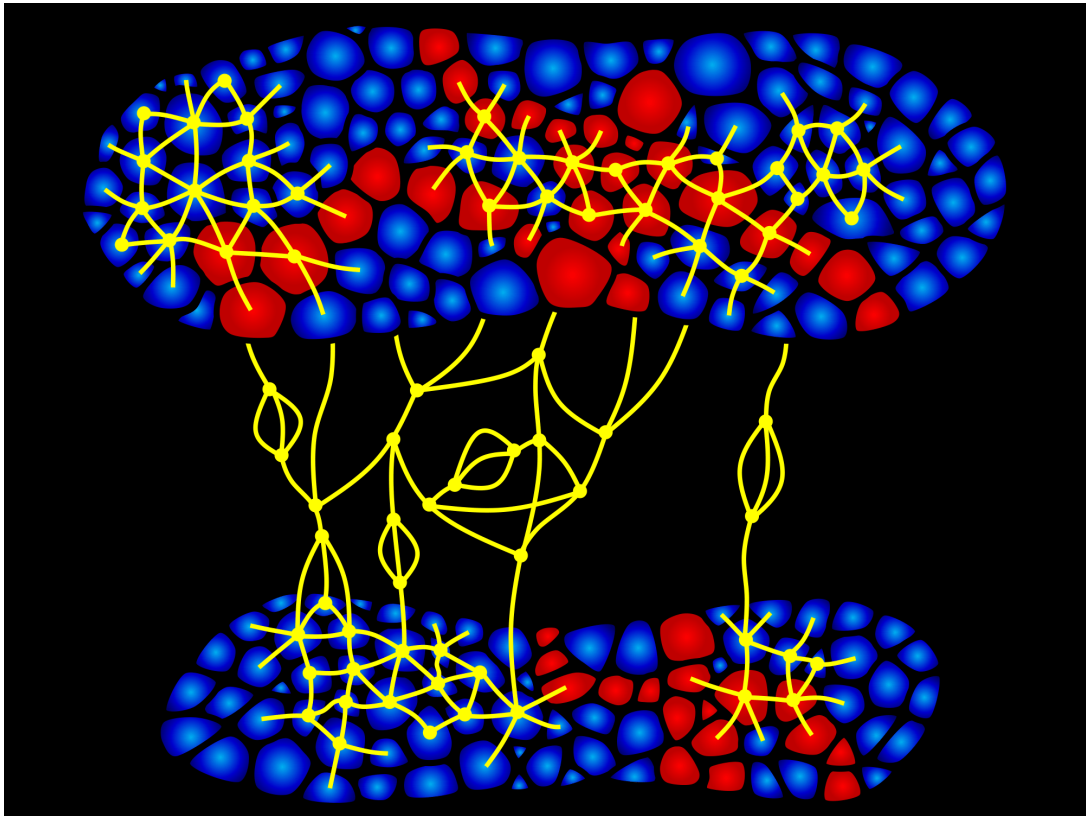


共変ループ量子重力

量子重力とスピン・フォーム理論への初等的な入門

CARLO ROVELLI AND FRANCESCA VIDOTTO



本稿はループ量子重力の入門書, C. ロヴェッリ/F. ヴイドット『共変ループ量子重力』

C. Rovelli and F. Vidotto, 2020, Covariant Loop Quantum Gravity: An elementary introduction to Quantum Gravity and Spinfoam Theory, Cambridge University Press, Cambridge.

の和訳を兼ねたまとめノートである。本書は今のところ管見の及ぶ限り、最もよくまとまったループ量子重力の教科書の1冊であり、初学者へ配慮し基本事項から丁寧に説き起こしている箇所も見受けられる。また最新の研究分野に関するこのような教科書があるだけでも有難いことであり、我々は著者らに感謝せねばならない。しかしおそらく著者らの労力の限界もあってか、必ずしも全ての解説が親切であって容易に理解できるとは言い難い。往々にして科学は人間の寿命に比べて長い時間スケールで発展するものだとすれば、この分野の理解がさらに整理された形で市井の人々にアクセスできるようになるにも、まだまだ時間がかかるのかもしれない。今の私にできるのはせいぜい、本稿のようなノートの公開を通じて、この分野への“獣道”を作ることである。それが理論の将来的な普及・発展に多少なりとも繋がれば幸いである。

本稿には筆者の誤りや勘違いが潜んでいるかもしれないことをあらかじめ断っておく。言うまでもなく、原著を当てるに越したことはない。

なお本稿の他にも理論物理の各種ノートを以下のページで公開している。

<http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/>

- R. ガムビーニ/J. プリン『初級講座 ループ量子重力』 [1]
- C. ロヴェッリ『量子重力』 [2]

のノートも公開している。

表紙について 裏表紙から引用する：

Cover illustration: “Jimi Hendrix, House Burning Down”, Martin Klimas.

Cover design: Andrew Ward

原著の表紙に載っている Martin Klimas のアート “Jimi Hendrix, House Burning Down” は、Jimi Hendrix の楽曲 “House Burning Down” をかけたときに、スピーカー上にのせたカラフルな塗料が飛び散る様子を撮影したものである。本稿では筆者が独自に作成したスピン・フォームのイメージ図を表紙に載せた。イラストでは始・終状態における離散的な空間とその上の場の配位、および対応するスピン・ネットワークとそれを境界に持つスピン・フォームの構造の一部を描いた。

副題について 共変な定式化が進展した今となっては、従来の「ループ量子重力」よりも副題にある「スピン・フォーム理論」という名称の方が、理論の内容を素直に反映しているように感じられる。

量子重力は物理学における最も魅力的な問題の 1 つである。それは時間、空間および物質に対する我々の理解を修正する。ループのアプローチの最近の発展により、ブラックホールの熱力学から初期宇宙にわたる領域の探求が可能になった。

本書は読者にループ量子重力への、その共変なアプローチに重点を置いた簡潔な手引きを供する。本書は問題の物理的で概念的な側面に焦点を当て、またこの活発な研究領域に参入するのに必要な背景を含んでおり、研究者と卒業生にとって理想的となっている。

網羅されている話題は、空間の量子、時間のない古典および量子物理、テトラード形式、Holst 作用、格子ゲージ理論、Regge 計算法、ADM および Ashtekar 変数、Ponzano–Regge および Turaev–Viro 振幅、4 次元 Lorentz 的量子重力の運動学と力学 (ダイナミクス)、面積と体積のスペクトル、コヒーレント状態、古典的極限、物質との結合、重力子の伝播関数、スピン・フォーム宇宙論およびブラックホールの熱力学を含んでいる。

Carlo Rovelli はエクス＝マルセイユ大学 (Aix-Marseille Université) における物理学の教授であり、そこで彼は重力研究グループを指揮している。彼はループ量子重力の創始者の 1 人である。

Francesca Vidotto はナイメーヘン・ラドバウド大学 (Radboud Universiteit Nijmegen) のオランダ科学研究機構 (NWO) の Veni フェローであり、宇宙論に対するスピン・フォームのアプローチを創始した。

“ループ量子重力として知られる量子重力へのアプローチは過去 10 年で大いに前進し、そして Carlo Rovelli と Francesca Vidotto による本書は、この分野における最新の教科書の必要性を見事に満たしている。それは初心者の学生と自立した研究者の双方が、この急速に変化する分野における発展に追いつくのに役立つだろう。それはブラックホール、量子宇宙論、および量子時空の基礎理論からの一般相対性理論の導出に関係した結果を含む、理論の重要な結果を提示している唯一の本である。著者らは大局的なアイデアや原理と、技術的な詳細との優れたバランスを実現している。”

Lee Smolin, 理論物理学のペリメーター研究所 (Perimeter Institute)

“本書はスピン・フォームへの優れた入門であり、それは Regge 計算法、トポロジカルな場の理論および群の場の理論からもアイデアを引き出すループ量子重力の分野である。それは教育的な概観と、急速に発展している研究の最前線の分野におけるさらなる発展へのプラットフォームの両方を供することで、文献の重大なギャップを埋めている。”

Abhay Ashtekar, ペンシルベニア (Pennsylvania) 州立大学

我々の知識を問い、協働を通じて学び、発見の喜びを感じることを子供たちを教える、
我々が教師たちと全ての人々へ。

本稿では原著巻末の「索引 (Index)」を省略する.

目次

序文	8
第 I 部 基礎	10
第 1 章 量子的対象としての時空	11
1.1 問題	11
1.2 空間と時間の終わり	13
1.3 量子化された幾何学	17
1.3.1 面積と体積の量子	25
1.4 Planck スケールの存在の物理的な帰結	28
1.4.1 離散性: スケーリングは有限である	28
1.4.2 不鮮明さ: 古典的な空間と時間の消失	30
1.5 グラフ, ループおよび量子 Faraday 線	31
1.6 展望	32
1.7 補完	34
1.7.1 $SU(2)$ 表現とスピノル	34
1.7.2 Pauli 行列	40
1.7.3 体積の固有値	45
第 1 章の (部分的な) 総括 (本稿筆者)	50
間奏曲——古典的 GR の背景独立性 (筆者補論)	51
第 2 章 時間のない物理	57
2.1 Hamilton 関数	57
2.1.1 境界項	62
2.2 遷移振幅	65
2.2.1 経路にわたる積分としての遷移振幅	66
2.2.2 遷移振幅の一般的性質	68
2.3 力学の一般共変な形式	69
2.3.1 一般共変な系の Hamilton 関数	75
2.3.2 部分的観測量	76
2.3.3 時間のない古典物理	76
2.4 時間のない量子物理	78
2.4.1 量子重力における観測可能性	83
2.4.2 境界の定式化	84
2.4.3 関係的量子, 関係的空間	85

2.5	補完	88
2.5.1	時間のない系の例	88
2.5.2	シンプレクティック構造と Hamilton 関数	92
第 3 章	重力	100
3.1	Einstein の定式化	100
3.2	テトラードとフェルミオン	101
3.2.1	重要な符号	110
3.2.2	1 次の形式	112
3.3	Holst 作用と Barbero–Immirzi 結合定数	112
3.3.1	線形単純性拘束	116
3.3.2	境界項	119
3.4	Hamilton 形式の一般相対性理論	119
3.4.1	ADM 変数	120
3.4.2	このことは何を意味するか？ ダイナミクス	127
3.4.3	Ashtekar 接続とトライアド	131
3.5	3 時空次元での Euclid 的な一般相対性理論	142
3.6	補完	145
3.6.1	一般共変な場の理論の研究	145
3.6.2	問題	151
第 4 章	古典的な離散化	153
4.1	格子 QCD	153
4.1.1	Hamilton 形式の格子理論	155
4.2	共変な系の離散化	156
4.3	Regge 計算法	158
4.4	2-複体上の一般相対性理論の離散化	162
4.5	補完	171
4.5.1	ホロノミー	171
4.5.2	問題	176
	第 4 章の (部分的な) 総括 (本稿筆者)	177
第 II 部	3 次元の理論	181
第 5 章	3 次元の Euclid 的な理論	182
5.1	量子化の戦略	182
5.2	量子論の運動学：Hilbert 空間	183
5.2.1	長さの量子化	184
5.2.2	スピン・ネットワーク	186
5.3	量子ダイナミクス：遷移振幅	198

5.3.1	振幅の性質	203
5.3.2	Ponzano–Regge モデル	204
5.4	補完	206
5.4.1	基本的な調和解析	206
5.4.2	遷移振幅の別の形	207
5.4.3	Poisson 括弧	211
5.4.4	宇宙の周囲	213
第 6 章	泡と宇宙定数	215
6.1	ゲージ不変な恒等関数としての頂点振幅	215
6.2	泡と棘	221
6.3	Turaev–Viro 振幅	228
6.3.1	宇宙定数	230
6.4	補完	232
6.4.1	$SU(2)_q$ に関する若干のノート	232
6.4.2	問題	233
	第 6 章の (部分的な) 総括 (本稿筆者)	233
第 III 部	現実世界	235
第 7 章	現実世界 : 4 次元の Lorentz 的な理論	236
7.1	古典的な離散化	236
7.2	重力の量子状態	243
7.2.1	Y_γ 写像	243
7.2.2	物理的理論におけるスピン・ネットワーク	252
7.2.3	空間の量子	255
7.3	遷移振幅	256
7.3.1	連続極限	263
7.3.2	QED および QCD との関係	264
7.4	完全な理論	265
7.4.1	面振幅, くさび振幅, および核 P	266
7.4.2	宇宙定数と赤外の有限性	268
7.4.3	変種	268
7.5	補完	270
7.5.1	理論の要約	270
7.5.2	スピン・ネットワークの計算	271
7.5.3	体積のスペクトル	276
7.5.4	Lorentz 群のユニタリー表現と Y_γ 写像	279
第 8 章	古典的極限	283

8.1	内部コヒーレント状態	283
8.1.1	四面体の幾何学と $SU(2)$ コヒーレント状態	283
8.1.2	Livine-Speziale コヒーレント状態	290
8.1.3	鋭いおよび鈍いくさびと, 時間の向きを持つ四面体	291
8.2	スピノルとその手品	291
8.2.1	スピノル, ベクトル, および 2-ベクトル	293
8.2.2	コヒーレント状態とスピノル	297
8.2.3	スピノルの関数上の $SU(2)$ および $SL(2, \mathbb{C})$ の表現と Y_γ 写像	297
8.3	頂点振幅の古典的極限	300
8.3.1	コヒーレント状態に関する遷移振幅	300
8.3.2	古典的極限 対 連続極限	304
8.4	外部コヒーレント状態	306
第 9 章	物質	311
9.1	フェルミオン	311
9.2	Yang-Mills 場	320
第 IV 部	物理的応用	322
第 10 章	ブラックホール	323
10.1	Bekenstein-Hawking エントロピー	323
10.2	局所熱力学と Frodden-Ghosh-Perez エネルギー	325
10.3	エントロピーの運動学的な導出	327
10.4	エントロピーの力学的な導出	329
10.4.1	エンタングルメント・エントロピーと面積のゆらぎ	334
10.5	補完	335
10.5.1	Minkowski および Schwarzschild 計量において加速する観測者	335
10.5.2	Tolman の法則と熱時間	337
10.5.3	代数的な量子論	337
10.5.4	KMS と温度計	338
10.5.5	一般共変な統計力学と量子重力	341
第 11 章	宇宙論	344
11.1	古典的な宇宙論	344
11.2	正準ループ量子宇宙論	349
11.3	スピン・フォーム量子宇宙論	351
11.3.1	一様等方な幾何学	354
11.3.2	頂点展開	355
11.3.3	大スピン展開	356
11.4	最大の加速度	358

11.5 物理的予言？	359
第 12 章 散乱	360
12.1 一般共変な理論における n 点関数	360
12.2 重力子伝播関数	364
第 13 章 最後の注意	368
13.1 短い歴史に関するノート	368
13.2 足りないもの	369
第 V 部 付録 (筆者補論)	372
付録 A 微分形式	373
付録 B Lie 微分	378
B.1 Lie 微分の概念的導入	378
B.1.1 積分曲線と 1 径数変換群 [16, pp.49–50]	378
B.1.2 引き戻しと微分写像 [16, pp.50–51]	378
B.1.3 Lie 微分 [16, pp.53–55]	379
B.2 Lie 微分の一般公式	381
付録 C Regge 計算法	385
C.1 『座標を用いない一般相対性理論』	385
C.1.1 多面体	385
C.1.2 ε -錐面	387
C.1.3 基本的な群	388
C.1.4 [無題]	390
C.1.5 微分可能多様体	391
C.1.6 Lorentz 多様体	393
C.1.7 変分原理	393
C.1.8 付録	394
C.2 Regge の原論文に関するノート	396
付録 D Wigner の $3j$ 記号と結節因子	401
D.1 Wigner の $3j$ 記号	401
D.2 角運動量成分 m の反転に伴う $3j$ 記号の符号の変化	405
D.3 結節因子	407
参考文献	410

序文

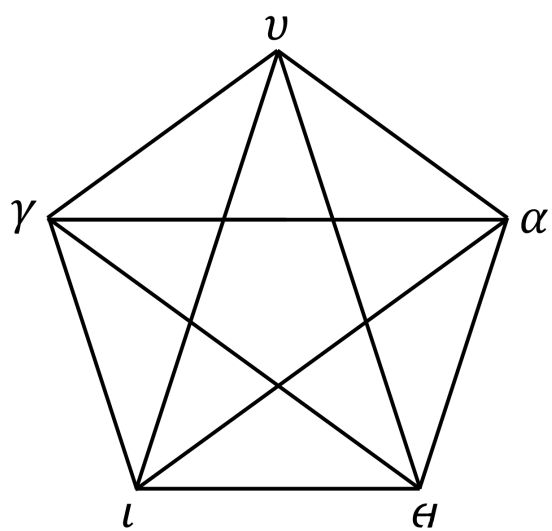
本書はループ量子重力 (loop quantum gravity; LQG) の、その共変な定式化に焦点を当てた入門である。本書は Carlo Rovelli と Eugenio Bianchi によって 2012 年 4 月の間に、ペリメーター研究所 (Perimeter Institute) で成された一連の講義と、Rovelli により 2013 年の冬に Marselle で成された課程から生まれた。本書は入門的であり、一般相対性理論、量子力学および場の量子論の、一定の基礎知識のみを仮定している。本書はループ量子重力の教科書『量子重力 (Quantum Gravity)』(Rovelli 2004) と、発展的で濃密な『ザコパネ講義 (Zakopane lectures)』(Rovelli 2011) よりも簡単ではるかに読みやすく、それでいて、有限の遷移振幅へと導き、Rovelli (2004) では予示されるに留まっていた、過去数年で発展した共変な理論における重要な進展を網羅し、実に重点的に説明している。

本書で網羅していない全ての話題に関して、我々は LQG に関する豊富な文献を紹介する。量子重力全般に関しては、Claus Kiefer による最新の一般的な入門 Kiefer (2007) がある。執筆当時、Ashtekar と Petkov は、スピン・フォームに関する John Engle の論文をはじめとする数多くの有用な貢献を含む、『時空のシュプリンガー便覧 (Springer Handbook of Spacetime)』を編集している。

多くの有用な背景の題材を含む優れた本は、John baez と Javier Munian (1994) の本である。主題への多くのアイデアと見事な入門のある Baez (1994b) も見よ。学部学生の水準の LQG への入門が Rodolfo Gambini と Jorge Pullin (Gambini and Pullin 2010) によって与えられている。数学的な詳細が豊富な、理論の正準形式に関する厳格で網羅的な教科書が、Thomas Thiemann (2007) によって与えられている。理論の非常に初期の形と、それをもたらした最初のアイディアは Abhay Ashtekar による 1991 年の本に見出される。

優れた最近の参考文献は、Jerzy Lewandowski によって組織された、ループ量子重力に関する第 3 回ザコパネ研究会 (Zakopane school) の論集 (Barrett *et al.* 2011a) である。それは Abhay Ashtekar による LQG への入門 (Ashtekar 2011)、Rovelli の『ザコパネ講義 (Zakopane lectures)』(Rovelli 2011)、Kristina Giesel と Hanno Sahlmann による正準理論への入門、およびスピン・フォームのダイナミクスに対する半古典的な近似に関する John Barrett らのレビュー Barrett *et al.* (2011b) を含んでいる。いくつかの点で本書の補足となる、Alejandro Perez のスピン・フォームのレビュー Perez (2012) も勧める。最後にスピン・ネットワークの数学の注意深く有用な入門と参考文献として、オンラインの Hall Haggard の論文 (Haggard 2011) を勧める。

草稿を注意深く読み、修正し明確化していただいたことに関して、Klaas Landsman, Gabriele Stagno, Marco Finocchiaro, Hal Haggard, Tim Kittel, Thomas Krajewski, Cedrick Miranda Mello, Aldo Riello, Tapio Salminem, comesempre, Leonard Cottrell に大いに感謝する。国際ペリメーター (International Perimeter) の学生—— Andrzej, Grisha, Lance, Lucas, Mark, Pavel, Brenda, Jacob, Linging, Robert, Rosa ——に対する数回の個別指導を David Kubiznak と Jonathan Ziprick に準備していただき、その全員にも感謝する！



第 I 部
基礎

第 1 章 量子的対象としての時空

本書は読者に量子重力の理論を紹介する。その理論は共変ループ量子重力 (共変 LQG) である。それは歴史的には、本章の最後に手短に要約する、長い迂遠な道筋を経て発達した理論である。本書は歴史的な道筋を追わない。むしろ本書は教育的であり、理論を学ぶのに必要な手順へと読者を導く。

理論は 2 つの理由でまだ仮説的である。第 1 に、その整合性に関して未解決のままの疑問がある；それらは後で本書で議論する。第 2 に、科学的な理論は世界の領域の信頼できる記述となる前に、経験的な試験に合格しなければならない；理論の直接的で実験的な裏付けはまだない。本書は我々の読者、あなた方の誰かがこれらの溝を埋め得ることを望んで書かれている。

この最初の章は理論が取り組む問題が何であるかを明確にし、理論の一般的な帰結を含め、理論の核となる物理的な内容の簡単で大まかな導出を与える。

1.1 問題

Higgs の期待される性質に合致することが判明した粒子の、CERN での検出 [ATLAS Collaboration (2012); CMS Collaboration (2012)] の後、根本的な物理的世界について我々が知っていることと知らないことを分離している境界線は、今や明快な方法でたどることができる。我々の知っていることは 3 つの主要な理論に要約される：

- 量子力学、それはダイナミクスを記述する一般的な理論的枠組みである。
- 素粒子物理学の $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 標準模型、それは我々が今のところ直接観測した全ての物質と、その非重力的な相互作用を記述する。[GR の文脈では重力場以外の全ての力学的対象を物質と呼ぶ [2, p.37].]
- 一般相対性理論 (GR)、それは重力、空間および時間を記述する。

これらの理論の破れに対する数十年にわたる不断の予期にも関わらず、多くの理論の予言に対する初期の信じ難さ (長距離のエンタングルメント、基本的なスカラー粒子、宇宙の膨張、ブラックホール……) にも関わらず、またしばしば一貫性のない継ぎ接ぎだと揶揄する、標準模型の晒されている悪評にも関わらず、今のところこれらの理論の全ての予言に対して“イエス”と、また代わりの理論の全ての予言 (陽子崩壊、余剰次元の兆候、超対称性粒子、新しい短距離の力、LHC でのブラックホール……) に対して“ノー”と、自然は絶えず答え続けている。これらの理論を超えるあらゆることは思索的である。試すことと夢を見ることは良いことだ：全ての優れた理論は、信頼できるようになる前は試みと夢だった。しかし多くの試みと夢は何の成果も生まない。上記の理論のパッケージの成功はあらゆる人の予想の先を行っており、額面通りに受け取らねばならない。

これらの理論はもちろん、根本的な世界の究極的なストーリーではない。未解決問題の中で、3 つが突出している。

- 暗黒物質 (ダークマター)
- 統一
- 量子重力

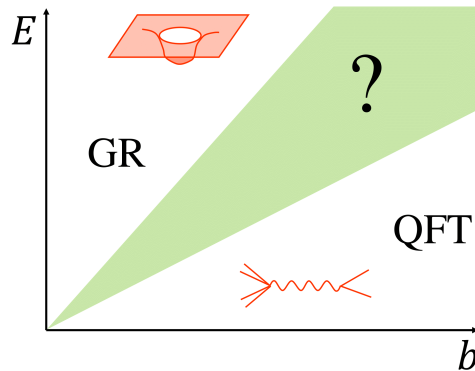


図1 Planck 単位 $c = \hbar = G = 1$ における中性粒子の重力的な散乱の領域。[Planck 単位系では E と b を無次元量として比較できる。もっとも軸に目盛りはない。] E は質量中心系におけるエネルギー、 b は衝突パラメータ (2つの粒子が互いにどれだけ近くやって来るか) である。低エネルギーでは、有効 QFT は散乱振幅を予言するのに充分である。高エネルギーでは、古典的な一般相対性理論は一般に充分である。中間の領域 (色付けしたくさび形)(の少なくとも一部) では、いかなる予言的な理論もない。

これらは非常に異なる種類の問題である^{*1}。これらのうちの1つ目^{*2}は、銀河と宇宙の物質のおよそ 85 % が標準模型で記述される種類の物質ではないようであることを示す、実験的な証拠の要素が集まってきていることによる。多くの代わりの仮説的な説明が俎上にあるものの、今のところ納得のいくものは何もない (Bertone 2010)。2つ目は我々の自然の基本的な記述において、自由なパラメータと独立な要素の数を削減する、昔からの夢である。3つ目の量子重力は、我々がここで論じる問題である。それは必ずしも最初の2つと関係しない。

量子重力の問題は単に、現在の理論が重力場の量子的な振舞いを記述できないという事実である。このため、我々は重力と量子論の両方が役割を演じる現象を記述できる、予言的な理論を欠いている。例はブラックホールを中心、非常に初期の宇宙、非常に短いスケールでの自然の構造、あるいは単に2つの中性粒子の小さな衝突パラメータと高エネルギーでの散乱振幅である。図1を見よ。

観測技術は最近この領域のある側面、例えばその Lorentz 不変性に到達し探索し始めており、既にいくつかの仮説的な理論的アイデアを実験的に除外している (Liberati and Maccione 2009)。これは量子重力的な領域が我々の観測によって完全に到達不可能に見えていた数年前からの、主要な進展である。しかし今のところ、この領域に関する直接的な実験的情報はわずかである。このことは、もしそこから選ばねばならない、多くの代わりとなる量子重力の完全な理論が我々にあるならば、問題となり得る。しかし我々はそのような状況にない：理論はあるにしても、非常にわずかしかない。我々は理論的自由度が過剰な状況には全くない：基本法則の組の欠点は悲鳴を上げ解決策を求めているものの、我々が知っていることとの整合性は我々の自由を劇的に制約する——それは良いことである、と言うのも、自由とは“棄てられるものが何もない”ことの言い換

^{*1} これらに量子力学の解釈問題を加えることができ、それはおそらく、また異なる種類の問題である。[しかし 2.4.3 項は量子力学の解釈に関連する。]

^{*2} 通常喧伝されているほどの謎では全くない、不正確に呼ばれる“暗黒エネルギーの謎”と混同しないように (Bianchi and Rovelli 2010a,b)。[3.1 節で言及される宇宙定数に関する見解も参照。また暗黒物質の正体 (の少なくとも一部) は Planck 質量程度の、天空を漂う無数のホワイトホールとする可能性に、Rovelli は一般向けの本『ブラックホールは白くなる』の第 17 章で控え目に言及している。(これに関しては学術的な論文 Rovelli, C., and Vidotto, F. 2018. Small black/white hole stability and dark matter がある。13.2 節の脚注*164 も参照。) 同著の訳者あとがきで解説されているように、ホワイトホールはループ量子重力の妥当性を実験的に検証する上で重要な (潜在的) 対象の 1 つでもある。]

えに過ぎないからである。

問題はより一層深刻である：我々の上手くいく理論は矛盾する仮説に基づいている。午前中に一般相対性理論の授業を、午後に場の量子論の授業を受けている健全な学生は、彼女の先生たちがまぬけであるか、何十年も互いに会話してこなかったのだと考えるはずである。先生たちは2つの全く異なる世界を教えている。午前中には、時空は曲がり、あらゆるものは滑らかで決定論的である。午後には、午前の先生が我々の世界の特徴ではないと注意深く説明した、大域的な対称性 (Poincaré) に支配される、平坦な時空の上を跳躍する離散的な量子から世界は形成されている。

実験的に成功している理論の間の矛盾は災難ではない：それは大いなる好機である。物理学における主要な前進のいくつかは、まさにそのような矛盾を解消する試みの結果だった。Newton は Galileo の放物線を Kepler の楕円と組合せることで、万有引力を発見した。Einstein は特殊相対性理論を発見し、力学と電磁気学の間の“不治の”矛盾を解消した。10年後、Newton 的な重力を特殊相対性理論と調停する試みの中で、彼は時空が曲がっていることを発見した。科学におけるこれらと他の主要な歩みは事実上、いかなる新しい実験的なデータもなく達成されたことに注意せよ。例えば Copernicus は太陽中心説を構成し、Ptolemy の本のデータだけを用いて太陽からの惑星の距離を計算できた^{*3}。

このことはまさに量子重力に当てはまる。Planck スケールに関する直接的な実験的情報の不足は致命的でない：Copernicus, Einstein, またそれほどではないが Newton は、新しいデータなくして世界に関する新しいことを理解した——ただあからさまに矛盾している上手くいく理論を比較することで。我々は同じ特権的な状況にいる。我々には彼らの才能はないが、懸命に挑むことを免除されてはいない^{*4}。[肯定的に権利として言えば、我々は量子重力に挑むことを許されている。]

1.2 空間と時間の終わり

困難の理由でありながら、問題の美と魅力の源でもあることは、GR が単なる重力の理論ではないことである。それは空間と時間の本性に対する我々の理解の修正である。Einstein の発見は、時空と重力場が同じ物理的存在だということである^{*5}。時空は物理的な場の現れである [その逆ではない]。我々の知る全ての場は何らかのスケールで量子的な性質を示し、したがって空間と時間もまた量子的な性質を持つと我々は信じる。

こうして我々はこれらの量子的性質を考慮するために、空間と時間の本性の理解を修正しなければならない。(擬) Riemann 多様体としての時空の記述は、量子重力では生き残り得ない。我々は世界を記述する新しい言語——平坦な時空上の標準的な場の理論の言語でも、Riemann 幾何学の言語でもない言語——を学ばねばならない。量子空間と量子時間が何であるかを理解しなければならない。これが量子重力の困難な側面であり、その美の源でもある。

^{*3} このことは科学的な知識が実験的な基礎に基づくという事実に矛盾しない。第1に、理論は新しい実験的な支持の後で初めて信頼できるようになる。それだけでなく、新しいデータがないときでさえ、新しい理論の発見そのものは実験的な基礎に基づいている：実験的な基礎は従来の理論の実験的内容である。進展はこれらを捉えることができる全体の概念的な構造を見出す試みから得られる。科学的な営みは新しい観測が手に入らないときも、なお観測を説明する理論を見つけている。Copernicus と Einstein は彼らが新しいデータを利用できないときでさえ科学者だった。(優れた最新のデータを得ることに取りつかれていたらと考えられている Newton でさえ、本質的には Galileo と Kepler の法則を融合することで万有引力を発見した。) 新しいデータがなければ物理学に進展はないという一般的な主張は明らかに誤りであることを、彼らの例は示している。

^{*4} そして我々は彼らの肩の上にいる。[Newton が用いた表現「巨人の肩の上」を踏まえている。]

^{*5} Riemann 幾何学の数学では、計量場を多様体から区別し、時空を後者に同定できる。しかし一般相対性理論の物理では、理論に特有のゲージ不変性のため、この術語は誤解を招く。もし“時空”が多様体を表すならば、このとき Einstein の言葉を借りれば、“一般共変性の要求は空間と時間から物理的な客観性の最後の残滓を取り除く”(Einstein 1916)。この点の議論は Rovelli (2004) の2.2節と2.3節に与えられている。



図2 量子重力が時空の本性に影響することを理解した科学者、Matvei Bronstein の最後の写真 [本稿では教科書 p.7 から採った]. Matvei は 1937 年 8 月 6 日の夜に逮捕された. 彼は 30 歳だった. 彼は 1938 年 2 月に Leiningrad 監獄で処刑された.

このことが初めて理解された方法には閃きがある. その全ては Lev Landau の誤りから始まった. Heisenberg が彼の交換関係

$$[q, p] = i\hbar \quad (1.1)$$

と, 帰結する不確定性関係を導入したすぐ後, 俎上の問題は量子論を電磁場に拡張することだった. Peierls との 1931 年の論文 (Landau and Peierls 1931) で, 不確定性関係は一度電磁場に適用されると, 任意の精度で測定できる与えられた時空点の場の成分がないことを意味するだろうと, Landau は提唱した. その直観は, 任意にシャープな時空の位置付けは Heisenberg の不確定性関係と矛盾するだろうということだった.

Niels Bohr は直ちに, また正しく, Landau は誤っていると推測した. Landau が誤っていることを証明するために, Bohr は Rosenfeld との研究計画を開始し, それは電磁場の量子論において Heisenberg の不確定性関係が, 時空点において場の単一の成分が任意の精度で測定されることを妨げないことを証明する, 古典的な論文 (Bohr and Rosenfeld 1933) へと導いた.

しかし Landau は流石 Landau であって, 彼の誤りさえ一石を投じている. Landau には, 実際, 優秀な若いロシアの理論物理学者である, 年下の友人 Matvei Petrovich Bronstein がいた (Gorelik and Frenkel 1994). Bronstein は電磁場ではなく重力場を用いて, Bohr-Rosenfeld の解析を繰り返した. そこでは, 驚くなかれ, Landau の直観は正しいことが判明した (Bronstein 1936a,b). 一般相対性理論を無視しなければ, 量子論は任意に小さな領域での場の測定可能性を妨げる.

1937 年 8 月, Matvei Bronstein は Stalin の大粛清の中で逮捕され, 簡易裁判で有罪判決を下され, 処刑された. 彼の罪状は Stalin 主義を伴わないコミニズムの信奉だった (図 2).

Bronstein の議論の現代的で単純化されたバージョンを与えよう, 何故ならそれは単に始まりであるだけでなく, 量子重力の核心でもあるからである.

位置 x において, ある場の値を測定したいとする. そのためには, この位置に印を付けなければならない. 正確さ L でそれを定めたいとする. 位置 x に粒子をとることで, これを行うとする. [実際, 空間における点はそれ自体では意味を成さない [2, § 2.2.5].] あらゆる粒子は量子論的な粒子なので, 粒子の位置と運動量に関する不確かさ Δx と Δp があるだろう. 正確さ L で定まる位置を得るには, $\Delta x < L$ であれば良く, また

Heisenberg の不確定性は $\Delta x > \hbar/\Delta p$ を与えるので、 $\Delta p > \hbar/L$ が帰結する。 p^2 の平均値は $(\Delta p)^2$ よりも大きく、したがって $p^2 > (\hbar/L)^2$ 。

note 平均値を $\langle \dots \rangle$ で表すと、 $(\Delta p)^2 \equiv \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$ より $\langle p^2 \rangle \geq (\Delta p)^2$ 。

最後に $\langle p^2 \rangle \rightarrow p^2$ と書き改める (すぐ後で古典論に乗り換えることを念頭に)。

これは Heisenberg の不確定性のよく知られた帰結である：シャープな位置は大きな運動量を要する；これが CERN で小さいスケールを調べるのに、高い運動量の粒子が用いられる理由である。しかるに、大きな運動量は大きなエネルギー E を意味する。静止質量 [速度に依らない質量を考え、それを単に質量と呼ぶ方が好ましい] が無視できる相対論的な極限では、 $E \sim cp$ 。シャープな位置付けは大きなエネルギーを要する。

ここで GR を加味しよう。GR では、エネルギー E のあらゆる形態は重力質量 (gravitational mass) $M \sim E/c^2$ として振舞い、その周りの時空を歪める。エネルギーが集中すると歪みは増大し、 G を Newton 定数として質量 M が半径 $R \sim GM/c^2$ の中に集中すると、ブラックホールが形成される点に達する。よりシャープな位置付けを得るために L を任意に小さくとれば、集中したエネルギーは R が L よりも大きくなる点に達する。ところがこのとき我々が印を付けたい領域のサイズ L は、ブラックホールの地平面の奥に隠れてしまい、我々は位置付けを見失う。したがって L は、明らかに地平面の半径が L に達するときに、すなわち $R = L$ のときに達成される、最小値までしか減少できない。[位置の不鮮明さの幅 $\max(L, R)$ は $R = L$ を境に減少から増加に転じる.]

上記の関係を組合せると、量子論的な粒子をその地平面に隠されることなく位置付けられる最小のサイズ

$$L = \frac{MG}{c^2} = \frac{EG}{c^4} = \frac{pG}{c^3} = \frac{\hbar G}{Lc^3} \quad (1.2)$$

を得る。これを L について解くと、いかなるものも、Planck 長さと呼ばれる長さ

$$L_{\text{Planck}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \sim 10^{-33} \text{ cm} \quad (1.3)$$

より良い精度で位置付けることは不可能であることが見出される [以上を本稿次節で補足しつつまとめる]。この長さスケールの充分上では、時空を滑らかな空間として扱える。下では、距離について述べることは意味を成さない。このスケールで起きることは、重力場すなわち計量の量子ゆらぎが拡がり、時空がもはや滑らかな多様体と見なせなくなるということである： L_{Planck} より小さいあらゆるものは“それ自身のミニ・ブラックホールの内側に隠される”。

この単純な導出は半古典的な物理の外挿によって得られている。しかし結論は正しく、量子時空の物理を特徴付けている。[実際、Planck 長さ程度より小さい連続的な空間がそもそも存在しないのだとすれば、Planck 長さより短いスケールで位置について語ることは意味を成さないという結論自体は正しい。]

Bronstein の言葉では：“古典的な概念の深い反省がなければ、重力の量子論を〈短距離の〉領域にも拡張することは、ほとんど不可能であるように見受けられる” (Bronstein 1936b)。Bronstein の結果は重力と幾何学の関連を真剣に受け止めることを強いる。それは量子場が空間の任意に小さい領域で定義できるとする Bohr–Rosenfeld の議論が、重力の存在下では破綻することを示している。標準的な量子場を定義するのに必要な基礎である、物理的な空間の滑らかな計量の幾何学はそれ自体、量子論に影響される。我々に必要なものは真の幾何学の量子論である。

このことは場の量子論による伝統的な直観が、量子重力に対しては破綻することを示唆している。量子場が時空上で定義される世界観は、場の量子論において一般的な世界の描像であるものの、それは量子重力に対し

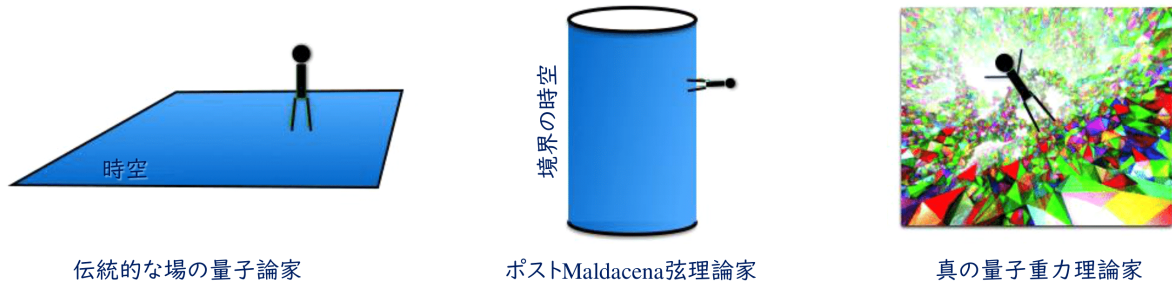


図3 前・一般相対論的な物理は時空上で認識される．境界理論を用いて記述されるバルクの物理に伴う，弦理論の最近の発展は，同じ方向への進展である．真に完全な量子重力は全く時空を必要としない．[教科書 p.8 の図を下敷きに作成した.]

ては棄てる必要がある．空間と時間が量子状態の前ではなく，後に来るような，物理を行う真に新しい方法が必要である．空間と時間は量子的な配位の半古典的な近似である．量子状態は時空上の量子状態ではない．それらは時空の量子状態である．これがループ量子重力の与えるものである (図3)．

1.2 節について

■式 (1.2-3) の導出について 本文を補足しつつまとめよう．Heisenberg の不確定性により，粒子の位置を L 程度の正確さで得るには，高エネルギー $E \sim cp \gtrsim \hbar/L$ が必要である．すると GR により粒子は質量 $M \sim E/c^2 \gtrsim \hbar/cL$ を，したがって地平面の半径 $R \sim GM/c^2 \gtrsim \hbar G/c^3 L$ を持つ*6．(備考：Schwarzschild 半径の表式は $2GM/c^2$ ．これは座標長さである*7．) これが長さ L を覆い隠さない条件は

$$L > R \gtrsim \frac{\hbar G}{c^3 L}, \quad \therefore L \gtrsim \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \equiv L_{\text{Planck}}.$$

このような粗い議論でも本質を捉えていれば，ある意味正しい洞察が得られるというのは小気味よい．

なお Planck 長さ L_{Planck} は自然界の基本単位 $c, \hbar, G$ から作られる長さのスケールであり，Planck 単位系 $c, \hbar, G = 1$ では L_{Planck} を単位として長さを測ることになる．図1と1.4.1節末尾を見よ．

これを踏まえると，位置の固有状態 $|x\rangle$ では $\Delta p = \infty$ なので，粒子は半径 $R = \infty$ の地平面に隠されることになる．ところがこれは位置が確定していることに反する．このように $|x\rangle$ は理想化された概念である．

この思考実験はまた，どのような粒子も単にそれが質量を持つという理由だけで，実際に周りにミニ・ブラックホールを形成しているのかという，別の疑問を想起させる．確かに例えば電子 (質量 $M = 9.11 \times 10^{-31} \text{kg}$) に対して Schwarzschild 半径を定義でき，その値は $r_g = 2GM/c^2 = 1.35 \times 10^{-57} \text{m}$ である．ところがこれは Planck 長さ L に比べて極めて小さいため，空間が Planck 長さのオーダーの最小単位を持つのであれば，素粒子に対して地平面の概念は現実的には意味を成さないと想像できる． r_g が Planck 長さのオーダーに達するには， M は Planck 質量 $\sqrt{\hbar c/G} \sim 10^{-8} \text{kg}$ 程度には大きい必要がある．

*6 エネルギー E の1粒子から成る“媒質”を考えると，その内部エネルギー密度はエネルギー・運動量テンソルの時間-時間成分として，重力場の源の資格を持つと考えられる．いや地平面内部で座標 r に対応する真の長さを求めることが可能であるとしても，位置の幅 L は座標の読みなので，地平面の半径としても同じく (遠方で真の長さに収束する) 座標の読み r と比較するのが自然だと考えることもできる．あるいは単に大雑把な議論なので，真の長さ r の違いにはナイーブに議論を進めているだけかもしれない．

*7 ブラックホールの外部からは地平面の内部は見えないので，座標長さ r に対応する動径方向の真の距離よりも，外部から見える地平面の真の面積 $4\pi r^2$ を与える座標 r そのものが重要な役割を演じると考えられる．

1.3 量子化された幾何学

我々の有する量子重力への最善の導きは、現在の量子力学と現在の重力理論である。これらの理論が依拠する基礎理論がなお Planck スケールに当てはまる確証はないものの、優れた理論の広い外挿はしばしば非常に上手くいくことを物理学の歴史は教えている。[これは一種の帰納的推論であり、したがってそれが上手くいくのは、明日も太陽が昇ってくると我々が予言できるのと同程度に納得できる (あるいは納得できない) [2, p.419].] 小さな実験室の実験で見えられた Maxwell 方程式は、我々の Planck スケールからの隔たりよりも広い、大きさがおよそ 35 桁離れた、原子核から銀河のスケールまで、非常に正確なことが判明する。太陽系のスケールで見つかった一般相対性理論は、さらに大きさがおよそ 20 桁大きい、宇宙論的スケールで著しく上手くいくことが判明する、等々。科学では、実験的に新しい何かが現れるまでは、最善の仮説は我々の知っていることの拡張である。

問題はしたがって、Planck スケールで起きることを推測することではない。問題は：一般相対性理論と量子論を融合する整合的な理論はあるか？ これが過去において極めて生産性のあった考え方である。推測の物理学、“これを試してはどうか？”の物理学は時間の無駄である。過去において唐突に現れた優れたアイデアはない：優れたアイデアは実験、または実験的に上手くいく理論を真剣に受け止めることの、いずれかに由来する。そこで幾何学と量子を真剣に受け止め、最も単純で可能な方法で、“量子幾何”の意味することを検討しよう。

一般相対性理論は幾何学が重力場の現れであることを我々に教えている。幾何学は面積、体積、長さ、角度、……のような量を扱う。これらは重力場によって決定される量である。量子論は場が量子的性質を持つことを我々に教えている。量子重力の問題はしたがって、面積、体積、その他のような幾何学的な量の量子的性質が何かを理解することである。

物理量の量子的な本性は 3 つの形において表される：

1. 量そのものの可能な離散化 (あるいは“量子化”) において
2. 不確定性関係の意味する短いスケールの“不鮮明さ (fuzziness)” において
3. (遷移振幅で与えられる) その発展の確率的な本性において。

ここではこれらの最初の 2 つに焦点を当て (重力的な文脈における確率的な発展は次章で議論する)、理論がどのように立ち現れ得るか、すなわちどのように空間が離散的で不鮮明になり得るかの、簡単な例を考える。この例は初等的であり、いくつかの点を省略することになるものの、それは示唆に富み、ループ量子重力の最も特徴的な側面——“空間の量子”の存在——へと導く。

3 つの非常に初等的な例で基本的な量子論を復習するところから始めよう；次いで基礎的な幾何学的対象を説明する；最後にこれら 2 つの組合せがどのように直接的に空間の量子へと導くかを見る。

調和振動子

弾性定数 k を持つばねに取り付けられた質量 m を考えよ [図 4]。その運動を、位置 q 、速度 v および運動量 $p = mv$ を用いて記述する。エネルギー $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kq^2$ は正の実数であり保存する。そこから量子論が導かれるところの“量子化仮説 (quantization postulate)” は、 (p, q) が

$$[q, p] = i\hbar \quad (1.4)$$

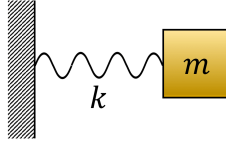


図4 調和振動子

を満たす非可換で (本質的に) 自己共役な演算子となる, Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の存在である (Born and Jordan 1925). これがそこから離散化を計算できるところの “自然の新しい法則” (Heisenberg 1925) である. この交換関係はエネルギー演算子 $E(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2$ が, $\omega = \sqrt{k/m}$ として固有値

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (1.5)$$

($E\psi^{(n)} = E_n\psi^{(n)}$) の, 離散的なスペクトルを持つことを意味する. すなわち, エネルギーは “離散化される”: それは離散的な量子として現れる. 自由場は各モードにつき 1 つずつの振動子の集まりなので, 量子場は離散的な量子の集まりである (Einstein 1905a). 電磁場の量子は光子である. Dirac 場の量子は通常物質を構成する粒子である. 我々は重力場の基本的な量子に興味がある.

魔法の円 (magic circle): 離散性は運動学である



図5 円に沿って運動する粒子

ポテンシャル $V(\alpha)$ に従って円の上を運動する粒子を考えよ [図5]. その位置を角度変数 $\alpha \in S^1 \sim [0, 2\pi]$ [$\sim$ は同一視], また $p = c d\alpha/dt$ を [α に共役な] 運動量, c を (次元 ML^2 の) 定数として, そのハミルトニアンを $H = \frac{p^2}{2c} + V(\alpha)$ とする.

note 具体的に M を粒子の質量, L を円の半径とすれば, 粒子の角運動量は $p = ML^2\dot{\alpha}$, 運動エネルギーは $\frac{M}{2}(L\dot{\alpha})^2 = \frac{p^2}{2ML^2}$ なので, $c = ML^2$ と同定できる.

粒子の量子的な振舞いは, 円上の 2 乗可積分関数 (square integrable functions) $\psi(\alpha)$ の Hilbert 空間 $L_2[S^1]$ と, 運動量演算子 $p = -i\hbar d/d\alpha$ [文献 [3, 式 (3.6.9)] (のノート) 参照] で記述される. この演算子はポテンシャルには依らず, 固有値

$$p_n = n\hbar \quad (1.6)$$

を持つ. 系の座標と運動量のような基本的な変数にのみ依存する系の性質を “運動学”, またハミルトニアン, あるいは一般に, 発展に依存する性質を “ダイナミクス (力学)” と呼ぶ. このとき一般に, 離散性は運動学的な性質であることは明らかである*8.

p の離散性は α がコンパクトな領域に属しているという事実の直接的な帰結である. (同じことは箱の中の粒子に対しても起きる.) [$\alpha, p \neq i\hbar$ であることに注意せよ, 何故なら円上の関数 α の微分は $\alpha = 0 \sim 2\pi$

*8 もちろんハミルトニアンの形に依存する, 前の例のようなエネルギーの離散性はそうではない.

で発散するからである：実際、 α は S^1 上の不連続な関数である．量子化は相空間の大域的なトポロジーを考慮しなければならない．それを行う多くの方法の 1 つは、 α のような不連続な関数を用いることを避け、 $s = \sin(\alpha)$ または/かつ $c = \cos(\alpha)$ のような連続関数を用いることである．3 つの変数 s, c, p は、演算子 $-i\hbar d/d\alpha$ および乗法的な演算子 $s = \sin(\alpha)$ と $c = \cos(\alpha)$ の交換子によって正しく表される、閉じた Poisson 括弧 $\{s, c\} = 0, \{p, s\} = c, \{p, c\} = -s$ を持つ [本稿次項で補足]．後ろ 2 つの演算子は複素演算子 $h = e^{i\alpha}$ に統合できる．(同じ理由で量子重力における正しい演算子は重力的な接続ではなく、むしろその“ループ”に沿う指数化 (exponentiation) であることを我々を見るだろう．これは LQG の“ループ”の最初のヒントである．)

角運動量

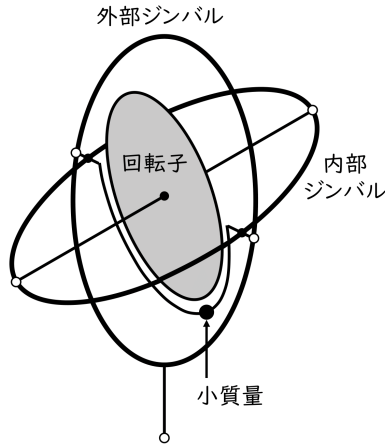


図 6 本稿では回転軸が任意の向きをとり得る物体として、文献 [4, p.378] を参考にジャイロコンパスを模式的に描いた

$\vec{L} = (L^1, L^2, L^3)$ を、成分 $\{L^i\}$ 、ただし $i = 1, 2, 3$ を持つ、回転できる系 [図 6 を見よ] の角運動量とする．全角運動量は $L = |\vec{L}| = \sqrt{L^i L^i}$ (断らない限り常に繰り返された添字の和をとると了解する)．古典力学は $\vec{L}$ が (Poisson 括弧の意味で) 無限小回転の生成子であることを我々に教える．対応する量子論的な演算子もまた Hilbert 空間における回転の生成子であると仮定すると、量子化則

$$[L^i, L^j] = i\hbar \varepsilon^{ij}_k L^k \quad (1.7)$$

が得られ (Born *et al.* 1926), ここに ε^{ij}_k は完全反対称 (Levi-Civita) 記号である [ϵ との表記揺れがある]．演算子 $\vec{L}$ が上記の交換関係を満たすならば、SU(2) 表現理論 (本章の補完 [1.7 節] で復習する) はこのとき直ちに L の固有値を与える．それは

$$L_j = \hbar \sqrt{j(j+1)}, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \quad (1.8)$$

[$L = \sqrt{\vec{L}^2}$ の固有値は $\vec{L}^2$ の固有値の平方根である.] すなわち、全角運動量は量子化される．角運動量の量子化は純粋に量子論の運動学的な予言であることに注意せよ：それはハミルトニアンに依らずに、とりわけ角運動量が保存するか否かに依らずに、同一に留まる．魔法の円の場合のように、離散性は相空間——ここでは物体の向きの空間——におけるコンパクトな向きの帰結であることに注意せよ．

これが量子論のうち必要な全てである．幾何学に移ろう．

幾何学

単純な幾何学的対象、空間の基本要素を選ぶ。例えば必ずしも正四面体とは限らない、小さな四面体 τ を選ぶことにしよう [図 7 を見よ]。

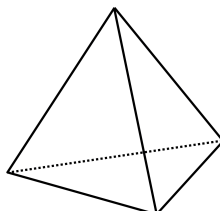


図 7 四面体

四面体の幾何学はその辺の長さ、その面の面積、その体積、その辺における 2 面角、その面における頂点の角、等々によって特徴付けられる。これらは全て重力場の局所的な関数である、何故なら幾何学は重力場と同じものだからである。これらの幾何学的な量は互いに関係している。独立な量の組は例えば、6 本の辺の長さで与えられるものの、それらは量子化を研究するのに適していない、何故ならそれらは不等式に制約されるからである。例えば、三角形の 3 本の辺の長さは、任意に選べない：それらは三角不等式を満たさねばならない。力学変数間の非自明な不等式は、相空間のあらゆる大域的な特徴と同様、一般に量子論に実装するのが困難である。

代わりに、我々は各三角形 a に対して、三角形の境界となる 2 本の辺の (外向き) ベクトル積の $\frac{1}{2}$ として定義される、4 つのベクトル $\vec{L}_a$, $a = 1, \dots, 4$ を選ぶ [文字 $\vec{L}_a$ の選択はすぐ後で、これらのある種の角運動量と見なすことから動機付けられる.]。図 8 を見よ [本稿ですぐ後で導入される 3 辺のベクトル $\vec{M}_a$ を描き、これに応じて決まる $\vec{L}_a$ を添えた]。これらの 4 つのベクトルはいくつかの見事な性質を持つ。初等的な幾何学は、それらが等価的に以下の 2 つの方法の 1 つで定義できることを示す。

- ベクトル $\vec{L}_a$ は四面体の面の (外向き) 法線であり、そのノルムは面の面積に等しい。
- $a = 1, 2, 3$ に対する成分 L_a^i の行列 (3 辺だけが関係することに注意せよ) は $L^T = -\frac{1}{2}(\det M)M^{-1}$ であり、ここに M は共通の頂点を発する四面体の 3 辺の 3 辺から成る行列である。

演習 1.1 上記の定義が全て等価であることを証明せよ [解答は本稿次項]。

ベクトル $\vec{L}_a$ たちは以下の性質を満たす：

- それらは“閉包 (closure)” 関係

$$\vec{C} := \sum_{a=1}^4 \vec{L}_a = 0 \quad (1.9)$$

を満たす [本稿次項で確認*9]。(これを頭に留めておくように、何故ならこの式は本書全体にわたって繰り返し現れるからである。)

- 量 $\vec{L}_a$ は面積、体積、辺の間の角度および面の間の 2 面角のような、他の全ての幾何学的な量を決定する。

*9 これは物理的には一様な圧力の中に置かれた四面体の力のつり合いを表す (式 (8.5))。2 次元のバージョン (5.14) はより容易に分かる。

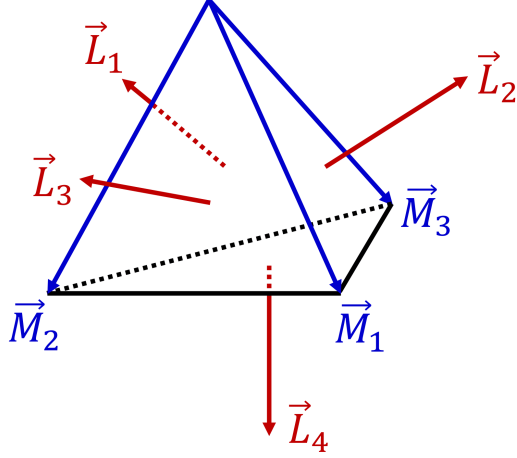


図8 面に垂直な4つのベクトル $\vec{L}_a$

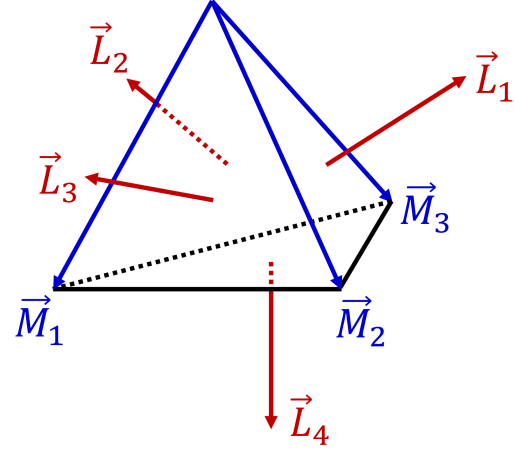


図9 $\{\vec{M}_a\}$ が左手系の場合

- これら全ての量，すなわち，四面体の幾何学は，4つのベクトル $\vec{L}_a$ の共通の $SO(3)$ 回転の下で不変である．したがって四面体は式 (1.9) を満たすベクトル $\vec{L}_a$ の4つ組の，回転の下での同値類で定められる．
- 結果として得られる自由度の数は正しい [本稿次項で確認]．
- 面 a の面積 A_a は $|\vec{L}_a|$ ．
- 体積 V は任意の3つの面の，(適切な順序の) 3重積で決まる：

$$V^2 = \frac{2}{9} (\vec{L}_1 \times \vec{L}_2) \cdot \vec{L}_3 = \frac{2}{9} \epsilon_{ijk} L_1^i L_2^j L_3^k = \frac{2}{9} \det L. \quad (1.10)$$

(この方法で定義すると， V^2 の負の値は単に3重積の順序の変更，すなわち，向きの反転を意味する．)

演習 1.2 これらの関係を証明せよ．ヒント：直交する辺の3つ組によって定義される四面体を選び，次いで公式 [スカラー積] は線形変換の下で不変なので結果は一般的であることを議論せよ． $\frac{2}{9}$ 因子を導け [解答は本稿次項]*¹⁰．

幾何学の量子化

量子重力へ跳ぶための全ての要素が得られた．現実の物理的な四面体の幾何学は，量子場である重力場によって決まる．したがって重力の量子的な本性を考慮に入れるならば，法線 $\vec{L}_a$ たちは量子論的な演算子で表されることになる．それらは交換関係に従うだろう．交換関係は式 (1.1) と式 (1.7) が得られるのと同じ方法

*¹⁰ 第3章ではトライアド (3脚場; triads) とテトラード (4脚場; tetrads) を用いて重力場を記述する．ここでベクトル $\vec{L}_a$ とトライアドの関係を予想しよう．もし局所的な曲率のスケールに比べて四面体が小さく，したがって計量が局所的に平坦と仮定できるならば，

$$L_a^i = \frac{1}{2} \epsilon^i_{jk} \int_a e^j \wedge e^k. \quad (1.11)$$

[微分形式については付録 A にまとめておく．実際に右边が面積要素 L_a^i であることは，式 (3.92) の箇所で判明する．] 等価的に， $\vec{L}_a$ は面を横切る，Ashtekar の電場に他ならない，密度化した (densitized) 逆トライアド場 $E_i^a = \frac{1}{2} \epsilon^{abc} \epsilon_{ijk} e_b^j e_c^k$ の束 (flux) と同一視できる．[本稿次項で補足する． $L_a^i \sim E_i^a$ を踏まえると，体積 (1.10) は一般公式 $V = \int d^3x \sqrt{|\det E|}$ を想起させる [2, p.150]．詳しくは式 (8.4) のノートを見よ．] トライアドは重力場なので，これは $\vec{L}_a$ と重力場のあからさまな関係を与える．ここでトライアドは四面体によって定まる3次元超平面で定義される．

で, Poisson 括弧を演算子に移行させることで, GR の Hamilton 形式の解析から得ることができる; ところが究極的にはそれらは, 式 (1.1) と式 (1.7) のような量子化仮説である. そこで, ここでは単にそれらを仮定しよう. 最も単純な可能性 (Barbieri 1998) は, 式 (1.7) を真似ること, すなわち l_0^2 を $\hbar$ に比例し面積の次元を持つ定数として [式 (1.13) はこの条件を満たしている],

$$[L_a^i, L_b^j] = i\delta_{ab}l_0^2\varepsilon^{ij}_k L_a^k \quad [a \text{ で和をとらない}] \quad (1.12)$$

と書くことである. これらの交換関係は再び回転子の場合のように, 再び四面体の記述における回転対称性を反映した, $SU(2)$ の代数の実現である. これは好ましい: 例えば式 (1.9) で定義される $\vec{C}$ はまさに共通の回転の生成子であり [$\vec{C}$ を生成子とするユニタリー変換は式 (1.12) より全種類の “角運動量” $\vec{L}_1, \dots, \vec{L}_4$ を回転させる], したがって閉包条件 (1.9) は回転不変性の直接の条件であることが分かるが, それは我々が求めることに他ならない: ここではゲージである回転を除き, 幾何学は $\vec{L}_a$ で決まる. そこで量子化仮説を式 (1.12) に決めよう.

定数 l_0 は量子重力において唯一次元を持つ定数である, Planck スケール L_{Planck} に関係しているはずである. 正確な関係はしばらく保留して

$$l_0^2 = 8\pi\gamma L_{\text{Planck}}^2 = \gamma \frac{\hbar(8\pi G)}{c^3} \quad (1.13)$$

とおく, ここに 8π は単に歴史的な理由で存在し (Einstein 方程式の右辺の結合定数は G ではなく $8\pi G$ である), また γ は理論の正確なスケールを定める無次元のパラメータ (おそらくは 1 (unity) のオーダー) である. [基本単位には 1 程度の数係数を含める自由度がある*11.] この量子化則の帰結を研究しよう.

1.3 節冒頭 (1.3.1 項の前まで) について

■「魔法の円」における変数 p, s, c の Poisson 括弧と交換子 (教科書 p.11) について Poisson 括弧を

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial \alpha} - \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial g}{\partial p}$$

の順に定義すると, 量子力学的な交換子との関係には $[\ , \] = -i\hbar\{ \ , \ }$ のように負号が付く [3, p.67]. この定義に従うと Poisson 括弧は

$$\{p, s\} = \frac{ds}{d\alpha} = c, \quad \{p, c\} = \frac{dc}{d\alpha} = -s$$

であり, これは微分演算子 $p = -i\hbar d/d\alpha$ に対する交換子

$$[p, s] = -i\hbar \frac{ds}{d\alpha} = -i\hbar c, \quad [p, c] = -i\hbar \frac{dc}{d\alpha} = i\hbar s$$

と整合している.

■ $\vec{L}_a$ の定義の等価性の確認 (教科書 p.12 の演習 1.1) 最初に三角形の 2 辺のベクトル積 (の $1/2$ 倍) として定義した $\vec{L}_a$ が, 三角形の面積要素ベクトルであることは明らかである. 面積要素ベクトルとしての幾何学的解釈から, ベクトル積は三角形の 2 辺の選び方に依らないことも納得できる.

第 3 の定義

$$L^T = -\frac{1}{2}(\det M)M^{-1} \quad (1)$$

*11 これは自然単位系において Planck 定数 $\hbar$ そのものではなく $\hbar = \hbar/2\pi$ を単位に採ることができるのと同じ事情である. また $G = 1$ と $8\pi\gamma G = 1$ の違いは, 電磁気学の Gauss 単位系と Heaviside 単位系の違いとも似ている.

との等価性を確認しよう．後の式 (1.9) より $\vec{L}_4$ は $\vec{L}_1, \dots, \vec{L}_3$ で決まるので，3つのベクトル $\vec{L}_1, \dots, \vec{L}_3$ について等価性を示せば充分である．図 8 のように四面体の辺のベクトル $\vec{M}_a$ を定義すると，それらの張る三角形の面積ベクトルは

$$\vec{L}_1 = -\frac{1}{2}\vec{M}_2 \times \vec{M}_3, \quad \vec{L}_2 = -\frac{1}{2}\vec{M}_3 \times \vec{M}_1, \quad \vec{L}_3 = -\frac{1}{2}\vec{M}_1 \times \vec{M}_2, \quad (2)$$

あるいは

$$\vec{L}_a = -\frac{1}{4}\varepsilon_a^{bc}\vec{M}_b \times \vec{M}_c \quad \text{i.e.} \quad L_a^i = -\frac{1}{4}\varepsilon_a^{bc}\varepsilon_{jk}^i M_b^j M_c^k \quad (3)$$

と表される．他方で $\tilde{M} \equiv (\det M)M^{-1}$ は $M = (M_a^i)$ の余因子行列の転置行列であり，その (a, i) 成分は

$$\tilde{M}_i^a = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{abc}M_b^j M_c^k$$

と書ける^{*12}．すると転置行列 $\tilde{M}^T$ の (i, a) 成分は $\tilde{M}$ の (a, i) 成分なので，定義式 (1) は

$$L_a^i = -\frac{1}{2}\tilde{M}_i^a = -\frac{1}{4}\varepsilon_a^{bc}\varepsilon_{jk}^i M_b^j M_c^k$$

を意味する．これは上式 (3) に一致しているので，式 (1) が成り立つ．

なお一連の式 (1),(2),(3) における負号は，図 8 で $\vec{M}_a$ を右手系として定義したことに起因している．図 9 のように左手系の $\vec{M}_a$ を採ると，これらの負号は現れない．

■ $\vec{L}_a$ の恒等式 (1.9) の確認 図 8 において底面のベクトル $\vec{M}_{12} \equiv \vec{M}_2 - \vec{M}_1$ ， $\vec{M}_{13} \equiv \vec{M}_3 - \vec{M}_1$ を用いて

$$\vec{L}_4 = \frac{1}{2}\vec{M}_{12} \times \vec{M}_{13} = \frac{1}{2}(\vec{M}_1 \times \vec{M}_2 + \vec{M}_2 \times \vec{M}_3 + \vec{M}_3 \times \vec{M}_1)$$

と書ける．最右辺は期待されるように $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \vec{M}_3$ の巡回置換に関して対称である．これと 3つのベクトル (2) を足すとゼロになることが見て取れる．

直観的にも 3つのベクトル $\vec{L}_1, \dots, \vec{L}_3$ は四面体の 3つの面 $a = 1, 2, 3$ を定めるのに充分であり，このとき残りの面のベクトル $\vec{L}_4$ が決まると想像できる．

■教科書 p.12 の箇条書きで言及されている，四面体の自由度の確認 図 8 において幾何学的に明らかに，3本のベクトル $\vec{M}_a$ を指定すると四面体が定まる．等価的に 3本のベクトル $\vec{L}_a$ を与えても良い ($a = 1, 2, 3$)．いずれにせよ我々は $3 \cdot 3 = 9$ 個のベクトル成分を選べる．ところが回転によって互いに移行できる四面体を区別しなければ，空間回転の自由度 3 を差し引き，四面体の自由度は 6 となる．これは四面体が独立な量として，6本の辺の長さで指定できるという記述 (教科書 p.12) と整合している．これと同じことが後の教科書 p.17 に書いてある．なお四面体を平行移動してもベクトル $\vec{L}_a$ や $\vec{M}_a$ の成分は変わらないので，空間並進の自由度は最初から除かれている．

■体積の表式 (1.10) の確認 (教科書 p.13 の演習 1.2) 第 1 の等号だけが非自明である．そこでヒントに頼らず直接 $V^2 = \frac{2}{9} \det L$ を示す．四面体の底面を $|\vec{L}_3|$ に選ぶと，高さの向きは $\vec{n} = -\vec{L}_3/|\vec{L}_3|$ ，高さは $h = \vec{M}_3 \cdot \vec{n}$ である (図 8 を見よ)．すると式 (2) とより，体積は

$$V = \frac{1}{3}|\vec{L}_3|h = -\frac{1}{3}\vec{M}_3 \cdot \vec{L}_3 = +\frac{1}{3 \cdot 2}\vec{M}_3 \cdot (\vec{M}_1 \times \vec{M}_2) = \frac{1}{6} \det M$$

^{*12} 言い換えれば，逆行列 M^{-1} の要素を M_i^a として $(\det M)M_i^a = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{abc}M_b^j M_c^k$ と表される．実際， M_a^i との縮約をとると両辺は $3 \det M$ となるので，これは成り立っている．より手堅い確認として， M_a^l や M_d^i を掛けて一方の添字のみでの縮約を調べても良い．

と表される．これはよく知られているように四面体の体積が，右手系を成すベクトル $\vec{M}_a$ の張る平行六面体の体積 $\det M (\geq 0)$ の $1/6$ であることを意味する．ここで式 (1): $L^T = -\frac{1}{2}(\det M)M^{-1}$ の両辺の行列式をとると

$$\det L = \left(-\frac{1}{2} \det M\right)^3 (\det M)^{-1} = -\frac{1}{8}(\det M)^2 (\leq 0)$$

を得る． $\det L$ が負であることは，図 8 から視覚的に示唆されるように， $\vec{L}_a$ が左手系を成すことから裏付けられる．以上の 2 式より

$$V^2 = -\frac{2}{9} \det L$$

となるため，式 (1.10) の第 2 辺以降には負号が必要と考えられる．他方で図 9 のように左手系の $\vec{M}_a$ を採ると，負号は現れない．

■面積要素 (1.11) 右辺が E_i^a の束であることについて L_a^i において i はベクトル成分の添字であり， a はベクトルの種類をラベルする添字であるのに対し，トライアド e_a^i では a が空間添字， i が内部添字と見なされる．そこで四面体の埋め込まれた 3 次元空間の座標を x^a として，微分 1 形式 $e^i = e_a^i dx^a$ を定義する (以上，文献 [2, § 4.1.1] を見よ)．また面 a をパラメトライズする座標 $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$ を積分変数にとると， L_a^i の式 (1.11) の積分は

$$\int_a e^j \wedge e^k = \int_a e_b^j e_c^k dx^b \wedge dx^c = \int_a e_b^j e_c^k \frac{\partial(x^b, x^c)}{\partial(\sigma^1, \sigma^2)} d^2\sigma$$

となる．ここで Jacobian は，座標 σ に関する接ベクトルの張る法線要素

$$n_{a'} = \epsilon_{a'bc} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^c}{\partial \sigma^2}$$

(面 a と区別するため添字を a' とした) と次のように関係する：

$$\epsilon^{a'bc} n_{a'} = \epsilon^{a'bc} \epsilon_{a'b'c'} \frac{\partial x^{b'}}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^{c'}}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial(x^b, x^c)}{\partial(\sigma^1, \sigma^2)}. \quad (\because \epsilon^{a'bc} \epsilon_{a'b'c'} = \delta_{b'}^b \delta_{c'}^c - \delta_{c'}^b \delta_{b'}^c)$$

すると

$$(\text{式 (1.11) 右辺}) = \frac{1}{2} \epsilon^i{}_{jk} \int_a e_b^j e_c^k \cdot \epsilon^{a'bc} n_{a'} d^2\sigma = \int_a E_i^{a'} n_{a'} d^2\sigma$$

は Ashtekar の電場 (3.79):

$$E_i^a \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{abc} \epsilon_{ijk} e_b^j e_c^k \quad (\text{添字 } a' \text{ のプライムは外した})$$

の束 (面積分) となる ($n_{a'} d^2\sigma$ は面積要素)．

以上では一見，本文 (教科書 p.13) にある四面体が小さいという仮定を用いていない．しかし実際には計量が局所的に平坦である条件は，Euclid 幾何学から辺のベクトル積として求めた式 (1.11) 左辺の L_a^i を面積要素ベクトルと見なせることを保証している．また四面体が小さいと仮定すれば，計量 (3.75) を，したがって $E_i^{a'}$ を積分の外に出せると考えられる．実際，体積を面積要素で表す式 (8.4) (式 (1.10) と等価) の導出時にこの仮定を用いる．もとより興味ある三角形分割としては，それが良い近似となる場合，すなわち古典的な GR で計算される曲率のスケールに比べて離散化のスケールが充分小さい場合 (式 (8.107)) が念頭に置かれると考えられる．なお Regge 計算法では平坦な四面体を貼り合わせて得られる三角形分割のヒンジが曲率を担う (4.3 節)．



図 10 Giordano Bruno (ジョルダノ・ブルーノ) による *De triplici minimo et mensura* (1591 年) からの図で [本稿では教科書 p.14 から採った], 離散的な要素を示し, Democrituss (デモクリトス) の原子論に言及している. Bruno の図は物質の原子構造に関する現代的な直観の源として, 重要な役割を果たした.

次にここで定義した Ashtekar の電場が, 「密度化した (densitized) 逆トライアド場」(p.13 脚注) であることを説明する. 行列 L と M の関係 (1) と同様, 上式は $E = (E_i^a)$ が $e = (e_a^i)$ の余因子行列の転置行列であること

$$E = (\det e)e^{-1} \quad \text{i.e.} \quad E_i^a = (\det e)e_i^a$$

を意味する. ここに逆トライアド e_i^a はトライアド e_a^i の逆行列である. ところが計量 $q = (q_{ab})$ の式 (3.75) の行列式をとると $\det e = \sqrt{\det q}$ なので, E_i^a は e_i^a の密度化になっている [1, § 3.7] [2, § 4.1.1].

1.3.1 面積と体積の量子

交換関係 (1.12) の 1 つの帰結は直接的である (Rovelli and Smolin 1995a; Ashtekar and Lewandowski 1997): 量 $A_a = |\vec{L}_a|$ は全角運動量として振舞う. この量は面積なので, あらゆる四面体の境界となる三角形の面積は固有値

$$A = l_0^2 \sqrt{j(j+1)}, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \quad (1.14)$$

で量子化されることが直ちに帰結する. これはループ量子重力の要点である. 空間は任意に小さな部分へと分割可能ではない^{*13}. これから見るように, この結果は単に四面体の境界となる三角形の面積だけでなく, あらゆる面に拡張される.

量子幾何学が面積固有値 $j_1, \dots, j_4$ を持つ状態にあるとしよう, 4 つのベクトル演算子 $\vec{L}_a$ は, スピン $j_1, \dots, j_4$ に対応する 4 つの $SU(2)$ の表現のテンソル積 $\mathcal{H}$ に作用する. すなわち, 四面体の面の面積の決まった値における, 四面体の幾何学の量子状態の Hilbert 空間は

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3} \otimes \mathcal{H}_{j_4}. \quad (1.15)$$

もし状態が四面体を記述するならば, 状態が満たさねばならない, 閉包方程式 (1.9) も考慮しなければならない. $\vec{C}$ は 4 つの表現空間上の大域的な (対角的な) $SU(2)$ の作用の生成子に他ならない. 式 (1.9) の解となる (はっきり言えば, すなわち $\vec{C}\psi = 0$) 状態は, この作用の下で不変な状態, すなわち部分空間

$$\mathcal{K} = \text{Inv}_{SU(2)}[\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3} \otimes \mathcal{H}_{j_4}]. \quad (1.16)$$

^{*13} この性質が物質に対して成り立つという直観は, 昔の原子論まで遡ることができる (図 10).

に属する状態である。こうして予期されるように、物理的状态は (共通の) 回転の下で不変であることが分かる、何故なら幾何学は回転の下での $\vec{L}_a$ の同値類によってのみ定義される。(この閉包方程式 (1.9) と回転の下での不変性の関係は、見事で心強い；それは我々の量子化仮説が理に適っていることを確信させる。完全な一般相対性理論の文脈でここに戻ってくるとき、このゲージは一般相対性理論のテトラード形式における局所回転ゲージ不変性に他ならないことを見ることになる。)

ここで式 (1.10) で定義される体積演算子を考えよ。これは K においてよく定義されている、何故ならそれは $\vec{C}$ と交換する [本稿次節で確認]、すなわちそれは回転不変だからである。したがって Hilbert 空間 K 上の自己共役な [本稿次節で確認] 体積演算子に対する体積演算子に対する、よく提起された固有値問題を導く。この空間は有限次元なので、その固有値は離散的であることが帰結する (Rovelli and Smolin 1995a; Ashtekar and Lewandowski 1998)。したがって体積もまた離散的な固有値を持つという結果を得る。言い換えると、“体積の量子” または “空間の量子” がある：四面体の体積はちょうど電磁場のモードの振幅のように、離散的なステップでのみ増大し得る。本章の補完 1.7.3 項では、体積の固有値をいくらかあからさまに計算する。

幾何学の離散化、すなわち面積と体積が量子化される事実を、単一の四面体に着目することが意味する空間の離散化と混同しないことが重要である。1 つ目は電磁場のモードのエネルギーが離散的な量子として現れる事実の類似物である。それは量子的な現象である。2 つ目は場を離散的なモードに分解し、そのときの 1 つのモードを研究するのが便利である事実の類似物である：それは量子論とは完全に無関係な、自由度の便宜的な分離である。幾何学は我々が四面体に着目しているため離散的なのではない：幾何学はあらゆる四面体 (実にこれから見るように、あらゆる多面体) の面積と体積が量子化された値のみをとるため、離散的である。幾何学の量子的な離散化は、面積と体積のスペクトル的な性質によって決まる。

賢明な読者は、我々が決まった空間の塊から出発したという事実が、議論において役割を演じないか疑問に思うかもしれない。初めにより小さい四面体を選んだならば、より小さい幾何学的な量子を得ただろうか？ 答はノーであり、その理由は一般相対性理論の物理の核心にある：重力場それ自体によって与えられるものと独立なサイズ (長さ、面積、体積) の概念は全くない。一般相対性理論で用いられる座標は距離の (metrical) 意味を担わない。実際、座標は物理的な意味を全く担わない。もし座標空間において “より小さい” 四面体から始めて上記の計算を繰り返せば、我々は物理的により小さい四面体ではなく、単に座標の異なる選択を扱っている。このことは導出において座標が何の役割も演じていないという事実から明らかである。我々が描こうとする座標四面体は何であれ、いかに小さくとも、その物理的なサイズは、四面体のサイズが同じ固有値で量子化されるように、四面体上の重力場によって決まる。この点を飲み込むことが量子重力の理解への第 1 歩である。ちょうど量子力学において最小の角運動量を分断する方法がないように、最小の四面体を半分に切る方法はない。空間はそれ自体、個々の量子から成る “粒状の (granular) 構造” を持つ。

空間の量子の形と幾何学の不鮮明さ

後で証明するように、4 つの面の 4 つの面積 A_a と体積 V は、Dirac の意味で最も多く (maximally) 交換する演算子の組を成す。したがって、それらはともに対角化でき、四面体の幾何学の量子状態はそれらの固有値 $|j_a, v\rangle$ で一意的に特徴付けられる。

そのような量子状態の形は本当に四面体か？

以下の理由で、答はノーである。古典的な四面体の幾何学は 6 つの数量、例えば、6 本の辺の長さで決まる。(等価的に、3 つの回転を除き、3 つの閉包方程式に制約される 4×3 個の量 L_a^i 。) ところが四面体の量子状態を決定する、対応する量子数は 6 個ではない；それらは 5 個——4 つの面積と 1 つの体積——だけである。

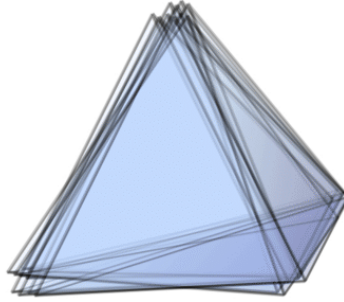


図 11 四面体の量子幾何は不鮮明さを伴う [図は教科書 p.16 から採った]

古典系が 3 つの数量, 角運動量の 3 成分で決まるのに対し, 2 つの量 (例えば L^2, L_z) だけが完全な組を成す角運動量と, 状況は正確にアナログスである. この事実により, よく知られているように, 量子的な回転子は決して確定した角運動量 $\vec{L}$ を持たず, 我々は電子を本当に小さな自転する石と考えることはできない: もし L_x がシャープならば, 必然的に L_z は不鮮明であり, 量子的に拡がる.

まさに同じ理由で, したがって, 角運動量の 3 成分が決して全てシャープにはなり得ないのと同じ意味で, 量子論において幾何学は決してシャープになり得ない. あらゆる現実の量子状態には, 生き残る幾何学の量子的な不鮮明さがある: 全ての 2 面角, 全ての面積および全ての長さをシャープに定めることは不可能である. 幾何学は Planck スケールにおいて不鮮明である. [図 11 を見よ.]

我々は量子幾何の 2 つの典型的な特徴を見出した:

- 面積と体積は離散的な固有値を持つ.
- 幾何学は Planck スケールにおいて量子力学的に拡がる.

量子幾何学はこれらの基礎の両方において Riemann 幾何学と異なる.

1.3.1 項について

■体積演算子が $\vec{C}$ と交換すること (教科書 p.15) の確認 生成子 (1.9): $C^i = \sum_a L_a^i$ と, 体積の 2 乗 (1.10) における行列式 $\det L = \epsilon_{jkl} L_1^j L_2^k L_3^l$ の交換子は

$$\begin{aligned}
 [C^i, \det L] &= \sum_{a=1}^4 \epsilon_{jkl} ([L_a^i, L_1^j] L_2^k L_3^l + L_1^j [L_a^i, L_2^k] L_3^l + L_1^j L_2^k [L_a^i, L_3^l]) \\
 &= i l_0^2 \epsilon_{jkl} (\epsilon_m^{ij} L_1^m L_2^k L_3^l + \epsilon_m^{ik} L_1^j L_2^m L_3^l + \epsilon_m^{il} L_1^j L_2^k L_3^m) \quad (\because \text{交換関係 (1.12)}) \\
 &= i l_0^2 \{ (-\cancel{L_1^l L_2^i L_3^j} + \cancel{L_1^k L_2^j L_3^i}) + (\cancel{L_1^i L_2^l L_3^j} - \cancel{L_1^j L_2^i L_3^k}) + (\cancel{L_1^j L_2^k L_3^l} - \cancel{L_1^l L_2^j L_3^k}) \} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

行列式を代わりに $\det L = \frac{1}{3!} \epsilon^{bcd} \epsilon_{jkl} L_b^j L_c^k L_d^l$ と書くと, かえって計算が煩雑になる.

行列式の表式 1.7.1 節では $SU(2)$ 行列 U に対して $\det U$ の表式の証明が要求されていることを踏まえ, ここで 3 次の行列 $L = (L_a^i)$ を例に, 同様の表式

$$\det L = \epsilon_{ijk} L_1^i L_2^j L_3^k = \frac{1}{3!} \epsilon^{abc} \epsilon_{ijk} L_a^i L_b^j L_c^k$$

を説明しておく．まず第2辺は行列式の定義式に他ならない．第3辺への書き換えは次のように考えれば良い．すなわち ϵ^{abc} と $\epsilon_{ijk}L_a^iL_b^jL_c^k$ はいずれも添字 a, b, c に関して反対称なので，これらを縮約すると，相異なる添字の組 a, b, c に関する $3!$ 個の項が得られる．各々の項は添字 a, b, c が $1, 2, 3$ の偶置換または奇置換であり，いずれの場合も全体としてはもとの $(a, b, c) = (1, 2, 3)$ の項に等しい．よって第2辺に戻ることができる．

■体積演算子が自己共役であること (教科書 p.15) の確認 L_a^i が自己共役 (Hermite) と仮定すると，体積の式 (1.10) における行列式

$$\det L = \frac{1}{3!} \epsilon^{abc} \epsilon_{ijk} L_a^i L_b^j L_c^k$$

は Hermite 共役が

$$(\det L)^\dagger = \frac{1}{3!} \epsilon^{abc} \epsilon_{ijk} L_c^k L_b^j L_a^i = \frac{1}{3!} \epsilon^{cba} \epsilon_{kji} L_a^i L_b^j L_c^k = \frac{1}{3!} (-\epsilon^{abc})(-\epsilon_{ijk}) L_a^i L_b^j L_c^k = \det L$$

となるので，自己共役である．

1.4 Planck スケールの存在の物理的な帰結

1.4.1 離散性：スケリングは有限である

Planck 長さの存在は2つの理由で，量子重力を標準的な場の量子論から区別する．第1に，量子重力が局所的な場の量子論によって，その術語の厳密な意味で記述されることを期待できない (Haag 1996)．局所的な量子論は，連続的な多様体の任意に小さな領域における観測量で，量子場が表されることを要求する．これは量子重力では起こらないはずである，何故なら物理的な領域は任意に小さくはなり得ないからである．

第2に，標準模型の場の量子論は無限大の繰り込み群を用いて定義されている．Planck 長さの存在は，これが量子重力には当てはまらないはずであることを示唆する．このことをより詳しく検討しよう．

摂動の手法を用いて場の理論に対する遷移振幅を計算するとき，任意に小さな波長の場のモードの効果による，無限大の量が現れる [紫外発散]．切断を導入して理論の定義を修正し，物理的な観測量が切断に依存せず実験的な観測に適合するような方法で，理論を切断に依存させることで，無限大は取り除ける．切断は技術的な技巧と見なせる [その場合には理論の正則化はあくまで (少なくとも理論内部では) 正当化できない人為的な異物であり，繰り込みの後では正則化を解除して元の理論を復元する必要がある]；代わりに，場の量子論は有効 (effective) で，(未知の) 物理の自然なスケールよりも非常に低いエネルギー・スケールで有用と見なせる [その場合には正則化は理論の本質的な修正と見なされる]．対応して，最終的な振幅が切断に依存ないように注意を払わねばならない．凝縮系は短距離からの独立性の手本となる例——2次相転移——を与える．2次相転移の臨界点において，系の振舞いはスケール独立になり，大きなスケールの物理はほとんどミクロなダイナミクスに依存しなくなる．伝統的な場の量子論は凝縮系の相転移を手本としている：それらは切断を用いて定義されているものの，切断は次いで無限大にとられ，理論は最終的な結果が有限に留まり選んだ切断の詳細に依存しないようは方法で定義される．

この枠組みは素粒子物理を記述するには有効であることが証明されたが，量子重力に対しては上手くいきそうにない．代案もまた凝縮系の物理によって示唆される：臨界点にない一般的な物質系を考えよ．例えば，室温の鉄の棒である．そのマクロなスケールでの振舞いは，何らかの物理定数で特徴付けられる低エネルギー理論で記述される．この振舞いは波の伝播と有限の相関関数を含む．棒の高振動数 [短波長] モードはマクロな物理の値に影響し，物理的なパラメータのスケールへの依存性を記述する繰り込み群方程式を用いて探求できる．ところが系は物理的で有限な切断スケール——原子のスケール——で特徴付けられる；したがって，この

スケールを超える棒のモードは存在しない [原子の間隔より短い波長はない]。棒は大きい有限な自由度の数を持つ系として記述できる。モードの短距離の切断は無無限大を取り除く数学的な技巧でも、未知の物理を隠す方法でもない：それは系の真の物理的な特徴である。量子重力も似ている：Planck スケールの切断は量子時空の成す、系の真の物理的な特徴である^{*14}。

最小の長さスケールの存在は、特殊相対性理論と量子力学にアナログな、普遍的な特徴を量子重力に与える。特殊相対性理論は最大の局所的な物理的速度、光速 c の存在の発見と見なせる。量子力学は全ての物理的な相互作用における最小の作用 $\hbar$ 、あるいは等価的に、相空間のコンパクトな領域は有限の数の識別可能な (直交する) 量子状態のみを含み、したがって系の状態には情報^{*15}の最小量があるという事実の発見と解釈できる。量子重力は Planck スケールにおける最小の長さ l_0 があるという発見をもたらす。これは世界の基本的な有限性と離散性へと導く。

自然な物理的単位は、速度を最大速度 c との比として、作用を最小作用 $\hbar$ の倍数において、また長さを最小の長さ l_0 の倍数において測ることで得られる。これらの“自然単位”では $c = \hbar = l_0 = 1$ 。 γ との混同を避けるために、本書の第 I 部ではこれらの単位を用いず、むしろより伝統的な Planck 単位 $c = \hbar = 8\pi G = 1$ を用いる。 [図 1 では $G = 1$ としているのに対し、ここでは数係数を含めた $8\pi G$ を 1 とおいていることに注意する (1.3 節 p.14 も見よ).]

1.4.1 項について

■Planck 定数が情報の最小量の存在を意味すること (pp.17-18) について 一般向けの非専門書、C. ロヴェッリ『すごい物理学講義』第 4 章 pp.173-174 に即して説明する。例えば計測により振り子の振幅が 5cm と 6cm の間であることが分かったとする (あらゆる計測は完璧ではあり得ない)。量子力学によれば、この範囲で振幅がとり得る値は離散化されており、その数は有限である。このことは振り子の例に限らず、一般に成り立つ。相空間の限定された領域には (直交性のある) 有限個の量子状態が含まれ、系の自由度を f とすると、その個数は相空間の体積を h^f で割って得られる。したがって、我々が物理系 (振り子) について所持していない情報の量も有限である。ここで情報とは、「ある現象の中で生じ得る、互いに区別可能な状態」を指す。(本書の 10.1 節におけるエントロピーの説明も見よ。)

同著の第 12 章 (pp.321-322, pp.327-328) では情報を「起こり得る選択肢の数」として定義する、Shannon のアイデアが説明されている。例えばサイコロには $N = 6$ 通りの面があるから、実際に出たサイコロの目を我々が知らないとき、我々にとって欠けているサイコロの情報量は $N = 6$ (正確にはその対数 $S = \log_2 N$) である。

量子状態が相空間に体積 h^f を占めることは、作用が離散的な値 $S = \oint p dq = n\hbar$ をとるという、Bohr-Sommerfeld の量子化の規則の帰結である [5, § 27]。この意味で $\hbar$ は作用の最小単位ないし作用量子と言える [6, p.191]。ただし本文中の相互作用における最小の作用とは作用積分よりもむしろ、例えばエネルギーのやりとりがエネルギー準位の差に対応する量子化された値 $\hbar\omega$ を通じて行われることを述べていると考えられる。

^{*14} 量子論に関する Einstein の初期の仕事の説明の際に Douglas Stone が述べているように：“それは数学的な技巧ではない；それは原子の世界のやり方である。それに慣れよ” (Stone 2013)。

^{*15} “情報”はここでは Shannon の意味——識別可能なオルタナティブの数——で用いている (Shannon 1948)：それは意味論 (semantics)、意味、重要性、意識、記録、蓄積、あるいは心理的、認知的、観念的または主観的な観念とは関係ない。

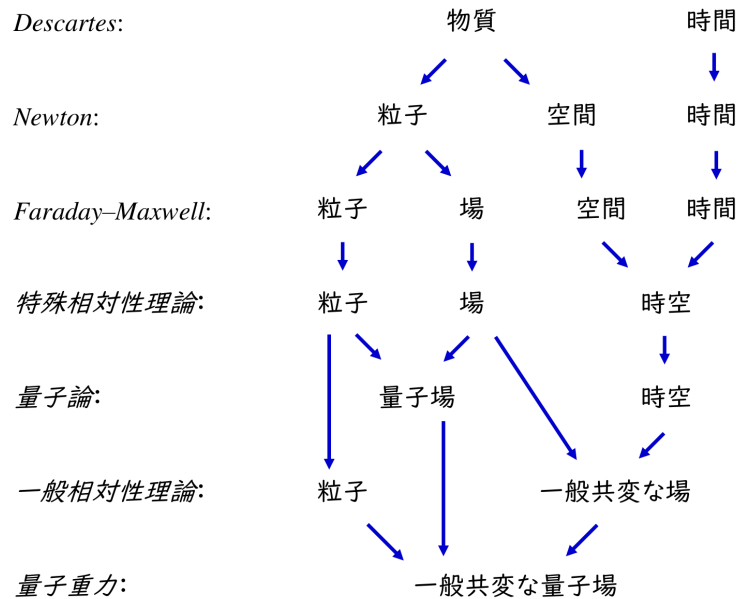


図 12 各時代の物理学における世界の存在論 [原著では p.19 の表 1.1]

1.4.2 不鮮明さ：古典的な空間と時間の消失

小さなスケールで伝統的な空間と時間の概念がないことは、物理の基礎を再考することを強いる。例えば、Hamilton 形式の力学は時間における発展に関係しており、伝統的な量子力学の定式化もそうであり、また時間発展が Poincaré 群のユニタリー表現で捉えられる、QFT もそうである。量子時空の理解はしたがって重大な概念的革命を要する。量子重力の物理は時空における重力場の物理ではない。それは時空を構成する量子場の物理である。前世紀の間に発展した物理の基本的な存在論は、簡単になる。

Descartes によれば、彼はこの点において本質的にまだ Aristotle に従っていたが、時間の中で運動する物質のみが物理的な宇宙の構成要素であり、延長 [空間的な広がりを表す哲学用語] は単なる物質の性質 (“res extensa ; 延長実体”) であった。Newton は、空間に位置付けられ時間の中で運動する粒子を用いた、世界の記述を導入した。Faraday と Maxwell は、この存在論は新しい存在——場——によって補完される必要があることを示した。特殊相対性理論は、空間と時間を単一の存在、時空の側面と考えねばならないことを示した。一般相対性理論は時空それ自体が場——重力場——であることを示した。最後に量子論は、粒子が量子場の量子であることを示した。これを図 12 に要約する。これらの結果を全て併せると、我々が今日知る限り、自然に存在する全ては一般共変な量子場であることが帰結する。

1.4.2 項について

■物理の存在論的な統一 (図 12) について

- すると量子重力それ自体は必ずしも統一理論を目指さないものの (1.1 節)、統一理論へ至るために必要なステップでもあることが予感される。Newton 力学が今日も近似理論として生き残っているように、LQG もまたその種の“永遠”の真理 [2, p.418] なのではないか。LQG には——素人の私 (本稿筆者) にも——そうさせる説得力がある (あるいは私の錯覚かもしれないが)。少なくとも概念的には LQG

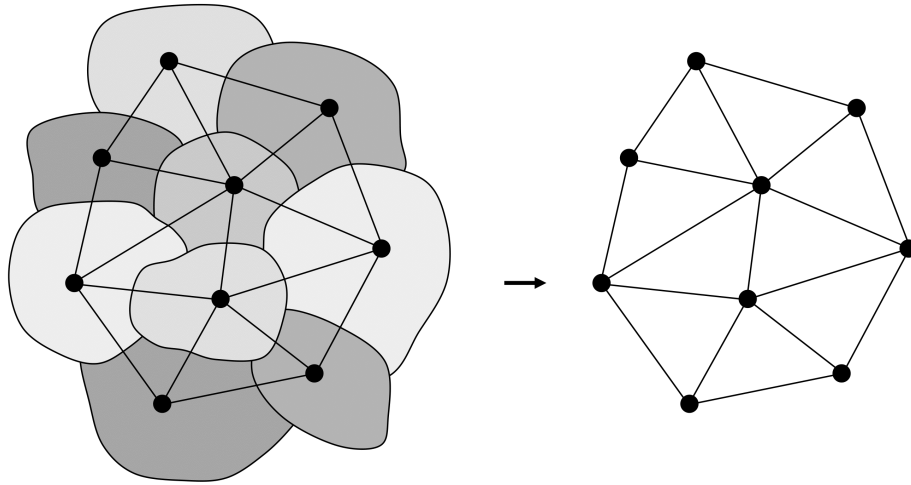


図 13 隣接する量子多面体の集合とそれらが定めるグラフ [本稿では文献 [2, p.20,p.264] にならって空間の塊 (chunks) だけを描き, 結節点の周りの半透明な多面体 (その面はグラフのリンクで指定される) は省略した]

において, 存在するものは全て量子場に“統一”されたとも言い得る: 重力場を含め全ての場は, 背景時空に対してではなく, 互いに対してのみ位置付けられるという描像に達する. (標準模型で考えられている全ての場は, LQG の枠組みに問題なく含められる [2, § 7.2–7.3].)

- 粒子の位置は力学変数であるのに対し, 伝統的な場の理論では位置は場の観測点を表すパラメータに過ぎない. こうして場の理論では空間的な位置を時間と同じパラメータに“格下げ”することで, 空間と時間を同等に扱うことが可能となっている. 他方, 量子重力では空間と時間は力学的な場から生起する.

1.5 グラフ, ループおよび量子 Faraday 線

上では物理的な空間の単一の粒の量子論を記述した. 場合によっては曲がっている物理的な空間の領域は, 互いに繋がった空間の粒の集まりで記述できる. それらは各結節点 (node) が空間の粒であり, リンク (links) が隣接する粒を関係付けるグラフで表せる (図 13).

後でこの描像が重力場の量子化から, 自然に立ち現れることを見る. 理論の量子状態はこの種の自然なグラフ構造を持つだろう. [場を量子化すると粒子が得られるのと同様に, 空間に他ならない重力場を量子化すると空間の粒が得られると期待される.]

“ループ量子重力”における“ループ”はそのようなグラフにおける, 閉じた一連のリンクの成すループに言及している^{*16}. グラフの個々の線は重力場の離散的な Faraday 線と見なせる. Michael Faraday によって導入された Faraday 線, あるいは“力線”は, 場の現代的な概念の起源にある初期の直観を形成した. 量子的な離散性は量子論において, これらの線を離散的にするという直観の上に, LQG は発達した. このアイデアは Dirac によって予期されていた:

^{*16} 歴史的には, 構成された最初の状態は結節点を持たなかった [Rovelli and Smolin (1988, 1990)].

量子論へ移行するとき、力線は全て離散的になり互いに分離すると仮定できる。[……] こうして基本的な物理的実在が力線であるモデルを得る……Paul Dirac (Dirac 1956)。

重力場は時空なので、その離散的で量子的な線は空間の中にあるのではなく、むしろ空間そのものの生地 (texture) を成す。これが LQG の物理的直観である。

以下は理論において起きることの、より完全で要約された説明である (この小節の残りを理解し難く感じるならば、心配せず、単に読み飛ばすこと；それは本を学んだ後に明快になるだろう)：フェルミオンの存在は、計量場が重力場を記述するのに充分でないことを示している。第3章で復習するテトラードが必要である。これは時空の各点で独立な Lorentz 系を選ぶ自由度に関係する、局所 Lorentz ゲージ不変性を導入する。この局所ゲージ不変性は、異なる時空点間の平行移動を支配する、接続場 $\omega(x)$ の存在を意味する。理論の専門用語でホロノミーと呼ばれる、多様体の任意の曲線 e に沿った、接続の指数の経路順序化 $U_e = P e \int_e \omega$ は、群の要素であって $\omega(x)$ と同じ情報を含んでいる。(これらの量は第3章で定義される。) アプリオリには、量子論の変数として量 $\omega(x)$ または U_e のいずれを採っても良い。1つ目は Lie 代数に属し、2つ目は Lie 群に属する；1つ目は $U_e = 1 + \omega(\dot{e}) + O(|e|^2)$ [正確には式 (4.3), (4.41) の形] のように、任意に短い e の極限をとることによって、2つ目から導ける。ところが、我々が量子重力において期待する Planck スケールの離散性は、その2つの間の関係を破る。もし空間が離散的ならば、空間における無限小の変位に意味はなく、したがって U_e はよく定義されたままであるのに対し、その微分 $\omega(x)$ はよく定義されない。したがって我々は $\omega(x)$ を忘れ、上記で円上の変数の量子化に対して言及したように、代わりに群の変数 U_e を用いて量子化を探索するよう導かれる。それらは理論の専門用語で“ループ”変数と呼ばれる。対応する量子論的な演算子は、やはり接続の指数である。QCD における Wilson ループ演算子に類似している^{*17}。ちょうど上で議論した円上の粒子の場合のように、回転群がコンパクトである事実は離散性の起源である。

これをより明確に理解するには、格子 QCD (第4章で復習する) とのアナロジーが教育的である。格子 QCD では、格子間隔 (リンクの長さ) a を持つ時空における格子を採り、格子のリンクに関係する群の要素 U_e を用いて場を記述する。物理的な理論は a がゼロに近づく極限で復元され、この極限で個々の e たちに関係する群の要素は全て恒等元に近づく。その極限は Yang-Mills 接続を定義する。重力において我々は同様に、リンクに関係する群の要素 U_e を用いた離散化から出発できる。しかしこれらのリンクの長さはゼロにされる外的なパラメータではない：それは場そのもので決まる、何故なら幾何学は重力で決まるからである。量子化は幾何学を離散的にするので、理論に e たちが無限小となる極限はない。したがって量子論において定義される接続 $\omega(x)$ はない。Planck スケールより極めて大きいスケールで理論を調べ、したがって e たちの長さを形式的にゼロにできる古典的な極限でのみ、接続は定義される。

1.6 展望

現在のところ、Planck スケールの存在から帰結する紫外の有限性を定式化に組み込んだ、よく発達しており、量子重力における遷移振幅のよく定義された定義を与える、2つの理論がある：それらはループ量子重力と弦理論である。

時空の因果構造を固定するのに用いられる、背景の固定された計量場と、量子的なゆらぐ“重力場” $h_{\mu\nu}(x)$ へと重力場を分離することによって、重力を量子化する試みから弦理論は発展した。結果として得られる理論

^{*17} “ループ”という名前は e が閉曲線ないしループであるときのみ適切であり、その場合 U_e [狭義のホロノミー [1, p.67]] のトレースはゲージ不変である。

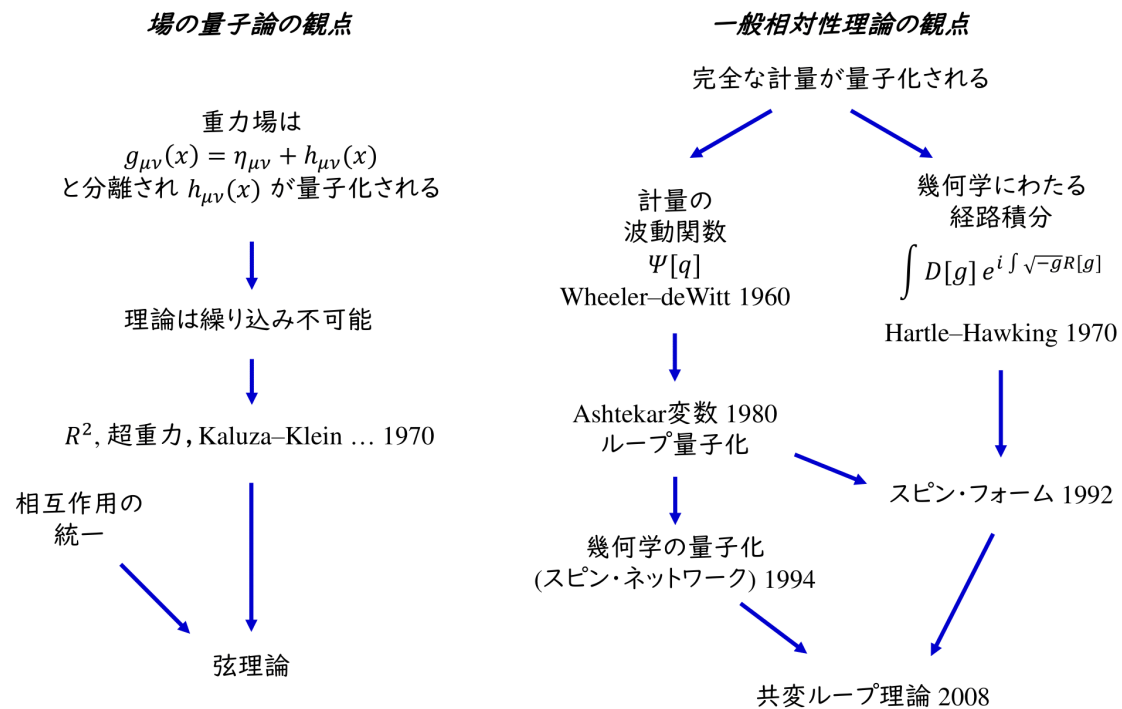


図 14 量子重力の発展の主要な路線 [原著では p.22 の表 1.2]

の繰り込み不可能性は理論家を、弱い相互作用の示唆する道のりに従った、より大きな繰り込み可能または有限の理論の探求へと促した。作用における曲率の 2 乗の項, Kaluza-Klein 的な理論, 超重力……による GR の修正を探索はさまよった。全ての相互作用の統一理論の研究と融合して、それはついに弦理論をもたらしたのであり、弦理論はおそらくは重力を含む全ての相互作用の有限の量子論であり、10 次元で定義され、超対称性を含むが、それは今のところ観測される世界と一致させることが困難である。

LQG の正準バージョンは、Ashtekar 変数で書かれた正準 GR の形式的な量子化、すなわち Wheeler-deWitt 方程式の、“ループ” 解の発見から生まれた。幾何学の量子化がこの理論の内部で導かれ、量子幾何のスピン・ネットワークによる記述をもたらした (第 4 章と第 5 章)。70 年代に Hawking と彼のグループによって発展した、汎関数積分の Euclid 的な定式化に触発された、Feynman の方法での (à la Feynman) “幾何学にわたる和の形式” へと正準理論は分岐した。この“スピン・フォーム” 理論 (第 7 章) は正準 LQG の運動学と融合し、本書で説明する現在の共変な理論へと発展した。これらの理論の歴史的な発展が図 14 にスケッチされている。歴史的な再構成と参考文献については、Rovelli (2004) の付録を見よ。

1.6 節について

■弦理論について 弦理論は LQG と対照的に、重力を他の力や粒子と合わせて弦へと統一する形で、量子化することを構想する^{*18}。弦理論は平坦な空間の QFT (場の量子論) の技法と概念的枠組みに深く根付いてお

^{*18} このような“一石二鳥”を狙う背景には、我々は既に“物理学の終わりの近く”にいるという期待があるのかもしれない。しかし残念ながら、そのようなことは物理学者が過去 3 世紀にわたってずっと思ってきたことだ [2, p.13]。確かにいずれは統一理論にたどり着きたいという希望はあり、また一石二鳥が上手くいくに越したことはないが、物事が一筋縄に解決するとは限らない。

り、背景独立な QFT とは何かを理解するという、量子重力の主要な困難に直接取り組んでいない。[古典的には無重力を表す Minkowski 空間において閉弦を量子化した場合にも、重力子 (に同定し得る 1 粒子状態) が得られることは象徴的である [7, pp.286–287].] 場の量子論や弦理論で重力場を Minkowski 計量からのズレ $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ として扱うのは、摂動論的であると同時に、重力場を $\eta_{\mu\nu}$ で定義される背景の Minkowski 時空上の場 $h_{\mu\nu}$ と見なしていることになる。なお弦理論と LQG が将来統合される可能性も繰り返し唱えられている: LQG は弦理論が必要としてきた背景独立な定式化を行う方法を与えるのに対し、LQG のスピン・ネットワークの織物 (weave) 状態は自然な弦の構造を持つ [2, p.8]. [もっともスピン・ネットワークの抽象的なリンク線は、素朴には物理的な弦とは異質なものに見受けられる.]

1.7 補完

SU(2) 表現理論の基礎をいくつか復習する。これは量子重力において重要な役割を演じる。次いで空間の最小の量子に対して体積の固有値を計算する。

1.7.1 SU(2) 表現とスピノル

定義

SU(2) はユニタリーな 2×2 複素行列 U たちの群である。それらは $U^{-1} = U^\dagger$ および $\det U = 1$ を満たす。これらの条件は行列 U の形を

$$U = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

のように定め、ここに (単位の行列式により)

$$|a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (1.18)$$

値 0,1 をとる添字 $A, B, C, \dots$ を用いて、行列要素を U^A_B と書く。SU(2) は回転群 SO(3) と同じ代数を持つ (群 SU(2) は SO(3) の普遍被覆 (universal cover) である)。後で見る量子時空を含め、多くの観点から、SU(2) を最小の建築用ブロック (building block) と見なせる。

測度

式 (1.18) は $\mathbb{C}^2 \sim \mathbb{R}^4$ における単位半径の球面を定義する [原著には R と $\mathbb{R}$ の表記揺れがある]。すると、群のトポロジーは 3 次元球面 S^3 のそれである。この球面に制限された $\mathbb{R}^4$ の Euclid 計量は群の不変測度を定義する [式 (1.44) の導出を見よ]。

$$\int_{\text{SU}(2)} dU = 1 \quad (1.19)$$

と規格化すると、これは右左両方からの乗法の下で不変な Haar 測度である: $dU = d(UV) = d(VU)$, $\forall V \in \text{SU}(2)$. Hilbert 空間この測度に関して 2 乗可積分な群上の関数 $\psi(U)$ によって構成される Hilbert 空間 $L_2[\text{SU}(2)]$ は、以下で重要な役割を果たす。

スピノル

SU(2) の基本表現の空間は、スピノル、すなわち 2 成分を持つ複素ベクトル z ,

$$z = \begin{pmatrix} z^0 \\ z^1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \quad (1.20)$$

の空間である。物理学者が暗黙のうちに用い、例えば Wald の本 (Wald 1984) では明示的である、“抽象添字記法 (abstract index notation)” を一般に用いる; すなわち、成分ではなく、むしろ完全なベクトルを示す添字を用いる記法であり、スピノルに対して z^A は z と同義であり、ベクトルに対して v^i は $\vec{v}$ と同義である [式 (1.22) も同様]。

第8章ではスピノルたちの幾何学的性質をより詳しく研究し、スピノルを時空の対象と再解釈する．ここではそれらに関するいくつかの基本的な事実と、それらの $SU(2)$ 表現理論における役割のみを導入する．

表現とスピン

完全対称な n 個の添字のスピノル

$$z^{A_1 \cdots A_n} = z^{(A_1 \cdots A_n)} \quad (1.21)$$

[右辺の丸括弧は対称化を表す] のベクトル空間は、 $SU(2)$ の作用、 $z^{A'_1 \cdots A'_n} = U^{A'_1}_{A_1} \cdots U^{A'_n}_{A_n} z^{A_1 \cdots A_n}$ の下で変換し [この変換則は添字の対称性と整合していることが見て取れる]、したがって群の表現を定義する．この空間は $\mathcal{H}_j$ と表され、ここに $j = n/2$ (よって $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$) であり、それが定義する表現はスピン j 表現と呼ばれる．この表現は既約である．

演習 1.3 $\mathcal{H}_j$ が次元 $2j+1$ を持つことを示せ [本稿次項で解答]．

これらの表現の性質をいくつか復習しよう．

1. 2 つの反対称テンソル

$$\epsilon^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

を考えよ．これらはテンソルに対する g^{ab} と g_{ab} とアナログな方法で、ただし [反対称性より] 順序に注意しつつ——下付きは左で上付きは右の (down-left-up-right) 規則、あるいは A/A 規則：

$$z_A = \epsilon_{AB} z^B, \quad z^A = z_B \epsilon^{BA} \quad (1.23)$$

を用いて——、スピノルの添字を上げるか下げるのに用いることができる [以降、本稿次項で補足]．例えば、縮約 $z^A_A = \epsilon_{AB} z^{AB} = -\epsilon_{AB} z^{BA} = -z^A_A$ を得る．次のことを示せ．

- 1 $\epsilon_{AC} \epsilon^{CB} = -\delta_A^B$, $\epsilon_{BA} \epsilon^{AB} = -2$, $\epsilon_{AB} \epsilon^{AB} = 2$.
 - 2 ϵ^{AB} は $SU(2)$ の作用の下で不変である、すなわち、 $U^A_C U^B_D \epsilon^{CD} = \epsilon^{AB}$.
 - 3 $\det U = \epsilon^{BD} U^0_B U^1_D = \frac{1}{2} \epsilon_{AC} \epsilon^{BD} U^A_B U^C_D = 1$.
 - 4 $U^{-1} = -\epsilon U^T \epsilon$ [右辺の U を転置行列に訂正した]；すなわち、 $(U^{-1})^A_B = -\epsilon_{BD} U^D_C \epsilon^{CA}$.
2. $\mathbb{C}^2$ 上で定義される 2 つの $SU(2)$ 不変な 2 次形式があり、それらを混同してはならない．1 つ目は (半双線形) スカラー積

$$\langle z | y \rangle = \sum_A \bar{z}^A y^A = \bar{z}^0 y^0 + \bar{z}^1 y^1 \quad (1.24)$$

であり、ここにバーは複素共役を表す [式 (1.17) で既出]．このスカラー積は $\mathbb{C}^2$ を Hilbert 空間に移行させるものであり、したがって $SU(2)$ 表現をユニタリーにするものである．2 つ目は (双線形) 反対称な 2 次形式^{*19}

$$(z, y) = \epsilon_{AB} z^A y^B = z^0 y^1 - z^1 y^0. \quad (1.25)$$

その 2 つは半線形写像 $J: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$(Jz)^A = \begin{pmatrix} \bar{z}^1 \\ -\bar{z}^0 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

を定義することにより、

$$\langle z | y \rangle = (Jz, y) \quad (1.27)$$

と関係付けられる．これらの構造は全て $SU(2)$ 不変であり [本稿次項で確認]、しかるに、後で見るように、 $(,)$ は $SL(2, \mathbb{C})$ 不変でもあるのに対し、 J と $\langle | \rangle$ はそうではない．したがって、スピノルは“時空的な”対象である、と言ったもスピノルは Lorentz 群の表現も担っているからである、しかし Lorentz 群の表現としては $\mathbb{C}^2$ はユニタリー表現ではない．厳密な意味で、内積と J は時空における Lorentz 系の選択に依存する．

^{*19} これはその反対称性を強調した表記、 $[z|y]$ でも表される．

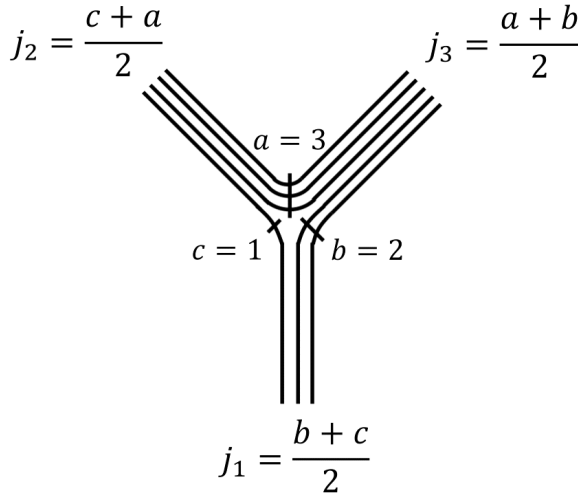


図 15 基本的なリカップリング

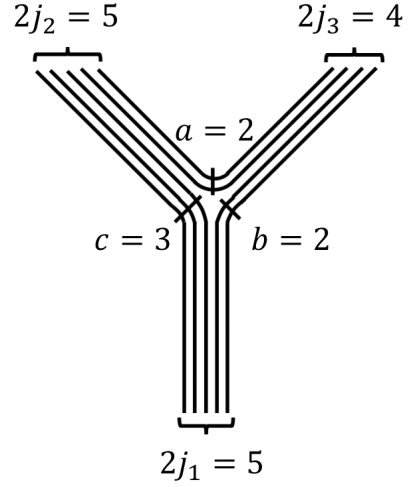


図 16 文献 [2, p.379] の例で記号を適切に置き換えた

3. $SU(2)$ 表現理論のほとんどは ϵ_{AB} の不変性から直接帰結する．まず 2 つの基本 ($j = 1/2$) 表現のテンソル積 $(z \otimes y)^{AB} = z^A y^B$ を考えよ．あらゆる 2 添字スピノル z^{AB} はその対称および反対称部分に分解できることを示せ [本稿次項で証明]：

$$z^{AB} = z_0 \epsilon^{AB} + z_1^{AB}, \quad z_0 = \frac{1}{2} z^A_A, \quad z_1^{AB} = z^{(AB)}, \quad (1.28)$$

それは $SU(2)$ の作用の下で不変である． ϵ_{AB} の不変性により，この分解 (1.28) は $SU(2)$ 不変であり，スカラー z_0 は自明な表現 $j = 0$ を定義するのに対し， z_1^{AB} は随伴表現 $j = 1$ を定義する．よって 2 つのスピノル $1/2$ 表現のテンソル積はスピノル 0 およびスピノル 1 表現の和であることを，証明したことになる： $1/2 \otimes 1/2 = 0 \oplus 1$ ．[文献 [3, pp.278–280, pp.294–295] [8, pp.113–114] も見よ．]

4. 一般に，スピノル j_1 とスピノル j_2 の表現をテンソル化すると，初めの $2j_1$ 個と後ろの $2j_2$ 個の添字に関して対称な， $(2j_1 + 2j_2)$ 個の添字を持つスピノルの空間を得る．[2 つのスピノル (1.21) の積をとれば良い．] 全ての添字を対称化することにより， $(j_1 + j_2)$ 表現において変換する不変部分空間を得る．代わりに， k 回テンソル ϵ_{AB} を用いて，1 つ目のグループの k 個の添字と 2 つ目のグループの k 個の添字を縮約し，次いで残り $2(j_1 + j_2 - k)$ 個の添字を対称化して，スピノル j_3 表現を得ることができる．

$$j_1 + j_2 + j_3 \in \mathbb{N}, \quad |j_1 - j_2| \leq j_3 \leq (j_1 + j_2) \quad (1.29)$$

を示せ [本稿次項を参照]．これら 2 つの条件は **Clebsch–Gordan 条件** [Gordon は誤記] と呼ばれる．ピンと来るか？ それらは

$$2j_1 = b + c, \quad 2j_2 = c + a, \quad 2j_3 = a + b \quad (1.30)$$

なる 3 つの非負整数 a, b, c が存在するという事実と等価である．

演習 1.4 式 (1.30) が式 (1.29) を意味することを示せ．

note 代入により直ちに確認できる．逆証を含め，式 (1.29) と式 (1.30) の等価性は，すぐ後のグラフの解釈 (図 15) において見やすい．また式 (1.30) のように書き換えれば，条件 (1.29) が実は j_1, j_2, j_3 に関して対称であることが明白となる．

これには見事なグラフ的解釈がある，図 15 を見よ [本稿次項で補足]．次で与えられる (j_1, j_2, j_3) に対して類似の図を描け．i: $(1/2, 1/2, 1)$, ii: $(5/2, 5/2, 2)$, iii: $(1, 3/2, 5/2)$, iv: $(5/2, 2, 5)$, v: $(5/2, 5/2, 7/2)$, vi: $(1, 1, 1)$ ．対応する a, b, c を求めよ．

note ii の場合のグラフと a, b, c の値を図 16 に示す．iv では $j_3 \leq j_1 + j_2$ が，v では $j_1 + j_2 + j_3 \in \mathbb{N}$ が満たされない．一般に式 (1.30) を逆に解くと，

$$a = -j_1 + j_2 + j_3, \quad b = j_1 - j_2 + j_3, \quad c = j_1 + j_2 - j_3.$$

5. スピノル基底は $SU(2)$ 表現にとって必ずしも最も便利ではない。 $\mathcal{H}_j$ において L_z を対角化すれば、全ての量子力学の教科書で説明されている、よく知られた基底 $|j, m\rangle$ が得られ、ここに $m = -j, \dots, j$ 。この基底において、表現行列たち $D_{nm}^j(U)$ は Wigner 行列と呼ばれる。 *Mathematica* はそれらをあからさまに与える；それらは `WignerD[j, m, n, psi, theta, phi]` と呼ばれ、 $SU(2)$ の Euler 角によるパラメータ付け (以下の式 (1.42) で与えられる) を用いて与えられる。 [文献 [3, pp.261–265] も見よ.]
6. 基本表現の 2 つの双線形形式は全ての既約表現に拡張される。 $\mathcal{H}_j$ における 2 つのベクトル $\mathbf{z}$ と $\mathbf{y}$ が与えられたとき、それらの不変な縮約とそれらのスカラー積の両方をとることができる。整数表現では 2 つの双線形形式は同じであることが判明する。半整数表現では、それらは異なる。縮約は写像 (projection) $\mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_0$ で定義され、 $z^{A_1 \dots A_{2j}}$ 表現においてそれは

$$(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = z^{A_1 \dots A_{2j}} y^{B_1 \dots B_{2j}} \epsilon_{A_1 B_1} \dots \epsilon_{A_{2j} B_{2j}} \quad (1.31)$$

で与えられるのに対し、スカラー積は

$$\langle \mathbf{z} | \mathbf{y} \rangle = \overline{z^{A_1 \dots A_{2j}}} y^{B_1 \dots B_{2j}} \delta_{A_1 B_1} \dots \delta_{A_{2j} B_{2j}} \quad (1.32)$$

で与えられる。 L_z は自己共役なので、 L_z を対角化する基底はもちろん直交する。したがって

$$\langle j, m | j, n \rangle = \delta_{mn} \quad (1.33)$$

であるのに対し、直接の計算 (例えば Landau and Lifshitz (1959) を見よ) は

$$(j, m, j, n) = (-1)^{j-m} \delta_{m, -n} \quad [\text{式 (5.45)}] \quad (1.34)$$

を与える。因子 $\delta_{m, -n}$ は容易に理解できる：一重項は消える全 L_z を持たねばならない。

1.7.1 項について

■ $SU(2)$ の既約表現のスピノル (1.21) について

$SU(2)$ の場合には、 ϵ テンソルは単に二つの上付き添字を完全につぶすだけである。このことは既約表現が完全対称テンソルに対応することを意味する。何故なら、 n 個の添字を持つテンソルが完全対称でなければ、二つの添字を ϵ で縮約して $n-2$ 個の添字を持つゼロでないテンソルを作れ、表現が簡約できるからである。 [他方、完全対称テンソルと ϵ の縮約は消える.] 明らかに、 n 個の完全対称な添字を持つテンソルは、全ての添字が 1 である最高ウェイト状態が $J_3 = n/2$ を持つので、既約なスピノル $n/2$ 表現に対応する [9, p.162].

対称化はスピン j の系を、平行なスピン $1/2$ を持つ $n = 2j$ 個の粒子の集まりと見なしたとき、粒子を入れ替えた状態を区別できないことに対応している。

■ スピン j 表現の空間 $\mathcal{H}_j$ の次元が $(2j+1)$ であることの確認 (教科書 p.23 の演習 1.3) 完全対称なスピノル (1.21) は n 個の添字の順番を入れ替えても変わらないので、添字に含まれる 0 と 1 の個数によってのみ区別される。そこで独立な (複素) 成分として、

$$z^{0 \dots 000}, \quad z^{0 \dots 001}, \quad z^{0 \dots 011}, \quad \dots \quad z^{1 \dots 111}$$

の $(n+1) = (2j+1)$ 個を選べる。よって $\mathcal{H}_j$ は複素 $(2j+1)$ 次元である。これは角運動量の理論でよく知られた結果である。

■ ϵ によるスピノル添字の上げ下げの規則 (1.23) と、続く一連の公式について 式 (1.23):

$$z_A = \epsilon_{AB} z^B, \quad z^A = z_B \epsilon^{BA}$$

の 2 式の整合性 (添字を下げてから上げると元に戻る) は、すぐ後の $\epsilon^{AC} \epsilon_{BC} = \delta_B^A$ から保証される.

次に式 (1.23) の直後の縮約

$$z^A_A = \epsilon_{AB} z^{AB} = -\epsilon_{AB} z^{BA} = -z^A_A$$

について、これは ϵ による添字の上げ下げ (1.23) の下でも、スピノル z^{AB} の反対称性が z^A_A に引き継がれることを意味する. 第 1 と第 3 の等号で添字 B の代わりに A で和をとるためには、 ϵ の添字 A を z に近づけた形に書き換えねばならないことに注意する. 実際

$$\epsilon_{AB} z^{AB} = -\epsilon_{BA} z^{AB} = -z^B_B, \quad -\epsilon_{AB} z^{BA} = \epsilon_{BA} z^{BA} = z^B_B$$

とすると、正しい結果が得られる. なお、より一般には

$$z^A_B = \epsilon_{BC} z^{AC} = -\epsilon_{BC} z^{CA} = -z^A_B$$

が成り立つ.

続く 4 つの命題の証明に移ろう.

1. $\epsilon_{AC} \epsilon^{CB} = -\delta_A^B$, $\epsilon_{BA} \epsilon^{AB} = -2$, $\epsilon_{AB} \epsilon^{AB} = 2$ の証明

$$\epsilon^{AD} \epsilon_{BC} = \begin{vmatrix} \delta_B^A & \delta_C^A \\ \delta_B^D & \delta_C^D \end{vmatrix}$$

から出発して、さらに添字を縮約すると、一連の公式

$$\epsilon^{AC} \epsilon_{BC} = \delta_B^A, \quad \epsilon^{AB} \epsilon_{AB} = 2$$

が得られる. 第 1 式は $\epsilon = (\epsilon^{AB}) = (\epsilon_{AB})$ の逆行列が転置行列 $\epsilon^T (= -\epsilon)$ であることを意味している.

2. ϵ^{AB} の SU(2) 不変性の確認 反対称テンソル ϵ^{AB} と Kronecker のデルタは座標変換のみならず、SU(2) 群の変換に関しても不変テンソルである [8, p.134]:

$$U^A_C U^B_D \epsilon^{CD} = (\det U) \epsilon^{AB} = \epsilon^{AB}, \quad U^A_C (U^\dagger)^D_B \delta^C_D = U^A_C (U^\dagger)^C_B = \delta^A_B.$$

(第 1 の等号で次の「3」における $\det U$ の表式を用いた.) $U^\dagger$ を含まない第 1 式の変換則に限定して考えれば、これらのうち不変テンソルは ϵ^{AB} のみとなる.

3. $\det U$ の表式の確認 与式

$$\det U = \epsilon^{BD} U^0_B U^1_D = \frac{1}{2} \epsilon_{AC} \epsilon^{BD} U^A_B U^C_D = 1$$

の最後の等号は U が SU(2) 行列であることによる. 第 3 辺までについて、本稿では既に 1.3 節の補足にて同様の表式

$$\det L = \epsilon_{ijk} L^i_1 L^j_2 L^k_3 = \frac{1}{3!} \epsilon^{abc} \epsilon_{ijk} L^i_a L^j_b L^k_c$$

を説明した.

4. 逆行列 U^{-1} の表式の確認 一般に 2×2 行列

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対して

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \epsilon M^T \epsilon^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

なので,

$$\epsilon M^T \epsilon^T = (\det M) M^{-1}$$

が恒等的に成立する [10, p.9]. ここで M を特に $SU(2)$ 行列 U に選ぶと

$$U^{-1} = \epsilon U^T \epsilon^T, \quad \therefore (U^{-1})^A{}_B = \epsilon^{AC} U^D{}_C \epsilon_{BD} = -\epsilon_{BD} U^D{}_C \epsilon^{CA}.$$

あるいは最初から $SU(2)$ 行列 U を想定して, 式 (1.17) に対して $\epsilon U^T \epsilon$ を成分計算しても良い.

■内積などの構造 (1.24–26) の $SU(2)$ 不変性の確認 内積 (1.24) の $SU(2)$ 不変性は

$$z^\dagger y \rightarrow (Uz)^\dagger (Uy) = z^\dagger U^\dagger U y = z^\dagger y$$

と確かめられる. また ϵ の不変性 $U \epsilon U^T = \epsilon$ を繰り返し用いると, 内積 (1.25) の $SU(2)$ 不変性も

$$z^T \epsilon y \rightarrow (Uz)^T (U \epsilon U^T) (Uy) = z^T (U \epsilon U^T) y = z^T \epsilon y$$

と確かめられる. すると式 (1.27) の関係を通じて, J も $SU(2)$ 不変でなければならない.

■ z^{AB} の対称・反対称部分への分解 (1.28) について 恒等式

$$z^{AB} = z^{[AB]} + z^{(AB)}, \quad z^{[AB]} \equiv \frac{1}{2}(z^{AB} - z^{BA}), \quad z^{(AB)} \equiv \frac{1}{2}(z^{AB} + z^{BA})$$

において, 反対称部分が

$$z^{[AB]} = z_0 \epsilon^{AB}, \quad z_0 \equiv \frac{1}{2} z^C{}_C = \frac{1}{2} \epsilon_{CD} z^{CD} = z^{[01]}$$

と書けることを示せば良い. ところが上式は両辺が同じ反対称性を持ち, $(A, B) = (0, 1)$ に対して同じ値 $z^{[01]}$ をとるので, 常に成立する.

■Clebsch–Gordan 条件 (1.29) の理由 [2, p.378] k 組の添字を縮約して $2(j_1 + j_2 - k)$ 次元の不変部分空間を定義するとき, k の最大値は明らかに $2j_1$ と $2j_2$ のうち大きくない方 (smallest) である. [$2j_1$ 個の添字と $2j_2$ 個の添字のどちらかを使い切るまで縮約できるから.] よって [得られる既約表現は

$$j_3 = j_1 + j_2 - k, \quad k = 0, 1, \dots, \min(2j_1, 2j_2)$$

だから,] 表現 j_1 と j_2 のテンソル積は, 表現 $|j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \dots, (j_1 + j_2)$ の和である. このとき 2 つの表現の積に現れる各々の既約な j_3 は Clebsch–Gordan 条件 (1.29) を満たす. [特に $j_3 = j_1 + j_2 - k$ と 2 つの半整数 j_1, j_2 との和 $2(j_1 + j_2) - k$ は常に整数となる.]

■Clebsch–Gordan 条件のグラフ的解釈 (図 15) について [2, pp.379–380] スピン j の各既約表現を $2j$ 本の構成要素の線 (strands) から成る線 (a line) として表そう. 図 15 は 3 本のそのような線が出会い, 全ての構成要素の線が結節点を通じて繋がれるところの, 3 価の結節点である: c 本の構成要素の線が j_1 から j_2 へ流れる, 等々. Clebsch–Gordan 条件 (1.29) の意味はこのとき直ちに明らかである: 第 1 式は単に構成要素の線の総数が偶数であり, よってそれらを組合せられることを要求している; 第 2 式は j_3 が $j_1 + j_2$ よりも大きくなく (さもなくば j_3 の構成要素の線のいくつかは接続されずに余る), $|j_1 - j_2|$ より小さくもない (さもなくば j_1 と j_2 のうち小さくない方 (largest) が接続されずに余る) ことを要求している.

1.7.2 Pauli 行列

$i = 1, 2, 3$ として Pauli 行列 σ_i は

$$\sigma_{iB}^A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (1.35)$$

あらゆる $SU(2)$ 群の要素 $U = (U_B^A)$ は, 何らかの $\alpha \in [0, 2\pi[$ [$0 \leq \alpha < 2\pi$ の意味] と単位ベクトル $\hat{n}$ に対して

$$U = e^{i\alpha\hat{n}\cdot\hat{\sigma}} \quad (1.36)$$

の形に書ける. [ただし $\hat{n}\cdot\hat{\sigma} \equiv \sum_i n_i \sigma_i$ である. 文献 [3, pp.223–224, p.229] を見よ.]

演習 1.5 Pauli 行列が

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (1.37)$$

および

$$\epsilon \sigma_i \epsilon = \sigma_i^T = \sigma_i^* \quad (1.38)$$

に従うことを示せ, ここに T は転置を, $*$ は複素共役を表す [本稿次項を参照].

演習 1.6

$$e^{i\alpha\hat{n}\cdot\hat{\sigma}} = \cos \alpha + i\hat{n}\cdot\hat{\sigma} \sin \alpha \quad (1.39)$$

を示せ [文献 [3, pp.223–224] で確認済み].

3 つの行列たち

$$\tau_i = -\frac{i}{2} \sigma_i \quad (1.40)$$

は $SU(2)$ の, 基本表現における生成子である.

演習 1.7 それらが代数 $\mathfrak{su}(2)$ を定義する関係

$$[\tau_i, \tau_j] = \epsilon_{ij}^k \tau_k \quad (1.41)$$

を満たすことを確かめよ. [交換関係 $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk} \sigma_k$ は上式 (1.41) に読み替えられる [3, p.222].]

$SU(2)$ の Euler 角によるパラメータ付けは

$$U(\psi, \theta, \phi) = e^{\psi\tau_3} e^{\theta\tau_2} e^{\phi\tau_3} \quad (1.42)$$

で定義され [文献 [3, p.234] を見よ], ここに

$$\psi \in [0, 2\pi[, \quad \theta \in [0, \pi[, \quad \phi \in [0, 4\pi[. \quad [0 \leq \psi < 2\pi, \text{etc. の意味}] \quad (1.43)$$

これらの座標を用いると, Haar 測度は

$$\int dU = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{4\pi} d\phi \quad (1.44)$$

となる [本稿次項を参照].

演習 1.8 $SL(2, \mathbb{C})$ 行列 A と B に対して

$$\mathrm{Tr}(\tau_i \tau_j) = -\frac{1}{2} \delta_{ij}, \quad \mathrm{Tr}(\tau_i \tau_j \tau_k) = -\frac{1}{4} \epsilon_{ijk}, \quad (1.45)$$

$$\delta^{ij} \tau_i^A{}_B \tau_j^C{}_D = -\frac{1}{4} (\delta_D^A \delta_B^C - \epsilon^{AC} \epsilon_{BD}), \quad (1.46)$$

$$\delta_B^A \delta_C^D = \delta_C^A \delta_B^D + \epsilon^{AD} \epsilon_{BC}, \quad (1.47)$$

$$\delta^{ij} \mathrm{Tr}(A \tau_i) \mathrm{Tr}(B \tau_j) = -\frac{1}{4} [\mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(AB^{-1})], \quad (1.48)$$

$$\mathrm{Tr}(A) \mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(AB) + \mathrm{Tr}(AB^{-1}) \quad (1.49)$$

を確かめよ [本稿次項を参照].

関係 (1.47) は特に重要である. それはグラフ的には, $A = 1$ として

$$\begin{array}{c} A \quad D \\ \diagdown \quad \diagup \\ C \quad B \end{array} = A^{-1} \begin{array}{c} A \quad D \\ \diagdown \quad \diagup \\ C \quad B \end{array} + A \begin{array}{c} A \quad D \\ \diagup \quad \diagdown \\ C \quad B \end{array} \quad (1.50)$$

[緑の添字を書き添えた]

の形に書けることに注意せよ [本稿次項で補足]. この書き方の理由は第 6 章でより明確になる.

演習 1.9 もし Pauli 行列の添字を ϵ で上げれば, 2 つの添字のスピンルたち $(\sigma_i)^{AB} = (\sigma_i)^A{}_C \epsilon^{CB}$ を得る. これらが表現 $1/2 \otimes 1/2 \otimes 1$ における不変テンソルであることを示せ [解答は本稿次項].

1.7.2 項について

■式 (1.37–38) の証明 (教科書 p.26 の演習 1.5) 式 (1.37) はよく知られた関係であり, Pauli 行列の反交換関係と (角運動量の) 交換関係

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}, \quad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk} \sigma_k$$

を辺々足して得られる [3, p.222].

式 (1.38) の第 1 の等号は, 任意の 2 次の正方行列 M に対して

$$M \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \epsilon M \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d & c \\ b & -a \end{pmatrix}$$

となることによる. 第 2 の等号が成り立つことは, Pauli 行列の表式 (1.35) から直接見て取れる.

■Haar 測度 (1.44) について 公式 (1.39) を用いると, Euler 角でパラメトライズした $SU(2)$ 行列 (1.42) は

$$U(\psi, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} e^{-i(\psi+\phi)/2} \cos(\theta/2) & -e^{-i(\psi-\phi)/2} \sin(\theta/2) \\ e^{i(\psi-\phi)/2} \sin(\theta/2) & e^{i(\psi+\phi)/2} \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

と計算でき, これを一般式 (1.17) と比較すると

$$\begin{aligned} x \equiv \mathrm{Re} a &= \cos \frac{\psi + \phi}{2} \cos \frac{\theta}{2}, & y \equiv \mathrm{Im} a &= -\sin \frac{\psi + \phi}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\ z \equiv \mathrm{Re} b &= \cos \frac{\psi - \phi}{2} \sin \frac{\theta}{2}, & w \equiv \mathrm{Im} b &= \sin \frac{\psi - \phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

と同定される [3, p.234]. よって Euler 角は 3 次元球面 $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ をパラメトライズする. 上式を正直に微分すると

$$dx^2 + dy^2 = \left(\frac{d\theta}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \left(\frac{d\psi + d\phi}{2}\right)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad dz^2 + dw^2 = \left(\frac{d\theta}{2}\right)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + \left(\frac{d\psi - d\phi}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

が得られるので, 3 次元球面上の線要素の 2 乗は

$$dl^2 \equiv dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 = \frac{1}{4}(d\psi^2 + d\theta^2 + d\phi^2 + 2\cos\theta d\psi d\phi)$$

となる. ここから計量テンソルを読み取ると,

$$g \equiv \begin{pmatrix} g_{\psi\psi} & g_{\psi\theta} & g_{\psi\phi} \\ g_{\theta\psi} & g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{\phi\psi} & g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \therefore \det g = \frac{1}{64} \sin^2 \theta.$$

さて, 群の作用は座標の変更に对应し, そこで不変測度 dU は 3 次元球面上の固有体積を採れば良いと考えられる:

$$dU \sim \sqrt{\det g} d\theta d\psi d\phi.$$

そこで式 (1.44) のように数係数を選ぶと, 規格化条件 (1.19) が満たされる.

$U(\psi, \theta, \phi)$ の逆行列 $U^{-1} = U^\dagger$ を Hermite 共役として求めると, $U(\psi' = -\phi, \theta' = -\theta, \phi' = -\psi)$ が得られる. したがって ψ, ϕ の範囲をともに 2π としておけば, Haar 測度 (1.44) (ただし規格化定数を再定義する) は $\theta \rightarrow \theta'$ に伴って符号を変えるに過ぎず, $d(U^{-1}) = -dU$ が成り立つと考えられる.

■恒等式 (1.45–49) の証明 (教科書 p.27 の演習 1.8) Pauli 行列の性質

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k : (1.37), \quad \text{Tr}[\sigma_i] = 0$$

より $\text{Tr}[\sigma_i \sigma_j] = 2\delta_{ij}$ であり, 式 (1.45) 第 1 式はここから帰結する $SU(2)$ の生成子の規格直交性である. また上式を繰り返し用いると

$$\sigma_i \sigma_j \sigma_k = (\delta_{ij} + i\epsilon_{ijl} \sigma_l) \sigma_k = \delta_{ij} \sigma_k + i\epsilon_{ijl} (\delta_{lk} + i\epsilon_{lkm} \sigma_m) = \delta_{ij} \sigma_k - \delta_{ik} \sigma_j + \delta_{jk} \sigma_i + i\epsilon_{ijk}$$

となるので (ここでは第 3 辺までの変形で充分),

$$\text{Tr}(\sigma_i \sigma_j \sigma_k) = 2i\epsilon_{ijk}$$

を得る. これは τ_i に対する式 (1.45) 第 2 式に読み替えられる.

式 (1.46) について, 表 1 に示した直接の成分計算より,

$$\delta^{ij} \sigma_i^A \sigma_j^C = 2(2\delta_D^A \delta_B^C - \delta_B^A \delta_D^C) = 2(\delta_D^A \delta_B^C - \epsilon^{AC} \epsilon_{BD})$$

が成立している. よって式 (1.46) 右辺の係数を $-1/4 \rightarrow -1/2$ と直さねばならないと考えられる.

式 (1.47) は既に 1.7.1 項の演習で用いた

$$\epsilon^{AD} \epsilon_{BC} = \begin{vmatrix} \delta_B^A & \delta_C^A \\ \delta_B^D & \delta_C^D \end{vmatrix}$$

に他ならない.

表 1 式 (1.46) 両辺の成分計算

	A	B	C	D	$\delta^{ij}\sigma_{iB}^A\sigma_{jD}^C$		$\delta_D^A\delta_B^C$	$\delta_B^A\delta_D^C$	$2\delta_D^A\delta_B^C - \delta_B^A\delta_D^C$
①	0	0	0	0	$(-1)^2 + 0^2 + 1^2$	$= 2$	1	1	1
②	0	0	0	1	$(-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-i) + 1 \cdot 0$	$= 0$	0	0	0
③	0	0	1	0	$(-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-i) + 1 \cdot 0$	$= 0$	0	0	0
④	0	0	1	1	$(-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1)$	$= -2$	0	1	-1
⑤	0	1	0	0	②に同じ	$\rightarrow 0$	0	0	0
⑥	0	1	0	1	$1^2 + (-i)^2 + 0^2$	$= 0$	0	0	0
⑦	0	1	1	0	$0 \cdot 0 + (-i) \cdot i + 0 \cdot 0$	$= 1$	1	0	2
⑧	0	1	1	1	$0 \cdot 1 + (-i) \cdot 0 + 0 \cdot (-1)$	$= 0$	0	0	0
⑨	1	0	0	0	③に同じ	$\rightarrow 0$	0	0	0
⑩	1	0	0	1	⑦に同じ	$\rightarrow 1$	1	0	2
⑪	1	0	1	0	$1^2 + i^2 + 0^2$	$= 0$	0	0	0
⑫	1	0	1	1	$0 \cdot 1 + i \cdot 0 + 0 \cdot (-i)$	$= 0$	0	0	0
⑬	1	1	0	0	④に同じ	$\rightarrow -2$	0	1	-1
⑭	1	1	0	1	⑧に同じ	$\rightarrow 0$	0	0	0
⑮	1	1	1	0	⑫に同じ	$\rightarrow 0$	0	0	0
⑯	1	1	1	1	$1^2 + 0^2 + (-1)^2$	$= 2$	1	1	1

式 (1.46) を適用すると,

$$\begin{aligned}\delta^{ij}\text{Tr}[A\tau_i]\text{Tr}[B\tau_j] &= \delta^{ij}(A^A{}_B\tau_i^B{}_A)(B^C{}_D\tau_j^D{}_C) = A^A{}_B B^C{}_D (\delta^{ij}\tau_i^B{}_A\tau_j^D{}_C) = -\frac{1}{4}A^A{}_B B^C{}_D (\delta_C^B\delta_A^D - \epsilon^{BD}\epsilon_{AC}) \\ &= -\frac{1}{4}(A^A{}_B B^B{}_A - A^A{}_B (\epsilon^{BD}\epsilon_{AC}B^C{}_D)).\end{aligned}$$

ところで 1.7.1 項の式 (1.23) のすぐ後で見た逆行列 U^{-1} の表式は, 導出の際に U の行列式が 1 であることを用いたのに対し, U のユニタリー性は利用していないため, 任意の $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 行列 A に対しても成り立つ [2, p.382]:

$$(A^{-1})^A{}_B = \epsilon^{AC}\epsilon_{BD}A^D{}_C. \quad (4)$$

よって上式は, 最右辺の第 2 項において $\epsilon^{BD}\epsilon_{AC}B^C{}_D = (B^{-1})^B{}_A$ となるので, 式 (1.48) を与える.

最後に, 式 (1.47), 式 (4) を適用すると

$$\begin{aligned}\text{Tr}[A]\text{tr}[B] &= (\delta_B^A\delta_A^B)(\delta_C^D\delta_D^C) = (\delta_C^A\delta_B^D + \epsilon^{AD}\epsilon_{BC})A^B{}_AB^C{}_D = A^B{}_AB^A{}_B + A^B{}_A(B^{-1})^A{}_B \\ &= \text{Tr}[AB] + \text{Tr}[AB^{-1}]\end{aligned}$$

となって, 式 (1.49) が導かれる.

■グラフ的な表記 (1.50) について [2, § A2.1] Roger Penrose は自身の博士論文において, 添字の和があるテンソル表現をグラフ的な方法で書くアイデアを導入しており, それはスピン・ネットワークの起源となる美しいアイデアである^{*20}. 特にスピノル算法を考えよ. Penrose はスピノル算法の基本的要素を

^{*20} 私 [著者 Rovelli] は最近, Penrose がこの表記を “ループ表記 (loop notation)” と呼んでいたことを知った!

$$\psi^A = \begin{array}{c} \bullet^A \\ \boxed{\psi} \end{array} \quad (\text{A.35})$$

$$\psi_A = \begin{array}{c} \boxed{\psi} \\ \bullet_A \end{array} \quad (\text{A.36})$$

$$\delta_C^A = \begin{array}{c} \bullet^A \\ \vdots \\ \bullet_C \end{array} \quad (\text{A.37})$$

$$\epsilon_{AC} = \begin{array}{c} \bullet_A \quad \bullet_C \\ \frown \end{array} \quad (\text{A.38})$$

$$\epsilon^{AC} = \begin{array}{c} \bullet^A \quad \bullet^C \\ \smile \end{array} \quad (\text{A.39})$$

のように，また一般に，あらゆるテンソル対象を

$$X_{AB}^C = \begin{array}{c} \bullet^C \\ \boxed{X} \\ \bullet_A \quad \bullet_B \end{array} \quad (\text{A.40})$$

のように表す (以降，式番号は文献 [2, § A2.1] のもの). アイデアは次いで添字の縮約を，単にむき出しの (open) 線の端点を繋ぎ添字を落とすことによって表すことである. この約束はあらゆる 2 つのテンソルの積をグラフ的な方法で書く可能性を与える. 例えば：

$$\epsilon_{AB} \psi^A \psi^B = \begin{array}{c} \bullet^A \quad \bullet^B \\ \frown \\ \boxed{\psi} \quad \boxed{\psi} \end{array} \quad (\text{A.41})$$

note ここから上付き添字と縮約する因子 ϵ_{AB} を式 (A.38) のように，端点を上側で繋ぐ線で表しておいたのは理に適っていることが納得できる. 繋がれる端点にはダミー添字が対応するので，勝手な添字を充てて良い.

ところが，滑らかに線を変形しても，ダイアグラムの意味は不変であることに注意せよ. 例えば

$$\epsilon_{AB} \eta^A \eta^B = \begin{array}{c} \bullet^A \quad \bullet^B \\ \frown \\ \boxed{\eta} \quad \boxed{\eta} \end{array} \quad (\text{A.42})$$

$$= -\epsilon_{AD} \epsilon_{BC} \epsilon^{CD} \eta^A \eta^B = - \begin{array}{c} \bullet^A \quad \bullet^B \quad \bullet^C \quad \bullet^D \\ \frown \quad \smile \\ \boxed{\eta} \quad \boxed{\eta} \end{array} \quad (\text{A.43})$$

$$= -\epsilon_{CD} \delta_A^D \delta_B^C \eta^A \eta^B = - \begin{array}{c} \bullet^C \quad \bullet^D \\ \times \\ \bullet^A \quad \bullet^B \\ \boxed{\eta} \quad \boxed{\eta} \end{array} \quad (\text{A.44})$$

[式 (A.44) 左辺は式 (A.42) 左辺から書き換えるのが容易である.] (Penrose は彼がバイノル算法 (binor calculus) と言い表すところの, このグラフ的なスピノル算法を線の変形の下で不変にする修正を導入した.)

このとき恒等式 (1.47) は式 (1.50) に読み替えられる.

■ $(\sigma_i)^{AB}$ が不変テンソルであることの証明 (教科書 p.27 の演習 1.9) スピン $j = 1$ 表現における $SO(3)$ 変換を受けるベクトル添字 $i, j, \dots$ の上下は区別せず,

$$\sigma^{i,AB} = \sigma^{i,A}_C \epsilon^{CB}$$

と書いて良い. またスピン 1 表現における変換行列を R^i_j で表すと, 表現 $1/2 \otimes 1/2 \otimes 1$ における変換は

$$\sigma^{i,AB} \rightarrow R^i_j U^A_C U^B_D \sigma^{j,CD}$$

と表される. 右辺において

$$U^A_C U^B_D \sigma^{j,CD} = U^A_C (\sigma^{j,C}_E \epsilon^{ED}) U^B_D = U^A_C \sigma^{j,C}_E (-U^B_D \epsilon^{DE}).$$

ただし第 2 の等号ではダミー添字 D が規則 (1.23) に従う形に書き換えた. ここで式 (1.23) のすぐ後で見た逆行列 U^{-1} の表式と $\epsilon_{BD} \epsilon^{BE} = \delta_D^E$ より,

$$(U^{-1})^A_B \epsilon^{BE} = -U^E_C \epsilon^{CA} \quad \text{i.e.} \quad -U^B_D \epsilon^{DE} = (U^{-1})^E_D \epsilon^{DB}$$

となることを用いると, さらに

$$U^A_C U^B_D \sigma^{j,CD} = U^A_C \sigma^{j,C}_E (U^{-1})^E_D \epsilon^{DB} = (U \sigma^j U^{-1})^A_D \epsilon^{DB}$$

と書き換えられる. ところで $SU(2)$ 行列は一般に式 (1.36) のように, 単位ベクトル $\hat{n}$ 周りの角度 $(-\phi)$ の回転演算子 $U = e^{i\hat{\sigma} \cdot \hat{n} \phi/2}$ として表すことができる. また対応する回転行列 $R^i_j = R(\hat{n}, -\phi)^i_j$ を用いて, Pauli 行列の相似変換は

$$U \sigma^j U^{-1} = e^{i\hat{\sigma} \cdot \hat{n} \phi/2} \sigma^j e^{-i\hat{\sigma} \cdot \hat{n} \phi/2} = R(\hat{n}, -\phi)^j_k \sigma^k$$

となる [3, pp.223–225]. 以上より

$$R(\hat{n}, +\phi)^i_j U^A_C U^B_D \sigma^{j,CD} = R(\hat{n}, +\phi)^i_j R(\hat{n}, -\phi)^j_k \sigma^{k,A}_D \epsilon^{DB} = \sigma^{i,AB}$$

を得るので, $\sigma^{i,AB}$ は不変テンソルである [2, pp.235–236].

なお行列の積を直接計算すると, 具体的には

$$\sigma^{AB}_i = \sigma^A_i{}_C \epsilon^{CB} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

である [2, p.380].

1.7.3 体積の固有値

問題

この $SU(2)$ の数学を備えて, 面が最小の (消えない) 面積を持つ空間の量子に対する体積の固有値を計算せよ.

解

体積演算子 V は

$$V^2 = \frac{2}{9} \epsilon_{ijk} L_1^i L_2^j L_3^k \quad (1.51)$$

で決まり (式 (1.10)), ここに演算子 $\vec{L}_a$ たちは交換関係 (1.12) を満たすことを思い出そう.

空間の量子の面が最小の面積を持つならば, 対応する表現の Casimir は最小の消えない値を持つ [式 (1.14) を見よ]. したがって 4 つの演算子 $\vec{L}_a$ たちは基本表現 $j_1 = j_2 = j_3 = j_4 = \frac{1}{2}$ に作用する. したがって, それらは基本表現において Pauli 行列である, $SU(2)$ の (自己共役な) 生成子に比例する. すなわち

$$L_f^i = \alpha \frac{\sigma^i}{2}. \quad (1.52)$$

[右辺はもはや面 f 依存性を持たない.] 比例定数は長さの 2 乗の次元を持ち, Planck スケールであり, Pauli 行列の交換関係を式 (1.12) と比較することで定まる. それは $\alpha = l_0^2 = \frac{8\pi\gamma\hbar G}{c^3}$ を与える.

これらの演算子が作用する Hilbert 空間はしたがって $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ [式 (1.15) を見よ]. これは各々が $SU(2)$ の $\frac{1}{2}$ 表現に属する, 4 つのスピンノル添字 $A, B = 0, 1$ を持つ対象の空間である.

$$\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3} \otimes \mathcal{H}_{j_4} \ni z^{ABCD}. \quad (1.53)$$

演算子 $\vec{L}_a$ は a 番目の添字に作用する. したがって体積演算子は

$$(V^2 z)^{ABCD} = \frac{2}{9} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^3 \epsilon^{ijk} \sigma_{iA'}^A \sigma_{jB'}^B \sigma_{kC'}^C z^{A'B'C'D} \quad (1.54)$$

と作用する. ここで閉包条件 (1.9) を実装しよう. [それには部分空間 (1.16) を考えれば良い.]

$$\mathcal{H}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}, \quad (1.55)$$

$$\mathcal{K}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \text{Inv}_{SU(2)}[\mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}] \quad (1.56)$$

としよう. 各空間 $\mathcal{H}_j$ に対する共通の回転の下で不変な部分空間だけを求めれば良い, すなわち回転の下で不変な 4 つのスピンノル添字を持つ量を求めれば良い. この空間の次元はいくらか? $SU(2)$ 表現に対して $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1$ であることを思い出そう; これは

$$\mathcal{H}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = (0 \oplus 1) \otimes (0 \oplus 1) = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus (0 \oplus 1 \oplus 2) \quad (1.57)$$

を意味する [本稿次項で補足]. 自明な表現が 2 度現れているので, $\mathcal{K}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ の次元は 2 である. したがって 4 つの添字を持つ 2 つの独立な不変テンソルがあるはずである. それらは容易に推測できる, 何故なら利用できる不変な対象は ϵ^{AB} , および Pauli 行列 $\sigma_i^A{}_B$ の添字を上げて得られる $\sigma_i^{AB} = (\sigma_i \epsilon)^{AB}$

$$\sigma_i^{AB} = \sigma_i^A{}_C \epsilon^{CB} \quad (1.58)$$

[1.7.2 項末尾] だけだからである. したがって $\mathcal{K}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ を張る 2 つの状態は

$$z_1^{ABCD} = \epsilon^{AB} \epsilon^{CD}, \quad (1.59)$$

$$z_2^{ABCD} = \sigma_i^{AB} \sigma_i^{CD}. \quad (1.60)$$



図 17 量子重力が現れる基となった議論の 4 人の人物．左から：Landau, Bohr, Rosenfeld および Bronstein．写真は Kharkov で撮られ，1934 年 5 月 20 日の新聞 *Khar'kovskii rabochii* (The Kharkov Worker) で公開された．[本稿では教科書 p.29 から図を採った.]

[σ_i^{AB} の添字 i は σ_i^{CD} と縮約して潰すしかない.] これらは $\mathcal{K}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ における (非直交) 基底を成す．これら 2 つの状態は，与えられた面積を持つ空間の量子の全ての形を与える，Hilbert 空間の物理的な $SU(2)$ 不変な部分を張る．体積の固有値を求めるには， 2×2 行列 V_{nm}^2

$$V^2 z_n = V_{nm}^2 z_m \quad (1.61)$$

を対角化すれば充分である．この行列を計算しよう．Pauli 行列を用いた直接の計算 (実行せよ！ 式 (1.37) と (1.38) が有用である) は

$$V^2 z_1 = -\frac{i\alpha^3}{18} z_2, \quad V^2 z_2 = \frac{i\alpha^3}{6} z_1 \quad (1.62)$$

を与えるので [本稿次項で確認]，

$$V^2 = -\frac{i\alpha^3}{18} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.63)$$

であり，その対角化は固有値

$$V^2 = \pm \frac{\alpha^3}{6\sqrt{3}} \quad (1.64)$$

を与える． [$\alpha^6 \rightarrow \alpha^3$ と訂正した (次元に注意)．固有値を λ として永年方程式 $\det(V^2 - \lambda) = 0$ を解けば良い.] 符号はこれが選んだ法線の 3 つ組の相対的な向きに依存する，向き付けされた体積の 2 乗であるという事実によっている．最後の式に，上で決定した値 $\alpha = \frac{8\pi\gamma\hbar G}{c^3}$ を代入すると，最終的に (向き付けされていない) 体積の固有値

$$V = \frac{1}{\sqrt{6\sqrt{3}}} \left(\frac{8\pi\gamma\hbar G}{c^3} \right)^{\frac{3}{2}} \left[= \frac{1}{\sqrt{6\sqrt{3}}} l_0^3 \right] \quad (1.65)$$

を得る．このサイズの体積の量子が約 10^{100} 個， cm^3 に収まる．第 7 章 [7.5.3 項] では体積の固有値を計算する一般的なアルゴリズムを与える．

1.7.3 項について

■式 (1.57) 第 2 の等号について 自明な表現 $j = 0$ に対して $0 \otimes 0 = 0, 0 \otimes 1 = 1 \otimes 0 = 1$ ．また Clebsch-Gordan 条件 (1.29) で $j_1 = j_2 = 1$ とおくと，直積 $1 \otimes 1$ の既約分解に含まれる表現は $j_3 = j_1 + j_2 - k = 0, 1, 2$

と分かるので,

$$1 \otimes 1 = 0 \oplus 1 \oplus 2.$$

表現をスピン j の代わりにその次元 $N = 2j + 1$ で表し, これを両辺の次元が等しいことが明白な形に書けば,

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{5}.$$

また式 (1.57) 右辺全体は期待されるように, $2^4 = 16$ 次元の表現となっていることが見て取れる.

■式 (1.62) の確認 まず第 1 式について, V^2 の作用 (1.54) より

$$(V^2 z_1)^{ABCD} = \frac{2}{9} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^3 \epsilon^{ijk} \left(\sigma_{iA'}^A \epsilon^{A'B'} \sigma_{jB'}^B \right) \left(\sigma_{kC'}^C \epsilon^{C'D} \right).$$

ここで $\sigma_{kC'}^C \epsilon^{C'D} = \sigma_k^{CD}$ である. また $\sigma_{iA'}^A \epsilon^{A'B'} \sigma_{jB'}^B$ を (A, B) 成分に持つ行列は, 式 (1.37-38) と $\epsilon^2 = -1$ より

$$\sigma_i \epsilon \sigma_j^T = \sigma_i \epsilon (\epsilon \sigma_j \epsilon) = -\sigma_i \sigma_j \epsilon = -(\delta_{ij} + i \epsilon_{ijl} \sigma_j) \epsilon \quad (5)$$

と計算できる. すると

$$\begin{aligned} (V^2 z_1)^{ABCD} &= -\frac{2}{9} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^3 \epsilon^{ijk} (\delta_{ij} \delta^{AB} + i \epsilon_{ijl} \sigma_l^{AB}) \sigma_k^{CD} \\ &= -\frac{i \alpha^3}{18} \sigma_k^{AB} \sigma_k^{CD} = -\frac{i \alpha^3}{18} z_2^{ABCD} \quad (\because \epsilon^{ijk} \delta_{ij} = 0, \epsilon^{ijk} \epsilon_{ijl} = 2 \delta_l^k) \end{aligned}$$

となるので, 式 (1.62) 第 1 式が成り立つ.

第 2 式の確認に移ろう.

$$(V^2 z_2)^{ABCD} = \frac{2}{9} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^3 \epsilon^{ijk} \left(\sigma_{iA'}^A \sigma_l^{A'B'} \sigma_{jB'}^B \right) \left(\sigma_{kC'}^C \sigma_l^{C'D} \right)$$

の右辺において, 第 1 の因子 $\sigma_{iA'}^A \sigma_l^{A'B'} \sigma_{jB'}^B$ を (A, B) 成分に持つ行列は $\sigma_i (\sigma_l \epsilon) \sigma_j^T$ である. これは後ろ 3 つの行列の積に対して上式 (5) を再利用するか, 改めて $\sigma_i \sigma_l$ と σ_j^T にそれぞれ式 (1.37), (1.38) を適用して書き換えられる. いずれの場合も計算の手間は大差なく,

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_l \epsilon \sigma_j^T &= \delta_{ij} (\sigma_l \epsilon) - \delta_{il} (\sigma_j \epsilon) - \delta_{jl} (\sigma_i \epsilon) + i \epsilon_{ijl} \epsilon, \\ \therefore \sigma_{iA'}^A \sigma_l^{A'B'} \sigma_{jB'}^B &= \delta_{ij} \sigma_l^{AB} - \delta_{il} \sigma_j^{AB} - \delta_{jl} \sigma_i^{AB} + i \epsilon_{ijl} \epsilon^{AB} \end{aligned}$$

が得られる. 右辺の最初の 3 項は全体として添字 i, j に関して対称なので, ϵ^{ijk} との縮約に寄与を持たない. また第 2 の因子 $\sigma_{kC'}^C \sigma_l^{C'D}$ を (C, D) 成分に持つ行列は

$$\sigma_k \sigma_l \epsilon = (\delta_{kl} + i \epsilon_{klm} \sigma_m) \epsilon$$

である. 以上より

$$\begin{aligned} (V^2 z_2)^{ABCD} &= -\frac{2}{9} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^3 \epsilon^{ijk} \cdot i \epsilon_{ijl} \epsilon^{AB} (\delta_{kl} \epsilon^{CD} + i \epsilon_{klm} \sigma_m^{CD}) \\ &= \frac{i \alpha^3}{6} \epsilon^{AB} \epsilon^{CD} = \frac{i \alpha^3}{6} z_1^{ABCD} \quad (\because \epsilon^{ijk} \epsilon_{ijl} = 2 \delta_l^k, \delta_l^k \delta_{kl} = 3, \delta_l^k \epsilon^{klm} = 0) \end{aligned}$$

となって, 式 (1.62) 第 2 式が導かれる.

■スピン・ネットワークの観点から再考 本問の手続きを、体積に関するスピン・ネットワーク (7.2.2 項) の固有値問題として再解釈できる。

四面体の 4 つの面が (ゼロでない) 最小の面積を持つとき、面に双対なリンク $l = 1, 2, 3, 4$ はスピン $j = 1/2$ で色付けされている。そこでリンクは全て内向き (四面体に双対な内部の結節点 n に入射する向き) と仮定し、リンク l にホロノミーとして $SU(2)$ 行列 U_l を充てる。開いた端点の添字を A として、行列要素は $U_l^A_B$ と書ける。このとき結節点 n には結節因子 $\iota^{B_1 B_2 B_3 B_4}$ が充てられ (5.2.2 項のノート)、これは各々の添字に対する $SU(2)$ の作用の下で不変なテンソルとして定義される (式 (7.87))。すなわち結節因子は不変部分空間 (1.56): $\mathcal{K}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ に属し、本問では z^{ABCD} と表記されている。そのようなテンソルは一般に 2 種類の不変テンソル (1.59–60) の線形結合で与えられる。これらを用いて、スピン・ネットワーク状態 (7.40–41) は

$$\psi(U_l) = \iota^{B_1 B_2 B_3 B_4} U_{1 B_1}^{A_1} U_{2 B_2}^{A_2} U_{3 B_3}^{A_3} U_{4 B_4}^{A_4}$$

と書ける。

ここで体積の 2 乗 (1.51), (7.42): $V^2 = \frac{2}{9} \epsilon_{ijk} E_1^i E_2^j E_3^k$ を考える。この体積の公式は Euclid 幾何学の下で導かれたので (式 (1.10))、これを適用するには曲率を近似的に平坦と見なせる充分小さな四面体を仮定しなければならない。ただし理論の背景独立性から、体積は結節点を取り囲む四面体の座標空間に描かれる大きさに依らないと期待されること (1.3.1 項) を、あらかじめ前提とするならば、この仮定は一般性を失わない。また E_l^i はリンク l に双対な三角形に関する、式 (3.91–92) の面積ベクトルである。体積は 4 つの E_l^i から 3 つ組 E_1^i, E_2^j, E_3^k を選ぶ方法に依らない (7.5.3 項末尾の問題)。正準理論では式 (3.79) の密度化したトライアド E_a^i が、 $SU(2)$ Yang–Mills 接続 A_a^i の共役運動量、したがって演算子としては A_a^i による汎関数微分となるので、リンク l のホロノミー U_l に対して式 (4.45) のように作用する。ここから E_l^i は U_l に作用して、リンクと考えている面 (ここでは三角形) の交点 P に $\mathfrak{su}(2)$ 生成子 (1.40): $\tau^i = -\frac{i}{2} \sigma^i$ を挿入すること

$$E_l^i U_l = \mp i l_0^2 U_+ \tau_i U_- \quad (l_0^2 \equiv 8\pi\gamma\hbar G/c^3)$$

を証明できる。ここに $U_{\pm}$ は交点 P で分断されるリンク l の 2 つの部分に関するホロノミーである。また面とリンクの向きが右手系を成すと仮定すれば、複号は負号を採って良い [2, § 6.5.2]。ここで始点 n 側のホロノミーを $U_- = \mathbb{1}$ とするゲージ (3 次元理論に対して式 (4.32) の段落と 5.4.3 項, 4 次元の理論に対して 7.1 節の脚注*117) を採用すると、生成子 τ^i を終点 n に移動でき、このとき E_l^i は U_l に対して、単に左不変ベクトル場 (7.45): $\vec{E}_l = l_0^2 \vec{J}_l$ (式 (5.9–10) も見よ) として作用する：

$$E_l^i U_l = -i l_0^2 U_l \tau^i = \frac{l_0^2}{2} U_l \sigma^i.$$

これを結節点 n から見れば、結節因子は各リンクに由来する Pauli 行列の作用を受ける。ここから

- 面積要素 E_l^i ないし L_l^i を $\mathfrak{su}(2)$ 代数の要素と見なすこと (7.1 節) が動機付けられる (7.5.4 項も見よ)。
- 本問のように、 L_l^i を Pauli 行列 (1.52) として書くことが正当化される。

こうして体積演算子のスピン・ネットワーク状態 $\psi(U_l)$ に対する作用は、明示的には

$$\begin{aligned} V^2 \psi(U_l) &= \frac{2}{9} \left(\frac{l_0^2}{2} \right)^3 \epsilon_{ijk} \iota^{B_1 B_2 B_3 B_4} (U_{1 C_1}^{A_1} \sigma^{i C_1}_{B_1}) (U_{2 C_2}^{A_2} \sigma^{j C_2}_{B_2}) (U_{3 C_3}^{A_3} \sigma^{k C_3}_{B_3}) U_{4 B_4}^{A_4} \\ &= \left[\frac{2}{9} \left(\frac{l_0^2}{2} \right)^3 \epsilon_{ijk} \sigma^{i C_1}_{B_1} \sigma^{j C_2}_{B_2} \sigma^{k C_3}_{B_3} \iota^{B_1 B_2 B_3 B_4} \right] U_{1 C_1}^{A_1} U_{2 C_2}^{A_2} U_{3 C_3}^{A_3} U_{4 B_4}^{A_4} \end{aligned}$$

となる．よって $\psi(U_l)$ が体積の固有状態であるためには，結節因子に対する固有方程式

$$\frac{2}{9} \left(\frac{l_0^2}{2} \right)^3 \epsilon_{ijk} \sigma^{iC_1}_{B_1} \sigma^{jC_2}_{B_2} \sigma^{kC_3}_{B_3} l^{B_1 B_2 B_3 B_4} \sim l^{C_1 C_2 C_3 B_4} \quad (6)$$

が満たされねばならない (式 (7.103) に対応)．ところが不変テンソルの空間 $\mathcal{K}_{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}}$ の基底 (1.59–60) の線形結合で与えられる結節因子は，一般には固有状態にない．そこで固有状態を求めることは，再び式 (1.61) の行列を対角化する固有値問題に帰着する．体積の固有状態が適切な結節因子 l_v でラベルされるという事情 (式 (7.43) の箇所) も，ここから理解できる．

第 1 章の (部分的な) 総括 (本稿筆者)

第 1 章では，量子重力の核心的なアイデアに素早く至る“近道”が披露されている．それらの議論はもちろん，厳密性や一般性をいくらか犠牲にはしているものの，巧妙であり，最初の導入には適している．その 1 つは Planck 長さ程度の空間の最小単位が存在することを示す，Bronstein にならった半古典的な思考実験である (1.2 節)．もう 1 つは，空間の要素として考察の対象を四面体に限定すれば，その面積と体積の固有値を比較的容易に導出できることである (1.3 節と 1.7.3 項)．一般的な問題設定の下で，面積の固有値が角運動量のそれを想起させることから期待されるように (文献 [2, § 6.5, § 6.6])，実際に面積の演算子をあからさまに角運動量に対応付ける簡潔な考察が可能であることを，この議論は具体的に示してもいる．

間奏曲——古典的 GR の背景独立性 (筆者補論)

ループ量子重力 (LQG) には (Planck スケールで) 伝統的な時空の概念がないことが、1.2 節末尾、1.3.1 項の「体積の量子」を説明した箇所、および 1.4.2 項で手際よく言及されている。しかしそれらは文献 [2] と比べると、いささか簡単に言及されている程度という印象が否めない。実は LQG の背景独立性のアイデアは重力の古典論、すなわち一般相対性理論 (GR) に既に備わっている。そして LQG は統一理論を目指す前に、GR の背景独立性を量子重力理論に引き継ぐ困難と正面から直接向き合う、概念的に手堅く数学的にもよく定義されたアプローチと言える。そこで第 2 章の「時間のない物理」へと話を進める前に、GR の背景独立な理論としての解釈を強調し、その動機付けを行っておくことは適切であると考え。そのためには文献 [2, § 2.2] で説明されている、GR の発見へと至る概念的な道のりを概観することが有用である。

GR の難しさ

準備として GR の標準的な解釈から始めよう。私見では思うに、GR がしばしば難しく感じられる理由として、次の点が挙げられる。

1. まずは内部曲率の概念。例えば 2 次元の球面は 3 次元空間から眺めれば、曲がっていることが視覚的に把握できる。他方で我々の時空については、それを超曲面として内に含む高次元の空間の存在は必ずしも保証されないから、時空の曲がりを同じように視覚的に把握することはできない。時空の歪みは時空の内部だけで理解・定義できる量を用いて記述せねばならず、それは直観的に落とし込むのが困難である。こればかりは仕方がない。
2. 次に、時空の歪みと曲線座標系を混同しかねないこと。実際には場の方程式 (Einstein 方程式) はテンソル方程式なので、座標変換に対して不変であることが保証されている。そこで任意の座標系を用いて Einstein 方程式を解き、その座標系に関する計量テンソル場を求めれば、与えられた時空点間の座標距離を対応する真の距離に換算することができる。これは特定の座標系を用いて、座標系に依らない時空の幾何学的性質そのものを調べられることを意味する。実際ひとまず標準的な解釈としては、座標系に依らない真の距離の関係として時空の幾何学を調べることが、GR の主眼であると言える。また座標系に依らない幾何学的性質としての時空の曲がりは、曲率テンソルで特徴付けられる (図 18)。

例 Schwarzschild 解における球座標 r は、 $r = \text{const}$ の円周の真の長さが $2\pi r$ となるように定義されている。一方、赤道面 $\theta = \pi/2$ の動径 $\phi = \text{const}$ 上の $r = r_1, r_2 (> r_1)$ となる 2 点間の真の距離は $\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}}$ であり (パラメータ r_g は Schwarzschild 半径)、これは座標の読み $r_2 - r_1$ より大きい。こうして場の中心を中心とした円周 $2\pi r_1, 2\pi r_2$ の同心円に挟まれた円環の幅は $r_2 - r_1$ よりも長くなるという幾何学的な性質が見いだされる [11, p.336]。

このような空間の歪みを次のように視覚化できる [11, p.339]。図 19 では

座標が dr だけ異なる動径上の 2 点 A, B 間の距離が dr ,

座標が $d\phi$ だけ異なる円周上の 2 点 A, C 間の距離が $r d\phi$

となるように場の中心を含む赤道面上の点が xy 平面に描かれている。すなわち xy 平面は球座標 r, ϕ の読みを表示している。一方、線分 AB, AC の真上にある曲面上の線分 A'B', A'C' の長さがそれぞれ AB 間, AC 間の真の距離 $\frac{dr}{\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}}, r d\phi$ を与える。このような性質を持つ曲面の方程式は $z = \pm 2\sqrt{r_g(r-r_g)} + \text{const}$ である。空間の歪みをシートの凹みのようにイメージできるとは、このような仮想的な曲面への言及である。

3. ところが実際に距離を測るには、もの差しを用いることになる。ここで重力により空間がのびされるともの差しものばされるから、空間ののびはもの差しでは測定できないのではないかという疑問が生じ得

計量 $g_{\mu\nu}$ ($\leftrightarrow$ 重力ポテンシャル)

- 局所慣性系で $\eta_{\mu\nu}$
- 適当な座標系での計量から、幾何学(座標系によらない真の距離 ds の関係)が分かる



Christoffel記号(接続) $\Gamma_{\lambda,\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu})$ ($\leftrightarrow$ 重力の強さ)

計量(重力ポテンシャル)の1階微分までを含み、局所慣性系で 0 ($\leftrightarrow$ テンソルではない)



曲率テンソル $R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho} + \Gamma^\mu_{\alpha\rho} \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} \Gamma^\alpha_{\nu\rho}$

- 計量の2階微分までを含み、一般には局所慣性系で $\neq 0$.
- テンソルなので、全成分がゼロか否かは座標系によらない
- $\leftrightarrow$ 時空が曲がっているか否かという、座標系によらない幾何学的性質を特徴付ける

図 18 一般相対性理論の基礎概念

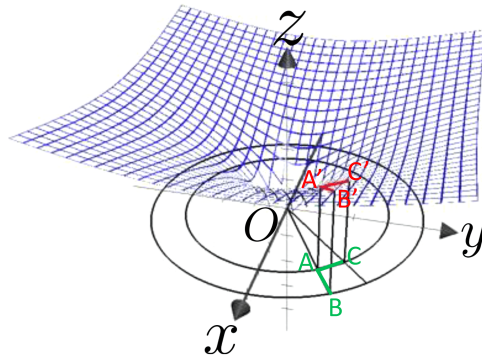


図 19 Schwarzschild 時空における空間の歪みの視覚化

る．すると仮に教科書の計算を追いかけることができたとしても、結局それは全くのナンセンスなのではないかという疑念に囚われる．これに対する答は、シュッツ『相対論入門』の重力波を説明した箇所で見えられている [12, pp.271–272].

もの差しを構成している原子は自由粒子ではなく、近くの原子から電気的な力を受けているので、もの差しは、重力による潮汐力が内部の結合力と比べてどれほど大きいかにによってそののび方が変化する．ふつう、重力は電気的な力に比べて非常に弱いので、もの差しは実際上はまったくのびることがない．したがってもの差しを使って、接近した自由粒子が潮汐力によって受ける変位を測定できるのである．つまり「空間ののび」を測定できることになる．

4. さらにもの差しがのびないのは近似的であるにすぎず、原理的には多かれ少なかれのびるとしても、距離の概念にあからさまに言及するのを避けることで、我々はなお物理的に意味のある予言を行える．実際、2つの自由粒子の間にももの差しを当てるとき、我々は2点間の(真の)距離というよりも、正確には

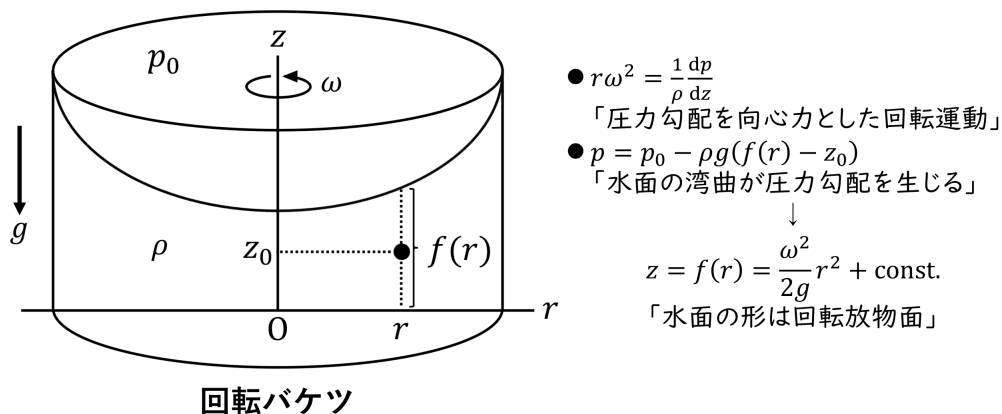


図 20 Newton の回転バケツにおいて水面は回転放物面になる (回転の角速度 ω は一定) [4, pp.232-234]

対応する範囲に含まれるもの差し中の原子の個数を調べていると言える。そして理論が予言するのはこの原子の個数に他ならない [2, pp.61-62]。

Einstein の見立てでは、GR において物理的に意味を成すのは、このような原子どうしの「時空の一致」である。より一般には、力学的対象 (重力場を含む場と粒子) の互いに対する相対的な位置付けのみが物理的に意味を成し、それらの背景時空 (ないし、その役割を果たす座標多様体) に対する位置付けには、もはや絶対的な意味がない。実はこれから見るように、上記の「与えられた時空点」すら、それ単独では意味を成さない。そこで我々は長さの概念や、伝統的な空間や時間の概念を用いずとも物理をできるということを学ばねばならない。次節では GR の提示する背景独立な物理に関する、文献 [2, § 2.2] のやや息の長い説明の要約を通じて、実際に GR からそのような教訓が引き出せることを見ていく。

古典的 GR の背景独立性

GR において重力場は時空の歪みから立ち現れると、一般には理解されている。他方で代わりに時空こそが重力場の現れに過ぎないと見なすこともできる [2, p.9]。まずはこの点を納得するために、しばらく Einstein の思考をたどることにしよう。

空間や運動を物体の相対的な位置関係およびその変化として理解する西洋文化の伝統とは対照的に、Newton は物体の運動を絶対空間に占める位置の変化 (絶対運動) として記述した。もちろん Newton 力学においても [運動方程式は Galilei 変換に対して不変なので]、絶対空間 [ないし慣性系] に対する等速直線運動を検出することはできない。しかし加速度は識別できる。このことを示す議論として、Newton は回転バケツの実験を挙げている。水を入れたバケツを回転させると、水面が凹んだ定常状態に落ち着く (図 20)。このとき水はバケツとともに回転しているので、水は周囲のバケツに対して回転しているということとはできない。したがって水面の凹みをもたらす水の回転は、絶対空間に対する運動であると Newton は主張する。これに対し Einstein は、絶対空間とそれに対する“真の運動”というアイデアは間違っていると確信していた。[再び絶対空間を慣性系と同一視すれば] 運動の法則は慣性系の間だけでなく、全ての基準系において同じでなければならない [2, pp.52-56]。

Newton の回転バケツの実験において、水は不活性で大域的な絶対空間に対して回転しているのではなく、

力学的で (dynamical) 局所的な物理的存在であるところの重力場に対して回転していると Einstein は考えた。(ここで絶対加速を取り除くという問題は、Newton 相互作用 $F = Gm_1m_2/r^2$ を静的な極限に持つ場の理論を発見するという問題と合流する。) このアイデアは Einstein によるエレベーターの思考実験から導かれる。慣性力は重力と相殺するため、自由落下するエレベーターは (少なくとも局所的には) 慣性系と区別できない。そこで Newton 的な“大域的”基準系を棄て、“局所的”慣性基準系を導入することが自然と求められる。局所慣性系は局所的な重力場によって定義されるため、局所慣性系に対する慣性/加速運動は局所的な重力場に対する運動と言える。

任意の座標系 x において現れる任意の時空点 A (座標 $x = 0$ とする) 周りの重力は、 A における局所慣性系 $X^I(x)$ (ただし $X^I(0) = 0$) からの座標 x のズレ、したがって微分係数

$$e_\mu^I(x) \equiv \frac{\partial X^I(x)}{\partial x^\mu} \quad (\text{値は時空点 } A \text{ で評価}) \quad (7)$$

で表される。これが GR で導入されるテトラード場 [例えば文献 [11, pp.325–328] を見よ] である*²¹。すると確かに重力場 $e_\mu^I(x)$ は、局所慣性系を $X^I(x) = e_\mu^I(0)x^\mu$ で定義する [その逆ではない] [2, pp.57–61]。

ここまでの議論で、時空の正体は重力場であるという描像が浮かび上がってきた。さらに GR の背景独立性へと話を進めよう。

時空点 A の周りで平坦である重力場 $e(x)$ (添字は省略) を考えよう。ここで能動的な微分同相写像により、別の時空点 B 周りの非平坦な重力場を点 A へと移せば、点 A の周りで非平坦となる新しい重力場 $\tilde{e}(x)$ が得られる。ところでもとの場 $e(x)$ に単なる (受動的な) 座標変換を施した結果が関数 $\tilde{e}(x)$ に一致するような、適当な座標変換を常に見出すことができる。するともし場の方程式が一般的な座標変換に対して共变的であるならば、2つの場 e と $\tilde{e}$ はいずれも場の方程式の解でなければならない。このとき適当な設定 (Einstein による“孔”の議論、図 21) の下で、時空点 A における物理 (重力場が平坦か否か) は一意的に決まらないことになる。これは一見すると、理論の共変性が決定論と矛盾することを意味しているように見える。しかし実際には2つの解は同じ物理的状况を表しており*²²、あくまで時空点 A それ自体に言及することが物理的に無意味だったにすぎない。我々に問うことができるのは、例えば、2粒子の世界線の交差点において場が平坦か否かである。実際、微分同相写像は世界線の交差点における重力場を交差点とともに移すので (図 21)、そのような問に対しては決定論的な予言が可能である。このように、一般に場と粒子の多様体上の位置には物理的な意味がなく、それらの相対的な配置のみが物理的な意味を持つ。こうして GR の描像からは背景時空の概念が除かれる [2, pp.65–71]。

注解 1 このように相対性理論は、その名の通り相対性の理論であることになる。真に相対性理論の名に値するのは GR であって、一般的な語法に反して Rovelli が特殊相対性理論 (SR) を非相対論的 (または前相対論的) と呼んでいるのも頷ける [2, xxi]。

注解 2 一見すると GR の主要な目的は、適当な座標系で計量 $g_{\mu\nu}(x)$ を求めることで、与えられた時空点間の真の距離 ds を、したがって座標系に依らない時空の幾何学を決定することであると言えそうである。しかし、ここで「与えられた時空点」はそれ自体ではもはや意味を成さない。同様に空間の点で流れる真の時間 $d\tau$ も、正確には空間の点に印を付けるための粒子の軌道に沿う固有時間として理解できる。

まとめよう。時空は重力場の現れであって背景時空というものはなく、あらゆるものは重力場に対して位

*²¹ すると計量テンソルは後から $g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^I(x)e_\nu^J(x)\eta_{IJ}$ で定義できることになる (η_{IJ} は Minkowski 計量)。このとき計量を用いて添字を上げ下げした量 $e_I^\mu \equiv \eta_{IJ}g^{\mu\nu}e_\nu^J$ は e_μ^I の逆行列となる (これを逆テトラードと呼ぶ) [2, p.46]。

*²² それらは Dirac が言うところのゲージ変換で互いに関係付けられる [2, pp.40–41]。

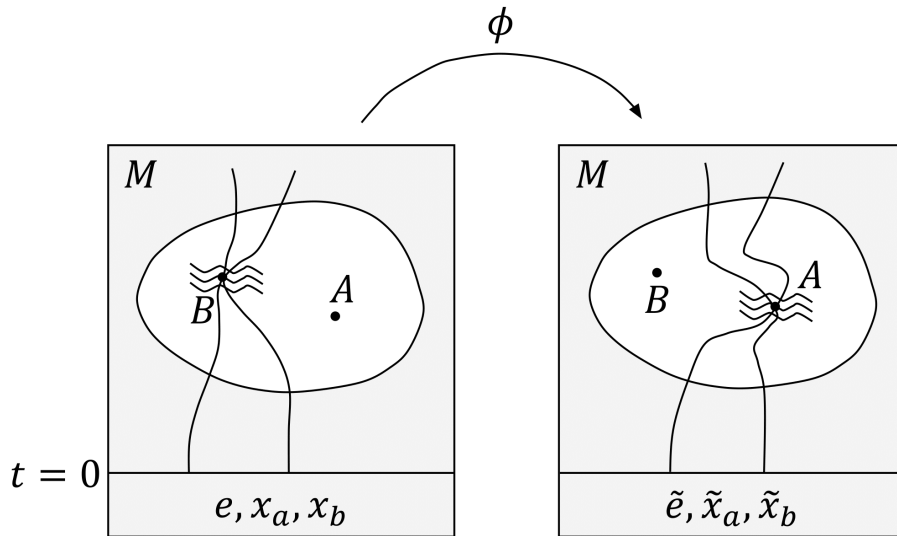


図 21 白い領域は物質のない宇宙の“孔”を表す．能動的な微分同相写像 ϕ は非平坦な (波状の) 重力場を 2 粒子 a, b の交差点とともに点 B から点 A へ動かす．(ϕ は孔の内部にのみ施す．) [孔は周りの物質 (と初期条件) から本来、重力場が一義的に決定されるはずの領域という意味を持つ.]

置付けられるという結論に我々は至った．Rovelli によるレトリックの効いた表現を引用すれば，Einstein 方程式の解は“どこか (somewhere)”にあるのではない：それは、それとの関係であらゆるものが位置付けられるところの“場所 (where)”である [2, p.21]. それは言わば、海に浮かぶ島の上に動物が住んでいると思っていたら、実際には島自体が巨大なクジラだと分かるようなものである．同様に、宇宙は時空中の場から成るのではなく、場の上の場から成るのである．これはあくまで例え話ではあるが、言い得て妙である．この観点からは重力場を含む力学的 (dynamical) ・物理的な実在を取り除けば、時空すら残らないことになる [2, p.9, pp.73–75]*²³．時空は存在せず真に存在するのは重力場であるという見方と、重力は見かけ上の幻想であって真に存在するのは時空であるという言葉遣いの、どちらを採用するかは究極的には好みの問題であり、その意味で科学哲学における空間概念をめぐる相対主義と実体主義の論争は解消されたと言える [2, pp.76–78]. いずれにせよ Newton の絶対空間や SR における Minkowski 時空に代表されるような、粒子や場のダイナミクスから独立した大域的で非活性な背景時空の概念は、根本的な基礎理論の水準ではもはや支持し得ない．

レトリック

上記のように、Rovelli の著書 [2] には魅力的な言い回しやカラフルな比喩が随所に散りばめられている．そこで重複を厭わずに、改めて印象に残ったフレーズを以下にまとめておきたい．

- それはあたかも、海に浮かぶ島の上に多くの動物が住んでいるのを見ていたようなものである：島の上の動物だ．あるとき我々は、実は島自体が巨大なクジラであることを発見する．すると動物はもはや島

*²³ したがって無重力という日常用語は不正確となる．いわゆる重力のない平坦な時空とは、正確には重力場の特定の値 $e_{\mu}^I(x) = \delta_{\mu}^I$ (したがって $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$)、あるいは平坦な重力場として理解できる [2, pp.39–40].

の上にいるのではなく、ただ動物の上に動物がいる。同様に、宇宙は時空上の場から成るのではない；それは場の上の場から成る [2, p.9].

- Einstein 方程式の解は“どこか (somewhere)”にあるのではない：
それは、それとの関係であらゆるものが位置付けられるところの“場所 (where)”である [2, p.21].
- 短いスケールでは空間的な連続性がないため、理論には (文字通り！) 紫外発散の余地 (room) がない [短い波長を収容できる連続的な空間領域がないということ] [2, p.21].
 - Planck スケールの切断と紫外の有限性は、本書では既に 1.4.1 項と 1.6 節で言及されている。

Rovelli の一般向けの本『時間は存在しない』のタイトルもまた、キャッチコピー的なスローガンとしてはインパクトがある^{*24}。

もう 1 つ付け加えるとすれば、ブラックホールのエントロピーが地平面の自由度で与えられることを説明した箇所が特筆に値する。一般には任意の物体に対して表面の自由度を勘定しても、その物体のエントロピーは得られない。ところがブラックホールはその内部が地平面によって完全に隠されているので、表面に現れる自由度だけが、我々が外から見たときの、エントロピーに寄与する自由度となる (本書の 10.3 節も見よ)。これを Rovelli はややコミカルな比喻で説明している：

自分の銀行口座に書かれた数字を足し上げれば、自分がいくらのお金を所有しているのかが分かる。このことは、任意の紙切れに書かれた数字を足し上げれば、自分の所有しているお金の量が得られることを意味しない。計算は同じかもしれないが、任意の紙切れは銀行口座ではなく、銀行口座に対してのみ計算結果は意味を成す。同様に、任意の面に対して同じ計算を実行できるものの、ブラックホールに対してのみ、その特別な性質により、計算結果はエントロピーとなる [2, p.308].

^{*24} Rovelli は他にも一般向けの本を多く出しているものの、LQG の根本的なテーマである背景時空のない物理のみならず、時間が熱・統計力学から“生まれる”こと (熱時間仮説；文献 [2] の 3.4 節と 5.5.1 項) や、量子力学の關係的解釈 (同文献 [2] の 5.6 節；独立に読める) など、主要なアイデアは既に教科書 [2] に含まれている。

第2章 時間のない物理

一般相対性理論は我々が空間と時間について考える方法と、理論的に発展を記述する方法を修正した。この変更は適切な道具を要求する。本章では、これらの道具を研究する。それらは古典論に対する Hamilton 関数 (ハミルトニアンと混同してはならない) と、量子論に対する遷移振幅である。力学の他の道具のほとんど (ハミルトニアン, 固定した時刻における量子状態, Schrödinger 方程式, ……) と違い, これらの量は量子重力においても有意義に留まる。それらを馴染みある文脈で導入するところから始めよう。

2.1 Hamilton 関数

“Hamilton 形式で (あるいはもしかすると Hamilton 形式の概念の何らかの一般化で) 取り組むことによってのみ得られる, 他の手法からは欠ける何かが常にあるはずだと感じる。”

Paul Dirac (2001)

[本節は大部分が力学の復習であるものの, 2.1.1 項は特に注意を要する.]

$\mathcal{C}$ を (任意の次元の) 配位空間として, 配位変数たち $q \in \mathcal{C}$ で記述される系をとろう。この系の発展を時間変数 $t \in \mathbb{R}$ に関して記述する。これは発展が $q(t)$, すなわち可能な運動を表す関数たち $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$ で与えられることになることを意味する。これらの量は操作的には以下のように解釈できる。我々には思い通りになる 2 種類の測定器具—— t を読み取る時計と, 変数 q に対する他のデバイス——がある。

系がとり得る物理的な運動 $q(t)$ は, $\dot{q} = dq/dt$ として, ラグランジアン $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ によって, 作用

$$S[q] = \int dt \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) \quad (2.1)$$

を最小化する運動として決定される。作用は関数 $q(t)$ の汎関数である。これが力学である。

note

- 原著には作用の記号として S と $\mathcal{S}$ の表記揺れがある。煩わしいので, 本稿では S に統一する。
- 時間に陽に依らない $\mathcal{L}$ を仮定しているのは, 力学自体は時間変数 t を選び出さないという立場を反映していると考えられる (2.3 節の定式化を見よ)。

ここで, 以下で主要な役割を演じる, 重要な対象を定義しよう。Hamilton 関数 $S(q, t, q', t')$ (ハミルトニアンと混同してはならない) は, 時刻 t に q を出発して時刻 t' に q' で終わる, 物理的な軌道 (すなわち運動方程式の解) に沿う作用の値として定義される, 4 変数 q, t, q', t' の関数である^{*25}。Hamilton 関数を作用と混同してはならない: 1 つ目は 4 変数の関数であり, 2 つ目はあらゆる関数 $q(t)$ に対して数量を与える, 軌道全体の汎関数である。その 2 つの対象は関係している: Hamilton 関数は軌道の境界によって決まる特定の軌道に関する作用である。

(q, t) で始まり (q', t') で終わる物理的な運動を $q_{qt, q't'}(\vec{t})$ で表そう [図 22 を見よ^{*26}]。すなわち, それは運

^{*25} そのような軌道が一意的ならば, Hamilton 関数は固有の関数 (proper function) である。軌道が複数あれば, それは多価であり, 軌道が存在しなければ, 対応する値に対してそれは定義されない。より明快な取り扱いについては, 本章の補完 [2.5 節] を見よ。

^{*26} この表記は必ずしも使い勝手が良いとは言えない。他の記法として $q_{q_0 t_0, q_t t}(s)$ や $q_{q_0 t_0, q_t t}(\tau)$, $q_{q_i t_i, q_f t_f}(t)$ などが考えられる。もっとも 2.3 節を念頭に置くと, この表記にも一定の合理性がある。

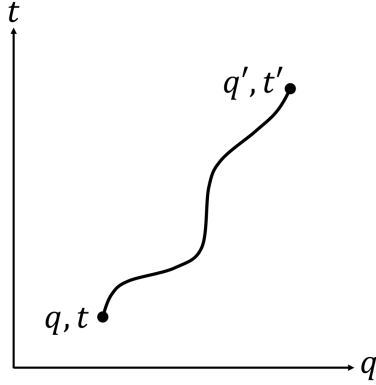


図 22 一般の現実の軌道

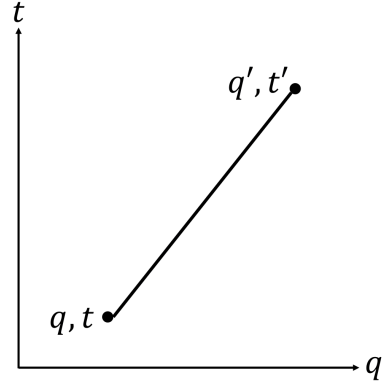


図 23 自由粒子に対する現実の軌道

動方程式の解となり，また

$$q_{qt,q't'}(t) = q, \quad (2.2)$$

$$q_{qt,q't'}(t') = q' \quad (2.3)$$

を満たす時間の関数であり，しばらくそれは一意的であると仮定する．Hamilton 関数は

$$S(q, t, q', t') = \int_t^{t'} d\tilde{t} \mathcal{L}(q_{qt,q't'}(\tilde{t}), \tilde{q}_{qt,q't'}(\tilde{t})) \quad (2.4)$$

で定義される．

例 2.1：自由粒子

作用は

$$S[q] = \int dt \frac{1}{2} m \dot{q}^2. \quad (2.5)$$

運動方程式の解は直線運動

$$v \equiv \dot{q} = \frac{q' - q}{t' - t} \quad (2.6)$$

なので [図 23 を見よ]，直ちに Hamilton 関数

$$S(q, t, q', t') = \int_t^{t'} d\tilde{t} \frac{1}{2} m \left(\frac{q' - q}{t' - t} \right)^2 = \frac{m(q' - q)^2}{2(t' - t)} \quad (2.7)$$

を得る．

演習 2.1 調和振動子の Hamilton 関数は

$$S(q, t, q', t') = m\omega \frac{(q^2 + q'^2) \cos \omega(t' - t) - 2qq'}{2 \sin \omega(t' - t)} \quad (2.8)$$

であることを示せ [解答は本稿次項]．

運動方程式の解が分かっているとき，Hamilton 関数は容易に計算できる．実に以下で示すように，Hamilton 関数を知ることは運動方程式の解を知るのに充分である．

Hamilton 関数の性質

[以降は見かけ上は 1 変数 q に対する議論となっているものの、多変数 $q = \{q^i\}$ への一般化は直接的である.]

