu^I = \frac{\partial X^I}{\partial x^\mu}$ を持つベクトルとして定義できる。すると局所慣性系での Minkowski 計量 η_{IJ} に関する接ベクトル e_μ の

内積(257)は計量テンソルの座標変換に一致するので、曲線座標系に関する計量 $g_{\mu\nu}$ を与える。なお e_μ^I はテトラードと呼ばれ、後で見るように、量子重力に適した一般相対性理論の定式化の基本変数に用いられる [2, pp.59–60] [27, pp.32–33,p.50].

これを踏まえ、球対称時空の座標の説明に戻ろう。球座標 (r, θ, ϕ) は2次元球面内の基底 e_θ, e_ϕ が動径方向の基底 e_r と直交するように定義される。すなわち、それらの内積 $g_{r\theta}$ と $g_{r\phi}$ はゼロになる [14, p.336]。また θ 方向と ϕ 方向の直交性 $g_{\theta\phi} = e_\theta \cdot e_\phi = 0$ も成り立つ。実際このとき2次元球面上の線要素の式(256)が保証される。

さらに空間の次元を1つ落とすと、模式的には時空の球対称性は図20のような軸対称性のように描画できる。ここから時空の球対称な時空では、2次元球内の基底 e_θ, e_ϕ は e_0 とも直交することが視覚的に理解できる。したがって内積 $g_{0\theta}$ と $g_{0\phi}$ もゼロになる。

このため球対称時空の一般的な計量は式(258)の形をとる [14, p.337].

さらに時空が球対称であるだけでなく静的である場合を考えよう。この分野では“静的”と“定常”という術語が慣習的に異なる意味に使い分けられる。まず計量の全成分が座標時間 $t(= x^0/c)$ に依らない場合、時空間いし重力場は定常であると言われる。より正確には、そのような座標系を採れる時空を定常という。その上で時間反転 $t \rightarrow -t$ の下でも幾何学が不変な時空を静的と呼ぶ。定常な場が静的であるとは限らない。例えば一様な自転を行っている天体は周りに定常的な重力場を作ると期待されるものの、時間反転を施すと自転の向きが入れ替わるため、重力場は一般にもとの場と異なり得る。これは定常であるが静的でない重力場の例である。静的な時空では時間反転の下で世界

間隔 ds の表式が不変に留まるので、計量テンソルの時間-空間成分は恒等的に $g_{0i} = 0$ でなければならない。よって静的な球対称時空では式 (258) の g_{0r} が消え、その計量は一般に式 (259) の形に書ける。ただし $g_{00} > 0, g_{rr} < 0$ を仮定し、未知関数 $\lambda(r), \nu(r)$ を導入した [14, pp.337–338] [4, p.277].

ここで具体的な物理として場の方程式を適用しよう。ただし宇宙定数は $\Lambda = 0$ とおく。その上で未知関数 $\lambda(r), \nu(r)$ を真空中の Einstein 方程式から定めると、Schwarzschild 解 (260) が得られる。ただし定数パラメータ r_g は Schwarzschild 半径と呼ばれ、重力場が弱い極限で源の質量 m が作る Newton 重力の式 (215), (222) が再現されることを要求すると、式 (261) のように定められる (導出スライド参照) [4, pp.334–336].

結果の解釈に移ろう。以下では Schwarzschild 半径の外側 $r > r_g$ を考える。場の回転対称性から、場の中心を含む赤道面 $\theta = \pi/2$ 上の幾何学を考えれば充分である。それは座標 (r, ϕ) でパラメトライズされる 2次元の平面である。座標 r, ϕ がそれぞれ $dr, d\phi$ だけ異なる 2点間の空間的な距離の 2乗 dl^2 は、Schwarzschild 解 (260) における $dr, d\phi$ の項 (の逆符号) で与えられる。よって既に説明したように、Schwarzschild 座標 r は、 $r = \text{const}$ の円周の長さが $2\pi r$ となるように定義されている。一方、 $\phi = \text{const}$ の動径上で座標 $r = r_1, r_2 (> r_1)$ を持つ 2点間の距離は式 (262) であり、これは座標の読み $r_2 - r_1$ より大きい。こうして場の中心を中心とした円周 $2\pi r_1, 2\pi r_2$ の同心円に挟まれた円環の幅は $r_2 - r_1$ よりも長くなることが見出される [4, p.336]. これは座標に依らない真の距離の間の幾何学的な関係である。

ここで見た空間の歪みは図21のように視覚化できる [4, p.339]. 図21の xy 平面は場の中心を含む赤道面を表しており, 2点間の距離は座標距離に一致するように描かれているものと約束する. すなわち xy 平面は球座標 r, ϕ の読みを表示している. ここで

- 動径上に座標距離 dr 隔たる2点 A, B を採り,
- 円周上に座標距離 $r d\phi$ 隔たる2点 A, C を採る.

このとき図21に描画した曲面は, 線分 AB, AC の真上にある曲面上の線分 $A'B', A'C'$ の長さがそれぞれ AB 間, AC 間の真の距離 $\frac{dr}{\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}}, r d\phi$ を与えるように定義されている. 図21から円周方向の長さは座標距離に一致するのに対し, 動径方向の実際の長さは座標距離よりも引き伸ばされて長くなる様子が視覚的に把握できる. このような条件を満たす曲面は, “横に寝かせた” 放物線を z 軸の周りに回転して得られる回転面 (263) である (導出スライド参照). 物体が周りに作る空間の歪みをシートの凹みになぞらえる通俗的な説明で目にするイラストは, おそらく図21の曲面のイメージを起源に持つと推察される.

引き続き Schwarzschild 半径の外側 $r > r_g$ を考えよう. Schwarzschild 解 (260) において計量テンソルは座標時間 t に依らない. このような条件を満たす座標時間 t としては, 光の振動の回数で測った時間を考えれば良い. 実際, 計量テンソルが座標時間 t に依らないとき, t で測った光の振動数は光線上で一定となると期待される [4, p.279]. これは言い換えれば図22のように, 光 (電場または磁場) の振動に要する座標時間 T が光線上

の2点A,Bで等しくなることを意味する.

他方で空間座標が一定の各点に置かれた, 造りの全く同じ時計の示す固有時間 τ は Schwarzschild 解 (260) に従い, 座標時間が dt 経過するうちに式 (264) だけ進む. よって r の小さい重力源の近くほど図 22 のように時計は遅れることとなる [4, pp.277–278, p.336]^{*72}. なお空間の異なる2点で流れる時間を比較できるのは, 2点間で光の信号を送受信しているからであり, ここでは光の振動が刻む座標時間を大域的な同時性の定義に採用していると言える.

一般相対性理論の標準的な解釈によれば, 物体 (例えば惑星) は重力源 (例えば太陽) の作る時空の歪みに沿って運動するため, 重力源の周りを周回する. ここでは Schwarzschild 時空の赤道面 $\theta = \pi/2$ におけるテスト粒子の運動を例にとって, “時空の歪みに沿う運動” の意味するところを定性的に考察しよう. ただしテスト粒子の質量は重力源に比べて極めて小さく, 与えられえた重力場をかき乱さないものとする. まず最小作用原理に基づき, 時刻 $t = t_1, t_2$ での粒子の空間位置を指定しよう. このとき始・終点を結ぶ軌道のうち作用 $S_m = -mc \int ds$ を極小にする, 言い換えれば粒子の固有時間 (265) を極大にする曲線が実際の粒子の軌道を与える. ここで固有時間の表式 (265) は世界間隔 ds の式 (260) で $\theta = \pi/2$ とおいて得られ, 最右辺における $dr, d\phi$ は微小時間

^{*72} 座標時間 t を示す光の振動を利用した時計と固有時間 τ を示す時計で用いている時間の単位の関係は, 式 (264) より無限遠 $r \rightarrow \infty$ で t と τ が一致することから決まる.

dt 中の粒子の空間座標の変化と見なさねばならない．定性的には r の大きい重力源の遠方ほど最右辺において

- 通過位置での固有時間 $d\tau = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} dt$ の項は大きくなり，
- 半径方向の変位に対応する真の距離の項は絶対値 $dl = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}}$ が小さくなる．

このため重力源の遠方を遠回りするほど固有時間を“稼ぐ”ことができる．しかしながら重力源から離れすぎると，与えられた終点に達するには粒子は図23の緑の曲線のように急なカーブを描かねばならず，このとき角速度の項($d\phi$ の項)が大きくなって固有時間を“損する”と想像される．以上を踏まえると，粒子の空間的な軌道は図23の赤い経路のように，重力源の遠方へと適度に膨らんだ曲線になると期待される．これは粒子が重力源から実効的に引力を受けて，軌道を曲げられることを意味する．

なお一見すると物体が重力源に引き込まれるならば，軌道は重力源の遠方ではなく，むしろ重力源側に近づくのが自然だと読者は疑問を呈するかもしれない．しかし変分原理で比較しているのは初期条件ではなく，あくまで境界条件が同一の軌道であることに注意しよう．丸みを帯びた図23の赤い経路も，始点における接線方向と比べると内側を通っており，重力場の下での軌道として自然である．

定量的には物体ないし惑星の運動は，第1近似でNewton力学におけるKepler問題に帰着する．実際，例えば太陽の周りの水星の運動を考えると，比 r_g/r は 10^{-8} のオーダーなので，Schwarzschild時空の線要素(265)は平坦な時空における表式から僅かにズレて

いるに過ぎない．実にそのような僅かな時空の歪みが惑星を太陽の周りに引き付け，一方では我々を確かに地球の表面に束縛しているのである．また計量の時間-時間成分 g_{00} と空間-空間成分 g_{rr} に対する補正は同程度であるものの，式(265)の中で時間 dt^2 の項には c^2 が掛かっているので，式(214)の箇所見たようにラグランジアンに対する主要な補正は g_{00} から得られる．このとき粒子は重力ポテンシャル ϕ の下でのNewtonの運動方程式(213)に従うことを思い出そう．また g_{00} の式(215)から同定される重力ポテンシャル ϕ がNewtonの重力理論(222)に一致するように，我々はSchwarzschild半径 r_g の値を定めた．以上より重力の弱い非相対論的極限での惑星の運動の解析は，Newton重力の下でNewtonの運動方程式を解く伝統的なKepler問題に帰着する [7, pp.465–466] [4, p.276]．これは初等的な力学の題材であり，ここで改めて詳しく論じるには及ぶまい．Kepler問題の標準的な解法を要約すると，運動方程式は2階の微分方程式なので，解を求めるにはこれを2度積分する必要がある．そこで運動方程式の第1積分としてエネルギーと角運動量保存則を出発点に採り，2式から時間 dt を消去した空間座標の関係さらに積分すれば，軌道として楕円を含む2次曲線が得られ，また軌道上の各点を物体が通過する時刻も原理的に決定できる [8, pp.36–49]．なおエネルギー保存則の代わりにいわゆる「Lenzベクトル」の保存を出発点に採って，運動を決定することもできる [29, pp.148–154]．

ここまではSchwarzschild半径の外側 $r > r_g$ を考えてきた．ところがSchwarzschild解(260)の定義域自体は外側 $r > r_g$ に限定されず，内側 $r < r_g$ にも適用できる．そこで

Schwarzschild 半径 r_g の内側を念頭に、 r_g から内側への変位 $\varepsilon \equiv r_g - r (> 0)$ を導入する。ただし ε は微小でなくとも良い。すると内側 $r < r_g$ の計量は $\varepsilon (> 0)$ を用いて式 (266) で与えられる。よって半径 r_g の内側では

- r が変化して得られる座標曲線は、線に沿って $ds^2 < 0$ となる時間的世界線
- t が変化して得られる座標曲線は、線に沿って $ds^2 > 0$ となる空間的世界線

となる。すなわち今や ε (したがって r) が時間的な座標であるのに対し、 t は空間的な座標となっている。これは時空そのものではなく、むしろ Schwarzschild 座標の振舞いの質が悪いことを意味している。いずれにせよ座標系の選択に依らず粒子は時間的世界線をたどらねばならないから、半径 r_g の内側に落下した粒子は絶えずその座標 r が減少する。したがって半径 r_g の内部で発した信号は、光でさえ、半径 r_g を超えて外部の観測者に到達することはない。このため半径 $r = r_g$ の面は Schwarzschild 地平面、またその内部の領域はブラックホールと呼ばれる [14, pp.392–393].

例えば地球の Schwarzschild 半径は 1cm 程度のオーダーであり、地球の内部に隠れている [27, p.130]. ところが地球の内部はそもそも真空中の Schwarzschild 解の適用範囲外である。これに対し重力源となる質量がその Schwarzschild 半径よりも狭い範囲に収まっている高密度の系では、ブラックホールの概念は現実的な意味を成す。

次に曲率が発散するブラックホールの特異点について説明する。Schwarzschild 時空の曲率は、Schwarzschild 解 (260) の導出過程において既に計算しているも同然である。実際、そこで求めた指数 $\lambda(r), \nu(r)$ の具体的な関数形を正直に代入すると、スカラー曲率

は1程度のつまらない数係数を除き式(267)のように表されることが直ちに確かめられる．これは $r \rightarrow 0$ とすると発散するため，ブラックホールの空間的な中心 $r = 0$ は曲率特異点と呼ばれる [14, p.393]．ただしこの結果はブラックホールの中心に現に特異性があるのではなく，むしろ $r = 0$ の近くでは古典的な一般相対性理論が破綻することを意味していると解釈できる．そこで一般相対性理論の適用限界の目安として，曲率(267)がPlanckスケール程度となる半径を考えよう．ここでPlanckスケールとは自然界の基本定数である光速 c ，換算Planck定数 $\hbar$ ，Newton定数 G から作られるスケールであり， $\hbar$ を含むため量子力学が重要となるスケールと考えられる．ここでは曲率を考えているので，そのPlanckスケールは具体的にはPlanck長さ $L_P = \sqrt{G\hbar/c^3}$ の (-2) 乗である．これを曲率(267)と等置すると，一般相対性理論の適用限界として半径(268)を得る．面白いことに，半径(268)はPlanck長さよりも極めて長い．実際Planck長さは $L_P \sim 10^{-33}$ cm程度であるのに対し，太陽質量程度の天体ではSchwarzschild半径 r_g は数km程度なので，半径(268)は 10^{-21} cm程度に大きくなる [27, p.140]．

ここでホワイトホールについても簡単に言及しておく [27, pp.140–141]．ホワイトホールはブラックホールを時間反転した解であると言われる．Schwarzschild解は計量が座標時間 t に依らないため，時間反転を行っても依然としてEinstein方程式の解である．とは言えSchwarzschild時空は静的なので，一見すると時間反転を行っても新しい解は得られないように見受けられる．実際ホワイトホールの地平面の外側の幾何学は，ブラックホールのそれと同じである．他方で地平面の内部ではもはやSchwarzschild座標 t

はよい時間座標ではないので，時間反転という言葉の解釈には注意が必要である；ブラックホールの内部ではあらゆる物体が常に内向きに進むとを強いられるのに対し，ホワイトホールの内部では物体は絶えず外側へ押し出されることになる．

この点を明快にするためにKruskal-Szekeres (クルスカルスゼッケル)座標 u, v を式(269)で定義する．するとSchwarzschild時空の計量は式(270)のように書き換えられる(導出スライド参照)．ただし線要素の式(270)における r は関係式(271)を通じて， u と v を用いて表されているものと見る．このときSchwarzschild計量の地平面 $r = r_g$ における特異性は計量(270)からは消失しており，単なる座標特異性に過ぎない；特異性は座標変換(269)に移されたのである．また動径方向に進む光の軌道に沿って式(272)が成り立つので，座標図上の局所的な光円錐の傾きは時空点の位置に依らず，常に $dv/du = \pm 1$ となる．

Kruskal-Szekeres座標 u, v での座標図は図24のようである(ただし θ と ϕ は一定として省略してある)．まず式(271)より，地平面 $r = r_g$ は (u, v) 平面では2直線 $v = \pm u$ に対応する．また式(269)または式(271)より特異点 $r = 0$ は双曲線 $v^2 - u^2 = 1$ に対応する． $r = 0$ は“点”であるが，それは特異領域であり次元を考えることはできないから， $r = 0$ が線で表されていることは問題ない．さらに式(269)より地平面の外側 $r > r_g$ は図24の領域Ⅰに，内側 $r < r_g$ は領域Ⅱに対応していることが見て取れる．

ここで式(269)より v はSchwarzschild座標時間 t の単調増加関数なので時間の役割を担い，粒子の世界線は v 座標が増加する向きを持つことに注意しよう．すると地平面の外

側の領域Ⅰで発せられた、動径方向に沿って外向きと内向きに進む2本の光は、 uv 平面で右上と左上に向かう傾き $\pm 45^\circ$ の2直線で表される。右上に進む線は $r = \text{const}$ の一連の双曲線を次々と横切って無限遠 $r \rightarrow \infty$ まで伸び、外向きの光に対応しているのに対し、左上に進む内向きの光はいずれ地平面の内側の領域Ⅱに突入し、特異点 $r = 0$ に達することが見て取れる。同様に地平面の内側の領域Ⅱで発せられた光も傾き $\pm 45^\circ$ の2直線で表されるので、領域Ⅱから抜け出すことはできず特異点に達することが視覚的に把握できる。さらに粒子の世界線は傾き $\pm 45^\circ$ の線で表される光円錐の内側を通るので、やはり一度領域Ⅱに入ると、再び領域Ⅱから出ることはなく $r = 0$ の線に達する。こうして領域Ⅱはブラックホールとなっていることが改めて確認できる。

以上のようにSchwarzschild座標は uv 平面の領域Ⅰと領域Ⅱしか覆っていない。ところがEinstein方程式の一般共変性より、座標変換(269)によって得られた計量(270)は残りの領域においても、現実のSchwarzschild時空を表すと期待できる。言い換えればKruskal-Szekeres座標 u, v はSchwarzschild時空全体をカバーしているのに対し、Schwarzschild座標はSchwarzschild時空の一部しか張れていなかったのである。

そこで図24の領域Ⅳを考えよう。再び v 座標を時間と見なせば、 uv 平面で領域Ⅳから発した光は、傾き $\pm 45^\circ$ で右上と左上に進む2直線で表されるので、いずれ必ず領域Ⅰまたは領域Ⅲへと抜け出す。他方で逆に領域Ⅰと領域Ⅲからの光はいずれも領域Ⅳに入り得ない。こうして領域Ⅳはホワイトホールを表していることが分かる。ホワイトホール時空は領域Ⅰと領域Ⅳに対応し、地平面の外部の時空領域Ⅰはブラックホールの場合と共通である。このようにSchwarzschild時空は本来、ブラックホールとホワイトホー

ルの両方を同時に含んでいる．それらは時空図の異なる領域に対応するため，このことは何ら矛盾ではない．

なお領域Ⅲは領域Ⅰの鏡映のような存在であり，天体物理学者には無視されるものの，数学者にとっては興味ある対象である．

最後にブラックホールのエネルギーとエントロピーを考察する準備として，地平面付近に静止する観測者を考える，と言うのも，実にエネルギーはエントロピーは観測者を指定して初めて意味を成す量である．このことは3.1.1項で既に指摘したように，一般相対性理論ではエネルギーの定義に曖昧さがあり得ることにも関係していると推察される．とは言え，ここで観測者という術語が単に座標系を意味するのであれば，系のエネルギーが座標系に依存して変換すること自体は，初等的なNewton力学の水準においてさえよく認知されていることであり，今さら驚くには値しない．ただしこの場合，エネルギーは素朴実在論的に決まる量と想定されている．これに対しエントロピーは情報の欠如を特徴付ける量であるという点で，単に座標系に依存する量であるに留まらず，よりも強い意味で観測者に依存する量だと言える．いずれにせよ我々はブラックホールのエネルギーとエントロピーを定義する上で，我々は地平面のすぐ外側に静止する観測者を考えることにする．以下では静止する観測者が加速度を持つことを説明する．

ここでは粒子の4元加速度を式(136): $a^\mu = \frac{du^\mu}{ds}$ の代わりに，ベクトルとして変換する量(273)で定義すると，ノルム $a \equiv \sqrt{-g_{\mu\nu} a^\mu a^\nu}$ は不変量である．Schwarzschild時空において空間座標の一定位置 (r, θ, ϕ) に静止した粒子は加速度(274)を持つ ([導出スライド参](#)

照). 静止している粒子が加速度を持つというのは、安直に文字通りの意味に受け取ると一見奇妙であるものの、式(274)は一定の空間位置に留まる粒子が、自由落下する局所慣性系に対して持つ加速度と考えられる [27, pp.143–144]. 実際、粒子の4元速度 u^μ は座標系に依らない幾何学的なベクトル u として定義でき、これに対して式(273)で定義される加速度をゼロとおくと測地線の方程式が得られるので、加速度がゼロとなるのは自由落下する粒子に対してである [14, p.199–200]. 他方で例えば地面に静止した物体は、地面からの力で支えられていることを思い出そう [14, p.222]. また a は構成により粒子の固有時間で測った加速度であり、動径成分のみを持つという点で、2.2.5項で見た Minkowski 時空における一様な等加速度運動のそれと共通している. これは一定の空間座標に留まる加速系も第1近似では自由落下する系に一致するので、観測者は平坦な空間で加速していることになるからである [27, p.143].

ここで地平面の近く $r = r_g + \varepsilon$ ($0 < \varepsilon \ll r_g$) を考えると、Minkowski 時空における等加速度運動(2.2.5項)の場合と同様、加速度は地平面からの真の距離(275)の逆数 $a = 1/l$ で表される (導出スライド参照).

4.2 宇宙論

4.2.1 Friedmann–Robertson–Walker 計量

大きなスケールでは宇宙は一様・等方的 [14, pp.445–446].
銀河の位置 x^i を空間座標に用いて, 計量を

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) h_{ij} dx^i dx^j \quad (286)$$

と書く. このとき t は銀河と共動する時計たちの固有時間に他ならず, 全ての銀河に共通の宇宙時間 (cosmological time) を定義する [2, p.105]. さらに $t = (\text{一定})$ の 3 次元空間が一様・等方的であることを要求しよう. このとき空間はスケール因子 $a(t)$ で一様に膨張することが保証される. まず原点周りの等方性を要求して, 空間の計量を

$$h_{ij} dx^i dx^j = e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (287)$$

と書き, 次いで 3 次元スカラー曲率 R が一定となることを課すと, Robertson–Walker 計量 (Friedmann–Lemaître 計量 [1, p.215])

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2, \quad dl^2 = a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (288)$$

を得る (k は任意定数) [14, pp.449–452].

■3種類の宇宙 [14, p.453]

- $k = 0$ のとき

$$dl^2 = a^2(t)(dr^2 + r^2 d\Omega^2). \quad (\text{平坦な Euclid 空間})$$

- $k > 0$ に対して, $r = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \chi$, $\tilde{a} \equiv \frac{a}{\sqrt{k}}$ とおくと

$$dl^2 = \tilde{a}^2(t)(d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega). \quad (3\text{次元球面}) \quad (289)$$

- $k < 0$ に対して, $r = \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh \chi$, $\tilde{a} \equiv \frac{a}{\sqrt{-k}}$ とおくと

$$dl^2 = \tilde{a}^2(t)(d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega). \quad (3\text{次元双曲面}) \quad (290)$$

■3次元球面 [27, pp.40–43]

2次元球面の3次元への一般化であり, 4次元空間に埋め込まれた超曲面

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a^2 \quad (291)$$

として定義できる.

3次元球面は有限の拡がりを持つものの境界のない宇宙の形を提示する.

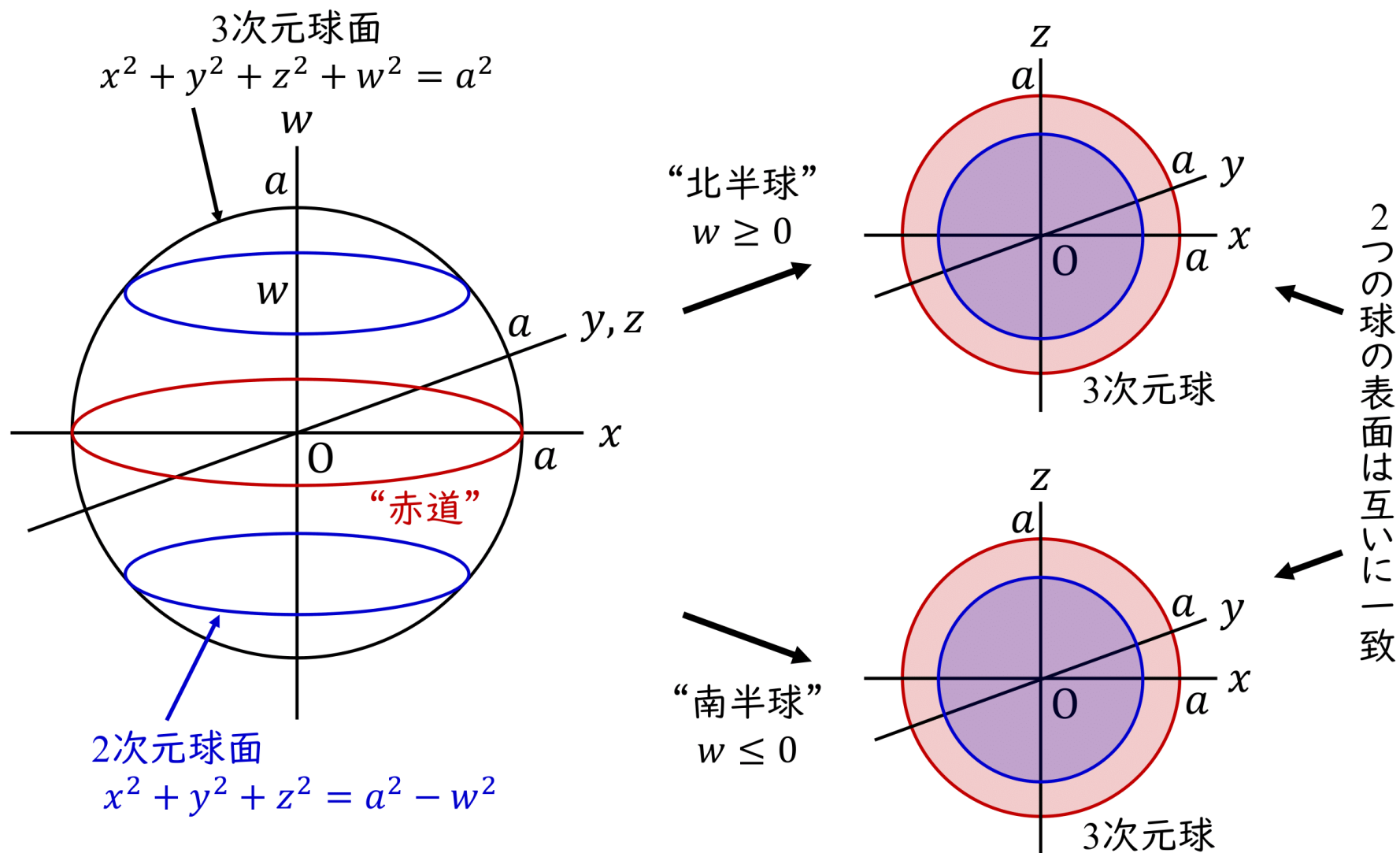


図25 3次元球面は2つの3次元球を表面で貼り合わせた構造として、(したがって3次元球面の内部で)理解できる

半径 a の 3 次元球面 (291) に対して球座標 (r, θ, ϕ) , $r = \sqrt{a^2 - w^2}$ を導入すると,

$$dl^2 = \frac{a^2}{a^2 - r^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 = a^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi \cdot d\Omega^2). \quad (r = a \sin \chi) \quad (292)$$

→ $k > 0$ に対する Robertson–Walker 計量の式 (289) は
スケール因子 $\tilde{a} \equiv a/\sqrt{k}$ を半径とする 3 次元球面の計量.

$$x = a \sin \chi \sin \theta \cos \phi, \quad y = a \sin \chi \sin \theta \sin \phi, \quad z = a \sin \chi \cos \theta, \quad w = a \cos \theta. \quad (293)$$

同様に $k < 0$ に対する式 (290) の計量は開いた 3 次元双曲面

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \tilde{a}^2 \quad (294)$$

を表す.

4.2.1 項の式の導出など

■一様等方な空間における計量の式(288)の導出 [14, pp.451–452]

球座標に関する計量(287)に対する3次元のEinsteinテンソル G^i_j は, Schwarzschild解(260)の導出過程で求めたEinsteinテンソル G^μ_ν の空間成分において, 単に

$\nu(r, t) = 0, \lambda(r, t) = \lambda(r)$ とおけば得られることに着目しよう. するとそのトレースは

$$\text{Tr } G \equiv G^i_i = \left(-e^{-\lambda} \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \right) + 2 \left(-\frac{1}{2} e^{-\lambda} \cdot \frac{-\lambda'}{r} \right) = \frac{1}{r^2} [1 - (re^{-\lambda})']$$

と計算できる. 一様性に基づき, これを適当な定数 κ と等置すると, A を積分定数として

$$(re^{-\lambda})' = 1 - r^2 \kappa, \quad \therefore re^{-\lambda} = r - \frac{\kappa}{3} r^3 - A, \quad \therefore g_{rr} = e^\lambda = \frac{1}{1 - \frac{\kappa}{3} r^3 - \frac{A}{r}}$$

を得る.

ここで原点において局所関係系をとると, 原点周りの小さい円周と半径の比は 2π である. ところがこれは座標系に依らない真の長さの間の幾何学的関係だから, 一般性を失うことなく, 極座標は常に $g_{rr}(r \rightarrow 0) = 1$ を満たさねばならないと結論付けられる [14, p.344]. この要請から積分定数は $A = 0$ と定まる. 最後に任意定数を $\kappa/3 \rightarrow k$ と書き改めると $g_{rr} = e^\lambda = \frac{1}{1 - kr^2}$ となり, 計量の式(288)を得る.

■3次元球面の計量(292)の導出 [27, pp.40–41]

3次元空間 (x, y, z) に球座標 (r, θ, ϕ) を導入すると, その微小変化に伴う線要素は $d'l^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2$ と書ける. 次に4次元空間 (x, y, z, w) に埋め込まれた半径 a の3次元球面 $r^2 + w^2 = a^2$ を考えると, その上では r の変化 dr に伴って w が dw 変化し, $w dw = -r dr$, $\therefore dw = \mp \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}$. よって3次元球面の線要素は

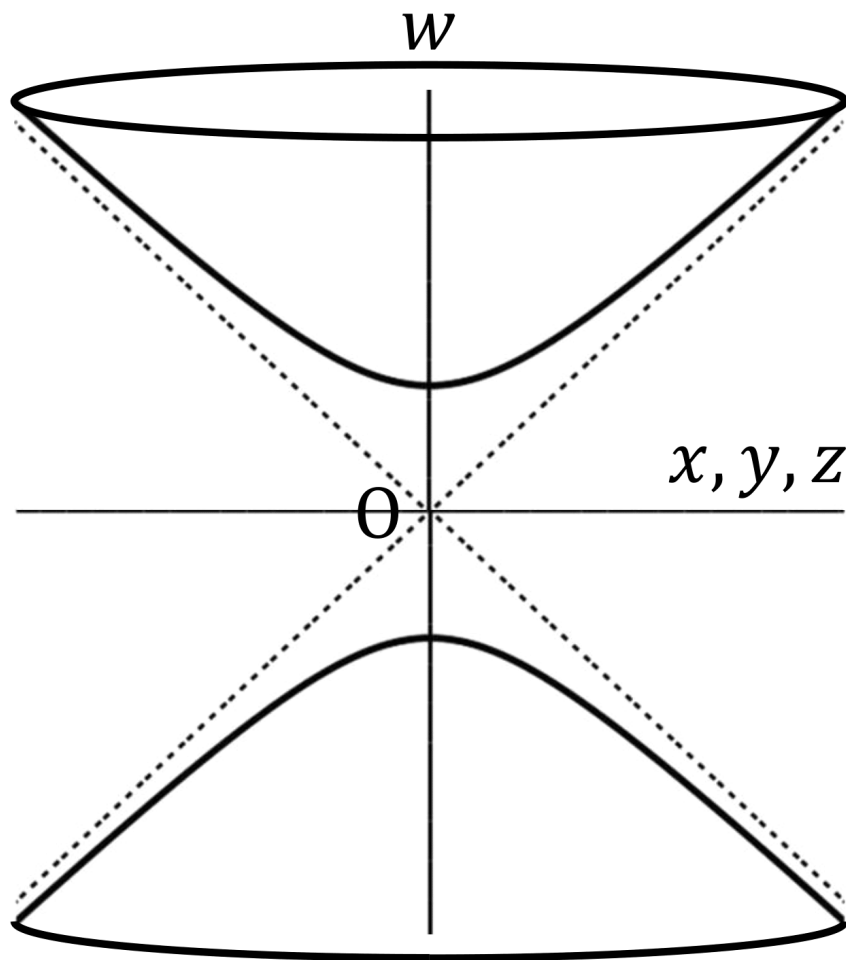
$$dl^2 = d'l^2 + dw^2 \frac{a^2}{a^2 - r^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

さらに変域を考慮すると $r = a \sin \chi$ とおけるので, 式(292):

$$dl^2 = a^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi \cdot d\Omega^2)$$

を得る.

■ $k < 0$ の計量 (290) が 3次元双曲面 (294) を表すこと 図26を見よ.



左図の3次元双曲面

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = a^2$$

上の線要素は $dl^2 = d'l^2 - dw^2$. ここで

$$d'l^2 \equiv dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

と書いて球座標 (r, θ, ϕ) を導入すると,
双曲面 $w^2 - r^2 = a^2$ 上では r の変化 dr に
伴って w が dw 変化し,

$$wdw = rdr, \therefore dw = \pm \frac{rdr}{\sqrt{a^2 + r^2}}.$$

よって3次元双曲面の線要素は

$$\begin{aligned} dl^2 &= d'l^2 - dw^2 = \frac{a^2}{a^2 + r^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ &= a^2 (d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega^2). \quad (r = a \sinh \chi) \end{aligned}$$

と表される. これは双曲面を

$$x = a \sinh \chi \sin \theta \cos \phi,$$

$$y = a \sinh \chi \sin \theta \sin \phi,$$

$$z = a \sinh \chi \cos \theta,$$

$$w = a \cosh \chi$$

とパラメトライズすることに対応する.

図26 3次元双曲面の計量 (290)

4.2節の原稿(序文)

一般相対性理論の今一つの応用として宇宙モデルを取り上げる．まず運動学的な水準では，一様等方な宇宙はFriedmann–Robertson–Walker計量で記述されることを説明する．次いで一般相対性理論のダイナミクスを適用すると，その支配方程式としてFriedmann方程式が得られることを示す．

4.2.1項の原稿

少なくとも我々の観測の及ぶ範囲では，多数の銀河団を含む大きなスケールで見ると，宇宙は物質分布などに関して一様かつ等方的である．さらに宇宙の膨張もまた一様である，すなわち宇宙のどの点から見ても，他の点(正確には目印となる星など)は距離に比例した速度で遠ざかっていく [14, pp.445–446]．

次に一様等方な宇宙の記述に適した座標系を導入することを考えよう．一般相対性理論の背景独立性によれば，他の基準物体などを参照することなく，時空点それ自体を単独で指定することは意味を成さない [2, pp.68–69]．そこで各々の銀河に一定の空間座標 x^i を割り当て，空間位置を指定するのに銀河を用いることにする．この定義により全ての銀河は一定の空間位置に静止している．この設定の下で，一様等方な宇宙では計量が式(286)の形をとるような座標時間 t を選べると考える．すると式(286)より，この座標で一定の空間位置に静止した銀河にとって，時間 t は固有時間に等しい．そのため銀河に固定した，あるいは銀河と「共動する(co-moving)」複数の時計は，同じ時間を刻み，

共通の固有時間を測ることになる．これを「宇宙時間(cosmological time)」と呼ぶ．もし時空から一様性の仮定を外すならば，このような共通時間を定義できる可能性はなくなる [2, p.105]．宇宙の年齢はこの宇宙時間を用いて定義され，一様な宇宙に対して初めて意味を成す概念である [2, p.108]．

さて，宇宙時間 t が一定の超曲面では，式(286)は銀河の位置 x^i を座標に持つ3次元空間の線要素の表式を与える．これが一様等方な空間を表していれば良い．実際このとき空間は乗法的な形でのみ現れる時間の関数 $a(t)$ により，時間とともに一様に膨張することが保証される． $a(t)$ はスケール因子と呼ばれ，3次元空間のサイズを規定する [14, pp.449–450]．ここでは $a(t)$ は無次元であるものの，粗く述べると $a(t)$ は3次元空間の半径を表す．(そのことはすぐ後で見る3次元球面のモデルにおいて，とりわけ明瞭となる．)

そこで h_{ij} を計量に持つ3次元空間が一様等方であることを要求して，さらに計量の具体的な形を調べよう [14, pp.451–452]．まず等方性から，空間は少なくとも座標原点の周りに球対称でなければならない．そこで4.1節の球対称時空の場合と同様に，基底ベクトルが図20の直交性を満たす球座標 (r, θ, ϕ) を導入して，空間の計量を式(287)のように書く．次に一様性の必要条件として，3次元計量に対するスカラー曲率 R が一定となることを要求しよう． R はEinsteinテンソルのトレース $\text{Tr } G \equiv G^i_i$ に比例することを踏まえると，等価的に $\text{Tr } G$ を定数とおいても良い．すると k を任意定数として，式(286)の計量は式(288)の形に書けることが示される(導出スライド参照)．これをRobertson–Walker計量という．(Friedmann–Lemaître計量とも呼ばれる [1, p.215].)

厳密には我々は3次元空間が一様等方であるための必要条件しか課していない．しかしながら逆に，式(288)の計量で表される空間は一様等方であることが判明する．実際この後で見るようにRobertson–Walker計量(288)は k の符号に応じて，平坦な空間，閉じた3次元球面，開いた3次元双曲面を表す．とりわけ物理的に興味ある平坦な空間と3次元球面に対しては，一様等方性が満たされていることは直観的に明白である．

さて，Robertson–Walker計量(288)で $k = 0$ とおくと，平坦な3次元Euclid空間の計量を得られる．次に非自明な $k \neq 0$ の場合の空間を調べるにあたり，適当な変数変換を行っておこう．まず $k > 0$ に対して $r = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \chi$ とおくと，式(288)における3次元空間の線要素は式(289)へと書き換えられる．同様に $k < 0$ に対して $r = \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh \chi$ とおくと，式(290)を得られる [14, p.453]．いずれにおいて導入した $\tilde{a}$ も，因子 $1/\sqrt{\pm k}$ が長さの次元を担っていることに注意しよう．以下ではこれらの式(289),(290)はそれぞれ順に，3次元球面と3次元双曲面を表していることを説明する．

それに先立ち，3次元球面とは何かを説明しておかねばならない．通常の球面は2次元の面なので，あえて言えば2次元球面であるのに対して，3次元球面はその高次元への一般化であり，あくまで3次元の領域である．そう，数学的には3次元球面という術語は決して形容矛盾ではない．そこでまずは2次元の球面を考えよう．球面は球の境界であって，それ自体には境界がない；実際このため球面上を一定の方向に進んでゆくと，行き止まりに直面することなく，いずれもとの点に戻ってくることができる．したがって球面は有限の表面積を持つ，境界のない2次元の領域であると言える．同様に3次元

球面は有限の体積を持つ，境界のない3次元の領域である．

これには「宇宙は無限に広がっているのか」という疑問に対する魅力的な含意がある：有限の広がりを持つものの境界のない宇宙の形として，3次元球面が考えられるのである．なるほど，確かに例えばレンコンのようにデタラメに孔のあいた領域の表面もまた，有限であって境界がない．しかしそのような構造は明らかに宇宙の一樣・等方性を満たさない．トーラス(ドーナツ)も少なくとも等方性はない：トーラスでは2種類の円周方向を区別できる．

面白いことに，3次元球面の宇宙観はDante (ダンテ)『神曲』において既に，2つの3次元球を境界で貼り合わせた構造として描かれている [27, pp.40–43]．3次元球面をこのような仕方で捉えられることを理解するのは，実はさほど困難ではない．種明かしとして視覚的な直観も交えつつ説明しよう．3次元球面は4次元空間に埋め込まれた超曲面 (291) として表すことができ，ここに定数パラメータ $a > 0$ は半径と呼べる．

図25の左側では常套的に空間の次元を1つ落として，3次元球面をあたかも半径 a の2次元の球面であるかのように描いている．また高さ $\pm w$ の青いリングのように見えているのが，実際には2次元球面である．さらに北半球を水平な“ xyz 平面”に投影すると，視覚的には半径 a の円盤のようなものが得られる．それは実際には3次元球となっており，その半径は先ほどの a に一致する．ここで球(ball)とは中身の詰まった領域を指し，その表面であるところの球面(sphere)と区別されることも，言葉の定義として注意を要する．さて，青いリングが北極から赤道に移動するとき，“ xyz 平面”への投影図では

リングが円盤の中心から円周に移動する。このとき実際には2次元球面が、3次元球の中心から表面に移動するということが起きている。北半球と南半球のいずれに対応する3次元球(図25の右側)も、表面の2次元球面が図25の左側では赤道に来るので、2つの表面は一致する。これは w の符号に応じた2つの3次元球の表面が、“赤道” $w = 0$ で貼り合わせられていることを意味する。これは2次元球面が、“北半球”と“南半球”に対応する2枚の円盤を、その円周(赤道)で貼り合わせた構造として理解できることとアナログスである。

2つの球を表面で貼り合わせる様子を想像するには、いくらか頭を柔軟にする必要がある。例えば一方を堅い鉄球、もう一方を自在に変形する粘土でできた球体とすると、それらを表面で貼り合わせるには、粘土を鉄球に押し付け、鉄球全体を粘土で包み込めばよい。このとき一方の球は他方の球に包み込まれていることになる。ところが、その逆も然りであり、Danteの言うように2つの球は互いを取り巻き、また互いに取り巻かれているのである。

なお球体を2つ貼り合わせるという3次元球面の構成は、物理的な空間を超曲面として内に含む高次元空間に依拠しない説明となっている。実際このとき3次元球面は、その内部の立場から次のように理解できる。すなわち北半球という名の球体内を出発して1方向に進んで行くと、いずれ表面から宇宙の外に抜け出せるかと思いきや、実際には地球の表面上で赤道を超えるときのように、何事もなく南半球という名のもう1つの球体に突入するに過ぎない。さらに進むと北半球に戻って来る。

3次元球面の式(291)で w を固定して得られる球面の半径 $r = \sqrt{a^2 - w^2}$ を用いて, 3次元球面に球座標 (r, θ, ϕ) を導入すると, これらの座標に関する計量の式(292)が得られる(導出スライド参照). ただし第2の等号は変域に注意して $r = a \sin \chi$ とおいた. これと比較すると, $k > 0$ に対するRobertson-Walker計量の式(289)はスケール因子 $\tilde{a}$ を半径とする3次元球面の計量となっていることが見て取れる. また $k \rightarrow 0$ とすると半径は $\tilde{a} \equiv a/\sqrt{k} \rightarrow \infty$ となる. これは $k = 0$ のときRobertson-Walker計量(288)が平坦な空間を表すことと整合している. 我々の観測可能な範囲では宇宙空間はほとんど平坦なので, 局所的に宇宙を $k = 0$ の平坦なモデルで近似して記述することには意味がある. しかしながら宇宙空間が局所的に平坦であることは, 宇宙が小さな正のパラメータ k で特徴付けられる, 極めて大きな半径の3次元球面の形状を持つ可能性を排除しない. それは見渡す限り地表面が平らであっても, 地球は平らだと結論付けられないのと同じことである [27, p.109] [1, p.215]. なお式(292)は通常の球面を極座標でパラメトライズするのと同様, 3次元球面を式(293)のようにパラメトライズすることに対応する. 同様に $k < 0$ に対する式(290)の計量は開いた3次元双曲面(294)を表すことが確かめられる(導出スライド参照).

4.2.2 Friedmann 方程式

Robertson–Walker 計量 (288) に対して Einstein 方程式 $G_{00} - \Lambda g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}$ は, Friedmann 方程式

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3c^4} \varepsilon \quad (295)$$

を与える ($T_{00} = \varepsilon$ は物質系のエネルギー密度) [14, pp.465–466] [27, p.107].

- ダスト流体に対して $\varepsilon \sim 1/a^3$ (体積に反比例)
- 電磁輻射 (光子ガス) に対して $\varepsilon \sim 1/a^4$ (光子のエネルギーは波長に反比例)

なので, C_m, C_g を適当な定数として Friedmann 方程式 (295) は [27, p.108]

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{C_m}{a^3} + \frac{C_g}{a^4}, \quad \therefore \frac{1}{c^2} \ddot{a} = - \left(\frac{2C_g}{a^3} + \frac{C_m}{a^2} \right) + \frac{\Lambda}{3} a. \quad (296)$$

$\Lambda = 0$ とおき, a の小さい初期宇宙を念頭に曲率の項 k/a^2 を無視すると,

$$\text{輻射優勢} \quad \dot{a} \sim 1/a, \therefore a \sim t^{1/2}, \quad \text{物質優勢} \quad \dot{a} \sim 1/a^{1/2}, \therefore a \sim t^{2/3} \quad (297)$$

となり, 有限の過去 $t = 0$ にビッグバン $a = 0$ に達する [14, pp.467–469].

■作用 [1, pp.215–216] $k = 0, \Lambda = 0$ のとき, Einstein–Hilbert 作用とその変分は

$$S_{\text{EH}} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R = \frac{3c^2 V_0}{8\pi G} \int dt (\ddot{a} a^2 + \dot{a}^2 a), \quad (298)$$

$$\delta S_{\text{EH}} = \frac{3c^2 V_0}{8\pi G} a^2 \delta \dot{a} \Big| + \frac{3c^2 V_0}{8\pi G} \int dt (2a \ddot{a} + \dot{a}^2) \delta a \quad (299)$$

である ($V_0 \equiv \int d^3x$ は着目領域の座標体積). Gibbons–Hawking–York 境界項 (235):

$$S_{\text{GHY}} = +\frac{1}{8\pi G} \int k^{ij} q_{ij} \sqrt{q} d^3x = -\frac{3c^2 V_0}{8\pi G} \dot{a} a^2 \quad (300)$$

はここでは境界項 (236): $S_{\text{boundary}} \equiv \frac{c^3}{16\pi G} \int W^0 \sqrt{-g} dV$ に一致し, 変分 (299) の $\delta \dot{a}$ を含む境界項を相殺する. 作用と運動量は

$$S_{\text{EH}} + S_{\text{boundary}} = S_{\text{g}} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} G^* = -\frac{3c^2 V_0}{8\pi G} \int dt \dot{a}^2 a, \quad (301)$$

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = -\frac{3c^2 V_0}{4\pi G} \dot{a} a \quad (L : \text{ラグランジアン}) \quad (302)$$

であり, 境界項は $S_{\text{GHY}} = \frac{1}{2} p_a a$ と書ける.

4.2.2 項の式の導出など

■Friedmann 方程式 (295) の導出 [14, p.487]

Robertson–Walker 計量

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(t)/(1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

に対して, Christoffel 記号

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} g^{\mu\gamma} (g_{\gamma\alpha,\beta} + g_{\gamma\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\gamma}) \quad (\text{コンマは通常の微分}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\mu\mu} (\cdots), \quad (\cdots) \equiv (g_{\mu\alpha,\beta} + g_{\mu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\mu}) \quad (\mu \text{ で和をとらない}) \end{aligned}$$

のゼロでない全成分を調べる.

1. $\mu = 0$ のとき, 対称な添字 α, β のいずれか, 例えば α をゼロとすると

$$(\cdots) = g_{00,\beta} \pm \cancel{g_{0\beta,0}} - \cancel{g_{0\beta,0}} = 0.$$

よってゼロでない成分は

$$\begin{aligned}
 \Gamma^0_{jk} &= \frac{1}{2} g^{00} (g_{0j,k} + g_{0k,j} - g_{jk,0}) \\
 &= -\frac{1}{2} g_{jk,0} \quad (\because g_{0j} = g_{0k} = 0, g^{00} = 1/g_{00} = 1) \\
 &= -\frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a} g_{jk}. \quad (\because g_{jk} = a^2(t) f(r, \theta) \text{ と書ける})
 \end{aligned}$$

2. 対称な添字 α, β のいずれかがゼロのとき, $\alpha = 0$ を考えれば充分であり,

$$\begin{aligned}
 (\cdots) &= g_{\mu 0, \beta} + g_{\mu \beta, 0} - g_{0 \beta, \mu} \\
 &= \begin{cases} g_{00, \beta} + \cancel{g_{0\beta, 0}} - \cancel{g_{0\beta, 0}} = 0 & (\mu = 0 \text{ のとき}) \\ g_{\mu 0, 0} + g_{\mu 0, 0} - g_{00, \mu} = 0 & (\beta = 0 \text{ のとき, } \{g_{\mu 0}\} \text{ は } t \text{ に依らない}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

よってゼロでない成分は

$$\begin{aligned}
 \Gamma^j_{0k} &= \frac{1}{2} g^{jj} (g_{j0,k} + g_{jk,0} - g_{0k,j}) \quad (j \text{ で和をとらない}) \\
 &= \frac{1}{2} g^{jj} (\delta^j_k g_{jj,0}) \quad (\because g_{j0} = g_{0k} = 0, g_{jk} = g_{jj} \delta^j_k) \\
 &= \frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a} \delta^j_k. \quad (\because g^{jj} = 1/g_{jj}, g_{jj} = a^2(t) f(r, \theta) \text{ と書ける})
 \end{aligned}$$

3. $\mu = r, (\alpha, \beta) = (j, k)$ のとき,
 $j \neq k$ とすると $g_{jk} = 0$ より

$$(\cdots) = g_{rj,k} + g_{rk,j} - g_{jk,r} = g_{rj,k} + g_{rk,j}.$$

これは j, k の少なくとも一方が r でなければ, $g_{rj} = g_{rk} = 0$ より消える.
 次に $\alpha = r, \beta = j \neq r$ とすると $(\cdots) = g_{rr,j} = 0$ となる.
 よってゼロでない成分は Γ^r_{jj} (j で和をとらない) の形に限られ,

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2} g^{rr} g_{rr,r} = \frac{1}{2} \frac{1 - kr^2}{a^2(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{a^2(t)}{1 - kr^2} \right) = \frac{kr}{1 - kr^2},$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{1}{2} g^{rr} (-g_{\theta\theta}),_r \quad (\because g_{r\theta} = 0)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1 - kr^2}{a^2(t)} \frac{\partial}{\partial r} (a^2(t) r^2) = -r(1 - kr^2),$$

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = \frac{1}{2} g^{rr} (-g_{\phi\phi}),_r \quad (\because g_{r\phi} = 0)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1 - kr^2}{a^2(t)} \frac{\partial}{\partial r} (a^2(t) r^2 \sin^2 \theta) = -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta.$$

4. $\mu = \theta$, $(\alpha, \beta) = (j, k)$ のとき,

$$(\cdots) = g_{j\theta,k} + g_{k\theta,j} - g_{jk,\theta}.$$

(a) j, k の一方, 例えば $j = r$ とすると

$$(\cdots) = g_{r\theta,k} + g_{k\theta,r} - g_{rk,\theta} = g_{k\theta,r} - g_{rk,\theta} = \begin{cases} 0 & (k = \phi) \\ -g_{rr,\phi} = 0 & (k = r) \\ g_{\theta\theta,r} = -2ra^2(t) & (k = \theta) \end{cases}$$

このときゼロでない成分は

$$\Gamma_{r\theta}^{\theta} = \frac{1}{2} \frac{1}{a^2(t)r^2} \cdot 2ra^2(t) = \frac{1}{r}.$$

(b) j, k の一方, 例えば $j = \theta$ とすると

$$(\cdots) = g_{\theta\theta,k} + \cancel{g_{k\theta,\theta}} - \cancel{g_{\theta k,\theta}} = g_{\theta\theta,k}.$$

よって $k = r$ の場合のみゼロでない成分が得られ, それは再び $\Gamma_{r\theta}^{\theta}$ である.

(c) j, k の一方, 例えば $j = \phi$ とすると

$$(\cdots) = g_{k\theta,\phi} - g_{\phi k,\theta} = \begin{cases} 0 & (k = r) \\ g_{\theta\theta,\phi} = 0 & (k = \theta) \\ -g_{\phi\phi,\theta} = 2a^2(t)r^2 \sin \theta \cos \theta & (k = \phi) \end{cases}$$

このときゼロでない成分は

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\frac{1}{2} \frac{1}{a^2(t)r^2} \cdot 2a^2(t)r^2 \sin \theta \cos \theta = -\sin \theta \cos \theta.$$

5. $\mu = \phi$, $(\alpha, \beta) = (j, k)$ のとき, 全ての g_{jk} は ϕ に依らないので

$$(\cdots) = g_{j\phi,k} + g_{k\phi,j} - g_{jk,\phi} = g_{j\phi,k} + g_{k\phi,j}.$$

j, k の一方が ϕ でなければ, これは消える. そこで例えば $j = \phi$ のとき, 再び $g_{k\phi,j} = g_{k\phi,\phi} = 0$ に注意すると

$$(\cdots) = g_{\phi\phi,k} = \begin{cases} -2ra^2(t) \sin^2 \theta & (k = r) \\ -2r^2a^2(t) \sin \theta \cos \theta & (k = \theta) \\ 0 & (k = \phi) \end{cases}$$

このときゼロでない成分は

$$\Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{2} \frac{1}{a^2(t) r^2 \sin^2 \theta} \cdot 2ra^2(t) \sin^2 \theta = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma^\phi_{\phi \theta} = \frac{1}{2} \frac{1}{a^2(t) r^2 \sin^2 \theta} \cdot 2ra^2(t) \sin \theta \cos \theta = \cot \theta.$$

これを踏まえ Einstein テンソルの時間-時間成分 $G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R$ を求めよう。
 $R_{00} = R^\alpha_{0\alpha 0}$, $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha=0}^3 g^{\alpha\alpha} R_{\alpha\alpha}$ だから, Ricci テンソル

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^\alpha_{\rho\alpha} \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\rho\nu} \Gamma^\rho_{\mu\alpha}$$

の対角成分 ($\mu = \nu$) を調べれば充分である.

$R_{00} = \Gamma^\alpha_{00,\alpha} - \Gamma^\alpha_{0\alpha,0} + \Gamma^\alpha_{\rho\alpha} \Gamma^\rho_{00} - \Gamma^\alpha_{\rho 0} \Gamma^\rho_{0\alpha}$ において

$$\Gamma^\alpha_{00}, \Gamma^\rho_{00} = 0, \quad \Gamma^\alpha_{0\alpha,0} = \Gamma^j_{0j,0} = \left(\frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a} \delta^j_j \right)_{,0} = \frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2},$$

$$\Gamma^\alpha_{\rho 0} \Gamma^\rho_{0\alpha} = \Gamma^j_{k0} \Gamma^k_{0j} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \delta^j_k \delta^k_j = \frac{3}{c^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2$$

なので, $R_{00} = -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a}$.

$$R_{rr} = \Gamma^\alpha_{rr,\alpha} - \Gamma^\alpha_{r\alpha,r} + \Gamma^\alpha_{\rho\alpha}\Gamma^\rho_{rr} - \Gamma^\alpha_{\rho r}\Gamma^\rho_{r\alpha} \text{ において}$$

$$\Gamma^\alpha_{rr,\alpha} = \Gamma^0_{rr,0} + \Gamma^r_{rr,r} = \left(\frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a} \cdot \frac{a^2}{1 - kr^2} \right)_{,0} + \Gamma^r_{rr,r}$$

$$= \frac{1}{c^2} \frac{\dot{a}^2 + a\ddot{a}}{1 - kr^2} + \Gamma^r_{rr,r},$$

$$\Gamma^\alpha_{r\alpha,r} = \Gamma^r_{rr,r} + \Gamma^\theta_{r\theta,r} + \Gamma^\phi_{r\phi,r} = \Gamma^r_{rr,r} - \frac{2}{r^2},$$

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha_{\rho\alpha}\Gamma^\rho_{rr} &= \Gamma^\alpha_{0\alpha}\Gamma^0_{rr} + \Gamma^\alpha_{r\alpha}\Gamma^r_{rr} = \Gamma^i_{0i}\Gamma^0_{rr} + \Gamma^i_{ri}\Gamma^r_{rr} \\ &= \frac{3}{c^2} \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} \cdot \frac{a^2}{1 - kr^2} \right) + \left(\frac{kr}{1 - kr^2} + \frac{2}{r} \right) \frac{kr}{1 - kr^2}. \end{aligned}$$

また $\{\Gamma^\alpha_{\rho r}\}$ のうちゼロでない成分は $(\alpha, \rho) = (0, r), (r, 0), (r, r), (\theta, \theta), (\phi, \phi)$ なので

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha_{\rho r}\Gamma^\rho_{r\alpha} &= 2\Gamma^0_{rr}\Gamma^r_{r0} + (\Gamma^r_{rr})^2 + (\Gamma^\theta_{r\theta})^2 + (\Gamma^\phi_{r\phi})^2 \\ &= \frac{2}{c^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \cdot \frac{a^2}{1 - kr^2} \right) \frac{\dot{a}}{a} + \left(\frac{kr}{1 - kr^2} \right)^2 + \frac{2}{r^2}, \end{aligned}$$

$$\therefore R_{rr} = \frac{1}{c^2} \frac{\dot{a}^2 + a\ddot{a}}{1 - kr^2} \cancel{+ \Gamma^r_{rr,r}} \cancel{- \Gamma^r_{rr,r}} \cancel{+ \frac{2}{r^2}} + \frac{3}{c^2} \frac{\dot{a}^2}{1 - kr^2} + \left(\cancel{\frac{kr}{1 - kr^2}} + \frac{2}{r} \right) \frac{kr}{1 - kr^2}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{c^2} \frac{\dot{a}^2}{1-kr^2} - \left(\frac{kr}{1-kr^2} \right)^2 - \frac{2}{r^2} \\
& = \frac{2}{c^2} \frac{\dot{a}^2}{1-kr^2} + \frac{1}{c^2} \frac{a\ddot{a}}{1-kr^2} + \frac{2k}{1-kr^2}.
\end{aligned}$$

$R_{\theta\theta} = \Gamma^\alpha_{\theta\theta,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\theta\alpha,\theta} + \Gamma^\alpha_{\rho\alpha}\Gamma^\rho_{\theta\theta} - \Gamma^\alpha_{\rho\theta}\Gamma^\rho_{\theta\alpha}$ において

$$\Gamma^\alpha_{\theta\theta,\alpha} = \Gamma^0_{\theta\theta,0} + \Gamma^r_{\theta\theta,r} = \left(\frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a} \cdot a^2 r^2 \right)_{,0} + \{-r(1-kr^2)\}_{,r}$$

$$= \frac{1}{c^2} (\dot{a}^2 + a\ddot{a}) r^2 - (1-3kr^2),$$

$$\Gamma^\alpha_{\theta\alpha,\theta} = \Gamma^\phi_{\theta\phi,\theta} = \cot \theta_{,\theta} = -\frac{1}{\sin^2 \theta},$$

$$\Gamma^\alpha_{\rho\alpha}\Gamma^\rho_{\theta\theta} = \Gamma^\alpha_{0\alpha}\Gamma^0_{\theta\theta} + \Gamma^\alpha_{r\alpha}\Gamma^r_{\theta\theta} = \Gamma^i_{0i}\Gamma^0_{\theta\theta} + (\Gamma^r_{rr} + \Gamma^\theta_{r\theta} + \Gamma^\phi_{r\phi})\Gamma^r_{\theta\theta}$$

$$= \frac{3}{c^2} \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} \cdot a^2 r^2 \right) + \left(\frac{kr}{1-kr^2} + \frac{2}{r} \right) \{-r(1-kr^2)\}$$

$$= \frac{3}{c^2} \dot{a}^2 r^2 - kr^2 - 2(1-kr^2).$$

また $\{\Gamma^\alpha_{\rho\theta}\}$ のうちゼロでない成分は $(\alpha, \rho) = (0, \theta), (\theta, 0), (r, \theta), (\theta, r), (\phi, \phi)$ なので

$$\begin{aligned}\Gamma^\alpha_{\rho\theta}\Gamma^\rho_{\theta\alpha} &= 2\Gamma^0_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{\theta 0} + 2\Gamma^r_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{\theta r} + (\Gamma^\phi_{\phi\theta})^2 \\ &= \frac{2}{c^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \cdot a^2 r^2 \right) \frac{\dot{a}}{a} + 2\{-r(1 - kr^2)\} \frac{1}{r} + \cot^2 \theta \\ &= \frac{2}{c^2} \dot{a}^2 r^2 - 2(1 - kr^2) + \cot^2 \theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore R_{\theta\theta} &= \frac{1}{c^2} (\dot{a}^2 + a\ddot{a})r^2 \cancel{-1} + 3kr^2 \cancel{+ \frac{1}{\sin^2 \theta}} \\ &\quad + \frac{3}{c^2} \dot{a}^2 r^2 + kr^2 \cancel{-2} - \frac{2}{c^2} \dot{a}^2 r^2 \cancel{+1} - 2kr^2 \cancel{- \cot^2 \theta} \\ &= \frac{2}{c^2} \dot{a}^2 r^2 + \frac{1}{c^2} a\ddot{a}r^2 + 2kr^2.\end{aligned}$$

$R_{\phi\phi} = \Gamma^\alpha_{\phi\phi,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\phi\alpha,\phi} + \Gamma^\alpha_{\rho\alpha}\Gamma^\rho_{\phi\phi} - \Gamma^\alpha_{\rho\phi}\Gamma^\rho_{\phi\alpha}$ において

$$\begin{aligned}\Gamma^\alpha_{\phi\phi,\alpha} &= \Gamma^0_{\phi\phi,0} + \Gamma^r_{\phi\phi,r} + \Gamma^\theta_{\phi\phi,\theta} \\ &= \left(\frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a} \cdot a^2 r^2 \sin^2 \theta \right)_{,0} + \{-r(1 - kr^2) \sin^2 \theta\}_{,r} + (-\sin \theta \cos \theta)_{,\theta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{c^2} (\dot{a}^2 + a\ddot{a}) r^2 \sin^2 \theta - (1 - 3kr^2) \sin^2 \theta - (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \\
\Gamma^\alpha_{\phi\alpha,\phi} &= 0, \quad (\alpha = 0, r, \theta, \phi \text{ に対して } \Gamma^\alpha_{\phi\alpha} = 0) \\
\Gamma^\alpha_{\rho\alpha} \Gamma^\rho_{\phi\phi} &= \Gamma^\alpha_{0\alpha} \Gamma^0_{\phi\phi} + \Gamma^\alpha_{r\alpha} \Gamma^r_{\phi\phi} + \Gamma^\alpha_{\theta\alpha} \Gamma^\theta_{\phi\phi} \quad (\because \Gamma^\phi_{\phi\phi} = 0) \\
&= \Gamma^i_{0i} \Gamma^0_{\phi\phi} + (\Gamma^r_{rr} + \Gamma^\theta_{r\theta} + \Gamma^\phi_{r\phi}) \Gamma^r_{\phi\phi} + \Gamma^\phi_{\theta\phi} \Gamma^\theta_{\phi\phi} \\
&= \frac{3}{c^2} \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} \cdot a^2 r^2 \sin^2 \theta \right) + \left(\frac{kr}{1 - kr^2} + \frac{2}{r} \right) \{ -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta \} \\
&\quad \underbrace{+ \cot \theta (-\sin \theta \cos \theta)}_{-\cos^2 \theta}.
\end{aligned}$$

また $\{\Gamma^\alpha_{\rho\phi}\}$ のうちゼロでない成分は $(\alpha, \rho) = (0, \phi), (\phi, 0), (r, \phi), (\phi, r), (\theta, \phi), (\phi, \theta)$ なので

$$\begin{aligned}
\Gamma^\alpha_{\rho\phi} \Gamma^\rho_{\phi\alpha} &= 2\Gamma^0_{\phi\phi} \Gamma^\phi_{0\phi} + 2\Gamma^r_{\phi\phi} \Gamma^\phi_{r\phi} + 2\Gamma^\theta_{\phi\phi} \Gamma^\phi_{\theta\phi} \\
&= \frac{2}{c^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \cdot a^2 r^2 \sin^2 \theta \right) \frac{\dot{a}}{a} + 2 \{ -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta \} \frac{1}{r} \underbrace{+ 2(-\sin \theta \cos \theta) \cot \theta}_{-2 \cos^2 \theta},
\end{aligned}$$

$$\therefore R_{\phi\phi} = \frac{1}{c^2} (\dot{a}^2 + a\ddot{a}) r^2 \sin^2 \theta - \cancel{(1 - 3kr^2) \sin^2 \theta} - \cancel{\cos^2 \theta} + \cancel{\sin^2 \theta}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{c^2} \dot{a}^2 r^2 \sin^2 \theta - \cancel{kr^2 \sin^2 \theta - 2(1 - kr^2) \sin^2 \theta - \cos^2 \theta} \\
& - \frac{2}{c^2} \dot{a}^2 r^2 \sin^2 \theta + \cancel{2(1 - kr^2) \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta} \\
& = \frac{2}{c^2} \dot{a}^2 r^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{c^2} a \ddot{a} r^2 \sin^2 \theta + 2kr^2 \sin^2 \theta.
\end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned}
R & \equiv g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha=0}^3 g^{\alpha\alpha} R_{\alpha\alpha} \\
& = -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1 - kr^2}{a^2} \cdot \frac{1}{1 - kr^2} \left(\frac{2}{c^2} \dot{a}^2 + \frac{1}{c^2} a \ddot{a} + 2k \right) \\
& \quad - \frac{1}{a^2 r^2} \left(\frac{2}{c^2} \dot{a}^2 r^2 + \frac{1}{c^2} a \ddot{a} r^2 + 2kr^2 \right) \\
& \quad - \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{2}{c^2} \dot{a}^2 r^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{c^2} a \ddot{a} r^2 \sin^2 \theta + 2kr^2 \sin^2 \theta \right) \\
& = -6 \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right\},
\end{aligned}$$

$$G_{00} \equiv R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = -\frac{3}{c^2}\frac{\ddot{a}}{a} = +\frac{1}{2} \cdot 6 \left\{ \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{1}{c}\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right\} = 3 \left\{ \left(\frac{1}{c}\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right\}.$$

ここで求めた G_{00} と $g_{00} = 1$, $T_{00} = \varepsilon$ を Einstein 方程式 $G_{00} - \Lambda g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{00}$ に代入すると Friedmann 方程式 (295) を得る.

参考 平坦な宇宙モデル ($k = 0$) にのみ興味がある場合, 空間座標として極座標の代わりに Descartes 座標を用いる方が計算は圧倒的に容易である.

■Friedmann系の作用(298)–(301)とその周辺

Robertson–Walker計量(288)に対してスカラー曲率は、平坦な宇宙モデルの場合

$$R = -\frac{6}{c^2} \left\{ \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right\}$$

で与えられる*73. Friedmann方程式(295)の導出過程では極座標 (r, θ, ϕ) を用いてこのことを確認した. もっとも平坦な宇宙モデルにのみ興味があるならば, Descartes座標 (x, y, z) を用いて計算する方が容易である. また R の表式は極座標にあからさまに依存しないので, 変換 $(r, \theta, \phi) \rightarrow (x, y, z)$ の下で不変である. この場合の計量

$$(g_{\mu\nu}) = \text{diag}[1, -a^2(t), -a^2(t), -a^2(t)],$$
$$\therefore (g^{\mu\nu}) = \text{diag}[1, -1/a^2(t), -1/a^2(t), -1/a^2(t)]$$

(diagは対角行列を表す)に対するChristoffel記号

$$\Gamma_{\lambda, \mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}), \quad \Gamma^\mu_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} \Gamma_{\nu, \alpha\beta} = g^{\mu\mu} \Gamma_{\mu, \alpha\beta} \quad (\mu \text{で和をとらない})$$

*73 このように3次元空間に(内部)曲率がなくとも, 時空は曲率を持ち得る.

のゼロでない成分は

$$\Gamma_{0,ij} = \frac{1}{c} a \dot{a} \delta_{ij}, \quad \Gamma_{i,j0} = -\frac{1}{c} a \dot{a} \delta_{ij}, \quad \Gamma^0_{ij} = \frac{1}{c} a \dot{a} \delta_{ij}, \quad \Gamma^i_{j0} = \frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a} \delta^i_j$$

のみであることが直ちに確かめられる。

3.2.2項では最初から自然な作用 S_g を採用すれば、それを式(236)のように部分積分して Einstein–Hilbert 作用へと書き換える際に、境界項 S_{boundary} が人為的に導入せずとも自動的に得られることを指摘した。また境界項 S_{boundary} の変分は

Gibbons–Hawking–York 境界項(235)の変分 δS_{GHY} に一致することを確認めた。ところが我々の考えている単純な宇宙論では、これら2つの境界項そのものが一致すること $S_{\text{boundary}} = S_{\text{GHY}}$ が比較的簡単に確認できる。

実際、冒頭の Friedmann–Robertson–Walker 計量に対する Christoffel 記号を用いると、式(237)の W^μ は

$$W^0 = g^{ij} \Gamma^0_{ij} - g^{00} \Gamma^i_{0i} = -\frac{6}{c} \frac{\dot{a}}{a}, \quad W^i = g^{\nu\rho} \Gamma^i_{\nu\rho} - g^{ii} \Gamma^\nu_{i\nu} = 0 \quad (i \text{ で和をとらない})$$

となる。また $\sqrt{-g} = a^3$ なので、式(236)の境界項は

$$S_{\text{boundary}} \equiv \frac{c^3}{16\pi G} \int W^0 \sqrt{-g} dV = -\frac{3c^2 V_0}{8\pi G} \dot{a} a^2$$

と求まる (V_0 は空間の座標体積).

さらに冒頭のスカラー曲率 R の表式を用いると

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}W^\mu) = -\frac{6}{c^2}(\ddot{a}a^2 + 2\dot{a}^2a),$$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{-g}G^* &= \sqrt{-g}R - \partial_\mu(\sqrt{-g}W^\mu) = -\frac{6}{c^2}a^3 \left\{ \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right\} + \frac{6}{c^2}(\ddot{a}a^2 + 2\dot{a}^2a) \\ &= \frac{6}{c^2}\dot{a}^2a, \quad \therefore G^* = \frac{6}{c^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2\end{aligned}$$

となる. このように G^* は計量の1階微分までを含むことを反映して, 2階微分 $\ddot{a}$ の項を含まない. 同じ結果はもちろん, G^* をその定義式に基づき直接計算しても得られる. 実際,

$$g^{00}\Gamma^\sigma_{0\rho}\Gamma^\rho_{0\sigma} = -\Gamma^i_{0j}\Gamma^j_{0i} = \frac{3}{c^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2,$$

$$g^{ij}\Gamma^\sigma_{i\rho}\Gamma^\rho_{j\sigma} = \frac{\delta^{ij}}{a^2}(\Gamma^0_{ik}\Gamma^k_{j0} + \Gamma^k_{i0}\Gamma^0_{jk}) = \frac{2\delta^{ij}}{a^2}\Gamma^0_{ik}\Gamma^k_{j0} = -\frac{6}{c^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2,$$

$$g^{00}\Gamma^\rho_{00}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} = 0, \quad g^{ij}\Gamma^\rho_{ij}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} = g^{ij}\Gamma^0_{ij}\Gamma^k_{0k} = -\frac{9}{c^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2,$$

$$\therefore G^* = (3 - 6 + 9) \frac{1}{c^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{6}{c^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2.$$

よって宇宙定数を $\Lambda = 0$ とした重力場の作用は

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} G^* = -\frac{3c^2 V_0}{8\pi G} \int dt \dot{a}^2 a.$$

あるいは冒頭のスカラー曲率 R の表式を用いて、改めて Einstein–Hilbert 作用を部分積分しても

$$\begin{aligned} S_{\text{EH}} &= -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R = \frac{3c^2 V_0}{8\pi G} \int dt (\ddot{a} a^2 + \dot{a}^2 a) \\ &= \frac{3c^2 V_0}{8\pi G} \dot{a} a^2 \Big| - \frac{3c^2 V_0}{8\pi G} \int dt \dot{a}^2 a \equiv -S_{\text{boundary}} + S_g \end{aligned}$$

が得られる。また上式の変分

$$\delta S_{\text{EH}} = \frac{3c^2 V_0}{8\pi G} a^2 \delta \dot{a} \Big| + \frac{3c^2 V_0}{8\pi G} \int dt (2a \ddot{a} + \dot{a}^2) \delta a$$

の境界項は $\delta \dot{a}$ を含み、これを相殺するのに必要な境界項はやはり

$S_{\text{boundary}} = -\frac{3c^2 V_0}{8\pi G} \dot{a} a^2$ である*74.

最後に式(235)のGibbons–Hawking–York境界項 S_{GHY} を今の場合に直接書き下そう.
Robertson–Walker計量(288)に対して空間計量は $q_{ij} = -g_{ij} = a^2 \delta_{ij}$, ラプスは $N = 1$, シフトは $N_i = 0$ なので, 外部曲率(129)は

$$k_{ij} = -\frac{1}{2c} \dot{q}_{ab} = -\frac{1}{c} a \dot{a} \delta_{ij} \quad (303)$$

となる. なるほどパラメータ $k = 0$ の平坦な3次元空間は内部曲率を持たないものの, スケール因子 $a(t)$ の変化のため外部曲率を持つ. すると $k_{ij} q^{ij} = 3\dot{a}/a$, $\sqrt{q} = a^3$ より

$$S_{\text{GHY}} = +\frac{1}{8\pi G} \int k^{ij} q_{ij} \sqrt{q} d^3x = -\frac{3c^2 V_0}{8\pi G} \dot{a} a^2.$$

よって単純な宇宙論モデルでは $\delta S_{\text{boundary}} = \delta S_{\text{GHY}}$ のみならず, $S_{\text{boundary}} = S_{\text{GHY}}$ が成り立っている.

*74 ここから得られる運動方程式 $2a\ddot{a} + \dot{a}^2 = 0$ は Einstein 方程式の空間-空間成分に一致している [15, p.188].

4.2.2 項の原稿

4.2.1 項では一様等方な宇宙が Robertson–Walker 計量 (288) で表されることを見た。ここまでの結果はダイナミクスを考慮していないという意味で宇宙論的運動学と呼べる。次に具体的なダイナミクスとして Einstein 方程式を適用しよう。Robertson–Walker 計量 (288) に対して Einstein 方程式の時間-時間成分 $G_{00} - \Lambda g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}$ を書き下すと、 $T_{00} = \varepsilon$ を物質系のエネルギー密度として Friedmann 方程式 (295) を得る ([導出スライド参照](#)) [14, pp.465–466] [27, p.107]。このように一様等方な宇宙モデルのダイナミクスは、単一のスケール因子 $a(t)$ を力学変数とする単純な支配方程式で記述される。正確には力学変数 $a(t)$ について閉じた方程式を得るには、式 (295) 右辺の ε を a で表す、すなわち宇宙の膨張に伴いエネルギー密度がどのように変化するかを知る必要がある。そのためには物質系のエネルギー保存則と状態方程式を組合せる必要があるものの [14, pp.464–465, p.487]、ここでは簡単に次のように考えよう。まず等方性から物質に働く応力は非対角成分を持たず、対角成分の圧力 (または張力) に限定される。そこで要素間の相互作用もランダムな速度による運動学適応力もない物質系を考えると、そのようなダスト流体では状態方程式として、圧力がゼロになる。このとき一定の座標を占める物質の塊が膨張する際に周囲の物質から仕事をされないので、塊の全エネルギーないし質量は一定であり、その密度は体積 ($\sim a^3$) に反比例すると期待される。よって Friedmann 方程式 (295) の右辺に対する寄与は、適当な定数 C_m を用いて C_m/a^3 と書ける。これに対し輻射場ないし光子ガスは、エネルギー密度 ε に比例する圧力 $p = \varepsilon/3$ を

持つので、同じ議論を適用できない。実際、Friedmann方程式(295)の右辺に対する電磁輻射の寄与は、 C_g を適当な定数として今度は C_g/a^4 という形をとる。この結果は直観的には次のように解釈できる。すなわち個々の光子は波長に反比例するエネルギーを持つ。ところが宇宙の膨張に伴い波長は引き伸ばされるので、エネルギー密度に対する追加の寄与として $1/a$ の因子が現れる。以上より通常の物質と電磁輻射の複合系に対して、Friedmann方程式(295)は式(296)のように書ける。加速度に関する第2式を得るには、分母 a^2 を払って時間微分をとりさえすればよく、その際に曲率に関する定数 k の項は消える。式(296)第2式から物質は宇宙膨張を減速させるのに対し、宇宙定数項は宇宙膨張を加速させることが見て取れる [27, pp.107–108]。

これを基に初期宇宙について考えよう。まずは簡単のために宇宙定数を $\Lambda = 0$ とおく。宇宙は現在膨張しており、時間を巻き戻して過去に遡ると、スケール因子 a は小さくなっていく。するとFriedmann方程式(296)において物質(とりわけ光子ガス)の項が支配的となる。そこで物質の項に比べて曲率の項 k/a^2 を無視しよう。このとき輻射優勢の宇宙では物質の項 C_m/a^3 を無視すると、式(297)第1式に従い宇宙は減速膨張を行うことが帰結する。同様に物質優勢の宇宙を仮定して光子ガスの項 C_g/a^4 を無視すると、減速膨張は式(297)第2式に従う。いずれにせよ有限の過去に、宇宙のサイズが $a = 0$ となる時刻(ここでは $t = 0$ に選んだ)に到達する。それは曲率と物質の密度が発散するビッグバン特異点である。そのような初期宇宙は古典的な一般相対性理論の適用範囲外であり、量子重力による取り扱いが必要と信じられている。宇宙定数項を考慮する場合にも、式(296)より正の宇宙定数 Λ はスケール因子 a が各値をとるときの膨張速度 $\dot{a}$ を

増大させ、 $a = 0$ となる時刻を現在に近づけるだけである [14, pp.467–469].

最後に量子重力に対する経路積分に取り組む準備として、この系に対する作用積分を調べて、宇宙モデルの古典論を締め括ろう [1, pp.215–216]. ただし考え得る最も簡単な場合として、 $k = 0$ の平坦なモデルを考え、宇宙定数を $\Lambda = 0$ とおき、また物質も存在しないと仮定する. 実際、空間的に平坦な宇宙モデルは我々が観測できる宇宙の範囲をよく近似しており、閉じた宇宙よりも記述がやや容易なので、少なくとも一定の目的に対しては平坦なモデルを積極的に取り上げることは理に適っている.

さてRobertson–Walker計量(288)に対して求めたスカラー曲率を用いると、Einstein–Hilbert作用は式(298)で与えられる. これはスカラー曲率 R が計量の2階微分を含んでいることを反映して、力学変数 a の2階微分を含んでいる. このため作用(298)の変分(299)は、部分積分に起因する $\delta\dot{a}$ を含む境界項を持つ. これを相殺してよく定義された変分原理を得るには、3.2.2項で展開した処方箋に従いGibbons–Hawking–York境界項(300)を作用に取り込めばよい. ところが直接の計算で確かめられるように、ここではGibbons–Hawking–York境界項は、力学変数 a の1階微分までを含む作用(301)の部分積分から生じる境界項 S_{boundary} と正確に一致する. したがってEinstein–Hilbert作用にGibbons–Hawking–York境界項を加えて修正した作用を用いることは、あらかじめ自然な作用(301)を採用することと等価である(以上, 導出スライド参照). そこで作用(301)からラグランジアン L を読み取ると運動量は式(302)のように同定できる. これを用いると境界項(300)は式(233)の場合と同様、再び力学変数 a と運動量 p_a の積で表

される.

第II部

量子力学の基礎

(換算) Planck 定数 [30, pp.46–47] [32, p.118]

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054 \times 10^{-27} \text{erg} \cdot \text{sec}. \quad (304)$$

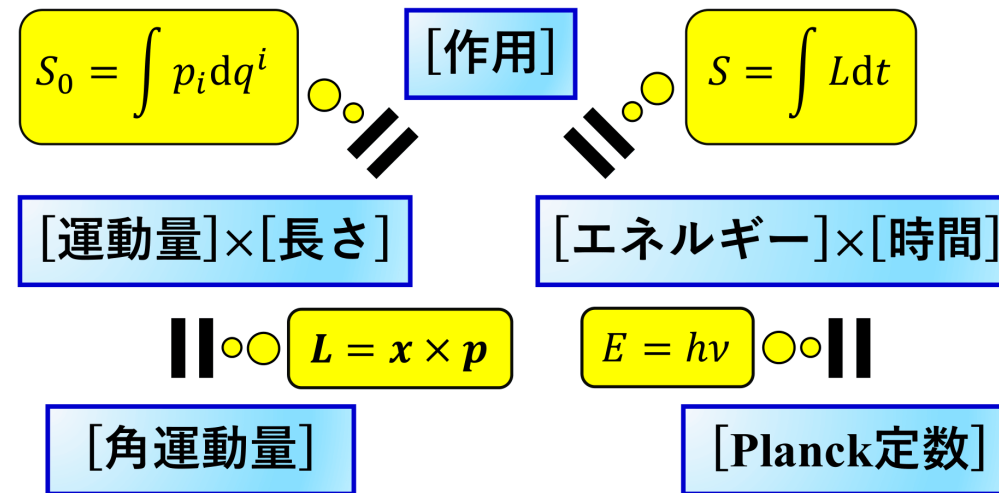


図27 Planck定数の次元. ここから例えば因子 $e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)/\hbar}$, $e^{iS/\hbar}$, $e^{i\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\phi/\hbar}$ の指数は無次元であることが見て取れる.

第II部の原稿(序文)

第II部では量子力学の基礎を復習する．ただし量子論の概観としては本稿で取り上げる題材は少なからず偏っており，特に専らループ量子重力の準備として，角運動量の理論に関してはいくらか発展的な内容にも踏み込み詳しく説明する．それはダイナミクス以前の量子力学の運動論として [1, p.10]，Schrödinger 方程式よりも先に論じる予定である．他方で本稿では

- 基底の完全性条件が完備関係式(恒等演算子の分解)で与えられること [11, pp.24–25]
- 状態ケットや演算子とその行列表現の関係 [11, pp.25–28]
- 可換な観測量には同時固有状態があり，
非可換な観測量の間には不確定関係があること [11, pp.38–48]

などは予備知識として仮定する．また与えられたポテンシャルに Schrödinger 方程式を適用して系のエネルギー固有状態を求めることをはじめとする，量子力学の具体的な応用などは初等的な入門書に譲る．それは不本意ながら一部の初学者を突き放すことにはなるものの，他方で内容を欲張るあまり，いたずらに叙述が冗長となり，読者に過度な負担を強いることもまた得策ではない．何よりループ量子重力を最終目標に据え，そこにたどり着くことを最優先とする本稿の趣向からすれば，これはあくまで適切な措置であると考える．

はじめに量子論において重要となる普遍定数として、Planck定数 h を 2π で割った、式(304)の換算Planck定数 $\hbar$ を導入しておく [30, pp.46–47] [32, p.118]. これは図27にまとめたように、[エネルギー] $\times$ [時間] の次元を、したがって作用積分の次元を持つ. それはまた[運動量] $\times$ [長さ] の次元に、したがって角運動量の次元に一致する. このことを覚えておくと量子力学に現れる式の次元を確認する上で見通しが良く、とりわけ頻繁に現れる指数の因子が確かに無次元化されていることが納得できる.

5 量子力学の关系的解釈

観測者 O が系 S (電子) のスピン成分 A の測定値 a_1 を得ると、状態は“収縮”する：

$$c_1 |\Psi_1\rangle + c_2 |\Psi_2\rangle \rightarrow |\Psi_1\rangle. \quad (\text{射影, 情報の更新}) \quad (305)$$

ここで“観測者” O とは任意の物理系 (例えば電球) の擬人的な表現である。

ところが O' の立場では結合系 $[S + O]$ は Schrödinger 発展を行い、相関を確立する：

$$(c_1 |\Psi_1\rangle + c_2 |\Psi_2\rangle) \otimes |\Phi\rangle \rightarrow \left(\underbrace{c_1 |\Psi_1\rangle \otimes |\Phi_1\rangle}_{[\text{スピン上向き/点灯}]} + \underbrace{c_2 |\Psi_2\rangle \otimes |\Phi_2\rangle}_{[\text{スピン下向き/消灯}]} \right). \quad (306)$$

→ “量子事象” $a_1, a_2, \dots$ は立ち現れる物理系に相対的 (关系的量子力学)。

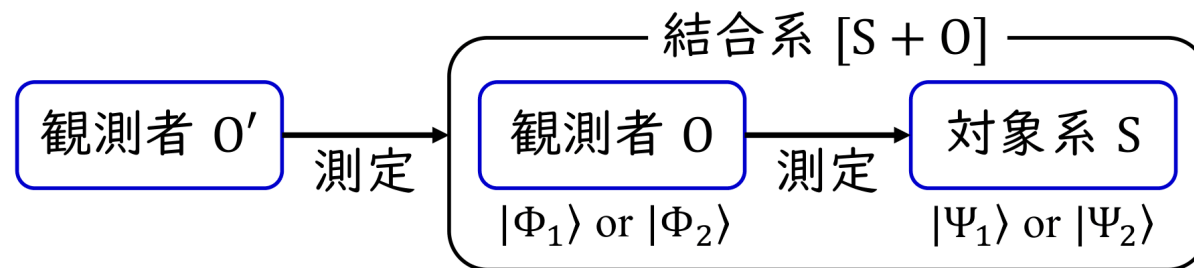


図28 観測される観測者, 「Wignerの友人」の思考実験 [2, pp.209–222] [32, p.100]

表2 關係的量子，關係的空間 [1, pp.52–53]

量子力学	一般相对性理論
過程	時空領域
← 局所性 →	
狀態	境界，空間領域

第5章の原稿

本稿ではDiracによる状態ベクトルのブラ・ケット表記を利用する．初見では状態ベクトル $|\alpha\rangle$ や状態の重畳せ $\sum_{a'} c_{a'} |a'\rangle$ といった概念は抽象的で，一見すると現実との対応が不明瞭な空想の産物に過ぎないという印象を受けるかもしれない．しかしFeynmanが注意しているように「直接実験にかかる概念だけを使って，完全に科学を追求できると考えるのは，正しくない」のであり，理論の正否はその予言の能力にかかっている [33, p.178]．そしてケット，ブラおよび演算子に関する計算規則が半ば公理的に与えられさえすれば，内積の2乗 $|\langle a'|\alpha\rangle|^2$ の確率的解釈の下で現象を確率的に予言できる以上，ひとまず物理的状态がケット $|\alpha\rangle$ で表されるという考えを受け容れるには充分である．

なるほど確かに量子力学の最も標準的な解釈として確率的解釈ないし「コペンハーゲン解釈」を認めておけば，当面は実践的な支障はない．物理学者のMerminはこの点を揶揄してコペンハーゲン解釈を「黙って計算せよ！ という解釈(Shut up and calculate interpretation)」と呼んでいる [32, p.100]．しかしながら思うに物理学の本質は自然観を提示することであり，その営みは必ずしも単なる現象の予言というプラグマティズムに還元し得ない．そこで量子力学の解釈問題を形而上学的な(擬似)問題として敬遠する風潮に揺さぶりをかけ，議論を展開するための糸口として，以下ではWignerの友人と呼ばれる思考実験を紹介する [32, p.101]．併せてC. Rovelliの提唱する量子力学の関係

的解釈を要約する [2, pp.209–222]. ただしそれは確率的解釈の否定では決してなく、むしろその含意を明らかにする試みである.

量子論の解釈をめぐる困難の核心は、“観測される観測者”の思考実験によって端的に示すことができる. まず物理量 A の2つの固有値 a_1, a_2 に属する2状態 $|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle$ をとり得る物理系 S を考えよう. 例えば系 S は電子であり, $|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle$ はそれぞれスピンの上向きと下向きの状態を表すと想定すれば良い. このとき系 S の初期状態は一般には2状態 $|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle$ の重畳で表される. ここで観測者 O が系 S の物理量 A (スピン成分) を測定し, 例えば測定結果 a_1 を得たとする. このとき状態は式(305)のように, 瞬時に“収縮(collapse)”する. これは単なる情報の取得による状態の変化と解釈でき, 射影と呼ばれる. 現実の“量子事象”はあくまで一連の測定結果 $a_1, a_2, \dots$ であり, これに対し波動関数を含め, 確率分布を与える状態ベクトル $|\Psi\rangle$ は物理的实在でないと考えれば, 多世界解釈を含め, その収縮機構に対する込み入った説明は不要となる.

ただし観測者 O が情報を取得するというのは, あくまで擬人的な表現であることに注意しよう. 実際ここで観測者 O が人間ではなく, 代わりに系 S と相互作用する単なる測定器であっても良く, またその測定結果が記録として残される必要もない. 測定とはあくまで単なる物理系の相互作用であり, 測定や観測という術語は本来, 必ずしも人間の意識や主観を意味しない.

そこで例えば系 O は相互作用により, 電子(S)のスピン上向き・下向きの状態 $|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle$ に応じて, 光がオン・オフの状態 $|\Phi_1\rangle, |\Phi_2\rangle$ になるような電球であるとしよう. 次いで図28のように, 第2の観測者 O' が結合系 $[S + O]$ に対して第2の測定を行う

場合を考える．例えば電球 O が点いているかを観測者 O' が調べて、電子のスピンの方
きに関する情報を引き出す場合がこれに相当する．

ところが系 O もまた量子力学によって記述されることを要求すると、結合量子系
[$S + O$] はユニタリーな Schrödinger 発展に従わねばならない．すると O' の立場では収
縮は全く起こらず、代わりに第1の測定は式(306)のように、 S と O の間の相関を確立す
ることになる．すなわち複合系は相互作用の後も依然として、[スピン上向き/点灯]と
[スピン下向き/消灯]の2状態の重合せにある．実際 O' による第2の測定の正しい確率
分布を与えるのは重合せ状態(306)である．

2つの説明(305)と(305)は素朴には両立しない．オリジナルの思考実験では O' が
Wigner, O が Wigner の友人という設定だったため、このパラドックスは「Wigner の友
人」として知られている [32, p.101]．ただし提唱者 Wigner の本意はパラドックスに基
づき、支配的なコペンハーゲン解釈に異を唱えることではなく、むしろ状態ベクトル
(波動関数)は観測者によって異なり得ることを示すことにあった．観測者を物理系と言
い換えれば、量子事象は常に物理系に対して相対的であると言える．我々の例では量子
事象 a_1 は系 O に関しては起きたのに対し、系 O' に関しては起きていない．別の物理系
を参照することなく、単に系 S の変数が値 a_1 をとるか否かを言うことには、意味がな
い．このような見方を C. Rovelli にならって量子力学の関係的解釈 (*relational*
interpretation of quantum mechanics)、あるいは単に関係的量子力学 (*relational*

quantum mechanics) と呼ぼう^{*75}。この観点からは、量子力学的な実在とは関係性のネットワークと言える。

O に関係した説明と O' に関係した説明は互いに一致していないにも関わらず、それらを比較しても矛盾は導かれない。と言うのも、比較のために O' が電子と相互作用すると、式(306)の右辺におけるいずれかの項、例えば[スピン上向き/点灯]成分が選び出されるため、次いで電球を測定すると、点灯状態が見出されるからである。つまり、まさに異なる説明の比較は物理的で量子論的な相互作用でしかあり得ないという理由で、説明の多様性は矛盾を導かない。この自己無撞着性は世界の関係的な本性を強く示唆している。

なお今の例では比喩的に述べると、物理系 O は S について知っているという意味で情報を持つのに対し、物理系 O' は O が S について何らかのことを知っていることを知っているという意味で情報を持つ。このように量子力学は、物理系が互いに対して持っている情報に関係していると考えられる。

ここで一般相対性理論 (GR) と量子力学 (QM) の関係主義的性格を比較してみたい。GR

^{*75} これはある意味、相対主義の徹底である。またそれは、系 S の変数はある観測者 (O) に対して良く定義された値 a_1 を持つことができ、同時に別の観測者 (O') に対しては決まった値を持てないという見解から帰結する、避け難い結論である。自然を理解するには、自然を我々の哲学的偏見に当てはめるのではなく、むしろ我々の哲学的見解を、我々が自然から学んだことに適合させねばならない。

では物体は背景時空ではなく他の力学的存在(物体や場)に対して位置付けられ, それらの関係は隣接性に基づいている. 他方でこれまでに論じてきたQMの根底にある関係性は, 物理系の相互作用に基づいている. ところが相互作用は系の隣接性を要求するのに対し, 隣接性は相互作用の表れであるならば, 隣接性と相互作用は表裏一体である. この最後のアイデアは多分に思弁的ではあるものの魅力的である.

量子力学と一般相対性理論のアナロジーをもう少し掘り下げよう [1, pp.52–53]. 量子力学における始・終状態間の過程は時空領域の中にあるのではなく, 時空領域そのものであり, 逆に時空領域は実際にその境界のうちに起こり得ることの確率的な重畳 (Feynman 和) なので, 量子過程である. そして時空領域の境界ないし量子過程の始・終状態は, 隣接する時空領域ないし測定器などの物理系との相互作用を特徴付ける. 表2を見よ.

6 数学的準備

6.1 有用な数学公式

■(反)交換子の性質 [17, pp.65–66] [11, pp.67–68]

(反)交換子 $[A, B] \equiv AB - BA$, $\{A, B\} = AB + BA$ は(反)交換に伴うお釣り :

$$AB = BA + [A, B], \quad AB = -BA + \{A, B\}. \quad (307)$$

定義より例えば公式

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B, \quad (308)$$

$$[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B. \quad (309)$$

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \quad (\text{Jacobi の恒等式}) \quad (310)$$

が成り立つ. さらに $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$ を繰り返し用いると,

$$\begin{aligned} [A, B^n] &= B[A, B^{n-1}] + [A, B]B^{n-1} = B^2[A, B^{n-2}]B + B[A, B]B^{n-2} + [A, B]B^{n-1} \\ &= \dots \\ &= B^{n-1}[A, B] + B^{n-2}[A, B]B + \dots + B[A, B]B^{n-2} + [A, B]B^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} B^{n-k-1}[A, B]B^k. \end{aligned} \quad (311)$$

■生成・消滅演算子 [11, pp.120–125] [17, pp.65–67]

調和振動子の交換関係

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (312)$$

を満たす非Hermite演算子 $a^\dagger, a$ を順に生成・消滅演算子と呼ぶ.

実際, 個数演算子 $N \equiv a^\dagger a$ の固有ケット $|n\rangle$ (固有値 n は非負整数) への作用は

$$a |n\rangle \propto |n-1\rangle, \quad a^\dagger |n\rangle \propto |n+1\rangle, \quad (313)$$

$$a |0\rangle = 0 \quad (314)$$

基底状態 $|0\rangle$ を $\langle 0|0\rangle = 1$ と規格化すると, 一連の規格化された固有状態は

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle. \quad (315)$$

代わりに反交換関係

$$\{a, a^\dagger\} = 1, \quad \{a, a\} = 0, \quad \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0 \quad (316)$$

を課すと, 再び $a^\dagger, a$ は生成・消滅演算子となるものの,

N の固有値は $n = 0, 1$ に限られる (フェルミオン系の排他律を再現).

■ Baker–Campbell–Hausdorff の公式 [28, pp.304–305] [11, p.129]

演算子 A の指数関数を Taylor 展開の形

$$e^A = \exp(A) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \quad (317)$$

で定義する。このとき $[A, B] = 0$ ならば “指数法則”

$$e^A e^B = e^{A+B} \quad (318)$$

が成り立ち、 $[A, B] = c$ (定数) の場合には、公式

$$e^A e^B = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}c\right) \quad (319)$$

が成り立つ。相似変換に関しては

$$\begin{aligned} & e^{i\lambda G} A e^{-i\lambda G} \\ &= A + i\lambda [G, A] + \frac{(i\lambda)^2}{2!} [G, [G, A]] + \cdots + \frac{(i\lambda)^n}{n!} [G, [G, \cdots [G, A] \cdots]] + \cdots \end{aligned} \quad (320)$$

が成り立つ。

■行列式が1の行列は指数がトレースレス [37, p.116, pp.226–227] [31, pp.88–90]
任意の (n 次) 正方行列 A に対し公式

$$\det(\exp A) = \exp(\operatorname{Tr} A) \quad (321)$$

が恒等的に成り立つ. ここから

$$\det(\exp A) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Tr} A = 0.$$

6.1 節の式の導出など

■生成・消滅演算子の作用(313)の導出 [11, p.121–122]

交換関係(312)および恒等式(308)を用いると

$$[N, a] = [a^\dagger a, a] = a^\dagger [a, a] + [a^\dagger, a] a = -a, \quad (322)$$

$$[N, a^\dagger] = [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger [a, a^\dagger] + [a^\dagger, a^\dagger] a = a^\dagger \quad (323)$$

が導かれる．ここから

$$\begin{aligned} N(a|n\rangle) &= (aN + [N, a])|n\rangle = a(N - 1)|n\rangle = (n - 1)(a|n\rangle), \\ N(a^\dagger|n\rangle) &= (a^\dagger N + [N, a^\dagger])|n\rangle = a^\dagger(N + 1)|n\rangle = (n + 1)(a^\dagger|n\rangle) \end{aligned}$$

を得る．これらは $a|n\rangle, a^\dagger|n\rangle$ がそれぞれ固有値 $n - 1, n + 1$ に属する N の固有ケットであることを意味する．よって式(313)が成り立つ．

■固有値 n が非負整数に限られることと式(314): $a|0\rangle = 0$ の理由 [11, pp.122–123,125]

$c_{\pm}$ を数定数として, 式(313)は

$$a|n\rangle = c_-|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = c_+|n+1\rangle$$

と書ける.

次に固有値 n がゼロ以上の整数に限られることを示す. まず上式の係数 $c_{\pm}$ を定めるに当たり, 各固有値 n に対する固有ケット $|n\rangle$ が $\langle n|n\rangle = 1$ と規格化されていることを要求しよう. すると

$$\begin{aligned} |c_-|^2 &= (\langle n-1|c_-^*) \cdot (c_-|n-1\rangle) = (\langle n|a^\dagger) \cdot (a|n\rangle) \\ &= n \langle n|n\rangle = n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |c_+|^2 &= (\langle n+1|c_+^*) \cdot (c_+|n+1\rangle) = (\langle n|a) \cdot (a^\dagger|n\rangle) = \langle n|a^\dagger a + [a, a^\dagger]|n\rangle \\ &= \langle n|N+1|n\rangle = (n+1) \langle n|n\rangle = n+1 \end{aligned}$$

を得る. 係数 $c_{\pm}$ の位相は物理的に意味がないから $c_{\pm}$ を実の正数にとって良く, このと

き $c_- = \sqrt{n}$, $c_+ = \sqrt{n+1}$ なので

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad (324)$$

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (325)$$

となる．式(324)によれば，ある固有ケット $|n\rangle$ から初めて N の固有ケットに消滅演算子 a をかける操作を繰り返すと，固有ケット

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad a |n-1\rangle = \sqrt{n-1} |n-2\rangle, \quad \dots$$

が得られることになる．正整数 n から始めればいずれ

$$a |1\rangle = |0\rangle, \quad a |0\rangle = 0$$

が得られ， $n=0$ よりも小さい固有値 n を持つ固有ケット $|n\rangle$ が作られることはない．一方，非整数の n から始めれば，負の値をとるいくらでも小さい固有値 n を持つ固有ケット $|n\rangle$ が作られることになる．ところで任意のケット $|\alpha\rangle$ に対して正值性 $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0$ が成り立つという要請から，固有値 n は

$$0 \leq (\langle n| a^\dagger) \cdot (a |n\rangle) = \langle n| N |n\rangle = n$$

を満たさなければならない．以上より固有値 n として許されるのはゼロ以上の整数のみである．

補足　すぐ後の固有ケット (315): $|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle$ が適正に規格化されていることは、上式 (325) から理解できる.

■反交換関係(316): $\{a, a^\dagger\} = 1$, etc. を課した場合 [17, pp.65–67]

反交換関係(316)および恒等式(309)を用いると

$$\begin{aligned}[N, a] &= [a^\dagger a, a] = a^\dagger \{a, a\} - \{a^\dagger, a\} a = -a, \\ [N, a^\dagger] &= [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger \{a, a^\dagger\} - \{a^\dagger, a^\dagger\} a = a^\dagger\end{aligned}$$

が導かれる．この結果はそれぞれ式(322),(323)と同じものであるから，上の議論を繰り返すことで再び

$$\text{式(324)} : a |n\rangle = \sqrt{n} |n\rangle, \quad \text{式(325)} : a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

が得られ，さらに固有値 n はゼロ以上の整数であることが結論される．そこで固有値 $n=0$ に属する固有ケット $|0\rangle$ に生成演算子 $a^\dagger$ を次々とかけて式(325)を用い， N の固有ケットを作ること考えよう．今，反交換関係(316): $\{a^\dagger, a^\dagger\} = 0$ より $(a^\dagger)^2 = 0$ であることに注意すると

$$a^\dagger |0\rangle = |1\rangle, \quad (a^\dagger)^2 |0\rangle = 0, \quad \dots$$

なので固有値は $n=0, 1$ に限られる．

同じ結論は反交換関係(316)およびその帰結 $a^2 = (a^\dagger)^2 = 0$ を用いると

$$N^2 = a^\dagger a a^\dagger a = a^\dagger (1 - a^\dagger a) a = N, \quad \therefore N(N - 1) = 0$$

であることから, $n = 0, 1$ と説明することもできる.

参考 複数の演算子 $a_r, a_r^\dagger (r = 1, 2, \dots)$ がある場合には, 反交換関係(316)を

$$\{a_r, a_s^\dagger\} = \delta_{rs}, \quad \{a_r, a_s\} = 0, \quad \{a_r^\dagger, a_s^\dagger\} = 0$$

と一般化するだけで良い. このとき各ラベル r の演算子 $a_r, a_r^\dagger, N_r \equiv a_r^\dagger a_r$ に対して上記の議論はそのまま成り立つ. “2粒子状態” $|1_r, 1_s\rangle = a_r^\dagger a_s^\dagger |0\rangle$ は粒子の入れ替えに関して反対称である.

$$\{a_r^\dagger, a_s^\dagger\} = 0 \quad \rightarrow \quad |1_r, 1_s\rangle = -|1_s, 1_r\rangle.$$

これはやはり同じ1粒子状態に2つ以上の粒子が入れないこと $|2_r\rangle = (a_r^\dagger)^2 |0\rangle = 0$ を含意している.

■可換な量 A, B に対して指数法則 $e^A e^B = e^{A+B}$ が成り立つ理由
まず,

$$e^A e^B = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} B^m \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} A^n B^m$$

の最右辺において和をとられる項 $\frac{1}{n!} \frac{1}{m!} A^n B^m$ をいくつか書き出すと以下のように
なる.

	1	B	$\frac{1}{2} B^2$	$\frac{1}{3!} B^3$	$\frac{1}{N!} B^N$
1	1	B	$\frac{1}{2} B^2$	$\frac{1}{3!} B^3$	$\frac{1}{N!} B^N$
A	A	AB	$\frac{1}{2} AB^2$	$\frac{1}{(N-1)!} AB^{N-1}$	
$\frac{1}{2} A^2$	$\frac{1}{2} A^2$	$\frac{1}{2} A^2 B$	$\ddots$		
$\frac{1}{3!} A^3$	$\frac{1}{3!} A^3$	$\frac{1}{(N-1)!} A^{N-1} B$			
$\frac{1}{N!} A^N$	$\frac{1}{N!} A^N$				

$n + m = N$ となる項の和 $\sum_{n=0}^N \frac{1}{n!(N-n)!} A^n B^{N-n}$ は上の図式で1列に並ぶ青い字で示

した項の和であることに注意すると,

$$e^A e^B = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!(N-n)!} A^n B^{N-n} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} A^n B^{N-n}$$

となることが分かる(ただし上の図式は $N = 4$ として書いている). 上式の最右辺は A, B が交換すれば

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} (A+B)^N = e^{A+B}$$

に等しいから指数法則 $e^A e^B = e^{A+B}$ が成り立つ.

■ Baker–Campbell–Hausdorff の公式 (319) の証明 [28, pp.304–305]

$f(\lambda) \equiv e^{\lambda A} e^{\lambda B}$ とおくと, 求める量は $f(1)$ である. $f(\lambda)$ に対する微分方程式を作ろう.

$$\begin{aligned} f'(\lambda) &= A e^{\lambda A} e^{\lambda B} + e^{\lambda A} B e^{\lambda B} \\ &= A e^{\lambda A} e^{\lambda B} + \{B e^{\lambda A} + [e^{\lambda A}, B]\} e^{\lambda B} \end{aligned}$$

の最右辺における交換子 $[e^{\lambda A}, B]$ は, 公式 (311) より $[A^n, B] = n c A^{n-1}$ となることを用いると

$$[e^{\lambda A}, B] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} [A^n, B] = \lambda c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} A^{n-1} = \lambda c e^{\lambda A}$$

と評価できる. これを上式に代入すると

$$f'(\lambda) = (A + B + \lambda c) f(\lambda)$$

を得る. $f(0) = 1$ を満たす解は

$$f(\lambda) = \exp \left[\lambda(A + B) + \frac{1}{2} c \lambda^2 \right]$$

であり, $\lambda = 1$ とおくと式 (319) が得られる.

■ Baker–Hausdorff の補助定理 (320) の証明

証明したい式 (320) を改めて以下に書いておこう.

$$e^{i\lambda G} A e^{-i\lambda G} = A + i\lambda [G, A] + \frac{(i\lambda)^2}{2!} [G, [G, A]] + \cdots + \frac{(i\lambda)^n}{n!} [G, [G, \cdots [G, A] \cdots]] + \cdots .$$

この公式は次のように証明できる. はじめに $e^{i\lambda G} = 1 + i\lambda G + \cdots$ を $A e^{-i\lambda G} = A - i\lambda A G - \cdots$ に左からかけたときに現れる項を以下に書き出す.

	1	$i\lambda G$	$\cdots$	$\frac{(i\lambda)^{N-k}}{(N-k)!} G^{N-k}$	$\cdots$	$\cdots$	$\frac{(i\lambda)^N}{N!} G^N$	$\cdots$
A							$\bullet$	
$-i\lambda A G$								$\bullet$
$\vdots$								
$\frac{(-i\lambda)^k}{k!} A G^k$				$\frac{(i\lambda)^{N-k} (-i\lambda)^k}{(N-k)! k!} G^{N-k} A G^k$		$\bullet$		
$\vdots$								
$\vdots$			$\bullet$					
$\vdots$		$\bullet$						
$\frac{(-i\lambda)^N}{N!} A G^N$	$\bullet$							
$\vdots$								

上の図式において青い項 $\frac{(i\lambda)^N}{N!} \sum_{k=0}^N {}_N C_k (-1)^k G^{N-k} A G^k$ が $\frac{(i\lambda)^N}{N!} \underbrace{[G, [G, \dots, [G, A] \dots]]}_{N \text{ 個の } G}$ に一致すれば良い^{*76}. これを数学的帰納法にて示す. まずこれは $N = 1$ に対して成り立つ. 次にこれがある N に対して成り立つとすると

$$\begin{aligned}
 & [G, \underbrace{[G, [G, \dots, [G, A] \dots]]}_{N \text{ 個の } G}] \\
 &= \left(G^{N+1} A + \sum_{k=1}^N {}_N C_k (-1)^k G^{N+1-k} A G^k \right) \\
 &\quad - \left(\sum_{k=0}^{N-1} {}_N C_k (-1)^k G^{N-k} A G^{k+1} + (-1)^N A G^{N+1} \right) \\
 &= G^{N+1} A + \sum_{k=1}^N \underbrace{({}_N C_k + {}_N C_{k-1})}_{{}_{N+1} C_k \text{ (Pascal の三角形)}} (-1)^k G^{N+1-k} A G^k + (-1)^{N+1} G^{N+1}
 \end{aligned}$$

より $N \rightarrow N + 1$ と置き換えても成り立つ. 以上より Baker–Hausdorff の補助定理 (320) が示された.

^{*76} $[G, [G, \dots, [G, A] \dots]]$ の右端の $\dots$ は括弧の連なりを表し, A の右側に G は来ない.

■公式(321): $\det(\exp A) = \exp(\text{Tr} A)$ の証明 [37, p.116, pp.226–227] [31, pp.88–90]

任意の n 次正方行列 $B(x)$ に対し

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\det B) &= \frac{d}{dx}(\varepsilon_{i_1 \dots i_n} B_{1i_1} \cdots B_{ni_n}) \\ &= \sum_{k=1}^n \varepsilon_{i_1 \dots i_n} B_{1i_1} \cdots \frac{dB_{ki_k}}{dx} \cdots B_{ni_n} = \sum_{k,l} \Delta_{kl} \frac{dB_{kl}}{dx}\end{aligned}$$

が成り立つ ($\{i_k\}$ でも和をとる). ただし最右辺における Δ_{kl} は B の (k, l) 余因子であり, 最後の等号は, 第3辺を

$$\sum_{k=1}^n \det \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{k1}' & B_{k2}' & \cdots & B_{kn}' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix} \quad \left(\text{ただし } B_{kl}' \equiv \frac{dB_{kl}}{dx} \right)$$

と書いて k 行目で展開することを考えれば分かりやすい. 特に逆行列を持つ B に対して

は，両辺を $\det B (\neq 0)$ で割り， $B^{-1} = \frac{1}{\det B} (\Delta_{kl})$ と表されることに注意すると，

$$\frac{1}{\det B} \frac{d}{dx} (\det B) = \text{Tr} \left(B^{-1} \frac{dB}{dx} \right)$$

と書き換えられる．ここで任意の n 次正方行列 C を用いて $B(x) = e^{xC}$ とおくと^{*77}，
 $\frac{dB}{dx} = BC$ となるので，上式は

$$\text{Tr} C = \frac{1}{\det(e^{xC})} \frac{d}{dx} \det(e^{xC}) = \frac{d}{dx} \ln |\det(e^{xC})|$$

を与える^{*78}．両辺を x で積分すると $\det(e^{xC}) = \text{const} \times e^{x \text{Tr} C}$ であり， $x = 0$ を代入すると $\text{const} = 1$ と定まるので，公式

$$\det(e^{xC}) = e^{x \text{Tr} C}, \quad \therefore \det(e^C) = e^{\text{Tr} C} (> 0) : (321)$$

を得る．

^{*77} 逆行列は $B^{-1}(x) = e^{-xC}$ である．実際 C どうしは交換するので，“指数法則” $e^{\pm xC} e^{\mp xC} = 1$ が成り立つ．

^{*78} 最右辺の $|\dots|$ は絶対値を表す．行列式は一貫して $\det$ で表してきた．

参考

$e^C (= B(1)) = A$ とおくと, C は“行列 A の対数” $C = \ln A$ と書くことが許される.
このように $\ln A$ を定義できる A に対して, 上式は

$$\ln \det A = \text{Tr} \ln A$$

と書き換えられる.

6.1 節の原稿

ここからは量子力学をある程度，体系的に記述するための数学的な準備に移ろう．まずは有用な恒等式をまとめて紹介する．

演算子の交換子と反交換子はそれぞれ式(307)のように， A, B を交換ないし反交換した際のお釣りの項として定義できる．また定義より定数との交換子は常にゼロであり，交換子は2つの演算子に関する双線形性と反対称性を満たす．さらに直接確かめられるように，交換子に対して，恒等式(308)が成り立つ．言葉で述べれば，積 AB のうち左側にある因子 A は交換子の左に，右側にある因子 B は交換子の右に出せば良い．代わりに反交換子を用いて，式(309)のように交換子を展開することもでき

る [17, pp.65–66] [11, p.68]．そこで演算子の交換関係が分かっている場合には式(308)を，また反交換関係が分かっている場合には式(309)を用いると都合が良い．

以上の交換子の性質は古典力学における Poisson 括弧の満たす代数的性質と全く同じ形をしている．実にこのとき初めて古典的な Poisson 括弧を量子力学的な交換子に置き換えて理論を量子化する，Dirac の処方が意味を成す [11, pp.67–68]．とりわけ量子力学的な交換子に対しては Jacobi の恒等式(310)が成り立つことは比較的容易に確認できるのに対し，古典的な Poisson 括弧もまた Jacobi の恒等式を満たすことを証明するのは厄介である [8, pp.172–173]．ところがシンプレクティック形式の力学を用いれば，Poisson 括弧に対する Jacobi の恒等式は驚くほど簡単に証明できる [7, p.316]．

量子力学に話を戻そう．式(308)を繰り返し用いると，公式(311)が見出される．言葉

で述べれば、 B のベキを交換子の左右に出す可能な全ての方法について和をとれば良い。公式(311)はすぐ後で見る Baker–Campbell–Hausdorff (ベーカー・キャンベル・ハウスドルフ)の公式(319)の証明に用いる。

生成・消滅演算子についても、ここで簡単に復習しておこう。生成・消滅演算子は調和振動子の演算子法による取り扱いの手段として導入されるのが一般的である。しかしながら本稿では調和振動子への応用は扱わず、むしろ具体的な文脈に依らない生成・消滅演算子の数理を抽出して要約する。

交換関係(312)を調和振動子の交換関係と言い、これを満たす演算子 a を消滅演算子、 $a^\dagger$ を生成演算子と呼ぶ。実際このとき個数演算子 $N \equiv a^\dagger a$ を定義すると、 $a, a^\dagger$ は N の固有値 n に属する固有ケット $|n\rangle$ に作用して式(313)のように、それぞれ固有値を1だけ減少、増加させた N の固有ケットを作る(導出スライド参照)。さらに固有値 n はゼロ以上の整数に限られ、固有値 $n = 0$ に属する固有ケット $|0\rangle$ に消滅演算子を作用させると式(314)のように状態が消失することを証明できる(導出スライド参照)。そこで N を何らかの量子の個数と解釈すれば、 $a, a^\dagger$ は量子を生成・消滅させる働きを持つ。これが生成・消滅演算子の名前の由来である。 $|0\rangle$ を式(314)で定義される、 $\langle 0|0\rangle = 1$ と規格化された基底状態(真空状態)として、これに $a^\dagger$ を逐次作用させると、規格化された N の一連の固有状態(315)が得られる。なお個数演算子 $N = a^\dagger a$ は Hermite 演算子となっているのに対し、生成・消滅演算子は非 Hermite であることに注意しよう(さもなくば調和振動子の交換関係(312)が満たされない) [11, pp.120–125].

調和振動子の交換関係(312)の代わりに、演算子 $a, a^\dagger$ に反交換関係(316)を課した場合にも、 $a, a^\dagger$ はそれぞれ消滅、生成演算子となる。ただしこの場合、 N の固有値は $n = 0, 1$ に限られる(導出スライド参照)。よってこれはフェルミオン系に対する排他律を再現するのに適した形式となっている [17, pp.65–67].

実のところ8.3.2項などの例外を除き、本稿では基本的に生成・消滅演算子を利用する機会がなく、冒頭で断ったように生成・消滅演算子による調和振動子系の取り扱いにも言及しない。さらに読者は既に伝統的な正準量子化の手法に慣れ親しんでいると仮定し、本稿では場の量子論においても経路積分による定式化を重点的に取り上げる予定である。これにはループ量子重力に通じる好適なアプローチという意味もある。実際、伝統的な場の量子論における生成・消滅演算子は、場の正および負の振動数モードに関する展開係数の量子力学的演算子である。ところが正および負の振動数の特徴付けには背景時空が必要である。対照的にこの後で見るように、背景独立なループ量子重力理論の基本変数にはホロノミーが用いられる [3, pp.14-15].

次に指数関数に関する公式を紹介する。演算子 A の指数関数を Taylor 展開の形(317)で定義する。実際、式(317)右辺における演算子の多項式に関しては、意味が明瞭である。このとき A, B が演算子であれ何であれ交換する量であれば、“指数法則”(318)が成り立つ(導出スライド参照)。したがって、もちろん通常の数 A, B は指数法則を満たす。他方で A と B が交換しない場合、指数法則が成り立つ保証はない。このことは実際に式(318)両辺の指数を展開することを考えると、容易に理解できる：左辺の指数を展開す

ると、 A が常に B に左から掛かった項から成る多項式が得られるのに対し、右辺を展開して得られる多項式は一般に A と B が勝手な順序に並んだ項から成る；このため両辺が一致するためには、 A と B を交換して順序を並び変える必要がある。

特に交換子が定数 $[A, B] = c$ の場合には、公式(319)が成り立つ(導出スライド参照) [28, pp.304–305]. $c = 0$ とおくと、“指数法則”(318)が再現される。ここでは簡単のため、特に興味がある場合として交換子 $[A, B]$ を定数としたものの、必要ならば、そのような仮定を外して公式(319)の後続の項を調べることも可能である。このとき得られる級数はBaker–Campbell–Hausdorffの公式と呼ばれる。

Baker–Hausdorffの公式と呼ばれる今一つの補助定理として、相似変換に対する公式がある。任意の演算子 A, G と定数パラメータ λ に対して、Baker–Hausdorffの補助定理(320)が成り立つ(導出スライド参照) [11, p.129]. 量子力学ではとりわけ演算子がHermite演算子である場合に興味を持たれるものの、公式(320)の導き方から演算子 A や G をHermite演算子に限定する必要はない。

任意の(n 次)正方行列 A に対し公式(321)が恒等的に成り立つ(導出スライド参照). ここから $\text{Tr } A = 0$ なる行列 A に対して、 e^A は行列式が1となること(およびその逆)が、 A の1次近似に頼らず直接読み取れる [37, p.116, pp.226–227] [31, pp.88–90].

6.2 混合状態を含む量子力学の数学的定式化

6.2.1 純粋状態に対する伝統的な定式化

まずは量子力学の標準的な公理を簡単に復習する [32, pp.106–113].

状態 $|\psi\rangle$ の下で物理量 (Hermite 演算子) A の測定値 a を得る確率は, [Born の確率規則](#)

$$\Pr(a|A, |\psi\rangle) = \langle\psi|P_a\psi\rangle \quad (|P_a\psi\rangle \equiv P_a |\psi\rangle) \quad (326)$$

で与えられる. A の固有値 a に対する固有射影演算子 [32, p.326] は

$$P_a = \sum_i |a, i\rangle \langle a, i| \quad (327)$$

と書ける ($|a, i\rangle$ は固有値 a に縮退した固有状態). 確率 (326) は見慣れた表式

$$\Pr(a|A, |\psi\rangle) = \sum_i |\langle a, i|\psi\rangle|^2 \quad (328)$$

になる (縮退がないときは単に $P_a = |a\rangle \langle a|$, $\Pr(a|A, |\psi\rangle) = |\langle a|\psi\rangle|^2$).

固有射影演算子(327): $P_a = \sum_i |a, i\rangle \langle a, i|$ は射影演算子の性質

$$P_a^\dagger = P_a, \quad P_a^2 = P_a, \quad \sum_a P_a = 1 : \text{恒等演算子} \quad (329)$$

を満たすことが見て取れる^{*79}. ここから確率(326)の非負性と規格化条件

$$\langle \psi | P_a \psi \rangle = \langle \psi | P_a^2 \psi \rangle = \langle P_a^\dagger \psi | P_a \psi \rangle = \langle P_a \psi | P_a \psi \rangle \geq 0, \quad (330)$$

$$\sum_a \langle \psi | P_a \psi \rangle = \left\langle \psi \left| \left(\sum_a P_a \right) \psi \right. \right\rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 1 \quad (331)$$

が満たされる. 最後に演算子 A に恒等式 $1 = \sum_{a,i} |a, i\rangle \langle a, i|$ を作用させると^{*80}

$$A = \underbrace{\sum_{a,i} a |a, i\rangle \langle a, i|}_{\text{固有値分解}} = \sum_a a \left(\sum_i |a, i\rangle \langle a, i| \right) = \underbrace{\sum_a a P_a}_{\text{スペクトル分解}}. \quad (332)$$

を得る.

^{*79} 第2式と第3式は正規直交性 $\langle a, i | a, j \rangle = \delta_{ij}$ による. 第3式については同文献 [32, p.327] も見よ.

^{*80} 同文献 [32, pp.327–328] の導出も見よ. 状態を指定する組 (a, i) を改めて i でラベルし, 状態 $|i\rangle$ の固有値を a_i で表せば, 固有値分解は $A = \sum_i a_i |i\rangle \langle i|$ と書ける.

6.2.1 項の原稿

量子力学の数学的定式化へと話を進めよう．まずは純粋状態に対する枠組みの復習から始める [32, pp.106–113].

量子系の状態は複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の単位ベクトル $|\psi\rangle$ で表される．(Hilbert 空間とは詮ずる所、適切な内積の定義されたベクトル空間のことと理解して差支えない [32, p.317, pp.319–320].) 物理量は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の Hermite 演算子 A で表され、測定値はその固有値で与えられる．(演算子の Hermite 性は固有値の実数性を保証する文献 [11, pp.22–23].) 状態 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ の下で物理量 A の測定値として固有値 a を得る確率は、Born の確率規則 (326) で与えられる．ここに P_a は A の固有値 a に対する固有射影演算子 [32, p.326] である．また式 (326) 右辺の $|P_a\psi\rangle \equiv P_a|\psi\rangle$ は状態ベクトル $|\psi\rangle$ に演算子 P_a を作用させて得られるベクトルである．一般にこのように演算子をケットの中に押し込んだ表記を用いると、代わりに新たな記法を定義する必要がなく便利である．さらに式 (326) 左辺では条件付き確率の表記を用いた．確率 (326) は状態 $|\psi\rangle$ の位相の変更の下で不変であることが見て取れる．したがって位相が異なるだけの単位ベクトルは同一の量子状態を表すと見なさねばならない．

固有射影演算子 P_a を用いた表式 (326) は見慣れないかもしれない．そこで簡単のため物理量 A の固有値が離散的なスペクトルを持つ場合を考えよう．一般に A の固有値 a に属する固有状態が l 重に縮退しているとき、直交する l 個の固有単位ベクトル $|a, i\rangle$ をとることができ、射影演算子は具体的に式 (327) のように書ける．このとき確率 (326) は

馴染みある表式(328)になる(縮退がないときは単に
 $P_a = |a\rangle \langle a|$, $\text{Pr}(a|A, |\psi\rangle) = |\langle a|\psi\rangle|^2$ となる [11, p.25]).

また固有射影演算子の表式(327)は射影演算子の性質(329)を満たすことが見て取れる
第2式は状態に一度だけ射影を行えば, その後は何度射影を行おうとも状態が変わらないことを意味している. さて, P_a は射影演算子の性質(329)を満たすことから確率(326)の非負性(330)と規格化条件(331)が成り立つことが保証される.
最後に演算子 A に恒等演算子の分解を作用させると式(332)を得る. 最右辺をスペクトル分解と呼ぶのに対し, 第2辺を固有値分解と呼んで区別する.

6.2.2 混合状態と密度演算子

- Stern–Gerlach のフィルター装置を通った，スピンの向きが $+y$ 向きの原子はいずれも単一の状態ケット $|S_y; +\rangle$ で特徴付けられる．
- 純粋状態 $|\alpha\rangle = c_+ |S_z; +\rangle + c_- |S_z; -\rangle$ は展開係数 $c_{\pm}$ に応じた特定の向きに関するスピンの固有状態なので，スピンの向きが不規則な熱い炉から出てきたばかりの銀原子を記述できない．

表3 純粋状態 $|\psi_i\rangle$ とその混合状態 $\{p_i; |\psi_i\rangle\}$ のまとめ [11, pp.235–238]

純粋状態 (アンサンブル)	混合状態 (アンサンブル)
$ \psi\rangle = \sum_i c_i a_i\rangle$	$\{p_i; \psi_i\rangle\}$
$\{ a_i\rangle\}$ は直交系 (基底)	一般に $\{ \psi_i\rangle\}$ は直交系でない
展開係数 $c_i \in \mathbb{C}$	分布の割合 $p_i \in \mathbb{R}$
コヒーレントな混合	インコヒーレントな混合
例) 偏極している銀原子線	例) 部分的に偏極している銀原子線
$ S_y; \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} S_z; +\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}} S_z; -\rangle$	$\{0.4, 0.3, 0.3; S_z; +\rangle, S_x; +\rangle, S_y; -\rangle\}$
(項数) = (ケット空間の次元)	一般に (項数) $\neq$ (ケット空間の次元)

確率 p_i で状態 $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}$ を準備した ($i = 1, \dots, n$) 混合状態

$$s = \{p_i; |\psi_i\rangle\}_{i=1}^n = \{p_1, \dots, p_n; |\psi_1\rangle, \dots, |\psi_n\rangle\} \quad (333)$$

において、任意の物理量 $A = \sum_a a P_a$ の測定値 a を得る確率は

$$\Pr(a|A, s) = \sum_i \Pr(a; A, |\psi_i\rangle) = \sum_i \Pr(a|A, |\psi_i\rangle) \Pr(|\psi_i\rangle) = \sum_i p_i \langle \psi_i | P_a | \psi_i \rangle. \quad (334)$$

ところで2つの混合状態

$$s_1 = \{1/2, 1/2; |+\rangle, |-\rangle\}, \quad s_2 = \{1/2, 1/2; |S_x; +\rangle, |S_x; -\rangle\} \quad (335)$$

は実際には同一の状態である．そこで状態 s に対応する **密度演算子 (密度行列)** を

$$\rho \equiv \sum_{i=1}^n p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (336)$$

で定義すると、確率 (334) は

$$\Pr(a|A, s) = \text{Tr}(P_a \rho) = \text{Tr}(\rho P_a) \quad (337)$$

と書ける． ρ は確率を、したがって状態を一意的に記述し、状態と同一視できる．

純粋状態 $s = \{1; |\psi\rangle\}$ に対して，密度演算子 (336) は

$$\rho = |\psi\rangle \langle \psi| \quad (338)$$

となる．

密度演算子 (336) は

$$\text{正值性 } \rho \geq 0 \quad (\text{任意の } |\xi\rangle \in \mathcal{H} \text{ に対して } \langle \xi | \rho \xi \rangle \geq 0 \text{ として定義}), \quad (339)$$

$$\text{規格化条件 } \text{Tr } \rho = 1 \quad (340)$$

を満たす．

物理量 A の期待値は

$$\begin{aligned} E_\rho[A] &\equiv \sum_a a \text{Pr}(a|A, s) = \sum_a a \text{Tr}(\rho P_a) \quad (\because \text{式 (337)}) \\ &= \text{Tr}(\rho A) = \text{Tr}(A\rho) \quad (\because \text{式 (332)}) \end{aligned} \quad (341)$$

と表される (純粋状態に対する公式 (345): $E_\psi[A] = \langle \psi | A \psi \rangle$ の一般化)．

(以上，文献 [32, pp.126–130].)

6.2.2項の式の導出など

■2つの混合状態(335)が同一の状態である理由
スピン $\pm z$ 向きの状態 $|\pm\rangle$ とスピン $\pm x$ 向きの状態

$$|S_x; \pm\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm |-\rangle) \quad (342)$$

に対して [11, p.36], 式(335)の2状態 s_1, s_2 に公式(334)を適用すると, 確率

$$\begin{aligned} \Pr(a|s_1) &= \frac{1}{2}(\langle +|P_a|+\rangle + \langle -|P_a|-\rangle), \\ \Pr(a|s_2) &= \frac{1}{2}(\langle S_x; +|P_a|S_x; +\rangle + \langle S_x; -|P_a|S_x; -\rangle) \end{aligned}$$

は共通の係数 $1/2$ を除き, いずれも P_a のトレースとなる. ところがトレースの値はそれを評価する基底に依らないから(式(343)参照), これらの確率は等しい. しかるに同じ確率分布を与える状態は区別する術がなく, 操作主義的には同一視される [32, pp.101–102]. この要請に基づき s_1 と s_2 は物理的に同じ状態と結論付けられる.

トレースが基底に依らないこと 2つの(正規直交)基底 $\{|a\rangle\}, \{|b\rangle\}$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr} X &\equiv \sum_a \langle a|X|a\rangle = \sum_{a,b,b'} \langle a|b\rangle \langle b|X|b'\rangle \langle b'|a\rangle = \sum_{b,b'} \langle b|X|b'\rangle \langle b'|b\rangle \\ &= \sum_b \langle b|X|b\rangle\end{aligned}\tag{343}$$

となる．ただし $\sum_a |a\rangle \langle a| = \sum_b |b\rangle \langle b| = 1$ を用いた [11, p.51].

なお状態 s_1, s_2 に対する密度演算子は定義式(336)よりそれぞれ

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(|+\rangle \langle +| + |-\rangle \langle -|) = \frac{1}{2}, \quad \rho_2 = \frac{1}{2}(|S_x; +\rangle \langle S_x; +| + |S_x; -\rangle \langle S_x; -|) = \frac{1}{2}$$

であり(2式の最右辺には恒等演算子が掛かっていると見なす), これらは確かに等しい [32, p.355].

■混合状態に対する Born の確率規則 (337) の証明

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の任意の正規直交基底 $\{|i\rangle\}$ を用いて, 演算子 A のトレースは行列要素のトレース $\text{Tr} A \equiv \sum_i \langle i|A|i\rangle$ として定義される. これは基底の選択に依らない (式 (343)) [11, p.51]. するとトレースは公式

$$\text{Tr}(A |\psi\rangle \langle\phi|) = \sum_i \langle i|A|\psi\rangle \langle\phi|i\rangle = \langle\phi| \left(\sum_i |i\rangle \langle i| \right) A|\psi\rangle = \langle\phi|A|\psi\rangle \quad (344)$$

を満たす [32, p.355]. ($A = 1$ とおくと特例として $\text{Tr}(|\psi\rangle \langle\phi|) = \langle\phi|\psi\rangle$.) これとトレースの線形性から, 式 (337) 第1の等号が

$$\text{Tr}(P_a \rho) = \sum_i p_i \text{Tr}(P_a |\psi_i\rangle \langle\psi_i|) = \sum_i p_i \langle\psi_i|P_a \psi_i\rangle = \text{Pr}(a|A, s)$$

と確かめられる. 式 (337) 第2の等号は行列のトレースの巡回対称性が, 定義より演算子のトレースの巡回対称性にそのまま引き継がれることによる [32, pp.332–333] :

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i,j} \langle i|A|j\rangle \langle j|B|i\rangle = \text{Tr}(BA).$$

■ 密度演算子の正値性 (339) と規格化条件 (340) の確認

$$\langle \xi | \rho | \xi \rangle = \langle \xi | \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \xi \rangle = \sum_i p_i |\langle \xi | \psi_i \rangle|^2 \geq 0,$$

$$\text{Tr } \rho = \text{Tr} \left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right) = \sum_i p_i \langle \psi_i | \psi_i \rangle = \sum_i p_i = 1.$$

■期待値の表式(341)について

次のように考えることもできる [11, pp.239–240]. 純粋状態 $|\psi\rangle$ における期待値は

$$\begin{aligned} E_\psi[A] &\equiv \sum_{a \in \sigma(A)} a \Pr(a|A, |\psi\rangle) = \sum_a a \langle \psi | P_a \psi \rangle \quad (\because \text{式(326)}) \\ &= \langle \psi | A \psi \rangle \quad (\because \text{式(332)}) \end{aligned} \tag{345}$$

で表される. そこで各純粋状態 $|\psi_i\rangle$ における期待値 $\langle \psi_i | A | \psi_i \rangle$ と, 純粋状態 $|\psi_i\rangle$ を見出す確率 p_i を用いて,

$$E_\rho[A] = \sum_i p_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle$$

と書ける. さらに任意の基底 $\{|j\rangle\}$ を考えると,

$$E_\rho[A] = \sum_{i,j} p_i \langle \psi_i | A | j \rangle \langle j | \psi_i \rangle = \sum_j \langle j | \left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right) A | j \rangle = \text{Tr}(\rho A) : (341)$$

と書き換えられる.

6.2.2項の原稿

これを踏まえ、次に混合状態の取り扱いを説明する．例えばStern–Gerlachのフィルター装置に銀原子線を通して、スピンの向きが $+y$ 向きの原子を取り出すと、その原子はいずれもスピンの向きが $+y$ 向きの同一の状態ケット $|S_y; +\rangle$ で特徴付けられる．これに対して熱い炉から出てきたばかりの銀原子はスピンの向きが不規則であり、状態を単一のケットで表すことはできない．実際、特定の状態ケットは例えばスピンの向きが $\pm z$ 向きの状態 $|S_z; \pm\rangle$ を基底として展開でき、それは展開係数 $c_{\pm}$ に応じた特定の向きに関するスピンの固有状態を表すため、偏極していないランダムなアンサンブルには対応しない．このような場合には適当な確率分布 $\{p_i\}$ による状態ケット $\{|\psi_i\rangle\}$ の確率的混合を用いて、準備した物理系のアンサンブルを記述する必要がある(表3を見よ)．確率 $\{p_i\}$ による混合の概念は、古典的な確率論のそれに近い．例えば全体の50%が男子で50%が女子の学生集団から無作為に選んだ1人が男子である確率は $1/2$ である．この場合には選んだ学生の性別は観測とは無関係に決まっており、この状態を確率混合という．これは1人の学生が男子と女子の重畳状態であることとは大違いである [11, pp.235–238]．

次に混合状態を一意的に表す量として、密度演算子を導入しよう [32, pp.126–128]．一般に「確率 p_i で状態 $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}$ を準備する($i = 1, \dots, n$)」確率混合を考える．このとき得られる混合状態は式(333)のように表記できる．このとき1つの純粋状態 $|\psi_i\rangle$ を見出す確率は p_i であり、各純粋状態 $|\psi_i\rangle$ において任意の物理量 $A = \sum_a a P_a$ の測定値 a を得る確率はBornの確率規則(326)より $\langle \psi_i | P_a | \psi_i \rangle$ で与えられるので、任意の混合状態

(333)において測定値 a を得る確率は、式(334)で表される．ところで式(333)の表記には、同じ状態が複数の異なる状態表現を持つという不都合がある．例えばスピン $\pm z$ 向きの粒子を $1/2$ ずつの割合で混合したアンサンブルと、スピン $\pm x$ 向きの粒子を $1/2$ ずつの割合で混合したアンサンブル(335)は実際には区別できず、同一の混合状態である(導出スライド参照)．

そこで状態 s に対応する密度演算子(密度行列)を式(336)で定義する．これを用いると確率(334)は式(337)のように書き換えられる(導出スライド参照)．式(334)は、したがって式(337)はBornの確率規則(326)の混合状態も対象に含めた拡張であり、同様にBornの確率規則と呼ばれる．

密度演算子 ρ は任意の物理量 A に対する確率(337)を与えるため、混合状態 s の全物理的情報を含んでいる．また等しい確率(337)を与える状態 s は共通の密度演算子 ρ を持つため、密度演算子は状態を一意的に記述しており、したがって状態と同一視できる．

特に純粋状態 $s = \{1; |\psi\rangle\}$ に対して、密度演算子(336)は単なる1次元射影演算子(338)になる．これは置き換え $|\psi\rangle \rightarrow e^{i\theta} |\psi\rangle$ の下で不変なので、位相の不定性がない．また純粋状態(338)に対して、確率(337)は公式(326)に帰着する．

密度演算子は定義式(336)より正值性(339)を満たし、また確率 $\{p_i\}$ の規格化条件は密度演算子の規格化条件(340)に焼き直される(導出スライド参照) [32, p.129]．

なお混合状態を含む一般の状態 ρ における物理量 A の期待値は式(341)で表される(導出スライドに載せた別の考え方も見よ)．これは純粋状態に対する公式(345)の一般化に

当たる [32, p.130].

6.2.3 量子エンタングルメント

量子系 A, B に相関がないとは、それぞれの物理量の同時確率分布が確率分布の積

$$\Pr(a, b|A, B, \rho_{AB}) = \Pr(a|A, \rho_A)\Pr(b|B, \rho_B)$$

になる場合を言う。このとき全体系の状態 ρ_{AB} は部分系の状態 ρ_A, ρ_B の積状態

$$\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B \quad (346)$$

で表される [32, p.137]^{*81}。全体系が純粋状態の場合、積状態は

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B \quad (347)$$

と書ける。他方で全体系の純粋状態が積状態の形 (347) に書けず、したがって部分系が相関を持つ状態を **エンタングル状態 (量子もつれ状態)** と呼ぶ [32, p.208].

^{*81} 正確に述べれば、 ρ_A, ρ_B は全体系の状態 ρ_{AB} の**部分トレース**によって得られる部分系 A, B の密度演算子であり、**縮約状態**と呼ばれる [32, pp.135–137].

例えば

$$|\Psi\rangle = \frac{|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B}{\sqrt{2}}, \quad (\text{相関状態 (348)}) \quad (348)$$

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|S_z; +\rangle |S_z; -\rangle - |S_z; -\rangle |S_z; +\rangle) \quad (\text{スピン 1 重項}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|S_x; -\rangle |S_x; +\rangle - |S_x; +\rangle |S_x; -\rangle) \quad (\because \text{式 (342)}) \end{aligned} \quad (349)$$

はエンタングル状態である [32, pp.35–37] [11, pp.306–308].

粒子 A のスピン成分 S_z (または S_x) の測定結果が正のとき, 遠方の粒子 B のスピン成分 S_z (または S_x) の測定結果は必ず負となる [11, pp.306–310].

あらかじめ同じ番号 (0 または 1) が書かれた紙の入った 2 つの箱 A, B は混合状態

$$\rho = \frac{1}{2} |00\rangle \langle 00| + \frac{1}{2} |11\rangle \langle 11| \quad (350)$$

に対応し, 純粋状態 (348) (の密度演算子 $|\Psi\rangle \langle \Psi|$) と明確に異なる [32, pp.206–207].

関係的量子力学 (第 5 章) に基づけば, エンタングルした 2 粒子 A, B は互いのスピンをあらかじめ “知っている” $\rightarrow$ 非局所的な相互作用の伝播はない.

6.2.3項の式の導出など

■ 相関のない状態が積状態 (346) で表される理由 [32, p.138]

系 A と B の任意の物理量 A, B のスペクトル分解 (332) をそれぞれ $A = \sum_a a P_a$ と $B = \sum_b b Q_b$ と書こう (P_a, Q_b は固有射影演算子). すると ρ_{AB} が相関のない状態であるとき, その定義より同時確率分布は

$$\Pr(a, b|A, B, \rho_{AB}) = \Pr(a|A, \rho_A) \Pr(b|B, \rho_B)$$

と書ける. ここで左辺は Born の確率規則 (337) より

$$\Pr(a, b|A, B, \rho_{AB}) = \text{Tr}_{AB}((P_a \otimes Q_b) \rho_{AB})$$

と書き換えられる^{*82}. 他方で右辺は

$$\Pr(a|A, \rho_A) \Pr(b|B, \rho_B) = \text{Tr}_A(P_a \rho_A) \text{Tr}_B(Q_b \rho_B) = \text{Tr}_{AB}((P_a \otimes Q_b)(\rho_A \otimes \rho_B))$$

と書き換えられる. (第2の等号はトレースの定義による.) これらを等置すると

$$\text{Tr}_{AB}((P_a \otimes Q_b) \rho_{AB}) = \text{Tr}_{AB}((P_a \otimes Q_b)(\rho_A \otimes \rho_B))$$

であり, ここで A, B は任意なので式 (346): $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ を得る.

^{*82} トレースの添字はトレースの定義される Hilbert 空間ないし量子系を表す.

■ 重合せ状態(348),(349)が積状態(347)の形に書けないことの確認 [32, pp.35–37]
2状態 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ を正規直交基底として, 量子ビット A, B の状態をそれぞれ

$$|\psi\rangle = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle, \quad |\phi\rangle = b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle$$

と展開すると, 積状態(347)は一般に

$$\begin{aligned} |\phi\rangle |\psi\rangle &= a_0 b_0 |00\rangle + a_0 b_1 |01\rangle + a_1 b_0 |10\rangle + a_1 b_1 |11\rangle \quad (|01\rangle \equiv |0\rangle |1\rangle, \text{ etc.}) \\ &= (a_0 b_0, a_0 b_1, a_1 b_0, a_1 b_1)^T \quad (\text{Tは転置}) \end{aligned} \quad (351)$$

と表される. ただしテンソル積の記号 $\otimes$ と系のラベル A, B を省略し, また最右辺では全体系の基底 $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ に関する行列表示に移行した^{*83}. 同様に重合せ状態(348)は

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)^T \quad (352)$$

と成分表示される. ここで仮に2式(351),(352)を等置すると,

^{*83} ここでは簡単のため, 状態とその成分表示をややナイーヴに等号で結んでいる.

- 第2成分より $a_0 = 0$ または $b_1 = 0$.
ところが $a_0 = 0$ は (第1成分) $= 1 \neq 0$ に, $b_1 = 0$ は (第4成分) $= 1 \neq 0$ に矛盾する.
- 第3成分より $a_1 = 0$ または $b_0 = 0$.
ところが $a_1 = 0$ は (第4成分) $= 1 \neq 0$ に, $b_0 = 0$ は (第1成分) $= 1 \neq 0$ に矛盾する.

よって重合せ状態(348)は積状態(347)の形に書けない.
同様にスピン1重項(349)

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0)^T \quad (|S_z; \pm\rangle \text{ を基底とした成分表示})$$

が積状態(347)の形に書けないことも確認できる.

参考 ところでユニタリー変換により量子系A側の基底を $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$, $-|1\rangle \rightarrow |0\rangle$ と変更すると, エンタングル状態(348)は

$$|\Psi\rangle = \frac{|0\rangle_A |1\rangle_B - |1\rangle_A |0\rangle_B}{\sqrt{2}}$$

と書き換えられる [32, p.209]. 次いで $|0\rangle$ をスピン $+z$ 向きの状態 $|S_z; +\rangle$, $|1\rangle$ をスピン $-z$ 向きの状態 $|S_z; -\rangle$ に読み替えると, スピン系のエンタングル状態(349)が得られる.

6.2.3項の原稿

我々は密度演算子を導入したので、今や量子エンタングルメント(量子もつれ)について入門的な説明ができる段階に達した。エンタングルした2つの量子系は著しい相関を示す。

まず2つの量子系A, Bから成る全体系の状態 ρ_{AB} は相関がない状態であるとは、状態 ρ_{AB} の下で「系AとBの任意の物理量のペアに統計的な相関がない場合」(すなわち、それらの同時確率分布が確率分布の積になる場合)を言う。このときBornの確率規則(337)から分かるように、全体系は部分系の状態 ρ_A, ρ_B の積状態(346)で表される(導出スライド参照) [32, p.137]。ここからは全体系が純粋状態にある場合を考えよう。すると積状態は式(347)の形をとる。これに対し全体系の純粋状態が積状態の形(347)に書けず、したがって部分系が相関を持つ状態をエンタングル状態(量子もつれ状態)と呼ぶ [32, p.208]。

我々は量子力学の關係的解釈を説明した際に、既にエンタングル状態の簡単な例として、2つの2準位系(ないし量子ビット)が相関を確立した状態(306)を見ている。2つの量子ビットをA, Bと呼び、各々がとり得る2状態をそれぞれ番号0と1でラベルして、重合せ状態(306)を改めて式(348)のように書こう。すると実際、これは積状態(347)の形に書けず、したがってエンタングル状態であることが背理的に確かめられる [32, pp.35–37]。あるいは具体的な物理系としてスピン1/2の2粒子A, Bの複合系を例の採ると、全角運動量がゼロのスピン1重項(349)もまたエンタングル状態であるこ

とが同様に確かめられる(導出スライド参照). ここに $|S_z; \pm\rangle$ はスピン $\pm z$ 向きの状態, $|S_x; \pm\rangle$ はスピン $\pm x$ 向きの状態(342)である [11, pp.306–308].

これを踏まえ式(348)ないし式(349)のエンタングル状態において, 実際に部分系 A, B が強い相関を持つことを説明する [32, pp.206–207] [11, pp.306–310]. A, B それぞれの量子ビットに対して, 基底 $|0\rangle, |1\rangle$ に関する測定を行うことを考えよう. A の測定結果が $|0\rangle$ (または $|1\rangle$) であれば, $|\Psi\rangle$ は $|0\rangle_A |0\rangle_B$ (または $|1\rangle_A |1\rangle_B$) に収縮するので, B の測定結果も必ず $|0\rangle$ (または $|1\rangle$) になる. したがって A と B の距離がどれだけ離れていようと, それらの測定結果は常に一致する. スピン系の例に即して言えば, 一方の粒子 A のスピンを $+z$ 向きに見出した場合, 引き続いて遠方の粒子 B のスピンの z 成分を測定すると, 必ず $-z$ 向きのスピンの得られる. これを単にあらかじめ同じ番号(0または1)が書かれた紙の入った2つの箱 A, B, あるいは白と黒の球が1つずつ入っている壺のように見なしてはならない. 実際, 式(349)よりスピンの x 成分を測定する場合にも, 粒子 A のスピン成分 S_x が正と確定すると, 粒子 B のスピン成分 S_x は負に定まる. したがって比喩的には, 第2の粒子 B は第1の粒子 A のどのスピン成分が測られるかを“知っている”かのように振舞うことになる. このようにエンタングルした状態 $|\Psi\rangle$ は箱の中の紙よりも遥かに強い相関を示し, これを量子相関という. 他方で箱の中の紙の例は古典相関と呼ばれ, 混合状態(350)に対応する. これは式(348)のエンタングルした状態 $|\Psi\rangle$ と明確に異なっている.

一方の量子系に対する測定結果が遠くのもう一方の量子系にあたかも非局所的に伝播するというのは, 一見すると奇妙である. そのような不条理を回避するには, 部分系に対

する測定もあくまで系全体に対する測定と考えねばならないというのが、量子力学の正統的な解釈である [11, p.310]. またスピンの相関を利用しても、一連のランダムなスピンの符号しか遠方に伝えることはできず、意味のある情報を光速より速く送ることはできないという意味では、相対性理論が基礎を置く信号の伝播速度の有限性は守られている [11, p.311]. (量子エンタングルメントを利用して量子状態を遠方へと転送する量子テレポーテーションの Protokol においても結局、情報伝達の手度は古典通信の手度で律速される [32, pp.209–211].)あるいは第5章で紹介した関係的量子力学に基づけば、2つのスピン A, B がエンタングルしていることは互いのスピンをあらかじめ “知っている” ことを意味する. そうであるならば、第3の観測者が一方の粒子 A のスピン成分を測定したとき、もう一方の粒子 B のスピン成分が決まることは、もとより非局所的な相互作用の伝播とは見なされない.

6.3 情報量

6.3.1 Shannon 情報量と相互情報量

■ Shannon 情報量 (Shannon エントロピー) [34, pp.137–140] [32, pp.164–167]
確率変数 X が離散的な値 x をとる確率 $P(x)$ を用いて, X の Shannon 情報量は

$$S(X) \equiv - \sum_x P(x) \ln P(x) \quad (353)$$

で定義され, 観測者にアクセスできない情報量 (不確かさ) の指標と解釈できる.
例えば 2 状態系 ($P(0) = p, P(1) = 1 - p$) の Shannon 情報量 (2 値エントロピー) は

$$S(X) = -p \ln p - (1 - p) \ln(1 - p) \equiv H(p). \quad (\text{図 29}) \quad (354)$$

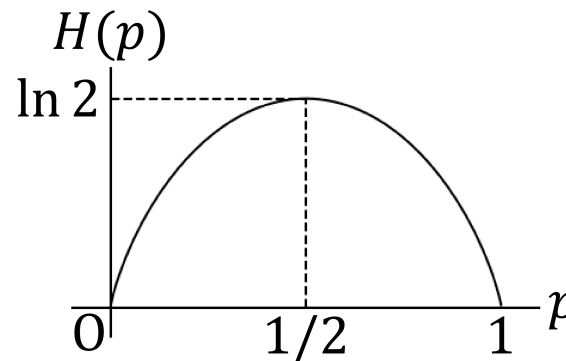


図 29 2 値エントロピー (354) のグラフ

より一般に x が N 通りの値をとり得るとき,

$$0 \leq S(X) \leq \ln N. \quad (355)$$

参考：典型系列とエントロピーの意味 [32, pp.167–171]

独立に同一分布 $P(x)$ に従う確率変数の列 $X^n = (X_1, \dots, X_n)$ ($n \gg 1$) に対しては

$$x^n = (x_1, \dots, x_n) = (0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 1, 0, \dots)$$

のように, ほとんど各実現値 $x = 0, 1, 2$ の出現頻度が生起確率

$P(0) = \frac{3}{5}, P(1) = \frac{2}{5}, P(2) = \frac{1}{5}$ に近い「典型系列」だけが等確率で得られる.

典型系列は要素数が近似的に

$$|A_n| = 2^{nH(X)} \quad (H(X) \equiv -\sum_x P(x) \log_2 P(x))$$

であり, $\log_2 |A_n| \simeq nH(X)$ ビットで指定できる.

→ 系列の1文字あたりの情報(の不確実性)は $H(X)$ ビット.

x が連続変数の場合には, 確率密度 $P(x)$ に対して Shannon エントロピーは

$$S(X) \equiv -\int dx P(x) \ln P(x). \quad (356)$$

■条件付き Shannon 情報量 [34, pp.140–142]

X, Y (実現値 x, y) の同時確率分布 $P(x, y)(= P(y, x))$ を導入すると, 恒等的に

$$P(x) = \sum_y P(x, y), \quad P(y) = \sum_x P(x, y). \quad (357)$$

が成り立つ. ここで2変数 X, Y の確率分布 $P(x), P(y)$ の関数形は異なっても良い^{*84}. $P(x, y)$ を用いて同時エントロピー [32, p.171]

$$S(X, Y) \equiv - \sum_{x, y} P(x, y) \ln P(x, y) (= S(Y, X)) \quad (358)$$

を定義する. もし X と Y が独立であれば, 加法性

$$S(X, Y) = S(X) + S(Y) \quad (\text{for } P(x, y) = P(x)P(y)) \quad (359)$$

が成り立つ.

^{*84} そこで明示的には確率変数 X, Y を添字に用いてそれぞれの分布を $P_X(x), P_Y(y)$ のように表記するのが正確であるものの [32, p.165, p.171], 本稿では情報理論の慣例に従い [34, p.141], 簡単のために2つの関数 $P(x), P(y)$ を引数で区別する.

Y の値が y であるという条件の下で, X の値が x となる条件付き確率 $P(x|y)$ は

$$P(x|y) = \frac{P(x, y)}{P(y)}, \quad (360)$$

$$\text{or } P(x, y) = P(x|y)P(y) = P(y|x)P(x). \quad (361)$$

- 任意の y について条件付き確率は規格化条件 $\sum_x P(x|y) = 1$ を満たす^{*85}.
- X と Y が独立であれば $P(x|y) = P(x)$ となり, y 依存性はなくなる^{*86}.

条件付き Shannon 情報量

$$S(X|y) \equiv - \sum_x P(x|y) \ln P(x|y) (\geq 0), \quad (362)$$

$$S(X|Y) \equiv \sum_y P(y) S(X|y) = - \sum_{x,y} P(x, y) \ln P(x|y) (\geq 0) \quad (363)$$

$$= S(X, Y) - S(Y), \quad (364)$$

$$S(Y|X) = S(X, Y) - S(X). \quad (\because S(X, Y) = S(Y, X)) \quad (365)$$

^{*85} これはそれ自体で明らかであり, $1 = \sum_x P(x|y) = \frac{1}{P(y)} \sum_x P(x, y)$ と書き換えると, 式 (357): $P(y) = \sum_x P(x, y)$ と等価であることが分かる.

^{*86} この結果は式 (360) に $P(x, y) = P(x)P(y)$ を代入すると確かめられ, 直観的にも納得がいく.

■相互情報量 [34, pp.142–144] 確率変数 X と Y の相互情報量は*⁸⁷.

$$I(X : Y) \equiv S(X) + S(Y) - S(X, Y) \quad (366)$$

$$= S(X) - S(X|Y) = S(Y) - S(Y|X). \quad (\because \text{式 (364), (365)}) \quad (367)$$

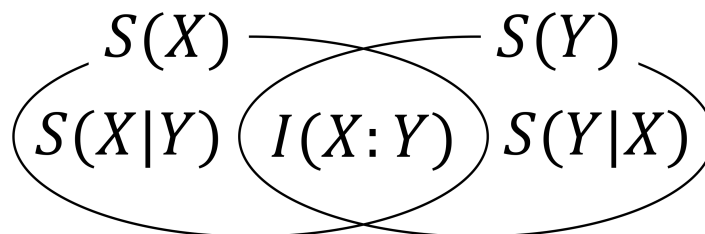


図30 情報量の相互関係を表すベン図. 2つの円の全体が $S(X, Y)$ を表す.

$$I(X : Y) = \sum_{x,y} P(x, y) \ln \frac{P(x, y)}{P(x)P(y)}, \quad (368)$$

$$\text{非負性} \quad I(X : Y) \geq 0. \quad (\text{等号成立は } P(x, y) = P(x)P(y)) \quad (369)$$

*⁸⁷ 式(366),(367)のように $I(X : Y)$ は $S(X, Y)$ と $S(X|Y)$ のいずれでも表せることから, 引数を「,」と「|」のいずれとも異なる記号「:」で表記しているものと推察される.

相互情報量の非負性(369)の含意：

- 定義式(366)より，Shannon情報量の「劣加法性」*88

$$S(X) + S(Y) \geq S(X, Y). \quad (370)$$

- 式(367)とより，

$$S(X) \geq S(X|Y), \quad S(Y) \geq S(X|Y). \quad (371)$$

さらに式(367)において $S(X|Y), S(Y|X) \geq 0$ を考慮すると

$$I(X : Y) \leq S(X), \quad I(X : Y) \leq S(Y). \quad (372)$$

参考：式(372)の等号成立条件

$I(X : Y) = S(X)$ のとき $0 = S(X|Y) = \sum_y P(y)S(X|y)$ であり，これが与えられた $P(y)$ に対して成り立つことを要求すると，

$$0 = S(X|y) = - \sum_x P(x|y) \ln P(x|y) \quad (\text{all } y)$$

となる．するとこれは「『任意の y に対して，ある x があって $P(x|y) = 1$ となる』ことと等価である」
[34, p.144].

*88 ここでは状態変化を考えているわけではなく，2つの系が“合体”する際のエントロピー増大則との混同に注意する．

6.3.1 項の式の導出など

■2値エントロピー(354)のグラフ(図29)と最大値について

Shannon 情報量は $H(p) = H(1 - p)$ を満たすので, $p = 1/2$ に関して対称であることが分かる. 改めて導関数を計算すると,

$$\frac{dH}{dp} = -\{\ln p - 1 - \ln(1 - p) - 1\} = \ln \frac{1 - p}{p} \geq 0 \quad \left(p \geq \frac{1}{2}\right)$$

なので, $p = 1/2$ で H は最大となる. さらに $H''(p) = -1/p(1 - p) < 0$ なので, グラフは上に凸である.

■ Shannon 情報量の値域 (355) の確認 [34, p.139] [32, pp.166–167]

まず式 (355) 第1の不等号 $S(x) \geq 0$ を示す. 定義式 (353) において $0 \leq P(x) \leq 1$ より $-\ln P(x) \geq 0$ なので, $S(X) \geq 0$. また和の各項 $-P(x) \ln P(x)$ が非負であることから, エントロピーがゼロなるのは各 x に対して $P(x) \ln P(x) = 0$, すなわち

$$P(x) = 0 \quad \text{または} \quad P(x) = 1$$

となる場合に限られる. 確率の規格化条件 $\sum_x P(x) = 1$ より, このときある $x = x_0$ に対して $P(x_0) = 1$, その他の $x (\neq x_0)$ に対して $P(x) = 0$ である.

次に式 (355) 第2の不等号 $S(X) \leq \ln N$ を示す. 確率の規格化条件 $\sum_x P(x) = 1$ を踏まえ, Lagrange の未定乗数 λ を導入して

$$f(P(x), \lambda) = - \sum_x P(x) \ln P(x) - \lambda \left(\sum_x P(x) - 1 \right)$$

を考える. $S(X)$ の最大条件は, 変分 $\delta P(x)$ (すべて独立と見なせる) に対して

$$0 = \delta f = - \sum_x (\ln P(x) + 1 + \lambda) \delta P(x), \quad \therefore P(x) = e^{-(1+\lambda)} = C \quad (x \text{ に依らない定数})$$

であり，改めて拘束条件を考慮すると

$$1 = \sum_x P(x) = NC, \quad \therefore P(x) = C = \frac{1}{N}.$$

このときに限り最大値 $S(X) = \ln N$ が実現される．

ここでは初等的に理解できる素朴な方法を採用した．しかし Kullback–Leibler 情報量 (KI 情報量) を利用すれば，より簡潔に証明することもできる [34, pp.146–147] [32, p.181]．式 (374) の KL 情報量 $S(P_1 \| P_2)$ において， P_2 が一様分布 $P_2(x) = 1/N$ (N は状態 x のとり得る場合の数) を考えると，KL 情報量は Shannon 情報量 $S(P_1) = -\sum_x P_1(x) \ln P_1(x)$ と

$$S(P_1 \| P_2) = \sum_x P_1 \ln(NP_1) = (\ln N) \sum_x P_1 + \sum_x P_1 \ln P_1 = \ln N - S(P_1)$$

で関係付けられる．これを KL 情報量の非負性 (375) と合わせると，式 (355) における不等式 $S(P_1) \leq \ln N$ が得られる (等号成立は $P_1(x) = P_2(x) = 1/N$)．

■連続変数 x に対する Shannon エントロピー (356) が変数変換に対して不変でないこと

素朴には Shannon エントロピー (353) における確率を $P(x) \rightarrow P(x)dx$ と置き換えて

$$S(X) \equiv - \int dx P(x) \ln[dx P(x)] \quad (\text{仮})$$

とすることが考えられる。確率そのものは変数変換に対して不変なので $(P(x)dx = P(x')dx')$ ^{*89} この $S(X)$ は不変量となっているものの、 $\ln(dx)$ という発散項を含む。(これは連続変数の持つランダムネスが本来無限大であることを示唆している。) そこで発散項を省いて $S(X) \equiv - \int dx P(x) \ln P(x)$: (356) と定義する。この定義は多くの場面で役に立つが、もはや式 (356) は変数変換に対して不変ではない。実際、積分変数の変換に伴い

$$- \int dx' P(x') \ln P(x') = - \int dx P(x) \ln P(x) - \int dx P(x) \ln \left| \frac{dx}{dx'} \right|. \quad (373)$$

となる [34, p.140].

^{*89} $P(x')$ にも同じ記号 P を用いているが、誤解の恐れはあるまい [34, p.141]. 引数で2つの関数 $P(x), P(x')$ を区別する.

上式(373)を補足しよう． x が一般に多変数(n 変数とする)であることを明示的に書けば，

$$P(x')d^n x' = P(x)d^n x = P(x) \left| \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \right| d^n x'$$

なので，式(373)は

$$\begin{aligned} - \int d^n x' P(x') \ln P(x') &= - \int d^n x P(x) \ln \left(P(x) \left| \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \right| \right) \\ &= - \int d^n x P(x) \ln P(x) - \int d^n x P(x) \ln \left| \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \right|. \end{aligned}$$

■独立な X, Y に対する加法性(359): $S(X, Y) = S(X) + S(Y)$ の確認
 X と Y の独立性 $P(x, y) = P(x)P(y)$ より,

$$\begin{aligned} S(X, Y) &\equiv - \sum_{x, y} P(x, y) \ln P(x, y) = - \sum_{x, y} P(x, y) \{ \ln P(x) + \ln P(y) \} \\ &= - \sum_x \left(\sum_y P(x, y) \right) \ln P(x) - \sum_y \left(\sum_x P(x, y) \right) \ln P(y) \\ &= - \sum_x P(x) \ln P(x) - \sum_y P(y) \ln P(y) \quad (\because \text{式(353)}) \\ &= S(X) + S(Y). \end{aligned}$$

■条件付きエントロピーの表式(364)の導出

定義式(363)の最右辺に $P(x|y)$ の式(360)を代入すると,

$$\begin{aligned} S(X|Y) &= - \sum_{x,y} P(x,y) \{ \ln P(x,y) - \ln P(y) \} \\ &= S(X,Y) + \sum_y \left(\sum_x P(x,y) \right) \ln P(y) \\ &= S(X,Y) - S(Y) : (364) \quad \left(\because \text{式(357)} : \sum_x P(x,y) = P(y) \right) \end{aligned}$$

となる.

■相互情報量の表式(368)の確認

$$S(X) = - \sum_x P(x) \ln P(x) = - \sum_{x,y} P(x,y) \ln P(x)$$

より,

$$\begin{aligned} I(X : Y) &= S(X) + S(Y) - S(X, Y) \\ &= - \sum_{x,y} P(x,y) \{ \ln P(x) + \ln P(y) - \ln P(x,y) \} \\ &= \sum_{x,y} P(x,y) \ln \frac{P(x,y)}{P(x)P(y)} : (368) \end{aligned}$$

■相互情報量の非負性(369)の証明

まず準備として Kullback–Leibler 情報量を導入する [34, pp.146–147].

カルバック・ライブラー (KullbackLeibler, KL) 情報量はシャノン情報量や相互情報量の性質を統一的に理解するうえで重要な概念であり, 熱力学とも密接に結びついている. KL 情報量は情報理論の分野では KL ダイバージェンス (Kullback-Leibler divergence) と呼ばれることが多いが, 物理ではしばしば相対エントロピー (relative entropy) と呼ばれる [34, p.146].

同じ確率変数 X 上の2つの確率分布 $P_1(x), P_2(x)$ に対して, KL 情報量は

$$S(P_1 \| P_2) \equiv \sum_x P_1(x) \ln \frac{P_1(x)}{P_2(x)} \quad (374)$$

で定義され ($P_1(x)$ と $P_2(x)$ に関して非対称), $P_1(x), P_2(x)$ がどれだけ異なるかを特徴付ける^{*90} まず KL 情報量は非負性

$$S(P_1 \| P_2) \geq 0 \quad (375)$$

^{*90} この解釈はひとまず非負性(375)から動機付けられる.

を満たす．等号成立は分布 $P_1(x), P_2(x)$ が(すべての x で)一致する場合である．

証明 $t > 0$ に対して $\ln(t^{-1}) \geq 1 - t$ である(等号成立は $t = 1$ のときのみ, 図31を参照)． $t = P_2/P_1$ とおくと $\ln(P_1/P_2) \geq 1 - (P_2/P_1)$ であり, 両辺に P_1 を掛けて x で和をとると,

$$S(P_1 \| P_2) \equiv \sum_x P_1 \ln \frac{P_1}{P_2} \geq \sum_x P_1 \left(1 - \frac{P_2}{P_1}\right) = \sum_x P_1 - \sum_x P_2 = 0$$

が得られる．導出過程より, 等号成立条件 $P_1(x) \equiv P_2(x)$ も理解される．

次に P_1 と P_2 をともに確率変数 X, Y の同時確率分布

$$P_1(x, y) = P(x, y), \quad P_2(x, y) = P(x)P(y)$$

に設定すると, 式(368)よりKL情報量は相互情報量になる：

$$S(P_1 \| P_2) = I(X : Y).$$

このとき式(374)は相互情報量の非負性(369): $I(X : Y) \geq 0$ を意味する(等号成立条件 $P_1 = P_2$ はやはり $P(x, y) = P(x)P(y)$ を与える)．

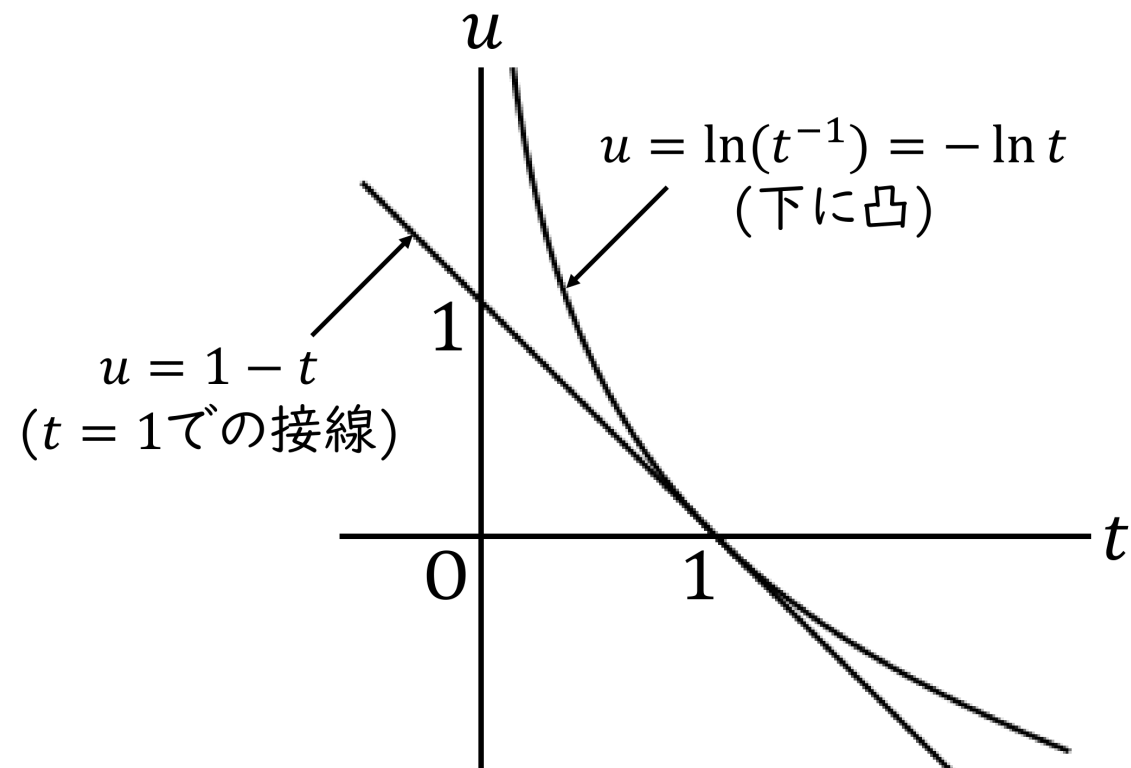


図31 $t > 0$ に対して $\ln(t^{-1}) \geq 1 - t$ (等号成立は $t = 1$ のときのみ)

6.3.1 項の原稿

もうしばらく量子情報科学の話題を取り上げよう．量子情報理論は物理学というよりも，むしろ応用数学である．その証拠に，その枠組みの定式化自体はPlanck定数を必要としない．しかしながら第5章で紹介した量子力学の關係的解釈に従えば，究極的には素朴実在論を放棄し，現実を特定の物理系(擬人的には観測者)との關係で記述することが要請される．このとき統計力学や量子情報理論で役割を演じている情報量(エントロピー)の数理が，物理以前の普遍的な枠組みとして必要になるという理路には一定の説得力がある．そこで以下では情報理論の観点から熱力学・統計力学を再考する準備として，古典系に対するShannon情報量と，その量子系における対応物にあたるvon Neumann情報量を導入する．これらは情報理論で定義される基本的な情報量であり，エントロピーとも呼ばれる．実にShannon情報量やvon Neumann情報量を，非平衡状態にも適用可能なエントロピーの定義に採ることができる．この点については第10章で熱力学・統計力学を情報理論の観点から見直す際に説明する．

まずは古典系に対する基本的な情報量として，Shannon情報量を紹介する [34, pp.137–140] [32, pp.164–167]．

確率変数 X が離散的な値 x をとる確率 $P(x)$ を用いて， X のShannon情報量(Shannonエントロピー)は式(353)で定義される^{*91}．情報理論の文脈では自然対数を用いる代わ

^{*91} もちろん確率が $P(x) = 0$ となる事象 x に対して，式(353)の因子は $P \ln P|_{P=0} \equiv \lim_{P \rightarrow 0} P \ln P =$

りに、しばしば対数の底を2に採る [32, p.49,p.165]. しかしこのとき情報量(353)は定数倍されるだけなので、情報量を測る単位が変更されるに過ぎず、本質的な違いは生じない. なお一般に x が多変数である場合にも定義式(353)を適用できる [34, p.17]. Shannon エントロピーは確率変数の不確かさ(曖昧さ)を表す情報量であり、 X の実現値が確定した場合に増える観測者の知識と解釈できる. 実際、特に2状態 $x = 0, 1$ をそれぞれ確率 p と $1 - p$ でとる系(ビット, バイナリ)の Shannon 情報量(354)は2値エントロピー(binary entropy)と呼ばれ、そのグラフの概形は図29のようである(導出スライド参照). しかるに、例えば表が出る確率が $p = 1/2$ のコインを投げたときの表裏の結果を伝えるには、表ならば1、裏ならば0としてビット数1が必要である. したがって結果を確認していない人にとって、“コインの表裏には1ビットの情報量(不確定さ)がある”と言える. これは対数の底を2とした場合の2値エントロピーに他ならない. 我々は自然対数を採用しているので、このとき2状態系の持つ情報量は2値エントロピー $H(1/2) = \ln 2$ である. 他方で $p = 1$ のときには、結果を確認せずともコインは表が出ると分かるので、情報の不確定さはゼロと考えるのが理に適っている. 実際このとき2値エントロピー(354)は、期待されるようにゼロとなる.

より一般に x が N 通りの値をとり得るとき、不等式(355)が成り立つ. 最小値 $S(X) = 0$ はやはり特定の事象 x の確率が $P(x) = 1$ となる「決定論的」な状況で実現さ

0と定義する [32, p.165].

