C. ロヴェッリ『量子重力』

本稿はループ量子重力の本格的な入門書

C. Rovelli, 2010, Quantum Gravity, Cambridge University Press, Cambridge

の和訳を兼ねたまとめノートである．私 (筆者) はノートを作成する際，要点と途中計算を分離した見通しの良い形に教科書を再構成した上で，補足・考察を書き加えることを習慣的に心掛けている．しかし本稿では教科書の本文をそのまま訳すに留め，基本的にそれ以上の内容の再構成は行わない．実際，概ね教科書では最小限の計算結果だけが本文に与えられているため，節を改めて本稿でノートとして式の導出に取り組めば，自動的に「要点と途中計算の分離」は達成される．第 7 章以降は事実上ほとんど天下りな読み物となるものの (第 8 章と第 9 章では冒頭でそのような趣旨の宣言が成されている)，入門的な解説としてよくまとまっており，一読の価値がある．

著者 Rovelli は一般向けの本も多く出しているが，ループ量子重力の根本的なテーマである背景時空のない物理のみならず，時間が熱・統計力学から“生まれる”こと (熱時間仮説；3.4 節と 5.5.1 節) や，量子力学の関係的解釈 (5.6 節；独立に読める) など，主要なアイデアは既に本書に含まれている．概念的な説明にも多くの頁数が割かれており，良い意味で“哲学的な”色の強い本と言える．

本稿には筆者の誤りや勘違いが潜んでいるかもしれないことをあらかじめ断っておく．言うまでもなく，原著を当たるに越したことはない．

なお本稿の他にも理論物理の各種ノートを以下のページで公開している．

http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/

R. ガムビーニ/J. プリン『初級講座 ループ量子重力』 [415] のノートも公開している．

量子重力 (本の扉より)

量子重力はおそらく基礎物理学における最も重要な未解決の問題である．それは 20 世紀の物理学における 2 つの偉大な概念的な革命である，量子力学と一般相対性理論を統合する問題である．

本書はこの問題の多くの側面を議論し，ここ 20 年で得られた，重力の背景独立な量子論に向けた技術的および概念的な進展を提示する．本の第 I 部は一般相対論的な概念的革命に照らして，基礎物理を一から再考する方法の探求である．第 II 部は**ループ量子重力**と**スピン・フォーム**形式の詳細な概説である．それは面積と体積のスペクトル，ダイナミクス，物質への理論の拡張，初期の宇宙論とブラックホールの物理への応用に関する結果を含む，この分野の現状の概観を与える．本書は 1930 年代から今日までの，量子重力の研究の進展を概観する，歴史に関する付録で締めくくられる．

「ABOUT THIS BOOK」(裏表紙より)

量子重力はおそらく基礎物理学における最も重要な未解決の問題である．それは 20 世紀の物理学における 2 つの偉大な概念的な革命である，量子力学と一般相対性理論を統合する問題である．この本で提示される，ループとスピン・フォームのアプローチは，この分野の指導的な研究プログラムの 1 つである．この本の第 I 部は一般相対性理論から要求される，古典的および量子論的な Hamilton 形式の物理の基礎の再定式化を議論する．第 II 部は基本的な専門的研究の方向性を網羅する．付録は量子重力の主題の詳細な歴史と，見つけるのが困難な数学的文献と，この主題から立ち上がる哲学的な問題に関する議論を含んでいる．この魅力的なテキストはこの分野に参入する卒業生だけでなく，既に量子重力の研究を行っている研究者にとっても理想的である．この本は哲学者や空間と時間の本性に興味を持つその他の学者にも魅力があるだろう．

本稿では原著巻末の「索引 (Index)」を省略する．

目次

序文 (Foreword)

10^{-33} cm という極めて短距離の Planck 尺度で古典的な一般相対性理論に起きることの問題は，明らかに物理学全体で最も差し迫ったことの 1 つである．その距離尺度に達したときには，既存の理論的構造の重大な修正が必須であることは，あまりに明白であるように見える．この困難に対する，いくつかの真剣な応答がある．それらは有効場の理論，弦理論，ループ量子重力，熱重力 (thermogravity)，ホログラフィー，および創発重力 (emergent gravity) を含んでいる．重力に対する有効場の理論の関係は，量子色力学に対するカイラル摂動論のそれと同じである——長距離では適切だが，短距離では無力である．その主要な貢献は，Einstein–Hilbert 作用は疑いなく，曲率テンソルの高次の冪から構成される無限級数の第 1 項に過ぎないという認識である［これには疑問の余地がある (1.1.2 節)］．弦理論はミクロな理論を形作る上での，超対称性，余剰次元，および標準理論の内部対称性が演じ得る役割を強調する．ループ重力は基礎的な量子問題に最も直接的に取り組み，候補となる背景独立な波動汎関数の構成を特徴付ける．熱重力は半古典的な重力の，温度やエントロピーといった熱力学的な概念との見かけの密接な関係を探求する．密接に関係するホログラフィー的なアイデアはバルク時空で定義された理論を，境界に備わる相補的な記述に関係付ける．最後に創発重力は，長期にわたって検証された凝縮系の理論と素粒子の理論の共生関係が，まだ理解されていないさらなる教訓と併せて，重力的および宇宙論的な文脈にも拡張されねばならないと提案する．

各々のアプローチにおいて，基礎的な問題に対する完全に満足のいく解決策を得る上で，難しい問題が立ちはだかる．各々にはその信奉者の集団があり，今のところ最大のものは弦の共同体である．ほとんどのアプローチはかなり強いイデオロギーを伴い，それは特にそれらが大衆化したときにはあからさまである．これらのイデオロギーの存在は共同体を互いに孤立させる傾向にある．私見では，これは極めて不幸なことである，と言うのも，私自身のイデオロギー (それは上に挙げたものとは異なる) も含め，これら全てのイデオロギーが完全に間違っているということがあり得るからである．その証拠は歴史である：ギリシャ正教徒 (Greeks) から Kepler から Newton から Einstein まで，基礎的な問い (Basic Questions) に関する壮大なアイデアに欠点は何もなかった．我々が入手でき彼らに入手できなかった新しいデータの下では，これらの壮大な見方のほんの一片だけが有効に留まる．標準模型の 30 余りのパラメータの煩雑さや現代宇宙論の記述的な性質は，我々もまた究極の単純性に到達するまでには，かなりの道のりがあることを示唆している．これはイデオロギーを放棄することを意味しない——それらは我々皆が問題に懸命に取り組むよう駆り立てるのに欠かせない．むしろそれは謙虚な態度と，代わりのアプローチに対する高い感受性が欠かせないことを意味する．

本書はこの主題に対する 1 つのアプローチ——ループ量子重力——だけに関係している．それは相当な技術的困難があり，それを扱った文献が手ごわい主題である．この特徴はそれだけで，上で描いたように進歩にとって不可欠な交流を隠してきた．しかしながら，これらのページのうちに，主導的な創始者かつ最も深い思索家の 1 人によって述べられた，主題の圧倒的に分かりやすい説明を見出すだろう．そのような素晴らしい本の存在により，未知の究極理論に著しく貢献する可能性が高いこの重要な主題は，より多くの理論の共同体から理解されるようになるだろう．もしこれが実際に実現すれば，その公表はこのまさに活発な分野における誕生以来の最も重要な発展の 1 つとなるだろう．

James Bjorken

note　Foreword は著者以外の人物 (ここでは James Bjorken) による序文を，Preface は著者自身による序文を表す．

序文 (Preface)

私が長いこと抱いている夢は，理論が最終的に見出され実験的に確かめられたら，量子重力の“専門書”を書くことである．我々はまだその段階にいない．実験的な支持もなければ，充分な理論的合意もない．それでも，過去 20 年にわたり時空の量子論に向けて，多くの研究が発展してきた．多くの問題が明かされ，明確なアプローチが具体化された．そのアプローチは，色々な呼び方があるが[*1]，“ループ量子重力”として最もよく知られている．

量子重力の問題には多くの側面がある．アイデアと結果が文献に走り書きされている．本書において私は，この 20 年の期間に発展した，主要な結果をまとめ，量子重力の全体像を提示することを試みた．その視座は個人的であり，主題の選択は私自身の興味に基づいている．見落とされている事柄について，私は友人と同僚に謝罪する；多くのことが見落とされているのは私自身の限界のせいであり，それについてはまず私が反省せねばならない．

量子重力の問題の広大さを過大評価することは難しい［それほど広大だということ］．20 世紀初期の物理学は，物理的世界に対する我々の理解のまさに基礎を，我々がそれを捉えるのに用いる基本的概念——物質，因果律，空間と時間——の意味を変えることによって修正した．我々はそれらの修正が一緒になって意味を成す，世界の一貫した描像を，まだ描けていない．量子重力の問題は，この新しい一貫した描像を見出し，ひいては 21 世紀の科学的革命を終着させる問題に他ならない．

この種の問題を解決することは，単なる数学的技術の問題ではない．量子力学，相対性理論，電磁気学，そして Newton 力学の誕生がそうであったように，取り組まねばならない概念的で根本的な問題がある．量子論および相対論的な領域において時空を記述するには，どの (場合によっては新しい) 概念が意味を成し，どの古い概念を捨てねばならないのかを理解しなければならない．我々に必要なのは，例えば，単に重力子–重力子散乱振幅を計算するための技術ではない (もっとも我々はいずれそれができるようになりたいのは間違いないけれど)．我々は世界を，量子論と一般相対性理論を通じてそれについて学んだ事柄に照らして，再考しなければならない．

一般相対性理論は，特に，時空構造の本質に対する我々の理解を，その帰結がまだ完全には探求されていないような仕方で修正した．量子重力の研究の大部分は根本的な問題を探求しており，本書の第 I 部 (「相対論的基礎」) はこれらの基本的な問題に充てられている．それは一般相対論的な概念的革命の後に，基礎物理を一から再考する方法の探求である．それがなければ，我々はいかなる仮説的な重力の量子論に対しても，誤った類の問題を問う恐れがある．

本書の第 II 部 (「ループ量子重力」) ではループのアプローチに焦点を当てる．第 II 部で説明するループ理論は，それだけで勉強できるものの，推論や解釈は第 I 部で研究した一般的な枠組みに照らして初めて明瞭になる．理論のいくつかの側面は未だ不完全ではあるが，本を正当化できる程度には主題は充分に成熟している．ループ量子重力の面白さは，私の見解では，今のところそれが (少なくとも原理的には反証可能な) よく定義された物理的な予言を導く量子重力への唯一のアプローチであることであり，より重要なこととしては，それが量子場の物理と，我々が一般相対性理論から発見した世界の見方を真に統合する，最も決然とした試みだということである．

ループ量子重力の手引きは他にもいくつかある．この主題に関する古典的な報告 [1–10] (時系列順) は，

[*1] 表記 (notation) の節を見よ．

理論の発展の様々な段階を描いている．素早い入門には，そして異なる観点を理解するには，レビュー論文 [11–15] を見よ．非常に有用な資料が [16] に見られる．スピン・フォーム理論の良い手引きが [11, 17–19] に見出される．本書は自己充足的であるけれど，他所でよく発達している本質的でない話題については，他の本やレビュー論文を参照することで，私は過剰な重複を避けるように努めた．本書はループ量子重力の物理的および概念的側面に焦点を当てている．もうすぐ完成しようとしている Thomas Thiemann の本 [20] は，同じ理論の数学的基礎に焦点を当てている．これら 2 冊の本は相補的である：ループ量子重力の総論において，この本は大体のところ第 1 巻 (『概論と概念的枠組み』) として読むことができ，Thiemann の本は第 2 巻 (『完全な数学的枠組み』) として読める．

本書は読者が一般相対性理論，量子力学および場の量子論の基本的知識を有していると仮定している．特に，一般相対性理論の章 (第 2 章)，古典力学の章 (第 3 章)，Hamilton 形式の一般相対性理論 (hamiltonian general relativity) の章 (第 4 章)，および量子論の章 (第 5 章) の目的は，これらの理論の伝統的な定式化に既に馴染んでいる読者に，量子重力で必要となる，それらの話題に関する新しい観点を与えることである．

コメントと例の節は小さい字で印刷してある (そのような最初の例は 1.3.1 節を見よ)．脇道やより複雑な話題を含む，最初に読む際には読み飛ばしても後の内容の理解に支障がない節には，タイトルに星 ($*$) を付けてある．本文中の参考文献は理解に厳密に必要となる場合にのみ現れる．各章は，より詳細へと立ち入りたい，あるいは主題の原論文に当たりたい読者にとって重要な参考文献を取り上げた，短い参考文献の節で終わる．ループ量子重力の完全な参考文献を集める大仕事は諦めた．多くの話題に関して，充分な参考文献の情報を見つけることができる，特定のレビュー論文を参照した．ループ量子重力の広範な参考文献は [9] と [20] に与えられている．

私は量子重力を研究することに興味を持っている研究者，それだけでなく，この途方もない未解決の問題に好奇心を持つ優れた博士課程の学生や進取の気性に富む学者 (scholar) のことを考えながら，この本を書いた．私は一般相対論的な量子物理と量子時空へ至る旅路，魅力的な冒険を見つけた．私が見ている美を読者が見て，彼または彼女が旅を完遂できることを望む．展望は魅力であり，旅は終わるにはほど遠い．

note：特筆事項

第 6 段落　第 II 部で説明するループ理論は，それだけで勉強できるものの，
　　推論や解釈は第 I 部で研究した一般的な枠組みに照らして初めて明瞭になる．

第 7 段落　Thiemann の本 [20] はループ量子重力の数学的基礎に焦点を当てており，本書を第 1 巻
　　『概論と概念的枠組み』とすれば，Thiemann の本は第 2 巻『完全な数学的枠組み』と見なせる．

第 9 段落　コメントと例の節は小さい字で印刷してある．
　　最初に読む際には読み飛ばしても支障がない箇所にはタイトルに星 ($*$) を付けてある．

ペーパーバック版への序文

本書の第 1 版から 3 年が経った．この 3 年間に，ループ重力の研究は活発に，そしていくつかの方向へ発展してきた．注目に値する新たな結果は例えば：スピン・フォームとハミルトニアン・ループ理論が 3 次元で等価であることの証明；ループ表現の一意性 (“LOST” 定理) の証明；$r = 0$ ブラックホール特異性の解消；ループ宇宙論の主要な進展；3 次元ループ量子重力 + 物質が実効的な非可換の場の量子論をもたらすという結果；量子ダイナミクスの定義に対する“マスター拘束”プログラム；リンクから粒子を導くアイデア；ブラックホール熱力学からの Immirzi パラメータの再計算；そして最後ではあるが重要なのは，背景独立な量子論からの散乱振幅の計算に向けた第 1 歩である．私はきっと，もうじき重要だと判明する何かを無視している……．

私は興味を持つ読者が特定の最新情報を見つけられる，最近の文献または最近のレビュー論文のノートとヒント (pointers) を加えた．このような急速な発展にも関わらず，しかしながら，全面的に改訂を施したこの本の第 2 版にはまだ早い：この本は，実際そうであるように，依然としてこの分野の包括的な概説を提供しているように私には見える．実際，これらの発展のいくつかは本書の見方――すなわちよく考えられた研究の路線 (lines) は一貫した描像を形成し，(背景となる) 空間と時間のない理路整然とした場の量子論を定義できる，共通言語を定義するという見方――を補強している．

私が悲観的に感じるとき，私は研究路線と未解決の荘厳な数の問題との隔たり (*divergence*) を見ている．私が楽観的に感じるとき，私はその著しい一貫性 (*coherence*) を見ており，我々は 1914 年の Einstein がそうであったように：全ての手続きがそろい，我々は多くの似た場の方程式を試せるようになる……と夢見る．そのとき重力の量子論 (もちろん万物の究極理論ではない) が真に手に入るように私には思われる；我々はそれを手にしているのかもしれない；我々に必要なのはただ技術の正しい組合せ，もう少しの詳細，あるいは最後の 1 つの欠けている鍵となるアイデアかもしれない．

繰り返せば，私の望みはこのペーパーバック版の読者の中に，最後の欠けているアイデアを我々に与えてくれる者が現れることだ．

note　後に共著で入門書『共変ループ量子重力』 [416] が出ている．その序文には本書より簡単ではるかに読みやすく，しかも本書では予示されるに留まっていた，有限の遷移振幅を導く共変な理論における重要な進展を網羅しているとある．

謝辞

この本のオンラインに投稿された草稿や初版に対して，提案や修正を送ってくださった多くの方々に感謝する．その中には M Carling, Alexandru Mustatea, Daniele Oriti, John Baez, Rafael Kaufmann, Nedal, Colin Hayhurst, Jürgen Ehlers, Chris Gauthier, Gianluca Calcagni, Tomas Liko, Chang Chi-Ming, Youngsub Yoon, Martin Bojowald，そして Gen Zhang が含まれる．特に Justin Malecki, Jacob Bourjaily および Leonard Cottrell に特別な感謝を捧げる．

私は，この冒険を共にすることに恵まれた友人たちに，大いなる感謝を捧げる：

冒険の仲間であり，友人でもある Lee Smolin へ．彼独特の創造性と知性，知的自由と完璧な誠実さは，私が人生で見つけた最も素晴らしいものの 1 つである．

Abhay Ashtekar へ．彼のたゆまぬ分析的厳密性，統合力およびリーダーシップは，最も貴重な導きとなってきた．Abhay は我々のアイデアを確立し，直観を定理へと変えた．この本は私のアイデアと仕事と同じぐらい，Lee と Abhay のそれらの成果である．

私を数学と量子重力へと導いた最初の先生である，Laura Scodellari と Chris Isham へ．

Sally とともに，帝国 (Empire) の遠くの地方からやって来たばかりの少年を育ててくた，Ted Newman へ．私は Ted と 10 年間，知的な喜びを共有した．彼の人間性，寛大さ，誠実さ，情熱，そして思索への愛は，私が自分を測る手本となっている．

本書で説明するアイデアと結論を発展させてきた，この分野で仕事をしている友人全員に一人ひとり，私は感謝したいけれど，彼らは多すぎる．私は直接的な協力者と，この分野外の数人の友人にしか言及できない：Luisa Doplicher, Simone Speziale, Thomas Schucker, Florian Conrady, Daniele Colosi, Etera Livine, Daniele Oriti, Florian Girelli, Roberto DePietri, Robert Oeckl, Merced Montesinos, Kirill Krasnov, Carlos Kozameh, Michael Reisenberger, Don Marolf, Berndt Brügmann, Junichi Iwasaki, Gianni Landi, Mauro Carfora, Jorma Louko, Marcus Gaul, Hugo Morales-Tecotl, Laurent Freidel, Renate Loll, Alejandro Perez, Giorgio Immirzi, Philippe Roche, Federico Laudisa, Jorge Pullin, Thomas Thiemann, Louis Crane, Jerzy Lewandowski, John Baez, Ted Jacobson, Marco Toller, Jeremy Butterfield, John Norton, John Barrett, Jonathan Halliwell, Massimo Testa, David Finkelstein, Gary Horowitz, John Earman, Julian Barbour, John Stachel, Massimo Pauri, Jim Hartle, Roger Penrose, John Wheeler そして Alain Connes.

これら全ての友人とともに，私は問題を解くことやお互いを出し抜くこと，あるいは“我々”を“彼ら”より強くするための武器を作ることとはかけ離れた形で，物理学について話す喜びを経験してきた．思うに，物理学とは受け入れられた考えの牢獄を脱し，世界を考える新しい方法を探すことに関係しており，湖が山を映すように現実を映す，我々の架空の夢にある霧のかかった湖を，いくらか晴らすことに関係している．

最も Bonnie に感謝する——彼女は理由を知っている．

術語と表記 (Terminology and notation)

- 本書では断りのない限り「相対論的」とは「一般相対論的」を意味する．特殊相対論に言及する際には，はっきりとそう述べる．同様に「非相対論的」および「前相対論的 (prerelativistic)」は「非一般相対論的」および「前一般相対論的」を意味する．この選択はやや普通ではない (この言葉使いでは特殊相対論は「非相対論的」である)．この理由の 1 つは単に言い回しを流暢にすることである：本書は“一般”相対論的な物理を扱っており，各行で毎度“一般”と繰り返すのは，フランス人が de Gaulle (ド・ゴール［フランスの軍人・政治家］) について語るのとあまりに似ている．［要するに一般相対論の本では「一般相対論」を単に「相対論」と呼ぶのが便利である.］しかしより重要な理由もある：真に相対論の名に値する時空の物理の完璧な革命は一般相対論であって，特殊相対論ではない．この見解は必ずしも今日共有されているものではないが，Einstein の見解だった．Einstein はこの点に関して批判された；しかし私見では，そのような批判は時空に関する Einstein の発見の完全な到達点を見落としている．本書の目的の 1 つは現代の術語において，自分の重力理論は物理学における相対論の完全な実行だという Einstein の直観を擁護することである．この点については第 2 章で詳細に議論する．
- 私はしばしば関数 f と関数の値 $f(x)$ を混同する物理学者の悪い習慣を容認する．重要なときには注意を払う．同様に私は，Maxwell ポテンシャルのような場を $A_\mu(x), A(x)$ あるいは A と表記し，3 つの表記を場の等価な表記方法として扱う，標準的な物理学者の言葉の乱用に従う．やはり，重要なときには注意を払う．
- 特に断りのない限り，全ての場は滑らかであると仮定する．特に断りのない限り，多様体と関数に関する全ての言明は局所的である；すなわち，それらは単一の座標を充てられた領域 (single coordinate patch) 内で成り立つ．一般に私は関数の定義域を指定しない；明らかに方程式は関数が定義されているところで成り立つ．
- 真ん中のギリシャ文字 $\mu, \nu, \cdots = 0, 1, 2, 3$ は 4 次元の時空添字 (spacetime tangent indices) である．
  真ん中の大文字のラテン文字 $I, J, \cdots = 0, 1, 2, 3$ は
  4 次元の Lorentz 添字 (Lorentz tangent indices) である (特殊相対論では $\mu, \nu, \cdots$ と区別されない)．
  冒頭の小文字のラテン文字 $a, b, \cdots = 1, 2, 3$ は 3 次元の添字 (3d tangent indices) である．
  真ん中の小文字のラテン文字 $i, j, \cdots = 1, 2, 3$ は R^3 における 3 次元の添字である．
  4 次元の多様体の座標は普通 $x, y, \cdots$ と表されるのに対し，3 次元の多様体の座標は $\vec{x}, \vec{y}$ (さらには $\vec{\tau}$) と表される．こうして時空座標 x の成分は

  $$x^\mu = (t, \vec{x}) = (x^0, x^a)$$

  と表されるのに対し，Lorentz ベクトル e の成分は $e^I = (e^0, e^i)$ と書かれる．
- η_{IJ} は符号 $[-,+,+,+]$ を持つ Minkowski 計量である．添字 $I, J, \cdots$ の上げ下げは η_{IJ} で行う．
  δ_{ij} は Kronecker のデルタ，あるいは R^3 計量である．添字 $i, j, \cdots$ の上げ下げは δ_{ij} で行う．
- 第 2 章の冒頭で説明する理由で，計量テンソル

  $$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{IJ} e^I_\mu(x) e^J_\nu(x) \qquad [\text{式 } (2.82)] \tag{1}$$

  ではなくテトラード場 (4 脚場) $e^I_\mu(x)$ を「重力場」と呼ぶ．
  ［上式 (1) を含め，テトラードについては文献 [417, pp.326–327] を参照］．

- ϵ_{IJKL} または $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ は完全反対称であり $\epsilon_{0123}=1$ を満たす．3 次元での ϵ_{abc} または ϵ_{ijk} も同様である．Hodge スターは平坦な空間では

$$F^*_{IJ}=\frac{1}{2}\epsilon_{IJKL}F^{KL} \tag{2}$$

で定義され［F^{KL} が反対称テンソルなら F^*_{IJ} は対偶 (双対；dual) テンソルに過ぎない］，重力の存在下では

$$F_{IJ}e^I_\mu e^J_\nu=F_{\mu\nu}, \qquad F^*_{IJ}e^I_\mu e^J_\nu=F^*_{\mu\nu}$$

の関係を通じて，同じ式 (2) で定義される．等価的に

$$F^*_{\mu\nu}=\sqrt{-\det g}\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}=|\det e|\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}. \tag{3}$$

note：上式 (3) について　式 (2) は

$$F^*_{\mu\nu}=F^*_{IJ}e^I_\mu e^J_\nu=\frac{1}{2}\epsilon_{IJKL}F^{KL}e^I_\mu e^J_\nu$$

を与える．ここで最右辺において，e^I_μ に相反なベクトルの組 e^μ_I を導入し (2.1.1 節)，文献 [417, p.327] の式 (98.7) にならって

$$F^{KL}=e^K_\rho e^L_\sigma F^{\rho\sigma}$$

と書くと，

$$F^*_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\left(\epsilon_{IJKL}e^I_\mu e^J_\nu e^K_\rho e^L_\sigma\right)F^{\rho\sigma}=\frac{1}{2}\left(|\det e|\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\right)F^{\rho\sigma}$$

となって式 (3) 最右辺を得る．ただしここで簡単のため暗に $\det e$ の符号を正と仮定しており，本稿でも以降この仮定を用いることがある (文献 [416, § 3.2.1,p.77] も見よ)．式 (3) の第 2 の等号 $\sqrt{-\det g}=|\det e|$ は上式 (1) の行列式をとれば得られる．式 (3) は式 (2) の一般化となっていることが見て取れる．

- 添字の対称化と反対称化は係数 1/2 を付けて定義する：

$$A_{(ab)}=\frac{1}{2}(A_{ab}+A_{ba}), \qquad A_{[ab]}=\frac{1}{2}(A_{ab}-A_{ba}).$$

［これらは A_{ab} の対称部分と反対称部分に他ならない.］

- 多様体 M 上の“曲線 (curve)”とは写像

$$\gamma: I\to M \qquad s\mapsto\gamma^a(s)$$

のことである．ここに I は実軸の区間である (実軸全体であっても良い)．［もっとも写像よりもむしろ，日常用語として文字通りに M 上の曲線 $\gamma^a(s)$ を思い浮かべる方がイメージしやすい.］“経路 (path)”とは向きのあるパラメータ付けされていない曲線のことであり，それ故，パラメータの付け替え

$$\gamma^a\mapsto\gamma'^a(s)=\gamma^a(s'(s)), \quad \text{with} \quad \frac{\mathrm{d}s'}{\mathrm{d}s}>0$$

の下で不変である．

- Lie 代数 $su(2)$ と $so(3)$ の直交基底は 1 度きり選ばれ，これらの代数は R^3 で特徴付けられる．$so(3)$ に対しては，基底ベクトル $(v_i)^j{}_k$ は $\epsilon_i{}^j{}_k$ に比例するようにとることができる；$su(2)$ に対しては基底ベクトル $(v_i)^A{}_B$ は Pauli 行列に比例するようにとることができる (付録 A.1 を見よ)．こうして $su(2)\sim so(3)$ における代数の要素 ω は成分 ω^i を持つ．

note　$so(3)$ の基底 $(v_i)^j{}_k \sim \epsilon_i{}^j{}_k$ は回転行列の生成子

$$v_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に他ならない [418, p.49].

- 3 次元添字 i, j を持つ任意の反対称な量 v^{ij} に対し，等価な単一添字の表記

$$v^i = \frac{1}{2}\epsilon^i{}_{jk} v^{jk}, \qquad v^{ij} = \epsilon^{ij}{}_k v^k$$

を用いることができる．［特に v^{ij} がテンソルならば，v^i は対偶 (双対；dual) テンソルに他ならない．］例えば $SO(3)$ 接続 ω^{ij}, A^{ij} は等価的に ω^i, A^i と書ける［2.1.1 節］.

記号　以下は記号とその名前，それらが導入または定義される式と章または節の一覧である．

$\mathbf{A}$	面積	2.1.4 節
A	Yang–Mills 接続	式 (2.30)
$A, A^i_\mu(x)$	自己双対な 4 次元の重力的な接続	式 (2.19)
$A, A^i_a(\vec{x})$	自己双対または実の 3 次元の重力的な接続	4.1.1 節，4.2 節
$\mathcal{C}$	相対論的 (な) 配位空間	3.2.1 節
D_μ	共変微分	式 (2.31)
$Diff^*$	拡大微分同相写像群 (extended diffeomorphism group)	6.2.2 節
$e^I_\mu(x)$	重力場	式 (2.1)
e	e^I_μ の行列式	
e	(スピン・フォームの) 辺	9.1 節
$E, E^a_i(\vec{x})$	重力的な電場	4.1.1 節
f	(スピン・フォームの) 面	9.1 節
F	曲率 2 形式	2.1.1 節
g または U	群の要素	
G	Newton 定数	
$\mathcal{G}$	境界データの空間	3.2.5–3.3.3 節
h_γ	$U(A, \gamma)$	7.1 節
H	相対論的ハミルトニアン	3.2 節
H_0	非相対論的 (伝統的) ハミルトニアン	3.2 節
$\mathcal{H}$	量子状態空間	第 5 章
$\mathcal{H}_0$	非相対論的 (な) 量子状態空間	第 5 章
i_n	スピン・ネットワークの結節点 n の結節因子 (intertwiner)	6.3 節
i_e	スピン・フォームの辺 e の結節因子 (intertwiner)	第 9 章
j	既約表現 ($SU(2)$ に対する：スピン)	
j_l	スピン・ネットワークのリンク l に関するスピン	6.2.1 節
j_f	スピン・フォームの面 f に関する表現	第 9 章
$\mathcal{K}$	運動学的 (な) 量子状態空間	5.2 節

$\mathcal{K}_0$	$SU(2)$ 不変な量子状態空間	6.2.3 節
$\mathcal{K}_{\text{diff}}$	微分同相不変な (diff-invariant) 量子状態空間	6.2.3 節
K	境界量子空間	5.1.4 節，5.3.5 節
l	(スピン・ネットワークの) リンク	9.1 節［5.3.6 節，第 6 章］
l_{P}	Planck 長さ，$\sqrt{\hbar G c^{-3}}$	
$\mathbf{L}$	長さ	2.1.4 節
M	時空多様体	
n	(スピン・ネットワークの) 結節点	9.1 節
p_a	(p_t を含む) 相対論的 (な) 運動量	3.2 節
p_t	t の運動量共役	3.2 節
P	“射影”演算子	5.2 節
P_G	群 G の射影子	式 (9.117)
P_H	部分群 H の射影子	式 (9.119)
$\mathcal{P}$	遷移確率	第 5 章
$\mathcal{P}$	経路順序化	式 (2.81)
q_a	部分的観測量	3.2 節
${R^I}_{J\mu\nu}(x)$	曲率	式 (2.8)
${R^{(j)\alpha}}_{\beta}(g)$	群の要素 g の表現 j における行列	
$\mathcal{R}$	3 次元領域	2.1.4 節
s	s-結び目 (s-knot)：抽象的なスピン・ネットワーク	式 (6.4.1)
$\lvert s\rangle$	s-結び目 (s-knot) 状態	式 (6.4.1)
S_{BH}	ブラックホール・エントロピー	8.2 節
S	埋め込まれたスピン・ネットワーク	6.3 節
$\lvert \mathrm{S}\rangle$	スピン・ネットワーク状態	6.3.1 節
$\mathcal{S}$	2 次元の面	2.1.4 節
$\mathcal{S}$	急減少関数の空間	第 5 章
$\mathcal{S}_0$	緩増加超関数 (tempered distributions) の空間	第 5 章
$S[\tilde{\gamma}]$	作用汎関数	3.2 節
$S(q^a)$	Hamilton–Jacobi 関数	3.2.2 節
$S(q^a, q_0^a)$	Hamilton 関数	3.2.5 節
t_ρ	熱時間 (thermal time)	3.4 節，5.5.1 節
T	場の理論の標的空間	3.3.1 節
U または g	群の要素	
$U(A,\gamma)$	ホロノミー	2.1.5 節
v	(スピン・フォームの) 頂点	9.1 節
$\mathbf{V}$	体積	2.1.4 節
$W(q^a, q'^a)$	伝播関数	第 5 章
W	遷移振幅，伝播関数	5.2 節
x	4 次元の時空座標	

$\vec{x}$	3 次元の座標	
Z	分配関数	第 9 章
α	ループ，閉じた経路	
β	逆温度	3.4 節
γ	経路	
γ	($\mathcal{C}$ における) 運動	3.2.1 節
γ	Immirzi パラメータ	4.2.3 節
$\tilde{\gamma}$	(Ω における) 運動	3.2 節
Γ	相対論的 (な) 相空間	3.2.1 節
Γ	グラフ	6.2 節
Γ	2-複体 (two-complex)	第 9 章
θ	Σ 上の Poincaré–Cartan 形式	3.2.2 節
$\tilde{\theta}$	Ω 上の Poincaré 形式	式 (3.9)
$\eta_{IJ}, \eta_{\mu\nu}$	Minkowski 計量 $= \mathrm{diag}[-1,1,1,1]$	
λ	宇宙定数	式 (2.11)
λ	ゲージ・パラメータ	2.1.3 節
ρ	統計的状態	3.4 節，5.5.1 節
Σ	拘束面 $H = 0$	3.2.2 節
σ, Σ	3 次元の境界面	第 4 章
σ	スピン・フォーム	第 9 章
$\phi(x)$	スカラー場	式 (2.32)
$\psi(x)$	フェルミオン場	式 (2.35)
ω	Σ 上の準シンプレクティック形式	3.2.2 節
$\omega^I_{\mu J}(x)$	スピン接続	式 (2.2)
$\tilde{\omega}$	Ω 上のシンプレクティック形式	3.2.2 節
Ω	観測量と運動量の空間	3.2–3.3.2 節
$\{6j\}$	Wigner の $6j$ 記号	式 (9.33)
$\{10j\}$	Wigner の $10j$ 記号	式 (9.103)
$\{15j\}$	Wigner の $15j$ 記号	式 (9.56)
$\|0\rangle$	K における共変な真空 (covariant vacuum)	5.1.4 節，5.3.5 節
$\|0_t\rangle$	$\mathcal{K}_t$ における力学的な真空 (dynamical vacuum)	5.1.4 節，5.3.2 節
$\|0_{\mathrm{M}}\rangle$	$\mathcal{H}$ における Minkowski 真空	5.1.4 節，5.3.1 節

- **理論の名前**．最後は，本書で説明する重力の量子論の名前に関する用語である．理論は**“ループ量子重力”**(*loop quantum gravity* ; LQG)，時には簡単に**“ループ重力”**(*loop gravity*) として知られている．しかしながら，理論は文献で他の多様な名前を用いて呼ばれてもいる．私は不慣れな読者の便宜のために，ここにそれらの名前とその用法の違いを列挙した．
  - **“量子スピン力学”**(*quantum spin dynamics* ; QSD) は LQG の同義語として用いられる．LQG のうち，それは特にハミルトニアン理論の力学的 (dynamical) な側面を指すのに用いられる．

- **“量子幾何”**(*quantum geometry*) もまた，時に LQG の同義語として用いられる．LQG のうち，それは特に理論の運動学的な (kinematical) 側面を指すのに用いられる．**“量子幾何”**という表現は総称的である : それは量子時空に対する他のアプローチ，とりわけ力学的三角区分法 (dynamical triangulation) [21] と非可換幾何学 (noncommutative geometry) にも広く用いられる．
- **“非摂動的量子重力”**(*nonperturbative quantum gravity*)，**“正準量子重力”**(*canonical quantum gravity*) および**“量子一般相対論”**(*quantum general relativity* ; QGR) はしばしば LQG を示すのに用いられる，それら本来の意味はもっと広いにも関わらず．
- **“Ashtekar (アシュテカー) アプローチ”**はいまだに時々，LQG を示すのに用いられる : それは LQG の鍵となる構成要素が，Abhay Ashtekar による，古典的 GR の接続の理論としての再定式化であるという事実に由来している．
- 過去には，LQG は**“量子一般相対論** (*quantum general relativity*) **のループ表現 (表示** ; representation)**”**とも呼ばれていた．今日では LQG において，**“ループ表現”**と**“接続表現”**はそれぞれ，ループ (またはスピン・ネットワーク) の汎関数および接続の汎関数としての LQG の状態の表示を指すのに用いられる．これら 2 つは，調和振動子のエネルギー ($\psi_n = \langle n|\psi\rangle$) 表現と位置 ($\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$) 表現と同様に関係している．

第 I 部

相対論的基礎

私は自分が死ぬ運命にある，一時を生きる生き物であることを知っている．
しかし星々の一連の軌道が成す円を調べるとき，私の足はもはや地面を離れている：Zeus (ゼウス) 本人と並んで，神々の食事，アンブロシアー (ambrosia) を飲み干す．

プトレマイオス『数学集成』［アルマゲスト］(Claudius Ptolemy, *Mathematical Syntaxis*)

［詩に下手な訳を充てるのは野暮であるが，許容していただきたい．］

第 1 章　一般的なアイデアと発見的な描像

本章の目的は発見的および直観的な方法で，本書が依拠するところの一般的なアイデアを導入し，ループ量子重力から立ち現れる量子時空の描像を提示することである．本章のスタイルはそれ故，お話的であり，正確さや完全性には関心を払わない．この本の教程において，本章で導入されるアイデアや概念は精密化され，主張は正当化され正式に導かれる．

1.1　量子重力の問題

1.1.1　終わっていない革命

量子力学 (quantum mechanics ; QM) と一般相対性理論 (general relativity ; GR) は物理的世界に対する我々の理解を大幅に広げた．前世紀の物理の大部分は，これら 2 つの理論によって拓かれた新たな世界の説明の凱旋行進曲だった．QM は原子物理，核物理，素粒子物理，物性物理，半導体，レーザー，コンピューター，量子光学などへと導いた．GR は相対論的天体物理，宇宙論，GPS 技術などへと導き，今日では，期待されているように，我々を重力波天文学へと導こうとしている．

しかし QM と GR は前相対論的な古典物理学によって与えられる世界の首尾一貫した描像を壊した：それらは互いの理論と矛盾する仮定を用いて定式化されたのである．QM は外的な時間変数 (Schrödinger 方程式の t)，または固定された非力学的な (nondynamical) 時空 (その上で場の量子論が定義されるところの時空) を用いて定式化された．しかしこの外的な時間変数と固定された背景時空は GR と相容れない．他方，GR は Riemann 幾何学を用いて定式化され，計量が滑らかで決定論的な力学的 (dynamical) 場であると仮定している．しかし QM はあらゆる力学的な場が量子化されることを要求する：小さなスケールではそれは離散的な量子として現れ，確率的な法則に従う．

我々は GR から時空が力学的であることを学び，QM からはあらゆる力学的な存在が量子から成り，確率的な重合せの状態をとり得ることを学んだ．そうであるならば小さなスケールでは空間と時間の量子があり，空間の量子力学的な重合せがあるはずである．しかしそれは何を意味するのか？ 我々は量子力学的特性を持つ時空――量子時空 (*quantum spacetime*) ――に住んでいる．量子時空とは何か？ それはどのように記述できるのか？

古典的な前相対論的物理は物理的世界の一貫した描像を与えていた．それは時間，空間，物質，粒子，波，力，測定，決定論的法則，……といった，明瞭な概念に基づいていた．この描像は部分的には発展したが (特に場の理論と特殊相対性理論の到来によって)，3 世紀にわたって一貫的かつ非常に安定的に保たれてきた．

GR と QM はこれらの基礎概念を深刻に修正した．GR は空間と時間の概念を修正した；QM は因果律，物質，そして測定の概念を修正した．新しい修正された概念たちは容易には互いに整合しない．新しい一貫した描像はまだ得られていない．各々のあらゆる多大な実験的成功のため，QM と GR は我々に，物理的世界の不明瞭でひどくばらばらな理解をもたらした．物理学の基礎には今日，混乱と矛盾がある．

我々は世界に関して 2 つの理論から学んだことを組合せ，新しい統一を見出したい．それは今日の基礎物理学における 1 つの主要な課題 (a major challenge) ——もしかしたら他ならぬ主要な課題 (the major challenge) ——である．GR と QM は革命を起こした．その革命はまだ完了していない．

重要な例外 (Dirac，Feynman，Weinberg，DeWitt，Wheeler，Penrose，Hawking，'t Hooft，ほか) を除いて，前世紀後半の大半の物理学者はこの課題を無視してきた．優先事項は 2 つの理論をもっともっと広い領域へ適用することだった．発展が重要であり，支配的な態度は実践的だった．新しい理論を適用することはそれらを理解することより重要だった．しかし過度に実践的な態度は，長期的には非生産的である．20 世紀の終わりに向けて，理論物理の関心は次第に，QM と GR の概念的新奇性を統合する課題に集まりつつある．

本書はそれを行う試みの記述である．

note：要約　一般相対性理論 (GR) と量子力学 (QM) は物理学に革命を起こした．しかし

- QM における外的な時間変数と固定された背景時空は GR に矛盾する．
- GR における滑らかで決定論的な計量は QM に矛盾する．

QM と GR の概念的新奇性を統合し，一貫性のある量子時空の描像を得ることはおそらく，今日の基礎物理学の主要な課題である．

1.1.2　どのように量子重力を研究するか

この新しい統合をどのように調べれば良いか？ 伝統的な場の量子化の手法は弱い場に関する摂動展開に基づいている．それらの GR への適用は繰り込み不可能な理論をもたらし［文献 [415, pp.85–87] のノートと，章末の文献ノートの第 1 文も見よ］，失敗する．おそらくこのことは驚くにはあたらない：GR は時間と空間の概念をあまりにラディカルに変えたため，平坦な空間における場の量子論と容易にはなじまないのだ．他の何かが必要である．

科学には発見のための確実な処方はなく，同時に異なる方向を探索することが重要である．現在，重力の量子論はあらゆる方向から探し求められている．最も発展している 2 つは，本書で説明するループ量子重力と，弦理論である．他の研究の方向には，力学的三角区分法，非可換幾何学，Hartle による時空の量子力学 (これは本当は重力の量子論に限らず，むしろ一般相対論的な量子論に対する一般的な理論的枠組みである)，Hawking の幾何学にわたる Euclid 的な和，量子 Regge 計算法，Penrose のツイスター理論，Sorkin の因果集合，'t Hooft の決定論的アプローチ，そして Finkelstein の理論がある［訳は文献 [415, p.6] にならった］．読者は本章末尾のノートで言及されている量子重力への全般的手引きにおいて，充分な文献を見つけることができる．ここでは，本書で説明されるアプローチを動機付ける一般的なアイデアと，現在ループ重力に対する最も人気の代案である弦理論に関する短いコメントだけをスケッチすることにしよう．

物理的世界の基本構造に対する我々の現在の理解は GR と，量子理論および場の量子論 (quantum field theory；QFT)，並びに素粒子物理の標準模型によって要約される．この基本的理論の組は矛盾している．しかし理論は著しい実験的成功によって特徴付けられており，このことは科学の歴史においてほとんど前例がない．実に，現在この理論の組に明らかに逸脱し，疑問を呈し，矛盾する，いかなる観測された現象の証拠もな

い (あるいはニュートリノの質量や宇宙定数といった，同理論の考慮すべき些細な修正がある)．この理論の組は特定の物理的領域 (regimes) では意味を成さなくなる．これらの領域では量子重力の予言が重要となり，GR と標準模型の予言と異なると期待される．これらの領域は，少なくとも今のところは，実験と観測の到達できる外部にある．それ故，我々は量子重力を調べる上で，実験による直接的な導きが得られない——原子のスペクトルが量子論の発見を導いたように．

量子重力は今のところアクセスできない領域を記述すると期待される理論なので，我々の経験からはるかに離れたスケールにおけるこれらの領域では，何でも起こり得ると心配する者もいるかもしれない．可能な理論の範囲があまりにも広すぎるので，研究は不可能かもしれない．この心配は妥当でない．もしそのことが問題ならば，我々は多くの完成した，予言能力のある首尾一貫した量子重力の理論を有しているだろう．しかし状況はその真逆である：我々はそのような理論を 1 つも持ち合わせていない．現実は，我々には QM と GR があるので，量子重力に関する多くの情報があるというものである．QM と GR の整合性は非常に厳しい拘束条件となる．

量子重力には何らかの全く新しく，ラディカルで野心的な仮説が必要なのだという見解が表明されることがある．私はこれが妥当だとは思わない．唐突に出てきた (pulled out of the blue sky) 野心的なアイデアは科学の進歩をもたらした例 (ためし) がない．物理学の成功を収めたラディカルな仮説は常に，新しい実験データ—— Kepler の楕円，Bohr の量子化，……——あるいは理論における厳格な演繹—— Maxwell の誘導電流 (inductive current)，Einstein の相対論……—— (付録 C を見よ) に強いられて否応なく採用されてきた．一般に，勝手で奇抜な仮説はどこへも導かない．

実に，我々はちょうど，理論物理学が過去で最も有用となる，典型的な状況の 1 つにいる．理論物理学における最も著しい進展の多くは，2 つの基本的でありながら一見すると矛盾する発見に対する，共通の理論的な枠組みを見つける試みから導かれた．例えば，Kepler の軌道を Galilei の物理と組合せる目的は Newton 力学に導き；Maxwell 理論を Galilei の相対性原理と組合せる目的は特殊相対性理論に導き；特殊相対性理論と非相対論的量子力学を組合せる目的は反粒子の理論的発見に導き；特殊相対性理論を Newton 的な重力と組合せる目的は一般相対性理論に導いた，等である．これらの事例の全てにおいて，主要な進展は一見矛盾する理論を “真剣に受け止め (taking seriously)”[*2]，両方の理論の鍵となる教義を真に保つことの含意を探求することによって得られた．今日の我々はまさしくそのような特徴的な状況の 1 つにいる．我々は QM と GR によって表される，自然の新しく非常に一般的な “事実” を学んだ：我々は “ただ”，それらが合わせて何を意味するのかを理解しなければならない．それ故，我々が問わねばならない問題は次である：我々は QM と GR から世界について本当は何を学んだのか？ それらの洞察を一貫した描像へと組合せられるか？ 我々に必要なのは GR と QM から得られる洞察が互いに整合する概念的な体系である．

今のところ，この見方は理論物理学における主要な見方では “ない”．QM が概念的な革命だったという合意はあっても，多くの者は GR を同じようには見ない．多数派によれば，GR の発見は今一つの場の理論の記述に過ぎない．この場の理論は，しかも，我々がまだ知らない理論の単なる近似のようである．この見解によれば，GR は理論的発展の導き手として過度に重視されるべきではない．

私の考えでは，この見解は，Einstein–Hilbert 作用という特定の形式と，GR のもたらす空間と時間の概念に対する修正との間の混同に由来している．Einstein–Hilbert 作用は確かに高エネルギー理論の低エネルギーの近似かもしれない．しかし空間と時間の概念に対する修正は，Einstein–Hilbert 作用という特定の形式に依

*2 [22] において，Einstein から学ばねばならない主な教訓は ‘上手くいくアイデアを “真剣に受け止め”，最初の提案者が提唱したよりも大いに有益に運用できるか試すことだ’ と Gell-Mann は述べている．

存しない．それはその微分同相不変性と背景独立性に依存している．これらの特性 (1.1.3 節で簡単に説明され，第 2 章で詳細に議論される) は高エネルギー理論においても保持される可能性が最も高い．GR のダイナミクスの詳細と，GR の規定する空間と時間の概念の修正を混同してはならない．この混同を犯せば，我々は GR の物理的内容のラディカルな新しさを過小評価することになる．量子重力の課題はまさに，このラディカルな新しさを QFT に完全に組み入れることにある．言い換えれば，課題は，一般相対論的な QFT，または背景独立な QFT とは何かを理解することである．

今日，多くの物理学者はこれらの基礎的な問題を無視するか先送りにすることを好み，代わりに，現在の理論を発展または適合させることを選んでいる．量子重力への最も人気のある作戦は，とりわけ，素粒子物理学の標準模型の成功の中で発達した研究の路線を追うことである．摂動論的な量子 GR の失敗は Fermi 理論の失敗の繰り返し[*3]と解釈されている．すなわち，我々が GR を高エネルギーにおいて修正しなければならないことの証拠と見なされている．大統一理論 (GUTs)，超対称性，そして Kaluza-Klein 理論の導入により，悪しき紫外発散から解放された GR の高エネルギーの修正への研究は，higher derivative theories，超重力 (supergravity)，そしてついには弦理論へと導いてきた．

重力の量子論は既に見つかっており，それは弦理論であると主張されることがある．これは弦を用いない量子重力の本なので，ここでこの主張について少し述べておかねばならない．弦理論は，物体の構成要素は粒子的と言うよりもむしろ拡がりを持つという物理的な仮説に基づいている．［“空間のアトム”(1.2.2 節) を持つ LQG においても，素粒子には拡がりが与えられると想像される．具体的には 7.2 節 (と 7.3 節の最終段落) を見よ．］この仮説は (適切な設定の下で) フェルミオン，Yang–Mills 場と重力子を含む多くの現象論を含み，紫外発散を含まないと大勢から期待されている，非常に豊かな統一理論へと導く．これらの理論的な結果の代償は，超対称性，余剰次元，任意の質量とスピンを持つ無数の場，等々といった付加的な物理の巨大な荷物である．

今のところ，この新しい物理には実験的に示されていることが何もない．とりわけ超対称性は，発見される寸前にあると何年も主張されてきたが，見つかっていない．残念ながら，理論を反証できる，正確な新しい定量的な物理的予言を，理論の途方もない数学的機構から導くことは難しいため，今のところ理論はいかなるがっかりする実験的結果も許容できてしまう．しかも，現実世界を理論の内部で再現することさえ難しい：正しい世代 (families) と質量を持ち不安定性のない標準模型を導くコンパクト化の研究は，私の知る限り，まだ成功していない．弦理論は非常に興味深い仮説ではあるものの，間違いなく，確立された理論でないことは明白だ．それ故，代わりの方向を探すこともまた重要である．

弦理論は標準模型の直接的な発展であり，平坦な空間の QFT の技法と概念的枠組みに深く根付いている．この本を通じて詳しく論じるように，この枠組みで用いられる多くの道具――エネルギー，ユニタリーな時間発展，真空状態，Poincaré 不変性，S 行列，時空を運動する物体，Fourier 変換，……――は，重力場が背景時空によって――場合によっては漸近的にすら――近似できない，量子重力の支配下ではもはや意味を成さない[*4]．それ故，弦理論は，背景独立な QFT とは何かを理解するという，量子重力の主要な困難に直接取り組

[*3] Fermi 理論は実験的には上手くいくが繰り込み不可能な弱い相互作用の理論である，ちょうど GR が実験的には上手くいくが繰り込み不可能な重力相互作用の理論であるのと同じように．解決策は Fermi 理論を高エネルギーで修正した，Glashow–Weinberg–Salam 電弱理論である．

[*4] なるほど，弦理論の発展は，曲がった時空，地平面 (horizons)，ブラックホール，そして異なる背景の関係といった，GR の多くの側面を取り入れてきた．しかしそれは古典的な文脈で GR によって体現されるような，背景独立な枠組みにはほど遠い．GR は曲がった時空の物理，あるいは異なる背景間の関係に関係しているのではない：それは時空のダイナミクスに関係している．弦理論の背景独立な基本的定義はいくつかの方向に沿って活発に研究されているが，今のところ理論の定義とあらゆる計算は背景の計量空間に依拠している．

んでいない．［実に閉弦を量子化すると，平坦な Minkowski 時空においても 1 重力子状態が得られる (p.8 脚注 3 (本稿の脚注 *4) に関係) [419, pp.286–287].］統一について心配する前に，この困難と直接向き合うことは，代わりに，ループ量子重力によって調べられている研究の方向性へと導く[*5].

弦理論に従う研究の路線の代わりは，摂動論的量子 GR の失敗が Fermi 理論の繰り返しでは“ない”という可能性によって与えられる．つまり，失敗は GR の作用の欠陥によるのではなく，むしろ伝統的な弱い場の量子論の摂動展開が重力場には適用されないという事実による．

この可能性はループ量子重力の結果によってアポステリオリに強く支持される．これから見るように，ループ量子重力は滑らかな背景の幾何学のそれとは著しく異なる時空の短距離構造の描像へと導く．(弦理論の計算にもこの方向のヒントがある [25]．) 時空は Planck 尺度において，理論によってあらわに記述される，非摂動的な，量子化された，離散的な構造を持つことが分かる．紫外発散はこの構造によって取り除かれる．伝統的な QFT の摂動展開に現れる紫外発散は，我々がこの離散的な Planck 尺度の構造を誤って滑らかな背景の幾何学に置き換えてしまっているという事実の結果である．

もしこれが物理的に正しいなら，紫外発散を取り除くには，弦理論の込み入った手続きは必要ない．他方で，我々は固定された滑らかな背景の幾何学を利用できなくなるので，伝統的な弱い場に関する摂動論の技法は適用できない．我々はそれ故 QFT を GR の概念的な新奇性に，特に GR によって導入された空間と時間の概念の変更に適合させなければならない．それらの変更とは何だろうか．完全な議論は第 2 章に回し，以下ではその答をスケッチする．

note：要約　量子重力が重要となるのは今のところ，実験と観測の及ばない領域である．しかしながら理論の可能性があまりにも広くなるということにはならない．状況はその真逆であって，QM と GR の整合性は非常に厳しい拘束条件となるため，我々は完成した，予言能力のある首尾一貫した量子重力の理論を 1 つも持ち合わせていない．

理論物理学の進展の多くは，2 つの基本的でありながら一見すると矛盾する発見に対して，“ただ”両方の理論の鍵となる教義を“真剣に受け止め”，それらが整合する共通の枠組みを見つける試みから導かれた．今日，我々に必要なのは GR と QM から得られる洞察が互いに整合する概念的な体系である．その際，GR の「微分同相不変性」と「背景独立性」は量子重力に引き継がねばならず，GR の概念的新奇性を過小評価してはならない．

重力の量子論として人気の候補に，弦理論による統一理論の構想がある．弦理論は平坦な空間の QFT (場の量子論) の技法と概念的枠組みに深く根付いており，背景独立な QFT とは何かを理解するという，量子重力の主要な困難に直接取り組んでいない．少なくとも弦理論がまだ確立された理論でないことは明白だ．他方でループ量子重力は統一理論を目指す前に，この困難と直接向き合う．ループ量子重力は Planck 尺度における非摂動的な，量子化された，離散的な時空構造へと導く．この時空構造によって紫外発散は除かれる．したがって摂動論的な量子重力が繰り込み不可能であることは必ずしも，Einstein–Hilbert 作用を高エネルギーにおいて修正しなければならない証拠とは言えない．

[*5] ループ重力は弦理論が必要とする背景独立な QFT の手法をまさしく発展させてきたので，ループ重力と弦理論は統合されるかもしれないということが繰り返し提唱されている [23]．また織物 (weave)［文献 [415, p.155] の訳語にならった］上の励起 (6.7.1 節を見よ) はループ重力において自然な弦の構造を持つ [24].

1.1.3 一般相対性理論の物理的な意味

GR は時空と重力場が同一の存在であるという発見である．我々が“時空”と呼ぶもの自体が，多くの面で電磁場と似た，物理的な対象である．GR は，時空というものは全くないという発見だ，と言うことができる．Newton が“空間”と呼び，Minkowski が“時空”と呼んだものの正体は明かされる：それはダイナミクスを無視する限りで見られるところの，力学的な (dynamical) 対象——重力場——に他ならない．

Newton 的および特殊相対論的な物理では，もし我々が力学的な存在——粒子と場——を取り去れば，残るのは空間と時間である．一般相対論的な物理では，もし我々が力学的な存在を取り去れば，何も残らない．Newton と Minkowski の空間と時間は場の 1 つ，重力場の配位 (configuration) として再解釈される．これは物理的な対象——粒子と場——が空間に埋められ，時間の中で動いているのではないことを示唆する．それらは時空の上に住んでいるのではない．それらは言うなれば，今 1 つの場の上に住んでいるのである．

それはあたかも，海に浮かぶ島の上に多くの動物が住んでいるのを見ていたようなものである：島の上の動物だ．あるとき我々は，実は島自体が巨大なクジラであることを発見する．すると動物はもはや島の上にいるのではなく，ただ動物の上に動物がいる．同様に，宇宙は時空上の場から成るのではない；それは場の上の場から成る．［これは例え話ではあるが，言い得て妙である．］本書はこの概念的な変更が QFT に及ぼす遠大な影響を研究する．

1 つの帰結は場の量子が時空に住めないということである：それらは自ら“時空”を構成しなければならない．これはループ量子重力においてまさしく，空間の量子が行うことである．

重力場の側面を表すのに“空間”と“時間”という表現を引き続き用いることができ，また私は本書でそうしている．我々は古典的な GR においてこのことに慣れている．しかし場が量子化された“粒子の (granular)”性質を持ち，そのダイナミクスが量子化され，それ故，確率的でしかあり得ないところの量子論では，重力場の“空間的な”そして“時間的な”特性のほとんどは消失する．

それ故，量子重力場を理解するには，我々は幾何学の主眼点をいくらか捨てなければならない．幾何学は古典的な重力場を表しているが，量子時空を表してはいない．これは Einstein の遺産に対する裏切りではない：それどころか，Einstein による正確な意味での“相対性”へ向けた歩みなのである．Alain Connes は空間に対する 2 つの視点の存在を鮮やかに説明した：空間の点を中心とする幾何学的な視点と，双対なスペクトル量 (dual spectral quantities) を中心とする“スペクトル的な (spectral)”視点である．Alain が強調するように，量子論は非可換性のために，この第 2 の視点に完全に移行することを我々に強いる．量子理論の光を当てれば，連続的な時空は量子論の非可換性を無視した近似以外の何ものでもあり得ない．ループ重力では，空間の物理的な特色は，我々 (観測者) の重力場との相互作用を記述する量子力学的な演算子のスペクトル特性として現れる．

量子重力の主要な概念的困難はそれ故，空間と時間という慣れ親しんだ舞台がなくとも物理ができるというアイデアを受け入れることである．我々は世界を“内に含む空間”と“時間発展”として考える習慣に関連した偏見から，自らを解放しなければならない．第 3 章ではこのような一般化された概念的枠組みにおいて力学系を記述する用語を説明する．

馴染みある時空という“舞台”の不在は古典論の背景独立性 (*background independence*) と呼ばれる．専門的には，それは (能動的な) 微分同相写像の下での作用のゲージ不変性として理解される．微分同相写像は全ての動的な場と粒子を，4 次元多様体のある領域から別の領域へと滑らかに移す変換である (これらの変換の正確な定義は第 2 章で与えられる)．他方，微分同相写像の下でのゲージ不変性 (あるいは微分同相不変性

(*diffeomorphism invariance*)) は，作用の 2 つの特性の組合せ——任意の座標変換の下での作用の不変性と，非力学的な“背景”場が存在しないという事実——の帰結である．

note：要約　GR は時空と重力場が同一の存在であるという発見である．そうであるならば，我々が重力場を含むあらゆる力学的 (dynamical) 対象を取り除いたら，時空すら残らないことになる．粒子と場は時空の上に住んでいるのではなく，言わば重力場という今 1 つの場の上に住んでいるのであり，それは例えるならば，海に浮かぶ島の上に動物が住んでいると思っていたら，実際には島自体が巨大なクジラだと分かるようなものである．幾何学は古典的な重力場を表しているが，量子時空を表してはいない．量子重力の主要な概念的困難はそれ故，空間と時間という慣れ親しんだ舞台がなくとも物理ができるというアイデア (背景独立性) を受け入れることである．
note：「時空 → 重力場」ではなく「重力場 → 時空」　GR の一般的な理解はおそらく，重力の正体は時空の歪みである，というものだろう．これは時空から重力場が立ち現れるという説明である．他方，本節では真に存在するのは重力場であり，時空はその近似的な側面として後から現れるという順序になっており，この点は目新しい．2.4.2 節の第 4 段落以降と，10.1.1 節の最終段落も見よ．
note：「無重力」という表現は不正確　重力がなければ時空もないならば，特殊相対性理論は重力がない場合の理論であるという言い方は厳密には不正確であることになる．2.1.2 節の Minkowski 解 (式 (2.47–49) の箇所) も見よ．

1.1.4　背景独立な場の量子論

量子力学[*6]は一般相対論的な空間と時間の概念と整合するだろうか．それは，我々が充分一般的な定式化を選択するかによる．例えば Schrödinger 描像は，大域的な観測可能な時間変数 t を持つ理論に対してのみ利用可能であるが，そのような時間変数 t は GR に矛盾する．それ故，Schrödinger 描像は背景独立な文脈ではあまり意味を成さない．しかしながら Schrödinger 描像よりも一般的な量子論の定式化もある．第 5 章で，一般相対論的な系を扱うのに充分一般的な QM の定式化を説明する．この種の定式化は時に“一般化された量子力学 (generalized quantum mechanics)”と呼ばれる．(QM の今 1 つの相対論的な定式化については，[26] を見よ．) しかしちょうど“古典力学”が Newton，Lagrange，Hamilton の，あるいはシンプレクティックな力学のように，一般性の異なる度合いを持つ定式化を示すのに用いられるのと同様に，私は一般性に関わらず，量子論のあらゆる定式化を“量子力学”と呼びたい．

これに対し，摂動論的な QFT の伝統的な手続きのほとんどは，全く一般相対性理論の枠組みになじまない．これには多くの理由がある：

- QFT の伝統的な定式化は Poincaré 不変性に依拠している．特に，それはエネルギーの概念と，ユニタリーな時間発展を生成するゼロにならないハミルトニアン演算子の存在に依拠している．真空は，例えば，エネルギーを最小化する状態である．一般相対論的な理論には一般に，大域的な Poincaré 不変性も，一般的なエネルギーの概念も，ゼロにならないハミルトニアン演算子もない．
- 伝統的な QFT の起源は粒子の物理的な概念である．曲がった時空における QFT [27] と，QFT における加速と温度の関係 [28] の理論的経験は，典型的な重力的状況において粒子の概念がかなりデリケートであることを示唆している．(この点については 5.3.4 節で議論する．)

[*6] 私は“量子力学”という表現を，有限または無限の自由度を持つ全ての量子系の理論を指すのに用いる．この意味で QFT は量子力学の一部である．

- 伝統的な繰り込まれた QFT を考えよう．理論の物理的な内容は，その理論の n 点関数 $W(x_1, \cdots, x_n)$ を用いて表される．n 点関数は古典論の不変性を反映している．一般相対性理論では，座標変換 $x \to x' = x'(x)$ の下での不変性は直ちに，n 点関数が

$$W(x_1, \cdots, x_n) = W(x'(x_1), \cdots, x'(x_n)) \tag{1.1}$$

を満たさねばならないことを意味し，それ故 (考えている点が異なっていれば) それは定数でなければならない！ すなわち

$$W(x_1, \cdots, x_n) = \text{constant}. \tag{1.2}$$

明らかに，直ちに我々は伝統的な QFT とは全く異なる枠組みにいることになる．

- 同様に，伝統的な QFT の 2 点関数の小さな $|x-y|$ に対する振舞い

$$W(x, y) = \frac{\text{constant}}{|x-y|^d} \tag{1.3}$$

は QFT の短距離の構造を表している．より一般に，QFT の短距離の構造は演算子積展開

$$O(x)O'(y) = \sum_n \frac{O_n(x)}{|x-y|^n} \tag{1.4}$$

に反映される．ここに $|x-y|$ は時空の計量で測った距離である．例えば平坦な空間では $|x-y|^2 = \eta_{\mu\nu}(x^\mu - y^\mu)(x^\nu - y^\nu)$．一般相対論的な文脈では，このような表式は意味を成さない，と言うのも，背景となる Minkowski (あるいは，その他の) 計量 $\eta_{\mu\nu}$ がないからである．その代わりに，重力場，すなわち量子場の演算子そのものがあるのである．しかしすると，もし標準的な演算子積展開が無意味になるなら，量子重力理論の短距離構造は伝統的な QFT のそれと全く異なったものになるはずだ．第 7 章で見るように，このことは実際に正しい．

これらの困難を迂回する暫定的な回避戦略がある：$e_{\text{background}}(x)$ を背景場の配位として，重力場 $e(x)$ を 2 つの項の和

$$e(x) = e_{\text{background}}(x) + h(x) \tag{1.5}$$

で書く［計量 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ に対応］．背景場は Minkowski であっても，それ以外でも良い．$e_{\text{background}}(x)$ は時空を定義する，すなわち位置と因果関係を定義すると仮定しよう．次いで $h(x)$ を，$e_{\text{background}}(x)$ で定義される背景時空における QFT に支配される，重力場と考える．例えば空間的とは $e_{\text{background}}(x)$ で規定される幾何によって定義されるものとして，場の演算子 $h(x)$ は空間的な隔たりでは交換する［それ故に因果関係を持たない］と仮定される．次のステップとして $e_{\text{background}}(x)$ に対する条件や，$e_{\text{background}}(x)$ の異なる選択によって定義される理論の定式化の関係を考えることができる．この回避戦略は 3 つの困難を導く．

(i) 式 (1.5) に基づく GR の伝統的な摂動論的 QFT は繰り込み不可能な理論である．制御不能な紫外発散を取り除くには，弦理論の完成に訴えなければならない．

(ii) 言及したように，ループ量子重力は Planck 尺度の時空構造が離散的であることを示す．それ故，物理的な時空は短距離構造を全く持たない．式 (1.5) に内在している滑らかな背景 $e_{\text{background}}(x)$ という非物理的な仮定が，まさに紫外発散の原因かもしれない．

(iii) 重力場を時空から分離することは，まさに GR の物理的な教訓と鋭く矛盾する．GR が重力の量子論を調べる上での何らかの案内であるならば，適切な時空の幾何学は全重力場 $e(x)$ から決定されねばならないものであり，分離 (1.5) は誤解を招く．

回避戦略 (1.5) を採らない量子重力の定式化は背景独立，ないし一般共変 (general covariant) な QFT である．本書の主要な目的は背景独立な QFT に向けた定式化を発展させることである．

1.2 ループ量子重力

ここではループ量子重力 (LQG) から立ち現れる量子時空の物理的な描像をスケッチする．LQG が基礎を置く基本的なアイデアと仮定は以下である：

(i) **量子力学と一般相対性理論**　一般共変性と整合するように適切に定式化された QM は，正しいと仮定される．Einstein 方程式は高エネルギーにおいて修正されるかもしれないものの，時間と空間の一般相対論的な概念は正しいと仮定される．これら 2 つの仮定の動機は，それらがこれまで成し遂げてきた著しい実験的成功と，それに反する実験的証拠が一切ないことである．

(ii) **背景独立性**　LQG は分離 (1.5) に基づく量子化の戦略が，時空の量子論的特性を記述するのに適切で“ない”というアイデアに基づく．

これらに加えて，

(iii) **統一なし**　最近では，流行のアイデアは，重力の量子化の問題が，全ての相互作用の統一的な記述を見つける問題と一緒に解決されねばならないというものだ．LQG は第 1 の問題の解決策であって，第 2 の問題の解決策ではない[*7]．

(iv) **4 次元時空，超対称性なし**　LQG はこれらの可能性［高次元と超対称性］と矛盾しないが，理論の中には高次元と超対称性を“要求する”ものは何もない．高次元時空と超対称性は，多くの他の興味深い理論的アイデアと同様に物理的な誤りであり得る，興味深い理論的アイデアだ．15 年の調査にも関わらず，多くの発見の予告が誤りと判明し，また超対称性は“来年”発見されるはずであるという繰り返される宣言にも関わらず，今までのところ実験的証拠は強固に，そして一貫して超対称性に“反して”きた．状況は変わるかもしれないが，科学者として我々は実験の示唆を真剣に受け止めなければならない．

これらの仮定に基づく LQG は，伝統的な物質と結合した GR の直接的な量子化である．LQG のプログラムはそれ故，保守的であってさほど野心的ではない．理論の物理的なインプットは，よく検証された物理理論である QM と GR だけである．主要な追加の物理的な仮説と仮定はない (例えば根源的物体は弦である，空間は個々の離散的な点から成る，量子力学は誤りである，GR は誤りである，超対称性，余剰次元，……等)．最終的な“万物の理論 (Theory Of Everything)”になるという主張はしない．

他方で，LQG にはラディカルで野心的な側面もある：GR の概念的な洞察を QM と統合することである．これを達成するには，我々は慣れ親しんだ空間と時間の概念を諦めなければならない．“その上に”事物が配置されるところの連続空間と，“それに沿って”発展が起こるところの時間は，理論における半古典的な近似的概念である．LQG ではこのラディカルな一歩が全面的に仮定される．

[*7] これら 2 つの問題が関連しているというアイデアの動機は，我々は“物理学の終わりに近い”という期待である．残念ながら，“物理学の終わりの近く”にいるという期待は現代物理学の歴史において，3 世紀にわたって存在した．世界の根本的な側面に関して深く概念的に混乱した現在の状況において，我々が物理的な世界に関する発見の終わりの近くにいるという兆候を私は見出せない．私が学生のとき，強い相互作用の理論を発見する問題は，繰り込み理論を取り除く問題と一緒に解決されねばならないと主張することが流行っていた．魅力的なアイデアだ．だが間違っている．［強い相互作用を記述する QCD も繰り込みに依拠していることを踏まえていると推察される．］

LQG は伝統的な QFT の馴染みある道具のほとんどを利用しない，と言うのも，それらは背景独立な文脈では不適切となるからである．LQG は量子理論の一般的な道具だけを用いる：状態の Hilbert 空間と，物理量の観測に関係する演算子，およびこれらの量の観測結果の確率を決める遷移振幅である．状態の Hilbert 空間と物理的観測量に関する演算子は，比較的標準的な量子化の手法によって，古典的な GR から得られる．量子化の手法はよく定義された逆問題――与えられた古典的極限を持つ量子理論を見出すこと――の解を調べる技法である．逆問題は多くの解を持ち得る．言及したように［1.1.2 節］，目下の困難は多くの完璧で首尾一貫した重力の量子論を見分けることではない．我々は 1 つあれば満足なのだ．

1.2.1 何故ループか？

量子化の手続きを実行するために為さねばならない専門的な選択は，どの場の関数の代数が量子力学的演算子になるかにかかっている．伝統的な QFT では，それは一般に場の正および負の振動数モードによって形成される正準代数である．この代数の量子化は生成・消滅演算子 a と $a^\dagger$ に導く．正および負の振動数の特徴付けには背景時空が必要である．

これとは対照的に，LQG を特徴付けるのは異なる基本的な場の関数の代数――重力的な接続のホロノミーに基づく非正準代数――の選択である．ホロノミー (または“Wilson ループ”) は閉曲線に沿う平行移動の行列である．

ホロノミーがゲージ理論の自然な変数であるというアイデアには長い歴史がある．ある意味，それはゲージ理論のまさに発端，Faraday の物理的な直観にまで遡ることができる．Faraday は電磁気現象を“力線”の観点から理解した．この直観の根底には 2 つの鍵となるアイデアがある．第 1 に，適切な物理変数が空間を満たす；Faraday によるこの直観が場の理論の起源である．第 2 に，適切な変数はある点で起きることに関与せず，むしろ線でつながれた異なる点の間の関係に関与する．このアイデアを表現する数学的な量が，線に沿ったゲージ・ポテンシャルのホロノミーである．例えば Maxwell 場の場合，ループ α に沿うホロノミー $U(A,\alpha)$ は単に，3 次元的な Maxwell ポテンシャル A の α に沿う線積分の指数である：

$$U(A,\alpha) = \mathrm{e}^{\oint_\alpha A} = \exp\left\{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}s\, A_a(\vec{\alpha}(s))\frac{\mathrm{d}\alpha^a(s)}{\mathrm{d}s}\right\}. \tag{1.6}$$

note　式 (1.6) 第 2 辺に線要素 $\mathrm{d}\alpha$ がないのは，微分形式 (2.28):$A \equiv A_\mu \mathrm{d}x^\mu$ を積分しているからだと考えられる．パラメータ s を積分変数に選べば，1 形式 A の積分は最右辺における通常の線積分になる (付録 D 参照)．その際ループ α は時間が一定の超曲面上にあるので $\mathrm{d}x^0/\mathrm{d}s = 0$ となり，時間成分は積分に寄与しない．なお式 (1.7) に合わせて，引数 $\vec{\alpha}(s)$ にベクトルの矢印を補った (式 (1.9) も同様)．

LQG では，ホロノミーは“ループ状態”を生成する量子力学的演算子になる．例えば Maxwell 理論のループ表現による定式化では，ループ状態 $|\alpha\rangle$ は，単一の Faraday 線 α 上を除いて至るところで電場が消える状態である．より正確には，それは $s \mapsto \vec{\alpha}(s)$ を空間における Faraday 線として，電場の固有値

$$\vec{E}_\alpha(\vec{x}) = \oint \mathrm{d}s\, \frac{\mathrm{d}\vec{\alpha}(s)}{\mathrm{d}s}\delta^3(\vec{x},\vec{\alpha}(s)) \tag{1.7}$$

に属する固有状態である［$\delta^3(\vec{x},\vec{\alpha}(s)) = \delta^3(\vec{x}-\vec{\alpha}(s))$ はデルタ関数］．この電場はループ α 自身を除いて至るところで消え，また α 上の全ての点でループに接している (図 1 を見よ)．［言わば 1 本の閉じた電気力線が取り出されており，これを Faraday 線と呼んでいる (2.2.1 節も参照)．］式 (1.7) で定義されるベクトル場分布 $\vec{E}(\vec{x})$ は分布の意味で無発散である，すなわち Coulomb の法則

$$\mathrm{div}\, \vec{E}_\alpha(\vec{x}) = 0 \tag{1.8}$$

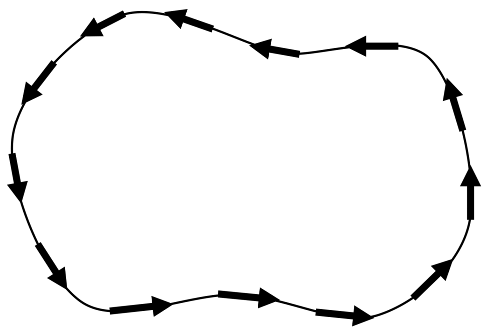


図 1　ループ α と (矢印で表される) 電場分布 $\vec{E}_\alpha$

を満たすことに注意しよう．実際，任意の滑らかな関数 f に対して

$$\begin{aligned}
[\operatorname{div}\vec{E}_\alpha](f) \equiv \int \mathrm{d}^3x\, f(\vec{x}) \operatorname{div}\vec{E}_\alpha(\vec{x}) &= \int \mathrm{d}^3x\, f(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x^a} \oint \mathrm{d}s\, \frac{\mathrm{d}\vec{\alpha}(s)}{\mathrm{d}s} \delta^3(\vec{x}, \vec{\alpha}(s)) \\
&= -\int \mathrm{d}^3x\, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^a} \oint \mathrm{d}s\, \frac{\mathrm{d}\vec{\alpha}(s)}{\mathrm{d}s} \delta^3(\vec{x}, \vec{\alpha}(s)) \\
&= -\oint \mathrm{d}s\, \frac{\mathrm{d}\alpha^a(s)}{\mathrm{d}s} \frac{\partial}{\partial \alpha^a} f(\vec{\alpha}(s)) \\
&= -\oint_\alpha \mathrm{d}f = 0
\end{aligned} \tag{1.9}$$

を得る．［最左辺は f による不鮮明化を表す [415, p.54]．］実に，直観的には，Coulomb の法則はちょうど電場が点において場自身の方向に“続く”こと，すなわち場が Faraday 線を定義することを要求する．状態 $|\alpha\rangle$ はそれ故，式 (1.8) を満足するある種の極小の量子的な励起である：それは単一の Faraday 線の量子力学的な素励起である．

Yang–Mills 理論はまさにこのようなループの理論であるというアイデアは，そのような理論が研究される間ずっと存在してきた．Mandelstam，Polyakov，Wilson，その他大勢が長い間，ループ励起は量子 Yang–Mills 理論において主要な役割を演じなければならず，我々は量子 Yang–Mills 理論をこれらの励起の観点から理解できるようにならねばならないと論じてきた．実際，弦理論の発展の多くはこのアイデアに触発されてきた．

“格子”Yang–Mills 理論では，すなわち時空を固定された格子で置き換える Yang–Mills 理論への近似では，ループ状態は有限のノルムを持つ．実際，“スピン・ネットワーク”状態と呼ばれる，ループ状態の適当な有限の線形結合は，格子ゲージ理論の Hilbert 空間においてよく定義され，またよく理解されている直交基底を成す．

しかしながら，“連続的な”背景の上での QFT では，ループ的な励起を利用して理論を定式化するアイデアは未だ有意義だと証明されていない．困難は本質的に，背景の上でのループ状態が“あまりに特異的 (too singular)”であり“過剰 (too many)”だということである．例えば上記で説明した量子 Mawxell 状態 $|\alpha\rangle$ は，無限大のノルムを持つ；そして背景時空におけるループ状態の無限小の変位は異なる，独立なループ状態を生成し，ループ状態の連続体をもたらすことになる．連続的な背景の上では，ループ状態によって張られる空間は，QFT の (可分な；separable) Hilbert 空間の基底を提供するには，あまりに“大きすぎる”のである．

しかしながら，“背景独立な”理論では，ループ状態は特異的でなければ過剰でもない．これが LQG の依拠するところの，鍵となる専門的なポイントである．その直観的な理由は以下のようである．時空それ自体がループ的な状態から形成される．それ故ループ状態の位置は“他のループとの関係において”のみ意味を持

ち，背景との関係においては意味を成さない．ループ状態に対する無限小の (座標の) 変位は異なる量子状態を生成せず，単に同じ物理的状態のゲージ等価な表現を生成する！ ループ状態に他のループを横切らせる有限の変位だけが物理的に異なる状態を生成する．それ故，ループ状態の空間のサイズは微分同相不変性によって劇的に削減される：その大部分は単なるゲージである！ (most of it is just gauge!) 等価的に，個々のループが固有の Planck サイズの“太さ”を持っていると考えることもできる．

それ故，一般相対論的な文脈ではループ基底が利用可能となる．$\mathcal{K}_{\rm diff}$ と呼ばれる理論の状態空間は，ループ状態によって張られる可分な Hilbert 空間である．より正確には，第 6 章で見るように，$\mathcal{K}_{\rm diff}$ はループ状態の有限の線形結合によって形成され，格子 Yang–Mills 理論のスピン・ネットワーク状態とちょうど同じように定義される，スピン・ネットワーク状態の直交基底を許容する．Hilbert 空間とその上に作用する場の演算子は第 6 章で説明される．それらは LQG の数学的構造の基礎を成す．

それ故 LQG は 2 つの考え方の系統，21 世紀の理論物理学における各特性の合流の結果である．一方には力が線で表されるという，Faraday，Yang と Mills，Wilson，Mandelstam，Polyakov，その他の直観がある．他方には，Einstein–Wheeler–DeWitt の背景独立性と背景独立な量子状態の直観がある．まことに驚くべきことに，これら 2 つの考えの系統の各々は，もう一方の立ち塞がる困難の解決策になっている．一方では，連続におけるループ基底の伝統的な利用不可能性が，背景独立性によって消える．他方では，微分同相不変な量を制御する伝統的な困難が，ループ基底のおかげで制御可能になる．

さらに意外なことに，この喜ばしい融合によって生成されるスピン・ネットワーク状態は，以下にスケッチするような，驚くべき必然的な幾何学的解釈を持つことが判明する．

1.2.1 節について

■電場分布 (1.7) のパラメータ付け替え不変性について　一見すると Faraday 線 α のパラメータを $s \to s'$ と付け替えれば，電場の式 (1.7) における接ベクトル $\mathrm{d}\vec{\alpha}/\mathrm{d}s$ が変化するため，α 上の異なる電場分布が得られそうである．しかし $s = f(s'), \vec{\alpha}(f(s')) = \vec{\beta}(s')$ とおくと，新しいパラメータ s' で定義した電場は

$$\begin{aligned}\vec{E}_\alpha(\vec{x}) &= \oint \mathrm{d}s' \frac{\mathrm{d}\vec{\beta}(s')}{\mathrm{d}s'} \delta^3(\vec{x} - \vec{\beta}(s')) = \oint \mathrm{d}s' \frac{\mathrm{d}\vec{\alpha}(f(s'))}{\mathrm{d}s'} \delta^3(\vec{x} - \vec{\alpha}(f(s'))) \\ &= \oint \mathrm{d}s \frac{\mathrm{d}\vec{\alpha}(s)}{\mathrm{d}s} \delta^3(\vec{x} - \vec{\alpha}(s))\end{aligned}$$

となって，元の式 (1.7) と変わらない．よって電場 (1.7) の α 上の分布はパラメータ付けに依らず，α の形状だけで決まることになる．式 (1.7) の左辺にパラメータ s のラベルがないのは理に適っている．

1.2.2　量子状態：スピン・ネットワーク

物理的な系は他の系との相互作用を通じて本性を表す．これらの相互作用は“量子”において起こり得る：振動数 ν の振動子で，サイズ $E = h\nu$ の離散的なパケット，または量子の形でエネルギーが交換される．もし振動子が n 番目のエネルギー固有状態にあるならば，我々はそこに n 個の量子があると言う．もし振動子が自由場のモードならば，我々は場に n 個の“粒子”があると言う．それ故，我々は電磁場がその量子，すなわち光子から構成されていると見なせる．重力場の量子は何だろうか．あるいは，重力場は時空と同じ存在だから，空間の量子とは何か［と問うても良い］．

系の量子の特性は，我々の系との相互作用に関与する量を表す演算子のスペクトル特性によって決まる．例えば振動子のエネルギーに関係する演算子は，離散的なスペクトルを持ち，量子数 n がその固有状態をラベルする．その固有状態の組は量子系の状態空間において基底を成す：この事実により我々は系の各状態を，n

量子から成る状態 $|n\rangle$ の量子力学的な重合せと見なせる．空間の量子力学的な特性を理解するには，それ故，我々の空間自体との相互作用に関与する量に関係する演算子の，固有値 (スペクトル) 問題を考えなければならない．我々が行う重力場との最も直接的な相互作用は，物理的空間の幾何学的構造を通じる．長さ，面積，あるいは体積の測定は，実際，GR によれば，重力場の局所的な特性の測定である．

例えば，物理的な領域 $\mathcal{R}$ の体積 $\mathbf{V}$ は

$$\mathbf{V} = \int_{\mathcal{R}} \mathrm{d}^3x \, |\det e(x)| \tag{1.10}$$

であり，ここに $e(x)$ は重力場 (を表すトライアド行列) である［文献 [415, p.101] のノートを参照］．量子重力では，$e(x)$ は場の演算子であり，それ故 $\mathbf{V}$ もまた演算子である．

体積 $\mathbf{V}$ は場 e の非線形な関数であり，体積演算子の定義は局所的な演算子化された (operator-valued) 分布の積を示している．これは適切な正則化の手続きを用いて，極限として達成できる．背景の計量の不在においても有意味に留まる正則化の手続きの発達は，LQG が基礎を置くところの主たる技術的な道具である．これらの技法を用いて，よく定義された自己共役 (self-adjoint)［Hermite］な演算子 $\mathbf{V}$ が定義できる．このときそのスペクトル特性の計算は LQG の主要な結論の 1 つであって，6.6.5 節で導かれる．

$\mathbf{V}$ のスペクトルは離散的であることが判明する．それ故，時空の体積はそれ自体，体積演算子の固有値で与えられる，決まった体積の大きさを持つ量子となって現れる．空間の量子は直観的には空間の量子化された“粒子 (grains)”あるいは“空間のアトム”として考えられる．量子空間の第 1 の直観的描像はそれ故“空間の粒子たち”の描像である．それらは演算子 $\mathbf{V}$ のスペクトルから決定される，量子化された体積の値を持つ．

描像の次の要素は，どの粒子がどの粒子に隣接しているかの情報である．隣接 (接触していること (being contiguous, being in touch)，傍にあること) は空間的な関係の基礎である．もし 2 つの時空領域が隣接していれば，すなわち，それらが互いに接触していれば，それらは面 $\mathcal{S}$ によって分離されている．$\mathbf{A}$ を面 $\mathcal{S}$ の面積としよう．面積もまた重力場の関数であり，それ故，体積のように，演算子によって表される．この演算子のスペクトル問題もまた，LQG において解かれている．これについては 6.6.2 節で詳細に議論する．このスペクトルもまた離散的であることが判明する．直観的には，空間の粒子は“面積の量子”によって分離されている．例えば面積固有値の主系列 (principal series) は半整数 $j_i, i = 1, \cdots, n$ の多重項によってラベルされ，

$$\mathbf{A} = 8\pi\gamma\hbar G \sum_i \sqrt{j_i(j_i+1)} \tag{1.11}$$

で与えられることが判明する．ここに Immirzi パラメータ γ は理論における任意の無次元の定数である．

いくつかが他と隣接しているような空間の N“粒子”から成る，空間の量子状態 $|s\rangle$ を考えよう．この状態を N 個の結節点 (nodes) を持つ抽象的なグラフ Γ で表す．(ここで抽象的なグラフとは，3-多様体に埋め込まれたグラフの滑らかな変形の下での同値類 (equivalence class) を意味する．) グラフの結節点は空間の粒子を表す；グラフのリンク線 (links) は隣接する粒子を繋ぎ，2 つの隣接する粒子を分離する面を表す．このとき量子状態はグラフ Γ と，結節点とリンク線のラベルで特徴付けられる：結節点 n のラベル i_n は体積の量子数であり，リンク線 l のラベル j_l は面積の量子数である．

これらのラベルを持つグラフは (抽象的な)“スピン・ネットワーク”$s = (\Gamma, i_n, j_l)$ と呼ばれる (図 2 を見よ)．6.3.1 節において，我々は量子数 i_n と j_l が局所ゲージ群 ($SU(2)$) の表現論から決まることを見る．より正確には，j_l はユニタリーな既約表現をラベルし，i_n は結節点 n に接続する表現間の結節因子 (intertwiners［文献 [415, p.106] の訳語を踏襲］) の空間における基底をラベルする．このときラベル $j_i, i = 1, \cdots, n$ を持つスピン・ネットワークの n 本のリンク線を切る面の面積は上式 (1.11) で与えられる．

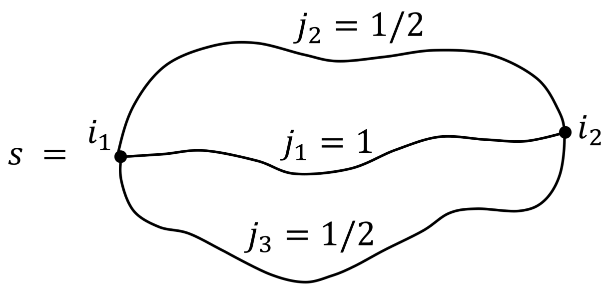


図 2　簡単なスピン・ネットワークの 1 例

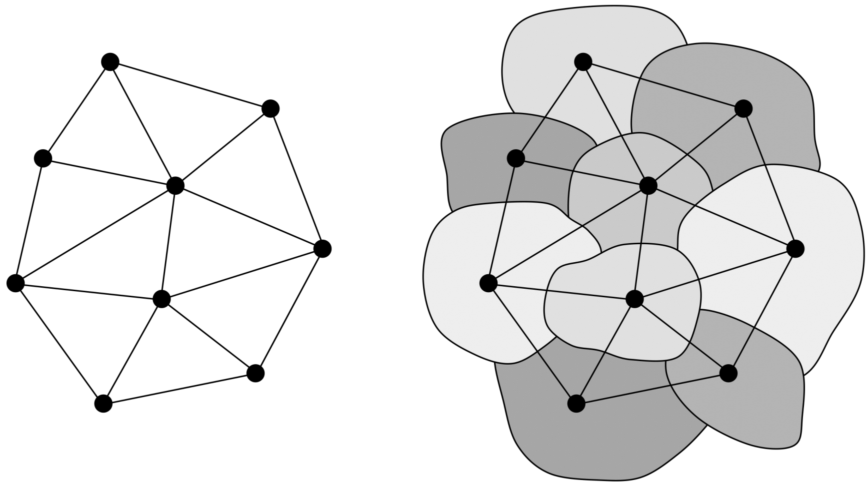


図 3　抽象的なスピン・フォーム［正確にはスピン・ネットワーク］のグラフと，それが表す“空間の塊 (chunks)”または体積の量子のアンサンブル．塊は対応する結節点が結ばれているとき隣接している．各リンク線は 2 つの塊を分離する 1 つの基本的な面を切る．

6.3.1 節で示されるように，(運動学的な) Hilbert 空間 $\mathcal{K}_{\rm diff}$ はちょうどスピン・ネットワークによってラベルされる基底を許容する．これは適当な面積と体積の演算子が対角的となるような基底状態である．その物理的な解釈が図 3 にスケッチされている：スピン・ネットワーク状態 $|s\rangle$ は量子化された 3 次元の幾何学を記述する．

ループ状態 $|\alpha\rangle$ はグラフ Γ が結節点を持たないスピン・ネットワーク状態である；すなわち，単一のループ α であって，群の基本表現によってラベルされる．そのような状態では，式 (1.7) の電場のように，重力場はループ α 自身の上にのみ土台を持つ．

電磁場が n 光子状態の量子力学的な重合せであるのと同じ意味で，LQG では，物理的空間はスピン・ネットワークの量子力学的な重合せである．電磁場に関する (自由な) QFT の第 1 の，そして基本的な予言は光子の存在であり，与えられた振動数を持つ光子のエネルギーと運動量の具体的で定量的な予言である．同様に，LQG の第 1 の予言は面積と体積の量子の存在の存在であり，それらのスペクトルの定量的な予言である．

面積と体積の充分正確な測定は，これらのスペクトル的な値の 1 つを測定することになると理論は予言する．今のところ，この予言を確かめることは我々の技術的能力の外にあることが分かる．

スピン・ネットワークはどこにあるか？　スピン・ネットワーク状態は位置を持たない．それは抽象的なグラフであって，時空の多様体に埋められたグラフではない．グラフを定義する抽象的な組合せの関係だけが重要であり，その空間における形状や位置は重要ではない．

実際，スピン・ネットワーク状態は空間“内”にはない：それは空間“である”．［実際「空間に与えられたスピン・ネットワーク」と言うとき，空間が生成される前から (連続的な) 空間の概念が密輸入されていることになる．］それは他のものとの関係で位置付けられるのではない：他のもの (物質，粒子，その他の場) がスピン・ネットワークとの関係で位置付けられる．「スピン・ネットワークはどこにあるのか」と問うことは，「Einstein 方程式の解はどこにあるのか」と問うようなものである．Einstein 方程式の解は“どこか (somewhere)”にあるのではない：それは，それとの関係であらゆるものが位置付けられるところの“場所 (where)”である．同様に，Yang–Mills 場およびフェルミオン場のような他の力学的な対象は，スピン・ネットワーク状態の上に住んでいる．

これは微分同相不変性の帰結である．専門的には，スピン・ネットワーク状態はまず 3 次元の多様体に埋め込まれたグラフとして定義される；次いで微分同相ゲージの実行は 2 つの互いへと変形可能なグラフを同一視する．それらはゲージ等価である．これは座標の変更で関係付けられる 2 つの Einstein 方程式の解を同一視することと似ている．多様体に埋め込まれたスピン・ネットワークは S と書かれ，“埋め込まれたスピン・ネットワーク”と呼ばれる；それらの微分同相写像の下での同値類は s と書かれ，“抽象的なスピン・ネットワーク”，あるいは s-結び目 (s-knots) と呼ばれる．空間の量子状態は s-結び目によって決まる[*8]．

スピン・ネットワークは空間“内”に住んでいるのではなく，むしろ空間“である”という事実は，遠大な帰結を持つ．空間それ自体が離散的で組合せ的な特徴を持つことが判明する．これは理論において強制あるいは仮定されていないことに注意せよ．それは完全に空間の幾何学を記述する物理量のスペクトルに関する，伝統的な量子力学の計算の結果である．短いスケールでは空間的な連続性がないため，理論には (文字通り！) 紫外発散の余地 (room) がない［短い波長を収容できる連続的な空間領域がないということ］．理論は実効的に自らを Planck 尺度において切断する．空間は Planck 尺度において実効的に粒状であり，無限大の紫外極限はない．

第 7 章ではいかにして Yang–Mills 場とフェルミオン場を理論と結合し得るかを説明する．これはスピン・ネットワーク s の構造を豊かにすることによって達成される．例えばゲージ群 G の Yang–Mills 理論の場合には，リンク線が G の既約表現をラベルする付加的な量子数を担う．スピン・ネットワーク自体が格子 Yang–Mills 理論の格子のように振舞う．量子重力では，それ故，格子自体が力学変量となる．しかしながら伝統的な格子 Yang–Mills 理論との重要な違いに注意してもらいたい：格子サイズはゼロへと縮小されない：それは物理的な Planck サイズを持つ．

まとめると，スピン・ネットワークは量子重力場の運動学の数学的によく定義された，物理的に納得のいく記述を与える．それは小さなスケールでの空間構造のよく定義された描像をも与える．この新しい描像が単に昔ながらの Yang–Mills 理論のアイデアと，一般相対論的な背景独立性の組合せだけから立ち現れていることは，注目に値する．

---

*8 “スピン・ネットワーク”という表現は文献において，埋め込まれたそれと抽象的なそれの両方，さらにはそれがラベルする量子状態を表すのに用いられる．

1.2.3　背景独立な QFT のダイナミクス

量子重力場のダイナミクスは，スピン・ネットワーク状態に対する振幅 $W(s)$ を与えることで記述できる．ここでは発見的な方法で，これらの振幅の物理的な解釈と，理論においてそれらを定義する方法を説明しよう．本書の主要な特色は，観測量 + 発展の一般相対論的な考え方に基づいていることである．本節はこの見方をスケッチしており，前の節よりもいくぶん理解するのが難しいかもしれない．

振幅 $W(s)$ の解釈　粒子の量子ダイナミクスは遷移の確率振幅

$$W(x,t,x',t') = \langle x|\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0(t-t')}|x'\rangle = \langle x,t|x',t'\rangle \tag{1.12}$$

によって完全に記述される．ここに $|x,t\rangle$ は Heisenberg 描像の位置演算子 $x(t)$ の固有値 x を持つ固有状態であり，H_0 はハミルトニアン演算子，そして $|x\rangle = |x,0\rangle$ である．伝播関数 (propagator) $W(x,t,x',t')$ は古典的な軌道の有限部分を限る 2 事象 (x,t) と (x',t') に依存する．本書では事象の組 (x,t,x',t') の空間を $\mathcal{G}$ と呼ぶ．

物理的実験は時刻 t' での準備 (用意，preparation) と時刻 t での測定から成る．例えば特定の実験では，我々は粒子を t' に x' に局在化させ，その後，時刻 t に粒子を x に見出す．組 (x,t,x',t') は準備と測定を含む，特定の完全な観測の設定におけるデータの完全な組を表す．空間 $\mathcal{G}$ はこれらのデータの組の空間である．量子論では，我々は $\mathcal{G}$ 上の関数である複素振幅 $W(x,t,x',t')$ を，そのようなあらゆるデータの組に関係付ける．Feynman が指摘したように，この振幅は量子ダイナミクスの全てを含んでいる．Feynman に従って，我々は $W(x,t,x',t')$ を，t と t' においてそれぞれ値 x と x' をとる経路にわたる和で計算できる．

もし我々が位置ではなく異なる観測量を測定するならば，我々は状態 $|x\rangle$ とは異なる状態を得る．$|\psi_{\rm in}\rangle$ を時刻 t' で用意された状態とし，$|\psi_{\rm out}\rangle$ を時刻 t で測定された状態としよう．この測定に関係する振幅は

$$A = \langle\psi_{\rm out}|\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0(t-t')}|\psi_{\rm in}\rangle\,. \tag{1.13}$$

状態の組 $(\psi_{\rm in},\psi_{\rm out})$ は，始状態の Hilbert 空間と終状態の Hilbert 空間 (の双対) のテンソル積の空間 $\mathcal{K}_{t,t'}$ における，状態 $\psi = |\psi_{\rm in}\rangle\otimes\langle\psi_{\rm out}|$ を定義する．伝播関数は $\langle 0|\,(|x'\rangle\otimes\langle x|) = W(x,t,x',t')$［式 (5.45)］によって，$\mathcal{K}_{t,t'}$ の (場合によっては一般化された) 状態 $|0\rangle$ を定義する．振幅 (1.13) は単に

$$A = \langle 0|\psi\rangle \tag{1.14}$$

と書ける［式 (5.44)］．それ故，我々は t' から t へのダイナミクスを，t'“と”t での測定結果を表す Hilbert 空間 $\mathcal{K}_{t,t'}$ の単一の状態 $|0\rangle$ を用いて表現できる．状態 $|0\rangle$ は共変な真空と呼ばれており［共変な定式化 (5.51–52) も見よ］，最低エネルギーの状態と混同してはならない．

このアイデアを場の理論へと拡張しよう．場の理論では，データの組 (x,t,x',t') の対応物は，有限の時空領域を限る 3 次元の面 Σ と，Σ 上の場の配位 φ の組 $[\Sigma,\varphi]$ である．ちょうど (x,t,x',t') が粒子の古典的な軌道の有限部分を限るように，これらのデータは古典的な場の配位の有限部分を限る事象の組 $(x\in\Sigma,\varphi(x))$ を定義する．局所的な実験 (測定，準備，あるいは単なる仮定) から得られるデータは実際，有限の時空領域の境界全体における系の状態に関係していなければならない．場の理論的空間 $\mathcal{G}$ はそれ故，面 Σ と Σ 上の場の配位 φ の空間である．量子ダイナミクスは振幅 $W[\Sigma,\varphi]$ を用いて表される．Feynman の直観に従って，我々は $W[\Sigma,\varphi]$ を，境界 Σ で値 φ をとるバルク場の配位にわたる和で形式的に定義できる．実際，5.3 節において，汎関数 $W[\Sigma,\varphi]$ が QFT のダイナミクスを捉えていることを主張する．

Σ の幾何学に対する $W[\Sigma,\varphi]$ の依存性は，測定器具の時空位置を含んでいることに注意しよう．実際，器具の構成要素の相対位置は，それらの物理的距離と測定の間に経過した物理的時間で決まり，それらのデータは Σ の計量に含まれている．

さて，背景独立な理論を考えよう．微分同相不変性は直ちに $W[\Sigma,\varphi]$ が Σ に依存しないことを意味する．これは 1.1.4 節で言及した，$W(x,y)$ が x と y に依らないことに対応している．それ故，重力では W は場の境界値にのみ依存する．しかしながら，場は重力場を含んでおり，そして重力場は時空の幾何学を決定する．それ故，W の場への依存性はなお測定器具の要素の相対的な距離と時間の隔たりを規定するのに充分である！

ここで起きていることは，背景独立な QFT では 2 種類の測定があるということである：器具の部分の距離と測定間の時間経過を決定する測定と，場の力学変数に対する真の測定である．量子重力では，代わりに，距離と時間の隔たりは力学的場と同じ基盤の上にある．これが一般相対論的な革命の核心であり，背景独立な QFT の鍵である．

最後にもう 1 ステップ必要である．式 (1.12) より W の引数は古典的な量ではなく，むしろ対応する演算子の固有状態であることに注意しよう．重力場の固有状態はスピン・ネットワークである．それ故，量子重力では W の引数は，閉じた 3 次元の面上の重力場 (または幾何学) の可能な測定結果を表す，スピン・ネットワークのはずである．こうして，量子重力では物理的振幅は $W(s)$ という形の振幅で表されるはずである．これはちょうど $W(x,t,x',t')$ が粒子に対して行ったのと同じように，幾何学の測定結果 s に関係する相関確率振幅を与える．

特に興味のある場合は，境界面を 2 つの構成要素に分離できるときであり，このとき $s=s_{\mathrm{out}}\cup s_{\mathrm{in}}$．この場合，$W(s_{\mathrm{out}},s_{\mathrm{in}})$ は s_{in} が観測されたときに，量子力学的な 3 次元幾何学 s_{out} を測定する確率振幅と解釈できる．

スピン・ネットワーク s_{in} は単に x だけでなく，(x,t) の類似物であることに注意せよ．時間変数は物理変数と混合される (第 3 章)．この文脈ではユニタリーな量子力学的時間発展の概念はよく定義されないものの，確率振幅は依然としてよく定義され，物理的に意味を成す (第 5 章)．理論の量子力学的なダイナミクスの情報は完全に，スピン・ネットワークの振幅 $W(s)$ に含まれている．空間と物質の配位が与えられたとき，振幅はそれを観測する相関確率を決定する．

振幅 $W(s)$ の計算　古典的なハミルトニアン理論の相対論的な定式化では，ダイナミクスは相対論的ハミルトニアン H に支配される[*9]．このことは第 3 章で詳細に議論する．量子ダイナミクスは対応する量子力学的演算子 H に支配される．量子重力では，H はスピン・ネットワークの空間上で定義される．理論には外的な時間変数 t がなく，Schrödinger 方程式に代わる量子力学的ダイナミクスの方程式は，Wheeler–DeWitt 方程式と呼ばれる方程式 $H\Psi=0$ となる．Wheeler–DeWitt 方程式の解の空間は $\mathcal{H}$ と書かれる．$\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ を Wheeler–DeWitt 方程式の解たちの上に射影する演算子 $P:\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}\to\mathcal{H}$ がある (数学的により正確な言明は 5.2 節を見よ)．

遷移振幅 $W(s,s')$ は演算子 P の行列要素である．それらは物理的なスカラー積，すなわち空間 $\mathcal{H}$ におけるスカラー積

$$W(s,s')=\langle s|P|s'\rangle_{\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}}=\langle s|s'\rangle_{\mathcal{H}} \tag{1.15}$$

を定義する．このように，2 状態間の遷移振幅は単にそれらの物理的スカラー積である (第 5 章)．より一般に，スピン・ネットワークの不在した，$\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ の特別な状態 $|\emptyset\rangle$ がある．それは体積がゼロの空間，あるいは，

[*9] H は“ハミルトニアン拘束”あるいは“superhamiltonian”と呼ばれることもある．

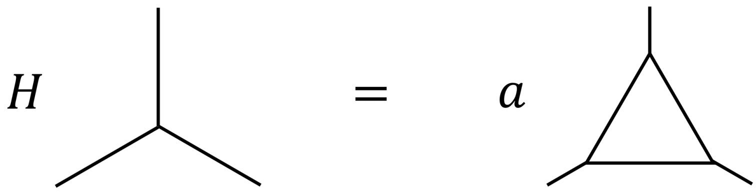


図 4　スピン・ネットワークの結節点に対する H の作用の図式

より正確には，全く空間がない状態を表す．理論のダイナミクスを定義する共変な真空は $|0\rangle = P\,|\emptyset\rangle$ で定義される．スピン・ネットワークの振幅は

$$W(s) = \langle 0|s\rangle = \langle\emptyset|P|s\rangle \tag{1.16}$$

で定義される．

演算子 H の構成は LQG の主要な課題である．それはデリケートであり，演算子積を扱うために非自明な正則化の手続きを必要とする．第 7 章はこの構成に充てられている．注目すべきことに，ちょうど微分同相不変性のおかげで，正則化が取り除かれるような極限が存在する (7.1 節)．これは背景独立性の第 2 の主要なご利益である［第 1 のご利益は 1.2.1 節末尾か]．今のところ，演算子 H の複数のバージョンが構成されており，どれが正しいのか (もしあれば！) はまだ明確でない．以下に述べることはそれら全てに当てはまる．

ハミルトニアン演算子 H の最も著しい側面は，それが結節点のみに作用することである．結節点を持たないスピン・ネットワークによってラベルされた状態――すなわち，そのグラフ Γ は単につまらないループの集まりである――は Wheeler–DeWitt 方程式の解である．実際，Wheeler–DeWitt 方程式の厳密解を発見できるという予期せぬ事実は全く，1980 年代後半の，初期の段階において LQG の興味を惹きたてた最初の主要な驚きだった．

典型的な状態 $|s\rangle$ に作用させると，演算子 H の作用は離散的で連結的 (combinatorial) であることが判明する：結節点の近傍においてグラフのトポロジーが変えられ，ラベルが修正される．結節点に対する H の作用の典型的な例が図 4 に示されている：結節点への作用は結節点を 3 つの結節点へと分け，(結節点の周りのスピン・ネットワークのラベルに依存する) 数 a を状態に掛ける．リンク線と結節点のラベルは図には示されていない．［文献 [415, pp.118–119,p.152] も参照．］

量子重力においてスピン・ネットワーク基底は多くの点で有用であることに注意しよう．スピン・ネットワーク基底の状態は

(i) 面積と体積を対角化する；
(ii) 微分同相不変性を制御する：状態の微分同相写像の同値類は s-結び目によってラベルされる；
(iii) H の作用を簡単にし，結節点に対する連結的な作用へと削減する．

純粋な重力の場合，ハミルトニアン演算子 H の構成は LQG の一般的な定式化の定義を完成させる．これは第 7 章において物質との結合に拡張される．第 8 章では理論の最も興味ある応用をいくらか説明する．特に LQG の，宇宙論 (古典的な初期の特異性，インフレーションの制御) とブラックホール物理学 (エントロピー，放出スペクトル) への応用を説明する．LQG の天体物理学への試験的な応用にもいくらか言及した．

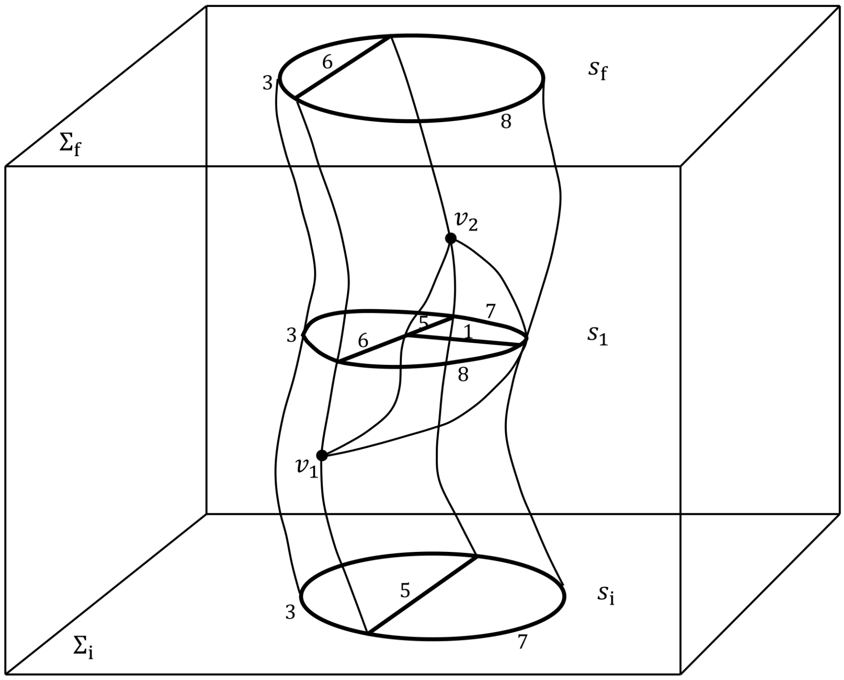


図 5　中間のスピン・ネットワーク s_1 を経由する，始スピン・ネットワーク s_{i} から終スピン・ネットワーク s_{f} への発展を表すスピン・フォーム．ここに v_1 と v_2 は相互作用頂点である．

1.2.4　量子時空：スピン・フォーム

理論の全ての予言が計算可能になるには，理論の一般的な定義を得るだけでは充分ではない．量子重力における遷移振幅の計算への道は，スピン・フォームによる定式化によってもたらされる［フォーム (foam) は泡の意］．

Feynman のアイデアに従って，$W(s,s')$ に経路にわたる和としての表現を与えることができる．この表現は様々な方法で得られる．特に，それは摂動展開から直観的に導かれ，s' を s へと移行させる H の一連の作用の異なる経歴にわたって和をとることになる．

経路はすると，結節点で起きる相互作用を伴う，グラフの“世界史 (world-history)”となる．この世界史は図 5 のように，2-複体 (two-complex)［文献 [415, p.150] の訳語にならった］——すなわち面 (faces，リンク線の世界史) の集まり；面は辺 (edges，結節点の世界史) で結びつく；他方，辺は頂点 (vertices) で結びつく——である．1 つの頂点は個々の H の作用を表す．図 4 の H の作用に対応する頂点の例が，図 6 に描かれている．下から上へ行くにつれて，2-複体の断面はちょうど図 4 の左辺のグラフから右辺のグラフへ移行することに注意せよ．このように，2-複体は Feynman グラフのようであるが，1 つの追加構造を持つ．Feynman グラフは頂点と辺から成り，スピン・フォームは頂点，辺，および面から成る．

面は［リンク線と同様に］面積の量子数 j_l でラベルされ，辺は［結節点と同様に］体積の量子数 i_n でラベルされる．このような方法でラベルされる面と辺から成る 2-複体は“スピン・フォーム”と呼ばれ，σ と書かれる．このように，スピン・フォームはスピン・ネットワークの Feynman グラフ，あるいはスピン・ネットワークの世界史である．s' から s に至る経歴は，s' と s によって限られたスピン・フォーム σ である．［スピ

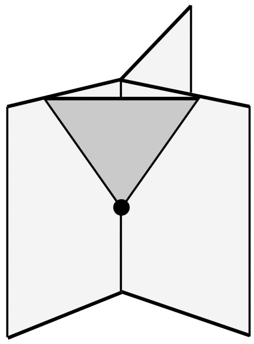


図 6　スピン・フォームの頂点

ン・フォームはビールの泡 (フォーム) のように見える構造を持ち，そのある高さでの断面としてスピン・ネットワークが現れる [415, pp.150–151].］

$W(s,s')$ の摂動展開には，s と s' によって限られた各スピン・フォーム σ に関する項が現れる．この項は σ の振幅である．スピン・フォームの振幅は (測度の項 $\mu(\sigma)$ 掛ける) 頂点 v の頂点振幅 $A_v(\sigma)$ にわたる積で与えられることが判明する．頂点振幅は始・終スピン・ネットワーク間の H の行列要素によって決定され，頂点に隣接する面と辺のラベルの関数である．これは始・終状態間のハミルトニアンの行列要素によって決まる，伝統的な Feynman 頂点の振幅とアナロガスである．

物理的な遷移振幅 $W(s,s')$ はこうして，スピン・ネットワーク s と s' によって限られたスピン・フォームにわたる和

$$W(s,s') \sim \sum_{\substack{\sigma \\ \partial\sigma = s\cup s'}} \mu(\sigma) \prod_v A_v(\sigma) \tag{1.17}$$

によって得られる．より一般には，閉じた表面を表すスピン・ネットワーク s に対して

$$W(s) \sim \sum_{\substack{\sigma \\ \partial\sigma = s}} \mu(\sigma) \prod_v A_v(\sigma). \tag{1.18}$$

一般に，Feynman の経路積分はハミルトニアン演算子を指数の肩に乗せること (exponentiating) によって，Schrödinger 理論から導けるけれど，それは粒子の古典的な軌道にわたる和として直接的に解釈することもできる．同様に，スピン・フォームの和 (1.17) も時空に関する和として解釈できる．すなわち，和 (1.17) は，4 次元幾何学にわたる和

$$W({}^3g, {}^3g') \sim \int_{\partial g = {}^3g \cup {}^3g'} [\mathrm{D}g] \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} S[g]} \tag{1.19}$$

としての量子重力の (よく定義されない) Wheeler–Misner–Hawking 表現の，具体的で数学的によく定義された実現と見ることができる．

Planck 尺度におけるその泡状の (foamy) 構造により，スピン・フォームは Wheeler による時空 “泡 (foam)” の直観の，数学的に正確な具現化と見ることができる．第 9 章では，式 (1.17) の多様な具体的理解，さらには式 (1.17) を式 (1.19) の離散化と直接関係付ける可能性を説明する．

1.3　概念的な問題

重力の量子論の研究は次のような疑問を生じる：空間とは何か？ 時間とは何か？「どこかにある」とは何を意味するのか？「運動」とは何を意味するのか？ 運動とは物体との関係で，それとも空間との関係で定義されるのだろうか？ 時間あるいは時空を参照することなく物理を定式化することはできるのか？ さらには：物質とは何か？ 因果律とは何か？ 物理学における観測者の役割とは何か？

この種の疑問は物理学の主要な発展の時期において，中心的な役割を果たしてきた．例えば，それらはEinstein，Heisenberg，Bohr および彼らの同僚；さらには Descartes，Galileo，Newton と彼らの同時代の人々，そして Faraday，Maxwell および彼らの同僚にとって，中心的な役割を果たした．今日では，この問題提起の仕方はしばしば多くの物理学者から“あまりに哲学的”だと見なされている．

実際，20 世紀後半の物理学者のほとんどは，この類の疑問を不適当と見なしてきた．この見方は，彼らが直面している問題にとっては適切であった：ヘリウム原子に Schrödinger 方程式を適用し，いかにして中性子星がまとまっていられるのかを理解し，強い相互作用を支配する対称群を見出すには，第 1 原理について心配する必要はない．この時期の間に，物理学者らは一般的な問題への興味を失った．この時期に誰かが言ったように，「理論が何をしてくれるかを問うな；理論のために何をできるかを問え．」つまり，根本的な疑問を投げかけるな，ただ目の前に与えられた理論を発展させ修正し続けよ．基礎が明確であって，問題が与えられた概念的枠組みの中での問題解決であるときには，基礎について心配する理由はない：問題は技術的なものであって，実践的なアプローチが最も有効となる．

今日では，我々の直面している困難の種類は変わった．量子時空を理解するには，我々は今一度，それらの根本的な問題へと立ち返らねばならない．我々は古い根本的な問題への新しい答を見つけなければならない．その新しい答は我々が QM と GR について学んだことを考慮に入れていなければならない．この概念的なアプローチは Weinberg と Gell-Mann のそれではなく，Newton，Maxwell，Einstein，Bohr，Heisenberg，Faraday，Boltzmann，その他大勢のそれである．後者の著述から明らかなように，彼らは一般的で根本的な疑問を考えることで，彼らが発見したことを発見したのである．量子重力の問題は，これらの疑問を再考することなくして解かれることはないだろう．

これらの疑問のいくつかは本文で議論される．ここではこれらの概念的な問題の 1 つ——時間の概念の役割——についてだけ言及する．

1.3.1　時間のない物理

遷移振幅 $W(s,s')$ は時間に陽に依存しない．これは期待されることである，何故なら古典的な GR の物理的予言も時間座標 t に陽に依存しないから．理論は特別な時間変数に関して物理的変数が発展するのとは異なる仕方で，物理的変数の相関を予言する．しかし時間変数 t の現れない物理学理論とは何を意味するのか．

逸話を紹介しよう．地面に対する物体の運動を，観測量 $A, B, C, \cdots$ の時間における発展を表す，数学的法則で記述できることに最初に気付いたのは Galileo Galilei だった．すなわち，関数 $A(t), B(t), C(t), \cdots$ に対する法則である．Calileo の重要な貢献は時間変数 t を測る有効な方法を発見し，それ故これらの関数に操作上の意味を与えたことである．実際，Galileo は若者として，振り子の微小振動が“等しい時間を刻む”ことに気付き，現代的な時計の発見に決定的な貢献をした．話は，今でも Pisa の大聖堂に見られる巨大なシャン

デリアの，ゆっくりとした振動を Galileo が見つめている場面に飛ぶ[*10]．彼は自分の脈拍に対する振動の周期を調べ，シャンデリアのどの振動の間にも同じ回数の脈拍が経過することに気付いた．これが鍵となる洞察，現代的な時計の基礎である：今日あらゆる時計は実質的に振動子を含んでいる．後に存命中，Galileo は歴史的な下り坂の実験で，時計を用いて最初の定量的な地上の物理法則を発見した．

さて，この話の悩ましいところは，Galileo が自分の脈拍に対して振り子を調べたのに対し，その後すぐに医者が振り子に対して患者の脈拍を調べたということである．振り子の周期が“等しい時間”かかることの本当の意味は何だろうか．全ての振動で等しい量の t が経過する：我々が他の振り子を通じてのみ t にアクセスできるのだとしたら，我々はこのことをどのように知るのか？

この問題を概念的に明確化したのは Newton だった．Newton は流れる (“絶対的で自分自身に等しい”)“観測不可能な”量 t が存在すると“仮定した”．我々はこの t を用いて運動方程式を書き下すが，我々は本当は t にアクセスできない：我々は読み $T_1(t), T_2(t), \cdots$ を与える時計を作ることはできるが，その読みは，我々の方程式によれば，望みの精度で t を近似するにすぎない．我々が実際に測定するのは時計に対する他の変数の発展，すなわち $A(T_1), B(T_1)$ である．さらに，我々は関数 $T_1(T_2), T_2(T_3), \cdots$ を測定することで，時計を他の時計と照合することができる．これらの測定が全て，t に関する発展方程式を用いた我々の計算結果と整合するという事実は，その方法に対する信頼を与える．特に，そのことは“観測できない”物理量 t を仮定することが，有用で理に適っていることであるという信頼を与える．

ただ：この仮定の有用性は量子重力では失われる．理論は $A(B), B(C), A(T_1), T_1(A)$ のような，我々の見る観測量の間の関係を計算することを可能にする．しかし理論は，Newton 理論や特殊相対性理論とは対照的に，これらの観測量の観測不可能な t に関する発展を与えない．ある意味，このことは単に Planck 尺度では良い時計がないことを意味している．

もちろん，特定の問題では 1 つの変数を選び，それを独立変数として扱うことに決め，“the”時間と呼ぶことはできる．例えば特定の時計の時間，特定の粒子の経歴に沿う特定の固有時間，等．選択は大いに任意であり，一般には局所的にしか意味を成さない．一般の共変な理論は特別な時間変数を選ばない．

この任意性を説明する例を 2 つ挙げる．

- 正確な時計を投げ上げ，それが地面に戻ってきたときにその時間経過の読み t_{f} を，地面に留まっている時計の時間経過の読み t_{e} と比較することを考えよう．GR は 2 つの時計の読みが異なることを予言し，t_{f} と t_{e} の定量的な関係を与える．これは物理的な時間 t_{e} に対して発展する観測量 t_{f}，あるいは物理的な時間 t_{f} に対して発展する観測量 t_{e} に関係するのだろうか[*11]？
- 宇宙論的な文脈はしばしば自然な時間の選択が利用可能な例として挙げられる：宇宙論的な時間 t_{c} はビッグバンからの銀河の世界線に沿う固有時間である．しかし我々の［銀河の］と同じ t_{c} でアンドロメダで起きる事象 A は，Einstein の同時性の定義［2.4.5 節］の意味で同時に起きているアンドロメダの事象 B よりも“ずっと後”である[*12]．すると“たった今”アンドロメダでは何が起きているのか？ A か B か？ さらに，現実世界は本当は均一でない：ビッグバンに対して 2 つの異なる年齢を持つ，あるいは 2 つの異なる質量を持つ，2 つの銀河が融合したら［me merge は merge の誤記か］，2 つのどちらが正しい時間を持つのか．

“古典的な”一般相対性理論の内に留まる限り，与えられた重力場は擬 Riemann 多様体の構造を持つ．それ故，理論のダイナミクスは特別な時間変数を持たないが，それでも我々は与えられた解の各々に対して時空の概念を有する．しかしながら量子理論では，ちょうど粒子の軌道がないのと同じく，古典的な場の配位がない．このように，粒子の量子理論において軌道の概念が消えるのと同様に，量子重力では時空の概念が消え

[*10] 魅力的な逸話だ．残念ながら，シャンデリアは Galileo の発見の数十年後にそこにかけられた．

[*11] 地面に留まっている時計の時間経過の読み t_{e} が“真の時間”を与えると言うつもりならば，時計が一緒にあるという 2 事象間の擬 Riemann 距離は t_{f} であって［擬計量は 2.1.1 節 (p.47)］，t_{e} ではないということを思い出してほしい：測地線に沿うのは上下する時計である．

[*12] この議論は Marc Lachieze-Rey による．

る．単一のスピン・フォームは時空を表していると考えられるけれども，世界の経歴は単一のスピン・フォームではない：それはスピン・フォームたちにわたる和である．

理論は時間の概念を利用することなく，概念的によく定義されている．理論は我々が観測可能な物理量の間の相関に対する確率的な予言を与える．原理的には，これらの予言を実験によって検証できる*13．さらに，理論は量子重力場，すなわち“量子幾何”の明瞭で理解可能な描像を与える．

このように，その上で事物が運動するところの舞台を成す背景“時空”はない．全てのものがそれに沿って流れるところの“時間”はない．我々が生まれ落ちた世界は時間の概念を用いずに理解できる．

文献ノート

摂動論的な量子一般相対性理論が繰り込み不可能である事実は長く信じられてきたが，それは 1986 年に Goroff と Sagnotti [29] によってようやく証明された．

量子重力の最新の研究の入門には，例えば，レビュー論文 [30–33] を見よ．問題の興味深い概観的な視点は，本 [34] への様々な寄稿にある．私は [35–37] において，時空の物理の現状に関する評論的な議論を与えた．量子重力の発展の歴史的な記述は付録 B に与えられている．

量子重力——まだ何も確かでない主題——への全般的な手引きとしては，学びに意欲的な学生は，John Wheeler 1967 [38]，Steven Weinberg 1979 [39]，Stephan Hawking 1979 および 1980 [40,41]，Karel Kuchar 1980 [42]，および Chris Isham の見事な総合 (magistral syntheses) [43–45] のような，アイデアに富み異なる視点を提示している，古典的なレビューも勉強することが強く勧められる．弦理論に関する古典的な教科書は Green, Schwarz および Witten，および Polchinski [46] である．弦理論の困難と，弦とループの結果の比較の議論については，対話形式で書かれた [47] と， [48] を見よ．Alain Connes の展望の魅力的な発表については， [49] を見よ．Lee Smolin の人気の科学本 [50] は LQG の読みやすく楽しめる概説を提供している．

LQG は小説や短編小説に着想を与えている．Kim Stanley Robinson による *Blue Mars* はループ重力と弦の将来的な発展と統合の記述を含んでいる．私はループ重力によって与えられる空間の描像の最も明瞭な説明の 1 つから始まる，Greg Egan による SF 小説 *Schild Ladder* [52] を勧める (Greg は才能ある作家であり LQG の発展に貢献している科学者でもある)．また，イタリア語が読める人々には，時間の消失の意味に関する静かな瞑想のある魅力的な小説，Enrico Palandri による *Anna prendi il volo* [53] を勧める．文学には科学が発展させた新しく難しい考え方を，我々の文化における一般的な談話へと繊細に統合させる力がある．

*13 時間の特性は巨視的にのみ現れ得る．これについては 3.4 節と 5.5.1 節で議論する．

第 2 章　一般相対性理論

Lev Landau は GR を科学理論で“最も美しい”と呼んだ［文献 [417, p.253]］．理論は第一義的には重力場の記述である．今日ではそれは地上の，および天文学的な観測により，非常に広範に支持されており，今のところ実験的な観測によって疑われたことはない．

しかし GR は単にそれだけには留まらない．それは自然の基本言語に対する我々の理解の完全な修正である．この修正は重力的な相互作用に単独で適用されるのではない：それは物理学のあらゆる側面に当てはまる．実際，Einstein によるこの理論の発見の，物理的世界に関する我々の理解の修正と，その帰結の完全な到達点は，まだ完璧には解明されていない．

本章は GR への入門ではなく，理論の網羅的な説明でもない．そのためには，私は読者にその主題に関する古典的な教科書を紹介する．ここでは量子理論で最も有用となる理論の読みを強調しつつ，簡潔で現代的な形式での定式化に対する手短な説明を与える．理論の物理的および概念的な基礎，そしてそれが物理的世界に対する我々の理解をどのように修正するかについても詳細に議論する．

2.1　定式化

note　本節には 2 重の難しさがある．1 つ目は数学のテクニックの問題で，理論が微分形式で書かれていること (付録 D 参照)．微分形式は座標系に依らないという意味で幾何学的であることが明白な表現である．2 つ目は物理的に重要で，理論が計量 $g_{\mu\nu}$ ではなく，テトラード (2.1):$e^I = e^I_\mu \mathrm{d}x^\mu$ を基本変数として書かれていること．テトラードは自然な変数であり，何より決定的なことに，フェルミオンはテトラードによる定式化を必要とする．

2.1.1　重力場

M を“時空”4 次元多様体としよう．$x = (x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ として，M の座標は $x, x', \cdots$ と書かれる．添字 $\mu, \nu, \cdots = 0, 1, 2, 3$ は時空添字である．

- **重力場** e は Minkowski 空間での値を持つ 1 形式

$$e^I(x) = e^I_\mu(x)\mathrm{d}x^\mu \tag{2.1}$$

である．添字 $I, J, \cdots = 0, 1, 2, 3$ は Minkowski ベクトルの成分をラベルする．それらは Minkowski 計量 η_{IJ} で上げ下げされる．

私は Einstein の計量場 $g_{\mu\nu}(x)$ よりもむしろ，テトラード場を“重力場”と呼ぶ．これには 3 つの理由がある：(i) フェルミオンがテトラードによる定式化を要求するため［式 (2.33–35)］，標準理論は g を用いて書けない；(ii) テトラード場 e は今日では，量子重力において g よりも利用されている；(iii) 私は e が g よりも重力場を，より概念的に明瞭な方法で表現していると考える (2.2.3 節を見よ)．計量による定式化との関係は 2.1.5 節で与えられる．［教科書の構成は e による定式化がより基本的であり，伝統的な g による定式化は後から導かれるという見方を反映している．］

- **スピン接続** ω は Lorentz 群の Lie 代数 $so(3,1)$ の値［本稿次節で補足］を持つ 1 形式

$$\omega^I{}_J(x) = \omega^I_{\mu J}(x)\mathrm{d}x^\mu \tag{2.2}$$

であり，ここに $\omega^{IJ} = -\omega^{JI}$．これは Lorentz 添字 I を持つ任意の場の共変微分

$$\mathrm{D}_\mu v^I = \partial_\mu v^I + \omega^I_{\mu J} v^J \tag{2.3}$$

［文献 [415, p.42] の 3 次元での式 (3.27) に対応］と，微分形式 (forms) のゲージ共変な外微分 D を定義する．例えば，Lorentz 添字を持つ 1 形式 u^I に対して

$$\mathrm{D}u^I = \mathrm{d}u^I + \omega^I{}_J \wedge u^J. \tag{2.4}$$

［式 (2.3) との関係を本稿次節で補足.］ねじれ (torsion) 2 形式は

$$T^I = \mathrm{D}e^I = \mathrm{d}e^I + \omega^I_{\mu J} \wedge e^J \tag{2.5}$$

で定義される．テトラード場 e は

$$0 = T^I = \mathrm{d}e^I + \omega[e]^I_{\mu J} \wedge e^J \tag{2.6}$$

によって，e と両立する (compatible) と呼ばれる，ねじれフリーな (torsion-free) スピン接続 $\omega = \omega[e]$ を一意的に定義する．この方程式のあらわな解は以下の式 (2.91) または式 (2.92) で与えられる．

- ω の曲率は Lorentz 代数の値を持つ 2 形式

$$R^I{}_J = R^I{}_{J\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \tag{2.7}$$

であって[*14]，

$$R^I{}_J = \mathrm{d}\omega^I{}_J + \omega^I{}_K \wedge \omega^K{}_J \tag{2.8}$$

で定義される［本稿次節で $R^I{}_{J\mu\nu}$ を同定][*15]．すると直ちに式 (2.4) から

$$\mathrm{D}^2 u^I = R^I{}_J \wedge u^J \tag{2.9}$$

が得られ［本稿次節で確認]，この式と式 (2.6) から，

$$R^I{}_J \wedge e^J \left[= \mathrm{D}^2 e^I = \mathrm{D}T^I\right] = 0. \tag{2.10}$$

曲率がゼロである領域は“平坦”と呼ばれる．式 (2.5) および式 (2.8) は Catran 構造方程式 (Cartan structure equations) と呼ばれる．

- “真空における”**Einstein 方程式**は

$$\epsilon_{IJKL}\left(e^I \wedge R^{JK} - \frac{2}{3}\lambda e^I \wedge e^J \wedge e^K\right) = 0. \tag{2.11}$$

［これを書き換えた式 (2.15) に $e_{I\mu}$ を掛けて式 (2.82),(2.94) を用いれば，見慣れた Einstein 方程式 $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \lambda g_{\mu\nu} = 0$ が得られる (式 (2.96)).］e と ω を関係付ける式 (2.6) と，Einstein 方程式 (2.11) が，他の場がないときの GR における場の方程式である．それらは作用

$$S[e,\omega] = \frac{1}{16\pi G}\int \epsilon_{IJKL}\left(\frac{1}{4}e^I \wedge e^J \wedge R[\omega]^{KL} - \frac{1}{12}\lambda e^I \wedge e^J \wedge e^K \wedge e^L\right) \tag{2.12}$$

の Euler–Lagrange 方程式であり［本稿次節で確認]，ここに G は Newton 定数[*16]，また λ は宇宙定数であって，以下ではしばしばゼロとおく．［式 (2.12) の次元から，光速を $c = 1$ と置いてある.］

---

*14 一般には私は時空添字 $\mu\nu$ を内部 Lorentz 添字 IJ の前に書くのを好む．しかし曲率に対しては Riemann の表記のより近くに留まるのを好む．

*15 接続 $\omega^I{}_J$ の曲率は $R^I{}_J = \mathrm{D}\omega^I{}_J$ と書かれることもある．D の定義 (2.4) を安直に用いると，2 次の項に余計な 2 が現れる［本稿次節で補足]．ポイントは，接続の添字がベクトル添字ではないということである．つまり，式 (2.4) はベクトル束の断面 (section of a vector bundle) 上での D の作用を定義しており，接続はベクトル束の断面ではない．

*16 定数 $16\pi G$ は古典的な運動方程式 (2.11) に何ら影響を及ぼさない．しかしながら，それは以降で説明する物質との相互作用の強さを支配し，また系の量子力学的特性も決定する．この点においてそれは，自由粒子の作用の前にある質量定数 m に似ている：古典的な運動方程式 ($\ddot{x} = 0$) は m に依存しないけれど，粒子の量子ダイナミクスは m に依存する．例えば，波束が拡がる割合 (rate) は m に依存する．同様に，純粋な重力の量子がこの定数に支配されることを見る予定である．

- 逆［相反］テトラード．行列 $e^I_\mu(x)$ の逆として定義される行列 $e^\mu_I(x)$ を用いて［$e^I_\mu e^\mu_J = \delta^I_J, e^I_\mu e^\nu_I = \delta^\mu_\nu$ [417, p.326]］，Ricci テンソル
$$R^I_\mu = R^{IJ}{}_{\mu\nu} e^\nu_J \tag{2.13}$$
と Ricci スカラー
$$R = R^I_\mu e^\mu_I \tag{2.14}$$
を定義し［本稿次節で補足］，真空の Einstein 方程式 (2.11) を
$$R^I_\mu - \frac{1}{2} R e^I_\mu + \lambda e^I_\mu = 0 \tag{2.15}$$
と書く［上式 (2.15) の導出については本稿次節］．
- 第 2 形式 (*Second-order formalism*)．式 (2.12) で ω を $\omega[e]$ に置き換えると，等価な作用
$$S[e] = \frac{1}{16\pi G}\int \epsilon_{IJKL}\left(\frac{1}{4} e^I \wedge e^J \wedge R[\omega[e]]^{KL} - \frac{1}{12}\lambda e^I \wedge e^J \wedge e^K \wedge e^L\right) \tag{2.16}$$
を得る．e と ω が独立である式 (2.12) における定式化は第 1 形式 (*first-order formalism*) と呼ばれる．2 つの形式はフェルミオンの存在下では等価でない；単一のフェルミオンに対する重力の影響は測定するのが困難なので，どちらが物理的に正しいのか我々は分からない．［文献 [416, § 3.2.2] の脚注に詳しい事情がスケッチされている．］
- 自己双対形式 (*Selfdual formalism*)．$i = 1, 2, 3$ として，
$$P^i_{jk} = \frac{1}{2}\epsilon^i{}_{jk}, \qquad P^i_{0j} = -P^i_{j0} = \frac{\mathrm{i}}{2}\delta^i_j \tag{2.17}$$
で与えられる“射影子” P^i_{IJ} ［$= -P^i_{JI}$］を考えよう*17．これは 2 つの性質
$$\frac{1}{2}\epsilon_{IJ}{}^{KL} P^i_{KL} = -\mathrm{i} P^i_{IJ}, \qquad P^{IJ}_i P^i_{KL} = P^{IJ}{}_{KL} \equiv \frac{1}{2}\delta^I_{[K}\delta^J_{L]} + \frac{\mathrm{i}}{4}\epsilon^{IJ}{}_{KL} \tag{2.18}$$
を保証し，ここに $P^{IJ}{}_{KL}$ は自己双対テンソル上の射影子である．［導出は本稿次節*18．第 1 式が自己双対性を意味している．］複素 $SO(3)$ 接続
$$A^i_\mu = P^i_{IJ}\omega^{IJ}_\mu \tag{2.19}$$
を定義する．等価的に，
$$A^i = \omega^i + \mathrm{i}\omega^{0i}. \tag{2.20}$$
(我々は $\omega^i = \epsilon^i{}_{jk}\omega^{jk}/2$ と書く．xxii 頁［冒頭の notation］を見よ．［上式 (2.20) を本稿次節で確認する．］) GR の力学変数として，我々は実の接続 $\omega^I{}_J$ (6 個の［∵ 反対称性］実の 1 形式) の代わりに，複素自己双対接続 A^i (3 個の複素 1 形式) を用いることができる．(これは 2 つの実の自由度 x と y を持つ系を，単一の複素変数 $z = x + \mathrm{i}y$ で記述することと等価である．)［自己双対部分をとっても場の自由度は減っていない．最初に式 (2.20) で接続の自己双対部分 A^i を定義し，次いで名前の由来として式 (2.19) に言及すると分かりやすい．］A^i を用いると，真空の Einstein 方程式は
$$P_{iIJ} e^I \wedge \left(F^i - \frac{2}{3}\lambda P^i_{KL} e^K \wedge e^L\right) = 0 \tag{2.21}$$
となる［本稿次節で確認］，ここに $F^i = \mathrm{d}A^i - \frac{1}{2}\epsilon^i{}_{jk} A^j \wedge A^k$ ［第 2 項に外積記号と係数 $-\frac{1}{2}$ を補った*19］は A の曲率である*20．これは運動方程式を変えない虚数の項だけ作用 (2.12) と異なる作用
$$S[e, A] = \frac{1}{16\pi G}\int \left(-\mathrm{i} P_{iIJ} e^I \wedge e^J \wedge F^i - \frac{1}{12}\lambda\epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge e^K \wedge e^L\right) \tag{2.22}$$
に対する，Euler–Lagrange 方程式である［本稿次節で確認］．自己双対形式はハミルトニアン理論の形を簡単にするので，正準量子化にしばしば用いられる．もし式 (2.17) における虚数単位 i を実パラメータ γ に置き換えるならば，式 (2.22) は Holst 作用と呼ばれ [54]，Ashtekar-Barbero-Immirzi 形式をもたらす．γ は Immirzi パラメータと呼ばれる．

---

*17 複素 Lorentz 代数は，自己双対および反自己双対 (anti-selfdual) 成分と呼ばれる 2 つの複素 $so(3)$ 代数に分離する：$so(3,1;C) = so(3;C) \oplus so(3;C)$．［Lie 代数の直和の定義と含意については文献 [418, p.80] を参照．］射影子 (2.17) は自己双対な成分を読み出す．

*18 第 1 式の右辺に負号を補い，第 2 式の最右辺第 1 項で J, L の上下を訂正した．

*19 式 (7) の箇所を参照．ただしこの F^i は式 (4.6) と同じものでなければならず，両者の整合性を確保するには，第 2 項に補う係数は逆符号 $+1/2$ でなければならない．

*20 前の脚注［*17］で言及した分離により，接続の自己双対な成分の曲率は曲率の自己双対な成分である．

* **Plebanski 形式．** Plebanski 自己双対 2 形式は

$$\Sigma^i = P^i_{IJ} e^I \wedge e^J \tag{2.23}$$

で定義される．すなわち，

$$\Sigma^1 = e^2 \wedge e^3 + \mathrm{i} e^0 \wedge e^1 \tag{2.24}$$

とその巡回置換である［式 (2.20) と同様の計算による］．直接の計算により，Σ は

$$\mathrm{D}\Sigma^i \equiv \mathrm{d}\Sigma^i + A^i{}_j \wedge \Sigma^j = 0 \tag{2.25}$$

を満たすことが示され［本稿次節で確認］，ここに $A^i{}_j = \epsilon^i{}_{jk} A^k$ と書いている．xxii 頁［冒頭の notation］を見よ．3 つの複素 2 形式 Σ^i に対する代数方程式

$$3\Sigma^i \wedge \Sigma^j = \delta^{ij} \Sigma_k \wedge \Sigma^k = -\delta^{ij} \overline{\Sigma}_k \wedge \overline{\Sigma}^k, \qquad \Sigma^i \wedge \overline{\Sigma}^j = 0 \tag{2.26}$$

は，e^I を任意の実テトラードとして，式 (2.23) を解に持つ［本稿次節で確認］．GR の作用はこうして

$$S[\Sigma, A] = \frac{-\mathrm{i}}{16\pi G} \int \left(\Sigma_i \wedge F^i + \frac{1}{3} \lambda \Sigma_k \wedge \Sigma^k \right) \tag{2.27}$$

と書くことができ［本稿次節で確認］，ここに Σ^i は Plebanski 拘束 (2.26) を満たす．Plebanski 形式はスピン・フォームモデルの出発点としてしばしば用いられる．

2.1.1 節について

■テトラード (2.1) の定義について　テトラード $e^I_\mu(x)$ は単に 1 形式 (2.1) の係数として導入されており，それ以上の条件は課されていない．具体的に場 $e^I_\mu(x)$ を決めるのは物理である．他方で文献 [417, p.326] ではテトラード $e^\mu_I(x)$ (教科書で言う逆テトラード (式 (2.13) の箇所で導入)) を

$$e^\mu_I(x) e_{\mu J}(x) = \eta_{IJ} \tag{4}$$

の関係で定義した．ところがここでは添字 μ, ν の上げ下げに関して，計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ を用いることが前提とされており，$g_{\mu\nu}(x)$ が物理で決まる．これに対して教科書では，逆テトラードの定義の下で上式 (4) と等価な [417, p.326] 後の式 (2.82):

$$g_{\mu\nu}(x) = e^I_\mu(x) e^J_\nu(x) \eta_{IJ}$$

は，計量の定義となっている．ここでもテトラードによる定式化がより基本的であり，計量を用いる伝統的な一般相対性理論は後から導かれるという立場が反映されている．

逆テトラード e^μ_I が計量で e^I_μ の添字を上げ下げした量と見なせること　教科書では式 (2.13) の箇所において，逆テトラード e^μ_I は

$$e^I_\mu e^\mu_J = \delta^I_J, \qquad e^I_\mu e^\nu_I = \delta^\nu_\mu$$

を満たす [417, p.326]，e^I_μ の逆行列として定義される．これは計量を用いて e^I_μ の添字を上げ下げした量 $e^\mu_I = g^{\mu\nu} \eta_{IJ} e^J_\nu$ に一致している ($g^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ の逆行列として定義)．このことは計量 $g_{\mu\nu}$ の定義式 (2.82) より，

$$e^I_\mu e^\nu_I = e^I_\mu (g^{\nu\rho} \eta_{IJ} e^J_\rho) = g_{\mu\rho} g^{\nu\rho} = \delta^\nu_\mu$$

となることから保証される．(また上式に e^J_ν をかけて ν で和をとると $e^I_\mu (e^\nu_I e^J_\nu) = e^J_\mu$ となるので，$e^\nu_I e^J_\nu = \delta^J_I$ も成立する．) 式 (2.83) 直後の説明も見よ．

■スピン接続 (2.2) と「Lorentz 群の Lie 代数 $so(3,1)$ の値」について　(本義) Lorentz 群 $SO(3,1)$ の表現 $\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2} \varepsilon^{IJ} S_{IJ}\right)$ (ただし $\varepsilon^{IJ} = -\varepsilon^{JI}$ は変換のパラメータ) と，その生成子 $S_{IJ} = -S_{JI}$ の属する Lie 代数 $so(3,1)$ の違いに注意する．ここに S_{IJ} は行列表現を持ち，添字 I, J は行列要素ではなく行列の種類をラベルしている．指数 $\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2} \varepsilon^{IJ} S_{IJ}\right)$ は群の値を，生成子 S_{IJ} を基底とした線形結合は代数の値をとると言われる [415, pp.61–62].

スピン接続の反対称性 $\omega^{IJ}=-\omega^{JI}$ は

$$\omega^J{}_I=\eta_{IK}\omega^{JK}=-\eta_{IK}\omega^{KJ}=-\omega_I{}^J$$

を意味する．これは通常の Levi–Civita 接続 (Christoffel 記号 (2.45)=(2.84)*21) の対称性 $\Gamma_{\lambda,\mu\nu}=\Gamma_{\lambda,\nu\mu}$ とは非なるものである．

■共変微分 (2.3) とゲージ共変な外微分 (2.4) の関係　任意の 1 形式 u^I は必ず $u^I=u^I_\nu \mathrm{d}x^\nu$ と書ける．そこで場 v^I として係数 u^I_ν を考えて式 (2.3) を適用し，両辺に 2 形式 $\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu$ を掛けると

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}_\mu u^I_\nu)\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu =&(\partial_\mu u^I_\nu+\omega^I_{\mu J}u^J_\nu)\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu\\ =&\mathrm{d}(u^I_\nu\mathrm{d}x^\nu)+(\omega^I_{\mu J}\mathrm{d}x^\mu)\wedge(u^I_\nu\mathrm{d}x^\nu)\\ =&\mathrm{d}u^I+\omega^I{}_J\wedge u^J\end{aligned}$$

となる．最左辺について，$u^I=u^I_\nu\mathrm{d}x^\nu$ のゲージ共変な外微分 D もまた，通常の外微分と同様の関係式

$$\mathrm{D}u^I=(\mathrm{D}_\mu u^I_\nu)\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu$$

で定義されると考えると，式 (2.4) が得られる．もちろん，この議論を逆にたどれば式 (2.4) から式 (2.3) が得られる．(以上，付録 D を参照．)

■曲率 (2.7) における $R^I{}_{J\mu\nu}$ の同定　曲率の定義式 (2.8):$R^I{}_J=\mathrm{d}\omega^I{}_J+\omega^I{}_K\wedge\omega^K{}_J$ 右辺にスピン接続 (2.2):$\omega^I{}_J=\omega^I_{\mu J}\mathrm{d}x^\mu$ を代入すると，

$$R^I{}_J=(\partial_\mu\omega^I_{\nu J}+\omega^I_{\mu K}\omega^K_{\nu J})\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu$$

となる．ところが外積 $\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu$ は添字 μ,ν に関して反対称なので，係数の対称部分は和に寄与を持たない．実際，微分形式の常として，式 (2.7) における外積の係数は添字 μ,ν に関して反対称である．これを踏まえると，

$$R^I{}_{J\mu\nu}=\partial_{[\mu}\omega^I_{\nu]J}+\omega^I_{[\mu K}\omega^K_{\nu]J} \tag{2.8$'$}$$

と同定される．ただし右辺の角括弧はいずれも，添字 μ,ν に関する反対称化を表す (冒頭の notation を参照)．これはもとの式 (2.8) の形を反映して，Riemann 幾何学の曲率テンソルと同様，接続の微分の項と接続の 2 次の項から成る．

また接続 $\omega^{IJ}=-\omega^{JI}$ の反対称性は，曲率 (2.8):

$$R^{IJ}=\mathrm{d}\omega^{IJ}+\omega^I{}_K\wedge\omega^{KJ}$$

が添字 I,J に関しても反対称であることを意味する．実際，特に第 2 項で I と J を入れ替えると

$$\omega^J{}_K\wedge\omega^{KI}=-\omega^{KI}\wedge\omega^J{}_K=\omega^{IK}\wedge(-\omega_K{}^J)=-\omega^I{}_K\wedge\omega^{KJ}$$

となる．

これら $R^{IJ}{}_{\mu\nu}$ の添字 I,J と μ,ν に関する反対称性は，Riemann 曲率 $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ の添字 μ,ν と ρ,σ に関する反対称性に引き継がれる．実際このことは，後の式 (2.93):

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}e^I_\mu=R^{IJ}{}_{\rho\sigma}e_{\nu J}$$

*21 2.1.2 節のノートを参照

に $e_{\lambda I}$ を掛けると分かるように，Riemann 曲率がそのテトラード成分の e による引き戻し

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R^{IJ}{}_{\rho\sigma} e_{\mu I} e_{\nu J}$$

で与えられること [417, p.327] から見て取れる．

ただし式 (2.93) で導入される $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ が Riemann 曲率であることは非自明である．そこでねじれのないスピン接続 (2.91):$\omega[e]^I_{\mu J} = -e^\nu_J(\partial_\mu e^I_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu} e^I_\rho)$ ($\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ は Levi–Civita 接続) に対して，曲率 2 形式 (2.8′):$R^{IJ}{}_{\mu\nu} = \partial_{[\mu}\omega^{IJ}_{\nu]} + \omega^I_{[\mu K}\omega^K_{\nu]J}$ (第 2 Cartan 方程式，角括弧は添字 μ,ν に関する反対称化) のテトラードによる射影 $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = e^\rho_I e_{\sigma J} R^{IJ}{}_{\rho\sigma}$ が Riemann の曲率テンソルに一致することを確認する．

曲率の第 1 項の因子は

$$\begin{aligned}\partial_\mu \omega[e]^{IJ}_\nu =& -\partial_\mu\{e^{\alpha J}(\partial_\nu e^I_\alpha - \Gamma^\beta_{\nu\alpha} e^I_\beta)\}\\ =& -(\partial_\mu e^{\alpha J})(\partial_\nu e^I_\alpha) + \Gamma^\beta_{\nu\alpha}\partial_\mu(e^I_\beta e^{\alpha I}) - e^{\alpha J}\partial_\mu\partial_\nu e^I_\alpha + (\partial_\mu \Gamma^\beta_{\nu\alpha}) e^I_\beta e^{\alpha J}\end{aligned}$$

と計算される．添字 μ,ν に関する反対称化は，最右辺の第 1 項の添字 I,J に関する反対称化を意味し，また第 3 項を消す．次に曲率の第 2 項の因子は

$$\begin{aligned}\omega^I_{\mu K}\omega^{KJ}_\nu =& e^\alpha_K(\partial_\mu e^I_\alpha - \Gamma^\beta_{\mu\alpha}e^I_\beta)\cdot e^{\gamma J}(\partial_\nu e^K_\gamma - \Gamma^\delta_{\nu\gamma}e^K_\delta)\\ =& e^\alpha_K e^{\gamma J}\{(\partial_\mu e^I_\alpha)(\partial_\nu e^K_\gamma) - (\partial_\mu e^I_\alpha)\Gamma^\delta_{\nu\gamma}e^K_\delta - (\partial_\nu e^K_\gamma)\Gamma^\beta_{\mu\alpha}e^I_\beta + \Gamma^\beta_{\mu\alpha}\Gamma^\delta_{\nu\gamma}e^I_\beta e^K_\delta\}\end{aligned}$$

と計算される．そこで (2.7) に係数 $\frac{1}{2}$ を含めて $R^{IJ} = \frac{1}{2}R^{IJ}{}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$ と書いて，$R^{IJ}{}_{\mu\nu}$ を再定義する．すると 2 つの青い項の $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = e^\rho_I e_{\sigma J} R^{IJ}{}_{\rho\sigma}$ への寄与はそれぞれ

$$\begin{aligned}2e^\rho_I e_{\sigma J}\cdot e^I_\beta e^{\alpha J}(\partial_{[\mu}\Gamma^\beta_{\nu]\alpha}) = 2\partial_{[\mu}\Gamma^\rho_{\nu]\sigma} = (\partial_\mu\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\sigma}),\\ 2e^\rho_I e_{\sigma J}\cdot e^I_\beta e^K_\delta \Gamma^\beta_{\mu\alpha}\Gamma^\delta_{\nu\gamma} = 2\Gamma^\rho_{[\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu]\sigma} = (\Gamma^\rho_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\alpha}\Gamma^\alpha_{\mu\sigma})\end{aligned}$$

となって，これらの和は Riemann の曲率テンソルに一致する．よって残りの項の寄与が相殺することを示せば良い (必要ならば式 (2.45) を用いる)．しかしそれは手計算で行うにはあまりに煩雑な作業となる．

そこで間接的ではありながら，飛躍のない証明方法を採る．2 種類の添字 μ, I を持つ量の共変微分は式 (2.86) の第 2 辺のように定義される．特に内部添字 I のみを持つ Minkowski 空間のベクトル v^I に対しては

$$\mathrm{D}_\mu v^I = \partial_\mu v^I + \omega^I_{\mu J}v^J, \qquad \therefore \mathrm{D}_\mu\mathrm{D}_\nu v^I = \partial_\mu(\mathrm{D}_\nu v^I) + \omega^I_{\mu J}(\mathrm{D}_\nu v^I) - \Gamma^\rho_{\mu\nu}(\mathrm{D}_\rho v^I)$$
$$= (\partial_\mu\omega^I_{\nu J} + \omega^I_{\mu K}\omega^K_{\nu J})v^J + (\text{添字}\mu,\nu\text{に関して対称な項})$$

なので，共変微分の順序交換に伴う差

$$[\mathrm{D}_\mu, \mathrm{D}_\nu]v^I = 2(\partial_{[\mu}\omega^I_{\nu]J} + \omega^I_{[\mu K}\omega^K_{\nu]J})v^J = R^I{}_{J\mu\nu}v^J$$

はやはり，式 (2.8′) で定義される曲率 $R^I{}_{J\mu\nu}$ を係数に持つ (引き続き係数 2 を補った)．さらに上式に e^λ_I を掛けて式 (2.86) を考慮すると，

$$[\mathrm{D}_\mu, \mathrm{D}_\nu]v^\lambda = R^\lambda{}_{J\mu\nu}v^J = R^\lambda{}_{J\mu\nu}(e^J_\rho v^\rho) = R^\lambda{}_{\rho\mu\nu}v^\rho$$

を得る．ここに $R^\lambda{}_{\rho\mu\nu} \equiv e^\lambda_I e^J_\rho R^I{}_{J\mu\nu}$ は曲率 $R^I{}_{J\mu\nu}$ のテトラードによる射影である．ここまでは接続 ω が計量を保つこと (2.86) しか用いていないから，Cartan 幾何学において常に成り立つと考えられる．

ところが ω をねじれのないスピン接続と仮定すると，内部添字を持たない時空ベクトル v^λ の共変微分 (2.85) において，Γ は Levi–Civita 接続となる (式 (2.87–90))．したがって共変微分の順序交換に伴う差は，Riemann の曲率テンソル $\mathcal{R}^\lambda{}_{\rho\mu\nu}$ を用いて

$$[\mathrm{D}_\mu, \mathrm{D}_\nu]v^\lambda = \mathcal{R}^\lambda{}_{\rho\mu\nu}v^\rho$$

とも表される．これら 2 通りの表現が任意の v^ρ に対して常に一致するためには，${R^\lambda}_{\rho\mu\nu} = {\mathcal{R}^\lambda}_{\rho\mu\nu}$ でなければならない．よって示された．

このように Cartan 幾何学は，ねじれがゼロのとき Riemann 幾何学に帰着する．

■教科書 p.34 の脚注について　Lorentz ベクトル v^I の積のように変換する量 ϕ^{IJ} (p 形式) に対しては，共変微分の規則 (2.3) は

$$\mathrm{D}\phi^{IJ} = \mathrm{d}\phi^{IJ} + {\omega^I}_K \wedge \phi^{KJ} + {\omega^J}_K \wedge \phi^{IK}$$

拡張される [416, p.76]．あたかもスピン接続 ω^{IJ} をそのような量と考えて上式を適用すると，

$$\mathrm{D}\omega^{IJ} = \mathrm{d}\omega^{IJ} + 2{\omega^I}_K \wedge \omega^{KJ} \qquad \text{(誤り！)}$$

となって，式 (2.8) と比べて ω の 2 次の項に余計な係数 2 が現れるということ．ω はテンソルではないため [Levi–Civita 接続 Γ と同様]，共変微分の公式を適用できない [416, p.77]．

■式 (2.9) の導出　式 (2.4) を繰り返し用い，

$$\text{恒等式}\ \ \mathrm{d}(\mathrm{d}u^I) = 0, \qquad \text{“Leibniz の規則”}\ \mathrm{d}({\omega^I}_J \wedge u^J) = \mathrm{d}{\omega^I}_J \wedge u^J - {\omega^I}_J \wedge \mathrm{d}u^J$$

(付録 D 参照) に注意すると，

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^2 u^I =& \mathrm{d}(\mathrm{d}u^I + {\omega^I}_J \wedge u^J) + {\omega^I}_K(\mathrm{d}u^K + {\omega^K}_J \wedge u^J) \\
=& (\mathrm{d}{\omega^I}_J + {\omega^I}_K {\omega^K}_J) \wedge u^J \cancel{- {\omega^I}_J \wedge \mathrm{d}u^J} \cancel{+ {\omega^I}_K \wedge \mathrm{d}u^K} \\
=& {R^I}_J \wedge u^J : (2.9). \qquad (\because \text{式 } (2.8))
\end{aligned}$$

■作用 (2.12) から場の方程式 (2.6),(2.11) の導出　後の式 (2.16) の箇所にもあるように，e と ω を関係付ける場の方程式 (2.6) の導出前には，式 (2.12):

$$S[e,\omega] = \frac{1}{16\pi G}\int \epsilon_{IJKL}\left(\frac{1}{4}e^I \wedge e^J \wedge R[\omega]^{KL} - \frac{1}{12}\lambda e^I \wedge e^J \wedge e^K \wedge e^L\right)$$

の作用において e と ω を独立と見なす．(右辺で R^{KL} の引数を e ではなく ω と書いているのも，同じ理由による．) また，場の変分に伴う微分形式の変分を $\delta e^I \equiv (\delta e^I_\mu)\mathrm{d}x^\mu$ などと書く．

するとまず，e の変分に伴う作用の変分は，最小作用原理により

$$\begin{aligned}
0 = 16\pi G\delta S = \int \epsilon_{IJKL}\Bigg[&\frac{1}{4}\left\{e^I \wedge \delta e^J \wedge R[\omega]^{KL} + (I \leftrightarrow J)\right\} \\
&- \frac{1}{12}\lambda\left\{e^I \wedge e^J \wedge e^K \wedge \delta e^L + (L \leftrightarrow I) + (L \leftrightarrow J) + (L \leftrightarrow K)\right\}\Bigg]
\end{aligned}$$

となる．ここで ϵ_{IJKL} と 1 形式どうしの外積はいずれも反対称なので，$\{\cdots\}$ 内の各項は等しい寄与を持つことに注意すると，

$$\begin{aligned}
0 = 16\pi G\delta S =& \int \epsilon_{IJKL}\left(\frac{1}{4}\cdot 2e^I \wedge \delta e^J \wedge R[\omega]^{KL} - \frac{1}{12}\cdot 4\lambda e^I \wedge e^J \wedge e^K \wedge \delta e^L\right) \\
=& \frac{1}{2}\int \epsilon_{IJKL}\left(e^I \wedge R[\omega]^{JK} - \frac{2}{3}\lambda e^I \wedge e^J \wedge e^K\right) \wedge \delta e^L
\end{aligned}$$

と書き換えられる．ただし最後の等号では被積分因子の第 1 項について，$e^I \wedge \delta e^J \wedge R[\omega]^{KL} = -e^I \wedge R[\omega]^{KL} \wedge \delta e^J$ と書き換え，ダミー添字の巡回置換 $J \to L \to K \to J$ を行った．これが任意の変分 δe^L に対して成り立つことを要求して，最右辺の δe^L の係数をゼロとおくと，Einstein 方程式 (2.6) が得られる．

ω に関する変分原理が式 (2.6) を与えることの証明は文献 [416, p.78] にある．以下に不完全ではあるものの，自力で考えた導出を書き残しておく．ω の変分に伴う作用の変分を調べる．ω は作用 (2.12) の第 1 項の曲率 $R[\omega]^{JK}$ だけに含まれ，第 2 項は変分をとると落ちる．曲率 (2.8) の変分は

$$\begin{aligned}\delta R[\omega]^{KL} =& \mathrm{d}(\delta\omega^{KL}) + \delta\omega^K{}_M \wedge \omega^{ML} + \omega^K{}_M \wedge \delta\omega^{ML} \\ =& \mathrm{d}(\delta\omega^{KL}) + \{\omega^K{}_M \wedge \delta\omega^{ML} - (K \leftrightarrow L)\}\end{aligned}$$

である*22．ここで作用の変分 δS に対する第 1 項 $\mathrm{d}(\delta\omega^{KL})$ の寄与を考えよう．外微分に対する変則的な Leibniz 則

$$\mathrm{d}\{(e^I \wedge e^J) \wedge \delta\omega^{KL}\} = \{\mathrm{d}(e^I \wedge e^J)\} \wedge \delta\omega^{KL} + (-1)^2 (e^I \wedge e^J) \wedge \mathrm{d}(\delta\omega^{KL})$$

において，左辺の積分への寄与は Stokes の定理により無限遠の表面積分に変換されて落ちるので，被積分因子において

$$(e^I \wedge e^J) \wedge \mathrm{d}(\delta\omega^{KL}) \ \to\ -\{\mathrm{d}(e^I \wedge e^J)\} \wedge \delta\omega^{KL} = (-\mathrm{d}e^I \wedge e^J + e^I \wedge \mathrm{d}e^J) \wedge \delta\omega^{KL} = (e^I \wedge \mathrm{d}e^J - e^J \wedge \mathrm{d}e^I) \wedge \delta\omega^{KL}$$

と置き換えて良い*23．（これはもちろん，通常の部分積分に対応する．）以上より最小作用原理は

$$\begin{aligned}0 =& 4 \cdot 16\pi G \delta S = \int \epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge \delta R[\omega]^{KL} \\ =& \int \epsilon_{IJKL} \left[\{e^I \wedge \mathrm{d}e^J - (I \leftrightarrow J)\} \wedge \delta\omega^{KL} + e^I \wedge e^J \wedge \{\omega^K{}_M \wedge \delta\omega^{ML} - (K \leftrightarrow L)\}\right] \\ =& 2\int \epsilon_{IJKL} \left(e^I \wedge \mathrm{d}e^J \wedge \delta\omega^{KL} + e^I \wedge e^J \wedge \omega^K{}_M \wedge \delta\omega^{ML}\right) \\ =& 2\int e^I \wedge \left(\epsilon_{IJKL} \mathrm{d}e^J + \epsilon_{IJML} \omega^J{}_K \wedge e^M\right) \wedge \delta\omega^{KL}\end{aligned}$$

と書ける．ただし最後の等号では，第 2 項でダミー添字を $K \leftrightarrow M$ と入れ替え，次いで $J \leftrightarrow M$ と入れ替えた．最右辺における $\delta\omega^{KL}$ は反対称な変分なので，その係数の添字 K, L に関する反対称部分をゼロとおく必要がある．すなわち

$$e^I \wedge \left(\epsilon_{IJKL} \mathrm{d}e^J + \frac{1}{2}\epsilon_{IJML} \omega^J{}_K \wedge e^M - (\text{第 2 項で } K \leftrightarrow L)\right) = 0.$$

目障りな ϵ を除くために，両辺に ϵ^{NPKL} を掛けて K, L で和をとる．このとき左辺の第 2 項と第 3 項は同じ寄与を持つこと，および公式

$$\begin{aligned}\epsilon^{NPKL}\epsilon_{IJKL} =& -2(\delta_I^N \delta_J^P - \delta_J^N \delta_I^P), \\ \epsilon^{NPKL}\epsilon_{IJML} =& -\begin{vmatrix} \delta_I^N & \delta_J^N & \delta_M^N \\ \delta_I^P & \delta_J^P & \delta_M^P \\ \delta_I^K & \delta_J^K & \delta_M^K \end{vmatrix} \\ =& -\delta_I^N \delta_J^P \delta_M^K + \delta_I^N \delta_M^P \delta_J^K + \delta_J^N \delta_I^P \delta_M^K - \delta_J^N \delta_M^P \delta_I^K - \delta_M^N \delta_I^P \delta_J^K + \delta_M^N \delta_J^P \delta_I^K \qquad (5) \\ & (1 \text{ 行目で展開した})\end{aligned}$$

*22 第 2 辺について，変分

$$\delta(\omega^K{}_M \wedge \omega^{ML}) = \delta(\omega^K_{\mu M} \omega^{ML}_\nu) \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$$

には単なる場の積に対する通常の Leibniz 則が適用されるので，外微分と違って変則的な負号は不要である．Einstein 方程式 (2.11) の導出時にも既にこのことを考慮した．

*23 最後の等号では 2 形式 $\mathrm{d}e^I = (\partial_\mu e^I_\nu)\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$ と 1 形式 $e^J = e^J_\rho \mathrm{d}x^\rho$ の外積の順序を入れ替えても，符号が変わらないことに注意した．

(文献 [417, p.20] (のノート) を参照) を利用し，また $\omega^K{}_K = 0$ に注意すると[*24]，

$$-2e^N \wedge (\mathrm{d}e^P + \omega^P{}_M \wedge e^M) + 2e^P \wedge (\mathrm{d}e^N + \omega^N{}_M \wedge e^M) = 0$$

を得る．ω の運動方程式 (2.6) は，この (各括弧内) $= 0$ である．

■Ricci テンソル (2.13) と Ricci スカラー (2.14) について　本稿では曲率 (2.8′) の箇所で指摘したように，後の式 (2.93) は曲率のテトラード成分が，通常の曲率 $R_{\rho\sigma\mu\nu}$ の e による引き戻し

$$R^{IJ}{}_{\mu\nu} = R_{\rho\sigma\mu\nu} e^{\rho I} e^{\sigma J}$$

で与えられること [417, p.327] を意味する．すると式 (2.13) は

$$\begin{aligned} R^I_\mu =& R^{IJ}{}_{\mu\nu} e^\nu_J = (R_{\rho\sigma\mu\nu} e^{\rho I} e^{\sigma J}) e^\nu_J \\ =& R^\nu{}_{\rho\nu\mu} e^{\rho I} \qquad (\because \text{式 } (2.82) : e^{\sigma J} e^\nu_J = g^{\sigma\nu}) \\ =& R_{\rho\mu} e^{\rho I} \end{aligned}$$

となって，通常の Ricci テンソル $R_{\rho\mu}$ のテトラード成分に一致していることになる．またこのとき式 (2.14) は

$$R = R^I_\mu e^\mu_I = (e^{\nu I} R_{\mu\nu}) e^\mu_I = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

となり，最右辺よりこれは通常の Ricci スカラー (あるいはスカラー曲率) と同じ量であることが分かる．

■真空の Einstein 方程式 (2.11) の式 (2.15) への書き換え　文献 [416, p.78] にスマートな導出がある．ポイントは

$$R^{JK} = \frac{1}{2} R^{JK}{}_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu = \frac{1}{2} R^{JK}{}_{LM} e^L_\mu e^M_\nu \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu = \frac{1}{2} R^{JK}{}_{LM} e^L \wedge e^M, \quad e^I \wedge e^L \wedge e^M = \epsilon^{ILMN} e^*_N$$

と書き，任意の 3 形式は双対テンソル $e^*_I \equiv \epsilon_{IJKL} e^J \wedge e^K \wedge e^L / 3!$ を基底として展開できると考え，その係数をゼロとおくことである．宇宙定数項も同様に計算すると，

$$\epsilon_{IJKL} e^I \wedge R^{JK} = -(R\delta^N_L - 2R^N{}_L) e^*_N, \qquad \epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge e^K = -3! e^*_L.$$

以下は自力で考えた，やや遠回りな導出方法である．Einstein 方程式 (2.11):

$$\epsilon_{MNPL} \left(e^M_\rho R^{NP}{}_{\sigma\tau} - \frac{2}{3} \lambda e^M_\rho e^N_\sigma e^P_\tau \right) \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma \wedge \mathrm{d}x^\tau = 0$$

の左辺から，ϵ_{MNPL} と外積 $\mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma \wedge \mathrm{d}x^\tau$ を取り除きたい．すぐに気付くことは，ϵ_{MNPL} と外積がいずれも反対称なので，中央の因子 $(\cdots)$ は任意の添字の組に関して反対称な部分しか寄与を持たないということである．とは言え，複数の添字を持つ量に関する“完全反対称部分”の定義には恣意性・曖昧さが伴う[*25]．そこで以下では純粋に機械的で確実な計算で，“反対称部分”が自動的に取り出されることを見る．

[*24] 実際，ω^{IJ} の反対称性より

$$\omega^K{}_K = \eta_{KL} \omega^{KL} = -\eta_{KL} \omega^{LK} = -\omega^L{}_L, \qquad \therefore \omega^K{}_K = 0.$$

[*25] なるほど一見すると，複数の添字を持つ量に対して，まずある添字の組について反対称化を施し，次いで別の添字の組について反対称化を施し，という作業を全ての添字の組に関して行えば，“完全反対称部分”を自然に定義できそうである．例えば $e^I_\lambda R^{IJ}{}_{\mu\nu}$ という量を添字の組 $(\mu,\nu), (\lambda,\mu), (\lambda,\nu)$ の順に反対称化すると

$$e^I_\lambda R^{IJ}{}_{[\mu\nu]} \quad \to \quad \frac{1}{2}(e^I_\lambda R^{IJ}{}_{[\mu\nu]} - e^I_\mu R^{IJ}{}_{[\lambda\nu]}) \quad \to \quad \frac{1}{4}(e^I_\lambda R^{IJ}{}_{[\mu\nu]} + 2e^I_\mu R^{IJ}{}_{[\nu\lambda]} + e^I_\nu R^{IJ}{}_{[\lambda\mu]})$$

となる．しかし最終的な結果は 3 つの巡回置換項が対称的に扱われていないという点で不自然であり，また以下で得られる結果とも異なる．

まず微分形式を基底ベクトル $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ に作用させて外積を取り除く．すると

$$\mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma \wedge \mathrm{d}x^\tau [\partial_\lambda, \partial_\mu, \partial_\nu] = \begin{vmatrix} \delta^\rho_\lambda & \delta^\rho_\mu & \delta^\rho_\nu \\ \delta^\sigma_\lambda & \delta^\sigma_\mu & \delta^\sigma_\nu \\ \delta^\tau_\lambda & \delta^\tau_\mu & \delta^\tau_\nu \end{vmatrix} = 2(\delta^\rho_\lambda \delta^\sigma_{[\mu}\delta^\tau_{\nu]} + \delta^\rho_\mu \delta^\sigma_{[\nu}\delta^\tau_{\lambda]} + \delta^\rho_\nu \delta^\sigma_{[\lambda}\delta^\tau_{\mu]})$$

なので (行列式を 1 行目で展開した)，第 1 項において

$$e^M_\rho R^{NP}{}_{\sigma\tau} \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma \wedge \mathrm{d}x^\tau [\partial_\lambda, \partial_\mu, \partial_\nu] = 2(e^M_\lambda R^{NP}{}_{[\mu\nu]} + e^M_\mu R^{NP}{}_{[\nu\lambda]} + e^M_\nu R^{NP}{}_{[\lambda\mu]})$$

となる．もっとも曲率 $R^{NP}{}_{\mu\nu}$ は添字 μ, ν に関して最初から反対称だから，$R^{NP}{}_{[\mu\nu]} = R^{NP}{}_{\mu\nu}$ として良い．

次に ϵ_{MNPL} を除くために，式全体に ϵ^{IJKL} を掛けて L で和をとる．すると公式 (5) より，この操作の上付き Lorentz 添字に対する作用は，先ほどの下付き時空添字に対するそれと変わらないので，

$$\begin{aligned} &\epsilon^{IJKL}\epsilon_{MNPL} e^M_\rho R^{NP}{}_{\sigma\tau} \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma \wedge \mathrm{d}x^\tau [\partial_\lambda, \partial_\mu, \partial_\nu] \\ =& -2^2[\{e^I_\lambda R^{[JK]}{}_{\mu\nu} + (\lambda, \mu, \nu \text{に関する巡回置換項})\} + (I, J, K \text{ に関する巡回置換項})] \\ =& -2^2(e^I_\lambda R^{[JK]}{}_{\mu\nu} + \text{cyclic}) \end{aligned}$$

となる．ここで最右辺は添字の組 (I, J, K) および (λ, μ, ν) に関する，$3 \times 3 = 9$ 個の巡回置換項を表す．ところが曲率 $R^{JK}{}_{\mu\nu}$ は添字 J, K に関しても反対称だから，再び $R^{[JK]}{}_{\mu\nu} = R^{JK}{}_{\mu\nu}$ として良い．

宇宙定数の項についても同様に

$$\epsilon^{IJKL}\epsilon_{MNPL} e^M_\rho e^N_\sigma e^P_\tau \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma \wedge \mathrm{d}x^\tau [\partial_\lambda, \partial_\mu, \partial_\nu] = -2^2(e^I_\lambda e^{[J}_{[\mu} e^{K]}_{\nu]} + \text{cyclic})$$

である．ところが直接確認できるように，2 組の添字に関する反対称化は

$$e^I_\lambda e^{[J}_{[\mu} e^{K]}_{\nu]} = \frac{1}{2}(e^J_\mu e^K_\nu - e^J_\nu e^K_\mu) = e^J_{[\mu} e^K_{\nu]} = e^{[J}_\mu e^{K]}_\nu$$

となって，結局，一方の添字の組に関する反対称化と変わらない．

以上をまとめると，Einstein 方程式 (2.11) は

$$\begin{aligned} 0 =& \epsilon^{IJKL}\epsilon_{MNPL} \left(e^M_\rho R^{NP}{}_{\sigma\tau} - \frac{2}{3}\lambda e^M_\rho e^N_\sigma e^P_\tau \right) \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma \wedge \mathrm{d}x^\tau [\partial_\lambda, \partial_\mu, \partial_\nu] \\ =& -2^2 \left\{ \left(e^I_\lambda R^{JK}{}_{\mu\nu} - \frac{2}{3}\lambda e^I_\lambda e^J_{[\mu} e^K_{\nu]} \right) + \text{cyclic} \right\} \end{aligned}$$

と書き換えられる．最右辺が冒頭で予告した“反対称部分”である．ここから式 (2.15) を導くには，両辺に $e^\mu_J e^\nu_K$ を縮約すれば良い[*26]．やや退屈な計算になるものの，必要な知識は e^μ_I が e^I_μ の逆であることと定義式 (2.13–14)，および曲率 $R^{IJ}{}_{\mu\nu}$ の反対称性だけである．9 つの巡回置換項に $e^\mu_J e^\nu_K$ を縮約した結果を，行列の形にまとめておく：

$$\begin{pmatrix} e^I_\lambda R^{JK}{}_{\mu\nu} & e^I_\mu R^{JK}{}_{\nu\lambda} & e^I_\nu R^{JK}{}_{\lambda\mu} \\ e^J_\lambda R^{KI}{}_{\mu\nu} & e^J_\mu R^{KI}{}_{\nu\lambda} & e^J_\nu R^{KI}{}_{\lambda\mu} \\ e^K_\lambda R^{IJ}{}_{\mu\nu} & e^K_\mu R^{IJ}{}_{\nu\lambda} & e^K_\nu R^{IJ}{}_{\lambda\mu} \end{pmatrix} e^\mu_J e^\nu_K = \begin{pmatrix} Re^I_\lambda & -R^I_\lambda & -R^I_\lambda \\ -R^I_\lambda & 4R^I_\lambda & -R^I_\lambda \\ -R^I_\lambda & -R^I_\lambda & 4R^I_\lambda \end{pmatrix}, \qquad (\text{合計 } 2R^I_\lambda - Re^I_\lambda)$$

$$\begin{pmatrix} e^I_\lambda e^J_{[\mu} e^K_{\nu]} & e^I_\mu e^J_{[\nu} e^K_{\lambda]} & e^I_\nu e^J_{[\lambda} e^K_{\mu]} \\ e^J_\lambda e^K_{[\mu} e^I_{\nu]} & e^J_\mu e^K_{[\nu} e^I_{\lambda]} & e^J_\nu e^K_{[\lambda} e^I_{\mu]} \\ e^K_\lambda e^I_{[\mu} e^J_{\nu]} & e^K_\mu e^I_{[\nu} e^J_{\lambda]} & e^K_\nu e^I_{[\lambda} e^J_{\mu]} \end{pmatrix} e^\mu_J e^\nu_K = \begin{pmatrix} 6 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 6 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 6 \end{pmatrix} e^I_\lambda. \qquad (\text{合計 } 9e^I_\lambda)$$

すると

$$-2^3 \left(R^I_\mu - \frac{1}{2}Re^I_\mu - 3\lambda e^I_\mu \right) = 0$$

となって，式 (2.15) と同じ形が得られるものの，宇宙定数 λ の前の数係数が合わない[*27]．

[*26] さらに e^λ_I も掛けてしまうと，式 (2.15) に e^μ_I を掛けた関係 $-R + (4)\lambda = 0$ しか得られない．

[*27] このため伝統的な Einstein 方程式と同じ形の式 (2.15) を信じるならば，Einstein 方程式 (2.11) と作用 (2.12) において，宇宙定数 λ の数係数をそれぞれ $-2/3 \to +2/9$, $-1/12 \to +1/36$ と修正する必要があると考えられる．もっとも宇宙定数 λ を「しばしばゼロとおく (often set to zero)」(式 (2.12) の 2 行下) ならば，数係数の違いは致命傷にはならない．少なくとも $\lambda = 0$ の場合には証明に成功したことになる．

■射影子の性質 (2.18) の確認　第 1 式について，

$$\frac{1}{2}\epsilon_{IJ}{}^{KL}P^i_{KL} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_{IJ}{}^{kl}P^i_{kl} + 2\epsilon_{IJ}{}^{0k}P^i_{0k}\right) = \frac{1}{4}\epsilon_{IJ}{}^{kl}\epsilon^i{}_{kl} + \frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon_{IJ}{}^{0i}$$

であり，最右辺は

- $(I,J)=(m,n)$ のとき　$\frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon_{mn}{}^{0i} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon_{mn0i} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon_{0imn} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon_{imn} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon^i{}_{mn} = -\mathrm{i}P^i_{IJ}$
- $(I,J)=(0,m)$ のとき　$\frac{1}{4}\epsilon_{0m}{}^{kl}\epsilon^i{}_{kl} = \frac{1}{4}\epsilon_m{}^{kl}\epsilon^i{}_{kl} = \frac{1}{2}\delta^i_m = -\mathrm{i}P^i_{IJ}$

となるので，

$$\frac{1}{2}\epsilon_{IJ}{}^{KL}P^i_{KL} = -\mathrm{i}P^i_{IJ}$$

が成り立つ．両辺はいずれも添字 (I,J) に関して反対称なので，これは $(I,J)=(m,0)$ のときも正しい．ここでは冒頭 (xxii 頁) の約束 $\epsilon_{0123}=+1$ に従ったが，$\epsilon^{0123}=+1$ とする場合には右辺の負号は不要である．

次に第 2 式は

- $(I,J)=(i,j),(K,L)=(k,l)$ のとき　$P^{ij}_m P^m_{kl} = \frac{1}{4}\epsilon_m{}^{ij}\epsilon^m{}_{kl} = \frac{1}{2}\delta^i_{[k}\delta^j_{l]}$
- $(I,J)=(i,j),(K,L)=(k,0)$　$P^{ij}_m P^m_{k0} = -\frac{\mathrm{i}}{4}\epsilon_m{}^{ij}\delta^m_k = -\frac{\mathrm{i}}{4}\epsilon_k{}^{ij} = -\frac{\mathrm{i}}{4}\epsilon_{0k}{}^{ij} = \frac{\mathrm{i}}{4}\epsilon^{ij}{}_{k0}$

となって成り立つ．ところが第 2 式は，両辺がともに添字の入れ替え $I\leftrightarrow J$ および $K\leftrightarrow L$ に関して反対称であり，また添字の組の入れ替え $(I,J)\leftrightarrow(K,L)$ に関して対称だから，全ての可能な添字の組 (I,J,K,L) に対して成り立つことになる．

■複素 $SO(3)$ 接続 (2.20) の確認　式 (2.19) は両辺に $\mathrm{d}x^\mu$ を掛けて，1 形式の関係

$$A^i = P^i_{IJ}\omega^{IJ} \tag{2.19$'$}$$

として表せる．右辺の和を空間-空間成分と時間-空間成分に分けると，

$$A^i = \frac{1}{2}\epsilon^i{}_{jk}\omega^{jk} + 2\cdot\frac{\mathrm{i}}{2}\delta^i_k\omega^{0k} = \omega^i + \mathrm{i}\omega^{0i} : (2.20)$$

を得る．

■曲率 F^i と R^{IJ} の関係　自己双対接続 $A^i = P^i_{IJ}\omega^{IJ} = \omega^i + \mathrm{i}\,\omega^{0i}$ の曲率 F^i が，曲率 $R^{IJ} = \mathrm{d}\omega^{IJ} + \omega^I{}_K \wedge \omega^{KJ}$ の自己双対成分

$$F^i = P^i_{IJ}R^{IJ} \tag{6}$$

であることを示す．

$$P^i_{IJ}R^{IJ} = P^i_{IJ}(\mathrm{d}\omega^{IJ} + \omega^I{}_K\wedge\omega^{KJ}) = \mathrm{d}A^i + P^i_{IJ}\omega^I{}_K\wedge\omega^{KJ}$$

において，非自明な接続の 2 次の項

$$\begin{aligned} P^i_{IJ}\omega^I{}_K\wedge\omega^{KJ} =& P^i_{i'j'}\omega^{i'}{}_K\wedge\omega^{Kj'} + P^i_{0j'}\omega^0{}_K\wedge\omega^{Kj'} + P^i_{i'0}\omega^{i'}{}_K\wedge\omega^{K0} \\ =& P^i_{i'j'}\omega^{i'}{}_K\wedge\omega^{Kj'} + 2P^i_{0j'}\omega^0{}_K\wedge\omega^{Kj'} \end{aligned}$$

は次のように計算できる．まず最右辺第 1 項は

$$\begin{aligned}P^i_{i'j'}\omega^{i'}{}_K\wedge\omega^{Kj'} =&\frac{1}{2}\epsilon^i{}_{j'k'}\omega^{i'}{}_K\wedge\omega^{Kj'}=\frac{1}{2}\epsilon^i{}_{j'k'}(\omega^{i'}{}_0\wedge\omega^{0j'}+\omega^{i'}{}_k\wedge\omega^{kj'})\\ =&\frac{1}{2}\epsilon^i{}_{j'k'}(\omega^{0i'}\wedge\omega^{0j'}+\epsilon^{i'}{}_{kl}\epsilon^{kj'}{}_m\omega^l\wedge\omega^m)\qquad(\because\omega^{i'}{}_0=-\omega^{i'0}=\omega^{0i'},\ \omega^{i'}{}_k=\epsilon^{i'}{}_{kl}\omega^l)\\ =&\frac{1}{2}\epsilon^i{}_{j'k'}(\omega^{0i'}\wedge\omega^{0j'}-\omega^{i'}\wedge\omega^{j'}).\qquad(\because\epsilon^{i'}{}_{kl}\epsilon^{kj'}{}_m=-(\delta^{i'j'}\delta_{lm}-\delta^{i'}_m\delta^{j'}_l))\end{aligned}$$

次に第 2 項は

$$2P^i_{0j'}\omega^0{}_K\wedge\omega^{Kj'}=\mathrm{i}\,\delta^i_{j'}\omega^0{}_k\wedge\omega^{kj'}=\mathrm{i}\,\omega^0{}_k\wedge\omega^{ki}=-\mathrm{i}\,\epsilon^{ki}{}_l\omega^l\wedge\omega^0{}_k=-\mathrm{i}\,\epsilon^i{}_{lk}\omega^l\wedge\omega^{0k}.$$

これらを合わせると

$$P^i_{IJ}\omega^I{}_K\wedge\omega^{KJ}=-\frac{1}{2}\epsilon^i{}_{jk}(\omega^j\wedge\omega^k+2\mathrm{i}\,\omega^j\wedge\omega^{0k}-\omega^{0j}\wedge\omega^{0k})$$

であり，右辺の括弧内の因子は

$$A^j\wedge A^k=(\omega^j+\mathrm{i}\,\omega^{0j})\wedge(\omega^k+\mathrm{i}\,\omega^{0k})=\omega^j\wedge\omega^k+2\mathrm{i}\,\omega^j\wedge\omega^{0k}-\omega^{0j}\wedge\omega^{0k}$$

に一致しているので，

$$P^i_{IJ}R^{IJ}=\mathrm{d}A^i-\frac{1}{2}\epsilon^i{}_{jk}A^j\wedge A^k\equiv F^i:(6)$$

とまとめられる．ただし教科書 p.37 の曲率 F^i の定義式において，A^i の 2 次の項に係数 $-1/2$ を補った．このため曲率

$$F^i=\frac{1}{2}F^i_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu,\qquad F^i_{\mu\nu}=\partial_\mu A^i_\nu-\partial_\nu A^i_\mu-\epsilon^i{}_{jk}A^j_\mu A^k_\nu \tag{7}$$

は $su(2)$ 代数の構造定数 $-\epsilon^i{}_{jk}$ を持つ場の強度である．ここから A を SU(2)Yang–Mills 接続と見なすことが動機付けられる．($su(2)$ の基底を適当に採り直せば，構造定数の係数は調節できる．) 上式 (7) は 3 次元面に誘導された F^i の定義式 (4.6) と構造定数の符号が異なるものの，su(2) の基底を適当に採り直せば，構造定数の係数は調節できる．後で見るように，また Ashtekar 電場の共変微分 $\mathrm{D}_aE^a_i$ の定義 (4.6) に含まれる構造定数も同時に修正されるため，構造定数の符号の違いは 4.1 節の結果に影響しない．

■A^i で表した真空の Einstein 方程式 (2.21) の確認　運動方程式 (2.21) の左辺第 1 項は，式 (6) を用いると

$$P_{iIJ}e^I\wedge F^i=e^I\wedge(P^{KL}{}_{IJ}R_{KL}),\qquad P^{KL}{}_{IJ}\equiv P_{iIJ}P^{iKL}=\frac{1}{2}\delta^K_{[I}\delta^L_{J]}+\frac{\mathrm{i}}{4}\epsilon^{KL}{}_{IJ}:(2.18)$$

と書き換えられる．ここで $P^{KL}{}_{IJ}$ の第 1 項は反対称な因子 R_{KL} に対しては恒等演算子のように作用し，また第 2 項は Hodge 双対 $(*R)_{IJ}=R^*_{IJ}=\frac{1}{2}\epsilon_{IJKL}R^{KL}$ を作る：

$$P^{KL}{}_{IJ}R_{KL}=\frac{1}{2}\left(R_{IJ}+\frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon_{IJKL}R^{KL}\right)=\frac{\mathrm{i}}{2}\left\{\left(*+\frac{1}{\mathrm{i}}\right)R\right\}_{IJ}.$$

同様に式 (2.21) の左辺第 2 項において，

$$P_{iIJ}P^i_{KL}e^K\wedge e^L=\frac{\mathrm{i}}{2}\left\{\left(*+\frac{1}{\mathrm{i}}\right)e\wedge e\right\}_{IJ}$$

と書き換えられる．よって式 (2.21) は

$$e^I\wedge\left\{\left(*+\frac{1}{\mathrm{i}}\right)\left(R-\frac{2}{3}\lambda e\wedge e\right)\right\}_{IJ}=0$$

とまとめられる．この式の実部は Einstein 方程式 (2.11) に一致している．

他方で虚部は

$$e^I \wedge R_{IJ} = 0 \tag{8}$$

を与える．ただし $e^I \wedge e_I = \eta_{IJ} e^I \wedge e^J = 0$ より，宇宙定数項は寄与を持たないことに注意した．上式 (8) は Bianchi の恒等式として自動的に満たされる [416, p.79]．実際

$$R_{IJ} = \frac{1}{2} R_{IJ\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu = \frac{1}{2} R_{IJKL} e^K_\mu e^L_\nu \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu = \frac{1}{2} R_{IJKL} e^K \wedge e^L \tag{9}$$

を代入すると，式 (8) は

$$0 = e^I \wedge R_{IJ} = \frac{1}{2} R_{IJKL} e^I \wedge e^K \wedge e^L = \frac{1}{2} R_{IJKL} \epsilon^{IKLM} e^*_M$$

と書ける．最右辺における基底 e^*_M の係数をゼロとおこう．ねじれ $T = 0$ の下で R_{IJKL} は Riemann 曲率テンソルのテトラード成分に一致することを用いると，

$$0 = R_{IJKL} \epsilon^{IKLM} = R_{\mu\nu\rho\sigma} e^\mu_I e^\nu_J e^\rho_K e^\sigma_L \epsilon^{IKLM}.$$

ここで余因子行列の転置行列の表式 $\epsilon^{IKLM} e^\mu_I e^\rho_K e^\sigma_L = \det(e^{-1}) e^M_\tau \epsilon^{\mu\rho\sigma\tau}$ (両辺に e^λ_M を縮約してみよ) を用いると，さらに

$$\det(e^{-1}) e^M_\tau e^\nu_J \epsilon^{\tau\mu\rho\sigma} R_{\nu\mu\rho\sigma} = 0$$

と書き換えられる．添字 ν, τ の固定した値に対し，相異なる 3 つの添字 $\mu, \rho, \sigma (\neq \tau)$ に関する和 $\epsilon^{\tau\mu\rho\sigma} R_{\nu\mu\rho\sigma}$ は，Riemann 曲率テンソルの後ろ 3 つの添字に関する 2 通りの巡回置換項の和から成るので，Bianchi の恒等式

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\sigma\nu\rho} + R_{\mu\rho\sigma\nu} = 0 \tag{10}$$

(すなわち後ろ 3 つの添字に関する巡回置換項の和はゼロ) [417, p.292] により消える．例えば

$$\epsilon^{0\mu\rho\sigma} R_{0\mu\rho\sigma} = (R_{0123} + R_{0312} + R_{0231}) + (R_{0321} + R_{0132} + R_{0213}) = 0.$$

よって式 (8) は自動的に満たされる．

■作用 (2.22) の作用 (2.12) との等価性の確認　式 (2.23) を真似て $\Sigma^{IJ} \equiv e^I \wedge e^J$ と略記する．Σ^{IJ} を Plebanski 形式といい [416, p.61]，このとき式 (2.23) はその自己双対成分 $\Sigma^i = P^i_{IJ} \Sigma^{IJ}$ である．

さて，作用 (2.12),(2.22) のにおける宇宙定数の項はもとより，互いに一致している．そこで各々の第 1 項を比較すれば充分である．式 (6) を用いると，作用 (2.22) の第 1 項において

$$-\mathrm{i}\, \Sigma_i \wedge F^i = -\mathrm{i}\, (P^{IJ}_i P^i_{KL}) \Sigma_{IJ} \wedge R^{KL} = \frac{1}{2} \Sigma^{IJ} \wedge \left\{ \left(* + \frac{1}{\mathrm{i}} \right) R \right\}_{IJ}$$

と書き換えられる．この実部 $\frac{1}{2} \Sigma^{IJ} \wedge (*R)_{IJ} = \frac{1}{4} \epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge R^{KL}$ は作用 (2.12) の第 1 項に一致している．

また作用の虚部は $\int e^I \wedge e^J \wedge R_{IJ}$ という形をしており，運動方程式の虚部と同様に，Bianchi の恒等式により消える [416, pp.64–65]．実際，再び式 (9):$R_{IJ} = \frac{1}{2} R_{IJKL} e^K \wedge e^L$ を代入すると，

$$\int e^I \wedge e^J \wedge R_{IJ} = \frac{1}{2} \int R_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge e^K \wedge e^L = \frac{1}{2} \int R_{IJKL} \epsilon^{IJKL} (\det e) \mathrm{d}^4 x$$

と書き換えられる．ここで接続 ω に関する変分はねじれ $T=0$ を与えるので，R_{IJKL} は Riemann 曲率テンソルのテトラード成分に他ならないことに注意すると，

$$R_{IJKL}\epsilon^{IJKL} = R_{\mu\nu\rho\sigma}e^{\mu}_{I}e^{\nu}_{J}e^{\rho}_{K}e^{\sigma}_{L}\epsilon^{IJKL} = R_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\det(e^{-1})$$

と書き換えられる．よって

$$\int e^I \wedge e^J \wedge R_{IJ} \sim \int R_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{d}^4x$$

が成立する．ここで Riemann 曲率テンソルが Bianchi の恒等式 (10) を満たすことを考慮しよう．与えられた μ の値，例えば $\mu=0$ に対して，残り 3 つの添字に関する和 $\epsilon^{0\nu\rho\sigma}R_{0\nu\rho\sigma}$ を考える．

- (ν,ρ,σ) が $(1,2,3)$ の巡回置換の項の和は，$\epsilon^{0\nu\rho\sigma}=+1$ より $\sum\epsilon^{0\nu\rho\sigma}R_{0\nu\rho\sigma}=R_{0123}+\mathrm{cyclic}=0$.
- (ν,ρ,σ) が $(3,2,1)$ の巡回置換の項の和は，$\epsilon^{0\nu\rho\sigma}=-1$ より $\sum\epsilon^{0\nu\rho\sigma}R_{0\nu\rho\sigma}=-(R_{0123}+\mathrm{cyclic})=0$.