1. 運動量は

$$p(q, \dot{q}) = \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \quad (2.9)$$

であることを思い出そう.

$$\frac{\partial S(q, t, q', t')}{\partial q} = -p(q, t, q', t'), \quad \frac{\partial S(q, t, q', t')}{\partial q'} = p'(q, t, q', t') \quad (2.10)$$

を示すことは難しくなく、ここに $p(q, t, q', t') = p(q, \dot{q}(q, t, q', t'))$ と $p'(q, t, q', t') = p(q', \dot{q}'(q, t, q', t'))$ は、始・終データで決まる運動方程式の実際の解を通じて、初めと終わりの位置と時刻の関数として表した、初めと終わりの運動量である.

これを示すために、Hamilton 関数の定義において、終点 q を変分する (時刻を固定したまま) : $q(t) \rightarrow q(t) + \delta q(t)$ (図 24 を見よ). [変分後の軌道は異なる初期条件での現実の運動に対応する.] これは

$$\delta S = \int_t^{t'} d\tilde{t} \delta \mathcal{L} = \int_t^{t'} d\tilde{t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) \quad (2.11)$$

を与える. 時間微分の変分は変分の時間微分 $\delta \dot{q} = \frac{d}{d\tilde{t}} \delta q$ なので、部分積分で、

$$\delta S = \int_t^{t'} d\tilde{t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{d\tilde{t}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) + \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_t^{t'}. \quad (2.12)$$

[被積分関数の第 2 項の符号を訂正した.]

式 (2.12) における第 1 項の丸括弧は Euler-Lagrange 方程式を含んでおり消える、何故なら定義により q は運動方程式の解だからである. 境界項は

$$\delta S = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_t^{t'} = p' \delta q' - p \delta q \quad (2.13)$$

を与え、これはまさに式 (2.10) である.

- この結果は運動方程式の解が、微分をとり逆に解くことで、Hamilton 関数から直接得られることを示している. 実際、 $p(q, t, q', t')$ を q' について逆に解くと $q'(t'; q, p, t)$, すなわち時刻 t' と初期データ q, p, t の関数としての終位置を得る.

Hamilton は書いている: “Lagrange 氏の関数はダイナミクスを記述し、Hamilton 氏の関数はそれを解く.” 非常に英国人的だ.

しかし我々はまだ真の美には達していない!

- q ではなく時刻に関して Hamilton 関数の微分をとると、どうなるか?

$$\frac{\partial S(q, t, q', t')}{\partial t} = E(q, t, q', t'), \quad \frac{\partial S(q, t, q', t')}{\partial t'} = -E'(q, t, q', t') \quad (2.14)$$

を示すことは難しくない. (式 (2.10) と比べて符号が入れ替わっていることに注意せよ. 特殊相対性理論との類似性は驚きであり不思議である. [あからさまには座標 x^I ($I = 0, 1, 2, 3$) で記述される 1 粒子系に対して、後の式 (2.16) は計量の符号系を $(-+++)$ として $\partial_I S = p_I$ とまとめられる [11, p.31].])

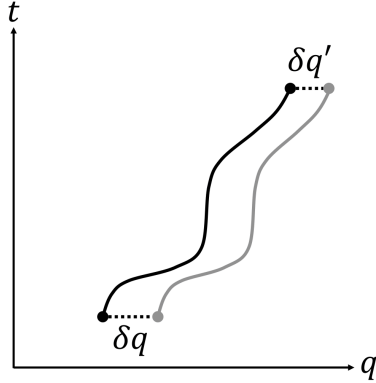


図 24 境界の時刻を固定した運動の変分

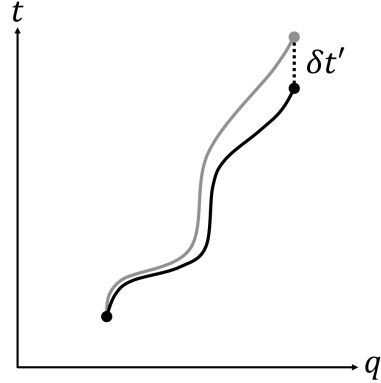


図 25 境界の位置を固定した運動の変分

式 (2.14) を導くために、境界の位置を変分せずに境界の時刻を変分することで S を変分する (図 25 を見よ)。簡単のため終点のみを変分し：

$$\delta S = \delta \int_t^{t'} d\tilde{t} \mathcal{L} = \mathcal{L}|_{t'} \delta t' - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \Big|_{t'} q' \delta t' = -(p' q' - \mathcal{L}(t')) \delta t' = -E' \delta t' \quad (2.15)$$

[第 2 の等号を本稿次項で確認]、またエネルギー $(p q' - \mathcal{L}) = E$ [左辺第 1 項のプライムも除いた] を同定する。すると

$$\vec{\nabla}_{(q', t')} S = (p', -E') \quad (2.16)$$

であり、同様に

$$-\vec{\nabla}_{(q, t)} S = (p, -E). \quad (2.17)$$

したがって、この言語において q と t はある種の対等な地位を獲得することが分かる。このことはまさに、これから見るように、従属 (q) および独立 (t) 変数の区別が意味を失う量子重力において、必要なことである。すぐ後でそうするよう強いられるように、 t と q を同等に扱いたいとき、Hamilton 関数は自然な対象となる。

- 最後に、Hamilton 関数は (変数の両方の組、すなわち (q, t) と (q', t') に関して) Hamilton-Jacobi 方程式の解である。このことは上記の方程式から直ちに帰結する。もしエネルギーが位置と運動量の関数としてのハミルトニアン $E = H(p, q)$ によって表されるならば、このとき式 (2.16) を代入すると直ちに

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) = 0 \quad (2.18)$$

が得られ、これは Hamilton-Jacobi 方程式に他ならない。Hamilton-Jacobi 方程式は多くの解を持つ；Hamilton 関数は、Hamilton-Jacobi 積分定数が初期の位置と時刻に選ばれた、この方程式の特別な解である。

例 2.2 : 自由粒子

Hamilton 関数 (2.7):

$$S(q, t, q', t') = \frac{m(q' - q)^2}{2(t' - t)} \quad (2.19)$$

から直ちに

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial q} &= -m \frac{q' - q}{t' - t} = -mv = -p, \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{m}{2} v^2 = E\end{aligned}$$

を得る。[これらは運動量とエネルギーの正しい表式を再現している.] 第 1 式を逆に解くと、運動方程式の一般解

$$q' = q + \frac{p}{m}(t' - t) \quad (2.20)$$

[等速直線運動] が与えられる。Hamilton-Jacobi 方程式は

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 \quad (2.21)$$

であり、これが式 (2.19) を解に持つことは容易に分かる。[変数分離にて Hamilton-Jacobi 方程式 (2.21) の解 (2.19) を求め、運動 (2.20) を得る計算は、文献 [2, § 3.2.5] のノートにまとめてある.]

2.1 節冒頭 (2.1.1 項の前まで) について

■調和振動子の Hamilton 関数 (2.8) の導出 (教科書 p.32 の演習 2.1) ラグランジアン

$$\mathcal{L}(q, v) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

(ただし $v = \dot{q}$) を持つ、角振動数 ω の調和振動子を考えよう。運動方程式の一般解は

$$q(t) = a e^{i\omega t} + \bar{a} e^{-i\omega t} \quad (8)$$

の形に書くことができる [q の実数条件より 2 係数 $a, \bar{a}$ は互いに複素共役]. ここでは本文の表記を改めて、境界条件

$$\text{始状態: } q(t_1) = q_1, \quad \text{終状態: } q(t_2) = q_2$$

を課す。すると係数は

$$a = \frac{q_1 e^{i\omega t_1} - q_2 e^{-i\omega t_2}}{2i \sin[(\omega(t_1 - t_2))]} \quad (9)$$

と定まる。

上式 (9) について 文献 [2, p.106] の式 (3.33) で、 α_2 (本稿の q_2) の項の符号を訂正した。

実際 $q(t)$ の式 (8) に境界条件を課すと、

$$q_1 = a e^{i\omega t_1} + \bar{a} e^{-i\omega t_1}, \quad q_2 = a e^{i\omega t_2} + \bar{a} e^{-i\omega t_2}.$$

第 1 式に $e^{-i\omega t_2}$ を、第 2 式に $e^{-i\omega t_1}$ を掛けて辺々引くと a の式 (9) を得る。 $\bar{a}$ はその複素共役で与えられねばならない。実際そのことは改めて上式の複素共役をとり、 q_1, q_2 の実数性を仮定すると直接確かめられる。

これを作用積分に代入して、Hamilton 関数 $S(q_1, t_1, q_2, t_2)$ を計算しよう。実際の運動 (8):

$$q(t) = a e^{i\omega t} + \bar{a} e^{-i\omega t}, \quad \therefore v(t) = \dot{q}(t) = i\omega(a e^{i\omega t} - \bar{a} e^{-i\omega t})$$

に対して,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{m}{2} \dot{v}^2(t) - \frac{m\omega^2}{2} q^2(t) = -m\omega^2 (a^2 e^{2i\omega t} + \bar{a}^2 e^{-2i\omega t}), \\
\therefore S &= \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \frac{i}{2} m\omega a^2 (e^{2i\omega t_2} - e^{2i\omega t_1}) + \text{c.c.} \quad (\text{c.c. は複素共役}) \\
&= \frac{im\omega}{8 \sin^2[\omega(t_1 - t_2)]} \left(-q_1^2 + q_2^2 + q_1^2 e^{2i\omega(t_1 - t_2)} - q_2^2 e^{-2i\omega(t_1 - t_2)} - 2 \cdot 2i q_1 q_2 \sin[\omega(t_1 - t_2)] \right) + \text{c.c.} \\
&\quad (\because a \text{ の式 (9)}) \\
&= \frac{m\omega}{8 \sin^2[\omega(t_1 - t_2)]} \left(4q_1 q_2 \sin[\omega(t_1 - t_2)] - (q_1^2 + q_2^2) \sin[2\omega(t_1 - t_2)] \right) \\
&= m\omega \frac{2q_1 q_2 - (q_1^2 + q_2^2) \cos[\omega(t_1 - t_2)]}{2 \sin[\omega(t_1 - t_2)]}.
\end{aligned}$$

これは式 (2.8) に他ならない。最右辺は期待されるように、作用積分の両端 t_1, t_2 の入れ替えに伴って符号が反転することが見て取れる。

なお量子力学の一般論として知られているように (2.2 節), 調和振動子の伝播関数は式 (2.8) の Hamilton 関数 S を用いて $W \sim e^{+iS/\hbar}$ と与えられることを, 直接証明できる。文献 [3, 式 (2.5.18)] (のノート) を見よ。

■ Hamilton 関数の時間微分 (2.14) について その証明 (2.15) における第 2 の等号は次のように考えれば良い [13, pp.496–499]。もとの軌道 $q(\tilde{t})$ と変分後の新しい軌道 $Q(\tilde{t})$ で評価したラグランジアンを, それぞれ

$$\mathcal{L}(\tilde{t}) \equiv \mathcal{L}(q(\tilde{t}), \dot{q}(\tilde{t})), \quad \mathcal{L}'(\tilde{t}) \equiv \mathcal{L}(Q(\tilde{t}), \dot{Q}(\tilde{t}))$$

で表す。このとき作用の変分は

$$\delta S = \int_t^{t'+\delta t'} d\tilde{t} \mathcal{L}' - \int_t^{t'} d\tilde{t} \mathcal{L} = \int_{t'}^{t'+\delta t'} d\tilde{t} \mathcal{L}' + \int_t^{t'} d\tilde{t} (\mathcal{L}' - \mathcal{L}) \simeq \mathcal{L}'(t') \delta t' + \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_t$$

と表される。ただし最後の等号では第 1 項に式 (2.13) を適用した。ここで軌道上の任意の位置 $q(\tilde{t})$ と変分後の位置 $Q(\tilde{t} + \delta \tilde{t}) \simeq Q(\tilde{t}) + \dot{Q}(\tilde{t}) \delta \tilde{t}$ が等しいことを要求すると, 変分は

$$\delta q(\tilde{t}) \equiv Q(\tilde{t}) - q(\tilde{t}) \simeq -\dot{q}(\tilde{t}) \delta \tilde{t}$$

と表されることが見出される。これを上式に代入して,

$$\delta S = \mathcal{L}'(t') \delta t' - \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right|_{t'} \dot{q}' \delta t'$$

を得る。

あるいは座標微分 (2.10) の下で, 時間微分 (2.14) は

$$\mathcal{L}(t') = \frac{dS}{dt'} = \frac{\partial S}{\partial t'} + \frac{\partial S}{\partial q'} \dot{q}' = \frac{\partial S}{\partial t'} + p' \dot{q}', \quad \therefore \frac{\partial S}{\partial t'} = \mathcal{L}(t') - p' \dot{q}' = -E'$$

と導くこともできる [14, p.176]。

2.1.1 境界項

作用の境界項への注意を払わねばならない, とりわけ重力の場合にそうであるように, 作用が 2 階微分を含むか 1 次の (first order) 形にあるときには, [以下の例のように, “first order” は作用が 1 階微分までを含む

だけでなく、力学変数について 1 次という意味も考え得る.] 自由粒子に対して 2 階微分を含む作用は

$$S[q] = \int dt \frac{1}{2} m q \ddot{q} \quad (2.22)$$

であるのに対し、1 次の作用は

$$S[q, p] = \int dt \left(p \dot{q} - \frac{1}{2m} p^2 \right). \quad (2.23)$$

境界項を無視すれば、これらの作用は全て自由粒子に対する同じ運動方程式を与える： $\ddot{q} = 0$ 。実際、それらは伝統的な作用 (2.5) と全微分だけ異なる。しかし物理的な運動上のそれらの値は異なる。Hamilton 関数は物理的な運動上の“正しい”作用の値である。“正しい”作用は Hamilton 関数がどの量に依存することを我々が望むかで決まる；すなわち、変分原理における境界でどの量を固定し続けるかである。それらを q (および t) としよう。すると運動の変分 $\delta q(t)$ は $\delta q(t) = \delta q(t') = 0$ となるように選ばれる。このとき作用 (2.5) に対して δS は $\delta \dot{q}(t)$ に依らないことが判明することを理解するのは容易である。[$\mathcal{L}(q, \dot{q})$ に対する一般式 (2.12) を見よ.] このとき変分原理はよく定義される。もし代わりに式 (2.22) を用い、境界において q (および t) を固定し続けるならば、変分が $\delta \dot{q}(0)$ に依存しないように、我々は作用に境界項

$$S|_{\text{boundary}} = m q \dot{q}|_{\text{boundary}} = p q|_{\text{boundary}} \quad (2.24)$$

を補わねばならない。

演習 2.2 試してみよ！[本稿次項を参照.]

これが重力的な作用を扱うときに、重力において境界項もまた必要となる理論的根拠である。重力の場合における正しい境界項は、York, また次いで Gibbons と Hawking によって書かれた (York 1972; Gibbons and Hawking 1977)。我々はそれを後で書く [3.3.2 項]。

note 重力場に対する Einstein–Hilbert 作用 (2.65) は場 $g_{\mu\nu}$ の 2 階導関数を含む。これに対し作用 (2.65) と等価でありながら、場 $g_{\mu\nu}$ とその 1 階導関数だけを含む作用が、文献 [11, § 95] に与えられている。

作用 (2.22) は物理的な運動の上で消えることに注意せよ。すると Hamilton 関数は境界項 (2.24)(の初めと終わりの差) によって完全に与えられる。同じことが純粋な重力において起こる。このことは Hamilton 関数が些末になることを意味しない、何故なら境界における運動量 p は全ての境界の q たちの関数として表されねばならず、そのためには依然として運動方程式を解かねばならないからである。

2.1.1 項について

■2 階微分を含む作用 (2.22) と、教科書 p.35 の演習 2.2 について 初期位置と初速度を与えると系の運動が完全に決まるという古典的因果律が満たされるのは、運動方程式が時間の 2 階の微分方程式となるとときであり、そのためにはラグランジアンは力学変数の 1 階微分までを含む必要がある。他方で変分原理では初期条件よりも、むしろ境界条件に興味を持たれる。

さて、ここでは式 (2.22) の符号を入れ替えて、2 階微分を含む作用を

$$S^{(2)}[q] = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} q \ddot{q} dt$$

で再定義する^{*27}．すると本文 (教科書 p.35) にあるように、ラグランジアンは作用 (2.5) のそれと比べて、全微分だけ異なる：

$$\frac{m}{2}\dot{q}^2 = -\frac{m}{2}q\ddot{q} + \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}q\dot{q}\right).$$

ただしラグランジアンに付加的な項が物理に影響しないのは、それが座標 q と時刻 t の関数の全微分 $\frac{d}{dt}f(q, t)$ の場合であることを思い出そう；そのとき作用への付加的な寄与は境界項 $[f(q, t)]_{t_1}^{t_2}$ となり、これは境界条件 $\delta q = 0$ の下で変分をとると落ちるので、作用が停留値をとる条件に他ならない運動方程式は不変に留まる [14, pp.4-5]．これに対し上式におけるラグランジアンは、 $\dot{q}$ にも依存する量の全微分となっている．このため、それらが同じ運動方程式を与えると言うためには、「境界項を無視すれば」(教科書 p.35) という但し書きが必要となる．

次に力学変数の 2 階微分までを含むラグランジアン $\mathcal{L}(q, \dot{q}, \ddot{q})$ で記述される系に対して、改めて最小作用原理から運動方程式を導く手続きを通じて、同じ問題を検討しよう．部分積分を繰り返すと、最小作用原理は

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}} \delta \ddot{q} \right) dt \\ &= \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}} \right) \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}} \delta \dot{q} \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}} \right) \delta q dt \end{aligned}$$

を与える．これは $\mathcal{L}$ が $\ddot{q}$ に依らないとき、もとの式 (2.12) を再現することが見て取れる．最右辺の境界項には、境界条件 $\delta q = 0$ の下で一般に消えない、 $\delta \dot{q}$ に比例する項を含んでいる．特に作用 (2.22) に対応するラグランジアン $\mathcal{L} = -\frac{m}{2}q\ddot{q}$ にこの結果を適用すると、(境界条件 $\delta q = 0$ の下で)

$$0 = \delta S^{(2)} = - \left[\frac{m}{2} q \delta \dot{q} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m \ddot{q} \delta q dt$$

が得られる．よって再び境界項を無視すれば、正しい運動方程式 $\ddot{q} = 0$ が得られる．上式の境界項を相殺するには、あらかじめ作用に含めておく境界項は、正しくは式 (2.24) の $1/2$ 倍 $m\dot{q}\delta q/2|_{\text{boundary}}$ と考えられる^{*28}．

■1 次の作用 (2.23) について 作用 (2.23) は Hamilton 関数の微分 (2.10),(2.14) を線積分した形

$$S = \int (pdq - Hdt) \quad (10)$$

をしている^{*29}．これを改めて相空間の軌道の汎関数と見なして変分原理を適用すると、Hamilton 方程式が得られる．その際、境界条件として $\delta q = 0$ を課せば充分であることを確認するために、その導出を復習しよう [14, pp.177-178]．座標と運動量を独立変数として Hamilton 関数の変分をとると、

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int \left(\delta p dq + p d(\delta q) - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q dt - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p dt \right) \\ &= \int \delta p \left(dq - \frac{\partial H}{\partial p} dt \right) + [p \delta q] - \int \delta q \left(dp + \frac{\partial H}{\partial q} dt \right) \end{aligned}$$

^{*27} 作用の停留値が極小であるためには、もとの作用 (2.5) の符号を反転してはならない [14, pp.8-9]．他方で作用 (2.22) に対しては、全体の符号に関わらず、停留値の最小性はもはや保証されないと考えられる．もっとも、そのことは運動方程式には影響しない．

^{*28} その変分が上式の境界項を打ち消す．2.1.1 項の最終段落にあるように、境界項 (2.24) は始・終状態での差をとることが想定されている．

^{*29} あるいは見かけ上は作用 $S = \int \mathcal{L} dt$ においてラグランジアンを $\mathcal{L} = p\dot{q} - H$ と書いてだけである．

となる．最右辺の境界項 $[p\delta q]$ は，境界条件 $\delta q = 0$ より消える（境界で $\delta p = 0$ まで要求しなくても良い [13, p.495]）．変分 $\delta q, \delta p$ は独立にとれるので

$$dq = \frac{\partial H}{\partial p} dt, \quad dp = -\frac{\partial H}{\partial q} dt$$

が導かれる．両辺を dt で割れば，これは Hamilton 方程式に他ならない．自由粒子に対して，これらはそれぞれ $\dot{q} = p/m, \dot{p} = 0$ を与えるので，現実の運動に沿って評価した作用 (2.23) の値は，作用 (2.5) の値に等しい．

2.2 遷移振幅

[本節は大部分が量子力学の復習であるものの，重要な論点もあり，一通り目を通すのが好ましい.]

ここで量子論に移ろう．量子論において，Hamilton 関数に対応する対象は遷移振幅である．量子論は

- Hilbert 空間 $\mathcal{H}$
- 古典的な変数に対応する演算子 $\hat{q}, \hat{p}$ ^{*30}
- 時間変数 t
- ハミルトニアン $\hat{H}$ ，あるいは等価的に^{*31}，それが定義する遷移振幅

によって定義される． $\hat{q}$ を Dirac の意味で完全な，交換する演算子の組であって^{*32}，その対応する古典的な変数は配位空間を座標付けするとしよう．これらの演算子を対角化する基底を考えよ： $\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle$ ．遷移振幅は

$$W(q, t, q', t') = \langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t'-t)} | q \rangle \quad (2.25)$$

で定義される．すなわち，遷移振幅は $|q\rangle$ 基底における，発展演算子

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} \quad (2.26)$$

の行列要素で与えられる．

遷移振幅は Hamilton 関数と同じ変数の関数であることに注意せよ．遷移振幅は量子論のダイナミクスを与える．古典物理学では，与えられた初期の何かに対して最後の何かを計算する．量子論では，与えられた初めと終わりの何かに対して，その組の確率を計算する．

例 2.3：自由粒子

自由粒子に対して：

$$W(q, t, q', t') = \langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m}(t'-t)} | q \rangle. \quad (2.27)$$

恒等子の分解 $\mathbb{1} = \int dp |p\rangle \langle p|$ を 2 つ挿入すると，

$$\begin{aligned} W(q, t, q', t') &= \int dp \int dp' \langle q' | p' \rangle \langle p' | e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m}(t'-t)} | p \rangle \langle p | q \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{i}{\hbar} p(q-q') - \frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m}(t'-t)} \end{aligned} \quad (2.28)$$

^{*30} 演算子であることを強調する必要がある場合にのみ，演算子の上にハットを付ける．明らかなきときには常に，ハットを落として $\hat{H}, \hat{q}, \hat{p}$ を H, q, p と書く．

^{*31} Stone の定理により．

^{*32} それらは最も多く交換する組を成す．

であり, ここで $\langle p|q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipq/\hbar}$ を用いた. Gauss 積分を実行すると

$$W(q, t, q', t') = A e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m(q'-q)^2}{2(t'-t)}} \quad (2.29)$$

が得られ, ここに振幅は $A = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i(t'-t)}}$ [文献 [3, p.151] で確認済み]. $\frac{m(q'-q)^2}{2(t'-t)}$ はこの系の Hamilton 関数であったことを思い出そう [式 (2.7)]. したがって

$$W(q, t, q', t') \sim e^{\frac{i}{\hbar} S(q, t, q', t')}. \quad (2.30)$$

この Hamilton 関数と遷移振幅の関係は自由粒子に対して正確であるのに対し, 一般にそれは $\hbar$ の最低次では依然として正しい. $\hbar$ を小さいと考えられるならば, Hamilton 関数は指数の前の因子がゆっくり変化する間に, 指数を素早く振動させる位相として機能する.

遷移振幅の素早く変化する部分は Hamilton 関数の指数で与えられる. これは量子論が古典的なダイナミクスを含む一般的な様式である.

2.2.1 経路にわたる積分としての遷移振幅

上記の結果は一般的であり, そのことは以下のように示せる. 遷移振幅を Feynman の方法で書く. すなわち,

$$W(q, t, q', t') = \langle q'|U(t' - t)|q\rangle \quad (2.31)$$

から出発し, 発展演算子が群を定義するという事実

$$U(t - t')U(t' - t'') = U(t - t'') \quad (2.32)$$

を用いて, これを短時間の発展演算子の積

$$W(q, t, q', t') = \langle q'|U(\epsilon) \cdots U(\epsilon)|q\rangle \quad (2.33)$$

として書く, ここに $\epsilon = (t' - t)/N$.

各ステップにおいて恒等子の分解 $\mathbb{1} = \int dq_n |q_n\rangle \langle q_n|$ を挿入する [図 26 参照]. 遷移振幅は多重積分

$$W(q, t, q', t') = \int dq_n \prod_{n=1}^N \langle q_n|U(\epsilon)|q_{n-1}\rangle \quad (2.34)$$

になる. [ただし $q_0 \equiv q$, $q_N \equiv q'$, $dq_n \rightarrow dq_1 \cdots dq_{N-1}$ と見る.] この表現は任意の N に対して正確であり, したがってそれは $N \rightarrow \infty$ としても正しい:

$$W(q, t, q', t') = \lim_{N \rightarrow \infty} \int dq_n \prod_{n=1}^N \langle q_n|U(\epsilon)|q_{n-1}\rangle. \quad (2.35)$$

ここでハミルトニアンが $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ の特別な場合を考える. 発展演算子は

$$U(\epsilon) = e^{-\frac{i}{\hbar} \left(\frac{p^2}{2m} + V(q) \right) \epsilon}, \quad (2.36)$$

すなわち 2 つの演算子の和の指数である. これは 1 つ目の指数, 掛ける 2 つ目の指数, 掛けるオーダーが $\sim \epsilon^2$ またはより高次である, 2 つの交換子で与えられる相関として書ける [Baker-Campbell-Hausdorff の公式による]. (これはもちろん厳密な手順にはほど遠く, 結果として得られる等式は場合ごとに確認しなければならない.) 小さな ϵ に対して

$$U(\epsilon) \sim e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} \epsilon} e^{-\frac{i}{\hbar} V(q) \epsilon}. \quad (2.37)$$

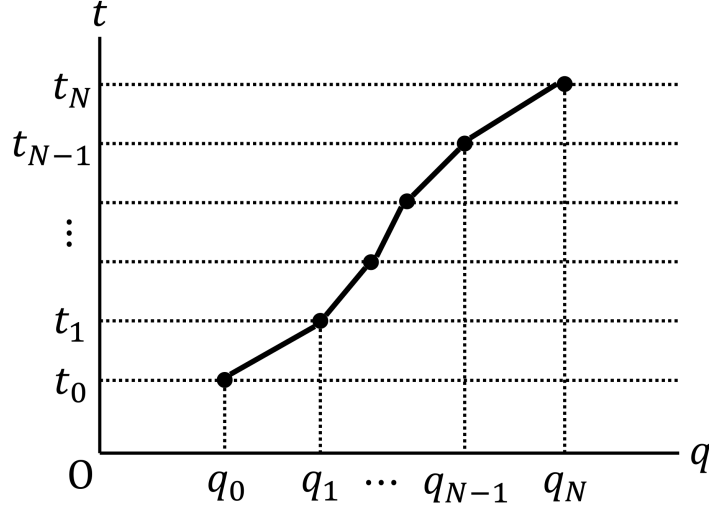


図 26 各時刻 $t_n = t_0 + n\epsilon$ ($n = 1, \dots, N-1$) における位置 q_n を指定すると、始点 (q, t) から終点 (q', t') への経路が得られる。途中の位置 q_n に関する積分 (2.39) は始点と終点を結ぶあらゆる経路が寄与するため経路積分と呼ばれる。

$|q\rangle$ 基底において 2 つ目の指数は単なる数を与える。1 つ目は上記の式 (2.28-2.29) で計算した。その 2 つは合わせて

$$\langle q_{n+1} | U(\epsilon) | q_n \rangle \sim e^{\frac{i}{\hbar} \left(\frac{m(q_{n+1} - q_n)^2}{2(t_{n+1} - t_n)^2} - V(q_n) \right) \epsilon} \quad (2.38)$$

を与え、我々が全体の乗法的な因子 $\mathcal{N}$ に吸収させる、振幅が掛かる。ところが $t_{n+1} - t_n = \epsilon$ なので、全てを合わせると

$$\begin{aligned} W(q, t, q', t') &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{N} \int dq_n e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \left(\frac{m(q_{n+1} - q_n)^2}{2\epsilon^2} - V(q_n) \right) \epsilon} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{N} \int dq_n e^{\frac{i}{\hbar} S_N(q_n)} \end{aligned} \quad (2.39)$$

を得る。最後の式の指数は古典的な作用の離散化である。遷移振幅はしたがって離散化がゼロになる極限、すなわち $\epsilon \rightarrow 0$ において、作用の離散化の多重積分として書ける。この極限は汎関数積分

$$W(q, t, q', t') = \int \mathcal{D}[q(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S[q]} \quad (2.40)$$

の定義である。この見事な構成は Feynman の博士論文 (Feynman 1948) で展開された。その興味は 2 重の意味を持つ。第 1 に、それは量子論に対する“経路にわたる和”としての新しい直観をもたらす。第 2 に、よく定義されたハミルトニアン演算子が存在しない中で、量子論を定義する試験的な仮定として式 (2.39) のような表現を採り、この理論が物理的に興味あるものかを研究することができる。これは例えば格子 QCD における論法であり、我々は量子重力において似た論法を採用することになる。

もしポテンシャル項がないかポテンシャルが単純な 2 次形式を持つならば、Gauss 積分が得られ、それはあからさまに計算できる。もし残りが摂動として扱えるならば、遷移振幅をその Gauss 的な部分の周りに展開して計算できる。基礎物理学における汎関数積分はほとんど常に：(例えば QED において) 摂動展開を追跡する方法、または (格子 QCD の場合ように) 多重積分の極限のいずれかである。

(古典物理学が良い近似となる) $\hbar$ を小さいと考えられる領域では、前に小さなパラメータを持つ振動する積分が得られ、これはその鞍点展開に支配される。 $S[q]$ の変分がゼロになるところ、すなわち古典的な解の上を除き、いたるところで振動は相殺する。これが一意的であると仮定しよう：

$$W(q, t, q', t') = \int D[q(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S[q]} \sim e^{\frac{i}{\hbar} S[q_{qtq't'}]} \sim e^{\frac{i}{\hbar} S(q, t, q', t')}; \quad (2.41)$$

すなわち、遷移振幅は Hamilton 関数の指数によって支配される^{*33}。この結果はしたがって一般的であり、量子論の古典的極限を研究する手段を与える。

場の量子論の形式的な古典的極限は、興味ある低エネルギーの現象論が場の理論によって上手く記述されない QCD の場合のように、特に物理的に重要とは判明しないかもしれない。しかし一般相対性理論は対照的に、(電磁気学のように) 長距離で上手くいき、したがって一般相対性理論によって記述される古典的領域を持つことは、量子重力の優れた理論のための必要条件である。我々は一般共変な文脈に適切に一般化した、上記で説明した技法を用いて、これから定義する重力の量子論を古典的な一般相対性理論に関係付ける。

2.2.2 遷移振幅の一般的性質

遷移振幅 $W(q, t, q', t')$ は時刻 t において q に局在するデルタ関数だった状態に対する、(q' の関数としての) 時刻 t' における波動関数でもある。したがってそれは Schrödinger 方程式を満たす、実に明らかに、両方の変数の組に関して：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} W - H\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial q}, q\right) W = 0. \quad (2.42)$$

[左辺第 2 項の符号を修正した.] Hamilton–Jacobi 方程式は Schrödinger 方程式に対するアイコナル近似 (波動方程式に対する [幾何] 光学的な近似を与える方程式) である。

実際、波動力学に関する彼の最初の論文 (Schrödinger 1926) において、Schrödinger はまさにこの近似から逆向きにたどることによって彼の方程式を導入した：彼は古典力学の Hamilton–Jacobi 形式から出発し、それを波動理論のアイコナル近似と解釈した。言い換えれば、アイコナル近似が Hamilton–Jacobi 方程式を与える波動方程式を探すことで、彼は Schrödinger 方程式を発見した。このとき遷移振幅の位相が Hamilton 関数で与えられることは、驚くべきことではない。

$S(q, t, q', t')$ と $W(q, t, q', t')$ の間には、見落としてはならない 1 つの重要な違いがある。記法の類似性は時にミスリーディングとなり得る。1 つ目は配位空間の変数 q に依存する。2 つ目は式 (2.31) で定義され、そこでは q は必ずしも古典的な変数を意味しない：それは $\hat{q}$ 演算子の固有値をラベルしている。古典的な変数と固有値のラベルは、演算子が連続的スペクトルを持つ場合に限りて同一視できる。スペクトルが離散的ならば、定義によって、 $W(q, t, q', t')$ における q は古典的な変数たちではない。それらは $\hat{q}$ 演算子の固有値の離散的なラベルたち、すなわち、その量子数たちである。例えば、線の上を運動する粒子に対して、運動量の固有基底で遷移振幅

$$W(p, t, p', t') = \langle p' | U(t' - t) | p \rangle \quad (2.43)$$

を定義できる。これは単に $W(q, t, q', t')$ の Fourier 変換で与えられることになり、運動量の変化に対する振幅を表す。ところがもし最初の章における例 [1.3 節] のように、粒子が円の上を運動するならば、運動量の

^{*33} このことは古典的な解が存在しないか、複数存在する場合の意味も明らかにする：それらは単に、遷移振幅が古典的な極限で抑制されるか、積分において複数の鞍点がある配位によって決定される。言い換えれば、 $S(q, t, q', t')$ は固有の (proper) 関数としてよく定義されるとは限らないのに対し、 $W(q, t, q', t')$ はそうではない。

固有状態は離散的 $\hat{p}|n\rangle = p_n|n\rangle = n\hbar|n\rangle$ であり、したがって振幅は

$$W(n, t, n', t') = \langle n'|U(t' - t)|n\rangle, \quad (2.44)$$

すなわち、それは(連続的で)古典的な運動量変数 p の関数ではない。そうでなければならない、何故なら振幅は量が特定の値を採る確率を決定し、また量子論においてある量は離散的な値しかとり得ないからである。この見解は、遷移振幅が古典的な配位空間の変数の関数ではなく、むしろこれから見るようにスピン・ネットワークで与えられる、対応する量子数の関数である、量子重力において重要となる。

遷移振幅は直接的な物理的解釈を持つ：それは過程の振幅を決定する。過程はその境界の量、すなわち (q, t, q', t') で特徴付けられる。理論が意味を成すためには、これらの量を測定する、すなわち数量を割り当てる方法がなければならない：それらは操作的な意味を持たねばならない^{*34}。

Hamilton 関数と遷移振幅は、古典論および量子論の他の道具の多くがもはや有効ではない、一般共変な文脈と量子重力においても、その意味を保持する道具である。我々はそれらを馴染みある文脈で導入した；今や時間のない物理に踏み出すときである [図 27 を参照]。

2.3 力学の一般共変な形式

出来事の過程の始・終状態を特徴付ける量は 2 種類ある：時刻 t 、および変数たち q 。道具主義的な観点からは、系のダイナミクスを研究するのに必要な道具は 2 種類ある： t を測定する時計、および q を測定するその他の器具たち。ここで我々はこれら 2 種類の量、 t と q を同等に扱う定式化を打ち立てる。

アナロジーにより、関数 $q(t)$ は関数の組

$$q(t) \rightarrow \begin{cases} q(\tau), \\ t(\tau) \end{cases} \quad (2.45)$$

を用いて、“媒介変数で”表せることを思い出そう [図 28 参照]。例えば関数 $q = t^{2/3}$ (ここで t は独立変数として扱われる) を、2 つの関数 $q = \tau^2, t = \tau^3$ (ここで t は従属変数の 1 つとして扱われる) を用いて表せる。逆は常には真でない：もし $q = \sin \tau, t = \cos \tau$ ならば、 q は t の固有の (proper) 関数ではない。[同じ t の値を与える $\tau = \pm\tau_0$ に対して、 q は 2 通りの値 $\pm \sin \tau_0$ をとり得る。] したがって媒介変数表示は、時計の変数 t とその他の変数たち q の間の、可能な関係の $q(t)$ 表示よりも一般的である。我々はこのより広い一般性が、物理によって要求されることを見ることになる。

もちろん、媒介変数表示は大いに冗長である。上記の例では、 $q = f(\tau)^2, t = f(\tau)^3$ はあらゆる可逆な関数 $f(\tau)$ に対して、同じ運動 $q(t)$ を定義する。したがって運動の媒介変数表示は多大な冗長性、言い換えれば、多大なゲージ不変性を担っている。これが一般相対性理論の多大なゲージ不変性、すなわち微分同相不変性の起源である。

単純な系のダイナミクスを媒介変数の形式で書こう。作用

$$S[q] = \int_t^{t'} d\tilde{t} \mathcal{L}(q(\tilde{t}), \dot{q}(\tilde{t})) \quad (2.46)$$

^{*34} これは我々が量子論の道具主義的な解釈を採用することを意味しない。過程は他の物理系との相互作用の間に系 S に起きることである。 S がそれと相互作用する物理系に影響を与える方法は、量 (q, t, q', t') で記述される。このことは Rovelli (1996b) で詳しく論じてあり、量子重力の厳格な文脈で意味を成す量子力学の解釈に関して興味のある読者にそれを勧める。

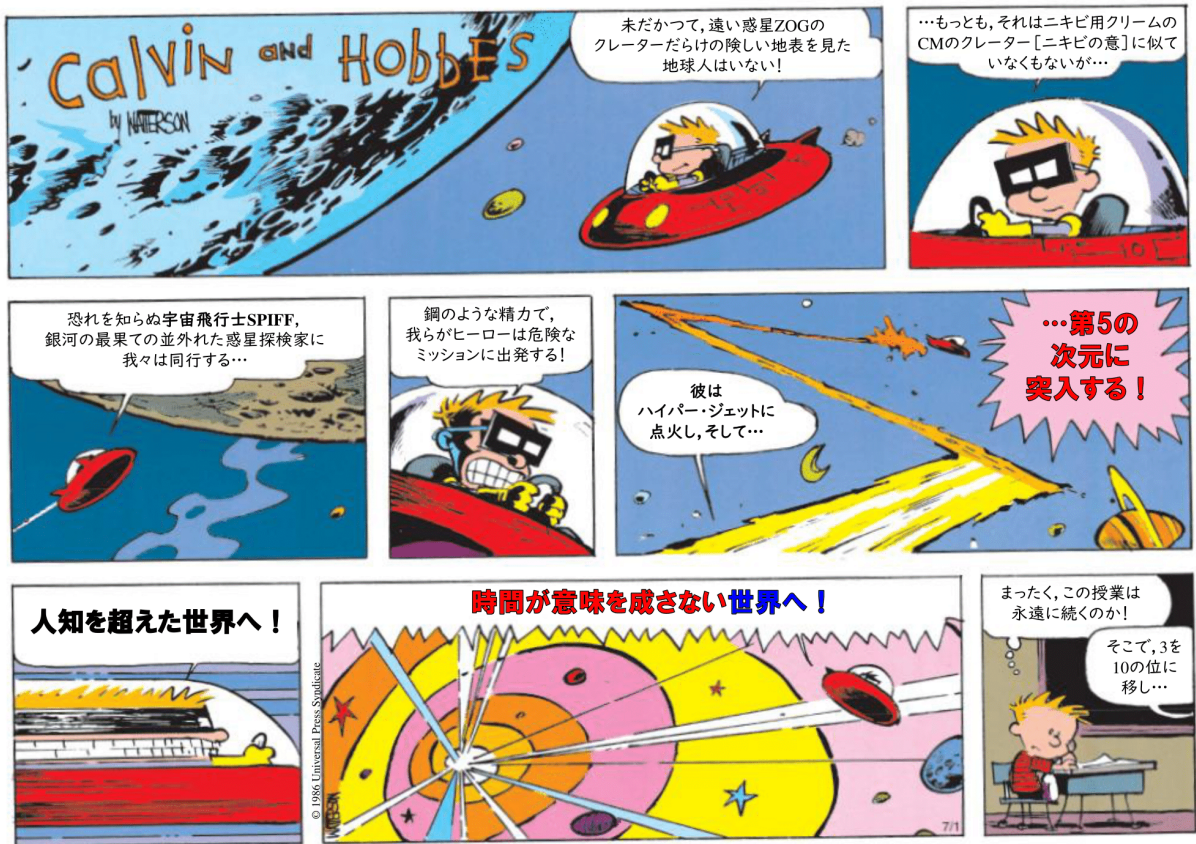


図 27 教科書 p.40 から図を採り、吹き出しの台詞を和訳に置き換えた。漫画の挿入は場合によっては不真面目な印象を与えかねないが、ここでは著者のユーモアとして好意的に受け容れたい。本書が優れた教科書であることは間違いない。

は変数変換 $t \rightarrow t(\tau)$ により、2つの関数 q と t の汎関数

$$S[q, t] = \int_{\tau}^{\tau'} d\tilde{\tau} \frac{dt(\tilde{\tau})}{d\tilde{\tau}} \mathcal{L} \left(q(\tilde{\tau}), \frac{dq(\tilde{\tau})}{d\tilde{\tau}} \right) \quad (2.47)$$

として書ける $[q(t(\tau)) \rightarrow q(\tau)]$. この作用を最小化する運動 $(q(\tau), t(\tau))$ は、もとの作用を最小化する運動 $q(t)$ を定める.

これをより具体的に行おう. 簡単のためラグランジアン

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \quad (2.48)$$

を持つ, Newton 的な系を採ろう. これは Newton の運動方程式

$$\frac{d}{dt} m \dot{q} = -\nabla_q V \quad (2.49)$$

(すなわち, $F = ma$) を与える. この系の媒介変数の形式はラグランジアン

$$\mathcal{L}(q, t, \dot{q}, \dot{t}) = \frac{1}{2} m \frac{\dot{q}^2}{\dot{t}} - \dot{t} V(q) \quad (2.50)$$

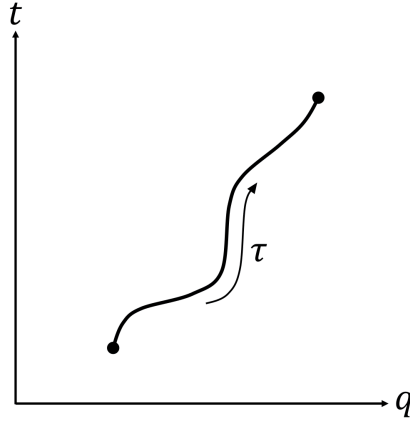


図 28 τ でパラメトライズされた相空間の軌道

を持ち、 τ において発展する 2 変数 $q(\tau)$ と $t(\tau)$ で与えられ、ここで今やドットは τ 微分を表す。[ここでは作用 (2.47) の被積分関数 $\dot{t}\mathcal{L}$ を改めてラグランジアン $\mathcal{L}$ に同定しており、それ故この $\mathcal{L}$ に対して通常の Euler–Lagrange 方程式が成立する。よって] このラグランジアン運動方程式は

$$q: \frac{d}{d\tau} m \frac{\dot{q}}{\dot{t}} + \dot{t} \nabla_q V = 0, \quad (2.51)$$

$$t: \frac{d}{d\tau} \left(-\frac{1}{2} m \left(\frac{\dot{q}}{\dot{t}} \right)^2 - V(q) \right) = 0. \quad (2.52)$$

式 (2.51) はまさに Newton の方程式であるのに対し、式 (2.52) はエネルギー保存に他ならず、それは第 1 式の帰結である。

2 式が独立でないという事実は、この系の記述が部分的に冗長である、すなわちゲージ不変性があることを意味している。ゲージは運動に沿うパラメータ τ の選択の任意性である。運動方程式と作用は、あらゆる微分可能で可逆な関数 $\tau'(\tau)$ に対して、ゲージ変換

$$q(\tau) \rightarrow q(\tau'(\tau)) \quad \text{および} \quad t(\tau) \rightarrow t(\tau'(\tau)) \quad (2.53)$$

の下で不変である。これは τ が純粋なゲージであることを意味する：物理は特定の関数 $q(\tau)$ と $t(\tau)$ にあるのではなく、これらの関数によって媒介変数的に決まる q と t の関係にある。

この系のハミルトニアン構造は重要である。運動量たちは

$$p_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = -\frac{1}{2} m \left(\frac{\dot{q}}{\dot{t}} \right)^2 - V(q), \quad (2.54)$$

$$p_q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m \frac{\dot{q}}{\dot{t}} \quad (2.55)$$

であり、これらの式を逆に解いて速度を運動量で表そうとすると、それは不可能だと分かる：写像 $(\dot{t}, \dot{q}) \rightarrow (p_t, p_q)$ は可逆でない。理由は、この写像の像が完全な (p_t, p_q) 空間ではなく、拘束 $C(t, q, p_t, p_q) = 0$ で決まる部分空間だということである [本稿次項で補足]。これは運動量の定義から容易に見出され、

$$C = p_t + H_0(p_q, q) = 0 \quad (2.56)$$

であり、ここに

$$H_0(p_q, q) = \frac{p_q^2}{2m} + V(q) \quad (2.57)$$

は容易に、我々が出発したパラメトライズされていない Newton 的な系のハミルトニアンと分かる。拘束は t の運動量共役がエネルギー (の逆符号) だと述べている。

ラグランジアン (2.50) で定義されるパラメトライズされた系の正準ハミルトニアン H は何か？ ラグランジアンからの Legendre 変換はハミルトニアン

$$H = \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} + i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \mathcal{L} \quad (2.58)$$

を与え、拘束を用いると直ちに

$$H = 0 \quad (2.59)$$

が分かり、ここで拘束が確認される。より正確には、ハミルトニアンは拘束量に比例する：

$$H \sim C. \quad (2.60)$$

[本稿次項で補足する.]

これは何ら驚くにはあたらない、と言うのもハミルトニアンは作用の発展パラメータ、すなわち τ における発展を生成するものの、 τ における変化は純粋なゲージであり、Hamilton 形式においてゲージ変換の生成子は (弱く [超曲面 $H = 0$ の上では [15, p.502]]) 消える。

これはいかなる意味でも、ダイナミクスが“凍結する”ことや、しばしば本で見かけるその他の類似の不条理を意味しない。正準ハミルトニアン H が消えることは、この定式化においてダイナミクスが、従属変数 q と t のゲージ・パラメータ τ における単一の発展によってではなく、むしろ q と t の関係で表されることを意味しているに過ぎない。

では、ハミルトニアンが消えるならば、いかにして Hamilton 形式は物理的な発展に関する情報を記録するのか？ Hamilton 形式は拘束

$$C(q, t, p_q, p_t) = 0 \quad (2.61)$$

を用いて、以下のようにそれを行う。相空間のあらゆる関数に対して、拘束量との Poisson 括弧

$$\frac{dA}{d\tau} = \{A, C\} \quad (2.62)$$

をとることによって、 τ における運動方程式を計算できる [例えば文献 [13, pp.553–554, p.557]^{*35}]; また我々はこれらに拘束方程式 (2.61) そのものを補い、物理は変数たちの τ に対する依存性にではなく、 τ を消去したときの変数たちの相対的な依存性にあることを思い出さねばならない^{*36}。こうして $C(q, t, p_q, p_t)$ により我々は全ての変数間の観測可能な相関を導ける。これがこの拘束量が時々“ハミルトニアン拘束”と呼ばれる理由である。

この定式化において、観測可能な相関を計算し理論の予言を導くためには、変数の 1 つを物理的な時間に同定する必要はないことを強調しておくことが重要である。物理的な相空間は初期データの空間ではなく、むしろ

^{*35} 超曲面 $C = 0$ 上の点においても、Poisson 括弧の定義に現れる相空間の座標軸方向の微分は、一般には超曲面 $C = 0$ から飛び出す方向への微分なので、Poisson 括弧はゼロにならない [15, pp.501–502].

^{*36} より数学的な正確さを好む読者のために、ダイナミクスのこの一般化された形の、形式的なシンプレクティックな取り扱いが、例えば Sundermeyer (1982) で説明されており、本章の補完 [2.5 節] で手短に展開する。

る可能な運動 (方程式の解) の空間と解釈され [運動は初期値 (x_0, v_0) の代わりに同じ個数の積分定数で指定される [2, § 3.2.1]], 時間変数は他の全ての変数たちと同等に扱われる. [詳しい説明が文献 [2, § 3.2] (とそのノート) にある. それは標準的な力学の見事な一般化になっている. それを 2.5.2 項のノートに簡単にまとめる.]

この構成は人工的か? そうではない. 実際, 我々は既にそれに馴染んでいる: 例えば相対論的な粒子の場合を思い出そう. 作用を

$$S = m \int d\tau \sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} \quad (2.63)$$

の形に書く. 添字 μ は 4 変数をラベルするが, 系は 3 つの自由度しか持たず, 実際この作用は τ の再パラメータ付けの下で不変である. ハミルトニアンはゼロであり, 拘束は

$$C = p^2 - m^2 = 0 \quad (2.64)$$

になる.

一般相対性理論において作用は

$$S[g] = \int d^4x \sqrt{-\det g} R[g] \quad (2.65)$$

であり, x のあらゆる再パラメータ付けの下で不変である. 正準ハミルトニアンは消え, ダイナミクスの情報は拘束量にコードされる. これはダイナミクスが重力場 $g_{\mu\nu}(x)$ と他の物質場の発展を, x (これは単なるゲージ) の関数として記述するのではなく, むしろ場たちの互いに対する相対的な発展を記述することを意味する.

我々はこの力学の一般化された定式化を “一般共変 (generally covariant)” あるいは単に “共変” と呼ぶ. この方法での力学の一般化の必要を最初に理解したのは Dirac である (Dirac 1950).

2.3 節冒頭 (2.3.1 項の前まで) について

■運動量 (2.54–55) を速度について逆に解けないことについて 式 (2.54–55) をさらに微分すると, ラグランジアン (2.48) のヘス行列は

$$A \equiv \begin{pmatrix} \partial^2 \mathcal{L} / \partial \dot{t}^2 & \partial^2 \mathcal{L} / \partial \dot{t} \partial \dot{q} \\ \partial^2 \mathcal{L} / \partial \dot{q} \partial \dot{t} & \partial^2 \mathcal{L} / \partial \dot{q}^2 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \dot{q}^2 / \dot{t}^3 & -\dot{q} / \dot{t}^2 \\ -\dot{q} / \dot{t}^2 & 1 / \dot{t} \end{pmatrix}.$$

すると $\det A = 0$ なので A は正則でない. このとき速度と運動量は 1 対 1 に対応せず, 逆に解けない (図 29 参照).

■拘束 (2.56) と正準ハミルトニアン (2.59–60) について 式 (2.59): $H = 0$ は H の定義式 (2.58) に式 (2.48), (2.54–55) を代入すれば直ちに確かめられる. そこで比例関係 (2.60): $H \sim C$ について補足する. これは Newton 力学を再現するラグランジアン (2.48) を仮定せずとも, 一般に次のように示せる. ただし以下ではラグランジアン $\mathcal{L}$ を単に L と書き, また L が時間に陽に依存する場合も想定に含める.

配位空間 $\mathcal{C}$ に時間軸を加えた $(m+1)$ 次元の拡大配位空間 $\mathcal{C}_{\text{ext}} = \mathbb{R} \times \mathcal{C}$ を考えよう. $\mathcal{C}_{\text{ext}}$ における経路にパラメータ τ を導入し, 経路の (局所) 座標成分を

$$\tilde{q}(\tau) = (q^0, q^1, \dots, q^m), \quad q^0(\tau) = t(\tau), \quad q^i(\tau) = q^i(t(\tau)) \quad (i = 1, \dots, m)$$

とする ($t(\tau)$ が単調増加関数となるようにパラメトライズする). また時間 t による微分をドット, τ による微分をプライムで表すことにする. このとき作用積分は

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q, \dot{q}) dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L\left(t, q, \frac{dq/d\tau}{dt/d\tau}\right) \frac{dt}{d\tau} d\tau \equiv \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{L}(\tilde{q}, \tilde{q}') d\tau : (2.47)$$

ヘス行列 $A = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right)$ が正則 $\leftrightarrow p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}$ を $\dot{q}$ について一意的に解ける

Legendre変換 $dH = d(p_i \dot{q}_i - L) = -p_i dq_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$ で定義されるハミルトニアン H が

q と p の関数であること自体は、ラグランジアン の正則性を仮定せずとも言える。ただし以下で見るように、ラグランジアン が正則でなければ、全ての p_i が独立とはならない。

さて、

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \phi_i(q, \dot{q}, t), \quad L(q, \dot{q}, t) = \phi_i(q, \dot{q}, t) \dot{q}_i - H(q, \phi(q, \dot{q}, t), t)$$

と書いて、ラグランジアンを $\dot{q}_i$ で微分すると

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \phi_i + \frac{\partial \phi_j}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial \phi_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial \dot{q}_i} = \phi_i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial \phi_j} \right), \quad \therefore \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial \phi_j} \right) = 0$$

を得る。よってラグランジアンが正則であれば $\dot{q}_j = \frac{\partial}{\partial \phi_j} H(q, \phi(q, \dot{q}, t), t) \equiv \psi_j(q, p, t)$ 。

さらに q, t をパラメーターとして固定すると、 $\dot{q}$ の微小変化 $\delta \dot{q}_i$ に伴う運動量 $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ の変化は、

ヘス行列要素を変換係数とする線形変換 $\delta p_i = \frac{\partial^2 L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j = A_{ij} \delta \dot{q}_j$ で与えられる。

よって状態空間から相空間への写像 $(q, \dot{q}) \mapsto (q, p = \partial L / \partial \dot{q})$ による像は、相空間の中の $N + (N - r) = 2N - r$ 次元の超曲面 $\phi^m(q, p, t) = 0$ ($m = 1, \dots, r$) を成す。また N 個の p_i のうち $(N - r)$ 個だけが独立となる。

図 29 文献 [16, p.105, pp.209–211] [15, pp.498–499] を基に作成。 N は配位変数 q_i (本図では添字は下付き) の個数。また $\text{rank } A = N - r$ 。

と書き換えられる ($q = \{q^1, \dots, q^m\}$, etc.). そこで最右辺の

$$\tilde{L}(\tilde{q}, \tilde{q}') \equiv L\left(q^0, q, q'/q^{0'}\right) q^{0'} \quad (11)$$

を拡大配位空間 $\mathcal{C}_{\text{ext}}$ におけるラグランジアンと見なす [16, § 3.1.2].

もとのラグランジアン L は $(2m + 1)$ 変数 $(q, \dot{q}, t)$ の関数であるのに対し、 $\tilde{L}(\tilde{q}, \tilde{q}')$ は $(2m + 2)$ 変数 $\tilde{L}(t, q, t', q')$ の関数であり、一見すると $(2m + 2)$ 次元の多様体上の関数のようである。しかし実際には $\tilde{L}$ は、 τ を陽に含まないことに対応する “エネルギー保存則”

$$\sum_{i=0} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q'^i} q'^i - \tilde{L} = 0 \quad (12)$$

を恒等的に満たす。[しかもエネルギーの一定値 (右辺) はゼロである.]

上式 (12) の証明 実際、全ての $\tilde{q}'$ を k 倍すると

$$\tilde{L}(\tilde{q}, \tilde{q}') \mapsto \tilde{L}(\tilde{q}, k\tilde{q}') = L\left(q^0, q, \frac{kq'}{kq^{0'}}\right) kq^{0'} = k\tilde{L}(\tilde{q}, \tilde{q}')$$

となるので、 $\tilde{L}$ は $\tilde{q}'$ の 1 次の同次関数である。よって同次関数についての Euler の定理より

$$\tilde{L}(\tilde{q}, \tilde{q}') = \sum_{i=0} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q'^i} q'^i$$

が成り立つので、上式 (12) を得る。

このため、運動は上式で表される $(2m + 1)$ 次元の超曲面に制限される。この超曲面は座標 $(q, \dot{q}, t)$ を持つため、拡大状態空間と見なせる [16, § 3.1.3, § 4.1.5].

ここで

$$q^{i'} = \frac{dq^i}{d\tau} = \frac{dq^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \dot{q}^i t'$$

に注意すると、 $\tilde{L}$ と $\tilde{q} = (q^0, q)$ に対する運動量は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^{i'}} &= \sum_{j=1} \frac{\partial(Lt')}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^{i'}} = \sum_{j=1} \frac{\partial(Lt')}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial}{\partial q^{i'}} \left(\frac{q^{j'}}{t'} \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = p_i, \\ p_t &\equiv \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^{0'}} = \frac{\partial}{\partial t'}(Lt') = L + \sum_{i=1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial t'} t' = L + \sum_{i=1} p_i \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{q^{i'}}{t'} \right) t' = L - \sum_{i=1} p_i \frac{q^{i'}}{t'} = L - \sum_{i=1} p_i \dot{q}^i = -H_0 \end{aligned}$$

と計算される [16, § 3.1.4]. 第 2 式 $p_t = -H$ より恒等的に式 (2.56):

$$C(q^0, q, p_t, p) \equiv p_t + H_0(q, p, t) = 0$$

が成り立つので、運動は $(2m+2)$ 次元の空間 $(\tilde{q}, \tilde{p}) = (q^0, q, p_0, p)$ における、 $(2m+1)$ 次元の超曲面 Σ に制限される。

参考

$$H = \sum_{i=0} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^{i'}} q'^i - \tilde{L} = \left(p_t + \sum_{i=1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L \right) q^{0'} = (p_t + H_0) q^{0'} = C q^{0'} \quad (13)$$

より、条件式 $p_t = -H_0$ は制約条件 (12) と等価である。また式 (2.60): $H \sim C$ における比例係数は $q^{0'}$ であることが見出される。

超曲面 Σ は座標 (q, p, t) を持つため、拡大相空間と見なせる [16, § 4.1.5].

2.3.1 一般共変な系の Hamilton 関数

パラメトライズされた系のラグランジアン (2.50) に戻り、これがラグランジアン $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q)$ を持つ伝統的な Newton 系と、同じ物理を記述することを頭に留めておこう。ラグランジアン (2.50) の Hamilton 関数は何か？ 定義により

$$S(q, t, \tau, q', t', \tau') = \int_{\tau}^{\tau'} d\tilde{\tau} \mathcal{L}(q_{qt\tau, q't'\tau'}, t_{qt\tau, q't'\tau'}, \dot{q}_{qt\tau, q't'\tau'}, \dot{t}_{qt\tau, q't'\tau'}) \quad (2.66)$$

であるが [積分変数を $\tau \rightarrow \tilde{\tau}$, 積分範囲の境界を $\tau_i \rightarrow \tau, \tau_f \rightarrow \tau'$ と修正した], 積分変数を変更して、これを

$$S(q, t, \tau, q', t', \tau') = \int_t^{t'} d\tilde{t} \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{dq}{d\tilde{t}} \right)^2 - V(q) \right) = S(q, t, q', t') \quad (2.67)$$

と書ける。すなわち：(i) $S(q, t, \tau, q', t', \tau')$ は τ と τ' に依存せず、

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = 0, \quad (2.68)$$

また (ii) その値はもとの Newton 系の Hamilton 関数 $S(q, t, q', t')$ に正確に等しい！ 一般共変な系の Hamilton 関数は発展パラメータに依存せず、2 変数 q と t の境界値のみに依存する。Hamilton 関数は時間において発展する系と一般共変な系の両方に対してよく定義される：Hamilton 関数は常に同じ対象であり、それは q と t のような物理量にのみ依存する。

そのような系の Hamilton 関数に対する Hamilton–Jacobi 方程式

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} + H\left(\frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) S(q, t, q', t') = 0 \quad (2.69)$$

は、式 (2.68) により第 1 項を失い、また式 (2.60) により第 2 項は

$$C\left(\frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) S(q, t, q', t') = 0 \quad (2.70)$$

をもたらす、ここに C は拘束量である。これが Hamilton–Jacobi 方程式の一般共変な形である。それは q と t を同等に扱っており、拘束量 C によって決定される。

もし拘束量 C が Newton 的な形 (2.56) を持つならば、この方程式はハミルトニアン H_0 を持つものの Newton 系の、標準的な非相対論的 Hamilton–Jacobi 方程式 (2.18) になる！ しかしそれはより一般的な形もとれる。

2.3.2 部分的観測量

同等に扱われるとき、変数 q と t は部分的観測量 (*partial observables*) と呼ばれる。配位空間の変数と時刻は、定義により、部分的観測量である。物理は部分的観測量の相対的な発展に関係している。形容詞“部分的”の理由は、部分的観測量が (Newton 系に対して) t 変数も含んでいる事実を強調することである；すなわちこれらの量を、時に“観測量 (observables)”と呼ばれる、配位空間または相空間の関数と区別することである。

“部分的観測量”という表現は重要である、何故なら“観測量”という言葉だけでは混乱を招くからである、と言うのも、それは量子力学、非相対論的な物理、一般相対論的な物理、拘束系の Dirac 理論……において異なる意味を持つ。混乱の主な要因は 2 つの概念の混同に由来する：

- 初期状態の知識から予言できる量。例えば：後の何らかの時刻における粒子の位置。
- 測定できる、すなわち、それに対する測定器具がある量。例えば：位置の変数 q 、および時間変数 t 。

系の部分的観測量の数は常に (物理的な) 自由度の数より大きい、何故なら自由度の数は、その発展が理論によって予言できる量の数で与えられ、これらは他方で部分的観測量の間の関係で与えられるからである。

部分的観測量の空間は拡大配位空間 $\mathcal{C}_{\text{ext}} = \mathcal{C} \times \mathbb{R}$ と呼ばれる。この空間における一般的な点を $x \in \mathcal{C}_{\text{ext}}$ で表そう (時に同じ文字で表す、時空座標と混同しないように)。議論した例では $x = (q, t)$ 。これらの道具を量子論に持ち込む前に、上記で展開した共変な定式化を要約する；それはダイナミクスの一般化された定義へと導く。これを次項で行う。

2.3.3 時間のない古典物理

$\mathcal{C}_{\text{ext}}$ を拡大配位空間とし、 $x \in \mathcal{C}_{\text{ext}}$ としよう。系の作用は $\mathcal{C}_{\text{ext}}$ における運動 $x(\tau)$ の汎関数

$$S[x] = \int d\tau \mathcal{L}(x, \dot{x}) \quad (2.71)$$

であって、再パラメータ付け $x(\tau) \rightarrow x(\tau'(\tau))$ の下で不変である。この不変性は正準ハミルトニアンが消えることと、 $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}$ として拘束 $C(p, x) = 0$ の存在を意味する [本稿次項で補足]。Hamilton 関数 $S(x, x')$ は $\mathcal{C}_{\text{ext}}$ における 2 点の関数であり、その 2 点を境界とする運動方程式の解に沿った作用の値として定義される。Hamilton 関数は拘束方程式

$$C\left(\frac{\partial S}{\partial x}, x\right) = 0 \quad (2.72)$$

を満たし、これが Hamilton-Jacobi 方程式の共変な形である。[式 (2.10) の証明を直接一般化すると $p' = \frac{\partial S}{\partial x'}$ が得られるので、式 (2.72) が成り立つ.] Hamilton 関数の知識は運動方程式の一般解を以下のように与える。微分

$$p = -\frac{\partial S(x, x')}{\partial x} = p(x, x') \quad (2.73)$$

は始運動量を定義する。始運動量 p と部分的観測量 x を固定すれば、式 (2.73) は部分的観測量 x' の間の関係を与える [2.1 節 (教科書 p.34 の箇条書き番号 2 の一般化)]。この関係が力学的な理論の予言内容である。

構成は“時間”という言葉に言及すること、または“時間変数”を参照することを、何ら要求しないことに注意せよ。

例 2.4 : 自由粒子

この場合には 2 つの部分的観測量がある : $x = (q, t)$ 。Hamilton 関数は $S(x, x') = \frac{m(q' - q)^2}{2(t' - t)}$ 。運動量たちは

$$p_q = -\frac{\partial S(x, x')}{\partial q} = m \frac{q' - q}{t' - t}, \quad p_t = -\frac{\partial S(x, x')}{\partial t} = \frac{m(q' - q)^2}{2(t' - t)^2}. \quad (2.74)$$

1 つ目の関係から

$$q'(t') = q + \frac{p_q}{m}(t' - t) \quad (2.75)$$

が導かれ、これは運動方程式の一般解であり、ここでは 2 つの同等に扱われる部分的観測量の間の関係として導かれている。[式 (2.74) 第 2 式は第 1 式が含意するエネルギー保存則 $(p_t =) p_q^2 / 2m = \text{const.}$ を表す.]

まとめると、ラグランジアンが発展パラメータの再パラメータ付けの下で不変な系は、発展パラメータが純粋なゲージとなる系である。正準ハミルトニアンは消え、運動量たちは拘束 $C(p, x) = 0$ を満たし、この拘束が力学的な情報をコードしている。[式 (2.73) を予言に用いる場合にも、その前提として Hamilton 関数を求めるには、拘束 C に対する式 (2.72) を解く必要がある.] Hamilton 関数はラグランジアンが発展パラメータに依存せず、それが満たす Hamilton-Jacobi 方程式は単に式 (2.72) である。あらゆる標準的な Newton 系はこの方法で再定式化できるものの、この方法で定式化された系を全て Newton 系として表現することはできない (その例を本章の補完 [2.5 節] で与える)。

2.3.3 項について

■拘束 $C(p, x) = 0$ (教科書 p.46) について 大まかには式 (12) と同様に証明できる。ここでラグランジアンの変換性が、作用のゲージ不変性の帰結であることが重要な点である。部分的観測量を $x = \{x^a\}$ のように添字 a でラベルする。

作用 (2.71) がパラメータの付け替え $x(\tau) \rightarrow x(\tau(\tau'))$ の下で不変に留まるには、ラグランジアンは

$$\mathcal{L}(x(\tau), \dot{x}(\tau)) = \frac{d\tau}{d\tau'} \mathcal{L}(x(\tau'), \dot{x}(\tau'))$$

を満たさねばならない。ここで引数は

$$x(\tau') \equiv x(\tau(\tau')), \quad \dot{x}(\tau') \equiv \frac{dx(\tau')}{d\tau'} = \frac{d\tau}{d\tau'} \frac{dx(\tau(\tau'))}{d\tau} = \frac{d\tau}{d\tau'} \dot{x}(\tau)$$

を意味する。よって引数 $\dot{x}(\tau)$ を全て $k \equiv \frac{d\tau}{d\tau'}$ 倍すると、ラグランジアンは k 倍になる：

$$\mathcal{L}(x(\tau), k\dot{x}(\tau)) = k\mathcal{L}(x(\tau), \dot{x}(\tau)).$$

これは $\mathcal{L}$ が $\dot{x}$ の 1 次の同次関数であることを意味するので、同次関数についての Euler の定理より

$$\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^a} \dot{x}^a = p_a \dot{x}^a \quad \text{i.e.} \quad \text{正準ハミルトニアン } H \equiv p_a \dot{x}^a - \mathcal{L} = 0.$$

またこの構成から $H(\tau) \equiv H(x(\tau), p(\tau))$ は上記のパラメータ付け替えで k 倍されることを踏まえ、 H に比例する拘束量 C を定義できる。

参考 拘束 $H = 0$ の下で $\mathcal{L} = p_a \dot{x}^a$ なので、作用 (2.71) は

$$S = \int \mathcal{L} d\tau = \int p_a dx^a \quad (14)$$

と書き換えられる (伝統的な式 (10) と比較される)。これは文献 [2, p.120] の式 (3.84-85) の一般化にあたる。

■議論の順序を逆転させること 我々は伝統的な力学を一般化して、共変な定式化を探り当てた。逆にいきなり原理として 2.3.3 項から出発し、部分的観測量の 1 つを時間変数に選び出して

$$x^0 = t, \quad x^i = q^i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

とくと、もとの力学が再現されることを改めて確かめることもできる。実際、式 (11):

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \mathcal{L}_0 \left(t, q, \frac{dq}{dt} \right) \dot{t}$$

を思い出し、また $a = 0$ に対する運動量 $p_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^a}$ を特に p_t と書くと、上記の正準ハミルトニアンはこのとき式 (13):

$$(0 \Rightarrow) H = p_a \dot{x}^a - \mathcal{L} = \left(p_t + p_i \frac{dq^i}{dt} - \mathcal{L}_0 \right) \dot{t} = (p_t + H_0) \dot{t}$$

を再現する。ここに

$$H_0(p_i, q^i, t) \equiv p_i \frac{dq^i}{dt} - \mathcal{L}_0$$

は通常ハミルトニアンであり、右辺の速度は運動量で表せる (図 29)。

ここから $\frac{\partial S}{\partial x^a} = p_a$ は

$$\frac{\partial S}{\partial t} = p_t = -H_0, \quad \frac{\partial S}{\partial q^i} = p_i$$

に帰着する。また Hamilton-Jacobi 方程式 (2.72) は 2.3.1 項末尾にあるように、式 (2.18) に戻る。

2.4 時間のない量子物理

共変な系の量子論は次で定義される。

- 古典的な変数たち $x \in \mathcal{C}_{\text{ext}}$ とそれらの運動量共役に対応する、 $\mathcal{K}$ における自己共役な演算子 x と p_x が定義されるところの、運動学的 Hilbert 空間と呼ばれる Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ 。
- 古典的極限が拘束量 $C(x, p)$ である拘束演算子 C 。等価的に、それが定義する遷移振幅 $W(x, x')$ [式 (2.78)] に取り組むことができる。

ハミルトニアン、時間変数、および Schrödinger 方程式が存在しないことに注意せよ。

離散的スペクトル

しばらくゼロが C の離散的スペクトルに属していると仮定しよう。このとき方程式

$$C\psi = 0 \quad (2.76)$$

を満たす状態の成す $\mathcal{K}$ の部分空間は $\mathcal{K}$ の真部分空間であり [連続的スペクトルの場合と対照的 (式 (2.80) のすぐ後を見よ)], したがってそれは Hilbert 空間である。それは物理的状態空間と呼ばれ, $\mathcal{H}$ で表される。式 (2.76) は Schrödinger 方程式を共変な場合に一般化する。これは様々な方法で理解できる。第 1 に方程式は正確に, パラメトライズされた形の Newton 系——既に見たように, 拘束量が形 (2.56) を持つ——に対する Schrödinger 方程式である。(それをあからさまに書いてみよ! [本稿次項を見よ。]) 第 2 に, それ [Schrödinger 方程式] は古典的極限が Hamilton–Jacobi 方程式 (2.72) となる, 波動方程式である [例えば文献 [3, p.139]]. したがってこの方程式は, Newton 系に対する正しい形と正しい古典的極限を持つ。これは共変な量子系の量子ダイナミクスの定義として, 真剣に受け止めねばならないこと以上のものである。そうすることで, 我々は真の物理的な仮説を立てていることになる。

式 (2.76) は Wheeler–deWitt 方程式と呼ばれる (DeWitt 1967)。それは初め Bryce deWitt によって, 波動方程式の幾何光学近似と解釈される Hamilton–Jacobi 方程式から出発して, すなわち中心対称なポテンシャルにおける粒子の Hamilton–Jacobi 方程式から出発して Schrödinger が彼の方程式を発見したのとまさに同じ方法で, 量子一般相対論の文脈で導かれた。John Wheeler はその方程式の重要性を理解し, それを真剣に受け止めた (Wheeler 1968)。

理論から予言を導くのに必要な現実的なものである遷移振幅を, この方程式がどのように定義するのかを調べよう。単に正射影 (orthogonal projection) で与えられる, $\mathcal{K}$ を $\mathcal{H}$ に移す写像 P が存在する。遷移振幅は演算子 x を対角化する基底における, P の行列要素で定義される:

$$W(x, x') = \langle x' | P | x \rangle. \quad (2.77)$$

遷移振幅は遷移確率を定める。これは全ての部分的観測量を同等に扱う関数であることに注意せよ。形式的には, この定義を

$$W(x, x') = \langle x' | \delta(C) | x \rangle \sim \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \langle x' | e^{i\tau C} | x \rangle \quad (2.78)$$

と書き換えることができ (指数の積分はデルタ関数である) [本稿次項で補足], また C はパラメータ τ における発展を生成するので [古典的には式 (2.62)], これを

$$W(x, x') = \int_x^{x'} D[x(\tau)] e^{\frac{i}{\hbar} S[x]} \quad (2.79)$$

という形の Feynman の言語に翻訳でき, 積分は経路のあらゆるパラメータ付けに対して, x を出発し x' に至る全ての経路にわたる。作用はパラメータ付けに依存しないので, 積分は無視する必要のある多大なゲージの冗長性を含む。Newton 系に対して, $t = \tau$ によるパラメータ τ のゲージ固定はこの遷移関数の定義を, 前の Newton 的なそれ (2.39) に帰着させる。次のセクションでは極限としての汎関数積分 (2.79) のより正確な定義に立ち返る。

連続的スペクトル

もしゼロが C の連続的スペクトルに属していても同じ構成が成り立つものの, この文脈では, 伝統的な量子論において連続的スペクトルの演算子とその一般化された固有状態を扱うことを可能にするのとアナログス

な、より洗練された数学が必要になる。この洗練された数学の必要性は時に、時間または確率に関する深刻な問題の証拠と誤解されるが、そうではない。それらを取り扱う方法をスケッチしよう。簡単な可能性は、その双対 (dual) が一般化された状態の空間 S^* を定義する、 $\mathcal{K}$ の稠密な (dense) 部分空間 S を採ることである^{*37}。このとき式 (2.76) の解の空間 $\mathcal{H}$ は、あらゆる $\phi \in S$ に対して $\psi(C\phi) = 0$ となる状態 $\psi \in S^*$ から成る S^* の部分空間と解釈され、写像 P は S から $\mathcal{H} \rightarrow (P\phi)(\phi') = \int d\tau \langle \phi | e^{i\tau C} | \phi' \rangle$ で定義される。空間 $\mathcal{H}$ はやはり、スカラー積 $\langle P\phi | P\phi' \rangle \equiv (P\phi)(\phi')$ を持つ Hilbert 空間である。演算子 P は、それが離散的スペクトルの場合にのみ真の射影演算子であるとしても、しばしば拡大解釈により“射影子 (the projector)”と呼ばれる。

連続的スペクトルの例として、1次元における自由な Newton 的粒子を考えよ。運動学的 Hilbert 空間は $\mathcal{K} = L_2[\mathbb{R}^2, dqdt]$ であり、部分的観測量の演算子とその運動量は、対角的な演算子 q と t 、および運動量演算子 $-i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$ と $-i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ であり、拘束演算子は

$$C = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \quad (2.80)$$

なので Wheeler–deWitt 方程式は正確に Schrödinger 方程式となる。 S を Schwartz 空間に、 S^* を緩増加超関数 (tempered distributions) の空間に採ることができる (Gel'fand and Shilov 1968)。物理的状態 (の) 空間 $\mathcal{H}$ は S^* における解空間であって、 $\mathcal{K}$ の中になく、何故なら解たちは $dqdt$ において 2 乗可積分でないからである。遷移振幅は

$$W(x, x') = W(q, t, q', t') = \int d\tau \langle q', t' | e^{\frac{i}{\hbar} \tau C} | q, t \rangle \quad (2.81)$$

で与えられる。これは以前 [式 (2.28)] のように恒等子の分解の挿入により計算でき、

$$W(q, t, q', t') = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d\tau \int dp \int dp_t e^{ip(q'-q)/\hbar} e^{ip_t(t'-t)/\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} \tau \left(p_t + \frac{p^2}{2m} \right)}. \quad (2.82)$$

[$\hbar$ を補い、係数の分母を $2\pi \rightarrow (2\pi\hbar)^2$ と改め、 $x \rightarrow q$ と修正した.] τ 積分はデルタ関数 $\delta\left(p_t + \frac{p^2}{2m}\right)$ を与え、すると Gauss 積分は結果 (2.29) に帰着する。演算子 P は単に Fourier 変換における $\delta\left(p_t + \frac{p^2}{2m}\right)$ で与えられる [以上を本稿次項で確認]。再び何ら物理的なハミルトニアンに言及することや、部分的観測量の 1 つを時間のパラメータに選ぶことなく、物理的に解釈される遷移関数を得たことに注意せよ。

解釈

方程式

$$W(q, t, q', t') = \langle q', t' | P | q, t \rangle \quad (2.83)$$

は以下のように解釈できる。 $\mathcal{K}$ における非物理的状態 $|q, t\rangle$ は時空点 (q, t) に局在したデルタ関数である。それは時刻 t に配位 q にある系を表す。粒子に対して、これは粒子が時空点 $x = (q, t)$ にあるという事象である。演算子 P はこの運動学的状態を Schrödinger 方程式の解、すなわち Schrödinger 方程式の解となり、時刻 t で空間の点 q に局在している、時空における波動関数の上に射影する。状態 $\langle q', t' |$ との縮約は、この波動関数の点 (q', t') における値——すなわち t において q にあった粒子が t' において q にある振幅——を与える。これは事象 “ (q, t) における粒子” を表す運動学的状態と、事象 “ (q', t') における粒子” を表す運動学的状態の物理的な重なり (overlap) である。この全ては単に、量子力学的な粒子の伝統的な物理を記述する共変

^{*37} Gel'fand の 3 つ組 (triple) $S \subset \mathcal{K} \subset S^*$ を与える。実際、厳密に言えば $\mathcal{K}$ 上の Hilbert 空間の構造は必要ない。

な言語である．その定式化は q と t を同等に扱う．1つの理論と別の理論の振舞いの違いは，単にそれらが C に異なる形で入り，したがって Wheeler-deWitt 方程式の解が q または t に関して異なる性質を持つという事実にある．

Hamilton 形式の言語 (時間発展, ハミルトニアン, Poincaré 対称性, ……) は量子重力で用いることができないのに対し，ここで説明した言語は有効に留まる．

2.4 節冒頭 (2.4.1 項の前まで) について

■Wheeler-deWitt 方程式 (2.76) が拘束量 (2.56) に対して Schrödinger 方程式を再現すること (教科書 p.47) の確認 式 (2.56) の形の拘束量 C に対応する演算子は

$$C = p_t + H_0(p_q, q) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \right)^2 + V(q)$$

なので，Wheeler-deWitt 方程式 (2.76): $C\psi = 0$ は通常の Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q) \right) \psi$$

に帰着する．特例として $V(q) = 0$ の場合が式 (2.80) の箇所に明記されている．

■伝播関数 (2.77-78), (2.81), (2.83) と演算子 P について 引き続き拘束量が式 (2.56): $C = p_t + H_0(p_q, q)$ の形をとる伝統的な系の量子論を考える．このとき演算子

$$P = \int d\tau e^{i\tau C} = \int d\tau e^{-i\tau C} \quad (15)$$

(変数変換 $-\tau \rightarrow \tau$ により文献 [2, p.169] と指数の符号を合わせておいた) は任意の関数 $f(q, t)$ を Wheeler-deWitt (WdW) 方程式 (2.76) の解へと，すなわち $\mathcal{H}$ へと写像することが³，以下のように示される [2, pp.169-170]． $H_n(q)$ を固有値 E_n に属する H_0 の固有関数として，関数 $f(q, t)$ を

$$f(q, t) = \sum_n \int \frac{dE}{2\pi} f_n(E) H_n(q) e^{-iEt}$$

と展開する． $[q$ の関数 $f(q, t)$ は完全系 $\{H_n(q)\}$ で展開できる．次いでその展開係数 $c_n(t)$ を Fourier 展開すれば良い．] P をこの関数に作用させると

$$\begin{aligned} [Pf](q, t) &= \int d\tau e^{-i\tau C} \sum_n \int \frac{dE}{2\pi} f_n(E) H_n(q) e^{-iEt} \\ &= \int d\tau \sum_n \int \frac{dE}{2\pi} e^{-i\tau(-E+E_n)} f_n(E) H_n(q) e^{-iEt} \quad [\text{下記にて補足}] \\ &= \sum_n \int dE \delta(E - E_n) f_n(E) H_n(q) e^{-iEt} \\ &= \sum_n \psi_n H_n(q) e^{-iE_n t} \end{aligned} \quad (16)$$

が得られ， $\psi_n = f_n(E_n)$ であり，最右辺は [Schrödinger 方程式の，したがって] WdW 方程式 (2.76) の一般解である．したがって P は任意の関数を WdW 方程式の解へと移す．

式 (16) 第 2 の等号について $p_t = -i\partial_t$ と H_0 は交換するので,

$$e^{-i\tau C} = e^{-i\tau(-i\partial_t + H_0)} = e^{-\tau\partial_t} e^{-i\tau H_0}$$

と書ける ($C = p_t + H_0$ と H_0 の違いにも注意). すると

$$e^{-i\tau C} [H_n(q) e^{-iEt}] = [e^{-i\tau H_0} H_n(q)] [e^{-\tau\partial_t} e^{-iEt}]$$

であり, 第 1 の因子は $e^{-i\tau H_0} H_n(q) = e^{-i\tau E_n} H_n(q)$, 第 2 の因子は

$$e^{-\tau\partial_t} e^{-iEt} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\tau)^n}{n!} \partial_t^n \right) e^{-iEt} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\tau E)^n}{n!} \right) e^{-iEt} = e^{i\tau E} e^{-iEt}$$

と計算できるので,

$$e^{-i\tau C} [H_n(q) e^{-iEt}] = e^{-i\tau(E_n - E)} [H_n(q) e^{-iEt}]$$

を得る.

式 (2.78) の直後にもあるように, 直観的には演算子 (15) は $P \sim \delta(C)$ なので (ただし引数 C は演算子であることに注意), P との積は WdW 方程式 $C\psi = 0$ の解を選び出すはずである.

次に式 (2.83) の段落の解釈の補足として, 伝播関数の定義が Newton 系の文脈で通常のそれに戻ることを確かめよう [2, p.174]. 以上を踏まえると, q と t の固有状態 $|q, t\rangle$ に対し,

$$|q; t\rangle \equiv P |q, t\rangle$$

は運動 $q(t)$ の固有状態になると考えられる. また演算子 P が通常の射影演算子と同様の性質 $P^\dagger P = P^2 = P$ を満たすと仮定すると^{*38}, 定義式 (2.83) は

$$W(q, t, q', t') = \langle q', t' | P | q, t \rangle = \langle q', t' | P^\dagger P | q, t \rangle = \langle q', t' | q; t \rangle$$

となる. 最右辺は見慣れた通常の伝播関数の定義式である. 自由粒子の例 (式 (2.82) の箇所) も見よ.

■自由粒子の伝播関数 (2.82) と, それが式 (2.29) を再現することの確認 伝播関数 (2.81) の最右辺に恒等式 $\mathbb{1} = \int dp dp_t |p, p_t\rangle \langle p, p_t|$ を挿入し, また

$$\langle p, p_t | q, t \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \right)^2 e^{i(pq + p_t t)/\hbar}$$

^{*38} C の Hermite 性を仮定すると,

$$P^\dagger P = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{iC(\tau' - \tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_G \times \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_r e^{iC\tau_r} \sim P.$$

ただし“重心座標” $\tau_G \equiv (\tau + \tau')/2$ と“相対座標” $\tau_r \equiv \tau' - \tau$ への変数変換を行った. 2 つの振動子に対しては, 射影子 (2.96) は $P^\dagger P = P^2 = P$ を満たし, τ 積分の範囲 2π は有限である.

に注意すると,

$$\begin{aligned}
W(q, t, q', t') &= \int d\tau dp dp_t dp'_t \langle q', t' | p', p'_t \rangle \langle p', p'_t | e^{\frac{i}{\hbar} \tau (\hat{p}_t + \frac{p^2}{2m})} | p, p_t \rangle \langle p, p_t | q, t \rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d\tau dp dp_t e^{i\{p(q-q') + p_t(t-t')\}/\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} \tau (p_t + \frac{p^2}{2m})} \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp dp_t e^{i\{p(q'-q) + p_t(t'-t)\}/\hbar} \times \frac{1}{2\pi\hbar} \int d\tau e^{\frac{i}{\hbar} \tau (p_t + \frac{p^2}{2m})} : (2.82) \quad (-p \rightarrow p, -p_t \rightarrow p_t) \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp dp_t e^{i\{p(q'-q) + p_t(t'-t)\}/\hbar} \delta\left(p_t + \frac{p^2}{2m}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left(p(q'-q) - \frac{p^2}{2m}(t'-t)\right)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left\{-\frac{t'-t}{2m} \left(p - m \frac{q'-q}{t'-t}\right)^2 + \frac{m}{2} \frac{(q'-q)^2}{t'-t}\right\}\right] \\
&= \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i(t'-t)}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{m(q'-q)^2}{2(t'-t)}\right) : (2.29).
\end{aligned}$$

2.4.1 量子重力における観測可能性

今のところ, 上記で展開してきた言語はあくまで言語である: 考えてきた全ての例は, 時間変数が独立な発展変数として用いられる Newton 的な定式化を許容する. しかしながら, 一般相対性理論は既にこの言語で定式化されて現れ, その変数たちの 1 つを選んで“時間変数”と解釈する一般的な方法はない. 一般相対性理論は自由度の時間における発展ではなく, 部分的観測量の相対的な発展を用いて世界を記述することを要求する.

象徴的な事例として, 以下の物理的な状況を考えよ. 読みが T である正確な時計を手にとっており, 読みが T' である, 1 つ目の時計と同一で過去に 1 つ目の時計と同期させた 2 つ目の時計を投げ上げる. 2 つ目の時計が落下し再び手に掴んだとき, それは 1 つ目の時計に対して遅れているだろう. [実際の運動 (自由落下) に対して第 2 の時計の作用 $S = -mc^2 \int d\tau$ は最小値を, 固有時間は最大値をとる. 他方で第 1 の時計には手からの抗力が働く.] 十分な初期データが分かれば, GR は第 1 の時計が T を示すときに, それが表示する値 $T'(T)$ を予言する. あるいは, 同じことだが, GR は第 2 の時計が T' を示すときに第 1 の時計が表示する値 $T(T')$ を予言する. これは時間 T' の関数としての T の発展を, あるいは時間 T の関数としての T' の発展を記述しているのか? 明らかにその間はばかげている^{*39}. T と T' は部分的観測量であり, 理論はそれらの相対的な発展を記述する際, それらを同等に扱う. 一般相対性理論には時間に代わる特別な観測量はない: 時間発展は常に何らかの任意の変数に対して測られる. フロントガラスのワイパーが時間を刻む.

Newton は彼の有名な本 *Principia* (プリンキピア) で“時間とは何か?”と問い, 時間は我々が直接観測するものではないと答えている. [実際 Galilei が自分の脈拍を用いて振り子の周期性を確かめたという逸話は, それが作り話だというだけでなく, 後に医者が振り子を用いて患者の脈拍を測ったという点で悩ましい [2, pp.29–30].] 時間は独立な発展パラメータの役割を演じるように有効に選び出せる, 観測可能な量の便利な関数である. これは重力場のダイナミクスを無視するときには上手くいく, 何故ならこの場の固定された配位そのものが便利な時間変数を与えるからである. しかしこれは完全な時空の量子ダイナミクスを考えるとときには, もはや上手くいかない. このため, 特別な“時間”変数の概念が何の役割も演じない, ダイナミクス

^{*39} ところで, 時計たちが離れている間に自由落下にある時計, すなわち“まっすぐ運動する時計”は, 打ち上げられた時計である.

の完全に関係的な見方に頼らねばならない。

このことは世界に発展がないことや変化がないことを意味しない。それは現実世界の発展と変化が、単一の変数における発展として上手く表現するには、あまりに複雑であることを意味している。

ここでこの技法を場の理論、またとりわけ一般的な文脈に拡張しなければならない。これは重要な問題であり、読者に特別な注意を求める。

初めと終わりの相互作用の間に系に起きることを過程と呼ぶ。ダイナミクスは前の節たちで、過程の境界における物理的変数の値の係数を用いて表された、系の軌道の有限の部分を用いて提示された。これらの関係は Hamilton 関数 S にコードできる。古典論では、ダイナミクスは始・終座標と運動量の係数を確立する [式 (2.73)]。量子論では、2 つの相互作用間の軌道は相互作用の結果から推定できない。遷移振幅 W は境界値の代わりの組の確率を定める^{*40}。

2.4.2 境界の定式化

上記のアイデアを場の理論に持ち込むことは、Robert Oeckl (Oeckl 2003, 2008) によって提唱され発展された、境界の定式化へと移行することを要求する。場の理論において、依然として系の軌道の有限部分を考えることができるものの、今や“有限”とは時間だけでなく空間において有限であることを意味する。そこで、時空のコンパクト領域 M を考える。

遷移振幅は M の初めと終わりの空間的な面上だけでなく、“側面”——箱の境界となる結果的に生じ得る (eventual) 時間的な面——の上における場の値の関数である。言い換えれば、遷移振幅 W は時空領域 M の境界全体上における場の値の関数である。形式的には、 W は境界 $\Sigma = \partial M$ で固定された値を持つ、 M の中の場に関する Feynman の経路積分で表せる。境界全体上の場の量子状態は、境界 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の要素である。遷移振幅 W はこの空間上の線形汎関数 $\langle W |$ である。

非相対論的な場合には、境界 Hilbert 空間は始・終 Hilbert 空間のテンソル積

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_t^* \quad (2.84)$$

に同定され、

$$W_t(\psi \otimes \phi^*) := \langle \phi | e^{-iHt} | \psi \rangle. \quad (2.85)$$

[遷移振幅 (2.85) は終状態のブラ・ベクトル $\langle \phi |$ で定義されるため、式 (2.84) ではブラ空間 $\mathcal{H}_t^*$ が用いられている。式 (2.84) 両辺のブラ・ケットの不一致は見かけ上である [2, pp.22–23, p.193].] 固定された時空上の場の理論に対して、 W は Σ の形状と幾何学、その初めと終わりの面の間に経過した時間に依存する、まさに最後の方程式において W が t に依存しているように。

しかし重力ではもはやそうではない。

重力では、遷移振幅 $\langle W | \Psi \rangle$ は境界 Σ 上の重力場 (と存在する他のあらゆる場) の状態 Ψ に依存し、これが全てである。形式的には、これは Σ 上の重力場 (と他の場) の決まった境界値における、内部領域における Feynman の経路積分で与えられるだろう。それならば Σ の形状、すなわち幾何学を、我々はどうのように知るのか？

^{*40} 量子論において過程を記述する一般的な用語では“準備 (preparation)”と“測定 (measurement)”が用いられる。この擬人的な用語は誤解を招く、と言うのもそれは人間の介入が関係している印象を与えるからである。過程の境界はもう 1 つの——一般的な——物理系との、系のあらゆる物理的な相互作用であり得る。量子力学はこれらの相互作用の際に、物理系が互いに影響する仕方を記述する (Rovelli 1996b)。量子力学はそのような相互作用の異なる可能な影響に対する確率を計算する。過程の境界として我々が考えることに決めるものの任意の置き換えと、この記述が整合する事実によって、理論は特徴付けられ、また実にその構造は大部分が決定される。

ここで量子重力のマジックが登場する：答は、 Σ の形状、サイズおよび幾何学が既に Ψ によって決定されているということである！

実際、境界 Σ 上の重力場はまさに Σ の形状を特定する量である！ それは面そのものの上で集められる、あらゆる重量な距離の (metric) 情報を含んでいる！ したがって $\langle W|\Psi\rangle$ は Ψ の関数であって、それ以外の何の関数でもないと期待する。

これはもちろん前の 2 つのセクション、とりわけ式 (2.68) で述べた現象の、場の類似物に他ならない：時間的な情報は、パラメトライズされない Newton 力学のように、選出され他の変数と分離される代わりに、力学的変数の中に蓄えられ混ぜられる。一般相対論的な文脈では、これは時間的だけでなく空間的な位置に対しても成り立つ： W は空間と時間の変数の関数ではなく、単に境界上の全ての重量な幾何学的情報を含んでいる、境界 Σ 上の重力場の関数である (Σ の微分同相写像を除けば)。これ [場の境界値] は境界上で時計と計量器 (meters) によって集められる、あらゆる情報を定める、何故なら時計と計量器は重力場を測定するからである ($T = \int \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\tau$)。

したがって、量子重力においてダイナミクスは、面 Σ 上における場の (量子) 状態の関数である遷移振幅 W によって捉えられる。直観的には、 W は Σ を境界とする有限のバルク領域における“幾何学にわたる和”である^{*41}。 W のあからさまな構成は本書の主要な目標である。それは第 7 章であからさまに与えられる。

2.4.3 関係的量子、関係的空間

量子重力の文脈でも用いることができる、Rovelli (1996b) で展開した量子力学の解釈は、量子力学の関係的側面を強調している。理論は過程に対する確率振幅をもたらし、ここで過程は相互作用の間の出来事である。[例えば粒子が測定器との相互作用を通じて位置を特定されてから、次に測定器と相互作用して位置が確定するまでの過程である。相互作用を行わないとき、粒子は空間のどこにも位置を占めない。] こうして量子論は系が互いに影響を及ぼす方法を用いて、宇宙を記述する。状態は系が今一つの系に影響を及ぼし得る方法の記述である。量子力学はしたがって、系間の関係に基づいており、ここで関係は物理的な相互作用によって具現化される。

一般相対性理論の構造もまた関係的である、何故なら力学的 (dynamical) 対象の位置付けは固定された背景構造に対して与えられるのではない；代わりに、“事物”は互いに対してのみ位置付けられるからであり、ここで“事物”は重力場を含む全ての力学的対象である。時空構造を構築する重要な関係はもちろん隣接 (contiguity) ——時空において“互いに隣にある”という事実——である。一般相対論的な理論は、境界で互

^{*41} 一般的な偏見は、素粒子論で散乱を扱う際にしばしば行われるように、量子重力では無限 (の時空間；infinity) における観測量にしか依拠できないというものである。この誤解を招く偏見の源は、一般共変な理論においてバルク観測量を定義する困難である。しかしこれは解消できる：我々は太陽系に埋め込まれているという事実にも関わらず、我々の太陽系の相対論的なダイナミクスを測定し記述する。偏見の第 2 の源は、局所的な観測量が無限の正確性を必要とし、それは無限に長い無限に広がる測定によってしか実現できないという考察である：サイズ L の領域では、 $\delta t \sim L_{\text{Planck}}^2/L$ より優れた時間の解像度で時間発展を議じることは意味を成さない (Arkani-Hamed *et al.* 2007)。その議論は、しかしながら、連続的な背景時空を仮定しており、それはまさに量子重力において存在しないものに他ならない。時間の解像度は不確定性関係によって制限されるものの、これは境界の重力場に対する標準的な不確定性関係と整合している。曖昧なのは重力場の期待値、したがって測定の物理的な位置付けであって、無限遠以外のどこかで測定を行う可能性そのものではない。その論点はホログラフィーに関係している (再び Arkani-Hamed *et al.* 2007 を見よ)：Bekenstein 境界は与えられた面積を持つ器具が識別できる状態数を制限し、したがって時空に位置付けられた器具は有限の数の状態しか識別できず、任意に小さい距離を識別できない。これもやはり正しいものの、時空の物理的な粒状性によって救われる。これらの議論は全て、重力の存在下では局所的な場の量子論の意味での局所的な観測量——任意に小さい領域に位置付けられた——が存在しないことを示している。それらは全て、空間と時間は量子重力においてよく定義されないという事実に関する、Bronstein のオリジナルの議論の変種である。解決策は無限大に避難することではない。解決策は Planck スケールよりも鮮明には空間と時間を識別しない観測量を受け容れることである。より一般的な意味において局所的な観測量を扱うために更新が必要なのは、伝統的な場の量子論である。

いに隣接する時空領域の動的な (dynamical) パッチワークと見なせる。

さて、20 世紀の物理学の基本的な発見と普遍的な要素は局所性である。相互作用は局所的である。すなわち、相互作用は時空での隣接を要する。しかるに逆もまた真である：2 つの物体が隣接していることを確かめる唯一の方法は、それらの相互作用を得ることである。したがって局所性は量子力学が基礎を置く関係と、それを基に時空が編まれる関係との間の、構造的なアナロジーの存在を明らかにする。

量子重力はこの関係を明確にする：過程は時空領域の中にあるのではない：過程は時空領域である。状態は空間のどこかにあるのではない：状態は 2 つの過程が相互作用する、あるいは 2 つの時空領域が互いに情報をやり取りする仕方の記述である。逆も然りであり、時空領域は過程である：何故なら時空領域は実際にその境界のうちに起こり得る全ての Feynman 和だからである。

量子力学	一般相対性理論
過程	時空領域
← 局所性 →	
状態	境界, 空間領域

注意したように [脚注*40], 量子論の著しい側面は過程 (間) の境界を自由に変更できることである。最終的な全振幅は“観測される系”と“観測する系”の間の境界の変更に影響されない。同じことは時空に対しても成り立つ：境界は時空に任意に描かれる。物理的な理論はしたがって、自然の任意の分割部分が互いに影響する仕方の記述である。局所性と重力により、これらの分割部分は細分された部分系であり (量子論の意味で), 同時に時空の分割部分である。時空領域は過程であり、状態はその境界に起きることである。

これらの抽象的な考察は、理論の構成と、最後の部 (chapter) におけるその応用とともに、具体的になるだろう。

2.4.3 項について

量子力学の解釈問題と量子重力はおそらく異なる種類の問題であると、1.1 節では論じられている。また文献 [2, § 5.6.4] においても、一般相対性理論と量子力学の关系的側面を関連付けた議論は、非常に思弁的 (very speculative) で何の成果ももたらさないかもしれない (might lead nowhere) と著者 Rovelli は断っている。他方でこの 2.4.3 項では、その議論がさらに深まり積極的に主張されている。とは言え最終段落にあるように、考察は抽象的であり、取っ付きにくい印象は否めない。そこで量子論の关系的解釈を説得的に論じた、同文献 [2, § 5.6] の内容を以下に簡単に要約する。关系的解釈はコペンハーゲン解釈と多世界解釈のジレンマから脱する第 3 の道を供する^{*42}。

量子論では状態ベクトル Ψ (例えば波動関数) から、系 S のあらゆる変数 A に対して、その異なる測定結果 $a_1, a_2, \dots$ が得られる確率を計算できる。特定の測定結果の実現に応じて、波動関数は突然“収縮 (collapse)”する。ここで実験的な証拠だけからは、確率分布 Ψ と一連の測定結果 $a_1, a_2, \dots$ のどちらが“現実の”存在かは決まらない。しかし我々は測定結果 $a_1, a_2, \dots$ を“量子事象”と呼ぶことにする^{*43}。

^{*42} もっとも波動関数の収縮機構が与えられるわけではない。依然として我々は指定した観測者に関する状態の収縮 (17) を考える。ただし波動関数そのものが物理的実在でなければ、その収縮機構の説明を求める動機は弱まる。

^{*43} 他方で Ψ が実在であって真に収縮することは決してないと思えるならば、現に観測値 $a_1, a_2, \dots$ が単一の Ψ から立ち現れる機構の込み入った説明が必要となる。仮にその説明が与えられたとしても、結局そのとき量子事象の存在論と似た状況に帰着することになる。

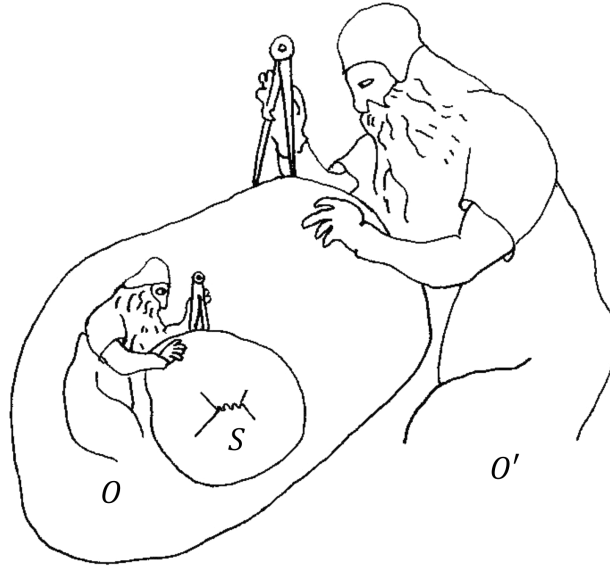


図 30 観測される観測者 [原著 [2, p.212] の図 5.1 を基に作成]

さて、量子論の解釈をめぐる困難の核心は、“観測される観測者”の思考実験によって端的に示すことができる。図 30 のように、系 O が (時刻 t に) 系 S の変数 A を測定し、次いで系 O' が (時刻 t' に) 結合系 $[S + O]$ の変数 B を測定する場合を考えよ。(ここで擬人的には系 O, O' は観測者と呼べる。ただし測定とはあくまで単なる物理系の相互作用であり、測定や観測という術語は本来、必ずしも人間の意識や主観を意味しないことに注意せよ。) 例えば初め系 S は変数 A がそれぞれ値 a_1, a_2 を持つ状態 Ψ_1, Ψ_2 の重畳せにあり、第 1 の測定で O は測定結果 a_1 を得たとする。このとき時刻 t では

$$\begin{cases} c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2 \rightarrow \Psi_1; \\ A \text{ は値 } a_1 \text{ をとる} \end{cases} \quad (17)$$

のように、波動関数は収縮する。ところが系 O もまた量子力学によって記述されることを要求すると、理論の内部に矛盾を生じるように見える。すなわち結合量子系 $[S + O]$ の Schrödinger 発展を考えると、収縮は全く起こらず、代わりに第 1 の測定は S と O の間の相関を確立することになる：

$$\begin{cases} (c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2) \otimes \Phi \rightarrow (c_1\Psi_1 \otimes \Phi_1 + c_2\Psi_2 \otimes \Phi_2); \\ A \text{ はなお 2 つの値 } a_1, a_2 \text{ の重畳せにある。} \end{cases} \quad (18)$$

例えば電子 (S) のスピン上向き・下向きの状態 Ψ_1, Ψ_2 に応じて、電球 (O) がオン・オフの状態 Φ_1, Φ_2 になるような測定 (相互作用) の過程を考えると、複合系は相互作用の後も依然として、[スピン上向き/光オン] と [スピン下向き/光オフ] の 2 状態の重畳せにある。[いわゆるエンタングル状態である [17, pp.36–37, pp.206–207].]

2 つの説明 (17) と (18) は素朴には両立しない (このパラドックスは「Wigner の友人」として知られている [17, p.101]). 実際、重畳せ (18) における 2 状態は O' が観測可能な干渉効果をもたらすため、 O' による第 2 の測定の正しい確率分布を予言するには、式 (17) ではなく重畳せ (18) を仮定しなければならない。他方で我々は第 1 の測定として一般的な状況を考えているので、このときいかなる物理量 A も一切決まった値 a_1 をとり得ないと結論しなければならない。

収縮を生じ量子事象を引き起こす“特別な”系を仮定することなく、このジレンマから脱する解決策は、量子事象は常に物理系に対して相対的であるという洞察に見出せる：量子事象 a_1 は O に関しては起きたのに対し、 O' に関しては起きていない。別の物理系を参照することなく、単に系 S の変数が値 a_1 をとるか否かを言うことには、意味がない。この観点は量子力学の关系的解釈 (*relational interpretation of quantum mechanics*)、あるいは単に关系的量子力学 (*relational quantum mechanics*) と呼ばれる^{*44}。

O に関係した説明と O' に関係した説明は互いに一致していないにも関わらず、それらを比較しても矛盾は導かれない。と言うのも、比較のために O' が電子と相互作用すると、式 (18) の右辺におけるいずれかの項、例えば [スピン上向き/光オン] 成分が選出されるため、次いで光を測定すると、光オンが見出されるからである。つまり、まさに異なる説明の比較は物理的で量子論的な相互作用でしかあり得ないという理由で、説明の多様性は矛盾を導かない^{*45}。この自己無撞着性は世界の关系的な本性を強く示唆している。

ところで O による S の測定は、十分な回数繰返せば未来の相互作用における結果 (の確率分布) を予言できるため、測定において O は S に関する“情報を持つ”と言える。他方で O' の観点からは、測定は O と S の間の相関 (式 (18)) を確立するため、Shannon による情報の定義から、やはり“ O は S に関する情報を持つ”と言える。比喩的には O は S について知っているという意味で情報を持つのに対し、 O' は O が S について何らかのことを知っていることを知っているという意味で情報を持つ。このように量子力学は、物理系が互いに対して持っている情報に関係していると考えられる。[また O が S について“知っている”ならば、 O' がスピン O の値を測定したとき O とエンタングルしたスピン S の値が決まることは、非局所的な相互作用の伝播とは見なされない。]

最後に一般相対性理論 (GR) と量子力学 (QM) の関係主義的性格を比較する。GR では物体は背景時空ではなく他の力学的存在 (物体や場) に対して位置付けられ、それらの関係は隣接性に基づいている。他方でこれまで論じてきた QM の根底にある関係性は、物理系の相互作用に基づいている。ところが相互作用は系の隣接性を要求するのに対し、隣接性は相互作用の表れであるならば、隣接性と相互作用は表裏一体である。この最後のアイデアは多分に思弁的ではあるものの魅力的である。

2.5 補完

2.5.1 時間のない系の例

問題

本章の共変な言語で定式化できるものの、Newton 的な言語では定式化できない系を研究する。系は座標 a と b を持つ拡大配位空間 $C_{\text{ext}} = \mathbb{R}^2$ と、ラグランジアン

$$\mathcal{L}(a, b, \dot{a}, \dot{b}) = \sqrt{(2E - a^2 - b^2)(\dot{a}^2 + \dot{b}^2)} \quad (2.86)$$

で与えられ、ここに E は定数である。運動方程式を解き (ヒント：この作用を最小化する運動は Riemann 計量 $ds^2 = (2E - a^2 - b^2)(da^2 + db^2)$ における測地線である [作用を $S = \int \mathcal{L} d\tau = \int ds$ と書くと $ds^2 = (\mathcal{L} d\tau)^2$ だから]。速度のノルムを 1 に規格化し変数を分離せよ)、これが形式的には全エネルギーが E に等しい 2 つの調和振動子に類似していることを示せ。[ただし各物理量は通常の次元を持たない。] 拡大配位空間における運動は楕円であり、それ故この系を脱パ

^{*44} これはある意味、相対主義の徹底である。またそれは、系 S の変数はある観測者 (O) に対して良く定義された値 a_1 を持つことができ、同時に別の観測者 (O') に対しては決まった値を持っていないという見解から帰結する、避け難い結論である。自然を理解したければ、我々の課題は自然を我々の哲学的偏見に当てはめるのではなく、むしろ我々の哲学的偏見を、我々が自然から学んだことに適合させる方法を学ぶことである。

^{*45} 量子力学の多くの一般的なパラドックスは、おそらく EPR (Einstein–Podolski–Rosen) の見かけのパラドックスも含め、異なる観測者の間の連絡が量子力学を破ると仮定することに起因する。

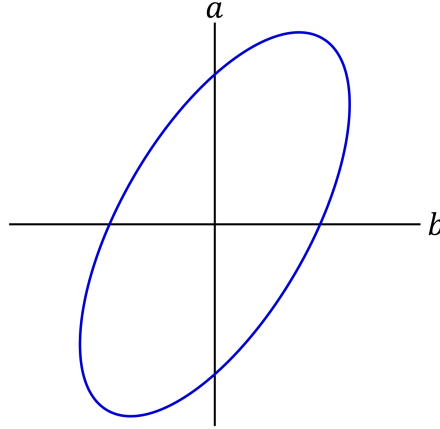


図 31 空間 (a, b) における運動. 2 変数のどちらが時間変数か？

ラメータ化して (deparametrize) Newton 的な形式に書き直すことは不可能であることを示せ. ハミルトニアンは消え, ダイナミクスはハミルトニアン拘束

$$C = \frac{1}{2}(p_a^2 + a^2 + p_b^2 + b^2) - E = 0 \quad (2.87)$$

によって決定されることを示せ. $\mathcal{K}$ と関連する演算子を定義し, ……と仮定すると [自然数 $E/\hbar$ を仮定すれば良い (式 (2.94) の箇所)^{*46}], ゼロがその離散的スペクトルに含まれることを示せ. (ヒント: 単なる調和振動子の数学である!) 物理的相空間 $\mathcal{H}$ は有限次元であることを示せ. その次元を計算せよ. (何がそれを決めるか?) [式 (2.95) より次元は $N+1 = E/\hbar$ であり, 全エネルギーで決まる.] また遷移振幅 $W(a, b, a', b')$ に対する整数 (積分; integral) 表現を書け. この系の物理的な解釈を論ぜよ. ここでの “時間” は何か? 図 31 を見よ.

解

作用 $S[a, b] = \int d\tau \mathcal{L}(a, b, \dot{a}, \dot{b})$ は τ のパラメータ付け替えの下で明らかに不変である. したがって正準ハミルトニアンは消える [2.3.3 項のノートで一般論として証明済み]. 運動量は

$$p_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} = \frac{(2E - a^2 - b^2)\dot{a}}{\mathcal{L}}, \quad (2.88)$$

$$p_b = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{b}} = \frac{(2E - a^2 - b^2)\dot{b}}{\mathcal{L}} \quad (2.89)$$

であり, これらが式 (2.87) を満たすことは直ちに分かる. [直接の代入により確認できる. また式 (2.87) がこの系のハミルトニアン拘束であることを本稿次項で説明する.]

τ における発展は C によって生成される. これは単なる 2 つの調和振動子のハミルトニアンの和なので, τ における発展は

$$a(\tau) = A \sin(\tau + \phi_a), \quad (2.90)$$

$$b(\tau) = B \sin(\tau + \phi_b) \quad (2.91)$$

で与えられる. 拘束それ自体は

$$A^2 + B^2 = 2E \quad (2.92)$$

を与える [以上, 本稿次項で導出]. したがって運動は拡大配位空間 (a, b) における閉曲線である. それは楕円である [図 31 参照]. τ の再定義により, 定数 ϕ_b をゼロとおくことができる. 解の空間はしたがって 2 次元であり, A と $\phi = \phi_a$ で

^{*46} 原文は “provided that... .” で終わっている.

パラメトライズされる．系によって予言される物理であるところの， a と b の関係は

$$\arcsin \frac{a}{A} - \arcsin \frac{b}{\sqrt{2E - A^2}} = \phi. \quad [E \text{ の係数 } 2 \text{ を補った}] \quad (2.93)$$

運動は閉じているので，この系は伝統的な Newton 的記述を許容しない系である．言い換えると，伝統的な Newton 的 (記述) では常に $-\infty$ から $+\infty$ に移行する 1 変数 t があるのに対し，ここでは全ての部分的観測量は有界である．[伝統的な拡大配位空間 $\mathcal{C}_{\text{ext}} = \mathcal{C} \times R$ における運動は $t \in R$ について単調なので，閉曲線になり得ない [2, p.109].]

運動学的 Hilbert 空間は $\mathcal{K} = L^2[R^2, \text{dadb}]$ ．拘束量は 2 つの調和振動子のハミルトニアン H の和マイナス E である．エネルギー基底では， C は対角的であり Wheeler-deWitt 方程式は

$$C |n_a, n_b\rangle = \left(\hbar \left(n_a + \frac{1}{2} \right) + \hbar \left(n_b + \frac{1}{2} \right) - E \right) |n_a, n_b\rangle \quad (2.94)$$

になる． $E/\hbar = N + 1$ が整数の場合にのみ解がある．[以上， $\hbar$ を補った (本稿次項で補足).] 解は $n_a + n_b = N$ なる状態 $|n_a, n_b\rangle$ の線形結合である．したがって $\mathcal{H}$ は，

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^N c_n |n, N - n\rangle \quad (2.95)$$

[和の下限 $n = 1$ を修正した (以下同じ) [2, p.182]] の形の状態たちから成る， $\mathcal{K}$ の真部分空間であって，この部分空間への射影は

$$P = \sum_{n=0}^N |n, N - n\rangle \langle n, N - n|. \quad (2.96)$$

[本稿次項を見よ.] 遷移振幅は [式 (2.77) より]

$$W(a, b, a', b') = \sum_{n=0}^N \langle a', b' | n, N - n \rangle \langle n, N - n | a, b \rangle. \quad (2.97)$$

これは

$$W(a, b, a', b') = \sum_{n=0}^N \langle a' | n \rangle \langle n | a \rangle \langle b' | N - n \rangle \langle N - n | b \rangle \quad (2.98)$$

の形に書き換えられ，遷移振幅のあからさまな形はしたがって

$$W(a, b, a', b') = \sum_{n=0}^N \psi_n(a') \bar{\psi}_n(a) \psi_{N-n}(b') \bar{\psi}_{N-n}(b) \quad (2.99)$$

であり，ここに $\psi_n(x)$ は調和振動子のハミルトニアンの固有関数 [式 (20)] である^{*47}．

2.5.1 項について

■式 (2.87) がこの系のハミルトニアン拘束であること 運動量の表式 (2.88-89) を用いて速度 $\dot{a}, \dot{b}$ を消去すると，正準ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H \equiv \dot{a}p_a + \dot{b}p_b - \mathcal{L} &= \frac{\mathcal{L}}{2E - a^2 - b^2} (p_a^2 + p_b^2) - \mathcal{L} = \frac{2\mathcal{L}}{2E - a^2 - b^2} \left\{ \frac{1}{2} (p_a^2 + a^2 + p_b^2 + b^2) - E \right\} \\ &= \frac{2\mathcal{L}}{2E - a^2 - b^2} C \end{aligned}$$

と表されるので，ハミルトニアン拘束 (2.87) に比例する．他方で式 (2.88-89) を代入して運動量を速度で表すと，再び値としては $H = 0$ であることが確かめられる．

^{*47} この系とその解釈に関するさらなる詳細については，Colosi and Rovelli (2003) を見よ．

■式 (2.90–92) の導出 C の生成する無限小の正準変換 (2.62): $\frac{dA}{d\tau} = \{A, C\}$ は、拘束量 (2.87) に対しては

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{1}{2}\{a, p_a^2\} = p_a, \quad \frac{db}{d\tau} = p_b, \quad \frac{dp_a}{d\tau} = \frac{1}{2}\{p_a, a^2\} = -a, \quad \frac{dp_b}{d\tau} = -b$$

を与える。ここで τ はラグランジアン (2.86) におけるパラメータと同じである必要はない。(現に最初の 2 式は式 (2.88–89) と係数が異なっている。) これらは単振動の方程式

$$\frac{d^2a}{d\tau^2} = -a, \quad \frac{d^2b}{d\tau^2} = -b$$

を与えるので、一般解は式 (2.90–91) の形に書ける。

次に一般解 (2.90–91) に対して、上式より

$$p_a = \frac{da}{d\tau} = A \cos(\tau + \phi_a), \quad p_b = \frac{db}{d\tau} = B \cos(\tau + \phi_b)$$

であり、これらを拘束条件 (2.87) に代入すると式 (2.92) を得る。

■2 つの調和振動子の Wheeler–deWitt 方程式 (2.94) について [2, p.181] $\mathcal{K} = L_2[R^2, dadb]$ の演算子を用いて、Wheeler–deWitt 方程式は

$$\frac{1}{2} \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial b^2} + a^2 + b^2 - 2E \right) \Psi(a, b) = 0. \quad (19)$$

ここで H_a (または H_b) を変数 a (または b) に関する調和振動子のハミルトニアンとすると、 $C = H_a + H_b - E$ なので、この方程式は調和振動子に対角化する基底を用いて容易に解ける。

$$\psi_n(a) = \langle a|n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} H_n(a) e^{-a^2/2\hbar} \quad (20)$$

を、固有値 $E_n = \hbar(n + 1/2)$ を持つ、調和振動子の規格化された n 番目の固有関数とする。ここに $H_n(a)$ は n 番目の Hermite 多項式である。このとき明らかに

$$\Psi_{n_a n_b}(a, b) = \psi_{n_a}(a) \psi_{n_b}(b) \equiv \langle a, b | n_a, n_b \rangle$$

は、もし

$$\hbar(n_a + n_b + 1) = E$$

ならば式 (19) の解である。 $N \equiv n_a + n_b = 0, 1, \dots$ なので、量子論は $E/\hbar = N + 1$ が整数 $1, 2, \dots$ の場合にのみ存在する。

■射影演算子 P の表式 (2.96) の確認 式 (2.96) の P は式 (2.95) の形の状態を作り、また明らかに $P^2 = P$ を満たすので、射影演算子として適正であることはそれ自体で納得できる。実際に P の表式 (2.96) が、射影演算子の定義式 (15) から直接導けることを確かめておく [2, p.182]。定義式 (15) において、積分範囲を古典的な運動 (2.90–91) の範囲 2π に限定すると、

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{2\pi} d\tau e^{-\frac{i}{\hbar}\tau C} = \int_0^{2\pi} d\tau \sum_{n_a, n_b} |n_a, n_b\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}\tau(\hbar(n_a+n_b+1)-E)} \langle n_a, n_b| \\ &= \sum_{n_a, n_b} |n_a, n_b\rangle \delta(n_a + n_b + 1 - E/\hbar) \langle n_a, n_b| \\ &= \sum_{n=0}^N |n, N-n\rangle \langle n, N-n|. \end{aligned}$$

[第 2 の等号では $\sum_{n_a, n_b} |n_a, n_b\rangle \langle n_a, n_b| = 1$ を右から掛ける.]

■問題文末尾における、この系の物理的解釈について 解の末尾の脚注*47で参考文献が紹介されているに留まっている。繰り返せば、古典的な運動 (2.90–91) において τ は時間ではなく単なるパラメータであり、変数 a, b の発展は互いに対してのみ定義され、ダイナミクスは 2 変数 a, b の関係に他ならない。言わば a の振動が刻む“時間”に対して b の発展が記述され、その逆も然りである。なおこの系は単なるトイ・モデルではない：

この例は人工的ではない。ちょうどこの構造を持つ宇宙論的なモデルが存在する。例えば、我々は a を最大限に対称的な (maximally symmetric) 宇宙の半径に、 b をその宇宙に満ちる物質を表す場の空間的に一定な値に同定し、これらが宇宙の大スケールの発展を支配するただ 2 つの変数となるような近似を採用できる [2, p.109].

2.5.2 シンプレクティック構造と Hamilton 関数

ここでは Robert Littlejohn (Littlejohn 2013) に従って、一般化された Hamilton 形式の力学の形式的な構造の、より正確な数学的描像を与える。もし数学が好きならば、これは非常に面白い。我々の出発点は、拘束量 C (簡単のため、ここでは単一) によって定義されるダイナミクスを伴う、拡大配位空間 $\mathcal{C}$ を持つ共変な系である。拡大相空間を $T^*\mathcal{C}$ と呼ぶ。この空間は自然なシンプレクティック構造 $\omega = d\theta$ を持つ、何故ならそれは余接空間だからである*48。 x が $\mathcal{C}$ 上の座標、すなわち部分的観測量ならば、拡大相空間上の自然な座標は (x, p_x) である。 n 自由度の Newton 系に対して、これらは配位変数と時刻 $x = (q, t)$ 、および運動量とエネルギー $p_x = (p, -E)$ を含む；拡大相空間の次元は $2(n+1)$ であり、 $C = p_t + H(q, p, t)$ 。拘束量 C は $C = 0$ によって、 $T^*\mathcal{C}$ における拘束面 Σ を定める；2 形式 ω はこの面に制限されたとき退化 (準シンプレクティック; presymplectic) であり、その軌道は運動である。この言語では Hamilton 方程式は

$$\omega|_{\Sigma}(X) = 0 \quad (2.100)$$

になる。 X は $\mathcal{C}$ のハミルトニアン・ベクトル場、あるいは運動を生成するベクトル場である。これらの運動の空間は物理的相空間 Γ_{ph} である。各点をそれが属する軌道に移す、 Σ から Γ_{ph} への自然な射影を π と呼ぶ。

ここで拡大境界相空間 $D = T^*\mathcal{C} \times T^*\mathcal{C}$ を考えよう。この空間のその Descartes 成分上への射影を、それぞれ P と P' と呼ぶ。これはシンプレクティック形式 $\omega_b = \omega' - \omega = d\theta_b = d\theta' - d\theta$ を担う。 n 自由度の Newton 系に対して、これらは初めと終わりの配位変数と時刻 (x, x') 、および初めと終わりの運動量とエネルギー (p_x, p'_x) を含む；また D の次元は $2(2(n+1))$ 。拘束面 Σ とそれ自身の Descartes 積は、シンプレクティック形式の引き戻しが 2 つの退化した方向を持つところの、余次元 (co-dimension) 2 の D の部分空間を定義する。この部分空間には、

$$\pi P p = \pi' P' p \quad (2.101)$$

なる点 $p \in D$ から成る面 L がある。面 L は Robert Littlejohn によって導入された。Newton 系に対しては $\mathcal{C}$ を用いて、他の変数の関数として p_t について解くことができ、 Σ を (q, p, t) で座標付けできる。 L は時刻 t における始 (q, p) が、時刻 t' における終 (q', p') へと発展することになる、組 (q, p, t, q', p', t') から成る [それが式 (2.101) の意味である]。それは (q, p, t, t') で座標付けできる。 $(q, p, t, t') \rightarrow (q, p, t, q', p', t')$ によって定義される写像 $\Sigma \times R \rightarrow L$ は一意的であり、運動方程式の完全な解を与える、と言うのも、 (q', p') はまさに (q, p, t) から発展した時刻 t' におけるデータだからである。

2 形式 $\omega_b = d\theta_b$ は L に制限されるとき消える；したがって θ_b の L 上の線積分は線の始・終点にのみ依存する。[L 上で始・終点をつなぐ 2 つの線 γ_1, γ_2 に囲まれる面を A とすると、Stokes の定理 (式 (117)) より $\oint_{\gamma_1 - \gamma_2} \theta_b = \int_A \omega_b = 0$ だから。] 始点 z_0 ([Descartes 積空間の] 対角部分集合 (diagonal) 上にある) を固定すると、この線積分は L 上の関数

$$S(z) := \int_{\gamma: z_0 \rightarrow z} \theta_b \quad (2.102)$$

*48 それは $\theta(v) := z(f_*v)$ で定義される；ここに $z \in T^*\mathcal{C}$, $v \in T_z(T^*\mathcal{C})$, また f は自然な射影 (projection) $T^*\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ である、例えば Arnold (1989) を見よ。局所座標では、 $z = (x^a, p_a)$, $\theta = p_a dx^a$ および $\omega = dp_a \wedge dx^a$ 。

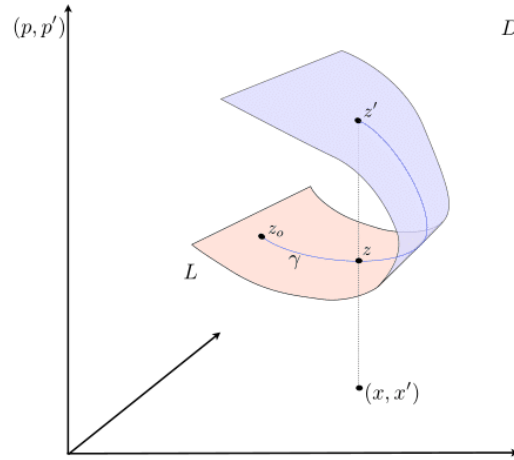


図 32 Hamilton 関数 $S(x, x')$ は基準点 z_0 から z への θ_b の線積分である. (x, x') の上に他の点 z' があるならば, $S(x, x')$ は多価である. [本稿では教科書 p.56 から図を採った.]

を定義し (図 32), ここに $\gamma \in L$. これは Hamilton 関数の簡潔な定義である. 関数 $S(z)$ は経路に依らず, 一価であり, L 上の至るところで定義される.

面 L は $C \times C$ と同じ次元を持つ. D から $C \times C$ への自然な射影 $f: (x, p, x', p') \rightarrow (x, x')$ を考えよ. この射影は L を $C \times C$ に写像する; 2 つの空間は同じ次元を持つものの, 写像は一般に単射でも全射でもなく, したがって L で定義された関数 S は, 至るところでは定義されず, また “枝 (branches)” を持ち得る $C \times C$ 上の “関数” へと移される. この $C \times C$ 上の関数は通常 Hamilton 関数と呼ばれるものである, すなわち

$$S(x, x') \equiv S(x, p, x', p'), \quad \text{if } (x, p, x', p') \in L. \quad (2.103)$$

与えられた (x, x') に対して, もし点 $(x, p, x', p') \in L$ がなければ, $S(x, x')$ は値を持たない; もし複数の点 $(x, p, x', p') \in L$ があれば, $S(x, x')$ は複数の枝を持つ. 他方で $S(x, p, x', p')$ は L 上で, 一意的に至るところで, よく定義される. [以上, 改めて図 32 を見よ.]

この構成の興味は, それが一般共変な場の理論に拡張されることである. この場合には空間 $D = T^*C_b$ は, 時空の領域 R の境界となる面 Σ における場の空間 C_b の, 余接空間に採ることができる. D における点はこのとき, 境界面上での場とその運動量の配位を表す. 面 L は R における場の方程式の解の境界となる, これらの配位の組として定義される. 境界相空間の 1 形式 θ_b の, L への制限は Hamilton 関数を定義する. 次章 [3.4.1 項末尾と 3.6.2 項の第 2 問 (5.3.2 項も見よ)] ではどのようにこれが一般相対性理論へと適用されるかを見る.

2.5.2 項について

以下では主に第 1 段落のシンプレクティック構造について補足する. その一環として, 力学の共変な定式化 (2.3 節) を詳しく再論する.

■伝統的な力学におけるシンプレクティック形式 ラグランジアン $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ を配位空間 C_0 の与えられた点 q における接空間 TC_0 上の関数, すなわち $\dot{q} = \{\dot{q}^i\}$ 上の関数と見なす. このとき接空間のベクトル $u = (u^1, \dots)$ からその方向微分への写像

$$\theta_0: u \mapsto \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(q, \dot{q} + su) - \mathcal{L}(q, \dot{q})}{s} = \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^i} u^i = p_i u^i \in R$$

は、余接空間 $T^*\mathcal{C}_0$ に属する 1 ベクトル (コベクトル) である。自然基底 $\{dq^i\}$ を用いれば、

$$\theta_0 = p_i dq^i$$

と表される (実際 $\theta_0[u] = p_i u^i$)。これを配位空間の全ての点 q で定義される場と見なすと、正準 1 形式 θ_0 が得られる。 θ_0 を、したがって各 q での p の値を与えることは、配位空間の全ての点 q にわたる余接空間 $T^*\mathcal{C}_0$ の和集合——余接バンドル (物理的には相空間 Γ_0 に相当) ——の点 (q, p) を指定することに他ならない [16, § 4.1.3]^{*49}。

正準 1 形式 θ_0 の外微分

$$\omega_0 = d\theta_0 = dp_i \wedge dq^i$$

を正準 2 形式という。ここでいわゆるシンプレクティック変数 $z = (z^\mu) = (q^1, \dots, q^m, p_1, \dots, p_m)^T$ (ただし T は転置を表し、以降 $\mu, \nu, \dots = 1, \dots, 2m$ とする) を用いて

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{2}(\omega_0)_{\mu\nu} dz^\mu \wedge dz^\nu \\ &= \frac{1}{2}(\omega_0)_{ij} dq^i \wedge dq^j + (\omega_0)_{m+1,j} dp_i \wedge dq^i + \frac{1}{2}(\omega_0)_{m+i,m+j} dp_i \wedge dp_j \quad (\because (\omega_0)_{\mu\nu} \text{ の反対称性}) \end{aligned}$$

と書くと、その成分は行列表示で

$$((\omega_0)_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と表される (右辺の各ブロックは $m \times m$ 行列)。ここで逆行列

$$((\omega_0)^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = ((\omega_0)_{\mu\nu})^T$$

を導入しておく。

幾何学的には、偶数次元の多様体 Γ_0 に閉じた非退化な交代 2 形式 ω_0 が備わっているとき (Γ_0, ω_0) をシンプレクティック多様体、この ω_0 をシンプレクティック形式という。ここで

- ω_0 が「閉じた形式」とは $d\omega_0 = 0$ となることを言う。
- ω_0 が「非退化」とは、 $\omega_0[v, \bullet] = 0$ ($\bullet$ はブランク (空白)) であれば必ず $v = 0$ となることを言う。
[対偶をとれば、 $\omega_0[v, \bullet] = 0$ を満たす $v \neq 0$ が存在すれば ω_0 は退化している。]

結局、力学でいう正準 2 形式 ω_0 は幾何学でいうシンプレクティック形式のことである。全ての有限 (偶数) 次元のシンプレクティック多様体には、シンプレクティック形式が $\omega_0 = dp_i \wedge dq^i = \frac{1}{2}(\omega_0)_{\mu\nu} dz^\mu \wedge dz^\nu$ の形に表される局所座標系が存在することが知られている (**Darboux (ダルブー) の定理**) [16, § 4.2.1]。

シンプレクティック方程式を用いると、Hamilton 方程式 $\dot{q}^i = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial q^i}$ は

$$\dot{z}^\mu = (\omega_0)^{\mu\nu} \frac{\partial H_0}{\partial z^\nu} \quad \text{i.e.} \quad (\omega_0)_{\mu\nu} \dot{z}^\nu = \frac{\partial H_0}{\partial z^\mu}$$

とまとめられる。2 形式の成分 $(\omega_0)_{\mu\nu}$ は共変テンソルとして変換するので、第 2 式は座標変換に対する共変性が明白である。

^{*49} 本稿では煩わしいので、1 ベクトルと 1 形式 θ_0 の表記を区別しない。同様に教科書本文でも、余接空間 $T^*\mathcal{C}_0$ と余接バンドルを厳密に区別していない。

さらに相空間 Γ_0 上のベクトル場

$$X_0 = \dot{z}^\mu \frac{\partial}{\partial z^\mu} = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p_i} \quad (21)$$

を用いると, Hamilton 方程式は微分形式の関係

$$\omega_0[X_0, \bullet] = -\frac{\partial H_0}{\partial z^\nu} dz^\nu = -dH_0 \quad (22)$$

として書き表せる. これは 1 形式 $\omega_0[X_0, \bullet], dH_0$ どうしの関係なので, やはり座標系に依らない [16, § 4.2.2]. 上式 (22) の導出

$$\omega_0[X_0, \bullet] = \dot{q}^i \omega_0 \left[\frac{\partial}{\partial q^i}, \bullet \right] + \dot{p}_i \omega_0 \left[\frac{\partial}{\partial p_i}, \bullet \right]$$

を計算するところから始めよう. $\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_0)_{\mu\nu} dz^\mu \wedge dz^\nu$ より任意のベクトル場 v に対し

$$\omega_0[v, \bullet] = \frac{1}{2}(\omega_0)_{\mu\nu} (dz^\mu[v] dz^\nu[\bullet] - dz^\mu[\bullet] dz^\nu[v]) = (\omega_0)_{\mu\nu} dz^\mu[v] dz^\nu[\bullet]$$

なので, $\omega_0 \left[\frac{\partial}{\partial q^i}, \bullet \right] = -dp_i, \omega_0 \left[\frac{\partial}{\partial p_i}, \bullet \right] = dq^i$ となる. よって

$$\omega_0[X_0, \bullet] = -\dot{q}^i dp_i + \dot{p}_i dq^i = -(\omega_0)_{\nu\mu} \dot{z}^\mu dz^\nu$$

とまとめられる. 最右辺に Hamilton 方程式 $\dot{z}^\mu = (\omega_0)^{\mu\rho} \frac{\partial H_0}{\partial z^\rho}$ を代入すると,

$$\omega_0[X_0, \bullet] = -\frac{\partial H_0}{\partial z^\nu} dz^\nu = -dH_0 : (22)$$

を得る.

■準シンプレクティック [2, pp.100–101] 力学の準シンプレクティックな定式化は, 関数 $(q^i(t), p_i(t))$ それ自体の代わりに, 関数のグラフを用いて運動を記述するというアイデアに基づいている. 関数 $(q^i(t), p_i(t))$ のグラフは座標 (t, q^i, p_i) を持つ $(2m+1)$ 次元の空間 $\Sigma = R \times \Gamma_0$ における, パラメータ付けされていない曲線 $\tilde{\gamma}$ である [Γ_0 の軌跡が t でパラメトライズされて初めて運動が決まるのとは対照的である]; ベクトル場

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + X_0 \quad (X_0 \text{ は式 (21) で定義}) \quad (23)$$

はこれら全ての曲線に接する^{*50}. ここで, Σ における Poincaré の 1 形式

$$\theta = p_i dq^i - H_0(q^i, p_i) dt \quad (24)$$

を考えよう. 2 形式 $\omega = d\theta$ は閉じているが, 退化している (奇数次元では全ての 2 形式は退化する); すなわち,

$$(d\theta)(X) = 0 \quad (25)$$

を満たすベクトル場 X (ω のヌルベクトル場と呼ばれる) が存在する. 2 形式 ω のヌルベクトル場の積分曲線^{*51}は ω の “軌道 (orbits)” と呼ばれる. 式 (23) で与えられる X が式 (25) を満たすことを確かめるのは容易である [下記にて確認]. したがって運動のグラフは単に $d\theta$ の軌道である. 言い換えれば, 式 (25) は運動方程式の書き換えである. 閉じた退化な 2 形式 ω を備えた空間 Σ は準シンプレクティックと呼ばれる.

^{*50} X をスケーリングして得られる他の任意のベクトル場, すなわち f を Σ 上のスカラー関数として, 任意のベクトル場 $X' = fX$ に対しても同様である. これは曲線のパラメータ付け替えの自由度に対応している.

^{*51} ベクトル場の積分曲線は至るところで場に接する曲線である.

ベクトル場 (23) が式 (25) を満たすことの確認

$$X_0 = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p_i} : (21), \quad \omega_0 = dp_i \wedge dq^i, \quad X = \frac{\partial}{\partial t} + X_0 : (23), \quad \omega = \omega_0 - dH_0 \wedge dt$$

に対して,

$$\omega[X, \bullet] = \omega_0[X, \bullet] - dH_0 \wedge dt[X, \bullet]$$

を計算する. まず右辺第 1 項は

$$\omega_0[X, \bullet] = \omega_0 \left[\frac{\partial}{\partial t}, \bullet \right] + \omega_0[X_0, \bullet] = \omega_0[X_0, \bullet] = -dH_0[\bullet]$$

である. ただし最後の等号は式 (22) による. 次に第 2 項

$$dH_0 \wedge dt[X, \bullet] = dH_0[X]dt[\bullet] - dt[X]dH_0[\bullet]$$

において,

$$\begin{aligned} dH_0[X] &= \frac{\partial H_0}{\partial z^\mu} dz^\mu[X_0] = \frac{\partial H_0}{\partial z^\mu} \left(\dot{q}^i dz^\mu \left[\frac{\partial}{\partial q^i} \right] + \dot{p}_i dz^\mu \left[\frac{\partial}{\partial p_i} \right] \right) = \frac{\partial H_0}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial H_0}{\partial p_i} \dot{p}_i \\ &= 0, \quad (\because \text{Hamilton 方程式}) \\ dt[X] &= dt \left[\frac{\partial}{\partial t} \right] = 1 \end{aligned}$$

なので,

$$dH_0 \wedge dt[X, \bullet] = -dH_0[\bullet]$$

となる. 以上より式 (25): $\omega[X, \bullet] = 0$ が得られる.

■拡大 [2, pp.101–102] $(m+1)$ 変数 (t, q^i) で座標付けされる拡大配位空間

$$\mathcal{C} = R \times \mathcal{C}_0 \quad (26)$$

に対して, 座標 (t, q^i, p_t, p_i) を持つ余接空間 $T^*\mathcal{C}$ と, この空間上の関数

$$C(t, q^i, p_t, p_i) = p_t + H_0(q^i, p_i) \quad (27)$$

を考えよ. Σ を

$$C(q^i, t, p_i, p_t) = 0 \quad (28)$$

によって定義される, $T^*\mathcal{C}$ 内の面とする. 我々は面 Σ を座標 (t, q^i, p_i) で座標付けできる. $T^*\mathcal{C}$ は余接空間なので, 自然な 1 形式

$$\tilde{\theta} = p_i dq^i + p_t dt \quad (29)$$

を担う. この 1 形式の面 (28) への制限は正確に式 (24) である [$p_t = -H_0$ を代入すれば良い]. したがって面 (28) はダイナミクスを定義する準シンプレクティック空間である. 構造 (26)–(27) は力学の共変な定式化において, 一般には生き残らない (2.3 節も見よ).

■力学の共変な定式化 (2.3 節) の再論 部分的観測量 x^a の空間を $\mathcal{C}$, 観測量 x^a とその運動量 p_a の空間を Ω とする. 拘束 $C = 0$ (本文同様に単一とする) は Ω における面 Σ を定める. Ω (観測量と運動量) における曲線を $\tilde{\gamma}$, その $\mathcal{C}$ (観測量のみ) への制限を γ と書く. 拘束量 C は以下を通じて物理的運動を決定する.

変分原理 事象 x_1^a と x_2^a をつなぐ曲線 γ は,

$$C(x^a, p_a) = 0 \quad (30)$$

を満たし, その $\mathcal{C}$ への制限 γ が x_1^a と x_2^a をつなぐ曲線 $\tilde{\gamma}$ のクラスにおいて, もし $\tilde{\gamma}$ が作用

$$S[\tilde{\gamma}] = \int_{\tilde{\gamma}} p_a dx^a \quad (31)$$

の極値を与えるならば, 物理的運動である.

この定式化はあらゆる Hamilton 系にも適用できる, 力学の一般的な枠組みである [2, pp.108–109]. 特に $\mathcal{C}$ と C が, 部分的観測量 x^a の 1 つを時間変数 t に選び出した構造 (26)–(27) を持つ場合, これは伝統的な相空間における変分原理 (式 (10) の箇所) に帰着する.

幾何学的な定式化 [2, p.110] 伝統的な Hamilton 形式の力学と同様に, 運動方程式はエレガントな幾何学的形式で表現できる. 変数 (x^a, p_a) は余接空間 $\Omega = T^*\mathcal{C}$ の座標である. 方程式 (30) はこの空間における面 Σ を定義する. 余接空間は自然な 1 形式

$$\tilde{\theta} = p_a dx^a \quad [\text{式 (29) の一般化}] \quad (32)$$

を担う. $\tilde{\theta}$ の Σ への制限を θ で表す. Σ 上の 2 形式 $\omega = d\theta$ は退化している: それはヌルの方向を持つ. これらヌルの方向たちの積分曲線は Σ 上の ω の軌道である. そのような軌道の各々は $T^*\mathcal{C}$ から $\mathcal{C}$ へ射影することにより, $\mathcal{C}$ における運動を与える.

$\tilde{\gamma}$ を Σ 上の運動とし, X を運動に接するベクトルとする; このとき

$$\omega(X) = 0. \quad [\text{式 (25) の一般化}] \quad (33)$$

本文の式 (2.100) であり, これが運動方程式を与える.

変分原理との関係 [2, p.111] $\tilde{\gamma}$ をその $\mathcal{C}$ への制限 γ が始および終事象 x_1 と x_2 で限られるような, Σ 上の ω の軌道とする. $\tilde{\gamma}'$ をその制限 γ' がやはり x_1 と x_2 で限られるような, $\tilde{\gamma}$ と無限小に近い Σ における曲線とする. δs_1 (および δs_2) を $\tilde{\gamma}$ と $\tilde{\gamma}'$ の始 (および終) 点の差とする. 4 つの曲線 $\tilde{\gamma}, -\delta s_1, -\tilde{\gamma}'$ および δs_2 は Σ における閉曲線を形成する. この曲線に囲まれた無限小の面にわたる ω の積分を考えよ. この積分は消える, と言うのも, 面の各点において正接の 1 つは (1 次のオーダーでは) ω のヌルの方向だからである (面は運動 $\tilde{\gamma}$ と平行な細長い 1 片 (strip) である). しかるに $\omega = d\theta$ なので, Stokes の定理により, 閉曲線に沿う θ の積分もまた消える. $\theta = p_a dx^a$ の δs_1 と δs_2 に沿う積分はゼロである, と言うのも, これらの線分に沿って x^a は一定だからである. したがって

$$\int_{\tilde{\gamma}} \theta + \int_{-\tilde{\gamma}'} \theta = 0,$$

あるいは, 考えているクラスの任意の変分に対して

$$\delta \int_{\tilde{\gamma}} \theta = 0.$$

これはまさに変分原理 (30–31) である.

Hamilton 方程式 [2, pp.111–112] (Ω における) 運動を τ でパラメトライズし, 関数 $(x^a(\tau), p_a(\tau))$ で表す. これらの関数は Hamilton 系

$$C(x^a, p_a) = 0, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx^a(\tau)}{d\tau} &= N(\tau) v^a(x^a(\tau), p_a(\tau)), \\ \frac{dp_a(\tau)}{d\tau} &= N(\tau) f_a(x^a(\tau), p_a(\tau)) \end{aligned} \quad (35)$$

を満たす. ここに

$$v^a(x^a, p_a) = \frac{\partial C(x^a, p_a)}{\partial p_a}, \quad f_a(x^a, p_a) = -\frac{\partial C(x^a, p_a)}{\partial x^a}.$$

[これは通常の Hamilton 方程式と似て非なる, 一般化された方程式である. 下記にて運動方程式 (33) から式 (35) を導出する.] 関数 $N(\tau)$ は “ラプス関数 (Lapse function)” と呼ばれる. それは任意である. $N(\tau)$ の異なる選択は, 運動に沿う異なるパラメータ τ を定める. 単調なパラメータ付けを得るには $N(\tau) > 0$ が必要である. 特に $N(\tau) = 1$ となるパラメータ付けは Lapse = 1 ゲージと呼ばれ, しばしば便利であるものの, 物理的な観点からは, それは特別でない.

式 (35) の導出 $X = \dot{x}^b \frac{\partial}{\partial x^b} + \dot{p}_b \frac{\partial}{\partial p_b}$ と書き (ドットは τ による微分), これを運動方程式 (33): $\omega(X) = 0$ に代入すると

$$0 = \omega(X) = (dp_a \wedge dx^a)[X, \bullet] = \dot{p}_a dx^a - \dot{x}^a dp_a$$

を得る. これを条件 (34): $C(x^a, p_a) = 0$ と併せて考えるために, 式 (34) の微分

$$0 = dC = \frac{\partial C}{\partial x^a} dx^a + \frac{\partial C}{\partial p_a} dp_a = -f_a dx^a + v^a dp_a$$

に未定乗数 $N(\tau)$ を掛けて辺々足す. すると

$$(\dot{p}_a - N f_a) dx^a + (-\dot{x}^a + N v^a) dp_a = 0$$

となって, 式 (35) が得られる.

変分原理からの導出 Lagrange 乗数 N を導入して作用を

$$S = \int d\tau \left(p_a \frac{dx^a}{d\tau} - N C(p_a, x^a) \right) \quad (36)$$

と書き, $N(\tau), x^a(\tau), p_a(\tau)$ に関する変分をとると

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left(\delta p_a \cdot dx^a + p_a d(\delta x^a) - N \left(\frac{\partial C}{\partial x^a} \delta x^a + \frac{\partial C}{\partial p_a} \delta p_a \right) d\tau + \delta N \cdot C d\tau \right) \\ &= p_a \delta x^a \Big| + \int \left(\left(dx^a - N \frac{\partial C}{\partial p_a} d\tau \right) \delta p_a - \left(dp_a + N \frac{\partial C}{\partial x^a} d\tau \right) \delta x^a + C \delta N \cdot d\tau \right). \end{aligned} \quad (37)$$

よって変分原理に基づき, 上式 (34), (35) を得る.

参考: 2つの振動子 (2.5.1 項) の再論 拘束量 (2.87) を持つ系に対して, Lapse = 1 ゲージにおける Hamilton 方程式

$$\dot{x}^a = \frac{\partial C}{\partial p_a}, \quad \dot{p}_a = -\frac{\partial C}{\partial x^a}$$

は再び

$$\dot{a} = p_a, \quad \dot{b} = p_b, \quad \dot{p}_a = -a, \quad \dot{p}_b = -b$$

を与える [2, p.112].

Hamilton 関数の微分 実際の物理的な運動に沿って評価した作用 (Hamilton 関数) も、式 (31) の形を持つ (式 (14) を見よ)。ただしこの Hamilton 関数の表式から導関数の公式 (2.73): $p' = \frac{\partial S}{\partial x'}$ が導かれることは、見かけほど自明ではない [2, p.121]。

変数 x^a, p_a の変分に伴う Hamilton 関数の変分は

$$\delta S = \delta \int p_a dx^a = \int (\delta p_a \cdot dx^a + p_a d(\delta x^a)) = p_a \delta x^a| + \int (\delta p_a \cdot dx^a - \delta x^a \cdot dp_a)$$

となる。最右辺の第 1 項は部分積分に起因する境界項を表す。ここで積分は実際の物理的運動に沿って評価されるので、最右辺の被積分関数に Hamilton 方程式 (35):

$$dx^a = N \frac{\partial C}{\partial p_a} d\tau, \quad dp_a = -N \frac{\partial C}{\partial x^a} d\tau$$

を代入して良い。すると

$$\delta S = p_a \delta x^a| + \int N \left(\frac{\partial C}{\partial p_a} \delta p_a + \frac{\partial C}{\partial x^a} \delta x^a \right) d\tau = p_a \delta x^a| + \int N \delta C \cdot d\tau$$

とまとめられる。ところが我々変数 x^a, p_a が常に式 (34): $C(x^a, p_a) = 0$ を満たすことを想定しているため、変数の変分に伴う C の変化は $\delta C = 0$ である。よって境界項の寄与

$$\delta S = p_a \delta x^a| = p'_a \delta x'^a - p_a \delta x^a$$

のみが生き残る。最右辺において、プライムの有無はそれぞれ順に終・始状態の値を表す。この結果は

$$\frac{\partial S}{\partial x'^a} = p'_a, \quad \frac{\partial S}{\partial x^a} = -p_a : (2.73)$$

を意味する。

例えば式 (2.12) において見て取れるように、Hamilton 関数の微分公式は最小作用原理と表裏一体である。すると以上は Hamilton 関数の微分公式を通じて、作用 (2.71) に対する変分原理と、作用 (31) に対する変分原理が等価であることを意味していると考えられる。実際そのことは作用の変分 (37) において明確に見て取れる。

第3章 重力

重力について我々の知っていることに取り組もう。一般相対性理論，“物理学理論の中で最も美しい理論”^{*52}は前世紀において、見事な量の実験的裏付けを得てきた。その理論は真剣に受け止めるに値する：それが世界について我々に教えることはおそらく重要であり、前に進むための主要な手掛かりを表している。ここでは続く章で用いられる形で、一般相対性理論の基礎の定式化を与える (テトラード, Holst 作用, 線形単純性拘束 (linear simplicity constraint), ……)^{*53}。

3.1 Einstein の定式化

Einstein によるオリジナルの定式化 Einstein (1915) では、重力場は対称テンソル場 $g_{\mu\nu}(x)$ であり、それは時空の擬 Riemann 計量と解釈できる。ダイナミクスは Einstein 方程式にコードされ、それは Einstein–Hilbert 作用

$$S[g] = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}(R - 2\Lambda) \quad (3.1)$$

から従い、ここに g は計量 $g_{\mu\nu}(x)$ の行列式、 R は Ricci スカラー、また Λ は宇宙定数である。ギリシャ文字の添字 $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$ は時空添字 (spacetime tangent indices) である。Einstein 方程式は、物質のないとき

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.2)$$

理論は 2 つの定数によって定義され、それらはいずれも測定されている。それらの測定値はおおよそ $G \sim 6 \times 10^{-8} \text{cm}^3 \text{g}^{-1} \text{s}^{-1}$ および $\Lambda \sim 10^{-52} \text{m}^{-2}$ 。

宇宙定数は時に実際よりも謎めいたものとして紹介される：それは他のいくつかと同様の、単なる自然の定数である。特に、それはしばしば真空のエネルギーと誤って混同される。これは電子の電荷と輻射補正を混同するようなものである^{*54}。宇宙定数の存在は (量子) 理論において無次元の定数があることを示唆する。その測定値は

$$\frac{\Lambda \hbar G}{c^3} \sim 10^{-120} \quad (3.3)$$

であり [左辺は $\Lambda \cdot L_{\text{Planck}}^2$]、それは偶然、非常に小さな数となる。宇宙定数は Hubble 半径 $R_{\text{Universe}} \sim \Lambda^{-1/2}$ のスケールに近く、したがってこの数は程度の差はあれ、我々が宇宙において知っている最大のものと最小のもの (すなわち宇宙論的スケールと Planck スケール) の比で与えられる。すなわち

$$\frac{c^3}{\Lambda \hbar G} \sim \frac{R_{\text{Universe}}^2}{L_{\text{Planck}}^2} \sim 10^{120}. \quad (3.4)$$

^{*52} Landau and Lifshitz (1951), Sec. 82.

^{*53} 用いられる幾何学のより正確な取り扱いを求める、数学に関心のある読者のために、いくつか参考文献を挙げる。我々の勧める、優れた簡単で入門的な本は Baez and Muniain (1994)。数理解物理学、とりわけ幾何学に対する標準的な参考文献は Choquet-Bruhat and Dewitt-Morette (2000, 2004) の 2 冊。その他の優れた教科書は Frankel (2003) と Chandia and Zanelli (1997)。数学が好きならば、古典 Kobayashi and Nomizu (1969) に取り組んでみよ。

^{*54} 真空のエネルギーは曲がった時空上の場の量子論を用いて計算でき、またこの文脈では、それは測定値へと繰り込める (Hollands and Wald 2008)。宇宙定数は自然に切断スケールになるはずだという、しばしば聞く議論は、我々がまだ Planck スケールにおいて場の量子論の優れた制御を有していないことを示しているのであって、宇宙定数それ自体が謎めいていることを示しているのではない (Bianchi and Rovelli 2010a,b)。

これは非常に大きな数である、あるいは我々の偏狭な人間的観点からはそう見えるだけかもしれない；もしかすると神にとって、それはなお小さな数である。この無次元の数は量子重力に座を占める^{*55}。

以下では Λ が概念的に寄与しないときは常に Λ を落とす。完全な理論において、上記の無次元の数が重要な役割を演じることを見る第 6 章で、 Λ に立ち戻る。また、それが便利なときには常に $\hbar = 8\pi G = c = 1$ となる単位を用いる。

3.2 テトラードとフェルミオン

重力場の擬 Riemann 計量としての定式化は形式的に正しくはあり得ない、何故ならそれはフェルミオンとの結合を許容せず、またフェルミオンは世界に存在するからである。このため、テトラード形式が必要である。

平坦な空間におけるフェルミオンのダイナミクスは Dirac 方程式

$$i\gamma^I \partial_I \psi - m\psi = 0. \quad (3.5)$$

に支配される。この方程式を重力と結合するには、重力場の異なる記述が必要である。 $g_{\mu\nu}(x)$ の代わりに、テトラード $e_\mu^I(x)$ を用いねばならない (テトラードとその他の数学的道具への入門は Baez (1994a) に見出される。その他の参考文献は Wald (1984), Misner *et al.* (1973), Hawking and Ellis (1973)) [テトラードの説明は文献 [11, § 98] にもある]。ここに $I = 0, 1, 2, 3$ は“内部”平坦 Minkowski 添字である。計量との関係は

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^I(x) e_\nu^J(x) \eta_{IJ} \quad (3.6)$$

であり、ここに η_{IJ} は Minkowski 計量であり、これ (とその逆 [行列]) を用いて平坦な Minkowski 内部添字 $I, J = 0, \dots, 3$ を上げ下げする。幾何学的には、 $e_\mu^I(x)$ は x における接空間から Minkowski 空間への写像である。時空は局所的には Minkowski 空間のようであるという、Einstein の主要な直観を、それは直接捉えている [式 (7) の箇所も見よ]。計量 $g_{\mu\nu}$ は Minkowski 計量の接空間への引き戻し [ないし“射影” [11, p.327]] である：これが最後の式の意味である。フェルミオンはこのとき、いつも通り Minkowski 空間において局所的に定義できる。

重力の作用は計量をそのテトラード表現に置き換えることで書ける： $S[e] = S[g[e]]$ 。

テトラード形式は、 $\Lambda^I_J(x)$ を Lorentz 行列として、変換

$$e_\mu^I(x) \rightarrow \Lambda^I_J(x) e_\mu^J(x) \quad (3.7)$$

の下で付加的な局所 Lorentz $SO(3,1)$ ゲージ不変性を満たす^{*56}。計量はこの変換に影響されない、何故なら Lorentz 行列は Minkowski 計量 η_{IJ} をそれ自身に変換するからである。よって作用は不変である。

^{*55} 基礎物理学の大きな数の存在における“自然性”の欠如について、多くのことが言われてきた。これは必ずしも優れた考え方だと我々は考えない。Samons (サモス) の Aristarchus (アリストアルコス) によって提唱された太陽中心モデルは、星々までの距離が“現実的であるには、あまりに大きすぎる”数であることを必要とするか、さもなければ地球の運動は観測されない恒星視差を決めるという理由で棄却された。この“自然性”の議論は Ptolemy (プトレマイオス) にあり、それは間違っている。似たような“自然性”の議論は 19 世紀の終わりになっても、Avogadro 数は現実的には“大きすぎる”として、原子論 (atomic hypothesis) への反論に用いられた。我々が宇宙についてさらに学ぶとき、我々はより遠く [未知] を見るのであり、我々にとって“自然”に見えることは、単に我々の経験が限られているから、そう見えるに過ぎないのかもしれないと学ぶのである。

^{*56} ゲージ不変性とは何か？ 孤立系を考えれば、ゲージ不変性を単に系の記述の数学的冗長性と解釈できる。しかしながら、重力と電磁気のような多くのゲージ不変な物理系は、ゲージ不変な量を通じては他の系と結合しない。むしろ、相互作用は系 A のゲージ不変でない量を、結合される系 B のゲージ不変でない量と結合する。[例えば QED の結合項 $\mathcal{L}_I = e\bar{\psi}A\psi$ において、Dirac 場 ψ と電磁場 A_I はそれぞれがゲージ変換する量である。] 結合系はなおゲージ不変であるものの、全ゲージ不変性は 2 つの要素系のゲージ不変性の積を含まない。すると、系のゲージ不変でない量を純粋に数学的な人工物と見なすことは正しくない；それらは系の可能な相互作用に対処する。この意味で、それらは物理的に意味のある量を表す。この点に関する詳しい議論については、Rovelli (2013b) を見よ。

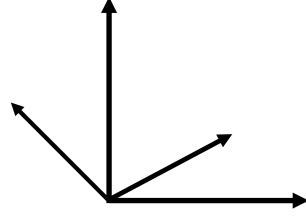


図 33 [局所 Lorentz ゲージ不変性の幾何学的解釈 (教科書 p.61) とは結局, 直交系 $\{e_I^\mu(x)\}$, $I = 0, \dots, 3$ を採り直す自由度と考えられる]

note $g_{\mu\nu} \rightarrow (\Lambda^I_K e_\mu^K)(\Lambda^J_L e_\nu^L)\eta_{IJ} = e_\mu^K e_\nu^L (\Lambda^I_K \Lambda^J_L \eta_{IJ}) = e_\mu^K e_\nu^L \eta_{KL} = g_{\mu\nu}.$

この局所 Lorentz ゲージ不変性には幾何学的解釈がある：行列 $e_\mu^I(x)$ の逆 $e_I^\mu(x)$ は各点 x において, (各 I に 1 つずつの) 4 つのベクトル場を定義する. それらは直交する：

$$e_I^\mu(x) e_J^\nu(x) g_{\mu\nu} = \eta_{IJ}. \quad [\text{式 (3.6) に逆行列をかける}] \quad (3.8)$$

Riemann 多様体が与えられたとき, 4 つのテトラード場は至るところで直交系を供する [図 33 参照]; 逆も然りであり, 各点にただ 4 つのベクトルがあるとき, それらが直交するような基準系を定義することにより, これらは Riemann 多様体を定義する.

この局所ゲージ不変性に関して, Yang–Mills 理論におけるように, 接続を導入できる [本稿次項で補足]. Lorentz 接続は Lorentz 群の Lie 代数に属する対象

$$\omega_\mu^{IJ} = -\omega_\mu^{JI} \quad (3.9)$$

である [本稿次項で補足]. この接続は, Lorentz 群の有限次元表現の下で変換するあらゆる対象の, 共変微分 D_μ を定義する [本稿次項と式 (3.103)]. 特に, これによりフェルミオン場をテトラードと接続と結合した, 一般共変な Dirac 方程式

$$i\gamma^I e_I^\mu D_\mu \psi - m\psi = 0 \quad (3.10)$$

を定義することが可能になる [本稿次項で補足].

$$e^I = e_\mu^I dx^\mu \quad \text{および} \quad \omega^{IJ} = \omega_\mu^{IJ} dx^\mu \quad (3.11)$$

と書いて, [微分] 形式表記を導入しよう^{*57}. テトラードと接続は Cartan の意味で “幾何学” を定義し, それは Riemann 幾何学よりも一般的である, 何故ならそれはねじれ (torsion) も含んでいるからである. ねじれ 2 形式は

$$T^I = de^I + \omega^I_J \wedge e^J \quad (3.12)$$

(これは第 1 Cartan 方程式と呼ばれる) で定義され, また曲率 2 形式は

$$F^I_J = d\omega^I_J + \omega^I_K \wedge \omega^K_J \quad (3.13)$$

(第 2 Cartan 方程式) で定義される. テトラードが与えられると, ねじれが消える条件

$$de^I + \omega^I_J \wedge e^J = 0 \quad (3.14)$$

^{*57} 微分形式の入門は例えば, Arnold (1989); Flanders (1963); Choquet-Bruhat and Dewitt-Morette (2000, 2004) を見よ. [本稿の付録 A も見よ.]

は接続に対する一意的な解 $\omega[e]$ を持つことを示せる．この解は (ねじれの無い ; torsionless) スピン接続, あるいは Levi-Civita 接続と呼ばれる．したがってもし接続にねじれがなければ, それはテトラードによって一意的に決まり, また Cartan 幾何学は Riemann 幾何学 (+ テトラードによって与えられる外的なゲージ不変性) に帰着する [本稿次項を見よ]．ねじれの無いスピン接続の曲率は

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = e_I^\mu e_\nu^J F^I{}_{J\rho\sigma}, \quad (3.15)$$

あるいは

$$F^{IJ} = e_\mu^I e_\nu^J R^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} dx^\rho \wedge dx^\sigma \quad (3.16)$$

によって, **Riemann** 曲率テンソルに直接関係付けられる [本稿次項で補足]．

これを用いると, Einstein–Hilbert 作用を

$$S[e] = \frac{1}{2} \int e^I \wedge e^J \wedge F^{KL} \epsilon_{IJKL} \quad (3.17)$$

の形に書き換えることは簡単な演習であり, ここに F はテトラード場の定めるねじれの無いスピン接続の曲率 (3.13), また ϵ_{IJKL} は $\epsilon^{0123} = 1 = -\epsilon_{0123}$ によって規格化された, 完全反対称な 4 つの添字の対象である．この作用は Einstein 方程式をもたらす (本章の補完 [3.6.1 項] を見よ)．Minkowski 空間における Hodge 双対 (Hodge dual) を星印 (star) で表す, すなわち $F_{IJ}^* \equiv \star F_{IJ} := \frac{1}{2} \epsilon_{IJKL} F^{KL}$, あるいは $T_I^* \equiv T^{JKL} \epsilon_{IJKL}$ ．式 (3.17) を

$$S[e] = \int e \wedge e \wedge F^* \quad (3.18)$$

と書くことができ, これ以降しばしば縮約される添字を省く．量

$$\Sigma^{IJ} = e^I \wedge e^J \quad (3.19)$$

は Plebanski 2 形式と呼ばれる．それは反対称な Minkowski 添字を持つ 2 形式であり, したがって Lorentz 代数の値を持つ 2 形式と解釈できる．

最後に, 曲がった Dirac 方程式 (3.10) を与える, 重力と相互作用しているフェルミオン場の作用は

$$S_f[\psi, e] = \int \bar{\psi} \gamma^I D\psi \wedge e^J \wedge e^K \wedge e^L \epsilon_{IJKL} \equiv \int \bar{\psi} \gamma D\psi \wedge (e \wedge e \wedge e)^* \quad (3.20)$$

であり, ここに $D = D_\mu dx^\mu$ ．[3.6.2 項の第 1 問を見よ.]

3.2 節冒頭 (3.2.1 項の前まで) について

■テトラード 3.2 節で提示される, 量子重力に適した GR の定式化には 2 重の難しさがある．

- 1 つ目は数学のテクニックの問題で, 理論が微分形式で書かれていること (付録 A を参照).
 - 微分形式は座標系に依らないという意味で幾何学的であることが明白な表現である.
- 2 つ目は物理的に重要で, 理論が計量 $g_{\mu\nu}$ ではなく,
 - テトラード $e^I = e_\mu^I dx^\mu$ を基本変数として書かれていること (例えば文献 [11, § 98] を参照).
 - テトラードは自然な変数であり, 何より決定的なことに, フェルミオンはテトラードによる定式化を必要とする.

テトラードは計量よりも基本的な量と見なされており, 式 (3.6) を通じて計量が後から定義される．GR の作用に関しても, テトラードによる表現を原理と見なし, そこから Einstein–Hilbert 作用を導くという手順を採ることができる．

<u>Riemann幾何</u>		<u>ゲージ理論</u>
座標変換	longleftrightarrow	ゲージ変換
ベクトル V^μ	longleftrightarrow	物質場 φ_i
接続 $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$	longleftrightarrow	ゲージ場 $(A_\mu)_i^j$
共変微分 ∇_μ	longleftrightarrow	共変微分 D_μ
曲率 $R_{\nu\rho\sigma}^\mu$	longleftrightarrow	場の強さ $(F_{\mu\nu})_i^j$

図 34 Yang-Mills 理論と幾何学 [10, § 5-1]

変換性 テトラード e_μ^I が微分 1 形式 (3.11) の成分となるには、添字 μ に関して共変ベクトルとして変換しなければならない：

$$e'^I_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} e^I_\nu(x).$$

ここで“同一の時空点”の古い座標を x ，新しい座標を x' と書いている．これと Lorentz 添字 I に関する反変ベクトルとしての変換性 (3.7) はいずれも、表式 (7): $e_\mu^I = \partial X^I / \partial x^\mu$ からは直ちに理解できる [2, p.60]．ただし座標が e_μ^I を定めるのではなく、むしろ e_μ^I が座標を定めるという見方もできる (式 (3.8) に続く段落)．

また計量の式 (3.6) はこのとき、単に共変テンソルの変換則に過ぎない．さらに計量の行列式との関係 $-\det g = (\det e)^2$ を経由せずとも、 $\det e = \partial(X)/\partial(x)$ は Jacobian であることが明白である．

逆テトラード e_I^μ が計量で e_μ^I の添字を上げ下げした量と見なせること 内部添字 I と空間添字 μ をそれぞれ、2 種類の計量 η_{IJ} と $g^{\mu\nu}$ ($g_{\mu\nu}$ の逆行列として定義される) で上げ下げした量として逆テトラード

$$e_I^\mu(x) \equiv \eta_{IJ} g^{\mu\nu}(x) e_\nu^J(x)$$

を定義すると、これは結果的に (その名の通り) $e_\mu^I(x)$ の逆行列になることが判明する [2, p.46]．実際、

$$e_I^\mu e_\nu^I = (\eta_{IJ} g^{\mu\rho} e_\rho^J) e_\nu^I = g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta_\nu^\mu, \quad (\because \text{計量の定義式 (3.6)})$$

また上式に e_μ^J をかけて μ で和をとると $(e_\mu^J e_I^\mu) e_\nu^I = e_\nu^J$ となるので、

$$e_\mu^J e_I^\mu = \delta_I^J$$

も成立する．そこで計量 (3.6) に逆行列 e_I^μ をかけると、式 (3.8): $e_I^\mu e_J^\nu g_{\mu\nu} = \eta_{IJ}$ を得る^{*58}．

■「Yang-Mills 理論におけるように、接続を導入できる」(教科書 p.60 末尾) について Yang-Mills 理論は数学的には幾何学として定式化される (図 34 参照)．ただし「接続」「曲率」といった数学的概念の物理的な意味は Maxwell 理論と GR とで異なる (表 2 参照)．GR において重力場のポテンシャルに相当するのは計量 $g_{\mu\nu}$ である．

^{*58} 等価的に上式 $e_\mu^J e_I^\mu = \delta_I^J$ に η_{JK} をかけて Lorentz 内部添字を下ろし、 $e_I^\mu e_{\mu K} = \eta_{IK}$ としても良い．文献 [11, § 98] ではこの関係を用いて (逆) テトラード e_I^μ を定義しており、次いで $e_\mu^I e_J^\mu = \delta_J^I$ を通じて逆行列 e_μ^I を定義すると、 $e_\mu^I e_I^\nu = \delta_\mu^\nu$ と計量の表式 (3.6) が導かれることを示している．

表 2 Maxwell 理論と GR における幾何学的概念の物理的意味の違い

	Maxwell 理論	GR
接続	電磁場のポテンシャル A	重力場の強度 Γ
曲率	電磁場の強度 F	時空の曲率 R

■式 (3.9),(3.11) の接続 ω^{IJ} について スピン接続の反対称性 $\omega^{IJ} = -\omega^{JI}$ は通常の Levi-Civita 接続 (Christoffel 記号 (式 (42))=(式 (43))) の対称性 $\Gamma_{\lambda,\mu\nu} = \Gamma_{\lambda,\nu\mu}$ とは異なるものである。

■接続 (3.9) の定義する共変微分 D_μ について 補完 (3.6 節) の式 (3.103) を見よ。

文献 [2, p.34] では次のように説明されている。すなわち接続 ω^{IJ} は Lorentz 添字 I を持つ任意の場の共変微分

$$D_\mu v^I = \partial_\mu v^I + \omega_{\mu J}^I v^J \quad (38)$$

[文献 [1, p.42] の 3 次元での式 (3.27) に対応] と、微分形式 (forms) のゲージ共変な外微分 D を定義する。例えば、Lorentz 添字を持つ 1 形式 u^I に対して

$$Du^I = du^I + \omega^I_J \wedge u^J \quad (\text{式 (3.103)}) \quad (39)$$

であり、特にねじれ (torsion) 2 形式 (3.12) は単に $T^I = De^I$ と書ける (式 (3.104))。

共変微分 (38) とゲージ共変な外微分 (39) の関係 任意の 1 形式 u^I は必ず $u^I = u_\nu^I dx^\nu$ と書ける。そこで場 v^I として係数 u_ν^I を考えて式 (38) を適用し、両辺に 2 形式 $dx^\mu \wedge dx^\nu$ を掛けると

$$\begin{aligned} (D_\mu u_\nu^I) dx^\mu \wedge dx^\nu &= (\partial_\mu u_\nu^I + \omega_{\mu J}^I u_\nu^J) dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= d(u_\nu^I dx^\nu) + (\omega_{\mu J}^I dx^\mu) \wedge (u_\nu^I dx^\nu) \\ &= du^I + \omega^I_J \wedge u^J \end{aligned}$$

となる。最左辺について、 $u^I = u_\nu^I dx^\nu$ のゲージ共変な外微分 D もまた、通常の外微分と同様の関係式

$$Du^I = (D_\mu u_\nu^I) dx^\mu \wedge dx^\nu$$

で定義されるとき、式 (39) が得られる。もちろん、この議論を逆にたどれば式 (39) から式 (38) が得られる。

■重力と結合した Dirac 方程式 (3.10) について フェルミオン場 ψ は Lorentz 群のスピン表現における場であり、Yang-Mills 群 G の表現の値をとり得る。スピン接続 ω と Yang-Mills 場 A は共変微分

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \omega_{\mu J}^I L_I^J \psi + A_\mu^A L_A \psi \quad (40)$$

を定義する。ここに L_I^J と L_A は ψ が属する表現における、Lorentz およびゲージ代数の生成子たちである。[ゲージ場 A との相互作用を考慮しない場合、 A の項は省略可能.] また γ^I を通常の Dirac 行列として、

$$\not{D}\psi = \gamma^I e_I^\mu D_\mu \psi \quad (41)$$

を定義する [2, p.38].

ところで Minkowski 解

$$e_\mu^I(x) = \delta_\mu^I, \quad \omega_{\mu J}^I(x) = 0$$

は計量 (3.6) を $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ に帰着させ、曲率をゼロにする [2, p.39]. [式 (50) より第 1 式は第 2 式を含意する.] このとき上式 (40) は接続 ω が消えて、見慣れた表式 [10, p.141] に帰着する. また式 (41) は $\mathcal{D} = \gamma^I D_I$ に戻る.

■ねじれの無い接続が Riemann 幾何学の Levi-Civita 接続を与えること (教科書 p.61) 段階的に説明する. Levi-Civita 接続は Christoffel 記号である

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = e_J^\rho e^{J\sigma} (e_{\rho I} \partial_{[\mu} e_{\nu]}^I + e_{\nu I} \partial_{[\mu} e_{\rho]}^I + e_{\mu I} \partial_{[\nu} e_{\rho]}^I) \quad (42)$$

は Levi-Civita 接続と呼ばれる [2, p.39]. ここでは通常の接続ないし Christoffel 記号

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = g^{\sigma\rho} \Gamma_{\rho,\mu\nu}, \quad \Gamma_{\rho,\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (43)$$

をテトラードで表すと, Levi-Civita 接続 (42) に書き換えられることを示す.

直接確かめられるように, 式 (3.6): $g_{\mu\nu} = e_\mu^I e_\nu^J \eta_{IJ}$ の逆テンソルは

$$g^{\rho\sigma} = e_K^\rho e_L^\sigma \eta^{KL} = e_K^\rho e^{K\sigma}$$

である. また

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho,\mu\nu} &\equiv \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} \{ e_\rho^J (\partial_\mu e_\nu^I) \eta_{IJ} + e_\nu^I (\partial_\mu e_\rho^J) \eta_{IJ} \} + \{ e_\mu^J (\partial_\nu e_\rho^I) \eta_{IJ} + e_\rho^I (\partial_\nu e_\mu^J) \eta_{IJ} \} - \{ e_\nu^J (\partial_\rho e_\mu^I) \eta_{IJ} + e_\mu^I (\partial_\rho e_\nu^J) \eta_{IJ} \} \\ &= e_{\rho I} \partial_{[\mu} e_{\nu]}^I + e_{\nu I} \partial_{[\mu} e_{\rho]}^I + e_{\mu I} \partial_{[\nu} e_{\rho]}^I \end{aligned}$$

なので, 接続 (43) は式 (42) へと書き換えられる. このように Levi-Civita 接続 (42) は, 右辺括弧内の $\Gamma_{\rho,\mu\nu}$ と, その前の $g^{\rho\sigma}$ とから成っている.

ねじれの無い接続が Levi-Civita 接続で与えられること 計量を保つ (metric-preserving) 線形接続を

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = e_I^\rho (\partial_\mu e_\nu^I + \omega_{\mu J}^I e_\nu^J) \quad (44)$$

によって定義する^{*59}. それは正接 (μ) 添字を持つ全ての場の共変微分 D_μ ,

$$D_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu v^\rho \quad (45)$$

を定義する [GR の通常の共変微分である [11, § 85]]. ω と合わせて, それは Lorentz および正接添字を持つ全ての対象の共変微分 D_μ を定義する. 特に, 式 (44) は直ちに

$$D_\mu e_\nu^I = \partial_\mu e_\nu^I + \omega_{\mu J}^I e_\nu^J - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho^I = 0 \quad (46)$$

を与えることに注意せよ [第 2 の等号では式 (44) を代入]. 線形接続の反対称部分 $T_{\mu\nu}^\rho = (\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\mu}^\rho)/2$ は, 式 (3.12) で定義されるねじれ $T^I = e_\rho^I T_{\mu\nu}^\rho dx^\mu \wedge dx^\nu$ を与える [2, p.46].

^{*59} Levi-Civita 接続に限らず任意の線形接続 (44) を用いて定義される共変微分に対して, 式 (46): $D_\mu e_\nu^I = 0$ より計量 (3.6) の共変微分がゼロになることが, 「計量を保つ」と形容される所以である.

確認 ねじれは定義式 (3.12) より

$$T^I = T_{\mu\nu}^I dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad T_{\mu\nu}^I \equiv \partial_{[\mu} e_{\nu]}^I + \omega_{[\mu J}^I e_{\nu]}^J$$

と書ける。右辺の角括弧はいずれも、添字 μ, ν に関する反対称化 (反対称部分として定義) を表す。すると

$$e_\rho^I T_{\mu\nu}^\rho = e_\rho^I \Gamma_{[\mu\nu]}^\rho = e_\rho^I e_K^\rho (\partial_{[\mu} e_{\nu]}^K + \omega_{[\mu J}^K e_{\nu]}^J) = \partial_{[\mu} e_{\nu]}^I + \omega_{[\mu J}^I e_{\nu]}^J = T_{\mu\nu}^I \quad (47)$$

となって、これはねじれの成分 $T_{\mu\nu}^I$ に一致する。

Levi-Civita 接続は e と $\omega[e]$ から決定される (計量を保つ) 線形接続である。すなわち、それは

$$\partial_\mu e_\nu^I + \omega[e]_{\mu J}^I e_\nu^J - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho^I = 0 \quad (48)$$

によって定義され、その解は式 (42) である。それはねじれフリーである。この方程式の反対称部分は消えるねじれに関する第 1 の Cartan 構造方程式 (3.12) であり、それは $\omega[e]$ を e の関数として決定するのに十分であることに注意せよ [2, p.46].

補足 Levi-Civita 接続の式 (48) がねじれフリーの条件 (3.14) に帰することは、Levi-Civita 接続がねじれ T^I をゼロにするスピン接続 $\omega[e]$ で定義される線形接続 Γ であることから、充分納得できることである。実際、式 (48) の反対称部分

$$(\partial_{[\mu} e_{\nu]}^I + \omega[e]_{[\mu J}^I e_{\nu]}^J) - \Gamma_{[\mu\nu]}^\rho e_\rho^I = 0$$

は上式 (47) より、式 (3.14):

$$T_{\mu\nu}^I = T_{\mu\nu}^I \Big|_{\omega=\omega[e]} = 0$$

を与える (第 2 の等号は $\omega[e]$ の定義による)。

一見すると式 (46–48) は、独立に選んだ場 e, ω に対して常に成立する恒等式として導かれているように見える。しかし (2 種類の添字を持つ量 e_ν^I の共変微分を式 (46) 第 1 の等号で定義する以上)、実際には式 (46–48) は e と ω の関係を規定する条件式になっている。そして接続の一般式 ((44) は添字 μ, ν に関して対称とは限らないものの、その反対称部分を消す式 (48) の解 $\omega[e]$ に対しては対称な Levi-Civita 接続 (42) となる。

ねじれないスピン接続のあからさまな表式 式 (43), (48) により、我々は GR の運動方程式 (3.14) のあからさまな解

$$\omega[e]_{\mu J}^I = -e_J^\nu (\partial_\mu e_\nu^I - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho^I) \quad (49)$$

を書くことが可能となることに注意しよう [式 (48) を ω について解いた]。ここに Γ は式 (43)、 g は式 (3.6) によって与えられる。明示的には、これは簡単な代数計算により、

$$\omega[e]_\mu^{IJ} = 2e^{\nu[I} \partial_{[\mu} e_{\nu]}^{J]} + e_{\mu K} e^{\nu I} e^{\sigma J} \partial_{[\sigma} e_{\nu]}^K \quad (50)$$

を与える [2, pp.46–47]。[上式 (50) においては、 ω の添字 I, J に関する反対称性が明白である。]

確認 $\omega[e]$ の式 (49) に Levi-Civita 接続の表式 (42) を代入すると、

$$\begin{aligned} \omega[e]_\mu^{IJ} &= -e^{\nu J} \left\{ \partial_\mu e_\nu^I - e_K^\sigma e^{K\rho} \left(e_{\sigma L} \partial_{(\mu} e_{\nu)}^L + e_{\nu L} \partial_{[\mu} e_{\sigma]}^L + e_{\mu L} \partial_{[\nu} e_{\sigma]}^L \right) e_\rho^I \right\} \\ &= -e^{\nu J} \left\{ \partial_\mu e_\nu^I - e^{\sigma I} \left(e_{\sigma L} \partial_{(\mu} e_{\nu)}^L + e_{\nu L} \partial_{[\mu} e_{\sigma]}^L + e_{\mu L} \partial_{[\nu} e_{\sigma]}^L \right) \right\} \end{aligned}$$

となる。最右辺において

$$(\text{第 2 項}) = e^{\nu J} e^{\sigma I} e_{\sigma L} \partial_{(\mu} e_{\nu)}^L = e^{\nu J} \partial_{(\mu} e_{\nu)}^I = \frac{1}{2} e^{\nu J} (\partial_\mu e_\nu^I + \partial_\nu e_\mu^I),$$

$$(\text{第 3 項}) = e^{\nu J} e^{\sigma I} e_{\nu L} \partial_{[\mu} e_{\sigma]}^L = e^{\sigma I} \partial_{[\mu} e_{\sigma]}^J = \frac{1}{2} e^{\nu I} (\partial_\mu e_\nu^J - \partial_\nu e_\mu^J)$$

であり、これらを第 1 項 $-e^{\nu J} \partial_\mu e_\nu^I$ と合わせると

$$\frac{1}{2} (-e^{\nu J} \partial_\mu e_\nu^I + e^{\nu J} \partial_\nu e_\mu^I + e^{\nu I} \partial_\mu e_\nu^J - e^{\nu I} \partial_\nu e_\mu^J) = 2e^{\nu[I} \partial_{[\mu} e_{\nu]}^{J]}$$

となる。また残る第 4 項は、ダミー添字の置き換え $\nu \leftrightarrow \sigma, L \rightarrow K$ により

$$e^{\sigma I} e^{\nu J} e_{\mu L} \partial_{[\nu} e_{\sigma]}^L = e^{\nu I} e^{\sigma J} e_{\mu K} \partial_{[\sigma} e_{\nu]}^K$$

と書き換えられるので、式 (50) を得る。

■曲率 (3.13),(3.15–16) について

曲率 (3.13) と文献 [2] の比較 文字 F^i は文献 [2, p.36] では自己双対接続 $A^i = P_{IJ}^i \omega^{IJ} = \omega^i + i\omega^{0i}$ に関する曲率であったのに対し、本稿では A^i を用いた GR の定式化^{*60}が現れず、 F^I_J は文献 [2, p.34] の R^I_J である。Cartan 幾何学と Riemann 幾何学の曲率を概念的に区別するために、異なる文字を充てるのは賢明である。

曲率 2 形式 (3.13) の成分 $F^I_{J\mu\nu}$ の同定 曲率の定義式 (3.13): $F^I_J = d\omega^I_J + \omega^I_K \wedge \omega^K_J$ の右辺に接続 (3.11): $\omega^I_J = \omega^I_{\mu J} dx^\mu$ を代入すると、

$$F^I_J = (\partial_\mu \omega^I_{\nu J} + \omega^I_{\mu K} \omega^K_{\nu J}) dx^\mu \wedge dx^\nu$$

となる。ところが外積 $dx^\mu \wedge dx^\nu$ は添字 μ, ν に関して反対称なので、係数の対称部分は和に寄与を持たない。実際、微分形式の常として、 $F^I_J \equiv \frac{1}{2} F^I_{J\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ における外積の係数は添字 μ, ν に関して反対称である^{*61}。これを踏まえると、

$$\frac{1}{2} F^I_{J\mu\nu} = \partial_{[\mu} \omega^I_{\nu]J} + \omega^I_{[\mu K} \omega^K_{\nu]J} \quad (51)$$

と同定される。ただし右辺の角括弧はいずれも、添字 μ, ν に関する反対称化を表す。これはもとの式 (3.13) の形を反映して、Riemann 幾何学の曲率テンソルと同様、接続の微分の項と接続の 2 次の項から成る。

また接続 $\omega^{IJ} = -\omega^{JI}$ の反対称性は、曲率 (3.13): $F^{IJ} = d\omega^{IJ} + \omega^I_K \wedge \omega^{KJ}$ が添字 I, J に対しても反対称であることを意味する。実際、特に第 2 項で I と J を入れ替えると

$$\omega^K_J \wedge \omega^{KI} = -\omega^{KI} \wedge \omega^K_J = \omega^{IK} \wedge (-\omega^K_J) = -\omega^K_J \wedge \omega^{IK}$$

となる。

Riemann 曲率との関係 (3.15–16) について 式 (3.15) は Riemann 曲率とそのテトラード成分の e による引き戻し

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = F^I_J{}_{\rho\sigma} e_{\mu I} e_{\nu J}$$

で与えられること [11, p.327] を意味する。このとき上で見た $F^I_J{}_{\mu\nu}$ の添字 I, J と μ, ν に関する反対称性は、Riemann 曲率 $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ の添字 μ, ν と ρ, σ に関する反対称性に引き継がれる。

^{*60} 虚部が運動方程式に影響しないという、複素数の作用

$$S = \frac{-i}{16\pi G} \int \Sigma_i \wedge F^i \quad (\Sigma^i \equiv P_{IJ}^i e^I \wedge e^J, \text{宇宙定数の項は省略})$$

を含む [2, pp.36–37]。代わりに作用の Holst 項が導入され、それ (とその運動方程式への付加的な寄与) はねじれが $T = 0$ のとき、Bianchi の恒等式により消えることが明瞭に分かる (3.3 節, 3.6.1 項)。

^{*61} 係数 $1/2$ を括り出して曲率成分 $F^I_{J\mu\nu}$ を定義して初めて、以下で見るように Riemann 曲率との関係 (3.15–16) が正確に成り立つ。この係数の流儀は、文献 [2, p.37] で Maxwell 場 $A = A_\mu dx^\mu$ の曲率を

$$F = dA = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

と書いていることに整合している。

また式 (3.15) を逆に解くと $F^{IJ}_{\rho\sigma} = e^I_\mu e^J_\nu R^{\mu\nu}_{\rho\sigma}$ となるので、式 (3.16) を得る。正確には本稿では $F^{IJ} = \frac{1}{2} F^{IJ}_{\rho\sigma} dx^\rho \wedge dx^\sigma$ と書いて曲率成分 $F^{IJ}_{\rho\sigma}$ を定義したため、式 (3.16) の右辺に係数 $1/2$ を補う必要がある。

ただし式 (3.15) で導入される $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ が Riemann 曲率であることは非自明である。そこでねじれの無いスピノ接続 (49): $\omega[e]_{\mu J}^I = -e^\nu_J (\partial_\mu e^I_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e^I_\rho)$ ($\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ は Levi-Civita 接続) に対して、曲率 2 形式 (51): $\frac{1}{2} F^{IJ}_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} \omega_{\nu]}^{IJ} + \omega_{[\mu K}^I \omega_{\nu]J}^K$ (第 2 Cartan 方程式, 角括弧は添字 μ, ν に関する反対称化) のテトラードによる引き戻し $R^\rho_{\sigma\mu\nu} = e^\rho_I e_{\sigma J} F^{IJ}_{\mu\nu}$ が Riemann の曲率テンソルに一致することを確認する。

曲率の第 1 項の因子は

$$\begin{aligned} \partial_\mu \omega[e]_\nu^{IJ} &= -\partial_\mu \{e^{\alpha J} (\partial_\nu e^I_\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\beta e^I_\beta)\} \\ &= -(\partial_\mu e^{\alpha J})(\partial_\nu e^I_\alpha) + \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \partial_\mu (e^I_\beta e^{\alpha J}) - e^{\alpha J} \partial_\mu \partial_\nu e^I_\alpha + (\partial_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\beta) e^I_\beta e^{\alpha J} \end{aligned}$$

と計算される。添字 μ, ν に関する反対称化は、最右辺の第 1 項の添字 I, J に関する反対称化を意味し、また第 3 項を消す。次に曲率の第 2 項の因子は

$$\begin{aligned} \omega_{\mu K}^I \omega_{\nu J}^K &= e_K^\alpha (\partial_\mu e^I_\alpha - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta e^I_\beta) \cdot e^{\gamma J} (\partial_\nu e^K_\gamma - \Gamma_{\nu\gamma}^\delta e^K_\delta) \\ &= e_K^\alpha e^{\gamma J} \{(\partial_\mu e^I_\alpha)(\partial_\nu e^K_\gamma) - (\partial_\mu e^I_\alpha) \Gamma_{\nu\gamma}^\delta e^K_\delta - (\partial_\nu e^K_\gamma) \Gamma_{\mu\alpha}^\beta e^I_\beta + \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \Gamma_{\nu\gamma}^\delta e^I_\beta e^K_\delta\} \end{aligned}$$

と計算される。すると **2 つの青い項** の $R^\rho_{\sigma\mu\nu} = e^\rho_I e_{\sigma J} F^{IJ}_{\mu\nu}$ への寄与はそれぞれ

$$\begin{aligned} 2e_I^\rho e_{\sigma J} \cdot e^\alpha_\beta e^{\alpha J} (\partial_{[\mu} \Gamma_{\nu]\alpha}^\beta) &= 2\partial_{[\mu} \Gamma_{\nu]\sigma}^\rho = (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho), \\ 2e_I^\rho e_{\sigma J} \cdot e^\alpha_\beta e^\gamma_\delta \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \Gamma_{\nu\gamma}^\delta &= 2\Gamma_{[\mu\alpha}^\rho \Gamma_{\nu]\sigma}^\alpha = (\Gamma_{\mu\alpha}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha) \end{aligned}$$

となって、これらの和は Riemann の曲率テンソルに一致する。よって残りの項の寄与が相殺することを示せば良い (必要ならば式 (42) を用いる)。しかしそれは手計算で行うにはあまりに煩雑な作業になる。

そこで間接的ではありながら、飛躍のない証明方法を採用。2 種類の添字 μ, I を持つ量の共変微分は式 (46) の第 2 辺のように定義される。特に内部添字 I のみを持つ Minkowski 空間のベクトル v^I に対しては

$$\begin{aligned} D_\mu v^I &= \partial_\mu v^I + \omega_{\mu J}^I v^J, \quad \therefore D_\mu D_\nu v^I = \partial_\mu (D_\nu v^I) + \omega_{\mu J}^I (D_\nu v^J) - \Gamma_{\mu\nu}^\rho (D_\rho v^I) \\ &= (\partial_\mu \omega_{\nu J}^I + \omega_{\mu K}^I \omega_{\nu J}^K) v^J + (\text{添字 } \mu, \nu \text{ に関して対称な項}) \end{aligned}$$

なので、共変微分の順序交換に伴う差

$$[D_\mu, D_\nu] v^I = 2(\partial_{[\mu} \omega_{\nu]J}^I + \omega_{[\mu K}^I \omega_{\nu]J}^K) v^J = F^I_{J\mu\nu} v^J$$

はやはり、式 (3.13) で定義される曲率 $F^I_{J\mu\nu}$ を係数に持つ。さらに上式に e_I^λ を掛けて式 (46) を考慮すると、

$$[D_\mu, D_\nu] v^\lambda = F^\lambda_{J\mu\nu} v^J = F^\lambda_{J\mu\nu} (e^\rho_J v^\rho) = F^\lambda_{\rho\mu\nu} v^\rho$$

を得る。ここに $F^\lambda_{\rho\mu\nu} \equiv e_I^\lambda e^\rho_J F^I_{J\mu\nu}$ は曲率 $F^I_{J\mu\nu}$ のテトラードによる射影である。ここまでは接続 ω が計量を保つことしか用いていないから、Cartan 幾何学において常に成り立つと考えられる。

ところが ω をねじれの無いスピノ接続と仮定すると、内部添字を持たない時空ベクトル v^λ の共変微分 (45) において、 Γ は Levi-Civita 接続となる。したがって共変微分の順序交換に伴う差は、Riemann の曲率テンソル $R^\lambda_{\rho\mu\nu}$ を用いて

$$[D_\mu, D_\nu] v^\lambda = R^\lambda_{\rho\mu\nu} v^\rho$$

とも表される。これら 2 通りの表現が任意の v^ρ に対して常に一致するためには、 $F^\lambda_{\rho\mu\nu} = R^\lambda_{\rho\mu\nu}$ でなければならない。よって示された。

このように Cartan 幾何学は、ねじれがゼロのとき Riemann 幾何学に帰着する。

■Hodge 双対 (教科書 p.61) について Hodge スターは平坦な空間では

$$F_{IJ}^* = \frac{1}{2} \epsilon_{IJKL} F^{KL} \quad (52)$$

で定義され $[F^{KL}]$ が反対称テンソルなら F_{IJ}^* は対偶 (双対 ; dual) テンソルに過ぎない, 重力の存在下では

$$F_{IJ} e_\mu^I e_\nu^J = F_{\mu\nu}, \quad F_{IJ}^* e_\mu^I e_\nu^J = F_{\mu\nu}^*$$

の関係を通じて, 同じ式 (52) で定義される. 等価的に

$$F_{\mu\nu}^* = \sqrt{-\det g} \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} = |\det e| \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \quad (53)$$

と書ける [2, p.xxii].

上式 (53) を補足する. 式 (52) は

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^* &= F_{IJ}^* e_\mu^I e_\nu^J = \frac{1}{2} \epsilon_{IJKL} F^{KL} e_\mu^I e_\nu^J = \frac{1}{2} \left(\epsilon_{IJKL} e_\mu^I e_\nu^J e_\rho^K e_\sigma^L \right) F^{\rho\sigma} \quad (\because F^{KL} = e_\rho^K e_\sigma^L F^{\rho\sigma}) \\ &= \frac{1}{2} (|\det e| \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}) F^{\rho\sigma} \end{aligned}$$

と書き換えられるため, 式 (53) 最右辺を得る. ただしここで簡単のため暗に $\det e$ の符号を正と仮定している (教科書の 3.2.1 項と 3.6.1 項 (特に p.77) も見よ). 式 (53) の第 2 の等号 $\sqrt{-\det g} = |\det e|$ は式 (3.6) の行列式をとれば得られる. 式 (53) は式 (52) の一般化となっていることが見て取れる.

また Hodge スターの定義式 $T_I^* \equiv T^{JKL} \epsilon_{IJKL}$ (教科書 p.61) の右辺には因子 $1/3!$ がないことに注意する. 式 (3.20) においても同様の流儀が適用されている. しかしフェルミオン場の作用 (3.20) は, Hodge 双対の定義として第 2 辺に $1/3!$ を補って初めて, 平坦な時空での慣習的な作用の表式との対応がとれる (3.6.2 項の第 1 問).

なお教科書には $\star$ と $*$ の表記揺れがある.