れる．最大値 $S(X) = \ln N$ は一様分布 $P(x) = 1/N$ に対して実現される (導出スライド参照)．これはどの事象が現れるかが全く分からないとき，実際に事象を観測したときに得られる情報量が最大となることを意味している．なお一様分布に対する Shannon エントロピー $S = \ln N$ は Boltzmann のエントロピーに他ならない．これは識別可能な状態数，ないし起こり得る選択肢の数 N (の対数) となっており，エントロピーが観測者にアクセスできない情報の量の指標であることを端的に表している．

我々は確率分布が決定論的な場合と完全にランダムな一様分布の両極端な場合だけを考え，Shannon 情報量 (353) がその名の通り情報量の意味を持つと推察した．この解釈が一般の確率分布に対しても成り立つことは，次のように説明できる [32, pp.167–171]．独立に同一分布 $P(x)$ に従う確率変数 $X^n = (X_1, \dots, X_n)$ から成る系列 (例えば 0 と 1 のビット列^{*92}) を生成すると， $n \gg 1$ のとき典型的には各実現値 a の現れる頻度 (回数の割合) が各々の生起確率 $P(a)$ に近い系列 $x^n = (x_1, \dots, x_n)$ が得られると期待される．実際そのような系列は典型系列と呼ばれ厳密な定義が与えられており，この直観は大数の法則から数学的に正当化できる．また Shannon エントロピー

$H(X) \equiv -\sum_x P(x) \log_2 P(x)$ (ここでは対数の底を 2 とする) を用いると典型系列の要素数は近似的に $|A_n| = 2^{nH(X)}$ であり，その各々が等確率 $2^{-nH(X)}$ で現れることが知られている (漸近等分割性)．すると典型系列の要素のみを $\log_2 |A_n| \simeq nH(X)$ ビット

^{*92} コイン投げのように結果が 0 と 1 の 2 状態の場合に限らず，一般に X_i のとり得る値が 3 つ以上の場合を考えても良い．数学的に言えば， X は任意の (有限) 集合 $\mathcal{X}$ に値をとる確率変数である．

で表現して送信すれば，得られた系列の結果をその場にいない人にほぼ確実に伝えられる．したがって系列の1文字あたりの情報(の不確実性)は $H(X)$ ビットであり，エントロピーの意味はこの事実の内に含まれている．なお，このことの証明は多分に数学的であり，さほど教育的でもないため，同文献 [32, pp.167–171] に譲る．

最後に x が連続変数の場合には， $P(x)$ を確率密度として再定義し，式(353)の代わりに Shannon エントロピーを積分(356)で定義する．ここで，もとの定義式(353)における確率を正直に $P(x) \rightarrow P(x)dx$ と置き換えれば，式(356)の真数にも測度 dx を含めるのが自然ではないかという疑問が生じる．対数の真数を無次元化しなければならないことも考えれば，この疑問はなおさら，もっともである．しかしながら真数における無限小 dx は発散を生じるため，これを除いた式(356)が用いられる．実際この定義は多くの場面で役に立つ．ただしこのとき，式(356)はもはや積分変数の変換に対して不変ではない(導出スライド参照)．

例えば Maxwell–Boltzmann 統計 [26, p.66] に従う古典的な多粒子系に対して，Shannon 情報量(356)の確率密度 P として相空間(6次元の μ 空間 [26, p.58])における1体の分布関数 f をとってエントロピー密度を定義できる．このときよく知られているように，エントロピーに対する連続の式におけるわき出しの項として定義されるエントロピー生成速度は非負であること(いわゆる H 定理)，また局所平衡分布に対してはエントロピー生成がゼロとなることが，Boltzmann 方程式から導かれる [24, pp.113–117]．あるいはゆらぎの熱力学においても「詳細ゆらぎの定理」から，エントロピー生成 $\hat{\sigma}$ のアンサンブル平均は第2法則 $\sigma \equiv \langle \hat{\sigma} \rangle \geq 0$ を満たすことが導かれる [34, p.45]．そして詳細ゆらぎ

の定理は、Hamilton系で(そしてMarkovジャンプ過程とLangevin系に対しても個別的に)証明できる [34, pp.48–50, pp.71–73, pp.167–168]. これらはいずれも特定の系に対して、熱力学第2法則(エントロピー増大則)を古典力学から基礎付ける試みと言える。これに対し本稿では第2法則を力学や量子力学に還元し得ない、熱力学・統計力学に固有の原理とする立場を採る(第10章)。

次に条件付きShannon情報量を導入する [34, pp.140–142]. 互いに独立とは限らない2つの確率変数 X, Y (とり得る値 x, y) を考えよう。例えば

- X : 熱力学系の状態, Y : その測定結果
- X : 送信メッセージ, Y : 受信メッセージ

である。ただし測定誤差や通信ノイズがあるため、このとき X と Y が一致するとは限らない。

X と Y の同時確率分布 $P(x, y)(= P(y, x))$ を導入すると、恒等的に式(357)が成り立つ。ここで2変数 X, Y の確率分布 $P(x), P(y)$ の関数形は異なっても良い。また $P(x, y)$ を用いて全体系のShannon情報量(ないし同時エントロピー [32, p.171])を式(358)で定義する。もし X と Y が独立であれば、加法性(359)が成り立つ(導出スライド参照)。しかし一般には加法性は破れており、すぐ後で導入する相互情報量ではそのことを相関の特徴付けに用いる。

次に確率変数 Y の値が y であるという条件の下で、確率変数 X の値が x となる条件付き確率 (360) を導入する。式 (360) は Bayes (ベイズ) の定理と呼ばれ [34, p.92], 場合の数から理解できる。あるいは、これを書き換えた式 (361) は事象 x, y が同時に起きる確率 $P(x, y)$ が、事象 y の起きる確率 $P(y)$ に条件付き確率 $P(x|y)$ を掛けて得られることを意味しており、ここから改めて上式 (360) も理解できる。任意の y について条件付き確率は規格化条件 $\sum_x P(x|y) = 1$ を満たす。また X と Y が独立であれば $P(x|y) = P(x)$ となり、 y 依存性はなくなる。

ここで Y の値が y であるという条件の下での、 X の条件付き Shannon 情報量 (362) を定義する。これをさらに y で平均すると式 (363) が得られる。式 (363) は条件付きエントロピーと呼ばれ [32, p.171], 第2の等号は式 (361) による。式 (362) が非負なので式 (363) もまた非負である。式 (360) を用いると、式 (364) のように書き換えられる (導出スライド参照)。同時エントロピーの引数に関する対称性 $S(X, Y) = S(Y, X)$ を考慮すると、同様に X と Y を入れ替えた条件付き Shannon 情報量 (365) も定義できる。

以上を踏まえ相互情報量を導入しよう [34, pp.142–144]。確率変数 X と Y の相互情報量は式 (366) で定義される。式 (359) の箇所で予告したように、相互情報量 (366) は X と Y の相関を Shannon 情報量の加法性の破れによって特徴付けている。実際、 X と Y の情報量を図 30 のようなベン図で表し、同時エントロピー $S(X, Y)$ が X と Y の全体系の情報量に他ならないことに注意すると、式 (366) は相互情報量 $I(X : Y)$ が X と Y の共有している情報量にあたり、それ故、相関を表すことが見て取れる。

式(364),(365)に注意すると、相互情報量(366)は条件付き Shannon 情報量を用いて式(367)のように書くこともできる。式(367)第2辺に関して言えば、 $I(X:Y)$ が Y についての情報を得る(Y についての条件付けを行う)ことによる、 X のShannon情報量の減少量であることを意味している。これは図30のベン図と整合している。あるいは逆にここから同時エントロピー $S(X|Y)$ を、情報量 $S(X)$ から Y と共有された情報量 $I(X:Y)$ を除いた情報量と解釈することが正当化される。

確率分布を用いて相互情報量(366)をあからさまに書くと式(368)のようになる(導出スライド参照)。また式(369)にしめすように、相互情報量は非負である。これはKullback–Leibler情報量の非負性の特例として証明できる(導出スライド参照)。ところで我々は既に、 X と Y が独立であれば $I(X:Y) = 0$ となることを知っている。実際、式(368)から直接分かるように、非負性(369)の等号成立条件は $P(x,y) = P(x)P(y)$ である。そのことは非負性(369)の導出過程からも明瞭に理解できる。

相互情報量の非負性(369)は

- 定義式(366)より、Shannon情報量の「劣加法性」(370)を含意する(等号成立は X と Y が独立なとき)。
- また式(367)とより、不等式(371)を含意する。これは条件付けを行うとShannon情報量が減少するという直観に整合している。

さらに式(367)において $S(X|Y), S(Y|X) \geq 0$ を考慮すると、式(372)が得られる。こ

これは図30のベン図から期待される結果である.

6.3.2 von Neumann 情報量

密度演算子 ρ で記述される量子系に対し, von Neumann エントロピー

$$S(\rho) \equiv -\text{Tr } \rho \ln \rho \quad (376)$$

を定義する.

密度演算子を対角化する基底における対角要素(固有値)を $\{p_k\}_{k=1}^d$ と書こう^{*93}.

定義式(336): $\rho = \sum_{k=1}^d p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k|$ を思い出すと, $\{p_k\}$ は確率分布に他ならない.

このとき式(376)は等価的に

$$S(\rho) = - \sum_{k=1}^d p_k \ln p_k \quad (377)$$

と書ける. これは確率分布 $\{p_k\}$ に関する

Shannon エントロピーに他ならない [32, pp.182–183] [11, pp.247–248].

^{*93} $d = \dim \mathcal{H}$ は ρ の作用する Hilbert 空間の次元

6.3.2 項の式の導出など

■演算子の関数 [32, pp.329–331]

Hermite共役 $A^\dagger$ と交換する演算子 A を正規演算子という．定義より Hermite 演算子とユニタリー演算子は正規演算子である [32, p.325]．正規演算子は固有値分解

(332): $A = \sum_i^d a_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ で表すことができる ($d = \dim \mathcal{H}$ は A の作用する Hilbert 空間の次元) [32, p.328]．このとき通常関数 $f(x)$ に対して，演算子の関数は固有値分解の形

$$f(A) \equiv \sum_{i=1}^d f(a_i) |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (378)$$

で定義できる．ここから $f(A)$ は固有値 $f(a_i)$ と対応する固有ベクトル $|\psi_i\rangle$ を持つこと，また $f(A)$ は正規演算子となることが分かる．多項式関数 $f(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ に対して，式(378)は多項式展開

$$f(A) = \sum_{k=0}^n c_k A^k \quad (A^0 = 1 \text{ は恒等演算子と約束}) \quad (379)$$

による定義と等価である^{*94}．

^{*94} 特に Taylor 展開可能な関数 $f(x)$ に対して， $f(A)$ の Taylor 展開による定義に一致する．我々は既に演

このことを示そう．固有値 a の固有射影演算子 P_a を用いて，式(378)は等価的に

$$f(A) \equiv \sum_{a \in \sigma(A)} f(a) P_a \quad (380)$$

と書き換えられることに注意しよう．実際，固有値 a の固有空間の正規直交基底 $\{|a, i\rangle\}_i$ を採って $P_a = \sum_i |a, i\rangle \langle a, i|$ と書くと，式(380)は式(378)に戻る．

そこで定義式(380)に従えば，定数関数 $f(x) = 1$ に対しては P_a の完全性 [32, p.327] より

$$f(A) = \sum_a P_a = 1,$$

また $f(x) = x^k$ ($k \geq 1$) に対しては，直交性 $P_a P_b = \delta_{ab} P_b$ [32, p.327] を繰り返し用いると

$$f(A) = \left(\sum_a a P_a \right)^k = \sum_{a_1, \dots, a_k} a_1 \cdots a_k \delta_{a_1 a_2} \cdots \delta_{a_{k-1} a_k} P_{a_k} = \sum_a a^k P_a$$

算子の指数 $\exp(A)$ を Taylor 展開の形(317)で定義した．

となる． よって多項式 $f(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ に対して定義式(379)は式(380)に一致する：

$$f(A) = \sum_{k=0}^n c_k A^k = \sum_{k=0}^n c_k \sum_a a^k P_a = \sum_a \left(\sum_{k=0}^n c_k a^k \right) P_a = \sum_a f(a) P_a.$$

■ von Neumann エントロピーの表式(377)の確認 [32, p.183]

密度演算子 ρ は固有値を $\{p_k\}_{k=1}^d$ ($d = \dim \mathcal{H}$), 対応する固有ベクトルを $|\psi_k\rangle$ (互いに直交) とすると, 固有値分解(332)は

$$\rho = \sum_{k=1}^d p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k|$$

と書ける. すると演算子の関数は, その定義式(378)より

$$-\rho \ln \rho = - \left(\sum_{k=1}^d p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \right) \left(\sum_{l=1}^d (\ln p_l) |\psi_l\rangle \langle \psi_l| \right) = - \sum_{k=1}^d p_k \ln p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \quad (381)$$

となる. このトレースをとると式(377): $S(\rho) = - \sum_{k=1}^d p_k \ln p_k$ を得る.

6.3.2項の原稿

さて，Shannonエントロピーの量子系における対応物として，密度演算子 ρ に対して von Neumannエントロピー(376)が定義される．ここで式(376)に現れる密度演算子の対数の定義について述べる．一般に演算子の関数は，演算子を対角化する基底に関する固有値分解の形で定義される．特に多項式で表される関数に対して，この定義は演算子の関数を多項式展開の形で定義することと等価である(導出スライド参照) [32, pp.329–331]．そこで密度演算子を対角化する基底における対角要素，したがって固有値を $\{p_k\}_{k=1}^d$ と書こう．ここで密度演算子の定義式(336): $\rho = \sum_{k=1}^d p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k|$ を思い出すと， ρ の固有値 $\{p_k\}$ は混合状態の確率分布に他ならないことに注意しよう．このとき von Neumannエントロピー(376)は等価的に式(377)のように書ける(導出スライド参照)．これは ρ の固有値分布 $\{p_k\}$ に関するShannonエントロピーに他ならない．固有値に縮退がある場合は，重複の数だけ同じ固有値の寄与が現れる [32, pp.182–183] [11, pp.247–248]．

6.4 群論

6.4.1 群と表現

群の定義 [36, p.9] [38, p.2] [37, p.14]

次の条件を満たす集合 G を群 (group) という.

0. 任意の元 $a, b \in G$ に対して定義される積 ab もまた G の元である.
1. 任意の $a, b, c \in G$ に対して結合律 $(ab)c = a(bc)$ が成り立つ.
2. 任意の $a \in G$ に対して $ae = ea = a$ となる単位元 $e \in G$ が存在する.
3. 任意の $a \in G$ に対して $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ となる逆元 $a^{-1} \in G$ が存在する.

表4 群とは積 g_1g_2 を指定する掛け算表 (群表)

	e	g_1	g_2	$\cdots$
e	e	g_1	g_2	$\cdots$
g_1	g_1	g_1g_1	g_1g_2	$\cdots$
g_2	g_2	g_2g_1	g_2g_2	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

表5 巡回群 Z_3 の群表 [38, p.3]

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

群表5に対して

$$D(e) = 1, \quad D(a) = e^{2\pi i/3}, \quad D(b) = e^{-2\pi i/3}. \quad (1 \text{次元表現}) \quad (382)$$

一般に群 G の各元 g_i に対して

$$g_i g_j = g_k \quad \Rightarrow \quad D(g_i) D(g_j) = D(g_k) \quad (383)$$

のように，掛け算則を保持する n 次正則行列 $D(g_i)$ を表現行列という (n : 表現の次元) [36, pp.31–32].

■既約表現 [38, pp.5–6] [36, p.32,p.36]

表現空間の基底の変更 $e_i' = \sum_k e_k V_{ki}$ に伴う表現行列の相似変換

$$D'(g) = V^{-1} D(g) V \quad (384)$$

は群の掛け算則を保ち, D と同値な表現 D' を定義する.

- 不変部分空間を持つ表現は可約, 可約でない表現は既約という.
- 相似変換により行列要素をブロック対角な形

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2(g) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_l(g) \end{pmatrix} \quad (385)$$

にできる表現を完全可約という. ここに各正方行列 $D_j(g)$ は既約表現を成す.

- ブロック対角な表現 (385) は表現 $D_j(g)$ の直和といい,

$$D = D_1 \oplus D_2 \oplus \cdots \oplus D_l \quad (386)$$

で表す.

表現がブロック対角な行列(385)となる基底で，対応して状態ベクトルもブロックに分けて $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots)^T$ と書くと (Tは転置を表す)，

$$D(g)\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 & \cdots \\ 0 & D_2(g) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1(g)\boldsymbol{v}_1 \\ D_2(g)\boldsymbol{v}_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (387)$$

となる． よってブロック対角行列 $D(g)$ は部分空間のベクトル

$$(\boldsymbol{v}_1, 0, 0, \dots)^T, \quad (0, \boldsymbol{v}_2, 0, \dots)^T, \quad \text{etc.} \quad (388)$$

に作用して， 同じ部分空間のベクトル

$$(D_1(g)\boldsymbol{v}_1, 0, 0, \dots)^T, \quad (0, D_2(g)\boldsymbol{v}_2, 0, \dots)^T, \quad \text{etc.} \quad (389)$$

を作る．

- 各ブロック $D_i(g)$ は既約なので， 定義により適当な相似変換によって， さらに細かいブロックに区分けすることはできない．
- 可約な表現が完全可約であるとは限らない．

■直積表現 [36, pp.37–38] [38, p.27]

群 G の2つの表現 $D^{(a)}, D^{(b)}$ の基底を $\{|a_i\rangle\}_{i=1}^n, \{|b_j\rangle\}_{j=1}^m$ と書こう.

このとき nm 個の基底 $|a_i, b_j\rangle$ は群 G の作用により

$$|a_i, b_j\rangle \longrightarrow \sum_{k,l} |a_k, b_l\rangle D_{ki}^{(a)}(g) D_{lj}^{(b)}(g) = \sum_{k,l} |a_k, b_l\rangle [D^{(a \times b)}(g)]_{kl,ij}, \quad (390)$$

$$[D^{(a \times b)}(g)]_{kl,ij} \equiv D_{ki}^{(a)}(g) D_{lj}^{(b)}(g) \quad (391)$$

と変換し [38, pp.24–25] [11, pp.116–119], ここに nm 次行列 (391) は $D^{(a)}, D^{(b)}$ の直積 (テンソル積) と呼ばれる. 行列 (391) もまた群の掛け算則

$$D^{(a \times b)}(gg') = D^{(a \times b)}(g) D^{(a \times b)}(g') \quad (392)$$

を満たし, 表現 $D^{(a)}, D^{(b)}$ の直積表現 (テンソル積表現) $D^{(a)} \otimes D^{(b)}$ を定義する.

6.4.1 項の式の導出など

■ 直積表現が群の掛け算則を満たすこと (392) の確認
表現行列 $D^{(a)}, D^{(b)}$ の直積の定義式 (391):

$$\langle a_k, b_l | D^{(a \times b)}(g) | a_i, b_j \rangle = \langle a_k | D^{(a)}(g) | a_i \rangle \langle b_l | D^{(b)}(g) | b_j \rangle$$

より,

$$\begin{aligned} & \langle a_k, b_l | D^{a \times b}(gg') | a_i, b_j \rangle \\ &= \langle a_k | D^{(a)}(gg') | a_i \rangle \langle b_l | D^{(b)}(gg') | b_j \rangle \\ &= \left(\sum_r \langle a_k | D^{(a)}(g) | a_r \rangle \langle a_r | D^{(a)}(g') | a_i \rangle \right) \left(\sum_s \langle b_l | D^{(b)}(g) | b_s \rangle \langle b_s | D^{(b)}(g') | b_j \rangle \right) \\ &= \sum_{r,s} \langle a_k, b_l | D^{(a \times b)}(g) | a_r, b_s \rangle \langle a_r, b_s | D^{(a \times b)}(g') | a_i, b_j \rangle : (392). \end{aligned}$$

6.4.1 項の原稿

数学的な準備として、群論についてもこの辺りで言及しておくのが適切だろう。

結合律が成り立ち単位元と逆元の存在する積演算に関して集合 G が閉じているとき、 G は群 (group) と呼ばれる。群 G に含まれる元の個数を群 G の位数 (order), また位数が有限の群を有限群という。しばらくは有限群に話を限定しよう。群の元が離散的な場合には、表4のように各元 g_i の行と元 g_j の列の交わる欄に、積 $g_i g_j$ を示した群表 (掛け算表) を作ることができる。平たく言えば群とは各要素 g_1, g_2 に対して積 $g_1 g_2$ を指定する掛け算の表である [36, p.9] [38, p.2] [37, p.14]。物理学への応用では専ら変換群に興味を持たれる：物理系に対する何らかの変換 (例えば空間回転) を立て続けに行うことが、ある変換を1度だけ行うことと等価であるとき、その変換は群を成す。

ここで位数3の群の群表の例を表5に示す。“種明かし”として a と b をそれぞれ反時計回りと時計回りの角度 $2\pi/3$ の回転と見なせば、この掛け算則を理解できる。議論を確定するために、ここで言う回転とは平面上の図形に対する能動的な変換と理解していただいて構わない。このとき例えば回転 a と逆回転 b を1度ずつ行った結果は恒等変換となることを反映して、積 $ab = ba = e$ は単位元となる。また反時計回りの $1/3$ 回転を2度繰り返した結果は時計回りの $1/3$ 回転を1度だけ行った結果に一致するので $a^2 = b$ であり、同様に $a^3 = e$ は恒等変換である。したがって全ての元 a, b, e は1つの元 (例えば a) ベキ乗で表せる。そのような群は巡回群と呼ばれる [37, p.12]。この例では群の要素は抽象的な回転操作を表しており、一般に群の要素は必ずしも具体的な数である必要は

ない．ところが抽象的な群要素の各々に，代わりに対応する回転を表す複素数(382)を充てても，群表5の掛け算則は明らかに満たされる [38, p.3]．あるいは2次の回転行列を充てることもできる．

一般に群 G の各元 g_i に対して式(383)のように，掛け算則を保持する演算子ないし正則行列 $D(g_i)$ を群の表現という．このとき群の単位元には単位行列が，逆元には逆行列が対応することが帰結する．なお逆行列の存在は表現行列として正則行列を想定していることから保証されている．表現行列 D が作用するベクトル空間を表現空間といい，行列の大きさ n (したがって表現空間の次元) を表現の次元という．なお全ての群要素に単位行列を対応させれば，群の掛け算則を満たすことは常に可能である．そのような表現を恒等表現(ないし自明な表現 [38, p.5])と呼ぶ [36, pp.31–32]．

表現空間の基底の変更 $e_i' = \sum_k e_k V_{ki}$ に伴い，表現行列は正則行列 V による相似変換(384)を受ける．相似変換(384)は群の掛け算則を保つため，式(384)で関係付けられる群 G の2つの表現 D, D' は同値と言われる [38, p.5]．

次に術語をいくらか定義する．部分空間の任意のベクトルにどの $D(g)$ が作用しても，得られるベクトルが部分空間に入っているとき，その部分空間を不変部分空間 (invariant subspace) という．不変部分空間を持つ表現は可約 (reducible)，可約でない表現は既約 (irreducible) という [38, pp.5–6] [36, p.36]．

行列要素がブロック対角な形(385) (ただし各正方行列 $D_j(g)$ は既約) を持つ表現と同値な表現は，完全可約と言われる．言い換えれば，完全可約な表現とは相似変換によりブ

ブロック対角化できる表現をいう．式(385)の各ブロック $D_i(g)$ もまた群 G の表現となっており，これらを既約表現と呼ぶ．さらにブロック対角な表現(385)は表現 $D_j(g)$ の直和といい，式(386)で表す．すると完全可約な表現とは既約な表現の直和に分解できるもの，と言い換えることもできる [38, p.6] [36, p.32].

ここでブロック対角行列(385)の含意を考察しよう．表現がブロック対角な行列(385)となる基底で，対応して任意の状態ベクトルもブロックに分けて $v = (v_1, v_2, \dots)^T$ と書くと (T は転置を表す)，ブロック対角行列 $D(g)$ の作用は式(387)のようになる．よってブロック対角な $D(g)$ は部分空間のベクトル(388)に作用して，同じ部分空間のベクトル(389)を作ることになる．これは完全可約な表現 $D(g)$ が相似変換により，各々の部分空間に個別に作用する既約な $D_i(g)$ に直和分解できることを意味する．

ブロック対角行列(385)の各ブロック $D_i(g)$ は既約表現なので，定義により適当な相似変換によってさらに細かいブロックに分割することはできない [11, p.262]. 実際もし $D_i(g)$ をさらに細かくブロック対角化できたとすると， $D_i(g)$ が作用するベクトル v_i の空間は，その中に不変部分空間を持つことになり，既約の定義に反する．

なお可約な表現が完全可約であるとは限らないことに注意する．実際，ある不変部分空間に収まらないベクトルが他の不変部分空間に属しているとは限らないため，不変部分空間を持つ表現を常にブロック対角化できるとは限らない．

共通の群 G に対する2つの表現 $D^{(a)}, D^{(b)}$ から新たに直積表現 $D^{(a)} \otimes D^{(b)}$ を作ること

ができる． $D^{(a)}, D^{(b)}$ をそれぞれ順に n 次元および m 次元の表現とし，表現の基底を $\{|a_i\rangle\}_{i=1}^n, \{|b\rangle_j\}_{j=1}^m$ と書こう．2つのラベル a_i と b_j を並べた nm 個の基底 $|a_i, b_j\rangle$ を定義すると，これは群 G の作用により式 (390), (391) のように変換する [38, pp.24–25] [11, pp.116–119]．ここで定義した行列 (391) は添字の組 (k, l) と (i, j) を添字とする nm 次行列であり，表現行列 $D^{(a)}, D^{(b)}$ の直積 (テンソル積) と呼ばれる．この行列 (391) もまた群の掛け算則 (392) を満たすため，群の表現行列となる (導出スライド)．直積 (391) が定義する表現を表現 $D^{(a)}, D^{(b)}$ の直積表現 (テンソル積表現) と呼び， $D^{(a)} \otimes D^{(b)}$ と書く．後で角運動量の合成において具体的に見るように，しばしば直積表現を既約表現に分解することに興味を持たれる．(なお直積表現の行列は定義式 (391) から分かるように，表現行列 $D^{(b)}$ を複製して $n \times n$ のブロック行列を作り，添字の組 (k, i) で指定される各ブロックの全要素に $D_{ki}^{(a)}$ を掛けると得られる [38, p.29] [32, p.339].)

6.4.2 直交関係式

■Schurの補題 [38, pp.14–15] [37, pp.67–69]

定理A D_1 と D_2 が互いに同値でない既約表現としたとき,

$\forall g \in G$ に対して $D_1(g)A = AD_2(g)$ が成立すれば $A = 0$ である.

定理B D が有限次元の既約表現の場合,

$\forall g \in G$ に対して $D(g)A = AD(g)$ が成り立てば $A \propto I$ である.

注解 $D(g)$ は行列ではなく演算子であり, I は恒等演算子.

■直交関係式 [38, pp.18–19,p.21] Schurの補題を用いると,

群 G の (有限次元の) 既約表現 $D_a(g), D_b(g)$ の行列要素に対する直交関係式

$$\sum_{g \in G} \frac{n_a}{N} [D_a(g^{-1})]_{kj} [D_b(g)]_{lm} = \delta_{ab} \delta_{jl} \delta_{km} \quad (393)$$

が得られる (n_a は表現 D_a の次元, N は群 G の位数). $D_a(g)$ がユニタリーであれば,

$$\sum_{g \in G} \frac{n_a}{N} [D_a(g)]_{jk}^* [D_b(g)]_{lm} = \delta_{ab} \delta_{jl} \delta_{km}. \quad (394)$$

$j = l, k = m$ とおいて和をとると,

指標 $\chi_a(g) \equiv \text{Tr} D_a(g)$ の直交性 $\frac{1}{N} \sum_{g \in G} \chi_a(g)^* \chi_b(g) = \delta_{ab}$ を得る.

6.4.2項の式の導出など

■Schurの補題(定理A)の証明 [38, pp.14–15] [37, pp.67–68]

D_2 の作用するベクトル空間 V の中に、一般には $A|\mu\rangle = 0$ を満たすベクトル $|\mu\rangle$ が存在する。言い換えれば、 $|\mu\rangle$ は A の右から掛かって消えるベクトルである。そのようなベクトル $|\mu\rangle$ の成す V の部分空間を N 、また N への射影演算子を P とすると、任意の $|\cdots\rangle \in V$ に対して $|\mu\rangle \equiv P|\cdots\rangle \in N$ であって、

$$0 = A|\mu\rangle = AP|\cdots\rangle, \quad \therefore AP = 0.$$

これと定理の仮定 $D_1(g)A = AD_2(g)$ を合わせると、

$$AD_2(g)P = D_1(g)AP = 0 \quad \forall g \in G$$

を得る。このため $|\mu\rangle \equiv P|\cdots\rangle \in N$ に対して

$$A(D_2(g)|\mu\rangle) = (AD_2(g)P)|\cdots\rangle = 0$$

である。このとき $|\mu\rangle \in N$ に対し $D_2(g)|\mu\rangle$ もまた N に属することになる。これは $D_2(g)$ が不変部分空間 N を持つことを意味する。ところが $D_2(g)$ は既約だから、 V の中に不変部分空間を持ってはならない。よって $N = 0$, V のいずれかである。

$N = 0$ と仮定すると、 $A|\mu\rangle = 0$ なるベクトル $|\mu\rangle$ ($\neq 0$)は存在しない。すると行列表示では、 A は逆行列 A^{-1} を持つ正方行列でなければならない。このとき定理の仮定 $D_1(g)A = AD_2(g)$ に左から A^{-1} を掛けると

$$A^{-1}D_1(g)A = D_2(g) \quad \forall g \in G$$

となり、 D_1 と D_2 が互いに同値でないことに反する。よって N は空間 V 全体となる。このときゼロでないベクトル $|\mu\rangle \in N = V$ に対して $A|\mu\rangle = 0$ が成り立つので、 $A = 0$ でなければならない。証明終。

■Schurの補題(定理B)の証明 [38, p.15] [37, pp.68–69]

有限次数の行列 A は, 特性方程式 $\det(A - \lambda I) = 0$ が少なくとも1つは根を持つ. よって固有方程式 $A|\mu\rangle = \lambda|\mu\rangle$ を満たす固有値 λ と固有ベクトル $|\mu\rangle$ を1つはとることができる, この λ と $|\mu\rangle$ に対して

$$(A - \lambda I)|\mu\rangle = 0 \quad (395)$$

が成り立つ. 他方, A がすべての $D(g)$ と可換であるという仮定は,

$$D(g)(A - \lambda I) = (A - \lambda I)D(g) \quad (396)$$

と書き換えられる. すると定理Aの証明と同様にして, 2式(395),(396)から

$$A - \lambda I = 0$$

と言える^{*95}. 上式は $A \propto I$ を意味する. 証明終.

^{*95} $A - \lambda I$ を定理Aの A と見れば良い. $N = 0, V$ の場合分けにおいて, ここでは $\det(A - \lambda I) = 0$ より $A - \lambda I$ が逆行列を持たないことから, $N = 0$ の可能性が排除される.

■直交関係式(393)の証明 [38, pp.18–19]

番号 a でラベルされる既約表現に属する演算子 $D_a(g)$ の, 基底 $|a, j\rangle$ に関する行列要素を $[D_a(g)]_{jk} \equiv \langle a, j|D_a(g)|b, k\rangle$ と表記する. さて, 線形演算子

$$A_{jl}^{ab} \equiv \sum_{g \in G} D_a(g^{-1}) |a, j\rangle \langle b, l| D_b(g) \quad (397)$$

を定義する. 任意の $g_1 \in G$ をとって, 左から $D_a(g_1)$ を掛けよう.

$$D_a(g_1)D_a(g^{-1}) = D_a(g_1g^{-1}) = D_a((gg_1^{-1})^{-1})$$

に注意すると,

$$D_a(g_1)A_{jl}^{ab} = \sum_{g \in G} D_a((gg_1^{-1})^{-1}) |a, j\rangle \langle b, l| D_b(g)$$

となる. ここで g が群 G の全ての元を走るとき, $g' \equiv gg_1^{-1}$ も全ての元を走ること

意すると,

$$\begin{aligned}
D_a(g_1)A_{jl}^{ab} &= \sum_{g' \in G} D_a(g'^{-1}) |a, j\rangle \langle b, l| D_b(g'g_1) \quad (\because g = g'g_1) \\
&= \sum_{g' \in G} D_a(g'^{-1}) |a, j\rangle \langle b, l| D_b(g')D_b(g_1) \\
&= A_{jl}^{ab} D_b(g_1)
\end{aligned}$$

と書き換えられる. ここでSchurの補題を用いると, $a \neq b$ のとき D_a と D_b は異なるので $A_{jl}^{ab} = 0$ となり (定理A), $a = b$ のとき $A_{jl}^{ab} \propto I$ となる (定理B). したがって

$$A_{jl}^{ab} = \delta_{ab} \lambda_{jl}^a I \quad (398)$$

と書ける^{*96}. λ_{jl}^a を決定するために, 与えられた a に対し基底ケット $\{|a, k\rangle\}$ で張られる空間での A_{jl}^{aa} のトレース

$$\text{Tr}(A_{jl}^{aa}) = \sum_k \langle a, k | A_{jl}^{aa} | a, k \rangle$$

^{*96} 右辺の恒等演算子 I は D_a と同じ空間に作用する (I はラベル a に依存). また λ_{jl}^a は c -数である.

を2通りに計算する．まず上式(398)より

$$\mathrm{Tr}(A_{jl}^{aa}) = \lambda_{jl}^a \mathrm{Tr}(I) = \lambda_{jl}^a \sum_k 1 = \lambda_{jl}^a n_a$$

である．他方，定義式(397)からは

$$\mathrm{Tr}(A_{jl}^{aa}) = \sum_k \sum_{g \in G} \langle a, k | D_a(g^{-1}) | a, j \rangle \langle a, l | D_a(g) | a, k \rangle = \sum_{g \in G} \langle a, l | D_a(g) D_a(g^{-1}) | a, j \rangle$$

(ここまではトレースの巡回対称性の証明にあたる計算となっている)

$$= \delta_{jl} \sum_{g \in G} 1 = N \delta_{jl}$$

と計算される．これらを等置すると $\lambda_{jl}^a = N \delta_{jl} / n_a$ と求まるので，上式(398)は

$$\sum_{g \in G} D_a(g^{-1}) |a, j\rangle \langle b, l| D_b(g) = \frac{N}{n_a} \delta_{ab} \delta_{jl} I$$

を与える．両辺を $\langle a, k |$ と $|b, m\rangle$ で挟んで行列要素を作り，右辺において

$\langle a, k | b, m \rangle = \delta_{ab} \delta_{km}$ および $\delta_{ab}^2 = \delta_{ab}$ となることに注意すると，直交関係式(393)を得る．

この後見るように、本稿の主眼であるループ量子重力では、数学的な道具立ての1つとして「Peter–Weyl定理」を度々用いる。Peter–Weyl定理は $SU(2)$ 群に関する既約表現の行列要素の直交関係式として理解できる [2, p.103]。それは少なからず難解であるものの、あくまで単なる数学的事実であるとして、受け容れることはひとまず可能である。実際、本稿ではPeter–Weyl定理の証明を与える準備はない。しかしながらPeter–Weyl定理の類似物として、有限群における直交関係式を証明することはできる。それは言わばPeter–Weyl定理のプロトタイプであり、アナロジーとしてPeter–Weyl定理の理解に資する。このためPeter–Weyl定理を完全に天下りに提示することは避けられる。

既約表現の行列要素の直交関係式を証明する上で、Schur (シュール/シュューア)の補題が有用となる [38, pp.14–15] [37, pp.67–69]。Schurの補題は2つの定理A,Bから成る。特に定理Bは言葉で言えば、有限次元既約表現の全ての元と可換な行列は単位行列に比例する、ということである。定理Aは定理Bの証明に用いられるだけでなく、直交関係式を示す際に定理Bと併せて用いる。定理A,Bの証明は[導出スライドを見よ](#)。

Schurの補題を用いると、群 G の(有限次元の)既約表現 $D_a(g), D_b(g)$ の行列要素に対する直交関係式(393)が得られる([導出スライド参照](#))。 $D_a(g)$ がユニタリー表現であれば、直交関係式(393)は式(394)のように書き換えられる [38, pp.18–19]。(式(394)は種類が (a, j, k) で指定される、 $g = 1, 2, \dots, N$ の N 成分を持つベクトル $[D_a(g)]_{jk}$ の直交性を見なせる [37, p.75]。)なお表現行列のトレースは群の表現の「指標(character)」と呼ばれる。トレースの巡回対称性より指標は相似変換の下で不変に留まるので、同値

な表現は共通の指標で特徴付けることができる．直交関係式(394)は指標の直交性を含意している [38, p.21].

6.4.3 Lie群

実数パラメータの組 $t \equiv (t^1, \dots, t^d)$ で特徴付けられ, $t = 0$ で単位元 1 と連続的に繋がる (線形) Lie 群 G の元 g を考える. 微係数 $X_i \equiv \left. \frac{\partial g}{\partial t^i} \right|_{t=0}$ に対して群の掛け算則は

$$\begin{aligned} g(\lambda + \delta\lambda) &= g(\delta\lambda)g(\lambda) \simeq \left(1 + \sum_{i=1}^d \delta t^i \cdot X_i\right) g(\lambda) \quad \left(t^i \equiv \lambda x^i, X \equiv \sum_{i=1}^d x^i X_i\right) \\ &= (1 + \delta\lambda \cdot X) g(\lambda), \quad \therefore \frac{d}{d\lambda} g(\lambda) = X g(\lambda). \end{aligned} \quad (399)$$

$$g(0) = 1 \text{ より } g = \exp(\lambda X) = \exp\left(\sum_{i=1}^d t^i X_i\right) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{i=1}^d t^i X_i\right)^n, \quad (400)$$

$$\text{or 式(148): } g = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \sum_i \frac{t^i}{N} X_i\right)^N = \exp\left(\sum_i t^i X_i\right) \quad (401)$$

と表される [36, pp.54–55]. そこで各 X_i を線形 Lie 群の生成子と呼ぶ [36, p.47]^{*97}.

^{*97} 量子力学の流儀ではしばしば虚数単位を括り出して $X_i = iT_i$ と書き, T_i を生成子と呼ぶ [38, p.45].

■ $O \in \text{SO}(3)$: 特殊直交群 (3次元回転群) [36, pp.48–49]

直交行列 O の行列式は

$$O^T O = 1, \quad \therefore (\det O)^2 = 1, \quad \therefore \det O = \pm 1. \quad (402)$$

単位元の近くの元を $O = 1 + M$ とおくと

$$1 = O^T O = (1 + M^T)(1 + M) \simeq 1 + M + M^T, \quad \therefore M^T = -M \quad (403)$$

より M は実交代行列なので, 一般に

$$M = \begin{pmatrix} 0 & t^3 & -t^2 \\ -t^3 & 0 & t^1 \\ t^2 & -t^1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \sum_{i=1}^3 t^i X_i \quad (404)$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (405)$$

と書ける^{*98}.

^{*98} 式(405)は $(X_i)_{jk} = \varepsilon_{ijk}$ とまとめられる [2, p.xxiii]

任意の大きさの t^i に対して,

$$R = \exp \left(\sum_i t^i X_i \right), \quad \exp(t^1 X_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t_1 & \sin t_1 \\ 0 & -\sin t_1 & \cos t_1 \end{pmatrix}, \text{ etc.} \quad (406)$$

は回転行列となっている；式(405)の生成子は $\text{Tr } X_i = 0$ を満たすので、行列(406)は行列式が1となる条件を自動的に満たしている。

$\det O = 1 \Leftrightarrow \text{Tr } X_i = 0$ の理由 [36, p.49]

一般公式(321): $\det(\exp A) = \exp(\text{Tr } A)$ から厳密に言える。

あるいは簡単には、単位元の近くの元を考え $O = 1 + M$ とおくと、

$$1 = \det O = \sum_{i_1, \dots, i_n} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} (\delta_{1i_1} + M_{1i_1}) \cdots (\delta_{ni_n} + M_{ni_n}) \simeq 1 + \text{Tr } M, \\ \therefore \text{Tr } M = 0. \quad (407)$$

- このように単位元1と連続的に繋がる直交行列としては、 $\det O = 1$ の回転行列 $O \in \text{SO}(3)$ が選び出される。
- $\det O = -1$ となる直交行列 O は空間反転を含む変換を表し、恒等変換と連続的に繋がらない。

■ $O(2)$: 直交群 [36, pp.47–48, pp.55–56]

単位元 1 と連続的に繋がる直交群 $O(2)$ の元として得られるのは、
行列式が $+1$ の回転群 $SO(2)$ の元

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = \exp(tX), \quad X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (408)$$

である。他方、行列式が -1 の $O(2)$ の元は空間反転の行列は空間反転の行列

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (409)$$

を用いて

$$TR(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ -\sin t & -\cos t \end{pmatrix} \quad (410)$$

と表され、これは連続的に単位元に近づけることができない。

したがってこれは、指数 $\exp(tX)$ の形に表せない ($\exp(tX)$ は単位元を通る)。

■ Lie代数 [36, pp.49–53]

線形 Lie 群 G の Lie 代数とは，独立な生成子 $\{X_i\}_{i=1}^d$ の張るベクトル空間，あるいは等価的に任意の実数 t に対して，次式(411)を満たす X の全体として定義される．

$$\exp(tX) \in G. \quad (411)$$

注解 群 ($SU(2)$ など) の表現 $\exp(\sum_i t^i X_i)$ と，その生成子 X_i の代数 ($\mathfrak{su}(2)$ など) の混同に注意する．指数 $\exp(\sum_i t^i X_i)$ は群の値を，生成子を基底とした線形結合 $\sum_i t^i X_i$ は代数の値をとると言われる [3, pp.61–62]．

1. X が Lie 代数に属するなら，任意の実数 a に対し aX も Lie 代数に属する．
2. X, Y が Lie 代数に属するなら， $X + Y$ も Lie 代数に属する．
→ Lie 代数は確かにベクトル空間を成す (生成子 $\{X_i\}$ はその基底)．
3. X, Y が Lie 代数に属するなら，交換子 $[X, Y] \equiv XY - YX$ も Lie 代数に属する．

理由 実パラメータ s, t の2次までの近似で [37, p.107]，群要素の積

$$\exp(sX) \exp(tY) \exp(-sX) \exp(-tY) \simeq 1 + st[X, Y] \quad (412)$$

もまた Lie 群の元となることを要求すると，(生成子) $\propto [X, Y]$ ．

→ Lie 代数は交換子を積演算として抽象 Lie 代数を構成する [36, p.59] [5, p.56]．

■ Lie群の直積と Lie代数の直和 [36, p.11,p.80,p.240]

群 G, H の直積(群) $G \otimes H$

元 $g \in G, h \in H$ の組 (g, h) 全体が, 次式(413)の積演算の下で作る群.

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2). \quad (413)$$

Lie代数 K, L の直和 $K \oplus L$

任意の元 $X \in K, Y \in L$ が可換であるとき $[X, Y] = 0$,

$X + Y$ の全体が成す Lie代数.

定理 連結線形 Lie群 H_1, H_2 とその Lie代数 K_1, K_2 に対して,

$$G = H_1 \otimes H_2 \quad \Leftrightarrow \quad W = K_1 \oplus K_2. \quad (414)$$

ここに W は Lie群 G の Lie代数である.

理由 $W = K_1 \oplus K_2$ のとき $X \in K_1, Y \in K_2$ に対して $[X, Y] = 0$ なので,

“指数法則”

$$\exp(X + Y) = \exp(X) \exp(Y) \quad (X + Y \in W) \quad (415)$$

が成り立つ. これは群要素の積として定義される群 H_1, H_2 の元の組(413) (単に積とも呼ぶ [37, pp.24–25]) が群 G の元となることを意味している.

■構造定数 [36, pp.79–81] [38, pp.47–48] [23, pp.138–139]

$X_i = iT_i$ と書くと，交換子 $[T_i, T_j]$ も Lie 代数に属するから，基底 T_k の線形結合

$$[T_i, T_j] = if_{ijk}T_k \quad (k \text{ で和をとる, 以下同じ}) \quad (416)$$

で書ける．係数 f_{ijk} は構造定数と呼ばれ，Lie 代数の構造，Lie 群の掛け算則を規定する．

慣例に従い，Lie 代数の基底 T_i に規格直交条件

$$\text{Tr}(T_i T_j) = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (417)$$

を課す^{*99}．すると構造定数 f_{ijk} は

$$if_{ijk} = 2\text{Tr}([T_i, T_j]T_k) \quad (418)$$

と書けるため^{*100}，添字に関して完全反対称である．

^{*99} 実は Killing 形式と呼ばれる“内積” $\text{Tr}(T_i T_j)$ が正定値であるのは，群がコンパクトな場合だけである [23, p.139]．文献 [36, p.55, pp.88–89] ではコンパクト群をパラメータの変域が有限の群（例えば $U(n)$ や $O(n)$ ）として定義した上で，Lie 代数の基底 T_i に対する Killing 形式 $g_{ij} = (T_i, T_j)$ （対称行列より対角化できる）がコンパクト群に対して，（半）正定値となることを示している．

^{*100} 右辺に式 (416) を代入し，式 (417) を用いれば確かめられる．

■随伴表現 [23, pp.139–140]

$$\text{Jacobi の恒等式} \quad [T_i, [T_j, T_k]] + [T_j, [T_k, T_i]] + [T_k, [T_i, T_j]] = 0 \quad (419)$$

$$\Rightarrow f_{jkl}f_{ilm} + f_{kil}f_{jlm} + f_{ijl}f_{klm} = 0. \quad (420)$$

$$[\text{ad}(T_i)]_j{}^k \equiv if_{jik} \quad (i, j, k = 1, \dots, \dim G) \quad (421)$$

で定義される行列 $\text{ad}(T_i)$ もまた交換関係 (416) を満たすため ($\because$ 恒等式 (420)), Lie 代数の 1 つの表現——**随伴表現** (adjoint representation)——となる.

群 G の変換は随伴表現での表現ベクトル v_i に対して

$$v'_j = \exp[i\theta^i \text{ad}(T_i)]_j{}^k v_k \quad (422)$$

と書ける. ここで生成子の任意の表現行列 $(T_i)_a{}^b$ に対して,

$$(v)_a{}^b = \sum_{i=1}^{\dim G} v^i (T_i)_a{}^b \quad (423)$$

なる行列 v を用いると^{*101}, 変換則 (422) は

$$v' = g v g^{-1}, \quad g_a{}^b \equiv [\exp(i\theta^i T_i)]_a{}^b. \quad (424)$$

^{*101} $a, b, \dots$ は行列要素の添字である. また添字 $i, j, \dots$ の上下は区別しない: $v_i = v^i, T_i = T^i$.

簡単な例

SO(3) 行列の生成子 (405): $(X_i)_{jk} = \varepsilon_{ijk}$ の右辺は

su(2) (角運動量) 代数 $[X_i, X_j] = \varepsilon_{ijk} X_k$ の構造定数に他ならない.

これを随伴表現の定義 (421): $[\text{ad}(X_i)]_{jk} = f_{ijk}$ と比較すると [36, p.85],

SO(3) は SU(2) の随伴表現となっている [2, p.236, p.378].

6.4.3 項の式の導出など

■直和 $K \oplus L$ が Lie 代数になること [36, p.80] の確認

(抽象) Lie 代数の条件として挙げた (i) 双線形性, (ii) 歪対称性, (iii) Jacobi 恒等式が全て満たされていることを確かめれば良い [36, p.53]. 仮定より $X_i \in K, Y_j \in L$ に対して $[X_i, Y_j] = 0$ であることに注意すると, (i) 双線形性は例えば

$$\begin{aligned} [a(X_1 + Y_1) + b(X_2 + Y_2), X_3 + Y_3] &= a[X_1, X_3] + a[Y_1, Y_3] + b[X_2, X_3] + b[Y_2, Y_3] \\ &= a[X_1 + Y_1, X_3 + Y_3] + b[X_2 + Y_2, X_3 + Y_3] \end{aligned}$$

のように確認できる. (ii) 歪対称性も同様に

$$[X_1 + Y_1, X_2 + Y_2] = [X_1, X_2] + [Y_1, Y_2] = -[X_2, X_1] - [Y_2, Y_1] = -[X_2 + Y_2, X_1 + Y_1]$$

と確かめられる. 最後に (iii) Jacobi の恒等式についても,

$$[X_1 + Y_1, [X_2 + Y_2, X_3 + Y_3]] = [X_1, [X_2, X_3]] + [Y_1, [Y_2, Y_3]]$$

に注意すると,

$$[X_1 + Y_1, [X_2 + Y_2, X_3 + Y_3]] + \text{cyclic} = ([X_1, [X_2, X_3]] + \text{cyclic}) + ([Y_1, [Y_2, Y_3]] + \text{cyclic}) = 0$$

と示される.

■構造定数に対する“Jacobiの恒等式”(420)の証明

式(416): $[T_i, T_j] = if_{ijk}T_k$ より

$$[T_i, [T_j, T_k]] = if_{jkl}[T_i, T_l] = -f_{jkl}f_{ilm}T_m$$

となるので, Jacobiの恒等式は

$$\begin{aligned} 0 &= [T_i, [T_j, T_k]] + [T_i, [T_k, T_i]] + [T_k, [T_i, T_j]] \\ &= -(f_{jkl}f_{ilm} + f_{kil}f_{jlm} + f_{ijl}f_{klm})T_m \end{aligned}$$

と書き換えられる. ここに $T_{m'}$ を掛けてトレースをとり, 規格直交条件(417)を用いれば最右辺の T_m を取り除くことができるので, その係数 $(\dots)$ (で $m \rightarrow m'$ と改めたもの) がゼロにならない. こうして式(420)を得る.

■随伴表現の行列(421)がLie代数(416)を満たすことの確認
式(420)の左辺第1項の2つの f と第2項の後ろの f を反対称性によって書き換え, 第3項を移項して

$$f_{kjl}f_{lim} - f_{kil}f_{ljm} = -f_{ijl}f_{klm}$$

と書こう. 両辺を i^2 倍し $\text{ad}(T_i)$ の定義を用いると

$$[\text{ad}(T_j)]_k^l [\text{ad}(T_i)]_l^m - [\text{ad}(T_i)]_k^l \text{ad}[(T_j)]_l^m = -if_{ijl}[\text{ad}(T_l)]_k^m,$$

すなわち $[\text{ad}(T_i), \text{ad}(T_j)]_k^m = if_{ijl}[\text{ad}(T_l)]_k^m$ を得る.

■行列記法の状態に対する群の作用(424)の証明

式(423): $v = v^i T_i$ より式(424)の左辺は

$$\begin{aligned} v' &= v'^i T_i = \exp[i\theta^j \text{ad}(T_j)]_i^k v_k T_i \\ &= \left[1 + i\theta^j \text{ad}(T_j) + \frac{(i\theta^j \text{ad}(T_j))^2}{2!} + \cdots \right]_i^k v_k T_i \\ &= \left[\delta_i^k + i\theta^j (if_{ijk}) + \frac{1}{2!} (i\theta^j)(i\theta^{j'}) (if_{ijk'}) (if_{k'j'k}) + \cdots \right] v_k T_i \end{aligned} \quad (425)$$

となる。他方, Baker–Hausdorff の公式(320):

$$e^Y X e^{-Y} = X + [Y, X] + \frac{1}{2!} [Y, [Y, X]] + \cdots$$

(X, Y は任意の行列) より式(424)の右辺は

$$g v g^{-1} = v + [i\theta^j T_j, v] + \frac{1}{2!} [i\theta^{j'} T_{j'}, [i\theta^j T_j, v]] + \cdots \quad (426)$$

と展開される。

式(423): $v = v^i T_i$ より式(425),(426)それぞれの(最)右辺第1項は等しい. そこで式(425)における $n(\geq 1)$ 次の項(の $n!$ 倍)

$$\begin{aligned}
& [(i\theta^j \text{ad}(T_j))^n]_i^k v_k T_i \\
&= (i\theta^{j_1})(i\theta^{j_2}) \cdots (i\theta^{j_n}) [\text{ad}(T_{j_1})]_i^{k_1} [\text{ad}(T_{j_2})]_{k_1}^{k_2} \cdots [\text{ad}(T_{j_n})]_{k_{n-1}}^k v_k T_i \\
&= (i\theta^{j_1})(i\theta^{j_2}) \cdots (i\theta^{j_n}) (if_{ij_1 k_1})(if_{k_1 j_1 k_2}) \cdots (if_{k_{n-1} j_n k}) v_k T_i
\end{aligned} \tag{427}$$

と, 式(426)における $n(\geq 1)$ 次の項(の $n!$ 倍)

$$[i\theta^{j_n} T_{j_n}, \cdots, [i\theta^{j_2} T_{j_2}, [i\theta^{j_1} T_{j_1}, v]] \cdots] \tag{428}$$

が一致していれば良い.

このことを数学的帰納法にて証明しよう. $n = 1$ のとき式(427)は $i\theta^j \cdot if_{ijk} v_k T_i$ である. 他方, 式(428)は

$$[i\theta^j T_j, v] = i\theta^j v^k [T_j, T_k] = i\theta^j v^k \cdot if_{jki} T_i = i\theta^j \cdot if_{ijk} v_k T_i$$

となるので, これらは一致する. 次にある n に対して式(427),(428)が等しいと仮定す

ると、式(428)で $n \rightarrow n + 1$ と置き換えた量は

$$\begin{aligned}
& (i\theta^{j_1}) \cdots (i\theta^{j_n})(if_{ij_1k_1}) \cdots (if_{k_{n-1}j_nk})v_k \times i\theta^{j_{n+1}}[T_{j_{n+1}}, T_i] \\
&= (i\theta^{i_1}) \cdots (i\theta^{i_n})(i\theta^{i_{n+1}})(if_{ij_1k_1}) \cdots (if_{k_{n-1}j_nk})(if_{jj_{n+1}i})v_k T_i \\
& \quad (\because [T_{j_{n+1}}, T_i] = if_{j_{n+1}ij}T_j = if_{jj_{n+1}i}T_j) \\
&= (i\theta^{j_1}) \cdots (i\theta^{j_n})(i\theta^{j_{n+1}})(if_{ij_{n+1}j})(if_{ij_1k_1}) \cdots (if_{k_{n-1}j_nk}) \\
& \quad (\because \text{ダミー添字の入れ替え } i \leftrightarrow j)
\end{aligned}$$

と計算される．最右辺でさらにダミー添字の置き換え

$$j_{n+1} \rightarrow j_1 \rightarrow j_2 \rightarrow \cdots \rightarrow j_n \rightarrow j_{n+1} : \text{巡回置換}, \quad j \rightarrow k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow \cdots \rightarrow k_{n-1} \rightarrow k_n$$

を施せば、これは式(427)で $n \rightarrow n + 1$ と置き換えた量に等しいことが判明する．以上より示された．

6.4.3項の原稿

ここまでは群要素が離散的な有限群を扱ってきた．ここからは群要素が連続パラメータで特徴付けられる(線形) Lie群を考える．正確を期すために形式的に数学的な定義を述べると，Lie群とは群 G の各元が連続な有限個のパラメータの組で指定され，群 G 自体がこのパラメータの組を座標とする微分可能多様体を成し，かつ群の演算が微分可能な写像であるものをいう．ここで群演算が微分可能な写像であるとは，群要素の積 $g_i g_j$ の座標が g_i と g_j の座標の微分可能な関数であり，逆元 g_i^{-1} の座標が g_i の座標の微分可能な関数になっていることである [5, p.57]．ただし本稿で取り上げる予定の，物理で興味のある連続群 $SL(2, \mathbb{C})$, $SU(2)$, $O(3)$, $SO(3, 1)$ などはいずれもLie群の条件を満たしているので [36, p.46, p.52]，数学的に厳密な定義にはあまり神経質にならずとも良い．

$t^1 = \dots = t^d = 0$ で単位元1と連続的に繋がる， d 個の実数パラメータ $(t^1, \dots, t^d)$ に依存する線形Lie群 G の元 g を考える． $t^i = \lambda x^i$ とおいて元を1変数関数 $g(\lambda)$ と見なすと，与えられた微係数 X_i の1次結合 $X \equiv \sum_{i=1}^d x^i X_i$ を用いて，パラメータの変化 $\delta\lambda$ の1次まで考慮した群の掛け算則は微分方程式(399)を与える．再び $g(0) = 1$ を考慮すると，解は指数(400)で表される [36, pp.54–55]．そこで各 X_i を線形Lie群の生成子と呼ぶ [36, p.47]．ただし，ここでは微分方程式(399)が任意の λ に対して成り立つことを前提としていることに注意する．この場合には有限の変換を言わば無限小変換の繰り返し(148)により，式(401)のように構成できる．したがって少なくとも単位元の近くの，単位元と連続的に繋がる元は指数(400)で表される．他方で微分方程式(399)が原点(す

なわち単位元)でしか成り立たない場合には，もちろん単位元から離れるにつれて，群の元をパラメータ化するやり方には膨大な自由度が生じる [38, p.45].

例として特殊直交群 $SO(3)$ を取り上げよう． $SO(3)$ は行列式が1である 3×3 の直交行列 O の成す群として定義される．“特殊” という術語は群の元の行列式が1であることを表している．行列式が1の直交行列 O は回転行列に他ならないため， $SO(3)$ は3次元回転群とも呼ばれる．なるほど，確かに式(45)の箇所では回転行列が直交行列で表されることを見た．しかし逆に直交行列が全て回転行列となるとは限らない．実際，実直交行列の行列式は式(402)より ± 1 のいずれかである．以下で見るように，行列式が $+1$ の直交行列は純粋な回転を表し，行列式が -1 の直交行列は空間反転を含む変換を表す．さて，単位元の近くの元を $O = 1 + M$ と表すと， M の1次までの近似で式(403)が課せられるので， M は実交代行列である．その一般形は3つの実パラメータ t^1, t^2, t^3 を用いて，式(404)のように表すことができる．(これは空間回転の自由度が3であることに整合する．) ここでは仮定より各 t^i は微小である．3つの t^i に対応する微係数 X_i は式(405)のように同定される．

任意の大きさの t^i に対して，単位元と連続的に繋がる $SO(3)$ の元は，式(405)の X_i を生成子として指数(406)で与えられる．実に単一の生成子，例えば X_1 は式(406)に示したように， x 軸周りの回転を表す回転行列を生成する [36, pp.48–49].
ここでは一見すると，群要素が直交行列となる条件(403)しか課していないにも関わら

ず，得られた行列(406)は行列式が+1のSO(3)群要素となっていることに注意しよう．実際，単位元の近くの元を $O = 1 + M$ と表すと， M の1次までの近似では行列式の条件として式(407)が課せられる．したがって行列式が1の行列に対する生成子は $\text{Tr } X_i = 0$ を満たさねばならない [36, p.49]．無限小変換の生成子の1次近似に依拠せずとも，一般公式(321)に基づけば群要素の行列式が1となる必要十分条件は生成子がトレースレスであることが厳密に言える．しかるに式(405)の生成子はトレースレスとなっているので，求めた行列(406)は行列式が1となる条件を自動的に満たしている．このように(実)直交群として回転群が得られるのは， $O = 1 + M$ において単位元1と連続的に繋がる行列を考えたためだと考えられる．他方 $\det O = -1$ となる直交行列 O は空間反転を含む変換を表し，恒等変換と連続的に繋がっていないと考えられる．

この点を見るために，簡単のために2次元平面上での直交変換を考えよう．単位元1と連続的に繋がる直交群O(2)の元として得られるのは，行列式が+1の回転群SO(2)の元(408)である [36, pp.47–48]．他方，行列式が−1のO(2)の元は空間反転の行列は空間反転の行列(409)を用いて式(410)のように表され，これは連続的に単位元に近づけることができない．したがってこれは，指数 $\exp(tX)$ の形に表せない [36, pp.55–56]．実際，行列(410)が指数 $\exp(tX)$ で表されると仮定すると単位元を通ることになり，式(410)右辺が単位元に一致し得ないことに矛盾する．

ここでLie群と密接な関係にあるLie代数を説明する [36, pp.49–53]．線形Lie群の独立

な生成子 X_i の張るベクトル空間をその Lie 群の Lie 代数と呼ぶ. あるいは等価的に任意の実数パラメータ t に対して, 指数 (411) が群要素となる X の全体を Lie 群 G の Lie 代数と定義しても良い. 例えば直交群 $O(3)$ の Lie 代数は既に見たように, 3 次の実交代行列 (404) の全体である.

実際, Lie 代数に属する行列は定数倍しても行列の和をとっても, Lie 代数を規定する行列の性質 (例えばトレースレスの実交代行列であることなど) が保持されるため, ベクトル空間を成す. そして生成子 X_i がその基底を成す.

さらに Lie 代数の元 X, Y の交換子 $[X, Y]$ も Lie 代数に属する. 実際 X, Y が Lie 代数に属するとき, その指数 $\exp(\pm tX), \exp(\pm sY)$ は Lie 群の元であるから, それらの積も Lie 群の元でなければならない. ところが実パラメータ s, t の 2 次までの近似では式 (412) のようになる. そこで右辺が微小変換を表す群の元であるためには, 定数倍の自由度を除き交換子 $[X, Y]$ が生成子とならねばならない. これは交換子 $[X, Y]$ が Lie 代数に属することを意味する. 念のため確認すると, 積 st と同程度の s^2 や t^2 の項まで考慮しなければ近似の一貫性がない. ところが直接の計算で確かめられるように, このとき s^2 と t^2 の項は正確にゼロになる [37, p.107].

ここで交換子は 2 つの行列ないし演算子について双線形かつ歪対称 (反対称) であり, Jacobi の恒等式 (310) を満たすことを思い出そう. 一般にベクトル空間の 2 つの元に対する双線形・歪対称な演算が Jacobi の恒等式を満たすとき, ベクトル空間はこの演算を演算積として (抽象) Lie 代数を構成するという [5, p.56]. したがって Lie 群の生成子の張る空間として定義した Lie 代数は, この抽象的な意味でも Lie 代数となってい

る [36, p.59]. 逆にこのことから抽象的なLie代数の定義が動機付けられると理解することもできる.

ここでLie代数に関する基本的な性質として, Lie群の直積とLie代数の直和について説明する. まずは群の直積を定義するところから始めよう. 2つの群 G, H に対して, 各々の元 $g \in G, h \in H$ の組 (g, h) 全体の集合 $G \otimes H$ は, 積の演算(413)の下で明らかに群を作る. これを G と H の直積群, あるいは単に直積という [36, p.11]. ここで考えているのはあくまで異なる群の直積であり, 6.4.1項で見た共通の群に対する表現の直積との混同に注意せよ. 次にLie代数の直和を定義しよう. 2つのLie代数 K, L の任意の元 $X \in K, Y \in L$ が可換であるとき ($[X, Y] = 0$), $X + Y$ の全体もLie代数になる (導出スライド参照). このLie代数を K と L の直和といい, $K \oplus L$ と表す [36, p.80]. さて, 連結線形Lie群 G が連結な部分群 H_1, H_2 の直積 $G = H_1 \otimes H_2$ であるための必要十分条件は式(414)のように, G のLie代数が H_1, H_2 のLie代数 K_1, K_2 の直和 $W = K_1 \oplus K_2$ となることである. このことはLie群の要素がLie代数の元の指数で表されることを踏まえれば, 見かけほど難解ではない. 実際, Lie群 G のLie代数が直和 $W = K_1 \oplus K_2$ で与えられるとき, 定義より2つのLie代数 K_1, K_2 の元 X, Y は交換するので, “指数法則”(415)が成り立つ. これは群要素の積として定義される群 H_1, H_2 の元の組(413)が群 G の元となることを意味している [36, p.80, p.240].

後の便宜のために, 以下では虚数単位を括り出してLie群 G の生成子 T_i を再定義する.

さて、Lie代数の基底 T_i の交換子 $[T_i, T_j]$ もまたLie代数に属するから、基底の1次結合(416)で表される。(以降、繰り返された添字について和をとるものと約束する。)この係数 f_{ijk} をLie群(またはLie代数)の構造定数という。Lie代数の構造は、したがって対応する連結Lie群の掛け算則は構造定数によって完全に決まる [36, pp.79–81]。このため交換関係(416)のことをLie代数と呼ぶ場合もある [38, pp.47–48]。裏を返せば構造定数自体は、群G自身の掛け算則から決まっているので、どのような表現の上で計算しても同じである [23, p.139]。実際このことを利用して、本稿では角運動量代数の構造定数がLevi-Civita記号となることを回転行列の掛け算則から示す予定である。

慣例に従い、規格直交条件(417)を満たすLie代数の基底 T_i を採ろう。すると交換関係(416)で定義される構造定数 f_{ijk} は式(418)のように書けるためトレースの巡回対称性(と交換子の反対称性)より、 f_{ijk} は添字に関して完全反対称であることが結論される [23, pp.138–139]。

ところで行列の交換子は常にJacobiの恒等式(310)を満たす。特に生成子 T_i の交換子に対するJacobiの恒等式(419)は、交換関係(416)を代入すると、構造定数に対する恒等式(420)に焼き直される(導出スライド参照)。これは生成子の表現行列として、 T_i の代わりに式(421)で定義される行列 $\text{ad}(T_i)$ を採用できることを意味する。実際このとき式(420)により $\text{ad}(T_i)$ もまた式(416)と同じ交換関係を満たすため、 $\text{ad}(T_i)$ もLie代数の1つの表現となる(導出スライド参照)。行列 $\text{ad}(T_i)$ を用いる表現を随伴表現(adjoint representation)と呼ぶ。随伴表現の行列要素は文字 $i, j, k, \dots$ でラベルされ、したがっ

て生成子 T_i の個数，すなわち Lie 群の次元 $\dim G$ と同じ個数の値をとることに注意しよう．次に随伴表現における群の作用も調べておこう．随伴表現 $\text{ad}(T_i)$ での表現ベクトルは添字 i を持つ量 v_i で，群 G の変換で式 (422) のように変換する．このように v_i を縦に並べた“ベクトル表示”を用いる代わりに，生成子の表現行列 $(T_i)_a^b$ に対して，式 (423) で定義される行列 v を用いることもできる．ここで v_i は随伴表現での表現ベクトルであるのに対し， $(T_i)_a^b$ は任意の表現の生成子であることに注意しよう．そのような“行列記法”では，式 (422) の変換は相似変換の形 (424) に書ける (ただし g における T_i は式 (423) で考えた任意の表現行列 $(T_i)_a^b$; [導出スライド参照](#)) [23, pp.139–140].

いくらか抽象的な議論が続いた．そこで随伴表現の簡単な具体例を見ておこう．本稿でもこの後で説明する予定だが，周知のように $\text{su}(2)$ (角運動量) 代数の構造定数は Levi-Civita 記号 ε_{ijk} で与えられる．これを踏まえ回転行列の生成子 (405) を随伴表現の定義式 (421) と比較すると， $\text{SO}(3)$ は $\text{SU}(2)$ の随伴表現となっていることが読み取れる [2, p.236, p.378].

7 運動量

粒子の位置 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ の同時固有状態 $|\boldsymbol{x}'\rangle$ に対して

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{a}) |\boldsymbol{x}'\rangle = |\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{a}\rangle \quad (429)$$

で平行移動演算子 $\mathcal{T}(\boldsymbol{a})$ を定義する [11, pp.56–59]^{*102}. 次いで平行移動の演算子を

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{a}) = e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}/\hbar} \quad (430)$$

と書いて、空間並進の生成演算子として運動量 $\boldsymbol{p}$ を定義する [11, pp.62–64].

運動量 $\boldsymbol{p}$ を Hermite 演算子で表される物理量とすれば、平行移動の演算子 (430) は

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{a})^\dagger = e^{+i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}/\hbar} = \mathcal{T}(-\boldsymbol{a}) = \mathcal{T}(\boldsymbol{a})^{-1} \quad (431)$$

よりユニタリーとなり^{*103}、確率の保存を保証する [11, pp.59–61].

^{*102} ここで考えているのは、空間に固定した座標系に対して物理系を並進させる、いわゆる能動の変換である。また $\boldsymbol{a}$ は演算子ではないことに注意しよう。

^{*103} 実際に式 (431) が逆演算子であることは、演算子 $\pm\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}/\hbar$ が自分自身と交換するため、“指数法則” $e^{\pm i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}/\hbar} e^{\mp i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}/\hbar} = 1$ が成り立つことから分かる。

平行移動の性質 $[\mathcal{T}(\Delta y \hat{y}), \mathcal{T}(\Delta x \hat{x})] = 0$, etc. ($\hat{x}, \hat{y}$ は方向単位ベクトル) (432)

$$\Leftrightarrow [p_i, p_j] = 0. \quad (433)$$

よって同時固有ケット $|\mathbf{p}'\rangle = |p'_x, p'_y, p'_z\rangle$ の存在が保証され [11, pp.64–66], また

$$\mathcal{T}(\mathbf{a})\mathcal{T}(\mathbf{b}) = \mathcal{T}(\mathbf{b})\mathcal{T}(\mathbf{a}) = \mathcal{T}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \quad (434)$$

が成り立つことも言える [11, p.60]^{*104}.

等価的に交換関係

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad (435)$$

を満たす演算子として運動量 $\mathbf{p}$ を定義できる. これは Heisenberg の不確定関係

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi}, \text{ etc.} \quad \left(\Delta x \equiv \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}, \text{ etc. : 標準偏差} \right) \quad (436)$$

$$\therefore \Delta x \Delta p_x \gtrsim \hbar (\sim h), \text{ etc.} \quad (437)$$

を含意する [11, pp.61–64].

^{*104} $[\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{b}] = a_i b_j [p_i, p_j] = 0$ より “指数法則” $e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}/\hbar} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{b}/\hbar} = e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})/\hbar}$ が成り立つことによる.

一連の(正準)交換関係

$$[x_i, x_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0 : (433), \quad [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} : (435) \quad (438)$$

は古典的な Poisson 括弧 [8, p.172] と類似している [11, pp.66–68]^{*105}.

波動関数 $\psi_\alpha(\mathbf{x}') \equiv \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle$ に対する運動量の作用は

$$\langle \mathbf{x}' | \mathbf{p} | \alpha \rangle = -i\hbar \nabla' \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle, \quad (\nabla' \equiv \partial/\partial \mathbf{x}') \quad (439)$$

$$\langle \mathbf{x}' | p_i^n | \alpha \rangle = (-i\hbar)^n \frac{\partial^n}{\partial x_i'^n} \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle \quad (440)$$

より微分演算子 $p_{x'} = -i\hbar \nabla'$ になる [11, pp.72–73]. 実際 $p_{x'}$ は分布 $\psi_\alpha(\mathbf{x}')$ の並進

$$\begin{aligned} e^{-i\mathbf{p}_{x'} \cdot \mathbf{a}/\hbar} \psi(\mathbf{x}') &= \exp(-\mathbf{a} \cdot \nabla') \psi(\mathbf{x}') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} a_{i_1} \cdots a_{i_n} \partial_{i_1}' \cdots \partial_{i_n}' \psi(\mathbf{x}') \\ &= \psi(\mathbf{x}' - \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (441)$$

を生成する [36, p.17].

^{*105} 古典的な関係式からの類推で適正な量子力学的関係式を得る(発見的・歴史的な)手続きとして, Poisson 括弧を交換子に置き換える Dirac の規則 $\{, \} \rightarrow [,]/i\hbar$ が知られている [11, pp.67–68].

式(439)から，運動量固有状態 $|\mathbf{p}'\rangle$ の波動関数は平面波

$$\langle \mathbf{x}' | \mathbf{p}' \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}' / \hbar} \quad (442)$$

となる [11, pp.74–75, pp.79–80]^{*106}. すると運動量表示(運動量空間)の波動関数 $\phi_\alpha(\mathbf{p}') = \langle \mathbf{p}' | \alpha \rangle$ は座標空間の波動関数 $\psi_\alpha(\mathbf{x}')$ の Fourier 変換

$$\psi_\alpha(\mathbf{x}') = \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle = \int d^3p' \langle \mathbf{x}' | \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p}' | \alpha \rangle = \int \frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}' / \hbar} \phi_\alpha(\mathbf{p}'), \quad (443)$$

$$\phi_\alpha(\mathbf{p}') = \langle \mathbf{p}' | \alpha \rangle = \int d^3x' \langle \mathbf{p}' | \mathbf{x}' \rangle \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle = \int \frac{d^3x'}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}' / \hbar} \psi_\alpha(\mathbf{x}') \quad (444)$$

で与えられ [11, pp.75–76, p.80], 物質波 $\psi_\alpha(\mathbf{x}')$ の波数 $\mathbf{k}'$ は de Broglie の関係式

$$\mathbf{p}' = \hbar \mathbf{k}' \quad (445)$$

を満たす.

^{*106} 運動量固有関数(442): $\psi_{\mathbf{p}'} = \langle \mathbf{x}' | \mathbf{p}' \rangle \sim e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}' / \hbar}$ に対して $|\psi_{\mathbf{p}'}|^2 = \text{const}$ (空間的に)なので，運動量が確定した状態では粒子の位置はすべて同じ確率である．これは不確定関係と整合している ($\Delta x_i = \infty$, $\Delta p_i = 0$) [30, pp.71–72].

第7章の式の導出など

■交換関係(433): $[p_i, p_j] = 0$ の導出 [11, p.65]

$\Delta x'$ と $\Delta y'$ の2次までの近似で式(432)は

$$\begin{aligned} 0 &= [\mathcal{T}(\Delta y \hat{\mathbf{y}}), \mathcal{T}(\Delta x \hat{\mathbf{x}})] = [e^{-ip_y \Delta y / \hbar}, e^{-ip_x \Delta x / \hbar}] \\ &= \left[\left(1 - \frac{ip_y \Delta y}{\hbar} - \frac{p_y^2 (\Delta y')^2}{2\hbar^2} + \dots \right), \left(1 - \frac{ip_x \Delta x}{\hbar} - \frac{p_x^2 (\Delta x')^2}{2\hbar^2} + \dots \right) \right] \\ &\simeq - \frac{(\Delta x')(\Delta y')[p_y, p_x]}{\hbar^2}, \quad \therefore [p_x, p_y] = 0 \end{aligned}$$

を得る．このように $\Delta x'$, $\Delta y'$ の1次までの項は消えるため，1次近似では有意な結論を引き出せない(角運動量の交換関係の場合も同様 [11, p.212]). 上式で添字を巡回置換した関係 $[p_y, p_z] = [p_z, p_x] = 0$ と自明な恒等式 $[p_x, p_x] = 0$, etc. を合わせると，式(433): $[p_i, p_j] = 0$ のようにまとめられる．

■運動量が平行移動を生成すること (430) と正準交換関係 (435) の等価性の確認
 運動量 $\mathbf{p}$ の定義として平行移動演算子の表式 (430): $\mathcal{T}(\mathbf{a}) = e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}/\hbar}$ と正準交換関係 (435): $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ が等価であることを示す. $\mathcal{T}(\mathbf{a})$ が平行移動演算子であることから

$$\begin{aligned} x_i \mathcal{T}(\mathbf{a}) |\mathbf{x}'\rangle &= x_i |\mathbf{x}' + \mathbf{a}\rangle = (x'_i + a_i) |\mathbf{x}' + \mathbf{a}\rangle, \\ \mathcal{T}(\mathbf{a}) x_i |\mathbf{x}'\rangle &= x'_i \mathcal{T}(\mathbf{a}) |\mathbf{x}'\rangle = x'_i |\mathbf{x}' + \mathbf{a}\rangle \end{aligned}$$

であり, これらを辺々引くと

$$[x_i, \mathcal{T}(\mathbf{a})] |\mathbf{x}\rangle = a_i |\mathbf{x}' + \mathbf{a}\rangle$$

となる. ここで平行移動演算子が $\mathcal{T}(\mathbf{a}) = e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}/\hbar} = 1 - \frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{a} + O(a^2)$: (430) と表されるとき両辺 $\mathbf{a}$ の1次の項を取り出すと

$$-\frac{i}{\hbar} a_j [x_i, p_j] |\mathbf{x}'\rangle = a_i |\mathbf{x}'\rangle$$

となるので, 正準交換関係 (435): $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ を得る [11, pp.61–63].

逆に交換関係(435)が成り立つとき Baker–Hausdorff の補助定理(320)より, 有限の $\boldsymbol{a}$ に対して式(430)で定義される演算子 $\mathcal{T}(\boldsymbol{a}) = e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}/\hbar}$ は

$$\begin{aligned} x_i \mathcal{T}(\boldsymbol{a}) &= \mathcal{T}(\boldsymbol{a}) [\mathcal{T}(\boldsymbol{a})^\dagger x_i \mathcal{T}(\boldsymbol{a})] |\boldsymbol{x}'\rangle \\ &= \mathcal{T}(\boldsymbol{a}) \left(x_i + \frac{i}{\hbar} a_j [p_j, x_i] + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 a_j a_k [p_k, [p_j, x_i]] + \cdots \right) |\boldsymbol{x}'\rangle \\ &= \mathcal{T}(\boldsymbol{a}) (x_i + a_i) |\boldsymbol{x}'\rangle = (x'_i + a_i) |\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{a}\rangle \end{aligned}$$

を満たす平行移動の演算子となるため, $\boldsymbol{p}$ は平行移動の生成演算子となる.

■運動量演算子の波動関数への作用(439),(440)の導出
 まず平行移動演算子の表式(430): $\mathcal{T}(\mathbf{a}) = e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}/\hbar}$ から式
 (439): $\langle \mathbf{x}' | \mathbf{p} | \alpha \rangle = -i\hbar \nabla' \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle$ を導こう.

$$\begin{aligned}
 e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}/\hbar} |\alpha\rangle &= \mathcal{T}(\mathbf{a}) |\alpha\rangle \\
 &= \int d^3x' \mathcal{T}(\mathbf{a}) |\mathbf{x}'\rangle \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle \\
 &= \int d^3x' |\mathbf{x}' + \mathbf{a}\rangle \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle \\
 &= \int d^3x'' |\mathbf{x}''\rangle \langle \mathbf{x}'' - \mathbf{a} | \alpha \rangle \quad (\mathbf{x}'' \equiv \mathbf{x}' + \mathbf{a})
 \end{aligned}$$

であり, 最左辺と最右辺について $\mathbf{a}$ の1次の項を取り出すと

$$\begin{aligned}
 -\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{a} |\alpha\rangle &= \int d^3x'' |\mathbf{x}''\rangle (-\mathbf{a} \cdot \nabla'') \langle \mathbf{x}'' | \alpha \rangle, \quad \left(\nabla'' \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}''} \right) \\
 \therefore \mathbf{p} |\alpha\rangle &= \int d^3x'' |\mathbf{x}''\rangle (-i\hbar \nabla'') \langle \mathbf{x}'' | \alpha \rangle
 \end{aligned}$$

となるので，式(439):

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}' | \mathbf{p} | \alpha \rangle &= \int d^3 x'' \langle \mathbf{x}' | \mathbf{x}'' \rangle (-i\hbar \nabla'') \langle \mathbf{x}'' | \alpha \rangle \\ &= -i\hbar \nabla' \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle \quad (\because \text{規格直交性 } \langle \mathbf{x}' | \mathbf{x}'' \rangle = \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}''))\end{aligned}$$

を得る [11, p.72].

次に式(439)を繰り返し用いると，公式(440)が得られる．実際 $|p_i^n \alpha\rangle \equiv p_i^n |\alpha\rangle$ とおくと，

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}' | p_i^n | \alpha \rangle &= \langle \mathbf{x}' | p_i | p_i^{n-1} \alpha \rangle = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x'_i} \right) \langle \mathbf{x}' | p_i^{n-1} \alpha \rangle \\ &= \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x'_i} \right) \langle \mathbf{x}' | p_i | p_i^{n-2} \alpha \rangle = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x'_i} \right)^2 \langle \mathbf{x}' | p_i^{n-2} \alpha \rangle \\ &= \cdots = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x'_i} \right)^n \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle : (440).\end{aligned}$$

■平面波状態(442)の導出

公式(439)を用いて，運動量固有状態 $|\mathbf{p}'\rangle$ の波動関数 $\langle \mathbf{x}' | \mathbf{p}' \rangle$ に対する微分方程式を作ると，

$$p'_i \langle \mathbf{x}' | \mathbf{p}' \rangle = \langle \mathbf{x}' | p_i | \mathbf{p}' \rangle = -i\hbar \partial_i' \langle \mathbf{x}' | \mathbf{p}' \rangle$$

となる．これは $\langle \mathbf{x}' | \mathbf{p}' \rangle = N e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}' / \hbar}$ とすると満たされ，さらに式(439)の導出で用いた規格直交条件

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') &= \langle \mathbf{x}' | \mathbf{x}'' \rangle = \int d^3p' \langle \mathbf{x}' | \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p}' | \mathbf{x}'' \rangle \\ &= \int d^3p' (N e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}' / \hbar}) (N^* e^{-i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}'' / \hbar}) \\ &= |N|^2 \int d^3p' e^{i\mathbf{p}' \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') / \hbar} = |N|^2 (2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \end{aligned}$$

から規格化定数 N を定めると，

$$N = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}, \quad \therefore \text{式(442)} : \langle \mathbf{x}' | \mathbf{p}' \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}' / \hbar}$$

を得る．ただし波動関数 $\langle \mathbf{x}' | \mathbf{p}' \rangle$ の位相は確率密度 $|\langle \mathbf{x}' | \mathbf{p}' \rangle|^2$ に影響しないため，任意にとって良いことに注意して $N > 0$ とした [11, pp,74–75].

■座標表示と運動量表示の波動関数の相互変換(443),(444)に関する参考
座標空間と運動量空間の各々で波動関数が適正な規格化条件

$$1 = \langle \alpha | \alpha \rangle = \begin{cases} \int d^3x' \langle \alpha | \mathbf{x}' \rangle \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle = \int d^3x' |\psi_\alpha(\mathbf{x}')|^2 \\ \int d^3p' \langle \alpha | \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p}' | \alpha \rangle = \int d^3p' |\phi_\alpha(\mathbf{p}')|^2 \end{cases}$$

を満たすためには、式(443),(444)Fourier変換と逆変換の各々に因子 $(2\pi\hbar)^{3/2}$ を割り当てなければならない。因子 $\hbar$ は波数 $\mathbf{k}'$ と運動量 $\mathbf{p}' = \hbar\mathbf{k}'$ の違いに起因している。

第7章の原稿

ここからは非相対論的な1粒子系に対する量子力学の運動学として、運動量と角運動量の理論を復習しよう。古典力学では系の並進対称性と回転対称性から、それぞれ運動量と角運動量の保存則が導かれ [8, p.17, pp.21–22], 翻って運動量と角運動量は順に系の並進と回転を生成する [6, pp.550–566]. ところで並進と回転は明らかにそれぞれ群を成す。そこで量子力学的な演算子としては、運動量と角運動量は並進と回転の生成子として定義されることを説明する。もちろん、これは積極的な飛躍である。「古典力学は量子力学から導けるがその逆はできない」 [11, p.113] のであり、古典論からボトムアップ式により根源的な量子論を探り当てる逆問題は、必然的に積極的な飛躍を伴う推論を必要とする。その正当性は結果から判断する他ない。

運動量から始めよう。粒子の位置 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ の3成分は同時に確定した値を持つことができる。したがって位置演算子の各成分は可換な演算子となる。そこで位置演算子 $\boldsymbol{x}$ の固有値 $\boldsymbol{x}'$ に属する固有ケットを $|\boldsymbol{x}'\rangle$ と書く。このように演算子にハットを付ける代わりに、我々はしばらく固有値にプライムを付けて演算子と区別する記法を用いる。また $|\boldsymbol{x}'\rangle$ から定ベクトル $\boldsymbol{a}$ だけ粒子を平行移動した状態 (429) を作る平行移動演算子 $\mathcal{T}(\boldsymbol{a})$ を定義する [11, pp.56–59]. 次いで平行移動の演算子を式 (430) のように書いて運動量演算子 $\boldsymbol{p}$ を定義する。これは6.4.3項で導入したLie群の言葉で言えば、空間並進操作の成す群の生成子として運動量 $\boldsymbol{p}$ を定義するということであり、このとき運動量 $\boldsymbol{p}$ は平行移動の生成演算子であると言われる。ただし $\hbar$ は $\boldsymbol{p}$ を運動量とした

ときに、指数を無次元化するために必要な因子である [11, pp.62–64]. また指数において虚数単位 i を括り出したのは、運動量 p が Hermite 演算子で表される物理量であることまで要求したときに、演算子 (430) がユニタリーとなり、その作用の下で確率が保存することを保証するためである. 実際、運動量 p が Hermite であれば、平行移動の演算子 (430) は Hermite 共役 (431) が逆演算子となるので、ユニタリーである. 逆に言えば平行移動の演算子 (430) がユニタリーであるためには、運動量 p は Hermite でなければならない [11, pp.59–61].

さらに平行移動の性質として幾何学的に理解できるように、 x 方向への並進と y 方向への並進を立て続けに行った結果が、2つの並進の順序に依らないことなど (432) を要請すると、交換関係 (433) が導かれる (導出スライド参照). すなわち運動量演算子 $p = (p_1, p_2, p_3) = (p_x, p_y, p_z)$ の各成分は可換である、したがって、それらの同時固有ケット $|p'\rangle$ の存在が保証される [11, pp.64–66]. 逆に交換関係 (433) が成り立つとき、異なる並進操作が交換すること (432) は明らかである. さらにここから、任意の並進ベクトル a, b に対して式 (434) が成り立つことも言える. これは平行移動の期待される性質である [11, p.60].

式 (430) のように平行移動の生成演算子として運動量を定義することは、交換関係 (435) を満たす演算子として運動量 p を導入することと同等である (導出スライド参照). これは Heisenberg の不確定関係 (436) を含意する [11, pp.61–64]. ただし不等式の下限の数係数にこだわることは、ややペダンティックな感が否めない. そこで不確定関係

(436)は簡単に式(437)のように書いて良い [30, p.71].

一連の交換関係(438)はまとめて正準交換関係と呼ばれる．正準交換関係は共役な正準変数 x_i, p_i の間に不確定関係をもたらし，理論を量子化する際の出発点となる．交換関係(438)は正準変数に対する古典的なPoisson括弧 [8, p.172] と類似している [11, pp.66–68].

ところで状態 $|\alpha\rangle$ での波動関数は粒子を位置 x' に見出す確率密度の振幅 $\psi_\alpha(x') \equiv \langle x'|\alpha\rangle$ として定義される [11, p.69]. ここで平行移動演算子の表式 (430): $\mathcal{T}(a) = e^{-ip \cdot a/\hbar}$ から，状態 $|\alpha\rangle, p|\alpha\rangle$ の波動関数 $\langle x'|\alpha\rangle, \langle x'|p|\alpha\rangle$ に対する式 (439), (440) が得られる (導出スライド参照) [11, pp.72–73]. これらは状態に運動量演算子 p を作用させることが，波動関数 $\psi_\alpha = \langle x'|\alpha\rangle$ に微分演算子 $p_{x'} = -i\hbar\nabla'$ を作用させることと等価であることを意味している．実際，微分演算子 $p_{x'} = -i\hbar\nabla'$ が波動関数に作用する場合の運動量演算子であり，したがって波動関数の空間分布の並進を生成することは，直接的には式(441)のように確かめられる．ここで波動関数をスカラー場と仮定すれば，物理系を a だけ能動的に平行移動するとき，座標 x' の位置における操作後の波動関数の値は，操作前の波動関数 ψ の位置 $x' - a$ における値 $\psi(x' - a)$ となるので，式(441)は平行移動の演算子の作用として適正である [36, p.17]. なお虚数単位 i と微分演算子 ∇' はいずれも反Hermiteであり，その結果 $p_{x'} = -i\hbar\nabla'$ は全体としてHermiteとなっている [30, p.67].

さらに式(439)から運動量固有状態 $|p'\rangle$ の波動関数が平面波(442)であることが導かれる(導出スライド参照) [11, pp.74–75, pp.79–80].

ここで運動量表示の(あるいは運動量空間における)波動関数 $\phi_\alpha(p') = \langle p' | \alpha \rangle$ を定義する. その絶対値の2乗 $|\phi_\alpha(p')|^2$ は粒子の運動量を p' に見出す確率密度を与える. (これに対して通常の波動関数 $\psi_\alpha(x') = \langle x' | \alpha \rangle$ は座標表示の波動関数と呼ばれる.) このとき平面波の式(442)より, 運動量空間の波動関数 $\phi_\alpha(p')$ は座標空間の波動関数 $\psi_\alpha(x')$ のFourier変換にあたること(443),(444)が見出される(導出スライドにて補足) [11, pp.75–76, p.80]. これは物質波 $\psi_\alpha(x')$ の波数 k' が, 係数 $\hbar$ の違いを除いて運動量に一致すること(445)を意味している. 式(445)はde Broglieの関係式と呼ばれ, 我々が粒子と呼んでいる対象の粒子性と波動性を関係付ける. 運動量(445)に対応する波長 $\lambda = 2\pi/|k'|$ はde Broglie波長と呼ばれる. ひとまずde Broglieの関係(445)が導かれたことから, 運動量を空間並進の生成演算子として定義したことが正当化できる. この後で量子ダイナミクスの古典的極限を調べる際に, 運動量演算子と古典的な運動量の対応はより明瞭になるだろう.

最後に波動全般に対する数学的な関係として, 任意の波動の空間的な広がり と 波数空間における広がり の間には不確定関係が成り立つことを思い出そう [4, pp.162–163]. 特に波動関数 $\psi_\alpha(x')$ に対してはそのFourier成分 $\phi_\alpha(p')$ が運動量空間の波動関数なので, これは粒子の位置と運動量の間の不確定関係(437)を意味する [30, pp.70–72]. 運動量空間の波動関数がFourier変換(444)であることと不確定関係(437)のいずれも元を質せば正準交換関係の帰結であることを踏まえれば, 改めて不確定関係(437)が説明できた

のは整合的であり理に適っている.

8 角運動量

8.1 一般論の復習

8.1.1 回転および角運動量の交換関係

第 i 軸周りの回転行列 $R_i(\phi)$ は一般に非可換であり (図32 参照)^{*107}, ε の2次近似で

$$[R_x(\varepsilon), R_y(\varepsilon)] = R_z(\varepsilon^2) - 1. \quad (446)$$

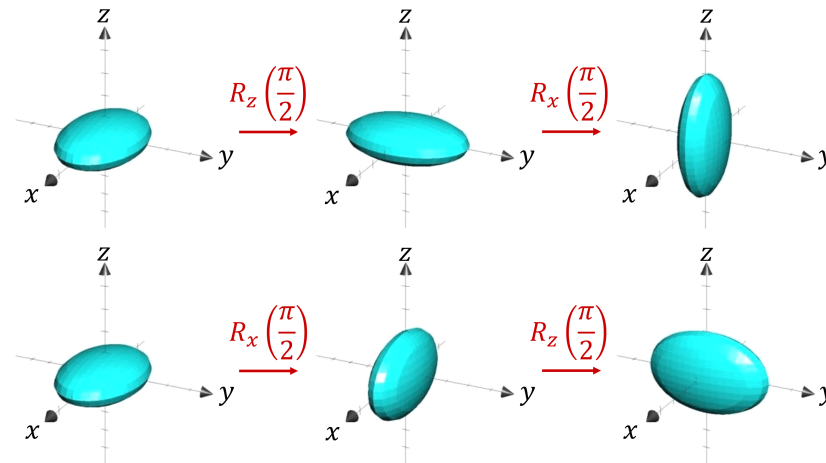


図32 有限回転の非可換性の例解 ($R_i(\pi/2)$ は第 i 軸周りの 90° 回転を表す)

^{*107} 回転角 ϕ は第 i 軸の正の側から見て反時計回りを正とする. ここでの回転操作は能動的変換である.

単位ベクトル $\mathbf{n}$ 周りの物理系の角度 ϕ 回転に伴う状態の変化を

$$|\alpha\rangle \rightarrow \mathcal{D}(\mathbf{n}, \phi) |\alpha\rangle, \quad (447)$$

$$\mathcal{D}(\mathbf{n}, \phi) = e^{-i\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \phi / \hbar} \quad (\text{回転の演算子}) \quad (448)$$

で与える生成演算子 (Hermite 演算子) $\mathbf{J}$ として, 角運動量を定義する.
回転演算子も回転行列の交換関係 (446) と同じ掛け算則

$$[\mathcal{D}_x(\varepsilon), \mathcal{D}_y(\varepsilon)] = \mathcal{D}_z(\varepsilon^2) - 1, \text{ etc.} \quad (\mathcal{D}_x(\varepsilon) \equiv \mathcal{D}(\hat{\mathbf{x}}, \varepsilon), \text{ etc.}) \quad (449)$$

を満たすことから, 角運動量の基本的交換関係

$$[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k \quad (450)$$

が導かれる^{*108}. 等価的に交換関係 (450) を満たす Hermite 演算子として角運動量 $\mathbf{J}$ を定義すると, 状態の回転 (447) に伴い期待値 $\langle \mathbf{J} \rangle \equiv \langle \alpha | \mathbf{J} | \alpha \rangle$ はベクトルの変換則

$$\langle J_k \rangle \rightarrow \sum_l R_{kl} \langle J_l \rangle \quad (451)$$

に従って回転する. 少なくとも軌道角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ は角運動量の定義を満たす.
(以上, 文献 [11, pp.205–216].)

^{*108} 添字 k で和をとる. 両辺とも角運動量の2乗の次元を持っていることに注意する.

8.1.1 項の式の導出など

■回転行列の交換関係(446)の導出 [11, pp.206–209]

無限小回転角 ε の2次まで残すと、回転行列は

$$R_z(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon & 0 \\ \sin \varepsilon & \cos \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．次に $R_x(\varepsilon), R_y(\varepsilon)$ を調べよう．物体の z 軸周りの回転は，軸の名前をサイクリックに

$$x \rightarrow y, \quad y \rightarrow z, \quad z \rightarrow x$$

と置き替えれば，物体の x 軸周りの回転になる．したがって $R_x(\varepsilon)$ の表式を得るには $R_z(\varepsilon)$ において

$$(x, x) \text{ 成分} \rightarrow (y, y) \text{ 成分}, \quad (x, y) \text{ 成分} \rightarrow (y, z) \text{ 成分}, \quad \text{etc.}$$

と成分を移動させれば良い．これは図33のように，行列の右端と左端，上端と下端とが周期境界条件によって繋がっていると考え，全成分を“右下に”ずらせば良いことを

意味している．すると同様に

$$R_x(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & -\varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \end{pmatrix}, \quad R_y(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \end{pmatrix}$$

が得られる．直接の行列計算により，同じ近似で

$$R_x(\varepsilon)R_y(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & 1 - \varepsilon^2 \end{pmatrix},$$

$$R_y(\varepsilon)R_x(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 0 & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & 1 - \varepsilon^2 \end{pmatrix},$$

$$\therefore R_x(\varepsilon)R_y(\varepsilon) - R_y(\varepsilon)R_x(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon^2 & 0 \\ \varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_z(\varepsilon^2) - 1 : (446)$$

となることを確かめられる(最右辺の1は単位行列).

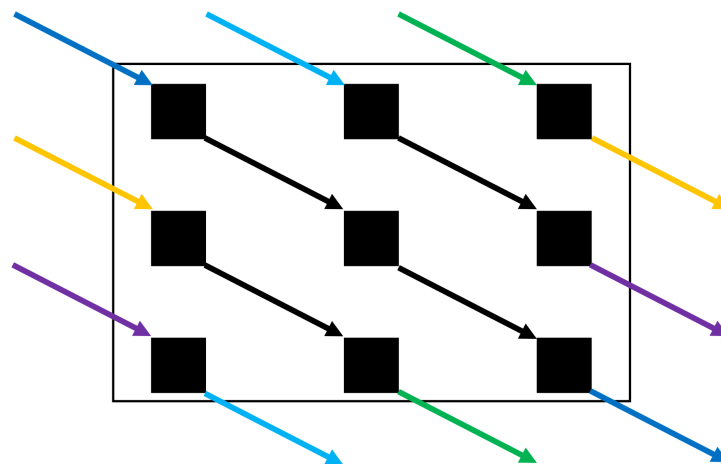


図33 3×3 の行列 $R_z(\varepsilon)$ の各成分を“右下に”ずらす様子

■角運動量の基本的交換関係(450)の導出 [11, p.212]

回転行列の交換関係(446)は微小な回転角 ε の2次までを考慮して得られた．そこで回転の演算子の交換関係

$$[\mathcal{D}_x(\varepsilon), \mathcal{D}_y(\varepsilon)] = \mathcal{D}_z(\varepsilon^2) - 1$$

についても，表式(448): $\mathcal{D}(\mathbf{n}, \phi) = e^{-i\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \phi / \hbar}$ を用いて ε の2次まで正確に書き下すと，

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{iJ_x \varepsilon}{\hbar} - \frac{J_x^2 \varepsilon^2}{2\hbar^2}\right) \left(1 - \frac{iJ_y \varepsilon}{\hbar} - \frac{J_y^2 \varepsilon^2}{2\hbar^2}\right) \\ & - \left(1 - \frac{iJ_y \varepsilon}{\hbar} - \frac{J_y^2 \varepsilon^2}{2\hbar^2}\right) \left(1 - \frac{iJ_x \varepsilon}{\hbar} - \frac{J_x^2 \varepsilon^2}{2\hbar^2}\right) \\ & = 1 - \frac{iJ_z \varepsilon^2}{\hbar} - 1, \quad \therefore [J_x, J_y] = i\hbar J_z \end{aligned} \tag{452}$$

が得られる．

交換関係(450): $[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k$ は $(i, j) = (1, 2), (2, 3), (3, 1)$ とおくと，上式(452)および添字を巡回置換した関係を再現する．また交換子は順序を入れ替えると，全体の符号が反転する．式(450)はこの性質を満たしているから， $(i, j) = (2, 1), (3, 2), (1, 3)$ に

対しても正しい. 最後に $(i, j) = (1, 1), (2, 2), (3, 3)$ に対しては, 式(450)は自明な関係 $[J_i, J_i] = 0$ (ただし i について和をとらない) を与える.

■期待値 $\langle J_k \rangle$ がベクトルとして回転すること (式(451)) の証明 [11, pp.213–216]

最初にデモンストレーションとして, z 軸周りに系を有限角 ϕ だけ回転させる場合に証明を行う. 系の回転に伴って状態は $|\alpha\rangle \rightarrow e^{-iJ_z\phi/\hbar} |\alpha\rangle$ と変化するので, 角運動量の期待値は

$$\langle \mathbf{J} \rangle \equiv \langle \alpha | \mathbf{J} | \alpha \rangle \rightarrow \langle \alpha | e^{iJ_z\phi/\hbar} \mathbf{J} e^{-iJ_z\phi/\hbar} | \alpha \rangle$$

と変化する. 例えば演算子積 $e^{iJ_z\phi/\hbar} \mathbf{J} e^{iJ_z\phi/\hbar}$ の x 成分は, Baker–Hausdorff の補助定理 (320) を用いて,

$$e^{iJ_z\phi/\hbar} J_x e^{-iJ_z\phi/\hbar} = J_x + \frac{i\phi}{\hbar} [J_z, J_x] + \frac{1}{2!} \left(\frac{i\phi}{\hbar} \right)^2 [J_z, [J_z, J_x]] + \cdots$$

と計算できる.

ここで角運動量の交換関係 (450) を用いると, 帰納的に

$$\underbrace{[J_z, [J_z, \cdots [J_z, J_x] \cdots]]}_{2n \text{ 個の } J_z} \underbrace{\cdots}_{\text{括弧のみ}} = (i\hbar)^{2n} (-1)^n J_x, \quad (453)$$

$$\underbrace{[J_z, [J_z, \cdots [J_z, J_x] \cdots]]}_{2n+1 \text{ 個の } J_z} \underbrace{\cdots}_{\text{括弧のみ}} = (i\hbar)^{2n+1} (-1)^n J_y \quad (454)$$

が見出される．すなわち式(453)は $n = 0$ で成り立つ．そしてある n に対して式(453)が成り立つと仮定すると式(454)が，したがって式(453)で $n \rightarrow n + 1$ とした式が成り立つことを証明できる．

式(453)，式(454)を用いると，

$$\begin{aligned} e^{iJ_z\phi/\hbar} J_x e^{-iJ_z\phi/\hbar} &= J_x \left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \cdots \right) - J_y \left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \cdots \right) \\ &= J_x \cos \phi - J_y \sin \phi \end{aligned}$$

とまとめられる．同様に

$$e^{iJ_z\phi/\hbar} J_y e^{-iJ_z\phi/\hbar} = J_x \sin \phi + J_y \cos \phi$$

が得られる．さらに J_z と $e^{-iJ_z\phi/\hbar}$ は交換するので，

$$e^{iJ_z\phi/\hbar} J_z e^{-iJ_z\phi/\hbar} = J_z e^{iJ_z\phi/\hbar} e^{-iJ_z\phi/\hbar} = J_z.$$

以上より期待値 $\langle \mathbf{J} \rangle$ は z 軸周りの回転の行列により

$$\begin{pmatrix} \langle J_x \rangle \\ \langle J_y \rangle \\ \langle J_z \rangle \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle J_x \rangle \\ \langle J_y \rangle \\ \langle J_z \rangle \end{pmatrix}$$

と変化するため，ベクトルとしての変換則(451)が満たされている．次に回転行列 $R(\mathbf{n}, \phi)$ で特徴付けられる一般の回転に対して，与式

$$e^{i\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\phi/\hbar} J_k e^{-i\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\phi/\hbar} = \sum_l R_{kl}(\mathbf{n}, \phi) J_l$$

を示そう．ひとまず回転角 ϕ を無限小とすれば，再び Baker–Hausdorff の補助定理より ϕ の1次までの近似で

$$e^{i\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\phi/\hbar} J_k e^{-i\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\phi/\hbar} \simeq J_k + \frac{i\phi}{\hbar} n_l [J_l, J_k] = J_k + \phi \varepsilon_{klm} n_l J_m = [\mathbf{J} + \phi \mathbf{n} \times \mathbf{J}]_k$$

より上式が成り立つ．そこで回転角 ϕ が有限の場合にも， $N \gg 1$ として無限小回転角 ϕ/N に対して上式を繰り返し適用すれば，

$$\begin{aligned} e^{i\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\phi/\hbar} J_k e^{-i\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\phi/\hbar} &= e^{i\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\phi/N\hbar} \cdots e^{i\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\phi/N\hbar} J_k e^{-i\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\phi/N\hbar} \cdots e^{-i\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\phi/N\hbar} \\ &= \sum_{l_1, \dots, l_N} R_{kl_N}(\mathbf{n}, \phi/N) \cdots R_{l_2 l_1}(\mathbf{n}, \phi/N) J_{l_1} \\ &= \sum_l R_{kl}(\mathbf{n}, \phi) J_l \end{aligned}$$

が成り立つ．

■軌道角運動量がHermite性であり角運動量代数(450)を満たすことの確認
軌道角運動量の量子力学的演算子を $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ で定義すると, そのHermite性は

$$\begin{aligned} L_i^\dagger &= \varepsilon_{ijk} (x_j p_k)^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k x_j = \varepsilon_{ijk} (x_j p_k + [p_k, x_j]) = \varepsilon_{ijk} (x_j p_k - i\hbar \delta_{jk}) \\ &= \varepsilon_{ijk} x_j p_k = L_i \end{aligned}$$

と確かめられる. また正準交換関係(438)より

$$\begin{aligned} [L_i, x_j] &= \varepsilon_{ikl} x_k [p_l, x_j] = -i\hbar \varepsilon_{ikl} \delta_{lj} x_k = i\hbar \varepsilon_{ijk} x_k, \\ [L_i, p_j] &= \varepsilon_{ikl} [x_k p_l, p_j] = \varepsilon_{ikl} [x_k, p_j] p_l = i\hbar \varepsilon_{ijl} p_l \end{aligned}$$

であり, これらを用いると

$$\begin{aligned} [L_i, L_j] &= \varepsilon_{jkl} [L_i, x_k p_l] \\ &= \varepsilon_{jkl} ([L_i, x_k] p_l + x_k [L_i, p_l]) \\ &= i\hbar \varepsilon_{jkl} (\varepsilon_{ikm} x_m p_l + \varepsilon_{jlm} x_k p_m) \\ &= i\hbar (\delta_{ji} \delta_{lm} - \delta_{jm} \delta_{li}) x_m p_l - i\hbar (\delta_{ji} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{ki}) x_k p_m \\ &= i\hbar (x_i p_j - x_j p_i) \\ &= i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k. \end{aligned}$$

8.1.1 項の原稿

角運動量の理論へと話を進めよう．まずは回転の生成演算子として量子力学における角運動量を導入し，角運動量が基本的交換関係(と Hermite 性)によって定義付けられることを説明する [11, pp.205–213].

よく知られているように，物体に2つの有限角の回転操作を施した結果は，回転の順序によって異なる(図32参照)．このことを反映して，ベクトル V を $i = x, y, z$ 軸の周りに角度 ϕ だけ回転したベクトルを $V' = R_i(\phi)V$ と書いて回転行列 $R_i(\phi)$ を定義すると，一般に2つの回転行列は交換しない．具体的には微小な回転角 ε に対して， ε の2次まで考慮すると，交換関係(446)が見出され，右辺は ε の2次の量である(導出スライド参照)．この結果は ε の1次近似では， $R_x(\varepsilon)$ と $R_y(\varepsilon)$ が交換することを意味している^{*109}．

ここで状態 $|\alpha\rangle$ にある系を単位ベクトル n の周りに角度 ϕ だけ回転させたときの状態の変化を(447)と書いて回転の演算子 $\mathcal{D}(n, \phi)$ を定義する．次に回転の演算子を式(448)で与える Hermite 演算子として，角運動量 J を定義する．言い換えれば第7章で空間並進の生成演算子として運動量を定義したのと同様に，量子力学では角運動量は空間回転

^{*109} このように，質点の微小時間 Δt における，角速度ベクトル ω_1, ω_2 での回転では，変位の合成する順序の違いによる差は $O(\Delta t^2)$ となる．角速度ベクトルの和 $\omega = \omega_1 + \omega_2$ が意味を持つのはこのためである．(そもそも角速度ベクトル ω が質点の変位を与えるには，微小な経過時間 Δt の1次までの近似においてである．)

の生成演算子として定義される．式(448)において指数の角運動量 $\mathbf{J}$ は因子 $\hbar$ により適切に無次元化されており， $\mathbf{J}$ の Hermite 性により回転演算子 $\mathcal{D}(\mathbf{n}, \phi)$ のユニタリー性が保証される．

さて，回転群のあらゆる表現(行列)は抽象的な回転操作と同じ掛け算則を満たさねばならないので，回転の演算子もまた回転行列の交換関係(446)と同様の交換関係(449)を満たさねばならない．ここから角運動量の基本的交換関係(450)が導かれる(導出スライド参照)

結局，角運動量は交換関係(450) (と Hermite 性)によって定義付けられると言って良い．実際に角運動量の交換関係(450)を満たす Hermite 演算子 $\mathbf{J}$ に対して，その指数(448): $\mathcal{D}(\mathbf{n}, \phi) = e^{-i\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \phi / \hbar}$ が回転の演算子となることの証拠を挙げることができる．すなわち状態が式(447): $|\alpha\rangle \rightarrow \mathcal{D}(\mathbf{n}, \phi) |\alpha\rangle$ のように変化すると，角運動量の期待値 $\langle \mathbf{J} \rangle \equiv \langle \alpha | \mathbf{J} | \alpha \rangle$ はベクトルの変換則(451)に従って回転することが導かれる(ここに R_{kl} は $\mathbf{n}$ 軸周りの角度 ϕ 回転の回転行列の要素である；導出スライド参照) [11, pp.213–216]*¹¹⁰．

古典的な角運動量の定義との繋がりを見るために，軌道角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ を考えよう．すると対応する量子力学的な演算子は Hermite であり，正準交換関係(438)より角

*¹¹⁰ なお角運動量 $\mathbf{J}$ に限らず，任意のベクトル演算子 $\mathbf{V}$ の期待値が同様の変換則 $\langle V_k \rangle = \sum_l R_{kl} \langle V_l \rangle$ に従って変換しなければならないという事実はむしろ，ベクトル演算子 $\mathbf{V}$ を定義するのに利用される [11, pp.318–320]．

運動量の交換関係(450)を自動的に満たす(導出スライド参照). したがって少なくとも軌道角運動量は量子力学的な角運動量の定義を満たす [11, pp.265–266]. しかもここでの角運動量の定義は古典的対応物のないスピン角運動量にも適用できる.

8.1.2 角運動量の固有値と固有状態

角運動量の交換関係 (450) から導かれる一連の結果を復習する.

■ 交換関係とはしご演算子 [11, pp.253–256]

角運動量の自乗の演算子 $\mathbf{J}^2 \equiv J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ は

$$[\mathbf{J}^2, J_k] = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \quad (455)$$

を満たす Casimir (カシミヤ) 演算子 [36, p.129] [7, p.348] である. よって, $\mathbf{J}^2$ (固有値 a) と 1 つの角運動量成分 J_z (固有値 b) の同時固有ケット $|a, b\rangle$ が採れる. はしご演算子

$$J_{\pm} \equiv J_x \pm iJ_y \quad (456)$$

は J_z の固有値を $\hbar$ だけ増加・減少させる:

$$J_{\pm} |a, b\rangle = c_{\pm} |a, b \pm \hbar\rangle. \quad (c_{\pm} \text{ は比例定数}) \quad (457)$$

■ $\mathbf{J}^2$ および J_z の固有値 [11, pp.256–259]

n をゼロ以上の整数として, 固有値のとり得る値は

$$a = \hbar^2 j(j+1), \quad j = \frac{n}{2} : (\text{半})\text{整数} \quad (458)$$

$$b = m\hbar, \quad m = -j, -j+1, \dots, j-1, j. \quad (459)$$

そこで $\mathbf{J}^2$ と J_z の同時固有ケットを $|a, b\rangle \rightarrow |j, m\rangle$ と書き改めると，固有方程式は

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^2 |j, m\rangle &= \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle, \\ J_z |j, m\rangle &= m\hbar |j, m\rangle\end{aligned}\tag{460}$$

となる^{*111}.

■角運動量演算子の行列要素 [11, pp.259–260]

各固有ケット $|j, m\rangle$ が規格化されているとすると， $\mathbf{J}^2, J_z$ の行列要素は

$$\langle j', m' | \mathbf{J}^2 | j, m \rangle = j(j+1)\hbar^2 \delta_{j'j} \delta_{m'm}, \quad \langle j', m' | J_z | j, m \rangle = m\hbar \delta_{j'j} \delta_{m'm}, \tag{461}$$

また，はしご演算子の作用(457)における係数は

$$J_{\pm} |j, m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\hbar |j, m \pm 1\rangle \tag{462}$$

のように定まる．このため，はしご演算子 $J_{\pm}$ の行列要素は

$$\langle j', m' | J_{\pm} | j, m \rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\hbar \delta_{j'j} \delta_{m', m \pm 1}. \tag{463}$$

^{*111} 粗く言えば固有値 j は， $\hbar$ を単位として測った角運動量の(古典的なベクトルとしての)大きさ $|\mathbf{J}|/\hbar$ に対応する．実際 $j \gg 1$ で $\mathbf{J}^2$ の固有値は $j(j+1)\hbar^2 \simeq (j\hbar)^2$ ． m は磁気量子数と呼ばれる．

8.1.2 項の式の導出など

■式(455): $[\mathbf{J}^2, J_k] = 0$ の導出
角運動量の交換関係(450)より

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}^2, J_k] &= J_i [J_i, J_k] + [J_i, J_k] J_i \\ &= i\hbar \varepsilon_{ikl} (J_i J_l + J_l J_i) \end{aligned}$$

であり、最右辺はダミー添字 i, l に関して ε_{ikl} が反対称、 $(J_i J_l + J_l J_i)$ が対称なのでゼロになる。

■はしご演算子 $J_{\pm} \equiv J_x \pm iJ_y$ の性質 (457) の導出 [11, pp.254–256]

角運動量の交換関係 (450) より

$$\begin{aligned}[J_z, J_{\pm}] &= [J_z, J_x] \pm i[J_z, J_y] = i\hbar J_y \pm i(-i\hbar J_x) \\ &= \pm \hbar J_x + i\hbar J_y = \pm \hbar (J_x \pm iJ_y) \\ &= \pm \hbar J_{\pm} \quad (\text{複号同順})\end{aligned}\tag{464}$$

が導かれる． また式 (455): $[\mathbf{J}^2, J_k] = 0$ より直ちに

$$[\mathbf{J}^2, J_{\pm}] = 0\tag{465}$$

が分かる． 以上を踏まえ， 状態 $J_{\pm} |a, b\rangle$ における J_z と $\mathbf{J}^2$ の固有値を調べると，

$$\begin{aligned}J_z(J_{\pm} |a, b\rangle) &= ([J_z, J_{\pm}] + J_{\pm} J_z) |a, b\rangle \\ &= (b \pm \hbar)(J_{\pm} |a, b\rangle), \quad (\because \text{式 (464)}) \\ \mathbf{J}^2(J_{\pm} |a, b\rangle) &= J_{\pm} \mathbf{J}^2 |a, b\rangle \quad (\because \text{式 (465)}) \\ &= a \mathbf{J}^2(J_{\pm} |a, b\rangle)\end{aligned}$$

を得る． すなわち $J_{\pm} |a, b\rangle$ は J_z と $\mathbf{J}^2$ の固有値 $b \pm \hbar, a$ に属する同時固有状態である (式 (457)).

■固有値 a, b のとり得る値 (458), (459) の導出 [11, pp.256–259]

まず古典的なベクトル $\mathbf{J}$ に対して $\mathbf{J}^2 \geq J_z^2$ が成り立つこととアナログな関係として、演算子 $\mathbf{J}^2, J_z$ の固有値 a, b は

$$a \geq b^2 \quad (466)$$

を満たすことを示す.

式 (466): $a \geq b^2$ の導出

$$\mathbf{J}^2 - J_z^2 = J_x^2 + J_y^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) = \frac{1}{2}(J_+ J_+^\dagger + J_+^\dagger J_+)$$

より,

$$\begin{aligned} a - b^2 &= \langle a, b | \mathbf{J}^2 - J_z^2 | a, b \rangle \\ &= \frac{1}{2}(\langle a, b | J_+) \cdot (J_+^\dagger | a, b \rangle) + \frac{1}{2}(\langle a, b | J_+^\dagger) \cdot (J_+ | a, b \rangle) \geq 0. \end{aligned}$$

ただし最後の不等号では任意のケット $|\cdot\rangle$ のノルムが $\langle \cdot | \cdot \rangle \geq 0$ を満たすことに注意した.

このため b は (与えられた固有値 a の下で) 最大値 $b_{\max}$ と最小値 $b_{\min}$ を持つ.

固有値 b が $b_{\max}$ を超えた状態や, $b_{\min}$ を下回った状態を作ることにはできないので,

$$J_+ |a, b_{\max}\rangle = 0, \quad J_- |a, b_{\min}\rangle = 0$$

でなければならない. ここで

$$\begin{aligned} J_{\mp} J_{\pm} &= (J_x \mp iJ_y)(J_x \pm iJ_y) \\ &= (J_x^2 + J_y^2) \pm i[J_x, J_y] \\ &= \mathbf{J}^2 - J_z^2 \mp \hbar J_z \end{aligned} \quad (467)$$

の関係に着目すると,

$$\begin{aligned} 0 &= J_- \underbrace{J_+ |a, b_{\max}\rangle}_{\text{零ケット}} = (a - \hbar b_{\max} - b_{\max}^2) \underbrace{|a, b_{\max}\rangle}_{\text{零ケットでない}}, \\ 0 &= J_+ \underbrace{J_- |a, b_{\min}\rangle}_{\text{零ケット}} = (a + \hbar b_{\min} - b_{\min}^2) \underbrace{|a, b_{\min}\rangle}_{\text{零ケットでない}} \end{aligned}$$

を得る. 最右辺における固有値がゼロでなければならないから,

$$\begin{aligned} a &= b_{\max}(b_{\max} + \hbar) = b_{\min}(b_{\min} - \hbar), \\ \therefore (b_{\max} + b_{\min})(b_{\max} - b_{\min} + \hbar) &= 0, \quad \therefore b_{\max} = -b_{\min} \end{aligned} \quad (468)$$

である．他方 $|a, b_{\min}\rangle$ に J_+ を有限回作用させると $|a, b_{\max}\rangle$ に到達するため^{*112}, n を整数として

$$b_{\max} = b_{\min} + n\hbar$$

と書けることと考え合わせると，固有値 b は式(459):

$$b = -j\hbar, \dots, m\hbar, \dots, j\hbar \quad \left(j = \frac{n}{2}\right)$$

のように量子化されることになる．

これを上式(468)に戻して，式(458): $a = \hbar^2 j(j+1)$ を得る．

^{*112} さもなくば条件 $J_+ |a, b_{\max}\rangle = 0$ によって状態が消失することがなく， b が最大値を持つという我々の得た結論に反して，いくらでも大きな固有値 $b(> b_{\max})$ を持つ状態を作ることができる．

■はしご演算子の作用(462)の導出 [11, p.260]

式(467):

$$J_+^\dagger J_+ = \mathbf{J}^2 - J_z^2 - \hbar J_z$$

および式(457):

$$J_+ |j, m\rangle = c_{jm}^+ |j, m+1\rangle$$

(ここでは係数 $c_{jm}^\pm$ の j, m 依存性を明示した)を用いると, 規格化されたケット $|j, m\rangle, |j, m+1\rangle$ に対して

$$\begin{aligned} |c_{jm}^+|^2 &= \langle j, m+1 | (c_{jm}^+)^* (c_{jm}^+) |j, m+1\rangle \\ &= \langle j, m | J_+^\dagger J_+ |j, m\rangle \\ &= \langle j, m | \mathbf{J}^2 - J_z^2 - \hbar J_z |j, m\rangle \\ &= \hbar^2 (j(j+1) - m^2 - m) \\ &= \hbar^2 (j-m)(j+m+1) \end{aligned}$$

が得られる. c_{jm}^+ の位相は任意に選べるから, c_{jm}^+ を正の実数に選んで

$$J_+ |j, m\rangle = \sqrt{(j-m)(j+m+1)\hbar} |j, m+1\rangle$$

として良い(式(462)の上側の複号を選んだ関係). 同様に $J_- |j, m\rangle = c^-_{jm} |j, m-1\rangle$ とおくと

$$\begin{aligned} |c^-_{jm}|^2 &= \langle j, m-1 | (c^-_{jm})^* (c^-_{jm}) | j, m-1 \rangle \\ &= \langle j, m | J_-^\dagger J_- | j, m \rangle \\ &= \langle j, m | \mathbf{J}^2 - J_z^2 + \hbar J_z | j, m \rangle \\ &= \hbar^2 (j(j+1) - m^2 + m) \\ &= \hbar^2 (j+m)(j-m+1) \end{aligned}$$

となるので, 式(462)の下側の複号に対する関係

$$J_- |j, m\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \hbar |j, m-1\rangle$$

も示される.

8.1.2項の原稿

角運動量の交換関係(450)から導かれる角運動量の一般論を調べよう。

角運動量の自乗の演算子 $J^2 \equiv J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ を定義すると、角運動量の交換関係(450)から交換関係(455)が導かれる(導出スライド参照)。ここから J^2 は **Casimir** (カシミヤ) 演算子であると言われる。一般に群の生成子 J_i の組合せによって作られる、全ての生成子 J_i と可換で、それ故に群要素(生成子の指数)の作用(相似変換)の下で不変な演算子を Casimir 演算子という [36, p.129] [7, p.348]。

さて、 J_x, J_y, J_z は互いに交換しないため、角運動量の全成分が同時に確定した固有状態は存在しない。そこで J^2 の固有値 a と1つの角運動量成分 J_z の固有値 b で特徴付けられる同時固有ケット $|a, b\rangle$ を考える。

ここで、はしご演算子(456)を定義すると、再び角運動量の交換関係(450)により、これは式(457)のように J^2 の固有値を不変に保ち、 J_z の固有値を $\hbar$ だけ増加・減少させることが導かれる(導出スライド参照)。

基本的交換関係(450)、およびその帰結としてのはしご演算子の性質(457)を用いると、 n をゼロ以上の整数として、固有値のとり得る値は式(459)のようになることが示される(導出スライド参照)。

そこで J^2 と J_z の同時固有ケットを $|a, b\rangle$ と書く代わりに、 $|j, m\rangle$ と書くのが便利である。このとき固有方程式は式(460)となる。

各固有ケット $|j, m\rangle$ が規格化されているとすると、固有方程式(460)より J^2, J_z の行列

要素は式(461)となる.

また固有ケット $\{|j, m\rangle\}$ が規格化されていることから, はしご演算子の作用(457)における係数は式(462)のように定まる (導出スライド参照). このため, はしご演算子 $J_{\pm}$ の行列要素は式(463)のように表される.

この辺りまでは概ね基本事項の復習であり, また量子力学の運動学の域を出ないものの, 角運動量の固有値が特定の値しかとり得ないということはそれ自体, 立派な物理的予言である.

ところである座標系の z 軸に関する角運動量成分が固有値 $m\hbar$ をとるならば, z 軸と何らかの角 α を成す今一つの z' 軸に関する角運動量成分は, 一見するとその $\cos \alpha$ 倍の値をとると考えたくなるかもしれない. するとこのことは, z' 軸に関する角運動量成分の固有値もまた $\hbar$ の (半) 整数倍しかとり得ないことと矛盾するという疑問が生じ得る. しかしながら異なる座標軸 z, z' 方向の角運動量は交換しないから, このとき z' 軸に関する角運動量成分も固有値の確定した固有状態にあると結論付けるのは誤りである. 正しくは $\cos \alpha$ 倍されるのは角運動量成分の固有値ではなく, あくまで期待値であり, 依然として角運動量の z' 成分の採り得る値が $\hbar$ の (半) 整数倍であることに変わりはない. このように量子力学の不確定性を考慮すれば, 任意の軸に関して角運動量成分が同様の離散的スペクトルを持つという理論の対称性は, 何ら矛盾をもたらさない. この洞察は本稿の主眼であるループ量子重力においても重要となる. 主要な結論を先取りして述べると, ループ量子重力によれば空間は最小のサイズを持つ. ところが Lorentz ブーストする系から見ると, このサイズは Lorentz 収縮するため, 一見すると最小のサイズであること

に矛盾する。これはループ量子重力に対するありがちな批判であり、やはり量子力学を無視している点に誤りがある。実際 Lorentz ブーストする系から見たサイズは Lorentz 収縮を受けるものの、サイズはもはや固有状態にはないため、このことは空間のサイズが全ての Lorentz 系に共通の離散的な固有値スペクトルを持つことと何ら矛盾しない。このようにループ量子重力は Lorentz 不変性と両立可能である [3, pp.316–317].

8.2 スピン角運動量

8.2.1 スピン1/2の系とSU(2)群

粒子は軌道角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ の他に内部自由度としてスピン角運動量 $\mathbf{S}$ を持ち、「スピン s の粒子」に対して

$$S^2 \text{ の固有値} \quad s(s+1)\hbar^2, \quad \left(s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \right) \quad (469)$$

$$S_z \text{ の固有値} \quad m\hbar. \quad (m = -s, -s+1, \dots, s-1, s) \quad (470)$$

■スピン $s = 1/2$ に対するスピン演算子 [11, p.29, pp.34–37, p.213]

スピン1/2の系に対して、 S_z の固有値 $\pm\hbar/2$ に属する固有状態 $|\pm\rangle$ を基底に選ぶと、スピン演算子は具体的に

$$\begin{cases} S_x = \frac{\hbar}{2} \{ (|+\rangle \langle -|) + (|-\rangle \langle +|) \} \\ S_y = \frac{i\hbar}{2} \{ -(|+\rangle \langle -|) + (|-\rangle \langle +|) \} \\ S_z = \frac{\hbar}{2} \{ (|+\rangle \langle +|) - (|-\rangle \langle -|) \} \end{cases} \quad (471)$$

と表せる。

スピン演算子(471)は確率推移図34と角運動量の基本的交換関係(450):

$$[S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k \quad (472)$$

が満たされるように定めた.

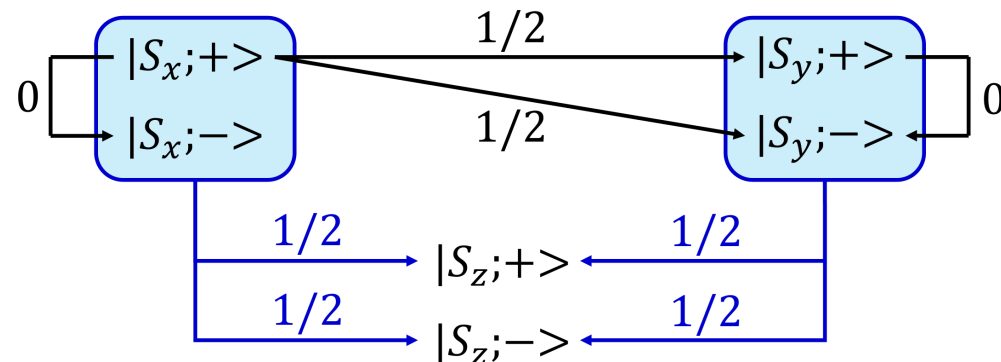


図34 スピン成分 S_i の固有値 $\pm\hbar/2$ に属する固有状態 $|S_i; \pm\rangle$ 間の遷移に対する確率推移図

スピン演算子(471)はまた, 反交換関係

$$\{S_i, S_j\} = \frac{1}{2}\hbar^2\delta_{ij} \quad (473)$$

を満たしている. 式(473)はスピンの正しい大きさ $s(s+1)\hbar^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$ を持つこと $S^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$ (右辺は恒等演算子に比例) を含意している.

■Pauliの2成分形式 [11, pp.220–223]

スピン演算子(471)の基底 $|\pm\rangle$ に関する行列表現として, Pauli行列

$$\sigma_k = \frac{1}{\hbar/2} \begin{pmatrix} \langle +|S_k|+ \rangle & \langle +|S_k|- \rangle \\ \langle -|S_k|+ \rangle & \langle -|S_k|- \rangle \end{pmatrix}, \quad (k = 1, 2, 3) \quad (474)$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (475)$$

を定義する. 同様に状態ベクトル $|\alpha\rangle$ の行列表現として, 2成分量

$$z = \begin{pmatrix} \langle +|\alpha \rangle \\ \langle -|\alpha \rangle \end{pmatrix} \quad (476)$$

を定義しておく. スピン演算子の(反)交換関係(472),(473)より,

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}, \quad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \quad (\sigma_1^2 = 1, \sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \text{ etc.}) \quad (477)$$

$$\sigma_i\sigma_j = \frac{1}{2}\{\sigma_i, \sigma_j\} + \frac{1}{2}[\sigma_i, \sigma_j] = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \quad (478)$$

を得る. またPauli行列の式(475)から直接見て取れるように,

$$\sigma_i^\dagger = \sigma_i, \quad \det(\sigma_i) = -1, \quad \text{Tr}(\sigma_i) = 0. \quad (479)$$

ここで3つのPauli行列をベクトルの形にまとめた記法

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (480)$$

を導入する．任意の3次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \dots$ に対して，有用な公式

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{a} \equiv a_k \sigma_k = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix}, \quad (\because \text{式(475)}) \quad (481)$$

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{b}) &= a_i a_j (\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k) \quad (\because \text{式(478)}) \\ &= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \end{aligned} \quad (482)$$

が導かれる．実数ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対しては，公式(482)の特例として

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{a})^2 = |\boldsymbol{a}|^2 \quad (483)$$

が成り立つ．

■2成分形式での回転 [11, pp.223–224]

回転演算子 $\exp\left(\frac{-i\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\phi}{\hbar}\right)$ の行列表現は、Pauli行列を生成子とする行列

$$\exp\left(\frac{-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\phi}{2}\right) = \left(\left\langle a' \left| \exp\left(\frac{-i\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\phi}{\hbar}\right) \right| a'' \right\rangle\right) \quad (484)$$

$$= \mathbf{1} \cos \frac{\phi}{2} - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n} \sin \frac{\phi}{2} \quad (485)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi}{2} - in_z \sin \frac{\phi}{2} & (-in_x - n_y) \sin \frac{\phi}{2} \\ (-in_x + n_y) \sin \frac{\phi}{2} & \cos \frac{\phi}{2} + in_z \sin \frac{\phi}{2} \end{pmatrix}. \quad (\because \text{式(475)}) \quad (486)$$

状態が回転演算子により

$$|\alpha\rangle \rightarrow \exp\left(\frac{-i\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\phi}{\hbar}\right) |\alpha\rangle \quad (487)$$

と変化するとき、等価的に z は

$$z \rightarrow \exp\left(\frac{-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\phi}{2}\right) z \quad (488)$$

と変化する。変換則(488)に従う2成分量 z をスピノルと呼ぶ [30, p.205].

■SU(2)群 [11, pp.228–230]

SU(2)行列はPauli行列の指数(484): $e^{-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\phi/2}$ の形に表せる.

実際, SU(2)行列は一般に, 複素数 a, b を用いて

$$U(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad (489)$$

$$\text{with } (\det U =) |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (\text{ユニモジュラー条件}) \quad (490)$$

これをPauli行列の指数(486)と比較すると,

$$\text{Re}(a) = \cos \frac{\phi}{2}, \text{Im}(a) = -n_z \sin \frac{\phi}{2}, \text{Re}(b) = -n_y \sin \frac{\phi}{2}, \text{Im}(b) = -n_x \sin \frac{\phi}{2} \quad (491)$$

と同定される.

SU(2)行列 $U = e^{-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\phi/2}$ のユニタリー性は確率保存に関係している: 全確率

$$z^\dagger z = |\langle +|\alpha \rangle|^2 + |\langle -|\alpha \rangle|^2 = 1 \quad (492)$$

は, 回転操作 $z \rightarrow Uz$ の下で不変に保たれる:

$$z^\dagger z \rightarrow z^\dagger U^\dagger U z = z^\dagger z. \quad (493)$$

■生成子の規格化 [1, pp.26–27]

Pauli行列を規格化した生成子

$$\tau_i = -\frac{i}{2}\sigma_i \quad (494)$$

を定義すると, $SU(2)$ 群要素は

$$e^{-i\sigma_i\phi_i/2} = e^{\phi_i\tau_i} \quad (495)$$

と簡略化され, また Pauli行列の交換関係(477)は生成子 τ_i の交換関係

$$[\tau_i, \tau_j] = \varepsilon_{ijk}\tau_k \quad (496)$$

に読み替えられる. さらに生成子(494)はトレースの公式

$$\mathrm{Tr}(\tau_i\tau_j) = -\frac{1}{2}\delta_{ij}, \quad \mathrm{Tr}(\tau_i\tau_j\tau_k) = -\frac{1}{4}\varepsilon_{ijk} \quad (497)$$

を満たす(第1式は生成子の標準的な規格直交条件(417)).

■ Euler角 [11, pp.231–235]

図35に示した Euler角 α, β, γ の定義より，空間回転は

$$R(\alpha, \beta, \gamma) \equiv R_{z'}(\gamma)R_{y'}(\beta)R_z(\alpha) \quad (498)$$

と表される．第2と第3の回転は剛体軸 y', z' 周りの回転で書かれている．

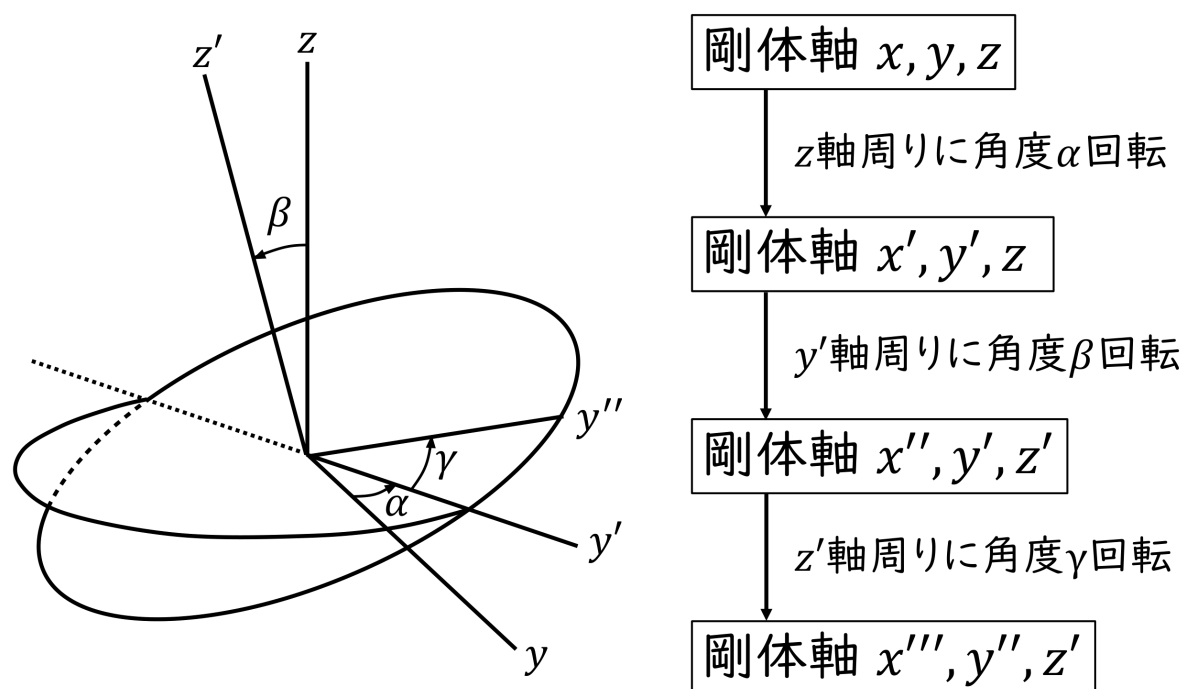


図35 Eulerの回転

ここで幾何学的に

$$R_{y'}(\beta) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z^{-1}(\alpha), \quad (499)$$

$$R_{z'}(\gamma) = R_{y'}(\beta) R_z(\gamma) R_{y'}^{-1}(\beta) \quad (500)$$

が成り立つことに着目すると，式(498)は空間に固定した座標軸周りの回転

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma) \quad (501)$$

で表せる．

対応する回転の演算子は掛け算則(501)を保持するから，

$$\mathcal{D}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{D}_z(\alpha) \mathcal{D}_y(\beta) \mathcal{D}_z(\gamma) \quad (502)$$

で与えられる．そのSU(2)行列による表現は

$$\begin{aligned} & e^{-i\sigma_3\alpha/2} e^{-i\sigma_2\beta/2} e^{-i\sigma_3\gamma/2} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma/2} \end{pmatrix} \quad (\because \text{式(486)}) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2} \cos(\beta/2) & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2} \sin(\beta/2) \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2} \sin(\beta/2) & e^{i(\alpha+\gamma)/2} \cos(\beta/2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (503)$$

8.2.1 項の式の導出など

■式(471)がスピン1/2の適切なスピン演算子であることの発見的な説明

スピン成分 S_i の固有値 $\pm\hbar/2$ に属する固有状態を $|S_i; \pm\rangle$ で表す. はじめに $|S_x; +\rangle$ を基底ケット $|\pm\rangle \equiv |S_z; \pm\rangle$ で展開すると,

$$|S_x; +\rangle = |+\rangle \langle +|S_x; +\rangle + |-\rangle \langle -|S_x; +\rangle$$

となる. ここで確率推移図34のように, 遷移 $|S_x; +\rangle \rightarrow |\pm\rangle$ の確率がそれぞれ1/2となる条件を考慮すると, 展開係数は

$$|\langle \pm | S_x; + \rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \therefore \langle \pm | S_x; + \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\delta_{\pm}}$$

と書ける ($\delta_{\pm}$ は実数). この下でなお, 全体の位相因子を調整する任意性が残されている. この自由度を利用して $|+\rangle$ の係数を正の実数に選ぶと,

$$|S_x; +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\delta_1} |-\rangle$$

と書ける (δ_1 は実数). $|S_x; -\rangle$ についても,

$$|S_x; -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\delta'_1} |-\rangle$$

とおき，直交性

$$\begin{aligned} 0 &= \langle S_x; + | S_x; - \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \langle + | + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\delta_1} \langle - | \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} | + \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\delta'_1} | - \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} (1 + e^{i(\delta'_1 - \delta_1)}) \end{aligned}$$

を考慮すると， $e^{i\delta'_1} = -e^{i\delta_1}$ より

$$|S_x; -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\delta_1} |-\rangle$$

となる．

同様に

$$|S_y; \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\delta_2} |-\rangle$$

とおける．ここで $|\langle S_y; \pm | S_x; \pm \rangle| = 1/\sqrt{2}$ (複号任意) を要求すると

$$\frac{1}{2} \left| 1 \pm e^{i(\delta_1 - \delta_2)} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \therefore \delta_2 - \delta_1 = \pm \frac{\pi}{2}$$

を得る．

演算子 A の固有ケット $\{|a'\rangle\}$ による固有値分解 (332): $A = \sum_{a'} a' |a'\rangle \langle a'|$ を用いて, 各スピン演算子を計算できる. すると

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{\hbar}{2} \{(|S_x; +\rangle \langle S_x; +|) - (|S_x; -\rangle \langle S_x; -|)\} \\ &= \frac{\hbar}{2} \{e^{-i\delta_1} (|+\rangle \langle -|) + e^{i\delta_1} (|-\rangle \langle +|)\} \end{aligned}$$

の最右辺は Hermite 的となっており, 適当な位相因子を吸収させて $|\pm\rangle$ を再定義すれば, $\delta_1 = 0$ とおくことができる. このとき $\delta_2 = \pm \frac{\pi}{2}$ であり, この2通りの符号に応じて

$$\begin{aligned} S_y &= \frac{\hbar}{2} \{(|S_y; +\rangle \langle S_y; +|) - (|S_y; -\rangle \langle S_y; -|)\} \\ &= \pm \frac{i\hbar}{2} \{-(|+\rangle \langle -|) + (|-\rangle \langle +|)\} \end{aligned}$$

は, 全体の符号が逆となって得られる (この不定性は座標系の右手系と左手系の選択の余地に対応している). 一方の S_y に対して角運動量の交換関係

(472): $[S_i, S_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} S_k$ が満たされるならば, 逆符号の S_y はこれを満たさない. すぐ後で確認するように, 交換関係 (472) を満たす S_y の, したがって δ_2 の符号の正しい選択は $\delta_2 = +\frac{\pi}{2}$ である. このとき

$$|S_x; \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle, \quad |S_y; \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}} |-\rangle$$

と定まり，式(471):

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \{(|+\rangle \langle -|) + (|-\rangle \langle +|)\},$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2} \{-i(|+\rangle \langle -|) + i(|-\rangle \langle +|)\},$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \{(|+\rangle \langle +|) - (|-\rangle \langle -|)\}$$

が得られる.

さて，以上で求めたスピン演算子(471)が角運動量の交換関係(472):

$$[S_i, S_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} S_k$$

を満たしていることを確かめよう. $(i, j) = (1, 2), (2, 3), (3, 1)$ の場合だけを調べれば十分である. ($i = j$ の場合は交換関係(472)は自明な式 $0 = 0$ を与える. $(i, j) = (1, 2)$ に対して交換関係(472)が成り立てば $(i, j) = (2, 1)$ に対しても成り立つ.)

$$S_x S_y = i \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2 \{(|+\rangle \langle +|) - (|-\rangle \langle -|)\} = \frac{1}{2} i \hbar S_z,$$

$$S_y S_x = i \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2 \{-(|+\rangle \langle +|) + (|-\rangle \langle -|)\} = -\frac{1}{2} i \hbar S_z,$$

$$\begin{aligned}
S_y S_z &= i \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2 \{ (|+\rangle \langle -|) + (|-\rangle \langle +|) \} = \frac{1}{2} i \hbar S_x, \\
S_z S_y &= i \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2 \{ -(|+\rangle \langle -|) - (|-\rangle \langle +|) \} = -\frac{1}{2} i \hbar S_x, \\
S_z S_x &= \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2 \{ (|+\rangle \langle -|) - (|-\rangle \langle +|) \} = \frac{1}{2} i \hbar S_y, \\
S_x S_z &= \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2 \{ -(|+\rangle \langle -|) + (|-\rangle \langle +|) \} = -\frac{1}{2} i \hbar S_y
\end{aligned} \tag{504}$$

により

$$[S_x, S_y] = i \hbar S_z, \quad [S_y, S_z] = i \hbar S_x, \quad [S_z, S_x] = i \hbar S_y$$

となる．これらはそれぞれ交換関係(472)において $(i, j) = (1, 2), (2, 3), (3, 1)$ としたもの
 のに他ならない．

■反交換関係(473)の確認
式(504)より

$$\{S_x, S_y\} = \{S_y, S_x\} = 0, \quad \{S_y, S_z\} = \{S_z, S_y\} = 0, \quad \{S_z, S_x\} = \{S_x, S_z\} = 0$$

となる. さらにスピン演算子(471)に対して

$$\begin{aligned} S_x^2 &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \{(|+\rangle\langle+|) + (|-\rangle\langle-|)\} = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2, \\ S_y^2 &= \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^2 \{-(|+\rangle\langle+|) - (|-\rangle\langle-|)\} = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2, \\ S_z^2 &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \{(|+\rangle\langle+|) + (|-\rangle\langle-|)\} = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

だから(完備関係式 $(|+\rangle\langle+|) + (|-\rangle\langle-|) = 1$ を用いた), 全ての添字の組 (i, j) に対してスピンの反交換関係(473): $\{S_i, S_j\} = \frac{1}{2}\hbar^2\delta_{ij}$ が満たされている.

■ Pauli 行列の (反) 交換関係 (477) の導出

スピン演算子の反交換関係 (473): $\{S_i, S_j\} = \frac{1}{2}\hbar^2\delta_{ij}$ より

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\hbar^2\delta_{ij} \langle a' | a'' \rangle &= \langle a' | \{S_i, S_j\} | a'' \rangle \\ &= \sum_{a'''} \langle a' | S_i | a''' \rangle \langle a''' | S_j | a'' \rangle + \sum_{a'''} \langle a' | S_j | a''' \rangle \langle a''' | S_i | a'' \rangle\end{aligned}$$

であり, これを $(\hbar/2)^2$ で割ったものは反交換関係 (477): $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$ の (a', a'') 成分である.

同様に交換関係 (472): $[S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k$ より

$$\begin{aligned}i\hbar\epsilon_{ijk} \langle a' | S_k | a'' \rangle &= \langle a' | [S_i, S_j] | a'' \rangle \\ &= \sum_{a'''} \langle a' | S_i | a''' \rangle \langle a''' | S_j | a'' \rangle - \sum_{a'''} \langle a' | S_j | a''' \rangle \langle a''' | S_i | a'' \rangle\end{aligned}$$

であり, これを $(\hbar/2)^2$ で割ったものは交換関係 (477): $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ の (a', a'') 成分である.

■回転演算子の行列表現(484)の導出

回転演算子の行列要素が

$$\begin{aligned} & \left\langle a' \left| \exp \left(\frac{-i \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \phi}{\hbar} \right) \right| a'' \right\rangle \\ & \equiv \left\langle a' \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{-i \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \phi}{\hbar} \right)^k \right| a'' \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{-i \phi}{\hbar} \right)^k (\langle a' | \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} | a'' \rangle)^k \\ & \equiv \exp \left(\frac{-i \phi}{\hbar} \langle a' | \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} | a'' \rangle \right) = \exp \left(\frac{-i \phi}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\langle a' | S_i | a'' \rangle}{\hbar/2} \hat{n}_i \right) \\ & = \exp \left(\frac{-i \phi}{2} \sum_{i=1}^3 (\sigma_i)_{a' a''} \hat{n}_i \right) = \left(\exp \left(\frac{-i \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \phi}{2} \right) \right)_{a' a''} \end{aligned}$$

となることによる。結果的に回転演算子を行列表現にするには、 $S/\hbar \rightarrow \boldsymbol{\sigma}/2$ と置き換えれば良い。

■ $e^{-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\phi/\hbar}$ の式(485)の導出 [11, pp.223–224]

Pauli行列の公式(483)より

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n})^m = \begin{cases} 1 & (m : \text{偶数}) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} & (m : \text{奇数}) \end{cases}$$

となるので,

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}\phi}{2}\right) &= \left[1 - \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n})^2}{2!} \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 + \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n})^4}{4!} \left(\frac{\phi}{2}\right)^4 - \dots\right] \\ &\quad - i \left[(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}) \frac{\phi}{2} - \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n})^3}{3!} \left(\frac{\phi}{2}\right)^3 + \dots \right] \\ &= \mathbf{1} \cos \frac{\phi}{2} - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} \sin \frac{\phi}{2} : (485) \end{aligned}$$

を得る.

■式(488)の導出

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &\rightarrow e^{-i\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\phi/\hbar} |\alpha\rangle, \\ \therefore \langle a'|\alpha\rangle &\rightarrow \langle a'|e^{-i\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\phi/\hbar}|\alpha\rangle = \sum_{a''} \langle a'|e^{-i\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\phi/\hbar}|a''\rangle \langle a''|\alpha\rangle. \end{aligned}$$

ここで $\langle a'|\alpha\rangle$ は z の a' 成分であり, また $\langle a'|e^{-i\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\phi/\hbar}|a''\rangle$ は行列 $e^{-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\phi/2}$ の (a', a'') 成分なので(式(488)参照), これは式(488):

$$z \rightarrow e^{-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\phi/2} z$$

を意味する.

■SU(2) 行列の一般的表式(489)の導出

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とおき, ユニモジュラー性 $\det U = 1$ を仮定すると

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

となる. さらにユニタリー性を要求して, これを

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}$$

と等置すると $d = a^*, c = -b^*$ が見出される. ここから c, d を消去すると式(489)が得られる.

■生成子 $\tau_i = -\frac{i}{2}$ のトレース公式(497)の証明

Pauli行列の性質(478),(479):

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad \text{Tr}[\sigma_i] = 0$$

より $\text{Tr}[\sigma_i \sigma_j] = 2\delta_{ij}$ であり, 式(497)第1式はここから帰結する $\text{SU}(2)$ の生成子の正規直交性である. また上式を繰り返し用いると

$$\sigma_i \sigma_j \sigma_k = (\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijl} \sigma_l) \sigma_k = \delta_{ij} \sigma_k + i\varepsilon_{ijl} (\delta_{lk} + i\varepsilon_{lkm} \sigma_m) = \delta_{ij} \sigma_k - \delta_{ik} \sigma_j + \delta_{jk} \sigma_i + i\varepsilon_{ijk}$$

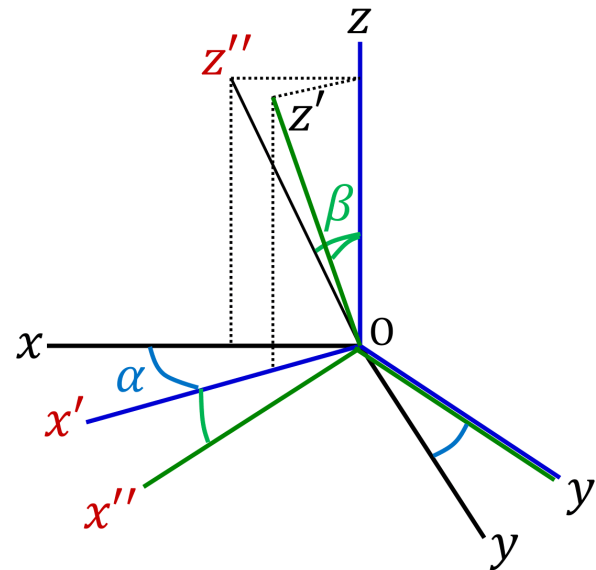
となるので(ここでは第3辺までの変形で充分),

$$\text{Tr}(\sigma_i \sigma_j \sigma_k) = 2i\varepsilon_{ijk}$$

を得る. これは τ_i に対する式(497)第2式に読み替えられる.

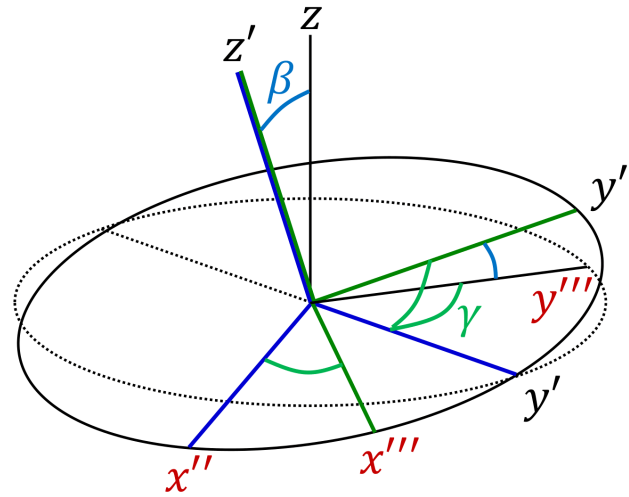
■ $R_{y'}(\beta)$ の式 (499), $R_{z'}(\gamma)$ の式 (500) の確認 [11, pp.232–233]

式 (499) の両辺が表す変換で図 36 のように回転前の剛体系の 2 軸 y', z (青色) が回転後に同じ軸 y', z' (緑色) に移されるから剛体全体が同じ配置に移されることになる。



$$\begin{array}{ccccccc}
 y' & \longleftarrow & y' & y' & \longleftarrow & y & \longleftarrow & y & \longleftarrow & y' \\
 R_{y'}(\beta) & = & R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z^{-1}(\alpha) \\
 z' & \longleftarrow & z & z' & \longleftarrow & z'' & \longleftarrow & z & \longleftarrow & z
 \end{array}$$

図 36 式 (499) の幾何学的意味



$$\begin{array}{ccccccc}
 z' & \longleftarrow & z' & z' & \longleftarrow & z & \longleftarrow & z & \longleftarrow & z' \\
 R_{z'}(\gamma) & = & R_{y'}(\beta) R_z(\gamma) R_{y'}^{-1}(\beta) \\
 y'' & \longleftarrow & y & y'' & \longleftarrow & y''' & \longleftarrow & y' & \longleftarrow & y'
 \end{array}$$

図37 式(500)の幾何学的意味

図36において

$$y \rightarrow z, \quad y' \rightarrow z', \quad z \rightarrow y', \quad z' \rightarrow y'', \quad z'' \rightarrow y''', \quad \alpha \rightarrow \beta, \quad \beta \rightarrow \gamma$$

と置き換えると図37のようになる(剛体系の x 軸は無視する). そこで式(499)に対しても同じ置き換えを施すと式(500)を得る. 剛体系の x 軸を指定するのは式(499) $\Rightarrow$ 式(500)を言うのに必要ない.

■空間固定軸の周りの回転の合成(501)の導出 [11, p.233]

式(498)に式(499),(500)を代入すると,

$$\begin{aligned} R(\alpha, \beta, \gamma) &= R_{z'}(\gamma) R_{y'}(\beta) R_z(\alpha) \\ &= [R_{y'}(\beta) R_z(\gamma) \cancel{R_{y'}^{-1}(\beta)}] \cancel{R_{y'}(\beta)} R_z(\alpha) \\ &= [R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z^{-1}(\alpha)] R_z(\gamma) R_z(\alpha) \\ &= R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma) : (501) \end{aligned}$$

を得る. ただし最後の等号では, 共通の軸周りの回転 $R_z(\gamma), R_z(\alpha)$ が交換することを用いた.

8.2.1 項の原稿

引き続き角運動量の一般論に取り組む代わりに、一度立ち止まって、ここで具体例としてスピン角運動量を説明し、 $SU(2)$ 群の概念を導入しておくのが適当だろう。と言うのも、これらの概念は角運動量の一般論を展開する上でも欠かせないビルディング・ブロックとなっているからである。

粒子の軌道角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ は、粒子の空間運動に伴う角運動量である。これに対して素粒子や複合粒子は、その空間運動に無関係な“固有の”角運動量 $\mathbf{S}$ を持つ。 $\mathbf{S}$ はスピン角運動量と呼ばれ、 $\hbar \rightarrow 0$ の極限で消失するような、量子力学に特有の量である^{*113}。角運動量の一般論(8.1.2項)より、固有値は式(469),(470)で与えられる。各種の素粒子は決まった s の値を持ち、「スピン s の粒子」として言及される。経験的に大部分の素粒子はスピンの値が $1/2$ であることが知られている [30, pp.195–196, pp.198–199]。そこで以下では最も重要な、スピンの値が $1/2$ の場合を重点的に調べよう。スピン $1/2$ の系に対して、各スピン成分は2通りの固有値 $\pm \hbar/2$ をとり得る。特にスピンの z 成分 S_z の固有値 $\pm \hbar/2$ に属する固有状態 $|\pm\rangle$ を基底に選ぶと、スピン演算子は具体的に式(471)で表せる。

ここで各係数は、固有状態間の遷移振幅が確率推移図34を満たし、なおかつ演算子 S_i

^{*113} したがってスピン $\mathbf{S}$ を粒子の“自転”に関係付けて古典的に解釈する通俗的な説明は最初から無意味である。

が角運動量の基本的交換関係(450)ないし式(472)を満たすように選ばれている(導出スライド参照). (ここで複素係数を許容してはじめて確率推移図34を満たす全ての固有状態を表すことができ, 量子力学では複素数の導入は単なる計算の簡略化の技法に留まらず本質的に不可欠である [11, pp.10–12].)

以上のスピン演算子(471)は, 反交換関係(473)を満たしていることを直接確かめられる(導出スライド参照). 反交換関係(473)はスピンの大きさが $s = 1/2$ を持つことを含意している. 実際8.1.2項の一般論より, スピン $s = \frac{1}{2}$ の系では角運動量の自乗 S^2 は, 固有値 $s(s+1)\hbar^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$ を持つ. ところが反交換関係(473)で $i = j$ とおいて和をとると, 正しい大きさを反映した演算子の表式 $S^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$ が得られる. またここでは S^2 は(つまりらない数係数 $\frac{3}{4}$ の違いを除き)恒等演算子となっているので, 任意のスピン成分と交換すること(455)は明白に満たされている.

スピン演算子(471)の基底 $|\pm\rangle$ に関する行列表現として, Pauli行列(474),(475)を定義する. 同様に状態ベクトル $|\alpha\rangle$ の行列表現として, 2成分量(476)を定義しておく.

以下, Pauli行列の重要な性質をまとめよう. スピン演算子の(反)交換関係(472),(473)は直ちに, Pauli行列の(反)交換関係(477)に読み替えられる(導出スライド参照). (特に各Pauli行列は自乗が単位行列となるように規格化されていることに注意しよう.) 式(477)を用いて積 $\sigma_i\sigma_j$ を対称部分と反対称部分に分けると, 式(478)を得る. またPauli行列の具体的表式(475)から直接見て取れるように, 公式(479)が成立する. 第1式はスピン演算子 S_i のHermite性を反映している.

ここで3つのPauli行列をベクトルの形にまとめた記法(480)を導入すると便利である．すると任意の3次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \dots$ に対して，有用な公式(481),(482)が導かれる．実数ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対しては，公式(482)の特例として式(483)が成り立つ．

回転演算子 $\exp\left(\frac{-i\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}\phi}{\hbar}\right)$ の行列表現は，Pauli行列を生成子とする行列(484)になる (導出スライド参照)．これは明示的には式(485),(486)のように計算される (式(485)の導出は導出スライド参照)．

状態が回転演算子により式(487)のように変化するとき，等価的に z は式(488)のように変化する (導出スライド参照)．このように空間回転に際して，Pauli行列を生成子とする行列(484)によって変換する2成分量 z を(1階の)スピノルと呼ぶ．すぐ後で説明するように，これはSU(2)行列で変換する2成分量としてスピノルを定義することと等価である [30, p.205]．(なお核子を記述する際にも，陽子 p と中性子 n をそれぞれ，ある種のスピン $I = 1/2$ の固有値 $I_3 = +1/2$ と $I_3 = -1/2$ の固有状態として，一般的な核子の状態を式(476)と同様の2成分(アイソ)スピノルで表す．この場合の量子数 (I, I_3) はアイソスピンと呼ばれる [36, pp.118–119]．)

ここでPauli行列を生成子とする行列(484)はSU(2)行列の一般的な表式であることを説明する．SU(2)行列とは行列式が1である 2×2 のユニタリ行列のことであり，(2×2 の)ユニタリー・ユニモジュラー行列とも呼ばれる．Pauli行列の指数(484): $e^{-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\phi/2}$ が実際にSU(2)行列であることは，その具体的表式(486)から直接確か

められるものの、教育的な観点から、ここではSU(2)行列の一般的な表現を考えてこのことを示そう。SU(2)行列は一般に、複素数 a, b を用いて式(489)で表せる(導出スライド参照)。ただし a, b には行列式が1のユニモジュラー条件(490)が課される。そこで表式(489)をPauli行列の指数(486)と比較すると、式(491)のように同定される。これらはユニモジュラー条件(490)も満たしている。よってPauli行列の指数(486)は、SU(2)行列の最も一般的な表現となることが分かる。

SU(2)行列 $U = e^{-i\sigma \cdot n\phi/2}$ のユニタリー性はやはり、確率保存に関係している。すなわち全確率(492)は、回転操作 $z \rightarrow Uz$ の下で、式(493)のように不変に保たれる。

SU(2)行列(489)は2つの複素数 a, b で指定されるので、ユニモジュラー条件(490)の下で3つの独立な実数パラメータを持つ。これはSU(2)行列が回転を表し、また3次元空間での回転の自由度は3であることから期待されることである^{*114}。

またSU(2)行列は行列の積に関して群を成す。このことは直接的には表式(489)に基づき容易に確認できるものの[11, p.230]、やはりSU(2)行列が回転を表すことから、あらかじめ期待される結果である。SU(2)の成す群はSU(2)群と呼ばれ、Sは“特殊

^{*114} 3次元空間内の回転は例えば、

- 回転軸の向き n を表す天頂角と方位角、および回転角 ϕ
 - 回転ベクトル ϕn のデカルト座標系に関する3成分
 - 3つのEuler角
- で特徴付けられる。

(special)” (行列式が1), U は“ユニタリー(unitary)”, 2は行列が作用する空間の次元を表す. ところで6.4.3項で見たように, 空間回転は3次の回転行列でも表すことができ, それらは $SO(3)$ 群の元である. そして $SO(3)$ は $SU(2)$ の随伴表現である. 実際 $SU(2)$ と $SO(3)$ のいずれも, 少なくとも単位元の近くでは生成子が角運動量の交換関係を満たすので, 群の構造(元の掛け算則)は局所的に同一(局所同型)である(群全体の大域的な構造は異なる) [36, p.112] [11, pp.230–231].

ここまで $SU(2)$ 群の基本表現の生成子はPauli行列であることを説明してきた. ここでPauli行列を規格化した生成子(494)を定義すると, $SU(2)$ 群要素は式(495)のように簡略化され, またPauli行列の交換関係(477)は生成子 τ_i の交換関係(496)に読み替えられる. さらに生成子(494)はトレースの公式(497)を満たす(導出スライド参照). 式(497)第1式は生成子 τ_i が標準的な規格直交条件(417)を満たすことを意味している. ただし式(494)では虚数単位 i を含めて生成子 τ_i を定義したため, ここでは右辺に負号が現れている. 式(497)第2式と合わせて, トレースが2つの不変テンソルを与えるのは興味深い.

空間回転を特徴付ける3つのパラメータとして, 特に剛体の回転を記述するのに用いられるEuler角を選ぶことができる [8, pp.138–139]. したがって $SU(2)$ 行列を含め, $SU(2)$ 群の任意の表現行列もまたEuler角で指定できる. ところがEuler角は図35のように, 剛体に固定した座標軸周りの回転角 (α, β, γ) として定義される. (ここでは量子

力学での慣例に従い、第2の回転を x' 軸ではなく y' 軸の周りに行うものと約束していることに注意せよ。) そこである Euler 角で表される回転の行列を、空間に固定した座標軸周りの回転の行列の積へと分解して求めることを考えよう。

図35に示した Euler 角 α, β, γ の定義より、 R を回転行列または抽象的な群要素として、空間回転は式(498)のように表せる。ただし第2と第3の回転は剛体軸 y', z' 周りの回転で書かれている。

ここで幾何学的に式(499),(500)が成り立つことに着目しよう (導出スライド参照), すると式(498)は空間に固定した座標軸周りの回転の合成として式(501)のように表せる (導出スライド参照)。よって対応する回転の演算子は掛け算則(501)を保持するから、式(502)で与えられる。その $SU(2)$ 行列による表現は式(503)となる。最右辺を $SU(2)$ 行列の一般式(489),(490)と見比べると、これは期待されるように $SU(2)$ 行列となっていることが分かる。なお念のため確認すると、異なる Pauli 行列は交換しないため(式(477)), 式(503)最左辺の行列の積を“指数法則”でまとめることはできないことに注意せよ。

8.2.2 SU(2) 表現とスピノル

■スピノル算 [1, pp.22–23]

SU(2) の基本表現の空間は，2成分スピノル(476):

$$z = z^A = \begin{pmatrix} z^0 \\ z^1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \quad (505)$$

の空間である．SU(2) 行列要素 U の添字の標準位置は U^A_B と約束する．スピノル添字の上げ下げは反対称テンソル

$$\varepsilon \equiv (\varepsilon^{AB}) = (\varepsilon_{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (506)$$

を用いて

$$z_A = \varepsilon_{AB} z^{\dots B \dots}, \quad z^A = z^{\dots B \dots} \varepsilon^{BA} \quad ({}_B/^B \text{規則}) \quad (507)$$

のように行う^{*115}．

^{*115} この取り決めを down-left-up-right 規則，あるいは ${}_A/^A$ 規則と呼ぶ．

- Levi-Civita 記号と Kronecker のデルタの関係

$$\varepsilon_{AD}\varepsilon^{BC} = \begin{vmatrix} \delta_A^B & \delta_A^C \\ \delta_D^B & \delta_D^C \end{vmatrix}, \quad \varepsilon_{AC}\varepsilon^{BC} (= -\varepsilon_{AC}\varepsilon^{CB}) = \delta_A^B, \quad \varepsilon_{AB}\varepsilon^{AB} (= -\varepsilon_{AB}\varepsilon^{BA}) = 2. \quad (508)$$

第2式は式(506)の行列 ε の逆行列が転置行列であること

$$\varepsilon^{-1} = \varepsilon^T (= -\varepsilon) \quad (509)$$

を意味する.

- SU(2) 行列 U の行列式は

$$1 = \det U = \varepsilon^{BD}U^0_B U^1_D = \frac{1}{2}\varepsilon_{AC}\varepsilon^{BD}U^A_B U^C_D. \quad (510)$$

- 添字の上げ下げに用いられる ε^{AB} 自身は

$$U^A_C U^B_D \varepsilon^{CD} = \varepsilon^{AB} \quad (511)$$

のように, SU(2)の作用の下で不変である.

- SU(2) 行列の逆行列は

$$U^{-1} = -\varepsilon U^T \varepsilon \quad \text{i.e.} \quad (U^{-1})^A_B = -\varepsilon_{BD}U^D_C \varepsilon^{CA}. \quad (512)$$

■表現とスピン [1, p.23] [38, p.162]

完全対称な n 個の添字のスピノル

$$z^{A_1 \cdots A_n} = z^{(A_1 \cdots A_n)} \quad (513)$$

(右辺の丸括弧は対称化を表す) のベクトル空間は, $SU(2)$ の作用

$$z^{A'_1 \cdots A'_n} = U^{A'_1}_{A_1} \cdots U^{A'_n}_{A_n} z^{A_1 \cdots A_n} \quad (514)$$

の下で変換し, 群の表現を定義する (変換則 (514) は添字の対称性を保持する).

- 完全対称スピノル (513) は ε との縮約が消えるので, 既約表現に対応する.
- スピノル (513) は上向きと下向きの2状態をとり得る n 個のスピン $1/2$ のに対応し, スピン $j = n/2$ 表現を定義する.

スピノル (513) の成すベクトル空間 $\mathcal{H}_j$ は $(2j + 1)$ 次元である.

実際, 完全対称なスピノル (513) の独立な (複素) 成分として

$$z^{0 \cdots 000}, \quad z^{0 \cdots 001}, \quad z^{0 \cdots 011}, \quad \dots \quad z^{1 \cdots 111} \quad (515)$$

の $(n + 1) = (2j + 1)$ 個を選ぶ ($(2j + 1)$ 通りのスピン成分の値に対応).

■ Pauli 行列の公式 [1, pp.26–27]

Pauli 行列の要素を引き続き上下のスピンル添字で指定する：

$$\sigma_i^A{}_B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (516)$$

- 式 (506) の行列 ε に対して，Pauli 行列は

$$\varepsilon \sigma_i \varepsilon = \sigma_i^T = \sigma_i^* \quad (517)$$

を満たす (ここに T は転置を， $*$ は複素共役を表す).

- 規格化した生成子 (494): $\tau_i = -\frac{i}{2} \sigma_i$ に対して

$$\sigma_i^A{}_B \sigma_i^C{}_D = \delta_D^A \delta_B^C - \varepsilon^{AC} \varepsilon_{BD} \quad \text{i.e.} \quad \tau_i^A{}_B \tau_i^C{}_D = -\frac{1}{4} (\delta_D^A \delta_B^C - \varepsilon^{AC} \varepsilon_{BD}). \quad (518)$$

- 任意の $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 行列 A, B に対して

$$\delta^{ij} \text{Tr}(A \tau_i) \text{Tr}(B \tau_j) = -\frac{1}{4} [\text{Tr}(AB) - \text{Tr}(AB^{-1})], \quad (519)$$

$$\text{Tr}(A) \text{Tr}(B) = \text{Tr}(AB) + \text{Tr}(AB^{-1}). \quad (520)$$

- ε との縮約でスピノル添字を上げた Pauli 行列要素

$$(\sigma_i)^{AB} = (\sigma_i)^A{}_C \varepsilon^{CB} \quad (521)$$

を定義すると、これは表現 $1/2 \otimes 1/2 \otimes 1$ における不変テンソルとなる。

8.2.2項の式の導出など

■ ε によるスピノル添字の上げ下げの規則(507)について

$\varepsilon^{AB}, \varepsilon_{AB}$ は計量テンソルと違い対称ではないので,

- テンソル $z^{\dots A \dots}$ の上付き添字 A を下げる際に ε_{AB} のいずれの添字と縮約するかで,

$$z^{\dots A \dots} = \varepsilon_{AB} z^{\dots B \dots} \quad ({}_B/^B \text{規則}), \quad z^{\dots A \dots} = z^{\dots B \dots} \varepsilon_{BA} \quad ({}^B \backslash_B \text{規則})$$

の2通りの可能性

- テンソル $z_{\dots A \dots}$ の下付き添字 A を下げる際に ε^{AB} のいずれの添字と縮約するかで,

$$z_{\dots A \dots} = z_{\dots B \dots} \varepsilon^{BA} \quad ({}_B/^B \text{規則}), \quad z_{\dots A \dots} = \varepsilon^{AB} z_{\dots B \dots} \quad ({}^B \backslash_B \text{規則})$$

の2通りの可能性

が考えられる. ただし一方で ${}_B/^B$ 規則(あるいは ${}^B \backslash_B$ 規則)を採用すれば, 他方でも一貫して ${}_B/^B$ 規則(あるいは ${}^B \backslash_B$ 規則)を用いなければならない. 実際, 式(507):

$$z_A = \varepsilon_{AB} z^{\dots B \dots}, \quad z^A = z_{\dots B \dots} \varepsilon^{BA}$$

の2式の整合性(添字を上げてから下げると元に戻る)が, すぐ後の式(508): $\varepsilon_{AC} \varepsilon^{BC} = \delta_A^B$ から保証される.

簡単な計算例を見ておこう：

$$z^A_B = \varepsilon_{BC} z^{AC} = -\varepsilon_{BC} z^{CA} = -z_B^A.$$

このように上下の添字の順序交換は添字の上げ下げを介して定義されるため，必然的に反対称となる．

■ ε^{AB} の SU(2) 不変性 (511) の確認

時空多様体上のテンソルとしての Levi-Civita 記号と Kronecker のデルタは不変テンソルであったのと同様, 反対称テンソル ε^{AB} と Kronecker のデルタは SU(2) 群の変換に関しても不変テンソルである [36, p.134] :

$$U^A_C U^B_D \varepsilon^{CD} = (\det U) \varepsilon^{AB} = \varepsilon^{AB}, \quad U^A_C (U^\dagger)^D_B \delta^C_D = U^A_C (U^\dagger)^C_B = \delta^A_B.$$

(第1の等号で $\det U$ の表式 (510) を用いた.) $U^\dagger$ を含まない第1式の変換則に限定して考えれば, これらのうち不変テンソルは ε^{AB} のみとなる.

■ 逆行列 U^{-1} の表式 (512) の確認

一般に 2×2 行列

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対して

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \varepsilon M^T \varepsilon^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

なので,

$$\varepsilon M^T \varepsilon^T = (\det M) M^{-1}$$

が恒等的に成立する [23, p.9]. ここで M を特に $SU(2)$ 行列 U に選ぶと

$$U^{-1} = \varepsilon U^T \varepsilon^T, \quad \therefore (U^{-1})^A{}_B = \varepsilon^{AC} U^D{}_C \varepsilon_{BD} = -\varepsilon_{BD} U^D{}_C \varepsilon^{CA}.$$

あるいは最初から $SU(2)$ 行列 U を想定して, 式 (489) に対して $\varepsilon U^T \varepsilon$ を成分計算しても良い.

■式(517)の証明

第1の等号は、任意の2次の正方行列 M に対して

$$M \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon M \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d & c \\ b & -a \end{pmatrix}$$

となることによる。第2の等号が成り立つことは、Pauli行列の表式(516)から直接見て取れる。

■恒等式(518)の証明

式(518)左辺を式(391)の箇所で説明したPauli行列のテンソル積(Kronecker積)の成分と見ることができる. すなわち 4×4 行列

$$\sigma_1 \otimes \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \otimes \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \otimes \sigma_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$$

を成分計算して, これらの和をとると

$$\sigma_i \otimes \sigma_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり, その成分が与式左辺 $\sigma_{iB}^A \sigma_{iD}^C$ を与える. ただし図38のように, 4×4 行列のブロックが添字の組 (A, B) で指定され, 次いでブロック内の行列要素が (C, D) で指定される.