ノンゼロの項は以上で尽くされるので $\epsilon^{0\nu\rho\sigma}R_{0\nu\rho\sigma}=0$．$\mu=1,2,3$ の各々に対する和も同様に消えるので，

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} = \sum_{\mu}\sum_{\nu,\rho,\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}=0.$$

こうしてねじれ $T=0$ の下で作用の虚部は物理に影響しないことになる．

以上より宇宙定数項を別にすれば，一般に Immirzi パラメータ γ の逆数を結合定数として，式 (2.12) の作用 $S\sim\int e^I\wedge e^J\wedge R^*_{IJ}$ に Holst 項 $S\sim\int e^I\wedge e^J\wedge R_{IJ}$ を加えた作用

$$S\sim\int e\wedge e\wedge R^* + \frac{1}{\gamma}\int e\wedge e\wedge R = \int e\wedge e\wedge\left(*+\frac{1}{\gamma}\right)R$$

を採ることができる．これは Holst 作用と呼ばれ，ここでは簡単のため縮約される添字を省いた [416, pp.64–65]．作用 (2.22) は $\gamma=\mathrm{i}$ とおいた場合の Holst 作用にあたる．

■作用 (2.22) が運動方程式 (2.21) を再現することの確認　式 (2.21) の宇宙定数 λ の項について，ひとまず添字 J を上げておくと

$$P^{IJ}_{i}P^{i}_{KL}e_I\wedge e^K\wedge e^L = \left(\frac{1}{2}\delta^I_{[K}\delta^J_{L]}+\frac{\mathrm{i}}{4}\epsilon^{IJ}{}_{KL}\right)e_I\wedge e^K\wedge e^L = \frac{\mathrm{i}}{4}\epsilon^{IJ}{}_{KL}e_I\wedge e^K\wedge e^L$$

と書き換えられる ($\delta^I_{[K}\delta^J_{L]}$ の項は $e_I\wedge e^I=0$ を作り寄与しない)．よって式 (2.21) の第 2 項は

$$-\frac{2}{3}\lambda P_{iIJ}P^i_{KL}e^I\wedge e^K\wedge e^L = -\frac{\mathrm{i}}{6}\lambda\epsilon_{IJKL}e^I\wedge e^K\wedge e^L$$

となって，数係数の違いを除き Einstein 方程式 (2.11) 第 2 項に一致する (生き残る添字 $J\leftrightarrow L$)．すると作用 (2.22) における宇宙定数 λ の項もまた，数係数の違いを除いて作用 (2.12) のそれと同じであって，式 (2.11) の導出時に調べたそのテトラード e に関する変分は，

$$\delta\left(-\frac{1}{12}\lambda\epsilon_{IJKL}e^I\wedge e^J\wedge e^K\wedge e^L\right) = -\frac{1}{3}\lambda\epsilon_{IJKL}e^I\wedge\delta e^J\wedge e^K\wedge e^L = \frac{4\mathrm{i}}{3}\lambda P_{iIJ}P^i_{KL}e^I\wedge\delta e^J\wedge e^K\wedge e^L$$

と書ける．また第 1 項の変分は

$$\delta\{e^J\wedge(\mathrm{i}P_{iIJ}e^I\wedge F^i)\} = 2\delta e^J\wedge(\mathrm{i}P_{iIJ}e^I\wedge F^i)$$

である．よって作用 (2.22) の積分記号の下にある微分形式の変分は

$$\delta\left(-\mathrm{i}P_{iIJ}e^I\wedge e^J\wedge F^i - \frac{1}{12}\lambda\epsilon_{IJKL}e^I\wedge e^J\wedge e^K\wedge e^L\right) = 2\mathrm{i}\delta e^J\wedge\left\{P_{iIJ}e^I\wedge\left(F^i-\frac{2}{3}\lambda P^i_{KL}e^K\wedge e^L\right)\right\}$$

となって，運動方程式 (2.21) が得られる．

■式 (2.25):$\mathrm{D}\Sigma^i=0$ の確認　スマートではないが，$i=1,2,3$ の各々の場合に対して個別に確認を行う．ここでは $i=1$ の場合の確認を示す．いずれにせよ証明において，ねじれフリーな条件 (2.6) を仮定することが重要である[*28]．

式 (2.6):

$$\mathrm{d}e^0=-\omega^0{}_i\wedge e^i,\qquad \mathrm{d}e^i=-\omega^i{}_I\wedge e^I=-(\omega^{0i}\wedge e^0+\omega^i{}_j\wedge e^j)$$

を用いると，式 (2.24):$\Sigma^1=e^2\wedge e^3+\mathrm{i}\,e^0\wedge e^1$ の外微分は

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Sigma^1=&\mathrm{d}e^2\wedge e^3-e^2\wedge\mathrm{d}e^3+\mathrm{i}\mathrm{d}e^0\wedge e^1-\mathrm{i}e^0\wedge\mathrm{d}e^1\\=&-(\omega^{02}\wedge e^0+\omega^2{}_i\wedge e^i)\wedge e^3+e^2\wedge(\omega^{03}\wedge e^0+\omega^3{}_i\wedge e^i)-\mathrm{i}\,(\omega^0{}_i\wedge e^i)\wedge e^1-\mathrm{i}\,e^0\wedge(\omega^{01}\wedge e^0-\omega^1{}_i\wedge e^i)\\=&-\omega^{02}\wedge e^0\wedge e^3-\omega^{12}\wedge e^3\wedge e^1+\omega^{03}\wedge e^0\wedge e^2+\omega^{31}\wedge e^1\wedge e^2\\&+\mathrm{i}\,\omega^{02}\wedge e^1\wedge e^2-\mathrm{i}\,\omega^{03}\wedge e^3\wedge e^1-\mathrm{i}\,\omega^{12}\wedge e^0\wedge e^2+\mathrm{i}\,\omega^{31}\wedge e^0\wedge e^3\end{aligned}$$

と計算できる．これは

$$\begin{aligned}A^1{}_j\wedge\Sigma^j=&\epsilon^1{}_{jk}A^k\wedge\Sigma^j=A^3\wedge\Sigma^2-A^2\wedge\Sigma^3\\=&(\omega^{12}+\mathrm{i}\,\omega^{03})\wedge(e^3\wedge e^1+\mathrm{i}\,e^0\wedge e^2)-(\omega^{31}+\mathrm{i}\,\omega^{02})\wedge(e^1\wedge e^2+\mathrm{i}\,e^0\wedge e^3)\\=&\omega^{12}\wedge e^3\wedge e^1-\omega^{03}\wedge e^0\wedge e^2-\omega^{31}\wedge e^1\wedge e^2+\omega^{02}\wedge e^0\wedge e^3\\&+\mathrm{i}\,\omega^{03}\wedge e^3\wedge e^1+\mathrm{i}\,\omega^{12}\wedge e^0\wedge e^2-\mathrm{i}\,\omega^{02}\wedge e^1\wedge e^2-\mathrm{i}\,\omega^{31}\wedge e^0\wedge e^3\end{aligned}$$

とちょうど逆符号なので，式 (2.25):

$$\mathrm{D}\Sigma^1\equiv\mathrm{d}\Sigma^1+A^1{}_j\wedge\Sigma^j=0$$

が成立する．

■Σ^i が恒等的に式 (2.26) を満たすことの確認　定義式 (2.23):$\Sigma^i=\frac{1}{2}\epsilon^i{}_{jk}e^j\wedge e^k+\mathrm{i}\,e^0\wedge e^i$ より，

$$\begin{aligned}\Sigma^i\wedge\Sigma^j=&\left(\frac{1}{2}\epsilon^i{}_{kl}e^k\wedge e^l+\mathrm{i}\,e^0\wedge e^i\right)\wedge\left(\frac{1}{2}\epsilon^i{}_{mn}e^m\wedge e^n+\mathrm{i}\,e^0\wedge e^j\right)\\=&\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\epsilon^i{}_{mn}e^0\wedge e^j\wedge e^m\wedge e^n+\epsilon^j{}_{mn}e^0\wedge e^i\wedge e^m\wedge e^n\right)\\=&\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\epsilon^i{}_{mn}\epsilon^{jmn}+\epsilon^j{}_{mn}\epsilon^{imn}\right)e^0\wedge e^1\wedge e^2\wedge e^3\\=&2\,\mathrm{i}\,\delta^{ij}e^0\wedge e^1\wedge e^2\wedge e^3.\end{aligned}$$

ただし第 2 の等号では $e^0\wedge e^0=0$，および部屋割り論法により $e^k\wedge e^l\wedge e^m\wedge e^n=0$ となるため，クロス・タームのみが生き残ることに注意した．上式で $i,j=k$ とおいて縮約をとると

$$\Sigma_k\wedge\Sigma^k=3\cdot 2\,\mathrm{i}\,e^0\wedge e^1\wedge e^2\wedge e^3 \tag{11}$$

となるので，直ちに

$$3\Sigma^i\wedge\Sigma^j=\delta^{ij}\Sigma_k\wedge\Sigma^k=-\delta^{ij}\overline{\Sigma}_k\wedge\overline{\Sigma}^k.$$

[*28] 一般的に書けば，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Sigma^i=&P^i_{IJ}(\mathrm{d}e^I\wedge e^J+e^I\wedge\mathrm{d}e^J)=P^i_{IJ}(\omega^I{}_K\wedge e^J\wedge e^K+\omega^J{}_K\wedge e^I\wedge e^K),\qquad(\because\text{式 (2.6)})\\A^i{}_j\wedge\Sigma^j=&\epsilon^i{}_{jk}A^k\wedge\Sigma^j=\epsilon^i{}_{jk}(P^k_{IJ}\omega^{IJ})\wedge(P^j_{KL}e^K\wedge e^L).\end{aligned}$$

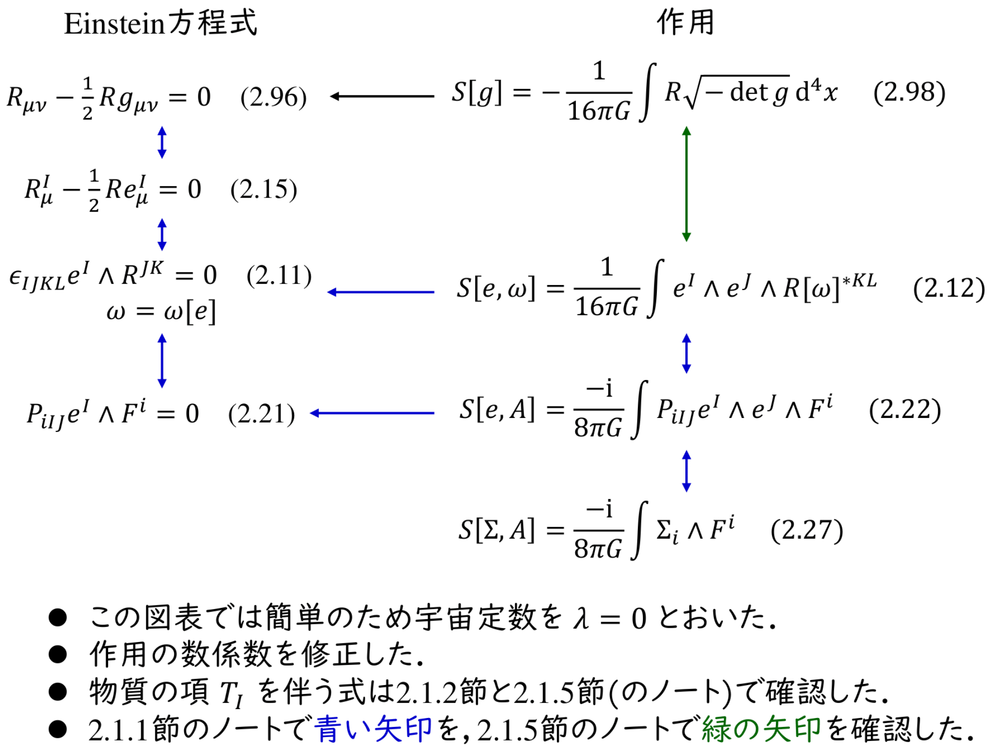


図 7　テトラード-接続形式まとめ

同様に,

$$
\begin{aligned}
\Sigma^i \wedge \overline{\Sigma}^j =& \frac{\mathrm{i}}{2}\left(-\epsilon^i{}_{mn}e^0 \wedge e^j \wedge e^m \wedge e^n + \epsilon^j{}_{mn}e^0 \wedge e^i \wedge e^m \wedge e^n\right) \\
=& \mathrm{i}\,\delta^{ij}\left(-e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 + e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3\right) = 0.
\end{aligned}
$$

■作用の表式 (2.27) の確認　作用 (2.27) は,Σ^i の定義式 (2.23) を代入すると作用 (2.22) に戻る.特に作用 (2.27) の第 2 項は,式 (2.18) を用いて

$$
\Sigma_k \wedge \Sigma^k = P_{kIJ}P^k_{KL}e^I \wedge e^J \wedge e^K \wedge e^L = \left\{\frac{1}{4}(\delta_{IK}\delta_{JL} - \delta_{IL}\delta_{JK}) + \frac{\mathrm{i}}{4}\epsilon_{IJKL}\right\} e^I \wedge e^J \wedge e^K \wedge e^L = \frac{\mathrm{i}}{4}\epsilon_{IJKL}e^I \wedge e^J \wedge e^K \wedge e^L
$$

と書き換えられる.あるいは先ほどの式 (11) を用いて,逆に作用 (2.22) の第 2 項を

$$
\epsilon_{IJKL}e^I \wedge e^J \wedge e^K \wedge e^L = 4!e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 = -4\mathrm{i}\,\Sigma_k \wedge \Sigma^k
$$

と書き換えても良い.これら 2 式は確かに等価であり,いずれにせよ式 (2.27) の第 2 項 (宇宙定数の項) は正しくは逆符号と考えられる[*29].またこのように,作用 (2.27) は Σ^i の定義式 (2.23) だけから導くことができ,Σ^i の満たす式 (2.25–26) はあからさまには用いない.

■テトラード-接続形式まとめ　一連の結果を図 7 にまとめておこう.

[*29] もっとも作用 (2.27) を後の式 (4.27) で用いる際には,宇宙定数の項を無視するので,この修正はひとまず問題にならない.これまでも度々指摘してきたように,教科書では宇宙定数の項における数係数の誤りが目立つ.

2.1.2 “物質”

一般相対論的な語法では，“物質”とは重力場以外の全てである［文献 [417, p.308] を見よ］．我々の知る限り，世界は重力場，Yang–Mills 場，フェルミオン場，そしておそらくはスカラー場とから成る．

- **Maxwell.** 電磁場は 1 形式の場 A，Maxwell ポテンシャル
$$A(x) = A_\mu(x)\mathrm{d}x^\mu \tag{2.28}$$
で記述される．その曲率は $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ を成分に持つ 2 形式 $F = \mathrm{d}A$ である［ここで $\mathrm{d}A = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$ と書いて成分 $F_{\mu\nu}$ を定義*30］．そのダイナミクスは作用
$$S_{\mathrm{M}}[e, A] = \frac{1}{4}\int F^* \wedge F \tag{2.29}$$
に支配される［本稿次節で確認］．
- **Yang–Mills.** 上記は Yang–Mills 群 G の非 Abel 接続 A へと一般化される．A はゲージ共変な外微分 D と曲率 F を定義する．作用は
$$S_{\mathrm{YM}}[e, A] = \frac{1}{4}\int \mathrm{tr}[F^* \wedge F] \tag{2.30}$$
であり，ここに tr は代数の上のトレースである．［文献 [420, pp.140–144] で学習済み．実際，式 (2.29) に対して確認したのと同様，作用 (2.30) は $S_{\mathrm{YM}} \sim \int \sqrt{-\det g}\,\mathrm{tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})$ となる.］
- **スカラー．** $\varphi(x)$ を，G の表現の値をとり得る，スカラー場としよう．Yang–Mills 場 A は共変微分
$$\mathrm{D}_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi + A^A_\mu L_A\varphi \tag{2.31}$$
を定義する［文献 [420, p.141] で学習済み (結合定数 $g = 1$)］，ここに L_A は φ が属する表現におけるゲージ代数の生成子たちである．場のダイナミクスを支配する作用は
$$S_{\mathrm{sc}}[e, A, \varphi] = \int \mathrm{d}^4x\, e\left(\eta^{IJ}e^\mu_I\overline{\mathrm{D}_\mu\varphi}e^\nu_J\mathrm{D}_\nu\varphi + V(\varphi)\right) \tag{2.32}$$
である，ここに e は e^I_μ の行列式であり，また $V(\varphi)$ は自己相互作用ポテンシャルである．［後の式 (2.82):$\eta^{IJ}e^\mu_I e^\nu_J = g^{\mu\nu}$，$e = \sqrt{-\det g}$ を用いると，作用 (2.32) は見慣れた形になる [420, p.144]．バー $\overline{(\cdots)}$ は共役転置行列 $(\cdots)^\dagger$ を表すと考えれば良い.］
- **フェルミオン．** フェルミオン場 ψ は Lorentz 群のスピノル表現における場であり，G の表現の値をとり得る．スピン接続 ω と Yang–Mills 場 A は共変微分
$$\mathrm{D}_\mu\psi = \partial_\mu\psi + \omega^I_{\mu J}L^J{}_I\psi + A^A_\mu L_A\psi \tag{2.33}$$
を定義する，ここに $L^J{}_I$ と L_A は ψ が属する表現における，Lorentz およびゲージ代数の生成子たちである．［Minkowski 時空では $\omega^I_{\mu J}(x) = 0$:(2.47) となって，見慣れた表式 [420, p.141] に帰着する.］γ^I を通常の Dirac 行列として，
$$\not{\mathrm{D}}\psi = \gamma^I e^\mu_I \mathrm{D}_\mu\psi \tag{2.34}$$

*30 実際，
$$\begin{aligned}\mathrm{d}A =& (\partial_\mu A_\nu)\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu = (\partial_{[\mu}A_{\nu]})\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu,\\ F_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu =& (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu = 2(\partial_\mu A_\nu)\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu = 2\mathrm{d}A.\end{aligned}$$

を定義する．［Minkowski 時空では $e^I_\mu(x)=\delta^I_\mu$:(2.47) より，$\not{D}=\gamma^I \mathrm{D}_I$ に戻る．］フェルミオン場のダイナミクスを支配する作用は

$$S_{\mathrm{f}}[e,\omega,A,\varphi,\psi]=\int \mathrm{d}^4x\, e\left(\bar{\psi}\not{D}\psi+Y(\varphi,\bar{\psi},\psi)\right)+(\text{複素共役}) \tag{2.35}$$

であり，ここに第 2 項は多項式のスカラー場との相互作用ポテンシャルである．

- **“世界のラグランジアン”：標準模型．**我々の知る限り，世界は場の組 e,ω,A,ψ,φ を用いて記述される，ここに $G=SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ ［強い相互作用と電弱相互作用，Newton 定数 G との混同の恐れはあるまい]，また ψ と φ は適当な多重項であり，適当な多項式 V と Y を持つ作用

$$\begin{aligned}S[e,\omega,A,\psi,\varphi]=&S_{\mathrm{GR}}[e,\omega]+S_{\mathrm{YM}}[e,A]+S_{\mathrm{f}}[e,\omega,A,\varphi,\psi]+S_{\mathrm{sc}}[e,A,\varphi]\\=&S_{\mathrm{GR}}[e,\omega]+S_{\mathrm{matter}}[e,\omega,A,\psi,\varphi]\end{aligned} \tag{2.36}$$

に支配される．e の変分をとることで，この作用から従う運動方程式は，源の項を伴う Einstein 方程式 (2.11)，すなわち

$$\epsilon_{IJKL}\left(e^I\wedge R^{JK}-\frac{2}{3}\lambda e^I\wedge e^J\wedge e^K\right)=2\pi G T_L \tag{2.37}$$

であり［本稿次節で補足]，ここにエネルギー・運動量 3 形式

$$T_I=\frac{\det e}{3!}T^\mu_I\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{d}x^\nu\wedge\mathrm{d}x^\rho\wedge\mathrm{d}x^\sigma \tag{2.38}$$

は

$$T_I(x)=\frac{\delta S_{\mathrm{matter}}}{\delta e^I(x)} \tag{2.39}$$

で定義される．等価的に，Einstein 方程式 (2.37) は

$$R^I_\mu-\frac{1}{2}Re^I_\mu+\lambda e^I_\mu=8\pi G T^I_\mu \tag{2.40}$$

と書ける［本稿次節で補足]．$T^I_\mu(x)$ はエネルギー・運動量テンソルと呼ばれる［式 (2.95) も見よ]．それはあらゆる物質の項に対する個々のエネルギー・運動量テンソルの和である*31．

- **粒子．**点粒子の軌道 $x^\mu(s)$ は近似的な概念である．巨視的な物体は有限の大きさを持ち，また素粒子は量子的存在であって，それ故，軌道を持たない．巨視的なスケールでは，点粒子の軌道の概念はそれでも非常に有用である．
非重力的な力が存在しないとき，粒子の世界線 $\gamma: s\mapsto x^\mu(s)$ に対する運動方程式は作用

$$S[e,\gamma]=m\int \mathrm{d}s\sqrt{-\eta_{IJ}v^I(s)v^J(s)} \tag{2.41}$$

によって決定される，ここに

$$v^I(s)=e^I_\mu(x(s))v^\mu(s) \tag{2.42}$$

および

$$v^\mu(s)=\dot{x}^\mu(s)\equiv\frac{\mathrm{d}x^\mu(s)}{\mathrm{d}s} \tag{2.43}$$

は粒子の速度である［本稿次節で補足］この作用は軌道をパラメトライズする方法に依存せず，それ故，経路 (path) を決定するのであって，そのパラメータ付けを決定するのではない［冒頭の「術語と表記」も参照]．パラメータ付けの選択 $v_Iv^I=-1$ の下では，運動方程式は

$$\ddot{x}^\mu=-\Gamma^\mu_{\nu\rho}\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho \tag{2.44}$$

*31 重力場に関する作用の変分として定義されるエネルギー・運動量テンソルは，変換の Noether カレントとして定義される Minkowski 空間における伝統的なそれとは，全微分だけ異なり得る．［文献 [417, pp.91–92,p.304] では電磁場を例にこの事情を詳しく見た．］

であり，ここに

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = e^{\rho}_{J} e^{J\sigma} (e_{\rho I} \partial_{(\mu} e^{I}_{\nu)} + e_{\nu I} \partial_{[\mu} e^{I}_{\rho]} + e_{\mu I} \partial_{[\nu} e^{I}_{\rho]}) \tag{2.45}$$

は Levi–Civita 接続と呼ばれる［本稿次節で確認］．任意のパラメータ付けでは，運動方程式は

$$\ddot{x}^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} \dot{x}^{\nu} \dot{x}^{\rho} = I(s) \dot{x}^{\mu} \tag{2.46}$$

であり，ここに $I(s)$ は s の任意の関数である［本稿次節で確認］．

Minkowski 解　Newton 定数 G が小さいと仮定できる領域，すなわち，重力場に対する物質の影響を無視できる領域を考えよう．我々の近似において，宇宙定数 λ も無視できると仮定しよう．このとき Einstein 方程式 (2.11)［と場の方程式 (2.6)］は (他にも数多くの解がある中で)，Minkowski 解と呼ばれる特に興味ある解

$$e^{I}_{\mu}(x) = \delta^{I}_{\mu}, \qquad \omega^{I}_{\mu J}(x) = 0 \tag{2.47}$$

を許容する．［式 (2.92) より第 1 式は第 2 式を含意する．］この解は至るところで平坦である［式 (2.10) の箇所を参照］．

重力場がこの配位にあると仮定しよう．この特定の重力場と相互作用する物質の運動方程式はどうなるだろうか？ それらは Minkowski 解 (2.47) の，物質の作用 (2.36) への代入

$$S[A, \varphi, \psi] = S_{\mathrm{matter}}[e = \delta, \omega = 0, A, \varphi, \psi] \tag{2.48}$$

によって，容易に得られる．作用 $S[A, \varphi, \psi]$ は高エネルギーの物理で用いられる標準模型の作用である．この作用は通常，時空の Minkowski 計量 $\eta_{\mu\nu}$ を用いて書かれる．［「時空の (spacetime)」と形容しているのは η_{IJ} と概念的に区別するためと推察される．］この計量はテトラード場の Minkowski 値 (2.47) から得られる．この解では例えば，スカラー場の作用 (2.32) において，組合せ $\eta^{IJ} e^{\mu}_{I}(x) e^{\nu}_{J}(x)$ は

$$\eta^{IJ} e^{\mu}_{I}(x) e^{\nu}_{J}(x) = \eta^{IJ} \delta^{\mu}_{I} \delta^{\nu}_{J} = \eta^{\mu\nu} \tag{2.49}$$

になる［一般式 (2.82) と比較すれば $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$］．

特殊相対論的な物理における Minkowski 計量 $\eta_{\mu\nu}$ は，重力場の特定の値に他ならない．それは特定の近似における，Einstein 方程式の解の 1 つである．

2.1.2 節について

■Maxwell 場の作用 (2.29) の確認　式 (2.29) の被積分因子は，一見すると擬スカラー $F^{*}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sim \vec{E} \cdot \vec{B}$ に似ている．これは 4 元発散となるため，作用に寄与しない [417, p.77]．しかしながら，冒頭の notation の箇所で確認した Hodge スターの定義式 (3) より

$$F^{*} = F^{*}_{\lambda\mu} \mathrm{d}x^{\lambda} \wedge \mathrm{d}x^{\mu} = \sqrt{-\det g} \frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} F^{\nu\rho} \mathrm{d}x^{\lambda} \wedge \mathrm{d}x^{\mu}, \qquad F = \frac{1}{2} F_{\sigma\tau} \mathrm{d}x^{\sigma} \wedge \mathrm{d}x^{\tau}$$

なので*32，

$$S_{\mathrm{M}} = \frac{1}{4} \int F^{*} \wedge F = \frac{1}{4 \cdot 2^2} \int \sqrt{-\det g} \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} F^{\nu\rho} F_{\sigma\tau} \mathrm{d}x^{\lambda} \wedge \mathrm{d}x^{\mu} \wedge \mathrm{d}x^{\sigma} \wedge \mathrm{d}x^{\tau}$$

である．ここで座標 x そのものを積分変数にとると，微分形式の積分の定義より

$$\mathrm{d}x^{\lambda} \wedge \mathrm{d}x^{\mu} \wedge \mathrm{d}x^{\sigma} \wedge \mathrm{d}x^{\tau} \quad \to \quad \begin{vmatrix} \partial_0 x^{\lambda} & \cdots & \partial_3 x^{\lambda} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial_0 x^{\tau} & \cdots & \partial_3 x^{\tau} \end{vmatrix} \mathrm{d}x^0 \cdots \mathrm{d}x^3 = \epsilon^{\lambda\mu\sigma\tau} \mathrm{d}^4 x$$

*32 ただし Heaviside 単位系での慣例 $S_{\mathrm{M}} = -\frac{1}{4} \int \sqrt{-\det g} F^{\nu\rho} F_{\nu\rho}$ と最終的な結果の数係数 $-1/4$ が合うように，F^{*} の成分は係数 1/2 を括り出さずに定義した．複数の作用の和をとる場合には，数係数の違いは運動方程式に影響する．

と置き換わる．次いで $\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\epsilon^{\lambda\mu\sigma\tau} = -4\delta_\nu^{[\sigma}\delta_\rho^{\tau]}$ に注意すると，

$$S_{\mathrm{M}} = -\frac{1}{2^2}\int\sqrt{-\det g}\delta_\nu^{[\sigma}\delta_\rho^{\tau]}F^{\nu\rho}F_{\sigma\tau} = -\frac{1}{4}\int\sqrt{-\det g}F^{\nu\rho}F_{\nu\rho}$$

となって，重力の存在下における通常の電磁場の作用の形が得られる．

■源の項を持つ Einstein 方程式 (2.37) について　Einstein 方程式 (2.11) の導出過程で見たように，テトラード e に関する変分は

$$\delta S_{\mathrm{GR}} = \frac{1}{2\cdot 16\pi G}\int\epsilon_{IJKL}\left(e^I\wedge R^{JK} - \frac{2}{3}\lambda e^I\wedge e^J\wedge e^K\right)\wedge\delta e^L$$

である．他方，微分形式による汎関数微分 (2.39) は

$$\delta S_{\mathrm{matter}} \sim \int\frac{\delta S_{\mathrm{matter}}}{\delta e^L}\wedge\delta e^L = \int T_L\wedge\delta e^L$$

と書いて定義されると考える*33．ここで T_L が 3 形式であることは，上式が 4 次元時空にわたる積分となることを保証する．このとき変分原理 $\delta S_{\mathrm{GR}} + \delta S_{\mathrm{matter}} = 0$ より，(数係数を除いて) 式 (2.37) の形が得られる．3 形式 T^I と場 T_I^μ の関係 (2.38) は，微分形式の関係 (2.37) を場の関係式 (2.40) に読み替える際にはじめて必要となる．

■源の項を持つ Einstein 方程式 (2.40) について　真空の Einstein 方程式 (2.15) の導出過程で見たように，

$$\begin{aligned}
&e_J^\mu e_K^\nu\epsilon^{IJKL}\epsilon_{MNPL}\left(e_\rho^M R^{NP}{}_{\sigma\tau} - \frac{2}{3}\lambda e_\rho^M e_\sigma^N e_\tau^P\right)\mathrm{d}x^\rho\wedge\mathrm{d}x^\sigma\wedge\mathrm{d}x^\tau[\partial_\lambda,\partial_\mu,\partial_\nu]\\
=&-2^3\left(R_\lambda^I - \frac{1}{2}Re_\lambda^I - (3)\lambda e_\lambda^I\right)
\end{aligned}$$

である．そこで式 (2.37) 右辺の源の項 $2\pi GT_L = 2\pi G\frac{\det e}{3!}T_L^\varrho\epsilon_{\varrho\rho\sigma\tau}\mathrm{d}x^\rho\wedge\mathrm{d}x^\sigma\wedge\mathrm{d}x^\tau$ にも同じ操作を施す．まず

$$\epsilon_{\varrho\rho\sigma\tau}\mathrm{d}x^\rho\wedge\mathrm{d}x^\sigma\wedge\mathrm{d}x^\tau[\partial_\lambda,\partial_\mu,\partial_\nu] = 2(\epsilon_{\varrho\lambda[\mu\nu]} + \mathrm{cyclic}) = 6\epsilon_{\varrho\lambda\mu\nu}$$

に注意すると

$$e_J^\mu e_K^\nu\epsilon^{IJKL}(2\pi GT_L)[\partial_\lambda,\partial_\mu,\partial_\nu] = 2\pi G(\det e)e_J^\mu e_K^\nu T_L^\varrho\epsilon^{IJKL}\epsilon_{\varrho\lambda\mu\nu}$$

であり，さらに右辺において

$$\begin{aligned}
\{(\det e)\epsilon^{IJKL}\epsilon_{\varrho\lambda\mu\nu}\}e_J^\mu e_K^\nu =&\begin{vmatrix} e_\varrho^I & e_\lambda^I & e_\mu^I & e_\nu^I\\ e_\varrho^J & e_\lambda^J & e_\mu^J & e_\nu^J\\ e_\varrho^K & e_\lambda^K & e_\mu^K & e_\nu^K\\ e_\varrho^L & e_\lambda^L & e_\mu^L & e_\nu^L\end{vmatrix}e_J^\mu e_K^\nu = \begin{vmatrix} e_\varrho^I & e_\lambda^I & \delta_J^I & \delta_K^I\\ e_\varrho^J & e_\lambda^J & \delta_J^J & \delta_K^J\\ e_\varrho^K & e_\lambda^K & \delta_J^K & \delta_K^K\\ e_\varrho^L & e_\lambda^L & \delta_J^L & \delta_K^L\end{vmatrix}\\
&(e_J^\mu\text{を 3 行目に，}e_K^\nu\text{を 4 行目に掛けて}\mu,\nu\text{で和をとった})\\
=&e_\varrho^I\{e_\lambda^J(\delta_J^L - 4\delta_J^L) - e_\lambda^K(4\delta_K^L - \delta_K^L) + e_\lambda^L(4\cdot 4 - 4)\}\\
&-e_\varrho^J\{e_\lambda^I(\delta_J^L - 4\delta_J^L) - e_\lambda^K(\delta_J^I\delta_K^L - \delta_K^I\delta_J^L) + e_\lambda^L(4\delta_J^I - \delta_J^I)\}\\
&+e_\varrho^K\{e_\lambda^I(4\delta_K^L - \delta_K^L) - e_\lambda^J(\delta_J^I\delta_K^L - \delta_K^I\delta_J^L) + e_\lambda^L(\delta_K^I - 4\delta_K^I)\}\\
&-e_\varrho^L\{e_\lambda^I(4\cdot 4 - 4) - e_\lambda^J(4\delta_J^I - \delta_J^I) + e_\lambda^K(\delta_K^I - 4\delta_K^I)\}\\
&(\text{行列式を 1 列目で展開し，得られる積の中で初めて繰り返された添字 }J,K\text{ の和をとる})\\
=&2(e_\varrho^I e_\lambda^L - e_\lambda^I e_\varrho^L)
\end{aligned}$$

*33 このとき同様に $\frac{\delta S_{\mathrm{GR}}}{\delta e^L} \sim \epsilon_{IJKL}\left(e^I\wedge R^{JK} - \frac{2}{3}\lambda e^I\wedge e^J\wedge e^K\right)$．後の式 (2.108) のノートも見よ．

となる (確かに両辺は同じ反対称性を持っている)．ここに残りの因子 $2\pi G T^{\varrho}_{L}$ を掛けて，式 (2.95) のように

$$T^{\varrho}_{L}e^{I}_{\varrho}e^{L}_{\lambda}=T^{\varrho}_{\lambda}e^{I}_{\varrho}=T^{I}_{\lambda},\qquad T^{\varrho}_{L}e^{I}_{\lambda}e^{L}_{\varrho}=Te^{I}_{\lambda}\qquad (T\equiv T^{\varrho}_{\varrho})$$

となることに注意する．さらに電磁場の場合のように [417, p.304,p.309]，エネルギー・運動量テンソルがトレースレスであること $T=0$ を仮定すると，数係数の違いを除き，Einstein 方程式 (2.40) の形

$$R^{I}_{\lambda}-\frac{1}{2}Re^{I}_{\lambda}-(3)\lambda e^{I}_{\lambda}\sim GT^{I}_{\lambda}$$

が得られる[*34]．

■点粒子の作用 (2.41–43) について　$v^{I}(s)$ の式 (2.42) を代入し式 (2.82) を考慮すると，作用 (2.41) は見慣れた形

$$\begin{aligned}S[e,\gamma]=&m\int \mathrm{d}s\sqrt{-\eta_{IJ}e^{I}_{\mu}(x(s))e^{J}_{\nu}(x(s))v^{\mu}(s)v^{\nu}(s)}\\=&m\int_{\gamma}\sqrt{-g_{\mu\nu}(x)\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}}\end{aligned}$$

になる．正確には作用 (2.41) の右辺には負号を要する [417, pp.27–28,p.273]．

また Minkowski 解 (2.47):$e^{I}_{\mu}(x)=\delta^{I}_{\mu}$ に対して，速度は単に $v^{I}(s)=\frac{\mathrm{d}x^{I}(s)}{\mathrm{d}s}$ と書けるから，このとき作用 (2.41) は

$$S[e,\gamma]=m\int_{\gamma}\sqrt{-\eta_{IJ}\mathrm{d}x^{I}\mathrm{d}x^{J}}$$

となる．

■粒子の運動方程式と Levi–Civita 接続 (2.44–46) について　Levi–Civita 接続 (2.45) が通常の接続ないし Christoffel 記号 (2.90):

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}=g^{\sigma\rho}\Gamma_{\rho,\mu\nu},\qquad \Gamma_{\rho,\mu\nu}\equiv\frac{1}{2}(\partial_{\mu}g_{\nu\rho}+\partial_{\nu}g_{\rho\mu}-\partial_{\rho}g_{\mu\nu})$$

に一致することさえ確かめられれば，式 (2.44) は測地線の方程式に他ならないことが判明する．このとき運動方程式 (2.44) が粒子の作用 (2.41) から導かれることは，既に知っていることである．このように計量を用いた一般相対論の伝統的な定式化を経由して，作用 (2.41) から運動方程式 (2.44) が得られることを証明できる．

そこで上式の Christoffel 記号をテトラードで表すと，式 (2.45) が得られることを示す．直接確かめられるように，式 (2.82):$g_{\mu\nu}=e^{I}_{\mu}e^{J}_{\nu}\eta_{IJ}$ の逆テンソルは

$$g^{\rho\sigma}=e^{\rho}_{K}e^{\sigma}_{L}\eta^{KL}=e^{\rho}_{K}e^{K\sigma}$$

である．また

$$\begin{aligned}\Gamma_{\rho,\mu\nu}\equiv&\frac{1}{2}(\partial_{\mu}g_{\nu\rho}+\partial_{\nu}g_{\rho\mu}-\partial_{\rho}g_{\mu\nu})\\=&\frac{1}{2}[\{e^{J}_{\rho}(\partial_{\mu}e^{I}_{\nu})\eta_{IJ}+e^{I}_{\nu}(\partial_{\mu}e^{J}_{\rho})\eta_{IJ}\}+\{e^{J}_{\mu}(\partial_{\nu}e^{I}_{\rho})\eta_{IJ}+e^{I}_{\rho}(\partial_{\nu}e^{J}_{\mu})\eta_{IJ}\}-\{e^{J}_{\nu}(\partial_{\rho}e^{I}_{\mu})\eta_{IJ}+e^{I}_{\mu}(\partial_{\rho}e^{J}_{\nu})\eta_{IJ}\}]\\=&e_{\rho I}\partial_{(\mu}e^{I}_{\nu)}+e_{\nu I}\partial_{[\mu}e^{I}_{\rho]}+e_{\mu I}\partial_{[\nu}e^{I}_{\rho]}\end{aligned}$$

---

*34 ノンゼロの T に対しては

$$R^{I}_{\lambda}-\frac{1}{2}Re^{I}_{\lambda}-(3)\lambda e^{I}_{\lambda}\sim G(T^{I}_{\lambda}-Te^{I}_{\lambda})$$

のように，源の項からも宇宙定数の項と同じ形の寄与が現れることになると考えられる．その係数 $T(x)$ は場なので，安易にこれを λ に吸収させて，宇宙定数を再定義するとは言い難い (逆に宇宙定数を源への寄与と見なすことは可能である)．

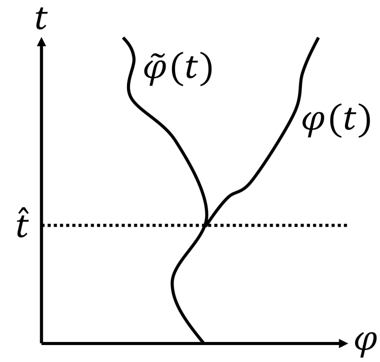


図 8　ゲージの Dirac 定義：運動方程式の 2 つの異なる解は，それらが $t < \hat{t}$ で等しければゲージ等価と考えねばならない．

なので，接続 (2.90) は式 (2.45) へと書き換えられる．このように Levi–Civita 接続 (2.45) は，右辺括弧内の $\Gamma_{\rho,\mu\nu}$ と，その前の $g^{\rho\sigma}$ とから成っている．

最後に任意のパラメータ付けに対する運動方程式 (2.46) を確かめよう．パラメータ付けの条件 $v_I v^I = -1$ を満たすパラメータ s を持つ軌道上の点に，新たに割り当てられるパラメータを $s'(s)$ とする[*35]．すなわち $x^\mu(s) = x^\mu(s'(s))$ であり，ここで簡単のため関数名に同じ記号 x^μ を用いる．また s, s' による微分を $\dot{x}^\mu, \mathring{x}^\mu$ のように，それぞれ順に 2 種類のドットで表すと，

$$\dot{x}^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}s'}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s'} = \dot{s}'\mathring{x}^\mu, \qquad \ddot{x}^\mu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}s'}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s'}\right) = \ddot{s}'\mathring{x}^\mu + (\dot{s}')^2\,\mathring{\mathring{x}}^\mu$$

となる．よって運動方程式 (2.44) は

$$0 = \ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho = (\dot{s}')^2(\mathring{\mathring{x}}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\mathring{x}^\nu\mathring{x}^\rho) + \ddot{s}'\mathring{x}^\mu$$

と書き換えられる．したがって式 (2.46) において $I(s') = -\ddot{s}'/(\dot{s}')^2$ と同定され，これは $s'(s)$ の関数形で決まる．

2.1.3　ゲージ不変性

ゲージ不変性を持つ系の一般的な，そしてゲージ系の物理を理解する上で最も有用な定義は，Dirac による以下である．発展パラメータ t における発展方程式を持つ系を考えよう．もし発展が劣決定 (under-determined) であれば，すなわち，もしある $\hat{t}$ よりも小さい t に対して互いに等しい．2 つの識別可能な解があれば，系は“ゲージ”不変であると言われる (図 8 を見よ)．これら 2 つの解は“ゲージ等価 (gauge equivalent)”であると言われる．いかなる 2 つの解も，それらが (上記のように) 第 3 の解とゲージ等価ならば，ゲージ等価であると言われる［分岐の位置 $\hat{t}$ は異なって良い］．ゲージ群 $\mathcal{G}$ は物理的な場に作用し，ゲージ等価な解を互いへと写像する群である．古典物理学は決定論的なので，劣決定な発展方程式は，ゲージ変換の下で不変な量だけが理論の物理的な予言であるという条件下でのみ，物理的に無矛盾である．これらの量はゲージ不変な観測量と呼ばれる．

note　まとめると，同一の初期条件に対する発展方程式の異なる解は，実際には系の同じ発展を表さねばなら

[*35] ただし $\mathrm{d}s'/\mathrm{d}s > 0$ を仮定する (冒頭の「術語と表記」を参照)．

ないので，互いにゲージ変換で関係付けられる (ゲージ等価である) と言える．また理論の予言はゲージ変換の下で不変な量でなければならず，そのような量をゲージ不変な観測量と呼ぶ．

作用 (2.36) から導かれる運動方程式はゲージ変換の 3 つの群―― (i) 局所 Yang–Mills ゲージ変換，(ii) 局所 Lorentz 変換，および (iii) 微分同相変換――の下で不変である．

(i) 局所 G 変換　G は Yang–Mills 群である．局所 G 変換は写像 $\lambda : M \to G$ によってラベルされる．［M は場の定義される多様体であり，写像 (2.50–54) の右辺を群 G の変換と見なせる．］それは φ, ψ および接続 A によく知られた形で作用するのに対し，e と ω は不変である，

$$\begin{aligned}\lambda: \quad \varphi(x) &\mapsto R_\varphi(\lambda(x))\varphi(x), & (2.50)\\ \psi(x) &\mapsto R_\psi(\lambda(x))\psi(x), & (2.51)\\ A_\mu(x) &\mapsto R(\lambda(x))A_\mu(x) + \lambda(x)\partial_\mu\lambda^{-1}(x), & (2.52)\\ e^I_\mu(x) &\mapsto e^I_\mu(x), & (2.53)\\ \omega^I_{\mu J}(x) &\mapsto \omega^I_{\mu J}(x). & (2.54)\end{aligned}$$

ここに R_φ と R_ψ は φ と ψ が属する G の表現であり，R は随伴表現である．

note　文献 [420, pp.140–143] で学習済みである．特に式 (2.52) の右辺第 1 項は随伴表現の場と同様の変換則 $\lambda A_\mu \lambda^{-1}$ を表しており，λ や A_μ の基底自体は随伴表現の行列である必要はない．後の式 (6.18) も同様である．

(ii) 局所 Lorentz 変換　局所 Lorentz 変換［局所慣性系の間の座標変換］は写像 $\lambda : M \to SO(3,1)$ によってラベルされる．それは Yang–Mills 群 $G = SO(3,1)$ の Yang–Mills 局所変換とちょうど同じように，φ, ψ および接続 ω に作用する．スカラー φ たちは自明な表現に属する；フェルミオン ψ たちはスピノル表現 S に属する．重力場 e は基本表現として変換する．明示的には，$SO(3,1)$ の要素を $\lambda^I{}_J$ と書けば，

$$\begin{aligned}\lambda: \quad \varphi(x) &\mapsto \varphi(x), & (2.55)\\ \psi(x) &\mapsto S(\lambda(x))\psi(x), & (2.56)\\ A_\mu(x) &\mapsto A_\mu(x), & (2.57)\\ e^I_\mu(x) &\mapsto \lambda^I{}_J(x)e^J_\mu(x), & (2.58)\\ \omega^I_{\mu J}(x) &\mapsto \lambda^I{}_K(x)\omega^K_{\mu L}(x)\lambda^L{}_J(x) + \lambda_K{}^I(x)\partial_\mu\lambda^K{}_J(x) & (2.59)\end{aligned}$$

を得る．［式 (2.123) の説明も見よ．$\lambda_K{}^I$ は $\lambda^I{}_K$ の逆行列と推察される．］

(iii) 微分同相写像　第 3 の，最も重要なものは，微分同相写像の下での不変性である．微分同相ゲージ変換 (diffeomorphism gauge transformation) は滑らかで可逆な写像 $\phi : M \to M$ によって (すなわち M の“微分同相写像”によって) ラベルされる*36．それは全ての場に対して，場の形式の種類に応じてそれらを引き戻すことによって，“非局所的に”作用する：φ と ψ は 0 形式であり，e, ω および A は 1 形式である*37：

$$\begin{aligned}\phi: \quad \varphi(x) &\mapsto \varphi(\phi(x)), & (2.60)\\ \psi(x) &\mapsto \psi(\phi(x)), & (2.61)\\ A_\mu(x) &\mapsto \frac{\partial\phi^\nu(x)}{\partial x^\mu}A_\nu(\phi(x)), & (2.62)\\ e^I_\mu(x) &\mapsto \frac{\partial\phi^\nu(x)}{\partial x^\mu}e^I_\nu(\phi(x)), & (2.63)\\ \omega^I_{\mu J}(x) &\mapsto \frac{\partial\phi^\nu(x)}{\partial x^\mu}\omega^I_{\nu J}(\phi(x)). & (2.64)\end{aligned}$$

note　微分同相写像 $x \mapsto \phi(x)$ は能動的な座標変換に対応し，移された先の点 $\phi(x)$ での場の値，例えば $\varphi(\phi(x))$ を元の点 x の関数と見ることを引き戻しという．微分形式の成分は共変テンソルの変換則に従わなければならない (0 形式はスカラー，付録 D も参照) [424, pp.50–51,p.69]．能動的な変換にせよ受動的な変換にせよ，共変テンソルの変換則 (2.62–64) の変換係数は逆と考えられる．式 (2.124) や p.161 下から 3 行目も見よ．

---

*36 ここには残念な術語の不正確さがある．写像 $\phi : M \to M$ は微分同相写像と呼ばれる．関連する場の変換 (2.60–64) もまた，微分同相ゲージ変換の代わりに，しばしば (本書においても) ルーズに微分同相写像と呼ばれる．これは混乱を生じやすい．

*37 この定義の下では，内部 Lorentz，スピノル，およびゲージ添字は微分同相写像の下で変換しない．代わりに，Lorentz およびゲージバンドルの，ファイバーを保持する (fiber-preserving) 微分同相写像が考えられる．［要するに微分同相写像を，局所的な Lorentz およびゲージ変換を含めて統一的に扱える，ということか．］この代案は数学的により明瞭で物理的により魅力的に見える，と言うのも，異なる時空点での局所的な内部基準系または局所的ゲージの選択が区別できないという事実が明白になるからである (後述)．しかし，2 つの選択は究極的には物理的に等価でありながら，局所的な Lorentz およびゲージ変換の下でのゲージ不変性のために，微分同相写像の数学的な記述はより複雑になる．微分同相写像の下でのスピノルの適切な数学的変換は [55] と [56] において論じられている．

これら 3 つの変換の群は運動方程式の解を別の運動方程式の解へと移す．我々はこれらの変換を与えられた座標時間 $\hat{t}$ の前では恒等変換になり，その後では恒等変換とは異なるようにとることができるので，それらはゲージ変換である．それ故それらは運動方程式の劣決定を担う．上で与えた Dirac の議論に従うと，理論の物理的な予言は，これら 3 つの変換全ての下で不変な量で与えられねばならない．

特に，時空の局所的な量を，固定された与えられた点 x に依存する量のこととしよう．そのような量は微分同相写像の下で不変になり得ないことに注意せよ．それ故 (この意味では) 時空の局所的な量はいずれも，GR におけるゲージ不変な観測量でない．この事実の意味と微分同相不変性の遠大な帰結は以下の 2.3.2 節で議論する．

2.1.4 物理的な幾何学

時空多様体 M の各点 x において，重力場 $e^I_\mu(x)$ は接空間 T_xM から Minkowski 空間への写像を定義する．写像は T_xM のベクトル v^μ を Minkowski ベクトル $u^I = e^I_\mu(x)v^\mu$ に移す．Minkowski 長さ (Minkowski length) $|u| = \sqrt{-u\cdot u} = \sqrt{-\eta_{IJ}u^Iu^J}$ は接ベクトル v^μ のノルム

$$|v| \equiv |u| = \sqrt{-\eta_{IJ}(e^I_\mu(x)v^\mu)(e^J_\nu(x)v^\nu)} \tag{2.65}$$

を定義し［式 (2.82) より $|v| = \sqrt{-g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu}$］，$|v|$ は接ベクトル v の“物理的長さ (physical length)”と呼ばれる．u が時間的 (空間的または光的) であれば，接ベクトル v は時間的 (空間的または光的) と呼ばれる．

この事実により M のあらゆる d 次元の面のサイズを指定することが可能になる．面上の任意の点 x で，重力場は面の接空間を Minkowski 空間の面に写像する．この面は x の接空間へ，次いで面そのものへ引き戻し，積分することのできる体積の形式を伴う．［つまり以下で見るように，考えている領域の線要素に対応する Lorentz ベクトル u^I を用いて，長さや面積，体積を構成・定義できる．］特に：

長さ L　曲線 $\gamma : s \mapsto x^\mu(s)$ の長さ $\mathbf{L}$ は，その正接の線積分

$$\mathbf{L}[e,\gamma] = \int |\mathrm{d}\gamma| = \int \mathrm{d}s|u(s)| = \int \mathrm{d}s\sqrt{-\eta_{IJ}u^I(s)u^J(s)} \tag{2.66}$$

であり，ここに

$$u^I(s) = e^I_\mu(\gamma(s))\frac{\mathrm{d}x^\mu(s)}{\mathrm{d}s} \tag{2.67}$$

である．［繰り返せば，長さは見慣れた形 $\mathbf{L} = \int\sqrt{-g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu}$ に書き換えられる．］これは 1 形式 $e^I(x) = e^I_\mu(x)\mathrm{d}x^\mu$ のノルムの γ に沿う線積分

$$\mathbf{L}[e,\gamma] = \int_\gamma |e| \tag{2.68}$$

として書ける［本稿次節で確認］．長さは γ のパラメータ付けと向きに依らない［ことが見て取れる］．曲線は，その正接がどこでも時間的であれば，時間的と呼ばれる．粒子の作用 (2.41) は時空におけるその経路の長さに他ならないこと

$$S[e,\gamma] = m\mathbf{L}[e,\gamma] \tag{2.69}$$

に注意せよ．

面積 A　M に埋め込まれた 2 次元の面 $\mathcal{S}:\sigma=(\sigma^i)\mapsto x^\mu(\sigma^i)$, $i=1,2$ の面積 $\mathbf{A}$ は

$$\mathbf{A}[e,\mathcal{S}]=\int\left|\mathrm{d}^2\mathcal{S}\right|=\int_{\mathcal{S}}\mathrm{d}^2\sigma\sqrt{\det(u_i\cdot u_j)} \tag{2.70}$$

であり，ここに

$$u_i^I(\sigma)=e_\mu^I(x(\sigma))\frac{\partial x^\mu(\sigma)}{\partial\sigma^i}, \tag{2.71}$$

また行列式は添字 i,j にわたる．［上式 (2.71) のテトラードの引数を $\gamma(\sigma)\to x(\sigma)$ と直しておいた．］すなわち，

$$\mathbf{A}[e,\mathcal{S}]=\int_{\mathcal{S}}\mathrm{d}^2\sigma\sqrt{(u_1\cdot u_1)(u_2\cdot u_2)-(u_1\cdot u_2)^2}. \tag{2.72}$$

［本稿次節で補足.］面はその正接が全て空間的であれば，空間的と呼ばれる．

体積 V　M に埋め込まれた 3 次元領域 $\mathcal{R}:\sigma=(\sigma^i)\mapsto x^\mu(\sigma^i)$, $i=1,2,3$ の体積 $\mathbf{V}$ は

$$\mathbf{V}[e,\mathcal{R}]=\int\left|\mathrm{d}^3\mathcal{R}\right|=\int_{\mathcal{R}}\mathrm{d}^3\sigma\sqrt{n\cdot n} \tag{2.73}$$

であり，ここに

$$n_I=\epsilon_{IJKL}u_1^Ju_2^Ku_3^L \tag{2.74}$$

は面に垂直である［本稿次節で補足］．領域は n が至るところで時間的であれば，空間的と呼ばれる．

量 $\mathbf{L},\mathbf{A}$ および $\mathbf{V}$ は重力場 e の特定の関数である．それらがこれらの幾何学的な名前を持つ理由は，以下の 2.2.3 節で議論される．

2.1.4 節について

■長さ (2.68) について　曲線 γ のパラメータ s を積分変数に選べば，1 形式 $e^I=e_\mu^I\mathrm{d}x^\mu$ の積分は定義より

$$\int_\gamma e^I=\int_\gamma e_\mu^I\mathrm{d}x^\mu=\int e_\mu^I(\gamma(s))\frac{\mathrm{d}x^\mu(s)}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=\int u^I(s)\mathrm{d}s$$

と書ける．ここでノルム $|e|$ の線積分は，両辺の積分記号の下にある因子に機械的に $|\cdots|$ を付けた関係

$$\int_\gamma|e|=\int|u(s)|\mathrm{d}s$$

で定義され，右辺における $|u(s)|$ は Minkowski ベクトル $u^I(s)$ の長さを表すと解すれば，元の長さの式 (2.66) が再現される．

■面積 (2.70–72) について　内積記号は式 (2.65) の直前と同様，$u_i\cdot u_j=\eta_{IJ}u_i^Iu_j^J$ を表す．面積は，面のパラメータ σ^i の微小変化に対応する線要素

$$\mathrm{d}x_1^\mu\equiv\frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma^1}\mathrm{d}\sigma^1,\qquad\mathrm{d}x_2^\mu\equiv\frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma^2}\mathrm{d}\sigma^2,\qquad\mathrm{d}x_1^I\equiv u_1^I\mathrm{d}\sigma^1=e_\mu^I\mathrm{d}x_1^\mu,\qquad\mathrm{d}x_2^I\equiv u_2^I\mathrm{d}\sigma^2=e_\mu^I\mathrm{d}x_2^\mu$$

の張る面積要素の積分

$$\mathbf{A}[e,\mathcal{S}]=\int\sqrt{\det(\mathrm{d}x_i\cdot\mathrm{d}x_j)}=\int\sqrt{(\mathrm{d}x_1\cdot\mathrm{d}x_1)(\mathrm{d}x_2\cdot\mathrm{d}x_2)-(\mathrm{d}x_1\cdot\mathrm{d}x_2)^2}$$

となっている．長さの場合と同様，上式の根号内において，Lorentz ベクトル $\mathrm{d}x_i^I$ の η_{IJ} による内積 $\mathrm{d}x_i\cdot\mathrm{d}x_j$ は，同時に元のベクトル $\mathrm{d}x_i^\mu$ の計量 $g_{\mu\nu}$ による内積でもある．面積 (4.28) に関する 4.1.1 節のノートも見よ．

■3 次元超曲面の法線ベクトル (2.74) について　法線ベクトル (2.74) を

$$n_I = \frac{1}{3!}\epsilon_{IJKL}\epsilon^{jkl}u_j^J u_k^K u_l^L \equiv \frac{1}{3!}\epsilon_{IJKL}n^{JKL} \qquad (\text{すなわち } n^{JKL} \equiv -\epsilon^{IJKL}n_I)$$

と書くと，対偶な (dual) テンソルは

$$n^{JKL} = \epsilon^{jkl}u_j^J u_k^K u_l^L = \begin{vmatrix} u_1^J & u_2^J & u_3^J \\ u_1^K & u_2^K & u_3^K \\ u_1^L & u_2^L & u_3^L \end{vmatrix}$$

と同定できる．これは 3 つの方向ベクトル u_1^I, u_2^I, u_3^I が張る平行 6 面体の体積に一致している [417, p.23]. ($\mathrm{d}^3\sigma$ を掛けると，線要素 $u_1^I \mathrm{d}\sigma^1$, etc. の張る体積要素になる．)

また n_I は 3 次元超曲面の接ベクトル u_i^I $(i = 1, 2, 3)$ の各々と直交している．実際，

$$n_I u_1^I = (\epsilon_{IJKL}u_1^I u_1^J)u_2^K u_3^L = 0, \qquad \text{etc.}$$

2.1.5　ホロノミーと計量

GR における，長さや面積といった観測に関係する量は，それらが線や面といった，時空の有限ではあるが広範囲にわたる領域に依存しているという意味で非局所的である．量子論で中心的な役割を演じる今 1 つの自然な非局所的量は，重力的な接続 (ω，あるいはその自己双対部分 A) の曲線 γ に沿うホロノミー U である．

ホロノミーの定義［本稿次節で補足］　多様体 M にわたって群 G における接続 A が与えられたとき，ホロノミーは以下のように定義される．曲線 γ を区間 $[0, 1]$ から M への連続的で区分的に滑らかな写像

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow M, \tag{2.75}$$
$$s \longmapsto x^\mu(s) \tag{2.76}$$

としよう．曲線 γ に沿う接続 A のホロノミー，あるいは平行移動関数 (parallel propagator) $U[A, \gamma]$ は

$$U[A, \gamma](0) = \mathbb{1}, \tag{2.77}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}U[A, \gamma](s) - \dot{\gamma}^\mu(s)A_\mu(\gamma(s))U[A, \gamma] = 0, \tag{2.78}$$
$$U[A, \gamma] = U[A, \gamma](1) \tag{2.79}$$

で定義される G の元である，ここに $\dot{\gamma}^\mu(s) \equiv \mathrm{d}x^\mu(s)/\mathrm{d}s$ は曲線の正接である．(数学的な文献では，“ホロノミー”という術語は一般に閉曲線に対してのみ用いられる．量子重力の文献では，一般に開いた曲線に対しても用いられる．) この方程式の形式的な解は

$$U[A, \gamma] = \mathcal{P}\exp\int_0^1 \mathrm{d}s\, \dot{\gamma}^\mu(s)A_\mu^i(\gamma(s))\tau_i \equiv \mathcal{P}\exp\int_\gamma A \tag{2.80}$$

であり，ここに τ_i は群 G の Lie 代数の基底，また経路順序化 (path ordered) $\mathcal{P}$ は冪級数展開

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}\exp\int_0^1 \mathrm{d}s\, A(\gamma(s)) \\ =&\sum_{n=0}^\infty \int_0^1 \mathrm{d}s_1 \int_0^{s_1} \mathrm{d}s_2 \cdots \int_0^{s_{n-1}} \mathrm{d}s_n A(\gamma(s_n)) \cdots A(\gamma(s_1)) \end{aligned} \tag{2.81}$$

によって定義される．接続 A は G の表現 R におけるベクトルの，M の点から近接する点への平行移動の意味を定義する規則である：x におけるベクトル v は $x+\mathrm{d}x$ におけるベクトル $v+R(U(A_\mu \mathrm{d}x^\mu))v$ に平行と定義される．［引数の添字を $A_a \to A_\mu$ と訂正した (文献 [415, § 5.2] のノートを参照).］ベクトルは γ に沿ってベクトル $R(U(A,\gamma))v$ へと平行移動される．

ホロノミーの重要な性質の 1 つは，A のゲージ変換 (2.52)［等価的に式 (6.18) [420, p.143]］の下でそれが同次変換する (transforms homogeneously) ことである．すなわち：$x^\gamma_{\mathrm{i,f}}$ を γ の始・終点として，$U[A_\lambda,\gamma]=\lambda(x^\gamma_{\mathrm{f}})U[A,\gamma]\lambda^{-1}(x^\gamma_{\mathrm{i}})$.

後で必要となる専門的な注意：たとえ γ が微分不可能で A がよく定義されない (有限の個数の) 点があろうとも，任意の曲線 γ のホロノミーはよく定義されている．［これが冒頭で γ を「区分的に滑らか」とした事情と考えられる.］理由は，γ をあらゆるものが微分可能となる構成要素に分解でき，γ のホロノミーを，連続性によってよく定義される構成要素のホロノミーの，積として定義できるということである．

ホロノミーの物理的解釈　時空点 A で出会い，別れた後に再び時空点 B で出会う 2 つの左手型のニュートリノを考える．それらのスピンは A において平行であり，重力場のみの影響のもとで発展すると仮定する．それらの B における相対的なスピンはどうなるか？ 左手型のニュートリノは Lorentz 群の自己双対表現に属し，それ故そのスピンは自己双対接続 A によって平行移動される．γ_1 と γ_2 を A から B に至る 2 つのニュートリノの世界線とし，$\gamma=\gamma_2^{-1}\circ\gamma_1$ を 2 つの世界線によって形成されるループとしよう．もし B において第 1 のニュートリノがスピン ψ を持てば，第 2 のニュートリノはスピン $\psi'=U(A,\gamma)\psi$ を持つ［本稿次節で補足]．2 つのニュートリノの相互作用が分かれば，我々は原理的には，($|\psi|=1$ と仮定したとき) ホロノミーのトレース $\alpha=\mathrm{tr}\,U[A,\gamma]$ を与える，$\alpha=2\mathrm{Re}\,\langle\psi|\psi'\rangle$ のような量を評価できる．

計量表記　Einstein は計量場を用いて GR を書いた．ここで私は計量変数への翻訳を与える．しかしながらフェルミオンの運動方程式は計量場を用いて書けないので［2.1.1 節 (p.34)]，それは必然的に完璧ではないことに注意せよ．

計量場　g は

$$g_{\mu\nu}(x)=e^I_\mu(x)e^J_\nu(x)\eta_{IJ} \tag{2.82}$$

によって定義される対称テンソル場である．M の各点 x で，g は接空間 T_xM におけるスカラー積

$$(u,v)=g_{\mu\nu}(x)u^\mu v^\nu, \qquad u,v\in T_xM \tag{2.83}$$

を定義し，それ故 T_xM を［余接空間 [424, p.79]］T^*_xM に写像する．言い換えれば，$g_{\mu\nu}$ とその逆 $g^{\mu\nu}$ は正接添字 (tangent indices) を上げ下げするのに用いることができる．このとき $e^\mu_I(x)\equiv\eta_{IJ}g^{\mu\nu}e^J_\nu(x)$ が $e^I_\mu(x)$ の逆行列であるという事実［式 (2.1) のノートで確認済み］は，結果であって定義ではない［2.1.1 節ではひとまず定義として導入したものの].

計量を保つ (metric-preserving) 線形接続 Γ　は，

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu}=e^\rho_I(\partial_\mu e^I_\nu+\omega^I_{\mu J}e^J_\nu) \tag{2.84}$$

によって定義される場 $\Gamma^\rho_{\mu\nu}(x)$ である．それは正接 (μ) 添字を持つ全ての場の共変微分 D_μ,

$$\mathrm{D}_\mu v^\nu=\partial_\mu v^\nu+\Gamma^\nu_{\mu\rho}v^\rho \tag{2.85}$$

を定義する［GR の通常の共変微分である [417, § 85]]．ω と合わせて，それは Lorentz および正接添字を持つ全ての対象の共変微分 D_μ を定義する．特に，式 (2.84) は直ちに

$$\mathrm{D}_\mu e^I_\nu=\partial_\mu e^I_\nu+\omega^I_{\mu J}e^J_\nu-\Gamma^\rho_{\mu\nu}e^I_\rho=0 \tag{2.86}$$

を与えることに注意せよ［本稿次節で補足]．線形接続の反対称部分 $T^\rho_{\mu\nu}=(\Gamma^\rho_{\mu\nu}-\Gamma^\rho_{\nu\mu})/2$ ［因子 1/2 を補った］は，式 (2.5) で定義されるねじれ $T^I=e^I_\rho T^\rho_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu$ ［右辺の外積記号を補った］を与える［本稿次節で確認].

Levi–Civita 接続は e と $\omega[e]$ から決定される (計量を保つ) 線形接続である．すなわち，それは

$$\partial_\mu e^I_\nu+\omega[e]^I_{\mu J}e^J_\nu-\Gamma^\rho_{\mu\nu}e^I_\rho=0 \tag{2.87}$$

によって定義され，その解は式 (2.45) である．それはねじれフリーである．この方程式の反対称部分は消えるねじれに関する第 1 の Cartan 構造方程式［式 (2.10) 直後を参照]，すなわち式 (2.6) であり，それは $\omega[e]$ を e の関数として決定するのに十分であることに注意せよ．[以上，本稿次節を参照せよ.］

Levi–Civita 接続は g によって一意的に決まる：それは計量を保つ唯一のねじれフリーな線形接続である，すなわちそれは

$$\mathrm{D}_\mu g_{\nu\rho} = 0, \tag{2.88}$$

あるいは等価的に，

$$\partial_\mu g_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} g_{\sigma\rho} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} = 0 \tag{2.89}$$

を満たす．この方程式は式 (2.45)，あるいは

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \tag{2.90}$$

を解に持つ．[Levi–Civita 接続 (2.45) が上式 (2.90) に他ならないことは本稿で確認済みであり，接続 (2.90) が式 (2.88–89) を満たすことは GR で学んだ通りである [417, p.270].］

方程式 (2.87) および (2.90) により，我々は GR の運動方程式 (2.6) のあからさまな解

$$\omega[e]^I_{\mu J} = -e^\nu_J (\partial_\mu e^I_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu} e^I_\rho) \tag{2.91}$$

を書くことが可能となることに注意しよう．［式 (2.87) を ω について解いた．右辺に負号を補った.］ここに Γ は式 (2.90)，g は式 (2.82) によって与えられる．明示的には，これは簡単な代数計算により，

$$\omega[e]^{IJ}_\mu = 2e^{\nu[I} \partial_{[\mu} {e_{\nu]}}^{J]} + e_{\mu K} e^{\nu I} e^{\sigma J} \partial_{[\sigma} {e_{\nu]}}^K \tag{2.92}$$

を与える．[導出は本稿次節を参照せよ．式 (2.92) においては，ω の添字 I, J に関する反対称性が明白である.］

Riemann テンソル　は

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} e^I_\mu = R^I{}_{J\rho\sigma} e^J_\nu \tag{2.93}$$

を通じて定義できる．Ricci テンソルは

$$R_{\mu\nu} = R^I_\mu e_{I\nu} \tag{2.94}$$

であり，ここで R^I_μ は式 (2.13) において定義されている．エネルギー・運動量テンソル (式 (2.40) の後の脚注*31 を見よ) は

$$T_{\mu\nu} = T^I_\mu e_{I\nu}. \tag{2.95}$$

これらの量を用いると，Einstein 方程式は

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{2.96}$$

になる．Minkowski 解は

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} \tag{2.97}$$

であり，ここに我々は時空の Minkowski 計量が重力場の特定の値に他ならないことを明確に見て取れる．直接的な計算により，作用 (2.12) は［見慣れた Einstein–Hilbert 作用の形］

$$S[g] = \frac{1}{16\pi G} \int (R + \lambda) \sqrt{-\det g}\, \mathrm{d}^4 x \tag{2.98}$$

になる［本稿次節で確認]．物質の作用は計量変数で書けない．

Riemann 幾何学　テンソル g は時空多様体 M に計量構造を装備させる：それは任意の 2 点間の距離を定義し，この距離は M 上の滑らかな関数である．(より正確には，距離は虚数になり得るので，それは擬計量 (pseudo-metric) 構造を定義する．) Riemann は，今日 Riemann 多様体と呼ばれる，(M, g) によって定義される構造を研究し，曲面に関する Gauss 理論の任意の次元数への一般化として，Riemann 曲率テンソルを定義した．Riemann はこの数学理論を，Euclid 幾何学を一般化した“幾何学”の一般理論として提示した．Einstein はこの数学理論を，重力場の物理的なダイナミクスを記述するのに利用した．今にして思えば，これが可能だった理由は，Einstein が理解したように，我々が住む物理的な空間の Euclid 的な構造が局所的な重力場によって決定されるからだ．それ故，初等的な物理的幾何学は単に，それと相互作用する物質 (剛体) によって明かされるような，重力場の局所的な特性の記述である．この点は以下の 2.2.3 節でより詳細に議論する．

——

本節で提示した GR の基礎方程式は前相対論的な[*38]場の理論の方程式とさほど違いないように見える．しかしその類似性は非常に誤解を招きやすい．一般相対論的な理論の物理的解釈は，前相対論的なそれの解釈と非常に異なる．特に，座標 x^μ の意味は前相対論的な物理の場合と異なり，ゲージ不変な観測量は，それらが前相対論的な物理で場に関係するのと同様には場に関係しない．

GR の定式化の物理的意味を理解する過程は何十年も要しており，おそらくまだ完全には終わっていない．Einstein による理論の発見から数十年の間，例えば，理論が重力波を予言するのか否かは明確でなかった．支配的な見解は，波動解は座標の産物に過ぎず，エネルギーと運動量を運ぶことのできる，あるいは Bondi が述べたように，“一杯の水を沸かす”ことのできる物理的な波を示していない，というものだった．この見解はもちろん間違っている．Einstein 自身，Schwarzschild 特異性の意味をひどく誤解した．物理的および座標の距離の間の概念的な混同による誤りのせいで，地球と月の距離の間違った高精度測定がしばらく文献に載っていた．

私は GR が“ぼんやりしている (foggy)”という印象を与えたくない．全く逆に，これらおよび似た事例の全てにおいて，最終的には合意が形成されたという事実は，GR の概念的構造がゆるぎないことを示している．しかしこの概念的構造を理解し，GR の方程式を正しく用い，これらの方程式に現れる量を，研究所で測定された，あるいは天文学者によって観測された数値に関係付ける方法を理解することは，間違いなく些末でない問題である．より一般的には，問題は GR が正確には世界について何を言っているのかを理解することである．理論の量子物理を理解したければ，この意味での明晰さは不可欠である．

この問題に光を当てるには，理論の発見へと導いた概念的な道のりと問題を再追跡するのが明快である．これは続く 2.2 節で成される．急ぐ読者は 2.2 節を省略して，GR の解釈が簡潔に提示されている 2.3 節に飛んで良い (しかし焦りは理解を遅らせる)．［実際 2.3 節よりも 2.2 節 (の各小節末尾に設けた要約) の方が分かりやすい．］

2.1.5 節について

■「ホロノミーの定義」(pp.44–45) について　全般的に文献 [415, § 5.2] (のノート) を復習せよ．比較の際には教科書の式 (2.78) 以降で，結合定数の因子が $ig \to 1$ と置かれていることに注意する．

式 (2.77–81) では群 G の表現 R に応じた基底 τ_i を用いて行列

$$A_\mu = A^i_\mu \tau_i$$

を定義しており，この下で $U[A,\gamma]$ を p.45 の行列 $R(U(A,\gamma))$ と見て良い (同じく式 (2.77) の右辺 $\mathbb{1}$ は単位行列)[*39]．なお式 (2.79):$U[A,\gamma] = U[A,\gamma](1)$ は引数 s のない $U[A,\gamma]$ が，γ の終点までの平行移動関数であることを意味している．

式 (2.80) は 1 形式

$$A = A_\mu \mathrm{d}x^\mu = (A^i_\mu \tau_i)\mathrm{d}x^\mu \tag{12}$$

(行列でもある) の積分として理解できる．例えば式 (2.2) に関して本稿で言及したように，接続 ${\omega^I}_J$ を並べた行列

$$({\omega^I}_J) = (\omega^I_{\mu J}\mathrm{d}x^\mu)$$

は $so(3,1)$ 代数の値，すなわち $so(3,1)$ 代数の基底 τ_i で展開できる行列であって，なおかつ 1 形式でもある．そこでこれをそのまま式 (12) の具体例として用いれば良い (9.3.1 節 p.332 も参照)．もし接続が Levi-Civita

[*38] 本書では“相対論的”とは“一般”相対論的を意味することを思い出そう［冒頭の「術語と表記」を参照］．

[*39] このように教科書には，引数の角括弧と丸括弧の表記揺れがある．

接続 $\omega[e]$ ならば，そのホロノミーは一般相対性理論における通常のベクトルの平行移動を与える．もし接続が自己双対 Ashtekar 接続 A ならば，そのホロノミーは左手型ニュートリノの γ に沿う平行移動を与える [416, p.95]．

経路順序化の定義 (2.81) では，経路に沿って後に現れる因子が優先的に右側に配置されている．しかし文献 [415, § 5.2] のノートで導出したように，実際に得られるホロノミーにはその逆の順序

$$
\begin{aligned}
U[A,\gamma] =& \mathcal{P}\exp\int_\gamma A = \mathcal{P}\exp\int_0^1 \mathrm{d}s\,\dot{\gamma}^\mu(s)A_\mu(\gamma(s)) \\
&\equiv \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \mathrm{d}s_1\int_0^{s_1}\mathrm{d}s_2\cdots\int_0^{s_{n-1}}\mathrm{d}s_n\dot{\gamma}^{\mu_1}(s_1)A_{\mu_1}(\gamma(s_1))\dot{\gamma}^{\mu_2}(s_2)A_{\mu_2}(\gamma(s_2))\cdots\dot{\gamma}^{\mu_n}(s_n)A_{\mu_n}(\gamma(s_n))
\end{aligned}
$$

に因子が並ぶ[*40]．ここで上式 (12) を踏まえて，式 (2.81) における積分に $\dot{\gamma}^\mu(s)$ を補って表記を改めた．($\dot{\gamma}^\mu$ どうしは可換であり，行列 A_μ どうしが非可換である．) なお exp という表記は，上式を指数関数の級数展開の形

$$
U[A,\gamma] = \mathcal{P}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\int_0^1 \mathrm{d}s\,\dot{\gamma}^\mu(s)A_\mu(\gamma(s))\right)^n
$$

に書き換えられることから動機付けられる．

ホロノミー (2.80) が G の要素である (p.44) のは，それが物質場のベクトル表示 v に作用して終点に平行移動したベクトルを作る行列であって，掛け算則

$$
H[A,\gamma_1]H[A,\gamma_2] = H[A,\gamma_1\circ\gamma_2]
$$

を満たすことによる (文献 [415, § 8.1] のノートを参照)．ホロノミーも行列 $A_\mu = A_\mu^i\tau_i$ の指数であるという点では，群 G の通常の (すなわち単位元と連続的に繋がる) 元に対する表現行列と似ている．

■「ホロノミーの物理的解釈」(p.45) における式 $\psi' = U(A,\gamma)\psi$ について　γ_1, γ_2 をそれぞれ順に第 1，第 2 のスピンの世界線とすると，A において 2 つのスピンが平行な条件

$$
U[A,\gamma_1^{-1}]\psi = U[A,\gamma_2^{-1}]\psi'
$$

より，実際には $\psi' = U[A,\gamma_2\circ\gamma_1^{-1}]\psi = U[A,\gamma^{-1}]\psi$ と考えられる．

■「ホロノミーの物理的解釈」(p.45) における $\alpha \equiv 2\mathrm{Re}\,\langle\psi|\psi'\rangle = \mathrm{tr}\,U[A.,\gamma]$ について　本文ではホロノミー U (引数は省略) は自己双対接続 (脚注*17 の $so(3;C)$ に属する) を用いて定義されるとあるものの，ここでは簡単のため Ashtekar 変数 [415, § 7.2] と同様，$su(2)$ に属する接続を仮定する．すると実数 a, b を用いて，一般の $SU(2)$ 行列は

$$
U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \qquad (\text{ただし } |a|^2+|b|^2=1)
$$

と書ける [421, p.229]．ところがトレースは基底に依らないので [421, p.51]，ホロノミー U を対角化する基底で

$$
\mathrm{tr}\,U = \lambda_1+\lambda_2 = 2\mathrm{Re}(\lambda_1)
$$

と評価して良い．ここに $\lambda_1, \lambda_2 = {\lambda_1}^*$ は U の固有値である．

[*40] 時間発展演算子に対する Schrödinger 方程式から Dyson 級数を得るのと同様に，逐次代入により導出できる．

ところで対応する (規格化された) 固有ベクトル v_1, v_2 は互いに直交する．実際 Pauli 行列 $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ と方向単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ に対して，スピン成分 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}$ の固有値 $+1$ に属する固有ベクトルは

$$v_1=\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}\\ \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\alpha/2}\end{pmatrix}$$

(ただし α,β はそれぞれ $\boldsymbol{n}$ の方位角と天頂角) である．これはスピン $\boldsymbol{n}$ 向きの状態に対応しており，一般的な $SU(2)$ 行列 $\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\phi/2)$ の固有ベクトルでもある [421, pp.225–226]．$\boldsymbol{n}$ と逆向きのスピン状態に対応する固有ベクトルは $\alpha\to\pi+\alpha, \beta\to\pi-\beta$ とすれば得られ，

$$v_2=\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}\\ +\mathrm{i}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\alpha/2}\end{pmatrix}$$

となる[*41]．2 つの固有ベクトルは ${v_2}^{\dagger}v_1=0$ を満たすので，直交している．

これを踏まえて

$$\psi=c_1v_1+c_2v_2$$

と展開すると，与えられた規格化条件は $1=|\psi|^2=|c_1|^2+|c_2|^2$ と書ける．すると

$$\psi'=U\psi=c_1\lambda_1v_1+c_2\lambda_2v_2$$

との内積の因子は

$$\alpha\equiv 2\mathrm{Re}\,\langle\psi|\psi'\rangle=2\mathrm{Re}(|c_1|^2\lambda_1+|c_2|^2\lambda_2)=2\mathrm{Re}(\lambda_1)\qquad(\because |c_1|^2+|c_2|^2=1,\ \lambda_2={\lambda_1}^*)$$

と計算される．これは $\mathrm{tr}\,U$ に一致している．

■線形接続 Γ が「計量を保つ」(p.46) と形容される所以　Levi–Civita 接続の式 (2.88) の箇所で言及されているように，そして Levi–Civita 接続に限らず任意の線形接続 (2.84) を用いて定義される共変微分に対して，式 (2.86):$\mathrm{D}_\mu e^I_\nu=0$ より計量 (2.82) の共変微分がゼロになることによる．

■テトラードの共変微分 (2.86) について　第 1 の等号は文献 [415, p.42] の式 (3.29) に対応しており，第 2 辺は式 (2.3),(2.85) の付加的な項を両方含んでいる．第 2 の等号では式 (2.84) を代入すれば良い．

■ねじれと接続の関係 $T^I=e^I_\rho T^\rho_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu$ (p.46) の確認　ねじれは定義式 (2.5) より

$$T^I=T^I_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu,\qquad T^I_{\mu\nu}\equiv\partial_{[\mu}e^I_{\nu]}+\omega^I_{[\mu J}e^J_{\nu]}$$

と書ける．右辺の角括弧はいずれも，添字 μ,ν に関する反対称化を表す．ここで本稿のように反対称部分 $T^\rho_{\mu\nu}$ を，係数 1/2 を付けた反対称部分 $T^\rho_{\mu\nu}=\Gamma^\rho_{[\mu\nu]}$ として定義すると，

$$e^I_\rho T^\rho_{\mu\nu}=e^I_\rho\Gamma^\rho_{[\mu\nu]}=e^I_\rho e^\rho_K(\partial_{[\mu}e^K_{\nu]}+\omega^K_{[\mu J}e^J_{\nu]})=\partial_{[\mu}e^I_{\nu]}+\omega^I_{[\mu J}e^J_{\nu]}=T^I_{\mu\nu}\tag{13}$$

となって，これはねじれの成分 $T^I_{\mu\nu}$ に一致する．

[*41] より簡単には単に $\beta\to\pi+\beta$ とするだけでも，上式から位相因子 i を除いた固有ベクトル v_2 が得られる．また 2 つの固有値 $\exp(\pm\mathrm{i}\phi/2)$ が互いに複素共役であることが，改めて納得できる．

■式 (2.87) の反対称部分がねじれフリーの条件 (2.6) に他ならないことなど (p.46) について　Levi–Civita 接続の式 (2.87) がねじれフリーの条件 (2.6) に帰すことは，Levi–Civita 接続がねじれ T^I をゼロにするスピン接続 $\omega[e]$ で定義される線形接続 Γ であることから，充分納得できることである．実際，式 (2.87) の反対称部分

$$(\partial_{[\mu}e^I_{\nu]} + \omega[e]^I_{[\mu J}e^J_{\nu]}) - \Gamma^\rho_{[\mu\nu]}e^I_\rho = 0$$

は上式 (13) より，式 (2.6):

$$T^I_{\mu\nu} = T^I_{\mu\nu}\big|_{\omega=\omega[e]} = 0$$

を与える (第 2 の等号は $\omega[e]$ の定義による)．

一見すると式 (2.86–87) は，独立に選んだ場 e, ω に対して常に成立する恒等式として導かれているように見える．しかし (2 種類の添字を持つ量 e^I_ν の共変微分を式 (2.86) 第 1 の等号で定義する以上)，実際には式 (2.86–87) は e と ω の関係を規定する条件式になっている．そして接続の一般式 (2.84) は添字 μ, ν に関して対称とは限らないものの，その反対称部分を消す式 (2.87) の解 $\omega[e]$ に対しては対称な Levi–Civita 接続 (2.45) となり，それ故その名の通り式 (2.88) のように，計量を保つ接続となる．

■$\omega[e]$ の式 (2.92) の導出　$\omega[e]$ の式 (2.91) に Levi–Civita 接続の表式 (2.45) を代入すると，

$$\begin{aligned}\omega[e]^{IJ}_\mu &= -\,e^{\nu J}\left\{\partial_\mu e^I_\nu - e^\sigma_K e^{K\rho}\left(e_{\sigma L}\partial_{(\mu}e^L_{\nu)} + e_{\nu L}\partial_{[\mu}e^L_{\sigma]} + e_{\mu L}\partial_{[\nu}e^L_{\sigma]}\right)e^I_\rho\right\} \\ &= -\,e^{\nu J}\left\{\partial_\mu e^I_\nu - e^{\sigma I}\left(e_{\sigma L}\partial_{(\mu}e^L_{\nu)} + e_{\nu L}\partial_{[\mu}e^L_{\sigma]} + e_{\mu L}\partial_{[\nu}e^L_{\sigma]}\right)\right\}\end{aligned}$$

となる．最右辺において

$$\begin{aligned}(\text{第 2 項}) &= e^{\nu J}e^{\sigma I}e_{\sigma L}\partial_{(\mu}e^L_{\nu)} = e^{\nu J}\partial_{(\mu}e^I_{\nu)} = \frac{1}{2}e^{\nu J}(\partial_\mu e^I_\nu + \partial_\nu e^I_\mu), \\ (\text{第 3 項}) &= e^{\nu J}e^{\sigma I}e_{\nu L}\partial_{[\mu}e^L_{\sigma]} = e^{\sigma I}\partial_{[\mu}e^J_{\sigma]} = \frac{1}{2}e^{\nu I}(\partial_\mu e^J_\nu - \partial_\nu e^J_\mu)\end{aligned}$$

であり，これらを第 1 項 $-e^{\nu J}\partial_\mu e^I_\nu$ と合わせると

$$\frac{1}{2}(-e^{\nu J}\partial_\mu e^I_\nu + e^{\nu J}\partial_\nu e^I_\mu + e^{\nu I}\partial_\mu e^J_\nu - e^{\nu I}\partial_\nu e^J_\mu) = 2e^{\nu[I}\partial_{[\mu}e_{\nu]}{}^{J]}$$

となる．また残る第 4 項は，ダミー添字の置き換え $\nu \leftrightarrow \sigma, L \to K$ により

$$e^{\sigma I}e^{\nu J}e_{\mu L}\partial_{[\nu}e^L_{\sigma]} = e^{\nu I}e^{\sigma J}e_{\mu K}\partial_{[\sigma}e^K_{\nu]}$$

と書き換えられるので，式 (2.92) を得る．

■作用 (2.98) の導出　まず作用 (2.12) の第 1 項の因子

$$32\pi G S_{\text{EH}} \equiv \int \epsilon_{IJKL}e^I \wedge e^J \wedge R^{KL} = \frac{1}{2}\int \epsilon_{IJKL}e^I_\mu e^J_\nu R^{KL}{}_{\rho\sigma}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma$$

を考える．(曲率 (2.7) を $R^{KL} = \frac{1}{2}R^{KL}{}_{\rho\sigma}\mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma$ と書いたことに注意せよ．) 最右辺において，恒等式

$$\epsilon_{IJK'L'}e^I_\mu e^J_\nu e^{K'}_\alpha e^{L'}_\beta = |\det e|\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$$

の両辺に $e^\alpha_K e^\beta_L$ を掛けて得られる関係

$$\epsilon_{IJKL}e^I_\mu e^J_\nu = |\det e|\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}e^\alpha_K e^\beta_L$$

を代入できる．さらに式 (2.82) 両辺の行列式をとると，$|\det e| = \sqrt{-\det g}$ と書き換えられる．また微分形式の積分の定義より，

$$\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma \ \to\ -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{d}^4x$$

と置き換えられる．ここで右辺の負号は，冒頭の表記 (notation) の節で $\epsilon_{0123} = 1$ と約束したことによっている．以上より

$$\begin{aligned}
32\pi G S_{\mathrm{EH}} =& -\frac{1}{2}\int \sqrt{-\det g}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}e^\alpha_K e^\beta_L \cdot R^{KL}{}_{\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{d}^4x \\
=& 2\int e^\alpha_K e^\beta_L R^{KL}{}_{\alpha\beta}\sqrt{-\det g}\mathrm{d}^4x \qquad (\because \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -2(\delta^\rho_\alpha\delta^\sigma_\beta - \delta^\rho_\beta\delta^\sigma_\alpha),\ \text{反対称性}\ R^{KL}{}_{\alpha\beta} = -R^{KL}{}_{\beta\alpha}) \\
=& 2\int R\sqrt{-\det g}\mathrm{d}^4x, \qquad (\because \text{定義式 (2.13-14)}: R = R^K_\alpha e^\alpha_K = R^{KL}{}_{\alpha\beta}e^\alpha_K e^\beta_L)
\end{aligned}$$

あるいは

$$S_{\mathrm{EH}} \equiv \frac{1}{32\pi G}\int \epsilon_{IJKL}e^I \wedge e^J \wedge R^{KL} = \frac{1}{16\pi G}\int R\sqrt{-\det g}\mathrm{d}^4x$$

を得る．こうして作用 (2.12) は全体の数係数を改める必要がある．

同様に作用 (2.12) の第 2 項は

$$\begin{aligned}
\frac{12\cdot 16\pi G}{\lambda}S_\lambda \equiv& \int \epsilon_{IJKL}e^I \wedge e^J \wedge e^K \wedge e^L = -\int \epsilon_{IJKL}e^I_\mu e^J_\nu e^K_\rho e^L_\sigma \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{d}^4x = -\int |\det e|\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{d}^4x \\
=& 24\int \sqrt{-\det g}\mathrm{d}^4x, \qquad (\because \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 1\cdot(-1)\cdot 4! = -24) \\
\therefore\ S_\lambda \equiv& \frac{1}{16\pi G}\int \frac{1}{12}\lambda\epsilon_{IJKL}e^I \wedge e^J \wedge e^K \wedge e^L = \frac{1}{16\pi G}\int 2\lambda\sqrt{-\det g}\mathrm{d}^4x
\end{aligned}$$

と計算できる．

以上より (やはり宇宙定数の項における数係数の違いを除いて)，作用 (2.98) を得る．文献 [416, p.58] [417, p.397] では上式と同じく，作用において宇宙定数 λ に係数 2 が掛かっている．Einstein 方程式 (2.96) と係数の符号も含めて整合する作用は，同文献 [416, p.58] の $S = \frac{1}{16\pi G}\int(R - 2\lambda)\sqrt{-\det g}\mathrm{d}^4x$．文献 [416, p.78] の同様の計算結果を利用すると，$s = \pm 1$ を $\det e$ の符号として

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}(R - 2\lambda) = -\frac{s}{32\pi G}\int \epsilon_{IJKL}\left(e^I \wedge e^J \wedge R^{KL} - \frac{\lambda}{3!}e^I \wedge e^J \wedge e^K \wedge e^L\right)$$

と書き換えられる．

2.2 理論への概念的な道のり

GR の起源は 2 つの別個の問題にある．Einstein の天才性は 2 つの問題が互いを解決することを理解したことだった．

2.2.1 Einstein の第 1 の問題：Newton 相互作用に対する場の理論

力学 (ダイナミクス) を発見したのは Newton だった．しかし大部分において，自然の現代科学，あるいは当時の呼び方では *Scientia Nova* の一般的な規則を整えたのは，前の世代の Descartes だった．Descartes の原理の 1 つは，中世の科学にはびこっていた“はるか遠くからの影響”の全ての除去だった．Descartes に

よれば，物理的な相互作用は接触した存在物の間でのみ起きる——衝突の場合のように，押したり引いたり．Newton はこの原理を破り，重力を力

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2} \tag{2.99}$$

の瞬間的な“遠隔作用 (action-at-a-distance)”として記述した．Newton は遠隔作用を気楽に導入したのではない：彼はそれを“不本意だ (repugnant)”と言っている［本心かは別として］．彼の Descartes 原理への違反は，Newton 主義に対する初期の強い反対の理由の 1 つだった．多くの者にとって，彼の重力の法則はあまりにも，中世の無益な科学における信用ならない“星々からの影響”のように聞こえた．しかし Newton の力学 (ダイナミクス) と重力理論の実験的成功は，遠隔作用への懸念がほとんど雲散霧消してしまうほど多大だった．

2 世紀後に，電気的および磁気的な力を理解する試みの中で，再びその問題に取り組む方法を見出したのは，もう 1 人の英国人だった．Faraday は現代物理学に革命を起こすことになる，新しい概念[*42]を導入した：“場”の概念である．Faraday にとって，場とは空間を満たす線の集まりである．Faraday 線は電荷から始まり電荷で終わる；電荷がないときには，各線は閉じ，“ループ”を形成する．［さもなくば無限遠まで伸びる.］現代物理学の支柱の 1 つであり，ほとんど数式のない彼の素晴らしい本の中で，Faraday は場が実在する物理的存在か否かを議論している[*43]．Maxwell は Faraday の強力な物理的直観を美しい数学的理論——場の理論——へと定式化した．各時空点において，Maxwell の電場と磁場は Faraday 線への正接を表す．理論に遠隔作用はない：2 つの電荷間の電気的な力の Coulomb による記述，すなわち瞬間的な遠隔作用の法則

$$F = k\frac{q_1 q_2}{d^2} \tag{2.100}$$

は，静的な極限でのみ正しいと理解される．他の電荷 q_2 と距離 d にある電荷 q_1 は q_2 に瞬間的な力を生じない，と言うのも我々が q_1 を素早く取り除いたとき，q_2 が何であれ変化を感じ始めるには，その前に時間 $t = d/c$ を要するからである．これは Descartes の規定と著しく整合する仕方で，相互作用が空間を有限の速さで横切るのに要する時間である．

Einstein が物理を研究していたとき，Maxwell 理論はたったの 30 年前だった．彼の書物で，Einstein は Maxwell 理論の美と，それが彼に与えた深い感銘を熱く語っている．Newton と Coulomb の力 (2.99) と (2.100) の形式的な類似性が与えられれば，式 (2.99) もまた静的な極限で正しいに過ぎないと予期するのは全く自然である．すなわち，重力もまた瞬間的ではない：もし澄み切った空から巨大な速さでやってきた中性子星が太陽をたたき飛ばしたら，地球でどんな影響を感じるにも，その前に有限の時間がかかるはずである．すなわち，Newton 理論の背後にもまた場の理論があると予期するのは自然である．Einstein はこの場の理論を見出すことを目指した．GR が彼の得た答である．

---

*42 現代科学の多くのアイデアは，ギリシャ文明の科学から復活した [57]．Faraday–Maxwell の場の概念は，例えば潮汐を引き起こす，月が海に及ぼす引力の担い手として Hipparchus (ヒッパルコス) に現れ，磁性に関係する文脈にも現れる [58]，$\pi\nu\epsilon\hat{\upsilon}\mu\alpha$ (pneuma；プネウマ) の概念の直系の子孫だろうか？ Faraday はこの概念を知っていたのか？

*43 “考えている重要な点に関して，それは単に：力の線が物理的な実存を有しているかどうかである．…私は線の物理的な本性を考慮せねばならないと考える.” [59] 厳密に言えば，場が電荷と独立な自由度を持つか否かとして，現代的な言い回しへと問題を翻訳できる．しかしこのことは，私には大筋において平明に見える，Faraday の問の存在論的な重要性を減じない．Faraday による続きは素敵だ：“私はそれが重要で，なおかつ究極的には肯定的に答えられそうだと自分が思わない限り，議論を提起してはならないにも関わらず，それでも幾らかの躊躇いはあれど，実に科学のまさに深みにおける点に関して，私が探し求めるいかなる結論をも導ことがあったらと思う程に戸惑いがあるものの，私はこの見解を保持する.”Faraday の偉大さは重大な新しい一歩を踏み出すリスクに対する完全な気付きとともに，自分が踏み出した一歩の重要性 (ほとんど現代の基礎物理学の全てはこの線に由来する) に対する彼の完全な気付きに反する，この“躊躇い”の中に輝いていると私は考える．

特殊相対性理論　実際，Newton の法則 (2.99) の背後にある場の理論の必要性は，単に Coulomb–Maxwell の類推から“暗示”されるのではない：それは Maxwell 理論から間接的に“要求”される．理由は，Maxwell 理論が Coulomb の法則 (2.100) のあからさまな遠隔作用を取り除いただけでなく，ひるがえって，“あらゆる”遠隔作用は矛盾になるという，空間と時間の概念の再編成にも導いたということである．この空間と時間の概念の再編成とは，GR へ向けた重要なステップである，特殊相対性理論である．

大いなる実験的成功にも関わらず，Maxwell 理論は基礎理論としては，明白な欠陥がある[*44]：それは Galilei 不変 (galilean invariant) ではない．Galilei 不変性は慣性系の等価性の帰結である——少なくともそれは常にそのように理解されてきた．慣性系の等価性，あるいは速度は相対的な概念であるという事実は，力学の支柱の 1 つである．この明白な矛盾に対する答を与える Einstein の 1905 年の論文を見て，ワルシャワ大学の静かなホールで，年老いた威厳のある教授が，「Eureka！ Eureka！ 新たな Archimedes (アルキメデス) が生まれた！」と叫びながら，狂人のように彼のオフィスから飛び出す場面に話は飛ぶ．Einstein が問題を解決した方法は最高の理論的思考の例である．GR と QM の間の明白な矛盾について考えるとき，それは見本として心に留めておかねばならないと私は考える．

見かけ上の矛盾にも関わらず，Einstein は，物理は全ての運動している慣性系で同じであるという Galilei の発見に対する信用を“守り”，“同時に”Maxwell 方程式は正しいという信用を守った．彼は，我々が暗に“第 3 の”仮定を設けるから矛盾が生じるに過ぎないことに気付いた．この第 3 の仮定を捨てることにより，矛盾はなくなる．第 3 の仮定は時間の概念に関係する．それは，2 つの離れた事象，A と B のどちらが先に起きたのかを言うことは常に意味を成すというアイデアである．すなわち，同時性は観測者に依らない仕方で良く定義されているというアイデアである．これは現実の構造に対して我々が持つ偏見だと Einstein は気付いた．我々はこの偏見を捨て，離れた事象の時間的順序には意味がなくても良いという事実を受け入れることができる．そうすれば，描像は無矛盾に戻る．

特殊相対性理論の成功は早く，そして理論は今日では広く実験的に支持され，広く受け入れられている．しかし，私は今でさえ特殊相対性理論が本当に完全に身に付けられているとは思わない：教養のある人々の大多数だけでなく，驚くほど多数の理論物理学者がなお，心の深くでは，アンドロメダで“ちょうど今”起きていることが何かしらあると；宇宙の命をチクタクと刻む単一の普遍的な時計があると信じている．読者よ，あなたはそう信じていないか？

特殊相対性理論から直ちに帰結されることは，遠隔作用が単に Newton の感じたように“不本意だ”というだけではないということだ：それは無意味なのである．質量 m_1 による力が質量 m_2 に“瞬時に”作用すると言える，(理に適った) 意味はない．特殊相対性理論が正しければ，式 (2.99) は単に場の理論の静的極限の“ようである”のではない：それは場の理論の静的極限でなければ“ならない”のである．中性子性が太陽を撃ち飛ばしたとき，地球がその影響を感じる“今”はない．太陽がもはやそこにないという情報は，太陽から地球へ空間をよぎって，実在に運ばれて伝わらねばならない．この実在は重力場である．

Maxwell→Einstein　それ故，特殊相対性理論の主要な帰結が上手くいってからすぐ後に，Einstein は明らかに次に問題となることに取り組んだ：静的極限で式 (2.99) を与える場の理論を探し求めることである．彼の目標は Faraday と Maxwell が式 (2.100) に対して行ったことを，式 (2.99) に対して行うことだった．現代的な術語で表せば，その結果は簡潔には以下である．

[*44] そのダイナミクスがやはり不完全だと分かる，力学的エーテルの妨害に関する現象論的理論よりも．

Maxwell による問題の解法は 1 形式の場 $A_\mu(x)$ を導入することである．

粒子に働く力は

$$m\ddot{x}^\mu = eF^\mu{}_\nu \dot{x}^\nu \tag{2.101}$$

であり［左辺に質量 m を補った [417, p.68]］，F は A の 1 階微分から成る．

A は場の (Maxwell) 方程式

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = J^\nu, \tag{2.102}$$

源として電荷のカレント J^ν を持つ，A に対する 2 階の偏微分方程式系を満たす．

より一般には，場の方程式は作用

$$\begin{aligned} S[A, \mathrm{matt}] =& \frac{1}{4}\int F^* \wedge F \\ &+ S_{\mathrm{matt}}[A, \mathrm{matt}] \end{aligned} \tag{2.103}$$

［式 (2.29) 参照］に対する Euler–Lagrange 方程式として得られる，ここに F は A の曲率である．

S_{matt} は微分を共変微分で置き換えることにより，物質 (matter) の作用から得られる．

場の方程式における源は

$$J^\mu = \frac{\delta}{\delta A_\mu} S_{\mathrm{matt}}[A, \mathrm{matt}] \tag{2.104}$$

であることが従う．

Einstein による解法は，Minkowski 空間の値をとる 1 形式である場 $e^I_\mu(x)$ を導入することである．

粒子に働く［単位質量当たりの］力は (式 (2.44))

$$\ddot{x}^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\rho}\dot{x}^\nu \dot{x}^\rho \tag{2.105}$$

であり，ここに Γ は e の 1 階微分から成る (式 (2.45))．

e は場の (Einstein) 方程式 (式 (2.37)，ここでは $\lambda = 0$)

$$R^I_\mu - \frac{1}{2}e^I_\mu R = 8\pi G T^I_\mu, \tag{2.106}$$

源としてエネルギー・運動量テンソル T^I_μ を持つ，e に対する 2 階の偏微分方程式系を満たす．

より一般には，場の方程式は作用 (式 (2.36) の 2 行目の形)

$$\begin{aligned} S[e, \mathrm{matt}] =& \frac{1}{16\pi G}\int e^I \wedge e^J \wedge R^{KL}\epsilon_{IJKL} \\ &+ S_{\mathrm{matt}}[e, \mathrm{matt}] \end{aligned} \tag{2.107}$$

に対する Euler–Lagrange 方程式として得られる，ここに R は e とと両立する (compatible) ω の曲率である．

S_{matt} は微分を共変微分で置き換え，Minkowski 計量を重力的な計量に置き換えることにより，物質の作用から得られる．

場の方程式における源は式 (2.37):

$$T^\mu_I = \frac{\delta}{\delta e^I_\mu} S_{\mathrm{matt}}[A, \mathrm{matt}] \tag{2.108}$$

［左辺の添字の上下を訂正した (本稿次節を参照)］であることが従う．

Maxwell と Einstein の理論の間の構造的な類似性は明白である．しかし，ここまでは話の半分に過ぎない．

note：要約　Newton は重力を遠隔作用 (2.99):$F = Gm_1m_2/d^2$ で記述した．他方で電磁場の Maxwell 理論では，あくまで相互作用は空間を有限の速さで伝わり，瞬間的な Coulomb 相互作用 (2.100):$F = kq_1q_2/d^2$ は静的な極限で成り立つに過ぎない．そこで Newton の法則 (2.99) の背後にも場の理論があると類推するのは自然である．

実際，Maxwell 理論と相対性原理 (慣性系の等価性) が両立する枠組みは特殊相対性理論であり，それは同時の相対性を含意する．このとき質量 m_1 が“瞬時に”質量 m_2 に力を及ぼすと述べることは，意味を成さなくなる．したがって Newton 重力 (2.99) は場の理論の静的極限でなければ“ならない”のであり，この場の理論は GR に他ならない．

2.2.1 節について

■式 (2.108):$T^\mu_I = \frac{\delta}{\delta e^I_\mu}S_{\mathrm{matt}}[e, \mathrm{matt}]$ と式 (2.39):$T_I = \frac{\delta S_{\mathrm{matt}}}{\delta e^I}$ の等価性　式 (2.39) では，そのノートに書いたように e の変分に伴う作用の変分を

$$\delta S_{\mathrm{matt}} \sim \int \frac{\delta S_{\mathrm{matt}}}{\delta e^I} \wedge \delta e^I = \int T_I \wedge \delta e^I$$

と書いており，ここに

$$\text{式 (2.38)} : T_I = \frac{\det e}{3!} T^\mu_I \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma, \qquad \delta e^I = (\delta e^I_\mu) \wedge \mathrm{d}x^\mu$$

Riemann幾何		**ゲージ理論**
座標変換	$\longleftrightarrow$	ゲージ変換
ベクトル V^μ	$\longleftrightarrow$	物質場 φ_i
接続 $\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}$	$\longleftrightarrow$	ゲージ場 $(A_\mu)_i{}^j$
共変微分 ∇_μ	$\longleftrightarrow$	共変微分 D_μ
曲率 $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$	$\longleftrightarrow$	場の強さ $(F_{\mu\nu})_i{}^j$

図 9　Yang–Mills 理論と幾何学 [420, § 5-1]

表 2　Maxwell 理論と GR における幾何学的概念の物理的意味の違い

	Maxwell 理論	GR
接続	電磁場のポテンシャル A	重力場の強度 Γ
曲率	電磁場の強度 F	時空の曲率 R

を代入すると，数係数を除いて

$$\begin{aligned}\delta S_{\mathrm{matt}} &\sim \int (\det e) T_I^\mu (\delta e_\mu^I) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathrm{d}^4 x \qquad (\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma \wedge \mathrm{d}x^\mu \to -\epsilon^{\nu\rho\sigma\mu} \mathrm{d}^4 x) \\ &\sim \int (\det e) T_I^\mu (\delta e_\mu^I) \mathrm{d}^4 x \qquad (\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -4!)\end{aligned}$$

となる．これは T_I^μ の式 (2.108) と整合している．実際，文献 [417, p.303] においても重力場の変分の係数から $\det e = \sqrt{-\det g}$ をくくり出して，

$$\delta S_{\mathrm{matt}} \sim \int T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \cdot \sqrt{-\det g} \mathrm{d}^4 x$$

でエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ を定義した．

■Maxwell 理論と GR の類似性 (2.101–108) について　Yang–Mills 理論は数学的には幾何学として定式化される (図 9 参照)．ただし「接続」「曲率」といった数学的概念の物理的な意味は Maxwell 理論と GR とで異なる (表 2 参照)．GR において重力場のポテンシャルに相当するのは計量 $g_{\mu\nu}$ である．

2.2.2　Einstein の第 2 の問題：運動の相対性

Einstein の第 2 の問題を理解するには，我々は再び現代物理の起源に戻らねばならない．西洋文化には“空間”とは何かを理解する 2 つの伝統的な方法がある：“実体 (*entity*)”として，あるいは“関係 (*relation*)”としてである．

“空間は実体である”　とは，空間の他に何もないときにも，空間がなお存在することを意味する．空間はそれ自体で存在し，物体はその中を運動する．これは Newton が空間を記述した方法であり，絶対空間と呼ばれる．それは特殊相対性理論において時空 (空間ではなく) を理解する方法でもある．古代から

(Democritus の (democritean) 流儀において) 考えられてきたにも関わらず，この空間を理解する方法は西洋文化において，支配的な見方ではなかった．Aristotle (アリストテレス) から Descartes までの支配的な見方は，空間を関係として理解することだった．

“空間は関係である”　とは，世界が物理的対象物 (objects)，あるいは物理的存在から成ることを意味する．これらの対象物はもう 1 つの対象物と接触しているか否かの性質を持つ．空間はこの物体間の“接触”または“隣接”(“touch”, or“contiguity”, or“adjacency”) の関係である．Aristotle は，例えば，物体の空間的位置を，物体を取り囲む物体の組の (内的な) 境界として定義した．[物体の近傍には空気を含め，一般には何らかの物体がある．(真空においても重力場がある．)] これは関係的な空間である．

空間を理解するこれら 2 つの方法と密接に関係して，運動を理解する 2 つの方法がある．

“絶対運動”　もし空間が実体ならば，運動は空間のある部分から空間の別の部分へ行くこととして定義できる．これは Newton が運動を定義した方法である．

“相対運動”　もし空間が関係ならば，運動はある対象物の隣接から別の物体の隣接へ行くこととしてしか定義できない．これは Descartes*45 と Aristotle*46 が運動を定義した方法である．

物理学者にとって，問題は空間と運動に関するこれら 2 つの考え方のどちらが世界のより有意義な記述を可能にするかである．

Newton にとって，空間は絶対的であり運動は絶対的である*47．これは Descartes 主義に対する第 2 の違反である [第 1 の違反は遠隔作用 (2.2.1 節)]．ここでも，Newton は軽い気持ちでこの措置をとったのではない：彼はプリンキピア (*Principia*) の長い最初の章を，彼の選択の理由の説明に充てている．Newton に味方する最も強力な議論は完全にアポステリオリである：彼の理論的構成は非常に上手く機能する．Descartes の物理は全く有意義でない．しかしこれは Newton の議論ではない．Newton は有名なバケツの実験を論じ，実験的な証拠に頼った．

Newton のバケツ　“ひもが強固にねじれるまで何度もひねった，長いひもに吊るされた，水で満たされたバケツ”を考えよ．バケツが回転運動を始め，ひものねじれがほどけるように，バケツを回す．最初は，

(i) **バケツは (我々に対して) 回転し，水は静止を保つ．水の表面は平らである．**
次いでバケツの運動が摩擦によって水に伝えられ，そうして水はバケツとともに回転を始める．
ある時点で

(ii) **水とバケツは一体となって回転する．水の表面はもはや平らではない：それは凹面になる．**
[以上，図 10 を参照.]

---

*45 “運動とは物質の一部または 1 つの物体の一部の，物体のすぐ傍の近傍――そこで静止していると見なされる――から他の近傍への移動と言える．”(Descartes, *Principia Philosophiae*, Section II-25, p.51) [60]

*46 Aristotle は，運動は相対的だと主張した．彼はボートの上を歩く人の例で論点を説明した．人はボートに対して運動し，ボートは川の水に対して運動し，水は地面に対して運動し……．Aristotle の関係主義 (relationalism) は，より特別な基準として用いることのできる，より特別な対象物――宇宙の中心の地球と，天球，とりわけ固定された星々の 1 つ――があるという事実によって和らげられた．しかしながら，古代の宇宙論には“2 つの”好ましい基準があった：地球“と”固定された星々であり，それら 2 つは互いの周りを回転する．中世の思想家はこの点を見逃さず，星々が地球の周りを回るのか，それとも地球が星々の下で回るのかを長いこと議論した．著しいことに，Copernicus より 1 世紀以上前の 14 世紀に，Buridan (ビュリダン) はどちらの見方ももう一方よりも真実であるとする理に適った根拠はないと結論し，Oresme (オレム) は地球の回転を研究した．

*47 “それ故，場所の，したがって局所的な運動の定義は，空間が真に運動する物体と区別されると見られる限りにおいて，延長自体 (extension alone) あるいは“空間”のような，何らかの動きのないものを参照する必要がある．” [61] これは脚注*45 で与えた Descartes の定義とあからさまに対照的である．

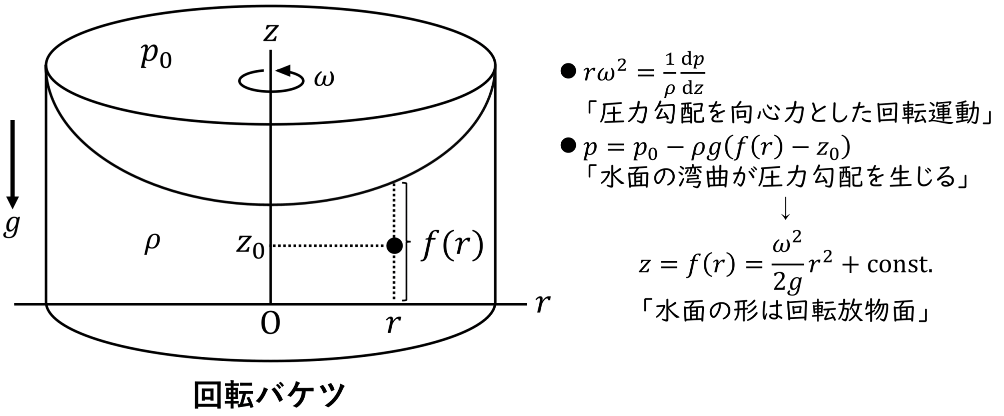


図 10　Newton の回転バケツにおいて水面は回転放物面になる (回転の角速度 ω は一定) [422, pp.232–234]

我々は実験から，水の凹みは回転によって引き起こされることを知っている．何に対する回転か？ Newton のバケツの実験はこの問の微妙な部分を示している．もし Descartes の主張するように，運動が周りの物体に対する場所の変化ならば，(i) 水は (それを囲むバケツに対して) 運動していると同時に，(ii) 水は (バケツに対して) 静止していると言わねばならない．しかし Newton は，表面の凹みは (i) ではなく (ii) において現れると述べる．それは水がバケツに対して静止しているときに現れるのであって，水がバケツに対して運動しているときに現れるのではない．したがって物理的な効果を生じる回転は，バケツに対する回転ではない．それは何に対する回転か？

それは空間自体に対する回転だと，Newton は答える．水面の凹みは水の絶対運動——周囲の物体ではなく，絶対空間に対する運動——の効果である．これは絶対空間の存在を証明している，と Newton は主張する．

Newton の議論は微妙で，3 世紀の間，誰もそれを打破できなかった．それを正しく理解するには，ありがちな誤解を終わらせねばならない．関係主義，すなわち運動は他の物体との関係においてのみ定義できるというアイデアを，Galilei の相対性と混同してはならない．Galilei の相対性は“直線状の一様な運動”が本来的に静止と区別できないという言明である．すなわち速度 (速度だけ！) は他の物体と相対的である．関係主義は，これに対して，“任意の”運動 (いかにジグザグであっても) が本来的に静止と区別できないと主張する．Galilei の相対性の正確な定式化は，非関係的な運動の定義を仮定する：[では] 何に対する“直線状の一様な運動”か？

さて，絶対空間に対する運動は真で物理的であると Newton が主張したとき，直線状の一様な運動もまた絶対的だと主張することで，ある意味，彼は言いすぎた．これは困難な討論をもたらした，と言うのも，慣性運動の物理的な効果はなく，それ故，バケツの論法はこの特別な類の運動に対しては成り立たないからである*48．それ故，慣性運動と速度は Newton 力学では相対的と考える．

力学 (ダイナミクス) を打ち立てるのに Newton が必要としたもの——そして我々がここで議論しているもの——は，慣性運動の相対性ではない：バケツの水の回転によって例示されている，“加速”運動が相対的か絶対的かである．ここでの問題は，それとの関係で速度を定義できるところの絶対空間があるか否かではない．問題は，それとの関係で“加速度”を定義できるところの絶対空間を定義できるか否かである．バケツの議論によって支持されている，Newton の答は肯定的である．この答がなければ，Newton の主たる法則

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{2.109}$$

は意味を成しすらしない．

Newton の絶対空間への反対は彼の遠隔作用への反発より一層強かった．Leibniz と彼の学派は Newton の絶対空間と，Newton の絶対加速の利用に激しく反対した*49．疑いは次の世紀になっても完全に消えること

*48 Newton はこの点をよく認識しており，この点はプリンキピアの補遺 (Corollary) V ではっきりと述べられているものの，彼はプリンキピアの導入において，それを無視することを選んだ．同時代の人にとって既に充分難解だった彼の議論を，単に簡単にするために，彼はそうしたのだと私は思う．

*49 Leibniz には Newton と対立する他の理由もあった．2 人は微積分学の優先権をめぐって争っていた——科学者の短所はどの世紀でも変わらない．

はなく，Newton の議論は何かが間違っているという，消えない感情が残った．19 世紀の終わりに，Ernst Mach はこの問題に戻り，水は絶対空間に対して運動しているのではなく，宇宙を満たすあらゆる物質に対して回転しているので，Newton のバケツの議論は誤りであり得ると唱えた．私はこのアイデアと，それが Einstein に与えた影響について，2.4.1 節で言及する．しかし，遠隔作用と同様に，Newton 主義の実験的勝利は打ち破れなかった．

あるいは打ち破れたのか？ 結局は 20 世紀の初めに，水星の軌道に 43 秒の弧［近日点移動］が観測されたが，それは Newton の理論が当てはまるようには見えなかった．

一般化された相対性 (Generalized relativity) Einstein は Galilei の相対性に感銘を受けた．単一の物体の速度は意味を持たない；他の物体に対する物体の速度だけに意味がある．この意味では，これは“真の運動”を明かそうとする Newton のプログラムの失敗であることに注意しよう．それは致命的ではないが，重大な失敗である．Einstein にとってこのことは，Newton 的な (そして特殊相対論的な) 概念体系に何か間違いがあるということのヒントだった．

その多大な実験的成功にも関わらず，Newton の絶対空間の概念は内に深刻に邪魔になるものを孕んでいる．Leibniz，Mach，その他大勢が強調したように，空間は物体に作用するものの自らは作用を受けない，超感覚的な存在の類である．そのような絶対空間のアイデアは間違っていると，Einstein は確信していた．絶対空間と“真の運動”はあり得ない．相対運動，したがって相対的な加速だけに物理的意味があるはずだ．絶対加速度は物理的方程式に現れてはならない．特殊相対性理論により，Einstein は Maxwell 理論の挑戦から Galilei の速度の相対性を擁護することに成功した．そして彼は，Aristotle–Descartes 的な運動の相対性全般を擁護できると確信した．Einstein の言葉では，“運動の法則は慣性系の間だけでなく，全ての基準系において同じでなければならない．”物は互いに対して運動するのであって，絶対空間に対して運動するのではない；絶対運動のいかなる物理的効果もあり得ない．

多くの同時代の物理学者によれば，これは物理において役割を演じてはならない，“哲学的な”思想への過剰な偏り (weight) である．しかし物理学における Einstein の業績は，これらの物理学者によって得られた業績よりもはるかに有意義である．

note：要約 空間や運動を物体の相対的な位置関係およびその変化として理解する西洋文化の伝統とは対照的に，Newton は物体の運動を絶対空間に占める位置の変化 (絶対運動) として記述した．もちろん Newton 力学においても［運動方程式は Galilei 変換に対して不変なので］，絶対空間［ないし慣性系］に対する等速直線運動を検出することはできない．しかし加速度は識別できる．このことを示す議論として，Newton は回転バケツの実験を挙げている．水を入れたバケツを回転させると，水面が凹んだ定常状態に落ち着く．このとき水はバケツとともに回転しているので，水は周囲のバケツに対して回転していると言うことはできない．したがって水面の凹みをもたらす水の回転は，絶対空間に対する運動であると Newton は主張する．これに対し Einstein は，絶対空間とそれに対する“真の運動”というアイデアは間違っていると確信していた．［再び絶対空間を慣性系と同一視すれば］運動の法則は慣性系の間だけでなく，全ての基準系において同じでなければならない．

2.2.3 鍵となるアイデア

Newton のバケツの実験で言及されている問は以下である．水の回転は物理的な効果——水面のくぼみ——を持つ：水は何に対して“回転”しているのか？ 意味のある回転は周囲の物体 (バケツ) に対する回転ではないから，絶対空間に対する回転であると Newton は論じる．Einstein による新しい答は単純で閃きがある

(fulgurating)：

<u>水は局所的な物理的存在——重力場——に対して回転している．</u>

物体にそれが加速しているか否か，回転しているか否かを伝えるのは，重力場であって，Newton の不活性な (inert) 絶対空間ではない．Newton 的空間のような，不活性な背景の存在はない：あるのは力学的な (dynamical) 物理的存在だけである．その中には場が含まれる．場の中には重力場が含まれる．

Newton のバケツにおいて水面が平らかくぼんでいるかは，水の絶対空間に対する運動によって決定されるのではない．それは水と重力場の間の物理的な相互作用によって決定されるのである．

重力に関する Einstein の 2 つの思考の線 (Newton 相互作用に対する場の理論を発見することと，絶対加速を取り除くこと) はここで合流する．Einstein の鍵となるアイデアは，Newton は重力場を絶対空間と間違えたということである．

何が Einstein をこのアイデアへと導いたのか？ 何故 Newton 的加速は重力場に対して定義されねばならないのか？ 答は重力相互作用の特別な性質によって与えられる[*50]．それらの性質は Einstein のエレベーターと呼ばれる思考実験によって明らかになる．以下では Einstein による“エレベーター”の議論の，現代的でより相対論的なバージョンを提示する．

“エレベーター”の議論：Newton 的な宇宙論　ここに慣性と重力が同じものであることを示す，単純な物理的状況がある．モデルは単純であるが，完全に現実的である．それは直ちに GR の背後にある物理的直観へと導く．

Newton 的な物理の文脈において，非常に巨大な球状の銀河の雲から成る宇宙を考えよう．銀河は時間に依存する［質量］密度 $\rho(t)$ で，空間において——常に——一様に分布しており，それらは重力で互いに引き合っていると仮定しよう．C を雲の中心とする．［このとき $\rho(t)$ の変化を引き起こすのは雲全体の膨張・収縮だけである (式 (2.111) の直後を参照)．ただし雲は C を中心として回転しても良い．］中心 C から距離 $r(t)$ にある，(例えば我々の) 銀河 A を考えよう．よく知られているように，C 周りの半径 r の球面の外側にある銀河が A に及ぼす重力は相殺し，球面の内側の銀河による重力は C に集中した同じ質量による力と同じである．したがって A に働く重力は

$$F = -G\frac{m_A\,\frac{4}{3}\pi r^3(t)\,\rho(t)}{r^2(t)}, \tag{2.110}$$

あるいは

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -G\frac{4}{3}\pi\, r(t)\rho(t). \tag{2.111}$$

もし密度が空間的に一定に留まるならば，それは r^{-3} に比例する．すなわち，$\rho(t) = \rho_0 r^{-3}(t)$ であり，ここに ρ_0 は $r(t) = 1$ での密度に等しい定数である［ρ_0 は質量の次元を持つ］．それ故

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{4}{3}\pi G\rho_0\frac{1}{r^2(t)} = -\frac{c}{r^2(t)} \tag{2.112}$$

であり，ここに

$$c = \frac{4\pi G\rho_0}{3} \tag{2.113}$$

は定数である．式 (2.112) は宇宙の膨張を支配する，Friedmann の宇宙論的方程式 (cosmological equation) である．(それは空間的に平坦な場合において完全な GR から得られるのと同じ方程式である［式 (8.8)(や文献 [423, p.488]) を見よ］．)

我々の考えている Newton 的なモデルでは，銀河 C は宇宙の中心にあって，［銀河 C に固定した座標系は］慣性系を定義するのに対し，銀河 A は中心になく，慣性系でない．雲は充分大きく，その境界は C または A から観測できないと仮定しよう．これら 2 つの銀河の一方に自分がいるとき，どうすれば自分がどちらにいると分かるか？ つまり，どうすれば自分が慣性基準系 C にいるのか，それとも加速系 A にいるのかが分かるか？

答は，非常に驚くべきことに，分からないということである．雲全体は一様に拡大または収縮するので，局所的な空の様子は全ての銀河から見てちょうど同じように，一様に拡大または収縮して見える．しかるに自分が慣性系の銀河 C にいるのか加速する銀河 A にいる

[*50] Newton の絶対空間は重力場のある配位だという意味で重力場は“特別”である．一度，絶対空間の概念を取り除いてしまえば，重力相互作用はことさら特別ではない．それは世界を構成する場の 1 つである．しかしそれは Newton と Maxwell の世界とは全く異なる世界である．

のかを，局所的な実験によって知ることもできない！ 実に，自分が加速系にいるのかを知るためには，Newton のバケツにおける水面をくぼませた力のような，慣性力を観測しなければならない．A 系の加速度は

$$\vec{a} = \frac{c}{r^2(t)}\vec{u} \tag{2.114}$$

であり，ここに $\vec{u}$ は C に向かう単位ベクトルである．それ故，運動する全ての質量には［単位質量あたり］慣性力

$$\vec{F}_{\mathrm{inertial}} = -\frac{c}{r^2(t)}\vec{u} \tag{2.115}$$

が働く．しかし全ての質量は，局所的な力 $\vec{F}_{\mathrm{local}}$ を別にしても，C に向かう宇宙論的で重力的な引力

$$\vec{F}_{\mathrm{cosmological}} = \frac{c}{r^2(t)}\vec{u} \tag{2.116}$$

を感じるため，加速系 A で見たその運動は

$$[m]\vec{a} = \vec{F}_{\mathrm{local}} + \vec{F}_{\mathrm{inertial}} + \vec{F}_{\mathrm{cosmological}} \tag{2.117}$$

$$= \vec{F}_{\mathrm{local}} \tag{2.118}$$

で記述される，と言うのも，式 (2.115) と式 (2.116) は正確に相殺するからである．それ故，A における局所的なダイナミクスはちょうど，あたかもそれが慣性系であるかのように見える．［これは慣性力が重力と相殺するため，自由落下するエレベーターが (少なくとも局所的には) 慣性系と区別できないという，オリジナルの思考実験に対応している．］A における落下する石の放物線は，加速系 A から見ると，直線に見える．自分が中心にいるかを知る方法はなく，自分が慣性系にいるか否かを知る方法はない．

このように慣性系を見分けられないことを，どのように解釈すれば良いか？ Newton 的な物理では，C または A におけるダイナミクスは全く異なっていなければならない．しかし違いは物理的に観測不可能である［重力を対象とする限り］．Newton 的な概念体系では，A は非慣性系であり，重力と慣性力とがあるけれど，ここにはその両方を隠すある種の共謀 (conspiracy) がある．実際，状況は完全に一般的である：充分に小さな領域では，自由落下する基準系において慣性力と重力は任意の精度で相殺する*51．これらの観測できない力の全てに頼ることのない，この物理的な状況を理解するより良い方法があるはずであることは明らかである．

より良い方法は Newton の優先的な“大域的”基準系を棄て，各銀河が独自の“局所的”慣性基準系を持つことを理解することである．Newton 的物理で行ったように，我々は局所慣性系を観測可能な慣性効果の不在によって定義できる．各銀河はこのとき独自の局所慣性系を持つ．これらの系は重力によって決定される．すなわち，各点において何が慣性であるかを決めるのは重力である．慣性運動はそのような局所的な重力場に対するものであり，絶対空間に対するものではない．

重力は次いで異なる銀河の基準系が互いに対して落ちる仕方を決める．重力場は多くの基準系の間の関係を表す．Newton の真の運動は絶対空間に対する運動ではない：それは重力場によって決まる基準系に対する運動である．それは重力場に相対的な運動である．方程式 (2.109) は重力場に対する物体の運動を支配する．

重力場の［微分］形式　Einstein の問題が重力場を記述することであったことを思い出そう．上の議論は重力場を，時空の各点において，運動が慣性的となる特別な基準系を定義する場と見なせることを示している．この直観を表現する数学を書こう．

銀河の雲に戻ろう．我々は大域的な慣性基準系のアイデアを棄てたので，“任意の”座標 $x = (x^\mu)$ で雲における事象に座標を割り当てよう．この座標の正確な物理的意味は，次節において詳細に議論する．x^μ_A を特定の，例えば我々の銀河における事象 A の座標としよう．この座標は任意に選ばれているので，座標 x^μ によっ

*51 これが等価原理である．ところで天才 Newton はそれを知っていた：“もし互いに対して運動する物体たちが，等しい加速度を生じる力で平行な線たちの方向に推進させられたら，それらはあたかもこれらの力によって推進させられなかった後と同じように，互いに対して運動し続けるだろう．”(Newton, *Principia*, Corollary VI to the “Laws of Motion”) [62]．Newton は太陽系における月の複雑な運動を計算するのに，この系 (corollary) を用いている．地球の基準系では，慣性力と太陽の重力は良い近似で相殺し，月は Kepler の軌道に従う．

て記述される運動は，一般には，我々の銀河において慣性的でない．例えば，局所的な力を受けない粒子が直線を描かない．しかし我々は A の周りに，局所慣性基準系を見出すことができる．それが定義する座標を X^I と書き，$X^I(A)=0$ となるように事象 A を原点にとろう．座標 X^I は任意の座標 x の関数

$$X^I = X^I(x) \tag{2.119}$$

として表せる．x 座標では，A における運動の非慣性 (noninertiality) は重力である．A における重力は慣性座標に対して我々に要する座標の変化の情報である．この情報は関数 (2.119) に含まれている．しかし A の周りの小さな近傍におけるこれらの関数の値だけが重要である；と言うのも，もし我々が行き去れば，局所慣性系は変わるはずだからである．それ故，我々は式 (2.119) を Taylor 展開し，最初の消えない項だけを残すことができる．$X^I(A)=0$ なので，最初の消えないオーダーでは我々は

$$X^I(x) = e^I_\mu(x_A)x^\mu \tag{2.120}$$

を得る［$x_A=0$ も仮定されている］．ここで我々は

$$e^I_\mu(x_A) = \left.\frac{\partial X^I(x)}{\partial x^\mu}\right|_{x=x(A)} \tag{2.121}$$

を定義した．量 $e^I_\mu(x_A)$ は，A における局所慣性系を知るために必要なすべての情報を含んでいる．この構成は各点 x で繰り返すことができる．X^I を今や x における慣性座標として，量

$$e^I_\mu(x) = \left.\frac{\partial X^I(x)}{\partial x^\mu}\right|_x \tag{2.122}$$

は x における重力場である．これが 2.1.1 節で導入した場の形式［微分形式の成分］である．

note　上式 (2.122) と定義式 (2.82):$g_{\mu\nu}=e^I_\mu e^J_\nu \eta_{IJ}$ の整合性・等価性は

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{IJ}\mathrm{d}X^I\mathrm{d}X^J = \eta_{IJ}\frac{\partial X^I}{\partial x^\mu}\frac{\partial X^J}{\partial x^\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu = \eta_{IJ}e^I_\mu e^J_\nu\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$$

において見て取れる．

重力場 $e^I_\mu(x)$ はそれ故，x 座標から x において局所的に慣性的である座標 X^I への，座標の変化の Jacobi 行列である．［逆行列は $e^\mu_I = \partial x^\mu/\partial X^I$.］場 $e^I_\mu(x)$ もまた“4”を表すギリシャ語にちなんで“テトラード”場，あるいはそれは Minkowski ベクトル・バンドルを接バンドルと“接合する (solders)”ため［式 (2.120)］，“接合形式 (soldering form)”，あるいはその周りに動くものは何もないにも関わらず，Cartan にならって“動的基準系 (moving frame)”と呼ばれる．

変換性　もし座標系 X^I が与えられた点における局所慣性系を定義しているならば，Λ を Lorentz 変換として，他のあらゆる局所慣性系 $Y^J = \Lambda^J{}_I X^I$ も定義している．それ故，局所 Lorentz 変換の下で $e^I_\mu(x)$ の添字 I は Lorentz 添字として変換し，2 つの場 $e^I_\mu(x)$ と

$$e'^J_\mu(x) = \Lambda^J{}_I(x)e^I_\mu(x) \tag{2.123}$$

は同一の物理的な重力場を表す．こうして，この重力場の記述は局所 Lorentz ゲージ不変性を持つ．

もし物理的な座標 x を用いる代わりに，我々が座標 $y=y(x)$ を選んだら，どうなるか？［式 (2.122) より］連鎖律 (chain rule)

$$e'^I_{\ \nu}(y)=\frac{\partial x^\mu(y)}{\partial y^\nu}e^I_\mu(x(y)) \tag{2.124}$$

は，我々が座標 y を用いていたら見出していたはずの場 $e'^I_{\ \nu}(y)$ を決定する．変換性 (2.123) と (2.124) はちょうど，GR の作用を不変に留める変換性 (2.58) と (2.63) である．

これらの変換則は，束 (fiber) が主 $SO(3,1)$ Lorentz バンドルに関連する Minkowski 空間 $\mathcal{M}$ である，時空多様体 M 上のベクトル・バンドル P の値をとる，1 形式の場の変換則でもある．これは重力場にとって自然な幾何学的設定である．2.2.1 節で定義した接続 ω は，このバンドルの接続である．この設定は銀河の雲によって提起され，Lorentz 系を各銀河に持ち込む，Minkowski 空間のつぎ当て (patchwork) の描像を実現する．より正確には，重力場は接ベクトルを Lorentz ベクトルに移す写像 $e:TM\to P$ と見なせる．

物質　最後に，世界線 $x^\mu(\tau)$ に沿って時空を運動する粒子を考えよう．もし粒子が点 x において速度 $v^\mu=\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau$ を持つならば，その x における局所 Minkowski 座標 X^I で見た速度は

$$u^I=\left.\frac{\partial X^I(x)}{\partial x^\mu}\right|_x v^\mu=e^I_\mu(x)v^\mu. \tag{2.125}$$

［これは式 (2.67) に他ならない．］この局所 Minkowski 系では，軌道に沿う無限小の作用は

$$\mathrm{d}S=m\sqrt{-\eta_{IJ}u^Iu^J}\mathrm{d}\tau. \tag{2.126}$$

それ故，軌道に沿う作用は式 (2.41) で与えたものである．同じ議論は全ての物質場に当てはまる：作用は Minkowski 空間の相当物から推論できる局所的な項の，時空にわたる和である．

計量の幾何学　2.1.4 節において，我々は重力場 e が時空上の計量構造を定義することを見た．しばしばこの構造を過度に重視しようとする者がいる，あたかも距離が現実の本質的な特性であるかのように．しかし世界を理解するために必要な，アプリオリな Kant 哲学の距離の概念はない．我々は一切，距離について考えることなく物理を発達させ，それでいてなお我々の理論に，完全な予言と記述の能力を確保することができたはずである．

時空の計量構造の物理的な意味は何か？ 2 点が 3cm 離れている，あるいは 2 つの出来事が 3 秒離れていると我々が言うとき，我々は何を意味しているのか？

その答は重力場と相互作用する物質の力学 (ダイナミクス) にある．はじめに Minkowski 空間を考えよう．3cm 離れている物体 A と B を考えよ．このことはもし我々が 2 点間に定規をあてたならば，その 2 つの間に収まる定規の部分が 3cm と記されていることを意味する．原子レベルでは，定規の形は Maxwell および Schrödinger 方程式で決まる．これらの方程式は Minkowski テンソル η_{IJ} を含んでいる．それらは分子が互いに一定の“距離”L での位置を保つ (より正確には：平衡位置の周りに振動する) 安定な解を持つ．これは分子が

$$\eta_{IJ}\Delta x^I\Delta x^J=L^2 \tag{2.127}$$

を満たす座標距離 Δx^I の点で位置を保つことを意味する．我々は時空位置を座標付けするのに，この凝縮系に特有の振舞いを利用する．すなわち“距離”とは，その力学 (ダイナミクス) が何らかの方程式に支配される物質的対象 (定規) によって決定される，位置をラベルする慣習的な方法に他ならない．与えられた初期値の下で Maxwell および Schrödinger 方程式に従う，A と B の間に収まる分子の数 $N=3[\mathrm{cm}]/L$ を言うことで，我々は距離に言及することを避け得る．

ここで重力場 e の下で同じ状況を考えよう．再び，2 点 A と B が 3cm 離れているという事実は，A と B の間に定規の N 分子を収められることを意味する．Maxwell および Schrödinger 方程式は，分子が

$$\eta_{IJ}e^I_\mu(x)e^J_\nu(x)\Delta x^\mu\Delta x^\nu=L^2 \tag{2.128}$$

を満たす座標距離 Δx^μ に自らを保つ，安定な解を持つ．このように，距離の測定は物質が重力場と相互作用する特定の様式を利用することによって成される，局所的な重力場の測定である．

同じことは時間的な間隔に対しても真である．時間のうちに起きる 2 つの出来事 A と B を考えよ．A と B の間に 3 秒が経ったということの意味は，秒を刻む時計がこの時間間隔のうちに時を 3 回刻んだということである．我々が時計として用いる物理系は重力場と相互作用する．時計のペースは e の局所的な値によって決まる．このように，時計は A から B に至る世界線に沿う重力場の非局所的な (extensive) 関数を測定するデバイスに他ならない．

A から B に至る時間的な測地線に沿って落ちる粒子を想像せよ．我々は特殊相対性理論により，粒子系における粒子の作用の増加が

$$\mathrm{d}S = m\mathrm{d}t \tag{2.129}$$

であることを知っている［正確にはその逆符号］．ここに m は粒子の質量である．それ故，粒子とともに運動する時計は量

$$T = \frac{1}{m}S = \int_A^B \mathrm{d}\tau \sqrt{-\eta_{IJ}e^I_\mu e^J_\nu \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \tag{2.130}$$

を測定するだろう．［式 (2.129) の t は固有時間であるのに対し，式 (2.130) の τ の意味はパラメータ付け替え不変性のため固定されない.］

このように，時計は重力場の関数 T を測定するデバイスである．一般に，あらゆる計量の測定は重力場の非局所的な関数の測定に他ならない.

このことは平坦な空間も含めて，任意の重力場 e において正しい．平坦な空間では，我々は重力場に対する位置を決定するのに，これらの測定を用いることができる．平坦な空間の重力場は Newton の絶対空間なので，これらの測定は点を時空に位置付ける.

note：要約　Newton の回転バケツの実験において，水は不活性で大域的な絶対空間に対して回転しているのではなく，力学的で (dynamical) 局所的な物理的存在であるところの重力場に対して回転していると Einstein は考えた．(ここで絶対加速を取り除くという第 2 の問題 (2.2.2 節) は，Newton 相互作用に対する場の理論を発見するという第 1 の問題 (2.2.1 節) と合流する．) このアイデアは Einstein によるエレベーターの思考実験から導かれる．慣性力は重力と相殺するため，自由落下するエレベーターは (少なくとも局所的には) 慣性系と区別できない．そこで Newton 的な“大域的”基準系を棄て，“局所的”慣性基準系を導入することが自然と求められる．局所慣性系は局所的な重力場によって定義されるため，局所慣性系に対する慣性/加速運動は局所的な重力場に対する運動と言える.

任意の座標系 x において現れる任意の時空点 A (座標 $x=0$ とする) 周りの重力は，A における局所慣性系 $X^I(x)$ (ただし $X^I(0)=0$) からの座標 x のズレ，したがって微分係数 (2.121–122):

$$e^I_\mu(x) \equiv \frac{\partial X^I(x)}{\partial x^\mu} \qquad (\text{値は時空点 } A \text{ で評価})$$

で表される．これが 2.1.1 節で重力場として導入したテトラード場である．すると確かに重力場 $e^I_\mu(x)$ は，局所慣性系を式 (2.120):$X^I(x) = e^I_\mu(0)x^\mu$ で定義する［その逆ではない］．またこの $e^I_\mu(x)$ の定義式は，上下の添字に関する変換則 (2.123–124) を含意し，式 (2.67):$u^I = e^I_\mu(x)\dot{x}^\mu(\tau)$ を再現することが見て取れる.

2.2.4　能動的および受動的な微分同相写像

Einstein の GR の発見における最後の主要なステップに取り組む前に，我々は能動的な微分同相写像の概念が必要である．例とともにこの概念を導入する.

地球の表面を考え，それを M と呼ぼう．地球の各点 $P \in M$，例えば Paris (パリ) 市には，何らかの温度 $T(P)$ がある．温度は地球の表面上のスカラー関数 $T: M \to P$ である．温度の変化を決定する唯一の原因が風による空気の移動であるような，天気の変化の単純化されたモデルを想像せよ．ここで私は次のことを意味している．時間間隔を固定する：例えば 5 月 1 日の温度を T，5 月 2 日の温度を $\tilde{T}$ と呼ぶ．この時間間隔の間に，風は空気を点 $Q = \phi(P)$ から点 P にかけて動かす．もし，例えば，Q がフランスの Quintin (カンタン) 村であるならば，これは風が Quintin の空気を Paris へと吹いたことを意味する．5 月 2 日における Paris の温度 $\tilde{T}(P)$ は，1 日前の Quintin の温度 $T(Q)$ に等しいと仮定しよう．“風”の写像は各点 P に，そこから空気が風で吹かれてきたところの点 Q を関係付ける，地球の写像からそれ自身への写像である．すると 5 月 1 日から 5 月 2 日に，温度場は次のように変化する：

$$T(P) \to \tilde{T}(P) = T(\phi(P)). \tag{2.131}$$

滑らかで可逆であると仮定すれば，写像 $\phi: M \to M$ は**能動的な微分同相写像**である．M 上のスカラー場 T はこの能動的な微分同相写像によって，式 (2.131) のように変換する：それは微分同相写像 ϕ により，地球の表面上で“引きずられる (dragged)”．ここで座標は全く役割を演じていないことに注意せよ.

ここで地球の表面を座標付けする何らかの地理的座標 x を選ぶことを想像せよ．例えば，緯度と経度，すなわち極座標 $x = (\theta, \varphi)$ であり，$\varphi = 0$ は Greenwich (グリニッジ) である．これらの座標を用い，温度は座標の関数 $T(x)$ で表される．5 月 1 日の温度 $T(x)$ と 5 月 2 日の温度 $\tilde{T}(x)$ は

$$\tilde{T}(x) = T(\phi(x)) \tag{2.132}$$

によって関係付けられる．例えば，もし風が東方へ［原著では「西方へ (westward)」となっている］角度 $2°20'$ だけ一様に吹いたならば (Quintin は Paris より $2°20'$ 西である)，

$$\tilde{T}(\theta, \varphi) = T(\theta, \varphi - 2°20'). \tag{2.133}$$

［「西方 → 東方」と連動して，右辺の符号を修正した*52.］

もちろん，この座標の選択には何ら重大性はない．例えば，座標の原点が Greenwich であることにフランス人は腹を立て，原点に Paris を通らせるかもしれない．このように，イギリス人が $T(\theta, \varphi)$ として記述するのと同じ温度場を，フランス人は $\varphi = 0$ を Paris として定義される別の極座標で記述し得る．Paris は Greenwich の $2°20'$ 東なので，フランス人にとって 5 月 1 日の温度場は

$$T'(\theta, \varphi) = T(\theta, \varphi - 2°20'). \tag{2.134}$$

［右辺の符号を訂正した.］これは座標の変化，あるいは**受動的な微分同相写像**である．

ここで 2 つの方程式 (2.133) と (2.134) は全く同じに見える．しかしこれらを混同することは馬鹿げていよう．式 (2.133) において，$\tilde{T}(\theta, \varphi)$ は 5 月 2 日の温度である；他方で式 (2.134) において，$T'(\theta, \phi)$ はフランス人の座標系で書かれているものの，5 月 1 日の温度である．まとめると，第 1 の方程式は風による温度場の変化を表しており，第 2 の方程式は慣習による変化を表している．第 1 の方程式は“能動的な微分同相写像”を記述しているのに対し，第 2 の方程式は座標の変化——“受動的な微分同相写像”とも呼ばれる——を記述している．

多様体 M が与えられたとき，能動的な微分同相写像 ϕ は M から M への滑らかで可逆な写像である．M 上のスカラー場 T は写像 $T : M \to R$ である．能動的な微分同相写像 ϕ が与えられたとき，我々は ϕ によって変換される新しいスカラー場 $\tilde{T}$ を

$$\tilde{T}(P) = T(\phi(P)) \tag{2.135}$$

で定義する．ここで座標は何の役割も演じていない．

d 次元多様体 M 上の座標系 x は M (の開集合) から R^d への，可逆で微分可能な写像である．M 上の場 T が与えられたとき，この写像は“座標 x における温度場 T”と呼ばれる，$t(x) = T(P(x))$ によって，関数 $t : R^d \to R$ を定める*53．受動的な微分同相写像は M 上の新しい座標系 x' を $x(P) = \phi(x'(P))$ で定義する，可逆で微分可能な写像 $\phi : R^d \to R^d$ である．座標 x' における場 T の値は

$$t'(x') = t(\phi(x')) \tag{2.136}$$

で与えられる．式 (2.135) と式 (2.136) の形式的な類似性に用心せよ．

上記は直ちに M 上のあらゆる構造に拡張される．例えば，能動的な微分同相写像 ϕ は M 上の 1 形式の場 e を新しい 1 形式の場 $\tilde{e} = \phi^* e$，ϕ による e の引き戻しへと移す，等．［1 形式 $e = e_\mu \wedge \mathrm{d}x^\mu$ 全体はその成分 e_μ とは違い，スカラーとして変換する.］

特に，距離 (metric) $d : M \times M \to R^+$ は M の任意の 2 点 A と B の間への距離 (distance) $d(A, B)$ の割り当てである．微分同相写像は $\tilde{d}(A, B) \equiv d(\phi^{-1}(A), \phi^{-1}(B))$ によって与えられる新しい距離 $\tilde{d}$ を定義する．2 つの距離 d および $\tilde{d}$ は等距離 (isometric) であるが区別される*54．能動的な微分同相写像の下での距離の同値類は時に“幾何学 (geometry)”と呼ばれる．座標系が与えられると，我々は (Riemann 的な) 距離 d を，

---

*52 もし原著通り風が西方へ吹くならば，冒頭の例とは逆に Paris から Quintin へ風が吹くことになるものの，このとき東を正とする角度 φ に対して原著の式 (2.133) はそのまま正しい．

*53 物理の文献では，2 つの写像 $T : M \to R$ と $t = T \circ x^{-1} : R^d \to R$ は常に同じ記号で表され，能動的および受動的な微分同相写像の間の混同を生み出している．この段落では私は別個の表記を用いる．本文の残りでは，しかしながら，私は標準的な表記に従い，場とその座標表現を同じ記号で表す．

*54 以下は等距離であるが区別される距離の例である．2001 年の *Shell* 道路地図によれば，New York (NY)，Chicago (C) および Kansas City (KC) の間の距離は $d(\mathrm{NY}, \mathrm{C})$ =100 マイル，$d(\mathrm{C}, \mathrm{KC})$ =50 マイル，$d(\mathrm{KC}, \mathrm{NY})$ =100 マイルであるのに対し，2002 年の *Lonely Planet* ツアーガイドの主張ではそれらの距離は $\tilde{d}(\mathrm{NY}, \mathrm{C})$ =100 マイル，$\tilde{d}(\mathrm{C}, \mathrm{KC})$ =100 マイル，$\tilde{d}(\mathrm{KC}, \mathrm{NY})$ =50 マイルである．明らかにこれらは同じ距離ではない．しかしそれらは等距離である：その 2 つは能動的な微分同相写像 $\phi(\mathrm{NY}) = \mathrm{C}$，$\phi(\mathrm{C}) = \mathrm{KC}$，$\phi(\mathrm{KC}) = \mathrm{NY}$ によって互いへと変換する．

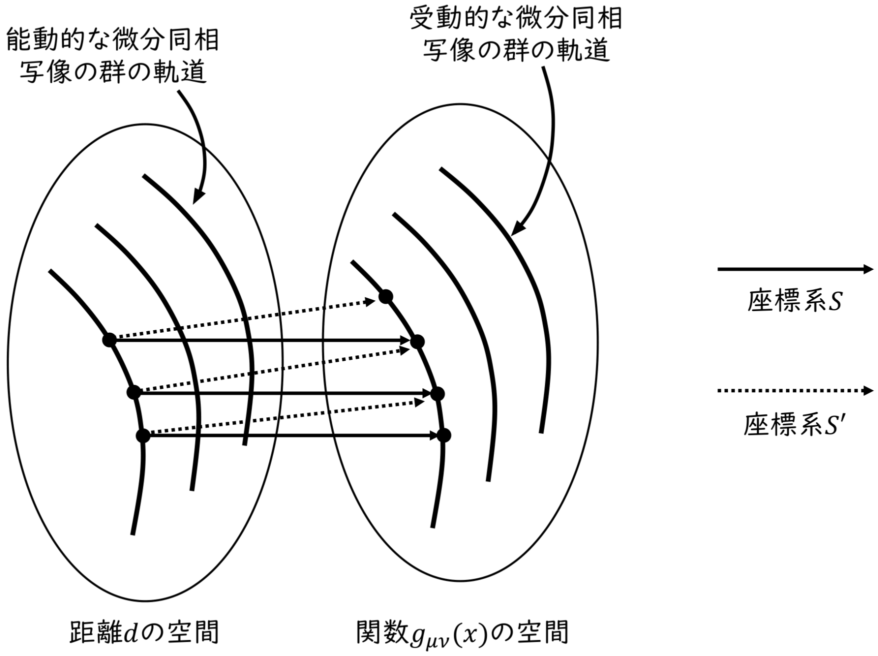


図 11　能動的および受動的な微分同相写像

R^d 上のテンソル場—— Riemann の計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$，あるいは等価的に，テトラード場 $e^I_\mu(x)$ ——を用いて表せる．座標系の変化の下で，同じ距離は異なる $g_{\mu\nu}(x)$ または $e^I_\mu(x)$ で表される．

上で与えた地球の温度の例は能動的および受動的な微分同相写像の間に特有の関係を示している：微分同相写像で関係付けられる 2 つの温度場 T と $\tilde{T}$ が与えられたとき，我々は常に T が古い座標系で表されるのと同じ関数で，新しい座標系において $\tilde{T}$ が表されるような座標変換を見出すことができる．この単純な数学的見解が，以下［2.2.5 節］で説明する Einstein の議論の根底にある．(その議論は本質的には，座標系を区別しない理論は，能動的な微分同相写像で関係付けられる場も区別できないということである．)

より正確には，能動的および受動的な微分同相写像の間の関係は以下のようである．能動的な微分同相写像の群は距離 d の空間に作用する．受動的な微分同相写像の群は関数 $g_{\mu\nu}(x)$ の空間に作用する．第 1 の群の軌道はその本性からして，第 2 の［群の］軌道と 1 対 1 の対応にある．しかしながら，個々の距離 d と個々の関数 $g_{\mu\nu}(x)$ の間の関係は選んだ座標系に依る．その状況が図 11 に示されている．

note：要約　多様体 M 上の各点 P を別の点 $Q=\phi(P)$ に移す (滑らかで可逆な) 写像 ϕ を能動的な微分同相写像という．これに伴いスカラー場 (例えば温度場) $T(P)$ は

$$T(P) \ \to\ \tilde{T}(P)=T(Q) \qquad (\text{式 } (2.135))$$

と変換する．この変換は各点 $Q=\phi(P)$ から点 P へ場の分布が多様体上を移動することを意味しており，座標系に依らずに定義されている．他方，受動的な微分同相写像は単なる座標変換 $x=\psi(x')$ であり［ϕ とは異なる写像なので記号も区別した］，新しい座標 x' で見た場の分布は

$$T(x) \ \to\ T'(x')=T(x) \qquad (\text{式 } (2.136))$$

と関数形が変化するものの，M 上の場の分布自体は不変である．

微分同相写像で関係付けられる 2 つの温度場 T と $\tilde{T}$ が与えられたとき，我々は常に T が古い座標系で表されるのと同じ関数で，新しい座標系において $\tilde{T}$ が表されるような座標変換を見出すことができる．この単純な数学的見解が，以下［2.2.5 節］で説明する Einstein の議論の根底にある．(その議論は本質的には，座標系を区別しない理論は，能動的な微分同相写像で関係付けられる場も区別できないということである．)

note：能動的変換と受動的変換の関係について　一般式 (2.135–136) を用いて具体例 (2.133–134) を再論しよう．2 点 P, Q の座標をそれぞれ $x, x-a$ とすると，能動的変換 (2.135) は

$$\tilde{T}(x) = T(x-a)$$

と書ける．これは場の分布を多様体上で a だけ推進させることを意味する．他方で逆に座標系を $-a$ だけ推進 (a だけ後退) させても，座標系に固定された始点からは場の分布が a だけ前進して見えるはずである．実際このとき座標変換は $x' = x + a$ なので，受動的変換 (2.136) は

$$T'(x') = T(x) = T(x'-a)$$

となり，2 式は同じ形になる．

2.2.5　一般共変性

1912 年頃，あらゆる運動は相対的であるというアイデアを用いて，Einstein は重力場の形式とともに，与えられた重力場の下での物質の運動方程式を見出した．これは既に注目に値する達成であるが，重力場に対する場の方程式はまだ欠けていた．実に，物語の最高の部分はまだやって来ていなかった．

2 つの問題が未解決のまま残されていた：場の方程式，およびそこで導入される座標 x^μ の物理的な意味を理解することである．Einstein は 1912 年から 1915 年の間，これら 2 つの問題に取り組み，いくつかの解決策を試みては繰り返し考えを変えた．Einstein はこれを彼の“座標の意味への取り組み”と呼んだ．その取り組みは壮大だった．結果は驚くべきものであることが判明した．Einstein の言葉では，それは“私の可能な限りの予想を超えていた”．

Einstein のストレスを増したことに，おそらく当時の最も偉大な数学者 Hilbert は，同じ問題に取り組み，重力場の方程式を見つける一番になろうとした．Hilbert が，そのはるかに優れた数学的能力を以ってしても，それらの方程式を一番に見つけられなかった事実は，基礎的な物理的な問題と数学的な問題の間の深い違いの証拠である．

場の方程式の探求において，Einstein はいくつかの情報の断片に導かれた．第 1 に，Maxwell 理論の静的な極限が Coulomb の法則をもたらすように，場の方程式の静的な極限は Newton の法則をもたらさねばならない．第 2 に，Coulomb の法則における源は電荷である；そして電荷密度は Maxwell 方程式における源である 4 元カレント $J^\mu(x)$ の，時間成分である．Newton 的な相互作用における源は質量である．特殊相対性理論により質量は実のところエネルギーの 1 形態であり，またエネルギー密度はエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}(x)$ の時間成分であることを Einstein は理解していた．それ故，$T_{\mu\nu}(x)$ が場の方程式のもっともらしい源になるに違いない．第 3 に，重力場の導入は任意の座標系の利用に基づいていたため，場の方程式には任意の座標の変化の下で何らかの形の共変性がなければならない．Einstein は共変な 2 階の方程式を，テンソル量の間の関係として探した，と言うのもそれらは座標の変化に影響されないからである．［両辺のテンソル成分はその定義により同じ座標変換則に従うため，方程式は形を変えず共変的となる．］彼は Riemann 幾何学から，テンソルとして変換する重力場の 2 階微分の唯一の組合せは Riemann テンソル $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}(x)$ であることを学んだ．これは実際 Riemann の主要な結果だった．Einstein はこれら全てを 1912 年には知っていた．これらの

アイデアから Einstein の場の方程式 (2.96)［式番号を訂正した］を導くことは，あらゆる GR の教科書に示されている単純な計算であって，今日では優れた卒業生は容易にそれを繰り返すことができる．それにも関わらず，Hilbert はそれができず，また Einstein は数年間，行き詰った．何が問題だったのか？

一般共変性を肯定する Einstein　はじめ，Einstein は重力場 $e^I_\mu(x)$ に対する場の方程式が M 上で一般的に共変的であることを要求した．これはもし $e^I_\mu(x)$ が解ならば，式 (2.124) で定義される ${e'}^I_\nu(y)$ もまた解でなければならないことを意味する．Einstein にとってこの要求 (当時としては前代未聞だった) は，自然法則は全ての基準系 (reference frames) で，従って全ての座標系で同じでなければならないというアイデアの定式化だった．

一般共変性を否定する Einstein　1914 年には，しかしながら，場の方程式は一般共変的であっては“ならない”と Einstein は自分に言い聞かせた [63]．何故か？ 何故なら，Einstein は一般共変性の物理的帰結をすぐに理解し，最初はそれらを前に困惑したからである．この話は非常に教育的である，と言うのも，それは GR の内に隠されている真の手品を明かしてくれるからである．一般共変性に“反対する”Einstein の議論は以下である[55]．

2 つの時空点 A と B を含む時空領域を考えよ．e をこの領域における重力場としよう．例えば，点 A の周りで場は平坦であるのに対し，点 B ではそうでないとしよう (図 12(a) を見よ)．次に，点 A を点 B に写像する M から M への写像を考えよ．この写像によって引き戻された新しい場 $\tilde{e} = \phi^* e$ を考えよ．A における場 $\tilde{e}$ の値は，B における e の値で決まり，それ故，場 $\tilde{e}$ は A の周りで平坦とならないだろう (図 12(b) を見よ)．

ここで，もし e が運動方程式の解であり，また運動方程式が一般に共変的であるとすると，$\tilde{e}$ もまた運動方程式の解でなければならない．これは能動的な微分同相写像と座標の変化の間の関係による：我々は座標系 x で e を表す関数 $e^I_\mu(x)$ が，座標系 y で $\tilde{e}$ を表す関数 $\tilde{e}^I_\mu(y)$ と同じ関数になるような，M 上の 2 つの異なる座標系 x と y を常に見出すことができる［2.2.4 節の後ろから 2 番目の段落］．2 つの座標系で運動方程式は同じだから，この関数が Einstein 方程式を満たすという事実は，e と $\tilde{e}$ がともに物理的な解であることを含意する．

議論を別の形で繰り返そう．我々は前の節で，もし $e^I_\mu(x)$ が Einstein 方程式の解ならば，式 (2.124) で定義される ${e'}^I_\nu(y)$ もまた解であることを見出した．しかし関数 ${e'}^I_\nu$ は 2 つの異なる方法で解釈できる．1 つ目は，異なる座標系で表された，e と同じ場としてである．2 つ目は，同じ座標系で表された，e と**異なる**場としてである．すなわち，我々は新しい場を

$$\tilde{e}^I_\mu(x) = {e'}^I_\mu(x) \tag{2.137}$$

で**定義**できる．この新しい場 $\tilde{e}$ は e と真に異なっている．一般に，それは A の周りで平坦とならないだろう．特に，A における $\tilde{e}$ のスカラー曲率 $\tilde{R}$ は

$$\tilde{R}|_A = \tilde{R}(x_A) = R(\phi(x_A)) = R|_B. \tag{2.138}$$

言い換えれば，運動方程式が一般に共変的ならば，それは能動的な微分同相写像の下においても**また**不変である［2.2.4 節の後ろから 2 番目の段落］．

これを踏まえて，Einstein は以下の有名な見解を述べた．

[55] はじめ Einstein は，静的な極限を導く際に彼が犯した間違いのせいで，一般共変的な場の方程式への意欲を失った：計算は間違った極限をもたらした．しかし Einstein は一般的な概念的議論を非常に効果的に用いることが常にできたことを踏まえると，そのことはここではさほど重要ではない．

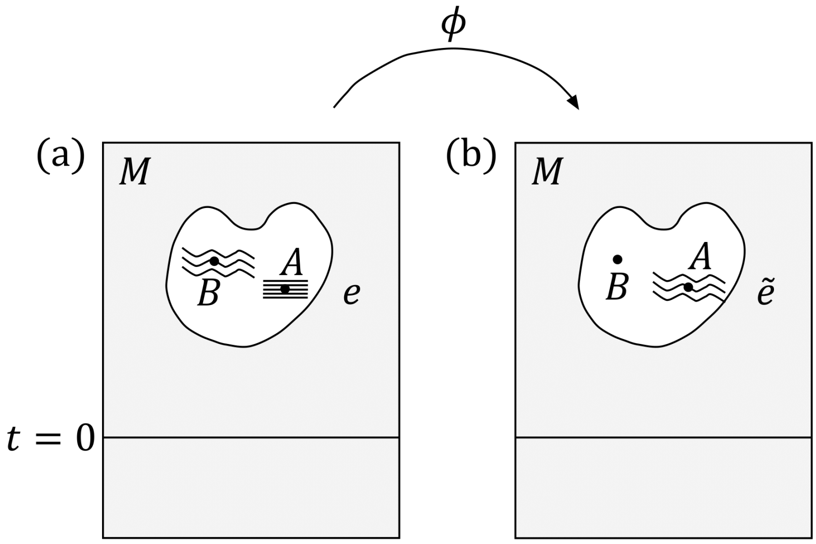


図 12　能動的な微分同相写像 ϕ は非平坦な (波状の) 重力場を点 B から点 A へ引きずる．

“孔”の議論：　重力の場の方程式が一般に共変的だと仮定しよう．重力場が e であり，物質のない宇宙の領域 H (図 12 の白い領域で表された“孔”) がある，この方程式の解を考えよ．H の内部には e が平坦である点 A と，それが平坦でない点 B があると仮定せよ．H の外部では恒等変換に帰着し，$\phi(A)=B$ となる滑らかな写像 $\phi: M \to M$ を考え，$\tilde{e}=\phi^{*}e$ を ϕ の下での e の引き戻しとする．2 つの場 e と $\tilde{e}$ は同じ過去を持ち，いずれも場の方程式の解であるが，点 A において異なる性質を持つ．それ故，場の方程式は時空点 A における物理を決定しない．それ故それは決定論的でない．しかし我々は (古典的な) 重力の物理が決定論的であることを知っている．それ故

(i)　場の方程式は一般に共変的であってはならないか，あるいは

(ii)　物理的な時空点 A について語ることには意味がないか

のいずれかである．

note　孔は周りの物質 (と初期条件) から本来，重力場が一義的に決定されるはずの領域という意味を持つ．

この議論に基づき，Einstein は 3 年間，Hilbert との大急ぎの競争の中で，非一般に共変的な場の方程式を探した．

一般共変性への Einstein の回帰　その後，唐突に，1915 年に，Einstein は一般共変的な場の方程式を発表した．何が起きたのか？ 何故 Einstein は考えを変えたのか？ 孔の議論には間違いがあったのか？ いや，孔の議論は正しい．正しい物理的な結論は，しかしながら，(ii) であって (i) ではない．この論点は稲妻のように Einstein を打った，彼の以前からの考え全てが導いた正確な概念的発見である．

孔の議論から生起する困難から抜け出した Einstein の方法は，「点 A」あるいは「事象 A」に，それ以上の詳述なく言及することは無意味であることに気付くことだった［A をイタリックに統一した]．

Einstein の説明を詳しく追いかけよう．

時空の一致　再び場の方程式の解 e を考え，ただし宇宙には 2 つの粒子 a と b もあると仮定せよ．例えば 2 粒子の世界線 $(x_a(\tau_a), x_b(\tau_b))$ は時空点 B で交差するとしよう (図 13 を見よ)．

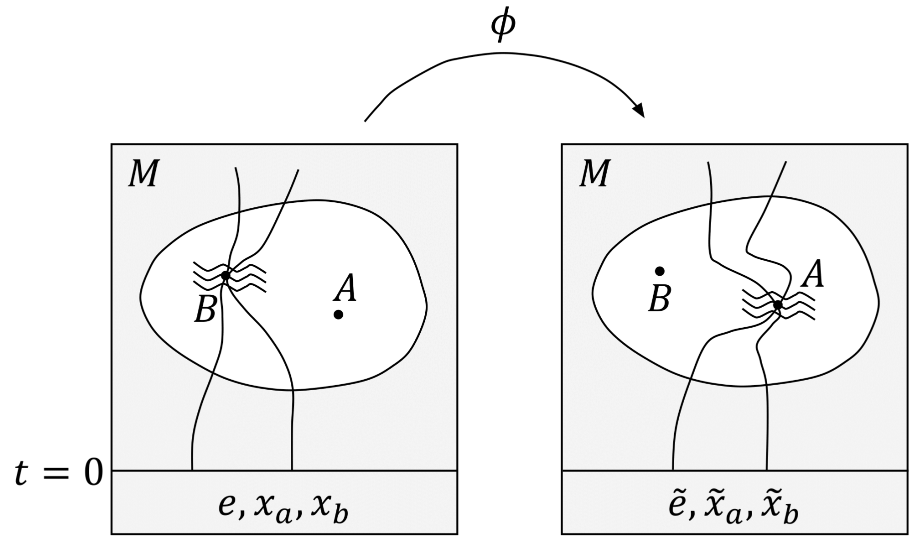


図 13　微分同相写像は非平坦な領域を 2 粒子 a, b の交差点とともに点 B から点 A へ動かす．

ここで，与えられた初期条件に対して，粒子の世界線は重力場によって決定される．それらは e の測地線であるか，もし他の力が関与しているならば，それらは付加的な力の項を伴う測地線の方程式を満たす．場 $\tilde{e} = \phi^* e$ を考えよう．粒子の世界線 $(x_a(\tau_a), x_b(\tau_b))$ はこの重力場における粒子の運動方程式の解では，もはやない．もし重力場が e の代わりに $\tilde{e}$ であるならば，M 上での粒子の運動は異なるだろう．しかし，まさに運動方程式の完璧な組は一般共変的であるという理由によって，$\tilde{e}$ によって決定される粒子の運動を見出すことは容易である．それ故，重力場および粒子に対する能動的な微分同相写像は解を解へと移す．こうして，重力場 $\tilde{e}$ における粒子の運動は世界線

$$\tilde{x}_a(\tau_a) = \phi^{-1}(x_a(\tau_a)), \qquad \tilde{x}_b(\tau_b) = \phi^{-1}(x_b(\tau_b)) \tag{2.139}$$

で与えられる．すると，粒子 a と b はもはや B では交差しない．それらは $A = \phi^{-1}(B)$ で交わる！［再び図 13 を見よ.］

ここで，場が A で平坦か否かを問う代わりに，粒子が出会う点で場が平坦か否かを問おう．明らかに，結果は 2 つの場合 (e, x_a, x_b) と $(\tilde{e}, \tilde{x}_a, \tilde{x}_b)$ とで同じである．形式的には，交差点を $\tau_a = \tau_b = 0$ と仮定すると，

$$\begin{aligned} \tilde{R}|_{交差} =& \tilde{R}(\tilde{x}_a(0)) = R(\phi(\tilde{x}_a(0))) \\ =& R(\phi(\phi^{-1}(x_a(0)))) = R(x_a(0)) = R|_{交差}. \end{aligned} \tag{2.140}$$

［第 2 の等号は式 (2.135)，第 3 の等号は式 (2.139) による．結論 $\tilde{R}(\tilde{x}_a(0)) = R(x_a(0))$ はそれ自体で見やすい.］この予言は決定論的である．2 つの矛盾する予言はなく，それ故，我々がこの種の予言に自らを制限する限り，決定論がある．Einstein は点を決定するこの方法を“時空の一致 (spacetime coincidences)”と呼んだ．

この結論は一般的であると Einstein は述べた：理論は (Newton 的および特殊相対論的な理論のようには)，時空点で何が起きるかを予言しない．むしろ，理論は理論における力学的要素自体によって決定される位置において，何が起きるかを予言する．Einstein の言葉では：

> あらゆる時空の確認は例外なく，時空の一致の決定になる．もし，例えば事象が単に質点の運動から成るならば，究極的には 2 つあるいはそれ以上のこれらの点の接触以外に観測できるものはないだろ

う．さらに，我々の測定結果とは，測定器の質点と他の質点とのそのような一致，時計の針と文字盤上の点との一致，そして時空間上で同じ場所において観測された点状の事象たちが一致することの確認に他ならない．基準系の導入には，そのような一致の完全な記述を容易にする以上の目的はない． [64]

2 つの解 (e, x_a, x_b) と $(\tilde{e}, \tilde{x}_a, \tilde{x}_b)$ はその多様体上の配置によってのみ識別される．それらは多様体の点に異なる性質を帰すという意味で異なっている．しかしながら，もし配置が場と粒子自身に対してのみ定義されることを要求するならば，2 つの解を物理的に識別するものは何もない．実際，Einstein が結論付けるように，2 つの解は同一の物理的状況を表す．能動的な微分同相写像の下で，理論は Dirac の意味でゲージ不変である［2.1.3 節］: 数学的定式化には冗長性がある；同一の物理的世界が運動方程式の異なる解によって記述され得る．

多様体上の配置には物理的意味がないことが帰結する．物理的描像は前の節で説明した地球の表面における温度場の例とは全く異なっている．あの例では，Paris と Quintin の都市は温度場に依らず，現実の見分けのつく存在だった．GR では，個々の時空点はそれ自体では物理的な意味を持たないと仮定してはじめて，一般共変性は決定論と整合する．それは下の地球がなく，温度場だけがあるようなものである．

この段階で消えたものはまさしく，多大な労力により見かけの相対運動を超えて発見できると Newton が信じていたところの，背景時空である．

自然の根本的に新しい理解に向けた Einstein の歩みは達成された．背景の空間および時空は，この新しい世界の理解からは拭い去られた．運動は完全に相対的である．能動的な微分同相不変性がこの完全な相対化を実現する鍵である．現実は時空の上の粒子と場から成るのではない：それは粒子と場 (重力場を含む) から成り，それらは互いに対してのみ位置付けできる．時空上の場はもうない：ただ場の上の場がある．相対性は一般的となった．

note：要約　時空点 A の周りで平坦である重力場 $e(x)$ を考えよう．ここで能動的な微分同相写像により，別の時空点 B 周りの非平坦な重力場を点 A へと移せば，点 A の周りで非平坦となる新しい重力場 $\tilde{e}(x)$ が得られる．ところでもとの場 $e(x)$ に単なる座標変換 (2.124) を施した結果が関数 $\tilde{e}(x)$ に一致するような，適当な座標変換を常に見出すことができる (式 (2.137))．するともし場の方程式が一般的な座標変換に対して共変的であるならば，2 つの場 e と $\tilde{e}$ はいずれも場の方程式の解でなければならない．このとき適当な設定 (Einstein による“孔”の議論) の下で，時空点 A における物理 (重力場が平坦か否か) は一意的に決まらないことになる．これは一見すると，理論の共変性が決定論と矛盾することを意味しているように見える．しかし実際には 2 つの解は同じ物理的状況を表しており (2.1.3 節の意味でゲージ等価)，あくまで時空点 A それ自体に言及することが物理的に無意味だったにすぎない．我々に問うことができるのは，例えば，2 粒子の世界線の交差点において場が平坦か否かである．実際，微分同相写像は世界線の交差点における重力場を交差点とともに移すので，そのような問に対しては決定論的な予言が可能である．このように，一般に場と粒子の多様体上の位置には物理的な意味がなく，それらの相対的な配置のみが物理的な意味を持つ．こうして GR の描像からは背景時空の概念が除かれる．

note　一見すると GR の主要な目的は，適当な座標系で計量 $g_{\mu\nu}(x)$ を求めることで，与えられた時空点間の真の距離 $\mathrm{d}s$ を，したがって座標系に依らない時空の幾何学を決定することであると言えそうである．しかし，ここで「与えられた時空点」はそれ自体ではもはや意味を成さない．同様に空間の点で流れる真の時間 $\mathrm{d}\tau$ も，正確には空間の点に印を付けるための粒子の軌道に沿う固有時間として理解できる．

2.3 解釈

一般共変性は定式化と実験の間の関係を，伝統的な場の理論におけるよりも一層，間接的にする．

Maxwell 理論を例にとろう．我々は背景時空があると仮定する．我々の取り扱いには，望みの精度で慣性系を定義する特定の物体 (研究室の壁，地球) がある．これらの物体により背景時空に対する位置を指定することが可能となる．我々には 2 種類の測定デバイスがある：(a) これらの基準物体からの距離と時間間隔を測るメーターと時計，および (b) 電場と磁場を測定するデバイスである．デバイス (a) の読みは x^μ を与える．デバイス (b) の読みは $F_{\mu\nu}$ を与える．我々は 2 つを測定し，場は点 x^μ において値 $F_{\mu\nu}$ を持つと述べる．理論は点 x^μ における値 $F_{\mu\nu}$ を予言できる．

我々は GR では同じことができない．理論は点 x^μ における場の値を予言しない［2.2.5 節］．では，どのようにして我々は理論と観測を比較するのか？

2.3.1 観測量，予言，および座標

前節の最後に議論したように，物理的な状態は Einstein 方程式の解 $e(x)$ に対応するのではなく，能動的な微分同相写像の下での解の同値類に対応する．それ故，理論が予言する量は，これらの同値類の上でよく定義された量だけで尽くされる．すなわち，微分同相写像の下で不変な量だけである．これらの量は座標 x^μ には依存しない．

理論の具体的な応用において，これらの量は一般に運動方程式の解から座標 x を解き放つこと (solving away) によって得られる．

太陽系　太陽系のダイナミクスを考えよ．変数は重力場 $e(x)$ と惑星の世界線 $x_n(\tau_n)$ である．運動方程式の解 $(e(x), x_n(\tau_n))$ を固定しよう．我々はこの解から物理的な予言を導き，それらを観測と比較したい．簡単のため，解が $(e(x), \vec{x}_n(x^0))$ によって表されるように，$\tau_n = x^0$ と選ぼう．地球の世界線を考えよ．x^0 に地球を発したヌル測地線 (光のパルス) が地球から惑星に伝わり戻る間に，地球の世界線に沿って経過する固有時間として定義される，地球と惑星 n の間の距離 $d_n(x^0)$ を計算する．［これは $\tau_n = x^0$ を踏まえると，文献 [417, pp.261–262] で空間距離の要素 $\mathrm{d}l$ を求めた方法と同じである．］

関数 $(d_n(x^0))$ は与えられた運動方程式の解から計算できる．座標 d_n を持つ空間 $\mathcal{C}$ を考えよ．関数 $(d_n(x^0))$ は［惑星 n の描く］この空間の曲線 (curve) γ を定義する．

我々は各 d_n に測定デバイスを関係付けることができる：惑星 n への距離を測るレーザー機器である．これらの量は一緒に測ることができる．我々は $\mathcal{C}$ における点として表される，事象 (d_n) を得る．理論はこの点が曲線 γ 上に乗ることを予言する．これら一連の事象は曲線 γ と比較することができ，このようにして我々は与えられた運動方程式の解を経験に対してテストできる．(第 3 章の術語では，量 d_n は部分的観測量 (部分観測可能量；partial observables) である．) これは任意の精度で行うことができ，また離れた星々，慣性系，特別な座標系，あるいは時間変数の選択は何ら役割を演じていないことに注意せよ．

時計　地球の周りの重力場を考えよ．2 つの世界線を考えよ．1 つ目を地球の表面に固定された物体の世界線とする．2 つ目を，地球の周りの Kepler 軌道を自由落下する物体，すなわち衛星の世界線とする．軌道を回る物体の世界線上に任意に始点 P を固定し，T_1 をこの世界線に沿う P からの固有時間とする．P から地球の物体に光の信号を送る；信号を受け取ったときの地球の世界線上の点を Q とし，T_2 をこ

の世界線に沿う Q からの固有時間とする．そして軌道の固有時間 T_1 に送られた信号の，地球上の受信固有時間を $T_2(T_1)$ とする．GR により，我々は任意の T_1 に対して関数 $T_2(T_1)$ を計算できる．

測定デバイスを T_1 と T_2 に関係付けることは容易である：それらは地球上の時計と軌道上の時計である．もし軌道を回る物体が固定された固有時間 T_1 に信号を発したならば，受信時間 T_2 は理論の予言と比較することができる．ここでは T_1 と T_2 が部分的観測量である．2 つのどちらが“真の時間変数”かを決めるのは読者に任せる［1.3.1 節の小さい字の箇所を参照］．

時計を伴う太陽系　上で説明した太陽系の測定に，時計を加えることができる．地球の初期事象 (特定の (太陽・月の) 食，Jesus (イエス) の誕生，あるいは John Lennon の死) を任意に固定すると，我々は地球の世界線に沿ってこの事象から経過した固有時間 $T(x^0)$ を計算できる．部分的観測量 T は部分的観測量 d_n に付け加えることができ，部分的観測量の組 (d_n, T) を与える．そうすると，相関 (d_n, T) を関数 $d_n(T)$ として表現することが便利だろう．理論によって完全に予言される，完全なゲージ不変な観測量は，何らかの与えられた初期事象からの地球の固有時間 T における，惑星距離の値 $d_n(T)$ である．T は座標ではないことに注意せよ．それは (部分的観測量を測定する) 測定デバイスが結び付けられるところの，複雑で非局所的な重力場の関数である．局所的な時間的位置を決定するのに地球上の時計を利用することは，単なる慣習的な事情に過ぎない．

連星パルサー　2 つの星の一方がパルサーであるような連星系を考えよ．Doppler 効果により，パルス信号の振動数は系の軌道の周期で振動する．この事実により，我々は各軌道［周期］におけるパルスの数を数えることができる．n 番目の軌道において我々が受け取るパルスの数を N_n としよう．パルサーの理論的なモデルにより，我々は軌道の周期において重力波の放出から期待される減少を，したがって観測される量と比較できる，期待される一連の N_n を計算することができる．これを充分に注意して行い，J.H. Taylor と R.A. Hulse は 1993 年の Nobel 賞を受賞した．

これら全ての例において，座標 x^μ は観測可能量から消えていることに注意せよ．このことは一般に正しい．物理系の理論的なモデルは座標 x^μ を用いて構成されるものの，このとき観測可能量は座標 x^μ に依存しない[*56]．

2.3.2　時空の消失

GR の数学的な定式化において，我々は x によって座標付けされた“時空”多様体 M を利用する．しかしながら，宇宙の状態は M 上の場の配位には対応しない．それは能動的な微分同相写像の下での場の配位に関する同値類に対応する．能動的な微分同相写像は場の M 上の位置を，あちこちへ引きずることによって変化させる．それ故，M 上の位置は単なるゲージである：それは物理的には重要でない．

実際，M それ自体には物理的解釈が何もなく，それは単なる数学的な道具，ゲージ的な人工物である．前一般相対論的な座標 x^μ は，事物が起きる“ところの”物理的な時空多様体の点を指定する (以降の 2.4.5 節における詳しい議論を見よ)；GR にはそのようなものはない．多様体 M を物理的な“事象”，あるいは場が値をとる“ところの”物理的な時空点の集合として解釈することはできない．M の点 A の周りで重力場が平坦か否かを問うことは無意味である，と言うのも，“時空点 A”という物理的実体はないからである．Newton および Minkowski に反して，粒子と場が住むところの時空点はない．時空点というものは全くない．Newton 的な空間と時間の概念は消失した．

[*56] 与えられた部分的観測量に対してそれらをゲージ固定しない限り，2.4.6 節を見よ．

Einstein の言葉では：

> ……一般共変性の要求は空間と時間から物理的中立性の最後の生き残りを取り除く…… [64]

Einstein はこの文の直後，すなわち私が前節の最後［2.2.5 節］に引用した段落で，あらゆる観測は時空の一致であるという見解とともに，この結論を正当化している．

Newton 的な物理では，もし力学的な (dynamical) 存在を取り除くと，残るのは空間と時間である．一般相対論的な物理では，力学的な存在を取り除くと，何も残らない．Newton および Minkowski の空間と時間は，場の 1 つ，重力場の配位として再解釈される．

具体的には，この空間的および時間的関係のラディカルな新しい理解は理論において，微分同相写像の下での場の方程式の不変性によって実現される．背景独立性により——すなわち，この不変性を破る非力学的な (nondynamical) 対象は理論には存在しないので——微分同相不変性は形式的には一般共変性，すなわち時空座標 $\vec{x}$ と t の任意の変更に対する場の方程式の不変性と等価である［1.1.3 節末尾も参照］．

微分同相不変性は，GR で用いられる時空座標 $\vec{x}$ と t が，前相対論的物理で用いられる時空座標 $\vec{x}$ と t と異なる意味を持つことを含意する．前相対論的な物理において，$\vec{x}$ と t は適切に選ばれた基準物体に対する位置を表す．この基準物体は，それが背景時空の物理的影響を明白にするような仕方で選ばれる．特に，その運動は慣性的となるように選ぶことができる．他方 GR では，時空座標 $\vec{x}$ と t に物理的意味はない：GR の物理的予言は座標 $\vec{x}$ と t に依存しない．

物理的理論は力学的対象の空間における位置と時間における発展を記述してはならない．それは力学的対象の**相対的な**位置と**相対的な**発展を記述する．Newton は背景時空の概念を導入した，と言うのも，彼は ($\vec{F} = m\vec{a}$ が意味を成すように) 粒子の加速度が良く定義されている必要があったからだ．Newton 的な理論と特殊相対性理論において，粒子はその中を粒子が動くところの固定された時空に対して加速するときに，加速する．一般相対性理論では，粒子 (力学的対象) は重力場 (他の力学的対象) の局所的な値に対して加速するときに，加速する．重力場の位置，あるいは粒子の位置に意味はない：重力場に対する粒子の相対的な位置だけが物理的な意味を持つ．

前相対論的な時空の概念のうち残るのは，力学的対象の間の関係である：我々は次のように述べることができる．2 つの粒子の世界線が“交差する”; 他の場が何らかの値を持つ“ところで”場が何らかの値を持つ；あるいは，我々は 2 つの部分的観測量を“一緒に”測定する．これはまさしく近代的な Descartes による**隣接** (*contiguity*) の概念であり［2.2.2 節］，GR における空間的および時間的な概念の基礎である．Whitehead が述べたように，猫がいなければ猫の笑みがあるとは言えないのと同じように，力学的存在なくして時空はあり得ない．世界は場から成っている．物理的には，それらは時空の上に住んでいるのではない．それらは，言わば，別の場の上に住んでいるのである．時空の上の場はもはやなく，ただ場の上の場がある．それは島の上の動物はもはやなく，ただクジラの上の動物，動物の上の動物があるという，1.1.3 節の比喩で概説した通りである．我々の足はもはや空間にはなく，我々はクジラに乗らねばならない．

2.4 * 補完

GR の解釈に関係するいくつかの問題を議論して本章を締めくくる．

2.4.1 Mach 原理

Ernst Mach の考えは Einstein による GR の発見に強い影響を及ぼした．Mach は絶対空間と絶対時間を導入する Newton の動機に対して鋭い批判を提示した．特に，彼は Newton のバケツの議論において欠けている要素があることを指摘した：慣性基準系 (それに

対する回転が検出可能な物理的効果を持つところの基準系) は，固定された星々が回転しない基準系でもあると彼は述べた．その上で慣性系は絶対空間によって決定されるのではなく，むしろそれは遠くの星々を含め，宇宙を満たす全ての物質によって決定されるのだと Mach は述べた．もし非常に大質量のバケツで実験を再現できれば，バケツの質量は慣性系に影響し，慣性系はバケツとともに回転するだろうと彼は述べた．

GR に照らせば，その見解は妥当であり，Einstein が Newton の議論を棄却した際に役割を演じたかもしれないことは明白である．しかしながら，いくつかの理由により，Mach の提案と GR の間の正確な関係は広範な議論を呼んだ．慣性は周りの物質によって決定されるという Mach の提案は“Mach 原理”と呼ばれ，GR はこの原理を満たしているか否か——“GR は Mach 的である”か否か——の議論に多くのインクが費やされてきた．驚くべきことに，文献には GR が Mach 的であるという結論に賛成する議論と証明とともに，反対する議論と証明も見られる．何故この混乱は生じたのか？

何故なら良く定義された“Mach 原理”がないからである．Mach は Einstein が理論の中で発展させた，非常に重要ではあるが曖昧な提案を与えたが，それは真にも偽にもなり得る不正確な言明である．“Mach 原理”を議論する著者は皆，実際には**異なる**原理を考えてきた．GR において満たされている“Mach 原理”もあれば，そうでないものもある．

この混乱にも関わらず，あるいはそのおかげで，Mach 的な一般相対性理論がどのようなものであるかに関する議論が，一般相対性理論の物理的内容にいくらかの光を当てている［is sheds → sheds/is shedding］．以下に文献において考えられてきた Mach 原理のいくつかのバージョンを列挙し，各々に対してその特定の Mach 原理が GR において真か偽かを述べる．以下では，“物質”とは重力場を除くあらゆる力学的存在を意味する．

- **Mach 原理 1：遠くの星々は局所慣性系に影響を与え得る．**
  真．何故なら物質は重力場に影響を与えるから．
- **Mach 原理 2：局所慣性系は宇宙を満たす物質によって完全に決定される．**
  偽．重力場は独立な自由度を持つ．
- **Mach 原理 3：バケツの中の慣性基準系の回転は実のところバケツに引きずられており，この効果はバケツの質量とともに増加する．**
  真．実際，これは Lense–Thirring 効果である：回転する質量は近傍の慣性系を引きずる．
- **Mach 原理 4：バケツの質量が大きい極限で，内的な慣性基準系はバケツとともに回転する．**
  場合による．それは極限のとり方の詳細による．
- **Mach 原理 5：宇宙の大域的な回転はあり得ない．**
  偽．Einstein はこれが GR において正しいと信じていたが，Gödel の解は反例である．
- **Mach 原理 6：物質が存在しないとき，慣性はない．**
  偽．Einstein の場の方程式には真空解がある．
- **Mach 原理 7：絶対運動はなく，他の何かに相対的な運動だけがある；それ故バケツの中の水は絶対的な意味で回転しているのではなく，他の力学的な物理的存在に対して回転している．**
  真．これが GR の基本的な物理的アイデアである．
- **Mach 原理 8：局所慣性系は宇宙の力学的な場によって完全に決定される．**
  真．実際，これはまさしく Einstein の鍵となるアイデアである．［Mach 原理 2 との違いは，「物質」とは対照的に「宇宙の力学的な場」が重力場を含んでいることである．］

2.4.2 関係主義 対 実体主義

現代の科学哲学には，GR の解釈をめぐる興味深い議論がある．空間に関する伝統的なそれら 2 つ——絶対的および関係的——は，科学の進歩を考慮するよう適切に修正されて，**関係主義** (*relationalism*) と**実体主義** (*substantivalism*) の名の下で続いている．

GR は物理における時空の概念を，関係主義の意味で変えた．前相対論的な物理では，時空はその中で物理が起きるところの，固定された非力学的な存在である．それは世界の入れもの (home) となる，ある種の形ある容器である．相対論的な物理では，そのようなものはない．相互作用する場と粒子だけがある．理論が提示する配置の概念はあくまで相対的である：力学的な対象は互いに対してのみ位置付けられる．これは，Newton がそれに対抗して *Principia* の慣性の部を書いたところの，Aristotle と Descartes によって定義された空間の概念である．Newton には 2 つのポイントがある：バケツ内の水の凹みような，慣性効果の物理的現実性，そして絶対空間に基づく彼の理論の多大な実験的成功である．Einstein は凹みの原因に対する別の解釈——局所的な重力場との相互作用——と，Newton 理論よりも優れた実験的成功を収めた，関係的な空間に基づく理論を与えた．3 世紀後に，ヨーロッパの文化は空間と時間の完全に関係的な理解となって復活した．

Descartes の関係主義の基礎には“隣接 (contiguity)”の概念がある．2 つの物体は互いに近くにあれば隣接している．空間は隣接関係に関する事物の様式である．GR の時空概念の基礎には本質的に同じ概念がある．Einstein の“時空の一致”は Descartes の“隣接”とアナロガスである．

実体主義の立場はそれでもなお，ある程度擁護できる．Einstein の発見は，Newton 的な時空と重力場が同じ存在だということである．このことは 2 つの等価な方法で表現できる．1 つ目は時空は存在しないと述べる；重力場だけが存在する．これは私が本書で採用した選択肢である．2 つ目は重力場は存在しないと述べる；力学的な性質を持つのは時空である．この選択は文献において一般的である．私は 1 つ目を好む，と言うのも，重力場と他の場との違いは本質的というよりも非本質的だと分かるからである．しかし 2 つの観点の選択は言葉の選択の問題にすぎず，それ故，究極的には好みの問題である．もし重力場よりも“時空”という名前を維持することを好むならば，あなたはなお実体主義者の立場を保ち，GR によれば，時空は実在であって関係ではないと主張することができる．しかも，配

置は重力場に対して定義されるので，時空は配置を定義する実在であると実体主義者は述べることができる．この論題の明文化に関しては，例えば， [65] を見よ．

しかしながら，これは非常に弱められた実体主義者の立場である．我々がそれに対して位置を定義できるものは何であれ“時空”と呼べる．しかし時空は位置を定義するのに用いるあらゆる任意の物体の連続体と，どの程度異なるのか？ 既に以前の脚注*47 で言及したように，Newton の実体主義に対する彼の鋭い定式化は，“空間”の正確な特徴付けを含んでいる：

> ……それ故，場所の，したがって局所的な運動の定義は，**空間が真に運動する物体と区別されると見られる限りにおいて**，延長自体 (extension alone) あるいは“空間”のような，何らかの動きのないものを参照する必要がある[*57]．

空間を定義付ける特徴は，**動いている**物体から真に区別されるものの特徴，すなわち，現代的な用語および Faraday–Maxwell の概念的な革命の後では，粒子や場のような力学的存在から真に区別されるものの特徴である．これは明らかに GR の時空には当てはまらない．もし現代的な実体主義者が Newton の強い実体主義を喜んで諦め，“時空は実在である”という主張を“時空は力学的存在であるところの重力場である”という主張と区別するならば，実体主義と関係主義の違いは完全に意味論の違いに帰着する．

長く続いている論争にある 2 つの対極的な立場が，その区別が意味論に帰着するほど密接になると，おそらくこの問題は解消されたと言える．この意味で GR は，長く続いている実体主義と関係主義による空間の解釈の問題を解決したと言えると，私は考える．

2.4.3 一般共変性に物理的内容はあるか？ Kretschmann の異議

事実上あらゆる場の理論は一般共変な形式に再定式化できる．Minkowski 時空におけるスカラー場の理論の一般共変な再定式化の例を以下で提示する．この事実により，一般共変性は本当に物理的な重要性を持つのか疑う人々がいた．その議論は次のようである：もしあらゆる理論が一般共変な言語で定式化できるならば，一般共変性は特定のクラスの理論を選ぶ原理ではなく，それ故それは物理的な内容を持たない．この議論は Einstein が GR を公表したすぐ後に，Kretschmann によって提示された．それは一部の科学哲学者の間で聞かれ，時には GR の概念的新奇性を退ける一部の物理学者によっても用いられた．

私はこの議論を誤りと考える．不合理な推論 (*non sequitur*) は，許容可能な理論を制限しないという形式的な性質に，物理的な重要性がないというアイデアである．何故そうでなければならないのか？ 定式化には柔軟性があり，我々は人為的に理論に形式的な特性を与えることができる，とりわけ我々が難解な (byzantine) 定式化を受け入れるならば．しかしこのことは，ある定式化または別の定式化を用いることが重要でないことを意味しない．物理とは自然を読み解くのにより有効な定式化の探求である．意味のある問は，一般共変性が許容可能な理論のクラスを制限するかではなく，一般共変性なくして GR を一切考えるか理解することができたかである．回転不変性を例に，この点を説明しよう．

回転不変性に適用された Kretschmann の異議　古代の物理は空間にはあらかじめ方向があると仮定していた．“上”と“下”は絶対的に定義されていると考えられていた．これは空間が回転対称性を持つとする，Newton 的な物理によって変わった：全ての空間的な方向はアプリオリに等価であり，偶然的な状況——例えば地球のような近くの質量の存在——だけがある方向を特別にできる．回転対称性は許容される力を制限すると，しばしば物理学者は言う．しかし厳密に言えば，これは正しくない．Kretschmann の異議も同様に回転不変性に適用される：回転不変でない理論が与えられたとき，単に何らかの変数を加えれば，我々はそれを回転不変な理論として再定式化できる．例えば，g を (重力のような) 定数として，全ての物体が z 方向の力 $F = -g$ に従う物理学理論 T を考えよ．これは回転不変でない理論である．ここで単位の長さを持つ力学的なベクトル量 $\vec{v}$ と力 $\vec{F} = g\vec{v}$ のある，別の理論 T' を考えよ．理論 T' は回転不変であるが，各々の解においてベクトル $\vec{v}$ は特定の値をとり，特定の方向を向く．この方向を z と呼べば，我々は理論 T と正確に同じ現象論を得る．

この例は，我々が回転不変でない理論 T を，回転不変な定式化 T' で表せることを示している．従って回転不変性は**真には**許容される理論を制限していない．我々は Kretschmann に賛同して，回転不変性には物理的重要性がないと結論できるだろうか？

明らかにそうではない．空間は回転不変であるという理解において，現代物理は古代の物理に対して確かに進歩してきた．どこに進歩があるのか？ それは空間の回転不変性の発見が，我々に自然を理解する上ではるかに有効な立場をもたらしたという事実の内にある．我々は一般には宇宙に“上”も“下”もないことを発見したと言える．等価的に，回転不変な物理の定式化は回転不変でない物理の定式化よりも，自然を理解する上ではるかに有効だと言える．

ここには 2 つの重要な問題がある．第 1 に，“上”と“下”が絶対的と考えられる概念的枠組みの中で，Newton 理論を発見することは困難だっただろう．第 2 に，理論 T の回転不変な形 T' への再定式化は我々の理論の理解を修正する：我々は力学的なベクトル $\vec{v}$ を導入しなければならない．2 つの理論 T と T' の観点からは，ベクトル $\vec{v}$ はあまり意味のない難解な構築物である．しかし自然の理解という観点からは，$\vec{v}$ の導入は物理的に正しい方向を示していることに注意せよ：我々はこのベクトルの本性と力学 (ダイナミクス) を調べるように導かれる；$\vec{v}$ は実に局所的な重力場であり，これはまさしくより有効な自然の理解へ向けた正しい道筋である．これが回転不変性を理解したことの強みである．

実際，もし宇宙に回転不変性があるならば，その限られた範囲が有効であるような古代の物理に対する，回転不変な理解の仕方があるはずである．上記の理論 T' はまさにこの古代の物理に対するより優れた理解を表している．何より，再解釈それ自体が世界を理解する新しい有効な方法を示している．まとめると，回転不変でない理論 T が難解な回転不変な定式化 T' を許容する事実は，回転不変性が物理的に重要でないことの論拠ではない．それどころか，それは我々が回転不変性を確信するために必要なことである．

一方では，回転不変性は我々が自然に記述できる物理の種類を**制限する**からではなく，**拡大する**から，興味深い．他方で，回転不変性は我々が考え**ようとする**理論の種類を劇的に削減する．それがある種の理論——理論 T' のような——を書くことを禁じるからではなく，

---

*57 I. Newton, *De Gravitatione et aequipondio fluidorum*, [61]

T のような理論を記述したいならば，対価を払わねばならないからである．ここではベクトル $\vec{v}$ の導入［が対価である］．この対価が払うに値するか，すなわち，ベクトル $\vec{v}$ が実際に考慮するに値する物理的存在であるかを判断するのは，理論家次第である．

理論物理学における新しいアイデアあるいは新しい言語の価値は，古い物理が新しい言語で表現できないという事実の内にあるのではない．それは単に，それが現実を記述する上でより有効であるという事実の内にある．物理学の理論的枠組みは現実の地図である．地図の記号がより上手く選ばれれば，地図はより有効となる．新しい言語が，それ自体により，表現できる理論の種類を真に制約することはほとんどない．むしろそれはある種の理論をはるかに単純にし，他の理論を不便にする．それは我々の自然の研究を方向付ける．これが，そしてこれこそが科学的知識である．

一般共変性に戻ろう．回転不変性のように，一般共変性は世界に関する一般的な物理的アイデアを表現する新しい言語である．Newton 的な物理を一般共変な言語で表現することは可能である．また (座標をゲージ固定することにより)，GR の物理を一般共変でない言語で表現することも可能である．しかし一般共変な言語で表現された Newton 的な物理，あるいは一般共変でない言語で表現された GR はいずれも，可能なものより［必要以上に］はるかに込み入った形に定式化された怪物 (monsters) である．誰もそれを発見しなかっただろう．

Einstein が発見したことは，以前は区別されると考えられていた 2 つのクラスの存在が，実のところ同種の存在だということである．(世界を理解する有効な方法は) 世界が全く異なる本性を持つ，2 つの明確に**異なる**クラスの存在から成る (と考えることだ) と，Newton は我々に教える．1 つ目のクラスは空間と時間から成る．2 つ目のクラスは時間と空間の中で運動するあらゆる力学的な存在を含んでいる．Newton 的な物理ではこれら 2 つの存在のクラスはあらゆる面で異なっており，全く異なる方法で物理モデルの定式化に入り込む．(世界を理解するより有効な方法は) 世界が 2 つの異なる種類の存在から成るのでは**ない** (と考えることだ) と，Einstein は理解した：1 種類の存在――力学的な場――だけがある．一般共変性は時空の存在と力学的な存在の間に区別がない世界を記述する言語である．それは，この区別を仮定しない言語である．

我々は前相対論的な物理を一般共変な言語で再解釈できる．それは Newton の絶対空間と絶対時間を力学的な場として書き換え，次いでそれらを平坦な時空における値に固定する一般共変な方程式を書くのに充分である．しかしそうしても，我々は Einstein のアイデアの物理的内容を否定しているのではない．むしろ，我々は単に世界を Einstein の言葉で再解釈しているのである．言い換えれば，我々は一般共変性の弱みではなく強みを見せているのである．しかもその際に我々は新しい物理的な場を導入し，この場を単一の値に拘束する場の運動方程式を書かねばならないという滑稽な状況に我々自身があることに気付く．このように我々は力学的な場の 1 つが奇妙にも単一の値に固定されている理論を得る．このことは直ちに，おそらく我々はこれらの方程式を緩め，この場の完全な力学 (ダイナミクス) を許容できることを示す．そうすれば，我々は直ちに GR の道筋に乗る．再び，一般共変性の物理的な非重要性を示すのではなく，このことはその多大な認知的な強力さを示す．

Kretschmann の議論の誤りの背景には，科学的な企図の過度に愚直な読みがあると私は考える．それはある一般的な物理学者の言明をあまりに文字通りに受け取るという誤りである．特定の対称性あるいは特定の原理が特定の理論を“一意的に決定する”と，しばしば物理学者は書く．注意深く読めば，これらの言明はほとんど常に大いに誇張されている．暗黙とされ，物理学者が自然であると見なし，詳しく述べるには及ばない事実やアイデアである，他の多数の仮定の下でしか，一意性は成り立たない．典型的な物理学者は反例を，それらが物理的でなく，信じ難いか，あるいは完全に人工的であると述べることによって，不注意に退ける．一般的な物理的アイデア，一般的な原理，直観，対称性の間の関係は，強力なアイデアのほとばしる融合 (burning melt) であり，数学的な定理の冷淡な (icy) 証明ではない．目標とされていることは，世界を考えるための最も有効な言語を見つけることであり，公理を書くことではない．それは形成されつつある (in formation) 言語であり，官僚主義的な手続き (bureaucracy) ではない*58．

一般共変な平坦な空間における場の理論　Minkowski 空間における質量のない自由スカラー場 $\phi(x)$ に対する場の理論を考えよ．理論は作用

$$S[\phi] = \int \mathrm{d}^4x\ \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\ \partial_\beta\phi \tag{2.141}$$

によって定義される．運動方程式は平坦な空間における Klein–Gordon 方程式

$$\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\phi = 0 \tag{2.142}$$

であり，理論は明らかに一般共変ではない．

この理論を一般共変な言語で再定式化する月並みな方法は，テトラード場 $e^\alpha_\mu(x)$ を導入して方程式

$$\partial_\mu(e\eta^{\alpha\beta}e^\mu_\alpha e^\nu_\beta\partial_\nu\phi) = 0, \tag{2.143}$$

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = 0 \tag{2.144}$$

を書くことである［上式 (2.143) の共変性を本稿次節で補足］．式 (2.144) の解は e が平坦であることである．系が共変的なので，我々は $e^\alpha_\mu(x) = \delta^\alpha_\mu$ となるゲージを選ぶことができる．このゲージでは，式 (2.143) は式 (2.142)［式番号を訂正した］になる．

*58 歴史的には，問題全体は誤解の結果だったのかもしれない．Kretschmann は敵意を持って Einstein を攻撃した．特に彼は，Einstein の孔の議論における一致の解決策を攻撃した．ここで Einstein はおそらく，一致だけが観測可能だというアイデアをまさに Kretschmann から学んだのだが，そのことに関して Kretschmann に賞賛を与えなかった．このことは大いに Kretschmann に敵意を抱かせたに違いないと私は考える．一般共変性は無内容だと Kretschmann が述べるとき，その言外の意味は，一般共変性が旧来の物理から進歩していないということではないと私は考える：それは一般共変性が，彼自身が Einstein よりも前に既に気付いていたことから進歩していないということである．

より興味深い方法は以下のようである．$A=1,\cdots,5$ として，5 つのスカラー場 $\Phi^A(x)$ に対する場の理論を考えよ．$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ と ϵ_{ABCDE} を 4 次元と 5 次元の完全反対称な擬テンソルとして，

$$V_A=\epsilon_{ABCDE}\partial_\mu\Phi^B\partial_\nu\Phi^C\partial_\rho\Phi^D\partial_\sigma\Phi^E\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{2.145}$$

という表記を用いる．V_5 は常に消えないと仮定して，作用

$$S[\Phi^A]=\int \mathrm{d}^4x\, V_5^{-1}(V_4V_4-V_3V_3-V_2V_2-V_1V_1) \tag{2.146}$$

によって定義される理論を考えよ．この理論は微分同相写像の下で不変である．実際，($\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ はテンソル密度なので［scalar density は誤記］) V_A はスカラー密度として変換するため，被積分関数はスカラー密度であって積分は不変である［本稿次節で補足］．$\alpha=1,2,3,4$ に対して，行列

$$E^\alpha_\mu(x)=\partial_\mu\Phi^\alpha(x), \tag{2.147}$$

その逆 E^μ_α およびその行列式 E を定義する．Φ^5 を変分することにより，運動方程式

$$\partial_\mu(E\eta^{\alpha\beta}E^\mu_\alpha E^\nu_\beta\partial_\nu\phi^5)=0 \tag{2.148}$$

を得る［本稿次節で導出］．これは重力場 E^α_μ と相互作用する，質量のない Klein–Gordon 方程式 (2.143) である．Φ^α を変分しても独立な方程式は得られない．我々は式 (2.148) が含意するエネルギー・運動量保存則を得る．1 つだけの独立な方程式があるという事実は，4 重 (four-fold) ゲージ不変性があるという事実の帰結である．我々は

$$\Phi^a(x)=x^a \tag{2.149}$$

となるゲージを選ぶことができる［以降しばらく $a\to\alpha=1,\cdots,4$ と訂正］．このとき直ちに $E^a_\mu=\delta^a_\mu$ が得られ，式 (2.148) は式 (2.142) になる．他の 4 つの方程式は

$$\partial_a\left(\partial^a\Phi^5\partial_b\Phi^5-\frac{1}{2}\delta^a_b\partial_c\Phi^5\partial_c\Phi^5\right)=0. \qquad \text{［本稿次節で導出］} \tag{2.150}$$

より優れた方法として，我々はゲージ固定をせず，

$$\phi(\Phi^a(x))=\Phi^5(x) \tag{2.151}$$

によって定義される，ゲージ不変な 4 変数関数 $\phi(X^a)$ を考えることができる．この関数は Minkowski 空間における Klein–Gordon 方程式 (2.142) を満たす．

そのような理論をどのように解釈すれば良いか？ 理論 (2.141) は一般共変でなく，それ故その座標 x は (部分的) 観測量である．理論は 5 つの部分的観測量―― 4 つの x^μ と ϕ ――によって定義される．理論を解釈するには，我々にはこれら 5 つの量に関する測定過程が必要である．これらの観測量の間の関係は式 (2.141) に支配される．一方，理論 (2.146) は一般共変的である；それ故，座標 x は観測量ではない．理論は 5 つの観測量―― 5 つの Φ^A［ϕ を大文字に訂正した］――によって定義される．我々にはこれら 5 つの量に関する測定過程が必要である．これらの観測量の間の関係は式 (2.141) に支配される．それ故 2 つの場合において，我々は $\Phi^A\leftrightarrow(x^a,\phi)$ と同定され，同じ方程式によって関係付けられる，同じ部部的観測量たちを得る．

理論 (2.146) と理論 (2.141) の間には微妙だが重要な違いが 1 つだけある．理論 (2.141) は 5 つの部分的観測量 (x,ϕ) を 2 組――独立なもの (x) と従属的なもの (ϕ) ――に分ける．［この意味で粒子系とは対照的に，場の理論では x は単なるパラメータであって観測量ではないと言われる．］理論 (2.146) は 5 つの部分的観測量 Φ^A を同等に扱う．このように，厳密な意味では，理論 (2.141) は 1 つの余分な情報――独立および従属的な部部的観測量の間の区別――を含んでいる．この違いにより，2 つの理論は 2 つの全く異なる世界の解釈を反映している．1 つ目は時空と物質に分離した世界の存在論を記述する．2 つ目は時空構造が関係性として解釈される世界を記述する．

2.4.3 節について

■スカラー場の方程式 (2.143) の共変性について　上式 (2.143) はスカラー場 ϕ の共変微分

$$0=\phi^{;\mu}_{;\mu}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi)=\frac{1}{e}\partial_\mu(e\eta^{\alpha\beta}e^\mu_\alpha e^\nu_\beta\partial_\nu\phi)$$

になっており [417, p.272]，それ故，一般座標変換に対して共変的である．

■作用 (2.146) が不変量 (スカラー) であることについて　全ての座標系で同じ値 $(0,\pm 1)$ を持つ量として完全反対称な因子 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ を定義すると，それはテンソル密度 (擬テンソル) の変換則に従わねばならない (証明は文献 [417, p.188–190])．またスカラー場 Φ^A に対しては，その微分 $\partial_\mu\Phi^A$ は共変微分に一致し共変ベクトルとして変換するので，テンソル密度 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ との縮約はスカラー密度 V_A を与える (A は場の種類をラベルし，変換性とは無関係)．さらに一般にスカラー密度 $\tilde{S}$ の積分はスカラーである：

$$\tilde{S}' = \frac{\partial(x)}{\partial(x')}\tilde{S}, \qquad \therefore \int \tilde{S}\mathrm{d}^4x = \int \tilde{S}\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\mathrm{d}^4x' = \int \tilde{S}'\mathrm{d}^4x'.$$

$\tilde{S}$ がスカラー密度と呼ばれる所以である．

■場の方程式 (2.148) の導出　定義式 (2.145),(2.147) より，

$$V_5 = \epsilon_{5\alpha\beta\gamma\delta}E^\alpha_\mu E^\beta_\nu E^\gamma_\rho E^\delta_\sigma \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon_{5\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}E = -4!E.$$

よって作用 (2.146) における分母 $V_5 \neq 0$ の仮定は，$E \neq 0$ であり逆行列 E^α_μ が存在することに対応している．

次に $\alpha = 1,\cdots,4$ に対して

$$\begin{aligned} V_\alpha =& \epsilon_{\alpha ABCD}\partial_\mu\Phi^A\partial_\nu\Phi^B\partial_\rho\Phi^C\partial_\sigma\Phi^D\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \\ =& 4!\epsilon_{\alpha\alpha'\alpha''\alpha'''5}E^{\alpha'}_\mu E^{\alpha''}_\nu E^{\alpha'''}_\rho \partial_\sigma\Phi^5\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \end{aligned}$$

を考える．ただし最右辺において $\alpha',\alpha'',\alpha'''$ にはそれぞれ，1,2,3,4 から α を除いた数を小さい順に割り当てるものとし[*59]，添字 $\alpha',\alpha'',\alpha'''$ に関しては和をとらない (代わりに反対称性を踏まえて式全体を 4! 倍した)．また上式の最右辺は行列 (E^α_μ) の余因子

$$\mathit{\Delta}^\alpha_\mu \equiv (-1)^{\alpha+\mu}\check{E}^\alpha_\mu$$

を含んでいることが見て取れる．ここに $\check{E}^\alpha_\mu$ は行列 (E^α_μ) から α 行目と μ 列目を除いた小行列式であり，行列 $\mathit{\Delta} \equiv (\mathit{\Delta}^\alpha_\mu)$ の転置行列 (いわゆる余因子行列) $\tilde{E} \equiv \mathit{\Delta}^{\mathrm{T}}$ を用いて，余因子は

$$\mathit{\Delta}^\alpha_\mu = \tilde{E}^\mu_\alpha = EE^\mu_\alpha$$

と書ける．この点を明確に理解するために，例えば V_1 を計算しよう．表記 (notation) にならって $\epsilon_{1234} = +1$ とすると

$$\epsilon^{2341} = +1, \qquad \epsilon^{1342} = -1, \qquad \epsilon^{1243} = +1, \qquad \epsilon^{1234} = -1$$

なので，

$$\begin{aligned} V_1 =& 4!E^2_\mu E^3_\nu E^4_\rho \partial_\sigma\Phi^5\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \\ =& 4!\left\{\check{E}^1_1\partial_1\Phi^5 - \check{E}^1_2\partial_2\Phi^5 + \check{E}^1_3\partial_3\Phi^5 - \check{E}^1_4\partial_4\Phi^5\right\} \\ =& 4!\sum_\mu \mathit{\Delta}^1_\mu\partial_\mu\Phi^5 \\ =& 4!EE^\mu_1\partial_\mu\Phi^5 \end{aligned}$$

と書ける．計算の類似性より $V_2,\cdots,V_4$ に対しても直ちに同様の表式を得ることができ，結果は

$$V_\alpha = 4!EE^\mu_\alpha\partial_\mu\Phi^5$$

*59 等価的に $\alpha',\alpha'',\alpha'''$ はそれぞれ順に，4 を法として $\alpha+1,\alpha+2,\alpha+3$ と合同な 1 から 4 のいずれかの数に固定しても良い．このとき例えば $\alpha = 3$ に対して $\alpha + 2 = 5 \equiv 1 \pmod 4$ なので，$\alpha'' = 1$.