3.2.1 重要な符号

上ではテトラード形式が計量の形式と等価であると書いた. これは正確には真ではなく, このことは量子論において重要となる. Einstein–Hilbert 作用

$$S_{\text{EH}}[g] = \frac{1}{2} \int \sqrt{-\det g} R d^4 x \quad (3.21)$$

によって定義される理論と, テトラードの作用

$$S_{\text{T}}[e] = -\frac{1}{2} \int e^I \wedge e^J \wedge F_{IJ}^* \quad (3.22)$$

によって定義される理論には違いがある.

note 3.1 節末尾の単位系を採用して $8\pi G = 1$ とおくと, Einstein–Hilbert 作用 (3.1) の係数は式 (3.21) のように $1/2$ となる. また式 (3.26) の符号が $s = +1$ のときに作用 (3.21) に一致するように, 式 (3.22) の右辺に係数 $-1/2$ を補った. 実際, 式 (3.26) の符号 s を明示すると, 式 (3.112–113) は

$$\begin{aligned} e \wedge e \wedge F^* &= \frac{1}{2} \text{Tr}(e \wedge e \wedge F) = -s |\det e| R d^4 x = -(\det e) R d^4 x, \\ S_{\text{T}} &= -\frac{1}{2} \int e \wedge e \wedge F^* = s \frac{1}{2} \int \sqrt{-\det g} R d^4 x = s S_{\text{EH}} \end{aligned}$$

を与える。したがって式 (3.22) は係数 $-1/2$ を補って初めて、以下の式 (3.25) に一致する。なお Einstein–Hilbert 作用を式 (3.1) の逆符号で定義する場合、式 (3.22) に補う係数も逆符号 $+1/2$ になる。

これら 2 つの作用は等価でない。それは内部 (internal) 時間反転操作

$${}^{(i)}Te^0 := -e^0, \quad {}^{(i)}Te^i := e^i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.23)$$

を実行すると理解できる。計量 $g = e^I e_I$ はこの変換によって影響されないで、この変換の下で S_{EH} は明らかに不変であるのに対し、 S_{T} は符号を反転し、 $S_{\text{T}}[{}^{(i)}Te] = -S_{\text{T}}[e]$ 。違いはそれぞれの作用をテンソル表記とテトラードで書くと明白になる：

$$S_{\text{EH}}[e] = \frac{1}{2} \int |\det e| R[e] d^4x, \quad (3.24)$$

$$S_{\text{T}}[e] = \frac{1}{2} \int (\det e) R[e] d^4x. \quad (3.25)$$

これらは符号因子

$$s \equiv \text{sgn}(\det e) \quad (3.26)$$

だけ異なる。[符号 s は変換 (3.23) の下で反転する.] よってトライアド [正しくはテトラード] ${}^{(i)}Te$ によって定義される重力場は、重力場 e と同じ Riemann 計量を定めるという事実にも関わらず、異なる作用を持つ。2 つの重力場 e と ${}^{(i)}Te$ の違いは、計量と結合する物質に全く影響しないものの、フェルミオンはテトラードと結合することを思い出そう。実際、Dirac 方程式 (3.10) によって決定されるフェルミオンのダイナミクスは、符号 s に敏感である：フェルミオンの位相は、 s が反対符号を持つ領域では逆向きに発展する。例えば“ラプス”関数 $N(t)$ は連続であるものの、時間 t の有限区間で負になるとして、テトラード場

$$e^i = dx^i, \quad e^0 = N(t) dx^0 \quad (3.27)$$

を考えよ。このテトラードが平坦な計量を定義することを理解するのは容易である。

note 式 (3.27) からテトラードは $e_\mu^i = \delta_\mu^i$, $e_\mu^0 = N(t) \delta_\mu^0$ 、対応する計量 (3.6) は $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-N^2, 1, 1, 1)$ と同定される。このとき Riemann 計量がゼロになることを確かめれば良い。

しかし負のラプスの領域では Dirac 方程式における時間微分の項が符号を反転し、したがって Dirac 粒子の位相は正のラプスの領域とは逆向きに回転する。干渉実験は原理的には相対的な位相のズレ (shift) を検出できるので、符号 s は原理的に観測可能である (Christodoulou *et al.* 2012)。

非相対論的な物理において、作用 (および Hamilton 関数) は時間反転した軌道に対して常に符号を変える。Einstein–Hilbert 作用はそうではない。したがって、この観点からはテトラードの作用が自然な作用である。これら全ては古典論にほとんど影響しないものの、それは量子論において重要である：重力場に対する経路積分を定義する際に、計量にわたって積分するのとテトラードにわたって積分するのは同じではない、何故ならテトラードにわたる積分は $s < 0$ の配位にわたる積分を含み、それは Feynman 積分に

$$e^{-\frac{i}{\hbar} S_{\text{EH}}[g]} \quad (3.28)$$

という形の項の寄与をするからである、

$$e^{+\frac{i}{\hbar} S_{\text{EH}}[g]} \quad (3.29)$$

という項に加えて、2つの寄与は相対論的な粒子に対する経路積分における、前方に伝播する経路と後方に伝播する経路に類似している。この意味で、負の s の領域を“反時空 (antispacetime)”と呼べる：作用にあたかもそれが時間反転を受けたかのような負号の寄与をする時空領域である。我々はこれら2つの項が量子論において、何度も繰り返し現れるのを見るだろう。

3.2.2 1 次の形式

異なる作用を考えよ、それは今や独立な場と考えられるテトラードと Lorentz 接続の関数

$$S[e, \omega] = \int e \wedge e \wedge F[\omega]^* \quad (3.30)$$

である。これは単純な多項式の (*polynomial*) 作用であり、時に Palatini 作用 (あるいは、より正確にはテトラード-Palatini 作用) と呼ばれる。似た文脈で Palatini が最初に気付いたように、この作用は一般相対性理論をもたらす：接続の変分は正確に方程式 (3.14) を与え、それはねじれが消え、したがって殻上で (on-shell) 接続は Levi-Civita 接続となることを述べる。このときテトラードの変分は Einstein 方程式を与える：

$$\begin{cases} \delta\omega: & \omega = \omega[e], \\ \delta e: & \text{Einstein 方程式.} \end{cases} \quad (3.31)$$

[3.6.1 項の第2問を見よ.] これは **1 次の形式** (*first order formulation*) と呼ばれ、自由粒子の作用 (2.23) の類似物である [e, ω を独立に扱うことは p, q を独立に扱うことに対応]；他方でテトラードまたは計量のみが唯一の変数である定式化は **2 次の形式** (*second order formulation*) と呼ばれる^{*62}。

3.3 Holst 作用と Barbero–Immirzi 結合定数

Palatini 作用は Yang–Mills 理論の作用のように、見事に多項式的である。しかも、それは微分形式を用いた純粋に幾何学的な定式化を許容する。これら全ての対称性を持つ他のどのような項を、この作用に加えられるかと問うことができる。実のところ、境界項を別にすれば、加えられる他の項は本質的に1つだけあり、それは $\int e \wedge e \wedge F := \int e_I \wedge e_J \wedge F^{IJ}$ 。それを結合定数 $1/\gamma$ とともに作用に加えよう：

$$S[e, \omega] = \int e \wedge e \wedge F^* + \frac{1}{\gamma} \int e \wedge e \wedge F. \quad (3.35)$$

^{*62} 1 次と 2 次の形式は純粋な重力に対しては等価であるものの、極小的に (minimally) 結合したフェルミオンに対しては等価ではない。2 次の作用

$$S[\psi, e] = \int e \wedge e \wedge F[\omega[e]]^* + \int \bar{\psi} \gamma D[\omega[e]] \psi \wedge (e \wedge e \wedge e)^* \quad (3.32)$$

と 1 次の作用

$$S[\psi, e, \omega] = \int e \wedge e \wedge F[\omega]^* + \int \bar{\psi} \gamma D[\omega] \psi \wedge (e \wedge e \wedge e)^* \quad (3.33)$$

の違いは 4-フェルミオン相互作用項であることを示せる。これはフェルミオンの存在下では ω の変分がねじれの消失を与えず、むしろフェルミオンのカレントに比例するねじれを与えることによる。この方程式の解となるスピン接続はフェルミオンに依存する項を持ち、それは翻って共変微分を通じてフェルミオンと結合する。こうして、概略的には

$$S[\psi, e] = S[\psi, e, \omega] + \int \bar{\psi} \psi \bar{\psi} \psi. \quad (3.34)$$

極小的に結合した理論は異なるものの、いずれの理論においても 4-フェルミオン相互作用を付け加えるか取り除くかして、それらを等価にできる。

[作用 (3.22) と同様、式全体を $1/2$ 倍するのが正確である.] この作用の運動方程式は再び GR のそれと同じである：第 2 項は運動方程式に影響しない。ここで起きることは、接続に関する変分が再びねじれない条件を与え、これを用いると、第 2 項は

$$\int e^I \wedge e^J \wedge F_{IJ} \sim \int R_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d^4x = 0 \quad (3.36)$$

となり、これは Riemann テンソル (その完全反対称部分は常に消える) の対称性により消えるということである。[本稿次項で補足する^{*63}。3.6.1 項の第 3 問も見よ.] 作用 (3.35) は簡潔な形

$$\begin{aligned} S[e, \omega] &= \int e \wedge e \wedge \left(F^* + \frac{1}{\gamma} F \right) \\ &\equiv \int e \wedge e \wedge \left(\star + \frac{1}{\gamma} \right) F \\ &= \int \left(\star e \wedge e + \frac{1}{\gamma} e \wedge e \right) \wedge F \quad [\star e \wedge e \text{ は } \Sigma_{IJ}^* = (e \wedge e)_{IJ}^* = \frac{1}{2} \epsilon_{IJKL} e^K \wedge e^L] \end{aligned} \quad (3.37)$$

に書くことができ、Holst 作用として知られている；第 2 項は Holst 項と呼ばれる^{*64}。結合定数 γ は Barbero–Immirzi 定数と呼ばれる [読み方は「バルペロ–イミジ」 [18, p.72]]. これが 4 次元の量子重力に取り組む際に我々が用いる作用である、と言うのも、それは最も一般的な作用である：それは多項式的であり、全ての重要な対称性を持つ。Holst 項は古典物理に影響しないものの、量子論において重要な役割を演じる。丸括弧内の項

$$B = \left(\star e \wedge e + \frac{1}{\gamma} e \wedge e \right) = \left(\star + \frac{1}{\gamma} \right) \Sigma \quad (3.38)$$

は以下で重要な役割を演じる [BF 理論 [2, § 9.3.2]]. $t = 0$ の境界上で、 B は作用 [正確にはラグランジアン (密度)] の $\partial\omega/\partial t$ に関する微分であり (何故なら作用の 2 次形式の (quadratic) 部分 [正しくは ω の 2 次形式を除いた部分] は $\sim B \wedge d\omega$ [pdq に対応]), したがって B は接続の運動量共役である。より正確には、完全な作用の前における次元を持つ定数 $\frac{1}{8\pi G}$ を復元し、 $\star e \wedge e$ の境界への制限が消える時間ゲージに移ると、運動量は $SL(2, \mathbb{C})$ の代数の値をとる境界上の 2 形式

$$\Pi = \frac{1}{8\pi\gamma G} B \quad (3.39)$$

となる。[以上、本稿次項で補足する^{*65}.]

QCD にも、運動方程式に影響しないものの量子論において役割を演じる、似た項があることに注意せよ：

$$S_{\text{QCD}} = \int F \wedge F^* + \theta_{\text{QCD}} \int F \wedge F. \quad [\text{本稿次項で補足}] \quad (3.40)$$

定数 θ_{QCD} は量子論において、例えばインスタントン (instantons) の理論において役割を演じる。Barbero–Immirzi 定数 γ についても同じことが起きる。

^{*63} 特に式 (3.36) において、最左辺の F_{KL} の添字を訂正し、また第 1 の等号を比例関係に置き換えた。

^{*64} Holst はそれを発見した 2 人目である [Hojman et al. (1980); Holst (1996)]：科学において何かを 2 人目の発見者に因んで呼ぶことは普通である。

^{*65} 本稿では共役運動量を求めるのに時間ゲージを仮定しない。時間ゲージで $\star e \wedge e$ の境界への制限が消えることについては、式 (7.8) のノートを見よ。

3.3 節冒頭 (3.3.1 項の前まで) について

■式 (3.36) について 作用に Holst 項 $S_\gamma = \frac{1}{\gamma} \int e \wedge e \wedge F$ を付け加えた場合にも, ω に関する変分はねじれ $T = 0$ を与えることを考察する. ω の変分に伴う変化は

$$\delta S_\gamma = \frac{1}{\gamma} \int e \wedge e \wedge \delta F = \frac{1}{\gamma} \int e \wedge e \wedge D\delta\omega.$$

ここで式 (3.115) の代わりに

$$0 = \int d(e \wedge e \wedge \delta\omega) = \int D(e \wedge e \wedge \delta\omega) = 2 \int T \wedge e \wedge \delta\omega + \int e \wedge e \wedge D\delta\omega$$

が成り立つことに注意すると, $\delta S_\gamma = -\frac{2}{\gamma} \int T \wedge e \wedge \delta\omega$ と書き換えられる. これを式 (3.116) 第 2 項 (の $-32\pi G$ 倍) と足すと, 変分原理は

$$0 = \delta S = -2 \int \left[\text{Tr}(T \wedge e \wedge \delta\omega) - \frac{1}{\gamma} T \wedge e \wedge \delta\omega \right].$$

ここから再び 3.6.1 項 (教科書 p.78) と同様に, $T \wedge e = 0, \therefore T = 0$ が得られると考えられる (十分性は明らか).

式 (3.36) の確認に移ろう. 式 (3.112) 第 2 の等号で見た関係 $F_{IJ} = \frac{1}{2} F_{IJKL} e^K \wedge e^L$ を代入し公式 (3.109) を用いると, 式 (3.36) 左辺は

$$\int e^I \wedge e^J \wedge F_{IJ} = \frac{1}{2} \int F_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge e^K \wedge e^L = \frac{1}{2} \int F_{IJKL} \epsilon^{IJKL} (\det e) d^4x$$

と書き換えられる. ここでねじれがゼロなので, F_{IJKL} は Riemann 曲率テンソルのテトラード成分に他ならないことに注意すると,

$$F_{IJKL} \epsilon^{IJKL} = R_{\mu\nu\rho\sigma} e_I^\mu e_J^\nu e_K^\rho e_L^\sigma \epsilon^{IJKL} = R_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \det(e^{-1})$$

と書き換えられる. よって式 (3.36) 第 1 の等号が成立する.

次に第 2 の等号を確認するにあたり, Riemann 曲率テンソルが Bianchi の恒等式

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\sigma\nu\rho} + R_{\mu\rho\sigma\nu} = 0$$

を満たすことを思い出そう [11, p.292]. すなわち後ろ 3 つの添字に関する巡回置換項の和はゼロである. そこで与えられた μ の値, 例えば $\mu = 0$ に対して, 残り 3 つの添字に関する和 $\epsilon^{0\nu\rho\sigma} R_{0\nu\rho\sigma}$ を考える.

- (ν, ρ, σ) が $(1, 2, 3)$ の巡回置換の項の和は, $\epsilon^{0\nu\rho\sigma} = +1$ より $\sum \epsilon^{0\nu\rho\sigma} R_{0\nu\rho\sigma} = R_{0123} + \text{cyclic} = 0$.
- (ν, ρ, σ) が $(3, 2, 1)$ の巡回置換の項の和は, $\epsilon^{0\nu\rho\sigma} = -1$ より $\sum \epsilon^{0\nu\rho\sigma} R_{0\nu\rho\sigma} = -(R_{0123} + \text{cyclic}) = 0$.

ノンゼロの項は以上で尽くされるので $\epsilon^{0\nu\rho\sigma} R_{0\nu\rho\sigma} = 0$. $\mu = 1, 2, 3$ の各々に対する和も同様に消えるので,

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \sum_\mu \sum_{\nu, \rho, \sigma} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0.$$

■接続の共役運動量 (3.39) について Holst 作用 (3.37) を

$$\begin{aligned} S &= \int B \wedge F = \int B_{IJ} \wedge F^{IJ} = \int B_{IJ} \wedge d\omega^{IJ} + \cdots = \int B_{IJ\mu\nu} \partial_\rho \omega_\sigma^{IJ} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma + \cdots \\ &= \int dt \int_{t=\text{const.}} d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_{IJ\mu\nu} \partial_\rho \omega_\sigma^{IJ} + \cdots \end{aligned}$$

と書くと、ラグランジアン L とその密度 $\mathcal{L}$ は

$$\mathcal{L} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_{IJ\mu\nu} \partial_\rho \omega_\sigma^{IJ} + \cdots, \quad L = \int d^3x \mathcal{L}$$

と同定される。ただし「 $+\cdots$ 」は曲率 (3.13) における ω の 2 次の項の寄与であり、 ω に共役な運動量 (密度)

$$\Pi_{KL}^\lambda \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\omega}_\lambda^{KL}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\omega}_\lambda^{[KL]}} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu 0\lambda} \{B_{KL\mu\nu} - (K \leftrightarrow L)\} = \epsilon^{0\lambda\mu\nu} B_{KL\mu\nu}$$

に影響しない。

反対称な汎関数微分に関する注意 汎関数微分の定義

$$\delta L = \int \frac{\delta L}{\delta \dot{\omega}_\lambda^{KL}} \delta \dot{\omega}_\lambda^{KL} d^3x$$

において、変分 $\delta \dot{\omega}_\lambda^{KL} (= \delta \dot{\omega}_\lambda^{LK})$ は反対称なので、その係数の反対称部分として $\frac{\delta L}{\delta \dot{\omega}_\lambda^{KL}}$ が定義されることに注意した。素朴には等価的に、あたかも $\dot{\omega}_\lambda^{KL}$ と $\dot{\omega}_\lambda^{LK}$ が独立であるかのように扱えば正しい計算結果が得られる。

最右辺より $\lambda = 0$ の成分はゼロであり、空間成分は $\epsilon^{123} = +1$ として

$$\Pi_{IJ}^a = \epsilon^{abc} B_{IJbc} \equiv 2B_{IJ}^a.$$

ここで式 (3.22) と同様に作用 (3.37) 全体に係数 $+1/2$ を導入し、また物理単位 $1/8\pi G$ を復元すると、上式の第 2 辺以降は $+1/(2 \cdot 8\pi G)$ 倍される。実際この結果は式 (7.2): $\Pi = B/8\pi G$ に対応する。

さらに面 $t = \text{const.}$ 上で $\star(e \wedge e) = 0$ となる座標付けを採用すると、 B の式 (3.38) において Holst 項のみが生き残る：

$$B_{IJ\mu\nu} = \frac{1}{\gamma} e_{\mu I} e_{\nu J}.$$

このとき運動量 Π 全体は $\frac{1}{\gamma}$ に比例するものの、式 (3.39) のように B から $\frac{1}{\gamma}$ を括り出すことはできない。

いずれにせよ作用において Holst 項は消えるので、結合定数を $\gamma \in \mathbb{C}$ とできる。なお「運動量は $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の代数の値をとる」(式 (3.39) の箇所) ことについては 7.1 節のノートで再論する。

■QCD の作用 (3.40) について Yang–Mills 理論におけるゲージ場 $A_\mu = A_\mu^i \tau_i$ とその強度 $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^i \tau_i$ は行列であり、ここに i は内部添字、 τ_i は生成子 (基底) である。そこで作用 (3.40) の被積分因子は行列のトレースをとって $\text{Tr}(F \wedge F^*)$ などとする必要がある [2, p.37]。等価的に $F \wedge F^* = F^i \wedge F^{i*}$ において内部添字 i の和が含意されていると見ても良い [10, p.144]。

さて、作用 (3.40) の第 1 項と第 2 項は見た目とは対照的に、それぞれ順にラグランジアン密度 $F^{iIJ} F_{IJ}^i$ と $F^{iIJ} F_{IJ}^{i*}$ に対応する：

$$\begin{aligned} \int F \wedge F^* &\sim \int F_{IJ}^i F_{KL}^{i*} dx^I \wedge dx^J \wedge dx^K \wedge dx^L = \frac{1}{2} \int \epsilon^{IJKL} \epsilon_{KLMN} F_{IJ}^i F^{iMN} d^4x = -2 \int F^{iIJ} F_{IJ}^i d^4x, \\ \int F \wedge F &\sim \int F_{IJ}^i F_{KL}^i dx^I \wedge dx^J \wedge dx^K \wedge dx^L = \int F_{IJ}^i F_{KL}^i \epsilon^{IJKL} d^4x = 2 \int F^{iIJ} F_{IJ}^{i*} d^4x. \end{aligned}$$

ここで Maxwell 理論の場合と同様に [11, p.71,p.77], 第 2 項のラグランジアン密度 $F^{IJ}F_{IJ}^*$ は場の 4 元発散となつて, 運動方程式に寄与しないことを確認しよう. 場の強度は

$$F_{IK}^i = \partial_I A_K^i - \partial_K A_I^i + g f_{ikl} A_I^k A_K^l = -F_{IK}^i$$

と書くことができ, ここに g は結合定数, f_{ikl} は完全反対称な構造定数である [10, p.144]. するとラグランジアン密度は

$$\begin{aligned} \epsilon^{IKLM} F_{IK}^i F_{LM}^i &= \epsilon^{IKLM} (2\partial_{[I} A_{K]}^i + g f_{ikl} A_I^k A_K^l) (2\partial_{[L} A_{M]}^i + g f_{imn} A_L^m A_M^n) \\ &= \epsilon^{IKLM} \left\{ 4\partial_{[I} A_{K]}^i \partial_{[L} A_{M]}^i + 2g \left(\partial_{[I} A_{K]}^i f_{imn} A_L^m A_M^n + \partial_{[L} A_{M]}^i f_{ikl} A_I^k A_K^l \right) + g^2 f_{ikl} f_{imn} A_I^k A_K^l A_L^m A_M^n \right\}. \end{aligned}$$

最右辺において g の 0 次の項は

$$4\epsilon^{IKLM} \partial_{[I} A_{K]}^i \partial_{[L} A_{M]}^i = 4\epsilon^{IKLM} (\partial_I A_K^i) (\partial_L A_M^i)$$

であり, これを 4 元発散 $4\partial_I (\epsilon^{IKLM} A_K^i \partial_L A_M^i)$ に置き換えた際のおつりの項 $4\epsilon^{IKLM} A_K^i \partial_I \partial_L A_M^i$ は, 添字 I, L について対称な項と反対称な項の縮約となっているので消える. g について 1 次の項は, ダミー添字を丸括弧内の第 1 項で $m, n \rightarrow k, l$, 第 2 項で $I, K \leftrightarrow L, M$ と置き換えると,

$$4g\epsilon^{IKLM} f_{ikl} \partial_{[I} A_{K]}^i A_L^k A_M^l = 4g\epsilon^{IKLM} f_{ikl} (\partial_I A_K^i) A_L^k A_M^l = \frac{4}{3} g \epsilon^{IKLM} f_{ikl} \partial_I (A_K^i A_L^k A_M^l)$$

となつて 4 元発散にまとめられる. g について 2 次の項は, 構造定数に対する “Jacobi の恒等式”

$$f_{ikl} f_{imn} = -(f_{ikn} f_{iln} + f_{ilm} f_{ikn})$$

を用いると [10, p.140],

$$-g^2 \epsilon^{IKLM} (f_{ikn} f_{iln} + f_{ilm} f_{ikn}) A_I^k A_K^l A_L^m A_M^n$$

と書き換えられる. 第 2 項でダミー添字を $k \leftrightarrow l, I \leftrightarrow K$ と入れ替えると, これは 2 つの項が相殺してゼロになることが見て取れる. 以上より

$$\epsilon^{IKLM} F_{IK}^i F_{LM}^i = 4\partial_I \left\{ \epsilon^{IKLM} \left(A_K^i \partial_L A_M^i + \frac{1}{3} g f_{ikl} A_K^i A_L^k A_M^l \right) \right\}.$$

3.3.1 線形単純性拘束

テトラード-接続形式において, 空間的な境界面 Σ を考えよ. テトラードは時空多様体の接空間から Minkowski 空間への写像である. 特に, Σ の各点 σ において, それは σ における接空間を, Minkowski 空間の 3 次元の線形で空間的な部分空間に写像する [以上, 本稿次項で補足]. この部分空間を不変に留める Lorentz 群の部分群は $SO(3)$ 回転部分群であり, その存在は境界において局所 $SO(3,1)$ 不変性を $SO(3)$ へと破る. すなわち, 境界は特別な Lorentz 系を選ぶことを可能にする.

座標では, Σ に接する全てのベクトルに垂直なコベクトル n_I を書くことで, このことを見ることができる, すなわち

$$n_I \sim \epsilon_{IJKL} e_\mu^J e_\nu^K e_\rho^L \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma^2} \frac{\partial x^\rho}{\partial \sigma^3} \quad (3.41)$$

であり, ここに $i = 1, 2, 3$ として $\{\sigma^i\}$ は点 $\sigma \in \Sigma$ の座標であり, また $x^\mu(\sigma)$ は境界 Σ の時空への埋め込みである [本稿次項で補足]. n_I を用いて $SO(3,1)$ を, 自身を保つ $SO(3)$ 部分群へとゲージ固定できる. すなわち, 境界が局所的に時間一定の面であり, したがって $n_I = (1, 0, 0, 0)$ となるように局所 Lorentz 系の向きを選べる.

note 与えられた法線ベクトル n_I の向きに沿って局所 Lorentz 系の時間軸を選べば, $n_I \sim (1, 0, 0, 0)$ とできる. このとき Lorentz 系の空間軸を面 Σ 内で回転する自由度が残される. なお σ のパラメータ付けを選び直して n_I の長さを調節すれば, ゲージ条件 $n_I = (1, 0, 0, 0)$ を正確に満たせる.

一度 Lorentz 系を選ぶと, 電磁場テンソル F^{IJ} は電場と磁場の部分に分解できるのと同様に, 式 (3.38) で定義される運動量 2 形式 B^{IJ} の Σ への引き戻しは, 電場的な部分 $K^I = n_J B^{IJ}$ と磁場的な部分 $L^I = n_J (\star B)^{IJ}$ に分解できる. B は反対称なので, L^I と K^I は Σ に垂直な成分を持たない, すなわち $n_I K^I = n_I L^I = 0$ であり, よって n に垂直な空間における 3 次元のベクトルであって, $\vec{K}$ および $\vec{L}$ と書ける. $n_I = (1, 0, 0, 0)$ のゲージでは, これらは単に

$$K^i = B^{i0}, \quad L^i = \frac{1}{2} \epsilon^i_{jk} B^{jk} \quad (3.42)$$

であり, ここで $\vec{K} = \{K^i\}$ および $\vec{L} = \{L^i\}$ と書いた. これらの関係は電場と磁場を Maxwell テンソルに関係付ける関係とアナログスである. [以上を本稿次項で補足する.]

さて, 量子論に重要な影響をもたらす簡単な結論が容易に帰結する: B の定義 (3.38) から

$$n_I B^{IJ} = n_I \left(\star e \wedge e + \frac{1}{\gamma} e \wedge e \right)^{IJ} = n_I \left(\epsilon^{IJ}_{KL} e^K \wedge e^L + \frac{1}{\gamma} e^I \wedge e^J \right) \quad (3.43)$$

が得られ [最右辺第 1 項は係数 1/2 を要するものの結論 (3.44–45) は変わらない], ところが境界上ではまさに n の定義より $n_I e^I|_{\Sigma} = 0$ なので [本稿次項で補足],

$$n_I B^{IJ} = n_I (\star e \wedge e)^{IJ}. \quad (3.44)$$

同じ理由で,

$$n_I (B^{\star})^{IJ} = n_I \left(\left(\frac{1}{\gamma} e \wedge e \right)^{\star} \right)^{IJ} = \frac{1}{\gamma} n_I (\star e \wedge e)^{IJ} = \frac{1}{\gamma} n_I B^{IJ}. \quad (3.45)$$

K^I と L^I の定義より, 最後の式は

$$\boxed{\vec{K} = \gamma \vec{L}} \quad (3.46)$$

を与える. [導き方より, この結論はゲージ条件 $n_I = (1, 0, 0, 0)$ に依らない.] 言葉で言えば, 運動量 2 形式 B の磁場と電場の部分は互いに比例し, 比例定数は Barbero–Immirzi 定数である. この関係は“線形単純性拘束 (linear simplicity constraint)”と呼ばれ, 第 7 章で見えるように, 共変ループ量子重力において最も重要な式の 1 つである.

3.3.1 項について

■テトラードによる Minkowski 空間への写像 (3.3.1 項冒頭) について テトラード $e^I_{\mu}(x)$ は時空多様体 M の各点 x において, 接空間 $T_x M$ のベクトル v^{μ} を Minkowski ベクトル $u^I = e^I_{\mu} v^{\mu}$ に移す. こうして $e^I_{\mu}(x)$ は $T_x M$ から Minkowski 空間への写像を定義する. 接ベクトル v のノルムないし“物理的長さ (physical length)”は, u の Minkowski 長さ (Minkowski length)

$$|u| = \sqrt{-\eta_{IJ} u^I u^J} = \sqrt{-\eta_{IJ} (e^I_{\mu} v^{\mu}) (e^J_{\nu} v^{\nu})} = \sqrt{-g_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu}} \equiv |v|$$

で定義される. u が時間的 (空間的または光的) であれば, 接ベクトル v は時間的 (空間的または光的) と呼ばれる [2, pp.42–43].

■法線要素 (3.41) について 3次元超曲面 Σ のベクトルをテトラードで写像して得られる, 3つの Minkowski ベクトル

$$u_i^I(\sigma) = e_\mu^I(x(\sigma)) \frac{\partial x^\mu(\sigma)}{\partial \sigma^i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (54)$$

を定義する. このとき法線要素 (3.41) は

$$n_I = \epsilon_{IJKL} u_1^J u_2^K u_3^L \quad (55)$$

と書ける [2, p.44]. ただし議論を確定するために, 比例関係 $\sim$ を等号に置き換えて n_I を定義した.

これを

$$n_I = \frac{1}{3!} \epsilon_{IJKL} \epsilon^{jkl} u_j^J u_k^K u_l^L \equiv \frac{1}{3!} \epsilon_{IJKL} n^{JKL} \quad (\text{すなわち } n^{JKL} \equiv -\epsilon^{IJKL} n_I)$$

と書くと, 対偶な (dual) テンソルは

$$n^{JKL} = \epsilon^{jkl} u_j^J u_k^K u_l^L = \begin{vmatrix} u_1^J & u_2^J & u_3^J \\ u_1^K & u_2^K & u_3^K \\ u_1^L & u_2^L & u_3^L \end{vmatrix}$$

と同定できる. これは 3つの方向ベクトル u_1^I, u_2^I, u_3^I が張る平行 6面体の体積に一致している [11, p.23]. ($d^3\sigma$ を掛けると, 線要素 $u_1^I d\sigma^1$, etc. の張る体積要素になる.)

また n_I は超曲面 Σ の接ベクトル u_i^I ($i = 1, 2, 3$) の各々と直交している. 実際,

$$n_I u_1^I = (\epsilon_{IJKL} u_1^J u_2^K u_3^L) u_1^I = 0, \quad \text{etc.} \quad (56)$$

■式 (3.42) の段落について 3.2 節 p.61 で定義した Hodge 双対 $F_{IJ}^* = \frac{1}{2} \epsilon_{IJKL} F^{KL}$ の, 添字を単に上げ下げした関係は成り立たない; 正しくは負号を付けた関係

$$(\star F)^{KL} = F^{\star KL} \equiv -\frac{1}{2} \epsilon^{KLMN} F_{MN}$$

が成り立つ. 言い換えれば F^{IJ} の双対 F_{IJ}^* と F_{IJ} の双対 F_{IJ}^* を区別する必要がある. 実際, このとき初めて双対テンソルの双対が自分自身に戻る:

$$(F^*)_{IJ}^* = \frac{1}{2} \epsilon_{IJKL} F^{\star KL} = -\frac{1}{4} \epsilon_{IJKL} \epsilon^{KLMN} F_{MN} = F_{IJ}. \quad (\because \text{式 (3.110)})$$

例えば 3階テンソルに双対な 1階テンソルを作る操作と, 1階テンソルに双対なものの 3階テンソルを作る操作は明らかに異なるものの, 2階テンソルに対しては式の見かけ上, 2つの操作が区別困難となる.

さて, $n_J = (1, 0, 0, 0) = \delta_{J0}$ のとき, 電磁場テンソル F^{IJ} に対して

$$n_J F^{IJ} = F^{I0} = (0, -\vec{E}), \quad n_J F^{\star IJ} = F^{\star I0} = (0, +\vec{B})$$

はそれぞれ電場 $E^i = F^{0i}$ と磁場 $B^i = \frac{1}{2} \epsilon^i_{jkl} F^{jk}$ を与える. (磁束密度 $\vec{B}$ と運動量 2 形式 (3.38) の混同に注意せよ.) 同様に

$$K^I = n_J B^{IJ} = B^{I0}, \quad L^I = n_J (\star B)^{IJ} = -\frac{1}{2} \epsilon^{I0JK} B_{JK} = +\frac{1}{2} \epsilon^{0IJK} B_{JK}$$

は式 (3.42) を与える. (式 (3.17) の後で $\epsilon^{0123} = +1$ と約束したため, $\epsilon^{0ijk} = \epsilon^{ijk}$.)

他方で添字 I, J について対称な量 $n_I n_J$ と反対称な量 $B^{IJ}, (\star B)^{IJ}$ の縮約が消えること

$$n_I K^I = n_I n_J B^{IJ} = 0, \quad n_I L^I = n_I n_J (\star B)^{IJ} = 0$$

は, ゲージ条件 $n_I = (1, 0, 0, 0)$ に依らず常に成り立つ. すなわち $\vec{K}, \vec{L}$ が面 Σ 内のベクトルであることは, Lorentz 系の選択に依らない幾何学的な事実である.

■ $n_I e^I|_{\Sigma} = 0$ (式 (3.43) の直後) について テトラードは境界 Σ に制約すると

$$e^I = e^I_{\mu} dx^{\mu} = e^I_{\mu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma^i} d\sigma^i = u^I_i d\sigma^i$$

と表される. すると式 (56): $n_I u^I_i = 0$ より Σ 上で $n_I e^I = 0$ が成り立つ.

3.3.2 境界項

4次元球のトポロジーを持つ時空のコンパクトな領域 $\mathcal{R}$ における重力を考えよ. $\mathcal{R}$ の境界は 3次元球面 (3-sphere) のトポロジーを持つ 3次元空間であり, それを Σ と呼ぼう. 2.1.1 項では, よく定義された変分原理と Hamilton 関数を得るには, 境界項が必要となり得ることを見た. これは一般相対性理論に対して分かっている (Gibbons and Hawking 1977; York 1972). 計量での定式化では, 境界項は

$$S_{\text{EH boundary}} = \int_{\Sigma} k^{ab} q_{ab} \sqrt{q} d^3 \sigma \quad (3.47)$$

であり, ここに k^{ab} は境界の外部曲率 (extrinsic curvature; そのあからさまな形は以下の式 (3.55) で与えられる), q_{ab} は境界に誘導される 3次元計量 (three-metric), q はその行列式, また σ は境界上の座標である. [境界項 (3.47) は Einstein–Hilbert 作用に似た形をしている.] 宇宙定数のない純粋な重力の場合には, Ricci スカラーが Einstein 方程式の解の上で消えるので [源 $T_{\mu\nu}$ を持つ Einstein 方程式 ($\Lambda = 0$) の両辺を縮約すると $R \sim T \equiv T^{\mu}_{\mu}$ を得る [11, p.308]], バルクの作用は消え, Hamilton 関数は単に境界項

$$S_{\text{EH}}[q] = \int_{\Sigma} k^{ab}[q] q_{ab} \sqrt{q} d^3 \sigma \quad (3.48)$$

で与えられる*66. これは計算するのが極めて非自明な汎関数である, 何故なら外部曲率 $k^{ab}[q]$ は, 境界内部の幾何学によって選出されるバルクの解によって決定されるからである. したがって $k^{ab}[q]$ は非局所的となるはずである. q から k^{ab} の依存性を知ることは, Einstein 方程式の一般解を知ることと等価である. [対応する議論として, 2.1.1 項の最終段落も見よ.]

3.4 Hamilton 形式の一般相対性理論

一般相対性理論に対する Hamilton 形式を見出す課題は最初に, 理論を量子化する目的で, Dirac (Dirac 1958) によって取り組まれた. その課題は 2つの理由で困難であることが判明した. 1つ目の理由は, 理論が拘束量を持つことである. 以下で簡単に復習する Dirac の拘束 Hamilton 系の理論を彼が展開したのは, この理由による. 2つ目の理由は計量変数を用いたときの, 理論の正準解析における代数の恐ろしい複雑さによる. Dirac はこれに関しても成功を取めたものの, 結果は厄介であった. 数年後, その課題はその全てを簡単にし, 明瞭な幾何学的解釈を持つ変数の変更を確立した, Arnowitt, Deser, および Misner によって著しく簡単になった. ここから始めよう.

note とは言え 3.4.1 項の ADM 変数による定式化の説明は天下りである. もっとも我々は既に理論をテトラードで定式化しており, ADM 変数を経由せずとも, テトラード-接続形式から出発して Hamilton 形

*66 ここでは Hamilton 関数は境界の計量の汎関数であることに注意せよ. したがってそれを作用と見分けるために, 有限次元系のように, $S(\)$ と $S[\]$ の表記の違いを頼ることはできない. どれがどれかは, しかしながら, 文脈から明らかだろう: 作用はバルクの 4次元計量の局所的な汎関数であり, Hamilton 関数は境界の 3次元計量の非局所的な汎関数である.

式を導出し得る．詳しくは 3.4.3 項における基礎方程式 (3.82–83), (3.85) のノートを見よ．ただし 3.3.2 項の境界項, 3.4.3 項の接続の構成 (3.78): $A_a^i = \Gamma_a^i[e] + \beta k_a^i$ や $\beta \neq i$ でのハミルトニアン (3.86) には, 外部曲率 k_{ab} があからさまに現れる．そこで 3.4.1 項では外部曲率の式 (3.55) までを本稿で補足する．

3.4.1 ADM 変数

Arnowitt, Deser, および Misner (Arnowitt *et al.* 1962) によって導入された変数の変更は以下である． $a, b = 1, 2, 3$ として, $g_{\mu\nu}$ から 3 つの場合

$$q_{ab} = g_{ab}, \quad (3.49)$$

$$N_a = g_{a0}, \quad (3.50)$$

$$N = \sqrt{-g^{00}} \quad (3.51)$$

を定義する．最後の式において N は, 上付き添字を持つ $g^{\mu\nu}$ の時間–時間成分で定義されていることに注意せよ． N および N_a は“ラプス (Lapse ; 経時)” および“シフト (Shift ; 変位)” 関数, q_{ab} は 3 次元計量と呼ばれる．この変数の変更は数々の理由で, 極めて賢明であることが判明する．主な理由は, これらの変数を用いて作用を書いたとき, ラグランジアンがラプスとシフトの時間微分 $\dot{N}$ と $\dot{N}_a$ に依存せず, このことは直ちに正準解析を簡単にすることが分かるということである．

2 つ目の理由は, これらの変数には見事な内部幾何学的な解釈があるという事実である．これを理解するために, 超曲面 $t = \text{constant}$ を考えよ．これらの超曲面は時空を薄層にスライスする (foliate) と仮定せよ．このとき q_{ab} は明らかに時空計量によって面に誘導された 3 次元計量である．[これを配位変数と見なすことから, 文字 q の選択が動機付けられる．] 我々はこの計量を用いて 3 次元的な添字 $a, b = 1, 2, 3$ を上げ下げする．次に, この面に対する計量の (metric) [すなわち直交性が計量で定義される] 法線 n^μ を考えよ．点 $y^\mu = x^\mu + N n^\mu dt$ が面 $t + dt$ 上にあることを理解するのは困難ではない．すなわちラプス関数は, t 面上の点と $t + dt$ 面上の点の間で, 法線に沿って経過する, あるいは等価的に, 面上で静止した観測者に対する固有時間である．ある意味, ラプスは選ばれた座標で物理的な時間が経過するレートを定める．最後に, シフト $\vec{N} = \{N^a = q^{ab} N_b\}$ は ($t + dt$ 面上における) 2 点 y^μ と $(t + dt, \vec{x})$ の間の隔たりを与える．すなわちシフト関数は, ある一定の面から次の面に移る際の, 初めの面上で動いていない観測者が担う座標に対する, 空間座標のシフトを測る．

ラプスは等価的に

$$N^2 \det q = \det g, \quad (3.52)$$

あるいは

$$g_{00} = -N^2 + N_a N^a \quad (3.53)$$

で定義でき, するとこれらの変数で表した線要素は

$$ds^2 = -(N^2 - N_a N^a) dt^2 + 2N_a dx^a dt + q_{ab} dx^a dx^b \quad (3.54)$$

となる． $t = \text{constant}$ 面の外部曲率は

$$k_{ab} = \frac{1}{2N} (\dot{q}_{ab} - D_{(a} N_{b)}) \quad (3.55)$$

で定義され、ここにドットは t に関する微分を表し、 D_a は 3 計量での共変微分である。これらを用いると、これらの変数で表した作用は

$$S[N, \vec{N}, q] = \int dt \int d^3x \sqrt{q} N (k_{ab} k^{ab} - k^2 + R[q]) \quad (3.56)$$

となり、ここに $k = k_a{}^a$ および $\sqrt{q} \equiv \sqrt{\det q}$ 。すなわち、主要な変数を用いると、ラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}[N, \vec{N}, q] = \frac{\sqrt{q}(g^{ac}g^{bd} - g^{ab}g^{cd})(\dot{q}_{ab} - D_{(a}N_{b)})(\dot{q}_{cd} - D_{(c}N_{d)})}{4N} + \sqrt{q}NR[q] \quad (3.57)$$

となる。この形式では、Hamilton 形式の解析が容易である。ラプスとシフトの正準運動量は消える、何故なら $\dot{N}$ と $\dot{N}_a$ が作用に現れないからである。3 次元計量の正準運動量は

$$\pi^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{ab}} = \sqrt{q} G^{abcd} k_{cd} = \sqrt{\det q} (k^{ab} - k q^{ab}) \quad (3.58)$$

であり、Hamilton 形式で書いた作用は

$$S[N, \vec{N}, q, \pi] = \int dt \int d^3x (\pi^{ab} \dot{q}_{ab} - NC(\pi, q) - 2N^a C_a(\pi, q)) \quad (3.59)$$

となり、ここに

$$C = G_{abcd} \pi^{ab} \pi^{cd} - \sqrt{q} R[q] \quad (3.60)$$

はスカラー拘束またはハミルトニアン拘束と呼ばれ、また

$$C_a = D_b \pi^{ab} \quad (3.61)$$

はベクトル拘束または微分同相拘束と呼ばれる。ここに

$$G_{abcd} = \frac{1}{2\sqrt{q}} (g_{ac}g_{bd} + g_{ad}g_{bc} - g_{ab}g_{cd}) \quad (3.62)$$

は DeWitt 超計量 (super metric) と呼ばれる。これら [拘束量 (3.60–61)] はラプスとシフトの変分により消えなければならない。Hamilton 形式の理論はしたがって、ラプスとシフトに関する運動量の消失、ハミルトニアン拘束と微分同相拘束の消失、および拘束条件が満たされるときに消えるハミルトニアン [作用 (3.59) における $\mathcal{H} \sim NC + 2N^a C_a$] によって完全に与えられる。

このことは直ちに前章で説明した力学の構造へと導くことに注意せよ。特に、拘束量 (3.60) と (3.61) は一般相対性理論に対する拘束 (2.61) を実現し、第 2 章で説明した理由で [すなわちゲージの自由度により (3.4.2 項も見よ)] ハミルトニアンは消える。

2.5.2 項で提示した定式化は一般相対性理論に対して、とりわけ見事な形をとる：空間 $\mathcal{C}_b$ は 3 次元球面のトポロジーを持つ面の内部幾何学 $q_{ab}(x)$ の空間である。 D はこの面における内部および外部幾何学 $[q_{ab}(x), k^{ab}(x)]$ の空間である。[式 (3.58) よりこれは配位変数 q_{ab} と共役運動量の組と等価である。] L は Ricci 平坦な球の境界となる、境界の (内部および外部) 幾何学の組である [現実のダイナミクスに対して $R = 0$]。 L 上の Hamilton 関数は表現

$$S[q, k] = \int_{\Sigma} k^{ab} q_{ab} \sqrt{q} d^3x \quad (3.63)$$

の L への制限であり、その $\mathcal{C}_b$ への引き戻し

$$S[q] = \int_{\Sigma} k^{ab}[q] q_{ab} \sqrt{q} d^3x \quad (3.64)$$

は理論の解をコードする，通常の Hamilton 関数である．

重力の場合には領域 $\mathcal{R}$ とその境界 Σ は，場が特定されるまで計量の幾何学を持たないことに注意せよ，何故なら計量は重力場によって決まるからである．したがって境界の場の空間において， $\mathcal{R}$ の幾何学が点に縮む極限がある．これは自然な基準点 z_0 である．

3.4.1 項について

■ADM 変数の説明 (式 (3.49–54)) について Hamilton 形式を利用するためには，出発点として一般相対性理論の定式化に，時間と空間の人為的な区別を持ち込む必要がある (3 + 1 分解)．これについて以下にまとめる [1, § 3.6]．

$t(x^\mu) = \text{const.}$ の超曲面 Σ 上での変位 δx^μ は，両辺の微分をとると

$$(\delta x^\mu) \partial_\mu t = 0$$

を満たすので， $\partial_\mu t$ と直交する (計量 $g_{\mu\nu}$ による内積の意味で)．よって Σ の法単位ベクトルは勾配 $n_\mu \sim \partial_\mu t$ で与えられる．これには規格化条件 $n^\mu n_\mu = -1$ が課せられる (右辺の負号は n^μ が時間的ベクトルであることによる*67)．

次に空間座標が一定の線 $x^a = \text{const.}$ に沿う時間的な接ベクトル $t^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t}$ を導入する．一般に時間方向 t^μ は超曲面 Σ に直交しているとは限らない，すなわち必ずしも法線 n^μ の向きとは一致しない．そこで t^μ の n^μ 方向成分

$$N \equiv -n_\mu t^\mu$$

として“経時 (ラプス)”を定義する．上式に $n_\mu = \text{const} \times \partial_\mu t$ を代入して規格化定数を定めると，

$$-N = n_\mu t^\mu = \text{const} \times \frac{\partial t}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial t} = \text{const}, \quad \therefore n_\mu = -N \partial_\mu t \quad (57)$$

と表せる．また

$$t^\mu = N n^\mu + N^\mu \quad (58)$$

と分解して“変位 (シフト) ベクトル” N^μ を定義する．このときシフト N^μ は法線 n^μ に直交する， t^μ の Σ に接する成分になる．実際，上式と n_μ の内積をとって定義式 $N \equiv -n_\mu t^\mu$ を考慮すると， $N^\mu n_\mu = 0$ を得る．こうしてベクトル t^μ の分解は図 35 のように描画できる．

さて，超曲面 Σ は 3 つの座標 $\vec{\tau} = (\tau^1, \tau^2, \tau^3)$ を用いて $x^\mu = x^\mu(\vec{\tau})$ と表される．このとき Σ 上の線要素は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau^b} d\tau^a d\tau^b \equiv q_{ab} d\tau^a d\tau^b \quad (a, b = 1, 2, 3)$$

と書けるので， Σ に誘導された計量は

$$q_{ab} \equiv e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu} \quad (59)$$

(ただし $e_a^\mu \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau^a}$) と同定される*68．また逆行列 $e_\mu^a = \frac{\partial \tau^a}{\partial x^\mu}$ を用いて，シフトの座標 $\vec{\tau}$ 成分 $N^a \equiv e_\mu^a N^\mu$ を定義しておく．すると時空の任意の無限小ベクトルは

$$\begin{aligned} dx^\mu &= \frac{\partial x^\mu}{\partial t} dt + \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau^a} d\tau^a = t^\mu dt + e_a^\mu d\tau^a \\ &= N n^\mu dt + e_a^\mu (N^a dt + d\tau^a) \quad (\because \text{式 (58)}) \end{aligned} \quad (60)$$

*67 改めて計量の符号系 (−+++) に注意せよ．

*68 式 (59) は共変テンソルの変換則に類似している．

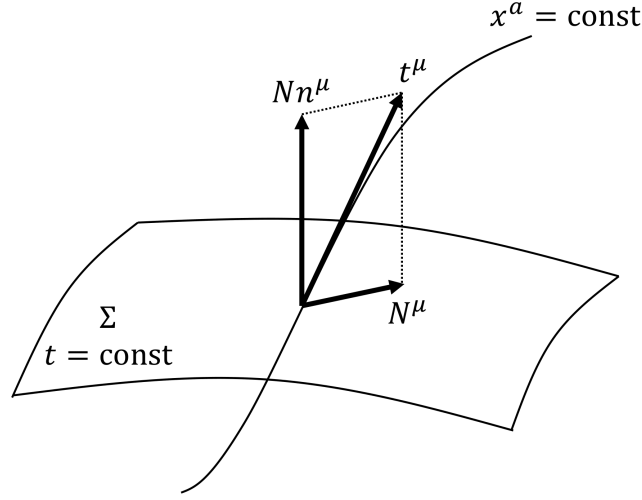


図 35 経時 (ラプス) N と変位 (シフト) ベクトル N^μ

という形をとる．最右辺において， Σ の法線ベクトルと接線ベクトルが直交すること

$$n_\mu e_a^\mu = -N \frac{\partial t}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau^a} = -N \frac{\partial t}{\partial \tau^a} = 0 \quad (\because \text{式 (57)})$$

に注意すると， q_{ab} の定義式 (59) とより

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt^2 + q_{ab} (N^a dt + d\tau^a) (N^b dt + d\tau^b) \\ &= -(N^2 - N_a N^a) dt^2 + 2N_a dt d\tau^a + q_{ab} d\tau^a d\tau^b \quad (N_a \equiv q_{ab} N^b) \end{aligned}$$

を得る．なお Σ の座標 τ^a として，時空座標の空間成分 x^a そのものを用いることもできる．この場合は単に $e_a^\mu = \delta_a^\mu$, $e_\mu^a = \delta_\mu^a$ であり，以上の結果は

$$\begin{aligned} q_{ab} &= g_{ab} : (3.49), \quad N^a = N^{\mu=a}, \quad ds^2 = -(N^2 - N_a N^a) dt^2 + 2N_a dt dx^a + q_{ab} dx^a dx^b : (3.54) \\ \therefore N_a &= g_{a0} : (3.50), \quad g_{00} = -(N^2 - N_a N^a) : (3.53) \end{aligned}$$

を与える^{*69}．

ここで本文 p.68 における，ラプスとシフトの幾何学的解釈が成り立つことを確認する．座標の任意の変化 $dt, d\tau^a$ に伴う変位 (60) において，接線 e_a^μ の項は法線 n^μ に直交する．よって第 1 項 $Nn^\mu dt$ を，2 つの面 $t, t+dt$ を繋ぐ法線方向の線要素に同定できる．対応する固有時間 (の 2 乗) は

$$-ds^2 = N^2 dt^2$$

である．他方で座標位置 τ^a に静止した点の描く世界線に沿った変位は， $d\tau^a = 0$ より

$$dx^\mu = t^\mu dt = (Nn^\mu + N^\mu) dt$$

と表される．シフト N^μ の項は移動先の時刻 $t+dt$ における点の，法線に沿って進んだ点 $y^\mu = x^\mu + Nn^\mu dt$ からのズレを与えている (再び図 35 を見よ)．したがって N^μ をシフトと呼ぶのは理に適っている．

^{*69} 特に 3.4.2 項のゲージ $N = 1, \vec{N} = 0$ の下で $q_{ab} = \delta_{ab}$ ととれる場合，Minkowski 空間の線要素 $ds^2 = -dt^2 + d\vec{x}^2$ が再現される．

式 (3.54) から読み取られる計量テンソル

$$g_{00} = -N^2 + q_{ab}N^aN^b, \quad g_{0a} = q_{ba}N^b, \quad g_{ab} = q_{ab}$$

の逆テンソルは,

$$g^{00} = -\frac{1}{N^2}, \quad g^{0a} = \frac{N^a}{N^2}, \quad g^{ab} = q^{ab} - \frac{N^aN^b}{N^2}$$

で与えられる*70. ただし q^{ab} は q_{ab} の逆テンソルである ($q^{ac}q_{cb} = \delta_b^a$). 第1式から式 (3.51): $N = \sqrt{-g^{00}}$ を得る.

$g^{\mu\nu}$ の表式の確認 ここでは空間添字 $a, b, \dots$ を表すのに, 文字 $i, j, \dots$ を併用する. するとブロック行列の積を計算することにより,

$$\begin{aligned} (g_{\mu\rho})(g^{\rho\nu}) &= \begin{pmatrix} -N^2 + q_{ab}N^aN^b & q_{ai}N^a \\ q_{ai}N^a & q_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^i}{N^2} \\ \frac{N^i}{N^2} & q^{ij} - \frac{N^iN^j}{N^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-N^2 + q_{ab}N^aN^b)(-\frac{1}{N^2}) + q_{ai}N^a \frac{N^i}{N^2} & (-N^2 + q_{ab}N^aN^b) \frac{N^i}{N^2} + q_{aj}N^a (q^{ij} - \frac{N^iN^j}{N^2}) \\ q_{ai}N^a (-\frac{1}{N^2}) + q_{ij} \frac{N^j}{N^2} & q_{ai}N^a \frac{N^j}{N^2} + q_{ik} (q^{kj} - \frac{N^kN^j}{N^2}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_i^j \end{pmatrix} = (\delta_\mu^\nu), \\ (g^{\mu\rho})(g_{\rho\nu}) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^i}{N^2} \\ \frac{N^i}{N^2} & q^{ij} - \frac{N^iN^j}{N^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -N^2 + q_{ab}N^aN^b & q_{ai}N^a \\ q_{ai}N^a & q_{ij} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-\frac{1}{N^2})(-N^2 + q_{ab}N^aN^b) + \frac{N^i}{N^2} q_{ai}N^a & -\frac{1}{N^2} q_{aj}N^a + \frac{N^i}{N^2} q_{ji} \\ \frac{N^i}{N^2} (-N^2 + q_{ab}N^aN^b) + (q^{ij} - \frac{N^iN^j}{N^2}) q_{aj}N^a & \frac{N^i}{N^2} q_{aj}N^a + (q^{ik} - \frac{N^iN^k}{N^2}) q_{kj} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_j^i \end{pmatrix} = (\delta_\nu^\mu). \end{aligned}$$

ここで $\sqrt{-\det(g)}$ と $\sqrt{\det(q)}$ の関係を調べよう. $(g_{\mu\nu})$ の逆行列成分 g^{00} は, g_{00} の余因子 $\det(q)$ を用いて

$$g^{00} = \frac{\det(q)}{\det(g)}$$

で与えられる. ところが $g^{00} = -1/N^2$ だから,

$$-\det(g) = N^2 \det(q), \quad \therefore \sqrt{-\det(g)} = N \sqrt{\det(q)}$$

が見出される (式 (3.52) の符号を修正した). これは時空の固有体積要素 $\sqrt{-\det(g)}d^4x$ が, 空間の固有体積要素 $\sqrt{\det(q)}d^3x$ とラプスの因子 Ndt (法線方向の固有時間) の積で与えられることを意味する.

■ $N, \vec{N}$ の変分により拘束量 (3.60–61) が消えること 一般にラグランジアンがある配位変数の時間微分 $\dot{q}_i$ に依らないとき, 対応する運動量 $p_i(q, p) = 0$ は (1 次) 拘束条件を与える. またこれは p を $\dot{q}$ について解けない簡単な例である. λ を未定乗数とすると, 1 次拘束量 λp_i の生成する座標のゲージ変換は Poisson 括弧

$$\delta q_i = \{q_i, \lambda p_i\} = \lambda$$

で与えられるので, 座標 q_i そのものが未定乗数として振舞う [1, p.51].

*70 なお $g^{ab} = q^{ab} - N^aN^b/N^2$ は文献 [11, p.262] における 3 次元空間の計量 $\gamma_{ij} = -g_{ij} + g_{0i}g_{0j}/g_{00}$ に類似している.

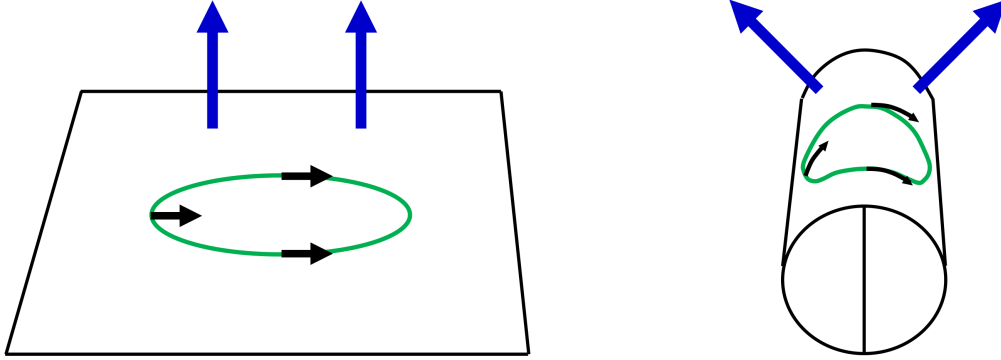


図 36 円筒面は内部曲率を持たず，外部曲率を持つ

同様に場の理論においても，ある配位変数 $\phi_r(x)$ (r は場の種類のラベル) の時間微分がラグランジアン密度に含まれないとき，共役な運動量密度は $\pi_r(x) = 0$ となる．そこで任意の関数 $f(x)$ による不鮮明化

$$\pi_r[f] \equiv \int d^3x f(x) \pi_r(x)$$

を導入し^{*71}，これが生成する $\phi_r(x)$ の変化を計算すると

$$\delta\phi_r(x) = \{\phi_r(x), \pi_r[f]\} = f(x)$$

となるので^{*72}， $\phi_r(x)$ は Lagrange の未定乗数である．

こうしてラプス N とシフト $\vec{N}$ は Lagrange の未定乗数となる．

■外部曲率 (3.55) について 我々の 4 次元時空に関しては，それを超曲面として内に含む高次元の空間の存在が保証されない．そこで時空の内部だけで理解できる量として，内部曲率を用いて時空の歪みを記述する．他方で 3 次元超曲面に関しては，それを超曲面として内に含む我々の 4 次元時空から見た外部曲率を定義できる．

そこで外部曲率の概念の導入を動機付ける簡単な例として，(3 次元 Euclid 空間に埋め込まれた) 2 次元の円筒面を考える (図 36 右)．円筒面では，それを切り開いて得られる平坦な面 (図 36 左) の場合と同様に，面上の閉曲線に沿って 1 周，平行移動したベクトルが変化しないので，内部曲率を持たない．他方で平面とは対照的に，円筒面では全ての位置の法線ベクトルが平行とはならないことが，視覚的に見て取れる [19, § 4.2]．

そこで一般に超曲面 $\Sigma: x^\mu = x^\mu(\vec{\tau})$ の法単位ベクトル n_μ を用いて，外部曲率を Σ 上の移動に伴うベクトル場 n_μ の変化率

$$k_{ab} \equiv D_a n_b \equiv e_a^\mu e_b^\nu D_\mu n_\nu \quad (61)$$

で定義する．ここで Σ 内の共変微分は最右辺のように， Σ の基底ベクトル $e_a^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau^a}$ と共変微分 $D_\mu n_\nu$ との

^{*71} 全ての位置 x で $\pi_r(x)$ となることは，任意の関数 $f(x)$ に対して $\pi_r[f] = 0$ となることと等価である．

^{*72} 場の理論における Poisson 括弧は，配位変数 $\phi_r(x)$ (r は場の種類のラベル) と共役な運動量密度 $\pi_r(x)$ の汎関数 F, G に対して，

$$\{F(x), G(y)\} = \int d^3z \sum_r \left\{ \frac{\delta F(x)}{\delta \phi_r(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \pi_r(z)} - \frac{\delta F(x)}{\delta \pi_r(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \phi_r(z)} \right\}$$

で定義される．

内積で表せる^{*73}。実際、共変微分は導関数がテンソルとなるように定義される。 $D_\mu A_\nu$ はテンソルであることが保証されており、このとき $D_a A_b \equiv e_a^\mu e_b^\nu (D_\mu A_\nu)$ は超曲面上のテンソルとして変換することが帰結するので、共変微分の表式として適正である。

外部曲率 (61) は、添字に関する対称性が明白な形

$$k_{ab} = \frac{1}{2}(D_a n_b + D_b n_a) \equiv \frac{1}{2}D_{(a} n_{b)} \quad (62)$$

に書き換えられる^{*74}。実際、 $n_\mu Y^\mu = n_\mu Z^\mu = 0$ を満たす 2 つの任意の空間的なベクトル Y^μ, Z^μ に対し、

$$Y^\mu Z^\nu (D_\nu n_\mu - D_\mu n_\nu) = Y^\mu Z^\nu D_\nu n_\mu - Y^\nu Z^\mu D_\nu n_\mu = n_\mu (Y^\nu D_\nu Z^\mu - Z^\nu D_\nu Y^\mu) = 0$$

が恒等的に成り立つ。ただし

- 第 2 の等号では $D_\nu (n_\mu Y^\mu) = 0$, $\therefore Y^\mu D_\nu n_\mu = -n_\mu D_\nu Y^\mu$, 同様に $Z^\mu D_\nu n_\mu = -n_\mu D_\nu Z^\mu$ とした。
- 最後の等号では、空間的なベクトル Y^μ, Z^μ の“交換子” $[Y, Z]^\mu \equiv Y^\nu D_\nu Z^\mu - Z^\nu D_\nu Y^\mu$ もまた空間的なベクトルであることを用いた^{*75}。

すると最左辺において

$$D_\nu n_\mu = D_\mu n_\nu \quad (63)$$

でなければならない [19, § D.2]。そこで式 (61) において $D_\mu n_\nu = \frac{1}{2}D_{(\mu} n_{\nu)}$ と書き換えると、対称な表式 (62) を得る。

さて、計量 $g_{\mu\nu}$ の共変微分はゼロなので、任意のベクトル X^μ 方向に沿う Lie 微分は、公式 (134) より

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X g_{\mu\nu} &= X^\alpha D_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu} D_\mu X^\alpha + g_{\mu\alpha} D_\nu X^\alpha \\ &= D_\mu X_\nu + D_\nu X_\mu \equiv D_{(\mu} X_{\nu)} \end{aligned}$$

と簡略化される [19, § E]。すると外部曲率 (61) は法線 n^μ 方向の Lie 微分

$$\mathcal{L}_n g_{\mu\nu} = D_{(\mu} n_{\nu)} = 2D_\mu n_\nu$$

(再び式 (63): $D_\nu n_\mu = D_\mu n_\nu$ を考慮した) と

$$2k_{ab} = 2D_a n_b = e_a^\mu e_b^\nu \mathcal{L}_n q_{ab}$$

で関係付けられる。

他方で時間方向の単位ベクトルは $t^\mu = N n^\mu + N^\mu$ と分解されることを思い出すと、 t^μ 方向の Lie 微分は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t g_{\mu\nu} &= D_{(\mu} t_{\nu)} = n_{(\nu} \partial_{\mu)} N + N D_{(\mu} n_{\nu)} + D_{(\mu} N_{\nu)} \\ &= n_{(\nu} \partial_{\mu)} N + N \mathcal{L}_n g_{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\vec{N}} g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (64)$$

と書ける。ところで Lie 微分はその公式 (130) より、微分の向きを指定するベクトルに関する線形性

$$\mathcal{L}_t = \mathcal{L}_{Nn} + \mathcal{L}_N, \quad \mathcal{L}_{Nn} : \text{法線 } Nn^\mu \text{ に沿う Lie 微分}, \quad \mathcal{L}_{\vec{N}} : \text{シフト } N^\mu \text{ に沿う Lie 微分}$$

^{*73} 座標の選択 $\tau = \vec{x}$ の下では $e_a^\mu = \delta_a^\mu$ なので、これは単に共変微分 $D_\mu n_\nu$ の空間成分をとることに帰着し、また $N^a = N^\mu =^a$ と式 (3.49): $q_{ab} = g_{ab}$ が成立する。

^{*74} しばらくは丸括弧による対称化の表記を、係数 $1/2$ を含めずに定義する。

^{*75} 空間 Σ 内のベクトル Z^μ の空間方向への微分 $Y^\nu D_\nu$ もまた Σ 内のベクトルと考えられる。

を持つ [19, § D.3]. これを踏まえると, 上式 (64) の第 1 項 $n_{(\nu}\partial_{\mu)}N$ は $\mathcal{L}_{Nn}$ を $N\mathcal{L}_n$ に置き換えたときのおつりの項であることが見て取れる. (そのことは直接の計算によっても確かめられる.) 上式 (64) の 1 行目に $e_a^\mu e_b^\nu$ を縮約して直交性 $e_a^\mu n_\mu = 0$ を考慮すると, 第 1 項の寄与は落ち,

$$e_a^\mu e_b^\nu \mathcal{L}_t g_{\mu\nu} = 2Nk_{ab} + D_{(a}N_{b)}$$

を得る. 右辺において e_a^μ を Lie 微分の下に移動し, $e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu} = q_{ab}$ としよう. このとき Lie 微分は Leibniz 則を満たすように定義されているため, おつりの項として e_a^μ の Lie 微分が生じる. ところが直接確かめられるように, $t = \text{const.}$ 面上の基底 e_a^μ の t^μ に沿う Lie 微分は

$$\mathcal{L}_t e_a^\mu = t^\nu \partial_\nu e_a^\mu - e_a^\nu \partial_\nu t^\mu \sim \frac{\partial t}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau^a} - \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau^a} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial t}{\partial x_\mu} = \frac{\partial t}{\partial x_\nu} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \tau^a} \delta_\nu^\mu}_{=0} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \underbrace{\frac{\partial \tau_a}{\partial x^\mu}}_{=0} = 0$$

となる. 以上より

$$\dot{q}_{ab} = 2Nk_{ab} + D_{(a}N_{b)}$$

となるので, 式 (3.55) を得る [1, p.41] [19, § D.3].

3.4.2 このことは何を意味するか? ダイナミクス

上記の結果は, ここで簡単に復習する 2 つのよく知られた理論の, Hamilton 形式の構造と比較すると明確になる.

電磁気学

Maxwell 理論はポテンシャル A_μ を用いて書ける. Maxwell 場は $F_{\mu\nu} = \partial_{[\mu}A_{\nu]}$ であり, Maxwell 方程式はゲージ変換 $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$ の下で不変である. 作用は

$$S[A] = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.65)$$

であり, これは $\dot{A}_0$ に依存しないことが直ちに分かる. したがって A_0 は電磁気学において, ラプスおよびシフト関数と同じ役割を担う [本稿次項で補足]. ゲージ変換により A_0 を思い通りに選べることに注意せよ. 例えば, それを $A_0 = 0$ に選べる. 同様に, ラプスとシフトは任意に選べる. それらは最初の点を選ぶと, 単に座標における次の $t = \text{constant}$ 面上の点を定める. 最も簡単な選択は, 時間ゲージ (time gauge) と呼ばれる選択 $N = 1, \vec{N} = 0$ であり, このとき線要素は $ds^2 = -dt^2 + q_{ab}dx^a dx^b$ の形を持つ. ラプスとシフトの運動量のように A_0 の運動量は消え, $\vec{A}$ の運動量は

$$\pi^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_a} = F^{0a}, \quad (3.66)$$

すなわち電場 $\vec{E}$ である. Hamilton 形式での作用はこのとき

$$S[A_0, \vec{A}, \vec{E}] = - \int dt \int d^3x \left(E^a \dot{A}_a - (E^2 + B^2) + A_0 C(\vec{E}) \right) \quad (3.67)$$

となり [本稿次項で確認], ここに

$$C(\vec{E}) = \partial_a E^a \quad (3.68)$$

は Gauss 拘束 (量) と呼ばれる [本稿次項で $C(\vec{E}) = 0$ を確認]. これは重力における拘束量の類似物である. こうして Hamilton 形式の理論は A_0 に関する運動量の消失と, Gauss 拘束量の消失, および消えないハミルトニアンによって定まる.

Gauss 拘束の物理的な解釈は, 選択 $A_0 = 0$ によって残る余りのゲージ対称性に関係している. 実際, 我々はなお時間に依存しない関数 λ を用いて, ゲージ変換 $A_a \rightarrow A_a + \partial_a \lambda$ を行うことができる [条件 $A_0 = 0$ を破ることなく]. このことは初期データに余分なゲージの自由度があることを意味する. あらゆる第 1 種の (first class) 拘束^{*76}がゲージの自由度に関係していることは, 拘束系の一般的な事実である. 実際, Gauss 拘束量がゲージ変換を生成することは容易に分かる. $C[\lambda] = \int d^3x \lambda(x) C(x)$ を定義すると,

$$\{A, C[\lambda]\} = d\lambda = \delta_\lambda A \quad (3.69)$$

を得る [本稿次項で確認]; すなわち: 変数の拘束量との Poisson 括弧はその無限小ゲージ変換を与える. 同様に, 重力のスカラーおよびベクトル拘束はそれぞれ順に, $t = \text{constant}$ 面の変形とこの面上の空間座標の変更に対応するゲージ変換を生成する.

Maxwell アナロジーには反映されていない, 重力の Hamilton 形式の特徴が 1 つ残っている: ハミルトニアン^{*}の消失である. これを説明するために, 2 つ目の例に移ろう.

特殊相対性理論のダイナミクス

単一の相対論的粒子の作用は

$$S = -m \int d\tau \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} \quad (3.70)$$

の形に書ける. 運動量は

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = m \frac{\dot{x}_\mu}{|\dot{x}|} \quad (3.71)$$

であり, 明らかに拘束

$$C = p^2 + m^2 = 0 \quad (3.72)$$

を満たす. [以上, 教科書の計量の符号系 $(-+++)$ に合わせて式 (3.70), (3.72) の符号を修正した.] この拘束量は理論のゲージ変換を生成し, それは τ の再パラメータ付けである. 重力とのアナロジーを見るために, 同じダイナミクスが作用

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau \left(\frac{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}{N} + Nm^2 \right) \quad (3.73)$$

から得られることに注意せよ [式 (3.74) と併せて本稿次項で補足]. これは式 (3.57) と正確に同じ構造を持ち, N の時間微分は現れないことに注意せよ. 運動量はここでは $p_\mu = \dot{x}_\mu / N$ であり, Hamilton 形式での作用は

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau (p_\mu \dot{x}^\mu + NC(p)). \quad (3.74)$$

すなわち, ハミルトニアンは拘束条件が満たされるとき消える. このことは重力のハミルトニアンの消失が単に, 座標時間で与えられる発展パラメータが物理量ではなく, むしろ自由なパラメータに過ぎないという事実の帰結であることを明らかにする. ベクトル拘束は q_{ab} の 6 個の自由度を 3 個に削減し, ハミルトニアン拘束はダイナミクスを, これら 3 変数間の関係の形で決定する. したがって理論は空間の点ごとに 2 つの自由度を持つ. [上式 (3.74) の代わりに, 作用 (36) をアナロジーとして採用することもできる.]

^{*76} Dirac の術語では拘束量は, 拘束条件が満たされるとき, 他の全ての拘束量とハミルトニアンとの Poisson 括弧が消えるならば第 1 種である.

3.4.2 項について

■ A_0 が $N, \vec{N}$ の役割を果たすこと (式 (3.65) の直後) について 拘束量 (3.60–61) の箇所で説明したように, ラプスやシフトと同様, 作用 (3.67) において A_0 は Lagrange の未定乗数として含まれている. 実際 Maxwell 理論の文脈で同じ説明を繰り返すと, A_0 に共役な運動量 $\pi^0(x) = \pi^0(A(x), E(x))$ はゼロになるので (1 次) 拘束量である. そこで任意の関数 $\mu(x)$ による不鮮明化

$$\pi[\mu] \equiv \int d^3x' \mu(x') \pi^0(x') \quad (65)$$

が生成する $A_0(x)$ の変化を計算すると

$$\delta A_0(x) = \{A_0(x), \pi[\mu]\} = \mu(x)$$

となるので, $A_0(x)$ は Lagrange の未定乗数である [1, p.56].

■ 正準変数 $\vec{A}, \vec{E}$ で表した作用 (3.67) の導出 ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x (\pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}) \\ &= \int d^3x \left(F^{0\mu} \partial_0 A_\mu - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \quad (\because \pi^\mu = F^{0\mu}) \\ &= - \int d^3x \left(\frac{E^2 + B^2}{2} + \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \phi \right) \\ &\quad \left(\because F^{0\mu} \partial_0 A_\mu = E_a \partial_0 A_a = -\vec{E} \cdot (\vec{E} + \vec{\nabla} \phi), F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(B^2 - E^2) \right) \\ &= - \int d^3x \left(\frac{E^2 + B^2}{2} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \phi \right) \quad (\because \text{部分積分により } \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \phi \rightarrow -(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \phi) \end{aligned} \quad (66)$$

と計算される [1, p.54]. 最右辺の第 1 項は電磁場のエネルギーとして馴染みのある表式であり, 第 2 項は電荷密度 ρ がゼロでない場合には $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$ より位置エネルギー (の逆符号) $-\sum e\phi$ となる. これは粒子系のハミルトニアン (場との相互作用項を含む) の寄与 $+\sum e\phi$ と相殺し, (見かけ上) 全エネルギーには現れない.

最右辺の被積分関数をハミルトニアン密度 $\mathcal{H}$ に同定すると, ラグランジアン密度は改めて

$$\mathcal{L} = E^a \dot{A}_a - \mathcal{H} = E^a \dot{A}_a - \frac{E^2 + B^2}{2} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \phi$$

と書けるので, 作用の表式 (3.67) を得る.

■ Gauss 拘束 (3.68) が拘束量であることの確認 作用 (3.67) の未定乗数 A_0 に関する変分をとると, 直ちに $C(\vec{E}) = 0$ が得られる.

あるいは拘束系の力学の一般論に即して, 次のようにも説明できる. すなわち拘束条件 $\pi^0(x) = 0$ が常に成り立つことから, 整合性の条件として, 一連の関係 $\dot{\pi}^0(x) = 0, \ddot{\pi}^0(x) = 0, \dots$ が成り立たねばならない. そこで式 (65) の $\pi[\mu]$ に対して全ハミルトニアン $H' = H + \pi[\mu]$ を定義すると, 運動方程式

$$0 = \dot{\pi}^0(x) = \{\pi^0(x), H'\}$$

が成り立つ. ただし付加的な項 $\pi[\mu]$ は最右辺の Poisson 括弧に寄与せず, H の式 (66) より

$$\dot{\pi}^0(x) = \{\pi^0(x), H\} = - \int d^3x' \{\pi^0(x), A_0(x') \partial_a' E^a(x')\} = \int d^3x' (\partial_a' E^a(x')) \delta^3(x - x') = \partial_a E^a(x)$$

となる．よって Gauss 拘束 $\partial_a E^a = 0$ を得る．こうして Hamilton 形式では Gauss の法則は拘束条件として導かれる [1, p.54].

なお高階微分 $\ddot{\pi}^0(x) = 0, \dots$ からは新たな拘束条件が得られないこと，また正準変数の運動方程式 $\dot{A}_a = \{A_a, H\}, \dot{E}^a = \{E^a, H\}$ がそれぞれ電場の式と Ampère–Maxwell の法則

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

を与えることも確かめられる (文献 [1, § 4.3] のノートを参照)．第 1 式は Hamilton 形式の力学において運動量の定義式が，正準方程式 $\dot{q}_i = \{q_i, H\}$ から得られるのと同じ事情である．第 2 式は拘束条件としての Gauss の法則 $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ と合わせて，Maxwell 方程式の非自明な組 (ポテンシャルに対する恒等式として導かれない) を再現する．

■不鮮明化した Gauss 拘束 $C[\lambda]$ との Poisson 括弧 (3.69) の確認 正準変数間の Poisson 括弧

$$\{E_b(x'), A^a(x)\} = \delta_b^a \delta^3(x - x'),$$

および

$$\{E^b(x'), E^a(x)\} = \int d^3x'' \sum_c \left\{ \frac{\delta E^b(x')}{\delta A_c(x'')} \frac{\delta E^a(x)}{\delta E^c(x'')} - \frac{\delta E^b(x')}{\delta E^c(x'')} \frac{\delta E^a(x)}{\delta A_c(x'')} \right\} = 0$$

を用いると，

$$\begin{aligned} \{C[\lambda], E^a(x)\} &= \int d^3x' \lambda(x') \partial_b' \{E^b(x'), E^a(x)\} = 0, \\ \{C[\lambda], A_a(x)\} &= \int d^3x' \lambda(x') \partial_b' \{E^b(x'), A_a(x)\} = - \int d^3x' \{\partial_b' \lambda(x')\} \{E^b(x'), A_a(x)\} \\ &= - \partial_a \lambda(x) : (3.69) \end{aligned}$$

が得られる [1, p.55].

■相対論的自由粒子の作用 (3.73–74) について [2, pp.127–128] ハミルトニアン拘束 (3.72): $C = p_\mu p^\mu + m^2$ を用いて，Hamilton 形式における相対論的粒子の作用を式 (3.74) の形

$$S = \int d\tau \left(p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{N}{2} (p_\mu p^\mu + m^2) \right)$$

に書くところから始める (式 (3.74) の数係数を修正した)． p_μ を変分することで得られる，速度と運動量の関係は， $\dot{x}^\mu = N p^\mu$ ．これを上式に戻すと，

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau \left(\frac{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}{N} - N m^2 \right) \quad (67)$$

と書き直せる (式 (3.73) に対応)．上式 (67) のラグランジアンを微分しても，やはり $p_\mu = \dot{x}_\mu / N$ が得られる．また式 (67) においては乗数 N の任意性が，パラメータ τ の任意性に対応していることが明白である．

さて，Lagrange 乗数 N に関する運動方程式を書き下すと

$$-\frac{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}{N^2} - m^2 = 0, \quad \therefore N = \frac{\sqrt{-\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}}{m}.$$

これを代入して作用 (67) から N を消去すると、式 (3.70) の形の、最もよく知られたパラメータ付け替え不変な作用

$$S = -m \int d\tau \sqrt{-\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}$$

が得られる。

3.4.3 Ashtekar 接続とトライアド

時空上にテトラードを導入する代わりに、各 $t = \text{constant}$ 面上にトライアドを導入することも可能である。それらは時空の対応物 [式 (3.6)] のように

$$q_{ab}(x) = e_a^i(x) e_b^j(x) \delta_{ij} \quad (3.75)$$

で定義される。ここに $i, j = 1, 2, 3$ は平坦な添字である [Kronecker のデルタで上げ下げする]。この変数の導入は、一定時刻の面上での空間回転という幾何学的解釈を持つ、局所 $\text{SO}(3)$ 不変性を理論に付与する。外部曲率のトライアド・バージョン k_i^a を

$$k_i^a e_b^i \equiv k_{ab} \quad (3.76)$$

で定義することもできる。これらの変数を $9+9$ 次元の正準共役な組と考える、すなわち $\{k_i^a, e_b^j\} \sim \delta_i^j \delta_b^a$ と仮定することができる。これは変数の数を 3 だけ増すことに注意せよ。しかしながら、定義により $k_i^a e_i^b$ は反対称部分が消えねばならず (何故ならそれは k^{ab} である)、したがって $6+6$ 次元の (q_{ab}, k^{ab}) 相空間を復元したければ、拘束

$$G_c = \epsilon_{cab} k_i^a e_i^b = 0 \quad (3.77)$$

を課さねばならない [本稿次項で補足]。この拘束量の Poisson 括弧がちょうど局所 $\text{SO}(3)$ ゲージ回転を生成することが直ちに分かる [本稿次項で確認]。1986 年に、Abhay Ashtekar は少し前に Amitaba Sen (Sen 1982) によって導入された興味ある接続が、極めて有用な正準変換をもたらすことに気付いた (Ashtekar 1982)*77。接続

$$A_a^i = \Gamma_a^i[e] + \beta k_a^i \quad (3.78)$$

を考えよ、ここに $\Gamma[e]_a^i$ はトライアドのねじれのないスピン接続 (3 次元の第 1 Cartan 方程式 $de^i + \epsilon^i_{jk} \Gamma^j \wedge e^k = 0$ の一意的な解 [式 (50) を再利用できる [2, p.148]]), β は任意パラメータ、また “Ashtekar 電場” は

$$E_i^a(x) = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon^{abc} e_b^j e_c^k, \quad (3.79)$$

すなわち、トライアドの行列式が掛かった逆行列 [式 (1.11) の $E_i^a = (\det e) e_i^a$] である [曲率 (3.84) の成分 F_i^{0a} との混同に注意]。Ashtekar は接続が Poisson 括弧

$$\{A_a^i(x), A_b^j(y)\} = 0 \quad (3.80)$$

(これは極めて非自明である、と言うのも接続は非可換な量に依存する) および

$$\{A_a^i(x), E_j^b(y)\} = \beta \delta_a^b \delta_j^i \delta^3(x, y) \quad (3.81)$$

を満たすことに気付いた。したがって A_a^i と E_i^a は正準共役変数である。

*77 Ashtekar–Barbero 変数は Ashtekar および Lewandowski (2004) において、その共変な 4 次元的な特徴を強調しつつ導出されている。

もし $\beta = i$ ならば、接続 A は時空におけるスピン接続の自己双対成分の $t = \text{constant}$ への引き戻しであることを示すことができ、複素 Ashtekar 接続 (あるいは単に Ashtekar 接続) と呼ばれる。この選択の下で、スカラーおよびベクトル拘束は驚くほど単純な形

$$C = \epsilon_{ijk} F_{ab}^i E^{aj} E^{bk}, \quad (3.82)$$

$$C_a = F_{ab}^i E^{bi} \quad (3.83)$$

を持つことが判明し、ここに F は Ashtekar 接続の曲率

$$F_{ab}^i = \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + \epsilon_{jk}^i A_a^j A_b^k \quad (3.84)$$

であり、また付加的な $\text{SO}(3)$ 局所回転を生成する拘束量は Yang-Mills 理論の場合と同じである：

$$G^i = D_a E^{ai}. \quad (3.85)$$

[以上を本稿次項で補足する.] この一般相対性理論の定式化は長らく、ループ量子重力の基礎であり続けてきた。それはなお正準理論における中心的な役割を演じており、共変な理論ではそれほど明白ではないが、より微妙な役割を演じている。[共変な理論に進む際に、正準な定式化は踏み台として、あるいはロケット・エンジンのように後方へと切り捨てられているかのようである.]

より近年には、専ら Fernando Barbero (Barbero 1995) の研究により、興味は実数の β の場合に移ってきた。実数の β を持つ接続は、 $\beta = \gamma$ での Holst 作用の Hamilton 形式での解析に自然に現れる。しかし γ (作用における結合定数) と β (接続の定義に入る定数) は必ずしも等しくとる必要はないことを、認識しておくことが重要である^{*78}。実数の $\gamma = \beta$ では、ハミルトニアン拘束はより複雑になることが判明する。宇宙定数を合わせると、それは

$$H = E_i^a E_j^b \left(\epsilon_k^{ij} F_{ab}^k - 2(1 + \beta^2) k_{[a}^i k_{b]}^j + \frac{\Lambda}{3} \epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} E_k^c \right) \quad (3.86)$$

となる [$\beta = i, \Lambda \rightarrow 0$ で式 (3.82) に帰着]。

場 E_i^a は面積要素としての直接的な幾何学的解釈を持つ。簡単な計算により、実際、 $t = \text{constant}$ 超曲面内の 2 次元面 S の面積は

$$A_S = \int_S d^2\sigma \sqrt{E_i^a n_a E_i^b n_b} \quad (3.87)$$

であることが示される。これを示すために、面が $x^3 = 0$ で与えられる座標を選ぶ。すると

$$\begin{aligned} A_S &= \int_S d^2\sigma \sqrt{\det^{(2)} q} = \int_S d^2\sigma \sqrt{q_{11}q_{22} - q_{12}^2} \\ &= \int_S d^2\sigma \sqrt{\det q q^{33}} = \int_S d^2\sigma \sqrt{E_i^3 E_i^3} = \int_S d^2\sigma \sqrt{E_i^a n_a E_i^b n_b}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

2 形式

$$E^i = \frac{1}{2} \epsilon_{abc} E^{ai} dx^b \wedge dx^c \quad (3.89)$$

を導入すると、これは

$$A_S = \int_S |E| \quad (3.90)$$

^{*78} 例えば γ を実数にしたまま $\beta = i$ を用いる、すなわち複素 Ashtekar 接続を主な変数に用いる、Hamilton 形式のダイナミクスのエレガントで有用な定式化が、Wieland (2012) によって与えられている。

という形に書ける．[以上を本稿次項で補足する．] 面が小さい極限では，

$$E_S^i = \int_S E^i \quad (3.91)$$

で定義される量 $\vec{E}_S$ は面の法線ベクトルであり [再び式 (3.90) のノートを見よ]，その長さは面の面積である^{*79}．トライアドを用いると，これは

$$E_S^i = \frac{1}{2} \epsilon^i{}_{jk} \int_S e^j \wedge e^k \quad (3.92)$$

となり [式 (3.89) に式 (3.79) を代入して導ける]，これは最初の章の式 (1.11) で既に見た公式である．覚えているか？

さて，運動量 (3.39) は接続に共役であり，したがってそれは Lorentz 変換の生成子である．[7.1 節のノートを参照．運動量 E_i^a の不鮮明化 (83) が $SO(3)=SU(2)$ ゲージ変換 (85) を生成することと比較される．] 特に，例えば z 方向へのブーストの生成子は

$$\mathcal{K}_z = \frac{1}{8\pi\gamma G} K_z. \quad (3.93)$$

単純性拘束 (3.46) を用いると，これは

$$\mathcal{K}_z = \frac{1}{8\pi G} L_z \quad (3.94)$$

を与える．ところが我々はたった今， L_z は z 方向に垂直な面の面積要素 A であることを見た [本稿次節で補足]．したがって面の面積要素 A は，面に垂直な方向へのブーストの生成子 $\mathcal{K}$ と，

$$\mathcal{K} = \frac{A}{8\pi G} \quad (3.95)$$

で関係付けられる．後で見るように，この重要で単純な式は，ある意味，一般相対性理論の完全なダイナミクスを含んでいる．

3.4.3 項について

■拘束 (3.77) が (q_{ab}, k^{ab}) 相空間を復元することと， $SO(3)$ ゲージ回転を生成すること 式 (3.77): $G_c(x) = 0$ の 3 条件と，計量 (3.75) に対する同様の 3 条件 $\epsilon^{cab} e_a^i e_b^i = 0$ を合わせると， $9+9$ 次元の相空間は $6+6$ 次元に削減され则认为られる．

正準変数に対する基本的な Poisson 括弧

$$\{k_i^a(x), e_j^b(x')\} = \delta_i^j \delta_b^a \delta^3(x, x'), \quad \text{etc.}$$

を用いると，拘束量 (3.77) の不鮮明化

$$G[\theta] \equiv \int d^3x' \theta^b(x') G_b(x') = \int d^3x' \epsilon_{bcd} \theta^b(x') k_j^c(x') e_j^d(x')$$

との Poisson 括弧は

$$\{e_a^i(x), G[\theta]\} = \epsilon_{ab}{}^c \theta^b(x) e_c^i(x), \quad \{k_i^a(x), G[\theta]\} = \epsilon^a{}_{bc} \theta^b(x) k_i^c(x)$$

と計算される．これは $\theta^b(x)$ を回転ベクトルとする無限小回転となっている．

^{*79} 電磁気学では，接続に共役な量は電場である [式 (3.66)]．ここではそれは E^i である．よって「重力的な電場の長さは面積である．」

■Ashtekar 接続で定式化した GR の基礎方程式 (3.82-83),(3.85) について 第3章では最初からテトラードを用いて GR を定式化してきた。そこで (少なくとも $\beta = \gamma = i$ の場合には), ADM 変数を経由せずとも, テトラード-接続形式から出発して, GR の基礎方程式 (3.82-83),(3.85) を直接導けることを示す。またこれを機に, 今回の教科書では重点的に取り上げられない LQG の正準な定式化をいくらか概観する。(この話題が後景に退いたからこそ, 著者らもあえて式の詳しい導出を与えていないのだろう。)

式 (3.82-85) の段落冒頭にあるように, スピン接続の自己双対成分として (複素) Ashtekar 接続 A を定義するところから始める [2, p.36]。 $i = 1, 2, 3$ として,

$$P_{jk}^i = \frac{1}{2}\epsilon^i_{jk}, \quad P_{0j}^i = -P_{j0}^i = \frac{i}{2}\delta_j^i \quad (68)$$

で与えられる “射影子” P_{IJ}^i [$= -P_{JI}^i$] を考えよう。これは 2 つの性質

$$\frac{1}{2}\epsilon_{IJ}^{KL}P_{KL}^i = iP_{IJ}^i, \quad P_i^{IJ}P_{KL}^i = P^{IJ}_{KL} \equiv \frac{1}{2}\delta_{[K}^I\delta_{L]}^J + \frac{i}{4}\epsilon^{IJ}_{KL} \quad (69)$$

を満たす。[第1式が自己双対性を意味しており,] 射影子 (68) は自己双対な成分を読み出す。射影子の性質 (69) の確認 第1式について

$$\frac{1}{2}\epsilon_{IJ}^{KL}P_{KL}^i = \frac{1}{2}\left(\epsilon_{IJ}^{kl}P_{kl}^i + 2\epsilon_{IJ}^{0k}P_{0k}^i\right) = \frac{1}{4}\epsilon_{IJ}^{kl}\epsilon^i_{kl} + \frac{i}{2}\epsilon_{IJ}^{0i}$$

であり, 最右辺は

- $(I, J) = (m, n)$ のとき $\frac{i}{2}\epsilon_{mn}^{0i} = -\frac{i}{2}\epsilon_{mn0i} = -\frac{i}{2}\epsilon_{0imn} = +\frac{i}{2}\epsilon_{imn} = +\frac{i}{2}\epsilon^i_{mn} = +iP_{IJ}^i$
- $(I, J) = (0, m)$ のとき $\frac{1}{4}\epsilon_{0m}^{kl}\epsilon^i_{kl} = -\frac{1}{4}\epsilon_m^{kl}\epsilon^i_{kl} = -\frac{1}{2}\delta_m^i = +iP_{IJ}^i$

となるので (3.2 節 p.61 の約束 $\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = +1$ に注意した),

$$\frac{1}{2}\epsilon_{IJ}^{KL}P_{KL}^i = +iP_{IJ}^i$$

が成り立つ。両辺はいずれも添字 (I, J) に関して反対称なので, これは $(I, J) = (m, 0)$ のときも正しい。

次に第2式は

- $(I, J) = (i, j), (K, L) = (k, l)$ のとき $P_m^{ij}P_{kl}^m = \frac{1}{4}\epsilon_m^{ij}\epsilon^m_{kl} = \frac{1}{2}\delta_{[k}^i\delta_{l]}^j$
- $(I, J) = (i, j), (K, L) = (k, 0)$ $P_m^{ij}P_{k0}^m = -\frac{i}{4}\epsilon_m^{ij}\delta_k^m = -\frac{i}{4}\epsilon_k^{ij} = -\frac{i}{4}\epsilon_{0k}^{ij} = \frac{i}{4}\epsilon^{ij}_{k0}$

となって成り立つ。ところが第2式は, 両辺がともに添字の入れ替え $I \leftrightarrow J$ および $K \leftrightarrow L$ に関して反対称であり, また添字の組の入れ替え $(I, J) \leftrightarrow (K, L)$ に関して対称だから, 全ての可能な添字の組 (I, J, K, L) に対して成り立つことになる。

射影子 (68) を用いて, 複素自己双対接続

$$A^i \equiv P_{IJ}^i\omega^{IJ} = \frac{1}{2}\epsilon^i_{jk}\omega^{jk} + 2 \cdot \frac{i}{2}\delta_k^i\omega^{0k} = \omega^i + i\omega^{0i} \quad (\omega^i \equiv \epsilon^i_{jk}\omega^{jk}/2) \quad (70)$$

を定義する。GR の力学変数として, 我々のは実の接続 ω_{IJ}^I (6 個の $[\cdot\cdot]$ 反対称性] 実の 1 形式) の代わりに, 複素自己双対接続 A^i (3 個の複素 1 形式) を用いることができる。(これは 2 つの実の自由度 x と y を持つ系を, 単一の複素変数 $z = x + iy$ で記述することと等価である。)

次に我々が第3章で書き下した Holst 作用と接続 A を関係付ける準備として, 自己双対接続 A^i の曲率 F^i が, 接続 ω^{IJ} の曲率 (3.13):

$$F^{IJ} = d\omega^{IJ} + \omega_K^I \wedge \omega^{KJ}$$

の自己双対成分

$$F^i = P_{IJ}^i F^{IJ} \quad (71)$$

であることを示す。

上式 (71) の証明

$$P_{IJ}^i F^{IJ} = P_{IJ}^i (d\omega^{IJ} + \omega_K^I \wedge \omega^{KJ}) = dA^i + P_{IJ}^i \omega_K^I \wedge \omega^{KJ}$$

において、非自明な接続の 2 次の項

$$\begin{aligned} P_{IJ}^i \omega_K^I \wedge \omega^{KJ} &= P_{i'j'}^i \omega_K^{i'} \wedge \omega^{Kj'} + P_{0j'}^i \omega_K^0 \wedge \omega^{Kj'} + P_{i'0}^i \omega_K^{i'} \wedge \omega^{K0} \\ &= P_{i'j'}^i \omega_K^{i'} \wedge \omega^{Kj'} + 2P_{0j'}^i \omega_K^0 \wedge \omega^{Kj'} \end{aligned}$$

は次のように計算できる。まず最右辺第 1 項は

$$\begin{aligned} P_{i'j'}^i \omega_K^{i'} \wedge \omega^{Kj'} &= \frac{1}{2} \epsilon_{j'k'}^i \omega_K^{i'} \wedge \omega^{Kj'} = \frac{1}{2} \epsilon_{j'k'}^i (\omega^{i'0} \wedge \omega^{0j'} + \omega^{i'k} \wedge \omega^{kj'}) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{j'k'}^i (\omega^{0i'} \wedge \omega^{0j'} + \epsilon_{kl}^{i'} \epsilon^{kj'} \omega^l \wedge \omega^m) \quad (\because \omega^{i'0} = -\omega^{0i'} = \omega^{0i'}, \omega^{i'k} = \epsilon_{kl}^{i'} \omega^l) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{j'k'}^i (\omega^{0i'} \wedge \omega^{0j'} - \omega^{i'} \wedge \omega^{j'}). \quad (\because \epsilon_{kl}^{i'} \epsilon^{kj'} = -(\delta^{i'j'} \delta_{lm} - \delta_m^{i'} \delta_l^{j'})) \end{aligned}$$

次に第 2 項は

$$2P_{0j'}^i \omega_K^0 \wedge \omega^{Kj'} = i\delta_{j'}^i \omega_K^0 \wedge \omega^{kj'} = i\omega_K^0 \wedge \omega^{ki} = -i\epsilon_{il}^{ki} \omega^l \wedge \omega_K^0 = -i\epsilon_{lk}^i \omega^l \wedge \omega^{0k}.$$

これらを合わせると

$$P_{IJ}^i \omega_K^I \wedge \omega^{KJ} = -\frac{1}{2} \epsilon_{jk}^i (\omega^j \wedge \omega^k + 2i\omega^j \wedge \omega^{0k} - \omega^{0j} \wedge \omega^{0k})$$

であり、右辺の括弧内の因子は

$$A^j \wedge A^k = (\omega^j + i\omega^{0j}) \wedge (\omega^k + i\omega^{0k}) = \omega^j \wedge \omega^k + 2i\omega^j \wedge \omega^{0k} - \omega^{0j} \wedge \omega^{0k}$$

に一致しているので、

$$P_{IJ}^i F^{IJ} = dA^i - \frac{1}{2} \epsilon_{jk}^i A^j \wedge A^k \equiv F^i : (71)$$

とまとめられる。このため曲率

$$F^i = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^i dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i - \epsilon_{jk}^i A_\mu^j A_\nu^k \quad (72)$$

は $\mathfrak{su}(2)$ 代数の構造定数 $-\epsilon_{jk}^i$ を持つ場の強度である。ここから A を $\mathrm{SU}(2)$ Yang–Mills 接続と見なすことが動機付けられる。上式 (72) は $t = \text{const.}$ 面に誘導された F^i の定義式 (3.84) と構造定数の符号が異なるものの、 $\mathfrak{su}(2)$ の基底を適当に採り直せば、構造定数の係数は調節できる。また後で見るように、共変微分 $D_a E_i^a$ の定義に含まれる構造定数も同時に修正されるため、構造定数の符号の違いは式 (78) 以降の結果に影響しない。

さて、略記のため Plebanski 形式 (3.19): $\Sigma^{IJ} \equiv e^I \wedge e^J$ とその自己双対成分 $\Sigma^i \equiv P_{IJ}^i \Sigma^{IJ}$ を導入する。このとき Barbero–Immirzi パラメータ $\gamma = i$ の下で、Holst 作用 (3.37) は A^i を用いて

$$S[e, A] = \frac{-i}{8\pi G} \int \Sigma_i \wedge F^i \quad (73)$$

と表される [2, pp.36–37].

式 (73) の Holst 作用への書き換え 式 (71): $F^i = P^{iKL} F_{KL}$ を用いると、作用 (73) において

$$\Sigma_i \wedge F^i = P^{KL}_{IJ} \Sigma^{IJ} \wedge F_{KL}, \quad P^{KL}_{IJ} \equiv P_{iIJ} P^{iKL} = \frac{1}{2} \delta_{[I}^K \delta_{J]}^L + \frac{i}{4} \epsilon^{KL}_{IJ} : (69)$$

と書き換えられる。ここで P^{KL}_{IJ} の第 1 項は反対称な因子 F_{KL} に対しては恒等演算子のように作用し、また第 2 項は Hodge 双対 $(\star F)_{IJ} = F_{IJ}^\star = \frac{1}{2} \epsilon_{IJKL} F^{KL}$ を作る：

$$P^{KL}_{IJ} F_{KL} = \frac{1}{2} \left(F_{IJ} + \frac{i}{2} \epsilon_{IJKL} F^{KL} \right) = \frac{i}{2} \left\{ \left(\star + \frac{1}{i} \right) F \right\}_{IJ}.$$

よって作用 (73) は

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \Sigma^{IJ} \wedge \left\{ \left(\star + \frac{1}{i} \right) F \right\}_{IJ}$$

と書き換えられ、全体の係数の違いを除いて $\gamma = i$ の Holst 作用 (3.37) に一致する*80.

式 (73) は既に Holst 作用の形をしているものの、我々はなお適当な係数を持つ Holst 項を付け加えることができる。この任意性が、接続の定義 (3.78) における定数の選択 $\beta = i$ と独立に作用の結合定数 γ を選べる自由度 (教科書 p.73) に対応していると考えられる*81.

ここで境界のない 3 次元の面 $\Sigma: \vec{\tau} = (\tau^a) \mapsto x^\mu(\vec{\tau})$ 上の場を用いた記述に移ろう [2, pp.147–148]. 4 次元の微分形式 A^i (自己双対接続), Σ^i (Plebanski 形式) および e^I (テトラード) は、 Σ 上の 3 次元の微分形式

$$A^i(\vec{\tau}) = A_a^i(\vec{\tau}) d\tau^a, \quad \Sigma^i(\vec{\tau}) = \Sigma_{ab}^i(\vec{\tau}) d\tau^a \wedge d\tau^b, \quad e^I(\vec{\tau}) = e_a^I(\vec{\tau}) d\tau^a \quad (74)$$

を誘導する。また $e^I(\vec{\tau}) = (e^0(\vec{\tau}), e^i(\vec{\tau}))$ と書き、ゲージ条件

$$e_a^0(\vec{\tau}) = e_a^{I=0}(\vec{\tau}) = 0 \quad (75)$$

を課す*82.

テトラードの 3 次元面への制限 (74) がトライアドを与えること 3 次元面 Σ 上でテトラードの 1 形式は $e^I = e_\mu^I dx^\mu = e_\mu^I \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau^a} d\tau^a$ と表され、これを式 (74) と比較すると、共変ベクトルの変換則と類似の関係

$$e_a^I = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau^a} e_\mu^I$$

が成り立つ。同様に Σ に誘導された計量は式 (59):

$$q_{ab} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau^b} g_{\mu\nu}$$

で定義できる。ここで式 (3.6): $g_{\mu\nu} = e_\mu^I e_\nu^J \eta_{IJ}$ を思い出し、またゲージ条件 (75): $e_a^0 = 0$ を課すと、上の 2 式はトライアド e_a^i の満たす関係 (3.75):

$$q_{ab} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau^b} (e_\mu^I e_\nu^J \eta_{IJ}) = e_a^I e_b^J \eta_{IJ} = e_a^i e_b^j \delta_{ij}$$

を再現する。このときトライアド e_a^i の添字を計量 δ_{ij} , q^{ab} で上げ下げした量 $e_i^a = q^{ab} \delta_{ij} e_b^j$ が逆トライアドとなること $e_a^i e_j^a = \delta_j^i$, $e_i^a e_b^a = \delta_b^a$ は、テトラードの場合と全く同様に示せる。

“Ashtekar 電場” ないし加重度 1 の (すなわち擬スカラー $\sqrt{\det q}$ を掛けて密度化した) 逆トライアド (3.79):

$$E_i^a(\vec{\tau}) = (\det e) e_i^a = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon^{abc} e_b^j(\vec{\tau}) e_c^k(\vec{\tau}) \quad (76)$$

はゲージ条件 (75) の下で、 Σ^i に関するベクトル密度

$$E^{ai}(\vec{\tau}) = \epsilon^{abc} \Sigma_{bc}^i(\vec{\tau}) \quad (77)$$

として表せることが有用となる。(文献 [2, p.148] ではあらかじめ上式 (77) で E_i^a を定義している。)

*80 本稿では実部の Palatini 作用 $\frac{1}{16\pi G} \int e^I \wedge e^J \wedge F_{IJ}^*$ が Einstein–Hilbert 作用 $-\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R$ に一致するように、式 (73) の数係数を調整しておいた (式 (3.22) の箇所を見よ)。

*81 選択 $\beta = i$ に対応する Ashtekar 接続 A_a^i は実数条件 $\text{Re} A_a^i = \Gamma_a^i[e]$ を満たす [2, p.145].

*82 これは Maxwell 理論のゲージ条件 $A_0 = 0$ とアナログスである。時間に依存しないゲージ関数 λ を用いて、ゲージ条件 $A_0 = 0$ を破ることなく、なおゲージ変換 $A_a \rightarrow A_a + \partial_a \lambda$ を施すことができ、Gauss 拘束 $C(\vec{E}) = \partial_a E^a$ はこのゲージ変換を生成する (3.4.2 項)。

$E_i^a(\vec{\tau})$ の式 (77) の確認 ゲージ条件 (75): $e_b^0 = 0$ の下で

$$\begin{aligned}\Sigma_{ibc} &\equiv P_{iIJ} e_b^I e_c^J = P_{i,jk} e_b^j e_c^k + P_{i,0j} e_b^0 e_c^j + P_{i,j0} e_b^j e_c^0 = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} e_b^j e_c^k, \quad (\text{添字 } b, c \text{ に関して反対称}) \\ \therefore \epsilon^{abc} \Sigma_{ibc} &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon^{abc} e_b^j e_c^k = E_i^a : (77).\end{aligned}$$

ここで Hamilton 形式の基礎方程式, すなわち Poisson 括弧 (3.81) と拘束系 (3.82–83), (3.85) の導出をスケッチする [2, pp.148–149]. 3次元の場合を用いて, 作用 (73) は以下のように書き換えられる:

$$\begin{aligned}S[\Sigma, A] &= \frac{-i}{8\pi G} \int \Sigma_i \wedge F^i = \frac{-i}{16\pi G} \int \Sigma_{i\mu\nu} F_{\rho\sigma}^i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d^4x \\ &= \frac{-i}{8\pi G} \int (\Sigma_{iab} F_{0c}^i + \Sigma_{i0a} F_{bc}^i) \epsilon^{abc} d^4x \\ &= \frac{-i}{8\pi G} \int \left(E_i^c \left(\partial_0 A_c^i - \partial_c A_0^i - \epsilon_{jk}^i A_0^j A_c^k \right) + P_{iIJ} e_0^I e_a^J F_{bc}^i \epsilon^{abc} \right) d^4x \\ &= \frac{-i}{8\pi G} \int \left(E_i^c \dot{A}_c^i + A_0^i D_c E_i^c + \frac{1}{2} \left(\epsilon_{jk}^i e_0^j e_a^k + i e_0^0 e_a^i \right) F_{ibc} \epsilon^{abc} \right) d^4x \\ &= \frac{-i}{8\pi G} \int \left(E_i^c \dot{A}_c^i + \lambda_0^i (D_c E_i^c) + \lambda^b (E_i^a F_{ab}^i) + \lambda (E_j^a E_k^b F_{ab}^{jk}) \right) d^4x. \quad (78)\end{aligned}$$

ただしゲージ条件 (75) を用いており, A の上のドットは時間微分を表す.

式 (78) 第 2 の等号 1 行目はほぼ自明である. すなわち 2 形式を $\Sigma_i = \Sigma_{i\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$, $F^i = \frac{1}{2} F_{\rho\sigma}^i dx^\rho \wedge dx^\sigma$ と書き, 次いで座標そのものを積分変数に選んで $dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \rightarrow \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d^4x$ とすれば良い.

式 (78) 第 4 の等号 3 行目の第 1 項では, E_i^c の表式 (77) と $F_{\mu\nu}^i$ の表式 (72) を用いる. 本稿の計算結果 (72) は構造定数 $-\epsilon_{jk}^i$ が式 (3.84) と逆符号である. しかしこのとき共変微分も同じ構造定数 $-\epsilon_{jk}^i$ を用いて

$$D_a v_i = \partial_a v_i - \epsilon_{ijk} A_a^j v^k$$

と (再) 定義されるため [2, p.146], 続く 4 行目の共変微分の項 $D_c E_i^c$ が得られることに変わりはない. ここで E_i^a の共変微分も同様に, Yang–Mills 理論の “電場” の微分 [10, p.143] と同じ形

$$D_a E_i^a = \partial_a E_i^a - \epsilon_{ij}^k A_a^j E_k^a$$

に定義され则认为る*83.

さらに第 2 項について,

$$\Sigma_i \equiv P_{iIJ} e^I \wedge e^J = \Sigma_{i\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad \Sigma_{i\mu\nu} \equiv P_{iIJ} e_\mu^I e_\nu^J = -\Sigma_{i\nu\mu} \text{ (既に反対称)}$$

と同定できる.

式 (78) 第 5 の等号 まず 3 行目の最初の項を

$$\int E_i^c \left(-\partial_c A_0^i + \epsilon_{jk}^i A_0^j A_c^k \right) d^4x = \int A_0^i \left(\partial_c E_i^c + \epsilon_{ij}^k A_c^j E_k^c \right) d^4x = \int A_0^i D_c E_i^c d^4x$$

と書き換える. ここで中辺に移る際に, 第 1 項を (d^3x に関する積分において) 部分積分し, 第 2 項ではダミー添字の巡回置換 $i \rightarrow k \rightarrow j \rightarrow i$ を行った.

3 行目の後ろの項に関しては, P_{IJ}^i の定義式とゲージ条件 (75): $e_a^0 = 0$ を用いて

$$P_{IJ}^i e_0^I e_a^J = P_{jk}^i e_0^j e_a^k + P_{0j}^i e_0^0 e_a^j + P_{j0}^i e_0^j e_a^0 = \frac{1}{2} (\epsilon_{jk}^i e_0^j e_a^k + i e_0^0 e_a^i)$$

と書き換えれば良い. したがって以降の e_0^0 は $e_{\mu=0}^{I=0}$ の意味である.

*83 重力理論の文脈での共変微分 (46) との混同に注意せよ.

式 (78) 最後の等号 まず最右辺の第 2 項において $\lambda_0^i \equiv A_0^i$ と同定する.

残りの項を得るには, E_i^a の表式 (76) が有用となる. $e = (e_a^i)$ が逆トライアド e_i^a の逆行列であることは, 式 (76) を真似て

$$e_a^i = \frac{1}{\det(e_i^a)} \left(\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \epsilon_{abc} e_j^b e_k^c \right) = \frac{1}{2 \det e} \epsilon^{ijk} \epsilon_{abc} E_j^b E_k^c$$

と書ける (第 2 の等号で $E_i^a = (\det e) e_i^a$ を代入).

これを正直に代入すると, 4 行目の第 3 項は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \epsilon^i{}_{jk} e_a^j e_0^k F_{ibc} \epsilon^{abc} &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \left(\frac{1}{2 \det e} \epsilon^{jlm} \epsilon_{ade} E_l^d E_m^e \right) e_0^k F_{bc}^i \epsilon^{abc} \\ &= - \frac{e_0^k E_k^c}{\det e} E_i^b F_{bc}^i \quad (\because \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} = -2 \delta_i^{[l} \delta_k^{m]}, \epsilon_{ade} \epsilon^{abc} = 2 \delta_d^{[b} \delta_e^{c]}) \end{aligned}$$

と書き換えられる. ここで式 (76): $E_i^a = (\det e) e_i^a$ と $0 = \delta_0^c = e_0^\mu e_\mu^c = e_0^0 e_0^c + e_0^k e_k^c$ に注意すると, 最右辺の係数は

$$- \frac{e_0^k E_k^c}{\det e} = -e_0^k e_k^c = e_0^0 e_0^c$$

となる. そこでこれを λ^c に同定すると, 式 (78) 最右辺の第 3 項 $\lambda^c E_i^b F_{bc}^i$ を得る.

同様に 4 行目の第 4 項は

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} e_0^0 e_a^i F_{ibc} \epsilon^{abc} &= \frac{i}{2} e_0^0 \left(\frac{1}{2 \det e} \epsilon^{ijk} \epsilon_{ade} E_j^d E_k^e \right) F_{ibc} \epsilon^{abc} \\ &= \frac{i}{2} e_0^0 \frac{1}{\det e} E_j^b E_k^c F_{bc}^{jk} \quad (\because \epsilon^{ijk} F_{ibc} = F_{bc}^{jk}, \epsilon_{ade} \epsilon^{abc} = 2 \delta_d^{[b} \delta_e^{c]}) \end{aligned}$$

と書き換えられる. よって式 (78) 最右辺の第 4 項では, $\lambda \equiv \frac{i}{2} e_0^0 \frac{1}{\det e}$ と同定している. すると λ は加重度 -1 であり, 加重度 2 の因子 $E_j^b E_k^c F_{bc}^{jk}$ に掛かって, 積分に適した加重度 $+1$ の量を作る^{*84}.

作用 (78) 最右辺の Lagrange 乗数 作用 (78) 最右辺の導出時に定義した乗数を改めてまとめると,

$$\lambda_0^i \equiv A_0^i, \quad \lambda^b \equiv e_0^0 e_0^b, \quad \lambda \equiv \frac{i}{2} e_0^0 \frac{1}{\sqrt{\det E}}.$$

ここに現れる $A_0^i, e_0^0 (= e_{\mu=0}^0), e_0^a$ はその時間微分がラグランジアンに含まれていないので, 式 (3.59) のラプス N とシフト $\vec{N}$ について説明したように, λ たちを「非力学的な (nondynamical) [2, p.149]」Lagrange の未定乗数と見なせる.

式 (78) の最右辺は作用の表式 $S = \int (p\dot{q} - H(p, q)) dt$ (あるいは式 (36)) と比較される. ここでは被積分関数は配位変数とその運動量共役の関数として表されているものの, それがラグランジアン (密度) に一致することには変わらない. そこで時間微分 $\dot{A}_a^i$ が作用式 (78) の第 1 項のみに含まれることに注意して, ラグランジアン密度を $\dot{A}_a^i$ で微分すれば, 運動量密度 $E_i^c / 8\pi G$ が得られる. したがって正準変数間の Poisson 括弧は

$$\{A_a^i(x), E_j^b(y)\} = (8\pi G) \delta^3(x, y) \quad (79)$$

である ($8\pi G = 1$ の下で式 (3.81) で $\beta = i$ と置いた結果に一致) [2, p.148]. また Lagrange 乗数 (λ たち) について変分をとると, 拘束系 (3.82–83), (3.85)

$$G_i = D_a E_i^a = 0, \quad C_a = F_{ab}^i E_i^b = 0, \quad C = F_{ab}^{ij} E_i^a E_j^b = 0$$

が帰結する.

^{*84} 実際この措置は分母の $\sqrt{\det E}$ を係数に吸収させる, 文献 [1, pp.92–93] の記述と整合している. 式 (76): $E_i^a = (\det e) e_i^a$ の行列式をとると $\sqrt{\det E} = \det e (= \sqrt{\det q})$ が見出される.

拘束条件の解釈に移ろう [2, pp.146–147]. 指定した 3 次元の境界 $x^\mu = x^\mu(\bar{\tau})$ (それは 3 次元球面のトポロジジーを持つか, 始・終状態を表す 2 つの超曲面から成る) とその上の場の値 $A(\bar{\tau})$ に対する, 運動方程式の解に関して評価した作用の値として, Hamilton (汎) 関数 $S[A]$ を定義する [2, p.159]. これを用いて共役運動量を

$$E_i^a(\bar{\tau}) = \frac{\delta S[A]}{\delta A_a^i(\bar{\tau})} \quad (80)$$

と書くことにより^{*85}, Hamilton–Jacobi 系

$$D_a \frac{\delta S[A]}{\delta A_a^i(\bar{\tau})} = 0, \quad F_{ab}^i(\bar{\tau}) \frac{\delta S[A]}{\delta A_a^i(\bar{\tau})} = 0, \quad (81)$$

$$F_{ab}^{ij}(\bar{\tau}) \frac{\delta S[A]}{\delta A_a^i(\bar{\tau})} \frac{\delta S[A]}{\delta A_b^j(\bar{\tau})} = 0 \quad (82)$$

が得られる. 最初の 2 つの方程式 (81) は, 各々の不鮮明化

$$G[\lambda] = - \int d^3\tau \lambda^i D_a E_i^a = \int d^3\tau D_a \lambda^i \cdot E_i^a = 0, \quad (83)$$

$$C[f] = - \int d^3\tau f^a F_{ab}^i E_i^b = 0 \quad (84)$$

が任意の“試験 (test)”関数に対して消えることと等価である.

上式 (83) 第 2 の等号の確認

$$- \int d^3\tau \lambda^i D_a E_i^a = - \int d^3\tau \lambda^i (\partial_a E_i^a - \epsilon_{ij}^k A_a^j E_k^a) = \int d^3\tau (\partial_a \lambda^i - \epsilon^i_{jk} A_a^j \lambda^k) E_i^a = \int d^3\tau D_a \lambda^i \cdot E_i^a$$

と変形できる. ここで第 2 の等号では, 第 1 項を部分積分し, 第 2 項でダミー添字を $i \leftrightarrow k$ と入れ替えた.

これらの方程式に現れる量 $D_a \lambda^i$ と $f^a F_{ab}^i$ は, 生成子 $\lambda^i(\bar{\tau})$ での内部ゲージ変換と, ベクトル場 $f^a(\bar{\tau})$ によって生成される無限小の微分同相写像 (と内部ゲージ変換の組合せ) の下での, 接続の無限小変換

$$\delta_\lambda A_a^i = D_a \lambda^i, \quad \delta_f A_a^i = f^b F_{ab}^i \quad (85)$$

である.

A_a^i の無限小変換 (85) について 第 1 式 $\delta_\lambda A_a^i = D_a \lambda^i$ が変換パラメータ λ^i による無限小ゲージ変換に伴う A_a^i の変化量であることは, 文献 [10, p.143] で確認済みである. また $G[\lambda]$ は Poisson 括弧

$$\{G[\lambda], A_a^i\} = D_a \lambda^i$$

を満たす, すなわち A_a^i の正しいゲージ変換を生成する. 実際, $G[\lambda]$ の定義式 (83) と正準変数間の基本的な Poisson 括弧

$$G[\lambda] = \int d^3\tau \lambda^j D_b E_j^b = \int d^3\tau \lambda^j (\partial_b E_j^b - \epsilon_{kjl} E_k^b A_b^l), \quad \{A_a^i(\bar{\tau}), E_j^b(\bar{\tau}')\} = \delta_j^i \delta_a^b \delta^3(\bar{\tau} - \bar{\tau}')$$

に注意すると^{*86},

$$\begin{aligned} \{G[\lambda], A_a^i(\bar{\tau})\} &= \int d^3\tau' \lambda^j(\bar{\tau}') \left[\partial_b' \{E_j^b(\bar{\tau}'), A_a^i(\bar{\tau})\} - \epsilon_{kjl} \{E_k^b(\bar{\tau}') A_b^l(\bar{\tau}'), A_a^i(\bar{\tau})\} \right] \\ &= \int d^3\tau' \lambda^j(\bar{\tau}') \left[\partial_b' \{-\delta_j^i \delta_a^b \delta^3(\bar{\tau} - \bar{\tau}')\} - \epsilon_{kjl} \{-\delta_k^i \delta_a^b \delta^3(\bar{\tau} - \bar{\tau}')\} A_b^l(\bar{\tau}') \right] \\ &= \partial_a \lambda^i(\bar{\tau}) + \epsilon_{ijl} A_a^l(\bar{\tau}) \lambda^j(\bar{\tau}) \\ &= \partial_a \lambda^i(\bar{\tau}) - \epsilon_{ijk} A_a^j(\bar{\tau}) \lambda^k(\bar{\tau}) \equiv D_a \lambda^i(\bar{\tau}). \end{aligned}$$

^{*85} 正確には式 (80) 左辺を $8\pi i G$ で割る必要がある. ただしこの修正は続く式 (81), (82) に影響しない.

^{*86} ここで省略した Poisson 括弧 (79) の係数 $8\pi i G$ を導入すれば, 続く $\{G[\lambda], A_a^i(\bar{\tau})\}$ の表式は全体が $8\pi i G$ 倍されるに過ぎない.

また第 2 式 $\delta_f A_a^i = f^b F_{ab}^i$ については、次のように考えれば良い．すなわち $C[f]$ と $G[\lambda]$ の適当な組合せ

$$\begin{aligned}
C[f^a] &\equiv C[f^a] - G[f^a A_a^i] = - \int d^3 \tau f^a \left\{ E_i^b F_{ab}^i - A_a^i (D_b E_i^b) \right\} \\
&= - \int d^3 \tau f^a \left\{ E_i^b (\partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i - \epsilon_{ijk} A_a^j A_b^k) - A_a^i (\partial_b E_i^b - \epsilon_{ijk} E_j^k A_b^i) \right\} \\
&= - \int d^3 \tau f^a \left\{ E_i^b (\partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i) - A_a^i \partial_b E_i^b \right\} \\
&= - \int d^3 \tau E_i^b (f^a \partial_a A_b^i + A_a^i \partial_b f^a) \quad (\text{第 3 項を部分積分した})
\end{aligned} \tag{86}$$

を作る．最右辺を $C[f]$ の式 (84) と比較すると、ここでは E_i^b の係数が共変ベクトル A_a^i のベクトル f^a に沿う Lie 微分 (付録 B)

$$(\mathcal{L}_{\vec{f}} A^i)_b \equiv f^a \partial_a A_b^i + A_a^i \partial_b f^a$$

になっており、これは純粋な微分同相写像のみによる A_a^i の変化量を表している．翻って式 (84) における係数 $f^b F_{ab}^i$ は、微分同相写像とゲージ変換の組合せの下での、 A_a^i の無限小変換であることが納得できる．

したがって式 (81) の不鮮明化形式は、無限小のゲージ変換および微分同相写像に伴う $S[A]$ の変分が

$$\int d^3 \tau (\delta_\lambda A_a^i) \frac{\delta S[A]}{\delta A_a^i(\vec{\tau})} = 0, \quad \int d^3 \tau (\delta_f A_a^i) \frac{\delta S[A]}{\delta A_a^i(\vec{\tau})} = 0 \tag{87}$$

となることを要求する．言い換えれば $S[A]$ は、したがって理論は、3 次元の微分同相写像 (diffe) と局所 $\text{SO}(3)=\text{SU}(2)$ 変換の下で不変である．最後の方程式 (82) は GR の Hamilton–Jacobi 方程式であり、GR のダイナミクスを定義する．

■面積の式 (3.87–88) について 2 次元面 S が $x^3 = 0$ で与えられる座標を選ばずとも、次のように一般的に証明できる．面 S を座標 σ^A ($A = 1, 2$) でパラメトライズしよう．式 (3.41) の箇所と同様に、トライアドを用いて R^3 のベクトル

$$u_1^i \equiv e_a^i \frac{\partial \tau^a}{\partial \sigma^1}, \quad u_2^i \equiv e_a^i \frac{\partial \tau^a}{\partial \sigma^2}$$

を導入する．法線ベクトルの定義式 $n_a = \epsilon_{abc} \frac{\partial \tau^b}{\partial \sigma^1} \frac{\partial \tau^c}{\partial \sigma^2}$ も利用すると、式 (3.87) の平方根の因子は

$$\begin{aligned}
E_i^a n_a &= \left(\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon^{abc} e_b^j e_c^k \right) \left(\epsilon_{ade} \frac{\partial \tau^d}{\partial \sigma^1} \frac{\partial \tau^e}{\partial \sigma^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \left\{ \left(e_b^j \frac{\partial \tau^b}{\partial \sigma^1} \right) \left(e_c^k \frac{\partial \tau^c}{\partial \sigma^2} \right) - \left(e_c^k \frac{\partial \tau^c}{\partial \sigma^1} \right) \left(e_b^j \frac{\partial \tau^b}{\partial \sigma^2} \right) \right\} \quad (\because \epsilon^{abc} \epsilon_{ade} = \delta_d^b \delta_e^c - \delta_e^b \delta_d^c) \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (u_1^j u_2^k - u_1^k u_2^j) = \epsilon_{ijk} u_1^j u_2^k = (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)_i,
\end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{(E_i^a n_a)(E_i^b n_b)} = \sqrt{(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)^2} = \sqrt{(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1)(\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2) - (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2)^2}$$

と書ける．よって面積 (3.87) は線要素 $dx_A^i = u_A^i d\sigma$ の張る面積要素の積分になっている．

ここで平方根の中身が、2 次元の面 S に誘導された計量

$$q_{AB} = q_{ab} \frac{\partial \tau^a}{\partial \sigma^A} \frac{\partial \tau^b}{\partial \sigma^B} \quad (a, b = 1, 2, 3; A, B = 1, 2)$$

の行列式になっていることを確認しておくのは教育的である．上式は 3 次元計量 q_{ab} の式 (59) と同様に理解できる．実際、パラメータの変化 $d\sigma^A$ に伴う変位 $d\tau^a = \frac{\partial \tau^a}{\partial \sigma^A} d\sigma^A$ に対応する “真の距離” (の 2 乗) は

$$dl^2 = q_{ab} d\tau^a d\tau^b = \left(q_{ab} \frac{\partial \tau^a}{\partial \sigma^A} \frac{\partial \tau^b}{\partial \sigma^B} \right) d\sigma^A d\sigma^B = q_{AB} d\sigma^A d\sigma^B$$

と書けるので、上式は面 S に誘導された計量 q_{AB} の定義として適正である。他方でトライアドの満たす関係 $\delta_{ij}e_a^i e_b^j = q_{ab}$ に注意すると、根号内の因子は

$$\det(\vec{u}_A \cdot \vec{u}_B) = \det \left\{ \delta_{ij} \left(e_a^i \frac{\partial \tau^a}{\partial \sigma^A} \right) \left(e_b^j \frac{\partial \tau^b}{\partial \sigma^B} \right) \right\} = \det \left\{ (\delta_{ij} e_a^i e_b^j) \frac{\partial \tau^a}{\partial \sigma^A} \frac{\partial \tau^b}{\partial \sigma^B} \right\} = \det(q_{AB})$$

と書き換えられる。(ここから $u_A^i = e_a^i \frac{\partial \tau^a}{\partial \sigma^A}$ の δ_{ij} による内積が⁸⁷, 3次元空間に引き戻したベクトル $\frac{\partial \tau^a}{\partial \sigma^A}$ の q_{ab} による内積に一致していることが見て取れる。) したがって面積は

$$A_S = \int_S d^2\sigma \sqrt{\det(q_{AB})}$$

と表せる (式 (3.88) の第2辺に対応)。

■面積の式 (3.90) について 積分変数を σ^1, σ^2 に選ぶと、定義より積分の下で微分形式 (3.89) は

$$\begin{aligned} E_i &\rightarrow \frac{1}{2} E_i^a \epsilon_{abc} \frac{\partial(x^b, x^c)}{\partial(\sigma^1, \sigma^2)} d^2\sigma = \frac{1}{2} E_i^a \epsilon_{abc} \left(\frac{\partial x^b}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^c}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial x^c}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^2} \right) d^2\sigma \\ &= E_i^a \epsilon_{abc} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^c}{\partial \sigma^2} d^2\sigma = E_i^a n_a d^2\sigma \end{aligned}$$

と置き換わる。これを機械的にノルムの定義式 $|v| = \sqrt{\delta^{ij} v_i v_j}$ に代入して

$$|E| \rightarrow \sqrt{(E_i^a n_a)(E_i^b n_b)} d^2\sigma$$

と書くと、式 (3.90) は面積の式 (3.87) に戻る。

■体積と長さ 3次元超曲面における領域 $\mathcal{R}$ の体積は、Jacobi 行列式の絶対値

$$\sqrt{\det E} = |\det e| = \sqrt{\det q} = \left| \frac{\partial(X)}{\partial(x)} \right|$$

を用いて

$$V(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} d^3x |\det e(x)|$$

と表される [2, p.150]。また曲線 γ の長さは、 γ に沿う R^3 のベクトル $u^i = e_a^i \frac{dx^a(s)}{ds}$ を用いて

$$L_\gamma = \int_\gamma ds |u| = \int_\gamma ds \sqrt{\delta_{ij} u^i u^j} = \int_\gamma \sqrt{q_{ab} dx^a dx^b}$$

と書けると考えられる [2, p.43]。量子論において、Thiemann の研究^{*87}にある長さの演算子は、面積と体積よりも驚くほどはるかに扱うのが複雑である [2, p.275]

■式 (3.94) の運動量成分 L_z が面積要素 A であること (教科書 p.74) について 式 (3.44): $L^I \equiv n_J (\star B)^{IJ} = n_J (\star e \wedge e)^{IJ}$ は常に成り立ち、これは $n_J = \delta_{J0}$ のゲージで

$$L^i = (\star e \wedge e)^{i0} = -\frac{1}{2} \epsilon^{i0jk} e_j \wedge e_k = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} e_j \wedge e_k$$

を与える。この微小な面にわたる積分は面積要素ベクトル (3.92) に一致している。ここから運動量成分 L^I を面積要素 (1.11) と同じ文字 L で表したことが⁸⁸, 理に適っていることも納得できる。

^{*87} T. Thiemann, A length operator for canonical quantum gravity, *J. Math. Phys.* **39** (1998) 3372–3392, gr-qc/9606092.

3.5 3 時空次元での Euclid 的な一般相対性理論

以下の章では、4 次元の (4d) Lorentz 的な理論という物理的に重要な場合に用いられる技法とアイデアを導入するために、トイ・モデルとして 3 時空次元での (3d) 一般相対性理論の Euclid 的なバージョンを用いる。

3 次元では Riemann テンソルは Ricci テンソルによって完全に決まり [例えば文献 [11, pp.293–294, p.297]], したがって真空の Einstein 方程式 $\text{Ricci} = 0$ は $\text{Riemann} = 0$, すなわち時空が平坦であることを意味する [本節の演習 3.1]. したがって理論には局所的な自由度がない: 時空は単に至るところで平坦である. このことは 2 つの理由で, 理論が完全に自明であることを意味しない. 第 1 に, もし空間が非自明なトポロジーを持つならば, 空間は局所的に平坦でありながら大域的なダイナミクス (例えば, 時間におけるサイズの変化) を持ち得る. 第 2 に, 物理的な状態が単一である自明なトポロジーの上でさえ, この単一の状態はなお境界の部分的観測量間の非自明な関係を決定する. これがどのように起きるのかを調べよう. 計量による定式化では, 作用 (定数を含む) は

$$S[g] = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-g} R + \frac{1}{8\pi G} \int_{\Sigma} d^2\sigma k^{ab} q_{ab} \sqrt{q} \quad (3.96)$$

であり, ここに第 2 項はコンパクトな (“バルクの”) 時空領域 $\mathcal{M}$ の境界 $\Sigma = \partial\mathcal{M}$ 上にあり, 2.1.1 項で説明した理由で必要となる. 理論の Hamilton 関数は, g によって Σ 上に誘導される 2 次元の計量 q によって与えられる, 計量の境界への制限の関数である. 運動方程式の解の上で, すなわち平坦な空間の上で Ricci スカラーは消えるため, 作用におけるバルクの項は Hamilton 関数に寄与しないので,

$$S[q] = \frac{1}{8\pi G} \int_{\Sigma} d^2\sigma k^{ab}[q] q_{ab} \sqrt{q} \quad (3.97)$$

が残る. これはもちろん Σ の内部計量の上に依存し, 一般共変性により, それが表現されるところの座標に依らない. 外部曲率 k^{ab} の q_{ab} への, すなわち内部計量への依存性が, ダイナミクスをコードしているものである. これは q によって定義される 2 次元の Riemann 空間の, 平坦な 3 次元空間への埋め込みで定まる. k^{ab} の q_{ab} 依存性は明らかに高度に非自明である. 理論の非自明性はしたがって, 外部曲率の内部計量に対する (大域的な!) 依存性にある.

ダイナミクスの解は境界の外部曲率 $k^{ab}(\sigma)$ を, 境界の部分的観測量 $q_{ab}(\sigma)$ の関数として与えることで表される. これは p を (q, t, q', t') の関数として与えること——それは翻って, [2.1 節 (p.33) で] 見たように, $q'(t')$ の初期データ (q, p, t) への依存性を与えることと等価である——によって, Newton 系の運動方程式の解を与えることとアナログスである.

トライアド-接続形式では, 重力場はトライアド場 $e^i = e^i_a dx^a$ と $\text{SO}(3)$ 接続 $\omega^i_j = \omega^i_{aj} dx^a$ で記述され, ここに $a, b, \dots = 1, 2, 3$ は時空添字であり, また $i, j = 1, 2, 3$ は Kronecker のデルタ δ_{ij} で上げ下げされる内部添字である. 3 次元では, バルクの作用は

$$S[e, \omega] = \frac{1}{16\pi G} \int \epsilon_{ijk} e^i \wedge F^{jk}[\omega] \quad (3.98)$$

であり, ここに曲率は $F^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j$. 運動方程式はねじれと曲率が消えることである.

演習 3.1 これらの運動方程式を作用から導け [本稿次節で解答].

テトラード形式における 4 次元の局所 Lorentz 不変性はここでは, 変換

$$e^i_a(x) \mapsto R^i_j(x) e^j_a(x), \quad R \in \text{SO}(3) \quad (3.99)$$

の下での局所 SO(3) ゲージ不変性に置き換えられる．これが 3 次元の Euclid 的な一般相対性理論である．

表記について一言．接続および 2 つの添字を持つその他全ての反対称なテンソルに対して，我々は単一添字の表記

$$\omega^i = \frac{1}{2} \epsilon^i_{jk} \omega^{jk} \quad (3.100)$$

も用いる．添字 i は実際 $\mathfrak{so}(3)=\mathfrak{su}(2)$ Lie 代数の基底をラベルする．Pauli 行列 $\sigma_i = (\sigma_i^A)_B$ の基底を用いて， $\mathfrak{su}(2)$ の基本表現における $\mathfrak{su}(2)$ 生成子として接続を書くこともまた便利である．すなわち，表記

$$\omega = \omega^i \tau_i \quad (3.101)$$

を用いるということであり，ここに $\tau_i = -\frac{i}{2} \sigma_i$ は $\mathfrak{su}(2)$ の生成子である [式 (1.41)]．

我々が Σ と呼ぶ，球面のトポロジーを持つ 2 次元の境界に囲まれた，自明なトポロジー (球) を持つ時空のコンパクト領域 $\mathcal{R}$ 上で，この理論を考える．接続の境界への引き戻しは， Σ 上の SO(3) 接続 ω である．トライアドの引き戻しは， $\mathfrak{su}(2)$ 代数の値をとる Σ 上の 1 形式 e である．これら 2 つの変数が互いに正準共役であることを，作用から理解するのは容易である：粒子の力学における $p\dot{q}$ 項とのアナロジーで，作用において境界面に垂直な微分項 ∂_0 は構造 $\sim \frac{1}{8\pi G} n_c \epsilon^{abc} e_a^i \partial_0 \omega_b^i$ を持ち，ここに n_a は境界の法線 1 形式である^{*88}．したがって， $\epsilon_{ab} \equiv n^c \epsilon_{cab}$ を用いると， ω と e の間の Poisson 括弧は

$$\{\omega_a^i(\sigma), e_j^b(\sigma')\} = 8\pi G \delta^{ij} \epsilon_{ab} \delta^2(\sigma, \sigma') \quad (3.102)$$

であり [左辺で配位変数と運動量共役の順を入れ替えた (式 (5.80) とも整合)]，ここに $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ ．[以上を本稿次節で確認する.]

3.5 節について

■作用 (3.101) からの運動方程式の導出 (教科書 p.75 の演習 3.1) 3.6.1 項と同様の計算をやり直せばよい．ここでは D を接続 ω_j^i で定義される共変外微分とすると，作用 (3.98) の ω に関する変分は，式 (3.114–116) と同様に

$$16\pi G \delta S = \int \epsilon_{ijk} e^i \wedge \delta F^{jk}[\omega] = \int \epsilon_{ijk} e^i \wedge \delta D \omega^{jk} = -2 \int \epsilon_{ijk} D e^i \wedge \delta \omega^{jk} = -4 \int D e^i \wedge \delta \omega_i$$

と計算される．これを変分原理に基づきゼロとおくと，ねじれ

$$T^i \equiv D e^i = 0$$

を得る．このとき曲率 $F^{ij} = \frac{1}{2} F^{ij}_{ab} dx^a \wedge dx^b$ の成分は式 (3.15–16) と同様，Riemann 曲率テンソル R_{abcd} と

$$F^{ij}_{ab} e_i^c e_j^d = R^{cd}_{ab}, \quad F^{ij}_{cd} = e_a^i e_b^j R^{ab}_{cd}$$

で関係付けられる．

この下で次に作用 (3.98) の e に関する変分をとろう．4 次元時空の理論における作用 (3.18) とは対照的に，作用 (3.98) で曲率に掛かる e は 1 つだけなので，単に

$$0 = 16\pi G \delta S = \int \epsilon_{ijk} \delta e^i \wedge F^{jk}[\omega[e]], \quad \therefore \epsilon_{ijk} F^{jk}[\omega[e]] = 0$$

^{*88} $n = \epsilon_{abc} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^c}{\partial \sigma^2} dx^a$ で定義され，ここに (σ^1, σ^2) は境界上の座標である．

が得られる。 F^{jk} は反対称なので、これは $F^{jk}[\omega[e]] = 0$ と等価である。(直接的な説明としては、さらに ϵ^{ilm} との縮約をとれば良い。) よって Riemann 曲率と Ricci テンソル ($R_{ab} = q^{cd} R_{cadb}$ で定義される [11, p.294]) はゼロになる。

■接続 ω の運動量共役が e であること (最終段落) について 式 (51) と同様に、曲率成分は

$$F^{ij} = \frac{1}{2} F^{ij}_{ab} dx^a \wedge dx^b, \quad F^{ij}_{ab} \equiv 2(\partial_{[a} \omega_{b]}^{ij} + \omega_{[ak} \omega_{b]}^{kj})$$

と同定される。ただし角括弧はいずれも、添字 a, b に関する反対称化 $\partial_{[a} \omega_{b]}^{ij} \equiv (\partial_a \omega_b^{ij} - \partial_b \omega_a^{ij})/2$, etc. を表す。接続の運動量共役に寄与する ω の微分を含む項だけを明示すると、作用 (3.98) は

$$16\pi G S[e, \omega] = \int \epsilon_{ijk} e_a^i \partial_{[b} \omega_{c]}^{jk} dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c + \cdots = 2 \int e_a^i \partial_b \omega_{ci} dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c + \cdots \quad (88)$$

となる。ここで 3 次元空間に座標 $\sigma^a = (\sigma^0, \sigma^A)$ を、境界 Σ 上で $\sigma^A = (\sigma^1, \sigma^2)$ が面の座標に一致し、 σ^0 が面の法線方向となるように導入する。このとき (少なくとも境界では) 面 $\sigma^0(x) = \text{const.}$ の勾配 $\partial_b \sigma^0$ は法線方向に一致するので、上式 (88) の σ^0 方向微分への寄与は

$$\partial_b = \frac{\partial \sigma^a}{\partial x^b} \frac{\partial}{\partial \sigma^a} \rightarrow \frac{\partial \sigma^0}{\partial x^b} \frac{\partial}{\partial \sigma^0} \sim n_b \frac{\partial}{\partial \sigma^0} \quad (89)$$

となる。

さて、式 (88) の積分変数を σ^a に選ぼう。法線の表式

$$n_a = \epsilon_{abc} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^c}{\partial \sigma^2}, \quad \therefore \epsilon^{bcd} n_d = \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^c}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^2} \frac{\partial x^c}{\partial \sigma^1}$$

に注意して行列式の展開を整理すると、

$$dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c \rightarrow \frac{\partial(x^a, x^b, x^c)}{\partial(\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2)} d^3\sigma = \left(\frac{\partial x^a}{\partial \sigma^0} \epsilon^{bcd} + \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^0} \epsilon^{cad} + \frac{\partial x^c}{\partial \sigma^0} \epsilon^{abd} \right) n_d d^3\sigma$$

とできる。最右辺の第 1 項と第 3 項の σ^0 方向微分 (89) への寄与はそれぞれ、 $\epsilon^{bcd} n_b n_d = 0, \epsilon^{abd} n_b n_d = 0$ により消える。そこで第 2 項のみを作用 (88) に代入すると、

$$S = \frac{1}{8\pi G} \int e_a^i \frac{\partial \omega_{ci}}{\partial \sigma^0} \epsilon^{cad} n_d d^3\sigma + \cdots$$

したがって接続 ω_{ci} の運動量共役は

$$\pi^{ci} = \frac{1}{8\pi G} \epsilon^{ca} e_a^i \quad (\epsilon^{ca} \equiv \epsilon^{cad} n_d) \quad (90)$$

であり、正準変数間の Poisson 括弧は

$$\delta^{ij} \delta_b^a \delta^2(\sigma, \sigma') = \{\omega_a^i(\sigma), \pi^{bj}(\sigma')\} = \frac{1}{8\pi G} \epsilon^{bc} \{\omega_a^i(\sigma), e_c^j(\sigma')\}.$$

最後に $\epsilon_{b'b} \epsilon^{bc} = \delta_{b'}^c$ (式 (1.23) の A/A 規則を踏襲した) なる逆行列 $\epsilon_{b'b}$ を両辺に縮約すると、式 (3.102) が導かれる。

3.6 補完

3.6.1 一般共変な場の理論の研究

問題

Einstein–Hilbert 作用 [式 (3.1)] をテトラード作用 [式 (3.17–18)] に関係付けよ。符号の違い [3.2.1 項] はどのように生じるか？

解

便利な表記をいくつか導入しよう：

- ゲージ外・共変微分 (gauge exterior covariant derivative) D は Lorentz 添字を持つ p 形式 ϕ に、

$$\begin{aligned} D\phi &= d\phi, \\ D\phi^I &= d\phi^I + \omega^I{}_J \wedge \phi^J, \\ D\phi^{IJ} &= d\phi^{IJ} + \omega^I{}_K \wedge \phi^{KJ} + \omega^J{}_K \wedge \phi^{IK} \end{aligned} \quad (3.103)$$

のように作用する [例えば第 2 式は 3.2 節のノートを参照]。それは Leibnitz 性を持つ。[共変微分の公式は Leibnitz 則を要求して逐次的に導かれる。] この方法にて第 1 Cartan 方程式 [式 (3.12)] を

$$De = T \quad (3.104)$$

と書くことができ、ここに T はねじれ 2 形式である。 $R = d\omega + \omega \wedge \omega \neq D\omega$ (何故なら ω はテンソルではない；因子 2 が足りない、参考：式 (3.103) の第 2 の関係) に注意せよ (参考：式 (3.104) [と対照的])。しかしながら、

$$\delta R = D\delta\omega. \quad (3.105)$$

(接続 ω はテンソルではないものの、 $\delta\omega$ はテンソルであることに注意せよ。) [以上、式 (3.105) とその周辺を本稿次項で補足する。ここでは曲率 R には式 (3.13) の文字 F を用いるのが正確である (式 (3.114) の箇所も見よ)。なお微分形式の変分はその成分の変分に伴う変化 $\delta\omega^{IJ} \equiv (\delta\omega_\mu^{IJ})\delta x^\mu$, etc. と見る.]

- 4 つの Lorentz 添字を持つ対象 V^{IJKL} に対して、以下のトレース表記

$$\text{Tr}(V) \equiv \epsilon_{IJKL} V^{IJKL} \quad (3.106)$$

が便利である。もし A^{IJ} と B^{IJ} が 2 つの反対称なテンソルならば、本章で用いた表記 ($A \wedge B \equiv A^{IJ} \wedge B_{IJ}$) で、これは

$$\text{Tr}(A \wedge B) = \text{Tr}(B \wedge A) = 2A \wedge \star B \quad (3.107)$$

になる。このトレースは通常の行列のトレースのように巡回性を持ち、例えば $\text{Tr}(a \wedge b \wedge B) = \text{Tr}(b \wedge B \wedge a) = \text{Tr}(B \wedge a \wedge b)$ であるだけでなく、 $\text{Tr}(a \wedge b \wedge B) = \text{Tr}(b \wedge a \wedge B)$ 。[以上、本稿次項で補足する*⁸⁹.]

多様体上の関数の積分に対して、

$$\begin{aligned} e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 &= e^0{}_\mu e^1{}_\nu e^2{}_\kappa e^3{}_\lambda dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\kappa \wedge dx^\lambda \\ &= e^0{}_\mu e^1{}_\nu e^2{}_\kappa e^3{}_\lambda \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= \det(e) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = s | \det(e) | d^4x = s \sqrt{-g} d^4x = s dV \end{aligned} \quad (3.108)$$

と書くことができ [本稿次項で補足]、ここに s は e の行列式の符号 [式 (3.26)]、また dV は多様体の不変体積である。 s の出現は計量とテトラードの定式化における符号の違い [3.2.1 項] を与える。以下では $s = +1$ を仮定して、 s を落とす。これは

$$e^I \wedge e^J \wedge e^K \wedge e^L = \epsilon^{IJKL} |e| d^4x \quad (3.109)$$

*⁸⁹ 証明の際に A, B を 2 形式、 a, b を 1 形式と仮定する。これは後の式 (3.111–113) への応用を念頭に置いた実践的な措置でもある。

を意味する [左辺は式 (3.108) の ϵ^{IJKL} 倍, $|e|$ は $\det e \rightarrow e$ の行列式]. ϵ に対する以下の恒等式

$$\begin{aligned}\epsilon^{IJKL}\epsilon_{IMNO} &= -\left(\delta_M^J\delta_N^K\delta_O^L + \delta_M^L\delta_N^J\delta_O^K + \delta_M^K\delta_N^L\delta_O^J - \delta_M^K\delta_N^J\delta_O^L - \delta_M^L\delta_N^K\delta_O^J - \delta_M^J\delta_N^L\delta_O^K\right), \\ \epsilon^{IJKL}\epsilon_{IJMN} &= -2\left(\delta_M^K\delta_N^L - \delta_N^K\delta_M^L\right), \\ \epsilon^{IJKL}\epsilon_{IJKN} &= -6\delta_N^L, \\ \epsilon^{IJKL}\epsilon_{IJKL} &= -24\end{aligned}\tag{3.110}$$

が成り立つ [本稿次項で補足].

$$\mathrm{Tr}(e \wedge e \wedge e \wedge e) = \epsilon_{IJKL}e^I \wedge e^J \wedge e^K \wedge e^L = \epsilon_{IJKL}\epsilon^{IJKL}|e|d^4x = -24|e|d^4x\tag{3.111}$$

と計算され, ここで式 (3.109) と式 (3.110) の最後の関係を用いた. これは作用に宇宙項を加えたいときに重要となる. 同様に,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(e \wedge e \wedge F) &= \epsilon_{IJKL}e^I \wedge e^J \wedge F^{KL} = \frac{1}{2}\epsilon_{IJKL}F^{KL}{}_{MN}e^I \wedge e^J \wedge e^M \wedge e^N \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_{IJKL}\epsilon^{IJMN}F^{KL}{}_{MN}|e|d^4x \\ &= -\left(\delta_K^M\delta_L^N - \delta_L^M\delta_K^N\right)F^{KL}{}_{MN}|e|d^4x = -2|e|Rd^4x\end{aligned}\tag{3.112}$$

が得られ, 最後のステップで式 (3.16) を用いた [本稿次項で補足]. よって重力の作用 (3.1) は

$$S[g[e]] = -\frac{1}{32\pi G} \int \mathrm{Tr}[e \wedge e \wedge F] = -\frac{1}{16\pi G} \int e \wedge e \wedge F^*\tag{3.113}$$

と書ける.

問題

[3.2.2 項で説明したように] テトラード作用において e と ω を独立変数として扱うことが, 同じ物理を与えることを示せ.

解

式 (3.113) を変分すると

$$\begin{aligned}-32\pi G\delta S &= \int \mathrm{Tr}[\delta e \wedge e \wedge F(\omega)] + \int \mathrm{Tr}[e \wedge \delta e \wedge F(\omega)] + \int \mathrm{Tr}[e \wedge e \wedge \delta F(\omega)] \\ &= 2 \int \mathrm{Tr}(e \wedge F \wedge \delta e) + \int \mathrm{Tr}(e \wedge e \wedge D\delta\omega)\end{aligned}\tag{3.114}$$

が得られ, ここで巡回性 [式 (3.107) 周辺] と式 (3.105) を用いた. 恒等式

$$\int d[\mathrm{Tr}(e \wedge e \wedge \delta\omega)] = \int D[\mathrm{Tr}(e \wedge e \wedge \delta\omega)] = 2 \int \mathrm{Tr}(De \wedge e \wedge \delta\omega) + \int \mathrm{Tr}(e \wedge e \wedge D\delta\omega)\tag{3.115}$$

[式 (3.103) の箇所を見よ^{*90}], 式 (3.104), および最左辺の項が全微分であ [り最左辺は境界積分となって消え] る事実を用いると, 先の方程式を

$$\delta S = -\frac{1}{16\pi G} \left[\int \mathrm{Tr}(e \wedge F \wedge \delta e) - \int \mathrm{Tr}(T \wedge e \wedge \delta\omega) \right]\tag{3.116}$$

と書ける. 第 1 項が消えることは

$$\epsilon_{IJKL}e^I \wedge F^{JK} = 0\tag{3.117}$$

^{*90} 第 1 の等号は式 (3.103) 第 1 式, 第 2 の等号は D が Leibniz 則を満たすように定義されていることによる.

を意味する．これが Einstein 方程式と等価であることを示すために、曲率 2 形式 F^{JK} を基底で展開して、 $F^{JK} = \frac{1}{2}R^{JK}_{MO}e^M \wedge e^O$ ．[この関係は式 (3.112) の第 2 の等号にて確認済みである^{*91}.] よって

$$\epsilon_{IJKL}R^{JK}_{MO}e^I \wedge e^M \wedge e^O = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon_{IJKL}\epsilon^{IMOP}R^{JK}_{MO} = 0 \quad (3.118)$$

が得られ、ここで Hodge 双対をとった [本稿次項で確認]．式 (3.110) を適用すると、これは

$$G^P_L = \text{Ric}^P_L - \frac{1}{2}\delta^P_L R = 0 \quad (3.119)$$

と等価であることが分かり [式 (91), 式 (92) も見よ]、これは真空の Einstein 方程式である．

x 次の形式と呼ばれる、3 つの可能性があるので注意せよ．

- **2 次の形式**． $\omega = \omega(e), i, e, T = 0$ を仮定する．このとき式 (3.114) は Einstein 方程式を与える．[式 (3.114) 最右辺の第 2 項は式 (3.115) により $\int \text{Tr}(e \wedge e \wedge D\delta\omega) = -2 \int \text{Tr}(T \wedge e \wedge \delta\omega)$ と書き換えられることに注意する (1 次の形式でも同様)． $T = 0$ より、この項は落ちる.]
- **1 次の形式**． ω と e を独立に扱う． e に関する変分は Einstein 方程式を与えるのに対し、 ω に関する変分は $T \wedge e = 0 \Rightarrow T = 0$ を与える [本稿次項で補足]．すなわち、物質が存在しないとき、ねじれ T は変分原理の帰結として消える．これは次いで関係 $\omega = \omega(e)$ を確立する．**1.5 次の形式**． ω と e を独立に扱う．ところが、我々は ω に関する変分が単に関係 $\omega = \omega(e)$ を、これが何であれ確立することを知っている．運動方程式を得るには、したがって S を e に関してのみ変分すれば充分である、すなわち、

$$\text{EOM} = \frac{\delta S[e, \omega]}{\delta e} = 0. \quad (3.120)$$

問題

Holst 項が運動方程式を修正しないことを示せ．

解

Holst 項

$$S_\gamma[e, \omega] \sim \frac{1}{\gamma} \int \text{Tr}(e \wedge e \wedge \star F) = \frac{2}{\gamma} \int e \wedge e \wedge F = \frac{2}{\gamma} \int e^I \wedge e^J \wedge F_{IJ} \quad (3.121)$$

を考えよ． e に関する変分は

$$\delta_e S_\gamma \sim \frac{1}{\gamma} \int \text{Tr}(e \wedge \star F \wedge \delta e) \quad (3.122)$$

を与え、これは

$$\epsilon_{IJKL}e^I \wedge (\star F)^{KL} = 0 \quad (3.123)$$

を意味する．すなわち、我々は以下の運動方程式を得る：

$$0 = \epsilon^{KLMN}\epsilon_{KLIJ}e^I \wedge F_{MN} = -2(\delta_I^M \delta_J^N - \delta_I^N \delta_J^M)e^I \wedge F_{MN} = -4e^I \wedge F_{IJ}. \quad (3.124)$$

ねじれがないとき、最後の表現は正確に Bianchi の恒等式であって消える．このことは Holst 作用が古典的な Einstein 方程式を与え、それ故、等しく GR に対する適切な作用であることを示している [本稿次項で補足]．

3.6.1 項について

■式 (3.105): $\delta R = D\delta\omega$ とその周辺について Lorentz ベクトル v^I の積のように変換する量 ϕ^{IJ} に対しては、共変微分の規則 (2.103):

$$D\phi^{IJ} = d\phi^{IJ} + \omega^I_K \wedge \phi^{KJ} + \omega^J_K \wedge \phi^{IK}$$

^{*91} ねじれ $T = 0$ をあらかじめ仮定すると F^{JK}_{MO} は Riemann 曲率テンソルのテトラード成分に一致するから、それを R^{JK}_{MO} と書いて良い．1 次の形式では下記のように ω に関する変分原理から $T = 0$ が帰結するので、これは循環論法には陥らない．

が成り立つ．あたかもスピン接続 ω^{IJ} をそのような量と考えて上式を適用すると，

$$D\omega^{IJ} = d\omega^{IJ} + 2\omega^I_K \wedge \omega^{KJ} \quad (\text{誤り!})$$

となって，曲率 (3.13) と比べて ω の 2 次の項に余計な係数 2 が現れる．よって $F^{IJ} \neq D\omega^{IJ}$ であることが述べられている．これは Levi-Civita 接続 $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ がテンソルでないと同様，接続 ω^{IJ} がテンソルではないため，共変微分の公式を適用できないことに関係している^{*92}．ところが接続の変分 $\delta\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ がテンソルとなるように [11, p.307]，変分 $\delta\omega^{IJ}$ はテンソルとなる．そこでテンソル $\delta\omega^{IJ}$ に共変微分の公式 (3.103) を適用すると，曲率 (3.13) に一致するので，式 (3.105) が成り立つ．

■ $\text{Tr}(A \wedge B)$ の公式 (3.107) とその周辺について 式 (3.107) の第 2 辺までは $A \wedge B$ を，添字の縮約された形 $A^{IJ} \wedge B_{IJ}$ (式 (3.107) 直前) ではなく $A^{IJ} \wedge B^{KL}$ と見なして，トレースの定義式 (3.106) を適用する．すると

$$\text{Tr}(A \wedge B) = \text{Tr}(A^{IJ} \wedge B^{KL}) = \epsilon_{IJKL} A^{IJ} \wedge B^{KL} = 2A^{IJ} \wedge \star B_{IJ} = 2A \wedge \star B$$

と書ける．よって式 (3.107) の両辺は一致する．なお $\epsilon_{IJKL} = \epsilon_{KLIJ}$ を A^{IJ} の代わりに B^{IJ} に縮約すれば，上式は $2A \star B = 2\star A \wedge B$ と書ける．

さて，式 (3.107) の第 1 の等号のように A, B の巡回対称性が成り立つには，例えば A^{IJ} を 2 形式 (一般には p を偶数として p 形式) と仮定しなければならない^{*93}．実際このとき A^{IJ} と B^{IJ} の外積は交換するので，

$$\text{Tr}(B \wedge A) = \epsilon_{IJKL} B^{IJ} \wedge A^{KL} = \epsilon_{KLIJ} A^{KL} \wedge B^{IJ} = \text{Tr}(A \wedge B).$$

引き続き 2 形式 A^{IJ} を仮定し，これを添字 I, J に関する反対称性の保証される形 $A^{IJ} = a^I \wedge b^J$ におく (a^I, b^J は 1 形式)．すると上式は直ちに $\text{Tr}(a \wedge b \wedge B) = \text{Tr}(B \wedge a \wedge b)$ を与える．また B^{IJ} も 2 形式 (一般には q を偶数として q 形式) と仮定すると，

$$\text{Tr}(a \wedge b \wedge B) = \epsilon_{IJKL} a^I \wedge b^J \wedge B^{KL} = \begin{cases} -\epsilon_{IJKL} b^J \wedge B^{KL} \wedge a^I = \text{Tr}(b \wedge B \wedge a) & (\because -\epsilon_{IJKL} = \epsilon_{JKLI}) \\ -\epsilon_{IJKL} b^J \wedge a^I \wedge B^{KL} = \text{Tr}(b \wedge a \wedge B) & (\because -\epsilon_{IJKL} = \epsilon_{JIKL}) \end{cases}$$

を得る．

■ 式 (3.108) について 座標 x そのものを積分変数に選ぶと，付録 A より

$$\begin{aligned} e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 &= e_\mu^0 e_\nu^1 e_\rho^2 e_\sigma^3 dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \\ &\rightarrow e_\mu^0 e_\nu^1 e_\rho^2 e_\sigma^3 \frac{\partial(x^\mu, x^\nu, x^\rho, x^\sigma)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} d^4x \quad (d^4x \equiv dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \text{ は通常の座標体積要素}) \\ &= e_\mu^0 e_\nu^1 e_\rho^2 e_\sigma^3 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d^4x = (\det e) d^4x = s |\det e| d^4x \end{aligned}$$

と置き換えられる．ここで式 (3.6) 両辺の行列式をとると，符号 s に依らず常に

$$-\det g = (\det e)^2, \quad \therefore |\det e| = \sqrt{-\det g}$$

が成り立つので，式 (3.108): $e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \rightarrow s \sqrt{-\det g} d^4x$ を得る．要するに上式の第 1 式の平方根をとって $\det e = s \sqrt{-\det g}$ とする際に，2 通りの符号 s の可能性が生じる．

^{*92} 時に $F^{IJ} = D\omega^{IJ}$ と書かれるものの [2, p.34]，その場合には右辺における非テンソル ω の共変微分を適切に計算しなければならない．

^{*93} A^{IJ} が 2 形式 $A^{IJ} = A_{\mu\nu}^{IJ} dx^\mu \wedge dx^\nu$ であることは，成分 $A_{\mu\nu}^{IJ}$ が添字 μ, ν に関して反対称な共変テンソルであることを意味する．これはもちろん， A^{IJ} が反対称な添字 I, J を持つこととは関係がない．

■Levi-Civita 記号の縮約公式 (3.110) について 1.7.1 項と式 (1.47) で既に類似の式

$$\epsilon^{AD}\epsilon_{BC} = \begin{vmatrix} \delta_B^A & \delta_C^A \\ \delta_B^D & \delta_C^D \end{vmatrix}, \quad \epsilon^{AC}\epsilon_{BC} = \delta_B^A, \quad \epsilon^{AB}\epsilon_{AB} = 2$$

を説明した。同様に

$$\epsilon^{IJKL}\epsilon_{MNOP} = - \begin{vmatrix} \delta_M^I & \delta_N^I & \delta_O^I & \delta_P^I \\ \delta_M^J & \delta_N^J & \delta_O^J & \delta_P^J \\ \delta_M^K & \delta_N^K & \delta_O^K & \delta_P^K \\ \delta_M^L & \delta_N^L & \delta_O^L & \delta_P^L \end{vmatrix}$$

の右辺の行列式を展開して、逐次、添字を縮約すると一連の公式 (3.110) が導かれる [11, p.20].

上式は両辺が添字の組 I, J, K, L および M, N, O, P のそれぞれについて同じ反対称性を持ち、 $(I, J, K, L) = (M, N, O, P) = (0, 1, 2, 3)$ のとき等しい値 (-1) をとるため、常に成り立つ。あるいは 4 次の単位行列の行列式は 1 であり、行列式は行や列を入れ替えるたびに符号が変化するので、上式が成り立つと考えても良い。

最後に式 (3.110) の第 4 式 $\epsilon^{IJKL}\epsilon_{IJKL} = -24$ はそれ自体で理解できる。実際 ϵ の反対称性より、和に寄与するのは相異なる添字 I, J, K, L の組に関する $4!$ 通りの項である。それらの項は I, J, K, L が $0, 1, 2, 3$ の偶置換または奇置換であり、いずれも $\epsilon^{0123}\epsilon_{0123} = -1$ に等しいので、 $\epsilon^{IJKL}\epsilon_{IJKL} = 4! \cdot (-1) = -24$ 。

■式 (3.112) について 第 2 の等号では、

$$F^{KL} = \frac{1}{2}F^{KL}_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2}F^{KL}_{MN}e_\mu^M e_\nu^N dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2}F^{KL}_{MN}e^M \wedge e^N$$

を代入すれば良い。

また最後 (第 5) の等号について、まず

$$(\delta_K^M \delta_L^N - \delta^M \delta_L \delta_K^N) F^{KL}_{MN} = F^{KL}_{KL} - F^{KL}_{LK} = 2F^{KL}_{KL}.$$

ただし式 (3.16): $F^{IJ}_{\mu\nu} = e^{\rho I} e^{\sigma J} R_{\rho\sigma\mu\nu}$ より、Riemann 曲率テンソルの後ろ 2 つの添字に関する反対称性は、 $F^{IJ}_{KL} = e_K^\mu e_L^\nu F^{IJ}_{\mu\nu}$ にも引き継がれることに注意した。再び式 (3.16) より、

$$F^{IJ}_{IJ} = e_I^\mu e_J^\nu e^{\rho I} e^{\sigma J} R_{\rho\sigma\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} R_{\rho\sigma\mu\nu} = g^{\nu\sigma} R^\mu_{\sigma\mu\nu} = g^{\nu\sigma} R_{\sigma\nu} = R \quad (91)$$

はスカラー曲率である。同様に Ricci テンソル $R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu}$ との関係を調べると、

$$F^{IK}_{JK} = e_J^\mu e_K^\nu F^{IK}_{\mu\nu} = e_J^\mu e_K^\nu e^{\rho I} e^{\sigma K} R_{\rho\sigma\mu\nu} = e^{\rho I} e_J^\mu g^{\nu\sigma} R_{\sigma\rho\nu\mu} = e^{\rho I} e^\mu R_{\rho\mu} = R^I_J \quad (92)$$

は第 5 辺より、Ricci テンソルのテトラード成分となっている。

■符号 s と宇宙定数 Λ を考慮した作用 $\det e$ の符号 s を明示すると、式 (3.111–112) は

$$\text{Tr}(e \wedge e \wedge e \wedge e) = -4!s\sqrt{-g}d^4x, \quad \text{Tr}(e \wedge e \wedge F) = -2sR\sqrt{-g}d^4x$$

と書ける。これらを用と、Einstein–Hilbert 作用 (3.1): $S[g] = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}(R - 2\Lambda)$ は

$$\begin{aligned} S &= -\frac{s}{32\pi G} \int \left[\text{Tr}(e \wedge e \wedge F) - \frac{\Lambda}{3!} \text{Tr}(e \wedge e \wedge e \wedge e) \right] \\ &= -\frac{s}{32\pi G} \int \epsilon_{IJKL} \left(e^I \wedge e^J \wedge F^{KL} - \frac{\Lambda}{3!} e^I \wedge e^J \wedge e^K \wedge e^L \right) \end{aligned} \quad (93)$$

と書き換えられる． $s = +1, \Lambda \rightarrow 0$ とおくと式 (3.113) に帰着する．また文献 [2, p.35] の作用 (2.12) はやはり細かい数係数が間違っている．なお文献 [11, p.397] では Einstein–Hilbert 作用の符号を式 (3.1) と逆符号で定義しており，その場合には上式全体の符号が反転する．(さらに宇宙定数そのものも逆符号で定義されているため，その上で $\Lambda \rightarrow -\Lambda$ と置き換える必要がある．)

■式 (3.118) について Hodge 双対の表式 $e_P^* = \epsilon_{PIMO} e^I \wedge e^M \wedge e^O / 3!$ (教科書 p.61 の定義式に係数 $1/3!$ を補った) の両辺に $\epsilon^{PI'M'O'}$ を掛けて P で和をとり，公式 (3.110) を用いると

$$e^I \wedge e^M \wedge e^O = -\epsilon^{PIMO} e_P^* = \epsilon^{IMOP} e_P^*$$

と逆に解ける．これを式 (3.118) 第 1 式に代入すると

$$0 = \epsilon_{IJKL} F^{JK}{}_{MO} e^I \wedge e^M \wedge e^O = \epsilon_{IJKL} \epsilon^{IMOP} F^{JK}{}_{MO} e_P^*.$$

ここで任意の 3 形式は e_P^* を基底として展開できると考え^{*94}，最右辺の e_P^* の係数をゼロとおくと，式 (3.118) 第 2 式を得る．

なお文献 [2, § 2.1.1] のノートでは，やや遠回りであるが次のような導出方法を利用した．すなわち運動方程式 (3.115):

$$0 = \epsilon_{MNPL} e^M \wedge F^{NP} = \epsilon_{MNPL} e_\rho^M F^{NP}{}_{\sigma\tau} dx^\rho \wedge dx^\sigma \wedge dx^\tau$$

の最右辺において，

- まず微分形式を基底ベクトル $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ に作用させて，外積 $dx^\rho \wedge dx^\sigma \wedge dx^\tau$ を取り除く．
- 次に ϵ_{MNPL} を除くために，式全体に ϵ^{IJKL} を掛けて L で和をとる．

■Einstein 方程式 (3.119) に宇宙定数項を含める場合 作用 (93) をテトラードに関して変分すると，式 (3.116) の第 1 項に宇宙定数項の寄与が加わり，

$$\begin{aligned} 0 &= -16\pi G s \delta S = \int \left[\text{Tr}(e \wedge F \wedge \delta e) - \frac{4}{2 \cdot 3!} \Lambda \text{Tr}(e \wedge e \wedge e \wedge \delta e) \right] \\ &= \int \epsilon_{IJKL} \left(e^I \wedge F^{JK} - \frac{4}{2 \cdot 3!} \Lambda e^I \wedge e^J \wedge e^K \right) \wedge \delta e^L \end{aligned}$$

となる．ここで式 (3.119) の導出を通じて見たように $\epsilon_{IJKL} e^I \wedge F^{JK} = 2(R^P{}_L - \frac{1}{2} R \delta_L^P) e_P^*$ であり，また Hodge 双対の定義より $\epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge e^K = -\epsilon_{LIJK} e^I \wedge e^J \wedge e^K = -3! e_L^*$ なので，

$$0 = \epsilon_{IJKL} \left(e^I \wedge F^{JK} - \frac{4}{2 \cdot 3!} \Lambda e^I \wedge e^J \wedge e^K \right) = 2 \left(R^P{}_L - \frac{1}{2} R \delta_L^P + \Lambda \delta_L^P \right) e_P^*.$$

再び基底 e_P^* の係数をゼロとおくと，Einstein 方程式 (3.2) のテトラード成分を得る．

■第 2 問末尾の「 $T \wedge e = 0 \Rightarrow T = 0$ 」(教科書 p.80) について ここでも曲率に対する式 (3.112) 第 2 の等号と同様に

$$T^I = T_{\mu\nu}^I dx^\mu \wedge dx^\nu = T_{MN}^I e_\mu^M e_\nu^N dx^\mu \wedge dx^\nu = T_{MN}^I e^M \wedge e^N$$

と書こう．すると作用の変分 (3.116) の第 2 項が消えることは，変分 $\delta\omega^{KL} (= -\delta\omega^{LK})$ の係数 (の反対称部分)

$$0 = \epsilon_{IJKL} T^I \wedge e^J = \epsilon_{IJKL} T_{MN}^I e^M \wedge e^N \wedge e^J = \epsilon_{IJKL} \epsilon^{MNJO} T_{MN}^I e_O^*$$

^{*94} 局所 Lorentz 座標を X^I で表すと，基底は単に $e^I = e_\mu^I dx^\mu = \frac{\partial X^I}{\partial x^\mu} dx^\mu = dX^I$ と書ける．

を意味する．再び基底 e_O^* の係数をゼロとおく．Levi-Civita 記号の縮約公式 (3.110) を適用し，さらに反対称性 $T_{MN}^I = -T_{NM}^I$ を利用して式を整理すると

$$0 = \epsilon_{IJKL} \epsilon^{MNJO} T_{MN}^I = 2(T_{IK}^I \delta_L^O - T_{IL}^I \delta_K^O + T_{KL}^O)$$

を得る．ここで添字 O, L を縮約すると $T_{IK}^I = 0$ が見出される．これを上式に戻すと

$$T_{KL}^O = 0, \quad \therefore T^O = 0$$

を得る．

■式 (3.124) が Bianchi 恒等式であることの確認と証明の補完 Holst 項が消えること (3.36) の確認の際にも，Bianchi の恒等式を用いた．運動方程式の水準においても，Bianchi の恒等式により Holst 項の寄与は消える (式 (3.124))．その確認は式 (3.36) の場合と似た手順で行える．

式 (3.112) 第 2 の等号で見た関係 $F_{IJ} = \frac{1}{2} F_{IJKL} e^K \wedge e^L$ を代入すると，式 (3.124) は

$$0 = e^I \wedge F_{IJ} = \frac{1}{2} F_{IJKL} e^I \wedge e^K \wedge e^L = \frac{1}{2} F_{IJKL} \epsilon^{IKLM} e_M^*$$

と書ける．最右辺における基底 e_M^* の係数をゼロとおこう．ねじれ $T = 0$ の下で F_{IJKL} は Riemann 曲率テンソルのテトラード成分に一致することを用いると，

$$0 = F_{IJKL} \epsilon^{IKLM} = R_{\mu\nu\rho\sigma} e_I^\mu e_J^\nu e_K^\rho e_L^\sigma \epsilon^{IKLM}.$$

ここで余因子行列の転置行列の表式 $\epsilon^{IKLM} e_I^\mu e_K^\rho e_L^\sigma = \det(e^{-1}) e_\tau^M \epsilon^{\mu\rho\sigma\tau}$ (両辺に e_M^λ を縮約してみよ) を用いると，さらに

$$\det(e^{-1}) e_\tau^M e_J^\nu \epsilon^{\tau\mu\rho\sigma} R_{\nu\mu\rho\sigma} = 0$$

と書き換えられる．添字 ν, τ の固定した値に対し，相異なる 3 つの添字 $\mu, \rho, \sigma (\neq \tau)$ に関する和 $\epsilon^{\tau\mu\rho\sigma} R_{\nu\mu\rho\sigma}$ は，Riemann 曲率テンソルの後ろ 3 つの添字に関する 2 通りの巡回置換項の和から成るので，Bianchi の恒等式により消える．例えば

$$\epsilon^{0\mu\rho\sigma} R_{0\mu\rho\sigma} = (R_{0123} + R_{0312} + R_{0231}) + (R_{0321} + R_{0132} + R_{0213}) = 0.$$

よって式 (3.124) は自動的に満たされる．

さて，式 (3.123–124) は Holst 項が単独で停留値をとることを仮定した場合の関係である．他方で Holst 作用全体に対する変分原理は， $e^I \wedge F_{IJ}$ に比例する付加的な寄与が，運動方程式 (3.117) の左辺に及ぶことを意味する．ところが付加的な項 $\sim e^I \wedge F_{IJ}$ は恒等的に消えるので，運動方程式は変わらない．

3.6.2 問題

1. 曲がった時空の Dirac 場の作用 [式 (3.20)] から Dirac 方程式 [式 (3.10)] を導け．
2. 一般相対性理論のテトラード-接続形式に対して，2.5.2 項で論じた定式化を展開せよ．

3.6.2 項について

■第 1 問について フェルミオン場の作用 (3.20) は，Hodge 双対の定義として第 2 辺に $1/3!$ を補うと，

$$S_f = \frac{1}{3!} \int \epsilon_{IJKL} \bar{\psi} \gamma^I (D_\mu \psi) e_\nu^J e_\rho^K e_\sigma^L dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma = \int d^4x \left(\frac{1}{3!} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{IJKL} e_\nu^J e_\rho^K e_\sigma^L \right) \bar{\psi} \gamma^I D_\mu \psi$$

と書ける．さらに式 (1.11) 直後に見た余因子行列の転置行列の表式 $E_i^a = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}\epsilon_{ijk}e_b^je_c^k$ と同様に，

$$\frac{1}{3!}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{IJKL}e_\nu^Je_\rho^Ke_\sigma^L = (\det e)e_I^\mu$$

が成り立つことに注意する (実際に両辺は e_μ^I を掛けると，ともに $4\det e$ を与える)．すると

$$S_f = \int d^4x (\det e) \bar{\psi} \gamma^I e_I^\mu D_\mu \psi = \int d^4x \sqrt{-\det g} \bar{\psi} \not{D} \psi \quad (94)$$

と書き換えられる [2, p.38]．最右辺は平坦な Minkowski 時空における，フェルミオン場の作用の自然な一般化になっていることが見て取れる．逆に言えば，これは幾何学的な表現 (3.20) に書き換えられる．

上式 (94) より， $\bar{\psi}$ に関する Euler-Lagrange 方程式は直ちに，曲がった時空の Dirac 方程式 (3.10) を与える．ただし質量は $m = 0$ である．フェルミオンに質量を与えるには，Higgs スカラー場との相互作用を導入する必要があると考えられる．

■第2問について 文献 [2, § 4.3] (とそのノート) を見よ．もっとも本章で展開される GR の基礎方程式は，力学の一般共変な定式化の難解な詳細を経由しなくとも，ある程度まで独立・自己充足的に理解し得るよう，配慮されている．

第 4 章 古典的な離散化

重力場の量子論を定義するために、第 2 章で考案した一般的な構造を、第 3 章で定義した理論に適用する。そのためには、一般相対性理論を離散化する方法を研究する必要がある。本章では、2 つの古典的な離散化——格子 Yang–Mills 理論と Regge 計算法 (Regge calculus) ——を復習し、次に後で用いる一般相対性理論の離散化を導入する。

格子 Yang–Mills 理論は強結合領域 (strong coupling regime) で QCD を定義する基礎であり、ハドロンの質量のような物理量を計算し、それらを測定と比較する最善の手段である (Durr *et al.* 2008)。理論は Kenneth Wilson (Wilson 1974) による、ある見事な直観の結果であり、それは量子重力にとっても重要である。しかし以下で詳しく論じるように、QCD と一般相対性理論の間には重大な違いがある。違いは Regge 計算法 (Regge 1961) と呼ばれる、Tullio Regge による一般相対性理論の自然な離散化で表され、それは以下でも重要となる。我々が量子重力で用いる一般相対性理論の離散化は、本章の最後に導入される；それは格子 Yang–Mills 理論と Regge 計算法の融合である。

離散化は近似である：与えられた問題にとって重要でなさそうな自由度を無視する、自由度の数の切り詰め (切り捨て；truncation) である。場の量子論では、切り詰めは構成的な役割も演じる。場が弱い領域 (weak field regime) を記述するのに、我々は Fock 空間の手法と摂動論を利用する。Fock 空間は N 粒子状態の空間を定義することで構成される。理論は形式的には $N \rightarrow \infty$ の極限で与えられる。同じことが格子でも成り立つ。理論は形式的には格子サイトの数 N が無限大となる極限で定義される。同じことが量子重力でも成り立つ：理論は離散化/切り詰めを通じて定義できる。

4.1 格子 QCD

簡単のために 4 次元における SU(2) Yang–Mills 理論を考える。[実際には QCD は SU(3) Yang–Mills 理論である。] 連続な理論における場の変数は SU(2) 接続 $A_\mu^i(x)$ であり、ここに i は SU(2) の Lie 代数に属する添字である。我々はこの場を、Lie 代数の値をとる 1 形式

$$A(x) = A_\mu^i(x) \tau_i dx^\mu \quad (4.1)$$

としても書き、ここに τ_i は su(2) 生成子、すなわち Pauli 行列の $i/2$ 倍である [式 (1.40), (3.101) とは逆符号]。

note 式 (4.1) の右辺において、 $A_i = A_\mu^i dx^\mu$ を接続 1 形式、

その成分 A_μ^i に対し $A_\mu = A_\mu^i \tau_i$ を場の行列表示に同定できる。

ループ量子重力の基礎でもある、Wilson の核心的なアイデアは、代数を群の接空間と見なし、 A を群の変数の log と見なさねばならないということである。

そのために、時空において E 本の辺で繋がった N 個の頂点を持つ立方格子を固定する [図 37]。これはもちろん理論の回転および Lorentz 不変性を破り、それは適切な極限でのみ復元される。 a を (ここでは固定された) 時空の平坦な計量で決まる、格子の辺の長さとしよう。群の要素 $U_e \in \text{SU}(2)$ を格子の (向き付けされた) 辺 e の各々に (また U_e の逆元 U_e^{-1} を、逆の向きを持つ同じ辺に) 関係付ける。このとき格子の全ての辺に対する群の要素 U_e の集合は、連続的な場 A の自然な離散化を供する。Wilson のアイデアは、代数の変数よりもこれらの群の変数から出発する方が、量子論を上手く定義できるというものである。物理量はこのとき

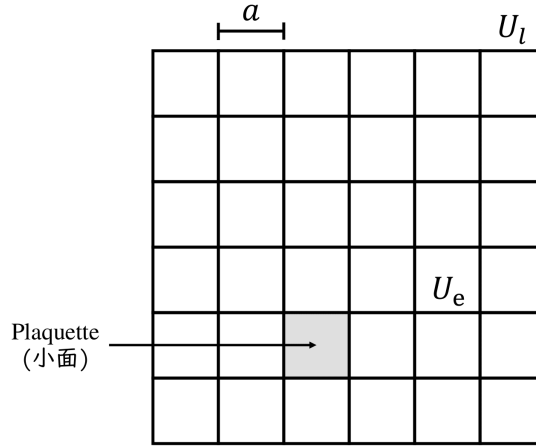


図 37 格子 Yang-Mills 理論を定義する立方格子

$N \rightarrow \infty$ かつ $a \rightarrow 0$ の極限で研究されねばならない．この極限が重力と Yang-Mills 理論に取り入れられる仕様の違いが^{*}、その 2 つの理論の構造的な違いを決定する．

U_e と A の形式的な関係は式

$$U_e = \text{Pe}^{\int_e A} \quad (4.2)$$

で与えられる，すなわち：群の要素は辺に沿う接続の経路順序化された指数と見なせる．量子重力の語法では，経路順序化された指数は一般に“ホロノミー”と呼ばれ，それは数学の場合とは少々異なる意味で用いられている術語である．この対象の定義は本章の補完 [4.5 節] で復習する．

辺の長さ a に関して展開すると，これは 1 次までで

$$U_e = \mathbb{1} + aA_\mu(s_e)\dot{e}^\mu \quad (4.3)$$

を与え，ここに $\dot{e}^\mu$ は辺の接単位 [ベクトル]，また s_e は e の始点 (“源 (source)”) である．ホロノミーは，辺の端点での値を除き，あらゆる局所ゲージ変換 $A \rightarrow A + D\lambda$ の下で不変である．したがって，理論を群の変数へと切り詰めるとき，局所 $SU(2)$ ゲージ対称性は単に，格子の頂点における $SU(2)$ 回転の下での対称性に削減される．格子理論のゲージ群はしたがって $SU(2)^V$ であり，ここに V は頂点の数である [本節冒頭では N]．群の変数はそのようなゲージ変換の下で

$$U_e \rightarrow \lambda_{s_e} U_e \lambda_{t_e}^{-1}, \quad \lambda_v \in SU(2) \quad (4.4)$$

と変換する．ここに s_e と t_e は辺 e の始頂点と終頂点 (源 (source) と標的 (target)) である．

note 以上，4.5.1 項のノートを参照．特に上式 (4.4)(さらには後の式 (4.12),(4.32),(5.4),(5.12)，7.1 節 p.134 の脚注) は式 (4.44) と同様，終点から始点に逆行するホロノミー U_e の変換則である^{*95}．逆向きのホロノミーを採る動機は式 (5.34–35) のノートを見よ．

小面 (plaquette) f [図 37]，すなわち格子の基本的な正方形周りの，4 つの群要素の順序化積

$$U_f = U_{e_1} U_{e_2} U_{e_3} U_{e_4} \quad (4.5)$$

^{*95} なお式 (4.12) の第 2 の λ は λ^{-1} に修正する必要がある．実際，式 (5.12) ではそのようになっている．

は曲率の離散バージョンである．[平行移動関数 U_f はループに沿って 1 周，平行移動したベクトルの変化を与えるから．詳しくは文献 [19, p.27] を見よ．] そのトレースはゲージ不変である．[式 (4.4) とトレースの巡回対称性による．] 離散的な作用

$$S = \beta \sum_f \text{Tr } U_f + \text{c.c.} \quad (4.6)$$

は a が小さい極限で，連続的な作用を近似することを Wilson は示した．結合定数 β は a に依存する数量であり， a がゼロに近づくときゼロに近づく．

ここで格子の境界を考えよ． l を境界の辺ないし“リンク (links)”とする [図 37]．これらの [上でのホロノミーの] 値を固定し，バルクの群要素にわたって作用の指数の積分

$$W(U_l) = \int dU_e e^{\frac{i}{\hbar} S[U]} \quad (4.7)$$

を行うと，切り詰められた理論の遷移振幅を得る．この積分は理論を完全に定義する．その虚時間での解析接続は Monte Carlo 法を用いて数値計算できる，と言うのも被積分関数は正定値となるからである．連続的な確率振幅を得るには， $\beta \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$ の連続極限を研究せねばならない．

4.1.1 Hamilton 形式の格子理論

我々にとって特に興味があるのはこの理論の Hamilton 形式であり，それは早くも Kogut および Susskind (1975) によって展開された．Hamilton 形式は格子の境界にあり，我々はそれを空間的と仮定する．Hamilton 形式の座標は境界の辺の群要素 U_l である．後で明らかになる理由で，境界の辺を“リンク (links)” l ，境界の頂点を“結節点 (nodes)” n と呼ぶ．これらの群要素は境界上の接続の空間成分に対応している，すなわち (時間ゲージ [3.4.2 項] では) それらは磁場をコードしている．Lagrange 形式の言語では，その時間成分あるいは電場は，境界に垂直な辺にコードされているのに対し，Hamilton 形式の言語ではそれは境界の群要素の運動量共役にコードされる．

正準配位空間はしたがって $SU(2)^L$ であり，それは群であり，削減されたゲージは境界上の結節点におけるゲージ変換で与えられる．ここに L はリンクの数である．対応する相空間は余接空間 $T^*SU(2)^L$ である．各リンク l に対して $SU(2)$ の代数に属する 1 つの運動量共役 L_l^i があり，それは電場に同定される．余接空間 T^*Q は自然なシンプレクティック構造を担う (2.5.2 項の脚注を見よ)．群の余接空間のシンプレクティック構造はよく研究されている．対応する Poisson 括弧は

$$\{U_l, U_{l'}\} = 0, \quad (4.8)$$

$$\{U_l, L_{l'}^i\} = \delta_{ll'} U_l \tau^i, \quad (4.9)$$

$$\{L_l^i, L_{l'}^j\} = \delta_{ll'} \epsilon^{ij}_k L_l^k \quad (4.10)$$

である (l で和をとらない)．

note 式 (4.10) は $\mathfrak{su}(2)$ 代数であり，式 (1.12) と比較される．

重力理論の文脈における対応する Poisson 括弧 (4.38) の導出が 5.4.3 項にある．

離散的な理論の Hilbert 空間はしたがって状態 $\psi(U_l)$ ，配位空間上の関数で表せる．これらの状態の空間は，境界上のゲージ変換の下で不変である，自然なスカラー積を担う： $SU(2)$ Haar 測度 [式 (1.19), (1.44)] で定義されるスカラー積

$$(\phi, \psi) = \int_{SU(2)} dU_l \overline{\phi(U_l)} \psi(U_l) \quad (4.11)$$

である。境界のゲージ変換は境界の結節点に作用し、状態を

$$\psi(U_l) \rightarrow \psi(\lambda_{s_l} U_l \lambda_{t_l}) \quad (4.12)$$

のように変換する。この変換の下で不変な状態はゲージ不変な状態の Hilbert 空間を成し、それは $L_2[\mathrm{SU}(2)^L/\mathrm{SU}(2)^N]$ の構造を持ち、ここに L は境界におけるリンクの数、また N は境界上の結節点の数である。

群の要素に対応する演算子はそれ自体、この基底で対角的である。 U_l に共役な量に対応する演算子は $\mathrm{SU}(2)$ の関数上の自然な微分演算子、すなわち左不変ベクトル場 $\vec{L}_l$ である [文献 [8, pp.71–72] を見よ]。古典論では、接続の運動量共役は電場、すなわち場の強度の時間–空間成分である。したがって $\vec{L}_l$ はこの量と (より正確には、リンク l に双対 (dual) な基本的な面を貫く電場の束 (flux) と) 同一視できる。これらの演算子は上記の Poisson 代数を実現する。

これら全ての構造はループ量子重力で再び現れる。

4.2 共変な系の離散化

重力に移る前に、(第2章の意味で) 共変な系を離散化したとき、古典論および量子論に何が起きるかを調べよう。

2.2.1 項において、量子論は汎関数積分で定義でき、これは多重積分の極限、すなわち理論の離散化の極限で定義できることを見た。式 (2.39) を見よ。

$$W(q, t, q', t') = \lim_{N \rightarrow \infty} \int dq_n e^{\frac{i}{\hbar} S_N(q_n)} \quad (4.13)$$

であり [再び $dq_n \rightarrow \prod_n dq_n$]、ここに N 段階での離散化された作用は

$$S_N(q_n) = \sum_{n=1}^N \frac{m(q_{n+1} - q_n)^2}{2\epsilon} - \epsilon V(q_n). \quad (4.14)$$

[和の記号は後ろの全ての項に掛かると見る (以下同じ).] $\epsilon = (t' - t)/N$ なので、パラメータ N はこの式に2度現れる：ステップ数と時間ステップの大きさに現れる。2つ目は部分的には積分変数の変更によって追放 (トレード) できるものの、完全には追放できない。 $q_n \rightarrow q_n/\sqrt{\epsilon}$ と再定義すると、 $S_N(q_n)$ を

$$S_N(q_n) = \sum_{n=1}^N \frac{m(q_{n+1} - q_n)^2}{2} - \epsilon V(\sqrt{\epsilon} q_n) \quad (4.15)$$

で置き換えられる。話を具体的にするために、例えば、 $V(q) = \frac{1}{2}\omega^2 q^2$ となる場合、すなわち調和振動子を考えよう。[通常どおり $V(q)$ の定義式に m を含めても良い (式 (4.16) も同様).] すると

$$S_N(q_n) = \sum_{n=1}^N \frac{m(q_{n+1} - q_n)^2}{2} - \frac{\Omega^2}{2} q_n^2 \quad (4.16)$$

であり、ここに $\Omega = \epsilon\omega$ 。こうして ϵ は形式的には離散的な作用から消えるものの、実際にはそれは Ω に隠されている。 $N \rightarrow \infty$ の極限をとるには、2つのことをしなければならない：和の上限を ∞ にするとともに、 Ω をその臨界値 $\Omega_c = 0$ に移行させねばならない。

このことは離散的な系を扱う誰もが知っている：連続極限は“格子サイト”の数を増すとともに、格子間隔をゼロへとスケールダウンさせる、あるいは等価的に、適当な定数 (ここでは Ω) を臨界極限值 (ここでは

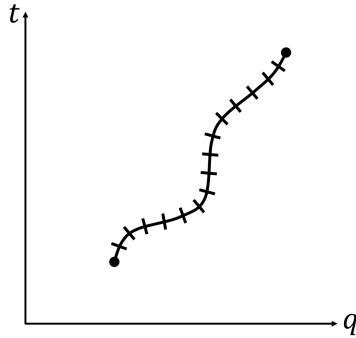


図 38 パラメータ時間の離散化

ロ)に移行させることで復元される。これは離散化の普遍的な特徴のように見受けられ、実際しばしばそのように説明される。

しかしそうではない。

(適切に) 離散化した共変な系には、著しいことが起きる。

2.3 節で説明した作用

$$S = \int d\tau \left(\frac{m}{2} \frac{\dot{q}^2}{\dot{t}} - tV(q) \right) \quad (4.17)$$

によって定義される系のように、上記の系と物理的には等価なパラメータ系を考えよ。この作用を自然な方法で離散化する [図 38]。それは

$$S = \sum_{n=1}^N \epsilon \left(\frac{m}{2} \frac{(q_{n+1} - q_n)^2}{\frac{\epsilon^2}{(t_{n+1} - t_n)}} - \frac{(t_{n+1} - t_n)}{\epsilon} V(q_n) \right) \quad (4.18)$$

を与える。これを一目見れば直ちに、

$$S = \sum_{n=1}^N \frac{m}{2} \frac{(q_{n+1} - q_n)^2}{(t_{n+1} - t_n)} - (t_{n+1} - t_n) V(q_n) \quad (4.19)$$

が分かる。パラメータ ϵ は相殺する！

一見するとこれは手品のようなものである：ラグランジアン of 離散化は [測度 $d\tau$ と合わせると] “格子間隔” に依らない！ 数 N は和の上限にのみ現れる。しかし少し考えると、疑い深い読者もそうでなければならぬと納得できる。もとの作用はパラメータ付けに依らないため、離散化したバージョンもそうである。[実際あらかじめ $d\tau$ を約分した形に作用 (4.17) を書いておけば、直ちに ϵ に依らない離散的な表式 (4.19) に移行できる。]

経路積分 (式 (2.79)) はここでは q_n たちと t_n たちの両方にわたることに注意せよ。ある意味、Newton 的な観点からは、我々は“離散化の時間ステップの位置にわたって積分している。”

第 2 章で見たように、連続的な理論の運動方程式は独立ではない。[式 (2.51) は式 (2.52) を含意する^{*96}。] 離散的な理論の運動方程式はこの依存性を失うことを確認するのは容易である：それらは独立になる。連続においてエネルギー保存則を与える、変数 t に対する方程式は、離散化においてもなおエネルギーが保存されるように t_n の値を定める。 $N \rightarrow \infty$ の極限において初めて、パラメータ付け替え不変性が復元される。[4.5.2 項の第 1 問を見よ。]

^{*96} この運動方程式の冗長性はパラメータ τ の付け替えに関するゲージ対称性を反映していることを、ここで思い出しておこう。

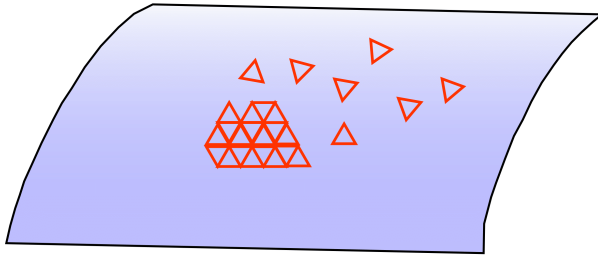


図 39 2次元での三角形の貼り合わせ

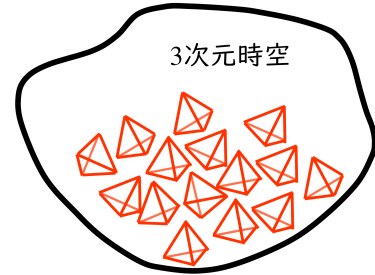


図 40 3次元での四面体の貼り合わせ

離散化が取り除かれる極限における不変性の復元は、離散化の一般的な特徴である。例えば、回転不変な系の離散化は典型的に回転不変性を損ない、それは極限で復元される。

パラメータ付け替え不変な系は、離散的な作用において極限をとる際にリスケールするパラメータがないという事実によって特徴付けられる： N が現れる箇所はステップ数だけである。

このパラメータ付け替え不変な系の離散化に特有な振舞いは、GR の“優れた”離散化に見られる。格子 QCD に用いられる Wilson 作用が、連続極限を得るためにその臨界値へとスケールせねばならないパラメータに依存しているのに対し、以下で説明する、GR の自然な離散化である Regge 計算法では、類似のパラメータはない。理論のより良い近似を得るために、他のいかなるパラメータも調節することなく増加させねばならないのは、ステップ (またはセル) の数 N だけである。

これは計量空間上の理論の離散化と、一般共変な理論の (優れた) 離散化の間の、重大な違いである。それは共変な形式の量子重力の独特性の起源となっている。

4.3 Regge 計算法

Tullio Regge は“Regge 計算法 (Regge calculus)”と呼ばれる、一般相対性理論の非常にエレガントな離散化を導入した。それは以下のように定義できる。 d -単体 (d -simplex) は三角形または四面体の、任意の次元への一般化である：形式的には、その $d+1$ 個の頂点の凸包 (convex hull) である。これらの頂点は $d(d+1)/2$ 本の線分 (line segments)^{*97} で結ばれ、その長さたち L_s は単体の形——すなわちその計量の幾何学——を完全に指定する。例えば次元 $d=3$ の単体 (四面体) は、その長さ $L_1, \dots, L_6$ が完全にその形を決める 6 本の線で結ばれた、 $d+1=4$ 個の頂点を持つ。

d 次元における Regge 空間 (M, L_s) は、境界の $(d-1)$ -単体が一致するようにして d -単体を貼り合わせて得られる、 d 次元の計量空間である。

例えば、2 次元では我々は三角形を貼り合わせて面を得ることができ、その三角形は線分に囲まれ、線分は点で合流する [図 39]。

3 次元では我々は空間を四面体に分割し、その四面体は三角形に囲まれ、その三角形はさらに線分に囲まれ、その線分は点で合流する [図 40]。

4 次元では我々は空間を 4-単体に分割し、その 4-単体は四面体に囲まれ、その四面体は三角形に囲まれ、その三角形は線分に囲まれ、その線分は点で合流する。

^{*97} Regge 計算法の文献では、線分 (segments) は時に“辺 (edges)”と呼ばれる。ここでは以下で導入する双対な複体 (dual complex) の辺との混同を避けるために、“線分”を用いるのを好む。

表 3 三角形分割 [曲率を担う単体 (ヒンジ) が太字で示されている]

2 次元			三角形	線分	点
3 次元		四面体	三角形	線分	点
4 次元	4-単体	四面体	三角形	線分	点

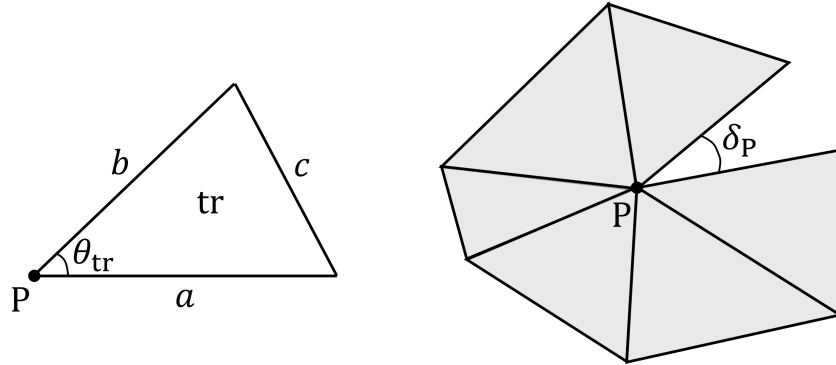


図 41 2 次元の三角形分割における点 P 周りの三角形

これらの構造は三角形分割 (triangulation) と呼ばれる (表 3 を見よ). 我々は常に三角形分割は向き付けられていると仮定する. このことは慣習的に, 各線分に向きを, 各三角形に特別な側 [表側の面] を, また各四面体に頂点の特定のサイクリックな順序を割り当てること, 等々を意味する; これは単に構成と表記を簡単にするためである.