このため2つの行列の行(または列)のラベルの組 (A, C) (または (B, D)) が, 全体の行列の行(または列)をラベルすることになる. 同様に図38に従い, 右辺の各項を行列に

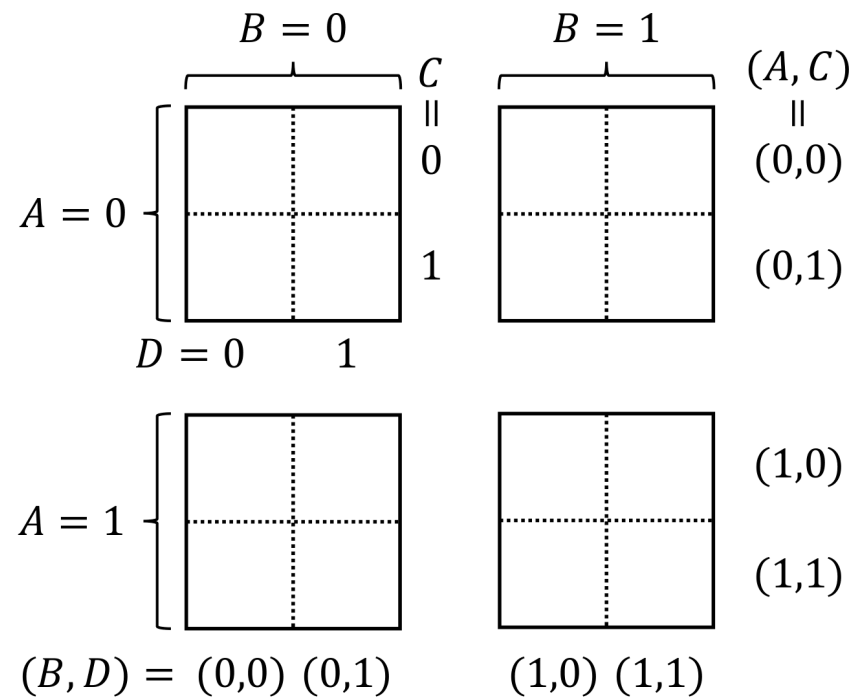


図38 行列の Kronecker 積の成分のラベル

読み替えると

$$\delta_D^A \delta_B^C \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \delta_B^A \delta_D^C \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{AC} \varepsilon_{BD} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．ここから与式(518):

$$\sigma_{iB}^A \sigma_{iD}^C = 2\delta_D^A \delta_B^C - \delta_B^A \delta_D^C \quad \text{or} \quad \sigma_{iB}^A \sigma_{iD}^C = \delta_D^A \delta_B^C - \varepsilon^{AC} \varepsilon_{BD}$$

が成立していることが見て取れる．(2式の等価性は恒等式(508)による．)なお添字の組を $(A, C) \leftrightarrow (B, D)$ と入れ替えても両辺の値は変わらないから，添字 A, B, C, D の組がとり得る $2^4 = 16$ 通りの全パターンを調べる必要はない．

■恒等式(519)の証明
式(518)を適用すると,

$$\begin{aligned}\delta^{ij}\mathrm{Tr}[A\tau_i]\mathrm{Tr}[B\tau_j] &= \delta^{ij}(A^A{}_B\tau_i{}^B{}_A)(B^C{}_D\tau_j{}^D{}_C) = A^A{}_B B^C{}_D(\delta^{ij}\tau_i{}^B{}_A\tau_j{}^D{}_C) \\ &= -\frac{1}{4}A^A{}_B B^C{}_D(\delta_C^B\delta_A^D - \varepsilon^{BD}\varepsilon_{AC}) \\ &= -\frac{1}{4}(A^A{}_B B^B{}_A - A^A{}_B(\varepsilon^{BD}\varepsilon_{AC}B^C{}_D)).\end{aligned}$$

ところで逆行列 U^{-1} の表式(512)は、導出の際に U の行列式が1であることを用いたのに対し、 U のユニタリー性は利用していないため、任意の $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 行列 A に対しても成り立つ [2, p.382] :

$$(A^{-1})^A{}_B = \varepsilon^{AC}\varepsilon_{BD}A^D{}_C. \quad (522)$$

よって上式は、最右辺の第2項において $\varepsilon^{BD}\varepsilon_{AC}B^C{}_D = (B^{-1})^B{}_A$ となるので、式(519)を与える。

■恒等式(520)の証明
式(522)を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[A]\mathrm{Tr}[B] &= (\delta_B^A A^B{}_A)(\delta_C^D B^C{}_D) \\ &= (\delta_C^A \delta_B^D + \varepsilon^{AD} \varepsilon_{BC}) A^B{}_A B^C{}_D \\ &= A^B{}_A B^A{}_B + A^B{}_A (B^{-1})^A{}_B \\ &= \mathrm{Tr}[AB] + \mathrm{Tr}[AB^{-1}]\end{aligned}$$

となって、式(520)が導かれる。

■式(521)の $(\sigma_i)^{AB}$ が不変テンソルであることの証明

スピン $j = 1$ 随伴表現における $\text{SO}(3)$ 変換を受けるベクトル添字 $i, j, \dots$ の上下は区別せず,

$$\sigma^{i,AB} = \sigma^{i,A}{}_C \varepsilon^{CB}$$

と書いて良い。またスピン1表現における変換行列を R^i_j で表すと、表現 $1/2 \otimes 1/2 \otimes 1$ における変換は

$$\sigma^{i,AB} \rightarrow R^i_j U^A{}_C U^B{}_D \sigma^{j,CD}$$

と表される。右辺において

$$U^A{}_C U^B{}_D \sigma^{j,CD} = U^A{}_C (\sigma^{j,C}{}_E \varepsilon^{ED}) U^B{}_D = U^A{}_C \sigma^{j,C}{}_E (-U^B{}_D \varepsilon^{DE}).$$

ただし第2の等号ではダミー添字 D が $_D/^D$ 規則(507)に従うことが明白な形に書き換えた。ここで逆行列 U^{-1} の表式(512)と $\varepsilon_{BD} \varepsilon^{BE} = \delta_D^E$ より,

$$(U^{-1})^A{}_B \varepsilon^{BE} = -U^E{}_C \varepsilon^{CA} \quad \text{i.e.} \quad -U^B{}_D \varepsilon^{DE} = (U^{-1})^E{}_D \varepsilon^{DB}$$

となることを用いると、さらに

$$U^A{}_C U^B{}_D \sigma^{j,CD} = U^A{}_C \sigma^{j,C}{}_E (U^{-1})^E{}_D \varepsilon^{DB} = (U \sigma^j U^{-1})^A{}_D \varepsilon^{DB}$$

と書き換えられる．ところでSU(2)行列は一般に式(484)のように，単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ 周りの角度 $(-\phi)$ の回転演算子 $U = e^{i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\phi/2}$ として表すことができる．また対応する回転行列 $R^i_j = R(\boldsymbol{n}, -\phi)^i_j$ を用いて，Pauli行列の相似変換は

$$U\sigma^jU^{-1} = e^{i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\phi/2}\sigma^je^{-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\phi/2} = R(\boldsymbol{n}, -\phi)^j_k\sigma^k$$

となる(式(451)の導出過程を見よ) [11, pp.223–225]．以上より

$$R(\boldsymbol{n}, +\phi)^i_jU^A_CU^B_D\sigma^{j,CD} = R(\boldsymbol{n}, +\phi)^i_jR(\boldsymbol{n}, -\phi)^j_k\sigma^{k,A}_D\varepsilon^{DB} = \sigma^{i,AB}$$

を得るので， $\sigma^{i,AB}$ は不変テンソルである [2, pp.235–236]．

なお行列の積を直接計算すると，具体的には

$$\sigma_i^{AB} = \sigma_i^A_C\varepsilon^{CB} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

である [2, p.380]．

8.2.2項の原稿

ここでSU(2)表現理論で基本的な役割を演じるツールとして、スピノル算を導入しておく。SU(2)の基本表現の空間は、2成分スピノル(476)、すなわち式(505)の空間である。ただし本項では2つの値0,1をとる添字 $A, B, C, \dots$ を用いてスピノル成分を表し、スピノル添字の上下を区別する。SU(2)行列要素は第1添字を上付き、第2添字を下付きとして U^A_B と書き、これをスピノル添字の標準位置と約束する。時空多様体上のテンソル添字の上げ下げが計量テンソルとの縮約で定義されるのと同様に、スピノル添字の上げ下げは2つの反対称テンソル(506)を用いて行うものと約束する。ただし計量テンソルと違いLevi-Civita記号(506)は添字に関して反対称なので、2つの添字のどちらと縮約をとるかに注意が必要である。そこでLevi-Civita記号の縮約される添字が、もう一方の縮約される添字を持つテンソルのすぐ隣に来るようにLevi-Civita記号を移動することを考えよう。このとき式(507)のように、常に縮約される下付き添字の右側に上付き添字が現れる、言い換えれば縮約される2つの添字が右上がりの形に配置されるように縮約をとると約束しておけば、添字の上げ下げはコンシステントに行うことができる(導出スライド参照)。

Minkowski空間のテンソルに対する式(42)と同様に、Levi-Civita記号とKroneckerのデルタの間には式(508)の関係が成り立つ。第2式は式(506)の行列 ε の逆行列が転置行列であること(509)を意味している。次にSU(2)行列 U の行列式は式(510)で表される。第3辺は行列式の定義そのものである。最右辺は添字 A, C について反対称な量どうし

の縮約であることに注意すると，第3辺に戻る．これを踏まえると，添字の上げ下げに用いられる ε^{AB} 自身は式(511)のように， $SU(2)$ の作用の下で不変であることが分かる．最後に， $SU(2)$ 行列の逆行列は式(512)で表される．

完全対称な n 個の添字のスピンル(513) (右辺の丸括弧は対称化を表す) のベクトル空間は， $SU(2)$ の作用(514)の下で変換し，したがって群の表現を定義する．実際，変換則(514)は添字の対称性を保持することが見て取れる．

完全対称なスピンル(513)を考えることは，数学的には既約表現を定義することに対応する．実際 n 個の添字を持つスピンルが完全対称でなければ，2つの添字を ε テンソルで縮約して $(n-2)$ 個の添字を持つゼロでないスピンルを作ることができ，表現を簡約できる．他方，完全対称スピンルは ε との縮約が消えるので，表現が既約であることを保証する．

物理的にはスピンル(513)は上向きと下向きの2状態をとり得るスピン $1/2$ の n 個の集まりと見なせる．このときスピンル(513)の対称性は粒子を入れ替えた状態を区別できないことに対応している．またこのときスピン成分は $-n/2$ から $n/2$ までの値をとり得るので，スピンル(513)が定義する表現はスピン $j = n/2$ 表現と呼ばれる．

スピンル(513)の成すベクトル空間 $\mathcal{H}_j$ は $(2j+1)$ 次元である．完全対称なスピンル(513)は n 個の添字の順番を入れ替えても変わらないので，添字に含まれる0と1の個数によってのみ区別される．そこで独立な(複素)成分として，式(515)の $(n+1) = (2j+1)$ 個を選べる．よって $\mathcal{H}_j$ は複素 $(2j+1)$ 次元である．これは明らかに

スピン成分が $-j$ から $+j$ までの $(2j + 1)$ 通りの値をとり得ることに対応する。

ここで導入したスピノル算の記法を踏まえると、さらにPauli行列の有用な公式を導入できる。ここではPauli行列の要素を式(516)のように、引き続き上下のスピノル添字で指定する。

まず式(506)の行列 ε に対して、Pauli行列は公式(517)を満たす(ここに ^{T} は転置を、 $*$ は複素共役を表す；[導出スライド参照](#))。

次に規格化した生成子(494): $\tau_i = -\frac{i}{2}\sigma_i$ に対して式(518)が成り立つ([導出スライド参照](#))。式(518)はとりわけスピノルの幾何学的性質を論じる際に有用となる(式(762),(763)を見よ)。

さらに A, B を任意の $SL(2, \mathbb{C})$ 行列としよう。 $SL(2, \mathbb{C})$ 行列とは複素数を成分に持つ、行列式が1の2次の正則行列である。このとき式(518)から恒等式(519)が導かれる([導出スライド参照](#))。式(519)とは独立に、式(519)とよく似た式(520)も成り立つことが個別的に確かめられる([導出スライド参照](#))。本稿では公式(520)を直接利用する予定はないものの、ここでその含意について形式的に言及しておくのが教育的だろう。歴史的にはループ量子重力の初期において、閉曲線(ループ)に沿うホロノミーのトレース(いわゆるWilsonループ)を空間の量子状態の基底に利用することが試みられた。しかしながらトレース公式(520)からは、考えている複数のループとそれらを繋いで得られるループに関するWilsonループを関係付ける、一連の“Mandelstam (マンデルシュタム) 恒等式”が芽づる式に得られる。したがって多様体における全てのWilsonループが独

立とはならず，ループ基底は過剰であることになる(これを過完備(over-complete)という). この過完備性は後で紹介する，結節点を持つスピン・ネットワーク基底において解消される [3, pp.104–105,p.107,pp.121–122].

最後に ε との縮約でスピノル添字を上げたPauli行列要素(521)を定義すると，これは表現 $1/2 \otimes 1/2 \otimes 1$ における不変テンソルとなる(導出スライド参照). このことはループ量子重力において簡単なスピン・ネットワークの結節因子を具体的に構成する際に有用となる.

8.3 Wigner行列とその周辺

8.3.1 Wigner行列

Wigner行列要素 (Wigner関数) を回転演算子 $\mathcal{D}(R)$ の行列要素

$$\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R) \equiv \langle j, m | \mathcal{D}(R) | j', m' \rangle = \langle j, m' | e^{-i\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \phi / \hbar} | j, m \rangle \quad (523)$$

で定義する。異なる j の値の間の行列要素は

$$\langle j', m' | e^{-i\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \phi / \hbar} | j, m \rangle = 0. \quad (j \neq j') \quad (524)$$

また Wigner行列要素 (523) はその構成により，始状態 $|j, m\rangle$ の回転後の状態を $|j, m'\rangle$ に見出す確率振幅となっており，実際，回転後の状態の展開係数となる：

$$\mathcal{D}(R) |j, m\rangle = \sum_{m'} |j, m'\rangle \langle j, m' | \mathcal{D}(R) | j, m \rangle = \sum_{m'} |j, m'\rangle \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R). \quad (525)$$

さらに Wigner行列要素 (523) は群の掛け算則を保持するため^{*116}，群の表現となる：

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R_1 R_2) &= \langle j, m' | \mathcal{D}(R_1 R_2) | j, m \rangle = \sum_{m''} \langle j, m' | \mathcal{D}(R_1) | j, m'' \rangle \langle j, m'' | \mathcal{D}(R_2) | j, m \rangle \\ &= \sum_{m''} \mathcal{D}_{m'm''}^{(j)}(R_1) \mathcal{D}_{m''m}^{(j)}(R_2). \end{aligned} \quad (526)$$

^{*116} 一般に量子力学における行列表示の定義は，演算子の掛け算則が保持されることを保証する。

	$j' = 1/2$	$j' = 1$	$j' = 3/2$
$j = 1/2$		0	0
$j = 1$	0		0
$j = 3/2$	0	0	

図39 ブロック対角行列 ($\langle j, m | \mathcal{D}(R) | j', m' \rangle$). 各行列要素は j, m, j', m' によって指定される.

図39でスピンの値 j を持つ各ブロックは $\mathcal{D}(R)$ の $(2j + 1)$ 次元の既約表現 (6.4.1 項)

$$\mathcal{D}^{(j)}(R) = (\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R)) \quad (\text{Wigner 行列}) \quad (527)$$

であり, 演算子 $\mathcal{D}(R)$ のユニタリー性を引き継ぐ:

$$\mathcal{D}_{m'm}(R^{-1}) = \mathcal{D}_{mm'}^*(R). \quad (528)$$

Euler角 α, β, γ を用いると，式(502)より Wigner行列は

$$\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R) = \langle j, m' | e^{-iJ_z\alpha/\hbar} e^{-iJ_y\beta/\hbar} e^{-iJ_z\gamma/\hbar} | j, m \rangle = e^{-(m'\alpha+m\gamma)} d_{m'm}^{(j)}(\beta), \quad (529)$$

$$d_{m'm}^{(j)}(\beta) \equiv \langle j, m' | e^{-iJ_y\beta/\hbar} | j, m \rangle. \quad (530)$$

例えばスピン $j = 1/2$ 表現では式(530)の行列は

$$d^{(1/2)}(\beta) = e^{-i\sigma_2\beta/2} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & -\sin \frac{\beta}{2} \\ \sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}. \quad (\because \text{式(503)}) \quad (531)$$

(以上，文献 [11, pp.261–264].)

8.3.1 項の式の導出など

■異なる値 $j, j' (\neq j)$ の間の行列要素が消えること (524) について
状態 $|j, m\rangle$ にある系の回転は j の値を変えない。実際、式 (455): $[\mathbf{J}^2, J_k] = 0$ に注意すると

$$\mathbf{J}^2(e^{-i\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\phi/\hbar} |j, m\rangle) = j(j+1)\hbar^2(e^{-i\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\phi/\hbar} |j, m\rangle)$$

である [11, p.261]。よって回転後の状態は固有値 j を持ち、

$$e^{-i\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\phi/\hbar} |j, m\rangle = \sum_{m''} c_{m''} |j, m''\rangle$$

と展開できるから、 $|j', m'\rangle$ ($j' \neq j$) と直交する。

■回転後の状態の展開(525)について

仮に完備性の関係式が

$$\sum_{j', m'} |j', m'\rangle \langle j', m'| = 1$$

であると考えたとしても, $j' \neq j$ に対して $\langle j', m' | \mathcal{D}(R) | j, m \rangle = 0$: (524) となるから式 (525):

$$\mathcal{D}(R) | j, m \rangle = \sum_{m'} |j, m'\rangle \langle j, m' | \mathcal{D}(R) | j, m \rangle$$

が得られる. これはあらかじめ完備性の関係式を, スピン j の空間の基底に対する関係

$$\sum_{m'} |j, m'\rangle \langle j, m'| = 1$$

と考えた場合に得られる結果と変わらない.

■ユニタリー性(528)について

一般にユニタリー演算子 U の表現行列 $\mathcal{D}(U) = (\langle a' | U | a'' \rangle)$ がユニタリー行列であることが次のようにして分かる。まず群の表現は掛け算則を保持するので

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}(U)\mathcal{D}(U^\dagger) = \mathcal{D}(U^\dagger)\mathcal{D}(U) = 1, \quad \therefore \mathcal{D}(U)^{-1} = \mathcal{D}(U^\dagger).$$

ところが Hermite 共役の表現行列は表現行列の共役転置行列である：

$$[\mathcal{D}(U^\dagger)]_{a'a''} = \langle a' | U^\dagger | a'' \rangle = \langle a'' | U | a' \rangle^* = [\mathcal{D}(U)]_{a''a'}^* = [\mathcal{D}(U)^\dagger]_{a'a''}.$$

よって行列のユニタリー性 $\mathcal{D}(U)^{-1} = \mathcal{D}(U)^\dagger$ が帰結する。

8.3.1 項の原稿

ここまではスピン $1/2$ の系の状態空間に作用する行列として、回転の $SU(2)$ 表現行列を調べてきた。これに対し任意のスピン j に関する回転ないし $SU(2)$ 群要素の表現行列として、Wigner 行列を定義しよう [11, pp.261–264]。まず与えられたスピン j に対して、Wigner 行列要素 (Wigner 関数) を回転演算子 $D(R)$ の行列要素 (523) で定義する。ここで状態 $|j, m\rangle$ にある系の回転は j の値を変えないため、異なる j の値の間の行列要素 (524) は消えるから考えなくて良い (導出スライド参照)。また Wigner 行列要素 (523) はその構成により、始状態 $|j, m\rangle$ の回転後の状態を $|j, m'\rangle$ に見出す振幅となっていることが素朴に見て取れる。実際、Wigner 行列要素は式 (525) のように、回転後の状態の展開係数となる。ただし第1の等号では式 (524) に注意して、スピン j の空間に限定した完備関係式を用いた (導出スライド参照)。再び完備関係式を用いると、Wigner 行列要素 (523) は式 (526) のように群の掛け算則を保持するため、群の表現となる。

式 (524) はまた、回転の演算子 $D(R)$ の行列要素が図 39 のようなブロック対角行列を作ることを意味する。スピンの値 j を持つ各ブロック (527) は $(2j + 1)$ 次の正方行列となっており、Wigner 行列と呼ばれる。実は図 39 のブロック対角行列における各 Wigner 行列はいかなる基底を選んでもさらに小さな正方行列に区分けすることができない、回転演算子 $D(R)$ の $(2j + 1)$ 次元の既約表現 (6.4.1 項) となっている。さらに回転演算子 $D(R) = e^{-i\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\phi/\hbar}$ のユニタリー性を反映して、その表現行列もまたユニタリー性 (528) を満たす (導出スライド参照)。

回転 R を Euler 角 α, β, γ で指定すると，式 (502) より対応する Wigner 行列要素は式 (529) で表され，最右辺における非自明な行列要素は式 (530) で定義される．例えばスピン $j = 1/2$ 表現では式 (530) の行列は Pauli 行列を生成子とする行列 (531) になる．これは y 軸周りの角度 $\beta/2$ の回転行列となっており，このようにスピノルに作用する行列の回転角は実際の空間での回転角 β の半分であることに注意しよう．

8.3.2 角運動量を表す Schwinger の振動子モデル

■結合していない振動子と角運動量 [11, pp.297–303]
プラス型とマイナス型の2種類の調和振動子に対して

$$\text{消滅演算子 } a_{\pm}, \quad \text{生成演算子 } a_{\pm}^{\dagger}, \quad \text{個数演算子 } N_{\pm} = a_{\pm}^{\dagger} a_{\pm} \quad (532)$$

を定義する．これは調和振動子の交換関係

$$[a_{\pm}, a_{\pm}^{\dagger}] = 1 \quad (533)$$

を満たす(複号同順, 以下同じ)．このとき N_+, N_- の同時固有ケットは

$$|n_+, n_-\rangle = \frac{(a_+^{\dagger})^{n_+} (a_-^{\dagger})^{n_-}}{\sqrt{n_+! n_-!}} |0, 0\rangle. \quad (\text{固有値 } n_+, n_-) \quad (534)$$

ここで演算子

$$J_{\pm} \equiv \hbar a_{\pm}^{\dagger} a_{\mp}, \quad J_z \equiv \frac{\hbar}{2} (N_+ - N_-) \quad (535)$$

を定義すると, これらは角運動量の交換関係を満たす:

$$[J_z, J_{\pm}] = \pm \hbar J_{\pm}, \quad [J_+, J_-] = 2\hbar J_z. \quad (536)$$

よって J_z はスピン成分と見なせる．しかるに

$$J_z |n_+, n_-\rangle = \frac{\hbar}{2}(n_+ - n_-) |n_+, n_-\rangle, \quad (537)$$

$$J_{\pm} |n_+, n_-\rangle = \sqrt{n_{\mp}(n_{\pm} + 1)}\hbar |n_+ \pm 1, n_- \mp 1\rangle \quad (538)$$

→ 上(下)向きスピン $1/2$ の粒子の個数を n_+ (n_-) と解釈できる．
角運動量の状態が $|j, m\rangle$ の任意の対象は，回転における変換の性質に関する限り，

- $n_+ = j + m$ 個のスピン $1/2$ の上向き粒子
- $n_- = j - m$ 個のスピン $1/2$ の下向き粒子

の複合系と見なせる．固有状態 (534) はこの置き換え $j \equiv \frac{n_+ + n_-}{2}, m \equiv \frac{n_+ - n_-}{2}$ により

$$|j, m\rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{j+m}(a_-^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} |0\rangle \quad (|0\rangle \equiv |0, 0\rangle) \quad (539)$$

と書き換えられる．

■回転行列に関する具体的な公式 [11, pp.303–306]

$$J_y = \frac{J_+ - J_-}{2i} = \frac{\hbar}{2i}(a_+^\dagger a_- - a_-^\dagger a_+) \quad (540)$$

に対して*117, y 軸周りの回転の演算子 $\mathcal{D}(R) = e^{-iJ_y\beta/\hbar}$ を考えると,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(R) |j, m\rangle &= \sum_k \sum_l \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}{(j+m-k)!k!(j-m-l)!l!} \\ &\times \left(a_+^\dagger \cos \frac{\beta}{2}\right)^{j+m-k} \left(a_-^\dagger \sin \frac{\beta}{2}\right)^k \left(-a_+^\dagger \sin \frac{\beta}{2}\right)^{j-m-l} \left(a_-^\dagger \cos \frac{\beta}{2}\right)^l |0\rangle, \end{aligned} \quad (541)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(R) |j, m\rangle &= \sum_{m'} |j, m'\rangle d_{m'm}^{(j)}(\beta) \quad (\because \text{式 (525), (530)}) \\ &= \sum_{m'} d_{m'm}^{(j)}(\beta) \frac{(a_+^\dagger)^{j+m'} (a_-^\dagger)^{j-m'}}{\sqrt{(j+m')!(j-m')!}} |0\rangle. \quad (\because \text{式 (539)}) \end{aligned} \quad (542)$$

*117 最右辺より Hermite 性が明白に見て取れる.

2式(541),(542)が一致することを要求すると, Wignerの公式

$$d_{m'm}^{(j)}(\beta) = \sum_k (-1)^{k-m+m'} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m-k)!k!(j-k-m')!(k-m+m')!} \\ \times \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{2j-2k+m-m'} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^{2k-m+m'} \quad (543)$$

を得る*118.

■ $\beta = \pi$ の場合 改めてWignerの公式(543)の導出をたどると,

$$d_{m'm}^{(j)}(\pi) = (-1)^{j-m} \delta_{m',-m} \quad (544)$$

が得られる. これを式(525)に代入すると

$$|j, m\rangle \rightarrow \mathcal{D}(R) |j, m\rangle = \sum_{m'} |j, m'\rangle d_{m'm}^{(j)}(\pi) = (-1)^{j-m} |j, -m\rangle \quad (545)$$

を得る. (期待される通りスピン成分 m の符号は反転する.)

*118 ただし式(543)で k についての和は, 分母中の階乗の変数が1つも負にならない範囲でとる

8.3.2項の式の導出など

■交換関係(536)の確認

$$\begin{aligned}[J_z, J_+] &= \frac{\hbar^2}{2} ([N_+, a_+^\dagger a_-] - [N_-, a_+^\dagger a_-]) \\ &= \frac{\hbar^2}{2} (a_+^\dagger [N_+, a_-] + [N_+, a_+^\dagger] a_- - a_+^\dagger [N_-, a_-] - [N_-, a_+^\dagger] a_-) \\ &= \frac{\hbar^2}{2} \{0 + a_+^\dagger a_- - a_+^\dagger (-a_-) - 0\} \\ &= \hbar^2 a_+^\dagger a_- \\ &= \hbar J_+, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[J_z, J_-] &= \frac{\hbar^2}{2} ([N_+, a_-^\dagger a_+] - [N_-, a_-^\dagger a_+]) \\ &= \frac{\hbar^2}{2} (a_-^\dagger [N_+, a_+] + [N_+, a_-^\dagger] a_+ - a_-^\dagger [N_-, a_+] - [N_-, a_-^\dagger] a_+) \\ &= \frac{\hbar^2}{2} \{a_-^\dagger (-a_+) + 0 - 0 - a_-^\dagger a_+\} \\ &= -\hbar^2 a_-^\dagger a_+ \\ &= -\hbar J_-, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[J_+, J_-] &= \hbar^2 [a_+^\dagger a_-, a_-^\dagger a_+] \\
&= \hbar^2 (a_+^\dagger [a_-, a_-^\dagger] a_+ + a_-^\dagger [a_+^\dagger, a_+] a_-) \\
&= \hbar^2 (a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-) \\
&= J_z.
\end{aligned}$$

これらが角運動量の交換関係であることについて,

- 第1式 $[J_z, J_\pm] = \pm \hbar J_\pm$ は角運動量の交換関係(464)である.
- 第2式も角運動量の交換関係 $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$ から直ちに

$$[J_+, J_-] = -2i[J_x, J_y] = 2\hbar J_z$$

と確かめられる.

■式(538)の導出 [11, p.298,p.300]

生成・消滅演算子の性質

$$a_+^\dagger |n_+, n_-\rangle = \sqrt{n_+ + 1} |n_+ + 1, n_-\rangle ,$$

$$a_-^\dagger |n_+, n_-\rangle = \sqrt{n_- + 1} |n_+, n_- + 1\rangle ,$$

$$a_+ |n_+, n_-\rangle = \sqrt{n_+} |n_+ - 1, n_-\rangle ,$$

$$a_- |n_+, n_-\rangle = \sqrt{n_-} |n_+, n_- - 1\rangle$$

による． (固有状態 $|n_+, n_-\rangle$ の式(534) もここから理解できる．)

■ $n_{\pm} = j \pm m$ と同定できる理由 [11, pp.299–301]

素朴には $n_{\pm}$ 個の $\pm z$ 向きスピン $1/2$ から成る角運動量の固有値

$$\frac{\hbar}{2}(n_+ + n_-) = j\hbar, \quad \frac{\hbar}{2}(n_+ - n_-) = m\hbar \quad (546)$$

を $n_{\pm}$ について逆に解くと $n_{\pm} = j \pm m$ を得る.

この直観を補強する第1の証拠として, 式(538)は $n_{\pm} \rightarrow j \pm m$ とおくと, はしご演算子の式(462)を完全に再現する.

確認 式(538)において平方根の因子は

$$\sqrt{n_{\mp}(n_{\pm} + 1)} \rightarrow \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}$$

と置き換わる. さらに式(546): $j \equiv \frac{n_+ + n_-}{2}$, $m \equiv \frac{n_+ - n_-}{2}$ の下で

$$|n_+, n_-\rangle \rightarrow |j, m\rangle, \quad |n_+ \pm 1, n_- \mp 1\rangle \rightarrow |j, m \pm 1\rangle$$

と書き換えた結果は, 完全に式(462):

$$J_{\pm} |j, m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\hbar |j, m \pm 1\rangle$$

に一致する.

また第2の証拠として、全体の個数演算子 $N \equiv N_+ + N_-$ を定義すると

$$\mathbf{J}^2 \equiv J_z^2 + \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) = \frac{\hbar^2}{2}N \left(\frac{N}{2} + 1 \right) \quad (547)$$

であり、その固有値は同じ置き換えで

$$\frac{\hbar^2}{2}(n_+ + n_-) \left[\frac{(n_+ + n_-)}{2} + 1 \right] \rightarrow \hbar^2 j(j+1)$$

となる(角運動量の自乗の固有値(458)に一致).

式(547)の確認 N_+ と N_- が交換するため

$$(N_+ \pm N_-)^2 = N_+^2 \pm 2N_+N_- + N_-^2$$

であることに注意すると

$$J_z^2 = \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2 (N^2 - 4N_+N_-) = \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{N^2}{2} - 2a_+^\dagger a_+ a_-^\dagger a_- \right)$$

となる． また

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}J_+J_- &= \frac{\hbar^2}{2}a_+^\dagger a_- a_-^\dagger a_+ = \frac{\hbar^2}{2}a_+^\dagger a_+ a_- a_-^\dagger = \frac{\hbar^2}{2}a_+^\dagger a_+ (a_-^\dagger a_- + 1), \\ \frac{1}{2}J_-J_+ &= \frac{\hbar^2}{2}a_-^\dagger a_+ a_+^\dagger a_- = \frac{\hbar^2}{2}a_+ a_+^\dagger a_-^\dagger a_- = \frac{\hbar^2}{2}(a_+^\dagger a_+ + 1)a_-^\dagger a_-\end{aligned}$$

なので

$$\boldsymbol{J}^2 \equiv J_z^2 + \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) = \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{N^2}{2} + a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- \right) = \frac{\hbar^2}{2} N \left(\frac{N}{2} + 1 \right) : (547)$$

を得る．

■式(541)の導出 [11, pp.303–305]

式(539)の状態 $|j, m\rangle$ に回転演算子 $\mathcal{D}(R) = e^{-iJ_y\beta/\hbar}$ を作用させると,

$$\mathcal{D}(R) |j, m\rangle = \frac{[\mathcal{D}(R)a_+^\dagger \mathcal{D}^{-1}(R)]^{j+m} [\mathcal{D}(R)a_-^\dagger \mathcal{D}^{-1}(R)]^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \mathcal{D}(R) |0\rangle \quad (548)$$

となる.

式(548)の確認

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}(R)a_+^\dagger \mathcal{D}^{-1}(R)]^{j+m} &= \mathcal{D}(R)(a_+^\dagger)^{j+m} \mathcal{D}^{-1}(R), \\ [\mathcal{D}(R)a_-^\dagger \mathcal{D}^{-1}(R)]^{j-m} &= \mathcal{D}(R)(a_-^\dagger)^{j-m} \mathcal{D}^{-1}(R) \end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned} (\text{式(548) 右辺}) &= \frac{[\mathcal{D}(R)(a_+^\dagger)^{j+m} \cancel{\mathcal{D}^{-1}(R)}] [\cancel{\mathcal{D}(R)}(a_-^\dagger)^{j-m} \cancel{\mathcal{D}^{-1}(R)}]}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \cancel{\mathcal{D}(R)} |0\rangle \\ &= \mathcal{D}(R) \frac{(a_+^\dagger)^{j+m} (a_-^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} |0\rangle \\ &= \mathcal{D}(R) |j, m\rangle. \end{aligned}$$

注意 式(540)で定義した J_y と $a_{\pm}^{\dagger}$ は交換しないため,

$$\mathcal{D}(R)a_{\pm}^{\dagger}\mathcal{D}^{-1}(R) \neq a_{\pm}^{\dagger}.$$

Baker–Hausdorff の補助定理 (320) を用いて右辺の因子を評価すると,

$$\mathcal{D}(R)a_{+}^{\dagger}\mathcal{D}^{-1}(R) = a_{+}^{\dagger} \cos \frac{\beta}{2} + a_{-}^{\dagger} \sin \frac{\beta}{2}, \quad (549)$$

$$\mathcal{D}(R)a_{-}^{\dagger}\mathcal{D}^{-1}(R) = a_{-}^{\dagger} \cos \frac{\beta}{2} - a_{+}^{\dagger} \sin \frac{\beta}{2} \quad (550)$$

を得る.

式(549),(550)の確認 Baker–Hausdorff の補助定理 (320) において

$$\left[\frac{-J_y}{\hbar}, a_{\pm}^{\dagger} \right] = \frac{1}{2i} [a_{-}^{\dagger} a_{+} - a_{+}^{\dagger} a_{-}, a_{\pm}^{\dagger}] = \pm \frac{1}{2i} a_{\mp}^{\dagger} [a_{\pm}, a_{\pm}^{\dagger}] = \pm \frac{1}{2i} a_{\mp}^{\dagger}$$

を繰り返し用いると

$$\begin{aligned} & e^{-iJ_y\beta/\hbar} a_{+}^{\dagger} e^{iJ_y\beta/\hbar} \\ &= a_{+}^{\dagger} + i\beta \left(\frac{1}{2i} a_{-}^{\dagger} \right) + \frac{(i\beta)^2}{2!} \left\{ - \left(\frac{1}{2i} \right)^2 a_{+}^{\dagger} \right\} + \frac{(i\beta)^3}{3!} \left\{ - \left(\frac{1}{2i} \right)^3 a_{-}^{\dagger} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(i\beta)^4}{4!} \left(\frac{1}{2i}\right)^4 a_+^\dagger + \dots \\
& = a_+^\dagger \left\{ 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\beta}{2}\right)^4 - \dots \right\} + a_-^\dagger \left\{ \frac{\beta}{2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\beta}{2}\right)^3 + \dots \right\} \\
& = a_+^\dagger \cos \frac{\beta}{2} + a_-^\dagger \sin \frac{\beta}{2} : (549)
\end{aligned}$$

を得る．式(550)も同様に得られる．
 結果の吟味 このとき特に

$$a_+^\dagger |0\rangle \rightarrow \cos \left(\frac{\beta}{2}\right) a_+^\dagger |0\rangle + \sin \left(\frac{\beta}{2}\right) a_-^\dagger |0\rangle \quad (551)$$

となる．これは基本となるスピン上向き状態 $a_+^\dagger |0\rangle$ の y 軸周りの回転として自然な結果である．

注解 式(525):

$$\mathcal{D}(R) |j, m\rangle = \sum_{m'} |j, m'\rangle \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R)$$

に注意すると，式(551)における係数 $\cos \frac{\beta}{2}, \sin \frac{\beta}{2}$ は， $d^{(1/2)}(\beta)$ の式(531)の1列目の成分として理解できる．

上式(549),(550)を式(548)に戻して2項定理

$$(x+y)^N = \sum_k \frac{N!x^{N-k}y^k}{(N-k)!k!} \quad (552)$$

を用いると，式(541):

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(R) |j, m\rangle &= \sum_k \sum_l \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}{(j+m-k)!k!(j-m-l)!l!} \\ &\times \left(a_+^\dagger \cos \frac{\beta}{2}\right)^{j+m-k} \left(a_-^\dagger \sin \frac{\beta}{2}\right)^k \left(-a_+^\dagger \sin \frac{\beta}{2}\right)^{j-m-l} \left(a_-^\dagger \cos \frac{\beta}{2}\right)^l |0\rangle \end{aligned}$$

が得られる．

注解 2項定理(552)は x と y が交換するときに成り立つ関係である．式(541)導出の最後のステップでは $a_+^\dagger$ と $a_-^\dagger$ が交換することに注意してこれを適用し，

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}(R)a_+^\dagger\mathcal{D}^{-1}(R))^{j+m} &= \left(a_+^\dagger \cos \frac{\beta}{2} + a_-^\dagger \sin \frac{\beta}{2}\right)^{j+m} \\ &= \sum_k \frac{(j+m)! \left(a_+^\dagger \cos \frac{\beta}{2}\right)^{j+m-k} \left(a_-^\dagger \sin \frac{\beta}{2}\right)^k}{(j+m-k)!k!}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}(R)a_{-}^{\dagger}\mathcal{D}^{-1}(R))^{j-m} &= \left(a_{-}^{\dagger}\cos\frac{\beta}{2}-a_{+}^{\dagger}\sin\frac{\beta}{2}\right)^{j-m} \\
&= \sum_l \frac{(j-m)!\left(a_{-}^{\dagger}\cos\frac{\beta}{2}\right)^{j-m-l}\left(-a_{+}^{\dagger}\sin\frac{\beta}{2}\right)^l}{(j-m-l)!l!}
\end{aligned}$$

としている.

■ Wignerの公式(543)の導出について

式(541)における l についての和を, $l = j - k - m'$ を満たす m' に関する和に制限すると

$$\sum_k \sum_{m'} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}{(j+m-k)!k!(k-m+m')!(j-k-m')} (a_+^\dagger)^{j+m'} (a_-^\dagger)^{j-m'} \\ \times (-1)^{k-m+m'} \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{2j-2k+m-m'} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^{2k-m+m'} |0\rangle$$

となる. これを式(542)の最右辺

$$\sum_{m'} d_{m'm}^{(j)}(\beta) \frac{(a_+^\dagger)^{j+m'} (a_-^\dagger)^{j-m'}}{\sqrt{(j+m')!(j-m')!}} |0\rangle$$

と等置して, $d_{m'm}^{(j)}(\beta)$ に対する Wignerの公式(543)を得る.

■ $d_{m'm}^{(j)}(\beta = \pi)$ の式 (544) の導出

$\beta = \pi$ とおくと式 (549), (550) は $\mathcal{D}(R)a_{\pm}^{\dagger}\mathcal{D}^{-1}(R) = \pm a_{\mp}^{\dagger}$ と簡略化される. これを式 (548) に代入すると

$$\mathcal{D}(R)|j, m\rangle = (-1)^{j-m} \frac{(a_{+}^{\dagger})^{j-m}(a_{-}^{\dagger})^{j+m}}{\sqrt{(j-m)!(j+m)!}} |0\rangle$$

となる. これを式 (542) の最右辺と比較すると, 直ちに

$d_{m'm}^{(j)}(\pi) = (-1)^{j-m} \delta_{m', -m}$: (544) と同定される.

8.3.2項の原稿

本稿ではこの後「Wignerの $3j$ 記号」の性質を調べる際に、スピンの z 成分の反転に伴う状態の変化を調べる予定がある。スピンの z 成分の符号を反転するには、第2のEuler角 β のみをゼロでない値 π としてEuler回転を行えば良い。このとき y 軸周りの角度 π 回転に対するWigner行列要素を用いて、回転に伴う状態の変化は式(525)で与えられる。そこで任意のスピン j に対して、 y 軸周りの回転に関する非自明なWigner行列要素(530)を求める便利な方法として、角運動量を表すSchwingerの振動子モデルを紹介する。アイデアは完全対称なスピノル(513)でスピン j 表現を定義したのと同様に、任意のスピン j を持つ系を、スピンの上向きと下向きのスピン $1/2$ の粒子の複合系と見なすことである。

2種類の調和振動子を考え、それぞれをプラス型とマイナス型と呼ぼう。各々の振動子に対して演算子(532)が定義され、これは調和振動子の交換関係(533)を満たす(複号同順、以下同じ)。また、2つの振動子は結合していないものとし、異なる型の振動子に関する演算子は交換すると仮定する。このとき N_+ と N_- は交換し、その固有値 n_+, n_- に属する同時固有ケット(534)が作られる。

ここで演算子(535)を定義すると、これらは角運動量の交換関係(536)を満たす(導出スライド参照)。

よって J_z はスピン成分と見なせる。しかるに式(537)が成り立つので

- 上向きスピンを持つスピン $1/2$ の粒子の個数を n_+
- 下向きスピンを持つスピン $1/2$ の粒子の個数を n_-

と解釈できる．また調和振動子の交換関係に基づく式(538)のように， $J_{\pm}$ はスピン $1/2$ の下向き (または上向き) 粒子を1個消滅させ，スピン $1/2$ の上向き (または下向き) 粒子を1個生成することが示される (導出スライド参照)．詳しく述べると，角運動量の状態が j と m で表される任意の対象は，回転における変換の性質に関する限り，

- $n_+ = j + m$ 個のスピン $1/2$ の上向き粒子
- $n_- = j - m$ 個のスピン $1/2$ の下向き粒子

の複合系と見なして良い (導出スライド参照)．固有状態(534)はこの置き換え $j \equiv \frac{n_+ + n_-}{2}, m \equiv \frac{n_+ - n_-}{2}$ により式(539)のように書き換えられる．

ここで y 軸周りの回転に関する非自明な Wigner 行列要素(530)を求めよう．式(540)で定義される角運動量成分 J_y に対して， y 軸周りの回転の演算子 $\mathcal{D}(R) = e^{-iJ_y\beta/\hbar}$ を考える．このとき演算子の作用は式(541)のように計算される (導出スライド参照)．これが Wigner 行列を用いた表式(542)に一致することを要求しよう．

すると，Wigner の公式(543)を得る；ただし式(543)で k についての和は，分母中の階乗の変数が1つも負にならない範囲でとる (導出スライド参照)．

もっとも本稿で必要となるのは、回転角が $\beta = \pi$ の場合の Wigner 行列要素の表式である。Wigner 行列要素 (543) を $\beta = \pi$ で評価するには、改めて $\beta = \pi$ に対して Wigner の公式 (543) の導出過程をたどるのが容易である。すると式 (544) が得られる (導出スライド参照)。またこの結果を式 (525) に代入すると式 (545) を得る。これは予想通りスピン成分 J_z ないし磁気量子数 m の符号の反転が、 y 軸周りの角度 π 回転として実現されることを意味している。

8.3.3 Haar測度とPeter–Weyl定理，群上の調和解析

■SU(2) Haar測度 [37, pp.137–138] [36, pp.73–77] [1, p.22,p.26]

一般に Lie 群 G の全ての元 g に対する，ある元 a の作用 (積分変数・座標の変更)

$$g \rightarrow ag \text{ (右移動)}, \quad g \rightarrow ga \text{ (左移動)} \quad (553)$$

の下で不変な群上の積分

$$\int f(ag)dg = \int f(g)dg \quad (554)$$

を与える積分測度 dg を **Haar (ハール)測度** という.

SU(2) 群の Haar 測度を求めよう. SU(2) 行列の一般式 (489), (503):

$$U = \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2} \cos(\beta/2) & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2} \sin(\beta/2) \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2} \sin(\beta/2) & e^{i(\alpha+\gamma)/2} \cos(\beta/2) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad (555)$$

を比較すると

$$\begin{aligned} x \equiv \operatorname{Re} a &= \cos \frac{\alpha + \gamma}{2} \cos \frac{\beta}{2}, & y \equiv \operatorname{Im} a &= -\sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \cos \frac{\beta}{2}, \\ z \equiv -\operatorname{Re} b &= \cos \frac{\alpha - \gamma}{2} \sin \frac{\beta}{2}, & w \equiv \operatorname{Im} b &= \sin \frac{\alpha - \gamma}{2} \sin \frac{\beta}{2}. \end{aligned} \quad (556)$$

このときユニモジュラー条件(490): $\det U = |a|^2 + |b|^2 = 1$ は3次元球面の式

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1 \quad (557)$$

になり, Euler角は3次元球面(557)をパラメトライズしていると言える^{*119}.

$$\text{Euler 回転 (SO(3) 群の表現) に対して} \quad 0 \leq \alpha, \gamma < 2\pi, \quad 0 \leq \beta < \pi, \quad (558)$$

$$\text{SU(2) 行列 (555) に対して} \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad 0 \leq \beta < \pi, \quad 0 \leq \gamma < 4\pi. \quad (559)$$

SU(2) Haar 測度は3次元球面上の固有体積

$$dU = \frac{1}{16\pi^2} \sin \beta d\alpha d\beta d\gamma \quad (560)$$

で与えられる. ただし “群の体積” が

$$\int_{\text{SU}(2)} dU = 1 \quad (561)$$

となるように規格化した.

^{*119} 3次元球面については4.2.1項で説明した. Euler角の式(556)は “極座標” の式(293)とは異なる, 3次元球面をパラメトライズする今一つの方法を供している.

なお式(503)のSU(2)行列 $U = U(\alpha, \beta, \gamma)$ に対して、逆行列は

$$U^{-1} = U^\dagger = U(\alpha' = -\gamma, \beta' = -\beta, \gamma' = -\alpha) \quad (562)$$

と求まる．ところがHaar測度(560)は $\beta \rightarrow \beta'$ に伴って符号を変えるに過ぎないため、

$$d(U^{-1}) = -dU \quad (563)$$

が成り立つと考えられる．

■Peter–Weyl 定理 [37, pp.137–138] [1, p.103]

- $SU(2)$ 群要素 U の既約表現： Wigner 行列 $\mathcal{D}^{(j)}(U)$
- スピン j 表現の次元： $d_j = 2j + 1$
- 群要素にわたる離散的な和 $\rightarrow$ Haar 測度 (560) による積分

として直交関係式 (393) を $SU(2)$ 群に一般化すると

$$\int dU [\mathcal{D}_{m'n'}^{(j')}(U)]^* \mathcal{D}_{mn}^{(j)}(U) = \frac{1}{d_j} \delta^{jj'} \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (564)$$

を得る (Peter–Weyl 定理)*¹²⁰.

直交関係式 (564) はスピン j 表現の指標

$$\chi^j(U) \equiv \text{Tr}[\mathcal{D}^{(j)}(U)] \quad (565)$$

の直交関係を与える：

$$\int dU \chi^k(U)^* \chi^j(U) = \delta^{jk}. \quad (566)$$

*¹²⁰ 数学的に言えば、Wigner 行列要素は Haar 測度で定義されるスカラー積に関して直交し、2 乗可積分空間 $\mathcal{H} = L_2[SU(2), dU]$ として定義される Hilbert 空間において直交基底を成す。

■群上の調和解析 [1, p.197, pp.113–114]

SU(2) 群上のデルタ関数 $\delta(U)$ は， Haar 測度による積分の下で性質

$$\int dU \delta(UV^{-1}) f(U) = f(V) \quad (567)$$

を満たす関数として定義できる． しかるに指標の直交性 (567) より，
群上の任意の関数を

$$f(U) = \sum_j \tilde{f}_j \chi^j(U) \quad (568)$$

と “Fourier 展開” したときの展開係数を定めることができ，
特にデルタ関数の “Fourier 展開” は

$$\delta(U) = \sum_j d_j \chi^j(U) = \sum_j d_j \text{Tr}[\mathcal{D}^{(j)}(U)]. \quad (569)$$

公式 (569) によりトレースの巡回対称性は
デルタ関数の引数に関する巡回対称性に引き継がれる：

$$\delta(UV) = \delta(VU), \quad \therefore \delta(UVU^{-1}) = \delta(V). \quad (570)$$

8.3.3項の式の導出など

■SU(2) Haar測度の式(560)の導出
式(556)を正直に微分すると

$$\begin{aligned}dx^2 + dy^2 &= \left(\frac{d\beta}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} + \left(\frac{d\alpha + d\gamma}{2}\right)^2 \cos^2 \frac{\beta}{2}, \\dz^2 + dw^2 &= \left(\frac{d\beta}{2}\right)^2 \cos^2 \frac{\beta}{2} + \left(\frac{d\alpha - d\gamma}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}\end{aligned}$$

が得られるので、3次元球面上の線要素の2乗は

$$dl^2 \equiv dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 = \frac{1}{4}(d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 + 2 \cos \beta d\alpha d\gamma)$$

となる．ここから計量テンソルを読み取ると、

$$g \equiv \begin{pmatrix} g_{\alpha\alpha} & g_{\alpha\beta} & g_{\alpha\gamma} \\ g_{\beta\alpha} & g_{\beta\beta} & g_{\beta\gamma} \\ g_{\gamma\alpha} & g_{\gamma\beta} & g_{\gamma\gamma} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cos \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \beta & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \therefore \det g = \frac{1}{64} \sin^2 \beta.$$

不変測度 dU は規格化の自由度を除き、3次元球面上の固有体積に比例する：

$dU \sim \sqrt{\det g} d\alpha d\beta d\gamma$. 次いで式(560)のように数係数を選ぶと、規格化条件(561)が満たされる．

■群上のデルタ関数の“Fourier展開”(569)の導出

群上の任意の関数の“Fourier展開”(568): $f(U) = \sum_j \tilde{f}_j \chi^j(U)$ における展開係数は、指標の直交性(566)から展開係数を

$$\int dU \chi^k(U)^* f(U) = \sum_j \tilde{f}_j \int dU \chi^k(U)^* \chi^j(U) = \tilde{f}_k$$

と求まる．すると特にデルタ関数の展開係数は、デルタ関数を定義する性質(567)とより

$$\tilde{\delta}_k = \int dU \chi^k(U)^* \delta(U) = \chi^k(1)^* = d_k$$

となるので、式(569): $\delta(U) = \sum_j d_j \chi^j(U)$ を得る．

8.3.3項の原稿

6.4.2項で予告したように，有限群に対する直交関係式(393)をSU(2)群へと一般化しよう [37, pp.137–138]. 直交関係式(393)における有限の群要素にわたる離散的な和は連続群SU(2)に対しては，群要素を指定する連続パラメータに関する適当な積分に置き換える必要があると推察される．ところで式(39)の箇所で見たように，多様体にわたる体積積分では，積分変数に選んだ座標の変更の下で不変な固有体積を積分測度に選ぶことができる．同様によく定義された群にわたる積分を得るには，群の作用の下で不変な測度を用いるのが適切であると考えられる．

一般にLie群Gの全ての元 g に対する，ある元 a の作用(553) [36, p.70]は，積分変数にあたる群の座標 g の変更と見なせる．そこで群多様体上の関数 $f(g)$ ($g \in G$)の積分を，群の作用(553)に対して不変な群上の積分(554)として定義しよう．不変積分(554)を与える積分測度 dg をHaar (ハール)測度という．Lie群に対しては，このような積分測度は定数倍を除いてただ1つ存在することが知られている．またSU(2)群のように群のパラメータの変域が有限なコンパクト群では，左移動に対して不変な積分(554)は右不変でもあり，左不変Haar測度は両側不変であることも示されている [36, pp.73–77].

ここではとりわけ興味のある，SU(2)群のHaar測度を具体的に求めよう．SU(2)行列をEuler角 α, β, γ でパラメトライズした公式(503)と一般式(489)を改めて式(555)に示す．これらを比較すると，パラメータ a, b の実部と虚部は式(556)のように同定される [11, p.234].

このときユニモジュラー条件(490): $\det U = |a|^2 + |b|^2 = 1$ は3次元球面の式(557)になるため, Euler角は3次元球面(557)をパラメトライズしていると言える.

ここでEuler角の変域について注意が必要である. 3次元空間のEuler回転に対しては, したがってSO(3)群の表現に対しては, Euler角の定義域を式(558)に採れば充分である. ところがSU(2)行列(555)は, $\alpha = \beta = 0$ と固定し γ をゼロから増大させると, $\gamma = 2\pi$ で単位元に戻らない. そこでSU(2)群を過不足なく覆うためには, 慣例に従い γ の変域を 4π にまで拡張して式(559)で定義する [37, p.136] [1, p.26]. もっとも我々はパラメータの変域に応じて適切に規格化されたHaar測度 dU を用いることもあり, 幸い今後パラメータの範囲をあからさまに書く必要に迫られることは基本的でない.

さて, 群の作用は座標の変更に対応し, 不変測度 dU は3次元球面上の固有体積に採れば良いと考えれば, SU(2) Haar測度(560)が得られる. ただし“群の体積”が式(561)で与えられるようにHaar測度を規格化し, 定数倍の不定性を取り除いた([導出スライド参照](#)). このようにHaar測度による積分は単なる群要素のパラメータにわたる通常の積分として理解できる [1, p.22,p.26].

なお式(503)のSU(2)行列 $U = U(\alpha, \beta, \gamma)$ に対して, 逆行列は式(562)のように求まる. ところがHaar測度(560)は $\beta \rightarrow \beta'$ に伴って符号を変えるに過ぎないため, 式(563)が成り立つと考えられる.

いよいよ直交関係式(393)をSU(2)群に一般化する. SU(2)群要素 U の既約表現はスピ

ン j 表現で与えられ、その表現行列は Wigner 行列 $D^{(j)}(U)$ 、表現の次元は $d_j = 2j + 1$ である。また群要素にわたる離散的な和を Haar 測度 (560) による積分に置き換えると、直交関係式 (564) を得る。これが Peter–Weyl 定理の主張である [1, p.103].

ここで $SU(2)$ 群に対してもスピン j 表現の指標を Wigner 行列のトレース (565) で定義しよう。このとき直交関係式 (564) は有限群の場合と同様、 $m = n, m' = n'$ とおいて m, m' で和をとると、指標の直交関係 (566) を与える [37, pp.137–138].

指標の直交関係 (566) の帰結として、群上のデルタ関数の “Fourier 展開” をここで説明しておくのが適切だろう。まず $SU(2)$ 群上のデルタ関数 $\delta(U)$ は、Haar 測度による積分の下で式 (567) のように、引数が単位元 (群多様体の “原点”) 1 となる値を選び出す関数として定義できる^{*121}。実際、ループ量子重力の計算では定義式 (567) を度々、成功裡に用いることになる。

ところで周期関数ないし円周上の関数は、正弦波を表す指数関数を用いて Fourier 級数へと展開できる。Fourier 展開は適当な周期を持つ一連の指数関数が直交基底を成すことに基づいている。また有界な円周はコンパクトな群多様体とアナログスであることを踏まえると、指標の直交性 (567) は指標を群上の “Fourier 展開” に利用できる可能性を示唆している。実際、任意のコンパクト群に対して Fourier 展開と類似の公式が成り立ち、その際に指数関数の役割を演じるのは表現の指標である。議論を確定するために引

^{*121} これは文献 [37, p.73] にある有限群に対するデルタ関数 $\delta(g)$ の定義とも整合する。

き続き $SU(2)$ 群を考え，群上の任意の関数が指標の重合せ (568) の形に展開できると仮定する．このことは Fourier 展開の場合と同様に，実際に指標の直交性 (566) から展開係数を定められることから正当化できる．すると特にデルタ関数はその定義 (567) により，表現の次元 d_j を展開係数として式 (569) のように展開できることが帰結する ([導出スライド参照](#))．式 (569) は通常のデルタ関数が，あらゆる波長の単色平面波を一様に含む白色光で表されることとアナログな結果となっている [1, p.197, pp.113–114]．さらに公式 (569) によれば著しい性質として，トレースの巡回対称性は式 (570) のように，デルタ関数の引数に関する巡回対称性に引き継がれる．特に相似変換に関する式 (570) 第2式は，両辺がともに $V = 1$ のときにゼロでない値を持つことから，直観的にも納得のいく結果となっている．

8.3.4 SU(2) コヒーレント状態

角運動量の交換関係 (450): $[J_x, J_y] = iJ_z$ より, Heisenberg の不確定関係

$$\Delta J_x \Delta J_y \geq \frac{1}{2} |\langle J_z \rangle| \quad (571)$$

不等式 (571) の等号を達成し, 不確定性を最小化する “コヒーレント状態” は固有状態 $|j, j\rangle$ で与えられる. 実際, 状態 $|j, j\rangle$ での不等式 (571) の両辺はそれぞれ

$$\Delta J_x \Delta J_y = \frac{j}{2}, \quad \frac{1}{2} |\langle J_z \rangle| = \frac{j}{2} \quad (572)$$

と評価される^{*122}. よって大きな j の極限では

$$\frac{\Delta J_x}{\langle \mathbf{J}^2 \rangle} = \frac{\sqrt{j/2}}{\sqrt{j(j+1)}} = \frac{1}{\sqrt{2(j+1)}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0. \quad (573)$$

^{*122} 正準交換関係とは対照的に式 (571) の右辺は観測量 J_z (の期待値) であり, その固有状態 $|j, j\rangle$ においても $\Delta J_x, \Delta J_y$ は発散しない. なお J_x, J_y のゆらぎのため, $|\mathbf{J}|$ の固有値 $\sqrt{j(j+1)}$ は J_z の固有値 j を上回ると解釈できる [29, p.223].

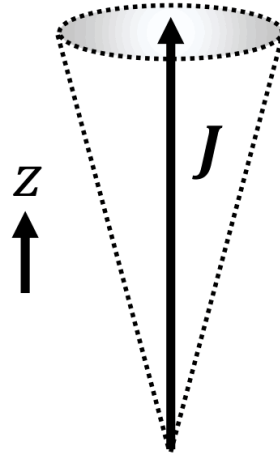


図40 コヒーレント状態 $|j, j\rangle$. 拡がりの程度を与える錐体の頂角 $\sim 1/\sqrt{j}$: (573).

角運動量が任意の方向単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向きを持つコヒーレント状態は、 z 軸の方向単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ 向きへと回転させる回転を R として

$$|j, \boldsymbol{n}\rangle = \mathcal{D}(R) |j, j\rangle. \quad (574)$$

コヒーレント状態 (574) は期待されるように、

$$\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n} |j, \boldsymbol{n}\rangle = j |j, \boldsymbol{n}\rangle, \quad (575)$$

$$\langle j, \boldsymbol{n} | \boldsymbol{J} | j, \boldsymbol{n} \rangle = j \boldsymbol{n} \quad (576)$$

を満たす.

J_z の固有状態によるコヒーレント状態の展開は式 (525) より

$$|j, \boldsymbol{n}\rangle = \mathcal{D}(R) |j, j\rangle = \sum_m |j, m\rangle \mathcal{D}_{mj}^{(j)}(R). \quad (577)$$

するとコヒーレント状態を用いて恒等演算子を

$$1_j = \frac{2j+1}{4\pi} \int_{S^2} d^2\boldsymbol{n} |j, \boldsymbol{n}\rangle \langle j, \boldsymbol{n}| \quad (578)$$

と分解できる.

(以上, 文献 [1, pp.164–166].)

8.3.4 項の式の導出など

■不確定関係 (571) の両辺を固有状態 $|j, j\rangle$ で評価した値 (572) の導出 [1, pp.164–165]

$|j, j\rangle$ は

$$J_z |j, j\rangle = j |j, j\rangle \quad (579)$$

を満たす J_z の固有状態なので, J_z の平均, 標準偏差, および分散は

$$\langle J_z \rangle \equiv \langle j, j | J_z | j, j \rangle = j\hbar, \quad \langle J_z^2 \rangle = (j\hbar)^2, \quad \Delta J_z \equiv \sqrt{\langle (J_z - \langle J_z \rangle)^2 \rangle} = 0 \quad (580)$$

となる (期待値は $\langle \cdots \rangle \equiv \langle j, j | \cdots | j, j \rangle$). これは直観的に期待される結果となっている. すると横方向成分 J_x, J_y の平均と分散は

$$\langle J_x \rangle = \langle J_y \rangle = 0, \quad (581)$$

$$\langle J_x^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle J_x^2 + J_y^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle J^2 - J_z^2 \rangle = \frac{1}{2} (j(j+1) - j^2) = \frac{j}{2}$$

と計算される.

上式 (581) について 直観的に納得できるものの, 厳密には

$$i \langle J_x \rangle = \langle j, j | [J_y, J_z] | j, j \rangle = j (\langle j, j | J_y | j, j \rangle - \langle j, j | J_y | j, j \rangle) = 0$$

のように示せる．あるいは，はじご演算子 $J_{\pm} \equiv J_x \pm iJ_y$ を用いて $J_x = \frac{J_+ + J_-}{2}$ と書き，その状態 $|j, j\rangle$ に関する期待値をとっても良い．

したがって

$$\Delta J_x = \Delta J_y = \sqrt{\frac{j}{2}}$$

となるので，式(572)を得る．

■ n 向きのコヒーレント状態 (574) における回転演算子 $\mathcal{D}(R)$ の具体的な構成 [1, p.165]

方向単位ベクトル n の方位角を ϕ , 天頂角を θ と書こう. このとき z 軸の方向単位ベクトル $\hat{z}$ を y 軸の周りに角度 θ だけ回転し, 次いで z 軸の周りに角度 ϕ だけ回転すると n が得られる. よって方向単位ベクトル $\hat{z}$ を $n = R\hat{z}$ へと向ける回転行列 $R \in \text{SO}(3)$ は, 式 (405) で見た $\text{SO}(3)$ の生成子 $(J_i)_{jk} = i\varepsilon_{ijk}$ を用いて $R = e^{-i\phi J_z} e^{-i\theta J_y}$ と表される. 式 (574) の $\mathcal{D}(R)$ はスピン j 空間の状態に作用する, この回転の演算子である.

■コヒーレント状態 $|j, \mathbf{n}\rangle$ の満たす式(575),(576)の導出
固有方程式(575)は

$$\begin{aligned}\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} |j, \mathbf{n}\rangle &= (\mathcal{D}(R) J_z \mathcal{D}^{-1}(R)) |j, \mathbf{n}\rangle \\ &= (\mathcal{D}(R) J_z \mathcal{D}^{-1}(R)) \mathcal{D}(R) |j, j\rangle = \mathcal{D}(R) J_z |j, j\rangle \\ &= j \mathcal{D}(R) |j, j\rangle = j |j, \mathbf{n}\rangle.\end{aligned}$$

のようにして得られる [1, p.166].

次に期待値(576)について, 角運動量が $\mathbf{n}$ 向きの固有状態 $|j, \mathbf{n}\rangle$ では, $\mathbf{n}$ に直交する角運動量成分 $\mathbf{J}_\perp$ の期待値はゼロになる. 実際, スピン $+z$ 向きの固有状態における式(581): $\langle J_x \rangle = 0$ の導出の根拠となった, 固有方程式(579)と角運動量の交換関係は, 回転に伴うユニタリー変換の下で不変である. すると回転後の成分 $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$ と $\mathbf{J}_\perp$ の間にも角運動量の交換関係が成り立つので, $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$ の固有状態では $\langle \mathbf{J}_\perp \rangle = 0$. そこで

$$\mathbf{J} = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \mathbf{J}_\perp$$

の期待値をとると, 式(575)から

$$\langle j, \mathbf{n} | \mathbf{J} | j, \mathbf{n} \rangle = \langle j, \mathbf{n} | (\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}) | j, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} = j \mathbf{n} : (576)$$

を得る.

参考 勝手な向き $\mathbf{m}$ に関する角運動量成分の標準偏差は

$$\Delta(\mathbf{J} \cdot \mathbf{m}) = \sqrt{1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m})^2} \sqrt{\frac{j}{2}} \quad (582)$$

で与えられる [1, p.166]. 特に式(582)で $\mathbf{m} = \mathbf{n}$ または $\mathbf{m} \perp \mathbf{n}$ なる $\mathbf{m}$ を採ると, 式(572)と式(580)が再現される.

上式(582)の説明 角運動量が $\mathbf{n}$ 向きの固有状態 $|j, \mathbf{n}\rangle$ において, 今一つの方法単位ベクトル $\mathbf{m}$ に関する成分 $\mathbf{J} \cdot \mathbf{m}$ の分散を評価する. まず式(576)と $\mathbf{m}$ との内積を作ると,

$$\langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{m} \rangle = j \mathbf{n} \cdot \mathbf{m}.$$

次に回転に伴うユニタリー変換の下での不変性に注意して, $\mathbf{n}$ の向きを改めて z 軸に選ぶ. すると

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{J} \cdot \mathbf{m})^2 \rangle &= m_x^2 \langle J_x^2 \rangle + m_y^2 \langle J_y^2 \rangle + m_z^2 \langle J_z^2 \rangle \\ &\quad + m_x m_y \langle J_x J_y + J_y J_x \rangle + m_y m_z \langle J_y J_z + J_z J_y \rangle + m_z m_x \langle J_z J_x + J_x J_z \rangle \\ &= \frac{j}{2} (m_x^2 + m_y^2) + j^2 m_z^2 \quad (\because \text{式(8.17-18)}) \\ &= \frac{j}{2} \{1 - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})^2\} + j^2 (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})^2. \end{aligned}$$

実際，クロス・タームに関しては

$$J_x = \frac{J_+ + J_-}{2}, \quad J_y = \frac{J_x - J_y}{2i}, \quad \therefore J_x J_y + J_y J_x = \frac{1}{2i}(J_+^2 - J_-^2)$$

と書くと，直ちに

$$\langle J_x J_y + J_y J_x \rangle = 0, \quad \langle J_y J_z + J_z J_y \rangle = 0, \quad \langle J_z J_x + J_x J_z \rangle = 0$$

となることが分かる．以上を定義式

$$\{\Delta(\mathbf{J} \cdot \mathbf{m})\}^2 = \langle (\mathbf{J} \cdot \mathbf{m})^2 \rangle - \langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{m} \rangle^2$$

に代入すると，式(582)を得る．

■コヒーレント状態の完全性条件(578)の証明 [1, p.166]

z 軸の方向単位ベクトルを $\mathbf{n}$ に移す回転 $R = e^{-i\phi J_z} e^{-i\theta J_y}$ を Euler 回転(501):

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma)$$

と比較すると, 極座標 (ϕ, θ) は Euler 角 (α, β) に他ならない. また回転 R は第3の Euler 角 γ に依らないので, Haar 測度(560)と立体角積分は

$$\int dR = \frac{1}{16\pi^2} 2\pi \cdot 2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} d^2 \mathbf{n}$$

で関係付けられる^{*123}. (これは全立体角にわたる平均操作に他ならない.) すると

$$\int_{S^2} d^2 \mathbf{n} |j, \mathbf{n}\rangle \langle j, \mathbf{n}| = \sum_{m, m'} \left(\int_{S^2} d^2 \mathbf{n} \mathcal{D}^{(j)}(R)_{jm} \left[\mathcal{D}^{(j)}(R)_{jm'} \right]^* \right) |j, m\rangle \langle j, m'| \quad (\because \text{式(577)})$$

^{*123} $R \in \text{SO}(3)$ に対しては $\text{SU}(2)$ Haar 測度(560)における γ の積分範囲 4π を半分の 2π に限定できるものの [37, p.136], 同時に Haar 測度の規格化定数も $1/16\pi^2 \rightarrow 1/8\pi^2$ と置き換わるため, この結果に変わりはない.

$$\begin{aligned}
&= 4\pi \sum_{m, m'} \left(\int dR \left[\mathcal{D}^{(j)}(R)_{jm'} \right]^* \mathcal{D}^{(j)}(R)_{jm} \right) |j, m\rangle \langle j, m'| \\
&= 4\pi \sum_{m, m'} \frac{\delta_{mm'}}{2j+1} |j, m\rangle \langle j, m'| \quad (\because \text{Peter-Weyl 定理 (564)}) \\
&= \frac{2j+1}{4\pi} \sum_m |j, m\rangle \langle j, m| = \frac{2j+1}{4\pi} 1_j
\end{aligned}$$

となるので，式(578)を得る．

8.3.4 項の原稿

今や我々は角運動量のコヒーレント状態に取り組むことができる段階に達した [1, pp.164–166]. 角運動量の交換関係 (450): $[J_x, J_y] = iJ_z$ より, 角運動量成分の間には Heisenberg の不確定関係 (571) が成り立つ. 全角運動量の量子数 j を持つあらゆる状態はこの不等式を満たす. ここで不等式 (571) の等号を達成し, したがって不確定性を最小化する “コヒーレント状態” は固有状態 $|j, j\rangle$ で与えられる. 実際, 状態 $|j, j\rangle$ で不等式 (571) の両辺はそれぞれ式 (572) のように評価される (導出スライド参照). よって大きな j の極限では式 (573) のように, 状態はシャープになる.

幾何学的な描像としては状態 $|j, j\rangle$ は図 40 のように, $+z$ 向きの周りに量子ゆらぎを伴う角運動量を表し, 角運動量の先端の拡がり と半径の比は大きさ j とともに減少する. 角運動量が任意の方向単位ベクトル n の向きを持つコヒーレント状態は, 状態 $|j, j\rangle$ を向き n へと回転することで容易に得られる. 具体的には z 軸の方向単位ベクトルを n 向きへと回転させる回転行列 $R \in \text{SO}(3)$ に対し, その角運動量 (スピン) j 空間へ作用する演算子を $\mathcal{D}(R)$ で表すと, コヒーレント状態は式 (574) で定義できる. 回転演算子 $\mathcal{D}(R)$ の具体的な構成は導出スライドを見よ.

コヒーレント状態 (574) のいくつかの性質を以下に示す. まずコヒーレント状態 $|j, n\rangle$ はその構成 (574) から期待されるように, 角運動量 $\mathbf{J}$ が大きさ j と向き n を持つ固有状態であり, 固有方程式 (575) と期待値の式 (576) を満たす (導出スライド参照).

J_z の固有状態によるコヒーレント状態の展開は式(525)より式(577)で与えられる。コヒーレント状態の最も重要な性質は、それらが恒等演算子の分解(578)を供することであり、ここに左辺はスピン j 空間における恒等演算子、また右辺は方向単位ベクトル n に関する立体角を積分測度とする、単位の2次元球面全体にわたる積分である (導出スライド参照)。

8.4 角運動量の合成とその周辺

8.4.1 角運動量の合成

■角運動量の合成の形式論 [11, pp.281–286]

2つの角運動量演算子 $\mathbf{J}_{(1)}, \mathbf{J}_{(2)}$ が交換関係

$$[J_{(a)i}, J_{(b)j}] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_{(a)k} \delta_{ab} \quad (583)$$

を満たすとする、全角運動量 $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{(1)} + \mathbf{J}_{(2)}$ もまた角運動量の交換関係

$$[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k \quad (584)$$

を満たすから、その名の通り角運動量となる。このとき系全体の回転演算子は

$$\exp\left(\frac{-i\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\phi}{\hbar}\right) = \exp\left(\frac{-i\mathbf{J}_{(1)} \cdot \mathbf{n}\phi}{\hbar}\right) \otimes \exp\left(\frac{-i\mathbf{J}_{(2)} \cdot \mathbf{n}\phi}{\hbar}\right). \quad (585)$$

- $\mathbf{J}_{(1)}^2, \mathbf{J}_{(2)}^2, J_{(1)z}, J_{(2)z}$ の同時固有ケット $|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle$
- $\mathbf{J}_{(1)}^2, \mathbf{J}_{(2)}^2, \mathbf{J}^2, J_z$ の同時固有ケット $|j_1 j_2; j m\rangle$

の2種類の基底は

$$|j_1 j_2; j m\rangle = \sum_{m_1} \sum_{m_2} |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j m\rangle \quad (586)$$

で関係付けられ(角運動量の合成),

変換係数 $\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j m\rangle$ を Clebsch–Gordan 係数と呼ぶ.

Clebsch–Gordan 係数は慣習上実数に採られ,

$$m = m_1 + m_2, \quad (587)$$

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 \quad (588)$$

のとき以外はゼロになる.

■ Clebsch–Gordan 条件とそのグラフ的解釈 [1, pp.24–25] [2, pp.379–380]

1. スピン j_1 とスピン j_2 の表現を定義する2つのスピノル(513)の積をとる
→ 初めの $2j_1$ 個と後ろの $2j_2$ 個の添字に関して対称な,
 $(2j_1 + 2j_2)$ 個の添字を持つスピノルを得る
2. 全ての添字を対称化すると, $(j_1 + j_2)$ 表現のスピノルを得る
3. k 回だけテンソル ε_{AB} を用いて, 1つ目のグループの k 個の添字と
2つ目のグループの k 個の添字を縮約する
4. 残り $2(j_1 + j_2 - k)$ 個の添字を対称化する
→ スピン $j_3 = j_1 + j_2 - k$ 表現のスピノルを得る

この構成から, スピンは

$$j_1 + j_2 + j_3 \in \mathbb{N}, \quad |j_1 - j_2| \leq j_3 \leq (j_1 + j_2) \quad (589)$$

を満たす (Clebsch–Gordan 条件). これは

$$2j_1 = b + c, \quad 2j_2 = c + a, \quad 2j_3 = a + b \quad (590)$$

を満たす3つの非負整数 a, b, c が存在することと等価である^{*124}.

^{*124} 式(590)を逆に解くと, $a = -j_1 + j_2 + j_3$, $b = j_1 - j_2 + j_3$, $c = j_1 + j_2 - j_3$.

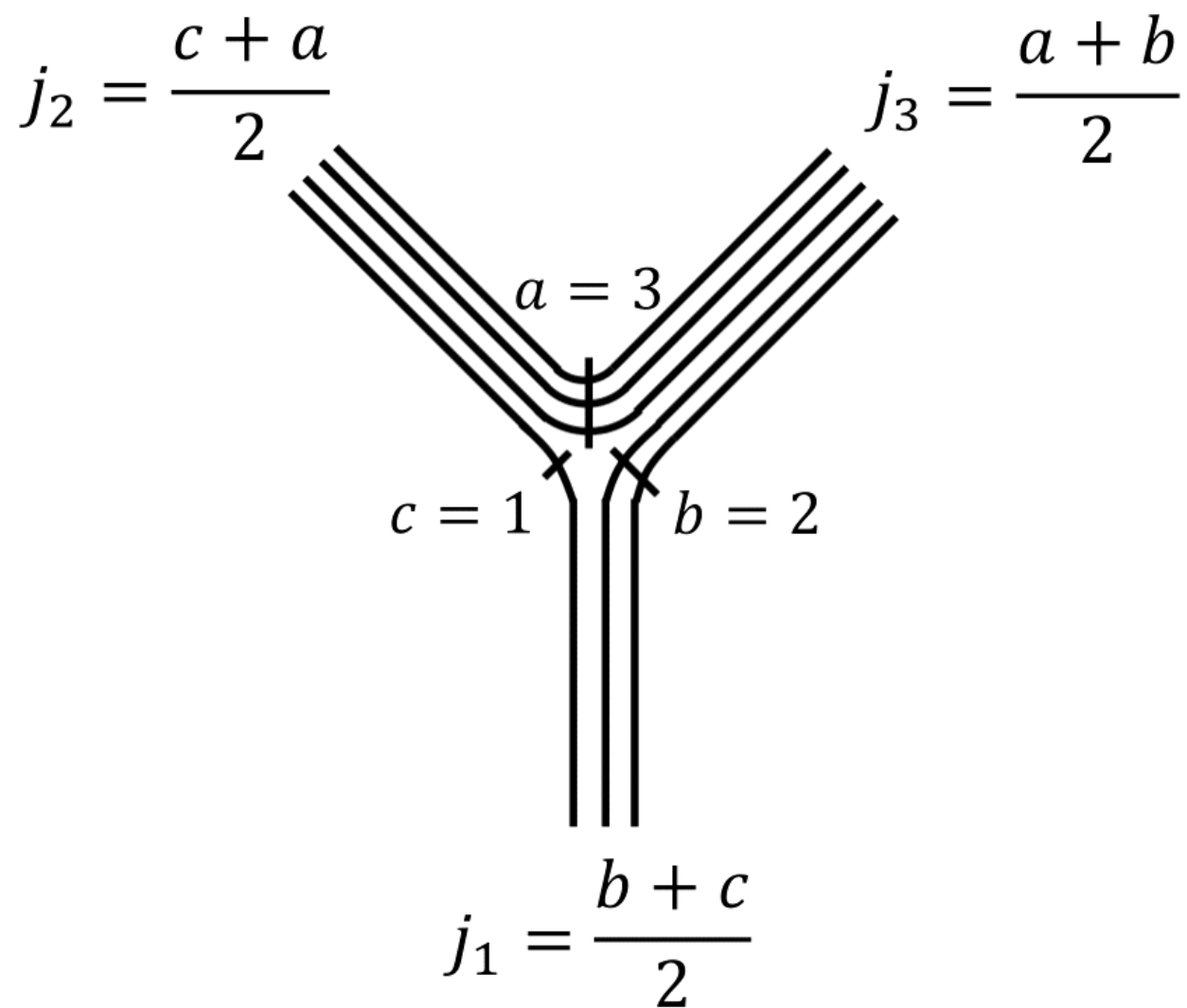


図41 Clebsch-Gordan条件のグラフ的解釈 ($j_1 = 3/2, j_2 = 2, j_3 = 5/2$)

■ Clebsch–Gordan 係数に対する漸化式 [11, pp.287–289]

はしご演算子 $J_{\pm}$ の複号に応じた Clebsch–Gordan 係数に対する 2 つの漸化式

$$\begin{aligned} & \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j, m \pm 1 \rangle \\ &= \sqrt{(j_1 \mp m_1)(j_1 \pm m_1 + 1)} \langle j_1 j_2; m_1 \pm 1, m_2 | j_1 j_2; jm \rangle \\ &+ \sqrt{(j_2 \mp m_2)(j_2 \pm m_2 + 1)} \langle j_1 j_2; m_1, m_2 \pm 1 | j_1 j_2; jm \rangle \end{aligned} \quad (591)$$

を用いて, $m_1 m_2$ 平面上の定義域

$$|m_1| \leq j_1, \quad |m_2| \leq j_2, \quad -j \leq m_1 + m_2 \leq j \quad (592)$$

を占める格子点 (m_1, m_2) で指定される, 一連の Clebsch–Gordan 係数を計算できる.

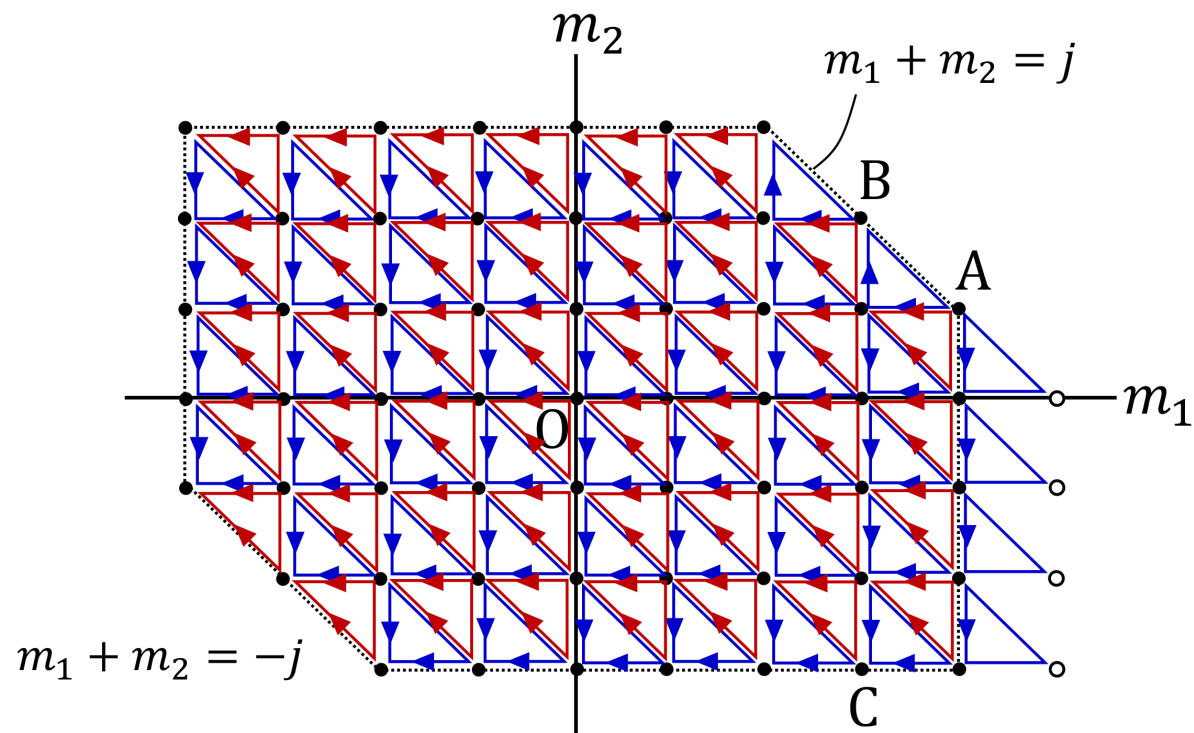


図42 漸化式(591)を用いて Clebsch–Gordan 係数を求める手順

全体の規格化には条件

$$1 = \langle j_1 j_2; j m | j_1 j_2; j m \rangle = \sum_{m_1, m_2} |\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j m \rangle|^2 \quad (593)$$

を用いれば良い [11, p.286].

■直積表現の直和分解と Clebsch–Gordan 級数 [11, pp.294–296]

角運動量 j_1, j_2 の合成は群の直積表現 $\mathcal{D}^{(j_1)} \otimes \mathcal{D}^{(j_2)}$ を定義し (式 (585)),
その表現行列は基底を適当に選ぶと, 図 43 のようにブロック対角化される :

$$\mathcal{D}^{(j_1)} \otimes \mathcal{D}^{(j_2)} = \mathcal{D}^{(j_1+j_2)} \oplus \mathcal{D}^{(j_1+j_2-1)} \oplus \mathcal{D}^{(j_1+j_2-2)} \oplus \dots \oplus \mathcal{D}^{(|j_1-j_2|)}. \quad (594)$$

その証拠に, 次式の Clebsch–Gordan 級数が成り立つ :

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_{m_1 m_1'}^{(j_1)}(R) \mathcal{D}_{m_2 m_2'}^{(j_2)}(R) \\ &= \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_m \sum_{m'} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j m \rangle \langle j_1 j_2; m_1' m_2' | j_1 j_2; j m' \rangle \mathcal{D}_{m m'}^{(j)}(R). \end{aligned} \quad (595)$$

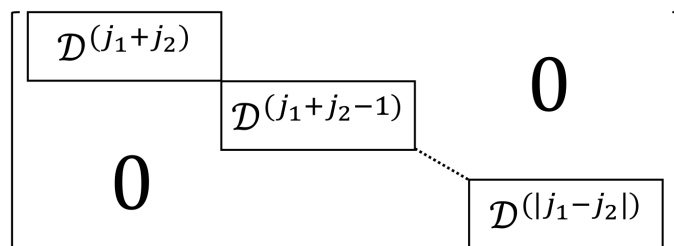


図 43 直積表現 $\mathcal{D}^{(j_1)} \otimes \mathcal{D}^{(j_2)}$ の直和分解 (594)

■2つのスピン1/2の合成 $S = S_1 + S_2$ [11, pp.278–280] [1, p.24]

基底には S_{1z} と S_{2z} の同時固有ケット

$$|m_1 = \pm 1/2, m_2 = \pm 1/2\rangle = |\pm\pm\rangle \quad (\text{複号任意}) \quad (596)$$

の他に, S^2 と S_z の同時固有ケット

$$\begin{aligned} |s = 1, m = \pm 1, 0\rangle, & \quad (\text{スピン3重項}) \\ |s = 0, m = 0\rangle & \quad (\text{スピン1重項}) \end{aligned} \quad (597)$$

を採れる. これら2組の基底ケット (596),(597) の関係は

$$|s = 1, m = 1\rangle = |++\rangle, \quad (598)$$

$$|s = 1, m = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle), \quad (599)$$

$$|s = 1, m = -1\rangle = |--\rangle, \quad (600)$$

$$|s = 0, m = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle). \quad (601)$$

これは角運動量の合成 (586) の特例であり, 直和分解 (594) を意味する :

$$1/2 \otimes 1/2 = 0 \oplus 1. \quad (602)$$

等価的に2つのスピン $j = 1/2$ 基本表現のテンソル積表現のスピンル $z^{AB} \equiv z^A y^B$ は

$$z^{AB} = z_0 \varepsilon^{AB} + z_1^{AB}, \quad z_0 = \frac{1}{2} z^A_A, \quad z_1^{AB} = z^{(AB)} \quad (603)$$

と分解できる.

- スカラー z_0 はスピン $j = 0$ の自明な表現を定義する.
- z_1^{AB} はスピン $j = 1$ 随伴表現を定義する.

8.4.1 項の式の導出など

■条件 (587), (588) の導出 [11, pp.284–285pp.354–355]

$J_z = J_{1z} + J_{2z}$ より

$$0 = \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | (J_z - J_{1z} - J_{2z}) | j_1 j_2; jm \rangle = (m - m_1 - m_2) \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm \rangle$$

なので、ゼロでない Clebsch–Gordan 係数 $\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm \rangle$ に対して式 (587): $m = m_1 + m_2$ が成立する.

表6 与えられた j_1, j_2 と各 $m = -(j_1 + j_2), \dots, j_1 + j_2$ に対し, $|m_1| \leq j_1, |m_2| \leq j_2, m_1 + m_2 = m$ を満たす組 (m_1, m_2)

m	$j_1 + j_2$	$j_1 + j_2 - 1$	$\dots$	$j_1 - j_2 + 1$	$j_1 - j_2$	$\dots$	$j_2 - j_1$	$j_2 - j_1 - 1$	$\dots$	$-j_1 - j_2 + 1$	$-j_1 - j_2$
(m_1, m_2)	(j_1, j_2)	$(j_1 - 1, j_2)$		$(j_1 - 2j_2 + 1, j_2)$	$(j_1 - 2j_2, j_2)$		$(-j_1, j_2)$				
		$(j_1, j_2 - 1)$		$(j_1 - 2j_2 + 2, j_2 - 1)$	$(j_1 - 2j_2 + 1, j_2 - 1)$		$(-j_1 + 1, j_2 - 1)$	$(-j_1, j_2 - 1)$			
				$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$			
				$(j_1, -j_2 + 1)$	$(j_1 - 1, -j_2 + 1)$		$(2j_2 - j_1 - 1, -j_2 + 1)$	$(2j_2 - j_1, -j_2 + 1)$		$(-j_1, -j_2 + 1)$	
					$(j_1, -j_2)$		$(2j_2 - j_1, -j_2)$	$(2j_2 - j_1 - 1, -j_2)$		$(-j_1 + 1, -j_2)$	$(-j_1, -j_2)$

次に式(588): $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$ の証明に移ろう．一般性を失うことなく， $j_1 \geq j_2$ を仮定することができる．しばらくはこの仮定の下で考察を行う．与えられた j_1, j_2 に対して $|m_1| \leq j_1, |m_2| \leq j_2$ より， $m = m_1 + m_2$ の最大値は $m_{\max} = j_1 + j_2$ である．固有値 $m_{\max}$ にはただ1つの状態

$$|j_1 j_2; m_1 = j_1, m_2 = j_2\rangle \sim |j_1 j_2; j = j_1 + j_2, m = j_1 + j_2\rangle$$

が対応する．次に m の値を $m_{\max}$ から減らすと， $\{m_1, m_2\}$ 表示では表6のように，各 m に対して

$$|m_1| \leq j_1, \quad |m_2| \leq j_2, \quad m_1 + m_2 = m$$

を満たす組 (m_1, m_2) で特徴付けられる縮退した状態が得られる．縮退は最大で $(2j_2 + 1)$ 重であることが見て取れる($m = -(j_1 - j_2), \dots, (j_1 - j_2)$ に対しては $m_2 = -j_2, \dots, j_2$ が全て可能となっている)． $(2j_2 + 1)$ 重に縮退した m に対して， $\{j, m\}$ 表示では異なる $(2j_2 + 1)$ 個の値 j を持つ状態 $|j, m\rangle$ が対応しなければならない．ところが今着目している m の値($m = -(j_1 - j_2), \dots, (j_1 - j_2)$ のいずれか)は $|m| \leq j_1 - j_2$ を満たすので， $(2j_2 + 1)$ 個の j の値

$$j = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, j_1 - j_2$$

に対して $|m| \leq j$ を満たす可能な値となる．よってこれらの j が縮退している状態を特徴付ける j の値である．上式は $j_1 - j_2 \leq j \leq j_1 + j_2$ を意味しており，最後に $j_1 \geq j_2$ の制約を外すと，式(588): $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$ が得られる．

■ Clebsch–Gordan 条件 (589) の理由 [2, p.378]

k 組の添字を縮約して $2(j_1 + j_2 - k)$ 次元の不変部分空間を定義するとき, $2j_1$ 個の添字と $2j_2$ 個の添字のどちらかを使い切るまで縮約できる. よって k の最大値は明らかに $2j_1$ と $2j_2$ のうち大きくない方である. したがって得られる既約表現は

$$j_3 = j_1 + j_2 - k, \quad k = 0, 1, \dots, \min(2j_1, 2j_2) \quad (604)$$

だから, 表現 j_1 と j_2 のテンソル積は, 表現 $|j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \dots, (j_1 + j_2)$ の和である. このとき 2 つの表現の積に現れる各々の既約な j_3 は Clebsch–Gordan 条件 (589) を満たす. (特に $j_3 = j_1 + j_2 - k$ と 2 つの半整数 j_1, j_2 との和 $2(j_1 + j_2) - k$ は常に整数となる.)

■漸化式(591)の導出 [11, pp.287–288]

はしご演算子 $J_{\pm}$ の作用(462)を用いると,

$$\begin{aligned} & \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j_1 j_2; j, m \pm 1\rangle \\ &= J_{\pm} |j_1 j_2; jm\rangle \\ &= (J_{1\pm} + J_{2\pm}) \left(\sum_{m_1} \sum_{m_2} |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle \langle j_1 j_2; m_1 m_2| \right) |j_1 j_2; jm\rangle \\ &= \sum_{m_1} \sum_{m_2} \left(\sqrt{(j_1 \mp m_1)(j_1 \pm m_1 + 1)} |j_1 j_2; m_1 \pm 1, m_2\rangle \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{(j_2 \mp m_2)(j_2 \pm m_2 + 1)} |j_1 j_2; m_1, m_2 \pm 1\rangle \right) \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm\rangle \quad (605) \end{aligned}$$

が得られる. ここで $k = 1, 2$ に対して $\sqrt{(j_k \mp m_k')(j_k \pm m_k' + 1)}$ に $m_k' = m_k \mp 1$ を代入すると

$$\sqrt{\{j_k \mp (m_k \mp 1)\}\{j_k \pm (m_k \mp 1) + 1\}} = \sqrt{(j_k \mp m_k + 1)(j_k \pm m_k)}$$

となるので, 式(605)右辺において左から $\langle j_1 j_2; m_1 m_2|$ をかけたときにゼロでない寄与

をする項を具体的に書くと

$$\begin{aligned} & \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)} |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle \langle j_1 j_2; m_1 \mp 1, m_2 | j_1 j_2; jm\rangle \\ & + \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)} |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle \langle j_1 j_2; m_1, m_2 \mp 1 | j_1 j_2; jm\rangle \end{aligned}$$

となる． (Clebsch–Gordan 係数を実数に選んだので，

$\langle j_1 j_2; jm | j_1 j_2; m_1 m_2 \rangle = \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm \rangle$ である [11, p.286].)

■ Clebsch–Gordan 級数 (595) の導出 [11, pp.295–296]

$$\begin{aligned}\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | \mathcal{D}(R) | j_1 j_2; m_1' m_2' \rangle &= \langle j_1 m_1 | \mathcal{D}(R) | j_1 m_1' \rangle \langle j_2 m_2 | \mathcal{D}(R) | j_2 m_2' \rangle \\ &\quad (\because |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle, \text{etc.}) \\ &= \mathcal{D}_{m_1 m_1'}^{(j_1)}(R) \mathcal{D}_{m_2 m_2'}^{(j_2)}(R)\end{aligned}$$

の最右辺を

$$\begin{aligned}&\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | \mathcal{D}(R) | j_1 j_2; m_1' m_2' \rangle \\ &= \sum_j \sum_m \sum_{j'} \sum_{m'} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j m \rangle \\ &\quad \times \langle j_1 j_2; j m | \mathcal{D}(R) | j_1 j_2; j' m' \rangle \langle j_1 j_2; j' m' | \mathcal{D}(R) | j_1 j_2; m_1' m_2' \rangle \quad (\because \text{完備関係式}) \\ &= \sum_j \sum_m \sum_{j'} \sum_{m'} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j m \rangle \mathcal{D}_{m m'}^{(j)}(R) \delta_{j j'} \langle j_1 j_2; j' m' | \mathcal{D}(R) | j_1 j_2; m_1' m_2' \rangle \\ &= \sum_j \sum_m \sum_{m'} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j m \rangle \langle j_1 j_2; j m' | \mathcal{D}(R) | j_1 j_2; m_1' m_2' \rangle \mathcal{D}_{m m'}^{(j)}(R)\end{aligned}$$

の最右辺と等置して, Clebsch–Gordan 級数 (595) を得る.

■2つの基底 $\{|s, m\rangle\}$ と $\{|m_1, m_2\rangle\}$ の関係 (598)–(601) の導出 [11, pp.279–280]

最初の式 (598): $|s = 1, m = 1\rangle = |++\rangle$ は2個のスピンがともに上向きの状態として充分, 直観的に納得がいく. 実際, 状態 $|++\rangle$ での角運動量成分 $S_z = S_{1z} + S_{2z}$ の固有値は $m = m_1 + m_2 = (1/2) + (1/2) = 1$ である. ところが与えられた全角運動量 $s = 0, 1$ に対して $-s \leq m \leq s$ なので, これは $s = 1$ に対してのみ可能だから, $|++\rangle = |s = 1, m = 1\rangle$ と定まる.

次に式 (598) にはしご演算子 $S_- \equiv S_{1-} + S_{2-}$ を辺々掛ける:

$$S_- |s = 1, m = 1\rangle = (S_{1-} + S_{2-}) |++\rangle. \quad (606)$$

ここで例えば部分系1の演算子 $S_{1\pm}$ は $|m_1, m_2\rangle$ における成分 m_1 にのみ作用することに注意して, 式 (462) を適用すると,

$$\begin{aligned} & \sqrt{(1+1)(1-1+1)} |s = 1, m = 0\rangle \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1\right)} | - + \rangle + \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1\right)} | + - \rangle \end{aligned}$$

となるので, 式 (599) を得る. 式 (599) に再びはしご演算子 (606) を掛けると,

$|s = 1, m = -1\rangle$ の式 (600) が導かれる. 最後にスピン1重項 (601) は, スピン3重項

(598)–(600), 特に式(599)と直交することを要請して得られる^{*125}.

^{*125} 異なる s の値を持つ状態間の内積はゼロである [11, p.261]. あるいは和が $m = m_1 + m_2 = 0$ となる組合せ $|\pm, \mp\rangle$ の線形結合が, 規格化条件および S_+ の作用の下で消えることに注目して係数を定めても良い [37, p.127].

■ z^{AB} の対称・反対称部分への分解 (603) の確認
恒等式

$$z^{AB} = z^{[AB]} + z^{(AB)}, \quad z^{[AB]} \equiv \frac{1}{2}(z^{AB} - z^{BA}), \quad z^{(AB)} \equiv \frac{1}{2}(z^{AB} + z^{BA})$$

において、反対称部分が

$$z^{[AB]} = z_0 \varepsilon^{AB}, \quad z_0 \equiv \frac{1}{2} z^C{}_C = \frac{1}{2} \varepsilon_{CD} z^{CD} = z^{[01]}$$

と書けることを示せば良い。ところが上式は両辺が同じ反対称性を持ち、 $(A, B) = (0, 1)$ に対して同じ値 $z^{[01]}$ をとるので、常に成立する。

8.4.1 項の原稿

2つの角運動量演算子 $\mathbf{J}_{(1)}, \mathbf{J}_{(2)}$ がそれぞれ角運動量の交換関係を満たし互いに可換である, すなわち交換関係(583)を満たすとする, 全角運動量 $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{(1)} + \mathbf{J}_{(2)}$ もまた角運動量の交換関係(584)を満たすから, その名の通り角運動量となる. このとき系全体の回転演算子は式(585)となる. ここで $\mathbf{J}_{(1)}, \mathbf{J}_{(2)}$ が交換するため, “指数法則” が成り立つことを考慮した. これは6.4.1項の箇所を導入した群論の術語では, 2つのスピン表現の直積表現に他ならない.

さて, 基底には

- $\mathbf{J}_{(1)}^2, \mathbf{J}_{(2)}^2, J_{(1)z}, J_{(2)z}$ の同時固有ケット $|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle$
- $\mathbf{J}_{(1)}^2, \mathbf{J}_{(2)}^2, \mathbf{J}^2, J_z$ の同時固有ケット $|j_1 j_2; j m\rangle$

の2通りを用いることができる(これらの演算子が交換することは容易に直接確かめられる). 2種類の基底は式(586)で関係付けられており, 変換係数 $\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j m \rangle$ を Clebsch–Gordan (クレプシュ・ゴルダン) 係数と呼ぶ. ただし Clebsch–Gordan 係数は慣習上実数にとる. 式(586)は合成前の2つの角運動量 $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$ の固有状態 $|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle$ を足し合わせて, 1つの角運動量固有状態 $|j_1 j_2; j m\rangle$ を作る方法を供しており [11, p.326], 角運動量の合成と呼べる.

Clebsch–Gordan 係数は式(587),(588)のとき以外はゼロになる ([導出スライド参照](#)). 第

1式(587)は角運動量の z 成分が加法的であることを意味している．また第2式(588)は古典的には角運動量の大きさに対する“三角不等式”と解釈できる．

ここで合成前のスピン j_1, j_2 と合成後のスピン j_3 の区別を設けず，3つのスピン j_1, j_2, j_3 に関して対称な見通しの良い形で，三角不等式(588)を理解できることを説明する．

手始めにスピン j 表現は $n = 2j$ 個の添字を持つ完全対称なスピノル(513)で定義できることを踏まえて，スピン j_1 と j_2 の合成を再考しよう．一般に，スピン j_1 とスピン j_2 の表現を定義する2つのスピノル(513)の積をとると，初めの $2j_1$ 個と後ろの $2j_2$ 個の添字に関して対称な， $(2j_1 + 2j_2)$ 個の添字を持つスピノルを得る．次いで全ての添字を対称化すると， $(j_1 + j_2)$ 表現のスピノルが得られる．さらに k 回だけテンソル ε_{AB} を用いて，1つ目のグループの k 個の添字と2つ目のグループの k 個の添字を縮約し，次いで残り $2(j_1 + j_2 - k)$ 個の添字を対称化して，スピン j_3 表現を得ることができる．この構成から，スピンは式(589)を満たすことが分かる(導出スライド参照)．これら2つの条件はClebsch–Gordan条件と呼ばれる．第2式は既に見た三角不等式(588)である．

Clebsch–Gordan条件(589)の第1式，または式(589)導出過程(604)から分かるように，スピンの固有値 j は一般に(半)整数をとり得るのに対し，合成されたスピン j_3 のとり得る値は $1/2$ ずつではなく， 1 ずつ変化することに注意する．

Clebsch–Gordan条件(589)は3つのスピン j_1, j_2, j_3 に関する対称性が明白な形に書き換えることができる．具体的にはClebsch–Gordan条件(589)は，式(590)を満たす3つの非負整数 a, b, c が存在することと等価である．ひとまず式(590)が元のClebsch–Gordan

条件 (589) を満たしていることは、代入により直ちに確認できる。

逆に Clebsch–Gordan 条件 (589) が条件 (590) を意味することは、グラフ的解釈を通じて理解できる。実に Clebsch–Gordan 条件 (589), (590) には見事なグラフ的解釈がある [2, pp.379–380]。図 41 のようにスピン j の各既約表現を $2j$ 本の線の束として表そう。図 41 は 3 本のそのような線の束が出会い、全ての構成要素の線が結節点を通じて繋がれるところの、3 価の結節点であり、例えば a 本の構成要素の線が j_2 から j_3 へ流れている。このとき Clebsch–Gordan 条件 (589) は全ての線を過不足なく繋ぎ変えられることを意味している。実際、第 1 式は単に構成要素の線の総数が偶数であり、よってそれらを組合せられることを要求している。また第 2 式に反して j_3 が $j_1 + j_2$ よりも大きければ、 j_3 の構成要素の線のいくつかは接続されずに余り、 j_3 が $|j_1 - j_2|$ より小さければ、 j_1 と j_2 のうち小さくない方が接続されずに余ることになる。こうして Clebsch–Gordan 条件 (589) は図 41 のように線をリカップリングできる条件となっているため、この下で線の本数の式 (590) を満たす非負整数 a, b, c が存在する。

本稿の水準では Clebsch–Gordan 係数の具体的な表式が必要となる場面は(ほとんど)ないものの、原理的には Clebsch–Gordan 係数を求められることを納得しておく必要がある。そこで漸化式を用いて一連の Clebsch–Gordan 係数を逐次的に求める方法を紹介する。

はしご演算子 $J_{\pm}$ の作用 (462) を用いると、Clebsch–Gordan 係数に対する漸化式 (591)

が得られる (導出スライド参照). これは $J_{\pm}$ の複号に応じた2つの漸化式である. 漸化式(591)を用いると, 適当な Clebsch–Gordan 係数から始めて, (m_1, m_2) で指定される全ての Clebsch–Gordan 係数 $\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j m \rangle$ を求めることができる. その一般的な手順は次のようにまとめられる. 与えられた j_1, j_2, j に対してノンゼロの Clebsch–Gordan 係数は, $m_1 m_2$ 平面上の領域(592)にある格子点の座標 (m_1, m_2) を持つ.

そのような格子点を図42に示す. 図42において,

- **赤い三角形**は J_+ の漸化式によって関係付けられる3つの Clebsch–Gordan 係数の格子点を表す.
- **青い三角形**は J_- の漸化式によって関係付けられる3つの Clebsch–Gordan 係数の格子点を表す.

そこでまず, 領域の右上の隅の点Aに対応付けられる Clebsch–Gordan 係数から出発して J_- の漸化式を繰り返し用いると, Aの真下の点における係数が逐次求まる. その際, 白丸で示した $m_1 = j + 1$ 上の禁止される領域の点は Clebsch–Gordan 係数がゼロになり, 漸化式に寄与を持たないことに注意する. 次いで J_+ の漸化式を用いると, 左隣の (すなわち $m_1 = j - 1$ 上の) 点の係数が得られる. (ただし一番上と下の点B, Cにおける係数を求めるには, 続いて J_- の漸化式を用いる.) 以下同様にして, 図42のようにすべての Clebsch–Gordan 係数をAの係数で表すことができる. 全体の規格化には条件

(593)を用いれば良い [11, p.286]. Clebsch–Gordan 係数を実数に選んだことを思い出すと, A の係数の符号に応じた全体の符号の任意性がなお残る. 符号は慣習に従って決める.

我々は群の直積表現と直和分解について 6.4.1 項で説明した. ところで角運動量 j_1, j_2 の合成は式 (585) のように群の直積表現 $\mathcal{D}^{(j_1)} \otimes \mathcal{D}^{(j_2)}$ を定義する. 直積表現の行列は基底を適当に選ぶと, 図 43 のようにブロック対角化される. 言い換えれば既約表現の直和 (594) に分解できる. その証拠に, 直積表現 $\mathcal{D}^{(1/2)} \otimes \mathcal{D}^{(1/2)}$ と各既約表現 $\mathcal{D}^{(j)}$ を関係付ける公式として, Clebsch–Gordan 級数 (595) が成り立つ (導出スライド参照). これは図 43 のブロック対角行列に対して右辺のように Clebsch–Gordan 係数による基底の変換を施すと, 左辺の直積表現の行列が得られることを意味する. ここから直和分解 (594) が成り立つことが裏付けられる.

最後に直和分解の簡単な具体例として, 2つのスピン $s_1, s_2 = 1/2$ の合成角運動量 $S = S_1 + S_2$ を考える [11, pp.278–280]. 基底には個々のスピン成分 S_{1z} と S_{2z} の同時固有ケット (596) の他に, 全スピン角運動量 S^2 と S_z の同時固有ケット (597) を用いることができる. ここで合成スピン s は三角不等式 (588) より $0 \leq s \leq 1$ を満たし, また Clebsch–Gordan 条件 (589) の箇所で説明したように, とり得る値は $1/2$ ずつではなく 1 ずつ変化するため, 可能な値は $s = 0$ と $s = 1$ の2通りであることに注意しよう. 式 (597) におけるスピン $s = 1$ の3状態はまとめてスピン3重項, またスピン $s = 0$ の単一

の状態はスピン1重項と呼ばれる。

これら2組の基底ケット(596),(597)は式(598)–(601)で関係付けられる(導出スライド参照)。式(598)–(601)はClebsch–Gordan係数を定義する式(586)の特例であり、また式(594)の箇所で見た一般論に従い、2つのスピン1/2表現の直積表現が、スピン0と1の表現に直和分解できること(602)を表している。

このことはスピノルの観点からは次のように理解できる [1, p.24]。2つのスピン $j = 1/2$ 基本表現のテンソル積表現を考えると、その表現空間のスピノルは2つのスピノルのテンソル積 $z^A y^B$ で与えられる。そのような2つの添字を持つあらゆるスピノル z^{AB} は式(603)のように、対称および反対称部分に分解できる(導出スライド参照)。 ε_{AB} の不変性により、この分解(603)はSU(2)不変であり、スカラー z_0 はスピン $j = 0$ の自明な表現を定義するのに対し、 z_1^{AB} はスピン $j = 1$ 随伴表現を定義する。(z_0 がスカラーであることは言い換えれば、群の自明な表現で変換することを意味する。) よって2つのスピン1/2表現のテンソル積は式(602)のように、スピン0およびスピン1表現に直和分解できる。

8.4.2 Wignerの $3j$ 記号と不変テンソル

■状態 $|j, m\rangle$ のスピノル表現 [39, pp.197–200]

スピン j の波動関数は式 (513) で見た $n = 2j$ 階の対称スピノル $\psi^{AB\cdots}$ である。特にスピン成分が $m (= -j, \cdots, j)$ の状態は, $n = 2j$ 個のスピン $1/2$ のうち

- スピン成分 $+1/2$ (スピノル添字 $A = 0$ で表す) の粒子が $(j + m)$ 個
- スピン成分 $-1/2$ (スピノル添字 $A = 1$ で表す) の粒子が $(j - m)$ 個

とすると得られ,

$$\psi_{jm} = \sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}} \psi_{j+m}^{00\cdots 0} \psi_{j-m}^{11\cdots 1}. \quad (607)$$

式 (607) から, さらに関係

$$\psi^{AB\cdots} \phi_{AB\cdots} = \sum_m (-1)^{j-m} \psi_{jm} \phi_{j,-m} \quad (608)$$

も導かれ, ここに $\psi^{AB\cdots}$ と $\phi_{AB\cdots}$ は同じ階数の異なる2つのスピノルであるのに対し, ψ_{jm}, ϕ_{jm} はこれらのスピノルから公式 (607) を通じて導かれる波動関数である。

■2つの角運動量を合成して全角運動量をゼロにする [39, pp.401–402]

2つの角運動量 (j_1, m_1) と (j_2, m_2) を足して全角運動量をゼロにするには $j_1 = j_2 \equiv j$ かつ $m_1 = -m_2$ でなければならず、合成系の波動関数は

$$\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} \psi_{jm}^{(1)} \psi_{j,-m}^{(2)}. \quad (609)$$

■3つの角運動量を合成して全角運動量をゼロにする [11, pp.402–403]

スピン j_1, j_2, j_3 を合成したスピンがゼロになる条件は、 $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ の下で、 j_1, j_2 を合成して j_3 が得られる Clebsch–Gordan 条件 (589) と等価である。

この下で全角運動量ゼロの合成系の波動関数は、各 $m_i = -j_i, \dots, j_i$ にわたる和

$$\Psi_0 = \sum_{m_1, m_2, m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \psi_{j_1 m_1}^{(1)} \psi_{j_2 m_2}^{(2)} \psi_{j_3 m_3}^{(3)} \quad (610)$$

の形をとる。公式 (610) の係数は [Wigner の \$3j\$ 記号](#) と呼ばれる (実数に選ぶ)。

$3j$ 記号を“対称な形”に定義しよう． Ψ_0 はスピノル $\psi^{(1)AB\cdots}, \psi^{(2)AB\cdots}, \psi^{(3)AB\cdots}$ の，添字を余すことなく異なるスピノルの間で縮約して得られるスカラーである．

- 粒子1と2の間で縮約される添字は全て $\psi^{(1)}$ で上付き， $\psi^{(2)}$ で下付きに書く．
- 粒子2と3の間で縮約される添字は全て $\psi^{(2)}$ で上付き， $\psi^{(3)}$ で下付きに書く．
- 粒子3と1の間で縮約される添字は全て $\psi^{(3)}$ で上付き， $\psi^{(1)}$ で下付きに書く．

各種類の組の総数はそれぞれ式(590):

$$c \equiv j_1 + j_2 - j_3, \quad a \equiv j_2 + j_3 - j_1, \quad b \equiv j_3 + j_1 - j_2. \quad (611)$$

このとき $3j$ 記号は列を巡回置換に対して不変であり，また

$$\begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}, \text{ etc.} \quad (612)$$

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \quad (613)$$

■2つの角運動量から与えられた角運動量 j, m を合成する [39, pp.403–404]
 粒子1,2の複合系(状態 Ψ_{jm})と粒子3の全角運動量がゼロのとき, 式(609)より

$$\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \sum_m (-1)^{j-m} \Psi_{jm} \psi_{j,-m}^{(3)}. \quad (614)$$

これを式(610)と注意深く比較すると

$$\Psi_{jm} = (-1)^{j_1-j_2+m} \sqrt{2j+1} \sum_{m_1, m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \psi_{j_1 m_1}^{(1)} \psi_{j_2 m_2}^{(2)} \quad (615)$$

が見出され, 和は条件 $m_1 + m_2 = m$ の下でとる.

公式(615)を Clebsch–Gordan 係数 $C_{m_1 m_2}^{jm} \equiv \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm \rangle$ の定義式(586):

$$\Psi_{jm} = \sum_{m_1, m_2} C_{m_1 m_2}^{jm} \psi_{j_1 m_1}^{(1)} \psi_{j_2 m_2}^{(2)} \quad (616)$$

と比較すると, $3j$ 記号と Clebsch–Gordan 係数の関係 [11, p.286]

$$C_{m_1 m_2}^{jm} \equiv \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm \rangle = (-1)^{j_1-j_2+m} \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \quad (617)$$

が見出される.

■不変テンソル

3つのスピンの直積空間のSU(2) 不変部分空間

$$\text{Inv}_{\text{SU}(2)}(\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3}) = \mathbb{C} \quad (618)$$

におけるベクトルを

$$|i\rangle = \sum_{m_1, m_2, m_3} \iota^{m_1 m_2 m_3} |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \otimes |j_3, m_3\rangle \quad (619)$$

の形に書いて，Wignerの $3j$ 記号

$$\iota^{m_1 m_2 m_3} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \quad (620)$$

を適切に定義すると， $3j$ 記号はClebsch–Gordan係数を3つのスピンに関して“対称な形”にした量であることが判明した [1, p.105].

ここではWigner行列要素を $\mathcal{D}_{mn}^{(j)}(U) \rightarrow \mathcal{D}^{(j)}(U)_{m_n}^m$ と書き改めよう [1, pp.152–154].
 すると基底ケット $|j, m\rangle$ の変換則 (525): $|j, m\rangle \rightarrow \sum_{m'} |j, m'\rangle \mathcal{D}^{(j)}(U)_{m'}^m$ の下で
 状態ベクトル (619) が不変に留まらねばならないことから,
 $3j$ 記号 (620) はWigner行列を変換係数とする不変なテンソルとなること

$$\sum_{m_1, m_2, m_3} \mathcal{D}^{(j_1)}(U)_{m_1}^{m'_1} \mathcal{D}^{(j_2)}(U)_{m_2}^{m'_2} \mathcal{D}^{(j_3)}(U)_{m_3}^{m'_3} l^{m_1 m_2 m_3} = l^{m'_1 m'_2 m'_3} \quad (621)$$

が帰結する. また

$$\begin{aligned} \sum_{m_1, m_2, n_3} \mathcal{D}^{(j_1)}(U)_{m_1}^{m'_1} \mathcal{D}^{(j_2)}(U)_{m_2}^{m'_2} \mathcal{D}^{(j_3)}(U^{-1})_{n'_3}^{n_3} l^{m_1 m_2 n_3} &= l^{m'_1 m'_2 n'_3}, \\ \sum_{m_3, n_1, n_2} \mathcal{D}^{(j_1)}(U^{-1})_{n'_1}^{n_1} \mathcal{D}^{(j_2)}(U^{-1})_{n'_2}^{n_2} \mathcal{D}^{(j_3)}(U)_{m_3}^{m'_3} l^{m_3 n_1 n_2} &= l^{m'_3 n'_1 n'_2} \end{aligned} \quad (622)$$

を満たす不変な “混合テンソル” も同様に定義できる. 式 (621) の複素共役をとると,

$$l_{m_1 m_2 m_3} = l^{m_1 m_2 m_3} \quad (623)$$

が分かる^{*126}.

^{*126} 等価的に式 (619) の Hermite 共役をとっても良い. 同じ結論が同文献 [40, p.77] にもある. $\langle i|i \rangle = 1$
 とすれば $3j$ 記号は $l_{m_1 m_2 m_3} l^{m_1 m_2 m_3} = 1$ と規格化される [1, p.152].

次に磁気添字を上げ下げするために， $3j$ 記号の特別な値 [39, p.406]

$$\begin{pmatrix} j & j & 0 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{j-m} \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \quad (624)$$

を用いて，“計量テンソル” の役割を演じる量 [1, p.108,p.152]

$$g^{mn} = \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} j & j & 0 \\ m & n & 0 \end{pmatrix} = \delta^{m,-n} (-1)^{j-m} \quad (625)$$

を定義する．式(623)同様， $g_{mn} = g^{mn}$ である [40, pp.76–77]．すると式(625)より，

$$g^{mm'} g_{m'm''} = (-1)^{2j} \delta_{m''}^m, \quad g_{mm'} g^{m'm''} = (-1)^{2j} \delta_m^{m''} \quad (626)$$

が成り立つ(以降しばらく和の記号は省略)．また

$$g_{-m,m} = (-1)^{j+m} = (-1)^{2m} (-1)^{j-m} = (-1)^{2m} g_{m,-m} \quad (627)$$

が成り立つ^{*127}．

^{*127} 他方で $3j$ 記号の対称性式(612)より $g_{-m,m} = (-1)^{2j} g_{m,-m}$ なので， $(-1)^{2j} = (-1)^{2m}$ であることになる．実際 j が整数ならば m も整数なので $(-1)^{2j}$ と $(-1)^{2m}$ はともに $+1$ である． j が半整数のとき m も半整数なので $2j$ と $2m$ はともに奇数であり， $(-1)^{2j}$ と $(-1)^{2m}$ はともに -1 である．

g_{mn} との縮約で $3j$ 記号の添字を

$$l^{m_1 m_2}_{n_3} = l^{m_1 m_2 m_3} g_{m_3 n_3}, \text{ etc.} \quad (628)$$

のように下ろすと，変換則(622)を満たす不変テンソルが得られる．

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} &= \begin{array}{c} j_1 \downarrow m_1 \\ \bullet \\ \nearrow j_2 \quad \searrow j_3 \\ m_2 \quad m_3 \end{array} \\ \\ g^{mm'} &= \begin{array}{c} j \quad j \\ \xrightarrow{m} \bullet \xleftarrow{m'} \\ | \\ \bullet \end{array} \\ \\ g_{mm'} &= \begin{array}{c} j \quad j \\ \xleftarrow{m} \bullet \xrightarrow{m'} \\ | \\ \bullet \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} j_1 \downarrow m_1 \\ \bullet \\ \nearrow j_2 \quad \rightarrow j_3 \\ m_2 \quad n_3 \end{array} &= \begin{array}{c} j_1 \downarrow m_1 \\ \bullet \\ \nearrow j_2 \quad \rightarrow j_3 \\ m_2 \quad m_3 \end{array} \begin{array}{c} j_3 \quad j_3 \\ \xleftarrow{m_3} \bullet \xrightarrow{n_3} \end{array} \end{aligned}$$

図44 不変テンソルのグラフ表記 [40, pp.76–77]

■4 価以上の結節因子 [1, p.138,pp.152–154] [2, pp.381–382]

4つのSU(2) 既約表現のテンソル積の不変部分空間

$$\mathcal{H}_n = \mathcal{K}_{j_1 \dots j_4} = \text{Inv}_{\text{SU}(2)}(\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3} \otimes \mathcal{H}_{j_4}) \quad (629)$$

に属する状態ベクトルを

$$|\iota\rangle = \sum_{m_1, \dots, m_4} \iota^{m_1 m_2 m_3 m_4} |j_1, m_1\rangle \otimes \dots \otimes |j_4, m_4\rangle \quad (630)$$

と書いて4 価の結節因子 $\iota^{m_1 m_2 m_3 m_4}$ を定義すると, それは変換則

$$\mathcal{D}^{(j_1)}(U)^{m_1}_{n_1} \dots \mathcal{D}^{(j_4)}(U)^{m_4}_{n_4} \iota^{m_1 m_2 m_3 m_4} = \iota^{m_1 m_2 m_3 m_4} \quad (631)$$

を満たす不変テンソルとなる.

4価の結節因子は

$$\iota_k^{m_1 m_2 m_3 m_4} \sim \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & k \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} g_{mn} \begin{pmatrix} k & j_3 & j_4 \\ n & m_3 & m_4 \end{pmatrix} = \iota^{m_1 m_2 m}_k \iota^{m_3 m_4}_m \quad (632)$$

のように構成でき，これは j_1, j_2 の間と j_3, j_4 の間の三角不等式

$$\max[|j_1 - j_2|, |j_3 - j_4|] \leq k \leq \min[j_1 + j_2, j_3 + j_4] \quad (633)$$

を満たす任意のスピン k でラベルされる．その空間 (629) の次元は

$$\dim[\mathcal{K}_{j_1 \dots j_4}] = \min[j_1 + j_2, j_3 + j_4] - \max[|j_1 - j_2|, |j_3 - j_4|] + 1. \quad (634)$$

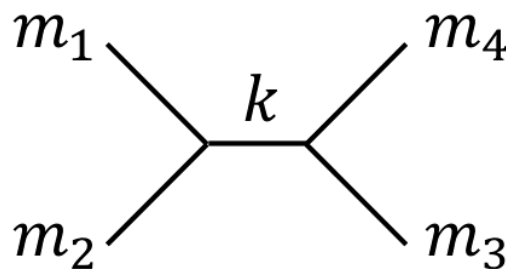


図45 4価の結節因子 (632) のグラフ的解釈

同様に任意の価数 $n(\geq 4)$ を持つ結節因子も,
 $(n - 2)$ 個の3価の結節因子を $(n - 3)$ 本の仮想的なリンクで繋いで,

$$v^{\alpha_1 \cdots \alpha_n} = l^{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1} l_{\beta_1}^{\alpha_3 \beta_2} l_{\beta_2}^{\alpha_4 \beta_3} \cdots l_{\beta_{n-3}}^{\alpha_{n-1} \alpha_n} \quad (635)$$

のように構成できる(図46).

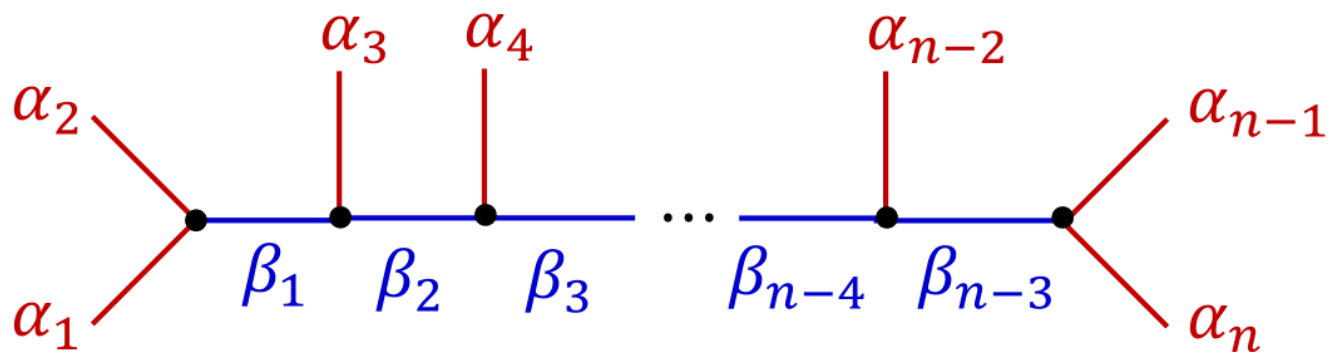


図46 $n(\geq 4)$ 価の結節因子 (635) のグラフ的解釈

■Wignerの $6j$ 記号 [1, pp.108–109]

Wignerの $6j$ 記号は4つの $3j$ 記号の間で全ての磁気添字を縮約した量

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} \equiv \sum_{m_a, n_a} \prod_{a=1}^6 g_{m_a n_a} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_4 & j_5 \\ n_1 & m_4 & m_5 \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} j_2 & j_4 & j_6 \\ n_2 & n_4 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_5 & j_6 \\ n_3 & n_5 & n_6 \end{pmatrix} \quad (636)$$

として定義される.

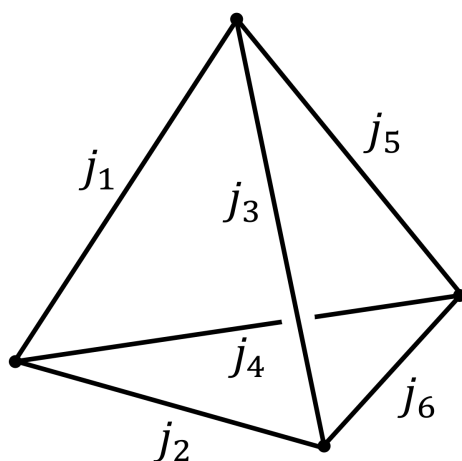


図47 $6j$ 記号(636)の縮約パターンを指定する四面体

8.4.2項の式の導出など

■状態 ψ_{jm} のスピノル表現 (607) における規格化定数の決定 [39, p.199]

$$\psi_{jm} \sim \psi_{j+m}^{00\cdots 0} \psi_{j-m}^{11\cdots 1}$$

における比例定数を定めたい．そこで全確率は

$$\sum_{m=-j}^j |\psi_{jm}|^2 = \sum_{A,B,\cdots} |\psi^{AB\cdots}|^2 \quad (637)$$

であることに着目しよう．右辺において添字が $(j+m)$ 個の0を含む項は $\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}$ 回現れる．また右辺において

$$(\text{添字0の個数}(j+m)) = 0, 1, \cdots, 2j \text{ にわたる和} \rightarrow \sum_{m=-j}^j$$

とできることに注意すると，式(607):

$$\psi_{jm} = \sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}} \psi_{j+m}^{00\cdots 0} \psi_{j-m}^{11\cdots 1}$$

のように比例係数を選べば,

$$\sum_{A,B,\dots} |\psi^{AB\dots}|^2 = \sum_{m=-j}^j \frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!} \left| \psi_{j+m}^{00\dots0} \psi_{j-m}^{11\dots1} \right|^2 = \sum_{m=-j}^j |\psi_{jm}|^2$$

となって, 確かに規格化条件(637)が満たされる. ただし最後の等号で式(607)を用いた.

■式(608)の確認

A/A 規則(507)にならって

$$\varepsilon^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_{AB}, \quad z^A = z_B \varepsilon^{BA}, \quad \therefore z^0 = -z_1, \quad z^1 = z_0$$

のように添字を上げる．このとき添字1を上げるときだけ符号が変わるので，

$$\begin{aligned} & \psi^{AB\dots} \phi_{AB\dots} \\ &= \sum_{m=-j}^j \frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!} \psi_{j+m}^{00\dots0 \, 11\dots1} \phi_{j+m}^{00\dots0 \, 11\dots1} \\ &= \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} \frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!} \psi_{j+m}^{00\dots0 \, 11\dots1} \phi_{j+m}^{11\dots1 \, 00\dots0} \\ &= \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} \left[\sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}} \psi_{j+m}^{00\dots0 \, 11\dots1} \right] \left[\sqrt{\frac{(2j)!}{(j-m)!(j+m)!}} \psi_{j-m}^{00\dots0 \, 11\dots1} \right] \\ &= \sum_m (-1)^{j-m} \psi_{jm} \phi_{j,-m} : (608). \end{aligned}$$

■状態(609)の規格化定数 $1/\sqrt{2j+1}$ と符号 $(-1)^{j-m}$ の説明 [39, p.402]

全角運動量ゼロの状態(609):

$$\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} \psi_{jm}^{(1)} \psi_{j,-m}^{(2)}$$

における, 和における係数は全て同じ絶対値を持たねばならない, 何故なら角運動量の成分 m の全ての値は等しく可能のはずだから. 和の前の因子 $1/\sqrt{2j+1}$ は規格化による.

注解 実際, 状態 $\psi_{jm}^{(1)} \psi_{j,-m}^{(2)} \sim |j, m\rangle |j, -m\rangle$ は m の値が異なると直交することに注意すると, $|\psi_{jm}|^2 = 1$ と規格化されているならば, 上式(609)の Ψ_0 もまた

$$|\Psi_0|^2 = \frac{1}{2j+1} \sum_{m=-j}^j |\psi_{jm}^{(1)}|^2 |\psi_{j,-m}^{(2)}|^2 = 1$$

と規格化されている.

式(609)における一連の符号は波動関数のスピノル表現の観点から容易に見出される. スピノル表記では式(609)における和は, $2j$ 階の2つのスピノルから成る (系の全角運動

量がゼロとなる) スカラー

$$\psi^{(1)AB\dots}\psi^{(2)}_{AB\dots} \quad (638)$$

である．これを用いると，式(608)から式(609)の符号が直接得られる．

ただし一般には和(609)における相対的な符号が決まるに過ぎず，和全体の符号は決まらない．例えば $(j+m)$ 個のスピンル添字0と $(j-m)$ 個のスピンル添字1を全て $\psi^{(1)}$ において下げ， $\psi^{(2)}$ において上げると，スカラー(638)は $(-1)^{2j}$ が掛かり，したがって j が半整数のときには符号を変える．

注解 縮約される1組の添字を上げ下げすると，

$$z_A w^A \rightarrow w_A z^A = w_A (z_B \varepsilon^{BA}) = -z_B (w_A \varepsilon^{AB}) = -z_B w^B$$

のように符号が入れ替わる．等価的に成分計算を明示すれば

$$w_A z^A = z^0 w_0 + z^1 w_1 = (-z_1) w^1 + z_0 (-w^0) = -z_A w^A.$$

■ Clebsch–Gordan 条件 (589) が成り立つときのみ, j_1, j_2, j_3 の合成スピンの値がゼロになる理由 [1, p.104]

スピン j_1, j_2 を合成した直積表現は式 (594) のように直和分解できることを思い出そう. これに対応して, 表現空間は

$$\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \mathcal{H}_j$$

の形の表現にわたる和で書ける. したがって

$$\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3} = \left(\bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \mathcal{H}_j \right) \otimes \mathcal{H}_{j_3} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \bigoplus_{k=|j-j_3|}^{j+j_3} \mathcal{H}_k.$$

最右辺に自明な表現 $k = 0$ が含まれるのは, 和の下限が $k = |j - j_3| = 0$ となる j の値 $j = j_3$ が, j に関する和に含まれる場合に限られる. これは2つのスピン j_1, j_2 を合成してスピン $j = j_3$ が得られることと等価であり, その条件は Clebsch–Gordan 条件 (589) で与えられる. 特に三角不等式に関しては, 和の範囲 $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$ に $j = j_3$ が含まれねばならないことから, 改めて理解できる. Clebsch–Gordan 条件 (589) が満た

されるとき、不変な空間、すなわちスピン・ゼロ表現は、3つの表現の積に1度だけ現れ得る。

■ $3j$ 記号の列の入れ替えに伴う符号の変化 (612) の確認
 状態 (610) はスピノル表記では

$$\Psi_0 = \psi^{(1)} \frac{c}{\frac{A' \dots}{\frac{A'' \dots}{b}}} \psi^{(2)} \frac{a}{\frac{A' \dots}{\frac{A'' \dots}{c}}} \psi^{(3)} \frac{b}{\frac{A' \dots}{\frac{A'' \dots}{a}}}. \quad (639)$$

ここで例えば添字 1 と 2 を入れ替えると、同時に $a \leftrightarrow b$ と入れ替わるので、

$$\Psi_0 \rightarrow \Psi'_0 = \psi^{(1)} \frac{b}{\frac{A' \dots}{\frac{A'' \dots}{c}}} \psi^{(2)} \frac{c}{\frac{A' \dots}{\frac{A'' \dots}{a}}} \psi^{(3)} \frac{a}{\frac{A' \dots}{\frac{A'' \dots}{b}}} = (-1)^\# \psi^{(1)} \frac{c}{\frac{A' \dots}{\frac{A'' \dots}{b}}} \psi^{(2)} \frac{a}{\frac{A' \dots}{\frac{A'' \dots}{c}}} \psi^{(3)} \frac{b}{\frac{A' \dots}{\frac{A'' \dots}{a}}} = (-1)^\# \Psi_0.$$

ここで $\# = a + b + c = j_1 + j_2 + j_3$ は縮約される添字の組を上げ下げする回数である。
 そこで Ψ_0 の定義式 (610) で添字 1 と 2 を入れ替えた状態を、もとの式 (610) の $(-1)^\#$ 倍と等置すると式 (612) を得る。

■角運動量成分 m の反転に伴う $3j$ 記号の符号の変化(613)の導出
 文献 [39, p.403] の記述を踏まえつつも，本稿独自の証明を与える．
 y 軸周りの角度 π 回転に伴い，固有状態は式(545):

$$|j, m\rangle \rightarrow \mathcal{D}(R) |j, m\rangle = \sum_{m'} |j, m'\rangle d_{m'm}^{(j)}(\pi) = (-1)^{j-m} |j, -m\rangle$$

に従って変化する．すると系の状態(610)は

$$\begin{aligned} \Psi'_0 &= \sum_{\{m_i\}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} ((-1)^{j_1-m_1} \psi_{j_1, -m_1}^{(1)}) ((-1)^{j_2-m_2} \psi_{j_2, -m_2}^{(2)}) ((-1)^{j_3-m_3} \psi_{j_3, -m_3}^{(3)}) \\ &= (-1)^{j_1+j_2+j_3} \sum_{\{m_i\}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \psi_{j_1, -m_1}^{(1)} \psi_{j_2, -m_2}^{(2)} \psi_{j_3, -m_3}^{(3)} \\ &= (-1)^{j_1+j_2+j_3} \sum_{\{m_i\}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \psi_{j_1 m_1}^{(1)} \psi_{j_2 m_2}^{(2)} \psi_{j_3 m_3}^{(3)} \end{aligned}$$

と変化する．ただし第2の等号では指数において $3j$ 記号がノンゼロとなる条件 $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ を考慮した．ところが全角運動量ゼロの状態 Ψ_0 は回転の下で不変である．そこで上式の Ψ'_0 を Ψ_0 の式(610)と等置すると，公式(613)を得る．

注解：状態の不変性 $\Psi'_0 = \Psi_0$ について 回転の下で Ψ_0 の符号が変わるわけではない． Ψ_0 が回転の下で不変な状態であることと，不変な状態の定義に符号の不定性があることを混同してはならない． Ψ_0 の不変性はスピノル表示では次のように理解できる． y 軸周りの角度 π の回転に伴いスピノルは $SU(2)$ 行列

$$U = e^{-i\pi\sigma_y/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{式 (503)})$$

の作用を受け，

$$\begin{pmatrix} \psi^0 \\ \psi^1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \psi^{0'} \\ \psi^{1'} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \psi^0 \\ \psi^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi^1 \\ \psi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi_0 \\ -\psi_1 \end{pmatrix} \quad (640)$$

と変換する．他方で $\phi_A \psi^A$ がスカラーとなるためには，下付き添字を持つスピノル ϕ_A は

$$\phi'_A = \phi_B (U^{-1})^B_A \quad (641)$$

と逆に変換しなければならない．実際この変換則は ε_{AB} の変換則と合わせて

$$\phi_A \equiv \varepsilon_{AB} \phi^B \rightarrow [\varepsilon_{CD} (U^{-1})^C_A (U^{-1})^D_B] (U^B_E \phi^E) = \phi_C (U^{-1})^C_A$$

と帰結する．また ε_{AB} の不変性を考慮すれば，これは成分の関係 $\phi_A \equiv \varepsilon_{AB} \phi^B$ が保持されること

$$\phi'_A = \varepsilon_{AB} (U^B_C \phi^C) = \varepsilon_{AB} \phi^{B'} \quad (642)$$

を意味するに過ぎず，もっともな結果である．すると変換則(641)は具体的には

$$(\phi_0 \quad \phi_1) \rightarrow (\phi'_0 \quad \phi'_1) = (\phi_0 \quad \phi_1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (-\phi_1 \quad \phi_0) = (\phi^0 \quad \phi^1) \quad (643)$$

を与える．これは等価的に式(640),(642)を通じても得られる：

$$\phi'_0 = \phi^{1'} = \phi^0 = -\phi_1, \quad \phi'_1 = -\phi^{0'} = \phi^1 = \phi_0.$$

また式(640),(643)を用いた直接の成分計算により，1組の添字の組に関する縮約の不変性 $\phi'_A \psi^{A'} = \phi_A \psi^A$ が確認できる．これは縮約の不変性が成り立つように変換則(641)を定義したことから当然であり，したがって U として y 軸周りの角度 $-\pi$ 回転や x 軸周りの角度 $\pm\pi$ 回転の行列を考えても，結果に変わりはない．このときスピノルの縮約(639)で与えられる状態 Ψ_0 も不変である．

■2つの角運動量から構成した状態 Ψ_{jm} の式(615)について

既に注意したように、式(610)と式(614)の Ψ_0 には符号の違いがあり得る．実際スピノル表示では

$$(\text{式(610)の}\Psi_0) = \psi^{(1)} \frac{c}{\frac{A''\dots}{b}} \psi^{(2)} \frac{a}{\frac{A'\dots}{c}} \psi^{(3)} \frac{b}{\frac{A''\dots}{a}} = (-1)^b \psi^{(1)} \frac{c}{A'\dots} \frac{b}{A''\dots} \psi^{(2)} \frac{a}{\frac{A'\dots}{c}} \psi^{(3)} \frac{A'\dots}{a} \frac{A''\dots}{b}$$

であり、最右辺は $a + b = 2j_3 = 2j$ 個のスピノル添字に関する式(638)の縮約の形

$\psi^{(1,2)} \frac{AB\dots}{2j} \psi^{(3)} \frac{AB\dots}{2j}$ をしているので、(式(610)の Ψ_0) = $(-1)^b$ (式(614)の Ψ_0) と分かる．そこで

$$\begin{aligned} & (\text{式(614)の}\Psi_0) \\ &= (-1)^b \sum_{m_1, m_2, m} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \psi_{j_1 m_1}^{(1)} \psi_{j_2 m_2}^{(2)} \psi_{j, -m}^{(3)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \sum_m (-1)^{j-m} \left[\sum_{m_1, m_2} (-1)^{b-(j-m)} \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \psi_{j_1 m_1}^{(1)} \psi_{j_2 m_2}^{(2)} \right] \psi_{j, -m}^{(3)} \end{aligned}$$

とし、最右辺を式(614)と比べて $[\dots]$ の部分を Ψ_{jm} に同定すると式(615)を得る．

■ $3j$ 記号の特例 (624) の導出

$3j$ 記号の定義式 (610) で

$$j_1 = j_2 = j, \quad j_3 = 0, \quad m_1 = -m_2 = m, \quad m_3 = 0$$

とおこう．式 (609) の箇所で補足したように $|\psi_{00}^{(3)}|^2 = 1$ を踏まえて $\psi_{00}^{(3)} = 1$ とおくと

$$\Psi_0 = \sum_m \begin{pmatrix} j & j & 0 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} \psi_{jm}^{(1)} \psi_{j,-m}^{(2)}$$

となる．これを式 (609) と等置して良く，式 (624) を得る．実際，いずれの Ψ_0 もスピノル表示では，粒子 1 の添字は上付き，粒子 2 の添字は下付きであるので，和の規則は共通しており，全体の符号の違いはない．

■不変テンソルの変換則(621)の導出

SU(2) 群要素 U の表す回転の下で基底ケット $|j, m\rangle$ は式

(525): $|j, m\rangle \rightarrow \sum_{m'} |j, m'\rangle \mathcal{D}^{(j)}(U)^{m'}_m$ に従って変換する. このとき式(619):

$$|i\rangle = \sum_{m_1, m_2, m_3} \iota^{m_1 m_2 m_3} |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \otimes |j_3, m_3\rangle$$

の状態ベクトルは

$$\begin{aligned} |i\rangle \rightarrow \sum_{\substack{m_1, m_2, m_3 \\ m'_1, m'_2, m'_3}} \iota^{m_1 m_2 m_3} \mathcal{D}^{(j_1)}(U)^{m'_1}_{m_1} \mathcal{D}^{(j_2)}(U)^{m'_2}_{m_2} \mathcal{D}^{(j_3)}(U)^{m'_3}_{m_3} \\ \times |j_1, m'_1\rangle \otimes |j_2, m'_2\rangle \otimes |j_3, m'_3\rangle \end{aligned}$$

と変化するので, 状態が不変に留まるには, $3j$ 記号は3つの添字に作用する群の変換に対する不変性

$$\sum_{m_1, m_2, m_3} \mathcal{D}^{(j_1)}(U)^{m'_1}_{m_1} \mathcal{D}^{(j_2)}(U)^{m'_2}_{m_2} \mathcal{D}^{(j_3)}(U)^{m'_3}_{m_3} \iota^{m_1 m_2 m_3} \iota^{m'_1 m'_2 m'_3} : (621)$$

を満たさねばならない.

■不変性(622)を満たす“混合テンソル”の定義

不変ベクトル(619)で定義される $\iota^{m_1 m_2 m_3}$ の変換則(621)を導く議論を，“混合テンソル”に対しても繰り返すことができる．

- 基底 $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \otimes \langle j_3, m_3|$ の張る空間 $\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3}^*$
- 基底 $\langle j_1, m_1| \otimes \langle j_2, m_2| \otimes |j_3, m_3\rangle$ の張る空間 $\mathcal{H}_{j_1}^* \otimes \mathcal{H}_{j_2}^* \otimes \mathcal{H}_{j_3}$

の不変ベクトルを，同様にそれぞれ

$$|i\rangle = \sum_{m_1, m_2, n_3} \iota^{m_1 m_2}_{n_3} |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \otimes \langle j_3, m_3|,$$
$$|i\rangle = \sum_{m_3, n_1, n_2} \iota^{m_3}_{n_1 n_2} \langle j_1, m_1| \otimes \langle j_2, m_2| \otimes |j_3, m_3\rangle$$

と書こう．すると添字 n に作用する行列は複素共役 $[\mathcal{D}^{(j)}(U)^{n'}_n]^* = \mathcal{D}^{(j)}(U^{-1})^n_{n'}$ となるので，展開係数は不変性(622)を満たさねばならない．

■ g_{mn} で添字を下ろした量(628)が不変テンソルとなることの確認
式(628)に明示した例では，確かに変換則

$$\begin{aligned}
l^{m_1 m_2}_{n_3} &\rightarrow l'^{m'_1 m'_2}_{n'_3} = l'^{m'_1 m'_2 m} g'_{mn'_3} \\
&= \left[\mathcal{D}^{(j_1)}(U)^{m'_1}_{m_1} \mathcal{D}^{(j_2)}(U)^{m'_2}_{m_2} \mathcal{D}^{(j_3)}(U)^m_{m'} l^{m_1 m_2 m'} \right] \\
&\quad \times \left[\mathcal{D}^{(j_3)}(U^{-1})^{m''}_m \mathcal{D}^{(j_3)}(U^{-1})^{n_3}_{n'_3} g_{m'' n_3} \right] \\
&= \mathcal{D}^{(j_1)}(U)^{m'_1}_{m_1} \mathcal{D}^{(j_2)}(U)^{m'_2}_{m_2} \mathcal{D}^{(j_3)}(U^{-1})^{n_3}_{n'_3} l^{m_1 m_2}_{n_3} \\
&\quad \left(\because \mathcal{D}^{(j_3)}(U)^m_{m'} \mathcal{D}^{(j_3)}(U^{-1})^{m''}_m = \delta^{m''}_{m'} \right)
\end{aligned}$$

が帰結する．またもとのテンソルの不変性 $l'^{m'_1 m'_2 m} = l^{m'_1 m'_2 m}$, $g'_{mn'_3} = g_{mn'_3}$ から，新しいテンソル(628)の不変性 $l'^{m'_1 m'_2}_{n'_3} = l^{m'_1 m'_2}_{n'_3}$ が成り立つ．

■ g_{mn} との縮約による式(623): $l_{m_1 m_2 m_3} = l^{m_1 m_2 m_3}$ の直接的な再確認

$$\begin{aligned} l_{m_1 m_2 m_3} &= g_{m_1 n_1} g_{m_2 n_2} g_{m_3 n_3} l^{n_1 n_2 n_3} \\ &= (-1)^{j_1 - m_1} \delta_{m_1, -n_1} \cdot (-1)^{j_2 - m_2} \delta_{m_2, -n_2} \cdot (-1)^{j_3 - m_3} \delta_{m_3, -n_3} l^{n_1 n_2 n_3} \\ &= (-1)^{j_1 + j_2 + j_3 - (m_1 + m_2 + m_3)} l^{-m_1, -m_2, -m_3} \\ &= (-1)^{2(j_1 + j_2 + j_3)} l^{m_1 m_2 m_3} \\ &= l^{m_1 m_2 m_3}. \end{aligned}$$

ただし最後の等号では $3j$ 記号の定義される前提 $m_1 + m_2 + m_3 = 0, j_1 + j_2 + j_3 \in \mathbb{N}$ と, $3j$ 記号の性質(613): $l^{-m_1, -m_2, -m_3} = (-1)^{j_1 + j_2 + j_3} l^{m_1 m_2 m_3}$ を用いた.

8.4.2項の原稿

ループ量子重力ではClebsch–Gordan係数そのものよりも、むしろそれを3つのスピンに関して“対称な形”にしたWignerの $3j$ 記号が有用となる．実際 $3j$ 記号はループ量子重力において、スピン・ネットワークの結節点に充てられる結節因子を構成するのに用いられる．そこで本項では $3j$ 記号を導入する．幸い本稿の水準では任意の $3j$ 記号(延いては結節因子)を具体的に与える一般公式を求める必要は生じないものの、8.4.1項で見たようにClebsch–Gordan係数は漸化式を用いて系統的に求めることができるため、あらゆる $3j$ 記号もまた原理的には計算可能である．

準備としてスピン固有状態 $|j, m\rangle$ の波動関数 ψ_{jm} (スピノル表現)を調べておく．スピン j の波動関数は式(513)で見た $n = 2j$ 階の対称スピノル $\psi^{AB\cdots}$ である．特にスピンの z 成分が $m(= -j, \cdots, j)$ の状態は、スピン $1/2$ を持つ $n = 2j$ 個の粒子のうち

- スピン成分 $+1/2$ (スピノル添字 $A = 0$ で表す)の粒子が $(j + m)$ 個
- スピン成分 $-1/2$ (スピノル添字 $A = 1$ で表す)の粒子が $(j - m)$ 個

とすると得られることに対応して、式(607)のように書ける．ここで下線を引いた添字0および1の個数を明示した．規格化定数の求め方は[導出スライドを見よ](#)．式(607)からさらに関係(608)も導かれ、ここに左辺の $\psi^{AB\cdots}$ と $\phi_{AB\cdots}$ は同じ階数の異なる2つのスピノルであるのに対し、右辺の ψ_{jm}, ϕ_{jm} はこれらのスピノルから公式(607)を通じて導かれる波動関数である；これはスカラーがスピン成分ゼロの状態から成ることを意味

している；符号の因子 $(-1)^{j-m}$ は，スピノル成分の全ての添字を上げたとき，添字に含まれる1の個数と同じ回数だけ符号が入れ替わることに起因する(導出スライド参照)。

ここで2つの構成粒子の波動関数から，与えられた全角運動量を持つ系の波動関数を構成する問題を考える．2つの角運動量 (j_1, m_1) と (j_2, m_2) を足して全角運動量をゼロにするという，簡単な場合から始めよう．ここでは明らかに $j_1 = j_2$ かつ $m_1 = -m_2$ でなければならない．よって角運動量 j とその成分 m を持つ1粒子の波動関数を ψ_{jm} とすると，求める波動関数 Ψ_0 は逆符号の m の値を持つ2粒子の波動関数の積の和(609)であり，ここに j は j_1 と j_2 の共通の値である．規格化定数 $1/\sqrt{2j+1}$ と一連の符号 $(-1)^{j-m}$ については導出スライドを見よ．

次に角運動量 j_1, j_2, j_3 とその成分 m_1, m_2, m_3 を持つ3つの粒子から成る，全角運動量ゼロの系を考えよう．このとき $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ である．また3つのスピン j_1, j_2, j_3 を合成したスピンがゼロになる条件は， j_1, j_2 を合成してスピン j_3 が得られる条件と等価であるため， j_1, j_2, j_3 は Clebsch–Gordan 条件(589)を満たさねばならない(導出スライド参照)。

この条件の下での波動関数は，磁気量子数の各々 $m_i = -j_i, \dots, j_i$ にわたる和(610)の形をとる．この公式(610)における係数は Wigner の $3j$ 記号と呼ばれる．定義により，それらは $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ のときのみノンゼロである．また Clebsch–Gordan 係数と同様， $3j$ 記号は実数として定義できる．

$3j$ 記号の一般的な定義として用いられる，和(610)における係数を定義する最も対称的

な方法は以下の通りである。スピノル表記では Ψ_0 は、3つのスピノル $\psi^{(1)AB\cdots}, \psi^{(2)AB\cdots}, \psi^{(3)AB\cdots}$ の積の、添字を余すことなく異なるスピノルの間で縮約して得られるスカラーである。ここで

- 粒子1と2の間で縮約される添字は全て $\psi^{(1)}$ で上付き、 $\psi^{(2)}$ で下付きに書く。
- 粒子2と3の間で縮約される添字は全て $\psi^{(2)}$ で上付き、 $\psi^{(3)}$ で下付きに書く。
- 粒子3と1の間で縮約される添字は全て $\psi^{(3)}$ で上付き、 $\psi^{(1)}$ で下付きに書く。

このとき例えば粒子1,2のスピノルの間で縮約される添字の組は、8.4.1項の図41で見たClebsch–Gordan条件のグラフ的解釈において、スピン j_1, j_2 の線の束の間で繋ぎ合わせられる線の本数 c と同じだけある。よって各種類の組の総数はそれぞれ式(590)と同じ式(611)で与えられる。この規則により Ψ_0 の符号は一意的に定まる。

この定義の下で、添字1,2,3の巡回置換が Ψ_0 を不変に留めることは明らかである。このことは $3j$ 記号が列を巡回置換したとき不変であることを意味する。また任意の2つの添字の入れ替えは、 $a + b + c = j_1 + j_2 + j_3$ 組の全てに関して下付き添字を上げ、上付き添字を下げることを要することが容易に分かる。このことは Ψ_0 に $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$ が掛かることを意味する；言い換えると、 $3j$ 記号には性質(612)がある。すなわち、もし整数 $j_1 + j_2 + j_3$ が奇数ならば、 $3j$ 記号は2つの列を入れ替えたとき符号を変える(導出スライド参照)。なお式(612)は先ほどの $3j$ 記号の巡回対称性を含意している。

さらに $3j$ 記号の公式(613)が成り立つことを説明する。角運動量の z 成分の符号の反転は、 y 軸周りの角度 π 回転の結果と見なせる。実際8.3.2項では y 軸周りの角度 π 回転に

関する Wigner 行列要素を求め、回転に伴い固有状態 $|j, m\rangle$ が式(545)に従って変化することを調べておいた。そこで状態変化(545)の下で全角運動量ゼロの状態(610)が不変に留まることを要求すると、公式(613)が見出される(導出スライド参照)。

式(610)から、2つの粒子を含み与えられた値 j と m を持つ系の波動関数 Ψ_{jm} を与える、重要な公式を導ける。そのために、粒子1と2を合わせて1つの系と考える。引き続き3つの粒子の全角運動量ゼロの状態を考えると、粒子1,2の複合系の角運動量 J は粒子3の角運動量 J_3 と合わせて全角運動量ゼロを与えるので、 $j = j_3, m = -m_3$ でなければならない。式(609)によると、このとき全体系の状態は式(614)のように書ける。この公式は式(610) (ただし j_3, m_3 を $j, -m$ に置き換える)と比較される。ここで、しかしながら、式(638)に対応した式(614)における和の構成の規則が、和(610)の構成の規則に対応しない事実をまず考慮せねばならない。式(614)を式(610)の形に移行させるには、容易に分かるように、粒子1と3に対応する上下の添字の組を入れ替えねばならない。このことは付加的な因子 $(-1)^{j_1-j_2+j_3}$ へと導く。結果は式(615)であり、ここで m_1 と m_2 にわたる和は条件 $m_1 + m_2 = m$ に制約される(導出スライド参照)。

得られた公式(615)を Clebsch–Gordan 係数 $C_{m_1 m_2}^{jm} \equiv \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm \rangle$ の定義式(586)、すなわち式(616)と比較すると、 $3j$ 記号と Clebsch–Gordan 係数の関係(617) [11, p.286]が見出される。

やや息の長い話が続いた。そこで次の話題に移る準備も兼ねて、ここまでの議論を簡単

に要約しておこう．式(610)の箇所では，基底 $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \otimes |j_3, m_3\rangle$ によって張られる，3つのスピンの直積空間の， $SU(2)$ 変換に対する不変部分空間(618)におけるベクトルを式(619)の形に書いて，Wignerの $3j$ 記号(620)を定義した [1, p.105]．このとき Clebsch–Gordan 条件が満たされない限り， $3j$ 記号はゼロである．またこのとき $3j$ 記号は列の巡回置換に関して対称であり，互換に対しては単に符号因子 $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$ が掛かるだけとなるように定義できる．さらにこのとき， $3j$ 記号は Clebsch–Gordan 係数と式(617)で関係付けられるため，Clebsch–Gordan 係数を3つのスピンに関して“対称な形”にした量であることが判明する．

さて，スピン j 表現を定義する対称スピノル(513)は群の作用の下で $SU(2)$ 行列 U で変換するのに対し， $3j$ 記号(620)のように磁気添字を持つテンソルは $SU(2)$ 群要素 U のスピン j 表現の行列，すなわち8.3.1項で導入した Wigner 行列 $D^{(j)}(U)$ で変換する．テンソルの変換性を表記の上で明白にするために，ここでは行列要素の磁気添字を上下に分けて Wigner 行列要素を $D_{mn}^{(j)}(U) \rightarrow D^{(j)}(U)^m_n$ と書き改めよう [1, pp.152–154]．すると実際，基底ケット $|j, m\rangle$ の変換則(525)の下で状態ベクトル(619)が不変に留まらねばならないことから， $3j$ 記号(620)は Wigner 行列の作用の下で不変なテンソルとなること(621)が帰結する(導出スライド参照)．また時空多様体上のテンソルを定義する座標変換則と同様に，テンソルの下付きの磁気添字は上付き添字に作用する行列の逆行列で変換する．このとき不変性(622)を満たす，上下の磁気添字を持つ不変な“混合テンソル”もまた同様に定義できる(導出スライド参照)．このように添字 m, n の上下で，不変テンソルに対する $SU(2)$ の作用の違いを明確に区別できる．

ループ量子重力ではスピン・ネットワークに充てる結節因子として、全ての種類の不変テンソルが必要となる。実際、そのようなテンソルを定義できる [2, p.200]。上付き添字のみを持つ $3j$ 記号 (620) は、Clebsch–Gordan 級数を対称的に直した量として得られる。次に下付き添字を持つ不変テンソルを具体的に構成する手順を説明しよう (着想は文献 [40, pp.73–78])。

まず $3j$ 記号 $\iota^{m_1 m_2 m_3}$ を実数に選んだことに注意し、式 (621) の複素共役をとると、下付き添字のみを持つ不変テンソル $\iota_{m_1 m_2 m_3}$ は値としては $3j$ 記号 $\iota^{m_1 m_2 m_3}$ に等しいこと (623) が分かる。

次に磁気添字を上げ下げするために、 $3j$ 記号の特別な値 (624) [39, p.406] を用いて、“計量テンソル” の役割を演じる量 (625) [1, p.108, p.152] を定義する (式 (624) の導き方は [導出スライド参照](#))。ただし式 (625) 最左辺において磁気添字を、 $3j$ 記号 (620) と整合して上付きとした。もっとも式 (623) と同様に、下付き添字の g_{mn} は、値としては上付き添字の g^{mn} に等しい [40, pp.76–77]。すると式 (625) とより、 g^{mn}, g_{mn} は式 (626) を満たすので (以降しばらく和の記号は省略)、符号の違いを除いて互いに逆行列となっている。符号の曖昧さは式 (625) の $3j$ 記号におけるスピン 0 の列の位置の任意性に起因していると考えれば、納得がいく。また一般には g_{mn} と g_{nm} には符号の違いがある。実際 g_{mn} のゼロでない値に対して式 (627) が成り立つ。

このとき g_{mn} との縮約で $3j$ 記号の添字を式 (628) のように下ろすと、変換則が添字の位

置によって適切に表され、式(622)を満たす不変テンソルが得られる。これは座標変換則で定義される時空多様体上のテンソルの一般論と同じ事情による(導出スライド参照)。さらにこのとき $3j$ 記号 $\iota^{m_1 m_2 m_3}$ とその上付き添字を全て g_{mn} との縮約で下ろした量は、式(623)で見たように、確かに値としては一致することが確認できる(導出スライド参照)。

なお第IV部で改めて詳しく説明するように、スピン・ネットワークの各リンク線には向きとスピン j が割り当てられており、結節点には入射するリンクのスピンに関する上付きの磁気添字と、射出するリンクのスピンに関する下付きの磁気添字を持つ結節因子が割り当てられる。これを踏まえると、これまでの一連の不変テンソルは、直観的には図44のようなグラフで表せる。例えば $3j$ 記号(620)は3価の、すなわち3本のリンクが接続した結節点の結節因子である。 $3j$ 記号の対称性より、不変テンソル $\iota^{m_1 m_2 m_3}$ の添字の順番は重要でない。また式(625)の g^{mn} はスピン j で色付けされた2本の入射するリンクを持つ(2価の)結節点の結節因子と見なせる。もっとも現段階では図44に示したグラフ表記はひとまず、不変テンソルの関係式を視覚的に把握するための補助的なツール程度に認識しておけば充分である。

ここまでは3価の結節因子となる不変テンソルを見てきた。これに対し4つのSU(2)既約表現のテンソル積の不変部分空間(629)に属する状態ベクトルを式(630)のように書いて4価の結節因子 $\iota^{m_1 m_2 m_3 m_4}$ を定義すると、それは変換則(631)を満たす不変テンソルとなる。

4価の結節因子は式(632)のように，2つの3価の結節因子を縮約して得られる．これは j_1, j_2 の間と j_3, j_4 の間の三角不等式をともに満たす，すなわち式(633)を満たす任意のスピン k でラベルされており，表記の上では明示していないものの，もちろん g_{mn} も中間のスピン k に関して定義されている．したがって4価の結節因子の空間(629)の次元は，不等式(633)を満たす中間のスピン k の可能な値の個数(634)に一致する．(ここで Clebsch–Gordan 条件を満たす合成スピン k の採り得る値は $1/2$ ずつではなく， 1 ずつ増加することに改めて注意しよう．)このように3価の結節因子の空間(618)とは対照的に，4価の結節因子の空間(629)はもはや一般に1次元でない．グラフ的には4価の結節因子(632)は図45のように，スピン k を持つ“仮想リンク(virtual link)”で2つの3価の結節点を繋ぎ，4本の“脚”を残したダイアグラムで表される．

同様に任意の価数 $n (\geq 4)$ を持つ結節因子も， $(n - 2)$ 個の3価の結節因子を $(n - 3)$ 本の仮想的なリンクで繋いで，式(635)のように構成できる(図46を見よ)．

最後に Wigner の $6j$ 記号と呼ばれる量を導入しておく． $6j$ 記号は4つの $3j$ 記号の間で全ての磁気添字を縮約した量(636)として定義される．Wigner の $6j$ 記号は原子核物理学，分子物理学，量子情報，等々において広く用いられている．縮約の方法は図47に示した四面体の構造で指定できることに注意しよう．まず四面体の底面の三角形を選び，その3辺に $6j$ 記号の1行目のスピン j_1, j_2, j_3 を充てる．次いで2行目のスピン j_4, j_5, j_6 を図47のように残りの辺に充てよう．このとき四面体の各頂点において，向かい合う面

の3つのスピンから成る $3j$ 記号として，式(636)の4つの $3j$ 記号が得られる．そこで2度現れる磁気量子数の添字をそれぞれ縮約すると， $6j$ 記号(636)を得る．

9 量子ダイナミクス

9.1 時間的发展と Schrödinger 方程式

■時間的发展の演算子 [11, pp.91–95]

初期時刻 t_0 に状態 $|\alpha, t_0\rangle$ にあった系の、時刻 t における状態を

$$|\alpha, t_0; t\rangle = U(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle \quad (644)$$

と書いて、時間的发展の演算子 $U(t, t_0)$ を定義する.

このとき $U(t, t_0)$ はユニタリーであり、

$$U(t_2, t_0) = U(t_2, t_1)U(t_1, t_0), \quad (t_2 > t_1 > t_0) \quad (645)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} U(t_0 + \Delta t, t_0) = 1 \quad (646)$$

を満たすことが要請される. そこでハミルトニアン H を Hermite 演算子として

$$U(t_0 + dt, t_0) = 1 - \frac{iHdt}{\hbar} \quad (647)$$

と書くと、一連の要請が満たされる.

■ Schrödinger 方程式 [11, pp.96–98]

合成の性質 (645):

$$U(t + dt, t_0) = U(t + dt, t)U(t, t_0) = (1 - iHdt/\hbar)U(t, t_0) \quad (648)$$

から Schrödinger 方程式が導かれる :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = HU(t, t_0), \quad \therefore i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0; t\rangle = H |\alpha, t_0; t\rangle. \quad (649)$$

Hamilton 演算子 H が時間に依存し, 異なる時間の H が交換しない
(最も一般的な) 場合, Schrödinger 方程式 (649) の形式的な解は Dyson 級数

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= T \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H(t') \right\} \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T \{ H(t_1) H(t_2) \cdots H(t_n) \} \end{aligned} \quad (650)$$

で与えられる. ここに T は時間順序化積であり, 式 (650) ではフェルミオン因子を2つ含む QED のハミルトニアンのように, 時間順序化の際に異なる時刻の $H(t)$ を単に交換すれば良い場合を仮定した [17, pp.107–108].

特にハミルトニアンが時間に依存しない場合には，単に

$$U(t, t_0) = \exp[-iH(t - t_0)/\hbar]. \quad (651)$$

ここからエネルギー E の1粒子系の固有状態の波動関数は

$$\langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0; t \rangle = \langle \mathbf{x}' | U(t, t_0) | \alpha, t_0 \rangle = e^{-iE(t-t_0)/\hbar} \langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0 \rangle \quad (652)$$

となり，その振動数 ω は

$$E = \hbar\omega. \quad (653)$$

■時間に依存する波動方程式 [11, pp.131–133]

ポテンシャル $V(\mathbf{x})$ の下で Newton 力学に従う粒子に対するハミルトニアン

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) \quad (654)$$

の演算子に対して，状態ケットに対する Schrödinger 方程式 (649) は
波動関数 $\psi(\mathbf{x}', t) \equiv \langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0; t \rangle$ に対する波動方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}', t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla'^2 \psi(\mathbf{x}', t) + V(\mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}', t) \quad (655)$$

になる．

■波動関数 ψ の解釈 [11, pp.136–137]

パラメータとしての位置を $x' \rightarrow x$ と略記する.

$\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2$ は粒子の存在確率密度を表す. また波動方程式 (655) から確率分布に対する連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (656)$$

が導かれ, ここに確率の流束 (流れの密度) は

$$\mathbf{j} \equiv \frac{\hbar}{m} \text{Im}(\psi^* \nabla \psi) \quad (657)$$

と同定される.

9.1 節の式の導出など

■ Schrödinger 方程式 (649) の導出

式 (648): $U(t + \Delta t, t_0) = (1 - iH \Delta t / \hbar) U(t, t_0)$ を移項して整理すると,

$$\frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{U(t + \Delta t, t_0) - U(t, t_0)}{\Delta t} = -i(H/\hbar)U(t, t_0),$$
$$\therefore i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = HU(t, t_0)$$

を得る. これに両辺右から $|\alpha, t_0\rangle$ をかけると,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0; t\rangle = H |\alpha, t_0; t\rangle$$

が得られる. その際, $|\alpha, t_0\rangle$ は t に依らないので

$$\{\partial_t U(t, t_0)\} |\alpha, t_0\rangle = \partial_t \{U(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle\}$$

とできることに注意する.

■ Dyson 級数 (650) の導出 [42, p.450] [17, pp.107–108]

時間的发展の演算子に対する Schrödinger 方程式 (649): $i\frac{d}{dt}U(t, t_0) = H(t)U(t, t_0)$ は, 初期条件 $U(t, t_0)|_{t=t_0} = 1$ を考慮すると

$$U(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H(t') U(t', t_0)$$

と書き換えられる. 逐次代入により

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 H(t_1) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2) + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H(t_1) H(t_2) \cdots H(t_n) \quad (658) \end{aligned}$$

を得る. ここで最右辺における $n = 0$ の項は 1, $n = 1$ の項は $-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 H(t_1)$ と約束する.

次にこれを式 (650):

$$U(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T\{H(t_1) H(t_2) \cdots H(t_n)\}$$

のように書き換えられることを説明する．式(650)の積分範囲は n 次元空間 $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ の範囲 $t_0 \leq t_i \leq t$ ($i = 1, \dots, n$)全体である．これは $n!$ 通りの置換

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi 1 & \pi 2 & \cdots & \pi n \end{pmatrix}$$

に対して，不等式 $t_{\pi n} \leq t_{\pi(n-1)} \leq \cdots \leq t_{\pi 2} \leq t_{\pi 1}$ で表される $n!$ 個の領域に分けられる．その各々にわたる積分は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^n \int_{t_0}^t dt_{\pi 1} \int_{t_0}^{t_{\pi 1}} dt_{\pi 2} \cdots \int_{t_0}^{t_{\pi(n-1)}} dt_{\pi n} T\{H(t_1)H(t_2) \cdots H(t_n)\}$$

なので

(式(650)右辺)

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^n \sum_{\pi} \int_{t_0}^t dt_{\pi 1} \int_{t_0}^{t_{\pi 1}} dt_{\pi 2} \cdots \int_{t_0}^{t_{\pi(n-1)}} dt_{\pi n} T\{H(t_1)H(t_2) \cdots H(t_n)\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^n \sum_{\pi} \int_{t_0}^t dt_{\pi 1} \int_{t_0}^{t_{\pi 1}} dt_{\pi 2} \cdots \int_{t_0}^{t_{\pi(n-1)}} dt_{\pi n} H(t_{\pi 1})H(t_{\pi 2}) \cdots H(t_{\pi n}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^n \times n! \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H(t_1)H(t_2) \cdots H(t_n) \end{aligned}$$

= (式(658) 右辺)

となるから，確かに式(650)が成り立つ．ここで第2の等号で $H(t_1)H(t_2)\cdots H(t_n)$ を $H(t_{\pi_1})H(t_{\pi_2})\cdots H(t_{\pi_n})$ に並べ替えるとき，フェルミオン場を2つ含むQEDのハミルトニアンのように，異なる時刻の $H(t)$ をあたかも交換するかのようによれば良い場合を仮定した．

■時間に依存する波動方程式(655)の導出 [11, pp.131–133]
状態ケットに対する Schrödinger 方程式(649):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0; t\rangle = H |\alpha, t_0; t\rangle$$

の両辺に左から $\langle \mathbf{x}' |$ をかけると,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0; t \rangle = \langle \mathbf{x}' | H | \alpha, t_0; t \rangle = \langle \mathbf{x}' | \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) | \alpha, t_0; t \rangle$$

を得る^{*128}. 最右辺において

$$\langle \mathbf{x}' | \frac{\mathbf{p}^2}{2m} | \alpha, t_0; t \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla'^2 \langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0; t \rangle \quad (\because \text{式(440)})$$

$$\langle \mathbf{x}' | V(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}' | V(\mathbf{x}') \quad (V(\mathbf{x}) \text{ は演算子, } V(\mathbf{x}') \text{ は固有値})$$

とできるので, 波動関数 $\psi(\mathbf{x}', t) \equiv \langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0; t \rangle$ に対する方程式(655):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}', t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla'^2 \psi(\mathbf{x}', t) + V(\mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}', t)$$

^{*128} Schrödinger 描像の位置固有ブラ $\langle \mathbf{x}' |$ は時間変化しないことに注意する.

が導かれる.

注解 1 導出を通して見て取れるように, この結果は式(440)に基づき単にハミルトニアン(654)における運動量演算子 p を, 波動関数に作用する場合の表式 $p_{x'} = -i\hbar\nabla'$ に置き換えさえすれば良いことを表している.

注解 2 時間に依存する波動方程式(655)は平面波解 $\psi \sim e^{i(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}' - Et)/\hbar}$ が, 適正な波数と振動数の関係(エネルギーの関係)

$$\frac{\mathbf{p}'^2}{2m} + V(\mathbf{x}') = E$$

を満たすことを保証する. 初等的には逆にこのことから波動方程式(655)が発見的に“導出”され, 任意のハミルトニアンの下での一般的な状態 ψ に対しても適用できるものと仮定される.

■連続の式(656)の導出

Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi$$

を利用すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \\ &= \psi^* \left\{ \frac{1}{i\hbar} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi \right\} + \psi \left\{ -\frac{1}{i\hbar} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi^* \right\} \\ &= \frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) \end{aligned}$$

を得る. また確率の流れの式(657):

$$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

より

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*)$$

となる．これらを辺々足すと，連続の式(656)が導かれる．

注解 1 確率の流束(657): $j = -\frac{i\hbar}{2m}[\psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi^*) \psi] = \frac{\hbar}{m} \text{Im}(\psi^* \nabla \psi)$ は

$$j = \text{Re} \left[\psi^* \frac{\hbar}{im} \nabla \psi \right]$$

とも書ける．

注解 2 連続の式(656)の導出ではポテンシャル V を実数と仮定している．他方で V が虚部を持つと仮定すると，連続の式には粒子の吸い込みを表す源の項が付け加わる．

9.1 節の原稿

ここまでは角運動量の理論を中心に、量子力学の運動学を見てきた。ここからは量子力学的な系の時間発展へと話を進める。

初期時刻 t_0 に状態 $|\alpha, t_0\rangle$ にあった系の、時刻 t における状態を式 (644) のように書いて、時間的发展の演算子 $U(t, t_0)$ を定義する。このとき確率の保存が保証されるには、時間发展演算子 $U(t, t_0)$ はユニタリーでなければならない。また演算子 $U(t, t_0)$ を未来 $t > t_0$ への時間发展に限って定義する場合、必ずしも時間发展演算子の成す群を考えることはできない。しかしながら演算子 $U(t, t_0)$ は合成の性質 (645) を満たし、恒等演算子と式 (646) のように連続的に繋がることが要請されることは確かである。ところで古典力学において、系の時間並進対称性に付随する保存量はエネルギーであり [8, p.16]、翻ってハミルトニアンが系の時間发展を生成する [6, p.554]。そこで量子力学においてもハミルトニアンの演算子 (Hamilton 演算子) H が時間发展を生成すると考え、無限小の時間发展の演算子を式 (647) のように書こう。ここで式 (647) 分母の $\hbar$ は、 H がエネルギーの次元を持つとした場合に必要とされる因子である。このとき性質 (645), (646) が満たされる。また Hamilton 演算子 H を Hermite と仮定すれば、 $U(t, t_0)$ のユニタリー性が保証される。

時間发展演算子の合成の性質 (645) を任意の時刻 t からの無限小時間 dt に適用すると、式 (648) が成り立つ (時間差 $t - t_0$ は有限であって良い)。ここから演算子 $U(t, t_0)$ に対する、したがって状態ケット $|\alpha, t_0; t\rangle$ に対する Schrödinger 方程式 (649) が導かれる (導出

スライド参照).

Hamilton 演算子 H が時間に依存し、異なる時間の H が交換しない(最も一般的な)場合、Schrödinger 方程式 (649) の形式的な解は Dyson 級数 (650) で与えられる. ここに $T\{\cdots\}$ は時間順序化積 (T 積) であり、引数の時刻がより早い演算子が先にケットに作用するように、演算子を引数の時刻の順序が右から左になるように並べ替えた演算子積を表す. ただし並べ替えの際、隣接するフェルミオン因子どうしは反交換は反交換し、それ以外の因子の組はあたかも交換するかのように扱うものと約束する. また演算子積を T 積に並び替えることを時間順序化と呼ぶ [17, pp.56–57, p.78, p.108]. 式 (650) ではフェルミオン因子を2つ含む量子電磁力学 (QED) のハミルトニアンのように、時間順序化の際に異なる時刻のハミルトニアンを単に交換すれば良い場合を仮定した (導出スライド参照). 後述の相互作用描像では Dyson 級数 (650) は、相互作用ハミルトニアンを摂動とする摂動展開を与えることになる [17, pp.107–108]. 本稿の応用ではループ量子重力において、ホロノミーを接続の指数の経路順序化で表す際に、Dyson 級数 (650) の導出と同じ形の問題に遭遇することになる; 数学的な類似性から、式 (650) の結果はそのまま流用できる.

特に異なる時刻のハミルトニアンが最初から交換する場合には、Dyson 級数 (650) の T 積の記号を省くことができる. さらにハミルトニアンが時間に依存しない場合、時間発展演算子は単にハミルトニアンを生成子とする指数の形 (651) に帰着する. 実際、演算子の指数 (651) が Taylor 展開の形で定義されることに注意すると、それらが Schrödinger

方程式(649)と初期条件(646)を満たしていることは、容易に直接確かめられる。あるいは式(148)の箇所で行ったように、合成の性質(645)に基づき無限小時間の発展演算子(647)を繰り返し掛けて、改めて式(651)を得ることもできる。

ここで1粒子系を考えると、Hamilton演算子 H の固有値に他ならない粒子のエネルギー E が一定の固有状態において、波動関数は式(652)の形の時間依存性を持つことになる [11, p.100]。これは物質波の振動数 ω が、de Broglieの関係式(Planck–Einsteinの関係式 [11, p.95]) (653)で与えられることを意味する。ここから時間発展演算子の表式(647)を部分的に正当化できる。

ポテンシャル $V(x)$ の下でNewton力学に従う粒子に対するハミルトニアン(654)を考えよう。古典的なハミルトニアン(654)に対応するHamilton演算子を用いて、状態ケットに対するSchrödinger方程式(649)は波動関数 $\psi(x', t) \equiv \langle x' | \alpha, t_0; t \rangle$ に対する方程式(655)になる(導出スライド参照)。式(655)は時間に依存する波動方程式と呼ばれ、いわゆる波動力学の出発点となる。本稿では先を急ぐので、与えられたポテンシャルに波動方程式を適用してエネルギー固有状態などを求める、具体的な応用は扱わない。

Schrödinger方程式(655)は初期時刻での波動関数 ψ の分布が与えられると、後の時刻での ψ の値が逐次的に定まることを意味している。(またこれは線形の方程式なので、物理的な状態の重ね合わせもまた物理的な状態であるという、重ね合わせの原理が保証される。) このように波動関数(の絶対値の2乗)は確率分布を表し、量子力学的な予言は確率的にしか行えないものの、波動関数自体の時間発展は決定論的である [30, p.51] [11, p.149]。また量子力学では粒子の位置が不確かなので、力の概念は必ずしも上手くなじまないも

のの、ポテンシャルの概念は依然として有効である [41, p.200].