とまとめられる．

以上の V_A の表式を代入すると，作用 (2.146) の被積分関数は

$$\mathcal{L} \equiv \frac{1}{V_5}\eta^{\alpha\beta}V_\alpha V_\beta = -4!E\eta^{\alpha\beta}E^\nu_\alpha E^\rho_\beta \partial_\nu\Phi^5\partial_\rho\Phi^5$$

と書き換えられる．E^μ_α は Φ^5 に依らないことに注意すると，Euler–Lagrange 方程式は

$$0 = \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^5)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi^5} = -2\cdot 4!\partial_\mu(E\eta^{\alpha\beta}E^\mu_\alpha E^\nu_\beta\partial_\nu\Phi^5)$$

となるので，運動方程式 (2.148) を得る．

■式 (2.150) の導出　まずは $E^\alpha_\mu = \delta^\alpha_\mu$ となるゲージ (2.149) を仮定することなく，作用 (2.146) の被積分関数

$$\mathcal{L} = -4!E\eta^{\beta\gamma}E^\nu_\beta E^\rho_\gamma\partial_\nu\Phi^5\partial_\rho\Phi^5$$

に対して，Φ^α $(\alpha = 1, \cdots, 4)$ に関する Euler–Lagrange 方程式を書き下す．

$$\begin{aligned}0 =&\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^\alpha)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi^\alpha} = \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial E^\alpha_\mu}\\ =&-4!\partial_\mu\left(2EE^\nu_\beta\partial^\mu\Phi^5\partial_\nu\Phi^5 + \frac{\partial E}{\partial E^\alpha_\mu}\eta^{\beta\gamma}E^\nu_\beta E^\rho_\gamma\partial_\nu\Phi^5\partial_\rho\Phi^5\right)\end{aligned}$$

において，$E = -\epsilon^{\nu\rho\sigma\tau}E^1_\nu E^2_\rho E^3_\sigma E^4_\tau$ より

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial E^\alpha_\mu} =&-\left(\delta^1_\alpha\epsilon^{\mu\rho\sigma\tau}E^2_\rho E^3_\sigma E^4_\tau + \delta^2_\alpha\epsilon^{\nu\mu\sigma\tau}E^1_\nu E^3_\sigma E^4_\tau + \cdots\right)\\ =&-(\delta^1_\alpha\mathit{\Delta}^1_\mu + \delta^2_\alpha\mathit{\Delta}^2_\mu + \cdots)\\ =&-\delta^\beta_\alpha EE^\mu_\beta = -EE^\mu_\alpha\end{aligned}$$

なので，

$$0 = \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial E^\alpha_\mu} = -2\cdot 4!\partial_\mu\left\{E\left(E^\nu_\alpha\partial^\mu\Phi^5\partial_\nu\Phi^5 - \frac{1}{2}\eta^{\beta\gamma}E^\mu_\alpha E^\nu_\beta E^\rho_\gamma\partial_\nu\Phi^5\partial_\rho\Phi^5\right)\right\}$$

を得る．

次いでゲージ条件 (2.149) を採用して $E^\alpha_\mu = \delta^\alpha_\mu$ とおくと，

$$0 = \partial_\mu\left(\delta^\nu_\alpha\partial^\mu\Phi^5\partial_\nu\Phi^5 - \frac{1}{2}\eta^{\nu\rho}\delta^\mu_\alpha\partial_\nu\Phi^5\partial_\rho\Phi^5\right) = \partial_\mu\left(\partial^\mu\Phi^5\partial_\alpha\Phi^5 - \frac{1}{2}\delta^\mu_\alpha\partial_\nu\Phi^5\partial^\nu\Phi^5\right) \qquad (\alpha = 1, \cdots, 4)$$

となる．これは式 (2.150) に他ならない．

2.4.4　時間の意味

自然言語において用いられる時間の概念は多くの性質を担っている．与えられた理論的枠組み (例えば Newton 力学) の内部では，時間はそれらの性質の一部を保持し，その他の性質を失う．異なる理論的枠組みでは時間は異なる性質を持つ．最もよく知られた例はおそらく時間の向きである：力学にはなく，熱力学にはある．しかし他にも多くの時間の特徴が，ある理論にはなく別の理論にはある．例えば，Newton 力学における時間の性質は一意性である：任意の 2 つの事象の間には一意的な時間間隔がある．対照的に，特殊相対性理論では Lorentz 座標 $(x^0, x'^0, \cdots)$ と同じだけ多くの時間変数がある．Newton 力学における時間の今一つの属性は大域性である：運動方程式の全ての解は，Newton 的な時間 t の全ての値を 1 度，そして 1 度だけ“通り”過ぎる．一部の宇宙論モデルでは，対照的に，そのような性質を持つ時間変数の選び方はない：大域的であることが時間に不可欠の性質であることを要求するならば，“時間はない”．言い換えれば，我々はこの性質あるいはあの性質を含むかもしれず含まないかもしれない，全く異なる概念を意味するのに“時間”という言葉を用いる．

ここでは考え得る時間の属性の単純な分類を説明する．以下では時間の 9 つの性質を見極め列挙する．次いで性質の数の増加に対応して複雑性を増していく，時間概念の 10 個の異なる水準を説明し表にまとめる．理論が理論の用いる時間概念に帰す属性の組に応じて，理論は典型的にはこれらの水準のうち 1 つに当てはまる．10 重の整理は便宜的である：私が意図する主眼は，単一の，明確で純粋な“時間”の概念が存在しないことを強調することである．

時間の性質　何の構造も持たない無限集合 S を考えよ．S にトポロジーと微分構造 $\mathrm{d}x$ を付与する．すると，S は多様体になる；この多様体は 1 次元的であると仮定し，集合 S をその微分構造と合わせて線 $L = (S, \mathrm{d}x)$ として表す．次に，距離 (metric) 構造 d を L に付与したとせよ；得られる計量線 (metric line) を $M = (S, \mathrm{d}x, d)$ と表す．次に，M における順序 $<$ (向き) を固定する．得られる向き付けされた線をアフィン線 $A = (S, \mathrm{d}x, d, <)$ として表す．次いで A における特別な点を原点 0 として固定する；得られる空間は実軸 $R = (S, \mathrm{d}x, d, <, 0)$ と同型である．

実軸 R は時間のアイデアの伝統的な比喩である．時間はしばしば R における変数 t で表される．R の構造は我々が自然に時間概念に関係付ける性質の全体と，以下のように対応する．(a) 時間の瞬間の組におけるトポロジーの存在，すなわち 2 つの時間の瞬間が互いに近接しているという概念の存在と，時間が“1 次元的である”という事実．(b) 距離の存在．すなわち 2 つの異なる時間間隔が大きさにおいて等しいと述べることが可能であること；時間は“距離”である．(c) 時間の瞬間に対する順序関係の存在．すなわち，過去への向きを未来への向きから見分けられること．(d) 特別な時間の瞬間，現在，“今”の存在．これらの性質を数学的な言語で捉えるために，我々は時間を実軸 R で表す．アフィン線 A は現在の概念以前の時間を表す；計量線 M は現在と過去/未来の向きの概念以前の時間を表す；線 L は距離性の概念以前の時間を表す．

Newton 力学では，我々は時間を R における変数で表すところから始めるものの，このとき方程式は $t \mapsto -t$ と $t \mapsto t + a$ の両方の下で不変となる．このように理論は実質的には計量線 M における変数 t を用いて定義されている．Newton 力学は，実際，時間の瞬間の組におけるトポロジーの概念と，(非常に本質的な仕方で) 時間が距離であるという事実を両方組み入れるものの，それは現在の概念も時間の向きの概念も一切利用しない．このことはよく知られている．Newton 理論は現在と時間の方向性の概念の導入と矛盾しないことに注意せよ：それは単にこれらの概念を何ら利用しないだけである．これらの概念は Newton 理論に現れない．

上で列挙した性質は，時間概念が物理学理論に持ち込まれる異なる方法を網羅していない；理論物理学の発展は自然な時間概念を実質的に修正した．最初の修正は特殊相対性理論によって導入された．Einstein による隔たる事象の時間座標の定義は，観測者に依存する時間の概念をもたらした．時間の 1 次元的性格と空間の 3 次元的性格を解体して 4 次元時空の概念を支持することと引き換えに，不変構造を保つことができる．代わりに単一の時間の概念は，そのうち 1 つが Lorentz 座標であるような，時間の 3 パラメータ族 $t_{\vec{v}}$ で置き換えられると述べることもできる．したがって，特殊相対性理論において我々が用いる時間は，Newton 力学における時間のように一意的ではない．単一の線よりもむしろ，我々は線たち (原点を通り Minkowski 空間における光円錐を満たす直線たち) の 3 パラメータ族を得る．この直線の組の 3 パラメータ族を M^3 で表す．

GR における時間　GR には“時間”を同定するいくつかの異なる可能性がある．各々は異なる時間の概念を選び出す．それらの概念の各々は適切な極限で，標準的な非相対論的あるいは特殊相対論的な時間に帰着するものの，各々は少なくとも非相対論的な時間の性質の一部を欠いている．GR において時間を同定する最も一般的な方法は以下である．

座標時間 x^0　座標時間は任意にリスケールすることができ，2 つの時間間隔が持続において等しいことを確かめる方法を与えない．それ故それは，上で定義した意味での距離ではない．さらに，時間座標を点から点へと自由に変えられることは，等しく良い座標時間の選択が無限次元にあることを示している．最後に，前相対論的な時間と違って，x^0 は観測可能な量ではない．あらゆる可能な座標時間の集合を L^∞ で表す．

固有時間 τ　この時間の概念は距離である．しかしそれはいくつかの理由により，特殊相対性理論における時間の概念と非常に異なる．第 1 に，それは重力場によって決定される．第 2 に，我々は各々の世界線ごとに，あるいは無限小では，各点のあらゆる速さごとに，異なる時間を有する．点 x における無限小の時間的な変位 $\mathrm{d}x^\mu$ に対して，無限小の時間間隔は $\mathrm{d}\tau = \sqrt{-g_{\mu\nu}(x)\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu}$ である．この時間の概念は特殊相対性理論で用いられる時間の概念からのラディカルな発展である，と言うのも，それは理論における力学的な場によって決定されるからである．Einstein 方程式の解は GR の相空間 Γ における点を定義する．それは全ての世界線に距離構造を割り当てる．それ故この時間の概念は，世界線の集合 wl を掛けた相空間 Γ から距離構造への関数 $d : \Gamma \times wl \mapsto R^+$［原著の $wl \times wl$ は誤記と判断］によって与えられる．この関数を m^∞ で表す．ダイナミクスによって影響される時間の概念を“内的 (internal)”と呼ぶ．

GR 以前は，ダイナミクスは距離の性質を持ち測ることのできる，単一の時間変数における発展として表現できた．一般相対論的な物理では，時間の概念は異なる 2 つの概念に分離する：我々はなおダイナミクスを時間変数 x^0 における発展と見なせるものの，この時間は距離の性質を持たず観測量ではない；代わりに，距離の性質を持つ時間の概念 τ があるものの，理論のダイナミクスは τ における発展として表現できない．この分離を回避し，観測可能な距離の時間における発展を表す理論の意味という，GR を力学的な理論と見なす方法はあるか？

時計時間 (Clock time)　GR のダイナミクスは観測量が互いに対して発展する仕方を決める．我々は常に観測可能な量 t_c を 1 つ選び，それを独立な量と宣言し，その他の観測量がその関数としてどのように発展するかを記述することができる．この時計時間の典型的な例は，相対論的な宇宙論における空間的にコンパクトな宇宙 (spatially compact universe) の半径 R である．形式的には，時計時間は理論の拡大配位空間 $\mathcal{C}$ (第 3 章を見よ) 上の関数である．この時間概念を時計時間 $\tau_\mathrm{c} : \mathcal{C} \mapsto R$ として表す．

この時間の定義の下で，GR は標準的な Hamilton 形式の力学と類似になる．時計時間は，しかしながら，一般には特定の状況または限られた時間のうちでのみ時計として振舞う．例えば宇宙の半径は，宇宙が再収縮するときには良い時間変数にならない．一般に，時計時間は時間的な大域性を欠く．実際，大域的な“良い時間”として振舞う関数 t_c を定義することへの妨げに関する，いくつかの結果が知られている [66].

これらの相対論的な時間概念の一部は，ある意味，前相対論的な場合と真逆であることに注意せよ：Newton 力学において時間発展は，計量線 M (時間) から配位または相空間への関数によって捉えられたのに対し，今や時間概念は配位または相空間から計量線への関数によって捉えられる．この逆転は，時間の流れが系のダイナミクス自身によって影響または決定されるという物理的なアイデアの，数学的な表現である．

最後に，量子論の領域へと無批判に拡張できる，古典的な GR における時間の考え方はない．物理的な時計の量子ゆらぎ，そして異なる距離構造の量子論的な重合せは，まさしく Planck 尺度でぼやける時間の概念を成す．本書の第 II 部で議論するように，量子重力には時間の基本的概念はないのかもしれない．

時間の概念　より基本的な物理学理論へと進むにつれて，時間の性質はしだいに消えていくことに注意せよ．このスペクトルの対極には，物理学理論には現れない，自然言語において用いられる時間概念に関係付けられる性質がある．それらは自然の研究における他の分野で役割を演じている．完全を期すために，それらの性質について言及する．それらは，例えば，記憶，予期，そして自由意志の心理的な知覚である［自由意志が実在するとは述べていない］．

まとめると，私は時間の概念における以下の性質を見出した．

1. 記憶と予期の存在．
2. 特別な時間の瞬間の存在：現在，今．
3. 方向性：過去を未来への向きから見分けられること．
4. 一意性：特別な時間変数を見出せない，特殊および一般相対性理論で失われる性質．
5. 外的であるという性質：理論の力学変数からの時間概念の独立性．
6. 空間的な大域性：全ての空間の点において同じ時間変数を定義できること．
7. 時間的な大域性：全ての運動は時間変数の全ての値を一度，そして一度だけ通り過ぎるという事実．
8. 距離性：2 つの時間間隔が等しい持続を持つと言えること．
9. 1 次元性，すなわち時間の瞬間を 1 次元多様体に並べられること．

この議論は以下で複雑性を増す順に列挙する，一連の時間の概念を示している．

自然言語の時間　これはたった今列挙した性質の全てを含む，日常用語の時間の概念である．この時間の概念が非科学的であるとは限らない：例えば，ヒトの脳に対するあらゆる科学的アプローチは，この時間の概念を利用しなければならない．

現在を伴う時間　これは特別な瞬間，現在の存在を含め，たった今列挙した性質の全てを含むものの，通常は時間自体よりも複雑系 (脳) に関係した概念である，記憶と予期を含まない時間の概念である．現在の概念は一般に時間そのものの性質と考えられている．この時間の概念は，しばしば人々が“時間の流れ”あるいは Eddington の“時間の流れの鮮明な知覚” [67] に言及するときに，言及するものである．この時間の概念はパラメトライズされた線 R の構造で表せる．

熱力学的な時間　もし我々が未来の向きと過去の向きの違いを保持し，しかし現在の概念は諦めれば，熱力学に特有の時間の概念が得られる．熱力学はこのリストに現れる最初の物理的科学なので，物理学用語による世界の説明には現在の概念，“今”の概念は完全に現れないことを，この場で強調しておくのが適切かもしれない．この時間の概念はアフィン線 A の構造で表せる．

Newton 的な時間　Newton 力学では特別な時間の向きはない．特別な時間の向きがないときには，原因と結果の概念は入れ替え可能であることに注意せよ．この時間の概念は計量線 M の構造で表せる．

特殊相対論的な時間　一意性を諦めれば，我々は特殊相対性理論で用いられる時間を得る：異なる Lorentz 座標系は異なる時間の概念を持つ．特殊相対論的な時間はなお外的であり，空間的および時間的に大域的であり，長さを測ることができ (metrical)，また 1 次元的であるものの，それは一意的でない：時間の資格を共有する 3 パラメータの集合の量がある．この時間の概念は計量線の 3 パラメータの集合 M^3 で表せる．

宇宙論的な時間　この言葉によって私は，空間的および時間的に大域的であり，長さを測ることができ，また 1 次元的であるものの，外的でない，すなわち理論によって力学的に決定される時間を表す．宇宙論における固有時間は典型的な例である［1.3.1 節の小さい字の箇所も参照］．それは GR に現れる最も整った時間の概念である．それを m で表す．

固有時間　この言葉によって私は，時間的に大域的であり，長さを測ることができ，また 1 次元的であるものの，空間的に大域的でない時間を表す，と言うのも，GR において固有時間の概念は世界線に沿っているからである．それは相空間と世界線の集合の Descartes 積 (cartesian product) 上の関数 m^∞ で表せる．

時計時間　この言葉によって私は，長さを測ることができ，また 1 次元的であるものの，時間的に大域的でない時間を表す．GR における現実的な物質の時計は，この意味での時間を定義する．この時間の概念は相空間上の関数 c で表せる．

パラメータ時間　この言葉によって私は，距離ではなく観測可能でない時間の概念を表す．典型的な例は GR における座標時間である．パラメータ時間の今一つの例は，相対論的な粒子のダイナミクスのパラメトライズされた定式化における，発展パラメータである．パラメータ時間はパラメトライズされていない線 L，あるいはパラメトライズされていない線の無限集合 L^∞ で表される．

無時間 (No-time)　最後に，これが分析の最下層である；それは時間概念ではなく，むしろ私は無時間によって，予言能力のある物理学理論はいかなる時間の概念がなくともよく定義できるというアイデアを表す．

このリスト［分類］は厳密に受け取らなくても良い．それを表 3 に要約する．

上の分析から立ち現れる興味深い特徴がある：階層的配列である．この配列の詳細には人為的な部分もあるが，それでもなお分析は一般的な事実を示している：脳や生き物のような“特殊な”対象の理論から，自然のより多くの部分を含むより一般的な理論へと進むにつれて，我々はより特殊性と決定性のない物理的な時間の概念を利用する．もし我々がしだいにより基本的な水準で自然を観測し，より一般的な文脈で成り立つ法則を探すならば，我々はそれらの法則がしだいに弱まっていく時間の概念を要求または許容することを発見する．

この見解は，“水面”の概念が水および空気の分子の組合せに対するダイナミクスのある領域で立ち現れるように，時間の“高水準”の

表 3　時間の概念

時間概念	性質	例	形態
自然言語の時間	記憶	脳	?
現在を伴う時間	現在	生物学	R
熱力学的な時間	向き	熱力学	A
Newton 的な時間	一意的	Newton 力学	M
特殊相対論的な時間	外的	特殊相対性理論	M^3
宇宙論的な時間	空間的に大域的	宇宙論的な時間	m
固有時間	時間的に大域的	世界線の固有時間	m^∞
時計時間	距離	GR における時計	c
パラメータ時間	1 次元的	座標時間	L^∞
無時間	なし	量子重力	なし

特徴が基本的な水準で現れるのではなく，特定の物理的領域における特徴として“立ち現れる”ことを示している (例えば [68] を見よ).

より多くの属性を持つ時間の概念は，より一般的な状況では意味を成さない高水準の概念である．例えば Newton 的な時間の一意性は，我々が互いに対してゆっくりと運動する物体の集合を考えるところの，特別な領域でのみ意味を成す．このように，一意的な時間の概念は，自然のある領域でのみ意味を成す高水準の概念である．一般的な系では，時間のほとんどの特徴は本当に無意味である．

2.4.5　非相対論的な座標

Newton 的および特殊相対論的な物理における座標 $x = (\vec{x}, t)$ の正確な意味は全く自明でない．それらと相対論的な座標の正確な違いを明らかにするために，ここでそのことを思い起こしておこう．

我々が観測する運動は相対運動であることを Newton はよく理解しており，*Principia* においてこの点を強調している．彼の主張は我々が絶対運動を直接**観測**できるということではない．彼の主張は，相対運動の観測から始めて，我々が絶対運動ないし“真の運動”，あるいは絶対空間に対する運動を，その物理的な効果 (バケツ中の水の凹みのような) から**推定**できるということである．

例えば，我々は地面に対する運動を観測し記述する；しかし Foucault の振り子のような微妙な効果から，それらは真の運動ではないと我々は推定する．バケツの実験は観測可能な効果 (水面の凹み) を利用して，真の運動 (空間に対する水の回転) を相対運動 (バケツに対する回転) から選り分けて解明する可能性の例である*60.

Newton にとって，彼の主要な方程式

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t^2} \tag{2.152}$$

に持ち込まれる座標 $\vec{x}$ は，絶対空間の座標である．しかしながら，我々は空間を直接観測できないので，我々が空間の点を座標付けできる唯一の方法は物理的な物体を用いることである．軌道 $\vec{x}(t)$ に沿って運動する物体 A の座標 $\vec{x}$ はそれ故，我々が“基準系”と呼ぶところの，選ばれた物体たちの系 O からの距離として定義される．しかしこのとき $\vec{x}$ は絶対空間における座標ではない．すると方程式 (2.152) はどのように機能するのか？

困難の解決策は，基準系 O を構成する物体を選ぶために，Newton が指摘した“真の運動”を明かす能力を賢く用いることである．“良い”および“悪い”基準系がある．良い基準系は，その内部で Newton のバケツにおける水面の凹みのような効果［慣性力］が，望みの精度で観測されないものである．我々がこれらの良い基準系に対して定義される座標を用いれば，方程式 (2.152) は望みの精度で正

*60 Newton は我々が真の運動を明らかにできるという事実に深い重要性を見出している．彼は我々が現実を観測する様式として相対運動を説明し，神が現実を直接“知覚”ないし“理解”するであろう様式として絶対運動を説明する．これが空間——それに対して真の運動が起きるところの存在——を Newton が“神の知覚 (Sensorium of God)”と呼んだ理由である : 真の運動は“神に対する”あるいは“神が知覚する”運動である．このアイデアには，推論が見かけの背後に隠された神聖な真理への道を見出すという，Platon 的な色合いがある．私はこのことが現代性から，しばしば書かれるほど離れているとは考えない．Newton による神が“世界を知覚する”方法の研究と，現実を概念化する最も有効な方法の現代的な研究の間に，大差は全くない．Newton の神はここではほとんど言語学的な役割——主要な企図を示し，現実の理解に対する我々自身の概念構造を更新する役割——を演じていない．

しい．言い換えれば，式 (2.152) の物理的な内容は実際かなり微妙である：

> それに対する他のあらゆる物体 A の運動が式 (2.152) によって正確に記述されるような，基準系 O が存在する．

これは非常に多数の運動する物体が関与するときにのみ，はじめて意味を持つ言明である．

この解釈が上手くいくためには，基準系を構成している物体たち O が，物体 A の運動に影響されないことが重要であることにも注意せよ．A と O の間にはいかなる力学的な相互作用もあってはならない．

特殊相対性理論はこの描像をさほど変えない．絶対的な同時性は意味を成さないので，もし事象 A が原点における時計から隔たっていれば，その時間 t はよく定義されない．Einstein のアイデアは慣性的に運動する時計を用いて，t を隔たる事象に割り当てる手順を**定義する**ことである．

> 時計時間 t_{e} に，事象に届く光の信号を発する．［t_{e} は光が発した時刻で，添字 e は emisson の頭文字と推察される．］反射して帰ってきた信号を t_{r} に受け取る．事象の座標時間は $t_A = \frac{1}{2}(t_{\mathrm{e}} + t_{\mathrm{r}})$ で**定義**される．［これは GR の文脈における 2.3.1 節や文献 [417, pp.261–262] の議論と同じである．］

これは有用な定義であって，観測者の時計が t_A を示す“まさにそのときに”事象 A が起きるという形而上学的な言明ではないことを，強調しておくことが重要である．

特殊相対性理論は Newton の絶対空間と絶対時間を単一の存在―― Minkowski の絶対時空――で置き換えるものの，慣性系の概念と座標の意味は Newton 力学の場合と同じである．

まとめると，これらの座標は以下の性質を持つ．

(i) 座標は物理的な基準物体 (基準系) に対する位置を記述する．
(ii) 空間座標は基準物体からの**距離**によって定義される．時間座標は等時間隔の (isochronous) 時計に対して定義される．
(iii) 基準物体は適切に選ばれている：それらは，それらが定義する基準系が慣性系となるものである．
(iv) 慣性系は絶対時空そのものの構造を明かす．
(v) 力学 (ダイナミクス) が座標によって記述される物体 A は，基準物体 O と相互作用しない．A と O の間に力学的な結合はない．

相対論的な座標はこれらの性質の**いずれも**持たない．2 つが同じ記法 x^μ で表される事実は，単なる不幸な歴史的偶然に過ぎない．

2.4.6 物理的な座標と GPS 観測量

任意の非物理的な座標 x^μ を用いる代わりに，我々は指定された物理的解釈を持つ座標 X^μ を用いて，時空の事象を座標付けすることを選べる．例えば，各々の銀河に名前 $\vec{X}$ を与え，X_0 を銀河の世界線に沿うビッグバンからの固有時間に選ぶことによって，我々は宇宙を記述できる．そうするならば，座標 X の定義となる性質が定式化に加えられねばならない．我々は重力場に対する何らかの個数の方程式を加えねばならない：座標を固定するのに用いられる，物体 (例えば銀河) の運動方程式である．これらの付加的な方程式は一般共変性をゲージ固定する．

ゲージ固定は部分的でもあり得る．例えば，よくある選択は

$$\tilde{e}_0^0(X) = 1, \qquad \tilde{e}_0^i(X) = 0, \qquad \tilde{e}_a^0(X) = 0 \tag{2.153}$$

であり，ここに $i = 1, 2, 3$ および $a = 1, 2, 3$．［局所 Lorentz 座標を Ξ として式 (2.122):$e_\mu^I(X) = \partial \Xi^I / \partial X^\mu$ を踏まえると，］これは X^0 が固有時間を測ること［第 1 式］，X^0 の等曲面が一定の $\vec{X}$ の線に対して Einstein の意味で局所的に同時の面となること［第 3 式］，そして局所 Lorentz 系はこれらの線が静止しているように選ばれていること［第 2 式］を要求して，部分的に座標を固定することに対応している．

もし座標が完全に特定されれば，物理的なゲージ固定の方程式と運動方程式から成る組にはゲージ不変性が残らない；すなわち，初期データは発展を一意的に決定する［2.1.3 節］．物理的な座標を固定する任意に多くの方法があり，他よりアプリオリに優れた方法はないので，この手続きは多くの可能な方法によって実行できる．この任意性にも関わらず，言及した宇宙論的な文脈のように，物理的な状況が自然な座標の選択を示している場合には，この手続きはしばしば便利である．

空間を満たす物質によって定義される物理的な座標 X^μ は，宇宙論的な文脈においてのみ効果的に用いることができる，と言うのも，物質が空間を満たすのは宇宙論的なスケールにおいてのみだからである．太陽系のように，内部に空っぽの領域がある系では，これらの物理的な座標は利用できない．興味深い代わりの選択は，以下で説明する GPS 座標によって与えられる．

物理的な座標 X^μ は部分的観測量であり，我々はそれらに測定デバイスを関係付けることができる．

決定されない物理的な座標　最後に，任意の座標 x^μ と物理的な座標 X^μ の中間物である，GR の座標に対する第 3 の解釈がある．宇宙のある領域が，自由落下しているとは限らない，何らかの軽い物体たちで満たされていると想像せよ．我々はこれらの物体を用いて物理的な座標 X^μ を定義できるだけでなく，これらの物体の運動方程式を無視することも選べる．我々はそのダイナミクスを無視することを**選んだ**，基準物体の時空位置と解釈される座標 X^μ で表された，重力場と他の物質に対する系の方程式を得る．

この方程式の組は劣決定である：同じ初期条件が異なる解へと発展し得る［2.1.3 節］．しかしながら，そのような劣決定性の解釈は単に，我々が運動方程式の一部を無視することを選んだということである．同じ初期条件を持つ異なる解は場の同じ物理的な配位を表しているが，例えばある場合には自由落下する基準物体に対して表されており，別の場合にはある瞬間に力が作用した基準物体に対して表されている，等といった具合である．観測可能なものがあって同時にそのダイナミクスを無視できると仮定できない量子論では，この手続きは無意味になるという欠点がある．

まとめると，一般相対論的な座標について語るときには常に，

(i) 任意の数学的な座標 x；

(ii) 運動方程式が考慮されている物体に対する位置としての解釈を持つ，物理的な座標 X；

(iii) 運動方程式が無視されている物体に対する位置としての解釈を持つ，物理的な座標

のうちどれに言及しているのかに注意せねばならない．系の運動方程式は (i) と (iii) において決定論的でなく，(ii) において決定論的である．座標は (ii) と (iii) において部分的観測量であり，(i) ではそうではない．GR における観測可能性に関する混乱は，これらの異なる座標の解釈の混乱から帰結する．以下は物理的な座標の例である．

GPS 観測量　文献には有用な物理的な座標を定義する多くの試みがある．物質が存在する場合の方が純粋な GR の文脈よりも，物理的な座標を定義するのは容易である．理想的には，我々は 4 つのスカラーの物質場と相互作用する GR を考えることができる．これらの場の配位は充分に非縮退であると仮定せよ．このとき与えられた物質場の値で定義された点における重力場の成分はゲージ不変な観測量である．このアイデアはダストを運ぶ時計やその他のような，多くの異なる形で発展してきた ([69–71] とその中の参考文献を見よ)．結果がどの程度，現実的または有用かは疑問である．もっと言えば，存在しない場あるいはダストのような現象論的な対象を利用した理論を理解することは満足がいかず，またこれらの手続きが，Planck 尺度でのダイナミクスの記述を目的とする量子論において意味を成すのかは疑問である．ゲージ不変な観測量の完全な組を書き下す初期の試みは純粋な GR の文脈で行われた [72]．アイデアは重力場の 4 つのスカラー関数 (例えば，曲率のスカラー多項式) を構成し，これらを用いて点を位置付けることである．4 つのスカラー関数が与えられた値を持つ点における，第 5 のスカラー関数の値はゲージ不変な観測量である．これは上手くいくが，結果は数学的に非常に込み入っており，また物理的に非常に非現実的である．そのような観測量の検出器を構成することは，原理的には，確かに可能だが，私はどのような実験家もそのような器具を作る提案に資金を得られるとは思わない．

最小限で**非常**に現実的な量の付加的な物質と結合した GR に基づく解決策がある．実に，この解決策は実際に現実のものであるほどに現実的である：それは本質的に現存の技術，Global Positioning System (GPS) に既に実装されており，GPS は GR の最初の技術的応用，あるいは GR の効果を考慮に入れる必要がある最初の大規模な技術である [73]．

4 つの小物体と結合した GR から成る一般共変な系を考えよ．小物体は無視できる質量を持つようにとる；それらを簡単のため点粒子と見なし，“衛星”と呼ぶ．4 つの衛星は時間的な測地線をたどり，それらの測地線は共通の (始) 点 O で出会い，O においてそれらは与えられた (固定された) 速さ―― 4 つ全てに等しい――と，四面体の 4 つの頂点の向きを持つと仮定する．理論は他の任意の物質を含んでも良い．このとき 4 つの数 s^α, $\alpha = 1, 2, 3, 4$ を各時空点 p に以下のように，一意的に関係付けられる (ような時空の領域 $\mathcal{R}$ が存在する)．p の過去の光円錐を考えよ．これは (一般には) 4 つの測地線と 4 点 p_α で交わるはずである．数 s^α は p_α と O の距離として定義される．(すなわち：衛星の測地線に沿う固有時間．) 我々は s^α を p の物理的に定義された座標として用いることができる．この座標における計量テンソルの成分たち $g_{\alpha\beta}(s)$ はゲージ不変量である．［計量は幾何学とスカラーだけで決まるから．あるいは］それらは 4 次元の微分同相写像の下で不変である (何故ならそれは計量とともに衛星の世界線を変えるから)．それらは領域 $\mathcal{R}$ におけるゲージ不変な観測量の完全な組を定義する．

物理的な描像は単純であり，その現実性は明白である．4 つの“衛星”が実際に衛星であり，各々は合流点 O から始まり，その軌道に沿う固有時間を測る時計を運んでいると想像せよ．また各々の衛星はその局所的な時間をラジオ信号で放送していると想像せよ．［ここでは言わば物質の代わりに電磁波 (光速) が空間を満たす．］私が点 p にいて，単に 4 つの信号を受け取り 4 つの読みを表示する，電気的なデバイスを持っているとしよう (図 14 を見よ)．これら 4 つの数はまさに上で定義した 4 つの物理的な座標 s^α である．現代の技術では，我々はこれらの測定を，相対論的な領域で良い精度で実行できる [73, 74]．このときもし我々が棒と時計を用いて，s^α 座標間の物理的な 4 距離を測れば，我々は物理的な座標系における計量テンソルの成分を直接測っていることになる．第 3 章の術語では，s^α は**部分的** (*partial*) 観測量であるのに対し，$g_{\alpha\beta}(s)$ は**完全な** (*complete*) 観測量である．

以下で示すように［式 (2.162) が GR でも成立 (p.93)］，物理的な座標 s^α たちは好ましい幾何学的性質を持つ；それらは

$$g^{\alpha\alpha}(s) = 0, \qquad \alpha = 1, \cdots, 4 \tag{2.154}$$

によって特徴付けられる．驚くべきことに，それらはいくぶん非局所的な過程のように見えるものによって定義されているという事実にも関わらず，$g_{\alpha\beta}(s)$ に対する発展方程式は局所的である．この発展方程式は Arnowitt–Deser–Misner (ADM) 変数 (詳しくは [131] 第 3 章を見よ) ラプス (Lapse；経時) とシフト (Shift；変位)［文献 [415, § 3.6] 参照］は 3 次元計量の局所的な関数に固定されることが判明する．

以下では，初めに Minkowski 空間において GPS 座標 s^α を導入する．次いで一般的な時空を考える．Einstein の和の約束は，一方が上付きで他方が下付きである繰り返された添字の組に対してのみ適用する．よって，式 (2.154) では α について和をとらない．Minkowski 時空を扱う間は，時空添字 μ, ν は Minkowski 計量で上げ下げする．ここでは 3 次元だけでなく，4 次元のベクトルの上にも矢印を書く．さらに，ここでは主題に関する原論文と同じ表現を得るために，符号系 $[+, -, -, -]$ を用いる．

3 次元の Euclid 空間における［正］四面体を考えよ．その中心を原点とし，その 4 つの頂点を $\vec{v}^\alpha$ とする，ここにベクトル $\vec{v}^\alpha$ は単位の長さ $|\vec{v}^\alpha|^2 = 1$ を持ち，$\alpha \neq \beta$ に対して $\vec{v}^\alpha \cdot \vec{v}^\beta = -1/3$ である［内積は式 (2.155–156)(と対称性) から分かる］．ここに $\alpha = 1, 2, 3, 4$

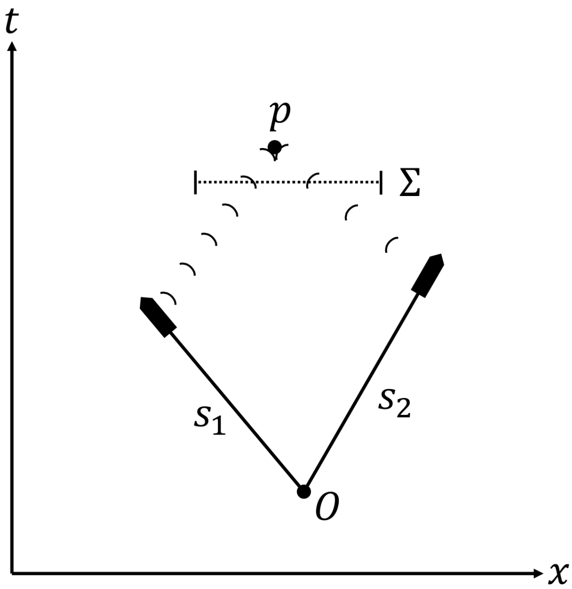


図 14　s_1 と s_2 は点 p の GPS 座標である．Σ は p がその未来の依存領域に含まれる Cauchy 面である．

は 4 つの頂点を識別する添字であり，ベクトル添字と混同してはならない．慣習的な配置では，これらの頂点は Descartes 座標

$$v^{1a} = (0,\ 0,\ 1), \qquad v^{2a} = (2\sqrt{2}/3,\ 0,\ -1/3), \tag{2.155}$$

$$v^{3a} = (-\sqrt{2}/3,\ \sqrt{2/3},\ -1/3), \qquad v^{4a} = (-\sqrt{2}/3,\ -\sqrt{2/3},\ -1/3) \tag{2.156}$$

を持つ $(a = 1, 2, 3)$［図 15 参照］．さて，4 次元の Minkowski 空間に移ろう．単位の長さ $|\vec{W}^\alpha|^2 = 1$ を持ち［内積は Minkowski 計量で定義］，$\vec{v}^\alpha$［ここでも単位ベクトル］の向きに共通の速さ v で原点を発する 4 つの粒子の規格化された 4 元ベクトルを表す，4 つの時間的な 4 元ベクトル $\vec{W}^\alpha$ を考えよ．それらの Minkowski 座標は

$$W^{\alpha\mu} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}(1, vv^{\alpha a}) \tag{2.157}$$

である $(\mu = 0, 1, 2, 3)$．［$c = 1$ の下で 4 元速度はもとより，規格化されたベクトル (2.157) そのものである．］行列 $W^{\alpha\mu}$ の行列式が 1 になることを要求して，速度 v を固定する．(この選択は v を光速の 1/2 に固定する；異なる選択は以下における規格化因子を少々変えるに過ぎない．) 4×4 行列 $W^{\alpha\mu}$ は以下において重要な役割を演じる．それは要素が与えられた数である，一定の行列であることに注意せよ．

4 つの 4 元ベクトルのうちの 1 つ，例えば $\vec{W} = \vec{W}^1$ を考えよ．Minkowski 空間において，原点から 4 元速度 $\vec{W}$ で発する自由粒子を考えよ．それを“衛星”と呼ぼう．その世界線 l は $\vec{x}(s) = s\vec{W}$ である．$\vec{W}$ は規格化されているので，s はちょうど世界線に沿う固有時間である［線要素 $\mathrm{d}\vec{x} = \vec{W}\mathrm{d}s$ の 2 乗 (4 元内積) は $\mathrm{d}s^2$］．ここで座標 $\vec{X}$ を持つ，Minkowski 空間における任意の点 p を考えよ．l と p の過去の光円錐との交点における s の値を計算せよ．それは簡単な演習であり，

$$s = \vec{X} \cdot \vec{W} - \sqrt{(\vec{X} \cdot \vec{W})^2 - |\vec{X}|^2} \tag{2.158}$$

となる［本稿次節で確認］．ここで原点を 4 元速度 $\vec{W}^\alpha$ で発する，4 つの衛星を考えよ．それらがその位置をラジオ放送していれば，Minkowski 座標 $\vec{X}$ を持つ点 p における観測者は 4 つの信号

$$s^\alpha = \vec{X} \cdot \vec{W}^\alpha - \sqrt{(\vec{X} \cdot \vec{W}^\alpha)^2 - |\vec{X}|^2} \tag{2.159}$$

を受け取る．変数変換 (2.159) によって定義される，Minkowski 空間上の (非 Lorentz 的な) 一般座標 s^α を導入する．［まだ GR ではなく，平坦な Minkowski 時空での自由粒子を考えている．］これらは GPS デバイスに読み取られる，Minkowski 空間における座標である．座標の変化の Jacobi 行列は

$$\frac{\partial s^\alpha}{\partial x^\mu} = W^\alpha_\mu - \frac{W^\alpha_\mu(\vec{X} \cdot \vec{W}^\alpha) - X_\mu}{\sqrt{(\vec{X} \cdot \vec{W}^\alpha)^2 - |\vec{X}|^2}} \tag{2.160}$$

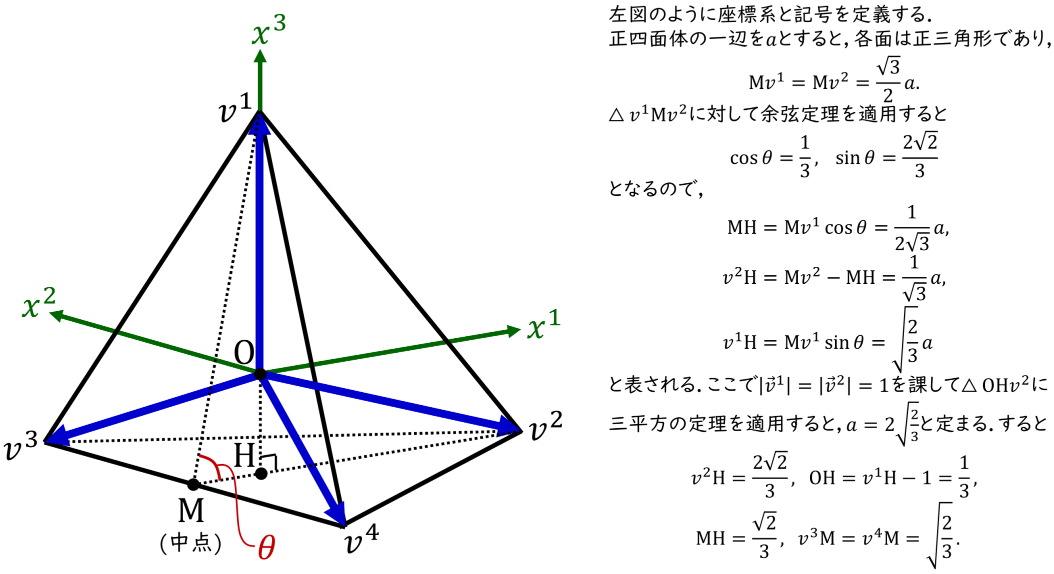


図 15　正四面体の頂点の座標 (2.155–156) について

で与えられ［$\vec{X}$ の成分 x^μ による微分］，ここに W^α_μ と X_μ は Minkowski 計量で時空添字を下げた $W^{\alpha\mu}$ と X^μ である．これはテトラード場 $e^\alpha_\mu(s)$

$$e^\alpha_\mu(s(X)) = \frac{\partial s^\alpha}{\partial x^\mu}(X) \tag{2.161}$$

を定義する．反変計量テンソルは $g^{\alpha\beta}(s) = e^\alpha_\mu(s)e^{\mu\beta}(s)$ によって与えられる．関係 $|\vec{W}^\alpha|^2 = 1$ を用いると，直接的な計算により

$$g^{\alpha\alpha}(s) = 0, \qquad \alpha = 1, \cdots, 4 \tag{2.162}$$

が示される．［本稿次節で確認する．式 (2.154) の段落での予告に関係して，これは局所的な条件式である．］．この方程式には以下のような好ましい幾何学的解釈がある．α を固定して 1 形式の場 $\omega^\alpha = \mathrm{d}s^\alpha$ を考えよ．s^α 座標では，この 1 形式は成分 $\omega^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta$ を，したがって“長さ” $|\omega^\alpha|^2 = g^{\beta\gamma}\omega^\alpha_\beta\omega^\alpha_\gamma = g^{\alpha\alpha}$ を持つ．ところが 1 形式の“長さ”はその微分形式によって定義される (ここでは無限小の) 3 次元面の体積に比例する．$\mathrm{d}s^\alpha$ によって定義される 3 次元面は面 $s^\alpha = \mathrm{constant}$ である．［以上，例えば文献 [423, § 3.3,p.90, § 4.3] を見よ．］ところが $s^\alpha = \mathrm{constant}$ は GPS 座標が s^α となる点，すなわち衛星 α の同じ事象 p_α からのラジオ放送を受け取る点，すなわち p_α の未来の光円錐上にある点の集合である．それ故 $s^\alpha = \mathrm{constant}$ はこの光円錐の一部である；それ［光円錐］はヌル面であり［面上の線要素が“長さ”を持たない］，それ故その体積はゼロである．だから $|\omega^\alpha|^2 = 0$，そして $g^{\alpha\alpha} = 0$ となるのである．

s^α 座標はヌルである $s^\alpha = \mathrm{constant}$ 面を定義するので，それを“ヌル GPS 座標”と呼べる．伝統的な時間的および空間的な特徴を持つ，別の GPS 座標の組を導入することもまた有用である．それらを s^μ で表し，“時間的な GPS 座標”と呼び，

$$s^\alpha = W^\alpha_\mu s^\mu \tag{2.163}$$

によって定義する．これは $s^{\mu=0}$ が時間的で $s^{\mu=a}$ が空間的となるような，4 つの GPS 座標の名前の単なる代数的な付け替えである．これらの座標では，ゲージ条件 (2.162) は

$$W^\alpha_\mu W^\alpha_\nu g^{\mu\nu}(s) = 0 \tag{2.164}$$

となる［本稿次節で補足］．これは幾何学的には以下のように解釈できる．(時間的な) GPS 座標は 4 つの 1 形式の場

$$\omega^\alpha = W^\alpha_\mu \mathrm{d}s^\mu \tag{2.165}$$

がヌルとなる座標 s^μ である［前段落と同じ理由による］．

ここで Minkowski 空間から完全な GR に移ろう．測地的に運動し，その世界線が上記の向きと速度で点 O から発する，質量の無視できる 4 つの衛星と結合した GR を考えよ．O の周りで局所的に計量は Minkowski 的に選べる；それ故，衛星の世界線に対する初期条件の詳細は上記のように選べる．この系の相空間は純粋な GR のそれと，O の位置と初速度の四面体の Lorentz 方向性を与える 10 個のパラメータである．衛星の測地線と光円錐の統合 (integration) は任意の計量では任意に複雑である．しかしながら，もし計量が充分に標準的 (regular) ならば，衛星によるラジオ信号放送が受け取られる領域 $\mathcal{R}$ はなお存在するはずである．(多重受信の場合には，最も強い信号を選べる．すなわち，p の過去の光円錐が l と 1 回よりも多く交わるならば，一般により短い光度距離の交差があるはずである．) このように，$\mathcal{R}$ 上にはなおよく定義された物理的な座標 s^α がある．この座標で式 (2.162) が成り立つ，と言うのも，それは p の周りに

おける光の伝播の性質にのみ依存するからである．［局所的な条件式 (2.162):$e^\alpha_\mu e^{\alpha\mu}=0$ は局所 Lorentz 系で成り立ち，テンソル方程式だから任意の座標系 x^μ で成り立つ.］式 (2.163) によって時間的な GPS 座標 s^μ も定義すると，計量テンソルに対する条件 (2.164) を得る．

GPS 座標における計量テンソルの発展を研究するには，ADM 変数 N, N^a, γ_{ab} に移る方が容易である．これは計量テンソルの共変成分の関数であり，一般に

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = N^2\mathrm{d}t^2 - \gamma_{ab}(\mathrm{d}x^a - N^a\mathrm{d}t)(\mathrm{d}x^b - N^b\mathrm{d}t) \tag{2.166}$$

で定義される．［上式 (2.166) を文献 [416, p.68] [415, § 3.6] と比較すると，N はラプス，N^a はシフト，γ_{ab} は $t=\mathrm{const}$ の面に誘導された計量に他ならないことが分かる (図 16 参照*61).］等価的に，それらは計量テンソルの共変成分と

$$g^{\mu\nu}v_\mu v_\nu = -\gamma^{ab}v_a v_b + (n^\mu v_\mu)^2 \tag{2.167}$$

によって関係しており［本稿次節で確認］，ここに γ^{ab} は γ_{ab} の逆，また $n^\mu = (1/N, N^a/N)$ である．これらの変数を用いると，ゲージ条件 (2.164) は

$$W^\alpha_a W^\alpha_b \gamma^{ab} = (W^\alpha_\mu n^\mu)^2 \tag{2.168}$$

となる［上式 (2.167) で $v_\mu \to W^\alpha_\mu$ とした量をゼロとおけば良い］．ここでこれは 3 次元計量の関数としてラプスとシフトについて解くことができ (W^α_μ は定数であることを思い出せ),

$$n^\mu = W^\mu_\alpha q^\alpha \tag{2.169}$$

が得られる．ここに W^μ_α は行列 W^α_μ の逆であり，また

$$q^\alpha = \sqrt{W^\alpha_a W^\alpha_b \gamma^{ab}}. \tag{2.170}$$

あるいは，明示的には［式 (2.169) を $1/N = W^0_\alpha q^\alpha, N^a/N = W^a_\alpha q^\alpha$ と書くと］,

$$N = \frac{1}{W^0_\alpha q^\alpha}, \qquad N^a = \frac{W^a_\alpha q^\alpha}{W^0_\alpha q^\alpha}. \tag{2.171}$$

幾何学的な解釈は以下のようである．我々は式 (2.165) で定義される 1 形式 ω^α がヌルになってほしい，すなわちそのノルムが消えてほしい．ところが ADM 形式ではこのノルムは 2 つの部分の和である：時間一定である ADM 面上の ω^α の引き戻し――それは式 (2.170) で与えられる q^α であり，3 次元計量に依存する――のノルム；プラス ω^α の n^μ への射影の自乗である．

note　ここまでに見た関係を用いてはっきりと書けば，ノルムは

$$0 = |\omega^\alpha|^2 = W^\alpha_\mu W^\alpha_\nu g^{\mu\nu} = -\gamma^{ab}W^\alpha_a W^\alpha_b + (n^\mu W^\alpha_\mu)^2 = -(q^\alpha)^2 + (n^\mu W^\alpha_\mu)^2.$$

するとラプスとシフトを調節することにより，ノルムの消失を得ることができる．我々は 4 つの条件 (α につき 1 つ) を有しているので，3 次元計量からラプスとシフトを決定できる．言い換えれば，3 次元計量が何であれ，我々は常にゲージ条件 (2.164) が満たされるようにラプスとシフトを調節できる．ところが ADM 形式では，Einstein 方程式における発展の任意性はラプスとシフトの選択の自由度によって完全に尽くされる．ここではラプスとシフトは 3 次元計量から一意的に決定されるので，Cauchy 面上の初期データが分かっていれば，発展は一意的に決定される．したがって，計量テンソルの GPS 成分 $g_{\mu\nu}(s)$ の GPS 座標 s^0 における発展は，決定論的な方程式――式 (2.170)–(2.171) から決定されるラプスとシフトと合わせた ADM 発展方程式――に支配される．ADM 発展方程式と式 (2.170)–(2.171) はともに局所的なので*62，発展は局所的であることにも注意せよ．

いかにして量 $g_{\mu\nu}(s)$ の発展は局所的であり得るのか？ 前の段落で説明したヌル面上の条件は非局所的である．座標距離は典型的に非局所性をもたらす：宇宙論的な時間 t_c と，例えば太陽 (Sun)，地球 (Earth) および木星 (Jupiter) からの (与えられた t_c における) 空間距離 $x_\mathrm{S}, x_\mathrm{E}, x_\mathrm{J}$ を用いて，太陽系における物理的な座標を定義することを想像せよ．この座標における計量テンソル $g_{\mu\nu}(t_\mathrm{c}, x_\mathrm{S}, x_\mathrm{E}, x_\mathrm{J})$ はゲージ不変な観測量だが，その発展は極めて非局所的である．これを納得するために，この瞬間において (宇宙論的な時間において)，木星が巨大な彗星に追い払われたと想像せよ．するとここでの $g_{\mu\nu}(t_\mathrm{c}, x_\mathrm{S}, x_\mathrm{E}, x_\mathrm{J})$ の値は，何の局所的な原因もなく瞬間的に変化する：座標 x_J の値ははるか遠くで起きた事象によって変化する．GPS 座標に関するいかなる特別性が，この非局所性を回避するのか？ その答は，点 p における GPS 座標の値もまた実際に“はるか遠く”で起きることに依存するということである．実際，座標は衛星に起きることに依存する．しかしながら，座標は p で受け取られる信号を放送するときに衛星に起きることにのみ依存し，それは p の過去にある！ もし p が部分的 Cauchy 面 Σ の未来の［past は future の誤記か］依存領域に含まれるならば，p における $g_{\mu\nu}(s)$ の値は Σ 上の計量とその微分によって完全に決定される，すなわち発展は因果的である，と言うのも，GPS 座標を構成するのに必要な全ての情報は Σ のデータに含まれているからである (図 14 を見よ)．はっきりと述べれば，Σ の周りの面 $s^\alpha = \mathrm{constant}$ は点 p へ向けてずっと一意的に積分できる．それは単に光の前方への発展を表しているので，確かにできる！ これが，この座標によって局所的な発展が達成される理由である．

まとめると，私はある種の物質的物体によって定義される，物理的な座標の組を導入した．物理的な座標で表される，計量テンソルの成分のような幾何学的な量は，ゲージ不変な観測量である．巨大で非現実的な量の物質を導入したり，計量テンソルの他に複雑で非現実

*61 図 16 で $t^\mu = (1,0) = Nn^\mu + (0, N^a)$ ならば $n^\mu = (1/N, -N^a/N)$ であり，これは教科書の n^μ の対応物と考えられる．

*62 $s^0 = 0$ における初期条件は ADM における条件の他に 4 つの拘束条件を満たすので，このことは $g_{\mu\nu}(s)$ の満たす方程式の完全な組が局所的でなければならないことを意味しない．

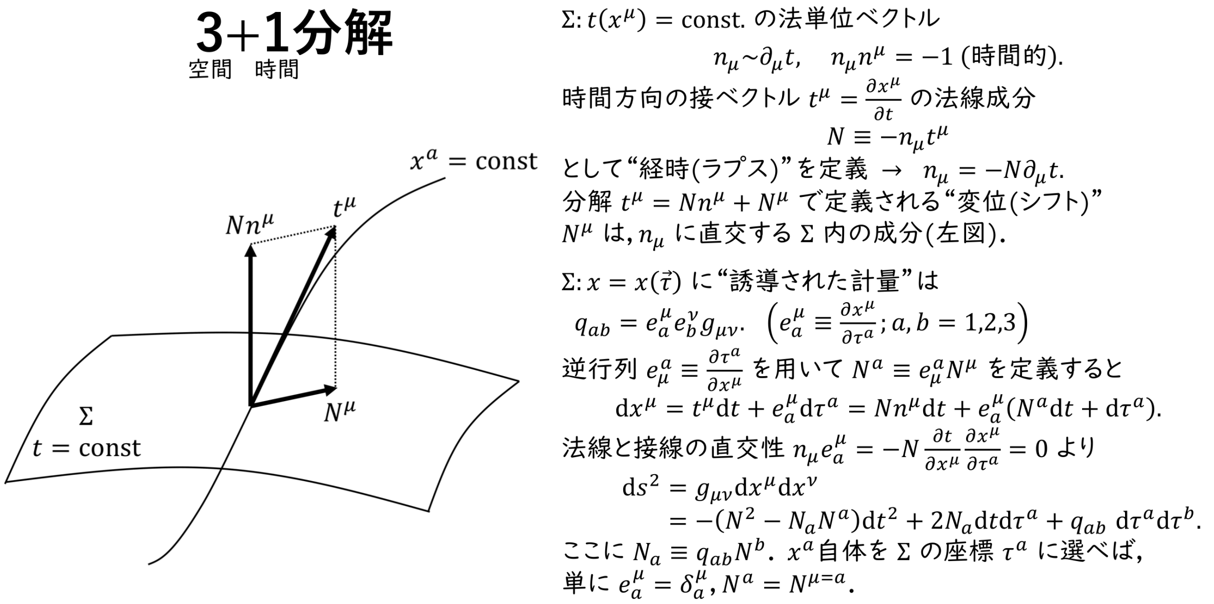


図 16　3 + 1 分解．本図は文献 [416, p.68] [415, § 3.6] にならっており，教科書とは $g_{\mu\nu}$ が逆符号であること，$\gamma_{ab} \to q_{ab}$ と表記していることに注意.

的な物理量を構成したりする必要はない．4 つの粒子は，(領域の) 4 次元の幾何学を座標付けるのに充分である．しかも，座標付けの手順は人為的でない：それは現存の技術で利用されている，現実的な手順である．

(時間的な) GPS 座標における計量テンソルの成分は以下のように測定できる (図 17 を見よ)．両端に 2 つの GPS デバイス (時間的な GPS 座標を読み取る) を持つ，(重力場が著しく変化する距離と比べて小さい) 物理的長さ L の棒を用意する．2 つの GPS デバイスが s^1 を除き全ての座標の同じ読み s を持つように，棒を向ける (あるいは記録された読みから探す)．2 つの s^1 の読みの差を δs^1 とする．すると棒に沿って

$$\mathrm{d}s^2 = g_{11}(s)\delta s^1 \delta s^1 = L^2. \tag{2.172}$$

したがって，

$$g_{11}(s) = \left(\frac{L}{\delta s^1}\right)^2. \tag{2.173}$$

$g_{ab}(s)$ の非対角成分もこの手順の単純な一般化によって測定できる．すると $g_{0b}(s)$ はゲージ条件から代数的に決定される．思考実験では，時空領域を飛んでいる宇宙船からのデータを用いて，計量テンソルの GPS 成分の値の地図を生成することができる．距離を測るにはかなり粗いデバイスである棒を用いる代わりに，一定の空間的な s^μ 座標に保たれた 2 つの GPS デバイスの間で，前後に光のパルスを送ることができる．もし T が一方のデバイスの正確な時計で測った往復する (物理的な) 時間ならば，$g_{11}(s) = (cT/2\delta s^1)^2$．これは $g_{ab}(s)$ が実験誤差のオーダーだけ変化する距離に比べて，T と L が小さい限り有効である．

物理的な座標で表された計量テンソルの個々の成分は測定可能である．しばしば聞く，“曲率は測定可能だが計量は測定可能でない”という言明は正しくない．物理的な座標における計量と曲率はいずれも，測定可能であり予言可能である．任意の非物理的な座標における計量と曲率はいずれも，測定可能でない．

GPS 座標は部分的観測量である (第 3 章を見よ)．［第 3 章においても部分的観測量の定義については末尾で参考文献が紹介されているに過ぎない．文献 [416, § 2.3.2] に説明がある．］完全な観測量は，座標 s^μ のあらゆる与えられた値に対する量 $g_{\mu\nu}(s)$ である．この量は微分同相不変であり，初期データから一意的に決定され，そして正準形式において全ての拘束量と交換する相空間上の関数［Dirac の観測可能量 (文献 [415, § 8.2] のノートを参照)］で表される．

GPS 観測量は Einstein の“時空の一致”の直接的な一般化である．ある意味，それらはちょうど Einstein の点の一致である．Einstein の“質点”［2.2.5 節］は単に光子 (光のパルス) で置き換えられる：時空点 s^α はラジオ信号 s^α を運んでいるという事実で指定された，4 つの光子が出会う点として特徴付けられる．

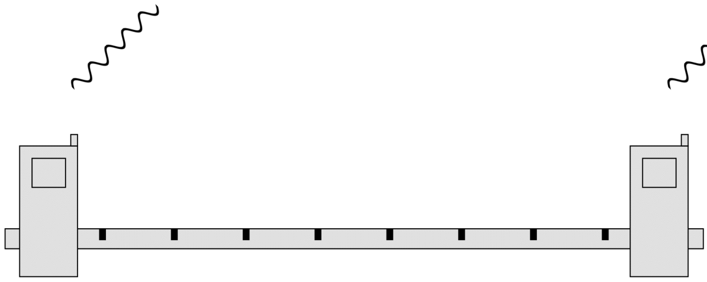


図 17　重力場を測定する単純な器具．それぞれ読みが s_{L}^{μ} と s_{R}^{μ} である 2 つの GPS デバイスが，1 メートルの棒に取り付けられている．もし例えば $\mu=0,2,3$ に対して $s_{\mathrm{R}}^{\mu}=s_{\mathrm{L}}^{\mu}$ であれば，$g_{11}(s)$ の局所的な値は：$g_{11}(s)=(s_{\mathrm{R}}^{1}-s_{\mathrm{L}}^{1})^{-2}\mathrm{m}^{2}$.

2.4.6 節について

■s の式 (2.158) の確認　交点 $\vec{x}=s\vec{W}$ と $\vec{X}$ が光的に隔たっている条件

$$0=(\vec{X}-s\vec{W})^2=|\vec{X}|^2-2s\vec{X}\cdot\vec{W}+s^2 \qquad (\because |\vec{W}|^2=1)$$

(ただし $|\vec{X}|^2$ や $\vec{X}\cdot\vec{W}$ は Minkowski 計量による 4 元内積の意味) を s について解くと，2 解

$$s=\vec{X}\cdot\vec{W}\pm\sqrt{(\vec{X}\cdot\vec{W})^2-|\vec{X}|^2}$$

を得る．このうち正号は未来の光円錐との交点に，負号は未来の光円錐との交点に対応する．

■式 (2.162) の確認

$$\begin{aligned}
g^{\alpha\alpha}=&\eta^{\mu\nu}e^{\alpha}_{\mu}e^{\alpha}_{\nu}=\eta^{\mu\nu}\frac{\partial s^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial s^{\alpha}}{\partial x^{\nu}}\\
=&\eta^{\mu\nu}\left(W^{\alpha}_{\mu}-\frac{W^{\alpha}_{\mu}(\vec{X}\cdot\vec{W}^{\alpha})-X_{\mu}}{\sqrt{(\vec{X}\cdot\vec{W}^{\alpha})^2-|\vec{X}|^2}}\right)\left(W^{\alpha}_{\nu}-\frac{W^{\alpha}_{\nu}(\vec{X}\cdot\vec{W}^{\alpha})-X_{\nu}}{\sqrt{(\vec{X}\cdot\vec{W}^{\alpha})^2-|\vec{X}|^2}}\right)\\
=&|\vec{W}^{\alpha}|^2-2\vec{W}^{\alpha}\cdot\frac{\vec{W}^{\alpha}(\vec{X}\cdot\vec{W}^{\alpha})-\vec{X}}{\sqrt{(\vec{X}\cdot\vec{W}^{\alpha})^2-|\vec{X}|^2}}+\frac{|\vec{W}^{\alpha}(\vec{X}\cdot\vec{W}^{\alpha})-\vec{X}|^2}{(\vec{X}\cdot\vec{W}^{\alpha})^2-|\vec{X}|^2}
\end{aligned}$$

の最右辺において，$|\vec{W}^{\alpha}|^2=1$ より第 1 項は 1，第 2 項はゼロ，第 3 項は -1 となるので，式 (2.162):$g^{\alpha\alpha}=0$ を得る．

■ゲージ条件 (2.164) について　“時間的な GPS 座標” s^{ρ} に対しても “ヌル GPS 座標” s^{α} と同様に

$$e^{\rho}_{\mu}=\partial_{\mu}s^{\rho}, \qquad g^{\rho\sigma}=e^{\rho}_{\mu}e^{\mu\sigma}$$

を定義すると，ゲージ条件 (2.162) は

$$0=g^{\alpha\alpha}=\eta^{\mu\nu}(\partial_{\mu}e^{\alpha})(\partial_{\nu}e^{\alpha})=\eta^{\mu\nu}(\partial_{\mu}W^{\alpha}_{\rho}s^{\rho})(\partial_{\nu}W^{\alpha}_{\sigma}s^{\sigma})=W^{\alpha}_{\rho}W^{\alpha}_{\sigma}\eta^{\mu\nu}e^{\rho}_{\mu}e^{\sigma}_{\nu}=W^{\alpha}_{\rho}W^{\alpha}_{\sigma}g^{\rho\sigma}:(2.164)$$

と書き換えられる．

■ADM 変数の満たす式 (2.167) の確認　文献 [415, § 7.1] のノートで確認したように，式 (2.166) から読み取れる計量テンソルの共変成分

$$g_{00} = N^2 - \gamma_{ab}N^aN^b, \qquad g_{0a} = -\gamma_{ab}N^b, \qquad g_{ab} = -\gamma_{ab}$$

に対して，その逆は

$$g^{00} = \frac{1}{N^2}, \qquad g^{0a} = -\frac{N^a}{N^2}, \qquad g^{ab} = -\gamma^{ab} + \frac{N^aN^b}{N^2}$$

で与えられる．すると任意のベクトル $v_\mu = (v_0, v_a)$ に対し，式 (2.167) の左辺は

$$g^{\mu\nu}v_\mu v_\nu = \frac{1}{N^2}{v_0}^2 - 2\frac{N^a}{N^2}v_0v_a + \left(-\gamma^{ab} + \frac{N^aN^b}{N^2}\right)v_av_b$$

と書ける．これは $n^\mu = (1/N, N^a/N)$ に対して，式 (2.167) の右辺

$$-\gamma^{ab}v_av_b + (n^\mu v_\mu)^2 = -\gamma^{ab}v_av_b + \left(\frac{1}{N}v_0 + \frac{N^a}{N}v_a\right)^2$$

に一致していることが見て取れる．

——

文献ノート

GR に関する多くの優れた古典的教科書がある．中でも理論に対する注目すべき異なる観点を提供している，2 つの最良のものは，Weinberg [75] と Wald [76] である．1 つ目は GR と平坦な空間における場の理論の類似性を強調している；2 つ目は，対照的に，GR の幾何学的な読みを強調している．ここでは私は第 3 の道を追った：私は一般相対論的な物理に必要な空間と時間の概念の変更 (それは量子化に劇的に影響する) に力点を置いたのに対し，重力場の幾何学的な解釈 (それは量子論ではほとんど失われることになる) にはあまり力点を置かなかった．

重要な数学は例えば，Choquet-Bruhat，DeWitt-Morette および Dillard-Bleick による教科書 [77] と [16] において，上手く提示されている．近年積み上げられた，GR を支持する多大な実験的証拠については，Ciufolini と Wheeler [78] を見よ．

テトラード形式とその量子重力への導入は主に Cartan，Weyl [80]，および Schwinger [80] により，第 1 形式［式 (2.16) の箇所］は Palatini による．Plebanski の 2 形式［式 (2.23)］は [81] で導入された．Ashtekar の正準理論 (第 4 章を見よ) の起源である自己双対接続は，Amitaba Sen [82] によって導入された．自己双対接続に対する Lagrange 形式は [83] に与えられている．単一の接続に基づく GR の定式化は [84] で議論されている．

GR への Einstein の道のりに関する興味深い再構成が [85, 86] にある．一般共変性の重要性に対する Kretschmann の異議［2.4.3 節］は [87] に現れる．これについては，Anderson の本 [88] も見よ．空間と運動の解釈をめぐる歴史的論争の報告は，Barbour による素晴らしい歴史的な本 [89] である．科学哲学では，論争は John Earman と John Norton による孔の議論に関する 1987 年の論文 [90] によって再開した．この論争の現代版については，[65, 91–93] を見よ．GR において何が“観測可能量”かに関する議論の物理的側面については，[71] を見よ．

時間の異なる概念に関する議論［2.4.4 節］は [94] に従っている．その主題に関する驚くべき感激的な本は Fraser [95] であり，これは時間の概念が一枚岩の概念からはかけ離れていると読者に確信させる本である．量子重力における時間の問題に関する文献は多大である．ここでは多様な問題を区別する，少しの指針だけを与える：“時間の矢”の起源と宇宙論的な時間の非対称性 [96]；正準量子重力における座標時間変数の消失 [97]；大域的な時間のない系に対する量子力学の整合的な解釈の可能性 [26, 98, 99]；一般相対性理論の“内的な時間”の選択における問題と，そのような内的な時間が持たねばならない性質 [66]； [100] も見よ．GPS 観測量の提示は [101] に従った； [102, 103] も見よ．

第 3 章　力学

伝統的な定式化では，力学は状態と観測量の時間における発展を記述する．この発展はハミルトニアンに支配される．このことは，発展がハミルトニアンを含む Poincaré 群の表現によって支配される，特殊相対論的な理論においても正しい．この伝統的な定式化は充分に一般的ではない，と言うのも，一般相対論的な系——実際に，我々が住んでいる世界——はこの概念的体系に適合しないからである．したがって我々は伝統的なものより一般的な力学の定式化が必要である．この定式化は一般相対論的な文脈においても明瞭な意味を保つ，“観測量”と“状態”の概念に基づいていなければならない．この種の定式化を本章で説明する．

伝統的な非相対論的力学の伝統的な構造は既に，ここで説明する相対論的な定式化をかなり直接的に示唆している．実に，この定式化の多くの側面が既に多くの著者によって利用されている．例えば，Arnold [104] は，座標 (t, q^i, p_i) (時間，ラグランジアン変数，およびその運動量) を持つ (準シンプレクティック) 空間を，力学の自然な舞台として発見している．Souriau は美しくあまり知られていない相対論的な定式化を発展させた [105]．おそらくここで用いる観点を最初に考えたのは，“相空間”の最も便利な定義は物理的な運動の空間であると述べた，Lagrange 自身である [106]．以下で用いる道具の多くは，一般にかなり曖昧な解釈の雲の内においてではあるが，拘束系としての一般共変な理論のハミルトニアン［形式による］取り扱いでも用いられている．

note　これから本章で見るように，力学に関しても相対論的/非相対論的という形容は著者独特の言い回しであり，一般的な語法とは異なっている．

3.1　非相対論的力学：力学は時間発展に関係する

伝統的な力学の短い復習から始める．それは表記を確定し，相対論的な定式化において役割を演じることになるいくつかの概念を導入するのに役立つ．ここでは導出を与えない：それらは標準的であり，次節における導出の特別な場合として得られる．

ラグランジアン　自由度 m の力学系は $i = 1, \cdots, m$ として，m 個のラグランジアン変数 q^i の時間 t における発展を記述する．変数 q^i が値をとる空間は m 次元の (非相対論的な) 配位空間 $\mathcal{C}_0$ である．系のダイナミクスは $2m$ 変数の単一の関数 $L(q^i, v^i)$，ラグランジアンによって決定される［$v^i \equiv \mathrm{d}q^i/\mathrm{d}t$］．2 つの時刻 t_1 と t_2 および 2 点 q^i_1 と q^i_2 が与えられたとき，物理的な運動は $q^i(t_1) = q^i_1$ および $q^i(t_2) = q^i_2$ となる運動 $q^i(t)$ の空間において，作用

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L\left(q^i(t), \frac{\mathrm{d}q^i(t)}{\mathrm{d}t}\right) \tag{3.1}$$

が極値をとる運動である．力学系はそれ故，組 $(\mathcal{C}_0, L)$ によって特定される．物理的な運動は Lagrange 方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_i\left(q^i(t), \frac{\mathrm{d}q^i(t)}{\mathrm{d}t}\right) = F_i\left(q^i(t), \frac{\mathrm{d}q^i(t)}{\mathrm{d}t}\right) \tag{3.2}$$

を満たす，ここに運動量と力は

$$p_i(q^i, v^i) = \frac{\partial L(q^i, v^i)}{\partial v^i}, \qquad F_i(q^i, v^i) = \frac{\partial L(q^i, v^i)}{\partial q^i} \tag{3.3}$$

で定義される．

ハミルトニアン　ラグランジアン座標 q^i と運動量 p_i を変数として用いることにより，Lagrange 方程式は 1 階の形にできる．関数 $p_i(q^i, v^i)$ を逆に解くことにより関数 $v^i(q^i, p_i)$ を得る；その関数 $F_i(q_i, v_i)$ への代入は，座標と運動量の関数としての力 $f_i(q^i, p_i) \equiv F_i(q^i, v^i(q^i, p_i))$ を定義する．運動方程式 (3.2) は

$$\frac{\mathrm{d}q^i(t)}{\mathrm{d}t} = v^i(q^i(t), p_i(t)), \qquad \frac{\mathrm{d}p_i(t)}{\mathrm{d}t} = f_i(q^i(t), p_i(t)) \tag{3.4}$$

になる．これらの方程式は $H_0(q^i, p_i) = p_i v^i(q^i, p_i) - L(q^i, v^i(q^i, p_i))$ によって定義される関数 $H_0(q^i, p_i)$，非相対論的なハミルトニアンによって定義される．実際，式 (3.4) は

$$v^i(q^i, p_i) = \frac{\partial H_0(q^i, p_i)}{\partial p_i}, \qquad f_i(q^i, p_i) = -\frac{\partial H_0(q^i, p_i)}{\partial q^i} \tag{3.5}$$

を通じて式 (3.2) と等価である．

シンプレクティック［本稿次節で補足］　Hamilton 方程式 (3.4)–(3.5) は便利で簡潔な幾何学的言語で書ける．座標 q^i と運動量 p_i で座標付けされる $2m$ 次元の空間は非相対論的な相空間 Γ_0 である．(添字 $_0$ の理由は以下で明らかになる．) 時間発展はこの空間における流れ $(q^i(t), p_i(t))$ である；この流れに接する Γ_0 上のベクトル場は

$$X_0 = v_i(q^i, p_i)\frac{\partial}{\partial q^i} + f_i(q^i, p_i)\frac{\partial}{\partial p_i}. \tag{3.6}$$

それ故ダイナミクスは Γ_0 上のベクトル場 X_0 を割り当てることで指定される．ここで，Γ_0 は余接空間 $T^*\mathcal{C}_0$ として解釈できる．あらゆる余接空間は $\mathrm{d}\theta_0$ が非退化 (nondegeerate［脚注*65］) として，自然な[*63] 1 形式 $\theta_0 = p_i \mathrm{d}q^i$ を担う．そのような 1 形式を備えた空間は，あらゆる関数 f が関係 $(\mathrm{d}\theta_0)(X_f) = -\mathrm{d}f$ を通じてベクトル場 X_f を定めるという，著しい性質を持つ．直接の計算により，H_0 によって決定される流れはちょうど時間発展ベクトル場 (3.6) であることが示される．それ故，運動方程式 (3.4)–(3.5) は簡単に

$$(\mathrm{d}\theta_0)(X_0) = -\mathrm{d}H_0 \tag{3.7}$$

と書ける[*64]．式 (3.7) に現れる 2 形式 $\omega_0 = \mathrm{d}\theta_0$ はシンプレクティックである[*65]．Γ_0 を多様体，ω_0 をシンプレクティックな 2 形式，そして H_0 を Γ_0 上の関数として，力学系は 3 つの組 $(\Gamma_0, \omega_0, H_0)$ によって指定される．

準シンプレクティック　力学の非常にエレガントな定式化，そして相対論的な理論に向けた決定的なステップは，準シンプレクティックな定式化によって与えられる．この定式化は関数 $(q^i(t), p_i(t))$ それ自体の代わりに，関数のグラフを用いて運動を記述するというアイデアに基づいている．関数 $(q^i(t), p_i(t))$ のグラフは座標 (t, q^i, p_i) を持つ $(2m+1)$ 次元の空間 $\Sigma = R \times \Gamma_0$ における，パラメータ付けされていない曲線 $\tilde{\gamma}$ である［Γ_0 の軌跡が t でパラメトライズされて初めて運動が決まるのとは対照的である］；それはこの空間における全ての点 $(t, q^i(t), p_i(t))$ から成る．ベクトル場

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + v_i(q^i, p_i)\frac{\partial}{\partial q^i} + f^i(q^i, p_i)\frac{\partial}{\partial p_i} \tag{3.8}$$

---

*63 X を $T^*\mathcal{C}_0$ 上のベクトル場，s を $T^*\mathcal{C}_0$ の点，π をバンドル射影として，それは本質的に $\theta_0(X)(s) = s(\pi X)$ で定義される．

*64 2 形式とベクトルの縮約は $(\alpha \wedge \beta)(X) = \alpha(X)\beta - \beta(X)\alpha$ で定義される．

*65 すなわち，閉じており非退化である．閉じているとは $\mathrm{d}\omega_0 = 0$ を意味する；非退化とは，$\omega_0(X) = 0$ ならば $X = 0$ であることを意味する．

はこれら全ての曲線に接する．(X をスケーリングして得られる他の任意のベクトル場，すなわち f を Σ 上のスカラー関数として，任意のベクトル場 $X' = fX$ に対しても同様である［理由は第 3 段落］．) ここで，Σ における Poincaré の 1 形式

$$\theta = p_i \mathrm{d}q^i - H_0(q^i, p_i)\mathrm{d}t \tag{3.9}$$

を考えよう．2 形式 $\omega = \mathrm{d}\theta$ は閉じているが，退化している (奇数次元では全ての 2 形式は退化する)；すなわち，

$$(\mathrm{d}\theta)(X) = 0 \tag{3.10}$$

を満たすベクトル場 X (ω のヌルベクトル場と呼ばれる) が存在する．2 形式 ω のヌルベクトル場の積分曲線*66は ω の“軌道 (orbits)”と呼ばれる．式 (3.8) で与えられる X が式 (3.10) を満たすことを確かめるのは容易である［本稿次節で確認］．したがって運動のグラフは単に $\mathrm{d}\theta$ の軌道である．言い換えれば，式 (3.10) は運動方程式の書き換えである．

閉じた退化な 2 形式 ω を備えた空間 Σ は準シンプレクティックと呼ばれる．力学系はこうして，準シンプレクティック空間 (Σ, ω) によって完全に定義される．$\omega = \mathrm{d}\theta$ として，我々は (Σ, θ) という表記も用いる．

式 (3.10) は同次 (斉次；homogeneous) なので，スケーリングの違いだけを除いて X を決定することに注意せよ．このことは，運動に接するベクトル場がスケーリングの違いだけを除いて定義されるという事実と整合している．すなわち，運動は Σ における**パラメータ付けされていない**曲線によって表されるという事実と整合している．

最後に，作用 (3.1) は単に Poincaré の 1 形式 (3.9) の軌道に沿う線積分であることを理解するのは容易である：$\tilde{\gamma}$ を ω の軌道 $(t, q^i(t), p_i(t))$ とすれば，運動 $q^i(t)$ の作用は

$$S[q] = \int_{\tilde{\gamma}} \theta. \tag{3.11}$$

拡大［本稿次節で補足］　最後に，一般相対論的な系に自然に拡張されるダイナミクスの定式化に進もう．上で説明した準シンプレクティックな定式化に照らせば，$(m+1)$ 変数 (t, q^i) で座標付けされる相対論的配位空間

$$\mathcal{C} = R \times \mathcal{C}_0 \tag{3.12}$$

を考え，運動を $\mathcal{C}$ におけるパラメータ付けされていない曲線である，関数 $q^i(t)$ のグラフで記述することは自然である．座標 (t, q^i, p_t, p_i) を持つ余接空間 $T^*\mathcal{C}$ と，この空間上の関数

$$H(t, q^i, p_t, p_i) = p_t + H_0(q^i, p_i) \tag{3.13}$$

を考えよ．Σ を

$$H(q^i, t, p_i, p_t) = 0 \tag{3.14}$$

によって定義される，$T^*\mathcal{C}$ 内の面とする．我々は面 Σ を座標 (t, q^i, p_i) で座標付けできる．$T^*\mathcal{C}$ は余接空間なので，自然な 1 形式

$$\tilde{\theta} = p_i \mathrm{d}q^i + p_t \mathrm{d}t \tag{3.15}$$

を担う．この 1 形式の面 (3.14) への制限は正確に式 (3.9) である［$p_t = -H_0$ を代入すれば良い］．したがって面 (3.14) はダイナミクスを定義する準シンプレクティック空間である．

*66 ベクトル場の積分曲線は至るところで場に接する曲線である．

言い換えれば，ダイナミクスは組 $(\mathcal{C}, H)$ ——相対論的な配位空間 $\mathcal{C}$ と $T^*\mathcal{C}$ 上の関数 H ——によって完全に定義される．運動のグラフは単に面 (3.14) 上の $\mathrm{d}\tilde{\theta}$ の軌道である*67．私は H を相対論的なハミルトニアンと呼ぶ．

驚くべきことに，ダイナミクスは $(\mathcal{C}, H)$ を基調とする変分原理を用いて，直接表現することができる：式 (3.14) を満たし，その $\mathcal{C}$ への制限 γ が与えられた 2 点 (t_1, q_1^i) と (t_2, q_2^i) を結ぶ，$T^*\mathcal{C}$ における曲線 $\tilde{\gamma}$ のクラスの中で，$\tilde{\gamma}$ が積分

$$S[\tilde{\gamma}] = \int_{\tilde{\gamma}} \tilde{\theta} \tag{3.16}$$

の極値を与えるならば，$\mathcal{C}$ におけるパラメータ付けされていない曲線 γ は物理的な運動を表す．［これは文献 [425, § 43] の変分原理と同内容である．］

相対論的な配位空間 $\mathcal{C}$ は構造 (3.12) を持ち，相対論的なハミルトニアン H は式 (3.13) の形を持つ．これから見るように，構造 (3.12)–(3.13) は力学の相対論的な定式化では生き残らない．

相対論的相空間　Σ における $\mathrm{d}\theta$ の軌道の空間を Γ と書く．Σ の各点をそれが属する曲線に移す自然な射影 $\pi : \Sigma \to \Gamma$ がある［3.2.2 節 p.110 では π を射影写像と呼んでいる］．Σ への引き戻しが $\mathrm{d}\theta$ である，すなわち $\pi^*\omega_{\mathrm{ph}} = \mathrm{d}\theta$ となるような Γ 上のシンプレクティック 2 形式 ω_{ph} が 1 つ，そしてただ 1 つ存在することを示すのは難しくない．それ故 Γ はシンプレクティック空間である．Γ は物理的な運動の空間である；私はそれを相対論的相空間と呼ぶ．

相対論的な相空間 Γ と非相対論的な相空間 $\Gamma_0 = T^*\mathcal{C}_0$ の関係は以下である．Γ_0 は瞬間的な状態——固定された時刻 $t = t_0$ に系がとり得る状態——の空間である．他方，Γ は運動方程式の全ての解の空間である．ここで例えば，時刻 $t = t_0$ を固定する．もし $t = t_0$ において系が Γ_0 の初期状態にあるならば，系は良く定義された運動で発展する．逆に各運動は $t = t_0$ における初期状態を決定する．それ故 Γ と Γ_0 の間には 1 対 1 の写像がある．Γ と Γ_0 の間の同定は t_0 の選択に依る．［3.2.1 節で説明されるように，振り子の例では初期値 $(\alpha(t_0), v(t_0)) \in \Gamma_0$ で積分定数 $(A, \phi) \in \Gamma$ が決まる．詳しくは 3.2.3 節で再論される．］

Hamilton–Jacobi［本稿次節で補足］　Hamilton–Jacobi 方程式は

$$\frac{\partial S(q^i, t)}{\partial t} + H_0\left(q^i, \frac{\partial S(q^i, t)}{\partial q^i}\right) = 0. \tag{3.17}$$

m 個のパラメータ Q^i［添字を上付きに訂正した］に依存する解 $S(q^i, Q^i, t)$ の族が見つかれば，単なる微分によって関数

$$P_i(q^i, Q^i, t) = -\frac{\partial S(q^i, Q^i, t)}{\partial Q^i} \tag{3.18}$$

を計算できる．この関数を逆に解くと，物理的な運動，すなわち量 (Q^i, P_i) を $2m$ 個の積分定数とする運動方程式の一般解

$$q^i(t) = q^i(Q^i, P_i, t) \tag{3.19}$$

を得る．

E を定数として式 (3.17) の解は $S(q^i, Q^i, t) = W(q^i, Q^i) - Et$［右辺全体の符号を訂正した］の形に見出され，$W$ は

$$H_0\left(q^i, \frac{\partial W(q^i, Q^i)}{\partial q^i}\right) = E \tag{3.20}$$

*67 より正確には，これらの軌道の $\mathcal{C}$ への射影である．

を満たす．S は Hamilton–Jacobi の主関数と呼ばれ，W は Hamilton–Jacobi の特性関数と呼ばれる．

Hamilton–Jacobi 方程式 (3.17) は Schrödinger 方程式の古典的な極限から得られる．

Hamilton 関数　$\mathcal{C}$ における 2 点 (t_1, q_1^i) と (t_2, q_2^i) を考えよ．$q_1^i(t_1)$ から $q_2^i(t_2)$ への (作用を最小化する) 物理的な運動 $q^i(t)$ に対して，$\mathcal{G} = \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ 上の関数

$$S(t_1, q_1^i, t_2, q_2^i) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L(q^i(t), \dot{q}^i(t)) \tag{3.21}$$

は Hamilton 関数と呼ばれる．等価的に，$\tilde{\gamma}$ を $q^i(t)$ に写像される Σ の軌道として，

$$S(t_1, q_1^i, t_2, q_2^i) = \int_{\tilde{\gamma}} \theta. \tag{3.22}$$

［2 式 (3.21–22) の等価性は後の式 (3.84–85) において見て取れる．］作用 (3.1) と Hamilton 関数 (3.21) の違いに注意せよ：前者は運動の汎関数である；後者は終点の関数である．Hamilton 関数は (変数の両方の組について) Hamilton–Jacobi 方程式の解になることを理解するのは難しくない．Hamilton 関数が分かれば，運動方程式が解けたことになる，と言うのも，単に関数

$$P_i(t, q^i, T, Q^i) = \frac{\partial S(t, q^i, T, Q^i)}{\partial Q^i} \tag{3.23}$$

［式 (3.21) と同じく，時間の両端 t, T の関数］を q^i について逆に解けば，運動方程式の一般解が $q^i = q^i(t, Q^i, P_i, T)$ の形に得られるからである．得られる関数 $q^i(t, Q^i, P_i, T)$ は時刻 T における座標と運動量 Q^i, P_i を積分変数とする，運動方程式の一般解である．

このように，作用は力学系を定義する；Hamilton 関数は全ての運動を直接与える[*68]．Hamilton 関数 (3.21) は量子力学的な伝播関数の［位相の］古典的極限である［式 (3.90) の箇所を見よ]．

例：振り子　α を単純な調和振動子——簡単のために“振り子”と呼ぶ——の発展を記述するラグランジアン変数とする．ラグランジアンは $L(\alpha, v) = (mv^2/2) - (m\omega^2\alpha^2/2)$；非相対論的なハミルトニアンは $H_0(\alpha, p) = (p^2/2m) + (m\omega^2\alpha^2/2)$．拡大配位空間は座標 (t, α) を持ち，相対論的なハミルトニアンは

$$H(t, \alpha, p_t, p) = p_t + \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2\alpha^2}{2}. \tag{3.24}$$

$H = 0$，したがって $p_t = -H_0(\alpha, p)$ によって定義される一定の面の座標 (t, α, p) を選ぶ．1 形式 $\tilde{\theta} = p_t\mathrm{d}t + p\mathrm{d}\alpha$ のこの面への制限は

$$\theta = p\mathrm{d}\alpha - \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2\alpha^2}{2}\right)\mathrm{d}t. \tag{3.25}$$

準シンプレクティックな 2 形式はそれ故，

$$\omega = \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}\alpha - \frac{p}{m}\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}t - m\omega^2\alpha\mathrm{d}\alpha \wedge \mathrm{d}t. \tag{3.26}$$

軌道は $\omega(X) = 0$ を満たすベクトル場

$$X = X_t\frac{\partial}{\partial t} + X_\alpha\frac{\partial}{\partial \alpha} + X_p\frac{\partial}{\partial p} \tag{3.27}$$

を積分することによって得られる．$\omega(X) = 0$ に式 (3.26) と式 (3.27) を代入すると［ここでは $\omega(X) = \omega[\bullet, X]$ の意味]，

$$\begin{aligned}\omega(X) =& X_t\left(-\frac{p}{m}\mathrm{d}p - m\omega^2\alpha\mathrm{d}\alpha\right) + X_\alpha\left(\mathrm{d}p + m\omega^2\alpha\mathrm{d}t\right) + X_t\left(-\mathrm{d}\alpha + \frac{p}{m}\mathrm{d}t\right)\\ =& \left(-\frac{p}{m}X_t + X_\alpha\right)\mathrm{d}p + \left(-m\omega^2\alpha X_t - X_p\right)\mathrm{d}\alpha + \left(m\omega^2\alpha X_\alpha + \frac{p}{m}X_p\right)\mathrm{d}t\\ =& 0\end{aligned} \tag{3.28}$$

[*68] Hamilton (自身についての第 3 者としての語り)：“Lagrange 氏の関数は問題を述べ，Hamilton 氏の関数はそれを解く” [107].

を得る．$\mathrm{d}t(\tau)/\mathrm{d}\tau = X_t, \mathrm{d}\alpha(\tau)/\mathrm{d}\tau = X_\alpha, \mathrm{d}p(\tau)/\mathrm{d}\tau = X_p$ と書くと，方程式 (3.28) は

$$\frac{\mathrm{d}\alpha(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - \frac{p}{m}\frac{\mathrm{d}t(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = 0, \qquad -\frac{\mathrm{d}p(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - m\omega^2\alpha\frac{\mathrm{d}t(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = 0, \tag{3.29}$$

およびこれら 2 つと独立でない第 3 の方程式になる．方程式 (3.29) は

$$\frac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{p}{m}, \qquad \frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} = -m\omega^2\alpha \tag{3.30}$$

と書くことができ，これらは振り子の Hamilton 方程式である．［そのことは正しい速度場 (3.8) が式 (3.10):$\omega(X) = 0$ を満たすという一般論と整合している．］その一般解を

$$\alpha(t) = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \bar{a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{3.31}$$

の形に書くことができる［α の実数条件より 2 係数 $a, \bar{a}$ は互いに複素共役］．Hamilton 関数 $S(\alpha_1, t_1, \alpha_2, t_2)$ は $\alpha(t_1) = \alpha_1$ から $\alpha(t_2) = \alpha_2$ に至る物理的運動 $\alpha(t)$ の作用を計算することで得られる，Hamilton–Jacobi 方程式

$$\frac{\partial S(\alpha, t)}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S(\alpha, t)}{\partial \alpha}\right)^2 + \frac{m\omega^2\alpha^2}{2} = 0 \tag{3.32}$$

の特別な解である．この運動は式 (3.31) で

$$a = \frac{\alpha_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_1} - \alpha_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_2}}{2\mathrm{i}\,\sin[(\omega(t_1 - t_2))]} \tag{3.33}$$

として与えられる．［α_2 の項の符号を訂正した．本稿次節で補足する．］これを作用に代入し積分を実行すると，Hamilton 関数

$$S(\alpha_1, t_1, \alpha_2, t_2) = m\omega\frac{2\alpha_1\alpha_2 - ({\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2)\cos[(\omega(t_1 - t_2))]}{2\sin[(\omega(t_1 - t_2))]} \tag{3.34}$$

を得る．［本稿次節で確認する．t_2 を初期時刻，t_1 を終時刻と見なせば，作用積分の両端 t_1, t_2 の入れ替えに伴って上式 (3.34) の右辺全体は符号が反転し，伝播関数 (5.11) との整合性が明確にとれることに注意する [416, 式 (2.8)]．］

これで非相対論的な力学の短い復習を終える．これより相対論的な系に対するこの定式化の一般化を考える．

3.1 節について

■シンプレクティック形式 (pp.99–100) について　ラグランジアン $L(q, \dot{q})$ を配位空間 $\mathcal{C}_0$ の与えられた点 q における接空間 $T\mathcal{C}_0$ 上の関数，すなわち $\dot{q} = \{\dot{q}^i\}$ 上の関数と見なす．このとき接空間のベクトル $u = (u^1, \cdots)$ からその方向微分への写像

$$\theta_0 :\ u \longmapsto \lim_{s\to 0}\frac{L(q, \dot{q} + su) - L(q, \dot{q})}{s} = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^i}u^i = p_i u^i \in R$$

は，余接空間 $T^*\mathcal{C}_0$ に属する 1 ベクトル (コベクトル) である．自然基底 $\{\mathrm{d}q^i\}$ を用いれば，

$$\theta_0 = p_i \mathrm{d}q^i$$

と表される (実際 $\theta_0[u] = p_i u^i$)．これを配位空間の全ての点 q で定義される場と見なすと，**正準 1 形式** θ_0 が得られる．θ_0 を，したがって各 q での p の値を与えることは，配位空間の全ての点 q にわたる余接空間 $T^*\mathcal{C}_0$ の和集合——余接バンドル (物理的には相空間 Γ_0 に相当) ——の点 (q, p) を指定することに他ならない [424, § 4.1.3]*69.

正準 1 形式 θ_0 の外微分

$$\omega_0 = \mathrm{d}\theta_0 = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i$$

*69 本稿では煩わしいので，1 ベクトルと 1 形式 θ_0 の表記を区別しない．同様に教科書本文でも，余接空間 $T^*\mathcal{C}_0$ と余接バンドルを厳密に区別していない．

を**正準 2 形式**という．ここでいわゆるシンプレクティック変数 $z=(z^\mu)=(q^1,\cdots,q^m,p_1,\cdots,p_m)^{\mathrm{T}}$ (ただし T は転置を表し，以降 $\mu,\nu,\cdots=1,\cdots,2m$ とする) を用いて

$$\begin{aligned}\omega_0 =&\frac{1}{2}(\omega_0)_{\mu\nu}\mathrm{d}z^\mu\wedge\mathrm{d}z^\nu\\ =&\frac{1}{2}(\omega_0)_{ij}\mathrm{d}q^i\wedge\mathrm{d}q^j+(\omega_0)_{m+1,j}\mathrm{d}p_i\wedge\mathrm{d}q^i+\frac{1}{2}(\omega_0)_{m+i,m+j}\mathrm{d}p_i\wedge\mathrm{d}p_j \qquad (\because (\omega_0)_{\mu\nu}\text{の反対称性})\end{aligned}$$

と書くと，その成分は行列表示で

$$((\omega_0)_{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

と表される (右辺の各ブロックは $m\times m$ 行列)．ここで逆行列

$$((\omega_0)^{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=((\omega_0)_{\mu\nu})^{\mathrm{T}}$$

を導入しておく．

幾何学的には，偶数次元の多様体 Γ_0 に閉じた非退化な交代 2 形式 ω_0 が備わっているとき (Γ_0,ω_0) を**シンプレクティック多様体**，この ω_0 を**シンプレクティック形式**という．ここで

- ω_0 が「閉じた形式」とは $\mathrm{d}\omega_0=0$ となることを言う．
- ω_0 が「非退化」とは，$\omega_0[v,\bullet]=0$ ($\bullet$ はブランク (空白)) であれば必ず $v=0$ となることを言う．
  ［本文の脚注*65 に対応．対偶をとった方が分かりやすい．］

結局，力学でいう正準 2 形式 ω_0 は幾何学でいうシンプレクティック形式のことである．全ての有限 (偶数) 次元のシンプレクティック多様体には，シンプレクティック形式が $\omega_0=\mathrm{d}p_i\wedge\mathrm{d}q^i=\frac{1}{2}(\omega_0)_{\mu\nu}\mathrm{d}z^\mu\wedge\mathrm{d}z^\nu$ の形に表される局所座標系が存在することが知られている (**Darboux** (ダルブー) **の定理**) [424, § 4.2.1].

シンプレクティック方程式を用いると，Hamilton 方程式 $\dot{q}^i=\frac{\partial H_0}{\partial p_i},\dot{p}_i=-\frac{\partial H_0}{\partial q^i}$ は

$$\dot{z}^\mu=(\omega_0)^{\mu\nu}\frac{\partial H_0}{\partial z^\nu}\qquad\text{i.e.}\qquad(\omega_0)_{\mu\nu}\dot{z}^\nu=\frac{\partial H_0}{\partial z^\mu}$$

とまとめられる．2 形式の成分 $(\omega_0)_{\mu\nu}$ は共変テンソルとして変換するので，第 2 式は座標変換に対する共変性が明白である．

次にこれを微分形式の関係として書き表すことを考える．相空間 Γ_0 上のベクトル場 (3.6):

$$X_0=\dot{z}^\mu\frac{\partial}{\partial z^\mu}=\dot{q}^i\frac{\partial}{\partial q^i}+\dot{p}_i\frac{\partial}{\partial p_i}$$

に対し，

$$\omega_0[X_0,\bullet]=\dot{q}^i\omega_0\left[\frac{\partial}{\partial q^i},\bullet\right]+\dot{p}_i\omega_0\left[\frac{\partial}{\partial p_i},\bullet\right]$$

を計算するところから始めよう．$\omega_0=\frac{1}{2}(\omega_0)_{\mu\nu}\mathrm{d}z^\mu\wedge\mathrm{d}z^\nu$ より任意のベクトル場 v に対し

$$\omega_0[v,\bullet]=\frac{1}{2}(\omega_0)_{\mu\nu}(\mathrm{d}z^\mu[v]\mathrm{d}z^\nu[\bullet]-\mathrm{d}z^\mu[\bullet]\mathrm{d}z^\nu[v])=(\omega_0)_{\mu\nu}\mathrm{d}z^\mu[v]\mathrm{d}z^\nu[\bullet]$$

なので (第 1 の等号は本文の脚注*64 に対応)，$\omega_0\left[\frac{\partial}{\partial q^i},\bullet\right]=-\mathrm{d}p_i,\omega_0\left[\frac{\partial}{\partial p_i},\bullet\right]=\mathrm{d}q^i$ となる．よって

$$\omega_0[X_0,\bullet]=-\dot{q}^i\mathrm{d}p_i+\dot{p}_i\mathrm{d}q^i=-(\omega_0)_{\nu\mu}\dot{z}^\mu\mathrm{d}z^\nu$$

とまとめられる．最右辺に Hamilton 方程式 $\dot{z}^\mu = (\omega_0)^{\mu\rho}\frac{\partial H_0}{\partial z^\rho}$ を代入すると，

$$\omega_0[X_0,\bullet] = -\frac{\partial H_0}{\partial z^\nu}\mathrm{d}z^\nu = -\mathrm{d}H_0 : (3.7)$$

を得る．これは 1 形式 $\omega_0[X_0,\bullet], \mathrm{d}H_0$ どうしの関係なので，やはり座標系に依らない [424, § 4.2.2].

■ベクトル場 (3.8) が式 (3.10) を満たすことの確認

$$X_0 = \dot{q}^i\frac{\partial}{\partial q^i} + \dot{p}_i\frac{\partial}{\partial p_i} : (3.6), \qquad \omega_0 = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i, \qquad X = \frac{\partial}{\partial t} + X_0 : (3.8), \qquad \omega = \omega_0 - \mathrm{d}H_0 \wedge \mathrm{d}t$$

に対して，

$$\omega[X,\bullet] = \omega_0[X,\bullet] - \mathrm{d}H_0 \wedge \mathrm{d}t[X,\bullet]$$

を計算する．まず右辺第 1 項は

$$\omega_0[X,\bullet] = \omega_0\left[\frac{\partial}{\partial t},\bullet\right] + \omega_0[X_0,\bullet] = \omega_0[X_0,\bullet] = -\mathrm{d}H_0[\bullet]$$

である．ただし最後の等号は式 (3.7) による．次に第 2 項

$$\mathrm{d}H_0 \wedge \mathrm{d}t[X,\bullet] = \mathrm{d}H_0[X]\mathrm{d}t[\bullet] - \mathrm{d}t[X]\mathrm{d}H_0[\bullet]$$

において，

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}H_0[X] =& \frac{\partial H_0}{\partial z^\mu}\mathrm{d}z^\mu[X_0] = \frac{\partial H_0}{\partial z^\mu}\left(\dot{q}^i\mathrm{d}z^\mu\left[\frac{\partial}{\partial q^i}\right] + \dot{p}_i\mathrm{d}z^\mu\left[\frac{\partial}{\partial p_i}\right]\right) = \frac{\partial H_0}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial H_0}{\partial p_i}\dot{p}_i \\
=& 0, \qquad (\because \text{Hamilton 方程式}) \\
\mathrm{d}t[X] =& \mathrm{d}t\left[\frac{\partial}{\partial t}\right] = 1
\end{aligned}$$

なので，

$$\mathrm{d}H_0 \wedge \mathrm{d}t[X,\bullet] = -\mathrm{d}H_0[\bullet]$$

となる．以上より式 (3.10):$\omega[X,\bullet] = 0$ が得られる．

■拡大 (pp.101–102) について　配位空間 $\mathcal{C}_0$ に時間軸を加えた $(m+1)$ 次元の**拡大配位空間** (3.12):$\mathcal{C} = R \times \mathcal{C}_0$ を考えよう．$\mathcal{C}$ における経路にパラメータ τ を導入し，経路の (局所) 座標成分を

$$\tilde{q}(\tau) = (q^0, q^1, \cdots, q^m), \qquad q^0(\tau) = t(\tau), \qquad q^i(\tau) = q^i(t(\tau)) \ \ (i = 1, \cdots, m)$$

とする ($t(\tau)$ が単調増加関数となるようにパラメトライズする)．また時間 t による微分をドット，τ による微分をプライムで表すことにする．このとき作用積分は

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t,q,\dot{q})\mathrm{d}t = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L\left(t, q, \frac{\mathrm{d}q/\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \equiv \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{L}(\tilde{q},\tilde{q}')\mathrm{d}\tau$$

と書き換えられる ($q = \{q^1, \cdots, q^m\}$, etc.)．そこで最右辺の

$$\tilde{L}(\tilde{q},\tilde{q}') \equiv L\left(q^0, q, q'/q^{0\prime}\right)q^{0\prime}$$

を拡大配位空間 $\mathcal{C}$ におけるラグランジアンと見なす [424, § 3.1.2].

もとのラグランジアン L は $(2m+1)$ 変数 $(q,\dot{q},t)$ の関数であるのに対し，$\tilde{L}(\tilde{q},\tilde{q}')$ は $(2m+2)$ 変数 $\tilde{L}(t,q,t',q')$ の関数であり，一見すると $(2m+2)$ 次元の多様体上の関数のようである．しかし実際には $\tilde{L}$ は，τ を陽に含まないことに対応する“エネルギー保存則”

$$\sum_{i=0} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial {q'}^i} {q'}^i - \tilde{L} = 0 \tag{14}$$

を恒等的に満たす．［しかもエネルギーの一定値 (右辺) はゼロである．］

上式 (14) の証明　実際，全ての $\tilde{q}'$ を k 倍すると

$$\tilde{L}(\tilde{q},\tilde{q}') \longmapsto \tilde{L}(\tilde{q},k\tilde{q}') = L\left(q^0, q, \frac{kq'}{k{q^0}'}\right) k{q^0}' = k\tilde{L}(\tilde{q},\tilde{q}')$$

となるので，$\tilde{L}$ は $\tilde{q}'$ の 1 次の同次関数である．よって同次関数についての Euler の定理より

$$\tilde{L}(\tilde{q},\tilde{q}') = \sum_{i=0} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial {q'}^i} {q'}^i$$

が成り立つので，上式 (14) を得る．

このため，運動は上式で表される $(2m+1)$ 次元の超曲面に制限される．この超曲面は座標 $(q,\dot{q},t)$ を持つため，**拡大状態空間** $R \times T\mathcal{C}_0$ と見なせる [424, § 3.1.3, § 4.1.5].

ここで

$${q^i}' = \frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \dot{q}^i t'$$

に注意すると，$\tilde{L}$ と $\tilde{q} = (q^0, q)$ に対する運動量は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{L}}{\partial {q^i}'} &= \sum_{j=1} \frac{\partial (Lt')}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial {q^i}'} = \sum_{j=1} \frac{\partial (Lt')}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial}{\partial {q^i}'}\left(\frac{{q^j}'}{t'}\right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = p_i, \\
\frac{\partial \tilde{L}}{\partial {q^0}'} &= \frac{\partial}{\partial t'}(Lt') = L + \sum_{i=1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial t'} t' = L + \sum_{i=1} p_i \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{{q^i}'}{t'}\right) t' = L - \sum_{i=1} p_i \frac{{q^i}'}{t'} = L - \sum_{i=1} p_i \dot{q}^i = -H_0
\end{aligned}$$

と計算される．式 (3.13) における時間 $q^0 = t$ に共役な運動量 p_t は，第 2 式の最左辺 $p_0 \equiv \partial \tilde{L}/\partial {q^0}'$ で定義されている [424, § 3.1.4]．これを用いて 1 形式 (3.15):

$$\tilde{\theta} = \sum_{i=0} p_i \mathrm{d}q^i = \sum_{i=1} p_i \mathrm{d}q^i + p_0 \mathrm{d}t$$

を定義する．$(\tilde{q},\tilde{p}) = (q^0, q, p_0, p)$ が $(2m+2)$ 次元の余接空間 $T^*\mathcal{C}$ の (局所) 座標を与える．ところが上式 $p_0 = -H_0$ より恒等的に式 (3.14):

$$H(q^0, q, p_0, p) \equiv p_0 + H_0(q,p,t) = 0$$

が成り立つので，運動は $(2m+1)$ 次元の超曲面 Σ に制限される．

参考

$$\sum_{i=0} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial {q'}^i} {q'}^i - \tilde{L} = \left(p_0 + \sum_{i=1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L\right) {q^0}' = (p_0 + H_0){q^0}'$$

より，条件式 $p_0 = -H_0$ は制約条件 (14) と等価である．

超曲面 Σ は座標 (q, p, t) を持つため，**拡大相空間** $R \times T^*\mathcal{C}_0$ と見なせる．Σ 上では $\tilde{\theta}$ は式 (3.9):

$$\theta = \sum_{i=1} p_i \mathrm{d}q^i - H_0(q, p, t)\mathrm{d}t$$

に一致する．これを「Σ にひき上げられた正準 1 形式」という [424, § 4.1.5].

■Hamilton–Jacobi (pp.102–103) について　全般的に文献 [425, § 47] を見よ．特に文献 [425, § 47] ではパラメータ Q^i が新しい運動量となる正準変換を考えたのに対し，ここでは Q^i が新しい座標となるような，$S(q^i, Q^i, t)$ を母関数とする正準変換 $(q^i, p_i) \to (Q^i, P_i)$ を考える．すると正準変換の公式 [425, § 45] より，

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}, \qquad P_i = -\frac{\partial S}{\partial Q^i} : (3.18), \qquad {H'}_0 = H_0 + \frac{\partial S}{\partial t}$$

である．またこの場合にも S は Hamilton–Jacobi 方程式を満たすことから, 新しいハミルトニアンは ${H'}_0 = 0$ となるので，新しい変数に対する正準方程式は

$$Q^i = \mathrm{const}, \qquad P_i = \mathrm{const}.$$

となる．

■a の式 (3.33) について　$\alpha(t)$ の式 (3.31) に与えられた境界条件を課すと

$$\alpha_1 = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_1} + \bar{a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_1}, \qquad \alpha_2 = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_2} + \bar{a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_2}.$$

第 1 式に $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_2}$ を，第 2 式に $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_1}$ を掛けて辺々引くと a の式 (3.33) を得る．$\bar{a}$ はその複素共役で与えられねばならない．実際そのことは改めて上式の複素共役をとり，α_1, α_2 の実数性を仮定すると直接確かめられる．

■Hamilton 関数 (3.34) の確認　実際の運動 (3.31):

$$\alpha(t) = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \bar{a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \qquad \therefore v(t) = \dot{\alpha}(t) = \mathrm{i}\omega(a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \bar{a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})$$

に対して，

$$\begin{aligned}
L =& \frac{m}{2}v^2(t) - \frac{m\omega^2}{2}\alpha^2(t) = -m\omega^2(a^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t} + \bar{a}^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t}),\\
\therefore S =& \int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{i}}{2}m\omega a^2(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t_2} - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t_1}) + \mathrm{c.c.} \qquad (\text{c.c. は複素共役})\\
=& \frac{\mathrm{i}m\omega}{8\sin^2[\omega(t_1 - t_2)]}\Big(-{\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2 + {\alpha_1}^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega(t_1 - t_2)} - {\alpha_2}^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega(t_1 - t_2)} - 2\cdot 2\mathrm{i}\,\alpha_1\alpha_2\sin[\omega(t_1 - t_2)]\Big) + \mathrm{c.c.}\\
&(\because a \text{ の式 } (3.33))\\
=& \frac{m\omega}{8\sin^2[\omega(t_1 - t_2)]}\left(4\alpha_1\alpha_2\sin[\omega(t_1 - t_2)] - ({\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2)\sin[2\omega(t_1 - t_2)]\right)\\
=& m\omega\frac{2\alpha_1\alpha_2 - ({\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2)\cos[\omega(t_1 - t_2)]}{2\sin[\omega(t_1 - t_2)]} : (3.34).
\end{aligned}$$

一般論として分かっているように，Hamilton 関数 (3.34) は $(\alpha, t) = (\alpha_1, t_1), (\alpha_2, t_2)$ に対して Hamilton–Jacobi 方程式 (3.32) を満たす．

3.2　相対論的な力学

3.2.1　相対論的な系の構造：部分的観測量，相対論的状態

相対論的な系に自然に適用できるほど充分に一般的な，“状態”と“観測量”の概念のバージョンはあるか？ 単純な系の文脈で共変的な力学の主要な概念と道具を導入するところから始める．

振り子の再考　例えば振り子の微小振動を記述したいとする．そのためには，**2** つの測定デバイス——時計と振り子の伸長 (elongation) を読み取るデバイス——が必要である．時計の (秒で測った) 読みを t とし，振り子の伸長を測定するデバイスの (センチメートルで測った) 読みを α とする．［これまで通り α と t を，単位も含めた次元を持つ量と見ても差支えあるまい.］変数 t と α を振り子の**部分的観測量** (*partial observables*) と呼ぶ．(私は**相対論的観測量**，あるいは別物である非相対論的な観測量の概念との混同の恐れがない場合には，単に**観測量**［という言い方］も用いる．)

有用な観測は時刻 t と伸長 α を**一緒に**読み取ることである．すると，観測は組 (t, α) をもたらす．この方法で得られる組を**事象** (*event*) と呼ぶ．

$\mathcal{C}$ を，座標 t と α を持つ 2 次元の空間とする．$\mathcal{C}$ を振り子の**事象空間** (*event space*) と呼ぶ．(私は**相対論的配位空間** (*relativistic configuration space*)，あるいは別物である非相対論的な配位空間 $\mathcal{C}_0$ との混同の恐れがない場合には，単に**配位空間**［という言い方］も用いる．)［拡大配位空間 (3.12) もまた直前で「相対論的配位空間」と呼ばれている.］

我々は事象の**連なり** (*sequences*) を特徴付ける数学的法則を見つけられることを，経験は示している．だからこそ我々は科学をできる．これらの法則には以下の形がある．$\mathcal{C}$ におけるパラメータ付けされていない曲線 γ を系の**運動**と呼ぶ．一連の組 (t, α) の測定を実行し，測定された組を表す点が運動 γ 上に乗ることを見出す．このとき，γ は**物理的運動**であると言う．我々は運動を $\mathcal{C}$ における関係

$$f(\alpha, t) = 0 \tag{3.35}$$

として表す．このように運動 γ は，部分的観測量の間の関係ないし**相関**である．

次に，振り子をかき乱し (指で押し)，実験を全体にわたって繰り返す．実験を繰り返すたびに，異なる運動 γ が得られる．すなわち，式 (3.35) の形の異なる数学的な関係が得られる．実験により，物理的運動の空間は非常に限られることが示される：それは単に 2 次元の空間である．自然においては曲線 γ の 2 次元の空間だけが実現される．

摩擦のない振り子の微小振動の場合には，物理的な運動は 2 つの実数 $A \geq 0$ と $0 \leq \phi < 2\pi$ で座標付けでき，式 (3.35) は

$$f(\alpha, t; A, \phi) = \alpha - A\sin(\omega t + \phi) = 0 \tag{3.36}$$

で与えられる．各組 (A, ϕ) に対して，この方程式は $\mathcal{C}$ における曲線 γ を与える．

Γ を A と ϕ によって座標付けされる，物理的運動の 2 次元的な空間とする．Γ は振り子の**相対論的相空間** (*relativistic phase space*) (あるいは**運動の空間** (*space of the motions*)) である．Γ の点はまた**相対論的状態** (*relativistic state*) と呼ばれる．(または **Heisenberg 状態**，あるいは別物である非相対論的な状態の概念との混同の恐れがない場合には，単に**状態**と呼ぶ．)

方程式 (3.26) は振り子について我々が有する実験的情報を表す，数学的法則である．この方程式は系の**発展方程式** (*evolution equation*) である．関数 f は系の**発展関数** (*evolution function*) である．

相対論的状態は組 (A,ϕ) によって決定される．それは (t,α) 平面上の曲線 γ を決定する．すなわち，それは式 (3.36) を通じて，2 つの部分的観測量 t と α の間の相関を決定する．もし我々が振り子と相互作用してそれをかき乱すか，全く新しい実験を始めれば，新たな状態を得る．もし我々が振り子と時計を，それらをかき乱すことなく観測すれば，状態は同一に留まる (ここではもちろん，我々は量子論を考慮していない)．

要約：**相空間 Γ の各状態は配位空間 $\mathcal{C}$ における観測量の間の相関を決定する**．これらの相関の全体は発展方程式 (3.36)，すなわち関数

$$f:\Gamma\times\mathcal{C}\to R \tag{3.37}$$

が消えることによって表される．発展方程式 $f=0$ は理論を用いて成され得る全ての予言を表現する．等価的に，それらの予言は相空間と配位空間との Descartes 積における面 $f=0$ によって表される．

力学系の一般的な構造　上で説明した $(\mathcal{C},\Gamma,f)$ の言語は一般的である．それは伝統的な力学のあらゆる予言を記述するのに充分である．他方，それは一般相対論的な系を記述するのに充分，一般的である．あらゆる基本的な系は (量子効果を無視して良い精度では) 以下の概念を用いて記述できる：

(i) 部分的**観測量**の相対論的**配位空間** $\mathcal{C}$.
(ii) 相対論的**状態**の相対論的**相空間** Γ.
(iii) **発展方程式** $f=0$，ここに $f:\Gamma\times\mathcal{C}\to V$.

ここで V は線形空間である．相空間 Γ における状態は，系がかき乱されない限り固定されている．Γ の各状態は ($f=0$ を通じて) 系の運動 γ を決定する，すなわちそれは $\mathcal{C}$ における観測量の間の関係，あるいは関係の全体を記述する．

運動は $\mathcal{C}$ における 1 次元の曲線である必要はない：それは $\mathcal{C}$ における任意の次元 k の面であり得る．もし $k>1$ ならば，ゲージ不変性があるという．ゲージ不変性のある系に対して，我々は運動そのものと，その中の任意の曲線を“運動”と呼ぶ．本章ではゲージ不変性のある系はあまり扱わないものの，重要な箇所ではそれに言及する．

予言は以下のように得られる．まず状態を決定するのに充分な測定を実行する．(現実には巨大な系の状態はしばしば，帰納的に正当化される不完全な観測ともっともらしい仮定に基づいて“推測”される．) 一度状態が決定または推測されると，発展方程式は全ての可能な事象，すなわち任意の続きの測定における，観測量の間の全ての許容される相関を予言する．

例えば振り子の例では，方程式は任意に与えられた t とともに測定され得る α の値，あるいは任意に与えられた α とともに測定され得る t の値を予言する．これらの予言は系がかき乱されない限り有効である．

ここで与えた観測量，状態，配位空間および相空間の定義は，伝統的な定義と異なっている．特に，瞬間的な状態，時間における発展，固定された時刻における観測量の概念は，ここでは何の役割も果たしていない．これらの概念は一般相対論的な文脈では意味を成さない．非相対論的な系では，通常の概念は与えた定義から復元できる．ここで考えた相対論的な定義と伝統的で非相対論的な概念の間の関係は 3.2.4 節で議論する．

力学の課題はあらゆる物理的な系に対して $(\mathcal{C},\Gamma,f)$ の記述を見出すことである．第 1 ステップ，運動学は，系を特徴付ける観測量の特定にある．すなわち，それは配位空間 $\mathcal{C}$ とその物理的な解釈の特定にある．物理的解釈とは $\mathcal{C}$ 上の座標と測定デバイスの関連付けを意味する．第 2 ステップ，力学は相空間 Γ と，系の物理的運動を表す関数 f を見出すことにある．

次節では，ここで定義した状態と観測量の相対論的な概念に基づく，力学の相対論的な Hamilton 形式を説明する．

3.2.2 Hamilton 形式の力学

初等的な物理系は Hamilton 形式の力学 (hamiltonian mechanics) で記述できる*70．一度，運動学——すなわち，部分的観測量 q^a の空間 $\mathcal{C}$ ——が分かれば，ダイナミクス——すなわち，Γ と f ——は，観測量 q^a とその運動量 p_a の空間 Ω における面 Σ を与えることで，完全に決定される．面 Σ は関数 $H:\Omega\to R^k$ を与えることで指定される．Σ はこのとき $H=0$ によって定義される*71．Ω (観測量と運動量) における曲線を $\tilde{\gamma}$，その $\mathcal{C}$ (観測量のみ) への制限を γ と書く．H は以下を通じて物理的運動を決定する．

変分原理　事象 q_1^a と q_2^a をつなぐ曲線 γ は，

$$H(q^a,p_a)=0 \tag{3.39}$$

を満たし，その $\mathcal{C}$ への制限 γ が q_1^a と q_2^a をつなぐ曲線 $\tilde{\gamma}$ のクラスにおいて，もし $\tilde{\gamma}$ が作用

$$S[\tilde{\gamma}]=\int_{\tilde{\gamma}} p_a \mathrm{d}q^a \tag{3.38}$$

の極値を与えるならば，物理的運動である．［この語順で訳せば式 (3.39) →式 (3.38) の順になる．］

あらゆる (相対論的および非相対論的な) Hamilton 系はこの方法で定式化できる．

もし $k=1$ ならば，H はスカラー関数であり，しばしばハミルトニアン拘束と呼ばれる．$k>1$ となる場合はゲージ不変性がある場合である．この場合，系 (3.39) はしばしば“拘束方程式 (constraint equations)”と呼ばれる．私は H を**相対論的ハミルトニアン**，あるいは曖昧さがなければ，単に**ハミルトニアン**と呼ぶ．私は**相対論的力学系**を組 $(\mathcal{C},H)$ で表す［式 (3.16) 直前の段落］．場の理論への一般化は 3.3 節で議論する．

相対論的ハミルトニアン H は，本書で H_0 と書いている通常の非相対論的ハミルトニアンに関係しているものの，それと混同してはならない．H は常に存在するのに対し，H_0 は非相対論的な系に対してのみ存在する．

実に，この力学の定式化は 3.1 節で定義した非相対論的力学の拡大形式と似ている．新奇性は，$\mathcal{C}$ と H が構造 (3.12)–(3.13) を持たないことである．上の議論は，定式化の良く定義された物理的解釈を得るためには，この構造が必要**でない**ことを示している．非相対論的な系は，その部分的観測量 q^a の 1 つが，独立変数 t という特別な役割を持つことで選び出されるという事実によって特徴付けられる．このことは相対論的な系においては起こらない．以下の簡単な例は，力学の相対論的な定式化が標準的な力学の適切な一般化であることを示している．

時間のない 2 つの (double) 振り子　［見出しについて，二重振り子という訳はミスリーディングと判断し避けた．］ここで理論を説明するための単純なモデルとして繰り返し用いることになる，真に時間のない系を導入する．2 つの部分的観測量，例えば a と b を持ち，E を定数として，そのダイナミクスが相対論的ハミルトニアン

$$H(a,b,p_a,p_b)=\frac{1}{2}(p_a^2+p_b^2+a^2+b^2-2E) \tag{3.40}$$

によって定義される力学的モデルを考えよ．［式 (3.42),(3.57),(3.61),(5.76) との整合性をとるため，右辺全体に掛かる負号を除いた．E の係数 2 をくくり出すと式 (3.44) で見通しが良い．］拡大配位空間は $\mathcal{C}=R^2$ である．拘束面は次元 3 を持つ；それは $T^*\mathcal{C}$ における半径 $\sqrt{2E}$ の球面である．相空間は次元 2 を持つ．［式 (3.41) のパラメータ (α,β) の空間 Γ．式 (3.60) 直後における相空間 Γ の次元の一般論とも整合 (ここでは $n=2,k=1$)．］運動は (a,b) 空間の曲線である．各状態に対して，理論は a と b の間の相関を予言する．

直接の計算により (以下［式 (3.58) の箇所］を見よ)，H によって決定される発展方程式は (a,b) 空間における楕円

$$f(a,b;\alpha,\beta)=\left(\frac{a}{\sin\alpha}\right)^2+\left(\frac{b}{\cos\alpha}\right)^2-2\frac{a}{\sin\alpha}\frac{b}{\cos\alpha}\cos\beta-2E\sin^2\beta=0 \tag{3.41}$$

*70 おそらく，それらが量子系の古典的極限だからである．

*71 同じ面 Σ の上で消える異なる H たちは，同じ物理系を定義する．

であり，ここに α と β は Γ をパラメトライズする．

note　中辺において第 3 項の符号を改め，第 4 項で $E^2 \to E$ と訂正した (式 (3.58) の箇所を見よ)．いずれにせよ

$$(2ab\text{ の係数})^2 - (a^2\text{の係数})(b^2\text{の係数}) = \frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}(\cos^2\beta - 1) \leq 0$$

より，2 次曲線 (3.41) は一般に楕円である．等号が成立するとき ($\beta = 0, \pi$) には，軌道は放物線ではなく線分 $\frac{a}{\sin\alpha} = \pm\frac{b}{\cos\alpha}$ である．軌道が楕円 (線分を含む) になることは，式 (3.58) においては見やすい．

したがって運動は閉曲線であり，実際 $\mathcal{C}$ における楕円である．系は伝統的な Hamilton 形式を許容しない，と言うのも，非相対論的な Hamilton 系に対して $\mathcal{C} = R \times \mathcal{C}_0$ における運動は $t \in R$ について単調であり，それ故，閉曲線になり得ないからである．

この例は人工的ではない．ちょうどこの構造を持つ宇宙論的なモデルが存在する．例えば，我々は a を最大限に対称的な (maximally symmetric) 宇宙の半径に，b をその宇宙に満ちる物質を表す場の空間的に一定な値に同定し，これらが宇宙の大スケールの発展を支配するただ 2 つの変数となるような近似を採用できる．このとき一般相対性理論のダイナミクスは，構造 (3.40) を持つ系へと簡略化される．

関連する非相対論的な系　系 (3.40) は以下のように見ることもできる．2 つの相互作用していない調和振動子から成る，我々が“関連する非相対論的な系”と言い表すところの物理系を考えよ．関連する非相対論的な系は，上で考えた時間のない 2 つの振り子とは**異なる**物理系であると強調したい．時間のない 2 つの振り子は自由度 1 を持ち，その関連する非相対論的な系は自由度 2 を持つ．関連する非相対論的な系の部分的観測量は 2 つの伸長 a と b，**および**時刻 t である．t における発展を支配する**非相対論的**ハミルトニアンは

$$H_0(a, b, p_a, p_b) = \frac{1}{2}(p_a^2 + p_b^2 + a^2 + b^2 - 2E). \tag{3.42}$$

これは［It it は It の誤記か］時間のない 2 つの振り子の**相対論的**ハミルトニアン (3.40) と同じ形を持つ[*72]．定数項 $2E$ はもちろん，運動方程式に何の影響も与えない；それはエネルギーを再定義するだけである．物理的には，我々は 2 つの系の関係を以下のように見ることができる．関連する非相対論的な系を用意するものの，t を測る時計を無視することに決めたと想像せよ：我々は 2 つの観測量 a と b の測定だけを考える．さらに，2 つの振り子のエネルギーが消えること，すなわち

$$\frac{1}{2}(p_a^2 + p_b^2 + a^2 + b^2) = E \tag{3.44}$$

が課せられていると仮定せよ．このとき，a と b の観測の間の得られる関係は相対論的な系 (3.40) によって記述される．

幾何学的な定式化　非相対論的な Hamilton 形式の力学と同様に，運動方程式はエレガントな幾何学的形式で表現できる．変数 (q^a, p_a) は余接空間 $\Omega = T^*\mathcal{C}$ の座標である．方程式 (3.39) はこの空間における面 Σ を定義する．余接空間は自然な 1 形式

$$\tilde{\theta} = p_a \mathrm{d}q^a \tag{3.45}$$

を担う．$\tilde{\theta}$ の Σ への制限を θ で表す．Σ 上の 2 形式 $\omega = \mathrm{d}\theta$ は退化している：それはヌルの方向を持つ．これらヌルの方向たちの積分面［2 段落後にあるように一般に $k(>1)$ 次元］は Σ 上の ω の**軌道** (*orbits*) である．そのような軌道の各々は $T^*\mathcal{C}$ から $\mathcal{C}$ へ射影することにより，$\mathcal{C}$ における面を与える．これらの面は運動である．

$k = 1$ の場合を考えよ．この場合 Σ の次元は $2n - 1$ であり［n は q^a の個数 ($\mathcal{C}$ の次元)］，ω の核は一般に 1 次元であり，運動は一般に 1 次元である．$\tilde{\gamma}$ を Σ 上の運動とし，X を運動に接するベクトルとする；このとき

$$\omega(X) = 0. \tag{3.46}$$

運動を見出すには，この方程式を積分しさえすれば良い．方程式 (3.46) は運動方程式である．X は同次方程式 (3.46) により乗算的因子を除いて定義され，したがって軌道のパラメータ付けは式 (3.46) からは決定されない．

[*72] 関連する非相対論的な系の**相対論的**ハミルトニアンは

$$H(a, b, t, p_a, p_b, p_t) = p_t + \frac{1}{2}(p_a^2 + p_b^2 + a^2 + b^2 - 2E). \tag{3.43}$$

$k > 1$ の場合もアナロガスである．この場合 Σ の次元は $2n - k$ であり，ω の核は一般に k 次元であり，運動は一般に k 次元である［式 (3.54) において，作用 (3.56) の未定乗数にあたる k 個の N_j を選べることに対応］．X はこのとき k 次元の多重正接 (multi-tangent) であり，それはなお式 (3.46) を満たす．

$\pi : \Sigma \to \gamma$ を拘束面の各点と，その点が属する運動を関係付ける射影写像としよう．射影 π は，π の下での Σ への引き戻しが ω となる 2 形式として定義された，シンプレクティック 2 形式 ω_{ph} を伴う相空間 Γ を備える．まさに ω は軌道に沿って退化しているため，局所的にそれは存在し一意的である．

変分原理との関係　$\tilde{\gamma}$ をその $\mathcal{C}$ への制限 γ が始および終事象 q_1 と q_2 で限られるような，Σ 上の ω の軌道とする．$\tilde{\gamma}'$ をその制限 γ' がやはり q_1 と q_2 で限られるような，$\tilde{\gamma}$ と無限小に近い Σ における曲線とする．δs_1 (および δs_2) を $\tilde{\gamma}$ と $\tilde{\gamma}'$ の始 (および終) 点の差とする．4 つの曲線 $\tilde{\gamma}, \delta s_1, -\tilde{\gamma}'$ および $-\delta s_2$ は Σ における閉曲線を形成する．［些末だが $\delta s_1, \delta s_2$ を $\tilde{\gamma}$ から $\tilde{\gamma}'$ への向きにとれば，逆符号 $-\delta s_1, \delta s_2$.］この曲線に囲まれた無限小の面にわたる ω の積分を考えよ．この積分は消える，と言うのも，面の各点において正接の 1 つは (1 次のオーダーでは) ω のヌルの方向だからである (面は運動 $\tilde{\gamma}$ と平行な細長い 1 片 (strip) である)．しかるに $\omega = \mathrm{d}\theta$ なので，Stokes の定理により，閉曲線に沿う θ の積分もまた消える．$\theta = p_a \mathrm{d}q^a$ の δs_1 と δs_2 に沿う積分はゼロである，と言うのも，これらの線分に沿って q^a は一定だからである．したがって

$$\int_{\tilde{\gamma}} \theta + \int_{-\tilde{\gamma}'} \theta = 0, \tag{3.47}$$

あるいは，考えているクラスの任意の変分に対して

$$\delta \int_{\tilde{\gamma}} \theta = 0. \tag{3.48}$$

これはまさに 3.2 節［本節冒頭］で述べた変分原理である．

Hamilton 方程式　まず $k = 1$ の場合を考えよ．運動は 1 次元的である．曲線を任意のパラメータ τ でパラメトライズする．すなわち，(Ω における) 運動を関数 $(q^a(\tau), p_a(\tau))$ で表す．これらの関数は Hamilton 系

$$H(q^a, p_a) = 0, \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}q^a(\tau)}{\mathrm{d}\tau} &= N(\tau) v^a(q^a(\tau), p_a(\tau)), \\ \frac{\mathrm{d}p_a(\tau)}{\mathrm{d}\tau} &= N(\tau) f_a(q^a(\tau), p_a(\tau)) \end{aligned} \tag{3.50}$$

を満たす．［本稿次節で運動方程式 (3.46) から式 (3.50) を導出する．等価な変分原理 (3.48) による導出は式 (3.86) の箇所を見よ．］ここに

$$v^a(q^a, p_a) = \frac{\partial H(q^a, p_a)}{\partial p_a}, \qquad f_a(q^a, p_a) = -\frac{\partial H(q^a, p_a)}{\partial q^a}. \tag{3.51}$$

関数 $N(\tau)$ は“ラプス関数 (Lapse function)”と呼ばれる．それは任意である．$N(\tau)$ の異なる選択は，運動に沿う異なるパラメータ τ を定める．単調なパラメータ付けを得るには $N(\tau) > 0$ が必要である．好ましいパラメータ付けは $N(\tau) = 1$ ととることによって，すなわち，式 (3.50)–(3.51) を (通常の簡潔な形に書いた) 方程式

$$\dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \qquad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a} \tag{3.52}$$

に置き換えることによって得られ，ここにドットは τ による微分を表す．この選択は Lapse = 1 ゲージと呼ばれる．物理的な観点からは，それは特別でない．特に，異なるが同じ面 Σ を定義する物理的に等価なハミルトニアン H は，異なる特定のパラメータ付けを定める．それにも関わらず，それはしばしば計算する上で最も容易なゲージである．

もし $k > 1$ ならば，$j = 1, \cdots, k$ として関数 H は成分 H^j を持ち，運動は k 次元の面である．我々は運動を k 個の任意のパラメータ $\vec{\tau} = \{\tau_j\}$ でパラメトライズできる．すなわち我々は k 個のパラメータ τ_j の $2n$ 個の関数 $q^a(\vec{\tau}), p_a(\vec{\tau})$ を用いて，運動を表せる．こ

れらの方程式［関数の誤記か］は式 (3.49) で与えられる系を満たし，

$$\frac{\partial q^a(\vec{\tau})}{\partial \tau_j} = N_j(\vec{\tau})\frac{\partial H^j(q^a, p_a)}{\partial p_a}, \qquad \frac{\partial p_a(\vec{\tau})}{\partial \tau_j} = -N_j(\vec{\tau})\frac{\partial H^j(q^a, p_a)}{\partial q^a}. \tag{3.53}$$

運動は $\mathcal{C}$ における完全な k 次元の面によって決まり，τ を任意のパラメータとして，我々はこの面上の特定の曲線 $\vec{\tau}(\tau)$ を選ぶことができ，運動を $\mathcal{C}$ における 1 次元の曲線 $q^a(\tau) = q^a(\vec{\tau}(\tau))$ として表すことができる．これは式 (3.49) の成す系，および k 個の任意の 1 変数関数 $N_j(\tau)$ に対して

$$\frac{\partial q^a(\tau)}{\partial \tau} = N_j(\tau)\frac{\partial H^j(q^a, p_a)}{\partial p_a}, \qquad \frac{\partial p_a(\tau)}{\partial \tau} = -N_j(\tau)\frac{\partial H^j(q^a, p_a)}{\partial q^a} \tag{3.54}$$

を満たす．［本稿次節で運動方程式 (3.46) から式 (3.54) を導出する．等価な変分原理 (3.48) による導出は式 (3.56) の箇所を見よ．式 (3.53) の右辺では j で和をとらず，両辺に $\frac{\partial \tau_j}{\partial \tau}$ を掛けてはじめて j で和をとると式 (3.54) が得られる．その際 $\frac{\partial \tau_j}{\partial \tau}$ を吸収させて N_j を再定義することになるため，異なる曲線 $\vec{\tau}(\tau)$ は異なる $N_j(\tau)$ に対応すると考えられる．実際］関数 $N_j(\tau)$ の異なる選択は，運動を定義する単一の面上の異なる曲線を定める．それらは同じ運動のゲージ等価な表現である．

τ または τ_j がこの技法の人工物であることを強調しておくことは重要である．それらに物理的重要性はない．それらは幾何学的定式化だけでなく，以下で見るように Hamilton–Jacobi の定式化にも現れない．理論の物理的内容は $\mathcal{C}$ における運動にあるのであって，運動をパラメトライズする方法にあるのではない．すなわち，物理的な情報は関数 $q^a(\tau)$ にあるのではない：それは関数の $\mathcal{C}$ における像にある．

変分原理との関係　曲線 $\tilde{\gamma}$ をパラメータ τ でパラメトライズする．作用 (3.38) は

$$S = \int \mathrm{d}\tau\, p_a(\tau)\frac{\mathrm{d}q^a(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \tag{3.55}$$

になる．拘束条件 (3.39) は Lagrange 乗数 $N_i(\tau)$ を伴う作用において実現できる．これは作用

$$S = \int \mathrm{d}\tau \left(p_a\frac{\mathrm{d}q^a}{\mathrm{d}\tau} - N_i H^i(p_a, q^a)\right) \tag{3.56}$$

を定義する．$N_i(\tau), q^a(\tau)$ および $p_a(\tau)$ に関する作用の変分は Hamilton 方程式 (3.49),(3.54) を与える．［そのことは非相対論的な変分原理 (式 (3.16) の箇所) との形式的類似性から直ちに理解できる．］

例：2 つの振り子　ハミルトニアン (3.40) によって定義される系を考えよ．Lapse = 1 ゲージにおける Hamilton 方程式 (3.49),(3.52) は

$$\dot{a} = p_a, \qquad \dot{b} = p_b, \qquad \dot{p}_a = -a, \qquad \dot{p}_b = -b, \qquad a^2 + b^2 + p_a^2 + p_b^2 = 2E \tag{3.57}$$

を与える．一般解は

$$a(\tau) = A_a \sin(\tau), \qquad b(\tau) = A_b \sin(\tau + \beta) \tag{3.58}$$

であり，ここに $A_a = \sqrt{2E}\sin\alpha$ および $A_b = \sqrt{2E}\cos\alpha$ である［本稿次節で補足］．運動はこれらの曲線の $\mathcal{C}$ における像によって与えられる．それらは楕円たち (3.41) である［本稿次節で補足］．曲線 (3.58) のパラメータ付けは物理的な重要性を持たない．物理は $\mathcal{C}$ におけるパラメータ付けされていない楕円，およびそれが定める a と b の関係にある．

Hamilton–Jacobi　Hamilton–Jacobi 形式はエレガントであり，一般的であり，そして強力である；それは量子論と直接関係し，また概念的に明瞭である．Hamilton–Jacobi 理論の**相対論的な**定式化は伝統的な非相対論的バージョンよりも単純であり，そのことは相対論的な定式化が，力学的な系の自然で一般的な構造を明かすことを意味している．

相対論的な Hamilton–Jacobi 形式は，拡大配位空間 $\mathcal{C}$ 上で定義された関数 $S(q^a)$ に対する，k 個の偏微分方程式の系

$$H\left(q^a, \frac{\partial S(q^a)}{\partial q^a}\right) = 0 \tag{3.59}$$

［すなわち $H^j = 0\,(j = 1, \cdots, k)$］によって与えられる．$S(q^a, Q^i)$ を，$n-k$ 個の積分定数 Q^i でパラメトライズされた解の族としよう．$n-k$ 個の任意定数 P_i に対して

$$f^i(q^a, P_i, Q^i) \equiv \frac{\partial S(q^a, Q^i)}{\partial Q^i} + P_i = 0 \tag{3.60}$$

とする．これが発展方程式である．定数 Q^i, P_i は $2(n-k)$ 次元の空間 Γ を座標付けする．これが相空間である．［以上の式 (3.59–60) の導出は節末にある．］

相対論的な Hamilton–Jacobi 方程式 (3.59) の形は，通常の非相対論的な Hamilton–Jacobi 方程式 (3.17) よりも単純である．しかも，非相対論的な定式化の場合のように，逆に解かねばならない方程式はない．式 (3.59) は消えるエネルギーを持つ式 (3.20) と形式的に類似しているので，関数 $S(q^a, Q^i)$ は非相対論的定式化における Hamilton–Jacobi の**主関数** $S(t, q^i, Q^i) = Et + W(q^i, Q^i)$ とも，Hamilton–Jacobi の**特性関数** $W(q^i, Q^i)$ とも同一視できることに注意せよ．2 つの関数は実際，相対論的定式化において同一視される．

例：2 つの振り子　時間のない系 (3.40) の Hamilton–Jacobi 方程式は

$$\left(\frac{\partial S(a,b)}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial S(a,b)}{\partial b}\right)^2 + a^2 + b^2 - 2E = 0. \tag{3.61}$$

解の 1 パラメータ族は

$$\begin{aligned} S(a,b,A) =& \frac{a}{2}\sqrt{A^2 - a^2} + \frac{A^2}{2}\arctan\left(\frac{a}{\sqrt{A^2 - a^2}}\right) \\ &+ \frac{b}{2}\sqrt{2E - A^2 - b^2} + \frac{2E - A^2}{2}\arctan\left(\frac{b}{\sqrt{2E - A^2 - b^2}}\right) \end{aligned} \tag{3.62}$$

で与えられる［本稿次節で確認］．系の一般解 (3.41) は，ϕ を積分定数として

$$\frac{\partial S(a,b,A)}{\partial A} - \phi = 0 \tag{3.63}$$

を書き下せば，直接得られる［本稿次節で確認］．

Hamilton–Jacobi 形式の導出　相空間 Γ はシンプレクティック空間なので，その上にわたって局所的に正準座標 (Q^i, P_i) を選べる．これらの座標は，それらが軌道に沿って一定となる Σ に引き戻せる．実際，それらは軌道をラベルする．$\theta_{\mathrm{ph}} = P_i \mathrm{d}Q^i$ とする；したがって $\mathrm{d}\theta_{\mathrm{ph}} = \omega$．しかるに $\omega = \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}(p_a \mathrm{d}q^a)$ なので，Σ 上で

$$\mathrm{d}(\theta_{\mathrm{ph}} - \theta) = \mathrm{d}(P_i \mathrm{d}Q^i - p_a \mathrm{d}q^a) = 0 \tag{3.64}$$

を得る．このことは

$$P_i \mathrm{d}Q^i - p_a \mathrm{d}q^a = -\mathrm{d}S \tag{3.65}$$

となる Σ 上の関数 S が，局所的に存在しなければならないことを意味する．q^a と Q^i を Σ 上の独立変数として選ぼう．このとき式 (3.65) は

$$\mathrm{d}S(q^a, Q^i) = p_a(q^a, Q^i)\mathrm{d}q^a - P_i(q^a, Q^i)\mathrm{d}Q^i, \tag{3.66}$$

すなわち

$$\frac{\partial S(q^a, Q^i)}{\partial q^a} = p_a(q^a, Q^i), \tag{3.68}$$

$$\frac{\partial S(q^a, Q^i)}{\partial Q^i} = -P_i(q^a, Q^i) \tag{3.69}$$

になる．Σ の定義により $H(q^a, p_a) = 0$ が得られ，それは式 (3.67) を用いると，Hamilton–Jacobi 方程式 (3.59) を与える．方程式 (3.68) はこのとき直ちに発展方程式 (3.60) となる．

言い換えれば，$S(q^a, Q^i)$ は観測量とその運動量 (q^a, p_a) を，$\dot{Q}^i = 0, \dot{P}_i = 0$ を満たす新しい正準変数 (Q^i, P_i) に関係付ける，正準変換の生成関数である．これらの新しい変数は運動の定数であり，それ故 Γ を定義する．正準変換の方程式 (3.67)–(3.68) によって与えられる $\mathcal{C}$ と Γ の間の関係は発展方程式である．

3.2.2 節について

■式 (3.50),(3.54) の導出　3.1 節末尾の振り子の例にならって $X=\dot{q}^b\frac{\partial}{\partial q^b}+\dot{p}_b\frac{\partial}{\partial p_b}$ と書き (ドットは τ による微分)，これを運動方程式 (3.46):$\omega(X)=0$ に代入すると

$$0=\omega(X)=(\mathrm{d}p_a\wedge\mathrm{d}q^a)[X,\bullet]=\dot{p}_a\mathrm{d}q^a-\dot{q}^a\mathrm{d}p_a$$

を得る．これを条件 (3.49):$H(q^a,p_a)=0$ と併せて考えるために，式 (3.49) の微分

$$0=\mathrm{d}H=\frac{\partial H}{\partial q^a}\mathrm{d}q^a+\frac{\partial H}{\partial p_a}\mathrm{d}p_a=-f_a\mathrm{d}q^a+v^a\mathrm{d}p_a$$

に未定乗数 $N(\tau)$ を掛けて辺々足す．すると

$$(\dot{p}_a-Nf_a)\mathrm{d}q^a+(-\dot{q}^a+Nv^a)\mathrm{d}p_a=0$$

となって，式 (3.50) が得られる．

$k>1$ の場合は代わりに，

$$0=\mathrm{d}H^j=\frac{\partial H^j}{\partial q^a}\mathrm{d}q^a+\frac{\partial H^j}{\partial p_a}\mathrm{d}p_a$$

に未定乗数 $N^j(\tau)$ を掛けて j で和をとり，第 1 式 $\dot{p}_a\mathrm{d}q^a-\dot{q}^a\mathrm{d}p_a=0$ と辺々足すと式 (3.54) を得る．

■一般解 (3.58) と，それが楕円 (3.41) を成すことについて　Hamilton 方程式 (3.57) の最初の 4 式は単振動の式なので，パラメータ付けの原点 $\tau=0$ を適当に選べば，一般解は式 (3.58) の形に書ける．これを式 (3.57) の第 5 式に代入すると ${A_a}^2+{A_b}^2=2E$ となるので，

$$A_a=\sqrt{2E}\sin\alpha,\qquad A_b=\sqrt{2E}\cos\alpha$$

とおける．積分定数は α と β の 2 つである．

得られた解を

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\sqrt{2E}\sin\tau,\qquad\frac{b}{\cos\alpha}=\sqrt{2E}\sin(\tau+\beta)=\sqrt{2E}(\sin\beta\cos\tau+\cos\beta\sin\tau)$$

と書いて関数 $f(a,b;\alpha,\beta)$ に代入すると，これらは楕円の式 (3.41) を満たすことが確かめられる．

■Hamilton–Jacobi 方程式の解 (3.62) の導出　$S(a,b)=f(a)+g(b)$ と変数分離して Hamilton–Jacobi 方程式 (3.61) に代入すると，A (ただし $0\le A\le\sqrt{2E}$) をパラメータとして

$$(0\le)\,(f'(a))^2+a^2=A^2,\qquad(0\le)\,(g'(b))^2+b^2=2E-A^2$$

とおける．その解 $f(a),g(b)$ には全体の符号と付加定数の任意性を持つ．そこで以下に記す解を考えれば充分である．まず初等的な積分により，

$$\begin{aligned}f(a)=&\int^a\sqrt{A^2-a^2}\mathrm{d}a=A^2\int^\tau\cos^2\tau\mathrm{d}\tau\qquad(a=A\cos\tau)\\=&\frac{A^2}{2}\left(\tau+\frac{\sin2\tau}{2}\right)\qquad(\text{付加的な定数項は捨てた})\\=&\frac{A^2}{2}\arctan\left(\frac{a}{\sqrt{A^2-a^2}}\right)+\frac{a}{2}\sqrt{A^2-a^2}\end{aligned}$$

を得る．最右辺で $a\to b,A^2\to2E-A^2$ と置き換えれば $g(b)$ が得られるので，$S(a,b)$ の式 (3.62) が導かれる．

■式 (3.63) が一般解 (3.41) を与えることの確認　公式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$ を用いて，式 (3.62):$S(a,b) = f(a)+g(b)$ の各項を正直に微分すると，

$$\frac{\partial f}{\partial A} = A\arctan\left(\frac{a}{\sqrt{A^2-a^2}}\right), \qquad \frac{\partial g}{\partial A} = -A\arctan\left(\frac{b}{\sqrt{2E-A^2-b^2}}\right)$$

となる．ここで式 (3.62) の導出過程を振り返ると，2 つの arctan の因子はそれぞれ順に，解を $a = A\sin\tau, b = \sqrt{2E-A^2}\sin\sigma$ と書いたときの位相 τ,σ である．よって式 (3.63) は位相差の関係

$$0 = \frac{\partial f}{\partial A} + \frac{\partial g}{\partial A} - \phi = A(\tau-\sigma) - \phi$$

を与えるので，

$$a = A\sin\tau, \qquad b = \sqrt{2E-A^2}\sin\left(\tau - \frac{\phi}{A}\right)$$

を得る．これはパラメータの組 (A,ϕ) と (α,β) の関係

$$\tan\alpha = \frac{A}{\sqrt{2E-A^2}}, \qquad \beta = -\frac{\phi}{A}$$

を通じて式 (3.58) と等価なので，楕円の式 (3.41) を満たす．

3.2.3　特別な場合としての非相対論的な系

ここでは 3.1 節で説明した伝統的な力学の概念と構造が，どのように相対論的な定式化から復元されるかを，より詳細に議論する．非相対論的な系は単に，部分的観測量 q^a の 1 つが t と表され“時間”と呼ばれ，ハミルトニアンが

$$H = p_t + H_0 \tag{3.69}$$

の形を持つような，相対論的な力学系である．ここに H_0 は p_t とは独立であり，非相対論的ハミルトニアンと呼ばれる．量 $E = -p_t$ はエネルギーと呼ばれる．部分的観測量 t を測るデバイスは時計と呼ばれる．

相対論的な配位空間はそれ故，$i = 1,\cdots,n-1$ として，座標 $q^a = (t,q^i)$ を伴う構造

$$\mathcal{C} = R \times \mathcal{C}_0 \tag{3.70}$$

を持つ．空間 $\mathcal{C}_0$ は通常の非相対論的な配位空間である．対応して，余接空間 $\Omega = T^*\mathcal{C}$ は座標 $(q^a,p_a) = (t,q^i,p_t,p_i)$ を持つ．

もし H が式 (3.69) の形を持つならば，相対論的な Hamilton–Jacobi 方程式 (3.59) は伝統的な非相対論的 Hamilton–Jacobi 方程式 (3.17) になる．

状態と時計の観測量の値 t が与えられたとき，(q^i,t) が可能な事象となるような観測量 q^i の可能な値は何かを問うことができる．すなわち，時刻が t である“とき”q^i の値が何かを問うことができる．答は発展方程式 $f^i(q^i,t;Q^i,P_i) = 0$ を q^i について解くことで得られる．これは

$$q^i = q^i(t;Q^i,P_i) \tag{3.71}$$

を与え，変数 q^i の時間 t における発展方程式と解釈される．ハミルトニアンの形 (3.69) は f を q^i について解けることを保証する，と言うのも，(ゲージ Lapse $= 1$ における) t に対する Hamilton 方程式は単に，逆に解くことのできる $t = \tau$ だからである．

note　発展方程式 (3.60) は上式 $f^i(q^i,t;Q^i,P_i)=0$ になり，ここでは q^i と t はいずれも変数である．ところがパラメータ τ を導入すると，Lapse $=1$ ゲージで Hamilton 方程式 (3.50) より

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\partial}{\partial p_t}(p_t+H_0)=1,\qquad \therefore t=\tau$$

となるので，発展方程式は $f^i(q(\tau),\tau;Q^i,P_i)=0$ となる．今や τ はパラメータなので，これを $q^i=q^i(\tau,Q^i,P_i)$ の形に解くのに何ら支障はなく，最後にここに $\tau=t$ を代入すれば良いと考えられる．

パラメトライズされた Hamilton 形式では，$t(\tau)$ に対する発展方程式は自明であり，τ をリスケールする自由度を利用すれば，単に $t=\tau$ となる．［上で見たようにパラメータ付けの条件はラプス $N(\tau)=1$.］これを用いると，方程式 (3.53)［むしろ式 (3.50)］は伝統的な Hamilton 方程式［式 (3.4–5)］になり，式 (3.49) は単に p_t の値，すなわち［符号の違いを除けば］エネルギーの値を固定する．

note　以上の設定 $N(\tau)=1$ の下で，残る p_t に対する Hamilton 方程式 (3.50) は p_t の保存

$$\frac{\mathrm{d}p_t(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=-\frac{\partial}{\partial t}(p_t+H_0)=0$$

を意味する．

準シンプレクティック形式では，R 上の座標を時間 t，また $\Gamma_0=T^*\mathcal{C}_0$ を非相対論的な相空間として，面 Σ は

$$\Sigma=R\times\Gamma_0 \tag{3.72}$$

であることが判明する［3.1 節のノートで言及済み］．$\tilde{\theta}$ のこの面への制限は Catran 形式

$$\theta=p_i\mathrm{d}q^i-H_0\mathrm{d}t=\theta_0-H_0\mathrm{d}t \tag{3.73}$$

である．X_0 を Γ_0 上のベクトル場として，

$$X=\frac{\partial}{\partial t}+X_0 \tag{3.74}$$

という形を持つようにベクトル場 X をとることができる．このとき運動方程式 (3.46) は方程式

$$(\mathrm{d}\theta_0)(X_0)=-\mathrm{d}H_0 \tag{3.75}$$

に帰着し［式 (3.7)→ 式 (3.10) の導出過程を逆にたどれば良い］，これは伝統的な Hamilton 方程式の幾何学的形式である．こうして，H はどのように Γ_0 における変数が変数 t に相関するかを決定する．すなわち，“どのように Γ_0 における変数が時間とともに発展するか”を決定する．この意味で，非相対論的ハミルトニアン H_0 は“時間 t における発展”を生成する．この発展は Γ_0 において，H_0 のハミルトニアン・フロー X_0［式 (3.5–6) で定義される [424, p.257]］によって生成される．Γ_0 の点 $s=(q^i,p_i)$ は

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=X_0(s(t)) \tag{3.76}$$

によって，点 $s(t)=(q^i(t),p_i(t))$ に移される．［Hamilton 方程式 (3.76) とその幾何学的表現 (3.75) の等価性は，3.1 節のノートで確認済み.］

$A_t(s) = A(s(t)) = A(s,t)$ によって定義される，(時間に陽に依存しない) 観測量の発展は，Poisson 括弧の表記

$$\{A, B\} = -X_A(B) = X_B(A) = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q^i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q^i} \right) \tag{3.77}$$

を導入して，

$$\frac{\mathrm{d}A_t}{\mathrm{d}t} = \{A_t, H_0\} \tag{3.78}$$

と書ける．

note　Poisson 括弧 (3.77) では式 (3.5–6):$X_0 = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$ を真似て，ベクトル場

$$X_A = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial A}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$$

を定義している．

瞬間的状態と相対論的状態　**状態**の非相対論的な定義は**時間の特定の瞬間における**系の性質に言及する．この伝統的な状態の概念を“瞬間的状態”と表現しよう．瞬間的状態の空間は伝統的な非相対論的相空間 Γ_0 である．時間変数の値 $t = t_0$ を固定し，初期データを用いて瞬間的状態を特徴付けよう．振り子に対してそれらは $t = t_0$ における位置と運動量，(α_0, p_0) である．このように (α_0, p_0) は Γ_0 の座標である．

他方，相対論的状態は運動方程式の解である．(もしゲージ不変性があれば，状態は運動方程式の解のゲージ等価なクラス (同値類；equivalence class) である．) 相対論的相空間 Γ は運動方程式の解の空間である．

時刻の値 t_0 が与えられたとき，初期データと運動方程式の解の間には 1 対 1 の対応がある：運動方程式の解の各々は $t = t_0$ における初期データを決定する；また t_0 における初期データの選択の各々は，運動方程式の解を一意的に決定する．したがって瞬間的状態と相対論的状態の間には 1 対 1 の対応がある．したがって相対論的な相空間 Γ は非相対論的な相空間と同型 (isomorphic) である：$\Gamma \sim \Gamma_0$．しかしながら，同型写像 (isomorphism) は選んだ時刻 t_0 に依存し，また 2 つの空間の物理的解釈は全く異なる．一方は与えられた時刻における状態の空間であり，他方は運動の空間である．

振り子の場合には，非相対論的な相空間 Γ_0 は (α_0, p_0) で座標付けできる；相対論的な相空間 Γ は (A, ϕ) で座標付けできる．同一視写像 (identification map) $(A, \phi) \mapsto (\alpha_0, p_0)$ は

$$\alpha_0(A, \phi) = A \sin(\omega t_0 + \phi), \tag{3.79}$$
$$p_0(A, \phi) = \omega m A \cos(\omega t_0 + \phi) \tag{3.80}$$

で与えられる．

非相対論的な相空間 Γ_0 は，非相対論的な Hamilton 形式の力学において二重の役割を演じる：それは瞬間的な状態の空間であるだけでなく，その上で H_0 が定義されるところの，非相対論的な Hamilton 形式の力学の舞台でもある．相対論的な文脈では，この二重の役割は失われる：その上で H が定義されるところの余接空間 $\Omega = T^*\mathcal{C}$ を，運動の空間である相空間 Γ から区別せねばならない．この区別は，Ω が有限次元であるのに対して Γ が無限次元となる場の理論において重要となる．

非相対論的な系において，X_0 は Γ_0 における 1 パラメータの変換群，Γ_0 上の H_0 のハミルトニアン・フローを生成する．t に依存する $\mathcal{C}_0$ における観測量の代わりに，視点を変えて，$\mathcal{C}_0$ における観測量を時間と

独立な対象と見なし，Γ_0 における状態を時間に依存する対象と見なすことができる．これは量子論における Heisenberg から Schrödinger の描像への移行の古典的類似物であり，“古典的な Schrödinger 描像”と呼べる．

相対論的な理論では一般に，特別な“時間”変数はなく，$\mathcal{C}$ は自然には $\mathcal{C} = R \times \mathcal{C}_0$ と分離せず，拘束量は $H = p_t + H_0$ という形を持たず，“$\mathcal{C}_0$ における変数がどのように時間とともに発展するか”という観点による相関の記述は利用できない．非相対論的な定式化を許容しない系では，状態が時間とともに発展する古典的な Schrödinger 描像は利用できない：状態と観測量の相対論的な概念だけが意味を成す．

特殊相対論的な系　上で議論した 2 つの振り子の例のように，非相対論的な定式化を許容しない相対論的な系がある．非相対論的な定式化を与えることができるものの，その構造が相対論的な定式化においてはるかに明瞭となる系もある．Lorentz 不変な系は典型的な例である．それは Lorentz 不変性を破るという代償を払って初めて，伝統的なハミルトニアン描像で定式化できる．特別な Lorentz 系の選択は特別な Lorentz 時間変数 $t = x^0$ を指定する．理論の予言は Lorentz 不変であるが，定式化はそうではない［文献 [415, pp.39–40] の記述を想起］．特殊相対論的な系の力学に対するこの扱い方は，そのハミルトニアン構造の簡潔さと対称性を隠してしまう．以下で自由粒子の場合に例示する相対論的なハミルトン形式は，明らかに Lorentz 不変である．

例：相対論的粒子　配位空間 $\mathcal{C}$ は座標 x^μ を持つ，Minkowski 空間 $\mathcal{M}$ である．ダイナミクスは質量 m の Lorentz 双曲面 $\mathcal{K}_m$ を定義する，ハミルトニアン $H = p^\mu p_\mu + m^2$ で与えられる．拘束面 Σ はそれ故 $\Sigma = T^*\mathcal{M}|_{H=0} = \mathcal{M} \times \mathcal{K}_m$ で与えられる．$\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}p_\mu \wedge \mathrm{d}x^\mu$ の Σ への制限［ω］のヌルベクトルは

$$X = p^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{3.81}$$

である［p_μ の添字を上げた］，と言うのも，$p^\mu p_\mu = -m^2$ 上で $\omega(X) = p^\mu \mathrm{d}p_\mu = 2\mathrm{d}(p^2) = 0$ だからである．X の積分線，すなわちその正接が X である線は

$$x^\mu(\tau) = P^\mu \tau + X^\mu, \qquad p^\mu(\tau) = P^\mu \tag{3.82}$$

であり［$\dot{x}^\mu(\tau) = p^\mu, \dot{p}^\mu(\tau) = 0$ を積分すれば良い］，これは粒子の物理的運動を与える．これらの線の空間は 6 次元であり (それは 8 つの数 (X^μ, P^μ) で座標付けされるものの，$P^\mu P_\mu = -m^2$ であり，また (P^μ, X^μ) は任意の a に対して $(P^\mu, X^\mu + P^\mu a)$ と同じ線を定義する)，相空間を表す．運動はこうして $\mathcal{M}$ における時間的な直線である．

用いた全ての概念は完全に Lorentz 不変であることに注意せよ．状態は時間的な測地線である；観測量は任意の Minkowski 座標である；相関は Minkowski 空間における点である．理論は Minkowski 座標間の相関，すなわち何らかの時空点における粒子の観測に関係する．対照的に，通常の Hamilton 形式を定義するのに必要な分離 $\mathcal{M} = R \times R^3$ は，観測者［座標系］に依存する．

力学の相対論的な定式化は，伝統的な非相対論的定式化に比べて一般的であるだけでなく，より単純でエレガントで操作的に良く整備されている．Hamilton 方程式，幾何学的な言語，あるいは Hamilton–Jacobi 形式のいずれを用いるかに依らず，このことは正しい．

3.2.4　議論：力学は観測量の間の関係に関係する

本章で議論した力学の相対論的な定式化と，伝統的なそれとの間——そして，とりわけ，状態と観測量の相対論的な定義と，伝統的なそれとの間——の重要な違いは，時間の演じる役割である．非相対論的な文脈では，時間は主要な概念である．力学は時間における発展の理論として定義される．一方，ここで考えている定義では，どの部分的観測量も独立変数として選び出されない．力学は部分的観測量の相関の理論として定義される．

学術的に言えば，一般に $\mathcal{C}$ は自然には $\mathcal{C} = R \times \mathcal{C}_0$ と分離せず，拘束量は $H = p_t + H_0$ の形を持たず，“状態と観測量がどのように時間において発展するか”という観点による，相関の Schrödinger 的な記述［観測量が発展するのは Heisenberg 的である］は利用できない．

この見方の移行の意味を明確に理解しておくことが重要である．

1 つ目のポイントは，伝統的な力学をこの時間に依らない言語で定式化することは**可能である**ということである．実際，力学の定式化はこの言語においてより一層，明瞭で対称的 (例えば，Lorentz 共変的) になる．これはそれ自体で著しい事実である．著しいことは，力学の形式的な構造が実際には，時間変数を他の変数と異なる身分で扱っていないことである．力学の構造は我々が世界の物理的構造について理解したことの定式化である．それ故，世界の物理的 (より正確には力学的) 構造は，変数 t に“特別な”ことが何かしらあるという事実に全く盲目であると言える．

歴史的には，相対論的な文脈では時間に依らない状態の概念が必要だというアイデアは特に，Dirac ([148] の第 5 章を見よ) と Souriau [105] によって唱えられた．状態の相対論的な概念の利点は多様である．例えば特殊相対性理論では，時間は他の変数とともに変換し，瞬間的状態の共変的な定義はない．とりわけ Lorentz 不変な場の理論では，瞬間的状態の概念は明白な Lorentz 共変性を破る：瞬間的状態は，特定の観測者にとってのみの同時の面上における，場の値である．状態の相対論的概念は，対照的に，Lorentz 不変である．

［我々の理解ではハミルトニアン H (H_0 ではない) が消えるから (完全拘束系)，時間発展が生成されないというよりも，むしろそもそも部分的観測量として時間変数 t が選び出されていない.］

2 つ目のポイントは，その上で初期データが固定されるところの特別な空間的な面の概念が微分同相不変性と矛盾する一般相対性理論において，この見方の移行は**強制される**ということである．瞬間的状態の一般共変な概念，あるいは“与えられた時刻における”観測量の一般共変な概念は，ほとんど物理的な意味を成さない．実際，一般相対性理論に現れる様々な時間の概念 (座標時間，固有時間，時計時間) のいずれも，非相対論的な力学で t が演じる役割を演じない．一般共変な文脈における状態と観測量の整合的な定義は，時間をあらわに含み得ない．

この違いの物理的な理由は第 2 章で議論した．非相対論的な物理では時刻と位置は，存在し，研究している物理系と相互作用しないと暗に仮定される，基準物体と時計の系に対して定義される．重力の物理では，重力場と相互作用しない物体や時計は存在しないことが分かる：重力場はあらゆる基準の物体または時計の運動と割合 (rate) に直接影響する．それ故，基準物体と時計を系の力学変数と分離することはできない．一般相対性理論――実際には，あらゆる一般共変な理論――は常に，時空点を特徴付ける基準として用いられる物理的物体と時計を必然的に含む，相互作用する変数の理論である．例えば 3.2.1 節で議論した振り子の例では，振り子と時計は相互作用しないと仮定できる．一般相対論的な文脈では，それら 2 つは常に相互作用し，$\mathcal{C}$ は $\mathcal{C}_0$ と R に分離しない．

まとめると，力学を物理的変数の時間における発展の理論と見なせるのは，非相対論的極限に過ぎない．完全に相対論的な文脈では，**力学は部分的観測量の間の相関の理論である**．

3.2.5　境界データの空間 $\mathcal{G}$ と Hamilton 関数 S

ここで量子論において重要な役割を演じる構造の相対論的なバージョンを説明する．

Hamilton 関数　式 (3.21) で定義した Hamilton 関数はもとより，相対論的配位空間 $\mathcal{C}$ (の 2 つの複製) 上の関数であることに注意せよ．実際，その定義は相対論的文脈に拡張される：$\mathcal{C}$ における 2 つの事象 q^a と q^a_0 が与えられたとき，Hamilton 関数は

$$S(q^a, q^a_0) = \int_{\tilde{\gamma}} \theta \tag{3.83}$$

で定義され，ここに $\tilde{\gamma}$ は q_0^a から q^a へ至る運動の Σ における軌道である．これはこの運動に沿う作用の値でもある．例えば，非相対論的な系に対しては

$$
\begin{aligned}
S(q^a, q_0^a) &= \int_\gamma \theta = \int_\gamma p_a \mathrm{d}q^a & (3.84)\\
&= \int_0^1 p_a(\tau)\dot{q}^a(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^1 \left(p_i(\tau)\dot{q}^i(\tau) + p_t(\tau)\dot{t}(\tau)\right)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^1 \left(p_i(\tau)\dot{q}^i(\tau) - H_0(\tau)\dot{t}(\tau)\right)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{t_0}^t \left(p_i(t)\frac{\mathrm{d}q^i(t)}{\mathrm{d}t} - H_0(t)\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0}^t L\left(q^i, \frac{\mathrm{d}q^i(t)}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t & (3.85)
\end{aligned}
$$

と書くことができ，ここに L はラグランジアンである．定義より

$$
\frac{\partial S(q^a, q_0^a)}{\partial q^a} = p_a(q^a, q_0^a) \tag{3.86}
$$

が得られ，ここに $p_a(q^a, q_0^a)$ は終事象における運動量の値である．この値は q^a **だけでなく** q_0^a **にも**依存することに注意せよ．この方程式の導出は一見した見かけよりも非自明である：詳細は鋭い読者に委ねる［本稿次節を参照］．

式 (3.86) から，$S(q^a, q_0^a)$ は Hamilton–Jacobi 方程式 (3.59) を満たすことが従う．量 q_0^a は Hamilton–Jacobi 積分定数と見なせる．それらは $n-1$ 個ではなく，n 個であることに注意せよ．方程式 (3.60) は今や

$$
f^a(q^a; q_0^a, p_{a0}) = \frac{\partial S(q^a, q_0^a)}{\partial q_0^a} + p_{a0} = 0 \tag{3.87}
$$

になる．したがって，相空間は始座標と運動量 (q_0^a, p_{a0}) によって直接 (過剰に) 座標付けできる．［p_{a0} を始運動量と解釈できることについては，本稿次節における式 (3.86) の導出過程を見よ．］これらは 2 つの理由により独立でない．第 1 に，それらは方程式 $H=0$ を満たす．第 2 に，同じ運動に沿う異なる組 $(q_0^a(\tau), p_{a0}(\tau))$ は同じ運動を決定する．［トートロジーのようだが，パラメータ付けに応じて得られる異なる値 (q_0^a, p_{a0}) の間の関係を通じて，(q_0^a, p_{a0}) の間にも関係が生じることを述べていると推察される．］しかも，方程式 (3.87) の 1 つはその他に依存していることが判明する．

$S(q^a, q_0^a)$ は両方の変数の組について Hamilton–Jacobi 方程式を満たす，すなわちそれは

$$
H\left(q_0^a, -\frac{\partial S(q^a, q_0^a)}{\partial q_0^a}\right) = 0 \tag{3.88}
$$

も満たし，ここで負号は第 2 の変数の組が式 (3.83) の積分の下限に来るという事実に由来する．［詳しくは本稿次節における式 (3.86) の導出過程を見よ．］

境界のデータを結ぶ 1 つより多くの物理的運動 γ があるならば，Hamilton 関数は多価である．$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ を同じ境界値を持つ異なる解として，その異なる枝 (branches) を

$$
S_i(q_1^a, q_2^a) = \int_{\tilde{\gamma}_i} \theta \tag{3.89}
$$

で表す．

Hamilton 関数は量子論と密接に関係する．それは第 5 章で見るように量子論の主要な対象である伝播関数 $W(q^a, q_0^a)$ の，位相である．もし S が一価ならば，$\hbar$ の高次の項を別にして

$$W(q^a, q_0^a) \sim A(q^a, q_0^a) \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} S(q^a, q_0^a)} \tag{3.90}$$

を得る．S が多価ならば，

$$W(q^a, q_0^a) \sim \sum_i A_i(q^a, q_0^a) \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} S_i(q^a, q_0^a)}. \tag{3.91}$$

例：自由粒子　自由粒子の場合，運動に沿う古典的な作用の値は

$$\begin{aligned} S(x, t, x_0, t_0) &= \int_0^1 (p_t \dot{t} + p\dot{x}) \mathrm{d}t = p_t \int_{t_0}^t \mathrm{d}t + p \int_{x_0}^x \mathrm{d}x \\ &= -\frac{m(x - x_0)^2}{2(t - t_0)} + m\frac{(x - x_0)^2}{t - t_0} \\ &= \frac{m(x - x_0)^2}{2(t - t_0)}. \end{aligned} \tag{3.92}$$

S が自由粒子の Hamilton–Jacobi 方程式の解になることを確認するのは容易である．［以上，本稿次節で補足する．］2 つの方程式 (3.87) の 1 つ目は発展方程式

$$\frac{\partial S(x, t, x_0, t_0)}{\partial x_0} + p_0 = -m\frac{x - x_0}{t - t_0} + p_0 = 0 \tag{3.93}$$

を与える．2 つ目の方程式

$$\frac{\partial S(x, t, x_0, t_0)}{\partial t_0} + p_{t0} = +\frac{1}{2m} p_0^2 + p_{t0} = 0 \tag{3.94}$$

［中辺第 1 項の符号を訂正した］は p_t［正しくは p_{t0}］を積分定数に拘束する．自由粒子の Schrödinger 方程式の伝播関数は

$$W(x, t, x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{i}\hbar(t - t_0)}} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} \frac{m(x - x_0)^2}{2(t - t_0)}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{i}\hbar(t - t_0)}} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} S(x, t, x_0, t_0)} \tag{3.95}$$

であることを思い出そう［文献 [421, p.151] を見よ］．

例：2 つの振り子　時間のない系 (3.40) の Hamilton 関数はその定義から直接計算できる．それは

$$S(a, b, a', b') = S\left(a, b, a', b'; A(a, b, a', b')\right) \tag{3.96}$$

を与え，ここに

$$S(a, b, a', b'; A) = S(a, b, A) - S(a', b', A). \tag{3.97}$$

$S(a, b, A)$ は式 (3.62) で与えられ，$A(a, b, a', b')$ は (a, b) と (a', b') を通る楕円 (3.41) の A の値である．この値は，式 (3.58) が少々の代数計算により，

$$A^2 = \frac{a^2 + a'^2 - 2aa' \cos\tau}{\sin^2\tau} \tag{3.98}$$

および

$$2E = \frac{(a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2) - 2(aa' + bb')\cos\tau}{\sin^2\tau} \tag{3.99}$$

［左辺に係数 2 を補った］を意味することに気付けば得られる．［上式 (3.98–99) を本稿次節で導出する．］第 2 式は $\tau(a, b, a', b')$ について解くことができ，これを代入すると第 1 式は $A(a, b, a', b')$ を与える．微分 $\partial S(a, b, a', b'; A)/\partial A$ が $A = A(a, b, a', b')$ のときに消えることを確認するのは，難しくない［本稿次節で補足］．これを用いれば，式 (3.96) が両方の変数の組に関して Hamilton–Jacobi 方程式の解になることが容易に分かる．［と言うのも，定数 A に対して $S(a, b, A)$ は Hamilton–Jacobi 方程式の解である．このことは式 (3.96) が Hamilton 関数であることの証明にもなる．］

与えられた (a, b, a', b') に対して，方程式 (3.98) は τ の関数としての A を与えることに注意せよ．我々はそれ故，関数

$$S(a, b, a', b'; \tau) = S(a, b, A(\tau)) - S(a', b', A(\tau)) \tag{3.100}$$

もまた考えることができ，これは非相対論的ハミルトニアン H を持ち，物理的時間 τ において発展する 2 つの調和振動子から成る非相対論的な系の作用の値である，すなわち，それはこの系の Hamilton 関数である．いくらかの代数計算により，これは

$$S(a, b, a', b') = M\tau + \frac{(a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2)\cos\tau - 2(aa' + bb')}{\sin\tau} \tag{3.101}$$

と書くこともできる．A に対するのと同様に，我々は直ちに

$$\left.\frac{\partial S(a,b,a',b';\tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=\tau(a,b,a',b')}=0 \tag{3.102}$$

を得る．これは時間のない系の Hamilton 関数が数量としては，全エネルギー E の運動に留まりつつ (a',b') から (a,b) に至るのに要する“正しい”時間 τ に対する，2 つの振動子の Hamilton 関数に等しいことを意味する［式 (3.101) 第 2 項の式 (3.34) との整合性による］．これはまた，この“正しい”時間 $\tau=\tau(a,b,a',b')$ が 2 つの振動子の Hamilton 関数を最小化する時間であることを意味する［式 (3.102)］．

より正確には，与えられた (a,b,a',b') に対して (a',b') を (a,b) と繋ぐ 2 つの経路がある：それらは (a',b') と (a,b) を通る楕円がこれらの点によって切り取られるところの，2 つの経路である．これらの経路に沿う作用の 2 つの値を S_1 と S_2 で表す．それらの関係は，楕円全体に沿う作用が簡単に

$$S_1+S_2=2\pi E \tag{3.103}$$

と計算できることに気付けば［本稿次節で確認]，容易に得られる．

境界データの空間 $\mathcal{G}$　Hamilton 関数は空間 $\mathcal{G}=\mathcal{C}\times\mathcal{C}$ 上の関数である．要素 $\alpha\in\mathcal{G}$ は拡大配位空間 $\mathcal{C}$ の要素の順序付けられた組である：$\alpha=(q^a,q_0^a)$．α は物理的運動に対する境界条件のアンサンブルであることに注意せよ．非相対論的な系に対しては，$\alpha=(t,q^i,t_0,q_0^i)$；運動は時刻 t_0 に q_0^i で始まり，時刻 t に q^i で終わる．

空間 $\mathcal{G}$ は自然なシンプレクティック構造を担う．実際 $i:\mathcal{G}\to\Gamma$ を，各組をその組が定義する運動へ移す写像としよう．すると ω_{ph} を 3.2.2 節で定義した相空間のシンプレクティック形式として，我々は 2 形式 $\omega_{\mathcal{G}}=i^*\omega_{\mathrm{ph}}$ を定義できる．言い換えれば，$\alpha=(q^a,q_0^a)$ を相空間の自然な過剰座標付け (over-coordinatization) にとることができる．運動を初めの位置と運動量で座標付けする代わりに，我々はそれを始・終位置で座標付けする．これらの座標では，シンプレクティック形式は $\omega_{\mathcal{G}}$ によって与えられる．

2 形式 $\omega_{\mathcal{G}}$ は，初めに Γ と ω_{ph} を計算することなく計算できる．境界データ α を持つ Σ における軌道を $\tilde{\gamma}_\alpha$ で表し，その $\mathcal{C}$ への射影を γ_α で表す．このとき α は γ_α の境界である．我々は $\alpha=\partial\gamma_\alpha$ と書く．Σ における $\tilde{\gamma}_\alpha$ の始・終点を s と s_0 で表す．すなわち，$s=(q^a,p_a)$ および $s_0=(q_0^a,p_{a0})$ であり，ここで p_a と p_{a0} はいずれも一般に，q^a と q_0^a に依存する．$\delta\alpha=(\delta q^a,\delta q_0^a)$ を α におけるベクトル (無限小の変位) としよう．すると次が成り立つ：

$$\begin{aligned}\omega_{\mathcal{G}}(\alpha)(\delta_1\alpha,\delta_2\alpha)=&\omega_{\mathcal{G}}(q^a,q_0^a)((\delta_1 q^a,\delta_1 q_0^a),(\delta_2 q^a,\delta_2 q_0^a))\\ =&\omega(s)(\delta_1 s,\delta_2 s)-\omega(s_0)(\delta_1 s_0,\delta_2 s_0).\end{aligned} \tag{3.104}$$

［例えば最左辺は α における 2 形式 $\omega_{\mathcal{G}}(\alpha)$ を 2 つのベクトル $(\delta_1\alpha,\delta_2\alpha)$ に作用させた値である．最右辺の負号ももっともらしい*73.］s の変分 $\delta_1 s$ は $\delta_1 q$ とともに $\delta_1 q_0$ によって決定される［p_a は q_0^a にも依存するから]，等々に注意せよ．この方程式は ω を用いて直接 $\omega_{\mathcal{G}}$ を表している．これから見るように，この方程式は ω が 5 形式［式 (3.150)］となり $\omega_{\mathcal{G}}$ が 2 形式［式 (3.171)］となる，場の理論の枠組みにおける直接的な一般化を許容する．

ここで $\alpha=(q^a,q_0^a)$ を固定し，その 1 つの成分のみの小さな変分，例えば

$$\delta\alpha=(\delta q^a,0) \tag{3.105}$$

を考えよう．これは Γ に押し出すことのできる，$\mathcal{G}$ 上の α におけるベクトル $\delta\alpha$ を定義する．もし変分が運動の方向に沿っていれば，このとき押し出しは消える，すなわち $i_*\delta\alpha=0$ である，と言うのも，$\alpha+\delta\alpha$ は同じ

*73 1 例としてスカラー場に対する $\omega_{\mathcal{G}}[\alpha](\delta_1\alpha,\delta_2\alpha)$ の式 (3.177) において，Minkowski 空間の境界 α_M が円筒 (側面は空間の無限遠) であり (3.3.3 節 pp.134–135)，n_ν がその外向き法線の場合を考えると，初期時刻の面と終時刻の面とで n_ν は逆向きになる．このため $\omega_{\mathcal{G}}[\alpha](\delta_1\alpha,\delta_2\alpha)$ は始・終状態からの逆符号の寄与に分離されると考えられる．

運動を定義する［ため，2 点 $\alpha, \alpha+\delta\alpha$ を Γ に押し出したベクトルの始点と終点は一致する］からである．変分が運動の方向に沿っていれば，$\omega_{\mathcal{G}}(\delta\alpha)=0$ となることが従う．したがって方程式

$$\omega_{\mathcal{G}}(X)=0 \tag{3.106}$$

は運動方程式の解を与える．

このように，組 $(\mathcal{G}, \omega_{\mathcal{G}})$ は系の全ての重要な情報を含んでいる．$\omega_{\mathcal{G}}$ のヌル方向は物理的運動を定義し，もしこれらのヌル方向によって $\mathcal{G}$ を分解すれば，商空間 (factor space) は物理的シンプレクティック構造を備えた物理的相空間である．［同じ運動を表す点 $\alpha \in \mathcal{G}$ の全体を Γ の 1 つの要素と見なせるということ．］

例：自由粒子　空間 $\mathcal{G}$ は座標 $\alpha=(t, x, t_0, x_0)$ を持つ．この $\mathcal{G}$ における点が与えられたとき，(t_0, x_0) から (t, x) へ至る 1 つの運動，

$$t(\tau)=t_0+(t-t_0)\tau, \tag{3.107}$$

$$x(\tau)=x_0+(x-x_0)\tau \tag{3.108}$$

がある．この運動に沿って

$$p=m\frac{x-x_0}{t-t_0}, \tag{3.109}$$

$$p_t=-\frac{m(x-x_0)^2}{2(t-t_0)^2}. \tag{3.110}$$

写像 $i:\mathcal{G}\to\Gamma$ はすると

$$P=p=m\frac{x-x_0}{t-t_0}, \tag{3.111}$$

$$Q=x-\frac{p}{m}t=x-\frac{x-x_0}{t-t_0}t \tag{3.112}$$

で与えられ［これらは運動量と位置の初期値］，したがって 2 形式 $\omega_{\mathcal{G}}$ は

$$\begin{aligned}\omega_{\mathcal{G}} &= i^*\omega_\Gamma = \mathrm{d}P(t,x,t_0,x_0)\wedge \mathrm{d}Q(t,x,t_0,x_0)\\ &= m\mathrm{d}\frac{x-x_0}{t-t_0}\wedge \mathrm{d}\left(x-\frac{x-x_0}{t-t_0}t\right)\\ &= \frac{m}{t-t_0}\left(\mathrm{d}x-\frac{x-x_0}{t-t_0}\mathrm{d}t\right)\wedge\left(\mathrm{d}x_0-\frac{x-x_0}{t-t_0}\mathrm{d}t_0\right).\end{aligned} \tag{3.113}$$

［最後の等号を本稿次節で確認する．］直ちに，$\omega_{\mathcal{G}}(\delta\alpha)=0$ となる (一定の (x_0,t_0) での) 変分 $\delta\alpha=(\delta t,\delta x,0,0)$ は

$$\delta x=\frac{x-x_0}{t-t_0}\delta t \tag{3.114}$$

を満たさねばならないことが分かる．これはまさに $((x_0,t_0)$ によって決定される) 物理的運動に沿う x と t の変分である．したがって $\omega_{\mathcal{G}}(\delta\alpha)=0$ は再び運動方程式を与える．$\omega_{\mathcal{G}}$ の 2 つのヌル方向はこうして，2 つのベクトル場

$$X=\frac{x-x_0}{t-t_0}\partial_x+\partial_t, \tag{3.115}$$

$$X_0=\frac{x-x_0}{t-t_0}\partial_{x_0}+\partial_{t_0} \tag{3.116}$$

によって与えられ，これらは可換 (in involution) であり (その Lie 括弧は消える)［本稿次節で確認］，したがって 2 次元の面を持つ $\mathcal{G}$ の葉層構造 (foliation) を定義する．これらの面は式 (3.111),(3.112) で与えられる P と Q でパラメトライズされ，実際，

$$X(P)=X(Q)=X_0(P)=X_0(Q)=0. \tag{3.117}$$

［例えば $X(P)$ は式 (3.115) の微分演算子 X を式 (3.111) の P に作用させた値を表し，正直に微分を実行すれば $X(P)=0,$etc. を直接確かめられる．これは物理的運動に沿うベクトルの Γ への押し出しが $i_*\delta\alpha=0$ となることと整合している．］我々はこうして，ちょうど物理的相空間を復元した：これらの面の空間は相空間 Γ であり，それへの $\omega_{\mathcal{G}}$ の制限は物理的シンプレクティック形式 ω_{ph} である．

S からの物理的予言　Hamilton 関数 $S(q^a, q_0^a)$ から物理的予言を導く，いくつかの異なる方法がある．

- 方程式 (3.87) は Hamilton 関数を用いた発展関数 f を与える．
- もし部分的観測量 q^a とともにその運動量 p_a を測定できるならば，Hamilton 関数は以下のように予言を行うのに用いることができる．

$$\begin{aligned} p_a^1(q_1^a, q_2^a) =& \frac{\partial S(q_1^a, q_2^a)}{\partial q_1^a}, \\ p_a^2(q_1^a, q_2^a) =& \frac{\partial S(q_1^a, q_2^a)}{\partial q_2^a}, \end{aligned} \tag{3.118}$$

  とする．2 つの方程式

$$\begin{aligned} p_a^1 =& p_a^1(q_1^a, q_2^a), \\ p_a^2 =& p_a^2(q_1^a, q_2^a) \end{aligned} \tag{3.119}$$

  は 4 つの部分的観測量の 4 つ組 $(q_1^a, p_a^1, q_2^a, p_a^2)$ を関係付ける．理論は，4 つ組 $(q_1^a, p_a^1, q_2^a, p_a^2)$ が式 (3.119) を満たす場合にのみ，それが観測可能であることを予言する．このようにして，古典的理論はどの部分的観測量の値の組合せが観測できるかを決定する．
- 代わりに，$\mathcal{C}$ における 2 点 q_i^a と q_i^f を固定し，第 3 の点 q^i が q_i^a と q_i^f によって決まる運動場にあるかを問うことができる．すなわち，相関 q_i^a と q_f^a が観測されたとして，相関 q^a を観測できるか否かを問うことができる．［ここで q^a は一連の観測量 $q^1, q^2, \cdots$ の間の相関をまとめて表している．］少し考えれば，この問への答がイエス (positive) ならば

$$S(q_f^a, q^a) + S(q^a, q_i^a) = S(q_f^a, q_i^a) \qquad \text{［ピリオド不要］} \tag{3.120}$$

  であることを読者は確信するだろう，と言うのも，作用は運動に沿って加法的だからである．しかも，q^a において入射する運動量と射出する運動量は等しくなければならず，それ故，

$$\frac{\partial S(q_f^a, q^a)}{\partial q^a} = -\frac{\partial S(q^a, q_i^a)}{\partial q^a}. \tag{3.121}$$

  ［右辺の引数を $q_f^a \to q_i^a$ と訂正した．確かに運動量の関係 (3.121) は式 (3.120) から保証される．］

3.2.5 節について

■式 (3.86) の導出　教科書本文 (p.121，l.1–3) にあるように，Hamilton 関数の表式 (3.84) (それは相対論的定式化においても一般に正しい) から式 (3.86) が導かれることは，見かけほど自明ではない．

変数 q^a, p_a の変分に伴う Hamilton 関数 (3.84) の変分は

$$\delta S = \delta \int p_a \mathrm{d}q^a = \int (\delta p_a \cdot \mathrm{d}q^a + p_a \mathrm{d}(\delta q^a)) = p_a \delta q^a| + \int (\delta p_a \cdot \mathrm{d}q^a - \delta q^a \cdot \mathrm{d}p_a)$$

となる．最右辺の第 1 項は部分積分に起因する境界項を表す．ここで積分は実際の物理的運動に沿って評価されるので，最右辺の被積分関数に Hamilton 方程式 (3.50):

$$\mathrm{d}q^a = N \frac{\partial H}{\partial p_a} \mathrm{d}\tau, \qquad \mathrm{d}p_a = -N \frac{\partial H}{\partial q^a} \mathrm{d}\tau$$

を代入して良い．すると

$$\delta S = p_a \delta q^a| + \int N \left(\frac{\partial H}{\partial p_a} \delta p_a + \frac{\partial H}{\partial q^a} \delta q^a \right) \mathrm{d}\tau = p_a \delta q^a| + \int N \delta H \cdot \mathrm{d}\tau$$

とまとめられる．ところが我々は変数 q^a, p_a が常に式 (3.49):$H(q^a, p_a) = 0$ を満たすことを想定しているため，変数の変分に伴う H の変化は $\delta H = 0$ である．よって境界項の寄与

$$\delta S = p_a \delta q^a| = p_a \delta q^a - p_{a0} \delta q_0^a$$

のみが生き残る．ここに p_{a0} は始事象における運動量の値である．この結果は

$$\frac{\partial S}{\partial q^a} = p_a : (3.86), \qquad \frac{\partial S}{\partial q_0^a} = -p_{a0}$$

を意味する．ここから式 (3.87) における p_{a0} を始運動量と見なすことも正当化される．

■自由粒子の Hamilton 関数 (3.92) について　通常の意味で非相対論的な自由粒子のハミルトニアンは，式 (3.14) の形

$$H(x, t, p, p_t) = p_t + H_0(x, p), \qquad H_0(x, p) = \frac{p^2}{2m}$$

を持つという意味でも非相対論的である．よってその Hamilton 関数は一般式 (3.84) または非相対論的表式 (3.22) のいずれに従って書き下しても良く，それらは同じ結果

$$S(x, t, x_0, t_0) = \int_0^1 \left(p_t \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} + p \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} \right) \mathrm{d}\tau, \qquad S(x, t, x_0, t_0) = \int_{(x_0, t_0)}^{(x, t)} (p\mathrm{d}x - H_0 \mathrm{d}t)$$

を与える．ここで

$$p = m \frac{x - x_0}{t - t_0}, \qquad H_0 = -p_t = \frac{m}{2} \left(\frac{x - x_0}{t - t_0} \right)^2$$

は自由粒子の一定の運動量とエネルギーであることを既知とすれば，Hamilton 関数 (3.92) が得られる．同じ結果は，ラグランジアンの時間積分の形 (3.85) から出発すれば，より手早く得られる．

Hamilton 関数を Hamilton–Jacobi 方程式

$$0 = H \left(x, t, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial t} \right) = \frac{\partial S}{\partial t} + H_0 \left(x, \frac{\partial S}{\partial x} \right) = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \tag{15}$$

の解として求め，一連の結果を実直に導くには次のようにすれば良い．H_0 は t を陽に含まないことを踏まえて $S(x, t) = f(x) - Et$ と変数分離すると (E は定数),

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \right)^2 = E, \qquad \therefore f(x) = \sqrt{2mE} x$$

と求まる．ここから運動量

$$p = \frac{\partial S}{\partial x} = \sqrt{2mE}$$

は一定であり，これを逆に解くと $E = p^2/2m$ はエネルギーであることが分かる．また式 (3.23) を適用すると

$$\mathrm{const} = \frac{\partial S}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{2E}} x - t, \qquad \therefore x = \sqrt{\frac{2E}{m}} t + \mathrm{const} = \frac{p}{m} t + \mathrm{const}$$

となるので，粒子は等速直線運動を行う．係数 $v=p/m$ は一定の速度に同定でき，これを用いて $p=mv, E=mv^2/2$ と表せる．以上より Hamilton 関数 (3.92) の導出の手続きも正当化される．

あるいは調和振動子に対して式 (3.33–34) で行ったのと同様に，実際の運動

$$\frac{x-x_0}{t-t_0}=v=\mathrm{const.}$$

に対して作用を評価しても良い [416, pp.31–32]：

$$S(x,t,x_0,t_0)=\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\frac{1}{2}m\left(\frac{x-x_0}{t-t_0}\right)^2=\frac{m(x-x_0)^2}{2(t-t_0)}.$$

最後に，逆に Hamilton 関数 (3.92) が Hamilton–Jacobi 方程式 (15) を満たすことは，式 (3.92) に対して

$$\frac{\partial S}{\partial x}=m\frac{x-x_0}{t-t_0}(=p),\qquad \frac{\partial S}{\partial t}=-\frac{m}{2}\left(\frac{x-x_0}{t-t_0}\right)^2(=-E)$$

となることから分かる．

■式 (3.98–99) の導出　楕円をパラメトライズした式 (3.58) は，式 (3.62–63) の箇所で導入したパラメータ A で振幅を表すと

$$a(\tau)=A\sin\tau,\qquad b(\tau)=\sqrt{2E-A^2}\sin(\tau+\beta).$$

ここで $\tau=\tau_0$ を始事象 (a',b') に対応させる，すなわち

$$a'=A\sin\tau_0,\qquad b'=\sqrt{2E-A^2}\sin(\tau_0+\beta)$$

とする[*74]．このとき

$$\begin{aligned}a(\tau)=&A\sin(\tau_0+(\tau-\tau_0))=a'\cos(\tau-\tau_0)+\sqrt{A^2-a'^2}\sin(\tau-\tau_0),\\ b(\tau)=&\sqrt{2E-A^2}\sin\{(\tau_0+\beta)+(\tau-\tau_0)\}=b'\cos(\tau-\tau_0)+\sqrt{2E-A^2-b'^2}\sin(\tau-\tau_0).\end{aligned}$$

ここで $\tau-\tau_0\to\tau$ と改めて式を簡略化する．次いで 2 式をそれぞれ移項して平方すると

$$\begin{aligned}(A^2-a'^2)\sin^2\tau=&a^2+a'^2\cos^2\tau-2aa'\cos\tau,\\ (2E-A^2-b'^2)\sin^2\tau=&b^2+b'^2\cos^2\tau-2bb'\cos\tau\end{aligned}$$

であり，第 1 式を A^2 について解くと式 (3.98) を得る．また第 1 式を用いて第 2 式から A^2 を消去し，E について解くと式 (3.99) を得る．

■微分 $\partial S(a,b,a',b';A)/\partial A$ が $A=A(a,b,a',b')$ のときに消えること (式 (3.99) の 2,3 行下) について　式 (3.63) の箇所で見たように，

$$a=\sin\tau,\qquad b=\sqrt{2E-A^2}\sin\sigma,\qquad a'=\sin\tau',\qquad b'=\sqrt{2E-A^2}\sin\sigma'$$

と書いたとき，

$$\frac{\partial S(a,b,A)}{\partial A}=A(\tau-\sigma),\qquad \frac{\partial S(a',b',A)}{\partial A}=A(\tau'-\sigma')$$

[*74] この段階で $\tau_0=0$ とおくと，あからさまに $a'=0$ となって都合が悪い．もちろんこの措置は楕円が $a=0$ を通る“瞬間”を“初期時刻”$\tau=0$ に選ぶことを意味しており，それ自体では何ら問題ない．

は位相差の因子を与える．ところが条件 $A = A(a,b,a',b')$ は曲線 $(a(\tau), b(\tau))$ が始・終事象 $(a',b'), (a,b)$ をつなぎ，それ故，これら 2 つの位相差が共通の値 (式 (3.58) の β) となることを保証すると考えられる．このとき，

$$\frac{\partial S(a,b,a',b';A)}{\partial A} = A\{(\tau-\sigma)-(\tau'-\sigma')\} = 0.$$

■楕円全体に沿う作用 (3.103) の確認　楕円のパラメータ付け (3.57–58):

$$a = A_a \sin\tau, \qquad p_a = \dot{a} = A_a\cos\tau, \qquad b = A_b\sin(\tau+\beta), \qquad p_b = \dot{b} = A_b\cos(\tau+\beta)$$

を利用すると，楕円全体に沿って評価した作用 (Hamilton 関数) は

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \oint (p_a \mathrm{d}a + p_b \mathrm{d}b) = \int_0^{2\pi} ({p_a}^2 + {p_b}^2)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^{2\pi} \{{A_a}^2\cos^2\tau + {A_b}^2\cos^2(\tau+\beta)\}\mathrm{d}\tau = \pi({A_a}^2 + {A_b}^2) = 2\pi E : (3.103). \end{aligned}$$

■式 (3.113) 最後の等号の確認　まず

$$\mathrm{d}\frac{x-x_0}{t-t_0} \wedge \mathrm{d}\left(x - \frac{x-x_0}{t-t_0}t\right) = \mathrm{d}\frac{x-x_0}{t-t_0} \wedge \left(\mathrm{d}x - \frac{x-x_0}{t-t_0}\mathrm{d}t\right)$$

と簡略化できる．次に第 1 の因子を

$$\mathrm{d}\frac{x-x_0}{t-t_0} = \frac{\mathrm{d}(x-x_0)}{t-t_0} - \frac{x-x_0}{(t-t_0)^2}\mathrm{d}(t-t_0) = \frac{1}{t-t_0}\left\{\left(\mathrm{d}x - \frac{x-x_0}{t-t_0}\mathrm{d}t\right) - \left(\mathrm{d}x_0 - \frac{x-x_0}{t-t_0}\mathrm{d}t_0\right)\right\}$$

と変形して上式右辺に代入すると，式 (3.113) 最後の等号

$$\mathrm{d}\frac{x-x_0}{t-t_0} \wedge \mathrm{d}\left(x - \frac{x-x_0}{t-t_0}t\right) = \frac{1}{t-t_0}\left(\mathrm{d}x - \frac{x-x_0}{t-t_0}\mathrm{d}t\right) \wedge \left(\mathrm{d}x_0 - \frac{x-x_0}{t-t_0}\mathrm{d}t_0\right)$$

を得る．

■ベクトル場 (3.115–116) の Lie 括弧 (交換子) が消えること (p.125，l.9) の確認

$$\begin{aligned} XX_0 &= \left(\frac{x-x_0}{t-t_0}\partial_x + \partial_t\right)\left(\frac{x-x_0}{t-t_0}\partial_{x_0} + \partial_{t_0}\right) = \cancel{\frac{x-x_0}{(t-t_0)^2}\partial_{x_0}} + \left(\frac{x-x_0}{t-t_0}\right)^2\partial_x\partial_{x_0} - \cancel{\frac{x-x_0}{(t-t_0)^2}\partial_{x_0}} + \partial_t\partial_{t_0}, \\ X_0X &= \left(\frac{x-x_0}{t-t_0}\partial_{x_0} + \partial_{t_0}\right)\left(\frac{x-x_0}{t-t_0}\partial_x + \partial_t\right) = -\cancel{\frac{x-x_0}{(t-t_0)^2}\partial_x} + \left(\frac{x-x_0}{t-t_0}\right)^2\partial_x\partial_{x_0} + \cancel{\frac{x-x_0}{(t-t_0)^2}\partial_x} + \partial_t\partial_{t_0} \end{aligned}$$

より，Lie 括弧 (交換子) は $[X, X_0] \equiv XX_0 - X_0X = 0$.