少し考えると, 平坦な d -単体の貼り合わせは $(d-2)$ 単体 (しばしば “ヒンジ (hinges)” と呼ばれる) 上に, 曲率を生成し得ることが分かる. 例えば $d=2$ 次元では, 四面体の境界におけるように 4 つの正三角形を貼り合わせることができ, 四面体の頂点には明らかに曲率がある. $d=3$ 次元では, いくつかの四面体を全て共通の線分の周りに貼り合わせ, この線分を除いて至るところで平坦な多様体を得ることができる.

note この線分はまさしくヒンジ (蝶番) のようである. ただしここでは先ほどと同様に曲率を, 多様体の埋め込まれたより高い次元の空間から素朴に視覚的に捉えることは困難である.

$d=4$ 次元では, 曲率は三角形上にある. 結果として得られる空間の計量は, その線分 s 全ての長さ L_s によって一意的に決まる. このことは, あらゆる d -単体の計量はその辺 (sides) の長さによって一意的に決まるという事実から直ちに帰結する.

ここで Riemann 多様体 (M, g) を Regge 多様体で任意に良く近似できることを理解するのは容易である. このことは, あらゆる (M, g) とあらゆる ϵ に対して, M のあらゆる 2 点 x と y に対する Riemann 距離と Regge 距離の差が ϵ 未満となるような, (充分多くの単体を持つ) (M, L_s) を見出せることを意味する. これは例えば製造業で用いられる, 曲がった面の三角形分割による近似の基礎である. Regge のアイデアは一般相対性理論を, Regge 多様体の理論で近似することである.

そのためには, Riemann 曲率に適切に収束する Regge 多様体の曲率の表記が必要である. Regge による曲率の表記は非常に見事である. まず簡単な $d=2$ の場合を考えよ. 三角形分割における点 P を考えよ. その周りには何らかの個数の三角形 tr たちがある. これらの三角形たちの P における角度を θ_{tr} とする [図 41].

辺 (sides) a, b , および c を持つ三角形の c に向き合う角度を与える, 初等幾何学の公式

$$\cos(\theta_{tr}) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad (4.20)$$

[余弦定理 (右辺全体の符号を修正した)] を用いて, これらの角度は直ちに長さから計算できる.

ここで, もし P の周りの角度が合わせて 2π となるならば, 明らかに多様体は P において平坦である. そうでなければ, 曲率がある. したがって P における Regge 曲率は, “欠損角 (deficit angle)” と呼ばれる角度

$$\delta_P(L_s) = 2\pi - \sum_t \theta_t(L_s) \quad (4.21)$$

として定義できる. [引数の長さ L_s は点 P に接続する線分の長さとして推察される (式 (4.24) の箇所も見よ).] この公式において, 和は P 周りの三角形にわたり, また θ_t は三角形 t の P における角度である.

より高い次元においても同じ論法を用いることができる. d 次元において, Regge 曲率はやはり単一の欠損角で与えられるものの, ここでは P は $(d-2)$ 単体 (3 次元における線分と 4 次元における三角形; 表 3 を見よ) に置き換えられ, 和はその周りの $(d-1)$ 単体 (3 次元における三角形, 4 次元における四面体) にわたり, 角度は平坦な d -単体の二面角になり [図 42], それは初等幾何学の公式を用いて辺 (sides) から計算できる. 例えば, 頂点 (a, b, c, d) を持つ四面体の辺 (side) ab 上の二面角 [のコサイン] は

$$\cos \theta_{ab} = \frac{\cos \theta_{acd} - \cos \theta_{abc} \cos \theta_{abd}}{\sin \theta_{abc} \sin \theta_{abd}} \quad (4.22)$$

であり, ここに θ_{abc} は頂点 a, b, c を持つ三角形の頂点 a における角度である [したがって長さで表せる].

note 図 43 では平坦な 3 次元 Euclid 空間において, 線分 ab を共有する 3 つの四面体 $abcd, abde, abec$ を貼り合わせた様子を描いた. このとき線分 ab において $\triangle abc$ と $\triangle abd$ の二面角, $\triangle abd$ と $\triangle abe$ の二面角, $\triangle abe$ と $\triangle abc$ の二面角の和は 2π となるため, Regge 曲率は期待されるようにゼロである. 本節でこの後見るように 3 次元の理論では欠損角が $\delta \neq 0$ となることはない (3.5 節も参照). なお i 番目と $(i+1)$ 番目の三角形の二面角を θ_i でラベルすれば, 二面角の和 $\sum_i \theta_i$ は確かに三角形にわたると言える.

欠損角の幾何学的解釈は単純である. $(d-2)$ 単体周りのループに沿ってベクトルを平行移動すると, ベクトルは欠損角だけ逆回転する (ループは 2 次元では点を, 3 次元では線分を, 4 次元では面を取り囲む) [図 44]. これを用いて Regge は Regge 多様体 (M, L_s) の Regge 作用を

$$S_M(L_s) = \sum_h A_h(L_s) \delta_h(L_s) \quad (4.23)$$

と定義しており, ここに和は三角形分割の $(d-2)$ 単体, ないし “ヒンジ” (2 次元では点 P , 3 次元では線分, 4 次元では三角形) にわたり, また A_h は h の $(d-2)$ 次元の体積 (3 次元では長さ, 4 次元では面積) である. ここで Regge によって得られた著しい結果は, Regge 多様体 (M, L_s) が Riemann 多様体 (M, g) に収束するとき, Regge 作用 (4.23) が Einstein–Hilbert 作用 $S[g]$ に収束することである. このことから Regge 理論は一般相対性理論の優れた離散化であることが分かる [付録 C を見よ].

Regge の運動方程式は作用を長さに関して変分すると得られる. これは 2 つの項を与える: 1 つ目は A たちの変分に由来し, 2 つ目は角度たちの変分に由来する. 2 つ目の項は消える [C.1.8 項を見よ]. これは重力理論の一般的な性質である: それは Einstein–Hilbert 作用における Riemann テンソルの変分が消える事実の

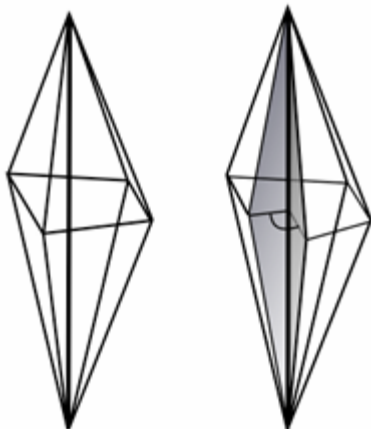


図 42 教科書 p.87 の, $d = 3, 4, \dots$ 次元においても Regge 曲率を欠損角として定義できることを説明した箇所に載っている図

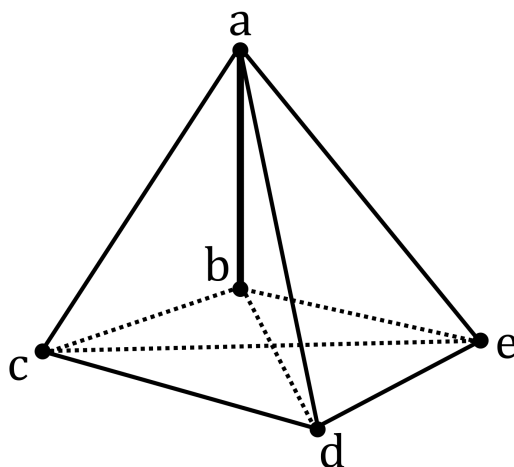


図 43 平坦な 3 次元 Euclid 空間における, 線分 ab を共有する四面体の貼り合わせ

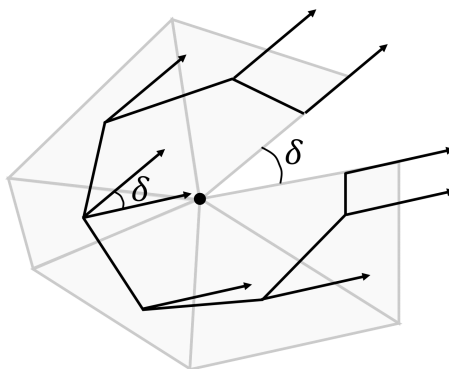


図 44 欠損角の幾何学的解釈

類似物である [文献 [11, pp.306–307] を見よ]. すると, Regge 方程式は

$$\sum_h \frac{\partial A_h}{\partial L_s} \delta_h(L_s) = 0 \quad (4.24)$$

であり, 和は線分 s に隣接するヒンジにわたり, 線分ごとに 1 つの方程式がある. $\delta_h(L_s)$ を離散的な Riemann 曲率の尺度 (measure) に, また運動方程式の左辺を離散的な Ricci テンソルの尺度 (measure) に同定できる.

3 時空次元ではヒンジは線分と同じものであり, したがって Regge 方程式は $\delta_h(L_s) = 0$, すなわち連続的な場合のように平坦性に帰着する.

Regge 離散化には以下で役割を演じる特殊性がある. Regge 曲率はヒンジに集中している. もし Regge 多様体においてヒンジの周りにベクトルを平行移動すれば, ベクトルは回転して元の位置に戻ってくる: これは曲率の標準的な現れである. しかしながら少し考えると, 起こり得る [ベクトルの向き] の回転は, ヒンジに平行な軸のまわりの回転だけであることを, 読者は納得できるだろう. すなわち, 回転は決してヒンジそのものを回転しない. [ヒンジに平行なベクトルは回転を受けない.] これが Regge 曲率を単一の数量, 欠損角で

捉えられる理由である：何故なら、回転はヒンジそのものの周りに制限されているからである。したがって Regge 多様体の Riemann 曲率はヒンジに垂直な平面上に集中した曲率であって、この同じ平面内の回転を生成する。もしヒンジに垂直な平面が例えば、 (x^1, x^2) 平面ならば、Riemann テンソルの消えない成分は R^{12}_{12} のみだろう。

これらの代数的制約を持つ曲率は非常に特殊である。しかし領域における物理的な曲率は、Regge 曲率を領域にわたって平均することで得られ、また Regge 曲率の特殊な特徴は線形な性質ではないので、平均の曲率はこの特殊な性質を引き継がないことになる。こうして Regge 幾何学はなお真の Riemann 空間を近似し得る。しかしそれは、かなり制約された種類の曲率によってであることを、覚えておくことが重要である。

作用は三角形分割における d -単体 v にわたる和としても書ける。式 (4.23) と欠損角の定義 (4.21) から、実際に

$$S_M(L_s) = 2\pi \sum_h A_h(L_s) - \sum_v S_v(L_s) \quad (4.25)$$

が得られ、ここに d -単体の作用は

$$S_v(L_s) = \sum_h A_h(L_s) \theta_h(L_s). \quad (4.26)$$

[2 次元では視覚的に容易に理解できるように、ヒンジ周りの二面角の和の全ヒンジにわたる和は、単体の各ヒンジにおける二面角の全単体にわたる和と等価である。] これは (後で起きるように) 量 A_h が整数——その場合には $e^{2\pi i \sum_h A_h} = 1$ ——、または半整数——その場合にはこの項は経路積分において単なる符号因子を与える——ならば、とりわけ有用となる。

三角形分割 Δ を固定すると、Riemann 多様体と一般相対性理論のあくまで有限の近似を得る。これは一般相対性理論の切り詰め (*truncation*) を定義する。これは波動方程式を有限差分方程式で、あるいは QCD を格子 QCD で置き換えることの類似物である。

Yang-Mills 理論の格子離散化と一般相対性理論の Regge 離散化の違いを見よ：1 つ目 (4.1 節) では、連続極限は頂点の数 N を無限大にすると同時に、結合定数 β (あるいは等価的に、格子間隔 a) をゼロにすることで得られる。Regge 離散化に対しては、そうではない。ここでは連続極限は、いかなるパラメータもゼロに採ることなく、三角形分割を精密化することで得られる。これは 4.2 節で説明したように、理論の共変な特徴の帰結である。格子 QCD と Regge 計算法の違いはしたがって、一般相対性理論の一般共変性に深く根差している。Regge 三角形分割の線分の物理的サイズ (長さ) はそれ自体が力学変数であり、特定の極限でスケールできる固定された外的な量ではない。一般共変な理論の適切な離散化の連続極限は、格子ステップの数を別にすれば、極限值に採らねばならないいかなるパラメータも必要としない。

4.4 2-複体上の一般相対性理論の離散化

Regge 離散化は 2 つの理由で、量子論にとって非常に優れているわけではない。第 1 に、それは計量変数に基づいている。フェルミオンの存在は基礎的な水準において、テトラードが必要であることを意味する。より重要なことに、Regge 三角形分割の線分は三角不等式に従う：2 点 P と Q を結ぶ線分は、 P と R および Q と R を結ぶ 2 つの線分の和よりも長くはなり得ない。したがって、これらの不等式を満たす線分の長さの集合である理論の配位空間は、境界を持つ複雑な空間であり、このことはこの古典的極限を持つ量子論の探求をはるかに複雑にする。

一般相対性理論のテトラード-接続形式は代替策を供し、Yang-Mills 理論の離散化により近いと同時に、離散的な共変理論に特有の性質を保持した、理論の離散化へと導く。この一般相対性理論の離散化は、Yang-Mills

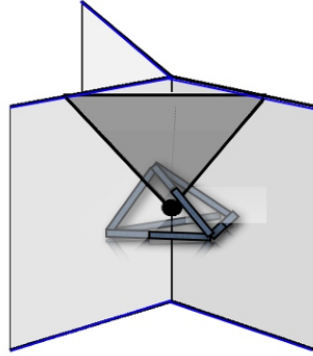


図 45 四面体に双対な 2-複体 [本稿では教科書 p.89 から図を採った]

格子と Regge 三角形分割を橋渡しする 2-複体を用いると、より上手く記述できる．ここでは以降で大いに用いることになる，この一般相対性理論の離散化を導入する．

本章 [本節] では 3 時空次元における基本的構成を与え，簡単のため Euclid 的な理論，すなわち 3.5 節で提示した理論に限定する．物理的な 4 次元の Lorentz 的な理論 (それは直接的な一般化である) の離散化は後の第 7 章で与える．

必要となる重要な概念は，ダイアグラム [図 45] に示した三角形分割の双対 (*dual*) であり，ここで四面体はもとの三角形分割に属しているのに対し，点で合流する辺を持つ，辺で出会う灰色の面が，双対を成す．より正確に， Δ を 3 次元における三角形分割としよう．三角形分割 Δ の双対 Δ^* は以下のように定義される．各四面体の内に頂点 (*vertex*) を置き，2 つの隣接する四面体の頂点を，2 つの四面体を隔てる三角形に“双対な”辺 (*edge*) で結び，三角形分割の各線分に，その線分を取り囲む辺を境界に持つ面 (*face*) を関係付けると，双対が得られる．[双対な面の説明を本稿次節で補足する．このとき確かに図 45 のような四面体の双対が得られることが，視覚的に見て取れる．] これらの対象はその双対から向きを引き継ぐ．

頂点，辺および面の組は，それらの境界関係と合わせて，**2-複体** (*2-complex*) と呼ばれる．2-複体は点で合流する辺を持つ，辺で出会う面の組によって視覚化できる．2-複体を定めるものは，これらの要素間の境界関係の組合せ的な構造である．[つまり上記のような面の貼り合わせ方で 2-複体が決まる．それは泡 (foam) の構造を持つ．]

境界

バルクの時空領域 $\mathcal{R}$ の離散化は，この領域の境界 $\Sigma = \partial\mathcal{R}$ の離散化を誘導する．境界 Σ は Δ の境界の三角形によって離散化され， Δ の境界の線分によって分離される．これらの三角形に双対な辺の端点は結節点 (*nodes*)，あるいは境界の頂点と呼ばれ，これらの線分に双対な面の境界はリンク (*links*)，あるいは境界の辺と呼ばれ，合わせて境界のグラフ (*graph*) Γ を成す．境界グラフは 2-複体の境界であると同時に，三角形分割の境界の双対でもある [本稿次節で補足]：

$$\Gamma = \partial(\Delta^*) = (\partial\Delta)^*. \quad (4.27)$$

この術語は重要である．それは図 46 および表 4 と表 5 に要約してある．それを入念に研究せよ，何故なら我々はこの術語と表記を大いに用いるからである．[4.5.2 項の第 2 問と第 3 問も見よ．]

ここでこの構成を用いて，3 Euclid 次元における Euclid 的な一般相対性理論，すなわち 3.5 節で定義した

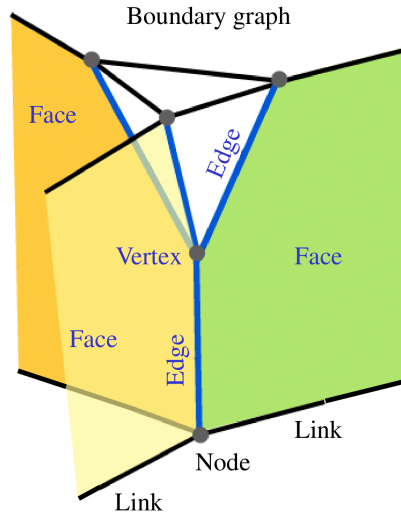


図 46 3次元における三角形分割と2-複体の術語と表記 [教科書 p.90 の図を下敷きに作成した]

表 4 バルクの術語と表記

バルク三角形分割 Δ	2-複体 Δ^*
四面体 (τ)	頂点 (v)
三角形 (t)	辺 (e)
線分 (s)	面 (f)
点 (p)	

表 5 境界の術語と表記

境界の三角形分割 $\partial\Delta$	境界グラフ Γ
三角形 (t)	結節点, (n) (境界の頂点)
線分 (s)	リンク, (l) (境界の辺)

理論——思い出していただきたいのだが、そこでは添字 $a, b, \dots = 1, 2, 3$ を時空添字、また $i, j = 1, 2, 3$ を Kronecker のデルタ δ_{ij} で上げ下げされる内部添字として、重力場はトライアド場 $e^i = e_a^i dx^a$ と $SO(3)$ 接続 $\omega^i_j = \omega_{aj}^i dx^a$ で定義される——の離散化を定義する。そのために、2-複体上の離散的な変数を導入する。

我々は Yang-Mills 理論のように、接続を用いて $SU(2)$ 群要素 U_e を 2-複体の各辺 e に割り当てることで、接続を離散化する。もとの三角形分割の線分 s に $\mathbb{R}^3$ のベクトル L_s^i を関係付けることで、トライアドを離散化する (図 47)。

$$\omega \longrightarrow U_e, \quad (4.28)$$

$$e \longrightarrow L_s^i. \quad (4.29)$$

連続的および離散的な変数の間の形式的な関係は、以下のように採ることができる：

$$U_e = P \exp \int_e \omega \in SU(2), \quad (4.30)$$

$$L_s^i = \int_s e^i \in \mathbb{R}^3. \quad (4.31)$$

U_e は辺に沿う接続のホロノミー、すなわち、 $SU(2)$ の基本表現における、接続によって生成される辺に沿う平行移動の行列である。[正確には e の終点から始点に逆行するホロノミーを群要素 U_e とする (5.2.2 項のノート).] 群の変数の辺に対するこの関係付けは、格子ゲージ理論の場合と同じである。 L_s^i は 1 形式 e^i の線分に沿う線積分である。作用 (3.98) はこれらの対象を用いて近似できる [式 (4.36)].

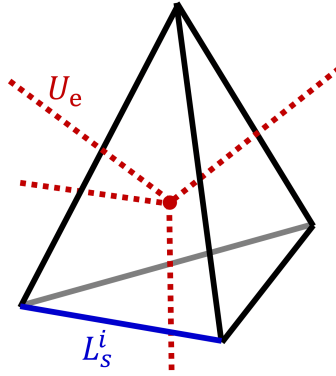


図 47 群の要素は辺 (破線) 上にあり, 代数の要素は線分 (実線) 上に, あるいは等価的に, その双対面内にある

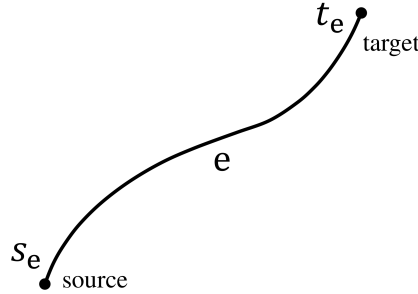


図 48 2-複体の辺 e とその始・終点

定義 (4.31) はゲージのため, ある意味, 不正確である. ゲージ変換 (3.99) の下で, 式 (4.30) で定義される群要素 U は “上手く” 変換する, すなわち

$$U_e \mapsto R_{s_e} U_e R_{t_e}^{-1} \quad (4.32)$$

と変換し, ここに s_e と t_e は辺 e の始 (“源 (source)”) および終 (“標的 (target)”) 頂点であり (全ての離散的な構造は向き付けされていることを思い出そう) [図 47] また $R_v \in \text{SO}(3)$. したがって離散的な理論では, 連続的な局所 $\text{SO}(3)$ 不変性は単に頂点における回転に削減される. 式 (4.31) で定義される代数の変数 L^i に対しては, そうではない. これを修正するために^{*98}, この定義は, 接続が線分自身に沿って一定となり (必要ならば線分の端点で分布的 [例えば不連続] になることを許容する), また各辺の前半部分 (辺は向き付けされている) に沿っても一定となるゲージで採用されていると仮定する. すると, L_s^i 変数もまた頂点を除き, 全てのゲージ変換の下で不変となる; それらは実際, 頂点 v における回転 R_v の下で, 随伴表現 [式 (1.28) の箇所のスピン $j = 1$ 表現, 通常の $\text{SO}(3)$ 回転行列を表現に持つ] において共変に変換する. [$L_f = L_f^i \tau_i$ を左不変ベクトル場として定義できれば, それは定義により共変に変換する [8, pp.71–72].]

三角形分割のスケールにおいて曲率が小さく, また線分が直線であるとき, 離散化は連続理論をよく近似する. このとき線分 s に関する $\mathbb{R}^3$ の要素 L_s^i のノルムは線分の長さであること

$$L_s^2 = |\vec{L}_s|^2 \quad (4.33)$$

^{*98} これを行うより正確な数学的方法があり, それは同じ点ヘトライアドを平行移動することで, 量 L^i のゲージ等価な定義を与えることになる; Thiemann (2007) を見よ.

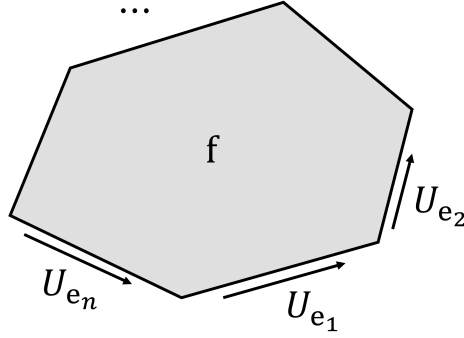


図 49 面 f を囲む辺 e とその群要素

に注意せよ [本稿次節で補足].

2-複体の各面 f は三角形分割の線分 $s = s_f$ に対応するので, L_s^i は面に関連していると見なせる: $L_f^i = L_{s_f}^i$. さらに, これを $\mathfrak{su}(2)$ 代数の要素と見ることも便利である. すなわち,

$$L_f = L_f^i \tau_i \quad (4.34)$$

を定義することである. したがって離散化された理論の変数は

- 2-複体の各辺 e に対する $SU(2)$ 群要素 U_e
- 2-複体の各面 f に対する $\mathfrak{su}(2)$ 代数要素 L_f

4 次元の Lorentz 的な理論において, 辺と面に関係付けられた同じ変数がある.

作用

辺 $e_1, \dots, e_n$ に囲まれた面 f が与えられたとき, その周りの群要素 U_e を掛けて, 面そのものに関する単一の群要素 U_f を得ることができる [図 49 参照^{*99}].

$$U_f = U_{e_1} \cdots U_{e_n}. \quad (4.35)$$

これは面 f に双対な線分 s_f を回る接続のホロノミーである. もし U_f が単位元と異なる [すなわち] $U_f \neq \mathbb{1}$ ならば, 曲率があり, Regge 計算法のように, この曲率を線分に関係付けられる.

すると離散的な作用は

$$S = \frac{1}{8\pi G} \sum_f \text{Tr}(L_f U_f) \quad (4.36)$$

となり, ここに $L_f \in \mathfrak{su}(2)$ および $U_f \in SU(2)$. 境界では, 境界で終結する面に対する量 U_f を書き, 作用を書くために, 面の外縁 (perimeter) を閉じねばならない. したがって境界のリンクに関係する群の量 U_l もなければならぬ. 言い換えれば, 境界の辺である境界のリンクは, パルクの辺と同等の立場にあり, やはり群の変数が割り当てられる. 関係 (1.39) を用いると, 作用 (4.36) における L_f の変分が $U_f = \mathbb{1}$ ——すなわち平坦性であり, それは 3 次元における連続的な Einstein 方程式と等価である——を与えるのを確かめるのは容易である.

^{*99} 式 (4.35) の右辺は U_e の並び順が逆の方が, 図 49 との対応が自然である.

note 1 実際 SU(2) の群要素は式 (1.39) の形 $U_f = e^{i\alpha\hat{n}\cdot\hat{\sigma}} = \cos\alpha + i\hat{n}\cdot\hat{\sigma}\sin\alpha$ の形に書ける．すると作用 (4.36) の L_f に関する変分は $0 = \text{Tr}(U_f) = 2\cos\alpha$, $\therefore \alpha = \pm\pi/2$ を課すので, $U_f = 1$ を得る．

note 2 天下りに与えられた離散的な作用 (4.36) は, 5.3 節で 3 次元理論の遷移振幅を導く際の出発点に用いられる．しかしその計算結果は, 7.3 節で 4 次元の理論の遷移振幅を仮説・原理として与える際に, アナロジーとして参照されるに過ぎない．4 次元の遷移振幅の表式は, それが 7.3 節末尾 (教科書 p.143) に列挙されている好ましい性質を満たすことから, 結果的に正当化される．したがって作用 (4.36) の導出は後回しとしても, ひとまず読み飛ばしても差し支えない．Regge 作用 (4.23) と作用 (4.36) の等価性の理解に 4.5.2 項の第 5 問が関係すると考えられる．

本節で説明した一般相対性理論の離散化は, Regge 離散化と似ているものの, 正確に等価ではない．1 つの違いは, それがフェルミオンと結合できることである．2 つ目の違いは 3.2.1 項で説明した符号で与えられる．

境界変数

量子論で重要な役割を演じることになる, 離散的な理論の境界変数をより詳しく研究しよう．(図 50 を見よ．) それらは 2 種類ある: 境界の辺, すなわちリンクの群要素 U_l ; および境界の線分 s の代数要素 L_s である．各リンク l につき正確に 1 つの境界線分 s があり, その 2 つは [互いに双対なので] 交差することに注意せよ [図 51]．したがって l が境界線分 s と交差するときには常に, L_s を L_l と改名できる．したがって境界変数はグラフの各リンク l に対して, 1 組

$$(L_l, U_l) \in \mathfrak{su}(2) \times \text{SU}(2) \quad (4.37)$$

から成る．代数は群の余接空間なので, $\mathfrak{su}(2) \times \text{SU}(2) \sim T^*\text{SU}(2)$ と書ける．すると離散化された理論の古典的な相空間は $T^*\text{SU}(2)^L$ であり, ここに L はグラフのリンクの本数である．[以上は直観的には, 連続理論の正準変数との対応 (4.28–29) から期待される．] これは格子上の SU(2) Yang–Mills 理論と正確に同じ境界相空間である．Poisson 括弧は前の節と同じである:

$$\begin{aligned} \{U_l, U_{l'}\} &= 0, \\ \{U_{l'}, L_l^i\} &= (8\pi G)\delta_{ll'}U_l\tau^i, \\ \{L_l^i, L_{l'}^j\} &= (8\pi G)\delta_{ll'}\epsilon^{ij}_k L_l^k, \end{aligned} \quad (4.38)$$

すなわち, 格子上の SU(2) Yang–Mills 理論の Poisson 括弧 (4.9) である [5.4.3 項も見よ]*100．次元を担う定数 $8\pi G$ は作用によって定まる, 何故なら接続に対する運動量共役 (それは [正準変数に対する通常の Poisson 括弧と同様,] 接続との間に無次元の Poisson 括弧を持つ) はトライアドではなく, $8\pi G$ で割ったトライアドだからである．

この構成の 4 次元版を第 7 章で論じる．3 次元の理論に対しては, 次章で行う量子論への移行のための, 全ての要素が今や得られている．

4.4 節について

■三角形分割の線分に双対な面 (教科書 p.90) について 文献 [2, p.332] にも同様の説明がある:

*100 前の脚注 [脚注*98] で言及した L_l^i のゲージ不変な定義を用いると, これらの Poisson 括弧は連続的なそれ (3.102) から導ける．

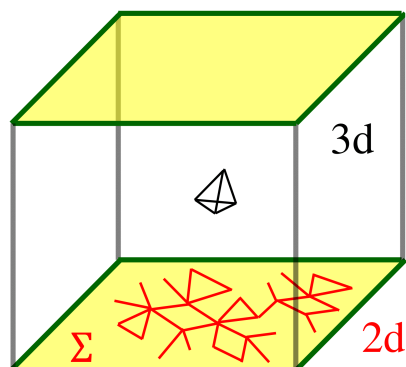


図 50 3次元時空の三角形分割された領域と，その2次元の三角形分割された境界

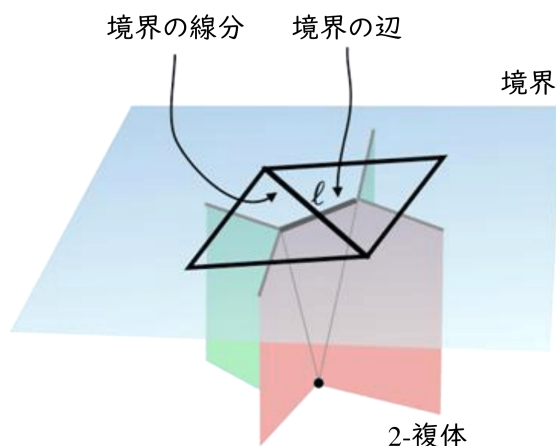


図 51 境界変数 [教科書 p.94 の図を下敷きに作成した]

三角形分割の各線分 f に対して，線分 f に共有される Δ の三角形に対応する辺に囲まれた， Δ^* の面 f を得る；最後に Δ の各点に対して，点に共有される線分に双対な面に囲まれた， Δ^* の3次元領域を得る．

図 52 のように考えている線分を共有する2つの三角形に双対な辺の張る面としてならば，線分に双対な面はよく定義できる．他方で教科書 p.93, p.107 の図では面は3本以上の線分に囲まれている．そこで線分に双対な面を，その線分を取り囲む， Δ に双対な辺たちを境界に持つ面として定義する場合，辺たちの頂点は同一平面上にあるとは限らないため，一般にそのような面が平面として常によく定義されるとは限らないと考えられる（仮に最初に四面体の内部に採る頂点の位置を適当に調節しても）．しかし双対面は平らな面である必要はない．（図 49 も見よ．）実際，関連して例えば，スピン・ネットワークを空間の離散的な構造と解釈する際には，背景独立性のため，リンクに割り当てられる，空間の塊を隔てる面積要素の背景多様体に対する正確な位置と形状は重要ではない．

■双対なグラフについて 双対という術語はおそらく，一方があれば他方を復元できるという意味で用いられている．実際ここでは3次元時空のスピン・フォームを考えたのに対し，スピン・ネットワークもまた空間（現実では3次元）の離散的な構造に双対なグラフを持つ（1.5 節）．そこでスピン・ネットワークを例にとり，

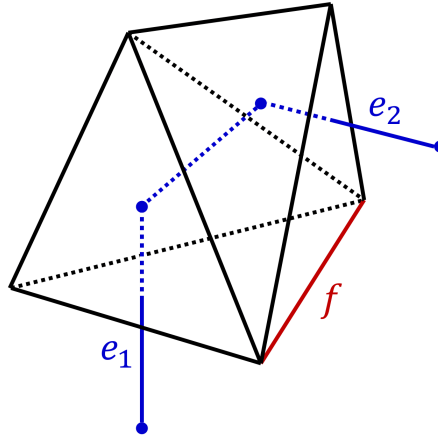


図 52 3次元での三角形分割 Δ における四面体を2つ示した (青い丸印はその双対な点). 赤い線で示した線分 f に着目すると, 隣接する2つの三角形には辺 e_1, e_2 が付随する (青線). このとき2辺 e_1, e_2 の張る平面として Δ^* の双対な面 f が定義される. Δ の各点はこのような面によって隣接する点と分離され, その“障地”ないし“守備範囲”を獲得する. それは双対な分割 Δ^* の3次元領域で表される.

双対なグラフの概念を説明する. まず離散的な空間を成す各体積の塊の中に点 (結節点; node) を適当に1つずつとり, 次いで面を介して隣り合う塊どうしに関しては, 対応する2つの結節点をリンクで繋いで隣接関係を表現できる. すると空間の離散的な構造を反映したグラフとして, 結節点をリンクで結んだネットワークが得られる. 逆に与えられたネットワークから元の離散的な空間構造を復元するには, 次のようにすれば良い. すなわちリンクで繋がった2つの結節点の間に, リンクを切るように適当な面を差し込み, 2つの結節点を分離する境界面とする. そのような面はリンクに双対であると言われる. これを全てのリンクに対して行くと, 各結節点はそこに接続しているリンクに双対な面たちによって周囲から仕切られ, 結節点の“守備範囲”が確定する. これが元の体積の塊であり, 結節点に双対な領域と言われる.

ここまでの定義には, 結節点やリンク, およびリンクに双対な面を導入する具体的な位置 (や形状) に曖昧さがある. ところが繰り返せば, 理論では背景の座標空間に対する具体的な位置付けが問題にならないため, 不都合は生じない (7.2.2 項, 7.2.3 項). 実際, スピン・ネットワークはグラフに加えてその“色付け”, すなわちリンク l に充てられるスピン j_l と結節点 n に充てられる結節因子 l_n で定義され, j_l はリンク l に双対な面の面積の量子数という意味を持ち, また l_n は n に双対な領域の体積の量子数に選べる. このときスピン・ネットワークは面積と体積の同時固有状態となる. そこで例えば結節点を取り囲む領域を背景の座標空間に対して連続的に変形すると, その見かけの体積 (座標体積) は変わるにも関わらず, 領域の中に同じ結節点が含まれている限り, 領域の真の体積は変わらない. また曲面の面積は, 面を貫くリンクが変わらない限り不変である. このようにループ量子重力の描像には, 一般相対性理論の背景独立性が見事に実装されている. スピン・ネットワークは背景の空間中の“どこか (somewhere)”にあるのではなく, あらゆる物理的対象がそれに対して位置付けられるところの“場所 (where)”であり, それ自体が空間を表す.

■式 (4.27) について 境界グラフ Γ は図 46 では2-複体 Δ^* の境界 $\partial(\Delta^*)$ として描かれているのに対し, 図 51 ではその双対として, 三角形分割の境界 $\partial\Delta = \Gamma^*$ が描かれている.

図 51 の境界グラフを例にとって, 式 (4.27) を例示しよう. 図 53 のように1本の線分を共有する2つの三角形を境界を持つ三角形分割として, バルクにおいて青い線で示したような, 2つの四面体の貼り合わせを考

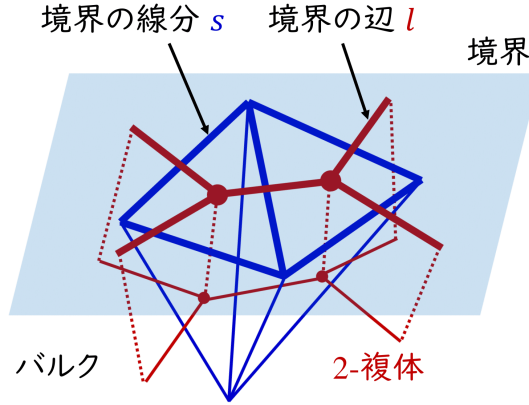


図 53 式 (4.27): $\Gamma = \partial(\Delta^*) = (\partial\Delta)^*$ の例示

える．このとき双対な 2-複体がバルクにおいて、赤い実線で示したような辺を持つことは確かである．これらの辺から境界に向かって伸びる面は、式 (4.36) の段落にあるように境界においてリンクで閉じねばならない．すると 2-複体の境界 $\partial(\Delta^*)$ として境界グラフ Γ が得られ、リンクの集まる点として境界の三角形内部に結節点が自然に導入され、それは辺の端点となっている．このとき Γ は境界の三角形分割に対する双対 $(\partial\Delta)^*$ ともなっていることが、視覚的に見て取れる．実際 Γ は境界において隣接する三角形に対し、三角形の内部に置いた点を結んで得られるリンクから成っており、各リンクは三角形の 1 本の線分と交差する．

なお式 (4.27) の関係 $\partial(\Delta^*) = (\partial\Delta)^*$ をより容易に見て取れる例として、5.3 節の図 65 と 6.1 節の図 72 に示されている、単一の四面体の境界グラフが挙げられる．この場合、境界に双対なグラフ $(\partial\Delta)^*$ は容易に理解できるのに対し、頂点 v に双対な 2-複体 Δ^* が境界に誘導するグラフ $\partial(\Delta^*)$ に関しては、5.4.2 項の頂点グラフ Γ_v の考察を見よ．

■式 (4.33) について トライアド $e^i = e_a^i \dot{x}^a ds$ (ただし $\dot{x}^a \equiv dx^a/ds$) のノルムは

$$|\vec{e}| = \sqrt{\delta_{ij} e^i e^j} = \begin{cases} \sqrt{g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b} ds & (g_{ab} = \delta_{ij} e_a^i e_b^j) \\ \sqrt{\delta_{ij} u^i u^j} ds & (u^i \equiv e_a^i \dot{x}^a) \end{cases}$$

なので、変数 (4.31): $L_s^i = \int_s e^i$ のノルムは

$$|\vec{L}_s| = \int_s |\vec{e}| = \int_s \sqrt{g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b} ds$$

と書ける．最右辺は線分 s の長さ L_s となっているので、式 (4.33) が成り立つ．

このことは 4 次元の Lorentz 的な理論において、“電場の長さ”が面積であること (式 (3.91) の箇所) とアナログスである．また変数 (4.31): $L_s^i = \int_s e_a^i dx^a$ そのものは、電場の束 (flux) と比較される．格子 Yang-Mills 理論に対する 4.1.1 項の説明も見よ．

■ L_s^i を $\mathfrak{su}(2)$ 代数要素と見なすこと (p.92) について L_s^i を展開係数として $\mathfrak{su}(2)$ 代数の生成子 τ_i の線形結合を作ると、 $\mathfrak{su}(2)$ 代数要素 (4.34): $L_f = L_f^i \tau_i$ を定義できる．また 3.5 節 p.76 には $L_s^i = \int_s e^i$ におけるトライアド e^i が、 $\mathfrak{su}(2)$ 代数の値をとるとある．

4.5 補完

4.5.1 ホロノミー

多様体上の群 G に属する接続 A と、多様体における経路 γ が与えられたとき、指数の経路順序化

$$U_\gamma = \text{Pe}^{\int_\gamma A} \quad (4.39)$$

は、初期条件 $U(0) = \mathbb{1}$ を持つ微分方程式

$$\frac{d}{ds} U(s) = \dot{\gamma}^a(s) A_a(\gamma(s)) U(s) \quad (4.40)$$

[右辺に $U(s)$ を書き加えた [2, p.44]] の解の、 $s = 1$ に対する値として定義される。ここに $s \in [0, 1]$ は経路 γ に沿う任意のパラメータであり、 $\dot{\gamma}^a = d\gamma^a/ds$ は γ の s における正接である。

これは

$$U_N = \prod_n (\mathbb{1} + \dot{\gamma}^a(x_n) A_a(x_n) \Delta\tau) \quad (4.41)$$

の大きな N における極限でもあり、ここに x_n は距離 $\Delta\tau$ おきの、 γ に沿う N 個の順序付けられた点である。

幾何学的には $U_\gamma \in G$ は、経路 γ を辿り接続 A に従って回転することで得られる、群の変換である。言い換えれば、それは γ に沿って共変的に一定なベクトルの行う回転である。

表記 P (経路順序化) の理由は、式 (4.39) の右辺における指数を A のベキ級数に展開し、各多重積分を γ に沿う順番に並べると、左辺が得られることである。すなわち、

$$U_\gamma = \mathbb{1} + \int_\gamma A + \frac{1}{2} P \int_\gamma A \int_\gamma A + \cdots \quad (4.42)$$

と書くこともでき、ここに

$$P \int_\gamma A \int_\gamma A = 2 \int_0^1 ds \int_0^s dt \dot{\gamma}^b(s) A_b(\gamma(s)) \dot{\gamma}^a(t) A_a(\gamma(t)) \quad (4.43)$$

(A はそれ自身と交換しない) 等々である。群の要素 U_γ は量子重力の文献ではしばしば“ホロノミー”と呼ばれる、“ホロノミー”の他の用法との関連性は部分的であるに過ぎないにも関わらず。[数学的な文献では、“ホロノミー”という術語は一般に閉曲線に対してのみ用いられる。量子重力の文献では、一般に開いた曲線に対しても用いられる [2, p.45] [1, p.67].] もし A が Levi-Civita 接続ならば、そのホロノミーは一般相対性理論における通常のベクトルの平行移動を与える。もし A が自己双対 Ashtekar 接続ならば、そのホロノミーは左手型ニュートリノの γ に沿う平行移動を与える。

ホロノミーの主要な性質は、それがゲージ変換の下で“見事に”変換することである：それは γ の内部 (bulk) に局在したゲージ変換には影響されず、 γ の端点におけるゲージ変換に対して斉次 (homogeneously) 変換する。すなわち、接続をパラメータ $\Lambda(x)$ でのゲージ変換によって変換すると、ホロノミーは

$$U_\gamma \rightarrow \Lambda(\gamma(0)) U_\gamma \Lambda^{-1}(\gamma(1)) \quad (4.44)$$

と変換する。[ここから特に閉じたループに関するホロノミーはゲージ不変である.]

最後にホロノミーの重要な性質は、接続または γ に対する任意の変分の下での、その変分である。直接的な計算は第 1 に

$$\frac{\delta}{\delta A_a^i(x)} U_\gamma = \int_\gamma ds \delta^3(x, \gamma(s)) \dot{\gamma}^a(s) U_{\gamma_1} \tau^i U_{\gamma_2} \quad (4.45)$$

を与え、ここに γ_1 と γ_2 は x で切り分けられる γ の 2 つの部分である；また第 2 に

$$\frac{\delta}{\delta \gamma^a(s)} U_\gamma = U_{\gamma_1} F_{ab}(\gamma(s)) \dot{\gamma}^b(s) U_{\gamma_2} \quad (4.46)$$

を与える。特に $f(s)$ は端点で消えるとして、パラメータ付けの無限小の変更 $s \rightarrow [s +] f(s)$ は

$$\int ds f(s) \dot{\gamma}^a(s) \frac{\delta}{\delta \gamma^a(s)} U_\gamma = \int ds f(s) U_{\gamma_1} F_{ab}(\gamma(s)) \dot{\gamma}^a(s) \dot{\gamma}^b(s) U_{\gamma_2} \quad (4.47)$$

を与え、これは反対称な F_{ab} と対称な $\dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b$ の縮約により消える。[式 (4.47) 左辺はパラメータの付け替え $\gamma^a(s) \rightarrow \gamma^a(s + f(s))$ 、したがって変分 $\delta \gamma^a(s) = \dot{\gamma}^a(s) f(s)$ に伴うホロノミーの変化である.]

4.5.1 項について

■ホロノミーに対する微分方程式 (4.40) とその解 (4.39) について

微分方程式 (4.40) の説明 Yang-Mills 理論において、物質場 $\varphi(x)$ を時空点 $x + dx$ へ無限小平行移動した場合は、行列表記で

$$\varphi_{\parallel}(x + dx) = (1 + igA_a dx^a)\varphi(x)$$

となる。これが接続 A の定義する平行移動である [10, p.141]. (多様体として特に 4 次元時空における平行移動を考える場合には、添字 a を時空添字 μ にとれば良い。) ここから無限小の平行移動の関数が

$$U(dx) = 1 + igA_a dx^a \quad (95)$$

となることが読み取れる。これは式 (4.41) と整合しており、以降、教科書との対応をとるには、接続に結合定数を吸収させて $igA \rightarrow A$ と再定義すれば良い^{*101}。

ここで平行移動した場 $\varphi_{\parallel}(x + dx)$ を位置 $x + dx$ での場 $\varphi(x + dx)$ と定義するならば、これらの差として定義される共変微分 [10, pp.141–142]

$$\begin{aligned} \varphi(x + dx) - \varphi_{\parallel}(x + dx) &= \{\partial_a \varphi(x) - igA_a(x)\varphi(x)\}dx^a \\ &\equiv D_a \varphi(x)dx^a \end{aligned}$$

がゼロになる。曲線 $\gamma^a(t)$ に沿う要素 $dx^a = \dot{\gamma}^a ds$ をとると、この条件は

$$\dot{\gamma}^a D_a \varphi = 0, \quad \dot{\gamma}^a \partial_a \varphi = +ig\dot{\gamma}^a A_a \varphi$$

を与える [1, pp.65–66]. これはベクトル φ の無限小平行移動に伴う変化量を表しており、

$$\varphi(s) \equiv \varphi(\gamma(s)) = U(s)\varphi(0)$$

の関係を通じてホロノミー $U(s)$ に対する微分方程式 (4.40) に読み替えられる。

解 (4.39) の説明 式 (4.40) から解としてホロノミーの表式 (4.39) を導く過程は、時間発展演算子に対する Schrödinger 方程式から Dyson 級数を得るのと似た計算になる [1, p.66–68]. 実際まず、微分方程式 (4.40) を形式的に積分すると

$$U(s) = U(0) + ig \int_0^s ds' \dot{\gamma}^a(s') A_a(s') U(s').$$

^{*101} これは行列 A の基底を再定義する自由度に関係していると考えられる。また g を摂動パラメータとする文脈では、 A が g を既に含んでいるならば、ベキ級数 (4.42) を摂動展開のようにも見なせる。

すると逐次代入により

$$\begin{aligned}
U(s) &= U(0) + ig \int_0^s ds_1 \dot{\gamma}^{a_1}(s_1) A_{a_1}(s_1) U(s_1) \\
&= U(0) + ig \int_0^s ds_1 \dot{\gamma}^{a_1}(s_1) A_{a_1}(s_1) U(0) \\
&\quad + (+ig)^2 \int_0^s ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dot{\gamma}^{a_1}(s_1) A_{a_1}(s_1) \dot{\gamma}^{a_2}(s_2) A_{a_2}(s_2) U(s_2) \\
&= U(0) + ig \int_0^s ds_1 \dot{\gamma}^{a_1}(s_1) A_{a_1}(s_1) U(0) \\
&\quad + (+ig)^2 \int_0^s ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dot{\gamma}^{a_1}(s_1) A_{a_1}(s_1) \dot{\gamma}^{a_2}(s_2) A_{a_2}(s_2) U(0) \\
&\quad + (+ig)^3 \int_0^s ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \dot{\gamma}^{a_1}(s_1) A_{a_1}(s_1) \dot{\gamma}^{a_2}(s_2) A_{a_2}(s_2) \dot{\gamma}^{a_3}(s_3) A_{a_3}(s_3) U(s_3) \\
&= \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (+ig)^n \int_0^s ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{n-1}} ds_n \dot{\gamma}^{a_1}(s_1) A_{a_1}(s_1) \dot{\gamma}^{a_2}(s_2) A_{a_2}(s_2) \dots \dot{\gamma}^{a_n}(s_n) A_{a_n}(s_n) \quad (96)
\end{aligned}$$

を得る^{*102}.

ここで“径路順序化積”(path ordered product)

$$P(A_{a_1}(s_1) \dots A_{a_n}(s_n))$$

を, 引数 s_i が大きい因子 $A_{a_i}(s_i)$ ほど左側に来るように並べ替えた積として導入する. つまり径路に沿って始点に近い位置の因子から先に, 右側の行列に作用することになる. $A_a = A_a^i \tau_i$ どうしは非可換であるが³, あたかも可換であるかのように並び替えれば良い. すると式 (96) において

$$\begin{aligned}
&\int_0^s ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{n-1}} ds_n \dot{\gamma}^{a_1}(s_1) A_{a_1}(s_1) \dot{\gamma}^{a_2}(s_2) A_{a_2}(s_2) \dots \dot{\gamma}^{a_n}(s_n) A_{a_n}(s_n) \\
&= \frac{1}{n!} \int_0^s ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{n-1}} ds_n P(\dot{\gamma}^{a_1}(s_1) A_{a_1}(s_1) \dot{\gamma}^{a_2}(s_2) A_{a_2}(s_2) \dots \dot{\gamma}^{a_n}(s_n) A_{a_n}(s_n)) \\
&= \frac{1}{n!} P\left(\int_0^t ds \dot{\gamma}^a(s) A_a(s)\right)^n \quad (97)
\end{aligned}$$

と書き換えられるので,

$$U(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(+ig)^n}{n!} P\left(\int_0^s ds' \dot{\gamma}^a(s') A_a(s')\right)^n \equiv P\left[\exp\left(+ig \int_0^s ds' \dot{\gamma}^a(s') A_a(s')\right)\right]$$

を得る. 式 (4.39) および式 (4.42) である.

式 (97) 第 1 の等号の説明 式 (97) 第 2 辺

$$\frac{1}{n!} \int_0^s ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{n-1}} ds_n P(\dot{\gamma}^{a_1}(s_1) A_{a_1}(s_1) \dot{\gamma}^{a_2}(s_2) A_{a_2}(s_2) \dots \dot{\gamma}^{a_n}(s_n) A_{a_n}(s_n))$$

の積分範囲は n 次元空間 $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ の“直方体領域” $0 \leq s_i \leq s$ 全体である. これは $n!$ 通りの置換

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi 1 & \pi 2 & \dots & \pi n \end{pmatrix}$$

^{*102} 最右辺の級数の第 n 項は $n=0$ に対して $U(0) = 1$, $n=1$ に対して $+ig \int_0^s ds_1 \dot{\gamma}^{a_1}(s_1) A_{a_1}(s_1) = +ig \int_0^s A$ と約束する.

に対して、不等式 $(0 \leq) s_{\pi n} \leq s_{\pi(n-1)} \leq \cdots \leq s_{\pi 2} \leq s_{\pi 1} (\leq s)$ で表される $n!$ 個の領域に分けられる。
その各々にわたる積分は

$$\frac{1}{n!} \int_0^s ds_{\pi 1} \int_0^{s_{\pi 1}} ds_{\pi 2} \cdots \int_0^{s_{\pi(n-1)}} ds_{\pi n} P(\dot{\gamma}^{a_1}(s_1) A_{a_1}(s_1) \dot{\gamma}^{a_2}(s_2) A_{a_2}(s_2) \cdots \dot{\gamma}^{a_n}(s_n) A_{a_n}(s_n))$$

なので

$$\begin{aligned} & \text{(式 (97) 第 2 辺)} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi} \int_0^s ds_{\pi 1} \int_0^{s_{\pi 1}} ds_{\pi 2} \cdots \int_0^{s_{\pi(n-1)}} ds_{\pi n} P(\dot{\gamma}^{a_1}(s_1) A_{a_1}(s_1) \dot{\gamma}^{a_2}(s_2) A_{a_2}(s_2) \cdots \dot{\gamma}^{a_n}(s_n) A_{a_n}(s_n)) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi} \int_0^s ds_{\pi 1} \int_0^{s_{\pi 1}} ds_{\pi 2} \cdots \int_0^{s_{\pi(n-1)}} ds_{\pi n} \dot{\gamma}^{a_{\pi 1}}(s_{\pi 1}) A_{a_{\pi 1}}(s_{\pi 1}) \dot{\gamma}^{a_{\pi 2}}(s_{\pi 2}) A_{a_{\pi 2}}(s_{\pi 2}) \cdots \dot{\gamma}^{a_{\pi n}}(s_{\pi n}) A_{a_{\pi n}}(s_{\pi n}) \\ &= \frac{1}{n!} \times n! \int_0^s ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \cdots \int_0^{s_{n-1}} ds_n \dot{\gamma}^{a_1}(s_1) A_{a_1}(s_1) \dot{\gamma}^{a_2}(s_2) A_{a_2}(s_2) \cdots \dot{\gamma}^{a_n}(s_n) A_{a_n}(s_n) \\ &= \text{(式 (97) 最左辺)} \end{aligned}$$

となるから、確かに式 (97) が成り立つ。

■ホロノミーの表式 (4.41) について ホロノミーが群 G の要素である [2, p.44] のは、それが (ベクトル表示の) 物質場に作用して終点に平行移動したベクトルを作る行列であって、掛け算則

$$U_{\gamma_1} U_{\gamma_2} = U_{\gamma_1 \circ \gamma_2}$$

を満たすことによる。ホロノミーも行列 $A_{\mu} = A_{\mu}^i \tau_i$ の指数であるという点では、群 G の通常の (すなわち単位元と連続的に繋がる) 元に対する表現行列と似ている。

そこで経路を距離 $\Delta\tau$ おきに分割し、ホロノミーを各線要素に沿う平行移動関数 (95) の積 (4.41) として書くことができる。式 (4.41) は最初から経路順序化されている。

■ホロノミーの変換則 (4.44) について ホロノミー U_{γ} は始点 x_i と終点 x_f の物質場を $\varphi(x_f) = U_{\gamma} \varphi(x_i)$ で関係付ける。ここで物質場の局所ゲージ変換はユニタリー変換 $\varphi'(x) = \Lambda(x) \varphi(x)$ で与えられるため [10, p.141],

$$\varphi'(x_f) = \Lambda(x_f) \varphi(x_f) = \Lambda(x_f) U_{\gamma} \varphi(x_i) = [\Lambda(x_f) U_{\gamma} \Lambda^{-1}(x_i)] \varphi'(x_i).$$

最右辺から U_{γ} のゲージ変換は $U'_{\gamma} = \Lambda(x_f) U_{\gamma} \Lambda^{-1}(x_i)$ に同定される。よって式 (4.44) は終点から始点に逆行するホロノミー $U_{\gamma^{-1}}$ の変換則

$$U'_{\gamma^{-1}} = \Lambda(x_i) U_{\gamma^{-1}} \Lambda(x_f)$$

である。逆向きのホロノミーを考える動機は式 (5.34-35) のノートを見よ。

■ホロノミーの接続による汎関数微分 (4.45) について ホロノミー (平行移動関数) を、経路に沿った微小区間ごとの積 (4.41) の形

$$\begin{aligned} U(A, \gamma) &\approx (1 + (A \cdot \dot{\gamma})_{N-1} ds) \cdots (1 + (A \cdot \dot{\gamma})_1 ds) (1 + (A \cdot \dot{\gamma})_0 ds), \\ (A \cdot \dot{\gamma})_k &\equiv A_a(\gamma(s_k)) \dot{\gamma}^a(s_k), \quad A_a \equiv A_a^i \tau_i, \quad s_k \equiv \frac{k}{n} ds \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \end{aligned}$$

に書いておき、汎関数微分をとるのが容易である。すると

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta A_a^i(x)} U_\gamma &= \sum_{k=0}^{N-1} [(1 + (A \cdot \dot{\gamma})_{N-1} ds) \cdots \{ \delta^3(\gamma(s_k), x) \tau_i \dot{\gamma}^a(s_k) ds \} \cdots (1 + (A \cdot \dot{\gamma})_0 ds)] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} U(1, s_k) \{ \delta^3(\gamma(s_k), x) \tau_i \dot{\gamma}^a(s_k) ds \} U(s_k, 0) \\ &= \int_0^1 ds U(1, s) \{ \delta^3(\gamma(s), x) \tau_i \dot{\gamma}^a(s) \} U(s, 0) : (4.45)\end{aligned}$$

を得る。ここに $U(s_2, s_1)$ は点 s_1 から点 s_2 への平行移動関数 (ホロノミー) である。

この公式は LQG の正準な定式化において、スピン・ネットワーク状態の面積固有値を求める際に有用となる。面積 (3.87) における Ashtekar 接続 A_a^i の運動量共役 E_i^a が、量子論では A_a^i による汎関数微分に置き換わるからである [2, § 6.5, § 6.6.1].

■ホロノミーの経路による汎関数微分 (4.46) について ホロノミーの表式 (4.41) において、各微小区間の因子 $1 + \dot{\gamma}^a(s) A_a(\gamma(s)) \Delta s$ の経路に関する変分は

$$\left[\frac{d\delta\gamma^a(s)}{ds} A_a(\gamma(s)) + \dot{\gamma}^a(s) \partial_b A_a(\gamma(s)) \cdot \delta\gamma^b(s) \right] \Delta s.$$

ホロノミーの変分は各区間に対する変分から寄与の和で、したがって経路に沿う積分で表される。具体的には、ホロノミーの変分に対する第 1 項の寄与は

$$\begin{aligned}& \int U(1, s) \frac{d\delta\gamma^a(s)}{ds} A_a(\gamma(s)) U(s, 0) ds \\ &= - \int \left[\frac{dU(1, s)}{ds} A_a(\gamma(s)) U(s, 0) + U(1, s) \frac{dA_a(\gamma(s))}{ds} U(s, 0) + U(1, s) A_a(\gamma(s)) \frac{dU(s, 0)}{ds} \right] \delta\gamma^a(s) ds \\ &= \int U(1, s) [-\partial_b A_a(\gamma(s)) - (A_a A_b - A_b A_a)(\gamma(s))] \dot{\gamma}^b(s) U(s, 0) \delta\gamma^a(s) ds\end{aligned}$$

と書ける。ここで第 1 の等号では、変分 $\delta\gamma^a(s)$ が端点でゼロになると仮定して部分積分を行った。また第 2 の等号では式 (4.40):

$$\frac{dU(s, 0)}{ds} = \dot{\gamma}^b(s) A_b(\gamma(s)) U(s, 0), \quad \frac{dU(1, s)}{ds} = -\dot{\gamma}^b(s) U(1, s) A_b(\gamma(s))$$

を考慮した (第 2 式は経路順序化した表式 (4.41) から説明できる)。これを第 2 項の寄与

$$\int U(1, s) (\partial_b A_a(\gamma(s))) \dot{\gamma}^b U(s, 0) \delta\gamma^a(s) ds \quad (\text{ダミー添字を } a \leftrightarrow b \text{ と入れ替えた})$$

と合わせると、ホロノミーの変分は

$$\delta U_\gamma = \int U(1, s) F_{ab}(\gamma(s)) \dot{\gamma}^b(s) U(s, 0) \delta\gamma^a(s) ds$$

とまとめられる。ここに $F_{ab} \equiv \partial_a A_b - \partial_b A_a - (A_a A_b - A_b A_a)$ は Yang-Mills 理論における曲率 (場の強度) である [10, p.143]。汎関数微分の定義に基づき、上式の被積分関数における $\delta\gamma^a(s)$ の係数を汎関数微分 (4.46) に同定できる。

端点を固定して経路の変分をとると閉ループが得られるため、曲率に関する結果が得られるのは納得がいく。

4.5.2 問題

1. 運動方程式. Newton 的な系の共変形式の離散化 [4.2 節] に対する運動方程式を計算せよ [解答は本稿次項].
2. 重要. 入念に取り組むこと. 四面体を考えよ. その内部に点 P を置き, P を四面体の 4 つの頂点と結ぶ. 結果として得られる 10 本の線は Regge 空間を定める. 注意深く三角形分割 Δ とその双対 Δ^* を描き, 全ての頂点, 辺, および面を列挙し, 似たものと異なる種類のものを区別せよ. 境界グラフを描け. 境界グラフもとの四面体の関係は何か? 次いで Δ^* の全ての辺に関係する群要素を考えよ. それらをラベルする上手い表記を見出せ. 接続が平坦であるためには, それらはいくつの条件を満たさねばならないか? (注意: 泡 [図 54 の四面体 $a'b'c'd'$ のこと (6.2 節 p.121)] があり, …….) [本稿次項で補足する.]
3. 2-複体の貼り合わせ. 境界の共通部分で繋がった 2 つの時空領域を考えよ. 境界で合致するように, それぞれを三角形分割する. どのように双対な三角形分割が境界で合致するかを説明せよ. 結節点とリンクには何が起きるか? 具体例を構成し, 全ての頂点, 辺, 面, 結節点, およびリンクをあからさまに与えよ. [4.4 節の補足における図 53 のノートを見よ.]
4. ホロノミー. 上記で与えたホロノミーの様々な定義 [4.5.1 項] が等価であることを示せ. 式 (4.45), (4.46) および (4.47) をホロノミーの形式的な定義から導け. [4.5.1 項のノートを見よ.]
5. 曲率 (難問). 欠損角 δ_h によって定義される Regge 曲率と, U_f によって定義される曲率の関係は何か? これら 2 つの量はどのように関係するか?

4.5.2 項について

■第 1 問について 離散的な作用 (4.19) を (端点以外の) ある q_k で変分しよう. $n = k-1, k$ に対する運動エネルギーの項と $n = k$ に対するポテンシャル項が寄与を持つことに注意すると, 直接の計算により作用の変分は

$$\delta S = - \left\{ m \left(\frac{q_{k+1} - q_k}{t_{k+1} - t_k} - \frac{q_k - q_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \right) + (t_{k+1} - t_k) \frac{\partial V(q_k)}{\partial q_k} \right\} \delta q_k$$

とまとめられる. 変分原理に基づき δq_k の係数 $\{\dots\}$ をゼロとおくと運動方程式が得られ, それは式 (2.51) の離散的なバージョンとなっていることが見て取れる.

次に離散的な作用 (4.19) を (端点以外の) ある t_k で変分しよう. 今度は運動エネルギーとポテンシャルのいずれも $n = k-1, k$ に対する項が寄与を持つことに注意すると, 直接の計算により作用の変分は

$$\delta S = \left[\left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{q_{k+1} - q_k}{t_{k+1} - t_k} \right)^2 + V(q_k) \right\} - \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{q_k - q_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \right)^2 + V(q_{k-1}) \right\} \right] \delta t_k$$

とまとめられる. 再び変分原理に基づき δt_k の係数 $[\dots]$ をゼロとおくと, 運動方程式が得られる. それはエネルギー保存則 (2.52) の離散的なバージョンとなっているものの, q_k の運動方程式とは独立である.

■第 2 問について 簡単のため図 54 のように “正” 四面体 $abcd$ を考え, 内部に重心 O をとる. このとき 4 つの四面体 $Obcd$, $Ocda$, $Odab$, $Oabc$ の貼り合わせとして三角形分割を定義できる. 双対な頂点として, それぞれの四面体の内部に順に重心 a', b', c', d' をとる. 隣接する四面体に付随する頂点を辺で結ぶと, 図 54 の赤線で示した四面体 $a'b'c'd'$ が得られる. その 4 つの面は双対な線分 Oa, Ob, Oc, Od に貫かれている.

境界グラフを次のように誘導しよう. 対称性より 2 つの重心 O, a' は同一直線 aOa' 上にあり, この直線は底面の $\triangle bcd$ の重心 a'' を通る. そこで境界の $\triangle bcd$, $\triangle cda$, $\triangle dab$, $\triangle abc$ の重心として, 順に 4 つの結節点 a'', b'', c'', d'' を定義する. これらは 4 つの頂点 a', b', c', d' を “境界に向けて延長した辺” $a'a'', \dots, d'd''$ の端点と見なせる. すると 4 つの結節点から 2 点を選んで境界上で結んだ 6 本のリンクとして, 図 54 に明示したリンク $a''md''$ 等が得られ, また対応する 6 枚の面 (影を付けた $a'a''md''d'$ 等) が追加される (それらは

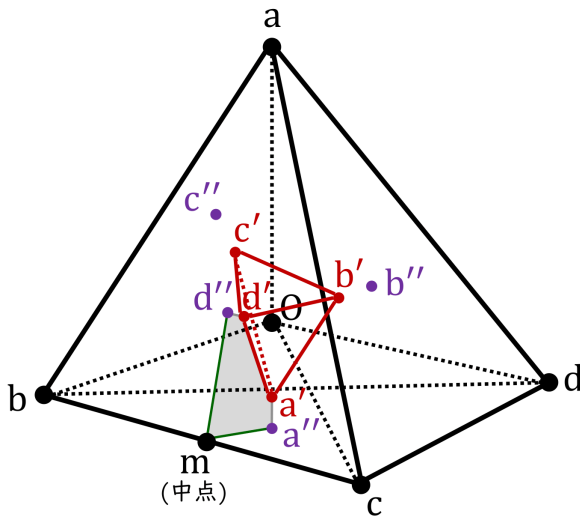


図 54 4つの四面体から成る三角形分割に双対な 2-複体

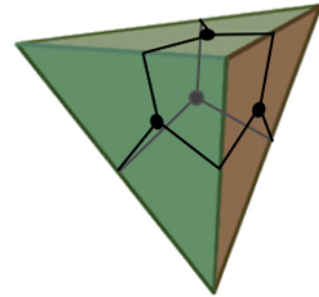


図 55 教科書 5.3 節 p.109 の図を先取りして載せた

6.1 節の図 72 に描かれた面の一部である). このとき 2-複体の境界としての境界グラフは, 図 55 のように描画できる. 以上の予想は 6.2 節の記述と合致している.

この措置を正当化するために, 誘導された境界グラフが実際に, もとの三角形分割の境界の双対と解釈できることを説明する. 境界の三角形は四面体の 4 つの面 $\triangle bcd$, $\triangle cda$, $\triangle dab$, $\triangle abc$ そのもので与えられる. 各々の内部には結節点 a'', b'', c'', d'' が 1 つずつ配置されており, 1 本のリンク, 例えば $a''md''$ はもとの線分 bc と 1 点 m で交差している. したがって境界グラフは三角形分割の双対として理に適っており, 適正と考えられる.

第 4 章の (部分的な) 総括 (本稿筆者)

第 4 章の内容をいくらか取捨選択・補足しつつ, 重複を厭わずにまとめておこう.

重力の量子論を定義する準備として, 格子 Yang-Mills 理論と Regge 計算法 (Regge calculus) の双方のアイデアを取り込んだ方法で, 一般相対性理論を離散化する. 量子重力理論は離散化 (近似) を通じて定義できる.

そこで第 4 章では格子 Yang-Mills 理論 (4.1 節) と Regge 計算法 (4.3 節) が順に取り上げられるものの, それらはあくまでアナロジーとして参照されるに過ぎないため, その説明が天下りであることは必ずしも議論の本筋の理解を妨げない. 実際, これまで教科書では重要事項に対してのみ式の導出が与えられており, 例えばループ量子重力の共変な定式化では中心的な役割を演じない, Ashtekar 変数の箇所 (3.4 節) などでは, 意図的に結果の導出が省かれているように見受けられる. それは一見不親切であるようであるものの, 好意的に捉えれば, むしろ読者に余計な負担をかけまいとする著者らの配慮なのだろう.

重力理論の説明 (4.3 節) もまた, 以下のように切り詰め (まさに truncation) が可能だと考えられる.

Regge 計算法

Regge 計算法のアイデアは, (d 次元) 時空を d -単体 (d -simplex) の貼り合わせへと三角形分割し, 近似的に一般相対性理論を記述することである. ここで d -単体とは, 三角形または四面体の, 任意の次元への一般化である (特に 2-単体は三角形, 3-単体は四面体).

このとき空間の曲率は d -単体たちに共有される $(d-2)$ -単体 (“ヒンジ”) が担い、その周りの欠損角によって特徴付けられる。例えば三角形を貼り合わせて 2 次元の曲面を近似すると、面の曲率は三角形の集まる点 (ヒンジ) が担うはずである。実際ある点 P の周りに集まる三角形 t を平面上に切り開くと、一般には展開図 44 のように、三角形 t の点 P における角度 θ_t の和は 2π に一致しない。そこで欠損角

$$\delta = 2\pi - \sum_t \theta_t$$

を用いて曲率を表せる。欠損角の幾何学的解釈は単純である。ヒンジ周りのループに沿ってベクトルを平行移動すると、ベクトルは欠損角だけ逆回転する (図 44)。これは曲率の標準的な現れである。

より高い次元においても同じ論法を用いることができる。 d 次元において、Regge 曲率は $(d-2)$ -単体のヒンジが担い、やはり単一の欠損角で与えられる。図 43 では平坦な $d=3$ 次元 Euclid 空間において、線分 ab を共有する 3 つの四面体 $abcd, abde, abec$ を貼り合わせた様子を描いた。このとき線分 ab はまさしくヒンジ (蝶番) のようであり、ヒンジにおいて $\triangle abc$ と $\triangle abd$ の二面角、 $\triangle abd$ と $\triangle abe$ の二面角、 $\triangle abe$ と $\triangle abc$ の二面角の和は 2π となるため、Regge 曲率は期待されるようにゼロである。もし二面角の和が 2π と異なれば、曲率がある。ただし $d=3$ 次元以上の曲がった時空ではヒンジの担う曲率を、多様体の埋め込まれたより高い次元の空間から素朴に視覚的に捉えることはもはや困難である。

共変な系の離散化

Regge 離散化から連続極限を得るには、三角形分割を精密化しさえすれば良く、他のいかなるパラメータも極限値に採る必要はない。(実際、例えば Regge 三角形分割の線分の物理的サイズ長さはそれ自体が力学変数であり、特定の極限でスケールできる固定された外的な量ではない。) これは一般相対性理論の一般共変性を反映した著しい性質である。

このことを簡単な例で説明する。例えば粒子系の作用積分を有限の時間ステップ ϵ で離散化すると、連続極限を復元するにはステップ数を $N \rightarrow \infty$ とするだけでなく、同時に時間幅を $\epsilon \rightarrow 0$ としなければならない。あるいは変数変換によって ϵ 依存性を適当なパラメータに吸収させれば、等価的にこのパラメータを適切な臨界値へと移行させる必要がある。同様に格子 Yang-Mills 理論において連続極限をとるには、格子の数を $N \rightarrow \infty$ とすると同時に、格子間隔 a (あるいは等価的に離散的な作用 (Wilson 作用) における結合定数 β) をゼロにしなければならない。

他方で一般共変な系の (適切な) 離散化では事情が異なる。再び粒子系を考え、拡大配位空間の軌道を $(q(\tau), t(\tau))$ とパラメトライズする。このとき作用積分はパラメータ τ に依らないため、その離散化もまた τ のステップ ϵ に依存しない (式 (4.18-19))。したがって連続極限を得るにはステップ数を $N \rightarrow \infty$ とすれば充分であり、理論には他に臨界値へとスケールせねばならない、いかなるパラメータも存在しない。

2-複体上の一般相対性理論の離散化 (格子 Yang-Mills 理論との融合)

しかしながら Regge 計算法は、三角形分割の線分の長さを基本変数としている。それらには三角不等式が課せられるため、対応する量子論の探求は困難となる。そこで理論の一般共変性を反映した Regge 離散化の利点を保持しつつ、一般相対性理論のより優れた離散化を導入することが動機付けられる。(ただしここでは 3.5 節で説明した、3 時空次元の Euclid 的な一般相対性理論に話を限定する。) そのためには Regge 三角形分割に双対な (dual) 2-複体 (2-complex) を用いるのが便利である。この措置はまた、計量ではなくテトラードを基本変数とする定式化との橋渡しを可能にする。

3 次元における三角形分割 Δ の双対 Δ^* は以下のように定義される。各四面体の内に頂点 (vertex) を置き、

2つの隣接する四面体の頂点を、2つの四面体を隔てる三角形に“双対な”辺 (edge) で結び、三角形分割の各線分に、その線分を取り囲む辺を境界に持つ面 (face) を関係付けると、双対が得られる。

- 双対な複体の“辺”との混同を避けるために、もとの三角形分割に対しては“線分”という表現を用いる。
- 線分を取り囲む Δ に双対な辺たちは、一般に (仮に最初に四面体の内部に採る頂点の位置を適当に調節しても) 同一平面上にあるとは限らない。しかし双対面が平らな面である必要はないとすれば、線分に双対な面を割り当てることは可能であり、その正確な位置と形状は重要ではない。

頂点、辺および面の組とそれらの境界関係 (すなわち上記のような面の貼り合わせ方) は 2-複体と呼ばれる。言い換えれば、2-複体は点で合流する辺を持つ、辺で出会う面の組によって視覚化でき (図 46)、泡 (foam) の構造を持つ。

バルクの時空領域 $\mathcal{R}$ の離散化は、この領域の境界 $\Sigma = \partial\mathcal{R}$ の離散化を誘導する。境界 Σ は Δ の境界の三角形によって離散化され、 Δ の境界の線分によって分離される。これが三角形分割の境界 $\partial\Delta$ を成す。他方で 2-複体 Δ^* の境界 $\partial(\Delta^*)$ の明確な定義は与えられていない。ここでは直観的に、2-複体の (境界へ向かう) 面の外縁 (perimeter) を図 53 のようにリンク (links) で閉じると (式 (4.36) の箇所)、2-複体の境界 $\partial(\Delta^*)$ として境界グラフ Γ が得られると理解して良い。すると 2-複体の境界 $\partial(\Delta^*)$ として境界グラフ Γ が得られる。またリンクの集まる点として、境界の三角形に双対な結節点 (nodes) が三角形の内部に自然に導入され、それは辺の端点となっている。このとき Γ は境界の三角形分割に対する双対 $(\partial\Delta)^*$ ともなっていることが、図 53 から視覚的に見て取れる。実際 Γ は境界において隣接する三角形に対し、三角形の内部に置いた点を結んで得られるリンクから成っており、各リンクは三角形の 1 本の線分と交差する。

ここまでの重要な術語を、図 46 および表 4 と表 5 に要約しておく。

以上を踏まえて、3 時空次元の Euclid 的な一般相対性理論に対して、変数 (ω, e) の代わりに 2-複体上の離散的な変数 (4.28–31):

$$\begin{aligned}\omega &\longrightarrow U_e = \text{P exp} \int_{e^{-1}} \omega \in \text{SU}(2), \\ e &\longrightarrow L_s^i = \int_s e^i \in \mathbb{R}^3\end{aligned}$$

を導入する。ただしここでは三角形分割と双対な 2-複体 (したがって辺 e と線分 s) は向き付けされていると想定しており、2-複体の辺 e (境界のリンク l を含む) には格子 Yang–Mills 理論のように、 $\text{SU}(2)$ の基本表現における群要素として、 e を逆行するホロノミー U_e を充てられる。これは接続の $\text{SU}(2)=\text{SO}(3)$ ゲージ変換の下で

$$U_e \rightarrow R_{s_e} U_e R_{t_e}^{-1} : (4.32)$$

と変換する [R_v は $\omega = \omega^i \tau_i$ の表現 j に応じた $\text{SU}(2)$ の表現行列]。ここに s_e と t_e はそれぞれ、辺 e の始頂点 (“源 (source)”) および終頂点 (“標的 (target)”) である。したがって連続的な理論のゲージ ($\text{SO}(3)$ 不変性) は単に頂点における回転に削減される (我々が指定できるのは端点の回転行列のみだから)。 (以上、ホロノミーの定義と変換則は 4.5.1 項とそのノートを見よ。)

他方で変数 L_s^i は三角形分割の線分 s (境界の線分を含む) に充てられる。トライアド $e^i = e_a^i \dot{x}^a ds$ (ただし $\dot{x}^a \equiv dx^a/ds$) の $\mathbb{R}^3$ におけるノルムは

$$|\vec{e}| = \sqrt{\delta_{ij} e^i e^j} = \begin{cases} \sqrt{g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b} ds & (g_{ab} = \delta_{ij} e_a^i e_b^j) \\ \sqrt{\delta_{ij} u^i u^j} ds & (u^i \equiv e_a^i \dot{x}^a) \end{cases}$$

なので、変数 $L_s^i = \int_s e^i$ のノルム

$$|\vec{L}_s| = \int_s |e| = \int_s \sqrt{g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b} ds$$

は (最右辺より) 線分 s の長さ L_s となる。また各線分 $s = s_f$ には 1 つの双対面 f が付随するので、 L_s^i は面に関係する変数 $L_f^i = L_{s_f}^i$ と見なせる。

このような離散化を採用できるのは、実際にこれらの変数 (U_e, L_s^i) を用いて連続理論の作用 (3.98) を良く近似できるからである。

量子論ではバルクの境界における変数が重要となる。それらはリンク l の群要素 U_l と、 l に双対な境界線分 $s = s_l$ に対する $L_l^i = L_{s_l}^i$ から成る。境界においてテトラードと接続 (e, ω) が共役な正準変数となること (3.5 節) から直観的に期待されるように、対応する離散的な境界変数の組 (L_l, U_l) の全リンク l に関する集合は、古典的な (境界) 相空間を成し、相空間を座標付けする。この構成は SU(2) Yang-Mills 理論の Hamilton 形式と同じであり、 $\vec{L}_l$ はリンクに双対な基本的な面 (線分) を貫く電場の束 (flux) と同一視できる^{*103}。

^{*103} このことは 4 次元の Lorentz 的な理論において、“電場の長さ” が面積であること (式 (3.91) の箇所) とアナログスである。

第Ⅱ部

3次元の理論

第5章 3次元の Euclid 的な理論

重力場の量子論を見出すために、第4章で説明したように離散化された、第3章で定義した理論に、第2章で考案した一般的な構造を適用できる。結果として得られる理論は数々の困難を含んでいるので、本章ではまず比較的簡単な練習をこなす：3.5節で取り上げた3時空次元における Euclid 的な一般相対性理論に、同じ戦略を適用する。この練習により数々のアイデアと技法を導入することが可能となり、それらは次いで物理的な場合、すなわち4時空次元における Lorentz 的な理論で用いることになる。

3次元と4次元の一般相対性理論の間には重大な違いがある。最も重要なことは、3次元の理論が局所的な自由度を持たないことである：それはしたがって4次元の理論よりも無限に単純である。このことは4次元では成り立たない、量子論の性質に反映される。これらの違いにも関わらず、3次元の理論での練習は啓発的であって、量子重力の仕組みに対する洞察を与える、何故ならその多大な単純性にも関わらず、3次元の理論は幾何学の一般共変な量子論であるからである。

5.1 量子化の戦略

量子論を定義するには、2つの要素が必要である：

- 境界の幾何学の量子状態を記述する境界 Hilbert 空間。
- これらの境界状態に対する遷移振幅。

$\hbar$ の小さい極限で、遷移振幅は Hamilton 関数の指数を再現せねばならない。

Hilbert 空間と遷移振幅を構成するために、段階的に進む。まず古典論を離散化する。次いで離散化した理論に対応する量子論を研究する。最後に連続極限を議論する。第1章でスケッチしたアイデアに従って理論の Hilbert 空間を構成する際と、また第2章でスケッチした戦略に従って遷移振幅を定義する際の両方において、理論の離散化を用いる。

前章から、 $SU(2)$ 群要素 U_e を各辺 e に、また $su(2)$ 代数要素 L_f を三角形分割に双対な各面 f に関係付けることで、3次元の一般相対性理論は2-複体上で切り詰められることを思い出そう。

$$\omega \longrightarrow U_e, \quad (5.1)$$

$$e \longrightarrow L_f. \quad (5.2)$$

1つ目は辺に沿う重力的な接続のホロノミー、2つ目は面 f に双対な線分に沿うトライアドの線積分と解釈される。作用は式 (4.36) で与えられる、すなわち

$$S = \frac{1}{8\pi G} \sum_f \text{Tr}(L_f U_f) \quad (5.3)$$

であり、 U_f は f 周りの辺の U_e の積である。ゲージ変換は

$$U_e \rightarrow \lambda_{s_e} U_e \lambda_{t_e}^{-1} \quad (5.4)$$

のように作用する。2-複体はグラフ Γ を境界に持ち、境界変数はグラフ Γ の各リンク l に対する群要素と代数要素

$$(U_l, L_l) \quad (5.5)$$

である。これらは $SU(2)^L$ の余接空間である、離散的な理論の相空間を座標付けする。

これが離散的な理論である。量子論に移ろう。

5.2 量子論の運動学：Hilbert 空間

群の余接空間である相空間の量子化は標準的である。Hilbert 空間上で式 (4.38) の量子論版、とりわけ

$$[U_l, L_{l'}^i] = i(8\pi\hbar G)\delta_{ll'}U_l\tau^i \quad (5.6)$$

を実現する演算子 U_l と L_l を我々は求めている。これは正しい古典的極限を得るための理論に対する基本的要請である。群要素 U_l を“座標”，また代数要素 L_l を“運動量”と考えよ。Hilbert 空間を座標の 2 乗可積分関数の空間とする：

$$\mathcal{H}_\Gamma = L_2[SU(2)^L]. \quad (5.7)$$

添字 Γ は、これが境界にグラフ Γ を誘導する離散化に由来することを、思い出すために書いてある。状態は L 個の群要素 U_l の波動関数 $\psi(U_l)$ である。 $SU(2)$ 構造と整合するスカラー積は群不変な測度、すなわち Haar 測度 dU (第 1 章の補完 [式 (1.44)] を見よ) で与えられ、

$$\langle\psi|\phi\rangle = \int_{SU(2)^L} dU_l \overline{\psi(U_l)}\phi(U_l). \quad (5.8)$$

関数 $\psi(U_l)$ 上の (自己共役な) 自然な $SU(2)$ 共変な微分演算子は、左不変ベクトル場である。これは

$$(J^i\psi)(U) \equiv -i\frac{d}{dt}\psi(Ue^{t\tau^i})\Big|_{t=0} \quad (5.9)$$

で定義される [文献 [8, pp.71–72] を見よ]。式 (5.6) を満たすトライアド演算し得るには、次元を持つ因子でこれをスケールすれば充分であり：

$$\vec{L}_l \equiv (8\pi\hbar G)\vec{J}_l, \quad (5.10)$$

ここに $\vec{J}_l$ は引数 U_l に作用する左不変ベクトル場である。これは交換関係 (5.6) を実現する [本稿次項で確認]。

まとめると： L を Γ のリンクの本数として、Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\Gamma = L_2[SU(2)^L]$ ，および離散的な変数 U_l と L_l に関する演算子を得た： U_l は乗法的な演算子であり，トライアドは $\vec{L}_l = 8\pi\hbar G\vec{J}_l$ 。

これで物理を始めるのに充分である！

5.2 節冒頭 (5.2.1 項の前まで) について

■演算子 (5.10) が交換関係 (5.6) を満たすことの確認 $U = \{U_l\}$ と書くと、任意の状態 $\psi(U)$ に対して

$$J_{l'}^i(U_l\psi(U)) = -i\left[\delta_{ll'}\left(\frac{d}{dt}U_le^{t\tau^i}\right)\psi(U) + U_l\frac{d}{dt}\psi(U_le^{t\tau^i}, \dots)\right]_{t=0} = -i\delta_{ll'}U_l\tau^i\psi(U) + U_lJ_{l'}^i\psi(U),$$

$$\therefore [U_l, J_{l'}^i]\psi(U) = i\delta_{ll'}U_l\tau^i\psi(U) \quad (l \text{ で和をとらない})$$

となるので、交換関係 (5.6) を得る。以上の計算は座標空間の波動関数に対する演算子の作用から、正準交換関係を導く手順とアナログスである。

5.2.1 長さの量子化

f を線分に双対な面として、線分の長さ L_s はノルム $L_s = |\vec{L}_f|$ で与えられることを思い出そう。したがって境界の線分 s の長さは、 l を s と交差するリンクとして、演算子 $L_l = |\vec{L}_l|$ で与えられる。この演算子のスペクトル的性質を調べよう。 $\vec{J}$ は $SU(2)$ の生成子なので、その 2 乗 $|\vec{J}|^2$ は $SU(2)$ の Casimir、すなわち全角運動量演算子と同じ数学的量である；その固有値は半整数 j たち [整数を含む] に対して $j(j+1)$ である。したがって線分 l [正確にはリンク l に双対な境界線分 $s = s_l$] の長さのスペクトルは、半整数 j_l に対して

$$L_{j_l} = 8\pi\hbar G \sqrt{j_l(j_l+1)} \quad (5.11)$$

である [本稿次項で補足]*104。これは 3 次元的な理論の第 1 の物理的帰結である：長さが量子化される。

三角形分割によって導入された古典的な離散性と、長さの演算子が離散的なスペクトルを持つという事実によって決定される量子論的な離散性を、混同してはならない。1 つ目は古典的であり、単なる自由度の切り詰めである。それは箱の中の電磁場をモードに展開し、理論を有限の数のモードに切り詰めることの類似物である。2 つ目は量子力学的である。それは電磁場の各モードのエネルギーが量子化される、すなわち場が量子から成るという事実の類似物である。

note 1.3.1 項 (p.15) でも同様の注意が促されている。なるほど、例えば格子 Yang–Mills 理論における格子の導入はあくまで近似の手段であって、実際に空間が離散化されていることを意味しない。同様に重力理論においても、三角形分割を用いて古典論を記述することは便宜的な措置であって、理論を量子化して初めて空間が離散的な構造を持つという結論が得られる。

特に我々の見出した量子論的な離散性は、量子 Regge 計算法 (quantum Regge calculus) や力学的三角形分割 (dynamical triangulations) のような、量子重力に対する他の試験的なアプローチで導入される離散化とは関係がない。この文脈では、時空は固定されたサイズの三角形分割を用いて離散化されるものの、このサイズは非物理的と考えられ、連続極限においてゼロへとスケール・ダウンされる。ここではそうではない。ここでは三角形の物理的な最小の (消えない) サイズは $\hbar$ と G で決まる。

我々の見出した量子論的な離散性は、 $SU(2)$ のコンパクト性の帰結である：長さは群の変数の共役であり、対応する演算子はコンパクト空間 $SU(2)$ 上の Laplace 演算子であり、したがって離散的なスペクトルを持つ。4 時空次元においても再び現れ、空間の物理的な粒状性の核心となるのは、この離散性である。

異なる (境界の) リンクに対応する長さの演算子は交換するので (何故なら各々は異なる U_l たちに作用する)、それら全てを同時に対角化できる。したがって j_l たちは理論の運動学的な境界状態をラベルする良い量子数である。他にも量子数があるか？ 今やループ量子重力の基本的な構造——スピン・ネットワーク基底——を導入する時である。これを次項で行う。

5.2.1 項について

■長さの固有値 (5.11) について ここでは各リンク l に充てられる表現 j が定まっている場合を念頭に、 $\psi(U)$ をスピン・ネットワーク状態 (5.34) の形

$$\psi(U) = D_{mn}^j(U_l) \phi^{mn}(U)$$

*104 2 次元では、 $\hbar G$ は長さの次元を持つ。このことは作用の形から容易に帰結する [本稿次項で確認]。

に書く．ただし $\phi^{mn}(U)$ は U_l を含まない．すると J_l^i の作用 (5.9) より

$$J_l^i \psi(U) = -i \frac{d}{dt} D_{mn}^j(U_l e^{t\tau_i}) \Big|_{t=0} \phi^{mn}(U) = -i D_{mm'}^j(U_l) (\tau_i^{(j)})_{m'n} \phi^{mn}(U),$$

$$\therefore J_l^i J_l^i \psi(U) = (-i)^2 D_{mm''}^j(U_l) (\tau_i^{(j)})_{m''m'} (\tau_i^{(j)})_{m'n} \phi^{mn}(U). \quad (l, j \text{ で和をとらない})$$

ここで適当に規格化したスピン j 表現の $\text{su}(2)$ 生成子 $\tau^{(j)}$ は

$$\tau_i^{(j)} \tau_i^{(j)} = -j(j+1) \mathbb{1}, \quad \therefore (\tau_i^{(j)})_{m''m'} (\tau_i^{(j)})_{m'n} = -j(j+1) \delta_{m''n}$$

を満たすので (Casimir 演算子^{*105}) [2, p.247], 固有方程式

$$|\vec{J}_l|^2 \psi(U) = j(j+1) \psi(U)$$

を得る．ここから $\vec{J}_l = (8\pi\hbar G) \vec{J}_l$ の大きさの固有値 (5.11) が得られる．

この導出では $\vec{J}_l$ の作用 (5.9) だけを利用し，それが $\text{SU}(2)$ 群の生成子であることは，あからさまには用いていない．むしろこの結果から $\vec{J}_l$ は角運動量と同じく $\text{su}(2)$ 代数の生成子であって，その 2 乗は Casimir 演算子と見て固有値 $j_l(j_l+1)$ に置き換えれば良いという，本文の直観的解釈を正当化できる．また以上は 5.2.2 項で構成するスピン・ネットワーク状態が，式 (5.27) の箇所で主張されているように，実際に長さの演算子 L_l の固有状態であることの証明となっている．

■ $\hbar G$ が長さの次元を持つこと (脚注*104) の確認 局所慣性系の座標を X^i としてトライアドは $e_a^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^a}$ と表されるので，座標 x^a の次元に依らず，1 形式としてのトライアド $e^i = e_a^i dx^a$ の次元は $[e^i] = L$ (長さ) である．次にねじれの定義式 $\text{De}^i = de^i + \omega_j^i \wedge e^j$ において， $de^i = (\partial_a e_b^i) dx^a \wedge dx^b$ のように外微分は微分形式の次元を換えない： $[\text{de}^i] = [e^i]$ ．これと第 2 項の和が定義されるには，微分形式としての接続 ω_j^i は無次元でなければならない．その曲率 $F_j^i = d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k$ は再び第 1 項が ω_j^i と同じく無次元，第 2 項も無次元なので，全体として無次元である．まとめると，

$$[e^i] = L, \quad [\omega_j^i] = 1, \quad [F_j^i] = 1.$$

なお微分形式は，したがってその次元は，座標 x^a の選択には依らない．ここで任意の次元を持つ座標 x^a を用いて微分形式を

$$e^i = e_a^i dx^a, \quad \omega_a^{ij} = \omega_a^{ij} dx^a, \quad F^{ij} = \frac{1}{2} F^{ij}_{ab} dx^a \wedge dx^b$$

と書くと，その成分の次元は $[e_a^i] = L \cdot [x]^{-1}$, $[\omega_a^{ij}] = [x]^{-1}$, $[F^{ij}_{ab}] = [x]^{-2}$ となる．

これを踏まえて作用 (3.98) を

$$16\pi GS = \int \epsilon_{ijk} e^i \wedge F^{jk}[\omega] = \frac{1}{2} \int \epsilon_{ijk} e_a^i \wedge F^{jk}_{bc}[\omega] \epsilon^{abc} d^3x$$

と書くと，最左辺は $\hbar G$ の次元を持つのに対し，第 2 辺と第 3 辺の次元

$$[e^i][F^{jk}] = L, \quad [e_a^i][F^{jk}_{bc}][x]^3 = L$$

はいずれも長さである．したがって $\hbar G$ は長さの次元を持つ．

^{*105} 実際 Pauli 行列の反交換関係 $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \mathbb{1}$ を思い出すと， $j = 1/2$ 表現に対する生成子 (1.40): $\tau_i = -\frac{i}{2} \sigma_i$ はこの関係を満たしていることが直接確かめられる．なお U_l が $\text{SU}(2)$ 行列であることに対応して， τ_i は $j = 1/2$ 表現の生成子 (1.40) である．

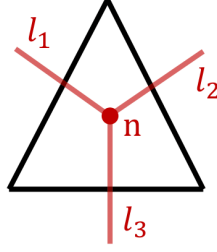


図 56 結節点 n に接続するリンク l_1, l_2, l_3 に双対な線分を辺に持つ三角形

5.2.2 スピン・ネットワーク

ゲージ

境界 Hilbert 空間の定義は完了していない．理論は $SU(2)$ ゲージ変換 (5.4) の下で不変でなければならない．我々はまだこの局所不変性を考慮に入れていない．(Maxwell 理論では，ゲージ不変性と Gauss の法則を考慮するのを怠ると，2 つではなく 3 つの光子の偏極を定義することになる．) ゲージ不変な状態は

$$\psi(U_l) = \psi(\Lambda_{s_l} U_l \Lambda_{t_l}^{-1}), \quad \text{ここに } \Lambda_n \in SU(2) \quad (5.12)$$

を満たさねばならない．等価的に，境界グラフの全ての結節点 n に対して

$$\vec{C}_n \psi = 0 \quad (5.13)$$

であり，ここに $\vec{C}_n$ は結節点 n における $SU(2)$ 変換の生成子：

$$\vec{C}_n = \vec{L}_{l_1} + \vec{L}_{l_2} + \vec{L}_{l_3} = 0; \quad (5.14)$$

l_1, l_2 および l_3 は結節点 n を発するリンクである．[本稿次項で補足する．図 56 も見よ]．この関係は閉包拘束 (closure constraint) またはゲージ拘束 (gauge constraint) または **Gauss** 拘束 (Gauss constraint) と呼ばれる．

この式は重要で直接的な幾何学的解釈を持つ：3 本の線分 s_1, s_2, s_3 に囲まれた，境界の三角形を考えよ．これらは三角形の中央の結節点 n で合流する 3 本のリンク l_1, l_2, l_3 の双対である．我々は $\vec{L}_l$ が三角形の辺 (side) を表すベクトルと解釈できることを見た．このとき式 (5.14) はまさに，三角形が閉じることを表す関係である！[本稿次項で補足する.]

式 (5.13) が満たされる部分空間 $\mathcal{H}_\Gamma$ は真部分空間であり (何故なら $SU(2)$ はコンパクトである)，それを $\mathcal{K}_\Gamma$ と呼ぶ．[文字 $\mathcal{K}$ は運動学的な空間を意味すると推察される．] 我々はそれを

$$\mathcal{K}_\Gamma = L_2 [SU(2)^L / SU(2)^L]_\Gamma \quad (5.15)$$

と書く [4.1.1 項も見よ]．ここに L は Γ のリンクの本数であり， N は Γ の結節点の個数であり，添字 Γ は $SU(2)^L$ 変数上の $SU(2)^N$ ゲージ変換 (5.4) のパターンが，グラフの構造によって指定されることを表す．この空間の構造を調べよう．

長さの演算子 L_l はゲージ不変である ($\vec{L}_l$ はベクトルとして変換する)．したがってそれらはゲージ不変な Hilbert 空間 $\mathcal{K}_\Gamma$ 上でよく定義されている．著しいことに，それらは以下で示すように，完全な交換する組を成す．すなわち， $\mathcal{K}_\Gamma$ の基底はこれらの演算子の規格化された固有ベクトルによって与えられ，我々はそれら

を $|j_l\rangle$ と表す．この基底の要素はしたがって，グラフの各リンク l にスピン j_l を充てることで定まる．各リンクにスピンを充てられたグラフは“スピン・ネットワーク”と呼ばれる．スピン・ネットワークのグラフのリンクは，スピンによって“色付けされている (colored)”と言う．スピン・ネットワーク状態 $|j_l\rangle$ は $\mathcal{K}_\Gamma$ の基底を成す．これはスピン・ネットワーク基底と呼ばれ，幾何学の量子状態を張る．このことを詳しく示そう．

スピン・ネットワーク基底

量子数 j_l は $\mathcal{K}_\Gamma$ の基底をラベルするのに充分であることを示そう．本パラグラフではかなり抽象的な方法でこれを行う．次のパラグラフにおいて，これらの状態のより具体的で明示的な構成を与える．

Peter–Weyl 定理の述べるところによれば， $SU(2)$ の関数と見た，Wigner 行列の行列要素 $D_{mn}^j(U)$ (第 1 章の補完を見よ) は，Haar 測度によって定義されるスカラー積に関して直交する．具体的には：

$$\int dU \overline{D_{m'n'}^{j'}(U)} D_{mn}^j(U) = \frac{1}{d_j} \delta^{jj'} \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (5.16)$$

であり，ここに $d_j = 2j + 1$ は表現 j の次元である．[文献 [20, § 4-2, § 7-7] に説明がある^{*106}.] したがって dU を不変測度として Hilbert 空間 $\mathcal{H} = L_2[SU(2), dU]$ において，Wigner 行列は直交基底 (因子 $1/d_j$ を別にすれば，これは正規直交基底) を成す．

言い換えると，Hilbert 空間 $L_2[SU(2)]$ は，Wigner 行列 $D^j(U)$ の行列要素が成す基底状態によって張られる，スピン j の有限次元の部分空間の和に分解できる．これらの空間の次元は，行列 $D^j(U)$ の要素 (entries) の個数 $(2j + 1)^2$ である．この行列はスピン j 表現の Hilbert 空間 $\mathcal{H}_j$ からそれ自身への写像である．あらゆるそのような写像は $\mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_j$ の要素と見なせる．

note 実際 $SU(2)$ 行列 U の表す回転の演算子を $D(U)$ とすると，Wigner 行列要素 $D_{mn}^j(U) \equiv \langle j, m | D(U) | j, m' \rangle$ はそのスピン j における表現行列である [3, p.261]. 特に $D_{mn}^j(U_l)$ はホロノミー U_l のスピン j 表現であり (式 (4.30) における $\omega = \omega^i \tau_i$ の生成子 τ_i をスピン j 表現のそれに置き換えれば得られる)，式 (5.4), (5.12) より

$$D_{mn}^j(U_l) \rightarrow D_{mm'}^j(\Lambda_{s_l}) D_{m'n'}^j(U_l) D_{n'n}^j(\Lambda_{t_l}^{-1}) \quad (98)$$

と変換する．これがここで言及されている写像と考えられる．式 (5.63) の箇所も見よ．

したがって Peter–Weyl 定理は

$$L_2[SU(2)] = \oplus_j (\mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_j) \quad (5.17)$$

であると述べる．これはスピンおよび，その範囲がスピンで決まる磁気量子数 (magnetic number) によってラベルされる基底があることの，別の言い方に他ならない．

我々の場合には，多くのそのような空間があり，したがって境界状態空間は構造

$$L_2[SU(2)]^L = \otimes_l [\oplus_j (\mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_j)] = \oplus_{j_l} \otimes_l (\mathcal{H}_{j_l} \otimes \mathcal{H}_{j_l}) \quad (5.18)$$

を持つ [最右辺で $\mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_{j_l}$ と修正した]．リンクに関係する 2 つの Hilbert 空間は自然にリンクの 2 つの端点に属する，何故なら各々は 1 つの端点におけるゲージ変換に従って変換するからである．[そこで図 57 のように Hilbert 空間 (5.17) をリンクに付随させると，境界状態空間として式 (5.18) 第 2 辺を得る.]

^{*106} 有限群の表現の直交性関係は文献 [9, p.19] で確認済みである．

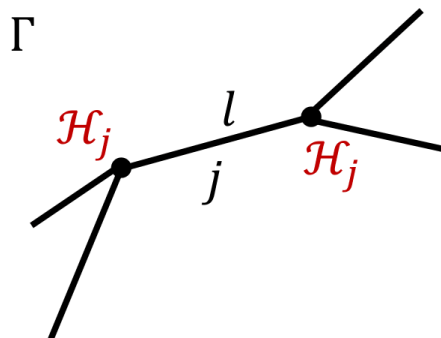


図 57 リンクに付随する Hilbert 空間 (5.17)

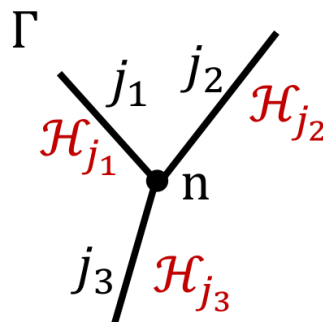


図 58 式 (5.19) における結節点 n に付随する Hilbert 空間 $\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_{j'}, \mathcal{H}_{j''}$

そこでゲージ変換の下で一斉に変換する, 同じ結節点に付随する Hilbert 空間を一緒にまとめよう.

$$L_2[\mathrm{SU}(2)^L] = \oplus_{ij} \otimes_{\mathfrak{n}} (\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_{j'} \otimes \mathcal{H}_{j''}) \quad (5.19)$$

が得られ、ここに j, j', j'' は結節点 n から発する [リンクの] スピンである. [図 58 のように, 以降それらを j_1, j_2, j_3 とも書く.] 次に, ゲージ不変な状態の空間を求めたい. そのために, 同じ結節点において変換するあらゆる空間の組の不変な部分に制限せねばならない.

$$L_2[\mathrm{SU}(2)^L/\mathrm{SU}(2)^N] = \oplus_{i_1} \otimes_{\mathfrak{g}} \mathrm{Inv}_{\mathrm{SU}(2)}(\mathcal{H}_{i_1} \otimes \mathcal{H}_{i_2} \otimes \mathcal{H}_{i_3}) \quad (5.20)$$

を得る．ところが $\text{Inv}_{\text{SU}(2)}(\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3})$ は，3つのスピンの和が整数であって，かつ3つのスピンの和が偶数であるようなものを表す．

$$|j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2 \quad (5.21)$$

〔等号を補った〕を満たさない限り存在しない*107. この条件は三角不等式 (*triangular inequality*) または Mandelstam (マンデルシュタム) 不等式と呼ばれる. [図 59 を見よ. $j_1 + j_2 + j_3 \in \mathbb{N}$ と合わせて, これらは Clebsch–Gordan 条件 (1.29) に他ならない.] これは状態が存在する条件である. それが満たされるならば, 不変空間は 1 次元である [脚注*107 のスピン・ゼロ表現]:

$$\text{Inv}_{\text{SU}(2)}(\mathcal{H}_{i_1} \otimes \mathcal{H}_{i_2} \otimes \mathcal{H}_{i_3}) = \mathbb{C}. \quad (5.22)$$

したがって

$$L_2[\mathrm{SU}(2)^L/\mathrm{SU}(2)^N] = \oplus_{ij} \otimes_{\mathfrak{n}} \mathbb{C} \quad (5.23)$$

であり [結節点 n に関する直積を補った], ここに和は三角関係を満たす j_l に制限される.

スピンは結節点を囲む三角形の長さであること [式 (5.11)] を思い出そう：三角恒等式は三角形の辺 (side) の長さ L_1, L_2, L_3 が三角不等式

$$|L_1 - L_2| \leq L_3 \leq L_1 + L_2 \quad (5.24)$$

*107 角運動量の合成の量子論において、2つの表現のテンソル積を $\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \mathcal{H}_j$ の形の表現にわたる和で書いたことを思い出す [文献 [3, pp.294–296] (とそのノート) を見よ]. したがって $\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3} = \left(\bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \mathcal{H}_j \right) \otimes \mathcal{H}_{j_3} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \bigoplus_{k=|j-j_3|}^{j+j_3} \mathcal{H}_k$ [最右辺に j にわたる直和を補った]. これは不変な空間, すなわちスピン・ゼロ表現 [式 (1.28), 式 (1.57) の箇所を見よ] が, 3つの表現の積に1度だけ現れ得ること, また三角不等式が満たされるときに現れることを意味している [本稿次項で補足].

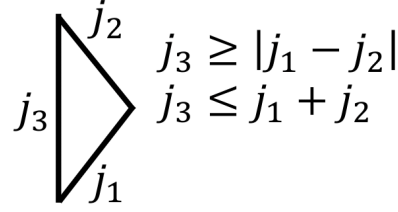


図 59 三角不等式 (triangular inequality)

を満たすことを述べている [等号を補った]. これはまさに幾何学的な三角形が満たす関係である. 幾何学は量子幾何学から見事に立ち現れる.

ループ量子重力における一般的な量子状態はスピン・ネットワーク状態の重畳

$$|\psi\rangle = \sum_{j_i} c_{j_i} |j_i\rangle \quad (5.25)$$

である.

まとめると, スピン・ネットワーク状態 $|j_i\rangle$ は:

- 全ての長さの演算子の固有状態である.
- ゲージ不変な Hilbert 空間を張る.
- 単純な幾何学的解釈を持つ:

それらは境界のリンク [に双対な線分] がどれだけ長いかを述べているに過ぎない.

群上の調和解析

$\psi(U_l)$ 表現における状態 $|j_l\rangle$ を書こう: すなわち, スピン・ネットワーク波動関数

$$\psi_{j_l}(U_l) = \langle U_l | j_l \rangle \quad (5.26)$$

を計算する. 言い換えると, 群の表現において, 長さの演算子 L_l に対する固有方程式

$$L_l \psi_{j_l}(U_l) = L_{j_l} \psi_{j_l}(U_l) \quad (5.27)$$

を陽に解く.

Peter-Weyl 定理は群上の Fourier 変換の概念を供する. 状態 $\psi(U)$ は Wigner 行列の基底における状態の線形結合

$$\psi(U) = \sum_{j,m,n} c_{jmn} D_{mn}^j(U) \quad (5.28)$$

で書ける [式 (5.17) に対応^{*108}]. 我々の場合には状態は L 個の群要素 $\psi(U_l)$ の関数であり, したがってそれを

$$\psi(U_l) = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_L \\ m_1, \dots, m_L \\ n_1, \dots, n_L}} c_{j_1 \dots j_L m_1 \dots m_L n_1 \dots n_L} D_{m_1 n_1}^{j_1}(U_{l_1}) \dots D_{m_L n_L}^{j_L}(U_{l_L}) \quad (5.29)$$

^{*108} 実際, 正規直交性 (5.16) から展開係数を定められるため, これは Peter-Weyl 定理と同内容である [19, 付録 H].

と書ける [式 (5.18) に対応]。結節点における $SU(2)$ の下で不変な状態は、結節点 n における変換 Λ_n を作用させたとき、不変でなければならない。これは結節点で合流する 3 本のリンクに関する 3 つの群要素に作用する。Wigner 行列は表現行列なので [ここではホロノミー U_l のスピン j 表現]、ゲージ変換は 3 つの対応する添字に作用する。したがって状態が不変であるためには、同じ結節点に対応する 3 つの添字に対する群の変換を受けたとき、 $C_{j_1 \dots j_L m_1 \dots m_L n_1 \dots n_L}$ は不変でなければならない。[本稿次項で、状態 (5.34–35) の不変性と合わせて説明する。] (規格化の違いを除き) 3 つの $SU(2)$ 表現に属する 3 つの添字を持つ対象がただ 1 つ存在する：それは Wigner の $3j$ 記号と呼ばれ、

$$\iota^{m_1 m_2 m_3} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

と書かれる [式 (5.22) に対応]。優れた手引きとして Haggard (2011) を見よ。すなわち、3 つの表現の 3 つ組のテンソル積におけるあらゆる不変状態は、規格化された状態

$$|i\rangle = \sum_{m_1, m_2, m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \otimes |j_3, m_3\rangle \quad (5.31)$$

に比例する。 $3j$ 記号は Clebsch–Gordan 係数の対称な形である；それらは Landau and Lifshitz (1959) の第 14 章で説明されている；それらは Mathematica によって明示的に与えられる (`ThreeJSymbol[{j1, m1}, {j2, m2}, {j3, m3}]`)。量子重力の文献では、Wigner の $3j$ 記号は通常、3 価の“結節因子 (intertwiners)”と呼ばれる。[以上、本稿次項で補足する。]

したがってゲージ不変な状態は

$$\psi(U_l) = \sum_{j_1, \dots, j_L} C_{j_1, \dots, j_L} \iota_1^{m_1 m_2 m_3} \dots \iota_N^{m_L - 2 m_L - 1 m_L} D_{m_1 n_1}^{j_1}(U_{l_1}) \dots D_{m_L n_L}^{j_L}(U_{l_L}) \quad (5.32)$$

の形を持たねばならず [式 (5.20) に対応]、ここに全ての添字は結節因子 ι と Wigner 行列 D の間で縮約される。[明示されていない添字 n たちを縮約する方法と合わせて、式 (5.32) のゲージ不変性を本稿次項で説明する。] これらの添字を縮約する方法は、グラフ Γ の構造によって指定される。各リンク l に対して 1 つの行列 D が、また各結節点 n に対して 1 つの $3j$ 記号 ι がある。結節点の添字は隣接するリンクの添字と縮約される。[こうして結節因子はその名の通り、結節点に接続するリンクを言わばその点で“繋ぎとめる”役割を果たす。]

したがって一般的なゲージ不変な状態

$$\psi(U_l) = \sum_{j_l} C_{j_l} \psi_{j_l}(U_l) \quad (5.33)$$

[式 (5.25) に対応] は、各リンクに関するスピンドラベルされた直交状態

$$\psi_{j_l}(U_l) = \iota_1^{m_1 m_2 m_3} \dots \iota_N^{m_L - 2 m_L - 1 m_L} D_{m_1 n_1}^{j_1}(U_{l_1}) \dots D_{m_L n_L}^{j_L}(U_{l_L}) \quad (5.34)$$

の線形結合である (添字 n を結節点 n と混同しないように)。これがスピン・ネットワーク波動関数である。それをより簡単な形

$$\psi_{j_l}(U_l) = \langle U_l | j_l \rangle = \bigotimes_n \iota_n \cdot \bigotimes_l D^{j_l}(U_l) \quad (5.35)$$

に書くこともある。これが群の表現における 3 次元のスピン・ネットワーク状態である。

5.2.2 項について

■ゲージ不変性が拘束条件 (5.13) の形に書けること 各リンク l に関するゲージ変換に伴い、状態は

$$\psi(U_l) \rightarrow \psi(\Lambda_{sl} U_l \Lambda_{tl}^{-1}), \quad \Lambda_n \in \text{SU}(2)$$

と変化する (式 (5.12)). すなわち各リンクはその両端にゲージ変換の作用を及ぼす. これを結節点から見ると, そこに接続している各リンク線から寄与が来る. そこで等価的に各結節点でのゲージ変換に対して, 状態が不変に留まることを要求できる.

ただし結節点 n に作用する, どのリンクに由来するゲージ関数 Λ_n も共通であることに注意せねばならない. 実際ホロノミーのゲージ変換 $U_\gamma \rightarrow \Lambda(x_f) U_\gamma \Lambda^{-1}(x_i)$ は, 物質場の局所ゲージ変換

$$\varphi'(x) = \Lambda(x) \varphi(x), \quad \therefore \varphi'(x_f) = \Lambda(x_f) \varphi(x_f) = \Lambda(x_f) U_\gamma \varphi(x_i) = [\Lambda(x_f) U_\gamma \Lambda^{-1}(x_i)] \varphi'(x_i)$$

から見出されたことを思い出そう (式 (4.44) のノート参照). したがって例えば始点 x_i を固定し, 終点 x_f の異なる様々な経路 γ を考えた場合にも, 始点に作用するゲージ関数 $\Lambda^{-1}(x_i)$ は変わらない.

そこで簡単のために n に接続している 3 本のリンク l_1, l_2, l_3 が全て n を始点として外向きに出ている場合を考え, n におけるゲージ関数を $\Lambda_n^{-1} = e^{t^j \tau_j}$ と書こう (t^j は無限小パラメータ). すると状態は

$$\psi(U_{l_1}, U_{l_2}, U_{l_3}, \dots) \rightarrow \psi(U_{l_1} e^{t^j \tau_j}, U_{l_2} e^{t^j \tau_j}, U_{l_3} e^{t^j \tau_j}, \dots)$$

と変換する. ここで状態が不変に留まることを要求すると,

$$0 = \frac{d}{dt^j} \psi(U_{l_1} e^{t^j \tau_j}, U_{l_2} e^{t^j \tau_j}, U_{l_3} e^{t^j \tau_j}, \dots) \Big|_{t^j=0} \sim (L_{l_1}^j + L_{l_2}^j + L_{l_3}^j) \psi(U) : (5.13)$$

を得る. ただし最後の変形では各 L_l^j が異なるリンクに作用することに注意して, 式 (5.9–10) を用いた.

なお 7.5.2 項では $\vec{L}_l$ がゲージ変換の生成子であることと結節因子のゲージ不変性から, 同様の閉包拘束 $\sum_l \vec{L}_l = 0$ を得ている.

■拘束 (5.13) は三角形が閉じる条件であること (p.102) について そのように解釈する場合には, 式 (1.9) で四面体の面積ベクトルを考えたように, 線分の双対として法線方向の“面積ベクトル” $\vec{L}_l$ を採らねばなるまい. 実際, ベクトルの大きさ $|\vec{L}_l|$ は線分の長さに等しい. そこで $\triangle P_1 P_2 P_3$ の辺 (side) を成す向き付けされた線分 $\overrightarrow{P_1 P_2}, \overrightarrow{P_2 P_3}, \overrightarrow{P_3 P_1}$ に対し, それらを時計回りに 90° 回転させた法線ベクトル $\vec{L}_{l_3}, \vec{L}_{l_1}, \vec{L}_{l_2}$ を双対として充てると, $\vec{L}_l$ たちの和は三角形が閉じる条件

$$\overrightarrow{P_1 P_2} + \overrightarrow{P_2 P_3} + \overrightarrow{P_3 P_1} = 0$$

によりゼロになる.

■脚注*107 (教科書 p.104) について

$$\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3} = \left(\bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \mathcal{H}_j \right) \otimes \mathcal{H}_{j_3} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \bigoplus_{k=|j-j_3|}^{j+j_3} \mathcal{H}_k$$

において, 最右辺に自明な表現 $k=0$ が含まれるのは, 和の下限が $k=|j-j_3|=0$ となるが j の値 $j=j_3$ が, j に関する和に含まれる場合に限られる. これは 2 つのスピンの j_1, j_2 を合成してスピン $j=j_3$ が得られることと等価であり, その条件は Clebsch–Gordan 条件 (1.29) で与えられる. 特に三角不等式に関しては, 和の範囲 $|j_1-j_2| \leq j \leq j_1+j_2$ に $j=j_3$ が含まれねばならないことから, 改めて理解できる.

■3j 記号 (5.30) の不変性について 本文中 (p.105) で紹介されている Landau and Lifshitz (1959) の第 14 章にしたがって、本稿の付録 D で 3j 記号について詳しくまとめる。以下では要点をいくつか書き出すに留める。同文献では、3j 記号は次のように導入されている。すなわち基底 $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \otimes |j_3, m_3\rangle$ によって張られる、3 つのスピンの直積空間の、SU(2) 変換に対する不変部分空間 (5.22):

$$\text{Inv}_{\text{SU}(2)}(\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3}) = \mathbb{C}$$

におけるベクトルを式 (5.31):

$$|i\rangle = \sum_{m_1, m_2, m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \otimes |j_3, m_3\rangle$$

の形に書いて、3j 記号を定義する。したがって Clebsch–Gordan 条件が満たされない限り、3j 記号はゼロである。またこのとき 3j 記号は列の巡回置換に関して対称であり、互換に対しては単に符号因子 $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$ が掛かるだけとなるように定義できる。したがって後で 3j 記号を結節因子 $\iota^{m_1 m_2 m_3}$ として充てるとき、ダミー添字の順番は重要でない。さらにこのとき、Clebsch–Gordan 係数との関係は

$$\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j m \rangle = (-1)^{j_1-j_2+m} \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix}$$

であることを導ける (文献 [3, p.286] にも同じ式がある)。

さて、SU(2) 行列 U の表す回転の演算子 $D(U)$ の作用に伴う状態の変化

$$|j, m\rangle \rightarrow D(U) |j, m\rangle = \sum_{m'} |j, m'\rangle \langle j, m' | D(U) | j, m \rangle = \sum_{m'} |j, m'\rangle D_{m'm}^j(U)$$

の下で [3, p.263], 式 (5.31) のベクトルは

$$|i\rangle \rightarrow \sum_{\substack{m_1, m_2, m_3 \\ m'_1, m'_2, m'_3}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} D_{m'_1 m_1}^{j_1}(U) D_{m'_2 m_2}^{j_2}(U) D_{m'_3 m_3}^{j_3}(U) |j_1, m'_1\rangle \otimes |j_2, m'_2\rangle \otimes |j_3, m'_3\rangle$$

と変化するので、状態が不変に留まるには、3j 記号は 3 つの添字に作用する群の変換に対する不変性

$$\sum_{m_1, m_2, m_3} D_{m'_1 m_1}^{j_1}(U) D_{m'_2 m_2}^{j_2}(U) D_{m'_3 m_3}^{j_3}(U) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix}$$

を満たさねばならない。

以降の便宜のため、ここで文献 [2, § 5.3.6, § 6.2] や 7.5.2 項にならい、添字を上下に分けて Wigner 行列要素を $D_{mn}^j(U) \rightarrow D^j(U)^m_n$ と書こう。すると

$$\sum_{m_1, m_2, m_3} D^{j_1}(U)^{m'_1}_{m_1} D^{j_2}(U)^{m'_2}_{m_2} D^{j_3}(U)^{m'_3}_{m_3} \iota^{m_1 m_2 m_3} = \iota^{m'_1 m'_2 m'_3}.$$

また例えば

- 基底 $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \otimes |j_3, m_3\rangle$ の張る空間 $\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3}^*$
- 基底 $\langle j_1, m_1| \otimes \langle j_2, m_2| \otimes |j_3, m_3\rangle$ の張る空間 $\mathcal{H}_{j_1}^* \otimes \mathcal{H}_{j_2}^* \otimes \mathcal{H}_{j_3}$

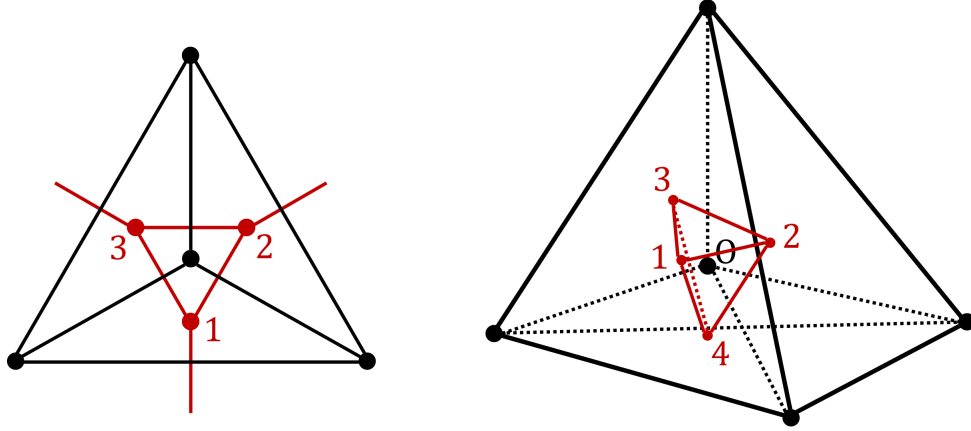


図 60 結節点に接続するリンクが全て外向き (または内向き) となる向き付けを選べない三角形分割の例. 結節点とリンクを赤色で示した.

の不変ベクトルを, 同様にそれぞれ

$$|i\rangle = \sum_{m_1, m_2, n_3} \iota^{m_1 m_2}_{n_3} |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \otimes \langle j_3, m_3|, \quad |i\rangle = \sum_{m_3, n_1, n_2} \iota^{m_3}_{n_1 n_2} \langle j_1, m_1| \otimes \langle j_2, m_2| \otimes |j_3, m_3\rangle$$

と書こう. すると添字 n に作用する行列は複素共役 $[D^j(U)^{n'}_n]^* = D^j(U^{-1})^n_{n'}$ となるので, 展開係数は不変性

$$\begin{aligned} \sum_{m_1, m_2, n_3} D^{j_1}(U)^{m'_1}_{m_1} D^{j_2}(U)^{m'_2}_{m_2} D^{j_3}(U^{-1})^{n_3}_{n'_3} \iota^{m_1 m_2}_{n_3} &= \iota^{m'_1 m'_2}_{n'_3}, \\ \sum_{m_3, n_1, n_2} D^{j_1}(U^{-1})^{n_1}_{n'_1} D^{j_2}(U^{-1})^{n_2}_{n'_2} D^{j_3}(U)^{m'_3}_{m_3} \iota^{m_3}_{n_1 n_2} &= \iota^{m'_3}_{n'_1 n'_2} \end{aligned} \quad (99)$$

を満たさねばならない. 左辺は通常のテンソルの座標変換則とよく似た形をしている. このように添字 m, n の上下で, 不変テンソルに対する $SU(2)$ の作用の違いを明確に区別できる.

スピン・ネットワーク状態 (5.34-35) をゲージ不変にするためには以下で見るように, 結節点から射出するリンクと結節点に入射するリンクを持つ結節点には, 2 種類の添字が混在した結節因子を充てる必要がある. しかるに三角形分割の全ての結節点において, 接続するリンクが射出する向きのみ, あるいは入射する向きのみを持つように向き付けを選ぶことは, 一般には不可能である. 実際そのような向き付けの試みが破綻するような簡単な反例が直ちに見つかる. 例えば 2 次元において図 60 の左側のように三角形が 3 つの三角形 1, 2, 3 に分割に分割されている場合を考えよう. 結節点 1 に接続する 3 本のリンクに共通の向き, 例えば外向き (結節点 1 から射出する向き) を与える. このとき結節点 2 または 3 に接続する 3 本のリンクが全て同じ向きを持つためには, それらは全て内向き (結節点 2 または 3 に入射する向き) でなければならない. ところが結節点 2 と 3 を結ぶリンクの向きに関して, この条件は両立しない. したがって結節点 2, 3 の少なくとも一方では, リンクの向きが混在することを受け容れなければならない. 3 次元空間においても, 図 60 の右側のような四面体の 4 つの四面体への分割を用いて, 同様の反例を構成できる. ある結節点 4 に接続する 4 本のリンクを四面体の外向きに採ると, 残り 3 つの結節点 1, 2, 3 に接続するリンクを全て四面体の内向きにするには, 3 つの結節点の間のリンクで利害が対立する.

そこで上式 (99) を満たす, 2 種類の添字を持つ不変テンソル $\iota^{m_1 m_2}_{n_3}, \iota^{m_3}_{n_1 n_2}$ を構成することに興味が持

たれる．実際，そのようなテンソルを定義できる [2, p.200]．以下では磁気添字の上げ下げに式 (5.45), (7.76) の $g_{mm'}$ を用いると本書にあること，および本文 (p.105) で紹介されている Haggard (2011) の 3.4.2 項に着想を得て，適切な結節因子を構成できることを説明する．

まず式 (5.31) の Hermite 共役をとると，結節因子 $\iota_{m_1 m_2 m_3}$ は $\iota^{m_1 m_2 m_3}$ の複素共役であることが分かる．ところが $3j$ 記号 $\iota^{m_1 m_2 m_3}$ は実数に選べるので (Landau and Lifshitz (1959) の第 14 章)，それらは値としては等しい： $\iota_{m_1 m_2 m_3} = \iota^{m_1 m_2 m_3}$ ．(同じ結論が Haggard (2011) の 3.4.2 項にもある．)

次に結節因子の特別な値 (5.45) を，ここでは式 (5.30) に合わせて上付き添字で

$$g^{mn} = \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} j & j & 0 \\ m & n & 0 \end{pmatrix} = \delta^{m,-n} (-1)^{j-m}$$

と書こう (第 2 の等号は D.1 節の式 (154) による)．これはスピン j で色付けされた 2 本の射出するリンクを持つ (2 価の) 結節点の結節因子と見なせる．2 本のリンクが入射する場合の結節因子 g_{mn} は，値としては g^{mn} に等しい．($g^{mn} = g_{mn}$ はやはり Haggard (2011) の 3.4.2 項にも見て取れる．) するとそれらは

$$g^{mm'} g_{m'm''} = (-1)^{2j} \delta_{m''}^m, \quad g_{mm'} g^{m'm''} = (-1)^{2j} \delta_m^{m''}$$

を満たすので (以降しばらく和の記号は省略)，符号の違いを除いて互いに逆行列となっている．符号の曖昧さは $3j$ 記号におけるスピン 0 の列の位置の任意性に起因していると考えれば，納得がいく．また一般には g_{mn} と g_{nm} には符号の違いがある．実際 g_{mn} のゼロでない値に対して

$$g_{-m,m} = (-1)^{j+m} = (-1)^{2m} (-1)^{j-m} = (-1)^{2m} g_{m,-m}.$$

他方で $3j$ 記号の対称性 (D.1 節の式 (149)) より $g_{-m,m} = (-1)^{2j} g_{m,-m}$ なので， $(-1)^{2j} = (-1)^{2m}$ であることになる．実際 j が整数ならば m も整数なので $(-1)^{2j}$ と $(-1)^{2m}$ はともに $+1$ である． j が半整数のとき m も半整数なので $2j$ と $2m$ はともに奇数であり， $(-1)^{2j}$ と $(-1)^{2m}$ はともに -1 である．

このとき g_{mn} との縮約で $3j$ 記号の添字を

$$\iota^{m_1 m_2}_{n_3} = \iota^{m_1 m_2 m_3} g_{m_3 n_3}, \text{ etc.} \quad (100)$$

のように下ろすと，変換則が添字の位置によって適切に表される，式 (99) を満たす不変テンソルが得られる．これは座標変換則で定義されるテンソルの一般論と同じ事情による．実際，上式 (100) の例では確かに変換則

$$\begin{aligned} \iota^{m_1 m_2}_{n_3} &\rightarrow \iota^{m'_1 m'_2}_{n'_3} = \iota^{m'_1 m'_2 m} g'_{mn'_3} \\ &= \left[D^{j_1}(U)^{m'_1}_{m_1} D^{j_2}(U)^{m'_2}_{m_2} D^{j_3}(U)^m_{m'} \iota^{m_1 m_2 m'} \right] \left[D^{j_3}(U^{-1})^{m''}_m D^{j_3}(U^{-1})^{n_3}_{n'_3} g_{mn''n_3} \right] \\ &= D^{j_1}(U)^{m'_1}_{m_1} D^{j_2}(U)^{m'_2}_{m_2} D^{j_3}(U^{-1})^{n_3}_{n'_3} \iota^{m_1 m_2}_{n_3} \quad \left(\because D^{j_3}(U)^m_{m'} D^{j_3}(U^{-1})^{m''}_m = \delta_{m'}^{m''} \right) \end{aligned}$$

が帰結する．またもとの結節因子の不変性 $\iota^{m'_1 m'_2 m} = \iota^{m'_1 m'_2 m}, g'_{mn'_3} = g_{mn'_3}$ から，この変換の下での不変性 $\iota^{m'_1 m'_2}_{n'_3} = \iota^{m'_1 m'_2}_{n'_3}$ が成り立つ．さらにこのとき g_{mn} との縮約で全ての添字を下ろした量

$$\begin{aligned} \iota_{m_1 m_2 m_3} &= g_{m_1 n_1} g_{m_2 n_2} g_{m_3 n_3} \iota^{n_1 n_2 n_3} \\ &= (-1)^{j_1-m_1} \delta_{m_1,-n_1} \cdot (-1)^{j_2-m_2} \delta_{m_2,-n_2} \cdot (-1)^{j_3-m_3} \delta_{m_3,-n_3} \iota^{n_1 n_2 n_3} \\ &= (-1)^{j_1+j_2+j_3-(m_1+m_2+m_3)} \iota_{-m_1,-m_2,-m_3} \\ &= (-1)^{2(j_1+j_2+j_3)} \iota_{m_1 m_2 m_3} \\ &= \iota_{m_1 m_2 m_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} &= \begin{array}{c} j_1 \uparrow m_1 \\ \bullet \\ j_2 \swarrow m_2 \quad j_3 \searrow m_3 \end{array} \\
g^{mm'} &= \begin{array}{c} j \leftarrow m \quad \bullet \quad j \rightarrow m' \end{array} \\
g_{mm'} &= \begin{array}{c} j \rightarrow m \quad \bullet \quad j \leftarrow m' \end{array} \\
\begin{array}{c} j_1 \swarrow m_1 \\ \bullet \\ j_2 \swarrow m_2 \quad j_3 \leftarrow n_3 \end{array} &= \begin{array}{c} j_1 \swarrow m_1 \\ \bullet \\ j_2 \swarrow m_2 \quad j_3 \leftarrow m_3 \end{array} \begin{array}{c} j_3 \rightarrow m_3 \quad \bullet \quad j_3 \rightarrow n_3 \end{array}
\end{aligned}$$

図 61 結節因子のグラフ表記 (Haggard (2011) の 3.4.2 項)

は、確かに値としてはもとの結節因子 $\iota^{m_1 m_2 m_3}$ に一致している．ただし最後の等号では $3j$ 記号の定義される前提 $m_1 + m_2 + m_3 = 0, j_1 + j_2 + j_3 \in \mathbb{N}$ と、D.2 節の性質 (155) $\iota^{-m_1, -m_2, -m_3} = (-1)^{j_1 + j_2 + j_3} \iota^{m_1 m_2 m_3}$ を用いた．

結節因子 (5.30), g^{mn}, g_{mn} の定義式 (5.45) および上式 (99) は、直観的には図 61 のようなグラフで表せる．

結局のところ幸い、以下では結節因子の具体的な構成はさほど問題にならず、適当な結節因子を構成できることさえ納得できれば充分である．なお我々は既に結節因子の具体例を見ている．1.7.2 項の演習 1.9 で示したように、 $(\sigma_i)^{AB}$ は表現 $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes 1$ の不変テンソルである．したがってそれはスピン $j = 1/2, 1/2, 1$ で色付けされた 3 本のリンクの結節因子である．

■スピン・ネットワーク状態 (5.34–35) のゲージ不変性——辺 e に終点から始点へ逆行するホロノミー U_e を充てること 向き付けされた辺 e に充てる群要素 e として、始点 s_e から終点 t_e に向かうホロノミーとその逆行列のいずれを選ぶことも可能であり、一方の選択を積極的に優先する理由はアプリアリにはない．しかしながら 2 通りの選択は異なる理論を定義する．以下ではホロノミーの向きの違いが、スピン・ネットワークの結節因子を定義する添字の違いに反映されることを確認する．次いで 3 次元の理論においてスピン表示の頂点振幅の計算結果が $6j$ 記号 (6.8) となり、したがって正しい古典的極限 (5.52–53) が再現されるのは、辺 e に終点から始点へ逆行するホロノミー U_e を充てた場合であることを示す．こうして共変な理論における遷移振幅の計算は、ホロノミーの好ましい向きを選び出して理論を定義することを動機付ける．

まず辺 e に充てる群要素 U_e を始点から終点へ向かうホロノミーとする解釈は、連続的な変数と離散的な変数の対応付け (4.30), (7.6): $U_e = \text{Pe}^{\int_s \omega}$ と整合する．しかしながら式 (4.44) のノートで見たように、そのゲージ変換則は式 (5.4): $U_e \rightarrow \lambda_{s_e} U_e \lambda_{t_e}^{-1}$ と比べて、始点と終点の因子が逆になる．他方で群要素 U_e を終点から始点へ逆行するホロノミーと解釈した場合、その変換則は式 (5.4) と整合する．この違いはスピン・ネットワーク状態をゲージ不変に留めるために、結節点に充てねばならない結節因子の違いに反映される．以下ではこのことの確認を通じて、スピン・ネットワーク状態のゲージ不変性を説明する．

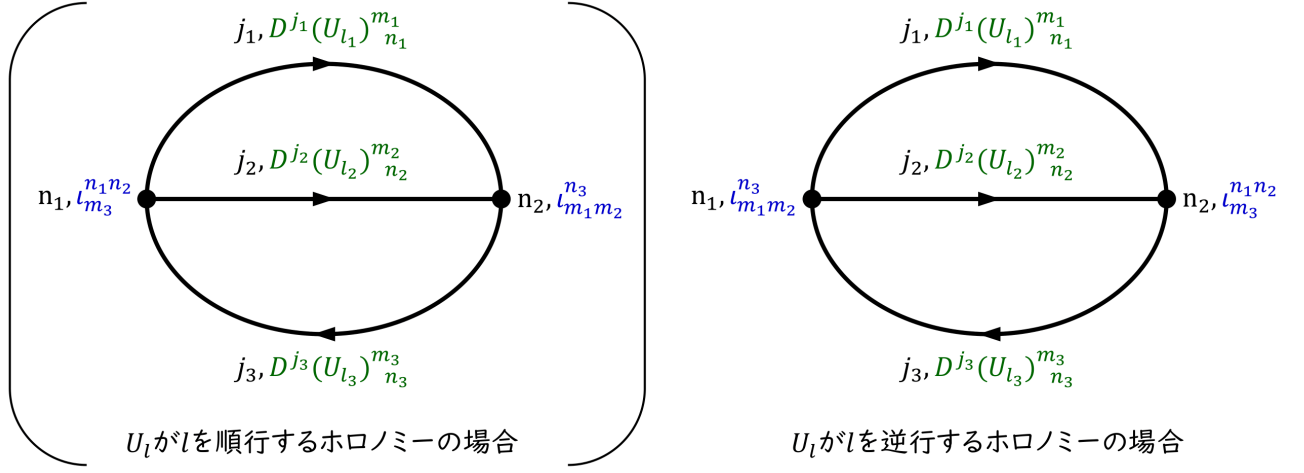


図 62 文字 θ の形をしたスピン・ネットワークとその色付け $\{j_l\}$

U_l が l に沿って順行するホロノミーの場合 スピン $\{j_l\}$ の色付けが固定されたスピン・ネットワーク状態 (5.34–35) は次のように構成される [2, § 5.3.6, § 6.3]. まず式 (5.29) に従い, 各リンク l に Wigner 行列の要素 $D^{j_l}(U_l)^{m_n}$ を充てる. これはホロノミー U_l のスピン j_l 表現である. 次に U_l を l に沿って順行するホロノミーと解釈する場合には, 結節点 n における結節因子として,

- 結節点 n から射出するリンクの持つ表現行列の第 2 添字 (下付き) $n, n', \dots$
- 結節点 n に入射するリンクの持つ表現行列の第 1 添字 (上付き) $m, m', \dots$

と縮約される因子 $l_{mm'}^{nn'}$ を採れば良い. すると例えば図 62 のようなグラフと色付け $\{j_l\}$ を持つスピン・ネットワークに対し, 状態 (5.34–35) は

$$\psi_{j_l}(U_l) = l_{m_3}^{n_1 n_2} D^{j_1}(U_{l_1})^{m_1}_{n_1} D^{j_2}(U_{l_2})^{m_2}_{n_2} D^{j_3}(U_{l_3})^{m_3}_{n_3} l_{m_1 m_2}^{n_3}$$

と書ける. ただし引き続き添字 m, n たちに関する和の記号を省略する.

実際このとき状態 $\psi_{j_l}(U_l)$ はゲージ不変となることを説明する. $\psi_{j_l}(U_l)$ の中で各ホロノミーは式 (98) の代わりに

$$D^j(U_l)^{m_n} \rightarrow D^j(\Lambda_{t_l})^m_{m'} D^j(U_l)^{m'}_{n'} D^j(\Lambda_{s_l}^{-1})^{n'}_n : (98)$$

と変換する. すなわち各リンクは, その両端の結節点に変換行列の作用を及ぼす. これを各結節点から見ると, その点に接続している全てのリンクに由来する行列要素が, 結節因子に掛かることになる. ところが結節因子はこの変換に対する不変量として定義されているので, スピン・ネットワーク状態全体はゲージ不変に留まることが保証される.

再び図 62 のスピン・ネットワークを例にとって, このことを具体的に示そう. 拘束条件 (5.13) のノートで説明したように, 同一の結節点に作用するゲージ変換は共通である. そこで 2 つの結節点 n_1, n_2 におけるゲージ変換を

$$\Lambda_{s_{l_1}} = \Lambda_{s_{l_2}} = \Lambda_{t_{l_3}} = \Lambda_{n_1}, \quad \Lambda_{t_{l_1}} = \Lambda_{t_{l_2}} = \Lambda_{s_{l_3}} = \Lambda_{n_2}$$

と書こう．するとスピン・ネットワーク状態のゲージ変換は

$$\begin{aligned}
\psi_{j_l}(U_l) &\rightarrow \iota_{m_3}^{n_1 n_2} \left(D^{j_1}(\Lambda_{n_2})^{m_1}_{m'_1} D^{j_1}(U_{l_1})^{m'_1}_{n'_1} D^{j_1}(\Lambda_{n_1}^{-1})^{n'_1}_{n_1} \right) \\
&\quad \times \left(D^{j_2}(\Lambda_{n_2})^{m_2}_{m'_2} D^{j_2}(U_{l_2})^{m'_2}_{n'_2} D^{j_2}(\Lambda_{n_1}^{-1})^{n'_2}_{n_2} \right) \\
&\quad \times \left(D^{j_3}(\Lambda_{n_1})^{m_3}_{m'_3} D^{j_3}(U_{l_3})^{m'_3}_{n'_3} D^{j_3}(\Lambda_{n_2}^{-1})^{n'_3}_{n_3} \right) \iota_{m_1 m_2}^{n_3} \\
&= \left(D^{j_1}(\Lambda_{n_1}^{-1})^{n'_1}_{n_1} D^{j_2}(\Lambda_{n_1}^{-1})^{n'_2}_{n_2} D^{j_3}(\Lambda_{n_1})^{m_3}_{m'_3} \iota_{m_3}^{n_1 n_2} \right) \\
&\quad \times D^{j_1}(U_{l_1})^{m'_1}_{n'_1} D^{j_2}(U_{l_2})^{m'_2}_{n'_2} D^{j_3}(U_{l_3})^{m'_3}_{n'_3} \\
&\quad \times \left(D^{j_1}(\Lambda_{n_2})^{m_1}_{m'_1} D^{j_2}(\Lambda_{n_2})^{m_2}_{m'_2} D^{j_3}(\Lambda_{n_2}^{-1})^{n'_3}_{n_3} \iota_{m_1 m_2}^{n_3} \right) \\
&= \iota_{m_3}^{n'_1 n'_2} D^{j_1}(U_{l_1})^{m'_1}_{n'_1} D^{j_2}(U_{l_2})^{m'_2}_{n'_2} D^{j_3}(U_{l_3})^{m'_3}_{n'_3} \iota_{m'_1 m'_2}^{n'_3} \quad (\because \text{上式 (99)}) \\
&= \psi_{j_l}(U_l)
\end{aligned}$$

となり，状態を不変に留める．

U_l が l に沿って逆行するホロノミーの場合 他方で U_l が l の終点から始点に逆行するホロノミーの場合には，結節点 n における結節因子として，

- 結節点 n から射出するリンクの持つ表現行列の第 1 添字 (上付き) $m, m', \dots$
- 結節点 n に入射するリンクの持つ表現行列の第 2 添字 (下付き) $n, n', \dots$

と縮約される因子 $\iota_{mm'}^{nn'}$ を採れば良い．すると再び図 62 のスピン・ネットワークに対し，状態 (5.34–35) は

$$\psi_{j_l}(U_l) = \iota_{m_1 m_2}^{n_3} D^{j_1}(U_{l_1})^{m_1}_{n_1} D^{j_2}(U_{l_2})^{m_2}_{n_2} D^{j_3}(U_{l_3})^{m_3}_{n_3} \iota_{m_3}^{n_1 n_2}$$

と書ける．ゲージ変換 (5.4), (5.12) により， $\psi_{j_l}(U_l)$ の中で各ホロノミーは式 (98) に従って変換するので

$$\begin{aligned}
\psi_{j_l}(U_l) &\rightarrow \iota_{m_1 m_2}^{n_3} \left(D^{j_1}(\Lambda_{n_1})^{m_1}_{m'_1} D^{j_1}(U_{l_1})^{m'_1}_{n'_1} D^{j_1}(\Lambda_{n_2}^{-1})^{n'_1}_{n_1} \right) \\
&\quad \times \left(D^{j_2}(\Lambda_{n_1})^{m_2}_{m'_2} D^{j_2}(U_{l_2})^{m'_2}_{n'_2} D^{j_2}(\Lambda_{n_2}^{-1})^{n'_2}_{n_2} \right) \\
&\quad \times \left(D^{j_3}(\Lambda_{n_2})^{m_3}_{m'_3} D^{j_3}(U_{l_3})^{m'_3}_{n'_3} D^{j_3}(\Lambda_{n_1}^{-1})^{n'_3}_{n_3} \right) \iota_{m_3}^{n_1 n_2} \\
&= \left(D^{j_1}(\Lambda_{n_1})^{m_1}_{m'_1} D^{j_2}(\Lambda_{n_1})^{m_2}_{m'_2} D^{j_3}(\Lambda_{n_1}^{-1})^{n'_3}_{n_3} \iota_{m_3}^{n_1 n_2} \right) \\
&\quad \times D^{j_1}(U_{l_1})^{m'_1}_{n'_1} D^{j_2}(U_{l_2})^{m'_2}_{n'_2} D^{j_3}(U_{l_3})^{m'_3}_{n'_3} \\
&\quad \times \left(D^{j_1}(\Lambda_{n_2}^{-1})^{n'_1}_{n_1} D^{j_2}(\Lambda_{n_2}^{-1})^{n'_2}_{n_2} D^{j_3}(\Lambda_{n_2})^{m_3}_{m'_3} \iota_{m_3}^{n_1 n_2} \right) \\
&= \iota_{m'_1 m'_2}^{n'_3} D^{j_1}(U_{l_1})^{m'_1}_{n'_1} D^{j_2}(U_{l_2})^{m'_2}_{n'_2} D^{j_3}(U_{l_3})^{m'_3}_{n'_3} \iota_{n'_3}^{n'_1 n'_2} \quad (\because \text{上式 (99)}) \\
&= \psi_{j_l}(U_l)
\end{aligned}$$

となり，スピン・ネットワーク状態はゲージ不変である．

スピン表示の頂点振幅 群要素 U_e を辺 e の順方向のホロノミーと解釈した場合，3 次元理論のスピン表示の頂点振幅 $W(j_{ab})$ が $6j$ 記号になるという結果 (6.8) は導けない．実際，結節点 $a, b = 1, 2, 3, 4$ を結ぶ各リンク a, b の向きを

$$1 \rightarrow 2, \quad 1 \rightarrow 3, \quad 1 \rightarrow 4, \quad 2 \rightarrow 3, \quad 2 \rightarrow 4, \quad 3 \rightarrow 4$$

と選び、対応する結節因子を用いると、 $W(j_{ab})$ の式 (6.7) は

$$\begin{aligned}
W(j_{ab}) &= \int dU_1 dU_2 dU_3 dU_4 \ell^{n_{12}n_{13}n_{14}} \ell_{m_{12}}^{n_{23}n_{24}} \ell_{m_{13}m_{23}}^{n_{34}} \ell_{m_{14}m_{24}m_{34}} \\
&\times \left[D^{j_{12}}(U_1^{-1})^{m_{12}}_{m'_{12}} D^{j_{12}}(U_2)^{m'_{12}}_{n_{12}} \right] \left[D^{j_{13}}(U_1^{-1})^{m_{13}}_{m'_{13}} D^{j_{13}}(U_3)^{m'_{13}}_{n_{13}} \right] \\
&\times \left[D^{j_{14}}(U_1^{-1})^{m_{14}}_{m'_{14}} D^{j_{14}}(U_4)^{m'_{14}}_{n_{14}} \right] \left[D^{j_{23}}(U_2^{-1})^{m_{23}}_{m'_{23}} D^{j_{23}}(U_3)^{m'_{23}}_{n_{23}} \right] \\
&\times \left[D^{j_{24}}(U_2^{-1})^{m_{24}}_{m'_{24}} D^{j_{24}}(U_4)^{m'_{24}}_{n_{24}} \right] \left[D^{j_{34}}(U_3^{-1})^{m_{34}}_{m'_{34}} D^{j_{34}}(U_4)^{m'_{34}}_{n_{34}} \right] \\
&= \int dU_1 dU_2 dU_3 dU_4 \left[D^{j_{12}}(U_2)^{m'_{12}}_{n_{12}} D^{j_{13}}(U_3)^{m'_{13}}_{n_{13}} D^{j_{14}}(U_4)^{m'_{14}}_{n_{14}} \ell^{n_{12}n_{13}n_{14}} \right] \\
&\times \left[D^{j_{12}}(U_1^{-1})^{m_{12}}_{m'_{12}} D^{j_{23}}(U_3)^{m'_{23}}_{n_{23}} D^{j_{24}}(U_4)^{m'_{24}}_{n_{24}} \ell_{m_{12}}^{n_{23}n_{24}} \right] \\
&\times \left[D^{j_{13}}(U_1^{-1})^{m_{13}}_{m'_{13}} D^{j_{23}}(U_2^{-1})^{m_{23}}_{m'_{23}} D^{j_{34}}(U_4)^{m'_{34}}_{n_{34}} \ell_{m_{13}m_{23}}^{n_{34}} \right] \\
&\times \left[D^{j_{14}}(U_1^{-1})^{m_{14}}_{m'_{14}} D^{j_{24}}(U_2^{-1})^{m_{24}}_{m'_{24}} D^{j_{34}}(U_3^{-1})^{m_{34}}_{m'_{34}} \ell_{m_{14}m_{24}m_{34}} \right]
\end{aligned}$$

となる．結節因子に作用する行列要素は引数 U_a が共通でないので，角括弧 $[\dots]$ 内はテンソルの変換則に一致しない．対照的に群要素 U_e を辺 e の終点から始点に逆行するホロノミーと解釈した場合の結節因子を用いれば，さらに計算を進めることができ， $W(j_{ab})$ は不変テンソル間の縮約 (6.8) ($\sim 6j$ 記号) になることが示される (6.1 節のノートを参照)．

5.3 量子ダイナミクス：遷移振幅

遷移振幅は境界状態の関数である．過去と未来の境界と捉えられる，2 つの非連結な要素から成る境界に限られた，時空のコンパクト領域を考えられる．しかし場合によっては連結している，一般的な境界状態を考え (Oeckl 2003, 2008)，この境界上のあらゆる状態に関する遷移振幅を定義することもできる．これは境界上の与えられた状態によって特徴付けられる過程に対する振幅を定義する．すなわち，部分的観測量の与えられた境界値の組に関する振幅である．

時空の三角形分割 Δ を固定する．遷移振幅は境界グラフ $\Gamma = (\partial\Delta)^*$ の上で定義される関数である．Hamilton 関数のように，遷移振幅は座標と運動量のいずれの関数でもある．2 つの形式を

$$W_\Delta(U_l) = \langle W_\Delta | U_l \rangle \quad (5.36)$$

および

$$W_\Delta(j_l) = \langle W_\Delta | j_l \rangle \quad (5.37)$$

と書く [2.4.2 項を見よ]．添字 Δ はこれが三角形分割 Δ 上で計算される振幅であることを表す．運動量 L_l が離散的スペクトルを持つ 2 つ目の場合において， W は量子数の関数であって，古典的な変数の関数ではないことに注意せよ．このことは 2.2.2 項で詳しく論じた．遷移振幅の 2 つの表現の関係は容易に分かる，何故なら我々は (一般化された) 基底 $|U_l\rangle$ において状態 $|j_l\rangle$ を表現する方法を知っているからであり，逆も然り：変換行列 [式 (5.26)] はスピン・ネットワーク状態 (5.34) で与えられる．

note 遷移振幅の 2 つの表示 (5.36–37) は，スピン・ネットワーク状態 (5.26) を変換係数として

$$W(j_l) = \langle W | j_l \rangle = \int dU_l \langle W | U_l \rangle \langle U_l | j_l \rangle = \int dU_l W(U_l) \psi_{j_l}(U_l) \quad (101)$$

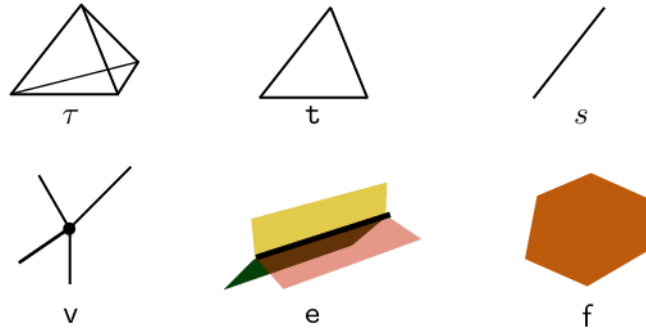


図 63 四面体，頂点，辺，面，リンク，およびそれらの関係 [本稿では教科書 p.107 から図を採った．上段の三角形分割の要素の双対がそれぞれ下段に示されている．]

で関係付けられる (式 (6.5) を見よ)． U_l が配位変数， j_l が運動量変数の固有値に対応することを思い出すと，これは位置基底と運動量基底の間における表示の変更に類似の公式として理解できる．

三角形分割 Δ に双対な 2-複体 (図 63 を見よ) の上で離散化された理論の遷移振幅 W_Δ を計算するために，Feynman の経路積分を用いる．古典的な作用 [式 (4.36)] の指数で重み付けされた，全ての古典的な配位にわたる積分で，遷移振幅は与えられる．すなわち，

$$W_\Delta(U_l) = \mathcal{N} \int dU_e \int dL_f e^{\frac{i}{8\pi\hbar G} \sum_l \text{Tr}[U_l L_f]}. \quad (5.38)$$

$\mathcal{N}$ は規格化因子であり，ここに様々な定数の寄与を吸収させることになる．運動量にわたる積分は容易に実行できる，と言うのもそれは指数の積分であって，デルタ関数を与えるからである．したがって

$$W_\Delta(U_l) = \mathcal{N} \int dU_e \prod_f \delta(U_f) \quad (5.39)$$

が得られ，ここにデルタ関数は $SU(2)$ にわたる [本稿次項で補足]．この積分を計算するために，

$$\delta(U) = \sum_j d_j \text{Tr} D^{(j)}(U) \quad (5.40)$$

を用いて^{*109}，表現たちにおいて群にわたるデルタ関数を展開する． d_j は表現の次元 $d_j = 2j + 1$ であることを思い出そう [式 (5.16) で導入]．群要素 $U \in SU(2)$ は $SO(3)$ における回転を定める：量 $D^{(j)}(U)$ は表現の指標 (character) であり，角度に依存するが回転軸に依存しない [したがって展開 (5.60) における因子 $e^{in\theta}$ とアナログス]．

これを用いると，

$$W_\Delta(U_l) = \mathcal{N} \int dU_e \prod_f \left(\sum_j d_j \text{Tr} D^{(j)}(U_f) \right) \quad (5.41)$$

$$= \mathcal{N} \sum_{j_f} \left(\prod_f d_{j_f} \right) \int dU_e \prod_f \text{Tr} (D^{j_f}(U_{1f}) \cdots D^{j_f}(U_{nf})) \quad (5.42)$$

^{*109} これは円 $U(1)$ にわたるデルタ [関数] のよく知られた展開 $\delta(\phi) = \frac{1}{2\pi} \sum_n e^{in\phi}$ の $SU(2)$ 類似物であり，ここに n は $U(1)$ の既約表現をラベルし，既約表現は全て 1 次元であって指数で与えられる．類似の公式があらゆるコンパクト群に対して成り立つ．[5.4.1 項のノートを見よ．教科書では 5.4.1 項の式 (5.64) においても，アナロジーとしてしか説明されていない．]

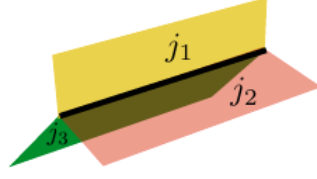


図 64 辺 e はちょうど 3 つの面の境界となる [本稿では教科書 p.107 から図を採った]

と書ける．上記の表現において，積の表現は表現の積である，すなわち $D(UV) = D(U)D(V)$ であるという事実と， U_f が面 f 周りのリンク $1f, \dots, nf$ に関する群要素の積であるという事実を利用した．

1 つの辺 e と対応する積分 dU_e を考えよ．各辺 e はちょうど 3 つの面の境界となることに着眼する (何故なら辺は 3 本の線で囲まれた三角形の双対である) [図 64]．したがって各 dU_e の積分は

$$\int dU D_{m_1 n_1}^{j_1}(U) D_{m_2 n_2}^{j_2}(U) D_{m_3 n_3}^{j_3}(U) \quad (5.43)$$

の形をとる．この積分は容易に実行できる．Haar 測度は両側不変なので，結果は両方の添字の組について不変でなければならない，既に見たように，そのような対象は 1 つしかない．規格化は縮約を考えると計算できる．それは

$$\begin{aligned} \int dU D_{m_1 n_1}^{j_1}(U) D_{m_2 n_2}^{j_2}(U) D_{m_3 n_3}^{j_3}(U) &= {}_l^{m_1 m_2 m_3} {}_l^{n_1 n_2 n_3} \\ &= \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.44)$$

を与える [${}_l^{n_1 n_2 n_3}$ は双対空間 $\mathcal{H}_{j_1}^* \otimes \mathcal{H}_{j_2}^* \otimes \mathcal{H}_{j_3}^*$ の不変テンソル [2, p.200, pp.333–334]]．

したがって式 (5.41) [= 式 (5.42)] における積分の結果は，それら自身の中で [m, n 添字が] 縮約される一連の $3j$ 記号である．縮約の正確なパターンを調べよう．各辺は 2 つの $3j$ 記号を生成し，それらは辺の 2 つの端点に位置すると見なせる，何故ならそれらは端点で縮約される添字を持つからである．縮約はしたがって各頂点で起きる．各頂点には 4 本の辺があり [図 63]，したがってそれら自身の中で縮約される 4 つの $3j$ 記号がある．表式全体が不変なので，縮約は $SU(2)$ 不変でなければならない，したがって磁気 [量子数の] 添字 (magnetic indices) の不変な縮約によって得られるものでなければならない，それは例えば Landau and Lifshitz (1959) の第 14 章，あるいは Haggard (2011) で計算されている行列

$$g_{mn} = \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} j & j & 0 \\ m & n & 0 \end{pmatrix} = \delta_{m,-n} (-1)^{j-m} \quad [\text{式 (1.34)}] \quad (5.45)$$

で与えられる．[D.1 節の式 (154) を見よ．] ($\delta_{m,-n}$ は角運動量の第 3 成分の保存として容易に理解できる．符号は不変な対象 ϵ^{AB} のテンソル積化 (tensoring) に起因する．) 4 つの $3j$ 記号の縮約は Wigner の $6j$ 記号 (あるいは Racah (ラカー) の W 係数 (Racah W -coefficient)) と呼ばれる対象を与え，以下のように表される：

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} &\equiv \sum_{m_a, n_a} \prod_{a=1}^6 g_{m_a n_a} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_4 & j_5 \\ n_1 & m_4 & m_5 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} j_2 & j_4 & j_6 \\ n_2 & n_4 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_5 & j_6 \\ n_3 & n_5 & n_6 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.46)$$

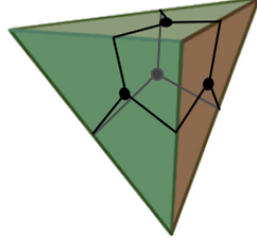


図 65 $6j$ 記号に関する四面体 τ は、三角形分割の四面体 v^* の境界グラフである [図 55 の再掲]

あるいは、より明示的に

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} &= (-1)^{J-M} \sum_{m_a} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_4 & j_5 \\ -m_1 & m_4 & m_5 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} j_2 & j_4 & j_6 \\ -m_2 & -m_4 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_5 & j_6 \\ -m_3 & -m_5 & -m_6 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.47)$$

であり、ここに $M = \sum_{a=1}^6 m_a$ および $J = \sum_{a=1}^6 j_a$. 全ての慣習が注意深く確定された、この代数の優れた詳しい手引きは Aquilanti *et al.* (2010) である. Wigner の $6j$ 記号は原子核物理学, 分子物理学, 量子情報, 等々において広く用いられている. それらは Mathematica では `SixJSymbol[{j1, j2, j3}, {j4, j5, j6}]` で与えられる.

縮約の方法は、 $3j$ 記号が四面体の頂点にあり、スピンの 6 本の辺 (sides) にある、四面体 τ の構造を再現することに注意せよ. 上の行における 3 つのスピンの (j_1, j_2, j_3) は三角形を成す; 下の行における 3 つのスピンの (j_4, j_5, j_6) はこの三角形に向かい合う頂点に繋がる; また各列は出会わないスピンの組から成る [本稿次項で補足].

この四面体 τ と、我々が考えている頂点 v に双対な三角形分割 Δ の四面体 v^* を混同してはならない. τ と v^* は互いに双対である: τ の頂点は v^* の面の中心にあり、 τ の辺 (sides) は v^* の辺 (sides) と交差する. さらに、重要なことなので注意してもらいたいのだが、四面体 τ は単一の四面体 v^* から成る三角形分割の境界グラフである. 図 65 を見よ. [本稿次項で補足する.]

全ての内部の辺 (internal-edge) の群要素にわたって積分すると、境界の辺の群要素が残る. これらもまた境界スピン・ネットワーク状態との縮約をとることで積分でき [表示の変更 (5.36)→(5.37)], (注意深く符号の跡 (trace) を残すと (Barrett and Naish-Guzman 2009))

$$W_{\Delta}(j_l) = \mathcal{N}_{\Delta} \sum_{j_f} \prod_f (-1)^{j_f} d_{j_f} \prod_v (-1)^{J_v} \{6j\} \quad (5.48)$$

が得られ [特に頂点振幅の因子の導出は式 (6.4–8) を見よ], ここに和は全ての辺において三角不等式を考慮した、各面へのスピンの割り当てにわたり、 $J_v = \sum_{a=1}^6 j_a$ であり、また j_a は頂点 v に隣接する面のスピンである. (2-複体の頂点は 6 つの面に隣接している; 図 66 を見よ.) 規格化因子が三角形分割に依存し得ることを明示した. これがスピン表現における遷移振幅である.

表現 (5.48) は最初に Ponzano と Regge によって 1960 年代に書かれた (Ponzano and Regge 1968). 驚くべきことに、Ponzano と Regge は長さのスペクトルが離散的であることを知らず、長さは離散的であってスピンの決まらねばならないと単に “推測した”. 彼らの前提の物理的な意味は、ループ量子重力によってはじめて明らかになった. ループ量子重力と Ponzano–Regge モデルの関連は Rovelli (1993b) で指摘された.

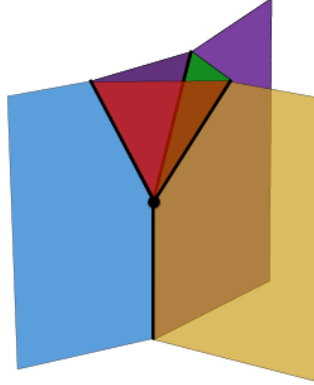


図 66 2-複体の頂点とその 6 つの隣接する面 [本稿では教科書 p.110 から図を採った]

5.3 節冒頭 (5.3.1 項の前まで) について

■遷移振幅 (5.38) の運動量積分がデルタ関数を与えること (式 (5.39)) について 式変形 (5.38) $\rightarrow$ (5.39) は単に形式的な書き換えと考えられる. 実際, 群要素のデルタ関数の Fourier 展開は正確にはすぐ後の式 (5.40) で与えられる.

あるいは遷移振幅 (5.38) における dU_l は Haar 測度であるのに対し, dL_f は正確には単なる実変数 dL_f^i に関する積分を表しており, また作用 (4.36) は

$$S = \frac{1}{8\pi G} \sum_f \text{Tr}(L_f U_f) = \frac{1}{8\pi G} \sum_f L_f^i \text{Tr}(\tau_i U_f)$$

と書けることに注意すると, 遷移振幅は

$$W_\Delta(U_l) = \mathcal{N} \int dU_e \int dL_f^i e^{iS/\hbar} = \mathcal{N} \int dU_e \prod_f \int dL_f^i \exp \left[\frac{i}{8\pi\hbar G} L_f^i \text{Tr}(\tau_i U_f) \right].$$

この L_f^i に関する積分は, 式 (5.39) における群要素のデルタ関数を与えると見ることが考えられる (適当な定数の因子を $\mathcal{N}$ に吸収させる) [2, pp.332–333].

■ $6j$ 記号 (5.46–47) の縮約パターンを指定する四面体 τ (教科書 p.109) について まず四面体の底面の三角形を選び, その 3 辺に $6j$ 記号の 1 行目のスピン j_1, j_2, j_3 を充てる. このとき次いで 2 行目のスピン j_4, j_5, j_6 を図 67 のように残りの辺に充てると辻褄が合う. 実際, 四面体の各頂点において, 向かい合う面の 3 つのスピンから成る $3j$ 記号として, 式 (5.46–47) の 4 つの $3j$ 記号が得られる. そこで 2 度現れる磁気量子数の添字をそれぞれ計量 (5.45) で縮約すると, $6j$ 記号 (5.46) を得る.

■ $6j$ 記号のスピンを担う四面体 τ と四面体 v^* (教科書 p.109) について ここでは 4.5.2 項の図 54 の点 O をスピン・フォームの頂点 v と見なそう. このとき点 O に隣接する 6 枚の面 (四角形 $Oa''md''$ など; 6.1 節の図 72 も見よ) の各々がスピン $j_1, \dots, j_6$ を担う.

- 6 枚の面は代わりに, 四面体 $\tau = abcd$ の 6 本の辺 (辺 bc など) で指定できる. さらに τ は等価的に, それを頂点 v に双対な四面体 $v^* = a'b'c'd'$ に投影して得られる, 図 65 のような境界グラフと同一視で

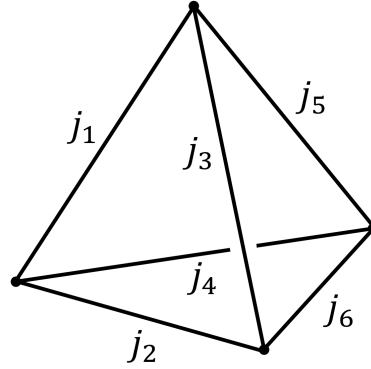


図 67 $6j$ 記号 (5.46–47) の縮約パターンを指定する四面体

きる。(これは面が四面体 v^* からはみ出すので、面が境界に誘導するリンクを考えるという措置に他ならない。)

- 6 枚の面は代わりに、四面体 $\tau = a'b'c'd'$ の 6 本の辺 (辺 $a'd'$ など) で指定できる。さらに τ は等価的に、それを頂点 v に双対な四面体 $v^* = abcd$ に投影して得られる、図 65 のような境界グラフと同一視できる。

5.3.1 振幅の性質

以下の基本的な性質が振幅を特徴付ける。

1. 重合せの原理。これは量子力学の基本原理解である。振幅は基本的な振幅の和で与えられることになる (標準的な量子論において、この和は経路 σ にわたる Feynman の和として表される) :

$$\langle W | \psi \rangle = \sum_{\sigma} W(\sigma). \quad (5.49)$$

[ここでは σ はスピン・ネットワークの経歴ないしスピン・フォーム [2, p.324,p.326].]

2. 局所性。これは 19 世紀と 20 世紀の物理学の根源的な発見である：相互作用は時空において局所的である。したがって基本的な振幅は、時空点に関する振幅の積と見なせる (標準的な場の量子論において、この積は時空点にわたる積分の指数として表される) :

$$W(\sigma) \sim \prod_v W_v. \quad (5.50)$$

3. 局所 Euclid 不変性。物理的な 4 次元の理論では、この基準は一般相対性理論の局所 Lorentz 不変性になる。ここでは、それは振幅の $SU(2)$ 不変性を定める。次章の初めの 6.1 節で示すように、頂点振幅、すなわち $6j$ 記号は、単に頂点の境界グラフ上の状態の $SU(2)$ 不変な部分への射影として書ける、すなわち

$$W_v = (P_{SU(2)} \psi_v)(1) \quad (5.51)$$

であって、ここに ψ は境界状態、 $P_{SU(2)}$ はその局所不変な $SU(2)$ 成分への射影子であり、また (1) はスピン・ネットワーク状態の恒等元 $U_i = 1$ 上での評価を表す。

これらの基本的な性質は、4 次元の理論において遷移振幅を書く手引きとなる。

5.3.2 Ponzano–Regge モデル

表現 (5.48) はやや魔法のようである。それは $SU(2)$ 表現理論の基本的な対象で書かれた、非常に単純な表現である。いかにしてそれは一般相対性理論と関係し得るのか？

古典論との関係は古典的極限にあるはずである。量子論において、古典的極限は量子論的な離散性が重要でなくなる、大きな量子数によって与えられる。そこでこの表現を大きな j たちに対して調べよう。

Ponzano と Regge は彼らの原論文において、以下の著しい結果を証明した。平坦な幾何学的な四面体を考えよ。その幾何学をその辺の 6 つの長さ $L_1, \dots, L_6$ で定めよう。 $L_a = j_a + \frac{1}{2}$ となるように、これらの長さに 6 つのスピンの $j_1, \dots, j_6$ を関係付ける。 V をこの四面体の体積、また S をこの四面体の Regge 作用とする。このとき Ponzano と Regge は、大きなスピンの極限で

$$\{6j\} \underset{j \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{12\pi V}} \cos\left(S + \frac{\pi}{4}\right) \quad (5.52)$$

となることの根拠を与えた [$\hbar = 1$ の単位系で作用 S は無次元]。これは 1998 年に Roberts (Roberts 1999) によってはじめて厳密に証明された。この漸近的関係の帰結は重要である。コサインは 2 つの項の和であり、 $\pi/4$ の項はコサインの外に出すことができ [指数法則で位相因子 $e^{\pm i\frac{\pi}{4}} = (e^{\mp i\frac{\pi}{2}})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\mp i}}$ として分離でき]、したがって上記の公式は

$$\{6j\} \underset{j \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{-12i\pi V}} e^{iS} + \frac{1}{2\sqrt{12i\pi V}} e^{-iS} \quad (5.53)$$

と書ける。大きなスピンのみを考えれば、量子論的な離散性を無視でき、またスピンのわたる和は Regge 幾何学における長さのわたる積分で近似される。被積分関数は作用の指数たちで与えられる。これは Einstein–Hilbert 作用の指数の、幾何学にわたる経路積分の離散化である。したがって式 (5.48) はまさに、量子重力の形式的な定義である経路積分での“幾何学にわたる和”

$$Z \sim \int D[g] e^{\frac{i}{\hbar} \int \sqrt{-g} R d^3x} \quad (5.54)$$

の具体的な実装である。

和が逆符号の作用を持つ 2 つの項から成るという事実は、3.2.1 項の議論から帰結する：我々は計量の理論ではなくトライアド理論を量子化しているので (このことはフェルミオンの存在により必要であることを思い出そう)、各頂点において、計量の各配位に対して 2 つの異なるトライアドの配位がある。それらは逆符号を持ち、上記の 2 つの項をもたらす。その 2 項間の追加の位相差をもたらす $\pi/4$ の項もまた、鞍点近似においてよく理解されている：この位相は Maslov (マスロフ) 指数 (Maslov index) と呼ばれ、2 つの鞍点で運動量に符号の反転、すなわち 2.5.2 項で議論した、配位空間上の Littlejohn の面 L の折り畳み (folding; 図 68) があるとき、常に現れる。このことは Littlejohn (1992) で詳しく論じられている。

最後に 1 つ、理論を定義するために議論せねばならない点がある：連続極限である。離散化を精密化すると何が起きるか？これを 2 段階に分けて議論しよう。第 1 に、境界グラフを固定したまま三角形分割を精密化する。 w を数、また p を三角形分割における点の数として、規格化因子を

$$\mathcal{N}_\Delta = w^p \quad (5.55)$$

となるように選ぶと、精密化において現れ得る可能な発散項を別にすれば、三角形分割の変更の下で遷移振幅は変わらないことを、Ponzano と Regge は彼らの論文で証明した。最終的に、発散項は以下のように w に

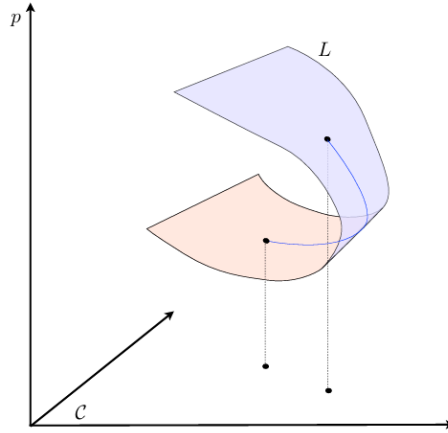


図 68 もし面 L が配位空間 C 上で畳み込まれる (folds) ならば, 2 つの極値間における経路積分の鞍点近似の相対的な位相は, 非自明な Mal'sov 指標による $\pi/4$ を含む. [本稿では教科書 p.112 から図を採った.]

再吸収できる. まず, スピンにわたる和を最大値 Λ までに制限することで, 切断によって理論を修正する. 次に,

$$w = \frac{w_0}{\Lambda} \quad (5.56)$$

の形の w を採る. このとき結果として得られる表現は $\Lambda \rightarrow \infty$ の極限で, 三角形分割に依存しないことを証明できる. すなわち, 振幅は

$$W = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left(\frac{w_0}{\Lambda} \right)^p \sum_{j_i=0}^{\Lambda} \prod_f (-1)^{j_i} d_{j_i} \prod_v (-1)^J \{6j\} \quad (5.57)$$

で定義される.

第 2 に, 境界グラフを精密化すると何が起きるか? この場合にも精密化は物理的な影響を及ぼさない. このことは以下のように理解できる. 2 つの分離した等しいグラフ Γ から成る境界に対する遷移振幅を考えよ. 遷移振幅は Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\Gamma$ からそれ自身への写像を定義する. この写像は $\mathcal{H}_\Gamma$ から物理的 Hilbert 空間へ射影する射影子である. 結果として得られる物理的 Hilbert 空間は Γ に依存しないことを証明できる. これらの性質はいずれも, 対応する古典論が局所的な自由度を持たないという事実と密接に関係しており, 4 次元では期待できない. それ故ここではこれらのことを強調しない, というのも, それらは量子重力の物理的な理論にとってあまり興味がないからである.

Regge と Ponzano が 3 次元の量子重力に対するこのモデルを見つけたとき, 当時 Regge がいたプリンストンでは, 大いに高揚があった. 漸近的な結果 (5.52) は真に驚くべきことである: 一般相対性理論は単純な $SU(2)$ 表現理論の組合せ論 (combinatorics) にコードされている. GR の作用はちょうど Wigner の $6j$ 記号に隠れている! その構成を 4 次元で繰り返すことを試みるアイデアが直ちに推し進められた; ところがその計画は予想よりも困難であることが判明した. モデルの 4 次元版には, ほぼ半世紀を待たねばならなかった. それを第 7 章で論じる.

5.4 補完

5.4.1 基本的な調和解析

ここでは量子重力で主要な役割を演じる、空間 $L_2[\text{SU}(2)]$ に関する若干の基本的事実をまとめる。コンパクト群上の調和解析の数学的に完全な提示については、例えば Folland (1995) を見よ。

コンパクト群上の関数の簡単でよく知られた例を、参考として念頭に置いておくのが好ましい：角度変数の 2 乗可積分関数 $\psi(\theta)$ の空間 $L_2[\text{U}(1)]$ である。これは例えば円上の粒子の量子状態の空間である。

note $\text{U}(1)$ 群の元は 1 次行列、すなわち単なる複素数 U であって、ユニタリー性はその絶対値が $|U|^2 = 1$ であることを意味する。したがって $\text{U}(1)$ 群の元は複素平面における単位円上の点 $U = e^{i\theta}$ として表され、それらは積に関して明らかに群を成す。

スカラー積は

$$(\psi, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \overline{\psi(\theta)} \phi(\theta). \quad (5.58)$$

これらの関数の空間は $\alpha \in \text{U}(1)$ に対して、単に $\psi(\theta) \rightarrow \psi(\theta + \alpha)$ と作用する $\text{U}(1)$ 群の表現を担う。このスカラー積に関して直交する基底の関数は、 n を整数として関数 $\psi_n(\theta) = e^{in\theta}$ で与えられる。これは (離散的な) Fourier の定理である。これらの関数の各々は、アーベル群 $\text{U}(1)$ のユニタリーで既約な (1 次元の) 表現を定義することに注意せよ、何故なら $\psi_n(\theta + \phi) = \psi_n(\theta)\psi_n(\phi)$ 。したがって Fourier の定理は、 $L_2[\text{U}(1)]$ が $\text{U}(1)$ の既約表現の直和 (orthogonal sum) に分解されることを述べている。このことは

$$L_2[\text{U}(1)] = \oplus_n C_n \quad (5.59)$$

の形に書くことができ、ここに C_n は、指数写像 $\psi_n(\theta)$ の下で $\text{U}(1)$ の表現と見られる、複素平面である。さらに、円周上のデルタ分布はこの基底を用いて単に

$$\delta(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_n e^{in\theta} \quad (5.60)$$

と展開できることに注意せよ。

このよく知られた例の主要な特徴は、Haar 測度に関して 2 乗可積分な、群 $\text{SU}(2)$ 上の関数 $\psi(U)$ の空間 $L_2[\text{SU}(2)]$ において再現される。スカラー積は

$$(\psi, \phi) = \int_{\text{SU}(2)} dU \overline{\psi(U)} \phi(U). \quad (5.61)$$

これらの関数の空間は $\Lambda \in \text{SU}(2)$ に対して、単に $\psi(U) \rightarrow \psi(\Lambda^{-1}U)$ と作用する $\text{SU}(2)$ 群の表現を担う。このスカラー積に関して直交する基底の関数は関数 $\psi_{jnm}(U) = D_{nm}^j(U)$ で与えられ、ここに $D_{nm}^j(U)$ は Wigner 行列である。これが Peter-Weyl 定理である [式 (5.16) の箇所です説明済み]。これらの関数の各々は非アーベル群 $\text{SU}(2)$ の、ユニタリー既約表現の行列要素である。したがって Peter-Weyl 定理は、 $L_2[\text{SU}(2)]$ が $\text{SU}(2)$ の既約表現の直和 (orthogonal sum) に分解されることを述べている。このことは

$$L_2[\text{SU}(2)] = \oplus_j V_j \quad (5.62)$$

の形に書くことができ、ここに和は $\text{SU}(2)$ の既約表現をラベルする半整数 j にわたる。空間 V_j は D^j 行列が属する空間である；それは $(2j+1)^2$ 次元であり、スピン j 表現の下で各々の添字に関して変換する。したがってそれは $\mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_j$ と書くことができ、ここに $\mathcal{H}_j$ は $\text{SU}(2)$ のスピン j 表現である。こうして

$$L_2[\text{SU}(2)] = \oplus_j (\mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_j). \quad [\text{式 (5.17)}] \quad (5.63)$$

最後に、群上のデルタ分布はこの基底を用いて単に

$$\delta(U) = \sum_j (2j+1) \text{Tr}[D^j(U)] \quad (5.64)$$

と展開できる [式 (5.40)；本稿次項で補足]。

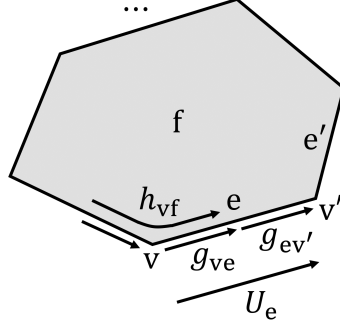


図 69 辺上の群要素 U_l [U_e] を 2 つに分離する．[頂点 v から辺 e 上の何らかの点へのホロノミー g_{ve} を定義すると，その逆行列として辺 e から頂点 v へのホロノミー $g_{ev} = g_{ve}^{-1}$ が存在する．]

5.4.1 項について

群上のデルタ関数の展開 (5.64) は結局ここでもほぼ天下りに提示されており，これでは通常の Fourier 解析とのアナロジーも見えて来ない．そこで公式 (5.64) について本稿で補足する．有限群に対して群要素の関数を指標で展開でき，指標は直交関係を満たすことを証明できる [9, pp.21-22]． $SU(2)$ 群に対しても同様に，Peter-Weyl の定理 (5.16) は $m = n, m' = n'$ とおいて m, m' で和をとると，指標 $\chi^j(U) \equiv \text{Tr}[D^j(U)]$ の直交関係

$$\int dU \chi^{k*}(U) \chi^j(U) = \delta^{jk}$$

を意味する [20, p.138]．そこで群上の任意の関数が $f(U) = \sum_j \tilde{f}_j \chi^j(U)$ の形に展開できると仮定する．このことは Fourier 展開の場合と同様に，実際に指標の直交性から展開係数を

$$\int dU \chi^{k*}(U) f(U) = \sum_j \tilde{f}_j \int dU \chi^{k*}(U) \chi^j(U) = \tilde{f}_k$$

と求められることから正当化できる．すると特にデルタ関数の展開係数は

$$\tilde{\delta}_k = \int dU \chi^{k*}(U) \delta(U) = \chi^{k*}(1) = d_k$$

となるので， $\delta(U) = \sum_j d_j \chi^j(U)$ を得る．

5.4.2 遷移振幅の別の形

ここでは理論を 4 次元に一般化するのに有用であることが判明する，振幅の別の形を導く．

$$Z = \int dU_e \prod_f \delta(U_{e_1} \cdots U_{e_n}) \quad (5.65)$$

から始めよう [式 (5.39)]．ここでは簡単のために境界のない三角形分割の分配関数を考えている．ここで各リンク l [より一般に辺 e] ごとに **2** つの変数，すなわち $U_e = g_{ve} g_{ev'}$ を導入する，ただし $g_{ev} = g_{ve}^{-1}$ は頂点-辺の各組に関する変数である (図 69)．すると

$$Z = \int dg_{ve} \prod_f \delta(g_{ve} g_{ev'} g_{v'e''} g_{e''v'''} \cdots) \quad (5.66)$$

と書ける．

ここで $h_{vf} = g_{ev}g_{ve'}$ [図 69 に従えばむしろ $h_{v'f} = g_{ev'}g_{v'e'}$] を用いて, g_{ev} 変数を別の方法で再編成することを想像せよ, ここに e と e' は面 f の境界であって頂点 v [図 69 では頂点 v'] を発する 2 辺である. このとき明らかに振幅を

$$Z = \int dh_{vf} dg_{ve} \prod_f \delta(g_{ve}g_{ev'}g_{v'e'}g_{e'v''} \cdots) \prod_{vf} \delta(g_{e'v}g_{ve}h_{vf}) \quad (5.67)$$

と書ける.

note vf は面 f の頂点である. また群要素のデルタ関数は

$$\int dh f(h) \delta(g^{-1}h) = f(g)$$

のように引数が単位元 (群上の“原点”) となる値を取り出し, h_{vf} に関する積分は独立変数を正しい値 $h_{vf} = g_{ev}g_{ve'}$ に固定すると推察される. 6.1 節や 6.2 節の計算からも, そのように見受けられる. 文献 [20, p.73] では有限群に対して Kronecker のデルタが同様に定義されている.

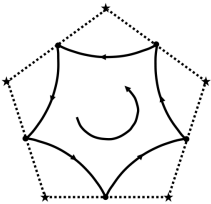
あるいは等価的に

$$Z = \int dh_{vf} dg_{ve} \prod_f \delta(h_{vf}h_{v'f} \cdots) \prod_{vf} \delta(g_{e'v}g_{ve}h_{vf}). \quad (5.68)$$

これはデルタ関数が各面の周りの群要素を貼り合わせる [本稿次項で確認], 遷移振幅

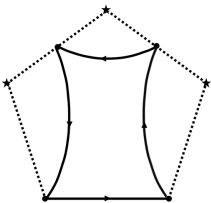
$$Z = \int dh_{vf} \prod_f \delta(h_f) \prod_v A_v(h_{vf}). \quad (5.69)$$

として再編成でき, ここに h_f を内部面の積



$$h_f = \prod_{v \in \partial f} h_{vf} \quad (5.70)$$

として定義した. もし面 f が境界のリンク l を境界に持つならば:



$$h_f = \left(\prod_{v \in \partial f} h_{vf} \right) h_l \quad (5.71)$$

頂点振幅はこのとき

$$A_v(h_{vf}) = \int dg_{ve} \prod_f \delta(g_{e'v}g_{ve}h_{vf}). \quad (5.72)$$

この頂点振幅における $SU(2)$ 積分は $n = 4$ 個である: 頂点を出る n 本 (ここでは 4 本) の辺の各々に対して 1 つの群要素がある. これはある意味冗長である, 何故なら少し考えれば, これらの積分の $n - 1$ 個を実行すると結果は残りの積分変数の下で不変であると分かるからである. したがって結果に影響を及ぼすことなく, 積分の 1 つを落とすことができる [6.1 節 (のノート) を見よ]. 我々は測度にプライムを付けてこれを書く:

$$\int_{SU(2)^n} dg'_{ve} \equiv \int_{SU(2)^{n-1}} dg_{ve_1} \cdots dg_{ve_{n-1}}. \quad (5.73)$$

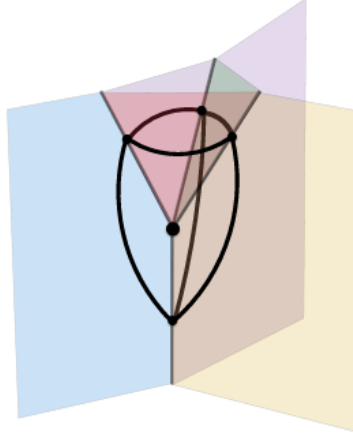


図 70 頂点グラフ Γ_v

$SU(2)$ の体積は単に 1 (unity) なので、これは 3 次元では表面的 (cosmetic) に過ぎないものの、無限の体積を持つ非コンパクト群を扱わねばならなくなる 4 次元において、それは非常に有用となる。デルタ関数を表現において展開すると [式 (5.64)],

$$A_v(h_{vf}) = \sum_{j_f} \int dg'_{ve} \prod_f (2j_f + 1) \text{Tr}_{j_f} [g_{e'v} g_{ev} h_{vf}]. \quad (5.74)$$

頂点振幅は頂点周りの面ごとに 1 つの $SU(2)$ 変数の [したがって $SU(2)^6$ の] 関数であることに注意せよ。頂点を取り囲む小さな球面を描くことを想像せよ：この球面と 2-複体の交わりはグラフ Γ_v である。頂点振幅は

$$\mathcal{H}_{\Gamma_v} = L_2[SU(2)^6 / SU(2)^4]_{\Gamma_v} \quad (5.75)$$

における状態の関数である。 Γ_v は 4 個の結節点を持つ完全グラフ (complete graph) であって、頂点の境界グラフである (図 70)。[以上、頂点グラフ Γ_v について本稿次項で補足する.]

まとめると、また遷移振幅への自明な道に戻ると、それは

$$W(h_l) = \int dh_{vf} \prod_f \delta(h_f) \prod_v A_v(h_{vf}). \quad (5.76)$$

で与えられ、ここに頂点振幅は

$$A_v(h_{vf}) = \mathcal{N} \sum_{j_f} \int dg'_{ve} \prod_f (2j_f + 1) \text{Tr}_{j_f} [g_{e'v} g_{ev} h_{vf}]. \quad (5.77)$$

振幅のこの形は 4 次元に一般化するのが最も容易であることが判明する。

5.4.2 項について

■式 (5.69) 以降の積 $\prod_f$ が直後のデルタ関数 $\delta(h_f)$ にのみ作用すること 分配関数 (5.68) の段階では、面にわたる積 $\prod_f$ は後ろの全ての因子に掛かっており、したがって $\prod_{vf}$ は、積 $\prod_f$ の下で指定された面 f に属する頂点にわたる積を意味する。このことを踏まえて、次に分配関数 (5.68) を

$$Z = \int dh_{vf} \left[\prod_f \delta(h_f) \right] \int dg_{ve} \prod_f \prod_{vf} \delta(g_{e'v} g_{ve} h_{vf}) = \int dh_{vf} \left[\prod_f \delta(h_f) \right] A_v(h_{vf}) : (5.69)$$

と書き換える。ただし第 2 の等号では、ある面 f に属する頂点 vf にわたる積をとり、次いで面 f にわたる積をとることが、ある頂点 v に隣接する面 f (7.4.1 項の図 91 のくさび) にわたる積をとり、次いで全ての頂点 v

にわたる積をとることと等価であることに注意して

$$\prod_f \prod_{vf} \rightarrow \prod_v \prod_f$$

とし、頂点振幅の定義式 (5.72) を適用すれば良い。よって式 (5.69) 以降ではもはや、作用素 $\prod_f$ は後続の頂点振幅の積 $\prod_v A_v(h_{vf})$ には掛からない。

■図 70 の頂点グラフ Γ_v について 頂点 v を取り囲む双対な三角形分割の四面体 v^* は、その境界に 4 枚の三角形と 6 本の線分を持つ。このとき頂点 v には図 70 のように、

- v^* の 4 枚の三角形に対応する 2-複体の 4 本の辺
- v^* の 6 本の線分に対応する 2-複体の 6 枚の面

が集まる。頂点 v に隣接する面の枚数は、 v に接続する 2 辺 e, e' の選び方の総数 ${}_4C_2 = 6$ としても理解できる。したがって頂点 v を取り囲む小さな球面と 2-複体の交わりとして、図 70 のような頂点グラフが得られる。ここで 4 本の辺は球面に 4 個の結節点を、6 枚の面は球面に 6 本のリンクを誘導しており、球面上のグラフ Γ_v は全ての結節点が互いにリンクで繋がった完全グラフとなっていることが見て取れる。式 (5.75) の直後にあるように、これは 5.3 節の図 65 で見た、1 つの頂点の表す単一の四面体の境界グラフと、トポロジカルに同じ構造を持つ。そこで境界グラフ上で定義されるスピン・ネットワーク状態を考えると、その Hilbert 空間は式 (5.75): $\mathcal{H}_{\Gamma_v} = L_2[\text{SU}(2)^6/\text{SU}(2)^4]_{\Gamma_v}$ で与えられる。

次に群の変数 g_{ve}, h_{vf} の個数を数えよう。頂点 v に接続する辺 e は、したがって頂点振幅 (5.72) の積分変数 g_{ve} は 4 つある。(実際にはそのうち 3 つの群の変数に関してのみ積分を施す (式 (5.73)).) 他方で変数 h_{vf} は第 1 義的には、頂点 v を通過する群要素 $h_{vf} = g_{e''v} g_{ve}$ として定義されていた (式 (5.66) の直後)。しかしながら式 (5.67) 以降では、もはや 2 種類の群要素 g_{ve}, h_{vf} は独立変数として扱われている。実際、とりわけ遷移振幅 (5.76) の被積分関数において、頂点振幅 $A_v(h_{vf})$ を定義する積分変数 h_{vf} は与えられた値に固定されており、この理解の下で頂点振幅 (5.77) では h_{vf} とは独立に、変数 g_{ve} に関してのみ積分が施されている。そこで群の要素 h_{vf} を面 f の頂点 v に関する変数と言うよりも、むしろ頂点 v に隣接する面 f に充てられた変数と解釈することが可能となる。このとき式 (5.74) 直後にあるように、頂点振幅は頂点に隣接する面ごとに 1 つずつある $\text{SU}(2)$ 変数 h_{vf} の関数であると言える。あるいは、より正確には変数 h_{vf} は、面 f が頂点 v の境界グラフ Γ_v に誘導するリンク l のホロノミー $h_l = h_{vf}$ と見なせる。このとき式 (5.70–71) のダイアグラムにおける面内部の実線も、各頂点の境界グラフを成すリンクたちとして理解できる。また h_{vf} 変数のこの解釈は、7.4.1 項におけるくさびの図 91 とも整合している。

■振幅 (5.76) のデルタ関数 $\delta(h_f)$ が「各面の周りの群要素を貼り合わせる」(式 (5.69) 直前) ことについて 頂点振幅 $A_v(h_{vf})$ の独立変数として、頂点 v に隣接する面 f ごとに群要素 h_{vf} を任意に選べる。このとき 1 つの面 f に着目すると、面の各頂点 $v, v', \dots$ における“くさび (wedge)”に群要素 $h_{vf}, h_{v'f}, \dots$ が充てられる。振幅 (5.76) におけるデルタ関数 $\delta(h_f)$ はこれら一連の群要素の積の値を $h_{vf} h_{v'f} \dots = 1$ に固定する。この意味でデルタ関数 $\delta(h_f)$ は「各面の周りの群要素を貼り合わせる」(式 (5.69) 直前)。その上で群要素 h_{vf} (ただし式 (5.71) が示唆するように境界変数 h_l は除く) に関する積分をとると、振幅 (5.67) は境界変数 h_l のみの関数となる。

5.4.3 Poisson 括弧

問題

L と U の Poisson 括弧 (4.9) [重力に対する式 (4.38)*¹¹⁰] をそれらの定義と連続的な Poisson 括弧 (3.102) から計算せよ.

解

定義より,

$$\{U_l, L_{l'}^i\} = \left\{ \text{Pe}^{\int_{l'} \omega}, \int_{s_{l'}} e^i \right\} \quad (5.78)$$

を得る. これは l が $s_{l'}$ と交わるとき, すなわち $l = l'$ のときにのみ消えない [式 (3.102) による]. この場合 (明快にするためにリンクの添字を落とすと),

$$\{U, L^i\} = \int_{s_l} ds \left\{ \text{Pe}^{\int_l dt \omega_b \frac{dl^b}{dt}}, e_a^i \frac{ds_l^a}{ds} \right\}. \quad (5.79)$$

[積分範囲を $s_{l'} \rightarrow s_l$ とし (式 (5.80) も同様), また $l^a \rightarrow s_l^a$ とした.] Poisson 括弧 (3.102) を用いてこれを計算しよう:

$$\begin{aligned} \{U, L^i\} &= \int_{s_l} \frac{ds_l^a}{ds} \int_l dt \frac{dl^b}{dt} U_{l+} \{ \omega_b^j(l(t)) \tau_j, e_a^i(s_l(s)) \} U_{l-} \\ &= 8\pi G \int_{s_l} \frac{ds_l^a}{ds} \int_l dt \frac{dl^b}{dt} \epsilon_{ab} \delta^2(s_l(s), l(t)) U_{l+} \delta_{ij} \tau_j U_{l-}. \end{aligned} \quad (5.80)$$

[デルタ関数の引数を $l(s) \rightarrow s_l(s)$ と直した. 本稿次項で補足する.] ここに $U_{l\pm}$ は線分によって切断される辺の 2 つの部分のホロノミーである. これは再パラメータ付けと座標の選択の下で不変なので, リンク l , 線分 s_l , 法線 n が直交する座標を選ぶことができ, 直ちに積分がちょうど 1 (unity) を与えることが分かる. したがって

$$\{U_l, L_{l'}^i\} = 8\pi G \delta_{ll'} U_{l+} \tau^i U_{l-}. \quad (5.81)$$

これは右辺がもとの変数で書かれていないので, やや悩ましい. しかし L^i の定義は $U_- = 1$ となる特別なゲージで成されていることを思い出そう [式 (4.32) の段落]. これを用いると,

$$\{U_l, L_{l'}^i\} = 8\pi G \delta_{ll'} U_l \tau^i. \quad (5.82)$$

[5.2.2 項のノートで述べたように群要素 U_l をリンク l に逆行するホロノミーとする場合にも, U_{l+} を l の始点側, U_{l-} を l の終点側のホロノミーと解釈すれば, 以上の結論はそのまま成り立つ. 途中計算では積分範囲を $l \rightarrow l^{-1}$ と修正しさえすれば良い.]

5.4.3 項について

■式 (5.80) について リンク l の線分 s_l との交点を含む無限小パラメータ区間 $(t - \Delta t/2, t + \Delta t/2)$ を Δt で表し, ホロノミーを式 (4.41) にならって

$$U_l = U_{l+} \left(\int_{\Delta t} dt \frac{dl^b(t)}{dt} \omega_b^j(l(t)) \tau_j \right) U_{l-}$$

*¹¹⁰ 特に 5.2 節で必要となるのは, Poisson 括弧 (4.38) の第 2 式である (式 (5.6)). なお τ^i は $j = 1/2$ 表現の生成子 (1.40) である.