ここからは量子力学的な演算子の代わりに波動方程式(655)を考察するので、パラメータとしての位置 x' からプライムを省こう. 第7章で説明したように、波動関数の絶対値の2乗 $\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2$ は時刻 t において粒子を位置 x に見出す確率密度を表す. また初等的によく知られているように、波動方程式(655)から確率分布に対する連続の式(656)が導かれ、ここに確率の流束(流れの密度)は式(657)に同定される (導出スライド参照).

9.2 Schrödinger 描像, Heisenberg 描像, 相互作用描像

■Schrödinger 描像 [17, pp.23–24] [11, pp.91–92, pp.96–97, pp.116–117]

- 状態ケット $|\alpha, t\rangle$ が Schrödinger 方程式 (649) に従って時間発展する枠組み (9.1 節) を Schrödinger 描像と呼ぶ.
 - Schrödinger 描像において観測量 A は, したがってその固有ケットにあたる基底ケット $\{|a'\rangle\}$ も時間変化しない*129.
 - 以下ではハミルトニアンが時間に陽に依らない場合を仮定し, 時間発展演算子を $U(t) = e^{-iHt/\hbar}$: (651) と書く.
-

■Heisenberg 描像 [17, p.24] [11, pp.110–112, pp.116–119]

Heisenberg 描像において, 状態ケットは時間変化しない:

$$|\alpha\rangle_{\text{H}} = |\alpha, 0\rangle. \quad (659)$$

また Heisenberg 描像の観測量は, Schrödinger 描像の観測量 A と

$$A^{\text{H}}(t) = U^{\dagger}(t)AU(t) \quad (660)$$

で関係付けられる.

*129 ここでは固有値 a' として, 離散的な値をとるものを考えても連続的な値をとるものを考えても良い.

このとき観測量の期待値は

$$\langle \alpha, t | A | \alpha, t \rangle = \langle \alpha, 0 | U^\dagger(t) A U(t) | \alpha, 0 \rangle = {}_H \langle \alpha | A^H(t) | \alpha \rangle_H. \quad (661)$$

$U(t)$ が Schrödinger 方程式 (649) に従うことから,
Heisenberg 描像の観測量 (660) は Heisenberg 方程式

$$\frac{dA^H}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [A^H, H] \quad (662)$$

に従う^{*130}. さらに Schrödinger 描像の観測量 A に対する固有方程式 $A |a'\rangle = a' |a'\rangle$ は Heisenberg 描像の観測量 $A^H(t)$ に対する固有方程式

$$A^H(t) |a', t\rangle_H = a' |a', t\rangle_H, \quad (663)$$

$$|a', t\rangle_H = U^\dagger(t) |a'\rangle, \quad \therefore {}_H \langle a', t| = \langle a'| U(t) \quad (664)$$

になる ; Heisenberg 描像の基底ケット (664) は Schrödinger 描像の状態ケット $|\alpha, t\rangle = U(t) |\alpha, 0\rangle$ と言わば “逆向きに回転” する.

^{*130} ただし式 (662) 右辺の H は Schrödinger 描像の Hamilton 演算子と同じである. また Heisenberg 方程式 (662) は時間に陽に依らない量 A に対する古典的な時間発展方程式 $\frac{dA}{dt} = \{A, H\}$ [8, p.171] に, Dirac の規則 $\{, \}_P \rightarrow [,]/i\hbar$ [11, p.67] を適用した形となっている.

ここから内積(確率振幅)の不変性が保証される：

$$\langle a' | \alpha, t \rangle = \langle a' | U(t) | \alpha, 0 \rangle = {}_H \langle a', t | \alpha \rangle_H. \quad (665)$$

■相互作用描像 [17, pp.24–25]

H_0 を非摂動ハミルトニアン, H_I を摂動(相互作用項)として $H = H_0 + H_I$ と書く.
このとき $U_0(t) \equiv e^{-iH_0 t/\hbar}$ を用いて相互作用描像の状態ケットと観測量はそれぞれ

$$|\alpha, t\rangle_I \equiv U_0^\dagger(t) |\alpha, t\rangle, \quad A^I(t) \equiv U_0^\dagger(t) A U_0(t) \quad (666)$$

と定義される. $|\alpha, t\rangle$ は Schrödinger 方程式 (649) に従うことから, $|\alpha, t\rangle_I$ は

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha, t\rangle_I = H_I^I(t) |\alpha, t\rangle_I, \quad H_I^I(t) \equiv U_0^\dagger(t) H_I(t) U_0(t) \quad (667)$$

に従う *131. 一方, 相互作用描像の観測量 (666) は

$$\frac{dA^I}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [A^I, H_0] \quad (668)$$

に従う.

*131 H_I, H_I^I の引数 t は場を通した時間依存性を表し, これらが時間に陽に依存することを意味しない.

Heisenberg 描像の観測量 (660) と相互作用描像の観測量 (666) は

$$A^{\text{I}}(t) = \mathcal{U}^\dagger(t) A^{\text{H}}(t) \mathcal{U}(t), \quad \mathcal{U}(t) \equiv U^\dagger(t) U_0(t) = e^{iHt/\hbar} e^{-iH_0t/\hbar} \quad (669)$$

で関係付けられる.

■ まとめ

表7 Schrödinger 描像, Heisenberg 描像, 相互作用描像の比較

	Schrödinger 描像	Heisenberg 描像	相互作用描像
状態ケット	$ \alpha, t\rangle$ Schrödinger 方程式 (649) に従う	$ \alpha\rangle_{\text{H}} = U^\dagger(t) \alpha, t\rangle = \alpha, 0\rangle$ 時間変化しない	$ \alpha\rangle_{\text{I}} = U_0^\dagger(t) \alpha, t\rangle$ “Schrödinger 方程式” (667) に従う
観測量	A 時間変化しない	$A^{\text{H}}(t) = U^\dagger(t) A U(t)$ Heisenberg 方程式 (662) に従う	$A^{\text{I}}(t) = U_0^\dagger(t) A U_0(t)$ “Heisenberg 方程式” (668) に従う
基底ケット	$ a'\rangle$ 時間変化しない	$ a', t\rangle_{\text{H}} = U^\dagger(t) a'\rangle$	$ a', t\rangle_{\text{I}} = U_0^\dagger(t) a'\rangle$

9.2節の式の導出など

■ Heisenberg 方程式 (662) の導出

$$\begin{aligned}\frac{dA^{\text{H}}}{dt} &= \frac{dU^{\dagger}}{dt}AU + U^{\dagger}A\frac{dU}{dt} \quad (\because \text{式 (660)} : A^{\text{H}}(t) = U^{\dagger}(t)AU(t)) \\ &= \left(-\frac{1}{i\hbar}U^{\dagger}H\right)AU + U^{\dagger}A\left(\frac{1}{i\hbar}HU\right) \\ &\quad \left(\because \text{式 (649)} : i\hbar\frac{dU}{dt} = HU, -i\hbar\frac{dU^{\dagger}}{dt} = U^{\dagger}H\right) \\ &= -\frac{1}{i\hbar}(U^{\dagger}HU)(U^{\dagger}AU) + \frac{1}{i\hbar}(U^{\dagger}AU)(U^{\dagger}HU) \quad (\because UU^{\dagger} = 1) \\ &= \frac{1}{i\hbar}[A^{\text{H}}, H^{\text{H}}]. \quad (\because \text{式 (660)} : A^{\text{H}}(t) = U^{\dagger}(t)AU(t))\end{aligned}$$

ここで最右辺において $H^{\text{H}} \equiv U^{\dagger}HU$ は Heisenberg 描像の Hamilton 演算子であり, H と $U(t) = e^{-iHt/\hbar}$: (651) は交換するから, これは Schrödinger 描像の Hamilton 演算子 H に等しい :

$$H^{\text{H}} \equiv U^{\dagger}HU = U^{\dagger}UH = H. \quad (\because U^{\dagger}U = 1)$$

よって上式は Heisenberg 方程式 (662):

$$\frac{dA^H}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [A^H, H]$$

に他ならない [11, pp.111–112].

■ Heisenberg 描像の観測量 $A^H(t)$ に対する固有方程式 (663) の導出
Schrödinger 描像の観測量 A に対する固有方程式

$$A |a'\rangle = a' |a'\rangle$$

に両辺左から $U^\dagger(t)$ をかけ, $UU^\dagger = 1$ に注意すると

$$\{U^\dagger(t)AU(t)\}\{U^\dagger(t)|a'\rangle\} = a'\{U^\dagger(t)|a'\rangle\}, \quad \therefore A^H(t)|a',t\rangle_H = a'|a',t\rangle_H : (663),$$

$$A^H(t) \equiv U^\dagger(t)AU(t) : (660), \quad |a',t\rangle_H \equiv U^\dagger(t)|a'\rangle : (664)$$

が得られる [11, pp.116–117].

■相互作用描像の状態ケット $|\alpha, t\rangle_{\text{I}}$ に対する時間発展方程式 (667) の確認

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha, t\rangle_{\text{I}} &= i\hbar \frac{d}{dt} (e^{iH_0 t/\hbar} |\alpha, t\rangle) \\ &= -H_0 e^{iH_0 t/\hbar} |\alpha, t\rangle + e^{iH_0 t/\hbar} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha, t\rangle \\ &= e^{iH_0 t/\hbar} (-H_0) |\alpha, t\rangle + e^{iH_0 t/\hbar} H |\alpha, t\rangle \quad (\because \text{Schrödinger 方程式 (649)}) \\ &= e^{iH_0 t/\hbar} H_{\text{I}} |\alpha, t\rangle \\ &= (e^{iH_0 t/\hbar} H_{\text{I}} e^{-iH_0 t/\hbar}) (e^{iH_0 t/\hbar} |\alpha, t\rangle) \\ &= H_{\text{I}}^{\text{I}} |\alpha, t\rangle_{\text{I}}. \end{aligned}$$

■ Heisenberg 描像と相互作用描像における観測量の関係 (669) の確認

$$\begin{aligned} A^{\text{I}}(t) &= U_0^\dagger(t) A U_0(t) \quad (\because \text{式 (666)}) \\ &= U_0^\dagger(t) U(t) A^{\text{H}}(t) U^\dagger(t) U_0(t) \quad (\because \text{式 (660)}) \\ &= \mathcal{U}^\dagger(t) A^{\text{H}}(t) \mathcal{U}(t) : (669), \\ \mathcal{U}(t) &\equiv U^\dagger(t) U_0(t) = e^{iHt/\hbar} e^{-iH_0t/\hbar}. \end{aligned}$$

9.2節の原稿

ここでは量子ダイナミクスを記述する3通りの方法として、Schrödinger描像、Heisenberg描像、相互作用描像を復習する。

9.1節で導入した、状態ケット $|\alpha, t\rangle$ が Schrödinger 方程式 (649) に従って時間発展する枠組みを Schrödinger 描像と呼ぶ。これに対し観測量 A の固有ケット $\{|a'\rangle\}$ を基底ケットに用いる、Schrödinger 描像において観測量 A は時間変化しないので、基底ケット $\{|a'\rangle\}$ も時間変化しない。さて、以下ではハミルトニアンが時間に陽に依らない場合を考えよう。このとき時間的発展の演算子はハミルトニアンの指数の形 (651) $U(t) = e^{-iHt/\hbar}$ に書ける。

次に Heisenberg 描像において、状態ケットは式 (659) のように時間変化しない。また Heisenberg 描像の観測量は、Schrödinger 描像の観測量を A として式 (660) で定義される。

このとき観測量の期待値は式 (661) のように、Schrödinger 描像と Heisenberg 描像とで変わらないことが保証される。こうして Schrödinger 描像では系の状態が時間変化するのに対し、Heisenberg 描像では観測量を表す演算子が時間変化する。そして時間的発展の演算子 $U(t)$ が Schrödinger 方程式 (649) に従うことから、Heisenberg 描像の観測量 (660) は Heisenberg 方程式 (662) に従って時間変化することが導かれる ([導出スライド参照](#))。さらに Schrödinger 描像の観測量 A に対する固有方程式 $A|a'\rangle = a'|a'\rangle$ は Heisenberg 描像の観測量 $A^H(t)$ に対する固有方程式 (663), (664) になる ([導出スライド参](#)

照). これは Heisenberg 描像の基底ケットが式 (664) の $|a', t\rangle_H$ であることを意味する. Schrödinger 描像の状態ケットが時間的发展の演算子 $U(t)$ で変化するのに対し, Heisenberg 描像の基底ケット (664) は $U^\dagger(t)$ で言わば “逆向きに回転” する.

このため式 (665) のように, 状態ケットと基底ケットの内積に他ならない確率 (または確率密度) の振幅は Schrödinger 描像と Heisenberg 描像とで同じ値となることが保証される.

最後に相互作用描像について述べる. 相互作用描像を定義する際の前提条件として, ハミルトニアンを非摂動ハミルトニアン H_0 と摂動ハミルトニアン H_I に分けて $H = H_0 + H_I$ と書く. 場の量子論では例えば H_0 として自由場を記述する項を, H_I として場の相互作用を記述する項を考えれば良い. このとき非摂動ハミルトニアンで定義される時間发展演算子 $U_0(t) \equiv e^{-iH_0 t/\hbar}$ を用いて相互作用描像の状態ケットと観測量はそれぞれ式 (666) で定義される. Schrödinger 描像の状態ケット $|\alpha, t\rangle$ は Schrödinger 方程式 (649) に従うことから, 相互作用描像の状態ケット $|\alpha, t\rangle_I$ は時間发展方程式 (667) に従うことが示される (導出スライド参照). これは相互作用 Hamilton 演算子 $H_I^I(t)$ の下での Schrödinger 方程式のような形をしており, 相互作用描像ではハミルトニアンの相互作用項が状態 $|\alpha, t\rangle_I$ の時間変化を引き起こすと見ることができる. 一方, Heisenberg 方程式 (662) の導出と同様にして, 相互作用描像の観測量 (666) は時間发展方程式 (668) に従うことが示される. これは H_0 をハミルトニアンとする Heisenberg 方程式のような形をしている.

Heisenberg 描像の観測量 (660) と相互作用描像の観測量 (666) は式 (669) で関係付けられる (導出スライド参照).

以上の結果は表7のようにまとめられる. 最後に, ユニタリー変換は交換関係を不変に保つことに注意しよう. このため例えば Heisenberg 描像における正準変数の演算子は Schrödinger 描像の場合と同様, 正準交換関係を満たすことになる.

9.3 Feynman の経路積分と古典的極限

9.3.1 Feynman の経路積分

ハミルトニアン (654): $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x})$ で記述される非相対論的な1粒子系に対して, 正準形式の量子力学から, 遷移振幅に対する経路積分の公式を導く.

まず Schrödinger 描像の位置固有ケット $|\mathbf{x}'\rangle$ を用いて, 粒子の伝播関数を遷移振幅

$$K(\mathbf{x}'', t; \mathbf{x}', t_0) = \langle \mathbf{x}'' | e^{-iH(t-t_0)/\hbar} | \mathbf{x}' \rangle \quad (670)$$

として定義する. これは次の意味を持つ [11, pp.148–151].

- 初期時刻 t_0 に粒子が位置 $\mathbf{x}'$ に局在していた系の, 後の時刻 t の状態 $e^{-iH(t-t_0)/\hbar} |\mathbf{x}'\rangle$ における波動関数.
- 波動関数 $\psi(\mathbf{x}', t) = \langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0; t \rangle$ の Schrödinger 発展を与える Green 関数 :

$$\psi(\mathbf{x}'', t) = \int d^3x' K(\mathbf{x}'', t; \mathbf{x}', t_0) \psi(\mathbf{x}', t_0). \quad (671)$$

Heisenberg 描像では位置固有ケットは式 (664): $|\mathbf{x}', t\rangle = e^{+iH(t-t_0)/\hbar} |\mathbf{x}'\rangle$ なので,

$$K(\mathbf{x}'', t; \mathbf{x}', t_0) = (\langle \mathbf{x}'' | e^{-iH(t-t_0)/\hbar}) \cdot |\mathbf{x}'\rangle = \langle \mathbf{x}'', t | \mathbf{x}', t_0 \rangle \quad (672)$$

は粒子が時空点 $(\mathbf{x}', t_0)$ から $(\mathbf{x}'', t)$ に移る遷移振幅と解釈できる.

ここで中間の時刻 $t_k = t_0 + k\Delta t$ ($k = 0, 1, \dots, N$) を定義しよう ($\Delta t = (t - t_0)/N$). 各時刻 t_k における基底ケット $\{|\mathbf{x}_k, t\rangle\}$ の完備関係式を挿入すると、遷移振幅はあらゆる経路(図48)からの寄与の“和”で書ける [11, pp.154–157] :

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{x}_t, t | \mathbf{x}_0, t_0 \rangle \\ &= \int d^3x_{N-1} \cdots d^3x_2 d^3x_1 \langle \mathbf{x}_t, t | \mathbf{x}_{N-1}, t_{N-1} \rangle \cdots \langle \mathbf{x}_2, t_2 | \mathbf{x}_1, t_1 \rangle \langle \mathbf{x}_1, t_1 | \mathbf{x}_0, t_0 \rangle. \quad (673) \end{aligned}$$

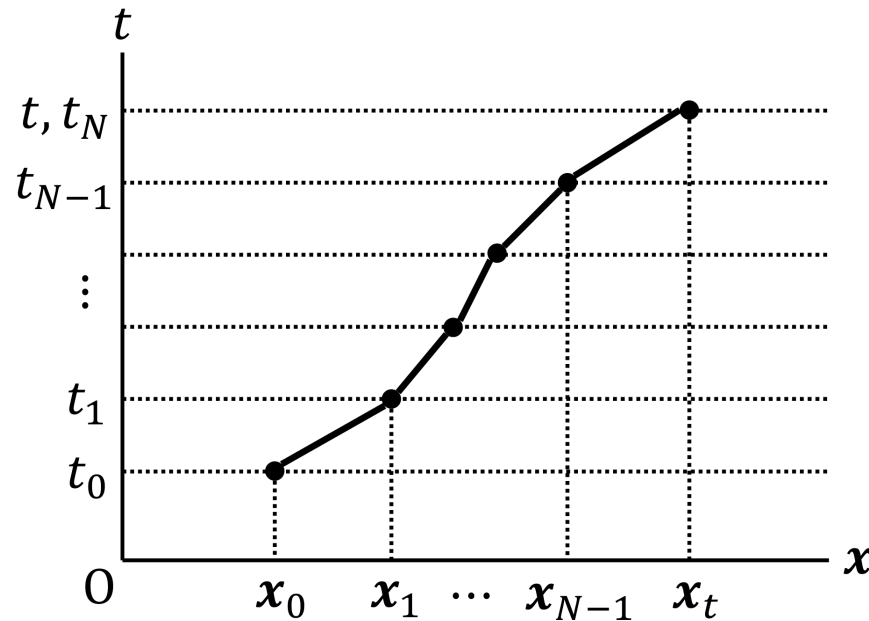


図48 各時刻 t_k での位置 x_k を指定して得られる，始点 (x_0, t_0) と終点 (x_t, t) を結ぶ経路

$N \rightarrow \infty$ を念頭に Δt の1次まで考慮すると、運動量の理論を用いて

$$\langle \mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1} | \mathbf{x}_k, t_k \rangle \simeq \int \frac{d^3 p_k}{(2\pi\hbar)^3} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left\{ \mathbf{p}_k \cdot \frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{\Delta t} - H(\mathbf{x}_k, \mathbf{p}_k) \right\} \Delta t \right] \quad (674)$$

と書ける． よって伝播関数(673)は相空間における経路積分

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{x}_t, t | \mathbf{x}_0, t_0 \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \frac{d^3 p_0}{(2\pi\hbar)^3} \left(\prod_{k=1}^{N-1} \frac{d^3 x_k d^3 p_k}{(2\pi\hbar)^3} \right) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \mathbf{p}_k \cdot \frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{\Delta t} - H(\mathbf{x}_k, \mathbf{p}_k) \right\} \Delta t \right] \\ &\equiv \int_{\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_t} \mathcal{D}p \mathcal{D}x \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau \{ \mathbf{p}(\tau) \cdot \dot{\mathbf{x}}(\tau) - H(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{p}(\tau)) \} \right] \end{aligned} \quad (675)$$

で表される [23, pp.78–79].

運動量変数に関する積分を実行すると，配位空間における (Feynman の) 経路積分

$$\begin{aligned}
 & \langle \boldsymbol{x}_t, t | \boldsymbol{x}_0, t_0 \rangle \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int d^3 x_{N-1} \cdots d^3 x_1 \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{3N/2} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{x}}_k^2 - V(\boldsymbol{x}_k) \right\} \Delta t \right] \\
 &\equiv \int_{\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_t} \mathcal{D}\boldsymbol{x} e^{iS[\boldsymbol{x}(\tau)]/\hbar}
 \end{aligned} \tag{676}$$

が得られる；ただし $\dot{\boldsymbol{x}}_k \equiv (\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k)/\Delta t$ と略記しており，また

$$S[\boldsymbol{x}(\tau)] \equiv \int_{t_0}^t d\tau L(\boldsymbol{x}(\tau), \dot{\boldsymbol{x}}(\tau)) \equiv \int_{t_0}^t d\tau \left\{ \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{x}}(\tau)^2 - V(\boldsymbol{x}(\tau)) \right\} \tag{677}$$

で作用積分を定義した [23, pp.81–82].

逆に経路積分 (676) を原理に採ると，量子ダイナミクスは H の生成する Schrödinger 発展で与えられること (正準理論) が帰結する．実際，経路積分で表される伝播関数 (676) (したがって波動関数 (671)) は Schrödinger 方程式 (と適切な初期条件 $\lim_{t \rightarrow t_0} \langle \boldsymbol{x}_t, t | \boldsymbol{x}_0, t_0 \rangle = \delta(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}_0)$) を満たす [11, pp.164–165].

9.3.1 項の式の導出など

■ 伝播関数が Green 関数であること (671) の導出

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{x}'', t) &= \langle \boldsymbol{x}'' | \alpha, t_0; t \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{x}'' | e^{-iH(t-t_0)/\hbar} | \alpha, t_0 \rangle \\ &= \int d^3x' \langle \boldsymbol{x}'' | e^{-iH(t-t_0)/\hbar} | \boldsymbol{x}' \rangle \langle \boldsymbol{x}' | \alpha, t_0 \rangle \\ &= \int d^3x' K(\boldsymbol{x}'', t; \boldsymbol{x}', t_0) \psi(\boldsymbol{x}', t_0)\end{aligned}$$

より, 式(671)における積分核は伝播関数

(670): $K(\boldsymbol{x}'', t; \boldsymbol{x}', t_0) = \langle \boldsymbol{x}'' | e^{-iH(t-t_0)/\hbar} | \boldsymbol{x}' \rangle$ に同定される.

■各微小時間の遷移振幅(674)の導出 [23, pp.78–79]

式(654)のハミルトニアンに対して Δt の1次近似で、各微小時間の遷移振幅は

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{x}_{k+1}, t_{k+1} | \boldsymbol{x}_k, t_k \rangle &= \langle \boldsymbol{x}_{k+1} | e^{-iH\Delta t/\hbar} | \boldsymbol{x}_k \rangle \simeq \langle \boldsymbol{x}_{k+1} | 1 - \frac{i\Delta t}{\hbar} H | \boldsymbol{x}_k \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{x}_{k+1} | 1 - \frac{i\Delta t}{\hbar} V(\boldsymbol{x}) | \boldsymbol{x}_k \rangle - \frac{i\Delta t}{2m\hbar} \langle \boldsymbol{x}_{k+1} | \boldsymbol{p}^2 | \boldsymbol{x}_k \rangle\end{aligned}$$

となる．ここで最右辺第1項は

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{x}_{k+1} | 1 - \frac{i\Delta t}{\hbar} V(\boldsymbol{x}) | \boldsymbol{x}_k \rangle &= \left(1 - \frac{i\Delta t}{\hbar} V(\boldsymbol{x}_k) \right) \delta(\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k) \\ &= \left(1 - \frac{i\Delta t}{\hbar} V(\boldsymbol{x}_k) \right) \int \frac{d^3 p_k}{(2\pi\hbar)^3} e^{i\boldsymbol{p}_k \cdot (\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k)/\hbar}\end{aligned}$$

と書き換えられる^{*132}．また運動量固有状態は平面波(442)で表されることを思い出す

^{*132} デルタ関数の下でポテンシャル V の引数は中点 $(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{x}_{k+1})/2$ に置き換えることも可能である．しかし本稿の水準ではこの措置は本質的な役割を演じない [23, p.80].

と，第2項の行列要素は

$$\langle \mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{p}^2 | \mathbf{x}_k \rangle = \int d^3 p_k \langle \mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{p}^2 | \mathbf{p}_k \rangle \langle \mathbf{p}_k | \mathbf{x}_k \rangle = \int \frac{d^3 p_k}{(2\pi\hbar)^3} \mathbf{p}_k^2 e^{i\mathbf{p}_k \cdot (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k)/\hbar}$$

と書ける．これらを合わせると

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1} | \mathbf{x}_k, t_k \rangle &\simeq \int \frac{d^3 p_k}{(2\pi\hbar)^3} e^{i\mathbf{p}_k \cdot (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k)/\hbar} \left\{ 1 - \frac{i\Delta t}{\hbar} \left(\frac{\mathbf{p}_k^2}{2m} + V(\mathbf{x}_k) \right) \right\} \\ &\simeq \int \frac{d^3 p_k}{(2\pi\hbar)^3} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \{ \mathbf{p}_k \cdot (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) - H(\mathbf{x}_k, \mathbf{p}_k) \Delta t \} \right] : (674) \end{aligned}$$

を得る ($k = 0, 1, \dots, N - 1$).

■配位空間における経路積分(676)の導出 [23, pp.81–82]

$\dot{\boldsymbol{x}}_k \equiv (\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k)/\Delta t$ と略記すると, 式(675)における運動量変数に関する積分は, Gauss–Fresnel積分の公式を用いて

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3 p_k}{(2\pi\hbar)^3} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \{ \boldsymbol{p}_k \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_k - H(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{p}_k) \} \Delta t \right] \\ &= \int \frac{d^3 p_k}{(2\pi\hbar)^3} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left\{ -\frac{1}{2m} (\boldsymbol{p}_k - m\dot{\boldsymbol{x}}_k)^2 + \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{x}}_k^2 - V(\boldsymbol{x}_k) \right\} \Delta t \right] \\ &= \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{x}}_k^2 - V(\boldsymbol{x}_k) \right\} \Delta t \right] \end{aligned}$$

と実行できる. これを相空間における経路積分(675)に代入して式(676)を得る.

参考1 与えられた初期値を $(\boldsymbol{x}_0, t_0) \rightarrow (\boldsymbol{x}_I, t_I)$ と改めると同時に, 新たに初期時刻の変数 $\boldsymbol{x}_0$ を導入して, あらかじめ式(673)において

$$\langle \boldsymbol{x}_1, t_1 | \boldsymbol{x}_I, t_I \rangle = \int d^3 x_0 \langle \boldsymbol{x}_1, t_1 | \boldsymbol{x}_0, t_0 \rangle \delta(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_I)$$

と書いておけば, 式(675)における見栄えの悪い p_0 積分を座標積分 $\boldsymbol{x}_0$ と組にすることが出来る [28, pp.32–35]. しかし配位空間の経路積分(676)を導く際に結局, $\boldsymbol{x}_0$ 積

分を実行してデルタ関数を消去するため，この措置は二度手間となる．

参考2 [33, pp.53–55] [4, pp.169–172]

Fresnel積分

$$f(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{it^2} dt$$

はFresnel回折によるスクリーン上の光の強度分布を求める際に現れる．“時間” t とともに複素平面上の無限小ベクトル $e^{it^2} dt$ の偏角 t^2 の増大は加速するため，そのベクトル和 $f(x)$ は図49のようなCornuの螺旋をパラメトライズする ($f(-x) = -f(x)$ より曲線は原点对称)．渦巻の中心に対応する点の座標は $f(\pm\infty) = \pm\frac{1}{2}(1+i)$ で与えられる．図49からFresnel積分(の実部と虚部)

$$C(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin(t^2) dt$$

のグラフの概形は $x : 0 \rightarrow \infty$ のとき，ゼロから増大して一定値 $1/2$ 周りの振動に移行し，その振幅は減少していくことが定性的に読み取れる．

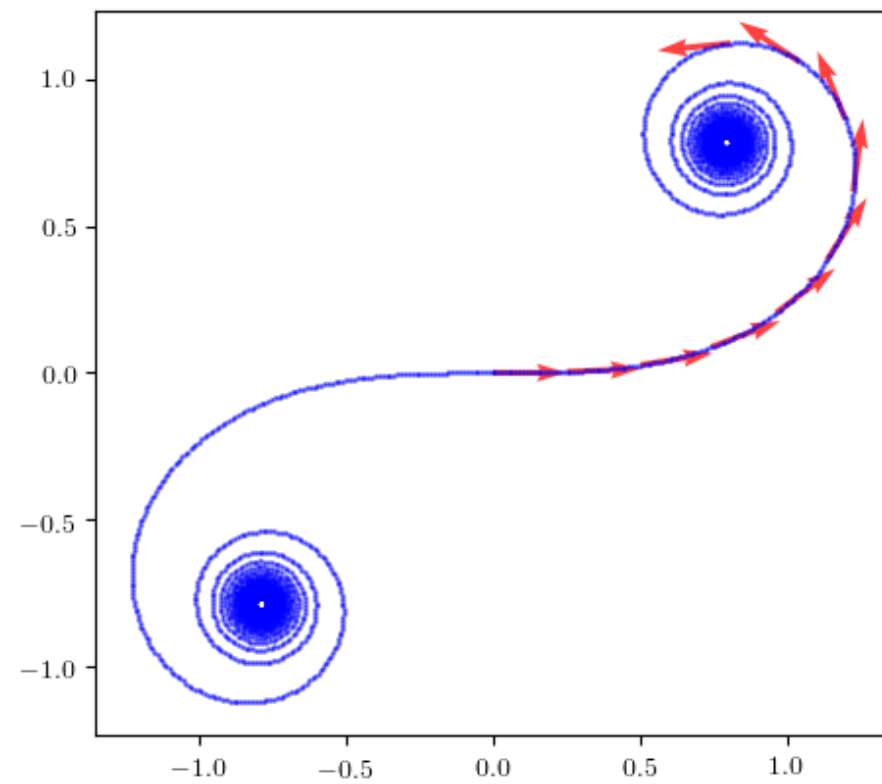


図49 Fresnel積分と Cornu の螺旋

■Feynmanの経路積分(676)がSchrödinger方程式を満たすことの確認 [11, pp.164–165]

Feynmanの経路積分(676)によれば、遷移振幅は

$$\begin{aligned} & \langle \boldsymbol{x}, t + \Delta t | \boldsymbol{x}_0, t_0 \rangle \\ &= \int d^3\xi \langle \boldsymbol{x}, t + \Delta t | \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}, t \rangle \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}, t | \boldsymbol{x}_0, t_0 \rangle \\ &= \int d^3\xi \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{\Delta t} \right)^2 - V(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) \right\} \Delta t \right] \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}, t | \boldsymbol{x}_0, t_0 \rangle \\ &= \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{3/2} \int d^3\xi \exp \left(\frac{im\boldsymbol{\xi}^2}{2\hbar\Delta t} - \frac{iV(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})\Delta t}{\hbar} \right) \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}, t | \boldsymbol{x}_0, t_0 \rangle \end{aligned}$$

と表される(Δt は無限小). 両辺を Δt について展開し, また $\Delta t \rightarrow 0$ のとき積分への主要な寄与は $\boldsymbol{\xi} = 0$ の近くから来ると考えられることを踏まえて, $\boldsymbol{\xi}$ についても級数展開を行うと

$$\begin{aligned} & \langle \boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{x}_0, t_0 \rangle + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \langle \boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{x}_0, t_0 \rangle \\ &= \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{3/2} \int d^3\xi \exp \left(\frac{im\boldsymbol{\xi}^2}{2\hbar\Delta t} \right) \left(1 - \frac{iV(\boldsymbol{x})\Delta t}{\hbar} + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\times \left[\langle \boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{x}_0, t_0 \rangle + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\nabla})^2 \langle \boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{x}_0, t_0 \rangle + \cdots \right] \quad (678)$$

を得る．ただし右辺 $[\cdots]$ 内における ξ の1次の項はゼロになる奇関数の積分を与えるため，あらかじめ落とした．Fresnel積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi_x \exp \left(\frac{im\xi_x^2}{2\hbar\Delta t} \right) = \sqrt{\frac{2\pi i\hbar\Delta t}{m}} \quad (679)$$

より Δt の0次の項は，両辺ともに $\langle \boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{x}_0, t_0 \rangle$ である．次に式(679)と，これをパラメータ Δt で微分して得られる公式

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_x \xi_x^2 \exp \left(\frac{im\xi_x^2}{2\hbar\Delta t} \right) &= \sqrt{2\pi} \left(\frac{i\hbar\Delta t}{m} \right)^{3/2}, \\ \therefore \int d^3\xi \xi_i \xi_j \exp \left(\frac{im\boldsymbol{\xi}^2}{2\hbar\Delta t} \right) &= \delta_{ij} \sqrt{2\pi} \left(\frac{i\hbar\Delta t}{m} \right)^{3/2} \cdot \frac{2\pi i\hbar\Delta t}{m} \end{aligned}$$

を合わせて用い，上式(678)の両辺において Δt の1次の項を拾い上げると，

$$\Delta t \frac{\partial}{\partial t} \langle \boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{x}_0, t_0 \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{3/2} \int d^3 \xi \exp \left(\frac{im \boldsymbol{\xi}^2}{2\hbar \Delta t} \right) \left(\frac{1}{2} \xi_i \xi_j \partial_i \partial_j \langle \boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{x}_0, t_0 \rangle - \frac{iV(\boldsymbol{x}) \Delta t}{\hbar} \langle \boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{x}_0, t_0 \rangle \right) \\
&= \Delta t \left(\frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 \langle \boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{x}_0, t_0 \rangle - \frac{i}{\hbar} V(\boldsymbol{x}) \langle \boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{x}_0, t_0 \rangle \right)
\end{aligned}$$

となる．これは遷移振幅 $\langle \boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{x}_0, t_0 \rangle$ に対する波動方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{x}_0, t_0 \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \langle \boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{x}_0, t_0 \rangle + V(\boldsymbol{x}) \langle \boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{x}_0, t_0 \rangle$$

に他ならない．

9.3.1 項の原稿

ここでは正準形式の量子力学から，系の遷移振幅に対する経路積分の公式を導く．ただし引き続き式(654)のハミルトニアン $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(\boldsymbol{x})$ で記述される，非相対論的な1粒子系を考える．この例はハミルトニアンにおいて位置と運動量が分離しており，対応する演算子の順序が問題にならないという意味で簡単でありながら，とりわけ興味ある場合でもある．

まず Schrödinger 描像の位置固有ケット $|\boldsymbol{x}'\rangle$ を用いて，粒子の伝播関数を遷移振幅(670)として定義する．これは初期時刻 t_0 に粒子が位置 $\boldsymbol{x}'$ に局在していた系の，後の時刻 t の状態 $e^{-iH(t-t_0)} |\boldsymbol{x}'\rangle$ における波動関数となっている．したがって始状態の変数 $\boldsymbol{x}'$ と t_0 を固定し，終状態の変数 $\boldsymbol{x}''$ と t の関数と見た伝播関数は Schrödinger の波動方程式を満たす．ここから推察されるように，伝播関数(670)は波動方程式の Green 関数となっており，実に波動関数 $\psi(\boldsymbol{x}', t) = \langle \boldsymbol{x}' | \alpha, t_0; t \rangle$ の時間発展を式(671)で与える ([導出スライド参照](#)) [11, pp.148–151].

次に Heisenberg 描像に移ろう．初期時刻 t_0 で Schrödinger 描像のケットと演算子が，Heisenberg 描像のそれに一致しているとすると，Heisenberg 描像の位置固有ケットは基底の時間発展(664)に従い $|\boldsymbol{x}', t\rangle = e^{+iH(t-t_0)/\hbar} |\boldsymbol{x}'\rangle$ と変化するため，伝播関数は式(672)に書き直される．式(672)最右辺より Heisenberg 描像においても，やはり伝播関数は粒子がある時空点 $(\boldsymbol{x}', t_0)$ から他の時空点 $(\boldsymbol{x}'', t)$ に移る遷移振幅と解釈できる．

ここで始・終状態の時間間隔を微小時間 $\Delta t = (t - t_0)/N$ おきに $N(\gg 1)$ 等分し，中間

の時刻 $t_k = t_0 + k\Delta t$ ($k = 0, 1, \dots, N$) を定義しよう．各時刻 t_k における Heisenberg 表示の基底ケット $\{|x_k, t\rangle\}$ の完備関係式を次々と挿入すると，遷移振幅は式(673)のように表される．ただし以降では添字の付いた位置と運動量は演算子ではなく，固有値を表すと約束する．仮に途中の各位置 x_k を固定すると図48のように，時空(一般の系に対しては拡大配位空間)において始点 (x_0, t_0) と終点 (x_t, t) を結ぶ1つの経路が指定される． $N \gg 1$ として時間区間を充分細かく分割すれば，この折れ線の経路は曲線を近似する．したがって各中間位置 x_k にわたる積分(673)には，始点と終点を結ぶあらゆる経路からの寄与が及ぶ．したがって粗く言えば，積分(673)は経路にわたるある種の“和”を表す [11, pp.154–157]．このように量子力学では(不確定性原理に関係して)，粒子の軌道(経路)を追跡することはできず，仮に経路の概念を許容した場合，粒子は可能な経路を確率的にとることになる [7, p.383]．

これを踏まえ遷移振幅に対する経路積分の公式を導こう．その際，相空間における経路積分を経由し，次いで運動量変数に関する積分を実行して，配位空間における経路積分を得ることになる．まず式(654)のハミルトニアンに対して各微小時間ごとの遷移振幅は，最後に $N \rightarrow \infty$ の極限をとることを念頭に Δt の1次までの近似で評価すると，運動量の理論を用いて式(674)のように書ける(導出スライド参照)．よって伝播関数(673)は相空間における経路積分(675)で表される．ただし式(675)最右辺は第2辺の速記術である [23, pp.78–79]．指数における被積分関数は運動量変数で表されているものの，ラグランジアンをしていることに注意しよう．

次いで式(675)における運動量変数に関する積分を実行すると、配位空間における経路積分(676)が得られる；ただし $\dot{x}_k \equiv (x_{k+1} - x_k)/\Delta t$ と略記しており、また式(677)で作用積分を定義した(導出スライド参照)。遷移振幅の表式(676)はFeynmanの経路積分と呼ばれ、配位空間の各経路が遷移振幅に対して、経路に沿った作用積分を位相因子とする寄与を持つことを意味する [23, pp.81–82].

我々はハミルトニアンが時間発展を生成するという正準理論の仮定から出発して、Feynmanの経路積分(676)を導いた。この議論を逆にたどれば、遷移振幅が経路積分(676)で与えられることを原理に採ると、量子ダイナミクスはハミルトニアンの生成するSchrödinger発展で与えられることが帰結するはずである。この予想は実際に、経路積分で表される伝播関数(676)が、したがってこれを積分核に持つ波動関数(671)がSchrödingerの波動方程式(と適切な初期条件 $\lim_{t \rightarrow t_0} \langle x_t, t | x_0, t_0 \rangle = \delta(x_t - x_0)$)を満たすことから裏付けられる(導出スライド参照)。こうして経路積分による量子力学の定式化はSchrödingerの波動力学と等価であることが結論付けられる [11, pp.164–165].

9.3.2 古典的極限

力学・光学アナロジー [4, pp.146–149] :

アイコナール(電磁場成分の位相) $\psi \leftrightarrow$ 粒子の作用 $S/\hbar$

- Fermat の原理 $\leftrightarrow$ 最小作用原理
- 光の波数と(角)振動数

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}}, \quad \omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad k_\mu \equiv \left(\frac{\omega}{c}, -\mathbf{k} \right) = -\partial_\mu \psi \quad (680)$$

$\leftrightarrow$ Hamilton 関数の微分 (2.1.2 項)

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}, \quad H = -\frac{\partial S}{\partial t}, \quad p_\mu \equiv \left(\frac{H}{c}, -\mathbf{p} \right) = -\partial_\mu S \quad (681)$$

- 電磁場に対する波動方程式は短波長極限でアイコナール方程式を与える :

$$(\partial_\mu \psi)(\partial^\mu \psi) = 0 \quad (682)$$

$\leftrightarrow$ (相対論的な) 粒子に対する Hamilton–Jacobi 方程式

$$(\partial_\mu S)(\partial^\mu S) = (mc)^2 \quad (683)$$

予想 [30, pp.45–47] [7, p.380] :

波動光学 $\xrightarrow{\lambda \rightarrow 0, |\psi| \gg 1}$ 幾何光学, 波動力学 $\xrightarrow{|S/\hbar| \gg 1, \hbar \rightarrow 0}$ 古典力学.

実際 $\hbar \rightarrow 0$ の極限をとると, Feynman の経路積分 (676) は作用 S が停留値をとる古典的経路の近傍からの寄与だけが残る [11, pp.160–161], 鞍点近似

$$\langle \mathbf{x}_t, t | \mathbf{x}_0, t_0 \rangle = \int_{\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_t} \mathcal{D}\mathbf{x} e^{iS[\mathbf{x}(\tau)]/\hbar} \sim e^{iS(\mathbf{x}_t, t; \mathbf{x}_0, t_0)/\hbar} \quad (684)$$

で与えられる ($S(\mathbf{x}_t, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ は Hamilton 関数) [1, p.38, pp.176–177].

対応して波動関数を絶対値と位相因子に分けて

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\rho(\mathbf{x}, t)} e^{iS(\mathbf{x}, t)/\hbar} \quad (685)$$

と書くと (ρ は確率密度), Schrödinger 方程式 (655) は $\hbar \rightarrow 0$ で Hamilton–Jacobi 方程式

$$\frac{1}{2m} |\nabla S|^2 + V + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (686)$$

を与えるため^{*133}, 位相因子 S は作用 (Hamilton 関数) となる.

^{*133} 式 (686) は Hamilton–Jacobi 方程式 (683) の非相対論的極限である [4, pp.32–33].

- このとき運動量とハミルトニアンはそれぞれ, $\hbar \rightarrow 0$ の極限で

$$\mathbf{p}\psi = -i\hbar\nabla\psi = -i\hbar\left\{(\nabla\sqrt{\rho})e^{iS/\hbar} + \sqrt{\rho}\frac{i}{\hbar}(\nabla S)e^{iS/\hbar}\right\} \simeq (\nabla S)\psi, \quad (687)$$

$$H\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = i\hbar\left(\frac{\partial\sqrt{\rho}}{\partial t}e^{iS/\hbar} + \sqrt{\rho}\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial t}e^{iS/\hbar}\right) \simeq -\frac{\partial S}{\partial t}\psi \quad (688)$$

のように, 古典論と同じく作用の微分(681)で与えられる [30, p.52, pp.66–67]^{*134}
 $\rightarrow$ 量子力学的な $\mathbf{p}, H$ の定義の正当化.

- 古典的運動量 $\mathbf{p} = \nabla S$ は位相 $S = \text{const.}$ の波面に垂直となる.

古典的極限に限らず, 式(684)で定義した位相因子 S を用いて, 確率流束(685)は

$$\mathbf{j} = \frac{\rho\nabla S}{m}. \quad (689)$$

古典的な運動量 $\mathbf{p} = \nabla S$ に対して速度 $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$ を定義すると, 流束(689)は適正な式

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v} \quad (690)$$

で表せる ($\mathbf{v}$ は確率分布の流体としての運動速度) [11, pp.137–140] [30, p.129].

^{*134} 式(681)の関係が成り立つことは, 特に平面波 $\psi \sim e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-Et)/\hbar}$ に対して容易に見て取れる.

9.3.2項の式の導出など

■古典的極限でのHamilton-Jacobi方程式(686)の導出 [11, p.139]

$\nabla^2\psi$ について考える. Leibnizの公式

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

を $u = \sqrt{\rho}, v = e^{iS/\hbar}$ として適用すると,

$$\partial_k^2\psi = \left\{ \partial_k^2\sqrt{\rho} + 2\frac{i}{\hbar}(\partial_k\sqrt{\rho})(\partial_k S) + \sqrt{\rho}\left(\frac{i}{\hbar}\partial_k S\right)^2 + \frac{i}{\hbar}\sqrt{\rho}\partial_k^2 S \right\} e^{iS/\hbar}$$

が各成分 k に対して成り立つ. そこで両辺 k について和をとると(すなわち繰り返された添字 k について和をとるものと見なすと), $\nabla^2\psi$ の式が得られる.

こうして $\psi = \sqrt{\rho}e^{iS/\hbar}$ に対して Schrödinger 方程式 $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$ の各項を書き換えると,

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\nabla^2\sqrt{\rho} + \frac{2i}{\hbar}(\nabla\sqrt{\rho})\cdot(\nabla S) - \frac{1}{\hbar^2}\sqrt{\rho}|\nabla S|^2 + \frac{i}{\hbar}\sqrt{\rho}\nabla^2 S\right] + \sqrt{\rho}V \\ & = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\rho} + \frac{i}{\hbar}\sqrt{\rho}\frac{\partial S}{\partial t}\right) \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} & \sqrt{\rho} \left(\frac{1}{2m} |\nabla S|^2 + V + \frac{\partial S}{\partial t} \right) \\ & - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \sqrt{\rho} - \frac{i\hbar}{m} (\nabla \sqrt{\rho}) \cdot (\nabla S) - \frac{i\hbar}{2m} \sqrt{\rho} \nabla^2 S - i\hbar \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (691)$$

を得る.

注解 式(691)を得るには, $\sqrt{\rho}$ の微分を実行して

$$\partial_\mu \sqrt{\rho} = \frac{\partial_\mu \rho}{2\sqrt{\rho}}, \quad \mu = t, x, y, z$$

とする必要はない.

式(691)で $\hbar$ を

$$\hbar |\nabla^2 S| \ll |\nabla S|^2$$

などの意味で小さな量と見なせると仮定して, $\hbar$ を含む項を落とすと, Hamilton-Jacobi 方程式(686)を得る.

■流束の表式(689)の導出 [11, pp.137–138]

式(685): $\psi = \sqrt{\rho}e^{iS/\hbar}$ に対して

$$\nabla\psi = (\nabla\sqrt{\rho})e^{iS/\hbar} + \sqrt{\rho}\frac{i\nabla S}{\hbar}e^{iS/\hbar}, \quad \therefore \psi^*\nabla\psi = \sqrt{\rho}\nabla\sqrt{\rho} + \frac{i}{\hbar}\rho\nabla S$$

なので、確率の流束(657)は式(689):

$$\boldsymbol{j} = \frac{\hbar}{m}\text{Im}(\psi^*\nabla\psi) = \frac{\rho\nabla S}{m}$$

を与える.

9.3.2項の原稿

ここからは古典力学がどのように量子力学の中に含まれているかを考察する．この問題に取り組むにあたり，力学・光学アナロジーが足掛かりとなる．

まず，幾何光学は電磁波の波長 $\lambda \rightarrow 0$ の極限として，波動光学の中に近似的に含まれていることを思い出そう．例えば光がその波長に比べて極めて大きいスリットを通るとき，光はほとんど回折することなく直進する．このような場合には波動的性質を捨象して光を光線として扱い，幾何光学を適用することができる．そこで電磁場の任意の成分の位相 ψ としてアイコナールを定義すると，光の波数と(角)振動数はアイコナールの微分(680)に同定される．ところが興味のある空間スケール(例えばスリットの幅)を a ，時間スケールを T としたとき，我々は短波長極限として $|k|a \gg 1, \omega T \gg 1$ の意味で，波数と振動数が大きい場合を考えている．これはアイコナールそのものが(1に比べて)大きいことを意味する．また電磁場に対する波動方程式は短波長極限で位相 ψ に対するアイコナール方程式(682)を与える．これは結果的に波数4元ベクトル(680)の2乗がゼロになるという，よく知られた分散関係に過ぎない．

ここで光学におけるアイコナール ψ を力学における粒子の作用 S に対応させると，光学と力学の間に著しい類似性が成り立つことを説明する．まず幾何光学におけるFermatの原理によれば，現実の光線軌道は空間において始点と終点を結ぶあらゆる経路のう

ち、所要時間が最小となる経路で与えられる^{*135}。これは力学における最小作用原理 (Hamilton の原理) とアナログスである^{*136}。そこで次に現実の光線軌道に沿って評価したアイコナル ψ を考えると同時に、作用積分を力学系の現実の軌道に沿って評価した Hamilton 関数 S を考えよう。このとき 2.1.2 項で見たように、力学系の運動量とハミルトニアンは終点の座標に関する Hamilton 関数の微分 (681) で与えられる。これは光の波数と振動数 (680) に比較される関係である。さらに相対論的な粒子に対しては 4 元運動量 (681) の 2 乗は質量 m (の c 倍) の 2 乗に一致しなければならないので、Hamilton–Jacobi 方程式 (683) が成り立つ [4, p.32]。これはアイコナル方程式 (682) と酷似している [4, pp.146–149]。

以上の古典力学と幾何光学の間に成り立つ類似性を踏まえると、幾何光学が波動光学に短波長極限として含まれているのと同様に、古典力学は Schrödinger の波動力学の“短波長極限”にあたると予想することができる。ここで波動力学の短波長極限とは、物質

^{*135} 真空中に限らず、媒質中の単色光線に対しても Fermat の原理は成立する。これを示すには現象論的に屈折率 $n(\mathbf{r})$ を導入し、波の伝播速度を $u(\mathbf{r}) = c/n(\mathbf{r})$ に置き換えた波動方程式に基づく必要がある [7, pp.370–373]。

^{*136} ただし最小作用原理 (Hamilton の原理) が粒子の“時空”における軌道を定めるのに対し、Fermat の原理は (単色) 光線の“空間”における軌跡を定める。したがって厳密には Fermat の原理に対応するのは、Hamilton の最小作用原理そのものよりも、むしろ与えられたエネルギーの一定値を持つ系の空間軌道を定める Maupertuis の原理 [8, pp.178–180] であると言うのが正確である。

波の de Broglie 波長 $\lambda \rightarrow 0$ の場合を意味する．あるいは力学・光学アナロジーに基づき，準古典的な波動関数の位相を ($\hbar$ で無次元化した) 作用 $S/\hbar$ に対応付けると，幾何光学はアイコナールの大きい場合であるのと同様に，波動力学の短波長極限は S (の絶対値) が $\hbar$ に比べて大きい場合と言い換えることもできる．等価的，形式的にはあたかも $\hbar$ が変数であるかのように見なして，式の上で $\hbar \rightarrow 0$ の極限をとれば良い [30, pp.45–47] [7, p.380].

この予想が正しいことを理解するために，Feynman の経路積分 (676) において $\hbar \rightarrow 0$ の極限をとろう．これは始点と終点を結ぶあらゆる経路が遷移振幅に対して $e^{iS[x(t)]/\hbar}$ の寄与を持つことを意味する．ところが古典的極限 $\hbar \rightarrow 0$ では経路の変化に伴って位相因子 $e^{iS[x(t)]/\hbar}$ が急激に変化・振動するため，異なる経路からの寄与が打消し合い，例外的に作用 S が停留値をとる (したがって経路の変化に伴ってゆっくりと変化する) 古典的経路の近傍からの寄与だけが残る．これは物質波が現に古典的経路の近傍のみを伝播することを意味していると考えれば，古典的極限で最小作用原理が再現されることになる [11, pp.160–161].

作用の停留値を与える軌道が一意的に定まる場合を仮定してあからさまに書けば，古典的極限 $\hbar \rightarrow 0$ において遷移振幅 (676) は，鞍点近似 (684) で与えられる．ここで最右辺は Hamilton 関数 $S(x_t, t; x_0, t_0)$ の指数である [1, p.38, pp.176–177]. 対応して波動関数を絶対値と位相因子に分けて式 (685) のように書き，位相因子 S を定義しよう．ただしここでは位置 x からプライムを省いており，また波動関数の絶対値の 2 乗は確率密度 ρ であることを考慮した．すると電磁場の波動方程式から短波長極限でアイコナール方程

式が導かれるのと同様に，Schrödingerの波動方程式(655)は古典的極限 $\hbar \rightarrow 0$ で式(686)を与える(導出スライド参照)．これは位相因子 S に対するHamilton–Jacobi方程式となっているため，古典的極限で波動関数の位相因子 S は作用(Hamilton関数)に一致する．

このとき運動量とハミルトニアンはそれぞれ， $\hbar \rightarrow 0$ の極限で式(687),(688)のように，古典論の場合と同じく作用(Hamilton関数)の微分(681)で与えられることになる．ここから運動量とハミルトニアンをそれぞれ，平行移動と時間発展の生成子として定義したことが正当化される [30, p.52, pp.66–67]．さらに波動関数の位相がHamilton関数 S であるならば，その勾配に他ならない古典的運動量は位相 $S = \text{const.}$ の波面に垂直となる．これは幾何光学の極限で，光が波面に垂直な方向に進む光線を成すことに類似している [11, pp.139–140]．

ところで古典的極限に限らず，式(684)で定義した位相因子 S を用いて，確率の流束(685)は式(689)で表される(導出スライド参照)．これは波動関数の位相の空間変化が確率の流れを示すことを意味している．ここで古典的な運動量 $p = \nabla S$ に対してある種の速度 $v = p/m$ を定義すると，確率の流束(689)は適正な式(690)で表せることになる．ただし量子力学では位置と速度を同時に正確に測定することはできないため，各位置で定義された速度 v を文字通りに解釈してはならず，式(690)はあくまで確率の密度分布の(流体としての)運動が，古典的な速度 v で行われることを意味する [11, pp.137–138] [30, p.129]．

最後に、古典力学の法則に従う軌道に沿った運動を得るには、波動関数の分布が空間的に局在した波束となっていることが必要である [30, pp.47–48]. しかるに Ehrenfest の定理としてよく知られているように、位置と運動量の期待値で特徴付けられる波束の中心は古典的な運動方程式に従って運動する (証明は Heisenberg 描像で行うのが容易である). したがって少なくとも物質波がシャープな波束を保つ間は、その波束は古典的な粒子のように振舞う [11, pp.113–116].

10 熱力学・統計力学

10.1 量子統計力学

■アンサンブルの時間的发展 [11, pp.245–246]

密度演算子 $\rho = \sum_i p_i |\psi_i, t\rangle \langle \psi_i, t|$ の Schrödinger 発展は

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = -[\rho, H] \quad (692)$$

と表される。この結果は古典論と

$\rho \leftrightarrow \rho_{\text{cl}}$: 相空間内の代表点の密度,

$$\text{式(692)} \leftrightarrow \text{Liouville の定理 } \frac{\partial \rho_{\text{cl}}}{\partial t} = -\{\rho_{\text{cl}}, H\} \quad (\{, \} \text{ は Poisson 括弧}) \quad (693)$$

のように対応付けられる (Dirac の規則 $\{, \} \rightarrow [,]/i\hbar$ を思い出そう [11, p.67]).

熱平衡では

$$0 = i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = -[\rho, H] \quad (694)$$

より, ρ と H の同時固有ケットの存在が保証される [11, p.249].

■量子統計力学 [11, pp.247–252]

エネルギー固有状態 $|k\rangle$ (固有値 E_k) に関する ρ の固有値 (確率) p_k を用いると, von Neumann 情報量 (377) は

$$S = -k_B \sum_k p_k \ln p_k \quad (695)$$

と書ける (エントロピーの定義). 平衡状態では制約条件

$$\mathrm{Tr} \rho = \sum_k p_k = 1, \quad (\text{規格化条件 (340)}) \quad (696)$$

$$E = \langle H \rangle = \mathrm{Tr}(\rho H) = \sum_k p_k E_k \quad (\because \text{式 (341)}) \quad (697)$$

の下で情報エントロピー (695) を最大化する確率分布 p_k が実現すると仮定すると, カノニカル分布

$$p_k = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_k}, \quad Z \equiv \sum_k e^{-\beta E_k} = \mathrm{Tr}(e^{-\beta H}) : \text{分配関数} \quad (698)$$

を得る (パラメータ $\beta = 1/k_B T$ は式 (697) で決まる逆温度).

カノニカル・アンサンブルに対する密度演算子は

$$\rho = \sum_k p_k |k\rangle \langle k| = \frac{1}{Z} \sum_k e^{-\beta E_k} |k\rangle \langle k| = \frac{1}{Z} e^{-\beta H} \quad (699)$$

と表される。また例えば内部エネルギーは分配関数から求まる：

$$E = \sum_k p_k E_k = \frac{1}{Z} \sum_k E_k e^{-\beta E_k} = -\frac{\partial}{\partial \beta} (\ln Z). \quad (700)$$

■熱力学 [34, p.16,p.18,pp.21-27]

$$\text{自由エネルギー} \quad F_{\text{eq}} \equiv -k_B T \ln Z, \quad (701)$$

$$\text{カノニカル分布} \quad p_k = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_k} = e^{\beta(E_{\text{eq}} - E_k)}, \quad (702)$$

$$\begin{aligned} \text{平衡エントロピー} \quad S_{\text{eq}} &= -k_B \sum_k p_k \ln p_k = -k_B \sum_k p_k \cdot \beta(F_{\text{eq}} - E_k) \\ &= k_B \beta(E - F_{\text{eq}}), \end{aligned} \quad (703)$$

$$\text{熱力学的関係式} \quad F_{\text{eq}} = E - TS_{\text{eq}}. \quad (704)$$

内部エネルギー(697): $E = \sum_k E_k p_k$ の変化は,

$$dE = dQ - dW_{\text{ext}}, \quad dQ \equiv \sum_k E_k dp_k, \quad dW_{\text{ext}} \equiv - \sum_k p_k dE_k. \quad (705)$$

すると平衡エントロピー(703)の変化は吸熱 dQ と

$$dS_{\text{eq}} = \frac{dQ}{T} \quad (706)$$

で関係付けられる. また外部座標 $\lambda = \{\lambda_r\}$ を通した系のエネルギー準位 $E_k(\lambda)$ の変化 $dE_k = \sum_r \frac{\partial E_k}{\partial \lambda_r} d\lambda_r$ に伴う内部エネルギーの減少

$$dW_{\text{ext}} = \sum_r X_r d\lambda_r, \quad X_r \equiv - \left\langle \frac{\partial E_k}{\partial \lambda_r} \right\rangle = - \sum_k p_k \frac{\partial E_k}{\partial \lambda_r} : \text{熱力学的な力} \quad (707)$$

は系が外部にした仕事と解釈できる. $dW_{\text{ext}} = p dV$, $X_V = p$ (圧力) を要求すると,

$$p = - \frac{\partial F_{\text{eq}}}{\partial V} \quad (708)$$

が再現される [13, p.498, p.528]. このとき式(705)は熱力学第1法則を表す.

非平衡過程においても， ΔS を系の情報エントロピーの変化， Q を式(705)で導入した系の吸熱として，系全体のエントロピー生成は

$$\sigma \equiv \Delta S - \frac{Q}{T} \geq 0 \quad (709)$$

を満たす(非平衡系の熱力学第2法則)。

非平衡状態に対しても情報エントロピー S を用いて自由エネルギーを式(704)と同じ形

$$F = E - TS \quad (710)$$

で定義し，また式(705) (の積分)で吸熱 Q と系にした仕事 $W = -W_{\text{ext}}$ を定義すれば，第1法則 $\Delta E = Q + W$ が成り立つので，第2法則(709)は

$$W \geq \Delta F \quad (711)$$

と書き換えられる。

10.1 項の式の導出など

■ 密度演算子の時間発展方程式 (692) の導出

Schrödinger 方程式 $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_i, t\rangle = H |\psi_i, t\rangle$ より, Schrödinger 表示の密度演算子 $\rho = \sum_i p_i |\psi_i, t\rangle \langle \psi_i, t|$ は

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \sum_i p_i (H |\psi_i, t\rangle \langle \psi_i, t| - |\psi_i, t\rangle \langle \psi_i, t| H) \\ &= -[\rho, H] : (692) \end{aligned}$$

を満たす [11, p.245].

■ Liouville の定理 (693) について

式 (693): $\frac{\partial \rho_{cl}}{\partial t} = -\{\rho_{cl}, H\}$ が Liouville の定理を表していることは、これを

$$\frac{d\rho_{cl}}{dt} = \frac{\partial \rho_{cl}}{\partial t} + \{\rho_{cl}, H\} = 0$$

と書き換えれば分かる．ここで $\frac{\partial \rho_{cl}}{\partial t}$ では相空間 (Γ 空間) に固定された点 (q, p) での ρ_{cl} の時間変化率を表しているのに対し， $\frac{d\rho_{cl}}{dt}$ は運動する代表点の位置 $(q(t), p(t))$ での ρ_{cl} の時間変化率を表している^{*137}．よってこれは代表点に固定した領域で密度が不変であることを意味し，領域の定義よりその中の代表点の数は変わらないから，領域の体積が変わらないという Liouville の定理 [8, p.186] と同等である．

^{*137} つまり流体力学の言葉で言えば $\frac{\partial \rho_{cl}}{\partial t}$ は Euler 微分， $\frac{d\rho_{cl}}{dt}$ は Lagrange 微分・物質微分である．

■ カノニカル分布 (698) の導出 [11, pp.249–250]

拘束条件 (696), (697):

$$0 = \delta(\text{Tr}\rho) = \sum_k \delta p_k, \quad 0 = \delta \langle H \rangle = \sum_k E_k \delta p_k$$

の下で von Neumann エントロピー (695) の最大性

$$0 = \frac{\delta S}{k_B} = - \sum_k (\ln p_k + 1) \delta p_k$$

を要求すると, Lagrange の未定乗数法により

$$\sum_k [(\ln p_k + 1) + \beta E_k + \gamma] \delta p_k = 0, \quad \therefore p_k = \exp(-\beta E_k - \gamma - 1) \equiv \frac{1}{Z} e^{-\beta E_k}$$

を得る (β, γ は未定乗数). 再び規格化条件 $\text{Tr}\rho = \sum_k p_k = 1$ から規格化因子 Z を定めると, カノニカル分布 (698) を得る.

参考

Shannon 情報量の値域 (355) を確認する際に見たように, 内部エネルギーの制約 (697) を外して情報エントロピーの最大性を課すと, 一様分布 $p_k = 1/N$ と

Boltzmann エントロピー $S = k_B \ln N$ が得られる (ミクロカノニカル・アンサンブルに対応) [11, p.250] [34, pp.18–19].

なお平均エネルギーの仮定 (697) を設けて情報エントロピー (695) を最大化することは、あらかじめカノニカル・アンサンブルを念頭に、情報エントロピー S と平均エネルギー E に対して式 (710): $F = E - TS$ で定義される非平衡自由エネルギーを最小化することと等価である.

参考

少なくとも平衡熱力学において、温度 T と体積 V を固定した系の平衡条件が

Helmholtz の自由エネルギーの最小性で与えられることを復習しよ

う [26, pp.121–123]. 系 Σ が環境系 Σ_0 (十分大きな系を考え、その温度 T_0 は一定として良い) から熱量 ΔQ を得て平衡状態に達したとき、第2法則より全体系 $\Sigma + \Sigma_0$ のエントロピー変化は

$$0 \leq \Delta S + \Delta S_0 = \Delta S - \frac{\Delta Q}{T_0}$$

$$= \Delta S - \frac{1}{T_0} \left(\Delta E + \int p dV \right) \quad \left(\text{系 } \Sigma \text{ についての第1法則 } \Delta E = \Delta Q - \int p dV \right)$$

$$\Leftrightarrow \Delta E - T_0 \Delta S \leq - \int p dV.$$

ここから

$$\begin{cases} S, V \text{ を固定} & \Rightarrow \Delta E \leq 0 \\ V, T \text{ を固定} & \Rightarrow \Delta F = \Delta E - T\Delta S \leq 0 \\ T, p \text{ を固定} & \Rightarrow \Delta G = \Delta E - T\Delta S + p\Delta V \leq 0 \end{cases}$$

が得られる (系 Σ の温度 T は Σ_0 との熱平衡状態では T_0 だから). よって平衡条件は表 8 のようにまとめられる (エネルギー E, F, G は最小値をとる).

表 8 固定条件を変えたときの平衡の条件

固定変数	実際の変化の向き	平衡の条件
E, V	$\Delta S \geq 0$	$S = \text{Max}$
S, V	$\Delta E \leq 0$	$E = \text{Min}$
T, V	$\Delta F \leq 0$	$F = \text{Min}$
T, p	$\Delta G \leq 0$	$G = \text{Min}$

■式(706): $dS_{\text{eq}} = \frac{dQ}{T}$ の導出
平衡エントロピー(703)の変化は

$$\begin{aligned} dS_{\text{eq}} &= -k_B \sum_k (\ln p_k + 1) dp_k = k_B \left(\beta \sum_k E_k dp_k + (\ln Z - 1) \sum_k dp_k \right) \\ &= \frac{1}{T} \sum_k E_k dp_k \quad \left(\text{確率の規格化条件より } \sum_k dp_k = 0 \right) \end{aligned}$$

で表されるので、式(705)で定義した吸熱 dQ と $dS_{\text{eq}} = \frac{dQ}{T}$:(706)で関係付けられる.

■熱力学的関係式(708)の導出

外部座標としての体積 V に共役な熱力学的な力は、定義式(707)より

$$\begin{aligned} X_V &= - \sum_k p_k \frac{\partial E_k}{\partial V} = \sum_k \frac{e^{-\beta E_k}}{Z} \left(- \frac{\partial E_k}{\partial V} \right) = \frac{1}{\beta Z} \frac{\partial}{\partial V} \sum_k e^{-\beta E_k} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial Z / \partial V}{Z} \\ &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial V} \ln Z = - \frac{\partial F_{\text{eq}}}{\partial V} \end{aligned}$$

と計算される(微分係数は温度 T を固定して評価する). これを圧力 p と等置すると熱力学的関係式(708)を得る.

■ 逆温度 β の説明 [35, pp.168–169]

カノニカル・アンサンブルの理論を理想気体に適用して状態方程式を導こう．逆温度 $\beta = 1/k_B T$ の熱浴に接する体積 V の容器に封入された，質量 m の N 個の同種粒子から成る単原子分子理想気体を考えると，その状態は N 粒子の位置と運動量の組 $\{\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i\}_{i=1}^N$ で指定される．しかるに準古典的な極限で成り立つ Bohr–Sommerfeld の量子化の条件によれば，1つの量子状態は $6N$ 次元の相空間 (Γ 空間) に体積 h^{3N} を占めるので，相空間の体積要素 $d^{3N}x d^{3N}p$ には $d^{3N}x d^{3N}p / h^{3N}$ 個の量子状態が含まれる [30, pp.132–134, pp.137–139].

参考 このことは自由粒子系に対しては容易に分かる．実際，簡単のために1粒子系を考え，一辺 L ，体積 $V = L^3$ の箱に周期境界条件を課すと，許容される波数 $\mathbf{k}$ は $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} = \frac{2\pi\hbar}{L} \mathbf{n}$ と離散化されるので ($\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ は整数の組)，1つの量子状態が相空間に占める体積は $V \cdot \left(\frac{2\pi\hbar}{L}\right)^3 = h^3$ となる． $\hbar = 1$ とおくと相体積の因子は $h = 2\pi\hbar \rightarrow 2\pi$ とも書ける．

- ここから離散的な和を積分に置き換える規則 [17, p.14]

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi/L)^2} \quad \text{or} \quad \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

が見出される．これは Fourier 積分の公式を Fourier 級数が体積 $V \rightarrow \infty$ で移行す

る極限として導く説明と等価である。その際、

$$\begin{array}{ccc} \phi(\mathbf{r}, t) = & \sum_{\mathbf{k}} & \left| \begin{array}{c} \phi(\mathbf{k}, t) \\ \downarrow \\ \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \varphi(\mathbf{k}, t) \end{array} \right| \begin{array}{c} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ \downarrow \\ e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \end{array} \\ \phi(\mathbf{r}, t) = & \int & \left| \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \varphi(\mathbf{k}, t) \right| e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \end{array}$$

のように Fourier 係数 $\phi(\mathbf{k}, t)$ から波数空間の体積要素 d^3k がくり出されるため、展開係数 $\phi(\mathbf{k}, t)$ と Fourier 成分 $\varphi(\mathbf{k}, t)$ は次元が異なる。

- このように実空間が有限であれば波数空間 (運動量空間) が離散化される。他方で格子場, 例えば結晶格子の原子の変位のように空間が離散化されている場合, 波数空間の定義域を第 1 Brillouin ゾーンに限定できるので, 波数空間が有限となる。

よって分配関数 (698): $Z = \sum_{\mathbf{k}} e^{-\beta E_{\mathbf{k}}}$ は自由粒子系に対しては, 容積 V を与える空間積分と運動量空間の Gauss 積分に分離して容易に評価できる:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{N!} \int \frac{d^{3N}x d^{3N}p}{h^{3N}} \exp \left(-\beta \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} \right) = \frac{1}{N! h^{3N}} \left(\int d^3x \right)^N \left(\int d^3p e^{-\beta p^2/2m} \right)^{3N} \\ &= \frac{V^N}{N! h^{3N}} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3N/2}. \end{aligned}$$

ただし N 個の粒子を入れ替えた $N!$ 通りの状態は区別できないため、同種粒子の補正として、それらの状態からの重複した寄与を除く因子 $1/N!$ を含めておいた。これをすぐ後で見る熱力学的関係式(708)に代入すると、

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial V} \ln Z = \frac{N}{V} k_B T$$

を得る。よって温度 $T \equiv 1/k_B \beta$ は理想気体の状態方程式で定義される気体温度計の温度 [26, pp.3–4] に同定できる。さらに公式(700)を適用すると、よく知られた理想気体の内部エネルギーの表式

$$E = \frac{3N}{2\beta} = \frac{3}{2} N k_B T$$

が得られる。ここから内部エネルギーの制約(697)はパラメータ β を決める式であることが明快に見て取れる。

参考 状態方程式 $pV = Nk_B T$ の両辺は数係数 $3/2$ の違いを除き、内部エネルギーの表式となっている。また粒子数 N の代わりに物質量 $\tilde{n} = N/N_A$ を用いれば (N_A は Avogadro 数), 状態方程式は Boltzmann 定数を気体定数 $R = k_B N_A$ に置き換えた形 $pV = \tilde{n}RT$ に書ける。この表式はとりわけ化学において有用であるものの、物理的には物質量と気体定数よりも、個数と Boltzmann 定数の方が基本的である。なお数密度 $n = N/V$ を用いると、状態方程式は局所的な量の関係 $p = nk_B T$ として書ける。

最後にエントロピーを調べておく．同種粒子の補正因子に Stirling の公式 $N! \simeq N^N e^{-N}$ を適用して分配関数を $Z = \left\{ \frac{V}{N} \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \right\}^N e^N$ とまとめると，式 (701): $F = -k_B T \ln Z$ と式 (704): $F = E - TS$ より，理想気体の平衡エントロピーは

$$S = \frac{1}{T}(E - F) = Nk_B \left[\frac{5}{2} + \ln \left\{ \frac{V}{N} \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \right\} \right] \quad (712)$$

と表される．これを Sackur-Tetrode の式という [26, p.104].

■仕事と自由エネルギーで表した第2法則(711)の導出 [34, p.27] 第2法則(709)は

$$\begin{aligned} 0 \leq \sigma &\equiv \Delta S - \frac{Q}{T} = \Delta S - \frac{\Delta E - W}{T} && (\text{第1法則 } \Delta E = Q + W) \\ &= \frac{1}{T} \{W - (\Delta E - T\Delta S)\} \\ &= \frac{1}{T} (W - \Delta F) && (\text{非平衡自由エネルギー(710) : } F = E - TS, \text{ 熱浴の温度 } T \text{ は一定}) \end{aligned}$$

と書き換えられる.

10.1 項の原稿

我々は量子系の情報量とハミルトニアンを定義し終えたので，この場で量子統計力学にも簡単に触れることができる．

まずは準備として密度演算子の量子ダイナミクスを調べることから始めよう [11, pp.245–246]．各純粋状態 $|\psi_i, t\rangle$ が Schrödinger 方程式に従うことから，その確率的混合である密度演算子 $\rho = \sum_i p_i |\psi_i, t\rangle \langle \psi_i, t|$ に対する時間発展方程式 (692) が導かれる (導出スライド参照)．Heisenberg 方程式とは右辺の符号が逆であることに注意しよう．密度演算子 ρ は Heisenberg 描像の演算子ではなく，Schrödinger 描像の状態の外積で構成されているので，このことは何ら不条理ではない．ところで密度演算子 ρ を位相空間内の代表点の密度 ρ_{cl} に読み替えると，式 (692) は古典的な Liouville の定理 (693) (導出スライドにて補足) に対応付けられる．このことから ρ を密度演算子と呼ぶのは理に適っている．

熱平衡では密度演算子は時間に依らず式 (694) が成り立つと期待されるので， ρ と H の同時固有ケットの存在が保証される [11, p.249]．

そこで密度演算子 ρ を対角化する基底をエネルギー固有ケット $|k\rangle$ に選ぼう (エネルギー固有値 E_k)．このとき ρ の固有値 p_k は混合状態をエネルギー固有状態 $|k\rangle$ に見出す確率を意味し，これを用いて von Neumann エントロピー (377) は式 (695) のように書ける．我々は von Neumann 情報量 (695) を熱力学・統計力学的なエントロピーの定義と見なす．ただし式 (695) ではエントロピーの物理的单位として，Boltzmann 定数 k_B を右辺全

体に乗じてある*¹³⁸.

ここで熱力学第2法則に基づき、平衡状態ではエントロピー(695)が最大となる確率分布 p_k が実現することを仮定する。我々は必ずしもこの仮定を力学や場の理論などの具体的な物理に還元することを試みず、むしろそれ自体を熱力学の原理に据える立場を採る。ただし密度演算子の規格化条件(340)、すなわち式(696)を考慮しなければならない。さらに我々はアンサンブルにわたるハミルトニアン H の平均値(期待値)が、マクロな系を特徴付けるエネルギーの与えられた値にあるという条件(697)を課す。この仮定(697)を設けて情報エントロピー(695)を最大化することは、あらかじめカノニカル・アンサンブルを念頭に、情報エントロピー S と平均エネルギー E に対して後の式(710): $F = E - TS$ で定義される非平衡自由エネルギーを最小化することと等価である。拘束条件(696),(697)の下でエントロピー(695)を最大化する確率分布 p_k を見出すには、Lagrangeの未定乗数法を利用するのが便利である。すると β を未定乗数として、カノニカル分布(698)が導かれる(導出スライド参照)。これは統計力学の原理にあたる式であり、ここに規格化因子 Z は分配関数と呼ばれる。パラメータ β は内部エネルギーが与えられた値(697)をとる条件から定まる。これを $\beta = 1/k_B T$ と書いて系の温度 T を定義できる。このとき β は逆温度と呼べる。実際、カノニカル・アンサンブルの理論による理想気体の状態方程式の導出を繰り返せば、 T は気体温度計の温度 [26, pp.3–4]

*¹³⁸ エントロピー、Boltzmann定数、気体定数、比熱はいずれもエネルギーを温度で割った次元を持つことを思い出そう。

に同定できる (導出スライド参照).

なおカノニカル・アンサンブルに対する密度演算子は式(699)で表される (最後の等号は固有値分解の公式(332)による). また統計力学で学んだように, 熱力学変数は分配関数から計算できる. 例えば系の内部エネルギーはカノニカル分布に対する恒等式(700)を公式的に適用すると得られる.

ところで von Neumann エントロピーの表式(695)は Shannon エントロピーと全く同じ形をしているので, 古典系に対しても与えられた平均エネルギー E と確率の規格化条件の下で Shannon エントロピーが最大になることを要求すると, 再び平衡状態としてカノニカル分布が得られる [34, p.18, p.148]. さらに von Neumann エントロピーの表式(695)は添字 k をエネルギー固有状態のラベルに限定しなければ, 非平衡状態にも適用できる. すると以降の議論は式(695)を量子系の von Neumann エントロピーとしても古典系の Shannon エントロピーとしても成り立つので, 式(695)を単に情報エントロピーと呼ぶことにする.

次に統計力学から熱力学を再現する問題に取り組もう. もっともここでの出発点に採った情報エントロピーの最大性は熱力学の第2法則を背景としているため, 我々はある意味, 熱力学から統計力学に進み, 再び熱力学に戻ろうとしていることになる. もっとも現代の非平衡系の研究においては, 熱力学と統計力学は一体として捉えるのが適切であり [34, p.36], 必ずしも熱力学と統計力学を区別する必要はない. 少なくともここでの議論は何ら循環論法に陥ってはいないことに注意していただきたい.

まず平衡状態でのHelmholtzの自由エネルギーを式(701)で定義すると^{*139}，カノニカル分布(698)は式(702)のように書き換えられるので，平衡エントロピーは式(703)で表され [34, p.16]，熱力学的関係式(704)が再現される．逆に言えば情報エントロピー(695)は平衡状態で，熱力学的関係式(704)を満たす正しい平衡エントロピー(703)を与える．ここから非平衡状態にも適用できるエントロピーの定義として，情報エントロピー(695)を採用したことが正当化される [34, p.18]．また平衡状態においてもエントロピーは観測者にアクセスできない情報の量を表すことになる．このことは平衡統計力学における簡単な具体例から納得できる：

- 2種類の気体を隔てる仕切りを取り除くと，
気体の混合によるエントロピー増大の際，気体分子の位置の情報は失われる．
－ 仕切りを除く前は気体分子は一方の部屋にあると分かっている．
- ゴムがエントロピー弾性により自然長に戻るとき，
ゴムを構成する分子レベルのボンドの向きの情報は失われる．
－ ゴムが伸びた状態ではほとんどのボンドが長さ方向に揃っていると分かっている．

さらに熱力学第1法則を考えよう．系が常に平衡状態をだどる準静的な過程に伴う内部

^{*139} これはミクロカノニカル・アンサンブルに対する Boltzmann エントロピーの公式 $S = k_B \ln W$ と比較される関係式である (W は状態数)．

エネルギーの変化は、式(697): $E = \sum_k E_k p_k$ の微分に Leibniz 則を適用して式(705)のように書ける。式(705)ではまずエネルギー準位 E_k に変化がないとした場合の、熱浴による分布 p_k の変化に伴うエネルギー変化として系の吸熱 dQ を定義した。実際、確率の規格化条件に注意すると、平衡エントロピー(703)の変化は吸熱と式(706)で関係付けられる(導出スライド参照)。これは平衡エントロピー(703)がエントロピーの熱力学的な定義を再現することを意味すると同時に、吸熱 dQ を式(705)のように同定したことを正当化する。次に式(705)の第2項 dW_{ext} を考える。系のエネルギー準位 $E_k(\lambda)$ は外場やポテンシャルの形などを特徴付ける外部座標 $\lambda = \{\lambda_r\}$ を通して変化する。すると第2項 dW_{ext} は外部座標の変化による内部エネルギーの減少(707)を表すので、系が外部にした仕事と解釈できる。式(707)で定義した外部座標の変化に伴うエネルギー準位の変化率のアンサンブル平均を熱力学的な力という(熱力学において力はこのように定義できる) [26, p.71]。例えば体積変化 dV を通じて仕事をする系では、系のする仕事は圧力 p を用いて $dW_{\text{ext}} = p dV$ と表される。これを式(707)と比較すると、外部座標としての体積 V に共役な力 X_V は圧力 p に同定される。すると熱力学的な関係(708)が再現される(導出スライド参照) [13, p.498, p.528]。ここから仕事の表式(707)は適正であったことが納得できる。以上より内部エネルギーの微分(705)は熱力学第1法則を表すことになる [34, pp.21–24]。

最後に熱力学第2法則を非平衡系にも適用し得る一般的な形に定式化しておこう。まず平衡熱力学の場合を復習する。熱浴(逆温度 β) に接し系の平衡状態間の変化における、

系の熱力学エントロピーの変化を ΔS ，系が吸収した熱量を Q とする．このとき熱浴のエントロピー変化は $-Q/T$ であり，熱浴を含めた全体系は孤立系だから，全体系のエントロピー変化について式(709)が成立する(平衡熱力学の第2法則)．準静的過程では系の熱浴との温度差が無限小で，熱浴の逆温度を用いて $\Delta S = +Q/T$ と書けるので式(709)における等号が成立する．系のエントロピー変化 ΔS 自体は負になっても良い．実際，系から熱浴に熱を捨てるとき ($Q < 0$)，準静過程で $\Delta S_{\text{eq}} = Q/T < 0$ より系のエントロピーは減少する [34, pp.24–25]．

そこで非平衡過程においても， ΔS を系の情報エントロピーの変化， Q を式(705)で導入した系の吸熱として，式(709)と同じ形の不等式が成り立つと考える(非平衡系の熱力学第2法則)．これは情報理論的な量 ΔS とエネルギー的な量 Q を関係付けており，再び系の情報エントロピーを減少させるには ($\Delta S < 0$)，熱を放出する必要がある ($Q < 0$)．これは Landauer 原理と呼ばれる．式(709)で定義した熱浴を含む全体系のエントロピー変化 σ を，Prigogine にならってエントロピー生成と呼ぶ．

次に第2法則を仕事と自由エネルギーで表そう．非平衡状態に対しても情報エントロピー S に対して自由エネルギーを式(704)と同じ形(710)に書いて定義する．(S が平衡エントロピー(703)となるカノニカル分布では， F は平衡自由エネルギー(704)となる．) また非平衡系に対しても式(705) (の積分) で吸熱 Q と系にした仕事 $W = -W_{\text{ext}}$ を定義すれば，第1法則 $\Delta E = Q + W$ が成り立つので，第2法則(709)は式(711)のように書き換えられる(導出スライド参照)．不等式(711)はもちろん平衡熱力学においても成り立つ [34, pp.25–27]．特にサイクルでは始・終状態が同じ熱平衡状態であり自由

エネルギー変化は $\Delta F_{\text{eq}} = 0$ なので, 系から取り出せる仕事は $W_{\text{ext}} = -W \leq 0$ となる. これは「単一の熱浴からサイクルで正の仕事を取り出すことはできない」あるいは「第二種永久機関は不可能である」という Kelvin の原理を表している [34, pp.3–4]. 第2法則の1つの表現である.

10.2 情報熱力学

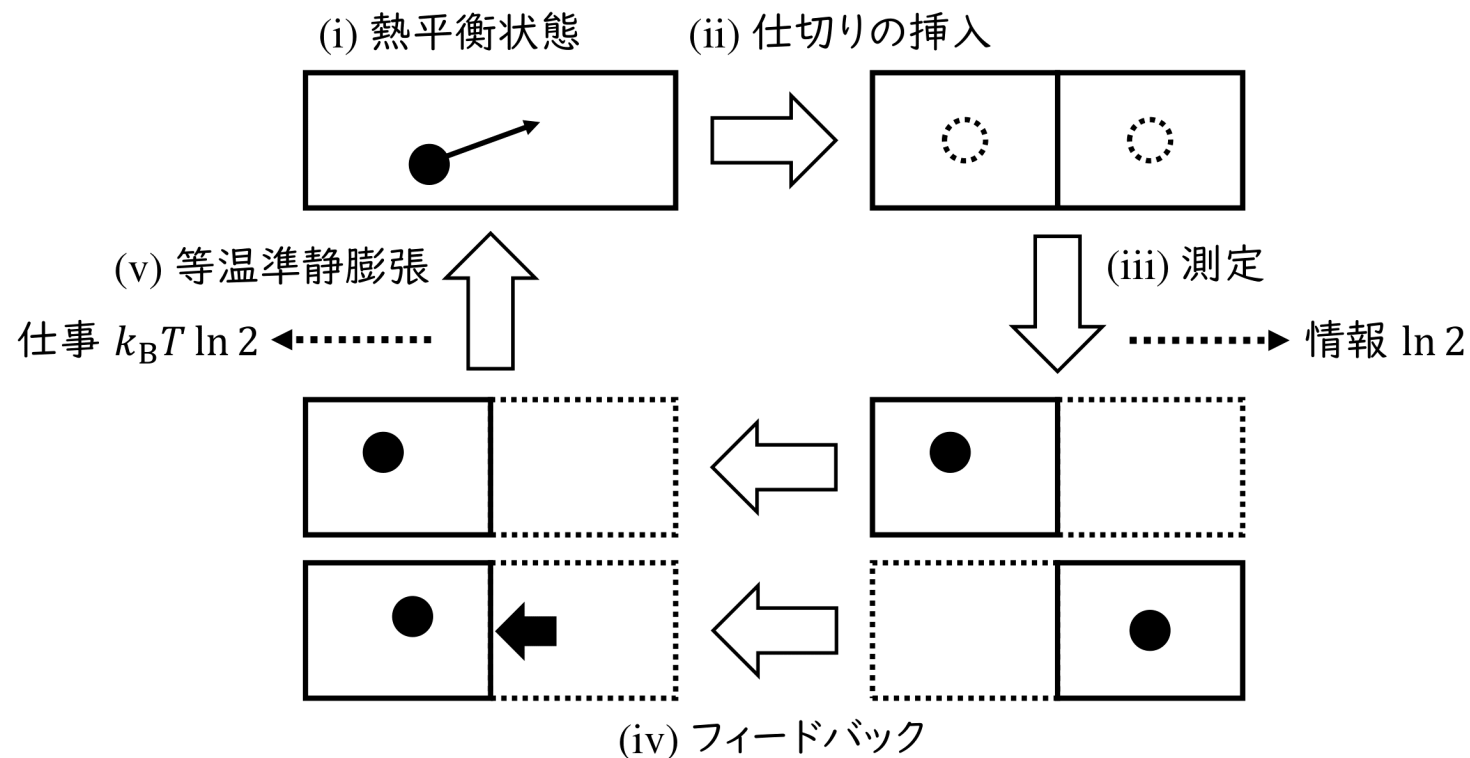


図50 Szilard エンジンの模式図 (Maxwell のデーモン) [34, pp.7–10]

理想気体の状態方程式 $pV = k_B T$ (粒子数 $N = 1$) より, (v) で気体がした仕事は

$$W_{\text{ext}} = \int_{V/2}^V p dV' = k_B T \int_{V/2}^V \frac{dV'}{V'} = k_B T \ln 2. \quad (713)$$

- 系 X は粒子の入った箱が左右にある状態 $x = 0, 1$ から成る 2 状態系と見なせる.
- 他方, 測定結果を記録するメモリの状態を Y で表そう (その値は $y = 0, 1$).

測定直後では, 測定誤差はないため ($P(x|y) = \delta_{xy}$),
条件付き Shannon エントロピー (362), (363) は

$$S(X|y) \equiv - \sum_{x=0,1} P(x|y) \ln P(x|y) = 0, \quad (y = 0, 1) \quad (714)$$

$$S(X|Y) \equiv \sum_{y=0,1} P(y) S(X|y) = 0. \quad (715)$$

測定の前後で $\ln 2$ から 0 に減少するのは条件付きエントロピー $S(X|Y)$ である (表 9).

表 9 Szilard エンジンのエントロピー収支. 式 (367): $I(X : Y) = S(X) - S(X|Y)$ に注意.

	$S(X)$	$S(X Y)$	$I(X : Y)$
測定前	$\ln 2$	$\ln 2$	0
測定後	$\ln 2$	0	$\ln 2$
フィードバック後	0	0	0

■情報交換における第2法則 [34, pp.107–109]

図51の過程で全体系 XY の吸熱を X の吸熱 Q_X なので、第2法則(709)は

$$0 \leq \sigma(X, Y)/k_B \equiv S(X', Y) - S(X, Y) - \beta_X Q_X \quad (716)$$

$$= \{S(X') \cancel{\pm S(Y)} - I(X' : Y)\} - \{S(X) \cancel{\pm S(Y)} - I(X : Y)\} - \beta_X Q_X \quad (\because \text{式(366)})$$

$$= \sigma(X)/k_B - \{I(X' : Y) - I(X : Y)\}, \quad (717)$$

$$\text{where } \sigma(X)/k_B \equiv S(X') - S(X) - \beta_X Q_X, \quad (X \text{ のエントロピー生成}) \quad (718)$$

$$\therefore \sigma(X)/k_B \geq I(X' : Y) - I(X : Y) \equiv -\Delta I \quad (719)$$

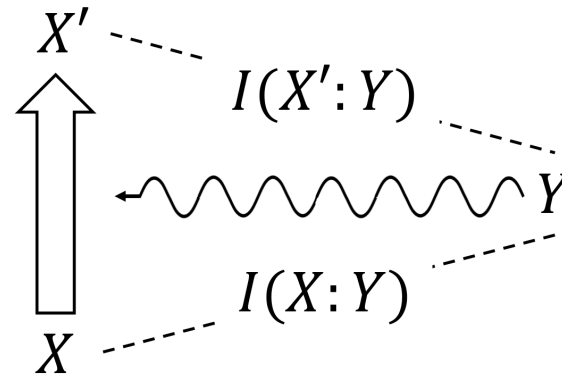


図51 逆温度 β_X, β_Y の熱浴に接した2つの系 X, Y の間の、一般的な情報交換過程の模式図

■情報熱力学の第2法則 [34, pp.93–96]

X を系, Y をメモリとするフィードバックに対して式(717): $\sigma(X)/k_B \geq -\Delta I$ は, 「系のエントロピー生成」 $\sigma(X)$ だけに注目すると $\sigma(X) < 0$ となり得るため, 見かけ上, 第2法則が破れるに過ぎないことを意味する [34, p.111].

系にした仕事 W と始・終状態の非平衡自由エネルギー $F(X), F(X')$ を用いて第2法則(719)を書き換えると

$$W \geq F(X') - F(X) - k_B T_X \Delta I \quad (720)$$

が得られる. 系から取り出せる仕事 $W_{\text{ext}} = -W$ の上限に対する制約

$$W_{\text{ext}} \leq -(F(X') - F(X)) + k_B T_X \Delta I \quad (721)$$

を与える (Szilard エンジンでは等号が実現 [34, p.10, p.110]).

■測定過程の第2法則 [34, pp.100–103]

図52の測定過程に一般公式(719)を適用すると、測定の第2法則

$$\sigma(Y)/k_B \equiv \{S(Y) - S(Y_*)\} - \beta_Y Q_Y \geq I(X : Y) \quad (722)$$

が得られ [34, pp.109–110], ここに Q_Y は測定におけるメモリの吸熱である.

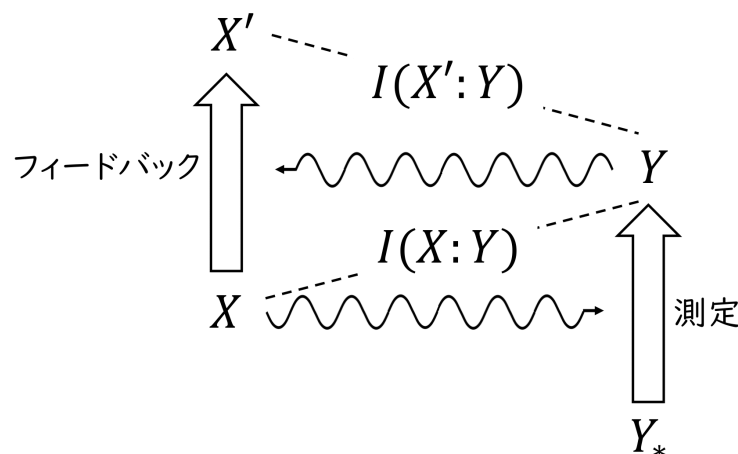


図52 メモリの始・終状態のShannonエントロピーは $S(Y_*)$, $S(Y)$, 非平衡自由エネルギーは $F(Y_*)$, $F(Y)$, 系 X との初期相関は $I(X : Y_*) = 0$.

式(722)はメモリに対する仕事 W^{meas} の条件に書き換えられる:

$$W^{\text{meas}} \geq F(Y) - F(Y_*) + k_B T_Y I(X : Y). \quad (723)$$

■測定と消去のトレードオフ [34, pp.103–105]

メモリの初期化 $Y_* \rightarrow Y$ に必要な仕事 W^{erase} は式(711)より

$$W^{\text{erase}} \geq F(Y_*) - F(Y) \quad (724)$$

を満たす。式(723)と辺々足すと

$$W^{\text{meas}} + W^{\text{erase}} \geq k_B T_Y I(X : Y) \quad (725)$$

が得られる (W^{meas} と W^{erase} はトレードオフの関係にある)。

さらに式(721)を合わせると、サイクルで系とメモリの全体系から取り出せる仕事は

$$W_{\text{ext}}^{\text{tot}} \equiv W_{\text{ext}} - W^{\text{meas}} - W^{\text{erase}} \leq k_B (T_X - T_Y) I(X : Y) \quad (726)$$

を満たすので、単一の熱浴 ($T_X = T_Y$) に対して Kelvin の原理 $W_{\text{ext}}^{\text{tot}} \leq 0$ が成り立つ。

$T_X > T_Y$ の場合には高温側の吸熱 Q_X を用いて定義される熱効率 η は

$$\eta \equiv \frac{W_{\text{ext}}^{\text{tot}}}{Q_X} \leq 1 - \frac{T_Y}{T_X} \quad (727)$$

を満たす (Carnot 限界)。

10.2節の式の導出など

■仕事で表した情報熱力学の第2法則(720)の導出

系の始・終状態の平均エネルギー $E(X), E(X')^{*140}$ に対して非平衡自由エネルギー

$$F(X) \equiv E(X) - T_X \cdot k_B S(X), \quad F(X') \equiv E(X') - T_X \cdot k_B S(X')$$

を定義する [34, pp.95–96]. その上で式(711)の導出と同様, 式(719)を書き換えれば良い:

$$\begin{aligned} -(I(X : Y) - I(X' : Y)) &\leq S(X') - S(X) - \beta_X Q \\ &= S(X') - S(X) - \beta_X \{E(X') - E(X) - W\} \quad (\text{第1法則}) \\ &= \{S(X') - \beta E(X')\} - \{S(X) - \beta E(X)\} + \beta_X W \\ &= \beta_X \{-F(X') + F(X) + W\}. \end{aligned}$$

*140 あからさまには y についても平均した次式で定義される [34, p.96].

$$\begin{aligned} E(X') &= \sum_{x', y} P(x', y) E'_{x'}(y) = \sum_{x', y} P(x'|y) P(y) E'_{x'}(y) = \sum_y P(y) \left(\sum_{x'} P(x'|y) E'_{x'}(y) \right) \\ &= \sum_y P(y) E(X'|y). \end{aligned}$$

■ Szilard エンジン は式 (719), (721) の等号を達成することの説明

Szilard エンジン では $F(X') = F(X)$ および

$$W_{\text{ext}} = k_B T \ln 2, \quad \Delta I = \ln 2$$

より式 (721) の等号が成立している [34, p.10, p.110]. したがって元の式 (719) でも等号が成立しているはずである. 実際, 測定後からフィードバック直後までのみに注目すれば, 式 (719) の等号が成立していることは

$$\Delta S = S(X') - S(X) = -\ln 2, \quad \Delta I = \ln 2, \quad Q = 0$$

から直接確かめられる. ここではフィードバックに注目しているので, 等温膨張過程の (したがってサイクル全体での) 吸熱

$$Q(X) = W_{\text{ext}} = k_B T \ln 2 (\neq 0)$$

(第1法則を考慮した) を用いてはならない.

■測定に要する仕事の制約(723)の導出 [34, p.102]

メモリの始・終状態の非平衡自由エネルギー

$$F(Y_*) \equiv E(Y_*) - T_Y S(Y_*), \quad F(Y) \equiv E(Y) - T_Y S(Y)$$

(ただし $E(Y_*)$, $E(Y)$ はメモリの始・終状態の平均エネルギー) を用いて $S(Y_*)$, $S(Y)$ を消去し, 熱力学第1法則

$$E(Y) - E(Y_*) = Q + W^{\text{meas}}$$

を用いると^{*141},

$$\begin{aligned} \text{式(722)} : \sigma(Y)/k_B &\equiv \{S(Y) - S(Y_*)\} - \beta_Y Q_Y \geq I(X : Y) \\ \Rightarrow \text{式(723)} : W^{\text{meas}} &\geq F(Y) - F(Y_*) + k_B T_Y I(X : Y). \end{aligned}$$

^{*141} ただし測定過程においてメモリと系の間にエネルギーのやり取りがあれば, それは W^{meas} に含める.

■正味の仕事に対する制約(726)の導出 [34, pp.104–105]

サイクルでは $F(X) = F(X')$ なので、フィードバックで取り出せる仕事に対する制約(721)は終相関 $I(X' : Y)$ を落として評価をゆるめると、

$$W_{\text{ext}} \leq k_{\text{B}} T_X I(X : Y) \quad (728)$$

を与える。これと式(725): $W^{\text{meas}} + W^{\text{erase}} \geq k_{\text{B}} T_Y I(X : Y)$ を組合せると

$$W_{\text{ext}}^{\text{tot}} \equiv W_{\text{ext}} - W^{\text{meas}} - W^{\text{erase}} \leq k_{\text{B}} (T_X - T_Y) I(X : Y) : (726)$$

を得る。

■熱効率の式(727)の導出 [34, p.105]

系のサイクルに対して第1法則を適用すると、高温側である系の吸熱は $Q_X = W_{\text{ext}}$ なので、熱効率 η は

$$\begin{aligned}\eta &\equiv \frac{W_{\text{ext}}^{\text{tot}}}{Q_X} = \frac{W_{\text{ext}} - W^{\text{meas}} - W^{\text{erase}}}{Q_X} = 1 - \frac{W^{\text{meas}} + W^{\text{erase}}}{W_{\text{ext}}} \\ &\leq 1 - \frac{k_B T_Y I(X : Y)}{k_B T_X I(X : Y)} = 1 - \frac{T_Y}{T_X} : (727)\end{aligned}$$

を満たす。ただし2行目に移る際に、式(725),(728):

$$W_{\text{ext}} \leq k_B T_X I(X : Y), \quad W^{\text{meas}} + W^{\text{erase}} \geq k_B T_Y I(X : Y)$$

を用いた。

10.2節の原稿

10.1節では専ら情報エントロピーの最大性から統計力学の原理を導き、次いで熱力学を再現することを通じて、情報理論の観点から熱力学・統計力学を見直した。本節ではエントロピーを情報量とする解釈を、より積極的・印象的に動機付ける題材として、Maxwellのデーモンのパラドックスを取り上げる。ただし考察対象を古典系に限定し、エントロピーをShannon情報量で定義する。また本節では各種情報量はBoltzmann定数 k_B を単位として測った無次元量として定義する。その上で情報と熱力学量を対等に扱う形に一般化した熱力学第2法則からパラドックスを解消する。

Maxwellのデーモンの有名なオリジナルの思考実験は次のように要約できるだろう。仕切りで隔てられた左右の部屋に気体が封入された温度が一樣な系を考える。系の状態として、隔壁の通路にさしかかった粒子の運動方向(右向き/左向き)と運動エネルギーの大小をデーモンが測定する。その測定結果に応じたフィードバックとして、デーモンは粒子を通過させるか通路をふさぐ。するとデーモンは仕事をすることなく、一方の部屋に熱運動のエネルギーの大きい粒子を、他方の部屋に熱運動のエネルギーの小さい粒子を集め、温度差を生み出すことができる。

ただし、ここではMaxwellのデーモンの単純で定量的なモデルとして、Szilard (シラード) エンジンを考えよう [34, pp.7–10]。Szilard エンジンは図50のような温度 T の熱浴と接する体積 V の箱に入った、古典的な単一粒子(質点)に対するサイクルで定義される。

- (ii) の仕切りの挿入では，箱を体積 $V/2$ の2つの箱に分けている．
 - － 仕切りが十分薄ければ，仕切りによる粒子に対する仕事は無視できる．
- (iii) の測定では粒子が左右どちらの箱に入っているかをデーモンが測定する．
 - － 測定に誤差はないとする．
 - － 古典的には測定による粒子への物理的な影響は無視できる．
 - － 理想的には，測定による系に対する仕事もない．
- (iv) の過程では粒子が左側の箱に入っていれば何もせず，粒子が右側の箱に入っている場合には，箱を準静的に左側に平行移動する．これは測定結果に応じたフィードバックと言える．
 - － 箱の移動の際，箱の左右の圧力は常につり合っているので，仕事は必要ない．また自由エネルギーも変化しない(粒子入りの箱の状態が不変だから)．
 - － フィードバックの後，粒子入りの箱は確率1で左側にある．
 - － 箱を左側に寄せる過程を飛ばしたとしても，系を初期状態に戻すには，粒子の左右に応じて仕切りを右または左に移動させるというフィードバックを要する．

さて，理想気体の状態方程式 $pV = k_B T$ (粒子数 $N = 1$ に注意した) より，(v) の等温準静膨張では外部への正の仕事(713)が取り出され，初期状態に戻る．このため一見するとこのサイクルは，式(711)の箇所の説明した Kelvin の原理に反しているように見える．これが Maxwell のデーモンのパラドックスである．

ところで仕切りで分けられた系は粒子が左右にある2状態を持つので，その Shannon エ

ントロピーは2値エントロピー(354)で与えられることに注意しよう．すると(iii)の測定の前では粒子が左右のどちら側にあるか判明していないのでShannonエントロピーは $\ln 2$ であるのに対し，(iv)のフィードバックの後では粒子が左側にあることが確実なのでShannonエントロピーはゼロに減少している．ここで式(709)の箇所で説明したように，通常の熱力学においては，熱を捨てることによってのみ系のエントロピーを減らせることを思い出そう．ところが，この過程でデーモンは仕事をしておらず，気体は熱を放出していないので，従来の熱力学とは異なる機構で系のエントロピーが減少したことになる．そして $\ln 2$ のエントロピーの減少は，自由エネルギー(710): $F = E - TS$ が $k_B T \ln 2$ だけ増加することを意味し，それが最終的に(v)で仕事として取り出されていることになる．このように情報を用いて仕事を取り出す熱機関を情報熱機関という．

Szilard エンジンにおける情報量の変化をもう少し詳しく調べておこう [34, pp.91–93]．平衡統計力学では，理想気体のエントロピーはSackur–Tetrodeの式(712)で与えられる(ただしここでは粒子数を $N = 1$ とおく)．これに基づけばエントロピーは体積 V に対数的に依存するため，エントロピー変化 $\Delta S_{\text{eq}} = -k_B \ln 2$ は仕切りの挿入(ii)に伴う体積変化 $V \rightarrow V/2$ の際に起こることになる．しかし気体の体積が $V/2$ であるというとき，暗に粒子がどちらの箱に入っているかが確定していると仮定していることになると考えられる．実際には仕切りを入れた直後の左右の確率はまだ $1/2$ ずつであり，それは仕切りを入れる前，そして測定直後と変わらない．このためShannon情報量の観点からは，仕切りを挿入した時点ではエントロピーは変化しない．

それでもなお疑問は残る．フィードバック後には箱は必ず左側にあるので，Shannon エントロピーはゼロである．ところが測定後に粒子を左側に見出す確率と右側に見出す確率は依然として $1/2$ ずつなので，定義より Shannon エントロピーはこの時点で $\ln 2$ のままであり，フィードバックをしてはじめて $\ln 2$ だけ減少することになる．しかしながら直観的にはデーモンが粒子の位置情報を得るのは測定の際であり，それ故に系のエントロピーは測定の過程において減るはずだと考えられる．この直観に対応するのは，条件付きエントロピーであることを説明する．

粒子の入った箱が左にある場合を $x = 0$ で，右にある場合を $x = 1$ で表すと，系は実現値 $x = 0, 1$ を持つ確率変数 X で記述される 2 状態系と見なせる．他方，測定結果を記録するメモリの状態を Y で表そう (その値は $y = 0, 1$)．まず測定前では測定結果 y は状態 x と無関係な変数であると考えれば， $I(X : Y) = 0$ となる (式 (369) の等号成立条件を見よ)．実際，測定前に系の状態と測定結果の共有する情報がゼロであるのは理に適っている．すると式 (367) より，測定前の条件付き Shannon エントロピーは $S(X|Y) = S(X) - I(X : Y) = \ln 2$ である．次に測定直後の情報量を考える．ここでは測定誤差がないため，測定値 y は常に系の状態 x に一致し，条件付き確率分布は $P(x|y) = \delta_{xy}$ である．すると条件付き Shannon エントロピー (362) は式 (714) となる．その平均 (363) もまた式 (715) のようにゼロである．よって系の状態と測定結果の間の相互情報量は，式 (367): $I(X : Y) = S(X) - S(X|Y)$ に基づき，測定後では $I(X : Y) = \ln 2$ となる．以上より確かに条件付きエントロピー $S(X|Y)$ は情報量の直観と整合して，測定の前後で $\ln 2$ から 0 に減少していることになる．実際，6.3.1 項で説

明したように、相互情報量 $I(X : Y) = S(X) - S(X|Y)$ は Y についての情報を得る (条件付けを行う) ことによる、Shannon 情報量の減少を定量化していることを思い出そう。さらに測定後の系に対する操作は、デーモン (メモリ) の状態には関係しないから、フィードバック後も $S(X|Y)$ の値は変わらない。以上より各種エントロピーの変化は表 9 のようにまとめられる。

さて、情報熱力学と第2法則の整合性を理解するには、デーモン (すなわち測定で得た情報を蓄える「メモリ」) 自身も熱浴と接した熱力学系と考える必要がある。そこで一般に、それぞれ逆温度 β_X, β_Y の熱浴に接した2つの系 X, Y の間の情報交換を考え、各々の初期状態を x, y とする。また初めの相互情報量を $I(X : Y)$ とする。その後の時間発展において Y の状態 y は変化しないものの、 X は Y の影響を受けながら (つまり状態 y に依存した) 時間発展をし、終状態 x' になるとしよう。時間発展した後の X を X' と書き、そのときの Y との相互情報量を $I(X' : Y)$ とする (以上、図 51 を参照)。

ここで定義式 (705) の箇所で見たとおり、吸熱は熱浴による状態 (確率分布) の変化に起因することを思い出そう。しかるに Y が時間発展しないと仮定しているため吸熱がなく、したがって全体系 XY の吸熱を X の吸熱 Q_X と見なせることに注意しよう。すると全体系 XY のエントロピー生成 $\sigma(X, Y)$ に対して、第2法則 (709) は式 (717) のように表せる。ただし最後の等号では、 X についての「エントロピー生成」(718) を定義した。よって第2法則は式 (719) へと書き換えられる。

まずは X を系, Y をメモリとして, デーモンによるフィードバックを考えよう. このとき式(719)はフィードバックの第2法則となる [34, pp.109–110]. 式(719)において右辺の相互情報量の差 $\Delta I \equiv I(X:Y) - I(X':Y)$ は, フィードバックでの相互情報量の減少量(使われた相互情報量(の上限))を表しており, 式(719)はフィードバックがある場合のエントロピー生成 $\sigma(X)$ が非負とは限らず, $-k_B \Delta I$ まで負になり得ることを意味している. 情報熱力学の第2法則である. ここで相互情報量は系のエントロピーを減らす「リソース」と解釈される.

このように着目系とデーモン(メモリを合わせた全体系のエントロピー生成 $\sigma(X, Y)$) はあくまで非負である. しかしながら, そこから式(717)のように相互情報量の寄与を分離した「系のエントロピー生成」 $\sigma(X)$ だけに注目すると, $\sigma(X) < 0$ となり得るため, 見かけ上, 第2法則が破れることになる. 言い換えれば, フィードバックにおいてデーモンと第2法則ははじめからコンシステントである [34, p.111].

次にパラドックスを仕事の観点から再考しよう. それはデーモンがない場合にエントロピー生成の非負性(709)を仕事の制約(711)へと書き換え, Kelvinの原理を導いた議論の一般化である. まず系にした仕事 W と始・終状態の非平衡自由エネルギー $F(X), F(X')$ を用いて第2法則(719)を書き換えると式(720)が得られる(導出スライド参照). 式(720)はデーモンが関与しない場合の式(711): $W \geq \Delta F$ と比べると, フィードバックがある場合の新たな特徴として, ΔI に関する付加的な項が現れており, 系から取り出せる仕事 $W_{\text{ext}} = -W$ の上限に対する制約(721)を与える. Szilardエンジンでは式(721)の等号が成立しており(導出スライド), この意味でSzilardエンジンは最も効

率の良い情報熱機関と言える [34, p.10,p.110].

仕事の観点からパラドックスを解消するには, Szilard エンジンの場合のように測定過程で系に仕事が行なされない場合にも, デーモンに対する仕事が必要となることを理解することが鍵となる. そこで次に, Maxwell のデーモンないし「メモリ」 Y 自身を, 温度 T_Y の熱浴に接している熱力学系として, 測定に要する仕事を考えよう.

図52のように [34, p.111], 測定前の

- メモリの初期状態の Shannon エントロピーを $S(Y_*)$
- 系の初期状態の Shannon エントロピーを $S(X)$

とする. 測定前の初期状態では系とメモリの間に相関はないので, 相互情報量は $I(X : Y_*) = 0$ である. これを踏まえ X をメモリ Y に, Y を系 X に読み替えて一般公式 (719) を適用すると, 測定の第2法則 (722) を得る [34, pp.109–110]. ここに Q_Y は測定におけるメモリの吸熱である. フィードバックに対する式 (719) とは対照的に, 上式 (722) 右辺には測定で得た相互情報量 $I(X : Y)$ が正号で入っており, したがってメモリのエントロピー生成 $\sigma(Y)$ は常に非負である. 測定は取得した情報 $I(X : Y)$ 以上のエントロピー生成 $\sigma(Y)$ をもたらす.

メモリの始・終状態の非平衡自由エネルギーを $F(Y_*)$, $F(Y)$ とすると, 式 (722) はメモリに対する仕事 W^{meas} の条件 (723) に書き換えられる ([導出スライド参照](#)). やはりフィードバックに対する式 (720) と比べて, 情報量 $I(X : Y)$ は逆符号で入っている.

よって測定では、メモリの非平衡自由エネルギーの変化よりも、相互情報量の項だけ余分な仕事が必要であることになる。ただし自由エネルギー変化はメモリの構造に依存しており [34, pp.121–122], したがってメモリの構造を上手く調節すれば、式(723)の右辺をゼロにできる。このため必ずしも測定に正の仕事は必要でない。

さらにメモリを繰り返し用いることを念頭に、メモリの初期化 $Y_* \rightarrow Y$ に必要な仕事 W^{erase} を考える。初期化のプロセスは「情報の消去」とも呼ばれる^{*142}。初期化の過程ではメモリは熱浴のみと相互作用し、系とは相互作用しないとすると、相互情報量の項のない式(711)を適用できるので式(724)が成り立つ。式(723),(724)を辺々足すと、式(725)が得られる。ここでメモリの構造に依存する自由エネルギー変化の項が相殺したため、上式(725)は測定と消去到要する仕事の普遍的なトレードオフ関係と見なせる：測定の仕事を節約すれば、その分だけ消去到仕事を費やす必要があり、また逆も然りである。実のところ測定と消去は必ずしも明確に区別できないため、合計の仕事に対する式(725)こそ意味のある不等式だと言える。

最後にサイクルに対して系とメモリの全体系から取り出せる仕事 $W_{\text{ext}}^{\text{tot}}$ を考える。

^{*142} ただし初期化で消去されるのは、実はメモリのShannonエントロピーであって、相互情報量ではない。実際、測定で得た相互情報量をフィードバックに使っても、メモリの状態が変わらなければメモリにはShannonエントロピーが残るため、メモリを初期化するにはShannonエントロピーの消去が必要である [34, p.103].

フィードバックで取り出せる仕事に対する制約(721)と、デーモンに対する仕事の制約(725)を合わせると式(726)を得る(導出スライド参照). ただし第1項の W_{ext} は式(721)における, フィードバックで系から取り出せる仕事である. 特に系とメモリが共通の熱浴に接している場合, 式(726)最右辺は温度 T_X, T_Y が等しいのでゼロになる. すると正味の仕事 $W_{\text{ext}}^{\text{tot}}$ は非負となり, 単一の熱浴からサイクルで正の仕事は取り出せないことになるので, Kelvinの原理が保証される. (このように仕事の観点からは, 測定と消去の仕事がフィードバックの仕事を打ち消すという形で, Maxwellのデーモンのパラドックスは解決する [34, p.111].) 2つの熱浴の温度が異なる場合にも $T_X \leq T_Y$ であれば, 式(726)は依然として正味の仕事が非負であること $W_{\text{ext}}^{\text{tot}} \leq 0$ を意味するものの, $T_X > T_Y$ とすると $W_{\text{ext}}^{\text{tot}} > 0$ となり得る. しかしこのとき熱効率は式(727)を満たす(導出スライド参照). 最右辺はCarnot限界となっており, 式(727)の結果はやはり第2法則と整合している.

まとめよう. デーモンが系の測定により得た情報(相互情報量 I)を用いてフィードバックを行うとき, T を熱浴の温度として $k_B T I$ までの仕事を取り出すことができる. これは一見すると, 単一の熱浴と接する系からサイクルで仕事を取り出すことはできないという, Kelvinの原理(第2法則)に反している. しかしデーモンに対しても「測定」と「初期化(情報消去)」を合わせた過程で, $k_B T I$ 以上の仕事をしなければならず, パラドックスは解消される [34, pp.10–11]. (なお測定と消去の一方の仕事は個別的にゼロにできるため, 測定と消去に要する仕事にはトレード・オフの関係がある.) 次にエントロピーの観点から考えると, デーモンも熱力学系と見なしたとき, 系とデーモン(と

熱浴)の全エントロピー生成は非負であり，はじめから第2法則は満たされている．しかし系だけの「エントロピー生成」に注目すると，それはフィードバックの過程で $-k_B T I$ まで負になり得るので，あたかも第2法則が破れているように見えていたにすぎない．これまでに展開してきた議論から，以上での仕事とエントロピーの観点は等価であることが分かり，これらをもって Maxwell のデーモンのパラドックスは完全に理解されたと言える [34, pp.126–127].

10.3 熱力学と因果律——流体系を例に

ミクロな構成要素のダイナミクスを熱力学的な状態方程式へと“簡約”するときに、古典的な因果律の概念もまた失われると考えられる。

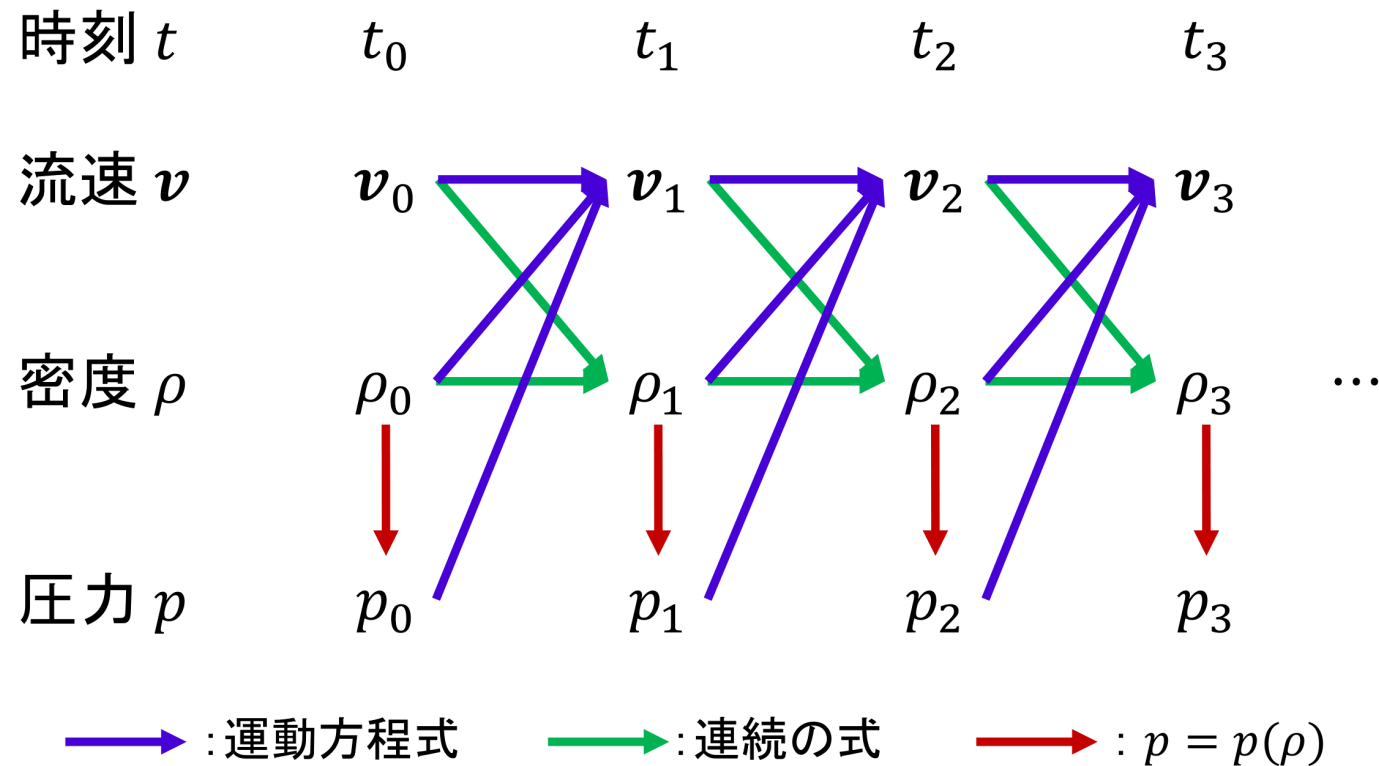
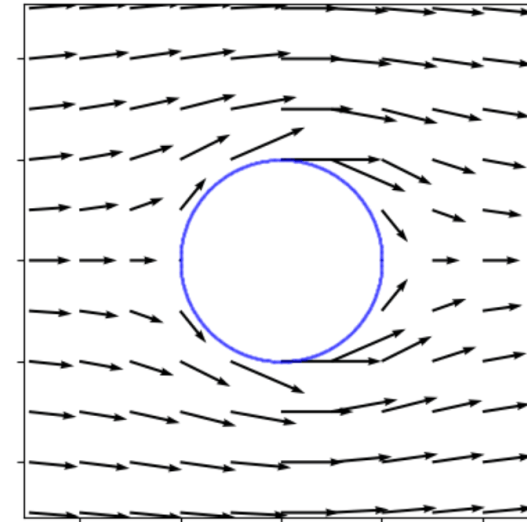
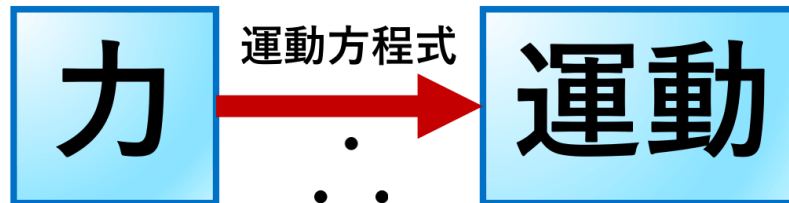


図53 数値シミュレーションを念頭に置いた流体の時間発展の記述．バロトロピー流体 ($p = p(\rho)$) [43, pp.16–17] を仮定した．

因果律



流体力学の説明



||
圧力

||
流れは速度ポテンシャル
 Φ から導かれる($v = \nabla\Phi$).
 Φ はLaplace方程式の解.

||
非圧縮性完全流体,
初期時刻は渦無し.

図54 非圧縮性完全流体の渦無し運動の理論 [43, pp.46–47]と因果律. 応用例として円柱を過ぎる一様流(2次元流) [43, pp.70–71]の描画を添えた.

- 飛行機の翼に働く揚力
 - Kutta-Joukowskiの定理 (循環 → 揚力)
- サイフォンの原理

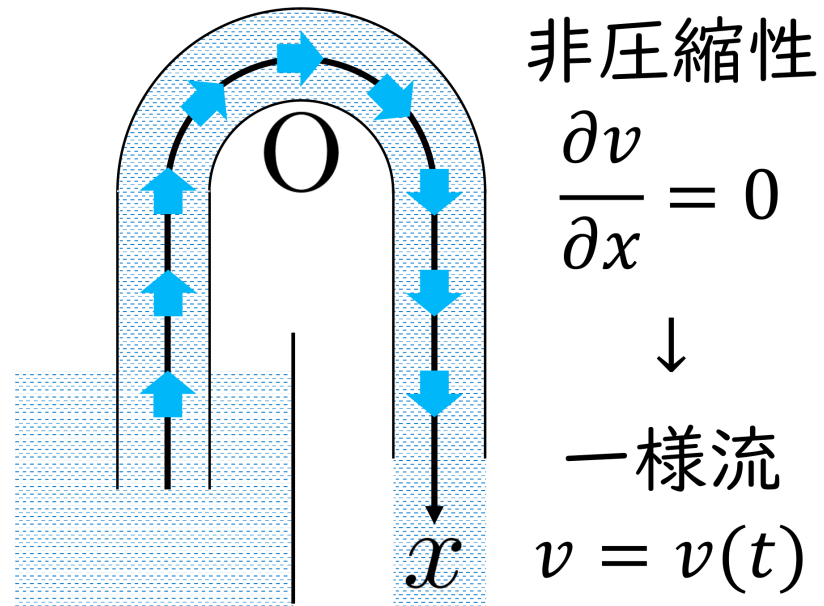


図55 サイフォンの原理の実験

- 流体には密度のゆらぎを打ち消す復元力が働く → 音波
- 粒子系から流体系へ
 - Boltzmann方程式 → 流体方程式
 - BBGKY階層性

10.3節の原稿

最後にやや蛇足の感はあるものの、熱力学は因果律に盲目であることについて、いくらかエッセイ風に論じることを許していただきたい。熱力学では系の膨大なミクロな自由度——例えば個々の気体分子の位置と運動量——を捨象して、マクロな変数間の状態方程式へと粗視化する。このとき我々にアクセスできないミクロな内部自由度の情報がエントロピーであった。さて、ミクロな構成要素のダイナミクスを熱力学的な状態方程式へと“簡約”するときに、古典的な因果律の概念もまた失われると考えられる。実際、少なくとも平衡状態を記述する熱力学にはもとより時間の概念はなく、因果律の概念の入り込む余地はないと考えられる。このため例えば理想気体の等温ないし断熱変化において、気体の体積が膨らんだために気圧が下がるのか、あるいは気圧が低下したために体積が膨張するのかを言うことは難しい。

流体力学では速度場の3成分と熱力学的に独立な2変数の合計5つの未知量を定めるのに、運動方程式の3成分と質量保存則、および状態方程式の合計5本の基礎方程式を用いる [43, p.8,p.11]。すると原理的には図53のように流体の時間発展を予言できる。

ところが熱力学的な状態方程式を取り入れたために、流体力学的な説明もまた半ば因果律に盲目になると考えられる。実に極端な状態方程式の例として、非圧縮整流体の仮定を取り上げよう。さらに粘性のない完全流体に対しては角運動量保存則に対応して、渦は不生不滅であることを主張するLagrangeの渦定理が成り立つ。これによると初期時刻に渦度を持たない流体粒子が、後の時刻にノンゼロの渦度を持つことはない。このた

め，例えば上流の流れが渦なしの一樣流であれば，下流の物体の周りを過ぎる流れも渦なしである [43, pp.41–45]. そこで非圧縮性完全流体の渦無し運動を調べることは実際的な興味を持たれる．渦なしの流れは速度ポテンシャル Φ を持ち($\boldsymbol{v} = \nabla\Phi$)，しかるに非圧縮性流体はわき出しがないので($\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$)，ポテンシャルはPoisson方程式 $\Delta\Phi = 0$ を満たす．このため非圧縮性完全流体の渦無し運動の理論では，運動方程式を解かずとも，Laplace方程式を適当な境界条件の下に解けば速度ポテンシャルが求まる．流体のモデルから流れが運動学的に決まってしまうと言っても良いだろう．ここでは運動方程式(正確にはその積分形である圧力方程式)は，与えられた力から物体の運動を预言する因果方程式の役割を果たさず，むしろ図54のように次いで，得られた流れを実現させる圧力場を求めるのに用いられる(これが圧力方程式の名前の由来である) [43, pp.46–47]. これは非圧縮性の仮定が一種の熱力学的条件であり，それ故，力学的因果律に対して盲目であることを反映していると考えられる．

ここで興味ある1つの具体例として，飛行機の翼に働く揚力を考えよう．翼の周りの流れに循環があると，翼の上面と下面に流体の速度差が，したがって圧力差が生じ，揚力が得られる．このように循環が揚力をもたらすことは，非圧縮性完全流体の渦無しの2次元流に対する理論に基づき，Kutta–Joukowskiの定理として証明できる [43, pp.85–86]. すると翼に働く揚力を説明することは，翼の周りの循環がどのように生じるのかを説明する問題に還元される．ところが非圧縮性完全流体の渦無し運動に対する理論の枠組みの内部では，これに答えることはできないと考えられる．実際，静

止した円柱の周りの流れを考えると明らかなように、流れが円柱の表面に沿うという境界条件を破ることなく、渦糸の作る循環を伴う速度場を重合せることは常に可能である [43, p.71]. すると循環 Γ の任意の値に対して境界条件を満たす可能な流れが得られるため、循環 Γ の値は向きも含めて定まらない*¹⁴³. この不定性は明らかに、粘性を無視した完全流体に対しては境界条件として、物体表面との相対速度の接線成分までもがゼロになることを要求できないという事情に関係している [43, pp.158–159]. 翼を囲む閉曲線について循環がゼロでない値を持つことは、その内部に渦領域があり、翼の断面が渦糸に貫かれていることを意味する. この渦糸は流体領域にはみ出し、下流まで伸びていなければならない [43, pp.106–107]. Lagrangeの渦定理により、流体の中の渦は翼の境界付近で粘性によって作られたものでなければならないから、結局、揚力は翼の表面(の薄い境界相 [43, pp.159–161])における流体と翼の相互作用によってもたらされることになる(これは自然な結論と言える). いずれにせよ翼に働く力は既知与えられた翼の周りの流れに対して事後的に求められ、その際、運動方程式は力から運動を決めるという因果方程式の役割を果たさない. なお流体が翼に沿って運動するならば、翼に揚力が働くのは一見すると不思議に思われるかもしれない. しかし流体の速度はあくまで分子の速度を平均して得られる、巨視的な運動を定義する量であって、実際にはミクロには翼には多数の分子が衝突している. これが圧力、延いては揚力の起源である.

*¹⁴³ 平板の周りの流れに対してはKuttaの条件から循環を決めることができるものの、あくまでこれは経験則である [43, pp.80–82].

今一つの日常的な疑問に即して、同じ事情を繰り返し説明しよう．図55のように水で満たした管を水槽から垂らし、管に沿って x 軸をとる．もし管の先端が水槽の液面よりも低ければ水は $+x$ 向きに流れ続ける．この現象はサイフォンの原理として知られる．水が部分的に重力に逆らって上昇するのは一見すると直観に反するため、不思議に感じる人は一定数いるだろう．何故 $x < 0$ の部分において水は途切れることなく、重力に逆らって昇り続けられるのだろうか．もし水の流れを非圧縮性流体の1次元流と見なすならば、質量保存則(連続の式)より速度場はわき出しのない一様流となる．こうして流体の非圧縮性を仮定すると運動方程式を用いることなく、図55のように水の各部分は全ての位置 x に共通の速度 $v(t)$ で一斉に流れることが運動学的に決まってしまう．(管の中の流れを一次元の流れの代わりに、粘性流体に対する粘着境界条件を満たす Poiseuille (ポアズイユ) の流れ [43, pp.190–191] と考えても、この事情は変わらない．) したがって「何故、水が流れるのか」という問いに答えるには、水の非圧縮性をもたらすメカニズムを説明しなければならない．そこで仮に水が局所的に膨張し、密度が薄まったとすると、その部分では圧力が減少するから、周りから密度のゆらぎを打ち消すような復元力を受ける．したがって流体は摂動的な密度のゆらぎに対して安定であると期待される．ここから非圧縮性流体の仮定は、少なくとも密度ゆらぎが本質的でない現象に対して、良い近似として正当化し得る．実に1次元の流れに対して、この復元力を用いて流体に固定した微小領域の運動方程式を書き下すと、流体粒子の変位に対する波動方程式が導かれる [33, pp.300–304]．すると密度は定常状態における値の周りに振動し、(特に断熱変化に対して)微小な密度のゆらぎは音波として流体中を伝播することに

なる．非圧縮性流体とは言わば音速が無限に大きい極限であり [43, p.47]，言い換えれば流体系を質点系に離散化したときの復元力を記述する“バネ定数”が無限に大きく，したがって流体の各部分が瞬時に相互作用を及ぼし一斉に運動する結果，密度変化が現れないとする理想化と理解できる．

非圧縮性流体の仮定はまた，力学における剛体近似とも大いに似ている：剛体は変形しない物体として定義され内部の構成要素の運動が“凍結”されているため，剛体の一見不思議な運動も単に質量中心の運動方程式と，質量中心周りの角運動量とトルクの関係から説明できてしまう．

状態方程式を持ち込むことが力学的・機械論的な因果律を隠してしまうならば，流体力学的な説明と因果律の繋がりを確保するには，状態方程式または流体方程式を多粒子系の力学から導出し，裏付けられれば良い．実際，希薄な気体に対しては，1粒子分布関数 f に関する Boltzmann 方程式から流体方程式を導くことができる．その際，応力テンソル P_{ij} は局所的な流体の静止系に対する粒子の速度を用いて運動学適応力の形に同定され，これは局所平衡分布関数 $f = f^{(0)}$ に対して理想気体の圧力 $P_{ij}^{(0)} = nk_B T \delta_{ij}$ を与えることが判明する．そして分布 f の平衡状態 $f^{(0)}$ からのズレは粘性応力に寄与する [24, pp.117–120]．ただし Boltzmann 方程式はその仮定により密度の高い液体などには適用できない．そこで(粒子数 N の)多粒子系に対して，相空間($6N$ 次元の Γ 空間)において異なる初期条件に対応する動点たちを考えると，一般にその密度は Liouville 方程式を満たす．ここから分布関数の時間発展方程式を調べると，1粒子分布関数を求める

には2粒子分布関数が必要となり，2粒子分布関数を求めるには3粒子分布関数が必要となる，といった具合に無限後退に陥ることが分かる．これをBBGKY階層性という．（正確には N 粒子分布関数まで付き合えば，それ以上は未知関数が現れなくなるはずだが，それでは実質 N 個の粒子全てを時間追跡するのと同程度の手間がかかり，粗視化の意味がない．）分布関数を求めるには，何らかの近似解法を用いて分布関数の閉じた方程式を得る必要がある．特にBoltzmann方程式は稀薄気体の仮定の下で2粒子分布を1粒子分布の積で表して得られる，1粒子分布関数について閉じた支配方程式に他ならない．

以上，本節では流体系を題材として，熱力学は因果律に盲目であることを指摘してきた．もっとも物理学は究極的には“何故(why)”ではなく“どのように(how)”を記述できるに過ぎないとすれば，そもそも力の概念はおろか，因果律を理論物理にとって基本的な概念として保持し得るか，疑問の余地はある．

第III部

場の量子論

11 序論

■時間と空間の(非)対称性 [11, p.91]

専ら粒子を記述する非相対論的量子力学では

- 時刻 t パラメータ
- 粒子の位置 x 観測量

→ 時間と空間は対称的に扱われていない.

場 $\phi(x, t)$ を対象とする相対論的量子力学では

- 位置 x , 時刻 t パラメータ
- 場 $\phi(x, t)$ 観測量

→ 時間と空間はパラメータとして対等に扱われる.

重力理論では時間と空間はいずれも重力場(動力学的な対象)の現れである.

■表記法など 第III部では基本的に以下の約束に従う.

- 断りのない限り,
 - 時空4成分 $0, 1, 2, 3$ をとる添字 $\rightarrow$ ギリシア文字 $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots$
 - 空間成分 $1, 2, 3$ のみをとる添字 $\rightarrow$ ラテン文字 $i, j, k, \dots$
- Minkowski計量は

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (729)$$

- 任意の4元反変ベクトルを $a = a^\mu = (a^0, \mathbf{a})$ のように書く. また4元内積を

$$a \cdot b \equiv \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = (a^0)^2 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (730)$$

と書く. 特に $a^2 \equiv a \cdot a$ と表すと, 例えばd'Alembert演算子は

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta = \partial^2. \quad (731)$$

- 換算 Planck 定数 $\hbar$, および真空中の光速 c を

$$\hbar = 1, \quad c = 1$$

とおく [自然単位系](#) を採用する [17, pp.101–102].

- このとき物理量の次元は質量の次元 M のベキで表され, 例えば

$$\begin{aligned} (\text{波数}) &= (\text{運動量}) = (\text{エネルギー}) = M, & (\text{長さ}) &= (\text{時間}) = M^{-1}, \\ (\text{作用}) &= (\text{エネルギー}) \cdot (\text{時間}) = (\text{運動量}) \cdot (\text{長さ}) = (\text{角運動量}) = 1. \end{aligned} \quad (732)$$

- 電磁気学の単位系として [Heaviside–Lorentz 単位系](#) を採用する.

- 第I部の Gauss 単位系と対照的に, Maxwell 方程式は

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu \quad \rightarrow \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = -j^\mu$$

のように簡略化される ($c = 1$ も考慮した) [4, pp.77–78].

- 素電荷を e と書く. 微細構造定数は

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137.04}$$

で定義される ($c, \hbar$ を復元すると $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{137.04}$) [17, p.102].

第11章の原稿

本稿はタイトルで「物理学原論」と銘打っている．そこで第III部では現代物理学の1つの柱である場の量子論を概説し，その金字塔として素粒子の標準模型を紹介する．ただし完全を期して込み入った網羅的な記述を行うよりも，むしろ一通りのアイデアをスケッチすることに努めた．また読者は既にこの分野の入門的な予備知識を習得していると仮定し，

- Klein–Gordon 方程式で記述されるスカラー場の理論
- 電磁場と Dirac 場の正準量子化
- γ 行列の反交換関係から導かれる縮約公式やトレース公式
- Dyson–Wick 形式に基づく S 行列要素の評価と QED の Feynman 規則の導出
- 最低次の QED 過程に対する断面積の計算

などの説明は本稿ではほとんど省略し，代わりに経路積分の方法に焦点を当てた．そのようにすれば辛うじて，話の長くなりがちな場の量子論を曲がりなりにも手際よく概観し得る．

場の量子論へと進むにあたり，量子力学における時間と空間の(非)対称性を最初に論じておくのが適切だろう．専ら粒子を記述する非相対論的量子力学では，時間 t がパラメータであるのに対し，粒子の位置 x は時間発展する観測量ないし力学変数である．こ

の意味で時間と空間は対称的に扱われていない．これに対し主に場 $\phi(x, t)$ を対象とする相対論的量子力学では，力学変数は場 $\phi(x, t)$ の値であり，位置 x はもはや場の値を評価する空間に固定された観測点の座標であり，時間 t と同じく単なるパラメータに過ぎない．このように場の量子論では，位置が力学変数からパラメータの地位に引き下ろされるため，時間と空間は対等に扱われる [11, p.91]．この考察には，さらに重力理論の観点を付け加えることができるだろう．伝統的な場の量子論とは対照的に，量子重力では時間と空間はいずれも重力場という動力学的な対象の現れとして対等に扱われる．

なお第III部と同様に，計量の符号を式(729)で定義する．ただし第I部では平坦な Minkowski 時空のみを考えるので，その計量を単に文字 $g_{\mu\nu}$ で表す．また4元ベクトルを引き続き抽象添字記法で表し，その空間成分は太字のベクトルで表し，2つのベクトル a, b の Minkowski 計量による4元内積には式(730)最左辺のように，添字を省いた内積記法を利用する．特に d'Alembert 演算子は4元内積の意味での微分演算子の2乗(731)で表される Lorentz 不変な演算子であり，時間微分と空間微分の符号は Minkowski 計量(729)の符号の選択を反映している．

さらに換算 Planck 定数 $\hbar$ と光速 c を1とおく自然単位系を採用する．このとき任意の物理量の次元は式(732)のように質量のベキで表される．特に波数4元ベクトルは運動量4元ベクトルと同一視できることに注意しよう．もとの単位系に戻るには式の次元が合うように c と $\hbar$ を復元しさえすれば良い．そのような方法は一意的に定まり，大抵は容

易に推察できる．自然単位系を選ぶと同時に，電磁気学の単位系として Heaviside–Lorentz 単位系を採用できる．このとき第I部で用いた Gauss 単位系と対照的に，Maxwell 方程式には煩わしい数係数 4π が現れない．なお場の理論ではラグランジアンそのものよりも，むしろ基本的な量としてラグランジアン密度が重要であるため，しばしばラグランジアン密度を単にラグランジアンと呼ぶ．（同様にハミルトニアン密度を単にハミルトニアンと呼ぶ．）

12 数学的準備

12.1 場の Lorentz 変換とスピノル

■無限小変換 [23, pp.4–5] “抽象的” な本義 Lorentz 変換の元を

$$\hat{\Lambda} = \exp \left(-\frac{i}{2} \varepsilon^{\rho\sigma} \hat{M}_{\rho\sigma} \right) \quad (733)$$

と書こう．“生成子” $\hat{M}_{\rho\sigma}$ の座標 x^μ 上での表現行列

$$(M_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu \equiv i(\delta^\mu{}_\rho g_{\sigma\nu} - \delta^\mu{}_\sigma g_{\rho\nu}) (= -(M_{\sigma\rho})^\mu{}_\nu) \quad (734)$$

は交換関係

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma} M_{\mu\rho}) \quad (735)$$

を満たすため、 $\hat{M}_{\rho\sigma}$ もまた代数 (735) を満たさねばならない．

■場の Lorentz 変換 [23, pp.5–6]

場 $\varphi_i(x)$ ($i = 1, \dots, N$) が Lorentz 変換 $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ に伴い線形変換

$$\varphi'_i(x') = D(\Lambda)_i{}^j \varphi_j(x), \quad \varphi'(x') = D(\Lambda) \varphi(x) \quad (736)$$

を受けると仮定すると、 $D(\Lambda)$ は群を成し、Lorentz 群の表現行列となる．

■ Lorentz 群の表現 [23, pp.6–8]

生成子 $\hat{M}_{\mu\nu}$ を2種類に分けて

$$J_i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\hat{M}^{jk}, \quad K_i \equiv \hat{M}_{i0}(= -\hat{M}_{0i}) \quad (\mathbf{J} = (\hat{M}_{23}, \hat{M}_{31}, \hat{M}_{12})) \quad (737)$$

と書くと, $\mathbf{J}, \mathbf{K}$ はそれぞれ空間回転と Lorentz ブーストの生成子であり, 交換関係

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k, \quad [K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k \quad (738)$$

を満たす. さらに新たな演算子

$$\mathbf{A} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{J} + i\mathbf{K}), \quad \mathbf{B} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{J} - i\mathbf{K}) \quad (739)$$

を定義すると, これらは角運動量の交換関係

$$[A_i, A_j] = i\varepsilon_{ijk}A_k, \quad [B_i, B_j] = i\varepsilon_{ijk}B_k, \quad [A_i, B_j] = 0 \quad (740)$$

を満たす. Lorentz 群の(有限次元)既約表現の各々は, スピン $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ の大きさの組 (A, B) で指定される. 対応する場は $(2A+1)(2B+1)$ 成分場

$$\varphi_{a,b}^{(A,B)}(x). \quad (a = -A, \dots, A; b = -B, \dots, B) \quad (741)$$

■SL(2, ℂ) スピノル [23, pp.8–9]

まず表現 $(A, B) = (0, 1/2)$ に対する場 (741) は $a = 0, b = \pm 1/2$ の2成分を持ち, $\xi_\alpha(x)$ ($\alpha = 1, 2$) と書ける. また生成子の表現は

$$D(\mathbf{A}) = 0, \quad D(\mathbf{B}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}, \quad (\boldsymbol{\sigma} : \text{Pauli 行列}) \quad (742)$$

$$\therefore D(\mathbf{J}) = D(\mathbf{A}) + D(\mathbf{B}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}, \quad D(\mathbf{K}) = -i\{D(\mathbf{A}) - D(\mathbf{B})\} = i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}. \quad (743)$$

ところで Lorentz 変換 (733) は一般に

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda} &= \exp\left(-\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu}\hat{M}_{\mu\nu}\right) = \exp(i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J} + i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}), \\ \boldsymbol{\theta} &\equiv -(\varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12}), \quad \boldsymbol{\omega} \equiv (\varepsilon_{10}, \varepsilon_{20}, \varepsilon_{30}) \end{aligned} \quad (744)$$

と書けるので, その表現行列は (α, β) 成分

$$a_\alpha{}^\beta = [\exp\{i\boldsymbol{\theta} \cdot D(\mathbf{J}) + i\boldsymbol{\omega} \cdot D(\mathbf{K})\}]_\alpha{}^\beta = \left[\exp\left(i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\right]_\alpha{}^\beta \quad (745)$$

を持つ SL(2, ℂ) 行列 $a = (a_\alpha{}^\beta)$ になる.

$(0, 1/2)$ 表現における場 $\xi_\alpha(x)$ は Lorentz 変換の際, $SL(2, \mathbb{C})$ 群要素 (745) によって

$$\xi'_\alpha(x') = a_\alpha{}^\beta \xi_\beta(x) \quad (746)$$

と変換し, $SL(2, \mathbb{C})$ 群の **2**スピノルと呼ばれる.

次に表現 $(A, B) = (1/2, 0)$ に対応する場を点付きスピノル $\eta^{\dot{\alpha}}$ ($\dot{\alpha} = 1, 2$) で表す. 同様に Lorentz 変換の表現行列を求めると, 場の変換則は

$$\eta'^{\dot{\alpha}}(x') = \left[\exp \left(i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right) \right]_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \eta^{\dot{\beta}}(x) \quad (747)$$

と求まる. この変換則に従う量 $\eta^{\dot{\alpha}}$ を $SL(2, \mathbb{C})$ 群の **2***スピノルと呼ぶ.

参考：**2***スピノルの名前の由来

反対称 Levi-Civita テンソルで添字を下ろした量 $\eta_{\dot{\alpha}} = \eta^{\dot{\beta}} \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}$ は^{*144}, ξ_α の複素共役 $(\xi_\alpha)^*$ と同様の変換則に従う：

$$\eta'_{\dot{\alpha}}(x') = a^*_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}}(x). \quad (a^*_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \equiv (a_\alpha{}^\beta)^*) \quad (748)$$

^{*144} 無限小パラメータ ε と区別するために Levi-Civita 記号を ϵ で表し, またここでは $\dot{\alpha} \backslash \dot{\alpha}$ 規則を採用した (8.2.2 項を見よ).

12.1 節の式の導出など

■生成子の座標上の表現行列(734)の導出 [23, pp.4–5]

実際, 生成子(734): $(M_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu \equiv i(\delta^\mu{}_\rho g_{\sigma\nu} - \delta^\mu{}_\sigma g_{\rho\nu})$ を用いると, 反対称な無限小パラメータ $\varepsilon^{\rho\sigma} (= -\varepsilon^{\sigma\rho})$ に対して Lorentz 変換(733)の表現行列は

$$\Lambda^\mu{}_\nu \simeq \left(1 - \frac{i}{2} \varepsilon^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma}\right)^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \varepsilon^\mu{}_\nu$$

となり(第2辺の1は 4×4 の単位行列), 正しい Lorentz 変換(140)の係数行列を再現する.

参考 無限小 Lorentz 変換は $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \simeq x^\mu + \varepsilon^{\mu\nu} x_\nu$ と表され, $\varepsilon^{\mu\nu}$ の反対称性から世界間隔の不変性 $x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu$ が保証される [4, pp.45–46] [17, pp.39–40] 等価的に $\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma}$ を要求しても $\varepsilon^{\mu\nu}$ の反対称性が見出される. 有限の変換は生成子(734)を用いて

$$x'^\mu = \left[\exp \left(-\frac{i}{2} \varepsilon^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma} \right) \right]^\mu{}_\nu x^\nu$$

と表される.

■ 行列 $M_{\rho\sigma}$ の交換関係 (735) の確認

行列 $M_{\rho\sigma}$ の定義式 (734): $(M_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu \equiv i(\delta^\mu{}_\rho g_{\sigma\nu} - \delta^\mu{}_\sigma g_{\rho\nu})$ より交換子 $[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}]$ の (α, β) 成分は

$$\begin{aligned} & ([M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}])^\alpha{}_\beta \\ &= (M_{\mu\nu})^\alpha{}_\gamma (M_{\rho\sigma})^\gamma{}_\beta - (M_{\rho\sigma})^\alpha{}_\gamma (M_{\mu\nu})^\gamma{}_\beta \\ &= i^2 \{ (\delta^\alpha{}_\mu g_{\nu\gamma} - \delta^\alpha{}_\nu g_{\mu\gamma}) (\delta^\gamma{}_\rho g_{\sigma\beta} - \delta^\gamma{}_\sigma g_{\rho\beta}) - (\mu \leftrightarrow \rho, \nu \leftrightarrow \sigma) \} \\ &= - (\delta^\alpha{}_\mu g_{\nu\rho} g_{\sigma\beta} - \delta^\alpha{}_\mu g_{\nu\sigma} g_{\rho\beta} - \delta^\alpha{}_\nu g_{\mu\rho} g_{\sigma\beta} + \delta^\alpha{}_\nu g_{\mu\sigma} g_{\rho\beta}) \\ &\quad + (\delta^\alpha{}_\rho g_{\sigma\mu} g_{\nu\beta} - \delta^\alpha{}_\rho g_{\sigma\nu} g_{\mu\beta} - \delta^\alpha{}_\sigma g_{\rho\mu} g_{\nu\beta} + \delta^\alpha{}_\sigma g_{\rho\nu} g_{\mu\beta}) \\ &= g_{\mu\rho} (\delta^\alpha{}_\nu g_{\sigma\beta} - \delta^\alpha{}_\sigma g_{\nu\beta}) - g_{\nu\rho} (\delta^\alpha{}_\mu g_{\sigma\beta} - \delta^\alpha{}_\sigma g_{\mu\beta}) \\ &\quad - g_{\mu\sigma} (\delta^\alpha{}_\nu g_{\rho\beta} - \delta^\alpha{}_\rho g_{\nu\beta}) + g_{\nu\sigma} (\delta^\alpha{}_\mu g_{\rho\beta} - \delta^\alpha{}_\rho g_{\mu\beta}) \\ &= -i \{ g_{\mu\rho} (M_{\nu\sigma})^\alpha{}_\beta - g_{\nu\rho} (M_{\mu\sigma})^\alpha{}_\beta - g_{\mu\sigma} (M_{\nu\rho})^\alpha{}_\beta + g_{\nu\sigma} (M_{\mu\rho})^\alpha{}_\beta \} \end{aligned}$$

と計算される。これは交換関係 (735) を意味する。

■ 演算子 J, K の交換関係 (738) の導出

生成子 $\hat{M}_{\rho\sigma}$ の交換関係 (735) と演算子 J, K の定義式 (737) を用いると

$$\begin{aligned}[J_i, J_j] &= \frac{1}{4} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} [\hat{M}^{kl}, \hat{M}^{mn}] \\&= -\frac{i}{4} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} (g_{km} \hat{M}_{ln} - g_{lm} \hat{M}_{kn} - g_{kn} \hat{M}_{lm} + g_{ln} \hat{M}_{km}) \\&= \frac{i}{4} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} (\delta_{km} \hat{M}_{ln} - \delta_{lm} \hat{M}_{kn} - \delta_{kn} \hat{M}_{lm} + \delta_{ln} \hat{M}_{km}) \\&= \frac{i}{4} \{ (\delta_{ij} \delta_{ln} - \delta_{in} \delta_{lj}) \hat{M}_{ln} + (\delta_{ij} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{kj}) \hat{M}_{kn} \\&\quad + (\delta_{ij} \delta_{lm} - \delta_{im} \delta_{lj}) \hat{M}_{lm} + (\delta_{ij} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kj}) \hat{M}_{km} \} \\&= \frac{i}{4} \times 4 \times (-\hat{M}_{ji}) \quad (\hat{M}_{ij} \text{ は反対称}) \\&= i \hat{M}_{ij} = i \varepsilon_{ijk} J_k, \\[J_i, K_j] &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} [\hat{M}_{kl}, \hat{M}_{j0}] \\&= -\frac{i}{2} \varepsilon_{ikl} (g_{kj} \hat{M}_{l0} - g_{lj} \hat{M}_{k0} - g_{k0} \hat{M}_{lj} + g_{l0} \hat{M}_{kj})\end{aligned}$$

$$= \frac{i}{2} \varepsilon_{ikl} (\delta_{kj} \hat{M}_{l0} - \delta_{lj} \hat{M}_{k0}) = \frac{i}{2} (\varepsilon_{ijl} \hat{M}_{l0} - \varepsilon_{ikj} \hat{M}_{k0})$$

$$= i \varepsilon_{ijl} \hat{M}_{l0} = i \varepsilon_{ijk} K_k,$$

$$[K_i, K_j] = [\hat{M}_{i0}, \hat{M}_{j0}]$$

$$= -i (g_{ij} \hat{M}_{00} - g_{0j} \hat{M}_{i0} - g_{i0} \hat{M}_{0j} + g_{00} \hat{M}_{ij})$$

$$= -i \hat{M}_{ij} = -i \varepsilon_{ijk} J_k$$

となって，交換関係(738)を得る．

■演算子 A, B の交換関係 (740) の導出

演算子 (739): $A \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{J} + i\mathbf{K})$, $B \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{J} - i\mathbf{K})$ に対して

$$[A_i, A_j] = \frac{1}{4}([J_i, J_j] + i[J_i, K_j] + i[K_i, J_j] + (+i)^2[K_i, K_j]),$$

$$[B_i, B_j] = \frac{1}{4}([J_i, J_j] - i[J_i, K_j] - i[K_i, J_j] + (-i)^2[K_i, K_j]),$$

$$[A_i, B_j] = \frac{1}{4}([J_i, J_j] - i[J_i, K_j] + i[K_i, J_j] + (+i)(-i)[K_i, K_j])$$

であり, ここに交換関係 (738):

$$[J_i, J_j] = -[K_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = [K_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k$$

を代入すると, 式 (740) を得る.

12.1 節の原稿

ここでは場のタイプが変換則を規定する Lorentz 群の表現によって分類されることを論じ、Lorentz 群の有用な表現として $SL(2, \mathbb{C})$ 表現を紹介する [23, pp.4–9]. これはスピン $1/2$ の粒子を記述する、古典的な対応物を持たない Dirac 場の変換則を説明する準備にもなる.

空間反転・時間反転を含まず、したがって恒等変換と連続的に繋がる Lorentz 変換を本義 Lorentz 変換と呼ぶ [9, pp.36–42] [23, pp.2–3]. 本義 Lorentz 変換は座標変換の係数行列 $\Lambda = (\Lambda^\mu{}_\nu)$ が行列式 $\det \Lambda = +1$ を満たし、 $SO(3, 1)$ と呼ばれる群を成す. (これは空間回転が $SO(3)$ 行列で表されるのと同様に理解できる.) そこで“抽象的”な本義 Lorentz 変換の群 $SO(3, 1)$ の元を、“生成子” $\hat{M}_{\rho\sigma}$ の指数 (733) の形に書こう. ここで元 $\hat{\Lambda}$ は言わば個々の Lorentz 変換の“名前”である. また Lorentz 対称性に付随する保存量が系の 4 元角運動量であることを踏まえ [4, pp.45–46, pp.87–90] [17, pp.39–43], 生成子に 4 元角運動量と同じ文字 M を用いている. さらに Minkowski 時空の世界間隔の不変性は、Lorentz 変換のパラメータ $\varepsilon^{\rho\sigma}$ の添字に関する反対称性を意味することを思い出すと [4, pp.45–46] [17, pp.39–40], 生成子の対称部分は式 (733) に寄与を持たないため、最初から生成子は反対称として良い. 群の表現はその定義により抽象的な元と同じ掛け算則を満たすので、生成子に課される交換関係 (代数) を見出すには、例えば座標 x^μ の上での表現行列 $M_{\rho\sigma}$ の交換関係を調べれば充分である. 座標上の表現行列は (μ, ν) 成分 (734) を持つ 4×4 行列 $M_{\rho\sigma} (= -M_{\sigma\rho})$ である (導出スライド参照). ところ

が、この行列(734)は交換関係(735)を満たす(導出スライド参照)。したがって抽象的な Lorentz 変換(733)の“生成子” $\hat{M}_{\rho\sigma}$ もまた、式(735)と同様の交換関係を満たさねばならない。これが求めていた4元角運動量の代数である。

一般に N 成分の場 $\varphi_i(x)$ を考えると ($i = 1, \dots, N$)、その値は Lorentz 変換 $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ に伴い線形変換(736)を受けると期待される。ここに x と x' はそれぞれ時空の同一点の古い座標と新しい座標である。また式(736)第2式は第1式の行列表記であり、 N 成分 $\varphi_i(x)$ を縦に並べたベクトル $\varphi(x)$ を定義している。実際、線形変換は逆変換もまた線形変換となるので、相対性原理と整合的である。ところが Lorentz 変換(736)の繰り返しもまた Lorentz 変換なので、このとき $N \times N$ の係数行列 $D(\Lambda)$ は群を成し、したがって Lorentz 群の表現行列となる。そこで Lorentz 群の(既約)表現を全て見出せば、表現行列に応じた変換則(736)で定義される、あらゆる可能な場のタイプを尽くすことができる。

Lorentz 群の表現 $D(\hat{\Lambda})$ は生成子の表現 $D(\hat{M}_{\mu\nu})$ で決まる。ところが表現 $D(\hat{M}_{\mu\nu})$ もまた生成子 $\hat{M}_{\mu\nu}$ の交換関係(735)を満たさなければならない。ここで $\hat{M}_{\mu\nu}$ の各成分を空間-空間成分と時間-空間成分の2種類に分けて式(737)のように書こう。このとき式(142),(143)の箇所で見たように、演算子 J, K はそれぞれ空間回転と Lorentz ブーストを生成する。 $\hat{M}_{\mu\nu}$ の交換関係(735)は J_i, K_i に対する交換関係(738)に焼き直される(導出スライド参照)。さらに新たな演算子(739)を定義すると、これらは角運動量の交換関係(740)を満たすスピン演算子となる(導出スライド参照)。逆に言えば生成子 J, K は

スピン A, B の合成角運動量であり，したがって Lorentz 群はスピン A, B の直積表現で与えられる^{*145}．こうして Lorentz 群の (有限次元) 既約表現の各々は，整数または半整数をとるスピン A, B の大きさに関する固有値の組 (A, B) で指定される．表現 (A, B) のベクトルとして変換する場は $(2A + 1)(2B + 1)$ 成分場 (741) であり，ここに a, b はスピン成分 A_3, B_3 の固有値である．これで可能な場のタイプを全て見出したことになる．

最も簡単な表現として $(A, B) = (0, 1/2)$ および $(A, B) = (1/2, 0)$ の場合を考えよう．まず表現 $(A, B) = (0, 1/2)$ に対する場 (741) は，スピン成分の固有値が $a = 0, b = \pm 1/2$ の 2 通りの値をとり得るので，2 成分である．そのような場を $\xi_\alpha(x)$ ($\alpha = 1, 2$) と表記しよう．また A -スピン， B -スピンの表現は式 (742) で与えられる．ここから J, K の表現は (743) となる．ところで Lorentz 変換 (733) は，回転とブーストに分けて式 (744) のように書ける．よってその表現行列は， (α, β) 成分 (745) を持つ 2×2 行列 $a = (a_\alpha^\beta)$ になる．Pauli 行列はトレースレスなので，公式 (321) より行列 a は $\det a = 1$ を満たす．そして実数パラメーター θ, ω を変化させると a は 2×2 の複素数の行列全体を動くため， $SL(2, \mathbb{C})$ 群を成す^{*146}．こうして Lorentz 群 $SO(3, 1)$ は 1 つの方法として， $SL(2, \mathbb{C})$ 群で表現できることになる．ただし 2 つの群の大域的な構造は異

^{*145} 実際 Lorentz 群の元 (733), (744) は A, B -スピンの指数の積 $e^{(i\theta + \omega) \cdot A} e^{(i\theta - \omega) \cdot B}$ で表される．

^{*146} $SL(2, \mathbb{C})$ 群は 2 次元複素特殊線形群とも呼ばれ，「S」は行列式が 1 であることを，「L」は線形を，「2」は 2 次元を，「C」は複素数を意味する．

なっており，Lorentz変換の係数 $\Lambda^\mu{}_\nu$ と $SL(2, \mathbb{C})$ 群要素 a の対応は1対2である [36, pp.217–219] [23, pp.10–11]. (これは空間回転にを表す $SO(3)$ と $SU(2)$ の元が1対2に対応することとアナログスである [36, p.221].)

$(0, 1/2)$ 表現における場 $\xi_\alpha(x)$ はLorentz変換に際して， $SL(2, \mathbb{C})$ 群要素(745)によって式(746)のように変換し， $SL(2, \mathbb{C})$ 群の2スピノルと呼ばれる.

次に表現 $(A, B) = (1/2, 0)$ に対応する場を点付きスピノル $\eta^{\dot{\alpha}}$ ($\dot{\alpha} = 1, 2$)で表す. 同様にLorentz変換の表現行列を求めると，場の変換則は式(747)のように求まる. この変換則に従う量 $\eta^{\dot{\alpha}}$ を $SL(2, \mathbb{C})$ 群の 2^* スピノルと呼ぶ.

参考 反対称Levi-Civitaテンソル(無限小パラメータ ε と区別するために ϵ で表す)で添字を下ろした量 $\eta_{\dot{\alpha}} = \eta^{\dot{\beta}} \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}$ が， ξ_α の複素共役 $(\xi_\alpha)^*$ と同様の変換則(748)に従うことが 2^* スピノルの名前の由来である.

非相対論的量子力学では，スピン $1/2$ の系の状態は空間回転の際に $SU(2)$ 行列で変換する2成分スピノルで表された. これに対しLorentz変換に対してスピン $1/2$ の粒子は $SL(2, \mathbb{C})$ 群要素で変換する2スピノルおよび 2^* スピノルで記述される^{*147}. 実際，2スピノルと 2^* スピノルを縦に並べてスピノル表示のDirac場を構成し [23, pp.25–27]，次

^{*147} 非相対論的理論とは対照的に，Lorentz変換に対しては粒子の密度はスカラーではあり得ないから，スピノルの変換行列にはユニタリー性の条件は課されない [30, pp.384–385].

いで γ 行列の表示に依らない Dirac 場の理論の定式化へと移行することができる。しかしながら本稿では γ 行列の具体的な表示に依拠せずに Dirac 場の理論を展開する。

12.2 スピノルと幾何学

■双線形形式 [1, pp.169–170]

スピノル

$$z = \begin{pmatrix} z^0 \\ z^1 \end{pmatrix} = z^A = |z\rangle, \quad z^0, z^1 \in \mathbb{C} \quad (749)$$

は $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ と $\mathrm{SU}(2)$ の基本表現を担う：

$$gz = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^0 \\ z^1 \end{pmatrix}, \quad g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \quad (750)$$

$$hz = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^0 \\ z^1 \end{pmatrix}. \quad h \in \mathrm{SU}(2) \quad (751)$$

スピノル z と w に関して反対称な双線形形式

$$(w, z) = w^A z^B \epsilon_{AB} = w^0 z^1 - w^1 z^0 \quad (752)$$

を定義すると、これは $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の下で不変である：

$$(gw, gz) = (w, z). \quad (753)$$

他方でスカラー積

$$\langle w|z\rangle = \overline{w^A} z^B \delta_{AB} = \overline{w^0} z^0 + \overline{w^1} z^1 \quad (754)$$

はSU(2)の下での不変性

$$\langle hw|hz\rangle = \langle w|z\rangle \quad (755)$$

を満たすものの、 $g \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ の作用下では一般に不変ではなく、

$$\langle gw|gz\rangle = \langle w|(g^\dagger g)z\rangle \quad (756)$$

となる。Lorentz変換 g をブースト $e^{\eta\sigma_3/2}$ ($\eta \geq 0$)と回転 $R, R' \in \text{SU}(2)$ の積

$$g = Re^{\eta\sigma_3/2}R'^{-1} \quad (757)$$

で表すと、上式(756)の $(g^\dagger g)$ においてブーストは相殺しない。

→ スカラー積は $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ のSU(2)部分群の選択に、

したがって空間座標軸の回転の自由度を除いたLorentz系の選択に依存する。

このことを反映して

$$J \begin{pmatrix} z^0 \\ z^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{z^1} \\ -\overline{z^0} \end{pmatrix}, \quad (758)$$

$$\langle w|z\rangle = (Jw, z). \quad (759)$$

■スピノルとベクトル [1, pp.171–172]

任意のスピノル $n \in \mathbb{C}^2$ に対して3次元の実ベクトル

$$\boldsymbol{n} = \langle n | \boldsymbol{\sigma} | n \rangle \quad (760)$$

を関係付けることができる．ベクトル(760)は明示的には

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 2\text{Re}(n^0 \overline{n^1}) \\ -2\text{Im}(n^0 \overline{n^1}) \\ |n^0|^2 - |n^1|^2 \end{pmatrix} \quad (761)$$

と表され，そのノルムは

$$|\boldsymbol{n}| = \langle n | n \rangle. \quad (762)$$

式(760),(761)をスピノルについて逆に解くと

$$|n\rangle \langle n| = \frac{1}{2}(|\boldsymbol{n}| \mathbb{1} + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \quad (763)$$

となる．ベクトル(760),(761)はスピノルの2次なので，スピノルは言わばベクトル(幾何学)の“平方根”と呼べる．

スピノル n と $e^{i\phi}n$ は明らかに同じベクトル (760) を与えるので、スピノルはベクトルに加えて位相 ϕ の情報を持つ (図56)。

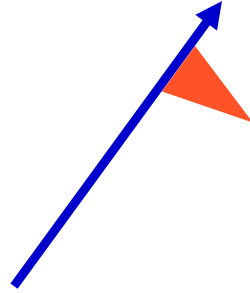


図56 スピノルの Penrose 表現：位相を表す旗(flag)を持つベクトル

スピノル n を Minkowski 空間のベクトル

$$n^\mu = \langle n | \sigma^\mu | n \rangle \quad (764)$$

に關係付けることもできる ($\sigma^\mu \equiv (\mathbb{1}, \boldsymbol{\sigma})$). 実際, 式 (764) はスピノルに対する $SL(2, \mathbb{C})$ の作用の下でベクトルとして変換する. またノルムの式 (762) より

$$n^0 = \langle n | n \rangle = |\boldsymbol{n}|, \quad \therefore n_\mu n^\mu = (n^0)^2 - |\boldsymbol{n}|^2 = 0 \quad (765)$$

となるので, ベクトル (764) はヌルである.

■コヒーレント状態とスピノル [1, pp.172–173]

8.3.4項で導入したコヒーレント状態 $|j, \mathbf{n}\rangle$ とスピノルの関係を調べる.

まずスピン $j = 1/2$ の系のコヒーレント状態 $|j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\rangle$ にはスピノル $n = (1, 0)$ が対応する. これを回転したスピノル

$$|n\rangle = |1/2, \mathbf{n}\rangle \quad (766)$$

もまたノルムが単位に規格化されており, 式(760)を通じて何らかの単位ベクトル $\mathbf{n}$ に関係付けられている. さらに状態(766)でのスピン成分 S の期待値は,

$$\langle n | \frac{\mathbf{S}}{\hbar} | n \rangle = \langle n | \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} | n \rangle = \frac{1}{2} \mathbf{n} = j \mathbf{n} \quad (767)$$

と計算されるので, $\mathbf{n}$ はコヒーレント状態のスピンの向きに他ならない.

なおスピン j 表現のコヒーレント状態は単に $2j$ 個の同じスピノル n のテンソル積

$$|j, \mathbf{n}\rangle = n \otimes \cdots \otimes n. \quad (768)$$

■スピノルの関数上のSU(2)表現 [1, pp.173–174]

SU(2)のスピン j 既約表現には対称テンソル $y^{A_1 \cdots A_{2j}}$ (8.2.2項)の代わりに、スピノル z の $2j$ 次の完全対称な多項式関数

$$f(z) = y^{A_1 \cdots A_{2j}} z_{A_1} \cdots z_{A_{2j}} \quad (769)$$

を利用できる。スピノル関数(769)は同次条件

$$f(\lambda z) = \lambda^{2j} f(z) \quad (770)$$

を満たす。SU(2)の作用は

$$(Uf)(z) = f(U^T z). \quad (771)$$

状態 $y^{A_1 \cdots A_{2j}}$ をコヒーレント状態のスピノル(766),(768)に選ぶと、スピン $1/2$ のコヒーレント状態は線形関数

$$f_n(z) \sim n^A z_A \sim \langle z|n \rangle, \quad (772)$$

スピン j 表現のコヒーレント状態は式(772)の $2j$ 乗

$$f_n^{(j)}(z) = \sqrt{\frac{2j+1}{\pi}} \langle z|n \rangle^{2j}. \quad (773)$$

12.2節の式の導出など

■ (w, z) の $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 不変性 (753) の確認

$g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ に対して $\det g = 1$ に注意すると,

$$\begin{aligned}(gw, gz) &= (g^A_C w^C)(g^B_D z^D) \epsilon_{AB} = w^C z^D (g^A_C g^B_D \epsilon_{AB}) = w^C z^D (\epsilon_{CD} \det g) \\ &= (w, z) : (753).\end{aligned}$$

参考 特に $h \in \mathrm{SU}(2)$ の下での不変性に限れば, $\epsilon = (\epsilon_{AB})$ の不変性 $h\epsilon h^T = \epsilon$ を繰り返し用いると,

$$(w, z) = w^T \epsilon z \rightarrow (Uw)^T (h\epsilon h^T) (hz) = w^T (h\epsilon h^T) z = w^T \epsilon z$$

と確かめられる.

■ $\langle w|z\rangle$ の $SU(2)$ 不変性 (755) の確認

$h \in SU(2)$ のユニタリー性

$$\sum_A \overline{h^A_C} h^A_D = \sum_A (h^\dagger)_C{}^A h^A_D = \delta_{CD}$$

に注意すると,

$$\langle hw|hz\rangle = \overline{(h^A_C w^C)} (h^B_D z^D) \delta_{AB} = \overline{w^C} z^D \left(\sum_A \overline{h^A_C} h^A_D \right) = \langle w|z\rangle : (755).$$

あるいは行列表記では見通し良く

$$\langle w|z\rangle = w^\dagger z \rightarrow (hw)^\dagger (hz) = w^\dagger h^\dagger h z = w^\dagger z$$

と確かめられる.

■ $SL(2, \mathbb{C})$ 行列 g を回転とブーストに分けた式 (757) の説明 [1, pp.185–186]

回転とブーストの生成子は一般に非可換なので“指数法則”は成り立たないものの、任意の Lorentz 変換が回転とブーストの合成により実現できるならば、群は掛け算則を保持するように定義されるので、適切に選んだ変換パラメータに対して $SL(2, \mathbb{C})$ 行列が回転とブーストの表現行列の積に分解できること自体は正しい。実際 $SL(2, \mathbb{C})$ 行列 g の表す Lorentz 変換を能動的変換として考えると直観的に納得できるように、Lorentz 変換はブースト $e^{\eta\sigma_3/2}$ ($\eta \geq 0$) と回転 $R, R' \in SU(2)$ の合成 (757):

$$g = R e^{\eta\sigma_3/2} R'^{-1}$$

で表される。ここで式 (745) で見たように、中央の指数 $e^{\eta\sigma_3/2}$ は z 軸方向への Lorentz ブーストを表す。

式 (757) を一層説得的に説明するために、回転 $R, R' \in SU(2)$ は Euler 角 (α, β, γ) を用いて

$$R = e^{-i\sigma_3\alpha/2} e^{-i\sigma_2\beta/2} e^{-i\sigma_3\gamma/2}, \quad R' = e^{-i\sigma_3\alpha'/2} e^{-i\sigma_2\beta'/2} e^{-i\sigma_3\gamma'/2}$$

と書けることを思い出そう (式 (503))。これを式 (757) に代入すると、

$$g = \left(e^{-i\sigma_3\alpha/2} e^{-i\sigma_2\beta/2} \right) \left(e^{-i\sigma_3\gamma/2} e^{\eta\sigma_3/2} e^{+i\sigma_3\gamma'/2} \right) \left(e^{+i\sigma_2\beta'/2} e^{+i\sigma_3\alpha'/2} \right)$$

$$=R_n e^{-i\sigma_3 z/2} R_{n'}^{-1} \quad (774)$$

が得られる．ここに

$$R_n \equiv e^{-i\sigma_3 \alpha/2} e^{-i\sigma_2 \beta/2}, \quad R_{n'} \equiv e^{-i\sigma_3 \alpha'/2} e^{-i\sigma_2 \beta'/2}$$

はちょうど z 軸の方向単位ベクトル $(0, 0, 1)$ を，天頂角 β (または β')，方位角 α (または α') の向き n (または n') に回転させる $SU(2)$ 行列となっている．また中央の行列において指数の因子を $z = (\gamma - \gamma') + i\eta$ に同定した．このとき $SL(2, \mathbb{C})$ 行列 (774) は与えられたベクトル n' を $+z$ 向きに回転子，次いで z 軸周りの回転 $e^{-i(\gamma - \gamma')\sigma_3/2}$ と z 軸方向へのブースト $e^{\eta\sigma_3/2}$ を施し (これらは可換)，最後に依然として 3 次元空間において $+z$ 向きの得られたベクトルを n 向きに回転する，一連の能動的な Lorentz 変換を表す．

こうして式 (774) は，したがってもとの式 (757) は，Lorentz 変換 $g \in SL(2, \mathbb{C})$ の一般的表式として適正と考えられる．

■スピノル n に対応するベクトル n の式(761)の確認

Pauli行列の具体的表式を用いると、 n の式(760)は

$$\begin{aligned}n_x &= \begin{pmatrix} \overline{n^0} & \overline{n^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n^0 \\ n^1 \end{pmatrix} = 2\text{Re}(n^0 \overline{n^1}), \\n_y &= \begin{pmatrix} \overline{n^0} & \overline{n^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n^0 \\ n^1 \end{pmatrix} = -2\text{Im}(n^0 \overline{n^1}), \\n_z &= \begin{pmatrix} \overline{n^0} & \overline{n^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n^0 \\ n^1 \end{pmatrix} = |n^0|^2 - |n^1|^2\end{aligned}$$

を与えるので、式(761)を得る.

■ ノルムの式(762)の確認

3次元ベクトル(760): $n_i = \overline{n_A} \sigma_i^A{}_B n^B$ を2乗して*148, 公式(518):

$$\sigma_i^A{}_B \sigma_i^C{}_D = \delta_D^A \delta_B^C - \epsilon^{AC} \epsilon_{BD}$$

を適用すると,

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{n}|^2 &= \overline{n_A} n^B \overline{n_C} n^D \sigma_i^A{}_B \sigma_i^C{}_D = \overline{n_A} n^B \overline{n_C} n^D (\delta_D^A \delta_B^C - \epsilon^{AC} \epsilon_{BD}) \\ &= (\overline{n_A} n_A) (\overline{n_B} n_B) - (\epsilon^{AC} \overline{n_A} \overline{n_C}) (\epsilon_{BD} n^B n^D) \\ &= |\langle n | n \rangle|^2 \quad (\because \overline{n_A} n_A = \langle n | n \rangle) \end{aligned}$$

となるので, 式(762)が得られる.