3.2.6　発展パラメータ

物理系はしばしば，発展パラメータに関するラグランジアンの積分である作用によって定義される．ただし発展パラメータが持ち得る，2 つの異なる物理的意味がある．

任意の Hamilton 系を支配する変分原理［の作用］は，

$$S = \int \mathrm{d}\tau \left(p_a \frac{\mathrm{d}q^a}{\mathrm{d}\tau} - NH(p_a, q^a)\right) \tag{3.122}$$

の形に書けることを，我々は見た (ここでは $k=1$)．作用は発展パラメータ τ のパラメータ付け替えの下で不変である．発展パラメータ τ に物理的な意味はない：それに関する測定デバイスはない．

他方で，$q^a=(t,q^i)$ および $H=p_t+H_0$ となるところの，非相対論的な系を考えよ．作用 (3.122) は

$$S=\int \mathrm{d}\tau\left(p_t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}+p_i\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}\tau}-N(p_t+H_0(p_i,q^i))\right) \tag{3.123}$$

となる．N を変分すると運動方程式

$$p_t=-H_0 \tag{3.124}$$

を得る．この関係を作用に戻って代入すると，

$$S=\int \mathrm{d}\tau\left(-H_0\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}+p_i\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}\tau}\right) \tag{3.125}$$

を得る．今や我々は積分変数を τ から $t(\tau)$ に変えることができる．(悪しき物理学者の表記で) $q^i(t)\equiv q^i(\tau(t))$ などを定義すると，

$$S=\int \mathrm{d}\tau\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\left(-H_0+p_i\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t}\right)=\int \mathrm{d}t\left(p_i\frac{\mathrm{d}q^i(t)}{\mathrm{d}t}-H_0\right) \tag{3.126}$$

と書ける．作用における発展パラメータはもはや任意の非物理的なパラメータ τ ではない．それは部分的観測量の 1 つ——時間観測量 t ——である．

作用を与えられたとき，我々は作用における発展パラメータが t のような部分的観測量か，それとも τ のような非物理的パラメータかを理解しなければならない．もし作用がその発展パラメータの付け替えの下で不変ならば，発展パラメータは非物理的である．もし不変でなければ，発展パラメータは部分的観測量である．［例えば上式 (3.126) 最右辺の t に関する積分は，変数変換により中辺へと形を変える．］

同じことは，作用が Lagrange 形式で与えられる場合にも正しい．Lagrange 形式から Hamilton 形式への Legendre 変換の実行において，作用のパラメータ付け替え不変性の帰結は多様である．第 1 に，速度と運動量の関係は逆に解けない．座標と速度 $(q^a,\dot{q}^a)$ の空間から座標と運動量 (q^a,p_a) の空間への写像は可逆でない．この写像の像は Ω の部分空間 Σ であり，我々は適切なハミルトニアン H に対して方程式 $H=0$ を用いて Σ を特徴付けることができる．第 2 に，Legendre 変換を通じて計算される正準ハミルトニアンは Σ 上で消える．拘束系の理論の言葉では，これは正準ハミルトニアンが作用のパラメータにおける発展を生成するからである；これは非物理的だから，この発展はゲージである；ゲージの生成子は拘束量であり，それ故 Σ 上で消える．［拘束系の正準力学に関する文献 [415] のノートの付録も見よ．］

作用における発展パラメータは，それが部分的観測量か非物理的パラメータかに関わらず，しばしば t で表される．第 1 の場合の t と第 2 の場合の t を混同してはならない．それらは全く異なる物理的解釈を持つ．Maxwell 理論における時間座標 t は部分的観測量である．GR における時間座標 t は非物理的パラメータである．その 2 つが一般に同じ文字と同じ名前で表されている事実は，非常に不幸な歴史的偶然である．

例：相対論的粒子　既に見たように［3.2.3 節末尾］，相対論的粒子のハミルトニアン・ダイナミクスは相対論的ハミルトニアン $H=p_\mu p^\mu+m^2$，すなわち作用原理

$$S=\int \mathrm{d}\tau\left(p_\mu\dot{x}^\mu-\frac{N}{2}(p_\mu p^\mu+m^2)\right) \tag{3.127}$$

によって定義される．［後の見通しを良くするため，係数 1/2 をくくり出して Lagrange 乗数 N を再定義してある．］p_μ を変分することで得られる，速度と運動量の関係は，$\dot{x}^\mu=Np^\mu$．逆の Legendre 変換はそれ故，

$$S=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\tau\left(\frac{\dot{x}_\mu\dot{x}^\mu}{N}-Nm^2\right) \tag{3.128}$$

を与える．［上式 (3.127) の被積分関数 (ラグランジアンに相当) に $p^\mu = \dot{x}^\mu/N$ を代入した．式 (3.128) においては乗数 N の任意性がパラメータ τ の任意性に対応していることが明白である．］Lagrange 乗数 N に関する運動方程式

$$-\frac{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}{N^2} - m^2 = 0 \tag{3.129}$$

——その解は

$$N = \frac{\sqrt{-\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}}{m} \tag{3.130}$$

である——を書き下し，この関係を作用に戻って代入して，作用から N を除くこともできる．これは最もよく知られた相対論的粒子のパラメータ付け替え不変な作用

$$S = -m \int \mathrm{d}\tau \sqrt{-\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu} \tag{3.131}$$

［右辺全体に負号を補った］を与える．

3.2.7　* 複素変数と実数条件

GR ではしばしば複素力学変数を用いることが便利である，と言うのも，それらは力学的方程式の形を簡単にするからである．とりわけ便利な選択は，ある正準変数が複素数でありながら，その共役変数が実数となるような，複素および実変数の組合せである．これから見るように，複素数である自己双対接続 (2.19) は，この種の正準変数へと自然に導く．そのような変数の利用がどのようにダイナミクスに影響するかを例示するために，座標 x，運動量 p，およびハミルトニアン $H_0(x,p) = p^2/2m$ を持つ自由粒子を考え，

$$z = x - \mathrm{i}p \tag{3.132}$$

として，変数 (x,z) を用いてそのダイナミクスを記述したいと仮定せよ．これらの変数を用いると，非相対論的ハミルトニアンは

$$H_0(x,z) = -\frac{1}{2m}(x-z)^2 \tag{3.133}$$

になる．z を配位変数，$\mathrm{i}x$ を運動量変数と考えよ．Hamilton–Jacobi 方程式は

$$\frac{\partial S(z,t)}{\partial t} = -H_0\left(-\mathrm{i}\frac{\partial S(z,t)}{\partial z}, z\right) = \frac{1}{2m}\left(\mathrm{i}\frac{\partial S(z,t)}{\partial z} + z\right)^2 \tag{3.134}$$

になる．［中辺について，運動量 $\mathrm{i}x = \frac{\partial S}{\partial z}$ より引数は $x = -\mathrm{i}\frac{\partial S}{\partial z}$.］これは

$$S(z,t;k) = kz + \frac{\mathrm{i}}{2}z^2 - \frac{k^2}{2m}t \tag{3.135}$$

と解ける．［代入により確認すれば充分である．k は積分変数にあたる．］S のパラメータ k に関する微分を定数と等置すると，解を得る：

$$C = \frac{\partial S(z,t;k)}{\partial k} = z - \frac{k}{m}t, \tag{3.136}$$

すなわち，

$$z(t) = \frac{k}{m}t + C. \tag{3.137}$$

これで話は終わりではない，と言うのも今のところ，k と C は任意の**複素**定数となり得るからである．実数の x と p に対応する良い解を見つけるには，z と x は本当は独立ではないことを思い出す必要がある，と言うのも，x は z の実部である：

$$z + \overline{z} = 2x, \tag{3.138}$$

すなわち，

$$z + \overline{z} = -2\mathrm{i}\frac{\partial S}{\partial z}. \tag{3.139}$$

［式 (3.135) を右辺に代入して，これを $\mathrm{Im}[z] = k$ と書き換えた上で］解 (3.137) を左辺に代入すると，

$$\mathrm{Im}[k]\frac{t}{m} + \mathrm{Im}[C] = +k \tag{3.140}$$

を得る［右辺の符号を訂正した］．したがって［これが任意の t で成り立つことを要求すると］，k は実であり C の虚部は k［原著では $-k$］となる．［よって式 (3.132) を $z = x + \mathrm{i}p$ に修正すれば，その後の計算に影響を与えることなく］これは直ちに正しい解［$x = \frac{k}{m}t + \mathrm{Re}[C]$, $p = k \in R$］を与える．

方程式 (3.138) は**実数条件** (*reality condition*) と呼ばれる．Hamilton–Jacobi 形式において，一度，発展方程式の解が代入されると，実数条件は Hamilton–Jacobi 定数の値を制限することを例は示している．

3.3　場の理論

場の理論を Hamilton 形式に持ち込むことのできる，いくつかの方法がある．1 つの可能性は，固定された時刻における場の空間を非相対論的な配位空間 Q にとることである．この戦略は特殊および一般相対論的な不変性をひどく破る．Lorentz 不変性は，t 変数のために Lorentz 系を選ばねばならないという事実によって破られる．はるかに悩ましいことは，一般共変性との矛盾である．一般共変な物理の真の基礎は，宇宙全体にわたる同時の面という概念が物理的な意味を欠くというアイデアである．物理的重要性を欠かない概念に基づく，Hamilton 形式の力学を打ち立てる方が好ましい．

第 2 の代案は運動方程式の解の空間上で力学を定式化することである．このアイデアは Lagrange にまで遡る．一般共変な文脈では，空間的な面を用いてこの空間上のシンプレクティック構造を定義できるものの，定義は面に依らず，それ故よく定義されていることを示せる．この戦略は数人の著者らによって探求された [108]．その構造は一般に有効であり，Hamilton 形式が本来的に共変的であることを示しているという利点がある．実践的には，相互作用のある理論の場合には，場の方程式の解の空間に取り組むのは困難である．したがって我々は座標付けさえできない空間を扱うか，ある同時の面上の初期データで空間を座標付けせねばならず，このため実質的に伝統的な時間を固定する定式化に戻ることになる．

私がここで考える第 3 の可能性は，Hamilton 形式の力学を定式化するのに，共変な**有限**次元の空間を用いることである．私は前に［式 (3.80) 直後の段落で］，相対論的な文脈では，力学の舞台と状態の空間としての相空間の 2 重の役割は失われることを指摘した．状態の空間，すなわち相空間 Γ は，本質的には場の理論の定義により，場の理論では無限次元である．しかしこのことは，Hamilton 形式の力学の舞台も同様に無限次元でなければならないことを意味しない．相対論的な力学の自然な舞台は，部分的観測量の拡大配位空間 $\mathcal{C}$ である．場の理論における部分的観測量の空間は有限または無限だろうか？

3.3.1　場の理論における部分的観測量

N 成分を持つ場 $\phi(x)$ に対する場の理論を考えよ．場は座標 x を持つ時空 M にわたって定義され，N 次元の標的空間 (target space) T における値をとる．

$$\begin{aligned} \phi:\ M &\longrightarrow T \\ x &\longmapsto \phi(x). \end{aligned} \tag{3.141}$$

例えば，$N = 6$ として，これは電磁場 $\phi = (\vec{E}, \vec{B})$ に対する Maxwell 理論となり得る．この理論によって記述される場に対する物理的測定を行うには，場 ϕ の成分を測定するための N 個の測定デバイスと，時空位置 x を決定するための 4 つのデバイス (1 つの時計と，3 つの基準物体からの距離を与える 3 つのデバイス) が必要である．場の値 ϕ と位置 x がそれ故，場の理論における部分的観測量である．［我々の流儀では位置 x も単なるパラメータではなく，場 ϕ と同列の観測量であることに注意する．］したがって場の理論に対する操作的に動機付けられた相対論的な配位空間は，次元 $4 + N$ を持つ**有限**次元の空間

$$\mathcal{C} = M \times T \tag{3.142}$$

である．相関は $\mathcal{C}$ における点 (x, ϕ) である．それは特定の時空点 (x) における特定の場の値 (ϕ) を表す．これは 3.2.1 節の例における振り子の (t, α) の相関の自明な一般化である．［なるほど，粒子の運動 $\alpha(t)$ が t 軸

(無限集合) 上で定義されているからと言って，拡大配位空間 (t,α) が無限次元にならないのと同じ理由で，場の理論の拡大配位空間も有限次元となっている．]

物理的運動 γ は物理的に識別できる相関のアンサンブルである．運動は場の方程式の解 $\phi(x)$ によって定義される．そのような解は ($(4+N)$ 次元の) 空間 $\mathcal{C}$ における，4 次元の面を定義する：面は関数 (3.141) のグラフである．すなわち，点 $(x,\phi(x))$ のアンサンブルである．[面上の点 $(x,\phi(x))$ において座標 x の 4 成分を独立に動かせるので，面は 4 次元となる．] 場の方程式の解の空間，すなわち相空間 Γ はそれ故，$(4+N)$ 次元の配位空間 $\mathcal{C}$ における 4 次元の面 γ たちの (無限次元の) 空間である．Γ における各状態は $\mathcal{C}$ における面 γ を定める．

$\mathcal{C}=M\times T$ 上で直接定義される Hamilton 形式の場の理論は可能であり，研究されてきた．主な理由は，局所的な場の理論では運動方程式が局所的であり，それ故ある点で起きることはその点の近傍にのみ依存するということである．このため場の方程式の Hamilton 的な構造を理解するのに，時空全体を考える必要はない．この種のアプローチの議論に関しては，私は読者に優れた詳しい論文 [109] と，そこに含まれる充分な参考文献を紹介する．以下に定式化の一般共変性を強調しつつ，その簡潔で自己充足的な説明を与える．

3.3.2 * 相対論的な Hamilton 形式の力学

Minkowski 空間 M 上の場の理論を考えよ．$A=1,\cdots,N$ として，$\phi^A(x^\mu)$ を場と呼ぶ．場は関数 $\phi: M\to T$ であり，ここに $T=R^N$ は標的空間，すなわち場が値をとるところの空間である．この理論の拡大配位空間は，座標 $q^a=(x^\mu,\phi^A)$ を持つ有限次元の空間 $\mathcal{C}=M\times T$ である．座標 q^a は $(4+N)$ 個の部分的観測量であり，その関係は理論によって記述される．運動方程式の解は $\mathcal{C}$ における 4 次元の面 γ を定義する．もし座標 x^μ を用いてこの面を座標付けすれば，この面は $[x^\mu,\phi^A(x^\mu)]$ によって与えられ，ここに $\phi^A(x^\mu)$ は運動方程式の解である．もし，代わりに，パラメータ τ^ρ, $\rho=0,1,2,3$ による任意のパラメータ付けを用いれば，面は $[x^\mu(\tau^\rho),\phi^A(\tau^\rho)]$ によって与えられ，ここに $\phi^A(x^\mu(\tau^\rho))=\phi^A(\tau^\rho)$ である．

有限自由度の (そしてゲージがない) 場合には，運動は 1 次元の曲線によって与えられる．曲線の各点において，1 つの接ベクトルがあり，運動量が 1 形式を座標付けする．場の理論では，運動は 4 次元の面であり，各点で 4 つの独立な接ベクトル X_μ，あるいは“4 重接ベクトル (quadritangent)” $X=\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}X_\mu\otimes X_\nu\otimes X_\rho\otimes X_\sigma$ を持つ．対応して，運動量は 4 形式を座標付けする．$\Omega=\Lambda^4T^*\mathcal{C}$ を $\mathcal{C}$ にわたる 4 形式 $p_{abcd}\mathrm{d}q^a\wedge\mathrm{d}q^b\wedge\mathrm{d}q^c\wedge\mathrm{d}q^d$ のバンドルとする．Ω の点はすると組 (q^a,p_{abcd}) である．空間 Ω は正準 4 形式

$$\tilde{\theta}=p_{abcd}\,\mathrm{d}q^a\wedge\mathrm{d}q^b\wedge\mathrm{d}q^c\wedge\mathrm{d}q^d \tag{3.143}$$

を担う．

一般に，部分的観測量 q^a の有限次元の空間 $\mathcal{C}$ が与えられると，ダイナミクスは相対論的ハミルトニアン $H:\Omega\to V$ によって定義され，ここに $\Omega=\Lambda^4T^*\mathcal{C}$ であり V はベクトル空間である．Ω における 4 次元の面を $\tilde{\gamma}$ で，この面の $\mathcal{C}$ への射影を γ で表す．物理的運動 γ は以下によって決定される．

変分原理　境界 α を持つ面 γ は，

$$H(q^a,p_{abcd})=0 \tag{3.145}$$

を満たし，$\mathcal{C}$ への制限 γ が α によって限られる面 $\tilde{\gamma}$ のクラスにおいて，もし $\tilde{\gamma}$ が積分

$$S[\tilde{\gamma}]=\int_{\tilde{\gamma}}p_{abcd}\,\mathrm{d}q^a\wedge\mathrm{d}q^b\wedge\mathrm{d}q^c\wedge\mathrm{d}q^d \tag{3.144}$$

の極値を与えるならば，物理的運動である．[この語順で訳せば式 (3.145) →式 (3.144) の順になる．]

これは完全に 3.2 節における変分原理［式 (3.38–39) の箇所］の直接的な一般化である．方程式 (3.145) は Ω における面 Σ を定義する．前と同様，$\tilde{\theta}$ の Σ への制限を θ，そして $\omega = \mathrm{d}\theta$ と書く．

ゲージのない Minkowski 空間上の場の理論に対して，系 (3.145) は

$$p_{ABCD} = p_{ABC\mu} = p_{AB\mu\nu} = 0, \tag{3.146}$$

$$H = \pi + H_0(x^\mu, \phi^A, p_A^\mu) = 0 \tag{3.147}$$

で与えられ，ここに H_0 は DeDonder の共変なハミルトニアンである [110] (例としては以下を見よ)．［$q^\mu = x^\mu, q^A = \phi^A$ の下で式 (3.146) は 4 形式 (3.143) の係数を表す．］消えない運動量に対して表記 $p_{\mu\nu\rho\sigma} = \pi\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ および $p_{A\nu\rho\sigma} = p_A^\mu\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ を用い，Σ 上の座標 (x^μ, ϕ^A, p_A^μ) を用いると便利である．［Lorentz 添字に関する反対称性からこのように置いても一般性を失わず，式 (3.147) における π と p_A^μ はこれらの関係で定義されている．いずれにせよ部分的観測量の一部を時空座標 x^μ に選んだことに対応し，ハミルトニアン (3.147) は式 (3.13) と類似の形を持つ．］式 (3.146) で定義される面の上では

$$\tilde{\theta} = \pi \mathrm{d}^4x + p_A^\mu \mathrm{d}\phi^A \wedge \mathrm{d}^3x_\mu \tag{3.148}$$

であり，ここで表記 $\mathrm{d}^4x = \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3$ および $\mathrm{d}^3x_\mu = \mathrm{d}^4x(\partial_\mu) = \frac{1}{3!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma$ を導入した［本稿次節で補足］．式 (3.146) と (3.147) によって定義される Σ 上では

$$\theta = \tilde{\theta}|_\Sigma = -H_0(x^\mu, \phi^A, p_A^\mu)\mathrm{d}^4x + p_A^\mu \mathrm{d}\phi^A \wedge \mathrm{d}^3x_\mu \tag{3.149}$$

であり，ω は 5 形式

$$\omega = -\mathrm{d}H_0(x^\mu, \phi^A, p_A^\mu)\mathrm{d}^4x + \mathrm{d}p_A^\mu \mathrm{d}\phi^A \wedge \mathrm{d}^3x_\mu \tag{3.150}$$

となる．ω の軌道は，その各点で面の正接の 4 つ組 X が

$$\omega(X) = 0 \tag{3.151}$$

を満たすような，Σ に埋め込まれた 4 次元の面 m である．軌道の $\mathcal{C}$ への射影が物理的運動であることを示す演習は，読者にとっておく．［式 (3.47–48) の箇所の議論を一般化すれば良いと考えられる．］

より詳しくは，$(\partial_\mu, \partial_A, \partial_\mu^A)$ を座標 (x^μ, ϕ^A, p_A^μ) によって定義される Σ の接空間の基底とする．面を任意のパラメータ τ^ρ によってパラメトライズする．面はすると点 $[x^\mu(\tau^\rho), \phi^A(\tau^\rho), p_A^\mu(\tau^\rho)]$ たちによって与えられる．$\partial_\rho = \partial/\partial\tau^\rho$ とする．次いで

$$X_\rho = \partial_\rho x^\mu(\tau^\rho)\,\partial_\mu + \partial_\rho\phi^A(\tau^\rho)\,\partial_A + \partial_\rho p_A^\mu(\tau^\rho)\,\partial_\mu^A \tag{3.152}$$

とする．［基底と違いその線形結合 (3.152) は，面の次元と同じく $\rho = 0, \cdots, 3$ の 4 つである[*75]．］このとき $X = X_0 \otimes X_1 \otimes X_2 \otimes X_3$ は Σ 上の 4 階のテンソルである．もし $\omega(X) = 0$ ならば，$\phi^A(x^\mu(\tau^\rho)) = \phi^A(\tau^\rho)$ によって決定される $\phi^A(x^\mu)$ は物理的運動である．

まとめると，場の理論の正準形式は組 $(\mathcal{C}, H)$ によって完全に定義され，ここに $\mathcal{C}$ は部分的観測量 (場の値と時空座標) の有限次元の空間であり，H は有限次元の空間 $\Omega = \Lambda^4 T^*\mathcal{C}$ 上のハミルトニアンである．等価的に，それは有限次元の準シンプレクティック空間 (Σ, θ) によって完全に定義される．定式化とその解釈は，$\mathcal{C}$ の座標が x^μ と ϕ^A に分離せず，相対論的ハミルトニアンが特定の形 (3.146)–(3.147) を持たない場合にも意味を成す．

[*75] 式 (3.152) 右辺における引数 τ^ρ はパラメータの集合であり，∂_ρ と和をとらない (言わずもがな)．

例：スカラー場　例として，場の方程式

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(x^\mu) + m^2\phi(x^\mu) + V'(\phi(x^\mu)) = 0 \tag{3.153}$$

を満たす，Minkowski 空間上のスカラー場 $\phi(x^\mu)$ を考えよ．ここに Minkowski 計量は符号 $[+,-,-,-]$ を持ち，また $V'(\phi) = \mathrm{d}V(\phi)/\mathrm{d}\phi$．場は関数 $\phi : M \to T$ であり，ただしここでは $T = R$．この理論の相対論的な配位空間は，座標 (x^μ, ϕ) を持つ 5 次元の空間 $\mathcal{C} = \mathcal{M} \times T$ である．空間 Ω は座標 $(x^\mu, \phi, \pi, p^\mu)$ を持ち (方程式 (3.146) は明らかに満たされる［反対称性より $p_{\phi\phi\mu\nu} = 0, \mathrm{etc.}$］)，正準 4 形式

$$\tilde{\theta} = \pi \mathrm{d}^4x + p^\mu \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^3x_\mu \tag{3.154}$$

を担う．ダイナミクスはこの空間上で，DeDonder の相対論的ハミルトニアン

$$H = \pi + H_0 = 0, \tag{3.155}$$

$$H_0 = \frac{1}{2}\left(p^\mu p_\mu + m^2\phi^2 + 2V(\phi)\right) \tag{3.156}$$

によって定義される．それ故，これらの方程式によって定義される面 Σ 上の座標 (x^μ, ϕ, p^μ) を用いることができ，式 (3.149) は

$$\theta = -\frac{1}{2}\left(p^\mu p_\mu + m^2\phi^2 + 2V(\phi)\right)\mathrm{d}^4x + p^\mu \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^3x_\mu \tag{3.157}$$

を与える．組 (Σ, θ) は系の準シンプレクティック形式を定義する；ω は 5 形式

$$\omega = \mathrm{d}\theta = -\left(p^\mu \mathrm{d}p_\mu + m^2\phi\mathrm{d}\phi + V'(\phi)\mathrm{d}\phi\right) \wedge \mathrm{d}^4x + \mathrm{d}p^\mu \wedge \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^3x_\mu \tag{3.158}$$

である．接ベクトルは

$$V = X^\mu \partial_{x^\mu} + X^\phi \partial_\phi + Y^\mu \partial_{p^\mu} \tag{3.159}$$

の形を持つ．もし座標 x^μ で ω の軌道を座標付けすれば，各点において 4 つの独立な接ベクトル

$$X_\mu = \partial_{x^\mu} + (\partial_\mu\phi)\partial_\phi + (\partial_\mu p^\rho)\partial_{p^\rho} \tag{3.159}$$

［式 (3.152) で τ^ρ を x^ρ そのものに選べば良い］および 4 重接ベクトル $X = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} X_\mu \otimes X_\nu \otimes X_\rho \otimes X_\sigma$ を得る．式 (3.160) と式 (3.158) を $\omega(X) = 0$ に代入すると，直接的な計算により

$$\partial_\mu\phi(x) = p_\mu(x), \tag{3.161}$$

$$\partial_\mu p^\mu(x) = -m^2\phi(x) - V'(\phi(x)), \tag{3.162}$$

したがって正確に場の方程式 (3.153) が得られる［本稿次節で補足］．正準形式は明白に Lorentz 共変であり，いかなる同時の初期データの面も選ぶ必要はないことに注意せよ．

状態は拡大配位空間 $\mathcal{C}$ における 4 次元の面 $(x, \phi(x))$ である．それは自然において実現できる部分的観測量の測定の組合せの集合を表す．相空間 Γ はこれらの状態から成る無限次元の空間である．状態は特定の相関 $(x, \phi(x))$，あるいは特定の相関の集合 $(x_1, \phi_1) \cdots (x_n, \phi_n)$ を観測できるか否かを決める．それらは点 (x_i, ϕ_i) たちが，状態を表す 4 次元の面上にあれば観測できる．逆に，相関の特定の組の観測は状態の情報を与える：面は観測された点を通らねばならない．

3.3.2 節について

■d^3x_μ の表式 (教科書 p.132，l.17) について

$$\mathrm{d}^4x \equiv \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 = \frac{1}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma$$

であると同時に，外積の定義 (付録 D) より

$$\mathrm{d}^4x = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu \otimes \mathrm{d}x^\rho \otimes \mathrm{d}x^\sigma$$

でもある．すると

$$\mathrm{d}^3x_\lambda \equiv \mathrm{d}^4x[\partial_\lambda, \bullet, \bullet, \bullet] = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\delta^\mu_\lambda \mathrm{d}x^\nu \otimes \mathrm{d}x^\rho \otimes \mathrm{d}x^\sigma = \frac{1}{3!}\epsilon_{\lambda\nu\rho\sigma}\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma.$$

■場の方程式 (3.161–162) について

$$\omega(X_\lambda) = \omega(\partial_\lambda) + (\partial_\lambda\phi)\omega(\partial_\phi) + (\partial_\lambda p^\rho)\omega(\partial_{p^\rho})$$

において，引き続き $\omega(X_\lambda) \equiv \omega[X_\lambda, \bullet, \cdots, \bullet]$, etc. と解釈して各項を計算する．まず第 1 項 $\omega(\partial_\lambda)$ について，

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}p_\mu \wedge \mathrm{d}^4x(\partial_\lambda) =& \mathrm{d}^4x(\partial_\lambda) \wedge \mathrm{d}p_\mu = \mathrm{d}^3x_\lambda \wedge \mathrm{d}p_\mu = -\mathrm{d}p_\mu \wedge \mathrm{d}^3x_\lambda, \qquad \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^4x(\partial_\lambda) = -\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^3x_\lambda,\\
\mathrm{d}^3x_\mu(\partial_\lambda) =& \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{d}x^\nu(\partial_\lambda) \otimes \mathrm{d}x^\rho \otimes \mathrm{d}x^\sigma = -\epsilon_{\lambda\mu\rho\sigma}\mathrm{d}x^\rho \otimes \mathrm{d}x^\sigma = -\frac{1}{2!}\epsilon_{\lambda\mu\rho\sigma}\mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma \equiv -\mathrm{d}^2x_{\lambda\mu}
\end{aligned}$$

より，

$$\omega(\partial_\lambda) = p_\mu \mathrm{d}p^\mu \wedge \mathrm{d}^3x_\lambda + \left(m^2\phi + V'(\phi)\right)\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^3x_\lambda - \mathrm{d}^2x_{\lambda\mu} \wedge \mathrm{d}p^\mu \wedge \mathrm{d}\phi.$$

次に後ろの 2 項はそれぞれ

$$\omega(\partial_\phi) = -\left(m^2\phi + V'(\phi)\right)\mathrm{d}^4x - \mathrm{d}p^\mu \wedge \mathrm{d}^3x_\mu, \qquad \omega(\partial_{p^\rho}) = -p_\rho \mathrm{d}^4x + \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^3x_\rho$$

と計算できるので，

$$\begin{aligned}
0 = \omega(X_\lambda) =& \left\{p_\mu \mathrm{d}p^\mu \wedge \mathrm{d}^3x_\lambda - (\partial_\lambda\phi)\mathrm{d}p^\mu \wedge \mathrm{d}^3x_\mu\right\}\\
&+ \left\{\left(m^2\phi + V'(\phi)\right)\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^3x_\lambda + (\partial_\lambda p^\rho)\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^3x_\rho\right\}\\
&- \mathrm{d}^2x_{\lambda\mu} \wedge \mathrm{d}p^\mu \wedge \mathrm{d}\phi\\
&- \left\{(\partial_\lambda\phi)\left(m^2\phi + V'(\phi)\right) + (\partial_\lambda p^\rho)p_\rho\right\}\mathrm{d}^4x
\end{aligned}$$

とまとめられる．最右辺の各行の 4 形式が恒等的にゼロにならねばならない．

1 行目の 4 形式を ∂_{p^ν} に作用させると $p_\nu \mathrm{d}^3x_\lambda - (\partial_\lambda\phi)\mathrm{d}^3x_\nu = 0$ であり，フリーな添字 λ, ν を等置すると (和はとらない)，式 (3.161):

$$p_\lambda = \partial_\lambda\phi$$

を得る．この下で 3 行目の 4 形式は $\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\phi = 0$ により自動的に消える．

次に 2 行目の 4 形式を $[\partial_\phi, \partial_\alpha, \partial_\beta, \partial_\gamma]$ に作用させ

$$\mathrm{d}^3x_\lambda[\partial_\alpha, \partial_\beta, \partial_\gamma] = \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu \otimes \mathrm{d}x^\rho[\partial_\alpha, \partial_\beta, \partial_\gamma] = \epsilon_{\lambda\alpha\beta\gamma}$$

を用いると，

$$\left(m^2\phi + V'(\phi)\right)\epsilon_{\lambda\alpha\beta\gamma} + (\partial_\lambda p^\rho)\epsilon_{\rho\alpha\beta\gamma} = 0.$$

フリーな添字の組に $(\lambda, \alpha, \beta, \gamma) = 0, 1, 2, 3$ を順に代入すると，

$$\left(m^2\phi + V'(\phi)\right) + \partial_\mu p^\mu = 0$$

が $\mu = 0, 1, 2, 3$ ごとに成り立つことになるので，μ について和をとった式 (3.162) も成り立つ．

なお式 (3.161):$p_\lambda = \partial_\lambda\phi$ より $p_0 = \dot{\phi}$ は場に共役な運動量密度となるものの (π との混同に注意)，これを H_0 の式 (3.156) に代入した結果は，通常のハミルトニアン密度

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left({p_0}^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 + m^2\phi^2\right) + V(\phi)$$

(文献 [426, p.34]，あるいは後の式 (3.190–191),(3.195) を見よ) とは空間微分の項が逆符号であることに注意する．実際，ハミルトニアン (3.184) の式 (3.185) への書き換えにおいて，H_0 が π に由来する $(\vec{\phi})^2$ を食べて式 (3.190–191) の $\mathcal{H}$ となっていることが見て取れる．式 (3.195) ではこのハミルトニアン密度を改めて H_0 と書いている．

3.3.3 境界データの空間 $\mathcal{G}$ と Hamilton 関数 S

3.2.5 節で説明した境界データの空間 $\mathcal{G}$ は量子論において重要な役割を演じる．有限次元の場合には，$\mathcal{G}$ は拡大配位空間の自身との Descartes 積であるものの，解を特徴付けるのに無限個の境界データが必要となる場の理論の文脈では，同じことは正しくない．有限次元の場合には，$\mathcal{G}$ は $\mathcal{C}$ における可能な**運動の境界**の空間であることを思い出そう．場の理論では，運動は $\mathcal{C}$ における 4 次元の面である．その境界は $\mathcal{C}$ における，境界のない 3 次元の面 α である．そこで場の理論における $\mathcal{G}$ を，$\mathcal{C}$ における境界のない向き付けされた 3 次元の面 α の空間として定義しよう．$\mathcal{C} = M \times T$ のとき，境界データ α は時空における 3 次元の境界面 σ とともに，この面上での場の値 φ を含む．

より正確には，x^μ を M における時空座標とし，ϕ^A を標的空間の座標とする．3 次元の面 α を 3 次元の座標 $\vec{\tau} = (\tau^1, \tau^2, \tau^3)$ で座標付けする．このとき α は関数

$$\begin{aligned} \alpha =& [\sigma, \varphi], && (3.163)\\ \sigma: \quad \vec{\tau} \mapsto & x^\mu(\vec{\tau}), && (3.164)\\ \varphi: \quad \vec{\tau} \mapsto & \varphi^A(\vec{\tau}) && (3.165) \end{aligned}$$

で与えられる．関数 $x^\mu(\vec{\tau})$ は時空における境界のない 3 次元の面 σ を定義する．関数 $\varphi^A(\vec{\tau})$ はこの面上での場 $\phi(x)$ の値を定義する：

$$\phi^A(x(\vec{\tau})) = \varphi^A(\vec{\tau}). \tag{3.166}$$

例えば σ を M における連結領域 $\mathcal{R}$ の境界としよう．すると，一般に，φ は $\phi|_\sigma = \varphi$ となるような，内部 $\mathcal{R}$ における運動方程式の解 $\phi(x)$ を決定する．σ が Minkowski 空間における円筒であると想像せよ．内部における解を決定するには，円筒の底における場の初期値，円筒の上面における場の最後の値，さらに円筒の側面における空間的な境界条件が必要である．データ α はこれら場の値の全てを，円筒自体の時空位置とともに決定する．これらのデータは，有限次元の力学における Hamilton 関数と量子論的な伝播関数の引数を成す組 $(t, q^i; t', q'^i)$ の，場の理論的な一般化を成す．あるいは，面 α が連結している必要はない．例えば，それは始・終配位と見なせる，2 つの要素から成っていても良い．

Hamilton 関数 $S[\alpha] = S[\sigma, \varphi]$ は，$\phi|_\sigma = \varphi$ となるような，$\mathcal{R}$ における運動方程式の解 $\phi(x)$ に対する作用として定義される．以下で見るように，$S[\alpha]$ は Hamilton–Jacobi 方程式を満たし［3.3.4 節］，量子力学的な伝播関数［の位相］の古典的な極限と見なせる*76．

我々は定義 (3.83) とアナロガスな，$S[\alpha]$ のより形式的な定義を与えることができる．γ を α によって限られた $\mathcal{C}$ における運動としよう．$\tilde{\gamma}$ を γ の Σ への持ち上げとしよう．すなわち，$\tilde{\gamma}$ を γ へと射影される ω の軌道とする．このとき

$$S[\alpha] = \int_{\tilde{\gamma}} \theta. \tag{3.167}$$

*76 $S[\alpha]$ はこの解が存在する $\mathcal{G}$ の領域上でのみ定義され，それは 1 つより多くの解があるところでは多価である．

例：スカラー場　例えば，スカラー場に対して

$$
\begin{aligned}
S[\alpha] &= \int_{\tilde{\gamma}} \theta = \int_{\tilde{\gamma}} (\pi \mathrm{d}^4 x + p^\mu \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^3 x_\mu) = \int_{\mathcal{R}} (\pi + p^\mu \partial_\mu \phi) \mathrm{d}^4 x \\
&= \int_{\mathcal{R}} \left(-\frac{1}{2} p^\mu p_\mu - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) + p^\mu \partial_\mu \phi \right) \mathrm{d}^4 x \qquad (3.168) \\
&= \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) \right) \mathrm{d}^4 x \\
&= \int_{\mathcal{R}} L(\phi, \partial_\mu \phi) \mathrm{d}^4 x \qquad (3.169)
\end{aligned}
$$

であり［式 (3.168) を本稿次節で補足］，ここに L はラグランジアン密度であり，また運動方程式 $p_\mu = \partial_\mu \phi$ を用いた．

α が 2 つの空間的で平行な超曲面 $x^\mu(\vec{\tau}) = (t_1, \vec{\tau})$ と $x^\mu(\vec{\tau}) = (t_2, \vec{\tau})$，およびこれらの面上における場の値 $\phi_1(\vec{x})$ と $\phi_2(\vec{x})$ から成る特別な場合に，自由スカラー場の Hamilton 関数を計算することは困難ではない．自由場は本質的に波長［波数］$\vec{k}$ と振動数 $\omega(\vec{k}) = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$ を持つ振動子の集まりであるという事実によって，計算は簡単になる．この事実と式 (3.34) を用いれば，与えられた境界値に対する場とその作用を計算することは直接的である．それは

$$
S(\phi_1, t_1, \phi_2, t_2) = \int \mathrm{d}^3 k \, \omega(\vec{k}) \frac{2\overline{\phi_1(\vec{k})}\phi_2(\vec{k}) - (|\phi_1|^2(\vec{k}) + |\phi_2|^2(\vec{k})) \cos[\omega(\vec{k})(t_1 - t_2)]}{2 \sin[\omega(t_1 - t_2)]} \qquad (3.170)
$$

を与え，ここに $\phi(\vec{k})$ は $\phi(\vec{x})$ の Fourier 成分である．［本稿次節で詳しく確認する．］

* **$\mathcal{G}$ 上のシンプレクティック構造**　有限次元の場合のように，我々は $\mathcal{G}$ 上のシンプレクティック構造を定義できる．s を，$\tilde{\gamma}$ を限る Σ における 3 次元の面としよう．すなわち，$s = [x^\mu(\vec{\tau}), \varphi^A(\vec{\tau}), p^\mu_A(\vec{\tau})]$ であり，ここで運動量 $p^\mu_A(\vec{\tau})$ は α 全体によって決定される場の方程式の解によって決定される．

$\mathcal{G}$ 上の 2 形式を

$$
\omega_{\mathcal{G}}[\alpha] = \int_s \omega \qquad (3.171)
$$

のように定義する．［微分］形式 $\omega_{\mathcal{G}}$ は 2 形式である：それは 3 次元の面にわたる 5 形式の積分である．より正確には，$\delta\alpha$ を α の小さな変分とする．この変分は α 上で定義されたベクトル場 $\delta\alpha(\vec{\tau})$ と見なせる．この変分は対応する小さな変分 δs を決定し，これは同様に，s 上のベクトル場 $\delta s(\vec{\tau})$ である．このとき

$$
\omega_{\mathcal{G}}[\alpha](\delta_1 \alpha, \delta_2 \alpha) = \int_{s_\alpha} \omega(\delta_1 s, \delta_2 s). \qquad (3.172)
$$

このように，有限次元の空間 Σ 上の 5 形式 ω は有限次元の空間 $\mathcal{G}$ 上の 2 形式 $\omega_{\mathcal{G}}$ を定義する．

α の小さな局所的な変分 $\delta\alpha$ を考えよ．これは Minkowski 空間における面 α_M を変分するとともに，その上での場の値を変分することを意味する．この変分が場の方程式を満たすと仮定せよ：すなわち，α によって決定される場の方程式の解に対して，場の変分は正しい変分である．我々は

$$
\omega_{\mathcal{G}}[\alpha](\delta\alpha) = \int_{s_\alpha} \omega(\delta s) \qquad (3.173)
$$

を得ている．ところが δs はその構成により軌道に沿っている，すなわち ω のヌル方向を向いており，それ故，方程式の右辺は消える．ここから，$\delta\alpha$ が無限小の物理的な運動ならば，

$$
\omega_{\mathcal{G}}(\delta\alpha) = 0 \qquad (3.174)
$$

となることが帰結する．

組 $(\mathcal{G}, \omega_{\mathcal{G}})$ は系の重要な情報の全てを含んでいる．$\omega_{\mathcal{G}}$ のヌル方向は 3 次元の面 α の物理的運動に沿う変分を決定する．これらのヌル方向によって分割された空間 $\mathcal{G}$，すなわちこれらの変分の軌道の空間は物理的な相空間 Γ であり，この空間に制限された $\omega_{\mathcal{G}}$ は系の物理的なシンプレクティック 2 形式である．

例：スカラー場　スカラー場の例に対して，$\omega_{\mathcal{G}}$ をもう少しはっきりした形に計算しよう．定義 (3.171) より，

$$\begin{aligned}\omega_{\mathcal{G}}[\alpha] &= \int_s \omega = \int_s [\mathrm{d}\pi \wedge \mathrm{d}^4x + \mathrm{d}p^\mu \wedge \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^3x_\mu] \\ &= \int_s [-(p^\nu \mathrm{d}p_\nu + m^2\phi\mathrm{d}\phi + V'\mathrm{d}\phi) + \mathrm{d}p^\mu \wedge \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^3x_\mu] \\ &= \int_{\alpha_M} \mathrm{d}^3x_\nu\ [-(p_\mu - \partial_\mu\phi)\mathrm{d}p^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu - (m^2\phi + V' + \partial_\mu p^\mu)\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}x^\nu + \mathrm{d}p^\nu \wedge \mathrm{d}\phi] \\ &= \int_{\alpha_M} \mathrm{d}^3x_\nu\ \mathrm{d}p^\nu \wedge \mathrm{d}\phi \end{aligned} \tag{3.175}$$

であり，ここで積分変数として x^μ 座標自身を用いたため，被積分関数の場は x^μ の関数である．［上式 (3.175) の 1,2 行目にも角括弧を補い，また ω の式 (3.158) に基づき，2,3 行目の $\mathrm{d}\pi$ に由来する項に負号を付けた．第 4 の等号を本稿次節で補足する (下記も参照).］積分は s 上なので，被積分関数における p^μ は α 上のデータにより決定される場の方程式の解によって与えられるそれであることに注意せよ．それ故それは運動方程式 (3.161)–(3.162) を満たし，そのことを我々は上で用いた．再び式 (3.161) を用いると，

$$\omega_{\mathcal{G}}[\alpha] = \int_{\alpha_M} \mathrm{d}^3x\, n_\nu\, \mathrm{d}(\nabla^\nu\phi) \wedge \mathrm{d}\phi \tag{3.176}$$

を得る．［記号 ∇^ν は共変微分の意味か (スカラー場 ϕ に対しては通常の微分に一致)．また式 (3.175) の導出過程 (本稿次節) で通常の積分要素として再定義した $\mathrm{d}^3x_\mu = \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta\mathrm{d}x^\gamma$ は式 (2.74) より，3 次元面の法線方向の要素 $\mathrm{d}^3x\, n_\mu$ に他ならない*77.］特に，面を動かさず，また面上の場の変化が $\delta\phi(x)$ であるような変分 $\delta\alpha$ を考えれば，

$$\omega_{\mathcal{G}}[\alpha](\delta_1\alpha, \delta_2\alpha) = \int_{\alpha_M} \mathrm{d}^3x\, n_\nu\, (\delta_1\phi\nabla^\nu\delta_2\phi - \delta_2\phi\nabla^\nu\delta_1\phi) \tag{3.177}$$

を得る．この公式は [108] における，場の方程式の解の空間上で与えられるシンプレクティック 2 形式の表現と直接比較できる．表現は同じであるが，解釈に微妙な差異がある：$\omega_{\mathcal{G}}$ は場の方程式の解の空間上で定義されていない；それはラグランジアン・データの空間 $\mathcal{G}$ 上で定義されており，これらのデータの法線方向微分 $n_\nu\nabla^\nu\phi$ は場の方程式を通じてデータ自体から決定される．

3.3.3 節について

■スカラー場の Hamilton 関数 (3.168) について

$$\theta = (\text{式 (3.157)}) = (\pi\mathrm{d}^4x + p^\mu\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^3x_\mu)|_{\pi=-H_0}$$

であり，第 4 の等号で実際に $\pi = -H_0$:(3.155) を代入している．

第 3 の等号 $\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^3x_\mu = \partial_\mu\phi\mathrm{d}^4x$ について，

$$\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^3x_\mu = \left((\partial_\lambda\phi)\mathrm{d}x^\lambda\right) \wedge \left(\frac{1}{3!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma\right).$$

ここで例えば $\mu = 0$ とおくと，Levi–Civita 記号に寄与するのは ν, ρ, σ が添字 $1, 2, 3$ の 3! 通りの置換となる場合だけであり，このとき外積が生き残るのは $\lambda = 0$ の場合だけである．よって $\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^3x_0 = \partial_0\phi\mathrm{d}^4x$ となる．$\mu = 1, 2, 3$ の場合も同様に $\lambda = \mu$ の項が生き残る．各々の場合をまとめて一挙的に扱えていない点は洗練されていないものの，このように場合分けすれば変形を無理なく確実に理解できる．

なお ϕ を座標の関数と見て $\mathrm{d}\phi = (\partial_\lambda\phi)\mathrm{d}x^\lambda$ とした時点で，我々は暗に座標そのものを積分変数に選ぶことを含意している．このとき外積 d^4x は通常の体積要素 $\mathrm{d}x^0 \cdots \mathrm{d}x^3$ に置き換わる．

■スカラー場の Hamilton 関数 (3.170) の確認　スカラー場の Fourier 展開を

$$\phi(t, \vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \left\{a(\vec{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega(\vec{k})t)} + \overline{a(\vec{k})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega(\vec{k})t)}\right\}$$

*77 3.3.4 節の“面積要素”(3.180) では係数 1/3! は余計と考えられる (本稿では訂正済み).

と書いて展開係数を定義する．被積分関数の因子 $\{\cdots\}$ は振動子の式 (3.31):$\alpha(t) = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \bar{a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ の対応物であり，この対応を確保するために，ここでは慣習に反して係数 $a(\vec{k})$ を“負振動数”の項に充てている．

境界値 $\phi(t_1, \vec{x}) = \phi_1(\vec{x}), \phi(t_2, \vec{x}) = \phi_2(\vec{x})$ に対応する被積分関数の因子 $\{\cdots\}$ の値を，それぞれ順に $\phi_1(\vec{k}), \phi_2(\vec{k})$ で表そう．このとき $\phi_1(\vec{k}), \phi_2(\vec{k})$ は調和振動子 (3.1 節末尾) に対する α_1, α_2 の対応物となることが保証させる．するとこれらを“Fourier components” (原文の式 (3.170) 直後) と呼ぶのは，厳密には不正確であることになる．

なお 3.3.2 節末尾との整合性を保つために，引き続き Minkowski 計量の符号系を $[+, -, -, -]$ とすれば，指数の因子は 4 元内積の記法

$$k \cdot x \equiv \omega(\vec{k})t - \vec{k} \cdot \vec{x}$$

で略記できる．

これらを踏まえて，自由場 (したがって $V(\phi) = 0$) に対して Hamilton 関数 (3.169):

$$S[\alpha] = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^4 x \left((\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^2 \right)$$

を評価しよう．必要な計算は常套的な式変形となる．$(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) = \dot{\phi}^2 - (\vec{\nabla}\phi)^2$ において

$$\dot{\phi} = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \mathrm{i}\omega(\vec{k}) \left\{ a(\vec{k}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} - \overline{a(\vec{k})} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} \right\}, \qquad \vec{\nabla}\phi = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} (-\mathrm{i}\vec{k}) \left\{ a(\vec{k}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} - \overline{a(\vec{k})} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} \right\}$$

であることに注意すると，

$$\begin{aligned} S[\alpha] = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^4 x \frac{\mathrm{d}^4 k \mathrm{d}^4 k'}{(2\pi)^6} \Big\{ & \Big(-\omega(\vec{k})\omega(\vec{k}') + \vec{k} \cdot \vec{k}' - m^2 \Big) a(\vec{k}) a(\vec{k}') \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+k')\cdot x} \\ & + \Big(\omega(\vec{k})\omega(\vec{k}') - \vec{k} \cdot \vec{k}' - m^2 \Big) a(\vec{k}) \overline{a(\vec{k}')} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')\cdot x} \\ & + \Big(\omega(\vec{k})\omega(\vec{k}') - \vec{k} \cdot \vec{k}' - m^2 \Big) \overline{a(\vec{k})} a(\vec{k}') \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-k')\cdot x} \\ & + \Big(-\omega(\vec{k})\omega(\vec{k}') + \vec{k} \cdot \vec{k}' - m^2 \Big) \overline{a(\vec{k}) a(\vec{k}')} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k+k')\cdot x} \Big\} \end{aligned}$$

とまとめられる．ここで各々の空間積分は

$$\int \mathrm{d}^4 x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(\vec{k})t} (2\pi)^3 \delta(\vec{k})$$

のように計算できる．次いでデルタ関数を利用して $\vec{k}'$ に関する積分を実行し，さらに $\omega^2(\pm\vec{k}) = \vec{k}^2 + m^2$ に注意すると，

$$S[\alpha] = -\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \omega^2(\vec{k}) \left(a^2(\vec{k}) \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega(\vec{k})t} + \overline{a^2(\vec{k})} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega(\vec{k})t} \right)$$

が得られる．これは式 (3.34) の導出過程で得た調和振動子のラグランジアン

$$L = -m\omega^2 (a^2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t} + \bar{a}^2 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t})$$

の時間積分と全く同じ形をしている．よって確かにその後の計算をそのまま流用することができ，式 (3.170) を得る．

■スカラー場の $\omega_{\mathcal{G}}[\alpha]$ の式 (3.175)，第 4 の等号について　運動方程式 (3.161–162) より最初の 2 項が消えることが明白となるように，2 行目と比べて 2 つの項が追加されている．そこで，それらの和

$$-(\partial_\mu\phi)\mathrm{d}p^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu+(\partial_\mu p^\mu)\mathrm{d}\phi\wedge\mathrm{d}x^\nu=-\{(\partial_\mu\phi)(\partial_\rho\partial^\mu\phi)-(\partial_\mu\partial^\mu\phi)(\partial_\rho\phi)\}\mathrm{d}x^\rho\wedge\mathrm{d}x^\nu$$

が積分に寄与しないことを示したい．あるいは式 (3.175) の 1 行目と最右辺を比べれば，結局

$$\mathrm{d}\pi=-(p^\mu\mathrm{d}p_\mu+(m^2\phi+V')\mathrm{d}\phi)=-\{(\partial^\mu\phi)(\partial_\rho\partial_\mu\phi)-(\partial_\mu\partial^\mu\phi)(\partial_\rho\phi)\}\mathrm{d}x^\rho$$

の項が積分に寄与しないことを示せば充分である．これらは最右辺の因子 $\{\cdots\}$ が共通なので，同じことである．そして，いずれにせよ

$$\{\cdots\}=[\partial_\mu(\phi\partial_\rho\partial^\mu\phi)-\phi\partial_\rho\partial_\mu\partial^\mu\phi]-[\partial_\rho(\phi\partial_\mu\partial^\mu\phi)-\phi\partial_\rho\partial_\mu\partial^\mu\phi]=\partial_\mu(\phi\partial_\rho\partial^\mu\phi)-\partial_\rho(\phi\partial_\mu\partial^\mu\phi)$$

と変形すれば，これはベクトルの回転と同じ形を持つため，Stokes の定理によって境界積分に変換できる．ところが積分領域 α_M はそれ自体が境界であって，自身は境界を持たないため，この積分はゼロになると考えられる．

「積分変数として x^μ 座標自身を用いた」(教科書 p.137，l.1) 場合に得られる積分要素についても調べておく必要がある．3.3.2 節の運動方程式 (3.161–162) に関して補足したように，

$$\mathrm{d}^3x_\mu[\partial_\alpha,\partial_\beta,\partial_\gamma]=\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{d}x^\nu\otimes\mathrm{d}x^\rho\otimes\mathrm{d}x^\sigma[\partial_\alpha,\partial_\beta,\partial_\gamma]=\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}$$

である．よって

$$\mathrm{d}^3x_\mu\quad\rightarrow\quad\mathrm{d}^3x_\mu[\partial_\alpha,\partial_\beta,\partial_\gamma]\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta\mathrm{d}x^\gamma=\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta\mathrm{d}x^\gamma$$

と置き換わる．この右辺 (通常の積分要素) を改めて d^3x_μ と再定義していることになる．同様に

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}^4x[\bullet,\partial_\alpha,\partial_\beta,\partial_\gamma]=\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{d}x^\mu\otimes\mathrm{d}x^\nu\otimes\mathrm{d}x^\rho\otimes\mathrm{d}x^\sigma[\bullet,\partial_\alpha,\partial_\beta,\partial_\gamma]=\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\mathrm{d}x^\mu[\bullet],\\ \therefore\ &\mathrm{d}^4x\quad\rightarrow\quad\mathrm{d}^4x[\bullet,\partial_\alpha,\partial_\beta,\partial_\gamma]\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta\mathrm{d}x^\gamma=\mathrm{d}x^\mu[\bullet](\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta\mathrm{d}x^\gamma)=\mathrm{d}x^\mu[\bullet]\mathrm{d}^3x_\mu.\end{aligned}$$

以上より式 (3.175) 第 4 の等号が得られる．

3.3.4 Hamilton–Jacobi

場の理論に対する Hamilton–Jacobi 方程式は，Hamilton 関数の満たす境界上の局所的な方程式として書ける．ここではスカラー場の場合に Hamilton–Jacobi 方程式の導出を示し，一般化は興味のある読者に委ねる．定義より

$$S[\alpha]=\int_{\tilde{\gamma}}\theta=\int_{\tilde{\gamma}}(\pi\mathrm{d}^4x+p^\mu\mathrm{d}\phi\wedge\mathrm{d}^3x_\mu)\tag{3.178}$$

であり［式 (3.168)］，

$$\frac{\delta S[\alpha]}{\delta x^\mu(\vec{\tau})}=\pi(\vec{\tau})n_\mu(\vec{\tau})+\frac{1}{2!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\nu(\vec{\tau})\,\partial_i\varphi(\vec{\tau})\,\partial_jx^\rho(\vec{\tau})\,\partial_kx^\sigma(\vec{\tau})\,\epsilon^{ijk}\tag{3.179}$$

と書くことができ，ここに

$$n_\mu(\vec{\tau})=\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_1x^\nu(\vec{\tau})\partial_2x^\rho(\vec{\tau})\partial_3x^\sigma(\vec{\tau})\tag{3.180}$$

は 3 次元の面 σ に直交する．［ただし $\partial_i = \partial/\partial\tau^i$ であり，上式 (3.179) を本稿次節で導出する*78．］運動量 π は α 全体に依存する．この方程式を n^μ と縮約すると，

$$\pi(\vec{\tau}) = n^\mu(\vec{\tau})\frac{\delta S[\alpha]}{\delta x^\mu(\vec{\tau})} - p^i(\vec{\tau})\partial_i\varphi(\vec{\tau}). \tag{3.181}$$

［本稿次節で導出する*79．］運動方程式 $p_\mu = \partial_\mu\phi$ を用いると，これは

$$\pi(\vec{\tau}) = n^\mu(\vec{\tau})\frac{\delta S[\alpha]}{\delta x^\mu(\vec{\tau})} - \partial^i\varphi(\vec{\tau})\partial_i\varphi(\vec{\tau}) \tag{3.182}$$

となる［境界のパラメータを $\vec{\tau} = \vec{x}$ と選んだ］．同様に

$$\frac{\delta S[\alpha]}{\delta\varphi(\vec{\tau})} = p^\mu(\vec{\tau})n_\mu(\vec{\tau}). \tag{3.183}$$

［本稿次節で導出する．］これら 2 つの方程式の導出は，式 (3.86) を導くのに用いたのとアナロガスな手順を必要とする．

さて，式 (3.155) および (3.156) よりスカラー場のダイナミクスは方程式

$$\pi + \frac{1}{2}\left(p^\mu p_\mu + m^2\phi^2 + 2V(\phi)\right) = 0 \tag{3.184}$$

に支配されることが分かる．p_μ を ($p^\mu = p^i\partial_i x^\mu + pn^\mu$ となるように) その法線成分 ($p = p^\mu n_\mu$) と接線成分 (p^i) に分離すると，

$$\pi + \frac{1}{2}\left(p^2 - \delta_{ij}p^ip^j + m^2\phi^2 + 2V(\phi)\right) = 0 \tag{3.185}$$

を得る［本稿次節で補足*80］．式 (3.182) および (3.183) を代入すると，

$$\frac{\delta S[\alpha]}{\delta x^\mu(\vec{\tau})}n^\mu(\vec{\tau}) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\delta S[\alpha]}{\delta\varphi(\vec{\tau})}\right)^2 - \partial_j\varphi(\vec{\tau})\partial^j\varphi(\vec{\tau}) + m^2\varphi^2(\vec{\tau}) + 2V(\varphi(\vec{\tau}))\right] = 0 \tag{3.186}$$

を得る［本稿次節で確認］．これが Hamilton–Jacobi 方程式である．関数

$$S[x^\mu(\vec{\tau}), \varphi(\vec{\tau})] = S[\sigma, \varphi] = S[\alpha] \tag{3.187}$$

は面がパラメトライズされない具合に，面の関数であることに注意せよ．ここから

$$\frac{\delta S[\alpha]}{\delta x^\mu(\vec{\tau})}\partial_j x^\mu(\vec{\tau}) + \frac{\delta S[\alpha]}{\delta\varphi(\vec{\tau})}\partial_j\varphi(\vec{\tau}) = 0 \tag{3.188}$$

が帰結する．(この方程式は式 (3.179) の接線成分からも得られる．)［本稿次節で確認する．］2 つの方程式 (3.186) および (3.188) が Hamilton–Jacobi 関数 $S[\alpha]$ を支配する．

*78 既に前節の式 (3.175) の後の脚注に書いたように，式 (2.74) と比べて教科書の式 (3.180) の係数 1/3! は余計と考えられる．実際そのように訂正して初めて汎関数微分 (3.179),(3.183) を導ける (次節の導出過程参照)．また式 (3.179) の右辺第 2 項に係数 1/2! を補った (同じく導出過程を参照)．係数 1/2! は $\partial_j x^\rho$ と $\partial_k x^\sigma$ からの重複する寄与を削減する因子として理に適っており，実際そのように訂正して初めて，後の式 (3.181) を導ける (その導出過程は本稿次節)．さらに式 (3.179),(3.180–181) において場 ϕ を境界値 $\varphi = \phi|_\sigma$ (3.3.3 節) に訂正した．

*79 式 (3.181–182) 右辺第 2 項の符号を改めた．教科書では Minkowski 計量 (3.3.2 節末尾の符号系 $[+,-,-,-]$) と Euclid 計量で上げ下げされる空間添字 $i, j, \cdots$ が混在している．式 (3.181) の導出過程において p^i は $p^{\mu=i}$ の意味だから (後で確認するように式 (3.184) 直後の接線成分 p^i も同様)，本稿では一貫して値としては $p^i = -p_i$ と考える．連動して式 (3.186) 以降の本節の式で，$+(\vec{\nabla}\varphi)^2$ の意味で用いられている $\partial_j\varphi\partial^j\varphi$ を $-\partial_j\varphi\partial^j$ に直した．

*80 式 (3.181) 直後の脚注で促した注意事項 $p^i = -p_i$ と関係して，誤解を防ぐために $p^ip_i \to \delta_{ij}p^ip^j$ と表記を改めた．

非相対論的な場の理論の Hamilton–Jacobi 形式との関連は以下である．我々は定式化をパラメータ $\vec{\tau}$ の特定の選択に限定できる．$\tau^j = x^j$ と選ぶと［このとき $n^\mu = (1, \vec{0})$］，$S[t(\vec{x}), \phi(\vec{x})]$ の形に S が得られ，Hamilton–Jacobi 方程式 (3.186) は

$$\frac{\delta S}{\delta t(\vec{x})} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\delta S[\alpha]}{\delta \phi(\vec{x})}\right)^2 - \partial_j \phi \partial^j \phi + m^2 \phi^2 + 2V(\phi)\right] = 0 \tag{3.189}$$

となる．さらに面を t が一定の面に限定することは，Hamilton–Jacobi 方程式

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\vec{x}\left[\left(\frac{\delta S}{\delta \phi(\vec{x})}\right)^2 + |\vec{\nabla}\phi|^2 + m^2\phi^2 + 2V(\phi)\right] = 0 \tag{3.190}$$

を満たす汎関数 $S[t, \phi(\vec{x})]$ を与え［本稿次節で確認］，これは $\mathcal{H}(\phi, \vec{\nabla}\phi, \partial_t \phi)$ を非相対論的ハミルトニアンとして，通常の非相対論的な Hamilton–Jacobi 方程式

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}\left(\phi, \vec{\nabla}\phi, \frac{\delta S[\alpha]}{\delta \phi(\vec{x})}\right) = 0 \tag{3.191}$$

に他ならない．

$\mathcal{G}$ 上の正準形式　無限次元の空間 $\mathcal{G}$ に対して，我々はハミルトニアン密度関数 $H(\vec{\tau})$ を直接書き下せる．$H(\vec{\tau})$ は余接空間 $T^*\mathcal{G}$ 上の関数である．我々はこの余接空間を関数 $(x^\mu(\vec{\tau}), \varphi(\vec{\tau}))$ とそれらの運動量 $(\pi_\mu(\vec{\tau}), p(\vec{\tau}))$ で座標付けする．ハミルトニアンはすると［式 (3.184) 左辺であって式 (3.186) 左辺のように書き換えられるので］

$$H[x^\mu, \varphi, \pi_\mu, p](\vec{\tau}) = \pi_\mu(\vec{\tau}) n^\mu(\vec{\tau}) + \frac{1}{2}\left[p^2(\vec{\tau}) - \partial_j \varphi(\vec{\tau})\, \partial^j \varphi(\vec{\tau}) + m^2 \varphi^2(\vec{\tau}) + 2V(\varphi(\vec{\tau}))\right] \tag{3.192}$$

であり，Hamilton–Jacobi 方程式 (3.186) は

$$H\left[x^\mu, \varphi, \frac{\delta S[\alpha]}{\delta x^\mu}, \frac{\delta S[\alpha]}{\delta \varphi}\right](\vec{\tau}) = 0 \tag{3.193}$$

となる．もし面 $x^\mu(\vec{\tau})$ を $x^\mu(\vec{\tau}) = (t, \vec{\tau})$ の場合に限定するならば，$H(\vec{\tau})$ は

$$H[x^\mu, \varphi, \pi_\mu, p](\vec{x}) = \pi_0(\vec{x}) + H_0(\vec{x}) \tag{3.194}$$

となり，ここに $H_0(\vec{x})$ は伝統的な非相対論的ハミルトニアン密度

$$H_0[\varphi, p] = \frac{1}{2}\left[p^2 - \partial_j \varphi \partial^j \varphi + m^2 \varphi + 2V(\varphi)\right] \tag{3.195}$$

である．［左辺の引数を $\phi \to \varphi$ と訂正した．3.3.2 節のノートで既に指摘したように，$H_0 + (\vec{\nabla}\phi)^2 = \mathcal{H} \to H_0$ としており，これをもとの H_0 と混同してはならない．］

S からの物理的予言　理論の完全な物理的予言は以下のように，Hamilton 関数 $S[\alpha] = S[\sigma, \varphi]$ から直接得られる．$p(\vec{\tau})$ を面 σ 上の関数としよう．

$$F[\sigma, \varphi, p](\vec{\tau}) = \frac{\delta S[\sigma, \varphi]}{\delta \varphi(\vec{\tau})} - p(\vec{\tau}) \tag{3.196}$$

を定義する．［これは式 (3.87) と比較される．］時空における閉じた面 σ が与えられると，我々は

$$F[\sigma,\varphi,p](\vec{\tau})=0 \tag{3.197}$$

のとき，かつ，そのときに限り，我々は場の境界値 $\phi(x(\vec{\tau}))=\varphi(\vec{\tau})$ を運動量 $n^\mu\partial_\mu\phi(x(\vec{\tau}))=p(\vec{\tau})$ とともに観測できる［3.2.5 節末尾も参照］．この方程式は運動方程式と等価であり，境界面において観測できる部分的観測量に対する制約として，理論の物理的内容を直接表現している．

有限次元系の場合のように，運動方程式の一般解は微分によって得られる．例えば α が，それぞれ $\vec{\tau}$ と $\vec{\tau}_0$ でパラメトライズされる，我々が $\alpha=[\sigma,\varphi]$ と $\alpha_0=[\sigma_0,\varphi_0]$ で表す 2 つの連結した要素から成るとしよう．$p_0(\vec{\tau}_0)$［引数に添字のゼロを補った］を任意の運動量の初期値として，α に対する方程式

$$f[\alpha](\vec{\tau})=\frac{\delta S[\alpha\cup\alpha_0]}{\delta\varphi_0(\vec{\tau}_0)}-p_0(\vec{\tau}_0) \tag{3.198}$$

を考えよ．これは σ_0 上の初期データ φ_0,p_0 と整合する全ての面 α を決定する発展方程式である．

3.3.4 節について

■$\delta S[\alpha]/\delta x^\mu(\vec{\tau})$ の式 (3.179) の導出　運動 γ は 4 次元の超曲面 $[x,\phi(x)]$ で表されるため，これを Σ に持ち上げた $\tilde{\gamma}$ もまた 4 つのパラメータ $\tau=(\tau^0,\cdots,\tau^3)$ でパラメトライズできる．そこで Hamilton 関数 (3.178) の積分変数を座標 x^μ そのものに選んで場を x^μ の関数と見なす代わりに，τ を積分変数に選んで $(x^\mu(\tau),\phi(\tau),\pi(\tau),p^\mu(\tau))$ を独立変数として扱う．特に式 (3.155–156) より Σ 上で評価される $\pi(\phi,p^\mu)$ は座標 x^μ と独立であることに注意する．このとき $\mathrm{d}^4\tau\equiv\mathrm{d}\tau^0\cdots\mathrm{d}\tau^3$ を通常の体積要素とすると，積分 (3.178) は微分形式が

$$\mathrm{d}^4x\ \to\ \frac{\partial(x)}{\partial(\tau)}\mathrm{d}^4\tau,\qquad \mathrm{d}\phi\wedge\mathrm{d}^3x_\mu=\frac{1}{3!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{d}\phi\wedge\mathrm{d}x^\nu\wedge\mathrm{d}x^\rho\wedge\mathrm{d}x^\sigma\ \to\ \frac{1}{3!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\frac{\partial(\phi,x^\nu,x^\rho,x^\sigma)}{\partial(\tau^0,\tau^1,\tau^2,\tau^3)}\mathrm{d}^4\tau$$

と置き換わるので，

$$S[\alpha]=\int_{\tilde{\gamma}}\left[\pi\frac{\partial(x)}{\partial(\tau)}+\frac{1}{3!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\mu\frac{\partial(\phi,x^\nu,x^\rho,x^\sigma)}{\partial(\tau^0,\tau^1,\tau^2,\tau^3)}\right]\mathrm{d}^4\tau \tag{16}$$

と書ける．また簡単のため，積分範囲の境界が $\tau^0=\mathrm{const.}$ で与えられるようにパラメータ付けを行う．

Hamilton 関数 (16) の $x^\mu(\vec{\tau})$ に関する変分を計算しよう．第 1 項において

$$\delta\frac{\partial(x)}{\partial(\tau)}=\delta\left[\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau^0}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau^1}\frac{\partial x^\rho}{\partial\tau^2}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tau^3}\right]=\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial\tau^0}\delta x^\mu\cdot\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau^1}\frac{\partial x^\rho}{\partial\tau^2}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tau^3}+\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau^0}\text{以外を変分した項}\right)\right]$$

である．境界では $\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau^0}=0$ であることに注意すると，部分積分から生じる境界項は

$$\int\pi\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau^1}\frac{\partial x^\rho}{\partial\tau^2}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tau^3}\delta x^\mu\mathrm{d}^3\tau=\int\pi n_\mu\delta x^\mu\mathrm{d}^3\tau$$

となる．ここに n_μ は式 (3.180) の“面積要素”である．

次に式 (16) 第 2 項の変分を考える．$\epsilon^{0123}=-1,\epsilon^{123}=+1$ なる反対称因子を用いると

$$\begin{aligned}\delta\frac{\partial(\phi,x^\nu,x^\rho,x^\sigma)}{\partial(\tau^0,\tau^1,\tau^2,\tau^3)}=&(-\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta})\frac{\partial\phi}{\partial\tau^\alpha}\delta\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau^\beta}\frac{\partial x^\rho}{\partial\tau^\gamma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tau^\delta}\right)\\=&(-\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta})\frac{\partial\phi}{\partial\tau^\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\tau^\beta}\delta x^\nu\frac{\partial x^\rho}{\partial\tau^\gamma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tau^\delta}+\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau^\beta}\frac{\partial}{\partial\tau^\gamma}\delta x^\rho\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tau^\delta}+\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau^\beta}\frac{\partial x^\rho}{\partial\tau^\gamma}\frac{\partial}{\partial\tau^\delta}\delta x^\sigma\right)\end{aligned}$$

である．再び境界では $\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau^0}=0$ (および $\phi=\varphi$) であることに注意すると，部分積分から生じる境界項は

$$
\begin{aligned}
&-\int \frac{1}{3!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\mu\left[\epsilon^{i0jk}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau^i}\frac{\partial x^\rho}{\partial\tau^j}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tau^k}\delta x^\nu+\epsilon^{ij0k}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau^j}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tau^k}\delta x^\rho+\epsilon^{ijk0}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau^j}\frac{\partial x^\rho}{\partial\tau^k}\delta x^\sigma\right]\mathrm{d}^3\tau \\
=&+\int \frac{1}{2!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\nu\frac{\partial\varphi}{\partial\tau^i}\frac{\partial x^\rho}{\partial\tau^j}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tau^k}\epsilon^{ijk}\delta x^\mu\mathrm{d}^3\tau
\end{aligned}
$$

となる．ただし 2 行目への変形では，まず 3 つの項から共通因子

$$\epsilon^{ijk}=-\epsilon^{0ijk}=\epsilon^{i0jk}=-\epsilon^{ij0k}=\epsilon^{ijk0}$$

を括り出した．次いで第 2 項でダミー添字の入れ替え $\nu\leftrightarrow\rho$，第 3 項で巡回置換 $\nu\to\rho\to\sigma\to\nu$ を行うと，3 つの項の寄与が等しくなることが判明する．最後に $\mu\leftrightarrow\nu$ と入れ替えた．

以上より部分積分の結果は

$$\delta S[\alpha]=\int\left(\pi n_\mu+\frac{1}{2!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\nu\frac{\partial\varphi}{\partial\tau^i}\frac{\partial x^\rho}{\partial\tau^j}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tau^k}\epsilon^{ijk}\right)\delta x^\mu\mathrm{d}^3\tau+\int_{\tilde{\gamma}}(\text{おつりの項})\mathrm{d}^4\tau$$

とまとめられる．ここで変分原理の裏返しとして，現実の物理的運動 $\tilde{\gamma}$ に沿う右辺第 2 項の積分は運動方程式により消え，第 1 項の境界積分が $S[\alpha]$ の正しい微分係数を与える．実際その被積分関数における δx^μ の係数を，汎関数微分の定義に基づき $\delta S[\alpha]/\delta x^\mu(\vec{\tau})$ に同定すると，式 (3.179) が得られる．

■式 (3.181) の導出　境界上の $\vec{\tau}$ のパラメータ付けを適当に調節すれば，式 (3.180) の n_μ として $n_\mu n^\mu=1$ を満たす単位ベクトルを選べると考えられる．すなわちパラメータ付けの制約条件として，$n_\mu n^\mu=1$ を用いて良い．このとき式 (3.179) の右辺第 2 項と n^μ の縮約だけが非自明である．

後の式 (3.181) から式 (3.182) への書き換えで暗に仮定しているように，境界のパラメータを単に $\vec{\tau}=\vec{x}$ ととることができる．このとき式 (3.179–180) における微分係数 $\partial_j x^\rho=\delta^\rho_j$ は座標基底の単位ベクトル成分に他ならず，

$$(\text{式 (3.179) 右辺第 2 項})=\frac{1}{2!}\epsilon_{\mu\nu jk}p^\nu\partial_i\varphi\epsilon^{ijk},\qquad \text{式 (3.180)}: n^\mu=(1,\vec{0}):\text{法単位ベクトル}$$

と簡略化される．ここで式 (3.179) の導出に引き続き，一貫して $\epsilon^{0123}=-1,\epsilon^{123}=+1$ とすると[*81]，

$$\epsilon_{\mu\nu jk}\epsilon^{ijk}=-\epsilon_{\mu\nu jk}\epsilon^{0ijk}=+2(\delta^0_\mu\delta^i_\nu-\delta^0_\nu\delta^i_\mu)$$

なので，n^μ との縮約は

$$n^\mu(\text{式 (3.179) 右辺第 2 項})=(n^0p^i-n^ip^0)\partial_i\varphi=p^i\partial_i\varphi$$

と評価できる．この導き方より $p^i=p^{\mu=i}$ の意味であり，それ故，値としては $p^i=-p_i$ であることに注意する．

以上より式 (3.179) に n^μ を縮約すると，

$$n^\mu\frac{\delta S}{\delta x^\mu}=\pi+p^i\partial_i\varphi,\quad \therefore \pi=n^\mu\frac{\delta S}{\delta x^\mu}-p^i\partial_i\varphi=n^\mu\frac{\delta S}{\delta x^\mu}-\partial^i\varphi\partial_i\varphi=n^\mu\frac{\delta S}{\delta x^\mu}+(\vec{\nabla}\varphi)^2:(3.181\text{–}182)\quad(17)$$

を得る．

[*81] 仮に $\epsilon^{123}=-1$ とすると以降の計算の符号が反転するものの，同時に式 (3.179) 右辺第 2 項も逆符号になるため，得られる結果 (3.181) に変わりはない．

■$\delta S[\alpha]/\delta\varphi(\vec{\tau})$ の式 (3.183) の導出　式 (3.179) と同様に，$S[\alpha]$ の今一つの引数である配位変数 $\varphi(\vec{\tau})$ による汎関数微分 (3.183) を導こう．Hamilton 関数 (16) の ϕ に関する変分を調べる．

$$\delta\frac{\partial(\phi,x^\nu,x^\rho,x^\sigma)}{\partial(\tau^0,\tau^1,\tau^2,\tau^3)}=(-\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta})\frac{\partial}{\partial\tau^\alpha}\delta\phi\cdot\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau^\beta}\frac{\partial x^\rho}{\partial\tau^\gamma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tau^\delta}$$

より，部分積分から生じる境界項は

$$\int\frac{1}{3!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\mu\cdot(-\epsilon^{0ijk})\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau^i}\frac{\partial x^\rho}{\partial\tau^j}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tau^k}\delta\varphi\mathrm{d}^3\tau=\int\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\mu\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau^1}\frac{\partial x^\rho}{\partial\tau^2}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tau^3}\delta\varphi\mathrm{d}^3\tau=\int p^\mu n_\mu\delta\varphi\mathrm{d}^3\tau$$

となる．最右辺の被積分関数における $\delta\varphi$ の係数を汎関数微分 $\delta S[\alpha]/\delta\varphi(\vec{\tau})$ に同定して，式 (3.183) を得る．

2 式 (3.179),(3.183) は有限次元系の式 (3.86):$\partial S/\partial q^a=p_a$ を想起させる形をしており，その自然な一般化として納得できる．

■式 (3.185) と直前の分解 $p^\mu=p^i\partial_ix^\mu+pn^\mu$ (教科書 p.138，l.9) について　運動量の分解

$$p^\mu=p^i\partial_ix^\mu+pn^\mu$$

について，式 (3.181) 導出時に説明したパラメータの選択 $\vec{\tau}=\vec{x}$ を踏まえると，境界の接ベクトル $\partial_ix^\mu=\delta_i^\mu$ は座標基底の単位ベクトル成分となるので，その展開係数は座標成分 $p^i=p^{\mu=i}$ そのものである．また n^μ の係数が $p\equiv p^\mu n_\mu$ となることは，n_μ が境界の接ベクトル ∂_ix^μ と直交することに注意して，上式に n_μ を縮約すると確かめられる．

式 (3.185) について，再び直交性に注意すると $p^\mu p_\mu=p^2n^\mu n_\mu+p^ip^j(\partial_ix^\mu)(\partial_jx_\mu)$．ここで

$$n^\mu n_\mu=1,\qquad(\partial_ix^\mu)(\partial_jx_\mu)=\eta_{\mu\nu}(\partial_ix^\mu)(\partial_jx^\nu)=\eta_{\mu\nu}\delta_i^\mu\delta_j^\nu=\eta_{ij}=-\delta_{ij}$$

なので，

$$\begin{aligned}p^\mu p_\mu=&p^2-\delta_{ij}p^ip^j\\=&p^2-\delta_{ij}\partial^i\varphi\partial^j\varphi=p^2-(\vec{\nabla}\varphi)^2\end{aligned}\tag{18}$$

を得る．これは 4 元内積の成分計算を回りくどい方法で再現しているに過ぎない．

■Hamilton–Jacobi 方程式 (3.186) の確認　教科書の表記との符号の違いを明確にするために，単純な代入操作を書いておく．式 (3.185) に式 (17),(3.183),(18) を代入すると，

$$\left(\frac{\delta S}{\delta x^\mu}n^\mu+(\vec{\nabla}\varphi)^2\right)+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\delta S}{\delta\varphi}\right)^2-(\vec{\nabla}\varphi)^2+m^2\varphi^2+2V(\varphi)\right]=0,$$

$$\therefore\ \frac{\delta S}{\delta x^\mu}n^\mu+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\delta S}{\delta\varphi}\right)^2+(\vec{\nabla}\varphi)^2+m^2\varphi^2+2V(\varphi)\right]=0:(3.186).$$

Hamilton–Jacobi 方程式 (3.186) は既に，通常の非相対論的な表式 (3.191) を想起させる形をしており，その自然な一般化として納得できる．

■式 (3.188) の導出　式 (3.179),(3.183) の導出時に見たように，境界値 $x^\mu(\vec{\tau}),\varphi(\vec{\tau})$ の変分に伴う Hamilton 関数の変分は，境界積分

$$\delta S=\int\left(\frac{\delta S}{\delta x^\mu}\delta x^\mu+\frac{\delta S}{\delta\varphi}\delta\varphi\right)\mathrm{d}^3\tau$$

で与えられる．そこで境界のパラメータ付け替え $\vec{\tau} \to \vec{\tau} + \delta\vec{\tau}$ に伴う変化量

$$\delta x^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau^j}\delta\tau^j, \qquad \delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau^j}\delta\tau^j$$

に対して，δS がゼロになることを要求すれば良い．

また同じ式 (3.188) が式 (3.179) の接線成分としても得られることを確認する．式 (3.181) の導出時に行ったように，$\vec{\tau} = \vec{x}, n^\mu = (1, \vec{0})$ の下で式 (3.179) を

$$\frac{\delta S}{\delta x^\mu} = \pi n_\mu + (\delta^0_\mu p^i \partial_i\varphi - \delta^i_\mu p^0 \partial_i \varphi)$$

と書く．次いでこれを境界の接ベクトル $\partial_j x^\mu$ (法単位ベクトル n_μ と直交) と縮約すると，

$$\frac{\delta S}{\delta x^\mu}\partial_j x^\mu = (\delta^0_\mu p^i \partial_i\varphi - \delta^i_\mu p^0 \partial_i\varphi)\partial_j x^\mu = -p^0 \partial_j \varphi = -\frac{\delta S}{\delta\varphi}\partial_j\varphi$$

となる．ただし最後の等号では式 (3.183) を考慮した．上式を移項すると，再び式 (3.188) が得られる．$\vec{\tau} = \vec{x}$ を仮定しているにも関わらず，これがパラメータ付け替え不変性の条件を表していることは，境界における $\vec{x}$ の座標付けの任意性に関係していると考えられる．

■非相対論的な Hamilton–Jacobi 方程式 (3.190) の導出　直前の式 (3.189) を $\vec{x}$ で空間積分して得られる．その際，第 1 項の積分は次のように考えれば良い．まず汎関数微分の定義より，$t(\vec{x})$ の微小変化に伴う $S[t(\vec{x}), \phi(\vec{x})]$ の変化量は

$$\delta S = \int \frac{\delta S}{\delta t}\delta t \mathrm{d}^3 x.$$

特に境界が $t(\vec{x}) = t$ (一定) の面で与えられる場合を考えると，δt を積分の外に出すことができる．その δS との比は $S[t, \phi(\vec{x})]$ の偏微分の意味になるから，

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \int \frac{\delta S}{\delta t}\mathrm{d}^3 x.$$

これが式 (3.190) の第 1 項である．

3.4 * 熱時間仮説

大地［ガイア］は天空［ウラノス］と交わり，その後，時［クロノス］が生［産］まれた．
彼は狡猾で，最も若く，彼女の子供たちの中でも最も恐ろしい存在であった．

Hesiod (ヘーシオドス), *Theogony* (神統記) [111]

巨視的 (マクロ) な世界では，時計によって測られる物理的変数 t には特別な性質がある．前提となる時間の概念を参照することなく，これらの性質を正確に記述することは容易ではないが，それらが存在することを否定することもまた難しい．本書で発展させてきた観点からは，根本的な水準では時計によって測られる変数 t は，他の部分的観測量と同列の身分にある．もしこのアイデアを受け入れるならば，我々は時間が根本的な水準では特別な変数ではないという事実と，巨視的な水準における時間の特別な性質を調和しなければならない．時間の何が特別なのか？ 興味深い可能性は，t を選び出し，それにその特別な性質を与えるのが，統計力学，したがって熱力学だというものである．本節ではこのアイデアを簡単に説明する．［これは通常，力学と対照的に熱・統計力学の扱う平衡状態には時間の概念がないと言われるのとは，事情が全く逆である．また本

節のアイデアは熱・統計力学が物理学全体にどのように位置付けられるかという問に対する，1 つの可能性を提示していると見ることもできよう.］

我々の周りの世界は場のように，多数の自由度を持つ系から成る．我々がこれらの自由度の全体を測定することは決してない．むしろ，我々は特定の巨視的なパラメータを測定し，残りの自由度の状態に関する仮定に基づいて予言を行う．巨視的パラメータの選択と，残りの状態に関する仮定の有効性は，予言システムが上手くいけばアポステリオリに正当化される．我々は統計的状態 ρ を用いて，我々の不完全な知識と仮定を表す．状態 ρ は相空間 Γ 上の規格化された正の関数

$$\rho: \quad \Gamma \to R^+, \tag{3.199}$$

$$\int_\Gamma \mathrm{d}s\, \rho(s) = 1 \tag{3.200}$$

として表せる．$\rho(s)$ は Γ における状態 s の仮定された確率密度を表す．［このように状態 s の確率分布 $\rho(s)$ もしばしば状態と呼ばれる.］このとき状態 ρ における任意の観測量 $A : \Gamma \to R$ の期待値は

$$\rho[A] = \int_\Gamma \mathrm{d}s\, A(s)\rho(s). \tag{3.201}$$

統計力学の基本的前提は，自由に熱運動化する (thermalize) 系が，Gibbs の統計状態

$$\rho_0(s) = N\mathrm{e}^{-\beta H_0(s)} \tag{3.202}$$

を用いて表される時間に依らない平衡状態に達することであり，ここに $\beta = 1/T$ は定数——逆温度——であり，H_0 は非相対論的ハミルトニアンである．古典的な熱力学はこの前提から帰結する．A の時間発展 $A_t = \alpha_t(A)$ は式 (3.78) によって決定される．等価的に $A_t(s) = A(t(s))$ であり，ここに $s(t)$ は Γ における H_0 のハミルトニアン・フローである．［右辺 $A(t(s))$ の引数は $s = s(t)$ を逆に解いた状態 s の関数と見る (式 (3.206) の箇所も同様).］A_t と B の間の相関確率は

$$W_{AB}(t) = \rho_0[\alpha_t(A)B] = \int_\Sigma \mathrm{d}s\, A(s(t))B(s)\mathrm{e}^{-\beta H_0(s)} \tag{3.203}$$

で与えられる［正確には式 (3.202) の規格化定数 N を最右辺に掛ける].

全ての力学的な予言は，t を選び出す非相対論的ハミルトニアン H_0 を用いる代わりに，全ての変数を同列に扱う相対論的ハミルトニアン H を用いて得られるので，力学の公式は特別な変数を選び出さないことを，本章において我々は見てきた．このことは統計力学および熱力学においても正しいか？ 方程式 (3.200)–(3.201) は，Γ が運動方程式の解の空間となる，相対論的な文脈においても意味を成す．しかしこのことは式 (3.202) および (3.203) には当てはまらない．これらは非相対論的ハミルトニアンに依存している．それらは t がその他と異なる変数であるという事実に依存している．方程式 (3.202) および (3.203) は間違いなく t を特別な変数として選び出す．この洞察は t 変数の特別な性質が，力学ではなく，むしろ統計力学と熱力学に関係していることを示唆する．純粋に力学的な測定では，我々は時間変数を識別できない．統計的あるいは熱的な測定では，時間変数を識別できる．

実に，変数 t に関して特別なことを指摘しようとすれば，我々は普通，熱力学に関係する特徴を見出す：非可逆性，平衡への収束，記憶，“流れ”の感覚，等々．

実に，式 (3.202) および (3.203) に関する興味深い事実がある．我々は逆温度 β の平衡にある系を研究しており，その非相対論的ハミルトニアン H_0 は知らないと想像せよ．原理的には，時間発展を観測する必要は何らなく，単に系の複製たちに対する微視的 (ミクロ) な測定の繰り返しによって，H_0 を見出すことができる．

実際，微視的 (ミクロ) な状態の分布 ρ_0 が分かれば，次いで，些末な付加的な定数の違いを除いて［対応して真数が次元を持つことを許容して］,

$$H_0 = -\frac{1}{\beta} \ln \rho_0 \tag{3.204}$$

を得る．［式 (3.204) によって (経験的な) 確率分布から逆に推定できるのは，時間に陽に依らない H_0 だけである*82．］したがって，統計的な文脈では，原理的には，どれが時間変数かを決定する操作的手続きがある．第 1 に，ρ_0 を測定する；第 2 に，式 (3.204) から H_0 を計算する；第 3 に，Σ 上の H_0 のハミルトニアン・フロー $s(t)$ を計算する．時間変数 t はこの流れ (フロー) のパラメータである．“時計”とは，その読みがこの流れに対して線形に増加する，あらゆる測定機器である．H_0 の前の乗法的な定数は単に，時間を測る際の単位を定める．この単位の違いを除けば，単に ρ_0 を測定することによって，我々はどれが時間変数かを理解できる．これは時間変数を選び出す操作的手続きが全くない，純粋に力学的な文脈とは著しく対照的である．

さて，本題に入りたい．いかなる部分的観測量も時間変数として選び出されていない，真に相対論的な系があると想像せよ．系の多くの複製に対して測定を行い，系を記述する統計的状態が，特定の**任意の***83状態 ρ で与えられることが分かったと仮定せよ．量

$$H_\rho = -\ln \rho \tag{3.205}$$

を**定義する**．$s(t_\rho)$ を H_ρ のハミルトニアン・フローとする．t_ρ を“熱時間 (thermal time)”と呼ぶ．読みがこの流れに対して線形に増加する任意の測定デバイスを“熱時計 (thermal clock)”と呼ぶ．与えられた観測量 A に対して，$A_{t_\rho}(s) = A(t_\rho(s))$ で定義される観測量の 1 パラメータ族 A_{t_ρ} を考えよ．このとき観測量 A_{t_ρ} と B の間の相関確率は

$$W_{AB}(t_\rho) = \int_\Sigma \mathrm{d}s\, A(t_\rho(s)) B(s) \mathrm{e}^{-H_\rho(s)} \tag{3.206}$$

で与えられることが帰結する．

式 (3.202)–(3.203) によって記述される物理と，式 (3.205)–(3.206) によって記述されるそれの違いは何か？何もない！ すなわち：統計的状態 ρ が**何であれ**，それに関して系が平衡となり，その物理が伝統的で非相対論的な統計の場合と同じになるような，熱時計によって測られる変数 t_ρ が常に存在する！［ここでは非平衡状態を考えない．］この重要な見解は自然に次の仮説へと導く．

熱時間仮説 (thermal time hypothesis)　自然には，特別な物理的時間変数 t はない．特別な平衡状態 ρ_0 はアプリオリにはない．むしろ，全ての変数は等価である：我々は系が任意の状態 ρ にあることが分かる；もし系が状態 ρ にあるならば，系の状態によって特別な変数が選び出される．この変数は我々が時間と呼ぶものである．

言い換えれば，どの変数が物理的な時間であるかを決めるのは統計的状態であって，系を特別な統計的状態に導くいかなるアプリオリで仮説的な“流れ”でもない．数学的な水準では，全ての変数は物理的に等価である．しかし我々が観測を巨視的なパラメータに制限し，その他の力学変数が統計的状態 ρ に従って分布していると仮定するならば，特別な変数がこの手続きによって選び出される．この変数は，それに関する相関がちょうど通常の統計力学によって記述されるという性質を持つ．言い換えれば，それはまさに我々の巨視的な時間パラメータを特徴付けるという性質を持つ．

---

*82 本章で時間に陽に依らない H_0 だけを扱ってきたのは，力学自体は時間変数 t を選び出さないという立場を反映していると考えられる．

*83 式 (3.205) が意味を成すように，ρ は Σ 上のどこでも消えないと仮定せよ．

言い換えれば，ある変数が“時間”であると言うとき，我々は現実の基礎的な力学的構造に関する言明を述べているのではない[*84]．むしろ我々は，我々が巨視的に記述する系の，巨視的性質を記述するのに用いる統計分布に関する言明を述べている．

状態 ρ によって決定されるハミルトニアン H_ρ は熱ハミルトニアン (thermal hamiltonian) と呼ばれる．“熱時間仮説”は，我々が“時間”と呼ぶものは，我々が選んだ巨視的パラメータを用いて記述されるときに世界が偶然そうなるところの，統計的状態の熱時間に過ぎないというアイデアである．

系が力学的でミクロな状態 s にあるとしよう．それを巨視的な観測量 A_i で記述する．一般には (ただし常にではない)，その平均値が A_i に対する正しい予言を与える，すなわち $A_i(s) \sim \rho[A_i]$ となる統計的状態 ρ が存在する．それが存在すると仮定すると，ρ はある意味，状態のミクロな詳細に対する我々の無知をコードする．直観的にはそれ故，時間の存在はこの我々の無知の結果であると言うことができる．時間はミクロな状態に対する我々の無知の表れである．

熱時間仮説は多くの場合に驚くべきほど上手くいく．例えば，特別な時間変数を持たない，放射で満たされた共変な宇宙論的モデルから始め，宇宙論的な背景放射を表す統計的状態を書くと，この状態の熱時間は正確に Friedmann 時間となることが判明する [112]．さらに，5.5.1 節で見るように，この仮説は極めて自然な仕方で量子論的文脈に拡張され，また一般的で抽象的で状態独立な時間の流れの概念にも導く場の量子論的な文脈へは，より一層自然に拡張される．

note：3.4 節の総括

根本的な水準では「時間のない物理 (古典力学と量子力学)」を定式化できる一方で，我々は日常的に時間変数 t を“経験している”こともまた確かである．すると，このギャップはどのように説明できるかという問を提起できる．興味深い 1 つの可能性は，あらゆる同等な変数 (部分的観測量) $\{q^a\}$ の中から，特別な時間変数 t を選び出すのが，熱・統計力学だという仮説である．

- これは通常，力学と対照的に熱・統計力学の扱う平衡状態には時間の概念がないと言われるのとは，事情が全く逆である．
- また，このアイデアは熱・統計力学が物理学全体にどのように位置付けられるかという問に対する，1 つの可能性を提示していると見ることもできよう．
- この点ではギリシャ神話は物理を正しく捉えているのかもしれない！ ギリシャ神話によれば，天空 (ウラノス) と大地 (ガイア) が交わり，時間 (クロノス) が生 (産) まれた．つまり時間はアプリオリに存在するわけではない．もっとも，神話を物理の根拠にはできないが……．

ポイントは Gibbs 分布［カノニカル分布］(3.202):$\rho_0(s) \sim e^{-\beta H_0(s)}$ が非相対論的なハミルトニアン H_0 を用いて定義されることである；それは特別な時間変数 t の存在を前提としている．そこで話を逆転させよう．すると与えられた任意の統計状態 ρ に対して，それが平衡分布となるように量 $H_\rho = -\ln\rho$ を定義して，そのハミルトニアン・フロー $s(t_\rho)$ を計算し，“熱時間 (thermal time)” t_ρ を定義できる．［これだと一見，あらゆる状態は平衡状態と見なせることになるので，平衡状態と非平衡状態をどのように区別し得るのかは疑問である．］この議論は量子力学，さらには場の量子論にも驚くべきほど上手く拡張できる (5.5.1 項)．

[*84] 時間，$\mathrm{K}\rho\acute{o}\nu o\varsigma$［クロノス］はギリシャ神話においても，物質 (大地，$\Gamma\alpha\hat{\iota}\alpha$［ガイア］と天空，$\mathrm{O}\grave{\upsilon}\rho\alpha\nu\acute{o}\varsigma$［ウラノス］) の後にやって来る．本節冒頭の Hesiod の引用 [111] を見よ．

文献ノート

拘束系の Hamilton 形式の理論は Dirac の多くの代表作の 1 つである．理論は標準的な Hamilton 形式の力学の単なる技術的な複雑化ではない：それは一般相対論的な文脈においても有効に留まる，力学の強力な一般化である．この主題に関する Dirac の最初の仕事の題名は“一般化された Hamilton 形式の力学 (ダイナミクス)”だった [113]．その理論は [114] において総合的に扱われている．現代的な重要性と発展については，[115] を見よ．部分的観測量の概念については， [116] に従った．力学の一般的構造については， [117, 118] に従った．詳細に扱われている関係的な発展の非自明な例については， [119] を見よ．

有限次元の空間における場の理論の正準な扱いは，Weyl と DeDonder の変分の計算 [110, 120] に由来する．共変な Hamilton 形式の場の理論の，優れた，包括的で数学的に正確な議論は，主題に関する文献への完全な参照を含んでいる [109] にある． [121] も見よ．

時間の熱的な起源のアイデアは [112, 122] において古典的な場の理論の文脈で導入され，Alain Connes によって独立に提唱された．それは [125] の中で，場の量子論において発展しており (5.5.1 節を見よ)， [124] も見よ．関係する Boltzmann 的なアプローチについては， [123] を見よ．

第 4 章　Hamilton 形式の一般相対性理論

GR の Hamilton–Jacobi 形式を提示するところから本章を始める．これは量子論の基礎である．

本章の残りでは，前章の最後に説明した路線に沿って，有限次元の配位空間における Hamilton 形式の GR の定式化を提示する．

この提示の順序は，部分的観測量の有限次元の配位空間から始まらねばならない論理的な順序とは逆である．しかし私は急ぐ読者に，量子論の基礎となる少ない単純な方程式を見つける前に，章全体を通り過ぎるよう強いたくはない．［実際 4.1 節は概ね自己充足的であり，後の節と独立に理解できる．もっとも 4.3 節で Hamilton 形式から基礎方程式を再現して初めて，第 3 章の準備が報われる．］

私は宇宙定数をゼロとおき物質場を無視し，重要な方程式に宇宙項と物質項を付け加える一般に簡単な演習は読者に委ねる．

4.1　Einstein–Hamilton–Jacobi

境界のない 3 次元の面 σ 上で定義される，実数条件

$$A_a^i + \overline{A_a^i} = \Gamma^i{}_a[E] \tag{4.1}$$

［式 (3.138) の箇所も見よ］を満たす複素場 $A_a^i(\vec{\tau})$ と 3 次元の実数の運動量の場 $E_i^a(\vec{\tau})$ を用いて GR を表現でき，ここに Γ は以下で式 (4.23)–(4.24) において定義される．理論は Hamilton 系

$$\mathrm{D}_a E_i^a = 0, \tag{4.2}$$

$$E_i^a F_{ab}^i = 0, \tag{4.3}$$

$$F_{ab}^{ij} E_i^a E_j^b = 0 \tag{4.4}$$

によって定義され，ここに $F_{ab}^{ij} = \epsilon^{ij}{}_k F_{ab}^k$ (xxii 頁［notation の箇所[*85]］を見よ) であり，また D_a と F_{ab}^i は

$$\mathrm{D}_a v_i = \partial_a v_i + \epsilon_{ijk} A_a^j v^k, \tag{4.5}$$

$$F_{ab}^i = \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^j + \epsilon^i{}_{jk} A_a^j A_b^k \tag{4.6}$$

で定義される共変微分と A_a^i の曲率である．以下ではこれらの方程式の Lagrange 形式からの導出をスケッチする［式 (4.27) の箇所］．有限次元の正準形式を経由する間接的な導出を，本章の終わりで与える．

note　式 (4.2–4) は順に文献 [415, § 7.2] で見た “Gauss の法則” “運動量拘束” “ハミルトニアン拘束” である．また式 (4.5–6) は文献 [415, § 5.1] [420, § 5.1] で見た，接続 (ゲージ場) A_a^i を持つ $SU(2)$Yang–Mills 理論における共変微分と曲率 (場の強度) である．

Hamilton 系の中で

$$E_i^a(\vec{\tau}) = \frac{\delta S[A]}{\delta A_a^i(\vec{\tau})} \tag{4.7}$$

と書くことにより，Hamilton–Jacobi 系は汎関数 $S[A]$ を用いて与えられる．［正確には式 (4.7) 左辺を $8\pi \mathrm{i} G$ で割る必要がある[*86]．］得られる最初の 2 つの方程式

$$\mathrm{D}_a \frac{\delta S[A]}{\delta A_a^i(\vec{\tau})} = 0, \qquad F_{ab}^i(\vec{\tau}) \frac{\delta S[A]}{\delta A_a^i(\vec{\tau})} = 0 \tag{4.8}$$

[*85] 3 次元の Levi–Civita 記号に関しては，空間添字 $a, b, \cdots$ と R^3 の内部添字 $i, j, \cdots$ は Kronecker のデルタで上げ下げする．(実質，上下の区別は必要ない．)

[*86] 式 (4.27) の箇所を見よ．ただしこの修正は続く式 (4.8–9) に影響しない．

は，すぐ後で示すように［式 (4.13) の箇所］，3 次元の微分同相写像 (diffs) と局所 $SO(3)$ 変換［$SU(2)$ 変換と局所同型 (式 (6.5) 直前も見よ)］の下で $S[A]$ が不変であることを要求する．最後の方程式は

$$F^{ij}_{ab}(\vec{\tau})\frac{\delta S[A]}{\delta A^i_a(\vec{\tau})}\frac{\delta S[A]}{\delta A^j_b(\vec{\tau})}=0 \tag{4.9}$$

になる．これが GR の Hamilton–Jacobi 方程式である．それは GR のダイナミクスを定義する．

不鮮明化形式 (Smeared form)　等価的に，適当な“試験 (test)”関数に対して方程式 (4.2)–(4.4) を積分し，任意のそのような関数に対して積分が消えることを要求できる．最初の 2 つに対して，

$$G[\lambda]=-\int \mathrm{d}^3\tau\lambda^i\mathrm{D}_aE^a_i=\int \mathrm{d}^3\tau\mathrm{D}_a\lambda^iE^a_i=0, \tag{4.10}$$

$$C[f]=-\int \mathrm{d}^3\tau f^aF^i_{ab}E^b_i=0 \tag{4.11}$$

を得る［式 (4.10) 第 2 の等号を本稿次節で補足］．これらの方程式に現れる量 $\mathrm{D}_a\lambda^i$ と $f^aF^i_{ab}$ は，生成子 $\lambda^i(\vec{\tau})$ での内部ゲージ変換と，ベクトル場 $f^a(\vec{\tau})$ によって生成される無限小の微分同相写像 (と内部ゲージ変換の組合せ) の下での，接続の無限小変換

$$\delta_\lambda A^i_a=\mathrm{D}_a\lambda^i, \qquad \delta_f A^i_a=f^bF^i_{ab} \tag{4.12}$$

である［本稿次節で補足］．したがって式 (4.8) の不鮮明化形式は

$$\int \mathrm{d}^3\tau\delta_\lambda A^i_a\frac{\delta S[A]}{\delta A^i_a(\vec{\tau})}=0, \qquad \int \mathrm{d}^3\tau\delta_f A^i_a\frac{\delta S[A]}{\delta A^i_a(\vec{\tau})}=0 \tag{4.13}$$

となり，これは $S[A]$ がゲージおよび微分同相写像の下で不変であるという要求に他ならない．

量 (4.4) は，他方で，加重度 (density of weight) 2 である［文献 [415, p.44] の訳語にならった[*87]］．それをスカラー量に対して積分し，良く定義した結果を得られるためには，加重度 1 が必要である．これはハミルトニアンの定義の自由度を利用して，ハミルトニアンを E の行列式の平方根で割ることによって得られる．以下の式 (4.25) において見出される，体積

$$\mathbf{V}=\int \mathrm{d}^3x\,\sqrt{|\det E(x)|} \tag{4.14}$$

［本稿次節で補足］と接続の間の Poisson 括弧は

$$\{\mathbf{V},A^i_a(x)\}=(8\pi\mathrm{i}G)\frac{E^b_j(x)E^c_k(x)\epsilon_{abc}\epsilon^{ijk}}{4\sqrt{|\det E(x)|}}. \tag{4.15}$$

［本稿次節で上式 (4.15) を導出し，これが加重度 1 を持つことを確認する．］これを用いると，式 (4.4) を

$$H[N]=\int N\mathrm{tr}(F\wedge\{\mathbf{V},A\})=0 \tag{4.16}$$

という形に書ける［本稿次節で確認］．この形のハミルトニアンは量子論において便利であることが判明する．方程式 (4.10),(4.11)，および (4.16) が GR を定義する．

---

*87 本章の式を文献 [415, § 7.2, § 7.4] と比べると，本章の E^a_i は同文献 [415, p.44] で定義した加重度 +1 のトライアド (3 脚場)

$$\tilde{E}^a_i=\sqrt{\det(q)}E^a_i \qquad (\text{右辺の } E^a_i \text{ は本書の通常のトライアド } e^a_i)$$

に相当すると考えられる．本稿次節で体積の式 (4.14) を説明する際，E^a_i が加重度 +1 のトライアドであることを仮定した．このことは後の式 (4.26) から正当化される．

4.1 節冒頭 (4.1.1 節の前まで) について

■式 (4.10) 第 2 の等号の確認　文献 [415, § 7.2] のノートで断ったように，E_i^a の共変微分も式 (4.5) を適用して，Yang–Mills 理論の“電場”の微分 [420, p.143] と同じ形

$$\mathrm{D}_a E_i^a = \partial_a E_i^a + \epsilon_{ij}{}^k A_a^j E_k^a$$

に定義されると考える[*88]．すると式 (4.10) の $G[\lambda]$ は，確かに

$$-\int \mathrm{d}^3\tau \lambda^i \mathrm{D}_a E_i^a = -\int \mathrm{d}^3\tau \lambda^i (\partial_a E_i^a + \epsilon_{ij}{}^k A_a^j E_k^a) = \int \mathrm{d}^3\tau (\partial_a \lambda^i + \epsilon^i{}_{jk} A_a^j \lambda^k) E_i^a = \int \mathrm{d}^3\tau \mathrm{D}_a \lambda^i \cdot E_i^a$$

と変形できる．ここで第 2 の等号では，第 1 項を部分積分し，第 2 項でダミー添字を $i \leftrightarrow k$ と入れ替えた．

■A_a^i の無限小変換 (4.12) について　第 1 式 $\delta_\lambda A_a^i = \mathrm{D}_a \lambda^i$ が変換パラメータ λ^i による無限小ゲージ変換に伴う A_a^i の変化量であることは，文献 [420, p.143] で確認済みである．また文献 [415, § 5.1] のノートで確認したように，$G[\lambda]$ は Poisson 括弧

$$\{G[\lambda], A_a^i\} = \mathrm{D}_a \lambda^i$$

を満たす，すなわち A_a^i の正しいゲージ変換を生成する．実際，$G[\lambda]$ の定義式 (4.10) と正準変数間の基本的な Poisson 括弧

$$G[\lambda] = \int \mathrm{d}^3\tau \lambda^j \mathrm{D}_b E_j^b = \int \mathrm{d}^3\tau \lambda^j (\partial_b E_j^b + \epsilon_{kjl} E_k^b A_b^l), \qquad \{A_a^i(\vec{\tau}), E_j^b(\vec{\tau}\,')\} = \delta_j^i \delta_a^b \delta^3(\vec{\tau} - \vec{\tau}\,')$$

に注意すると[*89]，

$$\begin{aligned}
\{G[\lambda], A_a^i(\vec{\tau})\} =& \int \mathrm{d}^3\tau' \lambda^j(\vec{\tau}\,') \left[\partial_b{}' \{E_j^b(\vec{\tau}\,'), A_a^i(\vec{\tau})\} + \epsilon_{kjl} \{E_k^b(\vec{\tau}\,') A_b^l(\vec{\tau}\,'), A_a^i(\vec{\tau})\}\right] \\
=& \int \mathrm{d}^3\tau' \lambda^j(\vec{\tau}\,') \left[\partial_b{}' \{-\delta_j^i \delta_a^b \delta^3(\vec{\tau} - \vec{\tau}\,')\} + \epsilon_{kjl} \{-\delta_k^i \delta_a^b \delta^3(\vec{\tau} - \vec{\tau}\,')\} A_b^l(\vec{\tau}\,')\right] \\
=& \partial_a \lambda^i(\vec{\tau}) - \epsilon_{ijl} A_a^l(\vec{\tau}) \lambda^j(\vec{\tau}) \\
=& \partial_a \lambda^i(\vec{\tau}) + \epsilon_{ijk} A_a^j(\vec{\tau}) \lambda^k(\vec{\tau}) \equiv \mathrm{D}_a \lambda^a(\vec{\tau}).
\end{aligned}$$

また第 2 式 $\delta_f A_a^i = f^b F_{ab}^i$ については，次のように考えれば良い．すなわち文献 [415, § 7.2] のノートで行ったように，$C[f]$ と $G[\lambda]$ の適当な組合せ

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}[f^a] \equiv& C[f^a] - G[f^a A_a^i] = -\int \mathrm{d}^3\tau f^a \left\{E_i^b F_{ab}^i - A_a^i (\mathrm{D}_b E_i^b)\right\} \\
=& -\int \mathrm{d}^3\tau f^a \left\{E_i^b (\partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i \cancel{+ \epsilon_{ijk} A_a^j A_b^k}) - A_a^i (\partial_b E_i^b \cancel{+ \epsilon_{jik} E_j^b A_b^k})\right\} \\
=& -\int \mathrm{d}^3\tau f^a \left\{E_i^b (\partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i) - A_a^i \partial_b E_i^b\right\} \\
=& -\int \mathrm{d}^3\tau E_i^b (f^a \partial_a A_b^i + A_a^i \partial_b f^a) \qquad \text{(第 3 項を部分積分した)}
\end{aligned} \tag{19}$$

[*88] 重力理論の文脈での共変微分 (2.86) との混同に注意せよ．

[*89] ここで省略した Poisson 括弧 (4.25) の係数 $8\pi\mathrm{i}G$ を導入すれば，続く $\{G[\lambda], A_a^i(\vec{\tau})\}$ の表式は全体が $8\pi\mathrm{i}G$ 倍されるに過ぎない．

を作る．最右辺を $C[f]$ の式 (4.11) と比較すると，ここでは E_i^b の係数が共変ベクトル A_a^i のベクトル f^a に沿う Lie 微分 (付録 E)

$$(\mathcal{L}_{\vec{f}} A^i)_b \equiv f^a \partial_a A_b^i + A_a^i \partial_b f^a$$

になっており，これは純粋な微分同相写像のみによる A_a^i の変化量を表している．翻って式 (4.11) における係数 $f^b F_{ab}^i$ は，微分同相写像とゲージ変換の組合せの下での，A_a^i の無限小変換であることが納得できる．

■体積の式 (4.14) について　文献 [415, p.144] で定義した加重度 $+1$ のトライアド (3 脚場) は，教科書の表記ではもとのトライアド e_i^a を用いて

$$E_i^a = \sqrt{\det(q)}\, e_i^a$$

と書ける (式 (4.26) の箇所で再考・正当化する)．ここに $q = (q_{ab})$ は (式 (4.14) の積分変数の座標に関する) 3 次元の面 σ の計量 (2.4.6 節の γ_{ab}) である．このとき文献 [415, § 7.4] のノートで調べたように，トライアドの性質

$$q^{ab} = e_i^a e_j^b \delta^{ij} = \frac{1}{\det(q)} E_i^a E_j^b \delta^{ij}$$

を行列 $q = (q_{ab}), q^{-1} = (q^{ab}), E = (E_i^a)$ の関係

$$(q_{ab})^{-1} = \frac{1}{\det(q)} (E_i^a)(\delta^{ij})(E_j^b)^{\mathrm{T}}$$

と見て (T は転置)，両辺の行列式をとると，

$$\frac{1}{\det(q)} = \frac{1}{[\det(q)]^3}[\det(E)]^2, \qquad \therefore |\det(q)| = |\det(E)| \tag{20}$$

が得られる．よって体積は

$$\mathbf{V} = \int \mathrm{d}^3\tau \sqrt{|\det q(\vec{\tau})|} = \int \mathrm{d}^3\tau \sqrt{|\det E(\vec{\tau})|} : (4.14)$$

と表される．

なお教科書がこのように計量 q_{ab} を介した説明を採っていないのは，ここでも E_i^a を計量よりも基本的な変数と見なしているからだと推察できる．式 (4.33) の箇所で計量 q_{ab} をあからさまに用いない説明を再考する．

■Thiemann の恒等式 (4.15) とその加重度　式 (4.15) は文献 [415, § 7.4] で見た Thiemann の恒等式であり，そのノートに載せた導出を整理して以下に示す．

一般に $f(E(y), A(y)) \equiv f(y)$ と略記すると[*90]，正準変数と $f(y)$ との Poisson 括弧は

$$\{A_a^i(x), f(y)\} = \int \mathrm{d}^3 z \sum_{b,j} \left\{ \frac{\delta A_a^i(x)}{\delta A_b^j(z)} \frac{\delta f(y)}{\delta E_j^b(z)} - \frac{\delta A_a^i(x)}{\delta E_j^b(z)} \frac{\delta f(y)}{\delta A_b^j(z)} \right\} = \frac{\delta f(y)}{\delta E_i^a(x)}, \qquad \{E_i^a(x), f(y)\} = -\frac{\delta f(y)}{\delta A_a^i(x)}$$

と計算できる．(これらは力学で馴染みある関係式であり，ただし微分が汎関数微分に置き換わっている．)

注意：Poisson 括弧の比例係数　ただし f を正準変数 A_b^j, E_j^b 自身に選ぶと，正準変数間の Poisson 括弧 (4.25) を再現するには，適当な係数 $8\pi\mathrm{i}G$ を補わねばならない．これは A_a^i が共役運動量そのものではなく，その $8\pi\mathrm{i}G$ 倍だからである (4.1.1 節)．

[*90] 教科書の式 (4.14–15) でも 3 次元の面の座標 $x, y, \cdots$ に矢印 (ベクトル記号) を付けていない．

さらに場 A^i_b, E^b_i それ自体を場の汎関数と見て

$$\frac{\delta f(y)}{\delta A^i_b(x)} = \frac{\partial f(y)}{\partial A^j_a(y)}\frac{\delta A^j_a(y)}{\delta A^i_b(x)} = \frac{\partial f(y)}{\partial A^i_b(y)}\delta^3(x-y), \qquad \frac{\delta f(y)}{\delta E^b_i(x)} = \frac{\partial f(y)}{\partial E^b_i(y)}\delta^3(x-y)$$

とできる．以上を一般公式

$$\{A^i_a(x), f(x')\} = 8\pi \mathrm{i}G\frac{\delta f(x')}{\delta E^a_i(x')} = 8\pi\mathrm{i}G\frac{\partial f(x')}{\partial E^a_i(x')}\delta^3(x-x'), \qquad f(x') \equiv f(E(x'), A(x'))$$

としてまとめておく．

また行列式が

$$\det(E) = \frac{1}{3!}E^a_i E^b_j E^c_k \epsilon^{ijk}\epsilon_{abc}$$

と書けることも有用である．

これらを踏まえて，体積 (4.14):

$$\mathbf{V} = \int \mathrm{d}^3x\sqrt{|\det(E)|}$$

と接続の Poisson 括弧 $\{A^l_d(x), \mathbf{V}\}$ を計算しよう．すると，

$$\begin{aligned}
\{A^l_d(x), \mathbf{V}\} = &\int \mathrm{d}^3x' \left\{A^l_d(x), \sqrt{|\det(E(x'))|}\right\} = (8\pi\mathrm{i}G)\int \mathrm{d}^3x'\frac{\partial\sqrt{|\det(E(x'))|}}{\partial E^d_l(x')}\delta^3(x-x') \\
=&(8\pi\mathrm{i}G)\frac{1}{2\sqrt{|\det(E)|}}\frac{\partial}{\partial E^d_l}|\det(E)| = (8\pi\mathrm{i}G)\frac{1}{2\cdot 3!\sqrt{\det(E)}}\frac{\partial}{\partial E^d_l}E^a_i E^b_j E^c_k\epsilon^{ijk}\epsilon_{abc} \\
=&(8\pi\mathrm{i}G)\frac{1}{2\cdot 3!\sqrt{\det(E)}}\{\delta^a_d\delta^l_i E^b_j E^c_k\epsilon^{ijk}\epsilon_{abc} + (a,b,c\text{ を巡回置換した項})\} \\
=&(8\pi\mathrm{i}G)\frac{3}{2\cdot 3!\sqrt{\det(E)}}\epsilon^{ljk}\epsilon_{dbc}E^b_j E^c_k = (8\pi\mathrm{i}G)\frac{\epsilon^{ljk}\epsilon_{dbc}E^b_j E^c_k}{4\sqrt{\det(E)}}.
\end{aligned}$$

ここで積分を実行してデルタ関数を消去する際，場 $A^l_d(x)$ を評価する位置 x は体積 $\mathbf{V}$ を考えている領域 (したがって x' の積分範囲) に含まれていると仮定した．これは最左辺の Poisson 括弧の順序 (したがって符号) が教科書と逆であることを除けば，式 (4.15) に一致している．

さて，Levi–Civita 記号 ϵ^{ijk} が全ての座標系で共通の値を持つためには，それはテンソル密度 (擬テンソル) として変換しなければならない．しかし $\sqrt{\det(q)}$ はスカラー密度 (擬スカラー) であって，また定義より加重度 +1 を持つのに対し，$\epsilon_{abc}, \epsilon^{ijk}$ は加重度を持たない．すると式 (4.15) 右辺は分子が 2 つの E^a_i を含むため加重度 +2 であるのに対し，式 (20):$|\det(q)| = |\det(E)|$ より分母は加重度 +1 なので，全体として加重度 +1 となっている．

■$H[N]$ の式 (4.16) の確認　微分形式

$$F^k = F^k_{ab}\mathrm{d}x^a \wedge \mathrm{d}x^b, \qquad \{\mathbf{V}, A^k\} = \{\mathbf{V}, A^k_c\}\mathrm{d}x^c$$

を定義して

$$\mathrm{tr}(F\wedge\{\mathbf{V}, A\}) \equiv F^k \wedge \{\mathbf{V}, A_k\} = F^k_{ab}\{\mathbf{V}, A_{ck}\}\mathrm{d}x^a\wedge\mathrm{d}x^b\wedge\mathrm{d}x^c$$

と表記していると考えられる[*91]．このとき座標 $\vec{x}$ そのものを積分変数にとって $\mathrm{d}x^a\wedge\mathrm{d}x^b\wedge\mathrm{d}x^c\to\epsilon^{abc}\mathrm{d}^3x$ とすれば，

$$H[N]=\int\mathrm{d}^3xN\{\mathbf{V},A_{ck}\}F^k_{ab}\epsilon^{abc}.$$

ここから先の変形は文献 [415, § 7.4] で行ったのと同じである．すなわち Thiemann の恒等式 (4.15) を代入すると，

$$\begin{aligned}H[N]&=\int\mathrm{d}^3xN\{\mathbf{V},A_{ck}\}F^k_{ab}\epsilon^{abc}=\int\mathrm{d}^3xN\frac{8\pi\mathrm{i}G}{4}\frac{E^d_iE^e_j\epsilon_{cde}\epsilon_k{}^{ij}F^k_{ab}\epsilon^{abc}}{\sqrt{\det(E)}}\\&=\int\mathrm{d}^3xN\frac{8\pi\mathrm{i}G}{4}\frac{E^d_iE^e_j(\delta^a_d\delta^b_e-\delta^a_e\delta^b_d)\epsilon_k{}^{ij}F^k_{ab}}{\sqrt{\det(E)}}=\int\mathrm{d}^3xN\frac{8\pi\mathrm{i}G}{4}\frac{(\tilde{E}^a_i\tilde{E}^b_j-\tilde{E}^b_i\tilde{E}^a_j)\epsilon_k{}^{ij}F^k_{ab}}{\sqrt{\det(E)}}\\&=\int\mathrm{d}^3xN\frac{8\pi\mathrm{i}G}{2}\frac{E^a_iE^b_j\epsilon_k{}^{ij}F^k_{ab}}{\sqrt{\det(E)}}=\int\mathrm{d}^3xN\frac{8\pi\mathrm{i}G}{2\sqrt{\det(E)}}E^a_iE^b_jF^{ij}_{ab}\end{aligned}$$

となる．最右辺から，これは確かに式 (4.44) の不鮮明化になっていることが見て取れる．また加重度 1 を得るために被積分関数の分母に $\sqrt{\det(E)}$ を導入する際に導入したハミルトニアンの定義の自由度とは，具体的には試験関数 (不鮮明化関数) N の自由度にあたることが分かる．

4.1.1　3 次元の場．“電場の長さは面積である”

第 2 章で用いた 4 次元の場と，上で用いた 3 次元の場の関係は何か？ Einstein 方程式 (2.21) の解 $(e^I_\mu(x),A^i_\mu(x))$ を考えよ．座標空間における境界のない 3 次元の面 $\sigma:\vec{\tau}=(\tau^a)\mapsto x^\mu(\vec{\tau})$ を選ぶ．4 次元の［微分］形式 A^i (式 (2.19) で定義される自己双対接続)，Σ^i (式 (2.23) で定義される 4 次元の Plebanski 2 形式) および e^I (式 (2.1) で導入した重力場) は，σ 上の 3 次元の［微分］形式

$$A^i(\vec{\tau})=A^i_a(\vec{\tau})\mathrm{d}\tau^a,\tag{4.17}$$

$$\Sigma^i(\vec{\tau})=\Sigma^i_{ab}(\vec{\tau})\mathrm{d}\tau^a\wedge\mathrm{d}\tau^b,\tag{4.18}$$

$$e^I(\vec{\tau})=e^I_a(\vec{\tau})\mathrm{d}\tau^a\tag{4.19}$$

を誘導する．3 次元の場 E は Σ^i に関するベクトル密度，すなわち

$$E^{ai}(\vec{\tau})=\epsilon^{abc}\Sigma^i_{bc}(\vec{\tau})\tag{4.20}$$

として定義される．$e^I(\vec{\tau})=(e^0(\vec{\tau}),e^i(\vec{\tau}))$ と書こう．

$$e^0(\vec{\tau})=0\tag{4.21}$$

となるゲージを選ぶ［式 (2.153) の箇所も見よ］．(より一般的なゲージへの定式化の拡張は調べる価値がある．[127] を見よ．) このゲージでは $E^a_i(\vec{\tau})$ は実であり，

$$E^a_i(\vec{\tau})=\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon^{abc}e^j_b(\vec{\tau})e^k_c(\vec{\tau})\tag{4.22}$$

[*91] あるいは縮約される添字を省略し [416, p.61]，また Levi–Civita 記号との縮約を tr で表すと [416, p.77]，

$$\mathrm{tr}(F\wedge\{\mathbf{V},A\})=\mathrm{tr}(F^{ij}\wedge\{\mathbf{V},A^k\})=\epsilon_{ijk}F^{ij}\wedge\{\mathbf{V},A^k\}=2F_k\wedge\{\mathbf{V},A^k\}.$$

となることを理解するのは容易である［本稿次節で確認］．式 (4.1) で用いた接続 $\Gamma^i[E](\vec{\tau}) = \epsilon^i{}_j{}^k \Gamma^j{}_k[E](\vec{\tau})$ は

$$\mathrm{d}e^i + \Gamma^i{}_j[E] \wedge e^j = 0 \tag{4.23}$$

(これは σ に対する第 1 Cartan 構造である［式 (2.6) と比較せよ］) によって定義され，これは

$$\Gamma^j_{ak} = \frac{1}{2} e^b_k (\partial_a e^j_b - \partial_b e^j_a + e^{cj} e_{al} \partial_b e^l_c) \tag{4.24}$$

と解ける．すなわち，それはトライアド e^i_a のスピン接続である［本稿次節で補足］．このゲージでは式 (4.17) と (4.20) で定義される 2 つの量 $A^i_a(\vec{\tau})$ と $E^a_i(\vec{\tau})$ が，"実数条件" (4.1) を満たすことを証明することもまた容易である［本稿次節で補足］．

量 $E^a_i(\vec{\tau})$ は $A^i_a(\vec{\tau})$ の運動量共役 ($\times 8\pi \mathrm{i} G$) である［式 (4.27) の箇所で示される］．よって，直ちに Poisson 括弧

$$\{A^i_a(\vec{\tau}), E^b_j(\vec{\tau}')\} = (8\pi \mathrm{i} G)\delta^b_a \delta^i_j \delta^3(\vec{\tau}, \vec{\tau}') \tag{4.25}$$

を書ける．Maxwell および Yang–Mills 理論において，3 次元の接続 A の運動量共役は電場と呼ばれる．場 E はそれ故，重力的な電場と呼ばれる．［曲率 (場の強度) F^i_{ab} との混同に注意[*92]．］我々の考えているゲージ (4.21) では，E は σ のトライアド場 $e^i_a(\tau)$ のみから決定される．方程式 (4.22) は，E が $e^i_a(\tau)$ の逆行列とその行列式の積

$$E^{ai} = (\det e) e^{ai} \tag{4.26}$$

であることを示している．［これが加重度 1 のトライアドに他ならないことも含めて，本稿次節で確認．］

ここで Hamilton 形式の基礎方程式，すなわち Poisson 括弧 (4.25) と拘束系 (4.2)–(4.4) の導出をスケッチする．この導出の詳細な議論は，例えば， [2, 9, 20, 126] を見よ．有限次元の正準形式を経由する間接的な導出を，本章の終わりで与える．我々は例えば，宇宙定数を除いた作用 (2.27) から出発し，それを以下のように書ける：

$$\begin{aligned}
S[\Sigma, A] =& \frac{-\mathrm{i}}{16\pi G} \int \Sigma_i \wedge F^i = \frac{-\mathrm{i}}{16\pi G} \int \Sigma_{i\mu\nu} F^i_{\rho\sigma} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathrm{d}^4 x \\
=& \frac{-\mathrm{i}}{8\pi G} \int \left(\Sigma_{iab} F^i_{c0} + \Sigma_{i0a} F^i_{bc} \right) \epsilon^{abc} \mathrm{d}^4 x \\
=& \frac{-\mathrm{i}}{8\pi G} \int \left(E^c_i \left(\partial_0 A^i_c - \partial_c A^i_0 + \epsilon^i_{jk} A^j_0 A^k_c \right) + P_{iIJ} e^I_0 e^J_a F^i_{bc} \epsilon^{abc} \right) \mathrm{d}^4 x \\
=& \frac{-\mathrm{i}}{8\pi G} \int \left(E^c_i \dot{A}^i_c + A^i_0 \mathrm{D}_c E^c_i + \frac{1}{2} \left(\epsilon^i_{jk} e^j_0 e^k_a + \mathrm{i} e^0_0 e^i_a \right) F_{ibc} \epsilon^{abc} \right) \mathrm{d}^4 x \\
=& \frac{-\mathrm{i}}{8\pi G} \int \left(E^c_i \dot{A}^i_c + \lambda^i_0 \left(\mathrm{D}_c E^c_i \right) + \lambda^b \left(E^a_i F^i_{ab} \right) + \lambda \left(E^a_j E^b_k F^{jk}_{ab} \right) \right) \mathrm{d}^4 x.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

［式変形を本稿次節で補足する[*93]．］A の上のドットは時間微分を表す．ゲージ条件 $e^0_i = 0$［正しくは $e^0_a = 0$ か (本稿次節)[*94]］を用いており，Lagrange 乗数は非力学的な変数 A^i_0, e^0_0, e^i_0［本稿次節で補足 (正しくは $e^i_0 \to e^a_0$ か)］の倍数 (multiples) である．第 1 項は $E^c_i / 8\mathrm{i}\pi G$ が A^i_c の運動量共役であることを示している［本稿次節で補足］; Lagrange 乗数について変分すると，拘束系 (4.2)–(4.4) が帰結する．

[*92] 対照的に Maxwell および Yang–Mills 理論では，A^i_a の運動量共役は実際に電場 ($\sim F^i_{0a}$) となる．文献 [415] の式 (4.19) と，5.1 節のノートを見よ．

[*93] 2 行目で $F^i_{c0} \to F^i_{0c}$ と修正した．また 3 行目の最後の項で $e^J_a e^J_0 \to e^I_0 e^J_a$，4 行目で $e^j_a e^k_0 \to e^j_0 e^k_a$ と訂正した．

[*94] 4.3.4 節 (教科書 p.160，l.2) でも (境界面上での) 同じゲージ条件 $e^0_b(\vec{\tau}) = 0$ に言及している．これは Maxwell 理論のゲージ条件 $A_0 = 0$ とアナロガスである．時間に依存しないゲージ関数 λ を用いて，ゲージ条件 $A_0 = 0$ を破ることなく，なおゲージ変換 $A_a \to A_a + \partial_a \lambda$ を施すことができ，Gauss 拘束 $C(\vec{E}) = \partial_a E^a$ はこのゲージ変換を生成する [416, pp.70–71].

3 次元の面の幾何学　2.1.4 節では，重力場が距離の (metric) 解釈を持つことを見た．σ に引き継がれる距離構造は重力的な電場 E に依存する．特に，3 次元の面 σ に埋め込まれた 2 次元の面 $S : \sigma = (\sigma^1, \sigma^2) \mapsto \vec{\tau}(\sigma^i)$ を考えよ．S の面積は何か？ 面積の定義，式 (2.70) より，少々の手順で

$$\mathbf{A}(S) = \int_S \mathrm{d}^2\sigma\, |E| \tag{4.28}$$

を得る［本稿次節で補足］．ここにノルムは $|v| = \sqrt{\delta^{ij} v_i v_j}$ で定義され，また

$$E_i(\sigma) = E_i^a(\vec{\tau}(\sigma)) n_a(\sigma) \tag{4.29}$$

は

$$n_a(\sigma) = \epsilon_{abc} \frac{\partial \tau^b}{\partial \sigma^1} \frac{\partial \tau^c}{\partial \sigma^2} \tag{4.30}$$

によって定義される面への法線である．方程式 (4.28) は 2 形式

$$E_i = \frac{1}{2} E_i^a \epsilon_{abc} \mathrm{d}x^b \wedge \mathrm{d}x^c \tag{4.31}$$

［右辺に係数 1/2 を補った］のノルムの面積分として解釈でき，

$$\mathbf{A}(S) = \int_S |E| \tag{4.32}$$

と書ける［本稿次節で補足］．このように E_i^a，あるいは，より正確にはそのノルム，ないし“長さ”$|E|$ は，面積要素を定義する．したがって重力では，**“電場の長さは面積である”**，あるいは，より正確には，面の面積は面を貫く重力的な電場の (ノルムの) 束 (flux) であると言える．

式 (2.73) を用いると，類似の計算により 3 次元の領域 R の体積は

$$\mathbf{V}(R) = \int_R \mathrm{d}^3\tau \sqrt{|\det E|} \tag{4.33}$$

で与えられる［本稿次節で補足］．あらゆる面の面積とあらゆる領域の体積が分かれば，幾何学が分かる．［古典的には長さは面積と体積から副次的・派生的に復元されると考えられる*95．長さの量子力学的な演算子については第 6 章の文献ノートで言及されている．］

重力的な電場 E を用いた面積と体積に対するこれらの表現は，量子重力において主要な役割を演じる．対応する量子力学的な演算子は離散的なスペクトルを持ち，その固有値は知られており，量子状態の空間における便利な基底を定める．

後で用いるために，$\det E = \det((\det e)e^{-1}) = (\det e)^3(\det e)^{-1} = (\det e)^2$ に注意せよ［式 (4.26) の行列式をとった］．したがって $\sqrt{n \cdot n} = |\det e| = \sqrt{|\det E|}$ であり，ここに n は式 (4.30) で定義される［本稿次節で補足］．

*95 しかし例えば古典的な四面体の形状はちょうど 6 本の辺の長さで決まるため，その体積と 4 つの面の面積の合計 5 つの量を指定しただけでは，全ての長さは決まらない．量子重力においてもスピン・ネットワーク基底において同時に対角化されるのは面積と体積であるため，四面体の形状は (Planck スケールでは) 量子論的な不鮮明さを伴う [416, p.18,p.140].

相空間，状態，および Einstein 方程式との関係　GR の状態とは，Einstein 方程式の解となる 4 次元の場の配位 $e^I_\mu(x)$ の，2 つのゲージ変換 (2.123) と (2.124) の下での同値類である．これらの同値類の空間 Γ が GR の相空間である．

Einstein 方程式の 1 つの解が与えられたとして，座標空間における境界のない 3 次元の面 σ を考えよう．$A^i_a(\vec{\tau})$ を 4 次元の自己双対接続 $A^i_\mu(x)$ から誘導される，σ 上の接続とする．状態は，解の同値類における代表の変更，あるいは等価的に，σ の変更によって得られる，状態と両立する (compatible) と呼ばれる，可能な 3 次元の場 $A^i_a(\vec{\tau})$ の族を決定する［式 (2.6) の $\omega[e]$ の対応物］．状態と両立する 3 次元の場 $A^i_a(\vec{\tau})$ の族は，原理的には，Hamilton–Jacobi 系の解から以下のように得られる．

一般に系を解くには，充分多くの数のパラメータ α_n に依存する Hamilton–Jacobi 系の解 $S[A,\alpha]$ が必要である．状態は次いで定数 α_n と β_n から以下のように決定される．方程式

$$F[A,\alpha] = \frac{\partial S[A,\alpha]}{\partial \alpha_n} - \beta_n = 0 \tag{4.34}$$

［式 (3.87)］は状態と両立する $A^i_a(\vec{\tau})$ を決定する．この意味で，HJ 方程式 (4.9) の解 $S[A,\alpha]$ は Einstein 方程式の解を含んでいる．以下では，Hamilton 関数によって与えられる Hamilton–Jacobi 系の特別な解に集中する．

4.1.1 節について

■テトラードの 3 次元面への制限 (4.19) がトライアドを与えること　3 次元面 $\sigma : x^\mu = x^\mu(\vec{\tau})$ において線要素は

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau^a}\frac{\partial x^\nu}{\partial \tau^b}\mathrm{d}\tau^a\mathrm{d}\tau^b$$

なので，計量は共変テンソルの変換則と類似の式

$$q_{ab} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau^a}\frac{\partial x^\nu}{\partial \tau^b}g_{\mu\nu}$$

で定義できる．また面 σ 上でテトラードの 1 形式は $e^I = e^I_\mu\mathrm{d}x^\mu = e^I_\mu\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau^a}\mathrm{d}\tau^a$ と表され，これを式 (4.19) と比較すると，共変ベクトルの変換則と類似の関係

$$e^I_a = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau^a}e^I_\mu$$

が成り立つ．ここで式 (2.82):$g_{\mu\nu} = e^I_\mu e^J_\nu \eta_{IJ}$ を思い出し，また本節で用いられるゲージ条件 $e^0_a = 0$ を課すと，上の 2 式はトライアド e^i_a の満たす関係

$$q_{ab} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau^a}\frac{\partial x^\nu}{\partial \tau^b}(e^I_\mu e^J_\nu \eta_{IJ}) = e^I_a e^J_b \eta_{IJ} = e^i_a e^j_b \delta_{ij}$$

を再現する．

このときトライアド e^i_a の添字を計量 δ_{ij}, q^{ab} で上げ下げした量 $e^a_i = q^{ab}\delta_{ij}e^j_b$ が逆トライアドとなること

$$e^i_a e^a_j = \delta^i_j, \qquad e^a_i e^i_b = \delta^a_b$$

は，テトラードの場合と全く同様に示せる．

■$E^a_i(\vec{\tau})$ の式 (4.22) の確認　定義式 (2.23):

$$\Sigma^i = \frac{1}{2}\epsilon^i{}_{jk} e^j \wedge e^k + \mathrm{i}\, e^0 \wedge e^i$$

の右辺第 2 項 (虚数の項) はゲージ条件 (4.21):$e^0(\vec{\tau}) = 0$ により消えるので，3 次元の面 σ 上で

$$\Sigma^i = \Sigma^i_{bc} \mathrm{d}\tau^b \wedge \mathrm{d}\tau^c, \qquad \Sigma^i_{bc} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^i{}_{jk} e^j_b e^k_c$$

となる．よって $E^a_i(\vec{\tau})$ の定義式 (4.20) は式 (4.22) を与え，その右辺の表式から分かるように $E^a_i(\vec{\tau})$ は実である．

■スピン接続 Γ の式 (4.24) について　式 (4.23) を

$$0 = \mathrm{d}e^i + \Gamma^i{}_j \wedge e^j = (\partial_{[a} e^i_{b]} + \Gamma^i_{[aj} e^j_{b]}) \mathrm{d}\tau^a \wedge \mathrm{d}\tau^b$$

と書くだけでは不十分である．実際 2.1.5 節で行ったように，2 種類の添字を持つ対象の導関数には，通常の接続 $\Gamma^b{}_{ac}$ とスピン接続 $\Gamma_a{}^j{}_i$ を用いて，ねじれを

$$0 = \mathrm{D}_a e^b_i = \partial_a e^b_i - \Gamma_a{}^j{}_i e^b_j + \Gamma^b{}_{ac} e^c_i, \qquad \therefore \Gamma_a{}^j{}_i e^b_j = \partial_a e^b_i + \Gamma^b{}_{ac} e^c_i$$

と書かねばならない．両辺に e^k_b を掛けて b で和をとり $e^b_j e^k_b = \delta^k_j$ とすると，

$$\Gamma_a{}^k{}_i = e^k_b (\partial_a e^b_i + \Gamma^b{}_{ac} e^c_i)$$

が得られる．

この導き方から，Γ^{ij}_a は，スピン接続 $\omega[e]^{IJ}_\mu$ の式 (2.92) で添字を空間成分に限定した量に対応すると考える．

$$\Gamma^{ij}_a = 2e^{b[i} \partial_{[a} e_{b]}{}^{j]} + e_{ak} e^{bi} e^{cj} \partial_{[c} e_{b]}{}^k.$$

ただし実際には式 (4.24) は，上式右辺の第 1 項における i, j の反対称化と，第 2 項における b, c の反対称化 (それは第 1 項と同様に i, j に関する反対称化を意味する) を解除した量

$$\Gamma^{ij}_a = e^{bj} \partial_{[a} e^i_{b]} + \frac{1}{2} e_{ak} e^{bj} e^{ci} \partial_b e^k_c = \frac{1}{2} e^{bj} (\partial_a e^i_b - \partial_b e^i_a + e^{ci} e_{ak} \partial_b e^k_c)$$

となっている．もっとも i, j に関する反対称化の有無は，Cartan 方程式に直接現れる $\Gamma^i_a = \epsilon^i{}_{jk} \Gamma^{jk}_a$ には影響しない．結論としては，式 (2.92) を流用して構わないことになる．

式 (9.23–25) の箇所における 3 次元の Riemann 的な GR との混同に注意せよ．

■実数条件 (4.1) が満たされること (式 (4.24) に続く文) について　式 (4.24) において $\omega^i{}_j \sim \Gamma^i{}_j$ と考えたことに対応して，

$$A^i = \omega^i + \mathrm{i}\,\omega^{0i} \sim \Gamma^i + \mathrm{imaginary}$$

とする．これは文献 [415] の式 (7.4):$A^i_a = \Gamma^i_a + \beta K^i_a$ に対応している (ここでは Immirzi パラメータ $\beta = \mathrm{i}$)．ここから実数条件 (4.1) を説明できる．実際 4.3.5 節ではそのように説明されている．

■加重度 1 のトライアド (4.26) の確認　式 (4.22) の $E=(E^a_i)$ はトライアドの行列 $e\equiv(e^i_a)$ (添字の上下が E と逆であることに注意) の，余因子行列の転置行列に他ならない[*96]．よって

$$E=(\det e)\,e^{-1}\qquad \text{i.e.}\qquad E^a_i=(\det e)\,e^a_i:(4.26).$$

またトライアドの満たす式 $q_{ab}=e^i_a e^b_j\delta_{ij}$ の両辺の行列式をとると

$$\det q=(\det e)^2,\qquad \therefore |\det e|=\sqrt{\det q}$$

となる．よって

$$E^a_i=(\det e)\,e^a_i=\sqrt{\det q}\,e^a_i$$

は加重度 1 のトライアドに他ならない．

■作用 (4.27) の式変形について

第 2 の等号　1 行目はほぼ自明である．すなわち 2 形式を $\Sigma_i=\Sigma_{i\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu, F^i=\frac{1}{2}F^i_{\rho\sigma}\mathrm{d}x^\rho\wedge\mathrm{d}x^\sigma$ と書き，次いで座標そのものを積分変数に選んで $\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu\wedge\mathrm{d}x^\rho\wedge\mathrm{d}x^\sigma\to\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{d}^4x$ とすれば良い．冒頭 xxii 頁の約束 $\epsilon_{0123}=+1$ に従えば $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ に負号を付ける必要があるものの，2 行目以降の式の符号は正しい．

式 (2.98) の箇所で見たように，Einstein–Hilbert 作用 $-\frac{1}{16\pi G}\int\mathrm{d}^4x\sqrt{-g}R$ に一致する (Palatini) 作用は $\frac{1}{16\pi G}\int e^I\wedge e^J\wedge R^*_{IJ}$ なので，作用 (2.22),(2.27) の，したがって式 (4.27) 第 2 辺の数係数の分母を $16\pi G\to 8\pi G$ と改めねばならない．ところが曲率の成分を $F^i=\frac{1}{2}F^i_{\rho\sigma}\mathrm{d}x^\rho\wedge\mathrm{d}x^\sigma$ で定義したので，式 (4.27) 第 3 辺以降の数係数は正しい．

第 4 の等号　3 行目の第 1 項では，E^c_i の定義式 (4.20) を用いる．また式 (2.27) における曲率 F^i の成分は，式 (4.6) で定義される F^i_{ab} と同じであることに注意する．正確には本稿の計算結果 (7) は構造定数 $-\epsilon^i{}_{jk}$ が式 (4.6) と逆符号である．しかしこのとき共変微分の定義式 (4.5) も同じ構造定数 $-\epsilon^i{}_{jk}$ を用いて再定義されるため，続く 4 行目の共変微分の項 $\mathrm{D}_cE^c_i$ が得られること，したがって式 (4.27) 最右辺が成り立つことに変わりはない．

さらに第 2 項について，定義式 (2.23) より

$$\Sigma_i=P_{iIJ}e^I\wedge e^J=\Sigma_{i\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu,\qquad \Sigma_{i\mu\nu}\equiv P_{iIJ}e^I_\mu e^J_\nu=-\Sigma_{i\nu\mu}\ (\text{既に反対称})$$

と同定できる．我々はゲージ条件 (4.21):$e^0(\vec{\tau})=0$ ではなく $e^0_a(\vec{\tau})=0$ を課すので，$I=0$ も寄与を持つことに注意する (続く式変形を見よ)．

第 5 の等号　まず 3 行目の最初の項を

$$\int E^c_i\left(-\partial_cA^i_0+\epsilon^i{}_{jk}A^j_0A^k_c\right)\mathrm{d}^4x=\int A^i_0\left(\partial_cE^c_i+\epsilon_{ij}{}^kA^j_cE^c_k\right)\mathrm{d}^4x=\int A^i_0\mathrm{D}_cE^c_i\mathrm{d}^4x$$

と書き換える．ここで中辺に移る際に，第 1 項を (d^3x に関する積分において) 部分積分し，第 2 項ではダミー添字の巡回置換 $i\to k\to j\to i$ を行った．

3 行目の後ろの項に対しては P^i_{IJ} の定義式 (2.17) を用いる．また正しいゲージ条件は $e^0_i=0$ (教科書 p.149) ではなく，$e^0_a=0$ であると考えて初めて，

$$P^i_{IJ}e^I_0e^J_a=P^i_{jk}e^j_0e^k_a+P^i_{0j}e^0_0e^j_a+P^i_{j0}e^j_0e^0_a=\frac{1}{2}(\epsilon^i{}_{jk}e^j_0e^k_a+\mathrm{i}\,e^0_0e^i_a)$$

とできる．したがって以降の e^0_0 は $e^{I=0}_{\mu=0}$ の意味である．

[*96] 言い換えれば，$(\det e)e^a_i=\frac{1}{2}\epsilon^{abc}\epsilon_{ijk}e^j_be^k_c$ と表される．実際，e^i_a との縮約をとると両辺は $3\det e$ となるので，これは成り立っている．より手堅い確認として，e^l_a や e^i_d を掛けて一方の添字のみでの縮約を調べても良い．

最後の等号　まず最右辺の第 2 項において $\lambda_0^i \equiv A_0^i$ と同定する．

残りの項を得るには，式 (4.21) の代わりにゲージ条件 $e_a^0 = 0$ だけを課す場合にも，E_i^a の表式 (4.22) が成り立つことが有用となる．実際，再び P_{IJ}^i の定義式 (2.17) とより，このゲージにおいて

$$\begin{aligned}\Sigma_{ibc} \equiv& P_{iIJ}e_b^I e_c^J = P_{i,jk}e_b^j e_c^k + P_{i,0j}e_b^0 e_c^j + P_{i,j0}e_b^j e_c^0 = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}e_b^j e_c^k, \qquad (\text{添字 } b, c \text{ に関して反対称})\\ \therefore\ E_i^a \equiv& \epsilon^{abc}\Sigma_{ibc} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon^{abc}e_b^j e_c^k : (4.22).\end{aligned}$$

したがって式 (4.26) もまた有効である．すると $e = (e_a^i)$ が逆トライアド e_i^a の逆行列であることは，式 (4.22) を真似て

$$e_a^i = \frac{1}{\det(e_i^a)}\left(\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\epsilon_{abc}e_j^b e_k^c\right) = \frac{1}{2\det e}\epsilon^{ijk}\epsilon_{abc}E_j^b E_k^c$$

と書ける (最後の等号で式 (4.26) を用いた)．

これを正直に代入すると，4 行目の第 3 項は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\epsilon^i{}_{jk}e_a^j e_0^k F_{ibc}\epsilon^{abc} =& \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left(\frac{1}{2\det e}\epsilon^{jlm}\epsilon_{ade}E_l^d E_m^e\right)e_0^k F_{bc}^i\epsilon^{abc}\\ =& -\frac{e_0^k E_k^c}{\det e}E_i^b F_{bc}^i \qquad (\because \epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm} = -2\delta_i^{[l}\delta_k^{m]},\ \epsilon_{ade}\epsilon^{abc} = 2\delta_d^{[b}\delta_e^{c]})\end{aligned}$$

と書き換えられる．ここで式 (4.26) と $0 = \delta_0^c = e_0^\mu e_\mu^c = e_0^0 e_0^c + e_0^k e_k^c$ に注意すると，最右辺の係数は

$$-\frac{e_0^k E_k^c}{\det e} = -e_0^k e_k^c = e_0^0 e_0^c$$

となる．そこでこれを λ^c に同定すると，式 (4.27) 最右辺の第 3 項 $\lambda^c E_i^b F_{bc}^i$ を得る．

同様に 4 行目の第 4 項は

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{i}}{2}e_0^0 e_a^i F_{ibc}\epsilon^{abc} =& \frac{\mathrm{i}}{2}e_0^0\left(\frac{1}{2\det e}\epsilon^{ijk}\epsilon_{ade}E_j^d E_k^e\right)F_{ibc}\epsilon^{abc}\\ =& \frac{\mathrm{i}}{2}e_0^0\frac{1}{\det e}E_j^b E_k^c F_{bc}^{jk} \qquad (\because \epsilon^{ijk}F_{ibc} = F_{bc}^{jk},\ \epsilon_{ade}\epsilon^{abc} = 2\delta_d^{[b}\delta_e^{c]})\end{aligned}$$

と書き換えられる．よって式 (4.27) 最右辺の第 4 項では，$\lambda \equiv \frac{\mathrm{i}}{2}e_0^0\frac{1}{\det e}$ と同定している．ところが式 (4.14) と式 (4.26) での考察から

$$\det e = \sqrt{\det q} = \sqrt{\det E} \tag{21}$$

なので，我々は式 (4.16) の箇所と同じく加重度 2 の因子 $E_j^b E_k^c F_{bc}^{jk}$ に関して，分母の $\sqrt{\det E}$ を係数に吸収させたことになる．この措置は文献 [415, pp.92–93] の記述とも整合している．

■作用 (4.27) 最右辺の Lagrange 乗数について　作用 (4.27) 最右辺の導出時に定義した乗数を改めてまとめると，

$$\lambda_0^i \equiv A_0^i, \qquad \lambda^b \equiv e_0^0 e_0^b, \qquad \lambda \equiv \frac{\mathrm{i}}{2}e_0^0\frac{1}{\sqrt{\det E}}.$$

ここに現れる $A_0^i, e_0^0(= e_{\mu=0}^{I=0}), e_0^a$ が「非力学的 (nondynamical)」(教科書 p.149) であることについて，文献 [415, § 4.2] のノートに書いたように，ラグランジアンにある変数の時間微分 $\dot{q}_i$ が含まれない場合，変数 q_i は実のところ Lagrange の未定乗数である : 1 次拘束条件として $p_i(q, \dot{q}) = \partial L/\partial\dot{q}_i = 0$ が課される．このとき 1 次拘束量としての運動量 p_i が生成する座標のゲージ変換は，p_i に充てられる Lagrange の未定乗数を λ として $[q_i, \lambda p_i] = \lambda$ なので，座標 q_i そのものを未定乗数のように見なせる．

■「第 1 項は $E_i^c/8\mathrm{i}\pi G$ が A_c^i の運動量共役であることを示している」(教科書 p.147) について　式 (4.27) 最右辺は作用の表式 $S=\int(p\dot{q}-H(p,q))\mathrm{d}t$ (あるいは式 (3.56)) と比較される．ここでは被積分関数は配位変数とその運動量共役の関数として表されているものの，それがラグランジアン (密度) に一致することには変わりない．そこで時間微分 $\dot{A}_c^i$ が作用 (4.27) の第 1 項のみに含まれることに注意して，ラグランジアン密度を $\dot{A}_c^i$ で微分すれば運動量密度が得られる．

あるいはより正確には，共役な運動量 (密度) の定義式

$$\frac{\delta L}{\delta A_a^i}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_a^i}-\partial_b\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_b\dot{A}_a^i)}$$

を用いる．ここに L と $\mathcal{L}$ はそれぞれラグランジアンとその密度である．(文献 [415, § 4.3] のノートを見よ．) もっとも，ここでは付加的な第 2 項は寄与を持たない．

Hamilton 関数に作用 (4.27) を採用すれば，(係数 $8\pi\mathrm{i}G$ の修正が必要であるものの) 式 (4.7) も成立する．実際，作用 (4.27) の最右辺を場の物理的な運動に関して評価すれば，後ろの 3 つの項は式 (4.2–4) により落とせる．そこで残る第 1 項を A_a^i に関して変分すると，

$$\delta S=\frac{1}{8\pi\mathrm{i}G}\int E_i^a\delta\dot{A}_a^i\mathrm{d}^4x=\frac{1}{8\pi\mathrm{i}G}\left(\int E_i^a\delta A_a^i\mathrm{d}^3x-\int\dot{E}_i^aA_a^i\mathrm{d}^4x\right).\qquad(x^0\text{で部分積分した})$$

よって汎関数微分の定義に基づき，境界積分における δA_a^i の係数を

$$\frac{\delta S}{\delta A_a^i}=\frac{1}{8\pi\mathrm{i}G}E_i^a$$

と同定できる．ここからも再び右辺の量を A_a^i の運動量共役と解釈できる．

4.3.4 節における運動量共役 E_i^a の式 (4.69) (正確には式 (4.66)) を確認する際にも，本稿では部分積分から生じる境界項しか調べない．

■面積の式 (4.28) について　式 (2.71) に対応する R^3 のベクトル

$$u_1^i\equiv e_a^i\frac{\partial\tau^a}{\partial\sigma^1},\qquad u_2^i\equiv e_a^i\frac{\partial\tau^a}{\partial\sigma^2}$$

を導入し，これを用いて式 (4.28) 右辺を表すことを考える．E_i^a の式 (4.22) も利用すると，

$$\begin{aligned}E_i=&E_i^an_a=\left(\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon^{abc}e_b^je_c^k\right)\left(\epsilon_{ade}\frac{\partial\tau^d}{\partial\sigma^1}\frac{\partial\tau^e}{\partial\sigma^2}\right)\\=&\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left\{\left(e_b^j\frac{\partial\tau^b}{\partial\sigma^1}\right)\left(e_c^k\frac{\partial\tau^c}{\partial\sigma^2}\right)-\left(e_c^k\frac{\partial\tau^c}{\partial\sigma^1}\right)\left(e_b^j\frac{\partial\tau^b}{\partial\sigma^2}\right)\right\}\qquad(\because\epsilon^{abc}\epsilon_{ade}=\delta_d^b\delta_e^c-\delta_e^b\delta_d^c)\\=&\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(u_1^ju_2^k-u_1^ku_2^j)=\epsilon_{ijk}u_1^ju_2^k=(\vec{u}_1\times\vec{u}_2)_i,\\\therefore\ |E|=&\sqrt{\delta^{ij}E_iE_i}=\sqrt{(\vec{u}_1\times\vec{u}_2)^2}=\sqrt{(\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1)(\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2)-(\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2)^2}\end{aligned}$$

と書ける．よって式 (4.28) は面積の式 (2.72) と全く同じ形になる．

ここで平方根の中身が，2 次元の面に誘導された計量

$$q_{AB}=q_{ab}\frac{\partial\tau^a}{\partial\sigma^A}\frac{\partial\tau^b}{\partial\sigma^B}\qquad(a,b=1,2,3;\ A,B=1,2)$$

の行列式になっていることを確認しておくのは教育的である．上式は共変テンソルの変換則と類似している．実際，パラメータの変化 $\mathrm{d}\sigma^A$ に伴う変位 $\mathrm{d}\tau^a = \frac{\partial\tau^a}{\partial\sigma^A}\mathrm{d}\sigma^A$ に対応する“真の距離”(の 2 乗) は

$$\mathrm{d}l^2 = q_{ab}\mathrm{d}\tau^a\mathrm{d}\tau^b = \left(q_{ab}\frac{\partial\tau^a}{\partial\sigma^A}\frac{\partial\tau^b}{\partial\sigma^B}\right)\mathrm{d}\sigma^A\mathrm{d}\sigma^B = q_{AB}\mathrm{d}\sigma^A\mathrm{d}\sigma^B$$

と書けるので，上式は面に誘導された計量 q_{AB} の定義として適正である．他方でトライアドの満たす関係 $\delta_{ij}e^i_a e^j_b = q_{ab}$ に注意すると，根号内の因子は

$$\det(\vec{u}_A\cdot\vec{u}_B) = \det\left\{\delta_{ij}\left(e^i_a\frac{\partial\tau^a}{\partial\sigma^A}\right)\left(e^j_b\frac{\partial\tau^b}{\partial\sigma^B}\right)\right\} = \det\left\{(\delta_{ij}e^i_a e^j_b)\frac{\partial\tau^a}{\partial\sigma^A}\frac{\partial\tau^b}{\partial\sigma^B}\right\} = \det(q_{AB})$$

と書き換えられる．（ここから $u^i_A = e^i_a\frac{\partial\tau^a}{\partial\sigma^A}$ の δ_{ij} による内積が，3 次元空間に引き戻したベクトル $\frac{\partial\tau^a}{\partial\sigma^A}$ の q_{ab} による内積に一致していることが見て取れる．）したがって面積は

$$\mathbf{A}(S) = \int_S \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{\det(q_{AB})}$$

と表せる (文献 [415, p.110] の式 (8.8) に対応).

■面積の式 (4.32) について　微分形式 (4.31) を式 (4.29) の E_i と区別するために，

$$E_i^{(\mathrm{form})} \equiv \frac{1}{2}E^a_i\epsilon_{abc}\mathrm{d}x^b\wedge\mathrm{d}x^c$$

と表記する．ただし教科書の式の右辺に係数 1/2 を補って訂正した．（このとき以下のように計算の辻褄が合う．後の式 (6.69) についても同様．文献 [416, p.73] の式 (3.89) では係数 1/2 が補われている．）その上で長さの式 (2.68):$\mathbf{L}[e,\gamma] = \int_\gamma|e|$ と同様に考えれば良い．すなわち積分変数を σ^1, σ^2 に選ぶと，定義より積分の下で微分形式は

$$\begin{aligned}E_i^{(\mathrm{form})} &\to \frac{1}{2}E^a_i\epsilon_{abc}\frac{\partial(x^b,x^c)}{\partial(\sigma^1,\sigma^2)}\mathrm{d}^2\sigma = \frac{1}{2}E^a_i\epsilon_{abc}\left(\frac{\partial x^b}{\partial\sigma^1}\frac{\partial x^c}{\partial\sigma^2} - \frac{\partial x^c}{\partial\sigma^1}\frac{\partial x^b}{\partial\sigma^2}\right)\mathrm{d}^2\sigma\\ &= E^a_i\epsilon_{abc}\frac{\partial x^b}{\partial\sigma^1}\frac{\partial x^c}{\partial\sigma^2}\mathrm{d}^2\sigma = E^a_i n_a\mathrm{d}^2\sigma = E_i\mathrm{d}^2\sigma\end{aligned}$$

と置き換わる．これを機械的にノルムの定義式 $|v| = \sqrt{\delta^{ij}v_iv_j}$ に代入して，形式的に両辺に $|\cdots|$ を付けただけの関係

$$|E^{(\mathrm{form})}| \;\to\; |E|\mathrm{d}^2\sigma$$

が成り立つと考える．このとき式 (4.32) は面積の式 (4.28) に戻る．

■体積の式 (4.33) について　式 (4.14) の箇所で説明済みであるものの，ここでは空間計量 (q_{ab}) をあからさまに用いない説明を考える．式 (4.26) の両辺の行列式をとると，

$$|\det E| = |(\det e)^3/(\det e)| = (\det e)^2, \qquad \therefore |\det e| = \sqrt{|\det E|}.$$

(この結果は $\sqrt{|\det q|}$ を介して式 (21) で確認済みであり，またすぐ後の教科書 p.150，l.13–14 でも言及されている．）すると体積の式 (4.33) は

$$\mathbf{V}(R) = \int_R \mathrm{d}^3x\,|\det e(x)|$$

と読み替えられる．ところがトライアド $e^i_a = \partial X^i/\partial x^a$ (式 (2.122) を見よ) の行列式は Jacobian に他ならないので，上式は体積の表式として適正である．

体積の公式 $\mathbf{V} = \int\mathrm{d}^3x\sqrt{|\det q|}$ による説明も $\sqrt{|\det q|}$ が Jacobian であることに基づいているため，ここでの説明の方が基本的である．

■長さについて　2.1.4 節とは対照的に，本節 (4.1.1 節) では面積と体積しか与えられていない．これは量子重力において，面積と体積を長さよりも基本的な量として扱うためであると想像される．もっとも式 (2.67) と類似の R^3 のベクトル $u^i = e^i_a \frac{\mathrm{d}x^a(s)}{\mathrm{d}s}$ を用いて，長さを式 (2.66) と同じ形

$$\mathbf{L} = \int \mathrm{d}s\,|u| = \int \mathrm{d}s\sqrt{\delta_{ij}u^i u^j} = \int \sqrt{q_{ab}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b}$$

に書けることは，依然として正しいと考えられる．

■教科書 p.150，l.14 の式 $\sqrt{n\cdot n} = |\det e|$ について　「n は式 (4.30) で定義される」(p.150，l.14) とあるのは誤りであり，実際には 3 次元超曲面の要素 (2.74) と同様に，n は 3 つのベクトル $e^i_a = \partial X^i/\partial x^a$ ($a = 1,2,3$，式 (2.122) を見よ) の張る体積要素

$$n \equiv \det e = \epsilon_{ijk}e^i_1 e^j_2 e^k_3 = \epsilon_{ijk}\frac{\partial X^i}{\partial x^1}\frac{\partial X^j}{\partial x^3}\frac{\partial X^k}{\partial x^3} = \frac{\partial(X)}{\partial(x)}$$

として定義されるものと考えられる．これは式 (2.74) の第 0 成分 n_0 に一致しており，それ故 $x^0 = \mathrm{const}$ の超曲面の要素に他ならない．実際このとき体積の式 (4.33) は，式 (2.73) の類似性が明瞭な形

$$\mathbf{V}(R) = \int_R \mathrm{d}^3x\sqrt{n\cdot n}$$

になる．

他方で式 (4.30) の n_a は面積要素ベクトルであって，そのノルム (の 2 乗)

$$n_a n^a = \left(\frac{\partial\vec{\tau}}{\partial\sigma^1}\times\frac{\partial\vec{\tau}}{\partial\sigma^2}\right)^2$$

は明らかに面積要素に関係している．実際，トライアドの性質

$$\delta^{ab} = e^a_i e^b_j \delta^{ij} = (\det e)^2 E^a_i E^j_b \delta^{ij} = |\det E| E^a_i E^j_b \delta^{ij}$$

の両辺に $n_a n_b$ を縮約すると

$$n_a n^a = |\det E|(E^a_i n_a)(E^b_j n_b)\delta^{ij} = |\det E| E_i E_j \delta^{ij} = |\det E|\cdot|E|^2$$

となるので，面積の式 (4.28) は

$$\mathbf{A} = \int \mathrm{d}^2\sigma\,|E| = \int \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\sqrt{|\det E|}}\sqrt{\left(\frac{\partial\vec{\tau}}{\partial\sigma^1}\times\frac{\partial\vec{\tau}}{\partial\sigma^2}\right)^2}$$

とも書けることになる．

4.1.2　GR の Hamilton 関数とその物理的意味

Hamilton–Jacobi 方程式の特別な解は Hamilton 関数 $S[A]$ である．これは境界値 A から決定される場の方程式の解に基づいて計算される，$\sigma = \partial\mathcal{R}$ に囲まれる領域 $\mathcal{R}$ の作用の値として定義される．

σ 上の境界値 A は領域 $\mathcal{R}$ における Einstein 方程式の解 $(e^I_\mu(x), A^i_\mu(x))$ を決定する．他方，この解は σ 上に 3 次元の場 $E[A]$ を誘導する．Hamilton 関数は

$$\frac{\delta S[A]}{\delta A^i_a(\vec{\tau})} = E^a_i(\vec{\tau})[A] \tag{4.35}$$

を満たす［正確には式 (4.7) と同様に右辺を $8\pi \mathrm{i}G$ で割る］．$E^a_i(\vec{\tau})[A]$ は Einstein 方程式を通じて，面 σ **全体**における A の値から決定される $E^a_i(\vec{\tau})$ の値であることに注意せよ．汎関数

$$F[A,E](\vec{\tau}) = \frac{\delta S[A]}{\delta A^i_a(\vec{\tau})} - E^a_i(\vec{\tau}) \tag{4.36}$$

を定義する；このとき方程式

$$F[A,E]=0 \tag{4.37}$$

は Einstein 方程式と等価である［式 (3.196–197) に対応］．これは 3 次元の曲面上に場 A と E を得る可能性に対して，Einstein 方程式が課す条件を表している．

これは単一の連結領域 $\mathcal{R}$ を限る，2 つの連結した要素，$\sigma_{\rm in}$ と $\sigma_{\rm out}$ から成るように σ を採る，特別な場合における発展問題と見なせる．例えば，$\sigma_{\rm in}$ と $\sigma_{\rm out}$ は空間的に閉じた宇宙の，2 つの空間的な面となり得る．この場合，解は $\sigma_{\rm in}$ と $\sigma_{\rm out}$ 上の接続の要素 $[A_{\rm in}, A_{\rm out}]$ から，あるいはまた，$\sigma_{\rm in}$ 上のみでの接続と電場の要素 $[A_{\rm in}, E_{\rm in}]$ から決定される．

$$F[A_{\rm out},A_{\rm in},E_{\rm in}](\vec{\tau})=\frac{\delta S[A_{\rm in},A_{\rm out}]}{\delta A_{{\rm in}\,a}^{\ \ i}(\vec{\tau})}-E_{{\rm in}\,i}^{\ \ a}(\vec{\tau})=0 \tag{4.38}$$

と書ける．$A_{\rm out}$ を未知，そして $A_{\rm in}$ と $E_{\rm in}$ をデータと見なすと，この方程式は Einstein 方程式の一般解を与える：固定された $A_{\rm in}$ と $E_{\rm in}$ に対して，それは“初期条件”$A_{\rm in}$ と $E_{\rm in}$ を伴う 3 次元の面に限られた解と整合する，あらゆる σ 上の 3 次元の接続 $A_{\rm out}$ を解に持つ．すなわち，式 (4.38) は“初期条件”$A_{\rm in}$ と $E_{\rm in}$ から“発展し”得る全ての場 $A_{\rm out}$ を決定する．それ故 Hamilton 関数 $S[A]$ は Einstein 方程式の全ての解を含む．$S[A]$ は GR の完全なダイナミクスを表す．

これから見るように，量子 GR の完全なダイナミクスは対応する量子力学的な伝播関数 $W[A]$ に含まれている．$\hbar$ に関する最初の重要なオーダーでは，$W[A]$ は $\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S[A]}$ に関係する［文献 [416, § 2.2] [421, pp.137–139] とは指数が逆符号[*97]］．

私は 3 次元の面 σ が空間的であることを全く要求しなかった．特に私は，任意の境界値 A が内挿される解を許容または決定するかどうかという問題を避けてきた．一般に，関数 $S[A]$ はある領域上でのみ定義され，何らかの別の領域では多価になり得る．これらの問題は重要であり，この話題に関する文献として，私は興味のある読者に [109] と，そこに含まれる出典を紹介する．他方で空間的な面の強調は，それらの Cauchy 問題との関係よりも，我々の前相対論的な思考の習慣に関係しているかもしれないと私は考える．量子論の構成の観点からは，これらの問題はおそらく後回しにできる．必要ならば，3 次元の面が空間的であるという要求は，運動量 E に対する制約として課すことができる．

実験　Hamilton 関数 $S[A]$ があからさまに分かっていると仮定せよ．我々はどのように理論を経験と比較できるか？ 答は単純である．閉じた 3 次元の面 σ 上における 3 次元の場 A と E を測定すれば良い．理論は我々の測定できる場 (A,E) が，式 (4.36) と (4.37) を満たすものだけであることを予言する．したがって理論はどの 3 次元の場が測定でき，どの場が測定できないかを決定する．他方でこれは，これらの場に依存する他のあらゆる量に対する制約 (すなわち予言) を決定する．

第 1 に，予言は時空の有限領域を対象としているという意味で局所的である．観測に全時空あるいは全空間を必要とする観測量は現実的でない．

第 2 に，そして最も重要だが：面 σ はどこに位置しているのか？ どの面 σ を我々は考えねばならないのか？ 驚くべき答：それは問題ではない．これは GR の解釈の重要な点であって，詳しく理解せねばならない．

具体的な実験の状況を考えよ．例えば粒子の加速器における散乱の実験，あるいは (電磁的または重力的な) 波の伝播と受信を考えよ．非相対論的な状況，例えば Minkowski 空間上では，我々は状況を以下のように見

[*97] 式 (5.180) も同様である．式 (3.90–91),(5.70) における指数の符号は正しい．Hamilton–Jacobi 方程式は S の符号の反転に対して不変ではないから，指数 $\mathrm{e}^{\pm\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S}$ の符号の一方のみ (正号) が正しいはずである．

なせる．時空における何らかの既知の位置にある，何らかの数の物体と検出器がある．我々は初期の，あるいは入射するデータを測定する．我々は終わりの，あるいは射出するデータを測定する．さらに，我々は (例えば不要な入来する放射を禁じる) 空間的な境界値を指定する．場の始・終および境界の値は，コンパクトな 3 次元の面 σ 上の場の値で表される．これらのデータは，しかしながら，理論的予言を行うのに充分ではない：我々は時空における σ の位置もまた知る必要がある．考えを確定するために，例えば σ を Minkowski 空間における円筒としよう．例えば円筒の高さは，実験の始まりと終わりの間の時間経過である．

物体，器具，および検出器の位置の重要な側面は，それらの相対的な距離と時間経過だけであることに注意せよ．それ故，σ の位置の重要な側面は，面とその内部での距離 (metric) の値だけである．実際，実験の幾何学が同一に留まる仕方で面 (すなわち，実験全体) を移動させれば，得られる結果は変わらないと期待される．内部の幾何学は (Minkowski では) σ の幾何学によって規定されるため，実際に知る必要があるのは σ の幾何学だけである．放出と検出の間の相対的な距離と時間経過を決定するのは，この幾何学である．このように，前相対論的な状況において必要な完全なデータは：

(i) σ 上の力学的な場の値；および
(ii) σ の幾何学.