と書いておく．すると $U_{l\pm}$ は Poisson 括弧に寄与せず，

$$\begin{aligned}\{U_l, L_l^i\} &= \int_{s_l} ds \frac{ds_l^a(s)}{ds} \{U_l, e_a^i(s_l(s))\} : (5.79) \\ &= \int_{s_l} ds \frac{ds_l^a(s)}{ds} U_{l+} \left(\int_{\Delta t} dt \frac{dl^b(t)}{dt} \{\omega_b^j(l(t)), e_a^i(s_l(s))\} \tau_j \right) U_{l-} \\ &= 8\pi G \delta^{ij} \epsilon_{ab} \left(\int_{s_l} ds \int_{\Delta t} dt \frac{ds_l^a(s)}{ds} \frac{dl^b(t)}{dt} \delta^2(s_l(s), l(t)) \right) U_{l+} \tau_j U_{l-} : (5.80) \quad (\because \text{式 (3.102)})\end{aligned}$$

となる．

■式 (5.80) から式 (5.81) への書き換えについて 本稿では式 (90) の箇所で ϵ_{ab} を $\epsilon^{ab} = \epsilon^{abc} n_c$ の逆行列として定義した．これが $\epsilon_{abc} n^c$ に一致する保証はないため，式 (5.80) における積 $\epsilon_{ab} ds_l^a dt^b$ が本文 (p.116) でおそらく想定されているように，3つの線要素の張る体積要素 $\epsilon_{abc} ds_l^a dt^b n^c$ となるとは限らない．

しかし文献 [2, p.245] にならって境界上の座標

$$x^a(s, t) = s_l^a(s) + l^a(t)$$

を導入すると，パラメータ s, t は定義域が線分やリンクに限らず面上に自然に拡張されるため，面の座標 (σ^1, σ^2) と見なせる．すると式 (5.80) の因子

$$\epsilon_{ab} \frac{ds_l^a(s)}{ds} \frac{dl^b(t)}{dt} = \epsilon_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial s} \frac{\partial x^b}{\partial t}$$

が Jacobi 行列式 $\frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(s, t)}$ となる座標とパラメータの選択が可能である．実際，法線要素 n_c が第 0 成分のみを持つ座標系を採り，次いで $n_c = (-1, 0, 0) = -\delta_{0c}$ となるようにパラメータを調節すれば，

$$\epsilon^{ab} = \epsilon^{abc} n_c = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \therefore \epsilon_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

は単なる反対称テンソルに過ぎない．このとき続く式 (5.81) が得られる．

■量子力学的演算子の交換関係 接続 ω_{ci} の運動量共役 (90):

$$\pi^{bi} = \frac{1}{8\pi G} \epsilon^{bc} e_c^i \quad (\epsilon^{ab} \equiv \epsilon^{abc} n_c)$$

を汎関数微分 $-i\hbar \delta / \delta \omega_{bi}$ に置き換えて

$$\epsilon^{bc} e_c^i = -8\pi i \hbar G \frac{\delta}{\delta \omega_{bi}}, \quad \therefore e_a^i = -8\pi i \hbar G \epsilon_{ab} \frac{\delta}{\delta \omega_{bi}} \quad (\epsilon_{ab} \epsilon^{bc} = \delta_a^c)$$

としても，量子力学的な演算子に関して式 (5.80-82) に対応する交換関係が得られる．実際，

$$\begin{aligned}[U_l, L_l^i] &= -L_l^i U_l \quad (\because [U_l, L_l^i] \bullet = U_l \cancel{L_l^i \bullet} - (L_l^i U_l) \bullet = -U_l \cancel{L_l^i \bullet}) \\ &= - \int_{s_l} ds \frac{ds_l^a(s)}{ds} e_a^i(s_l(s)) U_l \\ &= 8\pi i \hbar G \epsilon_{ab} \int_{s_l} ds \frac{ds_l^a(s)}{ds} \frac{\delta U_l}{\delta \omega_{bi}(s_l(s))} \\ &= 8\pi i \hbar G \epsilon_{ab} \int_{s_l} ds \frac{ds_l^a(s)}{ds} \int_l dt \delta^2(s_l(s), l(t)) \frac{dl^b(t)}{dt} U_l(1, t) \tau^i U_l(t, 0) \quad (\because \text{式 (4.45)}) \\ &\quad (\text{式 (5.80) に対応}) \\ &= 8\pi i \hbar G U_{l+} \tau^i U_{l-}. \quad (\text{式 (5.81) に対応})\end{aligned}$$

再びゲージ条件 $U_{l-} = 1$ を課すと, Poisson 括弧 (5.82) の代わりに交換関係 (5.6):

$$[U_l, L_l^i] = 8\pi i \hbar G \delta_{ll'} U_l \tau^i$$

を得る. このとき対応して, たった今見た演算子 $J_l^i \equiv L_l^i / 8\pi \hbar G$ の作用

$$J_l^i U_l = -i U_l \tau^i$$

は, 式 (5.9) のように書ける.

5.4.4 宇宙の周囲

問題

3 時空次元における Euclid 的な GR を考え, 時空が球面 $\mathcal{S}^2$ (“空間”) 掛ける $\mathbb{R}$ (“時間”) のトポロジーを持つと仮定せよ. 空間 (すなわち 2 次元球面) が境界で繋がった 2 つの三角形で近似される離散化を用いて, この理論を近似せよ. (2 つの) 三角形の (共通の) 周囲 (perimeter) を球面の “赤道” と呼ぶ. この三角形分割に双対なグラフは, 3 本のリンクで繋がった 2 つの結節点を持つグラフである. したがって Hilbert 空間は関数 $\psi(U, V, W)$ の空間であり, ここに U, V , および W は (リンクの与えられた向きを持つ) $SU(2)$ 群要素である. ここで, 量子状態が $\psi(U, V, W) = \text{Tr}(UV)$ となったとする. 赤道の長さはいくらか? その期待値と量子力学的な揺らぎはいくらか?

ヒント: 量子力学的な揺らぎはゼロである, 何故なら状態は周囲 (perimeter) $P = C_1 + C_2 + C_3$ の固有状態にあるからであり, ここに C_i は 3 つの Casimir である. 平均値は固有値, すなわち 3 つのスピンの (その 1 つはゼロになる) の和, 掛ける $8\pi \hbar G$ であり…….

5.4.4 項について

図 71 のように丸みを帯びた 2 つの三角形を 3 辺で貼り合わせると, その 3 辺を赤道とした 2 次元球面のトポロジーの空間が得られる (11.3 節の序文も見よ). 赤道に沿う 3 本の線分はそれぞれ, ホロノミー U, V, W を持つ双対なリンクと交差する. ここで U, V は $SU(2)$ 群要素なので $j = 1/2$ 表現のホロノミーであるのに対し, スピン・ネットワーク状態に現れない W は単位行列となっており, 実質的に自明な表現 $j = 0$ で色付けされていると見て良い. これらのリンクが担う線分の長さを式 (5.11) から求めると, 赤道の長さは

$$8\pi \hbar G \left(2 \times \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right)} + 0 \right) = 8\sqrt{3}\pi \hbar G$$

であり, 宇宙の赤道は最低でもこの長さを持たねばならないと考えられる.

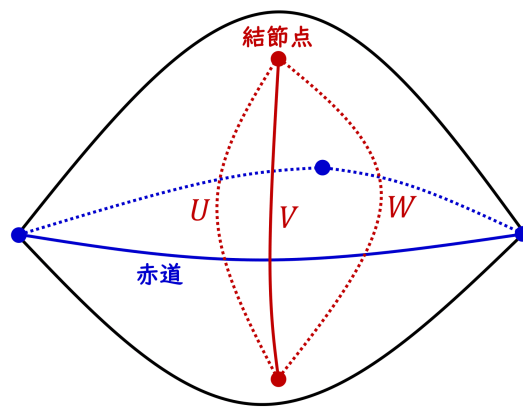


図 71 三角形分割で近似した，2次元球面のトポロジーを持つ宇宙空間の“赤道”

第 6 章 泡と宇宙定数

もし読者が物理的な 4 次元の理論にたどり着くのを急ぐならば、本章は初読の際には、以降の理解を損なうことなく飛ばすことができる。

本章では振幅に現れる発散とそれらを修正する方法に焦点を当てつつ、第 5 章で構成した 3 次元の Euclid 的な一般相対性理論の量子論を解析する。

これらの発散は摂動論的な量子一般相対性理論における標準的な紫外 (ultraviolet ; UV) 発散と同一視できない、何故なら UV 発散は任意に小さな時空領域に起因するのに対し、ここでは理論は Planck スケールで切断されているからである。むしろ、発散は大きな時空領域に由来し、ある意味、赤外 (infrared ; IR) である、もっとも時空の大きな部分を小さな境界の中に収めることができる重力においては、区別は微妙である。これらの IR 発散は理論を台無しにするか？

本章で手短かに説明する著しい結果は、正の宇宙定数を持つ理論ではこれらの発散が消えることである。Planck 長さがもたらす UV 切断に次いで、宇宙定数は理論において自然な IR 切断として機能することになる。

これは見事である、何故なら基礎物理学における 2 つの未解決の問題——小さな宇宙定数の存在と、場の量子論的な発散の存在——が互いを解消するからである：宇宙定数は理論の有限性をもたらし、また理論の有限性にとって必要である。

6.1 ゲージ不変な恒等関数としての頂点振幅

単一の頂点の振幅をさらに研究するところから、発散の解析を始めよう。単一の四面体 τ から成る三角形分割を考えよ。境界グラフは再び図 65 のように四面体の形を持つ [境界の三角形分割の双対 $\Gamma = (\partial\Delta)^*$ として理解できる]。したがって振幅はこのグラフ上のリンクに対する変数の関数である。グラフの結節点 (四面体の面) を $a, b = 1, 2, 3, 4$ でラベルし、リンクに属する境界の群要素を $U_{ab} = U_{ba}^{-1}$ で表す。遷移振幅は関数 $W(U_{ab})$ である。

それを書くには、2-複体を構成せねばならない。四面体の内部に頂点を置き、4 本の辺でそれを 4 つの境界の結節点と繋ぎ、また頂点を 6 本のリンクと繋ぐ 6 枚の面を描く。図 72 を見よ。[これらの面は 4.5.2 項の図

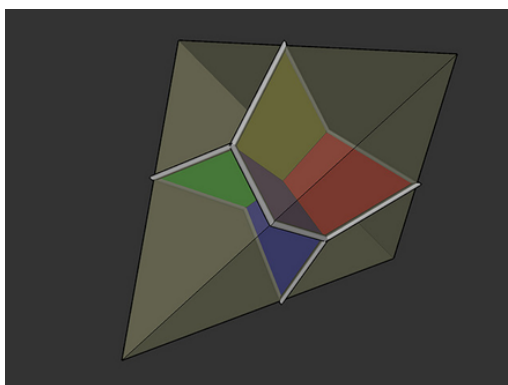


図 72 単一の四面体のスピン・フォーム [本稿では教科書 p.119 から図を採った]

54 における四角形 $Oa''md''$ などである.] 式 (5.39) (簡単のために規格化を落とす) を用いると, これは

$$W(U_{ab}) = \int dU_a \prod_{ab} \delta(U_a U_{ab} U_b^{-1}) \quad (6.1)$$

で与えられる [これは式 (5.72) に一致している]. この積分たちは容易に実行できる. それらの 1 つは冗長であることが判明し,

$$W(U_{ab}) = \delta(U_{12}U_{23}U_{31})\delta(U_{13}U_{34}U_{41})\delta(U_{23}U_{34}U_{42}) \quad (6.2)$$

を得る [本稿次節を見よ]. デルタ関数の中にある一連の U_{ab} の各々は, 境界グラフにおける独立な閉ループに対応することに注意せよ [図 65 の結節点に番号 $a = 1, 2, 3, 4$ を記入すると分かりやすい]. この振幅の解釈はしたがって直接的である: 振幅は接続が境界において平坦であることを課す. 平坦であるのは 3 次元の接続, すなわち 2 次元の回転ではなく, 3 次元の回転を生成する接続であることに注意せよ. すなわち, 各面に時空の基準系があり, それらはあらゆる閉ループが単位元を与える具合に, 境界に沿って平行移動されると想像できる. 言い換えると, $W(U_{ab})$ は単に $\prod_{ab} \delta(U_{ab})$ のゲージ不変なバージョンである. [閉ループに関するホロノミーはゲージ不変である (式 (4.44) の箇所を見よ).] また実際, これが公式 (6.1) の述べていることである: それはデルタ関数の積をゲージ不変にしているに過ぎない. 何故 4 番目の独立なループ $U_{12}U_{24}U_{41}$ が現れないのか, 読者は不思議に思うかもしれない. しかし接続が他の 3 本のループにおいて平坦であれば, 接続はこのループにおいても平坦であることが直ちに分かる [本稿次節で説明]. 実際,

$$\langle W | \psi \rangle = \int dU_{ab} W(U_{ab}) \psi(U_{ab}) = \int dU_a \psi(U_a U_b^{-1}) \quad (6.3)$$

が容易に分かる. すなわち, W はゲージ軌道にわたって平均された平坦な接続上へ射影する.

ここで同じ振幅をスピン表現で調べよう. それは

$$W(j_{ab}) = \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} \quad (6.4)$$

で与えられる. [図 65 の箇所で説明されているように, 組 ab でラベルされる 6 本の境界リンクがスピン $\{j_{ab}\} = \{j_1, \dots, j_6\}$ を担う.] 全てが整合的ならば, これはちょうど積分核がスピン・ネットワーク状態で与えられる, 上記の変換でなければならない. すなわち, [式 (101) でリンクのラベルを $l \rightarrow ab$ とおくと]

$$W(j_{ab}) = \int dU_{ab} \psi_{j_{ab}}(U_{ab}) W(U_{ab}). \quad (6.5)$$

これを確認しよう. 定義 [式 (5.35) (ただし $\iota_n \rightarrow i_a$) と式 (6.1)] を代入すると

$$W(j_{ab}) = \int dU_{ab} \int dU_a \prod_{ab} \delta(U_a U_{ab} U_b^{-1}) \otimes_a i_a \cdot \prod_{ab} D^{j_{ab}}(U_{ab}). \quad (6.6)$$

積分を実行すると

$$W(j_{ab}) = \int dU_a \otimes_a i_a \cdot \prod_{ab} D^{j_{ab}}(U_a^{-1}) D^{j_{ab}}(U_b). \quad (6.7)$$

[結節因子の前の $\prod_{ab}$ を消去し, また 2 つの Wigner 行列の引数をそれぞれ逆数に修正した.]

ところが今や表現の行列要素はちょうど不変テンソルに作用し, またそれら [テンソル i_a たち] は不変なので, それら [行列 $D^{j_{ab}}$ の要素] は何もせず, よって残るのは 4 つの不変テンソルの縮約

$$W(j_{ab}) = \text{Tr}[\otimes_a i_a], \quad (6.8)$$

すなわち Wigner の $6j$ 記号 (6.4) である [本稿次節で補足].

これは $6j$ 記号が四面体のグラフに関する Hilbert 空間における, 平坦な接続上のゲージ不変なデルタ関数の Fourier 変換に他ならないことを示している. このことは表記

$$W(j_{ab}) = \psi_{j_{ab}}(\mathbb{1}) \quad (6.9)$$

で書ける [改めて式 (6.5) に $W(U_{ab}) = \prod \delta(U_{ab})$ を代入], あるいは関数の $SU(2)$ 不変な部分への射影子 $P_{SU(2)}$ を用いて, 頂点振幅 W_v は

$$\langle \psi_v | W_v \rangle = (P_{SU(2)} \psi_v)(\mathbb{1}) \quad (6.10)$$

と書くことができ, ここに ψ_v は頂点の境界における状態である. [本稿次節で補足する. 2.4.2 項, 式 (5.49), 式 (6.3) と比較すると, 上式 (6.10) 左辺はブラとケットが逆と考えられる.] これは前章 [の式 (5.51)] で予期していた表記である.

6.1 節について

■頂点振幅 (6.1-2) について 準備として $SU(2)$ 群上のデルタ関数 $\delta(g)$ について述べておく. それは引数が単位元 (群多様体の “原点”) $\mathbb{1}$ となる値を選び出す:

$$\int dg \delta(gh^{-1}) f(g) = f(h).$$

この性質からデルタ関数の “Fourier 展開” の公式 (5.64): $\delta(g) = \sum_j d_j \text{Tr}[D^j(g)]$ が導かれる. すると著しい性質として, トレースの巡回対称性はデルタ関数の引数に関する巡回対称性に引き継がれる. したがって特に

$$\delta(ghg^{-1}) = \delta(h)$$

が成り立つ. これは両辺がともに $h = \mathbb{1}$ のときにゼロでない値を持つことから, 直観的にも納得のいく結果となっている.

ここで頂点振幅 (6.1) に取り組む前に, 練習として 2 次元の空間における式 (6.1) の対応物を考えよう. このとき単一の頂点は図 73 のように三角形分割における単一の三角形を表し, その境界の 3 辺はそれぞれ結節点 $a = 1, 2, 3$ を持つ. そこで頂点から結節点 a に向かう辺と, 境界上で結節点を a から b の向きに繋ぐリンクに割り当てられる群要素を, 結節点のラベルを用いてそれぞれ U_a と U_{ab} で表す (図 73). すると $U_{ba} = U_{ab}^{-1}$ であり, 頂点振幅 (6.1) の対応物は

$$W(U_{ab}) = \int dU_1 dU_2 dU_3 \delta(U_1 U_{12} U_2^{-1}) \delta(U_2 U_{23} U_3^{-1}) \delta(U_3 U_{31} U_1^{-1}).$$

ここで例えば U_1 に関する積分を実行して 1 つ目のデルタ関数を消去すると, 残りの因子に $U_1 = U_2 U_{21}$, すなわち $U_1^{-1} = U_{12} U_2^{-1}$ が代入される. 同様の手続きを繰り返すと

$$\begin{aligned} W(U_{ab}) &= \int dU_2 dU_3 \delta(U_2 U_{23} U_3^{-1}) \delta(U_3 U_{31} U_{12} U_2^{-1}) = \int dU_3 \delta(U_3 U_{31} U_{12} U_{23} U_3^{-1}) \\ &= \delta(U_{31} U_{12} U_{23}) \int dU_3 = \delta(U_{12} U_{23} U_{31}) \end{aligned}$$

となり, 式 (6.2) に対応する結果が得られる. ただし第 3, 第 4 の等号ではデルタ関数の巡回対称性を用い, 特に最後の等号では Haar 測度が式 (1.19) のように規格化されていることに注意した. このように 3 つの群

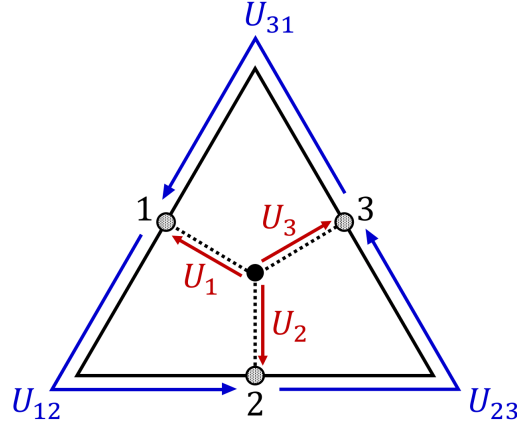


図 73 2次元における単一の頂点のスピン・フォーム

要素 U_1, U_2, U_3 に関する積分のうち 1 つは冗長である．また 2 つの面に共有される辺に関する逆向きの群要素の寄与が相殺し，三角形の境界を周回する群要素の寄与が生き残るのは，通常の Stokes の定理と似ている．あるいは式 (5.69) の箇所の表現を借りれば，デルタ関数は 3 つの面を共通の辺 (群要素 U_1, U_2, U_3 を持つ) で貼り合わせているとも言い得る．

さて，3次元での頂点振幅 (6.1) を考えよう．ここでは同様に， U_a は四面体内部の頂点と面 a の結節点を繋ぐ辺の群要素と推察される．実際このときデルタ関数の引数は面を周回するホロノミーであり，組 ab は面の枚数と同じ数 ${}_4C_2 = 6$ だけある．すると式 (6.1) は具体的には

$$W(U_{ab}) = \int dU_1 dU_2 dU_3 dU_4 \delta(U_1 U_{12} U_2^{-1}) \delta(U_1 U_{13} U_3^{-1}) \delta(U_1 U_{14} U_4^{-1}) \\ \times \delta(U_2 U_{23} U_3^{-1}) \delta(U_2 U_{24} U_4^{-1}) \delta(U_3 U_{34} U_4^{-1})$$

と書けると考えられる．再び $U_1, U_2, \dots$ に関する積分をこの順に実行し，一連のデルタ関数を前から順に消費していくと

$$\begin{aligned} W(U_{ab}) &= \int dU_2 dU_3 dU_4 \delta(U_2 U_{21} U_{13} U_3^{-1}) \delta(U_2 U_{21} U_{14} U_4^{-1}) \delta(U_2 U_{23} U_3^{-1}) \delta(U_2 U_{24} U_4^{-1}) \delta(U_3 U_{34} U_4^{-1}) \\ &= \int dU_3 dU_4 \delta(U_3 U_{31} U_{12} U_{21} U_{14} U_4^{-1}) \delta(U_3 U_{31} U_{12} U_{23} U_3^{-1}) \delta(U_3 U_{31} U_{12} U_{24} U_4^{-1}) \delta(U_3 U_{34} U_4^{-1}) \\ &= \int dU_4 \delta(U_{31} U_{12} U_{23}) \delta(U_{41} U_{13} U_{31} U_{12} U_{24} U_4^{-1}) \delta(U_{41} U_{13} U_{34} U_4^{-1}) \\ &= \delta(U_{12} U_{23} U_{31}) \delta(U_{12} U_{24} U_{41}) \delta(U_{13} U_{34} U_{41}) \end{aligned}$$

を得る．ただし最後の等号では全てのデルタ関数を積分の外に出せることに注意し，再び $\int dU_4 = 1$ を用いた．したがってここでも 1 つの積分が冗長である．

最右辺を式 (6.2) と比べると，1 つのデルタ関数 $\delta(U_{23} U_{34} U_{42})$ が代わりに $\delta(U_{12} U_{24} U_{41})$ に置き換わっている．ところが式 (6.2) の段落にあるように，四面体上の 4 つのループのうち 3 つに関するホロノミーが $\mathbb{1}$ であれば，残り 1 つのループのホロノミーも $\mathbb{1}$ となる．よって 4 つのループのうち，どの 3 つに関するデルタ関数を書き並べても式の意味は変わらないため，上式は式 (6.2) と等価である．実際，例えば 3 つのデルタ関

数を式 (6.2) のように選ぶと、各々のデルタ関数は

$$U_{12} = U_{13}U_{32}, \quad U_{24} = U_{23}U_{34}, \quad U_{41} = U_{43}U_{31}$$

を課す。これらを代入すると、第 4 のループに関するホロノミーは

$$U_{12}U_{24}U_{41} = (U_{13}U_{32})(U_{23}U_{34})(U_{43}U_{31}) = \mathbb{1}$$

となる。

■式 (6.7) の式 (6.8) への書き換えについて 再び 2 次元の例 (図 73) を用いて、教科書における言葉での説明をあからさまな式変形として示そう。まず出発点となる式 (6.5) におけるスピン・ネットワーク状態 $\psi_{jab}(U_{ab})$ を構成するところから始める。スピン $j_{ab}(=j_{ba})$ で色付けされた 3 本のリンク ab の各行列要素 $D^{jab}(U_{ab})_{n_{ab}}^{m_{ab}}$ を充てる。ただし 7.5.2 項にならって磁気量子数の添字の上下を区別した。このとき結節点 $a = 1, 2, 3$ に充てられる結節因子は順に $\iota_{m_{12}}^{n_{31}}, \iota_{m_{23}}^{n_{12}}, \iota_{m_{31}}^{n_{23}}$ と書くことができ、これらと Wigner 行列要素の縮約で $\psi_{jab}(U_{ab})$ が定義される。これを踏まえて式 (6.7) を具体的に書き下すと

$$\begin{aligned} W(j_{ab}) &= \int dU_1 dU_2 dU_3 \iota_{m_{12}}^{n_{31}} \iota_{m_{23}}^{n_{12}} \iota_{m_{31}}^{n_{23}} \\ &\quad \times [D^{j_{12}}(U_1^{-1})_{m_{12}}^{n_{12}} D^{j_{12}}(U_2)^m_{n_{12}}] [D^{j_{23}}(U_2^{-1})_{m'_{23}}^{m_{23}} D^{j_{23}}(U_3)^{m'_{23}}_{n_{23}}] [D^{j_{31}}(U_3^{-1})_{m''_{31}}^{m_{31}} D^{j_{31}}(U_1)^{m''_{31}}_{n_{31}}] \\ &= \int dU_1 dU_2 dU_3 [D^{j_{12}}(U_1^{-1})_{m_{12}}^{n_{12}} D^{j_{31}}(U_1)^{m''_{31}}_{n_{31}}] \\ &\quad \times [D^{j_{23}}(U_2^{-1})_{m'_{23}}^{m_{23}} D^{j_{12}}(U_2)^m_{n_{12}}] [D^{j_{31}}(U_3^{-1})_{m''_{31}}^{m_{31}} D^{j_{23}}(U_3)^{m'_{23}}_{n_{23}}] \\ &= \iota_m^{m''} \iota_{m'}^{m'} \iota_{m''}^{m''} \int dU_1 dU_2 dU_3 = \iota_m^{m''} \iota_{m'}^{m'} \iota_{m''}^{m''} \end{aligned}$$

となり、式 (6.8) の形が得られる。

3 次元においても同様に計算できる。実際ここでは結節点 $a, b = 1, 2, 3, 4$ を結ぶ各リンク a, b の向きを

$$1 \rightarrow 2, \quad 1 \rightarrow 3, \quad 1 \rightarrow 4, \quad 2 \rightarrow 3, \quad 2 \rightarrow 4, \quad 3 \rightarrow 4$$

と選び、対応する結節因子を用いると、式 (6.7) は

$$\begin{aligned} W(j_{ab}) &= \int dU_1 dU_2 dU_3 dU_4 \iota_{m_{12}m_{13}m_{14}}^{n_{12}n_{13}n_{14}} \iota_{m_{23}m_{24}}^{n_{23}n_{24}} \iota_{m_{34}}^{n_{34}} \iota_{m_{14}m_{13}m_{12}}^{n_{14}n_{13}n_{12}} \\ &\quad \times [D^{j_{12}}(U_1^{-1})_{m'_{12}}^{m_{12}} D^{j_{12}}(U_2)^{m'_{12}}_{n_{12}}] [D^{j_{13}}(U_1^{-1})_{m'_{13}}^{m_{13}} D^{j_{13}}(U_3)^{m'_{13}}_{n_{13}}] \\ &\quad \times [D^{j_{14}}(U_1^{-1})_{m'_{14}}^{m_{14}} D^{j_{14}}(U_4)^{m'_{14}}_{n_{14}}] [D^{j_{23}}(U_2^{-1})_{m'_{23}}^{m_{23}} D^{j_{23}}(U_3)^{m'_{23}}_{n_{23}}] \\ &\quad \times [D^{j_{24}}(U_2^{-1})_{m'_{24}}^{m_{24}} D^{j_{24}}(U_4)^{m'_{24}}_{n_{24}}] [D^{j_{34}}(U_3^{-1})_{m'_{34}}^{m_{34}} D^{j_{34}}(U_4)^{m'_{34}}_{n_{34}}] \\ &= \int dU_1 dU_2 dU_3 dU_4 [D^{j_{12}}(U_1^{-1})_{m'_{12}}^{m_{12}} D^{j_{13}}(U_1^{-1})_{m'_{13}}^{m_{13}} D^{j_{14}}(U_1^{-1})_{m'_{14}}^{m_{14}} \iota_{m_{12}m_{13}m_{14}}^{n_{12}n_{13}n_{14}}] \\ &\quad \times [D^{j_{12}}(U_2)^{m'_{12}}_{n_{12}} D^{j_{23}}(U_2^{-1})_{m'_{23}}^{m_{23}} D^{j_{24}}(U_2^{-1})_{m'_{24}}^{m_{24}} \iota_{m_{23}m_{24}}^{n_{23}n_{24}}] \\ &\quad \times [D^{j_{13}}(U_3)^{m'_{13}}_{n_{13}} D^{j_{23}}(U_3)^{m'_{23}}_{n_{23}} D^{j_{34}}(U_3^{-1})_{m'_{34}}^{m_{34}} \iota_{m_{34}}^{n_{34}}] \\ &\quad \times [D^{j_{14}}(U_4)^{m'_{14}}_{n_{14}} D^{j_{24}}(U_4)^{m'_{24}}_{n_{24}} D^{j_{34}}(U_4)^{m'_{34}}_{n_{34}} \iota_{m_{14}m_{13}m_{12}}^{n_{14}n_{13}n_{12}}] \\ &= \iota_{m'_{12}m'_{13}m'_{14}}^{m'_{12}m'_{13}m'_{14}} \iota_{m'_{23}m'_{24}}^{m'_{23}m'_{24}} \iota_{m'_{34}}^{m'_{34}} \int dU_1 dU_2 dU_3 dU_4 \\ &= \iota_{m'_{12}m'_{13}m'_{14}}^{m'_{12}m'_{13}m'_{14}} \iota_{m'_{23}m'_{24}}^{m'_{23}m'_{24}} \iota_{m'_{34}}^{m'_{34}} \end{aligned}$$

となる．最右辺は不変テンソル間の縮約 (6.8) であって，符号を含む規格化定数の違いを除き $6j$ 記号に一致する．

■頂点振幅の表記 (6.10) について この頂点振幅の速記術的な表記は既に式 (5.51) で導入されており，そこでは引数 (1) は頂点グラフ (5.4.2 項の図 70) のスピン・ネットワークの $U_l = 1$ 上での評価を意味するとある．確かに得られた頂点振幅 (6.2) は，四面体上の各結節点 $a = 1, 2, 3$ を結びリンクのホロノミー U_{ab} に対し，4 つのループのホロノミーが

$$U_{12}U_{23}U_{31} = 1, \quad U_{12}U_{24}U_{41} = 1, \quad U_{13}U_{34}U_{41} = 1, \quad U_{23}U_{34}U_{42} = 1$$

であることを意味し，またループは結節因子を必要としない (ループは結節点のないスピン・ネットワークである)．他方で各ループを我々が行ったように，結節点間のホロノミー U_{ab} に分割すると，必ずしも式 (5.51) の箇所のように各 $U_l = U_{ab} = 1$ であることまでは言えないと考えられる．実際，例えば $h \neq 1$ に対して

$$U_{12} = h, \quad U_{13} = 1, \quad U_{14} = h, \quad U_{23} = h^{-1}, \quad U_{24} = 1, \quad U_{34} = h$$

としても，上式が全て満たされる．よって群要素 U_{ab} は完全には固定されず，実際それらは頂点振幅 (5.77) の引数に他ならない独立変数 h_{vf} を成し，完全な振幅 (5.76) において初めて積分される．

式 (6.2) の段落にあるように，頂点振幅の構成 (6.1) は境界状態 $\psi_v(1) \sim \prod_{ab} \delta(U_{ab})$ をゲージ不変にする措置と見なせる．実際，各ホロノミー U_{ab} は両端の結節点異なるため，一般に $\text{SU}(2)$ ゲージ不変でない．そこで面を $\text{SU}(2)$ 積分により辺で貼り合わせると $\psi_v(1)$ の代わりにループのホロノミーが，したがってゲージ不変な状態が得られる．このように考えると，それを式 (6.10): $W_v = (\text{P}_{\text{SU}(2)}\psi_v)(1)$ と略記するのは理に適っている．

ただし表記 (6.10) に関しては，4 次元の Lorentz 的な理論に対する頂点振幅の構成 (7.3 節) に応用し得る形で，『ザコパネ講義 (Zakopane lectures)』(Rovelli 2011) の 3.1 節を参考に改めて以下のようにまとめる．一般に振幅は境界状態の関数である (2.4.2 項)．ところが状態には 2 通りの意味があり，境界状態は配位変数 h_l で指定することも，式 (5.29), (5.33), (7.39) のようにその関数 $\psi(h_l)$ として表すこともできる．そこで頂点振幅は式 (6.10) 左辺のように，境界状態 $\psi(h_l)$ の関数として $W_v(\psi) = \langle W_v | \psi \rangle$ と書ける．これは境界グラフの群要素 $h_l = h_{\text{vf}}$ の関数としての頂点振幅 $W_v(h_l)$ (式 (5.77) の $A_v(h_l)$) と，

$$W_v(\psi) = \langle W_v | \psi \rangle = \int dh_l \langle W_v | h_l \rangle \langle h_l | \psi \rangle = \int dh_l W_v(h_l) \psi(h_l) \quad (102)$$

で関係付けられると考えられる．(ここでも正確には $dh_l \rightarrow \prod_l dh_l$, $\psi(h_l) \rightarrow \psi(\{h_l\})$ 等々である．完全性 $\int dh_l |h_l\rangle \langle h_l| = 1$ に関しては式 (101) や式 (11.25) も見よ．)

次に式 (6.10) 右辺の速記術が表す手順に従って頂点振幅 $W_v(\psi)$ を構成する．恒等式

$$\begin{aligned} \psi(g_l) &= \int_{\text{SU}(2)} dh_l \psi(h_l) \prod_l \delta(g_l^{-1} h_l) \\ &= \int_{\text{SU}(2)} dh_l \psi(h_l) \prod_l \left[\sum_j d_j \text{Tr}_j(g_l^{-1} h_l) \right] \quad (\text{式 (5.64), } \text{Tr}_j(g) = \text{Tr}(D^j(g)) \text{ は指標}) \\ &= \int_{\text{SU}(2)} dh_l \psi(h_l) \sum_{j_l} \prod_l d_{j_l} \text{Tr}_{j_l}(g_l^{-1} h_l) \end{aligned}$$

から始めよう．リンク l の始点 (source) と終点 (target) をそれぞれ $s(l), t(l)$ として, $SU(2)$ 群要素は

$$g_l \rightarrow g_{s(l)} g_l g_{t(l)}^{-1} \quad \text{i.e.} \quad g_l^{-1} \rightarrow g_{t(l)} g_l^{-1} g_{s(l)}^{-1}$$

とゲージ変換する．そこで結節点 n に作用する $SU(2)$ 群要素を g_n , dg_n を Haar 測度として, ゲージ変換の作用にわたる積分を施すと, Haar 測度の定義により $SU(2)$ ゲージ不変な状態

$$(P_{SU(2)}\psi)(g_l) = \int_{SU(2)} dg'_n \psi(g_l) = \int_{SU(2)} dh_l \psi(h_l) \sum_{j_l} \int_{SU(2)} dg'_n \prod_l d_{j_l} \text{Tr}_{j_l} [(g_{t(l)} g_l^{-1} g_{s(l)}^{-1}) h_l]$$

が得られる (式 (8.35) の箇所も見よ)．ここに $P_{SU(2)}$ はゲージ不変な状態への射影子, また dg'_n におけるプライムは式 (5.73) で導入したように 1 つの冗長な積分を除外することを表す．ここで式 (5.13) のノートで注意したように, 同じ結節点 n に作用する群要素 $g_n^{\pm 1}$ は, それが由来する全てのリンク l に共通であることを思い出そう．特に上式で境界のホロノミーを $g_l = \mathbb{1}$ において頂点振幅 (6.10):

$$W_v(\psi) = (P_{SU(2)}\psi)(\mathbb{1}) = \int_{SU(2)} dh_l \psi(h_l) \sum_{j_l} \int_{SU(2)} dg'_n \prod_l d_{j_l} \text{Tr}_{j_l} [g_{t(l)} g_{s(l)}^{-1} h_l]$$

を定義すると, その構成により頂点振幅の $SU(2)$ 不変性が満たされる．

これを冒頭の式 (102) と比較すると,

$$W_v(h_l) = \sum_{j_l} \int_{SU(2)} dg'_n \prod_l d_{j_l} \text{Tr}_{j_l} [g_{t(l)} g_{s(l)}^{-1} h_l]$$

と同定できる．ここで境界グラフのリンク l と結節点 n がそれぞれ, 頂点 v に隣接する面 f と辺 e に 1 対 1 に対応すること, また $d_j = 2j + 1$ がスピン j 表現の次元であることに注意すると, これは式 (5.77) と等価である．式 (5.77) は面 f に任意にスピン j_f を充てて, 面 f に関する量をスピン j_f 表現で評価し, 次いで可能なスピン j_f に関する和をとるという構成になっている．またデルタ関数の展開公式 (5.64) の面影を残している．

以上をまとめると順序としては, 式 (6.10) で表される頂点振幅がホロノミーの関数として式 (5.77) ないし式 (6.1) で与えられ, そのスピン表示が $6j$ 記号 (6.4), (6.8) であることが示された．

6.2 泡と棘

再び四面体 τ を考えよ, ただしここではその内部に点 P を加え, P をもとの四面体の 4 点と繋ぐ．点 P と, もとの四面体の 6 辺のうち 1 つで決まる, 6 つの三角形を考えよ．これらの三角形はもとの四面体を 4 つのより小さい四面体 $\tau_1, \dots, \tau_4$ に分離する．これは 4 つの連結した四面体から成る三角形分割 Δ_4 を定義する (図 74)．(1 つの四面体から 4 つの四面体へのこの手順は “1-4 Pachner 移動 (1-4 Pachner move)” と呼ばれる．) 振幅 W_{Δ_4} を計算しよう．この三角形分割の境界は単一の四面体の場合と同じである [4.5.2 項の第 2 問の解答を見よ]．したがって境界変数はやはり前節のように, 6 つの変数 U_{ab} に採ることができる．

振幅を計算するには, 2-複体 Δ_4^* を理解する必要がある．[以下, 4.5.2 項の図 54 の記号を参照しつつ補足する.] これは各々が他の頂点および 1 つの境界の結節点と繋がる, 4 つの頂点 $[a', b', c', d']$ を持つ．それは 2 種類の内部の面を持つ: 6 つの境界面 [面 $a'a''md''d'$ 等] と, 4 つの内部面 $[\Delta a'b'c'$ 等] であり, それぞれは頂点を端に持つ．少し考えると, これら 4 つの内部面は $P [= O]$ を取り囲むことが分かる．それらは合わせて球面のトポロジーを持つ [四面体 $a'b'c'd'$]．それらは “泡 (bubble)” の例を成す．泡とは境界のない面を成す, 内部面の集まりである．[ここで境界がないとは, 面が境界とリンクを共有していないという意味で

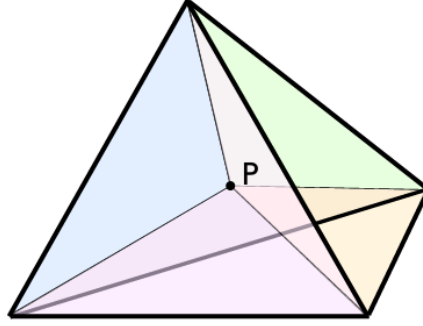


図 74 Δ_4 . [本稿では教科書 p.120 から図を採った.]

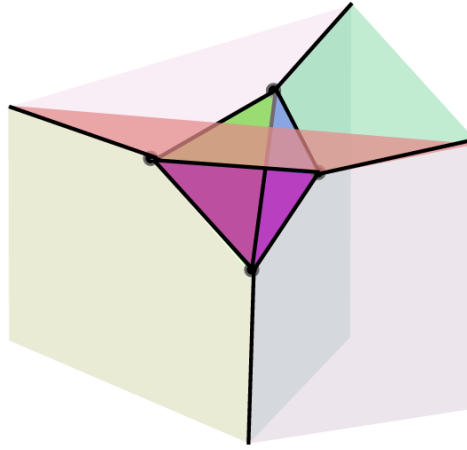


図 75 Δ_4^* . 泡は 4 つの内部の頂点によって張られる, 内部の四面体である. [本稿では教科書 p.121 から図を採った. 4.5.2 項の図 54 における四面体 $a'b'c'd'$ が泡である.]

あり (式 (6.16) の段落), このとき泡はバルクにおいて, 球面などと同様に閉曲面を成すという意味でも境界を持たないと推察される (続く段落). 文献 [2, p.338] では泡を単に閉じた 2 次元の面を成す 2-複体の面の集まりと定義している.] 泡は重要である. 図 75 を見よ.

振幅はこのとき容易に書ける. 境界の群要素を U_{ab} , 内部の群要素を U_a および V_{ab} と呼ぶと,

$$W_{\Delta_4}(U_{ab}) = \int dU_a dV_{ab} \prod_{ab} \delta(U_{ab} U_b^{-1} V_{ba} U_a) \prod_{abc} \delta(V_{ab} V_{bc} V_{ca}) \quad (6.11)$$

を得る.

note 4.5.2 項の図 54 において, 境界面の周りを囲む一連の辺とリンク $a''d'', d''d', d'a', a'a''$ に順に群要素 $U_{ad}, U_d^{-1}, V_{da}, U_a$ を充てると, 第 1 のデルタ関数の引数を得る. 第 2 のデルタ関数の引数は泡の境界 $\Delta a'b'c'$ 等を周回するホロノミーである.

積分すると, 容易に

$$W_{\Delta_4}(U_{ab}) = \delta(U_{12} U_{23} U_{31}) \delta(U_{13} U_{34} U_{41}) \delta(U_{23} U_{34} U_{42}) \delta(U_{12} U_{24} U_{41}) \quad (6.12)$$

を得る [本稿次節で確認]。一見すると、これは上記で計算した単一の四面体の振幅 [式 (6.2)]：

$$W_{\Delta_4}(U_{ab}) = \delta(U_{12}U_{23}U_{31})\delta(U_{13}U_{34}U_{41})\delta(U_{23}U_{34}U_{42}) \quad (6.13)$$

と全く同じものに見えるかもしれない；しかし重要な違いがある：最後のデルタ関数である。既に注意したように、これは冗長である。これを詳しく理解するために、振幅を任意の境界関数 $\psi(U_{ab})$ に対して積分しよう。

$$\langle W_{\Delta_4}|\psi\rangle = \int dU_{ab} W_{\Delta_4}(U_{ab})\psi(U_{ab}) = \delta(1) \int dU_a \psi(U_a U_b^{-1}) \quad (6.14)$$

を得る。すなわち

$$W_{\Delta_4} = \delta(1)W_{\Delta_1} \quad (6.15)$$

であり [本稿次節で確認]， $\delta(1)$ はもちろん無限大の因子である。[公式 (5.40), (5.64) より $\delta(1) = \sum_j (2j+1)^2 = \infty$.]

発散の出現は標準的な場の量子論の発散の現れである。それは泡の存在と密接に関係している。実際そうであることを理解するために、スピン表現において同じ計算を再考しよう [運動量空間に移る]。この場合、

$$W_{\Delta_4}(j_{ab}) = \sum_{j_{ab}} \prod_{ab} d_{j_{ab}} \prod_a \{6j\}. \quad (6.16)$$

[これは式 (5.48) の特例となっている.] 一般に、このような和において j_{ab} の和の範囲は三角恒等式に制限される。境界の面は有限のスピンを持つので、内部面が大きなスピンを持つ唯一の可能性は、各辺において、少なくとも 1 つの大きなスピンを持つ他の面と隣接することである。言い換えると、任意に大きなスピンを持つ面の組は境界を持ち得ない。したがって三角恒等式による最大のスピンの打ち切られない和を得る唯一の可能性は、2-複体において境界のない面を成す面の集まりを得ることである。すなわち、泡である。

これは全て、頂点において運動量が保存するために発散がループに関係するところの、通常の場合の量子論の Feynman 表現における紫外発散と非常に似ている。ここでは角運動量が辺で保存するため、発散は泡に関係している。Feynman ループは任意に高い運動量が巡回し得る、閉じた線の集まりである。スピン・フォーム発散は任意に高いスピンを持ち得る、閉じた面の集まりである。

しかしながら、形式的な類似性にも関わらず、2 種類の発散の物理的な解釈には重要な違いがあることに注意せよ。Feynman 発散は [大きな運動量に、したがって] 非常に小さなスケールで起きることに関係する。対照的に、スピン・フォーム発散は大きなスピン、すなわち大きな幾何学に関係する。したがって、それらは紫外発散ではない：それらは赤外発散である。これをより詳しく調べよう。

棘

$W_{\Delta_4}(j_{ab})$ の発散に寄与する項を考えよう。それは非常に大きなスピンの内部面に付随する 2-複体の、スピンの配位である。対応する幾何学はどうなるか？ 内部面のスピンは P を境界と繋ぐ 4 本のボーン (bones) の長さである。したがって発散を生じる幾何学は、これらの長さが非常に大きい幾何学である。

これに関する直観を得るために、3 次元の代わりに 2 次元においてアナログな状況を考えよ。小さな曲率を持つ平面を三角形分割することを想像せよ。ただしこの平面上のどこかに“棘 (spike)”——極めて細く高い山 (図 76)——があると想像せよ。点 P がこの山の頂点に位置し、山の底を囲む三角形によって囲まれる三角形分割を選ぶ。これは底辺の三角形は小さいものの、この三角形からの P の距離は大きいという状況である。これは全て平面の内部幾何学に関係しており、この文脈で重要ではない平面の外部幾何学に関係しているのではないことを、強調しておくことが重要である。したがって P は、たとえ三角形の境界からの距離が任

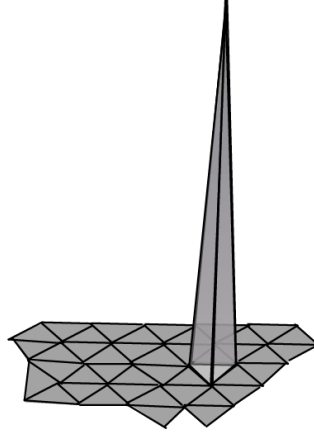


図 76 2 次元の三角形分割における棘. 重要なのは 2 次元の面の内部幾何学である. [本稿では教科書 p.123 から図を採った.]

意に大きいとしても, なお三角形の内部にある. それが三角形の“外側”にあるというのは意味がない, というのも, ここで重要なのは 2 次元の面そのものの幾何学のみだからである. その境界から非常に大きな距離にある点を含む小さな三角形を得る可能性は, Riemann 空間の通常の特徴に過ぎない. それは空間が強く曲がり得るために起きる.

この例は棘, したがってスピン・フォーム発散に対する正しい直観を供する. それらは強く曲がった幾何学であり, 小さな境界にも関わらず大きな内部の体積を持つ領域がある場合に起きる^{*111}.

6.2 節について

■ W_{Δ_4} の式 (6.12), (6.15) の確認 まず式 (6.11) における群要素 U_a に関する積分

$$\begin{aligned} w(U_{ab}, V_{ab}) &\equiv \int dU_a \prod_{ab} \delta(U_{ab} U_b^{-1} V_{ba} U_a) \\ &= \int dU_1 dU_2 dU_3 dU_4 \delta(U_{12} U_2^{-1} V_{21} U_1) \delta(U_{13} U_3^{-1} V_{31} U_1) \delta(U_{14} U_4^{-1} V_{41} U_1) \\ &\quad \times \delta(U_{23} U_3^{-1} V_{32} U_2) \delta(U_{24} U_4^{-1} V_{42} U_2) \delta(U_{34} U_4^{-1} V_{43} U_3) \end{aligned}$$

に着目する. 例えば $U_1, U_2, \dots$ に関する積分をこの順に実行し, 一連のデルタ関数を前から順に消費しよう. すると

$$\begin{aligned} w(U_{ab}, V_{ab}) &= \int dU_2 dU_3 dU_4 \delta(U_{13} U_3^{-1} V_{31} V_{12} U_2 U_{21}) \delta(U_{14} U_4^{-1} V_{41} V_{12} U_2 U_{21}) \\ &\quad \times \delta(U_{23} U_3^{-1} V_{32} U_2) \delta(U_{24} U_4^{-1} V_{42} U_2) \delta(U_{34} U_4^{-1} V_{43} U_3) \end{aligned}$$

^{*111} 鋭い読者はこの点に反論するかもしれない. 3 次元的な重力の古典的な配位は消える曲率を持つ. おそらく, 量子論において常に期待されるように, 大きな量子数の領域において, 運動方程式の解から非常にかけ離れている配位は抑制される. それでは何故, 棘が大きな曲率を持つというならば, 棘の重みは抑制されないのか? 答は絶妙である: それは頂点振幅の半古典的な表現 (5.53) の第 2 項による. もし第 1 項だけがあるならば, 発散はおそらく現れない, 何故なら大きな曲率は積分において素早く振動する位相を生じ, それは棘の寄与を抑制し得るからである. ところが第 2 項は逆符号の作用の寄与をする. 4 つの頂点 (4 つの四面体) があるので, 振幅においてそのような項の 4 つの組がある. 詳しい解析 (Christodoulou *et al.* 2013) は発散が, 1 つの四面体の正の寄与が別の四面体の負の寄与を打ち消す混合項 (mixed terms) に関係することを示している.

$$= \int dU_3 dU_4 \delta(U_{14}U_4^{-1}V_{41}\cancel{V_{42}V_{21}V_{13}}U_3U_{31}\cancel{U_{12}U_{21}}) \\ \times \delta(U_{23}U_3^{-1}V_{32}V_{21}V_{13}U_3U_{31}U_{12})\delta(U_{24}U_4^{-1}V_{42}V_{21}V_{13}U_3U_{31}U_{12})\delta(U_{34}U_4^{-1}V_{43}U_3).$$

ここで式 (6.11) における後続のデルタ関数 $\delta(V_{12}V_{23}V_{31})$ の下で $V_{32}V_{21}V_{13} = 1$ において、最右辺の 2 つ目デルタ関数を

$$\delta(U_{23}U_3^{-1}V_{32}V_{21}V_{13}U_3U_{31}U_{12}) = \delta(U_{23}U_{31}U_{12})$$

と簡略化できる．その上で U_3 に関する積分を実行すると

$$w(U_{ab}, V_{ab}) = \int dU_4 \delta(U_{23}U_{31}U_{12})\delta(U_{24}U_4^{-1}V_{42}V_{21}\cancel{V_{13}}\cancel{V_{31}}V_{14}U_4U_{41}\cancel{U_{13}}\cancel{U_{31}}U_{12})\delta(U_{34}U_4^{-1}U_{43}\cdot V_{31}V_{14}U_4U_{41}U_{13}).$$

再び式 (6.11) の後続のデルタ関数 $\delta(V_{12}V_{24}V_{41}), \delta(V_{13}V_{34}V_{41})$ の下で、第 2, 第 3 のデルタ関数の引数において $V_{42}V_{21}V_{14} = 1, V_{43}V_{31}V_{14} = 1$ とおくと、

$$w(U_{ab}, V_{ab}) = \delta(U_{23}U_{31}U_{12})\delta(U_{24}U_{41}U_{12})\delta(U_{34}U_{41}U_{13}) \int dU_4 = W_{\Delta_1}$$

を得る．ここでも群要素 U_a にわたる積分の 1 つは冗長である．また上式は結果的に変数 V_{ab} を含まないので、式 (6.11) から泡 (bubble) の群要素 V_{ab} に関する積分

$$B \equiv \int dV_{ab} \prod_{abc} \delta(V_{ab}V_{bc}V_{ca}) = \int dV_{12}dV_{13}dV_{14}dV_{23}dV_{24}dV_{34} \delta(V_{12}V_{23}V_{31})\delta(V_{12}V_{24}V_{41})\delta(V_{13}V_{34}V_{41})\delta(V_{23}V_{34}V_{42})$$

を分離して $W_{\Delta_4} = BW_{\Delta_1}$ とできる．再び $V_{12}, V_{13}, \dots$ に関する積分をこの順に実行し、一連のデルタ関数を前から順に消費すると

$$B = \int dV_{13}dV_{14}dV_{23}dV_{24}dV_{34} \delta(V_{13}V_{32}V_{24}V_{41})\delta(V_{13}V_{34}V_{41})\delta(V_{23}V_{34}V_{42}) \\ = \int dV_{14}dV_{23}dV_{24}dV_{34} \delta(\cancel{V_{14}}V_{42}V_{23}V_{34}\cancel{V_{41}})\delta(V_{23}V_{34}V_{42}) \\ = \int dV_{23}dV_{24}dV_{34} \delta(V_{42}V_{23}V_{34})\delta(V_{23}V_{34}V_{42}) \int dV_{14} \\ = \delta(1) \int dV_{14}dV_{24}dV_{34} = \delta(1)$$

となる．こうして群要素 V_{ab} にわたる積分の 3 つは冗長である．また上記の計算から、泡の群要素 V_{ab} の積分 B が発散を生じていることが明白に見て取れる．以上をまとめると式 (6.15):

$$W_{\Delta_4} = \delta(1)W_{\Delta_1}$$

を得る．

これが式 (6.12) と等価であることを理解するために、式 (6.12) が式 (6.15) へと書き換えられることを確認しよう．そのためには式 (6.14) を経由せずとも、6.1 節での考察を援用して、より簡単に次のように説明すれば良い．すなわち式 (6.12) 右辺における最初の 3 つのデルタ関数の下で $U_{12} = U_{13}U_{32}, U_{24} = U_{23}U_{34}, U_{41} = U_{43}U_{31}$ を代入すると、最後のデルタ関数は $\delta(1)$ となるので式 (6.15) を得る．

なお図 77 のような 2 次元の対応する泡に対して同様の計算を行うと

$$W_{\Delta_4}(U_{ab}) = \int dU_1dU_2dU_3dV_{12}dV_{23}dV_{31}\delta(U_{12}U_2^{-1}V_{21}U_1)\delta(U_{23}U_3^{-1}V_{32}U_2)\delta(U_{31}U_1^{-1}V_{13}U_3)\delta(V_{12}V_{23}V_{31}) \\ = \delta(U_{12}U_{23}U_{31}) \int dU_3dV_{12}dV_{23}dV_{31}\delta(V_{12}V_{23}V_{31}) \\ = \delta(U_{12}U_{23}U_{31})$$

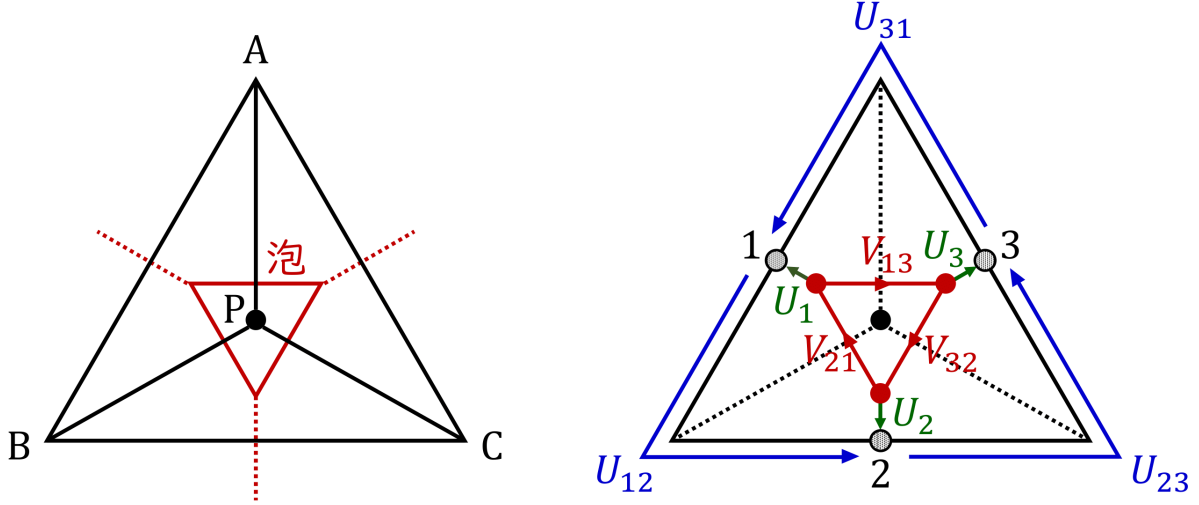


図 77 2次元の三角形分割における泡 (bubble)

となり，結果は泡のない場合と変わらず，発散は生じない．ここまでの計算上では，3次元の場合との発散の有無の違いは泡の群要素 V_{ab} の因子に求められる．実際，3次元では

$$\prod_{abc} \delta(V_{ab}V_{bc}V_{ca}) = \delta(V_{12}V_{23}V_{31})\delta(V_{12}V_{24}V_{41})\delta(V_{13}V_{34}V_{41})\delta(V_{23}V_{34}V_{41})$$

であり，最初の3つのデルタ関数はそれぞれ順に $V_{23} = V_{21}V_{13}$, $V_{42} = V_{41}V_{12}$, $V_{34} = V_{31}V_{14}$ を課す．すると最後のデルタ関数の引数は

$$V_{23}V_{34}V_{41} = V_{21}V_{13} \cdot V_{31}V_{14} \cdot V_{41}V_{12} = \mathbb{1}$$

とよい，最初の4つのデルタ関数のうち1つは発散する因子 $\delta(\mathbb{1})$ となる．対照的に2次元では単一のデルタ関数 $\delta(V_{12}V_{23}V_{31})$ しか現れない．以下では発散の由来をスピンの表示で再考する．

■ $W_{\Delta_4}(j_{ab})$ の式 (6.16) について 式 (6.16) 左辺は境界リンク ab の与えられたスピン j_{ab} 上で評価される．したがって 4.5.2 項の図 54 に示した泡を持つ2-複体を見ると，面 $a'a''md''d'$ などの内部面のスピン j_{ab} は指定されている．他方で泡すなわち四面体 $a'b'c'd'$ の4つの面には，なお任意のスピン j を割り当てることができる（それは本来 j_{abc} のようにラベルするのが正確と考えられる）．ただしフリーな j たちは四面体の各辺 $a'b'$, etc. で三角不等式を満たさねばならない．具体的には1本の辺には，5角形 $a'a''md''d'$ のような与えられたスピン j_f を持つ1枚の内部面と，各々が勝手なスピン $j_{f'}, j_{f''}$ を持つ四面体の2枚の三角形の，合計3枚の面が集まる．これらに対応する3つのスピンには三角不等式，したがって Clebsch–Gordan 条件 (1.29–30) が課せられる (Feynman ダイアグラムの運動量保存則に対応)．ところが泡の4枚の面のスピンを同時に $1/2$ だけ増価させても，新しいスピンの値 $j_f, j_{f'} + 1/2, j_{f''} + 1/2$ は再び Clebsch–Gordan 条件を満たす．実際 1.7.1 項の図 17 で見た Clebsch–Gordan 条件のダイアグラムの解釈では，泡のスピンを増すと単にスピン $j_{f'}, j_{f''}$ を繋ぐ線が1本追加されるに過ぎない．こうして泡のスピンは任意に大きな値を持ち得るため，赤外発散を生じる [2, p.338].

この観点からは本稿で考えた対応する2次元の泡が，赤外発散を生じない理由も納得できる．すなわち2次元の泡を成す三角形の周囲は既に，境界リンクのスピン j_{ab} を割り当てられた内部面の1辺に過ぎず，新たにフリーなスピン j を付与し得る“面”が初めから存在しない．

さて、泡の各面にも適当なスピンを充てると、泡の各頂点 (図 54 の a', b', c', d') には境界リンクのスピン j_{ab} を充てられた 3 枚の内部面と、フリーなスピン j を持つ泡の 3 枚の三角形の、合計 6 枚の面が集まる (本文の図 75 も見よ)。そこで対応する 6 つのスピンから成る $6j$ 記号を各頂点に充て、三角不等式の下でフリーなスピン j について和をとるとというのが、式 (6.16) 右辺の構成と推察される。その結果、左辺の引数を成す境界のリンク上で指定したスピン j_{ab} 依存性のみが生き残る。

式 (6.15) を表示の変換公式 (6.5) に代入すると、泡を持つ 2-複体のスピン表示の振幅は単に

$$W_{\Delta_4}(j_{ab}) = \delta(1)W_{\Delta_1}(j_{ab})$$

となると考えられる。ただし $W_{\Delta_1}(j_{ab})$ は式 (6.8) で求めた頂点振幅である。このことは以下のように式 (6.11) の $W_{\Delta_4}(U_{ab})$ に対して、表示の変更 (6.5–8) と同様の計算を繰り返しても確かめることができる。ただしそれは必ずしも式 (6.16) の導出に役立つとは限らない。

6.1 節のノートで書き下したスピン・ネットワーク状態

$$\begin{aligned} \psi_{j_{ab}} = & \bigotimes_a i_a \cdot \bigotimes_{ab} D^{j_{ab}}(U_{ab}) = \iota_{m_{12}m_{13}m_{14}} \iota_{m_{23}m_{24}}^{n_{12}} \iota_{m_{34}}^{n_{13}n_{23}} \iota^{n_{14}n_{24}n_{34}} D^{j_{12}}(U_{12})^{m_{12}}_{n_{12}} D^{j_{13}}(U_{13})^{m_{13}}_{n_{13}} D^{j_{14}}(U_{14})^{m_{14}}_{n_{14}} \\ & \times D^{j_{23}}(U_{23})^{m_{23}}_{n_{23}} D^{j_{24}}(U_{24})^{m_{24}}_{n_{24}} D^{j_{34}}(U_{34})^{m_{34}}_{n_{34}} \end{aligned}$$

と式 (6.11) の $W_{\Delta_4}(U_{ab})$, ただし $dU_a \equiv dU_1 dU_2 dU_3 dU_4$,

$$\prod_{ab} \delta(U_{ab} U_b^{-1} V_{ba} U_a) \equiv \delta(U_{12} U_2^{-1} V_{21} U_1) \delta(U_{13} U_3^{-1} V_{31} U_1) \delta(U_{14} U_4^{-1} V_{41} U_1) \delta(U_{23} U_3^{-1} V_{32} U_2) \delta(U_{24} U_4^{-1} V_{42} U_2) \delta(U_{34} U_4^{-1} V_{43} U_3), \text{ etc.}$$

に対して,

$$\begin{aligned} W_{\Delta_4}(j_{ab}) &= \int dU_{ab} \psi_{j_{ab}}(U_{ab}) W(U_{ab}) \quad (dU_{ab} \equiv dU_{12} dU_{13} dU_{14} dU_{23} dU_{24} dU_{34}) \\ &= \int dU_{ab} \bigotimes_a i_a \cdot \bigotimes_{ab} D^{j_{ab}}(U_{ab}) \int dU_a dV_{ab} \prod_{ab} \delta(U_{ab} U_b^{-1} V_{ba} U_a) \prod_{abc} \delta(V_{ab} V_{bc} V_{ca}) \\ &= \int dU_a dV_{ab} \bigotimes_a i_a \cdot \bigotimes_{ab} D^{j_{ab}}(U_a^{-1} V_{ab} U_b) \prod_{abc} \delta(V_{ab} V_{bc} V_{ca}). \quad (U_{ab} \text{ 積分を実行した}) \end{aligned}$$

ここで各行列要素を $D^{j_{ab}}(U_a^{-1} V_{ab} U_b)^{m_{ab}}_{n_{ab}} = D^{j_{ab}}(U_a^{-1})^{m_{ab}}_{m'_{ab}} D^{j_{ab}}(V_{ab})^{m'_{ab}}_{m''_{ab}} D^{j_{ab}}(U_b)^{m''_{ab}}_{n_{ab}}$ と書くと,

$$\begin{aligned} \bigotimes_a i_a \cdot \bigotimes_{ab} D^{j_{ab}}(U_a^{-1} V_{ab} U_b) &= \left[D^{j_{12}}(U_1^{-1})^{m_{12}}_{m'_{12}} D^{j_{13}}(U_1^{-1})^{m_{13}}_{m'_{13}} D^{j_{14}}(U_1^{-1})^{m_{14}}_{m'_{14}} \iota_{m_{12}m_{13}m_{14}} \right] \\ &\quad \times \left[D^{j_{12}}(U_2)^{m'_{12}}_{n_{12}} D^{j_{23}}(U_2^{-1})^{m_{23}}_{m'_{23}} D^{j_{24}}(U_2^{-1})^{m_{24}}_{m'_{24}} \iota_{m_{23}m_{24}}^{n_{12}} \right] \\ &\quad \times \left[D^{j_{13}}(U_3)^{m'_{13}}_{n_{13}} D^{j_{23}}(U_3)^{m'_{23}}_{n_{23}} D^{j_{34}}(U_3^{-1})^{m_{34}}_{m'_{34}} \iota_{m_{34}}^{n_{13}n_{23}} \right] \\ &\quad \times \left[D^{j_{14}}(U_4)^{m'_{14}}_{n_{14}} D^{j_{24}}(U_4)^{m'_{24}}_{n_{24}} D^{j_{34}}(U_4)^{m'_{34}}_{n_{34}} \iota^{n_{14}n_{24}n_{34}} \right] \prod_{ab} D^{j_{ab}}(V_{ab})^{m'_{ab}}_{m''_{ab}} \\ &= \iota_{m'_{12}m'_{13}m'_{14}} \iota_{m'_{23}m'_{24}}^{m'_{12}} \iota_{m'_{34}}^{m'_{13}m'_{23}} \iota^{m'_{14}m'_{24}m'_{34}} \prod_{ab} D^{j_{ab}}(V_{ab})^{m'_{ab}}_{m''_{ab}}, \\ \prod_{ab} D^{j_{ab}}(V_{ab})^{m'_{ab}}_{m''_{ab}} &\equiv D^{j_{12}}(V_{12})^{m'_{12}}_{m''_{12}} D^{j_{13}}(V_{13})^{m'_{13}}_{m''_{13}} D^{j_{14}}(V_{14})^{m'_{14}}_{m''_{14}} D^{j_{23}}(V_{23})^{m'_{23}}_{m''_{23}} D^{j_{24}}(V_{24})^{m'_{24}}_{m''_{24}} D^{j_{34}}(V_{34})^{m'_{34}}_{m''_{34}}. \end{aligned}$$

すると U_a 積分を分離して $\int dU_a = 1$ とできるので,

$$W_{\Delta_4}(j_{ab}) = \iota_{m'_{12}m'_{13}m'_{14}} \iota_{m'_{23}m'_{24}}^{m'_{12}} \iota_{m'_{34}}^{m'_{13}m'_{23}} \iota^{m'_{14}m'_{24}m'_{34}} \int dV_{ab} \prod_{ab} D^{j_{ab}}(V_{ab})^{m'_{ab}}_{m''_{ab}} \prod_{abc} \delta(V_{ab} V_{bc} V_{ca}).$$

さらに $\prod_{abc} \delta(V_{ab}V_{bc}V_{ca}) \equiv \delta(V_{12}V_{23}V_{31})\delta(V_{12}V_{24}V_{41})\delta(V_{13}V_{34}V_{41})\delta(V_{23}V_{34}V_{42})$ におけるデルタ関数を前から順に消去しつつ, $dV_{ab} \equiv dV_{12}dV_{13}dV_{14}dV_{23}dV_{24}dV_{34}$ の積分を前から順に可能であれば実行すると

$$\int dV_{ab} \prod_{ab} D^{j_{ab}}(V_{ab})^{m'_{ab}}_{m''_{ab}} \prod_{abc} \delta(V_{ab}V_{bc}V_{ca}) = \delta(\mathbb{1}) \int dV_{14}dV_{24}dV_{34} D^{j_{12}}(V_{14}V_{42})^{m'_{12}}_{m''_{12}} D^{j_{13}}(V_{14}V_{43})^{m'_{13}}_{m''_{13}} D^{j_{14}}(V_{14})^{m'_{14}}_{m''_{14}} \\ \times D^{j_{23}}(V_{24}V_{43})^{m'_{23}}_{m''_{23}} D^{j_{24}}(V_{24})^{m'_{24}}_{m''_{24}} D^{j_{34}}(V_{34})^{m'_{34}}_{m''_{34}}.$$

再び $D^{j_{12}}(V_{14}V_{42})^{m'_{12}}_{m''_{12}} = D^{j_{12}}(V_{14})^{m'_{12}}_{n_{12}} D^{j_{12}}(V_{42})^{n_{12}}_{m''_{12}}$ などと書くと

$$W_{\Delta_4}(j_{ab}) = \delta(\mathbb{1}) \int dV_{14}dV_{24}dV_{34} \left[D^{j_{12}}(V_{14})^{m'_{12}}_{n_{12}} D^{j_{13}}(V_{14})^{m'_{13}}_{n_{13}} D^{j_{14}}(V_{14})^{m'_{14}}_{m''_{14}} \ell_{m'_{14}m'_{12}m'_{13}m'_{14}} \right] \\ \times \left[D^{j_{12}}(V_{42})^{n_{12}}_{m''_{12}} D^{j_{23}}(V_{24})^{m'_{23}}_{n_{23}} D^{j_{24}}(V_{24})^{m'_{24}}_{n_{24}} \ell_{m'_{23}m'_{24}} \right] \\ \times \left[D^{j_{34}}(V_{34})^{n_{13}}_{m''_{13}} D^{j_{23}}(V_{43})^{n_{23}}_{m''_{23}} D^{j_{24}}(V_{34})^{m'_{34}}_{m''_{34}} \ell_{m'_{13}m'_{23}m'_{34}} \right] \ell_{m'_{14}m'_{24}m'_{34}} \\ = \delta(\mathbb{1}) \ell_{n_{12}n_{13}m''_{14}} \ell_{n_{23}n_{24}} \ell_{m''_{34}} \ell_{m'_{14}m'_{24}m'_{34}} \int dV_{14}dV_{24}dV_{34} \\ = \delta(\mathbb{1}) W_{\Delta_1}(j_{ab}).$$

■図 76 の棘の描像について 似たような状況として, Schwarzschild 時空の場の中心を通る 2 次元の“赤道面”では, 真の長さ $2\pi r_1, 2\pi r_2$ の同心円に挟まれた動径方向の線分が, 座標距離 $r_2 - r_1$ ($r_2 > r_1$ とする) より大きな固有長さを持つ. 図 19 ではこの空間の歪みを, 図 76 の“棘”の場合と同様に, 3 次元超曲面に埋め込まれた仮想的な 2 次元の曲面として視覚化した.

2 次元面上のある三角形 ABC の内部に点 P を採り, P を 3 点 A,B,C と結ぶと, 3 つの三角形から成る三角形分割が得られる. ここで線分 PA,PB,PC に双対な 3 辺は $\triangle ABC$ 内部において閉じた三角形を成すため, 泡の例と見なせる (図 77). すると泡の 3 辺が任意に大きなスピンの持つことは, たとえ $\triangle ABC$ の境界を成す線分 AB,BC,CA が与えられた有限の長さを持つとしても, 内部の線分 PA,PB,PC が任意に長くなる状況に対応する. ただし実際には上記のように, 2 次元では赤外発散は生じない.

6.3 Turaev–Viro 振幅

発散にどう対処するか? 3 次元の理論では, それは容易である: 単に泡のない 2-複体を用いて振幅を計算すれば良い. これは一般に可能であり, したがって理論は実際そうであるように, よく定義されている. 局所的な自由度がないので, 一般により複雑な三角形分割を選ぶことは近似を改善しない.

ところが 4 次元の理論では, そのような幸運はない; 何故なら理論は局所的な自由度を持ち, 理論の全ての自由度を捉えるには三角形分割を精密化する必要があるからである. これを念頭に置き, 3 次元においても泡の発散を理解する方法がないか調べよう.

実際, 方法はあり, それは数学者 Turaev と Viro によって 1990 年代初頭に発見された (Turaev and Viro 1992). Turaev と Viro は理論を修正して, 発散のないバージョンを得ることが可能であることを発見した. 著しいことに, 修正された理論には, 次項で論じる物理的解釈がある.

修正された理論は整数 r に対してパラメータ $q = e^{\frac{i\pi}{r}}$ (したがって $q^r = -1$) に依存し, $r \rightarrow \infty$ すなわち $q \rightarrow 1$ のとき形式的に Ponzano–Regge モデルに収束する. Turaev–Viro 理論の振幅は

$$W_q(j_l) = w_q^p \sum_{j_f} \prod_f (-1)^{j_f} d_q(j_f) \prod_v (-1)^{J_v} \{6j\}_q \quad (6.17)$$

で与えられる, 式 (5.48) の修正で定義される. この公式に現れる量 $d_q(j)$ と $\{6j\}_q$ は, 量子群 (quantum group) $SU(2)_q$ の表現理論に現れる量子次元 (quantum dimension) と量子 $6j$ 記号 (quantum $6j$ -symbol) である. これらは例えば Carter *et al.* (1995) あるいは Kauffman and Lins (1994) で定義され議論されており, 以下での若干の言及を除き, ここではそれらを論じない. 規格化因子は

$$w_q = -\frac{(q - q^{-1})^2}{2r}. \quad (6.18)$$

振幅を三角形分割でラベルしなかったのは, 振幅が実際に厳密に三角形分割に依存しないことを, Turaev と Viro が証明したからである. 振幅はそれが定義される場所の多様体の, 大域的なトポロジーにのみ依存する. 最も重要なことだが, 振幅は有限である.

大きな r に対して, 振幅に含まれる全ての量は対応する $SU(2)$ の量に収束する:

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\}_q = \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} + O(r^{-2}), \quad (6.19)$$

$$d_j^q = (2j+1) + O(r^{-2}), \quad [\text{上記では } d_q(j) \text{ と表記}] \quad (6.20)$$

$$w_q = \frac{2\pi^2}{r^3} (1 + O(r^{-2})). \quad (6.21)$$

この意味で振幅は大きな r に対して Ponzano–Regge の振幅に収束する. ただし表現にわたる和は有限である, 何故なら q -変形された (q -deformed) 量は大きな j に対して消えるからである. 特に, 量子次元は

$$d_j^q = (-1)^{2j} \frac{q^{2j+1} - q^{-2j-1}}{q - q^{-1}} = (-1)^{2j} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{r}(2j+1)\right)}{\sin\frac{\pi}{r}} \quad (6.22)$$

で与えられ, 図 78 のようにプロットされる.

note $q = e^{\frac{i\pi}{r}}$ の値に依らず, 次元 (6.22) はやはり表現 $j = 0$ に対して常に $d_j^q = 1$ となることが見て取れる (図 78 も見よ). また式 (6.22) 最右辺より $r \rightarrow \infty$ で $d_j^q \rightarrow (-1)^{2j}(2j+1)$ となるので, 式 (6.20) 右辺第 1 項は正確には符号因子 $(-1)^{2j}$ を要すると考えられる. さらに次元 (6.22) の最右辺が正である条件

$$\frac{\pi}{r}(2j+1) < \pi, \quad \therefore j < \frac{r-1}{2}$$

を満たす最大の半整数 j は, すぐ後の式 (6.23) で与えられる. 図 78 では $d_j^q = 0$ となる横軸の値が $j = \frac{r-1}{2} = 2, 5, 9, \dots$ となっているので, $r = 2j+1 = 5, 11, 19, \dots$ に対してグラフを描画していると考えられる.

プロットから j の最大値があり, それは $q \rightarrow 1$ のとき増加することに注意せよ. したがって最大値

$$j_{\max} \sim \frac{r-2}{2} \quad (6.23)$$

までのスピンのこの理論に現れる. j たちの有限性は振幅を明白に有限にする. 理論は各線分の最大の長さを予言する. これは赤外の棘の発散を抑制する赤外切断として機能する. 量子 $6j$ 記号 $\{6j\}_q$ の完全に明示的な表現は, Noui and Roche (2003) の付録に与えられている.

三角不等式もまた, この設定では修正される: q -変形された $6j$ 記号は, 三角不等式の q -変形されたバージョンが成り立たない限り消える. それは平坦な空間における三角形が満たす不等式には対応せず, むしろ有限の半径の球面上の三角形が満たす不等式に対応する.

この数学の物理的解釈を次項で論じる.

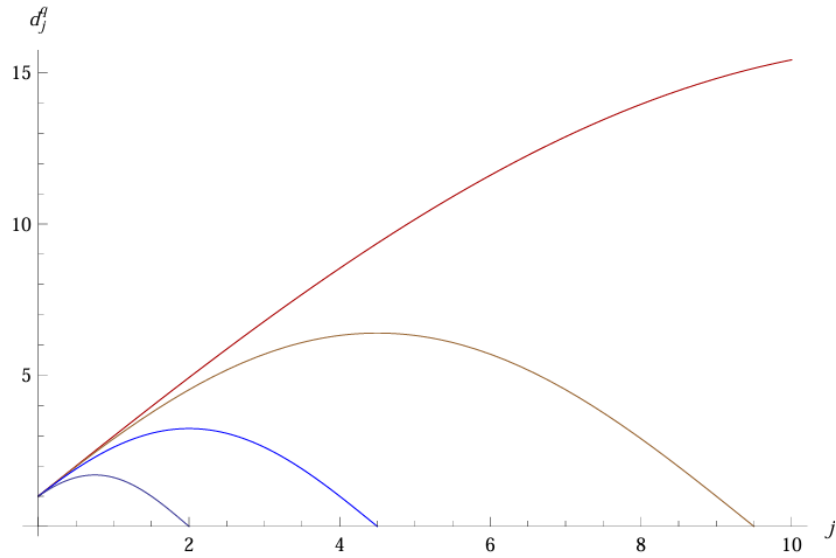


図 78 $q = 1$ に近づく異なる q の値に対する，表現の関数としての量子次元 [本稿では教科書 p.125 から図を採った]

6.3.1 宇宙定数

Ponzano と Regge は大きなスピンに対する $\{6j\}$ 記号の漸近形が，3 次元的な一般相対性理論の Regge 作用を与えることを証明した [式 (5.52–53)]．これは理論の古典的極限が実際に一般相対性理論であることを意味する． q -変形された記号 $\{6j\}_q$ の漸近形は何を与えるか？

著しいことに，Mizoguchi and Tada (1992) によって，それは宇宙定数 Λ を伴う理論の Regge 作用であることが示され，ここで宇宙定数は変形パラメータ (deformation parameter) [$q = e^{\frac{i\pi}{r}}$] によって，

$$q = e^{i\sqrt{\Lambda} \hbar G} \quad (6.24)$$

あるいは

$$\Lambda = \frac{\pi^2}{(r \hbar G)^2} \quad (6.25)$$

で決まる．[すると Ponzano–Regge モデルを再現する極限 $r \rightarrow \infty, q \rightarrow 1$ で，確かに宇宙定数 $\Lambda \rightarrow 0$ となる．] したがって Turaev–Viro 振幅は，その古典的極限が単に正の宇宙定数を持つ量子一般相対論に関する量子論を定義する．宇宙定数の存在は理論の有限性に関係している．ここ数年で，確かに，宇宙論的な観測から，自然において宇宙定数はゼロでなく正であることを我々は学んだ．重力の量子論はこの事実を考慮に入れて初めて整合的となることが判明する．

Planck 単位系で測った宇宙定数は非常に小さな数である [式 (3.3)]．これは変形パラメータ r が非常に大きい，あるいは $q \sim 1$ であって，“現実的な” (我々は依然として 3 次元の Euclid 的な文脈にいる) 理論において最大スピンは非常に大きく，関係する量子群は “SU(2) に極めて近い” ことを意味する．

理論において宇宙定数 Λ は [式 (6.25) より] 正にしかなり得ず，これは観測される実際の宇宙定数と一致し

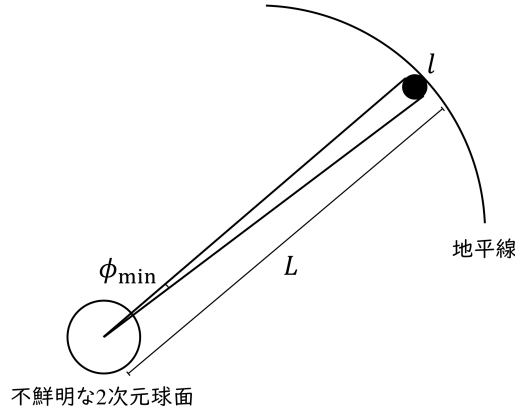


図 79 4次元の宇宙において最小のサイズと最大の距離を持つ最小の角度

ている^{*112}。正の宇宙定数は正の [constant は positive の誤記か^{*113}] 曲率に対応し、したがって空間が閉じていることを意味する： Λ の値は空間のサイズに対応付けることができ [式 (3.3) の後の $R_{\text{Universe}} \sim \Lambda^{-1/2}$ を見よ]，それは有限でなければならない。これは小さい事物に対する無限の解像度を持ち得ないという事実 (最小の長さ) による。Planck 長さは小さい事物における物理的な切断を供する；宇宙定数は大きい事物における赤外切断を供する。

宇宙定数の存在と角運動量の切断の関係を理解する簡単な物理的方法がある。 $\hbar G$ が長さ 2 乗の次元を持ち [$c = 1$]，また宇宙定数と q の関係が

$$q = e^{i\Lambda\hbar G} \quad (6.26)$$

[指数が適切に無次元化されている] となる 3+1 次元において，これを行おう。Planck スケールで決まる最小のサイズ $l [= \sqrt{\hbar G}]$ と，長距離のスケール L を定める宇宙定数がある世界における観測者を考えよう。最も対称な幾何学において，この世界の観測者は $L = 1/(2\Lambda)$ [分母は $\sqrt{2\Lambda}$ の誤記だろう^{*114}] のスケールより遠くを見ることができない。Euclid 的な文脈では，これは宇宙が球面であることによる；Lorentz 的な文脈では，これは宇宙論的な地平線 (cosmological horizon) による。ここでそのような観測者が物体を見る角度 ϕ [物体が視野に占める角度範囲] を考えよ。この角度を小さくするには，物体を遠くへ移動するか，物体を小さくしなければならない。ところが物体のサイズの小ささには l で与えられる制約があり，さらに距離には L で与えられる制約がある。したがって物体を見る最小の角度 (図 79) は

$$\phi_{\min} \sim \frac{l}{L}. \quad (6.27)$$

[その 2 乗は式 (3.4) の逆数である.]

ここで観測者が彼の周囲を観測しているとしよう。彼が見ているものは，彼を取り囲む球面上で球面調和関数に分解 [展開] できる。より小さな物体を捉えるには，より高次の球面調和関数が必要である。スピン j の球面調和関数の次元数 [独立な関数 Y_j^m の個数] は $2j+1$ であり，また全立体角は 4π なので，スピン j の球

^{*112} 弦理論では全く逆のことが起こり，理論は標準的な AdS/CFT シナリオにおけるように，非物理的な負の宇宙定数を好むように見受けられる。

^{*113} 実際，物質がないときの Einstein 方程式 (3.2) を $g^{\mu\nu}$ と縮約すると $\Lambda = R/4$ を得る。

^{*114} このとき初めて L は長さの次元を持ち，また式 (6.28) 最後の等号が成り立つ。つまらない数係数 2 を捨てた場合，式 (6.28) の最右辺は 2 倍され，式 (6.29) は $q^2 \cdot \frac{2\pi}{\Lambda\hbar G} \sim 1$ に修正されるものの，式 (6.26) が解となることに変わりはない。

面調和関数は立体角 $\phi^2 \sim 4\pi/(2j+1)$ を捉え [大きなスピンでは (分母) $\sim 2j$], これは前の式と合わせて

$$j_{\max} = \frac{2\pi}{\phi_{\min}^2} \sim 2\pi \frac{L^2}{l^2} = \frac{\pi}{\Lambda \hbar G} \quad (6.28)$$

を与える. 定義 $q^r = 1$ と式 (6.23) を用いると

$$1 = q^r = q^{2j_{\max}+1} \sim q^{\frac{2\pi}{\Lambda \hbar G}} \quad (6.29)$$

が得られ, これはちょうど式 (6.26) を解に持つ. 言葉で述べれば, 最大のスピンは, 対応する球面調和関数の最善の角度の解像度が, 最大の距離にある最小の物体を捉えるのに要するスピンである.

Turaev–Viro 理論で表される幾何学は以下のように視覚化できる. r で与えられる半径を持つ, 3 次元球面を考えよ. 観測者がいる場所として北極を固定し, 緯線 (parallels) に対応する 2 次元球面で 3 次元球面を層状に切り分ける (foliate). j の値で与えられる北極からの距離に対して, これらの有限の部分集合を考えよ. これらの各々は基底 $|j, m\rangle$ を持つ, スピン j 表現の状態で特徴付けられる.

これは量子重力の整然とした, 完全で有限な理論である——ただし実のところ, さほど興味のあることが起こらない, 3 次元においては. 次の部では現実の世界を記述する問題に取り掛かる.

6.4 補完

6.4.1 $SU(2)_q$ に関する若干のノート

量子群 $SU(2)_q$ は “群” ではなく, “量子的” など何もない. それは群 $SU(2)$ の量子力学的な変形ではない; それは $SU(2)$ の表現の代数に対する 1 径数の (one-parameter) 変形である. 変形パラメータは Planck 定数に同定されない; どちらかと言えば, それは宇宙定数に同定される [6.3.1 項].

$SU(2)$ の標準的な表現空間 $\mathcal{H}_j$ を考えよ. 各空間は演算子 $\vec{L}^{(j)}$ で与えられる $\mathfrak{su}(2)$ 代数の表現を担う; さらにこれらの空間は, 標準的な $SU(2)$ 表現理論が $\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2}$ から $\mathcal{H}_{j_3}$ への写像を定義するという事実によって関係する. この写像は $\mathcal{H}_{j_3}$ 表現において変換する $\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2}$ の部分空間上へ射影する. 量子群 $SU(2)_q$ は演算子 $\vec{L}^{(j)}$ の変形および, これらの対象間の一般的な代数関係が成り立ち続けるような, $\mathcal{H}_{j_3}$ から $\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2}$ への写像によって定義される. 変形は $\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2}$ から $\mathcal{H}_{j_3}$ への写像が, $\mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_1}$ から $\mathcal{H}_{j_3}$ への写像と異なるという事実によって特徴付けられる. この意味で, それは非可換である.

これが実現させる第 1 段階は, $\mathcal{H}_{1/2} \otimes \mathcal{H}_{1/2}$ から $\mathcal{H}_0$ への写像においてである. 標準的な群 $SU(2)$ に対して, この写像は

$$(\phi, \psi) \mapsto \epsilon_{AB} \phi^A \psi^B \quad (6.30)$$

で与えられる [式 (1.28)]. $SU(2)_q$ に対しては, 代わりに

$$(\phi, \psi) \mapsto \epsilon_{AB}^q \phi^A \psi^B \quad (6.31)$$

で与えられ, ここに

$$\epsilon_{AB}^q = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

であって, また

$$A^2 = q \quad (6.33)$$

は量子群を特徴付ける変形パラメータである. $\mathcal{H}_{1/2} \otimes \mathcal{H}_{1/2}$ から $\mathcal{H}_0$ への写像はもはや対称でないことに注意せよ.

テンソル ϵ^q は等式

$$\delta_C^A \delta_D^B = A^{-1} \delta_B^A \delta_D^C + A \epsilon^{qAC} \epsilon_{BD}^q \quad (6.34)$$

を満たし, これはグラフ的には

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = A^{-1} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \left(+ A \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right) \quad (6.35)$$

の形に書ける．これは $A = 1$ であるところの関係 (1.47) および (1.50) の，変形であることに注意せよ．Haggard の論文 (Haggard 2011) の詳細を見よ．

同様に， $SU(2)_q$ では， $\mathcal{H}_{1/2}$ の $2j$ 個の複製，すなわち $\mathcal{H}_{1/2} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{1/2}$ ($2j$ 回) から $\mathcal{H}_j$ への写像は，単にテンソル積の完全対称部分への射影によって得られる．これは因子の全ての置換 σ にわたって和をとることで得られる．因子の置換 σ を実現する演算子を P_σ としよう．このとき $SU(2)_q$ に対して， $\mathcal{H}_{1/2} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{1/2}$ ($2j$ 回) から $\mathcal{H}_j$ への写像は，重みを付けて全ての置換 σ にわたって和をとることで得られる．これは射影子

$$P_j = \sum_{\sigma} A^{-3cr(\sigma)} P_{\sigma} \quad (6.36)$$

で与えられ，ここに

$$c^{-1} = \sum_{\sigma} A^{-4cr(\sigma)} \quad (6.37)$$

であり， $cr(\sigma)$ は置換における入れ替え (crossing) の (最小の) 回数であるこれらの関係は P_j のトレースとして定義される，量子次元を計算するのに充分である．それは

$$\Delta_j = (-1)^{2j} \frac{A^{4j+2} - A^{-4j-2}}{A^2 - A^{-2}} = (-1)^{2j} \frac{\sin((2j+1)h)}{\sin h} \equiv (-1)^{2j} [2j+1] \quad (6.38)$$

であり [式 (6.22) に対応]，ここに $q = e^h$ ．重要なことに，三角不等式は修正され， $q = e^{\frac{i\pi}{r}}$ として条件

$$2j_1, 2j_2, 2j_3 \leq j_1 + j_2 + j_3 \leq r - 2 \quad (6.39)$$

に拡充されることが判明し，これはまさに r で決まる半径を持つ球面上の三角形に関する三角不等式である． q -変形されたスピン・ネットワークの幾何学はしたがって，宇宙定数で決まる曲率を持つ一定の曲率の空間の幾何学と整合する．

6.4.2 問題

面積固有値に対する宇宙定数の影響は期待されるか？

ヒント： 面積固有値は Casimir の固有値で与えられ，さらに Casimir は $SU(2)$ 生成子で定義されることを思い出せ．もし $SU(2)$ が $SU(2)_q$ に変形されれば，その生成子と Casimir も変形される．

6.4.2 項について

q -変形スピン・ネットワークでは面積の量子が， r (したがって宇宙定数) で決まる (大きな) 長さに関係する，最大値を持つことが示唆される [2, p.293]．面積固有値をラベルするスピン j が切断されるからである．

第 6 章の (部分的な) 総括 (本稿筆者)

第 6 章全体のうち天下りな計算結果は基本的に省略し，定性的な説明を中心とした要点を，以下に補足・解釈しつつ，重複を厭わずまとめよう．

泡・棘による赤外発散

標準的な場の量子論において，Feynman ダイアグラムにおけるループは保存則の下で固定されない運動量変数に関する積分を伴い，紫外発散を生じる．同様に 3 次元の Euclid 的な理論において，スピン・フォームの“泡 (bubble)”——境界とリンクを共有せず，また閉曲面を成すという意味でも境界を持たない，バルク内部の面の集まり——から振幅の発散が生じる．ただしスピン・フォーム発散は紫外発散ではなく，むしろある

種の赤外発散と解釈できる。実際ここでの発散は泡の面が、境界における有限のスピンによって三角不等式に制限されない、任意に大きなスピンを持ち得ることに起因している。ところが大きなスピンは大きな長さ (幾何学) を表し、この意味でスピン・フォーム発散は赤外発散に対応する。

発散を引き起こす幾何学に関する直観を得るために、2次元においてアナログな状況を考えよう。一般に強く曲がった Riemann 空間では、小さな境界の中に大きな体積を収めることができる。そこで Schwarzschild 時空における空間の歪みを図 19 のように視覚化したのと同様に、赤外発散を生じる空間の歪みを、3次元超曲面に埋め込まれた仮想的な2次元の曲面として描画すると、図 76 のような“棘 (spike)”が得られる。実際これは曲率の標準的な現れであり、棘の描像はスピン・フォーム発散に対する正しい直観を供する。

宇宙定数による赤外切断

1990 年代初頭に Turaev と Viro は、理論を修正して発散のないバージョンを得ることが可能であることを発見した。Turaev–Viro 理論では振幅に寄与するスピン j の値が、したがって振幅が有限となる。著しいことに、Turaev–Viro 理論の古典的極限は、単に正の宇宙定数を持つ一般相対論と解釈できることが、Mizoguchi と Tada によって示された。したがってループ量子重力では、Planck 長さが紫外切断をもたらす一方で、宇宙定数は自然な赤外切断として機能することになる。さらに赤外発散に対するこの処方箋は、宇宙論的な観測から、現に宇宙定数はゼロではなく小さな正の値を持っていることと整合している^{*115}。

詳細 Turaev–Viro 理論の振幅は Ponzano–Regge モデルの振幅 (5.48) に現れる $SU(2)$ の量を、変形パラメータ (deformation parameter) $q = e^{\frac{i\pi}{r}}$ (ただし r は整数) で特徴付けられる、対応する“量子群 (quantum group)” $SU(2)_q$ の量に置き換えた式 (6.17) で定義される。 $r \rightarrow \infty$ すなわち $q \rightarrow 1$ の極限で、振幅 (6.17) はもとの振幅 (5.48) に対応し、宇宙定数 (6.25): $\Lambda = (\pi/r\hbar G)^2 \geq 0$ はゼロになる。

以上と同じことが、4次元の時空においても起きる (7.4.2 項)。

^{*115} 弦理論では全く逆のことが起こり、理論は標準的な AdS/CFT シナリオにおけるように、非物理的な負の宇宙定数を好むように見受けられる。

第Ⅲ部

現実世界

第 7 章 現実世界：4 次元の Lorentz 的な理論

“Remember what the dormouse said ...” (ヤマネ (眠りネズミ) の言ったことを思い出せ……)

note Jefferson Airplane 『White Rabbit』の歌詞からの引用であり、
“feed your head (知力を育め)” という台詞が続く。

ここは本書の主要な章であり、量子重力の物理的な理論が定義される。現実世界は、現時点の全ての実験的な証拠が示している限りでは、4 次元であって Lorentz 的である。我々は 3.3 節で与えた、一般相対性理論の Holst 作用から出発する。テトラード場 e と Lorentz 接続 ω を変数として、それは

$$S[e, \omega] = \int e \wedge e \wedge \left(\star + \frac{1}{\gamma} \right) F \quad (7.1)$$

となることを思い出そう。境界において、 ω の運動量共役は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 代数の値をとる 2 形式

$$\Pi = \frac{1}{8\pi G} B = \frac{1}{8\pi G} \left((e \wedge e)^* + \frac{1}{\gamma} (e \wedge e) \right) \quad (7.2)$$

であり [式 (3.39) の補足も見よ]、ここに B の電場のおよび磁場的な部分は線形単純性拘束 (3.46)、すなわち

$$\vec{K} = \gamma \vec{L} \quad (7.3)$$

を満たす。理論は局所 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 変換の下で不変である [7.1 節のノート参照]。これは非常に強力な実験的支持を得ている理論である、標準的で古典的な一般相対性理論の定式化であり、我々はこの古典的極限を持つ量子論を求めている。

7.1 古典的な離散化

3.5 節で論じた 3 次元の理論の跡をたどって、量子論を探求する。そのためには、2 つの要素が必要である：4.4 節で論じた 2-複体上の離散化の 4 次元への一般化；および量子論において式 (7.3) を保持する方法である。1 つ目は直接的である；2 つ目は理論の技術的核心である。離散化から始めよう。

時空のコンパクト領域 M の三角形分割 Δ を固定する^{*116}。すなわち、 M を 4-単体に分割する。4-単体は 5 点で範囲を定められる $\mathbb{R}^4$ の凸領域と考えられる。4-単体は 5 つの四面体を境界に持つ。以前のように、三角形分割の双対 Δ^* を考え、その頂点、辺、および面に注意せよ。これらの対象とその関係は、境界に対するものも含めて、表 6 に列挙し、また図 80 に示してある。

2-複体の対象たちは 3 次元のそれらと全く同じであることに注意せよ。それらは [3 次元理論と] 似た役割を演じるものの、三角形分割における次元のより高い対象を指し示す。特に、頂点は依然として時空の塊 (chunk) に双対であるものの、今やこの塊は 4-単体である、何故なら我々は 4 次元にいるからである。さらに、辺は四面体に双対である。ここにある図 [図 81] を見よ [本稿次節で補足]。

同様に、境界にはやはりグラフ Γ がある。その結節点はやはり“空間の塊”であるものの、ここではそれは四面体である、何故なら空間は 3 次元だからである (表 7)。境界グラフのリンクは隣接する四面体を繋ぎ、し

^{*116} 後で構成を三角形分割よりも一般的な構造へと一般化する予定である [7.4.3 項]。

表 6 バルクの術語と表記

バルク三角形分割 Δ	2-複体 Δ^*
4-単体 (v)	頂点 (v)
四面体 (τ)	辺 (e)
三角形 (t)	面 (f)
線分 (s)	
点 (p)	

表 7 境界の術語と表記

境界の三角形分割 $\partial\Delta$	境界グラフ Γ
四面体 (τ)	結節点 (境界の頂点) (n)
三角形 (t)	リンク (境界の辺) (l)

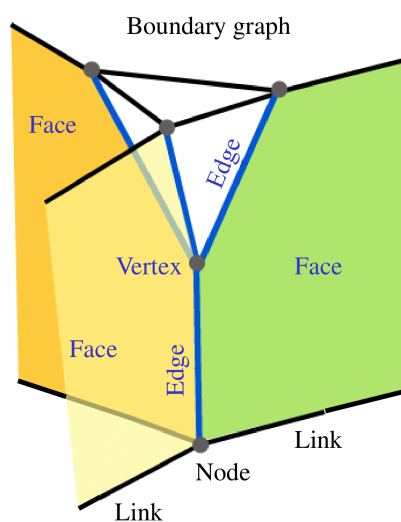


図 80 4次元における三角形分割と2-複体の術語 [図 46 の再掲]

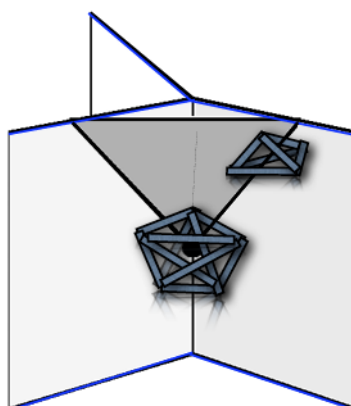


図 81 4次元における2-複体の頂点は4-複体に、辺(と結節点)は四面体に、面(とリンク)は三角形に双対である [本稿では教科書 p.132 から図を採った]

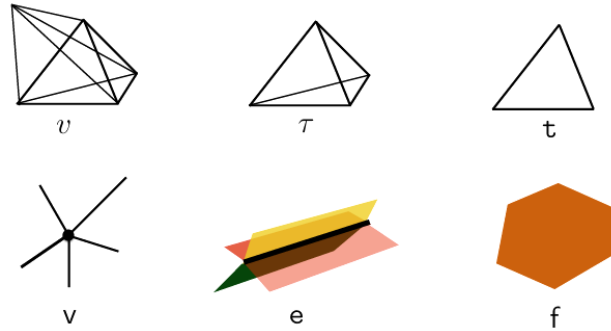


図 82 頂点は 4 単体内部の点である．それは 4 単体の境界となる 5 つの四面体に対応する，5 本の辺を持つ．三角形は“その周りを取り巻く”面に双対である，と言うのも 4 次元では (t, z) 平面内を移動して， (x, y) 平面内の三角形の周りを周回できる．[さらに四面体は境界に 4 つの三角形を持つので，四面体に双対な辺には 4 つの面が隣接する．なお本稿では教科書 p.133 から図を採った.]

たがって境界の三角形分割における三角形に双対である．理論において主要な役割を演じるのは，2-複体の面 f である (先の絵 [図 81] を見よ)．それは三角形分割の三角形に双対である ((x, y) 平面内の三角形は (z, t) 平面内の面に双対である)．境界に接触する面は境界の三角形に双対であり，したがって境界のリンク l に対応する．幾何学的には，このリンクは面の境界との交わりである．したがって境界のリンク l は境界の辺でありながら，境界に接触する面 f にも関係する．熱心な読者は以下で脱落しないように，これをよく習得することを勧める．

変数

3 次元の場合のように， $SL(2, \mathbb{C})$ 群要素 U_e を 2-複体の各辺 e に関係付けることで，接続を離散化する． $sl(2, \mathbb{C})$ 代数の要素を三角形分割の各三角形 (図 82 を見よ) に関係付けることで，テトラードを離散化する．三角形は面に双対なので，代数のベクトルは 3 次元の場合のように，面 f に関係付けられる．すなわち

$$\omega \longrightarrow U_e, \quad (7.4)$$

$$e \longrightarrow B_f. \quad (7.5)$$

連続的および離散的な変数の間の形式的な関係は，以下のように採ることができる：

$$U_e = P e^{\int_e \omega} \in SL(2, \mathbb{C}), \quad (7.6)$$

$$B_f = \int_{t_f} B \in sl(2, \mathbb{C}). \quad (7.7)$$

1 つ目の積分は辺に沿う接続のホロノミー，すなわち，接続によって生成される辺に沿う平行移動の行列であり [辺を逆行 (5.2.2 項のノート)]，それを $SL(2, \mathbb{C})$ の基本表現において採る．2 つ目は面 f に双対な三角形 t_f にわたる 2 形式 B の積分である．3 次元では面に双対な線分に沿う線積分を施す 1 形式 e があったのに対し，ここでは面に双対な三角形にわたって積分を施す 2 形式 B があることに注意せよ．ただしいずれの場合も，得られるのは面ごとの代数要素である．作用はこれらの対象を用いて近似できる^{*117}．

こうして，3 次元の場合のように，離散化された理論の変数は：

^{*117} 3 次元の場合のように [式 (4.32) の段落]，ゲージをより上手く扱うために，式 (7.7) をより正確にできる．ゲージ変換の下で，式 (7.6) で定義される群要素 U は“見事に”，すなわち $U_e \mapsto \Lambda_{s_e} U_e \Lambda_{t_e}^{-1}$ と変換し，ここに s_e と t_e は (向き付けされた) 辺 e の始 (“源 (source)”) および終 (“標的 (target)”) 頂点である．したがって離散的な理論において連続的な局所 $SL(2, \mathbb{C})$ 不変性

- 2-複体の各 (内部および境界の) 辺 e に対する群要素 U_e
- 2-複体の各面 f に対する代数要素 B_f

である。3次元の場合のように、境界の辺 l 、すなわち境界グラフ Γ のリンクに関する群要素を U_l 、またリンク l を境界に持つ面の代数要素を B_l と呼ぶ。

変数 B_l は著しい幾何学的解釈を持つ。境界に横たわる三角形を考えよ。テトラード場を $e^0 = dt$, $e^i = e_a^i dx^a$ となる時間ゲージで選ぶと便利である。 $(e \wedge e)^*$ の境界への引き戻しは消え、

$$L_f^i = \frac{1}{2\gamma} \epsilon^i_{jk} \int_{t_f} e^j \wedge e^k \quad (7.8)$$

を得る [本稿次節で確認]。三角形上で計量が一定となる近似では、この量のノルムが三角形の面積に比例すること

$$|L_f| = \frac{1}{\gamma} A_{t_f} \quad (7.9)$$

が分かる。これは $e_a^i = \delta_a^i$ となるゲージと座標を選ぶと分かる。ベクトル $\vec{L}_f$ はそれ自体が三角形に垂直であり、三角形の面積に比例する長さを持つ。したがってそれは ($\frac{1}{\gamma}$ の違いを除き)、式 (3.91) で定義される量 $\vec{E}_S$ と同じ量である。[このことはむしろ式 (7.8) から直接分かる。また L_f^i が面積に関係することは、3次元の対応する量が線分の長さを表すこと (式 (4.33)) とアナログスである。] 今や量子論に移るための全ての要素がそろった。

7.1 節について

■4次元時空中における2-複体について 結局、2-複体が頂点、辺、面から構成されることには変わりなく、単にそれが埋め込まれている背景多様体の次元が上がるだけである。実際、2-複体 (スピン・フォームのグラフ) をスピン・ネットワークが (背景多様体の中で “高さ” 方向に) 発展するときに通過する領域と解釈すると、やはりスピン・ネットワークの結節点は1次元的な曲線 (辺と呼ぶ) を、リンクは2次元的な面を描くため、石鹸の泡 (foam) のような構造が得られる。逆にスピン・フォームを3次元の超曲面で切ると、断面に現れる網目状のグラフとして、空間を表すスピン・ネットワークが得られる。2-複体は境界にグラフを誘導すると言い換えても良い。

ただし再びスピン・フォームは時空中にあるのではなく、時空そのものである。また図 81 はあくまで3次元における描画であり、実際には頂点は図 82 のように5本の辺と接続している。4-単体の境界となる四面体は、4-単体の5点から四面体の4点を選ぶ方法の数 ${}_5C_4 = 5$ だけあり、同様に4-単体の面は ${}_5C_3 = 10$ 枚 [2, p.332]、線分は ${}_5C_2 = 10$ 本 (4.3 節冒頭) ある。なお4-単体は5個の頂点が互いに繋がっている (4.3 節)、2次元の平面に投影すると図 81 や図 82 のような五線星形 (pentagram) が得られるはずである。これは線分のみを用いて四面体や直方体などの立体を紙面に描くのと同様の視覚表現である。

■何故 $U_e \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ か Holst 作用 (7.1) は微分形式で表されており、またゲージ変換則を表す内部 Lorentz 添字が適切に縮約されている。したがって Holst 作用で定義される連続的な理論はもとより一般共変性を持ち、また内部 Lorentz 添字に関するゲージ変換 (Lorentz 変換) の下で不変である。

は頂点における Lorentz 変換に削減される。適切なゲージを選ばない限り、式 (7.7) で定義される代数の変数 B はそうではない。これを修正するために、この定義は、接続が三角形それ自体、また隣接する四面体の上と、各 (向き付けされた) 辺の前半に沿って一定となるゲージで採用されていると仮定する。すると、 B^i 変数もまた頂点を除き、全てのゲージ変換の下で不変となる；それらは実際、頂点 v における Lorentz 変換 Λ_v の下で、随伴表現において共変に変換する。

他方で古典的な離散化を施した理論においても、各辺 e に対して背景独立な変数として群要素 U_e を充てれば、一般共変な理論を構成できると考えられる。さらに理論の内部 Lorentz 不変性を保証するためには、その手掛かりとして、群要素 U_e を内部 Lorentz 変換に伴ってゲージ変換する量、したがって Lorentz 群の表現に採ることが自然である。ところが 3 次元空間の回転を $SO(3)$ 群の代わりに $SU(2)$ 群で表せるのと同様、文献 [10, pp.6–8] で見たように、Lorentz 群の 1 つの表現として $SO(3,1)$ 群の代わりに $SL(2, \mathbb{C})$ 群を採ることができる (7.5.4 項冒頭も見よ)。

ただし式 (7.6) の箇所で宣言されているように、実際に U_e を $SL(2, \mathbb{C})$ の基本表現の行列要素に採る必然性は、決して自明ではない。実際それは必ずしも連続理論の変数との関係 (7.6) からボトムアップ形式に演繹し得ることではなく、むしろ原理として積極的に導入されている仮定と考えられる。言い換えれば $SL(2, \mathbb{C})$ 群の選択は既に、理論の命運を左右する試験的な方策であって、唐突に感じられるのは当然である。この措置は

- おそらく正準理論の経験に動機付けられており、正準な定式化で見出したスピン・ネットワーク状態に改めてたどり着くのが数学的に有利な出発点を供している (7.2.1 項)。
- 変数 $U_e \in SL(2, \mathbb{C})$ を用いて連続理論を近似できること (7.1 節 p.134) から正当化される。

第 7 章の序文ではこれを踏まえて、ややフライング気味に運動量 2 形式 (7.2) は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 代数の値をとり、また「理論は局所 $SL(2, \mathbb{C})$ 変換の下で不変である」(教科書 p.131) と書いているのだと考えられる。

このとき逆に式 (7.6) を通じて $SL(2, \mathbb{C})$ 群要素 U_e を接続 ω のホロノミーと解釈すれば、 $SL(2, \mathbb{C})$ の Lie 代数の生成子 τ^{IJ} を用いて接続を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 代数要素 $\omega = \omega_{IJ} \tau^{IJ} / 2$ (反対称性に注意して数係数 $1/2$ を付けた^{*118}) としなければならないことが初めて言える。

- 実際、式 (3.9) の段階ではスピン接続 ω_μ^{IJ} は Lorentz 群の Lie 代数に属する対象とあるに過ぎない。
- 文献 [2, p.34] ではスピン接続が $\mathfrak{so}(3,1)$ 代数の値をとるとしているのに対し、ここでは $SO(3,1)$ と局所同型な $SL(2, \mathbb{C})$ 群の代数の値をとることになる。
- また 4.5.1 項にある、Levi-Civita 接続 (ここでは Christoffel 記号 $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ の意味) に対するホロノミーが一般相対性理論における (ベクトルの) 標準的な平行移動を与えることとの混同に注意する。

■ Lorentz 不変性 さて、離散的な理論を実際に Lorentz 不変にする十分条件は次のように考えられる。まず $SU(2)$ スピン・ネットワークと $SL(2, \mathbb{C})$ スピン・ネットワークは Y_γ 写像を通じて 1 対 1 に対応付けられているものの、スピン・ネットワークはあくまで $SU(2)$ 不変な状態として定義されているに過ぎず、それは状態の Lorentz 不変性を意味しない。もっともこのことは、スピン・ネットワーク状態で記述される境界の選択が、特定の Lorentz 系の選択に対応することを踏まえれば、理に適っており何ら問題ではない (7.2.1 項)。(3 次元理論では境界においても $SO(3) = SU(2)$ 不変性が課されたこと (式 (5.15)) とは対照的である。) Lorentz 不変でなければならないのは、古典論を定義する作用であり、また量子ダイナミクスを定義する遷移振幅である。我々はこの後で Lorentz 不変な遷移振幅を構成する (式 (7.54))。 $SL(2, \mathbb{C})$ 不変性は Lorentz 不変性の“原型”と考えられる。

■ 何故 $L_f \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ か さらに運動量変数 (3.39) の箇所に結論を先取りして書かれているように、変数 U_e を $SL(2, \mathbb{C})$ 群要素、したがって接続 ω を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 代数要素と見なすとき、式 (7.5) の共役な運動量変数は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 代数の値をとらねばならない。その理由は連続変数との対応 (7.6–7) に求められる。実際 3 次元の理

^{*118} 同様に代数 (7.125) を満たす生成子 J^{IJ} に対して Lorentz 群の要素は $\exp(\epsilon_{IJ} J^{IJ} / 2)$ と書ける [10, pp.4–5]。

論では連続的な正準変数に対する Poisson 括弧 (3.102) から、ゲージ条件 $U_- = 1$ の下で離散的な変数 U_l, L_l^i の Poisson 括弧 (5.82) を導いた。(それは通常の正準変数間の Poisson 括弧ではないものの、2 種類の変数 U_l, L_l^i は相空間を座標付ける (5.1 節 p.100).) そして対応する量子力学的な交換関係 (5.6) を実現する共役運動量 L_l^i の演算子が式 (5.9) の左不変ベクトル場であることから、 L_l^i は U_l が属する群の Lie 代数の値をとると結論付けられた。

同じ演算子の表式 (5.9) は、接続表示において再びゲージ条件 $U_- = 1$ の下で、 L_l^i を汎関数微分の演算子に置き換えても得られる。このことを興味ある 4 次元の Lorentz 的な理論の文脈で具体的に説明しよう。議論の大まかな流れは Ashtekar 接続を配位変数とする定式化の接続表示における、面積 (7.8–9) の演算子の作用の計算と同じである [2, § 6.5.2]。3 次元的な境界を $x^0 = \text{const.}$ に選び、その上のリンク l に双対な三角形 t_l の位置を $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2)$ でパラメトライズして $\vec{x} = \vec{x}(\vec{\sigma})$ と表すと、離散的な変数 (7.7) は

$$\begin{aligned} B_l^{IJ} &= \int_{t_l} B^{IJ} = \int_{t_l} B^{IJ}_{ab}(\vec{x}(\vec{\sigma})) \frac{\partial(x^a(\vec{\sigma}), x^b(\vec{\sigma}))}{\partial(\sigma^1, \sigma^2)} d^2\sigma = \int_{t_l} \epsilon_{ab}^c B_c^{IJ}(\vec{x}(\vec{\sigma})) \frac{\partial(x^a(\vec{\sigma}), x^b(\vec{\sigma}))}{\partial(\sigma^1, \sigma^2)} d^2\sigma \\ &= 2 \int_{t_l} \epsilon_{ab}^c B_c^{IJ}(\vec{x}(\vec{\sigma})) \frac{\partial x^a(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^b(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^2} d^2\sigma \end{aligned}$$

と表される。ここで連続な理論において接続 ω_μ^{IJ} に共役な運動量変数は式 (3.39), (7.2) の $\Pi_{IJ}^\mu = \frac{1}{8\pi G} B_{IJ}^\mu$ (ただし $\Pi_{IJ}^0 = 0$) であることを踏まえ、接続表示での演算子を汎関数微分 $B_c^{IJ}(\vec{x}) = -8\pi G i \frac{\delta}{\delta \omega_c^{IJ}(\vec{x})}$ とする。ただし式 (3.39) のノートで注意したように、汎関数微分をとる際に ω_{IJ} と $\omega_{JI} (= -\omega_{IJ})$ は独立であるかのようによくて良い。それは結果的に公式 (4.45) をナイーブに適用することに対応する。これを踏まえて B_l^{IJ} の定義されているリンクと同じ l ($\vec{x} = \vec{x}(s)$ とする) に関する変数 U_l に対する、 B_l^{IJ} の作用を調べよう。5.4.3 項と同様に $U_{l-} = 1$ となるゲージを採用すると (5.1 節の脚注*117),

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi G} B_c^{IJ}(\vec{x}) U_l &= -i \frac{\delta U_l}{\delta \omega_{IJ}^c(\vec{x})} = -i \int_{l-1} ds \delta^3(\vec{x}, \vec{x}(s)) \dot{x}^c(s) U_{l+} \frac{\tau^{IJ}}{2} U_{l-} = \frac{-i}{2} \int_{l-1} ds \delta^3(\vec{x}, \vec{x}(s)) \dot{x}^c(s) U_l \tau^{IJ}, \\ \therefore \frac{1}{8\pi G} B_l^{IJ} U_l &= -i \left[\int_{t_l} d^2\sigma \int_{l-1} ds \epsilon_{abc} \frac{\partial x^a(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^b(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^2} \dot{x}^c(s) \delta^3(\vec{x}(\vec{\sigma}), \vec{x}(s)) \right] U_l \tau^{IJ}. \end{aligned}$$

ここで U_e が $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 群要素であるという前提を用いた。次いでリンク l と双対な三角形 t_l の交点を原点とする位置ベクトル $\vec{x}(\vec{\sigma}, s) = \vec{x}(\vec{\sigma}) + \vec{x}(s)$ を定義して、パラメータ $\vec{\sigma}$ と s の定義域をそれぞれ t_l と l の外部にも拡張しよう。すると上式の各括弧 $[\dots]$ 内の積分は、

$$\epsilon_{abc} \frac{\partial x^a(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^b(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^2} \dot{x}^c(s) = \epsilon_{abc} \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^2} \frac{\partial x^c}{\partial s} = \frac{\partial(x^a, x^b, x^c)}{\partial(\sigma^1, \sigma^2, s)}$$

が Jacobian となるので、交点の個数 ± 1 を与える。ただし複号は 3 つの接ベクトル $\frac{\partial x^a}{\partial \sigma^1}, \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^2}, \frac{\partial x^c}{\partial s}$ が右手系と左手系のいずれを成すか、言い換えればリンクが三角形を「裏から表」と「表から裏」のいずれの向きに貫くかに応じて決まる。ここでは簡単な向き付けを採用して正号をとる。以上より $B_l^{IJ} U_l = -8\pi G i U_l \tau^{IJ}$ であり、ここから変数 B_l^{IJ} は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 代数の値をとると言える。もとの連続的な変数 B^{IJ} も然りである。なお演算子 B_l^{IJ} は作用が

$$J_l^{IJ} U_l = -i \frac{d}{dt} \left(U_l \exp \left[\frac{1}{2} \{ t \tau^{IJ} + (-t) \tau^{JI} \} \right] \right) \Big|_{t=0} = -i \frac{d}{dt} \left(U_l e^{t \tau^{IJ}} \right) \Big|_{t=0} = -i U_l \tau^{IJ} \quad (103)$$

で定義される“左不変ベクトル場” J_l^{IJ} に比例する：

$$B_l^{IJ} = 8\pi G J_l^{IJ}. \quad (104)$$

■生成子の規格化 ここで上式 (104) の“電場成分”と“磁場成分”をとろう。右辺について、 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 代数の生成子 τ^{IJ} が、したがって J_l^{IJ} があらかじめ適切に規格化されていれば、その 2 種類の成分 (7.126–127):

$$\mathcal{K}_l^i \equiv J_l^{i0}, \quad \mathcal{L}_l^i \equiv \frac{1}{2} \epsilon^i_{jk} J_l^{jk}$$

は代数 (7.128) を満たす Lorentz 推進 (boost) と回転の生成子となる [10, pp.4–7]. 他方で左辺について、ゲージ条件 (75): $e_a^0(\vec{\tau}) = e_a^{I=0}(\vec{\tau}) = 0$ の下では $n^I \sim (1, 0, 0, 0)$ が、したがって式 (3.42): $K^i = B^{i0}$, $L^i = \frac{1}{2} \epsilon^i_{jk} B^{jk}$ が成り立つ (式 (7.8) のノートを参照). よって比例関係

$$\begin{aligned} K_l^i &\equiv \int_{t_l} K^i = \int_{t_l} B^{i0} = B_l^{i0} = 8\pi G J_l^{i0} = 8\pi G \mathcal{K}_l^i, \\ L_l^i &\equiv \int_{t_l} L^i = \frac{1}{2} \epsilon^i_{jk} \int_{t_l} B^{jk} = \frac{1}{2} \epsilon^i_{jk} B_l^{jk} = 8\pi G \cdot \frac{1}{2} \epsilon^i_{jk} J_l^{jk} = 8\pi G \mathcal{L}_l^i \end{aligned}$$

が満たされる。 Y_γ 写像の構成 (7.2.1 項) ではこの事実をあからさまに用いる：

- 式 (7.14–15) では共役運動量の成分間の比例関係 (7.13): $\vec{K} = \gamma \vec{L}$ が、Lorentz 群の生成子間の比例関係 $\vec{K}_l = \gamma \vec{L}_l$ に読み替えられることを用いている。
- 式 (7.16–17) では規格化された生成子 $\vec{L}_l$ が角運動量代数 (7.128) を満たすので、リンクのスピンの j_l を持つ式 (7.10) の $\mathrm{SU}(2)$ 部分空間 $\mathcal{H}_{j_l}$ において、Casimir 演算子が

$$|\vec{L}_l|^2 = j_l(j_l + 1)$$

であることを用いている (面積固有値 (7.30) の箇所も同様)*119。

引き続きゲージ条件 (75) を用いると式 (7.8–9): $\vec{L}_l = \frac{1}{\gamma} \vec{E}_l$ が成り立つ。これを上式 $\vec{L}_l^i = 8\pi G \vec{L}_l^i$ と等置して式 (7.28):

$$\vec{E}_l = 8\pi G \gamma \vec{L}_l$$

を得る。すると生成子 $\vec{L}_l$ の規格化の任意性は面積 (7.29–31) などの観測量において、Barbero–Immirzi 定数 γ の不定性に吸収されと考えられる。

■ L_f^i の式 (7.8) の確認 時間ゲージの条件 $e^0 = dt$, $e^i = e^i_a dx^a$ は

$$e_a^0 = 0, \quad e_0^0 = 1, \quad e_0^i = 0$$

を意味する*120。ところが式 (3.43) 直後で見た $n_I e^I|_\Sigma = 0$ は常に成り立つので、このとき $n_I \sim (1, 0, 0, 0)$ となる。そこで法線要素 (3.41) の定義に用いた、面 Σ をパラメトライズする座標 σ を適当に調節して、等号 $n_I = (1, 0, 0, 0)$ を成立させよう。このゲージでは式 (3.42):

$$K^i = B^{i0}, \quad L^i = \frac{1}{2} \epsilon^i_{jk} B^{jk}$$

が成立する。また比例関係 (3.45): $K^I = \gamma L^I$ は常に成立し、その時間成分はこのゲージで $K^0 = n_J B^{0J} = B^{00} = 0$ となる。よって境界変数 (7.7): $B_f^{IJ} \equiv \int_{t_f} B^{IJ}$ に対する磁場的な部分 $L^I = n_J (\star B)^{IJ}$ の空間成分の

*119 上式 (103) と比べると、これはスピン j_l 表現の生成子 $(j_l) \tau_i$ の規格化 $(j_l) \tau_i (j_l) \tau_i = -j_l(j_l + 1) \mathbb{1}$ に対応すると考えられる。

*120 これは条件 (75) を含んでいる。

寄与

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{t}_f}^i &\equiv \int_{\mathbf{t}_f} L^i = \frac{1}{2} \epsilon^i{}_{jk} \int_{\mathbf{t}_f} B^{jk} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^i{}_{jk} \int_{\mathbf{t}_f} \left(-\frac{1}{2} \epsilon^{jk}{}_{LM} e_\mu^L e_\nu^M + \frac{1}{\gamma} e_\mu^j e_\nu^k \right) \frac{\partial(x^\mu, x^\nu)}{\partial(\sigma^1, \sigma^2)} d^2\sigma \quad (\because B \text{ の定義 (3.38)}) \end{aligned}$$

にのみ興味を持たれる．ただし最右辺では三角形 $\mathbf{t}_f$ の座標を改めて $\sigma^A = (\sigma^1, \sigma^2)$ と書いており，また三角形は境界 $x^0 = \text{const.}$ 上にあるので， $\partial x^0 / \partial \sigma^A = 0$ が成り立つ．すると Jacobi 行列式に寄与するのは空間成分 $\mu, \nu = a, b$ のみとなる．よって縮約に寄与し得る第 1 項のテトラード成分は e_a^L, e_b^M である．しかるに Levi-Civita 記号 $\epsilon^{jk}{}_{LM}$ の下で，そのうち一方は内部添字 0 を持たねばならず，時間ゲージ $e_a^0 = 0$ により消える．こうして本文 (式 (7.8) 直前と式 (3.39) の箇所) にあるように，時間ゲージでは $(e \wedge e)^*$ の境界への引き戻しは消え，第 2 項の寄与 (7.8) が生き残る．

なお 3.4.2 項のノートでは正準理論の定式化において，時間ゲージの代わりにゲージ条件 (74):

$$e^I(\vec{\tau}) = e_a^I(\vec{\tau}) d\tau^a = 0$$

を用いた．この場合にも共役運動量と面積の関係 (7.8–9) は成り立つ．実際，Minkowski ベクトル (54):

$$u_i^I(\sigma) = e_\mu^I(x(\sigma)) \frac{\partial x^\mu(\sigma)}{\partial \sigma^i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

において，境界を $x^0 = \text{const.}$ に選んだため $\partial x^0 / \partial \sigma^i = 0$ となることと考え合わせると， $u_i^{I=0} = 0$ となる．すると法線要素 (55): $n_I = \epsilon_{IJKL} u_1^J u_2^K u_3^L$ はやはり $n_I \sim (1, 0, 0, 0)$ となるので，上記の議論をそのまま流用できる．したがって式 (3.79): $E_i^a = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon^{abc} e_b^j e_c^k$ が Ashtekar の正準変数となるゲージ条件下で，同時に式 (3.91–92) の面積要素ベクトル E_S^i を用いて $L_{\mathbf{t}_f}^i = \frac{1}{\gamma} E_{\mathbf{t}_f}^i$: (7.8–9) と書けることになる．

7.2 重力の量子状態

Hilbert 空間から始めよう．変数 U_e と L_f はそれぞれ辺と面に関係しているので，境界の変数はそれぞれ境界の辺すなわちリンク l と，やはりリンクに他ならない面の境界に関係している．したがって，ちょうど 3 次元理論の場合のように，境界の変数は境界グラフ Γ の各リンク l 上の $B_l \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ と $U_l \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ である．これらは量子論において演算子になる．自然な量子化は $\text{SL}(2, \mathbb{C})^L$ 上の関数である，状態 $\psi(U_l)$ へと導き，ここで演算子 $B_l \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ は $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 変換の生成子として実現される．

しかしながら，これらの生成子の成分は線形単純性拘束 (7.3)，すなわち $\vec{K} = \gamma \vec{L}$ を，少なくとも古典的極限において満たさねばならない．したがってこの条件が成り立つために，状態の何らかの制約が必要となる．これを実現するために， Y_γ 写像を導入する．

7.2.1 Y_γ 写像

$\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 上の関数は $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の既約なユニタリー表現へと展開できる． $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ のユニタリー表現を，ユニタリーでない，物理で馴染みある一般的な Lorentz 表現 (4 元ベクトルやスピノルのような) と混同してはならない； $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ のユニタリー表現は詳細な形で Ruhl (1970) に提示されており，本章の補完 [7.5.4 項] で手短かに復習する．我々にとって必要な重要な事実は以下である．それらは正の実数 p と非負の半整数 k でラベルされる． (p, k) 表現の Hilbert 空間 $V^{(p, k)}$ は以下のように，部分群 $\text{SU}(2) \subset \text{SL}(2, \mathbb{C})$ の既約 [表現]

たちに分解する：

$$V^{(p,k)} = \bigoplus_{j=k}^{\infty} \mathcal{H}_j. \quad (7.10)$$

[以下のように、右辺は p に依存している.] ここに $\mathcal{H}_j$ は $SU(2)$ のスピン j 既約表現を担う、 $2j+1$ 次元空間である. (p,k) 表現ではそれ故、 $j = k, k+1, \dots$ かつ $m = -j, \dots, j$ として、状態の基底 $|p, k; j, m\rangle$ を選ぶことができる. 量子数 (p, k) は $SL(2, \mathbb{C})$ の2つの Casimir 演算子と

$$|\vec{K}|^2 - |\vec{L}|^2 = p^2 - k^2 + 1, \quad (7.11)$$

$$\vec{K} \cdot \vec{L} = pk \quad (7.12)$$

で関係し、ここに j と m はそれぞれ $|\vec{L}|^2$ と L_z の量子数である.

note 基底の表記 $|p, k; j, m\rangle$ について、初めの p, k が $SL(2, \mathbb{C})$ ユニタリ表現の空間 $V^{(p,k)}$ を指定しており、次いで j, m がその分解に現れる $SU(2)$ 既約表現の状態をラベルする. またここでの $\vec{K}, \vec{L}$ は式 (7.126–127) で定義される Lorentz 変換の生成子 $B^{IJ}/8\pi G$ の電場部分と磁場部分であり、したがって線形単純性拘束 $\vec{K} = \gamma\vec{L}$ のベクトルに他ならない. (7.1 節のノートを見よ. 以下でこのことを用いる.) 特に L^i は交換関係 (7.128) より角運動量として扱える.

ここで、古典的極限において、すなわち大きな量子数の極限において、

$$\vec{K} = \gamma\vec{L} \quad (7.13)$$

となつてほしい. もしそうなるならば、Casimir は

$$|\vec{K}|^2 - |\vec{L}|^2 = (\gamma^2 - 1)|\vec{L}|^2, \quad (7.14)$$

$$\vec{K} \cdot \vec{L} = \gamma|\vec{L}|^2 \quad (7.15)$$

を満たさねばならない. 量子数に引き継ぐと、これは

$$p^2 - k^2 + 1 = (\gamma^2 - 1)j(j+1), \quad (7.16)$$

$$pk = \gamma j(j+1) \quad (7.17)$$

を与える. 大きな量子数に対して、これは

$$p^2 - k^2 = (\gamma^2 - 1)j^2, \quad (7.18)$$

$$pk = \gamma j^2 \quad (7.19)$$

を与え、2つの基本的な式

$$p = \gamma k, \quad (7.20)$$

$$k = j \quad (7.21)$$

を解に持つ.

note 代入により直ちに確かめられる. あるいは $p > 0$ より式 (7.19) を $k = \gamma j^2/p$ と書き換えて良く、これを式 (7.18) に代入すると $(p^2 - \gamma^2 j^2)(p^2 + j^2) = 0$ となる. 再び $p > 0$ に注意すると、式 (7.20–21) が得られる.

2つの関係のうち1つ目はユニタリー表現の集合上の制約である。2つ目は各表現から部分空間 (和 (7.10) における最低スピンの部分空間) を選び出す。これらの関係を満たす状態は

$$|p, k; j, m\rangle = |\gamma j, j; j, m\rangle \quad (7.22)$$

の形を持つ。[よって一旦まとめると, $SL(2, \mathbb{C})$ のうち古典的極限 (大きな量子数の極限) で $\vec{K} = \gamma \vec{L}$ が満たされる部分空間は $SU(2)$ である。しかも] これらの状態は $SU(2)$ の表現の状態と 1 対 1 の関係にあることに注意せよ。すると写像 Y_γ を

$$Y_\gamma: \mathcal{H}_j \rightarrow V^{(p=\gamma j, k=j)}, \quad (7.23)$$

$$|j; m\rangle \mapsto |\gamma j, j; j, m\rangle \quad (7.24)$$

のように導入でき, この写像の像における全てのベクトルは弱い意味で単純性拘束を満たす。すなわち, 大きな j の極限で

$$\langle Y_\gamma \psi | \vec{K} - \gamma \vec{L} | Y_\gamma \phi \rangle = 0 \quad (7.25)$$

となる^{*121}。[これは一見期待されることではあるが, Y_γ 写像の構成 (7.20–21) は式 (7.25) の必要条件から定めたに過ぎず, 十分条件ではない。] そこで我々は量子重力状態が, 状態 $|\gamma j, j; j, m\rangle$ のみから構成されると仮定する。

これらの状態は $SU(2)$ 状態 $|j; m\rangle$ と 1 対 1 対応にある: その写像は実際に Y_γ で与えられる。この写像は直ちに $SU(2)$ 上の関数から $SL(2, \mathbb{C})$ 上の関数への写像に拡張される。明示的には, それは

$$Y_\gamma: L_2[SU(2)] \rightarrow F[SL(2, \mathbb{C})] \quad (7.26)$$

$$\psi(h) = \sum_{j,m,n} c_{jmn} D_{mn}^{(j)}(h) \mapsto \psi(g) = \sum_{j,m,n} c_{jmn} D_{jmn}^{(\gamma j, j)}(g) \quad (7.27)$$

で与えられる。したがって $SU(2)$ スピン・ネットワークから $SL(2, \mathbb{C})$ スピン・ネットワークへの写像がある。

我々はまもなく, 写像 Y_γ が量子重力のダイナミクスの中心的な要素であることを見る。それは Einstein–Hilbert 作用に依存し, $SU(2)$ 状態が理論において $SL(2, \mathbb{C})$ 変換の下で変換する方法をコードしている。このことはまた, 空間の量子状態の力学的な発展をコードしている。

量子重力の物理的状態はこうして $SU(2)$ スピン・ネットワーク, あるいは等価的に, その Y_γ の下での像である。この空間はよく定義されたスカラー積を担うことに注意せよ: $SU(2)$ Haar 測度で定められるスカラー積である。スカラー積が $SU(2)$ 不変であって $SL(2, \mathbb{C})$ 不変でない (それは $SL(2, \mathbb{C})$ の下で共変に過ぎない) という事実は, スカラー積が境界に関係しており, これが Lorentz 系を選び出すという事実を反映している。

量子重力の Hilbert 空間が $SU(2)$ スピン・ネットワークから成るという事実は, 3.4.1 項 [あるいは 3.4.3 項の $SU(2)$ ゲージ不変性を表す拘束 (3.85)] の理論の正準解析と整合的であることに注意せよ。したがって, 境界の自由度は 3 次元計量で与えられることが示された。これはトライアドを用いて表すことができ, さらにこれは Ashtekar の正準な組 (A_a^i, E^{ia}) をもたらし, それは $SU(2)$ Yang–Mills 理論と正確に同じ運動学的相空間を成す。対応する量子状態は $SU(2)$ スピン・ネットワークである。全てはしたがって見事に整合している。[以上について本稿次項で, 正準理論の文脈でスピン・ネットワークが導入される理路を復習する。] $SU(2)$ 変

^{*121} これは以下のように証明できる。唯一の消えない行列要素は $\langle \gamma j, j; j, m | K^i | \gamma j, j; j, m' \rangle$ となり得, これらは表現 j, j および 1 の間の結節因子に比例するはずである。 $\langle \gamma j, j; j, m | L^i | \gamma j, j; j, m' \rangle$ に対しても同様である。したがってこれら 2 つは比例する。比例係数は行列要素から Casimir を再構成することで定められる。

換の生成子 $\vec{L}$ は面積要素 E^{ia} 掛ける $1/\gamma$ であることも思い出そう。したがって、式 (3.39) から物理的単位を復元すると、境界グラフの各リンクに関する演算子を、境界における対応する三角形の法線

$$\vec{E}_l = 8\pi\gamma\hbar G \vec{L}_l \quad (7.28)$$

として同定でき、それは三角形の面積が

$$A_l = 8\pi\gamma\hbar G |\vec{L}_l| \quad (7.29)$$

となるように規格化されている $[|\vec{L}|^2 \rightarrow |\vec{L}_l|$ と修正した]。これは直ちに単一の三角形の面積固有値を

$$A_j = 8\pi\gamma\hbar G \sqrt{j(j+1)} \quad (7.30)$$

で与え、また $[N$ 枚の三角形から成り、それ故] N 個の孔 $n_1, \dots, n_N$ で [リンクに] 貫かれる任意の面の固有値を

$$A_{j_n} = 8\pi\gamma\hbar G \sqrt{j_n(j_n+1)} \quad (7.31)$$

で与え、ここに j と j_n たちは非負の半整数である。 $[B^{IJ} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ と仮定したため $L^i \in \mathfrak{su}(2)$ であり (式 (7.126),(7.128)), $\vec{L}^2$ が Casimir 演算子となることをあからさまに用いた^{*122}。]

これはまさに最初の章で得た結果であることに注意せよ、したがって今や最初の章で言及したループ量子重力のスケール l_0 ,

$$l_0^2 = 8\pi\gamma\hbar G \quad (7.32)$$

を定めることができ、ここに γ は今や Barbero–Immirzi 定数である [式 (1.13–14) と比較せよ]。第 1 章で不定のままであったパラメータは一般相対性理論作用で決まり、Holst 項の結合定数に同定される。

7.2.1 項について

■正準理論との整合性 (式 (7.28) 直前の段落) について この機に LQG の正準な定式化について、簡単に要約しておく。

3.4.3 項のノートで見たように、Ashtekar 変数を用いた古典的な GR の正準な定式化では、Hamilton 関数 $S[A]$ に対する基礎方程式 (81),(82):

$$D_a \frac{\delta S[A]}{\delta A_a^i(\vec{\tau})} = 0, \quad F_{ab}^i(\vec{\tau}) \frac{\delta S[A]}{\delta A_a^i(\vec{\tau})} = 0, \quad F_{ab}^{ij}(\vec{\tau}) \frac{\delta S[A]}{\delta A_a^i(\vec{\tau})} \frac{\delta S[A]}{\delta A_b^j(\vec{\tau})} = 0$$

が成り立つ。最初の 2 式は、 $S[A]$ のゲージ不変性と微分同相不変性 (87):

$$\int d^3\tau (\delta_\lambda A_a^i) \frac{\delta S[A]}{\delta A_a^i(\vec{\tau})} = 0, \quad \int d^3\tau (\delta_f A_a^i) \frac{\delta S[A]}{\delta A_a^i(\vec{\tau})} = 0$$

を意味する。これを踏まえて、対応する量子論に移行しよう [2, § 6.1]。

まず接続 A の波動汎関数 $\Psi[A]$ を導入する。ところで通常の古典力学は、波動力学の幾何光学的な極限として量子力学に含まれている。そこで量子重力においても同様に、古典的な極限 $\hbar \rightarrow 0$ で $\Psi[A] = ae^{iS/\hbar}$ の位相が Hamilton 関数 $S[A]$ で与えられ、古典的な Hamilton–Jacobi 系 (81),(82) が再現されることを要求し

^{*122} 他方で 3 次元理論における長さの固有値 (5.11) の導出では、ホロノミーが $U_- = 1$ となるゲージを仮定した上で Poisson 括弧なしい交換関係 (5.6) を導き (5.4.3 項)、これを実現する演算子 $\vec{L}_l$ の作用 (5.9) をスピン・ネットワーク状態 (5.34–35) に適用した。

よう．そのためには，共役運動量 $\frac{1}{8\pi i G} E_i^a = \frac{\delta S[A]}{\delta A_a^i}$ を $\Psi[A]$ に作用する汎関数微分演算子 $-i\hbar \frac{\delta}{\delta A_a^i}$ に置き換えて，単に $\Psi[A]$ そのものに式 (81) と同様の関係

$$D_a \frac{\delta \Psi[A]}{\delta A_a^i(\vec{\tau})} = 0, \quad F_{ab}^i(\vec{\tau}) \frac{\delta \Psi[A]}{\delta A_a^i(\vec{\tau})} = 0$$

を課せば良い^{*123}．ところが式 (81) から式 (87) が導かれるのと全く同じ理由で，これらは直ちに $\Psi[A]$ もまた SU(2) ゲージ変換と 3 次元の微分同相写像の下で不変であること

$$\int d^3\tau (\delta_\lambda A_a^i) \frac{\delta \Psi[A]}{\delta A_a^i(\vec{\tau})} = 0, \quad \int d^3\tau (\delta_f A_a^i) \frac{\delta \Psi[A]}{\delta A_a^i(\vec{\tau})} = 0 \quad (105)$$

を意味する^{*124}．

同様に Hamilton–Jacobi 方程式 (82) は，ハミルトニアン拘束 (3.82): $C[A, E/8\pi i G] = F_{ab}^{ij} E_i^a E_b^j$ に対する Wheeler–deWitt 方程式 (2.76):

$$C \left[A, -i\hbar \frac{\delta}{\delta A} \right] \Psi[A] = 0 \quad \text{i.e.} \quad F_{ab}^{ij}(\vec{\tau}) \frac{\delta}{\delta A_a^i(\vec{\tau})} \frac{\delta}{\delta A_b^j(\vec{\tau})} \Psi[A] = 0 \quad (106)$$

に置き換わる．重力場の量子ダイナミクスの，時間変数を含まない支配方程式である．

運動学 量子ダイナミクスを論じるに先立ち，理論の運動学的な条件として，量子状態のゲージ不変性と微分同相不変性 (105) を実装することを考える [2, § 6.2–6.4]．

ゲージ不変性を満たす基底状態として，スピン・ネットワークを導入するところから始めよう．それは 3 次元多様体に埋め込まれたグラフを用いて定義され，グラフは結節点とそれらを結ぶリンク線から成るネットワーク構造を持つ．(ここではグラフを三角形分割によって得られる構造に限定する必要はなく，結節点は任意の価数を持ち得る^{*125}．7.4.3 項の p.150 も見よ．) ただし各リンクには順序 ($l = 1, 2, \dots$) と向きが与えられている．また各リンク l は SU(2) の表現をラベルするスピン j_l で“色付け”されている．

スピン・ネットワーク状態は以下のように，対応する波動汎関数 $\Psi[A]$ に翻訳される．まず SU(2) の基底 (生成子) $\tau_i = -\frac{i}{2}\sigma_i$: (1.40) に対して行列表示の接続 $A_a = A_a^i \tau_i$ を導入すると， l に沿って終点から始点へ逆行する (5.2.2 項のノート) 平行移動関数 (ホロノミー)

$$U_l(A) = \text{P exp} \left(\int_{l-1} A_a dx^a \right) \quad (107)$$

を定義できる (4.5.1 項)．そこで図 62，図 92 のように各リンク l に SU(2) 群要素として，そのリンクが担うスピン j_l 表現でのホロノミーの行列要素 $D^{(j_l)m}_n(U_l)$ を充てる．これは Wigner 行列要素に他ならず，ホロノミー (107) の中で生成子 τ_i をそのスピン j_l 表現 $\tau_i^{(j_l)}$ に置き換えて得られる行列の要素に他ならない．次に

- 結節点 n から射出する線の持つホロノミーの第 1 添字 (上付き) を $m, m', \dots$
- 結節点 n に入射する線の持つホロノミーの第 2 添字 (下付き) を $n, n', \dots$

として，各結節点 n にこれらと縮約される，適切な結節因子 (intertwiner) $\iota_n^{nn' \dots mm' \dots}$ を充てる．このとき結節因子はその名の通り，結節点に集まるリンク線を繋ぎとめる (intertwine) 役割を果たす．スピン・ネットワーク

^{*123} 実際， $\Psi = ae^{iS/\hbar}$ の係数 a の汎関数微分は古典的極限 $\hbar \rightarrow 0$ で生き残らない

^{*124} ここで利用したアイコナール近似を経由しない $\Psi[A]$ の不変性の説明が文献 [1, § 7.4] にある (同文献のノートも参照)．

^{*125} 結節点の価数とは結節点に接続するリンクの本数のことである．また例えば 3 本のリンクが接続している結節点は，3 価の結節点であると言われる．

ク状態 $\Psi[A]$ は全てのホロノミーと結節因子の縮約で与えられ、速記術的には

$$\Psi = \bigotimes_n \iota_n \cdot \bigotimes_l D^{(j_l)}(U_l) \quad (108)$$

と書ける (式 (7.40–41)).

ここでは状態 $\Psi[A]$ を接続 A の汎関数として導入した。しかしこれから見るように、空間は離散的な構造を持つことが判明するため、無限小の平行移動を定義する (あるいはホロノミーの微分にあたる) 接続はよく定義されない。これに対しホロノミー U_l は、したがってスピン・ネットワーク状態は依然としてよく定義される。 U_l は理論の専門用語で“ループ”変数と呼ばれる (l が閉曲線でなくとも)^{*126}。

スピン・ネットワーク状態 (108) がゲージ不変となるような、適切な結節因子が存在する。実際、接続 $A_a(x) = A_a^i(x)\tau_i$ がユニタリー行列 $\lambda(x)$ をゲージ関数とするゲージ変換を受けるとき、物質場の列ベクトルは同じ行列によるユニタリー変換 $\varphi(x) \rightarrow \lambda(x)\varphi(x)$ を受けるので [10, pp.140–142], ホロノミーは

$$U_l \rightarrow \lambda(s_l)U_l\lambda(t_l)^{-1}, \quad D^{(j_l)} \rightarrow \Lambda(s_l)D^{(j_l)}\Lambda(t_l)^{-1}$$

と変換する (式 (4.44) のノート, 7.1 節の脚注*117)。ここに s_l と t_l はそれぞれリンク l の始点 (“source”) と終点 (“target”), Λ はゲージ関数 λ のスピン j_l 表現の行列である。ここから新たに生じる始点 s_l と終点 t_l の因子をそれぞれ、リンク l の両端 s_l, t_l の結節因子に割り当てよう。このとき各結節点から見ると、その点に接続している全てのリンクに由来する行列要素が、結節因子に掛かることになる。そこで結節因子をこの変換に対する不変量として定義すれば、スピン・ネットワーク状態全体はゲージ不変に留まることが保証される (5.2.2 項のノートを参照)。

幸いそのような不変テンソル $\iota_n, \dots$ の具体的な構成方法は、差し当たり問題にならない。ここでは注意点を簡単に述べるに留める。4 価以上の結節点では、結節因子は (規格化の任意性を除いても) 一意的には決まらず、複数の不変テンソルが結節因子の空間の基底を成す (7.2.2 項, 7.5.2 項)。したがってスピン・ネットワーク状態はリンクのスピン j_l だけでなく、結節因子 ι_n によっても色付けされる [2, p.234]。1.7.3 項で具体例を通じて見たように、不変テンソルの基底の適当な線形結合を結節因子に選んでスピン・ネットワークを定義すると、それは体積の演算子の固有状態になる。このときスピン・ネットワークの色 j_l, ι_n はそれぞれ面積と体積の量子数であり、スピン・ネットワーク状態は面積と体積の同時固有状態となる (7.2.2 項)。三角形分割などを通じて、あらかじめ与えられたグラフを導入すると、その上の状態は必ずスピン・ネットワーク状態の重合せ (7.39) で表されることが、Peter–Weyl 定理から数学的に保証される (5.2.2 項, 7.2.2 項)。

ここまでで $SU(2)$ ゲージ不変な状態としてスピン・ネットワークを導入した。スピン・ネットワークは 3 次元空間を定義する。このように述べると、そのネットワークもまた背景の 3 次元空間の中にあり、ネットワークを導入する前から、空間の概念が密輸入されているのではないかという疑惑が生じる。確かに第一義的には、我々はネットワークを背景の多様体に埋め込まれた対象として思い描くしかない。例えばネットワークを絵に描く場合、紙を 2 次元の背景として利用していることになる。ところが $SU(2)$ ゲージ不変性に加えて、式 (105) に基づき、状態にはさらに微分同相不変性が要求されるため、連続的な変形 (より正確には微分同相写像^{*127}) によって互いに一致するスピン・ネットワークを同一視しなければならない。このとき多様体に埋め込まれたスピン・ネットワークは抽象的なスピン・ネットワーク (s -knot とも言う) に移行し、もはやネットワークは背景の多様体とは無関係に、「ある結節点 (ノード) が別の点と繋がっているか否か」といった抽象

^{*126} 1.5 節 p.20 を見よ。また「ループ量子重力」の名前の由来に関する説明が 7.5.2 項 p.154 の演習 7.5 にある。

^{*127} 微分同相写像 (変換) はスピン・ネットワークのグラフを連続的に変形するだけでなく、グラフ以外の情報も変え得る [2, p.238]。

的な関係だけで定義されることになる。こうして我々は背景の多様体を消すことができる。すると今やスピン・ネットワークは“どこか (somewhere)”にあるのではなく、あらゆる力学的対象がそれに対して位置付けられるところの“場所 (where)”である^{*128}。

■量子幾何学 ダイナミクス以前に上記の運動学的な帰結を考慮するだけでも、重要な物理的予言として面積と体積の固有値が求まる。これは通常の量子力学において Schrödinger 方程式やポテンシャルの形のような具体的なダイナミクスとは無関係に、角運動量の交換関係だけからその固有値が導かれるのと同じ事情であり、この意味で角運動量の理論は量子力学の運動学と呼べる。ループ量子重力の共変な定式化における量子幾何学の導出は、この後の 7.2.2 項、7.2.3 項で論じられる。他方で正準な定式化においても、同じ結果が導かれる。まずスピン・ネットワークで表される固有状態に、2次元の面 S の面積演算子

$$A(S) = \int_S d^2\sigma \sqrt{\det(q_{AB})} = \int_S d^2\sigma \sqrt{(E_i^a n_a)(E_i^b n_b)} \quad (n_a \text{ は面の法線要素})$$

を作用させると、面積の固有値

$$A(S) \sim l_P^2 \sum_P \sqrt{j_P(j_P + 1)}$$

が得られる^{*129}。ここに P は面 S とスピン・ネットワークのリンクの交点であり、 j_P は点 P で面 S と交わるリンクの色である [2, § 6.5–6.5]。ここから面積は Planck スケール l_P^2 のオーダーであり、離散的なスペクトルを持つことが見て取れる。これは立派な物理的予言である：例えば粒子の散乱断面積を正確に測定すれば、上式で表される固有値の 1 つが得られるはずである [2, pp.265–266]。結果の解釈に移ろう。

面積演算子の固有値は、スピン・ネットワークを構成する線が指定した面に交わるかどうかということと、その線の色に依存して決まる [よって結果は背景独立]。あたかもスピン・ネットワークに含まれるそれぞれの線がすべて“面積の量子”を担っており、指定された面は、スピン・ネットワークの線がその面を通ることによって面積を獲得する、というように解釈することができる (p.112, 図 8.3 参照 [本稿では省略]) [1, p.115]。

[実はリンク線の色 $N = 2j$ は、基本表現のホロノミーを持つ線の束の本数と解釈できるので [2, p.236] [1, p.106]、色の依存性も含めて、面積は面を貫くネットワーク線の本数で決まると言える。]

3次元領域 $\mathcal{R}$ の体積 $V(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} d^3x \sqrt{\det(q_{ab})} = \int_{\mathcal{R}} d^3x \sqrt{\det(E_i^a)}$ の固有値もまた、大体のところ面積演算子の場合と同様に計算できる^{*130}。体積もまた離散的なスペクトルを持つことが判明する。

現れてくる描像は、スピン・ネットワークが、線の部分に“面積の量子”を、結節点の部分に“体積の量子”を担っており、これらが量子的幾何を構成する要素になっている、というものである。指定された領域は、もしその中にスピン・ネットワークのしかるべき [4 価以上の (すなわち 4 本以上のリンク線が接続した) [1, pp.115–116]] 結節点が含まれるならば、体積を付与され、指定された面は、もしそこにスピン・ネットワークの線が通っていれば、面積を付与される。こうして図 8.4 [本稿の図 83] のように、空間の“基礎建築用ブロック” (elementary building block) の描像が見いだされる [1, pp.115–116]。

^{*128} 同じ話題に関する somewhere と where の対比が効いたレトリック [2, p.21] を借用した。

^{*129} 本稿では既に 7.1 節のノートで、その導出と類似の計算を示した。

^{*130} なお長さの演算子は面積と体積に比べて驚くほど複雑になる。文献 [2, 275] から原論文を孫引いておく：T. Thiemann, A length operator for canonical quantum gravity, *J. Math. Phys.* **39** (1998) 3372–3392, gr-qc/9606092。

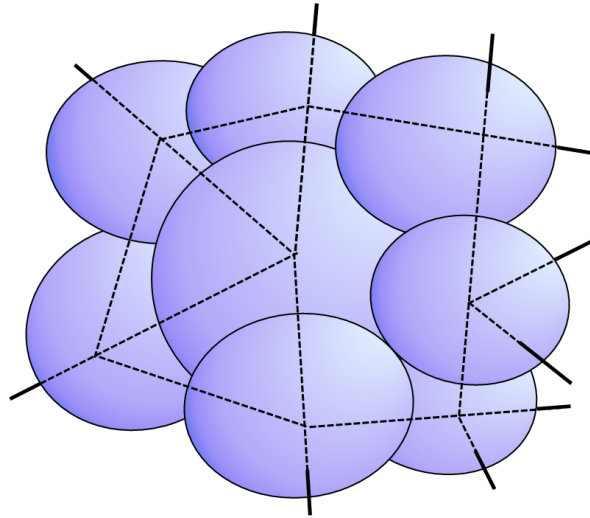


図 83 各結節点は体積を担い，“空間の塊 (chunks)”を表す．塊は対応する結節点が結ばれているとき隣接している．各リンク線は 2 つの塊を分離する 1 つの基本的な面を切る．[リンク線に貫かれる適当な面で囲まれた各結節点の“守備範囲”として“空間の塊”を得るのは，Voronoi 分割の手順に似ている．ただし微分同相不変性により，面の多様体に対する正確な位置には意味がない.]

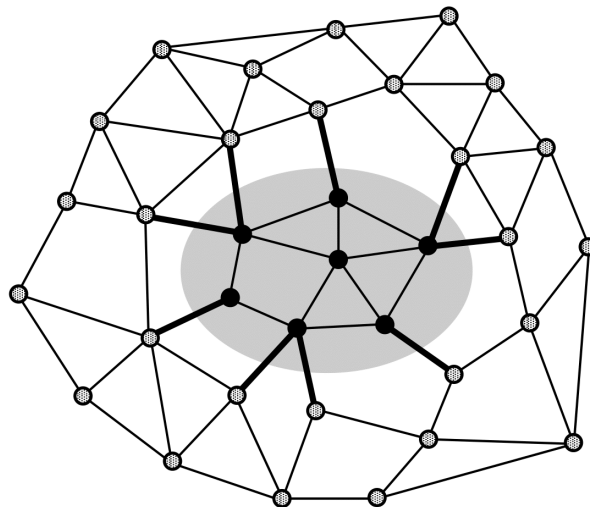


図 84 スピン・ネットワーク．濃い黒の結節点の集まりは空間の“領域”を定義する；太く黒いリンクの集まりはこの領域を囲む“面”を定義する．

確かに頭の中では背景の空間における 3 次元の領域を思い描き，それを連続的に変形してゆくことができる．しかしその領域が含む結節点の個数や表面を貫く線の本数が変わらない限り，その領域が持つ固有値としての体積や表面積は一定であることになる (図 84 参照)．ちょうど領域の境界が結節点にさしかかって，新しい結節点が領域の中に取り込まれると，領域の体積は不連続的に増加する．表面積もまた，リンク線の枝分かれする結節点を境として，不連続に変化する．

- これは空間が Planck スケールで離散的な構造を持つことを意味していると解釈できる．ただし量子力

学的な離散性はネットワーク構造の離散性に起因しているのではなく、むしろ固有値の離散性を反映しているとするのが適切である。実際、格子や三角形分割などを用いて空間を記述することは便宜的な古典的離散化であるのに対し、現に空間が離散的な構造を持つことは、理論を量子化すると格子のサイズが離散的な固有値をとるという事実の内にある (1.3.1 項, 7.2.3 項)。

- 空間が離散化されているということは、粗いイメージとしては、この世は究極的には点描画やピクセル画、あるいはある種のステンドグラスのようなものだと言えよう。より正確にはスピン・ネットワークに描かれる離散的な絵は、大きさや形状がまばらな石を不規則に敷き詰めた石畳の上に、個々の石を単位として描かれたモザイク画に似ているかもしれない。LQG では時空も離散化され、このため理論には (文字通り！) 紫外発散の余地 (room) がない [短い波長を収容できる連続的な空間領域がないということ] [2, pp.6–9, p.21].
- また背景の多様体に我々が思い描く領域に物理的な意味はなく、領域に含まれる結節点と境界を貫くリンクで体積と面積が決まることは、まさに理論の微分同相不変性から要請される結果でもある。こうして理論は GR の背景独立性を量子論に実装することに見事に成功している。空間の正体がこのような抽象的なスピン・ネットワーク状態 (より正確には、その量子力学的な重合せ (7.39)^{*131}) で表されることは、どこか不気味であるものの美しい描像である。

■ダイナミクス Wheeler–deWitt 方程式 (106) におけるハミルトニアン拘束 C に対して、その解への“射影子”

$$P \sim \delta(C) \sim \int [DN] e^{-i \int d^3\tau N(\vec{\tau}) C(\vec{\tau})}$$

を定義する [2, p.226]。また簡単のために境界状態が始・終状態を表す 2 つのスピン・ネットワークに分離されている場合を考えると、2.4 節のように P を用いて、その間の遷移振幅は

$$W(s, s') = \langle s | P | s' \rangle \quad (109)$$

で与えられる [2, p.24]。ここでスピン・ネットワーク状態 $|s\rangle$ に対するハミルトニアン演算子 C の作用に興味を持たれる。 C は結節点のみに作用する。結節点を持たないスピン・ネットワークによってラベルされた状態——すなわち、そのグラフは単につまらないループの集まりである——は [C が作用すると消えるため] Wheeler–deWitt 方程式の解である^{*132}。 C が一般的な状態 $|s\rangle$ に作用すると、典型的には図 85 のように、結節点の近傍においてグラフのトポロジーが変えられ、ラベルが修正される： C は結節点を 3 つの結節点へと分け、(結節点の周りのスピン・ネットワークのラベルに依存する) 数 a を状態に掛ける。リンク線と結節点のラベルは図には示されていない [2, p.25]。[この C の作用を理解するには、体積 V との Poisson 括弧を用いて C を Thiemann の恒等式で書き換えておくのが便利である。詳しくは文献 [1, pp.116–119] [2, § 7.1] (のノート) を参照。]

遷移振幅 (109) の摂動展開 [P における指数の展開] において、スピン・ネットワークは一連の H の頂点に対する作用の下で発展し、終状態へと移行する様々な過程が得られる。各々の過程はスピン・ネットワークの結節点とリンクが通過して得られる、スピンと結節因子で色付けされた 2-複体として捉えられる。それは石鹸の泡 (foam) のような構造を持つためスピン・フォームと呼ばれ、その断面がスピン・ネットワークを成す。

^{*131} あるスピン・ネットワークで表される、空間を離散化する 1 つの方法が特別に選ばれる理由がないことを考えれば、空間が様々なスピン・ネットワーク状態の量子力学的な重合せで表されることは納得がいく。

^{*132} 実際、Wheeler–deWitt 方程式の厳密解を発見できるという予期せぬ事実は全くもって、1980 年代後半の、初期の段階において LQG の興味を惹きたてた最初の主要な驚きだった。

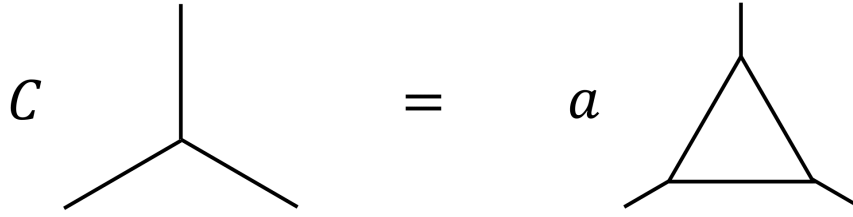


図 85 スピン・ネットワークの結節点に対する C の作用の図式

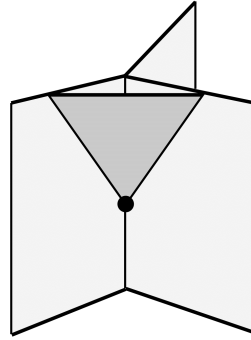


図 86 スピン・フォームの頂点

やはりスピン・フォームは時空の中にあるのではなく、それ自体が時空を表す。例えばスピン・ネットワークの結節点に対する C の作用が図 85 の C のように表されるとき、対応するスピン・フォームの頂点は周りに図 86 のような構造を持つ。下から上へ行くにつれて、2-複体の断面はちょうど図 85 の左辺のグラフから右辺のグラフへ移行することに注意せよ。さて、Feynman の経路積分のアイデアに従い、スピン・フォームに適切な振幅を与えて、遷移振幅を幾何学の経歴にわたる和として表すことができる [2, § 1.2.4, § 9.1].

我々は共変な定式化において改めてこの問題に取り組むことになる。その際ダイナミクスは、正準な理論ではハミルトニアン拘束 C に対するあるいは Wheeler-deWitt 方程式 (106) にコードされているのに対し、共変な理論では線形単純性拘束 (7.3) に、あるいは Y_γ 写像にコードされている (p.136)。また遷移振幅を定義する際に、可能な 2-複体にわたって和をとる代わりに、固定された 2-複体上の変数にわたる和で Feynman 和を表す戦略を採用する。理論の見た目は変われど、記述される物理そのものは変わらないという直観が根底にあるのだろう。さらにここでは境界状態がスピン・ネットワーク状態の重合せ (7.39) で指定され、境界は固定された色付けを持たず、遷移振幅にはスピン・フォームの面の様々な色付け j_f が寄与することになる。共変な理論では遷移振幅を導くというよりも、むしろ遷移振幅を原理として与えることが理論を定義することに相当する。

7.2.2 物理的理論におけるスピン・ネットワーク

3次元では、面積 [線分の長さ (5.11)] の量子数は、さらなる縮退なく状態の基底を定めるのに充分であった。同じことは 4次元では成り立たない。このことは以下のように理解できる。3次元で行ったように、Hilbert 空間を分解すると、

$$L_2[\mathrm{SU}(2)^L] = \otimes_l [\oplus_j (\mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_j)] = \oplus_{j_l} \otimes_l (\mathcal{H}_{j_l} \otimes \mathcal{H}_{j_l}) \quad (7.33)$$

(式 (5.17) [むしろ式 (5.18), 再び最右辺で $\mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_{j_l}$] を見よ), および

$$L_2[\mathrm{SU}(2)^L/\mathrm{SU}(2)^N] = \oplus_{j_l} \otimes_n \mathrm{Inv}_{\mathrm{SU}(2)}(\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3} \otimes \mathcal{H}_{j_4}) \quad (7.34)$$

(式 (5.20) を見よ) が得られ, これは式 (5.20) とは異なっている, 何故ならここでは各辺は 3 つではなく 4 つの面の境界となっている [したがって (3 次元) 境界面に 4 価の結節点を誘導する] からである. 空間 $\mathrm{Inv}_{\mathrm{SU}(2)}(\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3} \otimes \mathcal{H}_{j_4})$ は一般に 1 次元でない. 実際, この空間の線形独立な不変テンソルが

$$\iota_k^{m_1 m_2 m_3 m_4} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & k \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} g_{mn} \begin{pmatrix} k & j_3 & j_4 \\ n & m_3 & m_4 \end{pmatrix} \quad (7.35)$$

のように, j_1, j_2 の間と j_3, j_4 の間の三角関係をともに満たすあらゆる k に対して, すなわち,

$$\max[|j_1 - j_2|, |j_3 - j_4|] \leq k \leq \min[j_1 + j_2, j_3 + j_4] \quad (7.36)$$

を満たすあらゆる k に対して構成できる [式 (7.90), g_{mn} もスピン k で評価]. これらの状態を $|k\rangle$ で表す. したがって空間

$$\mathcal{K}_{j_1 \dots j_4} \equiv \mathrm{Inv}_{\mathrm{SU}(2)}(\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3} \otimes \mathcal{H}_{j_4}) \quad (7.37)$$

が得られ, その次元は

$$\dim[\mathcal{K}_{j_1 \dots j_4}] = \min[j_1 + j_2, j_3 + j_4] - \max[|j_1 - j_2|, |j_3 - j_4|] + 1 \quad (7.38)$$

であり [不等式 (7.36) を満たす k の個数^{*133}], これは各四面体における, その面の面積がシャープであるときの残りの幾何学的自由度を表す [1.3.1 項と式 (7.41) の段落を見よ].

一般のゲージ不変な状態

$$\psi(U_l) = \sum_{j_l, k_n} C_{j_l k_n} \psi_{j_l k_n}(U_l) \quad (7.39)$$

は直交状態

$$\psi_{j_l k_n}(U_l) = \iota_{k_1}^{m_1 m_2 m_3 m_4} \dots \iota_{k_N}^{m_{L-3} m_{L-2} m_{L-1} m_L} D_{m_1 n_1}^{j_1}(U_{l_1}) \dots D_{m_L n_L}^{j_L}(U_{l_L}) \quad (7.40)$$

の線形結合であることが帰結し, これらが式 (5.33) と式 (5.34) に取って代わる. 3 次元の場合と 4 次元の場合の違いは, 3 価のグラフのスピン・ネットワークがスピンのみでラベルされるのに対し, より高い価数のグラフのスピン・ネットワークは各結節点 n に関する“結節する (intertwine)”量子数 k によってもラベルされることである. [4 価の結節因子 (7.91) において, k は 2 つの 3 価の結節点を繋ぐ“仮想リンク”のスピンである. こうしてスピン・ネットワーク状態はリンクのスピンだけでなく結節因子によっても色付けされる [2, p.234].] これらがスピン・ネットワーク波動関数である. それらをより簡単な形

$$\psi_{j_l k_n}(U_l) = \langle U_l | j_l, k_n \rangle = \bigotimes_n \iota_{k_n} \cdot \bigotimes_l D^{j_l}(U_l) \quad (7.41)$$

に書くこともある. これらが群の表現における 4 次元のスピン・ネットワーク状態である.

古典的には, この余りの幾何学的な自由度は四面体の相空間, すなわち, 決まった面積を持つ四面体の可能な形の空間で記述される. 例えば, この空間を座標付けるのに, 2 つの向かい合う 2 面角を採ることができる. この空間は大域的な回転を除き, 与えられた面積を持つ, 閉包関係を満たすベクトルの 4 つ組 [式 (1.9) の箇所の $\{\vec{L}_a\}$] の空間と見なすこともできる. もう一度, 次元を数えると $4 \times 3 - 4 - 3 - 3 = 2$.

^{*133} 式 (7.35) の 2 つの $3j$ 記号が消えないための Clebsch–Gordan 条件 (1.29): $j_1 + j_2 + k, j_3 + j_4 + k \in \mathbb{N}$ が常に満たされるためには, 整数ないし半整数 k はここでは $1/2$ ずつではなく 1 ずつ増加せねばならないことに注意する.

note ベクトル成分数 4×3 から、面積の条件数 4、閉包条件の数 3、回転の自由度 3 を引いた．（ベクトルの始点を指定していないので、並進の自由度はあらかじめ除かれている．）四面体の形状の自由度 $4 \times 3 - 3 - 3 = 6$ は辺の本数であり、ここから面積の条件数 4 を引くと見ても良い．

この空間上の観測量として、特に、四面体の（向き付けされた）体積 V があり、それは既に最初の章で調べてあり、

$$V^2 = \frac{2}{9} \epsilon_{ijk} E_1^i E_2^j E_3^k \quad (7.42)$$

で与えられる [式 (1.10–11), E の下付き添字を補った]．体積の行列要素は $|k\rangle$ 基底で、標準的な角運動量理論を用いて、あからさまに計算できる（本章の補完 [7.5.3 項] を見よ）．結果として得られる行列を対角化すると、次いで各 Hilbert 空間 $\mathcal{K}_{j_1 \dots j_4}$ において体積の固有値 v と固有状態 $|v\rangle$ を計算できる．この基底では、スピン・ネットワーク状態を

$$\psi_{j_l v_n}(U_l) = \langle U_l | j_l, v_n \rangle = \bigotimes_n \iota_{v_n} \cdot \bigotimes_l D^{j_l}(U_l) \quad (7.43)$$

と書くことができ、ここに ι_{v_n} は結節点 n で結節した (intertwined) 空間において体積演算子を対角化する基底を成す．

まとめると、量子重力の切り詰められた状態空間は Hilbert 空間

$$\mathcal{H}_\Gamma = L_2[\mathrm{SU}(2)^L / \mathrm{SU}(2)^N] \quad (7.44)$$

で与えられ、ここに各リンクに関するトライアド演算子（または流束 (flux) 演算子）は

$$\vec{E}_l = l_0^2 \vec{L}_l \quad (7.45)$$

であり [式 (7.28)], $\vec{L}_l$ はリンク上の $\mathrm{SU}(2)$ 変換の生成子、すなわち左不変ベクトル場である．[ここでは $\vec{L}_l$ が式 (5.9–10) における左不変ベクトル場 $\vec{J}_l$ に相当する．] その代数は第 1 章で式 (1.12) において単に仮定されたものであり、また式 (1.13) における次元を担う因子はここでは、運動量のスケールを固定する、一般相対性理論の作用で決まる．さらに、閉包関係 (1.9) は各結節点における状態の $\mathrm{SU}(2)$ 不変性の直接的な帰結である [式 (5.13) の導出と同様]．

グラフ Γ の複雑性を増すことは、完全な理論のより良い近似を与える． $\mathcal{H}_\Gamma$ の状態の基底は、グラフの各リンクに関するスピン j_l と、グラフの各結節点に関する体積固有値 v_n を持つ、スピン・ネットワーク状態 $|\Gamma, j_l, v_n\rangle$ で与えられる．それらは面積と体積の演算子の固有状態である．これは明示的な離散的基底が示しているように、もちろん可分な (separable) Hilbert 空間である^{*134}．図 87 を見よ．

7.2.2 項について

■ゲージ不変性から閉包拘束、その幾何学的解釈へ 式 (5.12–14) と同様に状態 $\psi(U_l)$ のゲージ不変性は、各結節点において生成子 $\vec{L}_l$ に対する閉包拘束 (7.102): $\sum_{l=1}^4 \vec{L}_l = 0$ を課す．（等価的な説明が 7.5.2 項にある．）ところが生成子は運動量成分 $\vec{L}_l = 8\pi G \vec{\mathcal{L}}_l$ に、したがって面積ベクトル $\vec{E}_l = 8\pi G \gamma \vec{\mathcal{L}}_l$ に比例するので (式 (7.9), (7.28)), 3 次元の場合 (式 (5.14) の直後) と同様、これは幾何学的には 4 つの面が閉じて四面体を成す条件 (1.9) に読み替えられる．

^{*134} LQG の Hilbert 空間は不可分であるという、根強い噂は誤っている．

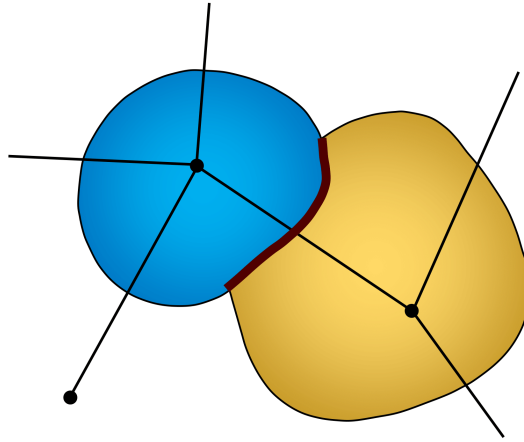


図 87 量子化された体積を持つ空間の塊は結節点に関係付けられる．2 つのセルの間で共有された面の面積もまた量子化される．

7.2.3 空間の量子

スピン・ネットワーク基底の状態は面積と体積の演算子を対角化するので，直接的な物理的解釈を持つ．それらは粒状の物理的空間を成す，重力場の量子状態と解釈される．この単純で直観的な描像を，いくつかの方法で明確化しなければならない．

1. 物理的で量子的な離散性を，自由度の数の切り詰めによる離散性と混同しないことが重要である．この混同はあまりに一般的なので，繰り返しの労をとってでも，このことを改めて強調しておいた方がよい [1.3.1 項も見よ]．我々がグラフに取り組んでいるという事実は，箱の中のを離散的なモードに展開し，有限の数のモードのみを考えることで理論を切り詰めることとアナログな，古典的な切り詰めである．ここに量子力学と関係することは何もない．切り詰められた古典論において，三角形分割の面の面積は任意に小さくなることができ，離散的な三角形分割の幾何学は連続的な幾何学を任意によく近似できる．

量子論的な離散性は，他方で，面積と体積の離散的なスペクトルによっている．これは例えば電磁場の，各モードの量子化されたエネルギー・スペクトルとアナログである．モードのエネルギーの量子は個々の光子である．これは真に量子論的な現象である．重力では，各三角形の面積と各四面体の体積が量子化される．これもまた $\hbar$ によって設定されるスケールを持つ，真に量子論的な現象である．

このため，四面体が無限に小さくなる極限は存在しない．これはループ量子重力の主要な核心である．それはループ量子重力によって明かされる空間の物理的な離散性である．

2. スピン・ネットワーク状態は 3 次元の計量を完全には対角化しない．これは面積と体積が四面体の幾何学を決定するのに充分ではないからである．[なお長さの演算子は面積と体積よりも驚くほどはるかに扱うのが複雑である^{*135}.] 四面体の幾何学は 2 つの数量 (6 本の辺の長さ) で決まるのに対し，面積と体積は 5 つの数量でしかない．状況は角運動量の理論と似ている：古典的な角運動量は 3 つの数量

^{*135} 文献 [2, p.275] から孫引いた．原典は T. Thiemann, A length operator for canonical quantum gravity, *J. Math. Phys.* **39** (1998) 3372–3392, gr-qc/9606092.

(L_x, L_y, L_z) で決まるものの、2つの演算子 (L^2, L_x) だけが同時に対角化でき、その帰結として角運動量 $\vec{L}$ は決してシャープになり得ない。同様に、3次元の幾何学は決してシャープになり得ない。したがって空間的な計量は Planck スケールにおいて、常に量子力学的に不鮮明に留まる。[以上、1.3.1 項末尾も見よ.]

“四面体”“三角形”等々の幾何学的な描像は、何らかの古典的近似において初めて意味を成し、基礎的なスケールでは意味を成さない何かと捉えねばならないことが帰結する。Planck スケールでは、電子が“小さな自転する小石”だということと同じ意味で“四面体”がある。すなわち、非常に曖昧な意味においてである。Planck スケール以下に四面体はない。大きな量子数の極限で我々が3次元の Riemann 幾何学として記述する何かをもたらす性質を持つ、重力場の量子から成る量子状態がある。

note もっともこのような但し書きが付くとは言え、三角形分割から出発している以上、空間の量子としては4価の結節点に付随する、したがって4つの面を境界に持つ“四面体”しか得られず、5価以上の結節点に対応する多面体は現れない。この意味では、これは本章冒頭の脚注*116で予告されている一般的な構造とは見なし難い。7.4.3 項を見よ。

3. スピン・ネットワーク状態 $|\Gamma, j_l, v_n\rangle$ で表される空間の量子を、空間の中で運動する量子と考えてはならない。それらは空間の中にあるのではない。それら自体が物理的空間である。このことは、それらを電磁場の量子の通常の記述と比較すると理解できる。それらは量子数たち $|p_1, \dots, p_n\rangle$ で特徴付けられ、ここに p_i たちは運動量、すなわち、位置変数の Fourier 変換である。位置は光子の属している空間に対して与えられる。量子重力では、他方で、量子数たちは位置を含んでいない。それらは量子自体の固有の物理的サイズ(面積と体積)と、それらの量子の間の隣接関係をコードするグラフ Γ を含んでいる。したがって空間の量子は互いに対して位置付けられ、この関係は Γ の組合せ的な構造で与えられる。これがループ量子重力が量子論において空間的な背景独立性を実現する方法である。これは重力場が時空の中に属しているのではなく時空そのものとなる、古典的な一般相対性理論において起きることの量子論的な対応物である。
4. 最後に、注意：ループ量子重力の空間の量子を現実の存在として過度に素朴に捉えてはならず、むしろ相互作用のモードとして捉えねばならない。理論が予言することは、何かの効果がその面積に依存するあらゆる相互作用において、この効果は量子化された面積の効果になるということである。空間の量子を成す具体的な“塊”に関して過度に文字通りに考えようとすることは、量子力学において常にそうであるように、誤解を招き得る。振りはその量子“から構成されている”のではない。それは量子化されたエネルギーで特徴付けられる相互作用において振りが作用する仕方である。量子力学において常にそうであるように、素朴なまでに現実的な描像が誤解を招き得る理論の応用において、このことは特に重要である。Hilbert 空間の基底を“事物”のリストと誤解してはならない、何故なら非可換な観測量 [observers は observables の誤記か] に関する基底は等しく物理的に意味があるからである。

7.3 遷移振幅

最後に、今や完全な理論の遷移振幅を書き下して、その構成を完成させることができる。

3次元での経験はこの振幅の一般的な構造を与える。3次元の理論を思い出そう：それは式 (5.69) と式

(5.74) で与えられ、それらを以下に書き写しておく：

$$W(h_l) = \int_{\text{SU}(2)} dh_{\text{vf}} \prod_{\text{f}} \delta(h_{\text{f}}) \prod_{\text{v}} A_{\text{v}}(h_{\text{vf}}) \quad (7.46)$$

であり、ここに $h_{\text{f}} = h_{\text{vf}} h_{\text{v'f}} \cdots$ であり、また頂点振幅は

$$A_{\text{v}}(h_{\text{vf}}) = \sum_{j_{\text{f}}} \int_{\text{SU}(2)} dg'_{\text{ve}} \prod_{\text{f}} d_{j_{\text{f}}} \text{Tr}_{j_{\text{f}}} [g_{\text{e'v}} g_{\text{ev}} h_{\text{vf}}]. \quad (7.47)$$

4次元の運動学的 Hilbert 空間 [式 (7.44)(また 2 複体の構造)] は 3次元の場合と本質的に同じなので、1 目の式は 4次元において不変に留まり得る。実際それは、振幅が個々の来歴 (stories) の振幅の和をとることと得られるとする、量子力学の重ね合わせの原理と、来歴の振幅は時空の分離した領域に関する個々の局所的な振幅の積であるとする、局所性原理を反映しているに過ぎない。[そうであるならば、式 (7.46) の代わりに抽象的に式 (5.49–50), (7.52–53) を出発点に採っても良い。] 真のダイナミクスは局所的な物理を決定する、頂点振幅で与えられる。4次元における頂点振幅は何か？

それは結節点のグラフ上 (すなわち、時空の 4-単体の境界上) に属する $\text{SU}(2)$ 群要素の関数 $A_{\text{v}}(h_{\text{vf}})$ のはずであるものの、それは $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 不変でなければならない。振幅 (7.47) は $\text{SU}(2)$ の下で不変であるにすぎず、 $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ について何も関知しない。 $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 不変な振幅を得るためには、式 (7.47) における $\text{SU}(2)$ 積分を $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 積分に置き換え、何らかの方法で $\text{SU}(2)$ 群要素を $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 群要素へと写像しなければならない。

我々にはそのための手段があり、それは写像 Y_{γ} である。その写像は $\text{SU}(2)$ 変数の関数を $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 変数の関数へと写像する。これらを次いで $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 不変な状態上に射影して評価できる：

$$A_{\text{v}}(\psi) = (\text{P}_{\text{SL}(2, \mathbb{C})} Y_{\gamma} \psi)(\mathbb{1}). \quad (7.48)$$

これをあからさまに書こう。群の表現では

$$A_{\text{v}}(h_{\text{vf}}) = \sum_{j_{\text{f}}} \int_{\text{SL}(2, \mathbb{C})} dg'_{\text{ve}} \prod_{\text{f}} (2j_{\text{f}} + 1) \text{Tr}_{j_{\text{f}}} [Y_{\gamma}^{\dagger} g_{\text{e'v}} g_{\text{ve}} Y_{\gamma} h_{\text{vf}}] \quad (7.49)$$

であり、ここにトレース表記の意味は

$$\text{Tr}_j [Y_{\gamma}^{\dagger} g Y_{\gamma} h] = \text{Tr} [Y_{\gamma}^{\dagger} D^{(\gamma j, j)}(g) Y_{\gamma} D^{(j)}(h)] = \sum_{m, n} D_{jm, jn}^{(\gamma j, j)}(g) D_{nm}^{(j)}(h). \quad (7.50)$$

頂点振幅は頂点周りの面ごとに 1 つの $\text{SU}(2)$ 変数の関数である。頂点を取り囲む小さな球面を描くところを想像せよ：この球面と 2-複体の交わりがグラフ Γ_{v} である (図 88 を見よ)。頂点振幅は

$$\mathcal{H}_{\Gamma_{\text{v}}} = L_2[\text{SU}(2)^{10}/\text{SU}(2)^5]_{\Gamma_{\text{v}}} \quad (7.51)$$

に属する状態の関数である。グラフ Γ_{v} は 5 つの結節点を持つ完全グラフである (全ての結節点は繋がっている)；図 89 を見よ。

式 (5.73) で導入した、 $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 積分におけるプライムは、5 つの群の変数に関してではなく、そのうち 4 つに対してのみ積分を行うことを意味する。積分の結果は 5 番目 [の群要素] に依存しないことが判明する。このことは 3次元では表面的であったのに対し [6.1 節]、ここではこの手続きが必要とされる、何故ならこの事前の注意を考慮しなければ、非コンパクトな最後の $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 上の積分は発散をもたらすからである。実際には現に定義されているように、頂点振幅は有限であることを証明できる (Engle and Pereira 2009; Kaminski 2010)。

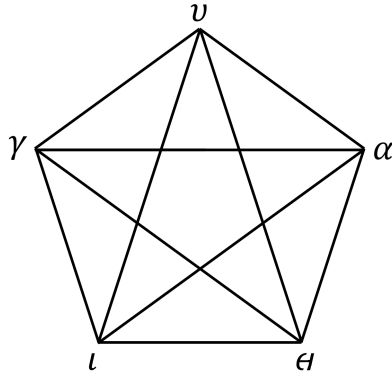


図 88 グラフ Γ_v , 頂点の境界グラフ, あるいは五線星形 (pentagram) は Pythagoras (ピタゴラス) 学派によって $\nu\gamma\iota\epsilon\iota\alpha$ (Hugieia) と呼ばれた. 彼らはそこに数学的な完璧を見た. Hugieia は健康の女神であり, “Hugieia” という表現は挨拶として用いられた.

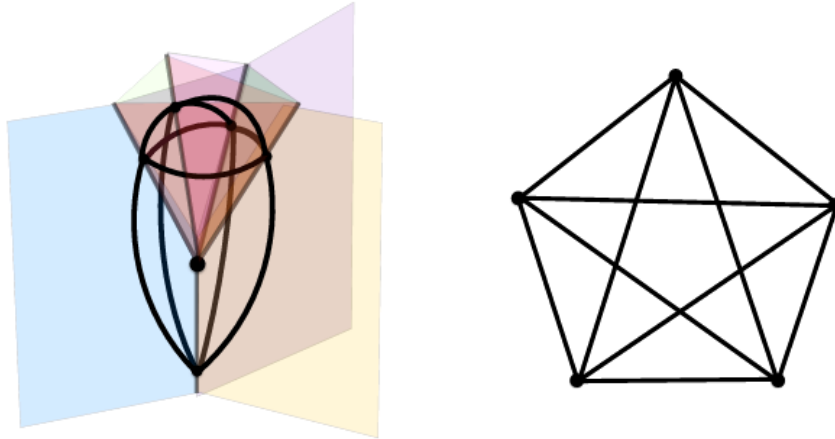


図 89 4次元における頂点グラフ [本稿では教科書 p.143 から図を採った]

これは与えられた 2-複体上のループ量子重力の, 理論の共変な定式化の定義を完成させる.

このダイナミクスは, 物理的な 4 次元の場合に適合した形で以下に繰り返す, 5.3 節で述べた 3 つの基準を実現する:

1. **重合せの原理.** 量子力学の基本原理解. 振幅は基本的な振幅の和である (標準的な量子論では, これは Feynman の経路 σ にわたる和である):

$$\langle W | \psi \rangle = \sum_{\sigma} W(\sigma). \quad (7.52)$$

2. **局所性.** 19 世紀と 20 世紀の物理学の根源的な発見である: 相互作用は時空において局所的である. 基本的な振幅は, 時空点に関する振幅の積 (標準的な場の量子論では, 時空点にわたる積分の指数) であり,

$$W(\sigma) \sim \prod_v W_v. \quad (7.53)$$

3. **Lorentz 不変性.**

$$W_v = (P_{\text{SL}(2, \mathbb{C})} \circ Y_{\gamma} \psi_v)(1) \quad (7.54)$$

であり [式 (7.48) とやや表記が異なる], ここに ψ は境界状態, $P_{\text{SL}(2,\mathbb{C})}$ はその $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 不変な成分への射影子であり, また (1) はスピン・ネットワークの単位元上での評価を表す.

以下で見るように:

1. 理論は古典的極限で一般相対性理論に関係する [第 8 章].
2. 理論は紫外有限である. [本節で既に頂点振幅の有限性が言及されている. 7.3.1 項の最終段落, 第 9 章序文も見よ.]
3. 宇宙定数を加える適切な量子変形 (quantum-deformation) の下で, 理論は赤外有限でもある [7.4.2 項].
4. 理論は摂動論的な一般相対性理論の n 点関数, 宇宙論における Friedmann 方程式, また (有限な) Bekenstein–Hawking ブラックホール・エントロピーへと導く [第 IV 部].

7.3 節冒頭 (7.3.1 項の前まで) について

3 次元理論の振幅 (5.69),(5.74) は, 天下りに与えられた離散的な作用 (4.36) から出発して, 群の変数に関するテクニカルな積分を経て導かれた. ただしそれらは, ここではアナロジーとして参照されているに過ぎない. もちろんトイ・モデルとの比較は間違いなく, 理論を構築・納得する上で重要な観点であり, 教育的な意味を持つ. しかしながら 4 次元の理論の振幅 (7.46),(7.48–49) の方がより根源的である以上, そこにたどり着くためのボトムアップ型の推論は必然的に, 積極的な飛躍を含むことになる. そこで極論, 遷移振幅の満たさねばならない性質 (7.52–54) のみを要請して, 共変な定式化の原理として 4 次元の理論の振幅 (7.46),(7.48–49) をいきなり与えれば充分と考えることもできる. 以下ではこのような立場を採り, ひとまず振幅 (7.46),(7.48–49) をそれぞれ単独で理解することに努める.

■図 89 の頂点グラフ Γ_v について 5.4.2 項の図 70 における, 3 次元での頂点グラフ Γ_v のノートを 4 次元に一般化してまとめる.

頂点 v を取り囲む双対な三角形分割の 4-単体 v^* は, その境界に ${}_5C_4 = 5$ 個の四面体と ${}_5C_3 = 10$ 個の三角形を持つ. このとき頂点 v には

- v^* の 5 個の四面体に対応する 2-複体の 5 本の辺
- v^* の 10 個の三角形に対応する 2-複体の 10 枚の面

が集まる (表 6 も見よ) [2, p.332]. 頂点 v に隣接する面の枚数は, v に接続する 2 辺 e, e' の選び方の総数 ${}_5C_2 = 10$ としても理解できる. したがって頂点 v を取り囲む小さな球面と 2-複体の交わりとして, 図 89 に半ば直観的に描画されているような頂点グラフが得られる. ここで 5 本の辺は球面に 5 個の結節点を, 10 枚の面は球面に 10 本のリンクを誘導しており, 球面上のグラフ Γ_v は全ての結節点が互いにリンクで繋がった完全グラフとなる. これは 1 つの頂点の表す単一の 4-単体の境界グラフと, トポロジカルに同じ構造を持ち, 頂点の境界グラフと見なせるはずである. そこで境界グラフ上で定義されるスピン・ネットワーク状態を考えると, その Hilbert 空間は式 (7.51): $\mathcal{H}_{\Gamma_v} = L_2[\text{SU}(2)^{10}/\text{SU}(2)^5]_{\Gamma_v}$ で与えられる.