*148 以降, 添字の上下で和をとるために, 文献 [1, p.171] にならって $\overline{n^A}$ を $\overline{n_A}$ と書く. これは添字を ϵ_{AB} との縮約で下ろした量ではなく, あくまで見かけの整合性を保つための細工に過ぎない.

■スピノル n について逆に解いた式(763)の確認

式(760): $n_i = \overline{n_C} \sigma_i^C{}_B n^D$ に $\sigma_i^A{}_B$ を縮約して, 公式(518)を利用すると

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma})^A{}_B &= n_i \sigma_i^A{}_B = \frac{1}{2} \overline{n_C} n^D \sigma_i^A{}_B \sigma_i^C{}_D = \overline{n_C} n^D (\delta_D^A \delta_B^C - \epsilon^{AC} \epsilon_{BD}) \\ &= \overline{n_B} n^A - \epsilon^{AC} \epsilon_{BD} \overline{n_C} n^D. \end{aligned}$$

最右辺に

$$\epsilon^{AC} \epsilon_{BD} \overline{n_C} n^D = (\delta_B^A \delta_D^C - \delta_D^A \delta_B^C) \overline{n_C} n^D = \delta_B^A \overline{n_C} n^C - \overline{n_B} n^A$$

を代入すると,

$$(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma})^A{}_B = 2 \overline{n_B} n^A - \delta_B^A \overline{n_C} n^C = 2(|n\rangle \langle n|)^A{}_B - |\boldsymbol{n}|(\mathbb{1})^A{}_B \quad (\because \text{式(762)} : |\vec{n}| = \overline{n_C} n^C)$$

とまとめられるので, 式(763)を得る.

■式(764)の n^μ がベクトルとして変換することの確認

座標変換の係数 $\Lambda^\mu{}_\nu$ で特徴付けられる Lorentz 変換の $SL(2, \mathbb{C})$ 表現行列(745):

$$a = \exp \left(i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right)$$

でスピノルは変換する．そこで

$$\Lambda^\mu{}_\nu \sigma^\nu = a^\dagger \sigma^\mu a \quad (775)$$

が成り立つことを示せば充分である [23, p.10].

まず無限小変換の場合を考えると

$$\begin{aligned} a^\dagger \sigma^\mu a &\simeq \left(1 - \frac{i}{2} \theta_k \sigma_k - \frac{1}{2} \omega_k \sigma_k \right) \sigma^\mu \left(1 + \frac{i}{2} \theta_l \sigma_l - \frac{1}{2} \omega_l \sigma_l \right) \\ &\simeq \sigma^\mu - \frac{i}{2} \theta_k [\sigma_k, \sigma^\mu] - \frac{1}{2} \omega_k \{ \sigma_k, \sigma^\mu \} \\ &= \begin{cases} 1 - \omega_k \sigma_k & (\mu = 0) \\ \sigma_i + \varepsilon_{kil} \theta_k \sigma_l - \omega_i & (\mu = i) \end{cases} \end{aligned}$$

となる．ただし最後の等号でPauli行列の(反)交換関係(477),(478)を用いた．他方,
 $\theta \equiv -(\varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12})$, $\omega \equiv (\varepsilon_{10}, \varepsilon_{20}, \varepsilon_{30})$ より

$$\begin{aligned}\Lambda^\mu{}_\nu \sigma^\nu &\simeq (\delta^\mu{}_\nu + \varepsilon^\mu{}_\nu) \sigma^\nu \\ &= \begin{cases} 1 + \varepsilon_{0i} \sigma_i & (\mu = 0) \\ \sigma_i - \varepsilon_{i0} - \varepsilon_{ik} \sigma_k & (\mu = i) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - \omega_k \sigma_k & (\mu = 0) \\ \sigma_i - \omega_i + \varepsilon_{ikl} \theta_l \sigma_k & (\mu = i) \end{cases}\end{aligned}$$

なので，式(775)の両辺は無限小パラメータの1次までの近似で正確に一致する．
有限の変換パラメータ $\varepsilon_{\mu\nu}$ の変換行列 $a(\varepsilon)$, $\Lambda(\varepsilon)$ に対しても， $N \gg 1$ として無限小パラメータ ε/N での変換が式(775)を満たすことを繰り返し用いれば，

$$\begin{aligned}a^\dagger(\varepsilon) \sigma^\mu a(\varepsilon) &= a^\dagger(\varepsilon/N) \cdots a^\dagger(\varepsilon/N) \sigma^\mu a(\varepsilon/N) \cdots a(\varepsilon/N) \\ &= \Lambda(\varepsilon/N)^\mu{}_{\nu_1} \cdots \Lambda(\varepsilon/N)^{\nu_{N-1}}{}_{\nu_N} \sigma^{\nu_N} \\ &= \Lambda(\varepsilon)^\mu{}_\nu \sigma^\nu : (775)\end{aligned}$$

が成り立つ．

なお式(764)の n^μ がベクトルとして変換することは，角運動量の期待値が3次元空間でベクトルとして回転すること(式(451))と比較される結果である．

■式(771): $(Uf)(z) = f(U^T z)$ の理由

$f(z)$ の式(769)の中で $y^{A_1 \cdots A_{2j}} \rightarrow U^{A_1}_{B_1} \cdots U^{A_{2j}}_{B_{2j}} y^{B_1 \cdots B_{2j}}$ とすると,

$$\begin{aligned} f(z) &\rightarrow y^{B_1 \cdots B_{2j}} (z_{A_1} U^{A_1}_{B_1}) \cdots (z_{A_{2j}} U^{A_{2j}}_{B_{2j}}) \\ &= y^{B_1 \cdots B_{2j}} ((U^T)_{B_1}^{A_1} z_{A_1}) \cdots ((U^T)_{B_{2j}}^{A_{2j}} z_{A_{2j}}) = f(U^T z) \end{aligned}$$

となる.

12.2節の原稿

12.1節では $SL(2, \mathbb{C})$ 群がLorentz変換の表現を担うことを見た．これを踏まえるとループ量子重力の準備として，8.2.2項で導入したスピノル算の発展的な話題に取り組むことができる．ここでは主にスピノルの幾何学との関係に焦点を当てる．実にスピノルは3次元および4次元の物理的対象，回転，およびLorentz変換を巧妙にコードしているのである．

スピノル $z \in \mathbb{C}^2$ は2次元の複素ベクトルであり，文脈に応じて式(749)のような表記を使い分ける． $SL(2, \mathbb{C})$ の基本表現もまた $SU(2)$ の基本表現と同じベクトル空間 $\mathbb{C}^2$ の上で定義されており，したがってスピノルは式(750)のように $SL(2, \mathbb{C})$ の基本表現を担う．ここに $SL(2, \mathbb{C})$ 行列 g の行列式は $ad - bc = 1$ である．またスピノルは定義により $SU(2)$ 部分群の表現(751)を担う．ただし $SU(2)$ 行列の一般的表式(489)を考慮しており，以降しばらく複素共役をバーで表す^{*149}．また一貫して $SL(2, \mathbb{C})$ の要素を g ， $SU(2)$ の要素を h で表すことにする．

スピノル z と w に対して，2種類の双線形形式を定義できる．1つ目はLevi-Civita記号での縮約(752)であり，これは z と w に関して反対称であることが見て取れる．また式(752)は $SL(2, \mathbb{C})$ の下での不変性(753)を満たす(導出スライド参照)．

2つ目はスカラー積(754)であり，これは $SU(2)$ の下での不変性(755)を満たす(導出ス

^{*149} しばしば添字を持つ量の複素共役をとるので，*よりもバーを用いる方が見やすい．

[ライド参照](#)). しかしながらスカラー積(754)は $SL(2, \mathbb{C})$ の下では一般に不変ではなく, 実際, $SU(2)$ 不変性(755)の導出過程で見たように, $SL(2, \mathbb{C})$ 行列 g に対しては式(756)が成り立つ; 特に g を $SU(2)$ 行列 h に選ぶと, 式(756)右辺においてユニタリー性 $h^\dagger h = 1$ が成り立つため, $SU(2)$ 不変性(755)が得られる.

他方で $SL(2, \mathbb{C})$ の基本表現はユニタリーでなく, それ故, 内積(754)を不変に保たない. この点をあからさまに見るために, Lorentz変換 g をブースト $e^{\eta\sigma_3/2}$ ($\eta \geq 0$)と回転 $R, R' \in SU(2)$ の積(757)で表そう ([導出スライドで補足](#)). すると $(g^\dagger g)$ においてブーストは相殺しない.

したがってスカラー積は $SL(2, \mathbb{C})$ の $SU(2)$ 部分群の選択に依存する. 言い換えればスカラー積は空間座標軸の回転の自由度を除いたLorentz系の選択に関する情報を有している. 同じ情報は式(758)で定義される写像 $J: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ にコードできる. 実際, 容易に式(759)が成り立つことが分かる. 言葉では: (基準系に依らない)双線形形式と(基準系に依る)写像 J を用いて, (基準系に依る)スカラー積を定義できる. これらがスピノル空間の基本的な構造である.

数学者Michael Atiyahの述べるところによれば, スピノルの代数は明快だが, その幾何学的な意義は謎のままである. スピノルはある意味, 幾何学の“平方根”を表している. しかるに -1 の平方根を完全に理解するには数世紀かかっており, スピノルについても同じことが当てはまるかもしれない [1, p.169].

ここでスピノルが“幾何学の平方根”であると言われる理由を説明する. 任意のスピノ

ル $n \in \mathbb{C}^2$ に対して3次元の実ベクトル(760)を関係付けることができる^{*150}。式(760)はスピノル n で表される状態におけるスピン成分の期待値を求める計算に相当する。実際Pauli行列はHermiteなので、その2次形式として定義されるベクトル(760)は実である。ベクトル(760)は明示的には式(761)のように表される(導出スライド参照)。式(761)の右辺からも改めて、ベクトル n は実であることが明白に見て取れる。そのノルムは式(762)のようにスピノルのノルムに関係付けられる(導出スライド参照)。式(760),(761)をスピノルについて逆に解くと式(763)となり、ここに右辺第1項の $\mathbb{1}$ は単位行列である(導出スライド参照)。ベクトル(760),(761)はスピノルの2次なので、スピノルは言わばベクトルの“平方根”と呼べる。

ところが実数 x には2つの平方根 $\pm\sqrt{x}$ がある。同様に、ベクトルには複数のスピノル“平方根”がある。実際、位相因子 $e^{i\phi}$ だけ異なる2つのスピノル n と $e^{i\phi}n$ は明らかに同じベクトルを与える。したがってスピノルはベクトルに加えて、位相 ϕ の情報を持つ。そこでRoger Penroseは図56のように、小さな旗(flag)を持つ矢印としてスピノルを描いている：矢印はベクトルを表し、矢印の周りの旗の回転角が位相を表す。なるほど、スピノルを2成分 n^0, n^1 の実部と虚部の代わりに、ベクトル n の3成分と位相 ϕ で指定することもでき、いずれも自由度は4である。

^{*150} (ここでベクトル n が単位ベクトルである必要はなく、あくまでスピノル n に対応することを表記の上で明確にするために、ベクトル n に同じ文字 n を用いている。

ここまではスピノル n が、3次元空間のベクトル n に関係付けられることを見てきた。これに対しスピノルには4次元のMinkowski空間における解釈を与えることもできる。そのためには、0番目に単位行列を付け加えて4つ組にしたPauli行列 $\sigma^\mu = (1, \sigma)$ を用い、定義(760)を式(764)のように拡張すれば充分である。著しいことに、これはスピノルに対する $SL(2, \mathbb{C})$ の作用の下でベクトルとして変換する([導出スライド参照](#))。またノルムの式(762)より式(765)が成り立つので、ベクトル(764)はヌルである。ヌル性により4元ベクトル n^μ の自由度は3であり、また式(764)より依然として位相の不定性があるため、再びスピノルの自由度は4である。まとめると、スピノルは空間におけるベクトルと、時空におけるヌル・ベクトルを定める。

8.3.4項では角運動量が n 向きの固有状態として $SU(2)$ コヒーレント状態 $|j, n\rangle$ を導入した。ここでコヒーレント状態とスピノルの関係を調べておく。まずスピン $j = 1/2$ の系に対して、スピン $+z$ 向きのコヒーレント状態は(規格化された)固有ベクトル $|j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\rangle$ であり、行列表示では単位のノルムを持つスピノル $n = (1, 0)$ が対応する。次に $j = \frac{1}{2}$ 基本表現における他の全てのコヒーレント状態は、この状態 $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ を回転することで得られ、また回転はスピノルのノルムを保つ。よってスピノル $(1, 0)$ を回転して得られる、全ての規格化されたスピノル(766)は基本表現におけるコヒーレント状態を表し、ここにスピノル(766)は式(760)を通じて何らかのベクトル n に関係付けられている。また式(766)より n は単位ベクトルである。さらに式(760)より状態(766)でのスピン成分 S の期待値は、この単位ベクトル n を用いて式(767)のように計算され

る．ここから単位ベクトル n はコヒーレント状態のスピンの向きに他ならないことが判明する．まとめると規格化されたスピノルは，それが定義する規格化された3元ベクトルに対するコヒーレント状態である．これは極めて著しい性質であり，結論自体は分かりやすい．なおスピン j 表現のコヒーレント状態は単に $2j$ 個の同じスピノル n のテンソル積(768)で与えられる．

8.2.2項では $SU(2)$ のスピン j 既約表現空間 $\mathcal{H}_j$ を， $2j$ 個の添字を持つ対称テンソル $y^{A_1 \cdots A_{2j}}$ の空間として構成した．ところで $SL(2, \mathbb{C})$ の基本表現はユニタリーでないのに対し，ループ量子重力に取り組む際に，我々は“ Y_γ 写像”で定義される $SL(2, \mathbb{C})$ ユニタリー表現を利用する予定がある．実は $SU(2)$ 表現を $SL(2, \mathbb{C})$ ユニタリー表現に関係付ける上で有用となる，スピン空間 $\mathcal{H}_j$ の今一つの実現方法がある．それはスピノルの関数 $f(z)$ の空間上で定義される．具体的には対称テンソル $y^{A_1 \cdots A_{2j}}$ で表される状態には，スピノル z の $2j$ 次の多項式関数(769)が対応付けられる．テンソル $y^{A_1 \cdots A_{2j}}$ の対称性より，多項式(769)は任意の2つの z_A の入れ替えに関して対称となっていることが見て取れる．またスピノル関数(769)は同次条件(770)を満たす．明らかに $SU(2)$ はその転置の作用(771)を通じて，これらの関数に作用する(導出スライド参照)．

この表現においてコヒーレント状態がどのように見えるかを調べよう．そのためには単にスピノル関数(769)における状態 $y^{A_1 \cdots A_{2j}}$ を，コヒーレント状態のスピノル(766),(768)に選びさえすれば良い．スピン $1/2$ に対して，規格化を別にすれば，明らかにコヒーレント状態は線形関数(772)によって非常に簡単に表される．スピン j 表現の

コヒーレント状態は単に式(772)の $2j$ 乗(773)で与えられる．式(773)では形式的に規格化定数 $\sqrt{(2j+1)/\pi}$ を明示したものの，我々はそもそも規格化条件を明示しておらず，またこの規格化定数が本稿で後に重要な役割を演じることもない．

12.3 Grassmann 代数と Grassmann 場

■ Grassmann 代数 [22, pp.315–316]

Grassmann 変数 (生成子) $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ は反交換関係

$$\{\theta_i, \theta_j\} = 0 \quad (776)$$

を満たす量として定義される. よって $\theta_i^2 = 0$ となるから,
 n 個の生成子 θ_i の最も一般的な “関数” は

$$f(p) = p_0 + \sum p_i \theta_i + \sum p_{ij} \theta_i \theta_j + \dots + p_{12\dots n} \theta_1 \theta_2 \dots \theta_n \quad (777)$$

の形を持つ ($\sum$ は $1 \leq i < j < \dots \leq n$ を満たす添字 $i, j, \dots$ に関する和).

■ Grassmann 数の微分 [22, pp.316–318]

Grassmann 変数 θ_i による微分 $\partial/\partial\theta_i$ を定義するには, 式 (777) の各項の微分

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i} (\theta_{j_1} \theta_{j_2} \dots \theta_{j_\omega}) \quad (778)$$

を定義すれば十分である. まず

$$\frac{\partial\theta_i}{\partial\theta_j} = \delta_{ij}. \quad (779)$$

θ_i を1つだけ含む積 $\theta_{j_1} \theta_{j_2} \cdots \theta_{j_\omega}$ の微分 (778) は左微分の約束

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_i} (\theta_{j_1} \theta_{j_2} \cdots \theta_{j_{k-1}} \theta_i \theta_{j_{k+1}} \cdots \theta_{j_\omega}) &= (-1)^{k-1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} \theta_i \right) \theta_{j_1} \theta_{j_2} \cdots \theta_{j_{k-1}} \theta_{j_{k+1}} \cdots \theta_{j_\omega} \\ &= (-1)^{k-1} \theta_{j_1} \theta_{j_2} \cdots \theta_{j_{k-1}} \theta_{j_{k+1}} \cdots \theta_{j_\omega} \end{aligned} \quad (780)$$

で定義する．なお，微分の定義により反交換関係

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right\} = 0, \quad \left\{ \theta_i, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right\} = \delta_{ij} \quad (781)$$

が成立する．

■ Grassmann 場と汎関数微分 [22, pp.318–320]

Grassmann 変数 θ_i を時空座標 x でラベルされる Grassmann 場 $\theta(x)$ に読み替える．

反交換関係 (776) を引き継ぎ，Grassmann 場は

$$\{\theta(x), \theta(y)\} = 0 \quad (782)$$

を満たす．Grassmann 汎関数は式 (777) にならった形で定義できる (f_i は通常関数)：

$$F[\theta] = f_0 + \int d^4x f_1(x) \theta(x) + \iint d^4x d^4y f_2(x, y) \theta(x) \theta(y) + \cdots \quad (783)$$

Grassmann 場による汎関数微分 $\delta/\delta\theta(x)$ を，左微分の約束(780)と類似の性質

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta\theta(x)} \{\theta(x_1)\theta(x_2)\theta(x_3)\cdots\theta(x_n)\} \\ &= \delta^{(4)}(x-x_1)\{\theta(x_2)\theta(x_3)\cdots\theta(x_n)\} - \delta^{(4)}(x-x_2)\{\theta(x_1)\theta(x_3)\cdots\theta(x_n)\} \\ & \quad + \cdots + (-1)^{n-1}\delta^{(4)}(x-x_n)\{\theta(x_1)\theta(x_2)\cdots\theta(x_{n-1})\} \end{aligned} \quad (784)$$

を満たす線形演算子として“定義”する．このとき次の関係式が成立する．

- 通常の汎関数微分(175)と同様の関係

$$\frac{\delta\theta(x)}{\delta\theta(y)} = \delta^{(4)}(x-y). \quad (785)$$

- 微分演算子の反交換関係

$$\left\{ \frac{\delta}{\delta\theta(x)}, \frac{\delta}{\delta\theta(y)} \right\} = 0, \quad \left\{ \theta(x), \frac{\delta}{\delta\theta(y)} \right\} = \delta^{(4)}(x-y). \quad (786)$$

$$\frac{\delta\theta(x)}{\delta\tilde{\theta}(y)} = 0, \quad \frac{\delta\tilde{\theta}(x)}{\delta\theta(y)} = 0, \quad (787)$$

$$\{\theta(x), \tilde{\theta}(y)\} = 0, \quad \left\{ \frac{\delta}{\delta\theta(x)}, \frac{\delta}{\delta\tilde{\theta}(y)} \right\} = 0, \quad (788)$$

$$\left\{ \theta(x), \frac{\delta}{\delta\tilde{\theta}(y)} \right\} = 0, \quad \left\{ \tilde{\theta}(x), \frac{\delta}{\delta\theta(y)} \right\} = 0 \quad (789)$$

を満たす互いに独立な2つの Grassmann 場の組 $\theta(x), \tilde{\theta}(x)$ に興味を持たれる。
既知の積分核 $K(x, y)$ と独立な Grassmann 場 $\theta, \tilde{\theta}$ から成る汎関数

$$[\theta K \tilde{\theta}] = \int d^4x d^4y \theta(x) K(x, y) \tilde{\theta}(y) \quad (790)$$

に対して、式(787),(788),(789)より、次の有用な公式が成り立つ：

$$\frac{\delta[\theta K \tilde{\theta}]}{\delta\tilde{\theta}(z)} = - \int d^4x \theta(x) K(x, z), \quad (791)$$

$$\frac{\delta}{\delta\theta(z)} \exp i[\theta K \tilde{\theta}] = i \frac{\delta[\theta K \tilde{\theta}]}{\delta\theta(z)} \exp i[\theta K \tilde{\theta}]. \quad (792)$$

12.3節の式の導出など

■反交換関係(781)の説明

例えば生成子 θ_i が $n = 2$ 個の場合に，式(781)を容易に証明できる [22, p.318].

実際 $n = 2$ を仮定すると，代数要素 $f(p)$ の式(777)は

$$f(p) = p_0 + p_1\theta_1 + p_2\theta_2 + p_{12}\theta_1\theta_2$$

の形に簡略化され，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta_j}f(p) &= p_1\delta_{1j} + p_2\delta_{2j} + p_{12}(\delta_{1j}\theta_2 - \delta_{2j}\theta_1), \\ \therefore \frac{\partial}{\partial\theta_i}\frac{\partial}{\partial\theta_j}f(p) &= p_{12}(\delta_{1j}\delta_{2i} - \delta_{2j}\delta_{1i}), \quad \therefore \left\{ \frac{\partial}{\partial\theta_i}, \frac{\partial}{\partial\theta_j} \right\} f(p) = 0\end{aligned}$$

となるので，第1式 $\left\{ \frac{\partial}{\partial\theta_i}, \frac{\partial}{\partial\theta_j} \right\} = 0$ が成立する.

第2式の確認に移ろう.

$$\begin{aligned}\theta_i\frac{\partial}{\partial\theta_j}f(p) &= \theta_i\{p_1\delta_{1j} + p_2\delta_{2j} + p_{12}(\delta_{1j}\theta_2 - \delta_{2j}\theta_1)\} \\ &= p_1\delta_{1j}\theta_1 + p_2\delta_{2j}\theta_i + p_{12}(\delta_{1j}\delta_{1i} + \delta_{2j}\delta_{2i})\theta_1\theta_2\end{aligned}$$

において $\delta_{1j}\delta_{1i} + \delta_{2j}\delta_{2i} = \delta_{ij}$ に気付くと,

$$\theta_i \frac{\partial}{\partial \theta_j} f(p) = p_1 \delta_{1j} \theta_1 + p_2 \delta_{2j} \theta_i + p_{12} \delta_{ij} \theta_1 \theta_2$$

と書ける. 他方, $\theta_j \theta_1 \theta_2 = 0$ とできることに注意すると

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} \theta_i f(p) = p_0 \delta_{ij} + p_1 (\delta_{ij} \theta_1 - \delta_{1j} \theta_i) + p_2 (\delta_{ij} \theta_2 - \delta_{2j} \theta_i)$$

であり, 以上2式を辺々足すと

$$\left\{ \theta_i, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right\} f(p) = \delta_{ij} f(p)$$

となるので, 第2式 $\left\{ \theta_i, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right\} = \delta_{ij}$ が成立する.

■反交換関係(786)の説明

式(781)の場合と同様に，汎関数(783)の右辺第3項までとった

$$F[\theta] = f_0 + \int d^4x' f_1(x')\theta(x') + \int d^4x' d^4y' f_2(x', y')\theta(x')\theta(y')$$

に対して反交換関係(786)を確かめる．ただしここでは δ 関数を $\delta^{(4)}(\dots) \rightarrow \delta(\dots)$ と略記する．まず

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\theta(y)} F[\theta] &= \int d^4x' f_1(x')\delta(x' - y) \\ &\quad + \int d^4x' d^4y' f_2(x', y')\{\delta(x' - y)\theta(y') - \theta(x')\delta(y' - y)\} \\ &= f_1(y) + \int d^4y' f_2(y, y')\theta(y') - \int d^4x' f_2(x', y)\theta(x'), \\ \therefore \frac{\delta}{\delta\theta(x)} \frac{\delta}{\delta\theta(y)} F[\theta] &= \int d^4y' f_2(y, y')\delta(y' - x) - \int d^4x' f_2(x', y)\delta(x' - x) \\ &= f_2(y, x) - f_2(x, y), \quad \therefore \left\{ \frac{\delta}{\delta\theta(x)}, \frac{\delta}{\delta\theta(y)} \right\} F[\theta] = 0 \end{aligned}$$

となるので, 第1式 $\left\{ \frac{\delta}{\delta\theta(x)}, \frac{\delta}{\delta\theta(y)} \right\} = 0$ が成立する.

第2式の確認に移ろう.

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta\theta(y)} \theta(x) F[\theta] \\ &= f_0 \delta(x-y) + \int d^4x' f_1(x') \{ \delta(x-y) \theta(x') - \delta(x'-y) \theta(x) \} \\ & \quad + \int d^4x' d^4y' f_2(x', y') \{ \delta(x-y) \theta(x') \theta(y') - \delta(x'-y) \theta(x) \theta(y') - \delta(y-y') \theta(x) \theta(x') \} \end{aligned}$$

において,

$$\begin{aligned} & \theta(x) \frac{\delta}{\delta\theta(y)} F[\theta] - \int d^4x' f_1(x') \delta(x'-y) \theta(x) \\ & \quad - \int d^4x' d^4y' f_2(x', y') \{ \delta(x'-y) \theta(x) \theta(y') + \delta(y-y') \theta(x) \theta(x') \} \\ &= \theta(x) \left[f_1(y) + \int d^4y' f_2(y, y') \theta(y') - \int d^4x' f_2(x', y) \theta(x') \right] \\ & \quad - \theta(x) f_1(y) - \int d^4y' f_2(y, y') \theta(x) \theta(y') + \int d^4x' f_2(x', y) \theta(x) \theta(x') \\ &= 0 \end{aligned}$$

より

$$\left\{ \theta(x), \frac{\delta}{\delta \theta(y)} \right\} F[\theta] = \delta(x-y) \left[f_0 + \int d^4x' f_1(x') \theta(x') + \int d^4x' d^4y' f_2(x', y') \theta(x') \theta(y') \right] \\ = \delta(x-y) F[\theta]$$

となるので、第2式 $\left\{ \theta(x), \frac{\delta}{\delta \theta(y)} \right\} = \delta(x-y)$ が成立する.

■ 公式(792)の証明

まず式(790)の因子を $[i] \equiv [\theta(x_i)K(x_i, y_i)\tilde{\theta}(y_i)]$ と略記すると、指数関数は

$$\exp i[\theta K \tilde{\theta}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \prod_{n=0}^{\infty} \int d^4x_i d^4y_i [i] \quad (793)$$

で定義される(ただし $\prod_{n=0}^{\infty} \int d^4x_i d^4y_i [i]$ は $n = 1$ に対して1と約束する).

$\theta_1 \equiv \theta(x_1), \tilde{\theta}_1 \equiv \tilde{\theta}(y_1), \theta_2 \equiv \theta(x_2), \tilde{\theta}_2 \equiv \tilde{\theta}(y_2)$ は式(788)よりいずれも反交換するので、

$$\theta_1 \tilde{\theta}_1 \theta_2 \tilde{\theta}_2 = \theta_2 \tilde{\theta}_2 \theta_1 \tilde{\theta}_1. \quad (\text{入れ替え } \theta_1 \leftrightarrow \theta_2, \tilde{\theta}_1 \leftrightarrow \tilde{\theta}_2 \text{ のそれぞれが奇置換})$$

すると[1]と[2]は交換するので、指数関数の展開(793)において、各因子 $[i]$ の順序は重要でない. さらに $\delta/\delta\theta(z)$ と $\delta/\delta\tilde{\theta}(z)$ は式(789)より $\theta(x_i), \tilde{\theta}(y_i)$ と反交換するから、各因子 $[i]$ と交換する [22, pp.319–320].

さて、式(793)の汎関数微分をとると

$$\frac{\delta}{\delta\theta(z)} \exp i[\theta K \tilde{\theta}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \left(\prod_{n=0}^{\infty} \int d^4x_i d^4y_i \right) \frac{\delta}{\delta\theta(z)} \prod_{i=1}^n [i].$$

ここで $\delta/\delta\theta(z)$ は式 (12.72b) により $\theta(x_i), \tilde{\theta}(y_i)$ と反交換するから,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta\theta(z)} \prod_{i=1}^n [i] &= \left\{ \frac{\delta\theta(x_1)}{\delta\theta(z)} K(x_1, y_1) \tilde{\theta}(y_1) - \theta(x_1) K(x_1, y_1) \frac{\delta\tilde{\theta}(y_1)}{\delta\theta(z)} \right\} [2][3] \cdots \\
&\quad + [1] \left\{ \frac{\delta\theta(x_2)}{\delta\theta(z)} K(x_2, y_2) \tilde{\theta}(y_2) - \theta(x_2) K(x_2, y_2) \frac{\delta\tilde{\theta}(y_2)}{\delta\theta(z)} \right\} [3] \cdots \\
&\quad + \cdots \\
&= \sum_{j=1}^n [1] \cdots [j-1] \frac{\delta[j]}{\delta\theta(z)} [j+1] \cdots [n]
\end{aligned}$$

となる (ただし最右辺は $n=0$ に対してゼロと約束する). よって

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{i=1}^n \int d^4x_i d^4y_i \right) \frac{\delta}{\delta\theta(z)} \prod_{i=1}^n [i] &= \sum_{j=1}^n \left\{ \Pi' \int d^4x_i d^4y_i [i] \right\} \left(\int d^4x_j d^4y_j \frac{\delta[j]}{\delta\theta(z)} \right) \\
&= n \underbrace{\left\{ \prod_{i=1}^{n-1} \int d^4x_i d^4y_i [i] \right\}}_{j \text{ に依らない量だから} }
\end{aligned}$$

とできる．ここに $\prod'$ は $i = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n$ にわたる積であり，また2つの $\{\dots\}$ はいずれも $n = 0$ で0， $n = 1$ で1と約束する．以上より

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\theta(z)} \exp i[\theta K \tilde{\theta}] &= i \frac{\delta[\theta K \tilde{\theta}]}{\delta\theta(z)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{(n-1)!} \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} \int d^4x_i d^4y_i[i] \right\} \\ &= i \frac{\delta[\theta K \tilde{\theta}]}{\delta\theta(z)} \exp i[\theta K \tilde{\theta}] : (792) \end{aligned}$$

を得る．

12.3節の原稿

後で見るように古典場としてのフェルミオン場は Grassmann 場として扱われる．そこで準備として Grassmann 数の概念を導入しておく．

Grassmann 変数 (生成子) $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ は反交換関係 (776) を満たす量として定義される．よって $\theta_i^2 = 0$ となるから， n 個の生成子 θ_i の Grassmann 代数における最も一般的な代数要素 (Grassmann 変数 θ_i の “関数”) は式 (777) の形を持つ．ここに $\sum$ は $1 \leq i < j < \dots \leq n$ を満たす添字 $i, j, \dots$ に関する和を表す．また係数 $p_0, p_i, p_{ij}, \dots$ は通常の数であり，ここでは代数要素 (777) を θ_i よりもむしろ係数 $p \equiv \{p_0, p_i, p_{ij}, \dots\}$ の関数と見なしている．

次に Grassmann 変数 $\{\theta_i\} \equiv \theta$ の任意の関数 $f(\theta)$ の，Grassmann 変数 θ_i による微分 $\partial/\partial\theta_i$ を定義しよう．Grassmann 数は連続変数のようなものではなく，純粹に上述のような操作上の性質だけで定義された抽象的な対象であり， $\partial/\partial\theta_i$ もまた通常の微分とは全く異なるものである (表面的には類似の性質を持つにせよ)． $f(\theta)$ は式 (777) の形を持つので， θ_i による微分が線形性を持つものとして式 (777) の各項の微分 (778) を定義すれば十分である．ここで θ_i による微分は式 (779) を満たすものとする．また通常の数 θ_i による微分はゼロとする．

これを踏まえ，積 $\theta_{j_1} \theta_{j_2} \dots \theta_{j_\omega}$ の θ_i による微分 (778) を定義する．まず積 $\theta_{j_1} \theta_{j_2} \dots \theta_{j_\omega}$ が θ_i を含まないとき，式 (778) はゼロとする．次に積 $\theta_{j_1} \theta_{j_2} \dots \theta_{j_\omega}$ が θ_i を 2 つ以上含むとき，反交換関係 (776) によりこれはゼロになるので，その θ_i による微分 (778) もゼロ

である．そこで積 $\theta_{j_1} \theta_{j_2} \cdots \theta_{j_\omega}$ が θ_i を1つだけ含む場合を考える．このとき θ_i による微分(778)を実行するには，式(780)のように反交換関係(776)を用いて θ_i を積 $\theta_{j_1} \theta_{j_2} \cdots \theta_{j_\omega}$ の左端まで移動してから，式(779)を適用して θ_i を除去すれば良い．これを左微分の約束という．なお，微分の定義により反交換関係(781)が成立する (導出スライド参照)．さらに Grassmann 変数 θ_i のラベルを時空座標 x に読み替え，各時空点 x に付随する無限個の生成子として Grassmann 場 $\theta(x)$ を定義する．このとき反交換関係(776)を引き継ぎ，Grassmann 場は式(782)を満たすものと約束する．Grassmann 汎関数を式(777)にならった形(783)で定義する (f_i は通常関数)．

そして Grassmann 場による汎関数微分 $\delta/\delta\theta(x)$ を，左微分の約束(780)と類似の性質(784)を満たす線形演算子として“定義”する．

- 一般公式(783)は特例として，
通常汎関数微分(175)と同様の関係(785)を含意している．
- また式(784)は微分演算子の反交換関係(786)を含意している (導出スライド参照)．

具体的な応用では，式(787)を満たす互いに独立な2つの Grassmann 場の組 $\theta(x), \tilde{\theta}(x)$ に興味を持たれる．2つの独立な場，もしくはその汎関数微分を含む反交換子は式(788),(789)のように，全てゼロになる．場の理論では典型的には，既知の積分核 $K(x, y)$ と独立な Grassmann 場 $\theta, \tilde{\theta}$ から成る汎関数(790)が扱われる．これに対して，

式(787),(788),(789)より，有用な公式(791),(792)が成立する．第2式(792)は通常の汎関数微分に対する“合成関数の微分法”(178)と似た関係である(証明は導出スライド参照)．

12.4 経路積分 (汎関数積分)

■汎関数積分の定義 [22, p.336] [23, p.85]

時空を微小体積 Δ の胞 (セル) に分割し, 胞の中心点 x_i で評価した実スカラー場の値を $\phi_i = \phi(x_i)$ とする. このとき場 ϕ の汎関数は $F[\phi] = F(\{\phi_i\})$ と表される.

$F[\phi]$ の経路積分 (汎関数積分) は

$$\int \mathcal{D}\phi F[\phi] \sim \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\prod_i \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_i \right) F(\{\phi_i\}) \quad (794)$$

で定義され, 場の時間発展のあらゆる履歴にわたる “和” と捉えられる.

■Grassmann 数による (汎関数) 積分の定義 [22, pp.339–340]

Grassmann 変数 $\{\theta_i\} \equiv \theta$ の関数 $f(\theta)$ の積分を定義しよう. 任意の $f(\theta)$ は

$$f(\theta) = p_0 + \sum p_i \theta_i + \sum p_{ij} \theta_i \theta_j + \cdots + p_{12\dots n} \theta_1 \theta_2 \cdots \theta_n \quad (\text{式 (777)}) \quad (795)$$

の形を持つので, θ_i による積分が線形性を持つものとして式 (795) の各項の積分

$$\int d\theta_i (\theta_{j_1} \theta_{j_2} \cdots \theta_{j_\omega}) \quad (796)$$

を定義すれば十分である.

積分(796)を次の規則で定める.

$$\int d\theta_i 1 = 0, \quad \int d\theta_i \theta_i = 1, \quad (797)$$

$$\int d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} d\theta_n F(\theta) = \int d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} \left\{ \int d\theta_n F(\theta) \right\}, \quad (798)$$

$$\begin{aligned} \int d\theta_i (\theta_{j_1} \theta_{j_2} \cdots \theta_{j_{k-1}} \theta_i \theta_{j_{k+1}} \cdots \theta_{j_\omega}) &= (-1)^{k-1} \left(\int d\theta_i \theta_i \right) \theta_{j_1} \theta_{j_2} \cdots \theta_{j_{k-1}} \theta_{j_{k+1}} \cdots \theta_{j_\omega} \\ &= (-1)^{k-1} \theta_{j_1} \theta_{j_2} \cdots \theta_{j_{k-1}} \theta_{j_{k+1}} \cdots \theta_{j_\omega}. \end{aligned} \quad (799)$$

1. 例えば p_0, p_1, p_2, p_{12} を通常の数として

$$\int d\theta_1 d\theta_2 (p_0 + p_1 \theta_1 + p_2 \theta_2 + p_{12} \theta_1 \theta_2) = -p_{12} \int d\theta_1 d\theta_2 \theta_2 \theta_1 = -p_{12}. \quad (800)$$

2. 2種類の Grassmann 変数 $\theta_i, \tilde{\theta}_i$ ($i = 1, 2$) のノンゼロの積分 [1, p.189]

$$\int d\theta d\tilde{\theta} \theta_i \tilde{\theta}_j \theta_k \tilde{\theta}_l = \epsilon_{ik} \epsilon_{jl} = (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (801)$$

- Grassmann 変数 θ_i のラベル $i \rightarrow$ 時空座標 x
- Grassmann 数の積分 $\rightarrow$ Grassmann 場による汎関数積分

12.4 節の式の導出など

■ Berezin 積分 (801) の確認

$d\theta d\tilde{\theta} \equiv d\theta_0 d\tilde{\theta}_0 d\theta_1 d\tilde{\theta}_1$ と略記している． 実際このとき反交換性を利用して Grassmann 数 $\theta_i, \tilde{\theta}_i$ を積分測度の右隣まで移動し，積分操作 (797) により取り除くと

$$\begin{aligned} \int d\theta_0 d\tilde{\theta}_0 d\theta_1 d\tilde{\theta}_1 \theta_0 \tilde{\theta}_0 \theta_1 \tilde{\theta}_1 &= - \int d\theta_0 d\tilde{\theta}_0 d\theta_1 \theta_0 \tilde{\theta}_0 \theta_1 = - \int d\theta_0 d\tilde{\theta}_0 \theta_0 \tilde{\theta}_0 \\ &= + \int d\theta_0 \theta_0 = +1 \end{aligned}$$

となる． よって $i = j = 0, k = l = 1$ に対して式 (801) が成り立つ． ところが互換は常に奇置換なので， θ_i と θ_k ， $\tilde{\theta}_j$ と $\tilde{\theta}_l$ の入れ替えに伴い積分 (801) は符号が反転する． よって式 (801) は常に成り立つ． (なお式 (801) は $i = k$ や $j = l$ に対して Grassmann 数 θ の 2 乗が $\theta^2 = 0$ となって，積分がゼロになることを含意している． また第 2 の等号は式 (508) による．)

参考として公式 (801) の応用例を紹介する． ループ量子重力の教科書 [1, pp.187–194] では Dirac 場を， スピン・フォームと呼ばれるグラフの各辺 e 上で定義された 2 種類の 2 成分 Grassmann 変数 $\psi_e, \bar{\psi}_e$ として扱っている． 筆者にはこの話題を十全に論じるだけの力量はないものの， ここで読者の便宜として， 有用となり得る公式を調べておく． 単

一の辺 e に関する変数を対象として辺のラベル e を省き, Grassmann 変数を $\psi^a, \bar{\psi}^a$ ($a = 1, 2$) と書こう. また適当な定数 v を導入して積分測度

$$D\psi \equiv \frac{1}{v^2} d\psi d\bar{\psi} e^{-v\bar{\psi}\psi}$$

を定義する^{*151}. このとき適当な2次の正方行列 M に対して

$$\begin{aligned} \int D\psi \bar{\psi} M \psi &= \frac{1}{v^2} \int d\psi d\bar{\psi} (1 - v\bar{\psi}^c \psi^c) (\bar{\psi}^a M_{ab} \psi^b) = -\frac{1}{v} M_{ab} \int d\psi d\bar{\psi} \psi^c \bar{\psi}^c \psi^b \bar{\psi}^a \\ &= -\frac{1}{v} M_{ab} \epsilon^{cb} \epsilon^{ca} = -\frac{1}{v} \text{Tr } M \\ \int D\psi (\bar{\psi} M \psi)^2 &= \frac{1}{v^2} \int d\psi d\bar{\psi} (1 - v\bar{\psi}^e \psi^e) (\bar{\psi}^a M_{ab} \psi^b) (\bar{\psi}^c M_{cd} \psi^d) \\ &= \frac{1}{v^2} M_{ab} M_{cd} \int d\psi d\bar{\psi} \psi^b \bar{\psi}^a \psi^d \bar{\psi}^c \\ &= \frac{1}{v^2} M_{ab} M_{cd} \epsilon^{bd} \epsilon^{ac} = \frac{1}{v^2} \{(\text{Tr } M)^2 - \text{Tr}(M^2)\} \end{aligned}$$

^{*151} 納得のためには, 定数 v (と以下の行列 M) は体積の次元を持ち, 変数 $\psi, \bar{\psi}$ は波動関数と同じく (体積) $^{-1/2}$ の次元を持つとすれば良い.

が成り立つ．また変数 $\psi, \bar{\psi}$ を含まない “定数” の積分は

$$\begin{aligned}\int \mathrm{D}\psi &= \frac{1}{v^2} \int \mathrm{d}\psi \mathrm{d}\bar{\psi} e^{-v\bar{\psi}\psi} = \frac{1}{v^2} \int \mathrm{d}\psi \mathrm{d}\bar{\psi} (1 - v\bar{\psi}\psi) \\ &= \frac{1}{v^2} \int \mathrm{d}\psi^0 \mathrm{d}\bar{\psi}^0 \mathrm{d}\psi^1 \mathrm{d}\bar{\psi}^1 \{1 - v(\bar{\psi}^0\psi^0 + \bar{\psi}^1\psi^1)\} = 0\end{aligned}$$

により消える．

12.4 節の原稿

本稿では経路積分による場の量子論の定式化を重点的に取り上げる予定である．ところで粒子の遷移振幅を表す Feynman の経路積分については，9.3.1 項で既に説明した．ここでは場の理論における経路積分を定義する．

簡単のために単一の実スカラー場 ϕ を考えよう．時空を微小体積 Δ の胞 (セル) に分割し，胞の内部における実スカラー場 ϕ の値を，胞の中心点 x_i における値 $\phi_i = \phi(x_i)$ で近似する．このとき ϕ の汎関数は $F[\phi] = F(\{\phi_i\})$ と表され， $F[\phi]$ の経路積分は式 (794) で定義される．経路積分測度 $\mathcal{D}\phi$ の定義には適当な因子を含める任意性があるものの，これに伴う曖昧さは経路積分 (794) 全体に掛かる規格化定数 N に吸収できるため，式 (794) の定義で不都合は生じない．積分範囲を2つの時刻 $t = t_I, t_F$ に挟まれた時空領域に選べば，全ての格子点での場の値にわたる積分 (794) には，初期時刻 t_I から終時刻 t_F までの場のあらゆる時間発展の仕方が寄与する．したがって粗く言えば経路積分 (794) は，場の時間発展のあらゆる履歴にわたる“和”と捉えることができる．それはもはや 9.3.1 項のように，文字通りに粒子の経路にわたる積分と解釈することはできないため，場の理論では経路積分を代わりに汎関数微分と呼ぶこともある．

次に Grassmann 場に関する経路積分を定義する準備として，Grassmann 変数 $\{\theta_i\} \equiv \theta$ の関数 $f(\theta)$ の，Grassmann 変数 θ_i による積分を定義しよう．任意の $f(\theta)$ は式 (795) の形を持つので， θ_i による積分が線形性を持つものとして式 (795) の各項の積分 (796) を定義すれば十分である．

ところで Grassmann 数に関する積分を微分の逆演算として定義することは不可能である． と言うのも， θ_i についての微分が θ_i となるような Grassmann 代数の要素 (795) は存在しないからである． そこで初見では奇妙な印象を受けるものの， 積分 (796) を規則 (797), (798), (799) で定める． まず式 (797) は Grassmann 数の積分が微分と同様に生成子 θ_i を取り除く働きをすることを意味しており， また積分は式 (798), (799) のように生成子を反交換して積分測度のすぐ隣まで移動して実行するものと約束する． ただし式 (798) の $F(\theta)$ は Grassmann 変数 $\{\theta_i\} \equiv \theta$ の任意の関数である． また式 (799) の被積分関数は θ_i を1つだけ含むものとする． 以上より， 例えば p_0, p_1, p_2, p_{12} を通常の数として式 (800) のように計算を実行できる． また2種類の Grassmann 変数 $\theta_i, \tilde{\theta}_i$ ($i = 1, 2$) に関する， ノンゼロになり得る非自明な Berezin 積分の計算結果は式 (801) のようにまとめられる ([導出スライド参照](#)) [1, p.189]. (Grassmann 変数の積分は Berezin 積分とも呼ばれる [21, pp.193–194].)

Grassmann 場による汎関数積分を得るには， Grassmann 数の積分において変数 θ_i のラベル i を， 単に時空座標 x に読み替えさえすれば良い． 実際， 我々は 14.1.2 項における Dirac 場の経路積分 (874), (876) の箇所で， この Grassmann 場の汎関数積分の定義を成功裡に用いることになる． いずれにせよ Grassmann 数の積分はもはや通常の積分と呼び得る代物ではないため， Grassmann 場の経路積分もまた， 少なくとも素朴には， 必ずしも場の可能なあらゆる時間発展からの寄与の和と解釈し得ない． もっとも Dirac 場をはじめとする Grassmann 場として記述されるフェルミオン場はそもそも古典的対応物を持たないので， このことは何ら不都合ではない．

なお本稿ではゲージ固定に関する Faddeev–Popov (ファデエフ–ポポフ) の方法を入念に扱う予定はないので、ここで “Gauss 型” の汎関数積分の公式を説明する必要はない.

13 Dirac場と電磁場

13.1 自由なDirac場

■Dirac方程式と共変性 [17, pp.67–69, pp.257–259] 反交換関係と(反) Hermite性

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (802)$$

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \\ \gamma^{j\dagger} = -\gamma^j \quad (j = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (803)$$

を満たす4次の正方行列として, γ 行列 γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$)を定義する. また,

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma, \quad (\varepsilon_{0123} = +1) \quad (804)$$

$$\not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu. \quad (805)$$

代数(735)を満たす生成子 $\sigma_{\mu\nu}/2$ による変換則

$$\psi'(x') = \exp\left(-\frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right)\psi(x) \equiv A\psi(x), \quad \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (806)$$

に従う4成分スピノル場 $\psi(x)$ を考える. (そのような場 $\psi(x)$ はスピン1/2のフェルミオンを記述するためGrassmann場として扱う [23, pp.104–105].)

Dirac場 ψ に随伴する場 $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ を定義すると，スピノルの変換則(806)より，

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\psi}\psi \\ \bar{\psi}\gamma_5\psi \\ \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \\ \bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi \\ \bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi \end{array} \right\} \text{はそれぞれ} \left\{ \begin{array}{l} \text{スカラー} \\ \text{擬スカラー} \\ \text{ベクトル} \\ \text{軸性ベクトル(擬ベクトル)} \\ \text{(反対称な2階)テンソル} \end{array} \right\} \text{として変換する.} \quad (807)$$

よって m を Dirac 粒子の質量とする自由場のラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi \quad (808)$$

は Lorentz スカラーであり，ここから導かれる Dirac 方程式

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0, \quad i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 \quad (809)$$

は共変的である．

- γ 行列の(反) Hermite 性(803) $\rightarrow$ 式(809)の2式は等価
- γ 行列の反交換関係(802) $\rightarrow$ Klein-Gordon 方程式 $(\square + m^2)\psi = 0$
 $\rightarrow$ 分散関係 $p^2 = m^2$

■表示の任意性 [44, pp.104–105] [17, p.259]

γ 行列異なる表示はユニタリー変換

$$\psi \rightarrow U\psi, \quad \gamma^\mu \rightarrow U\gamma^\mu U^\dagger \quad (810)$$

で関係付けられる [44, pp.104–105].

■ヘリシティ [17, pp.69–71] [23, pp.41–42]

2成分スピノルに作用する Pauli 行列 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ のように,
 $\hbar/2$ を単位として測ったスピン演算子の行列は, 変換則 (806) における生成子

$$\boldsymbol{\Sigma} \equiv (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12}) \quad \text{i.e.} \quad \Sigma_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{kij} \sigma^{ij} \quad (811)$$

に同定できる. このことは回転対称性に伴う Dirac 場の角運動量

$$\boldsymbol{M} = \int d^3x \psi^\dagger(x) \{ \boldsymbol{x} \times (-i\nabla) \} \psi(x) + \int d^3x \psi^\dagger(x) \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} \right) \psi(x) \quad (812)$$

の第2項がスピン角運動量に対応することからも納得がいく [17, pp.39–43, p.69].

スピノル表示(カイラル表示)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (813)$$

を利用すると, スピン(811)は

$$\Sigma_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \quad (814)$$

と表され [23, pp.25–26] [44, p.p.112], 固有値 ± 1 に属する2つの固有状態を持ち, 固有方程式は表示の変更(810)の下で不変 $\rightarrow$ スピン $1/2$ [44, pp.112–113].

より一般にはスピン(811)の運動量 $\boldsymbol{p}$ 向きの成分として, (任意の表示で)ヘリシティ

$$\Sigma_{\boldsymbol{p}} = \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|} \quad (815)$$

を定義できる. 周期境界条件を課した体積 $V = L^3$ の立方体領域の下で許容される運動量 $\boldsymbol{p} = \frac{2\pi}{L} \boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n}$ の成分は整数) と, “質量殻” $p^2 = m^2$ 上の正のエネルギー

$$p_0 = E_{\boldsymbol{p}} \equiv \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} \quad (816)$$

を用いて, 可能な4元運動量は $\pm \boldsymbol{p} = \pm(E_{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{p})$ で網羅される.

よって基本解は正エネルギー解，負エネルギー解

$$\psi(x) = u(\mathbf{p}) \frac{e^{-ip \cdot x}}{\sqrt{V}}, \quad \psi(x) = v(\mathbf{p}) \frac{e^{ip \cdot x}}{\sqrt{V}} \quad (817)$$

のいずれかの形をとる．再び式(817)が解となることを要求すると，

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}) = 0, \quad (\not{p} + m)v(\mathbf{p}) = 0. \quad (818)$$

さて， $\Sigma_{\mathbf{p}}$ は $(\pm \not{p} + m)$ と可換なので，同時に固有値を指定できる [23, p.42].
そこで $\Sigma_{\mathbf{p}}$ の固有状態を添字 $r = 1, 2$ で $u_r(\mathbf{p}), v_r(\mathbf{p})$ とラベルする：

$$\Sigma_{\mathbf{p}} u_r(\mathbf{p}) = (-1)^{r+1} u_r(\mathbf{p}), \quad \Sigma_{\mathbf{p}} v_r(\mathbf{p}) = (-1)^r v_r(\mathbf{p}), \quad r = 1, 2. \quad (819)$$

以上により Dirac 方程式の4つの独立な解

$$\psi(x) = u_r(\mathbf{p}) \frac{e^{-ip \cdot x}}{\sqrt{V}}, \quad \psi(x) = v_r(\mathbf{p}) \frac{e^{ip \cdot x}}{\sqrt{V}}, \quad r = 1, 2 \quad (820)$$

を得る．議論を確定するため，スピノル $u_r(\mathbf{p}), v_r(\mathbf{p})$ の規格化条件を提示しておく：

$$u_r^\dagger(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) = v_r^\dagger(\mathbf{p}) v_r(\mathbf{p}) = \frac{E_{\mathbf{p}}}{m} \left(= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \right). \quad (821)$$

■ヘリシティ射影演算子 [17, p.85,pp.255–256] [22, pp.457–458]

$$\Pi^{\pm}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(1 \pm \Sigma_{\mathbf{p}}) \quad (822)$$

を定義すると、ヘリシティの固有方程式(819)より、これは

$$\begin{aligned} \Pi^+(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) &= \delta_{1r}u_r(\mathbf{p}), & \Pi^+(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p}) &= \delta_{2r}v_r(\mathbf{p}), \\ \Pi^-(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) &= \delta_{2r}u_r(\mathbf{p}), & \Pi^-(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p}) &= \delta_{1r}v_r(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (823)$$

のように正/負のヘリシティ解を射影する．特に質量がゼロのDirac粒子に対して、

$$\Pi^+(\mathbf{p}) = P_R \equiv \frac{1 + \gamma_5}{2}, \quad \Pi^-(\mathbf{p}) = P_L \equiv \frac{1 - \gamma_5}{2} \quad (824)$$

で与えられる．よって射影演算子(824)を用いて右手型と左手型の場合

$$\psi^R(x) \equiv P_R\psi(x), \quad \psi^L(x) \equiv P_L\psi(x) \quad (825)$$

を定義すると、 ψ_L は負のヘリシティだけを持つフェルミオンと、正のヘリシティだけを持つ反フェルミオンを記述する．

13.1 節の式の導出など

■式(806)の行列 $\sigma_{\mu\nu}/2$ がLorentz群の生成子となっていることの確認

スピノルの変換則(806)をLorentz変換(733)と比較すると、生成子に相当する量は

$M_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ に同定できる。(γ 行列の添字の上げ下げはMinkowski計量で行う。) 実際これが4元角運動量の交換関係(735)を満たし、したがってLorentz群の生成子の表現行列となっていることを確かめよう。

$$\begin{aligned}[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= \left(\frac{i}{4}\right)^2 [[\gamma_\mu, \gamma_\nu], [\gamma_\rho, \gamma_\sigma]] = \left(\frac{i}{4}\right)^2 ([[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \gamma_\rho\gamma_\sigma] - (\rho \leftrightarrow \sigma)) \\ &= \left(\frac{i}{4}\right)^2 (\gamma_\rho [[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \gamma_\sigma] + [[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \gamma_\rho]\gamma_\sigma - (\rho \leftrightarrow \sigma)) \\ &= \left(\frac{i}{4}\right)^2 ((X_{\mu\nu\rho\sigma} - (\mu \leftrightarrow \nu)) - (\rho \leftrightarrow \sigma)) \\ &= \left(\frac{i}{4}\right)^2 ((X_{\mu\nu\rho\sigma} - (\rho \leftrightarrow \sigma)) - (\mu \leftrightarrow \nu)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_{\mu\nu\rho\sigma} &\equiv \gamma_\rho[\gamma_\mu\gamma_\nu, \gamma_\sigma] + [\gamma_\mu\gamma_\nu, \gamma_\rho]\gamma_\sigma \\ &= \gamma_\rho(\gamma_\mu\{\gamma_\nu, \gamma_\sigma\} - \{\gamma_\mu, \gamma_\sigma\}\gamma_\nu) + (\gamma_\mu\{\gamma_\nu, \gamma_\rho\} - \{\gamma_\mu, \gamma_\rho\}\gamma_\nu)\gamma_\sigma \\ &= 2g_{\nu\sigma}\gamma_\rho\gamma_\mu - 2g_{\mu\sigma}\gamma_\rho\gamma_\nu + 2g_{\nu\rho}\gamma_\mu\gamma_\sigma - 2g_{\mu\rho}\gamma_\nu\gamma_\sigma, \quad (\because \text{式(802)})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore X_{\mu\nu\rho\sigma} - (\rho \leftrightarrow \sigma) &= -2g_{\mu\rho}[\gamma_\nu, \gamma_\sigma] + 2g_{\nu\rho}[\gamma_\mu, \gamma_\sigma] + 2g_{\mu\sigma}[\gamma_\nu, \gamma_\rho] - 2g_{\nu\sigma}[\gamma_\mu, \gamma_\rho], \\ \therefore [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= -i(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}) : (735). \end{aligned}$$

■スピノル場 ψ の双一次量の変換性(807)の証明 [17, pp.257–259]

γ 行列の条件(802),(803)より

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]^\dagger = -[\gamma^{\mu\dagger}, \gamma^{\nu\dagger}] = -[\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0, \gamma^0 \gamma^\nu \gamma^0] = -\gamma^0 [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \gamma^0$$

なので、スピノル場 ψ の変換則(806)における変換行列 $A = \exp(\varepsilon_{\mu\nu} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]/8)$ の逆行列は

$$A^{-1} = \exp\left(-\frac{1}{8}\varepsilon_{\mu\nu} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]\right) = \exp\left(\frac{1}{8}\varepsilon_{\mu\nu} \gamma^0 [\gamma^\mu, \gamma^\nu]^\dagger \gamma^0\right) = \gamma^0 A^\dagger \gamma^0 \quad (826)$$

と表される。ただし最後の等号では行列の指数を定義するTaylor展開を考慮した。するとスピノル場の変換則(806): $\psi' = A\psi$ より, $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ は

$$\bar{\psi}' = \psi'^\dagger \gamma^0 = (A\psi)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger A^\dagger \gamma^0 = (\psi^\dagger \gamma^0)(\gamma^0 A^\dagger \gamma^0) = \bar{\psi} A^{-1} \quad (827)$$

と変換する。

次に γ 行列の相似変換の公式

$$A\gamma^\mu A^{-1} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu \quad \text{i.e.} \quad \Lambda^\lambda{}_\mu A\gamma^\mu A^{-1} = \gamma^\lambda \quad (828)$$

を示そう．まず無限小変換に対してパラメータ $\varepsilon_{\mu\nu}$ の1次まで考慮すると，
 $\Lambda^\lambda_\mu \simeq \delta^\lambda_\mu + \varepsilon^\lambda_\mu$ である^{*152}．また Baker–Hausdorff の補題 (320) より
 $A\gamma^\mu A^{-1} \simeq \gamma^\mu + \frac{1}{8}\varepsilon_{\nu\rho}[[\gamma^\nu, \gamma^\rho], \gamma^\mu]$ であり，さらに Dirac 代数 (802) を用いて

$$\begin{aligned} [[\gamma^\nu, \gamma^\rho], \gamma^\mu] &= \gamma^\nu \{\gamma^\rho, \gamma^\mu\} - \{\gamma^\nu, \gamma^\mu\} \gamma^\rho - (\nu \leftrightarrow \rho) = 2(g^{\rho\mu} \gamma^\nu - g^{\nu\mu} \gamma^\rho) - (\nu \leftrightarrow \rho) \\ &= 4(g^{\rho\mu} \gamma^\nu - g^{\nu\mu} \gamma^\rho) \end{aligned}$$

と評価できる．以上より

$$\Lambda^\lambda_\mu A\gamma^\mu A^{-1} \simeq (\delta^\lambda_\mu + \varepsilon^\lambda_\mu)(\gamma^\mu - \varepsilon^\mu_\nu \gamma^\nu) \simeq \gamma^\lambda$$

となり， $\varepsilon_{\mu\nu}$ の1次近似で式 (828) が正確に満たされる．すると有限のパラメータ $\varepsilon_{\mu\nu}$ の変換行列 $A(\varepsilon)$, $\Lambda(\varepsilon)$ に対しても， $N \gg 1$ として無限小パラメータ ε/N での変換が式 (828) を満たすことを繰り返し用いれば，

$$\begin{aligned} A(\varepsilon)\gamma^\mu A^{-1}(\varepsilon) &= A(\varepsilon/N) \cdots A(\varepsilon/N) \gamma^\mu A^{-1}(\varepsilon/N) \cdots A^{-1}(\varepsilon/N) \\ &= \Lambda^{-1}(\varepsilon/N)^\mu_{\lambda_N} \cdots \Lambda^{-1}(\varepsilon/N)^{\lambda_2}_{\lambda_1} \gamma^{\lambda_1} \\ &= \Lambda^{-1}(\varepsilon)^\mu_\lambda \gamma^\lambda : (828) \end{aligned}$$

^{*152} 高次の項は原理的には生成子 (734) の指数 (733) の展開から求まる．

が成り立つ．これは式(451),(775)と比較される結果である．

以上の式(827),(828)で，変換性(807)を証明する準備は整った．まず $\bar{\psi}\psi$ は

$$\bar{\psi}'\psi' = (\bar{\psi}A^{-1})(A\psi) = \bar{\psi}\psi$$

と変換するので，Lorentz スカラーである．次に $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ は

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'\gamma_5\psi' &= (\bar{\psi}A^{-1})\gamma_5(A\psi) \\ &= \bar{\psi}i(A^{-1}\gamma^0 A)(A^{-1}\gamma^1 A)(A^{-1}\gamma^2 A)(A^{-1}\gamma^3 A)\psi \\ &= \Lambda^0_{\mu}\Lambda^1_{\nu}\Lambda^2_{\rho}\Lambda^3_{\sigma}\bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma})\psi \quad (\because \text{式(828)})\end{aligned}$$

と変換する．ここで相異なる γ 行列は反交換するので

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

と書けることに気付くと，

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'\gamma_5\psi' &= (\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^0_{\mu}\Lambda^1_{\nu}\Lambda^2_{\rho}\Lambda^3_{\sigma})\bar{\psi}(i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)\psi \\ &= \det(\Lambda)\bar{\psi}\gamma_5\psi\end{aligned}$$

を得る．ところが Lorentz 変換 $x \rightarrow x'$ では

$$\det(\Lambda) \equiv \det(\Lambda^{\mu}_{\nu}) = \frac{\partial(x')}{\partial(x)} = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} (= \pm 1)$$

なので，これは擬スカラーの変換則となっている．

この結果を公式

$$A^{-1}\gamma_5 A = \det(\Lambda^{-1})\gamma_5$$

にまとめて応用すると，

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' &= (\bar{\psi}A^{-1})\gamma^\mu(A\psi) = \Lambda^\mu{}_\nu(\bar{\psi}\gamma^\nu\psi), \\ \bar{\psi}'\gamma_5\gamma^\mu\psi' &= (\bar{\psi}A^{-1})\gamma_5\gamma^\mu(A\psi) = \bar{\psi}(A^{-1}\gamma_5 A)(A^{-1}\gamma^\mu A)\psi \\ &= \det(\Lambda^{-1})\Lambda^\mu{}_\nu(\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\nu\psi), \\ \bar{\psi}'\sigma^{\mu\nu}\psi' &= (\bar{\psi}A^{-1})\frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu](A\psi) = \bar{\psi}\frac{i}{2}(\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma - \Lambda^\nu{}_\rho\Lambda^\mu{}_\sigma)\gamma^\rho\gamma^\sigma\psi \\ &= \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\bar{\psi}\frac{i}{2}[\gamma^\rho, \gamma^\sigma]\psi = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma(\bar{\psi}\sigma^{\rho\sigma}\psi)\end{aligned}$$

はそれぞれベクトル，擬(軸性)ベクトル，2階テンソルの変換則となっている．

■ Dirac 方程式 (809) の導出など

Dirac 場のラグランジアン密度 (808) に対して, Euler–Lagrange 方程式は Dirac 方程式 (809):

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}} \{ \bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi \} = \mp (i\not{\partial} - m) \psi,$$

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \partial_\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \psi)} (\bar{\psi} i\not{\partial} \psi) \right\} + m \frac{\partial}{\partial \psi} \bar{\psi} \psi = \mp [i(\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu + m \bar{\psi}]$$

を与える^{*153}. 例えば第1式は, スピノル添字 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ を明記すると, Euler–Lagrange 方程式は

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi}_\alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_\alpha} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_\alpha} \{ \bar{\psi}_\gamma (i\not{\partial} - m)_{\gamma\beta} \psi_\beta \} = -(i\not{\partial} - m)_{\alpha\beta} \psi_\beta$$

となる [17, pp.67–69] [28, pp.210–211].

^{*153} 最右辺の複号は Grassmann 場の微分を左微分で約束するとき上側(負号)を, 右微分で約束するとき下側(正号)を採る [23, p.40].

これら2式の等価性は次のように確かめられる．まず Dirac 方程式 $i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0$ の両辺の Hermite 共役をとり，式(803): $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$ を用いると

$$0 = -i(\partial_\mu \psi^\dagger) \gamma^{\mu\dagger} - m\psi^\dagger = -i(\partial_\mu \psi^\dagger)(\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0) - m\psi^\dagger$$

となる．右から γ^0 を掛けると，随伴する Dirac 方程式

$$i(\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$$

を得る．

さらに Dirac 方程式が Klein–Gordon 方程式を含んでいることを確かめよう．Dirac 方程式 $i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = m\psi$ の両辺に左から $i\gamma^\nu \partial_\nu$ を掛けると，

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu)(i\gamma^\mu \partial_\mu) \psi = m(i\gamma^\nu \partial_\nu) \psi = m^2 \psi$$

となる．最左辺において $\partial_\nu \partial_\mu$ は添字 ν, μ に関して対称なので，積 $\gamma^\nu \gamma^\mu$ の対称部分だけが最左辺に対して寄与を持つ：

$$-\frac{1}{2}\{\gamma^\nu, \gamma^\mu\} \partial_\nu \partial_\mu \psi = m^2 \psi.$$

反交換関係(802): $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ により，これは Klein–Gordon 方程式 $(\square + m^2)\psi = 0$ になる．

■スピノル表示(813)が γ 行列の条件(802),(803)を満たすことと Σ_3 の表式(814)の確認

スピノル表示の γ 行列(813)に対して、ブロック行列の積を計算すると

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad \gamma^0 \gamma^i = -\gamma^i \gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix}, \quad \gamma^i \gamma^j = -\begin{pmatrix} \sigma_i \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_i \sigma_j \end{pmatrix}$$

となる($i, j = 1, 2, 3$). ここで $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$ を思い出すと、これらはDirac代数(802)が満たすことが確かめられる. また(反) Hermite性(803)が成り立っていることは、特にPauli行列のHermite性 $\sigma_i^\dagger = \sigma_i$ から確かめられる. 最後に上記の積 $\gamma^i \gamma^j$ の計算結果と $[\sigma_i, \sigma_j] = i\varepsilon_{ijl}\sigma_l$ より

$$\sigma^{ij} = \frac{i}{2}[\gamma^i, \gamma^j] = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} [\sigma_i, \sigma_j] & 0 \\ 0 & [\sigma_i, \sigma_j] \end{pmatrix} = \varepsilon_{ijl} \begin{pmatrix} \sigma_l & 0 \\ 0 & \sigma_l \end{pmatrix}$$

となるので、 $\Sigma_k = \varepsilon_{kij}\sigma^{ij}/2$ の式(814)を得る.

■ $\Sigma_{\mathbf{p}}$ が $(\pm \gamma^\mu p_\mu + m)$ と可換であることの確認

$$\Sigma_{\mathbf{p}} \equiv \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \frac{p_i}{|\mathbf{p}|} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \sigma^{jk} \right) = \frac{ip_i}{4|\mathbf{p}|} \varepsilon_{ijk} [\gamma^j, \gamma^k],$$

$$\begin{aligned} \therefore [\pm \not{p} + m, \Sigma_{\mathbf{p}}] &= \pm p_\mu \frac{ip_i}{4|\mathbf{p}|} \varepsilon_{ijk} [\gamma^\mu, [\gamma^j, \gamma^k]] = \pm p_\mu \frac{ip_i}{2|\mathbf{p}|} \varepsilon_{ijk} [\gamma^\mu, \gamma^j \gamma^k] \\ &= \pm p_\mu \frac{ip_i}{2|\mathbf{p}|} \varepsilon_{ijk} (\{\gamma^j, \gamma^\mu\} \gamma^k - \gamma^j \{\gamma^k, \gamma^\mu\}) \quad (\because \text{式 (309)}) \\ &= \pm p_\mu \frac{ip_i}{|\mathbf{p}|} \varepsilon_{ijk} (\gamma^k g^{j\mu} - \gamma^j g^{k\mu}) \quad (\because \text{式 (802)}) \\ &= \pm p_\mu \frac{ip_i}{|\mathbf{p}|} \varepsilon_{ijk} (\gamma^j \delta^\mu_k - \gamma^k \delta^\mu_j) = \pm \frac{2i}{|\mathbf{p}|} \varepsilon_{ijk} p_i p_k \gamma^j = 0. \end{aligned}$$

最後の等号では添字 i, k に関して ε_{ijk} が反対称であるのに対し, $p_i p_k$ は対称であることを考慮した.

■質量ゼロの極限におけるヘリシティ演算子の表式(824)の理由 [17, p.256]

$m = 0$ の極限では $p_0 = |\mathbf{p}|$ であり, $w_r(\mathbf{p})$ を $u_r(\mathbf{p}), v_r(\mathbf{p})$ のいずれかとすると式(818):

$$(\not{p} - m)u_r(\mathbf{p}) = 0, \quad (\not{p} + m)v_r(\mathbf{p}) = 0$$

は次のようになる.

$$\gamma^0 |\mathbf{p}| w_r(\mathbf{p}) = -\gamma^k p_k w_r(\mathbf{p}) = \gamma^k p^k w_r(\mathbf{p}).$$

左から $\gamma^5 \gamma^0$ をかけて公式

$$\sigma^{ij} = -\gamma^0 \gamma^5 \gamma^k \quad (\text{巡回的に充てた } i, j, k = 1, 2, 3 \text{ に対して}) \quad (829)$$

を用いると,

$$\gamma^5 w_r(\mathbf{p}) = \Sigma_{\mathbf{p}} w_r(\mathbf{p})$$

を得る. よって $m = 0$ の極限ではヘリシティ射影演算子 $\Pi^\pm(\mathbf{p}) = (1 \pm \Sigma_{\mathbf{p}})/2$ の役割を, 演算子(824): $(1 \pm \gamma_5)/2$ が果たす.

σ^{ij} の表式(829)の証明 相異なる γ 行列は反交換するので, $i \neq j$ に対して

$$[\gamma^i, \gamma^j] = \gamma^i \gamma^j - \gamma^j \gamma^i = 2\gamma^i \gamma^j, \quad \therefore \sigma^{ij} = \frac{i}{2} [\gamma^i, \gamma^j] = i\gamma^i \gamma^j$$

である．他方，

$$-\gamma^0\gamma^5\gamma^k = -i\gamma^0(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)\gamma^k = -i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^k = \begin{cases} i\gamma^2\gamma^3 & (k=1) \\ i\gamma^3\gamma^1 & (k=2) \\ i\gamma^1\gamma^2 & (k=3) \end{cases}$$

であり(第3の等号は $(\gamma^k)^2 = -1$ (k で和をとらない)による)，これらを等置して式(829): $\sigma^{ij} = -\gamma^0\gamma^5\gamma^k$ を得る．

13.1 節の原稿

まず反交換関係と“Hermite性”の条件(802),(803)を満たす4次の正方行列として、4つの γ 行列 γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$)を定義する。ただし式(802)の右辺には4次の単位行列が掛かっている。また式(802)が $(\gamma^0)^2 = 1$ を含意していることを覚えておくのは有用である。実際これを踏まえれば、式(803)の変形は反交換関係(802)を用いて直ちに行える。式(803)は γ^0 がHermiteであるのに対し、 γ^j は反Hermiteであることを意味している。すぐ後のDirac方程式(809)の箇所で、以上の γ 行列の定義を動機付ける。

ここで第5の γ 行列(804)を定義しておく。ただし式(802)より異なる γ 行列は反交換するので、最右辺はLevi-Civita記号と γ 行列がいずれも添字に関して反対称であり、添字の相異なる4!通りの項が全て等しい値を持つことに注意すると、第3辺に戻る [17, p.250]。さらに任意の4元ベクトル A_μ に対してFeynmanのスラッシュ記法(805)を導入する [17, p.70]。

さて、4つの複素場 $\psi_\alpha(x)$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$)を成分に持ち、式(806)のように変換するスピノル場(Dirac場) $\psi(x)$ を考えよう。これをLorentz変換(733)と比較すると、式(806)で定義される行列 $\sigma_{\mu\nu}/2$ を生成子に同定できる [23, p.26]。実際 $M_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu}/2$ は4元角運動量の代数(735)を満たすため、Lorentz変換の生成子の表現行列になっている(導出スライド参照)。我々は変換性(806)に基づきLorentz不変な場の方程式を構成し、その結果も踏まえつつ、そのようなスピノル場はスピン1/2のフェルミオンを記述することを説明する。

ところで正準量子化のアプローチではFermi–Dirac統計を再現する処方として、フェルミオン場の演算子 ψ には正準反交換関係が課される。このため強いて対応する古典場 ψ を考えれば、それらもまた互いに反交換するGrassmann場として扱わねばならない。正準反交換関係に依拠せず経路積分による定式化を採用する場合にも、この事情に変わりはなく、古典場としてのDirac場がGrassmann場であるという結論自体は(Fermi–Dirac統計を再現する措置として)保持される [23, pp.104–105].

Dirac場に随伴する場 $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ を定義しよう。するとスピノルの変換則(806)より、場の双一次な量の変換則(807)が示される(導出スライド参照)。これを踏まえスピノル場のダイナミクスを原理として提示する。スピン1/2のフェルミオンを記述するスピノル場 $\psi(x)$ はDirac場と呼ばれ、自由場のラグランジアン密度(808)で定義される。ただし m はDirac粒子の質量である。Dirac場のラグランジアン密度(808)から、 ψ と $\bar{\psi}$ に対する場の方程式(809)が導かれる；ここで γ 行列の“Hermite性”の条件(803)は2式が等価であることを保証するため、実質的に場の方程式として式(809)第1式のみを考えれば充分であり、これをDirac方程式と呼ぶ；他方で γ 行列の反交換関係(802)はDirac場 ψ の各成分がKlein–Gordon方程式を、したがって平面波解 $\psi \sim e^{\pm ip \cdot x}$ が物理的な分散関係 $p^2 = m^2$ を満たすことを保証する(導出スライド参照) [30, pp.396–397]。Dirac場の双一次形式の変換則(806)よりラグランジアン密度(808)はLorentzスカラーであり、したがってDirac方程式(809)はLorentz変換に対して共変的である。

ここまでは γ 行列をその具体的な成分表示に依拠することなく，反交換関係(802)と“Hermite性”の条件(803)のみで定義してきた．しかるに，この後の議論では一時的に γ 行列の特定の表示を利用するのが便利な場面がある．直ちに付け加えると，具体的な表示に頼って理論を展開することは一般には不適當であり [30, p.394,p.397]，最終的にはあくまで表示に依らない結論を引き出すことができる．実際，反交換関係(802)を満たす異なる γ 行列を相似変換で関係付ける正則行列 U が存在することが，Pauliの基本定理として知られている(その証明は文献 [45, pp.395–399]に見られる)． U はユニタリーに採ることができ，したがってこの相似変換は γ 行列の“Hermite性”の条件(803)も保持する [17, p.259]．そこで異なる表示の間の変換をDirac場と γ 行列のユニタリー変換(810)で定義すれば，例えばDirac場のラグランジアン密度(808)とDirac方程式(809)は，表示の変更の下で不変に留まることが見て取れる [44, pp.104–105]．

次に変換則(806)に従うスピノル場がスピン1/2の粒子を記述することを説明する．スピン演算子が2成分スピノルに作用するPauli行列 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ で表されるように，スピノル場 ψ に作用するスピン演算子の行列は，変換則(806)における生成子の空間成分(811)に同定できる．Pauli行列の場合と同様，正確には式(811)は生成子 $\sigma^{\mu\nu}/2$ の2倍なので， $\hbar/2$ を単位として測ったスピン演算子の行列表示である．このことは回転対称性に伴うDirac場の角運動量が式(812)のように計算され，第2項がスピン角運動量に対応することを思い出すと，ますます納得がいく [17, pp.39–43,p.69]．

スピン(811)の固有値問題に取り組むにあたり， γ 行列のスピノル表示(ないしカイラル

表示) (813)を利用するのが便利である。これは実際に γ 行列の条件(802),(803)を満たし、このときスピン(811)は式(814)で表される(導出スライド参照) [23, pp.25–26] [44, p.p.112]. スピン(814)の第3成分はPauli行列成分 σ_3 と同様、固有値 ± 1 に属する2つの固有状態を持つ。ところが固有方程式は表示の変更(810)の下で不変なので、任意の表示においても Σ_3 が固有値 ± 1 の固有状態を持つことに変わりはない。これは変換則(806)に従うスピノル場 ψ がスピン $1/2$ のフェルミオンを表すことを意味する [44, pp.112–113].

より一般にはスピン(811)の運動量 p 向きの成分として、(任意の表示で)ヘリシティ(815)を定義できる。その固有状態を調べる準備として、運動量固有状態を考える。まず議論を確定するため、便宜的に空間を一辺 L 、体積 $V = L^3$ の立方体領域と見なし、辺に沿って空間座標を採り、向かい合う面を同一視して周期境界条件を課す。この下で許容される運動量は、整数を成分に持つベクトル n を用いて $p = \frac{2\pi}{L}n$ と離散化される。さらに既に説明したように、Dirac方程式(809)はKlein–Gordon方程式を含意するため、その平面波解 $\psi(x) \sim e^{\mp i p \cdot x}$ はいわゆる質量殻の条件 $p^2 = m^2$ を満たさねばならない。そこで以降では正のエネルギーを式(816)で表すと、周期境界条件の下で許される運動量の空間成分 p を用いて、可能な4元運動量は $\pm p = \pm(E_p, p)$ で網羅される。

よって基本解は式(817)のいずれかの形をとる。これらは慣習的に、それぞれ正エネルギー解、負エネルギー解と呼ばれる。これは場のFourier展開において時間依存因子 $e^{\mp i \omega t}$, $\omega > 0$ を含む項が正/負振動数部分と呼ばれるのと同じ事情である。再び式(817)

が解となることを要求して，これらを Dirac 方程式に代入すると，4 成分スピノル $u(\mathbf{p}), v(\mathbf{p})$ はそれぞれ式 (818) を満たさねばならない．

さて，ヘリシティ (815) は式 (818) の演算子 $(\pm \not{p} + m)$ と可換なので (導出スライド参照)，同時に固有値を指定できる [23, p.42]．特に x^3 軸を運動量の向きに選ぶとヘリシティ (815) はスピンの第 3 成分 Σ_3 となるため，回転不変性よりヘリシティ Σ_p は Σ_3 と同じく固有値 ± 1 を持つ．そこで Σ_p の固有状態を添字 $r = 1, 2$ で区別して $u_r(\mathbf{p}), v_r(\mathbf{p})$ とラベルし，固有方程式を式 (819) のように書く．(ここで正準量子化の結果，粒子と反粒子のヘリシティ ± 1 の状態が共通の r の値でラベルされるよう，あらかじめ u, v -スピノルの添字の付け方を非対称に選んである [17, p.74]．) 以上により Dirac 方程式の 4 つの独立な解 (820) を得る．本稿で利用する場面はないが，議論を確定するため，スピノル $u_r(\mathbf{p}), v_r(\mathbf{p})$ の規格化条件 (821) を提示しておく^{*154}．なお単一粒子理論の枠内で空孔理論による u, v -スピノルの解釈に依拠せずとも，場の量子論では直接に粒子と反粒子の描像に到達できる．実際，Dirac 場の正準量子化を学んだ読者ならば，Dirac 場の Fourier 展開において u, v -スピノルがそれぞれ電子と陽電子の生成・消滅演算子を展開係数に持ち [17, p.72]，また S 行列要素に対する Feynman 規則において始・終状態の電子と陽電子の外線にはそれぞれ u, v -スピノルが充てられることをご存じだろう [22, pp.138–139]．

^{*154} 古典論を想定して運動量 $\mathbf{p}$ に対応する粒子の速度 v を導入すると，最右辺の因子 $E_{\mathbf{p}}/m = 1/\sqrt{1-v^2}$ は Lorentz 収縮による高密度化に関係する．

ここで演算子(822)を定義すると、ヘリシティの固有方程式(819)より、これは式(823)のように正/負のヘリシティ解を射影する。特に質量がゼロのDirac粒子に対して、ヘリシティ射影演算子は式(824)で与えられることが判明する(導出スライド参照)。式(824)はもはや運動量 p 依存性を持たないことに注意しよう [17, pp.255–256]。よって射影演算子(824)を用いて右手型と左手型の場合(825)を定義すると、 ψ_L は負のヘリシティだけを持つフェルミオンと、正のヘリシティだけを持つ反フェルミオンを記述する。 ψ_L をWeyl場と呼ぶ [17, p.85] [22, pp.457–458]。

13.2 QEDのラグランジアン密度

■ゲージ不変性 [17, pp.83–84,p.141] [22, pp.268–269]

Dirac場に対する位相変換

$$\psi(x) \rightarrow \psi(x)e^{ief(x)}, \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x)e^{-ief(x)} \quad (830)$$

を考えよう． $f(x)$ が定数である大域的位相変換の下では，自由Dirac場のラグランジアン密度(808)は不変に留まり，保存するカレント

$$s^\alpha = -e\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi \quad (831)$$

が得られる．次に局所的位相変換(830)の下で理論を不変にするために，極小置換

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu \quad (832)$$

を通じてゲージ場(電磁場) A_μ を導入する(4元運動量の置き換え(204)に対応)．このときDirac場のラグランジアン密度(808)は

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I, \quad \mathcal{L}_0 \equiv \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi, \quad \mathcal{L}_I \equiv e\bar{\psi}\not{A}\psi \quad (833)$$

となる．

さて，局所的位相変換(830)と同時に，電磁場のゲージ変換

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f \quad (834)$$

を施せば，ラグランジアン密度(833)は(従って理論は)不変に留まる．

なおラグランジアンの相互作用項はDirac場のカレント(831)と電磁場の結合項

$$\mathcal{L}_I \equiv e\bar{\psi}A\psi = -s_\alpha A^\alpha \quad (835)$$

となっている．

■自由電磁場 [17, pp.87–90] 純粋な電磁場はラグランジアン密度(200):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (836)$$

で記述される^{*155}．ここでゲージ変換の自由度を利用して電磁場 A^μ に Lorenz 条件

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (837)$$

を課すと，場の方程式は波動方程式に単純化される：

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = 0. \quad (838)$$

^{*155} ただしここでは Heaviside 単位系を用いているため，係数が $-1/4$ となっている．

電磁場 A^μ に共役な場は式(205):

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -F^{0\mu} \quad (839)$$

で与えられるため^{*156}, $\pi^0 = 0$ となる(3.2.3項).

そこでLorenz条件を踏まえ, ラグランジアン密度をFermiによって提案された形

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) \quad (840)$$

に改めよう. このとき再び波動方程式(838)が導かれ, また共役な場

$$\pi^\mu = -\dot{A}^\mu \quad (841)$$

はどの成分もゼロとならない.

- 電磁場 A^μ 4成分
- Lorenz条件(837)の下で, さらにゲージ関数 f を選ぶ
→ 電磁場の自由度は2 (横波の自由度)

^{*156} ドットは時間微分を表す. また再びGauss単位系との係数 4π の違いに注意する.

共変な定式化では光子の偏極ベクトル $\varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})$ (実数に採る) は $r = 0, 1, 2, 3$ の4種類が導入され,

$$\zeta_0 = -1, \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 1 \quad (842)$$

として, 正規直交性と完全性

$$\varepsilon_r(\mathbf{k}) \cdot \varepsilon_s(\mathbf{k}) \equiv \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}) = -\zeta_r \delta_{rs}, \quad r, s = 0, 1, 2, 3, \quad (843)$$

$$\sum_r \zeta_r \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}) = -g^{\mu\nu} \quad (844)$$

が課される [17, pp.90–91].

物理的な始・終状態は2つの偏極状態 $r = 1, 2$ で指定される.

■QEDのラグランジアン密度 [17, p.141] [22, p.502]

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi + e\bar{\psi}\not{A}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\end{aligned}\tag{845}$$

- 荷電レプトン …… 電子 $e^\mp$, ミュー粒子 $\mu^\mp$, タウ粒子 $\tau^\mp$
– 電荷 $\mp e$ (e は素電荷), 質量^{*157}

$$m_e = 0.511\text{MeV}, \quad m_\mu = 105.7\text{MeV}, \quad m_\tau = (1776.84 \pm 0.17)\text{MeV}.\tag{846}$$

- 中性レプトン(ニュートリノ) …… $\nu_l, \bar{\nu}_l$ ($l = e, \mu, \tau$)
– 電荷ゼロ, 質量 m_{ν_l}

一連のレプトンを記述に含めるには, Dirac場の項を全レプトンの和に置き換える:

$$\sum \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi = \sum_{l=e,\mu,\tau} \{ \bar{\psi}_l(i\not{D} - m_l)\psi_l + \bar{\psi}_{\nu_l}(i\not{D} - m_{\nu_l})\psi_{\nu_l} \}.\tag{847}$$

^{*157} 単位にMeVを用いているのは, 自然単位系において質量とエネルギーの次元が等しくなるからである.

13.2節の式の導出など

■ ラグランジアン密度 (833) のゲージ不変性と付随する保存する電磁カレント (831) の確認

ゲージ変換 (830), (834): $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$, $\psi \rightarrow \psi e^{ief}$, $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-ief}$ に対して

$$\mathcal{L}_0 \rightarrow (\bar{\psi} e^{-ief})(i\not{\partial} - m)(\psi e^{ief}) = \mathcal{L}_0 + \bar{\psi} i(ie\not{\partial} f)\psi = \mathcal{L}_0 - e\bar{\psi}(\not{\partial} f)\psi,$$

$$\mathcal{L}_I \rightarrow e(\bar{\psi} e^{-ief})(\not{A} + \not{\partial} f)(\psi e^{ief}) = \mathcal{L}_I + e\bar{\psi}(\not{\partial} f)\psi$$

だから $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$ は不変である.

また無限小ゲージ変換に伴う場の変化量 $\delta A_\mu, \delta\psi, \delta\bar{\psi}$ に対して

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \delta A_\mu = -s^\mu (\partial_\mu f),$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \delta\psi \right) = \partial_\mu [(\bar{\psi} i\gamma^\mu)(ief\psi)] = \partial_\mu (s^\mu f), \quad \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \delta\bar{\psi} \right) = 0$$

であり, ここからカレント (831) に対する連続の式が導かれる.

$$0 = \delta \mathcal{L} = -s^\mu (\partial_\mu f) + \partial_\mu (s^\mu f) + 0 = f \partial_\mu s^\mu, \quad \therefore \partial_\mu s^\mu = 0.$$

■ラグランジアン密度(836),(840)の等価性

自由電磁場のラグランジアン密度

$$\mathcal{L} \equiv -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} : (836), \quad \mathcal{L}_{\text{Fermi}} \equiv -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) : (840)$$

が, Lorenz 条件(837)の下で等価であることを示す.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu) \\ &= \mathcal{L}_{\text{Fermi}} + \frac{1}{2}\partial_\mu(A_\nu\partial^\nu A^\mu) \quad (\because \text{Lorenz 条件(837)} : \partial_\nu A^\nu = 0) \end{aligned}$$

のように, 2つのラグランジアン密度の差は $A_\nu\partial^\nu A^\mu/2$ の4元発散である. 任意の場の4元発散をラグランジアンに付け加えても場の方程式は変わらないから, これら2つのラグランジアン密度は等価である.

Fermiのラグランジアン密度(840): $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu)$ が(質量 $m = 0$ の)

Klein-Gordon 場に対するそれと類似していることから, 再び A^μ に対する波動方程式(838)が導かれることが納得できる.

■共役な場(841): $\pi^\mu = -\dot{A}^\mu$ の確認

Fremiの提案したラグランジアン密度(836): $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu)$ に対して, 共役な運動量密度は

$$\begin{aligned}\pi^\lambda &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} = -2 \times \frac{1}{2}(\partial^\mu A^\nu) \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)}(\partial_\mu A_\nu) \\ &= -(\partial^\mu A^\nu) \delta^0_\mu \delta^\lambda_\nu \\ &= -\partial^0 A^\lambda = -\partial_0 A^\lambda : (841)\end{aligned}$$

と計算される.

■ 偏極ベクトルの性質 (843), (844) の説明 [17, pp.90–91]

例えば特定の波数ベクトル $\mathbf{k}$ を考え $\mathbf{k}/|\mathbf{k}| = (0, 0, 1)$ となる座標系をとり,
 $\varepsilon_1(\mathbf{k}), \varepsilon_2(\mathbf{k}), \varepsilon_3(\mathbf{k}) \equiv \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ を互いに直交する単位ベクトル

$$\varepsilon_1(\mathbf{k}) = (1, 0, 0), \quad \varepsilon_2(\mathbf{k}) = (0, 1, 0), \quad \varepsilon_3(\mathbf{k}) = (0, 0, 1)$$

として

$$\varepsilon_0^\mu = n^\mu \equiv (1, \mathbf{0}), \quad (848)$$

$$\varepsilon_r^\mu = (0, \varepsilon_r(\mathbf{k})), \quad r = 1, 2, 3 \quad (849)$$

とすると, 偏極ベクトル $\varepsilon_r^\mu = (\varepsilon_0^\mu, \varepsilon_r)$ は正規直交性 (843):

$$\begin{aligned} \varepsilon_r \cdot \varepsilon_s &= \varepsilon_r^0 \varepsilon_s^0 - \varepsilon_r \cdot \varepsilon_s \\ &= \begin{cases} (\varepsilon_0^0)^2 = 1 = -\zeta_0 \delta_{00} & (r = s = 0) \\ 0 \cdot 1 - \mathbf{0} \cdot \varepsilon_s = 0 = \zeta_0 \delta_{0s} & (r = 0, s = 1, 2, 3) \\ -\varepsilon_r \cdot \varepsilon_s = -\delta_{rs} = -\zeta_r \delta_{rs} & (r, s = 1, 2, 3) \end{cases} \\ &= -\zeta_r \delta_{rs} \end{aligned}$$

を満たす (最右辺では r について和をとらない).

また $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0)$, $\varepsilon_3 = (0, 0, 1)$ より $i, j = 1, 2, 3$ に対して

$$(\varepsilon_1^i)^2 + (\varepsilon_2^i)^2 + (\varepsilon_3^i)^2 = 1, \quad \sum_{r=1}^3 \varepsilon_r^i \varepsilon_r^j = 0 \quad (i \neq j)$$

であり, これらを

$$\sum_{r=1}^3 \varepsilon_r^i \varepsilon_r^j = -g^{ij} \quad (850)$$

とまとめられることに注意すると, 完全性の条件(844):

$$\begin{aligned} \sum_r \zeta_r \varepsilon_r^\mu \varepsilon_r^\nu &= -\varepsilon_0^\mu \varepsilon_0^\nu + \sum_{r=1}^3 \varepsilon_r^\mu \varepsilon_r^\nu \\ &= \begin{cases} -(\varepsilon_0^0)^2 = -1 = -g^{00} & (\mu = \nu = 0) \\ -1 \cdot 0 + 0 \cdot \sum_{r=1}^3 \varepsilon_r^i = 0 = -g^{0i} & ((\mu, \nu) = (0, i), i = 1, 2, 3) \\ \sum_{r=1}^3 \varepsilon_r^i \varepsilon_r^j = -g^{ij} & ((\mu, \nu) = (i, j), i, j = 1, 2, 3, \because \text{式(850)}) \end{cases} \\ &= -g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

が満たされていることが分かる.

座標系を変えるとベクトルの成分は変化するため, 偏極ベクトルの具体的な表式 (848),(849) は特定の座標系でしか成り立たないのに対し, 偏極ベクトルの正規直交性 (843) と完全性の条件 (844) は座標変換に対して共変的であり, 任意の座標系で成り立つ関係式である.

13.2節の原稿

微分を共変微分に置き換える極小置換を通じて、Dirac場と相互作用するゲージ場を導入する手続きを復習しよう。Dirac場に対する位相変換(830)を考えよう。ただしDirac粒子として電子を念頭に置き、位相因子から素電荷 e を括り出した。特に位相因子 $f(x)$ が時空座標に依らない定数であるような大域的位相変換の下では、自由Dirac場のラグランジアン密度(808)は不変に留まる。理論のゲージ不変性に付随する保存するカレント(正確には保存するチャージのカレント)は式(831)で表される。次に変換(830)を位相因子 $f(x)$ が時空座標に依存するような局所的位相変換へと一般化し、理論の不変性を要求しよう。局所的位相変換の下では、もはや自由場のラグランジアン密度(808)は不変に留まらない。そこで理論のゲージ不変性が回復するために、微分の共変微分への置き換え(832)を通じてゲージ場 A_μ を導入する。このゲージ場 A_μ は量子電磁力学(QED)では、電磁場(正確には電磁ポテンシャル)に他ならず、式(832)は古典電磁気学で見た力学的エネルギー・運動量の置き換え(204)に対応している(ただし電荷 e を電子の電荷 $(-e)$ に再設定せねばならないことに注意せよ)。このとき自由場のラグランジアン密度(808)は式(833)に置き換わり、自由場項 $\mathcal{L}_0$ に対する付加的な項 $\mathcal{L}_I$ はDirac場と電磁場の相互作用項である。また置き換え(832)は正しい相互作用項を導く必要最小限の手続きという意味で、極小置換と呼ばれる。

さて、局所的位相変換(830)と同時に、式(830)と共通の $f(x)$ をゲージ関数として電磁場のゲージ変換(834)を施せば、ラグランジアン密度(833)は(従って理論は)不変に留

まる(導出スライド参照). 電磁場と Dirac 場の変換 (830),(834) を一括してゲージ変換と呼ぶ. 理論のゲージ不変性から得られる保存するカレントは, 自由 Dirac 場の場合と同じ電磁カレント (831) となる(導出スライド参照). なおラグランジアン of 相互作用項は Dirac 場のカレント (831) と電磁場の結合項 (835) となっている. これは電磁場と相互作用する荷電粒子の古典論と全く同じ結果である(式 (190) の箇所を見よ) [4, p.80].

純粋な電磁場そのものの(古典的)ダイナミクスは, 式 (200) で見たラグランジアン密度 (836) で記述されるここでゲージ変換の自由度を利用して電磁場 A^μ に Lorenz 条件 (837) を課す. Lorenz 条件を採用することの利点は, その式 (837) が座標変換に対して共変的であることと, 場の方程式が周知のように波動方程式 (838) に単純化されることにある.

ところで電磁場 A^μ に共役な場は, 式 (205) で調べたように式 (839) で与えられる. このため 3.2.3 項で Maxwell 理論の拘束条件として説明したように, 共役運動量密度の時間成分は $\pi^0 = 0$ となる. すると, このままでは正準交換関係を課することができない. そこで Lorenz 条件を踏まえ, ラグランジアン密度を Fermi によって提案された形 (840) に改めよう. このとき再び波動方程式 (838) が導かれる(導出スライド参照). また共役な場 (841) はどの成分もゼロとならないため(導出スライド参照), ラグランジアン密度 (840) は正準量子化に適している.

なおここでは電磁場 A^μ を 4 成分から成る 4 元ベクトルとして記述しているのに対し, 電磁波は横波なので実際の自由度は 2 である. そこで適切にゲージ固定を行えば電磁場の正しい自由度が得られることを確認しておこう. まず Lorenz 条件 (837) を課すと, 自由

度が1だけ減る．ところがLorenz条件を満たすポテンシャル A_μ は無数にあり，Lorenzゲージの下でもなお，ゲージ変換(834)を行う自由度が残されている．そこでゲージ関数 f を固定すると，さらに自由度が1だけ減り，確かに電磁場の自由度は2となる．

完全を期すために，ここで光子の偏極ベクトル $\varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})$ を導入しておこう．共変な定式化では式(842)の ζ_r に対して，正規直交性(843)と完全性(844)を満たす $r = 0, 1, 2, 3$ の4つの実の偏極ベクトル $\varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})$ が利用される (導出スライドで説明) [17, pp.90–91]．ただし光子の物理的な始・終状態に関しては，横波の自由度に対応する2つの偏極状態 $r = 1, 2$ で指定される．

Dirac場と自由電磁場のラグランジアン密度(833),(836)を合わせると，量子電磁力学(QED)の完全なラグランジアン密度(845)が得られる．全ラグランジアン密度(845)は「自由Dirac場項」「自由電磁場項」「相互作用項」の3つから成っており，これが理論を定義する．ただし自由電磁場の項には代わりにFermiの提案した形(840)を用いても良い．

QEDではスピン $\frac{1}{2}$ のDirac粒子として，荷電レプトンと中性レプトン(ニュートリノ) $\nu_l, \bar{\nu}_l$ が扱われる．荷電レプトンには電子 $e^\mp$ ，ミュー粒子 $\mu^\mp$ ，タウ粒子 $\tau^\mp$ の3種類が知られており，電子と等しい電荷 $\mp e$ (e は素電荷)と，異なる質量(846)を持つ．中性レプトン $\nu_l, \bar{\nu}_l$ もまた $l = e, \mu, \tau$ の3種類があり，いずれも電荷はゼロである．またニュートリノ $\nu_l, \bar{\nu}_l$ の質量を m_{ν_l} と書こう．これら一連のレプトンを記述に含めるには単に，

荷電レプトンと中性レプトンの各々にそれぞれ Dirac 場 ψ_l と ψ_{ν_l} を充てがい, ラグランジアン (845) における Dirac 場の項を全てのレプトンにわたる和 (847) に置き換えれば良い. このとき QED はレプトン対の生成過程 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ などを記述できる.

14 経路積分による QED

14.1 正準形式と経路積分形式

14.1.1 遷移振幅と Green 関数, および境界形式

■ 遷移振幅と Green 関数 [1, pp.227–229]

1 変数 $q(t)$ を持つ力学系に対する 2 点 (Green) 関数は, 真空上の量子 (励起) の振幅

$$A(t, t') = \langle 0 | q(t') q(t) | 0 \rangle \quad (t' > t) \quad (851)$$

で定義される ($q(t)$ は Heisenberg 演算子). 他方で遷移振幅

$$A(q, t, q', t') = \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle \quad (852)$$

は, 系を配位 $q(t)$ に見出した後に $q'(t')$ に見出す確率を定める. このため遷移振幅 (852) は左辺の引数に明示したように, 配位変数 q, q' にも依存する.

真空状態の波動関数を $\psi_0(q) = \langle q | 0 \rangle$ と書くと, 2つの量 (851), (852) は

$$A(t, t') = \int dq dq' A(q, t, q', t') q q' \psi_0(q) \overline{\psi_0(q')} \quad (853)$$

で関係付けられる (バーは複素共役).

2点関数(853)は、経路積分を用いて

$$A(t, t') = \int Dq q(t)q(t')e^{iS[q]} \quad (854)$$

と書くこともできる(S は作用). 実際, Feynmanの経路積分

$$A(q, t, q', t') = \int Dq e^{i \int_t^{t'} L dt}, \quad \psi_0(q) = \int Dq e^{i \int_{-\infty}^t L dt} \quad (855)$$

に対して, 経路積分(854)はもとの式(853)に戻る.

■場の理論 [1, pp.229–230]

2点関数の公式(853)は直ちに場の理論での表式

$$A(x, x') = \langle 0 | \phi(x') \phi(x) | 0 \rangle = \int D\phi D\phi' A[\phi, t, \phi', t'] \phi(x) \phi'(x') \overline{\Psi_0[\phi']} \Psi[\phi] \quad (856)$$

へと一般化できる. ただし第2辺の演算子積は既に時間順序化してある.

図58のようなコンパクト領域 $\mathcal{R}$ を選べば、2点関数の式(856)は

$$A_{\Psi_b}(x, x') = \int D\varphi_b A[\varphi_b] \varphi(\boldsymbol{x}) \varphi(\boldsymbol{x}') \Psi_b[\varphi_b] \quad (857)$$

と自然に一般化でき、ここに

- φ_b は領域の境界における場 (バルクの値 ϕ と字体を意図的に使い分けている)
- $A[\varphi_b]$ は境界場のみに依存する遷移振幅
- $\Psi_b[\varphi_b]$ は境界上の場の状態 (領域の外側の積分で決まる)

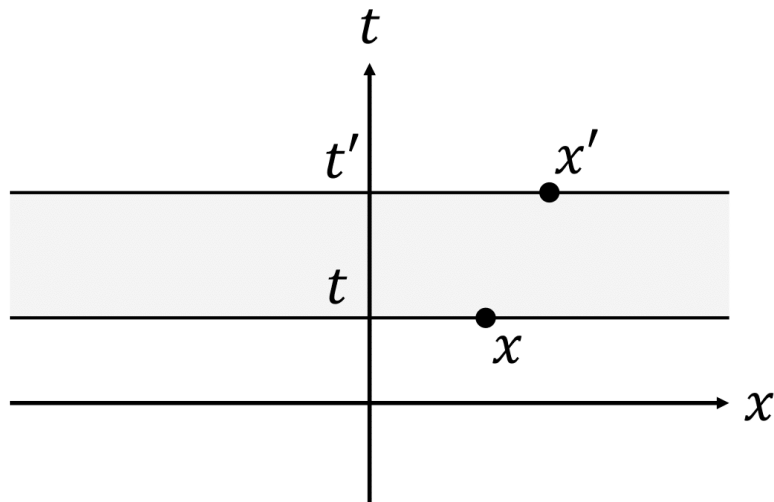


図57 式(856)に対応する時空の分離

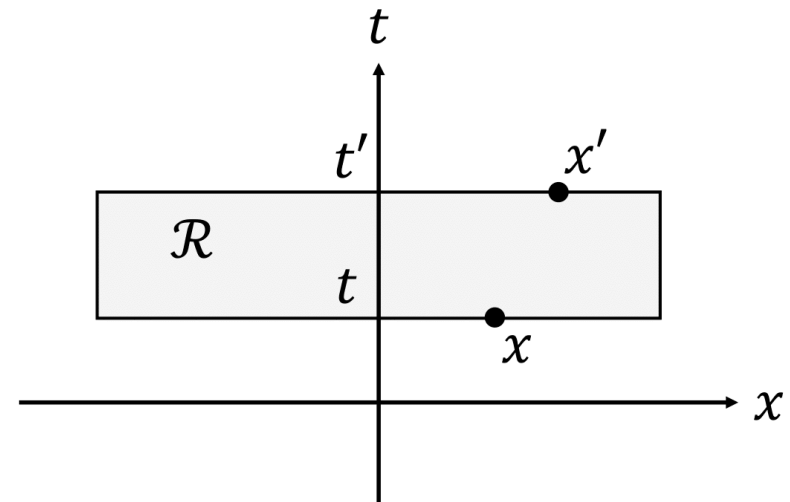


図58 式(857)に対応する時空の分離

■境界形式 [1, pp.50–52, pp.229–230] [2, pp.22–23, p.193]

背景独立な量子重力理論では、式(857)における境界振幅

$$A[\varphi_b] = \int D\phi e^{i \int_{\mathcal{R}} L[\phi] d^4x} \quad (858)$$

は境界場の状態 $\Psi[\varphi_b]$ のみの関数 $\langle A|\Psi\rangle$ であり、実際 $\Psi[\varphi_b]$ は境界の幾何学をも定める。特に背景時空の与えられた非相対論的な場合には、境界状態は始・終状態のテンソル積

$$|\Psi\rangle = |\psi_0\rangle \otimes \langle\psi_t| \quad (859)$$

で与えられ、対応する境界 Hilbert 空間は始・終 Hilbert 空間のテンソル積

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_t^* \quad (860)$$

に同定される^{*158}。このとき遷移振幅は境界状態の関数

$$A(\Psi) = \langle A|\Psi\rangle = \langle A| \cdot (|\psi_0\rangle \otimes \langle\psi_t|) \equiv \langle\psi_t| e^{-iHt} |\psi_0\rangle. \quad (861)$$

^{*158} 式(859)の各状態は属している空間が異なるため、両辺のブラ・ケットの不一致は見かけ上の不都合に過ぎない。

■量子重力 [1, pp.229–231]

共変ループ量子重力(第IV部)には, 2点関数(857)を書くための全ての要素がある.

n 点関数を素朴に

$$A(x_1, \cdots, x_n) = \int D[g] g(x_1) \cdots g(x_n) e^{iS[g]} \quad (862)$$

と書くと, これは一般共変性より座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ に依存しない定数になる(不条理).
正しくは座標距離 x_i ではなく, 境界状態で決まる物理的な距離を用いねばならない.

14.1.1 項の式の導出など

■2点 Green 関数と遷移振幅の関係 (853) の導出 [1, p.228]

2点関数 (851) における Heisenberg 演算子は Schrödinger 演算子 q と $q(t) = e^{+iHt} q e^{-iHt}$ で関係付けられる． よって2点関数 (851) は

$$A(t, t') = \langle 0 | q(t') q(t) | 0 \rangle = \langle 0 | e^{+iHt'} q e^{-iHt'} e^{+iHt} q e^{-iHt} | 0 \rangle$$

と書き換えられる． ところが真空状態 $|0\rangle$ は時間発展の下で不変である． よって

$$\begin{aligned} A(t, t') &= \langle 0 | q e^{-iH(t'-t)} q | 0 \rangle \\ &= \int dq \int dq' \langle 0 | q' \rangle q' A(q, t, q', t') q \langle q | 0 \rangle \\ &= \int dq \int dq' A(q, t, q', t') q q' \psi_0(q) \overline{\psi_0(q')} : (853) \end{aligned} \tag{863}$$

と書くことができ，表式 (863) 以降ではもはや q と q' は単なる数である．

■経路積分(854)が2点関数(853)に帰着することの確認 [1, pp.228–229]

経路積分は変数 $q(t)$ に関する多重積分(の極限)である. 一連の積分変数を図59のように,

- 固定された値 t と t' に対する単一の変数 $q(t)$ と $q(t')$
- 時刻 t と t' を境とする3つの時間区間の変数

の合計5つのグループに分割しよう.

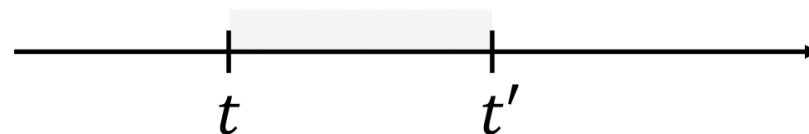


図59 測度の分割 $Dq = \left[\prod_{t_i < t} dq(t_i) \right] dq(t) \left[\prod_{t < t_i < t'} dq(t_i) \right] dq(t') \left[\prod_{t' < t_i} dq(t_i) \right]$

このとき経路積分(854)は

$$A(t, t') = \int dq(t) q(t) \int dq(t') q(t')$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\int \prod_{t_i < t} dq(t_i) \cdot e^{i \int_{-\infty}^t L[q] dt} \right] \left[\int \prod_{t < t_i < t'} dq(t_i) \cdot e^{i \int_t^{t'} L[q] dt} \right] \\
& \times \left[\int \prod_{t' < t_i} dq(t_i) \cdot e^{i \int_{t'}^{\infty} L[q] dt} \right] \\
& = \int dq(t) \int dq(t') q(t) q(t') \psi_0(q(t)) A(q(t), t, q(t'), t') \overline{\psi_0(q(t'))}
\end{aligned}$$

となり，式(853)に戻る．

14.1 節の原稿(序文)

9.3.1 項で見た粒子系に対する Feynman の経路積分と同様，場の理論においても正準形式から経路積分形式を導出することができる．しかしながら本稿では基本的に正準形式の知識を仮定することなく，一貫して経路積分のみを用いた自己完結的な定式化を目指す．それに先立ち教育的配慮として，正準形式に基づく経路積分の説明に関する最低限の話題をあらかじめまとめておこう．

14.1.1 項の原稿

Arthur Wightman が 1950 年代に強調したように，伝統的な場の理論では n 点 (Green) 関数が求まれば，そこから理論のあらゆる予言を導くことができる．まずは簡単のため場 $\phi(x)$ の代わりに，場の役割を演じる，時間発展する 1 変数 $q(t)$ を持つ力学系を考える．このとき 2 点 (Green) 関数は，真空期待値 (851) で定義され，ここに $q(t)$ は時間に依存する Heisenberg 演算子である．2 点関数 (851) は状態 $q(t) |0\rangle$ と $q(t') |0\rangle$ の間の遷移振幅であり，真空状態において時刻 t に量子を生成したとき，後の時刻 t' に量子を見出す確率を与える．場の理論では粒子のある時空点から別の時空点への伝播関数である．言い換えれば 2 点関数は特定の (真空) 状態 $|0\rangle$ 上の，場の量子 (励起) に対する振幅であって，場の配位に関する情報は担わない．したがって 2 点関数 (851) は左辺の引数に明示したように，時刻 t, t' のみの関数であって， q と q' には依存しない．他方で異なる時刻における場の配位の間遷移振幅 (852) は，系を初期時刻の配位 $q(t)$ に見出したときに，終

時刻に系を配位 $q'(t')$ に見出す確率を定める．このため遷移振幅(852)は左辺の引数に明示したように、配位変数 q, q' にも依存する．

2点関数(851)と遷移振幅(852)を混同してはならない．真空状態の波動関数を $\psi_0(q) = \langle q|0 \rangle$ と書き、その複素共役をバーで表すと、これら2つの量は式(853)で関係付けられる(導出スライド参照)．遷移振幅(852)とは対照的に、2点関数(853)は真空状態 ψ_0 も用いて表され、あくまで特定の状態 ψ_0 における理論のダイナミクスを特徴付ける．

ところで9.3.1項では、遷移振幅(853)に対する経路積分の公式を正準形式から導いた．他方で2点関数(853)は、経路積分を用いて式(854)のように書くこともでき、ここに S は作用積分である．実際、遷移振幅と始・終状態をFeynmanの経路積分(855)で与えると、経路積分(854)はもとの式(853)に戻る(導出スライド参照)．式(855)の始・終状態 ψ_0 は無限遠での適切な境界条件の下での積分の結果であり、2点関数に対する経路積分(854)においても、状態は無限遠での境界条件によって陰に決定されることになる．以上の考察を場の理論に推し進めよう．2点関数の公式(853)は直ちに場の理論での表式(856)へと一般化できる．ただし式(856)第2辺における場の演算子積は既に時間順序化が施されているものとする．

また最右辺における遷移振幅 $A[\phi, t, \phi', t']$ は図57に示した始・終時刻のスライス間の帯(band)における場の伝播関数である．この積分を実行するには、2つの同時刻面と空間

の無限遠での場の境界値を定めねばならないことに注意せよ.

図57のような2つの同時刻面に挟まれる帯を選ぶ代わりに, 図58に示したような任意のコンパクト領域 $\mathcal{R}$ を選ぶこともできる. このとき2点関数の式(856)は式(857)へと自然に一般化でき, ここに φ_b は領域の境界における場, $A[\varphi_b]$ は境界場のみに依存する遷移振幅, $\varphi(x)$ と $\varphi(x')$ は境界上の2つの異なる点における場の値, また $\Psi_b[\varphi_b]$ は領域の外側の積分で決まる境界上の場の状態である. 場とその境界値をそれぞれ意図的に ϕ, φ と書き分けていることに注意していただきたい. またコンパクト領域 $\mathcal{R}$ としては矩形に限らず, 2.2.4項の図12に示したような, 2枚の空間的超曲面に挟まれたレンズ型の時空領域を考えても良い.

コンパクト領域に対する式(857)の定式化は, 背景独立な量子重力理論を伝統的な平坦な空間上の場の量子論に関係付け, 重力子伝播関数などを計算する上での概念的な出発点を与える. 背景に依存する理論では, 式(857)における境界振幅(858)を定義するには場の境界値に加えて, 境界領域の形状, その幾何学, その大きさ, 過程の始まりから終わりまでの時間経過, 等々もまた定めねばならない. しかしながら背景独立な量子重力理論では, 重力場とは背景時空上の場ではなく時空そのものであり, 宇宙には動力学的な場の他には何も存在しない. したがって境界振幅(858)は領域 $\mathcal{R}$ の形状をはじめとする背景の情報に依らず, 境界 $\Sigma = \partial\mathcal{R}$ 上の重力場(と存在する他のあらゆる場)の状態 $\Psi[\varphi_b]$ のみの関数のはずである. しかし, それならば境界 Σ の形状, すなわち幾何学を, 我々はどのように知るのか? ここで量子重力のマジックが登場する: 答は, Σ の形状,

サイズおよび幾何学が既に境界場の状態 $\Psi[\varphi_b]$ によって決定されているということである！ 境界場の状態 $\Psi[\varphi_b]$ を割り当てることは、実に、境界の形状、サイズ、過程の始まりから終わりまでに経過した時間を含む、境界の幾何学を与えるのに充分である！ こうして遷移振幅は超曲面 Σ 上の重力場(と他の場)の決まった境界値に応じた、内部の有限なバルク領域における Feynman の経路積分(すなわち“幾何学にわたる和”)で与えられ、面 Σ 上における場の(量子)状態のみの関数となる。ブラ・ケット表記では、境界 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に属する場の量子状態 $\Psi[\varphi_b]$ を $|\Psi\rangle$ と書くと、境界状態の関数である遷移振幅は $\langle A|\Psi\rangle$ と表すことができる。数学的に言えば、遷移振幅は境界 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の線形汎関数 $\langle A|$ である。量子重力に対して遷移振幅 A をあからさまに構成することは、第 IV 部の主要な関心事となる。

特に非相対論的な場合には与えられた背景時空において、境界状態は始・終状態のテンソル積(859)で与えられ、対応する境界 Hilbert 空間は始・終 Hilbert 空間のテンソル積(860)に同定される。境界状態(859)では終状態にブラ・ベクトル $\langle\psi_t|$ が利用されているため、式(860)ではブラ空間 $\mathcal{H}_t^*$ が用いられている。式(859)の各状態は属している空間が異なるため、両辺のブラ・ケットの不一致は見かけ上の不都合に過ぎない。このとき遷移振幅は境界状態の関数(861)で与えられ、境界状態に加えて、始・終状態間の時間 t に依存する [2, pp.22–23, p.193].

ここで量子重力に戻ろう。第 IV 部で見る予定の共変ループ量子重力には、コンパクト領域の境界を利用した 2 点関数(857)を書くための全ての要素がある。理論には境界上の場に対する遷移振幅、および与えられた古典的な配位に対応する領域の境界上の量子

重力場を記述できるコヒーレント状態の概念がある．これらの要素を合わせると，背景独立な量子重力理論から背景上の n 点関数を再構成できる．

これが量子重力における長年の混乱の解決策である：形式的には，もし $S[g]$ が一般共変な作用であり $D[g]$ が一般共変な測度ならば，素朴に n 点関数を表すと期待される量 (862) は点 $(x_1, \dots, x_n)$ の位置に依存しない (点が重複しない限り)，何故なら一般共変性は他の全てを不変に保ちつつ点を動かせるからである．言い換えれば式 (862) は定数となる [2, p.11]．ところがそれは不条理であり，したがって式 (862) は一般共変な理論では n 点関数の不正確な定義である．誤りは n 点関数の引数が背景の計量において計算される物理的な距離でなければならないのに対し，式 (862) における引数 x_i たちは座標距離だということである．物理的な距離を特定するには，やはり場の境界状態をあからさまに指定する必要がある．2 点関数の式 (857) に関して言えば，微分同相写像の下では点の位置だけでなく，境界状態 $\Psi(\varphi_b)$ も変換するため，単なる定数に限らない非自明な量となっている．

14.1.2 Dirac場の経路積分

■フェルミオンのコヒーレント状態 [23, pp.108–109]

Dirac場 ψ の共役運動量密度は $\pi = i\psi^\dagger$ であることを踏まえ [17, p.69, p.105], 有限自由度のフェルミオン演算子 $\hat{\psi}_a^\dagger, \hat{\psi}_a$ に対する“正準反交換関係”

$$\{\hat{\psi}_a, \hat{\psi}_b^\dagger\} = \delta_{ab}, \quad \{\hat{\psi}_a, \hat{\psi}_b\} = 0, \quad \{\hat{\psi}_a^\dagger, \hat{\psi}_b^\dagger\} = 0 \quad (864)$$

を考えると, 真空を $|0\rangle$ として, $\hat{\psi}_a^\dagger, \hat{\psi}_a$ はそれぞれ

$$\hat{\psi}_a^\dagger |0\rangle \equiv |a\rangle, \quad \hat{\psi}_a |0\rangle = 0 \quad (865)$$

を満たす生成・消滅演算子と見なせる. ここでコヒーレント状態

$$|\psi\rangle \equiv \exp\left(-\sum_a \psi_a \hat{\psi}_a^\dagger\right) |0\rangle \quad (866)$$

を定義すると, これは消滅演算子の固有方程式

$$\hat{\psi}_a |\psi\rangle = \psi_a |\psi\rangle \quad (867)$$

を満たす固有状態となる.

コヒーレント状態(866)対して

$$\langle \psi | \psi' \rangle = \exp \left(\sum_a \psi_a^* \psi'_a \right), \quad (868)$$

$$\int \left(\prod_{a'} d\psi_{a'}^* d\psi_{a'} \right) |\psi\rangle \exp \left(- \sum_a \psi_a^* \psi_a \right) \langle \psi| = 1 \quad (869)$$

が成り立つ.

参考

Bose粒子系でもコヒーレント状態は式(868)と類似の関係 $\langle \lambda | \lambda \rangle = e^{|\lambda|^2}$ を満たす, 式(866)と類似の, 消滅演算子 $\hat{a}$ の固有値 λ に属する固有状態

$$|\lambda\rangle \equiv e^{\lambda \hat{a}^\dagger} |0\rangle \quad (870)$$

として定義されたことを思い出そう [17, p.11, pp.26–27] [11, pp.130–131, p.199].

■ Dirac場の経路積分 [23, pp.109–110] [28, pp.211–213]

フェルミオン場 $\psi_\alpha(x, t)$ を成分が $a = (\alpha, x)$ でラベルされる列ベクトル $\psi(t)$ で表す。
また Dirac場の理論のように、ハミルトニアンが ψ と $\psi^\dagger$ の双1次形式

$$H(t) = \psi^\dagger(t) M(t) \psi(t) \equiv H(\psi^\dagger(t), \psi(t), t) \quad (871)$$

の形に書ける場合を仮定する。ここで場を Heisenberg 演算子 $\hat{\psi}(t)$ の固有方程式

$$\hat{\psi}_a(t) |\psi(t), t\rangle = \psi_a(t) |\psi(t), t\rangle \quad (872)$$

を満たすコヒーレント状態 $|\psi(t), t\rangle$ を導入し、遷移振幅

$$\langle \psi_F, t_F | \psi_I, t_I \rangle \quad (\psi_I \equiv \psi(t_I), \psi_F \equiv \psi(t_F)) \quad (873)$$

を考える。次に時間を $t_k = t_I + k\Delta t$, $\Delta t = (t_F - t_I)/N$ と離散化すると,

$$\begin{aligned} \langle \psi_F, t_F | \psi_I, t_I \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{k=1}^{N-1} \prod_a d\psi_a(t_k)^* d\psi_a(t_k) \right) e^{+\psi(t_N)^\dagger \psi(t_N)} \\ &\quad \times \exp \sum_{l=0}^{N-1} \left[-\psi(t_{l+1})^\dagger (\psi(t_{l+1}) - \psi(t_l)) - i\Delta t H(\psi^\dagger(t_{l+1}), \psi(t_l), t_l) \right]. \end{aligned} \quad (874)$$

場の理論に移行するにあたり，各格子点 $\boldsymbol{x}$ が空間に占める体積を ΔV として，共役運動量 $i\psi^\dagger$ を $i\psi^\dagger \Delta V$ に読み替えると(このとき $i\psi^\dagger$ は運動量密度になる)，添字 $a = (\alpha, \boldsymbol{x})$ にわたる和からは

$$\begin{aligned}\psi^\dagger(t_k)\psi(t_k) &\rightarrow \Delta V \psi^\dagger(t_k)\psi(t_k) = \Delta V \sum_{\alpha, \boldsymbol{x}} \psi_\alpha(\boldsymbol{x}, t_k)^* \psi_\alpha(\boldsymbol{x}, t_k) \\ &\rightarrow \int d^3x \psi^\dagger(\boldsymbol{x}, t_k)\psi(\boldsymbol{x}, t_k)\end{aligned}\quad (875)$$

のように，空間積分が自然に現れる．(例えば複数のレプトンを記述する Dirac 場がある場合には，レプトンの種類のラベルをあらかじめ添字 a に含めておけば，明らかにレプトンの全種類にわたる和と積分が現れる．) このとき式(874)は経路積分

$$\langle \psi_F, t_F | \psi_I, t_I \rangle = \int \mathcal{D}\psi^* \mathcal{D}\psi \exp \left[i \int_{t_I}^{t_F} dt L(t) \right], \quad L \equiv \int d^3x (i\psi^\dagger) \dot{\psi} - H \quad (876)$$

になる．

14.1.2項の式の導出など

■コヒーレントに対する固有方程式(867)の確認

固有方程式(867)を正準反交換関係(864)と矛盾なく扱うには、固有値 ψ_a をGrassmann変数として、演算子 $\hat{\psi}_b, \hat{\psi}_b^\dagger$ とも反交換すると考えねばならない [23, pp.101–105] :

$$\{\psi_a, \psi_b\} = \{\psi_a, \hat{\psi}_b\} = \{\psi_a, \hat{\psi}_b^\dagger\} = 0.$$

このとき $\psi_a \hat{\psi}_a^\dagger$ と $\psi_b \hat{\psi}_b^\dagger$ (ただし $a \neq b$)は交換するから、

$$|\psi\rangle \equiv \exp\left(-\sum_a \psi_a \hat{\psi}_a^\dagger\right) |0\rangle = \left\{ \prod_a \exp\left(-\psi_a \hat{\psi}_a^\dagger\right) \right\} |0\rangle$$

とできる．さらに $\hat{\psi}_a$ と $\psi_b \hat{\psi}_b^\dagger$ (ただし $a \neq b$)が交換することに注意すると

$$\hat{\psi}_a |\psi\rangle = \hat{\psi}_a \left\{ \prod_b \exp\left(-\psi_b \hat{\psi}_b^\dagger\right) \right\} |0\rangle = \left\{ \prod_{b(\neq a)} \exp\left(-\psi_b \hat{\psi}_b^\dagger\right) \right\} \hat{\psi}_a \exp\left(-\psi_a \hat{\psi}_a^\dagger\right) |0\rangle \quad (877)$$

となる．ここで真空 $|0\rangle$ はGrassmann偶，すなわち偶数個のGrassmann数の積の線形結合であり，それゆえGrassmann数と交換する量であると約束する．このとき

$|a\rangle \equiv \hat{\psi}_a^\dagger |0\rangle$ は Grassmann 奇, すなわち奇数個の Grassmann 数の積の線形結合であり, それゆえ Grassmann 数と反交換する量となる [28, p.96] [23, p.108]. これに注意すると上式(877)最右辺において

$$\begin{aligned}\exp(-\psi_a \hat{\psi}_a^\dagger) |0\rangle &= (1 - \psi_a \hat{\psi}_a^\dagger) |0\rangle = |0\rangle - \psi_a |a\rangle = |0\rangle + |a\rangle \psi_a, \\ \hat{\psi}_a \exp(-\psi_a \hat{\psi}_a^\dagger) |0\rangle &= \hat{\psi}_a (|0\rangle + |a\rangle \psi_a) = |0\rangle \psi_a = \psi_a |0\rangle = \psi_a (|0\rangle - \psi_a |a\rangle) \\ &= \psi_a \exp(-\psi_a \hat{\psi}_a^\dagger) |0\rangle\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}(\text{式(877) 最右辺}) &= \left\{ \prod_{b(\neq a)} \exp(-\psi_b \hat{\psi}_b^\dagger) \right\} \psi_a \exp(-\psi_a \hat{\psi}_a^\dagger) |0\rangle \\ &= \psi_a \left\{ \prod_b \exp(-\psi_b \hat{\psi}_b^\dagger) \right\} |0\rangle = \psi_a |\psi\rangle : (867)\end{aligned}$$

を得る.

■コヒーレント状態の内積 $\langle\psi|\psi'\rangle$ の式(868)の確認

$$|\psi\rangle = \left\{ \prod_a \exp\left(-\psi_a \hat{\psi}_a^\dagger\right) \right\} |0\rangle,$$

$$\therefore \langle\psi| = \langle 0| \left\{ \prod_a \exp\left(-\hat{\psi}_a \psi_a^*\right) \right\} = \langle 0| \left\{ \prod_a \exp\left(\psi_a^* \hat{\psi}_a\right) \right\} = \langle 0| \left\{ \prod_a (1 + \psi_a^* \hat{\psi}_a) \right\}$$

なので

$$\begin{aligned} \langle\psi|\psi'\rangle &= \langle 0| \prod_a (1 + \psi_a^* \hat{\psi}_a) |\psi'\rangle = \langle 0| \prod_a (1 + \psi_a^* \psi_{a'}) |\psi'\rangle \\ &= \langle 0| \exp\left(\sum_a \psi_a^* \psi_{a'}\right) |\psi'\rangle = \exp\left(\sum_a \psi_a^* \psi_{a'}\right) \langle 0|\psi'\rangle \end{aligned}$$

となる．ここで

$$\langle 0| \psi_a^\dagger = 0, \quad \therefore \langle 0|\psi'\rangle = \langle 0|0\rangle = 1$$

だから，式(868)を得る．

■コヒーレント状態 $|\psi\rangle$ で表した完全性条件 (869) の導出

$$|\psi\rangle = \left\{ \prod_a \exp \left(-\psi_a \hat{\psi}_a^\dagger \right) \right\} |0\rangle = \left\{ \prod_a (1 - \psi_a \hat{\psi}_a^\dagger) \right\} |0\rangle ,$$

$$\langle\psi| = \langle 0| \left\{ \prod_a \exp \left(-\hat{\psi}_a \psi_a^* \right) \right\} = \langle 0| \left\{ \prod_a (1 - \hat{\psi}_a \psi_a^*) \right\}$$

なので

$$|\psi\rangle \exp \left(-\sum_a \psi_a^* \psi_a \right) \langle\psi|$$

$$= \left\{ \prod_b (1 - \psi_b \hat{\psi}_b^\dagger) \right\} |0\rangle \left\{ \prod_a (1 - \psi_a^* \psi_a) \right\} \langle 0| \left\{ \prod_c (1 - \hat{\psi}_c \psi_c^*) \right\}$$

となる．ここで ψ_a の添字 a は $\{a_1, \dots, a_N\}$ の N 種類あるとし， $0 \leq n \leq N$ を満たす整数 n を決めてここから n 個の要素 $a_{i_1}, \dots, a_{i_n}$ を選ぶ (select) 方法を s と呼ぶ．さらに選ばれた n 個の要素を a_s ，残りの $N - n$ 個の要素を a_r ， $|a_s\rangle \equiv \prod_{a_s} \psi_{a_s}^\dagger |0\rangle$ と書くことに

する．このとき $\int d\psi_a 1 = 0, \int d\psi_a^* 1 = 0$ に注意すると，式(869)左辺の積分に寄与する項は

$$\begin{aligned} & \sum_s \left\{ \prod_{a_s} (-\psi_{a_s} \hat{\psi}_{a_s}^\dagger) \right\} |0\rangle \left\{ \prod_{a_r} (-\psi_{a_r}^* \psi_{a_r}) \right\} \langle 0| \left\{ \prod_{a_s} (-\hat{\psi}_{a_s} \psi_{a_s}^*) \right\} \\ &= \sum_s \left\{ \prod_{a_r} (-\psi_{a_r}^* \psi_{a_r}) \right\} \left\{ \prod_{a_s} (-\psi_{a_s}^* \psi_{a_s}) \right\} |a_s\rangle \langle a_s| = \left(\prod_a \psi_a^* \psi_a \right) \sum_s |a_s\rangle \langle a_s| \end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned} & \int \left(\prod_{a'} d\psi_{a'}^* d\psi_{a'} \right) |\psi\rangle \exp \left(- \sum_a \psi_a^* \psi_a \right) \langle \psi| \\ &= \left\{ \left(\int d\psi_a^* \psi_a^* \right) \left(\int d\psi_a \psi_a \right) \right\} \sum_s |a_s\rangle \langle a_s| = \sum_s |a_s\rangle \langle a_s| = 1 : (869) \end{aligned}$$

を得る．

■ Dirac場の経路積分(874)の導出 [23, pp.109–110] [28, pp.211–213]

各時刻 t_k でのコヒーレント状態の完全系(869):

$$\int \left(\prod_a d\psi_a(t_k)^* d\psi_a(t_k) e^{-\psi_a(t_k)^* \psi_a(t_k)} \right) |\psi(t_k), t_k\rangle \langle \psi(t_k), t_k| = 1$$

を次々と挿入すると、遷移振幅は

$$\begin{aligned} \langle \psi_F, t_F | \psi_I, t_I \rangle &= \int \left(\prod_{k=1}^{N-1} \prod_a d\psi_a(t_k)^* d\psi_a(t_k) e^{-\psi_a(t_k)^* \psi_a(t_k)} \langle \psi(t_{k+1}), t_{k+1} | \psi(t_k), t_k \rangle \right) \\ &\quad \times \langle \psi(t_1), t_1 | \psi(t_0), t_0 \rangle \end{aligned} \quad (878)$$

と書き換えられる．ここでハミルトニアン(871): $\hat{H}(t) = \sum_{a,b} \hat{\psi}_a(t)^* M_{ab}(t) \hat{\psi}_b(t)$ が時間発展を生成することを用いると、各微小時間ごとの遷移振幅は

$$\begin{aligned} \langle \psi(t_{k+1}), t_{k+1} | \psi(t_k), t_k \rangle &\simeq \langle \psi(t_{k+1}), t_k | (1 - i\Delta t \hat{H}(t_k)) | \psi(t_k), t_k \rangle \\ &= \{1 - i\Delta t \psi^\dagger(t_{k+1}) M(t_k) \psi(t_k)\} \langle \psi(t_{k+1}), t_k | \psi(t_k), t_k \rangle \\ &\simeq e^{-i\Delta t H(\psi^\dagger(t_{k+1}), \psi(t_k), t_k)} e^{\sum_a \psi_a(t_{k+1})^* \psi_a(t_k)} \end{aligned}$$

と表される．ただし最後の等号でコヒーレント状態の公式(868)を利用した．これを上式(878)に代入すると

$$\begin{aligned}
\langle \psi_F, t_F | \psi_I, t_I \rangle &= \int \left(\prod_{k=1}^{N-1} \prod_a d\psi_a(t_k)^* d\psi_a(t_k) \right) \left(\prod_{l=0}^{N-1} e^{-i\Delta t H(\psi^\dagger(t_{l+1}), \psi(t_l), t_l)} \right) \\
&\quad \times \exp \sum_b \left[\psi_b(t_0)^* \psi_b(t_0) + \sum_{j=0}^{N-1} \{ \psi_b(t_{j+1})^* - \psi_b(t_j)^* \} \psi_b(t_j) \right] \\
&= \int \left(\prod_{k=1}^{N-1} \prod_a d\psi_a(t_k)^* d\psi_a(t_k) \right) \left(\prod_{l=0}^{N-1} e^{-i\Delta t H(\psi^\dagger(t_{l+1}), \psi(t_l), t_l)} \right) \\
&\quad \times \exp \sum_b \left[\psi_b(t_N)^* \psi_b(t_N) - \sum_{j=0}^{N-1} \psi_b(t_{j+1})^* \{ \psi_b(t_{l+1}) - \psi_b(t_j) \} \right] \\
&= \int \left(\prod_{k=1}^{N-1} \prod_a d\psi_a(t_k)^* d\psi_a(t_k) \right) e^{+\psi(t_N)^\dagger \psi(t_N)} \\
&\quad \times \exp \sum_{l=0}^{N-1} \left[-\psi(t_{l+1})^\dagger (\psi(t_{l+1}) - \psi(t_l)) - i\Delta t H(\psi^\dagger(t_{l+1}), \psi(t_l), t_l) \right]
\end{aligned}$$

とまとめられる．最後に $N \rightarrow \infty$ の極限をとると，式(874)を得る．

14.1.2項の原稿

9.3.1項では粒子の遷移振幅に対する(相空間の)経路積分の公式を正準理論から導いた。これと概ね同様の手続きで、フェルミオン場(Grassmann場)の遷移振幅を経路積分で表すことができる。ただしその際、粒子の位置固有状態の対応物として、フェルミオン場のコヒーレント状態を利用することになる。コヒーレント状態はあくまで最終的な経路積分の公式(876)を導く手段であり、初めから経路積分を原理として提示する場合には、必ずしもコヒーレント状態の概念をあからさまに利用する必要はない。

初等的によく知られているように、Dirac場 ψ の共役運動量密度は $\pi = i\psi^\dagger$ である [17, p.69,p.105]。これを踏まえ、有限自由度のフェルミオン演算子 $\hat{\psi}_a^\dagger, \hat{\psi}_a$ に対する“正準反交換関係”(864)を考えよう。ところが式(864)は調和振動子の反交換関係に他ならないので、真空を $|0\rangle$ とすると、 $\hat{\psi}_a^\dagger, \hat{\psi}_a$ はそれぞれ式(865)を満たす生成・消滅演算子と見なせる。ここでコヒーレント状態(866)を定義する。ただし指数の展開の2次以上の項は同じGrassmann変数を2つ以上含むため、指数の展開は1次の項までで途切れることに注意しよう。このときコヒーレント状態(866)は、消滅演算子の固有方程式(867)を満たす固有状態となる(導出スライド参照)。

またコヒーレント状態(866)対して式(868),(869)が成り立つことが示される(導出スライド参照)。

参考 Bose粒子系でもコヒーレント状態は式(868)と類似の関係 $\langle\lambda|\lambda\rangle = e^{|\lambda|^2}$ を満たす。

す，式(866)と類似の，消滅演算子 $\hat{a}$ の固有値 λ に属する固有状態(870)として定義されたことを思い出そう [17, p.11, pp.26–27] [11, pp.130–131, p.199].

次にフェルミオン場 $\psi_\alpha(x, t)$ を考え，スピノル添字と空間の格子点座標 x の組 $a = (\alpha, x)$ で成分がラベルされる列ベクトル $\psi(t)$ を導入する．また Dirac 場の理論のように， c 数の行列 $M(t)$ を用いてハミルトニアンが， ψ と $\psi^\dagger$ の双1次形式(871)の形に書ける場合を仮定する．ただし ψ と $\psi^\dagger$ は正準共役な変数にあたるので，独立に扱わねばならない．ここで場を Heisenberg 描像の演算子 $\hat{\psi}(t)$ に移行して，式(867)同様の固有方程式(872)を満たすコヒーレント状態 $|\psi(t), t\rangle$ を導入する．特に始・終時刻 t_I, t_F におけるコヒーレント状態の内積(873)として遷移振幅を定義する．次に $N \gg 1$ として時間を微小時間 $\Delta t = (t_F - t_I)/N$ おきに離散化し，時刻 $t_k = t_I + k\Delta t$ を定義する(このとき $t_0 = t_I, t_N = t_F$)．ハミルトニアン(871)が各微小時間 Δt ごとの時間発展を生成することをコヒーレント状態の公式と併せて用いると，遷移振幅(873)は式(874)へと書き換えられる．

場の理論に移行するにあたり，各格子点 x が空間に占める体積を ΔV として，共役運動量 $i\psi^\dagger$ を $i\psi^\dagger \Delta V$ に読み替え， $i\psi^\dagger$ が運動量密度となることを保証しよう．このとき式(874)に含意されている添字 $a = (\alpha, x)$ にわたる和からは式(875)のように，空間積分が自然に現れる．(例えば複数のレプトンを記述する Dirac 場がある場合には，レプトンの種類のラベルをあらかじめ添字 a に含めておけば，明らかにレプトンの全種類にわた

る和と積分が現れる．) このとき式(874)は適当に規格化した経路積分測度による，作用の指数の経路積分(876)になる．これは相空間の経路積分(675)に比較される結果と考えられる．

14.2 QED の Green 関数と生成汎関数

我々は Green 関数と生成汎関数を経路積分の方法で再定義することになるため、正準理論の説明は天下りで構わない。

14.2.1 正準形式と経路積分形式での定義

■正準理論での Green 関数 [22, pp.293–299, pp.306–308]

Green 関数は Heisenberg 描像 (添字 H で表す) において、複数の場の演算子の時間順序化積の真空期待値

$$G^{\mu\cdots}(x, \cdots y, \cdots z, \cdots) \equiv {}_H\langle 0 | T \{ A^{\mu H}(x) \cdots \psi^H(y) \cdots \bar{\psi}^H(z) \cdots \} | 0 \rangle_H \quad (879)$$

として定義される。Green 関数 (879) を相互作用描像に移行させると、Gell-Mann Low の定理 [21, pp.69–71] の形

$$G^{\mu\cdots}(x, \cdots y, \cdots z, \cdots) = \frac{\langle 0 | T \{ S A^{\mu}(x) \cdots \psi(y) \cdots \bar{\psi}(z) \cdots \} | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle} \quad (880)$$

になる。ここに S は QED の S 演算子 (S 行列) である。

■正準理論での生成汎関数 [22, pp.320–323]

QEDの量子場 $A^\kappa, \psi, \bar{\psi}$ に対応(結合)する虚構的な古典的源(source) $J_\kappa, \bar{\sigma}, \sigma$ (ただし $\sigma, \bar{\sigma}$ は独立なスピノル Grassmann 場)を導入し, ラグランジアン密度を

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_S, \quad \mathcal{L}'_I \equiv \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_S : \text{源がある場合の相互作用} \quad (881)$$

- 自由場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu)$
- 相互作用ラグランジアン密度 $\mathcal{L}_I = -s^\mu A_\mu$
- 源のラグランジアン密度 $\mathcal{L}_S = J_\kappa A^\kappa + \bar{\sigma}\psi + \bar{\psi}\sigma$

とする. 源の項 $\mathcal{L}_S$ を含むラグランジアン密度に対する S 演算子を S' として^{*159}, 生成汎関数は

$$Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \frac{\langle 0|S'|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle} \quad (882)$$

で定義される(したがって $Z[0, 0, 0] = 1$).

^{*159} S は $\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I$ (ただし正規順序化を施す) を相互作用ハミルトニアン密度とする Dyson 級数であるのに対し, S' は S 行列展開の中で $\mathcal{L}_I \rightarrow \mathcal{L}'_I = \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_S$ と置き換えた量である.

このとき

$$G^{\mu\cdots}(\underbrace{x_1, \cdots, y_1, \cdots}_{n \text{ 個}}, \overbrace{z_1, \cdots}^{\bar{n} \text{ 個}}) \equiv \frac{\langle 0 | T \{ S A^\mu(x_1) \cdots \psi(y_1) \cdots \bar{\psi}(z_1) \cdots \} | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle}$$

$$= (-1)^{\bar{n}} \left(\frac{1}{i} \right)^n \frac{\delta^n Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x_1) \cdots \delta \bar{\sigma}(y_1) \cdots \delta \sigma(z_1) \cdots} \Big|_0 \quad (883)$$

のように生成汎関数を源で汎関数微分すると，Green関数が得られる．

$$\text{生成汎関数} \quad \rightarrow \quad \text{Green関数} \quad \rightarrow \quad \text{S行列要素.} \quad (884)$$

■経路積分での表式 [22, pp.344–346]

経路積分形式では生成汎関数は,

$$Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX'}, \quad X' = \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_S) : \text{作用} \quad (885)$$

$$\mathcal{D}A = \prod_{\mu=0}^3 \mathcal{D}A^\mu, \quad \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi = \prod_{\alpha} \mathcal{D}\bar{\psi}_{\alpha} \mathcal{D}\psi_{\alpha} \quad (\alpha \text{はスピノル添字}) \quad (886)$$

で与えられる. 規格化定数 N は条件 $Z[0, 0, 0] = 1$ から

$$N = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX}, \quad X \equiv \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I) : \text{QED の作用} \quad (887)$$

と定まる. Green 関数は, 生成汎関数の源による (汎関数) 微分 (883),
あるいは等価的に, 式 (883) に経路積分 (885) を代入した表式

$$G^{\mu\cdots}(x_1, \cdots, y_1, \cdots, z_1, \cdots) = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \{ e^{iX} A^\mu(x_1) \cdots \psi(y_1) \cdots \bar{\psi}(z_1) \cdots \} \quad (888)$$

で与えられる.

■ゲージ固定 (Faddeev–Popov の方法) [22, pp.361–370]

Lorenz 条件 (837) を実装するため, デルタ汎関数 $\delta[\partial_\lambda A^\lambda]$ を経路積分測度を含めると

$$Z[J_\kappa] \sim \int \mathcal{D}A \delta[\partial_\lambda A^\lambda] \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J_\kappa A^\kappa \right) \right] \quad (889)$$

$$\sim \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right) + (\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \tilde{\eta}) + J_\kappa A^\kappa \right] \quad (890)$$

$$\sim \int \mathcal{D}A \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu) + J_\kappa A^\kappa \right) \right]. \quad (891)$$

- 自由電磁場項に付加的な “ゲージ固定項” $-\frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$ が現れる.
- ゴースト場 (Grassmann 場) $\eta, \tilde{\eta}$ に関する経路積分が生じる.

QCD のグルーオン場 $A_i^\mu(x)$ (ただし $i = 1, 2, \dots, 8$ は色電荷の添字 [22, p.370]) に対して式 (889) と類似の生成汎関数を

書き下すには, $h_i(x)$ を任意関数として, より一般的なゲージ条件

$$f_i(A_i^\mu(x)) \equiv \partial_\mu A_i^\mu(x) - h_i(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \quad (892)$$

を課し $\delta[\partial_\lambda A^\lambda] \rightarrow \prod_i \delta[f_i]$ とする. もはや式 (891) のようにゴースト項を分離不能.

14.2.1 項の式の導出など

■ Green 関数の経路積分表式 (888) の説明

生成汎関数 (885) を式 (883) に従い源で汎関数微分すると, Green 関数 (888) が得られることを説明する. 式 (885) の全作用 X' において源を含むのは

$$\mathcal{L}_S = J_\kappa A^\kappa + \bar{\sigma}\psi + \bar{\psi}\sigma$$

のみであり, その汎関数微分は

$$\frac{\delta \mathcal{L}_S(z)}{\delta J_\mu(x)} = A^\mu(x) \delta^{(4)}(x - z), \quad (893)$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_S(z)}{\delta \sigma(x)} = -\bar{\psi}(x) \delta^{(4)}(x - z), \quad \frac{\delta \mathcal{L}_S(z)}{\delta \bar{\sigma}(x)} = \psi(x) \delta^{(4)}(x - z) \quad (894)$$

と計算される [22, p.322].

注解 第1式 (893) では汎関数微分の公式 (175) を用いる. また Grassmann 場の汎関数微分に関しても同様の公式 (785) が成り立つことを思い出すと, 第2式 (894) に関しては例えば

$$\frac{\delta}{\delta \sigma(x)} (\bar{\psi}(z) \sigma(z)) = -\frac{\delta}{\delta \sigma(x)} (\sigma(z) \bar{\psi}(z)) = -\bar{\psi}(z) \delta^{(4)}(x - z) = -\bar{\psi}(x) \delta^{(4)}(x - z)$$

とすれば良い．ただし第2辺は $-\frac{\delta}{\delta\sigma_\alpha(x)} (\sigma_\beta(z)\bar{\psi}_\beta(z))$ を $\alpha = 1, 2, 3, 4$ についてまとめた式と解する．

汎関数微分の性質 (178) および式 (893) を用いると

$$\frac{\delta}{\delta J_\mu(x_1)} e^{iX'} = ie^{iX'} \int d^4x \frac{\delta J_\kappa(x)}{\delta J_\mu(x_1)} A^\kappa(x) = ie^{iX'} A^\mu(x_1)$$

を得る．Grassmann 場による微分に対しても式 (792) 同様の “合成関数の微分法” を適用し，同様に式 (894) を用いると

$$\frac{\delta}{\delta\bar{\sigma}(y_1)} e^{iX'} = ie^{iX'} \psi(y_1), \quad \frac{\delta}{\delta\sigma(z_1)} e^{iX'} = -ie^{iX'} \bar{\psi}(z_1)$$

となる．以上より

$$\begin{aligned} & G^{\mu\cdots}(x_1, \cdots, y_1, \cdots, z_1, \cdots) \\ &= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi (-1)^{\bar{n}} \left(\frac{1}{i}\right)^n \frac{\delta^n}{\delta J_\mu(x_1) \cdots \delta\bar{\sigma}(y_1) \cdots \delta\sigma(z_1) \cdots} e^{iX'} \Big|_0 \\ &= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \{e^{iX} A^\mu(x_1) \cdots \psi(y_1) \cdots \bar{\psi}(z_1) \cdots\} : (888) \end{aligned}$$

を得る．

14.2.1 項の原稿

ここでは経路積分を用いて QED を定式化する．まずは経路積分による場の量子論で必要となる新たな概念として，Green 関数と生成汎関数を正準理論の文脈で導入する．我々は結局これらの量を経路積分の方法で再定義することになるため，正準理論の説明は天下りで構わない．

Green 関数の定義からはじめよう．任意の場の量子論による物理的な予言はその S 行列要素に含まれている．これに対して Green 関数は S 行列要素ほど観測可能量と直接的な関係を持つわけではないものの，計算しやすく，また以下で見るように，いくつかの異なる過程の S 行列要素を単一の Green 関数から導くことが可能である．Green 関数は Heisenberg 描像 (添字 H で表す) において，複数の場の演算子の時間順序化積の真空期待値 (879) として定義される．Green 関数 (879) を相互作用描像に移行させると，Gell-Mann Low の定理 [21, pp.69–71] の形 (880) になる．ここに S は QED の S 演算子 (S 行列) である [22, pp.293–298]．式 (880) に S 行列展開を代入して適当な摂動次数まで考慮し，Wick の定理を適用すれば，S 行列要素の計算と同様の手法で Green 関数を評価できる [22, pp.306–308]．

次に QED の生成汎関数を定義するにあたり，QED の量子場 $A^\kappa, \psi, \bar{\psi}$ に対応 (結合) する虚構的な古典的源 (source) $J_\kappa, \bar{\sigma}, \sigma$ (ただし $\sigma, \bar{\sigma}$ は独立なスピノル Grassmann 場) を導入し，ラグランジアン密度を式 (881) に設定する．ここに

- $\mathcal{L}_0$ は自由場のラグランジアン密度
- $\mathcal{L}_I$ は相互作用ラグランジアン密度
- $\mathcal{L}_S$ は源のラグランジアン密度

である．源の項 $\mathcal{L}_S$ を含むラグランジアン密度に対する S 演算子を S' として，生成汎関数は式(882)で定義される(したがって $Z[0, 0, 0] = 1$)．

このとき式(883)のように生成汎関数を源で汎関数微分すると，Green関数が得られることが示される．ただし最右辺の添字0は汎関数微分の後，虚構的な源の項をゼロとおくことを意味する． σ と $\bar{\sigma}$ を Grassmann 源としたため，Green関数(883)は $y_1, \dots$ に関して反対称かつ $z_1, \dots$ に関して反対称となり，Pauli原理に整合する．なお生成汎関数は統計力学との類似性から分配関数とも呼ばれる．

まとめると，任意の過程の S 行列要素は，関係する Green関数から得られる．そして特定の場の理論に対するあらゆる Green関数は，生成汎関数から導くことができる(式(884))．このため理論の予言は全て生成汎関数に集約されることになる．

ところで9.3.1項では1粒子系(したがって有限自由度の系)に対する非相対論的量子力学の文脈で，正準形式から伝播関数(Green関数)に対するFeynmanの経路積分を導いた．同様に正準形式の場の量子論から，Feynmanによる経路積分形式の場の量子論を導くことができる．しかしながら正準理論の知識を一切仮定することなく，経路積分の

みで自己完結した定式化を求めるならば，生成汎関数に対する経路積分の表式は正準形式から導出する代わりに，原理として提示しなければならない．

生成汎関数に対する経路積分の表式は，式(885)で与えられる．ただし経路積分測度は式(886)であり，またS行列要素やフェルミオン伝播関数との混同を避けるため，以降では作用を文字 X などで表す．規格化定数 N は条件 $Z[0, 0, 0] = 1$ から式(887)のように定まる．

経路積分形式ではGreen関数をどのように定義すれば良いだろうかと問うてみよう．

Green関数は生成汎関数の源による(汎関数)微分(883)，あるいは等価的に，式(883)に経路積分(885)を代入した表式(888)で表される(導出スライド参照)．これは式(854)と比較される公式であり，同文献 [22, p.373] ではこれをGreen関数の定義としている．しかしながら他方でGreen関数という術語の本来の語義に従い，Green関数を適当な積分核としてS行列要素を求める公式をGreen関数の定義と見なすこともできる(S行列要素の定義ではなく)．このGreen関数とS行列の関係は後の14.2.4項で見るようにLSZ簡約公式と呼ばれ，Green関数の脚をS行列要素の適当な外線因子に置き換える操作に対応する [23, pp.71–76] [21, pp.75–76]．このとき生成汎関数からGreen関数を導く公式(883),(888)はGreen関数ではなく，むしろ生成汎関数の定義式と見なすのが自然である．まとめればLSZ簡約公式を通じてS行列要素を導く積分核としてGreen関数を，また汎関数微分を通じてGreen関数を導く母関数として生成汎関数を定義できる；このとき理論の予言は全て生成汎関数に集約されるため，原理としては生成汎関数を経路積分(885)で与えれば充分である．概念的にはこちらの解釈の方が納得がいく．ここで演算

子の利用に基礎を置く正準理論では、例えばS行列要素が直ちに始・終状態間の遷移振幅と解釈されるのとは対照的に、経路積分で表した量は単独ではそれ自体の物理的意味を表さないことに注意しよう。このためLSZ簡約公式を通じてS行列要素を求める量としてGreen関数を定義して初めて、Green関数、延いては生成汎関数もまた意味を成すと考えられる。このことは物理学の概念が必ずしも単独では定義されず、一般には他の概念との間の関係・文脈の中で初めて定義できることを考えれば、驚くべきことではない。実際ここで遭遇した状況は例えば、古典物理学においてラグランジアンがそれ自体では意味を成さず、最小作用原理と併せて初めて意味を成すことと似ている。

最後に電磁場のゲージ固定について、証明抜きに簡単に言及しておく。電磁場のラグランジアン密度をFermi型(840)に書いた時点で、我々はLorenz条件(837)を暗に仮定してきたことになる。これに対して場の強度の2乗(200)を自由電磁場のラグランジアン密度に選ぶ場合には、生成汎関数を規定する経路積分において適切にゲージ条件を考慮しなければならない [22, pp.357–358]。実際、電磁場は4成分のうち2つの横波成分だけが独立であるにも関わらず、生成汎関数では積分が場の4成分 $\mu = 0, 1, 2, 3$ の全てに対して施される。よって余分の自由度に関する積分を取り除く措置が必要である。そこでLorenz条件を実装するために、電磁場の4元発散を引数とするデルタ関数(正確にはデルタ汎関数) $\delta[\partial_\lambda A^\lambda]$ を経路積分測度に含めて生成汎関数を式(889)で与える。これを目障りなデルタ汎関数があからさまには現れない形(890)に書き換えることができる。新たな特徴としてラグランジアンの自由電磁場項に“ゲージ固定項”と呼ばれる付

加的な項 $-\frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$ が現れている．このため自由電磁場項は全体として Fermi 型のラグランジアン密度 (840) に帰着する．またゴースト場と呼ばれる，人為的に導入した Grassmann 場 $\eta, \tilde{\eta}$ に関する経路積分が生じている．以上の手続きを Faddeev–Popov (ファデエフ–ポポフ) の方法という．もっとも QED ではラグランジアンのゴースト項が電磁場を含んでいないので，ゴースト場の経路積分を分離して規格化定数に吸収できる．すると生成汎関数の表式 (891) が再現される．

Faddeev–Popov の方法は QED よりも，むしろ QCD (量子色力学) においてとりわけ有用となる．と言うのも，QCD はゲージ場 (グルーオン場) $A_i^\mu(x)$ ($i = 1, 2, \dots, 8$) のゲージ変換が構造定数の項を伴う非 Abel ゲージ理論であるため，実は量子化を行うには正準形式よりも経路積分形式の方が適している [17, p.293]．しかるに再びグルーオン場はゲージ変換が電磁場の場合よりも複雑であるため，式 (837) と同じ形の Lorenz 条件を課することはできない．また無理に Lorenz 条件を課したとしても，相互作用を考える際に矛盾が生じてくることが知られている．そこでグルーオン場に対して式 (889) と類似の生成汎関数を書き下すには， $h_i(x)$ を任意関数として，より一般的なゲージ条件 (892) を課し，デルタ汎関数を $\prod_i \delta[f_i]$ に置き換える必要がある．このとき結局 Faddeev–Popov の手続きによりゲージ固定を行うと，QED の式 (890) と同様に生成汎関数においてラグランジアン密度が修正され，ゴースト場に関する経路積分が現れることに変わりはない．ただし QCD ではラグランジアンのゴースト項がゲージ場 A_i^μ を含むため，もはやゴースト場の経路積分を分離して規格化定数に吸収することはできない．そこで摂動論を展開する際には，ゴースト粒子をあからさまに考慮する必要がある．もっともゴース

トは実在の場(ないし粒子)ではなく、あくまで都合の良い人工的な概念である.

14.2.2 自由場の生成汎関数

■自由場と相互作用する場 [22, pp.346–348]

$\mathcal{L}_I = 0$ とおくと，自由場の生成汎関数 Z_0 の経路積分表式

$$Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \frac{1}{N_0} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX'_0}, \quad N_0 = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L}_0 \right) \quad (895)$$

(ただし $X'_0 \equiv \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_S)$) が得られる．ここで相互作用演算子

$$I_\delta(x) \equiv \left(-\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} \right) \gamma_\mu \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}(x)} \right) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \right) \quad (896)$$

を定義すると，一般の生成汎関数(885)は自由場の生成汎関数(895)と，摂動展開

$$Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \frac{1}{N_I} \exp \left\{ ie \int d^4x I_\delta(x) \right\} Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}], \quad N_I \equiv \frac{N}{N_0} \quad (897)$$

で関係付けられる．このため Z_0 から Z が求まる．

しかるに自由場の生成汎関数(895)は，自由な電磁場の生成汎関数

$$Z_0[J_\kappa] = \frac{1}{N_1} \int \mathcal{D}A \exp(iX[J_\kappa]), \quad X[J_\kappa] = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu) + J_\kappa A^\kappa \right\} \quad (898)$$

と，自由スピノル場の生成汎関数

$$Z_0[\sigma, \bar{\sigma}] = \frac{1}{N_2} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp(iX[\sigma, \bar{\sigma}]), \quad X[\sigma, \bar{\sigma}] = \int d^4x \{ \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi + \bar{\sigma}\psi + \bar{\psi}\sigma \} \quad (899)$$

の積

$$Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = Z_0[J_\kappa] Z_0[\sigma, \bar{\sigma}] \quad (900)$$

へと分解できる．ただし

$$Z_0[J_\kappa = 0] = 1, \quad Z_0[\sigma = 0, \bar{\sigma} = 0] = 1 \quad (901)$$

となるように規格化定数 N_1, N_2 を選ぶ．

■自由電磁場の生成汎関数 [22, pp.348–350]

自由電磁場の生成汎関数(898)は具体的に

$$Z_0[J_\kappa] = \exp \left(-\frac{i}{2} [J^\kappa D_{\text{F}\kappa\lambda} J^\lambda] \right) \quad (902)$$

と求まる．ここに式(790)同様の省略記法

$$[AKB] \equiv \int d^4x d^4y A(x) K(x, y) B(y) \quad (903)$$

を用いており(以下同様) [22, p.313], 積分核は見慣れたFeynmanの光子伝播関数

$$D_{\text{F}\mu\nu}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_{\text{F}\mu\nu}(k) e^{-ik \cdot x}, \quad D_{\text{F}\mu\nu}(k) = \frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} \quad (904)$$

である [17, p.92]. 伝播関数は自由電磁場の方程式,
すなわち波動方程式のGreen関数であり, 実際

$$\square D_{\text{F}\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu} \delta^4(x) \quad (905)$$

を満たす [17, p.62, p.92].

式(902)は次の手順で証明できる.

1. まず対称な波動演算子

$$K^{\mu\nu}(x, x') \equiv -g^{\mu\nu} \delta^{(4)}(x - x') \square_{x'} \quad (906)$$

を用いて, 自由電磁場の生成汎関数(898)における作用を

$$X[J_\kappa] = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' A_\mu(x) K^{\mu\nu}(x, x') A_\nu(x') + \int d^4x J_\kappa(x) A^\kappa(x) \quad (907)$$

と書き換える.

2. すると

$$\int d^4x' K^{\mu\nu}(x, x') K_{\nu\tau}^{-1}(x', x'') = \delta^\mu_\tau \delta^{(4)}(x - x'') \quad (908)$$

で定義される波動演算子の逆演算子 $K_{\nu\tau}^{-1}(x', x'')$ を用いて,

$$Z_0[J_\kappa] = \exp \left(\frac{i}{2} [J^\kappa K_{\kappa\lambda}^{-1} J^\lambda] \right). \quad (909)$$

3. ところが逆演算子 $K_{\mu\nu}^{-1}(x, x')$ は Fourier 成分が

$$D_{\nu\tau}(k) = \frac{g^{\mu\nu}}{k^2} \quad (910)$$

と求まるため,

$$K_{\mu\nu}^{-1}(x, x') = -D_{F\mu\nu}(x - x') \equiv g^{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-x')}}{k^2 + i\varepsilon} \quad (911)$$

と表され, (符号の違いを除き) 光子伝播関数に一致する.

2式(909),(911)より生成汎関数(902)を得る.

ただし式(910)の分母に無限小因子 $i\varepsilon$ を補って極を $k^0 = \omega_{\mathbf{k}} \equiv |\mathbf{k}|$ からずらし,

$$\left(\frac{1}{i} \right)^2 \frac{\delta^2 Z_0[J_\kappa]}{\delta J_\mu(x) \delta J_\nu(y)} \Big|_0 = i D_F^{\mu\nu}(x - y) \quad (912)$$

を保証した [22, p.353]. なお正準形式では2点 Green 関数は式(880)より

$$G_0^{\mu\nu}(x, y) = \langle 0 | T \{ A^\mu(x) A^\nu(y) \} | 0 \rangle = i D_F^{\mu\nu}(x - y) \quad (913)$$

となり, Feynman 伝播関数に一致せねばならないことが明白である [22, p.326].

■自由スピノル場の生成汎関数 [22, pp.350–351]

自由スピノル場の生成汎関数は具体的に

$$Z_0[\sigma, \bar{\sigma}] = \exp(-i[\bar{\sigma} S_F \sigma]) \quad (914)$$

と求まる．ただし引き続き式(790),(903)の省略記法を踏襲しており，また

$$S_F(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S_F(p) e^{-ip \cdot x}, \quad S_F(p) = \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon} = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (915)$$

は見慣れたFeynmanのフェルミオン伝播関数である [17, p.79]^{*160}.

^{*160} 式(915)第2式について，第2辺における行列の逆数は逆行列の意味である．また γ 行列の反交換関係から導かれる公式 $\not{A}\not{A} = A^2$ (A は任意の4元ベクトル)を思い出すと [17, p.252], $(\not{p} \pm m)(\not{p} - m) = p^2 - m^2$ が成り立つことから第2の等号が分かる．

式(914)は自由電磁場の場合と同様に，以下の手順で証明できる．

1. まず対称な波動演算子

$$K(x, x') = \delta^{(4)}(x - x')(i\rlap{\not{\partial}}_{x'} - m) \quad (916)$$

を用いて，自由スピノル場の生成汎関数(899)における作用を

$$X[\sigma, \bar{\sigma}] = \int d^4x d^4x' \bar{\psi}(x) K(x, x') \psi(x) + \int d^4x \{ \bar{\psi}(x) \sigma(x) + \bar{\sigma}(x) \psi(x) \} \quad (917)$$

と書く．

2. 次に逆演算子 $K^{-1}(x', x'')$ を

$$\int d^4x' K(x, x') K^{-1}(x', x'') = -\delta^{(4)}(x - x'') \quad (918)$$

で定義すると，

$$Z_0[\sigma, \bar{\sigma}] = \exp \{ i[\bar{\sigma} K^{-1} \sigma] \} . \quad (919)$$

3. ところが逆演算子 $K^{-1}(x, x')$ は Fourier 成分が

$$S(p) = -\frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \quad (920)$$

と求まるため,

$$K^{-1}(x, x') = -S_F(x - x') \equiv -\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x - x')} \quad (921)$$

と表され, (符号の違いを除き) フェルミオン伝播関数に一致する.

2式(919),(921)より生成汎関数(914)を得る.

ただし式(920)の分母に無限小因子 $i\varepsilon$ を補って極を $p^0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ からずらし,

$$(-1) \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\delta^2 Z[\sigma, \bar{\sigma}]}{\delta \bar{\sigma}(y) \delta \sigma(z)} \Big|_0 = iS_F(y - z) \quad (922)$$

を保証した.

14.2.2項の式の導出など

■式(897)の導出 [17, pp.346–347]

まず直接証明できるように、式(896)の“相互作用演算子” $I_\delta(x)$ に対して

$$eI_\delta(x) \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_S) \right\} = \mathcal{L}_I(x) \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_S) \right\} \quad (923)$$

が成り立つ.

注解 $X'_0 \equiv \int d^4x' \{ \mathcal{L}_0(x') + \mathcal{L}_S(x') \}$ に対して式(888)の導出の際に用いた関係

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} e^{iX'_0} = e^{iX'_0} A^\mu(x), \quad \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}(x)} e^{iX'_0} = ie^{iX'_0} \psi(x), \quad -\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} e^{iX'_0} = -ie^{iX'_0} \bar{\psi}(x)$$

を再び利用すると,

$$eI_\delta e^{iX'_0} = (e\bar{\psi}\gamma_\mu A^\mu\psi)e^{iX'_0} = \mathcal{L}_I e^{iX'_0} : (923)$$

を得る. (汎関数)微分は1つずつ実行しなければならず, 3つの微分 I_δ に対して一息に

$$I_\delta e^{iX'_0} = (ie^{iX'_0})(I_\delta X'_0)$$

としては“いけない”ことに注意する.

式(923)から

$$\begin{aligned}
& \exp \left\{ ie \int d^4x I_\delta(x) \right\} \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_S) \right\} \\
&= \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right\} \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_S) \right\} \\
&= \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_S) \right\} = e^{iX'}
\end{aligned}$$

が得られる．（第2の等号は $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_I, \mathcal{L}_S$ が古典場と Grassmann 場の双1次量のみを含み，互いに可換であることによる．）よって

$$\begin{aligned}
Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] &= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_S) \right\} \\
&= \frac{1}{N} \exp \left\{ ie \int d^4x I_\delta(x) \right\} \underbrace{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_S) \right\}}_{N_0 Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]} \\
&= \frac{1}{N_I} \exp \left\{ ie \int d^4x I_\delta(x) \right\} Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] : (897), \quad N_I \equiv \frac{N}{N_0}
\end{aligned}$$

となる．

■ $X[J_\kappa]$ の式 (907) の導出 [22, pp.348–349]

$$X[J_\kappa] = -\frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\nu A_\mu(x)) (\partial^\nu A^\mu(x)) + \int d^4x J_\kappa(x) A^\kappa(x)$$

の第1項を次のように書き換えれば良い.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\nu A_\mu(x)) (\partial^\nu A^\mu(x)) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu(x) \square_x A^\mu(x) \quad (\text{部分積分した}) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x A_\mu(x) \int d^4x' \{-g^{\mu\nu} \delta^{(4)}(x-x') \square_{x'}\} A_\nu(x') \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' A_\mu(x) K^{\mu\nu}(x, x') A_\nu(x'). \end{aligned}$$

■式(909)の導出 [22, p.349]

式(908)で定義される逆演算子 $K_{\mu\nu}^{-1}(x', x'')$ を用いてシフトした場

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \int d^4x' K_{\mu\nu}^{-1}(x, x') J^\nu(x')$$

を導入して, $X[J_\kappa]$ の式(907)を書き換えると

$$X[J_\kappa] = \frac{1}{2} [J^\kappa K_{\kappa\lambda}^{-1} J^\lambda] - \frac{1}{2} [A'_\mu K^{\mu\nu} A'_\nu]. \quad (924)$$

注解

$$\begin{aligned} X[J_\kappa] &= -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \left\{ A'_\mu(x) + \int d^4y K_{\mu\lambda}^{-1}(x, y) J^\lambda(y) \right\} \\ &\quad \times K^{\mu\nu}(x, x') \left\{ A'_\nu(x') + \int d^4y' K_{\nu\rho}^{-1}(x', y') J^\rho(y') \right\} \\ &\quad + \int d^4x J_\kappa(x) \left\{ A'^\kappa(x) + \int d^4y K^{-1\kappa}_\lambda(x, y) J^\lambda(y) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} [A'_\mu K^{\mu\nu} A'_\nu] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' d^4y' K^{\mu\nu}(x, x') K_{\nu\rho}^{-1}(x', y') A'_\mu(x) J^\rho(y') \\
& -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' d^4y K_{\mu\lambda}^{-1} K^{\mu\nu}(x, x') A'_\nu(x') J^\lambda(y) \\
& -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' d^4y d^4y' K_{\mu\lambda}^{-1}(x, y) K^{\mu\nu}(x, x') K_{\nu\rho}^{-1}(x', y') J^\lambda(y) J^\rho(y') \\
& + \int d^4x J_\kappa(x) A^\kappa(x) + [J^\kappa K_{\kappa\lambda}^{-1} J^\lambda]
\end{aligned}$$

において逆演算子の定義式(908)を用いると，最右辺の2,3行目はいずれも $\frac{1}{2} \int d^4x J_\kappa(x) A^\kappa(x)$ となるので，5行目の第1項と相殺する．また最右辺の4行目は $-\frac{1}{2} [J^\kappa K_{\kappa\lambda}^{-1} J^\lambda]$ となるので，式(924)を得る．

式(924)より自由場の生成汎関数は

$$\begin{aligned}
Z_0[J_\kappa] &= \frac{1}{N_1} \int \mathcal{D}A \exp \{iX[J_\kappa]\} = \frac{1}{N_1} \int \mathcal{D}A \exp \left\{ \frac{i}{2} [J^\kappa K_{\kappa\lambda}^{-1} J^\lambda] - \frac{i}{2} [A'_\mu K^{\mu\nu} A'_\nu] \right\} \\
&= \exp \left\{ \frac{i}{2} [J^\kappa K_{\kappa\lambda}^{-1} J^\lambda] \right\} : (909) \quad (\because Z_0[J_\kappa = 0] = 1)
\end{aligned}$$

と表される．

■式(910)の導出

$$K_{\nu\tau}^{-1}(x', x'') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_{\nu\tau}(k) e^{-ik \cdot (x' - x'')}$$

と Fourier 展開して [22, pp.349], 式(908)を

$$\begin{aligned} \delta^\mu_\tau \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x - x'')} &= \int d^4x' \{ -g^{\mu\nu} \delta^{(4)}(x - x') \square_{x'} \} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_{\nu\tau}(k) e^{-ik \cdot (x' - x'')} \\ &= -g^{\mu\nu} \square_x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_{\nu\tau}(k) e^{-ik \cdot (x - x'')} \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D^\mu_\tau(k) k^2 e^{-ik \cdot (x - x'')} \end{aligned}$$

と書き換えると, Fourier 成分 $D_{\nu\tau}(k)$ は式(910)に同定される.

■式(919)の導出 シフトした場

$$\psi'(x) = \psi(x) - \int d^4x' K^{-1}(x, x') \sigma(x'), \quad (925)$$

$$\bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) - \int d^4x' \bar{\sigma}(x') K^{-1}(x', x) \quad (926)$$

を導入して自由電磁場の場合と同様の手順を繰り返せば良い [22, pp.350–351].

計算の詳細を確認する. 作用(917)の右辺第1項の被積分関数における ψ の引数 x は x' としても構わない. その上で式(925),(926)を代入すると

$$\begin{aligned} X[\sigma, \bar{\sigma}] = & \int d^4x d^4x' \left\{ \bar{\psi}'(x) + \int d^4y \bar{\sigma}(y) K^{-1}(y, x) \right\} \\ & \times K(x, x') \left\{ \psi'(x') + \int d^4y' K^{-1}(x', y') \sigma(y') \right\} \\ & + \int d^4x \left[\left\{ \bar{\psi}'(x) + \int d^4y \bar{\sigma}(y) K^{-1}(y, x) \right\} \sigma(x) \right. \\ & \left. + \bar{\sigma}(x) \left\{ \bar{\psi}'(x') + \int d^4y' K^{-1}(x', y') \sigma(y') \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [\bar{\psi}' K \psi'] \\
&\quad + \int d^4x d^4x' d^4y' \bar{\psi}'(x) K(x, x') K^{-1}(x', y') \sigma(y') \\
&\quad + \int d^4x d^4x' d^4y \bar{\sigma}(y) K^{-1}(y, x) K(x, x') \psi'(x') \\
&\quad + \int d^4x d^4x' d^4y d^4y' \bar{\sigma}(y) K^{-1}(y, x) K(x, x') K^{-1}(x', y') \sigma(y') \\
&\quad + \int d^4x \bar{\psi}'(x) \sigma(x) + [\bar{\sigma} K^{-1} \sigma] + \int d^4x \bar{\sigma}(x) \psi'(x) + [\bar{\sigma} K^{-1} \sigma]
\end{aligned}$$

となる．ここで逆演算子の定義式(918)を用いると，最右辺の2,3行目はそれぞれ $-\int d^4x \bar{\psi}'(x) \sigma(x)$, $-\int d^4x' \bar{\sigma}(x') \psi'(x')$ となり，4行目は $-[\bar{\sigma} K^{-1} \sigma]$ となるので

$$X[\sigma, \bar{\sigma}] = [\bar{\psi}' K \psi'] + [\bar{\sigma} K^{-1} \sigma]$$

を得る．これを生成汎関数の式(899)に代入すると

$$Z_0[\sigma, \bar{\sigma}] = \exp(i[\bar{\sigma} K^{-1} \sigma]) \frac{1}{N_2} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp(i[\bar{\psi}' K \psi'])$$

となる．規格化条件(901): $Z_0[\sigma = 0, \bar{\sigma} = 0] = 1$ を考慮して式(919)を得る．

■式(920)の導出

逆演算子を

$$K^{-1}(x', x'') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S(p) e^{-ip \cdot (x' - x'')}$$

とFourier展開し, これを式(918)に代入しよう [22, p.351]. すると式(918)は

$$\begin{aligned} - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x - x'')} &= \int d^4 x' \{ \delta^{(4)}(x - x') (i \not{\partial}_{x'} - m) \} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S(p) e^{-ip \cdot (x' - x'')} \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S(p) (i \not{\partial}_x - m) e^{-ip \cdot (x - x'')} \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S(p) (\not{p} - m) e^{-ip \cdot (x - x'')} \end{aligned}$$

と書き換えられるため, 式(920): $S(p) = -1/(\not{p} - m)$ を得る (行列の逆数は逆行列の意味).