ここで相対論的な状況を考えよう．上と同じデータが必要であるが，今や σ の幾何学は σ 上の力学的な場の値によって決定される，と言うのも，幾何学は重力場によって決定されるからである！ したがって必要なデータは

(i) σ 上の力学的な場の値

であって，それ以外にはない！

座標多様体における σ の“位置”は重要でない，と言うのも，それは時空の座標付けの任意の選択を反映しているに過ぎないからである．言い換えれば，検出器の間の距離と時間経過はまさに，σ 上の境界データ (A, E) の一部である．例えば，もし σ が円筒ならば，初めと終わりの測定間の時間経過はまさに，円筒の垂直な (時間的な) 側面上の重力場の値にコードされている．より長い時間の後に何が起きるかを問うことは，円筒の側面上のより大きな値 E に対して何が起きるかを問うという意味に他ならない．

4.2 Euclid 的 GR と実接続

4.2.1 Euclid 的 GR

本節では GR とは異なるものの，量子重力において重要な役割を演じる場の理論を説明する．それはしばしば“Euclid 的 GR (euclidean GR)”と呼ばれる．通常の物理的 GR はこのとき，その Euclid 的 GR との区別を強調するために，“Lorentz 的 (lorentzian)”と形容される．Euclid 的 GR は，内部空間の添字 $I, J, \cdots$ が Minkowski 計量 η_{IJ} の代わりに，Euclid 的な計量 δ_{IJ} で上げ下げされるという違いだけを除けば，GR と同じ方程式，例えば作用 (2.13) で定義できる．対応して，Euclid 的スピン接続 ω は $SO(3,1)$ 接続ではなく，$SO(4)$ 接続である．

式 (2.19) のように自己双対接続 A を定義することは依然として便利であるものの，適切な自己双対射影子 P はここでは虚数の因子を除いて定義される，すなわち

$$A^i = \omega^i + \omega^{0i}. \tag{4.39}$$

それ故 Euclid 的な場合には，自己双対接続 A は**実**である．虚数因子がないことは，式 (4.25) の代わりに直ちに Poisson 括弧

$$\{A_a^i(\vec{\tau}), E_j^b(\vec{\tau}')\} = (8\pi G)\delta_a^b \delta_j^i \delta^3(\vec{\tau}, \vec{\tau}') \tag{4.40}$$

を与える．

Lorentz 的および Euclid 的な場合の間には重要な違いがある．Euclid 的な場合には，接続は $so(4)$ 代数に属している．この代数は $so(4) = so(3) \oplus so(3)$ のように分解する．実接続 (4.39) は 2 成分の 1 つに過ぎない．したがって式 (4.39) は ω の情報の**半分**を持つ．

Lorentz 的な場合には，対照的に，Lorentz 代数 $so(3,1)$ は全く分解しない．しかしながら，その複素化 $so(3,1;C)$ は $so(3,1;C) = so(3;C) \oplus so(3;C)$ のように分解する．実の ω は互いに複素共役である 2 つの複素成分を定め，各々の成分は ω 自身と同じ情報を含んでいる．この場合，実際，接続 (2.19) は 3 つの複素成分を持ち，それは ω の 6 つの実成分と正確に**同じ**情報である．

著しいことに，Euclid 的な理論に対する正準形式は Lorentz 的な理論のそれと完全に並行している．

理論は (ゲージ (4.21) において) 実数条件 (4.1) が

$$E^{ai} - \overline{E^{ai}} = 0, \qquad A_a^i - \overline{A_a^i} = 0 \tag{4.41}$$

で置き換えられるという違いだけを除けば，同じ Hamilton–Jacobi 方程式 (4.2)–(4.4) で定義される．

世界は Euclid 的 GR によってではなく，**Lorentz** 的 GR によって記述される．それならばいったい何故，**Euclid** 的 GR は有用なのか？ 何故なら，重力の物理的量子論の探求において，いくつかの仕方で Euclid 的 GR は役割を演じるからである．これらは本書の第 II 部でより詳しく議論するものの，ここでこれらの理由をいくらか先取りしておくことは適切である．

第 1 に，量子重力の主要な困難は，非自明で一般共変な場の量子論を定式化する方法を理解することである．Euclid 的 GR は Lorentz 的 GR よりも簡単な，非自明で一般共変な場の理論の例である，と言うのも，実数条件がより簡単だからである．したがって，Euclid 的な量子 GR の完全で整合的な定式化はまだ重力の量子論ではないものの，おそらくそれに向けた大いなる一歩である．Euclid 的 GR は真の理論の高度に非自明なモデルである．

第 2 に，平坦な空間の場の量子論が，物理的で Lorentz 的なバージョンと密接に関係していることは良く知られている．一般的な (wide) 仮定の下で，物理的な n 点関数は Euclid 的な理論におけるそれの解析接続 (analytical continuation) であることを証明できる．素朴には，複素平面において単純に時間座標を Wick 回転できる．より正確には，公理的な場の量子論 (axiomatic quantum field theory) による信頼できる定理から，非常に一般的な仮定の下で，Wightman (ワイトマン) 分布は実際に Euclid 的な過程 (Schwinger 関数) のモーメントの解析接続であることが保証される．Euclid 的な場の量子論を定義することはそれ故，物理的な理論を定義することと等価である．同じことが量子重力においてもなお成り立つと素朴に仮定することはできない．考えることのできる Wick 回転が存在せず (観測可能な振幅にとって座標 t は何ら重要でないことを思い出すこと！)，我々は公理的なアプローチの仮定から疎外されている．したがって平坦な空間で行ったように，Euclid 的な場の量子論を定義して満足し，怠惰にも整合的な物理的理論が得られると確信することはできない．

それでも，平坦な空間において存在する Euclid 的および Lorentz 的な理論の間の密接な関係は，Euclid 的および Lorentz 的な量子 GR の間に何らかの関係がありそうであることを強く示唆している．特に Stephen Hawking は，物理的な量子重力が Euclid 的な理論の量子化を用いて，直接的に定義できるかもしれないという仮説を探求した．それには多様な示唆がある．第 1 に，Euclid 的な理論の形式的な汎関数経路積分が Lorentz 的な理論に対しても Wheeler–DeWitt 方程式の解になる．第 2 に，無限の Euclid 時間を伝播することによって，量子論における真空を得る標準的な手法がある；このアイデアの重力への適用は Jim Hartle と Stephen Hawking を，量子重力的な“真空”は虚時間における伝播から，あるいは等価的に，Euclid 的な量子論から得られるというアイデアへと導いた．

最後に，次節で示すように，Lorentz 的な理論は Euclid 的な理論と同じ運動学を持つ定式化を許容する．したがって 2 つの理論の運動学的な特徴は同じであり，それ故，物理的な理論の運動学的な側面は Euclid 的な文脈において研究できると期待することは理に適っている．

4.2.2 実接続を伴う Lorentz 的 GR

Lorentz 的な GR に戻ろう．この文脈において，式 (4.39) と全く同様に量

$$A^i = \omega^i + \omega^{0i} \tag{4.42}$$

を定義する．この量は (Euclid 的な場合に接続として変換するように) 局所 Lorentz 変換の下で接続として変換しないものの，それはなお良く定義された場である．ゲージ (4.21) を固定すれば，このとき簡縮された局所内部ゲージ不変性は $SO(3)$ であり，式 (4.42) で定義される A は $SO(3)$ 変換の下で接続として変換する．この理由により，それは Lorentz 的な理論の“実接続 (real connection)”と呼ばれる．

驚くべきことに，実接続，より正確には，その境界面への 3 次元的な制限を，正準座標として採ることができる．Lorentz 的 GR は，言い換えれば，実 $SO(3)$ 接続を用いて表現できる．実数条件は自明である．Euclid 的な理論との唯一の違いは，式 (4.4) に比べてより複雑な今一つの項を獲得した，ハミルトニアンの形

$$H = (F^{ij}_{ab} + 2K^i_{[a}K^j_{b]})E^a_i E^b_j \tag{4.43}$$

であり，ここに $K^i_a = A^i_a - \Gamma^i_a[E]$ である．(例えば [20] を見よ．) 接続 (4.42) とハミルトニアン (4.43) は，本章の最初に説明したものに代わる，GR に対する第 2 の Hamilton 形式の定式化を与える．

4.2.3 Barbero 接続と Immirzi パラメータ

最後に，Lorentz 的 GR の第 3 の可能な定式化がある．それは接続

$$A^i = \omega^i + \gamma\omega^{0i} \tag{4.44}$$

の利用にあり，ここに γ は任意の複素パラメータである．これは Barbero 接続と呼ばれる：それは Holst 作用 (2.1.1 節を見よ) の利用から自然に出てくる．$\gamma = \mathrm{i}$ の場合は自己双対接続を与える．γ が実のとき，それは Immirzi パラメータと呼ばれる．この場合，実数条件はやはり自明であり (すなわち，$\overline{A} = A$)，ハミルトニアンは式 (4.43) の少しの修正 ([20] を見よ)

$$H = (F^{ij}_{ab} + (\gamma^2 + 1)K^i_{[a}K^j_{b]})E^a_i E^b_j \tag{4.43}$$

である［文献 [415, p.95] の式 (7.12) に対応］．我々はこの定式化を量子論で用いる．

γ は，E との消えない Poisson 括弧を持つ項である，項 ω^{0i} をスケールするので，Barbero 接続と電場の間の Poisson 括弧が

$$\{A^i_a(\vec{x}), E^b_j(\vec{y})\} = (8\pi\gamma G)\,\delta^b_a\delta^i_j\delta^3(\vec{x},\vec{y}) \tag{4.46}$$

であることを理解するのは容易である．γ が任意であるという事実は重要である，と言うのも，これから見るように，γ の異なる値から出発して得られる量子論は**異なる**物理的予言を導くからである．すなわち，純粋な重力において γ は古典論に影響しないものの，量子論に影響する．(極小的に (minimally) 結合するフェルミオンの存在下では，γ は運動方程式に現れる [128]．) おそらく，パラメータの存在は理論の 1 パラメータ量子化の曖昧さ (one-parameter quantization ambiguity) を反映している：γ は例えば QCD の θ-真空 (θ-vacua) における θ パラメータのような，古典論には存在しない量子論のパラメータである［文献 [416, p.65] を見よ］．実際，γ はちょうど QCD における θ パラメータのように，作用に加えられるトポロジカルな項の前の定数としても導入できる．そのような項は古典的な運動方程式に影響しないものの，量子論に影響する．

第 8 章で見るように，γ は量子論のいくつかの重要な予言に入ってくる．特に，それはブラックホール・エントロピーの計算に入る．ブラックホール・エントロピーを熱力学的に決定されるものと比べ，次いで γ を決定する．第 8 章でスケッチする，この路線に沿う計算は，値

$$\gamma \approx 0.2375 \tag{4.47}$$

を提示する．［文献 [415, § 10.1.3] にも (不親切ながら) 短い説明がある.］γ は裸および繰り込まれた Newton 定数の間の関係を決定するかもしれないということも，繰り返し提案されている．とは言え，このパラメータの物理的解釈はまだはっきりしない．

4.3 *Hamilton 形式の GR

ここで 3.3.2 節で説明した路線に沿って，有限次元の配位空間における正準形式の GR の定式化を与える．

4.3.1 バージョン 1：実 $SO(3,1)$ 接続

T を，場 e と ω が値をとる空間とする．これは座標 $(e^I_\mu, \omega^{IJ}_\mu)$ を持つ $(16+24)$ 次元の空間である［反対称な添字の組 I,J は ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 通り］．$\Sigma = M \times T$ を，座標 $(x^\mu, e^I_\mu, \omega^{IJ}_\mu)$ を持つ $(4+16+24)$ 次元の空間とする．この空間上で定義される 4 形式

$$\theta = \epsilon_{IJKL} e^I_\mu e^J_\nu \mathrm{D}\omega^{KL}_\rho \wedge \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho \tag{4.48}$$

を考えよ．ここに，共変微分 D は

$$\mathrm{D}\omega^{KL}_\rho = \mathrm{d}\omega^{KL}_\rho + \omega^K_{\sigma I}\omega^{IL}_\rho \mathrm{d}x^\sigma \tag{4.49}$$

によって定義される．［以上，2.1.1 節との整合性を本稿次節で確認する.］この構造は以下のように GR を定義する．Σ における 4 次元の面 $\tilde{\gamma}$ を考えよ．3.3.2 節より，軌道［と言うと結論を先取りしてしまうので，正確には曲線］への 4 重接ベクトル X が 5 形式 $\omega = \mathrm{d}\theta$ の核である，すなわち

$$\mathrm{d}\theta(X) = 0 \tag{4.50}$$

であるならば，$\tilde{\gamma}$ は ω の軌道であると言うことを思い出そう．ω の軌道は Einstein 方程式の解である．x を $\tilde{\gamma}$ 上の座標に用いれば，そのとき $\tilde{\gamma}$ は

$$\tilde{\gamma} = (x^\mu, e^I_\mu(x), \omega^{IJ}_\mu(x)) \tag{4.51}$$

によって表される．もし $\tilde{\gamma}$ が ω の軌道ならば，関数 $e^I_\mu(x), \omega^{IJ}_\mu(x)$ は Einstein 方程式の解となる．証明は 3.3.2 節でスカラー場の例に対してスケッチした路線に沿う，直接的な計算である．

4.3.1 節について

■正準形式 (4.48) について　共変微分 (4.49):

$$\mathrm{D}\omega^{KL}_\rho = \mathcal{R}^{KL}_{\sigma\rho}\mathrm{d}x^\sigma, \qquad \mathcal{R}^{KL}_{\sigma\rho} \equiv \partial_\sigma\omega^{KL}_\rho + \omega^K_{\sigma I}\omega^{IL}_\rho$$

の成分は反対称部分をとると，本稿で見出した $R^{KL}_{\sigma\rho}$ の式 (2.8′) に一致することが見て取れる．すなわち

$$\mathcal{R}^{KL}_{[\sigma\rho]} = R^{KL}_{\sigma\rho}.$$

共変微分 (4.49) は 1 形式であるのに対し，式 (2.8) の ω^{KL} は 2 形式であることにも注意する．このとき式 (4.48) は

$$\begin{aligned}\theta &= -\epsilon_{IJKL}e^I_\mu e^J_\nu \mathcal{R}^{KL}_{\rho\sigma}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma \\ &= -\epsilon_{IJKL}e^I_\mu e^J_\nu R^{KL}_{\rho\sigma}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma \qquad (\text{対称部分 } \mathcal{R}^{KL}_{(\rho\sigma)} \text{は寄与しない}) \\ &= -\epsilon_{IJKL}e^I \wedge e^J \wedge R^{KL}\end{aligned}$$

と書き換えられる．これはつまらない係数の違いを除けば，作用 (2.12) の第 1 項の因子に一致しているので，正準形式の表式として適正である．

4.3.2 バージョン 2：複素 $SO(3)$ 接続

A^i_μ を複素量，e^I_μ を実として，座標 $(x^\mu, A^i_\mu, e^I_\mu)$ を持つ空間 Σ を考えよ．内部 i 添字を持つ全ての量に

$$\mathrm{D}v^i = \mathrm{d}v^i + \epsilon^i_{jk} A^j_\mu v^k \mathrm{d}x^\mu \tag{4.52}$$

のように作用するゲージ共変微分；そして

$$\mathrm{D}A^i_\mu = \mathrm{d}A^i_\mu + \epsilon^i_{jk} A^j_\nu A^k_\mu \mathrm{d}x^\nu \tag{4.53}$$

を定義する．GR は 4 形式

$$\theta = P_{IJi} e^I \wedge e^J \wedge \mathrm{D}A^i \tag{4.54}$$

によって定義され［2.1.1 節との整合性を本稿次節で確認］，ここに P^i_{IJ} は式 (2.17) で定義される自己双対射影子である［P_{iIJ} と P_{IJi} の表記揺れがある］．実際，$\omega = \mathrm{d}\theta$ の軌道 $(x^\mu, A^i_\mu(x^\mu), e^I_\mu(x^\mu))$ は，

$$e^I \wedge (\mathrm{d}e_J + P_{JKi} A^i \wedge e^K) = 0, \tag{4.55}$$
$$P_{IJi} e^I \wedge F^i = 0 \tag{4.56}$$

の形の Einstein 方程式を満たし［特に第 2 式 (4.56) は式 (2.21) に一致[*98]］，ここに F^i は A^i の曲率である．計算は直接的である．

4.3.2 節について

■正準形式 (4.54) について　正準形式 (4.48) と同様に理解できる．すなわち共変微分 (4.53):

$$\mathrm{D}A^i_\mu = \mathcal{F}^i_{\nu\mu} \mathrm{d}x^\nu, \qquad \mathcal{F}^i_{\nu\mu} \equiv \partial_\nu A^i_\mu + \epsilon^i{}_{jk} A^j_\nu A^k_\mu$$

の成分の反対称部分

$$\mathcal{F}^i_{[\nu\mu]} = \frac{1}{2}(\partial_\nu A^i_\mu - \partial_\mu A^i_\nu) + \epsilon^i{}_{jk} A^j_\nu A^k_\mu$$

は，ここでも A の非線形項の数係数に疑義があるものの，2.1.1 節と式 (4.6) で定義した曲率 (の半分) $F^i_{\nu\mu}/2$ に一致する．また再び共変微分 (4.53) は 1 形式であるのに対し，曲率 $F^i = \frac{1}{2} F^i_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$ は 2 形式であることにも注意する．その上で式 (4.54) における $\mathrm{D}A^i$ は

$$\mathrm{D}A^i \equiv \mathrm{D}A^i_\mu \wedge \mathrm{d}x^\mu = \mathcal{F}^i_{\nu\mu} \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu = \mathcal{F}^i_{[\nu\mu]} \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu = \frac{1}{2} F^i_{\nu\mu} \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu = F^i$$

で定義されると解する (教科書の式 (4.59) 直後の定義式と整合)．このとき式 (4.54) は，つまらない係数の違いを除けば，作用 (2.22) の第 1 項の因子

$$P_{IJi} e^I \wedge e^J \wedge F^i$$

に一致するので，正準形式の表式として適正である．

[*98] 教科書の式 (4.56) における e^I の前の余計な外積記号 $\wedge$ を消して訂正した．第 1 式 (4.55) はもう 1 つの運動方程式 (2.21) の形を含んでいる．

4.3.3 配位空間とハミルトニアン

上記では準シンプレクティック (Σ,θ) 系として正準 GR を直接定義した．これは配位空間とハミルトニアンから，すなわち 3.3.2 節で説明した $(\mathcal{C},H)$ 形式から，以下のように導くことができる．

座標 (x^μ, A^i_μ) を持つ有限次元の空間 $\tilde{\mathcal{C}}$ を考えよ．ここに，A^i_μ は複素行列である．直ちに式 (3.146) を仮定すると，対応する空間 Ω は座標 $(x^\mu, A^i_\mu, \pi, p^{\mu\nu}_i)$ を持ち，正準 4 形式

$$\tilde{\theta} = \pi \mathrm{d}^4x + p^{\mu\nu}_i \mathrm{d}A^i_\nu \wedge \mathrm{d}^3x_\mu \tag{4.57}$$

を担う．D を用いると，正準形式 (4.57) は

$$\tilde{\theta} = p\mathrm{d}^4x + p^{\mu\nu}_i \mathrm{D}A^i_\nu \wedge \mathrm{d}^3x_\mu \tag{4.58}$$

となり，ここに $p = \pi - p^{\mu\nu}_i A^j_\nu A^k_\mu \epsilon^i_{jk}$ である．［教科書の式 (4.58) で $\mathrm{D}A^i_\mu \wedge \mathrm{d}^3x_\nu \to \mathrm{D}A^i_\nu \wedge \mathrm{d}^3x_\mu$ と修正した．本稿次節で補足する．］また，Ω 上で

$$E^i_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\delta^{ij}p^{\rho\sigma}_j \tag{4.59}$$

および［微分］形式 $A^i = A^i_\mu \mathrm{d}x^\mu, \mathrm{D}A^i = \mathrm{d}A^i_\mu \wedge \mathrm{d}x^\mu + A^j_\nu A^k_\mu \epsilon^i_{jk}\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu$［前節の考察に引き続き $\mathrm{D}A^i_\mu \wedge \mathrm{d}x^\mu$ と見て第 2 項の $\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\nu$ を修正した］，$E^i = E^i_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$，等々を定義する．

GR は Hamilton 系

$$\begin{aligned} p =&0, && (4.60)\\ p^{\mu\nu}_i + p^{\nu\mu}_i =&0, && (4.61)\\ \bar{E}^i \wedge E^j =&0, && (4.62)\\ \left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right) E^i \wedge E^j =&0 && (4.63) \end{aligned}$$

によって定義される［これらは原理にあたる］．

重要なポイントは，$I=0,1,2,3$ として，$E^i_{\mu\nu}$ が $e^I_\mu e^J_\nu$ の自己双対部分となるような，実の 4×4 行列 e^I_μ が存在することを，拘束 (4.62),(4.63) が示唆していることである．実際，式 (4.62) と (4.63) が

$$E^i = P^i_{IJ} e^I \wedge e^J \tag{4.64}$$

を解に持つことを確認することは容易であり［本稿次節で確認］，自由度の勘定はこれが唯一の解であることを示唆する．それ故，拘束面 Σ 上で座標 $(x^\mu, A^i_\mu, e^I_\mu)$ を用いることができ (ここに A^i_μ は複素量であり e^I_μ は実である)，誘導された正準 4 形式は式 (4.54) である［本稿次節で確認］．このようにして，上記の (Σ,θ) 構造を復元する．

4.3.3 節について

■正準形式 (4.57) の式 (4.58) への書き換え

$$p^{\mu\nu}_i \mathrm{d}A^i_\nu \wedge \mathrm{d}^3x_\mu = p^{\mu\nu}_i(\mathrm{D}A^i_\nu - \epsilon^i{}_{jk}A^j_\rho A^k_\nu \mathrm{d}x^\rho)\wedge \mathrm{d}^3x_\mu$$

において

$$\mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}^3x_\mu = \mathrm{d}x^\rho \wedge \left(\frac{1}{3!}\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\mathrm{d}x^\alpha \wedge \mathrm{d}x^\beta \wedge \mathrm{d}x^\gamma\right) = \frac{1}{3!}\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\epsilon^{\rho\alpha\beta\gamma}\mathrm{d}^4x = -\delta^\rho_\mu \mathrm{d}^4x$$

なので，$\mathrm{d}A^i_\nu$ を $\mathrm{D}A^i_\nu$ に置き換えたときに現れるおつりの項は

$$-p_i^{\mu\nu}A^j_\rho A^k_\nu \epsilon^i{}_{jk}\mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}^3x_\mu = -p_i^{\mu\nu}A^j_\nu A^k_\mu \epsilon^i{}_{jk}\mathrm{d}^4x$$

となる (ダミー添字 j,k を入れ替えた)．これが d^4x の係数 p における付加的な寄与を成す．

■式 (4.64) の E^i が拘束 (4.62–63) を満たすことの確認　式 (4.64):

$$E^i = P^i_{IJ}e^I \wedge e^J = E^i_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu, \qquad E^i_{\mu\nu} \equiv P^i_{IJ}e^I_\mu e^J_\nu = -E^i_{\nu\mu}$$

は Plebanski 形式 (2.23):$\Sigma^i = P^i_{IJ}e^I \wedge e^J$ に他ならず，またこれは $E^i_{\mu\nu}$ が $e^I_\mu e^J_\nu$ の自己双対部分であることを意味している．

他方で拘束 (4.62–63):

$$\bar{E}^i \wedge E^j = 0, \qquad E_k \wedge E_l - \frac{1}{3}\delta_{kl}E_i \wedge E^i = 0$$

は Plebanski 拘束 (2.26) に他ならず，Plebanski 形式 $E^i = \Sigma^i$ がこれらを満たすことは確認済みである．

■正準形式 (4.58) から式 (4.54) の復元　正準形式 (4.58) の第 1 項は式 (4.60):$p = 0$ により消える．

次に式 (4.59) を $p^i_{\mu\nu}$ について逆に解くと，

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F^i_{\mu\nu} = \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\delta^{ij}p_j^{\rho\sigma} = -2\delta^{ij}(p_j^{\alpha\beta} - p_j^{\beta\alpha}) = -4\delta^{ij}p_j^{\alpha\beta}, \qquad \therefore p_i^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}E_{i\rho\sigma}$$

となる．ただし $p^i_{\mu\nu}$ の反対称性 (4.61) を考慮した．なお定義式 (4.59) には $p^i_{\mu\nu}$ の反対称部分しか寄与しないことを踏まえれば，反対称性 (4.61) は理に適っていると言える．

さらに準備として，恒等式

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} = -\begin{vmatrix} \delta^\nu_\alpha & \delta^\nu_\beta & \delta^\nu_\gamma \\ \delta^\rho_\alpha & \delta^\rho_\beta & \delta^\rho_\gamma \\ \delta^\sigma_\alpha & \delta^\sigma_\beta & \delta^\sigma_\gamma \end{vmatrix}$$

を用いて，α,β,γ に関する縮約を正直に計算すると

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{d}^3x_\mu = \frac{1}{3!}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\mathrm{d}x^\alpha \wedge \mathrm{d}x^\beta \wedge \mathrm{d}x^\gamma = \cdots = -\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma$$

が見出される．

以上と式 (4.64):$E^i_{\rho\sigma} \equiv P^i_{IJ}e^I_\rho e^J_\sigma$ より，正準形式 (4.58) において生き残る第 2 項は

$$\begin{aligned} p_i^{\mu\nu}\mathrm{D}A^i_\nu \wedge \mathrm{d}^3x_\mu &= \left(-\frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left(P_{IJi}e^I_\rho e^J_\sigma\right)\right)\mathrm{D}A^i_\nu \wedge \mathrm{d}^3x_\mu = \frac{1}{4}P_{IJi}e^I_\rho e^J_\sigma \mathrm{D}A^i_\nu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma \\ &= \frac{1}{4}P_{IJi}e^I \wedge e^J \wedge \mathrm{D}A^i \qquad (\because \mathrm{D}A^i \equiv \mathrm{D}A^i_\nu \wedge \mathrm{d}x^\nu) \end{aligned}$$

と書き換えられる．最右辺は数係数 1/4 の違いを除いて，正準形式 (4.54) に一致している[*99]．

[*99] 最右辺から数係数 1/4 を除くには，単にあらかじめ定義式 (4.59) の右辺に，係数 1/4 を含めておけば良い．

4.3.4 Hamilton–Jacobi 形式の導出

α を $\tilde{\mathcal{C}}$ における 3 次元の面とする．すると $\alpha = [x^\mu(\vec{\tau}), A^i_\mu(\vec{\tau})]$ であり，ここに $\vec{\tau} = (\tau^1, \tau^2, \tau^3) = (\tau^a)$．式 (3.167) のように汎関数

$$S[\alpha] = \int_{\tilde{\gamma}} \theta \tag{4.65}$$

を定義する．すなわち，$\tilde{\gamma}$ は $\mathrm{d}\theta$ の軌道である Σ における 4 次元の面，したがって場の方程式の解であり，その境界の $\tilde{\mathcal{C}}$ への射影が α となるものである．定義 (4.54) より，

$$\frac{\delta S[\alpha]}{\delta A^i_\mu(\vec{\tau})} = P_{iIJ}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} e^I_\rho(\vec{\tau}) e^J_\sigma(\vec{\tau}) n_\nu(\vec{\tau}) \tag{4.66}$$

であり［本稿次節で確認[*100]］，ここで n_ν は式 (3.180) において定義される．この方程式より直ちに

$$n_\mu(\vec{\tau}) \frac{\delta S[\alpha]}{\delta A^i_\mu(\vec{\tau})} = 0 \tag{4.67}$$

が得られるので［μ, ν に関して対称な因子と反対称な因子の縮約となって消える］，$S[\alpha]$ の $A^i_\mu(\vec{\tau})$ 依存性は 3 次元の面 α_M への $A^i(\vec{\tau})$ の制限を通じてのみ，すなわち，成分

$$A^i_a(\vec{\tau}) = \partial_a x^\mu(\vec{\tau}) A^i_\mu(\vec{\tau}) \tag{4.68}$$

を通じてのみであることが帰結する［本稿次節で補足］．すると $S[\alpha] = S[x^\mu(\vec{\tau}), A^i_a(\vec{\tau})]$ であり，また

$$\frac{\delta S[\alpha]}{\delta A^i_a(\vec{\tau})} = P_{iJK}\epsilon^{a\nu bc} \partial_b x^\rho(\vec{\tau}) \partial_c x^\sigma(\vec{\tau}) e^J_\rho(\vec{\tau}) e^K_\sigma(\vec{\tau}) n_\nu(\vec{\tau}) \equiv E^a_i(\vec{\tau}). \tag{4.69}$$

［この段階で $\vec{\tau} = \vec{x}$ と選べば，$\partial_b x^\rho = \delta^\rho_b$ より式 (4.66) との等価性が明白となる.］したがって E^a_i は接続 A^i_a の運動量共役である．［ここで係数 $8\pi \mathrm{i} G$ が現れないのは，作用 (2.22) 全体に掛かる係数が正準形式 (4.54) を用いた作用 (4.56) において省略されているためである.］E^a_i は式 (2.23) で定義される Plebanski 2 形式 $\Sigma^i = \Sigma^i_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$ の，境界面 σ への制限の対偶 (双対 ; dual) であることに注意せよ．［そのことは簡略化した式 (4.70) において見やすい.］簡単のために境界面は $x^0 = 0$ で与えられ $\vec{x}(\vec{\tau}) = \vec{\tau}$ によって座標付けされ，またゲージ $e^0_b(\vec{\tau}) = 0$ を選んだと仮定せよ．このとき $n_\mu = (1, 0, 0, 0)$ であり，また

$$E^{ai} = \epsilon^{abc} \Sigma^i_{bc}. \qquad \text{［定義式 (4.20) を再現］} \tag{4.70}$$

その実部は密度化した (densitized［スカラー密度 $\det(e) = \sqrt{\det(q)}$ を掛けた］) 逆トライアド

$$\mathrm{Re}\, E^a_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon^{abc} e^j_b e^k_c = \det(e)\, e^a_i \tag{4.71}$$

であり［中辺で負号を係数 1/2 に訂正した (本稿次節)］，ここに e^a_i は“トライアド”1 形式［の成分］e^i_a と逆の行列である．その虚部は

$$\mathrm{Im}\, E^a_i = \epsilon^{abc} e^0_b e^i_c. \tag{4.72}$$

［最右辺で $e^i_b e^0_c \to e^0_b e^i_c$ と訂正した[*101]．以上のゲージ条件 $e^0_b(\vec{\tau}) = 0$ と式 (4.70–72) について，本稿次節でまとめて補足する.］

---

*100 上式 (4.66) では $e^J_\rho e^I_\sigma \to e^I_\rho e^J_\sigma$ と改めた (式全体の符号が反転)．この措置は後の式 (4.69) とも整合する．

*101 したがって式全体の符号が反転する．後の式 (4.87) では誤りが修正されている．

σ 上の場の方程式 (4.56) の射影は，E_i^a を用いて書くと，$\mathrm{D}_a E_i^a = 0$, $F_{ab}^i E^{ai} = 0$ および $F_{ab}^i E^{ai} E^{bk} \epsilon_{ijk} = 0$ となり［本稿次節で補足］，ここに D_a と F_{ab}^i は A_a^i の共変微分と曲率である．式 (4.69) を用いると，これらは GR の Hamilton–Jacobi 方程式

$$\mathrm{D}_a \frac{\delta S[\alpha]}{\delta A_a^i(\vec{\tau})} = 0, \tag{4.73}$$

$$\frac{\delta S[\alpha]}{\delta A_a^i(\vec{\tau})} F_{ab}^i(\vec{\tau}) = 0, \tag{4.74}$$

$$F_{ab}^{ij}(\vec{\tau}) \frac{\delta S[\alpha]}{\delta A_a^i(\vec{\tau})} \frac{\delta S[\alpha]}{\delta A_b^j(\vec{\tau})} = 0 \tag{4.75}$$

を与える．

運動学的なゲージ　方程式 (4.73) は，単に $S[\alpha]$ は 3 次元面上の $SU(2)$ ゲージ変換の下で不変であると述べることで，得ることもできた．関数 $f^i(\vec{\tau})$ によって生成されるそのような 1 つの変換の下で，接続の変分は $\delta_f A_a^i = \mathrm{D}_a f^i$ である［式 (4.12) の第 1 式］．それ故，S は

$$\begin{aligned} 0 = \delta_f S = \int \mathrm{d}^3\vec{\tau}\, \delta_f A_a^i(\vec{\tau}) \frac{\delta S[\alpha]}{\delta A_a^i(\vec{\tau})} &= \int \mathrm{d}^3\vec{\tau}\, \mathrm{D}_a f^i(\vec{\tau}) \frac{\delta S[\alpha]}{\delta A_a^i(\vec{\tau})} \\ &= -\int \mathrm{d}^3\vec{\tau}\, f^i(\vec{\tau})\, \mathrm{D}_a \frac{\delta S[\alpha]}{\delta A_a^i(\vec{\tau})} \end{aligned} \tag{4.76}$$

を満たす［最後の等号は式 (4.10) にて確認済み］．次に，作用は 3 次元の面 α_M 上における座標の変化の下で不変である．関数 $f^a(\vec{\tau})$ によって生成されるそのような 1 つの変換の下で，接続の変分は $\delta_f A_a^i = f^b \partial_b A_a^i + A_b^i \partial_a f^b$ である［式 (4.12) のノートで言及した Lie 微分］．式 (4.76) のように部分積分すると，このことは

$$\partial_b A_a^i \frac{\delta S[\alpha]}{\delta A_a^i(\vec{\tau})} + (\partial_b A_a^i) \frac{\delta S[\alpha]}{\delta A_a^i(\vec{\tau})} = 0 \tag{4.77}$$

を与え，これは式 (4.73) と組合せると，式 (4.74) を与える［本稿次節で補足］．このように［式 (4.13) の箇所でも述べたように］，式 (4.73) と (4.74) は単に $S[\alpha]$ が，3 次元面上の内部ゲージと座標の変更の下で不変であるという要求である．3 つの方程式 (4.73),(4.74) および (4.75) が S の $A_a^i(\vec{\tau})$ に対する依存性を支配する．

座標を落とすこと　S が $x^\mu(\vec{\tau})$ から独立であることを理解するのは容易である．面に接する座標 $x^\mu(\vec{\tau})$ の変化は，用いている座標と独立な作用［式 (4.65)］に影響し得ない．より形式的には，パラメータ $\vec{\tau}$ の変化の下での不変性は

$$\frac{\delta S[\alpha]}{\delta x^\mu(\vec{\tau})} \partial_j x^\mu(\vec{\tau}) = \frac{\delta S[\alpha]}{\delta A_a^i(\vec{\tau})} \delta_j A_a^i(\vec{\tau}) \tag{4.78}$$

を意味し［スカラー場の式 (3.188) を $S[x^\mu(\vec{\tau}), A_a^i(\vec{\tau})]$ に応用］，我々は既に右辺が消えることを見ている．面に垂直な $x^\mu(\vec{\tau})$ の変化の下での S の変分は，Hamilton–Jacobu 方程式そのもの，方程式 (3.186) によって支配される．今の場合，スカラー場に対するのと同じ手順を踏むと，

$$\frac{\delta S[\alpha]}{\delta x^\mu(\vec{\tau})} n_\mu(\vec{\tau}) + \epsilon_{ijk} F_{ab}^i \frac{\delta S[\alpha]}{\delta A_a^j(\vec{\tau})} \frac{\delta S[\alpha]}{\delta A_b^k(\vec{\tau})} = 0 \tag{4.79}$$

が得られる．ところが第 2 項は式 (4.75) により消える．それ故 $S[\alpha]$ は $x^\mu(\vec{\tau})$ の正接だけでなく法線部分からも独立である：S は $[A_a^i(\vec{\tau})]$ にのみ依存する．

すると拡大配位空間からも時空座標 x^μ を落とせる．より小さい拡大配位空間 $\mathcal{C}$ を，変数 A_a^i の 9 次元の複素空間として定義する．幾何学的には，これは線形写像 $A: D \to sl(2;C)$ の空間と見なすことができ，ここに $D = R^3$ は“向き (direction) の空間”であり，我々は $sl(2;C)$ 代数において複素自己双対規定を選んだことになる．ここで空間 $\mathcal{G}$ を，$\mathcal{C}$ において成分 $[A_a^i(\vec{\tau})]$ を持ち境界を持たない，パラメトライズされた 3 次元の面 A の空間に同定する．GR はこの空間上で Hamilton–Jacobi 系

$$\mathrm{D}_a \frac{\delta S[A]}{\delta A_a^i(\vec{\tau})} = 0, \tag{4.80}$$

$$\frac{\delta S[A]}{\delta A_a^i(\vec{\tau})} F_{ab}^i(\vec{\tau}) = 0, \tag{4.81}$$

$$F_{ab}^{ij}(\vec{\tau}) \frac{\delta S[A]}{\delta A_a^i(\vec{\tau})} \frac{\delta S[A]}{\delta A_b^j(\vec{\tau})} = 0 \tag{4.82}$$

によって定義される．これらは我々がその上に量子論を基礎付けるところの，本章の初めに提示した方程式［式 (4.8–9)］である．

等価的に，ゲージおよび 3 次元・微分同相写像 $(A_a{}^i(\vec{\tau}) = \frac{\partial \tau'^b}{\partial \tau^a} A'_b{}^i(\vec{\tau}'(\vec{\tau})))$ の変換の下での，3 次元 $SU(2)$ 接続 A の同値類の空間 $\mathcal{G}_0$ を定義することにより，直ちに式 (4.80) と (4.81) を解くことができる．［定義より $\mathcal{G}_0$ の要素 A は自動的に式 (4.80–81) を満たす.］このとき GR は (関数 $S[A_a^i(\vec{\tau})]$ が $\mathcal{G}_0$ を過剰に座標付けする) この空間上で，単一の方程式 (4.82) によって定義される．対応して GR を，拡大配位空間 $\mathcal{G}_0$ と相対論的ハミルトニアン

$$H(\vec{\tau}) = F_{ab}^{ij}(\vec{\tau}) E_i^a(\vec{\tau}) E_j^b(\vec{\tau}) \tag{4.83}$$

によって定義される力学系と解釈できる．

4.3.4 節について

■$\delta S/\delta A_\mu^i$ の式 (4.66) の確認　3.3.4 節で行ったように，Hamilton 関数 (4.65) を

$$\begin{aligned} S &= \int P_{iIJ} e^I \wedge e^J \wedge (\mathrm{D}A_\rho^i \wedge \mathrm{d}x^\rho) = \int P_{iIJ} e_\mu^I e_\nu^J \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge (\mathrm{d}A_\rho^i + \epsilon^i{}_{jk} A_\sigma^j A_\rho^k \mathrm{d}x^\sigma) \wedge \mathrm{d}x^\rho \\ &= \int P_{iIJ} e_\mu^I e_\nu^J \frac{\partial(A_\rho^i, x^\mu, x^\nu, x^\rho)}{\partial(\tau^0, \tau^1, \tau^2, \tau^3)} \mathrm{d}^4\tau - \int P_{iIJ} e_\mu^I e_\nu^J \epsilon^i{}_{jk} A_\sigma^j A_\rho^k \frac{\partial(x^\mu, x^\nu, x^\rho, x^\sigma)}{\partial(\tau^0, \tau^1, \tau^2, \tau^3)} \mathrm{d}^4\tau \end{aligned} \tag{22}$$

と書き，場 A_μ^i に関する変分をとる．最右辺の第 1 項は，行列式の変分が

$$\delta \frac{\partial(A_\rho^i, x^\mu, x^\nu, x^\rho)}{\partial(\tau^0, \tau^1, \tau^2, \tau^3)} = (-\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}) \frac{\partial}{\partial \tau^\alpha} \delta A_\rho^i \cdot \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau^\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau^\gamma} \frac{\partial x^\rho}{\partial \tau^\sigma}$$

と表されるので，部分積分により境界 $\tau^0 = \mathrm{const}$ の項

$$\int P_{iIJ} e_\mu^I e_\nu^J \left\{ (-\epsilon^{0ijk}) \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau^j} \frac{\partial x^\rho}{\partial \tau^k} \right\} \delta A_\rho^i \mathrm{d}^3\tau \tag{23}$$

を生じる．ここで $\partial_i \equiv \partial/\partial\tau^i$ として，$\{\cdots\}$ の因子は式 (3.180):

$$n_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_1 x^\nu)(\partial_2 x^\rho)(\partial_3 x^\sigma) = \frac{1}{3!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_i x^\nu)(\partial_j x^\rho)(\partial_k x^\sigma) \epsilon^{ijk}$$

(以下では最右辺が便利) に対偶 (dual) なテンソル

$$\begin{aligned}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}n_\sigma =&\frac{1}{3!}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\sigma\alpha\beta\gamma}(\partial_i x^\alpha)(\partial_j x^\beta)(\partial_k x^\gamma)\epsilon^{ijk} = \frac{1}{3!}\begin{vmatrix}\delta^\mu_\alpha & \delta^\mu_\beta & \delta^\mu_\gamma\\ \delta^\nu_\alpha & \delta^\nu_\beta & \delta^\nu_\gamma\\ \delta^\rho_\alpha & \delta^\rho_\beta & \delta^\rho_\gamma\end{vmatrix}(\partial_i x^\alpha)(\partial_j x^\beta)(\partial_k x^\gamma)\epsilon^{ijk}\\ =&\cdots = (\partial_i x^\mu)(\partial_j x^\nu)(\partial_k x^\rho)\epsilon^{ijk}\end{aligned}$$

である．また作用 (22) の第 2 項の変分は境界項を生じない．以上より境界積分 (23) における δA^i_ρ の係数を汎関数微分

$$\frac{\delta S}{\delta A^i_\rho} = P_{iIJ}e^I_\mu e^J_\nu \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}n_\sigma = P_{iIJ}\epsilon^{\rho\sigma\mu\nu}e^I_\mu e^J_\nu n_\sigma : (4.66)$$

に同定できる．

■$S[\alpha]$ の $A^i_\mu(\vec{\tau})$ 依存性 (式 (4.68) の箇所) について　3.3.4 節の運動量の分解 $p^\mu = p^i\partial_i x^\mu + pn^\mu$ にならい，2 つの成分 $A^i \equiv A^i_\mu n^\mu$ と $A^i_a \equiv$ (式 (4.68)) を用いて

$$A^i_\mu = A^i_a\partial_a x^\mu + A^i n_\mu$$

と書こう．すると境界値 A^i_μ の変分に伴う $S[\alpha]$ の変化は，直交性 (4.67) の下では

$$\delta S = \int \frac{\delta S}{\delta A^i_\mu}\delta A^i_\mu \mathrm{d}^3\tau = \int \frac{\delta S}{\delta A^i_\mu}\delta A^i_a \cdot \partial_a x^\mu \mathrm{d}^3\tau$$

となるので，実質 A^i_a の変化しか寄与しない．

■ゲージ条件 $e^0_b(\vec{\tau}) = 0$ と式 (4.70–72) について　パラメータの選択 $\vec{\tau} = \vec{x}$ の下で $\partial_b x^\rho = \delta^\rho_b$ であり，また境界面 $x^0 = 0$ に対して $n_\mu = (1, \vec{0})$ となる．このとき E^a_i の式 (4.69) は

$$E^a_i = P_{iJK}\epsilon^{a\nu bc}e^J_b e^K_c n_\nu = \epsilon^{abc}P_{iJK}e^J_b e^K_c = \epsilon^{abc}\Sigma^i_{bc} : (4.70) \qquad (\because \epsilon^{abc} = -\epsilon^{0abc})$$

と書き換えられる．等価的にもとの式 (4.66) から出発して $n_\nu = \delta^0_\nu$ を代入すれば，2 度手間を回避できる．さて，射影子の定義式 (2.17) より上式は

$$E^a_i = P_{iJK}\epsilon^{abc}e^J_b e^K_c = 2P_{i,0j}\epsilon^{abc}e^0_b e^j_c + P_{i,jk}\epsilon^{abc}e^j_b e^k_c = \mathrm{i}\,\epsilon^{abc}e^0_b e_{ci} + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon^{abc}e^j_b e^k_c$$

を意味する．最右辺の実部と虚部をそれぞれ順に，式 (4.71),(4.72) に同定できる．式 (4.71) の最右辺への書き換えは，式 (4.22)⇒ 式 (4.26) において確認済みである．

ここまでは，教科書 p.160，l.2 のゲージ条件 $e^0_b(\vec{\tau}) = 0$ を全く仮定していないことに注意しよう．式 (4.27) の確認時に見たように，このゲージの下では E^a_i は式 (4.22) で与えられる．実際，このことは式 (4.71–72) からも改めて見て取れる．

ゲージ条件 $e^0_b(\vec{\tau}) = 0$ はすぐ後で，場の方程式 (4.56) から拘束系 (4.74) を導く際に用いることになる．

■場の方程式 (4.56) から拘束系の導出 (式 (4.73–75) の直前)　場の方程式 (4.56):

$$0 = P_{iIJ}e^I \wedge F^i = P_{iIJ}e^I_\mu F^i_{\nu\rho}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho$$

における係数 $P_{iIJ}e^I_\mu F^i_{\nu\rho}$ はフリーな添字 J を持ち，射影子の定義式 (2.17) より

$$\begin{aligned}J = 0 \text{ に対して}\qquad & P_{i,0j}e^j_\mu F^i_{\nu\rho} = -\frac{\mathrm{i}}{2}e_{\mu i}F^i_{\nu\rho},\\ J = j(\neq 0) \text{ に対して}\qquad & P_{i,0j}e^0_\mu F^i_{\nu\rho} + P_{i,jk}e^k_\mu F^i_{\nu\rho} = \frac{\mathrm{i}}{2}e^0_\mu F_{j\nu\rho} - \frac{1}{2}e^k_\mu(\epsilon_{ijk}F^i_{\nu\rho})\end{aligned}$$

となるので，独立な式

$$e_{\mu i}F^i_{\nu\rho}\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu\wedge\mathrm{d}x^\rho=0,\qquad \left(\mathrm{i}\,e^0_\mu F_{j\nu\rho}-e^k_\mu(\epsilon_{ijk}F^i_{\nu\rho})\right)\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu\wedge\mathrm{d}x^\rho=0$$

が得られる．ここでこれらを境界 $x^0=0,\vec{x}(\vec{\tau})=\vec{\tau}$ 上で積分することを念頭に，

$$\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu\wedge\mathrm{d}x^\rho\ \to\ \frac{\partial(x^\mu,x^\nu,x^\rho)}{\partial(\tau^1,\tau^2,\tau^3)}\mathrm{d}^3\tau$$

と置き換える．このとき μ,ν,ρ のいずれかがゼロであるとすると，行列式はある行にゼロが並ぶことになって消えるので，$(\mu,\nu,\rho)=(a,b,c)$ に限定できる．さらに乗数として試験関数 λ,λ_j を導入すると，不鮮明化形式では

$$\int\left\{\lambda e_{ai}F^i_{bc}+\lambda_j\left(\mathrm{i}\,e^0_a F^j_{bc}-e^k_a(\epsilon_{ijk}F^i_{bc})\right)\right\}\epsilon^{abc}\mathrm{d}^3\tau=0$$

と書ける．

第 1 項は式 (4.27) 第 4 項の導出時に見たように

$$e_{ai}F^i_{bc}=\frac{1}{\det e}E^b_jE^c_kF^{jk}_{bc}$$

と書き換えられ，再び $\det e$ は乗数 λ に吸収できる．次に第 2 項に対してゲージ条件 $e^0_a=0$ を適用しよう．このとき生き残る項は，式 (4.27) 第 3 項の導出と同様の計算により，

$$e^k_a(\epsilon_{ijk}F^i_{bc})\epsilon^{abc}=\frac{E^{cj}}{\det e}E^{bi}F_{ibc}$$

と書き換えられる．乗数 $\lambda_j\sim e_{0j}$ を仮定して，ここでも係数 $E^{cj}/\det e=e^{cj}$ との縮約で λ^c を定義すると，結局

$$\int\left(\lambda E^b_jE^c_kF^{jk}_{bc}+\lambda^cE^{bi}F_{ibc}\right)\mathrm{d}^3\tau=0.$$

乗数 λ,λ^c は独立なので，2 つの拘束量 $E^b_jE^c_kF^{jk}_{bc}=0,E^{bi}F_{ibc}=0$ を得る．

残りの拘束量 $\mathrm{D}_aE^a_i=0$ はもう 1 本の運動方程式 (4.55) から得られると想像される．

■式 (4.77) と，それが式 (4.74) を含意することについて $E^a_i=\delta S/\delta A^i_a$ とおいた上で，式 (4.12) のノートに書いた $\mathcal{C}[f]$ の式 (19) を逆にたどれば良い．すると接続の変分 $\delta_fA^i_a=f^b\partial_bA^i_a+A^i_b\partial_af^b$ に伴う作用の変化は

$$\begin{aligned}0=\delta S&=\int\mathrm{d}^3\tau\frac{\delta S}{\delta A^i_a}(f^b\partial_bA^i_a+A^i_b\partial_af^b)\\&=\int\mathrm{d}^3\tau f^b\left\{(\partial_bA^i_a)\frac{\delta S}{\delta A^i_a}-\partial_a\left(A^i_b\frac{\delta S}{\delta A^i_a}\right)\right\}\qquad(\text{部分積分した})\\&=\cdots=-\int\mathrm{d}^3\tau f^b\left(\frac{\delta S}{\delta A^i_a}F^i_{ab}+A^i_b\mathrm{D}_a\frac{\delta S}{\delta A^i_a}\right)\end{aligned}$$

となるので，式 (4.77) の左辺は上式 2 行目の $\{\cdots\}$ 内のように修正しなければならないと考えられる．いずれにせよ上式の最右辺より，式 (4.73):$\mathrm{D}_a\frac{\delta S}{\delta A^i_a}=0$ の下では式 (4.74):$\frac{\delta S}{\delta A^i_a}F^i_{ab}=0$ が導かれることに変わりはない．

4.3.5 実数条件

上記で説明した GR の正準形式をその上に基礎付けたところの 2 つの変数は，複素 3 次元接続 A^i_a とその複素共役運動量 E^{ai} である．それらはそれぞれ 9 個の複素成分を持つ．他方で，GR の自由度は $(9+9)$ 個の実成分を持ち，そのうち $(2+2)$ 個は物理的な自由度であり，7 個は拘束され，7 個はゲージである．成分の明白な重複の説明は，A と E が 1 次元系の相空間上の座標 $z=x+\mathrm{i}p$ と $\bar{z}=x+\mathrm{i}p$ のようであるというものである．すなわち，それらは互いに独立でない．

これらの関係を見出すために，A と E の実部と虚部を書こう．それらの定義より，

$$\mathrm{Re}\,A^i_a = \omega^i_a, \qquad (4.84) \qquad\qquad \mathrm{Re}\,E^a_i = \det(e)\,e^a_i, \qquad (4.86)$$

$$\mathrm{Im}\,A^i_a = \omega^{0i}_a, \qquad (4.85) \qquad\qquad \mathrm{Im}\,E^a_i = \epsilon^{abc} e^0_b e_{ic} \qquad (4.87)$$

を得る［式 (2.20),(4.71–72)］．我々は $e^0_a=0$ となるゲージを選んだ．このとき式 (4.87) は E が実であることを意味する．テトラードと接続 ω は方程式 $\mathrm{d}e^I = \omega^I{}_J \wedge e^J$ で関係していることを思い出そう．［式 (2.6) より正確には以降，右辺を逆符号に修正する．これが A と E は独立でないことに対応している．］この方程式を 3 次元の面に射影すると，

$$\mathrm{d}e^i = \omega^i_j \wedge e^j + \omega^i_0 \wedge e^0 \qquad (4.88)$$

を得る．選んだゲージでは，最後の項は消え ω^i_j はトライアド e^i のスピン接続となる．このため，式 (4.84) は A の実部が式 (4.1) を満たすことを意味する．ゲージ固定 $e^0_a=0$ がなければ，実数条件はもう少し扱いにくくなる．

——

文献ノート

GR の Hamilton 形式は Peter Bergmann と彼のグループ [129] によって，また Dirac [130] によって独立に開発された．両者の長期的な目標は量子重力だった．その主要な道具である，拘束系の Hamilton 形式の理論が，この目的のために開発された．Hamilton 形式の多大な代数的な複雑さは，Arnowitt，Deser および Misner による ADM 変数の導入 [131] によって，次いで Ashtekar によって体系化された自己双対接続変数 [132] によって劇的に簡単になった．

基礎方程式 (4.2–4.4) の Lagrange 形式からの伝統的な導出は多くの本と論文に見出される；例えば，[2, 9, 20, 126] を見よ．原論文 [132] も見よ．量子論で重要な役割を演じる，ハミルトニアンの表現 (4.16) は，Thomas Thiemann によって導入された [133]．Barbero 接続の有用性は [134] において指摘された；その幾何学的な解釈については [136] を見よ．量子論にとっての Immirzi パラメータの重要性は， [135] において指摘された．Immirzi パラメータとその物理的解釈に関する (結論の出ない) 議論は [137] にある．

有限次元の定式化については，ここでは [138, 139] にならった．この定式化の別のバージョンについては，[140] を見よ．GR の共変な Hamilton–Jacobi 形式については， [141] も見よ．

第 5 章　量子力学

量子力学 (QM) は単なるミクロな物体の理論ではない：それは我々の現在の運動の基礎理論である．それは古典力学よりも深い自然の理解を表している．ちょうど古典力学のように，QM の伝統的な定式化は状態と観測量の時間における発展を記述する．ちょうど古典力学のように，これは一般相対論的な系を扱うのに充分ではない，と言うのも，それらの系は時間における発展を表さないからである；それらは観測量の間の相関を表す．したがって伝統的なものよりも，いくらかより一般的な QM の定式化——あるいは前の章で議論した相対論的な古典力学の量子論版——が必要である．本章ではそのような定式化の可能性を論じる．［本書独特の相対論/非相対論の呼び分けは量子論の文脈にも持ち込まれる (節の見出し等).］最後の節では，QM の一般的な物理的解釈を論じる．

QM は複数の概ね等価な形式に定式化できる：正準 (Hilbert 空間と自己共役［Hermite］演算子)，共変 (Feynman の経歴にわたる和)，代数的 (algebraic；観測量の抽象代数上の線形関数としての状態)，その他．一般に，ただし常にではないが，我々はこれらの形式を互いに翻訳できるものの，しばしばある定式化において容易なことは他の定式化では難しい．一般相対論的な経歴にわたる和の形式は Jim Hartle [26] によって開発された．ここでは私は正準形式に集中する，と言うのも正準形式は，量子重力の数学的機構をあからさまに構成するのに必要な，数学的な完全性と正確さを提供してきたからである．後で代わりとなる形式を考える．

5.1　非相対論的 QM

伝統的な QM は以下のように定式化できる．

状態　系の状態は複素可分 (separable) Hilbert 空間 $\mathcal{H}_0$ におけるベクトル ψ で表現される．

観測量　各々の観測可能量 $\mathcal{A}$ は $\mathcal{H}_0$ 上の自己随伴演算子 A で表現される．

確率　ψ で表される多くの等しい状態上で，$\mathcal{A}$ がとる値の平均は $\overline{a} = \langle\psi|A|\psi\rangle \,/\, \langle\psi|\psi\rangle$ である［分母は確率の規格化因子[*102]］．

射影　もし観測量 $\mathcal{A}$ がスペクトル区間 I の値をとるならば，P_I を区間 I へのスペクトル射影子として，状態 ψ は状態 $P_I\psi$ になる．

発展　状態は Schrödinger 方程式

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t\psi(t) = H_0\psi(t) \tag{5.1}$$

に従って時間において発展し，ここに H_0 はエネルギーに対応するハミルトニアン演算子である．等価的に，状態が時間において発展するのではなく観測量が発展し，その発展は Heisenberg 方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t) = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[A(t), H_0] \tag{5.2}$$

に支配される．

与えられた量子系は，Hilbert 空間 $\mathcal{H}_0$ 上で定義された，H_0 を含む演算子たち A_i の族 (一般には代数) で定義される．

自然を記述するこの体系は Newton 的なそれと本質的に異なる．以下は上記の体系の物理的内容の主な特徴である．

確率　予言は確率的にすぎない．

---

*102 規格化条件 $1 = \langle\psi'|\psi'\rangle = |N|^2\,\langle\psi|\psi\rangle$ を満たす規格化された状態 $|\psi'\rangle = N\,|\psi\rangle$ を用いると，期待値は

$$\overline{a} = \langle\psi'|A|\psi'\rangle = |N|^2\,\langle\psi|A|\psi\rangle = \frac{\langle\psi|A|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}.$$

量子化　特定の離散的な値だけをとり得る (“量子化”された) 物理量がある．

重合せの原理　もし物理量 q が値 a を持つ状態 A と，q が値 b を持つ状態 B を系がとれるならば，系は q が確率 $|c_a|^2$ で値 a を持ち確率 $|c_b|^2$ で値 b を持つ状態 ($|c_a|^2+|c_b|^2=1$ として $\psi=c_aA+c_bB$ で表される) もとれる．

不確定性原理　同時に値を決めることのできない (共役な) 変数の組がある．

観測の予言への影響　ある時刻 t_2 に系が持つと我々が期待する性質は，系が時刻 t_0 に持っていたことを我々が知っている性質だけでなく，$t_0<t_1<t_2$ として，系が時刻 t_1 に持つことを我々が知っている性質によっても決定される[*103]．

5.6 節では，QM の物理的内容をより詳細に議論する．

一般に量子系 $(\mathcal{H}_0, A_i, H_0)$ は，Planck 定数よりも大きなスケールと正確さで系に対して行われる観測の結果を記述する力学系である，古典的極限を持つ．古典的極限では，Heisenberg の不確定性は無視することができ，観測量 A_i は可換な (commutative) 相空間 Γ_0 の座標に採れる．量子力学的な交換子は古典的な Poisson 括弧を定義し，式 (5.2) は Hamilton 方程式 (3.78) に帰着する．

もし古典的極限が分かっていれば，そこからこの極限が得られるような量子系の探求は**量子化**問題と呼ばれる．量子化問題が一意的な解を持つ理由はない．異なる解の存在は“量子化の曖昧さ (quantization ambiguity)”と表現される．与えられた古典系の最も単純な量子化が非常にしばしば，物理的に正しい量子化であることを経験は示している．座標 q^i を持つ非相対論的な配位空間 $\mathcal{C}_0$ と非相対論的なハミルトニアン $H_0(q^i,p_i)$ によって定義される古典系が与えられたならば，量子化問題の解は Hamilton–Jacobi 方程式 (3.17) を，量子ダイナミクスを支配する波動関数 (5.1) のアイコナール近似と解釈することによって得られる [142]．これは Hilbert 空間 $\mathcal{H}_0=L_2[\mathcal{C}_0]$，非相対論的な配位空間上の 2 乗可積分関数 (square integrable functions) の空間上で，乗法的な演算子 q^i，微分演算子 $p_i=-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial q^i}$ およびハミルトニアン演算子

$$H_0=H_0\left(q^i,-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial q^i}\right) \tag{5.3}$$

を定義することによって達成される [143]．

特殊相対論的な文脈ではこの構造は変わらないものの，上記を前提とする**発展**は，$\mathcal{H}_0$ が Poincaré 群のユニタリー表現を担い，H_0 がこの表現の時間並進の生成子になるという要求へと拡張される．

この構造は一般に相対論的でない．とりわけ，上記で用いた“状態”と“観測量”の概念は**非相対論的な**ものである．QM の構造は相対論的な枠組みへと拡張できるか？ 5.2 節では，そのような拡張を論じる．準備段階として，しかしながら，本節の残りでは——古典力学に対して行ったように——非常に単純な系の文脈において，この再定式化に必要ないくつかの道具を導入および説明する．

5.1.1　伝播関数と時空状態

非相対論的な定式化　振り子の量子論は波動関数 $\psi_0(\alpha)$ の Hilbert 空間 $\mathcal{H}_0=L_2[R]$ 上で，乗法的な位置演算子 α，運動量演算子 $p_\alpha=-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial\alpha}$ およびハミルトニアン

$$H_0=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{m\omega^2}{2}\alpha^2 \tag{5.4}$$

[*103] Bohr はこの事実を，観測は観測される系に影響すると言い表した．しかし Bohm のような，あるいは整合的な歴史はこの物理的事実を，より注意深い言葉遣いで表現することを強いる．

を用いて書ける．

より正確には，理論は**艤装** (*rigged*) Hilbert 空間，あるいは Gelfand (ゲルファント) の 3 つ組 (triple) の上で定義される．Gelfand の 3 つ組 $\mathcal{S} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{S}'$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$，$\mathcal{H}$ において稠密で (dense) 弱位相 (weak topology) を備えた適当な部分集合 $\mathcal{S}$，および自然な同一視 (identifications) を持つ $\mathcal{S}$ の双対 $\mathcal{S}'$ から成る．［量子重力の文脈における具体的な定義は 6.2 節 p.229 の脚注にある．］測度 $\mathrm{d}x$ を持つ多様体 M は艤装 Hilbert 空間 $\mathcal{S}_M \subset \mathcal{H}_M \subset \mathcal{S}'_M$ を決定し，ここに $\mathcal{S}_M$ は素早く減少する M 上の滑らかな関数の空間 (Schwarz 空間)，$\mathcal{H}_M = L_2[M, \mathrm{d}x]$，そして $\mathcal{S}'_M$ は M 上の緩増加超関数 (tempered distributions) の空間である．この設定により特に，連続的なスペクトルを持つ観測量の固有状態と Fourier 変換を扱うことが可能になる．

式 (5.2) の解となる演算子

$$\alpha(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH_0}\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0} \tag{5.5}$$

(ここでは $\hbar = 1$) は，あらゆる時刻 t における位置を与える，Heisenberg の位置演算子である．演算子 $\alpha(t)$ の固有値 α を持つ一般化された固有状態 (それらは $\mathcal{S}'$ に属する) を $|\alpha; t\rangle$ で表し

$$\alpha(t)\,|\alpha; t\rangle = \alpha\,|\alpha; t\rangle\,, \tag{5.6}$$

また $|\alpha\rangle = |\alpha; 0\rangle$ と書く．明らかに $|\alpha; t\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH_0}\,|\alpha; 0\rangle$［基底は状態と逆に発展することに注意 [421, pp.116–119]］．与えられた状態 $|\psi\rangle$ に対して，Schrödinger の波動関数

$$\psi(\alpha, t) = \langle\alpha; t|\psi\rangle = \langle\alpha|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0}|\psi\rangle \tag{5.7}$$

は Schrödinger 方程式 (5.1) を満たす．逆に，Schrödinger 方程式の各々の解は，$t = 0$ に制約されると，$\mathcal{H}_0$ における状態を定義する．それ故，固定された時刻の状態 $\psi_0(\alpha)$ と Schrödinger 方程式の解 $\psi(\alpha, t)$ の間には，1 対 1 の対応がある．私は Schrödinger 方程式の解の空間を $\mathcal{H}$ と呼ぶ．たった今言及した同一視のため，$\mathcal{H}$ は固定された時刻の状態の Hilbert 空間 $\mathcal{H}_0$ と同型な Hilbert 空間である．私は

$$R_0: \qquad \mathcal{H} \to \mathcal{H}_0 \tag{5.8}$$

$$\psi(\alpha, t) \mapsto \psi_0(\alpha) = \psi(\alpha, 0) \tag{5.9}$$

を同一視写像と呼ぶ．$\mathcal{H}$ と $\mathcal{H}_0$ の関係は第 3 章で説明した，古典力学における空間 Γ と Γ_0 の関係とアナロガスである．

伝播関数は

$$\begin{aligned} W(\alpha, t, \alpha', t') &= \langle\alpha; t|\alpha'; t'\rangle = \langle\alpha|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-t')H_0}|\alpha'\rangle \\ &= \sum_n H_n(\alpha)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n(t-t')}\overline{H_n(\alpha')} \end{aligned} \tag{5.10}$$

で定義され，ここに $H_n(\alpha)$［$\equiv \langle\alpha|n\rangle$］は H_0 の固有値 E_n を持つ固有状態である．あからさまには，多くの本に見られる直接的な計算により

$$W(\alpha, t, \alpha', t') = \sqrt{\frac{m\omega}{ih\sin[\omega(t-t')]}}\;\mathrm{e}^{\dfrac{\mathrm{i}\omega m}{2\hbar}\left[\dfrac{(\alpha^2 + \alpha'^2)\cos[\omega(t-t')] - 2\alpha\alpha'}{\sin[\omega(t-t')]}\right]} \tag{5.11}$$

が与えられ［文献 [421, 式 (2.5.18)] のノートで導出済み[*104]］，ここに $h = 2\pi\hbar$ である．伝播関数は変数 (α, t) に関する Schrödinger 方程式 (および変数 (α', t') に関する共役な方程式) を満たす．

[*104] 上式 (5.11) の指数分母で $\sin^2 \to \sin$ と訂正した．式 (5.11) の指数は符号を訂正した式 (3.34) の Hamilton 関数 S に対して，$\mathrm{e}^{+\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S}$ となっている．

時空状態　以下の状態を考えると便利である．コンパクト台を持つ複素関数 (compact support complex function) $f(\alpha,t)$ が与えられたとき，状態

$$|f\rangle = \int \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}t\, f(\alpha,t)\,|\alpha;t\rangle \tag{5.12}$$

は $\mathcal{H}_0$ に属し，関数 $f(\alpha,t)$ の“時空不鮮明化状態 (spacetime smeared state)”，あるいは単に“時空状態 (spacetime state)”と呼ばれる．標準的な規格化可能な状態は無次元であり ($\langle\psi|\psi\rangle = 1$ が意味を成すためには)，状態 $|\alpha;t\rangle$ は次元 $L^{-1/2}$ を持つので［波動関数と同じ ($\int \mathrm{d}\alpha\,|\,\langle\alpha|\psi\rangle\,|^2 = 1$ による)］，関数 f は次元 $T^{-1}L^{-1/2}$ を持たねばならない［上式 (5.12) で $|f\rangle$ が無次元であることを要求］．これらの状態は $f(\alpha,t) = f(\alpha)\delta(t)$ に対する伝統的な波束を一般化する［ここで $[\delta(t)] = T^{-1}$ に注意］．伝統的な波束は空間に関して有限の解像度 (resolution) での，**瞬間的な**位置の測定結果に関係付けられると考えられる；後で説明するように，時空状態は測定器具が空間だけでなく時間に関しても有限の解像度を持つ，現実的な測定に関係付けられる．$|f\rangle$ の Schrödinger の波動関数は

$$\begin{aligned}\psi_f(\alpha,t) &= \langle\alpha;t|f\rangle\\ &= \langle\alpha;t|\int \mathrm{d}\alpha'\mathrm{d}t'\, f(\alpha',t')|\alpha';t'\rangle\\ &= \int \mathrm{d}\alpha'\mathrm{d}t'\, W(\alpha,t,\alpha',t')f(\alpha',t')\end{aligned} \tag{5.13}$$

であって，［最右辺の伝播関数と同様に］Schrödinger 方程式を満たす．2 つの時空状態のスカラー積は

$$\langle f|f'\rangle = \int \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha'\mathrm{d}t'\, \overline{f(\alpha,t)}W(\alpha,t,\alpha',t')f'(\alpha',t'). \tag{5.14}$$

特に，各時空領域 R に規格化された状態

$$|R\rangle = C_R\int_R \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}t\ |\alpha;t\rangle \tag{5.15}$$

を関係付けることができ，ここに因子

$$C_R^{-2} = \int \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha'\mathrm{d}t'\, W(\alpha,t,\alpha',t') \tag{5.16}$$

は規格化 $\langle R|R\rangle = 1$ を固定するとともに，状態に正しい次元を与える．

5.1.2　運動学的状態空間 $\mathcal{K}$ と“射影子”P

第 3 章で議論したように，振り子の運動学は 2 つの部分的観測量——時刻 t と伸長 α ——で記述される．これらは相対論的な配位空間 $\mathcal{C}$ を座標付けする．古典的な相対論的定式化は α と t を同等に扱う．量子論的な相対論的定式化もまた，α と t を同等に扱い，それ故 $\mathcal{C}$ 上の関数 $f(\alpha,t)$ に基礎を置く．

正確を期すために，$\mathcal{S}\subset\mathcal{K}\subset\mathcal{S}'$ を $\mathcal{C}$ と測度 $\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}t$ によって定義される Gelfand の 3 つ組としよう．すなわち，$\mathcal{S}$ は素早く減少する $\mathcal{C}$ 上の滑らかな関数 $f(\alpha,t)$ の空間，$\mathcal{K} = L^2[\mathcal{C},\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}t]$，そして $\mathcal{S}'$ は $\mathcal{C}$ にわたる緩増加超関数から成る．

私は $\mathcal{S}$ を“運動学的状態空間 (kinematical state space)”，またその要素 $f(\alpha,t)$ を“運動学的状態 (kinematical states)”と呼ぶ．

相対論的な定式化では，系のダイナミクスは式 (3.24) で与えられる相対論的ハミルトニアン $H(\alpha,t,p,p_t)$ によって定義される．量子ダイナミクスは“Wheeler–DeWitt”(WdW) 方程式

$$H\psi(\alpha,t)=0 \tag{5.17}$$

によって定義され［古典論の式 (3.14) に対応］，ここに

$$\begin{aligned}H=&H\left(\alpha,t,-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial\alpha},-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right) \qquad [p_t\text{はエネルギーの逆符号に相当}]\\=&-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}+H_0\\=&-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{m\omega^2}{2}\alpha^2,\end{aligned} \tag{5.18}$$

また H_0 は式 (5.4) で与えられる．振り子の場合には，式 (5.17) は Schrödinger 方程式 (5.1) に帰着するものの，式 (5.17) は Schrödinger 方程式よりも一般的である，と言うのも，一般には H は非相対論的な形 $H=p_t+H_0$ を持たないからである．この方程式の解 $\psi(\alpha,t)$ は，すぐ後で構築する予定の自然なスカラー積を担う，線形空間 $\mathcal{H}$ を成す．相対論的な量子論の重要な対象は，$\mathcal{S}'$ 上で定義される演算子

$$P=\int\mathrm{d}\tau\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau H} \tag{5.19}$$

である．この演算子は任意の関数 $f(\alpha,t)$ を WdW 方程式 (5.17) の解へと，すなわち $\mathcal{H}$ へと写像する．

これを理解するために，関数 $f(\alpha,t)$ を

$$f(\alpha,t)=\sum_n\int\frac{\mathrm{d}E}{2\pi}\,f_n(E)H_n(\alpha)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et} \tag{5.20}$$

と展開する．［α の関数 $f(\alpha,t)$ は完全系 $\{H_n(\alpha)\}$ で展開できる．次いでその展開係数 $c_n(t)$ を Fourier 展開すれば良い．式 (5.21–22),(5.28) と整合性をとるため $\mathrm{d}E\to\mathrm{d}E/2\pi$ と修正した (以下，節末まで同様)．］P をこの関数に作用させると

$$\begin{aligned}[Pf](\alpha,t)=&\int\mathrm{d}\tau\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau H}\sum_n\int\frac{\mathrm{d}E}{2\pi}\,f_n(E)H_n(\alpha)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\\=&\int\mathrm{d}\tau\sum_n\int\frac{\mathrm{d}E}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau(-E+E_n)}f_n(E)H_n(\alpha)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et} \qquad [\text{本稿次節で補足}]\\=&\sum_n\int\mathrm{d}E\,\delta(E-E_n)f_n(E)H_n(\alpha)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\\=&\sum_n\psi_nH_n(\alpha)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_nt}\end{aligned} \tag{5.21}$$

が得られ，$\psi_n=f_n(E_n)$ であり，これ［最右辺］は［Schrödinger 方程式の，したがって］式 (5.17) の一般解である．したがって P は任意の関数を WdW 方程式の解へと移す．直観的には：$P\sim\delta(H)$．［実際 $\delta(H)$ の Fourier 展開は定義式 (5.19) に比例し，また $\delta(H)$ との積は WdW 方程式 $H\psi=0$ の解を選び出すはずである．］

P の積分核は伝播関数 (5.10) である［その意味は式 (5.23) に含まれている］．実際，式 (5.20) の逆は

$$\psi_n=f_n(E_n)=\int\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}t\,\overline{H_n(\alpha)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_nt}f(\alpha,t) \tag{5.22}$$

を与える［本稿次節で確認］．これを式 (5.21) に代入すると，

$$\begin{aligned}[Pf](\alpha,t)=&\sum_n\int\mathrm{d}\alpha'\mathrm{d}t'\,\overline{H_n(\alpha')}\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_nt'}H_n(\alpha)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_nt}f(\alpha',t')\\=&\int\mathrm{d}\alpha'\mathrm{d}t'\,W(\alpha,t,\alpha',t')f(\alpha',t') \qquad [\because \text{式 (5.10)}]\end{aligned} \tag{5.23}$$

を得る．

P はしばしば，不適切にではあるが，“射影子 (the projector)” と呼ばれる．直観的には，それは WdW 方程式の解の空間上へ “射影する”．(0 が H の離散的スペクトルの固有値であるとき) P が実際に射影子となる系もある．しかし一般には，とりわけ (0 が H の連続スペクトルの固有値となる) 非相対論的な系に対しては，P はその領域が $\mathcal{S}'$ 全体より小さいので射影子ではない．特に，それは WdW 方程式の解，すなわち P の終域を含まない．P の領域は他方で，$\mathcal{S}$ を含んでいる．

P の行列要素，

$$\langle f|P|f'\rangle_{\mathcal{K}} = \int \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}t \mathrm{d}\alpha' \mathrm{d}t' \, \overline{f(\alpha,t)} W(\alpha,t,\alpha',t') f'(\alpha',t') \tag{5.24}$$

［本稿次節で補足］は $\mathcal{S}$ における退化した内積を定義する．$\mathcal{S}$ をこの内積の核で割り，すなわち，$Pf = Pf'$ ならば f と f' を同一視し［参考：準同型定理 [418, p.28]］，ノルムで完備化すると，Hilbert 空間を得る．ところが $Pf = Pf'$ ならば，f と f' は WdW 方程式の同じ解を定義する．実際，それらは上で定義した時空状態 $|f\rangle$ に対応する解を定義する．

note　勝手な関数 $f(\alpha,t) \in \mathcal{S}$ そのものは一般に WdW 方程式を満たさないものの，対応する時空状態 $|f\rangle$ の波動関数 (5.13) は Schrödinger 方程式の，したがって WdW 方程式の解である．他方で式 (5.21) の関数 $[Pf](\alpha,t)$ もまた WdW 方程式の解だということ．

したがって，この Hilbert 空間の要素は WdW 方程式の解に対応する：Hilbert 空間は WdW 方程式の解の空間 $\mathcal{H}$ と同一視できる．したがって，

$$\begin{aligned} P: \quad \mathcal{S} &\to \mathcal{H}, \\ f &\mapsto |f\rangle . \end{aligned} \tag{5.25}$$

P は解の空間 $\mathcal{H}$ に直接，Hilbert 空間の構造を備え付けることが帰結する：もし $\psi = Pf$ と $\psi' = Pf'$ が WdW 方程式 (5.17) の 2 つの解ならば，スカラー積は

$$\langle \psi|\psi'\rangle \equiv \langle f|P|f'\rangle_{\mathcal{K}} \tag{5.26}$$

によって定義され，ここに右辺は $\mathcal{K}$ におけるスカラー積であり，式 (5.24) にてあからさまに与えられている．

WdW 方程式の解空間上のスカラー積は，何ら特別な変数として t を選び出す必要なく，単に相対論的な演算子 P を用いて定義できることに注意せよ．

全ての非相対論的な系に対して，$t \in R$ として，配位空間は $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \times R$ という構造を持ち，また $\mathcal{H}$ における関数 $\psi(\alpha,t)$ は固定された t に対して，その $\mathcal{C}_0$ 上への制限 $\psi_t = R_t\psi$,

$$\psi_t(\alpha) \equiv \psi(\alpha,t) \tag{5.27}$$

によって一意的に決まる．［上式 (5.27) は変数 t を固定したパラメータへと降格させることを表す.］各 t に対して，$L_2[\mathcal{C}_0]$ 関数 $\psi_t(\alpha)$ の空間を $\mathcal{H}_t$ で表せば，$R_t : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_t$ となる．空間 $\mathcal{H}$ と $\mathcal{H}_t$ は 1 対 1 対応にある：逆写像 R_t^{-1} は方程式 (5.17) によって決定される発展である．特に，$\mathcal{H}_0$ は量子論の非相対論的な定式化において用いられる Hilbert 空間である．R_0 によって与えられる $\mathcal{H}$ と $\mathcal{H}_0$ の同一視の下で，上で定義したスカラー積はちょうど，非相対論的 Hilbert 空間における通常のスカラー積になる．

このことは式 (5.24) の右辺がちょうど式 (5.14) であることに気付けば，直接理解できる．よりあからさまには，［式 (5.21) の形］$\psi(\alpha,t) = \sum_n \psi_n H_n(\alpha) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n t}$ を $\mathcal{H}$ の解，すなわち WdW 方程式の解とする．その $t = 0$ への制限は $\psi_0(\alpha) = \sum_n \psi_n H_n(\alpha)$ で

あり，その $\mathcal{H}_0$ におけるノルムは $\|\psi_0\|^2 = \int \mathrm{d}\alpha\, |\psi_0(\alpha)|^2 = \sum_n |\psi_n|^2$ である［第 2 の等号は式 (25) による］．$Pf = \psi$ となる関数 f は，例えば，単に $f(\alpha, t) = \psi_0(\alpha)\delta(t) = \sum_n \psi_n H_n(\alpha) \int \frac{\mathrm{d}E}{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}$ である．［実際これを式 (5.20) と比較すると $f_n(E) = \psi_n$ (定数) と同定できるので，Pf の式 (5.21) の 3 行目は上記の $\psi(\alpha, t)$ を再現する．］(これは実際には $\mathcal{S}_0$ にないものの，f に収束する $\mathcal{S}_0$ における一連の関数をとることができる．ところが f は P の領域にあり，そのような措置は何ら新しいことを与えない．) ψ のノルムは

$$
\begin{aligned}
\|\psi\|^2 &= \langle f|f\rangle_{\mathcal{H}} = \langle f|P|f\rangle_{\mathcal{K}} \qquad \text{［定義式 (5.26)］} \\
&= \int \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}\alpha \int \mathrm{d}t\, \overline{f(\alpha, t)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau H} f(\alpha, t) \qquad \text{［式 (5.24) に式 (5.23) を代入した関係］} \\
&= \int \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}\alpha \int \mathrm{d}t \sum_n \overline{\psi_n}\, \overline{H_n(\alpha)} \int \frac{\mathrm{d}E}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}Et} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau H} \sum_m \psi_m H_m(\alpha) \int \frac{\mathrm{d}E'}{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E't} \qquad \text{［上記の } f(\alpha, t) \text{ を代入］} \\
&= \sum_n \int \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}t \int \frac{\mathrm{d}E}{2\pi} \int \frac{\mathrm{d}E'}{2\pi} |\psi_n|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}Et} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\tau(E'-E_n)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E't} \qquad \text{［} \because \text{ 式 (24), (25)，第 2 の指数の符号を修正］} \\
&= \sum_n |\psi_n|^2 = \|\psi_0\|^2.
\end{aligned} \tag{5.28}
$$

5.1.2 節について

■式 (5.21) 第 2 の等号について　$p_t = -\mathrm{i}\partial_t$ と H_0 は交換するので，

$$
\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau H} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau(-\mathrm{i}\partial_t + H_0)} = \mathrm{e}^{-\tau\partial_t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau H_0}
$$

と書ける ($H = p_t + H_0$ と H_0 の違いにも注意)．すると

$$
\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau H} \left[H_n(\alpha) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\right] = \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau H_0} H_n(\alpha)\right] \left[\mathrm{e}^{-\tau\partial_t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\right]
$$

であり，第 1 の因子は $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau H_0} H_n(\alpha) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau E_n} H_n(\alpha)$，第 2 の因子は

$$
\mathrm{e}^{-\tau\partial_t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\tau)^n}{n!} {\partial_t}^n \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\tau E)^n}{n!} \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau E} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}
$$

と計算できるので，

$$
\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau H} \left[H_n(\alpha) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\right] = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau(E_n - E)} \left[H_n(\alpha) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\right] \tag{24}
$$

を得る．

■式 (5.22) の確認

$$
\int \mathrm{d}\alpha\, \overline{H_n(\alpha)} H_m(\alpha) = \int \mathrm{d}\alpha\, \langle n|\alpha\rangle \langle \alpha|m\rangle = \delta_{nm}, \qquad \text{(規格直交性)} \tag{25}
$$

$$
\int \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_n - E)t} = 2\pi\delta(E_n - E)
$$

を用いると，$f(\alpha, t)$ の式 (5.20) より

$$
\begin{aligned}
(\text{式 (5.22) 最右辺}) &= \int \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}t\, \overline{H_n(\alpha)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}E_n t} \left(\sum_m \int \frac{\mathrm{d}E}{2\pi} f_m(E) H_m(\alpha) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et} \right) \\
&= \sum_m \int \frac{\mathrm{d}E}{2\pi} f_m(E) \left(\int \mathrm{d}\alpha\, \overline{H_n(\alpha)} H_m(\alpha) \right) \left(\int \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_n - E)t} \right) = f_n(E_n)
\end{aligned}
$$

と書き換えられる．

■行列要素 (5.24) について　時空状態 $|f\rangle$ の定義式 (5.12) より

$$\langle f|P|f'\rangle_{\mathcal{K}} = \int \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha'\mathrm{d}t' \ \langle \alpha;t|\overline{f(\alpha,t)}Pf'(\alpha',t')|\alpha';t'\rangle .$$

ここで右辺において，ケット $|\alpha';t'\rangle = P\,|\alpha',t'\rangle$:(5.39) は既に運動 $\alpha'(t')$ に対応する WdW 方程式の解なので，解空間への“射影子”P を作用させても変わらない．そこで演算子 P の関数 f' への作用のみを考慮し，あたかも P はケット $|\alpha';t'\rangle$ には作用しないかのように扱えば充分であると考えられる．これは $\langle f|P|f'\rangle_{\mathcal{K}} = \langle f|Pf'\rangle_{\mathcal{K}}$ と見なすことと等価である．その上で

$$Pf'(\alpha',t') = \int \mathrm{d}\alpha''\mathrm{d}t''\, W(\alpha',t',\alpha'',t'')f'(\alpha'',t'') : (5.23), \qquad \langle \alpha;t|\alpha';t'\rangle \equiv W(\alpha,t,\alpha',t') : (5.10)$$

を代入すると (式 (5.36),(5.38) の箇所の注意も見よ)，

$$\begin{aligned}\langle f|P|f'\rangle_{\mathcal{K}} &= \int \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha'\mathrm{d}t'\mathrm{d}\alpha''\mathrm{d}t''\ \overline{f(\alpha,t)}W(\alpha,t,\alpha',t')W(\alpha',t',\alpha'',t'')f'(\alpha'',t'') \\ &= \int \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha''\mathrm{d}t''\ \overline{f(\alpha,t)}W(\alpha,t,\alpha'',t'')f'(\alpha'',t'') : (5.24)\end{aligned}$$

を得る．

5.1.3　部分的観測量と確率

拡大配位空間における 2 つの事象 (α,t) と (α',t') を考えよ．我々は事象 (α',t') を観測したとしよう．事象 (α,t) を観測する確率はいくらか？

この確率を測定するには，α と t に対する測定器具 (measuring apparata) が必要である．一般に，それらの器具は何らかの解像度，例えば $\Delta\alpha$ と Δt を持つ．適切な問はそれ故，領域 $R = (\alpha \pm \Delta\alpha, t \pm \Delta t)$ に含まれる事象を観測する確率はいくらかである．あらゆる現実の測定デバイスあるいは検出器は，$\Delta\alpha = 0$ も $\Delta t = 0$ も持ち得ないことを述べておくことは重要である．ほとんどの QM の教科書は $\Delta\alpha > 0$ という事実ばかりを強調して，$\Delta t > 0$ という事実を完全に無視している．さて 2 つの領域 R と R' を考えよ．もし R' における検出器が振り子を検出したならば，R における検出器が振り子を検出する確率 $\mathcal{P}_{RR'}$ はいくらか？

もし領域 R と R' が問題における他のあらゆる物理量よりも極めて小さければ，摂動論の直接の適用により

$$\mathcal{P}_{RR'} = \gamma^2 |\,\langle R|R'\rangle\,|^2 \tag{5.29}$$

が示され，ここに γ^2 は検出器の能力に関係する無次元の定数である［$|R\rangle$ は式 (5.15) で定義］.（“完璧な”検出器は $\gamma = 1$ によって定義されると仮定できる．）読者は自身で計算を再現するか，それを例えば [144] に見出すことができる．あからさまに，この確率を振幅の絶対値の 2 乗 $\mathcal{P}_{RR'} = |\mathcal{A}_{RR'}|^2$ として書ける．

$$\mathcal{A}_{RR'} = \gamma \frac{\langle R|R'\rangle}{\sqrt{\langle R|R\rangle}\sqrt{\langle R'|R'\rangle}}, \tag{5.30}$$

$$\sqrt{\langle R|R'\rangle} = \int_R \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}t \int_{R'} \mathrm{d}\alpha'\mathrm{d}t'\, W(\alpha,t,\alpha',t'). \tag{5.31}$$

したがって伝播関数は遷移確率に関する全ての情報を持つ．

R は充分小さいため，波動関数 $\psi(\alpha,t) = \langle \alpha;t|R'\rangle$ は R の中で一定であり，値 $\psi(\alpha,t)$ を持つと仮定せよ．このとき振り子が R に検出される確率を

$$\mathcal{P}_R = \gamma(V_R C_R)^2|\psi(\alpha,t)|^2 \tag{5.32}$$

と書くことができ，ここに V_R は領域 R の体積である［C_R は式 (5.16)］．ここで，R はサイズ $\Delta\alpha, \Delta t$ を持つと仮定せよ．直接的な計算 ([144] を見よ) により，もし $\Delta t \ll m\Delta\alpha^2/\hbar$ ならば，$(V_R C_R)^2$ は $\Delta\alpha$ に比例することが示される；したがって，

$$\mathcal{P}_R \sim \Delta\alpha|\psi(\alpha,t)|^2. \tag{5.33}$$

よって小さな領域に対して，(i) 検出器の時間的な解像度は検出確率から抜け落ち，また (ii) 確率は検出器の空間的な解像度に比例するという，2 つの重要な結果が得られる．(i) により，検出器の時間的な解像度を忘れ，**瞬間的な**検出器という理想化された極限をとることができる．(ii) により，α における各無限小区間 $\mathrm{d}\alpha$ に，α における確率**密度**を関連付けることができる．α の全ての値を網羅する理想化された完璧な検出器が，確実に (with certainty) 検出することを要求して全体の規格化を固定すると，これは $|\psi(\alpha,t)|^2$ が瞬間的な検出器で系を (α,t) に検出する，α における確率密度であるという結果をもたらす．すなわち，式 (5.29) から波動関数の伝統的な確率解釈を復元する．

逆の極限において，$\Delta t \gg m\Delta\alpha^2/\hbar$ のとき，$(V_R C_R)^2$ は $(\Delta t)^{-1/2}$ に比例する．したがって，

$$\mathcal{P}_R \sim (\Delta t)^{-1/2}|\psi(\alpha,t)|^2 \tag{5.34}$$

であり，t における確率密度をこの検出器に関連付けられない，と言うのも，検出確率は Δt に対して線形にスケールされないからである．確率の α と t における異なる振舞いは，ダイナミクスの特定の形の帰結である．

量子論における部分的観測量　α と t は部分的観測量であることを思い出そう．［t は単なるパラメータではなく，α と同様に変数として扱える．］それらは $\mathcal{K}$ における交換する自己共役な演算子を定義する．それらは単に乗法によって作用する．それらの共通の一般化された固有状態 $|\alpha,t\rangle$ は $\mathcal{S}$ に属する．状態 $|\alpha,t\rangle$ は

$$\langle\alpha,t|P|\alpha',t'\rangle = W(\alpha,t,\alpha',t') \tag{5.35}$$

を満たす［理由は節末］．状態 $|\alpha,t\rangle$ をダイナミクスについて何も知らない“運動学的状態”と見なせる．それらは単一の量子事象に対応する．以下の式 (5.36) で与えられる，これらの状態の $\mathcal{K}$ における“運動学的”スカラー積は，単にそれらの独立性を表す；他方で式 (5.35) で与えられる，これらの状態の $\mathcal{H}$ における“物理的”スカラー積は，2 つの事象の物理的関係を表す：それは一方の事象が起きたときにもう一方が起きる確率を与える．

$|\alpha,t\rangle$ を $|\alpha;t\rangle$ と混同してはならない．1 つ目は α と t の固有状態であり，2 つ目は $\alpha(t)$ の固有状態である．それらはいずれも $\mathcal{C}$ 上の (一般化された) 関数を定義する．状態 $|\alpha,t\rangle$ は点 (α,t) におけるデルタ関数の分布

$$\langle\alpha',t'|\alpha,t\rangle = \delta(\alpha',\alpha)\delta(t',t) \tag{5.36}$$

を定める；他方で状態 $|\alpha;t\rangle$ は Schrödinger 方程式の解を定める．解は $\mathcal{C}$ 全体にわたって台 (support) を持ち，線 $t = \text{constant}$ 上で α に関するデルタ関数

$$\langle\alpha';t|\alpha;t\rangle = \delta(\alpha',\alpha) \tag{5.37}$$

になるのに対し，異なる t たちに対しては

$$\langle\alpha;t|\alpha';t'\rangle = W(\alpha,t,\alpha',t') \tag{5.38}$$

になるようなものである．2 つの間の関係は単に

$$|\alpha;t\rangle = P\,|\alpha,t\rangle\,. \tag{5.39}$$

［解 $\alpha(t)$ への“射影”として期待される．］

式 (5.38) と (5.39) は

$$W(\alpha,t,\alpha',t') = \langle\alpha,t|P^\dagger P|\alpha',t'\rangle_{\mathcal{H}} \qquad \text{［右辺にプライムを補った］} \tag{5.40}$$

を与え，これは式 (5.35) と整合している，と言うのも，$\mathcal{H}$ におけるスカラー積 (式 (5.40) では $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ で表されている) の定義は式 (5.26) だからである．［結果的に (式 (5.40)) = (式 (5.35)) は通常の射影演算子の性質 $P^\dagger P = P^2 = P$ を要求して得られる関係と同じである*105．］

5.1.3 節について

■式 (5.29),(5.32–33) について　紹介されている文献 [144] のうち，特に本文に関係する部分をいくらか補足しつつまとめる．

位置 α_0 の検出器を用いて時刻 t_0 に粒子が検出されるかを調べる．ただし以降の取り扱いでは，検出器が空間的にも時間的にも有限の解像度を持つことを考慮する．粒子が検出された (または検出されなかった) 場合の粒子の状態を $\psi_1(\alpha,t)$ (または $\psi_0(\alpha,t)$)，検出器の状態を $|1\rangle$ (または $|0\rangle$) とすると，測定は粒子と検出器の相関

$$\psi_0(\alpha,t)\otimes|0\rangle+\psi_1(\alpha,t)\otimes|1\rangle \tag{26}$$

を確立する (5.6 節の式 (5.189) の説明を見よ)．ところで測定を記述する粒子と検出器の相互作用ハミルトニアンは，遷移 $|0\rangle\to|1\rangle$ を引き起こし，なおかつ全体として自己共役な演算子とならねばならないから，

$$H_{\mathrm{int}}=\lambda V(\alpha,t)\left(|1\rangle\langle 0|+|0\rangle\langle 1|\right)$$

という形を持つ．ここに粒子に作用する (実数の) ポテンシャル $\lambda V(\alpha,t)$ は，時空位置 (α_0,t_0) の周りの小さな有限領域 R でのみゼロでない値を持ち，λ は結合定数 (摂動パラメータ) である．領域 R のサイズ V_R は検出器の解像度で決まる．粒子に作用する非摂動ハミルトニアンを $H_0(\alpha)$ として (本文の例では調和振動子のハミルトニアン)，一般的な形 (26) を持つ全体系の状態 Ψ に対して Schrödinger 方程式

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi=(H_0\otimes 1+H_{\mathrm{int}})\Psi$$

を書き下すと，粒子に対する方程式

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_0(\alpha,t)=H_0(\alpha)\psi_0(\alpha,t)+\lambda V(\alpha,t)\psi_1(\alpha,t), \tag{27}$$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_1(\alpha,t)=H_0(\alpha)\psi_1(\alpha,t)+\lambda V(\alpha,t)\psi_0(\alpha,t) \tag{28}$$

が得られる．ここで非摂動ハミルトニアン H_0 の下での伝播関数 $W(\alpha,t,\alpha',t')$ は，

$$\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H_0(\alpha)\right)W(\alpha,t,\alpha',t')=\mathrm{i}\hbar\delta(\alpha,\alpha')\delta(t,t')$$

を満たす Green 関数であることに注意すると [421, pp.149–151]，終時刻を $t_{\mathrm{f}}(\gg t_0)$ として，非斉次方程式 (28) は

$$\psi_1(\alpha,t_{\mathrm{f}})=\frac{\lambda}{\mathrm{i}\hbar}\int_R \mathrm{d}\alpha'\mathrm{d}t'\,W(\alpha,t_{\mathrm{f}},\alpha',t')V(\alpha',t')\psi_0(\alpha',t') \tag{29}$$

*105 H の Hermite 性を仮定すると，

$$P^\dagger P=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau'\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(\tau'-\tau)}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau_{\mathrm{G}}\times\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau_{\mathrm{r}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H\tau_{\mathrm{r}}}\sim P.$$

ただし“重心座標”$\tau_{\mathrm{G}}\equiv(\tau+\tau')/2$ と“相対座標”$\tau_{\mathrm{r}}\equiv\tau'-\tau$ への変数変換を行った．2 つの振り子に対しては，射影子 (5.81) は $P^\dagger P=P^2=P$ を満たし，定義式 (5.82) における τ 積分の範囲 2π は有限である．

と積分される．ここで上式 (29) の積分範囲は本来 $-\infty < \alpha', t' < \infty$ であるものの，$V(\alpha', t')$ が値を持つ領域 R に限定されることに注意した．これは不鮮明化関数 $f = V\psi_0$ による時空状態の波動関数 (5.13) の形を持つ．(したがって粒子を時空領域 R' に局在させて準備した初期状態 (時刻 t_i) も同様の形を持つ．) 上式 (29) はその導き方から，摂動論に依らずに成り立つと考えられる．他方で上式 (29) は既に λ の 1 次の量なので，最低次の近似ではその被積分関数における ψ_0 は，式 (27) に基づき非摂動ハミルトニアン H_0 の下での初期値 $\psi_0(\alpha, t_\mathrm{i})$ からの Schrödinger 発展

$$\psi_0(\alpha, t) = \int \mathrm{d}\alpha'\, W(\alpha, t, \alpha', t_\mathrm{i})\psi_0(\alpha', t_\mathrm{i})$$

で評価すれば充分である．

さて，領域 R は充分小さく，その中でポテンシャルは近似的に一定値 $V_0 \equiv V(\alpha_0, t_0)$ をとると仮定すると，粒子を検出する確率は

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_R &= \int \mathrm{d}\alpha\, |\psi_1(\alpha, t_\mathrm{f})|^2 \\ &= \frac{\lambda^2 {V_0}^2}{\hbar^2} \int \mathrm{d}\alpha \int_R \mathrm{d}\alpha' \mathrm{d}t'\, \overline{W(\alpha, t_\mathrm{f}, \alpha', t')}\, \overline{\psi_0(\alpha', t')} \int_R \mathrm{d}\alpha'' \mathrm{d}t''\, W(\alpha, t_\mathrm{f}, \alpha'', t'')\psi_0(\alpha'', t'') \\ &= \frac{\lambda^2 {V_0}^2}{\hbar^2} \int_R \mathrm{d}\alpha' \mathrm{d}t' \int_R \mathrm{d}\alpha'' \mathrm{d}t''\, \overline{\psi_0(\alpha', t')} W(\alpha', t', \alpha'', t'')\psi_0(\alpha'', t'').\end{aligned} \tag{30}$$

さらに (2 度手間ではあるが)，ψ_0 も R 内で近似的に一様として積分の外に出せば，残る積分は規格化因子 C_R^{-2} の式 (5.16) に正確に一致するので，

$$\mathcal{P}_R = \left(\frac{\lambda V_0}{\hbar C_R}\right)^2 |\psi_0(x_0)|^2 \tag{31}$$

と簡略化される (引数を $x_0 \equiv (\alpha_0, t_0)$ と略記)．

ここで波動関数 $\psi_0(\alpha, t) = \langle \alpha; t|\psi_0\rangle$ を与える Heisenberg 描像の状態 $|\psi_0\rangle$ は時間発展せず，初期状態 $|R'\rangle$ に固定されている．また上式 (31) における ψ_0 は最低次の近似では，摂動の下での状態 ψ に置き換えることができる (ただし $x_\mathrm{i} \equiv (\alpha_\mathrm{i}, t_\mathrm{i}) \in R'$ として初期値は $\psi = \psi_0(x_\mathrm{i})$)．そこで ψ の添字ゼロを省いて

$$\psi_0(\alpha, t) \ \to\ \psi(\alpha, t) = \langle \alpha; t|\psi\rangle = \langle \alpha; t|R'\rangle$$

と書くと (引数 x_0 とは無関係)，これは教科書の式 (5.32) の箇所で定義されている波動関数に一致する．さらに 2 種類の波動関数 $\langle R|\psi\rangle, \langle \alpha; t|\psi\rangle$ は，$|R\rangle$ の定義式 (5.15) より

$$\langle R|\psi\rangle = \overline{C_R} \int_R \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}t\, \psi(\alpha, t) \simeq \overline{C_R} V_R \psi(x_0) \tag{32}$$

で関係付けられることに注意すると，検出確率 (31) は

$$\mathcal{P}_R = \gamma\, |\langle R|\psi\rangle|^2, \qquad \gamma \equiv \left(\frac{\lambda V_0}{\hbar V_R |C_R|^2}\right)^2 \tag{33}$$

と書き換えられる．なお再び $|\psi\rangle \simeq |\psi_0\rangle = |R'\rangle$ に注意すると，これは (おそらく γ の定義の違いを除いて)，式 (5.29):$\mathcal{P}_{RR'} = \gamma^2 \langle R|R'\rangle$ と等価である．

以上は 1 次の摂動論を利用しているので，我々は低性能 $\gamma \ll 1$ の検出器を仮定していることになる．しかし実験的に得られた検出頻度に尺度因子 $1/\gamma$ を掛けた値を，$|\langle R|\psi\rangle|^2$ と比べることはできる．そうである以上，検出頻度が

$$\mathcal{P}_R = |\langle R|\psi\rangle|^2 \tag{34}$$

で与えられる，理想的な検出器の概念を定義できる．この検出器による検出確率は，式 (32),(34) より

$$\mathcal{P}_R = (C_R V_R)^2 |\psi(x_0)|^2$$

と書ける (ただし実の規格化定数 C_R を仮定した)．係数は単に $(C_R V_R)^2$ であって，γ (における C_R, V_R 依存性) はもはや考えなくて良い．

ここで検出器の解像度 $V_R = \varDelta\alpha\varDelta t$ に関して，瞬間的な測定の極限 $\varDelta t \ll m(\varDelta\alpha)^2/\hbar$ を考える (確かに両辺の次元は合っている)．領域 R の持続時間に比べて，空間積分を $-\infty < \alpha < \infty$ に拡張できるほど空間幅 $\varDelta\alpha$ が広いとすると，

$$\begin{aligned}
C_R^{-2} = &\int_R \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}t \int_R \mathrm{d}\alpha' \mathrm{d}t'\, W(\alpha, t, \alpha', t') \simeq \int_{\varDelta\alpha, \varDelta t} \mathrm{d}\alpha' \mathrm{d}t' \int_{\varDelta t} \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\alpha\, W(\alpha, t, \alpha', t') \\
= &\varDelta\alpha(\varDelta t)^2, \qquad (\because W(\alpha, t, \alpha', t') = 1) \\
\therefore\ \mathcal{P}_R \simeq &\frac{(\varDelta\alpha\varDelta t)^2}{\varDelta\alpha(\varDelta t)^2} |\psi(x_0)|^2 = \varDelta\alpha |\psi(x_0)|^2 : (5.33)
\end{aligned}$$

を得る．ここから $|\psi(x_0)|^2$ は確率密度を与えるという解釈が正当化される．もっとも導出過程 (30) において我々は既に $|\psi_1|^2$ を確率密度として扱っているため，これは循環論法の感がある．

逆の極限の式 (5.34) に関しては，原論文 [144] ではおそらく伝播関数 $W(\alpha, t, \alpha', t')$ の自由粒子に対する関数形を仮定して $(C_R V_R)^2$ を評価している．

5.1.4 境界状態空間 K と共変な真空 $|0\rangle$

本小節では場の理論的な文脈において重要な役割を演じるいくつかの概念を導入する．2 つの時刻 $t = 0$ と t を固定する．$\mathcal{H}_0 = L_2[R, \mathrm{d}\alpha]$ を $t = 0$ における瞬間的な量子状態 ψ_0 の空間とする．$\mathcal{H}_t \sim \mathcal{H}_0$ を t における瞬間的な状態 ψ_t の空間とする．$t = 0$ に状態 ψ_0 が測定されたとしたときに，t において状態 ψ_t を測定する確率振幅は

$$A = \langle \psi_t | \mathrm{e}^{-\mathrm{i} H_0 t} | \psi_0 \rangle \,. \tag{5.41}$$

境界状態 (の) 空間 (boundary state space)

$$\mathcal{K}_t = \mathcal{H}_t^* \otimes \mathcal{H}_0 = L_2[R^2, \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\alpha'] \tag{5.42}$$

を考えよ［$\mathcal{H}_t^*$ は終状態の双対 $\langle \psi_t |$ の空間 (1.2.3 節)]．

$$\rho_t(\psi_t \otimes \psi_0) = \langle \psi_t | \mathrm{e}^{-\mathrm{i} H_0 t} | \psi_0 \rangle \,. \tag{5.43}$$

によって定義される線形の汎関数 ρ_t は，$\mathcal{K}_t$ 上で良く定義されている．この汎関数は系に関する力学的な (dynamical) 情報の全てを捉えている．Hilbert 空間上の線形な汎関数は状態を定義する．私は ρ_t

$$\rho_t(\psi) = \langle 0_t | \psi \rangle_{\mathcal{K}_t} \qquad [\text{式 } (1.14)] \tag{5.44}$$

によって定義される状態を $|0_t\rangle$ で表し，それを境界状態空間 $\mathcal{K}_t$ における“力学的な真空 (dynamical vacuum)” 状態と呼ぶ．

note　上式 (5.44) では始状態と終状態の組 $\psi = \psi_t \otimes \psi_0$ に対応した境界状態の空間 $\mathcal{K}_t$ における状態 $|\psi\rangle$ を考え，それとの内積が始・終状態間の遷移振幅 (5.43) を与えるような，空間 $\mathcal{K}_t$ における状態 $|0_t\rangle$ を定義している．なお 1.2.3 節にならって $\mathcal{K}_t = \mathcal{H}_t^* \otimes \mathcal{H}_0$ の状態を $|\psi\rangle = |\psi_0\rangle \otimes \langle \psi_t|$ と書くことができる．ここで両辺のケットとブラの見かけ上の形が揃っていないことは問題なく (式 (5.139) の箇所に明記されている)，このことを例えば後の式 (5.49) で考慮する．

これらの定義には以下の物理的解釈を与えることができる．我々は $t=0$ において系の測定を行い，また t において測定を行うことができる．我々は位置たち (α,α')，または運動量たち，または他の組を測定できる．ダイナミクスにより 2 つの測定の結果は独立でないものの，ひとまず，ダイナミクスを無視しよう．$t=0$ における測定の全ての可能な結果 (運動学的な関係を伴う) は，$t=0$ における瞬間的な状態によって，すなわち非相対論的な Hilbert 空間 $\mathcal{H}_0$ によって表される．t に対しても同様である．仮に力学的な (dynamical) 相関を無視すれば，2 つの測定をあたかも 2 つの独立な系に対して成されたかのように見なすことができ，それ故 Hilbert 空間 $\mathcal{K}_t$ を用いて 2 つの測定の結果を表すことができる．ダイナミクスは 2 つの測定間の相関である．これらの相関は，あらゆる与えられた状態の組に関連する，すなわち，$\mathcal{K}_t$ のあらゆる状態に関連する確率振幅で表される．

表現 $\mathcal{K}_t=L_2[R^2,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\alpha']$ において状態 $|0_t\rangle$ がちょうど伝播関数

$$\langle 0_t|\alpha,\alpha'\rangle=W(\alpha,t,\alpha',0) \tag{5.45}$$

であることを示すのは，読者に委ねる簡単な演習である．

note　$|0_t\rangle$ の定義式 (5.44) より，上式 (5.45) の左辺は遷移振幅 (5.43) で始・終状態を $|\psi_0\rangle=|\alpha';0\rangle\,,|\psi_t\rangle=|\alpha;t\rangle$ と選んだ量，すなわち伝播関数 $W(\alpha,t,\alpha',0)$ である．

力学的な真空と Minkowski 真空　$\mathcal{H}_0$ における H_0 の最低の固有状態

$$\langle\alpha|0_{\mathrm{M}}\rangle=H_0(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^2} \tag{5.46}$$

［最右辺の Gauss 分布は調和振動子の基底状態］を $|0_{\mathrm{M}}\rangle$ で表し，Minkowski 空間の場の量子論における真空状態［5.3.1 節］とのアナロジーから，それを“Minkowski”真空と呼ぶ．伝播関数 (5.10) の虚時間への解析接続

$$W(\alpha,-\mathrm{i}t,\alpha',0)=\langle\alpha|\mathrm{e}^{-H_0t}|\alpha'\rangle=\sum_n H_n(\alpha)\mathrm{e}^{-E_nt}\overline{H_n(\alpha')} \tag{5.47}$$

を考えよ．大きな t に対しては，和において最低エネルギーの状態だけが生き残り，

$$W(\alpha,-\mathrm{i}t,\alpha',0)\quad\longrightarrow_{t\to\infty}\quad H_0(\alpha)\mathrm{e}^{-E_0t}\overline{H_0(\alpha')} \tag{5.48}$$

を得る．前節の定義［式 (5.45)］を用いると，これは

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{E_0t}\,|0_{-\mathrm{i}t}\rangle=|0_{\mathrm{M}}\rangle\otimes\langle 0_{\mathrm{M}}| \tag{5.49}$$

と書ける．(右辺におけるケットとブラは $\mathcal{H}_0$ に属するのに対し，左辺におけるケットは $\mathcal{K}=\mathcal{H}_0^*\otimes\mathcal{H}_0$ に属する．) この表現は力学的な真空 $|0_t\rangle$ と Minkowski 真空 $|0_{\mathrm{M}}\rangle$ を関係付ける．量子重力のスピン・フォーム形式から Minkowski 時空に対応する量子状態を見出すのに，この関係を用いる予定である．

境界状態空間 K と共変な真空 $|0\rangle$　上記の構成には以下のように，より共変的な定式化を与えることができる．Hilbert 空間

$$\mathsf{K}=\mathcal{K}^*\otimes\mathcal{K}=L_2[R^4,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha'\mathrm{d}t']=L_2[\mathcal{G}] \tag{5.50}$$

を考えよ．私はこの空間を“全 (total)”量子空間と呼ぶ．伝播関数

$$\langle\alpha,t,\alpha',t'|0\rangle=W(\alpha,t,\alpha',t') \tag{5.51}$$

は K における特別な状態 $|0\rangle$ を定義する．私はこの状態を共変な真空状態と呼ぶ．

1 次元の量子系に対して完全な実験を実行するには，2 つの事象——“準備 (preparation)”と“測定”——を測定する必要がある．空間 K は 2 つの事象の全ての可能な (アプリオリには等価な) 測定結果を表す．あらゆる測定の組は K 上の演算子で表され，あらゆる結果はこれらの演算子の固有状態である，状態 $\psi \in$ K で表される．ダイナミクスはブラ $\langle 0|$ で与えられる．与えられた結果の確率振幅は

$$A = \langle 0|\psi\rangle \tag{5.52}$$

で定義される．これが量子ダイナミクスの簡潔で完全に共変的な定式化である．

5.1.5　* 発展する運動の定数

理論の解釈は既に式 (5.29) に完全に含まれている．しかし，非相対論的な定式化とより直接的に関係付けるために，確率分布を理論によって予言できる観測量と関係した演算子を考えることができる．

古典論では，振り子の (相対論的な) 状態［3.2.1 節］が分かれば，t が値，例えば $t = T$ を持つときの α の値を予言できる．量子論では，この物理的予言に対応する演算子がある．それは，もちろん，$t = T$ に対する Heisenberg の位置演算子 (5.5)，すなわち $\alpha(T)$ である．(はっきりさせるために，特定の数値 T を波動関数の引数 t と区別するのが便利である．) ここでこの演算子を相対論的な語法で定義し特徴付ける．

はじめに，式 (5.5) において $\mathcal{H}_0$［非相対論的定式化での Hilbert 空間 (5.1.2 節)］の上で定義されている演算子 $\alpha(T)$ は，実に $\mathcal{H}$［WdW 方程式の解空間 (5.1.2 節)］の上でも良く定義されている，と言うのも，［式 (5.27) 直後の $R_t : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_t$ を用いて］

$$\alpha(T) = R_0^{-1}\alpha(T)R_0 = R_0^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}TH_0}\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}TH_0}R_0 = R_T^{-1}\alpha R_T \tag{5.53}$$

であることに注意せよ．演算子 $\alpha(T)$ は $\mathcal{H}_0$［の関数 H_0］を参照することなく，$\mathcal{H}$ 上で直接定義できる．$\mathcal{S}$ 上で定義された演算子

$$a(T) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(T-t)}\left(\alpha + \mathrm{i}\frac{p_\alpha}{m\omega}\right) \tag{5.54}$$

およびその実部

$$\alpha(T) = \mathrm{Re}[a(t)] = \frac{a(T) + a^\dagger(T)}{2} \tag{5.55}$$

を考えよ．これらの演算子はあらゆる T に対して H と交換する［本稿次節で確認］．それ故それらは式 (5.17) の解の空間上で，すなわち $\mathcal{H}$ 上でよく定義されている．演算子 (5.55) の $\mathcal{H}$ への制限は正確に演算子 (5.53) である．［実際，実部 (5.55):$\alpha(T) = \alpha\cos[\omega(T-t)] + \frac{p_\alpha}{m\omega}\sin[\omega(T-t)]$ は Heisenberg 描像の位置演算子 (5.53) の正しい表式である [421, p.128]．］

演算子 $\alpha(T)$ は 2 つの性質によって特徴付けられる．第 1 に，それはハミルトニアンと交換するという事実

$$[\alpha(T), H] = 0 \tag{5.56}$$

である．第 2 に，表現 (5.54),(5.55) において $T = t$ とおけば，α を得る．すなわち，$\alpha(T)$ は

$$\alpha(T)(\alpha, p_\alpha, T) = \alpha \tag{5.57}$$

となる演算子関数 $\alpha(T)(\alpha, p_\alpha, t)$ として定義される．直観的には，これら 2 つの方程式は 2 つ目［式 (5.57)］が $\alpha(T)$ を $t = T$ において固定し，1 つ目［式 (5.56)］が $\alpha(T)$ を全ての t へと発展させるので，$\alpha(T)$ を決定する．この種の演算子は“発展する運動の定数 (evolving constants of motion)”と呼ばれる．それらは発展

(ここでは α の t に関する発展) を表すので，“発展して”いる；それらはハミルトニアンと交換するので“運動の定数”である．［ただし H_0 ではなく相対論的ハミルトニアン H と交換する演算子は，t とともに発展して良い．こうして“発展する運動の定数”という名称の見かけ上の矛盾は，単にミスリーディングなネーミングであるに過ぎない．］GR では，この種の演算子は時間座標に依存しない．

5.1.5 節について

■$[a(T), H] = 0$ と式 (5.56):$[\alpha(T), H] = 0$ の確認 [421, pp.120–121]　式 (5.54) の演算子 $a(T)$ から時間の指数を除いた因子は，定数係数の違いを除いて通常の消滅演算子

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(\alpha + \mathrm{i}\frac{p_\alpha}{m\omega}\right)$$

に一致している ($\hbar = 1$)．よって

$$a(T) = C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}a, \qquad C \equiv \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T}\sqrt{\frac{2}{m\omega}} : 定数$$

とおける[*106]．他方，調和振動子のハミルトニアンは

$$H = p_t + H_0, \qquad p_t = -\mathrm{i}\,\partial_t, \qquad H_0 = \omega\left(N + \frac{1}{2}\right), \qquad N = a^\dagger a$$

と表される．そこで

$$[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \partial_t] = -\mathrm{i}\,\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \qquad [a, N] = a$$

に注意すると，

$$[a(T), p_t] = -\mathrm{i}\,Ca[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \partial_t] = -\omega a(T), \qquad [a(T), H_0] = \omega C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}[a, N] = \omega a(T)$$

となる．これらを辺々足して $[a(T), H] = 0$ を得る (したがって式 (5.56):$[\alpha(T), H] = 0$ も成立)．

5.2　相対論的 QM

前節では，QM の相対論的なハミルトン形式が基礎を置くところの，いくつかの概念を導入するために，振り子の例を用いた．今や相対論的 QM の一般的な理論を試みる時である．

5.2.1　一般的な構造

運動学的状態　運動学的状態は艤装 Hilbert 空間 $\mathcal{S} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{S}'$ における空間 $\mathcal{S}$ を成す．

部分的観測量　部分的観測量は $\mathcal{K}$ における自己共役な演算子で表される．交換する部分的観測量の完全な組の共通の固有状態 $|s\rangle$ は量子事象で表される．

ダイナミクス　ダイナミクスは $\mathcal{K}$ における自己共役な演算子 H，(相対論的) ハミルトニアンで定義される．$\mathcal{S}$ から $\mathcal{S}'$ への演算子

$$P = \int \mathrm{d}\tau\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau H} \tag{5.58}$$

は (時に不適切に) 射影子と呼ばれる．(この積分の積分範囲は系に依る．) その行列要素

$$W(s, s') = \langle s|P|s'\rangle \tag{5.59}$$

*106 これが演算子 (5.54) を文字 $a(T)$ で表す動機と推察できる．以降，簡単のために引数の有無で $a(T)$ と a を区別する．

は遷移振幅と呼ばれる．

確率　離散的スペクトル：量子事象 s' が与えられたときの量子事象 s の確率は

$$\mathcal{P}_{ss'} = |W(s,s')|^2 \tag{5.60}$$

であり，ここで $|s\rangle$ は $\langle s|P|s\rangle = 1$ によって規格化されている．連続的スペクトル：小さなスペクトル領域 R' における量子事象が与えられたときの，小さなスペクトル領域 R における量子事象の確率は

$$\mathcal{P}_{RR'} = \left|\frac{W(R,R')}{\sqrt{W(R,R)}\sqrt{W(R',R')}}\right|^2 \tag{5.61}$$

であり，ここに

$$W(R,R') = \int_R \mathrm{d}s \int_{R'} \mathrm{d}s'\, W(s,s'). \tag{5.62}$$

ここに次を付け加えることができる：

境界量子空間と共変な真空　有限の自由度の数に対して，境界 Hilbert 空間 $\mathsf{K} = \mathcal{K}^* \otimes \mathcal{K}$ は量子事象の組のあらゆる観測を表す．

$$\langle 0|(\psi\otimes\psi')\rangle_{\mathsf{K}} = \langle\psi|P|\psi'\rangle_{\mathcal{K}} \tag{5.63}$$

によって定義される共変な真空状態 $|0\rangle \in \mathsf{K}$ はダイナミクスを表す．これは，あらゆるそのような観測の相関確率振幅を定める．QFT への拡張は 5.3.5 節で考える．

状態　物理的状態は Wheeler–DeWitt 方程式

$$H\psi = 0 \tag{5.64}$$

の解である．等価的に，それは $\mathcal{S}$ 上の 2 次形式 $\langle\cdot|P|\cdot\rangle$ で定義される Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の要素である．($\mathcal{K}$ の要素は運動学的状態と呼ばれ，K の状態は境界状態と呼ばれる．)

完全な観測量　完全な観測量 $\mathcal{A}$ は $\mathcal{H}$ 上の自己共役な演算子で表される．$\mathcal{K}$ における自己共役な演算子 A は，もし

$$[A,H] = 0 \tag{5.65}$$

ならば完全な観測量を定義する．

射影　観測量 $\mathcal{A}$ の値がスペクトル区間 I に制限されると，状態 ψ は状態 $P_I\psi$ になり，ここに P_I は区間 I 上のスペクトル射影子である．充分小さい領域 R に対応する事象が検出されると，状態は $|R\rangle$ になる．

相対論的な量子系は運動学的空間 $\mathcal{K}$ の艤装 Hilbert 空間と，相対論的ハミルトニアン演算子 H を含む部分的観測量 A_i の組によって定義される．等価的に，それは射影子 P を与えることで定義される．

公理化は明確化を意図しており，命令的であることを意図していない．上記で定義した構造はまだ仮説的であり，不完全かもしれない．この構造にはより良く理解し，明確化し，具体化するに値する側面がある．それらには，連続スペクトルの場合における領域 R の“小さいこと”の正確な意味と，繰り返される測定の正しい取り扱いが含まれる．他方で QM の伝統的な構造は，GR の観点からは，**確実**に物理的に不完全である．上記はそれを一般相対論的にし，補完する試みである．

5.2.2　量子化と古典的極限

一般に量子系 $(\mathcal{K}, A_i, H)$ は古典的極限を持ち，それは Planck 定数よりも大きなスケールと正確さでの系の観測結果を記述する力学系 $(\mathcal{C}, H)$ である．古典的極限では，Heisenberg の不確定性は無視することができ，部分的観測量の可換な組 A_i は，可換な (commutative) 相対論的配位空間 $\mathcal{C}$ の座標に採れる．

座標 q^a を持つ相対論的［nonrelativistic は誤記か］配位空間 $\mathcal{C}$ と相対論的ハミルトニアン $H(q^a, p_a)$ によって定義される古典系が与えられたならば，量子化問題の解は Hilbert 空間 $\mathcal{K} = L_2[\mathcal{C}, \mathrm{d}q^a]$，あるいはより正確には，$\mathcal{C}$ と測度 $\mathrm{d}q^a$ によって定義される Gelfand 3 乗構造上の，乗法的な演算子 q^a，微分演算子

$$p_a = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial q^a}, \tag{5.66}$$

およびハミルトニアン演算子

$$H = H\left(q^a, -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial q^a}\right) \tag{5.67}$$

によって与えられる．物理は遷移振幅

$$W(q^a, {q'}^a) = \langle q^a|P|{q'}^a\rangle \tag{5.68}$$

に完全に含まれており，ここに状態 $|q^a\rangle$ は乗法的演算子 q^a の固有状態である．

次に，空間 K は構造

$$\mathsf{K} = L_2[\mathcal{G}] \tag{5.69}$$

を持つ．これから見るように，これは場の理論と量子重力においても真に留まる．空間 $\mathcal{G}$ は有限次元系に対して 3.2.5 節で，場の理論に対して 3.3.3 節で，そして重力の場合に 4.3.4 節で定義した．

$\hbar \to 0$ の極限では，Wheeler–DeWitt 方程式は相対論的 Hamilton–Jacobi 方程式 (3.59) になり，伝播関数は $(q \equiv (q^a)$ と書くと)

$$W(q, q') \sim \sum_i A_i(q, q')\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S_i(q,q')} \tag{5.70}$$

の形を持ち，ここに $S_i(q, q')$ は式 (3.89) におけるように，Hamilton 関数の異なる枝である．ここで，各経路の逆もまた経路である［5.2.3 節末尾も参照］．逆転した経路の Hamilton 関数と振幅は負号を獲得し，

$$W(q, q') \sim \sum_i A_i(q, q')\,\sin\left[\frac{1}{\hbar}S_i(q, q')\right] \tag{5.71}$$

を与え，W は実である．1 経路だけの問題を仮定すると

$$W(q, q') \sim A(q, q')\,\sin\left[\frac{1}{\hbar}S(q, q')\right] \tag{5.72}$$

であり［本稿次節で補足］，例えば，

$$\lim_{\hbar\to 0}\frac{1}{W}\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial q^a}\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial q^b}W(q, q') = \frac{\partial S(q, q')}{\partial q^a}\frac{\partial S(q, q')}{\partial q^b} \tag{5.73}$$

と書ける［本稿次節で補足］．この方程式は量子論 (伝播関数 $W(q, q')$ によって完全に定義される) と古典論 (Hamilton 関数 $S(q, q')$ によって完全に定義される) の間の正確な関係を与える．式 (3.86) と (5.66) を用いると，この方程式は示唆的な形

$$\lim_{\hbar\to 0}\frac{1}{W}p_a p_b W(q, q') = p_a(q, q')p_b(q, q') \tag{5.74}$$

に書ける．

5.2.2 節について

■伝播関数の表式 (5.72) について　適当な位相因子 ϕ を導入すると，実数の振幅 $A(q,q')$ を用いて

$$W(q,q') = \mathrm{i}\,A(q,q')\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{1}{\hbar}S(q,q')+\phi\right)\right]$$

と書ける．ここで

$$W(q',q) = \overline{W(q,q')} = -\mathrm{i}\,A(q,q')\exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{1}{\hbar}S(q,q')+\phi\right)\right]$$

を要求し[*107]，これらの和を改めて

$$W(q,q') \equiv -2A(q,q')\sin\left[\frac{1}{\hbar}S(q,q')+\phi\right] \in R$$

と書くことができる．最後に右辺の付加的な定数 ϕ は Hamilton 関数 S に，乗法的な実係数 (-2) は振幅 A に吸収させて再定義すれば良い．

■式 (5.73) について　正直に微分すると

$$\frac{\partial^2}{\partial q^a\partial q^b}\left(A\sin\frac{S}{\hbar}\right) = \frac{\partial^2 A}{\partial q^a\partial q^b}\sin\frac{S}{\hbar} + \frac{1}{\hbar}\left(\frac{\partial A}{\partial q^a}\frac{\partial S}{\partial q^b}+\frac{\partial A}{\partial q^b}\frac{\partial S}{\partial q^a}+A\frac{\partial^2 S}{\partial q^a\partial q^b}\right)\cos\frac{S}{\hbar} - \frac{1}{\hbar^2}\frac{\partial S}{\partial q^a}\frac{\partial S}{\partial q^b}A\sin\frac{S}{\hbar}$$

となることによる．

5.2.3　例：振り子と時間のない 2 つの振り子

振り子　相対論的な定式化の例は，前節で説明した振り子の量子化によって与えられる：運動学的状態空間は $\mathcal{K} = L_2[R^2, \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}t]$ である．部分的観測量の演算子は，$\mathcal{K}$ に属する関数 $\psi(\alpha,t)$ に作用する乗法的な演算子 α と t である．ダイナミクスは式 (5.18) で与えられる演算子 H によって定義される．Wheeler–DeWitt 方程式はそれ故

$$\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{m\omega^2}{2}\alpha^2\right)\Psi(\alpha,t) = 0. \tag{5.75}$$

$\mathcal{H}$ はこの方程式の解の空間である．H によって定義される“射影子”演算子 $P : \mathcal{K}\to\mathcal{H}$ は式 (5.23) で与えられ，$\mathcal{H}$ におけるスカラー積を定義する．α と t の共通［同時］固有状態間の行列要素 $W(\alpha,t,\alpha',t')$ は伝播関数 (5.11) で与えられる．それは理論の全ての予言を表す．5.1.3 節で説明したように，H の特定の形のために，それは確率密度を α について定義するものの，t については定義しない．

　等価的に $\mathcal{G}$ を，座標 (α,t,α',t') を持つ古典論の境界空間として，量子論は境界状態空間 $\mathsf{K} = L_2[\mathcal{G}]$ と，準備/測定実験のあらゆる可能な結果 $\psi\in\mathsf{K}$ の振幅 $A = \langle 0|\psi\rangle$ を決定する共変な真空状態 $\langle\alpha,t,\alpha',t'|0\rangle = W(\alpha,t,\alpha',t')$ によって定義できる．

時間のない 2 つの振り子　伝統的な相対論的量子力学を用いて表せない相対論的量子系の例は，時間のない系 (3.40) の量子論によって与えられる．運動学的 Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ は $L_2[R^2, \mathrm{d}a\mathrm{d}b]$ であり，Wheeler–DeWitt 方程式は

$$\frac{1}{2}\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial a^2} - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial b^2} + a^2 + b^2 - 2E\right)\Psi(a,b) = 0. \tag{5.76}$$

以下ではこの系をいくらか詳しく説明する．

---

*107 調和振動子の伝播関数 (5.11) は，実際に第 1 の等号を満たしていることが見て取れる．

状態　H_a (または H_b) を変数 a (または b) に関する調和振動子のハミルトニアンとすると，$H = H_a + H_b - E$ なので，この方程式は調和振動子を対角化する基底を用いて容易に解ける．

$$\psi_n(a) = \langle a|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} H_n(a)\,\mathrm{e}^{-a^2/2\hbar} \tag{5.77}$$

を，固有値 $E_n = \hbar(n+1/2)$ を持つ，調和振動子の規格化された n 番目の固有関数とする．ここに $H_n(a)$ は n 番目の Hermite 多項式である．このとき明らかに

$$\Psi_{n_a n_b}(a,b) = \psi_{n_a}(a)\psi_{n_b}(b) \equiv \langle a,b|n_a,n_b\rangle \tag{5.78}$$

は，もし

$$\hbar(n_a + n_b + 1) = E \tag{5.79}$$

ならば式 (5.76) の解である．したがって量子論は (この順序に従って) $E/\hbar = N+1$ が整数の場合にのみ存在し，我々は以降このことを仮定する．式 (5.76) の一般解は

$$\Psi(a,b) = \sum_{n=0,N} c_n \psi_n(a)\psi_{N-n}(b). \qquad [\text{和は} \sum_{n=0}^{N} \text{の意味}] \tag{5.80}$$

したがって $\mathcal{H}$ は $\mathcal{K}$ の $(N+1)$ 次元の適当な部分空間である．直交基底は $N+1$ 状態 $|n, N-n\rangle$，ただし $n = 0, \cdots, N$ から成る．

射影子　射影子 $P : \mathcal{S} \to \mathcal{H}$ は実際に真の射影子であり，明示的に

$$P = \sum_{n=0,N} |n, N-n\rangle \langle n, N-n| \tag{5.81}$$

と書ける．これは積分範囲を，古典的なハミルトニアン発展における τ の範囲によって決定される 2π にとることによって，あるいは H が周期 2π を持つ，$\mathcal{K}$ 上の $U(1)$ ユニタリー作用の生成子であるという事実によって，式 (5.58) から得られる．実際，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\tau\, \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\tau H} &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\tau \sum_{n_a,n_b} |n_a,n_b\rangle\, \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\tau(\hbar(n_a+n_b+1)-E)} \langle n_a,n_b| \\ &= \sum_{n_a,n_b} |n_a,n_b\rangle\, \delta(n_a+n_b+1-E/\hbar) \langle n_a,n_b| \\ &= P.\end{aligned} \tag{5.82}$$

[第 2 辺，第 3 辺で $h \to \hbar$ と訂正した．第 1 の等号では $\sum_{n_a,n_b} |n_a,n_b\rangle \langle n_a,n_b| = 1$ を右から掛ける．]

遷移振幅　遷移振幅は P の行列要素である．a と b を対角化する基底では

$$W(a,b,a',b') = \langle a,b|P|a',b'\rangle = \sum_{n=0,N} \langle a,b|n,N-n\rangle \langle n,N-n|a',b'\rangle. \tag{5.83}$$

明示的には，これは

$$\begin{aligned}W(a,b,a',b') = \sum_{n=0,N} &\frac{1}{n!(N-n)!} H_n(a) H_{N-n}(b) \\ &\times H_n(a') H_{N-n}(b')\, \mathrm{e}^{-(a^2+b^2+a'^2+b'^2)/2\hbar}.\end{aligned} \tag{5.84}$$

［分母から平方根を除いて訂正した[*108]．］この関数は量子系の全ての性質をコードしている．粗く言えば，それは (a', b') が測定されたときに (a, b) を測定する確率密度を決定する．その性質を研究しよう．

射影子の半古典的極限　式 (5.82) を式 (5.83) に代入すると，$W(a, a', \tau)$ を式 (5.11) で与えられる，物理的な時間 τ における調和振動子の伝播関数として，射影子［の行列要素］を

$$\begin{aligned} W(a, b, a', b') &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\tau \, \langle a, b | \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} H\tau} | a', b' \rangle \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\tau \, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} E\tau} \langle a | \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} H_a \tau} | a' \rangle \langle b | \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} H_b \tau} | b' \rangle \,, \end{aligned} \tag{5.85}$$

$$W(a, b, a', b') = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\tau \, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} E\tau} W(a, a', \tau) W(b, b', \tau) \tag{5.86}$$

と書けることに注意せよ．式 (5.11) を式 (5.86) に代入すると

$$W(a, b, a', b') = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\tau \, \frac{1}{\sin\tau} \, \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} S(a, b, a', b', \tau)} \tag{5.87}$$

であり，ここに $S(a, b, a', b', \tau)$ は式 (3.101) で与えられる．この積分を鞍点近似で評価できる．これは

$$W(a, b, a', b') \sim \sum_i \frac{1}{\sin\tau_i} \, \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} S(a, a', b, b', \tau_i)} \tag{5.88}$$

を与え，ここに τ_i は

$$\left. \frac{\partial S(a, b, a', b'; \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau = \tau_i(a, b, a', b')} = 0 \tag{5.89}$$

で決まる．ところがこれは正確に，時間のない系の Hamilton 関数を与える τ の値を定義する式 (3.102) である．この方程式は楕円を切る 2 点に対応して，2 つの解を持つ．2 つの作用の関係は式 (3.103) で与えられる．$E/\hbar$ が整数であることを思い出すと，式 (5.72) におけるように，これは

$$W(a, b, a', b') \sim \frac{1}{\sin\tau(a, b, a', b')} \left(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} S(a, a', b, b')} - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} S(a, a', b, b')} \right), \tag{5.90}$$

すなわち

$$W(a, b, a', b') \sim \frac{1}{\sin\tau(a, b, a', b')} \sin\left[\frac{1}{\hbar} S(a, a', b, b') \right] \tag{5.91}$$

を与える．ここで $\sim$ は $\hbar$ の最低次での等価性を表す．この方程式は量子論と古典論の間の正確な関係を表す．

“時間の順と逆の”伝播　式 (5.90) における 2 つの項は 2 つの自然な解釈を持つことに注意せよ．1 つは，それらが $\mathcal{C}$ において (a', b') から (a, b) へ至る 2 つの経路を表すというものである．もう一方の，より興味深い解釈は，それらが (a', b') から (a, b) へ至る軌道と，(a, b) から (a', b') へ至る“時間反転した”軌道に対応するというものである．実際，射影子 (それ［その行列要素］は実であることを思い出せ) は 2 つの伝播関数——パラメータ τ に関して順行するものと逆行するもの——の和として，自然に解釈できる．

[*108] 式 (5.77–78) より，

$$\langle a, b | n, N-n \rangle = \psi_n(a) \psi_{N-n}(b) = \frac{1}{\sqrt{n!(N-n)!}} H_n(a) H_{N-n}(b) \, \mathrm{e}^{-(a^2+b^2)/2\hbar}.$$

パラメータ時間 τ に関する順と逆の区別は古典論では全く物理的な重要性を持たない，と言うのも，物理は $\mathcal{C}$ における楕円にのみあり，楕円の向きにはないからである．

しかしながら，量子論では $\mathcal{H}$ において“時計回りの運動”と“反時計回りの運動”の成分を識別できる．これらの成分は角運動量演算子 $L = a\partial_b - b\partial_a$ (あるいは $a = r\sin\phi, b = r\cos\phi$ として $L = \partial_\phi$) の，正および負の固有値の固有状態である．こうして我々は，“パラメータ時間に関して楕円を純粋に順行，あるいは純粋に逆行する”波束を書ける．$\mathcal{C}$ の小さな領域における局所的な発展だけを考え，例えば b を独立な時間変数，また a を力学変数と解釈すれば，このときこれら 2 つの成分はそれぞれ，正および負のエネルギーを持つ．ある意味，それらは粒子と反粒子と見なせる．

note　相対論的な粒子に対する経路積分には，前方に伝播する経路と後方に伝播する経路が寄与する [416, p.63]．時間と逆向きに伝播する経路は反粒子を表すと考えられる．

5.3　場の量子論

読者は標準的な場の量子論 (QFT) に慣れていると仮定する．ここでは QFT とこれまで発展させてきた相対論的な定式化の関係を説明し，また第 II 部で用いる広くは知られていない，いくつかの技法を思い出してもらう．特に重要なのは，Minkowski 真空と共変な真空の区別，場の理論の汎関数表現，および格子 Yang–Mills 理論の物理的 Hilbert 空間の構成である．

第 3 章では有限次元の空間 $\mathcal{C}$ における閉じた面 α の境界空間 $\mathcal{G}$ と，$T^*\mathcal{G}$ 上の相対論的ハミルトニアン H によって，古典場の理論を共変的に定義できることを見た．例えば，スカラー場の理論では $\mathcal{C} = M \times R$ は座標 (x^μ, ϕ) を持ち，ここに x^μ は Minkowski 空間の点，また ϕ は場の値である．面 α は 2 つの関数

$$\alpha = [x^\mu(\vec{\tau}), \varphi(\vec{\tau})] \tag{5.92}$$

で決まり，Minkowski 空間 M における境界の 3 次元面 $x^\mu(\vec{\tau})$ と，この面上の場の境界値 $\phi(x(\vec{\tau})) = \varphi(\vec{\tau})$ を定める．

理論の量子化は，ちょうど有限次元の場合のように，$\mathcal{G}$ 上の汎関数 $\Psi[\alpha]$ の境界状態空間 K を用いて得られる．しかしながら運動学的状態空間 $\mathcal{K}$ と境界状態空間 K の違いは，有限次元系に対するよりも場の理論においては，はるかに重要でないことに注意せよ．有限次元の場合には，$\mathcal{K}$ の状態 $\psi(q^a)$ は拡大配位空間 $\mathcal{C}$ 上の関数であるのに対し，K の状態 $\psi(q^a, q^{a\prime})$ は境界空間 $\mathcal{G} = \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ 上の関数である．場の理論の場合には，いずれの状態も $\Psi[\alpha]$ の形を持つ．違いは，$\mathcal{K}$ の状態が“初期の”面 α の関数であって，ここに $x^\mu(\vec{\tau})$ は例えば，空間的な面 $x^0 = 0$ であり得る；この場合 α は場の方程式の解を決定するのに必要なデータの半分だけを含んでいる．他方，K の状態 $\Psi[\alpha]$ は**閉じた**面 α の関数である．実際，$\mathcal{K}$ と K の違いは α の大域的なトポロジーだけである．もしそれを無視し，局所的な方程式を考えれば，我々は $\mathcal{K}$ と K を混同し得る (5.3.5 節を見よ)．

相対論的ハミルトニアンは式 (3.192) で与えられる．$\mathcal{R}$ を $x(\vec{\tau})$ で限られる 4 次元の領域，また $\phi(x)$ を境界データ $\phi(x(\vec{\tau})) = \varphi(\vec{\tau})$ で決まるこの領域における運動方程式の解として，作用の値

$$S[\alpha] = S[\mathcal{R}, \phi] = \int_{\mathcal{R}} \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x))\mathrm{d}^4x \tag{5.93}$$

である Hamilton 関数 $S[\alpha]$ が分かれば，古典的なダイナミクスの完全な解が分かる．もし 1 つより多くのこれらの解があれば，我々はそれらを $\phi_i(x)$ と書き，また Hamilton 関数は多価

$$S_i[\alpha] = S[\mathcal{R}, \phi_i] = \int_{\mathcal{R}} \mathcal{L}(\phi_i(x), \partial_\mu\phi_i(x))\mathrm{d}^4x \tag{5.94}$$

となる．

ちょうど有限次元の場合のように，相対論的ハミルトニアンは Wheeler–DeWitt 方程式

$$H\left[x^\mu,\varphi,-\mathrm{i}\hbar\frac{\delta}{\delta x^\mu},-\mathrm{i}\hbar\frac{\delta}{\delta\varphi}\right](\vec{\tau})\Psi[\alpha]=0 \tag{5.95}$$

をもたらす．Hamilton–Jacobi 方程式 (3.193) はこの波動方程式のアイコナール近似として解釈できる．

この方程式の解である伝播関数 $W[\alpha]$ が分かれば，ダイナミクスの完全な解が分かる．形式的には，場の伝播関数は汎関数積分

$$W[\alpha]=\int_{\phi(x(\vec{\tau}))=\varphi(\vec{\tau})}[\mathrm{D}\phi]\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S[\mathcal{R},\phi]} \tag{5.96}$$

として書ける．もちろん，場の伝播関数 $W[\alpha]$ を Feynman 伝播関数と混同してはならない．前者は場を伝播させ，後者は QFT の粒子を伝播させる．前者は面とこの面上の場の値の汎関数であり，後者は 2 つの時空点の関数である．$\hbar$ の最低次では，鞍点近似は

$$W[\alpha]\sim\sum_i A_i[\alpha]\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S_i[\alpha]} \tag{5.97}$$

を与える．

場の理論の文脈では，有限次元にはない 2 つの特徴的な困難がある：スカラー積の定義と，演算子積を正則化する必要である．

第 1 に，有限次元では，$\mathcal{C}$ 上の測度 $\mathrm{d}q^a$ は関連する波動関数の L_2 Hilbert 空間を定義するのに充分である．場の理論の場合には，スカラー積を何らかの別の方法で定義しなければならない．スカラー積は理論の不変性を守らねばならず，実数の古典的変数が自己共役な演算子で表されるようなものでなければならない．これは自己共役な演算子が実数のスペクトルを持ち，またスペクトルは量が測定においてとり得る値を決めるからである．線形空間上の線形な演算子の組が与えられたとき，それらが自己共役であるという要求はスカラー積に厳しい条件を課す．これから見るように，興味のある全ての場合において，これらの要求はスカラー積を決定するのに充分である．

第 2 に，局所的な演算子は一般に分布 (distributions) であり，それらの積はよく定義されない．演算子積は力学的 (dynamical) 方程式，すなわち Wheeler–DeWitt 方程式だけでなく，物理的観測量にも現れる．古典的な Hamilton–Jacobi 方程式には Hamilton–Jacobi 汎関数の汎関数微分の積があり，それは良く定義された関数の積である．対応する量子 Wheeler–DeWitt 方程式では，それは適切な正則化の措置がなければ良く定義されない，汎関数微分の演算子積になる．一般共変的な正則化の手法の定義は，本書の第 II 部の主要な関心事である．

5.3.1 汎関数表現

$V=0$ である単純なスカラー理論を考えよ．量子重力で役割を演じるある技法を説明するために，このよく知られた QFT をいくらか詳しく説明する．特に，場の量子論の**汎関数**表現，Wheeler–DeWitt 方程式の単純な形，$W[\alpha]$ の一般的な形，およびその物理的な解釈を説明する．汎関数表現は，場の演算子が対角的となる表現である．量子状態は汎関数 $\Psi[\phi]=\langle\phi|\Psi\rangle$ として表され，ここに $|\phi\rangle$ は場の演算子の固有値 $\phi(\vec{x})$ を持つ (一般化された) 固有状態である．この表現と Fock 基底 $|\vec{k}_1,\cdots,\vec{k}_n\rangle$ 上の伝統的な表現との関係はちょうど，単純な調和振動子に対する，Schrödinger 表現 $\psi(x)$ とエネルギー基底 $|n\rangle$ 上の表現との関係と同じである．場の演算子の実の性質から，Wheeler–DeWitt 方程式の解空間上のスカラー積を決定する方法も説明する．

始めるにあたり，また上記で説明した一般共変な定式化を伝統的な QFT と関係付けるために，α の面 $x(\vec{\tau})$ を Minkowski 空間における空間的な面 $x^\mu(\vec{\tau})=(t,\vec{\tau})$ に制限する．すると $\alpha=[t,\phi(\vec{x})]$ および

$\Psi[\alpha] = \Psi[t, \phi(\vec{x})]$ である．Hamilton–Jacobi 方程式 (3.186) は式 (3.190) に簡略化される．［このときハミルトニアンは式 (3.194) であり，同様に $\delta\Psi/\delta t \to \partial\Psi/\partial t$ とできるので］対応する量子 Wheeler–DeWitt 方程式は

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H_0\Psi \tag{5.98}$$

となり，ここに非相対論的ハミルトニアン演算子 H_0 は

$$H_0 = \int \mathrm{d}^3x\, H_0\left[\phi, -\mathrm{i}\hbar\frac{\delta}{\delta\phi}\right](\vec{x}) \tag{5.99}$$

であり［ハミルトニアンとその密度が同じ記号 H_0 で表されていることを許容］，$H_0[\phi, p](\vec{x})$ は式 (3.195) で与えられる．素朴な因子順序化

$$H_{0\,\mathrm{naive}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\left[-\hbar^2\frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})}\frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})} + |\vec{\nabla}\phi|^2(\vec{x}) + m^2\phi^2(\vec{x})\right] \tag{5.100}$$

から帰結する発散を避けるために，この演算子の因子順序化を選べる．Fourier モード

$$\phi(\vec{k}) = (2\pi)^{-3/2}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\phi(\vec{x}) \tag{5.101}$$

は

$$H_0 = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\vec{k}\left[p^2(\vec{k}) + \omega^2(\vec{k})\phi^2(\vec{k})\right] \tag{5.102}$$

を分離し (decouple)［本稿次節で補足］，ここに $\omega = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$ である．危険な発散は各モード $\vec{k}$ に関する量子振動子の真空エネルギーから生じ，正規順序化によって避けられる．正および負振動数の場

$$a(\vec{k}) = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\omega}}p(\vec{k}) + \sqrt{\frac{\omega}{2}}\phi(\vec{k}), \tag{5.103}$$

$$a^\dagger(\vec{k}) = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\omega}}p(-\vec{k}) + \sqrt{\frac{\omega}{2}}\phi(-\vec{k}) \tag{5.104}$$

［ただし $\omega = \omega(\vec{k})$］を用いると，ハミルトニアンは

$$H_0 = \int \mathrm{d}^3\vec{k}\,\omega(\vec{k})a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) \tag{5.105}$$

となる［本稿次節で確認］．我々は

$$a(\vec{k}) = \frac{\hbar}{\sqrt{2\omega}}\frac{\delta}{\delta\phi(\vec{k})} + \sqrt{\frac{\omega}{2}}\phi(\vec{k}), \tag{5.106}$$

$$a^\dagger(\vec{k}) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2\omega}}\frac{\delta}{\delta\phi(-\vec{k})} + \sqrt{\frac{\omega}{2}}\phi(-\vec{k}) \tag{5.107}$$

として［$p(\vec{k}) \to -\mathrm{i}\hbar\delta/\delta\phi(\vec{k})$］，量子ハミルトニアンをこの式で定義する．

ハミルトニアンの最低エネルギーの固有ベクトルは消える固有値を持ち［正規順序化した式 (5.105) による］，Minkowski 真空状態と呼ばれる．この状態は通常 $|0\rangle$ で表される；後で導入する他の真空状態と区別するために，ここではそれを $|0_\mathrm{M}\rangle$ で表し，ここに M は Minkowski を表す．Minkowski 真空状態は $a(\vec{k})\,|0_\mathrm{M}\rangle = 0$ で決まる．汎関数表現では，この状態は

$$\Psi_{0_\mathrm{M}}[\phi] \equiv \langle\phi|0_\mathrm{M}\rangle \tag{5.108}$$

になり，

$$a(\vec{k})\Psi_{0_\mathrm{M}}[\phi] = \frac{\hbar}{\sqrt{2\omega}}\frac{\delta}{\delta\phi(\vec{k})}\Psi_{0_\mathrm{M}}[\phi] + \sqrt{\frac{\omega}{2}}\phi(\vec{k})\Psi_{0_\mathrm{M}}[\phi] = 0 \tag{5.109}$$

で決まる．この方程式の解は真空状態の汎関数の形

$$\Psi_{0_\mathrm{M}}[\phi] = N\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\hbar}\int \mathrm{d}^3k\,\omega(\vec{k})\phi(\vec{k})\phi(\vec{k})} \tag{5.110}$$

を与える［本稿次節で確認］．運動量 $\vec{k}$ を持つ 1 粒子状態は $a^\dagger(\vec{k})$ によって生成される：

$$\Psi_{\vec{k}}[\phi] \equiv \langle\phi|\vec{k}\rangle = a^\dagger(\vec{k})\Psi_{0_\mathrm{M}}[\phi] = \sqrt{2\omega}\phi(\vec{k})\Psi_{0_\mathrm{M}}[\phi]. \tag{5.111}$$

［本稿次節で補足する.］それはエネルギー $\hbar\omega(\vec{k})$ を持つ．したがって，時間に依存する状態

$$\Psi_{\vec{k}}[t,\phi] \equiv \sqrt{2\omega}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(\vec{k})t}\phi(\vec{k})\Psi_{0_\mathrm{M}}[\phi] \tag{5.112}$$

は Wheeler–DeWitt 方程式 (5.98) の解である．

波動関数 $f(\vec{k})$ を持つ一般的な 1 粒子状態は

$$|f\rangle \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\omega}} f(\vec{k})\,|\vec{k}\rangle \tag{5.113}$$

で定義され，その汎関数表現はそれ故

$$\Psi_f[\phi] \equiv \langle\phi|f\rangle = \int \mathrm{d}^3k\, f(\vec{k})\phi(\vec{k})\Psi_0[\phi], \tag{5.114}$$

あるいは

$$\Psi_f[\phi] = \phi[f]\Psi_0[\phi] \tag{5.115}$$

であり［以降 $\Psi_{0_\mathrm{M}} \to \Psi_0$ と略記されている］，ここに

$$\phi[f] = \int \mathrm{d}^3k\, f(\vec{k})\phi(\vec{k}). \tag{5.116}$$

対応する Wheeler–DeWitt 方程式 (5.98) の解は

$$\Psi_f[t,\phi] = \int \mathrm{d}^3k\, f(\vec{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(\vec{k})t}\phi(\vec{k})\Psi_0[\phi], \tag{5.117}$$

あるいは Fourier 変換の下で

$$\Psi_f[t,\phi] = \int \mathrm{d}^3x\, F(t,\vec{x})\phi(\vec{x})\Psi_0[\phi] \tag{5.118}$$

であり［本稿次節で補足］，ここに

$$F(x) = F(t,\vec{x}) = (2\pi)^{-3/2}\int \mathrm{d}^3k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega(\vec{k})t)} f(\vec{k}) \tag{5.119}$$

は Klein–Gordon 方程式の**正エネルギー**解である．［正しい分散関係 $\omega(\vec{k})$ による．$\phi(x)$ に対する場の方程式 (Klein–Gordon 方程式) と，量子状態 $\Psi[t,\phi]$ に対する Wheeler–DeWitt 方程式の区別に注意せよ.］

n 粒子状態 $|\vec{k}_1,\cdots,\vec{k}_n\rangle$ はよく知られた方法で再び生成演算子 $a^\dagger(\vec{k})$ を用いることで得られる．それはエネルギー $\hbar(\omega_1+\cdots+\omega_n)$ を持ち，ここに $\omega_i = \omega(\vec{k}_i)$．Wheeler–DeWitt 方程式の一般解はそれ故

$$\Psi[t,\phi] = \sum_n \int \frac{\mathrm{d}^3k_1\cdots\mathrm{d}^3k_n}{\sqrt{2\omega_1\cdots 2\omega_n}} f(\vec{k}_1,\cdots,\vec{k}_n)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_1+\cdots+\omega_n)t} a^\dagger(\vec{k}_1)\cdots a^\dagger(\vec{k}_n)\Psi_0[\phi]. \tag{5.120}$$

関数 $f(\vec{k}_1, \cdots, \vec{k}_n)$ でラベルされるこれらの解の空間 $\mathcal{F}$ は，理論の物理的状態の空間 $\mathcal{H}$ である．$\Psi[t,\phi]$ は $\Psi[\phi] = \Psi[0,\phi]$ によって決定されるので，量子状態をその $t=0$ 面上での値によって，すなわち汎関数 $\Psi[\phi]$ として表現することもできる．

スカラー積　実の量は自己共役な演算子で表されるという要求から，Wheeler–DeWitt 方程式の解空間上でスカラー積を定義できる．スカラー場 $\phi(\vec{x})$ とその運動量［密度］$p(\vec{x})$ は実である．したがって，対応する演算子は自己共役であることを要求しなければならない．［ここから］演算子 $a^\dagger(\vec{k})$ は演算子 $a(\vec{k})$ の共役であることが帰結する．これを用いると，容易に

$$\langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle = \langle a^\dagger(\vec{k})0 | a^\dagger(\vec{k}')0 \rangle = \langle 0 | a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}') | 0 \rangle = \hbar \delta(\vec{k} - \vec{k}') \tag{5.121}$$

を得る．［最後の等号では $a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')$ を交換した際のおつりの交換子を，式 (5.106–107) から改めて評価すれば良い．］式 (5.113)［と上式 (5.121)］から

$$\langle f | f' \rangle = \hbar \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{2\omega} \overline{f(\vec{k})} f'(\vec{k}) \tag{5.122}$$

が帰結する．($\mathrm{d}^3k/2\omega$ は Lorentz 不変な測度であることを思い出せ．［例えば文献 [417, pp.33–34] [426, p.150] を見よ．］) したがって，1 粒子状態の空間は $\mathcal{H}_1 = L_2[R^3, \mathrm{d}^3k/2\omega]$.

$$f(\vec{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{2\omega} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} f(\vec{k}) \tag{5.123}$$

と書こう．時空の関数

$$f(x) = f(t, \vec{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{2\omega} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega(\vec{k})t)} f(\vec{k}) \tag{5.124}$$

は初期値 $f(0,\vec{x}) = f(\vec{x})$ を持つ Klein–Gordon 方程式の**正振動数**解である ($F = \mathrm{i}\partial_t f$［$\times 1/2$］である，式 (5.119) で定義されるものと混同してはならない)．このとき，容易に

$$\langle f | f' \rangle = \mathrm{i}\hbar \int \mathrm{d}^3 x \left[\overline{f(x)} \partial_0 f'(x) - f'(x) \partial_0 \overline{f(x)} \right]_{t=0}. \tag{5.125}$$

［本稿次節で確認する．］これは正振動数解の上で正定値となる，よく知られた Klein–Gordon スカラー積である［文献 [427, pp.18–19] を参照］.

1 粒子状態の Hilbert 空間は多様な等価な方法で表現できることに注意せよ．それは

- スカラー積 (5.125) を伴う，Klein–Gordon 方程式の正振動数解 $f(x)$ の空間；
- 関数 $f(\vec{k})$ の空間 $H = L_2[R^3, \mathrm{d}^3k/2\omega]$；
- 関数 $f(k)$ の空間 $H = L_2[R^4, \delta(k^2 + m^2)\theta(k^0)\mathrm{d}^4k]$［$k^0$ の積分を実行すると測度 $\mathrm{d}^3k/2\omega$ を得る］；
- 関数
$$f(\vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{\sqrt{2\omega}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} f(\vec{k}) \tag{5.126}$$
の空間 (この表現における位置演算子 $\vec{x}$ は明らかに自己共役である：それは他の表現でははるかに複雑な形を持つ，よく知られた Newton–Wigner 演算子である)；
- 等々．

同じ技法を用いて全空間 $\mathcal{F}$ にスカラー積を備え付けることができる．得られる Hilbert 空間はもちろん，この 1 粒子 Hilbert 空間にわたるよく知られた Fock 空間である．

5.3.1 節について

■H_0 の Fourier 展開 (5.102) について　古典的な (非相対論的) ハミルトニアンは，その密度の表式 (3.195) より

$$H_0 = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3 x \left[p^2(\vec{x}) + \left(\vec{\nabla}\phi(\vec{x})\right)^2 + m^2\phi^2(\vec{x})\right].$$

ここで式 (5.101) の流儀に従い，場の Fourier 展開を

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\phi(\vec{k}), \qquad p(\vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}p(\vec{k})$$

と書こう[*109]．これを上式に代入すると，例えば

$$\int \mathrm{d}^3 x \left(\vec{\nabla}\phi(\vec{x})\right)^2 = \int \mathrm{d}^3 x \frac{\mathrm{d}^3 k \mathrm{d}^3 k'}{(2\pi)^3}(-\mathrm{i}\vec{k})\cdot(-\mathrm{i}\vec{k}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}}\phi(\vec{k})\phi(\vec{k}') = \int \mathrm{d}^3 k\, |\vec{k}|^2 \overline{\phi(\vec{k})}\phi(\vec{k})$$

となる．ただし $\phi(\vec{x})$ の実数性より $\phi(-\vec{k}) = \overline{\phi(\vec{k})}$ であることに注意した (式 (5.103–104) とも整合)．よって H_0 の式 (5.102) で

$$p^2(\vec{k}) \ \to \ \overline{p(\vec{k})}p(\vec{k}), \qquad \phi^2(\vec{k}) \ \to \ \overline{\phi(\vec{k})}\phi(\vec{k})$$

と読み替えた関係が成立する．

■H_0 の Fourier 展開 (5.105) について　定義式 (5.103–104) を代入すると，式 (5.105) は

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^3 k\, \omega(\vec{k})a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) =&(\text{式 } (5.102)) - \frac{\mathrm{i}}{2}\int \mathrm{d}^3 k\, \omega(\vec{k})\left(p(-\vec{k})\phi(\vec{k}) - \phi(-\vec{k})p(\vec{k})\right)\\ =&(\text{式 } (5.102)) - \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{i}}{2}\int \mathrm{d}^3 k\, \omega(\vec{k})\left([p(-\vec{k}), \phi(\vec{k})] + [p(\vec{k}), \phi(-\vec{k})]\right)\end{aligned}$$

と書き換えられる．ただし第 2 の等号では，積分変数を $\vec{k} \to -\vec{k}$ と置き換えた式との平均をとった．我々は最右辺における付加的な項が，無限大の真空のエネルギー ($\sim \int \mathrm{d}^3 k \frac{1}{2}\omega(\vec{k})$) に対応することを知っている．実際，演算子 (5.103–104) 間の調和振動子の交換関係

$$\delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \sim [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = \frac{\mathrm{i}}{2}[p(-\vec{k}'), \phi(\vec{k})] + [p(\vec{k}), \phi(-\vec{k}')]$$

より，この項は $\delta^3(0)$ に比例するので発散する．この付加的な定数を落としてハミルトニアンを式 (5.105) で再定義することは，ハミルトニアン (5.102) に正規順序化を施すことと等価である．

■真空状態を表す汎関数 (5.110) について

$$F[\phi] \equiv -\frac{1}{2\hbar}\int \mathrm{d}^3 k'\, \omega(\vec{k}')\phi(\vec{k}')\phi(\vec{k}'), \qquad f(F) \equiv N\mathrm{e}^F$$

とおくと，汎関数 (5.110) は $\Psi_{0_\mathrm{M}}[\phi] = f(F[\phi]) = N\mathrm{e}^{F[\phi]}$ と表される．その汎関数微分は

$$\frac{\delta}{\delta\phi(\vec{k})}\Psi_{0_\mathrm{M}}[\phi] = \frac{\partial f}{\partial F}\frac{\delta F}{\delta\phi(\vec{k})} = N\mathrm{e}^{F[\phi]} \times \left(-2\cdot\frac{1}{2\hbar}\int \mathrm{d}^3 k'\, \omega(\vec{k}')\phi(\vec{k}')\delta^3(\vec{k} - \vec{k}')\right) = -\frac{1}{\hbar}\omega(\vec{k})\phi(\vec{k})\Psi_{0_\mathrm{M}}[\phi]$$

となるので，真空を定義する式 (5.109) が満たされる．

[*109] これは後の式 (5.119) や式 (5.123) 等と Fourier 展開の指数の符号が逆であるものの (式 (5.118–119) の箇所で再論)，得られる式 (5.102) に変わりはない．いずれにせよこの流儀には，最終的に得られる運動量空間の積分に煩わしい 2π の因子が現れないという利点がある．

■1 粒子状態を表す汎関数 (5.111) について　同様に

$$\frac{\delta}{\delta\phi(-\vec{k})}\Psi_{0_{\rm M}}[\phi]=\frac{\partial f}{\partial F}\frac{\delta F}{\delta\phi(-\vec{k})}=N\mathrm{e}^{F[\phi]}\times\left(-2\cdot\frac{1}{2\hbar}\int\mathrm{d}^3k'\,\omega(\vec{k}')\phi(\vec{k}')\delta^3(\vec{k}+\vec{k}')\right)=-\frac{1}{\hbar}\omega(\vec{k})\phi(-\vec{k})\Psi_{0_{\rm M}}[\phi]$$

となるので，式 (5.111) 最右辺において，したがって式 (5.112),(5.114),(5.116–7) において

$$\phi(\vec{k})\quad\to\quad\overline{\phi(\vec{k})}=\phi(-\vec{k}')$$

と置き換える必要があると考えられる*110．すぐ後で見るように，この修正は式 (5.118) を導く上でも理に適っている．

■Fourier 変換した式 (5.118–119) について　あらかじめ慣例通り指数を逆符号にして，Fourier 変換 (5.101) を

$$\phi(\vec{k})=\int\frac{\mathrm{d}^3x}{(2\pi)^{3/2}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\phi(\vec{x})$$

と修正しておこう．同時に 1 粒子状態 (5.111) と連動して，解 (5.117) では $\phi(\vec{k})\to\overline{\phi(\vec{k})}$ と修正される．そこで解 (5.117) において $f(\vec{k})$ はそのままに，上式の複素共役

$$\overline{\phi(\vec{k})}=\int\frac{\mathrm{d}^3x}{(2\pi)^{3/2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\phi(\vec{x})$$

($\phi(\vec{x})$ は実場) のみを代入すると，式 (5.118) が正確に再現される．しかも，ここで用いた Fourier 変換 $\phi(\vec{k})$ の定義は $f(\vec{k})$ の逆変換 (5.119) と整合する．

■スカラー積 (5.125) の確認　関数 $f(x)$ の定義式 (5.124) より，

$$\begin{aligned}\int\mathrm{d}^3x\,\overline{f(x)}\partial_0 f'(x)&=\int\mathrm{d}^3x\frac{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3 2\omega(\vec{k})2\omega(\vec{k}')}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega(\vec{k})t)}\overline{f(\vec{k})}\right]\partial_0\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}'\cdot\vec{x}-\omega(\vec{k}')t)}f'(\vec{k}')\right]\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}{2\omega(\vec{k})2\omega(\vec{k}')}(-\mathrm{i}\,\omega(\vec{k}'))\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega(\vec{k})-\omega(\vec{k}'))t}\left[\int\frac{\mathrm{d}^3x}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}\right]\overline{f(\vec{k})}f'(\vec{k}')\\&=-\frac{\mathrm{i}}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega(\vec{k})}\overline{f(\vec{k})}f'(\vec{k})\end{aligned}$$

と計算できる．最左辺の見かけに反して，実際には最右辺から見て取れるように，上式は既に時刻 t 依存性を持たないことに注意しよう．同様に

$$\int\mathrm{d}^3x\,f'(x)\partial_0\overline{f(x)}=\frac{\mathrm{i}}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega(\vec{k})}\overline{f(\vec{k})}f'(\vec{k})$$

であり，2 式を辺々引くと，式 (5.125) の右辺はスカラー積 (5.122) に一致していることが確かめられる．

*110 備考：真空状態 (5.110) の指数における $\phi(\vec{k})$ の一方をあらかじめ複素共役に置き換えて

$$F[\phi]\equiv-\frac{1}{2\hbar}\int\mathrm{d}^3k'\,\omega(-\vec{k}')\phi(\vec{k}')\phi(\vec{k}')$$

としても，この点は解消されない．実際このとき

$$\frac{\delta F}{\delta\phi(\vec{k})}=-\frac{1}{\hbar}\omega(\vec{k})\phi(-\vec{k}),\qquad\frac{\delta F}{\delta\phi(-\vec{k})}=-\frac{1}{\hbar}\omega(\vec{k})\phi(\vec{k})$$

となるので，式 (5.109) はもはや満たされず，また式 (5.111) はその形すら再現できなくなる．

5.3.2 平行な境界面間の場の伝播関数

ここで Minkowski 空間において，2 つの平行で空間的な平面——例えば $x_1^\mu(\vec{\tau}) = (t_1, \vec{\tau})$ と $x_2^\mu(\vec{\tau}) = (t_2, \vec{\tau})$——から成る面 Σ_t を考えよ．これらの面上の 2 つのスカラー場 $\varphi_1(\vec{\tau}), \varphi_2(\vec{\tau})$ を考えよ．α をこれら 2 つの面と，それらの場の和集合とする；すなわち，α は 2 つの分離した要素から成り，$\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2 = [x_1^\mu(\vec{\tau}), \varphi_1(\vec{\tau})] \cup [x_2^\mu(\vec{\tau}), \varphi_2(\vec{\tau})]$．この α の値に対して，場の伝播関数 (5.96) を考えよ．すると，$W[\alpha] = W[t_1, \varphi_1, t_2, \varphi_2]$．この場合，単に

$$W[t_1, \varphi_1, t_2, \varphi_2] = \langle t_1, \varphi_1 | t_2, \varphi_2 \rangle = \langle \varphi_1 | \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} H_0 (t_1 - t_2)} | \varphi_2 \rangle \tag{5.127}$$

と書ける．伝播関数の計算は，場の量子論が本質的に，各モード k に対する単一の調和振動子の集まりであるという事実によって簡略化される．式 (5.11) で与えられる調和振動子の伝播関数を用いると，いくらかの代数計算により

$$W[t_1, \varphi_1, t_2, \varphi_2] = \mathcal{N} \exp\left\{ -\frac{\mathrm{i}}{2\hbar} \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \omega \left[\frac{(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2) \cos[\omega(t_1 - t_2)] - 2\overline{\varphi_1}\varphi_2}{\sin[\omega(t_1 - t_2)]} \right] \right\} \tag{5.128}$$

が得られ，ここに $\mathcal{N}$ は形式的な発散する規格化因子

$$\mathcal{N} \sim \prod_{\vec{k}} \sqrt{\frac{m\omega(\vec{k})}{\hbar}} \exp\left\{ -\frac{V}{2} \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \ln \left[\sin[\omega(\vec{k})(t_1 - t_2)] \right] \right\} \tag{5.129}$$

である．これは式 (5.97) の形を持つ：式 (3.170) で与えられる古典的な Hamilton 関数を見よ．

Euclid 的な場の伝播関数からの Minkowski 真空　時刻ゼロの状態空間 $\mathcal{H}_{t=0}$ は，場の演算子 $\varphi(\vec{x}) = \phi(\vec{x}, t)$ とハミルトニアン H_0 の定義された Fock 空間である．Fock 空間は可分であり，それ故，可付番の基底を許容する．H_0 の固有値 E_n を持つ固有状態の基底 $|n\rangle$ を選び，演算子

$$W(T) = \sum_n \mathrm{e}^{-\frac{T}{\hbar} E_n} |n\rangle \langle n| \tag{5.130}$$

を考える．大きな T の極限で，これは消えるエネルギーを持つ状態，すなわち Minkowski 真空のみへの射影になる：

$$\lim_{T\to\infty} W(T) = |0_\mathrm{M}\rangle \langle 0_\mathrm{M}| \,. \tag{5.131}$$

汎関数 Schrödinger 表現では，演算子 (5.130) は

$$W[\varphi_1, \varphi_2, T] = \langle \varphi_1 | \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} H_0 (-\mathrm{i}T)} | \varphi_2 \rangle = W[0, \varphi_1, \mathrm{i}T, \varphi_2] \tag{5.132}$$

になる．［第 2 辺に $\sum_n |n\rangle \langle n| = 1$ を挿入すると分かるように，これは $\langle \varphi_1 | W(T) | \varphi_2 \rangle$ である．］したがって，これは場の伝播関数 (5.127) の解析接続であり，Euclid 的な Schrödinger 方程式

$$-\hbar \frac{\partial}{\partial T} W[\varphi_1, \varphi_2, T] = H_{\varphi_1} W[\varphi_1, \varphi_2, T] \tag{5.133}$$

を満たす．［Euclid 的 (euclidean) という形容は，虚時間を用いると時空の計量が Euclid 的になることによる．上式 (5.133) 左辺は $\mathrm{i}\hbar\partial_t|_{t=-\mathrm{i}T} = -\hbar\partial_T$．］真空は (規格化を別にして)

$$\Psi_{0_\mathrm{M}}[\varphi] = \langle \varphi | 0_\mathrm{M} \rangle = \lim_{T\to\infty} W[\varphi, 0, T] \tag{5.134}$$

と得られる［最右辺は $\lim_{T\to\infty}\langle\varphi|W(T)|\varphi_2=0\rangle\sim\langle\varphi|0_{\mathrm{M}}\rangle$ だから*111］.

汎関数 $W[\varphi_1,\varphi_2,T]$ から全ての粒子の散乱振幅を導ける．例えば，2 点関数は Schwinger 関数の解析接続

$$S(x_1,x_2)=\lim_{T\to\infty}\int \mathrm{D}\varphi_1\mathrm{D}\varphi_2\, W[0,\varphi_1,T]\varphi_1(\vec{x}_1)W[\varphi_1,\varphi_2,(t_1-t_2)]\varphi_2(\vec{x}_2)W[\varphi_2,0,T] \tag{5.135}$$

［後の式 (5.137) から分かる］として得られる．これは時刻 $t_1,\cdots,t_n$ を $t=0$ および $t=T$ 面上［間］として，あらゆる n 点関数へと一般化できる；漸近的状態の時間依存性は些末なので，それらは翻って，全ての散乱振幅を計算するのに充分である．［散乱振幅 (S 行列要素) は粒子の Feynman 伝播関数で表せる．ところが粒子の Feynman 伝播関数は (場の) 伝播関数 W で表せる (5.3 節序文では 2 つの伝播関数の区別に注意を促した).］

$W[\varphi_1,\varphi_2,T]$ はよく定義された汎関数積分表現

$$W[\varphi_1,\varphi_2,T]=\int_{\substack{\phi|_{t=T}=\varphi_1\\ \phi|_{t=0}=\varphi_2}}\mathrm{D}\phi\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{\hbar}S_T^E[\phi]} \tag{5.136}$$

を許容する．ここで積分は，固定された境界値を持つ 2 つの面 $t=0$ と $t=T$ に限られた，断片 $\mathcal{R}$ 上の全ての場 ϕ にわたる．作用 $S_T^E[\phi]$ は Euclid 的な作用である．この汎関数積分表現を用いると，Schwinger 関数に対する表現 (5.135) は，領域［$-T<$］$t<t_2, t_2<t<t_1$ および $t_1<t$［$<T$］の 3 つの汎関数積分を 2 つの境界で繋げることによって得られる，よく知られた表現

$$S(x_1,x_2)=\int \mathrm{D}\phi\,\phi(x_1)\phi(x_2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{\hbar}S^E[\phi]} \tag{5.137}$$

［2 点関数 $\langle 0_{\mathrm{M}}|\mathrm{T}\{\phi(x_1)\phi(x_2)\}|0_{\mathrm{M}}\rangle$ の経路積分表現 [427, p.169]］になることに注意せよ．

note　実際，見通しを良くするため，2 点関数 (5.135) に経路積分 (5.136) を代入した式をはっきりと書くと

$$\lim_{T\to\infty}\int \mathrm{D}\varphi_1\mathrm{D}\varphi_2\left(\int_{\varphi_1}^{\varphi=0}\mathrm{D}\phi\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{\hbar}S_T^E[\phi]}\right)\varphi_1(\vec{x}_1)\left(\int_{\varphi_2}^{\varphi_1}\mathrm{D}\phi\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{\hbar}S_{t_1-t_2}^E[\phi]}\right)\varphi_2(\vec{x}_2)\left(\int_{\varphi=0}^{\varphi_2}\mathrm{D}\phi\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{\hbar}S_T^E[\phi]}\right).$$

ここで $\varphi_1(\vec{x}_1)=\phi(t_1,\vec{x}_1)=\phi(x_1),\varphi_2(\vec{x}_2)=\phi(x_2)$ に注意し，また $T\to\infty$ で $S_T^E\to S^E$ とすれば良い．

φ の Fourier 変換 $\tilde{\varphi}$ を用いたその表現は式 (5.128) の解析接続

$$W[\varphi_1,\varphi_2,T]=\mathcal{N}\exp\left\{-\frac{1}{2\hbar}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\omega\left(\frac{(|\tilde{\varphi}_1|^2+|\tilde{\varphi}_2|^2)}{\tanh(\omega T)}-\frac{2\tilde{\varphi}_1\overline{\tilde{\varphi}_2}}{\sinh(\omega T)}\right)\right\} \tag{5.138}$$

である．［単に式 (5.128) で $t_1-t_2=-\mathrm{i}T$ とおけば良い*112.］

力学的な真空 $|0_{\Sigma_t}\rangle$　5.1.4 節のように，面 Σ_t 全体に関する境界状態空間 $\mathcal{K}_{\Sigma_t}$ を考えよ．すなわち，$\mathcal{K}_{\Sigma_t}=\mathcal{H}_t\otimes\mathcal{H}_0^*$ を定義する．Σ_t 上の場を $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$ で表す．Fock 空間の場の基底は，$\mathcal{K}_{\Sigma_t}$ における基底 $|\varphi\rangle=|\varphi_1,\varphi_2\rangle\equiv|\varphi_1\rangle_t\otimes\langle\varphi_2|_0$ を誘導する；$\mathcal{K}_{\Sigma_t}$ のベクトル $|\Psi\rangle$ はこの基底では汎関数 $\Psi[\varphi]=\Psi[\varphi_1,\varphi_2]\equiv\langle\varphi_1,\varphi_2|\Psi\rangle$ として書ける．これは式 (5.42) で定義される境界状態空間の，場の理論的な一般化である．

*111 もし $|\varphi=0\rangle$ を真空 $|0_{\mathrm{M}}\rangle$ と同一視して良ければ，これは $\langle 0_{\mathrm{M}}|0_{\mathrm{M}}\rangle$ に比例することになる．$|\varphi=0\rangle$ は 2 点関数 (5.135) の始・終状態にもなっている．

*112 $\cos(\mathrm{i}\omega T)=\cosh(\omega T),\sin(\mathrm{i}\omega T)=\mathrm{i}\sinh(\omega T)$ を用いる．式 (5.128) における φ は既に k 空間の場である．

式 (5.43)–(5.44) のように，汎関数 W はこの空間における特別な状態を定義する．この状態を $|0_{\Sigma_t}\rangle$ で表し，力学的な真空と呼ぶ．それは $\langle\varphi|0_{\Sigma_t}\rangle \equiv W[t,\varphi_1,0,\varphi_2]$ で定義される．この状態は $t=0$ から t へのダイナミクスを表す．2 つの Hilbert 空間のテンソル積における状態は，2 つの空間の間の線形写像を定義する．$|0_{\Sigma_T}\rangle$ によって定義される $\mathcal{H}_{t=0}$ から $\mathcal{H}_{t=T}$ への線形写像は，ちょうど時間発展 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}HT}$ ［$t\to T$ と訂正］である．

この状態の解釈は有限次元の場合と同じである．2 つの量子状態の空間のテンソル積は，2 つの因子によって表される測定のアンサンブルを表す．したがって，$\mathcal{K}_{\Sigma_t}$ は時刻 0 および時刻 t で行われる全ての測定の可能な結果の空間である．2 つの異なる時刻における測定はダイナミクスで関係付けられる．$\mathcal{K}_t$ は“運動学的な”状態なので，その意味で，それは物理的に実現するものよりも多くの結果を表す．ここでダイナミクスは，観測の可能な結果への制約である．それは測定結果が相関しているという事実を表す．$\mathcal{K}_{\Sigma_t}$ 上の線形汎関数 $\langle 0_{\Sigma_t}|$ はあらゆる観測結果に振幅を割り当てる．この振幅は時刻 0 の結果と時刻 t の結果の間の相関を与える．

したがって，理論は以下のように表される．Hilbert 空間 $\mathcal{K}_t$ は Σ_t 上で成される測定の全ての可能な結果を表す．ダイナミクスは単一のブラ状態 $\langle 0_{\Sigma_t}| : \mathcal{K}_t \to C$ で与えられる．状態 Ψ で表される与えられた測定結果の集まりに対して，量 $\langle 0_{\Sigma_t}|\Psi\rangle$ はそれらの測定間の相関確率振幅を与える．

式 (5.131) を用いると，力学的な真空と Minkowski 真空の間の関係

$$\lim_{t\to\infty} |0_{\Sigma_{-\mathrm{i}t}}\rangle = |0_{\mathrm{M}}\rangle \otimes \langle 0_{\mathrm{M}}| \tag{5.139}$$

を得る (ブラ/ケットの不一致は見かけ上であるに過ぎない，と言うのも，3 つの状態は異なる空間に属しているから)．

note　式 (5.49) の箇所と同様に考える．

$$\langle\varphi_1|W(t)|\varphi_2\rangle = W[0,\varphi_1,\mathrm{i}t,\varphi_2] = \langle\varphi|0_{\Sigma_{-\mathrm{i}t}}\rangle = (|\varphi_2\rangle_0 \otimes \langle\varphi_1|_t)\cdot|0_{\Sigma_{-\mathrm{i}t}}\rangle$$

の最左辺は $t\to\infty$ とすると，式 (5.131) より $\langle\varphi_1|0_{\mathrm{M}}\rangle\langle 0_{\mathrm{M}}|\varphi_2\rangle$ に移行する．これと最右辺を比較すると，上式 (5.139) を得る．

5.3.3　任意の境界面

これまでは，2 つの平行で空間的な平面から成る境界面のみを考えてきた．この制約は通常の Minkowski 空間上の QFT では充分かつ便利であるものの，一般共変な文脈では意味がない．したがって任意の境界面を考えることが必要であり，そこで面 Σ が，2 つの平行な平面から成る代わりに，時空 $\mathcal{R}$ における (充分に標準的な (regular)) 任意の有限領域である場合への，定式化の拡張を研究しよう［有限性は 5.3.4 節で議論］．

Σ を 3 次元球面のトポロジー (ただし，一般には，幾何学ではない) を持つ，Minkowski 空間における閉じた，連結した 3 次元面とし，また $\Sigma=\partial\mathcal{R}$ とする．φ を Σ 上のスカラー場として，汎関数

$$W[\varphi,\Sigma] = \int_{\phi|_\Sigma=\varphi} \mathrm{D}\phi\,\mathrm{e}^{-S^E_{\mathcal{R}}[\phi]} \tag{5.140}$$

を考える．積分は Σ 上で値 φ をとる $\mathcal{R}$ 上の全ての 4 次元の場にわたり，指数の作用は 4 次元の積分が $\mathcal{R}$ にわたる Euclid 的な作用である．自由な理論では積分はよく定義された Gauss 積分であって，評価できる．Σ 上の境界値 φ を伴う古典的な場の方程式は，一般に形状 $\mathcal{R}$ に対する Green 関数の積分によって得られる，解 $\phi_{\mathrm{cl}}[\varphi]$ を持つ省略的な (elliptic) 系を成す．積分における変数変換はそれを自明な Gauss 積分と $\mathrm{e}^{-S^E_{\mathcal{R}}[\varphi_{\mathrm{cl}}]}$ の

積にする［式 (5.128) の一般化］．ここに $S^E_{\mathcal{R}}[\varphi]$ は場の理論的な Hamilton 関数――境界条件 φ で決まるバルク場の作用――である．

$W[\varphi,\Sigma]$ は Minkowski 領域 (regime)［Euclid 化しない理論］においても同様に定義できる．Σ を Minkowski 空間における長方形の箱として，$\varphi=(\varphi_{\rm out},\varphi_{\rm in},\varphi_{\rm side})$ を空間的な底面と時間的な側面における場の要素とする．時間に依存する境界条件 $\varphi_{\rm side}$ を伴う箱の中で定義される場の理論を考え，$U[\varphi_{\rm side}]$ を理論の (時間に依存する) ハミルトニアンによって生成される，$t=0$ から $t=T$ への発展演算子とする［発展は箱の内部］．すると

$$W[\varphi,\Sigma]\equiv\langle\varphi_{\rm out}|U[\varphi_{\rm side}]|\varphi_{\rm in}\rangle \tag{5.141}$$

と書ける．特に，もし $\varphi_{\rm side}$ が時間について一定ならば，W は Euclid 的な汎関数からの解析接続によって得られる．より一般的に，形式的な定義

$$W[\varphi,\Sigma]=\int_{\phi|_\Sigma=\varphi}\mathrm{D}\phi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_{\mathcal{R}}[\phi]} \tag{5.142}$$

を書ける．

$W[\varphi,\Sigma]$ は 3.3.3 節で定義した空間 $\mathcal{G}$ 上の関数である．この空間は，閉じた面における古典的な場の測定の全ての可能なアンサンブル，すなわち，局所的な実験の最小のデータを表す．形式的には，$\mathcal{G}$ 上の関数は量子状態空間 K を定義し，$W[\varphi,\Sigma]$ は K における特別な共変な真空状態 $|0\rangle$ を定義する．

局所 Schrödinger 方程式　$W[\varphi,\Sigma]$ はその Σ 依存性を支配する局所的な汎関数方程式を満たす．$\vec{\tau}$ を Σ 上の任意の座標としよう．面と境界の場を $\Sigma:\vec{\tau}\mapsto x^\mu(\vec{\tau})$ および $\varphi:\vec{\tau}\mapsto\varphi(\vec{\tau})$ と表す．$n^\mu(\vec{\tau})$ を Σ に対する単位長さの法線とする．すると，

$$n^\mu(\vec{\tau})\frac{\delta}{\delta x^\mu(\vec{\tau})}W[\varphi,\Sigma]=H(\vec{\tau})W[\varphi,\Sigma] \tag{5.143}$$

であり［式 (5.133) と違い面上の各位置 $\vec{\tau}$ で局所的に定義］，ここに $H(\vec{x})$ はハミルトニアン密度

$$H(\vec{x})=g^{-\frac{1}{2}}\pi^2(\vec{x})+g^{\frac{1}{2}}(|\vec{\nabla}\varphi|^2+m^2\varphi^2) \tag{5.144}$$

において，$\pi(\vec{x})$ を $-\mathrm{i}\delta/\delta\varphi(\vec{x})$ に置き換えて得られる演算子である．ここに，g は Σ に誘導された計量の行列式であり，ノルムはこの計量に関してとる ([145, 146] を見よ)．［以上，本稿次節で補足する．］局所 Hamilton–Jacobi 方程式 (3.186) はこの方程式のアイコナール近似と見なせる．W はパラメータ付けに依らないので，

$$\frac{\partial x^\mu(\vec{\tau})}{\partial\vec{\tau}}\frac{\delta}{\delta x^\mu(\vec{\tau})}W[\varphi,\Sigma]=\vec{P}(\vec{\tau})W[\varphi,\Sigma] \tag{5.145}$$

が得られ，ここに線運動量は $\vec{P}(\vec{\tau})=-\vec{\nabla}\varphi(\vec{\tau})\delta/\delta\varphi(\vec{\tau})$．［右辺に負号を補い $\vec{\nabla}\phi\to\vec{\nabla}\varphi$ とした．式 (3.188) と同様に導ける．］もし Σ が空間的ならば，式 (5.143) は (Euclid 的な) 朝永–Schwinger 方程式である．

我々は式 (5.143) のような局所的な方程式が，あらゆる場の理論において成り立つと期待する．もし理論が一般共変ならば，汎関数 W は Σ に依存しないはずであり，したがって方程式の左辺は消え，場の変数に作用するハミルトニアン演算子だけが，すなわち Wheeler–DeWitt 方程式が残る．［ただしこの場合の H は非相対論的なハミルトニアン密度 (5.144) である．しかしそれが量子 GR の文脈 (4.83),(6.3) における相対論的ハミルトニアンの対応物である．］

5.3.3 節について

■局所 Schrödinger 方程式 (5.143) について　文献 [415, p.97] のノートで導いたように，GR におけるスカラー場のハミルトニアン密度は，ラプス N，シフト N^a，面 Σ に誘導された計量 q_{ab} を用いて

$$\mathcal{H}(\vec{\tau})=\frac{N}{2}H(\vec{\tau})+N^a\pi\partial_a\varphi,\qquad H(\vec{\tau})\equiv\left(q^{-1/2}\pi^2+q^{1/2}q^{ab}\partial_a\varphi\partial_b\varphi+m^2\varphi\right)(\vec{\tau})=(\text{式 }(5.144))$$

と表せる ($q \equiv \sqrt{\det(q_{ab})}, \partial_a \equiv \partial/\partial\tau^a$)．ここで WdW 方程式として，ハミルトニアン $\int \mathrm{d}^3\tau \mathcal{H}(\vec{\tau})$ の代わりにその密度を用いた局所的な関係式

$$\mathcal{H}(\vec{\tau})W[\varphi,\Sigma]=0$$

を考える．このとき $\mathcal{H}(\vec{\tau})$ において $\pi(\vec{\tau}) \to -\mathrm{i}\delta/\delta\varphi(\vec{\tau})$ とし，次いで $W[\varphi,\Sigma]$ への作用を念頭に式 (5.145) を考慮すると

$$N^a\pi\partial_a\varphi \;\to\; -\mathrm{i}N^aP_a \;\to\; \mathrm{i}N^a\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau^a}\frac{\delta}{\delta x^\mu}$$

と置き換えられる．ここで我々は面 Σ が $x^0=\mathrm{const}$ で与えられる特別な座標系を仮定してはいないので，$\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau^a}$ は面 Σ に沿う成分と，面の法線 n^μ 方向の成分を持つ．ところが閉曲面 Σ に沿う微分同相写像は面 Σ そのものの配置を，したがって $W[\varphi,\Sigma]$ を不変に留めるため，n^μ 方向成分のみが汎関数微分に寄与を持つと考えられる．すると

$$0=\mathcal{H}(\vec{\tau})W[\varphi,\Sigma]=\left(H(\vec{\tau})+\mathrm{const}\times n^\mu\frac{\delta}{\delta x^\mu}\right)W[\varphi,\Sigma]$$

となって，方程式 (5.143) の形を再現できる．(虚数単位 i は Euclid 化に伴って消去できる可能性がある．)

最後にここで出発点としたハミルトニアン密度 $\mathcal{H}(\vec{\tau})$ は，相対論的なハミルトニアン (密度) (3.194) とは (表記も含めて) 異なることに注意する．ただし本文末尾で補足したように，量子 GR の文脈 (4.83),(6.3) に照らせば，この点は問題ないかもしれない．

5.3.4　粒子とは何か？

Σ を 2 つの底面が面 $t=0$ と $t=T$ 上にある，半径 R，高さ T の円筒 Σ_{RT} に選ぶ．それぞれ $t=0$ と $t=T$ 上で定義された，コンパクト台を持つ関数 φ_1 と φ_2 が与えられたとき，2 つのコンパクト台が円筒の底面に含まれるように，常に R を充分大きく選ぶことができる．すると

$$\lim_{R\to\infty}W[\varphi_1,\varphi_2,\Sigma_{RT}]=W[\varphi_1,\varphi_2,T] \tag{5.146}$$

である，と言うのも，Euclid 的な Green 関数は素早く減衰し，有限の距離に円筒の側面を持つことの影響は，R が増大するにつれて素早くゼロになるからである．方程式 (5.135) はどのように散乱振幅を $W[\varphi_1,\varphi_2,T]$ から計算できるかを示している．他方，式 (5.146) は Σ を有限領域の境界として，$W[\varphi_1,\varphi_2,T]$ がどのように $W[\varphi,\Sigma]$ から得られるかを示している．したがって，$W[\varphi,\Sigma]$ の知識により粒子の散乱振幅を計算できる．我々は $\mathcal{R}$ が相互作用領域を含むとして，このことが相互作用する場の理論の摂動展開においてもなお真であると期待する．

極限 $T,R\to\infty$ は，真空と粒子の散乱振幅を計算するのに，任意に大きな面 Σ が必要であることを示しているように見える．しかし $W[\varphi_1,\varphi_2,T]$ の真空射影子への収束は式 (5.130) から課せられ，それは質量ギャップあるいは粒子の Compton 振動数の指数であることに注意せよ．こうして実験室スケールの T は任意に正確な収束を保証するのに全く充分である．Euclid 的な領域では，回転対称性は同じことが $R\to\infty$ の極限に対しても成り立つことを意味する．こうして，極限は R と T を実験室のスケールに選ぶことで置き換えられる．(少なくとも解析接続を必要としない真空に対しては．)

真空と粒子状態の伝統的な概念は本来的に大域的である．それらを局所的な汎関数 $W[\varphi,\Sigma]$ から復元できることは，いかにして可能なのか？ これは曲がった時空上の QFT と量子重力において役割を演じる，重要な問である．この問に答えるために，現実の粒子の検出器は**有限**に拡がっていることに注意せよ．もし粒子が大域的に定義される対象ならば，有限に拡がった検出器はいかにして粒子を検出し得るのか？

答は 2 つの異なる粒子の概念が存在することである．Fock 粒子状態は“大域的”であるのに対し，局在した検出器によって検出される物理的状態 (検出を表す局所的な演算子の固有状態) は“局所的”粒子状態である．局所的な粒子状態は (適切なトポロジーの下で) 大域的な粒子状態と，類似しているが異なっている．伝統的な QFT では，検出器によって検出される局所的な粒子状態を便宜的に近似するために，我々は大域的な粒子状態を用いる．大域的な粒子状態は，実に，はるかに扱うのが容易である．

したがって，真空と粒子の伝統的な定義における大域的な性質は，粒子の物理的性質から課せられるのではない：それは便宜のために適用される近似である．極限 $R \to \infty$ と $T \to \infty$ を有限の巨視的な R と T で置き換えると，我々は**正確に**大域的な真空または n 粒子状態を失うけれど，それでもなお局所的な実験を記述することができる．時空の有限領域への QFT の制限は，この領域に制限された実験を完全に記述しなければならない．

簡単な有限系における大域的および局所的な粒子　大域的粒子と局所的粒子の区別は非常に簡単な系で説明できる．2 つの弱く結合した調和振動子を考えよ．系の全ハミルトニアンを

$$H = \frac{1}{2}({p_1}^2 + {q_1}^2) + \frac{1}{2}({p_2}^2 + {q_2}^2) - 2\lambda q_1 q_2 = H_1 + H_2 - \lambda V \tag{5.147}$$

とする［運動量変数 p の上のドットを除いた］．第 1 の振動子のみと相互作用し，量 H_1 を測定する測定器具を考えよ．系の Hilbert 空間は $\mathcal{H} = L_2[R^2, \mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2]$．この空間上で，量 H_1 は演算子 $-\hbar^2\partial^2/\partial{q_1}^2 + {q_1}^2$ で表される．演算子は離散的なスペクトル $E = (n+1/2)\hbar$ を持つ．もし測定の結果が固有値 $(1 + 1/2)\hbar$ ならば，“第 1 の振動子に 1 つの局所的粒子がある”と言うことにする．特に 1 局所的粒子状態は，第 1 の振動子に 1 つの局所的粒子があり，第 2 の振動子には局所的粒子がない，H_1 と H_2 の共通固有状態

$$\psi_{\mathrm{local}}(q_1, q_2) = q_1 \mathrm{e}^{-({q_1}^2 + {q_2}^2)/2\hbar} \tag{5.148}$$

である．［上式 (5.148) は q_1 に関して第 1 励起状態，q_2 に関して基底状態の固有関数になっている．］

次に，全ハミルトニアン H を対角化しよう．これは系の基準モード，すなわち振動数 ${\omega_\pm}^2 = 1 \pm \lambda$ を持つ $q_\pm = (q_1 \pm q_2)/\sqrt{2}$ を見つけることで，容易に実行できる［本稿次節で補足］．H の固有値はそれ故 $E = \hbar(n_+\omega_+ + n_-\omega_- + 1)$．$|n_+, n_-\rangle$ を対応する固有状態，また $N = n_+ + n_-$ を大域的粒子数と呼ぶ．特に，$N = 1$ の全ての状態，すなわち $|\psi\rangle = \alpha\,|1,0\rangle + \beta\,|0,1\rangle$ の形のあらゆる状態を“1 大域的粒子状態”と呼ぶ．これはまさに QFT における 1 粒子状態の定義であることに注意せよ：1 粒子状態はモードの 1 つに単一の量子がある状態 $|k\rangle$ の，任意の線形結合である．特に，1 大域的粒子状態 $|\psi\rangle = (|1,0\rangle + |0,1\rangle)/\sqrt{2}$ を考えよ．これは第 1 の振動子上に最も局在した大域的粒子である．直接の計算により，λ について 1 次のオーダーでは

$$\psi_{\mathrm{global}}(q_1, q_2) = \left(q_1 + \frac{\lambda}{4} q_2\right) \mathrm{e}^{-({q_1}^2 + {q_2}^2 - 2\lambda q_1 q_2)/2\hbar} \tag{5.149}$$

で与えられる［以上，本稿次節で補足］．

2 つの状態 ψ_{local} と ψ_{global} は異なり，また異なる物理的意味を持つ．状態 ψ_{global} は QFT において 1 粒子状態と呼ばれる種類の状態である．それは第 1 の振動子上に最も局在した 1 粒子状態である．他方，我々の測定器具が第 1 の振動子のみと相互作用するならば，我々が測定するのは ψ_{global} ではなく，変数 q_1 にのみ作用する演算子の固有状態 ψ_{local} である．

QFT では 2 種類の状態を混同する．定式化において我々は ψ_{global} のような，大域的粒子状態を用いる．しかしながら，粒子の検出器は空間において局在している．(局所的な測定器具は，例における変数 q_1 のみと相互作用する器具のように，有限領域における場の成分のみと相互作用できる．) したがって，それらは ψ_{local} のような粒子状態を測定する．厳密に言えば，したがって，粒子の検出器によって測定される粒子状態の，大域的粒子状態としての解釈は誤りである，と言うのも，大域的粒子状態は局所的な測定器具の固有状態には決してなり得ず，したがって局所的な器具によって検出され得ないからである．

それにも関わらずこの解釈を成功裡に用いることができる理由は，状態 ψ_{local} と ψ_{global} が非常に似ていることである．例では，Hilbert ノルムにおけるそれらの距離は λ について 1 次のオーダーでは消える：

$$(\psi_{\mathrm{global}}, \psi_{\mathrm{local}}) = 0(\lambda). \tag{5.150}$$

物理的状態 ψ_{local} を記述するのに ψ_{global} を用いる際に生じる誤差は，もし λV が小さければ小さい．場の理論的な場合には，λV は検出器の内側の領域と検出器の外側の領域の相互作用エネルギーを表す；興味のある全ての状態に対して，このエネルギーは状態自体のエネルギーと比べて非常に小さい．我々は測定器具によって検出される局所的粒子状態を，より扱いやすい大域的粒子状態を用いて実効的に近似できる．

他方，議論が示しているように，大域的粒子状態は現実に観測される粒子を扱う上で**必要とされる**のではない；それは単なる便利な近似である．もし局所的な定式化を用いて局所的粒子状態を定義できれば，我々は間違いを犯していない：むしろ我々は，平坦な空間において便利であったが，一般共変な文脈では有効でないかもしれない近似を用いないだけである．

5.3.4 節について

■基準振動の固有振動数 $\omega_\pm$ (教科書 p.197, l.1) について　$q_\pm = (q_1 \pm q_2)/\sqrt{2}$ を逆に解くと

$$q_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_+ \pm q_-), \qquad p_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_+ \pm p_-).$$

そこでハミルトニアン (5.147) は

$$H = H_+ + H_-, \qquad H_\pm = \frac{1}{2}({p_\pm}^2 + {\omega_\pm}^2 {q_\pm}^2)$$

と書き換えられ (以下，複号同順)，教科書 p.197，l.1 の固有振動数は

$${\omega_\pm}^2 = 1 \mp 2\lambda, \qquad \therefore \omega_\pm = 1 \mp \lambda + O(\lambda^2)$$

と修正される (文献 [425, p.86] と整合).