次に群の変数 g_{ve}, h_{vf} の個数を数えよう. 頂点 v に接続する辺 e は, したがって頂点振幅 (7.49) に現れる変数 g_{ve} は 5 つある. (実際にはそのうち 4 つの群の変数に関してのみ積分を施す (式 (5.73), 本文 p.142).) 他方で変数 h_{vf} は第 1 義的には, 頂点 v を通過する群要素 $h_{vf} = g_{e''v}g_{ve}$ として定義されていた (式 (5.66) の直後). しかしながら式 (5.67) 以降では, もはや 2 種類の群要素 g_{ve}, h_{vf} は独立変数として扱われている. 実際, とりわけ遷移振幅 (7.46) の被積分関数において, 頂点振幅 $A_v(h_{vf})$ を定義する積分変数 h_{vf} は与えられた値に

固定されており、この理解の下で頂点振幅 (7.49) では h_{vf} とは独立に、変数 g_{ve} に関してのみ積分が施されている。そこで群の要素 h_{vf} を面 f の頂点 v に関する変数と言うよりも、むしろ頂点 v に隣接する面 f に充てられた変数と解釈することが可能となる。このとき式 (7.50) 直後にあるように、頂点振幅は頂点に隣接する面ごとに 1 つずつある $SU(2)$ 変数 h_{vf} の関数であると言える。あるいは、より正確には変数 h_{vf} は、面 f が頂点 v の境界グラフ Γ_v に誘導するリンク l のホロノミー $h_l = h_{vf}$ と見なせる。このとき式 (5.70–71) のダイアグラムにおける面内部の実線も、各頂点の境界グラフを成すリンクたちとして理解できる。また h_{vf} 変数のこの解釈は、7.4.1 項におけるくさびの図 91 とも整合している。

■振幅 (7.46) について 遷移振幅 (7.46) は与えられた境界状態、すなわち配位変数にあたるリンク l たちのホロノミー h_l (式 (5.71) でこの表記を導入した) の関数となっている。これを 2.4.2 項では式 (7.52) 左辺 $\langle W|\Psi \rangle$ のように表記した。現に右辺の積分変数 h_{vf} は式 (5.71) で見たように境界のリンク l の変数を含まないで、積分の結果、 h_l 依存性のみが生き残る。また dh_{vf} は Haar 測度として定義されているので、振幅 (7.46) は $SU(2)$ 不変である^{*136}。なお群要素のデルタ関数 $\delta(h_f)$ は積分の下で、引数が単位元となる値を取り出すと推察される (5.4.2 項や 6.1 節, 6.2 節の計算を見よ)。したがってデルタ関数は式 (5.69) の箇所にあるように、各面の周りの群要素を貼り合わせる働きをする (結果は式 (7.61))。

ところで振幅 (7.46) は与えられたグラフ Γ を境界に持つ固定された 2-複体 (とりわけここでは三角形分割を通じて定義される 2-複体) の上で定義されている。一見するとこのことは、式 (7.46) がスピン・フォームの様々な経歴に関する重畳 (7.52) を表現しているという記述 (p.141) に反している印象を受ける。しかしながら実際には、式 (7.46) の変数 h_{vf} たちに関する積分により、実質的に境界間の幾何学に関するあらゆる過程の寄与が考慮されていると考えられる。

- 確かに粗い三角形分割を用いて 2-複体を定義すれば、理論の捉えることのできるダイナミクスの自由度は制限される。とは言え、その場合にもあくまで、その制約された精度の下で捉えられる過程が全て遷移振幅に寄与することには変わらない。それは QED の遷移振幅の摂動展開をある次数で打ち切ったときに、その摂動次数までに現れる全ての Feynman ダイアグラムが考慮されることになるのと同様である (7.3.1 項, 7.3.2 項も見よ)。(他方で文献 [2, pp.328–329] では 2-複体にわたる和が明示された形で振幅が書かれている。7.4.3 項も見よ。)

— もちろん古典的な離散化の選択に応じて、記述される物理の内容が根本的に影響を受けるかもしれないという懸念はある。また現に 7.4.3 項で紹介されているように、量子重力の遷移振幅の定義には様々なアプローチがある：

- * まず遷移振幅の構成は三角形分割に限らず、頂点が任意の価数を持ち得る、任意の 2-複体に対しても直接的に拡張できる。
- * さらに固定された 2-複体を考える代わりに、群の場の理論 (group field theory ; GFT) による定式化では等価的に 2-複体にわたる和で遷移振幅を定義できる。

我々が主に調べる固定された 2-複体上の理論は、近似の精度を向上させるために格子を洗練化する点で格子 QCD と似ているのに対し、GFT における 2-複体にわたる和は、QED の Feynman ダイアグラムの摂動展開に似ている。これら 2 つの定式化が等価な遷移振幅を与えることは、アプローチの見かけの違いがあくまで表面的であるに過ぎず、それによって本質的な物理そのものは変わらないことを示唆している。そこで例えば流体系を (適当な精度で) 記述するには正方格子を用いれ

^{*136} Haar 測度で積分した状態はゲージ不変であることを、式 (8.34–35) でも用いている。

ば充分であるように、三角形分割を用いれば一般性を失うことなく量子重力理論を捉えられると仮定し、この直観の下で我々は、三角形分割を基調とする理論を重点的に調べるのである。

なお格子を洗練化することとグラフの和をとることが、より精度の高い遷移振幅を等しく与えることは次のように解釈できる。すなわち 7.3.2 項にあるように、スピン・フォームは時空の塊を表す QCD の格子とも、重力場の量子の経路を表す QED の Feynman ダイアグラムとも見なせる。このため格子 QCD と摂動論的 QED の計算は量子重力において区別できなくなり、スピン・フォームの描像において統一されると言える^{*137}。

– 11.3.2 項では 2-複体に関する頂点展開が考えられている。(11.3 節序文で言及されているスピン・フォームに関する展開である。)

- 非相対論的な粒子に対する Feynman の経路積分は、(拡大) 相空間における配位変数と運動量変数の双方に関する積分として表せる (式 (5.38) も見よ)。ただし運動量変数は Gauss 型の積分を実行して後から消去できる (詳しい計算は文献 [21, pp.32–41] を見よ)。同様に式 (7.46) の“中間状態の配位変数” h_{vf} に関する積分は、頂点振幅 (7.47) における“運動量の固有値” j_f の和と合わせて、(拡大) 相空間にわたる積分の対応物と見なせる。

他方で振幅 (7.46) が局所性 (7.53) を満たしていることは明らかである。

最後に式 (5.69) 以降と同様、振幅 (7.46) における面にわたる積 $\prod_f$ は直後のデルタ関数 $\delta(h_f)$ にのみ作用しており、後続の頂点振幅の積には掛からないことに、改めて注意を促しておく。

■頂点振幅 (7.48–49) について 『ザコパネ講義 (Zakopane lectures)』 (Rovelli 2011) の 3.1 節を参考にまとめる。一般に振幅は境界状態の関数である (2.4.2 項)。ところが状態には 2 通りの意味があり、境界状態は配位変数 h_l で指定することも、式 (5.29), (5.33), (7.39) のようにその関数 $\psi(h_l)$ として表すこともできる。そこで頂点振幅は式 (7.48) 左辺のように、境界状態 $\psi(h_l)$ の関数として $A_v(\psi)$ と書ける。これは境界グラフの群要素 $h_l = h_{vf}$ の関数としての頂点振幅 $A_v(h_l)$ (式 (7.49)) と、

$$A_v(\psi) = \langle A_v | \psi \rangle = \int dh_l \langle A_v | h_l \rangle \langle h_l | \psi \rangle = \int dh_l A_v(h_l) \psi(h_l) \quad (110)$$

で関係付けられると考えられる。(ここでも正確には $dh_l \rightarrow \prod_l dh_l$, $\psi(h_l) \rightarrow \psi(\{h_l\})$ 等々である。完全性 $\int dh_l |h_l\rangle \langle h_l| = \mathbb{1}$ に関しては式 (101) や式 (11.25) も見よ。)

次に式 (7.48) 右辺の速記術が表す手順に従って頂点振幅 $A_v(\psi)$ を構成する。恒等式

$$\begin{aligned} \psi(g_l) &= \int_{\text{SU}(2)} dh_l \psi(h_l) \prod_l \delta(g_l^{-1} h_l) \\ &= \int_{\text{SU}(2)} dh_l \psi(h_l) \prod_l \left[\sum_j d_j \text{Tr}_j(g_l^{-1} h_l) \right] \quad (\text{式 (5.64), } \text{Tr}_j(g) = \text{Tr}(D^j(g)) \text{ は指標}) \\ &= \int_{\text{SU}(2)} dh_l \psi(h_l) \sum_{j_l} \prod_l d_{j_l} \text{Tr}_{j_l}(g_l^{-1} h_l) \end{aligned}$$

から始めよう。この状態に $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 不変性を実装したい。そこで Y_γ 写像 (7.24):

$$Y_\gamma |j, m\rangle = |\gamma j, j; j, m\rangle$$

^{*137} この点に関しては Rovelli の一般向けの本『すごい物理学講義』第 7 章の記述が分かりやすい。

を用いて、状態の独立変数 $g = g_l^{-1} \in \text{SU}(2)$ (対応する回転演算子を $\hat{g}$ とする) のスピン j 表現行列を、 $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 行列に置き換える：

$$D_{mn}^{(j)}(g) = \langle j, m | \hat{g} | j, n \rangle \rightarrow \langle j, m | Y_\gamma^\dagger \hat{g} Y_\gamma | j, n \rangle = \langle \gamma j, j; j, m | \hat{g} | \gamma j, j; j, n \rangle \equiv D_{jm, jn}^{(\gamma j, j)}(g). \quad (\text{式 (7.50)})$$

最右辺において、式 (7.27) のように行列要素は組 (jm, jn) でラベルされる。この表現行列の変更は上式より、式 (7.50) のようにトレース内部での表記の置き換え $g \rightarrow Y_\gamma^\dagger g Y_\gamma$ で表せる。すると

$$(Y_\gamma \psi)(g_l) = \int_{\text{SU}(2)} dh_l \psi(h_l) \sum_{j_l} \prod_l d_{j_l} \text{Tr}_{j_l} [(Y_\gamma^\dagger g_l^{-1} Y_\gamma) h_l].$$

ところがリンク l の始点 (source) と終点 (target) をそれぞれ $s(l), t(l)$ として、 $\text{SU}(2)$ 群要素は

$$g_l \rightarrow g_{s(l)} g_l g_{t(l)}^{-1} \quad \text{i.e.} \quad g_l^{-1} \rightarrow g_{t(l)} g_l^{-1} g_{s(l)}^{-1}$$

とゲージ変換する。よって結節点 $\mathbf{n} = s(l), t(l)$ に関する $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 行列 $D^{(\gamma j, j)}(g_{\mathbf{n}})$ により、 $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 行列 $D_{jm, jn}^{(\gamma j, j)}(g)$ は対応する変換を受ける。そこで以降、改めて $D^{(\gamma j, j)}(g_{\mathbf{n}}) \rightarrow g_{\mathbf{n}} \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ と略記し、また $dg_{\mathbf{n}}$ を $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 群の Haar 測度として $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ のゲージの作用にわたる積分を施すと、Haar 測度の定義により $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ ゲージ不変な状態

$$\begin{aligned} (\text{P}_{\text{SL}(2, \mathbb{C})} Y_\gamma \psi)(g_l) &= \int_{\text{SL}(2, \mathbb{C})} dg_{\mathbf{n}}' (Y_\gamma \psi)(g_l) \\ &= \int_{\text{SU}(2)} dh_l \psi(h_l) \sum_{j_l} \int_{\text{SL}(2, \mathbb{C})} dg_{\mathbf{n}}' \prod_l d_{j_l} \text{Tr}_{j_l} [Y_\gamma^\dagger (g_{t(l)} g_l^{-1} g_{s(l)}^{-1}) Y_\gamma h_l] \end{aligned}$$

が得られる。ここに $\text{P}_{\text{SL}(2, \mathbb{C})}$ はゲージ不変な状態への射影子、また $dg_{\mathbf{n}}'$ におけるプライムは本文にあるように 1 つの冗長な積分を除外することを表す。ここで式 (5.13) のノートで注意したように、同じ結節点 $\mathbf{n}$ に作用する群要素 $g_{\mathbf{n}}^{\pm 1}$ は、それが由来する全てのリンク l に共通であることを思い出そう。特に上式で境界のホロノミーを $g_l = \mathbb{1}$ において頂点振幅

$$A_{\mathbf{v}}(\psi) = (\text{P}_{\text{SL}(2, \mathbb{C})} Y_\gamma \psi)(\mathbb{1}) = \int_{\text{SU}(2)} dh_l \psi(h_l) \sum_{j_l} \int_{\text{SL}(2, \mathbb{C})} dg_{\mathbf{n}}' \prod_l d_{j_l} \text{Tr}_{j_l} [Y_\gamma^\dagger g_{t(l)} g_{s(l)}^{-1} Y_\gamma h_l]$$

を定義すると、その構成により頂点振幅の Lorentz 不変性 (7.54) が満たされる。

これを冒頭の式 (110) と比較すると、

$$A_{\mathbf{v}}(h_l) = \sum_{j_l} \int_{\text{SL}(2, \mathbb{C})} dg_{\mathbf{n}}' \prod_l d_{j_l} \text{Tr}_{j_l} [Y_\gamma^\dagger g_{t(l)} g_{s(l)}^{-1} Y_\gamma h_l]$$

と同定できる。ここで境界グラフのリンク l と結節点 $\mathbf{n}$ がそれぞれ、頂点 $\mathbf{v}$ に隣接する面 $\mathbf{f}$ と辺 $\mathbf{e}$ に 1 対 1 に対応すること、また $d_j = 2j + 1$ がスピン j 表現の次元であることに注意すると、これは $A_{\mathbf{v}}(h_{\mathbf{vf}})$ の式 (7.49) と等価である。特に 5.4.2 項の表記をそのまま引き継ぎ、頂点 $\mathbf{v}$ を含むくさび (wedge) において、7.4.1 項の図 91 のように $s(l) = \mathbf{e}, t(l) = \mathbf{e}'$ であることに注意する。式 (7.49) は面 $\mathbf{f}$ に任意にスピン $j_{\mathbf{f}}$ を充てて、面 $\mathbf{f}$ に関する量をスピン $j_{\mathbf{f}}$ 表現で評価し、次いで可能なスピン $j_{\mathbf{f}}$ に関する和をとるという構成になっている。またデルタ関数の展開公式 (5.64) の面影を残している。

7.3.1 連続極限

上記の方程式は与えられたグラフ Γ 上で定義された状態空間と、与えられた 2-複体 $\mathcal{C}$ で決まる振幅を持つ理論を定義する。これは有限の自由度の数を持つ理論である。この定義は明らかに、無限の自由度の数を持つ理論である古典的な一般相対性理論の、切り詰めに対応する。完全な理論は次第に洗練される $\mathcal{C}$ と $\Gamma = \partial\mathcal{C}$ を選ぶことで近似される。

この手続きは場の量子論で一般的なものである。具体的な物理的計算はほとんど、格子量子色力学 (QCD) では例えば N 個の頂点を持つ有限の格子上で、また量子電磁力学 (QED) では摂動論の有限の次数で実行される。摂動論における有限次数は、考慮される全ての Feynman グラフが高々、粒子数 N を持ち、ここに N は有限であり、したがって事実上、 n 粒子 Hilbert 空間の有限な和で完全に定義され、任意に運動量が高くとも有限の自由度の数を記述することを意味する。(任意に高い運動量が単一の Feynman グラフに現れ、したがってグラフは無限の数のモードを含むという事実は、これらのモードの重要な励起が有限の数の粒子で記述できる励起であるという事実と矛盾しない。) いずれの場合にも、形式的に $N \rightarrow \infty$ の極限を考えることができるものの、具体的には残りがより小さいという何らかの議論の下で、常に有限の N で計算している。

量子重力も同じ方法で定義されている：切り詰められた理論の状態と振幅を考え、望みの精度に十分な洗練、すなわち Γ と $\mathcal{C}$ を選ぶ。

最初に状態空間を考えよう。ここで重要な見解は以下である。 Γ' を Γ の部分グラフ (subgraph)、すなわち、 Γ の結節点とリンクの部分集合から成るグラフとする。するとグラフ Γ' のループ重力 Hilbert 空間と正確に同型な部分空間 $\mathcal{H}_{\Gamma'} \subset \mathcal{H}_{\Gamma}$ があることが直ちに分かる。実際これは、 Γ にはあるが Γ' にはないリンク l に関する群要素 U_l に依存しない全ての状態 $\psi(U_l) \in \mathcal{H}_{\Gamma}$ から成る。等価的に $\mathcal{H}_{\Gamma'}$ は、 Γ にはあるが Γ' にはないあらゆる l に対して、 $j_l = 0$ で特徴付けられるスピン・ネットワーク状態の線形包 (linear span) である。

演習 7.1 上記の 2 つの定義が等価であることを示せ。[文献 [2, § 6.2.1] を見よ。]

したがって Γ 上で理論を定義すれば、より小さなグラフ Γ' 上で定義された理論を捉える状態の部分集合を思い通りに得る。この意味で Γ' から Γ へのステップは理論の洗練である：洗練された理論は同じ状態に加えて、他の状態を含む。

射影極限の技法 (projective limit technique) を用いて、全ての $\mathcal{H}_{\Gamma}$ たちを含む Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ を定義できる (Ashtekar and Lewandowski 1995)。全ての Γ に対する全ての空間 $\mathcal{H}_{\Gamma}$ の族は実際に射影族 (projective family) を成す。これがさほど具体的に役立つことはないので、ここではこれらの数学的に細かい点には立ち入らない。しかしながら、この構造と Fock 空間の間に密接な類似性があることを述べておく。Fock 空間は以下のように捉えられる。まず、1 粒子 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1$ を定義し、 n 粒子 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_n$ を $\mathcal{H}_1$ の n 個の複製の対称なテンソル積 $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_1 \otimes_S \cdots \otimes_S \mathcal{H}_1$ として定義し、 N 個またはそれより少ない粒子の空間 $\mathcal{H}_N = \bigoplus_{n=1}^N \mathcal{H}_n$ を定義する。このとき空間 $\mathcal{H}_{N-1}$ は空間 $\mathcal{H}_N$ の部分空間であり、Fock 空間は形式的な極限 $N \rightarrow \infty$ である。ループ重力とのアナロジーは N 個の結節点を持つ Γ の空間 $\mathcal{H}_{\Gamma}$ と、 $\mathcal{H}_N$ の間にある。Fock 空間が可分 (separable) であるように、結果として得られる空間は可分である。散乱振幅を計算する CERN の物理学者は実質的に何ら Fock 空間に関心を払わず、完全にある有限の N に対する $\mathcal{H}_N$ の内で研究していることに、留意していただきたい。

次に、遷移振幅を考える。再び、 $\partial\mathcal{C} = \Gamma$ として、 $\mathcal{C}$ が洗練されるときの $W_{\mathcal{C}}(h_l)$ の極限として、形式的に遷

移振幅 $W_\Gamma(h_l)$ を定義できる。極限の概念はよく定義されている^{*138}、何故なら 2-複体の集合は上限を持つ半順序集合 (partially ordered set) だからである^{*139}。再び、この極限の概念が実際のところ有用な概念か、あるいは重要な概念かさえ明確でない。物理を考える限り、低次の Feynman グラフ、あるいは有限のサイト数の QCD 格子が重要な物理を計算するのに充分であるのと同じ意味で、グラフと 2-複体の部分集合 (subclass) が重要な物理を捉えるのに充分である範囲において理論は有用である。

このことは、与えられた Γ および $\mathcal{C}$ で導入される近似の有効範囲に関する問を喚起する。答は古典論の解析から直ちに導かれる。離散化された理論が連続理論を古典的な文脈で近似するときには、近似は良いと期待される。一般相対性理論の離散化の有効範囲は分かっている。ヒンジにおける曲率が曲率が小さいとき、すなわち Regge の用語では欠損角が小さいとき [4.3 節]、離散化は良い近似となる。こうして、 Γ と $\mathcal{C}$ による展開は平坦な空間の周りで良い展開となる。

平坦な空間の周りの展開は、一般相対性理論の伝統的で繰り込み不可能な場の量子論的な量子化において、まさに上手くいかなかったことではないかと、読者は直ちに疑問に思うかもしれない。我々は何故ここでは同じ困難に遭遇しないのか？ 答は簡単である：何故ならここでの量子化では、無限大を切断する空間の Planck スケールの離散性が、定式化において考慮されているからである。伝統的な Feynman の摂動展開では、そうではない。

7.3.2 QED および QCD との関係

上記で定義した理論と、与えられた格子上の格子 QCD との類似性は明白である。いずれの場合にも、接続を群要素で置き換えた古典論の離散化と、局所的な振幅の積である配位振幅の、配位にわたる積分で定義される量子論が得られる。正方格子の代わりに三角形分割を用いることは単に、平坦な計量がない場合には、正方格子は不自然であるという事実を反映しているに過ぎない。重力の振幅の Wilson 振幅に比べてより複雑な見かけは、重力の特定の作用の反映に過ぎない。

重大な違いは、既に指摘したように [第 4 章]、Wilson 作用が外部パラメータに依存しているのに対し (Yang–Mills 理論が固定された外部計量 (external metric) に依存しているように)、重力の作用は (Einstein の作用のように) 外部パラメータに依存していないということである。対応して、格子 Yang–Mills 理論の連続極限はパラメータ (β) を臨界値 ($\beta = 0$) に調整することを含んでいるのに対し、重力に対してはこの種のことは何ら必要でない。

ところがここで導入した理論と摂動論的な QED の間にも著しい類似性がある。グラフの結節点は空間の量子と見なすことができ、また 2-複体は Feynman グラフの場合のように、空間の量子が相互作用し、結合し、分離するところの、空間の量子の経歴と捉えられる。スピン・フォーム振幅は実際に、“群の場の理論 (group field theory)” と呼ばれる補助場の理論 (auxiliary field theory) の Feynman 展開における項として具体的に得られるという事実によって、アナロジーは大いに強化される。本書では、群の場の理論による量子重力の提示は展開せず、それについては読者に例えば Rovelli (2004) の第 9 章を紹介する。重力の振幅を与える特定の群の場の理論が (Euclid 的な文脈で) Krajewski *et al.* (2010) によって導かれている。我々は、しかしながら、量子力学の基礎理論で最も成功している 2 つの定式化——摂動論的 QED と格子 QCD ——に特徴的な形式間の、この驚くべき収束の物理的な理由を論じる。

Feynman グラフと格子 QCD は非常に異なる存在に見える。しかし本当にそうか？ Feynman グラフは場

^{*138} $W = \lim_{\mathcal{C} \rightarrow \infty} W_{\mathcal{C}}$ はあらゆる $\mathcal{C} > \mathcal{C}_\epsilon$ に対して $|W - W_{\mathcal{C}}| < \epsilon$ となる $\mathcal{C}_\epsilon$ が存在することを意味する。

^{*139} あらゆる $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}'$ に対して、 $\mathcal{C}'' > \mathcal{C}$ かつ $\mathcal{C}'' > \mathcal{C}'$ となる $\mathcal{C}''$ が存在する。

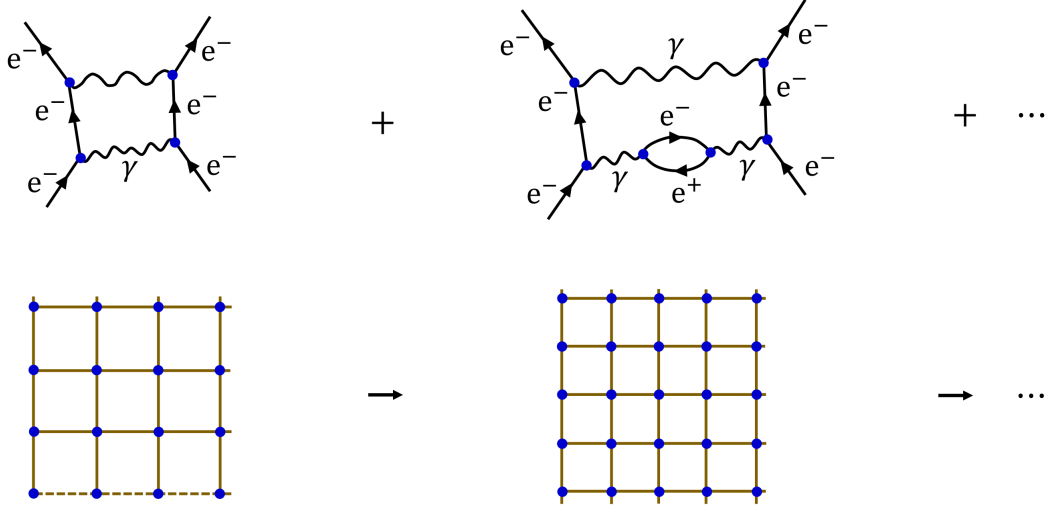


図 90 QED の Feynman グラフと格子 QCD の格子. 2 つの描像は LQG において収斂する.

の量子の経歴である. 格子 QCD の格子は時空の塊の集まりである. ところが時空は場である: それは重力場である. またその塊は実際に重力場の量子である. したがって重力場が動的となり量子化されるとき, 格子 QCD の格子はそれ自体が重力的な量子の経歴, すなわち場の量子論の Feynman グラフであると期待される. (このことは加えて, 格子 QCD においては見せかけであるところの, 理論の離散化における見かけの自由度を大いに固定する.) いずれの場合も, より優れた近似はグラフまたは格子の洗練を増すことで得られる.

重力の一般共変性のために, 場の量子論の QED と格子 QCD の描像が見事に融合されるループ量子重力の共変な定式化では, これらの漠然とした直観的なアイデアは具体的に実現される (図 90 を見よ).

7.4 完全な理論

まとめると, あらゆるグラフ Γ に対して Hilbert 空間

$$\mathcal{H} = L_2[\mathrm{SU}(2)^L / \mathrm{SU}(2)^N]_{\Gamma} \quad (7.55)$$

があり, それは結節点でラベルされる空間領域の境界となる面上の, 密度化した逆トライアドの流束と解釈される演算子

$$\vec{E}_l = l_0^2 \vec{L}_l = 8\pi\gamma\hbar G \vec{L}_l \quad (7.56)$$

を伴う. これらの状態間の遷移振幅は, Γ を境界とする 2-複体 $\mathcal{C}$ の定める切り詰めの各段階 (order) で計算できる. それは (2-複体に依存する規格化因子を改めて挿入すると),

$$W_{\mathcal{C}}(h_l) = N_{\mathcal{C}} \int_{\mathrm{SU}(2)} dh_{\mathrm{vf}} \prod_{\mathbf{f}} \delta(h_{\mathbf{f}}) \prod_{\mathbf{v}} A_{\mathbf{v}}(h_{\mathrm{vf}}) \quad (7.57)$$

で与えられ [式 (7.46)], ここに頂点振幅は [式 (7.49):]

$$A_{\mathbf{v}}(h_{\mathrm{vf}}) = \sum_{j_{\mathbf{f}}} \int_{\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})} dg'_{\mathbf{ve}} \prod_{\mathbf{f}} (2j_{\mathbf{f}} + 1) \mathrm{Tr}_{j_{\mathbf{f}}} [Y_{\gamma}^{\dagger} g_{\mathbf{e}'\mathbf{v}} g_{\mathbf{ve}} Y_{\gamma} h_{\mathrm{vf}}]. \quad (7.58)$$

ここに再掲する、 Y_γ 写像の定義と合わせて：

$$\boxed{Y_\gamma : |j, m\rangle \mapsto |\gamma j, j; j, m\rangle.} \quad (7.59)$$

$\mathcal{H}$ 上で定義された観測量 $\mathcal{O}$ が与えられたとき、その期待値を

$$\boxed{\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\langle W | \mathcal{O} | \Psi \rangle}{\langle W | \Psi \rangle}} \quad (7.60)$$

で定義する．これが宇宙定数の消える極限における、理論の完全な定義である．

グラフ Γ の各選択に対して、理論の与えられた切り詰めを得る．グラフを洗練させると、より良い近似を得る．与えられたグラフにおいて、2-複体 $\mathcal{C}$ の各選択に対して遷移振幅の与えられた切り詰めを得る．2-複体を洗練させると、より良い近似を得る．3次元理論との違いはしたがって重大である：3次元では、理論のトポロジカルな不変性、すなわち局所的な自由度の不在は、三角形分割の洗練が量子論に何ら影響しないことを意味していた；他方で4次元では、より洗練された三角形分割は、無限大の個数の局所的な自由度をより多く捉えられる．この洗練化は理論の“連続極限”と呼ばれるものを定める．第2章で説明した理由で、この極限に近づく際に調整しなければならないパラメータはアブリアリに存在しない．

これが本書の残りで詳しく解析する理論である．この理論の構成は長い過程の結果であって、そこには多くの数の人々が貢献してきた．非常に濃縮した歴史的が主要な文献とともに、最終章の補完 [13.1 節] にある．

7.4.1 面振幅、くさび振幅、および核 P

上記の振幅は頂点振幅の積の代わりに、等価的に面振幅 (face amplitudes) の積として書ける．そのためには、表現におけるデルタ関数を展開し [式 (5.40), (5.64)], dh_{vf} 積分を実行すれば充分である．すると同じ面に付随する異なる振幅における全ての j_f は等しくなるよう制約され、

$$W_{\mathcal{C}}(h_f) = N_{\mathcal{C}} \sum_{j_f} \int_{\text{SL}(2, \mathbb{C})} dg'_{ve} \prod_f \text{Tr}_{j_f} [Y_\gamma^\dagger g_{e'v} g_{ve} Y_\gamma Y_\gamma^\dagger g_{ev'} g_{v'e''} Y_\gamma \cdots] \quad (7.61)$$

が得られ、ここにトレースは適切な向きを持つ面の周りを走る．このトレースが面振幅である．

代わりに、“くさび振幅 (wedge amplitude)” を

$$W(g, h) = \sum_j (2j+1) \text{Tr}_j [Y_\gamma^\dagger g Y_\gamma h] \quad (7.62)$$

で定義する．これは図 91 のように、くさびに関係する．これを Wigner 行列要素から成る基底に Fourier 変換すれば、

$$W(g, j, m, m') = \langle j, m' | Y^\dagger g Y | j, m \rangle \quad (7.63)$$

であり、 $g = e^{i\eta K_z}$ を採れば、これは Lorentz 角 (lorentzian angle) η で推進 (boost) を行っている加速する観測者が観測したときの、状態 $|j, m\rangle$ と状態 $|j, m'\rangle$ の間の遷移に対する振幅を与える：

$$W_{mm'}(\eta) = \langle j, m' | Y^\dagger e^{iK\eta} Y | j, m \rangle. \quad (7.64)$$

この行列要素は、 $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 表現に関する他のいくつかの量と併せて、Ruhl (1970) に明示的に見出され、超幾何関数で表すと

$$W_{m,m'}(\eta) = \delta_{mm'} e^{-\eta m} e^{-\eta(1+i\gamma)(j+1)} {}_2F_1((1+i\gamma)(j+1), m+j+1, 2j+2; 1-e^{-2\eta}) \quad (7.65)$$

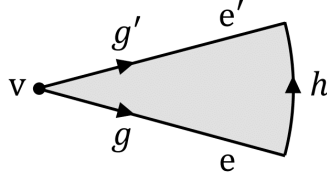


図 91 くさび

となる.

完全な振幅はこのとき, くさび振幅を用いて簡単なくさび形式

$$W_C(h_l) = N_C \int dh_{vf} dg'_{ve} \prod_f \delta(h_f) \prod_w W(g_{e'v} g_{ve} h_{vf}) \quad (7.66)$$

に書ける [本稿次項で補足].

最後に, しばしば頂点振幅 (7.58) を

$$A_v(h_l) = \int_{\text{SL}(2, \mathbb{C})} dg'_n \prod_l P[g_{s(l)} g_{t(l)}^{-1}, h_l] \quad (7.67)$$

の形に書くのが便利であり [本稿次項で補足], ここに l, n 表記は頂点グラフの結節点とリンクを表し, 核 (kernel) [積分核] は

$$P[g, h] = \sum_j d_j \text{Tr}_j [Y_\gamma^\dagger g Y_\gamma h]. \quad (7.68)$$

明示的には:

$$P[h, g] = \sum_j (2j+1) D_{jm, jn}^{(\gamma j, j)}(g) D_{nm}^{(j)}(h). \quad (7.69)$$

[式 (7.50) を見よ. $D_{mn}^{(j)}(h) \rightarrow D_{nm}^{(j)}(h)$ と修正した.] この核は計算に繰り返し現れる重要な量である. それは $\text{SU}(2)$ と $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の間の関連を表している.

7.4.1 項について

■くさび形式 (7.66) について 遷移振幅 (7.57): $W_C(h_l) = N_C \int_{\text{SU}(2)} dh_{vf} [\prod_f \delta(h_f)] \prod_v A_v(h_{vf})$ における頂点振幅 (7.58) の積

$$\prod_v A_v(h_{vf}) = \prod_v \sum_{j_f} \int_{\text{SL}(2, \mathbb{C})} dg'_{ve} \prod_f (2j_f + 1) \text{Tr}_{j_f} [Y_\gamma^\dagger g_{e'v} g_{ve} Y_\gamma h_{vf}]$$

を書き換えれば充分である.

まず面にわたる積 $\prod_f$ と, 面に割り当てたスピンの組 $\{j_f\}$ にわたる和 $\sum_{j_f}$ の順序を入れ替える. 実際, スピン j_f 表現で評価した面 f に関する量 $a_f^{(j_f)}$ に対して

$$\prod_{f=f', f'', \dots} \sum_{j_f=j, k, \dots} a_f^{(j_f)} = \left(a_{f'}^{(j)} + a_{f'}^{(k)} + \dots \right) \left(a_{f''}^{(j)} + a_{f''}^{(k)} + \dots \right) \dots = \sum_{\{j_f\}} a_{f'}^{(j_{f'})} a_{f''}^{(j_{f''})} \dots = \sum_{\{j_f\}} \prod_{f=f', f'', \dots} a_f^{(j_f)}$$

が成り立つ.

次にある頂点 v を指定し, さらに v に隣接する面 f を指定することは, 頂点 v に隣接する 1 つのくさび w を指定することと等価であることに注意して, 2 重積を $\prod_v \prod_f \rightarrow \prod_w$ と置き換えると, 式 (7.66) を得る.

■核で表した頂点振幅 (7.67) について 頂点振幅 (7.58) において、再び和の記号 $\sum_{j_f}$ を積 $\prod_f$ の直後に移動する。次に頂点 v に隣接する面 f を指定することは、面 f が v の境界グラフに誘導するリンク l を指定することと等価であることを踏まえ、 $\prod_f \rightarrow \prod_l$ と書き換える。リンク l を指定することはまた、図 91 に示したような、 v に接続するくさびをしていることと等価であることに注意しよう。

- ここでは図 91 に書き添えたリンク l に関する変数 h は h_{vf} であり、それを改めて h_l と書ける。
- また v からリンクの始点 $s(l)$ に向かう辺 e の変数 g は g_{ve} であり、それを改めて $g_{s(l)}$ と書ける。
- 同様にリンクの終点 $t(l)$ から v に向かう辺 e'^{-1} の変数 g'^{-1} は $g_{e'v}$ であり、それを改めて $g_{t(l)}^{-1}$ と書ける。

さらに v に接続する辺 e はその終点、すなわち境界グラフに誘導される結節点 n (リンクの始・終点 $s(l), t(l)$ に一致) で指定できるので、 $SL(2, \mathbb{C})$ 積分の変数 g_{ve} を代わりに g_n と書ける。以上のように表記を変更すると、頂点振幅 (7.67) を得る。ただし正確にはこのとき、積分核の 1 つ目の引数は群要素の順序を入れ替えた $g_{t(l)}^{-1} g_{s(l)}$ になると考えられる (5.4.2 項の表記とも整合)。

7.4.2 宇宙定数と赤外の有限性

6.3 節では 3 次元において、Turaev–Viro モデルで与えられる、有限で、その古典的極限が正の宇宙定数を持つ一般相対性理論を与える、遷移振幅のバージョンがあることを見た。同じことが 4 次元においても起きる。理論を定義するのに必要な $SL(2, \mathbb{C})$ 群の量子変形 (quantum deformation) が、Buffenoir and Roche (Buffenoir and Roche 1999) および Noui and Roche (Noui and Roche 2003) によって導かれ、また理論が Fairbairn and Meusburger (Fairbairn and Meusburger 2012) および Han (Han 2011b) によって構成され、この者は理論の古典的極限も研究した (Han 2011b; Ding and Han 2011)。本書では宇宙定数を伴う理論の定義には立ち入らない、何故ならそれは量子群 (quantum group) に関するさらなる詳細を必要とするからである。我々は上記の原論文を紹介する。

我々は 2 つの重要な結果を述べるに留める：

1. q -変形された (q -deformed) 理論の遷移振幅は有限である。
2. 頂点振幅の古典的極限は宇宙定数を持つ Regge 作用に関係する。

宇宙定数を持つ理論は 2 つの次元を担うパラメータに依存する：Planck 長さ l_0 と宇宙定数 Λ である。これらの一方を長さの単位に採ることができるので、究極的には量子重力は単一の無次元の定数に依存し、それは (我々人間の限られた想像力からすると) 非常に小さな数である：

$$\Lambda \hbar G \sim 10^{-120}. \quad [\text{式 (3.3), (6.27)}] \quad (7.70)$$

宇宙定数は宇宙論的なスケールのオーダーなので、この数は我々の周りの観測可能な最小と最大のスケール間の比のオーダーである。

7.4.3 変種

理論の定義と我々が未解決のままとしてきた側面には、数々の可能な代案があり、それらは将来重要な役割を演じるかもしれないので、ここで言及する。

- 我々は規格化因子 N_C がどのように C に依存するかを特定しなかった。以下で連続極限を扱うときに、

これについて論じる．3次元において有限の Turaev–Viro 理論を定義するには，非自明な $\mathcal{C}$ が必要であったことを思い出そう．

- 我々は $p = \gamma j$ で理論を定義した．しかし最初に Alexandrov (Alexandrov 2010) によって提案された，代案

$$p = \gamma(j + 1) \quad (7.71)$$

は非常に興味深く，またより好ましいかもしれない；この選択の下では，線形単純性拘束は単に大きな j に対してではなく正確に，弱く成り立つ (Ding and Rovelli 2010b)．本章の補完の最後の項を見よ [7.5.4 項の問題*140]．

- 我々は三角形分割に双対な 2-複体とグラフの上で理論を定義した．しかしながら，より一般的な複体を用いることができ，それらは重要かもしれない．まず，4-単体を貼り合わせて得られるものの，2つの4-単体が高々1つの四面体で繋がらねばならないという要求を落とした，一般的な三角形分割を採ることができる．これは以下で常に用いる一般化である．

より一般には，必ずしも三角形分割に双対でない——とりわけ，頂点と辺が任意の価数を持つ——，任意の 2-複体を採ることができる．上記の公式はこの場合に直ちに拡張されることが容易に分かる．この理論の一般化は Polish school (Kaminski *et al.* 2010a) によって指摘され発展した．理論はこのとき一般的な 2-複体に依存する．特に，グラフの結節点は必ずしも 4 価でない． $\sum_{l=1}^n \vec{E}_l = 0$ を満たす n 個のベクトルは，ベクトルが面に垂直で面の面積に比例する長さを持つところの， n 面を持つ多面体を一意的に定義することを述べる，Minkowski によって与えられた定理のおかげで，そのような結節点の幾何学的解釈は依然として成り立つ．対応する幾何学，とりわけ体積が，特に Bianchi *et al.* (2011b) および Coná and Speziale (2013) によって探求されている．理論のこのバージョンの利点の 1 つは，結節点が任意の価数を持つループ量子重力の正準な定式化と，それがより近づくことである．

- 理論の Euclid 的なバージョンにおいて，式 (7.57) ではデルタ関数で与えられる面振幅を修正する可能性もまた，Polish school は探求している；その対応する Lorentz 的なバージョンが存在するかは，まだ明らかではない (Bahr *et al.* 2011)．
- 与えられた 2-複体に関する振幅は，群上で定義された場を持つ，関係する場の量子論の摂動展開における，Feynman グラフとして得られる (Krajewski *et al.* 2010)．群の場の理論 (group field theories; GFT) への一般的な入門に関しては，Krajewski (2011) とそこに含まれる参考文献を見よ．完全な GFT 振幅は，ここでのような 2-複体の洗練化によってではなく，2-複体にわたる和で与えられる．見かけ上の違いにも関わらず，2つの定義は一定の条件 (特に規格化定数 $N_{\mathcal{C}}$ に関して) の下で合致することが，Rovelli and Smerlak (2012) によって示されている．今のところ，これらの条件が物理的な量子重力理論において満たされているかは，不明である．
- 群の場の理論から出発して， Y_γ 写像の代わりに定義が Baratin *et al.* (2010) において定義された．同論文では，離散化された理論の単純な経路積分形式にかなり近い定式化の導出が展開されている．
- 有望な物理的理論には見えないものの，ここで Barrett–Crane 理論 (Barrett and Crane 2000) にも言及する，何故ならそれは現在の理論の発展において重要な役割を果たしてきたからである．現在の理論は実際，Barrett–Crane 理論にあったいくつかの欠点に取り組むための，Barrett–Crane 理論の修正と

*140 上式 (7.71) と $k = j$ に対して式 (7.17) は正確に満たされ，またこれらを式 (7.16) に代入すると，再び $j \gg 1$ の 2 次未満を無視する近似で式 (7.18) が満たされる．我々の選択 (7.20–21) もまた j が大きい場合の近似式 (7.18–19) の厳密解にすぎず，したがって p, k の選択にはなお任意性が残ることに注意せよ．

して発見された．Barrett–Crane モデルは本章で定義した理論の適切な $\gamma \rightarrow \infty$ の極限と見なせる．このモデルへの簡単な入門として，Perez (2012) を紹介する．

- 次章ではコヒーレント状態の技法を論じる．これらの技法はコヒーレント状態の基底において，理論を直接定義するのも用いることができる．ここで提示した理論が最初に発見された 1 つの (独立な) 道のりは，Euclid 的な文脈において，これらの技法を用いることであった (Freidel and Krasnov 2008)．Euclid 的な文脈では，このアプローチは $\gamma > 1$ ならば僅かに異なる理論を与える；これらの技法の直接的な利用がまだ完全には明らかでない Lorentz 的な文脈では，そうではない．再び，詳しい議論に関しては Perez (2012) を見よ．

上記の式で定義される理論はもちろん，石碑に刻まれた「真理として確立された」わけではない．もしかすると自然を記述するには——すなわち，実験と完全に整合的であり合致するためには——，それは調整または修正する必要がある．今のところ，しかしながら，それは有限であって，我々が世界について知っていることと整合する古典的極限を持つ，非摂動的な量子重力の，可能な限り整合的で完全な理論をもたらすように見える^{*141}．

7.5 補完

7.5.1 理論の要約

運動学

Hilbert 空間： $\mathcal{H}_\Gamma = L_2 [\text{SU}(2)^L / \text{SU}(2)^N]$ ，ここに商 (quotient) の作用はグラフ Γ の組合せ的な構造で与えられる．

演算子： トライアド演算子 $\vec{E}_l = 8\pi G\hbar\gamma\vec{L}_l$ ，ここに $\vec{L}_l$ はリンク l 上の群要素に作用する，左不変ベクトル場 (代数における微分) である．

各結節点に演算子 $G_{ll'} = \vec{E}_l \cdot \vec{E}_{l'}$ がある．ノルム $A_l = \sqrt{G_{ll}} = |\vec{E}_l|$ はリンク l に貫かれる四面体の面の面積である．

結節点に関する体積 $V_n^2 = \frac{2}{9} \vec{E}_1 \cdot (\vec{E}_2 \times \vec{E}_3)$ ；それは結節点におけるゲージ不変性 [その条件 (7.102): $\sum_{l=1}^4 \vec{E}_l = 0$ ；7.5.3 項末尾の問題を見よ] のため，用いられる 3 つ組に依存しない．

A_l と V_n は交換する観測量の完全な組を成す．

状態： スピン・ネットワーク基底 $|\Gamma, j_l, v_n\rangle$ ．量子幾何学は小さなスケールで離散的で不鮮明であり，大きなスケールで Riemann 幾何学を与える．

力学 (ダイナミクス)

遷移振幅： 2-複体 $\mathcal{C}$ に依存し，

$$W_{\mathcal{C}}(h_l) = N_{\mathcal{C}} \int_{\text{SU}(2)} dh_{\text{vf}} \prod_f \delta \left(\prod_{v \in f} h_{\text{vf}} \right) \prod_v A_v(h_{\text{vf}}).$$

[$dh_f \rightarrow dh_{\text{vf}}$, $A_v(h_{\text{fv}}) \rightarrow A_v(h_{\text{vf}})$ と修正した．式 (7.57) を見よ．]

頂点振幅： 頂点グラフのリンクの変数を $h_l = h_{\text{vf}}$ ，頂点グラフの結節点を $\mathbf{n}$ と呼ぶと，

$$A_v(h_l) = \int_{\text{SL}(2, \mathbb{C})} dg_n' \prod_l \sum_j d_j D_{mn}^{(j)}(h_l) D_{jmjn}^{(\gamma j, j)}(g_n g_n'^{-1}).$$

^{*141} 超重力もなお有限の理論をもたらすかもしれないが，今のところ厳密な超対称性のない，我々の経験する 4 次元の世界において，Planck スケールの物理を記述するのに必要な非摂動的な情報を，そこから導き出す方法は分かっていない．弦理論は有限のようだが，我々が経験する世界との関連は，したがってその予言能力は，より一層脆弱である．これらの理論に取り組んでいる理論家たちは，長らく低エネルギーの超対称性を予言してきたが，それは今日まで観測されていない．

[式 (7.67–69) を見よ.] 積分は各結節点 (v の辺) に対し 1 つずつの g_n にわたり, ただしそのうち 1 つを除く. 4 重積 (4-product) [面 f が境界グラフに誘導する 10 本のリンク l (7.3 節のノート参照) にわたる積] は 10 枚の面 f にわたり, また $D^{(j)}$ と $D^{(pk)}$ は $SU(2)$ および $SL(2, \mathbb{C})$ 表現の行列要素である. それらは単純性写像 (simplicity map) で関係付けられる.

単純性写像:

$$Y_\gamma: \quad \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_{p,k} \quad \text{with} \quad p = \gamma j, \quad k = j, \\ |j, m\rangle \mapsto |\gamma j, j; j, m\rangle. \quad (7.72)$$

7.5.2 スピン・ネットワークの計算

スピン・ネットワーク理論と技法の優れた詳しい手引きは Haggard (2011) のものであり, それを読者に勧める. ここでは基本事項をいくらか与える. 3 つの $SU(2)$ 既約表現のテンソル積に関する不変部分の次元は,

$$\dim[\text{Inv}(\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3})] = \begin{cases} 1 & \text{三角不等式が満たされる場合} \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (7.73)$$

であることを思い出そう [式 (5.21) の箇所]. また三角不等式が満たされるならば, 1 つの不変な状態

$$|\iota\rangle = \sum_{m_1, m_2, m_3} \iota^{m_1 m_2 m_3} |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \otimes |j_3, m_3\rangle \quad (7.74)$$

が存在することを思い出そう [式 (5.30–31)]. その成分は Wigner の $3j$ 記号に比例する:

$$\iota^{m_1 m_2 m_3} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \quad (7.75)$$

不変な対象を得るために, Wigner 行列の方法で磁気添字を縮約でき, それを磁気添字の上げ下げに用いる:

$$g_{mm'} = (-1)^{j-m} \delta_{m, -m'}. \quad [\text{式 (5.45)}] \quad (7.76)$$

Wigner の $3j$ 記号は規格化されている, すなわち

$$\iota^{m_1 m_2 m_3} \iota_{m_1 m_2 m_3} = 1. \quad (7.77)$$

添字の縮約パターンを把握するのに, ダイアグラムの表記が非常に便利である. そのために,

$$\iota^{m_1 m_2 m_3} = \begin{array}{c} m_1 \\ | \\ j_1 \\ / \quad \backslash \\ j_2 \quad j_3 \\ | \quad | \\ m_2 \quad m_3 \end{array} \quad (7.78)$$

と書く.

すると式 (7.77) は

$$\begin{array}{c} j_1 \\ \bigcirc \\ j_2 \\ \hline j_3 \end{array} = 1 \quad (7.79)$$

となる. またこの表記では, Wigner の $6j$ 記号は

$$\begin{array}{c} j_5 \\ \diagup \quad \diagdown \\ j_1 \quad j_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ j_3 \quad j_4 \\ j_6 \end{array} = \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix}$$

となる。

これらの道具を用いて、任意の表現 j における回転群の生成子 L^i の行列要素を見出すことができる。それらは j 表現における 2 つの添字と随伴表現における 1 つの添字を持つテンソルである。したがってそれらは Wigner の $3j$ 記号に比例するはずであり、

$$\langle j, m' | L^i | j, m \rangle = \left(L^i \right)_{m'}^m = c \iota_{m'}^i{}^m, \quad (7.80)$$

あるいは

$$L^{im'}{}_m = c \iota^{im'}{}_m \quad (7.81)$$

であって、ここで基底を磁気 $m = -1, 0, +1$ 基底から、 $SU(2)$ の随伴表現に属する実の $i = 1, 2, 3 = x, y, z$ 基底に変更した。Casimir が

$$\vec{L}^2 = j(j+1)\mathbb{1} \quad (7.82)$$

であって、それ故 Casimir のトレースは $j(j+1)$ と表現の次元 $2j+1$ の積であることを思い起こすと、比例定数 c を見出せる。こうして、

$$j(j+1)(2j+1) = \text{Tr} \vec{L}^2 = \delta_{ik} L_m^i{}^{m'} L_{m'}^k{}^m = c^2 \iota^{mm'}{}_i \iota_{mm'}{}^i = c^2. \quad (7.83)$$

これで規格化定数が定まる。こうして

$$L^{im}{}_m = \sqrt{j(j+1)(2j+1)} \begin{array}{c} i \\ | \\ 1 \\ / \quad \backslash \\ j \quad j \\ m \quad m' \end{array} \quad (7.84)$$

が結論される。

結節因子

ここで四面体に関する Hilbert 空間 $\mathcal{H}_n$ を調べよう。[教科書では 1.3 節の四面体の図 8 が再掲されている。] これは 4 つの $SU(2)$ 既約 [表現] のテンソル積の不変部分

$$\mathcal{H}_n = \mathcal{K}_{j_1 \dots j_4} = \text{Inv}(\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3} \otimes \mathcal{H}_{j_4}) \quad (7.85)$$

である。この空間のテンソルは結節因子と呼ばれる。それらは

$$|\iota\rangle = \sum_{m_1, \dots, m_4} \iota^{m_1 m_2 m_3 m_4} |j_1, m_1\rangle \otimes \dots \otimes |j_4, m_4\rangle \quad (7.86)$$

の形を持ち、 $SU(2)$ の対角的な作用の下で不変である。すなわち、

$$D^{(j_1)m_1}{}_{n_1}(U) \dots D^{(j_4)m_4}{}_{n_4}(U) \iota^{n_1 n_2 n_3 n_4} = \iota^{m_1 m_2 m_3 m_4}. \quad (7.87)$$

もし $U = e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}}$ であって $|\alpha| \ll 1$ であれば、

$$D(U) |\iota\rangle = \left(1 + i\vec{\alpha} \cdot (\vec{L}_{j_1} + \vec{L}_{j_2} + \vec{L}_{j_3} + \vec{L}_{j_4}) \right) |\iota\rangle = |\iota\rangle \quad (7.88)$$

と展開でき $[L_j]$ にベクトル記号を補った], ここに各 $\vec{L}_j$ は異なる因子空間に作用する. すなわち, 結節因子は閉包拘束を満たさねばならない:

$$\sum_{l=1}^4 \vec{L}_l |\iota\rangle = 0. \quad (7.89)$$

この式は, 四面体の三角形の面積に一致するように規格化された法線の和が消えることを述べている. [式 (1.9), 式 (5.14) も見よ.]

3 価の結節因子から出発して, 不変テンソルの基底を見出すことは困難ではない. 実際,

$$\iota_k^{m_1 m_2 m_3 m_4} = \sqrt{2k+1} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m \\ j_1 & j_2 & k \end{pmatrix} g_{mm'} \begin{pmatrix} m' & m_3 & m_4 \\ k & j_3 & j_4 \end{pmatrix} \quad (7.90)$$

は明らかに不変である. [右辺の因子 $\sqrt{2k+1}$ は結節因子が式 (7.77) と同様に $\iota_k^{m_1 \dots m_4} \iota_{k, m_1 \dots m_4} = 1$ (k で和をとらない) と規格化されることを保証する (式 (7.100) のノートを参照).] 式 (7.90) は, 結節点においてスピン k を持つ “仮想リンク (virtual link)” を用いて, ダイアグラムの的に

$$\begin{array}{c} m_1 \quad m_4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ k \\ \diagup \quad \diagdown \\ m_2 \quad m_3 \end{array} = \sqrt{2k+1} K \begin{array}{c} m_1 \quad m_4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ k \\ \diagup \quad \diagdown \\ m_2 \quad m_3 \end{array} \quad (7.91)$$

と表せる [右辺の K は余計と考えられる].

演習 7.2 1 つ目から 2 つ目の結節点に向かう 3 本のリンクで繋がった 2 つの結節点を持つグラフ Γ_1 と, 全ての結節点 がそれらの間で繋がった 4 つの結節点から成るグラフ Γ_2 が与えられたとき, 対応するスピン・ネットワーク状態 $\psi_{j_1 j_2 j_3}(U_i)$ と $\psi_{j_1 j_2 j_3 j_4 j_5 j_6}(U_i)$ を書け [図 92 参照].

演習 7.3 ここで $U_i = (U, V, W)$ として, 第 1 のグラフと状態 $\psi_1 = \text{Tr}(UVWV)$ を考えよ. それは物理的状態か? $\psi_2 = \text{Tr}(UV^{-1}WV^{-1})$ に関してはどうか? もし物理的状態ならば, それをスピン・ネットワーク基底で展開せよ.

演習 7.4 第 2 のグラフと以下の状態を考えよ:

$$\psi_1 = \text{Tr}(UWV^{-1}), \quad \psi_2 = \text{Tr}(VYZW), \quad \psi_3 = \text{Tr}(X^{-1}UWY), \quad \psi_4 = \text{Tr}[(X^{-1}VY)^7]. \quad (7.92)$$

どれが物理的 Hilbert 空間に属しており, 群要素と向きを持つリンクはどのように同一視されるか.

演習 7.5 状態 $|\Gamma_1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\rangle$ を考えよ. ループをグラフの閉じたサイクルに沿う一連の U たちの積のトレースとして, この状態を “ループ” の積の和として書け. あらゆるスピン・ネットワーク状態はこの方法で書ける. これが理論に対する “ループ量子重力” という命名の由来である. [ヒント: Rovelli (2004) の p.237 の議論を読むと良いかもしれない.]

観測量

ここで $\mathcal{H}_n$ における観測量を導入する. 観測量 O は回転の生成子に対する拘束量 (7.89), $\mathcal{C} = \sum_{l=1}^4 \vec{L}_l |\iota\rangle = 0$ [$|\iota\rangle$ は余計と考えられる] と交換する [Dirac の観測可能量 (文献 [1, § 8.2] のノートを参照)]. すなわち, $[O, \mathcal{C}] = 0$. それらの観測量の 2 つは $(\vec{L}_1 + \vec{L}_2)^2$ と $\vec{L}_l^2$ である.

$$[\vec{L}_l^2, \mathcal{C}] = 0, \quad (7.93)$$

$$[(\vec{L}_1 + \vec{L}_2)^2, \mathcal{C}] = 0, \quad (7.94)$$

$$[(\vec{L}_1 + \vec{L}_2)^2, \vec{L}_l^2] = 0. \quad (7.95)$$

note: 交換関係 (7.93–95) の確認 角運動量の交換関係 (1.12), (8.8) を用いれば良い. すると式 (7.93) は直ちに分かる. 次に式 (7.94) は

$$[(\vec{L}_1 + \vec{L}_2)^2, \mathcal{C}^j] = 2[L_1^i L_2^i, \mathcal{C}^j] = 2([L_1^i, L_1^j] L_2^i + L_1^i [L_2^i, L_2^j]) = 2\epsilon^{ij}_k (L_1^k L_2^i + L_1^i L_2^k) = 0$$

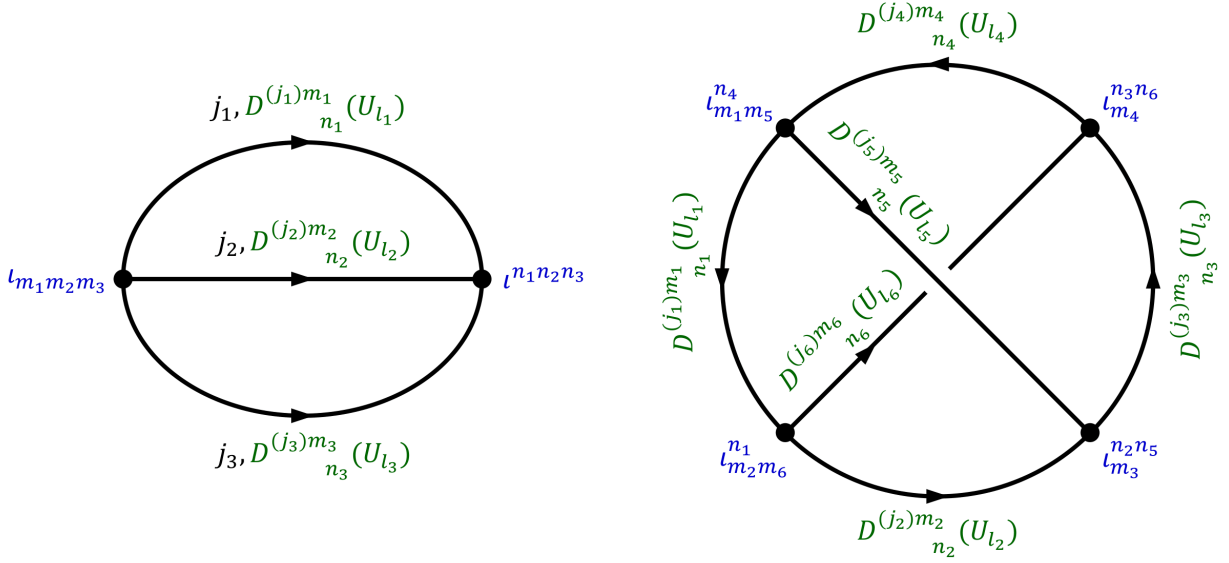


図 92 5.2.2 項のノートに従いホロノミーと結節因子を充て、それらの縮約としてスピンのネットワーク状態 $\psi_{j_l}(U_l) = \bigotimes_n l_n \cdot \bigotimes_l D^{(j_l)}(U_l)$ を構成する。第 2 のグラフ Γ_2 のリンクの向きは勝手に採った。

と確かめられる。ただし第 1 の等号では式 (7.93) を用い、最後の等号では添字 i, k に関して対称な項と反対称な項の縮約が消えることに注意した。最後に式 (7.95) について、 $l = 3, 4$ の場合は明らかである。そこで例えば $l = 2$ とすると

$$[(\vec{L}_1 + \vec{L}_2)^2, \vec{L}_1^2] = 2[L_1^i L_2^i, L_1^j L_2^j] + [\vec{L}_2^2, \vec{L}_2^2]$$

であり、直観的に期待されるように最右辺の第 2 項は $[\vec{L}_2^2, \vec{L}_2^2] = 0$ である。実際この交換子を展開すると、異なる角運動量成分 L_1^i, L_2^j の間の交換子しか現れない。また

$$[L_1^i L_2^i, L_1^j L_2^j] = L_1^i L_1^j [L_2^i, L_2^j] + [L_1^i, L_1^j] L_2^j L_2^i = \epsilon^{ij}_k (L_1^i L_1^j L_2^k + L_1^k L_2^j L_2^i) = 0$$

なので、式 (7.95) が成り立つ。

それらは回転の下で不変である。それらは同時に対角化できる。それらは交換する観測量の最大の組を成す。

$$\vec{L}_l^2 |\iota\rangle = j_l(j_l + 1) |\iota\rangle. \quad (7.96)$$

$(\vec{L}_1 + \vec{L}_2)^2$ は「式 (7.90–91) における」 k を測り、

$$(\vec{L}_1 + \vec{L}_2)^2 |\iota_k\rangle = k(k + 1) |\iota_k\rangle \quad \text{ただし} \quad |j_1 - j_2| \leq k \leq j_1 + j_2 \quad (7.97)$$

$$(\vec{L}_3 + \vec{L}_4)^2 |\iota_k\rangle = k(k + 1) |\iota_k\rangle \quad \text{ただし} \quad |j_3 - j_4| \leq k \leq j_3 + j_4. \quad (7.98)$$

〔拘束 $C = 0$ から考えても、2 つの合成角運動量の大きさ $(\vec{L}_1 + \vec{L}_2)^2$ と $(\vec{L}_3 + \vec{L}_4)^2$ の固有値は一致するはずである。〕 k の範囲は三角不等式で指定される。こうして $\dim \mathcal{H}_n = k_{\max} - k_{\min} + 1$ [式 (7.38)]。

状態 $|\iota_k\rangle$ は直交基底を成す、何故ならそれらは Hermite 演算子の固有状態だからである [例えば文献 [3, pp.22–23]]。

問題

状態 $|\iota_k\rangle$ たちは直交しており規格化されていることを、あからさまに示せ。

解

$$\begin{array}{c} |k \\ \text{---} \\ \text{---} \circ j \text{---} \\ |k \end{array} = \alpha \begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ \text{---} \\ |k \end{array} \quad (7.99)$$

における比例定数は、式の両端を閉じることで決定できる (Wigner–Eckart の定理). 左辺は 1 を与えるので [式 (7.79)], $\alpha = 1/(2k+1)$. [右辺においてもスピン k の磁気添字 $m = -k, \dots, k$ で和をとると, (スピン k のループ) $= 2k+1$ となる.] すると

$$\langle \iota_k | \iota_{k'} \rangle = \sqrt{2k+1} \sqrt{2k'+1} \begin{array}{c} j_1 \\ \text{---} \\ \text{---} \circ k \text{---} \\ \text{---} \circ k' \text{---} \\ \text{---} \\ j_4 \end{array} = \sqrt{2k+1} \sqrt{2k'+1} \frac{1}{2k+1} \delta_{kk'}. \quad (7.100)$$

[本稿次項で補足する.]

7.5.2 項について

■状態 $|\iota_k\rangle$ の正規直交性 (7.100) について 式 (7.97–98) で初出の状態 $|\iota_k\rangle$ は、仮想リンクのスピン k でラベルされる不変テンソル (7.35) に対して定義される不変状態 (7.86):

$$|\iota_k\rangle = \sum_{m_1, \dots, m_4} \iota_k^{m_1 m_2 m_3 m_4} |j_1, m_1\rangle \otimes \dots \otimes |j_4, m_4\rangle$$

である. その Hermite 共役 $\langle \iota_k |$ が不変な状態となるためには, “共変テンソル” $\iota_{k, m_1 \dots m_4}$ を展開係数に用いる必要がある (5.2.2 項のノートにおける式 (99) の箇所を参照). ここで基底 $|j, m\rangle$ の規格直交性に注意すると,

$$\begin{aligned} \langle \iota_k | \iota_{k'} \rangle &= \left(\sum_{m_1, \dots, m_4} \iota_{k, m_1 m_2 m_3 m_4} \langle j_1, m_1 | \otimes \dots \otimes \langle j_4, m_4 | \right) \cdot \left(\sum_{m'_1, \dots, m'_4} \iota_{k'}^{m'_1 m'_2 m'_3 m'_4} |j_1, m'_1\rangle \otimes \dots \otimes |j_4, m'_4\rangle \right) \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_4} \iota_{k, m_1 m_2 m_3 m_4} \iota_{k'}^{m_1 m_2 m_3 m_4} \end{aligned}$$

が見出される. ここで式 (7.97–98) の直後に説明があるように状態 $|\iota_k\rangle$ が直交系を成すことは一般論として言えるので, 問題の趣旨に反するものの我々は $k = k'$ の場合を仮定し, 状態 $|\iota_k\rangle$ が規格化されていることの確認に集中しよう. 上式より 4 価の結節因子を式 (7.77) と同様に規格化すれば, 状態 $|\iota_k\rangle$ も同様に規格化されることになる. ところが式 (7.90) では適当な因子 $\sqrt{2k+1}$ を含めて $\iota_k^{m_1 m_2 m_3 m_4}$ を定義しているので, これを最右辺に代入するとグラフ的に

$$\frac{\langle \iota_k | \iota_{k'} \rangle}{\sqrt{2k+1}\sqrt{2k'+1}} = k \quad k' = k \quad (7.100')$$

$$\langle \iota_k | \iota_k \rangle \stackrel{\text{式(7.99)}}{=} \sqrt{2k+1}\sqrt{2k+1} \frac{1}{2k+1} \frac{1}{2k+1} \frac{2k+1}{k} = 1$$

を得る。なお以上より式 (7.100) は

$$\langle \iota_k | \iota_{k'} \rangle = \sum_{m_1, \dots, m_4} \iota_{k, m_1 m_2 m_3 m_4} \iota_{k'}^{m_1 m_2 m_3 m_4} = \delta_{kk'}$$

とまとめられる。

7.5.3 体積のスペクトル

体積演算子は

$$\hat{V}_n = \frac{\sqrt{2}}{3} (8\pi G \hbar \gamma)^{\frac{3}{2}} \sqrt{|\vec{L}_1 \cdot (\vec{L}_2 \times \vec{L}_3)|} \quad (7.101)$$

となることを思い出そう [式 (7.28), (7.42)]. 4つのベクトル $\vec{L}_i$ があるものの、拘束

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \vec{L}_4 = 0 \quad (7.102)$$

により、あらゆる (順序付けられた) 3つ組は同じ結果を与える [本項末尾の問題を見よ]。体積演算子は固有状態 $|\iota_v\rangle$ を持ち、

$$\hat{V}_n |\iota_v\rangle = v |\iota_v\rangle. \quad (7.103)$$

[1.7.3 項のノートで見た結節因子に対する固有方程式 (6) である.] $|\iota_v\rangle$ を計算するために、

$$\vec{L}_1 \cdot (\vec{L}_2 \times \vec{L}_3) |\iota_q\rangle = q |\iota_q\rangle \quad (7.104)$$

を計算するところから始める。そうすれば

$$\hat{V}_n |\iota_q\rangle = \frac{\sqrt{2}}{3} (8\pi G \hbar \gamma)^{\frac{3}{2}} \sqrt{|q|} |\iota_q\rangle \quad (7.105)$$

が得られる。この演算子の行列要素

$$Q_k^{k'} = \langle \iota_k | \vec{L}_1 \cdot (\vec{L}_2 \times \vec{L}_3) | \iota_{k'} \rangle \quad (7.106)$$

が必要である；これらは固有ベクトル $\langle \iota_k | \iota_q \rangle$ の $d \times d$ 行列を成す。その行列要素を計算して対角化できる。

$$\frac{1}{2} [(\vec{L}_1 + \vec{L}_2)^2, \vec{L}_1 \cdot \vec{L}_3] = [\vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2, \vec{L}_1 \cdot \vec{L}_3] = [L_{1i}, L_{1j}] L_2^i L_3^j = i \epsilon_{ijk} L_1^i L_2^j L_3^k = i \vec{L}_1 \cdot (\vec{L}_2 \times \vec{L}_3) \quad (7.107)$$

に着目するところから始めよう。これを用いると、

$$Q_k^{k'} = \langle \iota_k | \vec{L}_1 \cdot (\vec{L}_2 \times \vec{L}_3) | \iota_{k'} \rangle \quad (7.108)$$

$$= -\frac{i}{2} \langle \iota_k | [(\vec{L}_1 + \vec{L}_2)^2, \vec{L}_1 \cdot \vec{L}_3] | \iota_{k'} \rangle \quad (7.109)$$

$$= -\frac{i}{2} (\langle \iota_k | (\vec{L}_1 + \vec{L}_2)^2 \vec{L}_1 \cdot \vec{L}_3 | \iota_{k'} \rangle - \langle \iota_k | [\vec{L}_1 \cdot \vec{L}_3 (\vec{L}_1 + \vec{L}_2)^2] | \iota_{k'} \rangle) \quad (7.110)$$

$$= -\frac{i}{2} (k(k+1) - k'(k'+1)) \langle \iota_k | \vec{L}_1 \cdot \vec{L}_3 | \iota_{k'} \rangle. \quad [\text{式 (7.97)}] \quad (7.111)$$

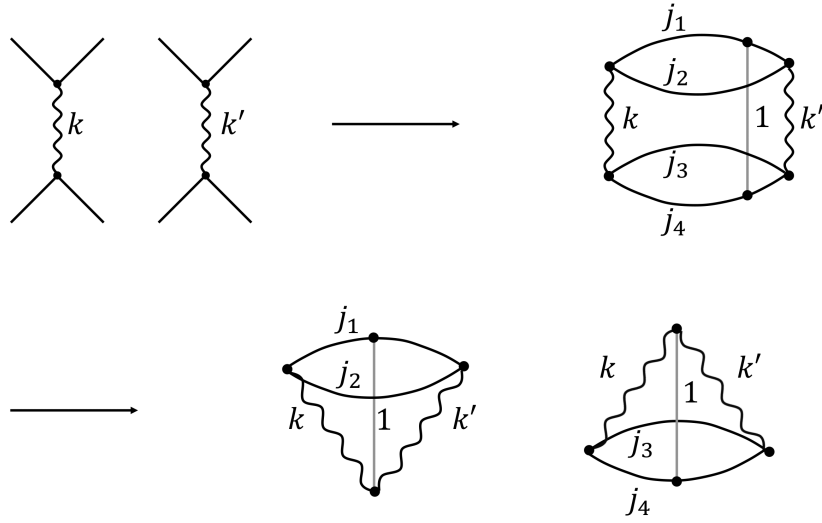


図 93 手 (grasping) はスピン 1 を担う線から成る繋がりであり，式 (7.84) を用いる．

最後の項は

$$\begin{array}{c} j_2 \\ \text{---} \\ k \quad 1 \quad k' = k+1 \\ \text{---} \\ j_4 \end{array} = \begin{array}{c} j_2 \\ \text{---} \\ k \quad 1 \quad k+1 \\ \text{---} \\ j_4 \end{array} = \begin{array}{c} j_2 \\ \text{---} \\ k \quad 1 \quad k+1 \\ \text{---} \\ j_4 \end{array} = \begin{Bmatrix} j_1 & 1 & j_1 \\ k & j_2 & k-1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_3 & 1 & j_3 \\ k & j_4 & k-1 \end{Bmatrix} \quad (7.112)$$

を用いて，ダイアグラムの的に計算できる (図 93)．すなわち，3 値の結節点による恒等子の分解を挿入してグラフを切ることである．固有値は複素共役である (上記の $k+1 \rightarrow k-1$ を見よ)．単に一方のみを計算すれば良く，そうすれば自動的に他方が得られる．これは

$$\langle \iota_k | \vec{L}_1 \cdot \vec{L}_3 | \iota_{k'} \rangle = \sqrt{2k+1} \sqrt{2k'+1} \sqrt{j_1(j_1+1)(2j_1+1)} \sqrt{j_3(j_3+1)(2j_3+1)} \quad (7.113)$$

と，図 93 における 2 つの四面体のグラフの積を与える．[以上，本稿次項で補足する*142.]

これらのグラフにおける三角不等式は， k と k' がちょうど 1 だけ異なることを課すことに注意せよ．少々の代数計算により結局，消えない行列要素は

$$\begin{aligned} a_k = Q_k^{k-1} &= -\frac{1}{2}(k(k+1) - (k-1)k) \\ &\times \sqrt{2k+1} \sqrt{2k-1} \sqrt{j_1(j_1+1)(2j_1+1)} \sqrt{j_3(j_3+1)(2j_3+1)} \\ &\times \begin{Bmatrix} j_1 & 1 & j_1 \\ k & j_2 & k-1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_3 & 1 & j_3 \\ k & j_4 & k-1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (7.114)$$

とその転置のみであり，行列は

$$Q_k^{k'} = \begin{pmatrix} 0 & +a_1 & 0 & \cdots \\ -a_1 & 0 & +a_2 & \\ 0 & -a_2 & 0 & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (7.115)$$

*142 式 (7.112) の最左辺と第 2 辺で $j_1 \leftrightarrow j_2$ と入れ替えて教科書を修正した．

の形を持つことが与えられる．この形の行列はいくつかの独特な性質を持つ：とりわけ，それらは縮退のないスペクトルを持つ．これらの行列の対角化は，しかしながら，直接的ではなく，数値的に行わねばならない．

スペクトルは縮退がないので，体積の固有基底を用い，その基底の良いラベルに $\vec{L}_1 \cdot (\vec{L}_2 \times \vec{L}_3)$ の固有値を用いることができる．行列において固有値は逆符号を持つものの，体積における絶対値をとったときに，この符号は失われることに注意せよ：各結節点において，我々是对応する体積と向き付けを指定する必要がある．

$\{6j\}$ が簡単な解析的な形をとる j の特別な値がある．それらは Landau の本において，または Mathematica にて見出せる．

$$\begin{Bmatrix} a & 1 & a \\ c & b & c-1 \end{Bmatrix} = (-1)^{-(a+b+c)} \frac{2\Delta(a+\frac{1}{2}, b+\frac{1}{2}, c)}{\sqrt{a(a+1)(2a+1)}\sqrt{2c+1}\sqrt{2c-1}\sqrt{c}} \quad (7.116)$$

であり，ここに $\Delta(a, b, c) = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$ は辺 (a, b, c) の三角形の面積に対する Heron の公式である．これを用いると，

$$a_k = -\frac{1}{2}2k \frac{2\Delta(j_1+\frac{1}{2}, j_2+\frac{1}{2}, k)}{\sqrt{2k+1}\sqrt{2k-1}\sqrt{k}} \frac{2\Delta(j_3+\frac{1}{2}, j_4+\frac{1}{2}, k)}{\sqrt{2k+1}\sqrt{2k-1}\sqrt{k}} \quad (7.117)$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{4k^2-1}} \Delta\left(j_1+\frac{1}{2}, j_2+\frac{1}{2}, k\right) \Delta\left(j_3+\frac{1}{2}, j_4+\frac{1}{2}, k\right). \quad (7.118)$$

例 7.1 全てのスピン $j_1 = j_2 = j_3 = j_4 = j$ が等しい場合をとる．すると上記の公式は

$$a_k = \frac{1}{4} \frac{k^2(k^2 - (2j-1)^2)}{\sqrt{4k^2-1}} \quad (7.119)$$

と簡略化される．特に：

- $j = \frac{1}{2}$ ならば， $a_1 = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ ，可能な仮想リンクのスピンは $k = 0, 1$ ，結節点の Hilbert 空間の次元は $d = 2$ ，また行列は

$$Q_k^{k'} = -\frac{\sqrt{3}}{4} \begin{pmatrix} 0 & +i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

これは固有値 $q_- = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ と $q_+ = +\frac{\sqrt{3}}{4}$ ，および固有ベクトル

$$|q_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|k=0\rangle \pm i|k=1\rangle) \quad (7.120)$$

を持つ．したがって完全な (向き付けされた) 体積の演算子は，固有値

$$V_{\pm} = \pm \frac{\sqrt{2}}{3} (8\pi G\hbar\gamma)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4}} \quad (7.121)$$

(符号は向きをコードする) [式 (1.65) に一致] を伴う，これらの固有ベクトルを持つ．

- $j = 1$ ならば， $a_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ ， $a_2 = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ ．可能な仮想リンクのスピンは $k = 0, 1, 2$ ，結節点の Hilbert 空間の次元は $d = 3$ ，また行列は

$$Q_k^{k'} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 2i & 0 \\ -2i & 0 & \sqrt{5}i \\ 0 & -\sqrt{5}i & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.122)$$

固有値は $q_0 = 0$ と $q_{\pm} = \pm\sqrt{3}$ ，また固有ベクトルは $|q_0\rangle = \frac{\sqrt{5}}{2}|0\rangle + |2\rangle$ と $|q_{\pm}\rangle = -\frac{2}{\sqrt{5}}|0\rangle \pm \frac{3i}{\sqrt{5}}|1\rangle + |2\rangle$ ．体積の固有値は

$$v_0 = 0, \quad v_I = \pm \frac{\sqrt{2}}{3} (8\pi G\hbar\gamma)^{\frac{3}{2}} 3^{\frac{1}{4}}. \quad (7.123)$$

問題

L_{j_i} は $SU(2)$ の j_i 表現に属しており，同様に 1_{j_4} は j_4 表現における単位行列であり， c は何らかの定数だとして，体積公式

$$V^2 = c\epsilon_{ijk} L_{j_1}^i L_{j_2}^j L_{j_3}^k 1_{j_4} \quad (7.124)$$

を思い出そう．

1. c の値を導け。[ヒント: $\mathbb{R}^3$ の 3 つの直交基底ベクトルに等しい 3 辺を持つ四面体を採れ。] [式 (7.101) より $c = \frac{2}{9}l_0^2$.]
 2. 体積は (4 本のうち) どの 3 本のリンクを選ぶかに依らないことを示せ。言い換えると, 式 (7.124) の体積演算子を V_{123}^2 と書くとき, これは V_{124}^2 や V_{234}^2 を選んだ場合と同じ結果を与えることを示せ。[ヒント: 物理的な状態上で $(L_1^{j_1} + L_2^{j_2} + L_3^{j_3} + L_4^{j_4})\psi = 0$ であることを思い出せ。]
- note: 解答** 幾何学的には明らかである。すなわち 1.3 節で見たように, 式 (1.9): $\sum_{a=1}^4 \vec{L}_a = 0$ を満たす 4 つのベクトル $\vec{L}_a$ は四面体の面積ベクトルと見なせる。このとき 3 つのベクトル $\vec{L}_1, \vec{L}_2, \vec{L}_3$ の 3 重積が四面体の体積 (1.10) を与えることは, 対称性から期待されるように, $\vec{L}_1, \vec{L}_2, \vec{L}_3$ の選び方に依らない。代数的にも閉包拘束 (1.9) の下で, 直ちに

$$\vec{L}_4 \cdot (\vec{L}_1 \times \vec{L}_2) = -(\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3) \cdot (\vec{L}_1 \times \vec{L}_2) = -\vec{L}_3 \cdot (\vec{L}_1 \times \vec{L}_2), \quad \text{etc.}$$

3. $\mathcal{K}_{11\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ と $\mathcal{K}_{1111}$ に対して体積固有値を計算せよ。

7.5.3 項について

■式 (7.112–114) について $|\iota_k\rangle$ の定義式と基底 $|j, m\rangle$ の完備関係式を代入すると, 式 (7.111) における行列要素は

$$\begin{aligned} \langle \iota_k | L_1^i L_3^i | \iota_{k'} \rangle &= \left(\sum_{\{m_l\}} \iota_{k, m_1 m_2 m_3 m_4} \bigotimes_{l=1}^4 \langle j_l, m_l | \right) L_1^i \left(\sum_{\{n_l\}} \bigotimes_{l=1}^4 |j_l, n_l\rangle \langle j_l, n_l| \right) L_3^i \left(\sum_{\{m'_l\}} \iota_{k', m'_1 m'_2 m'_3 m'_4} \bigotimes_{l=1}^4 |j_l, m'_l\rangle \right) \\ &= \sum_{\{m_l\}, \{n_l\}, \{m'_l\}} \langle j_1, m_1 | L_1^i | j_1, n_1 \rangle \langle j_1, n_1 | j_1, m'_1 \rangle \cdot \langle j_2, m_2 | j_2, n_2 \rangle \langle j_2, n_2 | j_2, m'_2 \rangle \\ &\quad \times \langle j_3, m_3 | j_3, n_3 \rangle \langle j_3, n_3 | L_3^i | j_3, m'_3 \rangle \cdot \langle j_4, m_4 | j_4, n_4 \rangle \langle j_4, n_4 | j_4, m'_4 \rangle \cdot \iota_{k, m_1 m_2 m_3 m_4} \iota_{k', m'_1 m'_2 m'_3 m'_4} \\ &= \sum_{\{m_l\}, m'_1, m'_3} \langle j_1, m_1 | L_1^i | j_1, m'_1 \rangle \langle j_3, m_3 | L_3^i | j_3, m'_3 \rangle \iota_{k, m_1 m_2 m_3 m_4} \iota_{k', m'_1 m'_2 m'_3 m'_4} \\ &= \sum_{\{m_l\}, m'_1, m'_3} \sqrt{j_1(j_1+1)(2j_1+1)} \sqrt{j_3(j_3+1)(2j_3+1)} \\ &\quad \times \iota_{m'_1}^i \iota_{m'_3}^i \iota_{k, m_1 m_2 m_3 m_4} \iota_{k', m'_1 m'_2 m'_3 m'_4} \quad (\cdot: \text{式 (7.80)}) \end{aligned}$$

と書き換えられる。最右辺における一連の結節因子の縮約は, 4 価の結節因子の定義式 (7.90–91) に由来する係数 $\sqrt{2k+1}\sqrt{2k'+1}$ を別にすれば, 確かに式 (7.94) におけるグラフ的表記と併せて式 (7.112) の最左辺のように描ける。ただしこの段階で $k' = k \pm 1$ と置く必要はない。なお式 (7.112) の第 2 の等号は式 (7.74) 直後で見たように, 中辺の 2 つの四面体がそれぞれ $6j$ 記号を表すことによる。よって $k' = k - 1$ に対する行列要素は式 (7.114) の $a_k = Q_k^{k-1}$ で与えられる (式 (7.111) の虚数単位を掛ける必要があると考えられる)。 $k' = k + 1$ に対する行列要素 $Q_k^{k'}$ に関しては一般項として k, k' の値をともに 1 だけ減らした Q_{k-1}^k を書き下すことにする。このとき式 (7.111) の因子 $(k(k+1) - k'(k'+1))$ は $k \rightarrow k-1, k' \rightarrow k$ とおかれるので, a_k のそれとちょうど逆符号になる。また $6j$ 記号の因子は $k \leftrightarrow k-1$ と置き換わるため, 式 (7.112) の最右辺を見ると符号が変わり得るものの (付録 D.1 の式 (149) を参照), 式 (7.112) のグラフを見ると不変に留まると期待される。このとき $Q_{k-1}^k = -a_k$ である (式 (7.115))。

7.5.4 Lorentz 群のユニタリ表現と Y_γ 写像

ここで Lorentz 群のユニタリ表現を復習する; より正確には, $\text{SO}(3,1)$ の二重被覆 (double cover) である $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, Lorentz 群の単位元と連結な成分の表現である。 $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の Lie 代数は

$$[J^{IJ}, J^{KL}] = -\eta^{IK} J^{JL} + \eta^{IL} J^{JK} + \eta^{JK} J^{IL} - \eta^{JL} J^{IK}. \quad (7.125)$$

$SL(2, \mathbb{C})$ の $SU(2)$ 部分群を固定する (行列の群としては、もちろん、 $SU(2)$ は単にユニタリ行列の部分群である；抽象群 (abstract group) としては、これは Lorentz 系、すなわち時間的ベクトル $t^I = (1, 0, 0, 0)$ の選択に依る。 $SU(2)$ は t^I を保持する小群 (little group) である)。 $SL(2, \mathbb{C})$ の生成子 J^{IJ} はこのとき回転と推進 (boosts)

$$L^I = \frac{1}{2} \epsilon^I_{JKL} J^{JK} t^L = (0, L^i), \quad (7.126)$$

$$K^I = J^{IJ} t_J = (0, K^i) \quad (7.127)$$

に分離し、その Lie 代数は

$$[L^i, L^j] = \epsilon^{ij}_k L^k, \quad [L^i, K^j] = \epsilon^{ij}_k K^k, \quad [K^i, K^j] = \epsilon^{ij}_k L^k. \quad (7.128)$$

[以上、文献 [10, pp.4–7] を見よ。同文献の生成子との関係は $M^{IJ} = -iJ^{IJ}$ であり、交換関係 (7.128) の第 3 式は右辺に負号を要すると考えられる。なお $\vec{K} = \gamma \vec{L}$ を課すと第 2 式は第 1 式から保証されるものの、第 3 式は自動的に満たされない。ここからも条件 $\vec{K} = \gamma \vec{L}$ は非自明な拘束を与えることが窺える。]

有限次元の表現

$SL(2, \mathbb{C})$ のユニタリ表現を、基礎物理学でよく見かけるよく知られた Lorentz 群の有限次元の表現と混同してはならない。それらは例えば：

1. Weyl の基本表現、あるいはスピノル表現。これは $\mathbb{C}^2$ 上で定義される。 $\mathbb{C}^2$ におけるスピノルを $z = z^A = (z^1, z^2)$ と書いたことを思い出そう [1.7 節]。回転の生成子はちょうど $SU(2)$ 基本表現のように、 $L^i = \tau_i = -i\frac{\sigma_i}{2}$ 行列である。推進 (boosts) の生成子は非 Hermite 演算子 $K^i = -\frac{\sigma_i}{2}$ である。[正確には虚数単位を括り出した生成子 K^i/i が非 Hermite である。以上、文献 [10, p.8] を見よ。]
2. ベクトル表現。これは Minkowski ベクトルから成る、 $SO(3,1)$ の基本 [表現] である： $I, J = 0, 1, 2, 3$ として、 $X^{IJ} = \Lambda^I_J X^J$ 。
3. 随伴表現。これは電磁場 F^{IJ} のように、2 つの反対称な Minkowski 添字を持つテンソルで与えられる [文献 [10, pp.11–13]]。特定の基準系、あるいは特定の時間方向 n_I を固定すると、 B に対して見たように [3.3.1 項]、テンソルは磁場部分と電場部分に分離する。特に代数の生成子——それはもちろん、随伴表現に属する——は推進 (boosts) と回転に分離する。
4. その他。

これらの表現は全てユニタリでない。それらの上で定義されるスカラー積がない。(Minkowski “スカラー積” $X^I X_I = (X^0)^2 - |\vec{X}|^2$ は正定値でない。) そこでユニタリ表現に移ろう。

無限次元の表現

我々にとって興味のある表現は、主系列 (principal series) におけるユニタリ既約表現である。それらは Ruhl (1970) による本で詳しく説明されている。 $SL(2, \mathbb{C})$ はランク 2 であり、それ故 2 つの独立な Casimir を持つ。それらは

$$C_1 = \frac{1}{2} J_{IJ} J^{IJ} = \vec{K}^2 - \vec{L}^2, \quad (7.129)$$

$$C_2 = \frac{1}{8} \epsilon_{IJKL} J^{IJ} J^{KL} = \vec{K} \cdot \vec{L} \quad (7.130)$$

に採ることができる。[これは電磁場の不変量 $F_{IJ} F^{IJ} \sim \vec{E}^2 - \vec{B}^2$, $\epsilon_{IJKL} F^{IJ} F^{KL} \sim F^{IJ} F_{IJ}^* \sim \vec{E} \cdot \vec{B}$ に類似している [11, § 25].] 対応して、ユニタリ表現は 2 つの量子数でラベルされる： $p \in \mathbb{R}$ と $k \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ である。表現空間は $V^{(p,k)}$ であり、無限次元である： $\dim V^{(p,k)} = \infty$ 。それは無限の個数の (異なる) $SU(2)$ 不変なブロックへの分解 (7.10) を許容する。例えば、もし $U \in SU(2)$ ならば、

$$D^{(p, \frac{1}{2})}(U) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} \cdot & \\ & \cdot \end{smallmatrix}} & & \\ & \boxed{\begin{smallmatrix} \cdot & \\ & \cdot \end{smallmatrix}} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \quad (7.131)$$

であって、ここに最初の 2×2 行列は $D(\frac{1}{2})$, 等々である. 回転の生成子はこの分解を保持する (ブロックは $SU(2)$ 変換の下で不変である) のに対し, 推進 (boost) の生成子 K^i はこれらのブロックの外に “連れ出す”. それは $\mathcal{H}_j$ を $\mathcal{H}_{j-1} \oplus \mathcal{H}_j \oplus \mathcal{H}_{j+1}$ に移す.

正準基底と呼ばれる $V^{(p,k)}$ の直交基底 $|p, k; j, m\rangle$ は, 演算子 $C_1, C_2, \vec{L}^2$ および L_z を対角化することで得られる [実際それらの固有値は p, k, j, m で特徴付けられる (式 (7.11–12))]. この基底での生成子は (Gel'fand *et al.* (1963), page 187–189) :

$$\begin{aligned} L^3 |j, m\rangle &= m |j, m\rangle, \\ L^+ |j, m\rangle &= \sqrt{(j+m+1)(j-m)} |j, m+1\rangle, \\ L^- |j, m\rangle &= \sqrt{(j+m)(j-m-1)} |j, m-1\rangle, \\ K^3 |j, m\rangle &= -\alpha_{(j)} \sqrt{j^2 - m^2} |j-1, m\rangle - \beta_{(j)} m |j, m\rangle + \alpha_{(j+1)} \sqrt{(j+1)^2 - m^2} |j+1, m\rangle, \\ K^+ |j, m\rangle &= -\alpha_{(j)} \sqrt{(j-m)(j-m-1)} |j-1, m+1\rangle - \beta_{(j)} \sqrt{(j-m)(j+m+1)} |j, m+1\rangle \\ &\quad - \alpha_{(j+1)} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)} |j+1, m+1\rangle, \\ K^- |j, m\rangle &= \alpha_{(j)} \sqrt{(j+m)(j+m-1)} |j-1, m-1\rangle - \beta_{(j)} \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |j, m-1\rangle \\ &\quad + \alpha_{(j+1)} \sqrt{(j-m+1)(j-m+2)} |j+1, m-1\rangle \end{aligned} \quad (7.132)$$

であり, ここに

$$L^\pm = L^1 \pm iL^2, \quad K^\pm = K^1 \pm iK^2$$

および

$$\alpha_{(j)} = \frac{i}{j} \sqrt{\frac{(j^2 - k^2)(j^2 + p^2)}{4j^2 - 1}}, \quad \beta_{(j)} = \frac{kp}{j(j+1)}. \quad (7.133)$$

問題

写像 Y_γ を ($p = \gamma j, k = j$ の代わりに)

$$p = \gamma(j+1), \quad k = j \quad (7.134)$$

で定義すれば, 単純性条件は大きな j の極限に限らず正確に, 弱く実現されること [式 (7.71) の箇所] を示せ.

解

$c = \sqrt{j(j+1)(2j+1)}$ として $\langle jm' | L^i | jm \rangle = c \iota_{mm'}^{im}$ であることを思い出そう [式 (7.80), (7.83)]. Y の像の上でこれらの行列要素を計算しよう: $\langle p, j; jm' | L^i | p, j; j, m \rangle$ は空間 $\text{Inv}(j \otimes j \otimes 1)$ において不変である. そのような対象はただ 1 つあり——それは $\{3j\}$ である——, $SU(2)$ 表現における係数を定めるのと同じ計算はここでも成り立つ. こうして $\langle p, j; jm' | L^i | p, j; j, m \rangle = c \iota_{mm'}^{im}$.

同じことを K^i に対して行うには注意が必要である, 何故なら K^i は $SU(2)$ 表現空間の “外に出る” からである. しかし実際に必要なのは, これを写像 Y_γ の像の上で計算することである.

$$\langle p, j; jm' | K^i | p, j; j, m \rangle = c \iota_{mm'}^{im'}. \quad (7.135)$$

左側と右側に同じスピンのあるので, 我々は依然として式 (7.131) のブロックの中におり, 実際に最低ウェイトを持つブロックの中にいる.

$$L^{im}_{m'} K^{im'} = \vec{L} \cdot \vec{K} \text{Tr} \mathbb{K}_j = (2j+1)pj = \alpha c \iota_{imm'}^{imm'} = \alpha c \quad (7.136)$$

が成り立つ, 何故なら結節因子は規格化されているからである [式 (7.77)]. 2 つの比例定数の比は

$$\frac{\alpha}{c} = \frac{(2j+1)pj}{j(j+1)(2j+1)} = \frac{p}{j+1} \quad (7.137)$$

を与える. もし $p = \gamma(j+1)$ ならば, これは $\frac{\alpha}{c} = \gamma$ を与え, 比は j に依存しない. こうして, $p = \gamma(j+1)$ で定義される写像 Y_γ を考え, 状態 $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in \text{Im} Y_\gamma$ を考えると, $\langle \phi | \vec{K} | \psi \rangle = \frac{\alpha}{c} \langle \phi | \vec{L} | \psi \rangle$, すなわち

$$\langle \phi | \vec{K} | \psi \rangle = \gamma \langle \phi | \vec{L} | \psi \rangle. \quad (7.138)$$

Y_γ の像の上で $k = j$ かつ $p = \gamma(j + 1)$ であり，したがって $\vec{K}$ と $\vec{L}$ の行列要素は関係

$$\boxed{\vec{K} = \gamma \vec{L}} \tag{7.139}$$

を満たす．

この興味深い結果のため，理論は $p = \gamma j$ ではなく $p = \gamma(j + 1)$ によって，より良く定義されるかもしれない (Alexandrov 2010; Ding and Rovelli 2010a)．問題は未解決である．

第 8 章 古典的極限

前章で定義した理論は一般相対性理論とあまり似ていない。Einstein 方程式はどこにあるのか？ Riemann 幾何学はどこにあるのか？ 曲率はどこにあるのか？ 等々。本章では、第 7 章で定義した量子論からどのように古典的極限が立ち現れるのかを示す。

非相対論的な粒子の Schrödinger 方程式から出発すれば、波束の発展を調べることで、古典的な粒子のダイナミクスを復元できる。波束は位置と運動量の両方があまり量子力学的に拡がっていない状態である。役割を演じている作用が Planck 定数より極めて大きい極限では、波束は古典的粒子のように振舞う。“波束”状態の有用なクラスは、両方の拡がりを最小化する古典的な変数 (位置と運動量) でラベルされる状態の族である、コヒーレント状態で与えられる。

コヒーレント状態は量子重力においても、古典的極限を調べる基本的な手段である。それは前章で定義した量子論を、古典的な一般相対性理論に関係付ける。本章では理論の Hilbert 空間におけるコヒーレント状態と、頂点振幅の長距離の振舞いを証明し、それを Einstein 方程式に関係付ける上での、コヒーレント状態の用途を調べる。

8.1 内部コヒーレント状態

スピン・ネットワーク基底 $|\Gamma, j_l, v_n\rangle$ の状態を考えよ。これに 3 次元の古典的な幾何学を関係付けられるか？ 一見すると、以下のように答えたい：三角形が面積 j_l を持ち、四面体が体積 v_n を持つような、平坦な四面体を貼り合わせて得られる、三角形分割された 3 次元の多様体を探れば良い。しかし少し考えると、この戦略は脆弱であることが分かる：四面体の幾何学は面積と体積を与えても、部分的に特定されるに過ぎない。四面体の形は 5 つではなく、6 つの数量で指定される [1.3.1 項]。したがって状態 $|\Gamma, j_l, v_n\rangle$ は実のところ、それが記述する内部幾何学のある量が最大限に量子力学的に拡がっているという意味で、高度に非古典的である。

同じ問題は別の観点から理解できる。四面体の 4 つの面積を固定する。結果として得られる量子状態の空間は、グラフの単一の結節点に関する Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\Gamma$ である。この空間の基底は、式 (7.35) で定義される状態たち $|i_k\rangle$ [第 7 章では $|\iota_k\rangle$ と表記] で与えられる。それらは $\vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2$ の固有状態であることを見た [式 (7.93–98) の箇所]。それらは面 1 と面 2 の間の 2 面角 θ_{12} を対角化する。他方で、例えば面 1 と面 3 の間の角 θ_{13} 、すなわち観測量 $\vec{L}_1 \cdot \vec{L}_3$ は拡がっている。

古典的な四面体が与えられたとき、全ての 2 面角が古典的な値の周りに最小に拡がっているような、 $\mathcal{H}_\Gamma$ における量子状態を見出せるか？ この問題に対する答は、以下で説明する内部コヒーレント状態で表される。

8.1.1 四面体の幾何学と $SU(2)$ コヒーレント状態

最初の章でスケッチした古典的な四面体の幾何学を再考しよう。平坦な空間における四面体は $a = 1, 2, 3$ として、頂点 P を発するその 3 辺を表す 3 つのベクトル $\vec{e}_a$ を与えることで定められる [図 94]。軸がこれらのベクトルに沿い、ベクトルが座標長さの単位を定める非直交座標系を選べば、 e_a^i はトライアドであり、

$$h_{ab} = \vec{e}_a \cdot \vec{e}_b \quad (8.1)$$

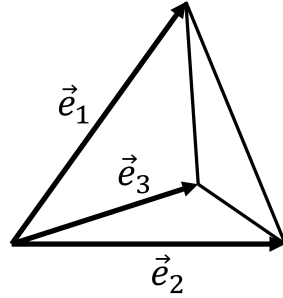


図 94 トライアドの成す四面体

はこの座標における計量である．[あらかじめ e_a^i をトライアドとすれば式 (8.1-3) が成り立ち，そこで後から $\vec{e}_a$ の成す四面体を定義すれば良い．] 3 つのベクトル

$$\vec{E}^a = \frac{1}{2} \epsilon^{abc} \vec{e}_b \times \vec{e}_c \quad (8.2)$$

は P に隣接する 3 つの三角形に垂直であり，それらの長さはこれらの面の面積である．積

$$\vec{E}^a \cdot \vec{E}^b = (\det h) h^{ab} \quad (8.3)$$

は計量 $h_{ab} = \vec{e}_a \cdot \vec{e}_b$ の逆行列 h^{ab} を定義する [本稿次項で補足]．四面体の体積は

$$V = \frac{1}{3} \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \frac{1}{3!} \sqrt{2^3 |\vec{E}_1 \cdot (\vec{E}_2 \times \vec{E}_3)|}. \quad [\text{本稿次項で補足}] \quad (8.4)$$

添字 a の範囲を 1,2,3,4 に拡張し，面積に規格化された 4 つの法線を $\vec{E}^a$ と書く．これらが閉包条件

$$\sum_{a=1}^4 \vec{E}_a = \sum_{a=1}^4 A_a \vec{n}_a = 0 \quad [\text{式 (1.9) で確認済み, } n_a \text{ は法単位ベクトル}] \quad (8.5)$$

を満たすことを示すのは容易である．(物理的直観：面に垂直で面積に比例するベクトル量は圧力による力である．四面体を気体の中に置き圧力を増したとき，四面体は動かない，すなわち力の総和はゼロになる．これが閉包の式 (8.5) の意味することである．)

2 つの三角形の間の 2 面角は

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = A_1 A_2 \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = A_1 A_2 \cos \theta_{12} \quad (8.6)$$

で与えられる．ここで量子論に移ろう．このとき量 $\vec{E}^a$ は 4 つの演算子 $\vec{L}_a$ を用いて

$$\vec{E}_a = 8\pi G \hbar \gamma \vec{L}_a \quad (8.7)$$

と量子化され [式 (7.45)], $\vec{L}_a$ は回転群の (Hermite な) 生成子である (式 (1.12) を思い出せ！) :

$$[L_a^i, L_b^j] = i \delta_{ab} \epsilon^{ij}_k L_a^k. \quad [a \text{ で和をとらない}] \quad (8.8)$$

2 つの角の交換子は

$$[\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2, \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_3] = (8\pi G \hbar \gamma)^4 [L_{1i}, L_{1j}] L_2^i L_3^j \quad (8.9)$$

$$= (8\pi G \hbar \gamma)^4 i \epsilon_{ijk} L_1^i L_2^j L_3^k \quad (8.10)$$

$$= i (8\pi G \hbar \gamma) \vec{E}_1 \cdot (\vec{E}_2 \times \vec{E}_3). \quad (8.11)$$

この交換関係から、Heisenberg の関係：

$$\Delta(\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2) \cdot \Delta(\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_3) \geq \frac{1}{2} 8\pi G \hbar \gamma |\langle \vec{E}_1 \cdot (\vec{E}_2 \times \vec{E}_3) \rangle| \quad (8.12)$$

が帰結し、ここに $\langle A \rangle = \langle \iota | A | \iota \rangle$ および $\Delta A = \sqrt{\langle \iota | A^2 | \iota \rangle - (\langle \iota | A | \iota \rangle)^2}$. ここで分散 (dispersion) が期待値に比べて小さい状態、すなわち

$$\frac{\Delta(\vec{E}_a \cdot \vec{E}_b)}{|\vec{E}_a| |\vec{E}_b|} \ll 1 \quad \forall a, b \quad (8.13)$$

となる半古典的な状態を求めたい.

SU(2) コヒーレント状態

単一の回転している粒子を考えよ. その角運動量の分散が最小の状態をどう書くか? もし j がその全角運動量の量子数ならば、状態の基底は

$$|j, m\rangle \in \mathcal{H}_j. \quad (8.14)$$

[ところで]

$$[L_x, L_y] = iL_z \quad (8.15)$$

なので、Heisenberg の関係

$$\Delta L_x \Delta L_y \geq \frac{1}{2} |\langle L_z \rangle| \quad (8.16)$$

を得る. あらゆる状態はこの不等式を満たす. その限界を達成する (saturate) [式 (8.16) の等号を実現する] ことはできるか? 式 (8.15) の限界を達成する, すなわち $\Delta L_x \Delta L_y = \frac{1}{2} |\langle L_z \rangle|$ となる状態は, $|j, j\rangle$ で与えられる. このことは以下のように示せる. $|j, j\rangle$ は L_z の固有状態であって

$$L_z |j, j\rangle = j |j, j\rangle \quad (8.17)$$

であり, $\Delta L_z = 0$ となる. すると

$$\langle L_x \rangle = \langle L_y \rangle = 0, \quad [\text{本稿次項で補足}] \quad (8.18)$$

$$\langle L_x \rangle^2 = \frac{1}{2} \langle L_x^2 + L_y^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle L^2 - L_z^2 \rangle = \frac{1}{2} (j(j+1) - j^2) = \frac{j}{2}. \quad (8.19)$$

したがって

$$\Delta L_x = \Delta L_y = \sqrt{\frac{j}{2}} \quad (8.20)$$

が結論される. したがって状態 $|j, j\rangle$ は不確定性関係の限界を達成する:

$$\Delta L_x \Delta L_y = \frac{j}{2}, \quad \frac{1}{2} |\langle L_z \rangle| = \frac{j}{2}. \quad (8.21)$$

[正準交換関係とは対照的に式 (8.15–16) の右辺は観測量 L_z (の期待値) であり, その固有状態 $|j, j\rangle$ においても $\Delta L_x, \Delta L_y$ は発散しない. なお L_x, L_y のゆらぎのため, $|\vec{L}|$ の固有値 $\sqrt{j(j+1)}$ は L_z の固有値 j を上回ると解釈できる.] 大きな j の極限では

$$\frac{\Delta L_x}{\langle \vec{L}^2 \rangle} = \frac{\sqrt{\frac{j}{2}}}{\sqrt{j(j+1)}} = \frac{1}{\sqrt{2(j+1)}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \quad (8.22)$$

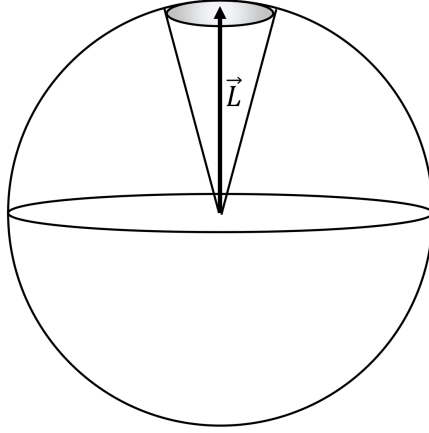


図 95 拡がりを与える錐体の角度のサイズは $\sim 1/\sqrt{j}$ のように移行する.

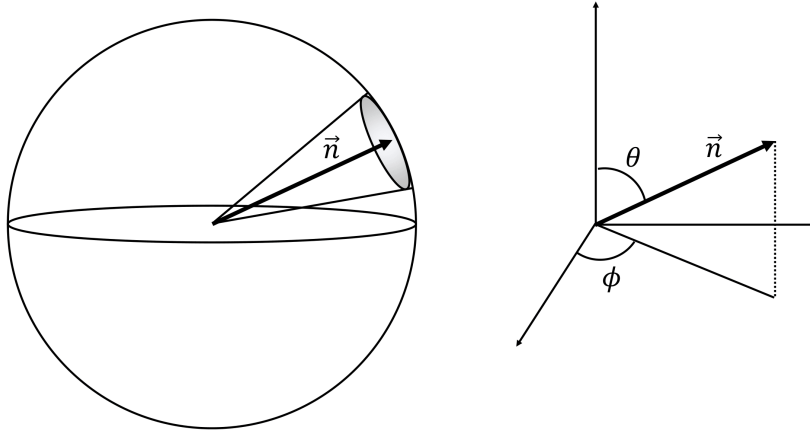


図 96 一般的な向き $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ に対して.

を得る. したがってこの状態は大きな j に対してシャープになる.

この計算に対応する幾何学的な描像は明白である: 状態 $|j, j\rangle$ は球面の北極に最大限に集中した球面調和関数を表し, また拡がり と半径の比はスピンのとともに減少する (図 95).

こうしてコヒーレント状態の優れた候補 $|j, j\rangle$ が見つかった. 族 (family) の他の状態に関してはどうか? よろしい, それらは状態 $|j, j\rangle$ を任意の向き $\vec{n}$ へと回転することで容易に得られる. 図 96 のように, 回転をラベルする Euler 角 θ, ϕ を導入しよう. 次いで $z^i = (0, 0, 1)$ とし, また $R_{\vec{n}j}^i z^j = n^i$ によって, $R = e^{-i\phi L_z} e^{-i\theta L_y}$ の形に行列 $R \in \text{SO}(3)$ を定義する [本稿次項で補足]. この下で,

$$|j, \vec{n}\rangle = D_{\vec{n}}(R) |j, j\rangle \quad (8.23)$$

を定義する. 状態 $|j, \vec{n}\rangle$ は, 連続パラメータ $\vec{n}$ でラベルされ, 角に対する不確定性関係の限界を達成する, 状態の族を成す.

そのいくつかの性質は以下である.

$$\vec{L} \cdot \vec{n} |j, \vec{n}\rangle = (D(R) L_z D^{-1}(R)) |j, \vec{n}\rangle \quad (8.24)$$

$$=(D(R)L_zD^{-1}(R))D(R)|j,j\rangle=D(R)L_z|j,j\rangle \quad (8.25)$$

$$=jD(R)|j,j\rangle=j|j,\vec{n}\rangle. \quad (8.26)$$

[この結果は $|j,\vec{n}\rangle$ がその構成 (8.23) から期待されるように、角運動量 $\vec{L}$ が大きさ j と向き $\vec{n}$ を持つ固有状態であることを意味する.] したがって

$$\langle j,\vec{n}|\vec{L}|j,\vec{n}\rangle=j\vec{n} \quad (8.27)$$

および

$$\Delta(\vec{L}\cdot\vec{m})=\sqrt{1-(\vec{n}\cdot\vec{m})^2}\sqrt{\frac{j}{2}}. \quad (8.28)$$

[上式 (8.27–28) を本稿次項で補足する.] L_z の固有状態によるこれらの状態の展開は

$$|j,\vec{n}\rangle=\sum_m\phi_m(\vec{n})|j,m\rangle \quad \text{ここに } \phi_m(\vec{n})=\langle j,m|D(R)|j,j\rangle=D^{(j)}(R)^j_m. \quad (8.29)$$

[$|j,\vec{n}\rangle=(\sum_m|j,m\rangle\langle j,m|)(D(R)|j,j\rangle)$ による. 展開係数は Wigner 行列要素となっている.] コヒーレント状態の最も重要な性質は、それらが恒等子の分解を供することである. すなわち、

$$\mathbb{1}_j=\frac{2j+1}{4\pi}\int_{S^2}d^2\vec{n}|j,\vec{n}\rangle\langle j,\vec{n}|. \quad (8.30)$$

左辺は $\mathcal{H}_j$ における恒等子である. 積分は全ての規格化されたベクトルにわたり、したがって単位球面に制限された標準的な $\mathbb{R}^3$ 測度 [立体角] を持つ、2 次元球面にわたる.

演習 8.1 これを証明せよ. (ヒント: Wigner 行列で表したコヒーレント状態の定義を用い、 $U(1)$ の下での不変性に注意し、 S^2 積分を $SU(2)$ 積分に直し、Peter–Weyl 定理を用いよ.) [本稿次項で解答する.]

最後に、コヒーレント状態のテンソル積をとると、コヒーレント状態が得られることに注意せよ. このことはテンソル積の下での平均値と分散の性質から帰結する.

8.1.1 項について

■式 (8.3): $\vec{E}^a\cdot\vec{E}^b=(\det h)h^{ab}$ について ベクトル (8.2) は式 (3.79) で定義した $E^a_i=(\det e)e^a_i=\sqrt{\det h}e^a_i$ である. ここに e^a_i は計量 h^{ab} でトライアドの空間添字を上げた量であり、その定義により $e^a_ie^b_j\delta^{ij}=h^{ab}$ を満たす逆トライアドとなる. 以上より式 (8.3) が成り立つ.

■四面体の体積 (8.4) について 第 2 辺について、式 (1.10) の箇所で見たように、正しくは

$$V=\frac{1}{6}\vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)=\frac{1}{3!}\det e$$

である. ここで Jacobi 行列式 $\det e$ を用いた四面体 τ にわたる体積積分

$$V=\int_{\tau}(\det e)d^3x\simeq(\det e)\int_{\tau}d^3x$$

との関係を調べておく. Jacobi 行列 $e^i_a=\partial X^i/\partial x^a$ による引き戻し $dX^i=e^i_adx^a$ を踏まえると、式 (8.1) 直前にあるように座標 x^a の単位長さに対応する変位はベクトル $\vec{e}_a$ で与えられる. すると $\vec{e}_a$ たちの張る四面体 τ は座標空間において、4 点 $(x^1,x^2,x^3)=(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ を頂点とする四面体を成す. よってその座標体積は $\int_{\tau}d^3x=1/6$ であり、改めて $V=(\det e)/6$ が得られる. 三角形分割では任意の領域の体積は単に、四面体の体積の和に過ぎない.

また式 (8.2) の密度化したトライアド E_i^a に対しては

$$E_i^a = (\det e) e_i^a, \quad \therefore \det E = (\det e)^3 (\det e)^{-1} = (\det e)^2, \quad \therefore V = \frac{1}{6} \sqrt{\det E}$$

なので, 一見すると式 (8.4) 最右辺の根号内の 2^3 は余計である. しかし式 (8.4) 最右辺 (さらに式 (8.5) 以降) では E_i^a を面積分した面積要素ベクトル (3.92):

$$E_S^i = \frac{1}{2} \epsilon^i_{jk} \int_S e^j \wedge e^k = \int_S E^{ai} n_a d^2\sigma, \quad n_a \equiv \epsilon_{abc} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^c}{\partial \sigma^2}$$

における四面体の面 S を $a = 1, 2, 3$ でラベルして, 改めて $\vec{E}_S = \{E_S^i\} \rightarrow \vec{E}_a$ と書いている (リンク l でラベルすると誤解の恐れがない). 実際, 例えば $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ の成す三角形に対しては, 座標 (x^1, x^2) そのものを積分変数 (σ^1, σ^2) に選んで $n_a = \delta_{a3} = (0, 0, 1)$ とできるので,

$$E_S^i \simeq E^{3i} \int_S d^2x = \frac{1}{2} E^{3i}, \text{ etc.} \quad \therefore E_S^i = \frac{1}{2} E_i^a$$

を得る (三角形の座標面積は $1/2$). これは 1.3 節で見た $L_a^i = -\frac{1}{2} \tilde{M}_i^a$ に他ならない. そこで

$$\det(E) \equiv \det(E_i^a) = 2^3 \det(E_S^i)$$

を $V = \frac{1}{6} \sqrt{\det E}$ と組合せると, 式 (8.4) 最右辺 $V = \frac{1}{6} \sqrt{2^3 \det(E_S^i)}$ を得る. これは式 (1.10): $V^2 = \frac{2}{9} |\det L|$ に他ならない.

■式 (8.18): $\langle L_x \rangle = \langle L_y \rangle = 0$ について 直観的に納得できるものの, 厳密には

$$i \langle L_x \rangle = \langle j, j | [L_y, L_z] | j, j \rangle = j (\langle j, j | L_y | j, j \rangle - \langle j, j | L_y | j, j \rangle) = 0$$

のように示せる. あるいは, はじめに演算子 $L_{\pm} \equiv L_x \pm iL_y$ を用いて $L_x = \frac{L_+ + L_-}{2}$ と書き, その状態 $|j, j\rangle$ に関する期待値をとっても良い.

■式 (8.23) の段落の $SO(3)$ 行列 R について $R_{\vec{n}}$ は方向単位ベクトル $\vec{z}$ を $\vec{n}$ へと向ける回転行列である. $\vec{z}$ を y 軸の周りに角度 θ だけ回転し, 次いで z 軸の周りに角度 ϕ だけ回転すると $\vec{n}$ が得られるので, $SO(3)$ の生成子 $(L_i)^j_k = \epsilon_i^j_k$ を用いて [2, xxiii 頁] [8, p.49], $R_{\vec{n}} = e^{-i\phi L_z} e^{-i\theta L_y}$ と表される. 式 (8.23) の $D_{\vec{n}}(R)$ はスピン j 空間の状態に作用する, この回転の演算子である.

■期待値 (8.27) について 角運動量が $\vec{n}$ 向きの固有状態 $|j, \vec{n}\rangle$ では, $\vec{n}$ に直交する角運動量成分 $\vec{L}_{\perp}$ の期待値はゼロになる. 実際, スピン $+z$ 向きの固有状態における式 (8.18): $\langle L_x \rangle = 0$ の導出の根拠となった, 固有方程式 (8.23) と角運動量の交換関係は, 回転に伴うユニタリー変換の下で不変である. すると回転後の成分 $\vec{L} \cdot \vec{n}$ と $L_{\perp}$ の間にも角運動量の交換関係が成り立つので, $\vec{L} \cdot \vec{n}$ の固有状態では $\langle L_{\perp} \rangle = 0$. そこで

$$\vec{L} = (\vec{L} \cdot \vec{n}) \vec{n} + \vec{L}_{\perp}$$

の期待値をとると, 式 (8.24-26) から

$$\langle j, \vec{n} | \vec{L} | j, \vec{n} \rangle = \langle j, \vec{n} | (\vec{L} \cdot \vec{n}) | j, \vec{n} \rangle \vec{n} = j \vec{n} : (8.28)$$

を得る.

■分散 (8.28) について 角運動量が $\vec{n}$ 向きの固有状態 $|j, \vec{n}\rangle$ において、今一つの方向単位ベクトル $\vec{m}$ に関する成分 $\vec{L} \cdot \vec{m}$ の分散を評価する。まず式 (8.27) と $\vec{m}$ との内積を作ると、

$$\langle \vec{L} \cdot \vec{m} \rangle = j \vec{n} \cdot \vec{m}.$$

次に回転に伴うユニタリー変換の下での不変性に注意して、 $\vec{n}$ の向きを改めて z 軸に選ぶ。すると

$$\begin{aligned} \langle (\vec{L} \cdot \vec{m})^2 \rangle &= m_x^2 \langle L_x^2 \rangle + m_y^2 \langle L_y^2 \rangle + m_z^2 \langle L_z^2 \rangle \\ &\quad + m_x m_y \langle L_x L_y + L_y L_x \rangle + m_y m_z \langle L_y L_z + L_z L_y \rangle + m_z m_x \langle L_z L_x + L_x L_z \rangle \\ &= \frac{j}{2} (m_x^2 + m_y^2) + j^2 m_z^2 \quad (\because \text{式 (8.17-18)}) \\ &= \frac{j}{2} \{1 - (\vec{m} \cdot \vec{n})^2\} + j^2 (\vec{m} \cdot \vec{n})^2. \end{aligned}$$

実際、クロス・タームに関しては

$$L_x = \frac{L_+ + L_-}{2}, \quad L_y = \frac{L_x - L_y}{2i}, \quad \therefore L_x L_y + L_y L_x = \frac{1}{2i} (L_+^2 - L_-^2)$$

と書くと、直ちに

$$\langle L_x L_y + L_y L_x \rangle = 0, \quad \langle L_y L_z + L_z L_y \rangle = 0, \quad \langle L_z L_x + L_x L_z \rangle = 0$$

となることが分かる。以上を定義式

$$\{\Delta(\vec{L} \cdot \vec{m})\}^2 = \langle (\vec{L} \cdot \vec{m})^2 \rangle - \langle \vec{L} \cdot \vec{m} \rangle^2$$

に代入すると、式 (8.28) を得る。

特に式 (8.28) で $\vec{m} = \vec{n}$ または $\vec{m} \perp \vec{n}$ なる $\vec{m}$ を採ると、式 (8.20) までに見た結果が再現される。

■演習 8.1 (教科書 p.166 ; コヒーレント状態の完全性条件 (8.30) の証明) の解答 z 軸の方向単位ベクトルを $\vec{n}$ に移す回転 $R = e^{-i\phi L_z} e^{-i\theta L_y}$ は Euler 角 ψ に依らないので、Haar 測度 (1.44) と立体角積分は

$$\int dR = \frac{1}{16\pi^2} 2\pi \cdot 2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} d^2\vec{n}$$

で関係付けられる^{*143}。これは全立体角にわたる平均操作に他ならない。すると

$$\begin{aligned} \int_{S^2} d^2\vec{n} |j, \vec{n}\rangle \langle j, \vec{n}| &= \sum_{m, m'} \left(\int_{S^2} d^2\vec{n} D^{(j)}(R)^j_m \overline{D^{(j)}(R)^j_{m'}} \right) |j, m\rangle \langle j, m'| \quad (\because \text{式 (8.29)}) \\ &= 4\pi \sum_{m, m'} \left(\int dR \overline{D^{(j)}(R)^j_{m'}} D^{(j)}(R)^j_m \right) |j, m\rangle \langle j, m'| \\ &= 4\pi \sum_{m, m'} \frac{\delta_{mm'}}{2j+1} |j, m\rangle \langle j, m'| \quad (\because \text{Peter-Weyl 定理 (5.16)}) \\ &= \frac{2j+1}{4\pi} \sum_m |j, m\rangle \langle j, m| = \frac{2j+1}{4\pi} \mathbb{1}_j \end{aligned}$$

となるので、式 (8.30) を得る。

^{*143} もとより Haar 測度 (1.44) における ϕ の積分範囲を 4π までとする必要はないと考えられる。

8.1.2 Livine–Speziale コヒーレント状態

これらの道具を身に付けると、今や“コヒーレント四面体”状態を導入するのは容易である。古典的な四面体は回転を除けば、4つの面積 A_a と4つの(規格化された)法線 $\vec{n}_a$ で定義される。[教科書には四面体の図8が再掲されている.] それらは $\sum_{a=1}^4 A_a \vec{n}_a = 0$ を満たす。そこで $\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_4$ において [8.1.1 項で導入した] コヒーレント状態

$$|j_1, \vec{n}_1\rangle \otimes |j_2, \vec{n}_2\rangle \otimes |j_3, \vec{n}_3\rangle \otimes |j_4, \vec{n}_4\rangle \quad (8.31)$$

を考え、[閉包拘束ないしゲージ不変性を実装するために] それを射影

$$P : \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_4 \rightarrow \text{Inv}(\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_4) \quad (8.32)$$

にて、その不変部分の上に写像する。結果として得られる状態

$$|j_a, \vec{n}_a\rangle \equiv P(|j_1, \vec{n}_1\rangle \otimes |j_2, \vec{n}_2\rangle \otimes |j_3, \vec{n}_3\rangle \otimes |j_4, \vec{n}_4\rangle) \quad (8.33)$$

は半古典的な四面体を記述する $\mathcal{H}_\gamma$ の要素である。射影は $\text{SO}(3)$ にわたって積分することで明示的に実装でき、

$$|j_a, \vec{n}_a\rangle = \int_{\text{SO}(3)} dR (|j_1, R\vec{n}_1\rangle \otimes |j_2, R\vec{n}_2\rangle \otimes |j_3, R\vec{n}_3\rangle \otimes |j_4, R\vec{n}_4\rangle). \quad (8.34)$$

あるいは、よりの確には、状態への $\text{SU}(2)$ の作用にわたって積分し、

$$|j_a, \vec{n}_a\rangle = \int_{\text{SU}(2)} dh (D^{j_1}(h) |j_1, \vec{n}_1\rangle \otimes D^{j_2}(h) |j_2, \vec{n}_2\rangle \otimes D^{j_3}(h) |j_3, \vec{n}_3\rangle \otimes D^{j_4}(h) |j_4, \vec{n}_4\rangle). \quad (8.35)$$

これらは Livine–Speziale コヒーレント結節因子と呼ばれ [状態と結節因子の関係は式 (7.86)], 理論の解析に不可欠な道具である。[これは単なる面積 A_a の固有状態ではなく、言わば向き $\vec{n}_a$ の固有状態である.]

この状態を任意の結節因子の基底で

$$|j_a, \vec{n}_a\rangle = \sum_k \Phi_k(\vec{n}_a) |\iota_k\rangle \quad (8.36)$$

と展開すると、大きな j に対して係数 $\Phi_k(\vec{n}_a) = \iota^{m_1 m_2 m_3 m_4} \psi_{m_1}(\vec{n}_1) \cdots \psi_{m_4}(\vec{n}_4)$ は、 $\Phi_k(\vec{n}_a) \sim e^{-\frac{1}{2} \frac{(k-k_0)^2}{\sigma^2}} e^{ik\psi}$ の形を持つことを証明できる：それらは対応する2面角の値を決める単一の値 k の周りに集中しており、また基底を異なる結節基底 (intertwined basis) へ変更したときに、依然としてある値の周りに集中した状態が得られるような位相を持つ。

これらの状態のいくつかの性質は以下である。大きな j に対して

$$\langle \iota(n_l) | \vec{E}_a \cdot \vec{E}_b | \iota(n_l) \rangle \approx j_a j_b n_a n_b \quad \text{および} \quad \frac{\Delta(\vec{E}_a \cdot \vec{E}_b)}{|\vec{E}_a| |\vec{E}_b|} \ll 1. \quad [\text{目標の式 (8.13)}] \quad (8.37)$$

最後に、各結節点にコヒーレント結節因子を関連付けると、古典的な三角形分割された幾何学上にピークを持つ波束である、 $\mathcal{H}_\Gamma$ におけるコヒーレント状態を定義できる：

$$\psi_{j_l, \vec{n}_{s_l}, \vec{n}_{t_l}}(U_l) = \bigotimes_l D^{(j_l)}(U_l) \cdot \bigotimes_n \iota_n(\vec{n}_l). \quad (8.38)$$

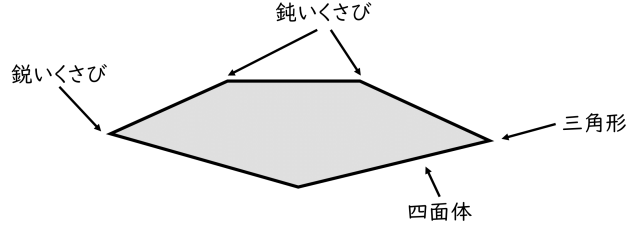


図 97 Minkowski 空間における空間的な四面体の間の鋭いおよび鈍いくさび

8.1.3 鋭いおよび鈍いくさびと、時間の向きを持つ四面体

時間的な面 Σ を境界に持つ擬 Riemann 多様体のコンパクトな領域を考えると、 Σ の外向き法線は部分的には未来の向きであり、部分的には過去の向きになるだろう。 Σ の三角形分割において、ある四面体は未来に向き付けられ、またある四面体は過去に向き付けられている。 そのような Lorentz 的な文脈では、コヒーレント結節因子は Euclid 的なそれ (8.35) から、過去に向き付けられた四面体の法線を時間反転することで得られる (Bianchi and Ding 2012)。 時間反転は我々の用いている表現においてよく定義された演算子であり、その作用はコヒーレント状態に対して

$$T |j, \vec{n}\rangle = (-1)^j |j, -\vec{n}\rangle \quad (8.39)$$

で与えられ、よって (過去を指す) コヒーレント結節因子に対して

$$T ||j_a, \vec{n}_a\rangle = (-1)^{\sum_{b>a} j_{ab}} ||j_a, -\vec{n}_a\rangle \quad (8.40)$$

で与えられる。

2 つの結節点間のグラフのリンクは、2 つの四面体を繋ぐ三角形を表す。 時空において、この三角形はくさびの端 (edge of wedge) であり、ここでくさびには 2 種類ある：出会う四面体が同じ時間の向きを持つならば鈍いくさび (*thick wedge*)、そうでなければ鋭いくさび (*thi wedge*) である (Barrett *et al.* 2010) (図 97)。

時空に埋め込まれた 3 次元の幾何学を扱うときには、量 Π_l を導入して、リンク l の Lorentz 的な幾何学を以下の方法で表すのが便利である：

$$\Pi_l = \begin{cases} 0 & \text{鋭いくさび} \\ \pi & \text{鈍いくさび} \end{cases} \quad (8.41)$$

我々はこれを最後の章 (last chapter) [12.2 節] で用いる。

これらの状態を用いて量子重力の古典的極限を論じる前に、立ち止まってスピノルに関する事実をいくつか導入しよう、と言うのも、これらのコヒーレント状態はスピノルの言語で書くと著しく簡単になるからである。

8.2 スピノルとその手品

$SL(2, \mathbb{C})$ の基本表現は $SU(2)$ の基本表現と同じベクトル空間、すなわち、複素数の組の空間 $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}} = \mathbb{C}^2$ の上で定義されている。 この空間の要素はスピノルと呼ばれ、基本的で普遍的な対象である。 スピノルの神秘的なところは、それらが 3 次元および 4 次元の物理的対象、回転、および Lorentz 変換をコードする仕方にある。 偉大な存命の数学者の 1 人、Michael Atiyah はスピノルについて書いている：

誰もスピノルを完全には理解していない。 その代数は明快だが、その幾何学的な意義は謎のままであ

る。ある意味、それは幾何学の“平方根”を表している。−1 の平方根を完全に理解するには数世紀かかっており、スピノルについても同じことが当てはまるかもしれない^{*144}。

我々は既に本文中でスピノルに繰り返し言及してきた。ここではスピノルの性質を要約・詳述し、物理的空間のコヒーレント量子状態を記述するための用途を説明する。

スピノル $z \in \mathbb{C}^2$ は 2 次元の複素ベクトル

$$z = \begin{pmatrix} z^0 \\ z^1 \end{pmatrix}, \quad z^0, z^1 \in \mathbb{C} \quad (8.42)$$

であることを思い出そう。スピノルを表すのに用いられる、多大で混乱を招く多様な表記がある。文脈に応じて、表記

$$z = \begin{pmatrix} z^0 \\ z^1 \end{pmatrix} = z^A = |z\rangle \quad (8.43)$$

を用いる。これらの対象の空間は $SL(2, \mathbb{C})$ の基本表現

$$gz = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^0 \\ z^1 \end{pmatrix}, \quad g \in SL(2, \mathbb{C}) \quad (8.44)$$

を担い、ここに $ad - bc = 1$ であり、またもちろん $SU(2)$ 部分群の表現 [式 (1.17)]

$$hz = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^0 \\ z^1 \end{pmatrix}, \quad h \in SU(2) \quad (8.45)$$

を担う。以降、常に g は $SL(2, \mathbb{C})$ の要素を、 h は $SU(2)$ の要素を表す。この空間上で定義される 2 つの双線形形式がある。1 つ目は

$$(w, z) = w^A z^B \epsilon_{AB} = w^0 z^1 - w^1 z^0. \quad [\text{式 (1.25)}] \quad (8.46)$$

それは反対称であり、 $SL(2, \mathbb{C})$ の下で不変、すなわち

$$(gw, gz) = (w, z). \quad [\text{本稿次項で確認}] \quad (8.47)$$

2 つ目は $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ のスカラー積

$$\langle w | z \rangle = \bar{w}^A z^B \delta_{AB} = \bar{w}^0 z^0 + \bar{w}^1 z^1. \quad [\text{式 (1.24)}] \quad (8.48)$$

それは $SU(2)$ の下で不変、すなわち

$$\langle hw | hz \rangle = \langle w | z \rangle \quad (8.49)$$

であるものの [本稿次項で確認]、 $SL(2, \mathbb{C})$ の下では不変でない。(これが $SL(2, \mathbb{C})$ の基本表現がユニタリーでない理由である。) 実際、

$$\langle gw | gz \rangle = \langle w | (g^\dagger g) z \rangle. \quad (8.50)$$

[式 (8.49) の導出過程で式 (8.50) に相当する結果を得ており、特に $h \in SU(2)$ に対してはユニタリー性 $h^\dagger h = \mathbb{1}$ が成り立つことから式 (8.49) が得られた.] g を回転と推進 (boost) の積として書けば、 $(g^\dagger g)$ におい

^{*144} Farmelo (2009), 第 31 章に引用されている。[本稿では 8.2.1 項を見よ.]

て回転は相殺するものの、推進は相殺しない。したがってスカラー積は与えられた基準系、すなわち、 $SL(2, \mathbb{C})$ の $SU(2)$ 部分群の選択に依存する。それは Lorentz 系の選択に関する情報を有している。同じ情報は

$$J \begin{pmatrix} z^0 \\ z^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}^1 \\ -z^0 \end{pmatrix} \quad [\text{式 (1.26)}] \quad (8.51)$$

で定義される写像 $J: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ にコードできる。実際、容易に

$$\langle w|z \rangle = (Jw, z) \quad [\text{式 (1.27)}] \quad (8.52)$$

が分かる。言葉では：(基準系に依らない) 双線形形式と (基準系に依る) 写像 J を用いて、(基準系に依る) スカラー積を定義できる。これらがスピノル空間の基本的な構造である^{*145}。

8.2 節冒頭 (8.2.1 項の前まで) について

■ $\langle w, z \rangle$ の $SL(2, \mathbb{C})$ 不変性 (8.47) の確認 $g \in SL(2, \mathbb{C})$ に対して $\det g = 1$ に注意すると、

$$(gw, gz) = (g^A_C w^C)(g^B_D z^D) \epsilon_{AB} = w^C z^D (g^A_C g^B_D \epsilon_{AB}) = w^C z^D (\epsilon_{CD} \det g) = \langle w, z \rangle : (8.47).$$

■ $\langle w|z \rangle$ の $SU(2)$ 不変性 (8.49) の確認 $h \in SU(2)$ のユニタリー性

$$\sum_A \overline{h^A_C} h^A_D = \sum_A (h^\dagger)_C^A h^A_D = \delta_{CD}$$

に注意すると、

$$\langle hw|h z \rangle = \overline{(h^A_C w^C)} (h^B_D) \delta_{AB} = \overline{w^C} z^D \left(\sum_A \overline{h^A_C} h^A_D \right) = \langle w|z \rangle : (8.49).$$

8.2.1 スピノル、ベクトル、および 2-ベクトル

スピノルと 3 元ベクトル

ここで Atiyah の言葉 [8.2 節冒頭] にあるように、スピノル空間が“幾何学の平方根”である理由を調べよう。ポイントは、各スピノル $n \in \mathbb{C}^2$ に対して 3 次元の実ベクトル

$$\vec{n} = \langle n | \vec{\sigma} | n \rangle \quad (8.57)$$

^{*145} $\bar{z}^0$ と $\bar{z}^1$ がそれぞれ z^0 と z^1 の複素共役を表さず、むしろそれぞれ z^1 と $-z^0$ の複素共役を表す、例えば Wolfgang Wieland によって用いられている表記との混同を避けるために、軽い表記 $\bar{z}^A$ の代わりに $\bar{z}^{\bar{A}}$ と書く。Wieland の表記は

$$z^A = z^A, \quad z_A = \epsilon_{AB} z^B, \quad \bar{z}^A = (Jz)^A, \quad \bar{z}_A = (Jz)_A \quad (8.53)$$

であり、これは

$$\langle z|w \rangle = \bar{z}_A w^A, \quad (z, w) = z_A w^A \quad (8.54)$$

へと導く。この分野で用いられる今一つの表記は Freidel と Speziale が用いているもので、彼らは

$$|z \rangle = z, \quad |z] = Jz \quad (8.55)$$

と書いているため、

$$[z|w] = (z, w) \quad (8.56)$$

となる [1.7.1 項の脚注*19]。この記法の 1 つの利点は、(,) が対称的でない事実をそれが明示的に表していることである。

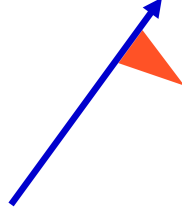


図 98 スピノルの Penrose 表現：旗 (flag) を持つベクトル [スピノル $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^2$ を成分 n^0, n^1 の実部と虚部の代わりに、ベクトル $\vec{n}$ と位相 ϕ で指定でき、いずれも自由度 (= 4) は一致している]

を関係付けられることである。Pauli 行列は Hermite であって、このベクトルは実である。明示的には、これは

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2\text{Re}(n^0 \overline{n^1}) \\ -2\text{Im}(n^0 \overline{n^1}) \\ |n^0|^2 - |n^1|^2 \end{pmatrix} \quad (8.58)$$

で与えられ、そのノルムは

$$|\vec{n}| = \langle \mathbf{n} | \mathbf{n} \rangle \quad (8.59)$$

であり、逆に $[\mathbf{n}]$ を $\vec{n}$ で表すと]

$$|\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}| = \frac{1}{2} (|\vec{n}| \mathbb{1} + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \quad (8.60)$$

であって、ここに左辺は行列 $n^B \overline{n_A}$ である [以上を本稿次項で確認する]。見て取れるように、スピノルからベクトルへの写像は 2 次である；したがってベクトルはスピノルの“2 乗”であり、スピノルはベクトルの“平方根”である。ここで実数 x には 2 つの平方根 $\pm\sqrt{x}$ がある。同様に、ベクトルには複数のスピノル“平方根”がある。このことは簡単に分かる、と言うのも $\mathbf{n}$ と $e^{i\phi}\mathbf{n}$ は明らかに同じベクトルを与えるからである。したがってスピノルはベクトルよりも多くの情報を持つ：加えて位相 ϕ がある。Roger Penrose は小さな旗 (flag) を持つ矢印としてスピノルを描いている：矢印はベクトルを表し、旗 (それは矢印の周りに回転できる) は位相を表す (図 98)。

ここで習得したい重要な点は、(自由な位相を持つ) 規格化されたスピノル $\mathbf{n}$ を、規格化されたベクトル $\vec{n}$ に関係付けられることである。

スピノルと 4 元ベクトル

スピノルには Minkowski 空間における 4 次元の解釈もある。そのためには、行列の 4 つ組 $\sigma^I = (\mathbb{1}, \vec{\sigma})$ を構成し、定義 (8.57) を

$$n^I = \langle \mathbf{n} | \sigma^I | \mathbf{n} \rangle \quad (8.61)$$

と拡張すれば充分である。著しいことに、これはスピノルに対する $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の作用の下でベクトルとして変換する (試してみよ) [本稿次項で補足]。ベクトル (8.61) はヌルである、何故なら式 (8.59) [と $n^0 = \langle \mathbf{n} | \mathbf{n} \rangle$] から

$$n^0 = |\vec{n}| \quad (8.62)$$

が帰結し、したがって $n_I n^I = (n^0)^2 - |\vec{n}|^2 = 0$ だからである。[ヌル性により 4 元ベクトル n^I の自由度は 3 であり、また式 (8.61) より依然として位相の不定性があるため、再びスピノルの自由度は 4 である。] したがってスピノルは空間におけるベクトルと、時空におけるヌル・ベクトルを定める。

スピノルと 2-ベクトル

ところがここで ($\mathbb{C}^2$ におけるスピノルに反して), 今や $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ におけるスピノルがあると仮定せよ. すなわちスピノルだけでなく, $\mathbb{C}^2$ で定義されたスカラー積, あるいは等価的に写像 J がある. するとスピノルは Minkowski 空間における空間的な **2-ベクトル** (*bivector*) を定義する. これはほぼ自明である, というのも 3 元ベクトルと Lorentz 系は Minkowski 空間における時間的な 2 次元平面を定義し, その双対は空間的な平面を定義する. 等価的に, 3 次元においてベクトルは平面を定め, また空間が Minkowski 空間の断面 (slice) ならば, この平面は Minkowski 空間における平面と見なせる. 例えば, 時間方向が $(0, 0, 0, 1)$ [正しくは $(1, 0, 0, 0)$] となる基準系におけるベクトル $(0, 0, 1)$ は空間的な平面 $(0, x, y, 0)$ を定める. これがスピノルに関してどのように上手くいくかを, あからさまに調べよう. 2-ベクトルは

$$n^{IJ} = \epsilon^{IJ}_{KL} \langle n | \sigma^{[K} | n \rangle \langle J n | \sigma^{L]} | J n \rangle \quad (8.63)$$

で定義される. 実際, J はパリティとして作用することを思い出そう [式 (8.51)]. すると例えば, スピノル $n = (1, 0)$ は 3 元ベクトル $\vec{n} = (0, 0, 1)$, ヌルの 4 元ベクトル $\langle n | \sigma^K | n \rangle = (1, 0, 0, 1)$, パリティ反転したヌルの 4 元ベクトル $\langle J n | \sigma^L | J n \rangle = (1, 0, 0, -1)$, したがって平面 23 を定める 2-ベクトル $n^{IJ} = \delta_2^I \delta_3^J$ [正しくは $n^{IJ} \sim \delta_1^I \delta_2^J$] を定める [本稿次項で補足].

したがってスピノルは空間的な 2-ベクトルを定める. この関係は理論において重要な役割を演じる. 境界では, スピノルは (向き付けされた) リンクに関係し, 三角形に垂直なベクトルを表す. バルクでは, スピノルは面に関係し, バルクの三角形分割における三角形に平行な 2-ベクトルを表す. このこと全ては, スピノルが重大な役割を演じるところの, コヒーレント状態によって実現される.

8.2.1 項について

■スピノル n と 3 元ベクトル $\vec{n}$ の関係 (8.58–60) の確認 本稿では

- 式 (8.58) 右辺の第 2 成分に負号を補い, また脚注*145 を踏まえ $\bar{n}^1 \rightarrow \overline{n^1}$ と表記を改めた.
- 式 (8.59) 左辺を $|\vec{n}|^2 \rightarrow |\vec{n}|$ と修正した.
- 式 (8.60) 右辺全体に係数 $1/2$ を補った.

式の導出を通じて, これらの修正を正当化する.

まず Pauli 行列 (1.35) を用いると, $\vec{n}$ の式 (8.57) は

$$\begin{aligned} n_x &= (\overline{n^0} \quad \overline{n^1}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n^0 \\ n^1 \end{pmatrix} = 2\text{Re}(n^0 \overline{n^1}), & n_y &= (\overline{n^0} \quad \overline{n^1}) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n^0 \\ n^1 \end{pmatrix} = -2\text{Im}(n^0 \overline{n^1}), \\ n_z &= (\overline{n^0} \quad \overline{n^1}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n^0 \\ n^1 \end{pmatrix} = |n^0|^2 - |n^1|^2 \end{aligned}$$

を与えるので, 式 (8.58) を得る. 式 (8.58) の右辺から, $\vec{n}$ は確かに実であることが明白に見て取れる.

次に式 (8.59) を確認する. 3 次元ベクトル (8.57): $n_i = \overline{n_A} \sigma_i^A{}_B n^B$ を 2 乗して*146 公式 (1.46):

$$\sigma_i^A{}_B \sigma_i^C{}_D = \delta_D^A \delta_B^C - \epsilon^{AC} \epsilon_{BD}$$

*146 以降, 添字の上下で和をとるために, 本文にならって $\overline{n^A}$ を $\overline{n_A}$ と書く. これは添字を ϵ_{AB} との縮約で下ろした量ではなく, あくまで見かけの整合性を保つための細工に過ぎない.

を適用すると,

$$\begin{aligned} |\vec{n}|^2 &= \overline{n_A} n^B \overline{n_C} n^D \sigma_{iB}^A \sigma_{iD}^C = \overline{n_A} n^B \overline{n_C} n^D (\delta_D^A \delta_B^C - \epsilon^{AC} \epsilon_{BD}) = (\overline{n_A} n_A) (\overline{n_B} n_B) - (\epsilon^{AC} \overline{n_A} \overline{n_C}) (\epsilon_{BD} n^B n^D) \\ &= |\langle \mathbf{n} | \mathbf{n} \rangle|^2 \quad (\because \overline{n_A} n_A = \langle \mathbf{n} | \mathbf{n} \rangle) \end{aligned}$$

となるので, 式 (8.59) が得られる.

最後に式 (8.60) を導く. 式 (8.57): $n_i = \overline{n_C} \sigma_{iB}^C n^D$ に σ_{iB}^A を縮約して, 再び公式 (1.46) を利用すると

$$(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^A_B = n_i \sigma_{iB}^A = \overline{n_C} n^D \sigma_{iB}^C \sigma_{iD}^A = \overline{n_C} n^D (\delta_D^A \delta_B^C - \epsilon^{AC} \epsilon_{BD}) = \overline{n_B} n^A - \epsilon^{AC} \epsilon_{BD} \overline{n_C} n^D.$$

最右辺に

$$\epsilon^{AC} \epsilon_{BD} \overline{n_C} n^D = (\delta_B^A \delta_D^C - \delta_D^A \delta_B^C) \overline{n_C} n^D = \delta_B^A \overline{n_C} n^C - \overline{n_B} n^A$$

を代入すると,

$$(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^A_B = 2 \overline{n_B} n^A - \delta_B^A \overline{n_C} n^C = 2(|\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}|)^A_B - |\vec{n}|(\mathbb{1})^A_B \quad (\because \text{式 (8.59)} : |\vec{n}| = \overline{n_C} n^C)$$

とまとめられるので, 式 (8.60) を得る.

■式 (8.61) の n^I がベクトルとして変換すること (教科書 p.172) について 回転と推進 (boost) の生成子をそれぞれ $\vec{L}, \vec{K}$ として, 有限の Lorentz 変換

$$\Lambda = \exp(i\vec{\theta} \cdot \vec{L} + i\vec{\omega} \cdot \vec{K})$$

を考えると, スピノルに作用するその $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 表現行列は

$$a = \exp \left(i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} - \vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \right)$$

で与えられる [10, p.8]. ここから $\sigma_I \equiv (\mathbb{1}, \vec{\sigma})$ を用いて, 4 元ベクトルに作用する変換行列との関係を

$$\sigma_I \Lambda^I_J = a \sigma_J a^\dagger$$

と表せることが分かる [10, p.10]. (このことは無限小変換の場合を考えると無理なく証明できる. 詳しくは文献 [8, § 8.2] のノートを見よ.) よってスピノルに対する $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の作用の下で, 式 (8.61) の n^I はベクトルとして変換する.

■式 (8.63) 直後における 2-ベクトル n^{IJ} の具体的な評価について 一般に式 (8.61–62) は, 式 (8.57) の $\vec{n}$ を用いて $n^K = (|\vec{n}|, \vec{n})$ と書けることを意味する. しかるにスピノル $\mathbf{n} = (1, 0)$ に対し 3 元ベクトル (8.58) は $\vec{n} = (0, 0, 1)$ となるので, $n^K = (1, 0, 0, 1)$. 同様にスピノル $\mathbf{m} \equiv J\mathbf{n} = (0, -1)$ に対応するベクトルは

$$\vec{m} = (0, 0, -1), \quad m^L \equiv \langle \mathbf{m} | \sigma^L | \mathbf{m} \rangle = (1, 0, 0, -1).$$

このとき 2-ベクトル (8.63) は

$$n^{IJ} = \epsilon^{IJ}_{KL} n^{[K} m^{L]} = \epsilon^{IJ}_{03} n^{[0} m^{3]} + \epsilon^{IJ}_{30} n^{[3} m^{0]} = 2\epsilon^{IJ}_{03} n^{[0} m^{3]} \equiv 2\epsilon^{IJ}_{03} (n^0 m^3 - n^3 m^0) = -4\epsilon^{IJ}_{03}.$$

そのゼロでない成分は $n^{12} = -n^{21} = 4$ のみなので,

$$n^{IJ} = 4(\delta_1^I \delta_2^J - \delta_1^J \delta_2^I) \equiv 4\delta_1^{[I} \delta_2^{J]}$$

とまとめられる.

なお係数 $1/2$ を含めて反対称化の表記を反対称部分 $n^{[K} m^{L]} \equiv \frac{1}{2}(n^K m^L - n^L m^K)$ として定義する場合, 得られる 2-ベクトルは上式の $1/2$ 倍 $n^{IJ} = -2\epsilon^{IJ}_{03}$ になるものの, $\delta_1^{[I} \delta_2^{J]}$ の定義にも同じ修正が施されるため, 最終的な結果 $n^{IJ} = 4\delta_1^{[I} \delta_2^{J]}$ は見かけ上変わらない.

8.2.2 コヒーレント状態とスピノル

スピノル $\mathbf{n} = (1, 0)$ は L_z の固有値 $1/2$ と単位のノルムを持つ固有ベクトルである。したがってそれは状態 $|j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\rangle$ であり、コヒーレント状態に他ならない。 $j = \frac{1}{2}$ 表現における他の全てのコヒーレント状態は $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ を回転することで得られ、また回転はスピノルのノルムを保つので、全ての規格化されたスピノル $\mathbf{n}$ は基本表現におけるコヒーレント状態を表すこと、すなわち

$$|\mathbf{n}\rangle = |1/2, \vec{n}\rangle \quad (8.64)$$

が帰結し、ここに $\mathbf{n}$ と $\vec{n}$ は式 (8.57) で関係する。実際、式 (8.57) から

$$\langle \mathbf{n} | \vec{L} | \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{n} | \frac{\vec{\sigma}}{2} | \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{2} \vec{n} = j \vec{n} \quad (8.65)$$

が帰結する。規格化されたスピノルは、それが定義する規格化された 3 元ベクトルに対するコヒーレント状態である。

note 上式 (8.65) では $j = \frac{1}{2}$ 表現の 2 成分スピノルに作用する角運動量演算子が、 $\vec{L} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$ と表されることを思い出そう [3, pp.220–222]。さて、スピノル $\mathbf{n} = (1, 0)$ を回転して得られる式 (8.64) のコヒーレント状態 $|\mathbf{n}\rangle$ は式 (8.57) を通じて何らかの 3 元ベクトル $\vec{n}$ で特徴付けられ、式 (8.59) より $|\vec{n}| = 1$ 。他方で $|\mathbf{n}\rangle$ がスピン $\vec{m}$ 向きのコヒーレント状態であるとする、この状態に関するスピンの期待値は $\langle \mathbf{n} | \vec{L} | \mathbf{n} \rangle = j \vec{m}$ を満たす。これを式 (8.65) と比較すると、方向単位ベクトル $\vec{n}$ はスピンの向き $\vec{m}$ に他ならないことが判明する。

これは極めて著しいことであり、より一層著しいことは、これがあらゆる表現に拡張されることである。実際、コヒーレント状態のテンソル積は、定義から確認できるように、コヒーレント状態である。状態

$$|j, \mathbf{n}\rangle = n \otimes \cdots \otimes n \quad (8.66)$$

($2j$ 個の積 [スピノル n は全て共通]) を考えよ。これはスピン j 表現に属し、まさに

$$\langle j, \mathbf{n} | \vec{L} | j, \mathbf{n} \rangle = j \vec{n} \quad (8.67)$$

を満たし最小の拡がりを持つコヒーレント状態 $|j, \vec{n}\rangle$ である。

8.2.3 スピノルの関数上の $SU(2)$ および $SL(2, \mathbb{C})$ の表現と Y_γ 写像

最初の章の補完 [1.7.1 項] では、スピノル空間をテンソル積化すること (tensoring) によって、 $SU(2)$ の既約表現を構成した。スピン j の表現空間 $\mathcal{H}_j$ は $2j$ 個のスピノル添字を持つ対称テンソル $y^{A_1 \cdots A_{2j}}$ で実現できる。とりわけ有用なスピン空間 $\mathcal{H}_j$ の今一つの実現方法がある。それはスピノルの関数 $f(\mathbf{z})$ の空間上で定義される。より正確には、有限次元のベクトル空間 $\mathcal{H}_j$ は、次数 $2j$ の完全対称な多項式関数 $f(\mathbf{z})$ の空間として実現できる。このことは実際 $y^{A_1 \cdots A_{2j}}$ 状態から始めれば、かなり直接的である：対応する $\mathbf{z}$ の多項式関数は単に

$$f(\mathbf{z}) = y^{A_1 \cdots A_{2j}} z_{A_1} \cdots z_{A_{2j}} \quad (8.68)$$

であり [$y^{A_1 \cdots A_{2j}}$ の対称性より $f(\mathbf{z})$ は 2 つの z_A の入れ替えに関して対称]、同次条件

$$f(\lambda \mathbf{z}) = \lambda^{2j} f(\mathbf{z}) \quad (8.69)$$

を満たす．明らかに $SU(2)$ はその転置の作用

$$(Uf)(z) = f(U^T z) \quad (8.70)$$

を通じて，これらの関数に作用する．

note $f(z)$ の中で $y^{A_1 \cdots A_{2j}} \rightarrow U^{A_1}_{B_1} \cdots U^{A_{2j}}_{B_{2j}} y^{B_1 \cdots B_{2j}}$ とすると，

$$\begin{aligned} f(z) &\rightarrow y^{B_1 \cdots B_{2j}} (z_{A_1} U^{A_1}_{B_1}) \cdots (z_{A_{2j}} U^{A_{2j}}_{B_{2j}}) \\ &= y^{B_1 \cdots B_{2j}} ((U^T)_{B_1}^{A_1} z_{A_1}) \cdots ((U^T)_{B_{2j}}^{A_{2j}} z_{A_{2j}}) = f(U^T z) \end{aligned}$$

となる．

この表現においてコヒーレント状態がどのように見えるかを調べよう．スピン $1/2$ に対して，規格化を別にすれば，明らかにコヒーレント状態は線形関数

$$f_n(z) \sim n^A z_A \sim \langle z | n \rangle \quad (8.71)$$

によって非常に簡単に表される．この状態の自分自身との $2j$ 回の対称化されたテンソル積をとれば， j 表現におけるコヒーレント状態を驚くべきほど簡単な形

$$f_n^{(j)}(z) \sim \langle z | n \rangle^{2j} \quad (8.72)$$

に得る．規格化は計算でき，規格化された状態

$$f_n^{(j)}(z) = \sqrt{\frac{2j+1}{\pi}} \langle z | n \rangle^{2j} \quad (8.73)$$

を与える．これは角運動量 $j\vec{n}$ を持つコヒーレント状態の非常に直接的な表現である．

$SU(2)$ 表現空間のこの具体的な構成は， $SU(2)$ 表現を $SL(2, \mathbb{C})$ ユニタリー表現に関係付ける上で非常に有用であることが判明する，何故なら $SL(2, \mathbb{C})$ に対して類似の表現が存在するからである．前章では，実際， $SL(2, \mathbb{C})$ 表現空間 $V^{(p,k)}$ を正準基底 $|p, j; jm'\rangle$ で構成した．これは概念的には簡単であるが，取り組むのは容易でない．計算にとってより便利な $V^{(p,k)}$ の表現空間の実現は， $z \in \mathbb{C}^2$ としてスピノルの関数 $f(z)$ による．表現 (p, k) は性質

$$f(\lambda z) = \lambda^{-1+ip+k} \bar{\lambda}^{-1+ip-k} f(z) \quad (8.74)$$

を満たすスピノルの同次関数の空間上で定義される．表現は転置の作用

$$gf(z) = f(g^T z) \quad (8.75)$$

で与えられる．正準基底とスピノル規定の間の翻訳は Barrett *et al.* (2010) において明示的に計算されており，そこでは

$$f_m^j(z) = \langle z | p, k; j, m \rangle = \sqrt{\frac{2j+1}{\pi}} \langle z | z \rangle^{ip-1-j} D_{mk}^j(g(z)) \quad (8.76)$$

が見出され，ここに

$$g(z) = \begin{pmatrix} z_0 & -\bar{z}_1 \\ z_1 & \bar{z}_0 \end{pmatrix}. \quad (8.77)$$

[Barrett *et al.* (2010) にならって右辺に負号を補った．このとき初めて右辺は行列式が 1 (式 (1.17) の形) となる．]

(SU(2) と SL(2, ℂ) の両方に対する) これらの表現において, 2 つの関数の間のスカラー積はスピノル空間における積分で与えられる. スピノル空間における不変な積分は

$$\langle f|g \rangle = \int \bar{f} g \Omega \quad (8.78)$$

で与えられ, ここに

$$\Omega = \frac{i}{2} (z^0 dz^1 - z^1 dz^0) \wedge (\bar{z}^0 d\bar{z}^1 - \bar{z}^1 d\bar{z}^0). \quad (8.79)$$

これは関数の同次性を援用すると, より容易に表せる. 実際, 同次性によりこれらはその $z^1 = 1$ 上の値で一意的に決まる. そこで $f(z)$ と同じ情報を持つ

$$F(z) = f \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8.80)$$

を定義する. するとスカラー積は簡単な形

$$\langle f|g \rangle = \int_{\mathbb{C}} d^2 z \overline{G(z)} F(z) \quad (8.81)$$

を持ち, ここに $d^2 z = dz d\bar{z} = dx dy$ ($z = x + iy$ ならば) は複素平面上の標準的な積分測度である. 代わりに, 群の作用は少しより複雑になる (Gel'fand *et al.* (1963), p.247 を見よ):

$$gf(z) = (az + b)^{k-1+ip} (\bar{a}\bar{z} + \bar{b})^{-k-1+ip} f \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) \quad (8.82)$$

であり, ここに

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (8.83)$$

これらのスピノル表現はとりわけ便利である, 何故ならこの言語では Y_γ 写像がとりわけ簡単な形をとるからである. $V^{(p,k)}$ における $\mathcal{H}_j$ の埋め込みが³

$$f(z) \rightarrow \langle z|z \rangle^{-1+ip-k} f(z) \quad (8.84)$$

で与えられるので, 単に

$$Y_\gamma f(z) = \langle z|z \rangle^{-1+(i\gamma-1)j} f(z) \quad (8.85)$$

を得る. これがこの表現における, ループ重力の根底にある写像である!

これによりコヒーレント状態に対する Y_γ 写像の作用を直ちに書くことが可能になる: 式 (8.85) から

$$\langle z|Y_\gamma|j, \vec{n} \rangle = \sqrt{\frac{2j+1}{\pi}} \langle z|z \rangle^{-1+(i\gamma-1)j} \langle z|\vec{n} \rangle^{2j} \quad (8.86)$$

を得る. あるいは, 後で便利のように,

$$\langle z|Y_\gamma|j, \vec{n} \rangle = \frac{\sqrt{2j+1}}{\sqrt{\pi} \langle z|z \rangle} e^{j[(i\gamma-1) \ln \langle z|z \rangle + 2 \ln \langle z|\vec{n} \rangle]}. \quad (8.87)$$

スピノル空間に作用するときの Y_γ 写像の形が, いかに直接的であるかに注意せよ. この表現は Y_γ によって適切な SL(2, ℂ) 表現に写像された後の, コヒーレント状態 $|j, \vec{n} \rangle$ の形を与える.

8.3 頂点振幅の古典的極限

ここで上記で展開した手段を用い、スピノルを用いて頂点振幅を書き直す。頂点振幅は式 (7.58) で与えられることを思い出そう、それを以下に再掲しておく：

$$A_v(h_{vf}) = \sum_{j_f} \int_{\text{SL}(2, \mathbb{C})} dg'_{ve} \prod_f (2j_f + 1) \text{Tr}_{j_f} [Y_\gamma^\dagger g_{e'v} g_{ve} Y_\gamma h_{vf}] \quad (8.88)$$

添字 v を落とし、頂点を発する辺をラベル $a, b = 1, \dots, 5$ で、また頂点において面を区切っている 2 辺を a および b として、頂点に隣接する面を (ab) でラベルするのが便利である。すると振幅は

$$A_v(h_{ab}) = \sum_{j_{ab}} \int_{\text{SL}(2, \mathbb{C})} dg'_a \prod_{ab} (2j_{ab} + 1) \text{Tr}_{j_{ab}} [Y_\gamma^\dagger g_a^{-1} g_b Y_\gamma h_{ab}] \quad (8.89)$$

となる。これが我々の調べたい量である。

8.3.1 コヒーレント状態に関する遷移振幅

最後の式におけるトレースは、コヒーレント状態による恒等子の分解 [式 (8.30)] を 2 つ挿入して書くことができる、

$$\text{Tr}_j [Y_\gamma^\dagger g g' Y_\gamma h] = \int_{S^2} d\vec{n}, d\vec{m} \langle j, \vec{m} | Y_\gamma^\dagger g g' Y_\gamma | j, \vec{n} \rangle \langle j, \vec{n} | h | j, \vec{m} \rangle. \quad (8.90)$$

これらの行列要素のうち、重要な方である 1 つ目に集中しよう。それをスピノル基底で書くことは

$$\langle Y_{\gamma j}, \vec{m} | g g' | Y_{\gamma j}, \vec{n} \rangle = \int_{\mathbb{C}^2} d\Omega \langle Y_{\gamma j}, \vec{m} | g \mathbf{z} \rangle \langle g'^\dagger \mathbf{z} | Y_{\gamma j}, \vec{n} \rangle$$

を与える。コヒーレント状態のスピノル基底における表現 (8.86) を用い、また (一般的ではあるがやや混乱を招く) 表記

$$\mathbf{Z} = g \mathbf{z}, \quad \mathbf{Z}' = g'^\dagger \mathbf{z} \quad (8.91)$$

を導入すると、これは

$$\langle Y_{\gamma j}, \vec{m} | g g' | Y_{\gamma j}, \vec{n} \rangle = \frac{(2j+1)}{\pi} \int_{\mathbb{C}^2} \frac{d\Omega}{\langle \mathbf{Z} | \mathbf{Z} \rangle \langle \mathbf{Z}' | \mathbf{Z}' \rangle} e^{j S(\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{Z}, \mathbf{Z}')} \quad (8.92)$$

を与え、ここに

$$S(\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{Z}, \mathbf{Z}') = \ln \frac{\langle \mathbf{Z} | \mathbf{m} \rangle^2 \langle \mathbf{Z}' | \mathbf{n} \rangle^2}{\langle \mathbf{Z} | \mathbf{Z} \rangle \langle \mathbf{Z}' | \mathbf{Z}' \rangle} + i\gamma \ln \frac{\langle \mathbf{Z} | \mathbf{Z} \rangle}{\langle \mathbf{Z}' | \mathbf{Z}' \rangle}. \quad (8.93)$$

ここでこれを頂点振幅 (8.89) に代入しよう。単位ベクトル $\vec{n}_{ab}$ が必要である (ここで $\vec{n}_{ab}$ と $\vec{n}_{ba}$ は異なる対象を表す)。振幅は頂点グラフ Γ_v の境界上に、すなわち、頂点に双対な 4-単体の境界上にある、状態の空間 $\mathcal{H}_{\Gamma_v}$ 上の汎関数である。 $\mathcal{H}_{\Gamma_v}$ におけるコヒーレント状態を選ぼう。特に、 Γ_v の各結節点 a に対し規格化されたベクトル $\vec{n}_{ab}$ の 4 つ組を選ぶ。これらは状態 $|j_{ab}, \vec{n}_{ab}\rangle$ を定義する。少し考えると、この状態の振幅は

$$A_v(j_{ab}, \vec{n}_{ab}) \equiv \langle A_v | j_{ab}, \vec{n}_{ab} \rangle = \int_{\text{SL}(2, \mathbb{C})} dg'_a \prod_f (2j_{ab} + 1) \langle j_{ab}, \mathbf{n}_{ab} | Y_\gamma^\dagger g_a^{-1} g_b Y_\gamma | j_{ab}, \mathbf{n}_{ab} \rangle. \quad (8.94)$$

であることが分かる．コヒーレントな四面体の状態を得るには， $SU(2)$ にわたって積分する必要はない，と言うのも， $SL(2, \mathbb{C})$ にわたる積分が既にこの役目を果たしているからである．上記の結果を用いると，これは

$$A_v(j_{ab}, \vec{n}_{ab}) = \mu(j_{ab}) \int_{SL(2, \mathbb{C})} dg'_a \int_{\mathbb{C}^2} \frac{d\Omega_{ab}}{|\mathbf{Z}_{ab}| |\mathbf{Z}_{ba}|} e^{\sum_{ab} j_{ab} S(\mathbf{n}_{ab}, \mathbf{n}_{ba}, \mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{Z}_{ba})} \quad (8.95)$$

を与え，ここに $\mu(j_{ab}) = \prod_{ab} \frac{(2j_{ab}+1)^2}{\pi}$ および $\mathbf{Z}_{ab} = g_a \mathbf{z}_{ab}$ および $\mathbf{Z}_{ba} = g_b \mathbf{z}_{ab}$ ， $j_{ab} = j_{ba}$ および $\mathbf{z}_{ab} = \mathbf{z}_{ba}$ であるが， $\vec{n}_{ab}$ および $\mathbf{Z}_{ab}$ は一般に $\vec{n}_{ba}$ および $\mathbf{Z}_{ba}$ と異なることに注意せよ．

最後の式はコヒーレント状態に関する頂点振幅の形を与える．これが次のセクションで行う，ダイナミクスの古典的極限の研究の出発点である．

鞍点

あらゆる量子論において，古典的極限は量子数の大きな極限である．一般に，これは作用が $\hbar$ に比べて大きく，したがって量子効果を無視できる領域である．ダイナミクスの古典的極限を調べるためには，したがって大きな量子数の極限で遷移振幅に何が起きるかを調べねばならない．特に j が大きいときに何が起きるかを調べよう．

もしスピン j_{ab} たちが大きければ，積分 (8.95) は鞍点近似を用いて評価できる (Barrett *et al.* 2010)．1 次元の積分に対する鞍点近似は

$$\int_R dx g(x) e^{jf(x)} = \sqrt{\frac{2\pi}{j\ddot{f}(x_0)}} g(x_0) e^{\lambda f(x_0)} \left[1 + o\left(\frac{1}{j}\right) \right] \quad (8.96)$$

であり $[\lambda \rightarrow j]$ ，ここに x_0 は鞍点，すなわち $f(x)$ の 1 階微分が消える点である（ここでは簡単のためにただ 1 つと仮定した）． d 次元における積分へのこの公式の一般化は

$$\int_{R^d} d^d x g(x) e^{jf(x)} = \left(\frac{2\pi}{j}\right)^{\frac{d}{2}} (\det H_2 f)^{-\frac{1}{2}} g(x_0) e^{\lambda f(x_0)} \left[1 + o\left(\frac{1}{j}\right) \right] \quad (8.97)$$

であり，ここに $H_2 f$ は f の鞍点における Hesse 行列 (hessian；2 階微分から成る行列) であり，鞍点は今や f の勾配 (gradient) が消える点である．これが成り立つためには， f の実部が負でなければならない．直観的には，起きることはかなり単純である：もし f が実数ならば，大きな j は f の最大値の周りに狭い Gauss 型 (gaussian) を与える．もし f が虚数ならば， j が大きいとき，指数は非常に素早く振動し，積分は素早い振動によって打ち消される．これが起きない点は f の微分が消える点である，何故ならそれらの点では指数の x に関する素早い変動が抑制されるからである．2 つの場合が図 99 に描かれている．

虚数の場合がとりわけ興味深い，何故ならそれは Feynman の経路積分の定式化から，量子力学の標準的な古典的極限を与えるからである：古典的な軌道は作用の極地で与えられる，何故なら $\hbar$ が小さい極限では，経路積分の鞍点を除き量子干渉が振幅を打ち消すからである．ここで起きることを理解するには，この一般的な事実を頭に留めておくのが良い．

ここでは積分 (8.95) の鞍点を求める計算の完全な詳細は与えない．それは Barrett *et al.* (2010) の古典的な論文に見出される．最近の解析については Magliaro and Perini (2011b); Han and Zhang (2013); Ding and Han (2011) も見よ．我々は主要なステップをスケッチするに留める．作用 (8.93) の停留点を見付けなければならない．実部から始めよう．それは

$$\text{Re}[S] = \sum_{ab} \log \frac{|\langle \mathbf{Z}_{ab} | \mathbf{n}_{ab} \rangle|^2 |\langle \mathbf{Z}_{ba} | \mathbf{n}_{ba} \rangle|^2}{\langle \mathbf{Z}_{ab} | \mathbf{Z}_{ab} \rangle \langle \mathbf{Z}_{ba} | \mathbf{Z}_{ba} \rangle} \quad (8.98)$$

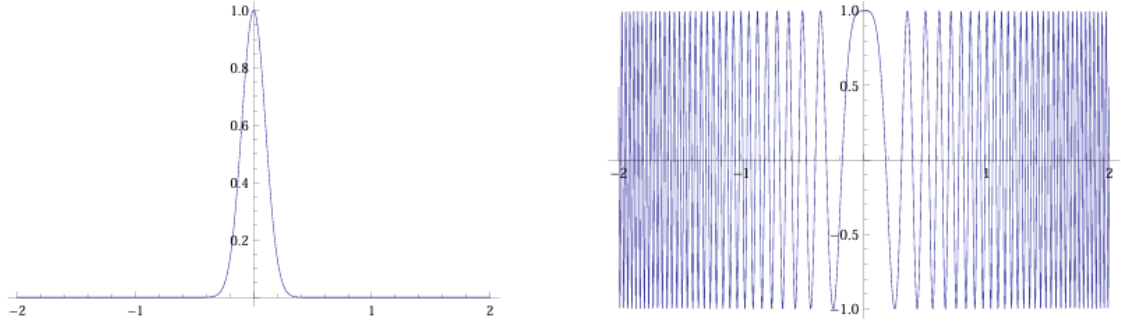


図 99 実数と虚数の場合における大きな j に対する $e^{jf(x)}$ [本稿では教科書 p.177 から図を採った]

で与えられる．これ〔真数〕は常に 1 (unit) よりも小さい，何故ならコヒーレント状態は規格化されているので，スカラー積 $|\langle \mathbf{Z}_{ab} | \mathbf{n}_{ab} \rangle|^2$ は必然的にノルム $\langle \mathbf{Z}_{ab} | \mathbf{Z}_{ab} \rangle$ よりも小さいからである．最大値はしたがって対数が消えるときである．自明な解は

$$\mathbf{n}_{ab} = \frac{\mathbf{Z}_{ab}}{|\mathbf{Z}_{ab}|}, \quad \mathbf{n}_{ba} = \frac{\mathbf{Z}_{ba}}{|\mathbf{Z}_{ba}|} \quad (8.99)$$

のときであるものの，これは唯一の解ではない，何故なら積において相殺する位相があり得るからである．一般解は代わりに

$$\mathbf{n}_{ab} = e^{i\phi_{ab}} \frac{\mathbf{Z}_{ab}}{|\mathbf{Z}_{ab}|}, \quad \mathbf{n}_{ba} = e^{i\phi_{ab}} \frac{\mathbf{Z}_{ba}}{|\mathbf{Z}_{ba}|}. \quad (8.100)$$

$\mathbf{Z}$ の意味を思い出すと，これは

$$g_a^{-1} \mathbf{n}_{ab} = \frac{\mathbf{Z}_{ba}}{\mathbf{Z}_{ab}} e^{i\theta_{ab}} g_a^{-1} \mathbf{n}_{ba} \quad (8.101)$$

を与える．ここでスピノル変数 $\mathbf{z}_{ab}$ の変分の下での作用の極値を調べよう．直接的な計算により，最後の式と似ているものの一致はしない式

$$g_a \mathbf{n}_{ab} = \frac{\mathbf{Z}_{ba}}{\mathbf{Z}_{ab}} e^{i\theta_{ab}} g_a \mathbf{n}_{ba} \quad (8.102)$$

が与えられる．最後にここで，群要素 g_a と積分変数 $\mathbf{z}_{ab}$ の変分の下での作用の極値を調べる．1 つ目は比較的容易である．群要素は $\mathbf{Z}_{ab}$ に含まれる．群要素の 1 次の変分は代数要素の作用を与える．したがって群要素に対する鞍点方程式は作用への無限小 $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 変換の作用が消えることを与える．そのような作用は推進 (boosts) と回転に分解でき，ところが構成により推進の作用は考えている表現において回転の作用に比例する．したがって必要な不変性は回転に対してのみである．これは変数の変更により $\mathbf{Z}$ から法線 $\mathbf{n}$ に移行でき，結果は

$$\sum_b j_{ab} |\mathbf{n}_{ab}\rangle = 0. \quad (8.103)$$

これは見事であり驚きである：群の積分に対する鞍点方程式は正確に，頂点グラフの各境界結節点における法線に対する閉包条件である．アプリアリには，我々は任意の法線の組を選んだものの，全ての可能な $\mathbf{n}_{ab}$ の組が各結節点において閉包条件を満たさない限り——すなわち，それらが頂点グラフの各結節点 a において適切な四面体 τ_a を定義しない限り——，ダイナミクスはそれらを抑制する．

ここで，式 (8.103) により，頂点グラフのスピノルと法線は 4 つの四面体を定義する．それらは 3 次元の対象であり， $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の $\text{SU}(2)$ 部分群によって不変に留まる，Minkowski 空間における共通の 3 次元の面 Σ に横

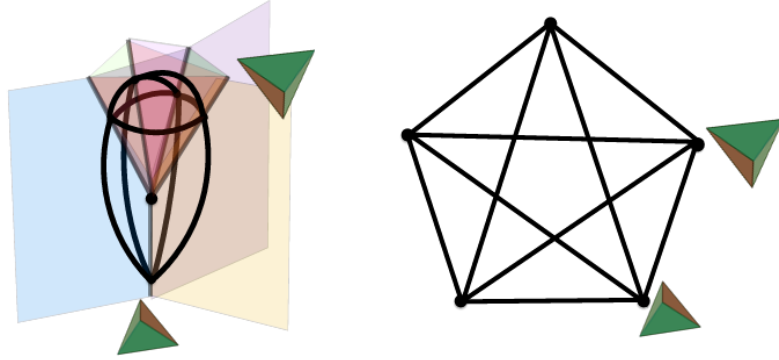


図 100 頂点の境界における 2 つの四面体は面で繋がっている [本稿では教科書 p.179 から図を採った ; 4-単体の境界を成す 5 つの四面体は対応する結節点どうしが互いにリンクで繋がっているため, 面で貼り合わせられている (11.3 節の図 110 も見よ)]

たわっていると考えられる. Σ 内のベクトルはそれに対してベクトルが垂直となる Σ 内の面を定義する. すると Lorentz 変換はこの面に作用して, それを Minkowski 空間における任意の (空間的な) 面へと移動できる. スピノルの観点からは, この作用は単にスピノルに対する $SL(2, \mathbb{C})$ 要素の作用で与えられる. このことはこれらの式を直ちに明瞭にする: それらは, 四面体 τ_a の b 面が四面体 τ_b の a 面に平行となるように, 5 つの四面体 τ_a を Minkowski 空間において回転する, 5 つの Lorentz 変換 g_a の存在を意味している. すなわち, 群要素 g_a は 5 つの四面体を共通の空間的な面から, 5-単体 [正しくは 4-単体] の境界を成す配置へと回転する (図 100).

したがって臨界点において変数は正確に Minkowski 空間における 4-単体を表す. 鞍点における作用の値はこのとき

$$S = i\gamma \sum_{ab} j_{ab} \Theta_{ab} \quad (8.104)$$

と, 単に振幅の符号を決める項の和である. Θ_{ab} は何か? それは 4-単体における三角形の各辺の両側 (opposite side of each side of a triangle) に対する Lorentz 変換の差である. したがって, それは 2 つの四面体の間の 2 面角である. ところが γj_{ab} は ($8\pi G\hbar = 1$ の単位系において) 4-単体の境界面の面積である. 臨界点における S は, 10 個の面積 j_{ab} で決まる境界幾何学を有する, 4-単体の Regge 作用であることが帰結する.

より正確には, 同じ境界データから逆向きの 2 つの 4-単体を構成できるので, 大きな j の極限における頂点振幅は

$$A(j_{ab}, n_{ab}) \sim c e^{iS_{\text{Regge}}(j_{ab})} + c' e^{-iS_{\text{Regge}}(j_{ab})} \quad (8.105)$$

に比例する. 3 次元で現れるのと同じ Maslov 指数の存在により [5.3.2 項], 定数 c と c' は等しくない. ここでは境界の四面体は非退化の (non-degenerate) Lorentz 的な 4-単体を定義すると仮定した. ここでは無視した詳細を含め, 他の可能な場合と詳細な導出と議論については, Barrett *et al.* (2010) を見よ.

まとめると, 頂点の境界の状態が 4-単体の境界の幾何学たり得る幾何学を表すならば, 頂点の振幅は対応する 4-単体に関する Regge 振幅である. 重要なことに, 法線たちが 4-単体の幾何学から決まるものでなければ, 振幅は抑制される.

4-単体の Regge 作用は 4-単体の Hamilton 関数である. 2-複体にわたる完全な振幅は次いで, スピンにわたって和をとると得られる. 四面体が合致する法線がないスピンの配位は抑制される. 残るものは面において対応する面積を定める, 4-単体の境界における長さのあるものである. それらにわたる和は切り詰められた幾

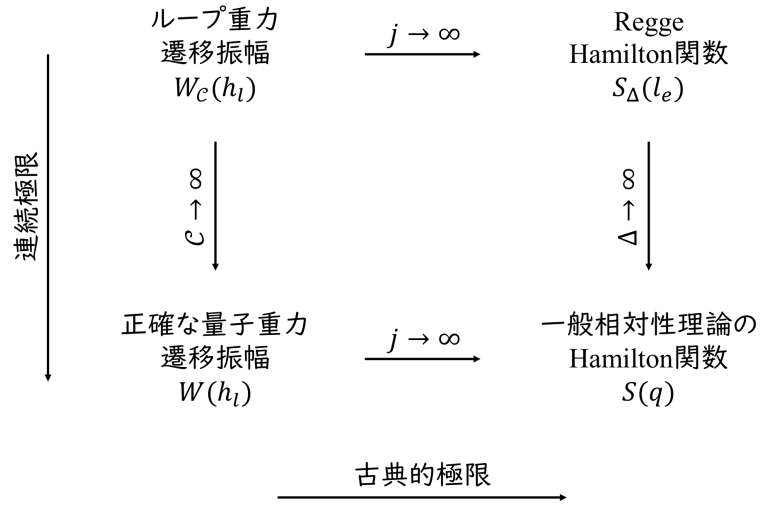


図 101 遷移振幅の古典的極限と連続極限の関係 [教科書では p.181 の表 8.1]

何学にわたる和と等価であり，ここで重みは Regge 作用で決まる．結果は古典的な極限において，境界データの Regge Hamilton 関数を与える．

積分に現れる全ての量の幾何学的解釈はこのとき明瞭である． $SL(2, \mathbb{C})$ 群要素 g_{ve} は，各頂点 v から 2 つの頂点を分離する四面体 e に移動する，スピン接続のホロノミーである．スピン j_f は対応する三角形の面積である，等々．

最後に，各頂点における局所 Lorentz 不変性は，3 次元幾何学の離散性を破ることなく実装されていることに注意せよ．

結論としては，4 次元の理論の頂点振幅は 4-単体の Regge 作用を近似する．この結果は長い間探し求められ，また理論の基礎となっている，Ponzano–Regge 定理の 4 次元版である．

8.3.2 古典的極限 対 連続極限

前項では大きな j の極限を論じたが，それは古典的極限である．前章では 2-複体 $\mathcal{C}$ が洗練化される極限を論じたが，それは連続極限である．2 つの極限は概念的にも実際的にも非常に異なり，それらを混同してはならない．残念ながら，2 つの極限の混同は文献に数多くある．そこで，この場でいくらか明快にしてみたい．2 つの極限の関係を図 101 に要約する．

我々が定義した固定された 2-複体上の遷移振幅は，図 101 の左上の隅を占めている．それは 2-複体を洗練化すると次第に良くなる近似をもたらす．2-複体を洗練化するにつれ，図 101 の下へと，すなわち，量子重力の (理想的な (ideal [観念的という意味合いを含む])) 正確な遷移振幅へと進む．

固定された三角形分割において境界状態の次第に増すスピンの値を調べるならば，図 101 において右へと進む．三角形分割 Δ に双対な，固定された 2-複体 $\mathcal{C}$ の各々に対して，遷移振幅の古典的な (大きな j の) 極限は，その三角形分割 Δ 上で定義された一般相対性理論の Hamilton 関数の Regge 的な切り詰めに関係する．

三角形分割を洗練化すると，Regge 離散化は古典的な一般相対性理論に収束することが知られている．したがって (対応して) 2-複体を洗練化すると，遷移振幅はより多くの自由度を持ち，その古典的極限がますます連続的な一般相対性理論に近づく量子論を定義する．これが共変ループ重力において振幅を定義する方法で

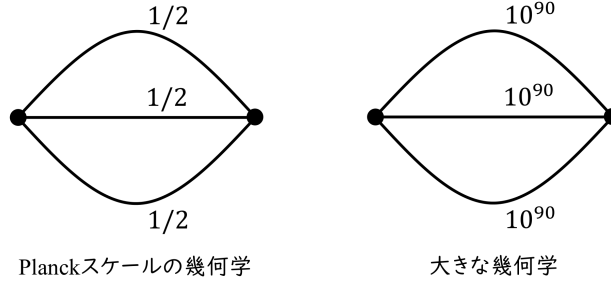


図 102 小さな空間と大きな空間

ある。

QED と QCD においても，具体的な計算は一般に切り詰められた理論の上で実行されることを改めて思い出そう．この理論は適当な領域で良い近似を供する．

量子重力において古典的極限が良くなる領域は，Planck スケールよりも極めて大きいスケール L に関する領域である．

$$L \gg L_{\text{Planck}}. \quad (8.106)$$

切り詰めが良くなる領域は Regge 近似から提示される．それは欠損角が小さいとき良くなる．これは離散化のスケールが曲率のスケール $L_{\text{curvature}}$ に比べて小さいとき

$$L \ll L_{\text{curvature}} \quad (8.107)$$

に起きる．したがって少数のセルを持つ三角形分割，また対応して少数の頂点を持つ 2-複体は，考えているセルのサイズが (与えられた境界データで決まる Einstein 方程式の古典的な解の) 曲率のスケールに比べて小さくなる，(境界データで決まる) 領域における近似を供する．

三角形分割の洗練化はより短い長さスケールの自由度の導入へと導く．しかしスピン・フォームの配位の物理的なスケールはグラフあるいは 2-複体で与えられない．それはスピン (と結節因子) で決まる，その幾何学的な量のサイズで与えられる．同一の三角形分割が，時空の小さいサイズと大きいサイズの両方を表し得る．ほとんど平坦な時空の大きな塊は粗い三角形分割で近似できるのに対し，曲率が非常に高い時空の小さな塊はよりきめ細かい三角形分割を必要とする．言い換えれば，三角形分割はあらゆるエンジニアの離散化のようである：それらは無駄にきめ細かい必要はない：それらは単に考えている曲率を捉えられるだけきめ細かければ良い^{*147}．

同じグラフで定まる同じ Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\Gamma$ 上に，空間の小さな塊と大きな塊を表す状態がある (図 102)．

古典論を復元するために Planck スケールと曲率のスケールの中間にあるスケールに取り組む必要性を考慮した，大規模な三角形分割 (large triangulations) に対する連続極限の詳しい解析が，とりわけ Muxin Han (Han and Zhang 2013; Han 2013) によって展開された．Han の解析は，ここでは報告しないが，完全なループ量子重力の振幅から実効的な作用を導く展開を，2 つのパラメータに関する展開として調べている： $1/\lambda \sim L_{\text{Planck}}^2/L^2$ は量子補正の指標となるのに対し， $\Theta \sim L^2/L_{\text{curvature}}^2$ は高エネルギーの補正の指標となる．興味深いことに，Han は γ とこれら 2 つのパラメータの関係を，図 103 に示したように

$$|\Theta| \leq \gamma^{-1} \lambda^{\frac{1}{2}} \quad (8.108)$$

^{*147} この点の誤解が文献において重大な混乱を生み出している．

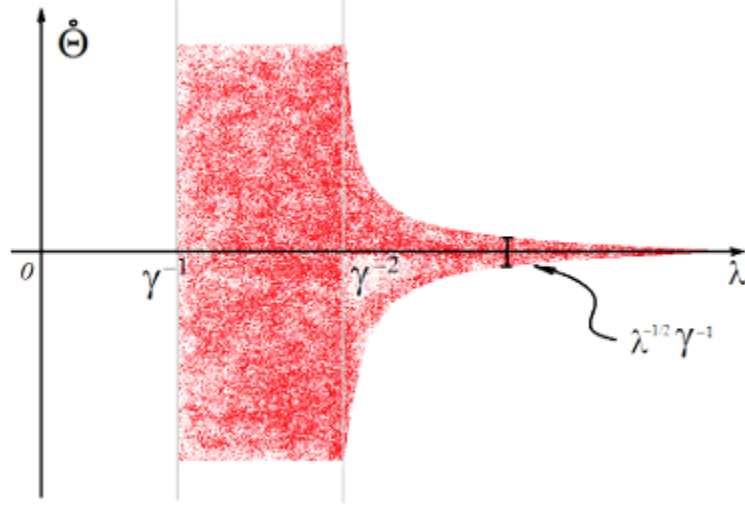


図 103 ループ量子重力の Einstein セクター [本稿では教科書 p.179 から図を採った]

の形に発見している.

図 103 における影を付けた領域は展開が上手くいくところである^{*148}. それはループ重力の **Einstein** セクターと呼ばれる. それはスピン・フォームの配位の, 配位が

$$L_{\text{Planck}} \ll L \ll L_{\text{curvature}} \quad (8.109)$$

を満たす Lorentz 的な幾何学として解釈される部分空間を定義する. スピン・フォーム変数のゆらぎがこのセクター内にあるとき, スピン・フォーム振幅の摂動展開はすると

$$W \sim \sum_{j_f, g_{ve}, z_{vf}} e^{\frac{i}{L_{\text{Planck}}^2} \int_M d^4x \sqrt{-g} R[g_{\mu\nu}] (1 + o(L^2/L_{\text{curvature}}^2) + o(L_{\text{Planck}}/L))} \quad (8.110)$$

で与えられ, ここに $g_{\mu\nu}$ はスピン・フォーム・データ (j_f, g_{ve}, z_{vf}) で近似される Lorentz 的な計量である. 主要な寄与は Einstein 方程式を満たす $g_{\mu\nu}$ を与える配位 (j_f, g_{ve}, z_{vf}) から来る.

8.4 外部コヒーレント状態

本章を締め括る前に扱わねばならない, もう 1 つの話題がある. 注意深い読者は, 8.23 項 [8.1 節] で導入した内部コヒーレント状態が何故 “内部” と言われるのか疑問に思ったかもしれない. その理由は, それらが空間の内部幾何学を表す演算子 $\vec{L}_l$ に対するコヒーレント状態であって, 外部幾何学を表す演算子のコヒーレント状態ではないことである. 空間の内部幾何学の量子論的な拡がりはこの状態によって最小化されるものの, その運動量共役, すなわち, その時間微分はそうではない. したがってそれらは, 一般的な波束がそうであるのと同じ意味では, 本当に半古典的な状態ではない. 実際, それらの状態は面積変数の固有状態であり, したがって面積に共役な変数のは完全に量子論的に拡がっている. 2 つの四面体の間の三角形の面積に共

^{*148} これらの結果は同著者ら (Bonzom 2009; Hellmann and Kaminski 2013) が言及しているスピン・フォーム振幅における見かけの “平坦性” の起源を明らかにする: 素朴な大スケール極限をとることはできない, 何故ならそれは低エネルギー近似の有効な正しい領域の外へと導く: 固定された三角形分割上の素朴な $j \rightarrow \infty$ の極限は平坦な幾何学をもたらす.

役な変数の幾何学的解釈は、2つの四面体の4次元的な法線の間の4次元的な2面角である。これは明らかに、ADM変数における3次元計量に共役な変数である外部曲率〔式(3.55)を参照〕の、離散的なバージョンである。内部および外部幾何学の両方に関してコヒーレントな状態は外部コヒーレント状態である。

外部コヒーレント状態を構成する、異なる2つの方法がある (Bahr and Thiemann 2009; Freidel *et al.* 2009; Freidel and Speziale 2010b; Bianchi *et al.* 2010a). ここではその意味が明瞭となる簡単な方法を提示する (Bianchi *et al.* 2010a,c). 起きることを理解するために、簡単な例から始めよう。位置 q と運動量 p を持つ1次元の量子系を考えよ。相空間の点 (q, p) にピークを持つ波束は (Schrödinger 表示において規格化を無視すると)

$$\langle x|q, p\rangle \equiv \psi_{q,p}(x) = e^{-\frac{(x-q)^2}{2\sigma^2} + \frac{i}{\hbar}px}. \quad (8.111)$$

この状態は位置について拡がり $\Delta x \sim \sigma$ を、運動量について拡がり $\Delta p \sim \hbar/\sigma$ を持つ、と言うのも、その Fourier 変換は (規格化を別にして)

$$\langle k|q, p\rangle \sim e^{-\frac{(k-p/\hbar)^2}{2/\sigma^2} + i q k}. \quad (8.112)$$

後の便宜のため、この状態が (常に規格化を無視することにして)

$$\psi_{q,p}(x) = e^{-\frac{(x-z)^2}{2\sigma^2}} \quad (8.113)$$

と書けることに注意する、ここに z は複素変数

$$z = q - i\frac{\sigma^2}{\hbar}p. \quad (8.114)$$

すなわち、相空間の点 (q, p) にピークを持つ波束は複素数の位置を持つ Gauss 型の関数で書ける。

群の変数とその共役の両方にピークを持つ、この状態の $\mathcal{H}_\Gamma$ における類似物が必要である。まず $L_2[\text{SU}(2)]$ を考えよう。群の変数上で完全にピークしているこの空間における状態は明らかに群上のデルタ関数で与えられる。(一般化された) 状態

$$\psi(U) = \delta(U) \quad (8.115)$$

は原点 $U = \mathbb{1}$ においてシャープであるのに対し、状態

$$\psi(U) = \delta(Uh^{-1}) \quad (8.116)$$

は群要素 $h \in \text{SU}(2)$ においてシャープである。これらの状態は群上の“Fourier 変換”〔式(5.40),(5.64)〕

$$\delta(U) = \sum_j d_j \text{Tr}_j[U] \quad (8.117)$$

から明らかなように、もちろん共役変数において完全に拡がっている。ところが運動量空間における Gauss 型の因子を加えて、原点の周りに“状態を拡げる”ことができる。これがどのように行えるのかを理解するために、 ∇^2 をラプラシアン、また $t = \sigma^2$ として、Gauss 型はデルタ関数に演算子 $\exp\{-t\nabla^2\}$ を作用させて得られることを思い出そう。

note 例えば1次元では $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$ として、 $\delta(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}$ に $e^{+t\nabla^2}$ (符号を修正した) を作用させると、

$$\begin{aligned} e^{+t\nabla^2} \delta(x) &= \int \frac{dk}{2\pi} \left[1 - tk^2 + \frac{(tk^2)^2}{2!} - \dots \right] e^{ikx} = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx - tk^2} = \int \frac{dk}{2\pi} \exp \left[-t \left(k - \frac{ix}{2t} \right)^2 - \frac{x^2}{4t} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-x^2/4t}. \end{aligned}$$

これは初期分布 $\delta(x)$ を拡散方程式に従って“時刻” t の Gauss 分布に移す操作と見なせる。

群の上で同じことを行いラプラシアン $\bar{L}^2$ を用いると、状態

$$\psi_{1,0}(U) = \sum_j d_j e^{-tj(j+1)} \text{Tr}_j[U] \quad (8.118)$$

が与えられ、これは拡がり $\sqrt{t}$ で $U = 1$ にピークしていると同時に、拡がり $1/\sqrt{t}$ で $j = 0$ にピークしている。同様に、

$$\psi_{h,0}(U) = \sum_j d_j e^{-tj(j+1)} \text{Tr}_j[Uh^{-1}] \quad (8.119)$$

は $U = h$ と $j = 0$ において、それぞれ拡がり $\sqrt{t}$ と $1/\sqrt{t}$ でピークしている。次にどのようにして $j \neq 0$ にピークを持つ状態を得るか？ 粒子の場合、これは振動する因子 $\exp\{ipx/\hbar\}$ を加えることで行われる。ところが我々はこれが引数を複素化することで得られることも見た。同じことを群の上でも行おう。SU(2) の複素化は SL(2, $\mathbb{C}$) で与えられる。そこで状態

$$\psi_H(U) = \sum_j d_j e^{-tj(j+1)} \text{Tr} D^{(j)}(UH^{-1}) \quad (8.120)$$

を考えよう、それは

$$H = e^{it \frac{E}{l_0^2}} h \quad (8.121)$$

なる変数 $H \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ でラベルされ、ここに $h \in \text{SU}(2)$ であり、また $E = \vec{E} \cdot i \frac{\vec{\sigma}}{2}$ は su(2) 代数に属する。Wigner 行列はここでは SL(2, $\mathbb{C}$) 要素 H の上で評価されていることに注意せよ：このように述べる時、我々はその複素平面上的解析接続を意味している。実際、あからさな計算は

$$\frac{\langle \psi_H | U | \psi_H \rangle}{\langle \psi_H | \psi_H \rangle} = h, \quad \frac{\langle \psi_H | \vec{E} | \psi_H \rangle}{\langle \psi_H | \psi_H \rangle} = \vec{E}, \quad (8.122)$$

および以前と同じ拡がりを与える。拡がり $\Delta U_l \sim \sqrt{t}$ および $\Delta E_l \sim l_0^2 \sqrt{1/t}$ である。

スケール $E \sim L^2 \sim l_0^2 j \gg l_0^2$ [原文では $\ll l_0^2$] での現象を調べるならば、

$$\frac{\Delta E}{E} \sim \frac{1}{\sqrt{t}j}. \quad (8.123)$$

これが小さいためには、

$$\sqrt{t} \gg \frac{1}{j} \quad (8.124)$$

が必要である。したがって同時に

$$\frac{1}{j} \ll \sqrt{t} \ll 1 \quad (8.125)$$

でなければならない。このとき [上式 (8.125) の逆数をとって l_0^2 を掛けると] $\sqrt{t}$ は

$$l_0 \ll L_{\text{wp}} \ll L \quad (8.126)$$

なる中間のスケール $L_{\text{wp}}^2 = l_0^2 \sqrt{t}$ を定めることに注意せよ。スケール L_{wp} は現象のスケール L と Planck スケール l_0 の中間にあるスケールである。それは波束のサイズを与える。半古典的な領域にあるためには、それは考えているスケールより極めて小さいものの、なお Planck スケールより極めて大きくなければならない。

このときこれらの状態を各結節点において $SU(2)$ の下で不変にすることで、スピン・ネットワーク状態に一般化するのは容易である。グラフ Γ 上の外部コヒーレント状態はこのとき、グラフ上の各リンク l に関する $SL(2, \mathbb{C})$ 変数 H_l でラベルされ、

$$\psi_{H_l}(U_l) = \int_{SU(2)} dh_n \prod_l \sum_{j_l} d_{j_l} e^{-t j_l(j_l+1)} \text{Tr} D^{(j_l)}(U_l h_{s_l} H_l^{-1} h_{t_l}^{-1}) \quad (8.127)$$

で定義され、ここに各 l に対して、結節点 s_l と t_l は源と標的 [始点と終点] である。群上のラプラシアンに対する拡散方程式の解の $SL(2, \mathbb{C})$ 上への解析接続であるため群上の“熱核 (heat kernel)”と呼ばれる、積分核

$$K(U, H) = \sum_j d_j e^{-t j(j+1)} \text{Tr} D^{(j)}(U H^{-1}) \quad (8.128)$$

を導入し、

$$\psi_{H_l}(U_l) = \int_{SU(2)} dh_n \prod_l K(U_l, h_{t_l} H_l h_{s_l}^{-1}) \quad (8.129)$$

と書くことと便利である。核は $SU(2)$ と $SL(2, \mathbb{C})$ を結び付けるものの、それとは無関係の Y_γ 写像と混同してはならない。

状態たち ψ_{H_l} はループ量子重力の外部コヒーレント状態である。それらは 3 次元の三角形分割における内部および外部曲率の両方にピークを持つ。その定義における $SU(2)$ 積分により、重要なのは各法線の特定の向きではなく、 $SU(2)$ 不変な量であり、それは法線の長さ、すなわち面の面積と、あらゆる結節点における 2 つの法線間の角度に他ならない。データ H_l と幾何学の関係は以下のように明確化できる。

Lorentz 変換 H は常に回転 R 、 z 方向への推進 (boost) $e^{p \frac{\sigma_3}{2}}$ 、および今一つの回転 R' の積で書ける。さらに、あらゆる回転 R は $R_{\vec{n}}$ と z 軸周りの回転 $e^{iq \frac{\sigma_3}{2}}$ の積として書くことができ、ここに $R_{\vec{n}} \in SU(2)$ は $(0, 0, 1)$ の向きを向く単位ベクトルを単位ベクトル $\vec{n}$ へと、両方 [の単位ベクトル] に垂直な軸の周りに回す回転行列である。これを用いて常に

$$H_l = R_{\vec{n}_{s(l)}} e^{-i z_l \frac{\sigma_3}{2}} R_{\vec{n}_{t(l)}}^{-1} \quad (8.130)$$

と書くことができる、複素変数

$$z_l = k_l + i \frac{2t}{l_0^2} A_l \quad (8.131)$$

に対して、 H_l の幾何学的解釈はこのとき 4 つの量 $(A_l, k_l, \vec{n}_s, \vec{n}_t)$ で与えられる。実際、 $j_l^0 = A_l/l_0^2$ 、また $\psi_{j_l, \vec{n}_{s_l}, \vec{n}_{t_l}}$ を 8.1.2 項で定義した内部コヒーレント状態 (8.23) [式 (8.38)] として、状態 ψ_{H_l} が

$$\psi_{H_l} = \sum_{j_l} \prod_l d_{j_l} e^{-t(j_l - j_l^0)^2} e^{i k_l} \psi_{j_l, \vec{n}_{s_l}, \vec{n}_{t_l}} \quad (8.132)$$

の形に書けることを示すのは困難ではない (Bianchi *et al.* 2010a)。2 つのベクトル $\vec{n}_s$ と $\vec{n}_t$ は三角形 l の、この三角形を境界に持つ 2 つの四面体における法線を表し、 A_l はこの三角形の面積、何故なら面積を定めるスピンは $j_l^0 = A_l/l_0^2$ にピークを持つからであり、また k_l は面積に共役な変数を定め、それは三角形における外部曲率、すなわち 2 つの四面体に対する 4 次元の法線の間角度に関する^{*149}。この幾何学的な解釈により、内部および外部幾何学を持つ離散的な空間を H_l から構築することが可能になる。

^{*149} より正確には、 k_l はリンクに沿う Ashtekar 接続のホロノミーで決まり、それは 2 面角と、三角形に垂直な 3 次元の接続成分の両方に依存する (Rovelli and Speziale 2010)。

各四面体の内部で計量が平坦であると仮定すれば，三角形分割の計量は各三角形において不連続となり得る，何故なら三角形の面積と法線は一方の側と他方で合致するものの，三角形の辺の長さに関してはそうではないからである．これらの離散化された幾何学は“ねじれた幾何学 (twisted geometries)”と呼ばれ，Speziale と Freidel (Freidel and Speziale 2010b) によって詳しく研究されている．Freidel and Speziale (2010a); Rovelli and Speziale (2010); Magliaro and Perini (2012) および Haggard *et al.* (2013) も見よ．

これらの状態は，波束を用いた標準的な量子力学の解析とアナログな，ダイナミクスの完全な半古典的解析の出発点となる．最後の章たち (last chapters) での物理的応用では，それらを繰り返し用いることになる．[特に外部コヒーレント状態は 11.3 節と 12.2 節で用いる．]

第9章 物質

宇宙は重力場のみから成るのではない．フェルミオンと Yang–Mills 場，またおそらくスカラー場もある．本章では Bianchi *et al.* (2010b) に従って，フェルミオンと Yang–Mills 場をどのように重力場に結合できるかを説明する (Han and Rovelli (2013) も見よ)．結果として得られる理論は依然として紫外有限である，何故なら幾何学の量子化は物質場に対しても，高運動量の Feynman 積分における物理的な切断として振舞うからである．ある意味，フェルミオンと Yang–Mills はあたかも Planck サイズの格子状にあるかのように振舞う．

9.1 フェルミオン

フェルミオンの量子重力への力学的結合は，スピン・フォーム形式では単純である．簡単のために，まず 4 次元の Euclid 的な空間を考えよ．Dirac 作用は

$$S_D = i \int d^4x \bar{\psi}_D \not{\partial} \psi_D \quad (9.1)$$

となり，これ以降常に複素共役を足すものと理解する．2 つの複素成分 ψ^A , $A = 0, 1$ を持つカイラル・スピノル $\psi \in \mathbb{C}^2$ に注意を向けよう．その作用は S_D の，その 2 つのヘリシティ成分の 1 つへの射影である．これは

$$S = i \int d^4x \bar{\psi} \sigma^I \partial_I \psi \quad (9.2)$$

となり，ここに $\sigma^I = (1, \vec{\sigma})$ は Pauli 行列であり，また $\bar{\psi}$ は ψ の Hermite 共役を表す [複素共役を足す措置を含め，例えば文献 [10, pp.23–26] を参照]．これは [微分] 形式の記法で

$$S = i \int \bar{\psi} \sigma^I d\psi \wedge e^J \wedge e^K \wedge e^L \epsilon_{IJKL} \quad (9.3)$$

と書き直すことができ，ここに e^I はテトラード場であって，今のところあくまで Euclid 的である．

note Euclid 空間を考えているので上式 (9.1–3) において $\sqrt{|\det g|} = |\det e| = 1$ となっている．

実際，式 (9.9) 直後に $e^I = dx^I$ とある．特に式 (9.3) に関しては式 (3.20) を見よ．

座標系 $x = (x^I)$ を固定し，時空を 4 次元のセル (4-cells ; 4-セル) v の集まり (union) へと分割することで離散化する．(向き付けされた) 辺 e で繋がった頂点 v (その座標 x_v) を持つ，双対な複体を考えよ． v を端に持つ辺の数を $|v|$ とする．場 $\psi(x)$ を各頂点におけるその値 $\psi_v = \psi(x_v)$ で近似する．各辺上で微分を

$$\psi_{t_e} - \psi_{s_e} \sim (x_{t_e}^I - x_{s_e}^I) \partial_I \psi \quad (9.4)$$

と離散化する [$\partial_I \psi$ の定義式と見る]，ここに s_e と t_e は辺 e の源 (source) と標的 (target) [これまで通り始・終点] である．これは

$$u_e^I \partial_I \psi \sim \frac{\psi_{t_e} - \psi_{s_e}}{l_e} \quad (9.5)$$

を与え，ここに $l_e = |x_{t_e}^I - x_{s_e}^I|$ は辺 e の長さ，また $u_e^I = (x_{t_e}^I - x_{s_e}^I)/l_e$ は e に平行な単位ベクトルである．作用 (9.2) はこのとき 4-セルにわたる和として離散化できる： $S \rightarrow \sum_v S_v$ ．

$$S_v \sim \frac{4iV_v}{|v|} \sum_{e \in v} \bar{\psi}_v u_e^I \sigma_I \frac{\psi_{v+e} - \psi_v}{l_e} \quad (9.6)$$

であり、ここに和は v を端に持つ辺にわたり、 V_v は $[v]$ に双対な 4-セル v の体積であり、また因子 $\frac{4}{|v|}$ は重複する辺が微分を過剰に勘定する (over-count) 事実を考慮するために導入した。上記の第 2 項は複素共役を差し引く際に相殺する [以上を本稿次項で補足]。ここで辺 e に双対な 3-セル τ_e を考えよ。これは辺に垂直であると仮定せよ。各 4-セル v は底面 τ_e と高さ $h_e = l_e/2$ を持つ、 $|v|$ 個のピラミッドに分割できる。これらの 4 次元体積は $\frac{1}{4}h_e v_e$ であり、ここに v_e は τ_e の 3 次元体積である [本稿次項で補足]。これを用いると、[式 (9.6) における体積 V_v をあらかじめピラミッドの体積 $\frac{1}{8}l_e v_e$ に分割して e ごとの和に含められるので]

$$S_v \sim \frac{i}{2} \sum_{e \in v} \bar{\psi}_v v_e \sigma_e \psi_{v+e} \quad (9.7)$$

であり、ここに

$$\sigma_e \equiv \sigma^I u_{eI} \quad (9.8)$$

は“ e 方向の” σ -行列である。これは

$$v_e \sigma_e \equiv \sigma^I \int_{\tau_e} \epsilon_{IJKL} e^J \wedge e^K \wedge e^L \quad (9.9)$$

と書くことができ、ここに $e^I = dx^I$ はトライアド 1 形式である。[右辺の積分は法線要素 (3.41) の積分となり $v_e u_{eI}$ を与える。] ここで和の各項は辺の量のみに依存することに注意せよ。これは完全な離散化した作用を、辺の項の和

$$S = i \sum_e \bar{\psi}_{s_e} v_e \sigma_e \psi_{t_e} \quad (9.10)$$

として書くことを動機付ける [本稿次節で補足]。より一般に、もしスケール a でゆっくり変化するあらゆる 1 形式 $\omega^I = \omega_\mu^I dx^\mu$ の 4 つ組に対して

$$\int d^4x \delta_I^\mu \omega_\mu^I(x) = \sum_e v_e \int_e \omega^I u_{eI} \quad (9.11)$$

ならば (Ashtekar *et al.* 1992), 辺 e の集まりはデータ (v_e, u_{eI}) と合わせてスケール a において平坦な計量を近似すると言う。するともし 2-複体が平坦な計量を近似するならば、式 (9.10) は Weyl 作用の離散化である。式 (9.10) はフェルミオンの作用を離散化する非常に単純な表現である^{*150}。その単純性はグラフ上の自由粒子ハミルトニアン of 単純性を想起させる (Rovelli and Vidotto 2010)。それは式 (9.9) と作用の形 (9.3) から直接推測することもできた。

重力との結合を見据え、また境界状態をより良く理解するために、頂点の変数から辺の変数に移るのが便利である。 x_e を e と τ_e の交点とし、辺の変数 $\psi_e = \psi(x_e)$ を導入する。我々が取り組んでいる場の 2 階微分を無視できる近似では、 $\psi_e \sim \frac{1}{2}(\psi_{s_e} + \psi_{t_e})$ このことと、2 次の項 (quadratic terms) を平均するとゼロになる事実を用いると

$$S = \frac{i}{4} \sum_{ve} \bar{\psi}_v v_e \sigma_e \psi_e \quad (9.12)$$

と書くことができ、ここで和は全ての隣接する頂点-辺の組にわたる [本稿次節で補足]。次いで (この近似では常に) 頂点フェルミオンを対応する境界の辺のフェルミオンの平均として表現できることに注意する：

^{*150} 格子上のフェルミオンは、フェルミオンの重複問題 (fermion-doubling problem) [例えば文献 [22, § 15.4]] と関係するカイラル・アノマリーに悩まされる。標準的な三角形分割と以下で導入する重力変数上の積分がないため、しかしながら、ここではフェルミオンは本質的にランダムな格子上にあり、(明白な) 種類の重複問題は生じない。

$\psi_v = \frac{1}{|v|} \sum_{e' \in v} \psi_{e'}$. これは

$$S \sim \sum_v \frac{i}{4|v|} \sum_{e, e' \in v} \bar{\psi}_{e'} v_e \sigma_e \psi_e \quad (9.13)$$

を与える. そこで, 境界場 ψ_e を持つ各 4-セル v に作用

$$S_v = i \sum_{ee'} \bar{\psi}_{e'} v_e \sigma_e \psi_e \quad (9.14)$$

を関係付けることで, フェルミオンの作用を離散化することを考える, ただしここで簡単のために全ての頂点は [三角形分割の場合のように] 同じ価数を持つと仮定して, 定数を場の再定義に吸収した. これはフェルミオンを量子重力と結合するのに用いることができる表現である.