14.2.2項の原稿

ラグランジアン密度の相互作用項を $\mathcal{L}_I = 0$ とおくと，自由場の生成汎関数 Z_0 の経路積分表式(895) (ただし $X'_0 \equiv \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_S)$) が得られる．ここで相互作用演算子(896)を定義すると，一般の生成汎関数(885)は自由場の生成汎関数(895)と，摂動展開(897)で関係付けられることを証明できる(導出スライド参照)．このため自由場の生成汎関数 Z_0 が求まれば，相互作用を含む場合の生成汎関数 Z も求まる．

しかるに自由場の生成汎関数 Z_0 はその経路積分表式(895)より，自由な電磁場の生成汎関数(898)と，自由スピノル場の生成汎関数(899)の積(900)へと分解できる．ただし条件(901)が成り立つように規格化定数 N_1, N_2 を選ぶ．よって自由電磁場と自由スピノル場の生成汎関数(898),(899)を個別的に求めれば，式(900)で自由場の生成汎関数が求まる．

自由電磁場の生成汎関数(898)は具体的に式(902)のように求まる．ここに省略記法(903)を用いており(以下同様) [22, p.313]，積分核は見慣れたFeynmanの光子伝播関数(904)である [17, p.92]．伝播関数は自由電磁場の方程式，すなわち波動方程式のGreen関数であり，実際，式(905)を満たす [17, p.62,p.92]．これは9.3.1項で見たように，非相対論的量子力学において粒子の伝播関数がSchrödinger方程式のGreen関数となるのと同じ事情である．

式(902)は次の手順で証明できる.

1. まず対称な波動演算子(906)を用いて, 自由電磁場の生成汎関数(898)における作用を式(907)へと書き換える(導出スライド参照).
2. すると式(908)で定義される波動演算子の逆演算子 $K_{\nu\tau}^{-1}(x', x'')$ を用いて, 式(909)へと変形できる(導出スライド参照).
3. ところが逆演算子 $K_{\mu\nu}^{-1}(x, x')$ は Fourier 成分が式(910)のように求まるため(導出スライド参照), 式(911)で表され, (符号の違いを除き)光子伝播関数に一致する. 2式(909),(911)より生成汎関数(902)を得る.

ただし式(910)の分母に無限小因子 $i\varepsilon$ を補って極を $k^0 = \omega_k \equiv |\mathbf{k}|$ からずらし, 生成汎関数から導かれる2点 Green 関数が光子伝播関数(904)となること(912)を保証した [22, p.353]. 以上は経路積分形式での光子伝播関数(904)の導出となっており, こうして2点 Green 関数はその名の通り Green 関数(904)となる.

なお正準形式では2点 Green 関数は式(880)より式(913)となり, Feynman 伝播関数に一致せねばならないことが明白である. ただし自由場の理論では相互作用ハミルトニアンがゼロとなるので, S 演算子が $S = 1$ となることに注意した [22, p.326].

自由スピノル場の生成汎関数は具体的に式(914)のように求まる. ただし引き続き式(790),(903)の省略記法を踏襲しており, また積分核(915)は見慣れたFeynmanのフェルミオン伝播関数である [17, p.79].

式(914)は自由電磁場の場合と同様に，以下の手順で証明できる．

1. まず対称な波動演算子(916)を用いて，自由スピノル場の生成汎関数(899)における作用を式(917)のように書く．
2. 次に逆演算子 $K^{-1}(x', x'')$ を式(918)で定義すると，式(919)を得る (導出スライド参照)．
3. ところが逆演算子 $K^{-1}(x, x')$ はFourier成分が式(920)のように求まるため (導出スライド参照)，式(921)で表され，(符号の違いを除き)フェルミオン伝播関数に一致する．2式(919),(921)より生成汎関数(914)を得る．

ただし式(920)の分母に無限小因子 $i\varepsilon$ を補って極を $p^0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ からずらし，生成汎関数から導かれる2点Green関数は自由フェルミオン伝播関数(915)になること(922)を保証した．以上は経路積分形式でのフェルミオン伝播関数(915)の導出となっている．

14.2.3 Green関数の摂動論

$$Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \frac{1}{N_I} \exp \left\{ ie \int d^4x I_\delta(x) \right\} Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] \quad (\text{式(897)}) \quad (927)$$

に基づき、指数関数を級数展開して e のべきによる摂動展開を得るよりも、直接、相互作用を持つ系の Green 関数

$$\langle A^\mu(x_1) \cdots \psi(y_1) \cdots \bar{\psi}(z_1) \cdots \rangle \equiv G^{\mu \cdots}(x_1, \cdots, y_1, \cdots, z_1, \cdots) \quad (928)$$

を対象とし、これを自由場の Green 関数

$$\langle A^\mu(x_1) \cdots \psi(y_1) \cdots \bar{\psi}(z_1) \cdots \rangle_0$$

に関係付けて級数に展開する方が容易である [22, p.352].

■ Wick の定理 [22, pp.352–354]

自由場に関しては、式(900),(902),(914)の生成汎関数を汎関数微分して Green 関数を求められる。場 $A, B, \dots$ を $A^\mu, \psi, \bar{\psi}$ のいずれかとしよう。また2つの場の2点 Green 関数を作る操作を縮約と呼び、

$$\langle AB \rangle_0 = \underbrace{AB}_{\square} \quad (929)$$

で表そう。

すると自由場 Green 関数 $\langle ABCD \cdots WXYZ \rangle_0$ は、
場 $A, \dots, Z$ が奇数個ならばゼロになり、偶数個ならば

$$\langle ABCD \cdots WXYZ \rangle_0 = \underbrace{ABCD}_{\square} \cdots \underbrace{WXYZ}_{\square} + \underbrace{ABCD}_{\square} \cdots \underbrace{WXYZ}_{\square} + \cdots \quad (930)$$

となる。これは経路積分形式の自由場 Green 関数

$$\langle ABC \cdots \rangle_0 = \frac{1}{N_0} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX_0} (ABC \cdots), \quad X_0 = \int d^4x \mathcal{L}_0(x) \quad (\text{式(888)})$$

(931)

に対する Wick の定理と見なされる。

■相互作用 [22, pp.554–355]

相互作用する場の Green 関数 $\langle ABC \cdots \rangle$ は、その表式(888)より

$$\langle ABC \cdots \rangle = \frac{\left\langle \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right\} (ABC \cdots) \right\rangle_0}{\left\langle \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right\} \right\rangle_0} \quad (932)$$

のように自由場 Green 関数に関係付けて評価できる。

指数関数を級数展開すれば、Green 関数の摂動展開が得られる。

■例：4点 Green 関数 [22, pp.305–307, p.358]

4点 Green 関数 $\langle A^\mu(x_1) A^\nu(x_2) \psi(x_3) \bar{\psi}(x_4) \rangle$ を2次の摂動論の範囲で調べよう.

- Wick 展開から現れる非連結ダイアグラム (例えば図60) を省く.
- 公式(932)分母の展開から生じる非連結の “真空気泡 (vacuum-bubble)” (例えば図61) は分子の展開から現れる同じ因子と正確に相殺する [22, p.355].

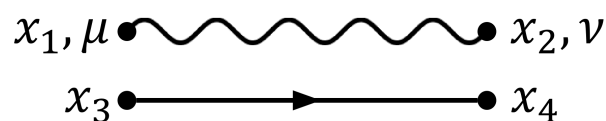


図60 非連結ダイアグラム

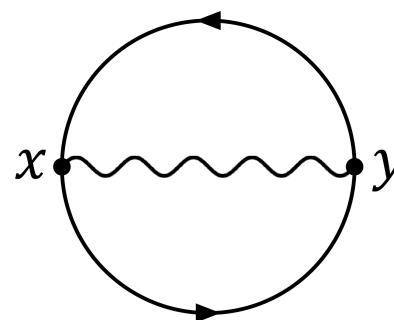


図61 真空気泡

結局，2次の摂動論では興味ある連結 Green 関数は

$$G_c^{\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4) = G_a^{\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4) + G_b^{\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad (933)$$

$$G_a^{\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \int d^4x d^4y [iS_F(x_3 - y)(ie\gamma_\sigma)iS_F(y - x)(ie\gamma_\rho)iS_F(x - x_4)] \\ \times iD_F^{\rho\mu}(x - x_1)iD_F^{\sigma\nu}(y - x_2), \quad (934)$$

$$G_b^{\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \int d^4x d^4y [iS_F(x_3 - x)(ie\gamma_\rho)iS_F(x - y)(ie\gamma_\sigma)iS_F(y - x_4)] \\ \times iD_F^{\rho\mu}(x - x_1)iD_F^{\sigma\nu}(y - x_2) \quad (935)$$

と求まる (図62).

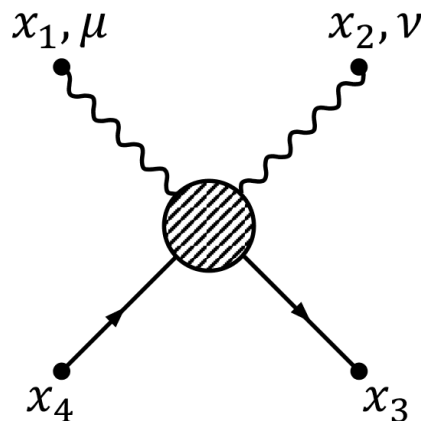


図62 Green 関数(933)を表すダイアグラム [22, p.295]

■運動量空間の Green 関数 [22, pp.307–308]

運動量空間の Green 関数 $G^{\mu\cdots}(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ は,

$$\begin{aligned} & \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_n \left(\prod_{i=1}^n e^{-ip_i \cdot x_i} \right) G^{\mu\cdots}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) G^{\mu\cdots}(p_1, p_2, \cdots, p_n) \end{aligned} \quad (936)$$

で定義される [22, p.298]. 定義式(936)に従い, 4点 Green 関数の
2つの項(934),(935)を運動量空間に移すと, それぞれ順に

$$\begin{aligned} & G_a^{\mu\nu}(k_1, k_2, p_1, p_2) \\ &= iD_F^{\nu\sigma}(k_2) iS_F(-p_1) [(ie\gamma_\sigma) iS_F(p_2 + k_1) (ie\gamma_\rho)] iS_F(p_2) iD_F^{\rho\mu}(k_1), \end{aligned} \quad (937)$$

$$\begin{aligned} & G_b^{\mu\nu}(k_1, k_2, p_1, p_2) \\ &= iD_F^{\mu\rho}(k_1) iS_F(-p_1) [(ie\gamma_\rho) iS_F(p_2 + k_2) (ie\gamma_\sigma)] iS_F(p_2) iD_F^{\sigma\nu}(k_2) \end{aligned} \quad (938)$$

となる.

2式(937),(938)を足した運動量空間のGreen関数

$$G_c^{\mu\nu}(k_1, k_2, p_1, p_2) = iD_F^{\mu\alpha}(k_1)iS_F(-p_1)\Gamma_{\alpha\beta}(k_1, k_2, p_1, p_2)iS_F(p_2)iD_F^{\beta\nu}(k_2), \quad (939)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}(k_1, k_2, p_1, p_2) \equiv (ie\gamma_\beta)iS_F(p_2 + k_1)(ie\gamma_\alpha) + (ie\gamma_\alpha)iS_F(p_2 + k_2)(ie\gamma_\beta) \quad (940)$$

は図63の運動量空間のダイアグラムにFeynman規則を適用した結果に一致している.

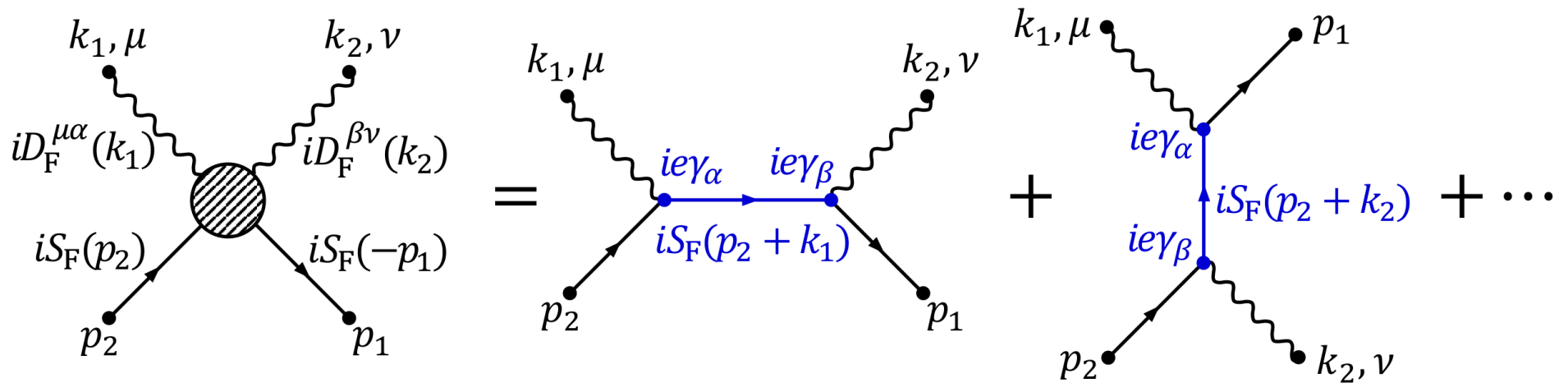


図63 連結 Green関数(939) (図63の青い字で示した因子が結節部分関数(940)に対応)

14.2.3 項の式の導出など

■ Wick の定理 (930) の説明

例えば自由電磁場の生成汎関数の微分は

$$Z_0[J_\kappa] = \exp \left\{ -\frac{i}{2} [J^\kappa D_{F\kappa\lambda} J^\lambda] \right\},$$
$$\frac{\delta Z_0[J_\kappa]}{\delta J_\nu(y)} = \exp \left\{ -\frac{i}{2} [J^\kappa D_{F\kappa\lambda} J^\lambda] \right\} \left(\frac{-i}{2} \right) \frac{\delta}{\delta J_\nu(y)} [J^\kappa D_{F\kappa\lambda} J^\lambda] \quad (941)$$

であり，式(941)右辺は汎関数微分の後には源 J が残るので，源を $J_\kappa = 0$ とおくとゼロになる [22, p.353]．このため自由場 Green 関数は電磁場どうしを過不足なく縮約し得ない限り消える．同様にスピノル場の生成汎関数 $Z_0[\sigma, \bar{\sigma}] = \exp(-i[\bar{\sigma} S_F \sigma])$ の微分

$$\frac{\delta Z_0[\sigma, \bar{\sigma}]}{\delta \sigma(x)} = \exp(-i[\bar{\sigma} S_F \sigma]) (-i) \frac{\delta [\bar{\sigma} S_F \sigma]}{\delta \sigma(x)}$$

は源を $\bar{\sigma} = 0$ とおくとゼロになり，自由場 Green 関数はスピノル場 $\bar{\psi}$ を ψ と過不足なく

縮約し得ない限り消える．すると

$$\begin{aligned}\underbrace{A^\mu(x)A^\nu(y)} &= \underbrace{A^\nu(y)A^\mu(x)} = \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\delta^2 Z_0[J_\kappa]}{\delta J_\mu(x)\delta J_\nu(y)} Z_0[\sigma, \bar{\sigma}] \Big|_0 = \frac{i}{2} \frac{\delta^2 [J_\kappa D_F^{\kappa\lambda} J_\lambda]}{\delta J_\mu(x)\delta J_\nu(y)} \Big|_0 \\ &= i D_F^{\mu\nu}(x-y)\end{aligned}$$

を得る [22, p.300,p.353]．またスピノル添字を明示すれば

$$\begin{aligned}\underbrace{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)} &\equiv \langle \psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) \rangle_0 = (-1) \left(\frac{1}{i}\right)^2 Z_0[J_\kappa] \frac{\delta^2 Z_0[\sigma, \bar{\sigma}]}{\delta \bar{\sigma}_\alpha(x)\sigma_\beta(y)} \Big|_0 = -i \frac{\delta^2 [\bar{\sigma} S_F \sigma]}{\delta \bar{\sigma}_\alpha(x)\delta \sigma_\beta(y)} \Big|_0 \\ &= i S_{F\alpha\beta}(x-y)\end{aligned}$$

となる．ただし最後の等号では汎関数微分 $\delta/\delta\sigma_\beta(y)$ が Grassmann 場 $\bar{\sigma}$ と反交換することに注意した．左辺でフェルミオン場 $\psi_\alpha(x)$ と $\bar{\psi}_\beta(y)$ を入れ替えると，汎関数微分の順序が，したがって計算結果の符号が反転して

$$\underbrace{\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x)} \equiv \langle \bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x) \rangle_0 = -i S_{F\alpha\beta}(x-y)$$

となる [22, p.300]．これは Green 関数 $\langle \cdots \rangle_0$ 内においてもフェルミオン場を Grassmann として反交換せねばならないことを意味する．さらに簡単な例としてスピノル場の非自

明な4点Green関数を調べると

$$\begin{aligned}
& \langle \psi(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) \bar{\psi}(w) \rangle_0 \\
&= (-i)^2 \left(\frac{1}{i} \right)^4 \frac{\delta^4 Z_0[\sigma, \bar{\sigma}]}{\delta \bar{\sigma}(x) \delta \bar{\sigma}(y) \delta \sigma(z) \delta \sigma(w)} Z_0[J_\kappa] \Big|_0 \\
&= -Z_0[J_\kappa = 0] \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}(x)} \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}(y)} (-i \exp(-i[\bar{\sigma} S_F \sigma]))^2 \frac{\delta[\bar{\sigma} S_F \sigma]}{\delta \sigma(z)} \frac{\delta[\bar{\sigma} S_F \sigma]}{\delta \sigma(w)} \Big|_0 \\
&= \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}(x)} \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}(y)} \frac{\delta[\bar{\sigma} S_F \sigma]}{\delta \sigma(z)} \frac{\delta[\bar{\sigma} S_F \sigma]}{\delta \sigma(w)} \Big|_0 \\
&= - \left(\frac{\delta^2[\bar{\sigma} S_F \sigma]}{\delta \bar{\sigma}(x) \delta \sigma(z)} \frac{\delta^2[\bar{\sigma} S_F \sigma]}{\delta \bar{\sigma}(y) \delta \sigma(w)} + (x \leftrightarrow y) \right) \Big|_0 \\
&= - [i S_F(x - z) \cdot i S_F(y - w) + (x \leftrightarrow y)]
\end{aligned}$$

となり，可能な全ての縮約パターンが自動的に尽くされる．ただし最後の等号では Grassmann 場の汎関数微分が反交換することに注意した．繰り返し注意を促すと，このことを反映して縮約をとる際は，Green 関数 $\langle \cdots \rangle_0$ の中でもフェルミオン場を反交換する Grassmann 場として扱わねばならない．今の例では

$$\underbrace{\psi(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) \bar{\psi}(w)} = - \underbrace{\psi(x) \bar{\psi}(z)} \underbrace{\psi(y) \bar{\psi}(w)} = -i S_F(x - z) \cdot i S_F(y - w).$$

■式(932)の導出 [22, pp.554–355]

$$\begin{aligned}\langle ABC \cdots \rangle &= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX} (ABC \cdots) \quad (\because \text{式(888)}) \\ &= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX_0} \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right\} (ABC \cdots) \\ &\quad \left(\because X_0 = \int d^4x' \mathcal{L}_0(x') \text{ と } \mathcal{L}_I(x) \text{ は交換} \right) \\ &\equiv \frac{N_0}{N} \left\langle \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right\} (ABC \cdots) \right\rangle_0, \\ N &\equiv \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX} \quad (\because \text{式(887)}) \\ &= N_0 \left\langle \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right\} \right\rangle_0, \quad \left(N_0 \equiv \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX_0} : (895) \right) \\ \therefore \langle ABC \cdots \rangle &= \frac{\left\langle \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right\} (ABC \cdots) \right\rangle_0}{\left\langle \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right\} \right\rangle_0} : (932).\end{aligned}$$

■座標空間の4点連結 Green 関数 (933) の導出
経路積分形式では公式 (932):

$$\begin{aligned} & \langle A^\mu(x_1) A^\nu(x_2) \psi(x_3) \bar{\psi}(x_4) \rangle \\ &= \frac{\langle \exp \{ ie \int d^4x \bar{\psi}(x) \not{A}(x) \psi(x) \} (A^\mu(x_1) A^\nu(x_2) \psi(x_3) \bar{\psi}(x_4)) \rangle_0}{\langle \exp \{ ie \int d^4x \bar{\psi}(x) \not{A}(x) \psi(x) \} \rangle_0} \end{aligned}$$

を適用し、次いで自由場 Green 関数に Wick 展開 (930) を施して Green 関数を評価できる。摂動パラメータ e の2次まで正確に Green 関数を調べよう。(上式の分子と分母のいずれも1次の項は奇数個の電磁場 A を含み、それらの間で過不足なく縮約ペアを作れないのでゼロになる。)

本文で説明したように、分母の展開から現れる非連結の“真空気泡 (vacuum-bubble)”は分子の展開から現れるそれと正確に相殺するため、連結 Green 関数を計算する際は分母の計算を省いて良い。以下では分母の寄与もあからさまに計算し、この一般的事実が実際に今の例でも成り立っていることを確かめる。

まず分母は2次の摂動論で

$$1 + \frac{(ie)^2}{2!} \int d^4x d^4y \langle \bar{\psi}(x) \not{A}(x) \psi(x) \bar{\psi}(y) \not{A}(y) \psi(y) \rangle_0$$

$$=1 + \frac{(ie)^2}{2!} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\gamma\delta} \int d^4x d^4y \langle \bar{\psi}_\alpha(x) A_\mu(x) \psi_\beta(x) \bar{\psi}_\gamma(y) A_\nu(y) \psi_\delta(y) \rangle_0$$

となる．ここにWickの定理(930)を適用しよう．その際Wickの定理(930)の箇所で説明したように，縮約をとる際はフェルミオン場をGrassmann場として反交換しなければならないことに注意する．まずは同時刻のフェルミオン場 $\psi(x)$ と $\bar{\psi}(x)$ を縮約した項

$$\begin{aligned} & \frac{(ie)^2}{2!} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\gamma\delta} \int d^4x d^4y \underbrace{\bar{\psi}_\alpha(x) A_\mu(x) \psi_\beta(x)}_{\text{contraction}} \underbrace{\bar{\psi}_\gamma(y) A_\nu(y) \psi_\delta(y)}_{\text{contraction}} \\ &= \frac{(ie)^2}{2!} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\gamma\delta} \int d^4x d^4y [-iS_{F\beta\alpha}(x-x)][iD_{F\mu\nu}(x-y)][-iS_{F\delta\gamma}(y-y)] \\ &= \frac{(ie)^2}{2!} \int d^4x d^4y i\text{Tr}[\gamma^\mu S_F(0)] iD_{F\mu\nu}(x-y) i\text{Tr}[\gamma^\nu S_F(0)] \end{aligned}$$

を考えよう．このようにQEDでは考え得る同時刻縮約は図64のサブグラフの形で現れ，フェルミオン伝播関数の表式(915)を思い出すと，その因子は

$$\text{Tr}[\gamma^\mu S_F(0)] = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p} + m)]}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{4p^\mu}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = 0$$

となる．ただし第2の等号では， γ 行列の反交換関係から導かれる周知のトレース公式 [17, pp.251–253]

$$\text{Tr} \gamma^\mu = 0, \quad \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$$

を用いており，また第3辺は奇関数の積分なので消える（正確には次元正則化した式 (963) を用いる）．こうして正準形式の場合と同様 [17, pp.112–113]，同時刻の縮約は Wick 展開から省かれる [22, pp.329–330]．

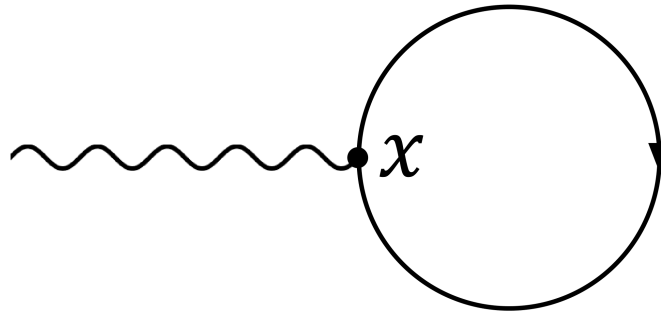


図64 QEDにおいて同時刻縮約から生じる寄与のないサブグラフ [22, p.329]

すると生き残る2次の項は

$$\begin{aligned}
 B^{(2)} &\equiv \frac{(ie)^2}{2!} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\gamma\delta} \int d^4x d^4y \underbrace{\bar{\psi}_\alpha(x) A_\mu(x) \psi_\beta(x) \bar{\psi}_\gamma(y) A_\nu(y) \psi_\delta(y)} \\
 &= - \frac{(ie)^2}{2!} \int d^4x d^4y iS_{F\delta\alpha}(y-x) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} iD_{F\mu\nu}(x-y) iS_{F\beta\gamma}(x-y) (\gamma^\nu)_{\gamma\delta} \\
 &= - \frac{(ie)^2}{2!} \int d^4x d^4y \text{Tr}[iS_F(y-x) \gamma^\mu iD_{F\mu\nu}(x-y) iS_F(x-y) \gamma^\nu]
 \end{aligned}$$

となる．これは図61に示した真空気泡のダイアグラムに対応付けられる [22, p.302].
次に議論を明確にするためにフリーなスピノル添字 α, β を補い，分子の自由場 Green 関数

$$\left\langle \exp \left\{ ie \int d^4x \bar{\psi}(x) \not{A}(x) \psi(x) \right\} (A^\mu(x_1) A^\nu(x_2) \psi_\alpha(x_3) \bar{\psi}_\beta(x_4)) \right\rangle_0$$

を調べよう．摂動展開の0次の項は

$$\begin{aligned} G^{(0)\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4) &\equiv \langle A^\mu(x_1) A^\nu(x_2) \psi_\alpha(x_3) \bar{\psi}_\beta(x_4) \rangle_0 = \underbrace{A^\mu(x_1) A^\nu(x_2)}_{\text{free}} \underbrace{\psi_\alpha(x_3) \bar{\psi}_\beta(x_4)}_{\text{free}} \\ &= iD_F^{\mu\nu}(x_1 - x_2) iS_{F\alpha\beta}(x_3 - x_4) \end{aligned}$$

であり，これは図60の非連結ダイアグラムに対応付けられる [22, p.306]. 1次の項は上述のようにゼロである．2次の項

$$\begin{aligned} &G^{(2)\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &\equiv \frac{(ie)^2}{2!} \int d^4x d^4y \langle \bar{\psi}(x) \not{A}(x) \psi(x) \bar{\psi}(y) \not{A}(y) \psi(y) A^\mu(x_1) A^\nu(x_2) \psi_\alpha(x_3) \bar{\psi}_\beta(x_4) \rangle_0 \\ &= \frac{(ie)^2}{2!} \int d^4x d^4y (\gamma_\rho)_{\alpha'\beta'} (\gamma_\sigma)_{\alpha''\beta''} \\ &\quad \times \langle \bar{\psi}_{\alpha'}(x) A^\rho(x) \psi_{\beta'}(x) \bar{\psi}_{\alpha''}(y) A^\sigma(y) \psi_{\beta''}(y) A^\mu(x_1) A^\nu(x_2) \psi_\alpha(x_3) \bar{\psi}_\beta(x_4) \rangle_0 \end{aligned}$$

に進もう． Wick展開から生じる可能な電磁場の縮約パターンは

$$\begin{aligned}
 \underbrace{A^\rho(x)A^\sigma(y)}\underbrace{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)} &= iD_F^{\rho\sigma}(x-y)iD_F^{\mu\nu}(x_1-x_2), \\
 \underbrace{A^\rho(x)A^\sigma(y)}\underbrace{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)} &= iD_F^{\rho\mu}(x-x_1)iD_F^{\sigma\nu}(y-x_2), \\
 \underbrace{A^\rho(x)A^\sigma(y)}\underbrace{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)} &= iD_F^{\rho\nu}(x-x_2)iD_F^{\sigma\mu}(y-x_1)
 \end{aligned}$$

の3通りであり，それぞれ順に図65の左端の $i = 1, 2, 3$ 行目のダイアグラムに関係付けて解釈できる． また可能なフェルミオン場の縮約パターンは

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\bar{\psi}_{\alpha'}(x)\psi_{\beta'}(x)}\underbrace{\bar{\psi}_{\alpha''}(y)\psi_{\beta''}(y)}\underbrace{\psi_\alpha(x_3)\bar{\psi}_\beta(x_4)} &= -iS_{F\beta''\alpha'}(y-x)iS_{F\beta'\alpha''}(x-y)iS_{F\alpha\beta}(x_3-x_4), \\
 \underbrace{\bar{\psi}_{\alpha'}(x)\psi_{\beta'}(x)}\underbrace{\bar{\psi}_{\alpha''}(y)\psi_{\beta''}(y)}\underbrace{\psi_\alpha(x_3)\bar{\psi}_\beta(x_4)} &= +iS_{F\beta''\alpha'}(y-x)iS_{F\beta'\beta}(x-x_4)iS_{F\alpha\alpha''}(x_3-y), \\
 \underbrace{\bar{\psi}_{\alpha'}(x)\psi_{\beta'}(x)}\underbrace{\bar{\psi}_{\alpha''}(y)\psi_{\beta''}(y)}\underbrace{\psi_\alpha(x_3)\bar{\psi}_\beta(x_4)} &= +iS_{F\alpha\alpha'}(x_3-x)iS_{F\beta'\alpha''}(x-y)iS_{F\beta''\beta}(y-x_4)
 \end{aligned}$$

の3通りであり，それぞれ順に図65の上段の $j = 1, 2, 3$ 列目のダイアグラムに関係付けて解釈できる． これらを掛け合わせると図65に示した 3×3 通りのダイアグラムで表される寄与が得られる．

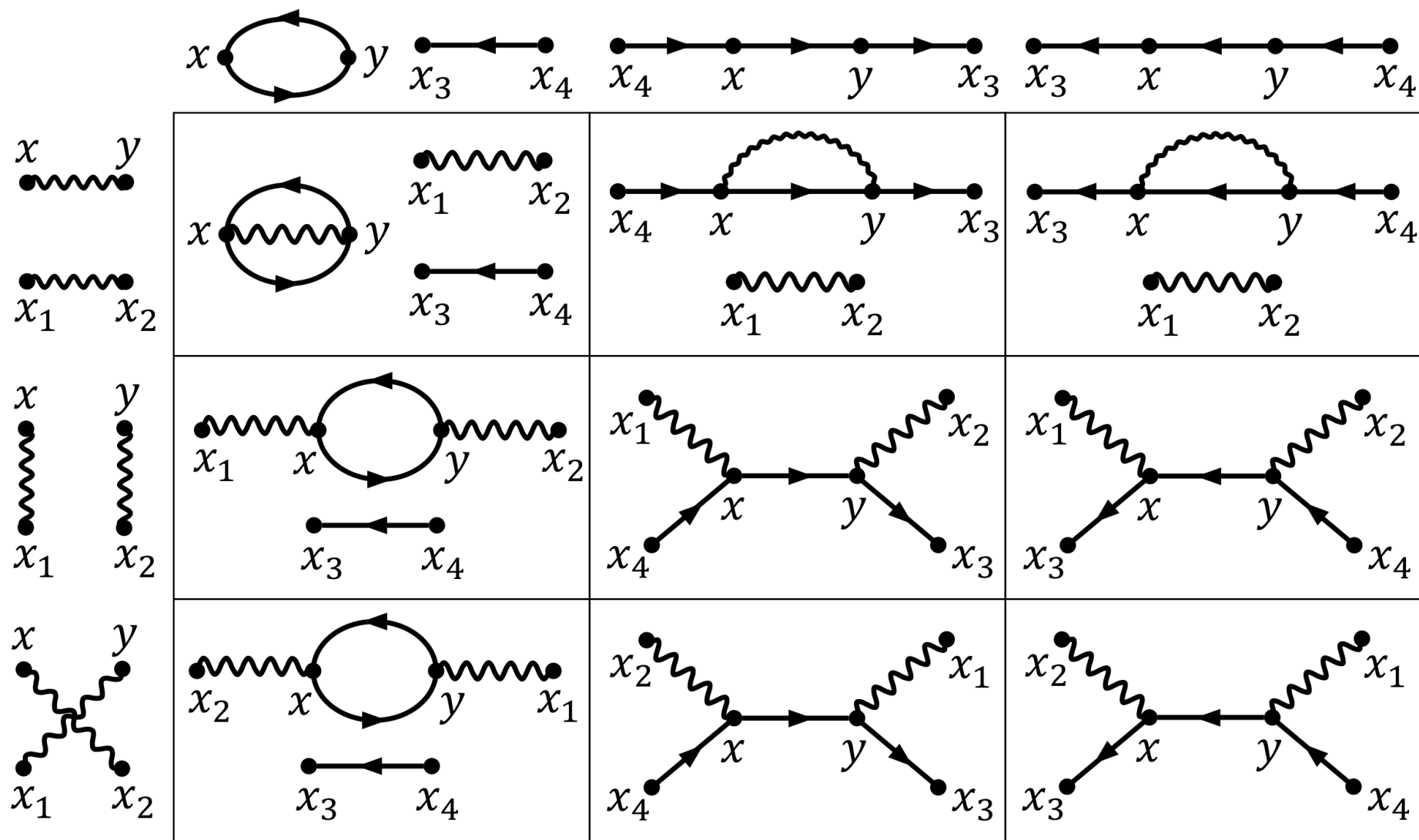


図 65 Green 関数 $\langle A^\mu(x_1) A^\nu(x_2) \psi(x_3) \bar{\psi}(x_4) \rangle$ への 2 次の寄与

図65における (i, j) 番目 (i 行 j 列目) のダイアグラムの Green 関数に対する寄与を $G_{ij}^{(2)\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ と書くと, 例えば真空気泡 $B^{(2)}$ を含む $(1, 1)$ 番目のダイアグラムの寄与は具体的に

$$\begin{aligned}
& G_{11}^{(2)\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
&= -\frac{(ie)^2}{2!} \int d^4x d^4y [iS_{F\beta''\alpha'}(y-x)(\gamma_\rho)_{\alpha'\beta'} iS_{F\beta'\alpha''}(x-y)(\gamma_\sigma)_{\alpha''\beta''}] \\
&\quad \times iS_{F\alpha\beta}(x_3-x_4) iD_F^{\rho\sigma}(x-y) iD_F^{\mu\nu}(x_1-x_2) \\
&= -\frac{(ie)^2}{2!} \int d^4x d^4y \text{Tr}[iS_F(y-x)\gamma_\rho iS_F(x-y)\gamma_\sigma] \\
&\quad \times iS_{F\alpha\beta}(x_3-x_4) iD_F^{\rho\sigma}(x-y) iD_F^{\mu\nu}(x_1-x_2) \\
&= B^{(2)} G^{(0)\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4)
\end{aligned}$$

と表される. よって Green 関数 $G^{\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \langle A^\mu(x_1) A^\nu(x_2) \psi(x_3) \bar{\psi}(x_4) \rangle$ の引数を略記すると, 少なくとも2次の摂動論では

$$G^{\mu\nu}(\dots) = \left[G^{(0)\mu\nu}(\dots) + G_{11}^{(2)\mu\nu}(\dots) + \sum_{(i,j) \neq (1,1)} G_{ij}^{(2)\mu\nu}(\dots) \right] [1 - B^{(2)}]$$

$$=G^{(0)\mu\nu}(\cdots)+\cancel{G_{11}^{(2)\mu\nu}(\cdots)}+\sum_{(i,j)\neq(1,1)}G_{ij}^{(2)\mu\nu}(\cdots)-\cancel{B^{(2)}G^{(0)\mu\nu}(\cdots)}$$

となり，分母の展開から現れる非連結の真空気泡は確かに，分子の展開から現れる同じ因子と正確に相殺することが見て取れる．

我々に興味のある連結 Green 関数に寄与する項は

$$G_{22}^{(2)\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{(ie)^2}{2!} \int d^4x d^4y [iS_F(x_3 - y)\gamma_\sigma iS_F(y - x)\gamma_\rho iS_F(x - x_4)]_{\alpha\beta} \\ \times iD_F^{\rho\mu}(x - x_1)iD_F^{\sigma\nu}(y - x_2),$$

$$G_{23}^{(2)\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{(ie)^2}{2!} \int d^4x d^4y [iS_F(x_3 - x)\gamma_\rho iS_F(x - y)\gamma_\sigma iS_F(y - x_4)]_{\alpha\beta} \\ \times iD_F^{\rho\mu}(x - x_1)iD_F^{\sigma\nu}(y - x_2),$$

$$G_{32}^{(2)\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{(ie)^2}{2!} \int d^4x d^4y [iS_F(x_3 - y)\gamma_\sigma iS_F(y - x)\gamma_\rho iS_F(x - x_4)]_{\alpha\beta} \\ \times iD_F^{\rho\nu}(x - x_2)iD_F^{\sigma\mu}(y - x_1),$$

$$G_{33}^{(2)\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{(ie)^2}{2!} \int d^4x d^4y [iS_F(x_3 - x)\gamma_\rho iS_F(x - y)\gamma_\sigma iS_F(y - x_4)]_{\alpha\beta} \\ \times iD_F^{\rho\nu}(x - x_2)iD_F^{\sigma\mu}(y - x_1)$$

の4つである．（これ以降の計算ではフェルミオン伝播関数の積 $[\dots]$ の順序が保持されるので，スピノル添字 α, β を省いても差支えない．）

さらに対応するダイアグラムからも予想できるように，これらの項の全てが独立ではない．実際，もとの $G^{(2)\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ の表式が積分変数の入れ替え $x \leftrightarrow y$ の下で不変であることから期待されるように，図65は変数変換 $x \leftrightarrow y$ でGreen関数への寄与が一致するダイアグラムを含んでいる．実際，変数変換 $x \leftrightarrow y$ と同時にダミー添字の入れ替え $\rho \leftrightarrow \sigma$ を施すと，

$$G_{12}^{(2)\mu\nu} = G_{13}^{(2)\mu\nu}, \quad G_{21}^{(2)\mu\nu} = G_{31}^{(2)\mu\nu}, \quad G_{22}^{(2)\mu\nu} = G_{33}^{(2)\mu\nu}, \quad G_{23}^{(2)\mu\nu} = G_{32}^{(2)\mu\nu}$$

であることが直接確かめられる（引数はいずれも (x_1, x_2, x_3, x_4) ）．積分変数 x, y を入れ替えた同じ寄与が2度現れるため，指数の展開における因子 $1/2!$ は相殺される．

以上より連結Green関数は2次の摂動論で

$$G_c^{\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4) = G_a^{\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4) + G_b^{\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

$$G_a^{\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv 2G_{22}^{(2)\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4) : (934),$$

$$G_b^{\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv 2G_{23}^{(2)\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4) : (935)$$

と求まる．

■運動量空間の Green 関数 (937), (938) の導出 [28, pp.252–254]

定義式 (936) に従い, 常套的な Fourier 変換の計算を行えば良い. まず式 (934) の $G_a^{\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ に対して,

$$\begin{aligned} & \int d^4x_1 \cdots d^4x_4 e^{-i(k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 + p_1 \cdot x_3 + p_2 \cdot x_4)} G_a^{\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= \int d^4x_1 \cdots d^4x_4 d^4x d^4y e^{-i(k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 + p_1 \cdot x_3 + p_2 \cdot x_4)} \\ & \quad \times \left[\int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} e^{-iq_1 \cdot (x_3 - y)} iS_F(q_1) \right] (ie\gamma_\sigma) \left[\int \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} e^{-iq_2 \cdot (x - y)} iS_F(q_2) \right] \\ & \quad \times (ie\gamma_\rho) \left[\int \frac{d^4q_3}{(2\pi)^4} e^{-iq_3 \cdot (x - x_4)} iS_F(q_3) \right] \\ & \quad \times \left[\int \frac{d^4q_4}{(2\pi)^4} e^{-iq_4 \cdot (x - x_1)} iD_F^{\rho\mu}(q_4) \right] \left[\int \frac{d^4q_5}{(2\pi)^4} e^{-iq_5 \cdot (y - x_2)} iD_F^{\sigma\nu}(q_5) \right] \\ &= \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4q_5}{(2\pi)^4} iS_F(q_1) (ie\gamma_\sigma) iS_F(q_2) (ie\gamma_\rho) iS_F(q_3) iD_F^{\rho\mu}(q_4) iD_F^{\sigma\nu}(q_5) \\ & \quad \times \int d^4x_1 \cdots d^4x_4 d^4x d^4y e^{-i(k_1 - q_4) \cdot x_1} e^{-i(k_2 - q_5) \cdot x_2} e^{-i(p_1 + q_1) \cdot x_3} e^{-i(p_2 - q_3) \cdot x_4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times e^{-i(-q_2+q_3+q_4)\cdot x} e^{-i(-q_1+q_2+q_5)\cdot y} \\
& = \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4 q_5}{(2\pi)^4} (2\pi)^{4 \times 6} \delta^{(4)}(k_1 - q_4) \delta^{(4)}(k_2 - q_5) \delta^{(4)}(p_1 + q_1) \delta^{(4)}(p_2 - q_3) \\
& \quad \times \delta^{(4)}(-q_2 + q_3 + q_4) \delta^{(4)}(-q_1 + q_2 + q_5) \\
& \quad \times iS_F(q_1)(ie\gamma_\sigma)iS_F(q_2)(ie\gamma_\rho)iS_F(q_3)iD_F^{\rho\mu}(q_4)iD_F^{\sigma\nu}(q_5) \\
& = (2\pi)^4 \int d^4 q_2 \delta^{(4)}(-q_2 + p_2 + k_1) \delta^{(4)}(p_1 + q_2 + k_2) \\
& \quad \times iS_F(-p_1)(ie\gamma_\sigma)iS_F(q_2)(ie\gamma_\rho)iS_F(p_2)iD_F^{\rho\mu}(k_1)iD_F^{\sigma\nu}(k_2) \\
& = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \\
& \quad \times iD_F^{\nu\sigma}(k_2)iS_F(-p_1)[(ie\gamma_\sigma)iS_F(p_2 + k_1)(ie\gamma_\rho)]iS_F(p_2)iD_F^{\rho\mu}(k_1)
\end{aligned}$$

となり，確かに反応全体のエネルギー・運動量保存則を保証するデルタ関数 $\delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$ が現れる．そこで定義式(936)に基づき，最右辺におけるデルタ関数の後ろの因子を運動量空間の Green 関数(937)に同定できる．全く同様の計算で式(938)の $G_b^{\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ を運動量空間に移すと式(938)を得る．

14.2.3項の原稿

最後に Green 関数について論じる．まず自然単位系では素電荷 e の 2 乗は (数係数 4π の違いを除き) 微細構造定数に一致するので，素電荷 e を摂動パラメータと見なせることに注意しよう．さて，通常の応用のためには，生成汎関数の式 (927) に基づき，指数関数を級数展開して e のべきによる摂動展開を得るよりも，これから見るように直接，相互作用を持つ系の Green 関数を対象とし，これを自由場の Green 関数に關係付けて級数に展開する方が容易である．以下では相互作用する場の Green 関数を式 (928) のように表記し，自由場の (すなわち相互作用項 $\mathcal{L}_I$ をゼロとした場合の Green 関数は添字のゼロを付けて $\langle A^\mu(x_1) \cdots \psi(y_1) \cdots \bar{\psi}(z_1) \cdots \rangle_0$ と表記する [22, p.352].

自由場に関しては生成汎関数が式 (900), (902), (914) で具体的に得られているので，これを汎関数微分して Green 関数を求めることができる．場 $A, B, \dots$ を電磁場 A^μ またはスピノル場 $\psi, \bar{\psi}$ のいずれかとしよう．また 2 つの場の 2 点 Green 関数を作る操作を縮約と呼び，式 (929) で表そう．

すると QED においてゼロにならない縮約は，式 (912), (922) で見た光子伝播関数 $iD_F^{\mu\nu}(x)$ とフェルミオン伝播関数 $iS_F(x)$ だけである．さらに一般に自由場 Green 関数 $\langle ABCD \cdots WXYZ \rangle_0$ は，場 $A, \dots, Z$ が奇数個ならばゼロになり，偶数個ならば式 (930) となることを帰納的に証明し得る ([導出スライド参照](#))．ただし右辺は全ての場が縮約された全ての可能な項の和であり，任意の自由場 Green 関数は，光子伝播関数 $iD_F^{\mu\nu}(x)$ とフェルミオン伝播関数 $iS_F(x)$ だけで表されることになる．この結果は正準

理論で T 積の真空期待値 $\langle 0 | T(ABCD \cdots WXYZ) | 0 \rangle$ に Wick の定理を適用した結果と一致しており [22, p.300], 経路積分形式の自由場 Green 関数 (931) に対する Wick の定理と見なされる.

相互作用する場の Green 関数 $\langle ABC \cdots \rangle$ は, その表式 (888) より式 (932) のように自由場 Green 関数に関係付けて評価できる (導出スライド参照). 指数関数を級数展開すれば, Green 関数の摂動展開が得られる. 公式 (932) は正準形式における式 (880) と似た関係である.

公式 (932), (930) の具体的な応用例として, 4 点 Green 関数 $\langle A^\mu(x_1) A^\nu(x_2) \psi(x_3) \bar{\psi}(x_4) \rangle$ を 2 次の摂動論の範囲で調べよう. 計算の要点をいくらか述べると, まず Wick 展開からは例えば図 60 のような非連結ダイアグラムに対応付けられる項が現れる. ところが非連結ダイアグラムはその構成要素となっている独立な過程のダイアグラム以上の情報を含んではいない. そこで連結 Green 関数に興味がある場合には, 非連結ダイアグラムの寄与を省いて良い [22, pp.306–307]. また公式 (932) 分母の展開からは例えば図 61 のような, (外線を持たない) 非連結の “真空気泡 (vacuum-bubble)” のダイアグラムに対応する項が現れる. 実は分母から生じる真空気泡はいずれも分子の展開から現れる同じ因子と正確に相殺するため, 連結 Green 関数を計算する際は結果的に分母の計算を省いて良い [22, p.355].

結局, 2 次の摂動論では興味ある連結 Green 関数は式 (933), (934), (935) のように求まる

(導出スライド参照). Green関数(933)は図62のような座標空間のダイアグラムに対応付けられる. Green関数の各脚は伝播関数であり, S行列要素と関係付けるときに始・終状態の粒子のいずれにも対応し得る. またGreen関数の中央の斜線部分には, 脚に接続する可能なあらゆるグラフが摂動展開の形で寄与する(ただし非連結ダイアグラムを生じるグラフは除く) [22, p.294].

運動量空間のGreen関数 $G^{\mu\cdots}(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ は, 座標空間のGreen関数のFourier変換(936)で定義される. ただしエネルギー・運動量保存を保証するデルタ関数はFourier変換に伴って必ず現れるため, 式(936)右辺のようにデルタ関数を除いた部分として運動量空間のGreen関数を定義している. また慣例に従って指数 $e^{-ip_i \cdot x_i}$ に負号を付けてあり, このとき運動量空間のダイアグラムとの対応を調べる際に判明するように, 各運動量変数 p_i はダイアグラムの内向きを正の向きとして設定していることになる [22, p.298].

定義式(936)に従い, 4点Green関数の2つの項(934),(935)を運動量空間に移すと, それぞれ順に式(937),(938)となる(導出スライド参照). ただし自然単位系を用いていることを踏まえ, 光子の運動量に波数の文字 k_1, k_2 を用いた.

2式(937),(938)を足した運動量空間のGreen関数(939),(940)は図63のような運動量空間のダイアグラムに対応付けて解釈できる. 実際, 図63のダイアグラムは斜線で示した結節部分と, そこに接続する外線(脚)から構成されており, 光子とフェルミオンの線

の各々に伝播関数を充て、各結節点に結合定数の因子 $ie\gamma_\alpha$ を充てると、Green関数 (939) が得られる。ただし各結節点でエネルギー・運動量エネルギーが保存するように内線の4元運動量を設定し、また一続きのフェルミオン線上に並んだ伝播関数と γ 行列は、フェルミオン線の矢を逆向きにたどる順に並べる。このように第1原理から具体的なGreen関数を求める計算は規則性があり、似たような手続きの繰り返しとなる。その結果、得られるGreen関数は決まって適当なダイアグラムを用いて解釈することができ、Green関数とダイアグラムとの対応関係は実際、Feynman規則と呼ばれる一連の規則にまとめ上げられる。このため毎度詳細な計算をせずとも、可能なグラフを描き、それをFeynman規則に従って数式に翻訳すれば、直ちにGreen関数を書き下せる。ここでは一部のFeynman規則を例示的に説明したことになる。本稿ではこれ以降、Feynman規則の全てを網羅的に導出する予定はなく、読者は既に正準理論を通じてQEDの全てのFeynman規則の起源を一通り理解していると仮定し、以降では必要に応じて、単にFeynman規則を天下りに引用するに留める。なおGreen関数に付した運動量 p_1 は内向きを基準としているのに対し、伝播関数 S_F の引数は常にフェルミオン線の矢の向きに一致させる約束だから、計算結果 (939) のように $iS_F(-p_1)$ における引数の負号を要する。

14.2.4 S行列要素(LSZ簡約公式)

■外線の置き換え [17, pp.132–133] [22, pp.308–309] Compton 散乱 (図67)

$$\gamma(k, r) + e^-(p, s) \rightarrow \gamma(k', r') + e^-(p', s') \quad (942)$$

のFeynman振幅 $\mathcal{M}$ は, Green関数(939) (図66)で運動量と外線因子を置き換えて得る:

$$k_1 = k, \quad p_1 = -p', \quad k_2 = -k', \quad p_2 = p, \quad (943)$$

$$iD_F^{\mu\alpha}(k_1) \rightarrow \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}), \quad iS_F(p_2) \rightarrow u_s(\mathbf{p}), \quad iD_F^{\beta\nu}(k_2) \rightarrow \varepsilon_{r'}^\beta(\mathbf{k}'), \quad iS_F(-p_1) \rightarrow \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}'). \quad (944)$$

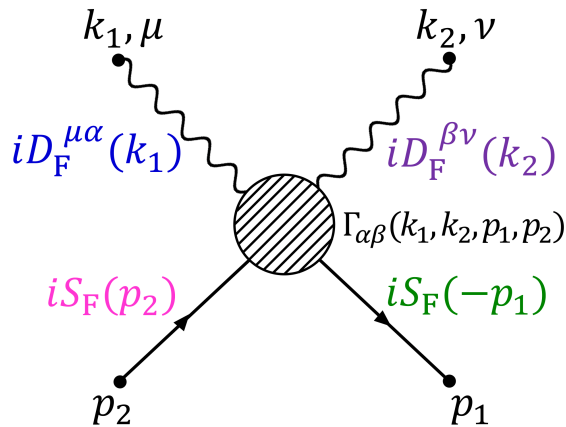


図66 Green関数

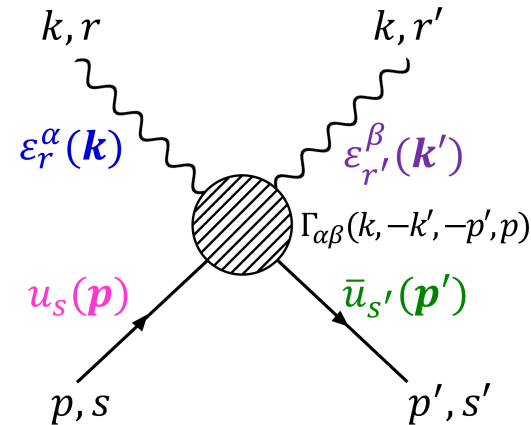


図67 Feynman振幅

すると Feynman 振幅は

$$\mathcal{M}(k, k', p, p') = \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \Gamma_{\alpha\beta}(k, -k', -p', p) u_s(\mathbf{p}) \varepsilon_{r'}^\beta(\mathbf{k}') \quad (945)$$

となる．ただしここでは最低次の摂動論を念頭に，
結節部分関数 $\Gamma_{\alpha\beta}$ は2次の表式(940)を想定しており，その2つの項の寄与

$$\mathcal{M}_a = -e^2 \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}_{r'}(\mathbf{k}') iS_F(p+k) \not{\epsilon}_r(\mathbf{k}) u_s(\mathbf{p}), \quad (946)$$

$$\mathcal{M}_b = -e^2 \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}_r(\mathbf{k}) iS_F(p-k') \not{\epsilon}_{r'}(\mathbf{k}') u_s(\mathbf{p}) \quad (947)$$

はそれぞれ順に図68 (a),(b)の Feynman ダイアグラムに対応付けられる．

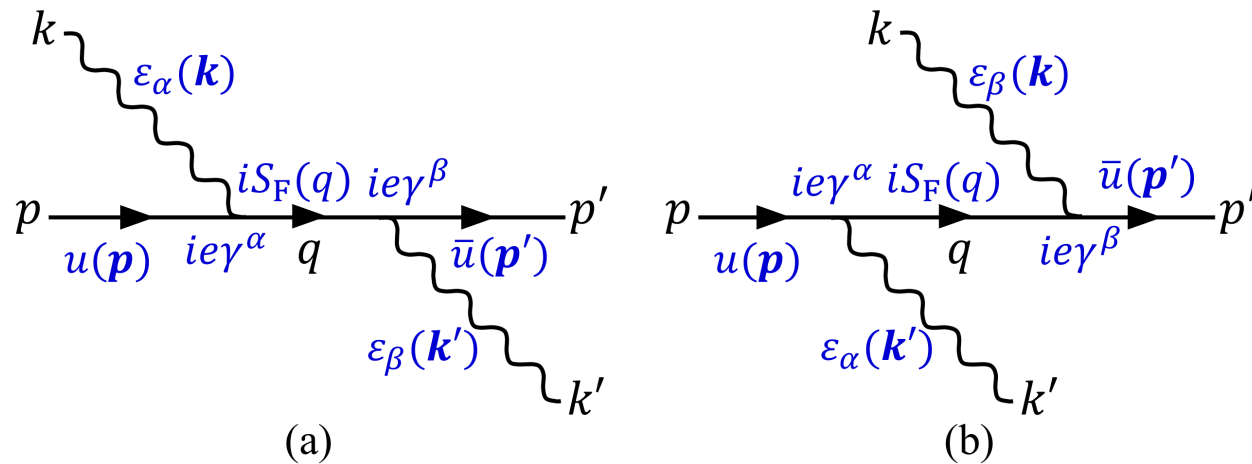


図68 Compton 散乱の Feynman ダイアグラム (スピン・偏極状態のラベルは省略)

■LSZ簡約公式 [23, pp.71–72, pp.74–76]

光子の偏極状態を $\alpha = 1, 2$ で表し, 始・終状態をそれぞれ

$$\begin{aligned} |i\rangle &= |e^-(\mathbf{p}_1, r_1), \dots, e^-(\mathbf{p}_n, r_n); e^+(\mathbf{q}_1, s_1), \dots, e^+(\mathbf{q}_m, s_m); \\ &\quad \gamma(\mathbf{k}_1, \alpha_1), \dots, \gamma(\mathbf{k}_l, \alpha_l)\rangle, \\ |f\rangle &= |e^-(\mathbf{p}_{1'}, r_{1'}), \dots, e^-(\mathbf{p}_{n'}, r_{n'}); e^+(\mathbf{q}_{1'}, s_{1'}), \dots, e^+(\mathbf{q}_{m'}, s_{m'}); \\ &\quad \gamma(\mathbf{k}_{1'}, \alpha_{1'}), \dots, \gamma(\mathbf{k}_{l'}, \alpha_{l'})\rangle \end{aligned} \quad (948)$$

と設定しよう.

また空間を有限の体積 V の箱と想定し, 平面波解を

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{k}} &\equiv \frac{e^{-ik \cdot x}}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}}, \\ U_{\mathbf{p}s}(x) &\equiv \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}\right)^{1/2} u_s(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}, \quad V_{\mathbf{p}s}(x) \equiv \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}\right)^{1/2} v_s(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x} \end{aligned} \quad (949)$$

と略記する ($\omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$, $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$).

S行列要素 S_{fi} はLSZ簡約公式

$$\begin{aligned}
S_{\text{fi}} = & \left[\prod_{k'=1'}^{l'} (-i) \varepsilon_{\alpha_{k'} \mu_{k'}}(\mathbf{k}_{k'}) \int d^4 z_{k'} f_{\mathbf{k}_{k'}}^*(z_{k'}) \square_{z_{k'}} \right] \left[\prod_{k=1}^l (-i) \varepsilon_{\alpha_k \nu_k}(\mathbf{k}_k) \int d^4 z_k f_{\mathbf{k}_k}(z_k) \square_{z_k} \right] \\
& \times \left[\prod_{i'=1'}^{n'} (-i) \int d^4 x_{i'} \bar{U}_{\mathbf{p}_{i'} r_{i'}}(x_{i'}) (i\rlap{\not{\partial}} - m)_{x_{i'}} \right] \left[\prod_{j=1}^m i \int d^4 y_j \bar{V}_{\mathbf{q}_j s_j}(y_j) (i\rlap{\not{\partial}} - m)_{y_j} \right] \\
& \times \left[\prod_{i=1}^n (-i) \int d^4 x_i \right] \prod_{j'=1'}^{m'} i \int d^4 y_{j'} \langle A^{\mu_{1'}}(z_{1'}) \cdots A^{\mu_{l'}}(z_{l'}) A^{\nu_1}(z_1) \cdots A^{\nu_l}(z_l) \\
& \times \psi(x_{n'}) \cdots \psi(x_{1'}) \psi(y_1) \cdots \psi(y_m) \bar{\psi}(x_1) \cdots \bar{\psi}(x_n) \bar{\psi}(y_{1'}) \cdots \bar{\psi}(y_{m'}) \rangle \\
& \times \left[\prod_{i=1}^n (-i \overleftarrow{\rlap{\not{\partial}}} - m)_{x_i} U_{\mathbf{p}_i r_i}(x_i) \right] \left[\prod_{j=1}^m (-i \overleftarrow{\rlap{\not{\partial}}} - m)_{y_{j'}} V_{\mathbf{q}_{j'} s_{j'}}(y_{j'}) \right] \quad (950)
\end{aligned}$$

で与えられる^{*161}。これは右辺の積分核となっている Green 関数 $\langle \cdots \rangle$ を左辺の S 行列要素に関係付ける公式である。

^{*161} 正準形式での説明 [23, pp.71–72, pp.74–76] を基に導出した。また省略記法 $M(x) \overleftarrow{\rlap{\not{\partial}}} \equiv \partial_\mu M(x) \gamma^\mu$ を導入した (行列 $M(x)$, γ^μ は順序交換できないことに注意)。

■ Compton 散乱への応用

2次の摂動論では, 4点 Green 関数 $\langle A^\mu(x_1) A^\nu(x_2) \psi(x_3) \bar{\psi}(x_4) \rangle$ には
2つの連結 Green 関数 (934), (935) が寄与する. そこで一方の連結 Green 関数 (934) に
LSZ 簡約公式 (950) を適用して, S 行列要素への寄与を求めると

$$S_{\text{fi}}^{(\text{a})} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+k-p'-k') \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}'}}} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \mathcal{M}_a \quad (951)$$

を得る. ここに Feynman 振幅 $\mathcal{M}_a$ は Green 関数の脚を適当な外線因子に置き換えた
表式 (946) と正確に一致する.

同様にもう一方の連結 Green 関数 (934) に LSZ 簡約公式 (950) を適用すると,
Feynman 振幅 (947) が得られる.

14.2.4 項の式の導出など

■S行列要素(951)の導出 2つの電磁場 $A^\mu(x_1), A^\nu(x_2)$ に対応する座標空間の Green 関数の脚に, それぞれ順に始・終状態の光子 $\gamma(k, r)$ と $\gamma(k', r')$ を対応付ける形でLSZ 簡約公式(950)を適用すると, Compton 散乱(942)のS行列要素は

$$\begin{aligned}
 S_{\text{fi}} = & \left[\cancel{(-i)} \varepsilon_{r'\nu}(\mathbf{k}') \int d^4x_2 \frac{e^{ik' \cdot x_2}}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}'}}} \square_{x_2} \right] \left[\cancel{(-i)} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \int d^4x_1 \frac{e^{-ik \cdot x_1}}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \square_{x_1} \right] \\
 & \times \left[\cancel{(-i)} \int d^4x_3 \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') e^{ip' \cdot x_3} (i\cancel{\partial} - m)_{x_3} \right] \cancel{(-i)} \int d^4x_4 \\
 & \times \langle A^\mu(x_1) A^\nu(x_2) \psi(x_3) \bar{\psi}(x_4) \rangle (-i\overleftarrow{\cancel{\partial}} - m)_{x_4} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} u_s(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x_4} \quad (952)
 \end{aligned}$$

となる^{*162}. ここで連結 Green 関数(934):

$$\begin{aligned}
 & \langle A^\mu(x_1) A^\nu(x_2) \psi(x_3) \bar{\psi}(x_4) \rangle_a \\
 & \equiv \int d^4x d^4y iD_F^{\mu\alpha}(x - x_1) iS_F(x_3 - y) [(ie\gamma_\beta) S_F(y - x) (ie\gamma_\alpha)] iS_F(x - x_4) iD_F^{\beta\nu}(y - x_2)
 \end{aligned}$$

^{*162} ここでは $(-i)^4 = 1$ としたものの, 各因子 $(-i)$ は一般には伝播関数に掛かる虚数単位 i を相殺する.

の寄与 $S_{\text{fi}}^{(\text{a})}$ を調べよう．これを上式の Green 関数 $\langle A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\psi(x_3)\bar{\psi}(x_4)\rangle$ に代入すると，

$$\begin{aligned}
S_{\text{fi}}^{(\text{a})} &= \left[\varepsilon_{r'\nu}(\mathbf{k}') \int d^4x_2 \frac{e^{ik'\cdot x_2}}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}'}}} \square_{x_2} \right] \left[\varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \int d^4x_1 \frac{e^{-ik\cdot x_1}}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \square_{x_1} \right] \\
&\times \left[\int d^4x_3 \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') e^{ip'\cdot x_3} (i\rlap{\not{\partial}} - m)_{x_3} \right] \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \int d^4x_4 \\
&\times \int d^4x d^4y \left[\int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} e^{-iq_1\cdot(x-x_1)} iD_{\text{F}}^{\mu\alpha}(q_1) \right] \left[\int \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} e^{-iq_2\cdot(x_3-y)} iS_{\text{F}}(q_2) \right] \\
&\times (ie\gamma_\beta) \left[\int \frac{d^4q_3}{(2\pi)^4} e^{-iq_3\cdot(y-x)} iS_{\text{F}}(q_3) \right] (ie\gamma_\alpha) \\
&\times \left[\int \frac{d^4q_4}{(2\pi)^4} e^{-iq_4\cdot(x-x_4)} iS_{\text{F}}(q_4) \right] \left[\int \frac{d^4q_5}{(2\pi)^4} e^{-iq_5\cdot(y-x_2)} iD_{\text{F}}^{\beta\nu}(q_5) \right] \\
&\times (-i\overleftarrow{\rlap{\not{\partial}}} - m)_{x_4} u_s(\mathbf{p}) e^{-ip\cdot x_4} \\
&= \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4q_5}{(2\pi)^4} \left[\varepsilon_{r'\nu}(\mathbf{k}') \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}'}}} (-q_5^2) \right] \left[\varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} (-q_1^2) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}')(\not{q}_2 - m) \right] \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \\
& \times \int d^4x_1 \cdots d^4x_4 d^4x d^4y e^{-i(k-q_1) \cdot x_1} e^{i(k'+q_5) \cdot x_2} e^{-i(-p'+q_2) \cdot x_3} e^{-i(-q_4+p) \cdot x_4} \\
& \times e^{-i(q_1-q_3+q_4) \cdot x} e^{-i(-q_2+q_3+q_5) \cdot y} \\
& \times iD_F^{\mu\alpha}(q_1) iS_F(q_2) ie\gamma_\beta iS_F(q_3) ie\gamma_\alpha iS_F(q_4) iD_F^{\beta\nu}(q_5)(\not{q}_4 - m) u_s(\mathbf{p}) \\
& = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+k-p'-k') \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}'}}} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \\
& \times [\varepsilon_{r'\nu}(\mathbf{k}')(-k'^2) iD_F^{\beta\nu}(k')] [\varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k})(-k^2) iD_F^{\mu\alpha}(k)] \\
& \times [\bar{u}_{s'}(\mathbf{p}')(\not{p}' - m) iS_F(p') ie\gamma_\beta iS_F(p+k) ie\gamma_\alpha iS_F(p)(\not{p} - m) u_s(\mathbf{p})] \\
& = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+k-p'-k') \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}'}}} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \\
& \times \varepsilon_{r'}^\beta(\mathbf{k}') \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') [(ie\gamma_\beta) iS_F(p+k) (ie\gamma_\alpha)] u_s(\mathbf{p}) : (951)
\end{aligned}$$

を得る．ただし最後の等号では伝播関数の具体的表式から，

$$(-k'^2)D_F^{\beta\nu}(k') = g^{\beta\nu}, \quad (-k^2)D_F^{\mu\alpha}(k) = g^{\mu\alpha}, \quad (\not{p}' - m)S_F(p') = 1, \quad S_F(p)(\not{p} - m) = 1$$

となることを用いた.

参考：非連結 Green 関数の寄与

2次の摂動論で4点 Green 関数 $\langle A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\psi(x_3)\bar{\psi}(x_4)\rangle$ に含まれる, 14.2.2項の図65に示した非連結 Green 関数はいずれも, 伝播関数 $iD_F^{\mu\nu}(x_1 - x_2)$ または $iS_F(x_3 - x_4)$ を分離した形で含む. 例えば孤立した伝播関数 $iS_F(x_3 - x_4)$ を含む非連結 Green 関数にLSZ簡約公式(952)を適用すると, S行列要素において $iS_F(x_3 - x_4)$ に関する次の因子を乗法的に分離できる.

$$\begin{aligned}
& \left[\int d^4x_3 \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') e^{ip' \cdot x_3} (i\not{\partial} - m)_{x_3} \right] \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \int d^4x_4 \\
& \times \left[\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq \cdot (x_3 - x_4)} iS_F(q) \right] (-i\overleftarrow{\not{\partial}} - m)_{x_4} u_s(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x_4} \\
& = \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') (\not{q} - m) iS_F(q) (\not{q} - m) u_s(\mathbf{p}) \\
& \times \int d^4x_3 d^4x_4 e^{i(p' - q) \cdot x_3} e^{i(q - p) \cdot x_4} \\
& = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p') \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} i\bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') (\not{p} - m) u_s(\mathbf{p}).
\end{aligned}$$

最右辺はデルタ関数 $\delta^{(4)}(p - p')$ を含むため，相異なる始・終状態 ($p \neq p'$) を設定する限り，そのような非連結 Green 関数は S 行列要素に寄与しない^{*163}．同様に分離した伝播関数 $iD_F^{\mu\nu}(x_1 - x_2)$ を含む非連結 Green 関数も光子の運動量 $k \neq k'$ の過程の S 行列要素に寄与しない．

^{*163} もとより正準形式では LSZ 簡約公式は，始・終状態の運動量が相異なることを仮定して導かれている [23, pp.71–72, pp.75–76]．

14.2.4項の原稿

素粒子の反応を含む散乱に対する確率振幅をS行列要素と言い、特にその非自明な部分はFeynman振幅と呼ばれる。粒子の寿命や散乱の断面積などの観測量は原理的にはS行列要素から計算できるため、理論の予言はS行列要素を求めることに懸っている。ところで運動量空間のGreen関数と同様に、S行列要素(とりわけFeynman振幅)もまたFeynman規則に従う。よって任意の過程のFeynman振幅を得るには、関係する(連結)Green関数の脚を表す伝播関数を、外線粒子の因子に適切に置き換えさえすれば良い。例えば図67のダイアグラムで表されるCompton散乱(942)のFeynman振幅 $\mathcal{M}$ を求めるには、図66のダイアグラムで表されるGreen関数(939)において内向き運動量を式(943)のように同定し、さらにGreen関数の脚(伝播関数)の外線因子への置き換え(944)を施せば良い。

するとFeynman振幅は(945)となる。ただしここでは最低次の摂動論を念頭に、結節部分関数 $\Gamma_{\alpha\beta}$ は2次の表式(940)を想定しており、その2つの項の寄与(946),(947)はそれぞれ順に図68 (a),(b)のFeynmanダイアグラムに対応付けられる。(いずれのダイアグラムも左側が始状態を、右側が終状態を表す。) また置き換え(944)では伝播関数と外線に対する輻射補正を考慮していない [17, pp.132–133] [22, pp.308–309]。

もっとも以上の説明はS行列要素に対するFeynman規則の予備知識を前提としている。そこで14.2.1項で予告したように、Green関数からS行列要素を導くLSZ簡約公式を説

明する．ここでは光子の偏極状態を文字 r, s の代わりにギリシャ文字 $\alpha = 1, 2$ で表し，始・終状態をそれぞれ式(948)のように設定しよう．また空間を有限の体積 V の箱と想定して，光子と電子(質量 m) の物理的な分散関係 $\omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$, $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ を満たす4元運動量を持つ平面波解を式(949)のように略記する．

このときS行列要素 S_{fi} はLSZ簡約公式(950)で与えられるこれは右辺の積分核となっているGreen関数 $\langle \dots \rangle$ を左辺のS行列要素に関係付ける公式である．

QEDのLSZ簡約公式(950)がGreen関数の脚を外線因子に置き換える適正な働きをすることを見るために，4点Green関数 $\langle A^\mu(x_1) A^\nu(x_2) \psi(x_3) \bar{\psi}(x_4) \rangle$ にLSZ簡約公式(950)を適用してCompton散乱(942)のS行列要素を求めてみよう．2次の摂動論では，4点Green関数には2つの連結Green関数(934),(935)が寄与する．そこで一方の連結Green関数(934)をLSZ簡約公式(950)に代入して，S行列要素への寄与を求めると式(951)を得る(導出スライド参照)．式(951)のように，一般にS行列要素は反応全体のエネルギー・運動量保存則を保証するデルタ関数と，始・終状態の外線に関するつまらない因子の積を含み，これらを除いた非自明な部分としてFeynman振幅 $\mathcal{M}$ が定義される．そしてLSZ簡約公式から求めたS行列要素(951)におけるFeynman振幅 $\mathcal{M}_a$ は，Green関数の脚を適当な外線因子に置き換えたFeynman振幅(946)と正確に一致する．同様にもう一方の連結Green関数(934)にLSZ簡約公式(950)を適用すると，Feynman振幅(947)が得られる．このようにLSZ簡約公式を通じてGreen関数の脚を置き換えると，正しい

S行列要素を導ける．

S行列要素が求まれば，散乱断面積をはじめとする観測量を計算することができる．読者はCompton散乱やBhabha散乱，レプトン対の生成などの代表的なQED過程に対して，S行列要素から反応の断面積を導く計算をいくらか行った経験があると仮定して，本稿では断面積の計算は割愛する．幸いこの論題に関しては既に丁寧な解説が教科書に見られるので [17, ch.8]，詳細は場の量子論の入門書に委ねることができる．我々は先を急ぎ，次の話題に進むことにしよう．

14.3 繰り込み

輻射補正から生じる発散は次の手順で解消される [17, p.185].

1. 理論を正則化する.
 - 全次数において, 諸量が有限で数学的によく定義されるように, 理論の形を修正する.
2. 繰り込み.
 - 相互作用する物理的な粒子を, 相互作用のない(裸の)粒子と区別する.
 - 物理的な粒子の性質を裸の粒子の性質と関係付け, 理論の予言を物理的な粒子の質量や電荷によって表現する.
3. 正則化された理論を再びQEDに戻す.
 - 発散は裸の粒子と物理的粒子の関係の部分にだけ残る.
これは裸の粒子自体を観測できないために, 物理的な検証の対象とはなり得ない.
 - 観測可能量, 輻射補正は有限となる.

14.3節の原稿(序文)

QEDの最低次の摂動計算に対する高次の補正は輻射補正と呼ばれる．そのような計算を行うと，発散する積分が現れる．このような発散を解消する処方箋として，一般に繰り込みが用いられる [17, p.185]．これは輻射補正から生じる無限大を，質量や電荷などの理論のパラメータに吸収させる手法である．これを行うには，まず無限大を操作可能な有限の因子に置き換えて分離するために，何らかの方法で理論を発散が生じない形に修正する必要がある．これを正則化と呼ぶ．正則化は少なくとも本来の理論の枠内では必ずしも正当化し得ない人為的な措置であり，言わば理論にとっての“異物”であるため，最終的には正則化を取り除く必要がある．そこで発散を生じる因子を吸収させて質量や電荷を再定義した後に，正則化を解除してもとの理論を復元すると，理論は有限の結果を与える．まとめると繰り込みの手続きは正確には，理論の正則化，無限大の繰り込み，正則化の解除の3段階から成る．

繰り込みの背後には相互作用する物理的な粒子を，相互作用のない(裸の)粒子と区別するという洞察がある．例えば電子は現実には常に光子の衣をまとっているので，孤立した裸の電子が観測されることはない．そこで輻射補正は裸の電子を物理的な電子へと移行させると考える．このとき質量や電荷の繰り込みとは実のところ，裸の電子に対する値の，物理的な電子に対する値への修正に他ならない．すると繰り込みの際に発散は観測にかからない，裸の粒子と物理的粒子の関係の部分に移されていることになる．

本稿では繰り込みの完全で網羅的な解説を行う代わりに，一例として電子の伝播関数に

対する2次の輻射補正を題材にとって，繰り込みのアイデアを説明するに留める．なお以下ではQEDのFeynman規則の知識 [17, pp.137–141] を仮定し，いちいち導出を与えない．

14.3.1 輻射補正

Feynmanルールに基づき，電子の自己エネルギー一部分(図69)は積分

$$ie_0^2 \Sigma(p) \equiv \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k iD_{F\alpha\beta}(k) \gamma^\alpha iS_F(p-k) \gamma^\beta \quad (953)$$

に翻訳できる (e_0, m_0 は裸の値) [17, pp.186–189]. ループ積分(953):

$$ie_0^2 \Sigma(p) = \frac{e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \frac{2\not{p} - 2\not{k} - 4m_0}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \quad (954)$$

は $k \rightarrow \infty$ で紫外発散するだけでなく， $k \rightarrow 0$ で赤外発散する.

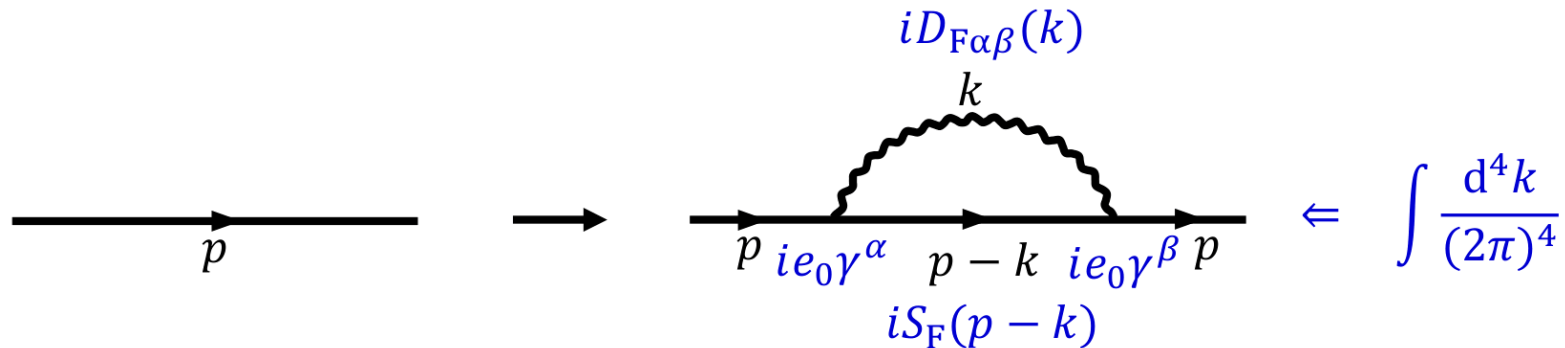


図69 フェルミオン(電子)の自己エネルギー(2次の輻射補正)

ここで図70のようにフェルミオン伝播関数を，自己エネルギー部分の挿入されたグラフと併せて考える修正を行う．これは置き換え

$$\begin{aligned} \frac{i}{\not{p} - m_0 + i\varepsilon} &\rightarrow \frac{i}{\not{p} - m_0 + i\varepsilon} + \frac{i}{\not{p} - m_0 + i\varepsilon} i e_0^2 \Sigma(p) \frac{i}{\not{p} - m_0 + i\varepsilon} \\ &= \frac{i}{\not{p} - m_0 + e_0^2 \Sigma(p) + i\varepsilon} + O(e_0^4) \equiv G(p) \end{aligned} \quad (955)$$

に対応する [17, pp.197–198].



図70 フェルミオン伝播関数の修正

14.3.1 項の式の導出など

■ループ積分の式(954)の確認 [17, p.197]

フェルミオンの自己エネルギー部分に関するループ積分(953)を具体的に書くと

$$\begin{aligned} ie_0^2 \Sigma(p) &= \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} \gamma^\alpha i \frac{\not{p} - \not{k} + m_0}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \gamma^\beta \\ &= -\frac{e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{\gamma^\alpha (\not{p} - \not{k} + m_0) \gamma_\alpha}{(k^2 + i\varepsilon) \{ (p-k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon \}} \quad (\gamma_\alpha \equiv g_{\alpha\beta} \gamma^\beta) \\ &= \frac{e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \frac{2\not{p} - 2\not{k} - 4m_0}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon} : (954) \end{aligned}$$

となる．ただし最後の等号では γ 行列の反交換関係(802)から容易に導かれる，よく知られた縮約公式 [17, p.251]

$$\gamma^\alpha \not{A} \gamma_\alpha = -2\not{A}, \quad \gamma^\alpha \gamma_\alpha = 4$$

を用いた(A は任意の4元ベクトル).

■修正したフェルミオン伝播関数(955)の最右辺への書き換え [17, p.198]

任意の演算子 A, B (これらは非可換でもよい) に対して, 恒等式

$$\frac{1}{A-B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \dots \quad (956)$$

が成立することを利用した. 式(956)は実際, 両辺に左あるいは右から $A-B$ を掛けると

$$\begin{aligned} (A-B)(\text{上式右辺}) &= 1 + \cancel{B \frac{1}{A}} + \cancel{B \frac{1}{A} B \frac{1}{A}} + \dots \\ &\quad - \cancel{B \frac{1}{A}} - \cancel{B \frac{1}{A} B \frac{1}{A}} - \dots = 1, \\ (\text{上式右辺})(A-B) &= 1 + \cancel{\frac{1}{A} B} + \cancel{\frac{1}{A} B \frac{1}{A} B} + \dots \\ &\quad - \cancel{\frac{1}{A} B} - \cancel{\frac{1}{A} B \frac{1}{A} B} - \dots = 1 \end{aligned}$$

となることから分かる.

14.3.1 項の原稿

輻射補正はS行列要素を表すFeynmanダイアグラムにおいて、仮想光子の放射と再吸収を表す結節点を付け加える補正にあたる．ところで各結節点にはFeynman規則に基づき、素電荷 e に比例する γ 行列の因子 $ie\gamma^\alpha$ が充てられる．よって例えば結節点を2つだけ追加する輻射補正を考えると、これはもとの行列要素に対する、微細構造定数 $\alpha = e^2/4\pi$ 程度の補正となる．

そのような2次の輻射補正の例として、以下では図69に示したような、電子の伝播関数にループ・ダイアグラムを挿入する置き換えを考えよう．図69のループは電子が放出した仮想光子を再吸収する過程を表し、電子の“自己エネルギー部分”と呼ばれる．これは古典的には点電荷が自らの生み出した静電場により、無限大の“自己エネルギー”を獲得する過程に比せられる．以下で見るように図69のような伝播関数の修正は等価的に電荷や質量の繰り込みとして表現され、それ故、自己エネルギー部分は裸の粒子を物理的な粒子へと移行させる過程と解釈できる．

Feynmanルールに基づき、電子の自己エネルギー部分は積分(953)に翻訳できる(図69を見よ)．ただし今まで e, m と書いていた裸の粒子の電荷と質量を、それが裸の値であることを明確にするために、それぞれ e_0, m_0 と書いている(以下同じ)．Feynman規則の1つに登録されている通り、4元運動量の分岐を伴うループには必ず式(953)のように、エネルギー・運動量保存則の下でも固定されない運動量変数に関する積分が施され、全ての可能な運動量の割り当てからの寄与が自然に考慮されることに注意しよ

う [17, pp.186–189].

フェルミオンの自己エネルギー部分に関するループ積分(953)を具体的に書くと式(954)のようになる(導出スライド参照). ループ積分(954)は積分変数の運動量 k が大きくなるところで発散する. 実際, すぐ後で導く正則化を施した自己エネルギー部分の表式(968)を見れば, 正則化を解除すると発散が生じることが明白である. あるいは素朴に考えると, $k \rightarrow \infty$ のとき被積分関数は $1/k^3$ のように振舞う. そこで一般に積分測度も含めた正味の運動量 p の次数として発散次数 K を定義すると, ループ積分(954)の発散次数は $K = 4 - 3 = 1$ である. ところが非負の発散次数 $K \geq 0$ を持つ積分は p^K のように発散する恐れがある($K = 0$ の場合は $\ln p$ に従う対数発散が生じ得る) [17, p.189, pp.228–229] [22, p.284]. なお大きな運動量は短い波長に対応するので, このような大きい運動量に起因する発散は紫外発散と呼ばれる. さらにループ積分(954)は $k \rightarrow \infty$ での紫外発散のみならず, $k \rightarrow 0$ でも発散する. 小さい運動量 $k \rightarrow 0$ での発散は長い波長に起因するという意味で赤外発散と呼ばれる.

ここで図70のようにフェルミオン伝播関数を, 自己エネルギー部分の挿入されたグラフと併せて考える修正を行う. これは置き換え(955)に対応する(導出スライド参照) [17, pp.197–198].

14.3.2 正則化

格子正則化(図71)では, 運動量空間の積分が
上限 π/a で切断される(図72) [21, pp.209–210].

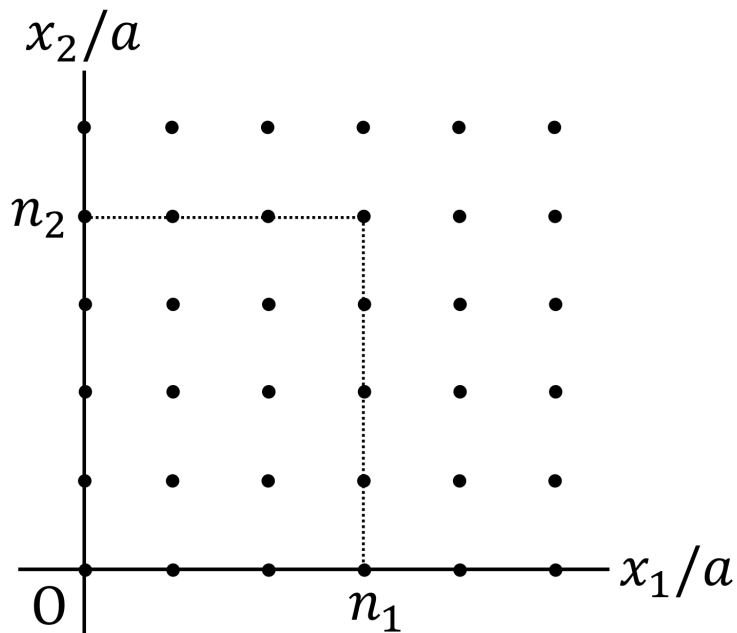


図71 正方格子

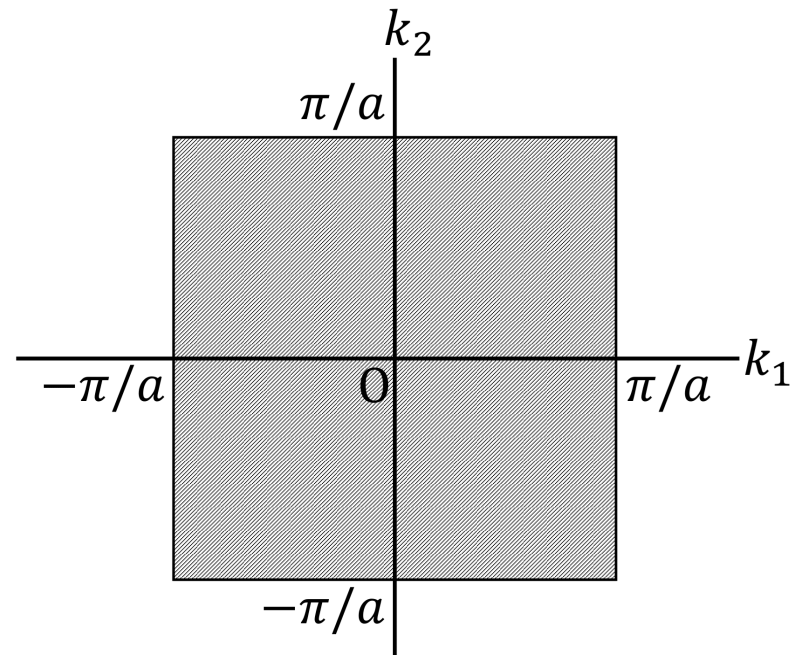


図72 Brillouin領域

以下では応用に適した次元正則化を紹介する [17, pp.233–234].

■ 数学的な準備 [17, pp.234–236]

● ループ積分の評価には公式

$$\int \frac{d^4 k}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = i\pi^2 (-1)^n \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-2}}, \quad n \geq 3 \quad (957)$$

$$\int d^4 k \frac{k^\mu}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = 0, \quad n \geq 3 \quad (958)$$

を用いる.

- 運動量の2次因子 a, b の積を分母に持つ被積分関数を
単一の2次因子のべきに直すには, Feynmanのパラメータ積分

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[b + (a-b)z]^2} \quad (959)$$

が有用である.

■次元正則化の一般論 [17, pp.237–239, pp.241–242]

公式(957)は、 D 次元時空における式

$$\int \frac{d^D k}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = i\pi^{D/2}(-1)^n \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-D/2}}, \quad n > D/2 \quad (960)$$

へと一般化される^{*164}。非整数次元 $D = 4 - \eta$ では、左辺の積分を右辺で定義できる。次元のズレ $\eta \rightarrow 0$ の極限を考える際、展開公式

$$x^{-\eta/2} = 1 - \frac{1}{2}\eta \ln x + \cdots, \quad (x \text{ は無次元量}) \quad (961)$$

$$\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{2}{\eta} - \gamma + \cdots \quad (962)$$

が有用となる($\gamma = 0.5772 \cdots$ は Euler 定数)。

^{*164} D 次元ベクトル k^μ の“自乗”は、

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (dx^0)^2 - \sum_{i=1}^{D-1} (dx^i)^2$$

となる計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いて $k^2 = g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu$ と定義されている。

なお D 次元空間においても奇関数の積分 (958) 同様の公式

$$\int d^D k \frac{k^\mu}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = 0 \quad (963)$$

が成り立つ.

また D 次元空間において

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I \quad (964)$$

を満たす $f(D) \times f(D)$ の γ 行列 $\gamma^0, \gamma^1, \dots, \gamma^{D-1}$ を導入する. このとき縮約公式

$$\gamma_\lambda \gamma^\lambda = DI, \quad \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\lambda = -(D-2)\gamma^\alpha, \quad \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda = (D-4)\gamma^\alpha \gamma^\beta + 4g^{\alpha\beta} I \quad (965)$$

および対角和に関する公式

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta) &= f(D) g^{\alpha\beta}, \\ \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) &= f(D) [g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}], \\ \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \dots \gamma^\mu \gamma^\nu) &= 0 \quad (\text{奇数個の } \gamma \text{ 行列の積に対して}) \end{aligned} \quad (966)$$

が成り立つ. これらの公式を非整数次元 $D = 4 - \eta$ でも用いる.

■電子の自己エネルギーと次元正則化 [17, p.248]

電子の自己エネルギー(953)は次元正則化により

$$ie_0^2 \Sigma(p) = \frac{-\tilde{e}_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int d^D k \frac{\gamma^\alpha (\not{p} - \not{k} + m_0) \gamma^\beta}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \frac{g_{\alpha\beta}}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon}. \quad (967)$$

- 適当な質量尺度 μ を導入して, 任意の空間次元 D で無次元となる電荷 $\tilde{e}_0$ を $e_0^2 = \tilde{e}_0^2 \mu^\eta$ で定義した.
- 小さい赤外切断 λ も導入した.

$\eta = 4 - D \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0$ の極限で

$$e_0^2 \Sigma(p) = \frac{\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} (\not{p} - 4m_0) \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right] + \tilde{e}_0^2 \Sigma_c(p), \quad (968)$$

$$16\pi^2 \Sigma_c(p) = (2m_0 - \not{p}) - 2 \int_0^1 dz [\not{p}(1-z) - 2m_0] \ln \left(\frac{m_0^2 z - p^2 z(1-z)}{\mu^2} \right) \quad (969)$$

となる. 式(968)において発散を生じる部分と収束する部分 $\Sigma_c(p)$ を分離できている.

14.3.2項の式の導出など

■標準的なループ積分の公式(957),(958)の導出

式(957)の $n = 3$ の場合の式は、 k^0 に関する積分を複素閉路において実行し、それから k に関する積分を繰り返すことによって導く．式(958)は対称性から自明である
[奇関数の積分] [17, p.235].

上記の方針に従い式(957)を導出しよう．式(957)の左辺は $n = 3$ の場合、

$$\int d^3k \int dk^0 f(k^0, \mathbf{k}), \quad f(k^0, \mathbf{k}) \equiv \frac{1}{\{(k^0)^2 - \mathbf{k}^2 - s + i\varepsilon\}^3}$$

となる． $f(k^0, \mathbf{k})$ は3位の極

$$k^0 = k^\pm \equiv \pm \sqrt{\mathbf{k}^2 + s - i\varepsilon} = \pm \sqrt{\mathbf{k}^2 + s} \mp i\varepsilon'$$

を持ち、

$$f(k^0, \mathbf{k}) = \frac{1}{(k^0 - k^-)^3 (k^0 - k^+)^3}$$

と表される．原点を中心として無限大の半径を持つ、複素 k^0 平面上の $\text{Im}[k^0] > 0$ 側の

半円に沿う $f(k^0, \mathbf{k})$ の複素積分はゼロになるため,

$$\int dk^0 f(k^0, \mathbf{k}) = 2\pi i \text{Res}[k^-]$$

である. ここで

$$\text{Res}[k^-] = \frac{1}{2!} \lim_{k^0 \rightarrow k^-} \left(\frac{d}{dk^0} \right)^2 \frac{1}{(k^0 - k^+)^3} = 6 \lim_{k^0 \rightarrow k^-} \frac{1}{(k^0 - k^+)^5} = -\frac{3}{16} \frac{1}{(\mathbf{k}^2 + s)^{5/2}}$$

なので(最後の等号では $\varepsilon = 0$ と置いた),

$$\begin{aligned} \int d^3k \int dk^0 f(k^0, \mathbf{k}) &= 2\pi i \frac{-3}{16} \int_0^\infty \frac{1}{(|\mathbf{k}|^2 + s)^{5/2}} \times 4\pi |\mathbf{k}|^2 d|\mathbf{k}| \\ &= -\frac{3}{2} \pi^2 i \frac{1}{s} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \quad (|\mathbf{k}| = \sqrt{s} \tan \theta) \\ &= -\frac{3}{2} \pi^2 i \frac{1}{s} \int_0^1 \sin^2 \theta d(\sin \theta) \\ &= -\frac{\pi^2 i}{2} \frac{1}{s} \end{aligned}$$

となる. これは式(957)右辺において $n = 3$ と置いたものと一致しているから, $n = 3$ のとき式(957)が成り立つ.

そこで任意の自然数 $n \geq 3$ に対して式(957):

$$\int \frac{d^4 k}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = i\pi^2 (-1)^n \frac{(n-3)!}{(n-1)!} \frac{1}{s^{n-2}}$$

が成り立つと仮定する．両辺を s で微分すると，

$$\text{左辺は } n \int \frac{d^4 k}{(k^2 - s + i\varepsilon)^{n+1}}, \quad \text{右辺は } i\pi^2 (-1)^n \frac{(n-3)!}{(n-1)!} \frac{-(n-2)}{s^{n-1}}$$

となり，これらを等置して

$$\int \frac{d^4 k}{(k^2 - s + i\varepsilon)^{n+1}} = i\pi^2 (-1)^{n+1} \frac{(n-2)!}{n!} \frac{1}{s^{n-1}}$$

を得る．これは式(957)において n を $n+1$ に置き換えた式となっているから，式(957)は任意の自然数 $n \geq 3$ に対して成り立つ．

■Feynmanのパラメータ積分(959)の証明 [17, pp.235–236]

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{dt}{t^2} = \int_0^1 \frac{dz}{[b + (a-b)z]^2} : (959) \quad (t = b + (a-b)z)$$

と確認できる.

参考：より一般に複数の2次因子 $a_0, a_1, \dots$ に対して，恒等式

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_0 a_1 a_2 \cdots a_n} \\ &= \Gamma(n-1) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \cdots \int_0^{z_{n-1}} dz_n \frac{1}{[a_0 + (a_1 - a_0)z_1 + \cdots + (a_n - a_{n-1})z_n]^{n+1}} \end{aligned} \quad (970)$$

が成り立つ. 右辺は単一の2次因子 $a_0 + (a_1 - a_0)z_1 + \cdots + (a_n - a_{n-1})z_n$ の $(n+1)$ 乗を分母とする，Feynmanのパラメータ積分積分となっている.

一般公式(970)を数学的帰納法にて証明する. $n=1$ の場合にこれが成り立つことは，式(959)として確認済みである. そこである自然数 n に対して式(970)が成り立つと仮定する.

$$A(z_1, \dots, z_n) \equiv a_0 + (a_1 - a_0)z_1 + \cdots + (a_n - a_{n-1})z_n, \quad B \equiv a_{n+1} - a_n$$

と略記すると，式(970)右辺において $n \rightarrow n + 1$ と置き換えた式は

$$(n + 1)\Gamma(n - 1) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \cdots \int_0^{z_{n-1}} dz_n \int_0^{z_n} \frac{dz_{n+1}}{(A + Bz_{n+1})^{n+2}}$$

であり ($\Gamma(n + 2) = (n + 1)\Gamma(n - 1)$)，新たに現れた変数 z_{n+1} に関する積分は

$$\begin{aligned} & \int_0^{z_n} \frac{dz_{n+1}}{(A + Bz_{n+1})^{n+2}} \\ &= -\frac{1}{(n + 1)B} \left[\frac{1}{(A + Bz_{n+1})^{n+1}} \right]_0^{z_n} = \frac{1}{(n + 1)B} \left\{ \frac{1}{A^{n+1}} - \frac{1}{(A + Bz_n)^{n+1}} \right\} \end{aligned}$$

と実行できる．ここで最右辺の $A + Bz_n$ は，多項式 A において a_n を a_{n+1} に置き換えたものになっていることに注意して数学的帰納法の仮定を用いると，上の積分は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{B}\Gamma(n + 1) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \cdots \int_0^{z_{n-1}} dz_n \left\{ \frac{1}{A^{n+1}} - \frac{1}{(A + Bz_n)^{n+1}} \right\} \\ &= \frac{1}{B} \left(\frac{1}{a_0 \cdots a_{n-1} a_n} - \frac{1}{a_0 \cdots a_{n-1} a_{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{a_0 \cdots a_{n-1} a_n a_{n+1}} \end{aligned}$$

となる．よって式(970)において $n \rightarrow n + 1$ と置き換えた式が成り立つから，示された．

■ 小さな引数に対するガンマ関数の近似式 (962) について

$\eta \rightarrow 0$ に対する公式 (962):

$$\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{2}{\eta} - \gamma + \cdots$$

の起源を簡単にまとめておく [46, pp.137–139]. 複素 x 平面全体で定義された解析関数としてのガンマ関数 $\Gamma(x)$ は, Weierstrass の無限乗積

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = e^{\gamma x} \prod_{p=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{p}\right) e^{-x/p} \right]$$

で表される. ここに

$$\gamma \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0.5772156649 \cdots$$

は Euler 定数である. ここから小さな x に対する $\Gamma(x)$ の近似式を見出すには,

$$\ln \Gamma(x+1) = -\gamma x + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{x}{p} - \ln \left(1 + \frac{x}{p} \right) \right) = -\gamma x + O(x^2),$$

$$\therefore \Gamma(x+1) = e^{-\gamma x + O(x^2)} = 1 - \gamma x + O(x^2),$$

$$\therefore \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{1}{x} - \gamma + O(x)$$

とすれば良い。最後の式に $x = \eta/2$ を代入すると、式(962)が得られる。

■次元正則化(967)における質量尺度 μ の導入について [17, pp.239–240]

$ie_0^2 \Sigma(p)$ における電荷(の自乗)を $e_0^2 = \tilde{e}_0^2 \mu^\eta$ と書くと, $\eta \rightarrow 0$ のとき $\tilde{e}_0^2$ は無次元を保ちながら e_0^2 になる. ここで現れた μ^η は $\Sigma(p)$ の式(968),(969)の導出過程で見るように, 被積分関数の分母を $(s/\mu^2)^{\eta/2}$ の形に無次元化するのに是非とも必要とされる因子であり, このとき初めて

$$\frac{1}{(s/\mu^2)^{\eta/2}} = 1 - \frac{\eta}{2} \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) + O(\eta^2)$$

と展開することが可能となる(真数は無次元でなければならない).

■式(968),(969)の導出 [17, p.248]

γ 行列に関する縮約の公式(965)より, 式(967)の被積分関数の分子は

$$\gamma^\alpha(\not{p} - \not{k} + m_0)\gamma^\beta g_{\alpha\beta} = Dm_0 - (D-2)(\not{p} - \not{k})$$

となる. Feynmanのパラメータ積分(959)を用いると, 式(967)の積分は

$$\begin{aligned} & \int d^D k \frac{Dm_0 - (D-2)(\not{p} - \not{k})}{\{(p-k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon\}\{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon\}} \\ &= \int d^D k \{Dm_0 - (D-2)(\not{p} - \not{k})\} \int_0^1 \frac{dz}{[\{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon\} + \{p^2 - 2p \cdot k - m_0^2 + \lambda^2\}z]^2} \\ &= \int_0^1 dz \int d^D q \frac{Dm_0 - (D-2)(\not{p} - \not{q} - \not{p}z)}{(q^2 - s + i\varepsilon)^2} \\ & \quad (q = k - pz, s = m_0^2 z + \lambda^2(1-z) - p^2 z(1-z)) \end{aligned}$$

と書き換えられる. 次に式(960),(963)を用いて q に関する積分を実行すると,

$$\int_0^1 dz \int d^D q \frac{Dm_0 - (D-2)(\not{p} - \not{q} - \not{p}z)}{(q^2 - s + i\varepsilon)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 dz \{Dm_0 - (D-2)(1-z)\not{p}\} \int d^D q \frac{1}{(q^2 - s + i\varepsilon)^2} \\
&= i\pi^{D/2} \Gamma(2 - D/2) \int_0^1 dz \frac{Dm_0 - (D-2)(1-z)\not{p}}{s^{2-D/2}}
\end{aligned} \tag{971}$$

を得る．この式はもはや赤外発散の恐れがないので， s の中で $\lambda = 0$ と置いて良い．

$$s = m_0^2 z - p^2 z(1-z).$$

式(967)の積分に上式(971)を代入して $D = 4 - \eta$ とおき，式(961),(962)を用いて η について展開すると

$$\begin{aligned}
e_0^2 \Sigma(p) &= -\tilde{e}_0^2 \frac{1}{(4\pi)^{D/2} (4\pi)^{-\eta/2}} \Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right) \int_0^1 dz \frac{4m_0 - 2(1-z)\not{p} + \eta\{-m_0 + (1-z)\not{p}\}}{(s/\mu^2)^{\eta/2}} \\
&= \frac{-\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} \left[1 + \frac{\eta}{2} \ln(4\pi) + \cdots\right] \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \cdots\right] \\
&\quad \times \int_0^1 dz [\{4m_0 - 2(1-z)\not{p}\} + \eta\{-m_0 + (1-z)\not{p}\}] \left[1 - \frac{1}{2}\eta \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) + \cdots\right]
\end{aligned}$$

となる．

$$\int_0^1 dz \{4m_0 - 2(1-z)\not{p}\} = 4m_0 - \not{p}, \quad \int_0^1 dz \{-m_0 + (1-z)\not{p}\} = -\frac{1}{2}(2m_0 - \not{p})$$

に注意しつつ, $\eta \rightarrow 0$ において生き残る $1/\eta$ の項と定数項までを拾い上げると,

$$\begin{aligned}
 e_0^2 \Sigma(p) &= \frac{-\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} \frac{2}{\eta} (4m_0 - \not{p}) + \frac{-\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} \left[\{-\gamma + \ln(4\pi)\} (4m_0 - \not{p}) - (2m_0 - \not{p}) \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^1 dz \{4m_0 - 2(1-z)\not{p}\} \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) \right] \\
 &= \frac{\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} (\not{p} - 4m_0) \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right] + \tilde{e}_0^2 \Sigma_c(p) : (968),
 \end{aligned}$$

$$16\pi^2 \Sigma_c(p) = (2m_0 - \not{p}) - 2 \int_0^1 dz [\not{p}(1-z) - 2m_0] \ln \left(\frac{m_0^2 z - p^2 z(1-z)}{\mu^2} \right) : (969)$$

を得る.

14.3.2項の原稿

14.3節冒頭で述べたように，場の理論から現れる(紫外)発散を物理的な量と裸の量との観測不可能な関係に繰り込むために，一時的に理論の形を修正して，発散を操作可能な有限の量にする措置を正則化という．このときはじめて，発散を引き起こす因子を適当なパラメータに吸収させることが可能になる．もちろん，その後で恣意的な正則化を解除して，もとの理論を復元する必要がある．しかしながら正則化は発散を抑えるための単なる人為的・数学的な技法であるに留まらず，より深遠な理論に基づき場の理論を修正する方法を示唆・反映している可能性もある．

そのような例として格子正則化が挙げられる [21, pp.209–210]．格子正則化とは理論を時空内の離散的な格子の上に構築する方法である．例えば図71のように整数の組 $(n_1, n_2, \dots)$ で時空位置が指定される格子点を持つ，格子間隔 a の正方格子上で定義された格子場の理論を考えよう．格子が離散的なので，運動量 k の値は図72に示した Brillouin 領域 $|k_i| \leq \pi/a$ の中に制約される^{*165}．実際，格子定数 a 程度より短い波長を考えることに意味はなく，この時点で紫外発散は除去できている．運動量空間の積分は最大値 π/a で打ち切られるので，ここでは格子定数 a が紫外発散に対する“切断因子”の役割を演じていると言える．

^{*165} 空間が有限のとき波数が離散化されるのに対し，空間を離散化すると波数が有限となることを思い出す．

格子正則化は概念的に明快であると同時に，ある意味では理論に対する現実的な修正と捉えることもできる．実際，第IV部で紹介するループ量子重力では，は時空が“実際に” Planck 尺度のオーダーで離散化されていると考えられている [3, pp.115–116].

しかしながら正則化はあくまで繰り込みを実行するのに役立つ数学的手段でありさえすれば何でも良い．このような観点から実用的なアプローチとして次元正則化の技法が，量子色力学や Weinberg–Salam 理論のような非 Abel ゲージ理論を含め，場の理論において広汎に用いられている．次元正則化は時空次元を非整数に修正する方法であり，その解釈は必ずしも明快ではないものの，数学的によく定義されており，応用に適している [17, pp.233–234].

そこで以下では次元正則化の手続きを，電子の自己エネルギーの輻射補正 $\Sigma(p)$ に適用する．そこから有限値に収束する量 $\Sigma_c(p)$ を分離することができ，発散は裸の粒子と物理的な粒子を関係付ける部分だけに残ることを説明する．

(輻射補正から生じる)ループ積分を評価する際に，度々遭遇する一連の標準的な積分がある．本稿で必要な積分公式は式 (957), (958) の2つである (導出スライド参照)．ここにガンマ関数 $\Gamma(n)$ は自然数 n に対して $\Gamma(n) = (n-1)!$ である^{*166}．また右辺では $\varepsilon = 0$ と置いてあり，これが許容されない場合には $s \rightarrow s - i\varepsilon$ と戻せば良い．

^{*166} この段階では $(n-1)!$ と書く代わりに $\Gamma(n)$ と書くことに積極的な意味はないものの，ガンマ関数を用いて表記しておくとし，すぐ後で見ると非整数次元の積分への一般化が見易くなる．

積分公式(957),(958)は被積分関数の分母が運動量に関する単一の2次因子のベキとなっている．これに対し通常，扱う必要の生じる積分は，被積分関数の分母がいくつかの2次因子の積を含む．そこで式(957),(958)のような積分公式を用いるには，これを被積分関数の分母が単一の2次因子の n 乗の形となるように直さなければならない．そのためには例えば2つの2次因子 a, b に対する恒等式(959)が有用となる(導出スライド参照)．公式(959)の右辺は望み通り，単一の2次因子 $[b + (a - b)z]$ のベキを分母とする積分となっており，これはFeynmanのパラメータ積分と呼ばれる．

次元正則化は発散するループ積分の次元数を修正することによって積分を有限にする方法である．ここでは例として公式(957)を取り上げる．これは $n \geq 3$ に対して成り立つ式であって， $n = 2$ の場合を考えると左辺の積分は対数的に発散する(右辺は $\Gamma(0)$ が特異となる)．ここでこの関係式は， D 次元空間(D は時間も含めた次元)における式(960)へと一般化されることに着眼する(時空次元を $D = 4$ とおくと式(957)に戻る)．今 D を非整数値とすることを考えると，(左辺の積分の意味は明瞭でなくなるものの)右辺はよく定義された量となるため，右辺を用いて左辺の積分を定義できる．そこで $n = 2$ に対して $D = 4$ のときに現れる積分の発散を避けるために，微小な正のパラメータ η を用いて次元を $D = 4 - \eta$ に修正する(次元正則化)．(修正された次元 $D = 4 - \eta$ は上式の条件 $n = 2 > D/2$ を満たす．)

次元のズレ $\eta \rightarrow 0$ の極限を考える際，展開公式(961),(962)が有用となる($\gamma = 0.5772 \dots$ はEuler定数，式(962)を導出スライドで説明)．

なお D 次元空間においても奇関数の積分 (958) 同様の公式 (963) が成り立つ.

また D 次元空間において反交換関係 (964) を満たす γ 行列 $\gamma^0, \gamma^1, \dots, \gamma^{D-1}$ を導入する. ただし γ 行列は次元に応じたサイズ $f(D) \times f(D)$ を持ち, I は $f(D) \times f(D)$ の単位行列とする. このとき γ 行列の反交換関係から, 縮約に関する公式 (965) および対角和に関する公式 (966) が成り立つ.

整数次元 D における以上の公式を非整数次元 $D = 4 - \eta$ の場合にも用いることにする. その際, 計量テンソル (積分公式の右辺に現れる) と γ 行列の意味は明らかでなくなるが, これらは $\eta \rightarrow 0$ すなわち $D \rightarrow 4$ の極限で定義されていれば充分である.

電子の自己エネルギー (953) は次元正則化により式 (967) となる. ただし適当な質量尺度 μ を導入して, 任意の空間次元 D に対して無次元となる電荷 $\tilde{e}_0$ を $e_0^2 = \tilde{e}_0^2 \mu^\eta$ で定義した (その必要性については[導出スライド参照](#)). また赤外発散を防ぐために小さい切断パラメータ λ も導入してある. $\eta = 4 - D \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0$ の極限で電子の自己エネルギーは式 (968), (969) となる ([導出スライド参照](#)). ここで定義した $\Sigma_c(p)$ は QED の復元操作 $\eta \rightarrow 0$ の際に有限に留まることが見て取れるので, 電子の自己エネルギー (968) において発散する部分と収束する部分を分離できている. 分母 η をゼロでない有限の値に留める限り電子の自己エネルギー (968) は有限となり, ここまでで理論の正則化が完了したことになる.

14.3.3 繰り込み

次元正則化を施した電子の自己エネルギー(968)において, 発散定数を

$$A' = \frac{-m_0}{4\pi^2} \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right], \quad B' = \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right] \quad (972)$$

と同定しよう (“修正された極小減算の体系” $\overline{\text{MS}}$). このとき

$$Z_2 = 1 - \tilde{e}_0^2 B' \quad (973)$$

で与えられる繰り込み定数 Z_2 を用いて^{*167}, 繰り込まれた質量と電荷

$$m = Z_2(m_0 - \tilde{e}_0^2 A'), \quad e = \tilde{e}_0 Z_2^{1/2} \quad (974)$$

を定義すると, 輻射補正を考慮した電子の伝播関数(955)は繰り込まれた伝播関数

$$G_r(p) = \frac{i}{\not{p} - m + e^2 \Sigma_c(p) + i\varepsilon} + O(e^4) \quad (975)$$

を与える. 式(975)の分母をゼロにする “物理的な” 電子質量 $m_e(\mu)$ (m ではない) は質量尺度 μ に依存する [22, pp.398–401].

^{*167} 電子の伝播関数に関係する繰り込み定数を添字2でラベルするのは, 単なる慣習に過ぎない [17, p.209].

14.3.3項の式の導出など

■式(975)の導出 [22, pp.399–400]

式(972)で定義した発散定数 A', B' を用いると，次元正則化した電子の自己エネルギー(968)は

$$\Sigma(p) = A' + B' \not{p} + \Sigma_c(p)$$

と書ける．ただし $\eta = 0$ とおける箇所では $\eta = 0$ とおき，したがって $\tilde{e}_0 \rightarrow e_0$ とした(以下同じ)．これを代入すると，輻射補正した電子の伝播関数(955)は

$$\begin{aligned} G(p) &= \frac{i}{\not{p} - m_0 + e_0^2 \{A' + B' \not{p} + \Sigma_c(p)\} + i\varepsilon} + O(e_0^4) \\ &= \frac{i}{(1 + e_0^2 B') \not{p} - (m_0 - e_0^2 A') + e_0^2 \Sigma_c(p) + i\varepsilon} + O(e_0^4) \\ &= \frac{i(1 + e_0^2 B')^{-1}}{\not{p} - (1 + e_0^2 B')^{-1}(m_0 - e_0^2 A') + e_0^2 (1 + e_0^2 B')^{-1} \Sigma_c(p) + i\varepsilon} + O(e_0^4) \end{aligned}$$

と表される．これを式(975)に一致させるために，まず式(973),(974):

$$Z_2 = (1 + e_0^2 B')^{-1} = 1 - e_0^2 B' + O(e_0^4), \quad m = Z_2(m_0 - e_0^2 A'), \quad e^2 = Z_2 e_0^2$$

のように置こう．第3式は $e_0 = Z_2^{-1/2} e_0 = e[1 + O(e_0^2)]$ と逆に解いて逐次代入すると

$$e = e_0 + O(e^3)$$

となるので，最初の2式は

$$Z_2 = 1 - e^2 B' + O(e^4), \quad m = Z_2(m_0 - e^2 A') + O(e^4)$$

となり， $G(p)$ における誤差は単に $O(e_0^4) \rightarrow O(e^4)$ と置き換わる．すると

$$G(p) = \frac{iZ_2}{\not{p} - m_r + e_r^2 \Sigma_c(p) + i\varepsilon} + O(e^4) \quad (976)$$

となる．最後に再び $e = z_2^{1/2} e_0$ に従い，上式(976)分子の Z_2 を伝播関数に接続する両端の結節点(因子 $ie_0 \gamma^\alpha$) が担う2つの電荷に吸収させると，繰り込まれた伝播関数(975)を得る．

14.3.3項の原稿

次元正則化を施した電子の自己エネルギー(968)では、発散をもたらす項を $1/\eta$ の形で分離できている。そこで $1/\eta$ の項だけでなく、後続の $-\gamma + \ln(4\pi)$ の項も含めて、物理パラメータに吸収させる発散定数を式(972)のように同定しよう。発散定数を単に η^{-1} に比例するように選ぶ繰り込みの体系は“極小減算の体系”(minimal subtraction scheme; MS)と呼ばれるのに対し、式(972)は発散定数の選び方が“極小”でないため、この場合の繰り込みの体系は“修正された極小減算の体系”(MS)と呼ばれる。MSの場合と区別するため、発散定数(972)にプライムを付けた。

このとき式(973)で与えられる繰り込み定数 Z_2 を用いて、繰り込まれた質量と電荷(974)を定義すると、輻射補正を考慮した電子の伝播関数(955)は、裸の電荷と質量を繰り込まれた値に置き換えた形(975)に書き換えられる(導出スライド参照)。ここで発散定数は質量と電荷に繰り込まれたため、 $\eta \rightarrow 0$ の極限をとって正則化を解除しても、繰り込まれた伝播関数(975)はよく定義された有限な表現に留まる。

ただしここで定義した繰り込まれた質量 m は、伝播関数(975)の分母をゼロにする“物理的な”電子質量 m_e とは異なることに注意しよう。電子質量は伝播関数(975)の分母をゼロにする根 $p = m_e$ として求められる。ところが自己エネルギーの有限部分 $\Sigma_c(p)$ はその表式(969)から見て取れるように、正則化を解除する $\eta \rightarrow 0$ の極限においても質量尺度 μ 依存性を持つ。このため電子質量 $m_e = m_e(\mu)$ もまたスケール・パラメータ μ に依存する [22, pp.398–401].

さらにここではフェルミオン伝播関数に対する輻射補正のみを考慮したものの、完全に繰り込まれた電荷 $e(\mu)$ はやはり μ に依存し、 μ とともに増大することが示される [22, p.404]. このように理論に任意パラメータ μ が導入されるのが $\overline{\text{MS}}$ の大きな特徴である [22, p.398]. しかしながら理論の予言は、人為的に導入した質量尺度 μ に依存してはならない. このことから引き出される帰結を見るために、連結 Green 関数から“脚”にあたる伝播関数因子を除いた結節部分関数 (正確には固有結節部分関数) Γ を導入しよう. 伝播関数から繰り込み定数を吸収した、繰り込まれた結節部分関数 Γ_r は質量尺度 μ に依存するのに対し、物理的な観測量は、したがってもとの結節部分関数 Γ は μ に依存してはならない. このことは 't Hooft–Weinberg (ト・フーフト・ワインバーグ) 方程式と呼ばれる、 Γ_r に対する繰り込み群方程式として表現できる [22, pp.405–407]. ここから質量尺度 μ を増大させることは、結節部分において移行する運動量を増大させることに、したがって短距離の相互作用を考えることに対応することが結論付けられる [22, pp.407–410]. ところで既に述べたように QED では電荷 $e(\mu)$ は μ に対して増大するから、電荷 $e(\mu)$ は短距離になるほど増大することになる. 逆に言えば、長距離の相互作用ほど $e(\mu)$ は減少する. これは定性的には、電荷の遠方ほど量子揺らぎで生じる真空偏極によって、電荷が著しく遮蔽される結果として理解できる [22, pp.410–411]. これとは対照的に QCD では $\overline{\text{MS}}$ を適用すると、強い相互作用に関する繰り込まれた結合定数は質量尺度 μ の増大に対して減少することが示される. このため QCD では、短距離になると結合定数が減少して、相互作用が弱まることになる [22, pp.420–421]. この性質を漸近的自由性という [22, p.391]. 漸近的自由性により、短距離の相互作用に

関しては摂動論を利用することが可能となる [22, p.422].

15 素粒子標準模型

15.1 Yang–Mills理論

■内部対称性と群 [23, pp.137–140]

N 種類のDirac場

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)^T, \quad \bar{\psi} = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_N) \quad (977)$$

(T は転置)に対するラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi = \sum_{a=1}^N \bar{\psi}_a(i\not{\partial} - m)\psi_a \quad (978)$$

は、 N 次ユニタリ行列 U による大域的位相変換

$$\psi \rightarrow U\psi, \quad U = \exp\left(i \sum_i \theta^i T_i\right) \in U(N) \quad (979)$$

の下で不変に留まる.

$U(N)$ 行列は式(979)のように、 N^2 個の適当なHermite行列 T_i を生成子に持つ.

N^2 個の生成子 T_i には、慣例に従い規格直交条件 (417) を課す：

$$\mathrm{Tr}(T_i T_j) = \frac{1}{2} \delta_{ij}. \quad (980)$$

- 生成子の1つを単位行列 $\mathbf{1}$ に比例する形 $T_0 = k\mathbf{1}$ に選ぶと、

$$\exp(i\theta^0 T_0) = \left[1 + (i\theta^0 k) + \frac{1}{2!} (i\theta^0 k)^2 + \dots \right] \mathbf{1} = \exp(i\theta^0 k) \mathbf{1} \quad (981)$$

は $U(1)$ 変換を生成する：

$$\psi \rightarrow \exp(i\theta^0 T_0) \psi, \quad \text{i.e.} \quad \psi_a \rightarrow \exp(i\theta^0 k) \psi_a. \quad (982)$$

- 残りの T_i ($i \neq 0$) は式 (980) よりトレースレスとなり、 $SU(N)$ 変換を生成する。
- $[T_0, T_i] \sim [\mathbf{1}, T_i] = 0$ ($i \neq 0$) より Lie 代数は直和に分解され、 $U(N)$ 群は直積

$$U(N) \simeq U(1) \times SU(N) \quad (983)$$

に分解される^{*168}。

^{*168} 記号「 $\simeq$ 」は同型を表す。なお文献 [36, p.88] では一般に任意のコンパクト Lie 群が、単純 Lie 群と 1 次元ユニタリー群 $U(1)$ の直積となることを証明している。

例1 $N = 2$ のとき Pauli 行列 σ_i ($i = 1, 2, 3$) を用いて

$$T_0 = \frac{1}{2}\mathbf{1}, \quad T_i = \frac{1}{2}\sigma_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (984)$$

Pauli 行列は $SU(2)$ 群の生成子であり，構造定数は ε_{ijk} .

例2 $N = 3$ のとき $N^2 = 9$ 個の T_i として，Gell-Mann 行列

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (985)$$

の $1/2$ 倍

$$T_i = \frac{1}{2}\lambda_i (\equiv F_i) \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \quad (986)$$

と，単位行列 $\mathbf{1}$ に比例した $T_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{1}$ を選べる．

F_i たちはいずれもトレースレスであり， $SU(3)$ 変換を生成する．

■局所ゲージ変換 [23, pp.140–144]

物質場 $\varphi_a(x)$ の大域的変換

$$\varphi'_a(x) = U_a{}^b \varphi_b(x) = [\exp(i\theta^i T_i)]_a{}^b \varphi_b(x) \quad (987)$$

を局所的位相変換

$$\varphi'_a(x) = U_a{}^b(x) \varphi_b(x) = [\exp(ig\theta^i(x) T_i)]_a{}^b \varphi_b(x) \quad (988)$$

に一般化し，理論のゲージ不変性を回復するためにゲージ場を導入しよう．

これ以降， φ_a を縦に並べたベクトルを φ ， $U_a{}^b$ を並べた行列を $U = (U_a{}^b)$ と書く．

まず，点 x におけるベクトル $\varphi_i(x)$ を近接する点 $x + dx$ に平行移動したベクトル

$$\varphi_{\parallel a}(x + dx) = \varphi_a(x) + ig(A_\mu)_a{}^b(x) \varphi_b(x) dx^\mu \quad (989)$$

を，点 $x + dx$ での変換行列 $U(x + dx)$ で変換するベクトルとなるように定義する．

平行移動を定める接続場

$$(A_\mu)_a{}^b(x) = \sum_{i=1}^{\dim G} A_\mu^i(x) (T_i)_a{}^b \quad (G = \text{SU}(N), \dim G = N^2 - 1) \quad (990)$$

としてゲージ場 $A_\mu^i(x)$ ($i = 1, \dots, N^2 - 1$) が導入される．

さて、 $x + dx$ におけるベクトル $\varphi(x + dx), \varphi_{\parallel}(x + dx)$ は、したがってその差

$$\begin{aligned}\varphi(x + dx) - \varphi_{\parallel}(x + dx) &= (\partial_{\mu}\varphi(x) - igA_{\mu}(x)\varphi(x))dx^{\mu} \\ &\equiv D_{\mu}\varphi(x)dx^{\mu}\end{aligned}\tag{991}$$

は $U(x + dx)$ で変換する(D_{μ} を共変微分と呼ぶ)。ここから

$$\begin{aligned}(D_{\mu}\varphi)'(x)dx^{\mu} &= U(x + dx)D_{\mu}\varphi(x)dx^{\mu} \simeq U(x)D_{\mu}\varphi(x)dx^{\mu}, \quad (dx \text{ の1次まで}) \\ \therefore (D_{\mu}\varphi)'(x) &= U(x)D_{\mu}\varphi(x),\end{aligned}\tag{992}$$

およびゲージ場の変換則

$$A_{\mu} \rightarrow A_{\mu}' = \frac{i}{g}U\partial_{\mu}U^{-1} + UA_{\mu}U^{-1}\tag{993}$$

が帰結する。物質場とゲージ場の変換(988),(993)を合わせて局所ゲージ変換と呼ぶ。

次に場 $\varphi(x)$ を図73の2つの経路に沿って平行移動した結果の差

$$\Delta\varphi(x) = [D_\mu, D_\nu]\varphi(x)dx^\mu dy^\nu \quad (994)$$

に現れる係数として、場の強さ (曲率テンソル)

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \quad (995)$$

を定義する．式(994),(995)をまとめると

$$\Delta\varphi(x) = \frac{g}{i}F_{\mu\nu}(x)\varphi(x)dx^\mu dy^\nu. \quad (996)$$

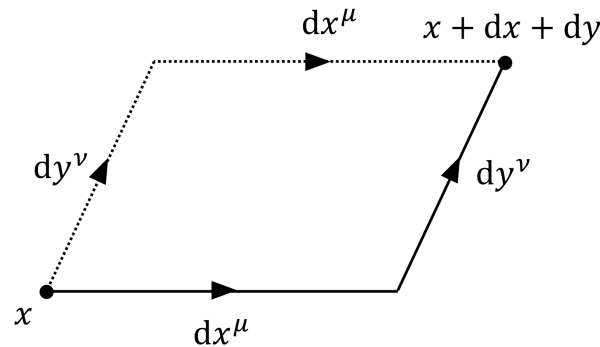


図73 2つの無限小の経路

表10 Yang–Mills理論とGRにおける幾何学的概念の物理的意味の違い

	Yang–Mills理論	一般相対性理論 (GR)
対称変換	平坦な時空でのゲージ変換	曲がった時空での座標変換
接続	ゲージ場のポテンシャル $(A_\mu)_a^b$	重力場の強度 $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$
曲率	ゲージ場の強度 $(F_{\mu\nu})_a^b$	時空の曲率 $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$

平行移動したベクトルの差(996)はユニタリ一行列 $U(x + dx + dy)$ で変換される。
このことから、場の強さの変換則は

$$F'_{\mu\nu} = U F_{\mu\nu} U^{-1}. \quad (997)$$

Maxwell方程式の自明な組(157): $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0$ に対応する式は

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} D_\nu F_{\rho\sigma} \equiv \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\nu F_{\rho\sigma} - ig[A_\nu, F_{\rho\sigma}]) = 0 \quad (998)$$

となる。これは Bianchi (ビアンキ) 恒等式と呼ばれ, Jacobi 恒等式

$$[D_\nu, [D_\rho, D_\sigma]] + [D_\rho, [D_\sigma, D_\nu]] + [D_\sigma, [D_\nu, D_\rho]] = 0 \quad \text{i.e.} \quad \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} [D_\nu, [D_\rho, D_\sigma]] = 0 \quad (999)$$

から導かれる。

場の強さ $F_{\mu\nu}$ もゲージ場 A_μ と同様,

$$(F_{\mu\nu})_a{}^b = \sum_{i=1}^{\dim G} F_{\mu\nu}^i (T_i)_a{}^b \quad (1000)$$

と展開される.

ここで変換パラメータ $\theta^i(x)$ を無限小とすると, 1次近似で物質場の変換則(988)は

$$\delta\varphi_i(x) = ig\theta^i(x)(T_i)_a{}^b\varphi_b(x) \quad (1001)$$

となる. またゲージ場の変換則(993)は,

$$\delta A_\mu = \partial_\mu(\theta^i T_i) + ig[(\theta^i T_i), A_\mu], \quad (1002)$$

$$\text{i.e. } \delta A_\mu^i = \partial_\mu\theta^i + gf_{ijk}A_\mu^j\theta^k = (D_\mu)^{ik}\theta^k \quad (1003)$$

を与える. ただし式(1003)最右辺の $(D_\mu)^{ik}$ は共変微分の随伴表現である.

■ゲージ不変なラグランジアン密度 [23, pp.144–145]

ゲージ場 A_μ と相互作用する物質場 φ のラグランジアン密度は、
極小置換 $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ を施して得られる：

$$\mathcal{L}_{\text{matter}} = \begin{cases} (D_\mu \varphi)^\dagger D_\mu \varphi - V(\varphi^\dagger \varphi) & \text{スカラー場} \\ \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi & \text{Dirac場} \end{cases} \quad (1004)$$

実際ゲージ変換 (988), (992), (993) の下でラグランジアン密度 (1004) は不変である。

また場の強さは相似変換 (997) を受けるので、ゲージ場のラグランジアン密度

$$\mathcal{L}_{\text{gauge field}} = -\frac{1}{4}N^{-1}\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} \quad (1005)$$

はゲージ不変である*169。

*169 ここに N は行列 T_i の正規直交性を $\text{Tr}(T_i T_j) = N\delta_{ij}$ と書いて定義される規格化因子であり、我々の定式化 (式 (980)) では $N = 1/2$ である。

ここで場の強さの成分成分 $F_{\mu\nu}^i$ (式(1000)の展開係数) を具体的に書き下すと,

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + gf_{ijk}A_\mu^j A_\nu^k (= -F_{\nu\mu}^i). \quad (1006)$$

なお, ゲージ場は式(993)のように変換するため,
ゲージ不変性を破ることなくラグランジアン密度にゲージ場の質量項

$$\frac{1}{2}m^2 A_\mu^i A^{i\mu} = \frac{1}{2}m^2 N^{-1} \text{Tr}(A_\mu A^\mu) \quad (1007)$$

を付け加えることはできない.

■ θ 真空項 [1, p.65]

Yang-Mills理論においてもMaxwell理論の式(161)と同様に,
運動方程式に影響しない(ゲージ不変な)項

$$\mathcal{L}_\theta \sim F^{i*\mu\nu} F_{\mu\nu}^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^i F_{\rho\sigma}^i \quad (1008)$$

をラグランジアンに付け加えることができる.

15.1 節の式の導出など

■ N 次の Hermite 行列 H が N^2 個の独立な実数パラメータを持つこと

Hermite 性より H の N 個の対角成分は全て実数であり，また下三角成分は上三角成分を与えると完全に定まる．上三角成分は全部で $(N^2 - N)/2$ 個あり，その各々が2つの実数で指定されるので，Hermite 行列 H は合計

$$N + 2 \times \frac{N^2 - N}{2} = N^2 \text{ 個}$$

の実数パラメータを持つ．

■ゲージ場の変換則(993)の導出 [23, pp.141–142]

式(992): $(D_\mu\varphi)'(x) = U(x)D_\mu\varphi(x)$ が任意の場 φ に対して成り立つためには、演算子の変換則が

$$D_\mu' = UD_\mu U^{-1} \quad (1009)$$

であれば良い。

注解 実際、上式(992): $D_\mu'(U\varphi) = UD_\mu\varphi$ の両辺に左から U^{-1} を掛けると

$$(U^{-1}D_\mu'U)\varphi = D_\mu\varphi$$

を得る。これが任意の場 φ に対して成り立つことを要求して式(1009)を得る。

式(1009)は

$$\begin{aligned} \partial_\mu - igA_\mu' &= U(\partial_\mu - igA_\mu)U^{-1} \\ &= \partial_\mu + U\partial_\mu U^{-1} - igUA_\mu U^{-1} \end{aligned}$$

を与える。これはゲージ場 A_μ が式(993)に従って変換することを意味する。

注解 ただし上式第2の等号でLeibniz則を用いた際に、式(1009)右辺の D_μ は U^{-1} の

右側の因子にも作用するのに対し，最右辺第2項 $U\partial_\mu U^{-1}$ の ∂_μ はすぐ右隣の U^{-1} のみに作用することに注意した．

■式(994),(995)の導出 [23, pp.142–143]

図73の実線の経路に沿って場 $\varphi(x)$ を点 $x + dx$ に移すと、式(991)より

$$\varphi_{\parallel}(x + dx) = \varphi(x + dx) - D_{\mu}(x)\varphi(x)dx^{\mu} \quad (1010)$$

が得られる。次いでこれを点 $x + dx + dy$ に移した結果は

$$\varphi_{\parallel}^{\parallel}(x + dx + dy) = \varphi_{\parallel}(x + dx + dy) - D_{\nu}(x + dx)dy^{\nu}$$

である(下付きの $\parallel$ は線要素 dx に沿う、上付きの $\parallel$ は線要素 dy に沿う平行移動を表す)。右辺に式(1010)を代入すると、

$$\begin{aligned} & \varphi_{\parallel}^{\parallel}(x + dx + dy) \\ &= \varphi(x + dx + dy) - D_{\mu}(x + dy)\varphi_{\parallel}(x + dy)dx^{\mu} - D_{\nu}(x + dx)\varphi_{\parallel}(x + dx)dy^{\nu} \\ & \quad + D_{\nu}(x + dx)D_{\mu}(x)\varphi(x)dx^{\mu}dy^{\nu} \end{aligned} \quad (1011)$$

と書き換えられる。他方、図73の破線の経路に沿って場 $\varphi(x)$ を点 $x + dx + dy$ に移した結果は、式(1011)で置き換え $dx \leftrightarrow dy$ を行った式で与えられ、ダミー添字の入れ替

え $\mu \leftrightarrow \nu$ も施せば

$$\begin{aligned} & \varphi_{||}(x + dx + dy) \\ &= \varphi(x + dx + dy) - D_\mu(x + dy)\varphi_{||}(x + dy)dx^\mu - D_\nu(x + dx)\varphi_{||}(x + dx)dy^\nu \\ & \quad + D_\mu(x + dy)D_\nu(x)\varphi(x)dx^\mu dy^\nu \end{aligned}$$

と書ける． よってこれらの差は

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(x) &\equiv \varphi_{||}(x + dx + dy) - \varphi_{||}(x + dx + dy) \\ &= \{D_\mu(x + dy)D_\nu(x) - D_\nu(x + dx)D_\mu(x)\}\varphi(x)dx^\mu dy^\nu \end{aligned}$$

となる． 曲率にとって重要な微小量 dx, dy の2次までの近似では， 最右辺において共変微分の引数をすべて x に置き換えて良いので， 式(994)を得る．

式(995)は

$$\begin{aligned} D_\mu D_\nu \varphi &= (\partial_\mu - igA_\mu)(\partial_\nu - igA_\nu)\varphi \\ &= \partial_\mu \partial_\nu \varphi - ig(\partial_\mu A_\nu)\varphi - ig\{A_\nu \partial_\mu + A_\mu \partial_\nu\}\varphi + (ig)^2 A_\mu A_\nu \varphi, \\ \therefore [D_\mu, D_\nu]\varphi &= -ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu])\varphi \end{aligned}$$

による．

■ Bianchi 恒等式 (998) の導出 [23, p.143]

Jacobi 恒等式 (999) を書き換えると,

$$0 = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} [D_\nu, [D_\rho, D_\sigma]] = \frac{g}{i} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} [D_\nu, F_{\rho\sigma}] = \frac{g}{i} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} [\partial_\nu - igA_\nu, F_{\rho\sigma}].$$

ところで Jacobi 恒等式 (999) は演算子の関係である. そこで演算子が作用するベクトル φ (ないし行列) を明記すると, 上式最右辺において

$$[\partial_\nu, F_{\rho\sigma}] \varphi = \partial_\nu (F_{\rho\sigma} \varphi) - F_{\rho\sigma} \partial_\nu \varphi = (\partial_\nu F_{\rho\sigma}) \varphi + F_{\rho\sigma} \partial_\nu \varphi - F_{\rho\sigma} \partial_\nu \varphi = (\partial_\nu F_{\rho\sigma}) \varphi$$

となるので, 式 (998):

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\nu F_{\rho\sigma} - ig[A_\nu, F_{\rho\sigma}]) = 0$$

を得る.

■場の強さの変換則(997)の導出 [23, p.143]

平行移動した場 $\varphi_{||}^{\parallel}(x + dx + dy), \varphi_{||}^{\parallel}(x + dx + dy)$ は, したがってその差(996):

$$\Delta\varphi(x) = \frac{g}{i} F_{\mu\nu}(x) \varphi(x) dx^{\mu} dy^{\nu}$$

は $U(x + dx + dy)$ で変換される :

$$(\Delta\varphi')(x) = U(x + dx + dy) \Delta\varphi(x) \simeq U(x) \Delta\varphi(x), \quad (dx, dy \text{ の2次までの近似})$$

$$\therefore F'_{\mu\nu} \varphi' = F'_{\mu\nu} (U\varphi) = U(F_{\mu\nu} \varphi).$$

これが任意の場 φ に対して成り立つことから, 場の強さの変換則

(997): $F'_{\mu\nu} = U F_{\mu\nu} U^{-1}$ が見出される. (接続の変換則(993)の場合と同様に考えれば良い.)

■ ゲージ場の無限小変換則(1002),(1003)の導出 [23, pp.143–144]

式(993)の第1項は

$$\frac{i}{g}U\partial_\mu U^{-1} = \frac{i}{g}(1 + ig\theta^i T_i)\{-ig(\partial_\mu\theta^j)T_j\} \simeq (\partial_\mu\theta^j)T_j,$$

第2項は

$$UA_\mu U^{-1} = (1 + ig\theta^i T_i)A_\mu(1 - ig\theta^j T_j) \simeq A_\mu + ig[(\theta^j T_j), A_\mu]$$

となるので、行列表記のゲージ場の変換則(1002)を得る.

次に式(1002)を成分 A_μ^i に対する変換則として書こう. 式(1002)に式(990): $A_\mu = A_\mu^k T_k$ を代入し, 左から T_i を掛けると

$$\begin{aligned}(\delta A_\mu^k)T_i T_k &= (\partial_\mu\theta^j)T_i T_j + ig\theta^j A_\mu^k T_i [T_j, T_k] \\ &= (\partial_\mu\theta^j)T_i T_j - gf_{jkl}\theta^j A_\mu^k T_i T_l.\end{aligned}$$

トレースをとると

$$\delta A_\mu^i = \partial_\mu\theta^i - gf_{jki}\theta^j A_\mu^k = \partial_\mu\theta^i + gf_{ijk}A_\mu^j\theta^k : (1003).$$

この最右辺は $D_\mu = \partial_\mu - ig(A_\mu^j T_j)$ の随伴表現

$$(D_\mu)^{ik} = \partial_\mu \delta^{ik} - ig A_\mu^j [\text{ad}(T_j)]^{ik}$$

による共変微分 $(D_\mu)^{ik} \theta^k$ となっている。

■場の強度の表式(1006)の導出 [23, p.144]

展開(1000): $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^j T_j$ から成分 $F_{\mu\nu}^i$ をとり出すには,

$$N^{-1} \text{Tr}(T_i F_{\mu\nu}) = N^{-1} F_{\mu\nu}^j \text{Tr}(T_i T_j) = F_{\mu\nu}^i$$

とすれば良い. そこでこの公式 $F_{\mu\nu}^i = N^{-1} \text{Tr}(T_i F_{\mu\nu})$ に式(995):

$$F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu^j - \partial_\nu A_\mu^j) T_j - ig A_\mu^j A_\nu^k [T_j, T_k] = (\partial_\mu A_\nu^j - \partial_\nu A_\mu^j) T_j + gf_{jkl} A_\mu^j A_\nu^k T_l$$

を代入すると,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^i &= N^{-1} \{ (\partial_\mu A_\nu^j - \partial_\nu A_\mu^j) \text{Tr}(T_i T_j) + gf_{jkl} A_\mu^j A_\nu^k \text{Tr}(T_i T_l) \} \\ &= \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + gf_{ijk} A_\mu^j A_\nu^k : (1006) \end{aligned}$$

を得る. 構造定数 f_{ijk} の添字に関する完全反対称性から, 反対称性 $F_{\mu\nu}^i = -F_{\nu\mu}^i$ が従う.

■ゲージ場の質量項(1007)について：Proca方程式 [22, pp.440–441]

ここでは荷電粒子を念頭に複素ベクトル場 W^α を考えよう．質量を m_W として，場の強度 $F_W^{\alpha\beta} = \partial^\beta W^\alpha - \partial^\alpha W^\beta$ の項に式(1007)の形の質量項を加えた自由場のラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}F_{W\alpha\beta}^\dagger F_W^{\alpha\beta} + m_W^2 W_\alpha^\dagger W^\alpha$$

を考えると^{*170}，場の方程式としてProca方程式

$$\square W^\alpha - \partial^\alpha(\partial_\beta W^\beta) + m_W^2 W^\alpha = 0 \quad (1012)$$

が導かれる．これはスピン1のベクトル・ボゾンを記述するのに用いられる．

Proca方程式(1012)の導出 $W_\alpha(x)$ と $W_\alpha^\dagger(x)$ を独立な場と見なすと，

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\beta W_\alpha^\dagger)}(F_{W\mu\nu}^\dagger F_W^{\mu\nu}) = F_W^{\alpha\beta} - F_W^{\beta\alpha} = 2F_W^{\alpha\beta}$$

^{*170} 場の演算子の代わりに古典場を考えれば，Hermite共役($\dagger$)は複素共役($*$)に置き換わる．

なので、場 $W_\alpha^\dagger(x)$ に対する Euler–Lagrange 方程式

$$0 = \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta W_\alpha^\dagger)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_\alpha^\dagger} = -\partial_\beta F_W^{\alpha\beta} - m_W^2 W^\alpha$$

は Proca 方程式(1012)を与える.

Proca 方程式(1012)は(その4元発散をとれば直ちに導かれるように), $m_W \neq 0$ に対して自動的に Lorenz 条件

$$\partial_\alpha W^\alpha = 0 \quad (1013)$$

を含意し,

$$(\square + m_W^2)W^\alpha = 0$$

と簡略化される (Klein–Gordon 方程式の形).

Proca 場は3つの偏極ベクトル $\varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k})$ ($r = 1, 2, 3$) を用いて平面波展開できる.

注解 光子の場合とは異なり, $r = 0$ の偏極ベクトル $\varepsilon_0^\mu(\mathbf{k})$ は導入されていない. 古典電磁場は横波成分に対応する2つの自由度を持つ. これに対して質量 $m_W \neq 0$ を持つベクトルボゾン場 W^α はゲージとは無関係に常に式(1013): $\partial_\alpha W^\alpha = 0$ を満たすため, 最初から電磁場よりも自由度が1だけ少ない ($m_W = 0$ では関係 $\partial_\alpha W^\alpha = 0$ が場の方程式から導かれなため, この論法は適用されない). 3つの偏極ベクトルを用いて W^α を展開しなければならないのはこのためである [21, p.93] [13, p.211].

■ θ -真空項(1008)について

式(43)で導入した反対称な共変テンソル $F_{\mu\nu}^i$ の双対テンソル $F^{*i\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}^i$ と似た量として, Minkowski空間ではHodge双対を $F_{\mu\nu}^{i*} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{i\rho\sigma}$ で定義できる(ここでは $\varepsilon_{0123} = +1$) [2, xxii] [1, pp.61–62]. すると θ -真空項(1008)は $F^{i\mu\nu} F_{\mu\nu}^{i*}$ のようにも書ける.

また場の強度を2.2.2項で導入した微分形式として $F^i \sim F_{\mu\nu}^i dx^\mu \wedge dx^\nu$ のように表すと, もとのゲージ場項(1005)と θ -真空項(1008)を合わせた作用積分は, θ を適当な結合定数として

$$S = \int F \wedge F^* + \theta \int F \wedge F \quad (1014)$$

と書ける [1, p.65].

実際, 上式(1014)の2項はそれぞれ

$$\begin{aligned} \int F \wedge F^* &\sim \int F_{\mu\nu}^i F_{\rho\sigma}^{i*} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma = \frac{1}{2} \int \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma\alpha\beta} F_{\mu\nu}^i F^{i\alpha\beta} d^4x \\ &= -2 \int F^{i\mu\nu} F_{\mu\nu}^i d^4x, \\ \int F \wedge F &\sim \int F_{\mu\nu}^i F_{\rho\sigma}^i dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma = \int F_{\mu\nu}^i F_{\rho\sigma}^i \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d^4x \end{aligned}$$

$$= 2 \int F^{i\mu\nu} F_{\mu\nu}^{i*} d^4x$$

と書き換えられる．最左辺の見た目とは対照的に，2式はそれぞれ順にラグランジアン密度 $F^{i\mu\nu} F_{\mu\nu}^i$ と $F^{i\mu\nu} F_{\mu\nu}^{i*}$ に対応することに注意しよう．Yang-Mills理論におけるゲージ場 $A_\mu = A_\mu^i T_i$ とその強度 $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^i T_i$ は行列であり (T_i は生成子)，そこで作用 (1014) の被積分因子は正確には行列のトレースをとって $\text{Tr}(F \wedge F^*)$ などとする必要がある [2, p.37]．等価的に $F \wedge F^* = F^i \wedge F^{i*}$ において内部添字 i の和が含意されていると見ても良い [23, p.144]．

ここでMaxwell理論の場合と同様に (式 (161) の箇所)，第2項のラグランジアン密度 $F^{i\mu\nu} F_{\mu\nu}^{i*}$ は場の4元発散となって，運動方程式に寄与しないことを確認しよう^{*171}．場の強度の式 (1006):

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + gf_{ikl} A_\mu^k A_\nu^l = -F_{\nu\mu}^i$$

を用いると，ラグランジアン密度は

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^i F_{\rho\sigma}^i &= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (2\partial_{[\mu} A_{\nu]}^i + gf_{ikl} A_\mu^k A_\nu^l) (2\partial_{[\rho} A_{\sigma]}^i + gf_{imn} A_\rho^m A_\sigma^n) \\ &= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\{ 4\partial_{[\mu} A_{\nu]}^i \partial_{[\rho} A_{\sigma]}^i + 2g \left(\partial_{[\mu} A_{\nu]}^i f_{imn} A_\rho^m A_\sigma^n + \partial_{[\rho} A_{\sigma]}^i f_{ikl} A_\mu^k A_\nu^l \right) \right\} \end{aligned}$$

^{*171} 第3辺から見て取れるように，2形式 F に対し安直に反対称性 $F \wedge F = 0$ を仮定するのは誤りである．

$$+ g^2 f_{ikl} f_{imn} A_\mu^k A_\nu^l A_\rho^m A_\sigma^n \}$$

と書き換えられる (反対称化の記法 $\partial_{[\mu} A_{\nu]}^i \equiv (\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i)/2$ を用いた). 最右辺において g の0次の項は

$$4\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_{[\mu} A_{\nu]}^i \partial_{[\rho} A_{\sigma]}^i = 4\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu A_\nu^i)(\partial_\rho A_\sigma^i)$$

であり, これを4元発散 $4\partial_\mu (\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu^i \partial_\rho A_\sigma^i)$ に置き換えた際のおつりの項 $4\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu^i \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma^i$ は, 添字 μ, ρ について対称な項と反対称な項の縮約となっているので消える (Maxwell理論の式(161)として確認済み). g について1次の項は, ダミー添字を丸括弧内の第1項で $m, n \rightarrow k, l$, 第2項で $\mu, \nu \leftrightarrow \rho, \sigma$ と置き換えると,

$$4g\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{ikl} \partial_{[\mu} A_{\nu]}^i A_\rho^k A_\sigma^l = 4g\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{ikl} (\partial_\mu A_\nu^i) A_\rho^k A_\sigma^l = \frac{4}{3} g\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{ikl} \partial_\mu (A_\nu^i A_\rho^k A_\sigma^l)$$

となって4元発散にまとめられる. g について2次の項は, 構造定数に対する “Jacobiの恒等式” (420):

$$f_{ikl} f_{imn} = -(f_{ikn} f_{iln} + f_{ilm} f_{ikn})$$

を用いると,

$$-g^2 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (f_{ikn} f_{iln} + f_{ilm} f_{ikn}) A_\mu^k A_\nu^l A_\rho^m A_\sigma^n$$

と書き換えられる．第2項でダミー添字を $k \leftrightarrow l$, $\mu \leftrightarrow \nu$ と入れ替えると，これは2つの項が相殺してゼロになることが見て取れる．以上より

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^i F_{\rho\sigma}^i = 4\partial_\mu \left\{ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(A_\nu^i \partial_\rho A_\sigma^i + \frac{1}{3} g f_{ikl} A_\nu^i A_\rho^k A_\sigma^l \right) \right\}.$$

15.1 節の原稿

素粒子の標準模型は専ら強い相互作用を記述する QCD (量子色力学) と、電弱相互作用を記述する Weinberg–Salam 理論から成る。QCD と電弱統一理論はいずれも Yang–Mills 理論の実例であり、QED はその雛形にあたる。実際 Yang–Mills 理論においても、やはり物質場の理論が局所的位相変換に対しても不変となるように、微分の共変微分への極小置換を通じてゲージ場 A を導入できる。また Yang–Mills 理論は数学的には幾何学の構造を持ち、ゲージ場 A は接続に、場の強度は曲率に相当することを説明する。

N 種類の Dirac 場 (977) (T は転置) に対するラグランジアン密度 (978) は、 N 次ユニタリ行列 U による大域的位相変換 (979) の下で不変に留まる。このような対称変換は 2 回繰り返し行っても、ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ を不変に保つ単一の N 次ユニタリ行列による変換となるから、 $U(N)$ 群と呼ばれる群を成す。 $U(N)$ 行列のユニタリー性より、その生成子は N 次 Hermite 行列であり、したがって N^2 個の独立な実数を持つ ([導出スライド参照](#)) [36, pp.49–50]。そこで N^2 個の適当な Hermite 行列 T_i を生成子に選ぶと、一般に $U(N)$ 行列は式 (979) のように、 T_i の線形結合の指数の形に書ける (ただし各 θ^i は実パラメータ)。

$U(N)$ 変換の N^2 個の生成子 T_i は、式 (417) で見た規格直交条件 (980) を満たすようにするのが慣例となっている。生成子の 1 つを単位行列 1 に比例する形 $T_0 = k1$ に選ぶと、 T_0 を生成子とするユニタリ行列 (981) による変換 (982) は $U(1)$ 部分群を成す。また式

(980)で2つの生成子の一方を T_0 とすると，残りの $(N^2 - 1)$ 個の T_i ($i = 1, \dots, N^2 - 1$)はトレースレスとなることが帰結する．このため T_0 以外の生成子は指数の行列式が1となり(式(321)の箇所を見よ)， $SU(N)$ 変換を生成する．さらに単位行列に比例する T_0 は明らかに他の生成子 T_i と交換するため，式(414)の箇所で見たとようにLie代数は直和に分解され， $U(N)$ 群は $U(1)$ 群と $SU(N)$ 群の直積(983)になる．なお T_0 以外の $(N^2 - 1)$ 個の生成子 T_i に対しては，生成子の規格化条件(980)より，交換関係(416)で定義される構造定数 f_{ijk} は完全反対称性が明白な式(418)で表される．

例1 $N = 2$ のとき Pauli行列 σ_i ($i = 1, 2, 3$)を用いて生成子を式(984)のように選べる．角運動量代数でよく知られているように，Pauli行列は $SU(2)$ 群の生成子であり，構造定数は ε_{ijk} ．

例2 $N = 3$ のとき このとき $N^2 = 9$ 個の T_i として，Gell-Mann行列(985)の $1/2$ 倍(986)と，単位行列 $\mathbf{1}$ に比例した $T_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{1}$ を選ぶことができる． F_i たちはいずれもトレースレスであり， $SU(3)$ 変換を生成する． $SU(3)$ 群の生成子がGell-Mann行列(985)の形をとることは確かに非自明であるものの，ひとまず数学的な事実として受け容れることができる．実際 $SU(2)$ 群にしてもスピン演算子の表式を半ば発見的な方法で説明できるとは言え，生成子がPauli行列で与えられることは極論，天下りに提示せざるを得ないことに変わりはない．

ここまではDirac場の大域的位相変換(979)を考えてきた．次に考えている物質場 $\varphi_a(x)$ の大域的変換(987)を局所的位相変換(988)に一般化しよう(ただし後の都合上, θ^i から結合定数 g をくくり出した)．このとき理論のゲージ不変性を回復するには, 極小置換(微分の共変微分への置き換え)により物質場と相互作用する $(N^2 - 1)$ 種類のゲージ場を導入すれば良いことを説明する．これ以降, φ_a を縦に並べたベクトルを φ , U_a^b を並べた行列を $U = (U_a^b)$ と書く．

まず, 点 x におけるベクトル $\varphi_i(x)$ を近接する点 $x + dx$ に平行移動したベクトル(989)を, 点 $x + dx$ での変換行列 $U(x + dx)$ で変換するベクトルとなるように定義する．右辺の行列 $A_\mu = (A_\mu)_a^b$ は接続場と呼ばれる．一般相対性理論の文脈で式(63)の箇所で説明したように, 平行移動を定義する係数を接続と呼ぶことを思い出そう．また式(989)はQEDにおける極小置換(832)に比較される式であり, したがって接続 A_μ は物理的にはゲージ場である．行列表示のゲージ場 A_μ は, 群 $G = \text{SU}(N)$ のLie代数の基底 T_i を用いて式(990)のように展開できる．これにより $(N^2 - 1)$ 種類のゲージ場 $A_\mu^i(x)$ ($i = 1, \dots, N^2 - 1$) が導入されたことになる．

さて, $x + dx$ におけるベクトル $\varphi(x + dx)$, $\varphi_{||}(x + dx)$ は, したがってその差(991)は $U(x + dx)$ で変換せねばならない．一般相対性理論の式(66)やQEDの式(989)の場合と同様, 式(991)で定義される物質場の微分 D_μ を共変微分と呼ぶ．ここから共変微分は物質場 φ と同様に U で変換すること(992), およびゲージ場の変換則(993)が帰結する(導出スライド参照)．物質場とゲージ場の変換(988),(993)を合わせて局所ゲージ変

換と呼ぶ.

次に場の強さ $F_{\mu\nu}(x)$ を導入しよう. それは数学的には曲率テンソルと呼ばれ, 場 $\varphi(x)$ を図73の2つの経路に沿って平行移動した結果の差(994)に現れる係数(995)として定義できる(導出スライド参照). 式(994),(995)はまとめて式(996)のように書くことができ, これはRiemann幾何学において曲率を定義する式(91)と同じ形をしている. また曲率の表式(995)はRiemann幾何学の曲率テンソル(92)と同様, 接続の微分と接続の2次の項から成る. さらに式(995)における交換子 $[D_\mu, D_\nu]$ は見かけと違って, もはや微分演算子ではなく, また最右辺における行列 A_μ, A_ν は交換しないことにも注意しよう.

ここまで見てきたように, Yang-Mills理論は数学的には幾何学として定式化される. ただし表10にまとめたように, 「接続」「曲率」といった数学的概念の物理的な意味はYang-Mills理論と一般相対性理論(Riemann幾何学)とで異なる. 例えば場の強度はYang-Mills理論では曲率に対応するのに対し, 一般相対性理論では接続に対応する. ポテンシャルはYang-Mills理論では接続に対応するのに対し, 一般相対性理論では計量 $g_{\mu\nu}$ に対応する.

さて, 曲率の定義式(996)は平行移動した時空位置 $x + dx + dy$ でのベクトルなので, 移動先でのユニタリ行列 $U(x + dx + dy)$ で変換される. このことから, 場の強さの変換則(997)が見出される(導出スライド参照).

ところでMaxwell理論では, ポテンシャルから導かれる電磁場の強さ

(159): $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ は恒等式として, Maxwell 方程式の自明な組

(157): $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0$ を満たした. 一般のゲージ場で, これに対応する式は式(998)となる. これは Bianchi (ビアンキ) 恒等式と呼ばれ, Jacobi 恒等式(999)から導かれ(導出スライド参照), Riemann 幾何学の曲率テンソルに対する Bianchi 恒等式(98)と比較される.

場の強さ $F_{\mu\nu}$ もゲージ場 A_μ と同様, 式(1000)のように展開される. ところでゲージ場とその強さの式(990),(1000)は, 式(423)で定義した随伴表現のベクトルの行列表示と同じ形をしている. これを踏まえて変換則(993),(997)を随伴表現に対する相似変換(424)と比べると, $F_{\mu\nu}^a$ は群 G の随伴表現として共変に変換するのに対し, ゲージ場 A_μ^i 自身の変換則には付加的な項が伴っていることが見て取れる.

ここで変換パラメータ $\theta^i(x)$ が無限小の場合を想定して, 変換則(988),(993)を $\theta^i(x)$ の1次までの近似で書き下しておこう. まず $U(x) \simeq 1 + ig\theta^i(x)T_i$ より, 物質場の変換則(988)は式(1001)またゲージ場の変換則(993)は式(1002),(1003)を与える(導出スライド参照). ただし式(1003)最右辺の $(D_\mu)^{ik}$ は共変微分の随伴表現である.

ゲージ場 A_μ と相互作用する物質場 φ のラグランジアン密度は, 自由な物質場のそれにおいて, 微分の共変微分への置き換え(極小置換) $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ を施した式(1004)で与えられる. 実際, 局所ゲージ変換(988),(993)の下で物質場の共変微分 $D_\mu \varphi$ は, 式(992)のように場 φ と同様に変換されるので, ラグランジアン密度(1004)はゲージ不変である.

また局所ゲージ変換に際して、場の強さは式(997)に従って相似変換する。したがってゲージ場のラグランジアン密度を式(1005)とすると、これは第2辺よりゲージ不変である(トレースの巡回対称性に注意)。式(1005)最右辺への書き換えでは生成子を基底とした場の強さの展開((1000))を代入し、生成子の正規直交性を用いれば良い。

ここで場の強さ $F_{\mu\nu}$ の展開(1000)における成分 $F_{\mu\nu}^i$ を具体的に調べると表式(1006)が見出される(導出スライド参照)。座標変換の他にゲージ変換に関する内部自由度を持つという意味で、時空添字 $\mu, \nu, \dots$ と区別して、群の添字 $i, j, k, \dots$ は“内部添字”とも呼ばれる。一般には生成子 T_i は非可換なので、 i 種類目のゲージ場の強さ(1006)における構造定数 f_{ijk} の項はゼロでなく、ラグランジアン密度(1005)は A_μ の3次と4次の自己相互作用項を持つことになる(係数 g はこれらの項を特徴付けるため、結合定数と呼ばれる)。この場合のゲージ理論をYang-Mills理論という。

なお、ゲージ場は式(993)のように変換するため、ゲージ不変性を破ることなくラグランジアン密度にゲージ場の質量項(1007)を付け加えることはできないことに注意する。なお質量項(1007)について導出スライドで補足する。

式(160),(161)の箇所で見たように、Maxwell理論では運動方程式に影響しない項として、場の不変量 $F^{*\mu\nu} F_{\mu\nu}$ に比例する項をラグランジアンに付け加えることができる。Yang-Mills理論においてもラグランジアンに対するゲージ不変な付加項として、同様の項(1008)を考えることができる。式(1008)はQCDにおいて θ -真空(θ -vacua)の項と呼ばれ [2, p.156], やはり運動方程式に影響しないものの(導出スライド参照), 量子論に

において役割を演じる．本稿の水準では場の量子論の文脈で式(1008)のような項を本格的に扱う機会はないものの，我々はループ量子重力の基礎となるテトラードを用いた重力理論の定式化において，式(1008)とアナログな項を見る予定である．

15.2 QCD (量子色力学)

強い相互作用を記述する QCD を概観する [22, pp.270–281].

クォークはスピン $1/2$ の粒子であり, 質量と電荷の異なる 6 種類の “香り” (フレーバー) $f = u, d, c, s, t, b$ が存在する :

	軽い	$\longleftrightarrow$	重い	
電荷 $2e/3$	$u : \text{up}$	$c : \text{charm}$	$t : \text{top}$	(1015)
電荷 $-e/3$	$d : \text{down}$	$s : \text{strange}$	$b : \text{bottom}$	

クォーク q (と反クォーク $\bar{q}$) は強粒子 (ハドロン) と呼ばれる束縛状態をとる [47, pp.5–7] :

- 重粒子 (バリオン) $\sim qqq$
 - 例 : 陽子 (uud), 中性子 (udd)
- 中間子 (メソン) $\sim q\bar{q}$
 - 例 : パイオン $\pi^+(u\bar{d}), \pi^-(\bar{u}d), \pi^0((u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2})$

QCD は $SU(3)$ Yang–Mills 理論の実例にあたる. クォークの各香り f について 3 種類の色状態 $c = r, g, b$ の Dirac 場 ψ_c^f が定義され, 自由クォークのラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}^f (i\not{\partial} - m_f) \Psi^f = \sum_{c=r,g,b} \bar{\psi}_c^f (i\not{\partial} - m_f) \psi_c^f, \quad \Psi^f \equiv (\psi_r^f, \psi_g^f, \psi_b^f)^T. \quad (1016)$$

ラグランジアン(1016)のゲージ不変性に付随する保存量は、色電荷

$$\hat{F}_i = \int d^3x \Psi^{f\dagger}(x) F_i \Psi^f(x) \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \quad (1017)$$

である(右辺の F_i は式(986)のSU(3)生成子).
クォークと反クォークの数演算子をそれぞれ

$$N_c \equiv \sum_{s, \mathbf{p}, f} b_{sc}^{f\dagger}(\mathbf{p}) b_{sc}^f(\mathbf{p}), \quad \bar{N}_c \equiv \sum_{s, \mathbf{p}, f} d_{sc}^{f\dagger}(\mathbf{p}) d_{sc}^f(\mathbf{p}) \quad (1018)$$

のように定義すると^{*172}, 正規順序化した色電荷(1017)は

$$\begin{aligned} \hat{F}_3 &= \frac{1}{2} \int d^3x N [\psi_r^{f\dagger}(x) \psi_r^f(x) - \psi_g^{f\dagger}(x) \psi_g^f(x)] \\ &= \frac{1}{2} (N_r - \bar{N}_r) - \frac{1}{2} (N_g - \bar{N}_g), \quad \text{etc.} \end{aligned} \quad (1019)$$

となる.

^{*172} $b_{sc}^{f\dagger}(\mathbf{p}), d_{sc}^{f\dagger}(\mathbf{p})$ はそれぞれ色 c , 運動量 $\mathbf{p}$, スピン s のクォークと反クォークの生成演算子である.

表11 色電荷の固有値 F_3, F_8

クォーク			反クォーク		
	F_3	F_8		F_3	F_8
r	$1/2$	$1/2\sqrt{3}$	$\bar{r}$	$-1/2$	$-1/2\sqrt{3}$
g	$-1/2$	$1/2\sqrt{3}$	$\bar{g}$	$1/2$	$-1/2\sqrt{3}$
b	0	$-1/\sqrt{3}$	$\bar{b}$	0	$1/\sqrt{3}$

一般に多クォーク状態 $|\chi_h^c\rangle$ には色の閉じ込めの条件

$$\hat{F}_i |\chi_h^c\rangle = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \quad (1020)$$

が課される．これは固有値 $F_3 = F_8 = 0$ を含意する．すると表11の値より，

- 自由クォーク q やクォーク対 qq は存在できない．
- クォーク対 $q\bar{q}$ やバリオン (重粒子) qqq は許容される．

さらにバリオンの色状態は同種クォークの入れ替えに関する反対称性を担う：

$$|\chi_B^c\rangle \sim \varepsilon_{ijk} |r_i, g_j, b_k\rangle = \begin{vmatrix} |r_1\rangle & |r_2\rangle & |r_3\rangle \\ |g_1\rangle & |g_2\rangle & |g_3\rangle \\ |b_1\rangle & |b_2\rangle & |b_3\rangle \end{vmatrix}. \quad (1021)$$

次に一般式(1004)に従い，クォークのラグランジアン密度を

$$\mathcal{L}_q = \bar{\Psi}^f [i\not{D} - m_f] \Psi^f = \bar{\psi}_a^f [i\not{D} - m_f]_{ab} \psi_b^f, \quad D_{ab}^\mu = \delta_{ab} \partial^\mu + \frac{i}{2} g_s (\lambda_j)_{ab} A_j^\mu \quad (1022)$$

(g_s は強い相互作用の結合定数)と書いて，グルーオン場 $A_i^\mu(x)$ ($i = 1, \dots, g$) との相互作用を導入する．上式(1022)を自由場項(1016)と相互作用項 $\mathcal{L}_I$ に分けて書くと

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I, \quad \mathcal{L}_I \equiv -\frac{1}{2} g_s \bar{\Psi}^f \gamma_\mu \lambda_j \Psi^f A_j^\mu. \quad (1023)$$

さらにグルーオン場そのものは，一般式(1006)に従い場の強度

$$G_i^{\mu\nu} \equiv \partial^\nu A_i^\mu - \partial^\mu A_i^\nu + g_s f_{ijk} A_j^\mu A_k^\nu \quad (1024)$$

を定義すると^{*173}，式(1005)で見たラグランジアン

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} G_{i\mu\nu} G_i^{\mu\nu} \quad (1025)$$

で記述される(式(1024)の f_{ijk} は $[F_i, F_j] = i f_{ijk} F_k$ で定義される構造定数).

^{*173} ここでは電磁場テンソルを $F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ とする流儀と比べて，添字 μ, ν を逆に付けてある．

以上より QCD (量子色力学) の完全なラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}^f (i\not{D} - m_f) \Psi^f - \frac{1}{4} G_{i\mu\nu} G_i^{\mu\nu} \quad (1026)$$

である.

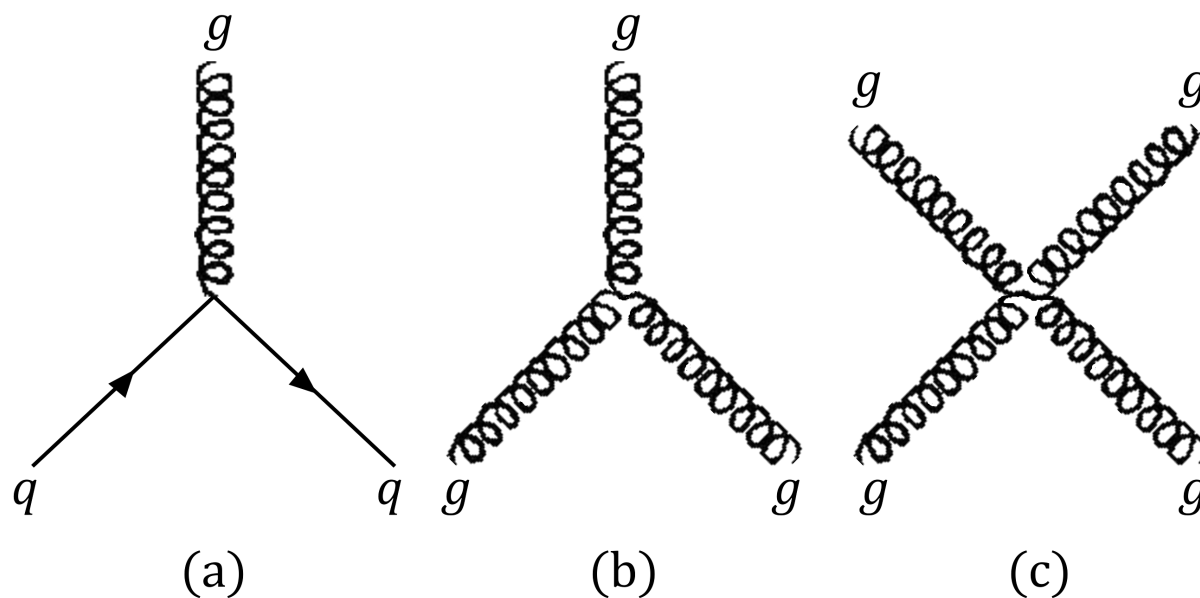


図74 QCDの相互作用

15.2節の原稿

次に Yang–Mills 理論の実例として、強い相互作用を記述する量子色力学 (quantum chromodynamics : QCD) を取り上げる。場の理論の一般的な技法に関しては既に QED の文脈で概ね導入してあるので、ここでは専ら QCD の理論の形を簡単に紹介するに留める [22, pp.270–281].

まず強い相互作用を行う物質粒子として、クォークの説明をする。クォークはスピン $1/2$ の粒子であり、式 (1015) に示したように、質量と電荷の異なる 6 種類の “香り” (フレーバー) $f = u, d, c, s, t, b$ が存在する。重粒子 (バリオン) と中間子 (メソン) はクォークの束縛状態であり (クォーク q の反クォークを $\bar{q}$ と表記), これらを総称して強粒子 (ハドロン) と呼ぶ [47, pp.5–7].

- 重粒子 (バリオン) は 3 つのクォークの束縛状態であり、
例として陽子と中性子が挙げられる。
- 中間子 (メソン) はクォーク q と反クォーク $\bar{q}$ の対から成り、
例としてパイオンが挙げられる。

さて、QCD は $SU(3)$ Yang–Mills 理論の実例にあたり、いわゆる色電荷が中心的な役割を担う。クォークの各香り $f = d, u, s, c, b, t$ について 3 種類の色状態 $c = r, g, b$ の Dirac 場 ψ_c^f が定義され、式 (986) で見た 8 種類の Gell-Mann 行列の $1/2$ 倍 $F_i = \lambda_i/2$ が $SU(3)$ 変換の生成子となる。QCD の文脈では F_i は色演算子と呼ばれる。Yang–Mills 理論の一

般式(977),(978)に従い, 自由クォークのラグランジアン密度は式(1016)で与えられる(繰り返された香りの添字 $f = d, u, s, c, b, t$ について和をとる).

大域的位相変換(979)の下でのラグランジアン(1016)の不変性から, 保存するチャージ(1017)が導かれる. これは場の理論の形式で表した色電荷であり, 右辺の被積分関数における色演算子の行列 F_i との混同に注意する. ここでDirac場を正準量子化すると, そのFourier係数 $b_{sc}^{f\dagger}(\mathbf{p}), d_{sc}^{f\dagger}(\mathbf{p})$ はそれぞれ色 c , 運動量 $\mathbf{p}$, スピン s のクォークと反クォークの生成演算子となる. これを用いてクォークと反クォークの数演算子をそれぞれ式(1018)のように定義すると, 正規順序化した色電荷(1017)は式(1019)となる.

ところで式(986)の行列 F_i は F_3 と F_8 のみに対角的である. 色電荷の演算子(1018)に関しても, クォークの色状態 r, g, b は $\hat{F}_3, \hat{F}_8$ の同時固有状態であり, 色電荷の固有値は表11のようにまとめられる(反クォークの固有状態は $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$ で表している).

ここでクォークが色の自由度を持つことの含意を見ておこう. 色の閉じ込めの仮説によれば, 一般に多クォーク状態 $|\chi_h^c\rangle$ には条件(1020)が課される. これは固有値に対する条件 $F_3 = F_8 = 0$ を含意する. すると表11の値より,

- 自由クォーク q やクォーク対 qq は存在できない.
- クォーク対 $q\bar{q}$ やバリオン(重粒子) qqq は許容される.
 - バリオン qqq に関しては, 全ての色 r, g, b が1つずつ含まれれば良い.

この結果は観測と合っている．さらにバリオンの色状態を，3つのクォークの色状態が相異なる状態の重合せの形に書き，閉じ込め条件を完全に考慮して係数を定めると，バリオンの色状態が式(1021)の形をとることが判明する．ただし例えば

$|r_1, g_2, b_3\rangle = |r_1\rangle |g_2\rangle |b_3\rangle$ は，バリオンを構成するクォーク1,2,3の色がそれぞれ r, g, b となる状態であり，添字 $i, j, k = 1, 2, 3$ について和をとる．このように色状態が同種クォークの入れ替えに関する反対称性を担っており，このときクォークの位置，スピン，香りの自由度を含めたバリオンの状態が，スピン-統計定理から期待される適正な反対称性を持つことが保証される [47, p.200].

次に局所ゲージ変換(988)に対しても理論が不変となるように，式(991)の極小置換を通じて，変換則(1003)に従う8種類のゲージ場 $A_i^\mu(x)$ ($i = 1, \dots, 8$)を導入する．QCDのゲージ場 $A_i^\mu(x)$ はグルーオン場と呼ばれ，添字 $i = 1, \dots, 8$ はグルーオンの色電荷のラベルである．このとき一般式(1004)に従い，グルーオン場と相互作用するクォークのラグランジアン密度は式(1022)で与えられる．ただし g_s は強い相互作用の結合定数であり，また繰り返されたクォークの色の添字 $a, b, \dots = r, g, b$ と香り f で和をとる．ラグランジアン(1022)をもとの自由場項(1016)と相互作用項 $\mathcal{L}_I$ に分けて書くと式(1023)となる．さらにグルーオン場そのものは，一般式(1006)に従い場の強度(1024)を定義すると，式(1005)で見たラグランジアン(1025)で記述される．ただし式(1024)における f_{ijk} はここでは，SU(3)群の生成子(986)の交換関係 $[F_i, F_j] = if_{ijk}F_k$ で定義される構造定数である．

以上より QCD (量子色力学) の完全なラグランジアン密度は式(1026)である.

- 式(1023)の相互作用ラグランジアン $\mathcal{L}_I$ は
図74 (a) のようなクォーク-グルーオンの3点結節点を作る.
- 場の強度(1024)はグルーオン場 A_i^μ の非線形項を含むため, 一般式(1005)の箇所で言及したように, グルーオン場のラグランジアン(1025)にはグルーオン場 A_i^μ の3次と4次の自己相互作用項が含まれる. これらはそれぞれ図74 (b),(c)に示された, 3本, 4本のグルーオン線の集まるグルーオン-グルーオン結節点を作る.
 - グルーオンの自己相互作用は,
グルーオン自体がゼロでない色電荷を持つことに起因する.
 - グルーオンが色電荷を持つことは, 図74 (a) のクォーク-グルーオン結節点において色電荷が保存することを保証する.
- “香り独立性”
 $\mathcal{L}_I$ の式(1023)におけるクォーク-グルーオン相互作用の強さと形は,
香り $f = d, u, s, \dots$ に依らない.

最後に, ゲージ不変性の観点からは, 極小置換によって得られないゲージ不変な項をラグランジアン密度に付け加えた理論も考えられる. しかしながら, そのような“極小でない”相互作用は, 繰り込み可能性によって排除される.