■最も第 1 の振動子に局在した 1 大域的粒子状態 (5.149) について　固有状態 $|n_+, n_-\rangle = |1,0\rangle\,, |0,1\rangle$ の固有関数は

$$\langle q_+, q_- | 1, 0\rangle \sim \left({\omega_+}^{1/4} \cdot {\omega_+}^{1/2} q_+ \cdot \mathrm{e}^{-\omega_+ {q_+}^2/2\hbar}\right)\left({\omega_-}^{1/4} \mathrm{e}^{-\omega_- {q_-}^2/2\hbar}\right) = {\omega_+}^{3/4}{\omega_-}^{1/4} q_+ \mathrm{e}^{-(\omega_+ {q_+}^2 + \omega_- {q_-}^2)/2\hbar},$$
$$\langle q_+, q_- | 0, 1\rangle \sim \left({\omega_+}^{1/4} \mathrm{e}^{-\omega_+ {q_+}^2/2\hbar}\right)\left({\omega_-}^{1/4} \cdot {\omega_-}^{1/2} q_- \cdot \mathrm{e}^{-\omega_- {q_-}^2/2\hbar}\right) = {\omega_+}^{1/4}{\omega_-}^{3/4} q_- \mathrm{e}^{-(\omega_+ {q_+}^2 + \omega_- {q_-}^2)/2\hbar}.$$

ここで上記の修正した式 $\omega_\pm \simeq 1 \mp \lambda$ を利用すると，最右辺の係数は λ の 1 次近似で ${\omega_\pm}^{3/4}{\omega_\mp}^{1/4} \simeq 1 \mp \frac{1}{2}\lambda$ となる (複号同順). また指数の中身は厳密に

$$\omega_+ {q_+}^2 + \omega_- {q_-}^2 = \frac{1}{2}(1-\lambda)({q_1}^2 + {q_2}^2 + 2q_1 q_2) + \frac{1}{2}(1+\lambda)({q_1}^2 + {q_2}^2 - 2q_1 q_2) = {q_1}^2 + {q_2}^2 - 2\lambda q_1 q_2$$

と書き換えられる. そこで係数 α, β を用いて 2 つの固有関数の線形結合を作ると，

$$\begin{aligned}\psi_{\mathrm{gloval}} &= \langle q_+, q_- | \psi\rangle = \langle q_+, q_-| \cdot (\alpha\,|1,0\rangle + \beta\,|0,1\rangle) \\ &\sim \left[\left\{(\alpha+\beta) - \frac{\lambda}{2}(\alpha-\beta)\right\} q_1 + \left\{(\alpha-\beta) - \frac{\lambda}{2}(\alpha+\beta)\right\} q_2\right] \mathrm{e}^{-({q_1}^2 + {q_2}^2 - 2\lambda q_1 q_2)/2\hbar}.\end{aligned}$$

これが第 1 の振動子の 1 局所的的粒子状態 (5.148) と最も“近い”のは，q_2 の係数 $\{\cdots\}$ において $\alpha - \beta = 0$ となる場合であることが見て取れる. すると規格化条件 $1 = \langle\psi|\psi\rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2$ より，正の実数 $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$ をとり，最も第 1 の振動子に局在した状態を

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle + |0,1\rangle), \qquad \psi_{\mathrm{global}} \sim \left(q_1 - \frac{\lambda}{2} q_2\right) \mathrm{e}^{-({q_1}^2 + {q_2}^2 - 2\lambda q_1 q_2)/2\hbar}$$

とできる[*113]. よって式 (5.149) における q_2 の係数は $\lambda/4 \to -\lambda/2$ と修正する必要があると考えられる.

*113 直観的には 2 つの振動子 $q_\pm$ に均等に粒子を見出すとき，第 2 の振動子 $q_2 = (q_+ - q_-)/\sqrt{2}$ を最もよく“凍結”できると想像できる.

5.3.5　境界状態空間 K と共変な真空 $|0\rangle$

最後に，Σ を時空における閉じた 3 次元の面として，変数 $\alpha = (\Sigma, \varphi)$ の空間 $\mathcal{G}$ を考えよ．関数 $\psi[\alpha] = \psi[\Sigma, \varphi]$ の空間を K と呼ぶ．この空間は時空の有限領域の境界上における測定の，全ての可能な結果のアンサンブルを表す．測定は Σ を決定する時空位置の測定とともに，φ (または φ の関数) を決定する場 (または粒子) の測定を含む．

$$\langle \Sigma, \varphi | 0 \rangle = W[\Sigma, \varphi] \tag{5.151}$$

で与えられる，K における特別な状態 $|0\rangle$ がある．もし汎関数積分が定義できるならば，これは式 (5.142) で与えられる．状態 $|0\rangle$ はダイナミクスを完全に表す．これから見るように，QFT のこの定式化は量子重力においても意味を成す．

一般に，K は $\mathcal{G}$ 上の関数の空間である．$\mathcal{G}$ が古典的な解を決定するのに必要なデータ――有限次元の場合における 2 事象；場の理論の場合における，3 次元の閉じた面を成す事象の集合――の空間であることを思い出そう．

有限次元の理論の場合には，何らかの区間 (interval) における古典的な解は，$\mathcal{C}$ における **2** つの事象によって決定される．量子論では，完全な実験は **2** つの事象，準備と量子測定より成る．この場合，$\mathsf{K} = L_2[\mathcal{G}] = L_2[\mathcal{C} \times \mathcal{C}] \sim L_2[\mathcal{C}] \otimes L_2[\mathcal{C}] = \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$ は **2** つの量子事象を表す空間であるのに対し，$\mathcal{K} = L_2[\mathcal{C}]$ は単一の量子事象を表す空間である．

場の理論的な場合には，領域 $\mathcal{R}$ における古典的な解は，閉じた 3 次元の面を成す $\mathcal{C}$ における無限の事象によって，すなわち時空における 3 次元の面 $\Sigma = \partial\mathcal{R}$ とその上の場 φ によって決定される．量子論では，完全な実験は Σ 全体上の測定 (または仮定) を必要とする．この場合，$\mathsf{K} = L_2[\mathcal{G}]$ は境界面 Σ 全体の観測とその上の測定を表す空間である．

$\mathcal{R}$ の境界は 2 つ (あるいはより多く) の連結した要素 Σ から成っていて良い．この場合，K は各要素に関する単一の因子 $\mathcal{K}$ のテンソル積に分解できる．空間 $\mathcal{K}$ はこのとき，連結した面 Σ とその上の場に対する汎関数の空間である．Wheeler–DeWitt 方程式は局所的なので，それは $\mathcal{K}$ 上および K 上とで同じに見える．したがって，K と $\mathcal{K}$ の区別は有限次元の場合よりも場の理論的な文脈でははるかに重要でない．空間 K は閉じた面 Σ 上の実験を特徴付ける完全なデータというアイデアに関係しているのに対し，空間 $\mathcal{K}$ は“初期データ”の面 Σ というアイデアに関係している．

5.3.6　格子スカラー積，結節因子およびスピン・ネットワーク状態

興味ある場の量子論は，自由な理論の周りの摂動展開として構築できる．もう 1 つの方法は格子を用いて，大きいが有限の自由度の数を持つ切断理論 (cut-off theory) を定義することである．このとき格子間隔がゼロとなる適切な極限として，物理的な予言が復元されると期待できる．ここでは格子ゲージ理論におけるスカラー積の定義を説明する，と言うのも，同じ技法が量子重力において用いられるからである．

L 本のリンク l と N 個の結節点 n を持つ 3 次元の格子 Γ を考えよ．この格子上でコンパクト Yang–Mills 群 G に対して Yang–Mills 理論を定義するために，各リンク l に群の要素 U_l を充て，G^L を G の L 個の複製の積，また $\mathrm{d}U_l \equiv \mathrm{d}U_1 \cdots \mathrm{d}U_L$ を群上の Haar 測度［例えば文献 [418, § 3.5] を見よ］として，Hilbert 空間 $\tilde{\mathcal{K}}_\Gamma = L_2[G^L, \mathrm{d}U_l]$ を考える．$\tilde{\mathcal{K}}_\Gamma$ における量子状態は L 個の群の要素の関数 $\Psi(U_l)$ である．2 つの状態のス

カラー積は

$$\langle\Psi|\Phi\rangle \equiv \int \mathrm{d}U_1 \cdots \mathrm{d}U_L\, \overline{\Psi(U_1,\cdots,U_L)}\Phi(U_1,\cdots,U_L) \tag{5.152}$$

で与えられる．$\tilde{\mathcal{K}}_\Gamma$ における状態の直交基底は以下のように得られる．G のユニタリーな既約表現を j でラベルし，表現の行列要素を $(R^j(U))^\alpha_\beta$ とする．Peter–Weyl 定理の教えるところによれば，$\langle U|j,\beta,\alpha\rangle = (R^j(U))^\alpha_\beta$ で定義される状態 $|j,\alpha,\beta\rangle$ は $L_2[G,\mathrm{d}U]$ における直交基底を成す．

note : Peter–Weyl 定理　文献 [416, p.103,p.105] の説明が分かりやすい．特に SU(2) の関数と見なされるところの Wigner 行列の要素 $D^j_{mn}(U)$ が直交性

$$\int \mathrm{d}U\, \overline{D^{j'}_{m'n'}(U)} D^j_{mn}(U) = \frac{1}{2j+1}\delta^{jj'}\delta_{mm'}\delta_{nn'}$$

を満たすことの証明は，文献 [428, § 4-2, § 7-7] にある．特に有限群の表現の直交性関係は文献 [429, p.19] で確認済みである．

$\tilde{\mathcal{K}}_\Gamma$ における基底はそれ故，$\langle U_l|j_l,\beta_l,\alpha_l\rangle = \prod_l (R^{j_l}(U_l))^{\alpha_l}_{\beta_l}$ で定義される状態

$$|j_l,\beta_l,\alpha_l\rangle \equiv |j_1,\cdots,j_L,\beta_1,\cdots,\beta_L,\alpha_1,\cdots,\alpha_L\rangle \tag{5.153}$$

で与えられる．

理論は格子上の局所 Yang–Mills 変換の下で不変である．それらは各結節点 n に対する群の要素 λ_n に依存する．リンク l は始結節点 l_i から終結節点 l_f へ至るとして，変数 U_l はゲージ変換の下で $U_l \mapsto {\lambda_{l_\mathrm{i}}}^{-1} U_l \lambda_{l_\mathrm{f}}$ と変換する．［ホロノミーの変換則 (2.1.5 節と式 (6.19)) と比べると，両端の因子は逆と考えられる (本稿次節も参照).］よってゲージ不変な状態は

$$\Psi(U_l) = \Psi({\lambda_{l_\mathrm{i}}}^{-1} U_l \lambda_{l_\mathrm{f}}) \tag{5.154}$$

を満たすものである．これらの状態は $\tilde{\mathcal{K}}_\Gamma$ の線形な部分空間 $\tilde{\mathcal{K}}^0_\Gamma$ を成す：$\tilde{\mathcal{K}}^0_\Gamma$ は理論のゲージ不変な状態の，(固定した時刻における) Hilbert 空間である．$\tilde{\mathcal{K}}^0_\Gamma$ における状態の直交基底は，結節因子 (intertwiner) の概念を用いて得られる．

結節因子　N 個の既約表現 $j_1,\cdots,j_N$ を考えよ．それらの Hilbert 空間のテンソル積

$$\mathcal{H}_{j_1\cdots j_N} = \mathcal{H}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{j_N} \tag{5.155}$$

を考えよ．この空間は既約成分の和に分解できる．特に，$\mathcal{H}^0_{j_1\cdots j_N}$ を不変なベクトルの成す部分空間，すなわち自明な表現で変換する部分空間とする．自明な表現が分解に現れる重複度を k として，この空間は k 次元である．それは，もちろん，Hilbert 空間であり，それ故その中で直交基底を選べる．この基底の要素 i を表現 $j_1,\cdots,j_N$ 間の“結節因子”と呼ぶ．

より明示的には，$\mathcal{H}_{j_1\cdots j_N}$ の要素は各表現につき 1 つの添字を持つテンソル $v^{\alpha_1\cdots\alpha_N}$ である．$\mathcal{H}^0_{j_1\cdots j_N}$ の要素は，その全ての添字に対する G の作用の下で不変なテンソル $v^{\alpha_1\cdots\alpha_N}$ である．すなわち，それらは

$$R^{(j_1)\alpha_1}{}_{\beta_1}(U)\cdots R^{(j_N)\alpha_N}{}_{\beta_N}(U) v^{\beta_1\cdots\beta_N} = v^{\alpha_1\cdots\alpha_N} \tag{5.156}$$

を満たす．結節因子 $v_i^{\alpha_1\cdots\alpha_N}$ は k 個のそのような不変テンソルの組であり，$\mathcal{H}^0_{j_1\cdots j_N}$ のスカラー積において直交する．すなわち，それらは

$$\overline{v_i^{\alpha_1\cdots\alpha_N}} v_{i'\alpha_1\cdots\alpha_N} = \delta_{ii'} \tag{5.157}$$

を満たす．

もし空間 $\mathcal{H}_j$ が表現 j を担うならば，その双対空間 $\mathcal{H}_j^*$ は双対表現 (dual representation) j^* を担う．n 個の双対表現 $j_1^*, \cdots, j_n^*$ と m 個の表現 $j_1, \cdots, j_m$ の間の結節因子 i は空間 $\left(\otimes_{i=1,n}\mathcal{H}_{j_i}^*\right) \otimes \left(\otimes_{k=1,m}\mathcal{H}_{j_k}\right)$ の不変テンソル，すなわち共変な写像

$$i: \ \left(\otimes_{i=1,n}\mathcal{H}_{j_i}\right) \longrightarrow \left(\otimes_{k=1,m}\mathcal{H}_{j_k}\right), \tag{5.158}$$

あるいは n 個の下付き添字と m 個の上付き添字を持つ不変テンソルである．

ここで格子において，各リンク l に表現 j_l を，各結節点 n に (結節点に接続するリンクに充てられた表現のテンソル積における) 結節因子 i_n を充てる．組 $s = (\Gamma, j_l, i_n)$ は“スピン・ネットワーク”と呼ばれる．各スピン・ネットワーク s は

$$\langle U_l | s\rangle = \psi_s(U_l) = \prod_l R^{j_l}(U_l) \cdot \prod_n i_n \tag{5.159}$$

によって状態 $|s\rangle$ を定義し，ここにドット (raised dot) は添字の縮約を表す．ドットの両側において各結節点-リンクの組に対して 1 つの添字 (式には示していない) があるので，添字は一致していることに注意せよ［本稿次節で補足］．状態 $|s\rangle$ は $\tilde{\mathcal{K}}_\Gamma^0$ における完全な直交基底を成す［6.3.1 節末尾］:

$$\langle s | s'\rangle = \delta_{ss'} \tag{5.160}$$

この基底は量子重力において主要な役割を演じる．

5.3.6 節について

■スピン・ネットワーク状態を定義する式 (5.159) について　格子ではないが，例として図 18(a),(b) に示す向きを持ったグラフに対して，スピン・ネットワーク $s = (\Gamma, j_l, i_n)$ を考える*114．まず表現 j_l を担う各リンク線 l に，行列要素 $R^{(j_l)\alpha_l}{}_{\beta_l}(U_l)$ を充てる．次に結節因子 i_n として，試しに

- 結節点 n に入射する線の持つ行列の上付き添字　$\alpha, \alpha', \cdots$
- 結節点 n から射出する線の持つ行列の下付き添字　$\beta, \beta', \cdots$

と縮約される因子 $v_{i_n,\alpha\alpha'\cdots}^{\beta\beta'\cdots}$ を考える (図 18 参照)．この選択は式 (6.29) 前後の記述と反しているものの，このとき初めてスピン・ネットワーク状態のゲージ不変性が示される (下記と 6.3.1 節のノートを参照)．このとき結節因子 (intertwiner) はその名の通り，結節点に集まるリンク線を繋ぎとめる (intertwine) 役割を果たす．またネットワークの与えられた表現 j_l に対して，結節因子には表現 j_l に関する上付き添字と双対表現 j_l^* に関する下付き添字の両方が自然に必要となる．向き付けした図 18 のグラフ (a),(b) に対して，実際にリンク線の因子と結節因子の縮約 (5.159)(式 (6.30) に対応) を書き下すと，それぞれ順に

$$\begin{aligned}
\psi_s^{(\mathrm{a})} =& v_{i_1}^{\beta_1\beta_2\beta_3}\left(R^{(j_1)\alpha_1}{}_{\beta_1}(U_1)R^{(j_2)\alpha_2}{}_{\beta_2}(U_2)R^{(j_3)\alpha_3}{}_{\beta_3}(U_3)\right)v_{i_2,\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, \\
\psi_s^{(\mathrm{b})} =& v_{i_1,\alpha_3}^{\beta_1\beta_2}\left(R^{(j_1)\alpha_1}{}_{\beta_1}(U_1)R^{(j_2)\alpha_2}{}_{\beta_2}(U_2)R^{(j_3)\alpha_3}{}_{\beta_3}(U_3)\right)v_{i_2,\alpha_1\alpha_2}^{\beta_3}
\end{aligned}$$

となる．第 1 式は具体例 (6.32) と整合している．

なお式 (5.159) の ψ_s は局所ゲージ変換の下で不変であると考えられる (6.3.1 節も見よ)．実際，接続のゲージ変換 $A \to A_\lambda$ に伴ってその汎関数は $\Psi(A) \to \Psi(A_{\lambda^{-1}})$ と変換する (6.2.2 節)．さらにこのときリンク線の

*114 ループ量子重力の文脈では，第 1 義的には各リンク線に充てられるホロノミー (平行移動関数) は向きの概念を持つ．また実際にスピン・ネットワーク状態 (6.30) は 6.3 節冒頭の向きを持つグラフ Γ に対して定義されている．

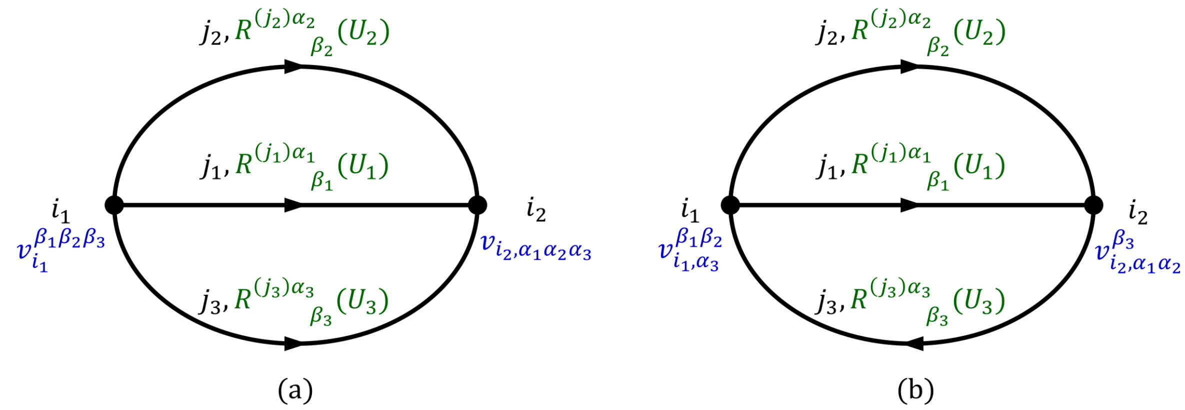


図 18　スピン・ネットワーク状態を定義する式 (5.159) について

因子は，2.1.5 節ないし式 (6.19) に従って

$$R^{(j_l)}(U_l) \ \to \ R^{(j_l)}({\lambda_{l_\mathrm{f}}}^{-1}U_l\lambda_{l_\mathrm{i}}) = R^{(j_l)}({\lambda_{l_\mathrm{f}}}^{-1})R^{(j_l)}(U_l)R^{(j_l)}(\lambda_{l_\mathrm{i}})$$

と変換すると考える (5.3.6 節本文の式は f, i の添字が逆)．ここから新たに生じる両端の結節点の因子は，式 (5.156) より結節因子を，したがって ψ_s を不変に留めることが期待される．例えば，

$$\begin{aligned}
\psi_s^{(\mathrm{b})} \ \to v_{i_1,\alpha_3}^{\beta_1\beta_2} &\left(R^{(j_1)\alpha_1}{}_{\alpha'_1}({\lambda_2}^{-1})R^{(j_1)\alpha'_1}{}_{\beta'_1}(U_1)R^{(j_1)\beta'_1}{}_{\beta_1}(\lambda_1)\right) \\
&\times\left(R^{(j_2)\alpha_2}{}_{\alpha'_2}({\lambda_2}^{-1})R^{(j_2)\alpha'_2}{}_{\beta'_2}(U_2)R^{(j_2)\beta'_2}{}_{\beta_2}(\lambda_1)\right) \\
&\times\left(R^{(j_3)\alpha_3}{}_{\alpha'_3}({\lambda_1}^{-1})R^{(j_3)\alpha'_3}{}_{\beta'_3}(U_3)R^{(j_3)\beta'_3}{}_{\beta_3}(\lambda_2)\right)v_{i_2,\alpha_1\alpha_2}^{\beta_3} \\
=&\left(R^{(j_1)\beta'_1}{}_{\beta_1}(\lambda_1)R^{(j_2)\beta'_2}{}_{\beta_2}(\lambda_1)R^{(j_3)\alpha_3}{}_{\alpha'_3}({\lambda_1}^{-1})v_{i_1,\alpha_3}^{\beta_1\beta_2}\right) \\
&\times\left(R^{(j_1)\alpha'_1}{}_{\beta'_1}(U_1)R^{(j_2)\alpha'_2}{}_{\beta'_2}(U_2)R^{(j_3)\alpha'_3}{}_{\beta'_3}(U_3)\right) \\
&\times\left(R^{(j_1)\alpha_1}{}_{\alpha'_1}({\lambda_2}^{-1})R^{(j_2)\alpha_2}{}_{\alpha'_2}({\lambda_2}^{-1})R^{(j_3)\beta'_3}{}_{\beta_3}(\lambda_2)v_{i_2,\alpha_1\alpha_2}^{\beta_3}\right) \\
=&v_{i_1,\alpha'_3}^{\beta'_1\beta'_2}R^{(j_1)\alpha'_1}{}_{\beta'_1}(U_1)R^{(j_2)\alpha'_2}{}_{\beta'_2}(U_2)R^{(j_3)\alpha'_3}{}_{\beta'_3}(U_3)v_{i_2,\alpha'_1\alpha'_2}^{\beta'_3} \\
=&\psi_s^{(\mathrm{b})}.
\end{aligned}$$

5.4　量子重力

最後に，ここで量子重力の形式的な構造をスケッチする．ここで言及する量の実際の数学的な定義は，本書の第 II 部で取り組む課題である．

5.4.1　量子力学における遷移振幅

背景の存在下では，QFT は漸近的な粒子状態に対して散乱振幅と断面積をもたらし，それらは実験室で得られたデータと比較される．これらの振幅の伝統的な理論的定義は無限に拡がる時空領域を含み，背景の対称な性質に頼っている．背景独立な文脈では，この措置は問題がある．例えば 1.1.4 節で言及したように，背景独立性は直ちに，あらゆる 2 点関数 $W(x,y)$ が $x \neq y$ に対して定数になることを意味する．いかにして定式化は測定器具の位置を制御し得るか？

単純なスカラー場の理論の文脈では，場の境界での固有状態 φ と，$\mathcal{R}$ を限る 3 次元の面 Σ の幾何学に依存する汎関数 $W[\varphi,\Sigma]$ を用いて，局所的な物理を表せることを上で見た．実験室で検出される粒子の散乱振幅を含め，有限の領域 $\mathcal{R}$ で行われる測定に関する物理的な予言は，$W[\varphi,\Sigma]$ を用いて表せる．この汎関数は Schrödinger 方程式の局所的なバージョンを満たす．Σ の幾何学は粒子の検出器の相対的な時空位置をコードしている．$W[\varphi,\Sigma]$ は時空における有限の時空領域 $\mathcal{R}$ にわたる汎関数積分で表せる．Euclid 的な領域では，汎関数積分はよく定義され，Minkowski 真空状態を決定するのに用いることができる．

この技法は量子重力に，すなわち微分同相不変な文脈に拡張できる．微分同相不変性の帰結は，汎関数 W が Σ の位置と独立であることが判明することである．一見すると，これは背景独立な QFT に典型的な解釈の曖昧さをもたらすように見える：W の Σ からの独立性は上で言及した，$W(x,y)$ の x と y からの独立性と等価である．

しかし注意深く考えると，そうではないことが分かる．境界の場は計量に他ならない重力場を含み，したがって 4.1.2 節で例示したように，W の引数は境界面の計量，すなわち，検出器の相対的な時空位置を表している．したがって一般共変性により Σ とともに失われた検出器の相対的な位置は，φ とともに復活する，と言うのもここで φ は重力場の境界値を含んでいるからである．重力場の境界値はちょうど φ と Σ が演じる 2 重の役割を演じる．実際，これはまさに一般相対性理論の概念的な新奇性の核心である：位置の測定と力学変数の測定の間に，アプリオリな区別は存在しない．

より形式的には，背景独立でない理論では空間 $\mathcal{G}$ は組 (Σ,φ) の空間だが，一般相対論的な理論では空間 $\mathcal{G}$ は単に閉じた滑らかな面 (differential surface) 上の場の空間である．純粋な GR では，$\mathcal{G}$ を閉じた面上の重力的な接続 A の空間にとれる．対応して，空間 K は閉じた面上の場 A の汎関数の空間である．これらの汎関数は面の 3 次元の微分同相写像の下で不変である．本書の第 II 部で，空間 K をあからさまに構築する予定である．前の節で説明したように，汎関数 W は K における特別な状態 $|0\rangle$ を定める．これは共変な真空状態であり，それは理論のダイナミクスの情報を含んでいる．

本書の第 II 部で発展させる理論の重要な結果は，3 次元面上の重力場の固有状態が滑らかな場でないことである．それらは特徴的な Planck 尺度の離散性を示す．これらの固有状態は，本書の第 II 部で詳しく説明する予定の“スピン・ネットワーク” s でラベルされる，K における特別な基底 $|s\rangle$ を定める．各状態 $|s\rangle$ は“空間の量子幾何学 (quantum geometry)”，すなわち 3 次元面上の重力場の完全な測定の可能な結果を表す．我々は W を特別な基底で表す：

$$W(s) = \langle 0|s\rangle\,. \tag{5.161}$$

したがって，空間の Planck 尺度の離散性により，重力的な文脈では，$W[\varphi,\Sigma]$ の類似物は汎関数 $W(s)$ である．正準量子理論における $W(s)$ の定義は後の式 (7.37) で与えられる．これから見るように，共変な真空状態 $|0\rangle$ は単に，結節点とリンクのないスピン・ネットワーク状態に関係している．経歴にわたる和としての $W(s)$ の定義は，後の式 (9.21) で与えられる．

特に興味のある場合は，境界面 Σ を 2 つの要素に分離できる場合である．例えば，それは非連結で良い．対応して，s を $(s_{\rm out}, s_{\rm in})$，また関連する振幅を

$$W(s_{\rm out}, s_{\rm in}) = \langle 0|s_{\rm out}, s_{\rm in}\rangle = \langle s_{\rm out}|P|s_{\rm in}\rangle \tag{5.162}$$

と書くことができ，ここに P は Wheeler–DeWitt 方程式の解への射影子である．経歴にわたる和としての $W(s_{\rm out}, s_{\rm in})$ の表現は，$s_{\rm in}$ から $s_{\rm out}$ へ至る経歴を用いて与えられる．

5.4.2 空騒ぎ (Much ado about nothing)：真空

note：**節タイトルについて** 『空騒ぎ (Much ado about nothing)』は Shakespeare (シェイクスピア) の喜劇である．直訳では「何もないことに関する大騒ぎ」ぐらいの意味であり，真空に関する議論が大いにあるという意味が掛けられていると考えられる．

“真空状態”の概念は背景時空上の QFT において中心的な役割を演じる．真空はその上に Fock 空間が構築されるところの基礎である．他方，重力では，真空の概念は非常に曖昧である．この事実は量子重力が伝統的な QFT と著しく異なる一因となっている．しかしながら，これは困難ではない：量子論がよく定義されているためには，真空の特別な概念は必要でない．調和振動子の量子論には真空状態があるが，自由粒子の量子論はそうではない．この観点からは，一般相対性理論は調和振動子よりも自由粒子に似ている．

古典的 GR の術語さえも，真空の概念に関して混乱を招くことに注意せよ：相対論的な語法では，源の項のない Einstein 方程式の**全ての**解は“真空解 (vacuum solutions)”と呼ばれる．

我々は量子重力において 3 つの異なる真空の概念を用いる．

共変な真空 (Covariant vacuum) 1 つ目は 5.1.4 節と 5.3.2 節で定義した非摂動的な，あるいは共変な真空状態 $|0\rangle$ である．これはダイナミクスを定義する，境界状態空間における状態である．直観的には，それは与えられた境界データによって限られる領域上の経歴にわたる和で定義される．距離の (metric) 境界データを空間的に選べば，これは Hartle–Hawking 状態である．我々が考えている文脈では，代わりに，境界面は時空における有限の 4 次元領域を限り，また状態 $|0\rangle$ は量子ダイナミクスをコードする背景独立な方法である．

空 (から) の状態 (Empty state) 状態 $|\emptyset\rangle$ は空間の体積がゼロとなる，すなわち物理的な空間がない，重力場の運動学的な量子状態である．これから見るように，それは共変な真空状態 $|0\rangle$ と関係している．

Minkowski 真空 (Minkowski vacuum) 真空の異なる概念は Minkowski 真空状態 $|0_{\rm M}\rangle$ である．Minkowski 真空を表す量子状態 $|0_{\rm M}\rangle$ は，ダイナミクスだけからは選び出されない．代わりにそれは，与えられた世界線に沿う固有時間 T として定義される重力場の非局所的な関数に，正準共役な変数であるエネルギー H_T の，最低の固有状態として選び出される．これは特定の Lorentz 時間 x^0 の選択の下で，エネルギーを運動量 p_0 に同定することとアナロガスである．量子重力においてこの状態を見出すために，式 (5.49) と式 (5.139) で採用した手続きを用いることができる．このことは第 9 章の終わりで手短に議論する．代わりに，漸近的に平坦な文脈では $|0_{\rm M}\rangle$ が，ADM エネルギーの最低の固有状態になることを期待する．

真空の概念はエネルギーの概念と密接に関係している．真空は最低エネルギーの状態として定義できる．GR ではエネルギーの概念は曖昧であり，エネルギーの定義における曖昧さは真空を定義する際の曖昧さに反映される．実際，我々は GR においていくつかのエネルギーの概念を区別できる．

正準エネルギー (Canonical energy) 正準エネルギー，すなわち座標時間の並進の生成子 H は，あらゆる一般相対論的な理論において恒等的に消える．この意味では，量子重力の全ての物理的状態は真空状態である．

物質のエネルギー (Matter energy) 非重力的な場のエネルギー・運動量テンソル T^I_μ はよく定義されており，したがって非重力的な場のエネルギー $E_{\rm matter} = T^0_0$ はよく定義されている．古典的な GR では，真空解は $E_{\rm matter} = 0$ を持つ解である．この意味では，真空状態は物質のない全ての純粋な重力の物理的状

態である．

重力的なエネルギー (Gravitational energy)　重力場のエネルギー E_{gravity} は，厳密に言えば，Einstein 方程式の時間–時間成分の左辺 (のマイナス) である；よって，Einstein 方程式の時間–時間成分は $E_{\mathrm{gravity}}+E_{\mathrm{matter}}=0$ になる．すなわち，全エネルギーは消える；例えば，[147] を見よ．

ADM エネルギー (ADM energy)　重力場が近似的に Minkowski 的である領域に囲まれた孤立系に，エネルギー E_{ADM} を関係付けることができる．そのような系は Einstein 方程式の漸近的に平坦な解で記述できる．そのような系に対して，我々はエネルギーを，漸近的な Minkowski 空間における時間並進の生成子 E_{ADM} に同定できる．漸近的な平坦性が与えられると，E_{ADM} は Minkowski 解によって最小化される．この意味では，Minkowski 解は漸近的に Minkowski 的な理論の“真空”である．

エネルギーと真空の概念が GR においてこれほど曖昧である事実は，驚くべきことではない．これらの概念に本質的なことはない：量子論とその予言はそれらがなくとも意味を成す．エネルギーと真空の概念は，我々がたまたま特別な対称性—— Newton 的または特殊相対論的な時間における並進不変性——を持つ宇宙の領域に住んでいるという，単に偶然的な事実によって，非一般相対論的な物理で重要な役割を演じる．

5.5　* 補完

5.5.1　熱時間仮説と冨田フロー

3.4 節で議論した熱時間仮説は上手く QM へ，そして非常に上手く QFT へ拡張される．

QM　QM では，時間の流れ (flow) は

$$A_t=\alpha_t(A)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}tH_0}A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0} \tag{5.163}$$

で与えられる．統計的状態は密度行列 ρ で記述される．それは

$$\rho[A]=\mathrm{tr}[A\rho] \tag{5.164}$$

を通じて，あらゆる観測量 A の期待値を決定する．この方程式は観測量の代数上の正の汎関数 ρ を定義する．量子 Gibbs 状態 ρ_0 と H_0 の関係は式 (3.202) と同様である．すなわち

$$\rho_0=N\mathrm{e}^{-\beta H_0}. \tag{5.165}$$

［以上，例えば文献 [421, § 3.4] を見よ．］相関確率は

$$W_{AB}(t)=\rho_0[\alpha_t(A)B]=\mathrm{tr}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tH_0}A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0}\mathrm{e}^{-\beta H_0}] \tag{5.166}$$

と書ける［規格化定数 N は省略］．定義から直ちに

$$\rho_0[\alpha_t(A)B]=\rho_0[\alpha_{-t-\mathrm{i}\beta}(B)A], \tag{5.167}$$

すなわち

$$W_{AB}(t)=W_{BA}(-t-\mathrm{i}\beta) \tag{5.168}$$

が帰結することに注意せよ．

note：上式 (5.167) の確認　H_0 どうしは交換するので“指数法則”$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(-t-\mathrm{i}\beta)H_0}=\mathrm{e}^{\pm\beta H_0}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}tH_0}$ が成り立つことに注意すると，式 (5.166) とより

$$\begin{aligned}\rho_0[\alpha_{-t-\mathrm{i}\beta}(B)A]=&\mathrm{tr}[\mathrm{e}^{\beta H_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0}B\mathrm{e}^{-\beta H_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tH_0}A\mathrm{e}^{-\beta H_0}]\\=&\mathrm{tr}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tH_0}A\cancel{\mathrm{e}^{-\beta H_0}\mathrm{e}^{\beta H_0}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0}B\mathrm{e}^{-\beta H_0}]=\rho_0[\alpha_t(A)B]:(5.167)\end{aligned}$$

を得る．ただし第 2 の等号ではトレースの巡回対称性を用いた．

関係 (5.167) を満たす代数上の状態 ρ_0 はフロー α_t に関して KMS (久保 (Kubo)–Martin–Schwinger) であると言われる．

熱時間仮説を容易に一般化できる．一般的な状態 ρ が与えられたとき，熱ハミルトニアンは

$$H_\rho=\ln\rho \tag{5.169}$$

で定義され［式 (3.205) のように右辺に負号を要するはず；演算子 ρ の対数の定義についても文献 [421, pp/247–248]］，また熱時間のフローは

$$A_{t_\rho}=\alpha_{t_\rho}(A)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_\rho H_\rho}A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_\rho H_\rho} \tag{5.170}$$

で定義される．ρ は熱時間のフローに関する KMS 状態である．

QFT：冨田フロー　QFT では，有限温度の状態はゼロ温度［絶対零度］の状態と同じ Hilbert 空間には属さない．H_0 はこれらの有限温度の状態上では発散する演算子である．これは期待されることである，と言うのも，熱的状態には一定のエネルギー密度，したがって発散する全エネルギー H_0 があるからである．したがって，式 (5.165) は QFT では意味を成さない．それでは，どのように Gibbs 状態を特徴付けるか？ この問題の解決策はよく知られている：式 (5.167) はなお代数的な枠組みにおいて Gibbs 状態 ρ_0 を特徴付けるのに用いることができ，統計的 QFT の基本的前提に採ることができる：観測量の代数上の Gibbs 状態 ρ_0 は時間フロー $\alpha(t)$ に関する KMS 状態である．

熱時間仮説を場の理論に拡張したければ，式 (5.169) を利用できないことが帰結する．この問題を回避できるか？ **一般の**熱的状態 ρ に関して KMS であるフロー α_{t_ρ} はあるか？ 驚くべきことに，答はイエスである．冨田 (Tomita) による有名な定理はまさに，von Neumann 代数[*115]上のあらゆる[*116]状態 ρ が与えられたとき，式 (5.167) が成り立つような，ρ の冨田フロー (Tomita flow) と呼ばれるフロー $\alpha(t)$ が常に存在することを述べている．

この定理により式 (3.205) を QFT に拡張できる：熱時間フロー α_{t_ρ} は一般に統計的状態 ρ の冨田フローとして定義される．

このように熱時間仮説は直ちに QFT に拡張できる：我々が“時間の流れ (flow)”と呼ぶものは単に，巨視的なパラメータを用いて記述するときに世界が偶然そうなるところの，統計的状態 ρ の冨田フローである．

フロー α_{t_ρ} は状態 ρ に依存する．ところが，von Neumann 代数は ρ に依らない，より抽象的な時間の流れの概念も有している．それは内部 (ユニタリー) 自己同型写像 (automorphism) の下での自己同型写像 (automorphism) の同値類から成る，外部自己同型写像の 1 パラメータ群によって与えられる．Alain Connes はこの群が ρ に依らないことを示した．それは代数自体にのみ依存する．観測

[*115] 観測量の代数は一般に C^* 代数である．量子状態空間の Hilbert ノルムで閉包する (closing in) ことにより von Neumann 代数を得る．

[*116] あらゆる**分離した** (*separating*) 状態 ρ．分離した密度行列はゼロ固有値を持たない．これは第 3 章の脚注*83 で述べた条件と QFT 等価である．

量の代数構造にのみ依存し，それ以外の何にも依存しない抽象的な時間の流れの概念を，この群が供するという事実を，Connes は強調している．

熱時間仮説と熱時間の概念はまだ大規模には調査されていない．それらは時間のない基本的な力学と，我々の時間において発展する世界の経験を関係付ける鍵となるかもしれない．

5.5.2　物理的スカラー積の“選択”

Wheeler-DeWitt 方程式 (5.64) の解は線形空間 $\mathcal{H}$ を成す．この空間はそれを Hilbert 空間にするスカラー積を自然に備えている．このスカラー積は，“運動学的”スカラー積と表現される $\mathcal{K}$ におけるスカラー積と区別するために，しばしば“物理的”スカラー積と表現される．

運動学的および物理的なスカラー積の間の関係は，ハミルトニアン H に依る．空間 $\mathcal{H}$ は固有値ゼロに対応する H の固有空間である．解が存在するためには，H のスペクトルはそれ故ゼロを含まねばならない．もしゼロが H の**離散的な**スペクトルの一部ならば，$\mathcal{H}$ は $\mathcal{K}$ の真部分空間 (proper subspace) である：すなわち，Wheeler-DeWitt 方程式 (5.64) の解は $\mathcal{K}$ において規格化可能な状態である．この場合，物理的スカラー積は運動学的スカラー積と同じであり，複雑なことはない．しかしもしゼロが H の**連続的な**スペクトルの一部ならば，$\mathcal{H}$ は $\mathcal{S}'$ に属し $\mathcal{K}$ には属さない一般化された固有ベクトルから成る．すなわち，Wheeler-DeWitt 方程式 (5.64) の解は $\mathcal{K}$ において規格化不可能な状態である．この場合，物理的スカラー積は運動学的スカラー積と異なる．それは何か？

量子重力 (および量子宇宙論) の文献には，物理的スカラー積の定義の問題に関係した特定の混乱がある．例えば，この問題は時間の概念に関係しているという記述がよくある．これは非相対論的な理論には特別な時間変数があり，また $\mathcal{K}$ から始めて $\mathcal{H}$ を定義する問題は現れないという見解から導かれる，概念的な誤りである．しかし $\mathcal{H}$ における積を定義する問題が時間のない系に現れる事実は，時間変数がない限りそれを解決できないことを意味しない．

実は，この問題には多数の解決策があり，全ては本質的に等価である．選択は多様である；以下は提示されている解決策のいくつかである．

(i) 上で説明したように，スカラー積は射影子の行列要素を用いて $\mathcal{H}$ 上で定義できる．

(ii) 以下は問題に関する一般的な定理である．もし H が Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ 上の自己共役な演算子ならば，

$$\mathcal{K} = \int_S \mathrm{d}s \, \mathcal{H}_s \tag{5.171}$$

と書ける．ここに S は H のスペクトル，$\mathrm{d}s$ はこのスペクトルの測度，また $\mathcal{H}_s$ は固有値 s でラベルされる Hilbert 空間の族である．Hilbert 空間にわたるこの積分の意味は以下である：あらゆるベクトル $\psi \in \mathcal{K}$ は族 ψ_s として書くことができ，ここに全ての s に対して $\psi_s \in \mathcal{H}_s$ であり，また

$$(\psi, \phi)_{\mathcal{K}} = \int_S \mathrm{d}s \, (\psi_s, \phi_s)_{\mathcal{H}_s} \tag{5.172}$$

であって，ここに $(\ ,\ )_{\mathcal{H}}$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ におけるスカラー積であり，この時点で，積分は通常の数値積分である．この定理の重要性は，**Hilbert** 空間 $\mathcal{H}_0$ があると述べていることである．すなわち，$H\psi = 0$ の解空間上のスカラー積である．

以下は定理がどのように機能するかの簡単な例である．空間 $\mathcal{K} = L_2[R^2, \mathrm{d}x\mathrm{d}y]$ と自己共役な演算子 $H = -\mathrm{i}\,\mathrm{d}/\mathrm{d}y$ を考えよ．$H\psi = 0$ あるいは

$$-\,\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\psi(x, y) = 0 \tag{5.173}$$

の解は，y に関して定数であり $\mathcal{K}$ において規格化不可能な関数 $\psi(x, y)$ である．ところが，分解 (5.171),(5.172) は直接的である：

$$\mathcal{K} = \int_R \mathrm{d}y \, \mathcal{H}_y \tag{5.174}$$

であり，ここに $\mathcal{H}(y) = L_2[R, \mathrm{d}x]$．実際

$$(\psi, \phi)_{\mathcal{K}} = \int_{R^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \, \overline{\psi(x, y)}\phi(x, y) = \int_R \mathrm{d}y \, (\psi_y, \phi_y)_{\mathcal{H}_y} \tag{5.175}$$

であり，ここに $\psi_y(x) = \psi(x, y)$ および

$$(\psi_y, \phi_y)_{\mathcal{H}_y} = \int_R \mathrm{d}x \, \overline{\psi_y(x)}\phi_y(x). \tag{5.176}$$

式 (5.173) の解の空間は $\mathcal{H}(0)$ であり，自然な Hilbert 構造 $\mathcal{H}(0) = L_2[R, \mathrm{d}x]$ を持つ．

(iii) 以下は別の解決策である．H と交換する，$\mathcal{K}$ における自己共役な演算子 A_i の組を選ぶ．これらは空間 $\mathcal{H}$ 上でよく定義されている，と言うのも，もし $H\psi = 0$ ならば $H(A_i\psi) = A_iH\psi = 0$ だからである．ここで，演算子 A_i が物理的スカラー積において自己共役であることを**要求する**．充分な数の演算子に対して，この要求は $\mathcal{H}$ のスカラー積を固定する．

上の (ii) で与えた例では，$H = -\mathrm{i}\mathrm{d}/\mathrm{d}y$ と交換する自明な自己共役な演算子は x と $-\mathrm{i}\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ である．これらは x だけの関数の空間上でよく定義されている．x と $-\mathrm{i}\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ を自己共役にする，この関数の空間上におけるただ 1 つのスカラー積がある：$L_2[R, \mathrm{d}x]$ のそれである．

(iv) とりわけ H が単一の演算子ではなく多くの成分を持つ場合に，この問題に取り組む便利な方法は，“群平均 (group averaging)” の技法で与えられる．Wheeler–DeWitt 方程式が $H_i\psi = 0$ の形を持ち，ここに自己共役な演算子 $H_i\psi = 0$ ［H_i の誤記か］は $\mathcal{K}$ 上における群のユニタリーな作用 U の生成子であると仮定せよ．$\mathcal{S}$ はこの作用の下で不変であり，群上で，あるいは少なくとも，$\mathcal{K}$ 上における群の軌道上で不変な測度を見出せることも仮定せよ．このとき式 (5.58) の射影子 $P : \mathcal{S} \to \mathcal{H}$ を一般化でき：

$$P = \int_U \mathrm{d}\tau\, U(\tau), \tag{5.177}$$

また物理的スカラー積を

$$(P\psi, P\phi)_{\mathcal{H}} \equiv (P\psi)(\phi) = \int_U \mathrm{d}\tau\, (\psi|U(\tau)|\phi)_{\mathcal{K}} \tag{5.178}$$

と書ける．

他の技法もまた確かにある．これは同じアイデアが異なる名前の下で (そして数学的な正確さの異なる水準で)，独立に何度も再出現する分野である．これら全ての技法は一般に等価である．もしそれらが異なる場合があれば，我々は物理的に正しい選択を見つけるために，物理的な議論に頼らねばならないだろう．

5.5.3 実数条件とスカラー積

3.2.7 節では GR で有用と判明する戦略である，複素数と実数の混ざった力学変数を用いる可能性を説明した．ここでは，同じ選択で量子論に何が起きるかを説明する．特に，実数条件が量子論において演じる重要な役割を説明する．3.2.7 節で議論した簡単な例，つまり座標 x と $z = x - \mathrm{i}p$ で記述される自由粒子を思い出そう．複素変数 z の波動関数 $\psi(z)$ を用いて量子論を書ける．Schrödinger 方程式は直ちに

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi(z,t)}{\partial t} = H_0\left(-\hbar\frac{\partial}{\partial z}, z\right)\psi(z,t) = -\frac{1}{2m}\left(\hbar\frac{\partial}{\partial z} + z\right)^2\psi(z,t) \tag{5.179}$$

を与える (式 (3.134) を見よ)．

note　むしろ式 (3.133) を見る．上式 (5.179) 第 2 辺において運動量を $\mathrm{i}x = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial z}$ とおき，引数 x の符号を修正した．上式 (5.179) 最右辺と式 (5.181) 右辺にも対応する符号の修正を施した．教科書の式 (5.183) 右辺では符号が修正されている．

解の完全な族は

$$\psi_k(z,t) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(z,t;k)} \tag{5.180}$$

で与えられ，ここに $S(z,t;k)$ は式 (3.135) で与えられる．

note　ここでも指数の符号を $\psi_k(z,t) = \mathrm{e}^{+\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(z,t;k)}$ と修正して初めて，これは Schrödinger 方程式を満たす．実際この ψ_k に対しては

$$p = \mathrm{i}(z - x) = \mathrm{i}\left(z + \hbar\frac{\partial}{\partial z}\right) \to \mathrm{i}\cdot\mathrm{i}k = -k$$

となる．後の式 (5.186) もこのように修正されるはずであり，またこの措置は 3.2.7 節における運動量 k の解釈とも整合する．
ところが指数の符号を上式 (5.180) のようにとらなければ，内積 (5.185) はその直後で説明されている好ましい性質を持たない．

ここで量子論では，実数条件 (3.138) は演算子の関係

$$z + z^\dagger = -2\hbar\frac{\partial}{\partial z} \tag{5.181}$$

になると述べる．古典的な複素共役をとること (conjugation) は共役操作 (operation) に翻訳されることに注意せよ：これは実の量が自己共役な演算子によって表されるために必要である．さて，式 (5.181) はスカラー積を指定した後でのみ意味を成す，と言うのも，ダガー操作はスカラー積を用いて定義されており，したがってスカラー積に依存するからであり．実際，実数条件 (5.181) が成り立つことを要求することは，理論のスカラー積に条件を課すことに等しい．f を特定したい関数として，

$$(\psi, \phi) = \int \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}\, f(z,\bar{z})\overline{\psi(z)}\phi(z) \tag{5.182}$$

の形のスカラー積を調べよう．式 (5.181) を課すと［f に作用させると］，f に対する条件

$$(z + \bar{z})f(z,\bar{z}) = -2\hbar\frac{\partial}{\partial z}f(z,\bar{z}) \tag{5.183}$$

を与える．これは

$$f(z,\bar{z}) = \mathrm{e}^{-(z+\bar{z})^2/4\hbar} \tag{5.184}$$

を与える［代入により確かめられる］．状態 (5.180) がこの積に関してよく定義されているかを確認しよう．式 (5.180) (簡単のため $t = 0$) と式 (5.184) を式 (5.182) に代入すると

$$(\psi_k, \psi_{k'}) = \int \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}\, \mathrm{e}^{-(z+\bar{z})^2/4\hbar}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(k\bar{z} - \frac{\mathrm{i}}{2}\bar{z}^2\right)}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(k'z + \frac{\mathrm{i}}{2}z^2\right)} \tag{5.185}$$

を与える．単純な変数変換により，z の虚部に関する積分は有限であり，z の実部に関する積分は $\delta(k,k')$ に比例する．

note　ここでは $z = x + \mathrm{i}y$ と書くと (実部 x と本文の座標 x との混同に注意)，測度は $\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z} = -2\mathrm{i}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ である [427, p.172]．また被積分関数を指数法則でまとめると，式 (5.180):$\psi_k(z,t) = \mathrm{e}^{\mp\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(z,t;k)}$ に応じて

$$\begin{aligned}\hbar\times(\text{指数}) &= -x^2 \pm \mathrm{i}\left\{k(x-\mathrm{i}y) - \frac{\mathrm{i}}{2}(x^2-y^2)\cancel{-xy}\right\} \mp \mathrm{i}\left\{k'(x+\mathrm{i}y) + \frac{\mathrm{i}}{2}(x^2-y^2)\cancel{-xy}\right\} \\ &= \begin{cases}\mathrm{i}(k-k')x - (y^2-y) & (\text{上側の符号}) \\ -2x^2 - \mathrm{i}(k-k')x + (y^2-y) & (\text{下側の符号})\end{cases}\end{aligned}$$

となる (複号同順)．よって教科書通りの符号に対して，x-積分はデルタ関数 $\delta(k,k')$ を生じ，y-積分は有限の Gauss 積分になる．

したがって状態 ψ_k は一般化された状態の標準的な連続の直交基底を成す．それらは明らかに運動量の固有状態である，と言うのも

$$p\psi_k = \mathrm{i}(x-z)\psi_k = \mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial z} - z\right)\psi_k = k\psi_k. \tag{5.186}$$

［この式を上記で修正した.］実際，我々が行ってきたことは，量子論的な粒子の標準的な Hilbert 空間の単なる書き換えである．

見かけは誤解を招きやすいことに注意せよ．例えば，$k=0$ に対して状態 ψ_k は

$$\psi_0(z,t) = \mathrm{e}^{+z^2/2\hbar} \tag{5.187}$$

となる［式 (5.180) のように指数に負号があれば］．これはひどく規格化不可能であるように見えるが，そうではない．これはよく定義された一般化された状態である，と言うのも，測度における負の指数は状態における正の指数を補償するからである．

5.6　* 量子論の関係的解釈

量子力学はこれまでに最も成功した科学的理論の 1 つである．しかしながら，その解釈は議論の余地がある．理論は実際には物理的世界について，我々に何を教えているのか？ この問は理論の初期である 1930 年代に盛んであって，今日新たな興味を生み出している，活発な議論を引き起こした．

実験的に成功している理論の解釈が討論され得るという可能性は，驚くべきことではない：例は科学の歴史にたくさんある．例えば大いなる科学的革命が，Copernicus 系の有効性は地球が**本当に**運動している証拠と捉えねばならないかどうかという討論に駆り立てられた．より最近では，特殊相対性理論への Einstein の有名な貢献は，ほとんど単に，既存の有効な数学的定式化 (Lorentz 変換) の物理的解釈 (同時性は相対的である) を理解することから成っている．これらの事例では，量子力学の場合のように，過度に厳格に経験主義的な立場は，理論の内容を予言された数値のリストへと矮小化することによって，問題を完全に回避できたかもしれない．しかしそれでは，科学は進歩しなかっただろう．

量子論は初め，ミクロな対象 (原子，電子，光子)，およびそれらの性質を測定するために作られたマクロな (巨視的) 器具と，それらが相互作用する仕方を記述するために構築された．そのような相互作用は“測定”と呼ばれた．理論は数学的形式によって整備され，そのような測定の個々の結果の確率を計算できるようになった．この目的のためだけに用いれば，理論は何の困難も生じない．しかし巨視的な器具自体——実に，世界のあらゆる物理系——も量子力学に従うと我々は期待し，そのことは理論の内部に矛盾を生じるように見える．ここではこれらの明白な矛盾と，可能な解答を論じる．この解答は，量子論が実際には物理的世界について，我々に何を教えているのかという問に対する，明確な答を与える．

5.6.1　観測される観測者

測定　系 S の変数 A の“測定”は，その O への影響が相互作用の時刻で変数 A が持つ値に依存するような，系 S と別の系 O の間の相互作用である．我々は変数 A が“測定された”と言い，その値 a は“測定結果”であると言う．例えば，S を O に影響する粒子とし，この影響の効果は粒子の位置に依存するとし，q を影響の瞬間の位置の値としよう．このとき我々は位置 Q が測定され，測定結果は q であると言う．

“測定”という術語と，測定の状況を説明する一般的な術語 (“系 (System)”の S と“観測者 (Observer)”の O) は非常に誤解を招く，と言うのも，それらは S を意図的に“観測”し，それに関するデータを集める器具を用いている人間を想起させるからである．上で与えた測定の定義には，“人間的”あるいは“意図的”なものは何もない．系 O は人間でも，特別な“器具”でも，巨視的でもある必要はない．測定された値が蓄えられる必要はない．あらゆる 2 つの物理的な系の相互作用は測定である．系 S の測定された値は，相互作用が O にもたらす効果を決定する変数である．これは古典論でも量子論でも正しい．

古典的状態と量子状態　古典力学では，系 S は特定の数の物理的変数 $A, B, C, \cdots$ で記述される．例えば，粒子はその位置 Q と速度 V で記述される．これらの変数は時間とともに変化する．それらは系の移ろう (contingent) 性質を表す．我々はこれらの変数の値が，各瞬間において，系の“状態”を決定すると言う．もし粒子の位置 Q の値が q であり，粒子の速度 V の値が v ならば，状態は (q, v) であると言う．古典力学では状態はそれ故，物理的変数の値のリストである．

量子力学は古典力学とは異なる，と言うのも，それは系の変数が全ての時刻において決まった値を持たないと仮定するからである．Werner Heisenberg はこの重要なアイデアを導入した．量子論によれば，電子は全ての時刻において良く定義された位置を持たない．電子がその位置に敏感な外的な系と相互作用していないときには，電子は異なる位置にわたって“拡がる (spread out)”ことができる．電子は異なる位置の“量子力学的な重合せ”にある．

量子力学では系の状態は，その変数の値を与えることによっては捉えられないことが帰結する．代わりに量子論は，古典的な変数値のリストとは異なる，系の“状態”の新しい概念を導入する．“量子状態”の新しい概念は Erwin Schrödinger の研究において，系の“波動関数”の形で導入された．Paul Adrien Maurice Dirac は抽象的なベクトル空間を運動するベクトル Ψ を用いて，それに一般的で抽象的な定式化を与えた．状態 Ψ の知識から，あらゆる変数 A の異なる測定結果 $a_1, a_2, \cdots$ の確率を計算できる．すなわち，相互作用の際に系 S が系 O に影響し得る，異なる仕方の確率である．

理論は，全てのそのような測定において，Ψ の値を更新し，異なる結果のうちどれが実現したかを考慮せねばならないことを規定する．状態 Ψ のこの突然の変化は測定の結果に依存し，それ故，確率的である．これが“波動関数の収縮 (collapse)”である．

古典力学における“系の状態”の概念はそれ故，量子論では 2 つの異なる概念に分離する：(i) 系 S がその周りと相互作用し得る異なる仕方の確率を表す状態 Ψ；および (ii) 相互作用の際に S の変数がとる実際の一連の値 $q_1, q_2, q_3, \cdots$．これらは“測定結果 (measurement outcomes)”と呼ばれる；私はそれらを“量子事象 (quantum events)”と呼ぶのを好む．

我々は Ψ が“現実の”存在であるとも，“現実の”事象である量子事象の，理論的な記帳 (bookkeeping) に過ぎないとも考えられる．我々が状態 Ψ あるいは量子事象 $q_1, q_2, q_3, \cdots$ に帰す相対的な存在論的な重みの選択は，便宜的な問題である；実験的な証拠自体は何が“現実”かを一意的に決めない．私は第 2 の選択がより明瞭であると考えるものの，以下では両方に言及する．

観測される観測者　量子力学の解釈の重要な問題は以下の状況によって説明される．ある時刻 t に系 O が系 S と相互作用し，次いで，後の時刻 t' に第 3 の系 O' が，S と O の両方から成る結合系 $[S+O]$ と相互作用する，図 19 に描いた物理的状況を考えよ．第 1 の相互作用の O への影響は系 S の変数 A に依存するとし，第 2 の相互作用の O' への影響は結合系 $[S+O]$ の変数 B に依存するとしよう．(すなわち，O は時刻 t に S の変数 A を測定し，次いで O' が時刻 t' に $[S+O]$ の変数 B を測定すると言える．) 第 1 の測定の前に，例え

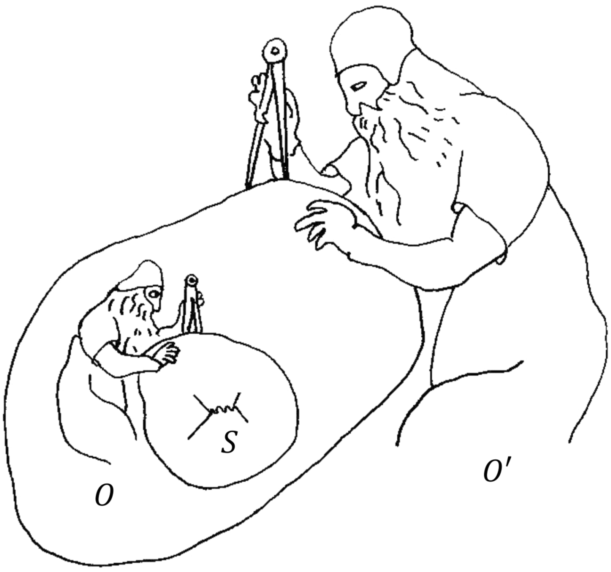


図 19　観測される観測者［原著の図 5.1 (p.212) を基に作成］

ば S は A が 2 つの値 a_1 と a_2 の量子力学的な重合せである状態にあったとしよう．第 1 の測定で，例えば O は変数 A［O を訂正］の値 a_1 を測定したとしよう．悩ましい疑問が，様々な等価な方法で定式化できる．

- 2 つの相互作用の間の S と O の状態は何か？
- 量子事象 a_1 は起きたのか否か？
- 量 A は第 1 の相互作用の後，決まった値を持つのか否か？

例えば Ψ_1, Ψ_2 をそれぞれ，A が値 a_1, a_2 を持つ状態として，第 1 の相互作用より前における S の状態は $\Psi = c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2$ だったとする．このとき時刻 t に

$$\begin{cases} c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2 \ \rightarrow \ \Psi_1; \\ A \text{ は値 } a_1 \text{をとる} \end{cases} \tag{5.188}$$

を得る．

しかしながら，系 O もまた量子論の法則に従う．したがって S と O の両方から成る結合量子系 $(S+O)$ の発展の量子力学的記述を与えることもできる．そうすると，収縮は全く起こらない．代わりに，O の適当な状態 Φ, Φ_1, Φ_2 に対して，相互作用の効果は Schrödinger 発展

$$\begin{cases} (c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2) \otimes \Phi \ \rightarrow \ (c_1\Psi_1 \otimes \Phi_1 + c_2\Psi_2 \otimes \Phi_2); \\ A \text{ はなお 2 つの値 } a_1, a_2 \text{の重合せにある} \end{cases} \tag{5.189}$$

である［多世界解釈に通じる］．

本当のことは我々がどのように世界を記述することを選ぶかに依るように見える．S と O の相互作用の後における，世界の出来事の本当の状態は何か：式 (5.188) か式 (5.189) か？ いずれの場合にも困難に遭う．もし t の後の状態が式 (5.188) のように収縮しており，A は値 a_1 を持つと言うならば，時刻 t' における第 2 の測定に関する誤った予言を得ることになる．実際，量子力学により第 2 の測定の可能な結果の確率分布を予言

することができるものの，それを計算するには，状態 (5.188) ではなく，状態 (5.189) を用いなければならない．実に，もし B と A が交換しなければ，この確率分布は式 (5.189) における 2 つの異なる“枝 (branches)”の間の干渉に影響され得る．言い換えれば，変数 A は値 a_1, a_2 の量子力学的な重合せにあり，決定されていないと仮定せねばならない．

しかしそう仮定して，第 1 の測定後の状態は式 (5.189) であると言うと，A は時刻 t で決まった値を持たないと言わねばならない．ところが状況は一般的である：あらゆる測定は例の第 1 の測定のように考えることができ，それ故いかなる変数も**一切**決まった値をとり得ないと結論しなければならない．

このように，いずれの場合にも矛盾が生じるように見える：波動関数は収縮し a_1 が実現したと考えるにしても，そうでないと考えるにしても．これが量子論の解釈の困難の核心である．

現実の波動関数または現実の量子事象　上記の困難をもう少し詳しく，量子論の 2 つの可能な存在論の，2 つの観点から吟味しよう．

もし Ψ が実在であって真に収縮することは決してないと考えるならば，現にそうであるように，各相互作用において決まった値をとる物理量の値によって記述されるように世界が現前せねばならない，単純で説得力のある理由はない．我々は与えられた位置に粒子を経験するのであって，粒子の波動関数を経験するのではない．収縮しない波動関数の存在論と我々の世界の経験の関係は，非常に遠回りであり複雑である．いかにして特定の観測された値 $q_1, q_2, q_3, \cdots$ が単一の Ψ から立ち現れるのかを理解するには，何らかの込み入った説明が必要である．もし (可能な) この説明が与えられたならば，そのとき我々はこれから立ち返るところの，量子事象の存在論の状況と似た状況にある．

量子事象を現実の実際の要素と捉え，Ψ を，過去に起きた事象とその帰結をコードしている単なる記帳手段と見なすのが，理に適っていると私は考える．例えば，原子より小さい (subatomic) 粒子の“実在性 (reality)”は，相互作用領域から立ち現れる球対称な波動関数によってではなく，泡箱 (bubble chamber) の泡によって明かされる一連の粒子の位置によって表現されると述べるのを私は好む．電磁の実在性は電子が周りと相互作用し，自身を現す事象にあるのであって，そのような事象の抽象的な確率振幅にあるのではない．この観点からは，世界の現実の事象とは，物理系間の相互作用に際する値 $q_1, q_2, q_3, \cdots$ の“具現化”(“現実になること”,“実現化”) である．これらの量子事象は本来的に離散的な“量子化された”粒状の (granular) 構造を持つ．

この観点もまた，しかしながら，上記の困難を解決しない．量子力学の主要な困難は，量子事象 a_1 が“起きた”という言明が，同時に真かつ偽となり得るという事実となる：量子事象 a_1 は起きたのか否か？ もしノーと答えれば，いかなる量子事象も**一切**起こらないと言わざるを得ない，と言うのも，上で記述した状況は完全に一般的だからである：2 つの系 S と O の相互作用において起きる量子事象は，さらなる系 O' への $(S+O)$ の影響を考慮する限り，“起きていない”．イエスと言えば，(第 2 の相互作用に関する) 量子力学の予言と矛盾する．

“第 2 の観測者”問題は，量子力学の解釈の核心となる概念的な困難を捉えている：それは量子力学的な重合せの可能性を，我々が観測し記述する世界が物理量の決まった値によって特徴付けられるという事実と整合させることである．より正確には，問題は 2 つを分離できないことを示している：理論によれば，量子事象 (a_1) は同時に実現も非実現もできる．

問題からの可能な逃げ道は，収縮を生じ量子事象を引き起こす“特別な”系が存在すると仮定することである．例えば，それは“巨視的な”系，または“充分に複雑な”系，または“記憶 (memory) を持つ系”，または“重力場”，または人間の“意識”であり得る．これら全ての系，およびその他が，量子力学的な収縮を引き起こし量子事象を生成していると提案されてきた．もしこれが正しいならば，ある段階で QM の予言の破れを

測定できなければならない．すなわち，我々の知る QM はこれらの系に対して破綻するだろう．

今のところ QM のこの破綻は全く観測されていない．まだ観測されておらず，我々が現実を考えてきたあり方へと現実を戻すことのできる現象論を，我々は想像できる．この可能性を理論的かつ実験的に調査することは間違いなく価値がある．しかし現実は我々が考えていたものと全く異なるかもしれず，単に古い偏見を放棄することを要求しているだけかもしれないことを，忘れてはならない．生産的な態度は，実験的に成功している理論の概念的新奇性に抵抗することではなく，むしろ，それを理解するよう努めることであることを，物理学の歴史は示唆していると私は考える．現実を我々の偏見に押し込めるのではなく，むしろ我々の概念的体系を，我々が世界について学んだことに適合させるよう努めねばならない．

5.6.2　事実は相互作用である

困難の解決の鍵は，2 つの方程式 (5.188) と (5.189) は異なる系に―― 1 つ目は O に，2 つ目は O' に――言及しているという見解に見出せると私は考える．より正確には，1 つ目は相互作用の O への影響の記述に関係する；2 つ目は相互作用の O' への影響の記述に関係する．

困難の解決策は，量子事象は現実の要素であるものの，それらは常に物理系に対して相対的であるというアイデアに見出せる：量子事象 a_1 は O に関しては起きたのに対し，O' に関しては起きていない．

言い換えれば，困難から脱する方法は，あらゆる物理系の変数の値が関係的だということである．それらは系 S 単独の性質を表現するのではなく，むしろこの系と今一つの系の関係を表す．変数 A は O に関して値 a_1 を持つのに対し，O' に関しては決まった値を持たない．この観点は**量子力学の関係的解釈** (*relational interpretation of quantum mechanics*)，あるいは単に**関係的量子力学** (*relational quantum mechanics*) と呼ばれる．

関係的量子力学の中心的なアイデアは，系 S の特定の変数が値 q をとると言うことには，意味がないということである．変数が系 O **に関して**値 q を持つと言うことにのみ意味がある．上で議論した例では，例えば，A が O に関して値 a_1 をとるという事実は，A が O' に関しても値 a_1 を持つことを意味しない．

物理系を参照しない全ての言明を避ければ，量子論の全ての見かけの矛盾を取り除ける．変数が値を持つまたは持たないという 2 つの言明の見かけの矛盾は，問題の系が相互作用する異なる系への言明を参照することで解消する．私が電子を特定の位置に観測したとき，電子がそこにあると結論付けることはできない：**私が見ている**電子はそこにあると結論できるに過ぎない．

実際，量子論は物理系がどのよう“である”かではなく，異なる物理系が相互作用するときに**互いに影響する**仕方の説明として理解しなければならない．この説明は物理的世界について言うことのできる全てを網羅する．物理的世界は“孤立した系の状態”に意味がない，相互作用する要素のネットワークとして記述できる．物理系の状態はその周りの系との関係のネットワークである．世界の物理的構造はこの関係のネットワークに同定される．

古典論における世界の状態の一意的な説明はこうして，各々の可能な“観測する”物理系ごとの説明の多様性へと分解される．量子力学は他の系と相対的な物理系の，物理的記述に関する理論であり，これは世界の完全な記述である．

もちろん我々は“観測者系”として常に系 O を選び，残りの世界がこの系に及ぼす影響だけを考えることができる．残りの世界と O の各相互作用は標準的な量子力学によって正確に記述できる．この記述では，量子状態 Ψ は O との各相互作用において収縮する．この記述は完全に自己無撞着であるものの，それは O をあたかも特別な系――古典的な，非量子論的な系――として扱っている．O 自体を量子力学的に記述したければ，できるものの，観測者として異なる系 O' を選び，O が O' と相互作用する仕方を記述しなければならな

い．この記述では，O の量子力学的性質が考慮されているものの，O' のそれは考慮されていない，と言うのも，記述は残りの世界が O' に及ぼす影響を記述するからである．

整合性　実在のこの相対性 (relativisation) は，量子力学の定式化の著しい性質のおかげで有効である．

理論の定式化は測定される系 (S) と測定する系 (O) を別に扱っていながら，その 2 つの境界をどこにとるかの選択に理論は驚くべきほど融通が利くことに，最初に気付いたのは John von Neumann だった．異なる選択は世界の状態の異なる説明を与える (例えば，波動関数の収縮は異なる時刻に起きる)；しかしこのことは，最終的な観測に関する予言に影響しない．この柔軟性は，異なる観測系の全ての異なる“世界の説明”の間の整合性を保証する，量子論の一般的で構造的な性質を反映している．この整合性が実現する方法は，しかしながら，微妙である．

この現象の簡単な説明として，2 つの状態 Φ_1 と Φ_2 を持つ系 O (例えば**オン**または**オフ**となり得る電球) が，2 つの状態 Ψ_1 と Ψ_2 を持つ系 S (例えば**上向き**または**下向き**となり得る電子のスピン) と相互作用する場合を考えよ．相互作用はスピンが**上向き** (**下向き**) ならば光が**オン** (**オフ**) になるようなものだと仮定せよ．

初めに，電子はその 2 つの状態の重合せをとり得る．我々が光と関係付け得る電子の状態の説明では，電子の波動関数は式 (5.188) のように，相互作用の間に 2 状態の 1 つに収縮し，このとき光は**オン**または**オフ**のいずれかである．ところが我々は量子系として光/電子の複合系を考え，この複合系と別の系 O' の相互作用を調べることもできる．O' と関係した説明では，相互作用のときに収縮はなく，複合系は式 (5.189) のように，相互作用の後も依然として，2 状態 [スピン**上向き**/光**オン**] と [スピン**下向き**/光**オフ**] の重合せにある．上で注意したように，この重合せを仮定することが必要である，と言うのも，それは 2 つの状態間の測定可能な干渉効果を説明するからである：もし量子力学が正しければ，この干渉効果は本当に O' によって観測可能である．

このように，同じ事象に対する 2 つの一致しない説明がある：スピンが決まった値を持つ，O に関係した説明と，スピンが重合せにある，O' に関係した説明である．そこで，2 つの一致しない説明は比較でき，比較は矛盾を導くだろうか？

それらは比較できる，と言うのも，第 1 の説明における情報は光の状態に蓄えられ，また O' はこの情報にアクセスできるからである．したがって，O と O' は世界の状態の説明を比較できる．しかしながら，比較は矛盾を導かない，**と言うのも，比較はそれ自体が量子力学的な文脈で理解せねばならない** **物理的な** **過程だからである．**

実際，O' は電子と，次いで光と (あるいは等価的に，光と，次いで電子と) 物理的に相互作用し得る．もし，例えば，O' が電子のスピンを**上向き**に見出すならば，量子力学はそのとき観測者が整合的に光がオンであるのを見出すことを予言する，と言うのも，第 1 の測定において複合系の状態はその [スピン**上向き**/光**オン**] 成分，すなわち式 (5.189) の右辺第 1 項に収縮するからである．

つまり，まさに異なる説明の比較は物理的で量子論的な相互作用でしかあり得ないという理由で，説明の多様性は矛盾を導かない．量子力学の多くの一般的なパラドックスは，異なる観測者の間の連絡が量子力学を破ると仮定することに起因する[*117]．この量子力学の内的な自己無撞着性は一般的であり，おそらくその最も著しい側面である[*118]．この自己無撞着性は世界の関係的な本性を強く示唆している．

[*117] EPR (Einstein–Podolski–Rosen) の見かけのパラドックスもその 1 例かもしれない．互いに遠く離れた 2 つ［擬人的には 2 人］の観測者は物理系である．標準的な説明は，2 つが物理的に連絡する瞬間まで，それらの各々が他方に対して量子力学的な重合せにあるという事実を無視している．しかしこの連絡は物理的な相互作用であって，因果性と厳密に整合しているはずである．

[*118] 実際，異なる観測者の観測間のこの特有な整合性は，量子論の Hilbeert 空間の定式化における再構成定理 (reconstruction theorem) に欠けている材料だと，ある者は推測するかもしれない．そのような再構成定理は依然として利用できない．理に適った物理的な仮定に基づけば，“ほとんど”，ただし完全にではないが，Hilbert 空間とその射影子の代数の存在を示唆する，Boole 代

5.6.3 情報

O に対して変数 A の測定 (特定の結果を伴う) として現れることは，O' に対しては単に［式 (5.189) のように］S と O の間の**相関**を確立する力学的な (dynamical) 過程として現れる．観測者 O を考える限り，系 S の変数 A は特定の値をとる．第 2 の観測者 O' を考える限り，現実の重要な要素は S と O の間に相関が確立されたということだけである．

具体的に，この相関は O' が $[S+O]$ 系に対して行い得る，全てのさらなる観測に現れる．すなわち，2 つの系 S と O が O' と相互作用する仕方は，相関があるという事実によって特徴付けられる：O' は S の何らかの性質と対応した O の何らかの性質を見出す．

他方で，それが $[S+O]$ と物理的に相互作用するまで，系 O' は O が S に対して行った測定の実際の結果へのアクセスを一切持たない．この実際の結果は O にとってのみ現実である．

O' が S に対して行った測定の可能な結果と，O' が O に対して行った測定の結果との相関の存在は，情報の観点から解釈できる．実際，この相関は Shannon による情報の定義と**正確**に対応する．この定義によれば，"O は S に関する情報を持つ" とは，O の可能な状態と S の可能な状態の Descartes 積から成る集合の部分集合に，我々は O と S を見出すことになることを**意味する**．すると，O による S の測定は "O が S の情報を持つ" という効果を持つ．この言明は第 3 の系 O' による測定の可能な結果に関する，正確な学術的意味を持つ．

他方で充分な回数，物理系 S と相互作用すれば，我々はこの系との相互作用に関する未来の結果 (の確率分布) を予言できる．この意味で，S と相互作用することにより我々は S に関する "情報を持つ" と言える．(この情報は蓄えられるか活用される必要はないものの，その存在は予言のために蓄えたり活用したりできるための物理的必要条件である．)

したがって，物理的理論が情報と関係する 2 つの異なる意味がある．しかし少し反省すると，2 つは単に，2 つの異なる系に影響するときの，同じ物理的現実を反映していることが分かる．一方では，O は S と相互作用し，過去の相互作用は "情報を与える"，すなわち未来の相互作用における結果 (の確率分布) を決定するのに充分であるため，O は S に関する情報を持つ．他方では，O' がその 2 つ［O と S］に対して行い得る測定の結果に相関があるという意味で，O は S に関する情報を持つ．

ここには，以下のように比喩的に表現できる，決定的に微妙な違いがある：O は S について "知っている" のに対し，O' は O が S について知っている**ということ** (*that*) だけを知っており，O が知っている**こと** (*what*) を知らない．O' を考える限り，S と O の間の相互作用は相関を確立する：それは結果を選ばない．

これらの見解は，実のところ量子力学が関係していることは，物理系が互いに対して持っている情報であると結論付けるのに充分である．

量子力学を自然の根本的な記述と捉えることに伴う，測定問題として言及される一般的な不安は，Einstein によって誤りであることが示された，観測者に依存しない時間の概念から導かれる Lorentz 変換に伴う不安と同様に，誤った概念の利用に遡ることができる．量子力学に伴う不安を生み出す誤った概念は，観測者に依存しない系の状態，あるいは観測者に依存しない物理量の値，あるいは観測者に依存しない量子事象の概念である．

全ての系は等価であり，アプリオリな観測者/被観測者 (observer–observed) の区別はないと仮定できる；理論は系が互いに持つ情報を記述する．理論は完璧である，と言うのも，この記述は物理的世界を網羅するか

数を成す部分集合を含む直交モジュラー束 (orthomodular lattice) の構造を導くことができる．おそらく部分系 (subsystems) 間の整合性の条件の適切な代数的定式化は，再構成定理を完成させる欠けている仮説を提供し得る．

らである．

物理学において，以前は絶対的に扱われていた概念を相対化することによる，我々の物理的世界への洞察を深める運動は，繰り返し，そして非常に成功裡に適用されてきた．以下はいくつかの例である．

物体の速度の概念は，それに対して物体が運動するところの基準物体を参照しない限り，無意味であると理解される．特殊相対性理論の下では，2 つの隔たる事象の同時性は，特定の何かの運動状態を参照しない限り，無意味であると理解される．(この何かは，もちろん，観測者が人間である，あるいは運動の状態を持つこと以外の何らかの特殊な性質を持つことを意味することなく，通常“観測者”と表現される．同様に，量子力学における“観測者系”O は人間であるか，“観測される”系 S と相互作用する可能性以外の何らかの特殊な性質を持つ必要はない．) 一般相対性理論の下では，物体の空間における位置と時間は，重力場，あるいは他の力学的な物理的存在を参照しない限り，無意味であると理解される．

量子力学の関係的解釈によって提示される道筋はこれらと強力なアナロジーを持つ．ある意味それはより長い跳躍である，と言うのも，全ての物理系の全ての不確かな (不定の) 性質は，第 2 の物理系に相対的としてのみ，意味を成すと捉えられるからである．これは勝手な道筋ではない．それは，(系 S の) 変数はある観測者 (O) に対して良く定義された値 a_1 を持つことができ，同時に別の観測者 (O') に対しては決まった値を持てないという――上で“第 2 の観測者”の例において説明した――見解から帰結する，避け難い結論である．

この世界の考え方はおそらく，重大な哲学的示唆を持つ．しかしこの考え方を我々に強いているのは自然である．自然を理解したければ，我々の課題は自然を我々の哲学的偏見に当てはめることではなく，むしろ我々の哲学的偏見を，我々が自然から学んだことに適合させる方法を学ぶことである．

5.6.4　時空の関係主義と量子論的な関係主義

非常に思索的な提案で締め括る．2.3 節で論じたように，GR の根底にある主要なアイデアは位置付けの相対的な解釈である：物体は時空に位置付けられるのではない．それらは互いに対して位置付けられる．前の節では，QM の教訓は量子事象と系の状態が関係的であることだと述べた：それらは他の系に対してのみ意味を成す．このように，GR と QM は関係主義の形式で特徴付けられる．これら 2 つの形式の関係主義に関連はあるのか？

2 つの関係を詳しく吟味しよう．GR では，物体 S の時空における位置付けは，S が**隣接**している別の物体 (あるいは場) O に相対的である．隣接，あるいは等価的に，Einstein の“時空の一致”は時空を構成する基本的な関係である．QM では，絶対的な性質あるいは事実は存在しない：系 S の性質は，S が**相互作用**している別の系 O に相対的である．事実は相互作用である．このように，相互作用が系の間の関係を成す．

ところが隣接と相互作用の間には密接な関連がある．一方では，S と O は隣接している場合にのみ――それらが時空において近接しているならば――相互作用できる：これが局所性である．相互作用は隣接性を要求する．他方で，S と O が隣接しているとは何を意味するのか？ それらが相互作用できるという事実を除き，他に何を意味するのか[*119]？ こうして，隣接性は相互作用によって表される．この意味で，相互作用は局所的であるという事実は，隣接していることと相互作用していることの間にはある種の同一視があることを意味する．

このように，局所性は GR における時空の関係主義と QM の根底にある関係主義を，互いに非常に密接に関連付ける．この見解に基づく一般的な概念的体系を発展させようと試みるのは魅力的である．それは隣接性

[*119] まさに“隣接している (contiguous)”という言葉はラテン語 *cum-tangere*――互いに接触していること，すなわち相互作用する (inter-act) こと――に由来する．

が量子論的な相互作用の存在の表れに他ならない，あるいは量子論的な相互作用の存在に同定され得る概念的体系となり得る．世界の時空構造はこのとき，何が何と相互作用しているかによって直接決定されるだろう．これはもちろん，非常に曖昧であり，どこへも導かないかもしれないが，私にはこのアイデアは非常に魅力的である．

note：5.6 節の要約

量子論では状態ベクトル Ψ (例えば波動関数) から，系 S のあらゆる変数 A に対して，その異なる測定結果 $a_1, a_2, \cdots$ が得られる確率を計算できる．特定の測定結果の実現に応じて，波動関数は突然“収縮 (collapse)”する．ここで実験的な証拠だけからは，確率分布 Ψ と一連の測定結果 $a_1, a_2, \cdots$ のどちらが“現実の”存在かは決まらない．しかし我々は測定結果 $a_1, a_2, \cdots$ を“量子事象”と呼ぶことにする[*120]．

さて，量子論の解釈をめぐる困難の核心は，“観測される観測者”の思考実験によって端的に示すことができる．図 19 のように，系 O が (時刻 t に) 系 S の変数 A を測定し，次いで系 O' が (時刻 t' に) 結合系 $[S+O]$ の変数 B を測定する場合を考えよ．(ここで擬人的には系 O, O' は観測者と呼べる．ただし測定とはあくまで単なる物理系の相互作用であり，測定や観測という術語は本来，必ずしも人間の意識や主観を意味しないことに注意せよ．) 例えば初め系 S は変数 A がそれぞれ値 a_1, a_2 を持つ状態 Ψ_1, Ψ_2 の重合せにあり，第 1 の測定で O は測定結果 a_1 を得たとする．このとき時刻 t では式 (5.188) のように，波動関数は収縮する．ところが系 O もまた量子力学によって記述されることを要求すると，理論の内部に矛盾を生じるように見える．すなわち結合量子系 $[S+O]$ の Schrödinger 発展を考えると，収縮は全く起こらず，代わりに第 1 の測定は S と O の間の相関を確立することになる (式 (5.189))．［いわゆるエンタングル状態である [430, pp.36–37,pp.206–207]．］例えば電子 (S) のスピン上向き・下向きの状態 Ψ_1, Ψ_2 に応じて，電球 (O) がオン・オフの状態 Φ_1, Φ_2 になるような測定 (相互作用) の過程を考えると，複合系は相互作用の後も依然として，[スピン上向き/光オン] と [スピン下向き/光オフ] の 2 状態の重合せにある．

2 つの説明 (5.188) と (5.189) は素朴には両立しない (このパラドックスは「Wigner の友人」として知られている [430, p.101])．実際，重合せ (5.189) における 2 状態は O' が観測可能な干渉効果をもたらすため，O' による第 2 の測定の正しい確率分布を予言するには，式 (5.188) ではなく重合せ (5.189) を仮定しなければならない．他方で我々は第 1 の測定として一般的な状況を考えているので，このときいかなる物理量 A も一切決まった値 a_1 をとり得ないと結論しなければならない．

収縮を生じ量子事象を引き起こす“特別な”系を仮定することなく，このジレンマから脱する解決策は，量子事象は常に物理系に対して相対的であるという洞察に見出せる：量子事象 a_1 は O に関しては起きたのに対し，O' に関しては起きていない．別の物理系を参照することなく，単に系 S の変数が値 a_1 をとるか否かを言うことには，意味がない．この観点は**量子力学の関係的解釈** (*relational interpretation of quantum mechanics*)，あるいは単に**関係的量子力学** (*relational quantum mechanics*) と呼ばれる[*121]．

O に関係した説明と O' に関係した説明は互いに一致していないにも関わらず，それらを比較しても矛盾は

[*120] 他方で Ψ が実在であって真に収縮することは決してないと考えるならば，現に観測値 $a_1, a_2, \cdots$ が単一の Ψ から立ち現れる機構の込み入った説明が必要となる．仮にその説明が与えられたとしても，結局そのとき量子事象の存在論と似た状況に帰着することになる．［そもそも波動関数そのものが物理的実在でなければ，その収縮機構を説明する必要はなくなる．］

[*121] これはある意味，相対主義の徹底である．またそれは，系 S の変数はある観測者 (O) に対して良く定義された値 a_1 を持つことができ，同時に別の観測者 (O') に対しては決まった値を持てないという見解から帰結する，避け難い結論である．自然を理解したければ，我々の課題は自然を我々の哲学的偏見に当てはめることではなく，むしろ我々の哲学的偏見を，我々が自然から学んだことに適合させる方法を学ぶことである．

導かれない．と言うのも，比較のために O' が電子と相互作用すると，式 (5.189) の右辺におけるいずれかの項，例えば [スピン上向き/光オン] 成分が選び出されるため，次いで光を測定すると，光オンが見出されるからである．つまり，まさに異なる説明の比較は物理的で量子論的な相互作用でしかあり得ないという理由で，説明の多様性は矛盾を導かない*122．この自己無撞着性は世界の関係的な本性を強く示唆している．

ところで O による S の測定は，充分な回数繰り返せば未来の相互作用における結果 (の確率分布) を予言できるため，測定において O は S に関する“情報を持つ”と言える．他方で O' の観点からは，測定は O と S の間の相関 (式 (5.189)) を確立するため，Shannon による情報の定義から，やはり“O は S に関する情報を持つ”と言える．比喩的には O は S について知っているという意味で情報を持つのに対し，O' は O が S について何らかのことを知っていることを知っているという意味で情報を持つ．このように量子力学は，物理系が互いに対して持っている情報に関係していると考えられる．

最後に一般相対性理論 (GR) と量子力学 (QM) の関係主義的性格を比較する．GR では物体は背景時空ではなく他の力学的存在 (物体や場) に対して位置付けられ，それらの関係は隣接性に基づいている．他方でこれまでに論じてきた QM の根底にある関係性は，物理系の相互作用に基づいている．ところが相互作用は系の隣接性を要求するのに対し，隣接性は相互作用の表れであるならば，隣接性と相互作用は表裏一体である．この最後のアイデアは多分に思弁的ではあるものの魅力的である．

——

文献ノート

量子論の教科書は数多くある．中でも最善は，Dirac の水晶のように澄み切った (crystal-clear) 思考のため，最初のもの : Dirac [148] であると私は考える．早版では，Dirac はここで行ったように，(時間において発展しない) 状態の相対論的概念を用いている．Dirac はここで行ったように，これらの状態を“相対論的”と呼んでいる．後版では，彼は前置きにて，それらを用いると計算がより簡単であると説明して，時間において発展する Schrödinger 状態に切り替えているが，より基本的である相対論的状態を諦めているのは残念である．

私は [98] と [149] において，QM はユニタリーな時間発展がない場合にも整合的に留まるというアイデアを議論した．同じアイデアは多くの著者によって発展しており， [26], [150] とそこに含まれる文献を見よ．

以前私は“発展する定数”のみを用いて相対論的な系を議論した．本文で用いた 2 つの振動子の例は [151, 152] において，これらの観点から考察されている．本章で提示した共変な定式化の確率的解釈は，この観点の発展であり， [144] から出てくる．

私は QFT の境界の定式化に関する議論を [145] から採った．場の量子論は有限の面上の境界データを用いて定式化せねばならないというアイデアは，Robert Oeckl [153] によって唱導されてきた．局所 Schrödinger 方程式の導出は [146] と [154] にある．朝永–Schwinger 方程式は cite155 で導入された．量子重力における n 点関数の直接的な解釈の困難については，例えば [156] を見よ．Hartle–Hawking 状態は [157] で導入された．

Wheeler–DeWitt 方程式の解の空間上で，それらの解が運動学的 Hilbert 空間上で規格化されていない場合にも，物理的なスカラー積を定義する可能性は，多様な技法を用いて多くの著者によって議論されてきた．優れた数学的構成が Don Marolf によって与えられており， [158] とそこに含まれる文献を見よ．

熱時間仮説は [125] において，QM と QFT へと拡張された．

ここで提示されている関係的解釈は [159, 160] で議論されている ; [161, 162] も見よ．似た観点の概観がオ

*122 量子力学の多くの一般的なパラドックスは，おそらく EPR (Einstein–Podolski–Rosen) の見かけのパラドックスも含め，異なる観測者の間の連絡が量子力学を破ると仮定することに起因する．

ンラインの *Stanford Encyclopedia of Philosophy* [163] にある；関連し得る観点については，[164] も見よ．量子論の基礎における情報の役割は [165,166] において，John Wheeler によって強調されてきた．量子論の基礎における情報の役割に関する最近の議論については，例えば [167] とそこに含まれる文献を見よ．量子論と相対論の関係的側面に関するオリジナルの魅力的な観点は [168] において，David Finkelstein によって探求された．

第 II 部

ループ量子重力

– さあ，覚悟が良ければ，カプセルを出るときだ……
– こちら Tom (トム) 少佐より地上管制塔へ
ドアの外へ踏み出した
そして最も奇妙な仕方で宙を漂っている
そして今日の星々は全く違って見える……

David Bowie［ミュージシャン］, *Space Oddity*［曲名］

第 6 章　量子空間

今や本書の第 I 部で発展させてきた道具を合わせ，時空の量子論を構築することを始めるときである．作戦は単純である．我々は第 4 章の初めに説明した GR の正準形式を，第 5 章で詳述した相対論的な QM の定式化に従って“量子化する”．本章は理論の運動学的な部分――状態，部分的観測量およびそれらの固有値――を扱う．次章はダイナミクス，すなわち遷移振幅を扱う．

6.1　量子重力の構造

第 4 章では，GR を Hamilton–Jacobi 方程式 (4.9):

$$F^{ij}_{ab}(\vec{\tau})\frac{\delta S[A]}{\delta A^i_a(\vec{\tau})}\frac{\delta S[A]}{\delta A^j_b(\vec{\tau})}=0 \tag{6.1}$$

で定義される力学系として定式化できることを見た．ここに汎関数 $S[A]$ は 3 次元の $SU(2)$ 接続 $A^i_a(\vec{\tau})$ の空間 $\mathcal{G}$ 上で定義されており，内部ゲージ変換と 3 次元の微分同相写像の下で不変である．すなわち，

$$\delta_f A^i_a(\vec{\tau})\frac{\delta S[A]}{\delta A^i_a(\vec{\tau})}=0, \qquad \delta_\lambda A^i_a(\vec{\tau})\frac{\delta S[A]}{\delta A^i_a(\vec{\tau})}=0 \tag{6.2}$$

であり，変分 $\delta_f A^i_a(\vec{\tau})$ と $\delta_\lambda A^i_a(\vec{\tau})$ は式 (4.12) で与えられる．等価的に，理論は $T^*\mathcal{G}$ 上のハミルトニアン $H[A,E]=F^{ij}_{ab}E^a_iE^b_j$ で定義される［式 (4.83)］．

第 5 章の処方箋に従い，理論の量子化は $\mathcal{G}$ 上の複素値をとる Schrödinger の波動汎関数 $\Psi[A]$ を用いて得られる．$S[A]$ を $\hbar\times$ ($\Psi[A]$ の位相) と解釈することによって，量子ダイナミクスは古典的なダイナミクスから推察される．すなわち，[142] のように，古典的な Hamilton–Jacobi 理論を量子力学的な波動方程式のアイコナール近似と解釈することによってである；半古典的な“波束”はこのとき古典論に従って振舞う．これは Hamilton–Jacobi 汎関数 $S[A]$ の微分を微分演算子に置き換えることによって，量子ダイナミクスを定義して得られる．2 つの方程式 (6.2) は不変に留まる：それらは単に $\Psi[A]$ が $SU(2)$ ゲージ変換と 3 次元の微分同相写像の下で不変であることを課す．［$\Psi=N\mathrm{e}^{\mathrm{i}S/\hbar}$ の係数 N の汎関数微分は古典的極限 $\hbar\to 0$ で生き残らない (式 (6.3) も同様)．アイコナール近似を経由しない $\Psi[A]$ の不変性の説明は文献 [415, § 7.4] にある (同文献のノートも参照)．］方程式 (6.1) は

$$F^{ij}_{ab}(\vec{\tau})\frac{\delta}{\delta A^i_a(\vec{\tau})}\frac{\delta}{\delta A^j_b(\vec{\tau})}\Psi[A]=0 \tag{6.3}$$

を与える．これは Wheeler–DeWitt 方程式，あるいは Einstein–Schrödinger 方程式である［5.3.3 節末尾］．それは時空の量子ダイナミクスを支配する．言い換えれば，ダイナミクスはハミルトニアン演算子 $H = H[A, -\mathrm{i}\hbar\delta/\delta A]$ で定義される．

より正確には，$\mathcal{S}$ を汎関数 $\Psi[A]$ の適当な空間として，我々は艤装 Hilbert 空間 $\mathcal{S} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{S}'$ を欲する．部分的観測量は $\mathcal{K}$ 上の自己共役な演算子で表される．それらの固有値は物理量の量子化を表す．形式的には式 (5.58) の場の理論的な一般化

$$P \sim \int [\mathrm{D}N]\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3\tau\, N(\vec{\tau})H(\vec{\tau})} \tag{6.4}$$

で与えられる，演算子 P は，$\mathcal{S}$ を式 (6.3) の解の空間に移す．部分的観測量の固有状態間のその行列要素は，量子重力の遷移振幅を定義する．それらは我々が行えるあらゆる測定の間の全ての (確率的な) 力学的 (dynamical) 関係を決定する．

$\mathcal{K}$ における特別な状態は，体積ゼロと面積ゼロの幾何学の固有状態 $|\emptyset\rangle$ である．共変な真空は $|0\rangle = P\,|\emptyset\rangle$ で与えられる．$\vec{\tau}$ で座標付けされる面 Σ が有限の時空領域の境界全体であると仮定すれば，$\mathcal{K}$ を境界空間 K に同定できる．境界面上の部分的観測量の測定に関する相関確率振幅は $A = W(s) = \langle 0|s\rangle$ であり，ここに $|s\rangle$ は測定された固有値に対応する部分的観測量の固有状態である．

ここでこの構造を具体的に構築せねばならない．これから見るように，正確に学術的な意味で，この構造は一意的である．

6.2 運動学的状態空間 $\mathcal{K}$

ここでは**実**接続 (4.2 節を見よ) によって定義される量子状態空間を構成する．これには 3 つの理由がある．第 1 に，物理的な Lorentz 的理論はこの接続を用いて定式化できる：唯一の違いは 4.2.2 節で説明したように，ハミルトニアン演算子が式 (6.3) よりわずかに複雑になることである．第 2 に，実接続では物事がはるかに簡単になり，また簡単なことを初めに行う方が良いからである；複素接続で定義される量子状態空間の構成には，なおいくつかの未解決の技術的な複雑さがある [169]．第 3 に，ハミルトニアン演算子 (6.3) を持つ実接続は量子 Euclid 的理論，すなわち 4.2.1 節で定義した理論をその古典的極限に持つ量子論を定義する；これはそれ自体で興味あるモデルであり，また 4.2 節で議論したように，物理的理論と関係しているようである．

円筒関数　$\mathcal{G}$ を一般には孤立した点を除いた*123 3 次元面 Σ の上で定義される，滑らかな 3 次元の実接続 A の空間とする．Σ のトポロジーを，例えば 3 次元球面に固定する．ここで $\mathcal{G}$ 上の汎関数の空間 $\mathcal{S}$ を定義する．

ここで場 A の接続としての幾何学的解釈を利用する．$so(3)$ Lie 代数は $su(2)$ Lie 代数と同じであり，A を $su(2)$ 接続と見なすことが伝統的である．τ_i を $su(2)$ Lie 代数の固定された基底とする．σ_i を Pauli 行列 (A.14) として，私は $\tau_i = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_i$ を選ぶ．

$$A(\vec{\tau}) = A^i_a(\vec{\tau})\tau_i \mathrm{d}x^a \tag{6.5}$$

と書く［行列 $A_a = A^i_a\tau_i$ を成分に持つ 1 形式］．2.1.5 節より，Σ における向き付けされた経路 γ と接続 A は，経路に沿う接続のホロノミーと呼ばれる，群の要素 $U(A,\gamma) = \mathcal{P}\exp\int_\gamma A$ を定めることを思い出そう．滑らかな向き付けされた経路 γ_l，ただし $l = 1, \cdots, L$ の順序付けされた集まり (ordered collection) と，L 個の群の要素の滑らかな関数 $f(U_1, \cdots, U_L)$ を考える．組 (Γ, f) は A の汎関数

$$\Psi_{\Gamma,f}[A] = f(U(A,\gamma_1), \cdots, U(A,\gamma_L)) \tag{6.6}$$

*123 この学術的選択の理由は以下で明らかになる．［$Diff^*$ の定義 (6.2.3 節) を踏まえて 6.4.2 節と 6.7 節 (pp.266–267) を見よ．］

を定義する．［要するに L 個の経路のホロノミーの関数である．］$\mathcal{S}$ は全ての Γ と f に対する，全ての汎関数 $\Psi_{\Gamma,f}[A]$ の線形空間として定義される．我々はこれらの汎関数を“円筒関数 (cylindrical functions)”と呼ぶ．ここで詳述するには及ばない，適当なトポロジーでは，$\mathcal{S}$ は全ての A の連続的な汎関数の空間で稠密 (dense) である．

Γ を Σ に埋め込まれた“順番と向きを持つ (ordered oriented) グラフ”と呼ぶ．順番と向きの違いを除いて，順番と向きを持つグラフを単に“グラフ”と呼び，同じ文字 Γ で表す．明らかに，円筒関数を考える限り，グラフの順番または向きを変えることは単に，関数 f の引数の順番を変えること，または引数をその逆［行列］で置き換えることと同じである．

スカラー積　ここで空間 $\mathcal{S}$ 上のスカラー積を定義する．2 つの汎関数 $\Psi_{\Gamma,f}[A]$ と $\Psi_{\Gamma,g}[A]$ が同じ順番と向きを持つグラフ Γ で定義されているならば，$\mathrm{d}U$ を $SU(2)$ 上の Haar 測度として，

$$\langle\Psi_{\Gamma,f}|\Psi_{\Gamma,g}\rangle \equiv \int \mathrm{d}U_1\cdots\mathrm{d}U_L\overline{f(U_1,\cdots,U_L)}g(U_1,\cdots,U_L) \tag{6.7}$$

を定義する．格子スカラー積 (5.152) との類似性に注意せよ：式 (6.7) は格子 Γ 上の Yang–Mills 理論のスカラー積である．

異なる順番と向きを持つ同じグラフ上で定義されている汎関数への，このスカラー積の拡張は自明である．

note　一方の汎関数 $\Psi_{\Gamma,g}$ を定義するグラフ，例えば $\Gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ と異なる順番と向きを持つグラフ $\Gamma'=(\gamma_2,\gamma_1,\gamma_3^{-1})$ で定義された汎関数 $\Psi_{f,\Gamma'}=f(U_2,U_1,U_3^{-1})$ を考える．これを $f'(U_1,U_2,U_3)=\Psi_{f',\Gamma}$ の形に表したときの f' を f の代わりに用いて，内積の定義式 (6.7) を適用すれば良いと考えられる．

それだけでなく，異なるグラフ Γ 上で定義された汎関数への拡張も簡単である．実際，異なる組 (Γ,f) と (Γ',f') が同じ汎関数を定義できることを説明する．例えば，Γ を Γ' における L' 本の曲線とその他の L'' 本の曲線の和集合とし，また $f(U_1,\cdots,U_{L'},U_{L'+1},\cdots,U_{L'+L''})=f'(U_1,\cdots,U_{L'})$ とする；このとき，明らかに $\Psi_{\Gamma,f}=\Psi_{\Gamma',f'}$．この事実を用いると，$\Gamma$ と Γ' と Γ'' の和集合として，あらゆる 2 つの与えられた汎関数 $\Psi_{\Gamma',f'}$ と $\Psi_{\Gamma'',g''}$ を，同じグラフ Γ を持つ汎関数 $\Psi_{\Gamma,f}$ と $\Psi_{\Gamma,g}$ に書き換えられることが明らかである．

note　簡単のために L' 本の曲線の集合 Γ' と L'' 本の曲線の集合 Γ'' が同じ曲線を共有しないとすれば，

$$\begin{aligned}\Psi_{\Gamma',f'} &= f'(U_1,\cdots,U_{L'}) = f(U_1,\cdots,U_{L'},U_{L'+1},\cdots,U_{L'+L''}) = \Psi_{\Gamma,f},\\ \Psi_{\Gamma'',g''} &= g'(U_{L'+1},\cdots,U_{L'+L''}) = g(U_1,\cdots,U_{L'},U_{L'+1},\cdots,U_{L'+L''}) = \Psi_{\Gamma,g}\end{aligned}$$

とできる．

この事実を用いると，式 (6.7) は $\mathcal{S}$ のあらゆる 2 つの汎関数に対して有効な定義になる：

$$\langle\Psi_{\Gamma',f'}|\Psi_{\Gamma'',g''}\rangle \equiv \langle\Psi_{\Gamma,f}|\Psi_{\Gamma,g}\rangle\,. \tag{6.8}$$

たとえ式 (6.7) が格子 Yang–Mills 理論におけるスカラー積と似ているとしても，違いは重大である．ここでは一般に状態が単一の格子 Γ ではなく，Σ における**全ての**格子の上に住んでいる，連続な理論を扱っている．格子 Yang–Mills 理論のように，自由度に対する切断はない．

ループ状態とループ変換　有限のノルムの状態の重要な例は，$(\Gamma, f) = (\alpha, \mathrm{tr})$ の場合で与えられる．すなわち，Γ は単一の閉曲線 α，あるいは“ループ”から成り，また f は群上のトレース関数である．状態を Ψ_α，あるいは単に Dirac の記法で $|\alpha\rangle$ と書ける．すなわち，

$$\Psi_\alpha[A] = \Psi_{\alpha,\mathrm{tr}}[A] = \langle A|\alpha\rangle = \mathrm{tr}\, U(A,\alpha) = \mathrm{tr}\, \mathcal{P} \mathrm{e}^{\oint_\alpha A}. \tag{6.9}$$

［この閉じたループに沿う $U(A,\gamma)$ が本来の意味での (あるいは狭義の) ホロノミーであり [415, p.67]，そのトレースは変量としては Wilson ループと呼ばれる [415, p.103].］量子重力においてこれらの状態が持つ，後で説明する非常に特殊な性質が，LQG のアプローチ全般 (とその名称) を動機付けてきた．Ψ_α のノルムは式 (6.7) から容易に計算される：

$$|\Psi_\alpha|^2 = \int \mathrm{d}U\, |\mathrm{tr}\, U|^2 = 1. \qquad \text{［本稿次節で補足］} \tag{6.10}$$

“多重ループ (multiloop)”は (一般には重なる) ループの有限の数 n の集合 $[\alpha] = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ である．“多重ループ状態”は

$$\Psi_{[\alpha]}[A] = \Psi_{\alpha_1}[A] \cdots \Psi_{\alpha_n}[A] = \mathrm{tr}\, U(A,\alpha_1) \cdots \mathrm{tr}\, U(A,\alpha_n) \tag{6.11}$$

で定義される．ループ空間上の汎関数

$$\Psi[\alpha] = \langle \Psi_\alpha | \Psi \rangle \tag{6.12}$$

は状態 $\Psi[A]$ の“ループ変換”と呼ばれる．汎関数 $\Psi[\alpha]$ はループの空間上の汎関数として量子状態を表す．“ループ変換”と呼ばれるこの公式は，それを通じて LQG が最初に構成された公式である (例えば [170] を見よ)．以下［6.2.1 節末尾］で言及する測度 $\mathrm{d}\mu_0[A]$ を用いて，これは

$$\Psi[\alpha] = \int \mathrm{d}\mu_0[A]\, \mathrm{tr}\, \mathcal{P}\mathrm{e}^{\oint_\alpha A}\, \Psi[A] \tag{6.13}$$

と書ける．直観的には，これは A 空間から α 空間への一種の無限次元 Fourier 変換である．

運動学的 Hilbert 空間　量子重力の運動学的 Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ を，スカラー積 (6.7) によって定義されるノルムにおける $\mathcal{S}$ の完備化 (completion)*124として定義し，$\mathcal{S}'$ を式 (6.7) によって定義される弱位相 (weak topology) における $\mathcal{S}$ の完備化*125として定義する．これは運動学的な艤装 Hilbert 空間 $\mathcal{S} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{S}'$ の定義を達成する．

何故この定義か？ 主な理由は，スカラー積 (6.7) が微分同相写像と局所ゲージ変換の下で不変であり (以下の 6.2.2 節)，実の古典的観測量が自己共役な演算子になるようなものである (以下の 6.5 節)，ということである．これらの非常に厳しい条件は，正しい古典的極限を持つ理論を与えるためにスカラー積が満たさねばならないものである．さらに，この定義の主な特徴はループ状態 Ψ_α が規格化可能なことである．後で見るように，ループ状態は量子重力において自然な対象である．それらは幾何学的観測量を対角化し，またそれらは Wheeler–DeWitt 方程式の解である．このため運動学と力学 (ダイナミクス) のいずれも，この状態の空間を重力において自然なものとして選ぶ．

我々が与えた $\mathcal{K}$ の定義に対する，2 つの異議を挙げることができる．第 1 に，$\mathcal{K}$ は不可分 (nonseparable) である．この異議は平坦な空間における場の量子論の文脈では致命的だが，一般相対論的な文脈では微分同相不変性により，無害であることが判明する．実際，不可分な Hilbert 空間の“過剰なサイズ”は単なるゲージであることが判明する：物理的 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ は可分 (separable) である．6.4 節で見るように，それは微分同相ゲージを取り除いて (factor away) 可分な Hilbert 空間 $\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ を得るのに充分である．

第 2 に，ループ状態は格子 Yang–Mills 理論では規格化可能だが，連続的な Yang–Mills 理論では規格化不可能である．アナロジーによって，それは連続的な量子重力においてもまた規格化不可能なはずだと，ある者は反論するかもしれない．以下で見るように，しかしながら，再びまさに微分同相不変な QFT と背景上の QFT の間の大いなる構造的な違いによって，このアナロジーは誤解を招くことになる．これから見るように，連続的な Yang–Mills 理論においてループ状態は，無限小の横断的な (transversal) 物理的サイズを持つ非物

*124 $\|\Psi_m - \Psi_n\|$ がゼロに収束する Cauchy 列 Ψ_n の空間.

*125 $\mathcal{S}$ に属す全ての Ψ に対して $\langle \Psi_n | \Psi \rangle$ が収束する列 Ψ_n の空間.

理的な励起を表す．他方で重量では，ループ状態は**有限の** (Planck 的な；Planckian) 横断的な物理的サイズを持つ物理的な励起を表す．このことは以下の 6.6.2 節で明らかになる．

境界 Hilbert 空間　境界空間 K を定義する 2 つの自然な方法がある．$\mathsf{K} = \mathcal{K}^* \otimes \mathcal{K}$ を定義し，始・終面によって限られる時空領域の量子幾何学を記述できる；あるいは閉じた連結した面 Σ を 4 次元の時空領域の境界と解釈して，単に $\mathsf{K} = \mathcal{K}$ を定義することもできる．

6.2 節冒頭 (6.2.1 節の前まで) について

■ループ状態のノルム (6.10) について　U が $SU(2)$ 群の要素であり，それ故，実数 (x, y, z, w) を用いて

$$U = \begin{pmatrix} x + \mathrm{i}y & z + \mathrm{i}w \\ -z + \mathrm{i}w & x - \mathrm{i}y \end{pmatrix}, \qquad x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$$

と座標付けできること [421, p.229] だけを仮定すれば充分である．このとき群の作用は座標の変更に対応し，そこで Haar 測度は単位の 3 次元球面上の不変な固有体積を与える Jacobian に選べば良いと考えられる．関係式

$$x = \cos\chi, \qquad y = \sin\chi\cos\theta, \qquad z = \sin\chi\sin\theta\cos\phi \qquad w = \sin\chi\sin\theta\sin\phi$$

を通じて極座標を導入すると (実際これらは $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ を満たす)，3 次元球面上の線要素 (の 2 乗) は

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\chi\sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2$$

と表される*126．Jacobian は計量の行列式の平方根 $\sin^2\chi\sin\theta$ で与えられる．ところが Haar 測度は定数倍の自由度を除いて一意的に定まる [418, § 3.5]．そこでこの自由度を利用して

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{2\pi^2}\sin^2\chi\sin\theta, \qquad \int \mathrm{d}U = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\chi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\,\sin^2\chi\sin\theta = 1$$

と規格化できる [416, p.22,p.26]．他方で $|\mathrm{tr}\,U|^2 = 4x^2 = 4\cos^2\chi$ なので，このとき

$$\int \mathrm{d}U\,|\mathrm{tr}\,U|^2 = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\chi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\,\sin^2\chi\sin\theta\cdot 4\cos^2\chi = 1 : (6.10)$$

を得る．

6.2.1　$\mathcal{K}$ の構造

空間 $\mathcal{K}$ は豊かで美しい構造を持つ．ここでは以下で重要となる，この構造のいくつかの側面にのみ言及し，詳しくはこの主題に関するより数学向きの文献 ([20] とそこに含まれる参考文献を見よ) を紹介する．

---

*126 直観的には χ が一定の面は通常の半径 $\sin\theta$ の球面だから，その上の線要素は

$$\mathrm{d}l^2 = (\sin^2\chi)(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2).$$

この $\mathrm{d}l$ を 3 次元球面上で“天頂角の方向”の線要素 $\mathrm{d}\chi$ と直交する“方位角の方向”の線要素と考えると，

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\chi^2 + \mathrm{d}l^2$$

と解釈できる．

グラフ部分空間　与えられたグラフ Γ 上の台を持つ円筒関数は $\mathcal{K}$ の部分空間 $\tilde{\mathcal{K}}_\Gamma$ を成す．定義により $\tilde{\mathcal{K}}_\Gamma = L_2[SU(2)^L]$ であり，ここに L は Γ に含まれる経路の本数である．5.3.6 節で説明したように，空間 $\tilde{\mathcal{K}}_\Gamma$ は特定の格子 Γ を持つ格子ゲージ理論の (非拘束) Hilbert 空間である．もしグラフ Γ がグラフ Γ' に含まれるならば，Hilbert 空間 $\tilde{\mathcal{K}}_\Gamma$ は Hilbert 空間 $\tilde{\mathcal{K}}_{\Gamma'}$ の真部分空間である．この Hilbert 空間の入れ子構造は Hilbert 空間の射影族 (projective family) と呼ばれる．$\mathcal{K}$ はこの族の射影の極限 (projective limit) である——またそのように定義できる．

直交基底　$\mathcal{K}$ の基底を見つける道具は Peter–Weyl 定理であり，それは $SU(2)$ 上の L_2 関数の Hilbert 空間の基底が，群の既約表現の行列要素で与えられることを述べている．$SU(2)$ の既約表現は半整数のスピン j［整数を含む］でラベルされる．その上に表現 j が定義されるところの Hilbert 空間を $\mathcal{H}_j$，そのベクトルを v^α と呼ぶ．表現 j の行列要素を

$$R^{(j)\alpha}{}_\beta(U) = \langle U|j,\alpha,\beta\rangle \tag{6.14}$$

と書く．各グラフ Γ に対して順番と向きを選ぶ．すると $\tilde{\mathcal{K}}_\Gamma$ の基底

$$|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle \equiv |\Gamma, j_1, \cdots, j_L, \alpha_1, \cdots, \alpha_L, \beta_1, \cdots, \beta_L\rangle \tag{6.15}$$

は単に基底 (6.14) のテンソル化 (tensoring) によって得られる．すなわち，

$$\langle A|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle = R^{(j_1)\alpha_1}{}_{\beta_1}(U(A,\gamma_1)) \cdots R^{(j_L)\alpha_L}{}_{\beta_L}(U(A,\gamma_L)). \tag{6.16}$$

［以上は式 (5.153) の箇所と比較される．］$\mathcal{K}$ においてこのベクトルの組は基底ではない，と言うのも，もし Γ がグラフ Γ' に含まれるならば，$\tilde{\mathcal{K}}_\Gamma$ と $\tilde{\mathcal{K}}_{\Gamma'}$ に同じベクトルが現れるからである．しかしながら，この過剰を取り除くのは非常に容易である，と言うのも全ての $\tilde{\mathcal{K}}_\Gamma$ のベクトルは，Γ' には含まれるが Γ には含まれない経路の自明な表現に属するからである．したがって，$\mathcal{K}$ の直交基底は単に式 (6.16) で定義される状態 $|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle$ で定義され，ただしスピン $j_l = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \cdots$ は決して値ゼロをとらない．

note　可能なあらゆるグラフ Γ に対して状態 $|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle$ が $\mathcal{K}$ の基底を成す．ここでグラフ Γ には含まれない Γ' の経路が，自明な表現

$$j_{L+1} = \cdots = j_{L+L'} = 0$$

を持つ $\tilde{\mathcal{K}}_{\Gamma'}$ の基底 $|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle$ は，$\tilde{\mathcal{K}}_\Gamma$ の基底と重複する．そこで常に $j_l \neq 0$ を想定すれば，$\mathcal{K}$ の基底の重複を取り除ける．続く式 (6.17) の段落を見よ．

この事実は以下の定義を正当化する．

真グラフ部分集合　各グラフ Γ に対して，**真** (*proper*) グラフ部分集合 $\mathcal{K}_\Gamma$ は $j_l > 0$ の基底状態によって張られる $\tilde{\mathcal{K}}_\Gamma$ の部分集合である．全ての真グラフ部分集合 $\mathcal{K}_\Gamma$ は互いに直交し，それらが $\mathcal{K}$ を張ることを理解するのは容易である；このことを

$$\mathcal{K} \sim \bigoplus_\Gamma \mathcal{K}_\Gamma \tag{6.17}$$

と書ける．“ヌル”グラフ $\Gamma = \emptyset$ が和に含まれる；対応する Hilbert 空間は状態 $\Psi[A] = 1$ によって張られる 1 次元の空間である．この状態は $|\emptyset\rangle$ と表される；すると $\langle A|\emptyset\rangle = 1$.

* L_2 **空間としての** $\mathcal{K}$　$\mathcal{K}$ を双線形形式 (6.7) で定義されるスカラー積における $\mathcal{S}$ の完備化として定義した．この空間は何らかの測度において 2 乗可積分汎関数の空間と見なせるか？ 答はイエスであり，それは美しい数学的構成に関与しているが，私はここでそれを説明しない，と言うのも，それは後で必要なく，それに関しては読者に [20] を紹介する．非常に手短には，$\mathcal{K} \sim L_2[\mathcal{A}, \mathrm{d}\mu_0]$ であり，ここに $\mathcal{A}$ は滑らかな接続の空間の**拡大** (*extention*) である．拡大は分布的な (distributional) 接続を含む．測度 $\mathrm{d}\mu_0$ はこの空間上で定義され，Ashtekar–Lewandowski 測度と呼ばれる．良く知られているように，分布 $\phi(x)$ の上で定義されているために必要となる Gauss 的測度 $\mathrm{d}\mu_G[\phi] \sim$ “$\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, \phi(x)G(x,y)\phi(y)[\mathrm{d}\phi]}$” と，構成はアナロガスである．空間 $\mathcal{A}$ は，接続 A の滑らかなホロノミーから成る Abel C^* 代数の Gelfand スペクトルであるという，美しい性質を持つ．

6.2.2　スカラー積の不変性

運動学的状態空間 $\mathcal{S} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{S}'$ は，単に引数 A の変換によって実現される，局所 $SU(2)$ および $\mathit{Diff}(\Sigma)$［面 Σ 上の微分同相写像］の自然な表現を担う．上で定義したスカラー積はこれらの変換の下で不変である．したがって $\mathcal{K}$ は局所 $SU(2)$ および $\mathit{Diff}(\Sigma)$ の**ユニタリー**表現を担う．このことをいくらか詳しく見よう．

局所ゲージ変換　(滑らかな) 局所 $SU(2)$ 変換 $\lambda : \Sigma \to SU(2)$ の下で，接続 A はゲージポテンシャルのように非斉次的に変換する，すなわち，

$$A \to A_\lambda = \lambda A \lambda^{-1} + \lambda \mathrm{d}\lambda^{-1}. \tag{6.18}$$

［以上，式 (2.52) の箇所を見よ.］この A の変換は $\mathcal{K}$ 上の局所ゲージ変換の自然な表現 $\Psi(A) \to \Psi(A_{\lambda^{-1}})$ を誘導する［本稿次節で補足］．接続の非斉次の変換則 (6.18) にも関わらず，ホロノミーは非斉的に変換し (2.1.5 節を見よ)，

$$U[A,\gamma] \to U[A_\lambda,\gamma] = \lambda(x_{\mathrm{f}}^\gamma)U[A,\gamma]\lambda^{-1}(x_{\mathrm{i}}^\gamma), \tag{6.19}$$

ここに $x_{\mathrm{i}}^\gamma, x_{\mathrm{f}}^\gamma \in \Sigma$ は経路 γ の始および終点である．与えられた (Γ, f) に対して，

$$f_\lambda(U_1, \cdots, U_L) = f(\lambda(x_{\mathrm{f}}^{\gamma_1})U_1\lambda^{-1}(x_{\mathrm{i}}^{\gamma_1}), \cdots, \lambda(x_{\mathrm{f}}^{\gamma_L})U_L\lambda^{-1}(x_{\mathrm{i}}^{\gamma_L})) \tag{6.20}$$

を定義する．このとき［式 (6.6) で定義される］量子状態の変換が

$$\Psi_{\Gamma,f}(A) \to [U_\lambda \Psi_{\Gamma,f}](A) = \Psi_{\Gamma,f}(A_{\lambda^{-1}}) = \Psi_{\Gamma,f_{\lambda^{-1}}}(A) \tag{6.21}$$

となることを理解するのは容易である．［後ろの 2 辺は式 (35) による．これは $\Psi(A)$ のゲージ不変性 (式 (6.2) の箇所) とは無関係に成り立つ．ところで,］Haar 測度は左右の群の変換の下で不変なので，直ちに式 (6.7) は不変であることが帰結する［本稿次節で補足］．式 (6.21) と定義により，基底状態 $|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle$ が

$$\begin{aligned} U_\lambda\,|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle =& R^{(j_1)\alpha_1}{}_{\alpha'_1}(\lambda^{-1}(x_{\mathrm{f}_1}))R^{(j_1)\beta'_1}{}_{\beta_1}(\lambda(x_{\mathrm{i}_1}))\cdots \\ & R^{(j_L)\alpha_L}{}_{\alpha'_L}(\lambda^{-1}(x_{\mathrm{f}_L}))R^{(j_L)\beta'_L}{}_{\beta_L}(\lambda(x_{\mathrm{i}_L}))\,|\Gamma, j_l, \alpha'_l, \beta'_l\rangle \end{aligned} \tag{6.22}$$

と変換することを理解するのは容易であり，ここに i_l と f_l はリンク l が始まる，および終わる点である［本稿次節で補足].

(拡大) 微分同相写像　連続であり，可逆であり，一般には有限の個数の孤立した点を除いて，写像とその逆がどこでも滑らかであるような写像 $\phi : \Sigma \to \Sigma$ を考えよ．これらの写像を“拡大微分同相写像 (extended diffeomorphism)”(あるいは時に，不正確だが，単に“微分同相写像”) と呼ぶ．これらの写像から成る群を Diff^* と呼ぶ．

2 次元において，真の微分同相写像でない拡大微分同相写像は以下である．極座標において，写像

$$r' = r, \qquad \phi' = \phi + \frac{1}{2}\sin\phi \tag{6.23}$$

はどこでも連続であるのに対し，Jacobi 行列式がよく定義されない $r = 0$ を除いて，どこでも微分可能である．［原点 $r = 0$ では ϕ は，したがって $\frac{\partial(r',\phi')}{\partial(r,\phi)} = 1 + \frac{1}{2}\cos\phi$ は不定である．］

拡大微分同相写像の下で，接続の変換はよく定義されている ($A \in \mathcal{G}$ は有限の個数の孤立した点を除いて，Σ 上のどこでも定義されていることを思い出そう［6.2 節冒頭］)．A は 1 形式として変換する：

$$A \to \phi^* A. \tag{6.24}$$

［2.2.5 節と同じ引き戻しの表記であり，ベクトル成分の座標変換則は式 (2.62)．］よって，$\mathcal{S}$ は $U_\phi \Psi(A) = \Psi((\phi^*)^{-1}A)$ によって定義される Diff^* の表現 U_ϕ を担う．ホロノミーは

$$U[A,\gamma] \to U[\phi^* A,\gamma] = U[A,\phi^{-1}\gamma] \tag{6.25}$$

と変換し，ここに $(\phi\gamma)(s) \equiv \phi(\gamma(s))$．すなわち，微分同相写像 ϕ によって A を引きずることは曲線 γ を［逆に］引きずることと等価である．(もし ϕ が真の微分同相写像でなければ，高々有限の個数の点において，曲線 $\phi\gamma$ は滑らかでなくなり得ることに注意せよ．) 他方，円筒関数 $\Psi_{\Gamma,f}[A]$ は円筒関数 $\Psi_{\phi\Gamma,f}[A]$ に，すなわちシフトしたグラフに基づくものに移される．式 (6.7) の右辺はグラフにあからさまには依存しないので，内積の微分同相不変性は直接的である．

6.2.2 節について

■ゲージ変換 $\Psi(A) \to \Psi(A_{\lambda^{-1}})$ (教科書 p.231 一番下) について　$|A_{\lambda^{-1}}\rangle = U_{\lambda^{-1}}|A\rangle = U_\lambda^\dagger |A\rangle$ の Hermite 共役をとると $\langle A_{\lambda^{-1}}| = \langle A| U_\lambda$ となる．すると状態が $|\Psi\rangle \to U_\lambda |\Psi\rangle$ と変換するとき，接続の汎関数は

$$\Psi(A) = \langle A|\Psi\rangle \ \to \ \langle A|U_\lambda|\Psi\rangle = \langle A_{\lambda^{-1}}|\Psi\rangle = \Psi(A_{\lambda^{-1}}) \tag{35}$$

となると考えられる．これが節の冒頭で言及されている，引数の変換である．

■スカラー積 (6.7) のゲージ不変性 (式 (6.21) の直後) について　式 (6.19) で決まる各リンク線 l のホロノミー $U_l(A) \to U_l(A_{\lambda^{-1}})$ を，単に $U_l \to U_l{}'$ と書く．Haar 測度はその定義により右不変かつ左不変なので，$\mathrm{d}U_l = \mathrm{d}U_l{}'$．するとスカラー積は

$$(\text{式 }(6.7)) = \int \mathrm{d}\{U_l\}\overline{f\{U_l\}}g\{U_l\} \ \to \ \int \mathrm{d}\{U_l\}\overline{f\{U_l{}'\}}g\{U_l{}'\} \int \mathrm{d}\{U_l{}'\}\overline{f\{U_l{}'\}}g\{U_l{}'\}$$

となって，節の冒頭の予告通りもとと変わらない (これは式 (6.20) とは無関係に成立)．よって話は前後するものの，$\Psi_{\Gamma,f}(A)$ の $SU(2)$ 変換をその左辺 $[U_\lambda \Psi_{\Gamma,f}](A)$ のように，ユニタリー変換として書ける．これが節の冒頭で予告されている，今一つの結論である．

■基底状態の変換則 (6.22) について　実際，式 (6.22) の両辺に左から $\langle A|$ を掛けて定義式 (6.16) を用いると，

$$\begin{aligned}\langle A_{\lambda^{-1}}|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle =& R^{(j_1)\alpha_1}{}_{\alpha'_1}(\lambda^{-1}(x_{\mathrm{f}_1}))R^{(j_1)\alpha'_1}{}_{\beta'_1}(U[A,\gamma_1])R^{(j_1)\beta'_1}{}_{\beta_1}(\lambda(x_{\mathrm{i}_1}))\cdots\\ & R^{(j_L)\alpha_L}{}_{\alpha'_L}(\lambda^{-1}(x_{\mathrm{f}_L}))R^{(j_L)\alpha'_L}{}_{\beta'_L}(U[A,\gamma_L])R^{(j_L)\beta'_L}{}_{\beta_L}(\lambda(x_{\mathrm{i}_L}))\end{aligned}$$

となる．ホロノミーの変換則 (6.19) より，これは式 (6.16) にゲージ変換 $A \to A_{\lambda^{-1}}$ を施した結果に一致している．

6.2.3　ゲージ不変および微分同相不変な状態

運動学的状態空間 $\mathcal{K}$ は任意の接続の波動汎関数 $\Psi[A]$ の空間であるのに対し，我々は局所ゲージ変換と微分同相写像の下で不変な波動汎関数である状態の空間が必要であることを思い出そう［6.2 節冒頭］．より形式的には，2 つの方程式 (4.80) と (4.81) を量子論に実装し，

$$\mathrm{D}_a \frac{\delta}{\delta A_a^i(\vec{\tau})}\Psi[A] = 0, \tag{6.26}$$

$$F_{ab}^i(\vec{\tau})\frac{\delta}{\delta A_a^i(\vec{\tau})}\Psi[A] = 0 \tag{6.27}$$

を与えねばならない．4.3.4 節で用いたのと同じ議論で，これらの方程式は局所 $SU(2)$ 変換と微分同相写像の下での Ψ の不変性を要求することが示される．より正確には，4.3.4 節の不鮮明化関数 $f^a(\vec{\tau})$ を適切なクラスの内に選ばねばならない：ここで関心のある群は Diff^* であり，したがって $f^a(\vec{\tau})$ は Diff^* のあらゆる無限小の生成子であり得る．この選択の下で式 (6.27) は，Diff^* の下での状態の不変性という要求と等価である．

局所 $SU(2)$ の下で不変な状態の空間を $\mathcal{K}_0$，また局所 $SU(2)$ と Diff^* の下で不変な状態の空間を $\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ と呼ぶ．Wheeler–DeWitt 方程式の解の空間を $\mathcal{H}$ と呼ぶことを思い出すと，したがって一連の Hilbert 空間

$$\mathcal{K} \quad \xrightarrow{SU(2)} \quad \mathcal{K}_0 \quad \xrightarrow{\mathit{Diff}^*} \quad \mathcal{K}_{\mathrm{diff}} \quad \xrightarrow{H} \quad \mathcal{H} \tag{6.28}$$

が得られ，ここで 3 段階は波動汎関数が満たさねばならない 3 つの方程式，すなわち式 (6.26),(6.27) および (6.3) にそれぞれ対応している．次節で $\mathcal{K}_0$ を，続く節で $\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ をあからさまに構成する．(最初のものを除けば，式 (6.28) における写像の領域は対応する艤装 Hilbert 空間の第 1 項で与えられることが判明する．)

6.3　内部ゲージ不変性．空間 $\mathcal{K}_0$

空間 $\mathcal{K}_0$ は局所 $SU(2)$ ゲージ変換の下で不変な $\mathcal{K}$ の状態の空間である．$\mathcal{S}$ のゲージ不変な部分空間を $\mathcal{S}_0$，その双対を $\mathcal{S}'_0$ と呼ぶ．$\mathcal{K}_0$ が $\mathcal{K}$ の真部分集合であることを理解するのは難しくない．有限ノルムの $SU(2)$ 不変な状態の例は，式 (6.9) で定義されるループ状態によって与えられる．

note　ループの始・終点を x とすると，式 (6.19) よりホロノミー (6.9) は

$$\mathrm{tr}\, U(A,\alpha) \;\to\; \mathrm{tr}[\lambda(x)U(A,\alpha)\lambda^{-1}(x)] = \mathrm{tr}\, U(A,\alpha)$$

と変換するので，$SU(2)$ 不変である (トレースの巡回対称性に注意).

実際，少し考えれば，多重ループ状態は $\mathcal{K}_0$ を張るのに充分であることが分かる．LQG の発展の最初の年において，多重ループ状態は $\mathcal{K}_0$ の基底に用いられた；しかしながら，この基底は過完備 (overcomplete) であ

り［文献 [415, pp.104–105] で見た］，この事実は定式化を複雑にする．今日では，一般的な直交基底を成している多重ループ状態の有限の線形結合と見なせる，スピン・ネットワーク状態の導入のおかげで，我々ははるかに優れた $\mathcal{K}_0$ の制御を有している．

量子重力におけるスピン・ネットワーク基底は，5.3.6 節で格子ゲージ理論の文脈で定義したスピン・ネットワーク基底の，単純な拡張である．次節で見るように，しかしながら，微分同相不変性は直ちに 2 つの場合を非常に異なったものにし，量子重力スピンネットワーク基底を，幾何学の量子状態はスピンを担う抽象的なグラフとして表せるという，Penrose の古い“スピン・ネットワーク”のアイデアに結び付ける．

スピン・ネットワーク　Γ の向き付けされた曲線の端点 (end points) を“結節点 (nodes)”と表現する．一般性を失うことなく，各曲線の集合 Γ はもし重なる (overlap) ならば結節点でのみ重なる曲線 γ から成ると仮定する．この観点からは，Γ は実際に多様体に埋め込まれたグラフ，すなわち，Σ における曲線であるリンク l でつながれた，Σ の点である結節点 n の集まりである．結節点の“射出多重度 (outgoing multiplicity)” m_{out} はその結節点から始まるリンクの本数である．結節点の“入射多重度 (ingoing multiplicity)” m_{in} はその結節点で終わるリンクの本数である．結節点の多重度 (multiplicity)，あるいは価数 (valence) $m = m_{\text{in}} + m_{\text{out}}$ はそれら 2 つの和である．

順番と向きの選ばれたグラフ Γ が与えられたとき，j_l を各リンク l への，自明なものとは異なる既約表現の割り当てとする．i_n を各結節点 n への結節因子 i_n の割り当てとする．結節因子の概念は 5.3.6 節で定義した．結節点に関する結節因子 i_n は，結節点に接続するリンクに関する表現の間にある．3 つ組 $S = (\Gamma, j_l, i_n)$ は“Σ に埋め込まれたスピン・ネットワーク”と呼ばれる．j_l と i_n の選択はそれぞれ，リンクと結節点の“色付け (coloring)”と呼ばれる．

6.3.1　スピン・ネットワーク状態

L 本のリンクと N 個の結節点を持つスピン・ネットワーク $S = (\Gamma, j_l, i_n)$ を考えよ．上記の式 (6.16) で定義される状態 $|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle$ は L 個の添字 α_l と L 個の添字 β_l を持つ．N 個の結節因子 i_n は，合わせると，それらと双対な添字をちょうど持つ．その 2 つの縮約

$$|\mathrm{S}\rangle \equiv \sum_{\alpha_l, \beta_l} v_{i_1}^{\beta_1 \cdots \beta_{n_1}}{}_{\alpha_1 \cdots \alpha_{n_1}} v_{i_2}^{\beta_{n_1+1} \cdots \beta_{n_2}}{}_{\alpha_{n_1+1} \cdots \alpha_{n_2}} \cdots v_{i_N}^{\beta_{(n_{N-1}+1)} \cdots \beta_L}{}_{\alpha_{(n_{N-1}+1)} \cdots \alpha_L} |\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle \tag{6.29}$$

はスピン・ネットワーク状態 $|\mathrm{S}\rangle$ を定義する．添字の縮約のパターンはグラフのトポロジー自体によって指定される：リンク l の添字 α_l (または β_l) は，リンク l の始まる (または終わる) 結節点 n の，対応する結節因子 v_{i_n} の添字と縮約される．

note　スピン・ネットワーク状態 (6.29–30) の不変性との整合性をとるためには実際には逆に，結節因子 $v_{\alpha\cdots}^{\beta\cdots}$ の α 添字と β 添字はそれぞれ順に，結節点で入射または射出するリンク線の添字でなければならないと考えられる (本稿次節)．実際，後の式 (6.35) の箇所ではそのようになっている．

この状態のゲージ不変性は，基底状態の変換性 (6.22) と結節因子の不変性から直ちに帰結する［本稿次節で確認］．接続の汎関数としては，この状態は

$$\Psi_{\mathrm{S}}[A] = \langle A|\mathrm{S}\rangle \equiv \left(\bigotimes_l R^{(j_l)}(H[A, \gamma_l]) \right) \cdot \left(\bigotimes_n i_n \right). \tag{6.30}$$

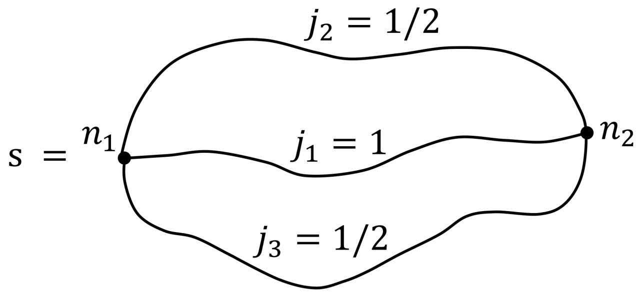


図 20　2 つの 3 価の (trivalent) 結節点を持つ簡単なスピン・ネットワークの例

［H はホロノミー U を表す．明示的には 5.3.6 節のノートと下記の例を見よ*127.］ドットの表記は双対な空間の間の縮約を表す：左側では，行列のテンソル積は空間 $\otimes_l(\mathcal{H}^*_{j_l}\otimes\mathcal{H}_{j_l})$ に属する．右側では，全ての結節因子のテンソル積はちょうどこの空間の双対に属する．

例　Γ は 2 つの結節点 n_1 と n_2 と 3 本のリンク l_1, l_2, l_3 を持ち，各リンクは n_1 から始まり n_2 で終わるとする．リンクの色付けを $j_1 = 1, j_2 = 1/2, j_3 = 1/2$ とする (図 20 を見よ)．2 つの結節点の各々において，それ故，$SU(2)$ の 2 つの基本表現と 1 つの随伴表現［$j_1 = 1$ 表現のこと (付録 A.1 (p.378))］のテンソル積を考えねばならない．よく知られているように，これらの表現のテンソル積は自明な表現の 1 つの複製を持つ；それ故 1 つだけ可能な結節因子がある．少し考えると，これは Pauli 行列の 3 つ組 $v^{i,AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma^{i,AB}$ で与えられることが分かる，と言うのも，これらはちょうど不変性

$$(R(U))^i{}_j U^A{}_C U^B{}_D \sigma^{j,CD} = \sigma^{i,AB} \tag{6.31}$$

を持つからである．ここに $(R(U))^i{}_j$ は $i, j = 1, 2, 3$ のベクトル添字を持つ随伴表現，また $U^A{}_C$ は $A, B = 0, 1$ のスピノル添字を持つ基本表現である．$\frac{1}{\sqrt{3}}$ は式 (5.157) を満たすための規格化因子である．［以上，本稿次節で補足する．］したがって，この場合はただ 1 つの可能な色付けがある．スピン・ネットワーク状態はこのとき，

$$\Psi_{\mathrm{S}}[A] = \frac{1}{3}\sigma_{i,AB}(R(H[A,\gamma_1]))^i{}_j(H[A,\gamma_2])^A{}_C(H[A,\gamma_3])^B{}_D\sigma^{j,CD}. \tag{6.32}$$

ここでスピン・ネットワーク状態に関する主要な事実を明言しよう：スピン・ネットワーク状態 $|\mathrm{S}\rangle$ のアンサンブルは $\mathcal{K}_0$ の直交基底を成す．直交性は直接の計算で確認できる．

note　自明な表現 $j_l = 0$ を付け加えることを許容すれば，式 (6.8) の箇所のように異なるグラフ Γ を持つ基底状態 $|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle$ に対しても内積を定義できる．Peter–Weyl 定理により $|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle$ は直交基底なので，内積は j_l, α_l, β_l に関する Kronecker のデルタを生じる．よって 2 つのスピン・ネットワーク状態 (6.29) の内積をとると，結節因子の間の縮約が現れる．さらに結節因子の直交性 (5.157) を用いると，スピン・ネットワーク状態 (6.29) の直交性が得られると想像される．

基底はスピン・ネットワーク，すなわちグラフ Γ と色付け (j_l, i_n) によってラベルされる．

いくつかのコメント．第 1 に，スピン j_l は全てゼロと異なると仮定した ($j_l = 0$ のリンク l を含むスピン・ネットワークは，リンク l を取り除くことによって得られるスピン・ネットワークに同定される)．第 2 に，この結果は Peter–Weyl 定理，すなわち状態 $|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle$ が $\mathcal{K}$ の基底を成すという事実と，結節因子の定義そのものの単純な帰結である．第 3 に，スピン・ネットワーク基底は一意的ではない，と言うのも，それは各結節点における結節因子の各空間における基底の (任意の) 選択に依存するからである．基底 $|\mathrm{S}\rangle = |\Gamma, j_l, i_n\rangle$ で

*127 接続 $A^i = A^i_a \mathrm{d}x^a$ の成分 A^i_a とスピン j 表現の基底 τ_i (ラベル j は省略) を用いて，常にスピン j 表現の行列 $A_a = A^i_a\tau_i$ を定義できる．スピン j 表現のホロノミーにはこれを用いれば良い．

は，ラベル Γ は全ての向きと順番のないグラフを走ることにも注意せよ．しかしながら，色付けの定義のためには，各 Γ に対して向きと順番を選ばねばならない．

空間 $\mathcal{S}_0$ は $\mathcal{K}_0$ で稠密となる，スピン・ネットワーク状態の**有限の**線形結合の状態であり，$\mathcal{S}'_0$ はその双対である．

6.3.1 節について

■スピン・ネットワーク状態 (6.29–30) のゲージ不変性の確認　例として 5.3.6 節のノートに載せた図 18(b) における，(向き付けしたグラフ $\Gamma^{(\mathrm{b})}$ に関する) スピン・ネットワークを考えよう．スピン・ネットワーク状態 (6.29) は

$$|\mathrm{b}\rangle = v_{i_1}^{\beta_1\beta_2\beta_3} v_{i_2,\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \left|\Gamma^{(\mathrm{b})}, j_l, \alpha_l, \beta_l\right\rangle . \qquad (l=1,2,3)$$

基底の変換則 (6.22) と結節因子の不変性 (5.156) より，これはゲージ変換に伴って

$$\begin{aligned} U_\lambda |\mathrm{b}\rangle =& v_{i_1}^{\beta_1\beta_2\beta_3} v_{i_2,\alpha_1\alpha_2\alpha_3} R^{(j_1)\alpha_1}{}_{\alpha'_1}({\lambda_2}^{-1}) R^{(j_1)\beta'_1}{}_{\beta_1}(\lambda_1) \\ &\times R^{(j_2)\alpha_2}{}_{\alpha'_2}({\lambda_2}^{-1}) R^{(j_2)\beta'_2}{}_{\beta_2}(\lambda_1) R^{(j_3)\alpha_3}{}_{\alpha'_3}({\lambda_1}^{-1}) R^{(j_3)\beta'_3}{}_{\beta_3}(\lambda_2) \left|\Gamma^{(\mathrm{b})}, j_l, \alpha'_l, \beta'_l\right\rangle \\ =& \left(R^{(j_1)\beta'_1}{}_{\beta_1}(\lambda_1) R^{(j_2)\beta'_2}{}_{\beta_2}(\lambda_1) R^{(j_3)\alpha_3}{}_{\alpha'_3}({\lambda_1}^{-1}) v_{i_1,\alpha_3}^{\beta_1\beta_2}\right) \\ &\times \left(R^{(j_1)\alpha_1}{}_{\alpha'_1}({\lambda_2}^{-1}) R^{(j_2)\alpha_2}{}_{\alpha'_2}({\lambda_2}^{-1}) R^{(j_3)\beta'_3}{}_{\beta_3}(\lambda_2) v_{i_2,\alpha_1\alpha_2}^{\beta_3}\right) \left|\Gamma^{(\mathrm{b})}, j_l, \alpha'_l, \beta'_l\right\rangle \\ =& v_{i_1,\alpha'_3}^{\beta'_1\beta'_2} v_{i_2,\alpha'_1\alpha'_2}^{\beta'_3} \left|\Gamma^{(\mathrm{b})}, j_l, \alpha'_l, \beta'_l\right\rangle \\ =& |\mathrm{b}\rangle \end{aligned}$$

となり，不変に留まる．また上式の両辺に左から $\langle A|$ を掛けると，波動汎関数 (6.30) の不変性

$$\Psi_{\mathrm{b}}[A_{\lambda^{-1}}] = \Psi_{\mathrm{b}}[A]$$

が導かれる．すなわちスピン・ネットワーク状態 (6.30) は 6.2 節で要求したゲージ不変性を満たす．このことは 5.3.6 節のノートにおいても，上記と同様の計算で直接確認した．

■式 (6.31) について　スピノル添字を上げた Pauli 行列成分は式 (A.15):$\sigma^{i,AB} = \sigma^{i,A}{}_C\epsilon^{CB}$ で定義される．ただし $j=1$ 表現における $SO(3)$ 変換 (付録 A.1，p.380) を受けるベクトル添字 $i,j,\cdots$ の上下は区別しなくて良い．

このとき式 (6.31) の左辺において

$$U^A{}_C U^B{}_D \sigma^{j,CD} = U^A{}_C(\sigma^{j,C}{}_E\epsilon^{ED})U^B{}_D = U^A{}_C\sigma^{j,C}{}_E(-U^B{}_D\epsilon^{DE}).$$

第 2 の等号について　スピノル添字の上げ下げに用いられる $\epsilon^{AB}, \epsilon_{AB}$ は通常の計量テンソルと違って反対称なので，縮約をとる添字の位置に注意する必要がある．添字を下げるときには式 (6.33) に従って，上げるときには式 (A.14) に従って

$$\psi_A = \epsilon_{AB}\psi^B, \qquad \psi^A = \psi_B\epsilon^{BA}$$

のようにする．実際これは文献 [416, p.23] の式 (1.23) で，「下付きは左で上付きは右の (down-left-up-right) 規則，あるいは ${}_A/{}^A$ 規則」として明記されている．これら 2 式の整合性 (添字を下げてから上げると元に戻ること) は $\epsilon^{AC}\epsilon_{BC} = \delta^A_B$ から保証される．

ここで逆行列の表式 (A.6) と $\epsilon_{BD}\epsilon^{BE} = \delta^E_D$ より，

$$(U^{-1})^A{}_B\epsilon^{BE} = -U^E{}_C\epsilon^{CA} \qquad \text{i.e.} \qquad -U^B{}_D\epsilon^{DE} = (U^{-1})^E{}_D\epsilon^{DB}$$

となることを用いると，さらに

$$U^A{}_C U^B{}_D\sigma^{j,CD} = U^A{}_C\sigma^{j,C}{}_E(U^{-1})^E{}_D\epsilon^{DB} = (U\sigma^j U^{-1})^A{}_D\epsilon^{DB}$$

と書き換えられる．

ところで $SU(2)$ 行列は一般に，単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ 周りの角度 $(-\phi)$ の回転演算子 $U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\phi/2}$ として表すことができる．また対応する回転行列 $R(\boldsymbol{n},-\phi)^i{}_j$ を用いて，Pauli 行列の相似変換は

$$U\sigma^j U^{-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\phi/2}\sigma^j\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\phi/2} = R(\boldsymbol{n},-\phi)^j{}_k\sigma^k$$

となる [421, pp.223–225]．以上より

$$R(\boldsymbol{n},+\phi)^i{}_j U^A{}_C U^B{}_D\sigma^{j,CD} = R(\boldsymbol{n},+\phi)^i{}_j R(\boldsymbol{n},-\phi)^j{}_k\sigma^{k,A}{}_D\epsilon^{DB} = \sigma^{i,AB} : (6.31)$$

を得る．

結節因子 $v^{i,AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma^{i,AB}$ は式 (A.18) では Wigner の $3j$ 記号として説明されている．ただし式 (A.18) は規格化されていないことに注意する．そこで結節因子の規格化条件 (5.157) を考えよう．

$$\overline{\sigma^{i,AB}}\sigma_{i,AB} = (\overline{\sigma^A_{iB'}}\epsilon^{B'B})(\sigma^{A'}_{iB}\epsilon_{A'A}) = (\delta^B_A\delta^{B'}_{A'} - \delta^{B'}_A\delta^B_{A'})\overline{\sigma^A_{iB'}}\sigma^{A'}_{iB} = \mathrm{tr}(\overline{\sigma_i}\sigma_i) - \mathrm{tr}(\overline{\sigma_i})\mathrm{tr}(\sigma_i)$$

であり (i で和をとる)，ここで $\mathrm{tr}(\sigma_i) = 0$，および直接の成分計算により

$$\overline{\sigma_1}\sigma_1 = 1_{2\times2}, \qquad \overline{\sigma_2}\sigma_2 = -1_{2\times2}, \qquad \overline{\sigma_3}\sigma_3 = 1_{2\times2}$$

(ただし $1_{2\times2}$ は 2 次の単位行列) となるので，

$$\overline{\sigma^{i,AB}}\sigma_{i,AB} = \mathrm{tr}(\overline{\sigma_i}\sigma_i) = 2$$

を得る．よって規格化定数は $1/\sqrt{2}$ と考えられる (式 (A.14) 直前の基底ベクトル $e^{AB}_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma^{AB}_i$ の係数に一致)．このとき続く式 (6.32) の係数も $1/3 \to 1/2$ と改める必要がある．

備考　規格化条件 (5.157) における複素共役をとらなければ，上式の代わりに

$$\sigma^{i,AB}\sigma_{i,AB} = \mathrm{tr}[(\sigma_i)^2] - [\mathrm{tr}(\sigma_i)]^2 = \mathrm{tr}[(\sigma_i)^2] \qquad (i\text{ で和をとる})$$

が得られる．ここで

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}1_{2\times2} + \mathrm{i}\,\epsilon_{ijk}\sigma_k, \qquad \therefore (\sigma_i)^2 = 3\cdot 1_{2\times2}, \qquad \therefore \mathrm{tr}[(\sigma_i)^2] = 6$$

に注意すると $\sigma^{i,AB}\sigma_{i,AB} = 6$ となるので，この場合は規格化定数は式 (6.31) の $1/\sqrt{6}$ のままで正しいと考えられる．

6.3.2　* スピン・ネットワークに関する詳細

向き (付け)　表現 j とその双対 j^* の間には同形写像 ϵ がある．もし j が基本［表現］ならば，

$$\begin{aligned}\epsilon:\quad & C^2 \to (C^2)^*,\\ & \psi^A \mapsto \psi_A = \epsilon_{AB}\psi^B\end{aligned} \tag{6.33}$$

であり，ここに ϵ_{AB} は反対称テンソルである．これは全ての他の表現に拡張される，と言うのも，それらは基本のテンソル積から得られるからである．これを用いて，結節因子の添字を上げ下げし，同じ添字の総数を持つ結節因子を同定できる．するともしリンクの 1 本の向きを変えると何が起きるかを問うことができる．式 (A.6) を用いると，読者に委ねるところの直接的な計算により，もし表現が半整数を持てば，変化は全体の符号だけに及ぶことが示される．こうして，スピン・ネットワークの重要な向きは全体の大域的な向きだけである．

スピン・ネットワーク 対 ループ状態 スピン・ネットワーク状態は (多重) ループ状態の有限の線形結合に分解される．表現 j は $2j$ 基本表現の対称化されたテンソル積として書ける．したがって $\mathcal{H}_j$ の要素を，$2j$ 個のスピノル添字 $A_i = 0, 1$ を持つ完全対称複素スピノル $\psi^{A_1,\cdots,A_{2j}}$ として書ける．この基底では，表現行列は簡単な形

$$R^{(j)A_1,\cdots,A_{2j}}(U) = U^{(A_1}{}_{(B_1} \cdots U^{A_{2j})}{}_{B_{2j})} \tag{6.34}$$

を持ち，ここに丸括弧は完全対称化を表す (付録 A.1 を見よ)．この基底では，結節因子は単に 2 つの $SU(2)$ 不変なテンソル，すなわち ϵ_{AB} と δ_A^B のみの組合せである．例えば，入射する表現 j, j' と射出する表現 j'' の間の (規格化されていない) 3 価の結節因子は

$$v_{A_1,\cdots,A_{2j},B_1,\cdots,B_{2j'}}{}^{C_1,\cdots,C_{2j''}} = \epsilon_{A_1B_1}\cdots\epsilon_{A_aB_a}\delta^{C_1}_{B_{a+1}}\cdots\delta^{C_b}_{B_{2j'}}\delta^{C_{b+1}}_{A_{a+1}}\cdots\delta^{C_{2j''}}_{A_{2j}} \tag{6.35}$$

であり，ここに $j = a+c, j' = a+b$ および $j'' = b+c$．［上式 (6.35) は式 (A.13) に ϵ_{AB} を縮約して添字を下げて得られる*128．］ここで，2 本の隣接したリンク γ_1 と γ_2 の 2 つのホロノミー行列が δ_A^B によって繋がってるとき，それらは私が $\gamma_1\#\gamma_2$ と書き表す，γ_1 と γ_2 を繋いで得られる曲線のホロノミーを与える：

$$H[A,\gamma_1]^A{}_B\delta^B_C H[A,\gamma_2]^C{}_D = H[A,\gamma_1\#\gamma_2]^A{}_D. \tag{6.36}$$

他方，$\epsilon_{AB}U^A{}_C\epsilon_{CD} = (U^{-1})^D{}_A$ を思い出そう［正しくは式 (A.6)］．したがって，

$$\epsilon_{DB}H[A,\gamma_1]^A{}_B\epsilon_{AC}H[A,\gamma_2]^C{}_E = -H[A,\gamma_1^{-1}\#\gamma_2]^D{}_E. \tag{6.37}$$

［$\epsilon_{DB}H[A,\gamma_1]^A{}_B\epsilon_{AC} = -(H[A,\gamma_1]^{-1})_{DC}$ より，右辺に負号を補った．］したがって結節因子におけるテンソル ϵ_{AB} と δ_A^B は単にホロノミーの引数の線分を繋ぐ．スピン・ネットワークのグラフは有限なので，繋がっている線は閉じてループにならねばならない．少し考えると，スピン・ネットワーク状態 (6.29) はしたがって，グラフをなぞる (wrap along) 閉曲線のホロノミーの，積の線形結合に等しいことを読者は納得できるだろう．すなわち，それは多重ループ状態の線形結合である．

スピン・ネットワーク状態のループ状態への分解は，グラフ的には以下のように得られる．スピン j で色付けされたグラフの各リンクを，$2j$ 本の平行な構成要素の線 (strands) に置き換える．これらの構成要素の線を各リンクに沿って対称化する．各結節点の結節因子は，異なるリンクの構成要素を繋ぐ部分 (segments) の集まりとして表せる．これらの部分を構成要素の線と繋ぐことによって，多重ループの線形結合が得られる．スピン・ネットワーク状態はこのとき，対応するループ状態に展開できる．これは付録 A.1［正しくは付録 A.2］で説明する Kauffman–Lins リカップリング理論の基礎における構成とアナロガスであることに注意せよ (符号に注意せねばらならい［式 (A.55) では線を反対称化している*129］)．この構成の詳細については，[171] を見よ．

図 20 に描いた状態 (6.32) にこの規則を適用すると，

$$\Psi_{\mathrm{S}}(A) = \frac{1}{2}\left[\Psi_{((\gamma_1\#\gamma_2^{-1}),(\gamma_1\#\gamma_3^{-1}))} + \Psi_{\gamma_1\#\gamma_2^{-1}\#\gamma_1\#\gamma_3^{-1}}\right] \tag{6.38}$$

を理解するのは容易である．この分解のグラフ的表現については図 21 を見よ．［これは Mandelstam 恒等式に基づくループ間の関係 [415, p.105,pp.121—122] とは非なるものである．］

結節因子に関する状態 グラフとそのリンクの色付けが与えられたとき，結節点に関係する消えない結節因子が全くないということが起こり得る．例えば，価数 1 (unity) の結節点はスピン・ネットワークには存在できない，と言うのも，単一の非自明な既約表現はいかなる不変な部分空間も含まないからである．もし結節点が 2 価 (bivalent) ならば，入射および射出する表現が同じである場合にのみ結節因子があり，結節因子は単位行列 (identity) である．2 価の結節点で繋がる 2 本のリンクを持つスピン・ネットワークは，2 本のリンクを単一のリンクで置き換えて得られるものと同一視される．3 価の結節点は色付け j_1, j_2, j_3 が Clebsch–Gordan 条件 (A.10)–(A.11) を満たす場合にのみ，それらの色付けを伴う隣接するリンクを持ち得る．結節因子は規格化を除き，Wigner の $3j$-係数 (A.16) で直接与えられる．非自明な結節因子の空間はあくまで 4 価またはそれ以上の結節点から始まる．付録 A.1 で詳述するように，n 価の結節点の結節因子は $n-2$ 個のスピンでラベルできる．

6.4 微分同相不変性．空間 $\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$

ここで 2 つ目の，はるかに重大な不変性—— 3 次元の微分同相不変性——に取り組もう．我々は微分同相不変な状態を見つけなければならない．［この話題に関する簡単な説明が文献 [415, § 8.1] にある．］

---

*128 式 (6.33) のように，添字の上げ下げは ϵ_{AB} を用いて行う [420, p.9]．縮約は $\epsilon = (\epsilon^{AB})$ の転置行列が逆行列であること $\epsilon_{BB'}\epsilon^{B'C} = -\delta^C_B, \epsilon_{AA'}\epsilon^{CA'}$，およびその結果として $\epsilon_{AA'}\epsilon_{BB'}\epsilon^{A'B'} = \epsilon_{AB}$ となることから具体的に評価できる．

*129 Kauffman–Lins 理論とスピン・ネットワークのリカップリング・ダイアグラムは互いに関係しているものの異なる (A.2.2 節，A.2.3 節)．

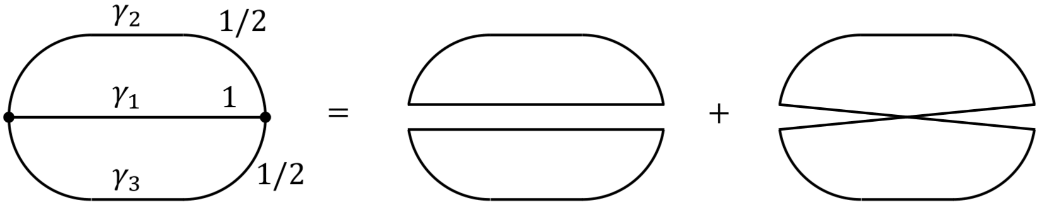


図 21　スピン・ネットワーク状態のループ状態への分解

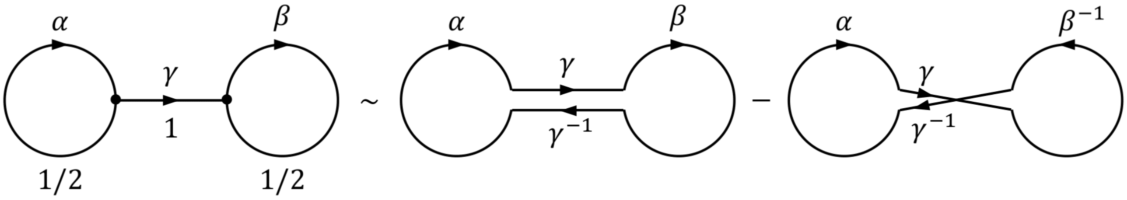


図 22　“眼鏡”グラフを持つスピン・ネットワーク状態 (6.40) の，ループ状態 (6.41) への分解

微分同相写像の下でのスピン・ネットワーク状態の変換性　スピン・ネットワーク状態 $|\mathrm{S}\rangle$ は微分同相写像の下で不変ではない．微分同相写像はグラフを多様体上で動かし，したがって状態を変える．しかしながら，微分同相写像はスピン・ネットワークのグラフ以外も変え得ること，すなわち，方程式 $U_\phi\,|\Gamma, j_l, i_n\rangle = |(\phi\Gamma, j_l, i_n)\rangle$ は常には正しくないことに注意せよ．特に，グラフ Γ を不変に留める微分同相写像もなおスピン・ネットワーク状態 $|\Gamma, j_l, i_n\rangle$ に影響し得る．これは各グラフに対して，スピン・ネットワーク状態の定義がリンクの向きと順番の選択を必要とし，それらが微分同相写像によって変化し得るからである．

以下は例である．Γ を $j=1$ 表現の経路 γ で繋がれた，$j=1/2$ 表現の 2 つのループ α と β から成る“眼鏡 (eyeglasses)”グラフとしよう．各結節点の結節因子の空間は 1 次元であるものの，このことは基底に対して成される選択がないことを意味しない，と言うのも，もし i が規格化された結節因子ならば，$-i$ もそうだからである．ある選択では，状態は

$$\Psi_{\mathrm{S}}[A] = (U(A,\alpha))^A{}_B\sigma_i{}^B{}_A(R^{(1)}(U(A,\gamma)))^i{}_j\sigma^{jD}{}_C(U(A,\beta))^C{}_D. \tag{6.39}$$

初等的な $SU(2)$ 表現理論を用いると，これは (規格化因子を除いて)

$$\Psi_{\mathrm{S}}[A] \sim \mathrm{tr}H[A,\alpha\gamma\beta\gamma^{-1}] - \mathrm{tr}H[A,\alpha\gamma\beta^{-1}\gamma^{-1}] \tag{6.40}$$

と書くことができる．［ひとまず 6.3.2 節の処方箋に従って対応する図 22 を描けるものの，以下で重要となる相対的な符号の違いは非自明である．式 (A.55) のようにリンク γ を $n=2j=2$ 本の平行線と反対称化作用素 (A.52) として扱えば良い*130．］ここでループ β をひっくり返す，すなわちその向きを反転させるのに対し，α と γ をそのままに留める微分同相写像 ϕ を考えよ．明らかにこの微分同相写像は最後の方程式の 2 項を互いに移し，

$$U_\phi\Psi_{\mathrm{S}}[A] = -\Psi_{\mathrm{S}}[A] \tag{6.41}$$

を与える一方で，$\phi\Gamma = \Gamma$.

向きと順番を持つグラフ Γ が与えられたとき，この例のように，グラフの向きまたは順番を変え，また微分同相写像として得られるような写像 g_k の，有限の離散的な群 G_Γ がある．この群の要素 g_k は $\mathcal{K}_\Gamma$ に作用する．

少し考えると，微分同相不変な状態は $\mathcal{K}_0$ の中になく，$\mathcal{S}'_0$ の中にあることを読者は納得できる．したがって量子論的な方程式の解を Hilbert 空間の拡大において探さねばならず，5.5.2 節で説明したように，スカラー積を解の空間に適切に拡張しなければならないのと，我々は同じ状況にある．

$\mathcal{S}'_0$ の要素は汎関数 $\Psi \in \mathcal{S}_0$ の線形汎関数 Φ である．微分同相不変性の要求は $\mathcal{S}'_0$ において意味を成す，と言うのも，微分同相写像の群の作用は双対性

$$(U_\phi\Phi)(\Psi) \equiv \Phi(U_{\phi^{-1}}\Psi) \tag{6.42}$$

*130 ただし Kauffman–Lins 理論とスピン・ネットワークのリカップリング・ダイアグラムは互いに関係しているものの異なる (A.2.2 節，A.2.3 節).

により，$\mathcal{S}'_0$ においてよく定義されているからである．したがって $\mathcal{S}'_0$ の微分同相不変な要素 Φ は

$$\Phi(U_\phi\Psi) \equiv \Phi(\Psi) \tag{6.43}$$

なる線形汎関数である．空間 $\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ はこれら $\mathcal{S}'_0$ の微分同相不変な要素の空間である．驚くべきことに，この空間の要素を物理的空間の量子状態と見なせる，非常に優れた理解がある．

空間 $\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$　ここで写像 $P_{\mathrm{diff}}:\mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}'_0$ を定義し，この写像の像 (のノルムにおける閉包) が正確に $\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ であることを示す．状態 $P_{\mathrm{diff}}\Psi$ を

$$(P_{\mathrm{diff}}\Psi)(\Psi') = \sum_{\Psi''=U_\phi\Psi} \langle\Psi'', \Psi'\rangle \tag{6.44}$$

によって定義される $\mathcal{S}'_0$ の要素とする．和は $\Psi'' = U_\phi\Psi$ なる $\phi \in \mathit{Diff}^*$ が存在するような，$\mathcal{S}_0$ の全ての状態 Ψ'' にわたる．重要な点はこの和が常に有限であり，それ故よく定義されていることである．これを理解するために，Ψ と Ψ' は $\mathcal{S}_0$ にあるので，それらはスピン・ネットワーク状態の有限の線形結合に展開できることに注意しよう．もし微分同相写像がスピン・ネットワーク状態 Ψ_{S} のグラフを変えるならば，微分同相写像はそれをそれ自身に直交する状態にする．もし微分同相写像がグラフを変えないならば，微分同相写像は状態を不変に留め，式 (6.44) に多重度 (multiplicity) は現れないか，あるいはリンクの順序または向きを変えるものの，それらは離散的な操作であって，式 (6.44) の和において高々離散的な多重度を与えるかのいずれかである．したがって，式 (6.44) における和は常によく定義されている．明らかに $P_{\mathrm{diff}}\Psi$ は微分同相不変である，すなわち式 (6.43) を満たす．

note　スカラー積 $\langle\,,\rangle$ が 2 状態に共通の微分同相写像を施しても不変であると仮定すると，

$$(P_{\mathrm{diff}}\Psi)(U_\phi\Psi') = \sum_{\Psi''=U_{\phi'}\Psi} \langle\Psi'', U_\phi\Psi'\rangle = \sum_{U_{\phi^{-1}}\Psi''=U_{\phi'}\Psi} \langle U_{\phi^{-1}}\Psi'', \Psi'\rangle = \sum_{\Psi'''=U_{\phi'}\Psi} \langle\Psi''', \Psi'\rangle = (P_{\mathrm{diff}}\Psi)(\Psi')$$

となるので，$\Phi = P_{\mathrm{diff}}\Psi$ は式 (6.43) を満たす．ただし第 3 の等号では $\Psi''' \equiv U_{\phi^{-1}}\Psi''$ とおいた．

さらに，式 (6.44) の形の汎関数が微分同相不変な状態の空間を張ることを納得するのは難しくない．したがって，$P_{\mathrm{diff}}:\mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}'_0$ の像 (のノルムにおける閉包) は $\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ である．微分同相写像によって関係する状態は P_{diff} によって，$\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ の同じ要素に射影される：

$$P_{\mathrm{diff}}\Psi_{\mathrm{S}} = P_{\mathrm{diff}}(U_\phi\Psi_{\mathrm{S}}). \tag{6.45}$$

最後に，$\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ 上のスカラー積は

$$\langle P_{\mathrm{diff}}\Psi_{\mathrm{S}}, P_{\mathrm{diff}}\Psi_{\mathrm{S}'}\rangle_{\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}} \equiv (P_{\mathrm{diff}}\Psi_{\mathrm{S}})(\Psi_{\mathrm{S}'}) \tag{6.46}$$

によって自然に定義される (5.5.2 節を見よ)．これは完全に $\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ を定義する．等価的に，$\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ は $\mathcal{S}_0$ における双線形な形

$$\langle\Psi, \Psi'\rangle_{\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}} \equiv \langle\Psi|P_{\mathrm{diff}}|\Psi'\rangle \equiv \sum_{\Psi''=\phi\Psi} \langle\Psi'', \Psi'\rangle \tag{6.47}$$

で定義される．

上記の定義が上手くいく理由を直観的に理解するために，以下の形式的な議論を考えよ．Diff^* 上の測度 $\mathrm{d}\phi$ を定義できたと想像せよ．このとき単に任意の状態を微分同相写像の群の軌道上で積分することで，微分同相不変な状態を書ける：

$$P_{\mathrm{diff}}\Psi = \int_{\mathit{Diff}^*} [\mathrm{d}\phi]\, U_\phi\Psi. \tag{6.48}$$

したがって，

$$(P_{\mathrm{diff}}\Psi')(\Psi)=\int_{\mathit{Diff}^*}[\mathrm{d}\phi]\,(\Psi' U_\phi \Psi). \tag{6.49}$$

簡単のため $\Psi\in\mathcal{K}_\Gamma$ と $\Psi'\in\mathcal{K}_{\Gamma'}$ を仮定しよう (一般的な場合は線形性から導かれる)．このとき式 (6.49) の右辺は，Γ を Γ' に移す ϕ が存在しない限り消える．そうであるならば，積分は Γ を不変に留める Diff^* の部分群上のみに台を持つ．この部分群の要素は状態 Ψ を変え得るか，それを不変に留めるかのいずれかである．すると，式 (6.49) を

$$(P_{\mathrm{diff}}\Psi')(\Psi)=\sum_{\Psi''=U_{\phi'}\Psi}\int_{D\Psi''}[\mathrm{d}\phi]\,(\Psi' U_\phi \Psi'') \tag{6.50}$$

と書くことができ，ここに積分は Ψ'' を不変に留める Diff^* の部分群 $D\Psi''$ にわたる．ところがこのときスカラー積を積分の外に出し，

$$(P_{\mathrm{diff}}\Psi')(\Psi)=\sum_{\Psi''=U_\phi\Psi}(\Psi' U_\phi \Psi'')\left(\int_{D\Psi'}[\mathrm{d}\phi]\right) \tag{6.51}$$

と書ける．ここで測度 $\mathrm{d}\phi$ が $D_{\Psi'}$ の体積を単位量にするものと仮定すれば，上で与えた定義が復元される．したがって定義 (6.44) は，式 (6.48) における直観的な“微分同相写像の群の積分”の，厳密な実装と見なせる．

6.4.1 結び目と s-結び目状態

$\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ の構造を理解するために，スピン・ネットワーク基底の状態への P_{diff} の作用を考える．この目的のために，微分同相写像はスピン・ネットワーク状態 $|\mathrm{S}\rangle$ を直交する状態に移すか，あるいはリンクの順序または［of は or の誤記か］向きを変えて得られる状態に移すことに着目する．上記の例のように［6.4 節冒頭］，順番または向きを変えることで $|\mathrm{S}\rangle$ から得られ，なおかつ微分同相写像を通じて得られる状態を $g_k\,|\mathrm{S}\rangle$ で表す．写像 g_k は有限の離散的な群 G_Γ を成し，したがって離散的な添字 k の範囲は有限である．このとき

$$\langle \mathrm{S}|P_{\mathrm{diff}}|\mathrm{S}'\rangle=\begin{cases}0 & \text{if } \Gamma\neq\phi\Gamma'\\ \sum_k\langle \mathrm{S}|g_k|\mathrm{S}'\rangle & \text{if } \Gamma=\phi\Gamma'\end{cases} \tag{6.52}$$

を理解するのは容易である．向きのないグラフ Γ の微分同相写像の下での同値類 K は“結び目 (knot)”と呼ばれる．結節点のない結び目は，結び目理論と呼ばれる数学の部門によって広く研究されてきた．結節点を持つ結び目もまた，比較的小規模ではあるが，結び目理論において研究されてきた．式 (6.52) の 1 行目から，

2 つのスピン・ネットワーク S と S′ は，それらが同じように結ばれていない限り，$\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ における直交状態を定義することが分かる．すなわち，それらが同じ結び目のクラス K に属するグラフ Γ と Γ' の上で定義されていない限り．したがって $\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ における基底状態は，ひとまず，結び目 K でラベルされる．すなわち，あらゆる $\Gamma\in K$ に対して

$$\mathcal{K}_K=P_{\mathrm{diff}}\mathcal{K}_\Gamma. \tag{6.53}$$

$\mathcal{K}_K$ における状態はこのとき，リンクと結節点の色付けによってのみ区別される．前に述べたように，離散的な対称群 G_Γ の非自明な作用のため，色付けは必ずしも直交的 (orthonormal) ではない．$\mathcal{K}_K$ における直交基底を見つけるために，我々はそれ故，さらに式 (6.52) の 2 行目によって定義される 2 次形式を対角化しなければならない．結果として得られる状態を $|s\rangle=|K,c\rangle$ で表す．離散的なラベル c は結び目 K の色付けと呼ばれる．離散的な対称性 G_Γ による複雑性を除けば，それは Γ のリンクと結節点の色付けに対応する．状態 $|s\rangle=|K,c\rangle$ はスピン・結び目状態，あるいは s-結び目状態と呼ばれる［1.2.2 節も見よ］．

6.4.2 Hilbert 空間 $\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ は可分である

結び目の重要な性質は，それらが離散的な集合を成すことである．したがって，ラベル K は離散的である．$\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ は離散的な直交基底 $|s\rangle=|K,c\rangle$ を許容することが帰結する．このように，$\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ は可分な (separable)

Hilbert 空間である．運動学的 Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ の不可分性を反映した“過剰なサイズ”は，単なるゲージの所産であることが判明する．

結節点を持たない結び目が離散的な集合を成すという事実は，結び目理論の古典的な結果である．それを直観的に理解することは容易である：まず，もし結節点を持たない 2 つのループが交差することなく互いへと連続的に変形できるならば，一方を他方へ移す微分同相写像がある；次に，結び目のクラス［node class は knot class の誤記か］を変えるには，別のリンクを横切ってリンクを変形せねばならず，これは離散的な操作である．他方，**結節点を持つ**結び目が離散的な集合を成すという事実は非自明である．実に，それは我々が微分同相写像の群 *Diff* の拡大 *Diff** を選んだことに依っている．不変性の群として *Diff* を選んだならば，結び目のクラスの空間は連続的になっていただろう．

これを理解するために，*Diff* の接空間への作用は線形であることを思い出そう．グラフ Γ' へと連続的に変形できるグラフ Γ を考えよ．p を Γ における n 価の結節点の位置，p' を Γ' の対応する結節点とする．*Diff* の中に Γ を Γ' に移す微分同相写像 ϕ はあるか？ 以下の理由により，答は一般に否定的である．微分同相写像は p を p' に移さねばならない．よって $\phi(p)=p'$．p の接空間は p における ϕ の Jacobian J_p によって p' の接空間に移され，それは 3 次元における線形変換である．$\vec{v}_i,\, i=1,\cdots,n$ を p における n 本のリンクの正接，また $\vec{v}'_i,\, i=1,\cdots,n$ を p' における n 本のリンクの正接としよう．ϕ が 2 つの結節点を互いに移すためには，

$$J_p\vec{v}_i=\vec{v}'_i \tag{6.54}$$

でなければならない．ところが，一般に，n 個の与えられた向きを n 個の他の与えられた向きに移す線形変換はない．言い換えれば，式 (6.54) は Jacobi 行列 $(J_p)^a{}_b=\partial\phi^a(x)/\partial x^b|_p$ の 9 個の自由度に対する，n 個の線形条件を与える．したがって，一般に，互いへと連続的に変形できる 2 つのグラフは，微分同相写像によって互いへと変形できない．同値類は結節点における連続的なパラメータで特徴付けられる．

他方，*Diff** の写像はこれらのパラメータを自由に変換できる．理由は，微分可能条件の緩和のおかげで，拡大微分同相写像 $\phi\in$ *Diff** は正接に非線形に作用できるというものである．6.7 節では，結び目状態の物理的な解釈の議論の後で，*Diff** が *Diff* よりもゲージ群として適切である物理的な理由を議論する．

これは LQG の運動学的な量子状態の空間の構成を結論付ける．$\mathcal{K}_{\text{diff}}$ における s-結び目状態の物理的意味は後で明らかになる．今は演算子を定義する時である．

6.5 演算子

正準理論には，そこから全ての測定可能な量を構成できる，2 つの基本的な場の変数——接続 $A_a^i(\tau)$ とその運動量 $E_i^a(\tau)$ ——がある．ここでそれらの単純な関数に対応する量子力学的演算子を定義する．量子状態は接続 A の汎関数 $\Psi[A]$ である．実接続 A の運動量共役は $(1/8\pi G)E$ である (式 (4.40) を見よ)．したがって汎関数 $\Psi[A]$ 上の 2 つの場の演算子

$$A_a^i(\tau)\Psi[A]=A_a^i(\tau)\Psi[A], \tag{6.55}$$

$$\frac{1}{8\pi G}E_i^a(\tau))\Psi[A]=-\,\mathrm{i}\hbar\frac{\delta}{\delta A_a^i(\tau)}\Psi[A] \tag{6.56}$$

を定義できる．以下では，$8\pi G=1$ となる単位系を選ぶ；そして必要に応じて物理的な単位を復元する．1 つ目は乗法的な演算子である；2 つ目は汎関数微分である．しかしながら，これらの演算子はいずれも $\Psi[A]$ を，我々が構成した状態空間の外に移す．特に，それらは $\mathcal{K}$ においてよく定義されない．このことは A と E の代わりに，それらの何らかの簡単な関数を採ることによって容易に解決できる．

6.5.1 接続 A

ホロノミー $U(A,\gamma)$ は $\mathcal{S}$ 上でよく定義されている．より正確には，$U^A{}_B(A,\gamma)$ を群の要素 $U(A,\gamma)$ の行列要素とする．このとき

$$(U^A{}_B(A,\gamma)\Psi)[A]=U^A{}_B(A,\gamma)[A]\Psi[A]. \tag{6.57}$$

もし $\Psi[A]$ が $\mathcal{S}$ に属するならば，右辺は明らかに $\mathcal{S}$ に属する．実際，接続のあらゆる円筒関数は $\mathcal{K}$ において，乗法的な演算子として直ちによく定義される．

例えば，閉じたループ α を考え $T_\alpha[A] = \mathrm{tr}U(A, \alpha)$ とする［Wilson ループ］．α と交差しないグラフを持つスピン・ネットワーク状態 $|\mathrm{S}\rangle$ への，この演算子の作用を考えよ．このとき明らかに

$$T_\alpha |\mathrm{S}\rangle = |\mathrm{S} \cup \alpha\rangle \tag{6.58}$$

であり，ここに $\mathrm{S} \cup \alpha$ は $j = 1/2$ 表現における，S 足すループ α から成るスピン・ネットワーク状態である．［この結果の直観的な説明が文献 [415, § 8.2] にある．］

場の演算子が演算子の値をとる分布 (operator-valued distributions) であり，それ故 3 次元で不鮮明化して初めてよく定義される背景時空上の量子場の物理とは，これら全ては非常に異なることに注意せよ．［分布は背景多様体の座標の関数であり，背景独立な物理には馴染まない．分布は積分されねばならない．］式 (6.57) において，よく定義された演算子は単に場 (の指数の経路順序化) のただ 1 次元――ループ γ に沿う――における不鮮明化によって得られている．これは微分同相不変な場の量子論の典型的な特徴である．

6.5.2 共役運動量 E

E の作用を理解するには，円筒関数の構成要素であるホロノミーの汎関数微分を計算する必要がある．

$$\frac{\delta}{\delta A^i_a(x)} U(A, \gamma) = \int \mathrm{d}s\, \dot{\gamma}^a(s) \delta^3(\gamma(s), x) [U(A, \gamma_1) \tau_i U(A, \gamma_2)] \tag{6.59}$$

を示すのは困難ではない［文献 [415, § 8.2] の式 (8.19) と，同文献のノートにおけるその導出を参照*131］．ここに s は曲線 γ の任意のパラメータ付け，$\gamma^a(s)$ は曲線の座標，$\dot{\gamma}^a(s) \equiv \mathrm{d}\gamma^a(s)/\mathrm{d}s$ は点 s における曲線の正接，γ_1 と γ_2 は γ が点 s で分断された 2 つの線分である．これは以下で主要な役割を演じる，重大な公式である．熱心な読者はしたがって，それを導き詳しく理解することを勧める．いくつかの可能な導出がある．素朴な導出は単に表現 (2.80) の汎関数微分を用いることである．厳密な導出は定義式 (2.78) の変分を考えることである．詳しくは [172] を見よ．

式 (6.59) の右辺は分布であるものの，あくまで 2 次元的な分布であることに注意せよ，と言うのも，δ^3 におけるデルタの 1 つが実際に $\mathrm{d}s$ にわたって積分されているからである．したがって E を 2 次元で不鮮明化することで，$\mathcal{K}$ 上でよく定義された演算子を探すことが自然である．［すぐ後の式 (6.60) が E^a_i の n_a による不鮮明化である．］この目的のために，3 次元の多様体に埋め込まれた 2 次元の面 $\mathcal{S}$ を考えよ．

$\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2)$ を面 $\mathcal{S}$ 上の座標とする．面は $\mathcal{S} : (\sigma^1, \sigma^2) \mapsto x^a(\sigma^1, \sigma^2)$ で定義される．演算子

$$E_i(\mathcal{S}) \equiv -\mathrm{i}\hbar \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\sigma^1 \mathrm{d}\sigma^2 n_a(\vec{\sigma}) \frac{\delta}{\delta A^i_a(x(\vec{\sigma}))} \tag{6.60}$$

を考えよ，ここに

$$n_a(\vec{\sigma}) = \epsilon_{abc} \frac{\partial x^b(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^c(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^2} \tag{6.61}$$

は $\mathcal{S}$ 上の法線の 1 形式，また ϵ_{abc} は完全反対称な対象 (相対論家 (relativists) にとって，密度の重み (density weight［加重度］) (-1) の Levi–Civita テンソル) である．

---

*131 簡単には始点 $\gamma(s=0)$ から終点 $\gamma(s=1)$ へのホロノミー (平行移動関数) を，経路に沿った微小区間ごとの積

$$U(A, \gamma) \approx (1 + (A \cdot \dot{\gamma})_{n-1} \mathrm{d}s) \cdots (1 + (A \cdot \dot{\gamma})_1 \mathrm{d}s)\, (1 + (A \cdot \dot{\gamma})_0 \mathrm{d}s)\,,$$

$$(A \cdot \dot{\gamma})_k \equiv A_a(\gamma(s_k)) \dot{\gamma}^a(s_k), \qquad A_a \equiv A^i_a \tau_i, \qquad s_k \equiv \frac{k}{n} \mathrm{d}s\ (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

の形に書いておき，汎関数微分をとれば良い．

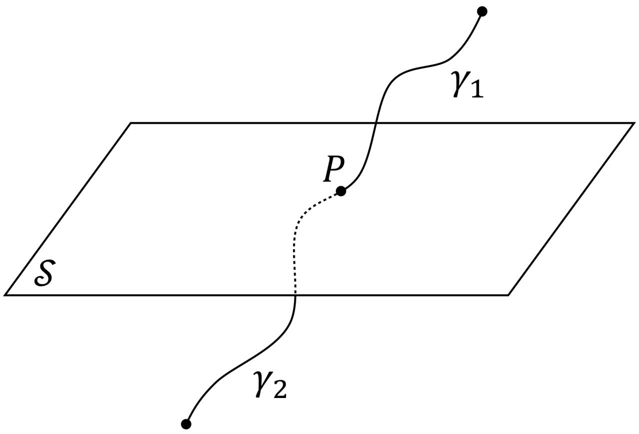


図 23　面と単一の点 P で交わる曲線［面 (surface) $\mathcal{S}$ は平面である必要はない］

note　座標変換で値が局所慣性系での値 ϵ^{abc} と変わらない量は

$$\underset{\sim}{\epsilon}^{abc} = \frac{\epsilon^{abc}}{\sqrt{\det q}}, \qquad \tilde{\epsilon}_{abc} = \sqrt{\det q}\,\epsilon_{abc}$$

(ただし $q = (q_{ab})$ は空間計量) である [417, p.259].

“捉える (grasp)” こと　ここで演算子 $E_i(\mathcal{S})$ のホロノミー $U(A,\gamma)$ への作用を考えよう．しばらく γ の端点は面 $\mathcal{S}$ 上にないと仮定する．また簡単のため，曲線 γ は面 $\mathcal{S}$ と多くとも 1 回だけ交わると仮定するところから始め，交点 (もしあれば) を P と表す (図 23 を見よ).

曲線は P によって 2 つの部分に分かれ，$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$．式 (6.59) と (6.60) を用いると，

$$\begin{aligned} E_i(\mathcal{S})U(A,\gamma) &= -\,\mathrm{i}\hbar \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\sigma^1 \mathrm{d}\sigma^2 \epsilon_{abc} \frac{\partial x^a(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^b(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^2} \frac{\delta}{\delta A_c^i(\vec{x}(\vec{\sigma}))} U(A,\gamma) \\ &= -\,\mathrm{i}\hbar \int_{\mathcal{S}} \int_{\gamma} \mathrm{d}\sigma^1 \mathrm{d}\sigma^2 \mathrm{d}s\, \epsilon_{abc} \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^2} \frac{\partial x^c}{\partial s} \delta^3(\vec{x}(\vec{\sigma}), \vec{x}(s)) U(A,\gamma_1) \tau_i U(A,\gamma_2) \end{aligned} \tag{6.62}$$

を得る．

note　最右辺では引数が省略されているものの，導き方より $\partial x^{a,b}(\vec{\sigma})/\partial \sigma^{1,2}$ は面 $\mathcal{S}$ 上で，$\partial x^c(s)/\partial s$ は曲線 γ 上で定義されている (式 (6.65) 左辺を見よ)．また因子 $U(A,\gamma_1)\tau_i U(A,\gamma_2)$ は被積分関数では曲線 γ_1, γ_2 を分断する点 s に依存しているのに対し，デルタ関数を積分した (6.66) では分点として交点 P が選ばれていることに注意する．

この結果をよく見ると，最後の積分は非常に簡単であることが判明する．面と曲線が交わらない限り積分は消える．単一の交点があると仮定し，さらにそれは座標 $x^a = 0$ を持つと仮定する．この点の近傍において，

$$x^a(\sigma^1, \sigma^2, s) = x^a(\sigma^1, \sigma^2) + x^a(s) \tag{6.63}$$

で定義される，積分領域から座標空間への写像 $(\sigma^1, \sigma^2, s) \mapsto (x^1, x^2, x^3)$ を考えよ．［これはパラメータ $\vec{\sigma}$ の定義域を面の外に，s の定義域を曲線の外に拡張する巧妙な手段である.］この写像の Jacobi 行列式

$$J \equiv \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\sigma^1, \sigma^2, s)} = \epsilon_{abc} \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^2} \frac{\partial x^c}{\partial s} \tag{6.64}$$

が積分に現れている．［ここで写像 (6.63) は式 (6.62) の 3 つの微分係数を変えないことに注意する．］したがって積分において変数変換 $(\sigma^1, \sigma^2, s) \to (x^1, x^2, x^3)$ を行うことができる．

Jacobi 行列式は消えない，と言うのも，ただ 1 つの，縮退していない (non-degenerate［端点 (や接点) ではない］) 交点があることを要求したからである．Jacobi 行列式 (6.64) と積分 (6.62) は，もし式 (6.64) における偏微分で与えられる接ベクトルが同一平面上にあれば，すなわち，もし面の正接 $\partial x^{a,b}(\vec{\sigma})/\partial\sigma^{1,2}$ が曲線の正接 $\partial x^c(s)/\partial s$ と平行ならば消える．これは例えば，曲線が完全に $\mathcal{S}$ 内に横たわっているときに起きる．このとき単なる単一の交点はない．これらの限定的な場合は後で考える．

積分における変数変換により，容易に積分を実行し，デルタ関数を取り除くことができる．著しいことに，

$$\int_{\mathcal{S}}\int_{\gamma} \mathrm{d}\sigma^1 \mathrm{d}\sigma^2 \mathrm{d}s\, \epsilon_{abc} \frac{\partial x^a(\vec{\sigma})}{\partial\sigma^1} \frac{\partial x^b(\vec{\sigma})}{\partial\sigma^2} \frac{\partial x^c(s)}{\partial s} \delta^3(\vec{x}(\vec{\sigma}), \vec{x}(s)) = \pm 1 \tag{6.65}$$

を得る．実際，これは面 $\mathcal{S}$ と曲線 γ の間の交点数 (intersection number) に対する，よく知られた解析的で座標独立な表現である．それは交差がなければ消える．符号は面と曲線の相対的な向きによって指定される．［座標 σ^1, σ^2 が定める面の表裏に関して，曲線 γ が面をどちらの向きに貫くかに応じて，3 つの接ベクトルが右手系を成すか否かが決まる．］よって，簡単な結果

$$E_i(\mathcal{S}) U(A, \gamma) = \pm \mathrm{i}\hbar\, U(A, \gamma_1) \tau_i U(A, \gamma_2) \tag{6.66}$$

を得る［式 (6.65) と複号は逆］．ホロノミーに対する演算子 $E_i(\mathcal{S})$ の作用は単に，交点に行列 $(\pm \mathrm{i}\hbar\tau_i)$ を挿入することから成る．我々は演算子 $E_i(\mathcal{S})$ が γ を“捉える (grasps)”と言う．

複数の交点への一般化は直接的である．異なる交点をラベルするのに P を用いると，

$$E_i(\mathcal{S}) U(A, \gamma) = \sum_{P \in (\mathcal{S} \cap \gamma)} \pm \mathrm{i}\hbar\, U(A, \gamma_1^P) \tau_i U(A, \gamma_2^P) \tag{6.67}$$

を得る．［ここでは式 (6.62) はそのまま成り立つのに対し，各交点 P がデルタ関数に寄与する．］

後で用いるため，ここで任意の表現 j におけるホロノミーに対する演算子 $E_i(\mathcal{S})$ の作用

$$E_i(\mathcal{S}) R^j(U(A, \gamma)) = \pm \mathrm{i}\hbar\, R^j(U(A, \gamma_1))\, {}^{(j)}\tau_i R^j(U(A, \gamma_2)) \tag{6.68}$$

も与える．ここに ${}^{(j)}\tau_i$ はスピン j 表現における $SU(2)$ の生成子である．［式 (6.66) は導出の際に $U(A, \gamma)$ が基本表現のホロノミーであることを用いていないので，スピン j 表現のホロノミー $R^j(U(A, \gamma))$ に対しても成り立つ．］

このように，$E_i(\mathcal{S})$ は $\mathcal{K}$ 上でよく定義された演算子である．それがよく定義された $E_i^a(\tau)$ の面積分であるという事実は，以下のように理解できる．幾何学的には，$E_i^a(\tau)$ はベクトル場ではなく，むしろベクトル密度である［式 (4.26)］．自然に関係する幾何学的な量は 2 形式 $E_i = \epsilon_{abc} E_i^a \mathrm{d}x^b \wedge \mathrm{d}x^c/2$ である．［これは式 (4.31) の E_i であり，同様に係数 1/2 を含めて修正した．テンソル密度 ϵ_{abc} との縮約 E_i は加重度ゼロの，座標系に依らない幾何学的対象 (スカラーとして変換) になる．］ところが 2 形式は面上で自然に積分でき，微分同相写像の下でよく振舞う対象を与える．実際，我々が定義した演算子はちょうど古典的な量

$$E_i(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} E_i \tag{6.69}$$

に対応する．

note　式 (4.31) に加えた修正と同様に，2 形式 E_i の定義にあらかじめ係数 1/2 を含めておくと，上式 (6.69) は

$$E_i(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{S}} \epsilon_{abc} E_i^a \epsilon_{AB} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^A} \frac{\partial x^c}{\partial \sigma^B} \mathrm{d}\sigma^1 \mathrm{d}\sigma^2 = \int_{\mathcal{S}} n_a E_i^a \mathrm{d}\sigma^1 \mathrm{d}\sigma^2 \qquad (A, B = 1, 2) \tag{36}$$

と書き直せる．最右辺より，これは演算子 (6.60) に対応する古典的な量となっていることが見て取れる．また第 2 辺の行列式の定義においてあからさまに明示した ϵ_{AB} が，被積分因子を自然に積分可能な加重度 +1 のスカラー密度にする役割をになっていると考えられる [415, p.44].