2-複体上の量子フェルミオン場

量 (v_e, σ_e) で特徴付けられる 2-複体のフェルミオン分配関数を考えよ. これは Berezin 積分 [Grassmann 変数の積分 [22, § 14.1]]

$$Z = \int D\psi_e e^{iS} \quad (9.15)$$

で与えられるだろう. 積分測度を

$$D\psi_e = \frac{1}{v_e^2} d\psi_e d\bar{\psi}_e e^{-v_e \bar{\psi}_e \psi_e} \quad (9.16)$$

と選ぶ, これは 2 つの 4-セル間の境界と見なされる各辺におけるスカラー積を実現し, またここで Pauli の原理を考慮に入れるために場 ψ_e を反交換する変数と解釈する. 指数における体積 v_e は次元に関する理由が必要であり, また古典論において

$$\langle \psi | \psi' \rangle = \int d^3x \sqrt{q} \bar{\psi}(x) \psi'(x) \quad (9.17)$$

は 3 次元体積の因子 $\sqrt{q}$ を含む事実を忘れないためのものである (Rovelli and Vidotto 2010). [以上, 本稿次節で補足する.] Berezin 積分の定義は唯一の消えない積分が[‡]

$$\int d\psi d\bar{\psi} \psi^a \bar{\psi}^b \psi^c \bar{\psi}^d = \epsilon^{ac} \epsilon^{bd} = (\delta^{ab} \delta^{cd} - \delta^{ad} \delta^{bc}) \quad (9.18)$$

となることである [非自明な第 1 の等号を本稿次節で確認]. 頂点作用 [式 (9.14)^{*151}] を Taylor 級数に展開すると

$$e^{iS_v} = 1 + \sum_{e_1 e_2} \bar{\psi}_{e_1} v_{e_2} \sigma_{e_2} \psi_{e_2} + \sum_{e_1 e_2 e_3 e_4} (\bar{\psi}_{e_1} v_{e_2} \sigma_{e_2} \psi_{e_2}) (\bar{\psi}_{e_3} v_{e_4} \sigma_{e_4} \psi_{e_4}) + \cdots \quad (9.19)$$

この級数は打ち切られる, 何故なら各辺につき最大で 4 つのフェルミオン (2 つの ψ と 2 つの $\bar{\psi}$) が存在し得るからである. 式 (9.15) における各辺の積分は, 辺にフェルミオンがないか, 項 $\bar{\psi}_e \psi_e$ があるか, 項 $\bar{\psi}_e \psi_e \bar{\psi}_e \psi_e$ があるとき以外はゼロを与える. 測度における体積の因子は頂点振幅における体積の因子を相殺する. [以上, 本稿次節で補足する.] 結果は式 (9.15) が

$$Z = \sum_{\{c\}} \prod_c A_c \quad (9.20)$$

^{*151} S_v と S_v の表記揺れがあるが, 4-セル v と双対な頂点 v は 1 対 1 に対応するので, いずれも妥当な表記として併用し得る.

の形の、各々がトレースの積から成る項の和になるというものであり、ここに $\{c\}$ は各々が 2-複体上で閉じた一連の向き付けされた辺 $c = (e_1, \dots, e_N)$ から成る、向き付けされたサイクル c の集合であり、また各トレースは

$$A_c = (-1)^{|c|} \text{Tr}[\sigma_{e_1} \cdots \sigma_{e_N}] \quad (9.21)$$

であり、ここに $|c|$ は式 (9.18) に由来する負号の数である。全ての辺に対して、2 本より多いフェルミオンの線は存在し得ず (Pauli の原理)、またもし 2 本の線があれば、それらは (式 (9.18) によって) 反対称化される。明示的には各項は

$$A_c = (-1)^{|c|} \text{Tr}[\sigma_{I_1} \cdots \sigma_{I_n}] u_{e_1}^{I_1} \cdots u_{e_n}^{I_n} \quad (9.22)$$

となり、したがって 3-セルの法線との Lorentz 不変な縮約である^{*152}。

重力と相互作用するフェルミオン

ここで Lorentz 的な枠組みに戻り、第 1 に重要な技術的見解を述べる。全ての辺は時間的であると仮定する。[これは Regge の論文の設定 (C.1.6 項) を想起させる。] 単位ベクトル $u^I = (1, 0, 0, 0)$ をベクトル u_e^I へと回転する $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 行列 g_e (位相は重要でなく、 g_e が純粋な推進 (boost) であることを要求して定められる [本稿次節で補足])

$$u_J \Lambda_{g_e}^J = u_{eI} \quad (9.24)$$

を考えよ、ここに Λ_g は $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ のベクトル表現である。 σ^I 行列の変換性

$$\Lambda_{gJ}^I \sigma^J = g^\dagger \sigma^I g \quad (9.25)$$

を思い出し [文献 [10, p.10]; 無限小変換に対して直接確認できる]、また $\sigma^0 = 1$ なので

$$[\sigma_e \equiv] u_e^I \sigma_I = g_e^\dagger \sigma^0 g_e = g_e^\dagger g_e \quad (9.26)$$

であることに注意する [最左辺 $u_e^I \sigma_I$ に式 (9.24) を代入して式 (9.25) を適用する]。したがって離散化した作用 (9.10) を

$$S = i \sum_e v_e \bar{\psi}_{s_e} g_e^\dagger g_e \psi_{t_e} \quad (9.27)$$

の形に、また頂点振幅 [式 (9.14)] を

$$S_v = i \sum_{ee'} v_e \bar{\psi}_{e'} g_e^\dagger g_e \psi_e \quad (9.28)$$

と書くことができる。[Euclid 的な結果 (9.10), (9.14) を援用できる理由を本稿次節で考察する。] これらの $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 群要素の幾何学的な解釈は何か？

単一のカイラル・フェルミオンを考えよ。これはフェルミオン場の単一のモードの量子力学的な励起、あるいは 1 つの時空点におけるスピン $\frac{1}{2}$ を持つフェルミオンの粒子と考えられる^{*153}。フェルミオン ψ は $\text{SU}(2)$ の基本表現 $H^{\frac{1}{2}} \sim \mathbb{C}^2$ において変換する。ベクトル空間 $\mathbb{C}^2$ は $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の基本表現を担う空間 (carrier space) $H^{(\frac{1}{2}, 0)}$ でもあり、これはフェルミオンの Lorentz 変換の性質を定める。ところが $H^{\frac{1}{2}}$ はユニタリー

^{*152} もし式 (9.16) における体積の因子を含めなければ、式 (9.21) は

$$A_c = (-1)^{|c|} v_{e_1} \cdots v_{e_N} \text{Tr}[\sigma_{e_1} \cdots \sigma_{e_N}] \quad (9.23)$$

に置き換わる。この代案は別の箇所でも調べる [教科書内には見当たらない]。

^{*153} Poincaré 不変性のない粒子の概念に関して、Colosi and Rovelli (2009) を見よ。

表現であるのに対し、 $H^{(\frac{1}{2},0)}$ はそうではない [7.2.1 項冒頭, 7.5.4 項前半]; 言い換えると、 $\mathbb{C}^2$ は $SU(2)$ 不変なユニタリー変換を備えられるのに対し、このスカラー積は $SL(2, \mathbb{C})$ 不変ではない [1.7.1 項, 7.2.1 項 pp.136–137, 8.2 節 pp.169–170]*¹⁵⁴。このことは [スカラー積 (1.24) を] $\langle \psi | \phi \rangle = \bar{\psi} \sigma^0 \phi$ と書くとりわけ明瞭になり、これはスカラー積が 4 元ベクトル $\bar{\psi} \sigma^I \phi$ の時間成分であることを示している。 $\partial_I = d(u_I)$ で微分の向きを与えるコベクトル u_I と Lorentz ベクトル $s^I = \bar{\psi} \sigma^I d\psi$ を縮約した Lorentz スカラーを構成することで、Dirac 作用はこの依存性を利用する。

この議論の観点からは、行列 g_e の幾何学的解釈は明瞭である。離散的な理論において、Lorentz 系は各 3-セルにおいて 3-セルの 4 次元的法線 (4-normal) で定められ、法線はそれに沿って微分が計算される向きである。行列 g_e は 4-セルの中央に固定された基準系から 3-セルの中央の基準系、すなわち 3-セルの法線が時間方向 $(1, 0, 0, 0)$ を向く 4-セルの境界へと、フェルミオンを平行移動する。作用を定義するスカラー積はこの系においてとられる。構成は Lorentz 不変である、何故ならスカラー積の特定の基準系は、それに沿ってフェルミオンの変化が計算されるところの法線で決まるからである。

ここで、式 (9.28) は離散化を曲がった時空に一般化する上でとりわけ興味がある。実に、曲がった幾何学は Regge 計算法の場合のように、平坦な 3-セルで貼り合わされた平坦な 4-単体を用いて離散化できる。曲率はこのとき 2-セル上に制限される。このことは 2-セル周りのスピン接続のホロノミーが 1 (unity) からずれ得ることを意味する。したがって一般に曲がった空間では各 4-セルにおいて、全ての 3-セルを通過して自身へと平行移動される基準系を選ぶ方法はない。言い換えると、 s_e から e への平行移動は t_e から e への平行移動と異なり得る。したがって Regge の方法で離散化された曲がった時空へのフェルミオン作用の一般化は、式 (9.27) を

$$S = i \sum_e v_e \bar{\psi}_e g_{e s_e}^\dagger g_{e t_e} \psi_{t_e} \quad (9.29)$$

で置き換えることで得られ、ここに g_{ev} は (平坦な) 4-セル v を覆う座標のパッチ (patch) から (平坦な) 3-セル e を覆う座標のパッチへの、スピン接続のホロノミーである; あるいは等価的に、頂点振幅 (9.28) を

$$S_v = i \sum_{e' \in e} v_e \bar{\psi}_{e'} g_{e s_{e'}}^\dagger g_{e t_{e'}} \psi_{e'} \quad (9.30)$$

で置き換えることで得られる。曲がった時空を表す 2-複体上のフェルミオン分配関数はしたがって以前のようであり [式 (9.20)], 唯一の違いは各サイクルの振幅 (9.22) が

$$A_c = (-1)^{|c|} \text{Tr}[g_{e_1 v_1}^\dagger g_{e_1 v_2} \cdots g_{e_n v_n}^\dagger g_{e_n v_1}] \quad (9.31)$$

で置き換えられることであり、ここに $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_n, e_n)$ はサイクル c が通過する一連の頂点と向き付けされた辺である。これは

$$g^* = (g^{-1})^\dagger = -\epsilon g^\dagger \epsilon \quad (9.32)$$

[第 2 の等号は式 (1.23) に続く U^{-1} の公式のノートを見よ] を定義することで、より見やすい形に書くことができる。回転に対して $g^* = g$ であるのに対し、推進 (boost) に対して $g^* = g^{-1}$ であることに注意せよ [本稿次節で補足]。これを用いると、

$$A_c = (-1)^{|c|} \text{Tr}[g_{v_1 e_1}^* g_{e_1 v_2} \cdots g_{v_n e_n}^* g_{e_n v_1}] \quad (9.33)$$

*¹⁵⁴ $\mathbb{C}^2$ における基底を固定すれば、スカラー積は $\langle \psi | \phi \rangle = \bar{\psi}^a \phi^b \delta_{ab}$ で与えられ、テンソル δ_{ab} は $SU(2)$ の下で不変であるのに対し $SL(2, \mathbb{C})$ の下では不変でない。

となり、ここで一連の頂点と辺はサイクルの順序にある。完全な分配関数 (9.20) は

$$Z = \sum_{\{c\}} \prod_c (-1)^{|c|} \text{Tr} \frac{1}{2} \left(\prod_{e \in c} (g_{s_e e}^* g_{et_e})^{\epsilon_{ec}} \right) \quad (9.34)$$

となり、ここで辺とサイクルの向きが合致しているかに応じて $\epsilon_{ec} = \pm 1$ である。

作用 (9.27) と振幅 (9.33) はフェルミオン場を量子重力に結合する上でとりわけ有用である、何故ならそれらは 2 つの量 v_e と g_{ve} を通じてのみ幾何学に依存しており、これらはまさに重力的なスピン・フォーム振幅に現れる量だからである。このことを次項で行う。

量子重力への結合

重力の遷移振幅は

$$W_C(h_I) = N_C \sum_{j_I} \int_{\text{SL}(2, \mathbb{C})} dg'_{ve} \prod_f \text{Tr}_{j_f} [Y_\gamma^\dagger g_{e'v} g_{ve} Y_\gamma Y_\gamma^\dagger g_{ev'} g_{v'e''} Y_\gamma \cdots] \quad (9.35)$$

と書けることを思い出そう [式 (7.61)]。簡単のため、ここでは分配関数 (境界なし)

$$Z_C = N_C \sum_{j_I} \int_{\text{SL}(2, \mathbb{C})} dg'_{ve} \prod_f \text{Tr}_{j_f} [Y_\gamma^\dagger g_{e'v} g_{ve} Y_\gamma Y_\gamma^\dagger g_{ev'} g_{v'e''} Y_\gamma \cdots] \quad (9.36)$$

を考えよう。今やフェルミオンを量子重力に結合する方法はかなり自明である：上記のフェルミオン分配関数を状態にわたる量子力学的な和の上に書けば充分である。この表現における $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 行列 g_{ev} は、式 (9.27) と式 (9.33) における $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 行列 g_{ev} に同定できる。それらは辺から頂点への平行移動演算子という、同じ幾何学的解釈を持つ；第 2 に、より重要なことであるが、Barrett *et al.* (2010) における頂点振幅の漸近解析は積分の鞍点近似が、4-セルにおける (任意の) Lorentz 系を、時間方向が 3-セルの法線に沿うところの 3-セルにおける Lorentz 系へと回転させる、 g_{ev} の値上であることを示しており、このことはまさに前のパラグラフ [2 式 (9.28–29) の間] で説明した幾何学である。したがって Planck スケールから離れる極限では、これらの群要素はまさにフェルミオン作用をもたらすのに必要な値をとる。

フェルミオンの存在下におけるダイナミクスに対する自明な仮定はしたがって

$$Z = N_C \sum_{\{c\}} \sum_{j_I} \int_{\text{SL}(2, \mathbb{C})} dg'_{ve} \prod_f \text{Tr}_{j_f} \left(\prod_{e \in f} Y_\gamma^\dagger g_{e'v} g_{ve} Y_\gamma \right) \prod_c (-1)^{|c|} \text{Tr} \left(\prod_{e \in c_n} (g_{es_e} g_{et_e}^\dagger)^{\epsilon_{ec}} \right) \quad (9.37)$$

であり、ここで $\{c\}$ は泡 (foam) の辺に沿って走る世界線の族をラベルしている。和は 1 度より多く重複しない全ての族にわたる。この表現における $*$ の定義は各辺における特定の $\text{SU}(2)$ 部分群の選択に依存しているものの、ちょうど Rovelli and Speziale (2011) で論じたように、 $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 積分によりこの依存性は全表現からは落ちることに注意せよ。したがってバルクにおいて Lorentz 不変性が実装される。

この表現はフェルミオンと相互作用している重力の量子論を定義する^{*155}。

^{*155} 重力中のフェルミオンのダイナミクスに関するこの自然性は、既に初期にループ量子重力の文献 (Morales-Tecotl and Rovelli 1994, 1995) において指摘されており、また驚きである。フェルミオンは本質的に 2-複体にわたる非局所的な、空間の量子のスピン $\frac{1}{2}$ の外部“面”と見なせる。固定した時刻において、それは Wheeler–Smolin “Kerr–Newman フェルミオン” のように、時空の外部で消え、遠方で再び現れる“非局所的な”ループと見なせる：John Wheeler によってずっと昔に提示され (Wheeler 1962; Sorkin 1977), Lee Smolin (Smolin 1994) によってループ重力の文脈で考えられた、ワームホールとしてのフェルミオンの描像である。

9.1 節について

■ S_v の式 (9.6) と、その第 2 項が複素共役と相殺することについて まず作用 (9.2) で $\int d^4x \rightarrow \sum_v V_v, \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}_v$ とする。その結果として本稿では式 (9.6-7) において、 $\bar{\psi}_e \rightarrow \bar{\psi}_v$ と修正した。実際このように修正して初めて、式 (9.6) の第 2 項が複素共役と和をとったときに相殺すること (教科書 p.188) が保証される。(その際、式 (9.2) の直後にあるようにカイラル・スピノル $\psi \in \mathbb{C}^2$ に対しては $\bar{\psi}$ は単なる Hermite を意味すること [10, p.23], および σ^I の Hermite 性に注意する。) また式 (9.10),(9.12) との整合性も満たされる。

次に方向微分 (9.5) と方向単位ベクトル u_e^I の積は勾配 $\partial_I \psi$ の役割を果たすと考え、 $|v|$ 本の辺 e にわたる適当な平均

$$\text{const} \times \sum_{e \in v} u_e^I \frac{\psi_{v+e} - \psi_v}{l_e} \quad (111)$$

として、 v における微分係数 $\partial^I \psi$ を評価・代用する。ここで ψ_{v+e} は頂点 v から辺 e だけ変位した点での場の値と解釈する (e の向き付けは問題にならない)。

適切な比例係数を見出すために、4-セルを立方格子に選んだ場合を考える。このとき各頂点には 4 つの座標軸の正負の向きに伸びる、合計 $|v| = 8$ 本の辺が接続する。また u_e^I は各座標軸の方向単位ベクトル、またはその逆ベクトルになる。すると微分係数は前方差分と後方差分の平均を用いて、

$$\partial^I \psi \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{e \in v} \frac{\psi_{v+e} - \psi_v}{l_e} u_e^I$$

と表される (第 I 方向の 2 辺 e が上式に寄与を持つ)。この結果を再現するためには、上式 (111) における比例係数を $\text{const} = 4/|v|$ と選べば良い。

■ピラミッドの 4 次元体積が $\frac{1}{4} h_e v_e$ であること (教科書 p.188) について 底面積 S 、高さ h の錐体の体積 $Sh/3$ の導出手順を、4 次元の Euclid 空間における錐体に対して繰り返せば良い。すなわち一般に頂点から距離 x 隔たる“底面”の 3 次元体積 $V(x)$ は体積比に従い x^3 のように増大する。よって高さ $x = h$ での値を $V = V(h)$ とすると、 $V(x) = Vx^3/h^3$ と書ける。(簡単のため引数の有無で $V = V(h)$ と一般の $V(x)$ と区別する。) したがって錐体の体積は

$$\text{vol} = \int_0^h V(x) dx = \frac{1}{4} Vh$$

と表される。この観点からは三角形の面積の公式 $\frac{1}{2}(\text{底辺}) \times (\text{高さ})$ も $n = 2$ 次元空間における錐体の体積の公式として統一的に理解できる。

■辺にわたる和で表した離散的な作用 (9.10) について セル v に関する作用 (9.7) では各頂点 v に接続する辺 e を、その向きを問わずに全て考慮した。このとき向き付けされた 1 本の辺 e は完全な作用 $S = \sum_v S_v$ の中で、 $v = s_e$ と $v = t_e$ の 2 つの項において考慮されることになる。よって作用 (9.7) は複素共役 (c.c. で表す) も含めると

$$S = \frac{i}{2} \sum_{e \in v} \bar{\psi}_v v_e \sigma_e \psi_{v+e} + \text{c.c.} = \frac{i}{2} \sum_e (\bar{\psi}_{s_e} v_e \sigma_e \psi_{t_e} + \bar{\psi}_{t_e} v_e \sigma_{e^{-1}} \psi_{s_e}) + \text{c.c.}$$

と書き換えられる。ところが定義式 (9.8) より $\sigma_{e^{-1}} = -\sigma_e$ であることに注意すると、最右辺の 2 つの項は (前の虚数単位 i を含めて) 互いに複素共役なので、

$$S = i \sum_e \bar{\psi}_{s_e} v_e \sigma_e \psi_{t_e} + \text{c.c.} : (9.10)$$

と簡略化できる.

■辺の変数を導入した作用 (9.12) について 我々は場の 2 階微分を無視する近似を採用していると式 (9.12) の直前にあることは, 式 (9.4-5) を振り返れば分かる. この近似で

$$\psi_{s_e} = \psi_e - \frac{l_e}{2} u_e^I \partial_I \psi_e, \quad \psi_{t_e} = \psi_e + \frac{l_e}{2} u_e^I \partial_I \psi_e$$

と書いて 2 式を辺々足すと $\psi_e = \frac{1}{2}(\psi_{s_e} + \psi_{t_e})$ を得る. なお局所慣性系で計量を平坦な値と見なせるのも, 同じく 2 次の微小量を無視する近似においてである.

さて作用 (9.10) はその導出で見たように, 複素共役も含めて書けば

$$\begin{aligned} S &= i \sum_e (\bar{\psi}_{s_e} v_e \sigma_e \psi_{t_e} - \bar{\psi}_{t_e} v_e \sigma_e \psi_{s_e}) = i \sum_{v=s_e, e} \bar{\psi}_v v_e \sigma_e \psi_{t_e} - i \sum_{v=t_e, e} \bar{\psi}_v v_e \sigma_e \psi_{s_e} \\ &= i \sum_{v=s_e, e} \bar{\psi}_v v_e \sigma_e (2\psi_e - \psi_v) - i \sum_{v=t_e, e} \bar{\psi}_v v_e \sigma_e (2\psi_e - \psi_v) \quad \left(\because \psi_e = \frac{1}{2}(\psi_{s_e} + \psi_{t_e}) \right) \\ &= 2i \sum_{v=s_e, e} \bar{\psi}_v v_e \sigma_e \psi_e - 2i \sum_{v=t_e, e} \bar{\psi}_v v_e \sigma_e \psi_e. \end{aligned} \quad (112)$$

ただし最後の等号では同じ頂点 v で評価された場の 2 次の項について, 与えられた v の周りの辺 e に関する和 (平均) は

$$i \sum_{v=s_e, e} \bar{\psi}_v v_e \sigma_e \psi_e + i \sum_{v=t_e, e} \bar{\psi}_v v_e \sigma_{e^{-1}} \psi_e = i \sum_v \bar{\psi}_v \sigma^I \left(\sum_{e: \text{射出}} v_e u_e^I \right) \psi_v = 0$$

のように, v に接続する辺 e を全て外向きに取り直して評価できる. すると閉包条件 (1.9) と同様に, 外向き法線要素の因子の和が消えると考えた.

ここで頂点-辺の組 (v, e) を指定するとき e は頂点 v から射出する向きと解釈すると, 上式 (112) 最右辺は第 2 項の終点に入射する辺の因子が $(-\sigma_e) = \sigma_{e^{-1}} \rightarrow \sigma_e$ と書き改められるため,

$$S = 2i \sum_{ve} \bar{\psi}_v v_e \sigma_e \psi_e$$

とまとめられる. この式は既に複素共役を含んでいるため, さらに複素共役を足すことを念頭に式を書く場合には, あらかじめ係数 $1/2$ を掛けておく必要がある. いずれにせよ式 (9.12) と数係数は合わない. もっとも定数係数は式 (9.14) において場の再定義に吸収させるため, 最終的な結果 (9.14) に変わりはない. なお上式 (112) 最右辺の 2 項は式 (9.10) の構成を引き継ぎ, 互いに複素共役である.

■フェルミオン分配関数の積分測度 (9.16) について これはフェルミオンのコヒーレント状態 $|\psi\rangle$ の完全性

$$\int d\bar{\psi} d\psi e^{-\bar{\psi}\psi} |\psi\rangle \langle \psi| = 1$$

から得られる経路積分形式の測度と同じ形をしている [21, § 4-6] [22, § 14.2].

式 (9.14) で再定義した場 ψ_e は (体積) $^{-1/2}$ の次元を持つことが見て取れる. ここから測度 (9.16) の指数が無次元であることが保証される. 式 (9.16) の全体に掛かる体積の因子 $1/v_e^2$ については, 後の p.190 の脚注*152 に言及がある.

■Berezin 積分 (9.18) の第 1 の等号について $d\psi d\bar{\psi} \equiv d\psi^0 d\bar{\psi}^0 d\psi^1 d\bar{\psi}^1$ と見れば良い。実際このとき反交換性を利用して Grassmann 数 $\theta = \psi^a, \bar{\psi}^a$ を積分測度の右隣まで移動し、積分操作 $\int d\theta \theta = 1$ により取り除くと

$$\int d\psi^0 d\bar{\psi}^0 d\psi^1 d\bar{\psi}^1 \psi^0 \bar{\psi}^0 \psi^1 \bar{\psi}^1 = - \int d\psi^0 d\bar{\psi}^0 d\psi^1 \psi^0 \bar{\psi}^0 \psi^1 = - \int d\psi^0 d\bar{\psi}^0 \psi^0 \bar{\psi}^0 = + \int d\psi^0 \psi^0 = +1$$

となる [23, § 13.1.2]。よって $a = b = 0, c = d = 1$ に対して式 (9.18) が成り立つ。ところが互換は常に奇置換なので、 ψ^a と ψ^c , $\bar{\psi}^b$ と $\bar{\psi}^d$ の入れ替えに伴い積分 (9.18) は符号が反転する。よって式 (9.18) は常に成り立つ。(なお式 (9.18) は $a = c$ や $b = d$ に対して Grassmann 数の 2 乗が $\theta^2 = 0$ となって、積分がゼロになることを含意している。)

■式 (9.19) と続く説明について 指数の展開 (9.19) は正確には係数 $i^2 = -1$ により交代級数になり、2 次の項に係数 $1/2!$ が付くはずである。

行列 $v_e \sigma_e \equiv M_e$ は、したがって S_v は非可換なので

$$e^{iS} = e^{i \sum_v S_v} \neq \sum_v e^{iS_v}$$

である。しかし作用 $S = \sum_v S_v$ で記述される古典論に対応する量子論を定義する逆問題には曖昧さがある。そこで振幅の局所性 (5.50), (7.53) が満たされるように、被積分関数を $e^{iS} \equiv \sum_v e^{iS_v}$ と改めて分配関数 (9.15) を定義するのが自然であると考えられる。

そこで各頂点に対して指数の展開 (9.19) を書き下すことを考える。同じ辺 e に関する因子 ψ_e を 3 つ以上含む項 $\psi_e^a \psi_e^b \psi_e^c \dots$ は、部屋割り論法により必ず同じ 2 成分の積 $\psi_e^0 \psi_e^0$ または $\psi_e^1 \psi_e^1$ を含むので消える。同様に同じ辺 e に関する因子 $\bar{\psi}_e$ を 3 つ以上含む項も消える。よって式 (9.19) のすぐ後にあるように、各辺につき最大で 4 つのフェルミオン (2 つの ψ と 2 つの $\bar{\psi}$) が存在し得る。辺の本数 $|v|$ は有限なので、高次の項は同じ辺上に同一の場の 2 乗を生じて消える。

さらに積分測度 (9.16) は

$$D\psi_e = \prod_{e=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2}} d\psi_e d\bar{\psi}_e (1 - v_e \bar{\psi}_e \psi_e)$$

となるので、式 (9.21) の直前にあるように e^{iS} のうち積分 (9.15) に寄与する項として、各辺 e につきフェルミオンがないか $\bar{\psi}_e \psi_e$ を 1 つまたは 2 つ含む項のみを残せば良い。

Berezin 積分を式 (9.18) のように書いておくと、分配関数の評価に有用な公式が得られる。例えば単一の辺 e に関する因子を考えて、 $\psi_e, \bar{\psi}_e, M_e \equiv v_e \sigma_e$ における辺のラベルを省略すると、

$$\begin{aligned} \int D\psi \bar{\psi} M \psi &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\psi d\bar{\psi} (1 - v \bar{\psi}^c \psi^c) (\bar{\psi}^a M_{ab} \psi^b) = -\frac{1}{v} M_{ab} \int d\psi d\bar{\psi} \psi^c \bar{\psi}^c \psi^b \bar{\psi}^a \\ &= -\frac{1}{v} M_{ab} \epsilon^{cb} \epsilon^{ca} = -\frac{1}{v} \text{Tr } M = -\text{Tr } \sigma, \\ \int D\psi (\bar{\psi} M \psi)^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\psi d\bar{\psi} (1 - v \bar{\psi}^e \psi^e) (\bar{\psi}^a M_{ab} \psi^b) (\bar{\psi}^c M_{cd} \psi^d) = \frac{1}{\sqrt{2}} M_{ab} M_{cd} \int d\psi d\bar{\psi} \psi^b \bar{\psi}^a \psi^d \bar{\psi}^c \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} M_{ab} M_{cd} \epsilon^{bd} \epsilon^{ac} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{(\text{Tr } M)^2 - \text{Tr}(M^2)\} = (\text{Tr } \sigma)^2 - \text{Tr}(\sigma^2) \end{aligned}$$

を得る。ここで式 (9.19) の後にあるように、測度における体積の因子は Berezin 積分において相殺することが見て取れる。また $\sigma^0 = 1$ はトレースに寄与するので、 $\text{Tr } \sigma = u_I \text{Tr } \sigma^I = 2u_0$ は一般にノンゼロであることに注意する。

■回転と推進 (boost) に対する $SL(2\mathbb{C})$ 群要素 g (式 (9.24) 直前と式 (9.32) 直後) について 3 次元の単位ベクトル $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ と Pauli 行列の組 σ を用いて, 回転と推進に対する群要素はそれぞれに対して順に

$$g(\theta) = \exp\left(-i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{n}\theta\right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) - in_z \sin(\theta/2) & (-in_x - n_y) \sin(\theta/2) \\ (-in_x + n_y) \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) + in_z \sin(\theta/2) \end{pmatrix},$$

$$g(\omega) = \exp\left(\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{n}\omega\right) = \begin{pmatrix} \cosh(\omega/2) + n_z \sinh(\omega/2) & (n_x - in_y) \sinh(\omega/2) \\ -(n_x + in_y) \sinh(\omega/2) & \cosh(\omega/2) + n_z \sinh(\omega/2) \end{pmatrix}$$

の形に書ける [10, p.8] [3, p.224]. これらに対して g^* は式 (9.32) 第 2 辺 $(g^{-1})^\dagger$ で定義されていると見る. (g は一般に非 Hermitic なので, g^* は単に全成分の複素共役をとった行列には一致しない.) そこで逆行列は $g(-\theta), g(-\omega)$ であることを踏まえて g^* を計算すると, 確かに回転に対して $g^* = g$, 推進に対して $g^* = g^{-1}$ であることが分かる.

■作用 (9.27–28) において Euclid 的な結果 (9.10), (9.14) を援用できる理由 2 式 (9.28–29) の間にある g_e の幾何学的解釈の段落 (p.191) を踏まえて考察する. 時間的な辺 e が $(1, 0, 0, 0)$ となる基準系では作用 (9.27–28) は Euclid 空間における作用 (9.10), (9.14) と変わらず, ところが作用の表式 (9.27–28) は Lorentz 不変なので常に成り立つ. これが Euclid 的な理論の結果 (9.10), (9.14) を援用できる理由と考えられる. この推論は Regge 計算法にて近似的に Euclid 的な 3 次元空間で導いた曲率の表式が, 4 次元の擬 Riemann 多様体 (近似的に Minkowski 空間) においても成り立つとする論法 (C.1.5 項, C.2 節) といくぶん似ている. あるいは作用の表式 (9.10), (9.14) は文脈が Euclid 的か Lorentz 的かを問わずに成り立つのに対し, その式 (9.27–28) への書き換えは Lorentz 変換を念頭に置いて初めて行える.

9.2 Yang–Mills 場

ここでフェルミオンはコンパクト群 G の基本表現に属しているとしよう. すると上記の理論は大域的な G 変換の下で不変である. 理論を局所ゲージ変換の下で不変にするために, [通常の Yang–Mills 理論でゲージ場を導入するように] 各くさび (wedge ; ve) に関する群要素 $U_{ve} \in G$ を導入し, 式 (9.10) を

$$S = i \sum_e \bar{\psi}_{s_e} U_{s_e e}^\dagger v_e \sigma_e U_{t_e e} \psi_{t_e} \quad (9.38)$$

で置き換えられる. 境界における量子運動学はこのとき明白である: スピンフォームは $SL(2, \mathbb{C})$ の表現を担い, 結節点における結節因子は $SL(2, \mathbb{C}) \times G$ の基本表現 (の反対称な積) におけるフェルミオンを表す, 可能な余分な脚 (leg) を持つ.

ダイナミクスはどうなるか? それを得る 1 つの可能性は単に作用における重力とフェルミオンの項だけを残すことである. Yang–Mills 作用はこのとき, Zel'dovich Adler (1982) によって示されているように, Yang–Mills 場におけるフェルミオン作用への 1 ループの輻射補正から生じる.

$$Z = \sum_{\{c\}} \sum_{j_f} \int_{SL(2, \mathbb{C})} dg'_{ve} \int_G dU_{ve} \prod_f \text{Tr}_{j_f} \left(\prod_{e \in f} Y_\gamma^\dagger g_{e'v} g_{ve} Y_\gamma \right) \\ \times \prod_c (-1)^{|c|} \text{Tr} \left(\prod_{e \in c_n} (g_{es_e} U_{es_e} U_{et_e}^\dagger g_{et_e}^\dagger)^{\epsilon_{ec}} \right). \quad (9.39)$$

この表現は Einstein–Weyl–Yang–Mills 系の極小結合した (minimally-coupled) スピン・フォーム形式を定義する. 原理的には, それはあらゆる量子重力の振幅を次数ごとに計算するのに用いることができる. 物質

を伴うループ重力理論の解析は初期段階にあり、今のところ成されたことはわずかである (Han and Rovelli 2013).

第 9 章全般について (正準理論との比較 ; 本稿筆者)

LQG の正準な定式化においても物質との結合を議論でき、標準模型で考えられている全ての場は、LQG の枠組みに問題なく含められる [2, § 7.2, § 7.3]. 具体的にはスピン・ネットワーク上で Yang-Mills 場 A_{YM} はリンクに、フェルミオンは結節点に属する. これは荷電粒子から力線が発する様子が、そのままスピン・ネットワークの構造に“乗る”ようなものである. Higgs 場は結節点に位置付けられる. こうして重力場を含め全ての場は、背景時空に対してではなく、互いに対してのみ位置付けられるという描像に達する.

これに対し本書の共変な理論ではスカラー場の取り扱いは論じられていない. フェルミオンは初めはスピン・フォームの頂点上で、次いで辺上で定義される (9.1 節にて $\psi_v \rightarrow \psi_e$). この任意性は連続理論を近似する離散的な理論を定義する逆問題に、複数の可能性があることを反映している. (さらに付言すると、最終的に近似と見なされるのは連続理論の方である.) しかるに辺は結節点の軌跡と見なせるので、これはフェルミオンが境界では結節点に属するという描像と整合し得る. また面はリンクの軌跡と見なせるので、Yang-Mills 場がくさび (wedge) の、したがって面の因子 U_{ve} として導入されていること (9.2 節) は、Yang-Mills 場が境界ではリンクに属するという描像と整合的である.

第 IV 部

物理的応用

第 10 章 ブラックホール

本章と続く 2 章は物理的状況への理論の主な最新の応用を紹介する。成果は主に 3 つの方面で得られている：

- ブラックホールの熱的性質
- 初期宇宙論
- 散乱理論。

理論はこれらの方面で急速に発展しており、したがって以下では基本的な事実のみを網羅し、重要な文献をいくらか示して、これらをあくまで手短かに説明する。ブラックホールから始める、それは今では天空に数多くあることが分かっているものの、宇宙において最も魅力的かつ神秘的であり続けている。

10.1 Bekenstein–Hawking エントロピー

ブラックホールは熱を持つ (hot) ことを場の量子論は予言するという、著しい理論的発見を Stephen Hawking は成し遂げた (Hawking 1974, 1975)。より正確には、ブラックホールを生じる時空上の量子場はその真空状態から、温度

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{k 8\pi G M} \quad (10.1)$$

における出ていく放射の熱的分布を持つ定常状態へと発展する。この結果の驚くべき側面は粒子が生成されることではない：量子場が非定常的なポテンシャルと相互作用するときには常に粒子の生成がある；驚くべきことは出ていく放射の熱的性質である。

この結果は古典的なブラックホールが熱的な系と似た仕方で振舞うことを示す、一連の先行する物理的直観 (Bekenstein 1973) と正確な数学的結果 (Bardeen *et al.* 1973) に信頼性を与える。ブラックホールはちょうど統計的な系のエントロピーのように、(古典的な) 物理的過程で減少し得ない量 (地平面の面積) によって特徴付けられる平衡状態へと急速に発展する。これも全く驚くべきことではない：エントロピーは多くの自由度を持つ系を記述する巨視的変数によって捉えられない、微視的状态に関する情報の量を測る。ブラックホールはちょうど巨視的変数による系の記述が行うように、情報を遮断する地平面を持つ系である。したがって、地平面の外側からアクセスできる観測量の物理と統計力学の間に、類似性を期待することは理に適っている。すると定常的な文脈では、ブラックホールに対する熱的性質を期待することは理に適っている。

巨視的な状態の熱的性質はそのエントロピーを巨視的変数たちの関数として与えることで捉えられる。ミクロ・カノニカル設定では、エントロピーはこれらの巨視的変数で定まる微視的な相空間の領域の体積を測る。すなわち、エントロピーは粗視化で失われた情報を測る。Hawking の場の量子論の計算で算出される温度をもたらすエントロピー S は、有名な公式：Bekenstein–Hawking エントロピー：

$$S_{BH} = \frac{k c^3}{4 \hbar G} A \quad (10.2)$$

で与えられ、ここに A はブラックホールの地平面の面積であり、また添字 BH は“ブラックホール (black hole)”または“Bekenstein–Hawking”のいずれかを表す。これは見事な公式である。それは Boltzmann 定数 k 、光速 c 、Planck 定数 $\hbar$ 、および Newton 定数 G を含んでいる；したがってそれは全ての基礎理論——統計力学、特殊相対性理論、量子力学、および一般相対性理論——が重要となる領域に関係する。不思議な因子

“4” は最初はやや奇妙に見えるものの、一般相対性理論の結合定数が G ではなく、むしろ Einstein–Hilbert 作用の分母と Einstein 方程式の右辺にある $8\pi G$ であることを思い出せば、奇妙ではない。不思議な “4” の起源はしたがって $4 = 8\pi/2\pi$ である。すなわち、自然単位 $k = c = \hbar = 8\pi G = 1$ では、Bekenstein–Hawking 公式は

$$S_{\text{BH}} = 2\pi A \quad (10.3)$$

となる；“4” は今やより見栄えの良い 2π である。

標準的な熱力学において、巨視的変数の関数としてのエントロピーの表現は統計力学を用いて計算できる。すなわち、エントロピーの値を計算することが可能である。例えば、与えられた巨視的変数に対応する相空間の体積を計算できる。同じことを Bekenstein–Hawking エントロピーに対して行えるか？ これは量子重力のあらゆる理論にとって未解決の課題である。

$\hbar$ が式 (10.2) に現れる事実、また $\hbar$ が分母に現れる事実について、しばしば多くの不平が投げかけられてきた。しかしそれは誤りである。体積 $V = L^3$ の空洞において平衡状態にある電磁場のエントロピーは、重要な力学的で巨視的な量であるエネルギー E の関数として表すと

$$S = k \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi^2 L^3 E^3}{15 c^3 \hbar^3}} \quad (10.4)$$

であり [本稿次節で補足]、これもまた $\hbar$ を “分母に (downstairs)” 含んでいる。 $\hbar$ の存在は、 $\hbar$ が統計的な振舞いの背後にある物理的で量子力学的な粒状性のサイズを定めるという事実によっており、このことは電磁気と重力のいずれに対しても正しい。 $\hbar$ をゼロにすれば、ブラックホールのエントロピーと黒体のエントロピーはいずれも発散する。その理由はそれらがもはや量子力学的な離散性に制限されないことである。このことは 19 世紀の終わりに統計力学を古典的な場に適用しようとした理論家が熟考した、紫外のカタストロフィをもたらす。

実際、紫外のカタストロフィがないという事実はまさに、Planck と Einstein に光子の離散性を気付かせた証拠である (Einstein 1905b)。同様に、ブラックホールのエントロピーは有限であり、 $\hbar$ が式 (10.2) の分母に現れる事実は、重力的な紫外のカタストロフィを妨げる類似の粒状性が量子時空にあることの証拠である。

アナロジーをより鮮明にしよう。式 (10.4) から相空間における単一のセルがいくらか分かる：それは S/k が 1 (unity) のオーダーのときで、すなわち $LE/c \sim \hbar$ によって与えられ、ところが L は波長でもあるので、単一のセルは

$$E \sim \hbar \nu \quad (10.5)$$

で特徴付けられ、ここに ν は振動数である。言い換えると、エントロピーの表現からスケールのサイズを読み取ることができる (実際に Einstein はそれを行った)。同様に、重力の量子のサイズは Bekenstein–Hawking エントロピーから、それを 1 (unity) のオーダーの数と等置することで読み取ることができ、それはループ量子重力の結果と整合して、面積の量子化：

$$A \sim \hbar G \quad (10.6)$$

を与える [以降 $c = 1$]。

電磁気の場合には、電磁場の量子論から直接エントロピーを計算できる。重力に対して同じことをできるか？

10.1 節について

■電磁場のエントロピー (10.4) について 例えば文献 [24, p.155] で得た結果

$$E = \frac{8\pi^5}{15} \frac{(kT)^4}{(hc)^3} V, \quad S = \frac{4}{3} \frac{E}{T}$$

(ただし $h = 2\pi\hbar$ は Planck 定数) の第 1 式を T について解き第 2 式に代入すると得られる. なお式 (10.4) 右辺は確かにエントロピーの次元を持っていることが見て取れる.

10.2 局所熱力学と Frodden–Ghosh–Perez エネルギー

正しい方向への重要な前進が Frodden, Ghosh, および Perez によって成された (Ghosh and Perez 2011). Schwarzschild ブラックホールの質量 M は無限遠で測ったエネルギーに同定できる. Schwarzschild 半径 R で測った同じエネルギーは赤方偏移因子でスケールされ [文献 [11, pp.278–279]],

$$E(R) = \sqrt{g^{00}(R)} M = \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{R}}}. \quad (10.7)$$

地平面から座標距離 $r \ll 2GM$ 隔たる観測者を考えよ [その位置は $R = 2GM + r$]. この観測者にとってのブラックホールのエネルギーは

$$E(r) = \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{2GM+r}}} \sim M \sqrt{\frac{2GM}{r}}. \quad (10.8)$$

地平面の近くでは座標距離 r は物理的な距離 d と

$$d = \sqrt{g_{rr}} r = r \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{2GM+r}}} \sim r \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2GM} r \quad (10.9)$$

で関係する. したがって地平面から物理的な距離 d で測ったエネルギーは

$$E(d) = \frac{2GM^2}{d}. \quad (10.10)$$

ブラックホールの地平面の面積は $A = 4\pi(2GM)^2$ であることを思い出そう. さらに, 古典的な一般相対性理論の標準的な計算により, 地平面から固定された距離 d に留まっている観測者は (その自身の基準系における) 加速度 $a = 1/d$ を保持することが示される [10.5.1 項の演習 10.2]. こうして, 加速度 a を持つ地平面の近くの静的な観測者にとって, ブラックホールのエネルギーは

$$E = \frac{aA}{8\pi G}. \quad (10.11)$$

この見事な公式は Frodden, Ghosh, および Perez によって数々の方法で裏付けられた. 例えば, 無限遠からブラックホールへと落下する小さな質量 m の粒子の, 地平面の近くの観測者が測ったエネルギーを dE とする. 質量がブラックホールに入るとき, ホールの面積はある量 dA だけ増加し, ここに

$$dE = \frac{a dA}{8\pi G}. \quad (10.12)$$

この公式の面白いところは、それが地平面において局所的なことである。地平面の近くの観測者は高々、地平面の無限小のパッチ (patch) と相互作用できる。もしこのパッチの面積が dA ならば、観測者はこのパッチに最後の式で与えられるエネルギー dE を関係付けることができる。観測者の近くでホールを出入りするエネルギーの変化 dE は、面積の局所的な変化 dA に反映され、 dE と dA は式 (10.12) で関係する。

Frodden–Ghosh–Perez 方程式のいくつかの別の導出を与えることができる。例えば、平坦な領域において一様に加速する観測者にとって、固有時間は単に加速度 a でスケールされた、地平面に向かう推進 (boost) の無次元の推進パラメータ η である。(10.5.1 項の演習 10.1 を見よ。) エネルギー E は固有時間における発展の生成子であり、またこの観測者にとって $K = E/a$ は推進の生成子である。[E が固有時間 s における発展を生成するとき、 $K = E/a$ はパラメータ $\eta = sa$ における発展を生成する。] これを式 (3.95) に代入すると、直ちに Frodden–Ghosh–Perez の関係 (10.11) を得る。このことは関係がブラックホールに制限されず、むしろ実にはあらゆる事象の地平面に対して成り立つことを示している：加速する観測者は Einstein 方程式の帰結として、事象の地平面を、またこの地平面の局所的な面積の変化 dA がそこを通過するエネルギー密度 dE と式 (10.11) で関係するのを見る。さらに時空の有限領域の作用に関するコーナー項 (corner term) を調べることで [10.5.5 項末尾の図 107 を見よ]、この関係のもう 1 つの導出が得られる (Carlip and Teitelboim 1995; Bianchi and Wieland 2012; Smolin 2012)。

Bill Unruh は量子場の真空状態を加速度 a で運動している観測者が、温度

$$T = \frac{\hbar a}{2\pi k} \quad (10.13)$$

を観測することを示した (Unruh 1976) [10.5.4 項末尾も見よ]。これを上記の結果と組合せると、エントロピーの Clausius の定義を用いて

$$dS = \frac{dE}{T} = \frac{2\pi k}{\hbar a} \frac{adA}{8\pi G} = k \frac{dA}{4\hbar G} \quad (10.14)$$

を得られる。右辺は正確に Bekenstein–Hawking エントロピー S_{BH} である [式 (10.2)]。したがって Unruh 温度 T と Frodden–Ghosh–Perez エネルギー E は熱力学的関係

$$dE = T dS_{\text{BH}} \quad (10.15)$$

で関係している。もしエネルギーと温度を地平面からの距離 d から無限遠まで赤方偏移させると、この関係は

$$dM = T_{\text{H}} dS_{\text{BH}} \quad (10.16)$$

となり、ここに M はブラックホールの Arnowitt–Deser–Misner (ADM) 質量であり、また T_{H} は Hawking 温度である。したがって Hawking 温度は加速する観測者が地平面近傍で測定する、無限遠まで赤方偏移された Unruh 温度に他ならない。

この Bekenstein–Hawking エントロピーの導出は古典的な Einstein 方程式と、平坦な時空における量子場の真空の性質に依拠している；すなわち、一方では古典的な一般相対性理論の、他方では場の量子論の個別的な利用に依拠している。それを古典的な近似に頼ることなく、完全な重力の量子論で再現できるか？

この問題に取り組む 2 つの方法が研究されてきた。1 つ目は統計的な議論の利用——地平面上の状態数を数えること——に基づいている。2 つ目は関心のあるエントロピーの、地平面を横切るエンタングルメント・エントロピーへの同定に基づいている。後で見るように、この 2 つは一見すると異なって見えるが、そうではない；実際、それらはコインの表と裏である。まずはそれらを別々に手短かにスケッチしよう。

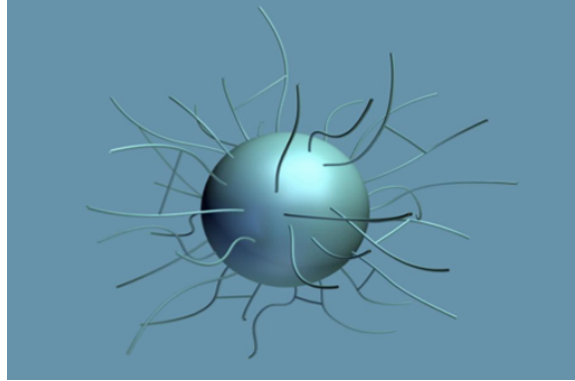


図 104 スピン・ネットワークのリンクに貫かれるブラックホール [本稿では教科書 p.202 から図を採った]

10.2 節について

Rovelli による前著 [2, pp.301–302] と比べると、ブラックホール・エントロピーに関する LQG 以前の議論もさらに洗練されている。この観点は運動学的な理論 (10.3) 節のみならず、とりわけ共変な理論 (10.4 節) で重要となる。同文献 [2, pp.301–302] の説明は以下のように、より素朴であった。すなわち無限遠 $R = \infty$ で見たブラックホールのエネルギー (10.7) は単に静止エネルギー $E = M$ である。これを曲がった空間の場の量子論による Hawking 温度の公式 (10.1): $T_H = \hbar/8\pi kGM$ と組合せると、

$$\frac{dS_{\text{BH}}}{dM} = \frac{1}{T_H} : (10.16), \quad \therefore S_{\text{BH}} = \frac{4\pi kGM^2}{\hbar} = k \frac{A}{4\hbar G} : (10.2).$$

最後の等号では地平面の (真の) 表面積が $A = 4\pi(2GM)^2$ であることを用いた。

10.3 エントロピーの運動学的な導出

1 つ目の可能性は、ブラックホールの外部の観測者がホール内部の自由度にアクセスできないことを理解することである。したがって彼女はホールを単に時間において発展する 2 次元の面と見る。ホールの内部は外部の発展に影響しない。したがって地平面は外部と相互作用する独立した力学系として扱える。

簡単のために回転しておらず電荷を持たないブラックホールを考えよ。平衡状態において、この系は面積 A の球面状の面から成る。熱力学的な文脈では、系は統計的なゆらぎを伴う。言い換えると、熱的な文脈では地平面は“揺れ動く”ことができる、何故なら Heisenberg の不確定性がそれを許容するからであり、このことがブラックホールの熱的な振舞いの起源である。[なるほど、重力場の熱ゆらぎとは量子力学的なゆらぎと考えられる (10.5.5 項末尾も見よ).]

ミクロ・カノニカルな枠組みで問題に取り組み、与えられたエネルギーの状態を数えることでエントロピーを計算できる。関心のあるエネルギーは、外部で起こることを何であれ含む無限遠で測ったエネルギーではなく、むしろ地平面の近傍から測ったエネルギーである。上で示したように、これは地平面の面積で決まる。ブラックホールのエントロピーを計算する問題はすると、面積 A を持つ 2 次元の面の状態数を計算する問題に帰着する。

古典的な理論ではこの数量は発散するのに対し、ループ重力では幾何学の離散性のため、それは有限である。計算は以下のように行える。Gibbs の仮定は平衡状態において、また温度 $T = \frac{1}{\beta}$ において [以降 $k = 1$],

系がエネルギー E_n の状態をとる確率 p_n は Boltzmann 因子 $\exp(-\beta E_n)$ に比例することを述べている．ループ量子重力ではスピン j を持ち地平面に突入するグラフの単一のリンク (図 104 を見よ) の面積への寄与は

$$A_j = 8\pi G\gamma\sqrt{j(j+1)} \quad (10.17)$$

で与えられる [式 (7.30) ; 以降 $\hbar = 1$]. このリンクはスピン j 表現を担うので, 実際には系がとり得る $d_j = 2j + 1$ 個の直交する状態がある．逆温度 β においてスピン j を得る確率は, 縮退を考慮すると, したがって

$$p_j(\beta) \sim (2j+1)e^{-\beta E} \quad (10.18)$$

であり, ここに E はエネルギーである．エネルギー (10.11) とスピン j のリンクに対する面積のあからさまな値 (7.30) [上式 (10.17)] を用いると, これは

$$p_j(\beta) \sim (2j+1)e^{-\beta \frac{aA}{8\pi G}} = (2j+1)e^{-\beta a\gamma\sqrt{j(j+1)}} \quad (10.19)$$

となる．

$$p_j(\beta) = Z^{-1}(\beta)(2j+1)e^{-\beta a\gamma\sqrt{j(j+1)}} \quad (10.20)$$

における比例係数は $\sum_j p_j = 1$ で定まる分配関数

$$Z(\beta) = \sum_j (2j+1)e^{-\beta a\gamma\sqrt{j(j+1)}} \quad (10.21)$$

である．これが系が加速する観測者の流れに対して平衡状態にある場合に, 逆温度 β における単一のリンクの Gibbs 状態を表す分配関数である．Gibbs 状態の統計的なエントロピーは定義により

$$S = -\sum_j p_j \log p_j \quad (10.22)$$

であり, 微分をとると, それが標準的な熱力学的関係

$$E = TS + F \quad (10.23)$$

を満たすことは直ちに分かり, ここに

$$F = -T \log Z \quad (10.24)$$

は Helmholtz の自由エネルギーである．系は Unruh 温度 $\beta = 2\pi/a$ にあると仮定しよう (Unruh 温度は独立な入力である) ; このとき直ちに Frodden–Ghosh–Perez 関係 (10.11) から

$$\begin{aligned} S &= \frac{2\pi}{a} \frac{aA}{8\pi G} + \log Z \\ &= \frac{A}{4G} + \log \sum_j (2j+1)e^{-2\pi\gamma j(j+1)} \end{aligned} \quad (10.25)$$

を得る．方程式

$$\sum_j (2j+1)e^{-2\pi\gamma j(j+1)} = 1 \quad (10.26)$$

の γ に対する解は量子重力の分野では γ_0 と呼ばれ, 数値的に ~ 0.274 であることが容易に分かる．こうして, もし

$$\gamma = \gamma_0 \sim 0.274 \quad (10.27)$$

ならば自由エネルギーが消え、統計的なエントロピーは正確に Bekenstein–Hawking エントロピーとなることを得る^{*156}.

カノニカルな手法を用いて、与えられた面積を持つ量子幾何学の状態数のより洗練された計算が広く発達しており、読者に詳しくは文献 (Rovelli 1996a) と (Ashtekar *et al.* 1998, 2005) を紹介する. 一般的な結果はエントロピーが有限で面積に比例するというものであり, Barbero–Immirzi パラメータを最後の式のように選べば, Bekenstein–Hawking の結果を完全に裏付けそれを第 1 原理から導出する.

ブラックホールの [リンクに貫かれる] 孔 (punctures) の数が化学ポテンシャルに支配される, グランド・カノニカルな枠組みを用いてこの制約を避ける代わりにの方法が Frodden *et al.* (2011); Ghosh *et al.* (2013) で展開されている. このアプローチの現況については最新の文献を勧めることにし, 次節では代わりにダイナミクスをより明確に考慮した, 本書で提示した共変な理論に基づく別のアプローチを取り上げる.

10.3 節について

ミクロ・カノニカル集団の取り扱いでは, 地平面を貫くリンクの面積への寄与の和が, 与えられたエネルギーで決まる表面積 A に一致する状態数としてエントロピーを求められ, 状態数の勘定は整数の分割 (partition) の数を求める整数問題に帰着する [2, § 8.2.2–8.2.4]. 今のところ非現実的なブラックホールのモデルに対してしかエントロピーを計算できない弦理論とは対照的に, LQG はあらゆる種類の現実的なブラックホールに対して, Immirzi パラメータ γ を同じ値に選べば, Bekenstein–Hawking エントロピーを再現できる [2, p.303]. (本書の 10.4.1 項の最終段落も見よ.)

他方で本書の計算はカノニカル分布に基づいている. より本質的な違いは Frodden–Ghosh–Perez エネルギーの表式 (10.11) を用いていることと, 系が Unruh 温度にあるという仮定にあると考えられる. また Bekenstein–Hawking エントロピーを再現する γ の値 (10.27) も, 前著 [2, p.303] の粗削りな計算結果 $\gamma \approx 0.2375$ とは若干異なる.

10.4 エントロピーの力学的な導出

Bekenstein–Hawking 公式の共変な導出の核心は, それが示量性の量 (extensive quantities) に関係し, したがって地平面において局所的であるという見解である. この見解は上記で与えた Frodden–Ghosh–Peres の関係 [式 (10.11–12)] によって明白になる. 地平面の近くの観測者は高々, 地平面の小さなパッチ (patch) と相互作用する. したがって問題は単一の基本的な地平面の三角形の水準で, 言わば地平面を通過する (あるいは慣習的な用語では “貫く (puncturing)”), スピン・ネットワーク・グラフの単一のリンクの水準で調べられる.

2 つ目のアイデアは Hawking–Bekenstein の公式に現れるエントロピーを, エンタングルメント・エントロピーに同定することである. アイデアは古く, 過去に Jacobson, Parentani, およびその他の人々によって定

^{*156} もし γ が γ_0 に等しくなければ, 分配関数の閉じた形は

$$Z = e^{-\frac{A}{8\pi G} \left(\beta a - 2\pi \frac{\gamma_0}{\gamma} \right)} \quad (10.28)$$

となると推測できる (Bianchi (2012a) を見よ). これはエントロピー

$$S = \frac{E}{T} + \log Z = \frac{A}{4G} - \frac{A}{4G} \left(1 - \frac{\gamma_0}{\gamma} \right) = \frac{\gamma_0}{\gamma} \frac{A}{4G} \quad (10.29)$$

を与え [$\gamma = \gamma_0$ で S_{BH} を再現], これはループ量子宇宙論 (loop quantum cosmology; LQC) の分野の一般的な結果である.

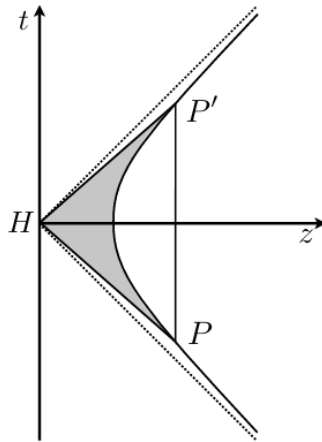


図 105 くさび (wedge) は P と P' の間の一様に加速される軌道と、 P と P' を地平面上の原点 H と繋ぐ 2 本の線分に囲まれている。くさび振幅は推進 (boost) パラメータの関数であって P から P' へ発展する。[本稿では教科書 p.205 から図を採った。Minkowski 空間の文脈で $z > |t|$ は Rindler くさびと呼ばれる (10.5.5 項 p.213 も見よ) [18, p.60].]

義された。それは 2 つの理由で受け容れられるのが困難だった。1 つ目の理由は、エンタングルメント・エントロピーが一見すると存在する場の数に依存するように見え、このことは Bekenstein–Hawking 公式の普遍性に矛盾することが判明するというのである。我々はこの反論が誤りであることを見る予定である：エンタングルメント・エントロピーは場の数に依存しない、何故なら場は重力の支配的となる Planck スケールで独立ではないからである。2 つ目の困難はエンタングルメント・エントロピーが熱力学的関係をもたらし得るというアイデアを受け容れることへの抵抗だった。しかし実際そうなのであり、このことは今では物理の様々な分野でより一層明確になっている。

このことを踏まえた上で、アイデアは 10.2 節で示した Frodden–Ghosh–Perez の導出の構成要素を復元することである、ただし完全な量子論の文脈で、時空の非常に小さいパッチに制約されたそのダイナミクスと、エンタングル状態の性質を用いて。

ブラックホール半径 $2GM$ よりも極めて小さいスケールにおける古典的な局所的な幾何学は平坦であり、加速度 a で加速された軌道に沿って運動する静的な Frodden–Ghosh–Perez 観測者を伴う。(10.5.1 節の演習 10.2 を見よ。) 既に見たように [10.2 節]、一定の加速度の軌道は地平面に垂直な向きへの推進 (boost) 生成子 K_z によって生成される。 K_z を a 倍すると軌道に沿うパラメータが固有時間となる変換を得る。したがって $H = aK_z$ は加速する観測者の固有時間に関する発展の生成子、すなわちハミルトニアンである。これは観測者を双曲線軌道に沿って移動させる、あるいは等価的に、地平面から一定の距離の静的な観測者が見たときの幾何学の変化を定める演算子である (図 105 を見よ)。

推進生成子 K_z は量子重力においてよく定義された演算子である、何故なら状態は Lorentz 群の表現に属しているからである。地平面を通過するリンクを考えよう。これは対応するスピンに関する $SU(2)$ 表現の状態で表される。例えばそれがスピン j を持つ面積の固有状態であるとしよう。巨視的な極限に興味があるので $j \gg 1$ と仮定する。我々は $2GM$ に比べて小さいものの Planck スケールに比べて大きい領域を調べている。地平面は仮定により z 方向に垂直な平面内にある。そこでこの向きのコヒーレント状態 $|j, j\rangle$ を考えよう。(こ

ここでは簡単のために、内部の基準系を外部の方向にゲージ固定した。) 面積演算子は

$$A = 8\pi G\hbar\gamma|L|. \quad (10.30)$$

[式 (7.29) と同様、 $|L^2| \rightarrow |L|$ と修正した.] したがってこの状態は面積

$$A = 8\pi G\hbar\gamma j \quad (10.31)$$

を持つ ($j \gg 1$). この状態の時空における発展は、それを

$$Y_\gamma |j, j\rangle = |\gamma j, j; j, j\rangle \quad (10.32)$$

へと写像する写像 Y_γ に支配される。加速する観測者に対するそのエネルギーは

$$E = \langle \gamma j, j; j, j | H | \gamma j, j; j, j \rangle = \langle \gamma j, j; j, j | a\hbar K_z | \gamma j, j; j, j \rangle. \quad (10.33)$$

ところが我々は γ -単純な (γ -simple) 表現にいたので [式 (7.3)], これは

$$E = \langle \gamma j, j; j, j | a\hbar\gamma L_z | \gamma j, j; j, j \rangle = a\hbar\gamma j. \quad (10.34)$$

これは

$$E = a\hbar\gamma \frac{A}{8\pi G\hbar\gamma} = \frac{aA}{8\pi G} \quad (10.35)$$

の形に書き換えることができ、これは正確に Frodden—Ghosh—Perez エネルギーである。

Eugenio Bianchi (Bianchi 2012a) によって得られたこの結果は非常に著しい。それを理解するために、Frodden—Ghosh—Perez の関係を導くには Einstein 方程式が必要であることに注意しよう。ここでは、同じ関係が写像 Y_γ と $SU(2)$ および $SL(2, \mathbb{C})$ 表現理論のみを用いることで得られている。

このことは実に、Einstein 方程式に関する情報が Y_γ 写像にコードされていることを裏付ける。Barbero—Immirzi 定数が相殺する仕方にも注意せよ。[Bekenstein—Hawking エントロピー (10.50), (10.54) の導出においても γ は自動的に相殺する。これは 10.3 節で γ の値を式 (10.27) のように選ばねばならなかったのとは対照的である。]

量子論において Bekenstein—Hawking の関係を導くための 2 つ目の主要な構成要素は、 $|\gamma j, j; j, j\rangle$ が演算子 K_z によって生成される流れに対する温度 $T = \hbar/2\pi$ における熱的状态であるという見解である。このことは Bianchi により、この状態にあからさまに温度計を結合し、加速した軌道を追跡し、温度計の状態間における上昇と下降の遷移の比を計算することで、原論文 (Bianchi 2012a) にて証明されている。

実際このことは、最初に Unruh が理解したように、Lorentz 不変な文脈における加速する観測者に対する一般的な結果である。これを理解するために、理論のダイナミクスを定めるくさび (wedge) 振幅 (7.62):

$$W(g, h) = \sum_j (2j+1) \text{Tr}_j [Y_\gamma^\dagger g Y_\gamma h] \quad (10.36)$$

を考えよう。Lorentz 角 η での推進を行っている加速する観測者から見たときの、状態 $|j, m\rangle$ と状態 $|j, m'\rangle$ の間の遷移に対する振幅は、そのあからさまな形と合わせて式 (7.64):

$$W_{j, m, m'}(\eta) = \langle j, m' | Y^\dagger e^{iK\eta} Y | j, m \rangle \quad (10.37)$$

で与えられる。それぞれこの発展の初めと終わりにおける観測量 A と観測量 B の間の相関関数は

$$G_{AB}(\eta) = \langle W(\eta) | AB | \Psi_\eta \rangle \quad (10.38)$$

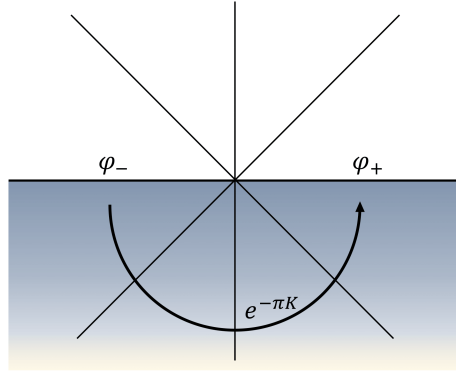


図 106 式 (10.42) とその周辺

であり、ここに Ψ_η は境界状態である [式 (7.60) も見よ]。局所 Lorentz 不変な状態を表す境界状態は何か？これに答えるために、Lorentz 群の重要な性質を考えよ：推進は空間的なベクトルを空間的なベクトルに回転し、ベクトルをくさび [図 105] の外に出すことはない。しかし虚数のパラメータを持つ推進は本当に回転であり、光円錐を横切ってベクトルを動かせる。特に、虚数パラメータ $2\pi i$ の推進は Minkowski 平面を回ってベクトルを動かし、虚数パラメータ $2\pi i - \eta$ の推進は η の半直線から $\eta = 0$ の半直線へ回転させる。境界状態がくさびの外の Lorentz ダイナミクスで与えられるように採れば、したがって

$$\Psi_\eta = e^{iK(2\pi - \eta)} \quad (10.39)$$

とおける。

これは実際 Unruh 効果の根底にある数学を与える Bisognano–Wichmann 定理 (Bisognano and Wichmann 1976) の、直観的なバージョンを与える古い形式的な議論の、量子重力バージョンに他ならない。標準的な形式的な議論は以下のようなものである。Minkowski 空間上の量子場を考えよう。真空状態 $|0\rangle$ は下半面 (lower half-plane) の場に関する経路積分

$$\langle \varphi | 0 \rangle = \int D[\varphi] e^{iS} \quad (10.40)$$

で書ける。場を原点の左側と右側におけるその成分 $\varphi_\pm$ に分離すると、

$$\langle \varphi_-, \varphi_+ | 0 \rangle = \int D[\varphi] e^{iS} \quad (10.41)$$

を得る。ところがこれは負から正の x 軸への π 回転によって生成される発展と捉えることができ、すると

$$\langle \varphi_-, \varphi_+ | 0 \rangle = \langle \varphi_- | e^{\pi K} | \varphi_+ \rangle \quad (10.42)$$

であり、ここに K は推進の生成子である。[以上、図 106 を見よ。] ここで正の軸に限定された統計的状态を表す密度行列を得るために、 φ_- にわたってトレースをとると

$$\rho = \text{Tr}_{\varphi_-} [\langle \varphi_-, \varphi_+ | 0 \rangle \langle 0 | \varphi_-, \varphi_+ \rangle] = \text{Tr}_{\varphi_-} [\langle \varphi_- | e^{\pi K} | \varphi_+ \rangle \langle \varphi_+ | e^{\pi K} | \varphi_- \rangle] = e^{2\pi K} \quad (10.43)$$

を得る。これを $e^{-iK\eta}$ でくさびの境界へ発展させると、くさび境界状態 (10.39) を得る。

振幅と状態を合わせると

$$G_{AB}(\eta) = \text{Tr}[e^{iK(2\pi - \eta)} B e^{iK\eta} A] \quad (10.44)$$

が得られ、ここでトレースはユニタリー Lorentz 表現においてとる．この相関関数は無次元の発展パラメータ η に対する無次元の温度

$$T = \frac{1}{2\pi} \quad (10.45)$$

において、熱的な配位の特徴である Kubo–Martin–Schwinger (KMS) の性質を満たす (これらの概念の簡単な導入については本章の補完 [10.5 節] を見よ)． a を観測者の加速度として発展パラメータを固有時間 $s = a\eta$ にスケールすると、Unruh 温度

$$T_H = \frac{\hbar a}{2\pi} \quad (10.46)$$

[式 (10.13)] が与えられる．上記 [式 (10.35)] では共変なダイナミクスが Frodden–Ghosh–Perez エネルギーを与えることを見た．ここではそれが Unruh 温度を与えることを見た．上記 [式 (10.14)] で見たように、その 2 つは合わせて、正しい係数を持つ Bekenstein–Hawking エントロピーを与える．このことは量子論において Bekenstein–Hawking エントロピー S_{BH} を完全に導けることを示している．このことはまた Bekenstein–Hawking エントロピーを、地平面を横切る量子論的な相関の効果と見なせることを意味している、何故ならこれが Bisognano–Wichmann 定理の熱的状態によって捉えられるエントロピーの源だからである．

計算は以下のように要約できる．地平面の近くの時空の量子状態は局所 Lorentz 不変性と整合する形式を持つ．もしそれをホールの外側に留まる観測者の観測量の代数に制限すれば、これは状態

$$\rho = e^{-2\pi K} \quad (10.47)$$

で表され、ここに K は地平面に垂直な推進の生成子である．この状態はエントロピー

$$S = -\text{Tr}[\rho \log \rho] \quad (10.48)$$

を持つ．ここでこの状態がそれを $\delta\rho$ だけ変化させる任意の過程によって修正されると仮定する．このときエントロピーの変化は

$$\delta S = -\delta \text{Tr}[\rho \log \rho] = -\text{Tr}[(\delta\rho) \log \rho] - \text{Tr} \left[\rho \frac{1}{\rho} \delta\rho \right]. \quad (10.49)$$

ρ は変化において規格化されたままでなければならないので、第 2 項は消える．第 1 項は、式 (10.47) および上記で導いた推進生成子と面積の関係 [式 (10.31–35)] を用いると

$$\delta S = \text{Tr}[(\delta\rho) 2\pi K] = 2\pi \text{Tr} \left[(\delta\rho) \frac{A}{8\pi G\hbar} \right] = 2\pi \frac{\delta A}{8\pi G\hbar} = \frac{\delta A}{4G\hbar} = \delta S_{\text{BH}} \quad (10.50)$$

を与える．こうして Bekenstein–Hawking の関係 (の微分形) が求まる．

簡単のため例えば、地平面を通過するリンクのスピンの変化 δj によって与えられる、状態の局所的な変化を考えよう．すると [式 (10.34) より] エネルギーの変化

$$\delta E = a \hbar \gamma \delta j \quad (10.51)$$

とエントロピーの変化

$$\delta S = \delta E/T = \frac{a \hbar \gamma \delta j}{\hbar a/2\pi} = 2\pi \gamma \delta j \quad (10.52)$$

を得る．こうして可能な付加的敵数を除けば、リンクに関係付けられるエントロピーはスピンの単純な関数

$$S = 2\pi \gamma j \quad (10.53)$$

であり、またリンクの面積は $A = 8\pi\gamma G\hbar j$ なので、これは再び Bekenstein–Hawking の公式

$$S = \frac{2\pi\gamma A}{8\pi\gamma G\hbar} = \frac{A}{4\hbar G} \quad (10.54)$$

を与える。

10.4.1 エンタングルメント・エントロピーと面積のゆらぎ

これまでの2節はブラックホール・エントロピーの起源に対する異なる物理的解釈を示しているように見える。1つ目はこれが地平面の量子ゆらぎの効果だというアイデアである。2つ目はブラックホールのエントロピーが地平面を横切るエンタングルメント・エントロピーで与えられるというアイデアに与している。ここには矛盾があるか？

そうではない。2つの解釈は互いに矛盾していない；それらは同じ現象、地平面の近くの（あらゆるものの）局所的な量子ゆらぎの、2つの側面である。一方では、このゆらぎは幾何学のゆらぎを生じ、したがって地平面の量子的な“揺れ動き”，あるいは地平面の Planck スケールの“厚み”——それが Planck スケールより小さいスケールで分解できない事実による——として視覚化できる。他方で、地平面が何らかの（仮想的な）背景座標に固定され、地平面を横切るあらゆる場の値を相関させる場の量子論的なゆらぎが有限の波長を持つ、頭の中の描像を思い描くこともできる。

一時期はブラックホール・エントロピーが地平面を横切るエンタングルメント・エントロピーに関係する可能性は、明白な反論のために信じ難いと考えられた：地平面のゆらぎは純粋に幾何学的な現象であり、それ故 Bekenstein–Hawking 公式のような普遍的な公式を正当化できる。ところが地平面のエンタングルメントは存在するあらゆる量子場の性質であり、それ故もし場の数が増大すればエントロピーは増大するはずである。そうであるならば何故 Bekenstein–Hawking 公式は場の数に依存しないのか？ この困難の解決策は最近 Eugenio Bianchi (Bianchi 2012b) により見出され、彼は標準的な場の量子論と古典的な一般相対性理論を用いて、物理的な過程におけるエンタングルメント・エントロピー S_{ent} と地平面の面積 A の変化を計算した。彼はこの変化量が有限であり、切断と場の数とは独立に

$$\delta S_{\text{ent}} = \frac{\delta A}{4\hbar G} \quad (10.55)$$

で与えられることを見出した。謎の鍵は、小さなスケールでは場が独立ではないため、 δS_{ent} が場の数とともに増大しないことである。場のモードに対する切断は場の全エネルギー密度が Planck スケールに達したとき発効する。全エネルギー密度は個々の場、ゆらぎに加えて、それらの（負の）ポテンシャル重力エネルギーに依存する。したがって個々の場の波長に対する切断のスケールは、やはり小さなスケールでゆらいでいる他の場の存在に依存する。結局のところ結果は、エンタングルメント・エントロピーが場の数に依存しないというものである。（これに関しては Ghosh *et al.* (2013), Frodden *et al.* (2012) および Han (2014) における、興味ある最近の結果も見よ。）

ブラックホール・エントロピーを量子重力において直接理解する問題は、これらのループ重力の結果によって大いに明快になった。ブラックホールのエントロピーは静的な観測者が加速しているという事実による局所的な現象である。それは地平面の量子ゆらぎに、あるいは等価的に、地平面を横切るエンタングルメントに関係している。エントロピーは有名な Hawking 因子 $1/4$ も含めて第1原理から計算でき、それは有限であり、計算は Schwarzschild または Kerr ホールのような現実的なブラックホールに対して行える。これは今のところ他のいかなる重力の仮説的な量子論も成し得ていない、理論の見事な成果である。

10.5 補完

10.5.1 Minkowski および Schwarzschild 計量において加速する観測者

演習 10.1 軌道

$$t = l \sinh \eta, \quad (10.56)$$

$$x = l \cosh \eta \quad (10.57)$$

をたどる, Minkowski 空間において一様に加速する粒子を考えよ. 加速度は一定で $a = 1/l$ であり, 軌道に沿う固有時間は $s = \eta l$ であり, 粒子と原点の距離は一定であり l で与えられ, ヌルの線 $x = t$ はこの粒子の地平 (horizon) であって, $t = 0, x < 0$ に発したいかなる信号も粒子には届かないことを示せ. 粒子の感じる Unruh 温度は何か? [本稿次項で解答する.]

演習 10.2 $\epsilon \ll 2GM$ として軌道

$$r = 2GM + \epsilon \quad (10.58)$$

をたどる, Schwarzschild 時空において一様に加速する粒子を考えよ. 地平面からの粒子の物理的な距離を l として加速度が $a = 1/l$ であることを示せ. この距離 (ϵ と混同してはならない!) は一定であることを示せ. 無限遠における Hawking 温度と Tolman の法則を用いて, この粒子の感じる温度を計算せよ. 前の演習と比較せよ. [本稿次項で解答する.]

10.5.1 項について

■演習 10.1 の答案 文献 [11] の § 7 の問題では, 粒子とともに運動する瞬間的な共動座標系で測った粒子の加速度 $\frac{d^2x}{ds^2}$ (s は粒子の固有時間に他ならない) が常に一定値 a をとる “等加速度運動” において, 背景の Minkowski 空間に固定した基準系で見た軌道が双曲線 $(x + \frac{1}{a})^2 - t^2 = \frac{1}{a^2}$ となること, また $t = 0$ から経過した座標時間 t に対応する固有時間が

$$s = \frac{1}{a} \sinh^{-1}(at)$$

で与えられることを見た. ただし上式では $c = 1$ とおいており, また $t = 0$ で $x = 0$ となるように積分定数を定めている. そこで x 座標の原点を改めて $x + \frac{1}{a} \rightarrow x$ と再定義すると, 双曲線の式は

$$x^2 - t^2 = \frac{1}{a^2}$$

と簡略化される. これは原点との固有距離 l が一定の軌道であり, その値は

$$l^2 = -t^2 + x^2 = \frac{1}{a^2}, \quad \therefore l = \frac{1}{a}.$$

そこで軌道を

$$x = l \cosh \eta : (10.56), \quad t = l \sinh \eta : (10.57)$$

とパラメトライズできる. これを $t = \frac{1}{a} \sinh(as)$ と比較すると, パラメータは $\eta = as = s/l$ と同定できるので, $s = l\eta$. なお $t = 0$ に $x < 0$ を発した信号は光速を超えないため, 漸近線 $x = t$ を横切って粒子の双曲線軌道に達することはなく, この意味でヌルの線 $x = t$ は地平と呼べる. 粒子の感じる Unruh 温度 (10.13) は “円周” の逆数 $T = 1/2\pi l$ になる.

■演習 10.2 の答案 Schwarzschild 時空において空間座標の一定位置 (r, θ, ϕ) に静止した粒子の 4 元速度は $u^\mu = (u^0, \vec{0})$ とおくことができ、Schwarzschild 半径を $r_g \equiv 2GM$ と書くと

$$-1 = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (u^0)^2, \quad \therefore u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}}.$$

このとき粒子の 4 元加速度は

$$a^\mu = u^\nu D_\nu u^\mu = u^\nu (\partial_\nu u^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} u^\rho) = (u^0)^2 \Gamma^\mu_{00}.$$

ところが Schwarzschild 解の導出過程で見たように [11, p.334] ノンゼロの Γ^μ_{00} は Γ^1_{00} のみであり ($x^1 = r$), その値は

$$\Gamma^1_{00} = g^{1\mu} \Gamma_{\mu 00} = g^{11} \Gamma_{100}, \quad \Gamma_{100} = \frac{1}{2} (\partial_0 g_{01} + \partial_0 g_{10} - \partial_1 g_{00}) = -\frac{1}{2} \partial_1 g_{00} = \frac{r_g}{2r^2}.$$

以上より粒子はゼロでない加速度成分 $a^1 = r_g/2r^2$ を持ち、その (不変な) ノルムは

$$a \equiv \sqrt{g_{\mu\nu} a^\mu a^\nu} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} \frac{r_g}{2r^2}.$$

これは一定の空間位置に留まる粒子が、自由落下する局所慣性系に対して持つ加速度と考えられる [18, pp.143–144]. 実際、粒子の 4 元速度 u^μ は座標系に依らない幾何学的なベクトル $\vec{u}$ として定義でき、これに対して $a^\mu = u^\nu D_\nu u^\mu$ で定義される加速度をゼロとおくと測地線の方程式が得られるので、加速度がゼロとなるのは自由落下する粒子に対してである [12, p.199–200]. また a は構成により粒子の固有時間で測った加速度であり、動径成分のみを持つという点で前問の Minkowski 空間における加速度と共通している。これは一定の空間座標に留まる加速系も第 1 近似では自由落下する系に一致するので、観測者は平坦な空間で加速していることになるからである [18, p.143].

ここで地平面の近く $r = r_g + \epsilon$ を考えると

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} = \sqrt{\frac{r_g + \epsilon}{\epsilon}} \simeq \sqrt{\frac{r_g}{\epsilon}}, \quad \therefore a \simeq \sqrt{\frac{r_g}{\epsilon}} \frac{1}{2r_g} = \frac{1}{2\sqrt{r_g \epsilon}}.$$

他方で地平面からの真の距離は

$$l = \int_{r_g}^{r_g + \epsilon} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} = \int_0^\epsilon d\rho \sqrt{\frac{r_g + \rho}{\rho}} \simeq \int_0^\epsilon d\rho \sqrt{\frac{r_g}{\rho}} = 2\sqrt{r_g \epsilon}. \quad (\rho \equiv r - r_g)$$

なおこれと同じ結果を線要素の表式 $\frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}}$ から直接読み取るには、 $dr \rightarrow \epsilon$ とおくと同時に、分母の r を線要素の中央 $r_g + (\epsilon/2)$ で評価すれば良い。するとここでも加速度は $a = 1/l$ と書ける。

すぐ後の式 (10.61) で定義される温度 T は、与えられた空間位置 r における座標時間 τ と固有時間 s の関係から

$$ds = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} d\tau, \quad \therefore T = \text{const} \times \frac{d\tau}{ds} = \text{const} \times \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2}$$

と表される (以下では係数を $\text{const} = \hbar/k$ に限定する必要はない)。特に地平面近く $r = r_g + \epsilon$ での値と、無限遠での値 (Hawking 温度 (10.1): $T_H = \hbar/8\pi kGM$ に一致すると仮定) はそれぞれ

$$T = \text{const} \times \sqrt{\frac{r_g}{\epsilon}} = \text{const} \times \frac{2r_g}{l}, \quad T_H = \text{const}$$

となるので,

$$T = \frac{2r_g}{l} T_H = \frac{4GM}{l} \frac{\hbar}{8\pi kGM} = \frac{\hbar}{2\pi kl}$$

を得る. 演習 10.1 の場合と同じく, これは加速度 $a = 1/l$ に対する Unruh 温度 (10.13) に一致している.

10.5.2 Tolman の法則と熱時間

一般相対性理論を無視すれば, 2つの系は同じ温度のとき平衡にある. 例えば (Newton 的な) 重力場の中で孤立した気柱は, 圧力が高度とともに減少するものの温度は一定である平衡状態に熱的緩和する (thermalize). このことは, しかしながら, 一般相対性理論を考慮するともはや正しくない. 平衡状態において, (標準的な温度計で測った) 気体の温度 T は高度とともに

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{g}{c^2} \quad (10.59)$$

のように減少し, ここに $g \sim 9.8\text{m/s}^2$ は Galileo 加速度である. [次元解析から ΔT は単位長さ当たりの温度変化と推察される.] この関係の共変なバージョンは

$$T\|\xi\| = \text{constant} \quad (10.60)$$

であり, ここに $\|\xi\|$ はそれに沿って平衡が確立されるところの, Killing 場 ξ のノルムである. この事実は, 当初はかなり驚きであったが, 1930 年代初頭に Tolman と Ehrenfest (Tolman 1930; Tolman and Ehrenfest 1930) によって最初に理論的に導出され, 次いで多くの著者によって数多くの方法で再導出された.

これを理解する最も簡単な方法は, 単に重力が時間を遅らせることに注意することである. 静的な重力場では, 静的な時計はもはや同期化していない. したがって静的な場には 2つの異なる時間の流れの概念がある: それに沿って時空が静的となる, Killing 場によって与えられる共通時間 (common time) τ ; および静止している各軌道に沿った固有時間で与えられる局所的な時間 s である. その 2つの比は Killing ベクトルのノルムで与えられる. 時計はエネルギー準位間の遷移確率を測るデバイスであり, これらの準位 (levels) は τ ではなく固有時間で決まる. ところが平衡の配位は s においてではなく, Killing 場の流れ (flow) に対して, すなわち τ において平衡にある. したがって大域的な平衡の配位における異なる領域は互いに, τ と s の比で赤方偏移している.

同じ効果を確認する今一つの方法は, 一般相対性理論においてエネルギーが “重さを持ち (weights)”, したがってより低い高度に集まることを理解することである. より正確には, エネルギーが系の低い部分を去り高い部分に達するとき, 赤方偏移して到達し, したがって減少している. もはや 1つの部分系におけるエネルギーの損失が他の部分系に獲得されると仮定して, エントロピーを最大化することはできないことが帰結する: 計算に赤方偏移因子を含めねばならず, これが式 (10.59) を与える.

平衡の時間パラメータ τ は熱時間 (thermal time) の例である (Rovelli 1993a; Connes and Rovelli 1994). 温度は熱時間と固有時間の比 $T \sim d\tau/ds$ で定義できる. 比例係数は Killing 場と熱時間のスケールを定める (Rovelli and Smerlak 2010). それを

$$T = \frac{\hbar}{k} \frac{d\tau}{ds} \quad (10.61)$$

と定めるのがとりわけ便利である, 何故ならそれは τ を無次元にし, 平衡において系が跳び回る個々の量子セルの数に同定するからである: Haggard and Rovelli (2013) を見よ. [後の式 (10.75) も見よ.]

10.5.3 代数的な量子論

ここでは本文で用いた [主に 10.4 節^{*157}], 代数的な言語における熱的状态の基本的定式化を説明する. これは熱的状态を記述する上で, 標準的な Hamilton 形式の言語よりも一般的で強力である.

温度計との結合の観点から, KMS 条件の直接的な物理解釈も与える.

状態の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$, ハミルトニアン H , および自己共役な演算子 $A, B, \dots$ の代数 $\mathcal{A}$ を持つ量子系を考えよ. 全ての状態 $\psi \in \mathcal{H}$ は代数上の正定値の線形関数を

$$\omega_\psi(A) = \langle \psi | A | \psi \rangle \quad (10.62)$$

^{*157} Unruh 温度 (10.13) にも 10.5.4 項末尾で言及される.

で定義し、より一般にあらゆる密度行列 ρ も同じく

$$\omega_\rho(A) = \text{Tr}[\rho A] \quad (10.63)$$

を定義する。ハミルトニアンは代数上の流れ (flow) を

$$\alpha_t(A) = e^{iHt} A e^{-iHt} \quad (10.64)$$

で定義する。流れ α_t を伴う代数 $\mathcal{A}$ とその正定値の状態 ω の組は量子論を語るための、Hilbert 空間の言語よりも一般的な言語を供する (以下を見よ)。この言語を用いて熱的な現象を記述しよう。

10.5.4 KMS と温度計

観測量 $A, B, \dots$ を持つ観測量の代数 $\mathcal{A}$ で記述され、状態 $\omega: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ にある量子系を考えよ。 $t \in \mathbb{R}$ として $\alpha_t: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ を代数上の流れ (flow) とする。もし全ての t に対して

$$\omega(\alpha_t A) = \omega(A) \quad (10.65)$$

ならば、状態 ω は α_t に関して平衡状態であり、もし

$$f_{AB}(t) = f_{BA}(-t - i\beta) \quad (10.66)$$

[β の項の符号を修正した (文献 [2, p.205] とも整合; 本稿次項)] ならばその温度は $T = 1/\beta$ であると言う、ここに

$$f_{AB}(t) = \omega(\alpha_t AB). \quad [\alpha_t \text{ は } A \text{ のみに作用}] \quad (10.67)$$

式 (10.66) の等価な形は f_{AB} の Fourier 変換 $\tilde{f}_{AB}$ を用いて

$$\tilde{f}_{AB}(\omega) = e^{\beta\omega} \tilde{f}_{BA}(-\omega) \quad (10.68)$$

と与えられる。[右辺で $e^{-\beta\omega} \rightarrow e^{\beta\omega}$, $\tilde{f}_{AB} \rightarrow \tilde{f}_{BA}$ と修正した (後の式 (10.73–74) とも整合)。本稿次項で上式 (10.68) を確認する.]

正準な例は、ハミルトニアン演算子 H の固有状態 $|n\rangle$ と固有値 E_n が定義される Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の演算子として $\mathcal{A}$ が実現し、流れと状態が発展演算子 $U(t) = e^{-iHt}$ と密度行列 $\rho = e^{-\beta H} = \sum_n e^{-\beta E_n} |n\rangle \langle n|$ を用いて、それぞれ

$$\alpha_t(A) = U^{-1}(t) A U(t) \quad (10.69)$$

および

$$\omega(A) = \text{tr}[\rho A] \quad (10.70)$$

で定義される場合で与えられる [例えば文献 [3, § 3.4]]. この場合、式 (10.65) と式 (10.66) が帰結することは直接確かめられる [本稿次項で確認].

しかしながら、式 (10.65) と式 (10.66) の射程はこの正準な場合よりも広い。例えばこれらの式は、無限の空間において熱状態の無限大のエネルギーのためハミルトニアンがよく定義されない、熱的な場の量子論の取り扱いを許容する。実にこれら 2 つの式は直接的に平衡と温度の物理的概念を捉えていることを、述べておくことが重要である。式 (10.65) に対しては、このことはほぼ自明である：あらゆる観測量の期待値が時間に依存しないならば、状態は流れに関して平衡にある。

式 (10.66) の直接的な物理的解釈は比較的非自明である：それは系の温度計との結合を表している。

これを理解するために、相互作用項

$$V = g(|0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0|) A \quad (10.71)$$

で量子系 S と結合した、エネルギー・ギャップ ϵ の 2 準位系から成る単純な温度計を考えよ、ここに g は小さな結合定数である [また A は系 S の状態に作用する演算子]。温度計が始状態 $|0\rangle$ から終状態 $|1\rangle$ に跳び上がる一方で、系が始状態 $|i\rangle$ から終状態 $|f\rangle$ に移行する振幅は、Fermi の黄金律を用いて g の 1 次までで計算できる：

$$\begin{aligned} W_+(t) &= g \int_{-\infty}^t dt (\langle 1| \otimes \langle f|) \alpha_t(V) (|0\rangle \otimes |i\rangle) \\ &= g \int_{-\infty}^t dt e^{it\epsilon} \langle f | \alpha_t(A) | i \rangle. \end{aligned} \quad (10.72)$$

[式 (10.72–73) を本稿次項で補足する.] 温度計が跳び上がる確率は、終状態にわたって和をとった、振幅の絶対値の 2 乗である。それは

$$P_+(t) = g^2 \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^t dt_2 e^{i\epsilon(t_1-t_2)} \omega(\alpha_{t_2}(A^\dagger) \alpha_{t_1}(A))$$

であり、ここで代数的な表記 $\omega(A) = \langle i|A|i \rangle$ を用いた。初期状態が平衡状態ならば

$$P_+(t) = g^2 \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^t dt_2 e^{i\epsilon(t_1-t_2)} f_{A^\dagger A}(t_1 - t_2)$$

であり、積分は時間差にのみ依存する。単位時間当たりの遷移確率はこのとき

$$p_+ = \frac{dP_+}{dt} = g^2 \tilde{f}_{A^\dagger A}(\epsilon) \quad (10.73)$$

であり、これは式 (10.67) がまさに系に結合した温度計の遷移率を与える量であることを示している。跳び下りる確率に対して直ちに計算を繰り返すことは重要であり、それは

$$p_- = g^2 f_{AA^\dagger}(-\epsilon) \quad (10.74)$$

を与える。したがって式 (10.68) はまさに温度計が温度 β に熱的緩和している (thermalize) 事実を表す、すなわち $p_+/p_- = e^{\beta\epsilon}$ 。[式 (10.66) の β の符号と連動して右辺の指数の符号を修正した。このとき初めて正しい詳細つり合いの関係が得られる.]

これらの知見は式 (10.65) と式 (10.66) が、量子系の熱的性質を完全に捉えた、標準的な量子統計力学の一般化を定義することを示している。これらの式によって定義される構造は数学の文献ではモジュラー・フロー (modular flow) と呼ばれる： α_t は状態 ω に対するモジュラー・フロー、あるいは冨田フロー (Tomita flow) であり、 C^* 代数の分類の基本的な手段である。物理の文献では、状態 ω は (時間の流れ (flow) に対する) KMS 状態と呼ばれる。系が平衡にあり、特定の状態で熱的に振舞うことを示すには、状態がこれら 2 つの式を満たすことを示せば充分である。

Hilbert 空間の量子力学の文脈では、状態は純粋状態であってもこれら 2 つの式を満たし得ることに注意せよ。標準的な例は Poincaré 不変場の量子論の真空状態と与えられ、それは与えられた向きへの推進 (boost) で定義されるモジュラー・フローに関して KMS である。Poincaré 不変であるため、真空はこの流れの下で不変であり、Unruh による有名な計算はそれが逆温度 2π において KMS であることを示した。

この場合、物理的な解釈は単にこの流れに関して静的な観測者が、すなわち単位の加速度で加速する観測者が、温度 $1/2\pi$ を計測するはずであるという事実で与えられる [式 (10.13)]。Unruh のオリジナルの計算も、実に、ちょうど上記の式 (10.71–10.74) の手順を踏んでいる。

10.5.4 項について

■Fourier 変換の満たす式 (10.68) の確認 $f_{AB}(t)$ の具体的表式 (10.67) に依らず、単に式 (10.66) の両辺の Fourier 展開

$$\begin{aligned} f_{AB}(t) &= \int \frac{dE}{2\pi} e^{-iEt} \tilde{f}_{AB}(E), \\ f_{BA}(-t - i\beta) &= \int \frac{dE}{2\pi} e^{-iE(-t-i\beta)} \tilde{f}_{BA}(E) = \int \frac{dE}{2\pi} e^{-iEt} \left[e^{-\beta E} \tilde{f}_{BA}(-E) \right] \quad (\text{第 2 の等号で } -E \rightarrow E) \end{aligned}$$

を等置すれば良い。ただし状態 ω との混同を避けるため、ここでは積分変数を E と書いた。

なお式 (10.66) は時間並進対称性

$$f_{BA}(-t) = \omega(\alpha_{-t} B \cdot A) = \omega(\alpha_t A \cdot B) = f_{AB}(t)$$

と似て非なる条件であることに注意する。

■正準な場合 (10.69–70) が条件 (10.65–66) を満たすことの確認 まず $\rho = e^{-\beta H}$ と $U^{-1} = e^{iH}$ は可換であることに注意すると,

$$\omega(\alpha_t A) = \text{Tr}[\rho(U^{-1} A U)] = \text{Tr}[\rho A(U U^{-1})] = \omega(A) : (10.65).$$

次に式 (10.66) の左辺は

$$f_{AB}(t) = \omega(\alpha_t A \cdot B) = \text{Tr}[\rho \alpha_t A \cdot B] = \text{Tr}[e^{-\beta H} e^{iHt} A e^{-iHt} B].$$

すると式 (10.67) の右辺は本稿のように β の符号を修正して初めて

$$f_{BA}(-t - i\beta) = \text{Tr}[e^{-\beta H} e^{-iHt + \beta H} B e^{iHt - \beta H} A] = \text{Tr}[e^{-\beta H} (e^{\beta H} e^{-iHt}) B (e^{-\beta H} e^{iHt}) A]$$

となり, トレースの巡回対称性とより上式の $f_{AB}(t)$ に一致する. ただし第 2 の等号では指数 $\pm iHt$ と $\pm \beta H$ が交換することに注意して“指数法則”を適用した.

■遷移振幅 (10.72) と遷移率 (10.73–74) について 遷移振幅 (10.72) の第 2 辺は時間に依存する摂動論の結果であり, 特に $\alpha_t(V)$ は非摂動ハミルトニアンによる V の相似変換 (10.69) であって, 相互作用描像の演算子 V に他ならない [25, § 5.6]. ここで調和摂動の下での 2 準位間の遷移の取り扱い [25, pp.460–462] に着想を得て, 相互作用項 (10.71) の Hermite 性を保証するために

$$V = g(|0\rangle\langle 1| A + |1\rangle\langle 0| A^\dagger)$$

と再定義しておく^{*158}. さらに 2 状態 $|0\rangle, |1\rangle$ のエネルギーはそれぞれ $E = 0, \epsilon$ とおけるので, ここでは初期時刻をひとまず t_0 とおくと, 具体的には

$$\begin{aligned} \alpha_t(V) &= g e^{iH(t-t_0)} [(|0\rangle\langle 1| A + |1\rangle\langle 0| A^\dagger) e^{-iH(t-t_0)}] \\ &= g e^{-i\epsilon(t-t_0)} |0\rangle\langle 1| \alpha_t(A) + g e^{i\epsilon(t-t_0)} |1\rangle\langle 0| \alpha_t(A^\dagger). \end{aligned}$$

そこで 2 状態 $|0\rangle, |1\rangle$ の規格直交性を仮定すると, 遷移 $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ に寄与するのは最右辺第 2 項である. 積分の上限 t と区別するために積分変数を t' と書くと,

$$W_+(t) = g \int_{t_0}^t dt' (\langle 1| \otimes \langle f|) \alpha_{t'}(V) (|0\rangle \otimes |i\rangle) = g \int_{t_0}^t dt' e^{i\epsilon(t'-t_0)} \langle f| \alpha_{t'}(A^\dagger) |i\rangle : (10.72').$$

よって遷移確率は

$$\begin{aligned} P_+(t) &= \sum_f |W_+(t)|^2 = \sum_f \left(g \int_{t_0}^t dt_1 e^{i\epsilon(t_1-t_0)} \langle f| \alpha_{t_1}(A^\dagger) |i\rangle \right) \left(g \int_{t_0}^t dt_2 e^{-i\epsilon(t_2-t_0)} \langle i| \alpha_{t_2}(A) |f\rangle \right) \\ &= g^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 e^{i\epsilon(t_1-t_2)} \langle i| \alpha_{t_2}(A) \left(\sum_f |f\rangle\langle f| \right) \alpha_{t_1}(A^\dagger) |i\rangle \\ &= g^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 e^{i\epsilon(t_1-t_2)} \omega(\alpha_{t_2}(A) \alpha_{t_1}(A^\dagger)) \end{aligned}$$

^{*158} すると以下で見ると, $p_\pm$ の式 (10.73–74) における $\tilde{f}$ の添字 $A, A^\dagger$ の順序の辻褄が合う. A が Hermite であれば式 (10.71) の Hermite 性はもとより保証されており, また A と $A^\dagger (= A)$ の順序は初めから問題にならない

と計算される．最右辺ではもはや被積分関数に t_0 依存性があからさまには現れないので，安全に $t_0 = -\infty$ とおいて計算を簡略化できる．また初期状態 $|i\rangle$ が平衡状態であると仮定すると， $\omega(A) \equiv \langle i|A|i\rangle$ には時間並進対称性 (10.65) が課せられるので，

$$\omega(\alpha_{t_2}(A)\alpha_{t_1}(A^\dagger)) = \omega(A\alpha_{t_1-t_2}(A^\dagger)) = f_{A^\dagger A}(t_1 - t_2).$$

ここで簡単のため，また興味のある場合として $t \rightarrow \infty$ を想定して，積分範囲を (t_1, t_2) 平面全体に拡げる．すると“相対座標” $t_r \equiv t_1 - t_2$ と“重心座標” $t_G \equiv (t_1 + t_2)/2$ に変数変換を行った結果は単に

$$P_+(t) = g^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt_G \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt_r e^{i\epsilon t_r} f_{A^\dagger A}(t_r) \right) = t g^2 \tilde{f}_{A^\dagger A}(\epsilon)$$

となる．時間微分をとると単位時間の遷移率 (10.73): $p_+ = g^2 \tilde{f}_{A^\dagger A}(\epsilon)$ を得る．

同様に逆の過程として，系 S の始・終状態も入れ替えた状態変化 $|1\rangle \otimes |f\rangle \rightarrow |0\rangle \otimes |i\rangle$ に対する確率 (振幅) を調べる．すると計算結果は

$$W_-(t) = g \int_{t_0}^t dt' e^{-i\epsilon(t'-t_0)} \langle i|\alpha_{t'}(A)|f\rangle,$$

$$P_-(t) = \sum_i |W_-(t)|^2 = g^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 e^{-i\epsilon(t_1-t_2)} \langle f|\alpha_{t_2}(A^\dagger)\alpha_{t_1}(A)|f\rangle$$

と置き換わる^{*159}．ここで $|f\rangle$ も $|i\rangle$ と同等の平衡状態であって $\omega(A) \equiv \langle f|A|f\rangle$ を定義するならば，

$$\langle f|\alpha_{t_2}(A^\dagger)\alpha_{t_1}(A)|f\rangle = \omega(\alpha_{t_2}(A^\dagger)\alpha_{t_1}(A)) = \omega(A^\dagger\alpha_{t_1-t_2}(A)) = f_{AA^\dagger}(t_1 - t_2).$$

よって今度は遷移率 (10.74): $p_- = g^2 \tilde{f}_{AA^\dagger}(-\epsilon)$ が得られる．

10.5.5 一般共変な統計力学と量子重力

重力，量子，および統計の間の関係は絡み合った問題のネットを成しており，そこには自然の基本的な側面に関する我々の混乱の多くがある．困難の核心には，重力場に対する整合的な統計的理論 (電磁場に対して我々が有するような) を，古典的な場合にさえ欠くという事実がある．その理由は統計力学の標準的な手段を無効にする，時間の一般相対性理論への特別な現れ方にある．統計的な推論の能力を一般共変な理論に拡張する試みは，我々の見解では，物理的な世界に対する我々の現在の理解の中心にある最も深遠で見事な未解決問題である——量子重力に劣らず見事であり，量子重力と最も密接に関係しているようである．ここでは著者らが発展させつつあるこの方面の研究の路線における成果とアイデアをいくつか，重要な文献を示しつつ手短かにスケッチするに留める．

古典論における熱時間

[第2章で見た時間変数を選び出さない力学のように] もし全ての変数が同等ならば，平衡とは何を意味するのか明らかでない．そのような状況では (一般に) あらゆる統計的状态 ρ は平衡状態と見なせる，何故ならそれは相空間の流れ (flow) の下で不変だからである：ハミルトニアン・フローは $H = -\ln \rho$ によって生成される． ρ は相空間上の密度なので，それは作用の逆数の次元を持ち，したがってその対数を修正するための定数が必要である [真数は無次元]．先を見据えて， $\hbar = 1$ の単位を採ることでこれを行う．量 H は状態 ρ の熱的ハミルトニアン (thermal hamiltonian) と呼ばれ，また (無次元の) 流れのパラメータ τ は熱時間 (thermal time) と呼ばれる．Gibbs 状態 $[\sim e^{-\beta H_0}]$ の熱的ハミルトニアンは温度でスケールされた標準的なハミルトニアンであり，温度は熱時間 τ と物理的時間 t の比：

$$T = \frac{\hbar \tau}{k t} \quad (10.75)$$

^{*159} 系 S の状態にわたる和を再び高準位 $|1\rangle$ 側，すなわち“始状態” $|f\rangle$ に関してとった場合にも，相関関数 $\langle f|\alpha_{t_2}(A^\dagger)\alpha_{t_1}(A)|f\rangle$ の代わりに $\langle i|\alpha_{t_2}(A^\dagger)\alpha_{t_1}(A)|i\rangle$ が得られるので，結果は変わらない．したがって逆過程を系 S の始・終状態はそのままとして $|1\rangle \otimes |i\rangle \rightarrow |0\rangle \otimes |f\rangle$ と書いても本質的な違いはない．

である。[通常のハミルトニアン H_0 が物理的時間 t における発展を生成するとき、熱的ハミルトニアン $H = \beta H_0 + \text{const.}$ は熱時間 $\tau = t/\beta = kTt$ における発展を生成する。 τ が無次元となるよう、右辺分母に $\hbar$ を復元すると上式を得る。] 式 (10.61) で既に見た表現は、 t が温度と同様に点から点へと変化する固有時間 s となる、重力へと一般化されている。

平均の幾何学

重力場の熱ゆらぎを調べるならば、熱時間の流れに同定できる Killing 場を持つ “平均の幾何学” の周りにこの熱ゆらぎが集中している状態を “平衡” と呼ぶのが理に適っている。この構成は Rovelli (2013a) で展開されている。

場の量子論における熱時間

熱時間の流れがユニタリー変換を除いて状態に依存しない、状態のモジュラー・フローとなる、量子場理論において熱時間の概念は効力を発揮する (Connes and Rovelli 1994)。Rindler くさび $x > |t|$ 上の観測量の代数に制限した、場の量子論の真空状態のモジュラー・フローは推進 (boost) のフローであり、熱時間は推進パラメータであり、式 (10.75) で定義される局所的な温度は Unruh 温度である。ところが宇宙背景放射状態の熱時間が宇宙論的時間であることが判明する Friedmann 宇宙論のような、非定常的な状況においても熱の流れは意味を成す (Rovelli 1993c)。

第ゼロ原理

著しいことに、2つの系が相互作用するとき、平衡はそれらの熱時間の一致で与えられる (Haggard and Rovelli 2013) [熱力学第ゼロ法則の一般化]。これには物理的解釈がある：熱時間は量子系がある状態からそれ自身に直交する状態に移る時間を単位とする時間である。したがって平衡にある2つの相互作用する系は同数の異なる状態と相互作用する：それらが交換する情報の流束のネットは消える。特定の時間変数の観点よりもむしろ情報の観点から定義されたこの平衡の概念は、特別な時間がない共変な系へと一般化される (Haggard and Rovelli 2013)。さらに、2つの系の結合系はそれ自体が、個々の時間の組合せの中から時間変数を選び得る (Chirco *et al.* 2013)。

境界の定式化における統計的状态

2.4.2 項において重力では時空領域の境界全体 Σ に状態を関係付ける必要があると論じた。もし Σ を過去と未来の構成要素に分離できるならば、この Hilbert 空間は構造 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{past}} \otimes \mathcal{H}_{\text{future}}$ を持つ。この空間は $\mathcal{H}_{\text{past}}$ の状態と $\mathcal{H}_{\text{future}}$ の状態のテンソル積でない状態を含んでいる。これらは何を表すのか？ これらが統計的状态を表すことを理解するのは困難ではない (Bianchi *et al.* 2013)。

統計的ゆらぎ 対 量子ゆらぎ

特に、もし境界の未来と過去の構成要素が図 107 のようにコーナー (角; corner) で接続されており、また量子的な意味での等価原理の量子論バージョン——それはコーナーが UV [紫外 (短距離)] において局所的に Minkowski 状態のようであることを意味する——が成り立つならば、全ての境界状態は混合状態であることが帰結する。これは局所的にコーナーにおいて状態が

$$\rho = e^{-2\pi K} \quad (10.76)$$

の形を持つためであり、ここに K はコーナーにおける推進 (boost) の生成子である。このことは重力と地平面が関与するときには、統計的ゆらぎと熱的ゆらぎの見分けが付かなくなるというアイデアを支持する。

この短いノートはもちろん、今なお明快さを探し求めている、この魅力的な話題を網羅するには程遠い。

10.5.5 項について

■古典論における熱時間について 第2章で見たように、時間変数の役割を果たす特別な変数を選び出さず、全ての変数 $\{x^a\}$ を同等に扱う力学の定式化が可能である。特に部分的観測量 $\{x^a\}$ の1つが時間変数 t に選出されるとき、残りの変数 $\{q^i\}$ によって座標付けされる配位空間を $\mathcal{C}_0$ として、 $\{x^a\}$ の張る空間は拡大配位空間 $\mathcal{C} = R \times \mathcal{C}_0$ に分解される。このとき対応してハミルトニアン拘束は式 (2.56): $\mathcal{C} = p_t + H_0(p_q, q)$ の形

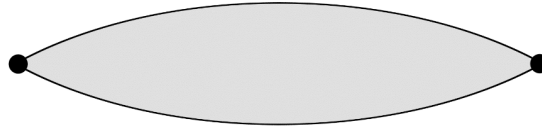


図 107 空間的な境界とコーナー (塗りつぶした丸) を持つレンズ型の時空領域

に分解され、通常の力学が復元される．ここに H_0 は通常のハミルトニアン、あるいは文献 [2] で Rovelli が言うところの「非相対論的ハミルトニアン」である．

このように根本的な水準では「時間のない物理」を定式化できる一方で、我々は日常的に時間変数 t を“経験している”こともまた確かである．すると、このギャップはどのように説明できるかという問を提起できる．興味深い 1 つの可能性は、あらゆる同等な変数 $\{x^a\}$ の中から、特別な時間変数 t を選び出すのが、熱・統計力学だという仮説である [2, § 3.4].

- これは通常、力学と対照的に熱・統計力学の扱う平衡状態には時間の概念がないと言われるのとは、事情が全く逆である．
- また、このアイデアは熱・統計力学が物理学全体にどのように位置付けられるかという問に対する、1 つの可能性を提示していると見ることもできよう．
- この点ではギリシャ神話は物理を正しく捉えているのかもしれない！ ギリシャ神話によれば、天空 (ウラノス) と大地 (ガイア) が交わり、時間 (クロノス) が生 (産) まれた．つまり時間はアプリオリに存在するわけではない [2, p.140,p.143]. もっとも言うまでもなく、神話を物理の根拠にはできない．

ポイントは Gibbs 分布 [カノニカル分布] $\rho_0(s) \sim e^{-\beta H_0(s)}$ が非相対論的なハミルトニアン H_0 を用いて定義されることである；それは特別な時間変数 t の存在を前提としている．そこで話を逆転させよう．すると与えられた任意の統計状態 ρ に対して、それが平衡分布となるように量 $H_\rho = -\ln \rho$ を定義して、そのハミルトニアン・フロー $s(t_\rho)$ を計算し、“熱時間 (thermal time)” t_ρ を定義できる．

ただしこれでは一見、あらゆる状態は平衡状態と見なせることになるので、平衡状態と非平衡状態をどのようにに区別し得るのかは疑問である．実際本文 (p.213) にあるように、時間の役割を担う特別な変数がなく、もし全ての変数が同等ならば、平衡とは何を意味するのか明らかでなく、そのような状況では一般にあらゆる統計的状态は平衡状態と見なせる．他方で平衡へと向かう非平衡状態ではもとより、過去と未来の区別が生じて時間の流れを識別し得る．

熱時間仮説は量子力学にも驚くべきほど上手く拡張できる．特に場の量子論への拡張では時間の流れを表すのに、本文 (pp.212–213) でも言及されている富田フローという数学的な概念が役立つ [2, § 5.5.1].

第 11 章 宇宙論

ループ重力の現実的な物理的現象への主要な応用は初期宇宙論である。これもまた最も重要な応用である、何故ならそれは理論を裏付け得る予言を最も導きそうに見えるからである。観測的宇宙論は急速に発展しており、宇宙論的観測、とりわけ宇宙背景放射において、ループ重力が特定の検証可能な予言を導き得る望みがある。

ブラックホール熱力学の場合のように、ループ重力を宇宙論に適用するには 2 つの主要な方法がある。1 つ目は理論の正準な定式化に、2 つ目は共変な定式化に基づいている。いずれも古典的な相対論的宇宙論と同じアイデア——宇宙の非常に大きなスケールの自由度のダイナミクスに着目すること (Einstein 1917) ——に基づいている。ここでは 1 つ目には手短に触れるに留め、2 つ目をもう少し詳しく論じる。単純な宇宙論的モデルの古典的定式化を、量子論にとって重要な側面に焦点を当てつつ復習するところから始める。

11.1 古典的な宇宙論

宇宙論は宇宙にある全てのものの研究ではない。それは少数の非常に大きなスケールの自由度の研究である。非常に大きなスケールでは宇宙は近似的に一樣かつ等方的に見えるというのは、(Einstein が直観した) 事実である。したがってそれは一樣等方な幾何学周りのモードへの展開によって得られる近似的な記述を許容する。

宇宙の空間的な曲率は我々がアクセスできるスケールでは非常に小さいように見える。この知見から宇宙は空間的に平坦であると結論付けてはならない。人類は既に一度この過ちを犯している：地球の平均的な曲率は我々のスケールでは非常に小さく、地球は平らであると我々は結論付けた。この間違いを繰り返さないようにしよう (多くの者が繰り返している)。ただし良い近似として、空間的に平坦な宇宙は我々の見る宇宙のパッチ (patch) を近似しており、また空間的に平坦な宇宙は、少なくとも一定の目的に対しては、閉じた宇宙よりも記述がやや容易なので、ここで空間的に平坦な計量を用いるのは理に適っている。

そこで Friedmann–Lemaître 計量を考え、関数 $a(t)$ をスケール因子として、それをテトラードで書こう：

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a(t)^2 d\vec{x}^2 = \eta_{IJ} e_\mu^I(t) e_\nu^J(t) dx^\mu dx^\nu, \quad (11.1)$$

ここに $e_\mu^I dx^\mu = e^I$ を

$$e^0 = N(t) dt, \quad e^i = a(t) dx^i \quad (11.2)$$

で導入した [式 (11.1) で $N(t) \rightarrow N(t)^2$ と修正した]。この計量の作用への代入は

$$S[a] = \frac{3}{16\pi G} \int dt N \left(\dot{a}^2 - \frac{\Lambda}{3} a^3 \right) + S_{\text{matter}} \quad (11.3)$$

を与える [本稿次節で補足]。スケール因子の運動量共役は

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = \frac{3V_0}{8\pi G} N \dot{a} \quad (11.4)$$

であり、ここに L はラグランジアンであり、 V_0 は考えている空間の座標体積である。混乱を招く無限大を定式化に持ち込むことなく、この体積を無限大にとることはできない。そこで我々はそれを有限にとる。 $V_0 = 1$ となるように座標を規格化することは、 a^3 が宇宙の実際の体積になることを含意する。[空間計量は $q_{ab} = a^2 \delta_{ab}$

なので宇宙の固有体積は $\int d^3x \sqrt{\det q} = a^3 V_0$.] この選択の下で、重力の作用の境界項はこのとき

$$S_{\text{boundary}} = p_a a = \frac{3}{8\pi G} N \dot{a} a^2. \quad [\text{本稿次節で補足}] \quad (11.5)$$

スケール因子のダイナミクスは 1 次元の力学系を定義し、それは物理的宇宙論の研究の基礎に他ならない。この系の解とその解の周りの摂動は宇宙の大スケールのダイナミクスをかなり良く記述する。Planck 衛星による最新の観測 (Planck Collaboration 2013) は驚くべき精度でこの描像の信頼性を裏付けた。

ラプス関数 N [教科書の初出は式 (3.27)] の変分によって得られる運動方程式は a と $\dot{a}$ を関係付ける式である。物質のエネルギー密度

$$\rho(t) = a^3 \frac{\partial S_{\text{matter}}}{\partial N(t)} \quad (11.6)$$

の存在下では、ラプスの変分は

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\Lambda}{3} + \frac{8}{3} \pi G \rho \quad (11.7)$$

を与え [本稿次節で定義式 (11.6) を修正して導出]、これは宇宙の大スケールのダイナミクスを支配する主要な式である、Friedmann 方程式である。この式を考慮した後では、ラプスを例えば $N = 1$ に固定できる。Friedmann 方程式は各時刻において $\dot{a}$ を a の関数として与える。したがって境界項は単に a の関数と見なせる。Hamilton 関数は

$$S(a_i, a_f) = S(a_f) - S(a_i) \quad (11.8)$$

の形の純粋な境界項であることが帰結し、ここに

$$S(a) = \frac{3}{8\pi G} \dot{a} a^2 \quad (11.9)$$

であり、また $\dot{a}$ は Friedmann 方程式を通じて a に依存する。したがって量子論の遷移振幅は小さな $\hbar$ の極限で

$$W(a_i, a_f) \sim e^{\frac{i}{\hbar} S(a_i, a_f)} = e^{\frac{i}{\hbar} S(a_f) - \frac{i}{\hbar} S(a_i)} = e^{\frac{i}{\hbar} S(a_f)} e^{-\frac{i}{\hbar} S(a_i)} \sim \overline{W(a_f)} W(a_i) \quad (11.10)$$

と因数分解されると期待され、ここに

$$W(a) \sim e^{-\frac{i}{\hbar} \dot{a} a^2}. \quad (11.11)$$

これが宇宙論的な量子力学的遷移振幅が標準的な宇宙論と整合するために、収束しなければならない古典的極限である。

これを 3.4.3 項で定義した Ashtekar 変数に翻訳しよう。密度化した逆トライアド $E_i^a = \frac{1}{2} \epsilon^{abc} \epsilon_{ijk} e_b^j e_c^k$ に共役な Ashtekar–Barbero 接続 $A_a^i = \Gamma_a^i + \gamma k_a^i$ はトライアドのスピン接続 Γ_a^i と、ここではループ量子宇宙論で通常行われるように γ に等しくとられている Barbero–Immirzi 定数 β の掛かった、空間的な面 (slide) の外部曲率 k_a^i の和である。平坦な場合には空間が平坦なので $\Gamma_a^i = 0$ であり、また外部曲率は対角的であってスケール因子の時間微分の倍数

$$k_a^i = e_a^i = \dot{a} \delta_a^i \quad (11.12)$$

である [本稿次節で確認]。したがって Ashtekar–Barbero 変数は

$$A_a^i = \gamma \dot{a} \delta_a^i = c \delta_a^i, \quad E_i^a = a^2 \delta_i^a = p \delta_i^a \quad (11.13)$$

と簡略化され [本稿次節で確認]、これらは

$$\{c, p\} = \frac{8\pi G}{3V_0} \gamma \quad (11.14)$$

を満たす [本稿次節で補足]. これらのハミルトニアン拘束 (3.86) への代入は (興味のない全体の定数を別にして)

$$H = \left(\frac{cp}{\gamma} \right)^2 - \frac{\Lambda}{3} p^3 \quad (11.15)$$

を与える [本稿次節で確認]. $H = 0$ は純粋な重力に対する Friedmann 方程式である. 物質のエネルギー密度 ρ (空間的に一定と仮定する) を加えると

$$\frac{c^2}{\gamma^2 p} = \frac{\Lambda}{3} + \frac{8}{3} \pi G \rho \quad (11.16)$$

が得られ, その $a(t)$ 変数への翻訳は式 (11.7), すなわち宇宙定数を伴う平坦な宇宙に対する標準的な Friedmann 方程式である. Hamilton 関数は上記のように因数分解して

$$S(p) \sim \frac{c(p)p}{\gamma} \quad (11.17)$$

となり, ここに $c(p)$ は Friedmann 方程式の解である. γ は [$c \equiv \gamma \dot{a}$ と] 相殺することに注意せよ. 例えば物質が存在しないとき,

$$S(p) \sim \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} p^{\frac{3}{2}} \quad (11.18)$$

が期待される [本稿次節を参照]. すると古典的極限が成り立つためには, 遷移振幅は小さな $\hbar$ での振舞い

$$W(p) \sim e^{\frac{i}{\hbar} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} p^{\frac{3}{2}}} \quad (11.19)$$

を持たねばならない.

11.1 節について

■作用 (11.3) と境界項 (11.5) について 文献 [12, § 12.6] の練習問題 14,16 を通じて確認したように, ラプスを $N = 1$ とする Friedmann–Robertson–Walker 解に対するスカラー曲率は, 平坦な宇宙モデルの場合

$$R = 6 \left\{ \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right\}$$

で与えられる. ところが R はスカラーなので, 計量 (11.1) を持つ座標系への変換 $t \rightarrow Nt, (r, \theta, \phi) \rightarrow (x, y, z)$ の下でその値は不変である. 他方で Jacobi 行列式は $\sqrt{-\det g} = Na^3$ である. すると作用 (3.1) は, 宇宙定数の項を逆符号にしておくと [11, p.397]

$$\begin{aligned} S &= + \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-\det g} (R + 2\Lambda) = + \frac{3V_0}{8\pi G} \int dt N \left(\ddot{a}a^2 + \dot{a}^2 a + \frac{\Lambda}{3} a^3 \right) \\ &= + \frac{3V_0}{8\pi G} N \dot{a}a^2 - \frac{3V_0}{8\pi G} \int dt \left\{ N \left(\dot{a}^2 a - \frac{\Lambda}{3} a^3 \right) + \dot{N} \dot{a}a^2 \right\} \end{aligned}$$

となる. ここで V_0 は空間の座標体積であり, 本文に合わせて 1 とおく. 最右辺における積分は作用 (11.3) の右辺第 1 項と同じ形を含んでおり, そこで式 (11.3) の係数は $3/16\pi G \rightarrow -3/8\pi G$ と修正されと考えられる. 実際このとき初めて以下で確認するように, Friedmann 方程式 (11.7) と Poisson 括弧 (11.14) が正しく

導かれる．ただし部分積分に起因する $\dot{N}$ の項が余計に含まれている．そこで $N(t)$ に関する Euler-Lagrange 方程式を書き下すと

$$0 = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{N}} - \frac{\partial}{\partial N} \right) \left\{ N \left(\dot{a}^2 a - \frac{\Lambda}{3} a^3 \right) + \dot{N} \dot{a} a^2 \right\} = \left(\ddot{a} - \frac{\Lambda}{3} a \right) a^2$$

となるので，恒等的に $a = 0$ となる場合も含めて $\ddot{a} = \frac{\Lambda}{3} a$ とまとめられる (文献 [18, p.108] も見よ)．これは ($\rho = 0$ に対する) 運動方程式 (11.7): $\dot{a} = \pm \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} a$ と同じ解 $a(t) = a_0 e^{\pm \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t}$ を持つ (de Sitter 宇宙 [18, p.110])．ただし式 (11.7) とは対照的に，ここで得たのは 2 階の微分方程式であって，2 つの積分定数を用いて $e^{\pm \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t}$ の線形結合を作ることができるという微妙な違いがある．

また 2.1.1 項で見たように，部分積分から生じる最右辺の境界項を相殺するには，作用にあらかじめ付加的な境界項 (11.5) (正確にはその逆符号) を含めておく必要がある．

■ $\rho(t)$ の定義式 (11.6) と Friedmann 方程式 (11.7) について 作用 (11.3) の各係数を上記のように修正し，またエネルギー密度の定義式 (11.6) を

$$\rho(t) = \frac{1}{a^3} \frac{\delta S_{\text{matter}}}{\delta N(t)}$$

と改める．実際この右辺は式 (11.6) とは対照的にエネルギー密度の次元を持っている．このときラプス $N(t)$ の変分に伴う作用の変化は

$$0 = \delta S = -\frac{3}{8\pi G} \int dt \delta N \cdot \left(\dot{a}^2 a - \frac{\Lambda}{3} a^3 \right) + \int dt \delta N \cdot \frac{\delta S_{\text{matter}}}{\delta N(t)} = -\frac{3}{8\pi G} \int dt \delta N \cdot a^3 \left\{ \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{\Lambda}{3} - \frac{8\pi G}{3} \rho \right\}$$

となるので，Friedmann 方程式 (11.7) を得る．

■Ashtekar 変数 (11.12–13) について 空間計量は $q_{ab} = a^2 \delta_{ab}$ なので， $N = 1$ の下で外部曲率 (3.55) は

$$k_{ab} = \frac{1}{2} \dot{q}_{ab} = a \dot{a} \delta_{ab}$$

となる．なるほど空間は内部曲率を持たないものの，スケール因子 $a(t)$ の変化のため外部曲率を持つ．ところが式 (11.2) のトライアド $e_a^i = a \delta_a^i$ の逆行列は $e_i^a = a^{-1} \delta_i^a$ であり，平坦な添字 i を上げた $e^{bi} = a^{-1} \delta^{bi}$ を用いると式 (3.76) から

$$k_a^i = k_{ab} e^{bi} = \dot{a} \delta_a^i : (11.12)$$

を得る．またトライアドの行列式は $\det e = a^3$ なので，余因子行列は

$$E_i^a = (\det e) e_i^a = a^2 \delta_i^a : (11.13).$$

ここから $p = a^2$ と同定される．なお式 (11.13) で定義される文字 $c \equiv \gamma \dot{a}$, $p \equiv a^2$ について，

変数記号 c は，おそらく configuration variable (配位変数) の頭文字から採ったものである． p はその正準共役運動量にあたる [1, p.124]．

■Poisson 括弧 (11.14) について 作用 (11.3) と連動して a の運動量共役 (11.4) を $p_a = -\frac{3V_0}{4\pi G} N \dot{a}$ と修正し，次いで $N = 1$ とおく．このとき正準変数 c, p を a, p_a で表すと

$$c \equiv \gamma \dot{a} = -\frac{4\pi G}{3V_0} \gamma \frac{p_a}{a}, \quad p \equiv a^2.$$

Poisson 括弧の正準不変性を踏まえると、 c, p 間の Poisson 括弧を変数 a, p_a に関して評価すれば充分と考えられる。実際このとき

$$\{c, p\} = -\frac{4\pi G}{3V_0}\gamma \left\{ \frac{p_a}{a}, a^2 \right\} = +\frac{4\pi G}{3V_0}\gamma \left(\frac{\partial}{\partial p_a} \frac{p_a}{a} \right) \left(\frac{\partial}{\partial a} a^2 \right) = \frac{8\pi G}{3V_0}\gamma : (11.14)$$

を得る。

直観的には式 (11.14) は Ashtekar 変数間の Poisson 括弧 (3.81) を引き継いでいる [1, p.124].

実際、Poisson 括弧 (3.81) において物理的単位 $8\pi G$ を復元し、機械的に正準変数 (11.13) を代入して x, y のいずれかで空間積分すると

$$8\pi G\gamma\delta_a^b\delta_j^i\delta^3(x, y) = \{A_a^i(x), E_j^b(y)\} = \delta_a^i\delta_j^b\{c, p\}, \quad \therefore 8\pi G\gamma\delta_a^b\delta_j^i = \delta_a^i\delta_j^b\{c, p\}V_0.$$

ここで添字の組 i, j または a, b で縮約をとると、左辺に数係数 3 が現れてしまう。そこで $b = j$ とおいて和をとると

$$8\pi G\gamma = 3V_0\{c, p\}$$

となって、見かけ上は式 (11.14) が得られる。ただし式 (11.14) とは対照的に式 (3.81) は場の汎関数微分で定義された Poisson 括弧であり、ここではそれらを区別せず形式的に $\{, \}$ と書いている。上記の計算の曖昧さも、このことに関係している可能性がある。

■ハミルトニアン拘束 (11.15) について Ashtekar 接続 (11.13): $A_a^i = c\delta_a^i$ に対して、曲率 (3.84) は

$$F_{ab}^k = \partial_a A_b^k - \partial_b A_a^k + \epsilon_{ij}^k A_a^i A_b^j = \epsilon_{ij}^k (c\delta_a^i)(c\delta_b^j) = c^2 \epsilon_{ab}^k$$

と計算される (ここでは教科書の通り構造定数 ϵ_{ij}^k から負号を除いておいた)。するとハミルトニアン拘束の式 (3.86):

$$H = E_i^a E_j^b \left(\epsilon_{ij}^k F_{ab}^k - 2(1 + \gamma^2) k_{[a}^i k_{b]}^j + \frac{\Lambda}{3} \epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} E_k^c \right)$$

において、各項は

$$\begin{aligned} E_i^a E_j^b F_{ab}^k &= p^2 c^2 \delta_i^a \delta_j^b \epsilon_{ab}^k = p^2 c^2 \epsilon_{ij}^k, & \therefore \epsilon_{ij}^k E_i^a E_j^b F_{ab}^k &= 3! p^2 c^2, \\ k_a^i &= \frac{c}{\gamma} \delta_a^i, & \therefore k_{[a}^i k_{b]}^j &= \frac{c^2}{\gamma^2} \delta_{[a}^i \delta_{b]}^j \equiv \frac{c^2}{2\gamma^2} (\delta_a^i \delta_b^j - \delta_b^i \delta_a^j), & \therefore E_i^a E_j^b k_{[a}^i k_{b]}^j &= \frac{p^2 c^2}{2\gamma^2} (3 \cdot 3 - 3) = 6 \frac{p^2 c^2}{2\gamma^2}, \\ E_i^a &= p \delta_i^a, & \therefore \frac{\Lambda}{3} \epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} E_i^a E_j^b E_k^c &= 3! \frac{\Lambda}{3} \det E = 3! \frac{\Lambda}{3} p^3 \end{aligned}$$

となるので、

$$H = -6 \left\{ \left(\frac{cp}{\gamma} \right)^2 - \frac{\Lambda}{3} p^3 \right\}$$

とまとめられる。これは全体のつまらない数係数を除き、式 (11.15) に一致している。

■式 (11.18) の Hamilton 関数 $S(p)$ について Friedmann 方程式 (11.7) で $\rho = 0$ とおくと $\dot{a} = \pm \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} a$ を得る。そこで Hamilton 関数 (11.9) を $S(a) \sim \dot{a} a^2 \sim \pm \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} a^3$ と書いておき、これを $p \equiv a^2$ で表すと式 (11.18) を得る。

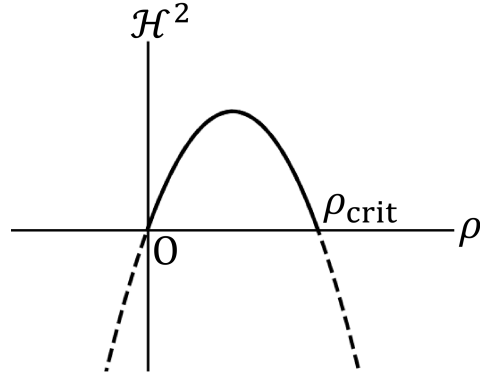


図 108 式 (11.20) のグラフ． $\mathcal{H} \equiv \dot{a}/a$ は Hubble パラメータであり，ここでは臨界密度を $\rho_c \rightarrow \rho_{\text{crit}}$ と表記している．宇宙が収縮すると ρ は増大する．補正項の存在下ではこれに伴い， $\mathcal{H}^2 (> 0)$ はいずれ減少に転じて $\rho = \rho_{\text{crit}}$ でゼロになる．これを境に $\dot{a}$ の符号が反転しバウンスが起きると考えられる．

11.2 正準ループ量子宇宙論

スケール因子のダイナミクスとその周りの摂動で定義される力学系の正準量子化を調べる数多くの研究が発展してきた．興味のある読者には，わずかに異なる道を行く Ashtekar and Singh (2011) と Bojowald (2011) によるレビューとそこに含まれる参考文献のような，最新のレビューを勧める．

この研究の主要な成果は，スケール因子の発展を記述する量子力学系のダイナミクスが，古典的な近似において初期の特異性として現れることの周りにおいても，よく定義されているということである．すなわち，ビッグバン特異点は物理的な事象としては現れず，むしろ古典的な近似の人為的産物に過ぎない．この点では，それは古典的な近似では予言されるものの電子の量子論では予言されない，電子が原子核に落ちる可能性とアナログである．ビッグバンの近くの宇宙の量子的発展はよく定義されており，いかなる特異性も発達しない．

興味深いことに，量子補正は波束に対する修正された古典的な力学的発展を用いて近似できる．これは修正された Friedmann 方程式を与える．例えば $\Lambda = 0$ かつ $k = 0$ [平坦な一様等方宇宙モデル] の場合には

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right) \quad (11.20)$$

が得られ，ここに臨界密度 ρ_c は近似的に Planck 密度 ($\rho_{\text{Pl}} \approx 5.1 \times 10^{96} \text{ kg/m}^3$) の半分の値を持つ定数である．補正項がない場合， $\dot{a}$ は小さいスケールで符号を変え得ない．補正項がある場合， $\dot{a}$ は消えることができ，スケール因子のダイナミクスは“バウンスする (跳ね返る ; bounces)”：半古典的な軌道は膨張する宇宙へとバウンスする，収縮する宇宙を記述する．[図 108 を参照．標語的にはビッグバンはビッグバウンスに置き換わる [1, p.130].] ここでは式 (11.20) の導出は与えない : Ashtekar and Singh (2011) を見よ，とは言え，どのようにしてこれが起きるのかについて，いくらか述べておくことが有益だろう [文献 [1, § 9.5] にも説明がある ; 本稿次節も見よ].

アイデアは完全な理論からの 2 つの重要なインプットを用いて，Friedmann 宇宙論を伴う量子系を古典的極限として調べることである．

1. 1 つ目は適切な演算子が局所的なものではなく積分されたものであるというアイデアである．とりわ

け、関心のある演算子は接続ではなく、むしろそのホロノミーである。このことは宇宙論では、量子論においてよく定義された演算子が c ではなく、むしろ適当な μ に対する $e^{i\mu c}$ であるという要請に翻訳される。

2. 2 つ目は空間の量子力学的な離散性を考慮するようダイナミクスが修正されることである。これはハミルトニアン拘束における曲率を、最小の可能な面積の量子を囲む小さな閉路の周りのホロノミーに置き換えて得られる。

1 つ目のインプットにより演算子 $e^{i\mu c}$ が定義される適切な Hilbert 空間の定義が可能になる。2 つ目はダイナミクスの定義を許容する。結果として得られる系の詳細な解析とその半古典的な極限はこのとき上記の結果をもたらす。宇宙論的な特異性の解消はかなり一般的と見受けられる (Singh 2009; Singh and Vidotto 2011)。Poisson 括弧 (11.14) は量子論では交換子になり、Heisenberg の不確定性関係

$$\Delta c \Delta p > \frac{8\pi\hbar G}{3V_0} \gamma \quad (11.21)$$

をもたらす。 V_0 を任意に大きくとると、不確定性は任意に小さくできる。このことは充分多くの原子から成る物体をとることで、その位置と速度を任意によく定義できるという事実とアナログである。言い換えると、ループ量子宇宙論は重力場の空間における平均である場の大きなモードのみに着目しており、より短い波長のモードに支配される重力場の局所的な量子ゆらぎに盲目である。理論は今のところ、バウンスにおける実際のゆらぐ幾何学を記述していないことが帰結する。バウンスは宇宙が小さくなることで決まるのではなく、物質のエネルギー密度が Planck スケールに達することで決まり、これは宇宙を満たす物質に応じて、宇宙の任意のサイズで起こり得る。

宇宙論的な摂動に対する量子重力の試みについても、ここで導出なく紹介する。著しいことに、これもまた標準的な宇宙論的摂動論に対する補正へとまとめられる。摂動のダイナミクスを支配する Mukhanov 方程式 (Mukhanov *et al.* 1992)

$$\ddot{v} - \nabla^2 v - \frac{\ddot{z}}{z} v = 0 \quad (11.22)$$

は Cailleteau *et al.* (2012a,b)

$$\ddot{v} - \left(1 - 2\frac{\rho}{\rho_c}\right) \nabla^2 v - \frac{\ddot{z}}{z} v = 0 \quad (11.23)$$

に修正される。

電子が Coulomb ポテンシャルから逃げることを可能にする大きな運動量を得ることなく、電子が空間のあまりに小さな領域に集中することを禁じる不確定性原理により、電子は Coulomb ポテンシャルの中に落ちない。ある意味、量子力学は短距離での実効的な斥力を供している。同じことが宇宙に対しても起きる：あまりに大きなエネルギー密度があまりに小さな領域に集中するとき、不確定性原理はさらなる収縮を妨げ、実効的に強力な斥力として作用する。

この半古典的なバウンスの正確な解釈は、我々の見解ではまだ完全に明快ではない、何故ならバウンスにおける時空の量子ゆらぎのさらなる理解が必要だからである。バウンス付近の重力場の完全な物理はまだよく理解されていない。時空はバウンスにおいてもなお近似的に古典的か、それとも Coulomb ポテンシャルに落ちる電子に対して古典的な軌道の概念がよく定義されないように、完全な量子ゆらぎはバウンスの周りで時空の概念そのものを無効にするか？ 2 つ目の場合、宇宙の“先行する”収縮する段階が“後続の”膨張する段階へとバウンスする描像は、一定の目的にとってはナイーブかもしれない：初期宇宙論では時空そのものがよく定義されなくなる。[時空は言わば確率の雲に溶けるものの、理論はこの確率の雲を抜える。と言うの

も，時空の概念がよく定義されずとも，時空より基本的な重力場（スピン・フォーム）はそこにあるからである [18, p.164]. 11.3.2 項も見よ.]

11.2 節について

■半古典的にバウンスを記述する式 (11.20) について 文献 [1, p.129] にならって変数 c を $\frac{\sin(\mu c)}{\mu}$ に置き換える．これは任意パラメータ $\mu \rightarrow 0$ で c に戻り，また三角関数は本文にある指数 $e^{i\mu c}$ で表せる．式 (11.15–16) からハミルトニアン拘束への物質に関する付加的な項は $H_{\text{matter}} = \frac{8}{3}\pi G\rho p^3$ であることが読み取られ，これは a のみの関数と考えられる．そこで全ハミルトニアンを用いた $p(=a^2)$ に対する運動方程式は，単に式 (11.15) の $H = \left(\frac{p\sin(\mu c)}{\gamma\mu}\right)^2$ (ただし導出時に見た全体の係数 -6 を除く) を用いて

$$\dot{p} = \{p, H\} = \frac{\partial p}{\partial a} \frac{\partial H}{\partial p_a} = 2a \frac{\partial H}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial p_a}$$

となる．最右辺に

$$\frac{\partial H}{\partial c} = \frac{2p^2}{\gamma^2\mu} \sin(\mu c) \cos(\mu c), \quad \frac{\partial c}{\partial p_a} = -\frac{4\pi G\gamma}{3V_0 a}$$

を代入して整理すると

$$\dot{p} = -\frac{16\pi G p^2}{3\gamma\mu V_0} \sin(\mu c) \cos(\mu c).$$

ところが $p = a^2$ より $\dot{p} = 2a\dot{a}$, $\dot{p}/p = 2\dot{a}/a$ なので，

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{\dot{p}}{p}\right)^2 = \left(\frac{8\pi G p}{3\gamma\mu V_0}\right)^2 \sin^2(\mu c) \{1 - \sin^2(\mu c)\}.$$

ここにハミルトニアン拘束 (11.16) で $\Lambda = 0$ とおいた関係 $\sin^2(\mu c) = \frac{8}{3}\pi G\rho \times \mu^2\gamma^2 p$ を代入して三角関数を消去すると

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \left(\frac{8\pi G}{3V_0}\right)^2 p^3 \times \frac{8}{3}\pi G\rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right), \quad \rho_c \equiv \frac{3}{8\pi G\mu^2\gamma^2 p}$$

となり，式 (11.20) の形が得られる．またここで同定した ρ_c は文献 [1, p.130] における臨界密度の表式と共通の係数因子を持っている．

11.3 スピン・フォーム宇宙論

ループ重力の共変な定式化に基づく量子宇宙論のアプローチは Bianchi *et al.* (2010d) で導入され，“スピン・フォーム宇宙論”と呼ばれている．共変な理論を基調とする展開は宇宙論に適している，何故ならそれは自由度の数に関する展開だからである．宇宙論モデルは少数の自由度への一般相対性理論の簡約なので，それはスピン・フォーム展開の低次で自然に記述される．

時間において発展する，半径 a の 3 次元球面 $\mathbb{S}^3$ の空間的幾何学を持つ，閉じた一様で等方的な宇宙を考えよ．自由度 $a(t)$ の量子ダイナミクス，また 3 次元球面の大きなスケールでの変形の量子ダイナミクスを調べたい．

有限の時間経過において，コンパクトな宇宙は 3 次元球面から 3 次元球面へと発展する．そこで 3 次元球面のトポロジーを持つ量子空間の状態から，3 次元球面のトポロジーを持つ別の量子空間の状態への遷移振幅を求めたい．スピン・フォーム宇宙論は初め， $\mathbb{S}^3$ の最も単純なセル状分割を用いて調べられた．これは 2 つの四

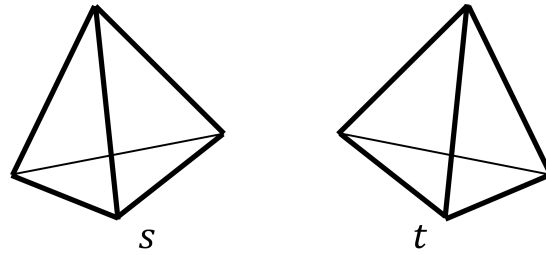


図 109 全ての面で貼り合わせられた 2 つの四面体は 3 次元球面を三角形分割する

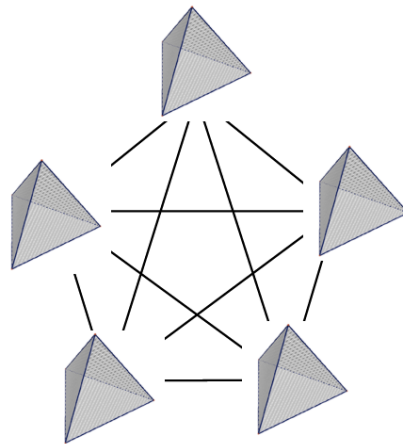


図 110 5 つの四面体は 3 次元球面を三角形分割する [本稿では教科書 p.221 から図を採った]

面体をそれらの全ての面で貼り合わせることで得られる^{*160}. (図 109.) この S^3 の三角形分割に双対なグラフは、各四面体に結節点を置き、各四面体の 4 枚の面を横切って 2 つの結節点を繋いで得られる. このグラフは Γ_2 , あるいは“双極子グラフ (dipole graph)”と呼ばれる: それは 4 本のリンクで繋がった 2 つの結節点から成る. このグラフ上の量子宇宙論は初め, Hamilton 形式の言語で調べられた (Rovelli and Vidotto 2008; Battisti *et al.* 2010; Borja *et al.* 2010, 2011). より一般的な正則グラフ (regular graph) [定義は 11.3.1 項冒頭] が Vidotto (2011) において調べられている. 例えば, 4-単体の境界のように, 5 つの四面体を 2 個 1 組で貼り合わせると, 3 次元球面が得られる (図 110 [8.3.1 項の図 100 も見よ])^{*161}. 以下では一般的な正則グラフ Γ を用いる. 宇宙の大きなスケールでの幾何学を記述する最初の手順は, 半古典的な配位を表す, Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\Gamma$ に属する境界状態を書くことである. 次いで入射 (*in*) および射出 (*out*) 状態と考えられる, これらの状態の組を採り, 対応する遷移振幅を計算できる.

11.3 節冒頭 (11.3.1 項の前まで) について

2 つの四面体を全ての面で貼り合わせて 3 次元球面を近似する三角形分割 (図 109) は, 2 つの 3 次元球をその表面で貼り合わせて 3 次元球面を得る構成と同じである.

有限の拡がりを持つものの境界のない宇宙の形として, 3 次元球面が考えられる. 面白いことに, 3 次元球

^{*160} 通常の S^2 は 2 つの三角形を用意し, それらを辺で貼り合わせて得られる [5.4.4 項で行ったように].

^{*161} 通常の S^2 は四面体の境界のように, 4 つの三角形を用意し, それらを辺で貼り合わせると得られる.

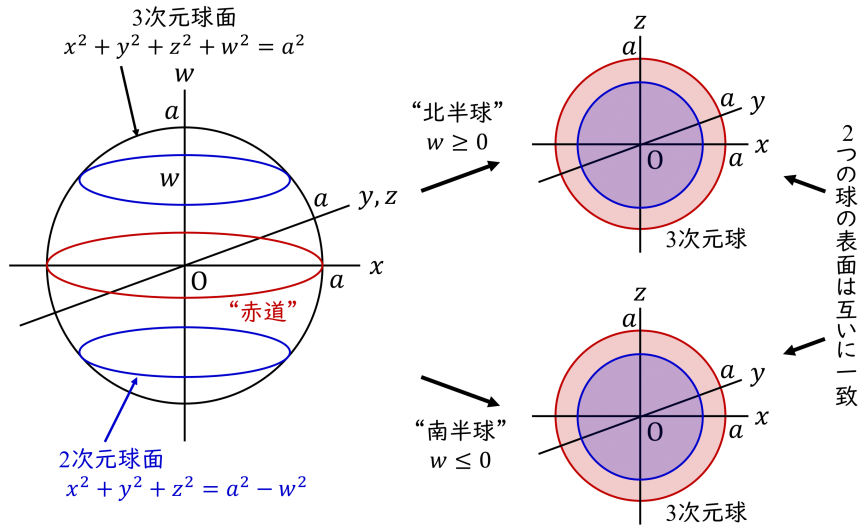


図 111 3次元球面は2つの3次元球を表面で貼り合わせた構造として理解できる

面の宇宙観は Dante (ダンテ)『神曲』において既に、2つの3次元球を境界で貼り合わせた構造として描かれている [18, pp.40–43]. 3次元球面をこのような仕方では捉えられることを理解するのは、実はさほど困難ではない。実際、3次元球面は4次元空間に埋め込まれた超曲面

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a^2$$

として表すことができ、ここに定数パラメータ $a > 0$ は半径と呼べる。他方で3次元球面の内部の立場では、その位置を表すのに3つの座標 (x, y, z) を用いることができる。このとき指定した w の値 (ただし $|w| \leq a$) に対して

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - w^2 \quad (113)$$

は (x, y, z) 空間における通常の2次元球面を表す。 $|w| : 0 \rightarrow a$ とすると球面が通過した領域として、半径 a の3次元球が得られる。 w の符号に応じて得られる3次元球は2つある。それらは4次元空間から見れば $w \geq 0$ に位置する“北半球”と“南半球”に対応し、各々の3次元球の表面にあたる2次元球面は“赤道” $w = 0$ で貼り合わせられている (図 111)。これは2次元球面が (トポロジカルには) 2つの半球を赤道面に射影した円盤を、その円周 (赤道) で貼り合わせた構造として理解できることとアナログスである。

■詳しい説明 ここまでは視覚的な直観に頼らず、専ら数式のみに基づき手堅く論理を展開してきた。次にその種明かしを含め、補足的な説明を行う。

通常の球面はあえて言えば2次元球面であるのに対して、ここで考えている3次元球面はその高次元への一般化であり、あくまで3次元の領域である。図 111 の左側では常套的に空間の次元を1つ落として、3次元球面をあたかも半径 a の2次元の球面であるかのように描いている。また高さ $\pm w$ の青いリングのように見えているのが、実際には2次元球面である。さらに北半球を水平な“ xyz 平面”に投影すると、視覚的には半径 a の円盤のようなものが得られる。それは実際には3次元球となっており、その半径は先ほどの a に一致する。ここで球 (ball) とは中身の詰まった領域を指し、その表面であるところの球面 (sphere) と区別されることも、言葉の定義として注意を要する。さて、青いリングが北極から赤道に移動するとき、“ xyz 平面”への投影図ではリングが円盤の中心から円周に移動する。このとき実際には2次元球面が、3次元球の中心から表

面に移動するということが起きている．北半球と南半球のいずれに対応する 3 次元球 (図 111 の右側) も，表面の 2 次元球面が図 111 の左側では赤道に来るので，2 つの表面は一致する．なお式 (113) では w を固定しているので，右辺 $a^2 - w^2$ は定数である．すると式 (113) は 3 変数 x, y, z に対する 1 つの拘束条件を課しているので，2 次元の領域を表していることが納得できる．実際，式 (113) は単に半径 $\sqrt{a^2 - w^2}$ の通常の球面の方程式である．

■宇宙モデルとしての 3 次元球面 例えばレンコンのようにデタラメに孔のあいた領域の表面もまた，有限であって境界がない．しかしそのような構造は明らかに宇宙の一樣・等方性を満たさない．トーラス (ドーナツ) も少なくとも等方性はない：我々は 2 種類の円周方向を区別できる．

物理的な空間としては，それを超曲面として内に含む高次元空間に依拠せずに，空間内部の幾何学を定義できれば良い．実際，球体を 2 つ貼り合わせるという 3 次元球面の構成は，そのような観点からの記述になっていると言える．北半球という名の球体内を出発して 1 方向に進んで行くと，いずれ表面から宇宙の外に抜け出せるかと思いきや，実際には地球の表面上で赤道を超えるときのように，何事もなく南半球という名のもう 1 つの球体に突入するに過ぎない．さらに進むと北半球に戻って来る．

5 つの四面体を貼り合わせる場合 (図 110) もやはり，四面体の全ての面は隣接する四面体と貼り合わせられているため，我々はどの面からも空間の“外部”には逃げ出せず，空間は閉じている．

実際に一樣等方な宇宙の内部幾何学はいわゆる Robertson–Walker 計量で記述できて，必ず平坦な宇宙，閉じた宇宙 (球面)，開いた宇宙 (双曲面) の 3 パターンのいずれかに帰着することを証明できる [12, pp.449–454]．特に 3 次元球面のモデルには，なるほど，「宇宙は無限に広がっているのか」という疑問に対する 1 つの魅力的な答という意味がある．

11.3.1 一樣等方な幾何学

正則グラフ，すなわち全ての結節点と同じ本数のリンクを持つグラフを選ぶ^{*162}．例として，全てが繋がった 5 つの結節点から成るグラフ Γ_5 を考えることができる [図 112]．[一樣等方な宇宙モデルを念頭に] 等しいセル，また正則グラフの双対から成る，(計量) 3 次元球面のセル状分割を採る．同じ体積，面の面積，平均的な面の法線を持つ平坦なセルで各セルを近似する．これはグラフの向き付けされたリンクの各々に関係付けられる法線 $\vec{n}_l$ を定義する．正則性により，グラフ上の全ての面積と外部曲率は等しい．8.4 節で展開したコヒーレント状態を用いて，これらの幾何学的データに基づき，グラフ上のコヒーレント状態を構成できる．コヒーレント状態は各リンクに対する $SL(2, \mathbb{C})$ 要素で決まり，ここに H_l は面を共有する 2 つのセルに関する 2 つの (異なる) 法線と，全てのリンクに共通の複素数 z で決まる． z の実部と虚部は面上の面積と外部曲率で決まる [式 (8.131)]．式 (8.121) の下で，これらと等方的な幾何学の係数 [式 (11.13) の c, p と推察される] の関係は単に

$$z = c + it \frac{p}{l_0^2} \quad (11.24)$$

で与えられると仮定する．(より入念な解析に関しては，Magliaro *et al.* (2011a, b) を見よ．) 分母の Planck 長さは式 (8.121) と次元によって課せられることに注意せよ．ここでこれらの三角形分割された空間の幾何学を記述する量子状態を求めよう．そのために，8.4 節で導入した Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\Gamma$ の外部コヒーレント状態 $\psi_{H_l}(h_l)$ を考えよう．これらの状態はデータ $(c_l, p_l, n_{s(l)}, n_{t(l)})$ で決まることを思い出そう．

^{*162} そのようなグラフは無数にある．例えば，2 つの結節点を任意の本数のリンクで繋ぐことができる． $N > 2$ の正則グラフの例は Plato (プラトン) の立体 (Platonic solid) (の双対) で与えられる．

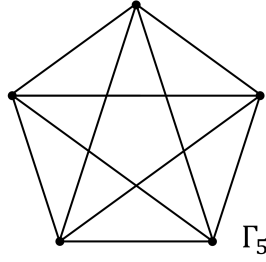


図 112 図 110 にも示されているグラフ Γ_5

これらの仮定の下で、正則なグラフ上の一様等方なコヒーレント状態は単一の複素数 z で記述され、その虚部はセル状分割の正則な面の各々の面積に比例し（そして総体積と対応付けることができ）、またその実部は外部曲率に関する (Rovelli and Speziale 2010). この状態を $\psi_{H_l(z)}$ で表し、また“入射”および“射出”する一様等方な状態のテンソル積化 (tensoring) によって得られる、正則グラフの 2 つの複製上の状態を $\psi_{H_l(z,z')} = \psi_{H_l(z)} \otimes \psi_{H_l(z')}$ で表す. これらの状態は一様等方な幾何学上にピークを持つものの、それらは真のコヒーレント状態なので、グラフによって捉えられる自由度に対する、この幾何学の周りの量子ゆらぎを伴う.

11.3.2 頂点展開

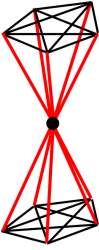
2 つの比連結な構成要素から成る境界状態に対して、遷移振幅は一方の状態から他方へ移る確率を定める. たった今導入したコヒーレント状態に対して、これは

$$W_C(z', z) = \langle z' | W | z \rangle = \int dh_l \int dh'_l \overline{\psi_{z'}(h'_l)} W_C(h'_l, h_l) \psi_z(h_l) \quad (11.25)$$

となる $[\int dh_l |h_l\rangle \langle h_l| = \mathbb{1}]$ を挿入]. 遷移振幅は理論の切り詰めたバージョンへと近似することで、すなわち境界グラフを、すなわち 2 つの Γ_5 グラフを境界に持つ 2-複体 C を選ぶことで計算できる. [ここで 11.3 節序文で言及したスピン・フォームに関する展開を考える.] 最低次では、頂点のない 2-複体の寄与を得る:

$$\langle z' | W_{C_0} | z \rangle \sim \quad (11.26)$$

興味のある非自明な場合として、始・終状態が充分かけ離れているときには、これは消える. [通常の S 行列展開が δ_{fi} から始まるのに似ている.] そこで単一の頂点を持つ 2-複体で決まる、1 次の項を調べよう:

$$\langle z' | W_{C_1} | z \rangle \sim \text{Diagram} \quad (11.27)$$


式 (7.67) および (7.68) を用いてこの遷移振幅を書く：

$$W_{C_1}(h'_l, h_l) = W(h'_l)W(h_l) \quad (11.28)$$

であり，ここに

$$W(h_l) = \int_{\text{SL}(2, \mathbb{C})} dg'_e \prod_{l=1}^L P(h_l, g_e). \quad (11.29)$$

[始・終状態を境界グラフに持つ単一の頂点に関する振幅がそのまま 2-複体の振幅 W_{C_1} になる^{*163}.] 各辺に関する $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 要素 h_n [正しくは上式 (11.29) の $g_e (= g_n)$ か] にわたる積分は Lorentz 不変性を課す．それは 1 つを除く全ての g_n にわたる．これらとコヒーレント状態の定義 (8.127) を用いると，短い計算により

$$W_{C_1}(z', z) = W(z)W(z') \quad (11.30)$$

が与えられ，ここに

$$\begin{aligned} W(z) &= \int dh_l \int dg'_n \prod_{l=1}^L K_l(h_l, H_l(z)) P(g_n, h_l) \\ &= \int dg'_n \prod_{l=1}^L \sum_{j_l} (2j_l + 1) e^{-2t_{j_l}(j_l+1)} D_{mm'}^{(j_l)}(H_l(z)) D_{jm'jm}^{(\gamma_{j_l}, j_l)}(G_l). \end{aligned} \quad (11.31)$$

古典論から予想したように [式 (11.10)]，遷移振幅は因数分解される．個々の項 $W(z)$ は境界のない初期条件で決まる Hartle–Hawking の“宇宙の波動関数” (Hartle and Hawking 1983)，すなわち，無 (nothing) から与えられた状態に移る振幅と解釈できる．これが与えられた幾何学から今一つの幾何学への遷移振幅と等価である理由は，古典論においてダイナミクスが単一の時刻における関係である，スケール因子とその運動量の関係として表せる事実の反映である．特定の“射出する”コヒーレント状態を測定する確率は“入射する”コヒーレント状態に依らない．

ここで $W(z)$ を半古典的な領域で評価しよう．

11.3.3 大スピン展開

我々は 3 次元球面の体積 (それは p で決まる) が Planck スケールに比べて大きい領域における式 (11.31) に興味がある．式 (11.24) より，これは z の虚部が大きい領域に対応する．式 (8.130) から，

$$D^{(j)}(H_l(z)) = D^{(j)}(R_{\vec{n}_s}) D^{(j)}(e^{-iz \frac{\sigma_3}{2}}) D^{(j)}(R_{\vec{n}_t}^{-1}) \quad (11.32)$$

^{*163} 12.2 節 p.232, 1.6 にも同じことが述べられている．

を得る． z の虚部が大きい $\text{Im } z \gg 1$ のとき，Wigner 行列

$$D^{(j)}(e^{-iz\frac{\sigma_3}{2}}) = \sum_m e^{-izm} |m\rangle \langle m| \quad (11.33)$$

は $m = j$ の項に支配され，したがって

$$D^{(j)}(e^{-iz\frac{\sigma_3}{2}}) \approx e^{-izj} |j\rangle \langle j| \quad (11.34)$$

であり，ここに $|j\rangle$ は表現 j における最大の固有値 $m = j$ を持つ L_3 の固有状態である．この式 (11.32) への代入は

$$D^{(j)}(H_l(z)) = D^{(j)}(R_{\vec{n}_s}) |j\rangle e^{-izj} \langle j| D^{(j)}(R_{\vec{n}_t}^{-1}) \quad (11.35)$$

を与え，内部コヒーレント状態の定義 (8.23) を思い出すと，これは

$$D^{(j)}(H_l(z)) = e^{-izj} |j, \vec{n}_l\rangle \langle j, \vec{n}_l|. \quad (11.36)$$

この式 (11.31) への代入は

$$W(z) = \int dg'_n \prod_{l=1}^L \sum_{j_l} (2j_l + 1) e^{-2tj_l(j_l+1)} e^{-izj_l} \langle j_l, \vec{n}_l | D_{j_{m'} j_m}^{(\gamma_{j_l, j_l})}(G_l) | j_l, \vec{n}_l \rangle \quad (11.37)$$

を与える．和の各々はスピンの大きな値の上にピークを持つ Gauss 型の和であり，そのスピンの値は，式 (11.24) を用いると

$$j_0 = \frac{p}{4l_0^2} \quad (11.38)$$

であって，全ての l に対して同じである．したがって

$$W(z) = \left(\sum_j (2j + 1) e^{-2tj(j+1)} e^{-izj} \right)^L \Omega(j_0) \quad (11.39)$$

と書くことができ，ここに

$$\Omega(j_0) = \int dg'_n \prod_{l=1}^L \langle j_0, \vec{n}_l | D_{j_{m'} j_m}^{(\gamma_{j_0, j_0})}(G_l) | j_0, \vec{n}_l \rangle. \quad (11.40)$$

この積分は鞍点法と前の章の公式を用いて，大きなスピンの領域で計算できる．行列要素は単に原点 $g_n = 1$ の周りにピークを持ち，積分の結果は j_0 の有理関数である Hesse 行列 (hessian) で決まる．ここでは $W(z)$ の位相にのみ興味があるので，

$$W(z) \sim \left(\sum_j (2j + 1) e^{-2tj(j+1)} e^{-izj} \right)^L \sim e^{-L \frac{z^2}{8t}} \quad (11.41)$$

と書く．2.2 節で説明したように，古典的極限は振幅における素早い位相の振動で与えられる． z の定義 (11.24) より，これは

$$W(z) \sim e^{-i \frac{Lcp}{4l_0^2}}. \quad (11.42)$$

標準的な変数に翻訳すると，これは

$$W(z) \sim e^{-i \frac{L\alpha a^2}{8\pi G\hbar}} \quad (11.43)$$

であって、期待される振舞い (11.11) に他ならない．このことはスピン・フォーム宇宙論で計算される遷移振幅が適切な極限で古典的な結果をもたらすことを裏付ける．

宇宙定数の導入を含め、スピン・フォーム宇宙論のさらなる詳細と結果に関しては、Bianchi *et al.* (2011a); Vidotto (2011); Borja *et al.* (2011) を見よ．

11.4 最大の加速度

スピン・フォーム宇宙論はまだブラックホール付近の領域 (near-black-hole region) の量子物理を直接記述できる段階にまで発展していない．しかしながら、それは実に古典的な特異性の解消に対する間接的な証拠の要素を供する、何故ならそれは加速度の限度を直接予言するからである．量子重力が加速度を制限するかもしれないというアイデアは古くからある (Caianiello 1981; Caianiello and Landi 1985; Brandt 1989; Toller 2003)．共変ループ量子重力では、それは面積の量子化、および面積と推進 (boost) を関係付ける単純性関係の直接的な帰結と見なせる (Rovelli and Vidotto 2013)．このことを理解するために、Minkowski 空間において加速度 a で一様に加速する観測者を考えよ．その軌道の部分によって定義されるくさび (wedge) が図 105 に描かれている．特に、このくさびの推進の角を $\eta = 1$ と採ると、くさびの Lorentz 的な面積が

$$A_l = \frac{1}{2a^2} \quad (11.44)$$

となることを理解するのは簡単な計算である．したがって、このくさびの面積は観測者の加速度を測る．ところが他方で、このくさびの Lorentz 的な面積は Euclid 的な面積 A_e と線形単純性拘束

$$A_l = \frac{1}{\gamma} A_e \quad (11.45)$$

で関係付けられ、 A_e の最小の消えない固有値は $8\pi G\hbar\gamma\sqrt{(1/2)\{(1/2)+1\}}$ なので、加速度の最大値は

$$a_{\max} = \sqrt{\frac{1}{8\pi G\hbar}} \quad (11.46)$$

であることが帰結する [分母に $\sqrt{3}$ を書き忘れていると考えられる]．

さらに、最大の加速度は古典的な特異性を防ぐ．最大加速度の仮定の下での古典的な特異性の解消は正準な手法を用いて、Rindler (Caianiello *et al.* 1990), Schwarzschild (Feoli *et al.* 1999), Reissner–Nordstrom (Bozza *et al.* 2000), Kerr–Newman (Bozza *et al.* 2001), および Friedmann–Lemaître (Caianiello *et al.* 1991) 計量に対して調べられている．ここでは空間的な曲率と圧力の消える一様等方な宇宙モデルを用いて、簡単な議論をスケッチする．ダイナミクスは Friedmann 方程式

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (11.47)$$

に支配され (ここでは加速度 a と混同しないようスケール因子に対して R を用いる), $\rho \sim R^{-3}$ は物質のエネルギー密度である．あらゆる共動する観測者はこの幾何学において彼の近隣に対して加速する．古典的特異性に近づいて増大する加速度は最大の加速度 $a \sim \sqrt{\ddot{R}/R}$ の存在によって反跳する．これはエネルギー密度の最大値

$$\rho_{\max} \sim \frac{3}{8\pi G} \frac{\dot{R}^2}{R^2} \Bigg|_{\max} = \frac{3}{8\pi G} l_{\min}^{-2} = \frac{3}{\hbar(8\pi G)^2} \quad (11.48)$$

を与える [本稿次節で補足]．正準ループ量子重力の場合のように、Planck スケールの最大のエネルギー密度を再現できる．

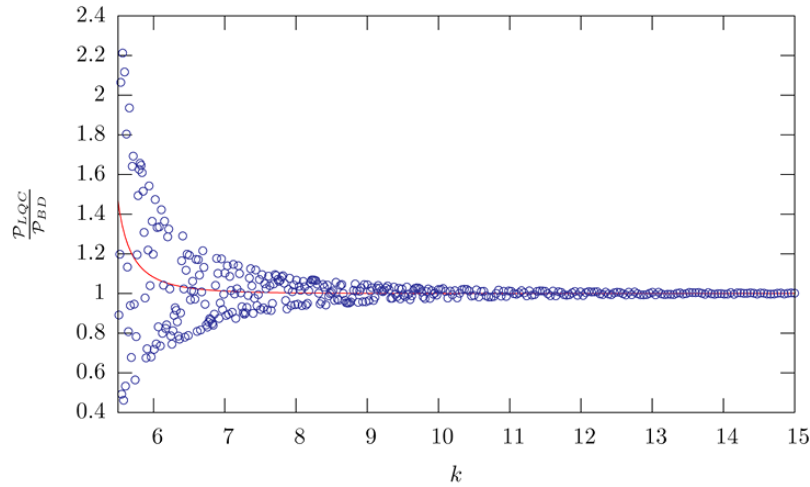


図 113 モードの変数としての、量子重力効果のある場合とない場合とで予言されるパワー・スペクトルの比 (Agullo *et al.* 2012). [本稿では教科書 p.226 から図を採った.]

11.4 節について

■式 (11.48) 第 2 の等号について 物質の密度は適当な定数 ρ_m を用いて $\rho = \rho_m/R^3$ とおける [18, p.197]. そこで $C \equiv 8\pi G\rho_m/3$ とおくと, $\Lambda = 0$ の Friedmann 方程式 (11.7) は $\dot{R}^2 = C/R$ と書ける. 両辺の微分をとると

$$2\dot{R}\ddot{R} = -C\frac{\dot{R}}{R^2}, \quad \therefore \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{1}{2}\frac{C}{R^3} = -\frac{1}{2}\frac{\dot{R}^2}{R^2}$$

が見出される. ただし最後の等号で再び Friedmann 方程式を用いた.

11.5 物理的予言?

宇宙マイクロ波背景放射 (cosmic microwave background; CMB) において量子重力効果を確かめる可能性が現在, 集中的に調べられている. ここではいかなる詳細にも立ち入らない, 何故ならそれは宇宙論に深入りしすぎることになり, また論題は急速に発展しているからである. 我々はそこから興味を持つ読者が分野をたどることができるような, 最新の結果を示すに留める. CMB への量子重力効果を調べるには, スケール因子の修正されたダイナミクスと幾何学それ自体の量子ゆらぎの両方の効果を調べる必要がある. これらの絡み合った効果は“衣をまとった (dressed)”滑らかな幾何学を得ることと等価である (Ashtekar *et al.* 2009). この結果を用いて CMB のパワー・スペクトルの標準的な宇宙論的導出を, ただしインフレーションの前の時期 (pre-inflation era) まで拡張しつつ繰り返すことができる. 最新の結果は, 例えば, Agullo *et al.* (2012) によるパワー・スペクトルの計算である. その論文から採った, 結果の例を図 113 に与える.

詳しいレビューに関しては, 例えば Agullo and Corichi (2013) を見よ. これは急速に発達している分野であり, 理論を検証する可能性の観点からとりわけ重要である.

第 12 章 散乱

前の 2 章では物理的に重要ではあるが特定の状況へのループ重力の応用——ブラックホールと初期宇宙論——を論じてきた。完全な情報を理論から系統的に引き出し、高エネルギー物理を行う通常の方法と比較するにはどうすれば良いか？

Arthur Wightman が 1950 年代に強調したように (Wightman 1959), 伝統的な場の理論では n 点関数

$$W(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | \phi(x_n) \cdots \phi(x_1) | 0 \rangle \quad (12.1)$$

を知ることが、理論の知識を完成させるのに充分である。これらの関数から散乱振幅とその他のあらゆるものを計算できる。本書で定義した理論から、これら全ての関数を再現できるか？これにより例えば理論を、繰り込み不能でありながら低エネルギーで有用である一般相対性理論の摂動論的な有効 (effective) 量子論と比べることが可能になる。より一般にそれは、量子重力を定義するのに一般に必要な難解で背景独立な定式化を、平坦な空間の物理から我々の慣れ親しんだ場の量子論の理論に関係付ける。

答はイエスであり、 n 点関数の値は本書で定義した理論から計算できる。これは、その周りに n 点関数が定義されるところの背景に関する情報が、背景独立な理論でどのように扱われるかに関する注意深い理解を要する。これを本章で行う。

12.1 一般共変な理論における n 点関数

n 点関数 (12.1) を遷移振幅と混同してはならない。

$$W[\varphi_{\text{in}}, \varphi_{\text{out}}] = \langle \varphi_{\text{out}} | e^{-iHt} | \varphi_{\text{in}} \rangle \quad (12.2)$$

のような遷移振幅は、任意の (決まった時刻における) 場の配位 φ の間で定義される。[場とその境界値をそれぞれ ϕ, φ と書き分ける.] 他方で式 (12.1) のような n 点関数は、特定の状態 (真空 $|0\rangle$) 上の場の量子 (励起) に対する振幅である。

これら 2 つの量の区別を説明し、その 2 つの関係を明らかにするために、時間において発展する 1 変数 $q(t)$ を持つ簡単な系を考えよ。変数 $q(t)$ はここでは場 $\phi(x)$ の役割を演じる。遷移振幅は

$$W(q, t, q', t') = \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle. \quad (12.3)$$

これは時間 $t' - t$ において $|q\rangle$ から $|q'\rangle$ へ移行する確率を定める。2 点関数は、他方で、

$$W(t, t') = \langle 0 | q(t') q(t) | 0 \rangle. \quad (12.4)$$

これは t と t' のみに依存し、 q と q' には依存しない関数である。それは状態 $q(t) |0\rangle$ と $q(t') |0\rangle$ の間の遷移振幅であり、ここに $q(t)$ たちは異なる時刻における (Heisenberg) 演算子である。遷移振幅は場に関する情報を担うのに対し、 n 点関数は与えられた状態上の場の量子に関する情報を担う。遷移振幅は系を配位 $q(t)$ に見出したときに、系を配位 $q'(t')$ に見出す確率である。もし系が真空状態にあり時刻 t に量子を生成すれば、2 点関数は後の時刻 t' に量子を見出す確率を与える。

これら 2 つの量の関係は以下のようなものである。2 点関数に対する表現の中で Schrödinger 演算子を用いて Heisenberg 演算子を書くと、

$$W(t, t') = \langle 0 | q(t') q(t) | 0 \rangle = \langle 0 | e^{+iHt'} q e^{-iHt'} e^{+iHt} q e^{-iHt} | 0 \rangle. \quad (12.5)$$

真空状態は時間発展の下で不変である． よって

$$\begin{aligned} W(t, t') &= \langle 0 | q e^{-iH(t'-t)} q | 0 \rangle \\ &= \int dq \int dq' \langle 0 | q' \rangle q' W(q, t, q', t') q \langle q | 0 \rangle \end{aligned} \quad (12.6)$$

$$= \int dq \int dq' W(q, t, q', t') q q' \psi_0(q) \overline{\psi_0(q')} \quad (12.7)$$

と書くことができ，ここではもはや q と q' は単なる数である． 量 $W(q, t, q', t')$ は遷移振幅である：それはいかなる特定の状態に関する情報も担わない． それは理論の完全なダイナミクスを特徴付ける． 他方で， $W(t, t')$ は特定の状態 ψ_0 における理論のダイナミクスを特徴付ける． n 点関数は特定するには， 遷移振幅， 場の演算子， および状態 ψ_0 を用いて書ける．

経路積分を用いた， 2 点関数を書く別の方法がある：

$$W(t, t') = \int Dq q(t) q(t') e^{iS[q]}. \quad (12.8)$$

この表現では状態は， 経路積分において無限遠での境界条件によって陰に決定される． この公式と前の公式の関係は興味深い． 経路積分は変数 $q(t)$ に関する多重積分 (の極限) である． これらを 5 つのグループに分割しよう： 固定された値 t と t' に対する単一の変数 $q(t)$ と $q(t')$ ， および t と t' が実軸を分割する時間の 3 つのクラスである [図 114]．

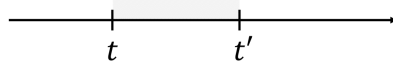


図 114 測度の分割 $Dq = \left[\prod_{t_i < t} dq(t_i) \right] dq(t) \left[\prod_{t < t_i < t'} dq(t_i) \right] dq(t') \left[\prod_{t' < t_i} dq(t_i) \right]$ (教科書 p.228 の図)

このとき明らかに式 (12.8) は式 (12.7) に帰着し [本稿次節で確認]， ここで遷移振幅は領域 $[t, t']$ における積分の結果

$$W(q, t, q', t') = \int Dq e^{i \int_t^{t'} L dt} \quad (12.9)$$

であり [指数に適当な積分測度を補った (以下同じ)]， また 2 つの状態は無限遠での適切な境界条件の下での， 過去と未来の領域における積分の結果

$$\psi_0(q) = \int Dq e^{i \int_{-\infty}^t L dt} \quad (12.10)$$

である．

ここでこれらの考察を場の理論に推し進めよう． ここで T 積に関して心配せずに済むよう， 点 x_n に対して (増加する) 時間順序を定める． n 点関数もまた経路積分として書ける．

$$W(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | \phi(x_n) \cdots \phi(x_1) | 0 \rangle = \int D\phi \phi(x_n) \cdots \phi(x_1) e^{iS[\phi]}. \quad (12.11)$$

簡単のため， まずは 2 点関数に限定しよう． やはり上記のように積分を 5 つの領域に分解でき，

$$W(x, x') = \langle 0 | \phi(x') \phi(x) | 0 \rangle = \int D\phi D\phi' W[\phi, t, \phi', t'] \phi(\vec{x}) \phi'(\vec{x}') \overline{\Psi_0[\phi']} \Psi[\phi] \quad (12.12)$$

が得られ、ここで時空は5つの領域に分離し [図 115 を参照]、また遷移振幅 $W[\phi, t, \phi', t']$ は中間の帯 (band) における場の伝播関数であり、その帯上の場で積分して得られる。この積分を実行するには始スライスと終スライス、さらに空間の無限遠で場の境界値を定めねばならないことに注意せよ。

一度これを理解すれば、別の可能性も考えることは自然である：式 (12.11) を別の方法で分離することである。2つの同時刻面に挟まれる帯を選ぶ代わりに、下図 [図 116] に示したような任意のコンパクト領域 $\mathcal{R}$ を選ぼう。すると

$$W_{\Psi_b}(x, x') = \int D\phi_b W[\phi_b] \varphi(\vec{x}) \varphi(\vec{x}') \Psi_b[\phi_b] \quad (12.13)$$

と書くことができ、ここに φ_b は領域の境界における場、 $W[\phi_b]$ は境界場だけに依存する汎関数積分、 $\varphi(\vec{x})$ と $\varphi(\vec{x}')$ は境界上の2つの異なる点における場の演算子、また $\Psi_b[\phi_b]$ は領域の外側の積分を表す境界上の場の状態である。

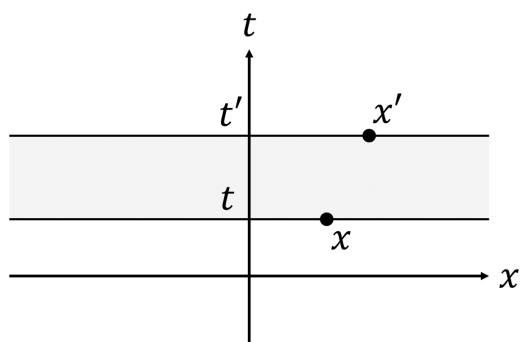


図 115 式 (12.12) に対応する時空の分離 (教科書 p.229 の図)

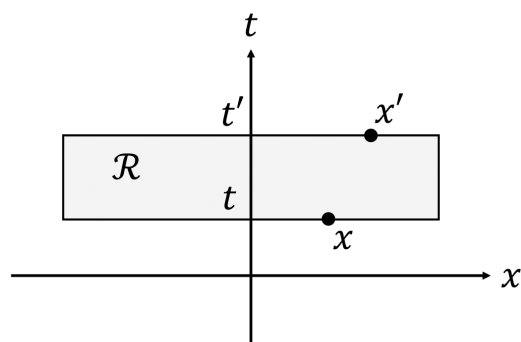


図 116 式 (12.13) に対応する時空の分離 (教科書 p.229 の図)

こうして 2.4.2 項における境界の定式化との関連が見出される。n 点関数は境界の定式化を用いて書ける：背景状態は境界状態を決定し、場の演算子は境界上に属する。

ここで量子重力に戻ろう。共変ループ量子重力には、最後の式を書くための全ての要素がある。我々には境界上の場に対する遷移振幅、場の演算子、および与えられた古典的な配位に対応する領域の境界上の量子重力場を記述できるコヒーレント状態の概念がある。これらの要素を合わせると、背景独立な量子重力理論から背景上の n 点関数を再構成できる。背景は境界状態の決定に入り込む。

考えている領域は正方形である必要はなく、実際、それを以下 [図 117] のように、2つの空間的な超曲面を境界に持つ領域に採ることができる：

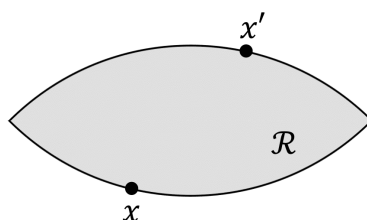


図 117 2つの空間的な超曲面を境界に持つ時空領域 (教科書 p.230 の図) [10.5.5 項の図 107 も見よ]

ここで重大な見解は、既に 2.4.2 項で述べてある：背景に依存する理論では、境界振幅

$$W[\phi_b] = \int D\phi e^{i \int_{\mathcal{R}} L[\phi] d^4x} \quad (12.14)$$

を定義するには場の境界値に加えて、境界領域の形状、その幾何学、その大きさ、過程の始まりから終わりまでの時間経過、等々もまた定めねばならない。ところが量子重力では、一般共変性により、この表現は $\mathcal{R}$ の形状や次元に依らない。境界場の状態 $\Psi_b[\phi]$ を割り当てることは、実に、境界の形状、サイズ、過程の始まりから終わりまでに経過した時間を含む、境界の幾何学を与えるのに充分である！

これは量子重力の真の魔法である：背景への依存性は完全に消え、遷移振幅は場のみの関数となる：仮定における力学的な場を除き、宇宙には考えられるものは他に何も無い。

n 点関数における n 点の引数の位置は、その周りに境界状態がピークを持つところの背景計量に対してよく定義されている。

そこで、例えば与えられた計量の幾何学を持つ、Minkowski 空間の領域 $\mathcal{R}$ を選び、それを調べたい関心のある現象の力学的なスケールを捉えるのに充分きめ細かい三角形分割で近似する。この領域の境界の内部および外部幾何学を決め、これらのデータ上にピークを持つ重力の量子状態 $\Psi \in \mathcal{H}_{\Gamma}$ を選ぶ。すると 2 点 $\vec{x}$ と $\vec{x}'$ は境界グラフの結節点上に属する。これらの結節点とリンクで決まる向きに関する演算子 $\vec{E}_l$ は境界状態上の量子を記述する。

これが量子重力における長年の混乱の解決策である：形式的には、もし $S[g]$ が一般共変な作用であり $D[g]$ が一般共変な測度ならば、量

$$W(x_1, \dots, x_n) = \int D[g] g(x_1) \dots g(x_n) e^{iS[g]} \quad (12.15)$$

は点 $(x_1, \dots, x_n)$ の位置に依存しない (点が重複しない限り)、何故なら一般共変性は他の全てを不変に保ちつつ点を動かせるからである [このことは文献 [2, p.11] でも説明されている]。したがって式 (12.15) は一般共変な理論では n 点関数の不正確な定義である。それは背景上の展開によって計算される量 (12.1) とは関係がない。[ところがそれは不条理であって、] 誤りは式 (12.1) における x_n が背景の計量において計算される物理的な距離であるのに対し、式 (12.15) における x_n は座標距離だということである。物理的な距離に依存する量を得るには、境界面上の背景状態をあからさまに指定し、この計量における位置で定義される x_n を得る必要がある。

より形式的な観点からは、式 (12.13) は非自明である、何故なら点の位置と Ψ_b の両方が微分同相写像の下でともに変換するからである。

12.1 節について

■2 点関数 (12.7),(12.8) の等価性の確認 本文の説明に従い積分測度を図 114 のように分離すると、経路積分 (12.8) は

$$\begin{aligned} W(t, t') &= \int dq(t) q(t) \int dq(t') q(t') \\ &\times \left[\int \prod_{t_i < t} dq(t_i) \cdot e^{i \int_{-\infty}^t L[q] dt} \right] \left[\int \prod_{t < t_i < t'} dq(t_i) \cdot e^{i \int_t^{t'} L[q] dt} \right] \left[\int \prod_{t' < t_i} dq(t_i) \cdot e^{i \int_{t'}^{\infty} L[q] dt} \right] \\ &= \int dq(t) \int dq(t') q(t) q(t') \psi_0(q(t)) W(q(t), t, q(t'), t') \overline{\psi_0(q(t'))} \end{aligned}$$

となり、式 (12.7) に戻る.

12.2 重力子伝播関数

2 点関数に集中しよう、それは摂動論では

$$W_{abcd}(x, y) = \langle 0 | g_{ab}(x) g_{cd}(y) | 0 \rangle \quad (12.16)$$

で定義され、ここに $g_{ab}(x)$ は計量場である. これを x と y における 2 組のベクトル——それをすぐ後で適切に選ぶ——と縮約するのが便利であり、

$$W(x, y) = \langle 0 | g_{ab}(x) g_{cd}(y) | 0 \rangle n^a(x) m^b(x) n^c(y) m^d(y). \quad (12.17)$$

その境界 $\Sigma = \partial M$ 上の x と y がある、背景計量におけるコンパクトな計量領域 M をとる. このとき Σ はそれに関する内部および外部幾何学を持つ. ベクトル $\vec{n}$ と $\vec{m}$ を Σ の正接にとる. Σ 上のトライアドに引き継ぐと

$$W(x, y) = \langle 0 | \vec{E}_a(x) \cdot \vec{E}_b(x) \vec{E}_c(x) \cdot \vec{E}_d(x) | 0 \rangle n^a(x) m^b(x) n^c(y) m^d(y) \quad (12.18)$$

と書くことができ [det e を n^a に吸収か], この表現を M に基づく表現

$$W(x, y) = \langle W | \vec{E}_a(x) \cdot \vec{E}_b(x) \vec{E}_c(x) \cdot \vec{E}_d(x) | \Psi \rangle n^a(x) m^b(x) n^c(y) m^d(y) \quad (12.19)$$

に翻訳でき、ここに Ψ は Σ の幾何学上にピークを持つ、3-次元球面のトポロジーを持つ面上の状態である. この状態は背景の情報をもたらす.

最後の表現を計算するために近似に訴える. この目的のために、 M を三角形分割された空間 Δ に置き換える. 三角形分割 Δ がきめ細かいほど、近似は良くなるだろう. 三角形分割 Δ は境界上の三角形分割を誘導し、 Γ を境界の三角形分割に双対なグラフとして、我々はスピン・ネットワーク Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\Gamma$ の状態 Ψ を求める. Ψ を Σ の (離散化された) 内部および外部幾何学で決まる、外部コヒーレント状態 (8.127) に選ぶ. 点 x と y をグラフの結節点、あるいは三角形分割の境界の四面体を選び、ベクトル n と m を対応する四面体の面に垂直にとる.

すると式 (12.19) はよく定義された表現になる: 境界状態 Ψ は上で述べたように選んだ状態 (8.127) であり、演算子 $\vec{E}_b(x) n^b(x)$ はスピン・ネットワークの対応するリンクに関するトライアド演算子 (7.56) である. 遷移振幅 W はバルクの三角形分割に双対な 2-複体に関する振幅 (7.57) である.

最低次の非自明な近似において、単一の 4-複体から成る三角形分割を採ることができる. [その境界は 3 次元球面を近似するからである (図 110 の箇所を見よ).] 我々は平坦な空間の周りに展開しているので、これは理に適っており、背景の曲率はない. すなわち、我々はこの展開が上手くいく見込みのある適正な領域にいる. このとき境界グラフは 5 つの接続された四面体から成る正則グラフであり、 W は頂点振幅 (7.58) で直接与えられる. こうして、式 (8.127), (7.56) および (7.58) を用いると、2-点関数 (12.19) は完全に明示的な表現になる. それを計算することは単に技術的能力の問題である.

任意の境界のサイズに対する計算は困難であるものの、 Σ の境界幾何学が Planck スケールに比べて大きい極限では計算は簡単になる. この場合には頂点振幅 (7.58) を鞍点近似 (8.104)–(8.105) で置き換える, Barrett *et al.* (2010) で展開されている技法を用いることが可能である.

Bianchi and Ding (2012) に従って、これを少し詳しく調べよう. 演算子の期待値は式 (7.60) で与えられる. ここで興味のある演算子は (密度 [加重度 [1, pp.43–44]] 2 の (density-2) 逆) 計量 $q^{ab}(x) = \delta^{ij} E_i^a(x) E_j^b(x)$

である．半古典的な境界状態 $|\Psi_0\rangle$ 上の連結 2 点相関関数 $G^{abcd}(x, y)$ に集中する．それは

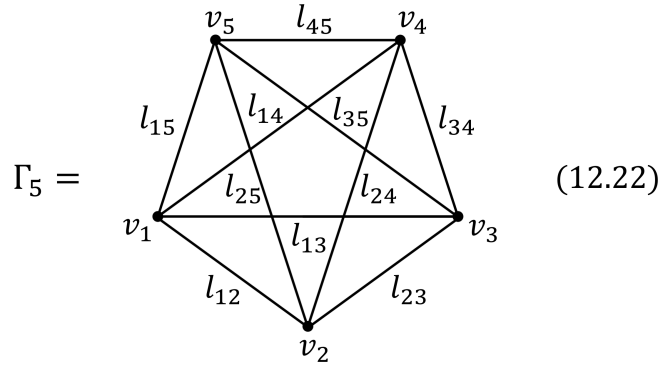
$$G^{abcd}(x, y) = \langle q^{ab}(x) q^{cd}(y) \rangle - \langle q^{ab}(x) \rangle \langle q^{cd}(y) \rangle \quad (12.20)$$

で定義される．四面体の面の法線と縮約したトライアドで表すと，これは

$$G_{nm}^{abcd} = \langle E_n^a \cdot E_n^b E_m^c \cdot E_m^d \rangle - \langle E_n^a \cdot E_n^b \rangle \langle E_m^c \cdot E_m^d \rangle \quad (12.21)$$

となる．

最初の問題は正しい境界状態を構成することである．これは 4-単体の四面体に双対な 5 つの結節点 v_a と，対応する貼り合わさる三角形に双対な 10 本のリンク $l_{ab}, (a < b)$ を持つグラフ



上のコヒーレント状態である．それを構成する際，8.1.3 項で論じた四面体の時間方向とリンクの鋭い/鈍い (Thin/Thick) 本性を見失わないよう注意せねばならない．Bianchi and Ding (2012) を見よ．これにより境界の四面体上の選んだ時間的な向き，リンクのスピンおよび四面体の面の法線に依存する内部コヒーレント状態

$$|\Gamma_5, j_{ab}, \vec{n}_{ab}\rangle = \exp\left(-i \sum_{a < b} \Pi_{ab} j_{ab}\right) |\Gamma_5, j_{ab}, \vec{n}_{ab}\rangle \quad (12.23)$$

を定義することが可能になる [Π_{ab} は式 (8.41) で定義]．

内部および外部幾何学の両方の上にピークを持つ Lorentz 的な外部コヒーレント状態は，Lorentz 的なコヒーレント・スピン・ネットワーク状態の重畳で与えられる．コヒーレント状態の完全な機構を用いる代わりに，単に波束

$$|\Psi_0\rangle = \sum_{j_{ab}} \psi_{j_0, \phi_0}(j) |j, \vec{n}\rangle \quad (12.24)$$

を選ぶ方が容易であり，係数 $\psi_{j_0, \phi_0}(j)$ は Gauss 型と位相の積

$$\psi_{j_0, \phi_0}(j) = \exp\left(-i \sum_{ab} \gamma \phi_0^{ab} (j_{ab} - j_0)\right) \exp\left(- \sum_{ab, cd} \gamma \alpha^{(ab)(cd)} \frac{j_{ab} - j_0}{\sqrt{j_0}} \frac{j_{cd} - j_0}{\sqrt{j_0}}\right) \quad (12.25)$$

で与えられ，ここに ϕ_0 は単体の (simplicial) 外部曲率，すなわち四面体の共有する三角形に関する角度である； 10×10 行列 $\alpha^{(ab)(cd)}$ は正定値の実部を持つ複素数と仮定される (Bianchi *et al.* 2009)．量 j_0 は計算における外からのインプットであり，その上に境界状態が定められるところの，境界の背景幾何学のスケールを設定する．それはしたがって我々が計算している 2 点関数の 2 点間の距離を確定する．

ここで状態 (12.24), 式 (8.95) と式 (8.93) で与えられる頂点振幅の形を, 2 点関数 (12.21) に対する期待値 (7.60) に代入できる. これは

$$G_{nm}^{abcd} = \frac{\sum_j \psi_j \langle W | E_n^a \cdot E_n^b E_m^c \cdot E_m^d | j, \vec{n} \rangle}{\sum_j \psi_j \langle W | j, \vec{n} \rangle} - \frac{\sum_j \psi_j \langle W | E_n^a \cdot E_n^b | j, \vec{n} \rangle}{\sum_j \psi_j \langle W | j, \vec{n} \rangle} \frac{\sum_j \psi_j \langle W | E_m^c \cdot E_m^d | j, \vec{n} \rangle}{\sum_j \psi_j \langle W | j, \vec{n} \rangle} \quad (12.26)$$

を与える. 行列要素 $\langle W | E_n^a \cdot E_n^b | j, \Upsilon(\vec{n}) \rangle$ および $\langle W | E_n^a \cdot E_n^b E_m^c \cdot E_m^d | j, \Upsilon(\vec{n}) \rangle$ は Bianchi *et al.* (2009) に従い, “挿入 (insertion)”

$$Q_{ab}^i \equiv \langle j_{ab}, -\vec{n}_{ab}(\xi) | Y^\dagger g_a^{-1} g_b Y (E_b^a)^i | j_{ab}, \vec{n}_{ab}(\xi) \rangle \quad (12.27)$$

を導入し, それらをこの関数で表すことで, 明示的な積分表現で与えることができる. いくつかの取り組み (Bianchi and Ding 2012) により, 表現

$$G_{nm}^{abcd} = \frac{\sum_j \psi_j \int d^4 g d^{10} z q_n^{ab} q_m^{cd} e^S}{\sum_j \psi_j \int d^4 g d^{10} z e^S} - \frac{\sum_j \psi_j \int d^4 g d^{10} z q_n^{ab} e^S}{\sum_j \psi_j \int d^4 g d^{10} z e^S} \frac{\sum_j \psi_j \int d^4 g d^{10} z q_m^{cd} e^S}{\sum_j \psi_j \int d^4 g d^{10} z e^S} \quad (12.28)$$

に到達し, ここに S は式 (8.93) で与えられ,

$$q_n^{ab} \equiv A_n^a \cdot A_n^b \quad (12.29)$$

および

$$A_{ab}^i \equiv \gamma j_{ab} \frac{\langle \sigma^i Z_{ba}, \xi_{ba} \rangle}{\langle Z_{ba}, \xi_{ba} \rangle}. \quad (12.30)$$

2 点関数の低エネルギーの振舞いは相関関数 (12.28) の大きな j_0 での漸近性で決まる, 何故なら j_0 は背景計量における 2 点間の距離を決める境界状態のパラメータだからである. これはスピン j_{ab} および $(j_0)_{ab}$ を整数 λ で $j_{ab} \rightarrow \lambda j_{ab}$ および $(j_0)_{ab} \rightarrow \lambda (j_0)_{ab}$ とリスケールすることで, 行うことができる (Bianchi *et al.* 2009); こうして 2 点関数 (12.28) は改めて $G(\lambda)$ と表せる. 大きなスピンの極限の研究はこうして, 鞍点近似 (stationary phase approximation) を通じた大きな λ の極限の研究になる. 積分の鞍点近似は詳しく調べられており, 文献を紹介する: Alesci and Rovelli (2008); Bianchi *et al.* (2009); Magliaro and Perini (2012); Rovelli and Zhang (2011), およびとりわけ Bianchi and Ding (2012). 結果は, 量子幾何学のサイズ $A \sim \gamma j$ を有限で一定に保ちながら (有限で一定の面積 A は相関関数が定義されるところの 2 点間の有限で一定の距離に対応する), Barbero–Immirzi パラメータがゼロにとられ, $\gamma \rightarrow 0$, また境界状態のスピンが無限大にとられる, $j \rightarrow \infty$, Bianchi *et al.* (2009) で導入された古典的極限において, 2 点関数が Lorentz 的な Regge 計算法から得られるもの (Regge 1961) と正確に合致するというものである. さらに, この極限で 2 点関数は一般相対性理論のそれ (12.16) と合致する.