15.3 電弱統一理論

15.3.1 弱い相互作用のゲージ理論

■大域的な位相変換と保存する弱カレント [22, pp.467–472]

質量ゼロの自由レプトン系のラグランジアン密度

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &= i(\bar{\psi}_l \not{\partial} \psi_l + \bar{\psi}_{\nu_l} \not{\partial} \psi_{\nu_l}) \\ &= i(\bar{\Psi}_l^L \not{\partial} \Psi_l^L + \bar{\psi}_l^R \not{\partial} \psi_l^R + \bar{\psi}_{\nu_l}^R \not{\partial} \psi_{\nu_l}^R), \quad \Psi_l^L \equiv \begin{pmatrix} \psi_{\nu_l}^L \\ \psi_l^L \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}_l^L \equiv (\bar{\psi}_{\nu_l}^L \quad \bar{\psi}_l^L) \quad (1027)\end{aligned}$$

は、Pauli 行列 τ_j を生成子とする大域的 SU(2) 変換

$$\Psi_l^L \rightarrow U(\alpha) \Psi_l^L, \quad \bar{\Psi}_l^L \rightarrow \bar{\Psi}_l^L U^\dagger(\alpha), \quad U(\alpha) \equiv \exp(i\alpha_j \tau_j/2) \quad (1028)$$

(右手型の場合 ψ^R たちは不変)の下で不変である．ここから弱アイソスピンカレント

$$J_i^\alpha = \frac{1}{2} \bar{\Psi}_l^L \gamma^\alpha \tau_i \Psi_l^L \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1029)$$

のチャージ(弱アイソスピン電荷)

$$I_i^W = \int d^3x J_i^0 = \frac{1}{2} \int d^3x \Psi_l^{L\dagger} \tau_i \Psi_l^L \quad (1030)$$

の保存が導かれる．

弱アイソスピンカレント (1029) の保存は，レプトン (荷電) カレント

$$\begin{aligned} J^\alpha &= \bar{\psi}_l \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l} = 2(J_1^\alpha - J_2^\alpha), \\ J^{\alpha\dagger} &= \bar{\psi}_{\nu_l} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_l = 2(J_1^\alpha + J_2^\alpha) \end{aligned} \quad (1031)$$

および “中性カレント”

$$J_3^\alpha = \frac{1}{2} \bar{\Psi}_l^L \gamma^\alpha \tau_3 \Psi_l^L = \frac{1}{2} (\bar{\psi}_{\nu_l}^L \gamma^\alpha \psi_{\nu_l}^L - \bar{\psi}_l^L \gamma^\alpha \psi_l^L) \quad (1032)$$

の保存を意味する．さらに電磁カレント

$$s^\alpha = -e \bar{\psi}_l \gamma^\alpha \psi_l \quad (1033)$$

を用いて弱超電荷カレント

$$J_Y^\alpha = \frac{1}{e} s^\alpha - J_3^\alpha = -\frac{1}{2} \bar{\Psi}_l^L \gamma^\alpha \Psi_l^L - \bar{\psi}_l^R \gamma^\alpha \psi_l^R \quad (1034)$$

を定義すると，通常の電荷 Q の保存則と合わせて，弱アイソスピン電荷 I_3^W の保存は弱超電荷

$$Y \equiv \int d^3x J_Y^3 = \frac{Q}{e} - I_3^W \quad (1035)$$

の保存を意味する．

表12 レプトンの1粒子状態における各種電荷の固有値

	$ l^-, L\rangle$	$ \nu_l, L\rangle$	$ l^-, R\rangle$	$ \nu_l, R\rangle$
Q/e	-1	0	-1	0
I_3^W	$-1/2$	$+1/2$	0	0
Y	$-1/2$	$-1/2$	-1	0

なお $\psi = \psi_{\nu_l}^L, \psi_l^L, \psi_{\nu_l}^R, \psi_l^R$ とし, Y を (正準形式において) 場 ψ によって消滅する粒子の弱超電荷とすると, 弱超電荷 Y の保存は $U(1)$ 変換

$$\psi \rightarrow e^{i\beta Y} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-i\beta Y} \quad (1036)$$

に対するラグランジアンの不変性から直接導かれる

→ 弱アイソスピン電荷と合わせて, 逆に通常の電荷保存則が保証される.

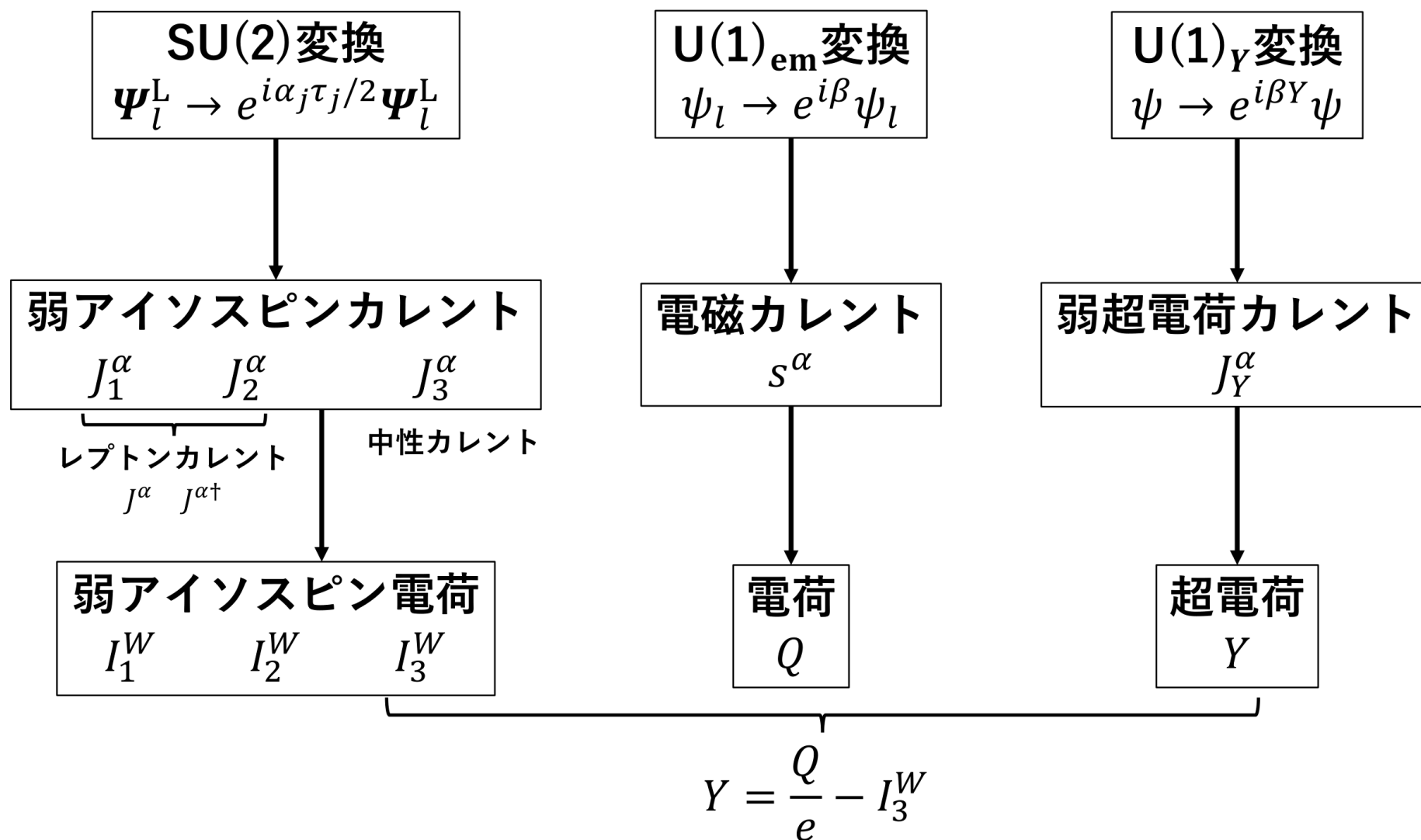


図75 大域的な位相変換と保存する電荷

■ゲージ不変な電弱相互作用 [22, pp.472–476]

SU(2)変換(1028)とU(1)変換(1036)において位相因子を $\alpha_j \rightarrow g\omega_j(x)$, $\beta \rightarrow g'f(x)$ と置き換えた局所的位相変換を考える(g, g' は定数). 微分の共変微分への置き換え

$$\partial^\mu \Psi_l^L \rightarrow D^\mu \Psi_l^L = \left[\partial^\mu + \frac{i}{2} g \tau_j W_j^\mu - \frac{i}{2} g' B^\mu \right] \Psi_l^L, \quad (1037)$$

$$\partial^\mu \psi_l^R \rightarrow D^\mu \psi_l^R = [\partial^\mu - i g' B^\mu] \psi_l^R, \quad (1038)$$

$$\partial^\mu \psi_{\nu_l}^R \rightarrow D^\mu \psi_{\nu_l}^R = \partial^\mu \psi_{\nu_l}^R \quad (1039)$$

を通して実ゲージ場 W_i^μ ($i = 1, 2, 3$), $B^\mu(x)$ を導入する. ただしゲージ場は

$$W_i^\mu \rightarrow W'^\mu_i = W_i^\mu - \partial^\mu \omega_i - g \varepsilon_{ijk} \omega_j W_k^\mu, \quad (\text{SU}(2) \text{変換}, \omega_j(x) : \text{無限小}) \quad (1040)$$

$$B^\mu \rightarrow B'^\mu = B^\mu - \partial^\mu f \quad (\text{U}(1) \text{変換}) \quad (1041)$$

と変換する. 結果として得られるレプトン系のラグランジアン密度

$$\mathcal{L}^L = i(\bar{\Psi}_l^L \not{D} \Psi_l^L + \bar{\psi}_l^R \not{D} \psi_l^R + \bar{\psi}_{\nu_l}^R \not{D} \psi_{\nu_l}^R) = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I, \quad (1042)$$

$$\mathcal{L}_I = -g J_i^\mu W_{i\mu} - g' J_Y^\mu B_\mu \quad (1043)$$

はSU(2) × U(1)ゲージ不変となる.

ここで $W_{1\mu}$ と $W_{2\mu}$ の代わりに非 Hermite なゲージ場

$$W_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_{1\mu} - iW_{2\mu}), \quad W_\mu^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_{1\mu} + iW_{2\mu}) \quad (1044)$$

を導入し, また $W_{3\mu}$ と B_μ の代わりにこれらの1次結合

$$\begin{aligned} Z_\mu &= \cos \theta_W W_{3\mu} - \sin \theta_W B_\mu, \\ A_\mu &= \sin \theta_W W_{3\mu} + \cos \theta_W B_\mu \end{aligned} \quad (1045)$$

を用いよう.

場 A_μ を電磁場と見なして, これが $\mathcal{L}_I$ に $-s^\mu A_\mu$ の形でのみ現れることを要求すると, 弱混合角 (Weinberg 角) θ_W は条件

$$g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W = e \quad (1046)$$

から定まり,

$$\mathcal{L}_I = -s^\mu A_\mu - \frac{g}{2\sqrt{2}}(J^{\mu\dagger} W_\mu + J^\mu W_\mu^\dagger) - \frac{g}{\cos \theta_W}(J_3^\mu - \sin^2 \theta_W s^\mu / e) Z_\mu \quad (1047)$$

となる.

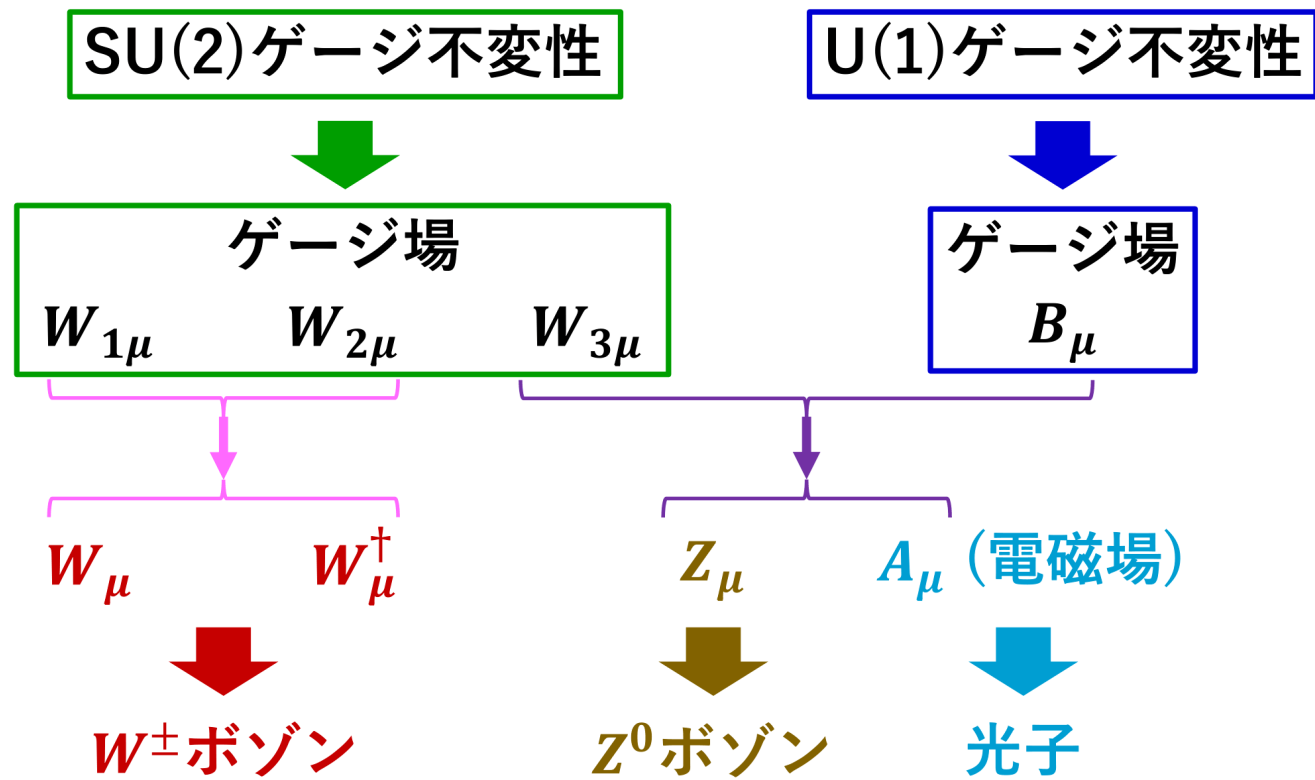


図76 電弱相互作用を媒介するゲージボゾン

■ゲージボゾンの性質 [22, pp.476–478]

レプトン系のラグランジアン密度 $\mathcal{L}^L = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$ にゲージボゾンの項 $\mathcal{L}^B$ を加えて,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}^B \quad (1048)$$

としよう. ここでは全てのゲージボゾンの質量をゼロとする.

引き続き Yang–Mills 理論の一般的な手続きに従い, ゲージ場の強度

$$B^{\mu\nu} \equiv \partial^\nu B^\mu - \partial^\mu B^\nu, \quad W_i^{\mu\nu} \equiv \partial^\nu W_i^\mu - \partial^\mu W_i^\nu + g\varepsilon_{ijk} W_j^\mu W_k^\nu \quad (1049)$$

を定義して, ゲージボゾンのラグランジアン密度を

$$\mathcal{L}^B = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{i\mu\nu} W_i^{\mu\nu} \quad (1050)$$

とすると, これは $SU(2) \times U(1)$ 不変となる.

場の強度(1049)の線形項

$$F_i^{\mu\nu} \equiv \partial^\nu W_i^\mu - \partial^\mu W_i^\nu, \quad F_W^{\mu\nu} \equiv \partial^\nu W^\mu - \partial^\mu W^\nu, \quad Z^{\mu\nu} \equiv \partial^\nu Z^\mu - \partial^\mu Z^\nu \quad (1051)$$

を定義すると，そのラグランジアン密度(1050)への寄与は，
電磁場， $W^\pm$ ボゾン場， Z^0 ボゾン場に対する自由場ラグランジアン密度の項

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^B &\equiv -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{i\mu\nu}F_i^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}F_{W\mu\nu}^\dagger F_W^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1052)$$

となる．また残りの非線形項は，ゲージボゾン同士の相互作用を表す付加的な項

$$g\varepsilon_{ijk}W_{i\mu}W_{j\nu}\partial^\mu W_k^\nu - \frac{1}{4}g^2\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}W_j^\mu W_k^\nu W_{l\mu}W_{m\nu} \quad (1053)$$

を形成するこのゲージボゾン同士の相互作用は
ゲージボゾンが弱アイソスピン電荷を持つことに起因する．

15.3.1 項の式の導出など

■自由レプトン系のラグランジアン密度(1027)について

質量ゼロのDirac粒子に対するヘリシティ射影演算子の表式(824): $P_{R,L} = (1 \pm \gamma_5)/2$ を思い出しておこう．射影演算子の性質 $P_L + P_R = 1$ により，任意のDiracスピノル ψ に対して $\psi = \psi^L + \psi^R$ である．また

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^{L,R} &\equiv (\psi^{L,R})^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2} \{ (1 \mp \gamma_5) \psi \}^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger \frac{1}{2} (1 \mp \gamma_5) \gamma^0 = \bar{\psi} \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5) \\ &= \bar{\psi} P_{R,L}\end{aligned}\tag{1054}$$

と考える(ただし $(\gamma_5)^\dagger = \gamma_5$, $\{\gamma_5, \gamma^0\} = 0$ を考慮した [17, p.250]). すると $\bar{\psi} = \bar{\psi}^L + \bar{\psi}^R$ であり，さらに射影演算子に対して期待される性質

$$P_L P_R = P_R P_L = \frac{1}{4} \{ 1 - (\gamma_5)^2 \} = 0$$

(ただし $(\gamma_5)^2 = 1$ を用いた [17, p.250]) により

$$\bar{\psi}^L i \not{\partial} \psi^R = \bar{\psi} P_R i \not{\partial} P_R \psi = \bar{\psi} i \not{\partial} P_L P_R \psi = 0, \quad \bar{\psi}^R i \not{\partial} \psi^L = \bar{\psi} P_L i \not{\partial} P_L \psi = \bar{\psi} i \not{\partial} P_R P_L \psi = 0$$

となることに注意すると，

$$\bar{\psi} i \not{\partial} \psi = (\bar{\psi}^L + \bar{\psi}^R) i \not{\partial} (\psi^L + \psi^R) = \bar{\psi}^L i \not{\partial} \psi^L + \bar{\psi}^R i \not{\partial} \psi^R$$

と書き換えられる.

なお2成分スピノル $\Psi_l^L, \bar{\Psi}_l^L$ と 4×4 の γ 行列とでは行列のサイズが異なるため, その積の意味に関して疑義が生じ得るものの, これ以降 γ 行列は単にスピノルの2成分に分配されるものと解せば良い:

$$\bar{\Psi}_l^L i \not{\partial} \Psi_l^L = \bar{\psi}_{\nu_l}^L i \not{\partial} \psi_{\nu_l}^L + \bar{\psi}_l^L i \not{\partial} \psi_l^L.$$

■弱アイソスピンカレント (1029) の確認

一般にラグランジアン $\mathcal{L}(\phi_r, \partial_\alpha \phi_r)$ を不変に留める場 ϕ_r の無限小変換 $\phi_r \rightarrow \phi_r + \delta\phi_r$ に対して、連続の式

$$0 = \delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r}\delta\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)}\delta(\partial_\alpha\phi_r) = \partial_\alpha f^\alpha, \quad f^\alpha \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)}\delta\phi_r \quad (1055)$$

が導かれることを思い出そう (第2辺の第1項を Euler–Lagrange 方程式で書き換えた) [17, pp.37–38]. 今の場合

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\alpha\Psi_l^L)} = i\bar{\Psi}_l^L\gamma^\alpha, \quad \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\alpha\bar{\Psi}_l^L)} = 0$$

なので、カレントの一般的な表式 $f^\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}}\delta\phi_r$ は

$$(i\bar{\Psi}_l^L\gamma^\alpha) \left(\frac{i\alpha_i\tau_i}{2} \Psi_l^L \right) = -\alpha_i J_i^\alpha, \quad J_i^\alpha \equiv \frac{1}{2} \bar{\Psi}_l^L \gamma^\alpha \tau_i \Psi_l^L : (1029)$$

を与える. 3つの変換のパラメーター α_i を独立に選べることから, 各 J_i^α ($i = 1, 2, 3$) が保存するカレントとなる.

■カレントの表式(1031),(1032)の確認 Pauli行列 τ_i に対して

$$\tau_1 - i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_1 + i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので,

$$2(J_1^\alpha - iJ_2^\alpha) = (\bar{\psi}_{\nu_l}^L \quad \bar{\psi}_l^L) \gamma^\alpha (\tau_1 - i\tau_2) \begin{pmatrix} \psi_{\nu_l}^L \\ \psi_l^L \end{pmatrix} = 2\bar{\psi}_l^L \gamma^\alpha \psi_{\nu_l}^L,$$

$$2(J_1^\alpha + iJ_2^\alpha) = (\bar{\psi}_{\nu_l}^L \quad \bar{\psi}_l^L) \gamma^\alpha (\tau_1 + i\tau_2) \begin{pmatrix} \psi_{\nu_l}^L \\ \psi_l^L \end{pmatrix} = 2\bar{\psi}_{\nu_l}^L \gamma^\alpha \psi_l^L$$

となる. 同様に中性カレントの式(1032)も理解できる.

さらに再び公式(1054): $\bar{\psi}^{L,R} = \bar{\psi} P_{R,L}$, $\{\gamma_5, \gamma^0\} = 0$ を用いると

$$2\bar{\psi}_l^L \gamma_\alpha \psi_{\nu_l}^L = 2(\bar{\psi}_l P_R) \gamma_\alpha (P_L \psi_{\nu_l}) = 2\bar{\psi}_l \gamma_\alpha P_L^2 \psi_{\nu_l} = \bar{\psi}_l \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l}, \text{ etc.}$$

と計算できる. ただし最後の等号では, 射影演算子の性質

$$P_L^2 = \left\{ \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \right\}^2 = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) = P_L \quad (\because (\gamma_5)^2 = 1)$$

を用いた. 以上よりレプトンカレントの表式(1031)が成り立つ.

■弱超電荷カレント (1034) の最右辺の確認

$\mathcal{L}_0$ の式 (1027) の導出と同様の計算により

$$\frac{1}{e}s^\alpha = -\bar{\psi}_l\gamma^\alpha\psi_l = -\bar{\psi}_l^{\text{L}}\gamma^\alpha\psi_l^{\text{L}} - \bar{\psi}_l^{\text{R}}\gamma^\alpha\psi_l^{\text{R}}$$

となるので,

$$\begin{aligned} J_Y^\alpha &\equiv \frac{1}{e}s^\alpha - J_3^\alpha = -\frac{1}{2}(\bar{\psi}_l^{\text{L}}\gamma^\alpha\psi_l^{\text{L}} + \bar{\psi}_{\nu_l}^{\text{L}}\gamma^\alpha\psi_{\nu_l}^{\text{L}}) - \bar{\psi}_l^{\text{R}}\gamma^\alpha\psi_l^{\text{R}} \\ &= -\frac{1}{2}\bar{\Psi}_l^{\text{L}}\gamma^\alpha\Psi_l^{\text{L}} - \bar{\psi}_l^{\text{R}}\gamma^\alpha\psi_l^{\text{R}} : (1034). \end{aligned}$$

■大域的U(1)変換(1036)から弱超電荷の保存が導かれることについて
固有値 Y の値を表12から読み取り, U(1)変換(1036)の第1式を明示的に書くと

$$\Psi_l^L(x) \rightarrow e^{-i\beta/2} \Psi_l^L(x), \quad \psi_l^R(x) \rightarrow e^{-\beta} \psi_l^R(x), \quad \psi_{\nu_l}^R(x) \rightarrow \psi_{\nu_l}^R(x)$$

である. さて, 各レプトン場 $\psi = \psi_{\nu_l}^L, \psi_l^L, \psi_{\nu_l}^R, \psi_l^R$ に対して

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\alpha \psi)} = i\bar{\psi}\gamma^\alpha, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\alpha \bar{\psi})} = 0$$

なので, カレントの一般的な表式(1055): $f^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \delta \phi_r$ は今の場合

$$\sum_{\psi} (i\bar{\psi}\gamma^\alpha)(i\beta Y \psi) = \beta \left(\frac{1}{2} \bar{\Psi}_l^L \gamma^\alpha \Psi_l^L + \bar{\psi}_l^R \gamma^\alpha \psi_l^R \right) = -\beta J_Y^\alpha$$

を与える(J_Y^α の式(1034)最右辺を見よ).

■相互作用ラグランジアン密度(1043)の確認

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_I &= \bar{\Psi}_l^L \left(-\frac{g}{2} \tau_i W_i + \frac{g'}{2} B \right) \Psi_l^L + \bar{\psi}_l^R g' B \psi_l^R \\ &= -g J_i^\mu W_{i\mu} - g' J_Y^\mu B_\mu : (1043), \\ J_i^\mu &= \frac{1}{2} \bar{\Psi}_l^L \gamma^\mu \tau_i \Psi_l^L, \quad J_Y^\mu = -\frac{1}{2} \bar{\Psi}_l^L \gamma^\mu \Psi_l^L - \bar{\psi}_l^R \gamma^\mu \psi_l^R.\end{aligned}$$

■式(1046),(1047)の導出 [22, pp.475–476]

$\mathcal{L}_I$ の式(1043)の初めの2項は

$$-g \sum_{i=1}^2 J_i^\mu W_{i\mu} = \frac{-g}{2\sqrt{2}} (J^{\mu\dagger} W_\mu + J^\mu W_\mu^\dagger) \quad (1056)$$

と書き換えられる.

注解：上式(1056)の確認 実際,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{2}} (J^{\mu\dagger} W_\mu + J^\mu W_\mu^\dagger) &= \frac{1}{2} \{ (J_1^\mu + iJ_2^\mu)(W_{1\mu} - iW_{2\mu}) + (J_1^\mu - iJ_2^\mu)(W_{1\mu} + iW_{2\mu}) \} \\ &= J_1^\mu W_{1\mu} + J_2^\mu W_{2\mu}. \end{aligned}$$

残りの2項は

$$\begin{aligned} &-g J_3^\mu W_{3\mu} - g' J_Y^\mu B_\mu \\ &= -\frac{g'}{e} s^\mu (-\sin \theta_W Z_\mu + \cos \theta_W A_\mu) \\ &-J_3^\mu \{ g(\cos \theta_W Z_\mu + \sin \theta_W A_\mu) - g'(-\sin \theta_W Z_\mu + \cos \theta_W A_\mu) \} \quad (1057) \end{aligned}$$

となる．ここでゲージ場 A_μ を電磁場と見なし， A_μ が $\mathcal{L}_I$ の中に $-s^\mu A_\mu$ という形でのみ含まれることを要求する．そのためには上式(1057)において

$$(J_3^\mu A_\mu \text{の係数}) \sim g \sin \theta_W - g' \cos \theta_W = 0, \quad (s^\mu A_\mu \text{の係数}) = -\frac{g'}{e} \cos \theta_W = -1$$

となれば良いから，条件(1046)を得る．

式(1056),(1057)を $\mathcal{L}_I$ の式(1043)に代入し，式(1046)を用いて g' を消去すると式(1047)を得る．

注解：式(1047)の導出について 実際，式(1046): $g' = g \sin \theta_W / \cos \theta_W$ により， Z_μ の係数は

$$\frac{g'}{e} s^\mu \sin \theta_W - J_3^\mu (g \cos \theta_W + g' \sin \theta_W) = \frac{g}{\cos \theta_W} \left(J_3^\mu - \sin^2 \theta_W \frac{s^\mu}{e} \right)$$

と計算される．

注解：弱混合角 θ_W を決定する式(1046)について もっとも式(1046)は実質2つの条件式なので，1つの未知数 θ_W を定めるものと見なすと条件過剰である．実際には実験に合う θ_W の値を与えると，式(1046)の関係を通して未知の結合定数 $g_W \equiv \frac{g}{2\sqrt{2}}$ ， g' の値が決まるものと考えられる．

参考 [22, p.476]

式(1047)第3項においてボゾン場 Z_μ と結合する中性カレントは，式(1032)より

$$J_3^\mu - \sin^2 \theta_W s^\mu / e = \frac{1}{4} \bar{\psi}_{\nu_l} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l} - \frac{1}{4} \bar{\psi}_l \gamma^\mu \{ (1 - 4 \sin^2 \theta_W) - \gamma_5 \} \psi_l \quad (1058)$$

と Dirac 場を用いて明示的に書き換えられる．実験と整合する弱混合角の値は

$$\sin^2 \theta_W = 0.23122 \pm 0.00015 \quad (1059)$$

である．このとき $1 - 4 \sin^2 \theta_W \simeq 0$ なので，中性カレント(1058)の右辺第2項はほとんど純粋な軸性カレントとなる(式(807)参照)．

■自由なゲージ場のラグランジアン密度(1052)の確認

式(1045): $B_\mu = -\sin \theta_W Z_\mu + \cos \theta_W A_\mu$ より

$$B_{\mu\nu} = \partial_\nu B_\mu - \partial_\mu B_\nu = -\sin \theta_W Z_{\mu\nu} + \cos \theta_W F_{\mu\nu}, \quad (Z_{\mu\nu} \equiv \partial_\nu Z_\mu - \partial_\mu Z_\nu)$$

$$\therefore B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} = \sin^2 \theta_W Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \cos^2 \theta_W F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 2 \sin \theta_W \cos \theta_W Z_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

である． また式(1044): $W_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_{1\mu} - iW_{2\mu})$ より

$$\begin{aligned} & F_{1\mu\nu} F_1^{\mu\nu} + F_{2\mu\nu} F_2^{\mu\nu} \\ &= (\partial_\nu W_{1\mu} - \partial_\mu W_{1\nu})(\partial^\nu W_1^\mu - \partial^\mu W_1^\nu) + (\partial_\nu W_{2\mu} - \partial_\mu W_{2\nu})(\partial^\nu W_2^\mu - \partial^\mu W_2^\nu) \\ &= \{\partial_\nu(W_{1\mu} + iW_{2\mu}) - \partial_\mu(W_{1\nu} + iW_{2\nu})\} \{\partial^\nu(W_1^\mu + iW_2^\mu) - \partial^\mu(W_1^\nu + iW_2^\nu)\} \\ &= 2(\partial_\nu W_\mu^\dagger - \partial_\mu W_\nu^\dagger)(\partial^\nu W^\mu - \partial^\mu W^\nu) \\ &= 2F_{W\mu\nu}^\dagger F_W^{\mu\nu} \end{aligned}$$

である． さらに式(1045): $W_{3\mu} = \cos \theta_W Z_\mu + \sin \theta_W A_\mu$ より

$$F_{3\mu\nu} = \partial_\nu W_{3\mu} - \partial_\mu W_{3\nu} = \cos \theta_W Z_{\mu\nu} + \sin \theta_W F_{\mu\nu},$$

$$\therefore F_{3\mu\nu} F_3^{\mu\nu} = \cos^2 \theta_W Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \sin^2 \theta_W F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 2 \sin \theta_W \cos \theta_W Z_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

なので， 式(1052)を得る．

15.3.1 項の原稿

電弱統一理論は弱い相互作用と電磁相互作用を統一的に記述するゲージ理論であり、 $SU(2)$ Yang–Mills 理論の実例にあたる。したがって理論を定式化するには、基本的に QED (や QCD) の場合と同様の手順を踏めば良い [22, pp.465–466] :

1. まず自由場のラグランジアンを不変に保つような大域的位相変換の組を見出し、それに付随する適切な電荷-電流保存則を導く。
2. 次にゲージ変換を局所的な位相変換へと一般化して、理論がゲージ不変となるようにゲージ場を導入する。

なおクォークの電弱相互作用は後で考察に含めることにし、ここではレプトン(ニュートリノを含む)を記述する理論として電弱相互作用のゲージ理論を導入する。

手始めに全てのレプトン(ニュートリノを含む)は質量を持たないと仮定する。15.3節の後半で、実際のレプトンは質量を持つという問題に立ち戻る予定である。このとき自由レプトン系のラグランジアン密度は式(1027)のように書ける(第2の等号は[導出スライドで確認](#))。ただしこれ以降、繰り返されたレプトンの添字 l については全ての世代 $l = e, \mu, \tau$ にわたって和をとるものと約束する。また最右辺ではラグランジアン密度を敢えて、式(825)で定義した右手型と左手型の場に関して非対称な形に書いている。

自由場のラグランジアン密度(1027)は、Pauli 行列 τ_j を生成子とする大域的 $SU(2)$ 変換(1028)の下で不変である。ただし右手型の場 ψ^R の各々はこの変換に対して不変と見な

す. $SU(2)$ 変換に対する変換性から

- 2成分場 Ψ_l^L は弱アイソスピノル
- 右手型の場 ψ^R の各々は弱アイソスカラー

と呼ばれる^{*174}.

$SU(2)$ 変換に対するラグランジアン密度の不変性から, 保存するチャージの電流密度 (簡単のため保存するカレントと呼ぶ) として弱アイソスピンカレント (1029) が導かれる (導出スライド参照). 対応するチャージは弱アイソスピン電荷と呼ばれ, 式 (1030) で表される. 保存量は $SU(2)$ 変換の自由度の数と同じく 3 種類あることに注意しよう.

弱アイソスピンカレント (1029) の保存は, レプトン (荷電) カレント (1031) が保存するカレントであることに加え, “中性カレント” (1032) が保存することを意味する (導出スライド参照). 式 (1032) が “中性カレント” と呼ばれるのは, このカレントが電氣的に中性のレプトン同士の組合せか, もしくは電磁カレント (1033) のように, 荷電レプトン同士の組合せで構成されているからである. これに対し “荷電カレント” (1031) は電氣的に中性なレプトンと, 荷電レプトンの組合せによって構成されている. さらに電磁力

^{*174} 左手型 2 成分レプトン場 Ψ_l^L の $SU(2)$ における変換性は, 中性子と陽子を記述する 2 成分アイソスピノルと同じである. また弱アイソスカラー ψ^R はスピン 1 重項状態と同じく, 変換の下で不変な 1 成分スカラーに他ならない.

レント (1033) を用いて，弱超電荷カレント (1034) を定義する (最右辺への書き換えは[導出スライド参照](#))．このとき式 (1034) 第2辺から分かるように，弱アイソスピン電荷 I_3^W の保存は通常の電荷 Q の保存則と合わせると，弱超電荷 (1035) が保存することを意味する．

ここで左手型の (すなわちヘリシティが負の) レプトン l^- が1個だけ存在している状態を $|l^-, L\rangle$ 等と書き，レプトンの1粒子状態について各種電荷の固有値を調べると，その結果は表12のようにまとめられる．弱アイソスピン電荷 I_3^W の固有値は式 (1030) における Pauli 行列 τ_3 に関する弱アイソスピノルの固有値として理解できる．これは QCD において場の理論に移行した色演算子 (1017) の固有値 F_i が，式 (986) の行列 $\hat{F}_i = \lambda_i/2$ に関する色スピノルの固有値に一致するのと同じ事情である．

なお ψ を $\psi_{\nu_l}^L, \psi_l^L, \psi_{\nu_l}^R, \psi_l^R$ のいずれかとし， Y を (正準形式において) 場 ψ によって消滅する粒子の弱超電荷とすると，弱超電荷 Y の保存は $U(1)$ 変換 (1036) に対するラグランジアンの不変性から直接導かれる ([導出スライド参照](#))．したがって弱い相互作用の理論では，対称性から弱アイソスピン電荷と弱超電荷の保存が独立に導かれ，逆に通常の電荷保存則が保証されることになる．

以上の大域的な位相変換と保存する電荷の関係は図75のようにまとめられる^{*175}．

^{*175} 文献 [13, pp.460–461] にならって，QEDにおける $U(1)$ 電磁ゲージ変換と $U(1)$ 弱超電荷変換 (1036) をそれぞれ $U(1)_{\text{em}}, U(1)_Y$ と書いて区別した．

SU(2)変換(1028)とU(1)変換(1036)において位相因子を $\alpha_j \rightarrow g\omega_j(x)$, $\beta \rightarrow g'f(x)$ と置き換えた局所的位相変換を考える(g, g' は定数). ラグランジアン密度のゲージ不変性を回復するために, QEDやQCDの場合と同様に, 微分の共変微分への置き換え(1037),(1038),(1039)を通じて実ゲージ場 W_i^μ ($i = 1, 2, 3$), $B^\mu(x)$ を導入する. ただしゲージ場は式(1040),(1041)のように変換する. また場 $W_i^\mu(x)$ はU(1)ゲージ変換の下で不変であり, $B^\mu(x)$ はSU(2)ゲージ変換の下で不変であるものとする. すると共変微分への置き換えによって得られるレプトン系のラグランジアン密度(1042),(1043)はU(1)ゲージ変換とSU(2)ゲージ変換の下で不変となる(SU(2) $\times$ U(1)ゲージ不変). ここに g, g' は $\mathcal{L}_I$ における結合定数に同定される. なお相互作用項の表式(1043)の確認は[導出スライド](#)を見よ.

ここで $W_{1\mu}$ と $W_{2\mu}$ の代わりに非Hermiteなゲージ場(1044)を導入し, また $W_{3\mu}$ と B_μ の代わりにこれらの1次結合(1045)を用いて相互作用ラグランジアン密度を表すことを考える. 式(1045)における“回転角” θ_W は弱混合角またはWeinberg角と呼ばれる. ここで場 A_μ を電磁場と見なして, これが相互作用ラグランジアン密度に電磁カレントとの結合項 $-s^\mu A_\mu$ の形でのみ現れることを要求すると, 弱混合角 θ_W は条件(1046)から定まり, 相互作用ラグランジアン密度は式(1047)となる([導出スライド参照](#)).

- 第1項 $-s^\mu A_\mu$ はQEDの相互作用である(電磁相互作用と弱い相互作用の統一)
- 第2項 $-\frac{g}{2\sqrt{2}}(J^{\mu\dagger}W_\mu + J^\mu W_\mu^\dagger)$ は, Wボゾンの量子場 $W_\mu(x)$ との相互作用項と解釈

され、その係数 $g_W = \frac{g}{2\sqrt{2}}$ を結合定数に同定できる。 Z^0 ボゾンを導入せず、弱い相互作用を媒介する粒子として $W^\pm$ ボゾンだけを考慮する仲介ベクトルボゾン (intermediate vector boson: IVB) 理論では、この第2項のみが相互作用ラグランジアン密度に採用される。

- 第3項は2つの中性カレント $J_3^\mu, s^\mu/e$ と場 Z_μ の相互作用を表し、実ベクトル場 Z_μ は中性ベクトルボゾン Z^0 の量子場と解釈される。

最後に以上で導入されたゲージ場は図76のようにまとめられる。

ここまではレプトンと相互作用するゲージ場を導入した。次にレプトン系のラグランジアン密度 $\mathcal{L}^L = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$ に純粋なゲージボゾンのラグランジアン密度 $\mathcal{L}^B$ を加えて、完全なラグランジアン密度を式(1048)としよう。ここでは全てのゲージボゾンの質量をゼロとして、レプトンがない場合のゲージボゾンの項 $\mathcal{L}^B$ を考える。実際には光子以外のゲージボゾンがゼロでない質量を持つことについては、以降で考察する。

引き続き Yang-Mills 理論の一般的な手続きに従い、ゲージ場の強度(1049)を定義して、ゲージボゾンのラグランジアン密度を式(1050)とすると、これは $SU(2) \times U(1)$ 不変となる。

場の強度(1049)の線形項(1051)を定義すると、そのラグランジアン密度(1050)への寄与は、電磁場、 $W^\pm$ ボゾン場、 Z^0 ボゾン場に対する自由場ラグランジアン密度の項

(1052)となる(導出スライド参照). また残りの非線形項は, ゲージボゾン同士の相互作用を表す付加的な項(1053)を形成する*¹⁷⁶. このゲージボゾン同士の相互作用はゲージボゾンが弱アイソスピン電荷を持つことに起因する*¹⁷⁷.

*¹⁷⁶ 場 $W_{1\mu}, W_{2\mu}$ は $W^\pm$ ボゾン場に, 場 $W_{3\mu}$ は電磁場 A_μ と Z^0 ボゾン場 Z_μ に関係付けられていたことを思い出そう(図76参照).

*¹⁷⁷ これはQCDにおいてグルーオンが色電荷を持つことに対応してグルーオン同士の相互作用を表す3グルーオン結節点や4グルーオン結節点が現れたのと同じ事情である.

15.3.2 自発的な対称性の破れ

■レプトンとゲージボゾンの質量

実際には光子を除き、レプトンとゲージボソンはゼロでない質量を持つ。
ところがラグランジアン密度に

- ゲージボソン $W^\pm, Z^0$ の質量項

$$m_W^2 W_\mu^\dagger W^\mu + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu \quad (1060)$$

を加えると,

- レプトン, 例えば電子 (場 $\psi = \psi_e$, 質量 $m = m_e$) の質量項

$$-m\bar{\psi}\psi = -m\bar{\psi}(P_R + P_L)\psi = -m(\bar{\psi}^L\psi^R + \bar{\psi}^R\psi^L) \quad (1061)$$

を加えると,

理論は $SU(2) \times U(1)$ 不変性を失う (また実は繰り込み不能となる).

→ 自発的な対称性の破れを通じて質量を導入.

■道標 [22, p.481]

- まず Goldstone モデル ($U(1)$ 位相変換の下で不変な場の理論のモデル) において, 自発的な対称性の破れを導入
 - 自然界で観測されない質量ゼロの (光子以外の) ボゾンが生じる.
 - この問題は大域的な位相変換を局所的な位相変換に改めてゲージ不変な理論を構築し, 自発的な対称性の破れを導入することによって解消できる (Higgs 機構).
 - 最後に, 以上を $SU(2) \times U(1)$ ゲージ不変な電弱理論へと一般化
 - Weinberg と Salam による電弱標準理論
ゲージ不変・繰り込み可能であり,
ラグランジアン密度が $W^\pm, Z^0$ ボゾンの質量項を含む.
- ★ 質量を導入する「数学的なモデル」と
質量の起源を説明する「物理的なメカニズム」の間には, なおギャップがある.

■ Goldstone モデル [22, pp.481–486]

Goldstone モデルでは複素スカラー場

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \phi_1(x) + i\phi_2(x) \} \quad (1062)$$

($\phi_1(x), \phi_2(x)$ は実スカラー場) をラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) - \mu^2 |\phi|^2 - \lambda |\phi|^4, \quad \lambda > 0 \quad (1063)$$

で記述する．古典的に考えた “基底状態” はハミルトニアン密度

$$\mathcal{H} = (\partial^0 \phi^*)(\partial_0 \phi) + (\nabla \phi^*) \cdot (\nabla \phi) + \mathcal{V}(\phi), \quad \mathcal{V}(\phi) \equiv \mu^2 |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4 \quad (1064)$$

が，したがって $\mathcal{V}(\phi)$ が最小になる場 $\phi(x)$ の定数値に対応する．

$\mu^2 < 0$ のとき，古典的な“基底状態”は $\mathcal{V}(\phi)$ の最低値を与える図78の円周

$$\phi(x) = \phi_0 \equiv \left(\frac{-\mu^2}{2\lambda} \right)^{1/2} e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (1065)$$

において実現される．もとのラグランジアン密度自体は大域的U(1)位相変換

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi e^{i\alpha}, \quad \phi^* \rightarrow \phi^{*'} = \phi^* e^{-i\alpha} \quad (1066)$$

に対して不変でありながら，特定の θ の“基底状態”は対称性を自発的に破っている．

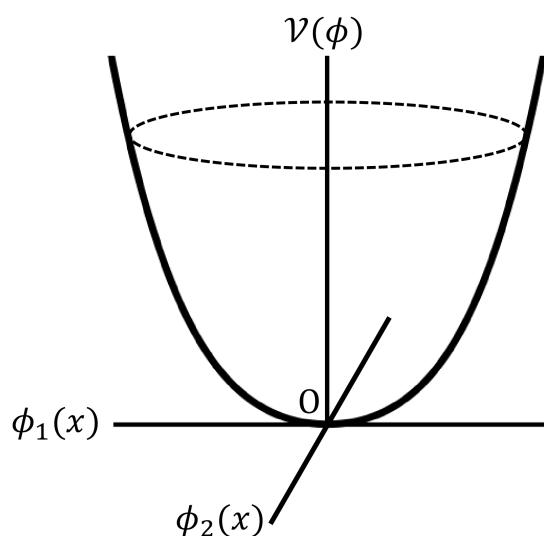


図77 $\mu^2 > 0$ のとき

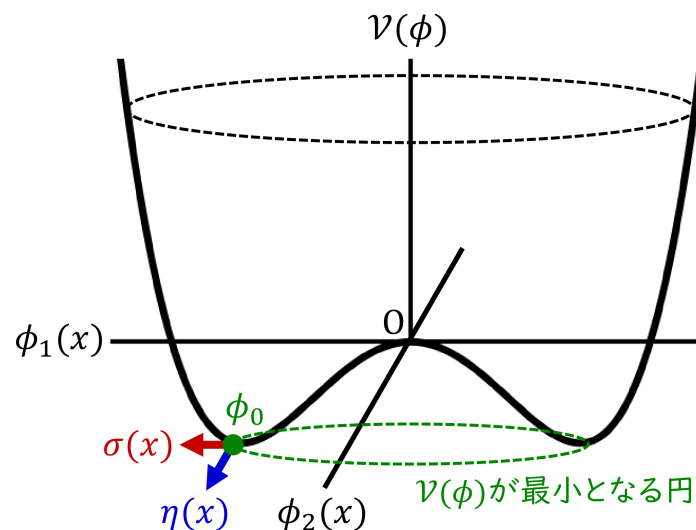


図78 $\mu^2 < 0$ のとき

$\mu^2 < 0$ の場合に対して, 例えば $\theta = 0$ の安定な平衡値

$$\phi_0 = \left(\frac{-\mu^2}{2\lambda} \right)^{1/2} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}v (> 0) \quad (1067)$$

を考え,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{v + \sigma(x) + i\eta(x)\} \quad (1068)$$

によってその周りの摂動 $\sigma(x), \eta(x)$ (ともに実場) を導入すると, ラグランジアン密度は

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 - \lambda v \sigma (\sigma^2 + \eta^2) - \frac{1}{4} \lambda (\sigma^2 + \eta^2)^2, \\ \mathcal{L}_0 &\equiv \frac{1}{2} (\partial^\mu \sigma) (\partial_\mu \sigma) - \frac{1}{2} (2\lambda v^2) \sigma^2 - \frac{1}{2} (\partial^\mu \eta) (\partial_\mu \eta) \end{aligned} \quad (1069)$$

と書き換えられる (定数項は省いた).

↓

- $\sigma(x)$ は質量 $\sqrt{2\lambda v^2}$ の Klein-Gordon 場
- $\eta(x)$ は質量ゼロの Klein-Gordon 場

■Higgsモデル [22, pp.486–489]

局所的なゲージ変換へと一般化したU(1)変換

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x)e^{-iqf(x)}, \quad \phi^*(x) \rightarrow \phi^{*'}(x) = \phi^*(x)e^{iqf(x)} \quad (1070)$$

に対して不変なゲージ理論を得るには，位相変換(1070)と同時にゲージ変換

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu f(x) \quad (1071)$$

を受けるゲージ場 $A_\mu(x)$ を導入し，微分の共変微分への置き換え

$$\partial_\mu \phi \rightarrow D_\mu \phi \equiv [\partial_\mu + iqA_\mu]\phi \quad (1072)$$

を行えば良い．Higgsモデルはさらに自由ゲージ場項

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (\text{ただし } F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) \quad (1073)$$

を付け加えた，ゲージ不変なラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = (D^\mu \phi)^*(D_\mu \phi) - \mu^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (1074)$$

で定義される．

$\mu^2 < 0$ の場合に対して, 再び式(1067),(1068)で $\sigma(x), \eta(x)$ を導入すると,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\sigma^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(qv)^2 A_\mu A^\mu \\ & + \frac{1}{2}(\partial^\mu \eta)(\partial_\mu \eta) + qv A^\mu \partial_\mu \eta + (\text{相互作用項})\end{aligned}\quad (1075)$$

と書き換えられる(定数項は省いた).

1. 自由場項に双1次項 $A^\mu \partial_\mu \eta$ が現れることは,
 A_μ と η が独立な場ではないことを示唆している.
2. 初めは質量のない自由度2のベクトル場 A_μ を考えているのに対し,
式(1075)には質量項 $\frac{1}{2}(qv)^2 A_\mu A^\mu$ が現れるので, ゲージ場は3つの偏極状態を持つ.
(自由度が見かけ上1つ増えている)

場(1068)の虚部 $\eta(x)$ は非現実的なゴースト場であり, 局所的な $U(1)$ ゲージ変換を利用して消去できる. そのような “ユニタリーゲージ” では

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\sigma^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(qv)^2 A_\mu A^\mu + (\text{相互作用項}) \quad (1076)$$

と表される.

$$\begin{aligned}
& \text{“複素” スカラー場 } \phi(x), \phi^*(x) \quad (\leftrightarrow \sigma(x), \eta(x)) \quad (\text{自由度 } 2) \\
+ & \text{“質量のない” 実ベクトル場 } A_\mu(x) \quad (\text{自由度 } 2) \\
& \downarrow \\
& \text{“実” スカラー場 } \sigma(x) \quad (\leftrightarrow \text{Higgs ボゾン}) \quad (\text{自由度 } 1) \\
+ & \text{“質量を持つ” 実ベクトル場 } A_\mu(x) \quad (\text{自由度 } 3). \qquad (1077)
\end{aligned}$$

■電弱標準理論 [22, pp.491–496]

電弱統一理論モデル(15.3.1項)に, Higgs機構を適用する. Higgsスカラー場

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_a(x) \\ \phi_b(x) \end{pmatrix} \quad (1078)$$

を考えよう. これはアイソスピン2重項 $\Psi_l^L(x)$ と同様のゲージ変換則

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = \exp[ig\tau_j\omega_j(x)/2]\Phi(x), \quad (\text{SU}(2) \text{ 変換に対して}) \quad (1079)$$

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = \exp[ig'Yf(x)/2]\Phi(x) \quad (\text{U}(1) \text{ 弱超電荷変換に対して}) \quad (1080)$$

に従うとする. このときレプトン場 $\Psi_l^L(x)$ の共変微分(1037)と同様に

$$D^\mu\Phi = \left(\partial^\mu + \frac{1}{2}ig\tau_jW_j^\mu + ig'YB^\mu \right) \Phi \quad (1081)$$

と定義し, Higgs場 $\Phi(x)$ のラグランジアン密度を

$$\mathcal{L}^H = (D^\mu\Phi)^\dagger(D_\mu\Phi) - \mu^2\Phi^\dagger\Phi - \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2 \quad (1082)$$

とすれば(式(1004)), 全ラグランジアン密度 $\mathcal{L} = \mathcal{L}^L + \mathcal{L}^B + \mathcal{L}^H$ は $\text{SU}(2) \times \text{U}(1)$ ゲージ不変となることが保証される.

やはり式(1082)のパラメータ $\lambda > 0, \mu^2 < 0$ に対して
古典的なエネルギー密度が最低値をとるのは，Higgs場 $\Phi(x)$ が条件

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} \phi_a^0 \\ \phi_b^0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_0^\dagger \Phi_0 = |\phi_a^0|^2 + |\phi_b^0|^2 = \frac{-\mu^2}{2\lambda} \quad (1083)$$

を満たす定数値 Φ_0 をとるときである．大域的な位相変換の自由度を利用して，
自発的に対称性を破った“基底状態”における特定の Φ_0 の値を

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad v \equiv \left(\frac{-\mu^2}{\lambda} \right)^{1/2} (> 0) \quad (1084)$$

と選んでも一般性を失わない．

Higgs機構の導入の後にも通常の電荷保存則が成り立つためには，基底状態は
U(1)電磁ゲージ変換 $\Phi(x) \rightarrow e^{-iQf(x)}\Phi(x)$, etc. の下で不変でなければならない．
そこで成分 ϕ_b^0 の電荷が $Q = 0$ となるためには，

$$Y = \frac{Q}{e} - I_3^W \quad (\text{式(1035)}) \quad (1085)$$

においてHiggs場の弱超電荷を $Y = 1/2$ とすれば良い．

このとき電磁的なゲージ不変性は破れない $\rightarrow$ 光子の質量はゼロ．

再び Higgs 場を真空場 Φ_0 (“基底状態” の場) とそこからのズレに分ける：

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \eta_1 + i\eta_2 \\ v + \sigma + i\eta_3 \end{pmatrix}. \quad (1086)$$

- 3つの非物理的 $\eta_1(x), \eta_2(x), \eta_3(x)$ はユニタリーゲージで消去でき，失われた自由度は3つのボゾン $W^\pm, Z^0$ の場に吸収される $\rightarrow W^\pm, Z^0$ ボゾンは質量を獲得する.
- 残る場 $\sigma(x)$ は Higgs スカラーボゾンを記述する.

レプトンに質量を与えるため， $SU(2) \times U(1)$ ゲージ不変な相互作用項

$$\mathcal{L}^{\text{LH}} = -g_l [\bar{\Psi}_l^{\text{L}} \psi_l^{\text{R}} \Phi + \Phi^\dagger \bar{\psi}_l^{\text{R}} \Psi_l^{\text{L}}] - g_{\nu_l} [\bar{\Psi}_l^{\text{L}} \psi_{\nu_l}^{\text{R}} \tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}^\dagger \bar{\psi}_{\nu_l}^{\text{R}} \Psi_l^{\text{L}}], \quad (1087)$$

$$\tilde{\Phi} \equiv -i[\Phi^\dagger \tau_2]^{\text{T}} = \begin{pmatrix} \phi_b^* \\ -\phi_a^* \end{pmatrix} \quad (\tau_2: \text{Pauli 行列}, \text{T}: \text{転置}) \quad (1088)$$

を考える．これはスカラー場 ϕ をスピノル場 ψ で挟んだ $\bar{\psi}\phi\psi$ という形

$$\bar{\Psi}_l^{\text{L}} \psi_l^{\text{R}} \Phi = \bar{\psi}_{\nu_l}^{\text{L}} \phi_a \psi_l^{\text{R}} + \bar{\psi}_l^{\text{L}} \phi_b \psi_l^{\text{R}}, \text{ etc.} \quad (1089)$$

をしており，このような項は一般に湯川型相互作用と呼ばれる．

■ユニタリーゲージにおけるラグランジアン密度 [22, p.496, pp.500–503]

Higgs機構を含む電弱標準理論の全ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ は

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^L + \mathcal{L}^B + \mathcal{L}^H + \mathcal{L}^{LH}. \quad (1090)$$

- レプトン系のラグランジアン密度 $\mathcal{L}^L$

$$\mathcal{L}^L = (\text{式(1042)}) = \mathcal{L}_0^L + \mathcal{L}_1^{LB}, \quad \mathcal{L}_0^L = (\text{式(1027)}), \quad \mathcal{L}_1^{LB} = (\text{式(1043)}) = (\text{式(1047)}). \quad (1091)$$

- ゲージボゾンのラグランジアン密度 $\mathcal{L}^B$

$$\mathcal{L}^B = (\text{式(1050)}) = \mathcal{L}_0^B + (\text{式(1053)}), \quad \mathcal{L}_0^B = (\text{式(1052)}). \quad (1092)$$

- Higgs場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}^H = (\text{式(1082)})$
- レプトンとHiggs場の相互作用項 $\mathcal{L}^{LH} = (\text{式(1087)})$

ここでユニタリーゲージを採用し, Higgs場(1086)を

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \sigma(x) \end{pmatrix} \quad (1093)$$

と表す.

ゲージ場 W_i^μ, B^μ をボゾン場 $W^\mu, W^{\mu\dagger}, Z^\mu, A^\mu$ で表すと，ラグランジアン密度 (1090) は

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I, \quad (1094)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & \bar{\psi}_l(i\partial - m_l)\psi_l + \bar{\psi}_{\nu_l}(i\partial - m_{\nu_l})\psi_{\nu_l} \quad \Leftarrow \quad \text{荷電・中性レプトン (質量 } m_l, m_{\nu_l}) \\ & - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad \Leftarrow \quad \text{光子} \\ & - \frac{1}{2}F_{W\mu\nu}^\dagger F_W^{\mu\nu} + m_W^2 W_\mu^\dagger W^\mu \quad \Leftarrow \quad W^\pm \text{ボゾン (質量 } m_W) \\ & - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu \quad \Leftarrow \quad Z^0 \text{ボゾン (質量 } m_Z) \\ & + \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) - \frac{1}{2}m_H^2 \sigma^2 \quad \Leftarrow \quad \text{Higgs スカラーボゾン (質量 } m_H) \end{aligned} \quad (1095)$$

と書き換えられる．ただし各ボゾンと各レプトンの質量は

$$m_W = \frac{1}{2}vg, \quad m_Z = \frac{m_W}{\cos \theta_W}, \quad m_H = \sqrt{-2\mu^2}, \quad (1096)$$

$$m_l = \frac{vg_l}{\sqrt{2}}, \quad m_{\nu_l} = \frac{vg_{\nu_l}}{\sqrt{2}} \quad (1097)$$

と同定される．

15.3.2 項の式の導出など

■ハミルトニアン密度 (1064) について

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^*, \quad \pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*} = \dot{\phi}, \quad \mathcal{L} = \dot{\phi}^* \dot{\phi} - (\nabla \phi^*) \cdot (\nabla \phi) - \mathcal{V}(\phi),$$

$$\therefore \mathcal{H} = \pi \dot{\phi} + \pi^* \dot{\phi}^* - \mathcal{L} = \dot{\phi}^* \dot{\phi} + (\nabla \phi^*) \cdot (\nabla \phi) + \mathcal{V}(\phi) : (1064).$$

なお Goldstone モデルのハミルトニアン密度 (1064) は，時間微分の項を除けば Ginzburg–Landau の自由エネルギーと同じ形をしている．例えば磁性体を考えると，単位体積当たりの磁化を m として Ginzburg–Landau の自由エネルギーは

$$F = \int dV \left[f(m) + \frac{K}{2} (\nabla m)^2 \right], \quad f(m) = am^2 + \frac{b}{4} m^4 - \mathcal{H}m, \quad a = \frac{T - T_c}{C}$$

と表される ($\mathcal{H}$ は外部磁場, $b, C > 0$). m の空間勾配があると自由エネルギーが増大することを表す簡単なモデルとして, $(\nabla m)^2$ に比例する項を導入してある ($K > 0$). 特に磁化の空間分布 m が一様な場合には, 磁性体の全磁化 M を用いて, 自由エネルギーを

$$F = -\mathcal{H}M + \frac{a}{2} M^2 + \frac{b}{4} M^4$$

と書けば十分である． $T \geq T_c$ に応じて係数 a の符号の変化するため，磁場 $\mathcal{H} = 0$ に対して F - M グラフの概形は図79のようになる．自由エネルギーの極小を与える平衡状態の磁化の値は， $T > T_c$ では $M = 0$ であり， $T < T_c$ では $M \neq 0$ に移ることが見て取れる（常磁性-強磁性状態の相転移） [48, pp.199–203] [24, pp.133–135]．

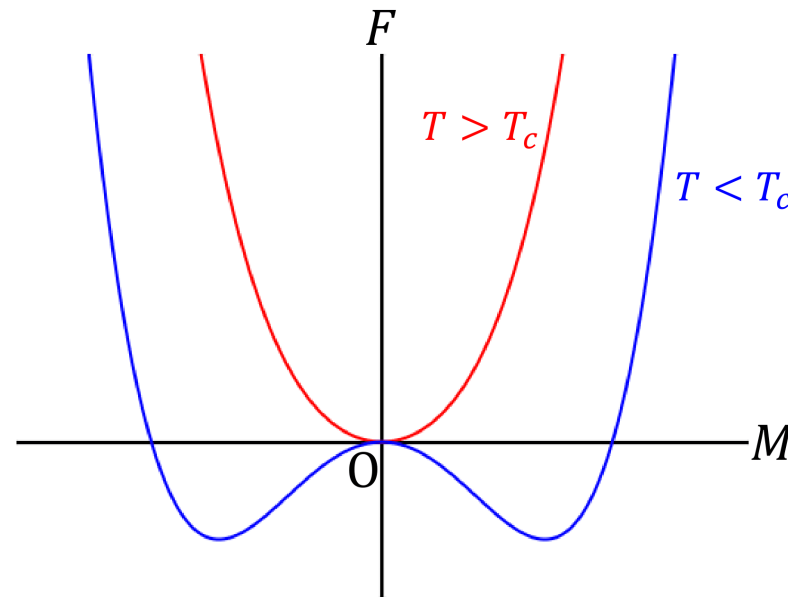


図79 磁性体の自由エネルギー

■ σ と η で表したラグランジアン密度 (1069) の確認

$$\begin{aligned}(\partial^\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) &= \frac{1}{2} \{ \partial^\mu (\sigma + i\eta) \} \{ \partial_\mu (\sigma - i\eta) \} \\&= \frac{1}{2} (\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) + \frac{1}{2} (\partial^\mu \eta)(\partial_\mu \eta), \\ \mathcal{V}(\phi) &= \frac{1}{2} \{ (v + \sigma)^2 + \eta^2 \} \left[\mu^2 + \frac{1}{2} \lambda \{ (v + \sigma)^2 + \eta^2 \} \right] \quad (\because |\phi|^2 = (v + \sigma)^2 + \eta^2) \\&= \frac{1}{2} \{ (v + \sigma)^2 + \eta^2 \} \frac{1}{2} \lambda \{ (v + \sigma)^2 + \eta^2 - 2v^2 \} \quad (\because \mu^2 = -\lambda v^2) \\&= \frac{1}{4} \lambda (v^2 + 2v\sigma + \sigma^2 + \eta^2) (-v^2 + 2v\sigma + \sigma^2 + \eta^2) \\&= \frac{1}{4} \lambda \{ (2v\sigma + \sigma^2 + \eta^2)^2 - v^4 \} \\&= \frac{1}{2} (2\lambda v^2) \sigma^2 - \lambda v \sigma (\sigma^2 + \eta^2) + \frac{1}{4} \lambda (\sigma^2 + \eta^2)^2 - \frac{1}{4} \lambda v^4\end{aligned}$$

と変形し, $\mathcal{V}(\phi)$ の計算の最右辺において定数項 $-\frac{1}{4} \lambda v^4$ を落とせば, ラグランジアン密度の式 (1069) を得る.

■ ラグランジアン密度 (1075) について

ラグランジアン密度 (1074) において，共変微分は $D^\mu \phi^*$ ではなく $(D^\mu \phi)^*$ として含まれていることに注意する．

$$\begin{aligned}(D^\mu \phi)^*(D_\mu \phi) &= \frac{1}{2} \{(\partial^\mu - iqA^\mu)(v + \sigma - i\eta)\} \{(\partial_\mu + iqA_\mu)(v + \sigma + i\eta)\} \\ &= \frac{1}{2} [\{\partial^\mu(\sigma - i\eta)\} \{\partial_\mu(\sigma + i\eta)\} \\ &\quad + \{\partial^\mu(\sigma - i\eta)\} iqA_\mu(v + \sigma + i\eta) \\ &\quad - iqA^\mu(v + \sigma - i\eta) \partial_\mu(\sigma + i\eta) \\ &\quad - (iq)^2 A^\mu A_\mu \{(v + \sigma)^2 + \eta^2\}] \\ &= \frac{1}{2} \{(\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) + (\partial^\mu \eta)(\partial_\mu \eta)\} + qvA^\mu \partial_\mu \eta + \frac{1}{2} (qv)^2 A_\mu A^\mu + (\text{相互作用項})\end{aligned}$$

なので，微分の共変部分への置き換えに伴う，Goldstone モデルのラグランジアン密度 (1069) に対する付加的な自由場項は “電荷” q の項

$$qvA^\mu \partial_\mu \eta + \frac{1}{2} (qv)^2 A_\mu A^\mu$$

である．

■ユニタリーゲージにおいて式(1086)の場合 $\eta_i(x)$ を消去できること

まず弱アイソスピノル(1086)を“下向き”の弱アイソスピノルに変換するSU(2)変換(1079)を、次いで、この“下向き”の弱アイソスピノルを実数に変換するU(1)変換(1080)を施せば良い [22, p.500].

備考 場 $\Phi(x)$ が条件(1083)を満たす一定値 Φ_0 をとる場合に、大域的な位相変換を利用してこれを式(1084)に書き換えられることも同様に理解できる.

■式(1087)の $\mathcal{L}^{\text{LH}}$ のSU(2) × U(1) ゲージ不変性の確認 [22, p.495]

$\mathcal{L}^{\text{LH}}$ の第1項が不変であることの確認は直接的である． 実際， U(1) 変換に対して

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_l^{\text{L}}(x) &\rightarrow \bar{\Psi}_l^{\text{L}}(x)e^{-ig'Yf(x)} = \bar{\Psi}_l^{\text{L}}(x)e^{ig'f(x)/2}, \\ \Phi(x) &\rightarrow \Phi(x)e^{ig'Yf(x)} = \Phi(x)e^{ig'f(x)/2}, \\ \psi_l^{\text{R}}(x) &\rightarrow \psi_l^{\text{R}}(x)e^{ig'Yf(x)} = \psi_l^{\text{R}}(x)e^{-ig'f(x)}\end{aligned}$$

であり， SU(2) 変換に対して

$$\bar{\Psi}_l^{\text{L}}(x) \rightarrow \bar{\Psi}_l^{\text{L}}(x)e^{-ig\tau_j\omega_j(x)/2}, \quad \Phi(x) \rightarrow \Phi(x)e^{ig\tau_j\omega_j(x)/2}, \quad \psi_l^{\text{R}}(x) \rightarrow \psi_l^{\text{R}}(x)$$

である．

そこで第2項の不変性を示そう． U(1) 変換 $\Phi'(x) = \exp[ig'Yf(x)]\Phi(x)$ (ただし $Y = 1/2$) に際して式(1088)の $\tilde{\Phi}(x)$ は

$$\tilde{\Phi}(x) \rightarrow \tilde{\Phi}'(x) = \exp[-ig'f(x)/2]\tilde{\Phi}(x)$$

と変換する． よって $\Psi_l^{\text{L}}(x) \rightarrow e^{-ig'f(x)/2}\Psi_l^{\text{L}}(x)$, $\psi_{\nu_l}^{\text{R}} \rightarrow \psi_{\nu_l}^{\text{R}}$ と合わせると， $\mathcal{L}^{\text{LH}}$ の第2項はU(1) 不変である． また $\mathcal{L}^{\text{LH}}$ の第2項がSU(2) 不変であるためには， $\tilde{\Phi}(x)$ が $\Phi(x)$

と同じように変換すれば良い． $\Phi(x)$ の無限小変換に伴う変化量は

$$\delta\Phi(x) = i\frac{1}{2}g\tau_j\omega_j(x)\Phi(x) \quad (1098)$$

である．よって $\tilde{\Phi}(x)$ のSU(2)変換性は

$$\begin{aligned} \delta\Phi^\dagger(x) &= -i\frac{1}{2}g\omega_j(x)\Phi^\dagger(x)\tau_j, \\ \therefore \delta\tilde{\Phi}(x) &= -i\left[\delta\Phi^\dagger(x)\tau_2\right]^\mathrm{T} = -i\left[-i\frac{1}{2}g\omega_j(x)\Phi^\dagger(x)\tau_j\tau_2\right]^\mathrm{T} \end{aligned} \quad (1099)$$

となる．Pauli行列が満たす関係 $\tau_j\tau_2 = -\tau_2\tau_j^\mathrm{T}$ を用いると，これは

$$\delta\tilde{\Phi}(x) = i\frac{1}{2}g\omega_j(x)\tau_j\left[-i\Phi^\dagger(x)\tau_2\right]^\mathrm{T} = i\frac{1}{2}g\omega_j(x)\tau_j\tilde{\Phi}(x) \quad (1100)$$

と書き換えられる．

注解：式(1100)の確認　まずPauli行列について，直接の成分計算により

$$\tau_1\tau_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \tau_2\tau_1^\mathrm{T} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \tau_3\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2\tau_3^\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

を確かめられる．また $\tau_2^T = -\tau_2$ より $\tau_2^2 = -\tau_2\tau_2^T$ なので，以上と合わせて $\tau_j\tau_2 = -\tau_2\tau_j^T$ が成立する．これを式(1099)に代入すると

$$\delta\tilde{\Phi} = i\frac{1}{2}g\omega_j[-i\Phi^\dagger\tau_2\tau_j^T]^T$$

となり，これは転置行列に関する一般的な性質 $(AB)^T = B^T A^T$ により

$$[-i\Phi^\dagger\tau_2\tau_j^T]^T = \tau_j[-i\Phi^\dagger\tau_2]^T = \tau_j\tilde{\Phi}$$

と書き換えられるので式(1100)を得る．

上式(1100)は $\Phi(x)$ の変換性(1098)に一致しているから，示された．

注解： $\tilde{\Phi}$ の式(1088)について

$$\Phi^\dagger\tau_2 = \begin{pmatrix} \phi_a^* & \phi_b^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\phi_b^* & -i\phi_a^* \end{pmatrix}, \quad \therefore [\Phi^\dagger\tau_2]^T = \begin{pmatrix} i\phi_b^* \\ -i\phi_a^* \end{pmatrix}$$

による．

参考 ニュートリノ振動と呼ばれる微妙な効果を扱うには， G を3次の Hermitian 定数行列として，湯川型相互作用(1087)の第2項を

$$- G_{ll'} \bar{\Psi}_{l'}^L \psi_{\nu_l}^R \tilde{\Phi} - G_{ll'}^* \tilde{\Phi}^\dagger \psi_{\nu_l}^R \Psi_{l'}^L \quad (1101)$$

の形に置き換える [22, p.496].

■全ラグランジアン(1094),(1095)の導出

まず全ラグランジアン(1090)におけるレプトンを除いた項は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\text{B}} + \mathcal{L}^{\text{H}} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ & -\frac{1}{2}F_{W\mu\nu}^{\dagger}F_W^{\mu\nu} + m_W^2 W_{\mu}^{\dagger}W^{\mu} \\ & -\frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_Z^2 Z_{\mu}Z^{\mu} \\ & +\frac{1}{2}(\partial^{\mu}\sigma)(\partial_{\mu}\sigma) - \frac{1}{2}m_H^2\sigma^2 \\ & +\mathcal{L}_{\text{I}}^{\text{BB}} + \mathcal{L}_{\text{I}}^{\text{HH}} + \mathcal{L}_{\text{I}}^{\text{HB}}\end{aligned}\tag{1102}$$

と書き換えられる．ただし定数項は省いており，また各相互作用項は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{I}}^{\text{BB}} = & ig \cos \theta_W \\ & \times [(W_{\mu}^{\dagger}W_{\nu} - W_{\nu}^{\dagger}W_{\mu})\partial^{\mu}Z^{\nu} + (\partial_{\mu}W_{\nu} - \partial_{\nu}W_{\mu})W^{\mu\dagger}Z^{\nu} - (\partial_{\mu}W_{\nu}^{\dagger} - \partial_{\nu}W_{\mu}^{\dagger})W^{\nu}Z^{\mu}] \\ & + ie [(W_{\mu}^{\dagger}W_{\nu} - W_{\nu}^{\dagger}W_{\mu})\partial^{\mu}Z^{\nu} + (\partial_{\mu}W_{\nu} - \partial_{\nu}W_{\mu})W^{\mu\dagger}Z^{\nu} - (\partial_{\mu}W_{\nu}^{\dagger} - \partial_{\nu}W_{\mu}^{\dagger})W^{\nu}Z^{\mu}] \\ & + g^2 \cos^2 \theta_W (W_{\mu}W_{\nu}^{\dagger}Z^{\mu}Z^{\nu} - W_{\mu}W^{\mu\dagger}Z_{\nu}Z^{\nu})\end{aligned}\tag{1103}$$

$$\begin{aligned}
& + e^2(W_\mu W_\nu^\dagger A^\mu A^\nu - W_\mu W^{\mu\dagger} A_\nu A^\nu) \\
& + eg \cos \theta_W \{W_\mu W_\nu^\dagger (Z^\mu A^\nu + A^\mu Z^\nu) - 2W_\mu W^{\mu\dagger} A_\nu Z^\nu\} \\
& + \frac{1}{2}g^2 W_\mu^\dagger W_\nu (W^{\mu\dagger} W^\nu - W^\mu W^{\nu\dagger}),
\end{aligned} \tag{1104}$$

$$\mathcal{L}_I^{\text{HH}} = -\lambda v \sigma^3 - \frac{1}{4}\lambda \sigma^4, \tag{1105}$$

$$\mathcal{L}_I^{\text{HB}} = \frac{1}{2}vg^2 W_\mu^\dagger W^\mu \sigma + \frac{1}{4}g^2 W_\mu^\dagger W^\mu \sigma^2 + \frac{vg^2}{4 \cos^2 \theta_W} Z_\mu Z^\mu \sigma + \frac{g^2}{8 \cos^2 \theta_W} Z_\mu Z^\mu \sigma^2 \tag{1106}$$

で与えられる [22, pp.500–501].

注解： $\mathcal{L}^{\text{B}} + \mathcal{L}^{\text{H}}$ の式(1102)の導出　まず式(1044):

$$W_{1\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu + W_\mu^\dagger), \quad W_{2\mu} = \frac{i}{\sqrt{2}}(W_\mu - W_\mu^\dagger)$$

および式(1045): $W_{3\mu} = \cos \theta_W Z_\mu + \sin \theta_W A_\mu$ を用いて, ゲージボゾンのラグランジアン密度(1092):

$$\mathcal{L}^{\text{B}} = \mathcal{L}_0^{\text{B}} + g\varepsilon_{ijk} W_{i\mu} W_{j\nu} \partial^\mu W_k^\nu - \frac{1}{4}g^2 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} W_j^\mu W_k^\nu W_{l\mu} W_{m\nu}$$

を書き換えよう．右辺第2項は

$$\begin{aligned}
& g\varepsilon_{ijk}W_{i\mu}W_{j\nu}\partial^\mu W_k^\nu \\
& =g(W_{1\mu}W_{2\nu}-W_{2\mu}W_{1\nu})\partial^\mu W_3^\nu + g(W_{2\mu}W_{3\nu}-W_{3\mu}W_{2\nu})\partial^\mu W_1^\nu \\
& \quad + g(W_{3\mu}W_{1\nu}-W_{1\mu}W_{3\nu})\partial^\mu W_2^\nu \\
& =g(W_{1\mu}W_{2\nu}-W_{2\mu}W_{1\nu})\partial^\mu W_3^\nu + g(W_{2\mu}\partial^\mu W_1^\nu - W_{1\mu}\partial^\mu W_2^\nu)W_{3\nu} \\
& \quad + g(W_{1\nu}\partial^\mu W_2^\nu - W_{2\nu}\partial^\mu W_1^\nu)W_{3\mu} \\
& =g\{i(W_\mu^\dagger W_\nu - W_\nu^\dagger W_\mu)\}(\cos\theta_W\partial^\mu Z^\nu + \sin\theta_W\partial^\mu A^\nu) \\
& \quad + g\{i(W_\mu\partial^\mu W^{\nu\dagger} - W_\mu^\dagger\partial^\mu W^\nu)\}(\cos\theta_W Z_\nu + \sin\theta_W A_\nu) \\
& \quad + g\{-i(W_\nu\partial^\mu W^{\nu\dagger} - W_\nu^\dagger\partial^\mu W^\nu)\}(\cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu) \\
& =ig\cos\theta_W[(W_\mu^\dagger W_\nu - W_\nu^\dagger W_\mu)\partial^\mu Z^\nu + (\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu)W^{\mu\dagger}Z^\nu \\
& \quad - (\partial_\mu W_\nu^\dagger - \partial_\nu W_\mu^\dagger)W^\nu Z^\mu] \\
& \quad + ie[(W_\mu^\dagger W_\nu - W_\nu^\dagger W_\mu)\partial^\mu Z^\nu + (\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu)W^{\mu\dagger}Z^\nu - (\partial_\mu W_\nu^\dagger - \partial_\nu W_\mu^\dagger)W^\nu Z^\mu] \\
& (\because g\sin\theta_W = e : (1046))
\end{aligned}$$

と変形でき，右辺第3項は

$$-\frac{1}{4}g^2\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}W_j^\mu W_k^\nu W_{l\mu}W_{m\nu}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4}g^2(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})W_j^\mu W_k^\nu W_{l\mu} W_{m\nu} \\
&= -\frac{1}{4}g^2W_j^\mu W_k^\nu (W_{j\mu} W_{k\nu} - W_{k\mu} W_{j\nu}) \\
&= -\frac{1}{4}g^2(W_1^\mu W_2^\nu - W_2^\mu W_1^\nu)(W_{1\mu} W_{2\nu} - W_{2\mu} W_{1\nu}) \\
&\quad -\frac{1}{4}g^2(W_2^\mu W_3^\nu - W_3^\mu W_2^\nu)(W_{2\mu} W_{3\nu} - W_{3\mu} W_{2\nu}) \\
&\quad -\frac{1}{4}g^2(W_3^\mu W_1^\nu - W_1^\mu W_3^\nu)(W_{3\mu} W_{1\nu} - W_{1\mu} W_{3\nu}) \\
&\quad (a_{jk,\mu\nu} \equiv W_{j\mu} W_{k\nu} - W_{k\mu} W_{j\nu} \text{ は添字 } j, k \text{ について反対称なので,} \\
&\quad W_1^\mu W_2^\nu a_{12,\mu\nu} + W_2^\mu W_1^\nu a_{21,\mu\nu} = (W_1^\mu W_2^\nu - W_2^\mu W_1^\nu)a_{12,\mu\nu}, \text{ etc.}) \\
&= -\frac{1}{4}g^2(W_1^\mu W_2^\nu - W_2^\mu W_1^\nu)(W_{1\mu} W_{2\nu} - W_{2\mu} W_{1\nu}) \\
&\quad -\frac{1}{4}g^2 \cdot 2W_3^\nu W_{3\nu}(W_1^\mu W_{1\mu} + W_2^\mu W_{2\mu}) \\
&\quad -\frac{1}{4}g^2 \cdot (-2W_3^\mu W_{3\mu})(W_1^\nu W_{1\nu} + W_2^\nu W_{2\nu}) \\
&= -\frac{1}{4}g^2\{i(W^{\mu\dagger}W^\nu - W^\mu W^{\nu\dagger})\}\{i(W_\mu^\dagger W_\nu - W_\mu W_\nu^\dagger)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}g^2\{2(\cos^2\theta_W Z^\nu Z_\nu + 2\sin\theta_W \cos\theta_W Z^\nu A_\nu + \sin^2\theta_W A^\nu A_\nu)\}2W_\mu W^{\mu\dagger} \\
& -\frac{1}{4}g^2\{-2(\cos^2\theta_W Z^\mu Z_\nu + 2\sin\theta_W \cos\theta_W Z^\mu A_\nu + \sin^2\theta_W A^\mu A_\nu)\} \\
& \times (W^\nu W_\mu^\dagger + W^{\nu\dagger} W_\mu) \\
& = \frac{1}{2}g^2 W_\mu^\dagger W_\nu (W^{\mu\dagger} W^\nu - W^\mu W^{\nu\dagger}) \\
& + g^2 \cos^2\theta_W (W_\mu W_\nu^\dagger Z^\mu Z^\nu - W_\mu W^{\mu\dagger} Z_\nu Z^\nu) \\
& + e^2 (W_\mu W_\nu^\dagger A^\mu A^\nu - W_\mu W^{\mu\dagger} A_\nu A^\nu) \\
& + eg \cos\theta_W \{W_\mu W_\nu^\dagger (Z^\mu A^\nu + A^\mu Z^\nu) - 2W_\mu W^{\mu\dagger} A_\nu Z^\nu\} \quad (\because g \sin\theta_W = e : (1046))
\end{aligned}$$

と計算できるので，ゲージボゾンの自己相互作用に関する項 $\mathcal{L}_I^{\text{BB}}$ を式(1104)で定義すれば

$$\begin{aligned}
& g\varepsilon_{ijk}W_{i\mu}W_{j\nu}\partial^\mu W_k^\nu - \frac{1}{4}g^2\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}W_j^\mu W_k^\nu W_{l\mu}W_{m\nu} = \mathcal{L}_I^{\text{BB}}, \\
& \mathcal{L}^{\text{B}} = \mathcal{L}_0^{\text{B}} + \mathcal{L}_I^{\text{BB}}
\end{aligned} \tag{1107}$$

となる．

次にユニタリーゲージ(1093): $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \sigma(x) \end{pmatrix}$ において，Higgs場のラグラ

ンジアン密度(1082):

$$\mathcal{L}^{\text{H}} = (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$$

を考える．共変微分の式(1081)は

$$\begin{aligned} D^\mu \Phi &= \left[\partial^\mu + \frac{i}{2} g \left\{ W_1^\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + W_2^\mu \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + W_3^\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} + \frac{i}{2} g' B^\mu \right] \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \sigma \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} g (W_1^\mu - i W_2^\mu) (v + \sigma) \\ \partial^\mu \sigma + \frac{i}{2} (g W_3^\mu - g' B^\mu) (v + \sigma) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{i}{2} g W^\mu (v + \sigma) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \partial^\mu \sigma + \frac{i}{2\sqrt{2}} \{ (g \cos \theta_{\text{W}} + g' \sin \theta_{\text{W}}) Z^\mu + (g \sin \theta_{\text{W}} - g' \cos \theta_{\text{W}}) A^\mu \} (v + \sigma) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を与える．上式最右辺において，式(1046)より

$$g \cos \theta_{\text{W}} + g' \sin \theta_{\text{W}} = \frac{g}{\cos \theta_{\text{W}}}, \quad g \sin \theta_{\text{W}} - g' \cos \theta_{\text{W}} = 0$$

となることに注意すると,

$$\begin{aligned}
(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) &= \frac{1}{4} g^2 W^{\mu\dagger} W_\mu (v + \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\partial^\mu \sigma) (\partial_\mu \sigma) + \frac{1}{8} \frac{g^2}{\cos^2 \theta_W} Z^\mu Z_\mu (v + \sigma)^2 \\
&= m_W^2 W_\mu^\dagger W^\mu + \frac{1}{2} (\partial^\mu \sigma) (\partial_\mu \sigma) + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu + \mathcal{L}_I^{\text{HB}}, \\
m_W &= \frac{1}{2} v g, \quad m_Z = \frac{v g}{2 \cos \theta_W} = \frac{m_W}{\cos \theta_W} : (1096), \quad \mathcal{L}_I^{\text{HB}} = (\text{式}(1106))
\end{aligned}$$

となる. これを

$$\begin{aligned}
-\mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 &= -\frac{1}{2} \mu^2 (v + \sigma)^2 - \frac{1}{4} \lambda (v + \sigma)^4 \\
&= -v(\mu^2 + \lambda v^2) \sigma - \frac{1}{2} (\mu^2 + 3\lambda v^2) \sigma^2 - \lambda v \sigma^3 - \frac{1}{4} \lambda \sigma^4 + \text{const} \\
&= -\frac{1}{2} m_H^2 \sigma^2 + \mathcal{L}_I^{\text{HH}} + \text{const}, \\
m_H &= \sqrt{-2\mu^2} : (1096), \quad \mathcal{L}_I^{\text{HH}} = (\text{式}(1105)) \quad (\because v = (-\mu^2/\lambda)^{1/2} : (1096))
\end{aligned}$$

と辺々足して定数項を落とすと,

$$\mathcal{L}^{\text{H}} = m_W^2 W_\mu^\dagger W^\mu + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu + \frac{1}{2} (\partial^\mu \sigma) (\partial_\mu \sigma) - \frac{1}{2} m_H^2 \sigma^2 + \mathcal{L}_I^{\text{HH}} + \mathcal{L}_I^{\text{HB}} \quad (1108)$$

を得る.

$\mathcal{L}^B$ の式(1107)と $\mathcal{L}^H$ の式(1108)を辺々足して, $\mathcal{L}_0^B$ の具体的な表式(1052)を代入すると, レプトンを除いたラグランジアン密度 $\mathcal{L}^B + \mathcal{L}^H$ の式(1102)が導かれる.

次にレプトンを含む残りの項は

$$\mathcal{L}^L + \mathcal{L}^{LH} = \bar{\psi}_l(i\not{\partial} - m_l)\psi_l + \bar{\psi}_{\nu_l}(i\not{\partial} - m_{\nu_l})\psi_{\nu_l} + \mathcal{L}_I^{LB} + \mathcal{L}_I^{HL} \quad (1109)$$

と書き換えられる. ただし各相互作用項は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I^{LB} = & e\bar{\psi}_l A\psi_l \\ & - \frac{g}{2\sqrt{2}}\{\bar{\psi}_{\nu_l} W(1 - \gamma_5)\psi_l + \bar{\psi}_l W^\dagger(1 - \gamma_5)\psi_{\nu_l}\} \\ & - \frac{g}{4\cos\theta_W}\bar{\psi}_{\nu_l} Z(1 - \gamma_5)\psi_{\nu_l} \\ & + \frac{g}{4\cos\theta_W}\bar{\psi}_l Z(1 - 4\sin^2\theta_W - \gamma_5)\psi_l, \end{aligned} \quad (1110)$$

$$\mathcal{L}_I^{HL} = -\frac{1}{v}m_l\bar{\psi}_l\psi_l\sigma - \frac{1}{v}m_{\nu_l}\bar{\psi}_{\nu_l}\psi_{\nu_l}\sigma \quad (\mathcal{L}^{LH} \text{ との混同に注意}) \quad (1111)$$

で与えられる [22, p.502].

注解: $\mathcal{L}^L + \mathcal{L}^{LH}$ の式(1109)の導出 レプトン系のラグランジアン密度 $\mathcal{L}^L$ は自由場項

(1027)と相互作用項(1047)の和(1042)で与えられる．特に相互作用項(1047)は，荷電力レントの表式(1031)と中性カレントの表式(1058)を代入すると，式(1110)の $\mathcal{L}_I^{\text{LB}}$ に書き換えられることが確かめられる．よって式(1110)の相互作用項 $\mathcal{L}_I^{\text{LB}}$ を用いて，レプトン系のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}^{\text{L}} = \bar{\psi}_l i \not{\partial} \psi_l + \bar{\psi}_{\nu_l} i \not{\partial} \psi_{\nu_l} + \mathcal{L}_I^{\text{LB}} : (1091)$$

と表される．

次にレプトンとHiggs場の相互作用項(1087):

$$\mathcal{L}^{\text{LH}} = -g_l(\bar{\Psi}_l^{\text{L}} \psi_l^{\text{R}} \Phi + \Phi^\dagger \bar{\psi}_l^{\text{R}} \Psi_l^{\text{L}}) - g_{\nu_l}(\bar{\Psi}_l^{\text{L}} \psi_{\nu_l}^{\text{R}} \tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}^\dagger \bar{\psi}_l^{\text{R}} \Psi_l^{\text{L}})$$

は，ユニタリーゲージのHiggs場

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \sigma \end{pmatrix} : (1093), \quad \therefore \tilde{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + \sigma \\ 0 \end{pmatrix}$$

に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{LH}} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(v + \sigma) \{g_l(\bar{\psi}_l^{\text{L}} \psi_l^{\text{R}} + \bar{\psi}_l^{\text{R}} \psi_l^{\text{L}}) + g_{\nu_l}(\bar{\psi}_{\nu_l}^{\text{L}} \psi_{\nu_l}^{\text{R}} + \bar{\psi}_{\nu_l}^{\text{R}} \psi_{\nu_l}^{\text{L}})\} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(v + \sigma)(g_l \bar{\psi}_l \psi_l + g_{\nu_l} \bar{\psi}_{\nu_l} \psi_{\nu_l}) \end{aligned}$$

$$=\mathcal{L}_I^{\text{HL}} - \bar{\psi}_l m_l \psi_l - \bar{\psi}_{\nu_l} m_{\nu_l} \psi_{\nu_l}, \quad (1112)$$

$$\mathcal{L}_I^{\text{HL}} = -\frac{1}{v} m_l \bar{\psi}_l \psi_l \sigma - \frac{1}{v} m_{\nu_l} \bar{\psi}_{\nu_l} \psi_{\nu_l} \sigma : (1111),$$

$$m_l = \frac{v g_l}{\sqrt{2}}, \quad m_{\nu_l} = \frac{v g_{\nu_l}}{\sqrt{2}} : (1097)$$

と計算される．ただし第2の等号では任意のレプトン場 ψ に対して

$$\bar{\psi}^{\text{L}} \psi^{\text{R}} + \bar{\psi}^{\text{R}} \psi^{\text{L}} = \bar{\psi} P_{\text{R}}^2 \psi + \bar{\psi} P_{\text{L}}^2 \psi = \bar{\psi} (P_{\text{R}} + P_{\text{L}}) \psi = \bar{\psi} \psi$$

となることを用いた．

最後に $\mathcal{L}^{\text{L}}$ の式(1091)と $\mathcal{L}^{\text{LH}}$ の式(1112)を辺々足すと，レプトンを含む項 $\mathcal{L}^{\text{L}} + \mathcal{L}^{\text{LH}}$ の式(1109)を得る．

2式(1102),(1109)を合わせて，全ラグランジアン(1094),(1095)を得る．ただし相互作用項は式(1104),(1105),(1106),(1110),(1111)の和

$$\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_I^{\text{LB}} + \mathcal{L}_I^{\text{BB}} + \mathcal{L}_I^{\text{HH}} + \mathcal{L}_I^{\text{HB}} + \mathcal{L}_I^{\text{HL}}$$

で与えられる．

15.3.2項の原稿

ここまでは全てのレプトンとゲージボゾンの質量をゼロと扱ってきたものの、実際には光子を除き、これらの粒子はゼロでない質量を持つ。ところが式(1007)の箇所で一般のYang–Mills理論に関して述べたように、ゲージボゾン $W^\pm, Z^0$ の質量 m_W, m_Z を考慮してラグランジアン密度に質量項(1060)を加えると、理論の $SU(2) \times U(1)$ 不変性が失われてしまう。同様にレプトンの質量を考慮して、例えば電子(場 $\psi = \psi_e$, 質量 $m = m_e$)についてラグランジアン密度に質量項(1061)を加えることが考えられるものの、最右辺を見れば明らかなようにこれは $SU(2) \times U(1)$ 不変性を持たない^{*178}。そして実は素朴に質量項(1060),(1061)を与えた理論は繰り込み不能となる。そこで理論のゲージ不変性・繰り込み可能性を壊すことなくゼロでない質量を導入する方法・機構として、以下では自発的な対称性の破れを説明する。

- まず Goldstone モデル ($U(1)$ 位相変換の下で不変な場の理論のモデル)において、自発的な対称性の破れ概念を導入する。Goldstone モデルからは自然界で観測されない質量ゼロの(光子以外の)ボゾンが生じる。
- この問題は全域的な位相変換を局所的な位相変換に改めてゲージ不変な理論を構築

^{*178} これは左手型の場と右手型の場とで変換則が異なるためであり、電磁的なゲージ変換やQCDにおけるゲージ変換に対してこの項が不変であったのとは対照的である。

し、自発的な対称性の破れを導入することによって解消することを説明する。これを Higgs 機構という。このとき理論はその構成によりゲージ不変でありながら、ゲージ・ボソンはゼロでない質量を獲得する。

- 最後に、以上を $SU(2) \times U(1)$ ゲージ不変な電弱理論へと一般化

→ Weinberg と Salam による電弱標準理論

ゲージ不変・繰り込み可能であり、

ラグランジアン密度が $W^\pm, Z^0$ ボソンの質量項を含む。

ここでのアイデアはあくまで、粒子の質量を Higgs 場との相互作用項という間接的な形で導入すれば、質量を理論の対称性と両立できるということであり、これを以って Higgs 粒子が質量の起源を「説明」とすると喧伝する通俗的な解説は過言である。「数学的なモデル」と「物理的なメカニズム」の間にはギャップがあり、それらは決して同一視できない。

まず初めに自発的な対称性の破れの身近な例として、強磁性を取り上げよう。磁性体の系のハミルトニアンは回転に対して不変であるにも関わらず、基底状態では磁性体全体として特定の方向を向いたゼロでない磁化 M が生じており、 M の方向の異なる状態が縮退している。このように縮退した状態から任意の状態が選ばれると、その基底状態は一般に系のラグランジアンやハミルトニアンと同じ対称性を持たず、非対称な基底状態が現れる。これを自発的な対称性の破れと呼ぶ。

場の理論においても基底状態(真空)が縮退していれば、自発的な対称性の破れが起こり得る。このことを最も簡単な理論モデルである、Goldstoneモデルを用いて説明する。Goldstoneモデルでは複素スカラー場(1062) (ただし $\phi_1(x), \phi_2(x)$ は実スカラー場)をラグランジアン密度(1063)で記述する。古典的に考えた“基底状態”はハミルトニアン密度(1064)が最小の状態であり、したがって場 $\phi(x)$ がポテンシャル・エネルギー密度 $\mathcal{V}(\phi)$ を最小にするような定数値をとる状態である。(ハミルトニアン密度(1064)の最初の2項は正定値であり、 $\phi(x)$ が定数のときゼロになるから。ハミルトニアン密度(1064)については[導出スライドを見よ](#)。)

μ^2 の符号に応じて、性格の異なる2通りの“基底状態”が現れる：

1. $\mu^2 > 0$ のとき。

ポテンシャル $\mathcal{V}(\phi)$ の概形は図77のようであり、古典的な“基底状態”は $\phi = 0$ である。

2. $\mu^2 < 0$ のとき。

ポテンシャル $\mathcal{V}(\phi)$ の概形は図78のような(メキシコ帽子型の [21, p.189])回転4次曲面であり、古典的な“基底状態”はその最低値を与える円周(1065)において実現される。位相角 θ の任意性に応じた異なる“基底状態”が“縮退”しており、もとのラグランジアン密度自体は大域的U(1)位相変換(1066)に対して不変であるにも関わらず、特定の θ で指定される“基底状態”は対称性を自発的に破っている。

$\mu^2 < 0$ の場合に対して，例えば $\theta = 0$ の安定な平衡値(1067)を考え，式(1068)のようにその周りの摂動 $\sigma(x), \eta(x)$ (ともに実場)を導入すると，ラグランジアン密度は式(1069)へと書き換えられる(定数項は省いた；[導出スライド参照](#))． λ を含む3つの項がポテンシャル $\mathcal{V}(\phi)$ に由来しており，ここから摂動の2次までの近似で，ポテンシャルは ϕ_1 軸方向の変位 σ に対して2次の変化をするのに対し， ϕ_2 軸方向の，したがって円周方向の変位 η に対しては変化しないことが読み取れる．(このことは図78に示したポテンシャルの概形からも視覚的に納得できる．) ところで相互作用項を除いた自由場項と見なされる $\mathcal{L}_0$ の部分は， $\sigma(x), \eta(x)$ がKlein-Gordon場であることを意味しており，場の2次の項の係数が質量に対応するため，場の量子化によって生じる σ ボゾンはゼロでない質量 $\sqrt{2\lambda v^2}$ を持つのに対し， η ボゾンの質量はゼロとなる．

Goldstoneモデルから質量ゼロのボゾンが生じる問題は，局所的なゲージ変換へと一般化したU(1)変換(1070)に対して不変な理論において解消される．理論のゲージ不変性を回復するには，位相変換(1070)と同時にゲージ変換(1071)を受けるゲージ場 $A_\mu(x)$ を導入し，微分の共変微分への置き換え(1072)を行えば良い．Higgsモデルはさらに自由ゲージ場項(1073)を付け加えた，ゲージ不変なラグランジアン密度(1074)で定義される．HiggsモデルはGoldstoneモデルと同様の機構により， $\mu^2 < 0$ に対して自発的な対称性の破れを起こす．

$\mu^2 < 0$ の場合に対して，再び式(1067),(1068)で安定な平衡値 ϕ_0 とその周りの摂動 $\sigma(x), \eta(x)$ (ともに実場)を導入すると，Higgsモデルのラグランジアン密度は式(1075)へと書き換えられる^{*179}．ただし定数項は省いた．また場の2次の項を自由場項と見なし，場の3次以上の項を相互作用項に含めた(導出スライド参照)．この結果を解釈する前に，次の問題を解消しなければならない．すなわち

1. 自由場項に双1次項 $A^\mu \partial_\mu \eta$ が現れることは， A_μ と η が独立な場ではないことを示唆している．
2. 初めは質量のないベクトル場 A_μ を考えており，その独立な自由度は光子と同様に2であるのに対し，書き換えられたラグランジアン密度には質量項 $\frac{1}{2}(qv)^2 A_\mu A^\mu$ が現れるので，Proca方程式(1012)の箇所で見たとように，ゲージ場は3つの偏極状態を持つ．このように自由度が見かけ上1つ増えていることは，書き換えられたラグランジアン密度が非物理的な場を余計に1つ含んでいることを意味している．

実際スカラー場 $\eta(x)$ は非現実的なゴースト場であり，局所的なU(1)ゲージ変換を利用して式(1068)の場 $\phi(x)$ の位相を調節すれば，その虚部 $\eta(x)$ を消去することができる．このような場 $\eta(x)$ の現れないゲージは“ユニタリーゲージ”と呼ばれ，このゲージにおいてHiggsモデルのラグランジアン密度は式(1076)のように表される．これがHiggsモ

^{*179} Goldstoneモデルのラグランジアン密度(1069)に対する付加的な自由場項は，“電荷” q を含む項 $qv A^\mu \partial_\mu \eta + \frac{1}{2}(qv)^2 A_\mu A^\mu$ である．

デルの最終的な結果である．（すると自由場ラグランジアン密度から $\eta(x)$ と $A_\mu(x)$ の結合した双1次項が除かれるので， $A_\mu(x)$ を独立な自由場と見なして量子化を行うことが許される [22, p.491]. ）

以上で見たことは次のようにまとめられる．すなわち理論のゲージ不変性を損なうことなくゲージ場 A_μ は質量を獲得し，これに伴ってゲージ場の自由度は2から3に増大する．このような現象を“Higgs機構”と呼ぶ．一方Goldstoneモデルにおける，目障りな質量ゼロの η 粒子は，Higgsモデルにおいてはゲージ不変性を根拠に消し去ることができる．ゲージ場 A_μ の獲得した第3の自由度は，もともとはこの場 $\eta(x)$ が持っていた自由度に他ならない(式(1077)を見よ)．

ここでは質量のないレプトンとゲージボソンを想定した15.3.1項における電弱統一理論モデルに，Higgs機構を適用する．まず元の理論がSU(2)ゲージ不変性を持つことを踏まえて，GoldstoneモデルやHiggsモデルにおけるスカラー場 $\phi(x)$ の代わりに弱アイソスピン2重項(1078)を考え，これをHiggs場と呼ぼう．ただし $\phi_a(x)$ と $\phi_b(x)$ はLorentzスカラーであり，ゲージ変換に対してはアイソスピン2重項の定義より，式(1037)の箇所で見た左手型のレプトン場 $\Psi_l^L(x)$ と同様の変換則(1079),(1080)に従う．ただし Y は場 $\Phi(x)$ の弱超電荷であり，その値はすぐ後で決める．

このとき式(1004)の箇所で展開したYang–Mills理論の一般論に従い，Higgsスカラー場 $\Phi(x)$ の共変微分をレプトン場 $\Psi_l^L(x)$ の式(1037)と同様に式(1081)で定義し，Higgs場

$\Phi(x)$ のラグランジアン密度を式(1082)とすれば，元の理論におけるラグランジアン密度(1048)にHiggs場の項(1082)を付け加えた全ラグランジアン密度 $\mathcal{L} = \mathcal{L}^L + \mathcal{L}^B + \mathcal{L}^H$ もまた $SU(2) \times U(1)$ ゲージ不変となることが保証される．

Higgsモデルの場合と同様，式(1082)のパラメータ $\lambda > 0$, $\mu^2 < 0$ に対して古典的なエネルギー密度が最低値をとるのは，Higgs場 $\Phi(x)$ が条件(1083)を満たす定数値 Φ_0 をとるときであり，自発的な対称性の破れは式(1083)を満たす無数の値 Φ_0 のうち，特定の Φ_0 が“基底状態”に選ばれることに対応する．ここで大域的な位相変換の自由度を利用して， Φ_0 の値を式(1084)のように選んでも一般性を失わない．

Higgs機構の導入の後にも通常の電荷保存則が成り立つためには，基底状態は $U(1)$ 電磁ゲージ変換(式(1070)と同様の変換 $\Phi(x) \rightarrow e^{-iQf(x)} \Phi(x)$, etc.)の下で不変でなければならない．ここでは Φ_0 を下側の成分 ϕ_b^0 だけがゼロでないように選んだので，成分 ϕ_b^0 の電荷が中性 $Q = 0$ であれば，この変換に対する不変性が満たされる．(しかるに $\Psi_l^L(x)$ の下側の成分 $\psi_l^L(x)$ の弱アイソスピン I_3^W が $-1/2$ であったのと同様に(15.3.1項の表12)，Higgs場 $\Phi(x)$ の下側の成分 ϕ_b^0 の弱アイソスピン I_3^W もまた $-1/2$ であると考えと，)成分 ϕ_b^0 の電荷が $Q = 0$ となるためには，式(1085)においてHiggs場の弱超電荷を $Y = 1/2$ とすれば良い．このときHiggs機構の導入の後にも電磁的なゲージ不変性は自発的な対称性の破れを起こさないので，光子の質量はゼロに保たれる．

再び Higgs 場を真空場 Φ_0 (“基底状態” の場) とそこからのズレに分けて式(1086)のように書くと, ここでも3つの場 $\eta_1(x), \eta_2(x), \eta_3(x)$ を非物理的な場に同定することができる. 実際これらは適当なユニタリーゲージにおいて消去することができ([導出スライド参照](#)), 失われた自由度は3つのボゾン $W^\pm, Z^0$ の場に吸収され, $W^\pm, Z^0$ ボゾンは質量を獲得する. 一方, 場 $\sigma(x)$ はユニタリーゲージにおいても残り, Higgs スカラーボゾン(ゼロでない質量を持つ, 電氣的に中性なスピン0の粒子)を生じる.

レプトンに質量を与えるために“標準模型”(standard model)では, レプトンと Higgs ボゾンの相互作用としてラグランジアン密度(1087),(1088)を考える(レプトンの世代 l について和をとる). これはスカラー場 ϕ をスピノル場 ψ で挟んだ $\bar{\psi}\phi\psi$ という形(1089)をしており, このような項は一般に湯川型相互作用と呼ばれる. このラグランジアン密度 $\mathcal{L}^{\text{LH}}$ は $\text{SU}(2) \times \text{U}(1)$ ゲージ不変であることを確認できる. この後でこの項がゼロでないレプトンの質量を生じることを見る.

- ニュートリノの質量をゼロとする取り扱いは,
相互作用項(1087)の第2項における結合定数を $g_{\nu_l} = 0$ と置くことに対応する.
- ここまでは純粋なレプトンの過程のみを考察してきたものの,
実はクォーク・ハドロンを含む半レプトン過程を扱えるように理論を拡張して初めて, 理論は繰り込み可能となる.

これまでに導入した，Higgs機構を含む電弱標準理論の全ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ を改めてまとめると式(1090)となる．ここに

- $\mathcal{L}^L$ はレプトン系のラグランジアン密度(1091)
- $\mathcal{L}^B$ はゲージボゾンのラグランジアン密度(1092)
- Higgs場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}^H = (\text{式(1082)})$
- レプトンとHiggs場の相互作用項 $\mathcal{L}^{LH} = (\text{式(1087)})$

ここでラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ の物理的な意味を解釈するために，ゲージ場 W_i^μ, B^μ を $W^\pm$ ボゾン場 $W^\mu, W^{\mu\dagger}$ ， Z^0 ボゾン場 Z^μ ，電磁場 A^μ によって表す．さらに非現実的な場 η_i を理論から取り除くためにユニタリーゲージを採用し，Higgs場(1086)を式(1093)のように表す．

するとラグランジアン密度(1090)は式(1094),(1095)と書き換えられる．ただし各ボゾンと各レプトンの質量は式(1096),(1097)のように同定される．(相互作用項 $\mathcal{L}_I$ の具体的表式を含め，[導出スライドを参照](#)．)自由場項 $\mathcal{L}_0$ の表式(1095)を見ると，系は光子，荷電レプトン，中性レプトン， $W^\pm$ ボゾン， Z^0 ボゾン，Higgsボゾンから成ることが明白である．ボゾンの質量項はHiggs場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}^H$ に由来しており，またレプトンの質量項は予告通り，レプトンとHiggs場の相互作用項 $\mathcal{L}^{LH}$ に由来している．

15.4 標準模型

QCDではラグランジアン密度(1026):

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\Psi}^f (i\not{D} - m_f) \Psi^f - \frac{1}{4} G_{i\mu\nu} G_i^{\mu\nu}$$

を用いてクォークの強い相互作用を, 電弱理論ではラグランジアン密度(1090):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\text{L}} + \mathcal{L}^{\text{B}} + \mathcal{L}^{\text{H}} + \mathcal{L}^{\text{LH}},$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}^{\text{L}} = i(\bar{\Psi}_l^{\text{L}} \not{D} \Psi_l^{\text{L}} + \bar{\psi}_l^{\text{R}} \not{D} \psi_l^{\text{R}} + \bar{\psi}_{\nu_l}^{\text{R}} \not{D} \psi_{\nu_l}^{\text{R}}) \\ \mathcal{L}^{\text{B}} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{i\mu\nu} W_i^{\mu\nu} \\ \mathcal{L}^{\text{H}} = (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \\ \mathcal{L}^{\text{LH}} = -g_l (\bar{\Psi}_l^{\text{L}} \psi_l^{\text{R}} \Phi + \Phi^\dagger \bar{\psi}_l^{\text{R}} \Psi_l^{\text{L}}) - g_{\nu_l} (\bar{\Psi}_l^{\text{L}} \psi_{\nu_l}^{\text{R}} \tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}^\dagger \bar{\psi}_l^{\text{R}} \Psi_l^{\text{L}}) \end{array} \right.$$

を用いてレプトンの電弱相互作用を記述した. 最後にクォークの電弱相互作用を理論に含めて標準模型を完成させよう [47, pp.177–183] [49, pp.240–243].

まずクォークのラグランジアン密度を，レプトンの項 $\mathcal{L}^L$ と類似の形

$$\mathcal{L}^q = \bar{\Psi}_{q_k}^L i \not{D} \Psi_{q_k}^L + \bar{\psi}_{u_k}^R i \not{D} \psi_{u_k}^R + \bar{\psi}_{d_k}^R i \not{D} \psi_{d_k}^R \quad (1113)$$

で与える．ただし $(u_1, u_2, u_3) = (u, c, t)$, $(d_1, d_2, d_3) = (d, s, b)$ はクォークの香り，

$$\Psi_{q_k}^L = \begin{pmatrix} \psi_{u_k}^L \\ \psi_{d_k}^L \end{pmatrix} \quad (1114)$$

は第 k 世代の左手型クォーク場のSU(2) 2重項である．各物質場の共変微分は

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s A_i^\mu T_{ic} + ig W_i^\mu T_i + ig' B_\mu Y \quad (1115)$$

と統一的に書くことができ，物質場に応じて表13の値を選ぶ．

表13 物質場の共変微分を定義する量

レプトン	T_{ic}	T_i	Y	クォーク	T_{ic}	T_i	Y
Ψ_l^L	0	$\tau_i/2$	$-1/2$	$\Psi_{q_k}^L$	$\lambda_i/2$	$\tau_i/2$	$1/6$
ψ_l^R	0	0	-1	$\psi_{u_k}^R$	$\lambda_i/2$	0	$2/3$
ψ_l^R	0	0	0	$\psi_{d_k}^R$	$\lambda_i/2$	0	0

次にクォークと Higgs 場の相互作用項を

$$\mathcal{L}^{qH} = - \left[G_{ij}^u \bar{\Psi}_{q_i}^L \tilde{\Phi} \psi_{u_j}^R + G_{ij}^d \bar{\Psi}_{q_i}^L \Phi \psi_{d_j}^R \right] + \text{h.c.} \quad (1116)$$

で与える．最後に純粋なグルーオン場の項 $-\frac{1}{4}G_{i\mu\nu}G_i^{\mu\nu}$ を含めてボゾン場の項を

$$\mathcal{L}^B = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{i\mu\nu}W_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{i\mu\nu}G_i^{\mu\nu} \quad (1117)$$

と再定義する．

以上より標準理論の完全なラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^L + \mathcal{L}^q + \mathcal{L}^B + \mathcal{L}^H + \mathcal{L}^{LH} + \mathcal{L}^{qH} \quad (1118)$$

で与えられる．

15.4 節の原稿

最後に素粒子の標準模型を定義する完全なラグランジアンを見て場の量子論を締め括ろう。我々はこれまで、QCDと電弱理論を別々に論じてきた。QCDではラグランジアン密度(1026)を用いてクォークの強い相互作用を記述し、また電弱理論ではラグランジアン密度(1090)を用いてレプトンの電弱相互作用を記述した。しかしながら現実には、クォークは強い力だけでなく弱い力も感じる。そこでクォークの電弱相互作用を扱うために、理論を拡張する必要がある。その方法は既に見たレプトンの電弱理論の定式化と似たものになるので、結果だけを記そう [47, pp.177–183] [49, pp.240–243].

まずクォークのラグランジアン密度を、レプトンの項 $\mathcal{L}^L$ と類似の形(1113)で与える。ただしここではクォークの香りを $(u_1, u_2, u_3) = (u, c, t), (d_1, d_2, d_3) = (d, s, b)$ と表記しており、例えば $\psi_{u_k}^R$ は香り u_k の右手型クォーク場、 $\Psi_{q_k}^L$ は式(1114)に示した第 k 世代の左手型クォーク場のSU(2) 2重項である。式(1113)の $\mathcal{L}^q$ では世代 $k = 1, 2, 3$ に関する和が含意されている。また各物質場の共変微分は式(1115)のように統一的に書くことができ、ここに T_{ic}, T_i はそれぞれSU(3)とSU(2)の生成子、 Y は(弱)超電荷であり、物質場に応じて表13の値を選ぶ(生成子=0は群の自明な表現に対応)。また第2項では $i = 1, \dots, 8$ で、第3項では $i = 1, 2, 3$ で和をとる。(Higgs場の共変微分は電弱統一理論と変わりなく、グルーオン場との結合項を含まず、そのためグルーオン場の質量項は現れない。) このときクォークのラグランジアン密度(1113)は $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$ における第1項 $\bar{\Psi}^f i \not{D} \Psi^f$ を含み、また例えば場 $\Psi_{q_k}^L$ はグルーオン、 $W^\pm, Z^0$ ボゾン、光子の全てと相

相互作用することになる.

次にクォークに質量を与えるために, $\mathcal{L}^{\text{LH}}$ のレプトンと Higgs 場の湯川型相互作用項 (1101) と類似の形 (1116) によってクォークを Higgs 場と結合する. ここに G_{ij}^u, G_{ij}^d は定数係数, h.c. は Hermite 共役であり, 世代の添字 $i, j = 1, 2, 3$ について和をとるものとする. 系が自発的に対称性を破ると, 式 (1116) は $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$ における質量項 $-m_f \bar{\Psi}^f \Psi^f$ を生じる.

最後に $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$ における純粋なグルーオン場の項 $-\frac{1}{4} G_{i\mu\nu} G_i^{\mu\nu}$ を含めてボゾン場のラグランジアン密度を式 (1117) で再定義する.

以上より標準理論の完全なラグランジアン密度は式 (1118) で与えられる. こうして大域的に述べると標準模型は, 自発的に対称性を破った Higgs スカラー場を背景に据える, $\text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times \text{U}(1)$ ゲージ不変な Yang-Mills 理論として定式化されると要約できる.

第Ⅳ部

ループ量子重力

16 序論

■表記法など [2, xxii]

- 特に断りのない限り,
 - $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$ は時空添字, $I, J, \dots = 0, 1, 2, 3$ は内部 Lorentz 添字 [2, p.34]
 - $a, b, \dots = 1, 2, 3$ は3次元の空間添字, $i, j, \dots = 1, 2, 3$ は3次元 Euclid 空間の添字
- 例えば時空座標 x と Lorentz ベクトル e の成分は

$$x^\mu = (t, \vec{x}) = (x^0, x^a), \quad (1119)$$

$$e^I = (e^0, e^i). \quad (1120)$$

- Minkowski 計量は第 I 部, 第 III 部と逆符号

$$(\eta_{IJ}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1121)$$

で定義する^{*180}.

^{*180} すると定義式に奇数個の計量を含む量 $\Gamma_{\lambda, \mu\nu}, R_{\mu\nu\rho\sigma}$, R は符号が反転するのに対し, 偶数個の計量を含む量 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}, R^\mu_{\nu\rho\sigma}, R_{\mu\nu}$ の符号は不変に留まる.

- 4次元の完全反対称 Levi-Civita 記号 $\epsilon^{IJKL}, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ を, 任意の座標系で

$$\epsilon^{0123} = 1 = -\epsilon_{0123} \quad (1122)$$

と約束する [1, p.61]. 3次元では $\epsilon_{ijk}, \epsilon_{abc}$ に対して同様に $\epsilon_{123} = \epsilon^{123} = 1$.

- Minkowski 空間における反対称テンソルの **Hodge 双対** を

$$F_{IJ}^* \equiv \star F_{IJ} \equiv \frac{1}{2!} \epsilon_{IJKL} F^{KL}, \quad T_I^* \equiv \frac{1}{3!} \epsilon_{IJKL} T^{JKL}, \quad \text{etc.} \quad (1123)$$

で定義する [1, p.61].

- 添字の対称化と反対称化は係数 $1/2$ を付けて定義する :

$$A_{(ab)} = \frac{1}{2}(A_{ab} + A_{ba}), \quad A_{[ab]} = \frac{1}{2}(A_{ab} - A_{ba}). \quad (1124)$$

- Planck単位系 ($G, c, \hbar = 1$) では, Planck スケール

$$l_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1.6 \times 10^{-33} \text{ cm}, \quad t_P = \frac{l_P}{c} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} = 5.4 \times 10^{-44} \text{ s},$$

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.2 \times 10^{-5} \text{ g} \quad (1125)$$

を単位として長さ・時間・質量を測ることになる [12, pp.58–59].

- $G = 1$ の代わりに $8\pi G = 1$, または $8\pi G\gamma = 1$ と
おく場合もある ($\gamma \sim 1$ は Immirzi パラメータ) [1, pp.13–14, p.18, p.59].
- 宇宙論的な長さスケール $L \sim 1/\sqrt{\Lambda}$ (Λ は宇宙定数) との比は, 無次元の定数

$$\left(\frac{l_P}{L}\right)^2 \sim \frac{\Lambda \hbar G}{c^3} \sim 10^{-120} \quad (1126)$$

を与える [1, pp.58–59, p.126].

第16章の原稿(序文)

第IV部ではいよいよループ量子重力を紹介する．本題に入る前に，まずは表記法などの取り決めをまとめておく．

- これから見るように，量子重力の基礎となるテトラードを用いた重力理論の定式化では，各時空点に付随する局所慣性系の間での Lorentz 変換はゲージ変換と見なされる．言い換えると Yang–Mills 理論におけるゲージ変換に関する“内部添字”の役割を Minkowski 時空の Lorentz 添字が担う．そこで4次元の時空添字 $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$ と区別して，内部 Lorentz 添字 [2, p.34] を大文字のラテン文字 $I, J, \dots = 0, 1, 2, 3$ で表す(特殊相対論ではギリシャ文字 $\mu, \nu, \dots$ と区別されない)．また3次元空間の添字も一般には冒頭のラテン文字 $a, b, \dots = 1, 2, 3$ で表し，特に平坦な Euclid 空間に関しては $i, j, \dots = 1, 2, 3$ と書き分けることにする．このとき例えば時空座標 x と Lorentz ベクトル e の成分はそれぞれ式(1119),(1120)のように表される．3次元のベクトルは太字を用いる代わりに，式(1119)のように矢印を付けて表記する．
- Minkowski 計量は式(1121)のように第I部，第III部と逆符号に採る．計量の符号系の異なる流儀で書かれた式を比較するには，計量の符号の反転に伴う物理量の符号の反転の有無を，定義式に含まれる計量の次数に基づき調べれば良い．すると例えば定義式に奇数個の計量を含む量 $\Gamma_{\lambda, \mu\nu}, R_{\mu\nu\rho\sigma}, R$ は符号が反転するのに対し，偶数個の計量を含む量 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}, R^\mu_{\nu\rho\sigma}, R_{\mu\nu}$ の符号は不変に留まる．なお Lorentz 添字 $I, J, \dots$ の上

げ下げは η_{IJ} で行い, Euclid空間の添字 $i, j, \dots$ の上げ下げはKroneckerのデルタ δ_{ij} で行う.

- 4次元の完全反対称Levi-Civita記号 $\epsilon^{IJKL}, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ の任意の座標系での成分を式(1122)で約束する [1, p.61]. そのためにはLevi-Civita記号は擬テンソルの変換則(41)に従うと考えれば良い. また式(1122)最左辺の添字を全てMinkowski計量で下ろすと, 最右辺のように符号が反転する. さらに3次元では $\epsilon_{ijk}, \epsilon_{abc}$ に対して同様に $\epsilon_{123} = \epsilon^{123} = 1$.
- Levi-Civita記号を用いて, Minkowski空間における反対称な反変テンソルのHodge双対を式(1123)で定義する [1, p.61]. Hodge双対を表す星印 $\star$ を, もとのテンソルに左から作用してHodge双対を作る演算子のように書くこともある. 2.2.1項で導入した双対テンソル(43)は共変テンソルに対して定義されており, Hodge双対(1123)と混同しないよう注意しよう.
- 添字の対称化と反対称化の記法を基本的に, 式(1124)のように係数 $1/2$ を付けて定義する. 式(1124)は A_{ab} の対称部分と反対称部分に他ならない.
- 自然の3つの基本定数, 光速 c , 換算Planck定数 $\hbar$, 万有引力定数(ないしNewton定数) G から作られるのスケール(1125)をPlanckスケールといい, 式(1125)の l_P, t_P, m_P をそれぞれ順にPlanck長さ, Planck時間, Planck質量と呼ぶ. Planckスケールとは言わば物理的世界にとって自然な長さや時間, 質量の単位である. Planck長さは 10^{-33} cm程度であり, Bohr半径 $a_0 \sim 10^{-9}$ cmや古典電子半径 $r_0 \sim 10^{-13}$ cmに比べて極めて小さい. Planck時間はPlanck長さを光が進む時間であり, 10^{-44} s程

度に過ぎない．他方で Planck 質量は 10^{-5} g であり，陽子質量のおおよそ 10^{19} 倍程度に大きい．ここで基本定数 $G, c, \hbar$ を全て 1 とおく単位系として Planck 単位系を導入する [12, pp.58–59]．このとき Planck スケール (1125) が 1 と置かれるため，Planck 単位系では Planck スケールを単位として長さや時間，質量を測っていることになる． c と $\hbar$ のみを 1 とおく自然単位系では全ての物理量が質量のベキで表されたのに対し，Planck 単位系ではもはや全ての物理量が無次元量で表される．このため面白いことに，Planck 単位系を用いれば長さ，時間，質量の大小を比較できる．実際，例えば 1 cm は Planck 長さを単位として 10^{33} 程度，1 s は Planck 時間を単位として 10^{44} 程度，1 g は Planck 質量を単位として 10^5 程度なので，1 g よりも 1 cm の方が圧倒的に大きく，さらに 1 cm よりも 1 s の方が圧倒的に大きいことになる．

- Einstein 方程式において Newton 定数 G は数係数 8π を伴う結合定数 $8\pi G$ の形で現れることを踏まえ， $G = 1$ の代わりに $8\pi G = 1$ とおく場合もある．このように基本単位には 1 程度の数係数を含める自由度がある．これは自然単位系において Planck 定数 h そのものではなく $\hbar = h/2\pi$ を単位に採ることができるのと同じ事情である．また $G = 1$ と $8\pi\gamma G = 1$ の違いは，電磁気学の Gauss 単位系と Heaviside 単位系の違いとも似ている．さらに量子重力の定式化ではこれから見るように，Immirzi (イミジ [27, p.72]) パラメータと呼ばれる，1 程度のオーダーの無次元のパラメータが導入される．そこで $8\pi G\gamma = 1$ とおく単位系を利用する場合もある [1, pp.13–14, p.18]．
- なお宇宙論的な長さスケールは大まかに $L \sim 1/\sqrt{\Lambda}$ で与えられ，宇宙定数の存在は

量子論において無次元の定数(1126)があることを示唆する．式(1126)は宇宙論的スケール L と Planck スケール l_P の比となっており，その平方根で与えられる長さの比は，宇宙論的な距離 L だけ離れた位置にある Planck 長さ l_P 程度の物体を見る角度範囲と解釈することもできる [1, p.126]．いずれにせよ第I部で宇宙定数に関して注意を促したように，無次元の比(1126)もまた単なる基本定数に過ぎず，その数値が人間的な感覚で“極めて小さい”ことは必ずしも神秘的ではない [1, pp.58–59]．

さて，本章ではしばらく，ループ量子重力のアプローチの動機付けも兼ねて，その主要なアイデアの概念的な導入に専念しよう．

16.1 現代物理学の諸問題

現代物理学の諸問題に占める量子重力の位置付けを論じる [1, pp.3–5].

現代物理学の3大理論

- 一般相対性理論 (GR) 第I部
- 量子力学 (QM) 第II部
- $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 素粒子標準模型 第III部

物理学の主要な未解決問題

- 量子重力
 - 現在の理論はGRとQMの両方が重要となる現象を記述できない
 - GRとQMは互いに矛盾する概念に基づいている
- 統一
 - LQGでは必ずしも統一理論を目指さない
- ダーク・マター (暗黒物質)
 - 真の謎はダーク・エネルギーではない (3.2.2 項)
 - Planck 質量程度のホワイトホールの集まりか (LQG の試金石)
- 量子力学の解釈問題
 - 背景独立な量子重力の観点は、量子力学の関係的解釈に通じる (第5章)

16.1 節の原稿

第Ⅳ部ではループ量子重力(loop quantum gravity; LQG)と呼ばれる理論を主題として取り上げる。ループ量子重力はその名の通り重力を量子化する試みの1つであり，単にループ重力とも呼ばれることもある [2, xxvii]。そこで手始めに理論物理学の成り立ちを俯瞰しつつ，現代物理学の直面している諸問題に占める量子重力の位置付けを論じよう [1, pp.3–5]。

これまで多大な成功を収めてきた現代物理学の柱となる3大理論として，一般相対性理論，量子力学，および(量子論の枠組みの下での) $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 素粒子標準模型を挙げることができる。我々はこれらの理論を，第Ⅰ部，第Ⅱ部，第Ⅲ部で順番にみてきた。長距離のエンタングルメント，Higgsスカラー粒子，宇宙の膨張，ブラックホールなどの一見信じ難い驚くべき帰結にも関わらず，これらの理論に対して自然は絶えず“イエス”と答え続けてきた。

他方で物理学の主要な未解決問題として，

- 量子重力
- 統一
- ダーク・マター(暗黒物質)
- 量子力学の解釈問題

を挙げることができる。まずはこれらを順番に見ていこう。

「量子重力」はまさに我々がこれから論じるテーマである。量子重力の問題とは単に、現在の理論が重力場の量子的な振舞いを記述できないという事実である。このため、我々は重力と量子論の両方が役割を演じる現象を記述できる、予言的な理論を欠いている。例はブラックホールを中心、非常に初期の宇宙、非常に短いスケールでの自然の構造などである。実際、高エネルギーでの粒子の衝突実験や、ブラックホールが極めて小さい質量にまで蒸発したときの状況、あるいはビッグバンに近い時点で宇宙に何が起こったかを理解するには、重力の量子論が必要になると考えられている。また重力の量子化を試みる動機は、単に理論的盲点があるという不都合に留まらない：重力の理論と場の量子論を統合すれば、それぞれが含んでいる特異性を解消できると期待できる。実際、一般相対性理論の下で必然的に現れる時空の特異点の近くでは、エネルギー密度が完全に古典的な方法では扱えないような水準になると考えられる。他方、場の量子論の数学的な特異性の問題は、場と演算子の(デルタ関数のような)分布的な性質に起因する。そうであるならば、背景となる空間と時間の描像を変更することで、場と演算子の分布的な性質を改善できると考えることは理に適っている。このように重力の物理と場の量子論は、互いが互いを必用としている状況にあると言える。そしてそれ以前に何より、自然界の4つの基本的な力のうち重力だけが古典論のままで残されているという状況は、概念的な明確さや物理学の理論的な統一という観点からも満足できず、それ自体で重力の量子化を試みる動機として十分である [3, pp.2-4]。決定的な難点はおそらく、一般相対性理論と量子力学が互いに矛盾する仮説に基づいていることである。実に一般相対性理論の教科書を紐解けば、時空は曲がり、あらゆるものは滑らかで決定論的に振

舞うとあるのに対し，すぐ隣にある場の量子論の教科書を手にとると，世界は平坦で非動力学的な背景時空の上を跳躍する離散的な量子から成ると教えられているといった具合である．

次に「統一」とは，基礎理論に含まれる自由なパラメータと独立な要素の数を削減する，昔からの夢である．確かに標準模型は，現にしばしば揶揄されるように，既に知られている素粒子の相互作用を寄せ集めた継ぎ接ぎのような理論であり，第1印象としてはエレガントとは言い難い．実際，標準模型には値が理論の内部で原理的に決まらず，実験・観測の結果と合うように値を“手で”入れなければならないパラメータが30余りあるという意味でも煩雑である．こうした標準模型の晒されている一連の悪評を踏まえると，標準理論の背後にありうべき統一理論を求める心理は私にも十分理解できる．少なくとも現段階で統一理論の模索を諦める必要はない．

しかしながら陽子崩壊，余剰次元の兆候，超対称性粒子，新しい短距離の力，LHCでのブラックホールといった，標準模型に代わる野心的な仮説の予言に対して，自然はこれまでのところ一貫して“ノー”と答え続けている．なるほど，科学の進歩をもたらすのは必ずしも奇想天外なアイデアを空想し“試してみる”ことではなく，むしろ既存の実験と理論の教訓を正面から“真剣に受け止め(taking seriously)”，それらが整合する首尾一貫した理論的枠組みを探求する堅実な姿勢なのかもしれない [1, p.9] [2, pp.5–6]．実に科学では，実験的に新たな知見が得られるまでは，最善の仮説は我々の知っていることの拡張であり，優れた理論の外挿はしばしば非常に上手くいくことを物理学の歴史

は教えている^{*181}。例えば小さな実験室の実験で発見された Maxwell 方程式は、大きさがおおよそ 35 桁離れた、原子核から銀河のスケールまで非常に正確なことが判明している。また太陽系のスケールで見つかった一般相対性理論は、さらに大きさがおおよそ 20 桁大きい、宇宙論的スケールで著しく上手くいくことが判明している。これらの事例を踏まえると、おそらく我々にとって量子重力への最善の投げ所は今のところ、量子力学と一般相対性理論である [1, p.9]。歴史的にも物理学における主要な進展の多くは、“ただ単に” 実験的に成功している理論の間の矛盾を解消する試みの中で成し遂げられた：Newton は Galileo の放物線を Kepler の楕円と組合せることで、万有引力を発見した。Einstein は特殊相対性理論を発見し、力学と電磁気学の間の矛盾を解消した。10 年後、Newton 的な重力を特殊相対性理論と調停する試みの中で、彼は時空が曲がっていることを発見した。我々の直面している量子重力の問題もまた、一般相対性理論と量子力学のアウフヘーベンを通じて、物理学の新たな段階へと至る大いなるチャンスと捉え得る。そこでループ量子重力は必ずしも統一理論を目指さず、基本的にあくまで重力の量子化のみを目標とする（また高次元の空間を仮定せず、したがって我々の時空が何故 4 次元化という問も立てない）[2, p.13]。弦理論が重力を他の基本的な力とともに弦へと統一する形で量子化する試みだとすれば、ループ量子重力はひとまず重力の量子化に直接取り組む、概念的にも数学的にも手堅いアプローチだと言える。

^{*181} これは一種の帰納的推論であり、したがってそれが上手くいくのは、明日も太陽が昇ってくると我々が予言できるのと同程度に納得できる（あるいは納得できない）[2, p.419]。

続いて「ダーク・マター」の問題とは、銀河と宇宙の物質のおよそ85%が標準模型で記述される種類の物質“ではない”ようであることを、一連の実験的な証拠が示唆しているという困難のことである。ここで真の謎はダーク・エネルギーではなく、あくまでダーク・マターであるという見解を3.2.2項で紹介したことを思い出していただきたい。また量子力学の解釈問題に関しては、第5章で言及した。

ここまでに列挙した困難は基本的に異なる問題である。しかしながら一般に物事は相互に何らかの関連を持つものだとするれば、我々がこれから論じる量子重力理論の進展が、他の問題に新たな洞察をもたらす可能性は考え得る。実際、例えばダーク・マターの正体(の少なくとも一部)はPlanck質量程度の、天空を漂う無数のホワイトホールとする可能性に、C. Rovelliは一般向けの啓蒙本『ブラックホールは白くなる [ホワイトになる]』の第17章で控え目に言及している [50, pp.162–166]。しかるにブラックホールがホワイトホールへ量子遷移する確率を計算することは、ループ量子重力の主たる試金石となり得る。また第5章では背景独立な量子重力の観点から、量子力学の关系的解釈に通じることを説明した。さらに重力場から時空が生起すると考えるループ量子重力の立場では、概念的には時空を含め万物は量子場へと統一されることになる。

最後に、量子重力が重要となる領域は長らく実験と観測の及ばない領域であると信じられていたにも関わらず、観測技術は今や量子重力に関するいくつかの仮説的な理論的アイデアを実験的に除外するに至っている。もっとも、この領域に関する直接的な実験的情報は依然として限られている。しかしながら、そのせいで理論の可能性があまりにも

広くなるということにはならない。実のところ状況はその正反対であって、一般相対性理論と量子力学の整合性は理論に対する非常に厳しい制約条件となるため、我々は完成した、予言能力のある首尾一貫した量子重力の理論を1つも持ち合わせていない。それは捉え方によっては好ましいことだとも言える。仮に有望な理論の選択肢が過剰にあるならば、捨てられるものが何もないという意味で、我々はかえって不自由となるからである。

なお科学的理論はもちろん最終的には反証可能な形で提示されねばならないと言えど、理論研究自体は新しい実験的データが入手できない状況下にあっても、従来の理論的および実験的な知見を基にして進め得ることを強調しておきたい。例えばCopernicusは太陽中心説を構想し、Ptolemy (トレミー) の本のデータだけを用いて太陽からの惑星の距離を計算できた。また優れた最新のデータを得ることに取りつかれていたとされるNewtonでさえ、本質的にはGalileoとKeplerの法則を融合することで万有引力を発見した。同様に我々は量子重力に挑むことを許されているのである。

16.2 古典的GRの背景独立性

■GRの難しさ

1. 内部曲率の概念

- 時空の曲がりを高次元の空間に埋め込まれた超曲面として可視化するのは方便

2. 時空の歪みと曲線座標系を混同しかねない ← 2.2.3項の図6

- 特定の座標系を用いて、真の距離の幾何学的関係を調べることがGRの主眼
- 座標系に依らない時空の曲がり、曲率テンソルで特徴付けられる

3. 空間が伸ばされると物差しも伸ばされるから、

空間の伸びは物差しでは測定できないのではないかという疑問

- ← 物差しの原子を結合する電氣的な力に比べて重力は非常に弱く、
ふつう物差しはほとんど伸びない [14, pp.271–272]

4. よく定義された問題としては距離に言及する代わりに、

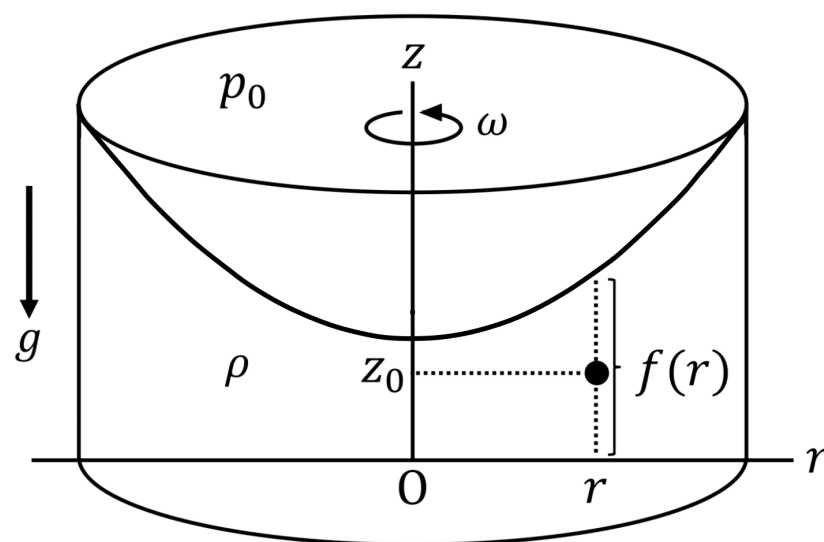
物差し中の原子の個数を問題にすれば良い [2, pp.61–62]

- 背景独立性

「与えられた時空点」といった言葉遣いすら、それ単独では意味を成さない

■古典的GRの背景独立性 [2, § 2.2]

○重力場 → 空間 / × 空間 → 重力場



● $r\omega^2 = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz}$
「圧力勾配を向心力とした回転運動」

● $p = p_0 - \rho g(f(r) - z_0)$
「水面の湾曲が圧力勾配を生じる」

$$z = f(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + \text{const.}$$

「水面の形は回転放物面」

図80 Newtonの回転バケツ (回転の角速度 ω は一定) [51, pp.232–234]

Einstein : 水は絶対空間ではなく, 重力場に対して回転

時空点 A ($x = 0$) 周りの局所 Lorentz 座標を $X^I(x)$ ($X^I(0) = 0$) として, テトラード

$$e_{\mu}^I(x) \equiv \frac{\partial X^I(x)}{\partial x^{\mu}} \quad (\text{値は時空点 A で評価}) \quad (1127)$$

は局所 Lorentz 座標 $X^I(x) = e_{\mu}^I(0)x^{\mu}$ を定義する重力場

→ 局所慣性系に対する運動は重力場に対する運動

Einstein の “孔” の議論：背景独立性を見落とすと，GR の一般共変性は決定論に矛盾

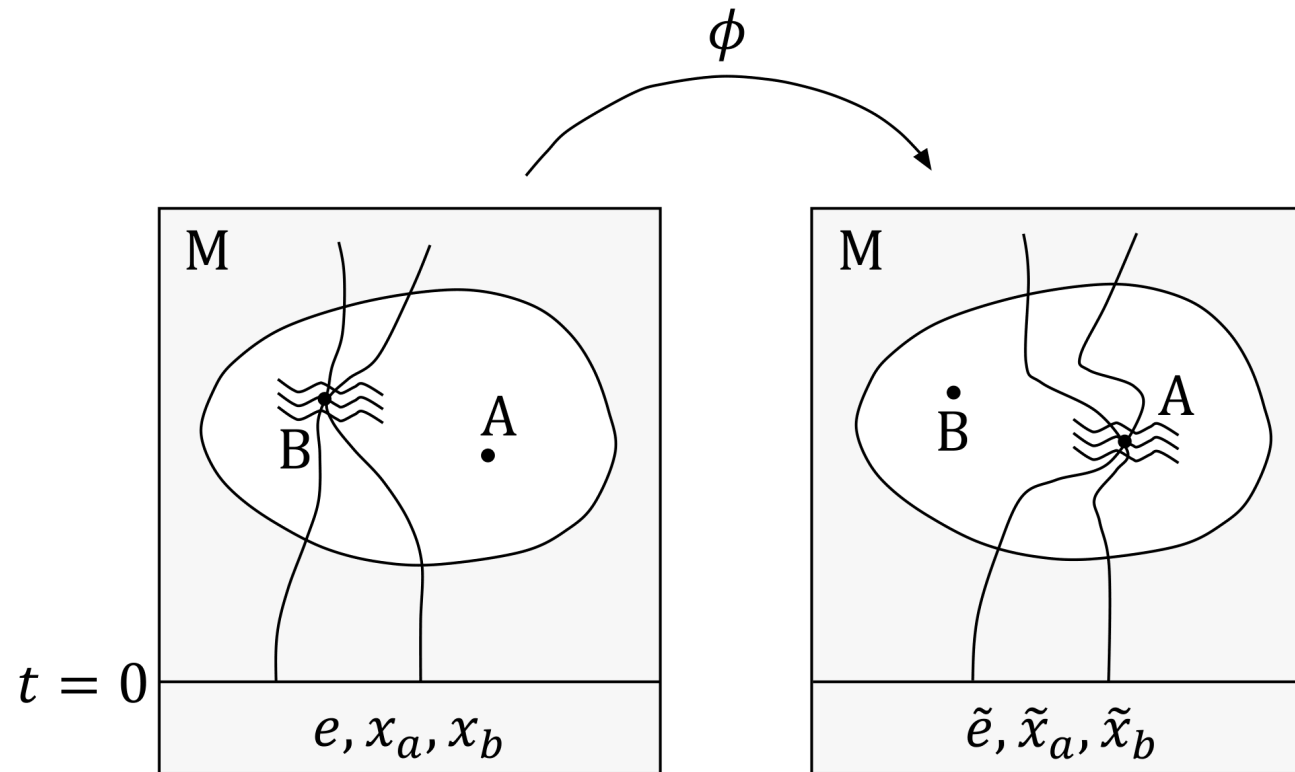


図81 白い領域は物質のない宇宙の“孔”を表す．能動的な微分同相写像 ϕ は非平坦な(波状の)重力場を2粒子 a, b の交差点とともに点Bから点Aへ動かす．(ϕ は孔の内部にのみ施す．孔は周りの物質(と初期条件)から本来，重力場が一義的に決定されるはずの領域という意味を持つ．)

動力学的対象は(重力場を含め)背景の時空座標多様体ではなく，
互いに対してのみ位置付け得る(背景独立性)

■世界の存在論 [1, pp.18–19]

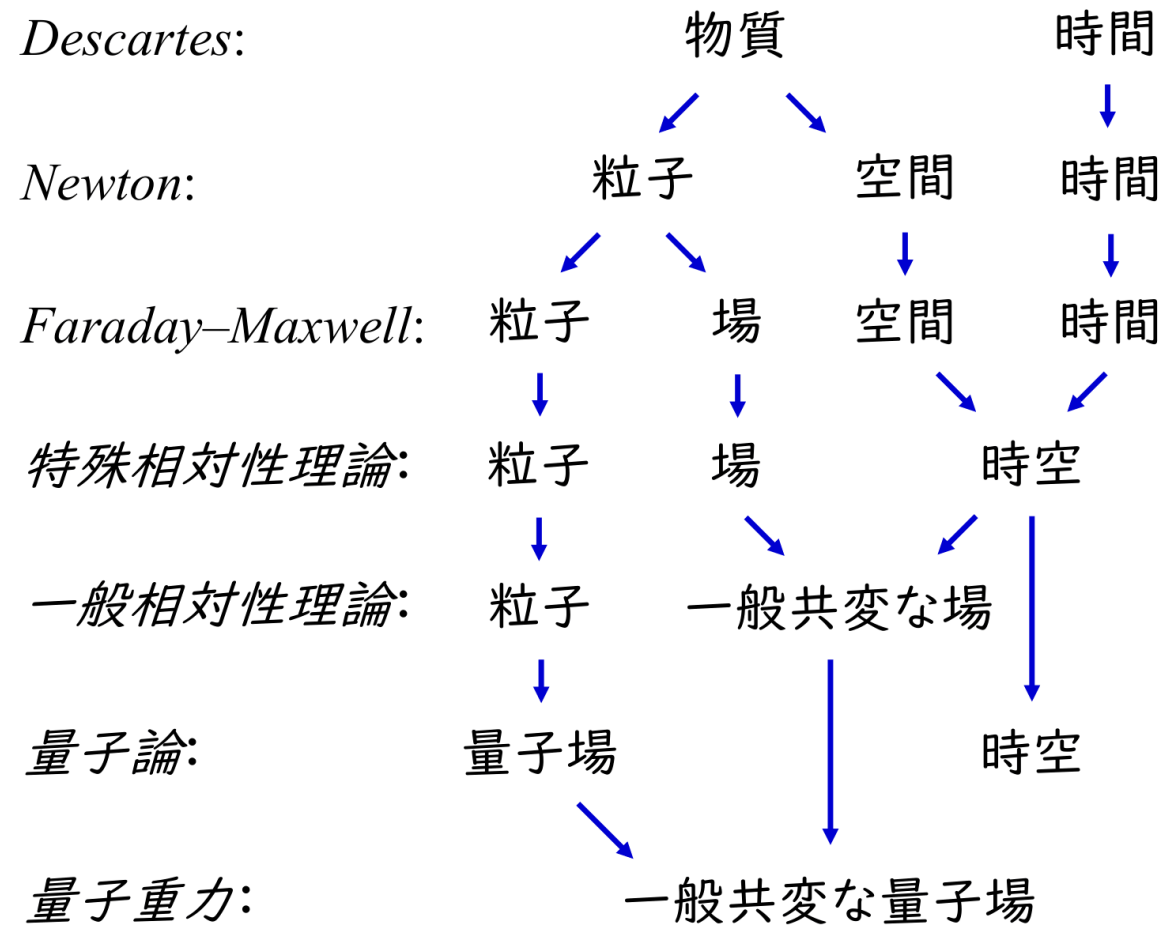


図82 各時代の物理学における世界の存在論 [1, p.19]

16.2節の原稿

繰り返せば量子重力理論を探求するにあたって、一般相対性理論 (GR) と量子力学 (QM) の鍵となる教訓を“真剣に受け止め”，洞察が互いに整合する概念的な体系を構想することが重要となる．その際，ループ量子重力 (LQG) は GR の「背景独立性」のアイデアを重視し，量子重力理論に引き継ぐ困難と正面から直接向き合う．実に LQG の背景独立性のアイデアは重力の古典論，すなわち GR に既に備わっている．そこで以下ではやや息の長い議論となるものの，改めて GR の概念的な解釈に焦点を当てつつ，その背景独立な理論としての側面を強調する．

準備として GR の標準的な解釈から始めよう．私見では思うに，GR がしばしば難しく感じられる理由として，次の点が挙げられる．

1. まずは内部曲率の概念である．例えば2次元の球面は3次元空間から眺めれば，曲がっていることが視覚的に把握できる．他方で我々の時空については，それを超曲面として内に含む高次元の空間の存在は必ずしも保証されないから，時空の曲がりを同じように視覚的に把握することはできない．時空の歪みは時空の内部だけで理解・定義できる量を用いて記述せねばならず，それは直観的に落とし込むのが困難である．こればかりは仕方がない．
2. 次に，時空の歪みと曲線座標系を混同しかねないことである．実際には場の方程式 (Einstein 方程式) はテンソル方程式なので，座標変換に対して不変であることが保証されている．そこで任意の座標系を用いて Einstein 方程式を解き，その座標系に関す

る計量テンソル場を求めれば、与えられた時空点間の座標距離を対応する真の距離に換算することができる。これは特定の座標系を用いて、座標系に依らない時空の幾何学的性質そのものを調べられることを意味する。(4.1節で調べたSchwarzschild時空の例では真の距離の間の幾何学的関係として、場の中心を中心とした円周 $2\pi r_1, 2\pi r_2$ の同心円に挟まれた円環の幅は $r_2 - r_1$ よりも長くなることを思い出していただきたい。)実際ひとまず標準的な解釈としては、座標系に依らない真の距離の関係として時空の幾何学を調べることが、GRの主眼であると言える。また座標系に依らない幾何学的性質としての時空の曲がり、曲率テンソルで特徴付けられる(2.2.3項の図6)。

3. ところが実際に距離を測るには、もの差しを用いることになる。ここで重力により空間がのびされるともの差しも伸びるから、空間ののびはもの差しでは測定できないのではないかという疑問が生じ得る。すると仮に教科書の計算を追いかけることができたとしても、結局それは全くのナンセンスなのではないかという疑念に囚われる。これに対する答は、シュッツ『相対論入門』の重力波を説明した箇所で与えられている [14, pp.271–272]。

もの差しを構成している原子は自由粒子ではなく、近くの原子から電氣的な力を受けているので、もの差しは、重力による潮汐力が内部の結合力と比べてどれほど大きいかにによってそののび方が変化する。ふつう、重力は電氣的な力に比べて非常に弱いので、もの差しは実際上はまったくのびることがない。したがってもの差しを使って、接近した自由粒子が潮汐力によって受ける変位を測定できるのである。つ

まり「空間ののび」を測定できることになる。

4. さらにもの差しがのびないのは近似的であるにすぎず，原理的には多かれ少なかれのびるとしても，距離の概念にあからさまに言及するのを避けることで，我々はなお物理的に意味のある予言を行える．実際，2つの自由粒子の間にももの差しを当てるとき，我々は2点間の(真の)距離というよりも，正確には対応する範囲に含まれるもの差し中の原子の個数を調べていると言える．そして理論が予言するのはこの原子の個数に他ならない [2, pp.61–62].

Einsteinの見立てでは，GRにおいて物理的に意味を成すのは，このような原子どうしの「時空の一致」である．より一般には，力学的対象(重力場を含む場と粒子)の互いに対する相対的な位置付けのみが物理的に意味を成し，それらの背景時空(ないし，その役割を果たす座標多様体)に対する位置付けには，もはや絶対的な意味がない．なるほど，GRの概念的な難しさは専ら，このような背景独立性に起因している．実は以下で見るように，これまでナイーヴに用いてきた「与えられた時空点」といった言葉遣いすら，それ単独では意味を成さない．そこで我々は長さの概念や，伝統的な空間や時間の概念を用いずとも物理をできるということを学ばねばならない．この点を敷衍するために，以下ではGRの発見へと至る概念的な道のりの概観を通じて，GRから背景独立の教訓を引き出していこう．

GRにおいて重力場は時空の歪みから立ち現れると，一般には理解されている．他方で

代わりに時空こそが重力場の現れに過ぎないと解釈することもできる [2, p.9]. まずはこの点を納得するために, しばらく Einstein の思考をたどることにしよう.

空間や運動を物体の相対的な位置関係およびその変化として理解する西洋文化の伝統とは対照的に, Newton は物体の運動を絶対空間に占める位置の変化(絶対運動)として記述した. もちろん Newton 力学においても(運動方程式は Galilei 変換に対して不変なので), 絶対空間(ないし慣性系)に対する等速直線運動を検出することはできない. しかし加速度は識別できる. このことを示す議論として, Newton は回転バケツの実験を挙げている. 水を入れたバケツを回転させると, 図 80 のように水面が凹んだ定常状態に落ち着く. このとき水はバケツとともに回転しているので, 水は周囲のバケツに対して回転していると言うことはできない. したがって水面の凹みをもたらす水の回転は, 絶対空間に対する運動であると Newton は主張する. これに対し Einstein は, 絶対空間とそれに対する“真の運動”というアイデアは間違っていると確信していた. 再び絶対空間を慣性系と同一視すれば, 運動の法則は慣性系の間だけでなく, 全ての基準系において同じでなければならない [2, pp.52–56].

Newton の回転バケツの実験において, 水は不活性で大域的な絶対空間に対して回転しているのではなく, 動力学的で(dynamical)局所的な物理的存在であるところの重力場に対して回転していると Einstein は考えた. (ここで絶対加速を取り除くという問題は, Newton 相互作用 $F = Gm_1m_2/r^2$ を静的な極限に持つ場の理論を発見するという問題と合流する.) この重力場に対する運動というアイデアは, Einstein によるエレベーターの思考実験から導かれる. 慣性力は重力と相殺するため, 自由落下するエレベー

ターは(少なくとも局所的には)慣性系と区別できない．そこでNewton的な“大域的”基準系を棄て，“局所的”慣性基準系を導入することが自然と求められる．局所慣性系は局所的な重力場によって定義されるため，局所慣性系に対する慣性/加速運動は局所的な重力場に対する運動と言える．

任意の座標系 x において現れる任意の時空点 A (座標 $x = 0$ とする) 周りの重力は， A における局所慣性系 $X^I(x)$ (ただし $X^I(0) = 0$) からの座標 x のズレ，したがって微分係数 (1127) で表される．この後で詳しく説明するように，式 (1127) はテトラード場と呼ばれる [4, pp.325–328]．我々は計量テンソルよりもテトラードを基本的な変数として扱う立場を採り，式 (1127) のテトラード場を単に重力場と呼ぶことにする．すると確かに重力場 $e_\mu^I(x)$ は，局所慣性系を $X^I(x) = e_\mu^I(0)x^\mu$ で定義する (その逆ではない) [2, pp.57–61]．

ここまでの議論で，時空の正体は重力場であるという描像が浮かび上がってきた．さらにGRの背景独立性へと話を進めるために，Einsteinの“孔”の議論を取り上げよう．これは背景独立性を見落とすと，GRの一般共変性が決定論に矛盾することを示す思考実験である．図81のように時空点 A の周りで平坦である重力場 $e(x)$ (添字は省略) を考えよう．ここで能動的な微分同相写像により，別の時空点 B 周りの非平坦な重力場を点 A へと移せば，点 A の周りで非平坦となる新しい重力場 $\tilde{e}(x)$ が得られる．ところでもとの場 $e(x)$ に単なる (受動的な) 座標変換を施した結果が関数 $\tilde{e}(x)$ に一致するような，適当な座標変換を常に見出すことができる．するともし場の方程式が一般的な座標変換に

対して共変的であるならば、2つの場 e と $\tilde{e}$ はいずれも場の方程式の解でなければならない。このとき図81に示した初期条件ないし境界条件の適当な設定の下で、時空点Aにおける物理(重力場が平坦か否か)は一意的に決まらないことになる。これは一見すると、理論の共変性が決定論と矛盾することを意味しているように見える。しかし実際には2つの解は同じ物理的状況を表しており^{*182}、あくまで時空点Aそれ自体に言及することが物理的に無意味だったにすぎない。我々に問うことができるのは、例えば、2粒子の世界線の交差点において場が平坦か否かである。実際、微分同相写像は世界線の交差点における重力場を交差点とともに移すので(図81)、そのような問に対しては決定論的な予言が可能である。このように、一般に場と粒子の多様体上の位置には物理的な意味がなく、それらの相対的な配置のみが物理的な意味を持つ。こうしてGRの描像からは背景時空の概念が除かれる [2, pp.65–71].

注解 この意味でも相対性理論は、その名の通り相対性の理論であることになる。またはじめに予告したように、「与えられた時空点」はそれ自体ではもはや意味を成さない。同様に空間の点で流れる真の時間 $d\tau$ も、正確には空間の点に印を付けるための粒子の軌道に沿う固有時間として理解できる。

まとめよう。時空は重力場の現れであって背景時空というものはなく、あらゆるものは重力場に対して位置付けられるという結論に我々は至った。Rovelliによるレトリック

^{*182} それらはDiracが言うところのゲージ変換で互いに関係付けられる [2, pp.40–41].

の効いた表現を引用すれば、Einstein 方程式の解は“どこか(somewhere)”にあるのではなく、それとの関係であらゆるものが位置付けられるところの“場所(when)”である [2, p.21]. それは言わば、海に浮かぶ島の上に動物が住んでいると思っていたら、実際には島自体が巨大なクジラだと分かるようなものである. 同様に、宇宙は時空中の場から成るのではなく、場の上の場から成るのである. これはあくまで例え話ではあるが、言い得て妙である. この観点からは重力場を含む動力学的(dynamical)・物理的な実在を取り除けば、時空すら残らないことになる [2, p.9, pp.73–75]*¹⁸³. 時空は存在せず真に存在するのは重力場であるという見方と、重力は見かけ上の幻想であって真に存在するのは時空であるという言葉遣いのどちらを採用するかは、少なくとも古典的な GR の水準では極論すれば好みの問題であり、その意味で科学哲学における空間概念をめぐる相対主義と実体主義の論争は解消されたと言える [2, pp.76–78]. しかしながら量子重力に取り組む上でより有益な足掛かりとして、我々は重力場から時空が現れるとする解釈を積極的に採用する. いずれにせよ Newton の絶対空間や特殊相対性理論における Minkowski 時空に代表されるような、粒子や場のダイナミクスから独立した大域的で非活性な背景時空の概念は、根本的な基礎理論の水準ではもはや支持し得ない. 最後に私(筆者)からも気の利いたカラフルなメタファーを披露したい. 絵を描くには普

*¹⁸³ したがって無重力という日常用語は不正確となる. いわゆる重力のない平坦な時空とは、正確には重力場の特定の値 $e_{\mu}^I(x) = \delta_{\mu}^I$ (したがって $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$), あるいは平坦な重力場として理解できる [2, pp.39–40].

通，画用紙やキャンバスが背景として必要である．ところが背景の上で絵の具の分布を連続的に変化させても絵の意味が変わらないのであれば，絵画はもはやキャンバスがなくとも絵の具の相対的な配置だけで成り立つことになる．我々の宇宙もまた，まさにそのような，背景を持たない絵の具の分布だけで描かれていると言える．これが背景独立性のアイデアである．重力場を含め全ての場は，背景時空に対してではなく，互いに対してのみ位置付けられる．

背景独立性が示唆するように，物理的世界が時空とその上の動力学的対象から成るのではなく，時空を含め動力学的対象から成るのであれば，図82に要約したように，物理の基本的な存在論は単純明快になる．まずDescartesにとって，空間的な広がり(哲学用語で言うところの「延長」)は，単なる物質の性質(“res extensa；延長実体”)であり，時間の中で運動する物質のみが物理的な宇宙の構成要素であるとされた．次いでNewtonは，空間と時間の中で運動する粒子を用いて，物理的世界を記述した．さらにこの存在論は新しい存在——場——によって補完される必要があることを，FaradayとMaxwellは示した．特殊相対性理論は，空間と時間を単一の存在，時空の側面と考えねばならないことを示した．一般相対性理論は時空それ自体が場——重力場——であることを示した^{*184}．最後に量子論は，粒子が量子場の量子であることを示した．これらの結果を全

^{*184} この段階で自然は粒子と場のみから成る．そして粒子と場の振舞いは原理的には最小作用原理から完全に決まることを第I部で見た．

て併せると、我々が今日知る限り、自然に存在する全ては一般共変な量子場であることが帰結する。

すると繰り返しになるが、量子重力それ自体は必ずしも統一理論を目指さないものの、統一理論へ至るために必要なステップでもあることが予感される。Newton力学が今日も近似理論として生き残っているように、LQGもまたその種の“永遠”の真理 [2, p.418]なのではないか。LQGには——素人の私(本稿筆者)にも——そう思わせる説得力がある(あるいは私の錯覚かもしれないが)。少なくとも概念的にはLQGにおいて、存在するものは全て量子場に“統一”されたとも言い得る。(現に標準模型で考えられている全ての場は、LQGの枠組みに問題なく含められる [2, pp.286–291].)

16.3 弦理論

重力場は $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$
と分離され $h_{\mu\nu}(x)$ が量子化される



理論は繰り込み不可能



R^2 , 超重力, Kaluza–Klein ... 1970



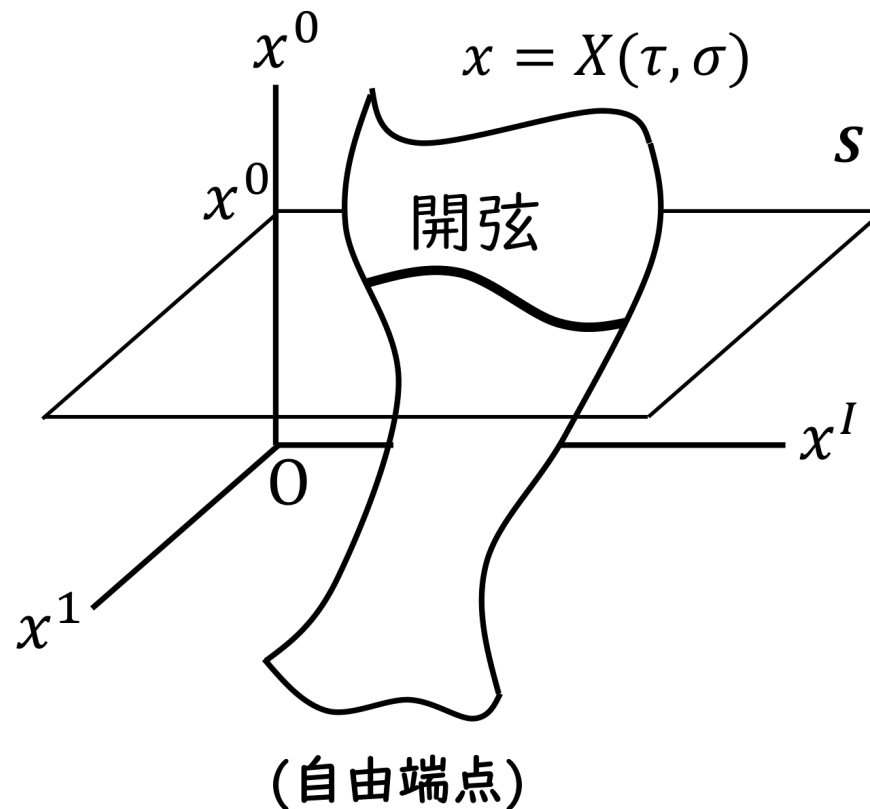
相互作用の
統一



弦理論

図83 場の量子論の観点に基づく量子重力へのアプローチ

弦理論は平坦な空間のQFTの技法と概念的枠組みに深く根付いており、量子重力の背景独立という、主要な困難に直接取り組んでいない [2, p.8].



南部-後藤作用

$$S = -T_0 \int d\tau d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}$$

光錐ゲージ

波動方程式 $\ddot{X}^\mu - X^{\mu''} = 0$

正準量子化

$X(\tau, \sigma)$ の Fourier 係数は
生成・消滅演算子:

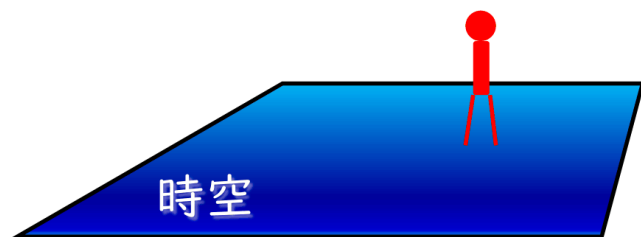
$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0}, \text{ etc.}$$

図84 弦の正準量子化 [12]

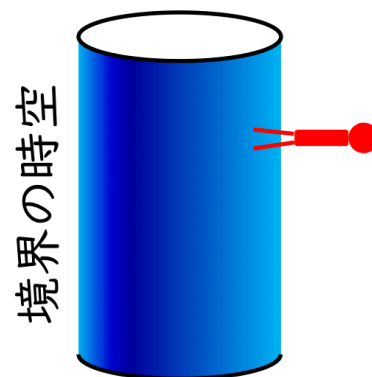
平坦な Minkowski 空間においてさえ,

閉弦を量子化すると重力子が得られる [12, pp.286–287]

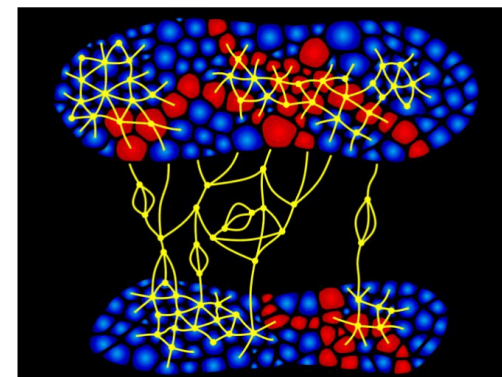
← 弦理論が GR の背景独立性に正面から取り組んでいないことを
端的かつ象徴的に示している



伝統的な場の量子論家



ポストMaldacena弦理論家



真の量子重力理論家

図85 場の理論・弦理論とLQGの時空観 [1, p.8]

16.3節の原稿

他方で現在のところ、ループ量子重力に並ぶ量子重力理論の最有力候補の1つとして、弦理論が有名である。本稿には必ずしも弦理論を積極的に批判する意図はないものの、今のところ弦理論がこの分野において支配的な影響力を持っている以上、全く言及を避けるわけにもいくまい。そこでまずは弦理論が台頭するに至る歴史的経緯を簡単にスケッチする [1, pp.21–22] [2, pp.6–9].

伝統的な場の量子論のアプローチでは式(212)のように、重力場を計量の Minkowski 計量からのズレ $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ として扱う。このような措置は摂動論的であると同時に、重力場を $\eta_{\mu\nu}$ で定義される背景の Minkowski 時空上の場 $h_{\mu\nu}$ と見なしていることになる。その結果として得られた理論は繰り込み不可能であることが判明した。(おそらくこのことは驚くにはあたらない：一般相対性理論は時間と空間の概念をあまりにラディカルに変えたため、平坦な空間における場の量子論と容易にはなじまないのである。)ところで弱い相互作用に関しては、Fermi 理論を高エネルギーにおいて

Glashow–Weinberg–Salam 理論へと修正したところ、繰り込み不可能性が解消された [2, p.7]. そこで物理学の主流派はこの成功体験にならい、Einstein–Hilbert 作用における曲率の2乗の項、Kaluza–Klein 的な理論、超重力のような、一般相対性理論を高エネルギーにおいて修正する試みを模索した。そして、その一方で、一般相対性理論が内蔵する背景独立性の教訓は過小評価されてきた。しかしながら現に結果的にループ量子重力は一般相対性理論の形を表面的に修正することなく、非摂動的で紫外発散のない理

論を実現している以上、摂動論的な量子重力が繰り込み不可能であることは必ずしも、Einstein–Hilbert作用を高エネルギーにおいて修正しなければならない証拠とは言えない。

いずれにせよ場の量子論の観点に基づく繰り込み可能または有限な理論の探求は、全ての相互作用の統一理論の研究と融合して、ついに弦理論をもたらした(図83を見よ)。弦理論はあるいは重力を含む全ての相互作用の有限な量子論であり、10次元で定義され、超対称性を含意するが、それは今のところ観測される現実世界と一致させることが困難である。

繰り返せば弦理論はLQGと対照的に、重力を他の力や粒子と合わせて弦へと統一する形で、量子化することを構想する^{*185}。少なくとも弦理論は平坦な空間のQFT (場の量子論)の技法と概念的枠組みに深く根付いており、背景独立なQFTとは何かを理解するという、量子重力の主要な困難に直接取り組んでいない [2, p.8]。

なるほど、確かに弦理論が場の量子論の延長線上の理論であるという印象はおそらく、弦理論の入門書を読んだ物理の好きな学生の誰もが真っ先に抱く感覚だろう [12]。

^{*185} このような“一石二鳥”を狙う背景には、我々は既に“物理学の終わりの近く”にいるという期待があるのかもしれない。しかし残念ながら、そのようなことは物理学者が過去3世紀にわたってずっと思ってきたことだ [2, p.13]。確かにいずれは統一理論にたどり着きたいという希望はあり、また一石二鳥が上手くいくに越したことはないが、物事が一筋縄に解決するとは限らない。

実際、弦は空間的に1次元的な広がりを持つので、時空が何次元であろうと、弦は図84のように時空の中に2次元の面を描く。これを弦の世界面と呼ぼう。すると世界面は図84のように2つの座標 τ, σ を用いて $x^\mu = X^\mu(\tau, \sigma)$ とパラメトライズできる。こうして弦の古典的な運動を決定することは、我々が任意に導入した世界面上のパラメータ τ, σ に対して、弦座標 $X^\mu(\tau, \sigma)$ の関数形を決定することに帰着する。ここで弦座標 $X^\mu(\tau, \sigma)$ は物理的な意味としては物体の位置であるものの、弦理論の定式化はむしろ場の理論によく馴染んでおり、弦座標を引数 τ, σ の座標空間上の場と見なす方が有益である。

パラメータ τ, σ の選択は任意であり、パラメータの付け替えは弦理論のゲージ変換を成す。ただし τ は背景の座標時間 x^0 とともに単調増加する時間座標の役割を果たし、 σ は空間座標の役割を果たすものと見なす。極端な例としては τ を素朴に座標時間 x^0 そのものにとれば良い。このとき図84のように τ が一定の線は時刻 $x^0 = \tau$ における弦を表し、その弦に沿う位置がパラメータ σ によって表されることになる。このようなパラメータの採り方は静的ゲージと呼ばれる。他方で弦を量子化するには、時空座標として x^0, x^1 -座標軸の代わりに、それらを 45° 回転した座標軸を持つ「光錐座標」を定義した上で、「光錐ゲージ」と呼ばれるパラメータ付けを利用するのが適している。このとき特定の座標系と特定のゲージを仮定することになるため、理論の座標変換に対する共変性とゲージ不変性は隠されてしまうものの、この処置は大抵の物理的な問題を扱うのに十分に有用である。

これを踏まえ、相対論的な弦の古典的なダイナミクスを考えよう。相対論的な点粒子の

作用が粒子の世界線に沿う固有長さに比例した形をとるのと同様に，弦の作用は弦が描く世界面の固有面積に比例する．これを南部-後藤作用という．また開弦の端点はD-ブレーンに沿った方向には動けるため，境界条件として弦の運動量流束と見なされる量 $\mathcal{P}^\sigma_\mu$ をゼロとおく「自由端点の条件」が課されるのに対し，D-ブレーンに直交する方向には端点は動けないため，その弦座標に対してDirichlet境界条件が課される．ここでは簡単のため自由端点の条件のみを考える．他方で閉弦には境界となる端点がなく，強いて言えば閉弦に沿って1周するともとの位置に戻るという周期境界条件が課される．いずれにせよ南部-後藤作用から導かれる運動方程式に変わりはなく，光錐ゲージでは自由端点の条件は弦座標に対するNeumann境界条件に帰着し，開弦と閉弦の運動方程式はともに弦座標に対する波動方程式へと簡略化される．その一般解はFourier展開の形に表すことができ，開弦と閉弦とで境界条件の違いに応じて，モード展開の形は異なる．

弦を量子化するには場の量子論の場合と同様に，弦座標とその運動量共役に対して正準交換関係を課せば良い．するとやはり弦座標のFourier係数は生成・消滅演算子となることが示される．ただし我々はあくまで1本の弦を量子化したので，生成演算子は粒子数を増加させるのではなく，粒子の種類を変える働きをすると考えられる．実際，真空状態に生成演算子を作用させた量子状態に対して弦の質量や弦状態の自由度を調べると，例えば閉弦の量子状態からは1重力子状態に同定し得る状態が得られる [12, pp.286-287]．このように古典的には無重力を表すMinkowski空間においてさえ，閉弦を量子化すると重力子が得られることは，弦理論が一般相対性理論の背景独立

性に正面から取り組んでいないことを端的かつ象徴的に示しているように見受けられる。(重力のある時空を等価的に平坦な境界上のゲージ理論に関係付けて記述する, 弦理論における AdS/CFT 対応と呼ばれるホログラフィー原理のシナリオ [13, p.552] もやはり, 本質的には伝統的な場の量子論の域を出ていないと言える。)

こうして場の量子論と弦理論, およびループ量子重力における時空の描像は, 大まかには図85のように模式的にまとめられる。一般相対論以前の物理は時空上で捉えられる。境界理論を用いて記述されるバルクの物理を伴う, 弦理論の最近の発展もまた, 同じ方向への進展である。これに対し真に完全な量子重力は全く時空を必要としない。実際, ループ量子重力では時空は量子状態の後にやって来る [1, p.8]。なお本稿の図85では背景独立な量子重力のイメージ図として, これから紹介するスピン・フォームのイラストを筆者が独自に作成して載せておいた。正確にはイラストでは始・終状態における離散的な空間とその上の場の配位, および対応するスピン・ネットワークとそれを境界に持つスピン・フォームの構造の一部を描いている。この模式図の要点は言わば, 我々が量子重力場に埋め込まれているということである。

なお弦理論とLQGが将来統合される可能性も繰り返し唱えられている: LQGは弦理論が必要としてきた背景独立な定式化を行う方法を与えるのに対し, これから紹介するLQGのスピン・ネットワークの織物(weave)状態は自然な弦の構造を持つ [2, p.8]。(もっともスピン・ネットワークの抽象的なリンク線は, 素朴には物理的な弦とは多分に異質なものに見受けられる。

16.4 量子化された幾何学

GR + QM $\rightarrow$ 空間の離散化

16.4.1 Bronstein にならった思考実験

粒子を目印に用いて、空間の位置を指定する.

大きな運動量 $p \simeq E/c$ (超相対論的極限) を与えるほど,

- 位置の不確定性 $\Delta x \gtrsim c\hbar/E$ は狭まる (QM)
- 質量 $M \sim E/c^2$ の作る “ミニ・ブラックホール” の地平面の半径 $r \sim GM/c^2$ は増大する (GR)

というジレンマがある. よって位置の不鮮明さ $\max(\Delta x, r)$ は $\Delta x = r$ のとき, Planck 長さ l_P 程度の最小値をとる [1, pp.6–8].

↑

l_P より小さい連続的な空間がそもそも存在しないのだとすれば, l_P より短いスケールで位置について語ることは意味を成さないという結論自体は正しい.