同じことは量子論でも正しい．汎関数微分はベクトル密度であり，それ故，2 形式とこれは自然に面上で積分される．幾何学と演算子の性質がここでは手を取り合って上手くいき始める．

Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ 上で定義された演算子 T_α と $E_i(\mathcal{S})$ は，対応する古典的な Poisson 代数の表現を成す．ループ量子重力に対する数学的に厳密なアプローチの主要な結論は，この表現に対する単一性定理 (unicity theorem) の証明である．その定理は通常，それ (より正確には，その 1 つのバージョン ; 以降［章末］の文献ノートを見よ) を発見した人々の頭文字から，“LOST” 定理と呼ばれる．その定理は Scrödinger 表現の単一性を示す，非相対論的量子力学における Stone-vonNeuman の定理とアナロガスである．それは微分同相不変性の仮定に大いに依拠している．その定理はいくつかの一般的な仮定の下で，ほとんど “手探りで (by hand)” 構築されたループ表現が，微分同相不変な理論を量子化する唯一の可能な方法であることを示す．伝統的な場の量子論では，いかなるそのような定理も成り立たない．特に，これは微分同相不変な文脈において，理論がかなり厳しく決まることを示している．

6.6　$\mathcal{K}_0$ 上の演算子

$\mathcal{K}_0$ 上でよく定義されているためには，演算子は内部ゲージ変換の下で不変でなければならない．接続を考える限り，これは容易に得られる．我々は上記［6.5.1 節］にて，あらゆる円筒関数がよく定義された演算子を与えることを知った．円筒関数は $\mathcal{K}_0$ でよく定義されているためには，単にゲージ不変でなければならない．例えば式 (6.58) で定義される演算子 T_α は，$\mathcal{K}_0$ 上でよく定義されている［6.3 節冒頭の note を参照］.

6.6.1　演算子 $\mathbf{A}(\mathcal{S})$

E に関しては状況はやや複雑になる．演算子 $E_i(\mathcal{S})$ は明らかにゲージ不変ではあり得ない，と言うのも，添字 i が内部ゲージの下で変換するからである．他方で，単に

$$E^2(\mathcal{S}) \equiv \sum_i E_i(\mathcal{S}) E_i(\mathcal{S}) \tag{6.70}$$

のように添字を縮約することでゲージ不変な量を得ることはできない，と言うのも，$E_i(\mathcal{S})$ の変換性は $\mathcal{S}$ にわたる積分によって複雑化しているからである．それでもスピン・ネットワーク状態 S に対するその作用を計算しよう，と言うのも，これは以下にとって重要なステップだからである．面 $\mathcal{S}$ とスピン・ネットワーク S (のグラフ Γ) の間に，単一の交点 P があると仮定する．交点におけるリンクのスピンを j とする．式 (6.68) を用いると，1 つ目の演算子 $E_i(\mathcal{S})$ は交点に行列 ${}^{(j)}\tau_i$ を挿入することが分かる．2 つ目も同様であり，ところが $-{}^{(j)}\tau_i {}^{(j)}\tau_i = j(j+1) \times \mathbf{1}$ は $SU(2)$ の Casimir 演算子である．

note　2 つ目の $E_i(\mathcal{S})$ を作用させる際には，交点 P がホロノミー $U(A, \gamma_1), U(A, \gamma_2)$ の曲線の端点に来るこ

とに起因する曖昧さが生じる．ここで遭遇した曖昧さはよく定義されない表現 (6.99):

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\,\delta(x) = ?$$

の形をとっており，そこで 6.6.4 節ではこれを避けるために面に微小な厚みを持たせる正則化を採用して，面積固有値を再導出している．また文献 [416, p.92,pp.116–117] では (3 次元の Euclid 的な一般相対性理論の文脈で)，リンクの前半に関するホロノミーが $U_- = 1$ となるゲージを用いて生成子 τ_i をホロノミーの始点に移動し，この曖昧さを解消している．4 次元の Lorentz 的な理論でも同様のゲージを採れる [416, p.134]．このとき面 S の演算子の作用は左不変ベクトル場のそれ $E^i_S\psi(U_l) \sim -i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(U_l e^{t\tau_i})\big|_{t=0}$ となる (面 S に双対なリンク l の引数 U_l のみ明示した) [416, p.100,p.151] [418, pp.71–72]．

ここでは曖昧な表現を見かけの上で回避するために，先に 2 階の汎関数微分を実行してから積分を施そう．自明な引数を省略すると

$$E^2U(\gamma) = (-\mathrm{i}\hbar)^2 \int \mathrm{d}^2\sigma \mathrm{d}^2\sigma'\, \epsilon_{abc}\epsilon_{a'b'c'} \frac{\partial x^a(\vec\sigma)}{\partial\sigma^1}\frac{\partial x^b(\vec\sigma)}{\partial\sigma^2}\frac{\partial x^a(\vec\sigma')}{\partial\sigma'^1}\frac{\partial x^b(\vec\sigma')}{\partial\sigma'^2}\sum_i \frac{\delta}{\delta A^i_c(\vec x(\vec\sigma))}\frac{\delta}{\delta A^i_{c'}(\vec x(\vec\sigma'))}U(\gamma)$$

において，2 階の汎関数微分は

$$\begin{aligned}\sum_i \frac{\delta}{\delta A^i_c(\vec x(\vec\sigma))}\frac{\delta}{\delta A^i_{c'}(\vec x(\vec\sigma'))}U(\gamma) = &\int \mathrm{d}s\mathrm{d}s'\, \frac{\partial x^c(s)}{\partial s}\frac{\partial x^{c'}(s')}{\partial s'}\delta^3(\vec x(s),\vec x(\vec\sigma))\delta^3(\vec x(s'),\vec x(\vec\sigma')) \\ &\times \sum_i \left[U(\gamma_{\mathrm{f}s'})\tau_i U(\gamma_{s's})\tau_i U(\gamma_{s\mathrm{i}}) + U(\gamma_{\mathrm{f}s})\tau_i U(\gamma_{ss'})\tau_i U(\gamma_{s'\mathrm{i}})\right]\end{aligned}$$

のようにホロノミーを 2 点で区切る．ここで例えば $\gamma_{s\mathrm{i}}$ は始点から $\vec x(s)$ までのホロノミー，$\gamma_{\mathrm{f}s'}$ は $\vec x(s')$ から終点までのホロノミー，等々である．積分変数とダミー添字の置き換えにより，最右辺の 2 項は等しい寄与を持つ．そこで再び座標 $\vec x(\vec\sigma, s)$ 等を積分変数にとると，

$$E^2U(\gamma) = 2(-\mathrm{i}\hbar)^2 \int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'\, \delta^3(\vec x)\delta^3(\vec x')\sum_i \left[U(\gamma_{\mathrm{f}s'})\tau_i U(\gamma_{s's})\tau_i U(\gamma_{s\mathrm{i}})\right].$$

被積分関数は 2 点 $\vec x, \vec x'$ がともに交点 (原点) に一致するときのみゼロでない寄与を持つので，これは

$$E^2U(\gamma) = 2(-\mathrm{i}\hbar)^2 U(\gamma_1){\tau_i}^2 U(\gamma_2) \sim \hbar^2 j(j+1)U(\gamma)$$

を与え，比例係数は生成子 τ_i の規格化の流儀に依ると考えられる．

Casimir 演算子については文献 [418, pp.129–130] を参照．それは定義により $SU(2)$ 不変である．また $-{}^{(j)}\tau_i{}^{(j)}\tau_i = j(j+1)\times\mathbf{1}$ の符号がこれで良いのは，生成子の選択による (例えば基本表現の生成子は式 (6.5) 直前の $\tau_i = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_i$)．

したがって，

$$E^2(\mathcal{S})\,|S\rangle = \hbar^2\, j(j+1)\,|S\rangle\,. \tag{6.71}$$

note　演算子 $E^2(\mathcal{S})$ はスピン・ネットワーク状態 (6.30):$\Psi_{\mathrm{S}}[A] = \langle A|\mathrm{S}\rangle$ を構成する，交点 P に関係するホロノミーにのみ作用する．このときホロノミーの途中に挿入される行列は，$-{}^{(j)}\tau_i{}^{(j)}\tau_i = j(j+1)\times\mathbf{1}$ により単位行列となるので，もとのホロノミー，したがってスピン・ネットワーク状態 $\Psi_{\mathrm{S}}[A]$ が正確に復元される．その結果は $\Psi_{\mathrm{S}}[A] = \langle A|\mathrm{S}\rangle$ の代わりに，状態 $|\mathrm{S}\rangle$ に対する固有方程式 (6.71) として書ける．

この美しい結果は，しかしながら，もし Γ が $\mathcal{S}$ と 1 回より多く交わるならば完全に台無しになる，と言うのもこの場合，異なる点での τ_i 行列が縮約され，ゲージ不変な状態が得られないからである．

この困難を回避するために，面 $\mathcal{S}$ に関係する演算子 $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ を以下のように定義しよう．あらゆる N に対し，$N \to \infty$ のときますます小さくなり，各 N に対して $\bigcup_n \mathcal{S}_n = \mathcal{S}$ となるような N 個の小さな面 $\mathcal{S}_n$ へと，面 $\mathcal{S}$ を分割する．次いで

$$\mathbf{A}(\mathcal{S}) \equiv \lim_{N\to\infty} \sum_n \sqrt{E^2(\mathcal{S}_n)} \tag{6.72}$$

を定義する．演算子を表すのに選んだ $\mathbf{A}$ と接続を表す A を混同してはならない：これら 2 つの量の間に関係はない．演算子 (6.72) を表すのに文字 $\mathbf{A}$ を選んだ理由は，まもなく［6.6.2 節冒頭で］明らかになる．

古典的な場合には，まさに Riemann による積分の定義より

$$\mathbf{A}(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} \sqrt{n_a E^a_i n_b E^b_i} \mathrm{d}^2\sigma \tag{6.73}$$

が得られ，これはよく定義されたゲージ不変な量である．

note　$N \gg 1$ のとき，式 (6.72) の和は

$$\begin{aligned}\sum_n \sqrt{E^2(\mathcal{S}_n)} &= \sum_n \sqrt{E_i(\mathcal{S}_n)E_i(\mathcal{S}_n)} = \sum_n \sqrt{\left(\int_{\mathcal{S}_n} n_a E^a_i \mathrm{d}^2\sigma\right)\left(\int_{\mathcal{S}_n} n_b E^b_i \mathrm{d}^2\sigma\right)} \qquad (\because \text{式 } (36)) \\ &\simeq \sum_n \sqrt{(n_a E^a_i)(n_b E^b_i)}\sigma_n \qquad \left(\sigma_n \equiv \int_{\mathcal{S}_n} \mathrm{d}^2\sigma \text{は面要素}\right)\end{aligned}$$

となる．これは $N \to \infty$ とすると，積分 (6.73) に移行する．

量子論の場合，演算子 (6.72) の作用は計算するのが容易である．$\mathcal{S}$ 上に乗るスピン・ネットワークの結節点はないという単純化の仮定の下で，それをスピン・ネットワーク上で評価しよう．充分大きな N に対して，1 つより多くの Γ との交点を含む $\mathcal{S}_n$ はない (図 24 を見よ)．したがって，n にわたる和は $\mathcal{S}$ と Γ の間の交点 P にわたる和に帰着し，それは充分大きな N に対して，N に依存しない．式 (6.71) を用いると，このとき直ちに

$$\mathbf{A}(\mathcal{S})\,|\mathrm{S}\rangle = \hbar \sum_{P\in(\mathcal{S}\cup\Gamma)} \sqrt{j_P(j_P+1)}\,|\mathrm{S}\rangle \tag{6.74}$$

が得られ (図 25 を見よ)，ここに j_P は $\mathcal{S}$ と P で交わるリンクの色である．［ここで演算子の平方根の固有値は，演算子の固有値の平方根と考えれば良い．］これは重要な結果である．第 1 に，演算子 $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ は $\mathcal{K}$ においてよく定義されている．これは古典的な量 (6.73) に対応する演算子である．第 2 に，スピン・ネットワーク状態はこの演算子の固有状態である．［我々は面やネットワークが埋め込まれた背景の多様体の座標を利用して計算を行ったものの，得られた結果 (6.74) はリンク線の色と，リンク線が指定した面に交わることだけに依っており，背景独立であることにも注意する [415, p.115]．］

まとめると，各面 $\mathcal{S} \in M$ に対して，$\mathcal{S}$ 上に結節点を持たないスピン・ネットワーク上で対角的である，よく定義された $SU(2)$ 不変で自己共役な［実の固有値を持つ］演算子 $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ を我々は得た．(言及した制約を持つ) 対応するスペクトルは多重項 (multiplets) $\vec{j} = (j_1, \cdots, j_n)$, $i = 1, \cdots, n$，および任意の正の半整数 j_i の個数 n でラベルされる．これはスペクトルの**主系列**と呼ばれ，

$$\mathbf{A}_{\vec{j}} = \hbar \sum_i \sqrt{j_i(j_i+1)} \tag{6.75}$$

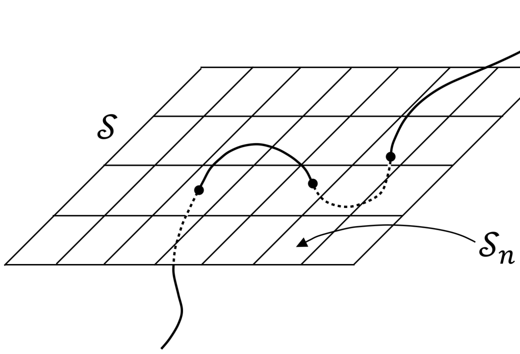


図 24　$\mathcal{S}$ の分割

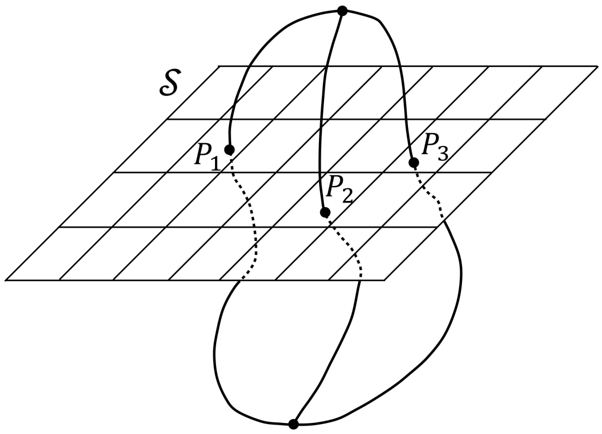


図 25　面 $\mathcal{S}$ と交わる簡単なスピン・ネットワーク S

で与えられる．スペクトルの残りは 6.6.4 節で計算するが，それもまた実で離散的である．

演算子は (結節因子を適切に選択した) スピン・ネットワーク状態上で対角的であり，全てのその固有値は実なので，それは自己共役でもある．実際，この演算子は厳密な数理物理学の水準でよく定義されている．完全に厳密に詳述された構成については，例えば [20] と [173] を見よ．この演算子が全く厳密に構成でき，それは有限でありそのスペクトルも計算できるという事実は，その定義が演算子積と平方根を含んでいることを考えると，かなり衝撃的な結果である．これは場の量子論に対するよく定義された微分同相不変な定式化の，1 つ目の著しい成果である．まもなく見るように，この結果には重大な物理的意味がある．

原理的には，演算子 T_α と $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ は量子論を定義するのに充分である．［これらが 6.5 節の冒頭 (式 (6.65–66) のすぐ後) で必要性を予告されていた，A と E の簡単な関数である.］実践的には，後で他の演算子もまた定義するのが便利である．そうする前に，しかしながら，ここまでに到達した数学的結果の物理的な意味を議論しよう．

6.6.2　面積の量子

前節では $SU(2)$ ゲージ不変で自己共役な演算子 $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ を構成および対角化した．この演算子の物理的な解釈は何か？ 式 (6.73) と式 (4.28) の直接的な比較により，$\mathbf{A}(\mathcal{S})$ はまさに面 $\mathcal{S}$ の物理的面積であることが分

かる！

したがって，直ちに重要な物理的結果を得る．固定された 2 次元の面の面積によって与えられる部分的観測量は量子論において，離散的スペクトルを持つ自己共役な演算子で表される．しかるに，このことは直ちに物理的予言をもたらす：あらゆる物理的な面のあらゆる測定は，この演算子のスペクトルに含まれる結果のみを与え得る．スペクトルは離散的なので，このことは物理的な面積が量子化された部分的観測量であることを意味する．面積の測定は $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ のスペクトル (6.75)–(6.125) に含まれる結果のみを与え得る．

$8\pi G$ と c の物理的な単位を復元すると，面積演算子は $8\pi Gc^{-3}$ 掛ける式 (6.72)，またその固有値は $8\pi Gc^{-3}$ 掛ける式 (6.75)–(6.125) のいずれかである．例えば主系列は，

$$\mathbf{A}_{\vec{j}} = 8\pi\hbar Gc^{-3}\sum_i \sqrt{j_i(j_i+1)} \tag{6.76}$$

を与える．［これは Planck 長さ $l_{\mathrm{P}} = \sqrt{\hbar Gc^{-3}} \sim 10^{-33}\mathrm{cm}$ の 2 乗を係数に持っている [419, p.58].］実接続の代わりに 4.2.3 節で説明したより一般的な Barbero 接続を用いたならば，式 (4.46) から，式 (6.56) の代わりに

$$\frac{c^3}{8\pi\gamma G}E^a_i(\tau)\Psi[A] = -\mathrm{i}\hbar\frac{\delta}{\delta A^i_a(\tau)}\Psi[A] \tag{6.77}$$

で与えられる演算子 E を得る．この場合スペクトルは全体に掛かる定数因子によって修正される：

$$\mathbf{A}_{\vec{j}} = 8\pi\gamma\hbar Gc^{-3}\sum_i \sqrt{j_i(j_i+1)}. \tag{6.78}$$

単一の Immirzi パラメータ γ を除けば，これは LQG の正確で定量的な予言である．それは原理的には，実証または反証できる．代わりに，この予言の間接的な帰結は観測可能な効果を持ち得る．実際この面積の量子化は，ブラックホール・エントロピーの導出のような，理論の多くの結果の基礎である．

式 (6.76) における最小の (消えない) 固有値は，Immirzi パラメータを 1 と等置すると，

$$\mathbf{A}_0 = 4\sqrt{3}\pi\hbar Gc^{-3} \sim 10^{-66}\mathrm{cm}^2 \tag{6.79}$$

である．これは Planck 面積のオーダーを持つ，ある種の面積の素量 (elementary quantum) である．それは基本 $j = 1/2$ 表現のリンクが担う面積の量子である．最小量より小さい測定可能な面積がないという事実は，Planck スケールにおいてある種の物理的空間の最小サイズがあることを示唆する．

Planck 長さでの物理的空間の本来的な離散性は量子重力において，長い間期待されていた．LQG の文脈では，この離散性は強制ないし仮定されないことに注意せよ．むしろ，それは GR の正直な量子化の直接的な帰結である．調和振動子のエネルギーが量子化されるのと同じ方法で，空間の幾何学は量子化される．

6.6.3 $^*n$ 手の (n-hand) 演算子とリカップリング理論

2 手の (two-hand) ループ演算子　面積演算子は異なる方法でも定義することができ，それは以下で用いる技法を採用するため興味が持たれる．小さな面 $\mathcal{S}$ の各々に対して，以下のように $SU(2)$ ゲージ不変な方法で $E^2(\mathcal{S})$ を定義する．端点 r と s を持つ経路 γ が与えられたとき，$R^{(1)}(U)^{ij}$ を随伴 $j=1$ 表現として，“2 つの手の (two-handed) ループ演算子”

$$T^{ab}_\gamma = E^a_i(r)R^{(1)}(U(A,\gamma))^{ij}E^b_j(s) \tag{6.80}$$

を定義する．小さな面 $\mathcal{S}$ の中に 2 点 r と s が与えられたとき，γ_{rs} を r から s への (選んだ座標において) まっすぐな線とし，

$$T^{ab}(r,s) = T^{ab}_{\gamma_{rs}} \tag{6.81}$$

とする．次いで

$$E^2(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}}\mathrm{d}^2\sigma\int_{\mathcal{S}}\mathrm{d}^2\sigma'\, n_a(\sigma)n_b(\sigma')T^{ab}(\sigma,\sigma') \tag{6.82}$$

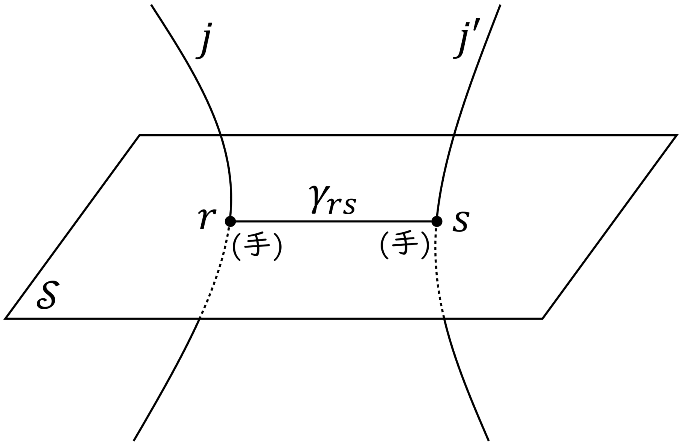


図 26　演算子の“手 (hands)”がスピン・ネットワークを“掴む (grasp)”様子．ここでは複数のリンク線と交わり得るだけ大きい面 $\mathcal{S}$ を仮定して良い．式 (6.91) も見よ．

を定義する．面が小さい極限では，ホロノミーの第 1 項，すなわち恒等演算子のみが生き残り，それ故この定義は小さな面に対して式 (6.70) の定義に収束する．

量子論においてこの種の正則化を用いることの利点は，それが $SU(2)$ 表現の計算を単純化することである．これは正則化した演算子がそれ自体，$SU(2)$ 不変だからである［式 (6.80)］．

量子力学的演算子 (6.81)［正しくは式 (6.82)[*132]］のスピン・ネットワーク状態への作用は容易に計算できる．スピン・ネットワークのリンクと面 $\mathcal{S}$ の各交点で，各 E の寄与がある．2 つの交点の各々は取っ手 (grasp) と呼ばれる．これらの寄与の各々に対して，スピン・ネットワークは点 r と s における 2 つの結節点――各取っ手に 1 つずつ――の生成と，スピン・ネットワークへのループ γ_{rs} の追加によって修正される．我々は演算子の“手 (hands)”がスピン・ネットワークを“掴む (捉える；grasp)”と言う．各結節点は 3 価であり，掴まれたスピン・ネットワークのものである 2 本のリンク―― j 表現としよう――と，表現 $j=1$ の γ_{rs} である残り 1 本のリンクを持つ．［以上，図 26 を参照．］これらの表現の間の結節因子は表現 j における $SU(2)$ 生成子 ${}^{(j)}(\tau_i)^{\alpha}_{\beta}$ である．それは規格化されていない．規格化された結節因子を $i^{\alpha}_{i\beta}$ と呼ぶならば，

$$ {}^{(j)}(\tau_i)^{\alpha}_{\beta} = n_j\, i^{\alpha}_{i\beta} \tag{6.83}$$

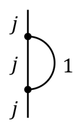
が得られ，ここで n_j はこの式のノルムをとることで容易に計算できる．これは

$$ {n_j}^2 = \mathrm{tr}({}^{(j)}\tau^{i\,(j)}\tau_i) = j(j+1)\mathrm{tr}(1) = j(j+1)(2j+1) \tag{6.84}$$

を与える．［第 1 の等号で i_i の規格化を要求した．式 (6.71) の直前の式 $-{}^{(j)}\tau_i{}^{(j)}\tau_i = j(j+1)\times\mathbf{1}$ との符号の違いは，添字 i を上げたことに起因か (5.3.6 節の後半も見よ)．］

リカップリング理論　面が小さい極限では，2 つの取っ手は同一のリンクに，そして同一点にあり，それらの間の線は無限小である．それにも関わらず，この線上の接続が自明であること，すなわちそれが恒等演算子に関係していることを思い出しさえすれば，2 つの取っ手を分離しているものとして，またそれらの間の線を有限の線として書くことは有用である．この表現ではスピン・ネットワークのスピン j のリンクを掴むことの結果はそれ故，以下のように表せる［本稿次節で補足］：

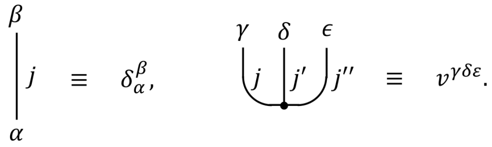
$$ E^2(\mathcal{S})\Big|\, j \quad \sim \quad \hbar^2 j(j+1)(2j+1) $$



(6.85)

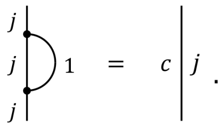
この絵は，$SU(2)$ 表現理論の計算を行う単純なグラフ的方法である，リカップリング理論を用いて直接的に解釈できる．この表現では，線は表現の添字の縮約を表し，結節点は規格化された結節因子を表す：

[*132] 積分において端点 $r=\sigma, s=\sigma'$ が，リンクと面の交点に一致するときに (すなわち手がリンク線を掴むときに) 寄与が生じる．



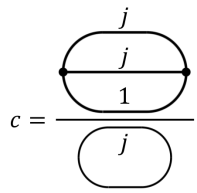
(6.86)

ここに α, β および γ は表現 j の，また δ と ϵ はそれぞれ表現 j' と j'' の，直交基底における添字である．式 (6.85) の絵は表現 j と表現 j の間の結節因子全体を表しているので，それは表現 j の恒等元に比例するはずである：



(6.87)

係数 c は［両辺ともに］両端を閉じることで，すなわち行列のトレースをとることで得られる．これは

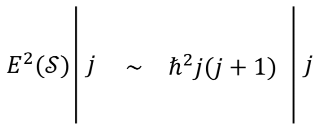


(6.88)

を与える．分子における文字 θ の形をした (theta-shaped) ダイアグラムは，結節因子のノルムなので単位の値を持つのに対し，分母は恒等元のトレース，すなわち表現の次元である．したがって

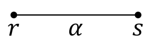
$$c = \frac{1}{2j+1}. \tag{6.89}$$

全てを併せると，E^2 の作用は



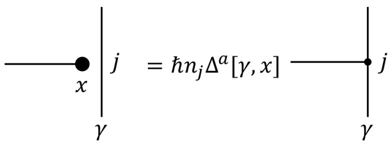
(6.90)

を与える．今の場合，この結果は以前により単純な計算で得られた［式 (6.71)］．しかしアイデアは非常に便利である，LQG の一般的な計算手法を定義するのに用いることができる．一般的なアイデアは，式 (6.80) のような演算子を絵



(6.91)

で表すことができるということであり，ここに点はリンクを掴み得る演算子 E を表す．掴むことの結果は結節点の形成と，因子 $\sqrt{j(j+1)(2j+1)}$ を掛けることである．より正確には，数値部分も含めれば，スピン j を持つリンク γ 上の点 x に位置する手の，掴むこと作用は

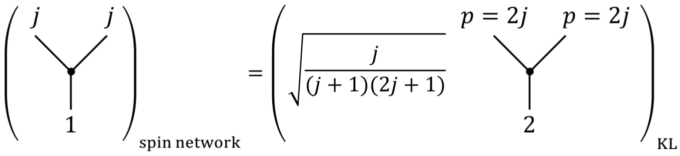


(6.92)

であり［本稿次節で補足］，ここに

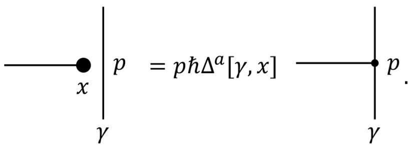
$$\Delta^a[\gamma, x] \equiv \int \mathrm{d}s\, \dot{\gamma}^a(s) \delta^3(\gamma(s), x). \tag{6.93}$$

計算は大抵 [174] に由来する，わずかに異なる表記で行われてきた．それは Kauffman–Lins (KL) 表記であり，付録 A.2 で説明する．この表記には公式の一覧が存在する．そこで本節で KL 表記に移行しよう．KL 表記では，リンクのスピンの 2 倍であって整数である，その“色” $p = 2j$ を用い[*133]，また 3 価の結節点は単位に規格化されない．関係は (A.68) で与えられる．上の例のように，スピン $j, j, 1$，すなわち色 $p, p, 2$ を持つ頂点の場合，付録 A.2 の公式から容易に導かれる，結節点の規格化因子は



(6.94)

であり，式 (6.92) を用いると，この表記における手の (grasp) 演算子の作用はしたがって



(6.95)

次節では面積演算子の完全なスペクトルの計算にあたり，この手の演算子を用いた完全な計算の例を与える．

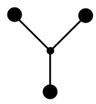
多数の手の経路　定義 (6.80) は任意の数の“手”を持つ経路に一般化できる．例えば，

$$T^{abc}(x, r, s, t) = \frac{1}{3!}\epsilon_{ijk} R^{(1)}(U(A, \gamma_{xr}))^{il} E^a_l(r) R^{(1)}(U(A, \gamma_{xs}))^{jm} E^b_m(s) R^{(1)}(U(A, \gamma_{xt}))^{kn} E^c_n(t) \tag{6.96}$$

とする．［点 x から端点 r, s, t の“手”E に伸びるホロノミーが，点 x では結節因子 $\sim \epsilon_{ijk}$:(A.19) で繋がれている．］閉曲面 $\mathcal{S}$ が与えられたとき，演算子 (6.90) の 3 つの手の (three-hand) 一般化を

$$E^3(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}^2\sigma \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}^2\sigma' \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}^2\sigma'' \, |n_a(\sigma) n_b(\sigma') n_c(\sigma'') T^{abc}(x, \sigma, \sigma', \sigma'')| \tag{37}$$

で定義する．ここに x は $\mathcal{S}$ の内部の点である (常に小さな $\mathcal{S}$ の極限を考えるので，その正確な位置は重要でない)．定義における絶対値は後の便宜のためである．これは絵



(6.98)

で表される．まもなく見るように［6.6.5 節］，この演算子もまた重要な物理的役割を演じる．

6.6.3 節について

■式 (6.85) について　ホロノミーを $R^{(j)}(U(A, \gamma)) \to H^{(j)}(\gamma)$ と略記する．式 (6.68) の導出過程をたどると，$f(\sigma)$ を面 $\mathcal{S}$ 上の任意の関数として，公式

$$\int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}^2\sigma \, f(\sigma) n_a(\sigma) E^a_i(x(\sigma)) H^{(j)}(\gamma) = \pm \mathrm{i}\hbar f(P) H^{(j)}(\gamma_1) \, {}^{(j)}\tau_i H^{(j)}(\gamma_2)$$

が成り立つことが示される．ここに P は曲線 γ と面 $\mathcal{S}$ の交点であり，γ_1, γ_2 はこの点 P で分断された曲線 γ の 2 つの部分である．

[*133] “色”という表現は慣習的に 2 つの異なる意味に用いられる．それはここでのように，スピンの 2 倍を表す．あるいは“スピン・ネットワークのリンクは表現によって，また結節点は結節因子によって色付けされる”と言うときのように，それはリンクまたは結節点 (また後では，スピン・フォームの辺と面) のあらゆるラベルを指す．

これを用いて式 (6.85) を確かめよう．左辺は表現 j を充てられたリンク線 γ に対する，演算子

$$E^2(\mathcal{S}) = \int \mathrm{d}^2\sigma \int \mathrm{d}^2\sigma'\, n_a(\sigma) n_b(\sigma') E^a_k(\sigma) H^{(1)kl}(\gamma_{\sigma\sigma'}) E^b_l(\sigma')$$

の作用である*134．すなわち対応する式は

$$\begin{aligned} E^2(\mathcal{S}) H^{(j)}(\gamma) =& \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}^2\sigma \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}^2\sigma'\, n_a(\sigma) n_b(\sigma') E^a_k(\sigma) H^{(1)kl}(\gamma_{\sigma\sigma'}) E^b_l(\sigma') H^{(j)}(\gamma) \\ =& \pm \mathrm{i}\hbar \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}^2\sigma\, H^{(1)kl}(\gamma_{\sigma P}) n_a(\sigma) E^a_k(\sigma) [H^{(j)}(\gamma_1)\, {}^{(j)}\tau_l H^{(j)}(\gamma_2)] \\ =& (\pm \mathrm{i}\hbar)^2 H^{(1)kl}(\gamma_{PP}) H^{(j)}(\gamma_1)\, {}^{(j)}\tau_k\, {}^{(j)}\tau_l H^{(j)}(\gamma_2). \end{aligned}$$

ここで同一点 P を繋ぐ面内の無限小の線要素のホロノミー $H^{(1)kl}(\gamma_{PP})$ を考えていることに対応して，交点 P における 2 つの τ 行列の間に曲線 γ に沿うホロノミー $H^{(j)}(\gamma_{PP})$ を挿入する*135．また (6.83–84):

$${}^{(j)}\tau_k = n_j i_k, \qquad {n_j}^2 = j(j+1)(2j+1)$$

を用いると，

$$E^2(\mathcal{S}) H^{(j)}(\gamma) = -\hbar^2 j(j+1)(2j+1) H^{(1)kl}(\gamma_{PP}) H^{(j)}(\gamma_1) i_k H^{(j)}(\gamma_{PP}) i_l H^{(j)}(\gamma_2)$$

を得る．この結果は式 (6.85) 右辺のグラフのように読み替えられる．

■**式 (6.92) について**　式 (6.92) の左辺は，点 x に接続するリンク (α と呼ぼう) が文脈から $j=1$ 表現を担うとすると，

$$[H^{(1)kl}(\alpha) E^a_l(x)] H^{(j)}(\gamma) = -\mathrm{i}\hbar H^{(1)kl}(\alpha) \int \mathrm{d}s\, \dot{\gamma}^a(s) \delta^3(\gamma(s), x) [H^{(j)}(\gamma_1)\, {}^{(j)}\tau_l H^{(j)}(\gamma_2)]$$

と読み替えられる．ただし変形には公式 (6.59) を用いた．ここで汎関数微分 E^a_i の式 (6.77) を見ると，パラメータを $\gamma \to \mathrm{i}$ とおけば右辺全体は i されることが分かる．またデルタ関数の下では曲線 γ_1, γ_2 の分点を $\gamma(s) = x$ に固定して，行列の積 $[\cdots]$ を積分の外に出して良い．さらに式 (6.83): ${}^{(j)}\tau_l = n_j i_l$ を用いると，上式は

$$\hbar n_j \Delta^a[\gamma, x] \times H^{(1)kl}(\alpha) H^{(j)}(\gamma_1) i_l H^{(j)}(\gamma_2)$$

となる．ここに現れているホロノミーと結節因子の縮約は，3 つの線 $\alpha, \gamma_1, \gamma_2$ が点 x で繋がった，式 (6.92) 右辺のグラフとして解釈できる．

6.6.4　* 縮退したセクター

面積のスペクトルを計算するために上で採用した単純化は，結節点が面上にないと仮定することであった．ここでは完全なスペクトルを見出すために，この仮定を落とす．この仮定を落とすと，上で考えた面積演算子の正則化は充分ではない，と言うのも，

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, \delta(x) = ? \tag{6.99}$$

という類のよく定義されない表現を得るからである．演算子のより良い正則化が必要である．この目的のためには，面を横切って演算子を不鮮明化すれば充分である．$\mathcal{S}$ の近傍にわたって滑らかな座標 τ を導入する．次いで $-\delta/2 \le \tau \le \delta/2$ で定義される，$\mathcal{S}$ の周りの 3 次元領域を考えよ．この領域を座標の高さ δ と，座標の辺が ϵ である正方形の水平の区画を持つ，複数のブロック $\mathcal{D}$ に分割する．ϵ と δ

*134 この表式を用いてはじめて，式 (6.85) 右辺における $j=1$ のリンク線が得られる．

*135 代わりに最初から交点 P を 2 点に分離させて考えると，2 つの手 E が 2 点のどちらを掴むかに応じて $2^2 = 4$ 通りの寄与が生じてしまう．

それぞれの固定された選択に対して，ブロックを添字 I でラベルする．後で，δ と ϵ の両方をゼロに移行させる．1 径数の系列を得るために，ここで δ を ϵ の固定された関数に選ぶ．技術的な理由で，ブロック $\mathcal{D}$ の高さは極限で ϵ より素早く減少しなければならない；そこで，k を 1 より大きく 2 より小さいとして $\delta = \epsilon^k$ とおく．

ブロックの 1 つを考えよう．ブロックと $\tau = \text{constant}$ の面の交わりは正方形の面である：そのような面の面積を $A_I(\tau)$ としよう．ブロックにおける面の面積の τ にわたる平均を $A_{I\epsilon}$ とする，すなわち

$$A_{I\epsilon} = \frac{1}{\delta}\int_{-\delta/2}^{\delta/2} A_I(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\delta}\int_{\mathcal{D}_I} \mathrm{d}^3x\,\sqrt{E^{ai}E_i^b n_a n_b}. \tag{6.100}$$

［第 2 の等号は式 (6.73) による.］ブロックにわたる和は $\tau = \text{constant}$ の面の面積の平均をもたらし，ϵ (したがって δ) がゼロに近づくとき，和は面 $\mathcal{S}$ の面積に収束する．したがって

$$\mathbf{A}(\mathcal{S}) = \lim_{\epsilon\to 0}\sum_I A_{I\epsilon} \equiv \lim_{\epsilon\to 0} A_\epsilon(\mathcal{S}) \tag{6.101}$$

を得る．各ブロックに関する量 $A_{I\epsilon}$ は以下のように表せる．

$$A_{I\epsilon} = \sqrt{{A_{I\epsilon}}^2} \tag{6.102}$$

と書き，

$${A_{I\epsilon}}^2 = \frac{1}{\delta^2}\int_{\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}} \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3y\, n_a(x)n_b(y)T^{ab}(x,y) + O(\epsilon^5) \tag{6.103}$$

に注意する［正しくは以下の導出より，式 (6.107) のように右辺に係数 1/2 が付く］．式 (6.103) は以下によって成り立つ．$\mathcal{D}$ における任意の 3 点 x, y，および x_I に対して

$$T^{ab}(x,y) = E^{ai}(x_I)E_i^b(x_I) + O(\epsilon) \tag{6.104}$$

を得る［定義式 (6.80–81) でホロノミーを単位行列にする］．

$$\epsilon^4 n_a(x_I)n_b(x_I)E^{ai}(x_I)E_i^b(x_I) = \frac{1}{2\delta^2}\int_{\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}} \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3y\, n_a(x)n_b(y)T^{ab}(x,y) + O(\epsilon^5) \tag{6.105}$$

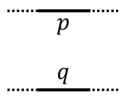
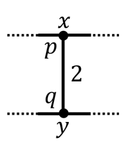
が帰結する［係数 1/2 は積分変数 x, y の入れ替えによる重複を除く］．式 (6.103) は

$$\begin{aligned} {A_I}^2 &= \left(\frac{1}{\delta}\int_{-\delta/2}^{\delta/2} A_I(\tau)\mathrm{d}\tau\right)^2 = \left(\frac{1}{\delta}\int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}^3x\,\sqrt{E^{ai}E_i^b n_a n_b}\right)^2 \\ &= \epsilon^4 n_a(x_I)n_b(x_I)E^{ai}(x_I)E_i^b(x_I) + O(\epsilon^5) \end{aligned} \tag{6.106}$$

［最左辺は正しくは ${A_{I\epsilon}}^2$］から帰結する．式 (6.101),(6.102) および (6.103) は面積の正則化を定義する．量子力学的演算子 $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ は式 (6.101) で定義され，ここに

$${A_{I\epsilon}}^2 = \frac{1}{2\delta^2}\int_{\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}} \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3y\, n_a(x)n_b(y)T^{ab}(x,y). \tag{6.107}$$

$\mathbf{A}(\mathcal{S})$ の量子状態への作用は T^{ab} 演算子の作用から理解できる．演算子 $T^{ab}(x,y)$ は，その手 x と y が S のグラフの何らかのリンクに行き当らない限り，状態 $|\mathrm{S}\rangle$ を消す．これ［手がリンクを掴むこと］が起きれば，演算子の状態への作用は点 x と y における 2 つの付加的な結節点を持つ，S と α の和集合を与える．より正確には，もし x と y がそれぞれ色 p と q を持つ β の 2 つの辺に行き当れば，手の (grasp) 演算子 (6.95) を用いて

$T^{ab}(x,y)$  $= \hbar^2 pq\Delta^a[\beta,x]\Delta^b[\beta,y]$  (6.108)

を得る．ループ α は交点 x と y (2 つの取っ手) の間を行き来するので，それはスピン 1，あるいは色 2 を持つ．

ここで一般的なスピン・ネットワーク状態 $|\mathrm{S}\rangle$ への演算子 $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ の作用を考えよう．その定義に含まれる極限操作により，演算子 $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ は $|\mathrm{S}\rangle$ のグラフに影響しない．さらに，特定の座標ブロック $\mathcal{D}$ の内部における T^{ab} の作用は，状態のグラフが $\mathcal{D}$ と交わらない限り消えるので，$\mathbf{A}(\mathcal{S})$ の作用は結局，グラフと面の各交点 P に 1 つずつの，項の加算の和から成る．

スピン・ネットワークと面の交点 P を考えよ．この議論の目的のために，リンクの一般的な点を“2 価の結節点”と考え［結節因子は単位行列 (6.3.2 節)］，一般性を失うことなく，P は結節点であると言うことができる．一般には，P から発する n 本のリンクがある．その一部は上側に (upward; u) 発し，一部は下側に (downward; d) 発し，そして一部は面 $\mathcal{S}$ に接している (tangential; t)，図 27 を見よ．ブロックがゼロに縮む極限を考えているので，一般性を失うことなく，リンクは P の周りで直線的であると仮定して良い (適切な関係する高階微分については以下を見よ)．式 (6.107) における 2 重積分により．面積演算子の 2 つの手の位置は各ブロックにわたって積分される．T^{ab} の作用は両方の手がスピン・ネットワークに行き当るときにのみ消えないので，掴まれたリンクの全ての組に 1 つずつ

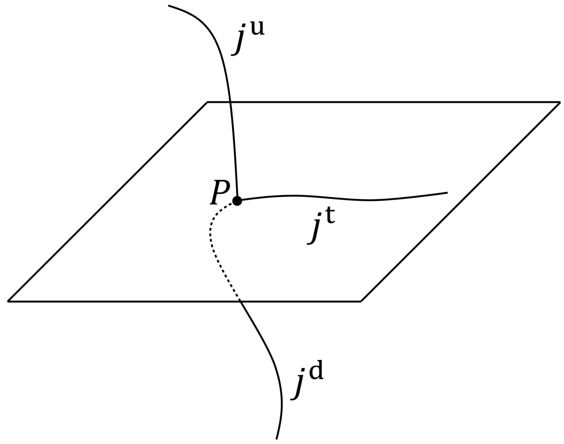
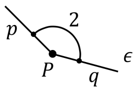


図 27　面上の結節点で合流するリンクの 3 つの分類

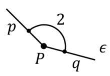
の，n^2 個の項を得る．掴まれたリンクが色 p と q を持つ，これらの項の 1 つを考えよ．有限の ϵ について，n 価の結節点のリンク p と q に対する T^{ab} の作用の結果を，(前の因子を除いて)



(6.109)

と書こう．重要でないリンクは示していない．p と q でラベルされたリンクは，この点においてそれらの面との角を指定する必要がないという意味で一般的である (2 本のリンクは一致していても良い)．面積演算子の定義 (6.101) と (6.107) および T^{ab} 演算子の定義から，手 (grasps) が色 p と q の 2 本のリンクにわたって走る各項は［$\hbar^2$ を除くと (式 (6.114) で復元)］

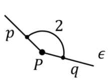
$$T = \frac{1}{2\delta^2}\int_{\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}} \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3y\, n_a(x)\Delta^a[\beta,x]n_b(y)\Delta^b[\beta,y]pq$$



(6.110)

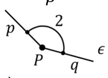
という形であり，

$$T = \frac{1}{2\delta^2}\int_{\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}}\left(n_a(x)\int_\beta \mathrm{d}s\,\dot{\beta}^a(s)\delta^3[\beta(s),x]n_b(y)\int_\beta \mathrm{d}t\,\dot{\beta}^b(t)\delta^3[\beta(t),y]pq\right.$$

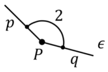


$$\left.\vphantom{\int}\right)\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3y$$

$$= \frac{1}{2\delta^2}\int_\beta \mathrm{d}s\, n_a(s)\dot{\beta}^a(s)\int_\beta \mathrm{d}t\, n_b(t)\dot{\beta}^b(t)pq$$



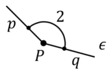
$$= \frac{pq}{2\delta^2}\left(\int_\beta \mathrm{d}s\, n_a(s)\dot{\beta}^a(s)\int_\beta \mathrm{d}t\, n_b(t)\dot{\beta}^b(t)pq\right)$$



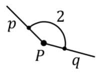
$$+\, O(\epsilon)$$

(6.111)

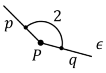
を与える．最後のステップでは状態を積分の外に取り出した．これは ϵ に依存する状態



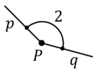
が全て，$\epsilon \to 0$ のとき同じ極限状態を持つため可能である．この極限を単に，ϵ を除いて



と書く，すなわち



$=$



$+\, O(\epsilon).$ (6.112)

よって積分における ϵ に依存する状態の，その極限による置き換えは，オーダー $O(\epsilon)$ の項を除き可能である．

$$\int_\beta \mathrm{d}t\, n_b(t)\dot{\beta}^b(t) = \begin{cases} 0 & \beta \text{が } \mathcal{S} \text{ に接するとき} \\ \delta/2 & \text{その他} \end{cases} \tag{6.113}$$

に注意せよ．この結果はリンクが面と成す角に依存しない，と言うのも，β が座標ブロック $\mathcal{D}$ の頂と底と交わるように，δ は常に充分小さく選ばれるからである．(これが δ が ϵ よりも早くゼロに近づくことを要求する理由である．) また k を 2 よりも小さく選んだので，2 階 (および高階) 微分を度外視すれば充分小さな ϵ に対して，面に接するあらゆるリンクは箱を側面から脱し，ϵ がゼロに近づくとき消える寄与を与えることが帰結する．したがってこの極限では，面に接するリンクは面積の作用に寄与しないのに対し，全ての消えない項は

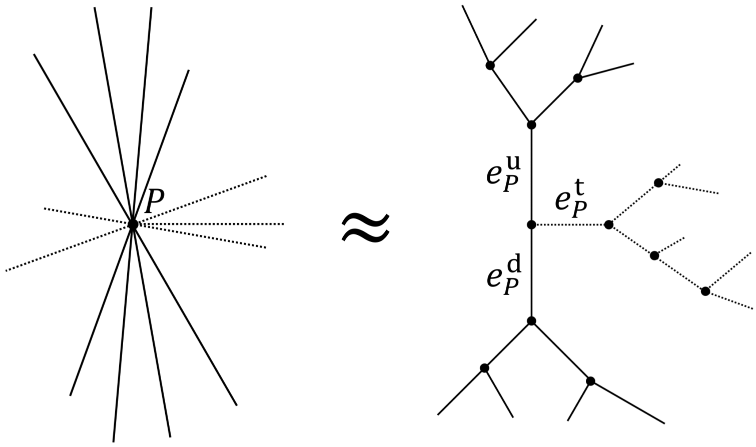
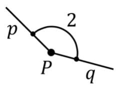
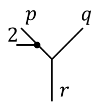
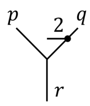
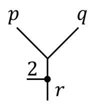


図 28　n 価の結節点の 3 価の展開．破線は面に接する線を表す．

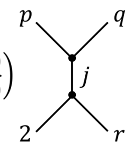
$$\frac{\hbar^2 pq}{8}$$  (6.114)

という形をとる．一般には，上と下の，また面 $\mathcal{S}$ に接する複数のリンクがある．結節点 P を仮想的な 3 価のスピン・ネットワークに展開する［式 (A.27)］．面の上の全てのリンクが単一の“主 (principal)”仮想リンク e^{u} に集まり，面の下の全てのリンクが単一の主仮想リンク e^{d} に集まり，また面に接する全てのリンクが単一の主仮想リンク e^{t} に集まるように，展開を行うことを選ぶ．3 本の主リンクは主 3 価結節点で結合する．この 3 価の展開を図 28 に示してある．

この選択は面積の作用の計算を簡単にする，と言うのも，1 つの手による面の上の全ての現実的なリンクの捕捉 (grasps) の和は，単一の e^{u} の (同様に面の下のリンクに対しては e^{d} の) 捕捉と等価だからである．このことは恒等式

p  $+q$  $= r$  (6.115)

から帰結し，これは以下のように証明できる．リカップリング定理 (A.65) を用いると，式 (6.115) の左辺は

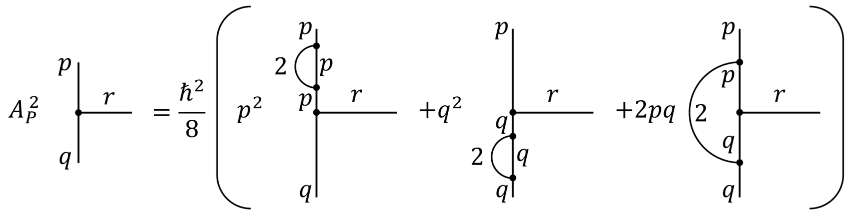
$$\sum_j \left(p\begin{Bmatrix} 2 & p & j \\ q & r & p \end{Bmatrix} - q\lambda_j^{2r}\begin{Bmatrix} r & p & j \\ q & 2 & q \end{Bmatrix} \right)$$  (6.116)

と書くことができ，ここに j は値 $r-2$ と $r+2$ をとり得る．式 (A.61) を用いた直接的な計算は

$$p\begin{Bmatrix} 2 & p & j \\ q & r & p \end{Bmatrix} - q\lambda_j^{2r}\begin{Bmatrix} r & p & j \\ q & 2 & q \end{Bmatrix} = r\delta_{jr} \tag{6.117}$$

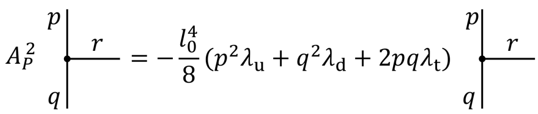
を与え，式 (6.115) が帰結する．恒等式 (6.115) を繰り返し適用することで，全ての捕捉を現実的なリンクから 2 本の仮想的なリンク e^{u} と e^{d} まで移動させることができる．こうして，全ての交点はその価数に関わらず，単一の主 3 価結節点として寄与する．

我々は今や一般的な交点に対する面積の作用を計算する段階に達した．上記の議論から，重要な項は以下に限られる：



(6.118)

ここに第 1 項は面の上にあるリンクたちの捕捉に，第 2 項は面の下にある 2 本のリンクの捕捉に，また第 3 項は一方の手が面の上のリンクを掴み，他方が面の下のリンクを掴む項に起因する．和における各項はもとの状態に比例する (式 (A.63)［正しくは (A.62)］と (A.64) を見よ)．したがって，



(6.119)

を得る．［l_0 の定義は示されていないが，文献 [416, p.13] では $l_0^2 = 8\pi\gamma L_{\mathrm{Planck}}^2$.］量 $\lambda_{\mathrm{u}}, \lambda_{\mathrm{d}}$ および λ_{t} はリカップリング理論から容易に得られる．付録 A.2 の公式を用いると，

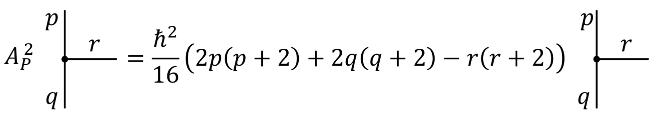
$$\lambda_{\mathrm{u}} = \frac{\theta(p,p,2)}{\Delta(p)} = -\frac{(p+2)}{2p} \tag{6.120}$$

を得る．λ_{d} は式 (6.120) において p を q で置き換えて得られる．λ_{t} は値

$$\lambda_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{Tet}\begin{bmatrix} p & p & r \\ q & q & 2 \end{bmatrix}}{\theta(p,q,r)} = \frac{-2p(p+2) - 2q(q+2) + 2r(r+2)}{8pq} \tag{6.121}$$

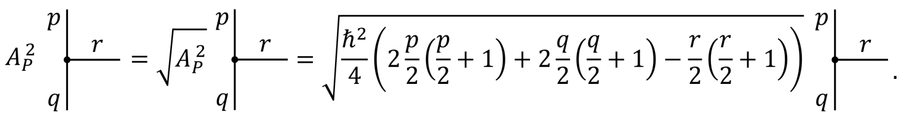
を持つ．(Tet は式 (A.60) で定義される．)

式 (6.118) に代入すると，



(6.122)

を得る．$A_P{}^2$ は対角的なので，平方根は容易にとれる：



(6.123)

交点にわたって和をとり，スピン表記 $p/2 = j^{\mathrm{u}}, q/2 = j^{\mathrm{d}}$ および $r/2 = j^{\mathrm{t}}$ に戻ると，最終的な結果は

$$\mathbf{A}(\mathcal{S})\,|\mathrm{S}\rangle = \left(\frac{\hbar}{2} \sum_{P \in \{\mathrm{S} \cap \mathcal{S}\}} \sqrt{2j_P^{\mathrm{u}}(j_P^{\mathrm{u}}+1) + 2j_P^{\mathrm{d}}(j_P^{\mathrm{d}}+1) - j_P^{\mathrm{t}}(j_P^{\mathrm{t}}+1)}\right)|\mathrm{S}\rangle\,. \tag{6.124}$$

この表現は面積の完全なスペクトルを与える．それは (全ての P に対して) $j_P^{\mathrm{t}} = 0$ かつ $j_P^{\mathrm{d}} = j_P^{\mathrm{u}}$ の場合，以前の結果 (6.75) に帰着する．

$\mathbf{A}(\mathcal{S})$ の完全なスペクトルはしたがって n 個の成分を持つ半整数 j_i の 3 つ組，すなわち $\vec{j}_i = (j_i^{\mathrm{u}}, j_i^{\mathrm{d}}, j_i^{\mathrm{t}})$, $i = 1, \cdots, n$ と任意の n でラベルされる．自然単位と Immirzi パラメータを復元すると，それは

$$\mathbf{A}_{\vec{j}_i}(\mathcal{S}) = \frac{4\pi\hbar G\gamma}{c^3} \sum_i \sqrt{2j_i^{\mathrm{u}}(j_i^{\mathrm{u}}+1) + 2j_i^{\mathrm{d}}(j_i^{\mathrm{d}}+1) - j_i^{\mathrm{t}}(j_i^{\mathrm{t}}+1)} \tag{6.125}$$

で与えられる．これは選択 $j_i^{\mathrm{u}} = j_i^{\mathrm{d}}$ かつ $j_i^{\mathrm{t}} = 0$ に対応する以前の場合 (6.75) を含んでいる．式 (6.125) に含まれ，式 (6.75) には含まれない固有値は縮退したセクター (degenerate sector) と呼ばれる．

6.6.5 体積の量子

重力場の量子状態の物理的解釈において重要な役割を演じる第 2 の演算子は，領域 $\mathcal{R}$ の体積に対応する演算子 $\mathbf{V}(\mathcal{R})$ である．上で構成した面積演算子に対するように，この量は量子論で定義するために少々仕事を必要とする，と言うのも，$\det E$ に含まれる演算子積と平方根の定義に注意を払わねばならないからである．3 次元の領域 $\mathcal{R}$ を考えよ．$\mathcal{R}$ の体積は［式 (4.33) より］

$$\mathbf{V}(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} \mathrm{d}^3x \sqrt{\frac{1}{3!}\left|\epsilon_{abc}\epsilon_{ijk}E^{ai}E^{bj}E^{ck}\right|}. \tag{6.126}$$

この表現の正則化された形式を構成するために，古典的な量 (6.96) を考えよ．r, s および t が x に収束する極限において

$$T^{abc}(x,s,t,r) \to 2\epsilon_{ijk}E^{ai}(x)E^{bj}(x)E^{ck}(x) = 2\epsilon^{abc}\det E \tag{6.127}$$

を得る［係数は $2 \to 1/3!$ と修正されるか (しわ寄せは定義式 (6.128) の数係数に吸収できる)］．したがって体積を正則化するのに，3 つの手のループ演算子を用いることができる．

3 次元多様体の任意の図表 (chart) を固定し，座標体積 ϵ^3 の小さな立方体領域 $\mathcal{R}_I$ を考える．x_I を $\mathcal{R}_I$ における任意ではあるが固定された点とする．古典場は滑らかなので，全ての $s \in \mathcal{R}_I$ に対して $E(s) = E(x_I) + O(\epsilon)$，またあらゆる $s, t \in \mathcal{R}_I$ および s と t を繋ぐまっすぐな線分 α に対して $H_\alpha(s,t)_A{}^B = 1_A{}^B + O(\epsilon)$ を得る．量

$$W_I = \frac{1}{16\epsilon^6\,3!}E^3(\partial\mathcal{R}_I) \tag{6.128}$$

を考えよ，ここに E^3 は式 (6.97) で定義される．式 (6.127) により，ϵ の最低次で

$$\begin{aligned} W_I =& \frac{1}{8\epsilon^6\,3!}|\det E(x_I)| \int_{\partial\mathcal{R}_I}\mathrm{d}^2\sigma \int_{\partial\mathcal{R}_I}\mathrm{d}^2\tau \int_{\partial\mathcal{R}_I}\mathrm{d}^2\rho |n_a(\sigma)n_b(\tau)n_c(\rho)\epsilon^{abc}| \\ =& |\det E(x_I)| \end{aligned} \tag{6.129}$$

を得る．

note：第 2 の等号について　1 次独立な法線を持つ立方体の 3 つの面の選び方は $2^3 = 8$ 通りあり，その各々に対して 3 つの面に積分変数 ρ, σ, τ を充てる方法は 3! 通りある．こうして得られる $8 \cdot 3!$ 通りの積分の各々に対して，絶対値 $|n_a n_b n_c \epsilon^{abc}|$ はノンゼロの寄与 ϵ^6 を持つ．

このように，W_I は小さな ϵ に対して体積要素を近似する非局所的な量である．面積の場合のように Riemann の定理を用いると，領域 $\mathcal{R}$ の体積 $\mathbf{V}(\mathcal{R})$ を以下のように書ける．全ての ϵ に対して，$\mathcal{R}$ を座標体積 ϵ^3 の立方体 $\mathcal{R}_I$ に分割する．このとき

$$\mathbf{V}(\mathcal{R}) = \lim_{\epsilon\to 0} V_\epsilon(\mathcal{R}); \tag{6.130}$$

$$V_\epsilon(\mathcal{R}) = \sum_{I_\epsilon} \epsilon^3 W_{I_\epsilon}^{1/2}. \tag{6.131}$$

体積演算子　ここで量子論に戻ると，このとき直ちに体積演算子の定義が

$$\mathbf{V}(\mathcal{R}) = \lim_{\epsilon\to 0} V_\epsilon(\mathcal{R}); \tag{6.132}$$

$$V_\epsilon(\mathcal{R}) = \sum_{I_\epsilon} \epsilon^3 W_{I_\epsilon}^{1/2}; \tag{6.133}$$

$$W_I = \frac{1}{16\epsilon^6\, 3!} E^3(\partial\mathcal{R}_I) \tag{6.134}$$

と得られ，これらの量は今や演算子である．式 (6.134) を式 (6.133) に代入したときの，ϵ^6 の因子の重大な相殺に注意せよ．

式 (6.132) における極限の意味を特定する必要がある．極限が取られるところのトポロジーの特定は演算子の定義の不可欠な部分である．場の量子論的な演算子の正則化に含まれる極限の常として，極限は一般にそれが存在しないところの，Hilbert 空間のトポロジーにおいてとることができない．極限は，対応する古典的な極限 (6.130) がとられるところのトポロジーを“覚えている”トポロジーにおいてとらねばならない．今の文脈ではこれは容易にできる．量子状態の数列 Ψ_n は，もし滑らかな接続 A に対して $\Psi_n[A]$ が $\Psi[A]$ に収束するならば，Ψ に収束すると言う．我々は対応する演算子のトポロジーを用いる：領域中の全ての Ψ に対して $O_n\Psi \to O\Psi$ ならば $O_n \to O$.

このトポロジーの利用の重要な帰結は，円筒関数の数列が極限のグラフ上で定義された円筒関数に収束することである．3 次元多様体のトポロジーにおいてグラフ Γ_n は Γ に収束する．この事実により極限の研究を 2 段階に分けることが可能になる．第 1 に，我々は極限状態のグラフを研究する．第 2 に，極限の表現をスピン・ネットワーク基底で表すために，状態の色付けに何が起きるかを研究できる．

ここでスピン・ネットワーク状態に対するこの演算子の作用の計算に取り掛かろう．立方体の面上における 3 つの面積分とループに沿う線積分は，面積の場合のように組み合わさり，スピン・ネットワークと立方体の境界との 3 つの交点を選び出す，3 つの交点数［式 (6.65) の箇所を見よ］を与える．我々が r, s および t で表すこれらの 3 点において，演算子の小さなグラフ $\gamma_{\sigma\tau\rho}$ はスピン・ネットワークを掴む．

(3 つの) 面積分の積分領域は 6 次元の空間——立方体の表面上にある 3 点の可能な位置の空間——であることに注意せよ．この積分領域を D^6 で表そう．式 (6.134) における絶対値がここでは重要な役割を演じる：D^6 の異なる点からの寄与は絶対値をとらねばならないのに対し，D^6 の同一の点からの寄与は絶対値をとる前に代数的に和をとらねばならない．演算子の各手の位置は面にわたって積分され，したがって各手が 3 点 r, s および t の各々を掴み，3^3 個の異なる項を生じる．ところが，絶対値により，2 つの手が同じ点，例えば r を掴む項は消える．これは捕捉 (grasp) の結果が対称であるのに対し，演算子が 2 つの手に関して反対称である—— 3 つのシグマ行列のトレースの反対称性［式 (A.29) か］から帰結するように——ために起きる．こうして，各手が異なる点を掴む項のみが消えない寄与を与える．スピン・ネットワークと立方体の表面との各 3 つの交点 r, s および t に対して，3 つの手が 3 点を掴み得る 3! 通りの方法がある．これら 3! 個の項は演算子の反対称性により交代する符号を持つものの，絶対値は和が消えることを防ぎ，3! 個の項の各々に対して同じ寄与をもたらす．

もし立方体の境界とスピン・ネットワークの間に交点が 2 つしかなければ，常に同じ点を掴む 2 つの手がある；寄与は絶対値をとる前に足す必要があるので，それらは相殺する．こうして式 (6.133) における和は，境界が少なくとも 3 つの異なる交点をスピン・ネットワークと持つ立方体 I_ϵ^i にわたる和に帰着し，また面積分は**異なる**点の 3 つの取っ手 (triple-grasps) にわたる和に帰着する．充分小さな ϵ に対して，表面が少なくとも 3 つの交点をスピン・ネットワークと持つ立方体は，スピン・ネットワークの結節点 i を含んでいる立方体である．したがって，立方体にわたる和は，$\mathcal{R}$ の内部に含まれるスピン・ネットワークの結節点 $n \in \{\mathrm{S} \cap \mathcal{R}\}$

にわたる和に帰着する．結節点 n を含む立方体を I_ϵ^n で表そう．このとき

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}(\mathcal{R})\,|\mathrm{S}\rangle =& \lim_{\epsilon\to 0}\sum_{n\in\{\mathrm{S}\cap\mathcal{R}\}}\epsilon^3\sqrt{|W_{I_\epsilon^n}|}\,|\mathrm{S}\rangle\,, \\
W_{I_\epsilon^n}\,|\mathrm{S}\rangle =& \frac{1}{16\epsilon^6\,3!}E^3(\partial\mathcal{R}_I)\,|\mathrm{S}\rangle
\end{aligned}
\tag{6.135}
$$

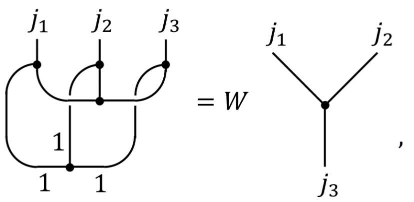
を得る．演算子 $E^3(\partial\mathcal{R}_I)$ の作用はスピン・ネットワークと立方体の境界との異なる交点の 3 つ組 (r,s,t) にわたる和である．そのような 3 つ組の各々に対して，この作用の結果を $\mathcal{T}(r,s,t)\,|\mathrm{S}\rangle$ とする．すると

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}(\mathcal{R})\,|\mathrm{S}\rangle =& \lim_{\epsilon\to 0}\sum_{n\in\{\mathrm{S}\cap\mathcal{R}\}}\epsilon^3\sqrt{|W_{I_\epsilon^n}|}\,|\mathrm{S}\rangle\,, \\
W_{I_\epsilon^n}\,|\mathrm{S}\rangle =& \frac{1}{16\epsilon^6\,3!}\sum_{r,s,t}\mathcal{T}(r,s,t)\,|\mathrm{S}\rangle\,.
\end{aligned}
\tag{6.136}
$$

次に，ここで重要な点は $\epsilon\to 0$ の極限において，演算子がスピン・ネットワークのグラフもリンクの色付けも変えないことである．演算子の唯一可能な作用はしたがって結節点への作用である．したがって，

$$
\mathbf{V}(\mathcal{R})\,|\Gamma,j_l,i_1\cdots i_N\rangle = (16\pi\hbar G)^{3/2}\sum_{n\in\{\mathrm{S}\cap\mathcal{R}\}}\mathcal{V}_{i_n}{}^{i'_n}\,|\Gamma,j_l,i_1\cdots i'_n\cdots i_N\rangle\,. \tag{6.137}
$$

数値の (numerical) 行列 $\mathcal{V}_{i_n}{}^{i'_n}$ の計算はリカップリング理論の演習である．例えば，3 価の結節点に対する



(6.138)

またさらに高い価数の結節点に対するより複雑なダイアグラムにおける，W を計算せねばならない．完全な計算は，固有値のリストもまた与えてある [175] に，非常に詳しく提示されている．詳しい計算の興味ある結果の 1 つは，消えない体積を持つためには結節点は少なくとも 4 価でなければならないことである．［このことは，体積を囲むには 4 枚以上の面が必要であることを考えれば納得がいく.］

演算子はよく定義された自己共役な，離散的なスペクトルを持つ非負の演算子であることを示せる．与えられたグラフとラベルの各々に対して，これ以降，行列 $\mathcal{V}_{i_n}$ を，したがって体積演算子を対角化する結節点の基底 i_n を選ぶ．対応する固有値を V_{i_n} で表す．

6.7　量子幾何

スピン・ネットワーク状態の物理的解釈　体積演算子の本質的な性質は，それがスピン・ネットワーク状態 $|\mathrm{S}\rangle$ の結節点からのみ寄与を持つことである．すなわち，領域 $\mathcal{R}$ の体積は，$\mathcal{R}$ の内部にある S の各結節点に 1 つずつの項の和である．すなわち，N 個の結節点を持つスピン・ネットワークは，多様体において結節点の“周りに”位置し，各々が量子化された体積 V_{i_n} を持つ，N 個の体積の量子，あるいは N 個の空間の“塊 (chunks)”のアンサンブルと解釈できる．

量子化された体積の基本的な塊はこのとき，面によって互いに分離されている．これらの面の面積は面積演算子に支配される．面積演算子 $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ は $\mathcal{S}$ と交差する S の各リンクからの寄与を持つ．したがって以下の解

釈が帰結する．2 つの空間の塊は，もし対応する結節点がリンク l で繋がっているならば隣接している．この場合，それらを分離している基本的な面があり，この面の面積はリンク l の色 j_l によって

$$\mathbf{A}_l = 8\pi c^{-3}\hbar G\sqrt{j_l(j_l+1)} \tag{6.139}$$

と決まる．したがって，結節点に関連する結節因子は体積の量子数であり，またリンクに関連するスピンは面積の量子数である．体積は結節点上にあり，面積はそれらを分離しているリンク上にある．スピン・ネットワークのグラフ Γ は空間の塊の間の隣接関係を定める．

言い換えるとグラフ Γ は，各セルが体積の量子である物理的空間のセル状の分割 (cellular decomposition) に双対なグラフと解釈できる［参考：Delaunay (ドロネー) 図］.

このようにスピン・ネットワーク状態 $|\mathrm{S}\rangle$ は，離散的な量子化された 3 次元の距離 (metric) を定める．この物理的描像は美しく納得がいく．しかしながらその完全な美は，微分銅像不変な状態の空間 $\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ へ行って初めて出現する．

s-結び目状態の物理的解釈　s-結び目状態 $|s\rangle$ を考えよ．簡単のため，向きと順序を変える微分同相写像による専門的事項を無視できるように，その対称群が自明である一般的な場合を考えよう．このとき $|s\rangle$ をスピン・ネットワーク状態 $|\mathrm{S}\rangle$ の，P_{diff} の下での射影と見なせる．スピン・ネットワーク状態 $|\mathrm{S}\rangle$ から s-結び目状態 $|s\rangle$ へ移行する際，3 次元空間の多様体上の位置を除き $|\mathrm{S}\rangle$ の全ての情報を保存する．これは物理的な幾何学が微分同相写像の下での計量の同値類であるところの，古典論における微分同相不変性の実装とちょうど同じである．量子論の場合，$|s\rangle$ は体積の塊の体積と隣接性，およびこれらの体積を分離する面の面積に関する情報を保持する．しかし 3 次元多様体における体積の塊の位置についてのあらゆる情報は，P_{diff} の下で失われる．

結果として得られる状態 $|s\rangle$ の物理的解釈はそれ故，非常に納得がいく：それは離散的な量子化された幾何学を表す．これは 3 次元多様体の上にはない，抽象的な空間の塊から成る：それらは単に互いに対して位置付けられる．それらの空間的関係は，リンクによって定義される隣接性によってのみ決定される (図 29 を見よ)．これは空間**における**量子力学的励起ではない：これは空間それ自体**の**量子力学的励起である．塊の体積と面の面積は s-結び目の色付けによって与えられる．スピン j_l は面積の量子数であり，結節因子 i_n は体積の量子数である．

これは単純な物理的解釈を持ち，完全に 3 次元の微分同相不変な方法で定義される量子状態である．これが空間の量子状態である．

s-結び目上の面と領域　古典的な GR では，計量 g と幾何学 $[g]$ を区別することを思い出そう．幾何学は微分同相写像の下での計量の同値類である．例えば，3 次元において，Euclid 的な計量 $g_{ab}(x) = \delta_{ab}$ と平坦な計量 ${g'}_{ab} \neq \delta_{ab}$ は異なる計量であるものの，同じ幾何学 $[g] = [g']$ を定義する．幾何学の概念は微分同相不変であるのに対し，計量の概念はそうではない．座標 x を持つ与えられた多様体上で，$\mathcal{S} : (\sigma^1, \sigma^2) \to x^a(\sigma^i)$ によって面を定義できる．このとき与えられた計量 $g_{ab}(x)$ において $\mathcal{S}$ の面積がいくらかを問うことは意味を成すのに対し，与えられた幾何学において $\mathcal{S}$ の面積がいくらかを問うことは意味を成さない，と言うのも，$\mathcal{S}$ の相対的な配置と幾何学が定義されないからである．

しかしながら，幾何学が与えられたとき，**幾何学それ自体の上で**面を定義することは有意義である．例えば，地球 (楕円体) の面の (2 次元での) 幾何学が与えられたとき，赤道はよく定義された (1 次元の) 面であり，赤道の 1km 北の平行線もまたそうである：それらの位置は幾何学それ自体に対して定められる．具体的に，幾

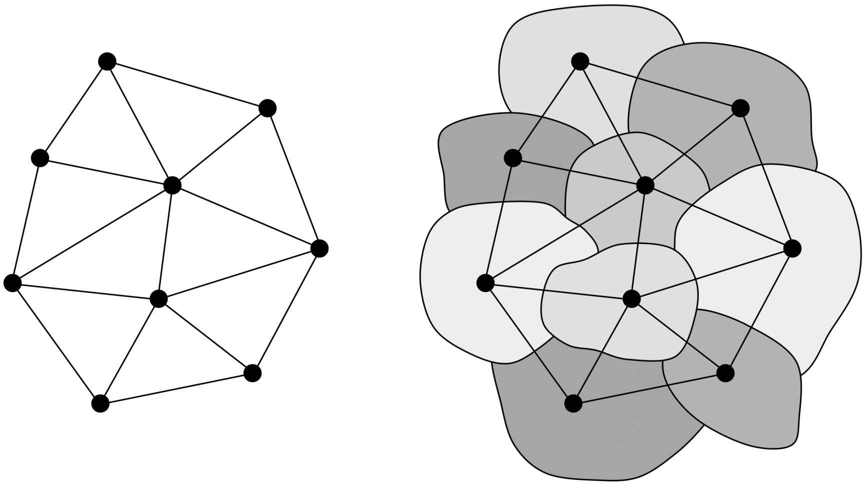


図 29　抽象的なスピン・フォーム［正確にはスピン・ネットワーク］のグラフと，それが表す“空間の塊 (chunks)”または体積の量子のアンサンブル．塊は対応する結節点が結ばれているとき隣接している．各リンク線は 2 つの塊を分離する 1 つの基本的な面を切る．

何学上の面は様々な方法で定義できる．例えば，それは $g \in [g]$ を持つ組 $(\mathcal{S}, g)$ で定義できる．組 $(\phi\mathcal{S}, \phi^* g)$ は同じ面を定義する．代わりに，面は本質から定義できる (赤道は最長の測地線である).

ここで，量子重力において我々は全く同じ状況を見出す．上では座標の面 $\mathcal{S}$ と領域 $\mathcal{R}$，およびそれらの面積と体積を定義した．そのような座標の面と領域は微分同相不変な水準では定義されない．しかしながら，それにも関わらず**抽象的な量子状態** $|s\rangle$ それ自体**の上で**面と領域，およびそれらが持つ関連する面積と体積を定義することができる．領域 $\mathcal{R}$ は単に結節点の集まりである．その境界はリンクのアンサンブルであって，面を定義する；この面はリンクを“切る”と言える．少し考えると，これは古典論におけるのと全く同じ状況であることを読者は納得できるだろう．

例えば，2 つの 4 価の結節点とスピン $1/2, 1/2, 1, 1$ の 4 本のリンクを持つ，s-結び目状態を考えよ．［4 本のリンクの各々が 2 つの結節点を繋いでいる．］この量子幾何学の上で，2 つの体積の量子を分離する閉曲面を特定できる．この面は 4 本のリンクを切り，面積 $\boldsymbol{A} = (8\sqrt{3} + 16\sqrt{2})\pi\hbar G c^{-3}$ ［4 つのスピンに対する固有値 (6.139) の和］を持つ．より複雑な状況が図 30 に描かれている．

固有値と測定　我々には面の面積，あるいは領域の体積を，Planck スケールの正確さで測定する技術的能力があると仮定せよ．例えば面積の測定の例は，相互作用の断面積の測定である．我々は本節で計算した固有値の 1 つを得るだろうか？ もしこれまで発展させてきた理論が物理的に正しければ，答はイエスである．実際，面積と体積は部分的観測量である．部分的観測量は測定でき，また理論は可能な測定結果が，対応する演算子のスペクトル中の数量であることを予言する．

したがって，これらのスペクトルは LQG の明確で定量的な物理的予言である．

この予言は一定の議論を引き起こしてきた．古典論において座標の面と領域の面積と体積は微分同相不変な量ではなく，それ故それらを真の観測量と解釈することはできないという反論が成された．その反論は正しくない；それは微分同相不変な系の制約された取り扱いの曖昧さから生じている．この点を明確にするために，以下の例を考えよ．力に従って，円周上を運動する粒子を考えよ．粒子の位置を与える角度の座標を ϕ，またその共役運動量を p_ϕ とする．我々がよく知っているように，p_ϕ は量子化されることが判明する．ここで，

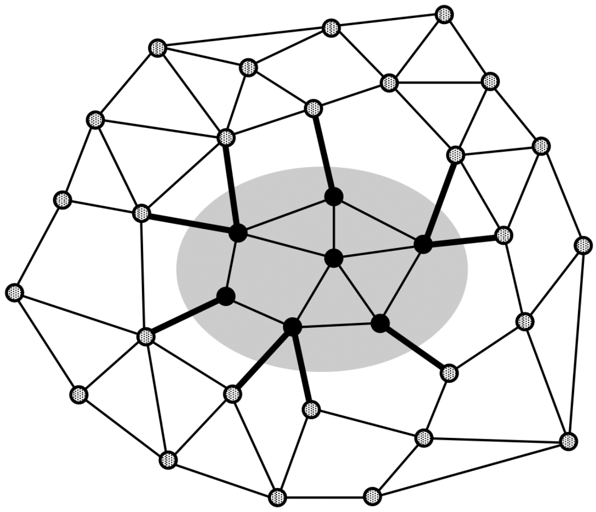


図 30　s-結び目上で定義される領域と面：濃い黒の結節点の集まりは空間の“領域”を定義する；太く黒いリンクの集まりはこの領域を囲む“面”を定義する．

この系の共変な定式化を書けば，Wheeler–DeWitt 方程式

$$H\psi(t,\phi) = \left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + V(\phi)\right)\psi(t,\phi) = 0 \tag{6.140}$$

が得られ，これは拘束系の理論の語法では，ハミルトニアン拘束方程式である．運動量 p_ϕ はゲージ不変な量では**ない**ことに注意せよ：それは演算子 H と交換しない，すなわち $[p_\phi, H] \neq 0$．これは面積と体積が GR においてゲージ不変な量にならないのと全く同じ理由で起きる．しかしこのことは，我々が p_ϕ を測定**でき**，それが量子化されていることを予言**する**という単純な事実に影響しない．混乱は第 3 章で詳しく説明した，完全な観測量と部分的観測量の区別に起因する．p_ϕ の物理的な値を物理的状態から，すなわち Wheeler–DeWitt 方程式の解から予言することはできない，と言うのも，どの時刻でこれが測定されるかを我々は知らないからである．しかしそれでも，その固有値を計算し予言することができる．

代わりに，5.1.5 節のように，発展する運動の定数 $p_\phi(T)$ を定義できる．これはゲージ不変な量である．$p_\phi(T)$ のスペクトル的な性質は，しかしながら，p_ϕ のそれと同じである．より重要なことに，それはポテンシャル $V(\phi)$ に影響されない，すなわちそれはダイナミクスに影響されない．同様に，我々は原理的には，一般に微分同相不変である，面の面積のゲージ不変な定義を用いることができるものの，この込み入った演習は無益である，と言うのも，スペクトル的な性質は部分的観測量の演算子から直接決定できるからである．

* **何故 Diff^* か？**　今や座標変換，あるいは能動的なゲージ写像 $\phi: M \to M$ の正確な関数空間の選択の疑問に取り組み，Diff の代わりに Diff^* を選んだ事実を正当化する時である．古典論において，我々が場を選ぶところの正確な関数空間は数学的な利便性によって指定されており，物理によってではないことに注意しよう．実際，我々は常に時空において不鮮明化された測定を行うのであって，それは点において起きることを直接感受できない．実に，場の古典論において有用なときには，我々は関数のクラスを自由に変更することを選ぶ．例えば，2 階微分可能な場は運動方程式をより容易に書くことを可能にするものの，次いで我々は特定の応用において，分布的な場に取り組むことを好む．解析的な場はふつう厳格すぎると考えられる，と言うのも，小さな有限の近傍における場が至るところの場を一意的に決定できるというアイデアを，我々はあまり好まないからである．滑らかな部類 (C^∞) はしばしば容易かつ便利であり，それは一般に量子重力において自然な出発点と捉えられてきたものの，それは天与 (God-given) ではない．もし滑らかな場を用いるならば，ゲージ群として滑らかな座標変換と Diff を考えるのが自然である．実際，これは量子重力における伝統的な選択であった．しかしながら 6.4 節の終わりで，もしゲージ群として Diff を選ぶと，結び目のクラスは連続的なパラメータ (絶対値；moduli) でラベルされ，空間 $\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ は不可分であることが判明することを指摘した．初めは，これらの絶対値は物理的な自由度を表していると考えられる．そうであるならば，それらによって影響される観測可能量があるだろう．しかしながら，本章で我々が構成したどの演算子もこれらの絶対値を

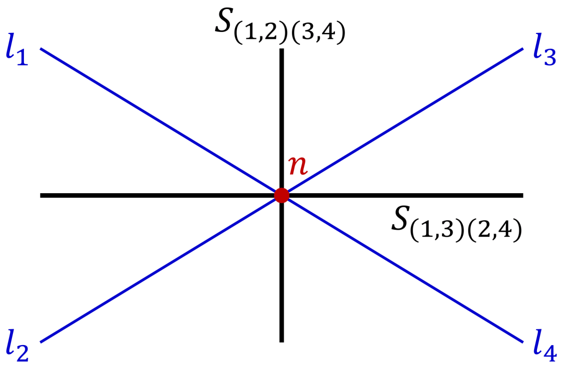


図 31　2 つの面 $S_{(1,2)(3,4)}$ と $S_{(1,3)(2,4)}$

感じない．特に，少し考えると，全ての幾何学的な演算子はグラフ (面と領域) の連続的な変形の下で不変な，グラフ (面と体積) の特徴だけを感じることが分かる．したがって，これらの絶対値は数学的な人工物ということがあり得る：それらは物理とは関係がない．それらは我々が写像 ϕ の関数空間を適切に選ばなかったという事実を反映しているに過ぎない．*Diff* における ϕ は，それらが結節点の接空間の線形構造を不変に留めるのに対し，この線形構造には物理的な重要性がないという意味で“厳格”すぎる．ゲージ群として *Diff** を選んだことは，冗長なパラメータを取り除く，ゲージ群の単純な拡張である．対応して，C^∞ よりもわずかに大きい場の空間に取り組まねばならない［that は than の誤記か］．古典論では何も変わらないのに対し，量子論では不可分な Hilbert 空間と，過剰で物理的に無意味な絶対値を持つという 2 重の問題が解決する．

幾何学の非可換性　ある見解で本節を締め括る．4 価の結節点 n を含むスピン・ネットワーク状態を考えよ．l_1, l_2, l_3, l_4 を結節点 n に接続する 4 本のリンクとする．i をこの結節点の結節因子とする．n が $S_{(1,2)(3,4)}$ 上にあり，リンク l_1 と l_2 が面の一方の側にあるのに対し，リンク l_3 と l_4 が面の他方の側にあるような面 $S_{(1,2)(3,4)}$ を考えよ［図 31］．結節点 n を仮想的なリンク l で繋がった 2 つの 3 価の結節点に分離することで，結節点の空間における基底を選べる (付録 A.1 を見よ)．リンクを (l_1, l_2) と (l_3, l_4) のように組んで，それを行おう．すなわち，2 つの 3 価の結節点は (l_1, l_2, l) と (l, l_3, l_4) の間にある．結節点の空間における基底はこのとき，

$$v_j^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} = v^{\alpha_1\alpha_2\alpha_j} v^{\alpha_j\alpha_3\alpha_4} \tag{6.141}$$

で与えられ，ここに添字たち α_i はリンクの表現に属しており，また添字 α_j は表現 j に属している．状態が S_a の面積の固有状態であるためには，結節因子はこれらの基底要素の 1 つでなければならないことを示すのは困難ではない．言い換えれば，基底 (6.141) は S_a の面積を対角化する．ここで n がその上にあり，リンク l_1 と l_3 が面の一方の側にあるのに対し，リンク l_2 と l_4 が面の他方の側にあるような面 $S_{(1,3)(2,4)}$ を考えよ［図 31］．明らかにこの場合，面積を対角化するのは異なる結節因子の空間の基底になる．それは基底

$$w_k^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} = v^{\alpha_1\alpha_3\alpha_k} v^{\alpha_k\alpha_2\alpha_4} \tag{6.142}$$

になる．2 つの基底は $6j$ 記号で関係している［式 (A.25)］．一般に，それらは異なる．演算子 $\mathbf{A}(S_{(1,2)(3,4)})$ と演算子 $\mathbf{A}(S_{(1,3)(2,4)})$ は交換しないことが帰結する (もし交換するならば，それらは同じ基底によって対角化されるはずである)．したがって 3 次元の幾何学は，ある意味，非可換である：交わる面の面積演算子は互いに交換しない．

6.7.1 空間の構造 (生地；texture)：織物 (weave)

上で説明した離散的で量子化された幾何学と，我々が身の周りで知覚する物理的な幾何学の滑らかな構造の関係は何か？ 答は数段階を要する．

織物 幾何学的な量の通常の測定——すなわち，重力場の測定——は巨視的である：我々は Planck 長さ $l_{\rm P}$ に比べて極めて大きいスケール l で，空間の幾何学を観測する．この大きなスケールでは，Planck 的な離散性は均される (smoothed out)．

アナロジーとして T シャツの布地を考えよ．離れて見ると，それは滑らかな曲がった 2 次元の幾何学的な面である．注意深く見ると，それは数千の繋がった 1 次元的な布糸から成る．LQG によって与えられる空間のイメージも似ている．各々が Planck 尺度を持つ非常に多数の結節点とリンクから成る，非常に大きなスピン・ネットワークを考えよ．微視的には，それは Planck 的なサイズの格子である．ところが巨視的なスケールで調べると，それは 3 次元の連続的な計量の幾何学として立ち現れる．我々の周りの物理的空間はしたがって，非常にきめの細かい (fine) 織物として記述できる．現実の隠れた構造 (texture) はスピンの織物である．

この直観的な描像を正確にできる．巨視的な 3 次元の計量 $g_{ab}(\vec{x}) = e^i_a(\vec{x})e_{ib}(\vec{x})$ を決定する，古典的で巨視的な 3 次元の重力場 e を固定する．スケール $l \gg l_{\rm P}$ でこの計量を近似するスピン・ネットワーク状態 $|{\rm S}\rangle$ を構成することは可能である．$|{\rm S}\rangle$ と e の正確な関係は以下である．(計量 g において) l より大きなサイズを持ち，このスケールでゆっくり変化する領域 $\mathcal{R}$ (または面 $\mathcal{S}$) を考えよ．$|{\rm S}\rangle$ が $l_{\rm P}/l$ に関する小さな補正を除き，e によって決定される $\mathcal{R}$ の体積 (そして $\mathcal{S}$ の面積) に等しい固有値を持つ，体積演算子 $\mathbf{V}(\mathcal{R})$ の (そして面積演算子 $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ の) 固有状態であることを要求する．すなわち

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\mathcal{R})\,|{\rm S}\rangle =&(\mathbf{V}[e,\mathcal{R}] + O(l_{\rm P}/l))\,|{\rm S}\rangle\,,\\ \mathbf{A}(\mathcal{S})\,|{\rm S}\rangle =&(\mathbf{A}[e,\mathcal{S}] + O(l_{\rm P}/l))\,|{\rm S}\rangle\end{aligned} \tag{6.143}$$

であり，ここに式 (2.73)(および式 (2.70)) で与えられる $\mathbf{V}[e,\mathcal{R}]$ (および $\mathbf{A}[e,\mathcal{S}]$) は，重力場 e によって決定される領域 (面) の体積 (面積) である．

あらゆる大きな領域と面に対してこれらの方程式を満たすスピン・ネットワーク状態 $|{\rm S}\rangle$ は，計量 g の“織物 (weave)”状態と呼ばれる．大きなスケールで，状態 $|{\rm S}\rangle$ は g と正確に同じ体積と面積を定める．

この定義は微分同相不変でない水準で与えられている；しかしそれは容易に微分同相不変な水準に持ち込める：s-結び目状態 $|s\rangle = P_{\rm diff}\,|{\rm S}\rangle$ は 3 次元の幾何学 $[g]$，計量 g が属する 3 次元の計量の同値類の，織物状態と呼ばれる．

LQG の初期には，平坦な空間の織物や Schwarzschild および重力的な織物を含め，様々な 3 次元の計量に対して，いくつかの織物状態が構成され研究された．それらは式 (6.143)，あるいはそれらに類似の方程式を満たす (当時は面積と体積の演算子が知られておらず，他の重力場の演算子関数が同じ役割を演じるのに用いられた)．これらの織物状態のほとんどは，スピン・ネットワーク基底の発見の前に，より厄介なループ基底に取り組む中で構成された．方程式 (6.143) は与えられた 3 次元の計量から織物状態を一意的には決定しない．与えられた計量からの織物状態の構成には大きな自由度がある，と言うのも，平均的な性質のみが式 (6.143) によって課せられるからである．構成された織物状態を，与えられた巨視的な幾何学の微視的状態に対する，現実的な提案と捉えてはならない．それらは特定の巨視的性質を持つ微視的状態の存在証明に過ぎない．

他方，織物状態は LQG の歴史的発展において非常に重要な役割を演じてきた．この役割を以下で振り返る，と言うのも，それは Planck 尺度の離散性の物理に関する重要な物理的教訓を含んでいるからである．

$a \to 0$ の極限の失敗と Planck 尺度の離散性の出現　量子 GR のループ表現の構成 (1988 年頃) と，理論が空間の離散的な構造を予言することを明らかにした，面積および体積の固有値の計算 (1995 年頃) の間には，数年のギャップがある．これらの年の間，ループが“Planck サイズ”を持つ事実は知られておらず，初めは予期さえされていなかった．直観は，無限に密なループの格子の**極限**をとることで巨視的な幾何学を構成できるというものだった――粗く言えば，格子のサイズ a がゼロに移行する格子理論の極限をとることで，伝統的な QFT を定義できるように．古典的な計量を近似する織物状態を構成するにあたり，したがって当初の目的は，ループの空間的な密度が無限大にとられる極限として定義される量子状態によって，式 (6.143) のような方程式を満たすことであった．ところが予期せぬ非常に驚くべきことが起こった．ループの密度の増大に伴い，近似の正確さは増加しなかった．代わりに，演算子の固有値が増加した！

より正確に述べよう．座標 $\vec{x}$ を持つ 3 次元の多様体から始めるとしよう．平坦な 3 次元の計量 ${g^{(0)}}_{ab}(\vec{x}) = \delta_{ab}$，すなわち場 ${e^{(0)}}^i_a(\vec{x}) = \delta^i_a$ を近似する，この多様体上の織物を定義したい．座標密度 $\rho = a_0^{-2}$ を持つループのもつれ (tangle) から成る，空間的に一様な織物状態 $|\mathrm{S}_{a_0}\rangle$ を構成する．(座標密度 ρ はループの合計の座標長さ L と合計の座標体積 V の比として定義できる．) ループはこのとき平均で互いに距離 a_0 にある．したがって，近似 (6.143) はスケール $l \sim a_0$ で破綻すると期待される．アイデアはしたがって，“格子間隔” a_0 を減少させることで，すなわちループの座標密度を増大させることで，近似を向上させることだった．ところが a_0 が減少して $a < a_0$ となると［むしろ a_0 を一定値と再定義して a を減少させる］，計算は代わりに

$$\mathbf{A}(\mathcal{S})\,|\mathrm{S}_a\rangle \sim \frac{{a_0}^2}{a^2}\left(\mathbf{A}[e^{(0)},\mathcal{S}] + O(l_\mathrm{P}/l)\right)|\mathrm{S}\rangle \tag{6.144}$$

をもたらした：誤差の減少の代わりに，面積が増大する！ 言い換えると，ループを加えることで我々はより良い近似を得ない．むしろ，我々は異なる場を近似している．${e^{(a)}}^i_a(\vec{x}) = \frac{a_0}{a}\delta^i_a$［特に右辺の係数 $(a_0/a)^2$ を 1 次に修正した］として，

$$\frac{{a_0}^2}{a^2}\mathbf{A}[e^{(0)},\mathcal{S}] = \mathbf{A}[(a_0/a)e^{(0)},\mathcal{S}] = \mathbf{A}[e^{(a)},\mathcal{S}] \tag{6.145}$$

なので［式 (2.70) より $e^{(0)} \to (a_0/a)e^{(0)}$ のとき $u_i \to (a_0/a)u_i, \mathbf{A} \to (a_0/a)^2\mathbf{A}$］，増大したループ密度を持つ織物は計量

$$g^{(a)}_{ab}(\vec{x}) = \frac{{a_0}^2}{a^2}\delta_{ab} \tag{6.146}$$

を近似している．

ただしループの**物理的な**密度 ρ_a は，a の減少とともに変化しないことに注意せよ．物理的な密度 ρ_a は，計量 $g^{(a)}$ から，すなわち方程式 (6.143) を通じて状態 $|\mathrm{S}_a\rangle$ 自体が定める計量によって決まる，ループの合計の長さと合計の体積の比である．すなわち

$$\rho_a = \frac{L_a}{V_a} = \frac{(a_0/a)L}{(a_0/a)^3V} = \frac{a^2}{{a_0}^2}\rho = \frac{a^2}{{a_0}^2}a^{-2} = a_0^{-2}. \tag{6.147}$$

ループの密度 a の選択に関わらず，物理的な密度は a_0^{-2} に留まる！ しかしこのとき，a_0 がループの密度から決まらないならば，それは理論自体の次元を持つ (dimensional) 定数によって与えられねばならず，また理論におけるそのようなスケールは Planck 尺度だけなので，必然的に，数係数を別にして

$$a_0 \sim l_\mathrm{P} \tag{6.148}$$

を得る．

初めはこの結果は困惑するものだった．理論は l_{P} より低い物理的スケールで滑らかな幾何学を近似することを拒んだのである．後に理由が明らかになった：l_{P} より低い物理的スケールは存在しない．各々のループは Planck サイズの幾何学の量子を担う：より多くのループは，与えられた幾何学のより優れた近似ではなく，より大きなサイズを与える．このことはループそれ自体が固有の幾何学的なサイズを持ち，また理論には Planck 尺度より小さな物理的スケールにおける空間構造がないことの，最初の予期せぬヒントであった．

量子および古典的な離散性：織物の重合せ　空間の織物の描像は格子理論の空間と似ている．しかしその 2 つには著しい違いがあり，アナロジーには注意を払う必要がある．

Planck 尺度の離散性は，原子のエネルギー準位の量子化が非相対論的量子力学から予言されるのと同様に，標準的な量子化の手続きに基づき，ループ量子重力によって**予言される**のに対し，格子理論における空間の離散化は**仮定される**．

しかし違いはこれよりもはるかに重大である．格子理論において，格子はその上に理論が定義されるところの固定された構造である．織物は，他方で，一定の巨視的な性質を持つ多くの量子状態の 1 つであり，また非常に特殊な 1 つである，と言うのも，それはスピン・ネットワーク基底の単一の要素だからである．空間の物理的な状態が一般的な状態にない理由はなく，また個の巨視的な性質を持つ**一般的な**量子状態は織物状態ではない：それは織物状態の**量子力学的な重合せ**である．したがって小さなスケールにおいて，空間は織物状態の量子力学的な重合せであると期待することは理に適っている．

したがって LQG の提示する物理的な空間の描像は，本当は小さなスケールの格子のそれではない．むしろ，それはそのような格子の，量子力学的な確率の雲である．

Minkowski 真空　適当な近似では，我々の周りの巨視的な空間は Minkowski 計量で記述される．したがって量子論には，大きなスケールで Minkowski 計量を再現する状態 $|0_{\mathrm{M}}\rangle$ (M は Minkowski を表す) があると期待するのはもっともである．

固定した時刻において，Minkowski の 3 次元空間は平坦な 3 次元の計量 g によって，すなわち重力場 $e^i_a(x)=\delta^i_a$ によって記述される．このことは，$|0_{\mathrm{M}}\rangle$ が e の織物状態であると期待せねばならないことを意味するか？ そうではない．量子 Maxwell 理論において，消える電場と磁場 $E=B=0$ を持つ古典的な解に対応する状態は，真空状態 $|0\rangle$ である．しかし $|0\rangle$ は電場 E の固有状態ではない．E と B は交換しないので，E と B は共通の固有状態を持たない．E の固有状態は B において最大に拡がっている．代わりに，E と B は $|0\rangle$ において消える平均値と最小の拡がりを持つ．状況は調和振動子の真空状態に対するのと全く同じである．古典的な解 $x(t)=p(t)=0$ は，位置 x の固有状態でも運動量 p の固有状態でもない状態である，真空状態に対応する．x の固有状態は非常に大きな Δp を持ち，瞬間的に拡がる．

同様に，$|0_{\mathrm{M}}\rangle$ は重力場 E の固有状態ではあり得ない．E の固有状態は重力的な磁場において最大の拡がりを持ち，瞬間的に拡がるだろう．対応して，$|0_{\mathrm{M}}\rangle$ は平坦な幾何学の織物状態でなければ，平坦な幾何学の織物状態の重合せでもない．

$|0_{\mathrm{M}}\rangle$ は重力的な電場と磁場の消える平均値と最小の拡がりを持つ状態に違いない．他方で，調和振動子の真空が $x=0$ の周りに集中しているのと同じ意味で，それは織物状態の周りに集中していなければならない．

我々はまだ状態 $|0_{\mathrm{M}}\rangle$ の形をあからさまには知らない．実際，この汎関数の探求は理論の主要な未解決問題の 1 つである．第 9 章でこの問題に戻る予定である．

GR を Minkowski 解の周りに線形化して得られる場の古典論から，状態 $|0_{\mathrm{M}}\rangle$ に関するいくらかのヒントを得ることができる．古典論において

$$e^I_\mu(x)=\delta^I_\mu+h^I_\mu(x) \tag{6.149}$$

と書き，考察を $h^I_\mu(x) \ll 1$ となる Einstein 方程式の解に制限する．h の 1 次のオーダーでは，これらの解は線形化された Einstein 方程式を満たす．線形化された Einstein 方程式はスピン 2 の場に対する Minkowski 空間上の自由な波動方程式である．それらはゲージ固定でき，$h^0_\mu = h^I_0 = 0$ と固定し，$h^i_a(x)$ を単一のトランスバース・トレースレス成分に制約する，すなわち $\partial_a h^i_a = \partial_i h^i_a = h^a_a = 0$．各々の運動量 $\vec{k}$ に対してこのとき，2 つの独立な偏極 $\epsilon_\pm$ がある．このゲージでは，線形化された Einstein 方程式は単に，各偏極と各 Fourier モード

$$h^i_a(\vec{k}) = (2\pi)^{-3/2} \int \mathrm{d}\vec{x}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\vec{x}} h^i_a(\vec{x}) \tag{6.150}$$

に 1 つずつの，振動数 $\omega(\vec{k}) = |\vec{k}| = \sqrt{k_a k^a}$ の結合していない振動子の集まりを表す．

この自由な系の場の量子論は，完全に伝統的な自由な QFT である．その真空状態 $|0_{\mathrm{lin}}\rangle$ (lin は線形化を表す) において，全ての振動子はその基底状態にある．理論の Hilbert 空間［state は space の誤記か］は，運動量と偏極 (k_i, ϵ_i) を持つ n 個の量子を含む状態

$$|k_1, \epsilon_1, \cdots, k_n, \epsilon_n\rangle \tag{6.151}$$

によって張られる，Fock 空間である．これらの量子は重力子と呼ばれる．$h^i_a(x)$ はこの Fock 空間上の，(生成および消滅部分から成る) 伝統的な場の演算子である．(ゲージ固定された) 場の配位 h の各々に対して，(一般化された) 固有状態 $|h\rangle$ を書ける．これにより Fock 空間の一般的な状態 $|\psi\rangle$ を，Schrödinger 表現において書くことが可能になる：

$$\Psi[h] = \langle h|\psi\rangle\,. \tag{6.152}$$

特に，真空状態はこの表現において

$$\Psi_0[h] = \langle h|0_{\mathrm{lin}}\rangle = N \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\hbar}\int \mathrm{d}\vec{k}\, |\vec{k}| h^a_i(-\vec{k}) h^i_a(\vec{k})} \tag{6.153}$$

で与えられる．［これは式 (5.110) と比較される．］これは場の配位 $h = 0$ の周りに集中した Gauss 型の汎関数である．この状態を重力場の汎関数

$$\Psi_0[e] = \langle e - \delta|0_{\mathrm{lin}}\rangle = N \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\hbar}\int \mathrm{d}\vec{k}\, |\vec{k}| (e^a_i(-\vec{k}) - \delta^a_i)(e^i_a(\vec{k}) - \delta^i_a)} \tag{6.154}$$

として書くことができ，これは $g = \delta$ の周りに集中した汎関数である．

このとき $|0_{\mathrm{M}}\rangle$ は，場 e の織物であるスピン・ネットワーク状態 S_e の全てに対して，

$$\Psi_{\mathrm{M}}[\mathrm{S}_e] \equiv \langle \mathrm{S}_e|0_{\mathrm{M}}\rangle \sim \Psi_0[e] = N \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\hbar}\int \mathrm{d}\vec{k}\, |\vec{k}| (e^a_i(-\vec{k}) - \delta^a_i)(e^i_a(\vec{k}) - \delta^i_a)} \tag{6.155}$$

を満たさねばならないと推測するのは理に適っている．これは平坦な織物 S_0 の周りに集中した状態である．

“空の (empty)” 状態　Minkowski 真空状態 $|0_{\mathrm{M}}\rangle$ を共変な真空状態 $|0\rangle$，および空の (empty) 状態 $|\emptyset\rangle$ と混同してはならない (5.4.2 節を見よ)．状態

$$\Psi_\emptyset[A] = \langle A|\emptyset\rangle = 1 \tag{6.156}$$

は $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ と $\mathbf{V}(\mathcal{R})$ の消える固有値を持つ固有状態である．したがって，それは体積と面積のない空間を表す．スピン・ネットワーク状態は $|\emptyset\rangle$ にホロノミー演算子を作用させることで得られる．この特定の意味において，$|\emptyset\rangle$ は Fock 真空とアナロガスである．状態 $|\emptyset\rangle$ はゲージ不変かつ微分同相不変であり，よって状態は $\mathcal{K}_0$ と $\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ に含まれてもいる．実際，それは物理的な空間が全くない重力場の量子状態を表している．次章で見るように，$|\emptyset\rangle$ は Wheeler–DeWitt 方程式の解であり，それ故それは $\mathcal{H}$ にも含まれる．

文献ノート

“量子一般相対性理論のループ表現”が [176, 177] で導入された．これらの論文はアプローチの最初の驚くべき結果―― Wheeler–DeWitt 方程式の解，および微分同相拘束の一般解――を提示した．接続の汎関数とループ汎関数の間を写像するループ変換は，[170] で説明された．アプローチは Ted Jacobson と Lee Smolin による，Ashtekar 変数で書かれた Wheeler–DeWitt 方程式のループ解の発見 [178] に動機付けられた．Rodolfo Gambini と彼の共著者らは独立に Yang–Mills 理論の形式的なループ量子化を開発した [179]．理論にとっての――ループが交わるところの――結節点の重要性が，Jorge Pullin によって強調された；結節点は [180] で研究された．この LQG の最初の段階の説明はレビュー [2] に見出される．

理論にとってのグラフの重要性は Jerzy Lewandowski によって理解された．量子重力理論においてスピン・ネットワーク基底は [171] で導入され，ループ基底の過完備性 (overcompleteness) という長年の困難を解消した．着想は空間の組合せ的な構造に関する Penrose の思索 [181] に由来する．スピン・ネットワークのアイデアの動機と歴史については，[182] を見よ．このアイデアの数学的な体系化は John Baez [183] による．交わりを持つグラフの *Diff* の下での同値類は離散的でないという事実と，状態の不可分性という関連する問題は [171] で指摘され，対応する絶対値の (moduli) 空間を分析した [184] で研究された．$Diff^*$ を用いた問題の解決策は [185] で議論されている．可分な Hilbert 空間を得る異なるアプローチが [186] にある．量子重力におけるループ表現の一意性定理 (“LOST”定理) は，Jerzy Lewandowski, Andrzej Okolow, Hanno Sahlmann および Thomas Thiemann [187] によって，またわずかに異なるバージョンで，Christian Fleischhack [188] によって証明された．

LQG は離散的な Planck 尺度の幾何学を予言し得るというアイデアは，織物状態の研究 [189] の中で現れた．面積の固有値が理論の物理的な予言を提示しているという最初の明確な主張は，原理的には [190] において述べられた．面積と体積の演算子の定義と，それらの離散的な固有値の最初の計算が [191] にある．面積のスペクトルの主系列はこの研究において計算された．縮退したセクターは [173] と，私がここで従った [192] において計算された．[191] の第 1 版における体積のスペクトルの計算の誤りは直ちに，体積演算子の格子バージョンを開発する際に Renate Loll [193] によって発見された；消えない体積を持つためには，結節点は少なくとも 4 価でなければならないことに Loll は気付いた．文献には体積演算子の数々の等価な構成がある；それらは全て 1 つの可能な変数を除き，同じ演算子を定義している．体積演算子の定義における変数の体系的な研究は [194] において，Jerzy Lewandowski によって完遂された．幾何学の固有値を計算する体系的な手法が，[174] の数学を用いて，[175] で開発された．さらなる詳細 (および他の応用) については，[195] も見よ．長さの演算子 (それは面積と体積よりも驚くほどはるかに扱うのが複雑である) が [196] において，Thiemann によって研究された．交わる面の面積の非可換性は [197] において詳しく研究されている．角度の演算子については，[198] を見よ．スピン・ネットワークとその幾何学の魅力的でよく書かれた手引きは Seth Major の [199] である．

LQG の数理物理学バージョンは，Abhay Ashtekar, Chris Isham および Jerzy Lewandowski による影響力のある (seminal) 研究 [200, 201] から始まった．Ashtekar の 1992 年の Les Houches での講義 [202] と John Baez [203] を見よ．この方向性は [176, 177] のループ表現を数学的に体系化した論文 [204] へと導いた；定式化の異なる変数の関係は [204] ではまだ非常に混乱しており，それは Roberto De Pietri [205] と Thomas Thiemann によって解明された．詳細な手引きと完全な参考文献については，[9] を見よ．完全な理論と線形化された理論の関係は [206] において探求されている．織物状態の概念は [189] で導入された；最近の議論と

参考文献については，[207] を見よ．

第 7 章　ダイナミクスと物質

前章では，LQG の Hilbert 空間と基本的な演算子を構成した．本章では理論の力学的な (dynamical) 側面を議論する．その際，ハミルトニアン演算子 H を構成するために，Wheeler–DeWitt 方程式 (6.3) のよく定義されたバージョンを書かねばならない．

LQG のハミルトニアン演算子の構成は長い時間をかけて，数々の段階を経てきた．演算子が単純な正則化を通じて定義でき，α が自己交差 (self-intersections) を持たないループならば，あらゆるループ状態 Ψ_α は $H\Psi_\alpha = 0$ の解になることに気付くことが最初であった．この見解は LQG への扉を開いた．結果は全て後に続く H の定義において真に留まる．この最初の単純な正則化では，しかしながら，H は交差の上で発散する．

第 2 段階は，(i) その作用が微分同相不変な状態の上で定義され，また (ii) その密度の特徴が適切に取り扱われるならば，有限の演算子 H が得られることに気付くことであった．ある種の手品 (magic) で，正しい密度の重みをもつ微分同相不変な状態上の演算子の作用は，切断を取り除く極限で自明に**収束する**．この結果は QFT への背景独立なアプローチの主要な成果である．それは背景独立性と，紫外発散 (UV divergences) の不在の関係の現れである．

第 3 段階は H を交換子として書くアイデアであり，それは平方根と逆行列を避けて演算子を書くことを可能にする技法であった．この技法は残る障害を一気に解消した：一方では，それは実の Barbero 接続を用いることで，量子論において非自明な実数条件を実装する困難を避けることを可能にした；他方でそれは，密度の重み 1 のハミルトニアンを得るために以前用いられていた平方根のような，H の非多項式性 (nonpolynomiality) による困難を回避することを可能にした．

本章では，紆余曲折した歴史的な道のりをたどるのではなく，むしろ演算子を直接定義する．実接続を持つ Lorentz 的な GR を定義する，ハミルトニアン (4.43) の第 1 項に対応する演算子のみを私は論じる．この第 1 項は単独で Euclid 的な量子 GR を定義する．ここで説明する技法は第 2 項に直接拡張でき，そのことについては読者に [20] を紹介する．

一般的な GR の語法に従い，重力場以外のあらゆるものを“物質”と呼ぶ．我々が知る限りでは，宇宙の中身は GR と標準模型によって記述されるもの——フェルミオン，Yang–Mills 場，重力場，そしておそらくは，Higgs スカラー——である．第 1 章で説明したように，LQG には自然に“統一された”理論を与えることや，宇宙の中身についての理由を説明することへの野心はない．本章では上に挙げた 4 つの存在が宇宙を構成していると仮定し，これまでに説明した重力場の背景独立な量子論が，これら全ての場の背景独立な理論へといかに自然に拡張されるかを説明する．

この拡張の著しい側面は，重力場のダイナミクスの有限性が物質に拡張されることである．理論には重力にも物質にも，紫外発散の“余地 (空間；space)”がない．

7.1　ハミルトニアン演算子

正則化　量子論にとって最も便利なハミルトニアン H の形は式 (4.16) で与えたもの，すなわち

$$H = \int N \mathrm{tr}(F \wedge \{\mathbf{V}, A\}) \tag{7.1}$$

である．理由は，量子演算子 $\mathbf{V}$ を既に定義しており，演算子 F と A は短い経路のホロノミー演算子の極限として定義できるのと同時に，古典的な Poisson 括弧は量子論において直ちに量子力学的な交換子として実現できることである．

点 x と点 x における接ベクトル u を固定する；点 x を発し u に接する座標長さ ϵ の経路 $\gamma_{x,u}$ を考えよ．このときホロノミーは

$$U(A, \gamma_{x,u}) = 1 + \epsilon u^a A_a(x) + O(\epsilon^2) \tag{7.2}$$

と展開できる．同様に，点 x と点 x における 2 つの接ベクトル u と v を固定し，小さな三角形のループ $\alpha_{x,uv}$ を考えよ．このとき

$$U(A, \alpha_{x,uv}) = 1 + \frac{1}{2}\epsilon^2 u^a v^b F_{ab}(x) + O(\epsilon^3). \tag{7.3}$$

これを用い，また $h_\gamma = U(A, \gamma)$ と書くと，ハミルトニアンの表現を

$$H = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon^3} \int N \epsilon^{ijk} \mathrm{tr}\left(h_{\gamma^{-1}_{x,u_k}} h_{\alpha_{x,u_i u_j}} \{\mathbf{V}, h_{\gamma_{x,u_k}}\} \right) \mathrm{d}^3 x \tag{7.4}$$

と書くことで正則化できる．ここに (u_1, u_2, u_3) は 3 重積が単位に等しい，x における任意の 3 つの接ベクトルである．面積と体積の演算子に対して用いたのと同じ戦略に従い，3 次元の座標空間を座標体積 ϵ^3 の小さな領域 $\mathcal{R}_m$ に分割しよう．このとき積分を Riemann 和として書くことができ，また

$$H = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon^3} \sum_m \epsilon^3 N_m \epsilon^{ijk} \mathrm{tr} \left(h_{\gamma^{-1}_{x_m, u_k}} h_{\alpha_{x_m, u_i u_j}} \{ \mathbf{V}(\mathcal{R}_m), h_{\gamma_{x_m, u_k}} \} \right) \tag{7.5}$$

と書くことができ，ここに x_m は今や $\mathcal{R}_m$ の任意の点であり，また $N_m = N(x_m)$ である．極限はこの点の選択に依らないという事実は Riemann の定理から保証される．ϵ^3 の因子は相殺するので，落とせることに注意せよ．

note　上式 (7.3–5) については文献 [415, § 8.3] の式 (8.25–26) (とそのノート) を見よ．Thiemann の恒等式 (4.15) の導出過程での考察より，式 (7.5) において $\mathbf{V}$ は考えている領域 $\mathcal{R}_m$ の体積にとれば充分である．

演算子の定義　$\mathbf{V}(\mathcal{R}_m)$ と h_γ は $\mathcal{K}$ においてよく定義された演算子なので，このとき対応する量子力学的演算子

$$H = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar} \lim_{\epsilon \to 0} \sum_m N_m \epsilon^{ijk} \mathrm{tr} \left(h_{\gamma^{-1}_{x_m, u_k}} h_{\alpha_{x_m, u_i u_j}} [\mathbf{V}(\mathcal{R}_m), h_{\gamma_{x_m, u_k}}] \right) \tag{7.6}$$

を考えることができる．演算子の定義を完成させるには，我々はなお各領域 $\mathcal{R}_m$ において，点 x_m，3 つのベクトル (u_1, u_2, u_3)，および経路 γ_{x, u_k} と $\alpha_{x, u_i u_j}$ を選ばねばならない．これは結果として得られる量子力学的演算子がよく定義され，微分同相写像の下で共変的であり，内部ゲージの下で不変であり，非自明となる方法で行わねばならない．これらの要求は高度に非自明である．驚くべきことに，これら全てを満たす選択がある．

それを見出すための重要な洞察は以下である．スピン・ネットワーク状態に作用するとき，体積の存在により，この演算子はスピン・ネットワークの結節点にのみ作用する．(このことは以下の理由により，交換子における項 $h_{\gamma_{x,u}}$ の存在によって変わらない．体積演算子は 3 価の結節点上で消える．演算子 $h_{\gamma_{x,u}}$ は結節点の価数を高々 1 だけ増加できる．したがって，H が消えないためには状態に少なくとも 3 価の結節点がなければならない．)

したがって和 (7.6) において，中に結節点 n のある領域 $\mathcal{R}_m$ のみが消えない寄与を与える．中にスピン・ネットワーク S の結節点 n が位置する領域を $\mathcal{R}_n$ と呼ぶ．このとき

$$H \, |\mathrm{S}\rangle = \lim_{\epsilon \to 0} H_\epsilon \, |\mathrm{S}\rangle \tag{7.7}$$

であり，ここに

$$H_\epsilon \, |\mathrm{S}\rangle = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar} \sum_{n \in \mathrm{S}} N_n \epsilon^{ijk} \mathrm{tr} \left(h_{\gamma^{-1}_{x_n, u_k}} h_{\alpha_{x_n, u_i u_j}} [\mathbf{V}(\mathcal{R}_n), h_{\gamma_{x_n, u_k}}] \right) |\mathrm{S}\rangle \, . \tag{7.8}$$

和は今や結節点にわたる．ここで，非自明な交換子を得る唯一の可能性は，経路 γ_{x_n, u_k} 自体が結節点に接触している場合である．そこでそのことを要求する．これは x_n が正確に結節点の位置であることを要求して得られる．x_n の正確な位置は，古典論では Riemann の定理により重要でないのに対し，量子論ではそうではないことを思い起こそう．このことが x_n を固定する．

最後に，3 つのベクトル (u_1, u_2, u_3) および経路 γ_{x, u_k} と $\alpha_{x, u_i u_j}$ の自然な選択がある：(u_1, t_2, u_3) を結節点 n から発する 3 本のリンク l, l', l'' の正接にとる．(それらの 3 重積が単位になる条件は，長さを調節することで満たせる．) γ_{x, u_k} をリンク l に沿う座標長さ ϵ の経路 $\gamma_{x,l}$ にとる．$\alpha_{x, u_i u_j}$ を，残り 2 本のリンク l' と

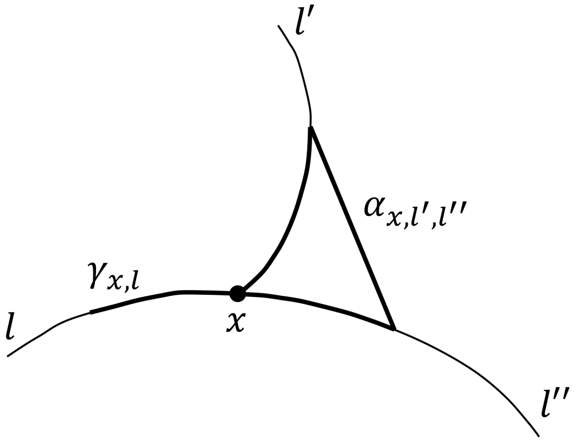


図 32　点 x での 3 価の結節点における経路 $\gamma_{x,l}$ とループ $\alpha_{x,l',l''}$

l'' に沿う座標長さ ϵ の 2 辺から成る三角形 $\alpha_{x,l',l''}$ にとり，第 3 の辺として 2 つの端点を繋ぐ (座標 x において) まっすぐな線をとる．このまっすぐな線は“弧 (arc)”と呼ばれる．i, j, k にわたる和は 3 本のリンクの全ての置換にわたる和である，図 32 を見よ．もし結節点が 3 より大きい価数を持つならば，すなわち，もし結節点 n において 3 本よりも多いリンクがあるならば，全ての異なるリンクの順序付けられた 3 つ組にわたる和をとることで共変性を維持する．こうして，

$$H_\epsilon \left|\mathrm{S}\right\rangle = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\sum_{n\in\mathrm{S}} N_n \sum_{l,l',l''} \epsilon_{ll'l''} \mathrm{tr}\left(h_{\gamma^{-1}_{x_n,l}} h_{\alpha_{x_n,l',l''}} [\mathbf{V}(\mathcal{R}_n), h_{\gamma_{x_n,l}}] \right) \left|\mathrm{S}\right\rangle \tag{7.9}$$

を提示する，ここに $\epsilon_{ll'l''}$ は (3 重積の符号によって決まる) 置換のパリティである．これは (以下で加える 1 つの付加的な詳細を除き) ハミルトニアン拘束の定義を完成させる．2 つの主要な問が未解決のままである．第 1 に，極限は有限かどうか．第 2 に，それは微分同相写像とゲージ変換の下でよく振舞うかどうか．特に，それは選んだ座標と独立かどうか．2 つの問は直ちに関係付けられる．

補足　ハミルトニアンが結節点のみに作用する理由を理解する単純で直観的な方法がある．Wheeler–DeWitt 演算子の素朴な (発散する) 形 (6.3) を考え，結節点のない点で，これをスピン・ネットワーク状態に作用させる．方程式 (6.59) は作用の結果が (発散を度外視すれば)

$$F^{ij}_{ab}(\vec{\tau})\frac{\delta}{\delta A^i_a(\vec{\tau})}\frac{\delta}{\delta A^j_b(\vec{\tau})}\Psi_{\mathrm{S}}[A] \sim F^{ij}_{ab}(\vec{\tau})\dot{\gamma}^a\dot{\gamma}^b \tag{7.10}$$

に比例することを示しており，ここに $\dot{\gamma}^a$ は演算子が作用する点 $\vec{\tau}$ におけるスピン・ネットワークのリンクの正接である．ところが F_{ab} は ab に関して反対称である一方，$\dot{\gamma}^a\dot{\gamma}^b$ は対称なので，この表現は消える．他方で，結節点に作用すると，$\dot{\gamma}^a_1$ と $\dot{\gamma}^a_2$ を結節点から発する 2 つの異なるリンクの正接として，2 つの汎関数微分は $F_{ab}\dot{\gamma}^a_1\dot{\gamma}^b_2$ という類の混ざった項を与える．これらの項は消えなくとも良い．よって，演算子は結節点上でのみ非自明な作用を持つ．

7.1.1　有限性

一般に，極限 (7.7) は存在しない．一般に場の量子論において演算子積はよく定義されないので，これは驚くにあたらない：それは正則化された形で定義できるものの，このとき正則化因子 (regulator) ϵ を取り除くと，発散が発達する．しかしながら大いなる驚きは，状態の部分空間——微分同相不変な状態——の上で極限 (7.7) が存在**する**ことである．これらは物理的な状態なので，これはまさに我々が必要とすることであり，理

論を定義するのに充分である．ここでは微分同相不変性と場の量子論的な短距離の振舞いの密接な協調が上手くいき始める：我々は微分同相不変な QFT の核心に居合わせている．

微分同相不変な状態上で H を計算するために，それらは双対空間 $\mathcal{S}'$ にあることを思い出そう．これまで，我々はスピン・ネットワーク状態，あるいは線形性により，$\mathcal{S}$ の上でのみ H を考えてきた．$\mathcal{S}'$ 上の H の作用は双対性

$$(H\Phi)(\Psi) = (\Phi)(H\Psi) \tag{7.11}$$

により直ちに定義できる．(正確を期すには，左辺の演算子を $H^\dagger$ と呼ばねばならないが，簡単のためそうしない．) 等価的に，全てのスピン・ネットワーク状態に対して

$$(H\Phi)(|\mathrm{S}\rangle) = (\Phi)(H\,|\mathrm{S}\rangle). \tag{7.12}$$

重要な点は，$\mathcal{S}'$ 上の正則化された演算子を考え，そこで極限をとりたいということである．そこで，単に式 (7.7) を最後の式に代入して

$$(H\Phi)(|\mathrm{S}\rangle) = (\Phi)\left(\lim_{\epsilon\to 0} H_\epsilon\,|\mathrm{S}\rangle\right) \tag{7.13}$$

と書く代わりに，

$$(H\Phi)(|\mathrm{S}\rangle) = \lim_{\epsilon\to 0} \Phi(H_\epsilon\,|\mathrm{S}\rangle) \tag{7.14}$$

によって $\mathcal{S}'$ 上のハミルトニアン演算子を**定義する**．極限は今や (Hilbert 空間のベクトルの系列の極限ではなく) 数量の系列の極限であることに注意せよ．ここで $\Phi \in \mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ ならば，すなわち Φ が微分同相不変な状態ならば，極限が存在する (すなわち極限は有限である) ことを示す．

鍵はこれが以下の重大な洞察であることを理解することである．スピン・ネットワーク S が与えられたとき，丸括弧の中の演算子は状態 $|\mathrm{S}\rangle$ を 2 つの方法で修正する：そのグラフ Γ とその色付けとを変えることによって．体積演算子はグラフを変えない．グラフは 2 つの演算子 $h_{\gamma_{x_n},l}$ と $h_{\alpha_{x_n},l,l'}$ によって修正される．1 つ目は Γ のリンク l に長さ ϵ の経路を重ねる (superimpose)．2 つ目は図 32 のように，Γ のリンク l' と l'' に沿う ϵ に比例する長さの 2 辺と，Γ 上にない第の 3 辺を持つ三角形を重ねる．根本的な洞察は，充分小さな ϵ に対して，演算子における ϵ を変えることは結果として得られる状態を変える**ものの，その微分同相写像の同値類を変えない**ということである．(これが起きるための最大の ϵ_m は，付け加えられた経路が S の他の結節点またはリンクと交差するか繋がるような ϵ の値である．) これはほとんど自明である：より小さな三角形を加えることは，より大きな三角形を加え，次いでそれを微分同相写像により縮小することと等価である．したがって，$\epsilon < \epsilon_m$ に対して，丸括弧内の項は ϵ がさらに小さくなるとき，同じ微分同相写像の同値類に留まる．ところが Φ は微分同相写像の下で不変であり，それ故，極限の引数の ϵ 依存性は $\epsilon < \epsilon_m$ に対して**定数**になる!!

したがって極限 (7.14) の値は単に

$$(H\Phi)(|\mathrm{S}\rangle) = \lim_{\epsilon\to 0} \Phi(H_\epsilon\,|\mathrm{S}\rangle) = \Phi(H\,|\mathrm{S}\rangle) \tag{7.15}$$

で与えられ，ここに

$$H\,|\mathrm{S}\rangle = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\sum_{n\in\mathrm{S}} N_n \sum_{l,l',l''} \epsilon_{ll'l''}\mathrm{tr}\left(h_{\gamma^{-1}_{x_n,l}} h_{\alpha_{x_n,l',l''}}[\mathbf{V}(\mathcal{R}_n), h_{\gamma_{x_n,l}}]\right)|\mathrm{S}\rangle \tag{7.16}$$

であり，また正則化する経路のサイズ ϵ は単に，加えられる弧が S の他の結節点を覆う (run over) か，他のリンクと繋がらないよう充分小さくとられる．極限の有限性はこのとき直接的である．

議論：正則化と背景独立性の関係　この結果は非常に重要であり，コメントに値する．1 つ目の重要な点は，座標空間 $\vec{x}$ が全く物理的重要性を持たないことである．事物の物理的な位置は互いに相対的な位置に過ぎず，座標 $\vec{x}$ に対する位置ではない．理論の微分同相不変な水準はこの本質的な一般相対論的な要求を実装している．2 つ目の点は理論の励起が量子化されていることである．これは短距離の離散性，あるいは状態の離散的な組合せ的な構造に反映される．これは重力場の量子力学的な性質の結果である．これら 2 つの特徴が組合さると，もはや発散する短距離の極限の余地 (room) は文字通りない．極限 $\epsilon \to 0$ は小さな座用距離の極限である：単に Planck 尺度より下には何もないので，正則化因子を小さくすることは Planck 尺度より下では何も変えられないという理由で，極限は有限になる．スピン・ネットワークの他の部分と繋がるか交差するのに必要なサイズよりも一度，正則化の (regulating) 小さなループ $\alpha_{x,l',l''}$ が小さくなると，そのサイズのあらゆるさらなる減少はゲージであって，物理ではない．これが微分同相不変性が場の量子論における紫外の病理を完全に解消する機構である．

最後の 1 つの専門的事項　与えられた定義では，座標 x への残った (離散的な) 依存性がある．異なる 2 つの座標系において弧はもとのグラフのリンクと異なった仕方で繋がり得る．例えば，第 4 のリンク l''' は弧の“上側 (over)”または“下側 (under)”を通り得る．もし結節点が n 価ならば，可能な代わりの方法は，$n-2$ 個の孔 (punctures) を持つ球面上の北極から南極に至る (交差しない) 線のホモトピー類でラベルされる．完全に微分同相不変な定義を得るには，したがって N_n 通りの代わりの方法にわたる和をとらねばならない．他方，3 本のリンクが同一平面にあり，ϵ の全ての値に対して弧がリンクと交差する座標系を，我々は整合的に除外できる．これをできるのは，拡大微分同相写像を用いているからである．こうして，r 番目のホモトピー類の表現を $\alpha^r_{x,l',l''},\ r=1,\cdots,N_n$ と呼ぶと，

$$(H\Phi)(|\mathrm{S}\rangle) = \Phi(H\,|\mathrm{S}\rangle) \tag{7.17}$$

に達し，ここに

$$H\,|\mathrm{S}\rangle = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar} \sum_{\substack{n\in \mathrm{S} \\ l,l',l'',r}} N_n \epsilon_{ll'l''} \mathrm{tr}\left(h_{\gamma^{-1}_{x_n,l}} h_{\alpha^r_{x_n,l',l''}} [\mathbf{V}(\mathcal{R}_n), h_{\gamma_{x_n,l}}] \right) |\mathrm{S}\rangle\,. \tag{7.18}$$

これが演算子の最終的な形である．

7.1.2　行列要素

結果として得られる H の s-結び目状態への作用は簡単に導き説明できる．(i) 作用は状態の各結節点 n に 1 つずつの項の和を与える．(ii) 各結節点に対して，H は結節点に達するリンクの各 3 つ組に 1 項ずつで，各 3 つ組に関して，3 本のリンク l, l', l'' の全ての置換に 1 項ずつの，さらなる項の和を与える．これらの項の各々は以下のように s-結び目状態に作用する (図 33 を見よ)．(iii) それはリンク l' と l'' に沿って n から有限距離にある，2 つの新しい結節点 n' と n'' を生じる．(iv) それは (他のあらゆる結節点と繋がることなく) n' と n'' を結ぶ，スピン 1/2 の新しいリンクを生じる．この新たなリンクは“弧”と呼ばれる．(v) それは n と n' を結ぶリンクの色付け j'，および n と n'' を結ぶリンクの色付け j'' を変える．これらは 1/2 だけ増加または減少したリンク l' と l'' の色であることが判明する．(vi) それは結節点 n における結節因子を変える；新たな結節因子は隣接するリンクの新たな色付けに対応する表現間にある．

注解　再び，ハミルトニアン演算子のこの作用の起源は，ハミルトニアン拘束の単純な形 (6.3) に基づいて容易に理解できる．2 つの汎関数微分はスピン・ネットワークを“掴み (grasp)”，また以前に説明したように，捕捉 (grasp) は結節点の近傍を除いて消える．曲率の項 F_{ab} は本質的に無限小のホロノミーである．したがって，それは結節点に隣接した小さなループを生じる．このループは 2 本の掴まれたリンクの面内になければならず，また付け加えられた弧によって定義される三角形に同定できる．

修正された結節点において，Clebsch–Gordan 条件は常に成り立つことに注意せよ．このことは，修正された結節因子がリカップリング理論から得られる事実から直ちに帰結する：結節因子に関連した Clebsch–Gordan 条件を満たさない行列要素は消えることが判明する．

(iii),(iv),(v) で説明した作用によって結節点 n の周りに作用する演算子を $D_{n,l',l'',r,\pm,\pm}$ と呼ぶ．これは図

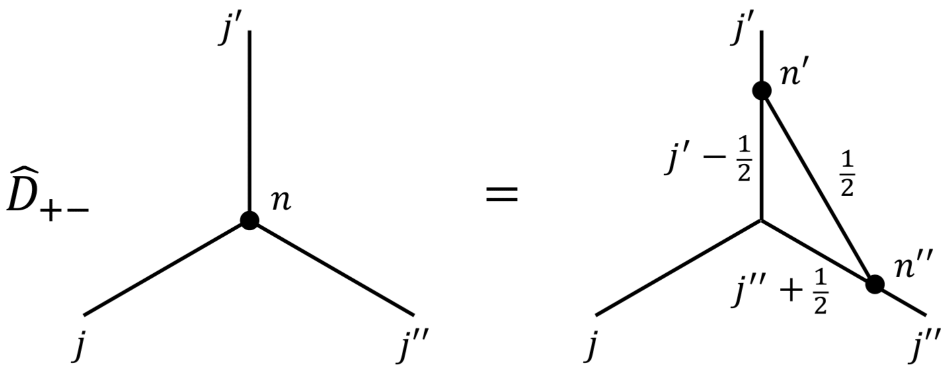


図 33　$D_{n,l',l'',\epsilon',\epsilon''}$ の作用

33 に示されている．このとき

$$H\,|\mathrm{S}\rangle=\sum_{n\in\mathrm{S}}N_n\sum_{l,l',l'',r}\sum_{\epsilon',\epsilon''=\pm}H_{n,l',l'',\epsilon',\epsilon''}D_{n,l',l'',\epsilon',\epsilon''}\,|\mathrm{S}\rangle\,. \tag{7.19}$$

演算子 $H_{n,l',l'',\epsilon',\epsilon''}$ は有限の行列として，結節点 n の結節因子の空間に作用する．その行列要素の明示的な計算は $SU(2)$ 表現理論の直接的な問題である．それは，単純な結節点に対してその行列要素を明示的に与えてある， [208] において詳しく議論されている．

演算子 H は $\mathcal{S}'$ 上で定義され，見てきたように，$\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ に制限されたとき有限である．しかしながら演算子は $\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ を不変に留めないことに注意せよ．一般に，状態 $H\,|s\rangle$ は微分同相不変な状態ではない．これはその N 依存性による．これを理解するために，その一般的なスピン・ネットワーク状態への作用

$$\langle s|H|\mathrm{S}\rangle=\sum_{n\in\mathrm{S}}N_n\sum_{l,l',l'',r}\sum_{\epsilon',\epsilon''=\pm}\langle s|H_{n,l',l'',\epsilon',\epsilon''}D_{n,l',l'',\epsilon',\epsilon''}|\mathrm{S}\rangle\,. \tag{7.20}$$

を計算する．右辺において，量 N_n はスピン・ネットワーク S の結節点 n が位置する点 $\vec{x}_n$ における $N(\vec{x})$ の値である．表現の残りは微分同相不変であるものの，$|\mathrm{S}\rangle$ に対する微分同相写像を施すと，それらの値は明らかに変化する．これはもちろん期待されることである，と言うのも，古典的な量 H そのものは微分同相不変でないからである．したがって，対応する量子力学的な演算子が微分同相不変になり，また $\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ を保持する理由はない．この演算子が定義する理論はそれにも関わらず微分同相不変である，と言うのも，演算子は Wheeler–DeWitt 方程式 $H\Psi=0$ を通じて現れるからである．この方程式は $\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ 上でよく定義されている．その解は H の核にある，(場合によっては一般化された) $\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ における状態である．H は $\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ 全体で有限なので，これはよく定義されている．これは H が微分同相不変でないものの，方程式 $H=0$ は解の微分同相不変な同値類に対する方程式として完全に意味を成す古典論と，完全にアナロガスである．($\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ をそれ自身に移すハミルトニアン演算子のバージョンをもたらす代わりの戦略が，最近 [209] において Thiemann によって探求されている．)

$|s\rangle$ の定義を思い出すと，スピン・ネットワーク状態間の H の行列要素

$$\langle\mathrm{S}'|H|\mathrm{S}\rangle=\sum_{n\in\mathrm{S}}N_n\sum_{|\Psi\rangle=U_\phi|\mathrm{S}'\rangle}\sum_{l,l',l''}\sum_{\epsilon',\epsilon''=\pm}\langle\Psi|H_{n,l',l'',\epsilon',\epsilon''}D_{n,l',l'',\epsilon',\epsilon''}|\mathrm{S}\rangle \tag{7.21}$$

を書くことができる．演算子 H は対称的でない．このことは例えば，それが弧を加えるものの弧を取り除かないという事実から明らかである．その共役 $H^\dagger$ は単にその行列要素の転置の複素共役

$$\langle\mathrm{S}'|H^\dagger|\mathrm{S}\rangle=\overline{\langle\mathrm{S}|H|\mathrm{S}'\rangle} \tag{7.22}$$

で定義でき，対称な演算子は

$$H_s = \frac{1}{2}(H + H^\dagger) \tag{7.23}$$

で定義される．これは弧を付け加えも取り除きもする演算子である．この演算子が古典的な極限でよりよく振舞うと期待するのは理に適っている．そこで理論を定義する基本的な演算子として，この演算子を採る．

7.1.3　変種

ハミルトニアン演算子に関する衝撃的な事実は，完全にそれを定義できることである．しかしいかにして，それは一意的となるのか？ 考え得る演算子の数々の可能な変種 (variants) がある．これらは量子化の曖昧さと見なせる，すなわち，それらは量子論において異なるダイナミクスを定義するものの，いずれも少なくとも一見すると，同じ古典的極限を持つ．今のところ，これらは本当に全て有効なのか，あるいはそれらを選別する物理的または数学的な制約があるのかは，はっきりしない．

より高い j　表現 j における接続のホロノミーを表す行列を展開すると，式 (7.2) におけるそれとアナロガスな表現を得る．したがって，あらゆる任意の表現 j のホロノミーを用いて，ハミルトニアンにおける項 F と A を正則化できる．すなわち，重要でない数係数を除き，

$$H = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^3}\int N\mathrm{tr}\left(h^{(j)}_{\gamma^{-1}_{x,w}} h^{(j)}_{\alpha_x,uv}\{\mathbf{V}, h^{(j)}_{\gamma_x,w}\}\right)\mathrm{d}^3x \tag{7.24}$$

を書くことができ，ここに $h^{(j)} = R^{(j)}(h)$．これは古典的な極限に影響しない．しかしながら，対応する量子力学的な演算子

$$H^{(j)} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\lim_{\epsilon\to 0}\sum_m N_m\mathrm{tr}\left(h^{(j)}_{\gamma^{-1}_{x_m,w}} h^{(j)}_{\alpha_{x_m},uv}[\mathbf{V}(\mathcal{R}_m), h^{(j)}_{\gamma_{x_m},w}]\right)\mathrm{d}^3x \tag{7.25}$$

は演算子 (7.6) と異なる．このことは，付け加わる弧がスピン 1/2 ではなくスピン j を持つことに気付けば容易に分かる．一般に，あらゆる任意の線形結合

$$\tilde{H} = \sum_j c_j H^{(j)} \tag{7.26}$$

は，正しい古典的極限を持つハミルトニアン演算子を定義する．整合的な理論では係数 c_j はゼロと異ならねばならないという示唆があり，それは例えば [210] で議論されている．同論文では，演算子 $H^{(j)}$ の行列要素が計算されており，係数 c_j を定める手がかりに関するいくらかの議論が論じられている．第 8 章で見るように，この量子化の曖昧さはループ量子宇宙論において役割を演じる．

H_s か H か？　対称な演算子 H_s と対称でない演算子 H_s のいずれも量子ダイナミクスを定義する．対称な方を採ることに賛成する議論がある一方で，対称でない方を採ることに賛成する議論もある [20]．

他の正則化の (regularizing) ループ　正則化にあたり $\alpha_{x,l',l''}$ および $\gamma_{x,l}$ と異なるループを選び得る．微分同相不変性と，結果として得られる演算子が有限で消えない条件により，自由度は強力に制限される．しかし他の選択も可能かもしれない．

順序 (Ordering)　体積とホロノミー演算子の間で異なる順序を選び得る．

その他？　より一般に，今のところ一意性定理は存在しない．

ハミルトニアン演算子の定義におけるこの自由度は問題ではなく，利点である．よく理解された低エネルギーの極限を持つ，量子重力の完璧で完全に整合的な理論は，今のところ存在しない．1 つより多くがあるこ

とは，差し当たり，我々の心配の中でまさに最小のものである．著しい結果は有限で興味あるハミルトニアン演算子の存在である．その定義において一定の残された許容範囲がある事実は，非常に有用であると判明するかもしれない．まだ考慮されていない何らかの内的な整合性の要求によって，あるいは正しい古典的極限の要求によって，“正しい”変種を選び得る．もしこれらの条件が不充分と判明したならば，我々は単に同じ古典的極限を持つ等価でない量子論を得るだけである．物理的に正しいものは実験によって決定される必要があるだろう．既にその段階に達していたいものだ．

7.2 物質：運動学

20 世紀の間における物質場の数学的記述の発展はゆっくりと，重力場の数学的記述の発展と収斂した．いずれの場合も，ファイバー・バンドル，バンドルの断面 (sections) や自己同型といった微分幾何学的な概念が，古典場の記述において役割を演じる．例えば Einstein–Yang–Mills 結合系を採り，$SO(3,1)$ 接続を用いて重力場を記述すると，2 つの場，ゲージ場と重力場の構造は互いにほとんど違いがない．

実に，2.3.2 節で論じたように，物質と重力 (時空) の記述の区別は重大でない : それは大いに慣習的である．重力場は本質的に他の物質場と異ならない．固定された背景時空上の理論と重大に異なるのは，完全な結合した重力 + 物質の理論である．力学的な (dynamical) 重力場が固定された背景で近似されないときは，完全な理論は一般共変であり，比喩における動物とクジラのように，物理的な場は“互いの上に”のみ住んでいる．

対応して，重力場に対して上で開発した手法は自然に他の場に拡張される．純粋な量子重力の理論と，量子重力と物質の理論は，互いにさほど異ならない．2 つ目は付加的な自由度を持つに過ぎない．古典的な数学的構造の類似性と無矛盾性は，これらの付加的な自由度への量子論の拡張を非常に自然なものにする．

7.2.1 Yang–Mills

前章で説明した理論の最も容易な拡張は Yang–Mills 場である．とりわけ標準模型を定義する群 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ のような，コンパクト Yang–Mills 群を $G_{\rm YM}$ とする．この群に対する 3 次元の Yang–Mills 接続を $A_{\rm YM}$ とし，重力的な接続を A とする．2 つの 3 次元の接続 A (重力的) と $A_{\rm YM}$ (Yang–Mills) は合わせて，群 $G = SU(2) \times G_{\rm YM}$ に対する単一の接続 $\mathcal{A} = (A, A_{\rm YM})$ と考えることができる．第 6 章における $\mathcal{K}, \mathcal{K}_0$ および $\mathcal{K}_{\rm diff}$ の構成は困難なく，この接続へと直ちに拡張される．

Yang–Mills 場のホロノミーはちょうど重力的なホロノミーのように，$\mathcal{K}$ 上の演算子として定義できる．Yang–Mills 電場の面積分はちょうど重力的な場 E に対するように定義できる．

GR+Yang–Mills の微分同相不変な量子状態はこのとき，リンク上の群 G の既約表現と，結節点上の対応する結節因子を担う，抽象的な結び目のある (knotted) グラフでラベルされる，s-結び目状態で与えられる．G は直積なので，その既約たちは単に $SU(2)$ と $G_{\rm YM}$ の既約たちの積で与えられる．言い換えると，各リンクはスピン j_l と $G_{\rm YM}$ の既約表現でラベルされる．

いかにして量子論が GR における相対的な位置付けの特性を実現するかに注意せよ : Yang–Mills 場の位置は，スピン・ネットワークの重力的な部分によって定義される，時空の量子状態に対してよく定義されており，あるいは等価的に，逆も然り．

微分同相不変性がなければ，上記の構成は Yang–Mills 場の賢明な量子状態空間をもたらさないことにも注意せよ，と言うのも，それは不可分な Hilbert 空間をもたらすからである．

7.2.2　フェルミオン

$\eta(x)$ を Grassmann 値のフェルミオン場とする［Grassman は誤記か］．それは Yang–Mills 群 G_{YM} の表現 k と，$SU(2)$ の基本表現の下で変換する．量子論では密度化した場 $\xi \equiv \sqrt{|\det E|}\eta$ を基本的な場の変数として採る方が便利である．Grassmann 値の場 ξ とその複素共役は，(有限次元の) 超曲面 S において値をとる．S にわたる積分は Berezin の記号的な積分 $\mathrm{d}\xi$ で定義される．

接続とフェルミオン場の円筒汎関数 $\Psi[A,\psi]$ を以下のように定義する．［式 (7.29) と比べると，引数 ψ は ξ を指すと推察される．］(i) 有限の本数 L の経路 γ_l の集まり Γ，(ii) 有限の個数 N の点 x_n，および (iii) L 個の群の要素と N 個の Grassmann 変数の関数 f が与えられたとき，円筒汎関数は

$$\Psi_{\Gamma,f}[A,\psi] = f(U(A,\gamma_1),\cdots,U(A,\gamma_L),\xi(x_1),\cdots,\xi(x_N)) \tag{7.27}$$

で定義される［式 (6.6) の一般化］．Grassmann 変数は反交換するので，円筒汎関数は各点 n におけるフェルミオン場 (の成分) の各々について，高々 1 次 (linear) にしかなり得ない．

スカラー積はこれらの汎関数の空間上で以下のように定義される．同じ Γ で定義される 2 つの円筒汎関数が与えられたとき，

$$(\Psi_{\Gamma,f},\Psi_{\Gamma,g}) \equiv \int_{G^L}\mathrm{d}U_L\int_{S^N}\mathrm{d}\xi_n\,\overline{g(U_1,\cdots,U_N,\xi_1,\cdots,\xi_N)}f(U_1,\cdots,U_N,\xi_1,\cdots,\xi_N) \tag{7.28}$$

を定義する［式 (6.7) の一般化］．あらゆる 2 つの円筒汎関数への，このスカラー積の拡張はこのとき，純粋に重力的な場合と完全にアナロガスである．

結節点の領域におけるフェルミオン数 (fermion number) を決める，各結節点 n における ξ に関する単項式の次数 F_n を固定することで，基底状態を容易に構成できる．

フェルミオンが存在しない場合，ホロノミーの添字をそれら自身の間で結節因子と縮約することで，ゲージ不変な汎関数を構成できる．フェルミオンが存在する場合，$SU(2)$ および Yang–Mills の添字をフェルミオンの添字と縮約することもできる．言い換えると，フェルミオンはグラフ Γ の結節点上に住んでおり，重力と Yang–Mills の束 (flux) の線はフェルミオンで止まり得る．これが起きるためには，もちろん，一般化された Clebsch–Gordan 条件が満たされねばならない．例えば，フェルミオンは $SU(2)$ の自明な表現におけるリンクの開いた (open) 端点を占めることはできない，と言うのも，その $SU(2)$ 添字を潰せない (cannot be saturated) からである．この物理的な描像は，例えば，正準格子ゲージ理論においてよく知られている．実際，各 Hilbert 部分空間 $\mathcal{K}_\Gamma$ は，格子 Γ 上で定義されたフェルミオンを持つ格子 Yang–Mills 理論の Hilbert 空間と同一視できる．我々は Faraday のオリジナルの直観に戻ってきた：力線は電荷を帯びた粒子から発し得る．

note　1.2.1 節も見よ．結局，スピン・ネットワークの構造 (結節点とリンクの各々) に荷電粒子と力線がそのまま“乗る”とまとめられる．

7.2.3　スカラー

標準模型の現在の定式化は，これまで観測されていない一定数のスカラー場も必要とする．これらの場——Higgs 場——が実際に自然に存在し観測可能であるのか，あるいはそれらは我々がまだ完全に理解していない自然の何らかの側面に対する，現象論的な記述を表しているのかは，まだ明らかでない．Yang–Mills 場とフェルミオンよりも不自然な方法ではあるが，LQG はスカラー場を含めることができる．

$\phi(x)$ をゲージ群 G_{YM} の表現 k において変換し，したがって対応するベクトル空間 $\mathcal{H}_k$ の値をとる，(常に実に採ることができる) スカラー場の適当な多重項とする．

困難のもとは $\mathcal{H}_k$ が非コンパクトなことである――それは自然な不変測度の下で無限の体積を持つ．これは理論のスカラー積の定義をより難しくする (なぜなら部分グラフ (subgraph) に関する Hilbert 空間が，グラフに関する Hilbert 空間の部分空間ではないからである)．この困難を脱する 1 つの方法は以下である．k を G_{YM} の随伴表現と仮定する．次いで場 $\phi(x)$ を指数化して (exponentiate)，$U(x)=\exp\{\phi(x)\}$ を定義できる．場 $U(x)$ はこのときコンパクトであり Haar 不変測度を担う，G_{YM} における値をとる．

接続，フェルミオン場，およびスカラー場の円筒汎関数 $\Psi[A,\psi,\phi]$ を以下のように定義する．(i) 有限の本数 L の経路 γ_l の集まり Γ，(ii) 有限の個数 N の点 x_n，および (iii) L 個の群の要素，N 個の Grassmann 変数と N 個の他の群の要素に対する関数 f が与えられたとき，円筒汎関数は

$$\Psi_{\Gamma,f}[A,\psi,\phi]=f(U(A,\gamma_1),\cdots,U(A,\gamma_L),\xi(x_1),\cdots,\xi(x_N),\mathrm{e}^{\phi(x_1)},\cdots,\mathrm{e}^{\phi(x_N)}) \tag{7.29}$$

で定義される．スカラー積はこれらの汎関数の空間上で以下のように定義される．同じ Γ で定義される 2 つの円筒汎関数が与えられたとき，

$$\begin{aligned}(\Psi_{\Gamma,f},\Psi_{\Gamma,g})\equiv\int_{G^L}\mathrm{d}U_L\int_{S^N}\mathrm{d}\xi_n\int_{G^N}\mathrm{d}U'_n\,&\overline{f(U_1,\cdots,U_N,\xi_1,\cdots,\xi_N,U'_1,\cdots,U'_N)}\\ &\times g(U_1,\cdots,U_N,\xi_1,\cdots,\xi_N,U'_1,\cdots,U'_N)\end{aligned} \tag{7.30}$$

を定義し，いつものように，これをあらゆるグラフへ拡張する．

7.2.4 空間と物質の量子状態

$\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ における状態 $|s\rangle$ は以下の量子数でラベルできる．

- リンク l と結節点 n を持つ抽象的な結び目のある (knotted) グラフ Γ．
- 各リンク l に関するスピン j_l．
- 各リンク l に関する，Yang–Mills 群 G_{YM} の既約表現 k_l．
- 各結節点に関する整数 F_n．
- 各結節点 n に関する，Yang–Mills 群 G_{YM} の既約表現 S_n．
- 各結節点 n に関する $SU(2)$ 結節因子 i_n．
- 各結節点 n に関する G_{YM} 結節因子 w_n．

こうして

$$|s\rangle=|\Gamma,j_l,k_l,F_n,S_n,i_n,w_n\rangle \tag{7.31}$$

と書ける．この状態は以下のような単純な解釈を持つ，系の量子力学的な励起を表す．体積を持ち，フェルミオンと Higgs スカラーが位置付けられる N 個の領域 n がある．それらは面積を持ち，(電気的な ; electric) ゲージ場の束 (flux) によって貫かれる L 個の面 l で分離される．量子数は表 4 のように観測可能量と関係する．これは重力 + 物質の結合系の運動学の定義を完成させる．

表 4　重力と物質に対するスピン・ネットワーク状態の量子数

量子数	物理量
Γ	領域間の隣接性
i_n	結節点 n の体積
j_l	面 l の面積
F_n	結節点 n のフェルミオン数 (number of fermions)
S_n	結節点 n のスカラー数 (number of scalars)
w_n	結節点 n での場の強度
k_l	面 l を横切る電気的な束 (electric flux)

7.3　物質：ダイナミクスと有限性

重力 + 物質の結合系のダイナミクスは，単に重力的な相対論的ハミルトニアンに，物質のダイナミクスを定義する項を付け加えることで定義される．説明した場のハミルトニアンは

$$H = H_{\mathrm{Einstein}} + H_{\mathrm{Yang\text{–}Mills}} + H_{\mathrm{Dirac}} + H_{\mathrm{Higgs}} \tag{7.32}$$

で与えられる．H_{Einstein} は前の章で説明した重力のハミルトニアンである．他の項は

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{Yang\text{–}Mills}} =& \frac{1}{2g_{\mathrm{YM}}^2 e^3} \mathrm{tr}[E_a E_b]\,\mathrm{Tr}[\mathcal{E}^a\mathcal{E}^b + B^a B^b], \\ H_{\mathrm{Dirac}} =& \frac{1}{2e} E_i^a \left(\mathrm{i}\pi\tau^i \mathcal{D}_a\xi + \mathcal{D}_a(\pi\tau^i\xi) + \frac{\mathrm{i}}{2} K_a^i \pi\xi + c.c. \right), \\ H_{\mathrm{Higgs}} =& \frac{1}{2e}\left(p^2 + \mathrm{tr}[E^a E^b]\,\mathrm{Tr}[(\mathcal{D}_a\phi)(\mathcal{D}_b\phi)] + e^2 V(\phi^2)\right). \end{aligned} \tag{7.33}$$

ここに：π はフェルミオン場の運動量共役；p はスカラー場の運動量共役；$\mathcal{E}$ は Yang–Mills ポテンシャルの運動量共役 (電場)；B は Yang–Mills ポテンシャルの曲率 (磁場)；$\mathcal{D}$ は $SU(2)\times G_{\mathrm{YM}}$ 共変微分；tr は $SU(2)$ Lie 代数のトレース，また Tr は G_{YM} の Lie 代数のトレース；$e \equiv \sqrt{|\det E|}$；V は Higgs ポテンシャル；$p^2 = \mathrm{Tr}[pp]$ および $\phi^2 = \mathrm{Tr}[\phi\phi]$；また g_{YM} は Yang–Mills 結合定数である．これらの表現の導出と議論については， [211] を見よ．

量子ハミルトニアンを定義するには，式 (7.33) における表現を正則化し，$\mathcal{K}$ 上でよく定義された演算子で表さねばならない．これは 7.1 節で重力的な量子ハミルトニアンに対して用いたのと同じ戦略に従って行える．ここでは詳しい構成は示さず，それについては読者に Thiemann の著作 [211] を紹介する．

この構成の本質的な結果は全ハミルトニアン (7.32) が，重力と物質の Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ の上でよく定義された演算子として構成できることである．演算子は重力的な部分と同様に結節点に作用するものの，その作用は純粋な重力の演算子よりも複雑であり，標準模型と一般相対性理論の全ダイナミクスをコードしている．

全ハミルトニアンが有限であると判明する事実は極めて著しい．それはおそらく LQG が基礎を置くところの，背景独立な量子化の戦略の主要な成果である．

この有限性の内在する理由の説明について， [211] および，とりわけ [11] における Thiemann による見事な説明を読むことを読者に勧める．通常の場の量子論における紫外発散がいかにして，量子化された離散的な

量子幾何の本性を無視した近似の帰結として直接解釈し得るのかを，Thiemann は説明している．例えば，演算子 $\frac{1}{2\beta^2 e^3}\mathrm{tr}[E_a E_b]\,\mathrm{Tr}[\mathcal{E}^a\mathcal{E}^b]$，Yang–Mills ハミルトニアンの運動項 (kinetic term) がいかにして，E を演算子として扱う限りはよく定義されるのに対し，E を滑らかな背景場で置き換えると直ちに無限大になるのかを，Thiemann は示している．

7.4　ループ量子重力

$\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ 上で有限な，重力と物質に対する演算子 H の定義で以って，重力の量子論の形式的な定義は完成する．理論は有限であり，空間の Planck 尺度の構造に対する納得のいく直観的な記述を与え，面積と体積の固有値のような明確な予言を持ち，素朴な $\hbar \to 0$ の極限で古典的な GR に帰着する．理論の遷移振幅は

$$W(s,s') = \langle s|P|s'\rangle \tag{7.34}$$

で定義され，ここに s と s' は s-結び目状態であり，P は方程式 $H\Psi = 0$ の解空間上への射影子である．量 $W(s,s')$ は s' によって定まる物質を伴う幾何学が観測されたときに，s-結び目状態 s によって定まる，物質を伴う離散化された幾何学を観測する確率振幅と解釈される．

2 つの非連結な面によって限られた時空の領域を考えれば，微分同相不変な境界空間は $\mathsf{K}_{\mathrm{diff}} = \mathcal{K}^*_{\mathrm{diff}} \otimes \mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ であり，共変な真空状態を用いて式 (7.34) を

$$\langle 0|s_{\mathrm{out}}, s_{\mathrm{in}}\rangle = \langle s_{\mathrm{out}}|P|s_{\mathrm{in}}\rangle \tag{7.35}$$

と書き直すことができ，ここに $|s_{\mathrm{out}}, s_{\mathrm{in}}\rangle = \langle s_{\mathrm{out}}| \otimes |s_{\mathrm{in}}\rangle \in \mathsf{K}_{\mathrm{diff}}$．

より一般に，3 次元の面 Σ で限られた時空の有限領域を考えることができる．もし s が Σ 上の重力場と物質場の測定結果を表すならば，このとき

$$W(s) = \langle 0|s\rangle \tag{7.36}$$

は状態 s の測定の相関確率振幅を与える．これはまた空の (empty) 状態から完全な s への遷移振幅と見ることもでき，よって

$$W(s) = \langle \emptyset|P|s\rangle\,, \tag{7.37}$$

あるいは K において

$$|0\rangle = P\,|\emptyset\rangle\,. \tag{7.38}$$

これがループ量子重力である．

成すべき多くのことが残っている．以下は扱ってこなかったいくつかの問題である．

(i) **Lorentz 的な理論**　これまで，私は Euclid 的な理論だけを扱ってきた．4.2.2 節で既に言及したように，ハミルトニアンの第 2 項を加えるだけで，Lorentz 的な理論は Euclid 的な理論と同じ運動学を用いて表せる．第 2 項の量子化はここで論じない．これは [20] で詳細に成されている．代わりに，量子化は複素接続を用いて定義されねばならないものの，私の知る限り複素接続に対して，完全な演算子代数を持つ完全な量子状態空間はまだ構成されていない．他の代わりの方法は，平坦な空間の QFT において行えるように，Euclid 的な理論の振幅から Lorentz 的な理論の振幅を導くことである．言及したように，平坦な空間の技法の素朴な再利用は量子重力において有効でないものの，それの適切な拡張は上手くいくかもしれない．

(ii) **遷移振幅**　射影子 P の行列要素は計算が容易でない．

(iii) **散乱**　重力子–重力子散乱のような粒子の観測量に，遷移振幅 $W(s, s')$ を関係付ける一般的な技法を開発せねばならない．

(iv) **古典的極限**　古典的な GR が LQG から復元できることを，あからさまに証明できるか？

(v) **ダイナミクスの形**　ハミルトニアン拘束の提案された形は正しいか，あるいは修正されねばならないか？

(vi) **物理的な帰結**　ブラックホールの熱力学や初期宇宙論のような，量子重力が重要になると期待される標準的な物理的問題について，理論は何を言うか？

(vii) **観測可能な予言**　何かあるか？

これらの問題のいくつかについて，多くのことが知られている．それらの一部を以下で論じる．特に，第 8 章は (vi) と (v) を扱う；第 9 章は (i),(ii),(iii) および (v) を扱う．

とは言え，その帰結とその物理的な正しさがどうであれ，これまで発展させてきた理論は重力場と物質場に対する，有限かつ整合的で一般共変な，また背景独立な場の量子論を与える．そこでは，GR と QFT の核心的な物理的直観が見事に融合する．そのような理論を見つけることが，我々の主要な目標であった．

7.4.1　* 変種

上で説明した LQG 理論は理論の標準的なバージョンである．文献で考えられてきた数々の可能な変種 (variants) がある．

H の異なる正則化　この可能性は上記の 7.1 節で説明した．

q-変形 (q-deformed) スピン・ネットワーク　興味ある可能性は量子論において，群 $SU(2)$ を量子群 $SU(2)_q$ で置き換え，N を大きな数として $q^N = 1$ で与えられるように q を選ぶことである．$SU(2)_q$ の表現でラベルされる q-変形スピン・ネットワークを定義し，理論の残りを上のように構築することが可能である．これはいくつかの理由で興味ある可能性である．第 9 章で研究するスピン・フォーム・モデルのいくつかは量子群を用いて定義され，その状態は q-変形スピン・ネットワークである．q-変形スピン・ネットワークの利用は宇宙定数 λ と自然に関係していることを，スピン・フォーム・モデルは示す．量子群 $SU(2)_q$ は N とともに増大する，有限の数の既約表現を持つ．このことは面積の量子が，N で決まり，宇宙定数で決まる (大きな) 長さに関係する，最大値を持つことを示唆する．最後に，N は赤外発散のあらゆる事態を解消するように見える，自然な赤外切断のように機能する．q-変形 LQG は文献において研究されてきたものの，q-変形スピン・ネットワークを用いた LQG の系統的な構成はまだない．

面積演算子の異なる順序　真空エネルギーが $\frac{1}{2}\hbar\omega$ の代わりにゼロになるようなハミルトニアンの順序を選んで，調和振動子を量子化できる．同様に，面積演算子の異なる順序を選び，異なるスペクトルを得ることができる．本書で，またほとんどの文献で用いられている順序は，Casimir 演算子にとって自然なものであるが，代わりの方法が考えられており，それはいくつかの興味ある効果を生じる．特に，等間隔のスペクトルが得られるように演算子を並べることが可能である．これは以下の 8.2.4 節で研究する Bekenstein–Mukhanov 効果を再導入し，またあからさまに，ブラックホールに対してスピン 1 の量子の優勢を自動的に与え，Immirzi パラメータをブラックホールの響き (black-hole ringing) のモードの振動数に適合させる (8.2.3 節を見よ)．

面積演算子の異なる正則化　式 (6.125) で与えられる面積演算子の完全なスペクトルは，主系列 (6.75) を含んでいる．もし面の微分同相不変な概念が真に領域の境界であり，また領域は体積の量子のアンサンブルであると考えるならば，このとき物理的な面は結節点に接触することなくリンクを切る数学的な面であるというアイデアに導かれる．面は主系列 (6.75) で与えられる面積を持つ．このように縮退したセク

ターは物理的にはまがいもの (spurious) かもしれない．縮退したセクターの固有値を得るには，結節点を正確に通る面が必要であり，これは面の位置が Planck 尺度を除いてのみ定義されるという直観に反する．面積演算子の異なる正則化は縮退したセクターを取り除くかもしれない．

結び目のない (Unknotted) スピン・ネットワーク　非常に興味ある可能性は，グラフの結び目と繋がり (knotting and linking) の情報を落とすことで，理論のスピン・ネットワーク状態の定義を修正することである．すなわち，グラフ理論でふつう行われるように，また上では行わなかったように，拡大微分同相写像の下での埋め込まれたグラフの同値類として，結節点間の隣接関係だけを用いて，スピン・ネットワークを成すグラフ Γ を定義することである．2 つの定義が示唆する物理的な違いは今のところ明らかでない．

体積の異なる正則化　文献では体積の 2 つの定義が与えられてきた．その 2 つはわずかに異なることが判明する．もともと，その 2 つは異なる数学的な言語で与えられ，違いは理論の異なる定式化に関係していると考えられた．後に，どちらの演算子も両方の定式化で定義できることが明らかになった．ここで定義した体積演算子は，接続するリンクに同一平面上の正接がある結節点と，接続するリンクの正接が同一平面にない結節点を区別しない．例えば [20] で用いられている，体積演算子の他のバージョンは，この区別を行う：同一平面のリンクを持つ結節点へのその作用は，ここで与えたものと異なる．この 2 つ目の演算子は $Diff$ の下で共変的であるのに対し，$Diff^*$ の下ではそうではない．

拡大ループ表現 (Extended loop representation)　Gambini と Pullin はループ状態が規格化可能でない LQG のバージョンを開発した．規格化可能な状態はループ状態を不鮮明化して得られる．主な動機は，平坦な空間の QFT においてこれが当てはまる事実である．議論と詳細については，読者に彼らの本 [7] を紹介する．

Lorentz 的なスピン・ネットワーク　LQG が基づく Hamilton 形式の理論には，部分的なゲージ固定がある．このゲージ固定の帰結の 1 つは，スピン・フォーム・モデルで用いられる共変な定式化との関係が，技術的により厄介になることである．この困難を避けるために，ゲージ固定を行うことなく，また Hamilton 形式における完全な Lorentz 群を保持して，LQG を定義する可能性を Sergei Alexandrov は研究した [127, 212]．これは面積演算子の異なる正則化をも与えるかもしれない [213]．

―――

文献ノート

Wheeler–DeWitt 方程式は [214] に現れた．LQG のハミルトニアン演算子の最初のバージョンとその最初の解は [177] で構成された．他の多様な解が見つかった，例えば [215] を見よ．ハミルトニアン演算子の初期の解のレビューが [216] にある．微分同相不変な状態が演算子を有限にするという結果は， [217] に現れた．ハミルトニアン拘束と演算子 D の一般的な構造が， [218] で説明されている．

ハミルトニアンを交換子として表すアイデアと，それによる最初の完全によく定義されたハミルトニアン演算子のバージョンは，Thomas Thiemann によって [133] で得られ，著しい“QSD”［quantum spin dynamics；冒頭の「術語と表記」を見よ］の一連の論文 [201, 209] で Thiemann によって系統的に発展させられた．この演算子の行列要素は [208] で系統的に研究されている．正の宇宙定数を持つハミルトニアン演算子と，理論をこの場合に定義する可能性については， [220] を見よ．Thiemann と共同研究者は“マスター・プログラム”と呼ばれる，独自の信頼できる量子ダイナミクスの定義へのアプローチを開発している．アイデアは拘束量の完全な組を単一のものに凝縮することである．手引きと参考文献については， [221] を見よ．

[222] と [223] でフェルミオンが LQG に導入された．フェルミオン–LQG 結合の現在の定式化への重要なステップが，半分の密度の (half-density) スピノル場を用いることで，Thomas Thiemann によって成された [224]．LQG における物質のハミルトニアンの完全な研究は Thiemann による．彼の [20] と，そこに含まれる完全な参考文献を見よ．面積演算子のスペクトルへのフェルミオン的な寄与が [225] で考えられた．フェルミオンがスピン・ネットワークの繋がり (linking) で表されるという興味ある可能性が，最近 [226] で探求された．

等間隔の固有値を持つ面積演算子と，そのブラックホール・エントロピーに対する影響については， [227] を見よ．LQG の q-変形バージョンは [228] で考えられた； [220] とそこに含まれる参考文献を見よ．q-変形スピン・ネットワークについては， [229], [230] および [231] も見よ．

第 8 章　応用

本章では具体的な物理的問題への，最も上手くいっている LQG の応用のいくつかに手短に言及する．完全を期すつもりはなく，いかなる詳しい導出も提示しない．それらについては，原論文とレビュー誌を紹介する．主要なアイデアと主要な結論のみを説明する．

量子重力の 2 つの伝統的な応用は，初期宇宙論とブラックホールの物理である．これらの分野の両方において，LQG は興味ある結果を得てきた．さらに，Planck 尺度の物理的効果がもしかすると観測できる，他の領域に関する一定数の仮説的な計算もまた成されてきた．

8.1　ループ量子宇宙論

LQG の著しい応用は初期宇宙論を対象とする．Einstein 方程式の宇宙論的な解を表す，$\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ における半古典的な状態の直接的な取り扱いは，まだ得られていない．しかしながら，理論の基底状態と演算子に一様性と等方性を課し，そうすることで，詳しく研究することができる，宇宙論的なダイナミクスの量子論バージョンを表す有限次元系に，理論を制約することができる．

結果は Friedmann モデルのダイナミクスの伝統的な Wheeler–DeWitt ミニ超空間の (minisuperspace) 量子化と異なる．違いの秘訣は，系が完全な理論の一定の物理的な側面を備えている事実である．特に，幾何学の量子化である．それは初期宇宙のダイナミクスに重大な影響を与える．主要な結果は以下である．

(i) **特異性の不在**　ビッグバンにおいてダイナミクスは特異的な振舞いがなく，よく定義される．特に，逆スケール因子は有界である．この意味で宇宙は最小のサイズを持つ．

(ii) **半古典的な振舞い**　宇宙論的な発展は，スケール因子 $a(t)$ の大きな値に対して標準的な Friedmann ダイナミクスを近似するものの，$a(t)$ の小さな値ではそれと異なる．

(iii) **スケール因子の量子化**　スケール因子――および宇宙の体積――は量子化される．

(iv) **離散的な宇宙論的発展**　スケール因子を宇宙論的な時間パラメータと見なせる．このとき宇宙論的時間は量子化されていると言える．対応して，Wheeler–DeWitt 方程式は a に関する差分方程式であって，微分方程式ではない．

(v) **インフレーション**　ビッグバンの直後，宇宙はインフレーション期 $\mathrm{d}^2a(t)/\mathrm{d}t^2 > 0$ を経た．これはスカラーのインフラトン場によってではなく，重力場自体の量子力学的な性質によって引き起こされる．

これらは全て著しい結果だが，異なる種類の結果である．結果 (i) と (ii) は初期宇宙の整合的な記述を与える，重力の量子論から期待されることである．結果 (iii) と (iv) は LQG の最も特徴的な側面――幾何学の量子化――を反映している．結果 (v) は大きな驚きとして現れる．これらの結果がどのように導かれるのかを手短に説明しよう．

一様で等方的な宇宙を考えよ．その重力場はよく知られた線要素

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2)\right) \tag{8.1}$$

［$\sin\theta \to \sin^2\theta$ と訂正した］で与えられ，ここに $a(t)$ はスケール因子であり k はゼロまたは ± 1 に等しい (例えば [75] を見よ)．Einstein 方程式は Friedmann 方程式

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \tag{8.2}$$

に帰着し，ここに ρ は時間に依存する物質のエネルギー密度である．宇宙を満たす物質を，簡単のためスカラー場 ϕ にとることのできる，単一の場を用いて表そう．一様性はこのとき，ϕ が時間座標のみの関数であることを要求する．系はしたがって $a(t)$ と $\phi(t)$ で表される．簡単のため $\phi(t)$ は単純な 2 次の自己相互作用 (ポテンシャル) 項を持つ，すなわち p_ϕ を ϕ の運動量共役として，そのハミルトニアンは

$$H_\phi = \frac{1}{2}(p_\phi^2 + \omega^2\phi^2) \tag{8.3}$$

であると仮定せよ．したがって，

$$\phi(t) = A\sin(\omega t + \phi_0). \tag{8.4}$$

場 ϕ をインフラトンと混同してはならない：それはインフレーションのポテンシャルを何ら持たない．エネルギー密度は**保存する**物質のエネルギー H_ϕ と

$$\rho = a^{-3}H_\phi = a^{-3}\rho_0 = \frac{1}{2}a^{-3}\omega^2A^2 \tag{8.5}$$

によって関係する．定数 ρ_0 は $a=1$ での密度である．Friedmann 方程式 (8.2) は単に $\dot{a} = -\mathrm{d}H/\mathrm{d}p_a$ を計算し $H=$ を用いることで，ハミルトニアン

$$H = -\left(\frac{p_a^2}{8a} + 2ka\right) + 16\pi GH_\phi \tag{8.6}$$

から導ける．最も単純な，空間的に平坦な場合 $k=0$ には，Friedmann 方程式 (8.2) は

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0}{a^3} \tag{8.7}$$

に帰着し，微分をとることで

$$\ddot{a} = -\frac{4}{3}\pi G\rho_0\frac{1}{a^2} \tag{8.8}$$

が得られ，これはちょうど Newton 的な宇宙論の文脈で得た式 (2.112) である．方程式はよく知られた Friedmann 発展

$$a(t) = a_0(t-t_0)^{2/3} \tag{8.9}$$

を解に持つ．

note　$C \equiv \frac{4\pi G\rho_0}{3}$ として式 (8.7) を $\dot{a}^2 = 2C\frac{1}{a}$ と書いておき，両辺を微分すると

$$2\dot{a}\ddot{a} = -2C\frac{\dot{a}}{a^2}, \qquad \therefore \ddot{a} = -C\frac{1}{a^2} : (8.9).$$

解 (8.9) がこれを満たすには $a_0 = \left(\frac{9}{2}C\right)^{1/3}$ であれば良く，また t_0 は $a=0$ となる t の値を意味する．

解釈　これらの方程式は変数 t に対する特定のゲージの選択において書かれているものの，完全な理論は t の再パラメータ付けの下で不変である．相対論的な配位空間は a と ϕ で座標付けされる．理論の物理的な内容はこれら 2 つの量の t への依存性にあるのではなく，互いに対する依存性にある．式 (8.4)–(8.9) の正確な意味は ϕ と a の関係に関係している．例えば，ϕ を時計と解釈できる．すなわち，その振動を同時 (isochronous) と**定義**できる．これは物理的な時間変数を定義する．このときスケール因子はこの時間変数において，式 (8.9)

で表されるように増大する．代わりに，時間の尺度としてスケール因子を用いることができる．この宇宙論的な時間では，全ての物質の物理的な過程は

$$\phi(a) = A\sin(\tilde{\omega}a^{3/2} + \tilde{\phi}_0) \tag{8.10}$$

のように減速する．言い換えると，Friedmann 発展は物質の過程の変化率と，スケール因子の変化率の相対的な発展である；それは 2 つの変化率の比の発展である．Friedmann 方程式の解はしたがって，場の変数の与えられた値 ϕ に対してスケール因子がとり得る値，あるいは等価的に，スケール因子の与えられた値 a において物質変数がとり得る値 $\phi(a)$ (式 (8.10)) を表す．

これらの関係が意味を成すためには，“t における発展”を用いて考える必要はないことに注意せよ．3.4 節で論じたように，時間発展，すなわちそれに対して a が増加し ϕ が振動するところの時間の物理的な“流れ (flow)”のアイデアは単に，多くの (重力と物質の) 変数の存在下で起こる熱力学的な過程の物理から導かれるのかもしれない．したがって**“ビッグバンの前に何が起きたのか？”**という問は，**“地球の表面上で北極の 1 メートル北には何があるか？”**という問と同じぐらい空虚かもしれない［少なくとも上記の理論の定義域の下では]．

伝統的な量子宇宙論　量子宇宙論への伝統的なアプローチでは，波動関数 $\psi(a,\phi)$ を導入する．これは式 (8.6) から得られる Wheeler–DeWitt 方程式に支配される．因子順序化を除き，これは

$$\left(\frac{\hbar^2}{8a}\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial a} + 2ka\right)\psi(a,\phi) = 16\pi G H^0_\phi \psi(a,\phi) \tag{8.11}$$

と書くことができ［$p_a \to -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial a}$ ならば左辺第 1 項は負号を要する]，ここに H^0_ϕ は角振動数 ω を持つ調和振動子のハミルトニアンである．この方程式は，大きな a に対して Friedmann 発展を近似する波束である，半古典的な解を持つ．小さな a に対しては，他方で，古典論の特異的な振舞いが残る．

ループ量子宇宙論　LQG を用いると何が変わるか？ 本質的な新奇性は幾何学の量子化である．V をコンパクト宇宙の体積として，定数を除き

$$a \sim \sqrt[3]{V} \tag{8.12}$$

であることを思い出そう．ところが理論では体積は離散的なスペクトルを持つ．したがって，a が離散的なスペクトルを持つことを期待できる．実際，［232] で行われた詳しい構成は，まさにこれが成り立つことを示している．観測量 a は整数 n でラベルされる固有状態 $|n\rangle$ と固有値

$$a_n = a_1\sqrt{n} \tag{8.13}$$

を伴う離散的なスペクトルを持ち，ここに定数 a_1 は

$$a_1 = \sqrt{\frac{4}{3}\gamma\pi\hbar G}. \tag{8.14}$$

したがって，LQG において宇宙のサイズは量子化される．a が量子化されるならば，状態を関数 $\psi(a,\phi)$ として表せない (調和振動子の状態をエネルギーの連続関数として表さないのと同じ理由で)．むしろ，状態を

$$\psi_n(\phi) = \langle n,\phi|\psi\rangle \tag{8.15}$$

の形に表すことができ，ここに $|n,\phi\rangle$ は a と ϕ の固有状態である．対応して，Wheeler–DeWitt 方程式 (8.11) における a に関する偏微分はループ量子宇宙論において，有限差分 (finite-difference) 演算子に置き換わる．実際，その Wheeler–DeWitt 方程式は [232] であからさまに導かれている．それは

$$\alpha_n\psi_{n+4}(\phi) - 2\beta_n\psi_n(\phi) + \gamma_n\psi_{n+4}(\phi) = 16\pi G a^{-3} H_\phi \psi_n(\phi) \tag{8.16}$$

の形を持ち，ここで定数 $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ は [232] に与えられている．右辺の体積密度因子 a^{-3} に注意せよ．それは量子拘束が LQG において**密度化した** (*densitized*) ハミルトニアン $a^{-3}H$ から得られねばならないために現れる．

ここで重要な点は，この方程式の右辺における演算子 a^{-3} の意味である．完全な理論のハミルトニアン演算子の定義では，よく振舞う演算子を定義するには，逆体積要素 $1/\det E$ の適切な定義を用いることが不可欠であったことを思い出そう．これは古典論では Poisson 括弧を通じて，量子論では交換子を通じてそれを表すことで得られた．この措置は体積要素演算子の逆の定義に関する，技術的な困難を回避する．式 (8.16) における逆スケール因子 a^{-3} は宇宙論的な理論において，その項の残るものである．しかしもし宇宙論的な理論が完全な理論を近似せねばならないなら，完全な理論において逆体積要素を定義したのと同じ方法で，この演算子をより上手く定義せねばならない．実際，そうすることは困難ではない：

$$d = a^{-3} \tag{8.17}$$

をよく定義された量子力学的演算子の交換子として書く．結果として得られる演算子 d はよく定義される．そのスペクトルはしかしながら a^3 のスペクトルの単純な逆よりも複雑である：

$$d_n = \left(\frac{12}{j(j+1)(2j+1)} \sum_{k=-j,j} k\sqrt{V_n} \right)^6 . \tag{8.18}$$

演算子 d の定義には量子化の曖昧さがある．これは d がホロノミーを用いて定義され，またホロノミーはあらゆる表現 j に採ることができるからである．これはまさに上の 7.1.3 節で議論した，ハミルトニアン演算子の定義における曖昧さである．著しいことに，そのスペクトルは有界であることが判明する．実際，大きな n に対して

$$d_n \sim a_n^{-3} \tag{8.19}$$

を得る；ところが小さな n に対して

$$d_n \sim a_n^{13} \tag{8.20}$$

を得る．d_n の最大値があり，その値と位置付けは自由な量子化のパラメータ j で決まる．Wheeler–DeWitt 方程式 (8.16) の中でこの演算子を用いると，$n=0$ とその周りで完全によく振舞う発展がもたらされる．この方程式の数値的な研究は，それが大きな n に対して標準的な半古典的振舞いを，したがって標準的な Friedmann 発展を与えることを容易に示している．

8.1.1 インフレーション

LQC［loop quantum cosmology］の最も驚くべき興味ある側面は，それが初期宇宙の膨張におけるインフレーション期を予言する事実である．このことは Wheeler–DeWitt 方程式 (8.16) のあからさまな数値解から，あるいはより簡単に，以下のように理解できる．小さな n に対して，演算子 d の振舞いは式 (8.19) の代

わりに式 (8.20) に支配される．対応する宇宙論的な発展はしたがって実効的に，H_ϕ が a^{-3} の代わりに a^{12} に比例する，Friedmann 方程式の修正によって近似できる．これは

$$a(t) \sim (t_0 - t)^{-2/9} \tag{8.21}$$

という形の，加速する初期の膨張をもたらす．

note　式 (8.5) よりもともと $H_\phi = \rho a^3$ は a^{-3} に比例しないものの，ハミルトニアン (8.6) において $H_\phi \sim a^{12}$ と仮定して，Friedmann 方程式 (8.2) の導出と同様の計算を繰り返すと (ただし $k = 0$)，式 (8.7) の代わりに

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \sim a^9$$

が得られる．解 (8.21) に対して上式の両辺はともに $(t_0 - t)^{-2}$ のようになる．

Wheeler–DeWitt 方程式の数値解はこの結果を裏付ける．初期の加速は後に滑らかに減じ，標準的な減速する Friedmann 解に収束する．このインフレーション的な膨張の持続は j に支配される．

物理的に起きていることは以下のように理解できる．物質のハミルトニアンにおける運動項は実効的に重力との結合を含んでいる．重力場が強いとき，初期の特異性の近くで，物質場は重力場の量子構造を感じ，それがそのダイナミクスに影響する．

このシナリオはより詳しく探求し，より良く理解するに値する．

8.2　ブラックホールの熱力学

ブラックホールが熱的性質を持ち得ることの最初のヒントは古典的な GR から来た．1972 年に，ブラックホールの事象の地平面 (event horizon) の面積は減少し得ないことを，Einstein 方程式は含意すると述べる定理を Hawking は証明した．すぐ後に，Bardeen, Carter および Hawking は GR においてブラックホールが，熱力学の原理と極めて似ている法則の組に従うことを示した；このアナロジーに触発されて，表面積 A の Schwarzschild ブラックホールにはエントロピー

$$S_{\mathrm{BH}} = a\frac{k_{\mathrm{B}}}{\hbar G}A \tag{8.22}$$

が関係付けられるはずだと，Bekenstein は提起した．(接続の現れない本章では，面積は $\mathbf{A}$ ではなく A で表す．) ここに a は単位のオーダーの定数，k_{B} は Boltzmann 定数であり，また光速は 1 にとってある．この公式に $\hbar$ が現れる理由は本質的に，次元を合わせることである．Bekenstein の提案は，熱力学の第 2 法則がブラックホールの存在下に拡張されるはずだというものだった：時間において減少しない全エントロピーは，ブラックホール・エントロピー S_{BH} を含む通常のエントロピーの和である．Bekenstein はこのアイデアを支持するいくつかの物理的な議論を提起したものの，主に以下の理由で，物理の共同体の反応は冷淡であった．Schwarzschild ブラックホールの面積 A はそのエネルギー M と

$$M = \sqrt{\frac{A}{16\pi G^2}} \tag{8.23}$$

で関係する．

note　これは Schwarzschild 半径 $r_g = 2GM/c^2$ に対する表面積 $A = 4\pi {r_g}^2 = 16\pi G^2 M^2/c^4$ である．ここで Schwarzschild 解において動径方向の座標長さ $\mathrm{d}r$ は対応する真の長さと一致しないのに対し，$r\mathrm{d}\theta$ と

$r\sin\theta\mathrm{d}\phi$ は球面上の真の距離を与えることを思い出そう [417, p.336]．実際，座標半径 r の球面における計量の行列式の平方根 $r^2\sin^2\theta$ を用いて，固有面積要素は $r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$.

もし式 (8.22) が正しいならば，標準的な熱力学的関係 $T^{-1}=\mathrm{d}S/\mathrm{d}E$ はブラックホール温度

$$T=\frac{\hbar}{a32\pi k_{\mathrm{B}}GM} \tag{8.24}$$

の存在を示唆し，したがってブラックホールはこの温度における熱的放射を放出する：それは信じがたい帰結である．

note：上式 (8.24) の確認　2 式 (8.22–23) より $S_{\mathrm{BH}}=a16\pi\frac{k_{\mathrm{B}}G}{\hbar}M^2$ なので，$\frac{1}{T}=\frac{\mathrm{d}S_{\mathrm{BH}}}{\mathrm{d}M}=a32\pi\frac{k_{\mathrm{B}}G}{\hbar}M$.

ところが，Bekenstein の提案のすぐ後に，Hawking は完全に異なる観点から，まさにそのようなブラックホールの熱的放射を導いた．曲がった時空における場の量子論の伝統的な手法を用いて，Hawking はブラックホールが形成する重力的な背景 (例えば星の崩壊) における量子場を研究し，もし量子場が初期に真空状態にあるならば，星の崩壊の後，我々はそれを熱的状態の性質を持つ状態に見出すことを発見した．このことはブラックホールが熱的放射を放出すると述べることで解釈できる．Hawking は放射温度が

$$T=\frac{\hbar}{8\pi k_{\mathrm{B}}GM} \tag{8.25}$$

になると計算して，見事に Bekenstein の推察を支持し，定数 a を

$$a=\frac{1}{4} \tag{8.26}$$

に決定したため，式 (8.22) は

$$S_{\mathrm{BH}}=\frac{k_{\mathrm{B}}A}{4\hbar G} \tag{8.27}$$

となる．それ以来，S_{BH} の添字 BH は“ブラックホール (black hole)”を意味しない：それは“Bekenstein–Hawking”を意味する．Hawking によるブラックホールの放射の理論的発見はそれ以降，数々の異なる方法で再導出され，今日では一般に非常に信頼できるものとして受け入れられている[*136].