したがって理論の半古典的極限は通常の線形化された重力を再現し, このことは理論が適切な極限で一般相対性理論であることを示唆する.

頂点展開における最初の次数の先に進むこともまた重要である. 任意の数の頂点を持つスピン・フォームの漸近解析は $\gamma \rightarrow 0$ の極限において Magliaro and Perini (2011a,b, 2013) で調べられている. $\gamma \rightarrow 0$ をとらずに, 任意の数の頂点を持つスピン・フォームの大きな j が, 閉じた多様体を用いて Conrady and Freidel (2008) で調べられている. 網羅的な議論と解析が Han (2013) で与えられている.

この結果には完全には明快でない側面がある. 中でも古典的な極限が出現する独特の極限がある. 同じ極限がループ量子宇宙論の文脈で Bojowald (2001) において考えられており, 理由はおそらく図 103 に描いた式 (8.108) に関係している. しかし状況はまだ完全には明快でない. さらに, 現在の計算は込み入っている. 特

に複雑さのほとんどが最終的に消える項に行き着くことを踏まえると、そのより単純なバージョンがあるはずだという印象を受ける。

量子補正は高次において得られる。執筆時点では、泡 (bubbles) を伴う輻射補正の予備計算が得られているに過ぎない (Riello 2013)。これは理論における調査の極めて重要な未解決の方向である。例えば n 点関数の適切な繰り込みやそれに似た数多くの疑問は、依然として不明瞭であり、さらなる取り組みが必要である。

理想的には、非摂動的な理論で計算される n 点関数の低エネルギーの振舞いは、繰り込み不可能な摂動展開で計算されるそれと一致する一方で、高次では非摂動的な理論は繰り込み不可能な理論の無限大のフリーなパラメータの全ての解消をもたらすと期待される。これが正しいかどうかは、なお未解決の問題である。

これらの結果の真の重要性は、他方で、それは長らく量子重力の大いなる混乱の源となってきた問題であった、非摂動的な理論から背景に依存する量を計算する方法を、それが示唆しているという事実にある。

第 13 章 最後の注意

提示した理論の発展に関する短い歴史のノートと、未解決の主要な問題に関する若干の考察で締め括る。

13.1 短い歴史に関するノート

本書で提示した重力の量子論は、多くの人々が貢献した長い道のりの成果である。ここではこの道のりに関する若干のノートと、読者の案内のための若干の参考文献をまとめる。網羅的な参考文献一覧は不可能だろう。

基本的なアイデアは今なお、状態空間に関する John Wheeler (Wheeler 1968) と Bryce DeWitt (DeWitt 1967) のアイデアと、幾何学にわたる和に関する Charles Misner (Misner 1957), Stephen Hawking (Hawking 1980), Jonathan Halliwell (Halliwell and Hawking 1985), および Jim Hartle (Hartle and Hawking 1983) のアイデアである。Abhey Ashtekar による彼の変数の導入 (Ashtekar 1986) がなければ理論は発展せず、1980 年代の終わりに考えられた“量子一般相対性理論のループ空間表現” (Rovelli and Smolin 1988, 1990; Ashtekar *et al.* 1991) から成長しなかっただろう。グラフが Jurek Lewandowski により (Lewandowski 1994) で導入された；スピン・ネットワークと離散化は 1990 年代にループ量子重力から現れた (Rovelli and Smolin 1995a,b; Ashtekar and Lewandowski 1997)。ここで用いられた幾何学的描像は Bianchi *et al.* (2011b) から導かれる。量子重力に対してスピン・フォームを用いるアイデアは大栗博司 (Hiroshi Ooguri; Ooguri 1992) に由来し、彼は 2 次元行列モデルの 3 次元への一般化である Boulatov モデル (Boulatov 1992) を、さらに 4 次元へと一般化した。4 次元における大栗理論は一般相対性理論ではないものの、ループ量子重力の構造と著しく合致する構造を持ち、したがって彼の技法を重力に持ち込むことを試みるのが自然に見受けられ (Rovelli 1993b), スピン・フォームのアイデアをもたらした (Reisenberger and Rovelli 1997)。大栗モデルを適切に制約して重力に適合させる問題が 1990 代に盛んに論じられ、4 次元の量子重力に対する最初のスピン・フォーム・モデルを考案した John Barrett and Louis Crane (Barrett and Crane 1998, 2000) によって、最終的に見事に解決した。そのモデルは群の場の理論 (group field theory) の技法 (De Pietri *et al.* 2000) の始まりを促したものの、それは問題を孕んでいることが判明し、問題はそれを重力子の 2 点関数の計算に用いると明らかになり、2 点関数は正しくないことが判明する (Alesci and Rovelli)。それを修正する試みは、数多くの人々が関与した協力により発展した、ここで提示したモデルへと導いた：Engle *et al.* (2007, 2008a); Freidel and Krasnov (2008); Livine and Speziale (2007)。その Euclid 的なバージョンは 2 つのグループによって独立に同時に発見された。Lorentz 的なバージョンは Engle *et al.* (2008b) に現れた。任意の複体 (complexes) への理論の拡張が Warsaw (ワルシャワ) グループ (Kaminski *et al.* 2010a,b) によって急速に発達した。

John Barrett と彼の同僚が振幅の半古典的近似を力技で計算することに成功し (Barrett *et al.* 2010), これらが Regge 理論と合致することが判明するまでは、理論は難解であり疑いの目で見られた。すぐ後に, Noui and Roche (2003) における数学的成果に立脚して、宇宙定数を伴うバージョンが導入され (Han 2011a; Fairbrin and Meusburger 2012), その理論は有限であることが証明された。コヒーレント状態の技法は多くの人々によって独立に発達した：Thiemann (2006); Livine and Speziale (2007); Bianchi *et al.* (2010a); Freidel and Speziale (2010b)。発散の研究における泡 (bubbles) の重要性は早くから理解されていたものの (Perez and Rovelli 2001), 輻射の計算は最近始まったばかりである (Perini *et al.* 2009; Riello 2013)。フェルミオンと

の結合は Bianchi *et al.* (2010b) に見られる。スピン・フォーム宇宙論は Bianchi *et al.* (2010d) で導入され、Vidotto (2011) で多くの結節点と多くのリンクがある場合に拡張された。スピン・フォームのブラックホールへの応用が Bianchi (2012a) で展開された。Robert Oeckl (Oeckl 2003) で展開された境界の定式化を用いて、背景独立な文脈で n 点関数を計算する技法が Rovelli (2006) で導入された。Lorentz 的な 2 点関数が Bianchi and Ding (2012) で計算された。より大きい n に対する n 点関数が Rovelli and Zhang (2011) で計算された。理論の漸近形が最近、Hang and Zhang (2013) と Han (2013) で調べられた。

これはループ量子重力の完全な参考文献一覧には程遠く、理論に重要な貢献をしながら、ここ、または本書の他の箇所で言及しなかった多くの科学者に心からお詫びする；そのような人々は大勢いる。

13.2 足りないもの

理論の主要な未解決の問題は 2 つある。1 つ目はその整合性に関係し、2 つ目は予言の実現可能性に関係している。さらに、理論が完全となるには、さらなる発展と、おそらくは修正がなお必要である。

整合性

1. 宇宙定数があるとき、遷移振幅たちは全ての次数で有限であり、各々の古典的極限は時空の有限な離散化の上の、GR の古典的極限の切り詰めに収束する；さらに、離散化がきめ細かくなるとき、これらは古典的 GR に収束する。これは整合的な近似の体系を与える。しかしながら離散化をきめ細かくするときに得られる補正たちの量子部分が大きければ、近似の体系は上手くいかないかもしれない。これらは“輻射補正”と呼べる、何故ならそれらはある意味、標準的な QFT の輻射補正とアナログだからである：近似の続く次数を採るときに現れる、場合によっては大きな量子効果である。近似が有効であるためには、これらの輻射補正が有限であるだけでは充分でない：それらは小さくもなければならない。理論は大きな数——宇宙定数のスケールの Planck スケールに対する（あるいは観測スケールに対する）比——を含んでいるので、これらの輻射補正はアプリアリには大きくなり得る。これらが（適切な物理的領域で）制御可能かを理解することは、今日理論の整合性が懸かっている重要な未解決問題である。振幅への大きな寄与は大きなスピンたちに由来し、それらは宇宙定数によって切断されるので、これらの潜在的に危険な大きな数量は $\Lambda = 0$ 理論における発散として調べられる。これは Aldo Riello (Riello 2013) の採った道であり、そこでは特定の泡の (bubble) 発散が計算されている。結果は今のところ安心できる、何故なら切断は発散する項に対数的にのみ現れ、せいぜい宇宙定数の対数が振幅に入ることを示唆しているからである。しかし一般的な解析が必要であり、問題は完全に未解決である。すると Riello (2013) で考えられているものの他に、別の泡の発散が $\Lambda = 0$ 理論に現れるかが重要である。
2. これらの泡に関する一般的な結果は得られるか？
3. 非常にきめ細かい離散化の寄与によって、別の問が提起されている。連続極限に近づくと理論に何らかの非自明なことが起きるか？ それは今のところなさそうに見えるものの、1 つの可能性である。量子重力と類似性を持つモデル理論の連続極限の研究に向けた多くの取り組みが発展してきた；例えば Bonzom and Livine (2011), Dittrich *et al.* (2013) およびそこに含まれる文献を見よ。これらの取り組みの成果は量子重力の連続極限の情報にとって非常に重要かもしれない。

理論を完成させること

1. 理論は物質セクターは十分に発展していない．頂点から Dirac 伝播関数を得られるか？
2. 理論の q -変形された (q -deformed) がスケッチされているものの (Han 2011a,b; Fairbrair and Meusburger 2012), それはほとんど発展していない (Ding and Han 2011). それは調べ, より良く理解するに値する. 特に, $\Lambda = 0$ 理論で得られた結果をこの理論において改めて得られるか？

理論の修正？

1. $p = \gamma j$ と $p = \gamma(j+1)$ の Y 写像の 2 つのバージョンは今のところ等しく有望であり興味深い. 2 つの理論の一方を選好する何かがあるか？
2. 理論を群の場の理論 (group field theory) として表現する可能性が Ben Geloun *et al.* (2010) において調べられている. 個々の離散化の上の遷移振幅はこれにより影響を受けないのに対し, この定式化は次第にきめ細くなる離散化の寄与が和をとられる, 連続極限の異なる定義へと導く. これは間違いなく興味ある, 理論の可能な代替りの定義である. この文脈では, ここで与えた定式化の可能な代案もまた, Baratin *et al.* (2010) で Daniele Oriti と Aristide によって定義された理論である.

物理的な予言

1. 理論の観測的な支持の最も有望な窓は今のところ, 宇宙論から得られそうである. 正準ループ量子宇宙論が上手く発展しているのに対し, 共変な理論はまだその初期にあり (Bianchi *et al.* 2010d; Vidotto 2011; Rennert and Sloan 2013), それを同じ水準に引き上げるには多くのことを成さねばならない. Lorentz 的な理論において次の興味ある次数まで, またより非自明な 2-複体に対して宇宙論的な遷移振幅を計算することは, 必要なステップである. Alesci and Cianfrani (2013) によって得られた宇宙論的状态を書く最新の結果は, そのための有益な手段を供し得る. 正準ループ量子宇宙論 (Ashtekar 2009; Bojowald 2005) との比較もまた, 成すべきこととして残っている.
2. 伝播は量子重力に影響され得るというアイデア——考慮され, 次いで理論が Lorentz 不変であることの証明のため, 数年前に不当に見捨てられた——は必ずしも誤りではない, 何故なら伝播関数への Lorentz 不変な補正はあり得るからである. これもまた探求したい方向である. そのためには, Bianchi *et al.* (2009); Bianchi and Ding (2012) で計算された重力子伝播関数の高次の補正を調べる必要がある. 古典的な伝播関数の形への Planck 補正はあるか？
3. 言及したように, Riello (2013) における Riello の結果は輻射補正が宇宙定数の対数に比例することを示唆している. このことを用いて何らかの物理を導けるか？ G または Λ のスケールリング？ 真空エネルギーの繰り込み？
4. 最新の提案 (Rovelli and Vidotto 2014) は重力的に崩壊する星が, ループ宇宙論で起きるように量子重力的な圧力が重力に逆らう, その生涯の新たな段階に達し得るというものである. これは “Planck スター” と呼ばれる. この段階の持続は星の固有時間では非常に短く, バウンスをもたらすものの, 大きな重力的な時間の遅れのため, 外から見ると極めて長い. ループ量子重力は量子重力的な効果の発現が——サイズではなく——エネルギー密度, あるいは加速度に支配されることを示唆し, したがって星はこの段階において Planck スケール (planckian) よりも極めて大きくなり得る. ブラックホールの Hawking 蒸発 (evaporation) の最後に現れる物体はすると, Planck スケールよりも因子 $(m/m_P)^n$ だ

け大きくなり得る，ここに m はホールに落ちた質量， m_P は Planck 質量であり，また n は正である．これらの物体には天体物理学的，宇宙論的な面白さがあり得る：蒸発を終えた原始のブラックホールは今では量子重力的な起源を持つ検出可能な信号を生じ得る．量子重力効果を増長する大きな要因はここでは，波長 (Rovelli and Vidotto 2014):

$$\lambda \sim \sqrt[3]{\frac{t_H}{t_{Pl}}} L_{\text{Planck}} \sim 10^{-14} \text{cm} \quad (13.1)$$

を与える，Hubble 時間 t_H (原始ブラックホールの寿命) の Planck 時間 t_{Pl} に対する比であり，これは現在検出可能な信号の範囲によく収まっている^{*164}．この提案は有効か？ Planck スターのダイナミクスはループ理論で調べられるか？

量子重力にはまだ成さねばならないことが多くある．何らかの実験的支持を待つ間，正しい道を進んでいるのか確信できない．しかし量子重力ではほんの数年前より空ははるかに澄んでいる．そこで，最終課題である：

演習 13.1

- 本書で定義した理論が完全に整合的であることを示せ；そうでないならば，理論を修正せよ．
- 観測可能で検証可能な帰結を見出せ．
- それらを用いて，理論を検証せよ．
- 理論が裏付けられれば，我々は気分良く感じ，また気分良く感じることはそれだけで良いことだ……．

^{*164} (Haggard and Rovelli 2014) ではブラックホールからホワイトホールへの量子遷移が調べられ，はるかに大きい波長の信号が考えられた．2つの場合の現象論が (Barrau and Rovelli 2014) と (Barrau, Rovelli and Vidotto 2015) で調べられた．

第Ⅴ部

付録(筆者補論)

付録 A 微分形式

ここでは微分形式 (それは写像である) を導入する [16, pp.37–46, pp.67–76, pp.79–99].

接ベクトル 多様体 M (座標 $q = \{q^i\}$ を持つ) の各点における微分作用素 $v = v^i \partial_i$. ただし $\partial_i \equiv \partial/\partial q^i$.

図 118 の曲線 c に沿った方向微分

→ 方向微分作用素 $v = \dot{q}^i \partial_i$

$$\frac{df(q(t))}{dt} = \dot{q}^i \partial_i$$

$c(t)$ に応じて (つまり動点の運動に応じて) $\{\partial_i\}$ を基底とする様々な速度 $\{q^i\}$ を持つ作用素 v が得られる. その全体が接空間を張る.

次に多様体の接空間に限らず，抽象的ベクトル空間 V を考える．その基底を $\{e_i\}$ ，元を $u_{(i)} = u_{(i)}^j e_j$ と書く．

p ベクトル p 個のベクトル $u_{(1)}, \dots, u_{(p)}$ を実数に対応させる写像のうち、引数となるベクトルについて

$$\begin{aligned} p \text{ 重線形: } & \omega^p[u_{(1)}, \cdots, au_{(i)} + bv_{(i)}, \cdots, u_{(p)}] = a\omega^p[u_{(1)}, \cdots, u_{(i)}, \cdots, u_{(p)}] + b\omega^p[u_{(1)}, \cdots, v_{(i)}, \cdots, u_{(p)}] \\ \text{歪対称: } & \omega^p[u_{(1)}, \cdots, u_{(i)}, \cdots, u_{(j)}, \cdots, u_{(p)}] = -\omega^p[u_{(1)}, \cdots, u_{(j)}, \cdots, u_{(i)}, \cdots, u_{(p)}] \end{aligned}$$

となる ω^p のこと.

- 例えば1ベクトル ω は

$$\omega : V \rightarrow \mathbf{R} : u \in V \mapsto \omega[u] \in \mathbf{R}$$

という線形写像.

- 特に 1 ベクトル $\mathcal{E}^i$ を,

$$\mathcal{E}^i[u^j e_j] = u^i$$

で定義しておく. これはベクトル $u = u^j e_j$ の第 i 成分 u^i を取り出す写像である.

1 ベクトル $\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(p)}$ から p ベクトルを構成することを考える.

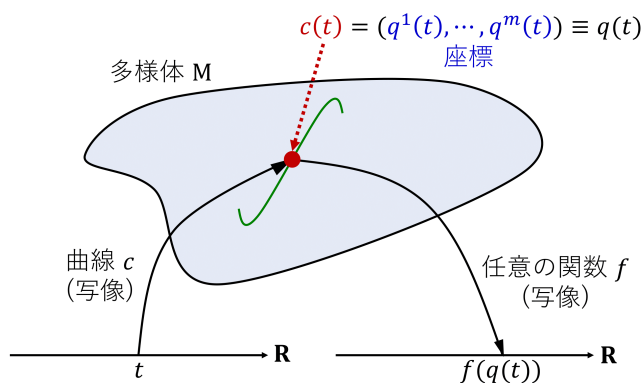


図 118 合成写像 $t \in \mathbf{R} \mapsto c(t) \in \mathbf{M} \mapsto f \circ c(t) \equiv f(c(t)) \in \mathbf{R}$

テンソル積 $\omega_{(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{(p)}$

テンソル積 $\omega_{(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{(p)}$ を

$$(\omega_{(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{(p)})[u_{(1)}, \cdots, u_{(p)}] = \omega_{(1)}[u_{(1)}] \cdots \omega_{(p)}[u_{(p)}]$$

で定義する.

外積 $\omega_{(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{(p)}$

テンソル積 $\omega_{(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{(p)}$ を用いて外積 $\omega_{(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{(p)}$ を

$$(\omega_{(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{(p)})[u_{(1)}, \cdots, u_{(p)}] = \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) (\omega_{(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{(p)})[u_{(\pi 1)}, \cdots, u_{(\pi p)}]$$

で定義する. ここに

$$\text{置換} \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ \pi 1 & \pi 2 & \cdots & \pi p \end{pmatrix}, \quad \text{その符号 } \text{sgn}(\pi) = \begin{cases} +1 & (\text{偶置換}) \\ -1 & (\text{奇置換}) \end{cases}$$

である.

これは行列式

$$\begin{vmatrix} \omega_{(1)}[u_{(1)}] & \cdots & \omega_{(1)}[u_{(p)}] \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{(p)}[u_{(1)}] & \cdots & \omega_{(p)}[u_{(p)}] \end{vmatrix}$$

であり, $u_{(1)}, \cdots, u_{(p)}$ について歪対称だから p ベクトルである.

また, ここから外積は $\omega_{(1)}, \cdots, \omega_{(p)}$ についても歪対称であることが分かる.

さらにこれは転置行列の行列式にも一致するから

$$\sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) (\omega_{(\pi 1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{(\pi p)})[u_{(1)}, \cdots, u_{(p)}]$$

とも書け,

$$\omega_{(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{(p)} = \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) (\omega_{(\pi 1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{(\pi p)}).$$

p ベクトル ω^p が

$$\omega^p = \sum' a_{i_1 \cdots i_p} \mathcal{E}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathcal{E}^{i_p} \quad (114)$$

と展開されることを示す (ただし $\sum'$ は $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq \dim V$ の和). $a_{i_1 \cdots i_p} \equiv \omega^p[e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}]$ とおくと, これは添字に関して反対称である.

$$\begin{aligned} \omega^p[u_{(1)}, \cdots, u_{(p)}] &= \omega^p[e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}] u_{(1)}^{i_1} \cdots u_{(p)}^{i_p} \quad (\omega^p \text{の線形性}) \\ &= a_{i_1 \cdots i_p} \mathcal{E}^{i_1}[u_{(1)}] \cdots \mathcal{E}^{i_p}[u_{(p)}] \\ &= a_{i_1 \cdots i_p} \mathcal{E}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}^{i_p}[u_{(1)}, \cdots, u_{(p)}] \end{aligned}$$

なので,

$$\omega^p = a_{i_1 \cdots i_p} \mathcal{E}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}^{i_p}$$

と書ける．よって

$$\begin{aligned}
\omega^p &= \sum' \sum_{\pi} a_{\pi i_1 \dots \pi i_p} \mathcal{E}^{\pi i_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{E}^{\pi i_p} \\
&\quad (\text{ここで } \sum' \text{ で } 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq \dim V \text{ と大小関係を指定する代わりに,} \\
&\quad \text{置換 } \pi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ \pi i_1 & \pi i_2 & \dots & \pi i_p \end{pmatrix} \text{ で順序を混ぜている}) \\
&= \sum' \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) a_{i_1 \dots i_p} \mathcal{E}^{\pi i_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{E}^{\pi i_p} \quad (a_{i_1 \dots i_p} \text{ の反対称性}) \\
&= \sum' a_{i_1 \dots i_p} \mathcal{E}^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathcal{E}^{i_p}.
\end{aligned}$$

V として多様体の接空間をとり p ベクトル $\omega^p = \sum' a_{i_1 \dots i_p} \mathcal{E}^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathcal{E}^{i_p}$ を考える．

微分 df 接ベクトル $v = v^i \partial_i$ に作用して方向微分 $v^i \partial_i f$ を与える 1 ベクトル (従って写像)

$$df[v] = v^i \partial_i f = (\partial_i f) \mathcal{E}^i[v], \quad \therefore df = (\partial_i f) \mathcal{E}^i \quad (115)$$

を導入する．

$$q^j(q) = q^j$$

で定義される座標関数 q^j を f にとると，微分 df の式 (115) に現れる $\partial_i f$ における $f(q) = q^j(q) = q^j$ は座標関数ではなく座標成分となることに注意して

$$\partial_i f = \delta_i^j, \quad \therefore dq^j = \mathcal{E}^j$$

を得る．

よって p ベクトルは

$$\omega^p = \sum' a_{i_1 \dots i_p} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p}$$

と表される． ω^p は多様体のある点 Q の接ベクトルに作用する (点 Q の接ベクトルを引数とする) 写像であることを明記するため，これを $(\omega^p)_Q$ と書く．

p (次微分) 形式 ω^p 多様体の各点で p ベクトル $(\omega^p)_Q$ を与える “場”

$$\omega^p = \sum' a_{i_1 \dots i_p} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p}.$$

全微分 df 微分 $(df)_Q$ の “場” である 1 形式 $df = (\partial_i f) dq^i$ ．

座標関数の全微分は $d\bar{q}^i = \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^j} dq^j$ より反変ベクトル成分の変換則に従うため， p 形式 $\sum' a_{i_1 \dots i_p} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p}$ が座標系に依らない意味を持つには $a_{i_1 \dots i_p}$ は p 階共変テンソルの変換則に従わなければならない．

外微分 p 形式

$$\omega = \sum' f_{i_1 \dots i_p} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p}$$

を外微分すると， $df_{i_1 \dots i_p}$ を $f_{i_1 \dots i_p}$ の全微分 (従って 1 形式) として $p+1$ 形式

$$d\omega = \sum' df_{i_1 \dots i_p} \wedge dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p}$$

を得る．

■微分形式の積分 以下では $\omega^p[u_{(1)}, \dots, u_{(p)}] \equiv \langle \omega^p | u_{(1)}, \dots, u_{(p)} \rangle$ という記法を用いる．多様体上の積分領域 A を $(\xi^1, \dots, \xi^p)$ でパラメトライズし，領域 A に対応する $(\xi^1, \dots, \xi^p)$ の範囲を $\bar{A}$ とする．このとき p 形式 ω^p の積分は

$$\int_A \omega^p \equiv \int_{\bar{A}} \left\langle \omega^p \left| \frac{\partial}{\partial \xi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi^p} \right. \right\rangle d\xi^1 \dots d\xi^p$$

で定義される．ここで

$$\frac{\partial}{\partial \xi^j} = \frac{\partial q^k}{\partial \xi^j} \frac{\partial}{\partial q^k}, \quad \therefore dq^i \left[\frac{\partial}{\partial \xi^j} \right] = \mathcal{E}^i \left[\frac{\partial q^k}{\partial \xi^j} \frac{\partial}{\partial q^k} \right] = \frac{\partial q^i}{\partial \xi^j}$$

なので

$$\begin{aligned} \left\langle \omega^p \left| \frac{\partial}{\partial \xi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi^p} \right. \right\rangle &= \sum' f_{i_1 \dots i_p} \left\langle dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p} \left| \frac{\partial}{\partial \xi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi^p} \right. \right\rangle \\ &= \sum' f_{i_1 \dots i_p} \begin{vmatrix} dq^{i_1} [\partial/\partial \xi^1] & \dots & dq^{i_1} [\partial/\partial \xi^p] \\ \dots & \dots & \dots \\ dq^{i_p} [\partial/\partial \xi^1] & \dots & dq^{i_p} [\partial/\partial \xi^p] \end{vmatrix} \\ &= \sum' f_{i_1 \dots i_p} \frac{\partial(q^{i_1}, \dots, q^{i_p})}{\partial(\xi^1, \dots, \xi^p)}, \\ \therefore \int_A \omega^p &= \int_A \sum' f_{i_1 \dots i_p} \frac{\partial(q^{i_1}, \dots, q^{i_p})}{\partial(\xi^1, \dots, \xi^p)} d\xi^1 \dots d\xi^p \end{aligned} \quad (116)$$

と書き換えられる．なお

$$\frac{\partial(q^{i_1}, \dots, q^{i_p})}{\partial(\xi^1, \dots, \xi^p)} d\xi^1 \dots d\xi^p \equiv \frac{\partial(q)}{\partial(\xi)} d^p \xi = \frac{\partial(q)}{\partial(\xi)} \frac{\partial(\xi)}{\partial(\xi)} d^p \bar{\xi} = \frac{\partial(q)}{\partial(\xi)} d^p \bar{\xi}$$

より，この積分はパラメータ $(\xi^1, \dots, \xi^p)$ の取り方に依らない．

■Stokes の定理 n 次元の領域 D と境界 ∂D に向きのつけられるとき，任意の $p \equiv (n-1)$ 形式 ω に対して

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega \quad (117)$$

が成り立つ．

■面積要素を構成する 領域 D の境界 ∂D を $(\xi^1, \dots, \xi^p)$ でパラメトライズする．1つのパラメータ ξ^j が動いてできる座標曲線上の2点 $q(\xi^j), q(\xi^j + d\xi^j)$ を結ぶ ∂D の接ベクトルを $d^{(j)}q$ とすると，その第 i 成分は $d^{(j)}q^i = \frac{\partial q^i}{\partial \xi^j} d\xi^j$ (j について和をとらない) なので， ∂D にわたる ω^p の積分から

$$\frac{\partial(q^{i_1}, \dots, q^{i_p})}{\partial(\xi^1, \dots, \xi^p)} d\xi^1 \dots d\xi^p = \begin{vmatrix} \frac{\partial q^{i_1}}{\partial \xi^1} d\xi^1 & \dots & \frac{\partial q^{i_1}}{\partial \xi^p} d\xi^p \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial q^{i_p}}{\partial \xi^1} d\xi^1 & \dots & \frac{\partial q^{i_p}}{\partial \xi^p} d\xi^p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d^{(1)}q^{i_1} & \dots & d^{(p)}q^{i_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ d^{(1)}q^{i_p} & \dots & d^{(p)}q^{i_p} \end{vmatrix}$$

が現れる．これは無限小ベクトル $d^{(1)}q, \dots, d^{(p)}q$ の張る面積要素を与える．

■外微分の公式 ω^p, σ^p を p 形式， f をスカラー関数とすると，外微分の定義より以下の公式が成り立つ．

$$d(\omega^p + \sigma^p) = d\omega^p + d\sigma^p, \quad (118)$$

$$d(f\omega^p) = df \wedge \omega^p + f d\omega^p, \quad (119)$$

$$d(df) = 0, \quad (120)$$

$$d(\omega^p \wedge \sigma^q) = d\omega^p \wedge \sigma^q + (-1)^p \omega^p \wedge d\sigma^q. \quad (121)$$

式 (118–119) はほとんど自明である.

式 (120) は

$$d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial q^j} dq^j\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial q^j} dq^i \wedge dq^j$$

の最右辺が³, 添字 i, j に関して対称な量と反対称な量の縮約となって消えることによる.

最後に式 (121) について, 任意の微分形式は

$$\omega^p = f dq^{i_1} \wedge dq^{i_2} \wedge \cdots \wedge dq^{i_p}, \quad \omega^q = g dq^{j_1} \wedge dq^{j_2} \wedge \cdots \wedge dq^{j_q}$$

という形の項の線形結合で書ける. ところが外積は線形性

$$\begin{aligned} (a\omega^p + b\sigma^p) \wedge \omega^q &= a(\omega^p \wedge \omega^q) + b(\sigma^p \wedge \omega^q), \\ \omega^p \wedge (a\omega^q + b\sigma^q) &= a(\omega^p \wedge \omega^q) + b(\omega^p \wedge \sigma^q) \end{aligned}$$

を満たすから (a, b は定数), 上記の単項式に対して式 (121) を示せば十分である. すると外微分の定義より

$$\begin{aligned} d(\omega^p \wedge \omega^q) &= d\{f g (dq^{i_1} \wedge dq^{i_2} \wedge \cdots \wedge dq^{i_p}) \wedge (dq^{j_1} \wedge dq^{j_2} \wedge \cdots \wedge dq^{j_q})\} \\ &= \{(df)g + f(dg)\} \wedge (dq^{i_1} \wedge dq^{i_2} \wedge \cdots \wedge dq^{i_p}) \wedge (dq^{j_1} \wedge dq^{j_2} \wedge \cdots \wedge dq^{j_q}) \end{aligned}$$

であり, 最右辺において dg と $dq^{i_1}, \dots, dq^{i_p}$ の外積を次々と反交換してゆくと符号 $(-1)^p$ が出るので, 式 (121) が得られる.

付録 B Lie 微分

B.1 Lie 微分の概念的導入

B.1.1 積分曲線と 1 径数変換群 [16, pp.49–50]

多様体 M 上にベクトル場 w が与えられているとき、初期位置 $q(0) = Q_0$ からベクトル場 w に導かれて運動する動点の軌跡、すなわち

$$\frac{dq^i}{dt} = w^i(q) \quad (122)$$

の解 $q = c(t)$ が表す曲線を、 w の積分曲線 (解曲線) という (図 119 参照)^{*165}. [平たく言えば、積分曲線はベクトルを滑らかに繋いで得られる曲線であり、例えば流体の速度場の積分曲線は流線、電場の積分曲線は電気力線である.]

動点の初期位置 Q_0 を時間 t 後の位置 $Q_t = c(t)$ に対応付ける写像

$$\varphi_t : Q_0 \mapsto Q_t$$

の全体 $\{\varphi_t | t \in \mathbf{R}\}$ を相流ないし流れ (フロー) という.

$$\varphi_0 = \text{id. (恒等写像)},$$

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s,$$

$$\varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1}$$

より相流は群を成す. この群をベクトル場 w が定める 1 径数変換群という.

B.1.2 引き戻しと微分写像 [16, pp.50–51]

多様体 M 上の各点 Q (座標 q) を多様体 N 上の点 $P = \varphi(Q)$ (座標 p) に移す微分同相写像 ϕ を考える. さらに N 上の点 P を実数 $g(P)$ に対応付ける写像 g を定義する. これを

$$g(P) = g(\varphi(Q)) = g \circ \varphi(Q) \equiv (\varphi^* g)(Q) \quad (123)$$

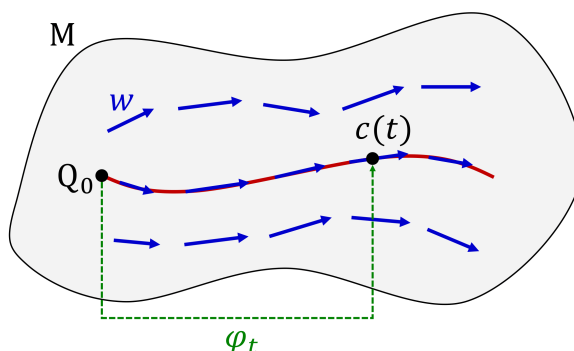


図 119 多様体上のベクトル場と積分曲線

^{*165} 式 (122) は、各点でのベクトル $w^i \partial_i$ が動点の速度 $\dot{q}^i \partial_i$ に一致する条件 $\dot{q}^i \partial_i = w^i \partial_i$ と等価である.

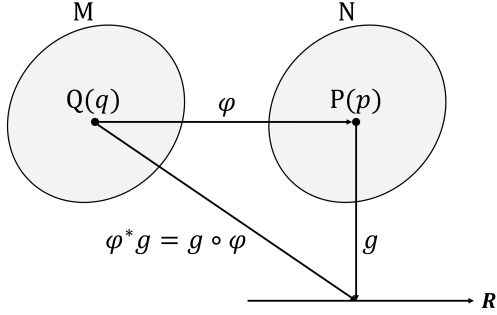


図 120 引き戻し

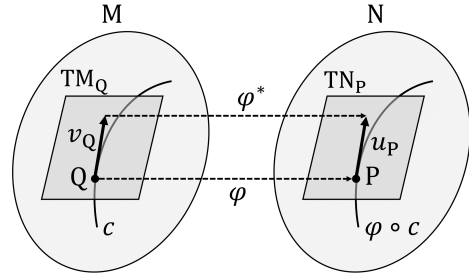


図 121 微分写像

と見ると, φ^*g は M において作用する関数となる. φ^*g を g の ϕ による M 上への引き戻し (pull back) という (図 120 参照).

M 上の曲線 $q = c(t)$ に沿う動点の運動は, 微分同相写像 φ を用いて, N 上の曲線 $p = (\varphi \circ c)(t)$ に沿う動点の運動に対応付けられる. すると M の点 Q における接ベクトル v_Q を, N の点 $P = \varphi(Q)$ における接ベクトル $u_P = (\varphi_*v)_P$ に移す写像を定義できる (図 121 参照). 一時的に添字 Q, P を省略すると, 局所座標表示では $v^j = \dot{q}^j$ に対して

$$v = \frac{d}{dt} = v^j \frac{\partial}{\partial q^j} = v^j \frac{\partial p^i}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial p^i}, \quad u = \frac{d}{dt} = u^i \frac{\partial}{\partial p^i}$$

であり, 2 式を比較すると

$$u^i = \frac{\partial p^i}{\partial q^j} v^j$$

となる. あるいは添字を復元して

$$u^i_P = \frac{\partial p^i}{\partial q^j} v^j_Q. \quad (124)$$

これは (反変) ベクトル成分の変換則となっており, 微分の変換 $dp^i = \frac{\partial p^i}{\partial q^j} dq^j$ と同じ変換則なので, 写像

$$\varphi_* : v_Q \mapsto u_P \quad (125)$$

を微分写像という.

note ここでは共変ベクトル $\partial/\partial q^i \rightarrow \partial/\partial p^i$ の変換則の下で, ベクトルの不変性 $v = u$ が成り立つことを要求して, $v^i \rightarrow u^i$ が反変ベクトル成分の変換則となることを導いたことになる. 同じことは直接,

$$u^i = \dot{p}^i = \frac{\partial p^i}{\partial q^j} \dot{q}^j = \frac{\partial p^i}{\partial q^j} v^j$$

としても示される. つまり $v^i = \dot{q}^i, u^i = \dot{p}^i$ は座標の微分だから, 反変ベクトル成分の変換則に従う. (このときベクトルの不変性 $u = v$ が保証される.)

B.1.3 Lie 微分 [16, pp.53–55]

多様体上のベクトル場 v に対して, Q を始点とする積分曲線を $\varphi_t(Q) = c(t)$ と書こう (B.1.1 項参照). 多様体上の関数 f の積分曲線に沿う変化率は, 点 $Q = c(0)$ において

$$\mathcal{L}_v(f) \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c(t)) - f(c(0))}{t} = v_Q[f]$$

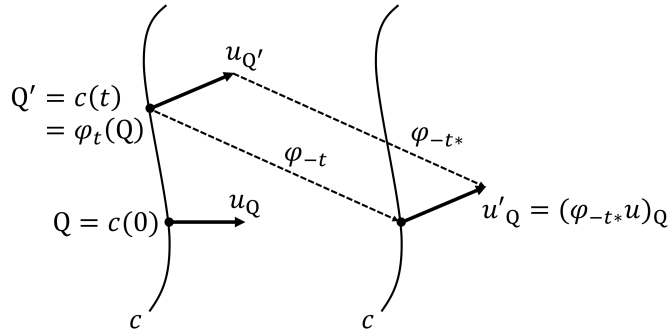


図 122 ベクトル場 u の Lie 微分

と表される．これを **Lie** (リー) 微分という．つまり関数の Lie 微分は，積分曲線に沿った方向微分に他ならない．

ベクトル場 u の Lie 微分も，積分曲線に沿う u の変化率

$$\mathcal{L}_v(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_{-t*}u - u}{t} \quad (126)$$

として定義できる．ここで第 1 項の $(\varphi_{-t*}u)_Q$ は，ベクトル場 u を積分曲線に沿って時間 t だけ逆向きにずらして得られるベクトル場 $u' = \varphi_{-t*}u$ の，点 Q での値である (φ_{-t*} は B.1.2 項の式 (125) の微分写像)．これは時間 t だけ進んだ点 $\varphi_t(Q) = Q'$ でのベクトル $u_{Q'}$ を，点 Q に移したベクトルに他ならない (図 122 参照)．このように式 (126) では，同一の点 Q でのベクトル u_Q, u'_Q を比較している．

注意 多様体上の異なる 2 点 Q, Q' のベクトル $u_Q, u_{Q'}$ の差は意味を持たない．と言うのも，一般に多様体の異なる 2 点でのベクトル成分は異なる変換係数 $(\partial \bar{q}^i / \partial q^j)$ を持つため，それらの和や差はベクトル成分とならないからである [16, p.30]．

ベクトル場の Lie 微分に対して，公式

$$\mathcal{L}_v(u) = vu - uv \quad (127)$$

が成り立つ．

公式 (127) の証明 ベクトル場 v の積分曲線上の 2 点 $Q = \{q^i\}, \varphi_t(Q) = Q' = \{q'^i\}$ に対して，

$$\begin{aligned} u_Q &= u^i(q) \partial_i, \\ u'_Q &= u^j(q') \partial_j' = u^j(q') \frac{\partial q^i}{\partial q'^j} \partial_i \equiv (\varphi_{-t*}u)_Q \end{aligned}$$

なので，

$$\mathcal{L}_v(u)_Q = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left\{ u^j(q') \frac{\partial q^i}{\partial q'^j} - u^i(q) \right\} \partial_i.$$

ここで点 Q' を始点 Q の近くにとると，

$$q'^i = q^i + t v^i + O(t^2), \quad \therefore u^j(q') = u^j + t v^k \partial_k u^j + O(t^2), \quad \frac{\partial q^i}{\partial q'^j} = \delta^i_j - t \frac{\partial v^i}{\partial q'^j} + O(t^2) = \delta^i_j - t \partial_j v^i + O(t^2)$$

より

$$\begin{aligned} \left\{ u^j(q') \frac{\partial q^i}{\partial q'^j} - u^i(q) \right\} \partial_i &= \left\{ (u^j + tv^k \partial_k v^j) (\delta^i_j - t \partial_j v^i) - u^i \right\} \partial_i + O(t^2) \\ &= t \left\{ (v^k \partial_k u^i) - (u^k \partial_k v^i) \right\} \partial_i + O(t^2) \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v(u)_Q &= \left\{ (v^k \partial_k u^i) - (u^k \partial_k v^i) \right\} \partial_i \\ &= (v^k \partial_k)(u^i \partial_i) - (u^k \partial_k)(v^i \partial_i) \\ &= (vu - uv)_Q \end{aligned} \tag{128}$$

を得る．これをベクトル場の関係として書いたのが式 (127) である．

■Lie 括弧 [16, pp.55–56] 式 (127) の右辺

$$vu - uv \equiv [v, u]_L \tag{129}$$

をベクトル場 v, u の **Lie** 括弧ないし交換子という．これを用いて式 (127) は改めて

$$\mathcal{L}_v(u) = [v, u]_L$$

と書ける．

Lie 括弧は式 (128):

$$[v, u]_L = \{(vu^i) - (uv^i)\} \partial_i$$

のように書けるので, Lie 括弧 $[v, u]_L$ もまた各点で接ベクトルを与えるベクトル場である^{*166}．

B.2 Lie 微分の一般公式

以降では多様体の座標の成分をギリシャ文字でラベルする．一般に (k, l) テンソル $T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}$ の Lie 微分は, 公式

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} &= V^\lambda \partial_\lambda T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} \\ &\quad - (\partial_\lambda V^{\mu_1}) T^{\lambda \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} - (\partial_\lambda V^{\mu_2}) T^{\mu_1 \lambda \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} - \dots \\ &\quad + (\partial_{\nu_1} V^\lambda) T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_l} + (\partial_{\nu_2} V^\lambda) T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \lambda \dots \nu_l} + \dots \end{aligned} \tag{130}$$

に従って実行できる [1, p.39].

実際まず, スカラー場 S の Lie 微分は方向微分

$$\mathcal{L}_V S = V^\mu \partial_\mu S \tag{131}$$

に他ならない (B.1.3 項). またベクトル $V = V^\mu \partial_\mu$ に沿うベクトル $U = U^\mu \partial_\mu$ の Lie 微分は, B.1.3 項の式 (127), (128):

$$\mathcal{L}_V U = [V, U]_L \equiv VU - UV = \{V^\nu \partial_\nu U^\mu - U^\nu \partial_\nu V^\mu\} \partial_\mu$$

^{*166} しかも B.1.2 項のノートで指摘したように, 各点 Q での値について, ベクトル $u = u^i \partial_i, v = v^i \partial_i$ そのものは不変量なので, $\{\dots\}$ 内の因子 $(vu^i) - (uv^i)$ はベクトル成分の変換則に従う.

で与えられる．この式の第 μ 成分をとれば

$$\mathcal{L}_V U^\mu = V^\nu \partial_\nu U^\mu - U^\nu \partial_\nu V^\mu \equiv [V, U]^\mu_L \quad (132)$$

となる．これは確かに公式 (130) で $T^{\dots} = U^\mu$ とおいた結果に一致している．

一般のテンソルに対する公式 (130) は，テンソルの共変微分の公式と同様，Lie 微分に対して Leibniz ルール

$$\mathcal{L}_V(T^{\dots} S^{\dots}) = (\mathcal{L}_V T^{\dots}) S^{\dots} + T^{\dots} (\mathcal{L}_V S^{\dots})$$

が成り立つことを要求すると導ける．例えば共変ベクトル ω_μ の Lie 微分の公式を調べるには，反変ベクトル U^μ との縮約によって得られるスカラー $\omega_\mu U^\mu$ の Lie 微分を計算するのが有効である．すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V(\omega_\mu U^\mu) &= V^\nu \partial_\nu (\omega_\mu U^\mu) \quad (\because \text{式 (131)}) \\ &= V^\nu (\partial_\nu \omega_\mu) U^\mu + V^\nu \omega_\mu (\partial_\nu U^\mu) \end{aligned}$$

となる．他方，Leibniz ルールを適用すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V(\omega_\mu U^\mu) &= (\mathcal{L}_V \omega)_\mu U^\mu + \omega_\mu (\mathcal{L}_V U)^\mu \\ &= (\mathcal{L}_V \omega)_\mu U^\mu + \omega_\mu V^\nu \partial_\nu U^\mu - \omega_\mu U^\nu \partial_\nu V^\mu \quad (\because \text{式 (132)}) \end{aligned}$$

と計算できる．これらを等置すると

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_V \omega)_\mu U^\mu &= V^\nu (\partial_\nu \omega_\mu) U^\mu + \cancel{V^\nu \omega_\mu (\partial_\nu U^\mu)} - \cancel{\omega_\mu V^\nu \partial_\nu U^\mu} + \omega_\mu U^\nu \partial_\nu V^\mu \\ &= (V^\nu \partial_\nu \omega_\mu + \omega_\nu \partial_\mu V^\nu) U^\mu \end{aligned}$$

を得る．これが任意の U^μ に対して成り立つことを要求すると，共変ベクトル ω_μ の Lie 微分の公式

$$\mathcal{L}_V \omega_\mu = V^\nu \partial_\nu \omega_\mu + \omega_\nu \partial_\mu V^\nu \quad (133)$$

が導かれる．同様の手続きで， (k, l) テンソル $T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}$ の Lie 微分の公式 (130) も導ける [26, p.137].

確認 (k, l) テンソル $T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}$ を共変ベクトルたち $A_{\mu_1}, B_{\mu_2}, \dots, C_{\mu_k}$ および反変ベクトルたち $X^{\nu_1}, Y^{\nu_2}, \dots, Z^{\nu_l}$ と縮約して得られるスカラーの Lie 微分を考える．すると

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_V(A_{\mu_1} B_{\mu_2} \dots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \dots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}) \\ &= V^\lambda \partial_\lambda (A_{\mu_1} B_{\mu_2} \dots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \dots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}) \quad (\because \text{式 (131)}) \\ &= A_{\mu_1} B_{\mu_2} \dots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \dots Z^{\nu_l} (V^\lambda \partial_\lambda T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}) \\ &\quad + (V^\lambda \partial_\lambda A_{\mu_1}) B_{\mu_2} \dots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \dots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + A_{\mu_1} B_{\mu_2} \dots (V^\lambda \partial_\lambda C_{\mu_k}) X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \dots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} \\ &\quad + A_{\mu_1} B_{\mu_2} \dots C_{\mu_k} (V^\lambda \partial_\lambda X^{\nu_1}) Y^{\nu_2} \dots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + A_{\mu_1} B_{\mu_2} \dots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \dots (V^\lambda \partial_\lambda Z^{\nu_l}) T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} \end{aligned}$$

となる．他方，Leibniz ルールを適用すると

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_V(A_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots C_{\mu_k}X^{\nu_1}Y^{\nu_2}\cdots Z^{\nu_l}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}) \\
&= A_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots C_{\mu_k}X^{\nu_1}Y^{\nu_2}\cdots Z^{\nu_l}(\mathcal{L}_VT^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}) \\
&\quad + (V^\lambda\partial_\lambda A_{\mu_1} + A_\lambda\partial_{\mu_1}V^\lambda)B_{\mu_2}\cdots C_{\mu_k}X^{\nu_1}Y^{\nu_2}\cdots Z^{\nu_l}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + A_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots (V^\lambda\partial_\lambda C_{\mu_k} + C_\lambda\partial_{\mu_k}V^\lambda)X^{\nu_1}Y^{\nu_2}\cdots Z^{\nu_l}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} \\
&\quad + A_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots C_{\mu_k}(V^\lambda\partial_\lambda X^{\nu_1} - X^\lambda\partial_\lambda V^{\nu_1})Y^{\nu_2}\cdots Z^{\nu_l}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} \\
&\quad \cdots \\
&\quad + A_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots C_{\mu_k}X^{\nu_1}Y^{\nu_2}\cdots (V^\lambda\partial_\lambda Z^{\nu_l} - Z^\lambda\partial_\lambda V^{\nu_l})T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}
\end{aligned}$$

と計算できる (式 (132), 式 (133) を用いた)．これらを等置し，相殺する項を省いて整理すると

$$\begin{aligned}
& A_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots C_{\mu_k}X^{\nu_1}Y^{\nu_2}\cdots Z^{\nu_l}(\mathcal{L}_VT^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}) \\
&= A_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots C_{\mu_k}X^{\nu_1}Y^{\nu_2}\cdots Z^{\nu_l}(V^\lambda\partial_\lambda T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}) \\
&\quad - (A_\lambda\partial_{\mu_1}V^\lambda)B_{\mu_2}\cdots C_{\mu_k}X^{\nu_1}Y^{\nu_2}\cdots Z^{\nu_l}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} \quad [\lambda \leftrightarrow \mu_1] \\
&\quad - \cdots \\
&\quad - A_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots (C_\lambda\partial_{\mu_k}V^\lambda)X^{\nu_1}Y^{\nu_2}\cdots Z^{\nu_l}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} \quad [\lambda \leftrightarrow \mu_k] \\
&\quad + A_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots C_{\mu_k}(X^\lambda\partial_\lambda V^{\nu_1})Y^{\nu_2}\cdots Z^{\nu_l}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} \quad [\lambda \leftrightarrow \nu_1] \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + A_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots C_{\mu_k}X^{\nu_1}Y^{\nu_2}\cdots (Z^\lambda\partial_\lambda V^{\nu_l})T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} \quad [\lambda \leftrightarrow \nu_l]
\end{aligned}$$

を得る．ここで右辺の各行に $[\cdots]$ で書き添えたダミー添字の入れ替え $\lambda \leftrightarrow \mu_1, \text{etc.}$ を施すと，右辺の各項を積 $A_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots C_{\mu_k}X^{\nu_1}Y^{\nu_2}\cdots Z^{\nu_l}$ に比例する形に書き換えられる．この等式が任意の $A_{\mu_1}, B_{\mu_2}, \cdots, C_{\mu_k}, X^{\nu_1}, Y^{\nu_2}, \cdots, Z^{\nu_l}$ に対して成り立つことを要求すると，式 (130):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_VT^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} &= V^\lambda\partial_\lambda T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} \\
&\quad - (\partial_\lambda V^{\mu_1})T^{\lambda\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} - \cdots - (\partial_\lambda V^{\mu_k})T^{\mu_1\mu_2\cdots\lambda}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} \\
&\quad + (\partial_{\nu_1}V^\lambda)T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\lambda\nu_2\cdots\nu_l} + \cdots + (\partial_{\nu_l}V^\lambda)T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\lambda}
\end{aligned}$$

が導かれる．

なお，公式 (130) は共変性が明白な形

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_VT^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} &= V^\lambda D_\lambda T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} \\
&\quad - (D_\lambda V^{\mu_1})T^{\lambda\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} - \cdots - (D_\lambda V^{\mu_k})T^{\mu_1\mu_2\cdots\lambda}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} \\
&\quad + (D_{\nu_1}V^\lambda)T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\lambda\nu_2\cdots\nu_l} + \cdots + (D_{\nu_l}V^\lambda)T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\lambda}
\end{aligned} \tag{134}$$

に書き換えられる (D_μ は共変微分) [26, pp.137–138].

理由 共変微分の公式

$$\begin{aligned}
D_\lambda T^{\mu_1\cdots\mu_k}_{\nu_1\cdots\nu_l} &= \partial_\lambda T^{\mu_1\cdots\mu_k}_{\nu_1\cdots\nu_l} + \Gamma^{\mu_1}_{\lambda\sigma} T^{\sigma\cdots\mu_k}_{\nu_1\cdots\nu_l} + \cdots + \Gamma^{\mu_k}_{\lambda\sigma} T^{\mu_1\cdots\sigma}_{\nu_1\cdots\nu_l} \\
&\quad - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu_1} T^{\mu_1\cdots\mu_k}_{\sigma\cdots\nu_l} - \cdots - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu_l} T^{\mu_1\cdots\mu_k}_{\nu_1\cdots\sigma}
\end{aligned}$$

を思い出すと、式 (130) 右辺を上式 (134) に置き換えた際に現れる付加的な項は

$$\begin{aligned}
& V^\lambda (\Gamma^{\mu_1}_{\lambda\sigma} T^{\sigma\cdots\mu_k}_{\nu_1\cdots\nu_l} + \cdots + \Gamma^{\mu_k}_{\lambda\sigma} T^{\mu_1\cdots\sigma}_{\nu_1\cdots\nu_l} \\
& - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu_1} T^{\mu_1\cdots\mu_k}_{\sigma\cdots\nu_l} - \cdots - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu_l} T^{\mu_1\cdots\mu_k}_{\nu_1\cdots\sigma}) \\
& - (\Gamma^{\mu_1}_{\lambda\sigma} V^\sigma) T^{\lambda\cdots\mu_k}_{\nu_1\cdots\nu_l} - \cdots - (\Gamma^{\mu_k}_{\lambda\sigma} V^\sigma) T^{\mu_1\cdots\lambda}_{\nu_1\cdots\nu_l} \\
& + (\Gamma^{\lambda}_{\nu_1\sigma} V^\sigma) T^{\mu_1\cdots\mu_k}_{\lambda\cdots\nu_l} + \cdots + (\Gamma^{\lambda}_{\nu_l\sigma} V^\sigma) T^{\mu_1\cdots\mu_k}_{\nu_1\cdots\lambda} = 0
\end{aligned}$$

となって、正確に打ち消し合うことが見て取れる。

テンソルの単なる微分は一般にテンソルではないが、テンソルの共変微分はテンソルだから、式 (134) は両辺が同種のテンソルであり、座標変換に対して共変的となる。

■共変微分と Lie 微分の違い 一連の公式の基本となるベクトルの微分に関して言えば、異なる点でのベクトルを比較する際に共変微分では接続で定義されるベクトルの平行移動を利用するのに対し、Lie 微分では微分写像を用いること (B.1.3 項) が、定義の違いに繋がっていると考えられる。

共変導関数は、曲率の概念を座標系に依存しない方法で規定するために決定的に重要であった。Lie 導関数だけを利用しても、そのような概念の抽出は行えない [1, p.39].

付録 C Regge 計算法

4.3 節で紹介されている Regge 計算法について、C.1 節では Regge による原論文『General Relativity without Coordinates』を訳出する。数学の色が強く、とりわけ C.1.3 項はある程度読み飛ばしても差し支えあるまい。差し当たり主に C.1.5 項の前半における Riemann 曲率の表式 (137)、および C.1.7 項の Regge 作用がきめ細かい骨格空間に対して Einstein–Hilbert 作用に収束することの理解を優先的な目標とすると良い。続く C.2 節で原論文の補足を行う。

C.1 『座標を用いない一般相対性理論』

要約 本稿では Riemann 多様体の理論への、座標の利用を避けるアプローチを展開する。曲がった空間は多面体の高次元の類似物で近似される。この措置の利点の中で、Wheeler のワームホールのようなトポロジーの特徴の本質や、より深い幾何学的な洞察を、単純化されたモデルに集約する可能性を挙げることができる。

C.1.1 多面体

本節ではまず 2 次元の多様体 (面) という簡単な場合に対して、我々のアプローチを説明する。ALEKSANDROV^{*167}に従って多面体上の内部曲率の理論を展開する。一般的な面はこのとき、面の数が次第に増す適切な一連の多面体の極限と考えられる。極限の厳密な定義ここでは与えない、何故ならそれは全ての多面体の集合上のトポロジーの取り扱いを必要とし、このため我々は大幅に脱線するからである。しかしながら、あらゆる面が適切な多面体によって望むだけ正確に任意に近似されることは、期待されることである。描像の細部を見ると近似は悪いものの、大局的な詳細のみを調べる観測者は、それがかなり満足いくと分かるだろう。測地的な三角形による曲率の実験を行うことで、あらゆる面上で積分 Gauss 曲率 (integral Gaussian curvature) を定義できる。

t をそのような三角形の 1 つとし、 α, β, γ をその内角とする。三角形内部の幾何学が Euclid 的でなければ、一般に $\alpha + \beta + \gamma \neq \pi$ を得る。 t の Gauss 積分曲率 ε_t はこのとき $\varepsilon_t = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ で定義される。球面上では $\varepsilon_t = A_t/R^2$ であり、ここに R は球面の半径、また A_t は t の面積である。もし t が点 P に縮み、また極限 $\lim_{A \rightarrow 0} \varepsilon_t/A_t = K(P)$ が存在して特定の極限操作に依存しないならば、 $K(P)$ を P における局所 Gauss 曲率 (local Gaussian curvature) の定義に採る。球面上では明らかに $K(P) = 1/R^2$ 。 $\varepsilon_t = \int_t K(P) dA$ であることはよく知られており、ここに dA は面の面積要素であり、また積分は t の内部で実行される。しかしながら積分曲率は非常に広い条件下で存在するのに対し、局所曲率は通常の関数としては全く存在せず、むしろ測度 (measure) として存在するに過ぎないかもしれないことを明確にしておこう。

この最後の論点は多面体 M の曲率を定義する際に重要である。 t 全体が M の面上に横たわっていれば、 $\varepsilon_t = 0$ を得ることは明らかである。同じ結論は t が M のどの頂点も含まない場合にも成り立つ [C.2 節を参照]。したがって P が頂点でなければ $K(P) = 0$ である。

もし t が頂点、例えば V を含み、他の頂点を含まなければ、それは t のあからさまな形に依らず、 V の特定

^{*167} P. S. ALEKSANDROV: *Topologia combinatoria* (Torino, 1957).

の選択にのみ依存する．言い換えると $\varepsilon_t = \varepsilon_V$ は V の特有の定数 (V の欠損量 [欠損角 (式 (4.21))]) である． ε_V は以下のように見出される．頂点 V を持つ M の面の全ての内角の和をとろう．この和は $2\pi - \varepsilon_V$ に等しい．もし複数の頂点 $V, X, \text{etc.}$, が t の内部にあるならば, $\varepsilon_t = \varepsilon_V + \varepsilon_X + \varepsilon_Y + \text{etc.}$ を得る．

頂点を台 (supports) に持つ Dirac タイプの分布として $K(P)$ を理解すれば, これら全ての結果はもとの公式 $\varepsilon_t = \int_t K(P) dA$ に集約できる． $f(P)$ を連続関数として, 積分 $\int_M f(P) K(P) dA$ はこのとき $\sum_n f(V_n) \varepsilon_n$ と計算され, ここに ε_n は V_n の欠損量であり, また和は M の全ての頂点にわたって実行される．

もし M がコンパクトな (すなわち有限で閉じている) 多面体ならば, Gauss-Bonnet の積分曲率定理は

$$\sum_n \varepsilon_n = 2\pi(2 - N)$$

と書くことができ, N はここでは M の種数 (genus) であり, 球面に対して $N = 0$, トーラスに対して $N = 2$ である． M の全ての面を三角形と仮定しても一般性を失わない．

この形式の下で, この定理と種数に対する Euler の公式の関連は最も明白になる．実際 σ_{fn} を面 f の頂点 n における内角とする．

$$\sum_f \sigma_{fn} = 2\pi - \varepsilon_n$$

が得られ, ここに和は V_n を頂点に持つ全ての面 f にわたって実行する． $\sum_n \sigma_{fn} = \pi$ もまた明白であり, 和はここでは面 f に属する全ての頂点にわたって実行する．[面 f を三角形と仮定したことを思い出そう．] 和 $\sum_{fn} \sigma_{fn}$ は今や, 最初に面に関して和をとり Gauss-Bonnet の定理を用いるか, 最初に頂点に関して和をとることにより, 2つの異なる方法で実行できる．1つ目の方法で

$$\sum_{fn} \sigma_{fn} = 2\pi v - 2\pi(2 - N)$$

を得る [$\sum_n 1 = v$ はすぐ後にある頂点数]．2つ目の方法で

$$\sum_{fn} \sigma_{fn} = \sum_f \pi = \pi f$$

が得られ, ここに v, e, f はそれぞれ M の頂点, 辺, 面の数である． M の全ての面は三角形なので $2e = 3f$ である [C.2 で確認]．したがって [2 式を等置した] 式 $2v - 2(2 - N) = f$ は単に Euler の公式 $v - e + f = 2 - N$ である [以上はその (三角形分割の文脈に限定した) 導出に相当する]．

この例は多面体上の曲率の取り扱いがいかに基本的であることを示している．

我々は主に多様体の内部幾何学に興味があるので, M の辺たちには特に興味がなく, それらをむしろ M を三角形に分割するための些細な慣習であり, 他のあらゆる慣習も同じく優れていると見なす．

隣接行列 (connection matrix) と全ての辺の長さで M の内部幾何学が完全に定まることに注意するのは面白い．隣接行列は本質的に M の全ての面, 辺および頂点のリストであり, またそれらの相互関係のリストである, すなわち隣接行列を読めば, どの頂点と辺が与えられた面に属しているか, 等々が判断できる．隣接行列は M の構成に必要な全てのトポロジカルな情報を供する．

一度 M 上の単体のネット (simplectic net ; 平たく言えば M の三角形への分割) を構成すれば, M の全ての辺の長さに関する知識は全ての角度 σ_{fn} , したがって欠損量 ε_n の知識を意味する．

単体のネットの概念はしたがって座標のネットの概念に取って代わる．他方で計量テンソルは辺の長さで置き換えられる．

M の頂点, 面, 等々の数が増加すれば, 局所 Gauss 曲率は連続関数 $K(P) = \varrho\varepsilon$ で近似され, ここに ϱ は頂点の密度, また ε は頂点の欠損量であり, この積が試験三角形 t の中でゆっくり変化することが前提となる [C.2 節で補足].

多面体の高次元の類似物を扱う際には, 測地的な三角形はもはや曲率を調べる上で便利ではない. 我々はそれを Levi-Civita の平行移動 (Levi-Civita's parallel transportation ; 簡単に LCT) で置き換える. M を P と Q の点とする. 弧 a は P を Q に繋ぐとする. LCT はこのとき P におけるベクトル空間 S_p と Q におけるベクトル空間 S_q の間の直交写像である. 特に $P = Q$ であって a がループならば, LCT は S_p をそれ自身に写像する. この写像は a に依存する何らかの角度 $\varepsilon(a)$ の, P 周りの S の回転である. 点検により $\varepsilon(a) = \int_a K(P)dA$, したがって $\varepsilon(t) = \varepsilon_t$ であることを確認できる. [ループに沿う平行移動に伴いベクトルが欠損角だけ回転することは, 4.3 節の図 44 の箇所で説明されている.] ε は明らかにループの加法的な関数である. つまり同じ端点 P を持つ 2 つのループ a, b をとる. その《積》 ab の周りに LCT を実行しよう, ただし ab はループ a と b を端点と端点でくっつけて得られるループとする. 我々は $\varepsilon(ab) = \varepsilon(a) + \varepsilon(b)$ を得る. 多面体 M 上で頂点がループ上に位置する場合は考えない, 何故なら LCT を曖昧さなく定義できないからである.

もし P を固定したまま上記の例外的な状況に遭遇することなくループ a がループ b へと連続的に変形できるならば $\varepsilon(a) = \varepsilon(b)$ であり, 我々は $a = b$ と書く. 以下では M の全ての頂点の集合を w で表すと, $a \approx b$ は単に $M - w$ におけるホモトピーであって, 同値関係である. ホモトピーのより一般的で厳密な定義は後で与える. 差し当たり曲率の集合 w の存在は, 与えられた端点 P を持つループの集合における同値類の存在を帰結することを理解することが重要である.

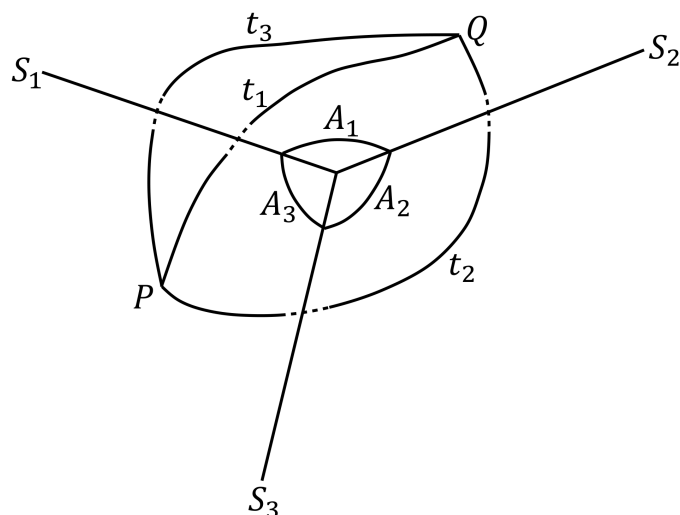


図 123 [原論文の Fig. 1. 本来, C.1.4 項の式 (135) の段落から参照されねばならない.]

C.1.2 ε -錐面

ここで 1 つだけの頂点を持つ多面体 M を考えよう. M を 1 枚のシートから成る錐面 (cone) またはピラミッドとして視覚化できる. M を特徴付ける単純な数学的方法がある. すなわち計量が $ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\theta^2$ で与えられるように平面極座標 ϱ と θ を採る. Euclid 的な平面では同じ ϱ と 2π の倍数だけ異なる近点角

(anomalies) θ を持つ 2 点は同一であると理解される. 2π を $2\pi - \varepsilon$ で置き換えることで, 同じ錐面の内部幾何学を持つ多様体を得る.

原点はこのとき欠損量 ε を持つ頂点である. この多様体——これ以降, ε -錐面 (ε -cone) と名付ける——は頂点を例外として, いたるところ Euclid 的である.

これらのアイデアは直ちに 3 (またはより高い) 次元空間に拡張できる. R を変数 z の実軸とし, 直積 $R \times \varepsilon$ -錐面を以下のように計量付ける (metrize):

$$ds^2 = dz^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2.$$

この空間は直線 $\rho = 0$ を例外として Euclid 的である. 我々はそれを ε -3-錐面と名付ける. もし積 $R^{n-2} \times \varepsilon$ -錐面が計量:

$$ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \cdots + dz_{n-2}^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2.$$

の下で考えられるならば, ε - n -錐面を得る. この多様体は $n-2$ 次元の平坦な部分集合 $\rho = 0$ を例外として Euclid 的である.

ε - n -錐面は我々の構造の建築用石材 (building stone) である. ε -2-錐面は前に定義した ε -錐面である. もし次元 n が別様に分かっていたら, それを表記から落とす.

C.1.3 基本的な群

ここで Riemann の n 次元多様体 M_n における経路をとる. $P(0), P(1)$ を経路の端点として, 点を値にとるパラメータ $s, 0 \leq s \leq 1$ の連続関数 $P(s)$ として経路 p を定義する. もし $P(0) = P(1) = P$ ならば経路はループと呼ばれる. $s'(s)$ は減少せず連続であり $s(0) = 0, s(1) = 1$ とするとき, ループ $P(s)$ と $P(s'(s))$ を同一と見なす. もし $A(1) = B(0)$ なる関数 $A(s), B(s)$ で定義される 2 つの経路 a, b があれば, 積 $c = ab$ は関数 $C(s) = A(2s)$ ($s \leq 0.5$ のとき), $C(s) = B(2s-1)$ ($s \geq 0.5$ のとき) で定義される. 積 $c = ab$ は $A(1) = B(0)$ を経て $A(0)$ を $B(1)$ に繋ぐ. この積は結合的 (associative) であるものの一般には可換でない. もし a, b が同じ端点 P を持つループならば, ab と ba はともに存在し端点 P を持つループである. 一般には, しかしながら, $ab \neq ba$. a の逆 a^{-1} は $A(1-s)$ で定義される. 後で詳しく説明することになる, 曲率を担う閉じた部分集合 w を除き, ここで我々の多様体はほとんどいたるところ Euclid 的であると仮定する. 同じ端点を持つ, $A(s)$ と $B(s)$ で定義される 2 つの経路 a, b をとる. 我々は常に $B(s) \notin w, A(s) \notin w$ を仮定する. もし s と t の両方において連続であり, $P(s, 0) = A(s), P(s, 1) = B(s)$ となる, 点を値にとる $s, 0 \leq s \leq 1$ と $t, 0 \leq t \leq 1$ の関数 $P(s, t)$ があれば, a を b に変形したと言い, 関数 $P(s, t)$ を変形 (deformation) と呼ぶ. もし与えられた a, b に対して, 全ての s, t に対し $P(s, t) \notin w$ なる変形を見出せるならば, $a \sim b$ と書く. 記号 $\sim$ は同値 (ホモトピー) の通常の性質を満たす. 実際 $a \sim a$ である, 何故ならそのような変形の 1 つが $P(s, t) = A(s)$ で与えられるからである. もし $a \sim b$ ならば $P(s, 1-t)$ は b を a に変形し, また $P(s, 1-t) \notin w$ であり, $a \sim b$ [正しくは $b \sim a$ と推察される] が帰結する. 同様にもし $P(s, t)$ が a を b に変形し $Q(s, t)$ が b を c に変形し, したがって $a \sim b, b \sim c$ ならば, 関数 $R(s, t) = P(s, 2t)$ ($t < 0.5$ のとき) および $R(s, t) = Q(s, 2t-1)$ ($t > 0.5$ のとき) は a を c に変形し, また $R(s, t) \notin w$ であって, $a \sim c$. ループがそのような変形の最中にも残る, あるいは全ての t に対して $P(0, t) = P(1, t)$ という付加的な要求の下で, これらの定義はループにも適用される. [これは t を固定して得られる変形途中の経路 $P(s, t = \text{const})$ が, 両端 $s = 0, 1$ で閉じてループを成す条件に他ならない.] もしさらに $P(0, t) = P(1, t) = P(0, 0) = P$ ならば, $a \approx b$ と書く. 明らかに $a \approx b$ は $a \sim b$ を意味するものの逆は真ではない. 記号 $\approx$ はループにのみ適用される.

記号 $\approx$ は同値 ($M_n - w$ におけるホモトピー) もまた定義する. 証明は自明である. もし $a \sim b$ だけが分かっているならば, 一般に関数 $C(s) = P(0, s) = P(1, s)$ はループ c を定義する, 何故なら $P(0, 0) = P(0, 1) = P$. 全く驚いたことに $b \approx c^{-1}ac$ を得る. この関係は

$$\begin{aligned} S(s, t) &= C(1 - 3ts) & s < \frac{1}{3}, \\ &= P(3s - 1, 1 - t) & \frac{1}{3} < s < \frac{2}{3}, \\ &= C(1 + 3(s - 1)t) & \frac{2}{3} < s < 1 \end{aligned}$$

で定義される変形 $S(s, t)$ から確認できる. 次に関数 $U(s) = P = \text{const}$ を通じて点 P における単位のループ u を定義する. 明らかに $aa^{-1} \approx u$. ここで $a \approx a'$ および $b \approx b'$ と仮定する. $P(s, t)$ は a を a' に変形し, $Q(s, t)$ は b を b' に変形するとする. 関数 $R(s, t) = P(2s, t)$, ($s < 0.5$) および $R(s, t) = Q(2s - 1)$, ($s > 0.5$) はこのとき $R(0, t) = R(1, t) = p$ の ab の $a'b'$ への変形であり $R(s, t) \notin w$. したがって $a \approx a'$ と $b \approx b'$ から $ab \approx a'b'$ が帰結する.

ここで端点 P を持つループの集合をとる. この集合は同値類に分割できる. 類はそれに属する 1 つの要素で特定でき, 以降特に断らない限り, 類全体をラベルするのにループを用いる. もし a と b が類ならば, $a \approx a'$ および $b \approx b'$ として全ての積 $a'b'$ はホモトピックであり新しい類に属し, それを類 a と b の積として定義し ab と書く. さらにもし a が類であり u が単位の類ならば, $au = a = ua$.

あらゆる類 a に逆の類 a^{-1} を関係付けることができ, $aa^{-1} = a^{-1}a = u$. 類の積は結合的である. したがって全ての類の集合は群, 基本的な群の公理を満たすことが分かる. ここで各ループ a に, 以下のように直交行列 $S(a)$ を関係付けられる. P においてベクトル $\mathbf{A}$ をとり, LCT に従って a 周りに $\mathbf{A}$ を移動させる. $\mathbf{A}$ の初めと終わりの配位 (position) の間には, 線形でノルムを保つ写像があるだろう. したがってもし P において局所的な直交基準系を選べば, この写像は直交行列で表せる. もちろん, 応用において我々が要請するように, もし我々の空間が局所的に擬 Euclid 的ならば Lorentz 行列を得る. ここで重要な点は, ホモトピックなループたちが同じ行列に対応すること, あるいは言い換えれば, 直交行列が類の関数であることである. このことはさらに写像の類の行列が, P のベクトル空間上の基本的な群の表現であることを意味する. このことを証明するためにまず, 全てのループ $\approx u$ は単位行列に対応することに注意する. もし $v \approx u$ ならば, v を u に移行させる変形関数 $T(s, t)$ がある. 全ての点の集合 $T(s, t)$ は単純連結な (simply connected) 面 Σ であり, Σ 上と Σ の適切な近傍において大域的に Euclid 的な基準系を選ぶことができ, この系で計算される v に沿う L - C 変換 [LCT] の結果は恒等変換である.

さらにもし $c = ab$ であって行列 $S(a), S(b), S(c)$ が a, b, c に対応するならば, $S(c) = S(b)S(a)$ を得ることは明らかである. すなわち P においてベクトル $\mathbf{V}$ をとり, それを a に沿って移動させる. 結果は定義により $S(a)\mathbf{V}$. 次にこのベクトルを b に沿って移動させる. $S(b)S(a)\mathbf{V}$ を得る. ところがその際に我々は $\mathbf{V}$ を c に沿って移動させており, したがって $S(c)\mathbf{V} = S(b)S(a)\mathbf{V}$ であって結論が従う. もしここで $a \approx a'$ ならば, $v \approx u$ として $a = va'$ が分かる. $S(a) = S(v)S(a')$ が帰結し, ただし $S(v) = 1$ かつ $S(a) = S(a')$. $S(a)$ における変数はこのとき同値類と理解される. 基本的な群は一般に無限に多くの要素を持つ. ε -錐面の例は教育的である. ε -錐面におけるループをとると, ループ上の点の角度 θ を s の関数として与えることができる. 一般性を失うことなく $\theta(0) = 0$ とする. $\theta(1) = N(2\pi - \varepsilon)$ が分かる. N は部分集合 w に一致する線 $\varrho = 0$ またはボーン (bone) の周りをループが回る回数を与える. 同じ N を持つループたちは明らかにホモトピックである. $a(N)$ を $\theta(1) = N(2\pi - \varepsilon)$ の同値類とする. $a(N)a(M) = a(N + M)$ を得る. 基本的な群はすると加法の下での整数の群と同型である. $S(a(n))$ ——簡単に $S(n)$ および $S(0) = S$ ——を見出すため

に, $S(N) = S^N$ に注意する. S はボーンの生成子と呼べる. ここで P におけるベクトル V をとり, それを $a(1)$ に沿って移動させる. V は直交する成分に分離でき, 一方は ε —2-錐面の内に, 他方は R^{n-2} の内にある. 後者は過程によって影響されないものの, 前者は角度 ε だけ回転する. 正味の効果は R^{n-2} を不変部分空間に持つ直交 $n \times n$ 行列のそれである. ε —3-錐面では, R^{n-2} は単に ε —2-錐面に垂直な実軸である. S は軸 $R^{n-2} = R$ を持つ回転である. この特別な基本的な群は Abel (abelian) であるものの, 一般には, このことは真ではない.

C.1.4 [無題]

ここで曲率が $n-2$ 次元の部分集合 w , 骨格 (skeleton [4.3 節のヒンジ]) に担われる, 多面体の n 次元的な一般化, 簡単に骨格空間を定義する. そのような構造の 1 つは ε — n -錐面である.

n 次元の空間 M_n の単体分解 (symplectic decomposition) から始める. この分解は M_n のトポロジーを定めるものの, 計量を定めない. M_n における計量を以下の公理で定義する.

- A) あらゆる n 次元の閉じた単体 T_n の内部における計量は Euclid 的である. このことは T_n 内部のあらゆる 2 点の距離を計算し, T_n 上で座標の Descartes 系を定義し, この系において T_n の境界の点の座標を与えることができることを意味する.
- B) T_n の計量において T_n の境界は $n+1$ 個の閉じた単体 T_{n-1} に分解でき, これらの単体は平坦である.
- C) もし単体 T_{n-1} が T_n と $T'_{n'}$ の共通の境界ならば, T_{n-1} のあらゆる 2 点の距離は T_n と $T'_{n'}$ の両方の系で同じである.
- D) もし $P \in T_n$, $P' \in T'_{n'}$ であって P, P' が T_{n-1} に充分近ければ, 距離 PP' を全ての $Q \in T_{n-1}$ に対する $PQ + QP'$ の下限と定義する.

この定義の下で, 場合によっては T_{n-1} の境界 T_{n-2} たちの上を除き, 計量は T_{n-1} 上においても Euclid 的である. 我々の定義は厳密に局所的なスケールにのみ取り組んでいるものの, それは滑らかに隣接する単体を接合するのに必要な全てである. 不定 (indefinite) 計量を導入したければ, 同じ結果をもたらす, 同様ではあるがより複雑な定義を用いることができる. 我々の単体は今や全ての T_{n-2} 境界単体 (ボーン) の和集合の外側で, いたるところ Euclid 的である. M_3 ではボーンは真っすぐな線分であり, T_{n-3} は点である. 各ボーンは 2 つの T_0 たちを繋ぐ. もしボーンの長さが与えられれば, 単体と M_3 の幾何学的構造が定まり, とりわけその内部の 2 面角は球面三角法 (spherical trigonometry) の初等的な公式から計算できる. ボーンの上に曲率がなければ, ボーン周りの全ての 2 面角の和は 2π のはずである. ところが長さたちがランダムに選ばれれば, i 番目のボーンに対するこの和は $2\pi - \varepsilon_i$ となる. ここでそのようなボーンの横断面は局所的に ε_i —2-錐面であり, したがってボーンは局所的に ε_i —3-錐面であることが分かる. S_n [T_n の意味と推察される] では T_{n-2} が局所的に ε — n -錐面と同じ幾何学を担う. ここで M_3 における T_0 をとる. 一般にこの点は複数のボーン $T_1^1 \cdots T_1^m$ の共通の端点である. ボーンを T_0 から射出する正の向きを持つように向き付ける. このとき T_0 を向き付けされた m -ジョイントと呼ぶ.

m -ジョイントにおいて S_p を p 番目のボーンの生成子として, $S_p p : 1 \cdots m$ の間に著しい恒等式がある. それを見出すには, 全ての射出するボーンが無限遠に伸びる, 理想化された孤立したジョイントを扱えば良い. 次いでボーンの特定のサイクリックな順番, 例えば指標 p (0 [正しくは 1 か] が m に続く) で定義されるものを選ぶ, 特定の選び方は重要でない. 次いで連続する 2 つのボーン T^p, T^{p+1} を縁に持つ, 平面の扇形 (sectors) A_p の集合を考える. 2 つのそのような扇形は, 場合によっては共通する境界のボーンを除き, 共通の点を持たないと仮定する. これらの扇形はこのとき空間を 2 つの領域 M' と M'' に分断する. これらの領

域の1つ, 例えば M' に試験点 P を, また M'' に点 Q を選ぶ. ここで P を Q に繋ぎ, したがって M' と M'' の境界と交わる, m 本の経路 t_p をとる. t_p は A_p のみと1度だけ交わるとする. このとき $t_p t_{p-1}^{-1}$ は P を端点に持ち T_1^p の周りを1度回るループ a_p である. a_p は T_1^p の生成子として適当な候補である. しかしながら他のあらゆる $a'_p \sim a_p$ も同様に優れており, 我々の手続きはそのような a_p の1つを曖昧さなく選んだに過ぎないということを, 指摘せねばならない. このとき基本的な恒等式を得る:

$$\begin{cases} a_1 a_2 a_3 \cdots a_p \approx u, \\ \text{あるいは} \\ S_1 S_2 \cdots S_p = 1. \end{cases} \quad (135)$$

後半の恒等式はボーンの欠損量 ε_p とボーンの間角 (mutual angles) を拘束する. このことは $m = 3$ ならば明確に分かる. この場合:

$$S_1 S_2 S_3 = 1.$$

球面の三角形において辺が角度 $A_1 A_2 A_3$ の順ならば, 反対の内角は $\pi - \varepsilon_3, \pi - \varepsilon_2, \pi - \varepsilon_1$ であることを述べる Euler の定理の助けを借りて, この恒等式を視覚化できる. したがってもし欠損量が分かればボーンの間角が分かり, 逆も然り.

後で見るように, 我々の幾何学的アプローチにおいて (135) は微分可能 Riemann 多様体における Bianchi 恒等式の役割を演じる.

高次元空間における (135) の対応する一般化が存在する. より正確には各 T_{n-3} において, この T_{n-3} を境界に持つ全ての T_{n-2} ボーンの生成子を拘束している, 1つのそのような恒等式がある. これらの恒等式の全てが独立ではない, と言うのも与えられた T_{n-4} を境界に持つ全ての T_{n-3} に対して, そのうち1つを除いて恒等式を書けば充分であり, 除外した1つのは他の恒等式の帰結である. ある意味 T_{n-4} は Bianchi 恒等式の数減らすことで負の拘束として振舞う. 実際に Bianchi 恒等式の数はいくつであるのか, また特に T_{n-5} etc. がその決定にどのような役割を果たすのかを示すところまでは, 我々は調査を進めていない, 何故ならこの問題は M_4 では生じないからである.

C.1.5 微分可能多様体

骨格空間の微分可能多様体への翻訳は, ボーンの密度 ρ を増すと同時に $\rho\varepsilon$ がゆっくり変化するままにすれば実現できる. 我々は既にこの措置が面上でどのように機能するかを見た. ここでは $Mn, n > 2$ 上の類似の形式に進む. 始めるにあたり, M_3 の平行なボーンたちの束 (bundle) を扱おう. ボーンたちによって誘導される曲率は充分小さく, M_3 を近似的に Euclid 的と見なせると仮定する. U をボーンたちに平行な単位ベクトルとする. 面積 Σ と単位法線 n , $\Sigma = \Sigma n$ の小さなループの周りにベクトル A を移動させて, 曲率を調べる. 試行の後に A は U の周りに角度 $\sigma = N\varepsilon$ だけ回転することが認められ, ここに N はループに取り囲まるボーンの数である. $N = \rho(U, \Sigma)$ である, ループ $\Sigma = U$ を通過するボーンの数 [を数密度 ρ] として, 最終的な結果はすると:

$$A = \rho\varepsilon(U \wedge A)(U, \Sigma). \quad (136)$$

他方で標準的な教科書から

$$\begin{aligned} A_\mu &= R_{\mu, \alpha\beta}^\sigma \Sigma^{\alpha\beta} A_\sigma, \\ \Sigma^{\alpha\beta} &= \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \Sigma_\gamma, \\ \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} &= \pm 1 = -\varepsilon^{\beta\alpha\gamma}, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

が分かっている。これらの結果を比較すると、

$$R_{\mu\sigma\alpha\beta} = \varrho \varepsilon U_{\mu\sigma} U_{\alpha\beta}; \quad U_{\mu\sigma} = \varepsilon_{\mu\sigma\lambda} U^\lambda \quad (137)$$

を得る [C.2 で確認]。この近似は完全な Riemann テンソルの対称性の性質を全て有している。[入れ替え $\mu \leftrightarrow \sigma, \alpha \leftrightarrow \beta$ に関する反対称性と、 $(\mu, \sigma) \leftrightarrow (\alpha, \beta)$ に関する対称性を見て取れる。] もし複数の束があるならば、それらの効果はこの段階において単に加法的である。 M_n においてボーンは歪対称テンソル $U_{\mu\sigma}$, $U_{\mu\sigma} U^{\mu\sigma} = 2$, $U_{\mu\sigma} U_{\alpha\beta} + U_{\mu\alpha} U_{\beta\sigma} + U_{\mu\beta} U_{\sigma\alpha} = 0$ で決まる向きを持つ。[第2式は Riemann テンソルに対する Bianchi 恒等式を課して得られる。] 平行なボーンの束を扱うならば、ボーンに垂直な座標 x_1, x_2 と平行な座標 $x_3 \cdots x_n$ を選べる。この場合 $U_{12} = -U_{21} = 1$ であり、他の全ての成分は消える。 $\mu, \sigma, \alpha, \beta$ が全ての値 $1 \cdots n$ をとることを許容しても、式 (137) は依然として成り立つ。 n とは無関係にスカラー曲率 R は $2\varrho\varepsilon$ で与えられる。[以上を C.2 節で補足する。] ここで式 (135) とこの近似における Bianchi の恒等式の関係を示そう。もし ε たちが小さければ、(135) は

$$\sum_1^m \varepsilon_p U_{\mu\sigma}^p = 0 \quad \text{あるいは} \quad \sum_1^m \varepsilon_p U_{\mu\sigma}^p = 0; \quad M_3 \text{ における } m\text{-ジョイントに対して}$$

と書ける。次に密度 ϱ の同じ m -ジョイントの分布があると仮定する。このことは平行なボーンの m 本の束があることも意味しており、 p 番目のバンドルは欠損 ε_ν , 向き $\mathbf{U}^p$, 密度 ϱ_ν を持つとする。もちろん ϱ_ν を一定と考えることはできない、何故なら m -ジョイントは (向きに応じて) 他のボーンからの崩壊 (decay) や他のボーンへの生成 (creation) をもたらすからである。崩壊の割合 (rate) は ϱ に依存する。この割合は以下のよう評価できる。定義により ϱ_p は $\mathbf{U}_p$ に垂直な面 Σ を通って出るボーンの束の流束密度である。

Σ の位置は $\mathbf{U}_p$ の向きに沿って計算される横座標 (abscissa) s で決まるとする。 C を高さ ds と底面 $\Sigma(s)$ のシリンダーとする。 C 内の各ジョイントは $\Sigma(s + ds)$ を通過する ϱ_ν ボーンの流束を単位だけ増加させる。 C には $\Sigma \cdot \varrho \cdot ds$ 個のジョイントがあり、したがって

$$\Sigma[\varrho_\nu(s + ds) - \varrho_\nu(s)] = \Sigma \varrho(s) ds \quad \text{あるいは} \quad \frac{d\varrho_\nu}{ds} = \varrho$$

であり、

$$(\mathbf{U}_p \mathbf{grad} \varrho_\nu) = \varrho$$

が帰結する。

Riemann テンソルはこのとき式 (137) より

$$R_{\alpha\beta\lambda\delta} = \sum_p \varepsilon_p \varrho_\nu U_{\alpha\beta}^p U_{\lambda\delta}^p \quad (138)$$

で与えられる。

我々の近似では共変微分は通常の微分に帰着する。Bianchi の恒等式は

$$B_{\alpha\beta:\lambda\delta\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial x_\varepsilon} R_{\alpha\beta,\lambda\delta} + \frac{\partial}{\partial x_\lambda} R_{\alpha\beta,\delta\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial x_\delta} R_{\alpha\beta,\varepsilon\lambda} \quad (139)$$

と書ける。

(138) と (139) を導入し、 ε_p と $\mathbf{U}_p$ を定数として扱う。演算子の恒等式

$$U_{\lambda\delta} \frac{\partial}{\partial x_\varepsilon} + U_{\delta\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_\gamma} + U_{\varepsilon\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\delta} = (\mathbf{U}, \mathbf{grad}) \varepsilon_{\nu\lambda\delta}$$

を利用すると、結果は (135) の助けを借りて

$$B_{\alpha\beta:\lambda\delta\varepsilon} = \sum_p (U_p, \mathbf{grad}_{\varrho_p}) \varepsilon_p U_{\alpha\beta}^p \varepsilon_{\lambda\delta\varepsilon} = \varepsilon_{\lambda\delta\varepsilon} \varrho \sum_p \varepsilon_p U_{\alpha\beta}^p = 0$$

となる。(135) と Bianchi の恒等式の関係はこうして明白となる。

C.1.6 Lorentz 多様体

骨格空間の計量が正定値でなければ、直交行列を Lorentz 行列で置き換えねばならない。対応して欠損量は虚数になり得る。さらに単体の辺の間における通常の三角不等式は成り立たなくなり、例えば全ての辺が時間的である三角形では、1 辺が他の辺の和よりも大きくなる。一般に、しかしながら、要件を満たすために通常の三角法 (trigonometry) を修正する方法は明らかである。 M_4 では、ボーンは三角形であり [4.3 節]、またもし計量が 1 つの時間座標に関して不定 (indefinite) ならば、3 種類のボーンがある：

- 1) 空間的。ボーン上の全てのベクトルは空間的である。それ [欠損量] は虚数である。
- 2) ヌル。ボーン上の全てのベクトルはヌル・ベクトルとそれに直交する空間的ベクトルの線形結合である。この場合対応する Lorentz 行列は対角化できない。 $\varepsilon = 0$ が成り立つ。
- 3) 時間的。ボーン上に時間的および空間的ベクトルの両方がある。 ε は実である。

簡単のため我々は時間的なボーンのみ、あるいはせいぜいヌル・ボーンを考える。

以下で有用なパラメータはボーンの面積 L である。 A_μ, B_μ をボーンの 2 辺とする。 L を以下のように定義する：

$$4L^2 = (A_\mu B^\mu)^2 - (A_\mu A^\mu)(B_\mu B^\mu).$$

[これは 3 次元 Euclid 空間では正しい三角形の面積 L を与える.]

L はしたがって常に実の量である [(上式右辺) $\geq (A_\mu B^\mu)^2 \geq 0$]。ボーンが時間的なならば、 L は実であり我々は常に $L > 0$ を選ぶ。さらに我々は L の定義の曖昧さを避けるために時間的なボーンのみを考える。ボーンがヌルならば $L = 0$ である。

C.1.7 変分原理

Einstein の空間を骨格空間で近似する最も直接的な方法は、変分原理を用いることである。ラグランジアン [正確には作用] は明らかに骨格上で計算される

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi} \int R d^4x \sqrt{-g}$$

であって、このラグランジアンを全ての T_1 の長さに関して変分する。この選択は特に好ましい、何故ならこれらの長さが計量テンソルと同じ種類の情報をもたらすことを我々は知っているからである。さらにボーンの欠損量と面積を用いた、 $\mathcal{L}$ に対する簡単な表現がある。実際 T_4 と T_3 の内には積分への寄与がないことが分かっている、何故なら R は台 w を持つ分布だからである。 L はボーンの加法的な関数である。骨格のボーンを n でラベルする。すると $\mathcal{L} = \sum_n F(T_2^n)$ 。関数 F はもちろん全てのボーンに対して同じ関数である。ボーンは均一 (homogeneous) なので、 $F(T_2^n)$ はボーンの面積に比例し $F(T_2^n) = L_n f(\varepsilon_n)$ 、ここに f は ε_n のみに依存する。 T_2^n は $\varepsilon_n = \varepsilon'_n + \varepsilon''_n$ となる、同じ形と面積を持つ 2 つのボーン $T_2^{n'}$ と $T_2^{n''}$ の重合せと考えることができる。 $f(\varepsilon_n) = f(\varepsilon'_n) + f(\varepsilon''_n)$ が帰結する。最後の条件は $f(\varepsilon) = C\varepsilon$ を意味し、ここに C は定数

である [C.2 節で補足]. すると $\mathcal{L} = C \sum_n \varepsilon_n L_n$ と書ける. この結果は C.1.5 節で論じた極限において, また等しい面積を持つ同一のボーン束に対して, $\mathcal{L} = (1/8\pi) \int \varepsilon_0 d^4x$ と比較せねばならない. 比較により $C = 1/8\pi$ と $\mathcal{L} = (1/8\pi) \sum_n \varepsilon_n L_n$ を得る [C.2 節で補足]. M_m において対応する結果は $\mathcal{L} = C \sum_n \varepsilon_n L_n^m$ であり, ここに L_n^m は T_{m-2}^m の $m-2$ 次元の測度 (measure) である.

さて次の課題は T_1^p の長さ l_p に関する $\mathcal{L}$ の変分である. L_n がどのように l_p に依存するかは明瞭である一方で, ε_n の l_p 依存性はかなり込み入っている. ところが極めて著しいことに, あたかも ε_n が定数であるかのように $\mathcal{L}$ の変分を実行できる:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} \sum_n \varepsilon_n \delta L_n.$$

(証明は付録 [C.1.8 項] を見よ; 結果はあらゆる次元で成り立つ.)

M_3 では測度 L_p^3 は単に T_1^p の長さ l_p であり, それらは全て独立であって, 場の方程式はこのとき単に $\varepsilon_n = 0$, すなわち全ての 3 次元的な Einstein 骨格は期待されるように平坦である [3.5 節と 4.3 節も見よ].

M_4 では場の方程式は代わりに:

$$\sum_n \varepsilon_n \frac{\partial L_n}{\partial l_p} = 0.$$

和はここでは l_p が L_n の辺となるような全ての n に拡張される. すると

$$\frac{\partial L_n}{\partial l_p} = l_p \operatorname{ctg} \theta_{pn}$$

が得られ, θ_{pn} は T_2^n における l_p に向かい合う角である. 最終的に:

$$\sum_n \varepsilon_n \operatorname{ctg} \theta_{pn} = 0 \quad (140)$$

が空っぽの骨格空間に対する Einstein 方程式である. それは C.1.5 節の方法で, 微分可能多様体に対する $R_{\mu\nu} = 0$ に帰着することを証明できる.

M_4 がコンパクト多様体であり, また分割における単体の数が有限, 例えば $1 \leq p \leq P$ ならば, P 個の変数 l_p に関する P 個の方程式 (140) を得る. 1 つのそのような変数はしかしながら思い通りに固定できる, 何故ならもし l_p が (140) の解ならば λl_p もまた解だからである. 言い換えると (140) は l_p 立ちに関する P 個の斉次方程式の組であって, 自明な $l_p = 0$ を除けば一般に (140) の解はないはずである. しかしながら 1 つまたはより多くの (140) がそれ以外と独立でないという証明もなく, コンパクト Einstein 空間の存在の疑問は未解決である. 疑問に対するいかなる答も我々の単純化したモデルにおいて, 微分可能多様体に対する類似の答に肯定的な強力な証拠をもたらすだろう. さらに (140) は緩和法 (relaxation methods) に形式的に適しているか, またはコンピュータ上でプログラムできる, もし解の存在が最初に問題になる場合には.

C.1.8 付録

ここで l_p の無限小の変分に対し M_m において

$$\sum_p \delta \varepsilon_p L_p^m = 0 \quad (141)$$

が得られることを示そう, L_p^m は n 番目のボーンの $m-2$ 次元の測度である.

T_n を単体とし, T_n の中で座標の Descartes 的な組が定義されているとする. T_n は $n+1$ 個の T_{n-1}^r 単体を持ち, $r:1\cdots n+1$. あらゆる 2 つの単体 T_{n-1}^r, T_{n-1}^s は共通の境界 T_{n-2}^{rs} を持つ. U_μ^r を T_{n-1}^r に垂直な単位ベクトルとする, $r:0\cdots n-1$, および $U_\mu^r U^{r,\mu} = 1$. もし θ_{rs} が T_{n-1}^r と T_{n-1}^s の間の角ならば,

$$\cos \theta_{rs} = U_\mu^r U^{s,\mu}$$

を得る. 次に歪対称テンソル

$$U_{\mu\lambda}^{rs} = -U_{\lambda\mu}^{rs} : \sin \theta_{rs} U^{rs} = U_\mu^r U_\lambda^s - U_\lambda^r U_\mu^s$$

を考える. 明らかに $U_{\lambda\mu}^{rs} U^{rs,\lambda\mu} = 2$ を得るので [C.2 節で確認], $U_{\lambda\mu}^{rs}$ は正確に C.1.5 節, 式 (137) と以降で用いたテンソルであり, T_{n-2}^{rs} の向きを定義する. もし L_{rs} が T_{n-2}^{rs} の測度ならば以下の恒等式を得る:

$$\sum_s L_{rs} U^{rs} = 0 : \quad (142)$$

つまり $U_0^r = 1, U_{\mu \neq 0}^r = 0$ となる系を探る. すると $V_\lambda^s = U_{\lambda 0}^{rs}, \lambda \neq 0$ が $U_{\lambda\mu}^{rs}$ の唯一消えない成分であって, $V_\lambda^s V^{s,\lambda} = 1$. T_{n-1}^r において量 $\sum L_{rs} V_\lambda^s A^\lambda$ は T_{n-1}^r の境界を通る定ベクトル A^λ の流束であり, したがって消える. [以上を C.2 節で補足する.]

ここで $[U_\mu^r U^{s,\mu} = \cos \theta_{rs}]$ を変分した] 公式:

$$\delta \theta_{rs} = \frac{-1}{\sin \theta_{rs}} (U_\mu^r \delta U^{s,\mu} + U_\mu^s \delta U^{r,\mu})$$

を採り, これを恒等式:

$$U_{\lambda\mu}^{rs} U^{r,\lambda} = \frac{1}{\sin \theta_{rs}} (\cos \theta_{rs} U_\mu^r - U_\mu^s)$$

[左辺に $U_{\lambda\mu}^{rs}$ の定義式を代入すれば良く, これ以降の式は右辺の符号が逆である (結果に影響はない)] および [上式に $\delta U^{r,\lambda}$ を掛け, 次いで $U_\mu^r U^{r,\mu} = 1$ の変分] $U_\mu^r \delta U^{r,\mu} = 0$ を用いた:

$$U_{\lambda\mu}^{rs} U^{r,\lambda} \delta U^{r,\lambda} = -\frac{1}{\sin \theta_{rs}} (U_\mu^s \delta U^{r,\lambda})$$

で変形する.

$$\delta \theta_{rs} = U_{\lambda\mu}^{rs} (U^{r,\lambda} \delta U^{r,\mu} + U^{s,\lambda} \delta U^{s,\mu})$$

が得られるので, 式 (142) より

$$\sum_{r,s} L_{rs} \delta \theta_{rs} = 0.$$

(141) はすると上記の恒等式の, 骨格の全ての単体にわたる和をとると帰結する [C.2 節で補足].

* * *

著者は多くの提案と励ましに関して, Prof. J. A. WHEELER と Dr. C. MISNER に感謝したい.

[原論文ではこの後にイタリア語の短い要約が続く. それは冒頭で訳出した要約と概ね同内容なので割愛する.]

C.2 Regge の原論文に関するノート

■三角形 t が頂点を含まなければ $\varepsilon_t = 0$ であること (C.1.1 項) について 多面体の辺 (一般には複数) をまたぐように三角形のシールを貼る場合にも, シールを辺に沿って折り曲げるだけで充分なので, 三角形の内角の和は π のまま変わらない. 他方で頂点に三角形を貼るには, 一般には内角の和の変化を伴う三角形のシールの伸縮を施す必要がある. 実際, 1 つの頂点には 3 枚以上の面が集まるので, 2 枚の面に合わせてシールを折り曲げた後, シールを変形することなく 3 枚目以降の面にシールを合わせることはできない.

なるほど多面体の面は平坦なので, 曲率を担い得る対象の候補が頂点と辺に限られることは直観的に理解できる. さらに辺が曲率を担わず頂点のみが曲率を担うことは, このように説明できる.

■面の三角形分割において $2e = 3f$ であること (C.1.1 項) について 各辺は 2 枚の面に共有されている. そこで各辺を仮想的に 2 本の辺が重なった状態と見なして, 2 つの面に辺を 1 本ずつ割り当てることを考える. このとき多面体 M 全体では $2e$ 本の辺を用いて, 多面体の各面が構成される. ここでは面として三角形を考えているので, 1 つの面を作るには 3 本の辺が必要であり, したがって得られる面の枚数は $f = 2e/3$. よって $2e = 3f$. (なお簡単な場合として四面体を考えると $e = 6, f = 4$ なので, 確かにこの関係が成り立っている.)

■連続関数としての局所 Gauss 曲率 $K(P) = \varrho\varepsilon$ (C.1.1 項) について $K(P)$ を Dirac タイプの分布と理解すれば公式

$$\varepsilon_t = \int_t K(P) dA$$

が成り立つと C.1.1 項にあることを踏まえ, $K(P) = \varrho\varepsilon$ における頂点の数密度 ϱ を Dirac のデルタ関数と同様, ある領域にわたって面積積分すると領域内の頂点の個数を与える面密度と解釈する. また積 $\varrho\varepsilon$ は試験三角形 t の中でゆっくり変化するという C.1.1 項の前提を踏まえ, 近くの頂点 n はほぼ等しい欠損角 ε_n を持つと考え, 連続関数 $\varepsilon(P)$ を導入する. このとき上記の積分は三角形 t 内にある頂点の欠損角の和 $\sum_n \varepsilon_n$ を, したがって正しい ε_t を与える.

あるループ t に関する欠損角が単に, ループに含まれる頂点の欠損角の和 $\varepsilon_t = \varepsilon_V + \varepsilon_X + \varepsilon_Y + \cdots$ となることは, 次のように理解できる. 4.3 節の図 44 の箇所に説明があるように, また C.1.1 項の終盤に $\varepsilon(t) = \varepsilon_t$ とあるように, ループに沿う平行移動に伴うベクトルの回転角は欠損角に一致する. これを踏まえて面積積分 $\int_t K(P) dA$ を, 1 つの頂点のみを含む領域にわたる積分の和に分割すると, 各頂点周りのループに沿った平行移動に伴うベクトルの回転角 ε_n を足すことになるので, Stokes の定理の要領でそれは縁 t に沿ってベクトルを平行移動した際の回転角 ε_t となる.

■C.1.5 項の曲率テンソルの式 (137) について ループに沿うベクトルの平行移動に伴い, ボーン (ヒンジ) に垂直なベクトル成分だけが回転を受ける (4.3 節, C.1.3 項末尾). よってボーンに平行な回転ベクトル $\sigma = \sigma U$ とのベクトル積を用いて, ベクトルの変化は

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{A} &= (\sigma U) \times \mathbf{A} = \varrho\varepsilon (\mathbf{U} \times \mathbf{A})(\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\Sigma}) : (136), \quad (\because \sigma = N\varepsilon, N = \varrho \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\Sigma}) \\ \text{i.e. } \delta A_\mu &= (\varrho\varepsilon)(\varepsilon_{\mu\nu\rho} U^\nu A^\rho)(U^\lambda \Sigma_\lambda) \\ &= \frac{1}{2}(\varrho\varepsilon U_{\rho\mu} U_{\alpha\beta}) \Sigma^{\alpha\beta} A_\rho \quad (\because \varepsilon_{\mu\nu\rho} U^\nu = U_{\rho\mu}, U^\lambda \Sigma_\lambda = U_{\alpha\beta} \Sigma^{\alpha\beta}/2) \end{aligned}$$

と表される．ただし各々の量は 3 次元 Euclid 空間におけるテンソル (と双対テンソル) であり， $U \cdot \Sigma$ は通常の内積であり， $\varepsilon_{123} = \varepsilon^{123} = +1$ である．これを続く式

$$\delta A_\mu = \frac{1}{2} R_{\rho\mu\alpha\beta} \Sigma^{\alpha\beta} A_\rho$$

(数係数 $1/2$ を補った；3 次元多様体の曲率に対しても正しい [11, § 91–92]) と比較すると，曲率テンソルを式 (137) のように同定できる．

なお空間は近似的に Euclid 的であり，積 $\varrho\varepsilon$ は空間的にゆっくり変化することが仮定されているものの，3 次元空間の三角形分割として四面体を貼り合わせてゆくことを想像すれば，その場合にも局所的にボーンは近似的に平行であることは何ら保証されない．ところが C.1.1 項で 2 次元面の文脈で正味の欠損角 $\varepsilon_t = \varepsilon_V + \varepsilon_X + \varepsilon_Y + \cdots$ が和で与えられるのと同じ理由で，また式 (137) の後にあるように，異なる向きを持つボーンの束の曲率への寄与は単に加法的である．そこで式 (137) の後で実際に行われているように，複数の向き U_p ($p = 1, 2, \dots$) に平行なボーンがある場合には，向きごとにボーンの数密度 ϱ_p と欠損量 ε_p (仮定により局所的には同じ向き U_p の全てのボーンに共通) を定義して，単に和

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \sum_p \varepsilon_p \varrho_p U_{\mu\nu}^p U_{\alpha\beta}^p$$

で曲率を与えれば良い．

■Riemann テンソルの表式 (137) が $n \geq 4$ 次元でも成り立つ理由 Riemann テンソルの表式 (137) はまず 3 次元の多様体 (近似的に Euclid 空間) を仮定して導かれた．これが 4 次元の擬 Riemann 多様体 (近似的に Minkowski 空間) においても成り立つ理由を考える．4 次元の多様体ではボーン (ヒンジ) は 2 次元の面である．C.1.5 項に従って時間的なボーンを考えると，式 (137) の後にあるように，座標軸 $x^4 = x^0$ を追加してボーンを $x^3 x^0$ 面内に選べる．このときボーンはベクトルの $x^1 x^2$ 面内の回転を生成する．またボーンの属する面の向きは， x^1, x^2 軸の方向単位ベクトル $U_\mu^1 = \delta_\mu^1, U_\mu^2 = \delta_\mu^2$ を用いて，ベクトル積に対応する反対称テンソル

$$U_{\mu\nu} = U_{[\mu}^1 U_{\nu]}^2 \equiv U_\mu^1 U_\nu^2 - U_\nu^1 U_\mu^2 = \delta_\mu^1 \delta_\nu^2 - \delta_\nu^1 \delta_\mu^2 \quad (\text{ノンゼロな成分 } U_{12} = -U_{21} = 1)$$

で指定できる．(これは $U^{\mu\nu} U_{\mu\nu} = 2$ を満たし，また式 (8.63) の箇所で見た 2-ベクトルや原論文の付録 C.1.8 の $U_{\mu\nu}^{rs}$ にも対応する．) そこでボーンの $x^1 x^2$ 面内の数密度を ϱ ，欠損角を ε とし， $x^1 x^2$ 面内のループ (囲まれる面積 $\Sigma = \Sigma^{12}$) に沿うベクトル A_μ の平行移動を考える．

4 次元の擬 Riemann 多様体においても式 (137) が成り立つと仮定すると，平行移動に伴うベクトルの変化は

$$\delta A_\mu = \frac{1}{2} R_{\nu\mu\alpha\beta} \Sigma^{\alpha\beta} A^\nu = \frac{1}{2} \varrho \varepsilon (U_{\nu\mu} A^\nu) (U_{\alpha\beta} \Sigma^{\alpha\beta}) = \varrho \varepsilon (-\delta_\mu^1 A^2 + \delta_\mu^2 A^1) \Sigma^{12}$$

と計算される．よってそのゼロでない成分は

$$\delta A_1 = -\varrho \varepsilon A^2 \Sigma, \quad \delta A_2 = \varrho \varepsilon A^1 \Sigma.$$

ここではベクトル添字の上げ下げは Minkowski 計量 $\eta^{\mu\nu}, \eta_{\mu\nu}$ で行われるものの，それはボーンに垂直な方向の添字 $\mu = 1, 2$ に関しては Euclid 計量による上げ下げと等価である．

他方で同じ操作を， $x^4 = x^0$ 軸方向を感知できない (x^1, x^2, x^3) 空間内の立場から考えよう．するとボーンは欠損角が ε で $x^1 x^2$ 面内の数密度が ϱ であることに変わりはないものの，今度は x^3 軸に平行な線分に見え

るはずである．実際，添字のとり値の範囲を $\mu, \nu = 1, 2, 3$ に限定すると， $U_{\mu\nu}$ からボーン方向単位ベクトル U が

$$U^\lambda = \frac{1}{2} \varepsilon^{\lambda\mu\nu} U_{\mu\nu} = \varepsilon^{\lambda 12} = (0, 0, 1)$$

のように得られる．再び式 (137) の導出過程を繰り返すと，面内のボーン数を $N = \varrho\Sigma$ ，正味の欠損角を $\sigma = N\varepsilon$ として，平行移動に伴うベクトルの変化は $\delta\mathbf{A} = (\sigma\mathbf{U}) \times \mathbf{A}$ で与えられる．これは上式に一致する．

よって式 (137) は (少なくともボーンが時間的な場合には)，特定の座標系で成立する．ところが式 (137) はテンソルの関係式なので，任意の座標系で成立することになる．(再び一般にボーンの向き p が複数あれば p で和をとる．)

■空間の次元 n に依らず $R = 2\varrho\varepsilon$ が成り立つこと (C.1.5 項) について 平坦な計量 $g_{\mu\nu}$ を Euclid 計量 $\delta_{\mu\nu}$ と Minkowski 計量 $\eta_{\mu\nu}$ のいずれかとし，また考えている空間の次元 n に応じて添字は n 通りの値をとり得るとする．このとき Riemann テンソル (137) に対してスカラー曲率は統一的に

$$R = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta} = \varrho\varepsilon g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} U_{\mu\nu} U_{\alpha\beta} = \varrho\varepsilon U^{\mu\nu} U_{\mu\nu} = 2\varrho\varepsilon$$

と書ける．一般にボーンの向き p が複数あれば， $R = 2 \sum_p \varrho_p \varepsilon_p$ と修正される．

なお (近似的に平坦な) 2 次元面ではスカラー曲率 R と Gauss 曲率 K の関係は $R = 2K$ である [11, p.293]．よって上式 $R = 2\varrho\varepsilon$ を 2 次元面にも適用すると，C.1.1 項の公式 $K = \varrho\varepsilon$ が再現される．

■ $f(\varepsilon') + f(\varepsilon'') = f(\varepsilon' + \varepsilon'')$ を満たす関数形 $f(\varepsilon) = C\varepsilon$ (C.1.7 項) について 条件 $f(x) + f(y) = f(x+y)$ は $x = y$ とおくと $f(2x) = 2f(x)$ を与え，ここから逐次的に

$$f(3x) = f(x) + f(2x) = 3f(x), \text{ etc.} \quad f(nx) = nf(x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

が得られるため，比例関係 $f(x) = Cx$ が期待される．また $x = y = 0$ とおくと $f(0) = 0$ ，次いで $y = -x$ とおくと $f(-x) = -f(x)$ も分かる．より一般には $f(x)$ が Taylor 展開できると仮定して $f(2x) = 2f(x)$ が恒等的に成り立つことを要求すると， x の 1 次の項のみが許されることが示される．

■Einstein-Hilbert 作用がきめ細かい骨格空間に対して Regge 作用に移行すること (C.1.7 項) について ボーンを除き近似的にいたるところ平坦な骨格空間に対して $\sqrt{-g} = 1, R = 2\varrho\varepsilon$ より，Einstein-Hilbert 作用 (ただし Newton 定数 $G = 1$; 原論文の $\mathcal{L}$) は

$$S = \frac{1}{16\pi} \int R \sqrt{-g} d^4x = \frac{1}{8\pi} \int \varrho\varepsilon d^4x.$$

あるいは $R = 2 \sum_p \varrho_p \varepsilon_p$ に対して

$$S = \frac{1}{8\pi} \sum_p \int \varrho_p \varepsilon_p d^4x.$$

ここで (最) 右辺は積分変数の座標のとり方に依らない．そこでボーンに垂直および平行な座標 x', x'' を導入すると，直観的には x' 積分は Dirac 型の分布 ϱ を消去し，残る x'' 積分はボーンの面積 L を与えると想像される．この予想を説明するために，空間を 1 つのボーン T_2^n だけを含む領域 Ω_n の貼り合わせへと分割できると考えると，2 式のいずれに対しても

$$\int \varrho\varepsilon d^4x = \sum_n \int_{\Omega_n} \varrho\varepsilon d^2x' d^2x''$$

と書ける．ここで 2 種類の座標 x', x'' は Ω_n ごとに定義され，また積分範囲を Ω_n に限定すると単一のボーン T_2^n のみが寄与を持つので，その座標を x'_n として $\varrho = \delta^2(x' - x'_n)$ と書いて良い．すると x' 積分は T_2^n の欠損角 $\varepsilon(x'_n) = \varepsilon_n$ を取り出すので

$$(\text{上式}) = \sum_n \varepsilon_n \int_{x'=x'_n} d^2 x'' = \sum_n \varepsilon_n L_n, \quad \therefore S = \frac{1}{8\pi} \sum_n \varepsilon_n L_n$$

を得る．

他方で C.1.7 項の冒頭にあるように，任意の骨格空間に対して作用は $S = C \sum_n \varepsilon_n L_n$ の形をとることを説明でき，上式と比較して $C = 1/8\pi$ と定めると Regge 作用 (4.23) を得る．分割のきめ細かい骨格空間に対して Einstein–Hilbert 作用が近似的に Regge 作用に一致することは，とりも直さず，三角形分割がきめ細くなる極限で Regge 作用が Einstein–Hilbert 作用に収束すること (4.3 節 p.87) を意味している．

■C.1.8 項の $U_{\lambda\mu}^{rs} U^{rs, \lambda\mu} = 2$ の確認 定義式

$$\sin \theta_{rs} U_{\mu\nu}^{rs} \equiv U_{[\mu}^r U_{\nu]}^s \equiv U_\mu^r U_\nu^s - U_\nu^r U_\mu^s$$

ではベクトル積の因子 $U_{[\mu}^r U_{\nu]}^s$ から $\sin \theta_{rs}$ を括り出して反対称テンソル $U_{\mu\nu}^{rs}$ を定義している．

$$U_{\mu\nu}^{rs} U^{rs, \mu\nu} = \frac{2}{\sin \theta_{rs}} U_\mu^r U_\nu^s U^{rs, \mu\nu} = \frac{2}{\sin^2 \theta_{rs}} U_\mu^r U_\nu^s (U^{r, \mu} U^{s, \nu} - U^{r, \nu} U^{s, \mu}) = \frac{2}{\sin^2 \theta_{rs}} (1 - \cos^2 \theta_{rs}) = 2.$$

■C.1.8 項の式 (142) とその説明について $U_\mu^r = \delta_{0\mu}$ となる座標系では

$$V_\mu^s \equiv U_{0\lambda}^{rs} = \frac{1}{\sin \theta_{rs}} (U_\lambda^s - U_\lambda^r U_0^s)$$

であって，これは $\lambda = 0$ に対してゼロになることが見て取れる．また

$$2 = U_{\mu\nu}^{rs} U^{rs, \mu\nu} = U_{0\lambda}^{rs} U^{rs, 0\lambda} + U_{\lambda 0}^{rs} U^{rs, \lambda 0} = 2V_\lambda^s V^{s, \lambda}, \quad \therefore V_\lambda^s V^{s, \lambda} = 1.$$

こうしてボーン T_{n-2}^{rs} の向きを指定する単位の反対称テンソルは

$$U_{\mu\nu}^{rs} \rightarrow U_0^r V_\lambda^s = V_\lambda^s \text{ (単位ベクトル)}$$

と置き換わる．実際ここでは単体 T_{n-1}^r を x^0 軸に垂直な (超) 平面内に選んだので，その境界にあたる T_{n-2}^{rs} の向きを指定するにはもう 1 つの成分 λ があれば充分である．そこで T_{n-2}^{rs} の“面積要素ベクトル” $L_{rs} V_\lambda^s$ との内積を作ると，ベクトル場 A^λ の流束 $L_{rs} V_\lambda^s A^\lambda$ が得られる．さらに T_{n-1}^r の境界を成す全ての T_{n-2}^{rs} にわたる和をとると， T_{n-2}^{rs} に囲まれた領域 T_{n-1}^r からの A^λ のわき出し

$$\sum_s L_{rs} V_\lambda^s A^\lambda$$

が得られる．ところが A^λ が一様なベクトル場であれば，その閉じた領域 T_{n-1}^r からのわき出しはゼロである (式 (142)).

■C.1.8 項最後の式 $\sum_{r,s} L_{rs} \delta\theta_{rs} = 0$ とそれが式 (141) を含意することの確認 直前の $\delta\theta_{rs}$ の表式を代入すると,

$$\sum_{r,s} L_{rs} \delta\theta_{rs} = \sum_r \left(\sum_s L_{rs} U_{\lambda\mu}^{rs} \right) U^{r,\lambda} \delta U^{r,\mu} + (r \leftrightarrow s) = 0.$$

ただし第 2 の等号で式 (142) を用いた.

ボーン $p = T_{n-2}^{rs}$ の欠損角 ε_p とその変分は, ボーン周りの 2 面角 θ_{rs} に関する和

$$\varepsilon_p = 2\pi - \sum_{rs} \theta_{rs}, \quad \therefore \delta\varepsilon_p = - \sum_{rs} \delta\theta_{rs}$$

で表されるので,

$$\sum_p \delta\varepsilon_p L_p = - \sum_p \sum_{r,s} L_{rs} \delta\theta_{rs} = 0.$$

ただし T_{n-1}^r と T_{n-1}^s に共通の境界 T_{n-2}^{rs} , したがってその大きさ L_{rs} として, ここでは全ての組 (r, s) に共通のボーン p を考えていることに注意する.

付録 D Wigner の $3j$ 記号と結節因子

以下の D.1 節では 5.2.2 項で導入された Wigner の $3j$ 記号 (5.30) が Clebsch–Gordan 係数の対称な形であることを、本文中 (p.105) で紹介されている Landau and Lifshitz (1959) の第 14 章の説明にならって確認する。Clebsch–Gordan 係数は漸化式を用いて系統的に求めることができるため [3, § 3.7], あらゆる $3j$ 記号もまた原理的には計算可能である。角運動量成分 m の反転に伴う $3j$ 記号の性質に関しては、Landau and Lifshitz (1959) の記述を踏まえつつも、D.2 節で本稿独自の導出を与える。D.1 節の結果を踏まえ、D.3 節では結節因子の簡単な例を調べる。

D.1 Wigner の $3j$ 記号

■状態 ψ_{jm} のスピノル表現 準備として $[\hbar$ を単位とした] スピン j , その成分 m の状態の波動関数 ψ_{jm} [位置について積分済み] と、そのスピノル表現との関係を調べておく。スピン j の波動関数は $n = 2j$ 階の対称スピノル $\psi^{AB\cdots}$ である [式 (1.21)]。特にスピンの z 成分が $m (= -j, \dots, j)$ の状態は、スピン $1/2$ を持つ $n = 2j$ 個の粒子のうち

- スピン成分 $+1/2$ (スピノル添字 $A = 0$ で表す) のものが $(j + m)$ 個
- スピン成分 $-1/2$ (スピノル添字 $A = 1$ で表す) のものが $(j - m)$ 個

とすると得られることに対応して、

$$\psi_{jm} \sim \psi_{j+m}^{00\cdots 0 \frac{11\cdots 1}{j-m}}$$

と書ける。ここで下線を引いた添字 0 および 1 の個数を明示した。ところが全確率は

$$\sum_{m=-j}^j |\psi_{jm}|^2 = \sum_{A,B,\dots} |\psi^{AB\cdots}|^2. \quad (143)$$

右辺において添字が $(j + m)$ 個の 0 を含む項は $\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}$ 回現れる。よって

$$\psi_{jm} = \sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}} \psi_{j+m}^{00\cdots 0 \frac{11\cdots 1}{j-m}} \quad (144)$$

とすれば、上式 (143) が満たされる。

note : 確認 式 (143) 右辺において

$$(\text{添字 } 0 \text{ の個数 } (j + m)) = 0, 1, \dots, 2j \text{ にわたる和} \rightarrow \sum_{m=-j}^j$$

に注意すると、

$$\sum_{A,B,\dots} |\psi^{AB\cdots}|^2 = \sum_{m=-j}^j \frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!} \left| \psi_{j+m}^{00\cdots 0 \frac{11\cdots 1}{j-m}} \right|^2 = \sum_{m=-j}^j |\psi_{jm}|^2$$

となって式 (143) が満たされる。ただし最後の等号で式 (144) を用いた。

式 (144) からさらに関係

$$\psi^{AB\cdots}\phi_{AB\cdots} = \sum_m (-1)^{j-m} \psi_{jm} \phi_{j,-m} \quad (145)$$

も導かれ、ここに $\psi^{AB\cdots}$ と $\phi_{AB\cdots}$ は同じ階数の異なる 2 つのスピンルであるのに対し、 ψ_{jm}, ϕ_{jm} はこれらのスピンルから公式 (144) を通じて導かれる波動関数である；因子 $(-1)^{j-m}$ は、スピンル成分の全ての添字を上げたとき、添字に含まれる 1 の個数と同じ回数だけ符号が入れ替わることによる。

note：確認 本編の式 (1.22-23) にならって

$$\epsilon^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \epsilon_{AB}, \quad z^A = z_B \epsilon^{BA}, \quad \therefore z^0 = -z_1, \quad z^1 = z_0$$

のように添字を上げる．このとき添字 1 を上げるときだけ符号が変わるので、

$$\begin{aligned} \psi^{AB\cdots}\phi_{AB\cdots} &= \sum_{m=-j}^j \frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!} \psi_{j+m}^{00\cdots 0 \overset{11\cdots 1}{j-m}} \phi_{j+m}^{00\cdots 0 \overset{11\cdots 1}{j-m}} \\ &= \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} \frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!} \psi_{j+m}^{00\cdots 0 \overset{11\cdots 1}{j-m}} \phi_{j+m}^{\overset{11\cdots 1}{j+m} \overset{00\cdots 0}{j-m}} \\ &= \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} \left[\sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}} \psi_{j+m}^{00\cdots 0 \overset{11\cdots 1}{j-m}} \right] \left[\sqrt{\frac{(2j)!}{(j-m)!(j+m)!}} \psi_{j-m}^{00\cdots 0 \overset{11\cdots 1}{j-m}} \right] \\ &= \sum_m (-1)^{j-m} \psi_{jm} \phi_{j,-m} : (145) \end{aligned}$$

を得る．

■2つの角運動量を合成して全角運動量をゼロにする ここで 2 つの構成粒子の波動関数から、与えられた全角運動量を持つ系の波動関数を構成する問題を考える．2 つの角運動量 $[j_1, m_1]$ と $[j_2, m_2]$ を足して全角運動量をゼロにするという、簡単な場合から始めよう．ここでは明らかに $j_1 = j_2$ かつ $m_1 = -m_2$ でなければならない．角運動量 j とその成分 m を持つ 1 粒子の波動関数を ψ_{jm} とする．求める波動関数 Ψ_0 は逆符号の m の値を持つ 2 粒子の波動関数の積の和

$$\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} \psi_{jm}^{(1)} \psi_{j,-m}^{(2)} \quad (146)$$

であり、ここに j は j_1 と j_2 の共通の値である．和の前の因子 $1/\sqrt{2j+1}$ は規格化による．和における係数は全て同じ絶対値を持たねばならない、何故なら角運動量の成分 m の全ての値は等しく可能のはずだから．

note 状態 $\psi_{jm}^{(1)} \psi_{j,-m}^{(2)} \sim |j, m\rangle |j, -m\rangle$ は m の値が異なると直交することに注意すると、 $|\psi_{jm}|^2 = 1$ と規格化されているならば、上式 (146) の Ψ_0 もまた

$$|\Psi_0|^2 = \frac{1}{2j+1} \sum_{m=-j}^j |\psi_{jm}^{(1)}|^2 |\psi_{j,-m}^{(2)}|^2 = 1$$

と規格化されている．

式 (146) における一連の符号は波動関数のスピノル表現の観点から容易に見出される．スピノル表記では式 (146) における和は、 $2j$ 階の 2 つのスピノルから成る (系の全角運動量がゼロとなる) スカラー

$$\psi^{(1)AB\cdots}\psi^{(2)}_{AB\cdots} \quad (147)$$

である．これを用いると、式 (145) から式 (146) の符号が直接得られる．

ただし一般には和 (146) における相対的な符号が決まるに過ぎず、和全体の符号は決まらない．例えば $(j+m)$ 個のスピノル添字 0 と $(j-m)$ 個のスピノル添字 1 を全て $\psi^{(1)}$ において下げ、 $\psi^{(2)}$ において上げると、スカラー (147) は $(-1)^{2j}$ が掛かり、したがって j が半整数のときには符号を変える．

note 縮約される 1 組の添字を上げ下げすると、

$$z_A w^A \rightarrow w_A z^A = w_A (z_B \epsilon^{BA}) = -z_B (w_A \epsilon^{AB}) = -z_B w^B$$

のように符号が入れ替わる．等価的に成分計算を明示すれば

$$w_A z^A = z^0 w_0 + z^1 w_1 = (-z_1) w^1 + z_0 (-w^0) = -z_A w^A.$$

■3 つの角運動量を合成して全角運動量をゼロにする 次に角運動量 j_1, j_2, j_3 とその成分 m_1, m_2, m_3 を持つ 3 つの粒子から成る、全角運動量ゼロの系を考えよう．このとき $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ であって、 j_1, j_2, j_3 は閉じた三角形を成す、すなわち

$$|j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2, \text{ etc.}$$

を満たす．代数和 $j_1 + j_2 + j_3$ が整数となることは明らかである．

note 3 つのスピンの j_1, j_2, j_3 を合成したスピンの成分がゼロになる条件は、 j_1, j_2 を合成してスピン j_3 が得られる条件と等価であること (5.2.2 項の脚注*107) を踏まえると、このことは Clebsch–Gordan 条件 (1.29) として確認済みである．

この条件の下での波動関数は、各 $m_i = -j_i, \dots, j_i$ にわたる和

$$\Psi_0 = \sum_{m_1, m_2, m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \psi^{(1)}_{j_1 m_1} \psi^{(2)}_{j_2 m_2} \psi^{(3)}_{j_3 m_3} \quad (148)$$

である [式 (5.31) に対応]．この公式における係数は **Wigner の $3j$ 記号** と呼ばれる [式 (5.30)]．定義により、それらは $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ のときのみノンゼロである．また $3j$ 記号は実数として定義できる．

$3j$ 記号の一般的な定義として用いられる、和 (148) における係数を定義する最も対称的な方法は以下である．スピノル表記では Ψ_0 は、3 つのスピノル $\psi^{(1)AB\cdots}, \psi^{(2)AB\cdots}, \psi^{(3)AB\cdots}$ の積の、2 つの異なるスピノルに属する添字の組の全てに関する縮約から成るスカラーである．

- 粒子 1 と 2 に属する全ての添字の組において、添字は $\psi^{(1)}$ で上付き、 $\psi^{(2)}$ で下付きに書く．
- 粒子 2 と 3 に属する全ての添字の組において、添字は $\psi^{(2)}$ で上付き、 $\psi^{(3)}$ で下付きに書く．
- 粒子 3 と 1 に属する全ての添字の組において、添字は $\psi^{(3)}$ で上付き、 $\psi^{(1)}$ で下付きに書く．

各種類の組の総数はそれぞれ

$$c \equiv j_1 + j_2 - j_3, \quad a \equiv j_2 + j_3 - j_1, \quad b \equiv j_3 + j_1 - j_2$$

であることが容易に分かる [式 (1.30) とそのグラフ的解釈を見よ]。この規則が Ψ_0 の符号を一意的に定める。

この定義の下で、添字 1,2,3 の巡回置換が Ψ_0 を不変に留めることは明らかである。このことは $3j$ 記号が列を巡回置換したとき不変であることを意味する。また任意の 2 つの添字の入れ替えは、 $a+b+c = j_1+j_2+j_3$ 組の全てに関して下付き添字を上げ、上付き添字を下げることを要することが容易に分かる。このことは Ψ_0 に $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$ が掛かることを意味する；言い換えると、 $3j$ 記号には性質

$$\begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}, \text{ etc.} \quad (149)$$

がある [これは列の巡回対称性を含意する]。すなわち、もし整数 $j_1+j_2+j_3$ が奇数ならば、 $3j$ 記号は 2 つの列を入れ替えたとき符号を変える。

note : 確認 状態 (148) はスピノル表記では

$$\Psi_0 = \psi^{(1)} \frac{c}{\frac{A' \dots}{A'' \dots}} \psi^{(2)} \frac{a}{\frac{A' \dots}{A'' \dots}} \psi^{(3)} \frac{b}{\frac{A' \dots}{A'' \dots}}. \quad (150)$$

ここで例えば添字 1 と 2 を入れ替えると、同時に $a \leftrightarrow b$ と入れ替わるので、

$$\Psi_0 \rightarrow \Psi'_0 = \psi^{(1)} \frac{b}{\frac{A' \dots}{A'' \dots}} \psi^{(2)} \frac{c}{\frac{A' \dots}{A'' \dots}} \psi^{(3)} \frac{a}{\frac{A' \dots}{A'' \dots}} = (-1)^{\#} \psi^{(1)} \frac{c}{\frac{A' \dots}{A'' \dots}} \psi^{(2)} \frac{a}{\frac{A' \dots}{A'' \dots}} \psi^{(3)} \frac{b}{\frac{A' \dots}{A'' \dots}} = (-1)^{\#} \Psi_0.$$

ここで $\# = a+b+c = j_1+j_2+j_3$ は縮約される添字の組を上げ下げする回数である。そこで Ψ_0 の定義式 (148) で添字 1 と 2 を入れ替えた状態を、もとの式 (148) の $(-1)^{\#}$ 倍と等置すると上式 (149) を得る。

■2つの角運動量から与えられた角運動量 j, m を合成する 式 (148) から、2 つの粒子を含み与えられた値 j と m を持つ系の波動関数 Ψ_{jm} を与える、重要な公式を導ける。そのために、粒子 1 と 2 を合わせて 1 つの系と考える。[引き続き上記の設定では] この系の角運動量 j は粒子 3 の角運動量 j_3 と合わせて全角運動量ゼロを与えるので、 $j = j_3, m = -m_3$ でなければならない。式 (146) によると、このとき

$$\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \sum_m (-1)^{j-m} \Psi_{jm} \psi_{j,-m}^{(3)} \quad (151)$$

と書ける。この公式は式 (148) (ただし j_3, m_3 を $j, -m$ に置き換える) と比較される。ここで、しかしながら、式 (147) に対応した式 (151) における和の構成の規則が、和 (148) の構成の規則に対応しない事実をまず考慮せねばならない。式 (151) を式 (148) の形に移行させるには、容易に分かるように、粒子 1 と 3 に対応する上下の添字の組を入れ替えねばならない。このことは付加的な因子 $(-1)^{j_1-j_2+j_3}$ へと導く。結果は

$$\Psi_{jm} = (-1)^{j_1-j_2+m} \sqrt{2j+1} \sum_{m_1, m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \psi_{j_1 m_1}^{(1)} \psi_{j_2 m_2}^{(2)} \quad (152)$$

であり、ここで m_1 と m_2 にわたる和は条件 $m_1+m_2=m$ に制約される。

note : 確認 既に注意したように、式 (148) と式 (151) の Ψ_0 には符号の違いがあり得る。実際スピノル表示では

$$(\text{式 (148) の } \Psi_0) = \psi^{(1)} \frac{c}{\frac{A' \dots}{A'' \dots}} \psi^{(2)} \frac{a}{\frac{A' \dots}{A'' \dots}} \psi^{(3)} \frac{b}{\frac{A' \dots}{A'' \dots}} = (-1)^b \psi^{(1)} \frac{c}{\frac{A' \dots}{A'' \dots}} \psi^{(2)} \frac{b}{\frac{A' \dots}{A'' \dots}} \psi^{(3)} \frac{a}{\frac{A' \dots}{A'' \dots}}$$

であり、最右辺は $a + b = 2j_3 = 2j$ 個のスピン添字に関する式 (147) の縮約の形 $\psi^{(1,2)\frac{AB\cdots}{2j}} \psi^{(3)\frac{AB\cdots}{2j}}$ をしているの、(式 (148) の $\Psi_0 = (-1)^b$ (式 (151) の Ψ_0) と分かる。そこで

$$\begin{aligned} (\text{式 (151) の } \Psi_0) &= (-1)^b \sum_{m_1, m_2, m} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \psi_{j_1 m_1}^{(1)} \psi_{j_2 m_2}^{(2)} \psi_{j, -m}^{(3)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \sum_m (-1)^{j-m} \left[\sum_{m_1, m_2} (-1)^{b-(j-m)} \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \psi_{j_1 m_1}^{(1)} \psi_{j_2 m_2}^{(2)} \right] \psi_{j, -m}^{(3)} \end{aligned}$$

とし、最右辺を式 (151) と比べて $[\cdots]$ の部分を Ψ_{jm} に同定すると上式 (152) を得る。

得られた公式 (152) を Clebsch–Gordan 係数 $C_{m_1 m_2}^{jm} \equiv \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm \rangle$ の定義式

$$\Psi_{jm} = \sum_{m_1, m_2} C_{m_1 m_2}^{jm} \psi_{j_1 m_1}^{(1)} \psi_{j_2 m_2}^{(2)}$$

と比較すると、文献 [3, p.286] で言及されている $3j$ 記号と Clebsch–Gordan 係数の関係

$$C_{m_1 m_2}^{jm} = (-1)^{j_1 - j_2 + m} \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \quad (153)$$

が見出される。

最後に $3j$ 記号の有用な特例に言及しておく。式 (146) に対応して

$$\begin{pmatrix} j & j & 0 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{j-m} \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \quad (154)$$

が得られる。

note $3j$ 記号の定義式で

$$j_1 = j_2 = j, \quad j_3 = 0, \quad m_1 = -m_2 = m, \quad m_3 = 0$$

とおこう。式 (146) の箇所で補足したように $|\psi_{00}^{(3)}|^2 = 1$ を踏まえて $\psi_{00}^{(3)} = 1$ とおくと

$$\Psi_0 = \sum_m \begin{pmatrix} j & j & 0 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} \psi_{jm}^{(1)} \psi_{j, -m}^{(2)}$$

となる。これを式 (146) と等置して良い。実際、いずれの Ψ_0 もスピノル表示では、粒子 1 の添字は上付き、粒子 2 の添字は下付きであるので、和の規則は共通しており、全体の符号の違いはない。

ここから式 (5.45), (7.76) の g_{mn} が得られる。 g_{mn} はその構成 (146) から、2 つのスピン成分 m, n と縮約するとスカラーを導く。このことは 5.2.2 項のノートで調べた g_{mn} の変換則からも納得できる。

D.2 角運動量成分 m の反転に伴う $3j$ 記号の符号の変化

ここでは $3j$ 記号の公式

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1 + j_2 + j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \quad (155)$$

が成り立つことを説明する。

角運動量の z 成分の符号の反転は、 y 軸周りの角度 π 回転の結果と見なせる。ところで文献 [3, § 3.8] では角運動量を表す Schwinger の振動子モデルを用いて、 y 軸周りの角度 β 回転 R に対する Wigner 行列要素 $d_{m'm}^{(j)}(\beta) \equiv \langle jm' | \mathcal{D}(R) | jm \rangle$ の明示的な公式 (3.8.33) を導いた。これを $\beta = \pi$ で評価するには、改めて $\beta = \pi$ に対して導出過程をたどるのが容易である。実際このとき同文献の式 (3.8.25–26) は $\mathcal{D}(R)a_{\pm}^{\dagger}\mathcal{D}^{-1}(R) = \pm a_{\mp}^{\dagger}$ と簡略化される。これを式 (3.8.21) に代入すると

$$\mathcal{D}(R) |j, m\rangle = (-1)^{j-m} \frac{(a_{+}^{\dagger})^{j-m} (a_{-}^{\dagger})^{j+m}}{\sqrt{(j-m)!(j+m)!}} |0\rangle$$

となる。これを式 (3.8.30) の最右辺と比較すると、直ちに

$$d_{m'm}^{(j)}(\pi) = (-1)^{j-m} \delta_{m', -m}$$

と同定される。(これは本編の内積 (1.34) や g_{mn} の式 (5.45), (7.76) に一致している。) またこの結果を式 (3.8.30) の 1 行目に代入すると

$$|jm\rangle \rightarrow \mathcal{D}(R) |jm\rangle = \sum_{m'} |jm'\rangle d_{m'm}^{(j)}(\pi) = (-1)^{j-m} |j, -m\rangle$$

を得る。これは予想通り、 m の符号の反転が y 軸周りの角度 π 回転として実現されることを意味している。

回転に伴い、系の状態 (148) は

$$\begin{aligned} \Psi'_0 &= \sum_{\{m_i\}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} ((-1)^{j_1-m_1} \psi_{j_1, -m_1}^{(1)}) ((-1)^{j_2-m_2} \psi_{j_2, -m_2}^{(2)}) ((-1)^{j_3-m_3} \psi_{j_3, -m_3}^{(3)}) \\ &= (-1)^{j_1+j_2+j_3} \sum_{\{m_i\}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \psi_{j_1, -m_1}^{(1)} \psi_{j_2, -m_2}^{(2)} \psi_{j_3, -m_3}^{(3)} \\ &= (-1)^{j_1+j_2+j_3} \sum_{\{m_i\}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \psi_{j_1 m_1}^{(1)} \psi_{j_2 m_2}^{(2)} \psi_{j_3 m_3}^{(3)} \end{aligned}$$

と変化する。ただし第 2 の等号では指数において $3j$ 記号がノンゼロとなる条件 $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ を考慮した。ところが全角運動量ゼロの状態 Ψ_0 は回転の下で不変である。そこで上式の Ψ'_0 を Ψ_0 の式 (148) と等置すると、冒頭の公式 (155) を得る。

■状態の不変性 $\Psi'_0 = \Psi_0$ について 回転の下で Ψ_0 の符号が変わるわけではない。 Ψ_0 が回転の下で不変な状態であることと、不変な状態の定義に符号の不定性があることを混同してはならない。 Ψ_0 の不変性はスピノル表示では次のように理解できる。 y 軸周りの角度 π の回転に伴いスピノルは $SU(2)$ 行列

$$U = e^{-i\pi\sigma_y/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad [\text{式 (1.39) を見よ}]$$

の作用を受け、

$$\begin{pmatrix} \psi^0 \\ \psi^1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \psi^{0'} \\ \psi^{1'} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \psi^0 \\ \psi^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi^1 \\ \psi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi_0 \\ -\psi_1 \end{pmatrix} \quad (156)$$

と変換する。他方で $\phi_A \psi^A$ がスカラーとなるためには、下付き添字を持つスピノル ϕ_A は

$$\phi'_A = \phi_B (U^{-1})^B_A \quad (157)$$

と逆に変換しなければならない。実際この変換則は ϵ_{AB} の変換則と合わせて

$$\phi_A \equiv \epsilon_{AB} \phi^B \rightarrow [\epsilon_{CD} (U^{-1})^C_A (U^{-1})^D_B] (U^B_E \phi^E) = \phi_C (U^{-1})^C_A$$

と帰結する。また ϵ_{AB} の不変性を考慮すれば、これは成分の関係 $\phi_A \equiv \epsilon_{AB} \phi^B$ が保持されること

$$\phi'_A = \epsilon_{AB} (U^B_C \phi^C) = \epsilon_{AB} \phi^{B'} \quad (158)$$

を意味するに過ぎず、もっともな結果である。すると変換則 (157) は具体的には

$$(\phi_0 \ \phi_1) \rightarrow (\phi'_0 \ \phi'_1) = (\phi_0 \ \phi_1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (-\phi_1 \ \phi_0) = (\phi^0 \ \phi^1) \quad (159)$$

を与える。これは等価的に式 (156), (158) を通じても得られる：

$$\phi'_0 = \phi^{1'} = \phi^0 = -\phi_1, \quad \phi'_1 = -\phi^{0'} = \phi^1 = \phi_0.$$

また式 (156), (159) を用いた直接の成分計算により、1組の添字の組に関する縮約の不変性 $\phi'_A \psi^{A'} = \phi_A \psi^A$ が確認できる。これは縮約の不変性が成り立つように変換則 (157) を定義したことから当然であり、したがって U として y 軸周りの角度 $-\pi$ 回転や x 軸周りの角度 $\pm\pi$ 回転の行列を考えても、結果に変わりはない。このときスピノルの縮約 (150) で与えられる状態 Ψ_0 も不変である。

D.3 結節因子

■3j 記号の簡単な例 スピン $j_1 = j_2 = 1/2$ に対して成分のとり得る値は $m_1, m_2 = \pm 1/2$ である。2つのスピンを合成して得られるスピン $j = 0$ の1重項は

$$|j = 1, m = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$$

であり [3, p.279], ここから Clebsch-Gordan 係数 $C_{m_1 m_2}^{j m}$ を読み取ることができる。特に $m_1 + m_2 = m$ を満たさない係数はゼロであることが見て取れる。ここで $m_1, m_2 = \pm 1/2$ でラベルされる行列要素に持つ行列 $C^{00} = (C_{m_1 m_2}^{00})$ を定義すると、結果は具体的に

$$C^{00} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon^{AB})$$

とまとめられる。ただし最右辺では行列要素を指定する添字 $m_1, m_2 = +1/2, -1/2$ をそれぞれ $A, B = 0, 1$ に読み替える。3j 記号との関係は式 (153) より

$$C_{m_1 m_2}^{00} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ m_1 & m_2 & 0 \end{pmatrix}$$

なので、3j 記号の列に関する反対称性が確かに満たされている。また式 (5.30) のノートに書いたように、3j 記号はその定義により $SU(2)$ の作用の下で不変でなければならない。ところが実際、ここで得られた ϵ^{AB} は不変テンソルである (1.7.1 項)。

さらに2つのを合成して得られるスピン $j = 1$ の3重項は

$$|j = 1, m = 1\rangle = |++\rangle, \quad |j = 1, m = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle), \quad |j = 1, m = -1\rangle = |--\rangle$$

であり [3, p.279], ここから Clebsch–Gordan 係数 $C_{m_1 m_2}^{jm}$ を読み取ることができる. 再び行列 $C^{1m} = (C_{m_1 m_2}^{1m})$ を定義して, 具体的に結果をまとめると

$$C^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{10} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{1,-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

となる. 他方で $3j$ 記号を (m_1, m_2) 要素を持つ行列

$$(3j)^{(m)} \equiv \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix}$$

を定義すると, Clebsch–Gordan 係数との関係 (153) は今の場合

$$C^{1m} = (-1)^m \sqrt{3} (3j)^{(-m)}, \quad \therefore (3j)^{(\pm 1)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} C^{1, \mp 1}, \quad (3j)^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} C^{1,0}.$$

ここで $SU(2)$ の作用 U は Clebsch–Gordan 係数 $C_{m_1 m_2}^{jm} = \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm \rangle$ の添字 m に $C^{jm} \rightarrow C^{jm'} D_{m'm}^j(U)$ のように作用し, これは球面テンソルの変換則と同じであるのに対し [3, pp.322–323], $3j$ 記号ないし結節因子は式 (5.30) のノートで見たように, その定義より $\iota^{m\cdots} \rightarrow D_{mm'}^j(U) \iota^{m'\cdots}$ のように変換する. よって球面テンソル T_m との関係 $T_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (V_x \pm iV_y), T_0 = V_z$ でベクトルとして変換する量 V_i が得られるのは, T_m に $3j$ 記号ではなく Clebsch–Gordan 係数を用いたときであると考え, 関係式

$$C^{10} = V_z, \quad C^{1, \pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (V_x \pm iV_y)$$

を通じて, ベクトル添字 $i = 1, 2, 3 = x, y, z$ を持つ行列

$$V_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad V_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を定義する. するとこれは数係数 $1/\sqrt{2}$ の違いを除き, 1.7.2 項末尾で見た不変テンソル

$$\sigma_i^{AB} \equiv \sigma_{iC}^A \epsilon^{CB} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

に一致する. ただし行列要素のラベル $m_1, m_2 = +1/2, -1/2$ をそれぞれ $A, B = 0, 1$ に読み替える. この結果は文献 [2, p.380] の

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ A & B & i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sigma^{iAB}$$

に対応すると考えられる. 他方で $(3j)^{(\pm 1)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (U_x \mp iU_y), (3j)^{(0)} = U_z$ で行列 U_i を定義すると,

$$\begin{aligned} \sigma_{iAB} &\equiv \sigma_{iB}^C \epsilon_{CA} = [\epsilon^T \sigma_i]_{AB} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

の $1/\sqrt{6}$ 倍が得られる^{*168}.

^{*168} $(3j)^{(m)}$ の線形結合から σ_i^{AB} に比例する量 $U_i = \sigma_i^{AB}/\sqrt{6}$ を作るには, $(3j)^{(\pm 1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (U_x \mp iU_y), (3j)^{(0)} = U_z$ としななければならない.

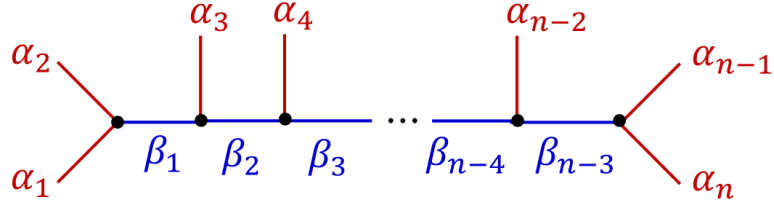


図 124 結節因子 (160) の図解

■4 価以上の結節因子 式 (7.90–91) の箇所で見たとように, 4 価の結節因子は 2 つの 3 価の結節因子を “仮想リンク” で繋ぐことで

$$v_i^{m_1 m_2 m_3 m_4} = i^{m_1 m_2 m_3} i_m^{m_3 m_4}$$

のように得られる. 実際, 1.7.3 項では上記で得た

- スピン $1/2, 1/2, 0$ 間の 3 価の結節因子 ϵ^{AB} をスピン 0 の仮想リンクで繋いで 4 価の結節因子 (1.59) を,
- スピン $1/2, 1/2, 1$ 間の 3 価の結節因子 σ_i^{AB} をスピン 1 の仮想リンクで繋いで 4 価の結節因子 (1.60) を

構成していると見ることができる. 一般に, $n (\geq 4)$ 価の結節点は $(n - 3)$ 本の仮想的なリンクで繋がった $(n - 2)$ 個の 3 価の結節点に分解でき, 対応して結節因子を

$$v_{i_1 \dots i_{n-3}}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = i^{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1} i_{\beta_1}^{\alpha_3 \beta_2} i_{\beta_2}^{\alpha_4 \beta_3} \dots i_{\beta_{n-3}}^{\alpha_{n-1} \alpha_n}, \quad (160)$$

のように構成できる, 図 124 を見よ.

参考文献

- Adler, S L. 1982. Einstein gravity as a symmetry breaking effect in quantum field theory. *Rev. Mod. Phys.*, **54**, 729.
- Agullo, I., and Corichi, A. 2013. Loop quantum cosmology. arXiv:1302.3833.v1 [gr-qc]. [In Ashtekar, A. and Petkov, V. (eds.). 2014. *The Springer Handbook of Spacetime*. Springer.]
- Agullo, I., Ashtekar, A., and Nelson, W. 2012. A quantum gravity extension of the inflationary scenario. *Phys. Rev. Lett.*, **109**, 251301, arXiv:1209.1609.
- Alesci, E, and Cianfrani, F. 2013. Quantum-reduced loop gravity: cosmology. *Phys. Rev.*, **D87**, 83521, arXiv:1301.2245.
- Alesci, E, and Rovelli, C. 2007. Complete LQG propagator: difficulties with the Barrett–Crane vertex. *Phys. Rev.*, **D76**(10), 104012, arXiv:0708.0883.
- Alesci, E, and Rovelli, C. 2008. The complete LQG propagator: II. Asymptotic behavior of the vertex. *Phys. Rev.*, **D77**, 44024, arXiv:0711.1284.
- Alexandrov, S. 2010. New vertices and canonical quantization. *Phys. Rev.*, **D82**(July), 24024, arXiv:1004.2260.
- Aquilanti, V., Haggard, H. M., Hedeman, A., Jeevanjee, N., Littlejohn, R. G., and Yu, L. 2010. Semiclassical mechanics of the Wigner 6j-Symbol. arXiv:1009.2811.
- Arkani-Hamed, N., Dubovsky, S., Nicolis, A., Trincherini, E., and Villadoro, G. 2007. A Measure of de Sitter entropy and eternal inflation. *J. High. Energy. Phys.*, **0705**, 55, arXiv:0704.1814.
- Arnold, V. I. 1989. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer Verlag.
- Arnowitt, R. L., Deser, S., and Misner, C. W. 1962. The dynamics of general relativity. arXiv:0405109 [gr-qc].
- Ashtekar, A. 1986. New variables for classical and quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 2244–2247.
- Ashtekar, A. 1991. *Lectures on Non-Perturbative Canonical Gravity*. World Scientific.
- Ashtekar, A. 2009. Loop quantum cosmology: an overview. *Gen. Relat. Gravit.*, **41**, 707–741, arXiv:0812.0177.
- Ashtekar, A. 2011. Introduction to loop quantum gravity. In: *Proceedings of the 3rd Quantum Gravity and Quantum Geometry School*. PoS (QGQG2011)001.
- Ashtekar, A., and Krasov, K. 1998 Quantum geometry and black holes. In: B. R. Iyer and B. Bhawel (eds.), *‘Black Holes, Gravitational Radiation and the Universe’, Essays in Honor of C. V. Vishveshwara* (pp.149–170). Kluwer.
- Ashtekar, A., and Lewandowski, J. 1995. Projective techniques and functional integration for gauge theories. *J. Math. Phys.*, **36**, 2170–2191, arXiv:9411046 [gr-qc].
- Ashtekar, A., and Lewandowski, J. 1997. Quantum theory of geometry. I: Area operators. *Classical Quant. Grav.*, **14**, A55–A82, arXiv:9602046 [gr-qc].
- Ashtekar, A., and Lewandowski, J. 1998. Quantum theory of geometry. II: Volume operators. *Adv. Theor. Math. Phys.*, **1**, 388–429, arXiv:9711031 [gr-qc].
- Ashtekar, A., and Lewandowski, J. 2004. Background independent quantum gravity: A status report.

- Classical Quant. Grav.*, **21**, R53, arXiv:0404018 [gr-qc].
- Ashtekar, A., and Petkov, V. 2014. *Springer Handbook of Spacetime*. Springer.
- Ashtekar, A., and Singh, P. 2011. Loop quantum cosmology: a status report. *Classical Quant. Grav.*, **28**, 213001, arXiv:1108.0893.
- Ashtekar, A., Rovelli, C., and Smolin, L. 1991. Gravitons and loops. *Phys. Rev.*, **D44**, 1740–1755, arXiv:9202054 [hep-th].
- Ashtekar, A., Rovelli, C., and Smolin, L. 1992. Weaving a classical geometry with quantum threads. *Phys. Rev. Lett.*, **69**(Mar.), 237–240, arXiv:9203079 [hep-th].
- Ashtekar, A., Baez, J., Corichi, A., and Krasnov, K. 1998. Quantum geometry and black hole entropy. *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 904–907, arXiv:9710007 [gr-qc].
- Ashtekar, A., Engle, J., and Van Den Broeck, C. 2005. Quantum horizons and black hole entropy: inclusion of distortion and rotation. *Classical Quant. Grav.*, **22**, L27, arXiv:0412003 [gr-qc].
- Ashtekar, A., Kaminski, W., and Lewandowski, J. 2009. Quantum field theory on a cosmological, quantum space-time. *Phys. Rev.*, **D79**, 64030, arXiv:0901.0933 [gr-qc].
- ATLAS Collaboration. 2012. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Phys. Lett. B*, **716**(1), 1–29.
- Baez, J. C. 1994a. Generalized measures in gauge theory. *Lett. Math. Phys.*, **31**, 213–223.
- Baez, J. C. (ed.). 1994b. *Knots and Quantum Gravity*. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 1. Clarendon Press.
- Baez, J. C., and Muniain, J. P. 1994. *Gauge Fields, Knots, and Gravity*. World Scientific, Singapore.
- Bahr, B., and Thiemann, T. 2009. Gauge-invariant coherent states for loop quantum gravity II: Non-abelian gauge groups. *Classical Quant. Grav.*, **26**, 45012, arXiv:0709.4636.
- Bahr, B., Hellmann, F., Kaminski, W., Kisielowski, M., and Lewandowski, J. 2011. Operator spin foam models. *Classical Quant. Grav.*, **28**, 105003, arXiv:1010.4787.
- Baratin, A., Dittrich, B., Oriti, D., and Tambornino, J. 2010. Non-commutative flux representation for loop quantum gravity. arXiv:1004.3450 [hep-th].
- Barbero, J. F. 1995. Real Ashtekar variables for Lorentzian signature space times. *Phys. Rev.*, **D51**, 5507–5510, arXiv:9410014 [gr-qc].
- Barbieri, A. 1998. Quantum tetrahedra and simplicial spin networks. *Nucl. Phys.*, **B518**, 714–728, arXiv:9707010 [gr-qc].
- Bardeen, J. M., Carter, B., and Hawking, S. W. 1973. The four laws of black hole mechanics. *Commun. Math. Phys.*, **31**, 161–170.
- Barrau, A., and Rovelli, C. 2014. Fast Radio Bursts and White Hole Signals, arXiv:1409.4031.
- Barrau, A., and Rovelli, C. 2014. Planck star phenomenology, arXiv:1409.4031.
- Barrett, J. W., and Crane, L. 1998. Relativistic spin networks and quantum gravity. *J. Math. Phys.*, **39**, 3296–3302, arXiv:9709028 [gr-qc].
- Barrett, J. W., and Crane, L. 2000. A Lorentzian signature model for quantum general relativity. *Classical Quant. Grav.*, **17**, 3101–3118, arXiv:9904025 [gr-qc].
- Barrett, J. W., and Naish-Guzman, I. 2009. The Ponzano–Regge model. *Classical Quant. Grav.*, **26**, 155014, arXiv:0803.3319.

- Barrett, J. W., Dowdall, R. J., Fairbairn, W. J., Hellmann, F., and Pereira, R. 2010. Lorentzian spin foam amplitudes: graphical calculus and asymptotics. *Classical Quant. Grav.*, **27**, 165009, arXiv:0907.2440.
- Barrett, J., Giesel, K., Hellmann, F., Jonke, L., Krajewski, T., *et al.* 2011a. Proceedings of 3rd Quantum Geometry and Quantum Gravity School. *Proceedings of Science, PoS, (QGQGS2011)*.
- Barrett, J. W., Dowdall, R. J., Fairbairn, W. J., Hellmann, F., and Pereira, R. 2011b. Asymptotic analysis of Lorentzian spin foam models. In: *Proceedings of the 3rd Quantum Gravity and Quantum Geometry School*. PoS **QGQGS2011009**.
- Battisti, M. V., Marciano, A., and Rovelli, C. 2010. Triangulated loop quantum cosmology: Bianchi IX and inhomogenous perturbations. *Phys.Rev.D*, **81**, 64019.
- Bekenstein, J. D. 1973. Black holes and entropy. *Phys. Rev.*, **D7**, 2333–2346.
- Ben Geloun, J., Gurau, R., and Rivasseau, V. 2010. EPRL/FK group field theory. *Europhys. Lett.*, **92**, 60008, arXiv:1008.0354 [hep-th].
- Bertone, G. 2010. *Particle Dark Matter*. Cambridge University Press.
- Bianchi, E. 2012a. Entropy of non-extremal black holes from loop gravity. arXiv:1204.5122.
- Bianchi, E. 2012b. Horizon entanglement entropy and universality of the graviton coupling. arXiv:1211.0522.
- Bianchi, E., and Ding, Y. 2012. Lorentzian spinfoam propagator. *Phys.Rev.*, **D86**, 104040, arXiv:1109.6538.
- Bianchi, E., and Rovelli, C. 2010a. Is dark energy really a mystery? *Nature*, **466**, 321, arXiv:1003.3483.
- Bianchi, E., and Rovelli, C. 2010b. Why all these prejudices against a constant? arXiv:1002.3966.v3.
- Bianchi, E., and Wieland, W. 2012. Horizon energy as the boost boundary term in general relativity and loop gravity. arXiv:ArXiv:1205.5325.
- Bianchi, E., Magliaro, E., and Perini, C. 2009. LQG propagator from the new spin foams. *Nucl. Phys.*, **B822**, 245–269, arXiv:0905.4082.
- Bianchi, E., Magliaro, E., and Perini, C. 2010a. Coherent spin networks. *Phys. Rev.*, **D82**, 24012, arXiv:0912.4054.
- Bianchi, E., Han, M., Magliaro, E., Perini, C., and Wieland, W. 2010b. Spinfoam fermions. arXiv:1012.4719.
- Bianchi, E., Magliaro, E., and Perini, C. 2010c. Spinfoams in the holomorphic representation. *Phys.Rev.D*, **82**, 124031, arXiv:1004.4550[gr-qc].
- Bianchi, E., Rovelli, C., and Vidotto, F. 2010d. Towards spinfoam cosmology. *Phys. Rev.*, **D82**, 84035, arXiv:1003.3483.
- Bianchi, E., Krajewski, T., Rovelli, C., and Vidotto, F. 2011a. Cosmological constant in spinfoam cosmology. *Phys. Rev.*, **D83**, 104015, arXiv:1101.4049 [gr-qc].
- Bianchi, E., Donà, P., and Speziale, S. 2011b. Polyhedra in loop quantum gravity. *Phys. Rev.*, **D83**, 44035, arXiv:1009.3402.
- Bianchi, E., Haggard, H. M., and Rovelli, C. 2013. The boundary is mixed. arXiv:1306.5206.
- Bisognano, J. J., and Wichmann, E. H. 1976. On the duality condition for quantum fields. *J. Math. Phys.*, **17**, 303–321.
- Bohr, N., and Rosenfeld, L. 1933. Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs. *Mathematiks-fysike Meddeleser*, **12**, 65.
- Bojowald, M. 2001. The semiclassical limit of loop quantum cosmology. *Classical Quant. Grav.*, **18** (Sept.),

- L109–L116, arXiv:0105113 [gr-qc].
- Bojowald, M. 2005. Loop quantum cosmology. *Living Rev. Relativ.*, **8**, 11, arXiv:0601085 [gr-qc].
- Bojowald, M. 2011. Quantum cosmology. *Lect. Notes Phys.*, **835**, 1–308.
- Bonzom, V. 2009. Spin foam models for quantum gravity from lattice path integrals. *Phys. Rev.*, **D80**, 64028, arXiv:0905.1501.
- Bonzom, V., and Livine, E. R. 2011. Yet another recursion relation for the 6j-Symbol. arXiv:1103.3415 [gr-qc].
- Borja, E. F., Diaz-Polo, J., Garay, I., and Livine, E. R. 2010. Dynamics for a 2-vertex quantum gravity model. *Classical Quant. Grav.*, **27**, 235010.
- Borja, E. F., Garay, I., and Vidotto, F. 2011. Learning about quantum gravity with a couple of nodes. *SIGMA* **8**, 15.
- Born, M., and Jordan, P. 1925. *Zur Quantenmechanik. Zeitschrift für Physik*, **34**, 858–888.
- Born, M., Jordan, P., and Heisenberg, W. 1926. *Zur Quantenmechanik II. Zeitschrift für Physik*, **35**, 557–615.
- Boulatov, D V. 1992. A Model of three-dimensional lattice gravity. *Mod. Phys. Lett.*, **A7**, 1629–1646, arXiv:9202074 [hep-th].
- Bozza, V., Feoli, A., Papini, G., and Scarpetta, G. 2000. Maximal acceleration effects in Reissner–Nordstrom space. *Phys. Lett.*, **A271**, 35–43, arXiv:0005124 [gr-qc].
- Bozza, V., Feoli, A., Lambiase, G., Papini, G., and Scarpetta, G. 2001. Maximal acceleration effects in Kerr space. *Phys. Lett.*, **A283**, 53–61, arXiv:0104058 [gr-qc].
- Brandt, H. E. 1989. Maximal proper acceleration and the structure of space-time. *Found. Phys. Lett.*, **2**, 39.
- Bronstein, M. P. 1936a. Kvantovanie gravitatsionnykh voln (Quantization of gravitational waves). *Zh. Eksp. Tear. Fiz.*, **6**, 195.
- Bronstein, M. P. 1936b. Quantentheorie schwacher Gravitationsfelder. *Phys. Z. Sowjetunion*, **9**, 140–157.
- Buffenoir, E., and Roche, P. 1999. Harmonic analysis on the quantum Lorentz group. *Commun. Math. Phys.*, **207**(3), 499–555, arXiv:9710022 [q-alg].
- Caianiello, E. R. 1981. Is there a maximal acceleration? *Lett. Nuovo Cim.*, **32**, 65.
- Caianiello, E. R., and Landi, G. 1985. Maximal acceleration and Sakharov’s limiting temperature. *Lett. Nuovo Cim.*, **42**, 70.
- Caianiello, E. R., Feoli, A., Gasperini, M., and Scarpetta, G. 1990. Quantum corrections to the space-time metric from geometric phase space quantization. *Int. J. Theor. Phys.*, **29**, 131.
- Cainiello, E. R., Gasperini, M., and Scarpetta, G. 1991. Inflation and singularity prevention in a model for extended-object-dominated cosmology. *Classical and Quant. Grav.*, **8**(4), 659.
- Caillaudeau, T., Mielczarek, J., Barrau, A., and Grain, J. 2012a. Anomaly-free scalar perturbations with holonomy corrections in loop quantum cosmology. *Classical Quant. Grav.*, **29**, 95010, arXiv:1111.3535 [gr-qc].
- Caillaudeau, T., Barrau, A., Grain, J., and Vidotto, F. 2012b. Consistency of holonomy-corrected scalar, vector and tensor perturbations in loop quantum cosmology. *Phys. Rev.*, **D86**, 87301, arXiv:1206.6736.
- Carlip, S., and Teitelboim, C. 1995. The Off-shell black hole. *Classical Quant. Grav.*, **12**, 1699–1704,

- arXiv:9312002 [gr-qc].
- Carter, J. S., Flath, D. E., and Saito, M. 1995. *The Classical and Quantum 6j-symbol*. Princeton University Press.
- Chandia, O., and Zanelli, J. 1997. Torsional topological invariants (and their relevance for real life). arXiv:hep-th/9708138 [hep-th].
- Chirco, G., Haggard, H. M., and Rovelli, C. 2013. Coupling and equilibrium for general-covariant systems. *Phys. Rev.* **D88**, 084027, arXiv:1309.0777.
- Choquet-Bruhat, Y., and Dewitt-Morette, C. 2000. *Analysis, Manifolds and Physics, Part II*. North Holland.
- Choquet-Bruhat, Y., and Dewitt-Morette, C. 2004. *Analysis, Manifolds and Physics, Part I*. 2 edn. North Holland.
- Christodoulou, M., Riello, A., and Rovelli, C. 2012. How to detect an anti-spacetime. *Int. J. Mod. Phys.*, **D21**, 1242014, arXiv:1206.3903 [gr-qc].
- Christodoulou, M., Langvik, M., Riello, A., Röken, C., and Rovelli, C. 2013. Divergences and orientation in spinfoams. *Classical Quantum. Grav.*, **30**, 055009, arXiv:1207.5156.
- CMS Collaboration. 2012. Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC. *Phys. Lett. B*, **716**(1), 30–61.
- Colosi, D., and Rovelli, C. 2003. A simple background-independent Hamiltonian quantum model. *Phys. Rev.*, **D68**, 104008, arXiv:0306059 [gr-qc].
- Colosi, D., and Rovelli, C. 2009. What is a particle? *Classical Quant. Grav.*, **26**, 25002, arXiv:0409054 [gr-qc].
- Connes, A., and Rovelli, C. 1994. Von Neumann algebra automorphisms and time thermodynamics relation in general covariant quantum theories. *Classical Quant. Grav.*, **11**, 2899–2918, arXiv:9406019 [gr-qc].
- Conrady, F., and Freidel, L. 2008. Path integral representation of spin foam models of 4d gravity. *Classical Quant. Grav.*, **25**, 245010, arXiv:0806.4640.
- De Pietri, R., Freidel, L., Krasnov, K., and Rovelli, C. 2000. Barrett–Crane model from a Boulatov–Ooguri field theory over a homogeneous space. *Nucl. Phys.*, **B574**, 785–806, arXiv:9907154 [hep-th].
- DeWitt, B. S. 1967. Quantum Theory of Gravity. 1. The canonical theory. *Phys. Rev.*, **160**, 1113–1148.
- Ding, Y., and Han, M. 2011. On the asymptotics of quantum group spinfoam model. arXiv:1103.1597.
- Ding, Y., and Rovelli, C. 2010a. Physical boundary Hilbert space and volume operator in the Lorentzian new spin-foam theory. *Classical Quant. Grav.*, **27**, 205003, arXiv:1006.1294.
- Ding, Y., and Rovelli, C. 2010b. The volume operator in covariant quantum gravity. *Classical Quant. Grav.*, **27**, 165003, arXiv:0911.0543.
- Dirac, P. A. M. 1950. Generalized Hamiltonian dynamics. *Can. J. Math.*, **2**, 129–148.
- Dirac, P. A. M. 1956. Electrons and the vacuum. In: *Dirac Papers*. Florida State University Libraries, Tallahassee, Florida, USA.
- Dirac, P. A. M. 1958. Generalized Hamiltonian dynamics. *Proc. R. Soc. Lond.*, **246**, 326–332.
- Dirac, P. 2001. *Lectures on Quantum Mechanics*. Dover Books on Physics. New York: Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York.
- Dittrich, B., Martin-Benito, M., and Steinhaus, S. 2013. Quantum group spin nets: refinement limit and

relation to spin foams.arXiv:1312.0905.

- Doná, P., and Speziale, S. 2013. Introductory lectures to loop quantum gravity. In: Bounames, A., and Makhoulouf, A. (eds.), *TVC 79. Gravitation: théorie et expérience*. Hermann.
- Durr, S., Fodor, Z., Frison, J., Hoelbling, C., Hoffmann, R., *et al.* 2008. Ab-Initio determination of light hadron masses. *Science*, **322**, 1224–1227, arXiv:0906.3599 [hep-lat].
- Einstein, A. 1905a. On a heuristic viewpoint of the creation and modification of light. *Annalen der Physik*, **1905**(17), 133–148.
- Einstein, A. 1905b. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*, **1905**(10), 891–921.
- Einstein, A. 1915. Zur Allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsher. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, **1915**, 778–786.
- Einstein, A. 1916. Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, **49**, 769–822.
- Einstein, A. 1917. Cosmological considerations in the general theory of relativity. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, **1917**, 142–152.
- Engle, J., and Pereira, R. 2009. Regularization and finiteness of the Lorentzian LQG vertices. *Phys. Rev.*, **D79**, 84034, arXiv:0805.4696.
- Engle, J., Pereira, R., and Rovelli, C. 2007. The loop-quantum-gravity vertex-amplitude. *Phys. Rev. Lett.*, **99**, 161301, arXiv:0705.2388.
- Engle, J., Pereira, R., and Rovelli, C. 2008a. Flipped spinfoam vertex and loop gravity. *Nucl. Phys.*, **B798**, 251–290, arXiv:0708.1236.
- Engle, J., Livine, E., Pereira, R., and Rovelli, C. 2008b. LQG vertex with finite Immirzi parameter. *Nucl. Phys.*, **B799**, 136–149, arXiv:0711.0146.
- Fairbairn, W. J., and Meusburger, C. 2012. Quantum deformation of two four-dimensional spin foam models. *J. Math. Phys.*, **53**, 22501, arXiv:1012.4784 [gr-qc].
- Farmelo, G. 2009. *The Strangest Man. The Hidden Life of Paul Dirac, Quantum Genius*. Faber and Faber.
- Feoli, A., Lambiase, G., Papini, G., and Scarpetta, G. 1999. Schwarzschild field with maximal acceleration corrections. *Phys. Lett.*, **A263**, 147–153, arXiv:9912089 [gr-qc].
- Feynman, R. P. 1948. Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 367–387.
- Flanders, H. 1963. *Differential Forms: With Applications to the Physical Sciences*. Dover.
- Folland, G. B. 1995. *A Course in Abstract Harmonic Analysis*. CRC Press.
- Frankel, T. 2003. *The Geometry of Physics: An Introduction*. 2 edn. Cambridge University Press.
- Freidel, L., and Krasnov, K. 2008. A new spin foam model for 4d gravity. *Classical Quant. Grav.*, **25**, 125018, arXiv:0708.1595.
- Freidel, L., and Speziale, S. 2010a. From twistors to twisted geometries. *Phys. Rev.*, **D82**, 84041, arXiv:1006.0199 [gr-qc].
- Freidel, L., and Speziale, S. 2010b. Twisted geometries: A geometric parametrisation of SU(2) phase space. *Phys. Rev.*, **D82**, 84040, arXiv:1001.2748.
- Freidel, L., Krasnov, K., and Livine, E. R. 2009. Holomorphic factorization for a quantum tetrahedron. arXiv:0905.3627.
- Frodden, E., Ghosh, A., and Perez, A. 2011. Black hole entropy in LQG: Recent developments. *AIP Conf.*

- Proc.*, **1458**, 100–115.
- Frodden, E., Geiller, M., Noui, K., and Perez, A. 2012. Black hole entropy from complex Ashtekar variables. arXiv:1212.4060.
- Gambini, R., and Pullin, J. 2010. *Introduction to Loop Quantum Gravity*. Oxford University Press.
- Gel’fand, I. M., and Shilov, G. E. 1968. *Generalized functions 1–5*. Academic Press.
- Gel’fand, I. M., Minlos, R. A., and Shapiro, Z. Ya. 1963. *Representations of the Rotation and Lorentz Groups and Their Applications*. Pergamon Press.
- Ghosh, A., and Perez, A. 2011. Black hole entropy and isolated horizons thermodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, **107**, 241301, arXiv:1107.1320.
- Ghosh, A., Noui, K., and Perez, A. 2013. Statistics, holography, and black hole entropy in loop quantum gravity. arXiv:1309.4563.
- Gibbons, G. W., and Hawking, S. W. 1977. Action integrals and partition functions in quantum gravity. *Phys. Rev.*, **D15**(10), 2752–2756.
- Gorelik, G., and Frenkel, V. 1994. *Matvei Petrovich Bronstein and Soviet Theoretical Physics in the Thirties*. Birkhäuser Verlag.
- Haag, R. 1996. *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras*. Springer.
- Haggard, H. M. 2011. Asymptotic analysis of spin networks with applications to quantum gravity. PhD dissertation, University of California, Berkeley. <http://bohr.physics.berkeley.edu/hal/pubs/Thesis/>.
- Haggard, H. M., and Rovelli, C. 2013. Death and resurrection of the zeroth principle of thermodynamics. *J. Mod. Phys.*, **D22**, 1342007, arXiv:1302.0724.
- Haggard, H. M., and Rovelli, C. 2014. Black hole fireworks: quantum-gravity effects outside the horizon spark black to white hole tunnelling. arXiv:1407.0989.
- Haggard, H. M., Rovelli, C., Wieland, W., and Vidotto, F. 2013. The spin connection of twisted geometry. *Phys. Rev.*, **D87**, 24038, arXiv:1211.2166.
- Halliwell, J. J., and Hawking, S. W. 1985. The origin of structure in the universe. *Phys. Rev.*, **D31**, 1777.
- Han, M. 2011a. 4-Dimensional spin-foam model with quantum Lorentz group. *J. Math. Phys.*, **52**, 72501, arXiv:1012.4216 [gr-qc].
- Han, M. 2011b. Cosmological constant in LQG vertex amplitude. *Phys. Rev.*, **D84**, 64010, arXiv:1105.2212.
- Han, M. 2013. Covariant loop quantum gravity, low energy perturbation theory, and Einstein gravity. arXiv:1308.4063.
- Han, M. 2014. Black hole entropy in loop quantum gravity, analytic continuation, and dual holography. arXiv:1402.2084. <http://arxiv.org/abs/1402.2084>.
- Han, M., and Rovelli, C. 2013. Spin-foam fermions: PCT Symmetry, Dirac determinant, and correlation functions. *Classical Quant. Grav.*, **30**, 75007, arXiv:1101.3264.
- Han, M., and Zhang, M. 2013. Asymptotics of spinfoam amplitude on simplicial manifold: Lorentzian theory. *Classical Quant. Grav.*, **30**, 165012, arXiv:1109.0499 [gr-qc].
- Hartle, J. B., and Hawking, S. W. 1983. Wave function of the universe. *Phys. Rev.*, **D28**, 2960–2975.
- Hawking, S. W. 1974. Black hole explosions? *Nature*, **248**, 30–31.
- Hawking, S. W. 1975. Particle creation by black holes. *Commun. Math. Phys.*, **43**, 199–220.
- Hawking, S. W. 1980. The path integral approach to quantum gravity. In: Hawking, S. W., Israel, W.

- (eds.) *General Relativity*. Cambridge University Press; 746–789.
- Hawking, S. W., and Ellis, G. F. R. 1973. *The Large Scale Structure of Space-time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press.
- Heisenberg, W. 1925. Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen. *Zeitschrift für Physik*, **33**(1), 879–893.
- Hellmann, F., and Kaminski, W. 2013. Holonomy spin foam models: asymptotic geometry of the partition function. arXiv:1307.1679.
- Hojman, R., Mukku, C., and Sayed, W. A. 1980. Parity violation in metric torsion theories of gravity. *Phys. Rev.*, **D22**, 1915–1921.
- Hollands, S., and Wald, R. M. 2008. Quantum field theory in curved spacetime, the operator product expansion, and dark energy. *Gen. Relat. Gravit.*, **40**, 2051–2059, arXiv:0805.3419.
- Holst, S. 1996. Barbero’s Hamiltonian derived from a generalized Hilbert–Palatini action. *Phys. Rev.*, **D53**, 5966–5969, arXiv:9511026 [gr-qc].
- Kaminski, W. 2010. All 3-edge-connected relativistic BC and EPRL spin networks are integrable. arXiv:1010.5384 [gr-qc].
- Kaminski, W., Kieselowski, M., and Lewandowski, J. 2010a. Spin-foams for all loop quantum gravity. *Classical Quant. Grav.*, **27**, 95006, arXiv:0909.0939.
- Kaminski, W., Kieselowski, M., and Lewandowski, J. 2010b. The EPRL intertwiners and corrected partition function. *Classical Quant. Grav.*, **27**, 165020, arXiv:0912.0540.
- Kauffman, L. H., and Lins, S. L. 1994. *Temperley–Lieb Recoupling Theory and Invariants of 3-Manifolds*. Annals of Mathematics Studies, vol. 134. Princeton University Press.
- Kiefer, C. 2007. *Quantum Gravity (International Series of Monographs on Physics)*. 2 edn. Oxford University Press.
- Kobayashi, S., and Nomizu, K. *Foundations of Differential Geometry*, Interscience (John Wiley), vol. 1 (1963) and vol. 2 (1968).
- Kogut, J. B., and Susskind, L. 1975. Hamiltonian Formulation of Wilson’s lattice gauge theories. *Phys. Rev.*, **D11**, 395.
- Krajewski, T. 2011. Group field theories. In: *Proceedings of the 3rd Quantum Gravity and Quantum Geometry School*. PoS(QGQGS2011)005.
- Krajewski, T., Magnen, J., Rivasseau, V., Tanasa, A., and Vitale, P. 2010. Quantum corrections in the group field theory formulation of the EPRL/FK Models. *Phys. Rev.*, **D82**, 124069, arXiv:1007.3150 [gr-qc].
- Landau, L. D., and Lifshitz, E. M. 1951. *The Classical Theory of Fields*. Pergamon Press.
- Landau, L. D., and Lifshitz, E. M. 1959. *Quantum Mechanics*. Pergamon Press.
- Landau, L., and Peierls, R. 1931. Erweiterung des Unbestimmtheitsprinzips für die relativistische Quantentheorie. *Zeitschrift für Physik*, **69**, 56–69.
- Lewandowski, J. 1994. Topological measure and graph-differential geometry on the quotient space of connections. *Int. J. Mod. Phys. D*, **3**, 207–210.
- Liberati, S., and Maccione, L. 2009. Lorentz violation: motivation and new constraints. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **59**, 245–267, arXiv:0906.0681 [astro-ph.HE].

- Littlejohn, R. 2013. *Lectures in Marseille*. [To appear.]
- Littlejohn, R. G. 1992. The Van Vleck formula, Maslov theory, and phase space geometry. *J. Stat. Phys.*, **68**, 7–50.
- Livine, E. R., and Speziale, S. 2007. A new spinfoam vertex for quantum gravity. *Phys. Rev.*, **D76**, 84028, arXiv:0705.0674.
- Magliaro, E., and Perini, C. 2011a. Emergence of gravity from spinfoams. *EPL (Europhysics Letters)*, **95**(3), 30007, arXiv:1108.2258.
- Magliaro, E., and Perini, C. 2011b. Regge gravity from spinfoams. arXiv:1105.0216.
- Magliaro, E., and Perini, C. 2012. Local spin foams. *Int. J. Mod. Phys.*, **D21**, 1250090, arXiv:1010.5227 [gr-qc].
- Magliaro, E., and Perini, C. 2013. Regge gravity from spinfoams. *Int. J. Mod. Phys. D*, **22**(Feb.), 1350001, arXiv:1105.0216.
- Magliaro, E., Marciano, A., and Perini, C. 2011. Coherent states for FLRW space-times in loop quantum gravity. *Phys. Rev. D*, **83**, 44029.
- Misner, C. W. 1957. Feynman quantization of general relativity. *Rev Mod Phys*, **29**, 497.
- Misner, C. W., Thorne, K., and Wheeler, J. A. 1973. *Gravitation (Physics Series)*. W. H. Freeman.
- Mizoguchi, S., and Tada, T. 1992. Three-dimensional gravity from the Turaev–Viro invariant. *Phys. Rev. Lett.*, **68**, 1795–1798, arXiv:9110057 [hep-th].
- Morales-Tecotl, H. A., and Rovelli, C. 1994. Fermions in quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 3642–3645, arXiv:9401011 [gr-qc].
- Morales-Tecotl, H. A., and Rovelli, C. 1995. Loop space representation of quantum fermions and gravity. *Nucl. Phys.*, **B451**, 325–361.
- Mukhanov, V. F., Feldman, H. A., and Brandenberger, R. H. 1992. Theory of cosmological perturbations. Part 1. Classical perturbations. Part 2. Quantum theory of perturbations. Part 3. Extensions. *Phys. Rept.*, **215**, 203–333.
- Noui, K., and Roche, P. 2003. Cosmological deformation of Lorentzian spin foam models. *Classical Quant. Grav.*, **20**, 3175–3214, arXiv:0211109 [gr-qc].
- Oeckl, R. 2003. A ‘general boundary’ formulation for quantum mechanics and quantum gravity. *Phys. Lett.*, **B575**, 318–324, arXiv:0306025 [hep-th].
- Oeckl, R. 2008. General boundary quantum field theory: foundations and probability interpretation. *Adv. Theor. Math. Phys.*, **12**, 319–352, arXiv:0509122 [hep-th].
- Ooguri, H. 1992. Topological lattice models in four-dimensions. *Mod. Phys. Lett.*, **A7**, 2799–2810, arXiv:9205090 [hep-th].
- Perez, A. 2012. The spin foam approach to quantum gravity. *Living Rev. Relativ.*, **16**, 3, arXiv:1205.2019.
- Perez, A., and Rovelli, C. 2001. A spin foam model without bubble divergences. *Nucl. Phys.*, **B599**, 255–282, arXiv:0006107 [gr-qc].
- Perini, C., Rovelli, C., and Speziale, S. 2009. Self-energy and vertex radiative corrections in LQG. *Phys. Lett.*, **B682**, 78–84, arXiv:0810.1714.
- Planck Collaboration. 2013. Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results. arXiv:1303.5062.

- Ponzano, G., and Regge, Tullio. 1968. Semiclassical limit of Racah coefficients. In: Bloch, F. (ed.), *Spectroscopy and Group Theoretical Methods in Physics*. North-Holland.
- Regge, T. 1961. General relativity without coordinates. *Nuovo Cimento*, **19**, 558–571.
- Reisenberger, M. P., and Rovelli, C. 1997. “Sum over surfaces” form of loop quantum gravity. *Phys. Rev.*, **D56**, 3490–3508, arXiv:9612035.
- Rennert, J., and Sloan, D. 2013. Towards anisotropic spinfoam cosmology. arXiv:1304.6688 [gr-qc].
- Riello, A. 2013. Self-energy of the Lorentzian EPRL-FK spin foam model of quantum gravity. *Phys. Rev.*, **D88**, 24011, arXiv:1302.1781.
- Roberts, J. 1999. Classical 6j-symbols and the tetrahedron. *Geom. Topol.*, **3**, 21–66, arXiv:9812013 [math-ph].
- Rovelli, C. 1993a. Statistical mechanics of gravity and the thermodynamical origin of time. *Classical Quant. Grav.*, **10**, 1549–1566.
- Rovelli, C. 1993b. The basis of the Ponzano–Regge–Turaev–Viro–Ooguri model is the loop representation basis. *Phys. Rev.*, **D48**, 2702–2707, arXiv:math-ph/9304164v1.
- Rovelli, C. 1993c. The statistical state of the universe. *Classical Quant. Grav.*, **10**, 1567.
- Rovelli, C. 1996a. Black hole entropy from loop quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, **77**(16), 3288–3291, arXiv:9603063 [gr-qc].
- Rovelli, C. 1996b. Relational quantum mechanics. *Int. J. Theor. Phys.*, **35**(9), 1637, arXiv:9609002 [quant-ph].
- Rovelli, C. 2004. *Quantum Gravity*. Cambridge University Press.
- Rovelli, C. 2006. Graviton propagator from background-independent quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 151301, arXiv:0508124 [gr-qc].
- Rovelli, C. 2011. Zakopane lectures on loop gravity. In: *Proceedings of the 3rd Quantum Gravity and Quantum Geometry School*. PoS (QGQGS2011)003.
- Rovelli, Carlo. 2013a. General relativistic statistical mechanics. *Phys. Rev. D.*, **D87**, 84055, arXiv:1209.0065[gr-qc].
- Rovelli, C. 2013b. Why Gauge? arXiv:1308.5599.
- Rovelli, C., and Smerlak, M. 2010. Thermal time and the Tolman–Ehrenfest effect: temperature as the “speed of time”. *Classical Quant. Grav.*, **28**, 075007, arXiv:1005.2985.
- Rovelli, C., and Smerlak, M. 2012. In quantum gravity, summing is refining. *Classical Quant. Grav.*, **29**, 55004, arXiv:1010.5437 [gr-qc].
- Rovelli, C., and Smolin, L. 1988. Knot theory and quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, **61**, 1155.
- Rovelli, C., and Smolin, L. 1990. Loop space representation of quantum general relativity. *Nucl. Phys.*, **B331**, 80.
- Rovelli, C., and Smolin, L. 1995a. Discreteness of area and volume in quantum gravity. *Nucl. Phys.*, **B442**, 593–622, arXiv:9411005 [gr-qc].
- Rovelli, C., and Smolin, L. 1995b. Spin networks and quantum gravity, arXiv:9505006 [gr-qc].
- Rovelli, C., and Speziale, S. 2010. On the geometry of loop quantum gravity on a graph. *Phys. Rev.*, **D82**, 44018, arXiv:1005.2927.
- Rovelli, C., and Speziale, S. 2011. Lorentz covariance of loop quantum gravity. *Phys. Rev.*, **D83**, 104029,

- arXiv:1012.1739.
- Rovelli, C., and Vidotto, F. 2008. Stepping out of homogeneity in loop quantum cosmology. arXiv:0805.4585.
- Rovelli, C., and Vidotto, F. 2010. Single particle in quantum gravity and BGS entropy of a spin network. *Phys. Rev.*, **D81**, 44038, arXiv:0905.2983.
- Rovelli, C., and Vidotto, F. 2013. Evidence for maximal acceleration and singularity resolution in covariant loop quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, **111**(9), 091303, arXiv:1307.3228.
- Rovelli, C., and Vidotto, F. 2014. Planck stars. arXiv:1401.6562.
- Rovelli, C., and Zhang, M. 2011. Euclidean three-point function in loop and perturbative gravity. *Classical Quant. Grav.*, **28**, 175010, arXiv:1105.0566 [gr-qc].
- Ruhl, W. 1970. *The Lorentz Group and Harmonic Analysis*. W.A. Benjamin.
- Schrödinger, E. 1926. Quantisierung als Eigenwertproblem. *Annalen der Physik*, **13**, 29.
- Sen, A. 1982. Gravity as a spin system. *Phys. Lett. B*, **119**, 89–91.
- Shannon, C. E. 1948. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, **XXVII**(3), 379.
- Singh, P. 2009. Are loop quantum cosmos never singular? *Classical Quant. Grav.*, **26**, 125005, arXiv:0901.2750.
- Singh, P., and Vidotto, F. 2011. Exotic singularities and spatially curved loop quantum cosmology. *Phys. Rev.*, **D83**, 64027, arXiv:1012.1307.
- Smolin, L. 1994. Fermions and topology. arXiv:9404010 [gr-qc].
- Smolin, L. 2012. General relativity as the equation of state of spin foam. arXiv:1205.5529.
- Sorkin, R. D. 1977. On the relation between charge and topology. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **10**, 717.
- Stone, D. 2013. *Einstein and the Quantum: The Quest of the Valiant Swabian*. Princeton University Press.
- Sundermeyer, K. 1982. *Constrained Dynamics : With Applications to Yang–Mills Theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String Model*. Springer-Verlag.
- Thiemann, T. 2006. Complexifier coherent states for quantum general relativity. *Classical Quant. Grav.*, **23**, 2063–2118, arXiv:0206037 [gr-qc].
- Thiemann, T. 2007. *Modern Canonical Quantum General Relativity*. Cambridge University Press.
- Toller, M. 2003. Geometries of maximal acceleration. arXiv:0312016 [hep-th].
- Tolman, R. C. 1930. On the weight of heat and thermal equilibrium in general relativity. *Phys. Rev.*, **35**, 904–924.
- Tolman, R. C., and Ehrenfest, P. 1930. Temperature equilibrium in a static gravitational field. *Phys. Rev.*, **36**(12), 1791–1798.
- Turaev, V. G., and Viro, O. Y. 1992. State sum in variants of 3 manifolds and quantum 6j symbols. *Topology*, **31**, 865–902.
- Unruh, W. G. 1976. Notes on black hole evaporation. *Phys. Rev.*, **D14**, 870.
- Vidotto, F. 2011. Many-nodes/many-links spinfoam: the homogeneous and isotropic case. *Classical Quant. Grav.*, **28**(245005), arXiv:1107.2633.
- Wald, R. M. 1984. *General relativity*. Chicago, University Press.
- Wheeler, J. A. 1962. *Geometrodynamics*. New York: Academic Press.

- Wheeler, J. A. 1968. Superspace and the nature of quantum geometrodynamics. In: DeWitt, B. S, and Wheeler, J. A. (eds.), *Batelles Rencontres*. Bennjamen.
- Wieland, W. 2012. Complex Ashtekar variables and reality conditions for Holst's action. *Annales Henri Poincare*, **13**, 425, arXiv:1012.1738 [gr-qc].
- Wightman, A. 1959. Quantum field theory in terms of vacuum expectation values. *Phys. Rev.*, **101**(860).
- Wilson, K. G. 1974. Confinement of quarks. *Phys. Rev.*, **D10**, 2445–2459.
- York, J. W. 1972. Role of conformal three-geometry in the dynamics of gravitation. *Phys. Rev. Lett.*, **28**, 1082.

続いて本稿独自の参考文献を以下に示す。

参考文献

- [1] R. ガムビーニ/J. プリン, 2021, 初級講座 ループ量子重力 (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [2] Rovelli, C. (2010) *Quantum Gravity*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [3] J.J.Sakurai, 2017, 現代の量子力学 (上) (桜井明夫訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [4] 江沢洋, 中村孔一, 山本義隆, 2022, 演習詳解 力学 [第 2 版], 株式会社 筑摩書房, 東京.
- [5] L.D. ランダウ, E.M. リフシッツ, 2019, 量子力学 ランダウ=リフシッツ物理学小教程 (好村滋洋, 井上健男訳), 株式会社筑摩書房, 東京.
- [6] 山本義隆, 2025, 物理学の発展——山本義隆自選論集 II, 株式会社筑摩書房, 東京.
- [7] B. ツヴィーバハ, 2013, 初級講座 弦理論《基礎編》(樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [8] 佐藤光, 2019, 群と物理, 丸善出版株式会社, 東京.
- [9] H. ジョージアイ, 2010, 物理学におけるリー代数——アイソスピンから統一理論へ—— (原著第 2 版) (九後汰一郎訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [10] 九後汰一郎, 2018, 新物理学シリーズ 23 ゲージ場の量子論 I, 株式会社培風館.
- [11] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, 2015, ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 場の古典論 (原書第 6 版)(恒藤敏彦, 広重徹訳), 東京図書株式会社, 東京.
- [12] シュッツ, 2010, 第 2 版シュッツ 相対論入門 (江里口良治, 二間瀬敏史訳), 丸善株式会社, 東京.
- [13] ゴールドスタインほか, 2009, 古典力学 (下) 原著第 3 版 (矢野忠ほか訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [14] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, 2013, ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 力学 (増訂第 3 版)(広重徹, 水戸巖訳), 東京図書株式会社, 東京.
- [15] 山本義隆, 中村孔一, 2012, 朝倉物理学大系 2 解析力学 II, 株式会社朝倉書店, 東京.
- [16] 山本義隆, 中村孔一, 2013, 朝倉物理学大系 1 解析力学 I, 株式会社朝倉書店, 東京.
- [17] 石坂智ほか, 2024, 量子情報科学入門 第 2 版, 共立出版株式会社, 東京.
- [18] C. ロヴェッリ, 2023, 一般相対性理論入門 (真貝泰明訳), 森北出版株式会社, 東京.
- [19] Sundance Bilson-Thompson, 2024, Loop Quantum Gravity for the Bewildered: The Self-Dual Approach Revisited (Second Edition), Springer.
- [20] 吉川圭二, 2022, 理工系の基礎数学 新装版 群と表現, 株式会社岩波書店, 東京.
- [21] 杉田勝実ほか, 2005, 経路積分と量子電磁力学 [POD 版], 森北出版株式会社, 東京.

- [22] M. ストーン, 2012, 量子場の物理〔新装版〕(樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [23] F. マンドル, G. ショー, 2013, 場の量子論 第2巻 素粒子の相互作用 (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [24] 中村伝, 1997, 統計力学 物理テキストシリーズ 10, 株式会社岩波書店, 東京.
- [25] J.J.Sakurai, 2014, 現代の量子力学 (下) (桜井明夫訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [26] Sean M. Carroll, 1997, Lecture Notes on General Relativity.