16.4.1 項の式の導出など

■Bronstein にならった思考実験の説明 [1, pp.7–8]

あらゆる粒子は量子論的な粒子なので、位置と運動量に関する不確かさ $\Delta x, \Delta p$ を持つ。粒子の位置を L 程度の正確さで得るには、 $\Delta x < L$ であれば良い。ところが Heisenberg の不確定性は $\Delta x > \hbar/\Delta p$ を与えるので、 $\Delta p > \hbar/L$ が帰結する。 p^2 の平均値は $(\Delta p)^2$ よりも大きく、したがって $p^2 > (\hbar/L)^2$ 。

注解 平均値を $\langle \dots \rangle$ で表すと、 $(\Delta p)^2 \equiv \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$ より $\langle p^2 \rangle \geq (\Delta p)^2$ 。
最後に $\langle p^2 \rangle \rightarrow p^2$ と書き改める(すぐ後で古典論に乗り換えることを念頭に)。

しかるに、運動量の大きな超相対論的極限では粒子のエネルギーは $E \simeq cp$ と表される。よって粒子の位置を L 程度の正確さで得るには、高エネルギー $E \simeq cp \gtrsim \hbar c/L$ が必要である。すると古典的には GR により、粒子は質量(重力質量; gravitational mass) $M \sim E/c^2 \gtrsim \hbar/cL$ を、したがって地平面の半径 $R \sim GM/c^2 \gtrsim \hbar G/c^3 L$ を持つ。

注解 エネルギー E の1粒子から成る“媒質”を考えると、その内部エネルギー密度はエネルギー・運動量テンソルの時間-時間成分として、重力場の源の資格を持つと考えられる。Schwarzschild 半径の表式は $r_g = 2GM/c^2$ である(4.1節)。これは座標長さである。ブラックホールの外部からは地平面の内部は見えないので、座標長さ r に対応する動径方向の真の距離よりも、外部から見える地平面の真の面積 $4\pi r^2$ を与え

る座標 r そのものが重要な役割を演じると考えられる．いや地平面内部で座標 r に対応する真の長さを求めることが可能であるとしても，位置の幅 L は座標の読みなので，地平面の半径としても同じく(遠方で真の長さに収束する)座標の読み r と比較するのが自然だと考えることもできる．あるいは単に大雑把な議論なので，真の長さ r の違いにはナイーブに議論を進めているだけかもしれない．

地平面の半径 R が長さ L を覆い隠さない条件は

$$L > R \gtrsim \frac{\hbar G}{c^3 L}, \quad \therefore L \gtrsim \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \equiv l_P : \text{Planck 長さ}.$$

このような粗い議論でも本質を捉えていれば，ある意味正しい洞察が得られるというのは小気味よい．

注解1 これを踏まえると，位置の固有状態 $|x\rangle$ では $\Delta p = \infty$ なので，粒子は半径 $R = \infty$ の地平面に隠されることになる．ところがこれは位置が確定していることに反する．このように $|x\rangle$ は理想化された概念である．

注解2 この思考実験はまた，どのような粒子も単にそれが質量を持つという理由だけで，実際に周りにミニ・ブラックホールを形成しているのかという，別の疑問を想起させる．確かに例えば電子(質量 $M = 9.11 \times 10^{-31} \text{kg}$)に対して Schwarzschild 半径を定義でき，その値は $r_g = 2GM/c^2 = 1.35 \times 10^{-57} \text{m}$ である．ところがこれは Planck 長さに比べて極めて小さいため，空間が Planck 長さのオーダーの最小単位を

持つのであれば，素粒子に対して地平面の概念は現実的には意味を成さないと想像できる． r_g が Planck 長さのオーダーに達するには， M は Planck 質量 $\sqrt{\hbar c/G} \sim 10^{-8} \text{kg}$ 程度には大きい必要がある．実際，文献 [20, pp.217–218] に全く同様の議論が見出される．

16.4 節の原稿(序文)

ここまでは主に一般相対性理論の概念的な含意を論じ、時空の幾何学は重力場の現れであるという解釈の下で背景独立性のアイデアを強調してきた。次に我々は可能な限り恣意的な仮定を設けることなく、素直で正直な方法で一般相対性理論を量子力学と融合し、重力場を量子化したい。それは言い換えれば“量子幾何”の意味を理解するという問題である。しかるに物理量の量子力学的な本性は3つの形で現れる [1, p.9] :

1. 量そのものの離散化(あるいは“量子化”)において
2. 不確定性関係の意味する短いスケールの“不鮮明さ(fuzziness)”において
3. (遷移振幅で与えられる)その発展の確率的な本性において.

ここではループ量子重力の最も特徴的な側面の1つとして1点目に焦点を当て、量子幾何学において空間が離散的になることを説明する。素朴には場を量子化すると粒子が得られるのと同様に、空間に他ならない重力場を量子化すると空間の粒が得られると期待される。(擬) Riemann 多様体としての時空の記述は、量子重力では生き残り得ない。

16.4.1 項の原稿

この離散的な空間に対する直観を導ける近道として、ここではひとまず Bronstein にならった歴史的な思考実験を紹介したい [1, pp.6–8]. それは完全な量子重力理論ではなく、あくまで半古典的な物理の外挿に基づいているものの、示唆に富んでおり、良くも

悪くも結論を先取りして“空間の量子”のアイデアを手早く導入するには都合が良い。話はLandauの誤りから始まる。Lifshitzとの共著『理論物理学教程』で有名な、あのLandauである。Heisenbergの不確定性関係は、与えられた時空点において電磁場成分を任意の精度で測定することを妨げるとLandauは予想した。その直観は、任意にシャープな時空の位置付けがHeisenbergの不確定性関係と矛盾するだろうということだった。これに対しLandauの師にあたるBohrはRosenfeldとの共同研究で、Landauの予想が誤りであることを証明した。しかしLandauは流石Landauであって、彼の誤りさえ一石を投じている。実際、Landauの年下の友人Bronsteinが電磁場の代わりに重力場を用いてBohr–Rosenfeldの解析を繰り返したところ、驚くなかれ、重力場に対してはLandauの直観は正しいことが判明した。すなわち一般相対性理論を無視しなければ、量子論は確かに任意に小さな領域での場の測定可能性を“妨げる”のである。こうしてBronsteinは歴史的に早くも、量子力学が時空の本性に影響することを理解した。しかしながらBronsteinは30歳にして、不当にもStalinの大粛清の下で処刑された。さて、Bronsteinの議論の現代的で単純化されたバージョンを与えよう、何故ならそれは単に量子重力の歴史の始まりであるだけでなく、量子重力の核心でもあるからである。粒子を目印に用いて、空間の位置をどれだけ精度良く特定できるかという問題を考える^{*186}。量子力学によれば粒子の位置の不確定性 Δx を狭めるには、粒子に大きな運

^{*186} 16.2節でEinsteinの孔の議論を例に説明したように、空間における点はそれ自体では意味を成さず、位置を指定するには何らかの目印が必要であることを思い出していただきたい。

動量を，したがってエネルギーを与える必要がある^{*187}．ここで重力の効果を考慮するために古典論に乗り換えると，一般相対性理論では粒子のエネルギーは重力場の源になり，周りに“ミニ・ブラックホール”を形成する．“ミニ・ブラックホール”の地平面の半径 r はエネルギーとともに増大するため，いずれ位置の幅 Δx はミニ・ブラックホールに飲み込まれ，粒子を見失ってしまうというジレンマがある．よって位置の不鮮明さ $\max(\Delta x, r)$ は $\Delta x = r$ のとき最小となり，これを境に減少から増大に転じる．以上のアイデアに沿って計算すると，このときの位置の不鮮明さ $\Delta x = r$ の値はちょうどPlanck長さ l_P のオーダーになることが示される(導出スライド参照)．するとPlanck長さより短いスケールで位置について語ることは意味を成さない．実際，Planck長さより小さい連続的な空間がそもそも存在しないのだとすれば，この結論自体は正しい．

^{*187} 実にこれがCERNで小さいスケールを調べるのに，高い運動量の粒子が用いられる理由である．

16.4.2 紫外切断

Planck長さが紫外切断となり，理論には文字通り紫外発散の余地(room)がない(Planck長さ程度より短い波長を内に含む連続的な空間がない) [2, p.21].

表14 基本定数の意味する有限性

基本定数	理論	有限性
c	一般相対性理論	最大の速度
h	量子力学	最小の情報
l_P	量子重力	最小の長さ

■素粒子の大きさ

- 剛体は最大速度 c に矛盾するため，古典的には素粒子は点 [4, pp.49–50].
- 電荷の自己エネルギー $\sim e^2/r$ が mc^2 程度になる値 $r \sim r_0 = e^2/mc^2$ より短距離で古典電磁気学は破綻 [4, pp.102–103]. r_0 は電子の“(古典)半径”と呼ばれ，Thomson散乱の断面積 $\sim r_0^2$ [4, pp.241–242] [17, pp.21–23].
- 弦理論でも弦内部の点の運動を辿ることはできない [12, p.108].

離散的な空間に位置付けられる物質もまた有限の拡がりを付与されると想像できる．実際，LQGは物質と結合した場合にも紫外有限である [1, p.187].

16.4.2項の原稿

空間が Planck 長さ程度の最小単位を持つことの重大な帰結の1つとして、Planck 長さが紫外切断の役割を演じることが挙げられる。場の理論では摂動論を用いて遷移振幅を計算すると、任意に小さな波長の場のモードに起因する紫外発散が現れる。そこで14.3節で紹介したように、例えば一時的に紫外切断を導入して理論を正則化し、繰り込みの技法を用いて無限大を取り除くことができる。代わりに正則化を理論の本質的な修正と見なして、低エネルギー理論での最終的な結果が切断の詳細に依存しないような方法で理論を再定義することも可能である。この場合、モードの短距離の切断は未知の物理を隠し、無限大を取り除く数学的な技巧に過ぎない。これに対し量子重力では Planck 長さ程度より短い波長を内に含む連続的な空間がないため、理論にははじめから文字通り紫外発散の余地(room)がないと言える [2, p.21]。量子重力における Planck スケールの切断は単なる数学的な技巧ではなく、量子時空の成す真の物理的な特徴である [1, p.17]。なお量子重力における最小の長さ ($\sim l_P$) の発見は、

- 特殊相対性理論における最大の局所的な物理的速度、光速 c
- 量子状態が相空間に占める体積 (Planck 定数 h),
したがって量子系が持つ情報の有限性

の発見と比較される (表14を見よ) [1, p.17]。

関連して素粒子の大きさについて考えよう。まず古典的な観点に立ち、素粒子として有

限の広がりを持つ物体と想定すると、それは内部構造を持たず、それ故に変形しない剛体と定義するのが自然と考えられる。ところが剛体は変形しないので、その一端に外力を加えて運動させると、他端も同時に運動を始めねばならず、これは力が有限の速度(光速以下)で伝播するという特殊相対性理論の前提に矛盾する。ここから相対論の文脈では剛体は実在し得ず、素粒子は大きさを持たない点と見なさねばならないことが帰結する [4, pp.49–50]. 他方で電荷 e の荷電粒子は、便宜的に有限の半径 r を持つと想定すると (Gauss 単位系で) e^2/r 程度の自己エネルギーを持ち、これは $r \rightarrow 0$ で発散する。これは古典電磁気学に適用限界があることを意味しており、自己エネルギーが粒子の静止エネルギー mc^2 と同程度になる r の値 $r \sim r_0 = e^2/mc^2$ より小さい距離では、古典電磁気学は破綻すると考えられる。(電子に対して)この r_0 は電子の“(古典)半径”と呼ばれる [4, pp.102–103]. 実際例えば自由電荷による電磁波の散乱の断面積を古典的に計算すると r_0^2 のオーダーになる。この結果は Thomson の公式として知られ [4, pp.241–242], 電荷が文字通り半径 r_0 程度の標的として振舞うことを意味する(同じ結果は量子電磁力学からも導ける [17, pp.21–23]).

次に量子論では、素粒子が有限の広がりを持つと想定するアプローチとして弦理論が有名である。なるほど、弦が古典的に位置を時間追跡できる無数の点から構成されているならば、それは弦がそれ以上の内部構造を持たない1つの素粒子を表していることに矛盾する。しかし16.3節で言及したように弦の上の位置を指定するパラメータ σ はゲージに過ぎず、開弦の端点を除き σ の一定値を持つ弦の内部の点の運動を辿ることは原理的にできないと想定される [12, p.108]. このように注意深く考えれば、実のところ剛体

に限定されない，有限の大きさを持つ素粒子を考える余地はあったのである．さて，これに対しループ量子重力では空間そのものが粒状の離散的な構造を持ち，その最小単位は Planck 長さ程度とされる．素朴には空間が最小単位を持つならば，それに対して位置付けられる物質もまた有限の広がりを与えられると想像できる．したがって必ずしも弦理論を採用せずとも，物質が有限のサイズを持つ理論を構想することは可能である．実際，ループ量子重力は物質と結合した場合にも紫外発散を生じない．何故なら幾何学の量子化は物質場に対しても，高運動量の Feynman 積分に対する物理的な切断として振舞うからである．ある意味，フェルミオンと Yang-Mills 場はあたかも Planck サイズの格子上にあるかのように振舞う [1, p.187].

16.4.3 スピン・ネットワークとスピン・フォーム

■双対なグラフ

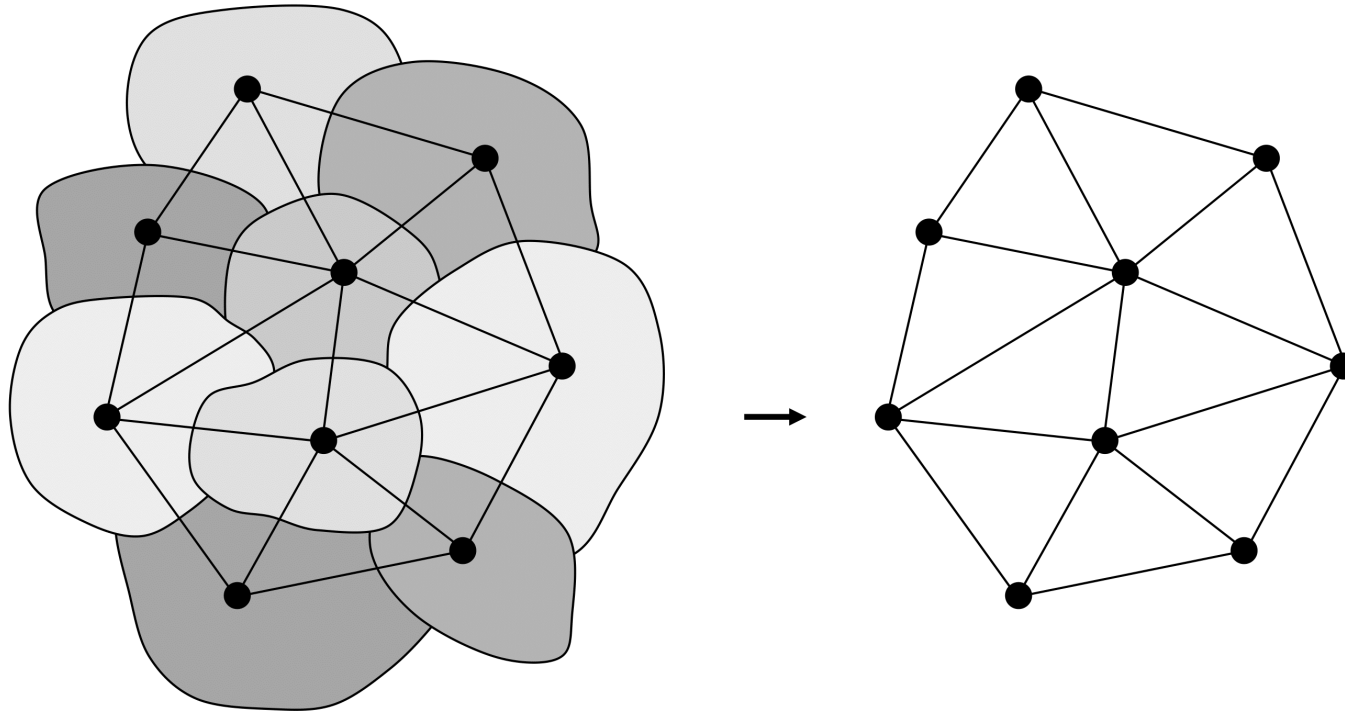


図86 空間の塊(chunks)の隣接関係を表すグラフ [1, p.20]

結節点やリンク、およびリンクに双対な面を導入する具体的な位置(や形状)の曖昧さは理論の背景独立性のため問題にならない。

■量子 Faraday 線 [1, p.19] [2, pp.15–16]

与えられた閉曲線 $\vec{\alpha}(s)$ に対して電場分布

$$\vec{E}_\alpha(\vec{x}) = \oint ds \frac{d\vec{\alpha}(s)}{ds} \delta^3(\vec{x} - \vec{\alpha}(s)) \quad (1128)$$

は図87のような, 単一の Faraday 線の量子力学的な素励起を表し, 確かに Gauss の法則

$$\text{div } \vec{E}_\alpha(\vec{x}) = 0 \quad (1129)$$

を満たす. LQG において図86のグラフの線は重力場の Faraday 線と見なせる.

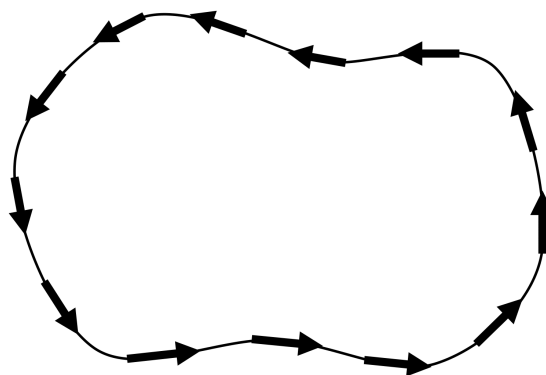


図87 ループ α と (矢印で表される) 電場分布 $\vec{E}_\alpha$

■ループ変数とホロノミー [1, pp.19–20, pp.95–96]

多様体の曲線 γ に沿った平行移動関数(ホロノミー) U_γ を“ループ”変数と呼ぶ.
無限小平行移動を定義する接続場は離散的な空間ではよく定義されない.

$\tau_i = -\frac{i}{2}\sigma_i$ を $SU(2)$ 生成子として, 3次元空間における $SU(2)$ Yang–Mills 接続

$$A(x) = A_a^i(x)\tau_i dx^a, \quad (1130)$$

$$(A_i = A_a^i dx^a : \text{接続1形式}, A_a = A_a^i \tau_i : \text{場の行列表示} : (990))$$

に従い物質場 $\varphi(x)$ を時空点 $x + dx$ へ無限小平行移動した場合は,

$$\varphi_{||}(x + dx) = (1 + A_a dx^a)\varphi(x) \quad (\text{式(989)}) \quad (1131)$$

で与えられる. 変数 s でパラメトライズされた多様体上の曲線 $\gamma(s)$ を考えると,
一般にホロノミーないし平行移動関数は, 始点 $s = 0$ の場に作用して終点の場

$$\varphi(s) \equiv \varphi(\gamma(s)) = U_\gamma(s)\varphi(0) \quad (1132)$$

を与える行列 $U_\gamma(s)$ として定義される. このとき式(1131)から,
無限小の平行移動に対するホロノミーは

$$U(dx) = 1 + A_a dx^a. \quad (1133)$$

Riemann 幾何学での平行移動に伴うベクトル成分の変化 (63) と同様,
ホロノミーは微分方程式

$$\frac{d}{ds}U_\gamma(s) = \dot{\gamma}^a(s)A_a(\gamma(s))U_\gamma(s) \quad (1134)$$

を満たす ($\dot{\gamma}^a \equiv d\gamma^a/ds$) [2, p.44]. 式 (1134) の初期条件 $U(0) = \mathbb{1}$ の下での解は,
接続の指数の経路順序化

$$U_\gamma(s) = Pe^{\int_\gamma A} = P \exp \left(\int_{\gamma(0)}^{\gamma(s)} A_a dx^a \right) \quad (1135)$$

で与えられる (Dyson 級数 (650) と同様に導出できる).

- ホロノミーはその定義 (1132) より, 掛け算則

$$U_{\gamma_1}U_{\gamma_2} = U_{\gamma_1 \circ \gamma_2} \quad (1136)$$

を満たす平行移動の表現行列 (群要素), 接続 A は群の Lie 代数の要素 [1, p.20].

- 閉ループに対するホロノミー (1135) は, Maxwell 理論では単に磁束の指数.

- 物質場の局所ゲージ変換

$$\varphi'(x) = \Lambda(x)\varphi(x) \quad (\text{式(988)}) \quad (1137)$$

に伴い，ホロノミーは曲線の始・終点 x_i, x_f に作用するゲージ関数により

$$U'_\gamma = \Lambda(x_f)U_\gamma\Lambda^{-1}(x_i), \quad U'_{\gamma^{-1}} = \Lambda(x_i)U_{\gamma^{-1}}\Lambda(x_f) \quad (1138)$$

と変換する． $\rightarrow$ 特に閉じたループに関するホロノミーはゲージ不変．

- ホロノミーの接続による汎関数微分は

$$\frac{\delta}{\delta A_a^i(x)}U_\gamma = \int_\gamma ds \delta^3(x - \gamma(s))\dot{\gamma}^a(s)U_{\gamma_1}\tau^i U_{\gamma_2} \quad (1139)$$

と計算され，ここに γ_1 と γ_2 は s で切り分けられる γ の2つの部分である．

■ スピン・フォーム [2, pp.26-27, pp.325-326] [3, pp.150-152]

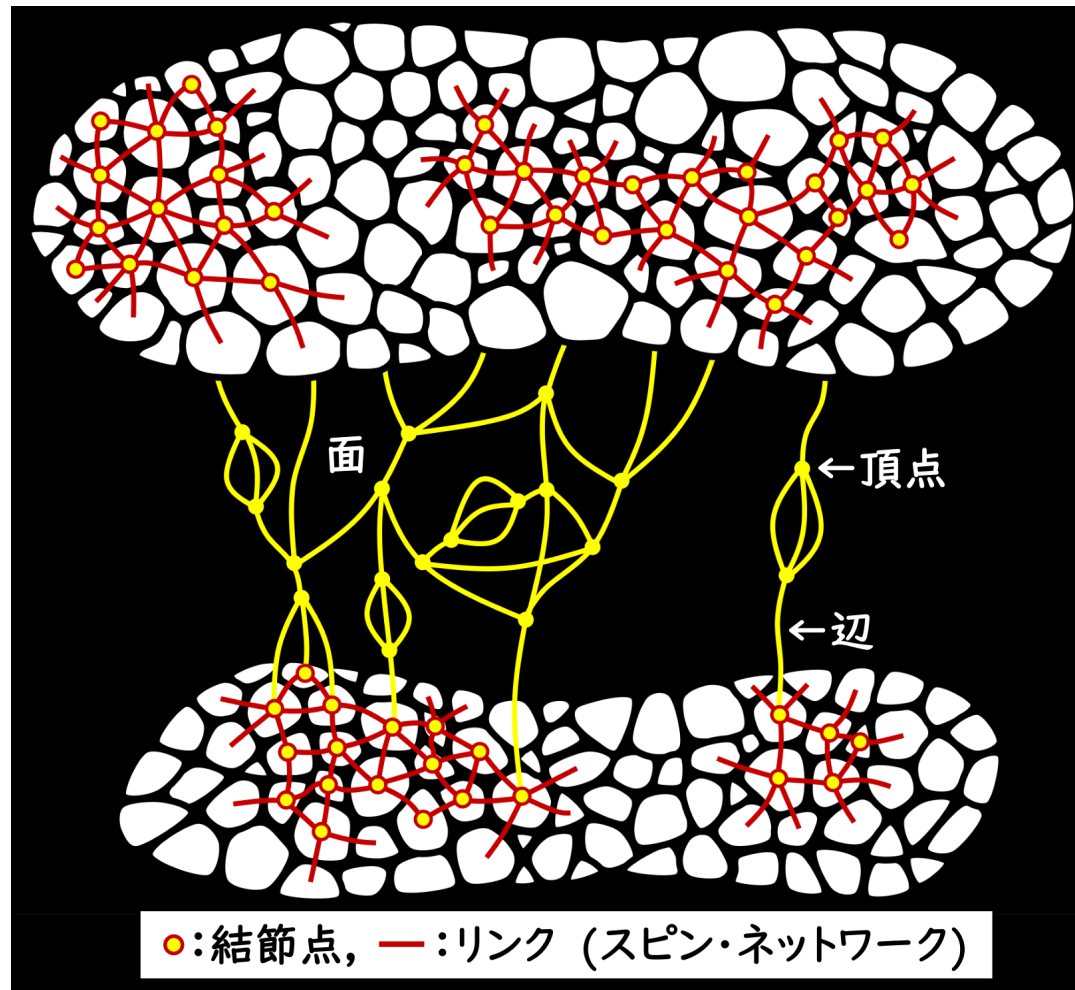


図88 始・終スピン・ネットワークを境界に持つスピン・フォーム

■ 正準 LQG と 共変 LQG

正準LQG	共変LQG (スピン・フォーム理論)
Hamilton形式 正準量子化	Lagrange形式 経路積分の方法
スピン・ネットワークで 記述される 運動学的構造を確立	スピン・フォームに 遷移振幅を与え ダイナミクスを直接定義

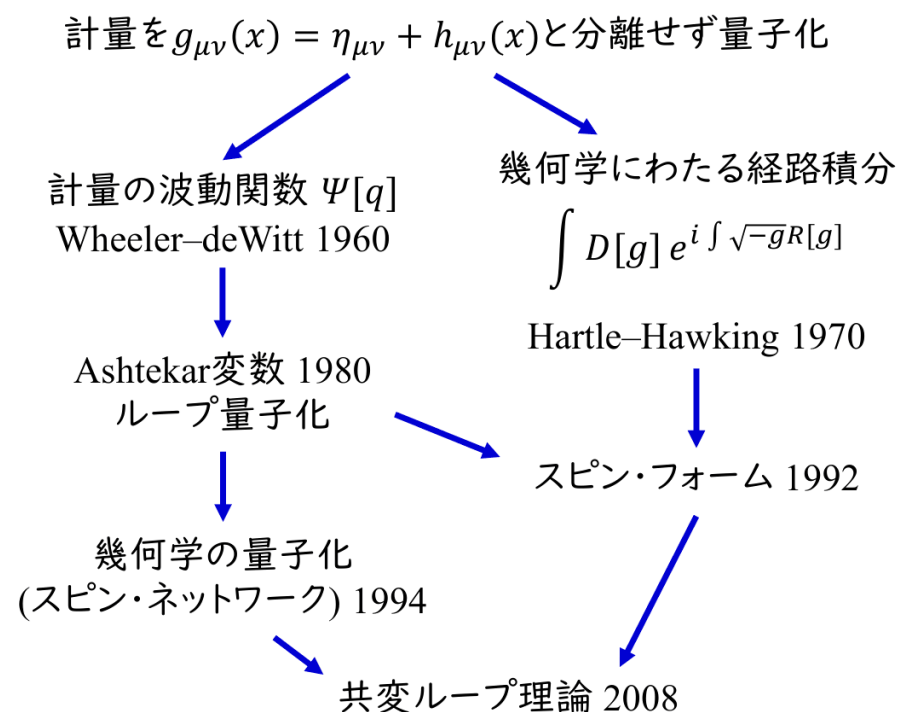


図89 LQGの発展の主要な路線 [1, p.22]

16.4.3項の式の導出など

■単一のFaraday線に対応する電場分布(1128)が Gauss の法則(1129)を満たすことの確認 [2, p.16]

任意の滑らかな関数 f に対して

$$\begin{aligned}\int d^3x f(\vec{x}) \operatorname{div} \vec{E}_\alpha(\vec{x}) &= \int d^3x f(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x^a} \oint ds \frac{d\vec{\alpha}(s)}{ds} \delta^3(\vec{x} - \vec{\alpha}(s)) \\ &= - \int d^3x \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^a} \oint ds \frac{d\vec{\alpha}(s)}{ds} \delta^3(\vec{x} - \vec{\alpha}(s)) \\ &= - \oint ds \frac{d\alpha^a(s)}{ds} \frac{\partial}{\partial \alpha^a} f(\vec{\alpha}(s)) \\ &= - \oint_\alpha df = 0\end{aligned}\tag{1140}$$

となるので、示された.

注解1 上式(1140)最左辺は不鮮明化関数 f による $\vec{E}_\alpha(\vec{x})$ の不鮮明化に他ならず, しばしば $[\operatorname{div} \vec{E}_\alpha](f)$ と表記される [3, p.54].

注解2: 電場分布(1128)のパラメータ付け替え不変性について 一見すると Faraday 線 α のパラメータを $s \rightarrow s'$ と付け替えれば, 電場の式(1128)における接ベクトル $d\vec{\alpha}/ds$ が変化するため, α 上の異なる電場分布が得られそうである. しかし

$s = f(s'), \vec{\alpha}(f(s')) = \vec{\beta}(s')$ とおくと, 新しいパラメータ s' で定義した電場は

$$\begin{aligned}\vec{E}_\alpha(\vec{x}) &= \oint ds' \frac{d\vec{\beta}(s')}{ds'} \delta^3(\vec{x} - \vec{\beta}(s')) = \oint ds' \frac{d\vec{\alpha}(f(s'))}{ds'} \delta^3(\vec{x} - \vec{\alpha}(f(s'))) \\ &= \oint ds \frac{d\vec{\alpha}(s)}{ds} \delta^3(\vec{x} - \vec{\alpha}(s))\end{aligned}$$

となって, 元の式(1128)と変わらない. よって電場(1128)の α 上の分布はパラメータ付けに依らず, α の形状だけで決まることになる(定数倍の自由度を除き). 式(1128)の左辺にパラメータ s のラベルがないのは理に適っている.

■ホロノミーの満たす微分方程式(1134)の導出

平行移動した場 $\varphi_{\parallel}(x + dx)$ を位置 $x + dx$ での場 $\varphi(x + dx)$ と定義するならば、これらの差として定義される共変微分(991):

$$\begin{aligned}\varphi(x + dx) - \varphi_{\parallel}(x + dx) &= \{\partial_a \varphi(x) - A_a(x)\varphi(x)\}dx^a \\ &\equiv D_a \varphi(x)dx^a\end{aligned}$$

がゼロになる。曲線 $\gamma^a(t)$ に沿う要素 $dx^a = \dot{\gamma}^a ds$ をとると、この条件は

$$\dot{\gamma}^a D_a \varphi = 0, \quad \dot{\gamma}^a \partial_a \varphi = \dot{\gamma}^a A_a \varphi$$

を与える [3, pp.65–66]。これはベクトル φ の無限小平行移動に伴う変化量を表しており、式(1132): $\varphi(s) = U_{\gamma}(s)\varphi(0)$ の関係を通じてホロノミー $U_{\gamma}(s)$ に対する微分方程式(1134)に読み替えられる。

■ホロノミーの変換則(1138)の理由

ホロノミー U_γ は始点 x_i と終点 x_f の物質場を式(1132): $\varphi(x_f) = U_\gamma \varphi(x_i)$ で関係付ける.
ここで物質場の局所ゲージ変換はユニタリー変換(988),(1137): $\varphi'(x) = \Lambda(x)\varphi(x)$ で与えられるため,

$$\varphi'(x_f) = \Lambda(x_f)\varphi(x_f) = \Lambda(x_f)U_\gamma\varphi(x_i) = [\Lambda(x_f)U_\gamma\Lambda^{-1}(x_i)]\varphi'(x_i).$$

最右辺から U_γ のゲージ変換は式(1138)第1式

$$U'_\gamma = \Lambda(x_f)U_\gamma\Lambda^{-1}(x_i)$$

に同定される. 終点から始点に逆行する曲線 γ^{-1} のホロノミー $U_{\gamma^{-1}}$ の変換則は, 第2式

$$U'_{\gamma^{-1}} = \Lambda(x_i)U_{\gamma^{-1}}\Lambda(x_f)$$

で与えられる.

■ホロノミーの接続による汎関数微分(1139)の導出 [3, p.113]

ここではホロノミーを式(1135)の代わりに、掛け算則(1136)を踏まえて、経路に沿った微小区間ごとのホロノミー(1133)の積

$$U(A, \gamma) \approx (1 + (A \cdot \dot{\gamma})_{N-1} ds) \cdots (1 + (A \cdot \dot{\gamma})_1 ds) (1 + (A \cdot \dot{\gamma})_0 ds), \quad (1141)$$

$$(A \cdot \dot{\gamma})_k \equiv A_a(\gamma(s_k)) \dot{\gamma}^a(s_k), \quad A_a \equiv A_a^i \tau_i, \quad s_k \equiv \frac{k}{N} ds \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

の形に書くと便利である．ただしここでは経路の区間を $s \in [0, s_{\max}]$ とし、 $N \gg 1$ に対して $ds \equiv s_{\max}/N$ とおいた．上式(1141)は経路順序化されていることが明白である．ホロノミー(1141)の汎関数微分をとると

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta A_a^i(x)} U_\gamma &= \sum_{k=0}^{N-1} [(1 + (A \cdot \dot{\gamma})_{N-1} ds) \cdots \{ \delta^3(\gamma(s_k), x) \tau_i \dot{\gamma}^a(s_k) ds \} \cdots (1 + (A \cdot \dot{\gamma})_0 ds)] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} U(s_{\max}, s_k) \{ \delta^3(\gamma(s_k) - x) \tau_i \dot{\gamma}^a(s_k) ds \} U(s_k, 0) \\ &= \int_0^1 ds U(s_{\max}, s) \{ \delta^3(\gamma(s) - x) \tau_i \dot{\gamma}^a(s) \} U(s, 0) : (1139) \end{aligned}$$

を得る. ここに $U(s_2, s_1)$ は点 s_1 から点 s_2 への平行移動関数 (ホロノミー) である.

16.4.3項の原稿

量子重力の描像では、空間はPlanck長さ程度の空間の塊(chunks)ないし粒から成る。そのような空間の粒の相対的な位置関係は、図86のようなグラフで表せる。ここでグラフの各結節点(node)は個々の空間の粒を表し、結節点を結ぶリンク(links)は対応する粒が互いに隣接していることを表す [1, p.18,p.20].

そのようなグラフはもとの空間の離散的な分割と双対であると言われる [2, p.263]. 双対という用語はおそらく、一方があれば他方を復元できるという意味で用いられている。ここで双対なグラフの概念を導入するために、今考えている離散的な3次元空間を例にとり、双対なグラフを作図する手順を説明する^{*188}。まず離散的な空間を成す各体積の塊の中に点(結節点; node)を適当に1つずつとり、次いで面を介して隣り合う塊どうしに関しては、対応する2つの結節点をリンクで繋いで隣接関係を表現できる。すると空間の離散的な構造を反映したグラフとして、結節点をリンクで結んだネットワークが得られる。逆に与えられたネットワークから元の離散的な空間構造を復元するには、次のようにすれば良い。すなわちリンクで繋がった2つの結節点の間に、リンクを切るように適当な面を差し込み、2つの結節点を分離する境界面とする。そのような面はリンクに双対であると言われる。これを全てのリンクに対して行くと、各結節点はそこに

^{*188} 空間のVoronoi (ボロノイ) 分割と双対なDelaunay (ドロネー) 図について既に知っている読者ならば、ここでも基本的なアイデアは変わらないことに気付くだろう。

接続しているリンクに双対な面たちによって周囲から仕切られ、結節点の“守備範囲”が確定する。これが元の体積の塊であり、結節点に双対な領域と言われる。

ここまでの定義には、結節点やリンク、およびリンクに双対な面を導入する具体的な位置(や形状)に曖昧さがある。ところが理論では背景の座標空間に対する具体的な位置付けが問題にならないため、不都合は生じない。実際ループ量子重力ではこの後で見るように、グラフの各リンク l と結節点 n にそれぞれスピン j_l と結節因子 ι_n を割り当て“色付け”した「スピン・ネットワーク」が中心的な概念として用いられる。スピン j_l はリンク l に双対な面の面積の量子数という意味を持ち、また ι_n は n に双対な領域の体積の量子数に選べる。このときスピン・ネットワークは面積と体積の同時固有状態となる [1, p.139]。そこで例えば結節点を取り囲む領域を背景の座標空間に対して連続的に変形すると、その見かけの体積(座標体積)は変わるにも関わらず、領域の中に同じ結節点が含まれている限り、領域の真の体積は変わらない。また曲面の面積は、面を貫くリンクが変わらない限り不変である。体積の塊を座標空間にどれだけ大きく思い描こうとも、その物理的なサイズは変わらないのである [1, pp.15–16]。このようにループ量子重力の描像には、一般相対性理論の背景独立性が見事に実装されている。繰り返せば、スピン・ネットワークは背景の空間中の“どこか(somewhere)”にあるのではなく、あらゆる物理的対象がそれに対して位置付けられるところの“場所(when)”であり、それ自体が空間を表す [2, pp.20–22]。

なるほど、確かに空間の正体は「スピン・ネットワーク」と呼ばれるネットワーク構造として捉えられると述べれば、一見するとそのネットワークもまた背景の3次元空間の

中にあるのではないか，という疑問が生じ得る．つまり，ネットワークを導入する前から，空間の概念が密輸入されているのではないかという疑惑が生じる．これはもっともな疑念であり，確かに第一義的には，我々はネットワークを背景の多様体に埋め込まれた対象として思い描くほかない．例えばネットワークを絵に描いてみせれば，紙を2次元の背景として利用していることになる．ところが連続的な変形(より正確には微分同相変換^{*189})によって互いに一致するネットワークを同一視すると，もはやネットワークは背景の多様体とは無関係に，「ある結節点(ノード)が別の点と繋がっているか否か」といった抽象的な関係だけで定義されることになる．こうして我々は背景の多様体を消すことができる [2, p.21].

ところで場の現代的な概念の起源は，Faradayの“力線”(Faraday線)の直観にまで遡ることができる^{*190}．そして力線は量子力学へ移行すると，全て離散的になり互いに分離すると予期されてきた．

面白いことに，古典論の水準でも静電気学と矛盾することなく，単離した1本の電気力線を考えることができる．実際，与えられた閉曲線 $\vec{\alpha}(s)$ に対して電場分布(1128)は図87のように，電場がループ α 自身を除いて至るところで消え，また α 上の全ての点で

^{*189} 微分同相変換(写像)はスピン・ネットワークのグラフを連続的に変形するだけでなく，グラフ以外の情報も変え得る [2, p.238].

^{*190} ただし電気力線は電場の重合せを表現できない．

ループに接しているような，単一のFaraday線の量子力学的な素励起を表す．電場分布(1128)は確かにわき出しがなく，Gaussの法則(1129)を満たすことが確かめられる(導出スライド参照)．直観的には，Gaussの法則(1129)はちょうど電場が各点において場自身の方向に途切れず“続く”こと，すなわち場がFaraday線を定義することを要求する．(このとき無限遠まで伸びた電気力線を除外すれば力線は閉じたループを形成する他なく，また無限に長い力線は巨大なループの一部と考えることもできる．)

LQGはこのような量子Faraday線に対する直観の上に発達した．実に図86のグラフの個々の線は重力場の離散的なFaraday線と見なせる．重力場は時空なので，その離散的で量子的な線は空間の中にあるのではなく，むしろ空間そのものの生地(texture)を成す．これがLQGの物理的直観である．服の生地も遠くからは滑らかな面に見えるように，マクロにはスピン・ネットワークの織物(weave)状態から，滑らかな空間が立ち現れると考えられる [2, p.268].

さて“ループ量子重力”における“ループ”とは，図86のようなグラフにおける，閉じた一連のリンクの成すループのことを指す．歴史的には，構成された最初の状態は結節点を持たなかった．結節点を持たないスピン・ネットワークは単につまらないループの集まりであり，体積(したがって空間)のない状態を表すに過ぎない．しかしループは量子重力のダイナミクスの支配方程式(Wheeler–DeWitt方程式)の厳密解であることが判明した．これは1980年代後半の，初期の段階においてLQGの興味を惹きたてた最初の主要な驚きだった [2, p.25,p.273].

もっとも今となっては必ずしも「ループ」という表現に拘らず、「ループ量子重力」の代わりに「スピン・ネットワーク理論」といった名称を用いる方が、理論の内容を素直に反映しているように感じられる。実際すぐ後で見るようにループ量子重力の共変なアプローチには、「スピン・フォーム理論」という気の利いた別名がある。

なお正確には時空多様体の接続場 $\omega(x)$ によって定義される、任意の曲線 γ に沿った平行移動関数 U_γ を、理論の専門用語で“ループ”変数と呼ぶ。(図86で見た3次元空間のリンクに沿う平行移動関数もループ変数に含まれる。) また数学用語としては本来、閉じたループ γ に対する平行移動関数 U_γ を特にホロノミーと呼ぶ。しかしながら本稿では慣習に従い、任意の曲線 γ に関する平行移動関数も単にホロノミーと呼ぶことにする [2, p.45] [3, p.67]。いずれにせよ、そのようなループ変数 U_γ はまさにループ量子重力の基本変数に用いることができる、と言うのも離散的な空間では、無限小の平行移動を規定する接続場 $\omega(x)$ はもはやよく定義されないのに対し、有限の平行移動に関するホロノミー U_γ は依然としてよく定義されるからである。

そこでホロノミーの具体的な定義と性質について、この場でまとめておこう [1, pp.95–96] [3, pp.65–68]。以降の議論は接続場 $\omega(x)$ の具体的な選択に依らずに成り立つ。例えば2.2.3項で見たように、 $\omega(x)$ としてChristoffel記号(ないしLevi-Civita接続 [2, p.46])を考えれば、一般相対性理論における通常のベクトルの平行移動を定義できる。他方でこれから見るように、ループ量子重力、とりわけその正準な定式化では15.1節で導入した、 $SU(2)$ Yang–Mills理論の運動学に従う接続場 A が配位変数として用いられる。 $SU(2)$ Yang–Mills接続 A の運動量共役は(密度化した)トライアド E であるこ

とが判明し，正準変数の組 (A, E) はまとめて Ashtekar 変数と呼ばれる．歴史的には 1980 年代の半ばに Ashtekar は彼の変数を用いて重力理論を Yang–Mills 理論と似た形に書き換えた．この仕事は量子重力理論に素粒子物理の技法を持ち込めるのではないかという期待を高め，ループ量子重力の発端となった [3, p.6]．そこで以下では議論を確定するため，3次元空間における $SU(2)$ Yang–Mills 接続 (1130) を考えよう．ただし式 (1130) では $SU(2)$ Yang–Mills 接続 A を行列表示かつ微分 1 形式として書いており， $\tau_i = -\frac{i}{2}\sigma_i$ は $SU(2)$ 生成子である．また背景の座標多様体として特に 4次元時空における平行移動を考える場合には，空間添字 a を時空添字 μ に採り直しさえすれば良い．Yang–Mills 理論において，接続 A に従い物質場 $\varphi(x)$ を時空点 $x + dx$ へ無限小平行移動した場合は，行列表記で式 (1131) で与えられる．ただし結合定数の因子 ig は 1 とおいた．等価的に因子 ig は接続に吸収させて， $igA \rightarrow A$ と再定義したと考えても良い^{*191}．また変数 s でパラメトライズされた多様体上の曲線 $\gamma(s)$ を考え， $s = 0$ を始点とすると，一般にホロノミーないし平行移動関数は，始点の場に作用して終点の場 (1132) を与える行列 $U_\gamma(s)$ として定義される．このとき式 (1131) から，無限小の平行移動に対してはホロノミーが式 (1133) となることが読み取れる．

^{*191} これは行列 A の基底を再定義する自由度に関係していると考えられる．また g を摂動パラメータとする文脈では， A が g を既に含んでいるならば，後で見るホロノミーの表式 (1135) の指数の展開を摂動展開のようにも見なせる．

また Riemann 幾何学での平行移動に伴うベクトル成分の変化 (63) と比較される関係として、ホロノミーは微分方程式 (1134) を満たす [2, p.44]. ここに $\dot{\gamma}^a = d\gamma^a/ds$ は曲線 γ の位置 s における接ベクトルである (導出スライド参照). 式 (1134) の初期条件 $U(0) = \mathbb{1}$ の下での解は、接続の指数の経路順序化 (1135) で与えられる. ただし記号 P は経路順序化を表し、指数 (1135) のベキ展開において、あたかも行列表示の場合 A_a たちを交換するかのように扱い、引数が経路に沿って始点に近いものから順に右から並べ替えることを意味する. つまり経路に沿って始点に近い位置の因子から先に、右側の行列に作用することになる. 微分方程式 (1134) の解 (1135) の導出は、時間発展演算子に対する Schrödinger 方程式 (649) から Dyson 級数 (650) を得る計算と同様の手順で行えるので [3, p.66–68], ここでは証明を繰り返さない. 実際、ホロノミーの式 (1135) では Dyson 級数 (650) における時間順序化が経路順序化に置き換わっているに過ぎない. ところでホロノミーはその定義 (1132) より、掛け算則 (1136) を満たす平行移動の表現行列であり、したがって群を成すのに対し、ホロノミー (1135) の指数にあたる接続 A は群の Lie 代数に属する [1, p.20]. ただし式 (1136) 右辺における $\gamma_1 \circ \gamma_2$ は2つの曲線 γ_1 と γ_2 を繋いだ経路であり、 γ_1 と γ_2 が空間的に離れている場合には、それらを往復経路 (trees) で繋げば良い. 往路と復路とでホロノミーの値は相殺するので、往復経路は任意に選べる [3, pp.121–122].

また Maxwell 理論では接続にあたるベクトル・ポテンシャル同士は可換なので、式 (1135) における経路順序化は何の役割も演じない. したがってホロノミー (1135) は単にベクトル・ポテンシャルの線積分の指数となる. 特に閉じたループに対してベクト

ル・ポテンシャルの周回積分は、そのループを貫く磁束である。多様体のあらゆるループに対して磁束またはホロノミーを指定すれば、多様体全体にわたる磁場分布を指定できる [3, p.65,p.68].

ここでホロノミーの重要な性質を挙げる。まず物質場の局所ゲージ変換(1137)に伴い、ホロノミーは曲線の始・終点 x_i, x_f に作用するゲージ関数により式(1138)のように変換する (導出スライド参照)。ここから特に閉じたループに関するホロノミーはゲージ不変である。

またこの後で見るように Ashtekar 接続 A_a^i の運動量共役 E_i^a は、量子論では A_a^i による汎関数微分に置き換わる [2, p.242]。このためホロノミーの接続による汎関数微分を計算する必要が生じる。そのためには公式(1139)を利用すれば良く、ここに γ_1 と γ_2 は s で切り分けられる γ の2つの部分である (導出スライド参照)。言葉で述べると、汎関数微分はその引数 x が曲線 γ 上にある場合にのみノンゼロの結果を与える。このときホロノミーの途中の点 s に生成子 τ^i が挿入され、その位置 s にわたる積分が施される。

ここまでは3次元空間の離散的な構造がスピン・ネットワークで表されることを説明してきた。次に時空の構造へと話を進めよう。ループ量子重力では時空は「スピン・フォーム」と呼ばれる、泡状の構造で表される。(「フォーム(foam)」とは「泡」を意味する英単語であり、「洗顔フォーム」といった日常用語にも用いられる。)ここで次元を1つ落として3次元空間を2次元の面としてイメージすれば、スピン・フォームは

スピン・ネットワークが背景多様体の中で“高さ”方向に発展するときに通過する領域として理解できる。(ただし、ここでもスピン・フォームは背景時空の中にあるのではなく、それ自体が時空そのものを成す。) スピン・ネットワークの結節点は1次元的な曲線を、リンクは2次元的な面を描くため、実際このとき図88のような石鹸の泡(foam)のような構造が得られる。(このこと自体は現実の4次元時空の理論に対しても正しい。)あるいは石鹸の泡の代わりに、グラスに注がれたビールの泡の層をイメージしても良い。ビールの泡をある“高さ”で切ると断面として網目状のネットワーク構造が得られるように、スピン・フォームを3次元の超曲面で切ると、断面に現れる網目状のグラフとして、空間を表すスピン・ネットワークが得られる。スピン・フォームは境界にグラフを誘導すると言い換えても良い。図88に示したように、慣習に従いグラフの点と線は、スピン・ネットワークに対しては結節点およびリンクと呼び、スピン・フォームに対しては頂点および辺と呼び分ける。スピン・フォームの泡の構造は数学的には2-複体(2-complex)と呼ばれ、泡において面は辺で繋がり、辺は頂点で繋がる。スピン・ネットワークの結節点とリンクと同様、スピン・フォームの辺は結節因子で、面はスピンで色付けられている。まとめるとスピン・フォームとは、結節因子とスピンの色付けされた2-複体である。

さて、古典物理学の枠組みはHamilton形式とLagrange形式に大別され、それぞれに対応して伝統的な場の量子論は正準量子化と経路積分の手法で定式化できるように、ループ量子重力(LQG)へのアプローチにもまた、大まかに「正準な定式化」と「共変な定式

化」の2通りがある [2, p.320]. 歴史的には最初にLQGの正準バージョンが, Ashtekar 変数で書かれた正準GRの形式的な量子化, すなわち Wheeler–deWitt 方程式の“ループ”解の発見から生まれた. 幾何学の量子化がこの理論の内部で導かれ, 量子幾何のスピン・ネットワークによる記述をもたらした [1, p.21]. このように正準理論はループ量子重力の土台として, その運動学的な構造を確立するのに大いに役立った. また正準形式ないし Hamilton 形式は時間と空間の恣意的な区別を導入するものの, 最終的にはその区別が解消されるという意味で「洗練された」枠組みとなっている [3, p.40].

これに対し「共変な定式化」では正準理論の結果を踏まえつつも, Feynman の経路積分のように, 始・終状態のスピン・ネットワーク間の遷移振幅を, 途中の可能な幾何学にわたる和として表すことを試みる. この場合, スピン・フォームに対して遷移振幅を原理として割り当て, 量子ダイナミクスを直接規定することが, 理論を定義することに相当する. これは必ずしも正準形式のように時間と空間の区別を設けないという意味で, 共変なアプローチと言える. また共変ループ量子重力には, より優美で理論の内容を素直に反映した呼称として, 「スピン・フォーム理論」という別名がある.

歴史的には70年代に Feynman の方法での (à la Feynman) “幾何学にわたる和の形式”が, Hawking と彼のグループによる汎関数積分の Euclid 的な定式化に触発され発展した. 正準理論はこの“スピン・フォーム”理論へと分岐し, 次いで正準LQGの運動学と融合し, 現在の共変な理論へと発展した (図89を見よ) [1, p.21].

確かに正準な理論のアイデアは共変な理論に通じている. 理論の見た目は変われど, 記述される物理そのものは変わらないという直観が根底にあるのだろう. ただし正準な理

論と共変な理論はあくまで今のところ独立に提唱されており，それらの等価性の証明は未解決問題である [1, p.238].

16.5 三角形分割

- 三角形分割 [1, pp.86–87]
 - 2次元の面 → 三角形の貼り合わせ
 - 3次元空間 → 四面体の貼り合わせ
 - 4次元時空 → 「4-単体 (4-simplex)」の貼り合わせ
- 古典的離散化は(面積・体積の固有値の)量子力学的な離散性を意味しない

16.5.1 四面体の Euclid 幾何学

四面体の幾何学 (形状 + サイズ) の自由度は6

- 三角不等式の下で6本の辺の長さを独立に選べる
- 四面体を指定する3辺 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ の成分数9から, 空間回転の自由度3を差し引く

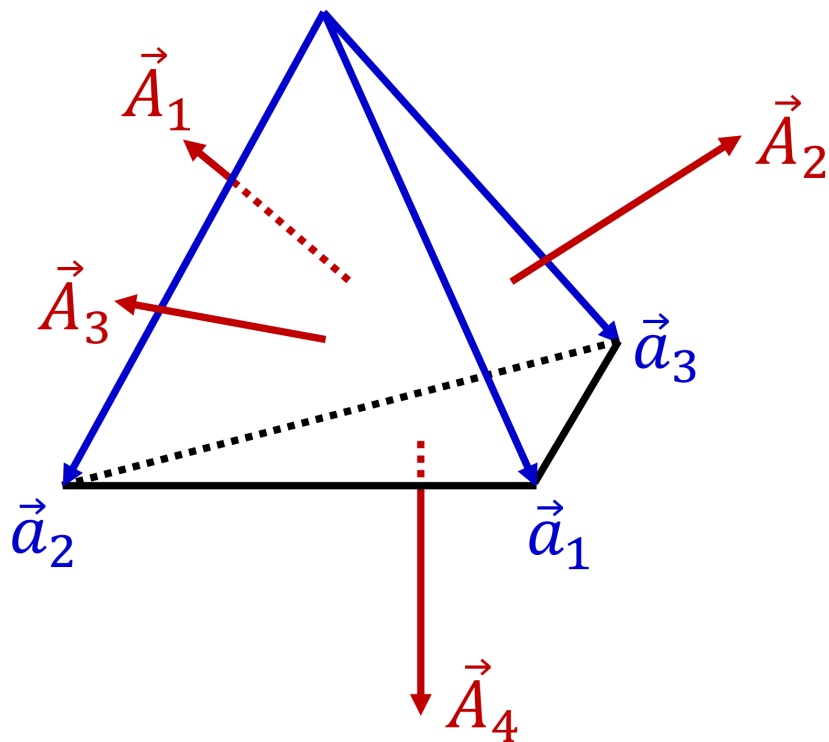


図90 四面体の面積ベクトル $\vec{A}_i$

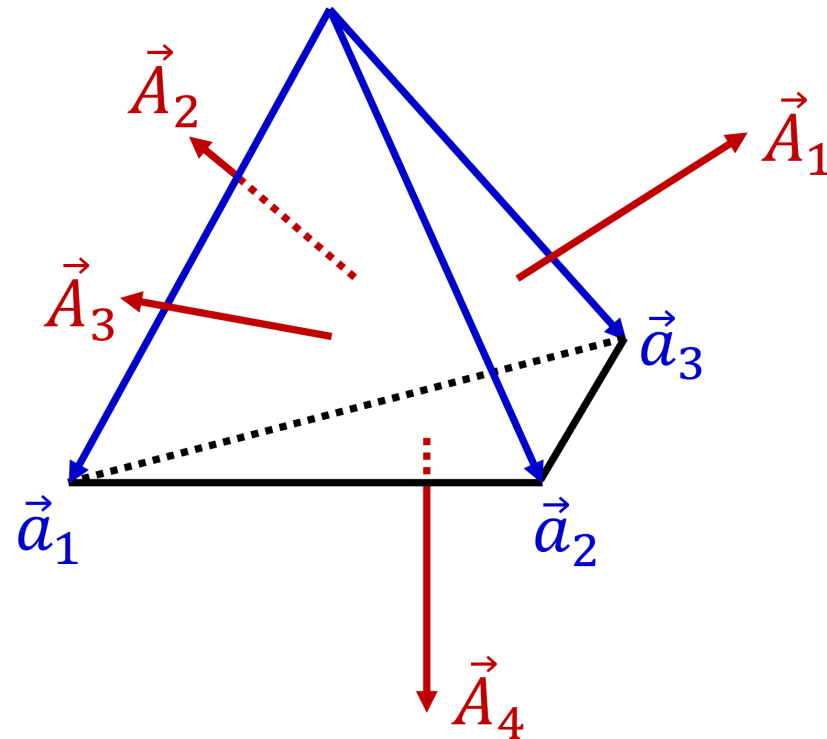


図91 $\{\vec{a}_i\}_{i=1}^3$ が左手系の場合

四面体の面積ベクトル $\vec{A}_l$ ($l = 1, 2, 3, 4$) は “閉包 (closure)” 関係

$$\sum_{l=1}^4 \vec{A}_l = 0 \quad (1142)$$

を満たす (面積要素たちがぴたりと閉じて立体の境界・表面を成す条件).

閉包拘束 (1142) を満たし回転の下で同一視される面積ベクトル $\vec{A}_l$ の組は, 四面体の幾何学を過不足なく特徴付ける.

3 辺 $a = (a_l^i)$ と面 $A = (A_l^i)$ (ただし $l = 1, 2, 3$) の関係は

$$A^T = \mp \frac{1}{2} (\det a) a^{-1} \quad (1143)$$

とまとめられる. ここから四面体の体積 V は

$$V^2 = \mp \frac{2}{9} (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2) \cdot \vec{A}_3 = \mp \frac{2}{9} \epsilon_{ijk} A_1^i A_2^j A_3^k = \mp \frac{2}{9} \det A \quad (1144)$$

のように, 3 つの面積ベクトルで決まる.

■幾何学の不鮮明さ [1, p.16]

四面体の幾何学の自由度は6なので、
面積(4つ)と体積(1つ)の同時固有状態において、四面体は量子ゆらぎを伴う。

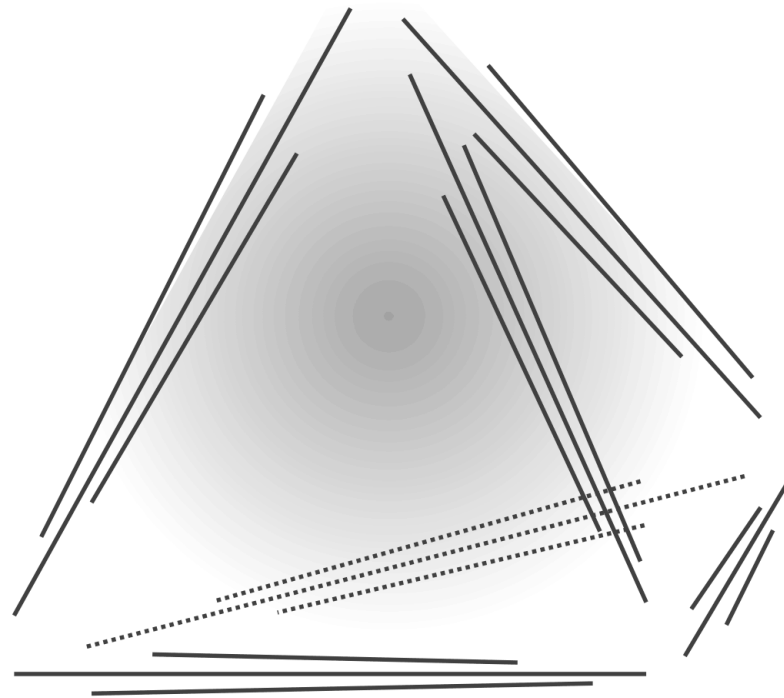


図92 四面体の量子幾何は不鮮明さを伴う

16.5.1 項の式の導出など

■閉包条件(1142)の確認

図90のように四面体の辺のベクトル $\vec{a}_l$ ($l = 1, 2, 3$) を定義すると、それらの張る三角形の面積ベクトルは

$$\vec{A}_1 = -\frac{1}{2}\vec{a}_2 \times \vec{a}_3, \quad \vec{A}_2 = -\frac{1}{2}\vec{a}_3 \times \vec{a}_1, \quad \vec{A}_3 = -\frac{1}{2}\vec{a}_1 \times \vec{a}_2, \quad (1145)$$

と表される．また図90において底面のベクトル $\vec{a}_{12} \equiv \vec{a}_2 - \vec{a}_1$, $\vec{a}_{13} \equiv \vec{a}_3 - \vec{a}_1$ を用いて

$$\vec{A}_4 = \frac{1}{2}\vec{a}_{12} \times \vec{a}_{13} = \frac{1}{2}(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 + \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 + \vec{a}_3 \times \vec{a}_1)$$

と書ける．最右辺は期待されるように $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ の巡回置換に関して対称である．これと3つのベクトル(1145)を足すとゼロになることが見て取れる．

■辺 $\vec{a}_l$ と面 $\vec{A}_l$ の関係 (1143) の確認 面積ベクトルの表式 (1145) は等価的に

$$\vec{A}_l = -\frac{1}{4}\epsilon_l^{mn}\vec{a}_m \times \vec{a}_n \quad \text{i.e.} \quad A_l^i = -\frac{1}{4}\epsilon_l^{mn}\epsilon_{jk}^i a_m^j a_n^k \quad (1146)$$

と書ける．他方で $\tilde{a} \equiv (\det a)a^{-1}$ は $a = (a_l^i)$ の余因子行列の転置行列であり，その (l, i) 成分は

$$\tilde{a}_i^l = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon^{lmn}a_l^j a_m^k \quad (1147)$$

と書ける^{*192}．すると転置行列 $\tilde{a}^T$ の (i, l) 成分は $\tilde{a}$ の (l, i) 成分なので，与式 (1143) は

$$a_l^i = -\frac{1}{2}\tilde{a}_i^l = -\frac{1}{4}\epsilon_l^{mn}\epsilon_{jk}^i a_m^j a_n^k$$

を意味する．これは上式 (1146) に一致しているので，式 (1143) が成り立つ．

なお一連の式 (1143), (1145), (1146) における負号は，図 90 で 3 辺 $\vec{a}_l$ を右手系として定義したことに起因している．図 91 のように左手系の $\vec{a}_l$ を採ると，これらの負号は現れない．

^{*192} 言い換えれば，逆行列 a^{-1} の要素を a_i^l として $(\det a)a_i^l = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon^{lmn}a_m^j a_n^k$ と表される．実際， a_l^i との縮約をとると両辺は $3 \det a$ となるので，これは成り立っている．より手堅い確認として， $a_l^{i'}$ や $a_{l'}^i$ を掛けて一方の添字のみでの縮約を調べても良い．

■体積の表式(1144)の確認

第1の等号だけが非自明である．そこで $V^2 = \frac{2}{9} \det A$ を示す．議論を確定するため，図90のように3辺 $\vec{a}_l$ が右手系を成す場合を考えよう．四面体の底面を $|\vec{A}_3|$ に選ぶと，高さの向きは $\vec{n} = -\vec{A}_3/|\vec{A}_3|$ ，高さは $h = \vec{a}_3 \cdot \vec{n}$ である(図90を見よ)．すると式(1145)とより，体積は

$$V = \frac{1}{3} |\vec{A}_3| h = -\frac{1}{3} \vec{a}_3 \cdot \vec{A}_3 = +\frac{1}{3 \cdot 2} \vec{a}_3 \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \frac{1}{6} \det a$$

と表される．これは初等幾何学でよく知られているように四面体の体積が，右手系を成すベクトル $\vec{a}_l$ の張る平行六面体の体積 $\det a (\geq 0)$ の $1/6$ であることを意味する．ここで式(1143): $A^T = -\frac{1}{2}(\det a)a^{-1}$ の両辺の行列式をとると

$$\det A = \left(-\frac{1}{2} \det a \right)^3 (\det a)^{-1} = -\frac{1}{8} (\det a)^2 (\leq 0)$$

を得る． $\det A$ が負であることは，図90から視覚的に示唆されるように， $\vec{a}_l$ が左手系を成すことから裏付けられる．以上の2式より $V^2 = -\frac{2}{9} \det A$ となる．他方で図91のように左手系の $\vec{a}_l$ を採ると，右辺の負号は現れない．

16.5 節の原稿(序文)

例えば3次元空間における一連の体積の塊は、背景の座標空間に対する正確な位置付けが問題にならないため、簡単のためそれらを連続的に変形して一般には多面体へと移行させることができ、対応して双対なグラフのリンクも真っすぐな線分にできることに注意しよう。

そこでループ量子重力では離散的な空間・時空を表現する手法として、しばしば三角形分割(triangulation)が用いられる。三角形分割とは三角形を貼り合わせて2次元の曲面を近似することや、3次元空間を四面体の貼り合わせで表すことを指す。4次元時空の三角形分割には、三角形や四面体を4次元に一般化した「4-単体(4-simplex)」が用いられる [1, pp.86–87]。実際、平坦な計量を持たない一般の空間では、正方格子よりも三角形分割を利用する方が自然である [1, p.145]。

いずれにせよ、ここで空間を便宜的にセルに分割することは、あくまで古典論の段階で導入できる措置であり、それ自体は必ずしも空間が現実には離散的であることを意味しないことに注意しよう。実際、古典論の段階では三角形分割をきめ細かくして、連続的な空間を復元することが許される。これに対して現実には空間が離散的であることは、あらかじめ空間を三角形分割で近似してから理論を量子化したときに、現に面積や体積の固有値が離散的なスペクトルを持つという事実の内にある。そこで量子力学的な空間の離散性と区別するため、三角形分割の措置を古典的離散化と呼ぶ [1, p.15, p.101]。

ところでグラフの頂点(または結節点)に接続する辺(またはリンク)の本数を価数と呼

び，例えば4本のリンクが接続している結節点は4価の結節点と言われる．4価の結節点はリンクに双対な4つの面に囲まれた体積の量子を，したがって四面体を表す．専らループ量子重力の正準理論では例えばスピン・ネットワークにおいて，任意の価数を持つグラフが用いられる．他方でグラフを三角形分割に双対な構造に限定すると，スピン・ネットワークには四面体に対応する4価の結節点しか現れない．したがって三角形分割を利用する際には，そのような措置を施しても一般性を失うことなく量子重力の本質を十分に捉えきれると，半ば直観的に仮定していることになる．もっとも結節点が任意の価数を持つような場合への理論の一般化は直接的に行える [1, p.150].

16.5.1 項の原稿

ここでは3次元空間の三角形分割のビルディング・ブロックとして，必ずしも正四面体とは限らない任意の四面体を考え，準備としてその幾何学的性質をまとめておく [1, pp.11–13].

まずは四面体の形と大きさを指定する方法を考えよう．四面体の幾何学的な自由度は6である．これは簡単には四面体の形状とサイズが，四面体の6本の辺の長さで指定できることから理解できる．確かに辺の長さの間には三角不等式が課せられるものの，三角不等式の下で6本の辺の長さを独立に選べることは正しい．なるほど，この説明は確かに直観に訴える説得力がある．

次にこの直観の正当化も兼ねて，改めて別の方法で四面体の幾何学的自由度を手堅く勘

定しよう．四面体は図90のように共通の頂点から発する3本の辺を表す，3つのベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ を指定すると完全に決まる．このとき我々は $3 \cdot 3 = 9$ 個のベクトル成分を選ぶ．ただし四面体を並進または回転した四面体は，形と大きさがもとの四面体と等しい．すると並進と回転によって互いに移行できる四面体は区別されないため，並進と回転の自由度を取り除かねばならない．ところが四面体を平行移動しても辺のベクトル $\vec{a}$ たちの成分は変わらないので，空間並進の自由度は最初から除かれている．あるいは等価的にベクトルの始点に選んだ四面体の頂点は，空間の原点に固定されていると考えても良い．他方で四面体の剛体的な回転はベクトル成分を変える．しかるに周知のように，3次元空間における回転の自由度は3である．そこでベクトル成分の総数9から空間回転の自由度3を差し引くと，四面体の自由度はやはり6となる [1, p.16]．

ここで四面体の4つの面を $l = 1, 2, 3, 4$ でラベルし，その各々に対して面積ベクトル $\vec{A}_l$ を，面に垂直で大きさが面の面積に一致する，外向きのベクトルとして導入しよう．例えば図90に示した3つの面積ベクトル $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$ は，3本の辺のベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ のベクトル積を用いて表せる．(ただし三角形は面積が2辺の張る平行四辺形の半分なので，数係数 $1/2$ を掛ける必要があることに注意する．) 残る“底面”の任意の辺も，したがって“底面”の面積ベクトル $\vec{A}_4$ もまた，3辺のベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ で表せる．すると直接の計算により，4つの面積ベクトルは条件(1142)を満たすことが確かめられる(導出スライド参照)．式(1142)は“閉包(closure)”関係と呼ばれ，面積要素たちがぴたりと閉じて立体の境界・表面を成す条件と解釈できる．式(1142)は量子重力において重

要な役割を演じ、繰り返し現れる関係なので、すぐ後の16.5.2項で改めて詳しく論じることにする。

四面体の辺の長さは三角不等式を満たさねばならないため、量子化を研究するのに適していない。そこで我々は四面体の幾何学を指定する量に、面積ベクトル $\vec{A}_l$ を選ぶことにする。実際、閉包拘束(1142)により、面積ベクトルのうち独立に選べるのは3つまでである。さらに辺のベクトルの場合と同様に回転の自由度を差し引くと、再び自由度は6となる。したがって閉包拘束(1142)を満たし回転の下で同一視される面積ベクトル $\vec{A}_l$ の組は、四面体の幾何学を過不足なく特徴付ける。長さに対する条件が三角“不等式”であるのとは対照的に、面積(ベクトル)に対する閉包関係(1142)は等式であることにも注意しよう。

なお3辺 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ とそれらに挟まれた3つの面の面積ベクトル $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$ に対して、それらの成分から成る3次正方行列 $a = (a_l^i)$ と $A = (A_l^i)$ を定義すると ($l = 1, 2, 3$)、辺と面積のベクトルの関係は式(1143)のようにまとめられる。ただし複号は辺のベクトル $\vec{a}_l$ を図90のように右手系に採る場合は負号を、図91のように左手系に採る場合は正号を選ぶ(導出スライド参照)。さらに3つの面積ベクトルで四面体の幾何学が決まるならば、このとき四面体の体積 V も決まるはずである。実際、公式(1143)を用いると、四面体の体積 V は式(1144)のように、任意の3つの面の(適切な順序の)3重積に関係付けられる。ただし複号は図90のように順序付けられた面積ベクトル $\vec{A}_l$ に対して負号を、図91のように順序付けられた面積ベクトル $\vec{A}_l$ に対して正号を採る(導出スライド参

照). このとき公式(1144)における V^2 の負の値は単に3重積の順序の変更, すなわち, 向きの反転に対応することが見て取れる.

16.4.3項で結論を先取りして言及したように, スピン・ネットワーク状態は四面体の面積と体積の同時固有状態に選ぶことができる. 先ほどのように面積ベクトルを特定すると, その時点で体積(1144)も決まってしまうのに対し, ここでは面積ベクトルではなく, 単に面積のみを指定していることに注意しよう. さて, このとき四面体は体積と4つの面積の, 合計5つの量子数で特徴付けられる. ところが四面体の幾何学の自由度は6なので, 同時固有状態においても四面体の幾何学はなお完全にはシャープに決まらず, 図92のように量子ゆらぎを伴うことになる. したがって量子力学では必ずしも, 我々が古典的に四面体と呼んでいる対象を額面通りに四面体と受け取ることはできない. それは量子力学において電子が常には文字通り粒子として振舞わないのと同じ事情である. 16.4節では冒頭で量子力学的な本性のキーワードとして挙げた「離散化」「不鮮明さ」「確率」のうち, 空間の離散化を重点的に説明した. ここでは加えて, 幾何学の量子力学的な不鮮明さが帰結する理路を見出したことになる.

16.5.2 閉包拘束

■2次元のバージョン [1, p.102] 図93の三角形の3辺が閉じる条件

$$\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_1} = 0 \quad (1148)$$

は，法線ベクトル $\vec{n}_l$ に対する閉包条件を意味する：

$$\sum_{l=1}^3 \vec{n}_l = 0. \quad (1149)$$

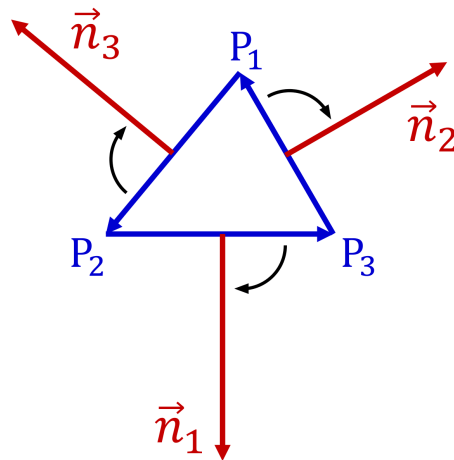


図93 三角形の閉包拘束の図解

■発散定理との関係

外向き面積ベクトル $d\vec{S}$ を持つ表面 ∂V に作用する全圧力は

$$-\oint_{\partial V} p d\vec{S} = -\int_V \vec{\nabla} p dV \quad (1150)$$

と表される^{*193}。ここで一様な圧力場 p を考えると $\vec{\nabla} p = 0$ より、任意の閉曲面に対しても

$$\oint d\vec{S} = 0 \quad (1151)$$

を得る。あるいは一様な速度ベクトル $\vec{U}$ を持つ流体中に、空間に固定した仮想的な閉曲面をとると、この閉曲面からの流体の正味のわき出しは

$$0 = \oint \vec{U} \cdot d\vec{S} = \vec{U} \cdot \oint d\vec{S} \quad (1152)$$

なので、再び一般の閉包条件 (1151): $\oint d\vec{S} = 0$ を得る。
(正確には閉包条件 (1151) $\Rightarrow$ 一様流のわき出し (1152).)

^{*193} これは微分2形式 $p dy \wedge dz$, etc. に Stokes の定理を適用して得られる “Gauss の定理” である。

多面体を三角形分割できることを示す簡単な具体例：

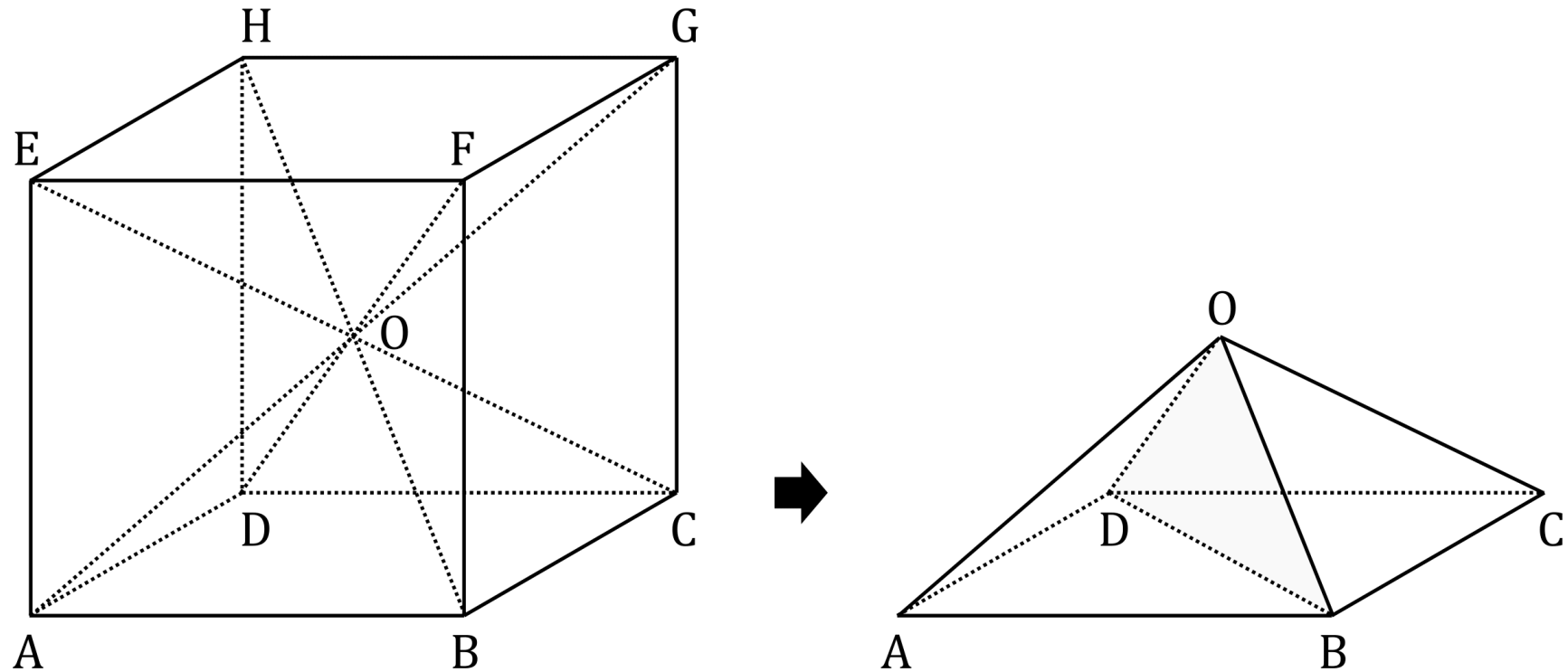


図94 立方体の三角形分割の一例．まず立方体 $ABCD-EFGH$ の中心に点 O を置き各頂点と線分で結ぶと，立方体の面を底面に持ち O を頂点とする6つの四角錐に立方体を分割できる．次にその各々，例えば四角錐 $O-ABCD$ は2つの四面体 $OBDA$ と $OBDC$ に分割できる．

三角錐台の面積ベクトルは図95 (b) から，閉包関係を満たす：

$$\sum_{l=1}^5 \vec{A}'_l = \sum_{l=1}^4 \vec{A}_l - \sum_{l=1}^4 \vec{B}_l = 0 - 0 = 0. \quad (1153)$$

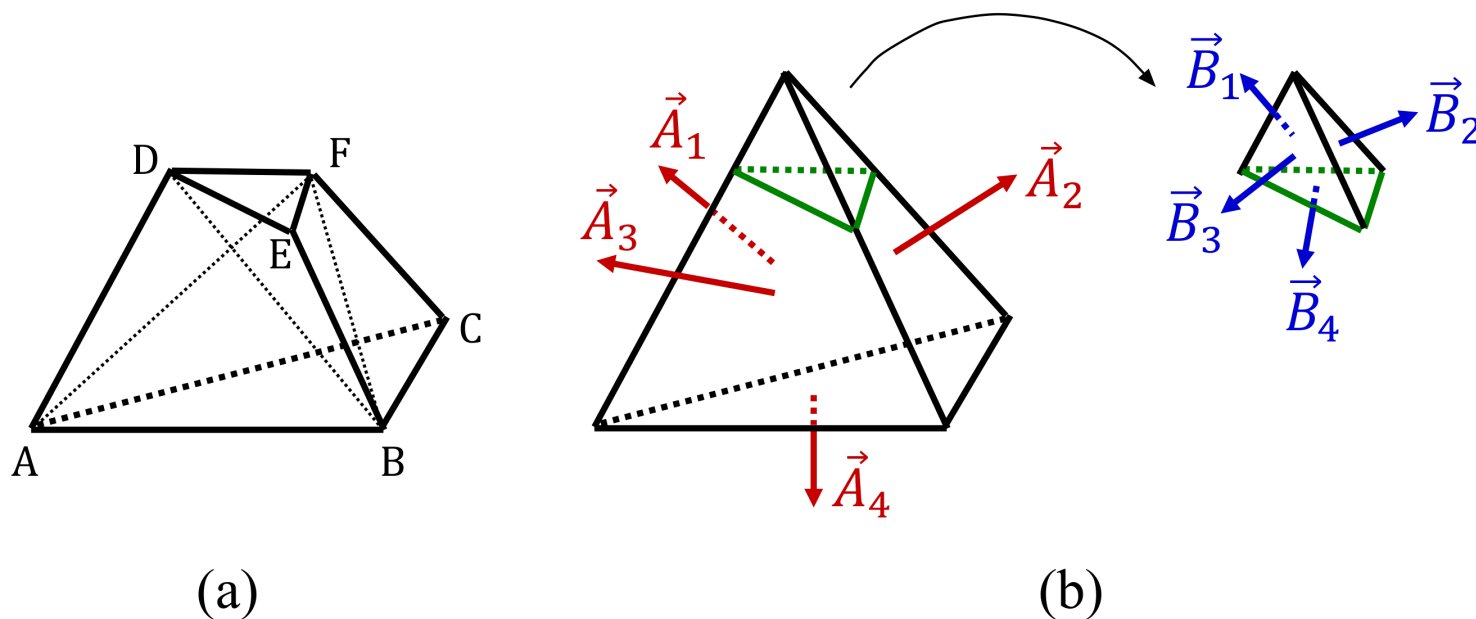


図95 三角錐台の形状を持つ五面体．(a)四面体ABCF,ABDF,BDEFへの三角形分割．(b)面積ベクトル $\{\vec{A}_l\}$ を持つ四面体から面積ベクトル $\{\vec{B}_l\}$ を持つ四面体を切り取って得られる五面体は，面積ベクトル $\vec{A}'_l = \vec{A}_l - \vec{B}_l$ ($l = 1, 2, 3$)と $\vec{A}'_4 = \vec{A}_4$, $\vec{A}'_5 = -\vec{B}_4$ を持つ．

16.5.2項の原稿

四面体に対する閉包拘束(1142)は、空間の次元を落として平面上の三角形を考えると理解が著しく容易になる。実際、与えられた三角形 $\triangle P_1P_2P_3$ の3辺に対しては“面積ベクトル”の対応物として、図93のように大きさが辺の長さに等しい外向きの法線ベクトル $\vec{n}_l$ ($l = 1, 2, 3$)を採ることができる。辺の長さに等しい大きさを持つ法線ベクトルを得るには、単に三角形の3辺に沿うベクトル $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3}, \overrightarrow{P_3P_1}$ を 90° 回転させれば良い。ところが三角形の3辺が閉じる条件(1148)はまさしく、直ちに法線ベクトルに対する閉包条件(1149)を意味する。

他方で3次元空間では、閉包関係(1142)は物理的には一様な圧力の中に置かれた四面体の力のつり合いを表す [1, p.163]。ここから着想して、任意の閉曲面へと考察を一般化しよう。流体力学でよく知られているように、外向き面積ベクトル $d\vec{S}$ を持つ表面 ∂V に作用する全圧力は式(1150)で表される。ここで一様な圧力場 p を考えると、 $\vec{\nabla}p = 0$ より式(1151)を得る。すなわち多面体に限らず、任意の閉曲面の面積要素ベクトルの総和はゼロになる。同じ結果は次のように理解することもできる。一様な速度ベクトル $\vec{U}$ を持つ流体中に、空間に固定した仮想的な閉曲面をとると、この閉曲面からの流体の正味のわき出しは式(1152)で表されゼロである。最右辺において $\vec{U}$ は任意に選べるので、再び一般の閉包条件(1151): $\oint d\vec{S} = 0$ を得る。(逆に最初に圧力の議論で示したように閉包条件(1151)が成り立つことから、一様流のわき出しが式(1152)のようにゼロ

であるという直観が正当化される。)

この発散定理の根底にあるアイデアとして、与えられた多面体を複数の四面体に三角形分割すれば、貼り合わされた2つの四面体に共有された三角形では面積ベクトル $\vec{A}_l$ が相殺するので、任意の多面体もまた閉包拘束 $\sum_l \vec{A}_l = 0$ を満たすことが分かる。(こうして発散定理が説明されるのだとすれば、逆に多面体の閉包拘束を Gauss の定理から説明するのは循環論法となる恐れがある。)

最後に納得のために、実際に多面体を三角形分割できることを簡単な具体例で確かめておこう。例えば立方体は図94のように三角形分割できる。もっとも立方体に対しては向かい合う面の面積ベクトルが相殺するので、6つの面積ベクトルの総和がゼロになることは、あらかじめ明らかである。

また五面体には四角錐と三角錐台の形状が考えられる。四角錐が2つの四面体に分割できることはたった今、図94で見た。三角錐台もまた図95 (a) のように3つの四面体に三角形分割できる。代わりにこれを図95 (b) のように四面体から1つの角を切り取った立体と見なしても、その面積ベクトルは閉包関係(1153)を満たすことが言える。

17 一般相対性理論の再定式化

- 宇宙定数は $\Lambda = 0$ とおく.
- $\hbar = 8\pi G = c = 1$ となる単位系 (式(1125)の箇所) を用いる.

17.1 テトラード

以下で提示する, 量子重力に適した GR の定式化には2重の難しさがある.

- 1つ目は数学のテクニックの問題であり, 理論が微分形式で書かれていること
 - 本稿では2.2.2項で既に微分形式を導入してある
- 2つ目は物理的に重要であり, 理論が計量 $g_{\mu\nu}(x)$ ではなく,
テトラード (4脚場) $e^I_\mu(x)$ を基本変数として書かれていること
 - 重力場と結合したフェルミオンの記述にはテトラードが不可欠

■テトラード [1, pp.59–60]

テトラードは平坦な Minkowski 時空の “内部” 添字 $I = 0, 1, 2, 3$ を持つ 1 形式

$$e^I(x) = e_\mu^I(x) dx^\mu \quad (1154)$$

の成分 $e_\mu^I(x)$ として定義でき、したがって添字 μ に関して共変ベクトルとして

$$e'^I_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} e^I_\nu(x) \quad (1155)$$

と変換しなければならない。また Lorentz 添字 I に関しては、

$$e^I_\mu(x) \rightarrow \Lambda^I_J(x) e^J_\mu(x) \quad (1156)$$

のように反変ベクトルとして変換する ($\Lambda^I_J(x)$ は局所 Lorentz 変換の行列).
種明かしとして

$$e^I_\mu = \frac{\partial X^I}{\partial x^\mu} \quad (\text{式 (1127)}) \quad (1157)$$

を思い出せば、テトラードの変換則 (1155), (1156) は直ちに理解できる [2, p.60].
またテトラードの平坦な時空での値は単に $e^I_\mu(x) = \delta^I_\mu$ とおける [2, p.39].

計量はテトラードによる Minkowski 計量の引き戻し (共変テンソルの変換則)

$$g_{\mu\nu}(x) = e^I_\mu(x)e^J_\nu(x)\eta_{IJ} \quad (1158)$$

で “定義” される. また式 (1158) の両辺の行列式をとると

$$|\det(e^I_\mu)| = \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} = \frac{\partial(X)}{\partial(x)} \quad (1159)$$

が見出される (式 (1157) から分かる). なお局所 Lorentz 変換 (1156) はこのとき

$$g_{\mu\nu} \rightarrow (\Lambda^I_K e^K_\mu)(\Lambda^J_L e^L_\nu)\eta_{IJ} = e^K_\mu e^L_\nu (\Lambda^I_K \Lambda^J_L \eta_{IJ}) = e^K_\mu e^L_\nu \eta_{KL} = g_{\mu\nu} \quad (1160)$$

のように, 計量を (したがって重力理論を) 不変に留めるゲージ変換となる.

ここで添字を計量 η_{IJ} と $g^{\mu\nu}$ で上げ下げした量として **逆テトラード**

$$e^\mu_I(x) \equiv \eta_{IJ}g^{\mu\nu}(x)e^J_\nu(x) \quad (1161)$$

を定義すると, これはその名の通りテトラード $e^I_\mu(x)$ の逆行列になる [2, p.46].

逆テトラードは各時空点 x で直交性

$$e^\mu_I(x)e^\nu_J(x)g_{\mu\nu} = \eta_{IJ} \quad (1162)$$

を満たす基底ベクトルの組 $\{e^\mu_I\}_{I=0}^3$ を成す.

■接続と共変微分 [1, p.60]

局所ゲージ Lorentz 不変性に関係して, Yang-Mills 理論におけるように, 接続

$$\omega_{\mu}^{IJ} = -\omega_{\mu}^{JI} \quad (1163)$$

を導入できる. あるいは微分形式として書けば, 接続 1 形式

$$\omega^{IJ} = \omega_{\mu}^{IJ} dx^{\mu} \quad (1164)$$

を定義できる. 接続 (1163), (1164) は (Lorentz 群の) Lie 代数に属するので, 2 つの Lorentz 添字 I, J に関して反対称である.

例えば接続 ω^{IJ} は Lorentz 添字 I を持つ任意の場の共変微分

$$D_{\mu} v^I = \partial_{\mu} v^I + \omega_{\mu J}^I v^J \quad (1165)$$

を定義し, したがってまた Lorentz 添字を持つ 1 形式 u^I のゲージ共変な外微分 D を

$$Du^I = du^I + \omega^I_J \wedge u^J \quad (1166)$$

で定義する [2, p.34].

ゲージ共変な外微分 D は Leibniz 則を満たすように定義されるので、一連の公式

$$\begin{aligned} D\phi &= d\phi, \\ D\phi^I &= d\phi^I + \omega^I_J \wedge \phi^J, \quad (\text{式 (1166)}) \\ D\phi^{IJ} &= d\phi^{IJ} + \omega^I_K \wedge \phi^{KJ} + \omega^J_K \wedge \phi^{IK} \end{aligned} \quad (1167)$$

が成り立つ [1, pp.76–77].

■ フェルミオン [1, pp.59–62]

平坦な Minkowski 時空におけるフェルミオン場 ψ のダイナミクスは Dirac 方程式

$$i\gamma^I \partial_I \psi - m\psi = 0 \quad (1168)$$

に支配される。次いで接続 (1163) を用いて一般共変な Dirac 方程式

$$i\gamma^I e^\mu_I D_\mu \psi - m\psi = 0 \quad (1169)$$

を定義するには、計量 $g_{\mu\nu}(x)$ の代わりにテトラード $e^I_\mu(x)$ がぜひとも必要である。
曲がった時空の Dirac 方程式 (1169) を与えるフェルミオン場の作用は

$$S_f[\psi, e] = \frac{1}{3!} \int \bar{\psi} \gamma^I D\psi \wedge e^J \wedge e^K \wedge e^L \epsilon_{IJKL} \equiv \int \bar{\psi} \gamma D\psi \wedge (e \wedge e \wedge e)^* \quad (D \equiv D_\mu dx^\mu). \quad (1170)$$

■ Cartan 幾何学から Riemann 幾何学へ [1, p.61]

テトラード e と接続 ω を独立に扱う「Cartan 幾何学」では，第1 Cartan 方程式

$$T^I = De^I = de^I + \omega^I_J \wedge e^J \quad (\text{式 (1166), (1167)}) \quad (1171)$$

でねじれ (torsion) 2形式が定義され，また第2 Cartan 方程式

$$F^I_J = d\omega^I_J + \omega^I_K \wedge \omega^K_J \quad (1172)$$

で曲率 2形式が定義される [27, pp.54–55]. Cartan 幾何学で
ねじれ (1171) をゼロとおくと Riemann 幾何学が再現される [27, p.55].
まず，テトラード e^I_μ の共変微分を

$$D_\mu e^I_\nu = \partial_\mu e^I_\nu + \omega^I_{\mu J} e^J_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu} e^I_\rho = 0 \quad (1173)$$

と書いて，計量を保つ (metric-preserving) 線形接続

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = e^\rho_I (\partial_\mu e^I_\nu + \omega^I_{\mu J} e^J_\nu) \quad (1174)$$

を定義すると，計量 (1158) の共変微分は

$$D_\lambda g_{\mu\nu} = D_\lambda (e^I_\mu e^J_\nu \eta_{IJ}) = 0 \quad \text{i.e.} \quad 0 = D_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu} g_{\mu\rho}. \quad (1175)$$

このとき線形接続(1174)の反対称部分 $\Gamma_{[\mu\nu]}^\rho$ は、ねじれ(1171)の成分を

$$T_{\mu\nu}^I = e_\rho^I \Gamma_{[\mu\nu]}^\rho \quad (1176)$$

で与える [2, p.46]. するとねじれが消えること

$$T^I = de^I + \omega^I_J \wedge e^J = 0 \quad (1177)$$

は、接続 $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ が下付き添字 μ, ν に関して対称となることを意味する.

このとき初めて式(1175)は、接続がChristoffel記号 ([Levi-Civita 接続](#) [2, p.39])

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = g^{\sigma\rho} \Gamma_{\rho,\mu\nu}, \quad \Gamma_{\rho,\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}), \quad (1178)$$

$$\text{i.e.} \quad \Gamma_{\mu\nu}^\sigma = e_J^\rho e^{J\sigma} (e_{\rho I} \partial_{(\mu} e_{\nu)}^I + e_{\nu I} \partial_{[\mu} e_{\rho]}^I + e_{\mu I} \partial_{[\nu} e_{\rho]}^I) \quad (1179)$$

となることを意味する. したがって条件(1177)の一意的な解 $\omega[e]$ は、

単に Γ をLevi-Civita接続(1179)に選んだ上で式(1173)を ω について解いた式

$$\omega[e]_{\mu J}^I = -e_J^\nu (\partial_\mu e_\nu^I - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho^I), \quad (1180)$$

$$\text{i.e.} \quad \omega[e]_\mu^{IJ} = 2e^{\nu[I} \partial_{[\mu} e_{\nu]}^{J]} + e_{\mu K} e^{\nu I} e^{\sigma J} \partial_{[\sigma} e_{\nu]}^K \quad (1181)$$

で与えられる [2, pp.46–47]. これは(ねじれのない ; torsionless) [スピン接続](#),
あるいは Γ と同様にLevi-Civita接続と呼ばれる.

Cartan 幾何学の曲率 (1172) はねじれの無いスピン接続に対して,
 Riemann 曲率テンソル $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ と, テトラードによる写像

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = e_I^\mu e_\nu^J F^I{}_{J\rho\sigma}, \quad (1182)$$

$$\text{i.e.} \quad F^{IJ} = \frac{1}{2} e_\mu^I e_\nu^J R^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} dx^\rho \wedge dx^\sigma \quad (1183)$$

で関係付けられる.

17.1 節の式の導出など

■逆テトラード(1161)がテトラードの逆行列であること

実際、計量で e_μ^I の添字を上げ下げした量(1161): $e_I^\mu \equiv \eta_{IJ} g^{\mu\nu} e_\nu^J$ に対して

$$e_I^\mu e_\nu^I = (\eta_{IJ} g^{\mu\rho} e_\rho^J) e_\nu^I = g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta_\nu^\mu, \quad (\because \text{計量の定義式(1158)})$$

また上式に e_μ^J をかけて μ で和をとると $(e_\mu^J e_I^\mu) e_\nu^I = e_\nu^J$ となるので,

$$e_\mu^J e_I^\mu = \delta_I^J$$

も成立する． よって e_I^μ はテトラード e_μ^I の逆行列であり，確かに逆テトラードと呼べる．

■ 共変微分 (1165) とゲージ共変な外微分 (1166) の関係

任意の1形式 u^I は必ず $u^I = u_\nu^I dx^\nu$ と書ける．そこで場 v^I として係数 u_ν^I を考えて式 (1165) を適用し，両辺に2形式 $dx^\mu \wedge dx^\nu$ を掛けると

$$\begin{aligned} (D_\mu u_\nu^I) dx^\mu \wedge dx^\nu &= (\partial_\mu u_\nu^I + \omega_{\mu J}^I u_\nu^J) dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= d(u_\nu^I dx^\nu) + (\omega_{\mu J}^I dx^\mu) \wedge (u_\nu^I dx^\nu) \\ &= du^I + \omega^I_J \wedge u^J \end{aligned}$$

となる．最左辺について， $u^I = u_\nu^I dx^\nu$ のゲージ共変な外微分 D もまた，通常の外微分と同様の関係式

$$Du^I = (D_\mu u_\nu^I) dx^\mu \wedge dx^\nu$$

で定義されると考えると，式 (1166) が得られる．もちろん，この議論を逆にたどれば式 (1166) から式 (1165) が得られる．

■重力と結合したDirac方程式(1169)について

フェルミオン場 ψ はLorentz群のスピンル表現における場であり、Yang-Mills群 G の表現の値をとり得る。スピン接続 ω とYang-Mills場 A は共変微分

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \omega_{\mu J}^I L^J_I \psi + A_\mu^A L_A \psi \quad (1184)$$

を定義する。ここに L^J_I と L_A は ψ が属する表現における、Lorentzおよびゲージ代数の生成子たちである。(ゲージ場 A との相互作用を考慮しない場合、 A の項は省略可能である。) また γ^I を通常のDirac行列として、

$$\not{D}\psi = \gamma^I e_I^\mu D_\mu \psi \quad (1185)$$

を定義する [2, p.38].

ところでMinkowski解

$$e_\mu^I(x) = \delta_\mu^I, \quad \omega_{\mu J}^I(x) = 0$$

は計量(1158)を $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ に帰着させる [2, p.39]^{*194}. このとき上式(1184)は接続

^{*194} ねじれ(torsion)のないRiemann幾何学における接続 $\omega[e]$ の式(1181)より、第1式 $e_\mu^I(x) = \delta_\mu^I$ は第2式 $\omega_{\mu J}^I(x) = 0$ を含意する.

ω が消えて，見慣れた共変微分の表式(991)に帰着する．また式(1185)は $\mathbb{D} = \gamma^I D_I$ に戻る．

■フェルミオン場の作用(1170)が重力と結合したDirac方程式(1169)を与えることの確認

フェルミオン場の作用(1170)は,

$$\begin{aligned} S_f &= \frac{1}{3!} \int \epsilon_{IJKL} \bar{\psi} \gamma^I (D_\mu \psi) e_\nu^J e_\rho^K e_\sigma^L dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \\ &= \int d^4x \left(\frac{1}{3!} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{IJKL} e_\nu^J e_\rho^K e_\sigma^L \right) \bar{\psi} \gamma^I D_\mu \psi \end{aligned}$$

と書ける. さらに式(1147)に見たように, 余因子行列の公式

$$\frac{1}{3!} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{IJKL} e_\nu^J e_\rho^K e_\sigma^L = (\det e) e_I^\mu$$

が成り立つことに注意すると,

$$S_f = \int d^4x (\det e) \bar{\psi} \gamma^I e_I^\mu D_\mu \psi = \int d^4x \sqrt{-\det g} \bar{\psi} \not{D} \psi \quad (1186)$$

と書き換えられる [2, p.38]. 最右辺は平坦なMinkowski時空における, フェルミオン場の作用の自然な一般化になっていることが見て取れる. 逆に言えば, これは幾何学的な表現(1170)に書き換えられる.

上式(1186)より, $\bar{\psi}$ に関する Euler-Lagrange 方程式は直ちに, 曲がった時空の Dirac 方程式(1169)を与える. ただし質量は $m = 0$ である. フェルミオンに質量を与えるには, Higgs スカラー場との相互作用を導入する必要があると考えられる.

■曲率2形式(1172)の成分 $F^I_{J\mu\nu}$ の同定

曲率の定義式(1172): $F^I_J = d\omega^I_J + \omega^I_K \wedge \omega^K_J$ の右辺に接続(1164): $\omega^I_J = \omega^I_{\mu J} dx^\mu$ を代入すると,

$$F^I_J = (\partial_\mu \omega^I_{\nu J} + \omega^I_{\mu K} \omega^K_{\nu J}) dx^\mu \wedge dx^\nu$$

となる. ところが外積 $dx^\mu \wedge dx^\nu$ は添字 μ, ν に関して反対称なので, 係数の対称部分は和に寄与を持たない. 実際, 微分形式の常として, $F^I_J \equiv \frac{1}{2} F^I_{J\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ における外積の係数は添字 μ, ν に関して反対称である^{*195}. これを踏まえると,

$$\frac{1}{2} F^I_{J\mu\nu} = \partial_{[\mu} \omega^I_{\nu]J} + \omega^I_{[\mu K} \omega^K_{\nu]J} \quad (1187)$$

と同定される. ただし右辺の角括弧はいずれも, 添字 μ, ν に関する反対称化を表す. これはもとの式(1172)の形を反映して, Riemann幾何学やYang-Mills理論の曲率テンソルと同様, 接続の微分の項と接続の2次の項から成る.

^{*195} 係数 $1/2$ を括り出して曲率成分 $F^I_{J\mu\nu}$ を定義して初めて, 以下で見るようにRiemann曲率との関係(1182),(1183)が正確に成り立つ. この係数の流儀は, 重複を除くため $F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ の和を $\mu < \nu$ の範囲でとる措置と等価である.

また接続 $\omega^{IJ} = -\omega^{JI}$ の反対称性は、曲率 (1172): $F^{IJ} = d\omega^{IJ} + \omega^I_K \wedge \omega^{KJ}$ が添字 I, J に関しても反対称であることを意味する。実際、特に第2項で I と J を入れ替え

$$\omega^J_K \wedge \omega^{KI} = -\omega^{KI} \wedge \omega^J_K = \omega^{IK} \wedge (-\omega^K_J) = -\omega^K_J \wedge \omega^{IK}$$

となる。

■計量を保つ線形接続(1174)の反対称部分がねじれを与えること(1176)の確認
ねじれは定義式(1171)より

$$T^I = T_{\mu\nu}^I dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad T_{\mu\nu}^I \equiv \partial_{[\mu} e_{\nu]}^I + \omega_{[\mu J}^I e_{\nu]}^J$$

と書ける．右辺の角括弧はいずれも，添字 μ, ν に関する反対称化(反対称部分として定義)を表す．すると線形接続(1174)の反対称部分 $\Gamma_{[\mu\nu]}^\rho$ に対して

$$e_\rho^I \Gamma_{[\mu\nu]}^\rho = e_\rho^I e_K^\rho (\partial_{[\mu} e_{\nu]}^K + \omega_{[\mu J}^K e_{\nu]}^J) = \partial_{[\mu} e_{\nu]}^I + \omega_{[\mu J}^I e_{\nu]}^J = T_{\mu\nu}^I : (1176)$$

となって，これはねじれの成分 $T_{\mu\nu}^I$ に一致する．

■ Christoffel記号(1178)をテトラードで表した式(1179)の確認
 直接確かめられるように, 式(1158): $g_{\mu\nu} = e_{\mu}^I e_{\nu}^J \eta_{IJ}$ の逆テンソルは

$$g^{\rho\sigma} = e_K^{\rho} e_L^{\sigma} \eta^{KL} = e_K^{\rho} e^{K\sigma}$$

である. また

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho,\mu\nu} &\equiv \frac{1}{2}(\partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2}[\{e_{\rho}^J(\partial_{\mu}e_{\nu}^I)\eta_{IJ} + e_{\nu}^I(\partial_{\mu}e_{\rho}^J)\eta_{IJ}\} + \{e_{\mu}^J(\partial_{\nu}e_{\rho}^I)\eta_{IJ} + e_{\rho}^I(\partial_{\nu}e_{\mu}^J)\eta_{IJ}\} \\ &\quad - \{e_{\nu}^J(\partial_{\rho}e_{\mu}^I)\eta_{IJ} + e_{\mu}^I(\partial_{\rho}e_{\nu}^J)\eta_{IJ}\}] \\ &= e_{\rho I}\partial_{(\mu}e_{\nu)}^I + e_{\nu I}\partial_{[\mu}e_{\rho]}^I + e_{\mu I}\partial_{[\nu}e_{\rho]}^I \end{aligned}$$

なので, 接続(1178)は式(1179):

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = e_J^{\rho} e^{J\sigma} (e_{\rho I}\partial_{(\mu}e_{\nu)}^I + e_{\nu I}\partial_{[\mu}e_{\rho]}^I + e_{\mu I}\partial_{[\nu}e_{\rho]}^I)$$

へと書き換えられる. このように Levi-Civita 接続(1179)は, 右辺括弧内の $\Gamma_{\rho,\mu\nu}$ と, その前の $g^{\rho\sigma}$ とから成っている.

■ねじれのないスピン接続 $\omega[e]$ のあからさまな表式(1181)の確認

$\omega[e]$ の式(1180)にLevi-Civita接続 Γ の表式(1179)を代入すると,

$$\begin{aligned}\omega[e]_{\mu}^{IJ} &= -e^{\nu J} \left\{ \partial_{\mu} e_{\nu}^I - e_K^{\sigma} e^{K\rho} \left(e_{\sigma L} \partial_{(\mu} e_{\nu)}^L + e_{\nu L} \partial_{[\mu} e_{\sigma]}^L + e_{\mu L} \partial_{[\nu} e_{\sigma]}^L \right) e_{\rho}^I \right\} \\ &= -e^{\nu J} \left\{ \partial_{\mu} e_{\nu}^I - e^{\sigma I} \left(e_{\sigma L} \partial_{(\mu} e_{\nu)}^L + e_{\nu L} \partial_{[\mu} e_{\sigma]}^L + e_{\mu L} \partial_{[\nu} e_{\sigma]}^L \right) \right\}\end{aligned}$$

となる．最右辺において

$$(\text{第2項}) = e^{\nu J} e^{\sigma I} e_{\sigma L} \partial_{(\mu} e_{\nu)}^L = e^{\nu J} \partial_{(\mu} e_{\nu)}^I = \frac{1}{2} e^{\nu J} (\partial_{\mu} e_{\nu}^I + \partial_{\nu} e_{\mu}^I),$$

$$(\text{第3項}) = e^{\nu J} e^{\sigma I} e_{\nu L} \partial_{[\mu} e_{\sigma]}^L = e^{\sigma I} \partial_{[\mu} e_{\sigma]}^J = \frac{1}{2} e^{\nu I} (\partial_{\mu} e_{\nu}^J - \partial_{\nu} e_{\mu}^J)$$

であり, これらを第1項 $-e^{\nu J} \partial_{\mu} e_{\nu}^I$ と合わせると

$$\frac{1}{2} (-e^{\nu J} \partial_{\mu} e_{\nu}^I + e^{\nu J} \partial_{\nu} e_{\mu}^I + e^{\nu I} \partial_{\mu} e_{\nu}^J - e^{\nu I} \partial_{\nu} e_{\mu}^J) = 2e^{\nu[I} \partial_{[\mu} e_{\nu]}^{J]}$$

となる．また残る第4項は, ダミー添字の置き換え $\nu \leftrightarrow \sigma, L \rightarrow K$ により

$$e^{\sigma I} e^{\nu J} e_{\mu L} \partial_{[\nu} e_{\sigma]}^L = e^{\nu I} e^{\sigma J} e_{\mu K} \partial_{[\sigma} e_{\nu]}^K$$

と書き換えられるので, 式(1181)を得る．

■ Riemann 曲率との関係 (1182), (1183) の説明

式 (1182) は Riemann 曲率テンソルが Cartan 曲率成分のテトラード e による引き戻し

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = F^{IJ}_{\rho\sigma} e_{\mu I} e_{\nu J}$$

で与えられることを意味する。このとき式 (1187) の箇所で見た $F^{IJ}_{\mu\nu}$ の添字 I, J と μ, ν に関する反対称性は、Riemann 曲率 $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ の添字 μ, ν と ρ, σ に関する反対称性に引き継がれる。

また式 (1182) を逆に解くと $F^{IJ}_{\rho\sigma} = e_{\mu}^I e_{\nu}^J R^{\mu\nu}_{\rho\sigma}$ となるので、式 (1183) を得る。すなわち Cartan 曲率成分は Riemann 曲率テンソルのテトラード成分 [4, p.327] である。

実際にねじれのないスピン接続 (1180): $\omega[e]_{\mu J}^I = -e_J^\nu (\partial_\mu e_\nu^I - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho^I)$ ($\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ は Levi-Civita 接続) に対して、曲率 2 形式 (1187): $\frac{1}{2} F^{IJ}_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} \omega_{\nu]}^{IJ} + \omega_{[\mu K}^I \omega_{\nu]}^K J$ (第 2 Cartan 方程式、角括弧は添字 μ, ν に関する反対称化) のテトラードによる引き戻し

$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = e_I^\rho e_{\sigma J} F^{IJ}_{\rho\sigma}$ が Riemann の曲率テンソルに一致することを確認しよう。繁雑な計算を避けるため、ここでは間接的ではありながら、飛躍のない証明方法を採用。2 種類の添字 μ, I を持つ量の共変微分は式 (1173) の第 2 辺のように定義される。特に内部添字 I のみを持つ Minkowski 空間のベクトル v^I に対しては

$$D_\mu v^I = \partial_\mu v^I + \omega_{\mu J}^I v^J,$$

$$\begin{aligned}\therefore D_\mu D_\nu v^I &= \partial_\mu (D_\nu v^I) + \omega_{\mu J}^I (D_\nu v^J) - \Gamma_{\mu\nu}^\rho (D_\rho v^I) \\ &= (\partial_\mu \omega_{\nu J}^I + \omega_{\mu K}^I \omega_{\nu J}^K) v^J + (\text{添字}\mu, \nu\text{に関して対称な項})\end{aligned}$$

なので、共変微分の順序交換に伴う差

$$[D_\mu, D_\nu] v^I = 2(\partial_{[\mu} \omega_{\nu]}^I + \omega_{[\mu K}^I \omega_{\nu]}^K) v^J = F^I_{J\mu\nu} v^J$$

はやはり、式(1172)で定義される曲率 $F^I_{J\mu\nu}$ を係数に持つ。さらに上式に e_I^λ を掛けて式(1173)を考慮すると、

$$[D_\mu, D_\nu] v^\lambda = F^\lambda_{J\mu\nu} v^J = F^\lambda_{J\mu\nu} (e_\rho^J v^\rho) = F^\lambda_{\rho\mu\nu} v^\rho$$

を得る。ここに $F^\lambda_{\rho\mu\nu} \equiv e_I^\lambda e_\rho^J F^I_{J\mu\nu}$ は曲率 $F^I_{J\mu\nu}$ のテトラードによる射影である。ところが ω をねじれないスピン接続と仮定すると、内部添字を持たない時空ベクトル v^λ の共変微分 [2, p.46]

$$D_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu v^\rho$$

において、 Γ は Levi-Civita 接続となる。したがって共変微分の順序交換に伴う差は、Riemann の曲率テンソル $R^\lambda_{\rho\mu\nu}$ を用いて

$$[D_\mu, D_\nu] v^\lambda = R^\lambda_{\rho\mu\nu} v^\rho$$

とも表される．これら2通りの表現が任意の v^ρ に対して常に一致するためには， $F^\lambda_{\rho\mu\nu} = R^\lambda_{\rho\mu\nu}$ でなければならない．よって示された．

第17章の原稿(序文)

第I部では計量テンソルを基本変数として一般相対性理論 (GR) を導入した。これに対し以下では量子重力に適した形で古典的な GR を再定式化する。ただし基本的に

- 宇宙定数は $\Lambda = 0$ とおく。
- $\hbar = 8\pi G = c = 1$ となる単位系 (式 (1125) の箇所) を用いる。

17.1 節の原稿

以下で提示する、量子重力に適した GR の定式化には2重の難しさがある。

- 1つ目は数学のテクニックの問題であり、理論が微分形式で書かれていることである。
 - 実に微分形式は座標系に依らない幾何学的な言語であることが明白であり、GR の定式化に適している。もっとも微分形式で表した式は適当な座標系を用いて、微分形式をあからさまに用いない等価な式に書き換えられるので、微分形式は見かけの困難に過ぎないということもできる。いずれにせよ本稿では2.2.2項で既に微分形式を導入してあるので、この点は解決済みである。
- 2つ目は物理的に重要であり、理論が計量 $g_{\mu\nu}(x)$ ではなく、
テトラード (4脚場) $e_{\mu}^I(x)$ を基本変数として書かれていることである。
 - テトラードは自然な変数であり、何より決定的なことに、

実は重力場と結合したフェルミオンの記述にはテトラードが不可欠である。

テトラードは平坦な Minkowski 時空の“内部”添字 $I = 0, 1, 2, 3$ を持つ 1 形式 (1154) の成分 $e_\mu^I(x)$ として定義できる。Minkowski 空間の添字 I は Minkowski 計量 η_{IJ}, η^{IJ} で上げ下げする。テトラード $e_\mu^I(x)$ が微分 1 形式 (1154) の成分となるには、添字 μ に関して式 (1155) のように共変ベクトルとして変換しなければならない。ここで“同一の時空点”の古い座標を x 、新しい座標を x' と書いている。また Lorentz 添字 I に関しては、各時空点 x の局所慣性系に関する Lorentz 変換の行列 $\Lambda^I_J(x)$ で、式 (1156) のように Minkowski 時空のベクトルとして変換する。種明かしとして、あらかじめ背景時空座標 x^μ を想定すれば、テトラードは局所 Lorentz 座標 X^I との間の変換係数 (1157) に他ならない。このときテトラードの変換則 (1155), (1156) はいずれも、表式 (1157) から直ちに理解できる [2, p.60]。また式 (1157) を踏まえると、テトラードの平坦な時空での値は (簡単のため Lorentz 変換の自由度を除けば) 単に $e_\mu^I(x) = \delta_\mu^I$ とおける [2, p.39]。

計量はテトラードによる Minkowski 計量の引き戻し (ないし“射影” [4, p.327]) (1158) で与えられる。再び式 (1157) を踏まえると、計量の式 (1158) は共変テンソルの変換則を書いているに過ぎないことが分かる。ただしテトラードを計量よりも基本的な量と見なすならば、計量は式 (1158) を通じて後から定義されることに注意しよう。GR の基礎方程式に関しても、式 (1158) を用いて Einstein–Hilbert 作用や Einstein 方程式において計量をテトラードで書きかえればテトラードによる表現が得られるものの、我々はあく

までテトラード形式を原理と見なし、そこから改めて Einstein–Hilbert 作用を導くという手順を採ることにする。また式(1158)の両辺の行列式をとると式(1159)が見出されるものの、テトラードの行列式が Jacobian であることは式(1157)からあらかじめ明白である。なお局所 Lorentz 変換(1156)はこのとき式(1160)のように、計量を(したがって重力理論を)不変に留めるゲージ変換となる。

ここで内部添字 I と時空添字 μ をそれぞれ、2種類の計量 η_{IJ} と $g^{\mu\nu}$ ($g_{\mu\nu}$ の逆行列として定義される)で上げ下げした量として逆テトラード(1161)を定義すると、これは結果的に(その名の通り)テトラード $e_\mu^I(x)$ の逆行列になることが判明する(導出スライド参照) [2, p.46]。また逆テトラード e_I^μ はベクトルの種類が Lorentz 添字 $I = 0, 1, 2, 3$ でラベルされ、ベクトル成分が時空添字 μ で指定される、4つのベクトル場と見ることができる。しかるに計量(1158)に逆行列 e_I^μ を掛けると、式(1162)を得る。これは逆テトラードの定める4つのベクトル場 e_I^μ が、各点 x において直交系を成すことを意味する。逆も然りであり、各点にただ4つのベクトルがあるとき、それらが直交するような基準系を定義することにより、これらは Riemann 多様体を定義する。式(1157)では座標からテトラード e_μ^I を定めたのに対し、ここではむしろ(逆)テトラードから座標多様体を定めていることになる。重力場から時空が生起するという見方である。

局所ゲージ Lorentz 不変性に関して、Yang–Mills 理論におけるように、接続(1163)を導入できる。あるいは微分形式として書けば、接続1形式(1164)を定義できる。16.4.3 項でホロノミーに関して説明したように、接続(1163),(1164)は(Lorentz 群の) Lie 代数

に属するので、2つの Lorentz 添字 I, J に関して反対称である。この接続は、Lorentz 群の有限次元表現の下で変換するあらゆる対象の、共変微分 D_μ を定義する。例えば接続 ω^{IJ} は Lorentz 添字 I を持つ任意の場の共変微分 (1165) を定義し、したがってまた Lorentz 添字を持つ 1 形式 u^I のゲージ共変な外微分 D を式 (1166) で定義する ([導出スライド参照](#)) [2, p.34].

式 (1166) の D は共変微分かつ外微分 (gauge exterior covariant derivative) であり、Leibniz 則を満たすように定義される。このためゲージ共変な外微分 D は Lorentz 添字を持つ一連の p 形式 ϕ に、式 (1167) のように作用する [1, pp.76–77].

ここで冒頭で予告したように、曲がった時空におけるフェルミオンの記述にはテトラードが必要不可欠であることを説明する。実際、平坦な Minkowski 時空におけるフェルミオン場 ψ のダイナミクスは Dirac 方程式 (1168) に支配される。ところが接続 (1163) を用いれば、フェルミオン場をテトラードと接続と結合した、一般共変な Dirac 方程式 (1169) を定義することが可能になる ([導出スライド参照](#))。Dirac 方程式 (1169) において共変微分を Minkowski 時空に射影するには、計量 $g_{\mu\nu}(x)$ の代わりに、テトラード $e_\mu^I(x)$ がぜひとも必要である。

最後に、曲がった時空の Dirac 方程式 (1169) を与える、重力と相互作用しているフェルミオン場の作用は式 (1170) で与えられる。ただし最右辺では Hodge 双対を定義式 (1123) に従い $\star$ で表しており、また和をとる添字を省略している ([導出スライド参照](#))。我々はこれ以降もしばしば縮約される添字を省く記法を採用する。

ここで与えられたテトラード場 e に対して、接続場 ω を具体的に決定する問題を考えよう。Riemann 幾何学を拡張した「Cartan 幾何学」ではテトラード e と接続 ω が独立に扱われ、第1 Cartan 方程式(1171)でねじれ(torsion) 2形式が定義され、また第2 Cartan 方程式(1172)で曲率2形式が定義される [27, pp.54–55]。曲率の常として、式(1172)は接続の微分の項と接続の2次の項から成る(成分の具体的な表式は[導出スライド参照](#))。もっとも我々はGRへの応用を念頭に、直ちにCartan 幾何学をRiemann 幾何学に帰着させるので、実のところCartan 幾何学とは何かについて詳しく知っておく必要はない。Cartan 幾何学でねじれ(1171)をゼロとおくとRiemann 幾何学が再現される [27, p.55]。このことを順を追って説明しよう。まず、テトラード e_{μ}^I はLorentz 添字 I だけでなく時空正接添字 μ を持つことを踏まえ、その共変微分を公式(1165)に付加的な項を含めて式(1173)のように書いて、計量を保つ(metric-preserving)線形接続(1174)を定義する。共変微分がLeibniz 則を満たすように定義されることと式(1173): $D_{\mu} e_{\nu}^I = 0$ より、計量(1158)の共変微分が式(1175)のようにゼロとなることが、「計量を保つ」と形容される所以である。

このとき線形接続(1174)の反対称部分 $\Gamma_{[\mu\nu]}^{\rho}$ は、ねじれ(1171)の成分を式(1176)で与える([導出スライド](#)) [2, p.46]。するとねじれが消えること(1177)は、計量を保つ線形接続 $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ が下付き添字 μ, ν に関して対称となることを意味する。ところが第I部で式(70)の導出時に見たように、計量の共変微分がゼロになること(1175)はこのとき初めて、接続がChristoffel 記号(1178),(1179)となることを意味する(テトラードで表した式(1179))

への書き換えは[導出スライド参照](#)). 式(1179)の接続はLevi-Civita接続と呼ばれる [2, p.39]. したがって与えられたテトラード場に対して, ねじれが消える条件(1177)の一意的な解 $\omega[e]$ は, 単に Γ をLevi-Civita接続(1179)に選んだ上で式(1173)を ω について解いた式(1180)で与えられる. これは(ねじれのない; torsionless)スピン接続, あるいは Γ と同様にLevi-Civita接続と呼ばれ, 明示的には式(1181)のように表される ([導出スライド参照](#)) [2, pp.46–47]. 式(1181)においては, ω の添字 I, J に関する反対称性が明白である.

式(1172)で定義したCartan幾何学の曲率 F はねじれのないスピン接続に対して, Riemann曲率テンソル R と, テトラードによる写像(1182),(1183)で直接関係付けられる ([導出スライド参照](#)). このようにCartan幾何学は, ねじれがゼロのときRiemann幾何学に帰着する.

17.2 Einstein–Hilbert 作用

■準備 [1, pp.76–77]

- 4つの Lorentz 添字を持つ対象 V^{IJKL} に対して, トレース表記

$$\mathrm{Tr}(V) \equiv \epsilon_{IJKL} V^{IJKL} \quad (1188)$$

を定義する. このとき2つの反対称テンソル A^{IJ} と B^{IJ} を2形式, また a^I, b^I を1形式とすると, 通常の行列のトレースと同様の巡回性を含む公式が成り立つ:

$$\mathrm{Tr}(A \wedge B) = \mathrm{Tr}(B \wedge A) = 2A \wedge \star B, \quad (1189)$$

$$\mathrm{Tr}(a \wedge b \wedge B) = \mathrm{Tr}(b \wedge B \wedge a) = \mathrm{Tr}(B \wedge a \wedge b), \quad \mathrm{Tr}(a \wedge b \wedge B) = \mathrm{Tr}(b \wedge a \wedge B). \quad (1190)$$

- 多様体上の関数の積分に対して,

$$e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 = s |\det(e)| d^4x = s \sqrt{-\det g} d^4x \quad (1191)$$

と書くことができ, ここに

$$s \equiv \mathrm{sgn}(\det e) \quad (1192)$$

はテトラード $e = (e_\mu^I)$ の行列式の符号である^{*196}.

^{*196} 第I部では計量 $g_{\mu\nu}$ の行列式を単に g と書いた. これに対し行列 $e = (e_\mu^I)$ との混同を避けるため, その行列式 $\det e$ をここでは e などと略記しない.

式(1191)は

$$e^I \wedge e^J \wedge e^K \wedge e^L = s\epsilon^{IJKL} |\det e| d^4x \quad (1193)$$

を意味する。さらに式(1193)の“トレース”は

$$\text{Tr}(e \wedge e \wedge e \wedge e) \equiv \epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge e^K \wedge e^L = s\epsilon_{IJKL} \epsilon^{IJKL} |e| d^4x = -24s |e| d^4x. \quad (1194)$$

- ねじれの式(1171): $T^I = D e^I$ とは対照的に,
Cartan 曲率(1172): $F = d\omega + \omega \wedge \omega \neq D\omega$ は接続の共変外微分で表せない。
しかしながら接続 ω はテンソルではないものの, その変分 $\delta\omega$ は
テンソルであり, 曲率の変分は共変外微分

$$\delta F = D\delta\omega \quad (1195)$$

で表せる^{*197}。

^{*197} ただし微分形式の変分はその成分の変分に伴う変化 $\delta\omega^{IJ} \equiv (\delta\omega_\mu^{IJ})\delta x^\mu$, etc. と見る。

■ Einstein–Hilbert 作用 [1, pp.67–68]

テトラードで表した純粋な重力場の作用

$$S_{\text{T}}[e] = \frac{1}{4} \int e^I \wedge e^J \wedge F^{KL} \epsilon_{IJKL} = \frac{1}{2} \int e \wedge e \wedge F^{\star} \quad (1196)$$

(ただし $F = F[\omega[e]]$) は Einstein–Hilbert 作用

$$S_{\text{EH}}[g] = \frac{1}{2} \int \sqrt{-\det g} R d^4x \quad (1197)$$

に一致する．なお作用 (1196) に現れる量

$$\Sigma^{IJ} = e^I \wedge e^J \quad (1198)$$

は [Plebanski 2形式](#) と呼ばれる．

■重要な符号 [1, pp.62–63]

テトラードの作用 (1196) の Einstein–Hilbert 作用 (1197) は厳密には符号の違い

$$S_{\text{EH}}[g] = -sS_{\text{T}}[e] \quad (s \equiv \text{sgn}(\det e) : (1192)) \quad (1199)$$

がある．内部 (internal) 時間反転操作

$${}^{(i)}Te^0 := -e^0, \quad {}^{(i)}Te^i := e^i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1200)$$

を実行すると,

- 計量 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}e_\mu^I e_\nu^J$ は不変 $\rightarrow$ Einstein–Hilbert 作用 S_{EH} は不変に留まる．
- 符号 s の反転に伴いテトラードの作用 (1196) は式 (1199) を通じて,
 $S_{\text{T}}[{}^{(i)}Te] = -S_{\text{T}}[e]$ のように符号を反転する．

よって量子論において重力場に対する経路積分をテトラードにわたって定義すると,
符号が異なる作用の指数の因子

$$e^{-\frac{i}{\hbar}S_{\text{EH}}[g]}, \quad e^{+\frac{i}{\hbar}S_{\text{EH}}[g]} \quad (1201)$$

がともに Feynman 積分に寄与する．

■ Palatini 作用 [1, pp.63–64]

e, ω を独立な場と見なして, Palatini 作用 (正確にはテトラード-Palatini 作用)

$$S[e, \omega] = \frac{1}{2} \int e \wedge e \wedge F[\omega]^* \quad (1202)$$

を考えると, 変分原理は

$$\begin{cases} \delta\omega : & \omega = \omega[e], \\ \delta e : & \text{Einstein 方程式} \end{cases} \quad (1203)$$

を与える.

17.2節の式の導出など

■ $\text{Tr}(A \wedge B)$ の公式 (1189), (1190) の確認

式 (1189) の第2辺までは $A \wedge B$ を，添字の縮約された形 $A^{IJ} \wedge B^{KL}$ と見なして，トレースの定義式 (1188) を適用する．すると

$$\text{Tr}(A \wedge B) = \text{Tr}(A^{IJ} \wedge B^{KL}) = \epsilon_{IJKL} A^{IJ} \wedge B^{KL} = 2A^{IJ} \wedge \star B_{IJ} = 2A \wedge \star B$$

と書ける．よって式 (1189) の両辺は一致する．なお $\epsilon_{IJKL} = \epsilon_{KLIJ}$ を A^{IJ} の代わりに B^{IJ} に縮約すれば，上式は $2A_{KL}^* \wedge B^{KL} = 2A^* \wedge B$ とも書ける．

さて，我々は A^{IJ} を2形式と仮定しているので^{*198}， A^{IJ} と B^{IJ} の外積は交換する．よって式 (1189) の第1の等号のように A, B の巡回対称性が成り立つ：

$$\text{Tr}(B \wedge A) = \epsilon_{IJKL} B^{IJ} \wedge A^{KL} = \epsilon_{KLIJ} A^{KL} \wedge B^{IJ} = \text{Tr}(A \wedge B).$$

引き続き2形式 A^{IJ} を仮定し，これを添字 I, J に関する反対称性の保証される形 $A^{IJ} = a^I \wedge b^J$ におく (a^I, b^J は1形式)．すると上式は直ちに

^{*198} A^{IJ} が2形式 $A^{IJ} = A_{\mu\nu}^{IJ} dx^\mu \wedge dx^\nu$ であることは，成分 $A_{\mu\nu}^{IJ}$ が添字 μ, ν に関して反対称な共変テンソルであることを意味する．これはもちろん， A^{IJ} が反対称な添字 I, J を持つこととは関係がない．

$\text{Tr}(a \wedge b \wedge B) = \text{Tr}(B \wedge a \wedge b)$ を与える．さらに B^{IJ} も2形式という仮定を併せると，

$$\text{Tr}(a \wedge b \wedge B) = \epsilon_{IJKL} a^I \wedge b^J \wedge B^{KL}$$

$$= \begin{cases} -\epsilon_{IJKL} b^J \wedge B^{KL} \wedge a^I = \text{Tr}(b \wedge B \wedge a) & (\because -\epsilon_{IJKL} = \epsilon_{JKLI}) \\ -\epsilon_{IJKL} b^J \wedge a^I \wedge B^{KL} = \text{Tr}(b \wedge a \wedge B) & (\because -\epsilon_{IJKL} = \epsilon_{JIKL}) \end{cases}$$

を得る(式(1190)).

■ $e^0 \wedge \cdots \wedge e^3$ の公式 (1192) の確認

座標 x そのものを積分変数に選ぶと, 2.2.2 項より

$$\begin{aligned} e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 &= e_\mu^0 e_\nu^1 e_\rho^2 e_\sigma^3 dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \\ \rightarrow e_\mu^0 e_\nu^1 e_\rho^2 e_\sigma^3 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d^4x &\quad (d^4x \equiv dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \text{ は通常の座標体積要素}) \\ &= (\det e) d^4x = s |\det e| d^4x = s \sqrt{-\det g} d^4x \end{aligned}$$

と置き換えられる. 最後の等号は符号 s に依らず常に式 (1159): $|\det e| = \sqrt{-\det g}$ が成り立つことによる.

■式(1195): $\delta F = D\delta\omega$ とその周辺について [1, pp.76–77]

Lorentzベクトル v^I の積のように変換する量 ϕ^{IJ} に対しては、共変微分の規則(1167):

$$D\phi^{IJ} = d\phi^{IJ} + \omega^I_K \wedge \phi^{KJ} + \omega^J_K \wedge \phi^{IK}$$

が成り立つ．あたかもスピン接続 ω^{IJ} をそのような量と考えて上式を適用すると，

$$D\omega^{IJ} = d\omega^{IJ} + 2\omega^I_K \wedge \omega^{KJ} \quad (\text{誤り！})$$

となって，曲率(1172)と比べて ω の2次の項に余計な係数2が現れる．よって $F^{IJ} \neq D\omega^{IJ}$ である．これはLevi-Civita接続 $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ がテンソルでないのと同様，接続 ω^{IJ} がテンソルではないため，共変微分の公式を適用できないことに関係している*199．ところが接続の変分 $\delta\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ がテンソルとなるように(2.2.3項)，変分 $\delta\omega^{IJ}$ はテンソルとなる．そこでテンソル $\delta\omega^{IJ}$ に共変微分の公式(1167)を適用すると，確かに曲率(1172)の変分に一致するので，式(1195)が成り立つ．

*199 時に $F^{IJ} = D\omega^{IJ}$ と書かれるものの [2, p.34]，その場合には右辺における非テンソル ω の共変微分を適切に計算しなければならない．

■テトラードで表した Einstein–Hilbert 作用 (1196) の確認 [1, pp.77–78]

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(e \wedge e \wedge F) &\equiv \epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge F^{KL} = \frac{1}{2} \epsilon_{IJKL} F^{KL}_{MN} e^I \wedge e^J \wedge e^M \wedge e^N \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon_{IJKL} \epsilon^{IJMN} F^{KL}_{MN} s | \det e | d^4 x \quad (\because \text{式 (1191)}) \\
 &= - (\delta_K^M \delta_L^N - \delta^M \delta_L \delta_K^N) F^{KL}_{MN} s | \det e | d^4 x = -2s | \det e | R d^4 x.
 \end{aligned} \tag{1204}$$

注解：式 (1204) 第2の等号について

$$F^{KL} = \frac{1}{2} F^{KL}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} F^{KL}_{MN} e_\mu^M e_\nu^N dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} F^{KL}_{MN} e^M \wedge e^N \tag{1205}$$

を代入すれば良い.

注解：式 (1204) 最後 (第5) の等号について まず

$$(\delta_K^M \delta_L^N - \delta^M \delta_L \delta_K^N) F^{KL}_{MN} = F^{KL}_{KL} - F^{KL}_{LK} = 2F^{KL}_{KL}.$$

ただし式 (1183): $F^{IJ}_{\mu\nu} = e^{\rho I} e^{\sigma J} R_{\rho\sigma\mu\nu}$ より, Riemann 曲率テンソルの後ろ2つの添字に関する反対称性は, $F^{IJ}_{KL} = e_K^\mu e_L^\nu F^{IJ}_{\mu\nu}$ にも引き継がれることに注意した. 再

び式(1183)より,

$$F^{IJ}{}_{IJ} = e_I^\mu e_J^\nu e^{\rho I} e^{\sigma J} R_{\rho\sigma\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} R_{\rho\sigma\mu\nu} = g^{\nu\sigma} R^\mu{}_{\sigma\mu\nu} = g^{\nu\sigma} R_{\sigma\nu} = R \quad (1206)$$

はスカラー曲率である．同様に Ricci テンソル $R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$ との関係を調べると,

$$F^{IK}{}_{JK} = e_J^\mu e_K^\nu F^{IK}{}_{\mu\nu} = e_J^\mu e_K^\nu e^{\rho I} e^{\sigma K} R_{\rho\sigma\mu\nu} = e^{\rho I} e_J^\mu g^{\nu\sigma} R_{\sigma\rho\nu\mu} = e^{\rho I} e_J^\mu R_{\rho\mu} = R^I{}_J \quad (1207)$$

は第5辺より, Ricci テンソルのテトラード成分となっている．

式(1159),(1189),(1204)より, 純粋な重力場に対する Einstein–Hilbert 作用(1197):

$$S[g] = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-\det g} R$$

($8\pi G$ を明示した)はテトラードを用いて

$$S[g[e]] = \frac{-s}{32\pi G} \int \text{Tr}[e \wedge e \wedge F] = \frac{-s}{16\pi G} \int e \wedge e \wedge F^\star \quad (1208)$$

と書き換えられる．最後に $8\pi G = 1$ とおき, つまらない符号因子($-s$)を省いて式(1196)を得る^{*200}．なお, ここでは計量を基本変数とした Einstein–Hilbert 作用をテト

^{*200} 符号 s の演じる役割については式(1199)以降を見よ．

ラードで書き換えて作用(1196)を導いたものの、我々はテトラードで書いた作用(1196)をより基本的な原理と見なす。

参考：宇宙定数 Λ を考慮した作用 公式(1194),(1204):

$$\text{Tr}(e \wedge e \wedge e \wedge e) = -4!s\sqrt{-g}d^4x, \quad \text{Tr}(e \wedge e \wedge F) = -2sR\sqrt{-g}d^4x$$

より，Einstein–Hilbert 作用

$$S[g] = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \quad (1209)$$

はテトラードを用いて

$$\begin{aligned} S &= -\frac{s}{32\pi G} \int \left[\text{Tr}(e \wedge e \wedge F) - \frac{\Lambda}{3!} \text{Tr}(e \wedge e \wedge e \wedge e) \right] \\ &= -\frac{s}{32\pi G} \int \epsilon_{IJKL} \left(e^I \wedge e^J \wedge F^{KL} - \frac{\Lambda}{3!} e^I \wedge e^J \wedge e^K \wedge e^L \right) \end{aligned} \quad (1210)$$

と書き換えられる [2, p.35]. $\Lambda \rightarrow 0$ とおくと式(1208)に帰着する。

■Palatini作用(1202)が一般相対性理論を与えること(1203)の証明 [1, pp.78–79]

e と ω を独立変数として扱ったPalatini作用(1202):

$$S[e, \omega] = \frac{1}{16\pi G} \int e \wedge e \wedge F(\omega)^* = \frac{1}{32\pi G} \int \text{Tr}[e \wedge e \wedge F(\omega)]$$

($8\pi G$ を明示した)を変分すると

$$\begin{aligned} 32\pi G \delta S &= \int \text{Tr}[\delta e \wedge e \wedge F(\omega)] + \int \text{Tr}[e \wedge \delta e \wedge F(\omega)] + \int \text{Tr}[e \wedge e \wedge \delta F(\omega)] \\ &= 2 \int \text{Tr}(e \wedge F \wedge \delta e) + \int \text{Tr}(e \wedge e \wedge D\delta\omega) \end{aligned} \quad (1211)$$

が得られる。ただし巡回性(1190)と式(1195): $\delta F = D\delta\omega$ を用いた。ここで恒等式

$$\int d[\text{Tr}(e \wedge e \wedge \delta\omega)] = \int D[\text{Tr}(e \wedge e \wedge \delta\omega)] = 2 \int \text{Tr}(De \wedge e \wedge \delta\omega) + \int \text{Tr}(e \wedge e \wedge D\delta\omega) \quad (1212)$$

に着目しよう。

注解 上式(1212)第1の等号は式(1167)第1式, 第2の等号は D がLeibniz則を満たすように定義されていることによる。

式(1212)最右辺第1項に式(1171): $De = T$ を代入し，式(1212)最左辺は境界積分となって消えることを用いて，式(1211)の最右辺第2項を書き換えると

$$\delta S = -\frac{1}{16\pi G} \left[\int \text{Tr}(e \wedge F \wedge \delta e) - \int \text{Tr}(T \wedge e \wedge \delta \omega) \right] \quad (1213)$$

を得る． e の変分に伴う作用の変化(第1項)が消えることは

$$\epsilon_{IJKL} e^I \wedge F^{JK} = 0 \quad (1214)$$

を意味する．ここに曲率2形式 F^{JK} を基底で展開した式(1205): $F^{JK} = \frac{1}{2} R^{JK}_{MO} e^M \wedge e^O$ を代入しよう．

注解 ねじれ $T = 0$ をあらかじめ仮定すると F^{JK}_{MO} はRiemann曲率テンソルのテトラード成分に一致するから，それを R^{JK}_{MO} と書いて良い． e と ω を独立に扱う形式では下記のように ω に関する変分原理から $T = 0$ が帰結するので，これは循環論法には陥らない．

すると式(1214)は

$$\epsilon_{IJKL} R^{JK}_{MO} e^I \wedge e^M \wedge e^O = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon_{IJKL} \epsilon^{IMOP} R^{JK}_{MO} = 0 \quad (1215)$$

となる(Hodge双対をとった)．

注解 Hodge 双対の表式 $e_P^\star = \epsilon_{PIMO} e^I \wedge e^M \wedge e^O / 3!$ の両辺に $\epsilon^{PI'M'O'}$ を掛けて P で和をとると,

$$e^I \wedge e^M \wedge e^O = -\epsilon^{PIMO} e_P^\star = \epsilon^{IMOP} e_P^\star$$

と逆に解ける. これを式(1215)第1式に代入すると

$$0 = \epsilon_{IJKL} F^{JK}_{MO} e^I \wedge e^M \wedge e^O = \epsilon_{IJKL} \epsilon^{IMOP} F^{JK}_{MO} e_P^\star.$$

ここで任意の3形式は $e_P^\star$ を基底として展開できると考え^{*201}, 最右辺の $e_P^\star$ の係数をゼロとおくと, 式(1215)第2式を得る^{*202}.

Levi-Civita 記号の縮約公式(42)を適用すると, 式(1215)は真空の Einstein 方程式(のテ

^{*201} 局所 Lorentz 座標を X^I で表すと, 基底は単に $e^I = e^I_\mu dx^\mu = \frac{\partial X^I}{\partial x^\mu} dx^\mu = dX^I$ と書ける.

^{*202} この説明に疑義を抱く読者は, やや遠回りではあるが次のように導出を行えば良い. すなわち運動方程式(1214):

$$0 = \epsilon_{MNP L} e^M \wedge F^{NP} = \epsilon_{MNP L} e^M_\rho F^{NP}_{\sigma\tau} dx^\rho \wedge dx^\sigma \wedge dx^\tau$$

の最右辺において,

- まず微分形式を基底ベクトル $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ に作用させて, 外積 $dx^\rho \wedge dx^\sigma \wedge dx^\tau$ を取り除く.
- 次に $\epsilon_{MNP L}$ を除くために, 式全体に ϵ^{IJKL} を掛けて L で和をとる.

トロード成分)

$$G^P{}_L = \text{Ric}^P{}_L - \frac{1}{2}\delta_L^P R = 0 \quad (1216)$$

と等価であることが判明する.

注解 1 式(1206),(1207)も見よ. 上式(1216)では曲率2形式との混同を避けるため, Ricciテンソルのテトロード成分(1207)を $\text{Ric}^P{}_L$ と書いている. 式(1216)をテトロードで引き戻せばテンソルの時空成分で書いた通常の Einstein 方程式が得られる. これは式(1199)の作用 $S_T[e]$ が Einstein 方程式を導くことの直接的な証明となっている.

注解 2: 宇宙定数を考慮する場合 宇宙定数項を含めた作用(1210)をテトロードに関して変分すると, 式(1213)の第1項に宇宙定数項の寄与が加わり,

$$\begin{aligned} 0 = -16\pi G s \delta S &= \int \left[\text{Tr}(e \wedge F \wedge \delta e) - \frac{4}{2 \cdot 3!} \Lambda \text{Tr}(e \wedge e \wedge e \wedge \delta e) \right] \\ &= \int \epsilon_{IJKL} \left(e^I \wedge F^{JK} - \frac{4}{2 \cdot 3!} \Lambda e^I \wedge e^J \wedge e^K \right) \wedge \delta e^L \end{aligned}$$

となる. ここで式(1216)の導出を通じて見たように

$\epsilon_{IJKL} e^I \wedge F^{JK} = 2 \left(R^P{}_L - \frac{1}{2} R \delta_L^P \right) e_P^*$ であり, また Hodge 双対の定義より

$\epsilon_{IJKL}e^I \wedge e^J \wedge e^K = -\epsilon_{LIJK}e^I \wedge e^J \wedge e^K = -3!e_L^*$ なので,

$$0 = \epsilon_{IJKL} \left(e^I \wedge F^{JK} - \frac{4}{2 \cdot 3!} \Lambda e^I \wedge e^J \wedge e^K \right) = 2 \left(R^P{}_L - \frac{1}{2} R \delta_L^P + \Lambda \delta_L^P \right) e_P^*.$$

再び基底 e_P^* の係数をゼロとおくと, Einstein 方程式 [1, p.58]

$$\text{Ric}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$$

のテトラード成分を得る.

ここで2通りの可能性を考える.

- 2次の形式 (*2nd-order formulation*). $\omega = \omega(e)$, i.e., $T = 0$ を仮定する. このとき式 (1211) は Einstein 方程式を与える.

注解 式 (1211) 最右辺の第2項は式 (1212) により

$\int \text{Tr}(e \wedge e \wedge D\delta\omega) = -2 \int \text{Tr}(T \wedge e \wedge \delta\omega)$ と書き換えられることに注意する (1次の形式でも同様). $T = 0$ より, この項は落ちる.

- 1次の形式 (*1st-order formulation*). ω と e を独立に扱う. e に関する変分は Einstein 方程式を与えるのに対し, ω に関する変分は $T \wedge e = 0 \Rightarrow T = 0$ を与える.

注解 ここでも公式 (1205) と同様に

$$T^I = T_{\mu\nu}^I dx^\mu \wedge dx^\nu = T_{MN}^I e_\mu^M e_\nu^N dx^\mu \wedge dx^\nu = T_{MN}^I e^M \wedge e^N$$

と書こう．すると作用の変分(1213)の第2項が消えることは，変分 $\delta\omega^{KL}(= -\delta\omega^{LK})$ の係数(の反対称部分)

$$0 = \epsilon_{IJKL} T^I \wedge e^J = \epsilon_{IJKL} T_{MN}^I e^M \wedge e^N \wedge e^J = \epsilon_{IJKL} \epsilon^{MNJO} T_{MN}^I e_O^*$$

を意味する．再び基底 e_O^* の係数をゼロとおく．Levi-Civita 記号の縮約公式(42)を適用し，さらに反対称性 $T_{MN}^I = -T_{NM}^I$ を利用して式を整理すると

$$0 = \epsilon_{IJKL} \epsilon^{MNJO} T_{MN}^I = 2(T_{IK}^I \delta_L^O - T_{IL}^I \delta_K^O + T_{KL}^O)$$

を得る．ここで添字 O, L を縮約すると $T_{IK}^I = 0$ が見出される．これを上式に戻すと

$$T_{KL}^O = 0, \quad \therefore T^O = 0.$$

すなわち，物質が存在しないとき，ねじれ T は変分原理の帰結として消える．これは次いで関係 $\omega = \omega(e)$ を確立する．

参考 [1, p.64]

1次と2次の形式は純粋な重力に対しては等価であるものの，極小的に(minimally)結合したフェルミオンに対しては等価ではない．2次の作用

$$S[\psi, e] = \int e \wedge e \wedge F[\omega[e]]^* + \int \bar{\psi} \gamma D[\omega[e]] \psi \wedge (e \wedge e \wedge e)^*$$

と1次の作用

$$S[\psi, e, \omega] = \int e \wedge e \wedge F[\omega]^* + \int \bar{\psi} \gamma D[\omega] \psi \wedge (e \wedge e \wedge e)^*$$

の違いは4-フェルミオン相互作用項であることを示せる．これはフェルミオンの存在下では ω の変分がねじれの消失を与えず，むしろフェルミオンのカレントに比例するねじれを与えることによる．この方程式の解となるスピン接続はフェルミオンに依存する項を持ち，それは翻って共変微分を通じてフェルミオンと結合する．こうして，概略的には

$$S[\psi, e] = S[\psi, e, \omega] + \int \bar{\psi} \psi \bar{\psi} \psi.$$

極小的に結合した理論は異なるものの，いずれの理論においても4-フェルミオン相互作用を付け加えるか取り除くかして，それらを等価にできる．

17.2節の原稿

次に17.1節で導入したテトラードを基本変数として重力場の作用積分を与えるにあたり，便利な表記や公式などを導入しておく．

- まず4つのLorentz添字を持つ対象 V^{IJKL} に対して，トレース表記(1188)を定義すると便利である．式(1188)は言わばトレースを拡大解釈した速記術であり，通常の行列のトレースとは異なることに注意せよ．ここで実際の応用を念頭に，2つの反対称テンソル A^{IJ} と B^{IJ} を2形式，また a^I, b^I を1形式としよう．するとダミー添字を省略する記法で，式(1188)で定義したトレースに対して，通常の行列のトレースと同様の巡回性を含む公式(1189),(1190)が成り立つ(導出スライド参照)．
- 多様体上の関数の積分に対して，式(1191)のように書くことができ(導出スライド参照)，ここに s はテトラード $e = (e^I_\mu)$ の行列式の符号(1192)である．式(1191)は最左辺の外積の順序を入れ替えるたびに符号が入れ替わるので，これは公式(1193)を意味する．さらに式(1193)の“トレース”は式(1194)のように計算される．これは作用に宇宙項を加えたいときに重要となる．
- ねじれの式(1171): $T^I = D e^I$ とは対照的に，Cartan曲率(1172): $F = d\omega + \omega \wedge \omega \neq D\omega$ は接続の共変外微分で表せない．しかしながらChristoffel記号の場合(2.2.3項)と同様，接続 ω はテンソルではないものの，その変分 $\delta\omega$ はテンソルであることに関して，曲率の変分は共変外微分(1195)で表せる(導出スライド参照)．

さて、テトラードを基本変数に用いると、純粋な重力場の作用は式(1196)で与えられる。ここに F はテトラード場の定めるねじれのないスピン接続の曲率(1172)である。また式(1196)最右辺における $\star$ は Hodge 双対を表し、ここでも式(1170)と同様に縮約される添字を省いている。実際、式(1196)は伝統的な Einstein–Hilbert 作用(1197)に一致し(導出スライド参照)、したがって Einstein 方程式をもたらす。作用(1196)に現れる量(1198)は **Plebanski 2形式** と呼ばれ、定義により2つの Minkowski 添字 I, J に関して反対称である。したがって式(1198)は Lorentz 代数の値を持つ2形式と解釈できる。

テトラードの作用(1196)の Einstein–Hilbert 作用(1197)との等価性を確認する際に式(1208)で見たように、これらは厳密には式(1199)のように符号の違いがある。したがって、これら2つの作用で定義される理論は完全には等価でない。実際、内部(internal)時間反転操作(1200)を実行すると、計量 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} e_{\mu}^I e_{\nu}^J$ はこの変換に影響されないので、Einstein–Hilbert 作用 S_{EH} は不変に留まる。これに対し、変換(1200)はテトラードの行列式の符号 s を反転させるので、テトラードの作用(1196)は式(1199)を通じて、 $S_{\text{T}}^{(i)}[Te] = -S_{\text{T}}[e]$ のように符号を反転する。よって時間反転したテトラード(1200)によって定義される重力場は、もとの重力場 e と同じ Riemann 計量を定めるという事実にも関わらず、符号の異なる作用を持つ。作用の符号の違いは古典論にほとんど影響しないものの、それは量子論において重要である：重力場に対する経路積分を定義する際に、計量にわたって積分するのとテトラードにわたって積分するのは同じではない、何故ならテトラードにわたる積分では符号が異なる作用の指数の因子(1201)がとも

にFeynman積分に寄与するからである．なおテトラードと結合したDirac方程式(1169)で記述されるフェルミオンのダイナミクスは，符号 s の違いに敏感に影響される．

テトラード形式の作用(1196)では F をねじれのないスピン接続 $\omega[e]$ に関する曲率，したがってテトラードの汎関数と見なしてきた．他方で，ここではテトラードとLorentz接続を独立な場と見なして，作用(1202)を考えよう．これは時にPalatini作用(あるいは，より正確にはテトラード-Palatini作用)と呼ばれ，座標と運動量を独立に扱う相空間上の作用積分の類似物である．Palatini作用作用(1202)は再び一般相対性理論へと導く．実際，接続に関する停留値条件は正確にねじれが消えること(1177)をもたらし，したがって運動方程式の解の上では接続はLevi-Civita接続となる．この下でテトラードに関する変分原理はEinstein方程式を与える．以上は図式的には式(1203)とまとめられる(導出スライド参照)．

17.3 Holst 作用とその周辺

17.3.1 Holst 作用と Barbero–Immirzi 結合定数

運動方程式に影響しない項を Palatini 作用 (1202) に付け加え, [Holst 作用](#)

$$S[e, \omega] = \frac{1}{2} \left[\int e \wedge e \wedge F^* + \frac{1}{\gamma} \int e \wedge e \wedge F \right] \quad (1217)$$

と採る.

- 付加的な第2項は Holst 項と呼ばれる.
- 結合定数 γ は [Barbero–Immirzi 定数](#) と呼ばれる.

実際, Holst 作用 (1217) の接続に関する変分原理は再びねじれ $T^I = 0$ を与え, この下で Holst 項は

$$\int e^I \wedge e^J \wedge F_{IJ} \sim \int R_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d^4x = 0 \quad (1218)$$

のように Riemann 曲率テンソルに対する Bianchi の恒等式により消える.

Holst 作用 (1217) は簡潔な形

$$\begin{aligned}
 S[e, \omega] &= \frac{1}{2} \int e \wedge e \wedge \left(F^* + \frac{1}{\gamma} F \right) \equiv \frac{1}{2} \int e \wedge e \wedge \left(\star + \frac{1}{\gamma} \right) F \\
 &= \frac{1}{2} \int \left(\star e \wedge e + \frac{1}{\gamma} e \wedge e \right) \wedge F
 \end{aligned} \tag{1219}$$

に書くことができ^{*203}, 正準・共変 LQG に共通の出発点を成す [1, pp.64–65].

^{*203} 式 (1219) 最右辺の $\star e \wedge e$ は $\Sigma_{IJ}^* = (e \wedge e)_{IJ}^* = \frac{1}{2} \epsilon_{IJKL} e^K \wedge e^L$ の意味である.

17.3.1 項の式の導出など

■ Holst 作用 (1217) の ω に関する変分原理が依然としてねじれ $T = 0$ を与えること
 ω の変分に伴う Holst 項 $S_\gamma = \frac{1}{\gamma} \int e \wedge e \wedge F$ の変化は

$$\delta S_\gamma = \frac{1}{\gamma} \int e \wedge e \wedge \delta F = \frac{1}{\gamma} \int e \wedge e \wedge D\delta\omega.$$

ここで式 (1212) の代わりに

$$0 = \int d(e \wedge e \wedge \delta\omega) = \int D(e \wedge e \wedge \delta\omega) = 2 \int T \wedge e \wedge \delta\omega + \int e \wedge e \wedge D\delta\omega$$

が成り立つことに注意すると, $\delta S_\gamma = -\frac{2}{\gamma} \int T \wedge e \wedge \delta\omega$ と書き換えられる. これを式 (1213) 第2項 (の $-32\pi G$ 倍) と足すと, 変分原理は

$$0 = \delta S = -2 \int \left[\text{Tr}(T \wedge e \wedge \delta\omega) - \frac{1}{\gamma} T \wedge e \wedge \delta\omega \right].$$

ここから再び $T \wedge e = 0$, $\therefore T = 0$ が得られると考えられる (十分性は明らか).

■ Holst 項の式 (1218) の確認

式 (1205): $F_{IJ} = \frac{1}{2} F_{IJKL} e^K \wedge e^L$ を代入し公式 (1193) を用いると, 式 (1218) 左辺は

$$\int e^I \wedge e^J \wedge F_{IJ} = \frac{1}{2} \int F_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge e^K \wedge e^L = \frac{1}{2} \int F_{IJKL} \epsilon^{IJKL} (\det e) d^4x$$

と書き換えられる. ここでねじれがゼロなので, F_{IJKL} は Riemann 曲率テンソルのテトラード成分に他ならないことに注意すると,

$$F_{IJKL} \epsilon^{IJKL} = R_{\mu\nu\rho\sigma} e_I^\mu e_J^\nu e_K^\rho e_L^\sigma \epsilon^{IJKL} = R_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \det(e^{-1})$$

と書き換えられる. よって式 (1218) 第1の等号が成立する.

第2の等号は Bianchi の第1恒等式 (99): $\epsilon^{\alpha\mu\nu\rho} R_{\beta\mu\nu\rho} = 0$ から直ちに理解できる.

■ Holst 項が運動方程式を修正しないことの証明 [1, p.79]

Holst 項

$$S_\gamma[e, \omega] \sim \frac{1}{\gamma} \int \text{Tr}(e \wedge e \wedge \star F) = \frac{2}{\gamma} \int e \wedge e \wedge F = \frac{2}{\gamma} \int e^I \wedge e^J \wedge F_{IJ}$$

を考えよ． e に関する変分は

$$\delta_e S_\gamma \sim \frac{1}{\gamma} \int \text{Tr}(e \wedge \star F \wedge \delta e)$$

を与え，これは

$$\epsilon_{IJKL} e^I \wedge (\star F)^{KL} = 0 \quad (1220)$$

を意味する． すなわち，我々は以下の運動方程式を得る：

$$0 = \epsilon^{KLMN} \epsilon_{KLIJ} e^I \wedge F_{MN} = -2(\delta_I^M \delta_J^N - \delta_I^N \delta_J^M) e^I \wedge F_{MN} = -4e^I \wedge F_{IJ}. \quad (1221)$$

ねじれがないとき，最後の表現は正確に Bianchi の恒等式であって消える． このことは Holst 作用が古典的な Einstein 方程式を与え，それ故，等しく GR に対する適切な作用であることを示している．

式(1221)がBianchi恒等式であることの確認と証明の補完 Holst項が消えること(1218)の確認の際にも, Bianchiの恒等式を用いた. 運動方程式の水準においても, Bianchiの恒等式によりHolst項の寄与は消える(式(1221)). その確認は式(1218)の場合と似た手順で行える.

式(1205): $F_{IJ} = \frac{1}{2}F_{IJKL}e^K \wedge e^L$ を代入すると, 式(1221)は

$$0 = e^I \wedge F_{IJ} = \frac{1}{2}F_{IJKL}e^I \wedge e^K \wedge e^L = \frac{1}{2}F_{IJKL}\epsilon^{IKLM}e_M^*$$

と書ける. 最右辺における基底 e_M^* の係数をゼロとおこう. ねじれ $T = 0$ の下で F_{IJKL} は Riemann 曲率テンソルのテトラード成分に一致することを用いると,

$$0 = F_{IJKL}\epsilon^{IKLM} = R_{\mu\nu\rho\sigma}e_I^\mu e_J^\nu e_K^\rho e_L^\sigma \epsilon^{IKLM}.$$

ここで式(1147)同様の余因子行列の転置行列の表式

$\epsilon^{IKLM}e_I^\mu e_K^\rho e_L^\sigma = \det(e^{-1})e_\tau^M \epsilon^{\mu\rho\sigma\tau}$ を用いると, さらに

$$\det(e^{-1})e_\tau^M e_J^\nu \epsilon^{\tau\mu\rho\sigma} R_{\nu\mu\rho\sigma} = 0$$

と書き換えられる. 添字 ν, τ の固定した値に対し, 相異なる3つの添字 $\mu, \rho, \sigma (\neq \tau)$ に関する和 $\epsilon^{\tau\mu\rho\sigma} R_{\nu\mu\rho\sigma}$ は, Bianchiの恒等式(99)により消える.

さて, 式(1220),(1221)はHolst項が単独で停留値をとることを仮定した場合の関係である. 他方でHolst作用全体に対する変分原理は, $e^I \wedge F_{IJ}$ に比例する付加的な寄与

が、運動方程式(1214)の左辺に及ぶことを意味する。ところが付加的な項 $\sim e^I \wedge F_{IJ}$ は恒等的に消えるので、運動方程式は変わらない。

17.3.1 項の原稿

運動方程式に影響しない項を Palatini 作用 (1202) に付け加え、重力場の一般的な作用を式 (1217) に採ることができる。これは Holst 作用として知られており、付加的な第2項は Holst 項、また結合定数を $1/\gamma$ と書いて導入したパラメータ γ は Barbero–Immirzi (バルベロ–イミジ [27, p.72]) 定数と呼ばれる。実際、Holst 作用 (1217) の接続に関する変分原理は再びねじれの条件を与える (導出スライド参照)。この下で第2項は式 (1218) のように Riemann 曲率テンソルに関係付けられるため、Bianchi の恒等式により消える (導出スライド参照)。したがって Holst 項は GR の運動方程式に影響しない。このことは運動方程式の導出の水準でも理解できる (導出スライド参照)。

Holst 項は古典物理に影響しないものの、量子論において重要な役割を演じる。QCD にも、運動方程式に影響しないものの量子論において役割を演じる似た項として、式 (1008) で紹介した θ -真空項がある。実に Holst 作用 (1217) は θ -真空項を含む Yang–Mills 理論の作用 (1014) とアナログスであり、その結合定数 θ は Barbero–Immirzi 定数 γ の対応物と見なせる。

Holst 作用 (1217) は簡潔な形 (1219) に書ける。ここまでの定式化は正準および共変なループ量子重力のいずれにも利用でき、Holst 作用 (1219) はそれらに共通の出発点に採ることができる [1, pp.64–65]。

第V部

付録：Spinoza 描像

自由意志の否定・当為命題の虚構性

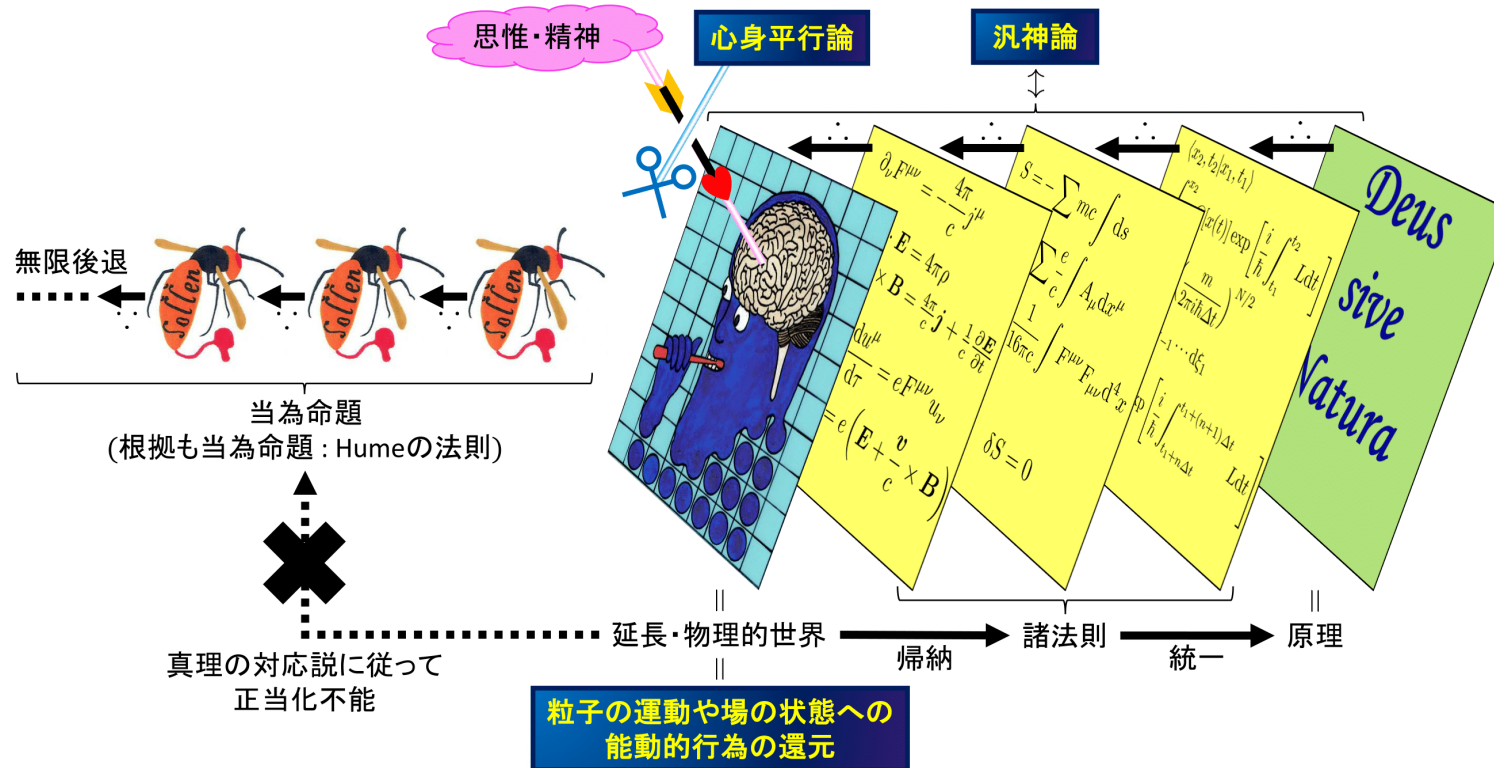


図96 「Spinoza 描像」 = 「自由意志の否定」 + 「当為命題の虚構性」

本付録では自然科学(とりわけ物理学)と相性が良いSpinozaの哲学について、科学との関係を整理しつつまとめる。またSpinoza的な描像の主要な帰結についても簡潔に議論する(図96参照)。

Spinozaの思想はその代名詞と呼べる「神即自然」という標語に端的に表されている。ここで神とは世界の外部から世界に働きかける人格を持った存在ではなく、むしろこの世界そのものであり、それ故、神即自然と呼ばれる。そしてSpinozaによれば、あらゆる事物は神の「現れ」であって、神の内なる必然性に従って生起しているとされる。このような考え方は汎神論と呼ばれ、少なくとも自然科学が対象とする物理的世界に関して言えば、万物は自然法則に従って振舞うという自然観と重なる。この限りで神の必然性とは、自然法則ないしその原理としての物理そのものと同一視し得る。(そしてこのことは私を含め、Spinozaに共鳴する一部の者にとって、間違いなく物理学理論を学ぶ一つの大きな原動力となってきた。)また人間を含め自然物は与えられた目的のために存在・活動するという考えを、Spinozaは偏見として退けている。この点もやはり、目的因よりもむしろ機械論的因果律による現象の理解を試みる自然科学的な姿勢に通じる：鳥は空を飛ぶために羽があるのではなく、羽があるから空を飛べるのである。さらに精神と物体は異質な存在であるため、その相互作用を考えることはできない。しかし我々は心と身体の状態に関連性があることを経験的に知っている。これはSpinoza哲学において、それらが同一の神の異なる二つの側面を表しているからであると説明される。このように精神的な出来事と身体的(物理的)な出来事は互いに対応しているもの

の、それらはあくまで独立に進行するという説は心身平行論と呼ばれる。これは物理現象がそれ自体で閉じており、そこに精神の作用が介入する余地はないとする自然科学の想定と整合する。(なお心身平行論を採用すれば、いかにして物質に過ぎない脳から意識が生まれるのかという、脳・神経科学に付きまとう形而上学的な難題も回避できる。)

以上のように、Spinoza 哲学と自然科学の世界観は整合的である。しかしながら Spinoza の思想は彼の主著『エチカ』において、定義や要請、公理から出発して定理を演繹する、いわゆる「幾何学的方法」で「論証」されており、それ故それは数学同様、頭の中で完結している。現に Spinoza の汎神論は、神の必然性に相当する物理の具体的な詳細——決定論的であれ非決定論的であれ——に依らずに理解できる (Spinoza のオリジナルの自然観は決定論的である)。これは Spinoza 哲学が実験や観察によって反証できず、形而上学の域を出ないことを意味する。他方で経験科学は現実世界について語り得るものの、帰納的推論の産物であるため絶対確実な知識ではあり得ず、やはり形而上学的な命題の正しさを証明することはできない。むしろ Spinoza が描くような形而上学的な直観が、物理学をはじめとする自然科学の前提を成していると言った方が正確である。

次に Spinoza のパラダイムは——Spinoza 自身がはっきりと述べているように——人間の自由意志を否定することを説明する。ここで自由意志とは、因果律の連鎖または物理法則の支配を断ち切り、純粹に自発的な行動を引き起こす超自然的な精神の作用として定義できる。言い換えれば自由意志とは言わば無からの創造であり、不可能を可能にす

るという自己矛盾であり，その定義により虚構に他ならないことが明らかである．実際 Spinoza が主張するように，一切は神の必然性によって完全に決定されており，また精神は身体に影響を及ぼさないならば，自由意志は存在し得ない．また人間も自然の一部であって，神の現れであるならば，自由意志を行使し得る行為の主体ははじめから存在しないことになる．これは一見すると能動的・主体的な人間の行為も，渾然一体とした単なる物理的な出来事(例えばミクロな粒子の運動や場の時間変化)から成るという，要素還元論的な見方に対応する．さらに量子力学の描くような非決定論的な自然観を導入しても，自由意志を救うことにはならないことに注意しよう．なるほど，「決定論が正しいければ自由意志は存在しない」という伝統的な議論は分かりやすい．ただしこの命題の裏も成り立つとは限らない．実際，事物がランダムに確率的に生起するとしても，人は世界のなすがままに振り回されてしまうのであれば，我々はそこにも自由意志を見出せないだろう．

自由意志は存在しないと主張することは，露悪的だという印象を与えかねない．とは言え人は時として，このことを括弧に入れて考えることが許されないような，差し迫った苦境に陥ることも確かである．そのような人生の局面の象徴的な例として，受験勉強が挙げられる．勉強しなくてはいけないと思いつつもやる気が出ず，一向に行動を起こせないという金縛りのような無気力状態を，誰しも少なからず経験したことがあるだろう．このときもし意志の力で言うことを聞かない身体を強制的に行動へと駆り立てられるならば，それは無気力の中でも自由に発動させることができる精神の能力，すなわち

自由意志でなければならない。ところが自由意志は存在しない以上、意志を抱くことや努力することは、それが神即自然の必然性に従って自動的に達成されない場合には絶対に不可能である。このような認識は必ずしも状況の解決には役立たないものの、思うに真なる認識であって、それを安易に無視することはかえって「無責任」な言動や実践に繋がりがねない。現代社会を伏流している新自由主義的な自己責任論のイデオロギーもその例外ではなく、それは本来、哲学的に正当化し得ないということも、ここで強調しておきたい。

最後に事実と価値の対立について論じる。一般に「……べきだ」という形に帰着できる、規範を表す命題を当為命題という。受験勉強をすべきとされながらもそれができない先の受験生の例は、自由意志なき世界では、我々がしばしば相容れない事実と当為の間で否応なく引き裂かれる運命にあることを示している。またそれ以前に、当為命題はいかに論理で武装しようとも、恣意性・無根拠性を免れないということも言える。その理由は次のようにまとめられる。まず素朴に理解できるように、自然にはもともと絶対的な善悪の区別は存在しない。(これはSpinozaの採る立場であると同時に、科学が自明視する暗黙の了解でもある。)このため当為命題は事実命題だけからは導けない(このことはHumeの法則と呼ばれる)。しかるに、ある当為命題を導く論理が循環論法や無限後退に陥らないためには、何らかの前提条件を出発点として認めなければならない。よってこの前提条件にもまた、何らかの当為命題が含まれることになる。再びHumeの法則より、この当為命題は単に現実世界との一致・不一致に基づいて真偽を判断できる

ものではないため、無条件に認めることを強られる。以上よりあらゆる当為命題は独断論であることを免れない。ただし——ここが重要だが——「こうあるべき」とは言えずとも、事実として「こうあってほしい(と思っている)」と述べる分には間違いにならない。このことを踏まえてはじめて、我々は普遍的な「正義」を求める答のない(擬似)問題と、それをめぐって弁論術を競うだけの表面的な水掛け論を脱し、個々人の気持ちを「感情論」として排除しない、地に足のついた真に倫理的な対話を行うことができる。

参考文献

- [1] C. Rovelli and F. Vidotto, 2020, Covariant Loop Quantum Gravity: An elementary introduction to Quantum Gravity and Spinfoam Theory, Cambridge University Press, Cambridge.
- [2] Rovelli, C. (2010) *Quantum Gravity*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [3] R. ガムビーニ/J. プリン, 2021, 初級講座 ループ量子重力 (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [4] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, 2015, ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 場の古典論(原書第6版) (恒藤敏彦, 広重徹訳), 東京図書株式会社, 東京.
- [5] 山本義隆, 中村孔一, 2013, 朝倉物理学大系1 解析力学I, 株式会社朝倉書店, 東京.
- [6] ゴールドスタインほか, 2009, 古典力学(下)原著第3版(矢野忠ほか訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [7] 山本義隆, 中村孔一, 2012, 朝倉物理学大系2 解析力学II, 株式会社朝倉書店, 東京.
- [8] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, 2013, ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 力学(増訂第3版) (広重徹, 水戸巖訳), 東京図書株式会社, 東京.
- [9] 内山龍雄, 2014, 相対性理論 物理テキストシリーズ8, 株式会社岩波書店, 東京.

- [10] P.A.M. ディラック, 2012, 一般相対性理論 (江沢洋訳), 株式会社筑摩書房, 東京.
- [11] J.J.Sakurai, 2017, 現代の量子力学 (上) (桜井明夫訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [12] B. ツヴィーバッハ, 2013, 初級講座 弦理論《基礎編》(樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [13] B. ツヴィーバッハ, 2018, 初級講座 弦理論《発展編》(樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [14] シュッツ, 2010, 第2版シュッツ 相対論入門 (江里口良治, 二間瀬敏史訳), 丸善株式会社, 東京.
- [15] 前田恵一, 田辺誠, 2024, 演習形式で学ぶ一般相対性理論, 株式会社サイエンス社, 東京.
- [16] Sean M. Carroll, 1997, Lecture Notes on General Relativity.
- [17] F. マンドル, G. ショー, 2011, 場の量子論 第1巻 量子電磁力学 (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [18] Sundance Bilson-Thompson, 2024, Loop Quantum Gravity for the Bewildered: The Self-Dual Approach Revisited (Second Edition), Springer.
- [19] 砂川重信, 2014, 電磁気学 物理テキストシリーズ4, 株式会社岩波書店, 東京.
- [20] 佐藤文隆, 小玉英雄, 2016, 現代物理学叢書 一般相対性理論, 株式会社岩波書店, 東京.
- [21] M. ストーン, 2012, 量子場の物理〔新装版〕(樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.

- [22] F. マンドル, G. ショー, 2013, 場の量子論 第2巻 素粒子の相互作用 (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [23] 九後汰一郎, 2018, 新物理学シリーズ23 ゲージ場の量子論I, 株式会社培風館.
- [24] 北原和夫, 吉川研一, 1994, 非平衡系の科学I 反応・拡散・対流の現象論, 講談社サイエンティフィク, 東京.
- [25] 早川尚男, 高田智史, 2025, 非線形レオロジー: 粉体の非平衡統計物理, 共立出版株式会社, 東京.
- [26] 中村伝, 1997, 統計力学 物理テキストシリーズ 10, 株式会社岩波書店, 東京.
- [27] C. ロヴェッリ, 2023, 一般相対性理論入門 (真貝泰明訳), 森北出版株式会社, 東京.
- [28] 杉田勝実ほか, 2005, 経路積分と量子電磁力学 [POD 版], 森北出版株式会社, 東京.
- [29] 山本義隆, 2025, 物理学の発展——山本義隆自選論集II, 株式会社筑摩書房, 東京.
- [30] L.D. ランダウ, E.M. リフシッツ, 2019, 量子力学 ランダウ=リフシッツ物理学小教程 (好村滋洋, 井上健男訳), 株式会社筑摩書房, 東京.
- [31] 佐武一郎, 2017, 数学選書1 線型代数学 (新装版), 株式会社裳華房, 東京.
- [32] 石坂智ほか, 2024, 量子情報科学入門 第2版, 共立出版株式会社, 東京.
- [33] ファインマンほか, 2012, ファインマン物理学 II (富山小太郎訳), 株式会社岩波書店, 東京.

- [34] 沙川貴大, 2022, 非平衡統計力学——ゆらぎの熱力学から情報熱力学まで——, 共立出版株式会社, 東京.
- [35] W. グライナー他, 2002, 熱力学・統計力学(伊藤伸泰, 青木圭子訳), シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社, 東京.
- [36] 佐藤光, 2019, 群と物理, 丸善出版株式会社, 東京.
- [37] 吉川圭二, 2022, 理工系の基礎数学 新装版 群と表現, 株式会社岩波書店, 東京.
- [38] H. ジョージアイ, 2010, 物理学におけるリー代数——アイソスピンから統一理論へ——(原著第2版)(九後汰一郎訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [39] Landau, L. D., and Lifshitz, E. M. 1965. *Quantum Mechanics*. Pergamon Press.
- [40] Haggard, H. M. 2011. Asymptotic analysis of spin networks with applications to quantum gravity. PhD dissertation, University of California, Berkeley.
<http://bohr.physics.berkeley.edu/hal/pubs/Thesis/>.
- [41] ファインマンほか, 2014, ファインマン物理学Ⅰ(坪井忠二訳), 株式会社岩波書店, 東京.
- [42] J.J.Sakurai, 2014, 現代の量子力学(下)(桜井明夫訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [43] 今井功, 2003, 流体力学 物理テキストシリーズ9, 株式会社岩波書店, 東京.
- [44] J.J.サクライ, 2013, 上級量子力学 第Ⅰ巻 輻射と粒子(樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [45] J.J.サクライ, 2010, 上級量子力学 第Ⅱ巻 共変な摂動論(樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.

- [46] 小野寺嘉孝, 2014, 物理のための応用数学, 株式会社裳華房, 東京.
- [47] W.N. コッティンガム, D.A. グリーンウッド, 2013, 素粒子標準模型入門(樺沢宇紀訳), 丸善出版株式会社, 東京.
- [48] 北原和夫, 1997, 非平衡系の統計力学 岩波基礎物理シリーズ8, 株式会社岩波書店, 東京.
- [49] 川村嘉春, 2024, 物理学レクチャーコース 素粒子物理学, 株式会社裳華房, 東京.
- [50] カルロ・ロヴェッリ, 2025, ブラックホールは白くなる(冨永星訳), NHK出版, 東京.
- [51] 江沢洋, 中村孔一, 山本義隆, 2022, 演習詳解 力学[第2版], 株式会社 筑摩書房, 東京.