Hawking の見事な結論は数々の疑問をもたらした．第 1 に，Hawking による導出において重力の量子力学的な性質は無視されている．それは結果に影響するか？ 第 2 に，我々は巨視的なエントロピーを統計力学的な観点から，微視的な自由度の効果として理解している．エントロピー (8.22) の原因となる微視的な自由度は何か？ 式 (8.22) を第 1 原理から導けるか？ 式 (8.22) に $\hbar$ が現れていることから，これらの疑問の答が重力の量子論を必要とすることは明らかである．これらの疑問に答える能力は以来，重力の量子論を試すことのできる標準的な判断基準となってきた．

ブラックホール熱力学の詳細な記述は LQG を用いて発達しており，研究はこの方面で活発である．主要な結果は，Schwarzschild とその他のブラックホールに対する，無限大が全く現れないよく定義された計算での，

[*136] その解釈に関していくらか疑義が残り得るにしても．量子のエネルギー分布が Planck 的である**純粋な**量子状態を書くことができる．崩壊の後の量子場の状態は本当に熱的状態か，あるいは熱的状態のエネルギー分布を持つ純粋状態か？ すなわち，異なるエネルギー成分の相対的な位相は本当にランダムか，あるいはそれらは初期状態によって決定論的に固定されているか？ Planck 的な分布の成分は熱的あるいは量子力学的な重合せを成すか？ 第 2 の場合，根号状態への遷移は隠れた相関を測定する困難に関する通常の結果に過ぎない．

第 1 原理からの式 (8.22) の導出である．私の知る限り，LQG はこの結果を達成できる，唯一の詳細な重力の量子論である[*137]．

以下で説明するように，LQG の計算結果は式 (8.22) とともに

$$a \approx \frac{0.2375}{4\gamma} \tag{8.28}$$

を与え，ここに γ は Immirzi パラメータである．もし Immirzi パラメータが値

$$\gamma \approx 0.2375 \tag{8.29}$$

を持つとすれば，これは Hawking の値 (8.26) と一致する．実際，今日ではこれが理論において γ の値を決定する方法である．計算は異なる種類のブラックホールに対しても実行でき，同じ γ の値が見出され，整合性を保証している．γ の値を決定する独立な方法は，この結果をはるかに強力にするだろう．

以下では，この結果の導出の根底にある主要なアイデアを提示する．

8.2.1　統計的なアンサンブル

エントロピーの原因となる自由度　電荷と角運動量を持たないブラックホールを考えよ．そのエントロピー (8.22) は Schwarzschild 計量で表される巨視的状態に対応する，地平面の微視的状態に起因し得る．直観的にはこれを，地平面の形のゆらぎの効果と考えられる．

直ちにこのアイデアへの反論が挙げられる：ブラックホールには“髪の毛 (hair)”がない，すなわち電荷と角運動量を持たないブラックホールは必然的に球対称な Schwarzschild ブラックホールであり，ゆらぐ自由度は残らない．

この反論は，しかしながら，正しくない．それは“ブラックホール”という術語の意味に関する，ありがちな混乱の帰結である．混乱は“ブラックホール”という表現が文献において，2 つの異なる意味で用いられる事実に起因する．1 つ目の意味では“ブラックホール”は崩壊した星のような，地平面の奥に隠れた時空領域である．2 つ目の意味では“ブラックホール”は“**定常的な** (*stationary*) ブラックホール”の同義語として用いられる．“ブラックホールは質量，角運動量および電荷によって一意的に特徴付けられる”と言うときには，任意のブラックホールではなく**定常的な**ブラックホールに言及している．特に，電荷と角運動量を持たないブラックホールが Schwarzschild ブラックホールである必要は**なく**，また球対称である必要は**ない**．その豊かなダイナミクスは例えば，数値計算によって得られる，例えば融合する 2 つのホール (holes) に対する，地平面の素早く変化する形状の見事な映像で示される．一般にブラックホールは大きな自由度の数を持ち，その事象の地平面は任意の形をとり得る．この地平面の自由度がエントロピーの起源になり得る．

確かに，古典論において消える電荷と消える角運動量を持つ現実的なブラックホールは，余分なエネルギーを全て素早く放射して，Schwarzschild 解に向かって非常に素早く発展する．その振動は重力的な放射の放出によって，強度に減衰する．しかしこの事実から，同じことが量子論または熱的な文脈において成り立つと推測することはできない．量子論では，ホールが正確に Schwarzschild 計量に収束するのを Heisenberg の原理が妨げ，ゆらぎは残り得る．実際，我々はこれが正しいことを見る．

統計的な文脈において，系の巨視的状態とその微視的状態を区別せねばならないことを思い出そう．明らかに巨視的状態の対称性は，関係する微視的状態が対称的であることを意味しない．例えば，気体の天体

[*137] 今のところ，弦理論は極めて非物理的な極限 (extreme) または，ほとんど極限の (nearly extreme) ブラックホールしか扱えない．［極限ブラックホール (extreme black hole) という術語がある．］

(sphere) の統計力学において，気体分子の個々の運動は確かに球対称性に制限されない．巨視的状態が球対称かつ定常的であるとき，微視的状態が球対称または定常的である必要はない．

Schwarzschild ブラックホールの熱力学的な振舞いを研究するとき，したがって Schwarzschild はあくまで巨視的状態であるのを覚えておくことが重要である．微視的状態は非定常的また非-球対称的となり得る．実際，ブラックホールの熱力学を定常的または球対称な計量の性質だけから説明しようとすることは，球状の箱に入った理想気体の熱力学を分子の球対称な運動だけから導こうとするようなナンセンスである．

幾何学の熱ゆらぎ　状況を明確にするために，非回転的で電荷のないブラックホールと，私がまとめて“物質”と言い表すところの，ダスト，気体あるいは放射のような，他の物理的要素とを含む現実的な物理系を考えよう．我々はそのような系の統計的熱力学に興味がある．Einstein 方程式により，有限温度における物質分布の，熱運動による微視的で時間に依存する非一様性は，重力場においても時間に依存する微視的で熱的な非一様性を生じるはずである．通常はこれらの幾何学のさざ波を安全に無視できる．例えば，地球の表面上の幾何学は Minkowski 計量 (または地球の重力場による Schwarzschild 計量) で与えられると我々は言い，個々の素早く運動する大気の分子によって生じる，非一様な時間に依存する重力場を無視する．Minkowski 幾何学はしたがって我々の周りの微視的な重力場の，“巨視的な”粗視化した平均である．これらの重力場の熱ゆらぎは小さく，大抵の目的にとって無視できるものの，重力の統計的・熱力学的な性質に興味はあるときには無視できない：これらのゆらぎは，他のあらゆる熱的な振舞いに対してもそうであるように，まさに重力場の熱的な振舞いの源である．

熱的な文脈では，Schwarzschild 計量はしたがって，微視的にゆらぐ幾何学の粗視化した巨視的な記述に過ぎない．微視的には，重力場は (非定常的な物質と相互作用するため) 定常的ではなく，球対称ではない (と言うのも，物質の分布は平均において球対称であるにすぎず，個々の微視状態において球対称ではない)．その微視状態は，したがって，Schwarzschild 計量で与えられるのではなく，何らかの複雑で時間に依存する非対称的な計量で与えられる．

地平面のゆらぎ　上記をもう少しより正確に考察しよう．まずは物質，重力およびブラックホールのある，有限温度の系の古典的な記述を考えよう．時空を座標時間 t でラベルされる空間的な面 Σ_t の族にスライスする (foliate)．空間的な面 Σ_t と事象の地平面 (未来のヌル無限遠 (null-infinity) の過去の境界) との交わり h_t は，座標時間 t における事象の地平面の瞬間的な微視的配位を定義する．私は簡単に h_t をホールの表面，あるいは地平面と呼ぶ．このように，h_t は Σ_t における 2 次元の閉曲面である．上で議論したように，一般にこの事象の地平面の微視的配位は球対称ではない．地平面 h_t の内的および外的な (intrinsic and extrinsic) 幾何学を g_t で表そう．2 次元の面の全ての可能な (内的および外的な) 幾何学の空間を $\mathcal{M}$ とする．t が変化すると，地平面の (微視的な) 幾何学は変化する．こうして，t が変化すると g_t は $\mathcal{M}$ の中をめぐる．

Einstein 発展はブラックホールを Schwarzschild 解へと駆り立てるので，与えられた半径［に対応する面積］A の球面を表す $\mathcal{M}$ の点 g_A へと g_t は収束する (ようにスライスを選べる)．ところが，前に言及したように，正確な収束は量子論によって禁じられ，量子効果は g_t を g_A の周りの有限の領域で振動させ続ける．

どの微視的状態が S_{BH} の原因となるか？　式 (8.22) はブラックホールに関する真の熱力学的エントロピーを表していると仮定しよう．すなわち，ホールと外部の熱の交換は S_{BH} に支配されると仮定しよう．このエントロピーの原因となる微視的な自由度はどこに位置付けられるか？ エントロピーにとって重要な微視的状態は，外部とのエネルギーの交換に影響し得るものだけである．すなわち，外部から識別できるものだけである．完璧に孤立した箱を含む系があれば，系と外部の熱の交換を考える限り，箱の内部状態は系のエントロロ

ピーに寄与しない．ブラックホールの内部の物質と重力の状態は外部に何ら影響しない．したがってブラックホールの内部の状態は S_{BH} にとって重要でない．

明確に述べると，ブラックホールの内部は外部から識別できない無限大の数の状態の 1 つにあり得る．例えば，ブラックホールの内部は，原理的には，無限の Kruskal 時空で与え得る：ホールのもう一方の側では，我々が指定した側に影響を与えない無数の銀河があり得る．潜在的に無限の数の内部状態は，ホールとその周りの相互作用に影響せず，ここでは重要でない，と言うのも，それはエントロピーを決めるホールとその外部のエネルギー交換に影響し得ないからである．我々はホールの外側に見分けの付く影響を持つ配位にのみ興味がある．

外側から見ると，ホールはその表面の幾何学的な性質によって完全に決定される．したがって，(ホールとその周りの熱的相互作用の熱力学的な記述にとって重要な) エントロピーは，ブラックホール表面の幾何学に よって，すなわち g_t によって完全に決定される．

統計的なアンサンブル　その上でホールがゆらぎ得るところの，微視的状態 g_t のアンサンブルを決定しなければならない．伝統的な統計的な熱力学において，統計的なアンサンブルは，系が孤立している場合，すなわち系がその周りとエネルギーを交換しない場合に，系がその上をめぐり得るところの相空間の領域である．この条件をブラックホールの場合に翻訳できるか？ 答はイエスである，と言うのも，GR においてブラックホールのエネルギーの交換は，その面積の変化を伴うことを我々は知っているからである．したがって統計的なアンサンブルは，面積の与えられた値 A を持つ g_t のアンサンブルとして定義しなければならない．

このアンサンブルの選択を擁護するために，以下を考えよ[*138]．アンサンブルは可逆な経路のみを含むはずである．古典論において，可逆な経路は Hawking の定理により面積を保存する．量子論はこのことを変えない，と言うのも量子論はエネルギーを放射すること (Hawking 放射)，すなわち統計的なアンサンブルを定義する――系はエネルギーを交換しないという―― (事実に反する) 仮定を破ることによってのみ，面積が減少することを許容するからである．

ブラックホールのエントロピーは，面積 A の 2 次元の面 h_t の幾何学 g_t に関する状態の数 $N(A)$ で与えられると結論付けられる．量 $S(A) = k_{\mathrm{B}} \ln N(A)$ が，地平面とその周りの熱的な相互作用を記述するために，地平線に関係付けられるエントロピーである．

量子論　古典論において数 $N(A)$ は明らかに無限大である．ところが量子論ではそうではない．古典的には無限大であり量子論では有限である，空洞における電磁場のエントロピーの場合と状況は似ている．それを計算するには，全面積 A を持つ 2 次元的な面の幾何学の，(直交する) 量子状態の数を数える必要がある．問題は今やよく定義されており，直接的な計算に翻訳できる．

2 つの反論　ブラックホールのエントロピーは，面積 A を持つ 2 次元の面の可能な状態の数によって決まると結論付けた．読者は議論において何かが足りないのではないかと疑うかもしれない：このことは**あらゆる**面が，面積を持つというだけの理由で，関連するエントロピーを持つことを意味するのか？ これがブラックホールであるという事実に関する情報はどこへ行ったのか？ また，Einstein 方程式に関する情報はどこへ行ったのか？ これらの反論が上記の議論に対してしばしば挙げられてきた．答は以下である．

1 つ目の反論には以下のように答えられる．あらゆる任意の面が与えられたとき，我々はもちろん，与えられた面積を持つ状態がいくら存在するかという数学的な問を問うことができる．しかし一般に，面に関係する

[*138] この文脈において，アンサンブルの選択をアプリオリに厳密に正当化する困難はいずれにせよ，伝統的な熱力学を悩ませることを思い出すことは，おそらく意義がある．

エントロピーがあると述べる理由はない．一般的な状況においてエネルギーは，あるいはより一般に情報は，面を通過できる．面はその幾何学を変えることなく熱を放出できる．したがって一般に，面の幾何学とその状態数は，熱の交換あるいはエントロピーと関係がない．ところが，ブラックホールという特別な場合には，地平面は我々から内部を隠し，我々がホールと行い得るあらゆる熱の交換は，面の幾何学によって完全に決定されるはずである．勘定が意味を成すのはこの場合だけである，と言うのも，与えられた面積の幾何学の状態数が，外部から識別できる領域の状態数と正確に対応するのは，この場合だけだからである．より正確に述べると，ブラックホールの表面の未来の発展は，その幾何学と外部によって完全に決定される；このことは任意の面に対しては成り立たない．幾何学の状態数がエントロピーを決めるのは，この地平面の特別な性質による．

自分の銀行口座に書かれた数字を足し上げれば，自分がいくらのお金を所有しているのかが分かる．このことは，任意の紙切れに書かれた数字を足し上げれば，自分の所有しているお金の量が得られることを意味しない．計算は同じかもしれないが，任意の紙切れは銀行口座ではなく，銀行口座に対してのみ計算結果は意味を成す．同様に，任意の面に対して同じ計算を実行できるものの，ブラックホールに対してのみ，その特別な性質により，計算結果はエントロピーとなる．

2 つ目の反論は Einstein 方程式の役割，すなわちダイナミクスの役割に関係している．この反論はしばしば挙げられてきたものの，私はそれを理解できたことがない．Einstein 方程式の役割は統計力学において力学 (dynamical) 方程式が演じる役割と全く同じである．一般にダイナミクスの役割は，系が孤立しているときには保存し，熱が交換されるときには交換される量である，系のエネルギーを定義する役割だけである．統計的なアンサンブルはこのとき，エネルギーの値によって決まる．ブラックホールの場合，**面積**がホールの外部との熱の交換を支配するという事実を決定するのは，Einstein 方程式である．もしそれが一般相対性理論の特定のダイナミクスに対することでなければ，面積はエネルギーの流入に対して増大したりエネルギーの損失に対して減少したりしないだろう．このように，統計的なアンサンブルを決定するのは Einstein 方程式である．

8.2.2 Bekenstein–Hawking エントロピーの導出

我々は上で，物理的な見地から，ブラックホールのエントロピーが何であるはずかを見出した．それは

$$S_{\rm BH} = k_{\rm B} \ln N(A) \tag{8.30}$$

で与えられ，ここに $N(A)$ は面積 A を持つ面の幾何学がとり得る状態数である．今やそれを計算する時である．

同時の空間的な 3 次元の Σ_t の幾何学の量子状態が，s-結び目 s によって決定される状態 $|s\rangle$ で与えられるとしよう．地平面は Σ_t に埋め込まれた 2 次元の面 $\mathcal{S}$ である．その幾何学はその s-結び目 s との交わりによって決定される．

交わりには 3 つのタイプがあり得る：(a) 面を横切る辺；(b) 面上に乗る頂点；(c) 面上に乗る s-結び目の有限の部分．ここでは面の外側から見たときの幾何学に興味があり，したがって我々が考える幾何学は，より正確には，$\mathcal{S}$ を囲む面の幾何学の，これが $\mathcal{S}$ に近付くときの極限である．この極限はタイプ (b) と (c) の交わりを検知し得ず，したがって我々はそのような交わりを無視する．

s-結び目の地平面 $\mathcal{S}$ との交点を $i = 1, \cdots, n$ でラベルしよう．面と交差するリンクのスピンを $j_1, \cdots, j_n$ としよう．地平面の面積は

$$A = 8\pi\gamma\hbar G \sum_i \sqrt{j_i(j_i+1)}. \tag{8.31}$$

s-結び目は地平面 $\mathcal{S}$ によって 2 つの部分に切り分けられる．外側の部分を $s_{\rm ext}$ と呼ぶ．s-結び目 $s_{\rm ext}$ は地平面で終わる，n 個の開いた端点 (open ends) を持つ．外部の観測者の観点からは，面の可能な幾何学は s-結

び目の可能な“終わり方”である．スピン j を持つリンクの可能な“端点”は単に表現空間 $\mathcal{H}_j$ のベクトルである．したがって，外部の s-結び目の可能な端は $\otimes_i \mathcal{H}_{j_i}$ のベクトルである．このように，外側から見ると，ホールの自由度はこの空間におけるベクトルとして現れる．面積が大きい極限では，これらのベクトルに対するいかなるさらなる制約も重要でなくなる．可能な状態は面積 A を与える全ての j_i の組と，各組に対する $\otimes_i \mathcal{H}_{j_i}$ の次元を考えることで得られる．まずは可能な状態の数が $j_i = 1/2$ の場合に支配されていると仮定しよう．この場合，単一のリンクの面積は

$$A_0 = 4\pi\gamma\hbar G\sqrt{3}. \tag{8.32}$$

これはブラックホール状態の勘定から Immirzi パラメータを得るために，最初に導かれた値である．後に Domagala と Lewandowski [233] は，エントロピーがスピン 1/2 に支配されるという仮定は間違っていることに気付き，より高い値を見出し，それは Meissner [234] によって評価され，式 (8.29) を与えた．

よって，個数

$$n = \frac{A}{A_0} = \frac{A}{4\pi\gamma\hbar G\sqrt{3}} \tag{8.33}$$

の交点があり，また $\mathcal{H}_{1/2}$ の次元は 2 である；よってブラックホールの状態の数は

$$N = 2^n = 2^{A/4\pi\gamma\hbar G\sqrt{3}} \tag{8.34}$$

であり，エントロピーは

$$S_{\mathrm{BH}} = k_{\mathrm{B}} \ln N = \frac{1}{\gamma}\frac{\ln 2}{4\pi\sqrt{3}}\frac{k_{\mathrm{B}}}{\hbar G}A. \tag{8.35}$$

これは Bekenstein–Hawking エントロピー (8.22) である．Immirzi パラメータを値

$$\gamma = \frac{\ln 2}{\pi\sqrt{3}}[\,\approx 0.1274] \tag{8.36}$$

に定めれば，数因子は Hawking の値 (8.26) に一致し，式 (8.27) を得る．

この導出のはるかに詳しい説明が [238] に与えられており，そこでは**境界**として孤立した地平面を持つ理論を量子化することで，ブラックホール表面の状態の Hilbert 空間が注意深く構成されている．

[238] に従って，しかしながら，Thiemann [20] は式 (8.36) のように見えるものの実際には因子 2 だけ異なる式を導いた．何故この食い違いが生じるのか？ 理由は，もし地平面が境界ならば，定式化において“地平面の反対側”がないとき，式 (6.125) において $j_{\mathrm{d}} = 0$ を得ると Thiemann が考えていることである．$j^i_{\mathrm{u}} = j^i$ と $j^i_{\mathrm{d}} = 0$ を合わせると，j_{t} の定義より $j^i_{\mathrm{t}} = j^i$ であり，したがって ($\gamma = 1$ とおくと) 地平面に入るスピン j を持つリンクの面積は，面積の量子

$$A = 4\pi G\hbar\sqrt{j(j+1)} \tag{8.37}$$

に寄与し，これはバルクにおいて面を横切るスピン j のリンクの面積に対する寄与の**半分**である．起きていることは，面積演算子がある意味，2 つの側に入るリンクの寄与を足すことで，面の面積を勘定しているということである；一方の側がないとき，これは成り立たない．このため，境界の面積はそれに無限に近いバルクの面の面積の半分となる．これはもちろん，物理的な見地からは，あまり納得がいかない． [238] の著者は実効的に地平面の面積を 2 倍にすることで，この食い違いを修正している．これは本書のように同じ最終的な結果を与える．“手による”この修正の必要は，地平面を境界として取り扱う定式化の不都合だと Thiemann は主張した．脱する 1 つの方法は地平面の面積を，地平面に近づくバルクの面の面積の極限として定義することである．

ブラックホールは面積の量子 A_0 につき 1 ビットの情報を担うことに注意せよ．これはまさにブラックホールの物理の基礎にあるに違いないと John Wheeler が [165, 166] で主張した，“すべてはビットから生まれる (it from bit)”という描像である．

結論の前に 1 つの注意．読者は次のように，上記の導出 (と [238] における導出) に反論するかもしれない：我々が勘定した状態はゲージ変換によって互いへと変換する．それなら何故エントロピーを勘定する際に，それらを区別して考えたのか？ この反論への答は以下である．系を要素へと分解すると，ゲージの自由度は境界の物理的な自由度になり得る．その理由は，ゲージ群を 2 つの要素に独立に作用させせると，それは境界に **2 度**作用することである．例えば，境界を横切る接続のホロノミーは，よく定義されなくなる．したがって，ゲージではない境界上の自由度がある；それらは言わば，2 つの側を互いに結びつける．

この点を説明するために，2 つの集合 A と B，および A 上と B 上に (自由に) 作用する群 G を考えよう．このとき G は $A \times B$ 上に作用する．空間 $(A \times B)/G$ は何か？ それは $A/G \times B/G$ (と同型) であると言いたくなるかもしれないが，少し考えるとこれは正しくなく，正しい答は

$$\frac{A \times B}{G} \sim \frac{A}{G} \times B \tag{8.38}$$

であることが納得できる．(もし G が A 上に自由に作用しなければ，B を A の要素の安定群 (stability group) で割らねばならない．) ここで，A はブラックホールの外側の状態の空間であり，B はブラックホールの状態の空間であり，G は理論のゲージ群であると想像せよ．このとき B を面のゲージ群で割ってはならず，スピン・ネットワークの残りを不変に留める，これらの内部ゲージと微分同相写像によってのみ割らねばならないことが分かる*139.

8.2.3　響きのモード (Ringing modes) の振動数

特定の数値 (8.36) を理解する方法はあるか？ ブラックホールの熱力学において中心的な役割を演じる面積の最小の量子は，スピン $j = 1/2$ に対するものであり，式 (8.36) を用いると，それは

$$A_{1/2} = 8\pi\hbar G\gamma\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)} = 4\ln 2\,\hbar G. \tag{8.39}$$

［式 (8.32) の A_0 である．］式 (8.23) により，そのような面積の量子の 1 つの変化はエネルギーの変化

$$\Delta E = \Delta M = \frac{A_{1/2}}{32\pi G^2 M} = \frac{\ln 2\,\hbar}{8\pi GM} \tag{8.40}$$

を意味する．

note：上式 (8.40) 確認　c を明示すると式 (8.23) は

$$A = 4\pi {r_g}^2 = \frac{16\pi G^2 M^2}{c^4} \qquad \text{i.e.} \qquad M = \sqrt{\frac{c^4 A}{16\pi G^2}},$$

式 (8.39) は $A_{1/2} = 4\ln 2\,\hbar G/c^3$ となるので，

$$\Delta E = c^2 \Delta M = c^2 A_{1/2}\frac{\partial M}{\partial A} = \frac{c^4 A_{1/2}}{2\sqrt{16\pi G^2}\sqrt{A}} = \frac{c^6 A_{1/2}}{32\pi G^2 M} = \frac{\ln 2\, c^3\hbar}{8\pi GM}.$$

そこで本稿では教科書の式 (8.40) における後ろの 2 辺の分母，したがって振動数 (8.41),(8.46) の分母に，G を 1 つ補った．実際，例えば $r_g = 2GM/c^2$ を思い出すと，このとき初めて正しい次元

$$\left[\frac{c^3\hbar}{GM}\right] = \left[\frac{c\hbar}{r_g}\right] = \frac{[\hbar]}{T} = [\Delta E], \qquad \left[\frac{c^3}{GM}\right] = \frac{1}{T} = [\omega]$$

*139 実際，[239] では微分同相不変性による境界の自由度のみが考慮されているのに対し，[238] とここでは内部ゲージ不変性による境界の自由度のみが考慮されている．おそらく両方を考慮することで式 (8.36) は変わり得る．

が得られる．後の式 (8.51) も見よ．

これを角振動数 ω の振動子から放出された量子として解釈するために Bohr の関係 $\Delta E = \hbar\omega$ を用いると，系には固有振動数

$$\omega = \frac{\ln 2}{8\pi GM} \tag{8.41}$$

で振動する何かがあるはずだということを量子重力理論は示唆する．私の知る限り，この振動数は古典論において何の役割も演じない．ところが何らかの理由で，ブラックホールの熱力学において中心的な役割を演じる面積の最小の量子が，上記のように $j = 1/2$ スピンによるのではなく，$j = 1$ スピンによると仮定せよ．このとき上の計算は少し変わる．最小の面積は

$$A_1 = 8\pi\hbar G\gamma\sqrt{1(1+1)} \tag{8.42}$$

であり，またスピン 1 表現は次元 3 を持つので，エントロピーは

$$S = \ln(3^{A/A_1}) = \frac{\ln 3}{8\pi\hbar G\gamma\sqrt{2}}A. \tag{8.43}$$

これは

$$\gamma = \frac{\ln 3}{2\pi\sqrt{2}} \tag{8.44}$$

であれば Bekenstein–Hawking エントロピーに一致し，翻ってこれは最小の重要な面積の量子を

$$A_1 = 4\ln 3\,\hbar G \tag{8.45}$$

に定める．式 (8.23) と Bohr の関係を用いると，固有振動数

$$\omega = \frac{\ln 3}{8\pi GM} \tag{8.46}$$

を得る．［式 (8.23) と Bohr の関係の帰結 $\omega = \Delta E/\hbar = A_{1/2}/32\pi\hbar G^2 M$:(8.40) は依然として成り立ち，ここで $A_{1/2}$ を式 (8.45) の A_1 に置き換えれば良い．］ここで，非常に驚くべきことに，**古典的な** Schwarzschild ブラックホールには，まさにこの振動数で振動する何かが**ある！** 実際，振動数 (8.46) はまさに Schwarzschild ブラックホールの，ほとんど減衰した響きのモード (most damped ringing mode) の振動数である！ この振動数の Einstein 方程式からの導出は複雑である．それは最初に数値的に計算され，次いで数値に基づき式 (8.46) と推測され，最近ようやく解析的に導出された．非常に驚くべきことに，重力の量子論は Einstein 方程式の非線形性の内に隠されたこの振動数を，かなり直接的に知っていることが明らかになる．

この事実は，ブラックホールの響きのモードがその熱力学の起源にあるというアイデアを支持しているように見える．他方で，スピン $j = 1/2$ を考えてはいけない理由は明らかでない．力学的な (dynamical) 選択則と等間隔の面積スペクトルを含め，いくつかの可能性が提案されている．概して，この興味ある知見は完全に満足のいく答を与えるよりも，むしろより多くの疑問をもたらしている．

8.2.4 Bekenstein–Mukhanov 効果

Hawking の放射の熱的な本性は重力の量子力学的な性質によって，かなり劇的に影響されるかもしれないと，1995 年に Bekenstein と Mukhanov は提唱した．量子重力へのいくつかのアプローチにおいて，面積は量子化された値のみをとり得ると彼らは主張した．ブラックホールの表面の面積はブラックホールのエネルギーに関係しているので，後者もまた量子化されている可能性がある．ブラックホールのエネルギーは放射が

放出されるときに減少する．したがって放射は，まさしく原子が行うように，エネルギーのある量子化された値から，より低い量子化された値への量子力学的な跳躍 (leap) をブラックホールが行うときに起きる．この描像の帰結は，放射がエネルギー準位間の差に対応する，量子化された振動数で放出されることである．このように，量子重力はブラックホールの放射に対する離散的な放射スペクトルを示唆する．この結果は Hawking による実効的に連続的な熱的スペクトルの予言と物理的に矛盾しない．これを理解するために，高温における，空洞の気体の黒体放射を考えよ．この放射は本質的に連続的な，熱的な Planck 的スペクトルを持つ．ところが，放射は離散的なスペクトルをもたらす，基本的な量子放出過程によって放出される．見かけの矛盾の解決策は，興味のある振動数の範囲においてスペクトル線は充分に密なので——実効的に——連続的なスペクトルをもたらすということである．

しかしながら，ブラックホールの場合は空洞放射の場合とかなり異なるかもしれないと，Bekenstein と Mukhanov は提唱した．彼らは面積のスペクトルに対する単純な前提を考えた：面積は基本的な面積 A_0 の倍数で量子化されるという前提である．すなわち，面積は値

$$A_n = nA_0 \tag{8.47}$$

をとることができ，ここに n は正の整数であり，また A_0 は Planck 面積のオーダーの基本的な面積

$$A_0 = \alpha\hbar G \tag{8.48}$$

であって，ここに α は単位のオーダーの数である．前提 (8.47) は基本的な“面積の量子”から成る幾何学の量子力学的な描像と整合する．ブラックホールの質量 (エネルギー) は面積と式 (8.23) で関係しているので，この関係と前提 (8.47) からブラックホールのエネルギー・スペクトルは

$$M_n = \sqrt{\frac{n\alpha\hbar}{16\pi G}} \tag{8.49}$$

で与えられることが帰結する．放出されるエネルギーがブラックホールの質量 M に比べて極めて小さい放出過程を考えよ．式 (8.49) より，エネルギー準位の間隔は

$$\Delta M = \frac{\alpha\hbar}{32\pi GM}. \tag{8.50}$$

note：上式 (8.50) の確認　面積 $A = nA_0$ の変化 A_0 に伴う，質量 (8.49) ないし (8.23):$M = \sqrt{A/16\pi G^2}$ の変化は

$$\Delta M = A_0\frac{\partial M}{\partial A} = \frac{A_0}{2\sqrt{16\pi G^2}\sqrt{A}} = \frac{A_0}{32\pi G^2 M} = \frac{\alpha\hbar}{32\pi GM} : (8.50).$$

量子力学的な関係 $E = \hbar\omega$ より，エネルギーは基本的な放射の振動数

$$\bar{\omega} = \frac{\alpha}{32\pi GM} \tag{8.51}$$

の倍数の振動数で放出されると結論付けられる．これが Bekenstein と Mukhanov の基本的な放射の振動数である．ここで放射の振幅が正確に Hawking の熱的スペクトルで与えられると仮定しよう．このとき完全な放射スペクトルは，その包絡線が Hawking の熱的スペクトルである，$\bar{\omega}$ の倍数の振動数におけるスペクトル線で与えられる．ここで，このスペクトルは Hawking のスペクトルと劇的に異なる．実際，Hawking の熱的放射における Planck 的な放射のスペクトルの最大値は

$$\omega_{\mathrm{H}} \sim \frac{2.82 k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{H}}}{\hbar} = \frac{2.82}{8\pi GM} = \frac{2.82 \times 4}{\alpha}\bar{\omega} \approx \bar{\omega} \tag{8.52}$$

の周りである［$T_{\rm H}$ は式 (8.24)］．基本的な放射の振動数 ϖ は，放出される放射の Planck 分布の最大値と同じ大きさのオーダーである！ 放射が評価可能な領域には数本のスペクトル線しかないことが帰結する．Bekenstein–Mukhanov スペクトルと Hawking スペクトルは同じ包絡線を持つものの，Hawking スペクトルが連続的であるのに対し，Bekenstein–Mukhanov スペクトルは放射が評価可能な振動数の区間における数本の線だけから成る．これが Bekenstein–Mukhanov 効果である．

この Bekenstein–Mukhanov 効果は LQG において本当に実現するか？ 一見するとイエスと言いたくなる，と言うのも，式 (6.78) で与えられる LQG の面積のスペクトルは，前提 (8.47) とかなり似ているからである．式 (6.78) における平方根の中の +1 を無視すれば，前提 (8.47) が，したがって Bekenstein–Mukhanov 効果が得られる．しかし +1 はあり，違いは重大であることが判明する．

+1 の存在の帰結を調べよう．面 Σ ――今の場合，ブラックホールの事象の地平面――を考えよ．Σ の面積は一連の量子化された値のみをとり得る．これらの量子化された値は任意の長さ n の，正の半整数の順番のない n データ (n-tuples) $\vec{j}=(j_1,\cdots,j_n)$ でラベルされる．

A より極めて小さいものの，なお $\hbar G$ よりも極めて大きい $\mathrm{d}A$ をとり，面積の値 $A\gg\hbar G$ と値 $A+\mathrm{d}A$ の間にある面積固有値の数を評価する［$\hbar G$ は Planck 面積］．式 (6.78) における +1 は低いスピン j_i を持つ項にしか注目に値する仕方で影響しないので，粗い評価のためにはそれを無視できる．半整数よりも整数を用いる方が便利である．そこで $p_i=2j_i$ を定義する．

$$\sum_{i=1,n} p_i=\frac{A}{8\pi\gamma\hbar G}\gg 1 \tag{8.53}$$

［左辺に係数 1/2 を要するか[*140]］となる，順番のない整数列 $\vec{p}=(p_1,\cdots,p_n)$ の数を評価しなければならない．これは数論においてよく知られた問題である．それは分割問題 (partition problem) と呼ばれる．それは整数 I を他の整数たちの和として書ける方法の数 N を数える問題である．大きな I に対する解は Hardy と Ramanujan による古典的な結果である [240]．Hardy–Ramanujan の公式によると，N は I の平方根の指数のように増大する．より正確には，大きな I に対して

$$N(I)\sim\frac{1}{4\sqrt{3}I}\mathrm{e}^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}I}} \tag{8.54}$$

を得る．［文献 [431, § 22.2] では弦理論の文脈で，統計力学的な意味付けとともにこの近似式を導いた．］この結果を我々の場合に適用すると，A と $A+\mathrm{d}A$ の間の固有値の数は

$$\rho(A)\approx\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{\pi A}{12\gamma\hbar G}}} \tag{8.55}$$

であることを得る．式 (8.23) を用いると，状態の密度は

$$\rho(M)\approx\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{4G}{3\gamma\hbar}}\pi M} \tag{8.56}$$

であることを得る．ここで +1 の項がなければ，$\sum_n p_n$ の同じ値を持つ全ての状態は縮退するという事実により，高い縮退がある．+1 の項の存在はこの縮退をなくし，固有値は偶然的にしか重複し得ない：一般に，全ての固有値は区別される．したがって，固有値の平均の間隔は状態密度の逆数であって，面積の平方根の逆数とともに**指数関数的**に減少する．この結果は，前提 (8.47) の場合にこの間隔が一定で Planck 面積のオーダーである事実と対照される．巨視的なブラックホールに対してエネルギー準位の間隔は無限小であり，スペクト

[*140] この修正は最終的な式 (8.55–56) の指数における数係数に影響するだけで，結論に変わりはない．

ル線は振動数において実質的に密であることが帰結する．我々はこのようにして，実効的に Hawking の熱的スペクトルを再現する[*141]．

素朴な前提 (8.47) を LQG から計算される面積スペクトル (6.78) で置き換えれば，Bekenstein–Mukhanov 効果は消失するというのが結論である．

8.3 観測可能な効果

半古典的な近似を用いて，LQG のあり得る低エネルギーの効果が研究されてきた．不鮮明化した幾何学的演算子の期待値をとることで，織物状態上の物質場の伝播を研究するアイデアを，Gambini と Pullin は導入した．適当な織物状態に対して，これは分散関係への量子重力効果が得られる可能性へと導くかもしれない．特に，彼らは光の伝播を研究し，興味ある複屈折効果の可能性を指摘した．Alfaro, Morales-Tecotl および Urrita はこの技法を発展させた．特に，質量 m のフェルミオンに対して彼らは一般的な形

$$E^2 = p^2 + m^2 + f(p, l_{\mathrm{P}}) \tag{8.57}$$

の，エネルギー E と運動量 p の間の分散関係を導いた．ここに最後の，Lorentz 抵触の (Lorentz-violating) 項はヘリシティに依存するかもしれない．LQG が観測可能な効果をもたらし得るという可能性は実に大いに関心を集めてきた．これらの効果は観測量，あるいは既に観測された効果にさえ関係しているかもしれないという提案が成されてきた．それらは宇宙線のエネルギー閾値，ガンマ線バースト，パルサーの速度，その他に関係している．

実際，量子重力効果は現在のところ観測不可能に違いないという従来のアイデアは，近年では強く疑問視されている．我々は“量子重力現象論の夜明けに”いるかもしれないという希望さえ表明している者もいる [241]．これらの希望が実現されるかを理解するにはあまりに時期尚早であるものの，可能性は魅力的であり，これらのあり得る見解に関係し得る LQG の計算の発展は，発展の重要な方向である．

LQG における Lorentz 不変性 Lorentz 抵触効果は LQG には存在**しない**かもしれない．LQG において Lorentz 抵触を期待する 2 つの理由がある．1 つは巨視的に Lorentz 不変な織物の短距離の構造が Lorentz 不変性を破り得ることである．しかしながら，全ての織物状態が Lorentz 不変性を破るか否かは明らかでない．単一のスピン・ネットワーク状態は Lorentz 不変ではあり得ないものの，このことはスピン・ネットワーク状態の量子力学的な重合せの状態もまた Lorentz 不変となり得ないことを意味しない．

2 つ目の理由は，よく言われることだが，最小の長さ (または最小の面積) が**必然的に** Lorentz 不変性を破るという主張である．その理由は以下のようである：もし観測者が最小の長さ l_{P} を測定すれば，このとき推進する観測者は l_{P} よりも短い，Lorentz 収縮した長さ $l' = \gamma^{-1} l_{\mathrm{P}}$ を観測し，したがって l_{P} は最小の長さではあり得ない．ここに $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ は Lorentz–Fitzgerald 収縮因子である．この主張は誤りである，と言うのも，それは量子力学を無視しているからである．

長さ，面積および体積は古典的な量ではない．それらは量子力学的な観測量である．もし観測者が何らかの系の長さ l_{P} を測定すれば，これは系が長さの演算子の固有状態にあることを意味する．同じ系の長さを測定する推進する観測者は異なる観測量 L' を測定しており，それは一般に L と交換しない．もし系が L の固有状態にあれば，一般にそれは L' の固有状態にはない．したがって，L' の異なる固有値を観測する確率の分布がある．L' の固有値は L の固有値と同じだろう：Lorentz 収縮するのは L' の期待値である．

[*141] Mukhanov は後に離散化はダイナミクスの帰結としてもなお起こり得ると提唱した．例えば，単一の面積の Planck 単位が失われる遷移をダイナミクスは強く選り好みし得る．

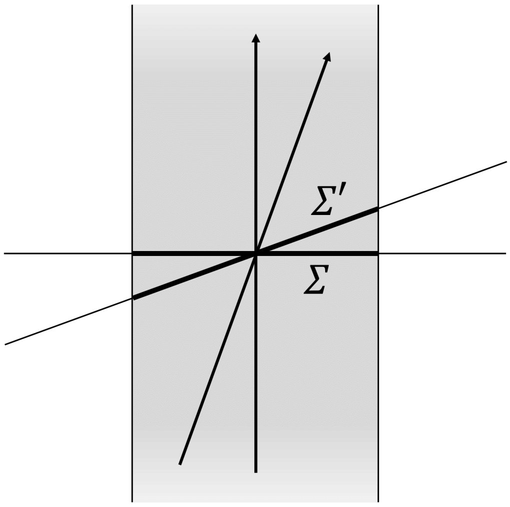


図 34　灰色の領域は物体の世界史 (world-history) を表す．2 本の矢印は 2 人の観測者の世界史を表す．太い線分 Σ と Σ' は物体の世界史と観測者の同時刻の面との交わりである．相対的に運動し，同じ物体の長さを測定する 2 人の観測者は，これら 2 つの異なる面上の重力場を測定する．Σ 上の重力場は Σ' 上の重力場と交換しない．よって 2 つの長さは交換しない．

状況は角運動量の L_z 成分に対するのと同じである．全スピン $= 1$ の量子系を考えよ．例えば観測者が L_z を測定し，固有値 $\hbar$ を得たとする．このことは角度 α だけ回転した第 2 の観測者が，固有値 ${L_z}' = \cos\alpha\hbar$ を観測することを意味するか？ もちろん違う．第 2 の観測者は平均値が ${L_z}' = \cos\alpha\hbar$ であるような確率分布で，やはり ${L_z}' = 0, \pm\hbar$ を測定する．状態と平均値は回転の際に連続的に変換するものの，固有値は同一に留まる．同様に，Lorentz 推進において状態と［平均・期待］値は連続的に変化するのに対し，固有値は同一に留まる．

長さ L と推進を受けた長さ L' が交換しない理由を理解するために，図 34 を考えよ．それは物体の世界史 (world-history) と，相対的に運動している 2 人の観測者によって測定される 2 つの長さを表している．2 人の観測者は，時間の隔たりを伴う 2 つの異なる線分 Σ と Σ' 上の重力場を測定することに注意せよ．時間的な隔たりにおいて自分自身と交換する量子場の演算子はないので，明らかに重力場 $e(x)$ の 2 つの関数

$$L = \int_\Sigma \sqrt{|e|} \qquad \text{and} \qquad L' = \int_{\Sigma'} \sqrt{|e|} \tag{8.58}$$

は交換しない．この点に関する詳しい議論と，推進を受けた幾何学的演算子の実際の構成については， [242] を見よ．

文献ノート

ループ量子宇宙論はほとんど Martin Bojowald によって発展してきた．初期の特異性がないことは [243] で導かれ，量子力学に駆動された (quantum-driven) インフレーションの可能性の提案は [244] で示された．レビューについては， [232] を見よ．ループ宇宙論は急速に発達している；現代的な (2007) 結果と参考文献のある最近の手引きは [235] である．

ループ量子重力の今一つの強力な最近の応用は，ブラックホールの中心における $r = 0$ の特異性を解消することである．アイデアは Leonardo Modesto [236] によって提示され，また Ashtekar と Bojowald [237] によって独立に考えられ発展させせられた．

ブラックホールの面積の増大に関する Hawking の定理は [245] にある．Bardeen, Carter および Hawking は [246] において，彼らの“ブラックホール力学の 4 法則”を提示した．Bekenstein エントロピーは [247] で，Hawking のブラックホールの放射輝度は [248] で提示された．この分野のレビューについては，[28] を見よ．

ブラックホールの熱力学を記述するために，LQG の面積の量子の勘定を用いる可能性に関する最初の提案は，Kirill Krasnov [249] によって提案された．LQG におけるブラックホール・エントロピーの議論については，私はここでは [239] に従った．境界としての地平面を用いる導出は [238] にある．ブラックホール・エントロピーは地平面の形のゆらぎに起因するというアイデアは，York [250] によって提起された．エントロピーにとっての地平面の自由度の重要性はそれ以来，異なる観点からも強調されてきており，例えば [251] を見よ．孤立した地平面の概念については，[252] を見よ．地平面の自由度の記述にとっての Chern–Simon の重要性は [253] で認識され，教科のゲージの自由度の重要性は [254] で強調された．Immirzi パラメータの新しい値を含む最近のレビューは [?]［原著ママ］である．

響きの (ringing) モードの振動数とスペクトルの関係は S Hod によって [255] で研究され，LQG におけるスピン 1 の面積の励起が響きのモードの振動数に関係している事実は，Olaf Dreyer によって [256] で指摘された．スピン 1 がスピン 1/2 よりも地平面の面積に寄与し得る理由については，あり得る力学的な (dynamical) 選択則に関して [257]，また面積演算子の順序化の役割に関して [227] を見よ．

Bekenstein–Mukhanov 効果は [258] で提示された (ただし $\alpha = 4\ln 2$)．この方向における初期の提案のレビューについては，[259] を見よ．ループ重力にこの効果が存在しないことに関する，ここで提示した議論は [260] に現れた．同じ結果が [173] で導かれた．

量子重力効果の評価を導く，織物にわたる伝播の半古典的な記述の可能性は，光子に対して [261] で導入され，光子とニュートリノに対して [261] で発展させられた．レビューについては，[232] を見よ．LQG は必ずしも Lorentz 不変性の破れを意味しないという事実については，[242] と [263] を見よ．量子重力における Lorentz 不変性の破れが示唆する困難について，[264] も見よ．Planck 尺度の観測が観測範囲に入っている可能性については，[241, 265, 266] を見よ．

第 9 章　量子時空：スピン・フォーム

古典力学は 2 つの異なる種類の定式化—— Hamilton 形式と Lagrange 形式——を許容する (私にはいまだ理由が分からない)．量子力学もそうであることに Feynman は気付いた：それは Hilbert 空間と演算子を用いて正準的に，あるいは経路にわたる和 (sum-over-paths) として共変的に定式化できる．2 つの定式化には異なる長所があり，一方において簡単な計算は他方において困難となり得る．一般に，Lagrange 形式はより単純であり，簡明かつ直観的であり，対称性と共変性を明白に留める．Hamilton 形式はより一般的であり，より強力であり，また量子論においてはるかにより厳密である．理想的な状況はもちろん，両方の定式化において理論を習得できることである．

これまで LQG の Hamilton 形式を議論してきた．本章では同じ理論の，Lagrange 形式における経路にわたる和の定式化の可能性を議論する．この定式化は別様には面にわたる和 (sum-over-surfaces)，状態和 (state-sum) と呼ばれ，“スピン・フォーム形式 (spinfoam formalism)”の名の下で今日に至る．スピン・フォーム形式は数学的によく定義され，おそらく Stephen Hawking による量子重力の幾何学にわたる和 (sum-over-geometries) としての定式化の，発散のないバージョンと見なせる．

スピン・フォーム形式はループ理論の Hamilton 形式バージョンに比べると発展していない．さらに，スピン・フォーム・モデルの一般的な構造は Hamilton 形式のループ理論と見事に一致する一方で，2 つの定式化の正確な関係 (その各々がいくつかのバージョンにある) は 3 次元においてしか厳密に確立されていない．しかし研究は最近，この方向に急速に進んでいる．

スピン・フォーム形式の目標は，量子重力における遷移振幅を計算する明確な手段を与えることである．それは経路にわたる和として表される．足し上げられる“経路”は“スピン・フォーム”である．スピン・フォームはスピン・ネットワークの掃く世界面と考えられる．スピン・フォームは背景独立な関係的な対象であり，帰属する時空を必要としない．スピン・ネットワークが空間を表すのと同じ意味で，スピン・フォーム自体が時空を表す．

スピン・フォームのアプローチの最も著しい側面は，驚くべき数の独立な研究の方向が同じ定式化へと収束している事実である．以下ではこれらの収束する研究の道のりをいくらか説明する．この収束はスピン・フォーム形式が，一般相対論的な場の量子論の経路にわたる和の定式化に対する，ある種の自然な一般的言語であることを示唆しているように見える．

この話題に関する優れたレビュー論文がいくらかある——章末の文献ノートを見よ．私は他のレビューで詳しく成されていることをここで繰り返さず，熱心な読者にはここで与える手引きを補完するために，これらのレビューを参照することを勧める，と言うのも，これは多様な観点からアプローチできる話題である．ここでは完璧な量子重力理論の我々の探求にとっての，これらのモデルの全般的な重要性に集中する．

9.1　ループからスピン・フォームへ

経路にわたる和　非相対論的な 1 次元の量子系を考えよ．x をその力学変数とする．系の伝播関数 $W(x,t,x',t')$ は式 (5.10) で定義される．Feynman が強調したように，$W(x,t,x',t')$ は量子系に関する完全な力学的 (dynamical) 情報を含んでいる．それは単に Hamilton 関数 $S(x,t,x',t')$ の指数に関係しており，Hamilton 関数は第 3 章で説明したように，系の古典的なダイナミクスをコードしている．第 5 章で説明したように，相対論的な定式化では $W(x,t,x',t')$ は，部分的観測量 x と t に対応する演算子の固有状態である状態 $|x,t\rangle$ 間の，射影演算子 P の行列要素：

$$W(x,t;x',t') = \langle x,t|P|x',t'\rangle_{\mathcal{K}} \tag{9.1}$$

として得られ，$\mathcal{K} = L_2[R^2, \mathrm{d}x\mathrm{d}t]$ はその上で部分的観測量 x と t に対応する演算子が定義されるところの，運動学的な Hilbert 空間である．

Richard Feynman の重要な直観は，伝播関数が経路積分

$$W(x,t,x',t') \sim \int_{\substack{x(t)=x \\ x(t')=x'}} \mathrm{D}[x(t)]\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S[x]} \tag{9.2}$$

として表せるということであり，ここで和は (x',t') で始まり (x,t) で終わる経路 $x(t)$ にわたり，また $S[x] = \int_{t'}^{t} \mathcal{L}(x(t),\dot{x}(t))\mathrm{d}t$ はこの経路の作用である．この積分を定義し操作するいくつかの技法がある．

Feynman と彼の後の大勢は，式 (9.2) を量子論の定式化の基本的な定義に採ることができると提案した．これはしたがって経路 $x(t)$ にわたる複素振幅 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}S[x]}$ の和に基づいている．

量子重力において経路にわたる和の定式化を利用するアイデアは古くからあり (付録 B を見よ) 広く研究されてきた．アイデアは 4 次元の計量にわたる経路積分

$$\int \mathrm{D}[g_{\mu\nu}(x)]\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_{\mathrm{GR}}[g]} \tag{9.3}$$

の定義を試みることである．特に，3 次元計量 g' と終・3 次元計量 g を考え，

$$W[g,g'] = \int_{\substack{g|_{t=1}=g\\ g|_{t=0}=g'}} \mathrm{D}[g_{\mu\nu}(x)]\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_{\mathrm{GR}}[g]} \tag{9.4}$$

で定義される，これらの間の遷移振幅を調べることができ，ここに S_{GR} は $t=0$ と $t=1$ の間の断片 (strip) の作用である．汎関数積分を微分同相不変な方法で定義すれば，座標 t に選ぶ特定の値は重要でない．汎関数積分に意味を与えるために量子力学と場の量子論で用いられる技法は，しかしながら，重力では失敗し，経路積分のアプローチの有効性は長らく粗い近似の範囲に留まっていた．その理由は，完全な理論をもたらす測度 $\mathrm{D}[g_{\mu\nu}(x)]$ の非摂動論的な定義が知られておらず，また背景の計量周りの摂動論的な定義は繰り込み不可能な発散をもたらすことである．

物理的空間の離散性の発見のおかげで，ループ重力により状況は変わった．理由を理解するために，少し一般的な考察をまとめる．

Hamilton 形式の理論から経路にわたる和へ　一般に，Feynman の経路にわたる和の**直接的な**定義に対して，我々は非常に優れた制御を有していない．測度の選択のような多くの問題に対して，正準理論はしばしば積分の正しい定義への最善の出発点を与える．Feynman はもちろん最初，汎関数積分を正準理論から導いた．彼は恒等演算子の分解 $1=\int \mathrm{d}x\,|x\rangle\,\langle x|$ を挿入して，発展演算子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t}$ を小さな時間ステップの発展演算子の積として書き，時間間隔 $\mathrm{d}t=(t-t')/N\to 0$ の極限をとることで，それを行った．汎関数積分はこのとき，

$$\int_{\substack{x(t)=x\\ x(t')=x'}} \mathrm{D}[x(t)]\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S[x]} \equiv \lim_{N\to\infty}\int \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{N-1}\,\langle x|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0\frac{(t-t')}{N}}|x_{N-1}\rangle\,\langle x_{N-1}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0\frac{(t-t')}{N}}|x_{N-2}\rangle \\ \cdots\langle x_2|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0\frac{(t-t')}{N}}|x_1\rangle\,\langle x_1|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0\frac{(t-t')}{N}}|x'\rangle \tag{9.5}$$

で定義される．正準理論はしたがって経路にわたる和を構成するのに用いることができる．これを量子重力において行えるか？ 問題は量子重力において，経路積分の正確な定義を与える Feynman–Kac 公式［文献 [427, p.163] にある］の類似物を得ることである．今のところ，この問題は未解決であり，経路にわたる和の定式化はまだ正準理論から厳密に導かれていない．しかしながら，我々はなお以下の戦略を用いて，この方向に進むことができる．

第 1 に，量子重力における経路にわたる和が持たねばならない，**一般的な構造**を示す形式的な式を書くことができる．すなわち，重力的な経路にわたる和の定式化の基礎を，正準理論から導ける．実際，まもなく見るように，少しの柔軟な形式的操作は直ちに，量子重力に対する一般共変な経路にわたる和の定式化が，空間の離散性により，かなり特別な性質を持たねばならないことを示す．これを以下で行う．第 2 に，この一般的な構造を持つ特定の理論的なモデルを研究できる．これは後に続く節で行う．

遷移振幅はスピン・ネットワーク間にある　重要な見解は伝播関数の引数における量 x が古典的な観測量ではなく，むしろこの変数の固有状態のラベルだということである．x が位置のような連続的なスペクトルを持つ観測量である限り，違いは重要でない．しかし x のスペクトルが非自明ならば，違いは重要となる．例えば，外力あるいは小さな非線形の摂動を受ける調和振動子を考えよ．与えられた x' に対して x を測定する振幅 $W(x,t;x',t')$ を問う代わりに，(摂動を受けていない) エネルギー E を測定する確率振幅 $W(E,t,E',t')$ を問題にしよう．これは

$$W(E,t,E',t') = \langle E|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0(t-t')}|E'\rangle \tag{9.6}$$

で与えられ，ここに $|E\rangle$ は固有値 E を持つ摂動を受けていないエネルギーの固有状態である．(H_0 は非相対論的なハミルトニアンであって，摂動を受けていないものではない．) ところが固有値 E は量子化されている：$E = E_n$，また $|n\rangle = |E_n\rangle$．したがって，$W(E,t,E',t')$ はスペクトルの中の値 $E = E_n$ に対してのみ定義される．伝播関数の引数は古典的なエネルギーではなく，離散的なエネルギー準位でなければならない．こうして，式 (9.6) は特別な形

$$W(n,t,n',t') \equiv W(E_n,t,E_{n'},t') = \langle n|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0(t-t')}|n'\rangle \tag{9.7}$$

でのみ意味を成す．

ここで積分 (9.4) を考えよ．これは 3 次元の幾何学の固有状態間の遷移振幅を定義せねばならない．第 6 章では 3 次元の幾何学の固有値は，3 次元の連続的な計量ではないことを見た．むしろ，それらは離散的なスペクトルを持ち，スピン・ネットワークでラベルされる．**したがって，量子重力における伝播関数はスピン・ネットワークの関数でなければならない．**例えば，式 (9.4) の代わりに，スピン・ネットワーク s' で表される量子化された 3 次元の幾何学が測定されたときに，スピン・ネットワーク s で表される量子化された 3 次元の幾何学を測定する確率振幅を与える量 $W(s,s')$ を研究しなければならない．

スピン・ネットワークの経歴　伝播関数 $W(s,s')$ を考えよ．7.4 節の終わりに議論したように，$W(s,s')$ を

$$W(s,s') = \langle s|P|s'\rangle_{\mathcal{K}} \tag{9.8}$$

の形に表せる．ここで $W(s,s')$ を経路にわたる和として表現する方法を含み得る，形式的な表現をいくらか書く．粗く言えば，演算子 P はハミルトニアン演算子 H の核への射影子である．H は縮退のないスペクトルを持つと試しに仮定すれば，形式的にこの射影子を

$$P = \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-Ht} \tag{9.9}$$

と書ける，と言うのも，もし $|n\rangle$ が H を対角化する基底であって E_n が対応する固有値ならば，このとき

$$P = \lim_{t\to\infty} \sum_n |n\rangle\, \mathrm{e}^{-Ht}\, \langle n| = \sum_n \delta_{0,E_n}\, |n\rangle\, \langle n|\,. \tag{9.10}$$

H は空間座標 $\vec{x}$ の関数なので，形式的に

$$P = \lim_{t\to\infty} \prod_x \mathrm{e}^{-H(x)t} = \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}^3x H(x)t} \tag{9.11}$$

と書ける［等号は“∼”に置き換えた方が好ましい］．よって，

$$W(s,s') = \lim_{t\to\infty} \langle s|\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}^3x H(x)t}|s'\rangle_{\mathcal{K}}\,. \tag{9.12}$$

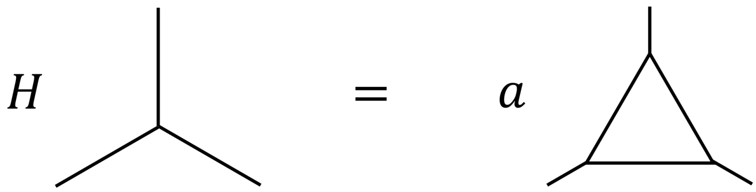


図 35　スピン・ネットワークの結節点に対する H の作用の図式

もし微分同相不変な方法で，H によって生成される 4 次元の伝播を定義できれば，極限は重要でなく，再び粗く，

$$W(s,s') = \langle s|\mathrm{e}^{-\int_0^1 \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3 x H(x)}|s'\rangle_{\mathcal{K}}. \tag{9.13}$$

と書ける．ここで式 (9.5) の右辺と同じ方法で，この表現を展開できる．恒等因子の分解 $1 = \sum_s |s\rangle\langle s|$ を挿入すると，

$$W(s,s') = \lim_{N\to\infty} \sum_{s_1,\cdots,s_N} \langle s|\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}^3 x H(x)\mathrm{d}t}|s_N\rangle_{\mathcal{K}} \langle s_N|\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}^3 x H(x)\mathrm{d}t}|s_{N-1}\rangle_{\mathcal{K}} \cdots \langle s_1|\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}^3 x H(x)\mathrm{d}t}|s'\rangle_{\mathcal{K}} \tag{9.14}$$

という形の表現を得る．小さな $\mathrm{d}t$ に対して指数を展開できる．固定された N において，展開の最初の項 ($\mathrm{e}^x = 1 + O(x)$) は低い N の経歴に等価な項を生成する．［つまり H が寄与しない行列要素は $\langle s_{n+1}|s_n\rangle = \delta_{n+1,n}$ となって積が縮まる．］したがって，和をスピン・ネットワークの配列 (sequences) にわたる和と見なすことができ，ここで配列は任意の長さを持ち得る．その結果，遷移振幅は 4 次元の場にわたる**積分**としては表されず，むしろ離散的な**スピン・ネットワークの経歴 σ にわたる和**

$$W(s,s') = \sum_\sigma A(\sigma) \tag{9.15}$$

として表される．経歴はスピン・ネットワークの離散的な配列 $\sigma = (s, s_N, \cdots, s_1, s')$ である．1 つの経歴に関する振幅は項の積

$$A(\sigma) = \prod_v A_v(\sigma) \tag{9.16}$$

であり，ここに v は経歴のステップのラベルであり，$A_v(\sigma)$ は行列要素

$$\langle s_{n+1}|\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}^3 x H(x)\mathrm{d}t}|s_n\rangle_{\mathcal{K}} \tag{9.17}$$

によって決定される．小さな $\mathrm{d}t$ に対して，Feynman が式 (9.5) で行ったように，これらの行列要素において H に関する線形項だけを残すことができる．ここで，ハミルトニアン演算子 H の作用は式 (7.21) で与えられる．それはスピン・ネットワークの結節点に作用する個々の項の和である．したがって，それは 1 つの結節点で H の作用だけ異なるスピン・ネットワーク s_{n+1} と s_n の間でのみ，消えない行列要素を持つ．(例えば) 3 価の結節点への，H の作用の典型的な項は図 33 に，あるいはより図式的に，図 35 に示されている．

まとめると，$W(s,s')$ をスピン・ネットワークの経路にわたる和として書ける；経路は図 33 に示されているような，個々のステップにより生成される；各ステップの振幅は対応する H の行列要素によって決定される：経歴の振幅は個々のステップの振幅の積である．

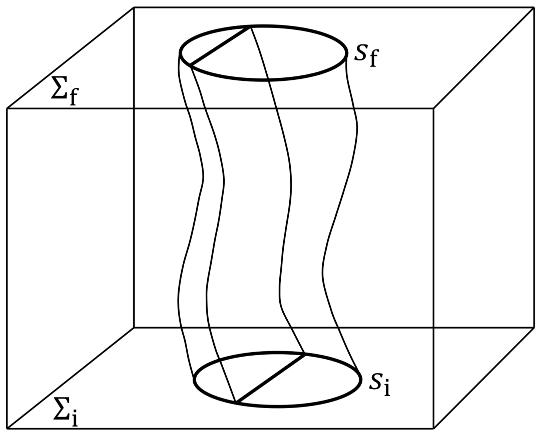


図 36　スピン・フォームを成す，終面 Σ_{f} 上のスピン・ネットワーク s_{f} へと交点なく発展する，始面 Σ_{i} 上のスピン・ネットワーク s_{i} の世界面．

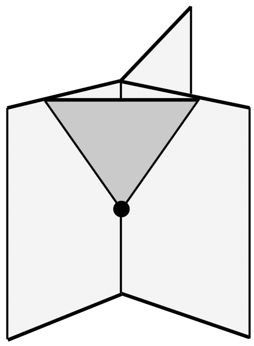


図 37　スピン・フォームの頂点

スピン・フォーム　スピン・ネットワークの経歴 $\sigma = (s, s_N, \cdots, s_1, s')$ はスピン・フォームと呼ばれる．より正確な定義は以下で与えられる．スピン・フォームは以下のように自然な表現を許容する．スピン・ネットワーク s のグラフが埋め込まれている，(座標時空を表す) 4 次元の空間を想像せよ．ここで，このグラフが 4 次元空間の“時間”座標に沿って上側に動き，世界面 (worldsheet) を掃き，各ステップにおいて H の作用の下で変化すると想像せよ．グラフのリンクの世界面 (worldsurfaces) を“面 (faces)”と呼び，それらを f で表す．グラフの結節点の世界線 (worldlines) を“辺 (edges)”と呼び，それらを e で表す．図 36 は文字 θ の形をした (theta-shaped) スピン・ネットワークの世界面を示している．[便宜的な背景多様体が何次元であれ，リンクの軌跡は 2 次元の面，結節点の軌跡は 1 次元の辺になる.]

ハミルトニアンは結節点に作用するので，スピン・ネットワークの経歴における個々のステップは，局所的に結節点の数を変える辺の分岐 (branching) として表すことができる．辺が分岐する点を“頂点 (vertices)”と呼び，それらを v で表す．

例えば，図 35 に示したハミルトニアン拘束の作用を反映して，図 37 のように辺は分岐して 3 本の辺を形成できる．

結果として得られる世界面が図 38 に示されており，それは単一の頂点を持つスピン・フォームを表す．2

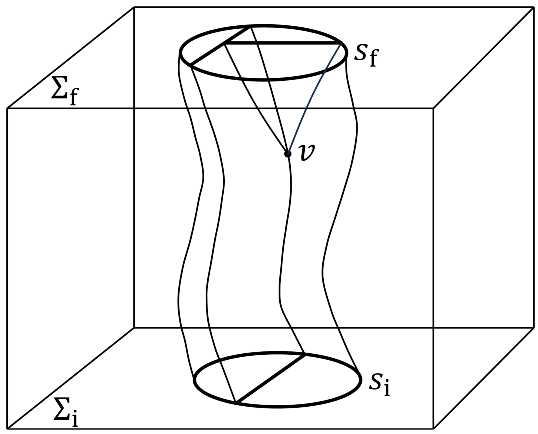


図 38　1 つの頂点を持つスピン・フォーム

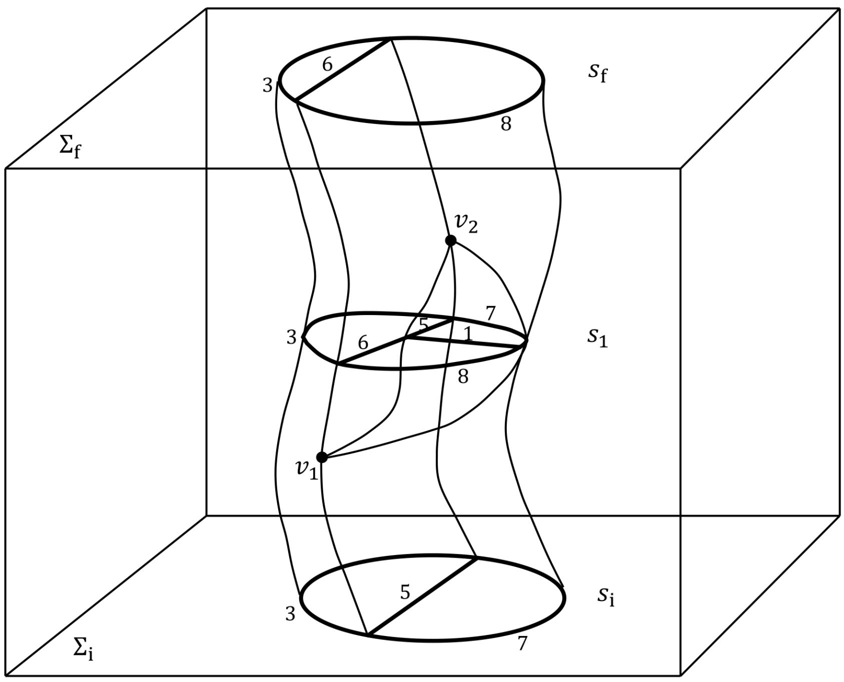


図 39　2 つの頂点を持つスピン・フォーム

つの頂点を持つスピン・フォームが図 39 に表されている．この方法で得るものは，辺 e で結びつく面 f と，頂点 v で結びつく辺 e の集まりである．これらの要素の集合とそれらの隣接関係によって定義される組合せ的な対象 Γ は，“2-複体 (two-complex)”と呼ばれる．

スピン・ネットワークはそのグラフのみによってではなく，そのリンクの色付け (表現) と結節点の色付け (結節因子) によっても定義される．対応して，一連のスピン・ネットワークによって定義される 2-複体 Γ は，面に関する既約表現 j_f と辺に関する結節因子 i_e で色付けされる．スピン・フォーム $\sigma = (\Gamma, j_f, i_e)$ は色付けされた面と辺を持つ 2-複体 Γ である．すなわち，それは各面 f に関する表現 j_f と各辺 e に関する結節因子

i_e を持つ 2-複体である．

9.2　スピン・フォーム形式

今やスピン・ネットワーク理論の一般的な定義を与える準備ができている．前節の議論は量子重力の経路にわたる和の定式化が，個々の頂点の振幅の積で与えられる振幅の，スピン・フォームにわたる和の形に持ち込めることを示している．

$$Z = \sum_{\Gamma} w(\Gamma) \sum_{j_f, i_e} \prod_{v} A_v(j_f, i_e) \tag{9.18}$$

のように定義される和を考えよ．和は 2-複体 Γ の集合と，表現 j と結節因子 i の集合にわたる．頂点の振幅 (vertex amplitude) と呼ばれる関数 $A_v(j_f, i_e)$ は各頂点 v に関する振幅である．それはその頂点に隣接する色の関数である．$w(\Gamma)$ は 2-複体のみに依存する重みの因子である．

面と辺に関する振幅 A_f と A_e は，原理的には A_v の再定義に含められるものの，それらも用いて表現 (9.18) を拡張した形

$$Z = \sum_{\Gamma} w(\Gamma) \sum_{j_f, i_e} \prod_{f} A_f(j_f) \prod_{e} A_e(j_f, i_e) \prod_{v} A_v(j_f, i_e) \tag{9.19}$$

に書き換えるのがしばしば便利である．これまで考えられてきたほとんどのモデルに対して，$A_f(j_f)$ は単に表現 j_f の次元 $\dim(j_f)$ である．よって (表記 $\sigma = (\Gamma, j_f, i_e)$ を用いると)

$$Z = \sum_{\sigma} w(\Gamma(\sigma)) \prod_{f} \dim(j_f) \prod_{e} A_e(j_f, i_e) \prod_{v} A_v(j_f, i_e) \tag{9.20}$$

を得る．これがスピン・フォーム形式の定義に採る一般的な表現である．

(i) 2-複体 Γ および関連する重み $w(\Gamma)$ の集合，
(ii) 表現 j と結節因子 i の集合，
(iii) 頂点の振幅 $A_v(j_f, i_e)$ と辺の振幅 $A_e(j_f, i_e)$

の選択が“スピン・フォーム・モデル”を定義する．我々はこれらのモデルのいくつかと，それらの重力との関係を次節で研究することになる．一般的に言って，頂点の振幅の選択 (iii) は正準理論におけるハミルトニアン演算子の特定の形の選択に対応する．

表現 (9.20) に関して著しいことは，後で見るように，多くの非常に異なるアプローチと技法が正確にこの公式に収束することである．おそらくこの種の表現は，背景独立で共変的な QGT の定式化の一般的な定義と捉えられる．

スピン・ネットワーク，スピン・フォーム，および (後で役割を演じる) 三角形分割 (triangulations) の要素を表すのに用いられる術語を，表 5 にまとめた．

9.2.1　境界

スピン・フォーム σ の境界はスピン・ネットワーク s である．このことはまさに我々がスピン・フォームを構成した方法から容易に帰結する．もし σ がスピン・ネットワーク s を境界に持つならば，このことを $\partial\sigma = s$ と書く．式 (9.20) と遷移振幅の関係は，与えられた境界を持つスピン・フォームにわたって和をとること

$$W(s) = \sum_{\partial\sigma = s} w(\Gamma(\sigma)) \prod_{f} \dim(j_f) \prod_{e} A_e(j_f, i_e) \prod_{v} A_v(j_f, i_e) \tag{9.21}$$

表 5　術語

	0 次元	1 次元	2 次元	3 次元	4 次元
スピン・ネットワーク：	結節点 (*node*)	リンク (*link*)			
スピン・フォーム：	頂点 (*vertex*)	辺 (*edge*)	面 (*face*)		
三角形分割：	点 (*point*)	線分 (*segment*)	三角形 (*triangle*)	四面体 (*tetrahedron*)	4-単体 (*four-simplex*)

表 6　スピン・フォーム・モデル (λ：宇宙定数，Tr：三角形分割)

モデル	古典論	2-複体	表現	頂点
Ponzano–Regge	3d GR	固定，双対 3d Tr	$SU(2)$	$\{6j\}$
Turaev–Viro	3d GR+λ	固定，双対 3d Tr	$SU(2)_q$	$\{6j\}_q$
大栗 *(TOCY)*	4d BF	固定，双対 4d Tr	$SO(4)$	$\{15j\}$
Crane–Yetter	4d BF+λ	固定，双対 4d Tr	$SO(4)_q$	$\{15j\}_q$
Barrett–Crane A	切断 4d GR	固定，双対 4d Tr	単純 $SO(4)$	$\{15j\}$
Barrett–Crane B	切断 4d GR	固定，双対 4d Tr	単純 $SO(4)$	$\{10j\}_{\mathrm{BC}}$
GFT A	4d GR	Feynman グラフ	単純 $SO(4)$	$\{15j\}$
GFT B	4d GR	Feynman グラフ	単純 $SO(4)$	$\{10j\}_{\mathrm{BC}}$

によって得られる．特に，スピン・ネットワーク s が連結しているならば，それは時空領域の連結した境界上の重力場の状態と解釈できる．例えば，時空の有限領域の境界である．

境界のスピン・ネットワークが 2 つの連結した要素 s と s' から成るならば [s, s' の各々が連結であって，必ずしも s と s' が連結していることを意味しない]，

$$W(s,s') = \sum_{\partial\sigma = s\cup s'} w(\Gamma(\sigma)) \prod_f \dim(j_f) \prod_e A_e(j_f, i_e) \prod_v A_v(j_f, i_e) \tag{9.22}$$

と書き，スピン・フォーム・モデルの和を式 (9.2) とのアナロジーで，重力場の 2 つの量子状態間の遷移振幅に対する経路にわたる和の定義と解釈する．

今のところ，$W(s,s')$ を 2 つの定式化において計算し，2 つが等価であることを証明できるという状況ではない．スピン・フォームの枠組みでは，モデルの定義に曖昧さがあるものの，これから見るように，遷移振幅を (逐次的に；order by order) 計算できる．Hamilton 形式では，他方で，たとえハミルトニアンの定義の曖昧さを無視したとしても，我々はまだ遷移振幅を計算できない．

9.3　モデル

ここでスピン・フォーム・モデルの重要な例を少しだけ説明する．それらの各々は式 (9.20) の具現化である．すなわち，それらの各々は 2-複体の組，表現と結節因子の組，および頂点と辺の振幅を選ぶことによって，式 (9.20) から得られる．これらのモデルは異なる理論に関係している：3 次元 (3d) と 4 次元 (4d) において，宇宙定数のない，およびある一般相対性理論，また BF 理論 (9.3.2 節を見よ) におけるもの．それらは表 6 に列挙されている．

これらのモデルは歴史的にスピン・フォーム量子重力の現在の定式化を導いた，自然な順序を成す．これは群多様体上で定義された補助場 (auxiliary field) の理論を用いて構成された，最後のもので表される．これは 4 次元の量子重力の完全で仮説的な経路にわたる和の定式化を表す．これらのモデルの順序は歴史的な興味があるだけではない：むしろ，それは完全なモデルに加わる材料を，順を追って導入することを可能にする．モデルは複雑さを増してきた．それらの各々は導入され，完全な理論の重要な特定の側面を説明している．以下は各モデルが定式化の構成に貢献してきた方法の，凝縮した下調べである (術語と概念は章の過程で明確になる).

(i) **Ponzano–Regge** 理論は 3 次元における重力の量子化である．それは量子重力における経路にわたる和がいかにして自然にスピン・フォームの形をとり，また何故，重力的な頂点は単純な不変な対象で表せるのかを，群の表現論から説明する．長い間，これらの単純な特性は 3 次元の特徴である，かつ/または理論が局所的な自由度を持たない (トポロジカルである) 事実を反映していると憶測されていた．他のモデルはこの憶測が誤りであることを示している．

(ii) **大栗 (Ooguri)**，または **TOCY (Turaev–Ooguri–Crane–Yetter)** モデルは定式化を 4 次元に拡張する．

(iii) **Barrett–Crane** モデルは定式化を，局所的な自由度を持つ理論へと拡張する．これを行う手がかりは，一定の拘束を加えることでトポロジカルな理論から GR が得られ，またこれらの拘束は和をとられる表現の集合への制約として，モデルに実装できるるという発見である．

(iv) モデルがトポロジカルでなくなるや否や，2-複体にわたる和は非自明になる．それを実装する方法は**群の場の理論** (*Group Field Theory* ; **GFT**) で与えられる．

9.3.1　3 次元の量子重力

3 次元の GR　3 次元における Riemann 的な一般相対性理論を考えよ．これは第 2 章の初めに与えた 4 次元の GR の定義のわずかな修正によって定義できる．3 次元では，重力場 e は R^3 の値を持つ 1 形式

$$e^i(x) = e^i_a(x)\mathrm{d}x^a \tag{9.23}$$

である．スピン接続 ω は $so(3)$ Lie 代数の値を持つ 1 形式

$$\omega^i(x) = \omega^i_a(x)\mathrm{d}x^a \tag{9.24}$$

であり，その曲率 2 形式を R^i で表す．理論を定義する作用は

$$S[e,\omega] = \int e_i \wedge R[\omega]^i. \tag{9.25}$$

ω の変分は Cartan 構造方程式 $\mathrm{D}e = 0$ を与える．e の変分は運動方程式 $R = 0$ を与え，それは時空が平坦であることを意味する[*142].

それにも関わらず，もし空間の多様体が非自明な大域的トポロジーを持つならば，理論は非自明である．例えば，異なる非等長の (nonisometric) 平坦なトーラスたちがある．平坦なトーラスは，例えば大域的な変数

[*142] g_{ab} を 3 次元の計量，R をその Ricci スカラーとして，Einstein–Hilbert 作用 $S[g] = \int \mathrm{d}^3x\sqrt{g}R$ は式 (9.25) と同じ運動方程式を与えるものの，e^i_a の行列式が負のときには式 (9.25) と符号が異なる．よって，2 つの作用の量子化は等価でない理論を導き得る．それらは同じ古典的な解を持つので，2 つのどちらを 3 次元の GR と呼ぶかは好みの問題である．

表 7　3 次元 (左側) と 4 次元 (右側) における，三角形分割 Δ とその双対 Δ^* の関係．下線［原著はイタリック］は 2-複体．丸括弧内は隣接要素．

Δ_3	Δ_3^*
四面体	<u>頂点</u> (4 辺，6 面)
三角形	<u>辺</u> (3 面)
線分	<u>面</u>
点	3 次元領域

Δ_4	Δ_4^*
4-単体	<u>頂点</u> (5 辺，10 面)
四面体	<u>辺</u> (4 面)
三角形	<u>面</u>
線分	3 次元領域
点	4 次元領域

である，その体積と 2 つの半径で特徴付けられる．3 次元の一般相対性理論のダイナミクスは，この種の大域的な変数のダイナミクスに帰着する．局所的な自由度がなく，大域的な自由度だけがあるこの種の理論は，トポロジカルな理論と呼ばれる*143．

離散化　ここで理論を離散化することで，3 次元の GR に対して汎関数積分 (9.3) の具体的な定義を与える．この目的のために，時空多様体の三角形分割 Δ を固定する．三角形分割の双対 (dual) Δ^* に，とりわけ Δ^* の 2-骨格 (two-skeleton) に取り組む方がより便利である．これらは以下のように定義される，表 7 を見よ．

Δ^* を得るために，Δ の各四面体の内部に頂点 v を置く；もし 2 つの四面体が同じ三角形 e を共有するならば，2 つの対応する頂点を三角形 e に双対な辺 e で結ぶ：三角形分割の各線分 f に対して，線分 f に共有される Δ の三角形に対応する辺に囲まれた，Δ^* の面 f を得る；最後に Δ の各点に対して，点に共有される線分に双対な面に囲まれた，Δ^* の 3 次元領域を得る．［以上，図 40 を参照*144．］4 次元では，Δ^* は 4-単体の各々の中に頂点を置く等して得られる．Δ^* の個々の頂点，辺および面 (とそれらの境界領域) は Δ^* の 2-骨格と呼ばれ，それはちょうど 2-複体である．

g_e を Δ^* の各辺に沿う ω のホロノミーとする．(接続 ω は代数に属し，$SO(3)$ の代数は $SU(2)$ の代数と同じである．ホロノミーを定義する際，ω を $SO(3)$ 接続か $SU(2)$ 接続と解釈するかを決めねばならない．$SU(2)$ の解釈を選ぼう．すなわち τ_i を Pauli 行列として，$g_e = \mathcal{P}\exp\left\{\int_e \omega^i\tau_i\right\}$ を定義する．)

l_f^i を Δ の線分 f に沿う e^i の線積分とする．我々はこれらを離散化の基本変数に選ぶ．離散化された理論の変数はしたがって，Δ^* の各辺 e に関する $SU(2)$ 群の要素 g_e と，Δ の各線分，あるいは等価的に Δ^* の面 f に関する R^3 の変数 l_f^i である．対応して，離散化された作用を

$$S[l_f, g_e] = \sum_f l_f^i \mathrm{tr}[g_f \tau_i] \tag{9.26}$$

と書くことができ，ここに

$$g_f = g_{e_1^f} \cdots g_{e_n^f} \tag{9.27}$$

*143 文献によっては“トポロジカルな場の理論”という表現は異なる意味で用いられる．例えば [267] では，それは有限または無限の自由度を持つ，あらゆる微分同相不変な理論を指すのに用いられている．これは，それら全ての理論の類似性と，それらの背景上の QFT との違いを強調するために成されている．ここでは本書を通じて強調してきたこの違いを，強調しないことのリスクはなく，私は一般的な語法に従うのを好む．

*144 あるいは図 40 の解釈に反して，文献 [416, p.93,p.107] の図では面は 3 本以上の線分に囲まれている．確かに線分を取り囲む Δ に双対な辺たちは，一般に (仮に最初に四面体の内部に採る頂点の位置を適当に調節しても) 同一平面上にあるとは限らない．しかし双対面が平らな面である必要はないとすれば，線分に双対な面を割り充てることは可能であり，その正確な位置と形状は重要ではない．

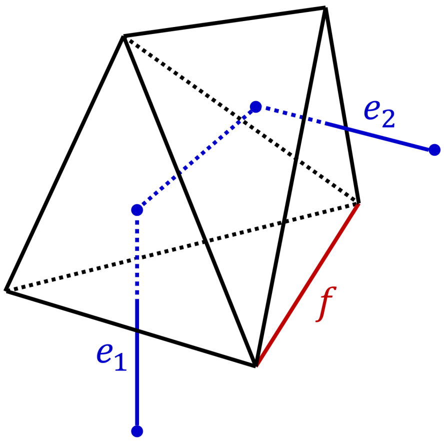


図 40　3 次元での三角形分割 Δ における四面体を 2 つ示した (青い丸印はその双対な点)．赤い線で示した線分 f に着目すると，隣接する 2 つの三角形には辺 e_1, e_2 が付随する (青線)．このとき 2 辺 e_1, e_2 の張る平面として Δ^* の双対な面 f が定義される．Δ の各点はこのような面によって隣接する点と分離され，その“陣地”ないし“守備範囲”を獲得する．それは双対な分割 Δ^* の 3 次元領域で表される．

は面 f を共有する辺 $e_1^f, \cdots, e_n^f$ に関する群の要素の積である．この作用を l_f^i に関して変分すると，運動方程式 $g_f = 1$ を得る，すなわち格子接続は平坦である．これを用いてこの作用を g_e に関して変分すると，各三角形の 3 辺 f_1, f_2, f_3 に対して運動方程式 $l_{f_1}^i + l_{f_2}^i + l_{f_3}^i = 0$ を得る．これは Cartan 構造方程式 $\mathrm{D}e = 0$ の離散化されたバージョンである．

経路積分　この離散化を用いて，経路積分を

$$Z = \int \mathrm{d}l_f^i \, \mathrm{d}g_e \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}S[l_f, g_e]} \tag{9.28}$$

と定義でき，ここに $SU(2)$ 上の測度は不変 Haar 測度である．l_f にわたる積分は直ちに (測度の定義に吸収させることにする，全体の規格化因子を除いて)

$$Z = \int \mathrm{d}g_e \prod_f \delta(g_{e_1^f} \cdots g_{e_n^f}) \tag{9.29}$$

を与える．ここで展開

$$\delta(g) = \sum_j \dim(j) \, \mathrm{tr} R^j(g) \tag{9.30}$$

を用いて，群多様体上のデルタ関数を展開でき，ここに和は $SU(2)$ のユニタリー既約表現にわたる．これを式 (9.29) に代入して，和と積を交換すると

$$Z = \sum_{j_1, \cdots, j_N} \prod_f \dim(j_f) \int \mathrm{d}g_e \prod_f \mathrm{tr} R^{j_f}(g_{e_1^f} \cdots g_{e_n^f}) \tag{9.31}$$

を得る．群にわたる積分を実行するのは難しくない．辺ごとに 1 つの積分がある．全ての辺はちょうど 3 つの面に共有されるので，各積分は

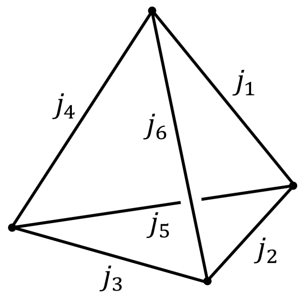
$$\int \mathrm{d}U \, R^{j_1}(U)^{\alpha}_{\alpha'} R^{j_2}(U)^{\beta}_{\beta'} R^{j_3}(U)^{\gamma}_{\gamma'} = v^{\alpha\beta\gamma} v_{\alpha'\beta'\gamma'} \tag{9.32}$$

の形であり，ここに $v^{\alpha\beta\gamma}$ はスピン j_1, j_2, j_3 表現間の (一意的な) 規格化された結節因子である．読者は頂点を表す記号 v を，結節因子を表すのに用いられるテンソル $v^{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ と混同してはならない．

右辺における 2 つの不変テンソルの各々は，(その群の要素が積分される) 辺を限る，2 つの頂点の一方に関係している．その添字はこの頂点において，他の辺に由来する添字と縮約を受ける．少し考えると，各頂点において 4 つのこれらのテンソルがあり，それらは縮約され，頂点を囲む 6 つの面に関する 6 つのスピンの関数

$$\{6j\} \equiv \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_6 \\ j_4 & j_3 & j_5 \end{pmatrix} \equiv \sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_6} v^{\alpha_3\alpha_6\alpha_2} v^{\alpha_2\alpha_1\alpha_5} v^{\alpha_6\alpha_4\alpha_1} v^{\alpha_4\alpha_3\alpha_5} \tag{9.33}$$

を与えることが分かる．添字の縮約のパターンは四面体の構造を再現する：もし (i) 表現 (6.86) を用いて各 3-テンソル $v^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ を表し，すなわちそれを 3 価の頂点として書き，(ii) 添字の縮約を接合する脚 (joining leg；開いた端点 (open ends)) で表し，(iii) 添字が属する表現を示すと，$6j$ 記号は



(9.34)

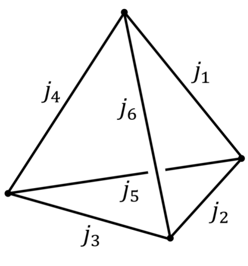
と表される．$\{6j\}$ と書き表されるこの関数は，$SU(2)$ の表現理論においてよく知られた関数である．それは 6 つの既約表現が与えられたときに構成できる自然な対象である．それは Wigner の $6j$ 記号と呼ばれる，付録 A.1 を見よ．

これらを総動員すると，3 次元の GR の分配関数に対する以下の形を得る：

$$Z_{\mathrm{PR}} = \sum_{j_1,\cdots,j_N} \prod_f \dim(j_f) \prod_v \{6j\}_v. \tag{9.35}$$

これが Ponzano–Regge スピン・フォーム・モデルである．表記 (6.86) を用いると，これを

$$Z_{\mathrm{PR}} = \sum_j \prod_f \dim(j_f) \prod_v$$



(9.36)

の形に書ける．これは以下の選択での，一般的な形 (9.21) を持つ：

- 和をとられる 2-複体の集合は単一の 2-複体から成る．これは 3 次元の三角形分割の双対の 2-骨格に選ばれる．
- 和をとられる表現は $SU(2)$ のユニタリー既約である．結節因子は自明である．
- 頂点の振幅は $A_v = \{6j\}$ である．

著しいことに，これらの単純な選択が 3 次元の GR の Ponzano–Regge 量子化を定義する．

頂点の振幅が単に Wigner の $6j$ 記号である事実はおそらく驚くべきことである．Wigner の $6j$ 記号は $SU(2)$ 表現理論の単純な代数的構成物である．一般相対性理論の作用は，重力的な相互作用の複雑性をコードしている複雑な表現である．さらにより著しい事実は，これから見るように，これが 3 次元の GR の特別に単純な形に関する，奇妙な偶然ではないことである：むしろ，単純な代数群の理論的な量と重力的な作用の同じ関係は，4 次元においても成り立つ．この関係はスピン・フォームのアプローチに対する興味を促す“奇跡”の 1 つである．

オリジナルの導出：Ponzano–Regge 仮定　上記の導出は Ponzano と Regge のオリジナルのものではない．オリジナルの導出の一般的な路線にも言及することは教育的である．Regge は固定された三角形分割の上で定義される，Regge 計算法 (Regge calculus) と呼ばれる，古典的な一般相対性理論の離散化を導入した．時空多様体の三角形分割 Δ を考え，その線分を f で表そう (文字 f の選択は以下で明瞭になる)．重力場は各線分 f に長さ l_f を関係付ける．他方，長さ l_f たちは連続的な計量を置き換える，離散的な変数の組と捉えられる．与えられた重力場の作用はこれらの長さの作用汎関数 $S_{\mathrm{Regge}}(l_f)$ で近似できる．連続的な作用が時空にわたる積分であるように，Regge 作用は単一の n-単体の作用の，三角形分割における n-単体 v たちにわたる和

$$S = \sum_v S_v \tag{9.37}$$

である．すると式 (9.3) の離散化されたバージョンを

$$Z = \int \mathrm{d}l_1 \cdots \mathrm{d}l_N \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}S_{\mathrm{Regge}}(l_f)} \tag{9.38}$$

の形に書ける．よって

$$Z = \int \mathrm{d}l_1 \cdots \mathrm{d}l_N \prod_v \mathrm{e}^{\mathrm{i}S_v(l_f)} \tag{9.39}$$

と書くことができ，ここに $S_v(l_f)$ は個々の n-単体の作用である．

Ponzano と Regge は 3 次元における一般相対性理論の場合に，1 つの付加的な仮定――各リンクの長さは Planck 長さ $l_{\mathrm{P}} = 1$ となる単位系で，離散的な値

$$l_n = j_n, \qquad j_n = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \cdots \tag{9.40}$$

しかとり得ないという仮定――の下で，積分 (9.39) を研究した．この仮定は Ponzano–Regge 仮定と呼ばれる．Ponzano と Regge はそれに対していかなる正当化も与えていない．彼らはそれを単に長さの倍数の離散化として導入した．これは時空の三角形分割に加わる，**第 2** の離散化であることに注意せよ．その物理的な意味はずっと後で明らかにされ，私は後でそれに戻るつもりである．Ponzano–Regge 仮定 (9.40) の下で，式 (9.39) は

$$Z_{\mathrm{PR}} = \sum_{j_1, \cdots, j_N} \prod_v \mathrm{e}^{\mathrm{i}S_v(j_n)} \tag{9.41}$$

となる．3 次元では，3-単体 (四面体) v の Regge 作用は，v の線分 f にわたる和

$$S_v = \sum_f l_f \theta_f(l_f) \tag{9.42}$$

として書くことができ，ここに θ_f は線分 f の二面角 (dihedral angle)，すなわち，線分に付随する三角形たちの外向き法線たちの間の角である．この作用は Ricci スカラー曲率の積分の近似であることを証明できる．

Ponzano–Regge 仮定の下で，したがって，S_v は **6 つの**スピン $j_1, \cdots, j_6$ の関数 $S_v(j_n)$ である (四面体は 6 本の辺を持つ).

“奇跡”: 記号における GR のダイナミクス　Ponzano と Regge の驚くべき発見は，Wigner の $6j$ 記号が一般相対性理論の作用を近似することであった．より正確には，大きな j たちの極限で，漸近公式

$$\{6j\} \sim \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_v(j_n)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}S_v(j_n)}\right) + \frac{\pi}{4} \tag{9.43}$$

が得られることを彼らは示せた．項 $\pi/4$ は古典的なダイナミクスに影響しない．式 (9.43) における 2 つの指数の項は，5.2.3 節で見出した 2 つの項とアナロガスである；特にその節の最後の議論を見よ．古典論は座標時間における前方と後方への伝播を区別せず，経路積分はその 2 つを足す．式 (9.43) における 2 つの項はこれら 2 つの伝播に対応する．式 (9.43) を式 (9.41) に代入し，三角形分割-独立性を課して (以下を見よ) 規格化因子を定めると，式 (9.35) が得られ，それは 3 次元の量子重力に対する離散化された経路積分として，Ponzano と Regge が提案した表現である．

Ponzano–Regge 仮定の物理的な意味　本章の初めに注意したように，経路積分は古典場の間ではなく，場の演算子の固有状態間の遷移振幅を定義する．Ponzano–Regge 経路積分 (9.35) は，2 次元の三角形分割のリンクが長さ l_f を持つ，三角形分割された 2 次元の面の間の遷移振幅を定義する．これらの長さは，Ponzano–Regge 仮定の下で，量子化されている．したがって Ponzano–Regge 仮定は，3 次元の量子重力において長さが量子化されるという物理的な仮定と等価である．ここで，この長さの量子化は仮定ではなく，ループ量子重力の**結果**である．実際，第 6 章で説明した面積が量子化されるという結果が，3 次元において**長さ**の量子化に読み替えられるのを理解するのは困難でない．したがって，Ponzano–Regge 仮定のもたらす重要な付加的なインプットは，ループ重力によって物理的に正当化される．

前の導出では，長さの離散化は積分上の以下の操作から導かれた．第 1 に，連続変数 l_f^i にわたって積分し，デルタ関数を得た (式 (9.29))．次いで第 2 に，式 (9.30) においてこのデルタ関数を和で表現した．この前後への変換の意味を理解するために，以下の例を考えよ．x を区間 $(-\pi, \pi)$ の変数とする．

$$\int \mathrm{d}p \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} = 2\pi\delta(x), \tag{9.44}$$

また

$$\sum_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_n x} = 2\pi\delta(x) \tag{9.45}$$

が成り立ち，ここに $p_n = n$．ここでデルタ関数 $\delta(x)$ はコンパクトな $(-\pi, \pi)$ 区間の関数上である．したがって，このコンパクトな区間上の関数を扱う限り，積分を和に置き換えることができる．これはまさに式 (9.29) と式 (9.31) の間で我々が行ったことである．コンパクトな空間はホロノミーが値をとるところの群多様体である．

コンパクトな区間上の“Fourier 成分”が離散的であるという数学的事実はもちろん，コンパクトな空間の値をとる変数に共役な量は量子化されるという物理的事実と密接に関係している．実際，これは 4 次元における面積の量子化と 3 次元における長さの量子化の起源である．

実に式 (9.45) における p_n は，コンパクトな変数 x に共役な，式 (9.44) における連続変数 p の，量子化された値と見なせる．同様に，表現 j_e は連続変数 l_e の量子化と考えられる．より正確には，l_f^i をスピン j_f 表現の生成子に同定し，線分 f の長さ $|l_f|$ を表現 j_f の 2 次の Casimir 演算子の平方根に同定することができる．

面にわたる和　式 (9.35) における表現にわたる和には，面にわたる和としての見事な解釈がある．三角形分割 Δ と，Δ^* の面に対する表現 j_f の特定の割り当てを考えよ．3 つの面 f, f', f'' を共有する辺 e を考えよ．3 つの表現 $j_f, j_{f'}, j_{f''}$ が Clebsch–Gordan 関係 (A.10)–(A.11) を満たす場合にのみ，e の結節因子は消えない (したがってスピン・フォームの振幅はノンゼロである)．これが成り立つと仮定し，$2j_f$ 枚の基本的な平行な面を各面 f に関係付ける．各辺を横切ってこれらの基本的な面を繋げる．制約 (A.10)–(A.11) はちょうど，その下で面を繋ぐことができ，各辺を横切ってそれらを繋ぐ方法がただ一つあるような条件である．(j_f から $j_{f'}$ へ，$j_{f'}$ から $j_{f''}$ へ［原著 p.338 は from $j_{f'}$ to $j_{f''}$ の“to”が抜けている]，そして j_f から $j_{f''}$ へ横断する面がそれぞれ，a, b および c 枚あり，また

$$2j_f = a + c, \qquad 2j_{f'} = a + b, \qquad 2j_{f''} = b + c.) \tag{9.46}$$

この方法で我々は Δ^* の 2-骨格を覆う (wrap around)，境界のない面を得る．そのような面の各々はスピン $= 1/2$ を担う．

式 (9.35) における表現にわたる和はしたがって，Δ^* の 2-骨格の周りにこれらスピン 1/2 の面を覆う，全ての方法にわたる和と見なせる．面 f の色付け j_f は面上の全スピンである，すなわち，スピン 1/2 の面の半数が f 上を過ぎる．

発散：泡　Ponzano–Regge モデルは赤外発散に悩まされる．それらは全てのスピン・フォーム・モデルにおいて再現される，特定の構造を持つ．

通常の QFT の Feynman ダイアグラムでは，発散は Feynman ダイアグラムにおけるループ，すなわち閉曲線に関係する．ループがなければ，発散は現れない，と言うのも，頂点における運動量の保存が内部の伝播関数の運動量の値を拘束するからである．スピン・フォーム・モデルにおいて，(積分される) 内部運動量の役割は (和をとられる) 表現が演じる．それらは辺において，運動量の保存の役割を演じる，辺での Clebsch–Gordan 条件によって拘束される．対応して，発散は通常の Feynman ダイアグラムにおけるようにループに関係するのではなく，むしろ“泡 (bubbles)”に関係する．泡は閉じた 2 次元の面を成す，Δ^* における面 f の集まりである．もし泡を成す面に関する表現の各々を同じ量 j だけ増価させれば，このとき関係 (A.10)–(A.11) は依然として満たされる，と言うのも，もし $j_f, j_{f'}, j_{f''}$ が式 (A.10)–(A.11) を満たすならば，$j_f + j, j_{f'} + j, j_{f''}$ もそうだからである．

前節で説明した面にわたる和の描像は，結果として現れる発散の明快な理解を与えてくれる：我々は常に泡に覆われる，任意の枚数のスピン 1/2 の面を加えることができる．

最小の泡の配位は“基本的な泡 (elementary bubble)”である．それは四面体のように，互いに繋がる 4 つの三角形状の面から成る．この基本的な泡は，Δ^* において 4 つの頂点が互いに接続している場合に，また等価的に，Δ において 4 つの四面体が互いに接続している場合に現れる．この配位は例えば単一の四面体を，内部の点を選んでそれを 4 つの頂点と結び，4 つの四面体に分割することで得られる．表現 (9.29) において，この配位は Z に対する寄与

$$A_{\text{bubble}} = \int \mathrm{d}g_1 \cdots \mathrm{d}g_6 \, \delta(g_1 g_2 g_6^{-1}) \delta(g_3 g_4 g_6) \delta(g_4 g_1 g_5^{-1}) \delta(g_2 g_3 g_5) \tag{9.47}$$

を与える (式 (9.34) を見よ)．積分は直接的であり，発散する表現

$$A_{\text{bubble}} = \delta(0) \tag{9.48}$$

を与える．同じ結果は表現にわたる和においても得られる．例えば，基本的な泡に接続する全ての面のスピンが消えると仮定せよ．このとき

$$A_{\text{bubble}} = \sum_j (\dim(j))^4 (\{6j\}(j,j,j,0,0,0))^4. \tag{9.49}$$

定義 (9.33) から，

$$\{6j\}(j,j,j,0,0,0) = v^{\alpha_1\alpha_2} v^{\alpha_1\alpha_3} v^{\alpha_2\alpha_3}. \tag{9.50}$$

規格化された結節因子 $v^{\alpha_1\alpha_2}$ は $v^{\alpha_1\alpha_2} = \delta^{\alpha_1\alpha_2}/(\dim(j))^{1/2}$ であり，

$$\{6j\}(j,j,j,0,0,0) = \dim(j)^{-3/2} \dim(j) = \dim(j)^{-1/2} \tag{9.51}$$

を与える．これを式 (9.49) に代入すると

$$A_{\text{bubble}} = \sum_j (\dim(j))^2 \tag{9.52}$$

がもたらされ，式 (9.30) から明らかなように，これは式 (9.48) と等価である．

Regge 三角形分割の描像ではこの発散は，格子の残りと 4 本の線分で接続する Regge 格子の点がある場合に対応する．このときこれら 4 本の線分を任意に長くできる．幾何学的には，これは 3 次元の (離散化された) 多様体から現れる，長く細い“棘 (spike)”を表す．

これは大きな j_f たち，すなわち大きな長さに関係するので，赤外発散であることに注意せよ．それは理論に存在しない紫外発散には関係しない．Ponzano と Regge はこの発散を切り捨てるための繰り込みの手続きを開発した．

Turaev–Viro　モデルの発散を取り除く興味ある方法は，群 $SU(2)$ の表現理論を，単位の平方根 (root of unity) に選ばれる q を持つ量子群 $SU(2)_q$ の表現理論に置き換えることである．次元と Wigner の $6j$ 記号のいずれも，この量子群に対してよく定義される．この量子群の既約表現は個数において有限であり，したがって和は有限である．この和は Turaev–Viro 不変量と呼ばれる．さらに，群の $SU(2)$ から $SU(2)_q$ への変形は単に古典的な作用への宇宙項の追加に対応することを主張できる．すなわち，作用

$$S[e,\omega] = \int \epsilon_{ijk} e^i \wedge \left(R[\omega]^{jk} - \frac{\lambda}{3} e^j \wedge e^k \right) \tag{9.53}$$

に対応する．この問題の優れた議論が [231] に見られる．

三角形分割-独立性　Ponzano と Regge による著しい結果は三角形分割-不変性である：式 (9.35) で定義される量 Z は選んだ 3 次元多様体の大域的なトポロジーに依存するものの，Δ には，すなわち多様体を三角形分割する方法には依存しない．特に，最小限の三角形分割を選ぶか，非常に細かい三角形分割を選ぶかに関わらず，分配関数は変わらない．

三角形分割-不変性の証明は，繰り込みの手続きが必要な Ponzano–Regge の場合には厄介である．他方，あらゆるものが有限な Turaev–Viro の場合には，それは明瞭な定理である．Turaev–Viro の和はコンパクトな 3 次元多様体の三角形分割を用いて定義されているものの，それはよく定義された 3 次元多様体の不変量である．

三角形分割-不変性は，3 次元の GR がトポロジカルな理論であるという事実の帰結である．理論は局所的な自由度を持たないので，離散化の際に我々は本当に自由度を失わない．通常，離散化は短距離の自由度を損

なうものの，この理論には短距離の自由度がない．よって，理論の三角形分割されたバージョンは完全な理論と同じ数の自由度を持ち，三角形分割を精密にすることはこの数を変えない．

表現 (9.35) の三角形分割-不変性は重要な数学低性質である．それは多くの数学的な仕事を触発した．しかし局所的な自由度を持つためトポロジカルな理論ではない 4 次元の GR において，三角形分割-不変性が成り立つと我々は期待しない．したがって，量子重力の問題の観点からは，三角形分割-不変性は Ponzano–Regge 理論の比較的興味のない側面である．それは後で研究する一般化を生き延びない．

9.3.2 BF 理論

上の構成を 4 次元へと拡張しよう．第 1 歩として GR を考えるのではなく，トポロジカルであって，トポロジカルな 3 次元の GR の 4 次元への単純な拡張である，BF 理論と呼ばれる，ずっと単純な 4 次元の理論を考える．群 $SO(4)$ に対する BF 理論を考えよう．これは 2 つの場によって定義される：$SO(4)$ の Lie 代数に属する値を持つ 2 形式 B^{IJ} と，$SO(4)$ 接続 ω^{IJ} である．作用は式 (9.25) の直接的な一般化

$$S[B,\omega] = \int B_{IJ} \wedge F^{IJ}[\omega] \tag{9.54}$$

であり，ここに F は ω の曲率 2 形式である．ここでは R の代わりに記法 F を用いる，と言うのも，それがこの文脈において標準的 (であり，また理論の名前“BF”の由来) だからである．

3 次元の GR に対して採用したのとまさに同じ手順で，理論を離散化して経路積分を定義できる．再び正確に式 (9.29) を，またここから，和が $SO(4)$ の既約表現にわたり，2-複体が 4 次元の三角形分割の双対における 2-骨格であるというだけの違いのある，式 (9.31) を得る．

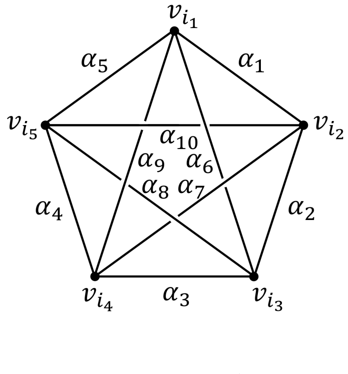
ここでも群にわたる積分を実行するのは難しくない．ただしここでは全ての辺は 3 つではなく，4 つの面に共有される．すると式 (9.32) の代わりに，積分

$$\int \mathrm{d}U\, R^{j_1}(U)^{\alpha}_{\alpha'} R^{j_2}(U)^{\beta}_{\beta'} R^{j_3}(U)^{\gamma}_{\gamma'} R^{j_4}(U)^{\delta}_{\delta'} = \sum_i v_i^{\alpha\beta\gamma\delta} v^i_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \tag{9.55}$$

を得る．ここで添字 i はスピン j_1, j_2, j_3, j_4 の表現間の結節因子の空間における，直交基底 $v_i^{\alpha\beta\gamma\delta}$ をラベルする．したがって各面に対する表現にわたる和に加えて，各辺に対する結節因子にわたる和を得る．各頂点には今，10 個の表現 (なぜなら頂点は 10 枚の面に共有される) と 5 つの結節因子がある．それらは関数

$$\begin{aligned}\{15j\} \equiv &\mathcal{A}(j_1, \cdots, j_{10}, i_1, \cdots, i_5) \\ \equiv &\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_{10}} v_{i_1}^{\alpha_1\alpha_6\alpha_9\alpha_5} v_{i_2}^{\alpha_2\alpha_7\alpha_{10}\alpha_1} v_{i_3}^{\alpha_3\alpha_7\alpha_8\alpha_2} v_{i_4}^{\alpha_4\alpha_9\alpha_7\alpha_3} v_{i_5}^{\alpha_5\alpha_{10}\alpha_8\alpha_4}\end{aligned} \tag{9.56}$$

を定義し，ここに添字 α_n は表現 j_n に属する．添字の縮約のパターンは 4-単体 (の 1-骨格) の構造



(9.57)

を再現する．

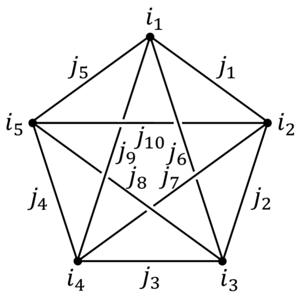
関数 (9.56) は $\{15j\}$ と書き表される．もし群が $SU(2)$ ならば結節因子は内部の仮想的なリンクの表現でラベルでき，よってこの関数は 15 個のスピンに依存する事実に，名前は由来する［式 (A.27) の箇所を参照］．

全てを組合せると，以下の形の 4 次元 BF 理論の分配関数

$$Z_{\mathrm{TOCY}} = \sum_{j_f, i_e} \prod_f \dim(j_f) \prod_v \{15j\}_v \tag{9.58}$$

が得られ，我々はこれを

$$Z_{\mathrm{TOCY}} = \sum_{j_f, i_e} \prod_f \dim(j_f) \prod_v \tag{9.59}$$



と書く．

この表現は TOCY モデル (Turaev, 大栗, Crane および Yetter に因む)，あるいは大栗モデルと呼ばれる．それは以下の選択での，一般的な形 (9.21) を持つ：

- 和をとられる 2-複体の集合は単一の 2-複体から成る．これは 4 次元の三角形分割の双対の 2-骨格に選ばれる．
- 和をとられる表現は $SO(4)$ のユニタリー既約である．
- 頂点の振幅は $A_v = \{15j\}$ である．

これらの選択が 4 次元 BF 理論の量子化を定義する．

発散と Crane–Yetter モデル　Ponzano–Regge モデルに対するように，和 (9.58) は赤外発散に悩まされる．典型的な発散はやはり“泡”に関係する．基本的な泡はここでは互いに接続する Δ^* の 5 つの頂点から成る．Δ では，これは互いに接続する 5 つの 4-単体に対応する．すなわち単一の 4-単体を，内部に単一の点を加えてそれを頂点と結び，5 つの 4-単体に再分割することで得られる配位である．Ponzano–Regge モデルに対して行ったように，表現 (9.29) から始めて，この発散の次数 (degree) を計算できる．今の場合，積分変数とデルタ関数のパターンは式 (9.57) で与えられる．それは

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{bubble}} = \int & \mathrm{d}g_1 \cdots \mathrm{d}g_{10}\, \delta(g_1 g_2 g_6^{-1}) \delta(g_2 g_3 g_7^{-1}) \delta(g_3 g_4 g_8^{-1}) \delta(g_4 g_5 g_9^{-1}) \delta(g_5 g_1 g_{10}^{-1}) \\ & \times \delta(g_1 g_7 g_8) \delta(g_2 g_8 g_9) \delta(g_3 g_9 g_{10}) \delta(g_4 g_{10} g_7) \delta(g_5 g_6 g_8) \end{aligned} \tag{9.60}$$

を与える．積分は直接的であり，発散する表現

$$A_{\mathrm{bubble}} = \delta^4(0) \tag{9.61}$$

を与える．発散は量子群 $SO(4)_q$ に引き継ぐことで解消される．量子 $15j$ 記号の定義は注意を要するものの，与えることができる．結果として得られるモデルは有限で三角形分割-独立である．それは Crane–Yetter モデルと呼ばれる．その古典的な極限は BF 理論 + 宇宙項に関係していることを，示すことができる．

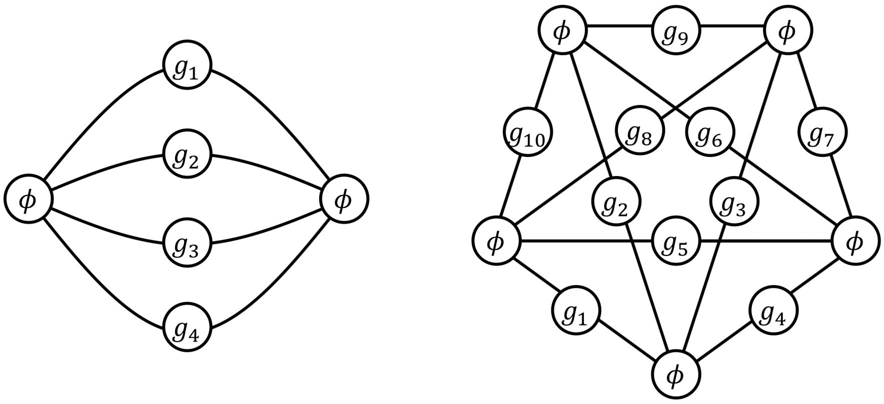


図 41　作用における運動項とポテンシャル項の構造

9.3.3　スピン・フォーム/GFT 双対性

Ponzano–Regge および TOCY モデルを一方，群上で定義された一定の特定の QFT たち (群の場の理論 (Group Field Theory)，または GFT) を他方として，それらの間には驚くべき双対性がある．この双対性は以下で重要な役割を演じる．ここではそれを 4 次元の場合に説明する．

$G = SO(4)$ の 4 つの複製の Descartes 積上における実場 $\phi(g_1, g_2, g_3, g_4)$ を考えよ．ϕ は対称的であり，

$$\phi(g_1, g_2, g_3, g_4) = \phi(g_1 g, g_2 g, g_3 g, g_4 g) \qquad (\forall\, g \in SO(4)) \tag{9.62}$$

の意味で $SO(4)$ 不変であることを要求する．作用

$$\begin{aligned} S[\phi] =& \frac{1}{2} \int \prod_{i=1}^{4} \mathrm{d}g_i\, \phi^2(g_1, g_2, g_3, g_4) \\ &+ \frac{\lambda}{5!} \int \prod_{i=1}^{10} \mathrm{d}g_i\, \phi(g_1, g_2, g_3, g_4)\phi(g_4, g_5, g_6, g_7)\phi(g_7, g_3, g_8, g_9)\phi(g_9, g_6, g_2, g_{10})\phi(g_{10}, g_8, g_5, g_1) \end{aligned} \tag{9.63}$$

で定義される QFT を考えよ．ポテンシャルの (5 次の) 項は 4-単体の構造を持つ：積における 5 つの場の各々を，4 本の脚――各 g_i に 1 本ずつ――を持つ結節点で表し，同じ引数に対応する脚の組を繋ぐと，4-単体 (の 1-骨格) を得る，図 41 を見よ．

この場の理論に関する著しい事実は以下である．GFT の分配関数の Feynman 展開

$$Z = \int \mathcal{D}\phi\, \mathrm{e}^{-S[\phi]} \tag{9.64}$$

は Feynman グラフにわたる和

$$Z = \sum_{\Gamma} \frac{\lambda^{v[\Gamma]}}{\mathrm{sym}[\Gamma]} Z[\Gamma] \tag{9.65}$$

で与えられることが判明し，ここに Feynman グラフの振幅は

$$Z[\Gamma] = \sum_{j_f, i_e} \prod_f \dim(j_f) \prod_v \{15j\}_v. \tag{9.66}$$

ここに Γ は Feynman グラフ，$v[\Gamma]$ はその頂点の数，また $\mathrm{sym}[\Gamma]$ はその対称性因子 (symmetry factor) である．理論の Feynman グラフ Γ は 2-複体としての自然な付加的な構造を持つ．運動量にわたる Feynman 積分は，2-複体の面と辺に関する $SO(4)$ 表現 j_f と結節因子 i_e にわたる，離散的な和である (なぜなら QFT が定義されるところの空間は離散的である)．さらに，与えられた 2-複体 Γ の各々に対して，運動量にわたる Feynman 和は**正確**にその 2-複体上で定義される TOCY モデルである．実際，式 (9.66) の右辺は式 (9.58) の右辺に等しい！ すなわち，

$$Z[\Gamma] = Z_{\mathrm{TOCY}}. \tag{9.67}$$

これらの結果の証明は QFT における摂動展開の手法の直接的な応用と，群のユニタリー既約表現で与えられる基底を用いて群上の関数をモード展開することを可能にする Peter–Weyl 定理の利用である．これを以下でいくらか詳しく行う．

モード展開　まず，(“運動量空間”において) 場 $\phi(g_1, g_2, g_3, g_4)$ をモードに展開し，これらのモードを用いて作用を書き換える．$SO(4)$ 上の 2 乗可積分関数 $\phi(g)$ を考えよ．Peter–Weyl 定理によれば，この関数をユニタリー既約表現 j の行列要素 $R^{(j)}_{\alpha\beta}(g)$ に展開できる：

$$\phi(g) = \sum_j \phi^j_{\alpha\beta} R^{(j)}_{\alpha\beta}(g). \tag{9.68}$$

添字 α, β は対応する表現空間の基底ベクトルをラベルする．対応して，場は

$$\phi(g_1, g_2, g_3, g_4) = \sum_{j_1, \cdots, j_4} \phi^{j_1 \cdots j_4}_{\alpha_1\beta_1 \cdots \alpha_4\beta_4} R^{(j_1)}_{\alpha_1\beta_1}(g_1) \cdots R^{(j_4)}_{\alpha_4\beta_4}(g_4). \tag{9.69}$$

のようにモードに展開できる．左からの群の作用の下での不変性 (9.62) を用いると，

$$\phi(g_1, g_2, g_3, g_4) = \int_{SO(4)} \mathrm{d}g\, \phi(gg_1, gg_2, gg_3, gg_4) \tag{9.70}$$

と書ける．ここにモード展開 (9.69) を代入し，4 つの群要素の積の積分に対して表現 (9.55) を用いると，

$$\phi(g_1, g_2, g_3, g_4) = \sum_{j_1, \cdots, j_4} \phi^{j_1 \cdots j_4}_{\alpha_1 \cdots \alpha_4 i} R^{(j_1)}_{\alpha_1\beta_1}(g_1) \cdots R^{(j_4)}_{\alpha_4\beta_4}(g_4) v^i_{\beta_1 \cdots \beta_4} \tag{9.71}$$

と書くことができ，ここで

$$\phi^{j_1 \cdots j_4}_{\alpha_1 \cdots \alpha_4 i} = \phi^{j_1 \cdots j_4}_{\alpha_1\beta_1 \cdots \alpha_4\beta_4} v^i_{\beta_1 \cdots \beta_4} \tag{9.72}$$

を定義した．我々は量 $\phi^{j_1 \cdots j_4}_{\alpha_1 \cdots \alpha_4 i}$ を場の Fourier 成分として用いる．これらを用いて書くと，作用の運動項は

$$\frac{1}{2} \int \prod_{i=1}^{4} \mathrm{d}g_i\, \phi^2(g_1, \cdots, g_4) = \frac{1}{2} \sum_{j_1, \cdots, j_4} \sum_i \phi^{j_1 \cdots j_4 i} \phi^{j_1 \cdots j_4 i} \tag{9.73}$$

となる．相互作用項は

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda}{5!} \int \prod_{i=1}^{10} \mathrm{d}g_i\, \phi(g_1, g_2, g_3, g_4)\phi(g_4, g_5, g_6, g_7)\phi(g_7, g_3, g_8, g_9)\phi(g_9, g_6, g_2, g_{10})\phi(g_{10}, g_8, g_5, g_1) \\ =&\frac{\lambda}{5!} \sum_{j_1, \cdots, j_{10}} \sum_{i_1, \cdots, i_5} \phi^{j_1 j_2 j_3 j_4 i_1} \phi^{j_4 j_5 j_6 j_7 i_2} \phi^{j_7 j_3 j_8 j_9 i_3} \phi^{j_9 j_6 j_2 j_{10} i_4} \phi^{j_{10} j_8 j_5 j_1 i_5} \mathcal{A}(j_1, \cdots, j_{10}, i_1, \cdots, i_5) \end{aligned} \tag{9.74}$$

となり，ここに $\mathcal{A}$ は式 (9.56) で与えられる．

Feynman グラフ　分配関数はモードにわたる積分

$$Z = \int [\mathrm{D}\phi^{j_1 \cdots j_4 i}] \mathrm{e}^{-S[\phi_{\mathcal{A}}]} \tag{9.75}$$

で与えられる．Z を λ の冪に展開する．Gauss 積分は容易に計算でき，伝播関数

$$P^{j_1 \cdots j_4 i, j'_1 \cdots j'_4 i'} \equiv \langle \phi^{j_1 \cdots j_4 i}, \phi^{j'_1 \cdots j'_4 i'} \rangle = \frac{1}{4!} \sum_\sigma \delta^{j_1 j'_{\sigma(1)}} \ldots \delta^{j_4 j'_{\sigma(4)}} \delta^i_{i'} \tag{9.76}$$

を与え，ここに σ は $\{1, 2, 3, 4\}$ の置換である．5 次の単一の頂点があり，それは：

$$\langle \phi^{j_1 j_2 j_3 j_4 i_1} \ldots \phi^{j_{10} j_8 j_5 j_1 i_5} \rangle = \lambda \mathcal{A}(j_1, \cdots, j_{10}, i_1, \cdots, i_5). \tag{9.77}$$

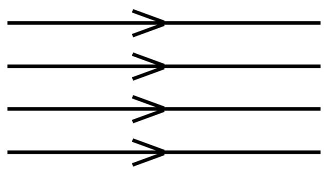


図 42　伝播関数は各々が表現を担う，4 本の構成要素線 (strands) で表せる

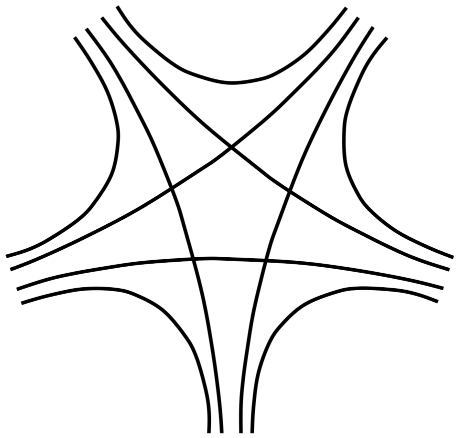


図 43　Feynman 展開から生じる頂点の構造

得られる Feynman 規則の組は以下である．第 1 に，通常の全体的な因子 $\lambda^{v[\Gamma]}/\mathrm{sym}[\Gamma]$ を得る (例えば [268]，93 頁を見よ)．第 2 に，伝播関数の定義 (9.76) の右辺における各項を，図 42 のように，端点にその添字を担っている 4 本の平行な構成要素の線 (strands) で表す．さらに，辺 e は表現 j_e でラベルされる．

我々の得る Feynman グラフは全ての可能な“4 本の構成要素線の (4-strands)”5 価のグラフであり，ここに“4 本の構成要素線のグラフ (4-strands graph)”はその辺が 4 本の構成要素線の集まりであり，その頂点が図 43 に示されているものたちであるグラフである．伝播関数の各構成要素の線は頂点の 5 つの“発端たち (openings)”における単一の構成要素線の各々と繋がることができる．頂点と伝播関数における向きは一致しなければならない (これは表現をその共役に変更することで常に達成できる)．4 本の構成要素線のグラフにおける各構成要素線はいくつかの頂点といくつかの伝播関数を通過して閉じ，サイクルを成す．特定の構成要素線は，4 本の構成要素線のグラフにおける特定の辺を 1 回より多く通り抜けられる．サイクルは添字の単純表現でラベルされる．各グラフに対して，頂点，辺，およびサイクルから成る抽象的な集合は，面がサイクルであるような 2-複体を成す．$SO(4)$ の単純表現によるサイクルのラベル付けは，スピンによる面の色付けを決定する．このように，色付けされた 2-複体，すなわちスピン・フォームを得る．

辺 e は添字 i_e を持つ結節因子でラベルされる．頂点 v はその頂点を通り抜けるサイクルをラベルする 10 個の表現と，5 つの結節因子，つまり v で合流する辺をラベルする $K_{\vec{i}_e}$ の基底要素に依存する，因子 λ 掛ける $\mathcal{A}$ に寄与する．2-複体 Γ の重みはこのとき式 (9.66) で与えられる[*145]．

*145 文献で他の人々によって与えられている公式を比較したい読者にとって，以下の注意が有用かもしれない．与えられた置換の各々に対して，すなわち各 2-複体に対して，また各辺 e に対して，私は辺 e に関する結節因子の空間における固定した直交基底を選んだ．代わりに，e に隣接する 4 つの面の 2 組への分解に関する基底を選べる．そうすると，伝播関数 (9.76) は基底の変更の行列も含む．それは

$$P^{j_1\cdots j_4 i, {j'}_1\cdots {j'}_4 i'} \equiv \langle \phi^{j_1\cdots j_4 \Lambda}, \phi^{{j'}_1\cdots {j'}_4 i'} \rangle = \frac{1}{4!}\sum_\sigma \delta^{j_1 {j'}_{\sigma(1)}} \ldots \delta^{j_4 {j'}_{\sigma(4)}} M_\sigma^{j_1\cdots j_4}{}^{i}_{i'} \tag{9.78}$$

となり［Λ は i の誤記か］，ここに行列 M_σ は $6j$ 記号で与えられる．各辺は 2 つの頂点，例えば v と v' を縮約し，行列 M_σ に寄与する．これは v で用いられる結節因子の基底から v' で用いられるそれへの基底の変更の行列である．ここでは結節因子の基底を全ての e と全ての固定された 2-複体の各々に対して一度きりだけ固定したので，行列 M_σ は自動的に頂点の振幅に含まれ，伝播関数は恒等因子である．

遷移振幅　次に，GFT における $SO(4)$-不変な遷移振幅を考えよう．すなわち，$f[\phi]$ を場の $SO(4)$-不変な多項式の汎関数として，振幅

$$W(f) = \int \mathcal{D}\phi\, f[\phi]\, \mathrm{e}^{-S[\phi]} \tag{9.79}$$

とその Feynman グラフによる展開

$$W(f) = \sum_{\Gamma} \frac{\lambda^{v[\Gamma]}}{\mathrm{sym}[\Gamma]} Z_f[\Gamma] \tag{9.80}$$

を考える．全ての場の $SO(4)$-不変な多項式の汎関数を運動量空間において，すなわち式 (9.69)–(9.71) で定義される Fourier モード $\phi^{j_1\cdots j_4}_{\alpha_1\cdots\alpha_4,i}$ の関数として構成するのが最も簡単である．$SO(4)$ スカラーを得るには，添字 α_n を縮約せねばならない．n 個の場の変数 $\phi^{j_1\cdots j_4}_{\alpha_1\cdots\alpha_4,i}$ から始め，添字を可能な全ての方法で 2 つずつ (pairwise) 縮約する．結果として得られる汎関数は，リンクの表現 j_l と結節因子 i_n で色付けされた，添字の縮約のパターンを与える 4 価のグラフ Γ で決定される．データの組 $s = (\Gamma, j_l, i_n)$ はちょうどスピン・ネットワークを成す．言い換えると，GFT の $SO(4)$-不変な観測量はスピン・ネットワークでラベルされる！

結節点 n に接続する 4 本のリンクを示すのに $n_1, \cdots, n_4$ と書くと，

$$f_s[\phi] = \prod_n \phi^{j_{n_1}\cdots j_{n_4}}_{\alpha_{n_1}\cdots\alpha_{n_4},i_n} \prod_l \delta_{l_1 l_2} \tag{9.81}$$

が得られ，ここで結節点 n の i 番目のリンクが射出 (または入射) するリンク l ならば $n_i = l_1$ (または $n_i = l_2$).

例えば 4 本のリンクで繋がる 2 つの結節点を持つグラフ上のスピン・ネットワーク $s = (\Gamma, j_1, \cdots, j_4, i_1, i_2)$ は，場の関数

$$f_s[\phi] = \sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_4} \phi^{j_1\cdots j_4}_{\alpha_1\cdots\alpha_4,i_1} \phi^{j_1\cdots j_4}_{\alpha_1\cdots\alpha_4,i_2} \tag{9.82}$$

を定める．この種の表現が

$$f_s[\phi] = \int \prod_l \mathrm{d}g_l \prod_n \phi(g_{n_1}, \cdots, g_{n_4}) f_s(g_{n_i}) \tag{9.83}$$

のような座標空間の表現に対応し，ここにスピン・ネットワーク関数は

$$f_s(g_{n_i}) = \prod_n v^{\alpha_{n_1}\cdots\alpha_{n_4}}_{i_n} \prod_l R^{(j_l)}(g_l)_{\alpha_{l_1}\alpha_{l_2}} \tag{9.84}$$

であることを示す簡単な演習は読者に委ねる．

GFT の全ての遷移振幅はしたがって，スピン・ネットワーク振幅

$$W(s) = \int \mathcal{D}\phi\, f_s[\phi]\, \mathrm{e}^{-S[\phi]} \tag{9.85}$$

を用いて表せる．これらの Feynman 展開を考えよ．Feynman 論 (feynmanology) の常として，場に関して次数 n の多項式の期待値は n 本の外脚 (external legs) を持つ．GFT の Feynman 展開では，加えて，面を考えねばならない．それらが正確にスピン・ネットワークのリンクを境界とする (be bounded) ことが判明するのを示す，簡単で教育的な演習を読者に委ねる．言い換えると，$W(s)$ の Feynman 展開は

$$W(s) = \sum_{\partial\Gamma = s} \frac{\lambda^{v[\Gamma]}}{\mathrm{sym}[\Gamma]} Z_s[\Gamma] \tag{9.86}$$

で与えられ，ここに和は s に限られる全ての 2-複体にわたり，また Feynman グラフの振幅は

$$Z_s[\Gamma] = \sum_{j_f, i_e} \prod_f \dim(j_f) \prod_v \{15j\}_v. \tag{9.87}$$

外部の (external) 結節点とリンクの色付けは s によって決定され，和はとられない．

これを逆に言い表す：固定したスピン・ネットワーク境界 s でのスピン・フォームの和は，GFT 期待値 (9.85) で決まる！

TOCY モデルを考える限り，たった今説明した双対性は特別に有用ではない．BF 理論には理論がトポロジカルであることを意味する，大きな不変群がある．このことは対応するスピン・フォーム・モデルが，発散する因子を別にして三角形分割-不変であることを意味する．したがって，GFT の振幅は等しい項の発散する和で与えられる．他方でスピン・フォーム/GFT 双対性は，BC モデルの文脈において重大な役割を演じる．

9.3.4 BC モデル

今や 4 次元の GR に向けた帰還を始める時である．$SO(4)$ BF 理論と Euclid 的な GR の間には密接な関係がある．もし式 (9.54) における B^{IJ} を

$$B^{IJ} = \epsilon^{IJ}{}_{KL} e^K \wedge e^L \tag{9.88}$$

で置き換えれば，正確に GR の作用を得る．したがって BF 理論における B 場を重力場 $e \wedge e$ に同定できる．しばしば Plebanski 拘束と呼ばれる，B に対する拘束 (9.88) は，BF 理論を GR に変換する．拘束 (9.88) を量子論において直接実装できるか？

式 (9.88) の直接的な帰結は

$$\epsilon_{IJKL} B^{IJ} B^{KL} = 0 \tag{9.89}$$

である．3 次元では，連続変数 l_f^i を表現 j_f の生成子に同定できる．4 次元では，$SO(4)$ 表現の生成子に同定できるのは変数 B_f^{IJ} である．そうすると，式 (9.89) は単に和をとられる表現への制約になる．

$SO(4)$ の Lie 代数は $\sim su(2) \oplus su(2)$ であることを思い出そう．$SO(4)$ の既約表現はしたがって $SU(2)$ の表現の組によって，すなわち 2 つのスピン $j = (j_+, j_-)$ によってラベルされる．もし B^{IJ} が $SO(4)$ の生成子ならば，2 つの $SU(2)$ 群の生成子は

$$B_\pm^i = P_{\pm IJ}^i B^{IJ} \tag{9.90}$$

であり，ここに射影子 $P_{\pm IJ}^i$ は式 (2.17) で定義される射影子の Euclid 的な対応物である．すなわち

$$P_{\pm jk}^i = \frac{1}{2}\epsilon_{jk}^i, \qquad P_{\pm 0j}^i = -P_{\pm j0}^i = \pm\frac{1}{2}\delta_j^i. \tag{9.91}$$

$SO(4)$ には 2 つの Casimir がある：スカラー Casimir

$$C = B_{IJ} B^{IJ} = |B|^2 \tag{9.92}$$

と擬スカラー Casimir

$$\tilde{C} = \epsilon_{IJKL} B^{IJ} B^{KL}. \tag{9.93}$$

後者は正確に式 (9.89) によってゼロに拘束される量である．擬スカラー Casimir (9.89) が消える $SO(4)$ 表現は“単純”または“平衡 (balanced)”と呼ばれる．表現 (j_+, j_-) における $\tilde{C}$ の値は容易に評価できる，と言うのも

$$\epsilon_{IJKL} B^{IJ} B^{KL} = B_+^i B_{+i} - B_-^i B_{-i} = j_+(j_+ + 1) - j_-(j_- + 1). \tag{9.94}$$

式 (9.89) と式 (9.94) より $j_+ = j_-$ を得る．この拘束を満たす表現，すなわち $(j_+, j_-) = (j, j)$ という類のものたちは単純表現である；それらは単一のスピン j でラベルされる．$SO(4)$ 表現理論と単純表現に関する数学的事実をいくらか，付録 A.3 に含めておいた．

このことは式 (9.58) における表現にわたる和を単純表現に制限することによって，量子 GR が得られることを示唆する．この措置は BC モデルと表されるモデルのクラスを定義する (スピン・フォーム形式における単純表現の利用を導入した，Barrett と Louis Crane に因む)．

ループ重力との関係　BF 理論の離散化において，三角形分割の各三角形 f に変数 B_f を割り当てることで，2 形式の B 場を離散化した．B_f は B の f 上の面積分に採ることができる．三角形分割の各線分 s に変数 e_s を割り当てることで，1 形式の重力場 e を離散化できる．e_s は e の線分 s に沿う線積分に採ることができる．式 (9.88) はこのとき三角形上の変数 B_f を，三角形の 2 辺上の変数 e_s に関係付ける．式 (9.88) を用いると，スカラー Casimir (9.92) は重力場を用いて表現でき，

$$C = |e \wedge e|^2 \tag{9.95}$$

が得られ，これは三角形の面積の 2 乗である．よって，表現 j_f の Casimir は三角形 f の面積を与える．スピン j_f はしたがって，三角形 f の面積の量子数と解釈できる．

三角形分割された多様体が境界を持ち，三角形 f が境界に属する場合を考えよ．2-複体の描像では，f は f 三角形に双対な面であり，j_f はこの面に関係する．面 f は境界スピン・ネットワークのリンクの 1 つであるリンクに沿って境界を切る．リンクの色は j_f である．このリンクは 1 回，かつ 1 回だけ三角形 f と交差する．よって，三角形 f と交差するリンクに関係する表現は，三角形 f の面積を決定する量子数であると結論付けられる．ところがこれはまさに第 6 章における Hamiltom 形式の理論で我々が得た結論である！

BC スピン・フォーム・モデルの境界状態は，スピン j でラベルされる面積の量子をリンクが担うスピン・ネットワークである．これはまさに Hamilton 形式のループ量子重力の状態の構造である．スピン・フォーム・モデルと Hamilton 形式の LQG は互いに非常に見事に“話が合う (talk)”.

他の拘束　式 (9.89) は式 (9.88) を意味しない・他方，式 (9.89) と 2 つの方程式

$$\epsilon_{IJKL} B^{IJ}_{\mu\nu} B^{KL}_{\nu\rho} = 0, \tag{9.96a}$$

$$\frac{4!\epsilon_{IJKL} B^{IJ}_{\mu\nu} B^{KL}_{\rho\sigma}}{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{IJKL} B^{IJ}_{\mu\nu} B^{KL}_{\rho\sigma}} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \tag{9.96b}$$

(1 つ目の方程式では繰り返された時空添字の和をとらない) から成る系は式 (9.88) を意味する．もし BF 理論 + 付加的な拘束 (9.96) を考えれば，結果として得られる理論は GR の全ての解を正確に持つことが帰結する．

2 つの注意．第 1 に，GR はトポロジカルである BF 理論よりもはるかに多くの解を持つ．B に対する拘束を加えることが解の数を増すことは，驚くべきことではない．BF 理論において，B は Lagrange 乗数の役割を演じ，曲率が消えることを課す．作用における B を拘束することで，我々は Lagrange 乗数の独立な成分の数を減らしている．よって，曲率に対するより少ない拘束を得る．よってより多くの解を得る．見張りを何人か拘束すれば，より多くの泥棒が自由になる．

第 2 に，系 (9.96) は式 (9.88) に加えて，他の解のクラスを持つ．特に，

$$B^{IJ} = -\epsilon^{IJ}{}_{KL} e^K \wedge e^L, \qquad \text{and} \qquad B^{IJ} = \pm e^I \wedge e^J. \tag{9.97}$$

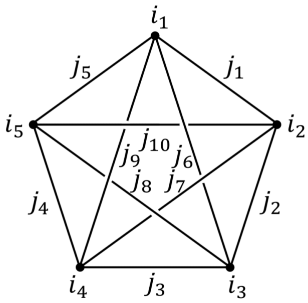
1 つ目は単に向きを再定義する．もう一方は古典的な運動方程式に影響しない，作用のトポロジカルな項を与える．この点に関する完全な議論については，読者に文献を紹介する．

添字を共有する変数の組 $B^{IJ}_{\mu\nu} B^{KL}_{\nu\rho}$ を，辺を共有する面に関する表現の生成子に同定することで，拘束 (9.96a) は量子論において実装できる．他方で拘束 (9.96b) に対して，共通の添字のない 2 つの $B^{KL}_{\rho\sigma} B^{KL}_{\nu\rho}$ 変数［$B^{IJ}_{\mu\nu} B^{KL}_{\rho\sigma}$ の誤記か］を，四面体の対面に関する表現の生成子に同定する．

文献において考えられてきた，異なる BC モデルをもたらす，これらの拘束を離散化する異なる方法がある．文献において考えられてきた，面と辺の振幅 A_f と A_e の異なる可能な選択もある．どの変種が離散化された GR に対応するかは，まだ明らかでない．ここでは異なる選択の動機の詳細には立ち入らない (詳しい議論については [19] を見よ)．むしろ，私は単にいくつかのモデルを説明し，それらの動機については文献を紹介する．

BCA　BCA モデル (Barrett–Crane モデル，バージョン A) と表される最も単純な BC モデルは，単に $A_e = A_f = 1$ と選ぶことで得られる．それは

$$Z_{\text{BCA}} = \sum_{\text{simple } j_f} \sum_{i_e} \prod_v \tag{9.98}$$



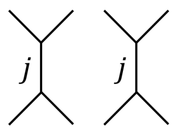
で与えられる．

BCB　BCB モデル (Barrett–Crane モデル，バージョン B) と表される 2 つ目のモデルは，結節因子が式 (9.96) によって

$$i_{\text{BC}}^{(aa')(bb')(cc')(dd')} = \sum_j (2j+1) v^{abf} v^{fcd} v^{a'b'f'} v^{f'c'd'} \tag{9.99}$$

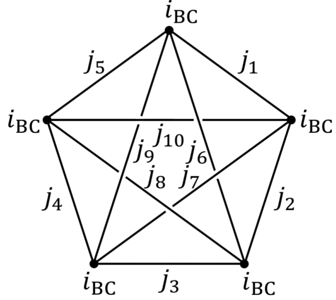
の形に制約されると仮定し，ここに $SO(4)$ 表現の添字は $SU(2)$ 表現の添字の組で与えられ，また添字 f と f' は表現 j に属する．これは BC 結節因子と呼ばれる．結節因子と式 (9.96) 関係については， [269] を見よ．BC 結節因子はあらゆる分解において，単純な仮想的リンクから成るという性質を持つ．表現 (6.86) を用いると，それは

$$i_{bc} = \sum_j (2j+1) \tag{9.100}$$



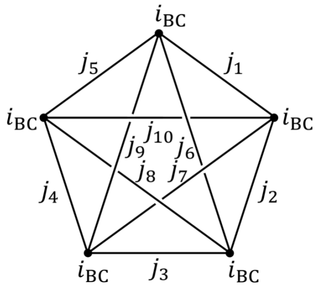
で与えられる．$A_e = 1$ と選ぶと，和

$$Z_{\text{BCB}} = \sum_{\text{simple } j_f} \prod_f \dim(j_f) \prod_v \tag{9.101}$$

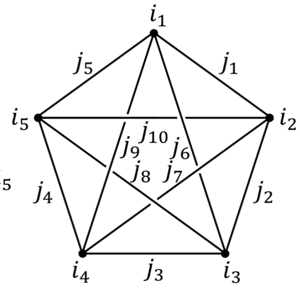


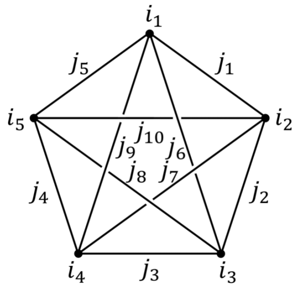
を得る．頂点の振幅

$$A(j_1, \cdots, j_{10}) =$$



$$= \sum_{i_1, \cdots, i_5}$$





(9.102)

は 10 個のスピンに依存し，$10j$ 記号と呼ばれる．そこで式 (9.101) を

$$Z_{\mathrm{BCB}} = \sum_{\text{simple } j_f} \prod_f \dim(j_f) \prod_v \{10j\} \tag{9.103}$$

と書く．

したがって，BCB モデルは以下の選択での，一般的な形 (9.21) を持つ：

- 和をとられる 2-複体の集合は単一の 2-複体から成る．これは 4 次元の三角形分割の双対の 2-骨格に選ばれる．
- 和をとられる表現は $SO(4)$ の単純ユニタリー既約表現である．全ての結節因子は i_{BC} に固定される．
- 頂点の振幅は $A_v = \{10j\}$ である．

これらの選択は固定された 2-複体上の，すなわち高い振動数のモードの切断を持つ，4 次元の Riemann 的な GR の仮説的な量子化を定義する．明らかに，固定された 2-複体は有限の数の自由度だけに適用でき，無限大の理論の自由度の全てを捉えることはできない．

BCC　モデル B の変種は特に興味がある，と言うのも，これから見るように，それは摂動的に有限だからである．これは BCB モデルに辺の振幅を加えることで得られ：

$$Z_{\mathrm{BCB}} = \sum_{\text{simple } j_f} \prod_f \dim(j_f) \prod_e A_e(j_{e_1}, \cdots, j_{e_4}) \prod_v \{10j\}, \tag{9.104}$$

ここに A_e は辺 e を共有する 4 つの面に関する 4 つの表現 $j_{e_1}, \cdots, j_{e_4}$ の関数であり，以下のように定義される．$\mathcal{H}_{j_1, \cdots, j_4}$ を 4 つの表現 $j_1, \cdots, j_4$ のテンソル積，また $\mathcal{H}^0_{j_1, \cdots, j_4}$ をその不変部分空間とする．このとき A_e はこれらの空間の次元の比

$$A_e(j_1, \cdots, j_4) = \frac{\dim \mathcal{H}^0_{j_1, \cdots, j_4}}{\dim \mathcal{H}_{j_1, \cdots, j_4}} \tag{9.105}$$

である．以下で見るように，この振幅は群の場の理論 (GFT) の文脈で自然に現れる．

今のところどの変種が，あるいは他のものが物理的に最も興味あるものかは明らかでない．選択を経路にわたる和の測度の選択と解釈し，微分同相不変性を課すことで，Bojowald と Perez は特定のモデルに肯定的な示唆を得た [270]． [271] では，これらのモデルの異なる統計的性質が数値的に解析された；しかしながら，どれが期待される“正しい”統計的性質かはまだ明らかでない．

Plebanski 拘束の幾何学的な解釈　BC モデルを定義する表現と結節因子に対する拘束には，幾何学的な解釈を与えることができる．実際，それらは最初はこの幾何学的な解釈に基づき，独立な一連の考察から得られた．R^4 に埋め込まれた四面体を考えよ．R^4 のベクトルを $v=(v^I)$, $I=1,\cdots,4$ と表す．四面体の 4 つの頂点を v_i, $i=1,\cdots,4$ とラベルする．ベクトル

$$v_{(ij)}=v_j-v_i \tag{9.106}$$

は四面体の辺 (ij) を表す．三角形 (ijk) は“2 重ベクトル (bivector)”

$$v^{IJ}_{(ijk)}=v^I_{(ij)}v^J_{(jk)}-v^J_{(ij)}v^I_{(jk)} \tag{9.107}$$

で表すことができ，これはしばしば

$$v_{(ijk)}=v_{(ij)}\wedge v_{(jk)} \tag{9.108}$$

と書かれる．例えば，3 つの頂点 (123) で決まる三角形は，式 (9.106) を式 (9.107) に代入することで得られる 2 重ベクトル

$$v^{IJ}_{(123)}=v^I_1v^J_2-v^I_2v^J_1+v^I_2v^J_3-v^I_3v^J_2+v^I_3v^J_1-v^I_1v^J_3=\sum_i\epsilon^{ijk}v^I_jv^J_k \tag{9.109}$$

で表される．三角形 (ijk) の面積は 2 重ベクトルのノルム

$$A^{IJ}_{(ijk)}=v^{IJ}_{(ijk)}v_{(ijk)IJ} \tag{9.110}$$

である．定義より，

$$\epsilon_{IJKL}v^{IJ}_{(ijk)}v^{KL}_{(ijk)}=0, \tag{9.111}$$

$$\epsilon_{IJKL}v^{IJ}_{(ijk)}v^{KL}_{(ijl)}=0. \tag{9.112}$$

さらに，$i=1,\cdots,5$ として頂点 v_i を持つ，R^4 に埋め込まれた 4-単体を考えよ．これは 4 つの四面体 $(ijkl)$，および 10 個の三角形 (ijk) を定義する．このとき頂点 i を共有する 2 つの三角形に対して

$$\epsilon_{IJKL}v^{IJ}_{(ijk)}v^{KL}_{(ilm)}=\sum_i\epsilon^{ijklm}\epsilon_{IJKL}v^I_jv^J_kv^K_lv^L_m \tag{9.113}$$

であり，これは i に依存しない．よって

$$\frac{\epsilon_{IJKL}v^{IJ}_{(ijk)}v^{KL}_{(ilm)}}{\sum_i\epsilon^{ijklm}\epsilon_{IJKL}v^I_jv^J_kv^K_lv^L_m}=\epsilon_{jklm} \tag{9.114}$$

と書ける．

2 重ベクトルの方程式 (9.111),(9.112) および (9.114) と，Plebanski 拘束 (9.89)–(9.96) の著しい類似性に注意せよ．2 重ベクトルの方程式は Plebanski 拘束の離散化と見なせる．逆に言えば Plebanski 拘束は，BF 理論の B 場が時空における基本的な三角形の無限小の面積要素であるという要求と解釈できる．

量子四面体　BC モデルへの歴史的な道のりは上で説明したものだった．上手くいかなかったが，Plebanski 拘束 (9.89) を彼の TOCY モデルに実装する方法を求めて，長時間にわたり Louis Crane と議論したのを私は覚えている．ところが単純表現を用いて問題を見事に解決した，影響力のある仕事 [269] では，Plebanski 拘束および BF と GR の関係を一切参照していない．その論文は今から説明するように，R^4 に埋め込まれた単一の四面体に固有な距離の自由度の記述と，それらの自由度の“量子化”に基づいている．

R^4 に埋め込まれた単一の四面体を考えよ．それをダイナミクスがその幾何学で与えられる物理的な系と見なす．この系の量子力学的な性質は量子状態空間 $\mathcal{H}$ で表され，力学変数はこの状態空間の演算子で表されると期待できる．四面体の幾何学は前節で定義した 2 重ベクトル $v^{IJ}_{(ijk)}$ を用いて表せる．こうして，2 重ベクトルは $\mathcal{H}$ 上の演算子で表されるはずである．この構成はある種の“量子四面体 (quantum tetrahedron)”を定義する．$SO(4)$ は 2 重ベクトルに自然に作用するので，$\mathcal{H}$ は $SO(4)$ の表現を担うと期待する．古典的な 2 重ベクトルは随伴表現として変換するので，量子力学的な演算子もそうであると期待する．2 重ベクトル演算子 $v^{IJ}_{(ijk)}$ は $\mathcal{H}$ における $SO(4)$ の表現 j の無限小生成子であることが帰結する．三角形の面積を与える 2 次の表現 (9.110) は正確に j の 2 つの Casimir の一方である．よって $\mathcal{H}$ は，その Casimir が三角形 (ijk) の面積であるような表現 j_{ijk} を担うはずである．$SO(4)$ のもう一方の Casimir は，消えるように構成される (9.111) で与えられる．よって，$\mathcal{H}$ はこの Casimir が消える表現だけを含むはずである．それらは単純表現である．和 (9.101) はこのとき，2 重ベクトル演算子の属する Hilbert 空間における状態にわたる和として構成できる．

BC モデルに到達するこの手法は，その GR との関係を隠すとともに，伝統的な量子化の手続きとの関係を隠してしまう短所がある．他方，それは量子時空に対する完全に新しい興味ある見方を拓く長所がある．互いに光を投じる，モデルを考える異なる方法の収束は常に価値がある．

実際，基本的な系としての量子四面体のアイデアはもしかすると，物理的な見地から真剣に受け入れられるかもしれない．背景上の伝統的な QFT には 2 つの自然な解釈がある．例えば，自由な電磁気学において我々は電場または磁場を測定し，理論を連続的な場の理論と解釈できる．代わりに，我々はエネルギーと運動量を測定し，理論は時空を運動する粒子，光子を記述していると解釈できる．調和振動子の伸長 (elogation) の連続性とそのエネルギーの離散性の間に矛盾がないのと同じ理由で，もちろん 2 つの記述の間に矛盾はない．

同様に我々は，場の古典論の量子化から始めて粒子の存在を導き，QFT を構成できる．あるいは粒子から始めて QFT を構成できる：単一の粒子の量子論を定義し，次いで任意の数の粒子に対する“多粒子の”量子論を定義する，等々．よく知られているように，2 つの道は同じ理論をもたらす．相互作用のある QFT において，非自明なダイナミクスは粒子状態間の単一の相互作用の頂点で表される．

GR では，ループ量子化は空間が短いスケールで粒状の (granular) 構造を持つことを示す．空間は (互いに繋がることのできる) 個々の空間の量子から成っていると考えられる．これらの空間の量子は，粒子のように，適当な測定可能な量の固有状態である．このとき量子 GR を，単一の空間の量子に対する量子論から構築される，“多粒子の”理論と再解釈できると考えることは不条理ではない．“量子四面体”の数学はおそらくこの方向への第 1 歩と見なせる．この観点を採用すれば，ダイナミクスはこれらの“粒子”状態間の単一の相互作用の頂点で表せる．例えば，図 37 のような基本的な頂点は，(互いに繋がり，また表示されていない 3 つの他の量子と繋がる) 3 つの空間の量子へと崩壊する，(表示されていない 3 つの他の量子と繋がる) 1 つの空間の量子と解釈できる，等々．時空はこのとき，個数の変わる空間の量子の相互作用の経歴である．

9.3.5　群の場の理論

量子 GR を表す可能性のあるモデルに達するために残るステップは，理論の無限大の自由度を捉えられるよう，2-複体にわたる和を実装することである．

全ての自由度を捉えるために，格子 QCD で行うように，三角形分割 (または 2-複体) を**精密化する**選択肢はないことに注意せよ．理由は実際に精密化させるものがなく，ゼロにすることのできる格子 QCD の格子間隔のようなパラメータがないということである．

実際，Barrett–Crane モデルによって導入される切断は紫外切断ではない．理論は紫外セクターを持たない，と言うのも，Planck 尺度を過ぎた自由度はないからである．むしろ，固定された三角形分割は，より大きな三角形分割 (より多くの n-単体を持つ三角形分割) で書ける配位を捉えられないという意味では，それはある種の赤外切断である．和は任意に大きな幾何学を含む，と言うのも，それは任意に高い j_f を含むからである (量子群の場合はそうでない)．ところが固定された Δ 上では，大きな幾何学は大きな三角形分割上の小さな j_f によってではなく，大きな j_f によってのみ表すことができる．明らかに，この制約はスピン・フォームの近似できる連続的な場のクラスを劇的に削減する．

大きな Δ の極限でモデルを定義することを考えられる．これは確かに興味ある探求の方向性である．他方，大きな Δ の色付けにわたって和をとる際に，Δ の部分集合 Δ' 上を除いて表現が自明であるような配位を含めねばならない．この配位の振幅は Δ ではなく，むしろ Δ' に関係していると見なせる．よって，三角形分割にわたる和に自然に帰着する．

体積 Nl_{P}^4 の古典的な幾何学をもたらす固定された境界条件に対して，N より極めて大きい 4-単体の個数を持つ三角形分割はさほど寄与しないと仮定することは，おそらく理に適っている．よって三角形分割のサイズに関する展開に物理的な興味が持たれるかもしれない．

どのように 2-複体にわたる和をとるか？ 問題は和をとる 2-複体のクラスを選び，その相対的な重みを固定することである．ここで，上記の 9.3.3 節で説明した双対性がまさに，2-複体にわたる和をとる処方箋を与える．したがって，完全な 2-複体にわたる和に対する自然な仮定として，BC モデルの双対な定式化を採るのは自然である．しかし BC モデルの双対な定式化は存在するのか，あるいは双対性はずっと単純なトポロジカルな BF モデルの特徴なのか？

著しいことに，BC モデルの双対な定式化は存在する．BC モデルは表現を単純なものに制約することで，TOCY モデルから得られる．この制約は BF 理論を GR に変換する拘束を実装する．双対な描像では，表現にわたる和は群上の場のモードに関する展開として得られる．一般的な場は全てのユニタリー既約表現にわたる和へと展開できる．展開が単純表現だけを含む場をどのように取り出せるか？ 答は簡単であることが判明する．

$SO(4)$ の固定された $SO(3)$ 部分群 H を選ぶ．このとき以下が成り立つ．$SO(4)$ 上の場 $\phi(g)$ は，モード展開が**単純**既約表現のみを含む場合，かつその場合に限り，H の作用の下で不変である，すなわち

$$\phi(g) = \phi(gh), \qquad \forall h \in H \tag{9.115}$$

を満たす．これは付録 A.3 で説明する基本的な結果である．

9.3.3 節で定義した場の理論を考えよ．この表記を少し簡略化することが有用である．第 1 に，作用を速記法

$$S[\phi] = \frac{1}{2}\int \phi^2 + \frac{\lambda}{5!}\int \phi^5 \tag{9.116}$$

で書く．第 2 に，場が式 (9.62) を満たすことを要求する代わりに，必ずしも式 (9.63) を満たさない任意の場 ϕ を採り，

$$P_G\phi(g_1, g_2, g_3, g_4) = \int_{SO(4)} \mathrm{d}g\, \phi(g_1 g, g_2 g, g_3 g, g_4 g) \tag{9.117}$$

で定義される射影演算子 P_G を用いることができる．左に作用する射影子 ${}_GP$ も定義できる：

$${}_GP\phi(g_1, g_2, g_3, g_4) = \int_{SO(4)} \mathrm{d}g\, \phi(g g_1, g g_2, g g_3, g g_4). \tag{9.118}$$

ここで単純表現上の射影子 P_H を定義する：

$$P_H\phi(g_1, g_2, g_3, g_4) = \int_{H^4} \mathrm{d}h_1 \mathrm{d}h_2 \mathrm{d}h_3 \mathrm{d}h_4\, \phi(g_1 h_1, g_2 h_2, g_3 h_3, g_4 h_4). \tag{9.119}$$

GFT/TOCY　一般的な場に対する作用

$$S[\phi] = \frac{1}{2}\int (P_G\phi)^2 + \frac{\lambda}{5!}\int (P_G\phi)^5 \tag{9.120}$$

は作用 (9.63) と等価であり，9.3.3 節で議論したように，TOCY モデルをもたらす．ここで，単にこの作用に射影子 P_H を挿入することで，以下の驚くべき結果を得る．

GFT/A　作用

$$S_{\mathrm{A}}[\phi] = \frac{1}{2}\int ({}_G P P_H\phi)^2 + \frac{\lambda}{5!}\int ({}_G P P_H\phi)^5 \tag{9.121}$$

を考えよ．この理論の分配関数の Feynman 展開は

$$Z_{\mathrm{A}} = \int \mathcal{D}\phi\, \mathrm{e}^{-S[\phi]} = \sum_{\Gamma} \frac{\lambda^{v[\Gamma]}}{\mathrm{sym}[\Gamma]} Z_{\mathrm{A}}[\Gamma] \tag{9.122}$$

を与える．Feynman グラフの振幅は正確に，モデルが Feynman グラフで決まる 2-複体にわたる，BCA モデルの分配関数 (9.98) であることが判明する！ すなわち，

$$Z_{\mathrm{A}}[\Gamma] = \sum_{\text{simple } j_f} \prod_{v} \{15j\} = Z_{\mathrm{BCA}}. \tag{9.123}$$

GFT/B　作用

$$S_{\mathrm{B}}[\phi] = \frac{1}{2}\int (P_G P_H\phi)^2 + \frac{\lambda}{5!}\int (P_G P_H\phi)^5 \tag{9.124}$$

は BCB モデルの分配関数 (9.101):

$$Z_{\mathrm{B}}[\Gamma] = \sum_{\text{simple } j_f} \prod_{f} \dim(j_f) \prod_{v} \{10j\} = Z_{\mathrm{BCB}} \tag{9.125}$$

を与える．

GFT/C　作用

$$S_{\mathrm{C}}[\phi] = \frac{1}{2}\int (P_G\phi)^2 + \frac{\lambda}{5!}\int (P_H P_G\phi)^5 \tag{9.126}$$

は BCC モデルの分配関数 (9.104):

$$Z_{\mathrm{C}}[\Gamma] = \sum_{\text{simple } j_f} \prod_{f} \dim(j_f) \prod_{e} A_e(j_{e_1}, \cdots, j_{e_4}) \prod_{v} \{10j\} = Z_{\mathrm{BCC}} \tag{9.127}$$

をもたらす．これらの関係の導出はある程度，9.3.3 節で説明したモード展開の直接的な応用である．それは良い演習として読者に委ねる．それは章末で引用する原論文に見出される．

ここで TOCY の場合，Feynman グラフにわたる和は自明であり，発散し，物理的動機がない．それは三角形分割-不変性のために，全ての項が等しいという意味で自明である．それは無限個の等しい項の和をとるため発散する．それは物理的動機がない，と言うのも，古典論の全ての自由度は有限の三角形分割によって既に捉えられているからである．

他方で BC モデルの場合には，固定された 2-複体の選択は理論の自由度の数を減らす．したがって，量子 GR を定義することを望むならば，2-複体にわたる和が必要であり，Feynman 展開はまさにそのような和を

与える．BC モデルは三角形分割-不変ではないので，和は自明ではない：2-複体の各々は異なる仕方で和に寄与する．GFT によって定義される 2-複体にわたる和はこれらの場合に，自由度の数が切断されない新しいスピン・フォーム・モデルを定義する．我々はこれらを GFT スピン・フォーム・モデルと表現する．特に，式 (9.122) で定義される和を群の場の理論バージョン A，または GFT/A と表現し，B および C の場合に対応する和を GFT/B および GFT/C と表現する．

有限性についてはどうか？ 著しいことに，GFT/C は λ の全ての次数で有限であることが分かる．証明は一定の縮退した 2-複体に及び複雑だが，そのことはしかし，結果を損ないそうにはない．したがって GFT/C モデル，あるいはその変種は，Euclid 的な量子重力における遷移振幅の共変な定義に対する，仮説的な仮定と捉えられる．

特に，式 (9.85) のようにスピン・ネットワークの期待値

$$W(s) = \int \mathcal{D}\phi\, f_s[\phi]\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int (P_G\phi)^2 + \frac{\lambda}{5!}\int (P_G P_H \phi)^5} \tag{9.128}$$

を考えることができる．これらの量はよく定義されており，λ の全ての次数で収束しそうである．仮説的にそれらを Euclid 的な量子重力の遷移振幅と解釈できる．

9.3.6 Lorentz 的なモデル

表現 (9.128) が量子重力的な遷移振幅の有限で仮説的な定義を与える事実は間違いなく心躍るものの，上で説明した GFT モデルは全て Euclid 的である．ここから物理的な Lorentz 的な理論を復元する，2 つの可能な方向がある．

$SO(3)$ および $SO(2,1)$ Lorentz 的 GFT　Lorentz 的な振幅を定義する 1 つの方向は，これらのモデルの Lorentz 的な類似物を研究することである．それらは単に $SO(4)$ を Lorentz 群 $SO(3,1)$ で置き換えることで得られる．$\phi(g_1,\cdots,g_4)$ を $[SO(3,1)]^4$ 上の場としよう．射影子 P_G と P_H を式 (9.117) と式 (9.119) のように定義する．射影子 H を定義するには，部分群 $H \subset SO(3,1)$ に対する 2 つの自然な選択がある．1 つ目はそれを $SO(3,1)$ の固定した $H = SO(3)$ 部分群に採ることである．これは選んだ時間的なベクトルを不変に保つ部分群である．2 つ目はそれを $SO(3,1)$ の $H = SO(2,1)$ 部分群に採ることである．これは選んだ空間的なベクトルを不変に保つ部分群である．2 つの場合に対して，作用

$$S_H[\phi] = \frac{1}{2}\int (P_G\phi)^2 + \frac{\lambda}{5!}(P_G P_H \phi)^5 \tag{9.129}$$

を考えよ．分配関数の Feynman 展開は，それぞれ $SO(3)$ および $SO(2,1)$ Lorentz 的 GFT と表現される，2 つの Lorentz 的なスピン・フォーム和を定義する．

スピン・フォーム和に現れる一連の表現は場のモード展開で決まる．このことは和をとられる表現がユニタリー既約表現であることを意味する．それらは非コンパクトである $SO(3,1)$ に対して無限次元であり，しかも連続変数でラベルされる．したがって，Lorentz 的なスピン・フォーム・モデルでは，内部添字にわたる和は積分に置き換わり，スピン・フォーム和は表現の連続的な集合にわたる積分を含む．それでも，上記で発展させた技術はこの場合に非常に上手く拡張される．これに関しては，興味のある読者に紹介する網羅的な文献がある；章末の文献ノートを見よ．Euclid 的な理論のほとんどの特徴は Lorentz 的な理論に残る．最も著しいことに，有限性の結果は Lorentz 的 $SO(3)$ GFT に拡張される．

$SO(3,1)$ のユニタリー表現は自然に 2 つのクラスを成す：面積の 2 乗を表す Casimir の符号で区別される，空間的および時間的なクラスである．上記の作用 $S_{SO(3)}$ は時間的な表現のみにわたる和をもたらす；他方，

作用 $S_{SO(2,1)}$ は両方の種類の表現にわたる和をもたらす．三角形 f に関係する表現の種類は，三角形分割における三角形に空間的または時間的な特徴を与える．これは物理的に魅力的であるものの，現在のところこの問題のいくつかの側面は不明瞭である．例えば，面積の 2 乗の符号は，Hamilton 形式の理論の基礎に期待されることに反するように見える．これは読者に伝える，興味ある未解決の問題である．

解析接続　物理的な理論の構成に対する 2 つ目の可能な方向は，伝統的な GFT で行われるように，解析接続によって Euclid 的な遷移振幅から Lorentz 的な遷移振幅を定義することである．Euclid 的な遷移振幅を Lorentz 的な QFT に関係付ける標準的な定理は Poincaré 不変性に基づいており，重力へと拡張されない．しかしこのことは，何らかの形の解析接続によって Euclid 的な理論から物理的な遷移振幅を定義する計画が，必ずしも失敗することを意味しない．特に，時間座標における解析接続は背景独立な文脈では完全に不適切のようである；しかし物理的な時間における解析接続は有効かもしれない．この可能性を以下の 9.4.1 節で議論する．

9.4　スピン・フォームによる物理

スピン・フォーム・モデルはあらゆる境界スピン・ネットワーク s に関係する振幅 $W(s)$ を計算するのに用いることができる．これらの振幅を物理的な測定にどのように関係付けられるか．

Hamilton 形式の理論との関係　スピン・フォーム形式には格子ゲージ理論との形式的な類似性がある．2 つの定式化の解釈は，しかしながら，全く異なる．格子理論の場合には，離散化された作用はパラメータ，格子間隔 a に依存する．物理的な理論は a をゼロにとると復元される．この極限で，格子によって導入された離散化は取り除かれる．特に，一連の格子離散化を用いて連続的な境界の場を近似できる．重力では，他方で，離散化された作用において格子間隔のパラメータ a はない．したがって，$a \to 0$ の極限に意味はない．スピン・フォームの離散的な構造は，物理的な理論の実際の特性を反映しているはずである．特に境界の状態は，一連の離散化された場によって近似される連続的な場の配位によってではなく，スピン・ネットワークによって与えられる．

第 6 章の Hamilton 形式の理論は境界スピン・ネットワーク s の物理的な解釈を与える．スピン・ネットワークは面積と体積の演算子の固有状態であり，したがって 3 次元の面の幾何学に対する測定結果を表していると解釈できる．そのような測定は完全な観測量には対応しない，と言うのも，それらはハミルトニアン演算子と交換しないからである．しかしながら，それらは第 3 章で説明した概念である，部分的観測量に対応する．したがって，第 5 章で論じたように，それらはなお運動学的な量子状態空間の演算子で表される．特に，それらの演算子の離散的なスペクトルは，それらの観測量の物理的な測定の可能な結果に対する物理的な予言と解釈できる．本章の初めに注意を促したように，遷移振幅は一般に，古典的な配位に依存しない：それらは量子力学的な固有状態に依存する．これが量子重力の遷移振幅はスピン・ネットワークの関数であって，連続的な 3 次元の幾何学の関数ではないと期待する理由である．スピン・フォーム形式はまさにそのようなスピン・フォームの関数をもたらす事実は，したがって，満足がいく．このようにスピン・フォーム理論と Hamilton 形式の LQG で与えられる非摂動的な量子重力の物理的な描像の間には，強力で励みになる整合性がある．

もし 2 つの定式化を直接的に翻訳できたら非常に素晴らしいだろう．ループ形式からのスピン・フォーム和の形式的な導出のスケッチは本章の初めに与えた．逆に言うと，理論の共変なスピン・フォームの定義から始めて，Hamilton 形式の Hilbert 空間とともに，ループ理論の運動学的および力学的な演算子を詳細に再構成することは，非常に興味深いだろう．現在のところ，これら 2 つの道のいずれも完全な制御下にはない．1 つ

目は微分同相不変な文脈で有効な Feynman–Kac 公式 (例えば [272] を見よ) の導出に相当するだろう．

2 つ目は Wightman および Osterwalder–Schrader の再構成定理 [273] の，微分同相不変な文脈への拡張に相当する．スピン・フォーム・モデルから Hilbert 状態空間を導ける 2 つの方法がある．1 つは $\mathcal{K}$ を境界データの集合の線形な閉包 (closure) に同定することである．これは私が上で用いた思想である．もう一方は Gelfand–Neimark–Siegal 構成を用いて，振幅 $W(s)$ から直接 $\mathcal{H}$ を再構成することである．このアプローチは [274] で発展している ([275] も見よ).

より素朴な水準においてさえ，Hamilton 形式のループ理論とスピン・フォーム・モデルの間には，これまで議論されてきた，いくつかのあえぎ (gasp) がある．それらは次に関係する：自己双対接続の役割；Hamilton 形式の枠組みで用いられる $SO(3,1) \to SO(3)$ ゲージ固定の役割；これまで考えられてきたスピン・フォーム・モデルは 4 価の結節点のみである事実；BFT/B および C モデルにおいて，結節点に関する自由な境界の結節因子の変数がない事実；Hamilton 形式の理論における量子群への変形の結果的な役割 [228]；その他．2 つの定式化の関係に関するこれら全ての側面は，その 2 つを整然と翻訳できるようになる前に，明らかにされる必要がある．

一方では，第 7 章で説明したように，ハミルトニアン演算子の定義には多大な自由度がある．一般に，共変な手法はより容易に対称性を扱い，相互作用の頂点は共変な描像において単純な形を持つ．例えば，完全な QED のハミルトニアンの複雑さを，全てのハミルトニアンの相互作用項をコンパクトに要約した，QED の単一の頂点の単純さと比較せよ．スピン・フォーム形式はハミルトニアン演算子の正しい形を提案し得る．

他方では，Hamilton 形式の手法は共変な経路にわたる和に比べて，より正確かつ厳密である．既に見たように，Hamilton 形式の描像は境界スピン・ネットワーク状態に対する明瞭でよく動機付けられた物理的な解釈とともに，時空の離散性の一般的な正当化を与える．したがって，2 つの定式化は互いに光を投じており，それらの関係は詳細に研究する必要がある．

(**ペーパーバック版への加筆**：スピン・フォームと Hamilton 形式の LQG の定式化の正確な等価性は，Karim Noui と Alejandro Perez によって厳密に証明された．以下の文献ノートを見よ．)

9.4.1 粒子の散乱と Minkowski 真空

最後にここで，5.4 節で説明した一般的な理論に従って，スピン・フォーム形式から Minkowski 真空状態を計算する方法をスケッチする．これは粒子状態を定義する第 1 歩である．2 つの“極”の**入射** (*in*) および**射出** (*out*) 領域と，1 つの“赤道の”**側面** (*side*) 領域から成る，3 次元球面を考えよ．3 次元球面上の物質 + 重力場を $\varphi = (\varphi_{\rm out}, \varphi_{\rm in}, \varphi_{\rm side})$ と分離しよう．赤道の場 $\varphi_{\rm side}$ を，以下のように定義される特別な値 φ_{RT} をとるように固定する．上のように定義される［5.3.4 節］，R^4 における半径 R と高さ T の円筒状の面 Σ_{RT} を考えよ．$\Sigma_{RT} = \Sigma_{\rm in} \cup \Sigma_{\rm out} \cup \Sigma_{\rm side}$ となるように，$\Sigma_{\rm in}$ (と $\Sigma_{\rm out}$) を Σ_{RT} の下側 (と上側) の底面に位置する (3 次元の) 円盤とし，$\Sigma_{\rm side}$ をこれらの円盤外部の Σ_{RT} の部分とする．g_{RT} を $\Sigma_{\rm side}$ の計量とし，$\varphi_{RT} = (g_{RT}, 0)$ を，g_{RT} である計量とゼロである他の全ての場から決定される，$\Sigma_{\rm side}$ 上の境界の場とする．2 つの円盤において，計量を含め，全ての場の値 $\varphi_{\rm out}$ と $\varphi_{\rm in}$ が与えられたとして，$W[(\varphi_{\rm out}, \varphi_{\rm in}, \varphi_{RT})]$ を考えよ．境界の場を 3 つの部分 $\varphi = (\varphi_{\rm out}, \varphi_{\rm in}, \varphi_{\rm side})$ から成るとして書く際，我々は実際に $\mathcal{K}$ を $\mathcal{K} = H_{\rm out} \otimes H^*_{\rm in} \otimes H_{\rm side}$ と分離している．$\varphi_{\rm side} = \varphi_{RT}$ を固定することは，$\mathcal{K}$ における共変な真空状態 $|0_\Sigma\rangle$ を，$H_{\rm side}$ のブラ状態 $\langle \varphi_{RT}|$ と縮約することを意味する．充分大きな R と T に対して，$= H_{\rm out} \otimes H^*_{\rm in}$ における結果として得られる状態は Minkowski 真空に帰着すると期待する．すなわち (ここでも，ブラ/ケットの不一致は見かけ上であるに過ぎない)

$$\lim_{R,T\to\infty} \langle \varphi_{RT}|0_\Sigma\rangle = |0_{\rm M}\rangle \otimes \langle 0_{\rm M}| \,. \tag{9.130}$$

一般的な入射配位に対して，規格化を除き，

$$\Psi_{\mathrm{M}}[\varphi] = \lim_{R,T\to\infty} W[(\varphi, \varphi_{\mathrm{in}}, \varphi_{RT})]. \tag{9.131}$$

(以下では，境界に対してより簡単な幾何学を用いることにする．) これらの公式により Euclid 的なスピン・フォーム形式から Minkowski 真空状態を取り出すことが可能になる．n 粒子散乱状態はこのとき平坦な空間の形式の一般化によって得られ，もしこれがよく定義されるなら，単一の変数 T に関する解析接続によって得られる．

s を任意，また s_T を以下のように定義される 3 次元計量 g_T の織物状態 (6.143) として，互いに繋がる 2 つの部分 s と s_T から成る，$s' = s\#s_T$ と表すスピン・ネットワークを考えよ．R^4 における半径 T の 3 次元球面 (3-sphere) をとる．単位の半径の球対称な 3 次元球 (3-ball) を取り除く．g_T は球の取り除かれた球面から成る，(境界を持つ) 3 次元面の 3 次元計量である．量

$$\psi_{\mathrm{M}}[s] = \lim_{T\to\infty} \int \mathrm{D}\Phi\, f_{s\#s_T}[\Phi]\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int(P_G\phi)^2 + \frac{\lambda}{5!}\int(P_G P_H \phi)^5} \tag{9.132}$$

は単位の半径の球における Minkowski 真空状態に対する仮定を表す．

(**ペーパーバック版への加筆**：背景独立な量子重力から n 点関数を計算する技法が提案され開発されている．これにより重力子の伝播関数の導出が可能になり，それは言わば，空間と時間のない理論からの“Newton の法則”の導出である．以下の文献ノートを見よ．)

文献ノート

John Baez は [17] で BF 理論とスピン・フォームへの見事で読みやすい手引きを与えており，それは貴重な，注意深い注釈付きの参考文献一覧も含んでいる．優れた一般的なレビューは Daniele Oriti の [18] である． [19] において，Alejandro Perez は群の場の理論を詳しく説明し，また異なるモデルの網羅的な概観を与えている．Hamilton 形式のループ理論からの導出については， [11] を見よ．

“面にわたる和”を用いて一般共変な QFT を記述するアイデアは初め， [276–278] で議論された；LQG からの形式的な導出は [279–281] で議論された．スピン・フォーム/三角形分割された時空の関係は Fotini Markopoulou [282] によって明らかにされた．

Ponzano–Regge モデルは [283] で導入された．$6j$ 記号と Einstein 作用の正確な関係については， [284] を見よ．Regge 計算法は [285] で導入されている；Turaev–Viro モデルは [286] で導入されている．スピン・フォーム・モデルと群上の QFT の双対性は，$[SO(4)]^4$ 上の QFT と 3 次元 Ponzano–Regge モデルの双対性として，Boulatov によって [287] で指摘された．Boulatov の目的は“行列モデル”と 2 次元量子重力の間の双対性 [21]，あるいは“ゼロ次元の弦理論” [288] を，2 次元から 3 次元に拡張することだった．(しばらくの間，行列モデルは弦理論の背景独立な定義を与えると期待されていた．より最近では，それは大規模に発展させられ，多様な応用に用いられている．) 結果は大栗によって [289] で 4 次元に拡張され，本章で説明した TOCY モデルをもたらした； [290] も見よ．(BF 理論は [291] で議論された．) このモデルの量子変形版の正確な構成と，その三角形分割-独立性の証明は [292] で与えられた．Ponzano–Regge モデル，LQG および長さの量子化の関係は [293] で指摘された．

BC モデルの構成については，私は Roberto DePietri と Laurent Freidel [294] にならった； [295, 296] も見よ．量子四面体のアイデアは Andrea Barbieri によって [297] で，また John Baez と John Barrett によっ

て [298] で議論され，気の利いた術語“スピン・フォーム”が導入された [269] と [299] において，GR に対するスピン・フォーム・モデルの構成に用いられた．モデル BCA と BCB は [300] で定義された．も d る BCC は [301] と [302] で定義された．異なるモデルの統計的な振舞いが [271] において試験的に探求されている．微分同相不変性に基づく，これらのモデルのいずれかを選好する議論が [270] で考察されている．スピン・フォーム・モデルと群上の QFT の双対性が BC モデルに拡張される事実は DePietri によって認識され， [300] で提示された．それを任意のスピン・フォーム・モデルに拡張できるという著しい事実は Michael Reisenberger によって認識され， [303] で提示された； [304] も見よ．GFT の有限性の証明は [305] に現れた．群の場の理論のアプローチに関する最近の (2007) 議論と改訂された参考文献については， [306] と [307] を見よ．興味ある最近の結果は，3 次元における重力の量子論 + 物質が，非可換な時空上の物質の理論と等価であるという，Laurent Freidel と Etera Livine による見解である [308].

3 次元における完全な級数の収束は [309] で議論されている．Lotentz 的 Ponzaon–Regge モデルは [310] で議論されている；Lotentz 的 BC モデルは [311] で議論されている．Lorentz 的モデルの量子群版は [231] で研究されており，これはその主題への詳細な手引きと網羅的な参考文献として私が読者に勧める論文である．Euclid 的な場合のように，群の量子変形は発散を制御し，古典的な作用の宇宙項に関係付けられる．Lorentz 的 GFT モデル $S_{SO(3)}$ は [312] で定義されている．このモデルに対する Lorentz 的 GFT の有限性の証明は [313] に現れた．モデル $S_{SO(2,1)}$ は [314] で定義されている．表現の時間的/空間的特徴の問題については，[315] とそこに含まれる参考文献を見よ．

Lorentz 的な経歴にわたる和への異なるアプローチが [317] で開発された．時間における前方および後方への伝播を区別できる，スピン・フォーム形式の興味ある変種が， [318] で導入された．

スピン・フォーム・モデルの振幅からの Hilbert 空間の再構成については， [274] と [275] を見よ．スピン・フォームと正準 LQG の関係については， [319, 320] も見よ．3 次元における等価性の完全な証明は Karim Noui と Alejandro Perez によって [321] で得られた．BF 理論における Immirzi パラメータの役割については， [322] を見よ．スピン・フォーム振幅からの Minkowski 真空の導出に対する仮定は [145] に現れた．Einstein 方程式の古典的な解を表すコヒーレント状態の構成に対する Hamilton 形式のアプローチは，Thiemann と Winkler [323] によって開発されている．スピン・フォーム形式の因果的なバージョンが Fotini Markopoulou と Lee Smolin [324] によって研究されている．スピン・フォーム・モデルの物質との結合への拡張はまだ発達していない， [325, 326] を見よ．Peter–Weyl 定理と群上の調和解析 (harmonic analysis) 一般については，例えば [327, 328] を見よ．

n 点関数の背景独立な定義は [329] で与えられている．重力子の伝播関数は [330] で導かれている． [331] も見よ．

第 10 章　結論

本書では量子重力，その技術的側面とその概念的問題，私がそれらを理解する方法に関する，コンパクトで統一的な観点を提示することを試みてきた．網羅したかった非常に多くの他の側面が量子重力にはあるが，私のエネルギーには限りがある．省いてきた主要な話題に少し言及だけする：2 + 1 重力．小玉状態 (Kodama state) と関係する結果，量子重力現象論，LQG における超重力，コヒーレント状態……．ここでは LQG から立ち現れる物理的な描像と，それが提示する量子重力の特徴的な概念的問題への解決策を手短に要約する．主要な未解決問題と理論の主要な結果の要約で締め括る．

10.1　ループ重力の物理的な描像

重力の量子論を発展させる試みは伝統的な物理的アイデアをいくらか改めることを我々に強いる．2 つの構成要素，GR と QM の概念的新奇性と，その 2 つの間の緊張を踏まえれば，これは期待されることである．本書で提示した物理的な描像は数十年の研究から現れており，困難の仮説的な解決策である．以下はその概念的な帰結の手短な要約である．

10.1.1　GR と QM

ループ重力の 1 つ目の結論は，GR と QM が互いに矛盾しないことである．GR をその古典的な極限に持つ量子論は，存在することが判明する．融合するためには，QM と古典的 GR の両方を適切に定式化し解釈せねばならない．より正確には，それらはいずれも古典的で前相対論的な物理のいくつかの側面を，したがって互いのいくつかの側面を修正する．

GR は我々がダイナミクスを理解する方法を変えた．それは古典的および量子力学的な，力学系の構造を変えた．古典および量子力学はこの概念的新奇性と整合する定式化を許容する．これらの定式化はそれぞれ第 3 章と第 5 章で研究した．QM の相対論的な定式化にはさらに開発する必要のある側面があるものの，古典および量子力学はいずれもよく定義され，この一般化された形において整合的であり予言能力がある．

主要な新奇性は，ダイナミクスが全ての物理的変数 (部分的観測量) を同等に扱い，それらの相関を予言することである．ダイナミクスは，それに対して発展が記述されるところの，“時間”と呼ばれる特別な変数を選び出さない．ダイナミクスは時間発展に関係するのではなく，部分的観測量の間の関係に関係する．

QM もまた古典的 GR の世界の描像を変える．量子論において物理的な系は軌道を追わない．重力場の古典的な軌道は時空である．したがって，Schrödinger 粒子の軌道の概念は無意味であるのと同じ意味で，連続的な時空が究極的には非物理的であることを QM は示唆するたとえ古典的な Maxwell 場の概念が失われても，Maxwell 理論が量子論の領域において物理的に意味のある理論に留まるように，古典的な時空の概念を諦めたとしても，GR は意味のある理論に留まる．

時空がない場合に GR を理解するには，伝統的なものとは異なる観点から Einstein の主要な発見を理解せねばならない．Einstein の主要な発見は，時空と重力場が同じ対象だということである．この発見の一般的な理解は，重力場はなく，力学的な (dynamical) 時空だけがあるというものである．量子論の観点からは，時空はなく，重力場だけがあると述べると述べる方が，より明解でより有用である．この観点からは，重力場は他のあらゆる場と極めて似ている．Einstein の発見は，Newton によって導入された虚構的な背景時空は存在しないということである．物理的な場とそれらの関係だけが現実の構成要素である．

10.1.2 観測量と予言

時間発展と時空がない場合，物理的な理論は何を予言するか？ 我々が行うあらゆる物理的な測定は究極的には，量子場の何らかの局所的な性質の測定である．これらの測定は適切な運動学的量子空間における演算子で表される．理論はこのとき 2 種類の予言を与える．

- 第 1 に，演算子のスペクトル的な性質は，対応する物理量の量子化の性質を予言する．それはその量がとることのできる値のリストを決定する．
- 第 2 に，量子ダイナミクスは観測の間の相関確率を予言する．すなわち，それは測定結果のアンサンブルに相関確率振幅を関係付ける．

この概念的な構造は背景時間がない場合にも，物理的な世界の意味ある予言的な理論を定式化するのに充分である．

特別な“量子重力的な観測量”はない．重力場に関与するあらゆる測定は量子重力的な測定でもある．我々が古典的 GR を検証し，その結果が古典的 GR を用いて予言されるあらゆる測定もまた，原理的に，“量子重力的な測定”である．区別は実験的な正確さの 1 つである．

重力場に依存する量の測定は，重力の量子論における演算子で表される．特に，面積や体積の測定のような幾何学的な測定は，この種のものである．第 6 章で説明した理論は，これらの測定に対応するよく定義された演算子を構成する．それらのスペクトルは分かっており，定量的で量子重力的な予言を与える．

検出器たちに囲まれた有限領域で起きる“散乱”実験と見なせる実験がある．この散乱の伝統的な記述は 2 つの異なる種類の測定に基づいている：

(i) 検出器の相対的な位置を測定する，時計と計器 (meters)；
(ii) 場の性質を測定する，粒子の検出器または他の器具．

前相対論的な物理では，クラス (i) の測定は背景時空上の位置に関係するのに対し，クラス (ii) の測定は場の理論の力学変数に関係する．(i) と (ii) の区別は重力では消える．これは距離と時間間隔が重力場の性質に他ならず，したがってクラス (i) の測定はクラス (ii) に含まれるからである：両方とも実験領域の境界上の場の値に関係する．場の性質の一定のアンサンブルを測定した検出器のアンサンブルと，それらの相対距離が与えられたとき，理論は同じ測定の異なる結果に関する，与えられた測定結果の相対頻度を計算することを可能にする，関連する相関確率振幅をもたらさねばならない．

10.1.3 空間，時間およびユニタリー性

空間　伝統的な物理的空間の消失は LQG の描像の典型的な特徴である．互いに変換する確率振幅を与えられた，重力場の量子力学的な励起がある．これらの“重力の量子”は時空に埋め込まれていない．それらは空間**である**．物理的な世界の不活性な“容器”としての空間のアイデアは消失する．

代わりに，我々を取りまく物理的な空間は，スピン・ネットワークの結節点によって表される．個々の重力場の量子の集まりである．より正確には，空間はそのような集まりの量子力学的な重合せである．

第 2 章で述べたように，空間-容器の消失は全く真の革命ではない：それは，Newton 以前に西洋文化において支配的で伝統的な空間の理解の仕方であった，事物の関係としての空間の見方への回帰に相当する．

Copernicus 以前の世界において，宇宙の秩序はかなり階層的で構造的だったことを，あるいは付け加えても良い．よって，物体は互

いに対してのみ位置付けられるものの，大局的にはこれは全ての物体にかなり正確な位置を与えるのに充分だった．この位置は各物体の“身分”を表す：卑しい物体はここに落ち，高貴な物体は上の天国にある．Copernicus 的な革命により，この全体的で大局的な構造は失われた．物体はもはや自分のいる“場所”を知らない．Newton は現実に大域的な基準を与えた．それは Newton によれば，神に固定された基準である：空間は神の“知覚”であり，神によって知覚される世界である．そのような神への露骨な言及があろうとなかろうと，空間はそれに対して他の全ての存在が位置付けられる特別な存在として，3 世紀にわたって支持された．おそらく 20 世紀と GR によって，我々は現実を成立させるのにこの基準が必要ないことを学んでいる．現実はそれ自体で成立する．物体は他の物体と相互作用し，これが現実である．現実はこれらの相互作用のネットワークである．ネットワークを成り立たせる外的な存在は必要ない．

時間　伝統的な物理的時間の消失は，非摂動的な量子重力の 2 つ目の典型的な特徴である．これはおそらく空間の消失よりラディカルな 1 歩である．本書は量子重力に関係するのと同じくらい，時間に関係する．本書で定義した中心的なアイデアは，重力の量子論を定式化するには，時間の流れが現実の究極的な側面であるというアイデアを捨てねばならないということである．物理的な世界を状態と観測量の時間発展の観点から記述してはならない．むしろそれを，観測量の相関の観点から記述しなければならない．

この観点の変更は既に古典的な GR によって強いられているものの，古典的な GR において Einstein 方程式の解の各々はなお，連続的な時空の概念を与える．我々が基本的な水準で時間の不在と真に対峙するのは，古典的な解が消失する重力の量子論においてのみである．時間のない基礎物理は有効である．その定式化と解釈は整合的に留まる．実際，第 3 章で示したように，“時間”部分観測量は特別であるというアイデアを諦めるや否や，力学ははるかにより簡潔で洗練された形をとる．

ユニタリー性　伝統的な QM と QFT において，ユニタリー性はダイナミクスの時間並進対称性の帰結である．GR では，時間並進対称性のアナロガスな概念は，一般には存在しない．したがって，伝統的なユニタリー性が理論に必要ということに意味はない．しばしばユニタリー性がなければ理論は整合的でないということを聞く．これは全ての物理的理論が時間並進の下で対称でなければならないという，誤った仮定に基づく誤解である．

時間が存在しないことを受け入れ難く感じる人々もいる．これは，それに沿って全てが流れる絶対“時間”の，古き Newton 的な概念に対する単なるある種のノスタルジアであると私は信じる．ところがこの概念は現実世界を理解するには不適切であることが，既に特殊相対性理論によって示されている．ユニタリーな時間発展，あるいは Poincaré 不変性の必要性のアイデアに固執することは，一般相対論的な量子物理を記述するのに不適切な概念の住処 (anchorage) である．

10.1.4　量子重力と他の未解決問題

理論物理学 (とその外部) のあらゆる種類の未解決問題が量子重力に関係付けられてきた．これらの多くについて，私は量子重力との関係が全く分からない．特に，

- **量子力学の解釈**．量子力学の標準的な解釈 (各人が好む何であれ) の範疇で重力の量子論を探求してはならない理由は全く分からない．これら 2 つの問題を関係付けるいくつかの議論が提示されてきた．一般的な議論は，Copenhagen 解釈では観測者が**外的**でなければならないものの，重力場に対して外的であることはできないというものである．この議論は誤りと考える：もしそれが正しいならば，それは Maxwell 場にも同様に当てはまる．巨視的な古典的器具と，例えば (巨視的な) 時空の小さな領域で起きる，量子重力現象の相互作用を記述するのに，我々は Copenhagen 解釈を整合的に用いることができる．この領域において短いスケールで時空の概念が破綻する事実は，外的な Copenhagen 観測者と相

互作用する領域を我々が有することを妨げない[146].

- **量子力学的な収縮** (collapse). Roger Penrose は GR と QM 収縮問題を関係付ける，微妙な議論を提示した．議論は Schrödinger 方程式において時間変数があるものの，物理的な時間の流れは重力場に影響されるという事実に基づいている．この議論は正しいものの，それは外的な時間変数を持つ Schrödinger 描像が，量子重力において有効でないことを示しているに過ぎないと私は考える．
- **全ての相互作用の統一**．電磁場を量子化するには，それを他の場と統一する必要はなかった．また強い相互作用の量子論を見出すために，それを他の相互作用と統一する必要はない．量子重力の問題と全ての相互作用を統一する問題が関係しているかもしれないという，かすかなヒントは，標準模型の走行 (running) 結合定数たちが合うスケールが Planck スケールから非常に離れてはいないという事実だけである．しかしそれは互いに非常に近くはない．
- **素粒子の質量，宇宙定数，標準模型の世代……意識……**．我々が理解していない宇宙の多くの側面がある；それら全てが重力を量子化する問題や，背景独立な QFT を理解する問題に関係していないければならない理由は何もない．我々は“物理学の終わり”のはるか遠くにおり，我々がまだ理解していないことは多くある．

他方で，量子重力が密接に関係している，2 つの重要な未解決問題がある．

- **紫外発散**．紫外発散の消失はループ重力の主要な成功の 1 つである．これは空間の短いスケールの量子化を通じて，物理的に明瞭で納得のいく方法で達成される．
- **時空の特異性**．これまで一般的な結果は何もない．しかし第 8 章で言及したループ量子宇宙論は，古典的な初期の特異性が理論によって制御できることを示している．

10.2 何が達成され何が欠けているか？

第 6 章と第 7 章で提示した定式化は，よく定義された背景独立な重力と物質の量子論を与える．理論は Euclid 的および Lorentz 的なバージョンに存在する．より詳しくは：

- **背景独立性**．LQG の主要な大望は GR と QM を，その 2 つの理論から得られた自然に対する洞察を融合できる理論へと結合することだった．問題は一般相対論的な QFT，あるいは虚構的な背景時空を用いることなく構成された QFT とは何であるかを，理解することだった．LQG はこの目標を達成している．それが物理的に正しいか否かに関わらず，それは QFT が一般相対論的で背景独立であり得ることを証明している．それは背景独立な QFT の非自明な例を与えている．
- **物理的な描像**．LQG は GR と QM を組み入れる，世界の新しい仮説的な一貫した描像を与える．本書ではこの描像，その仮定と含意を詳しく丹念に説明することを試みた．量子重力的な場と物質の背景独立な構造の描像は単純で納得がいく．スピン・ネットワーク状態は，Einstein 方程式の解のように，それ自体が位置付けと空間的な関係を定義する，Planck 尺度の量子力学的な励起を記述する．物理的な空間はスピン・ネットワークの量子力学的な重合せである．スピン・ネットワークは古典力学における粒子のような第一義的に具体的な“物体”ではない：むしろそれらは，振動子のエネルギーの量子のように，重力場が相互作用する仕方を表す．直接的な物理的解釈を持つ理論の要素は，スピン・ネット

[146] しかしながら，5.6.4 節を見よ．

ワークがスペクトルを特徴付けるところの，部分的観測量の代数の要素である．

- **定量的な物理的予言**．第 6 章で説明した面積と体積のスペクトルは，大量の正確で**定量的な**物理的予言を与える．単一の全体の乗法的な因子，Immirzi パラメータ，あるいは等価的に，Newton 定数の裸の値を除き，それらに曖昧さはない．今日の技術はこれらのスペクトルを直接検証できない．間接的な検証は必ずしも除外されない．これらの予言について興味あることは，他方で，まさにそれらが存在するという事実である．理論はそれが，少なくとも原理的には実証または反証可能な，大量の正確で定量的な予言を提供できない限り，科学的理論ではない．私の知る限り，同様に大量の予言された数量の組を与える，現在の仮説的な重力の量子論は他にない．
- **紫外発散**．LQG には標準模型と結合したときでさえ，紫外発散がないことが判明している．
- **ブラックホール熱力学**．描像のいくつかの側面はまだ不明瞭であるものの (とりわけ，Immirzi パラメータの決定)，8.2 節で説明したように，LQG はブラックホール・エントロピーの納得できる説明を与える．
- **ビッグバン特異性**．古典的な初期宇宙の特異性は，8.1 節で説明した LQG の宇宙論への応用において制御される．

まだ欠けている，あるいは充分に発展していない LQG の主要な側面は以下である：

- **散乱振幅**．よく定義された物理的理論を得ることは，そこから物理を取り出す方法を理解することとは異なる．我々は鉄の原子に対する完全な Schrödinger 方程式を書き，この方程式が鉄のスペクトルを予言し得ることを納得できる．しかしこのスペクトルを計算することは別の問題である．ある意味，我々は LQG において似た状況にある．よく定義された理論はあるものの，今のところ理論の基本的な定式化からの，観測可能な振幅の系統的な計算の優れた能力はない．欠けているのは，摂動展開の何らかの適切な形での，それを行うための系統的な定式化である．

  この定式化を発展させる困難はもちろん，重力場の古典的な解の周りの摂動展開が上手くいかない事実による．これが起きる理由は明らかである：非摂動的な効果が Planck 尺度で支配的になり，空間の離散的で量子化された構造をもたらす．摂動的な計算を実行する代わりの方法を見つける必要がある．この問題に関する研究の 1 つの方向は，第 9 章で説明した共変なスピン・フォーム形式を利用する．しかしこの形式はまだ，散乱振幅を計算する系統的な技法を与える段階にない．(**ペーパーバック版への加筆**：この方向の研究は急速に発展している．一般共変な n 点関数が定義され計算された．前章末尾の文献ノートを見よ．)
- **半古典的な極限**．量子電磁力学における電磁場の巨視的な配位の記述は自明ではないものの，例えばコヒーレント状態の技法を用いて，達成できる．LQG で Einstein 方程式の巨視的な解を記述することも似た問題である．与えられた巨視的な解を近似する $\mathcal{K}_{\mathrm{diff}}$ の状態を見つけられるか？ この方向の研究計画が，特に Thomas Thiemann と Abhay Ashtekar のグループによって追求されている．この急速に発展する研究の方向における技術の状況の説明については，私は彼らの仕事を読者に紹介する．

  LQG は量子重力への他の多くの伝統的なアプローチにとって，特異な対照的な位置 (specular position) にある．最も一般的な困難は Planck 尺度の物理の記述に達することである：多くの定式化は背景独立な Planck 尺度の水準において，発散するか，他の何らかの仕方で破綻する傾向にある；LQG は，対照的に，背景独立な Planck 尺度の物理の単純でコンパクトな記述を与える定式化を提供する；しかし低エネルギーの物理の復元はより困難であることが判明する．(**ペーパーバック版への加筆**：上で言及した n 点関数の最近の計算は，理論の長距離の極限を検証する方法を与える．特に， [330] で得られた伝

播関数の正しい長距離の振舞いは，背景独立な理論からの Newton の法則の復元と解釈できる．前章末尾の文献ノートを見よ．)

(**ペーパーバック版への加筆**：この方向における重要な最近の結果は，3 次元における 2 つの定式化の正確な等価性の証明である [321]．)

- **Minkowski 真空**．我々に必要な最も重要な状態は，Minkowski 空間に対応するコヒーレント状態 $|0_{\mathrm{M}}\rangle$ である．これは理論を QFT の通常の定式化に関係付け，粒子の散乱振幅を定義するのに不可欠である．この状態を計算する方針は第 9 章の最後に提案したものの，それが上手くいくかを理解するのはあまりに時期尚早である．
- **ハミルトニアンの形**．7.1.3 節で議論したように，量子力学的なハミルトニアンの正確な形はまだ確定していない．提案されてきた数々の量子化の曖昧さと，数々の可能な変種がある．ハミルトニアンの正しい形を選ぶ困難は，Planck 尺度の直接的な実験的な指南を欠くことだけに依るのではなく，上で論じたように，理論から物理的な予言を取り出す際の我々の貧弱な制御にも依っている．
- **スピン・フォームと Hamilton 形式の関係**．最後に，第 9 章の Lagrange 形式のアプローチと，第 6 章および第 7 章の Hamilton 形式のアプローチの関係はまだ充分明らかではない．

時空の信頼できる完璧な量子論を得たと言える前には，解決しなければならない多くの問題がある．本書にここまでついてきた読者の中に，旅を完遂できる者たちがいることを望む．

Galileo の素晴らしい散文を引用して締め括る：

> Ora, perché è tempo di por fine ai nostri discorsi, mi resta a pregravi, che se nel riandar più posatamente le cose da me arrecate incontraste delle difficoltà o dubbi non ben resoluti, scusiate il mio difetto, si per la novità del pensireo, si per la debolezza del mio ingegno, si per la grandezza del suggetto, e si finalmente perché io non pretendo né ho preteso da altri quell'assenso ch'io medesimo non presto a questa fantasia[*147].

*147 “さて，議論を終える時なので，私に残されているのは，私の説明したことをより注意深く再考する際に，よく解決されていない困難や疑義を発見したとしても，あなたが私の欠陥を非難しないことを祈ることだけである：それはアイデアの新奇性，私の理解の貧弱さ，主題の大きさゆえであり，また何より，私自身も持っていない確信を他者がこの空想に対して持つことを，私は彼らに求めることも求めたこともないからである．” [332]

第 III 部

付録

付録 A　群とリカップリング理論

A.1　$SU(2)$：スピノル，結節因子，n-j 記号

$SU(2)$ は行列式が 1 であるユニタリーの 2×2 複素行列の群である．添字 A と B は値 $A, B = 0, 1$ をとるとして，我々はこれらの行列を $U^A{}_B$ と書く．群の基本表現はこれらの行列の C^2 への自然な作用として定義される．表現空間はしたがって 2 つの成分を持つ複素ベクトルの空間である．それらはスピノルと呼ばれ，

$$\psi^A = \begin{pmatrix}\psi^0\\ \psi^1\end{pmatrix} \tag{A.1}$$

と書き表される．n 個の添字を持つ完全対称なスピノル $\psi^{A_1\cdots A_n}$ から成る空間を考えよ．全ての添字に対する $SU(2)$ の作用の下で，この空間はそれ自身へと変換する．したがって，それは $SU(2)$ の表現を定義する：

$$\psi^{A_1\cdots A_n} \to U^{A_1}{}_{A'_1}\cdots U^{A_n}{}_{A'_n}\psi^{A'_1\cdots A'_n} \tag{A.2}$$

［この変換則は添字の対称性と整合していることが見て取れる．］この表現は既約であり，次元 $2j+1$ を持ち，$SU(2)$ のスピン j 表現と呼ばれ，ここに $j = \frac{1}{2}n$ である．全てのユニタリーで既約な表現はこの形を持つ．［本稿次節で説明する．$j=1$ 表現に対しては確認済み [418, pp.113–114].］

反対称テンソル ϵ^{AB} ($\epsilon^{01}=1$ で定義される) は，$SU(2)$ の作用の下で不変である：

$$U^A{}_C U^B{}_D \epsilon^{CD} = \epsilon^{AB}. \qquad \text{［本稿次節で確認］} \tag{A.3}$$

この方程式を ϵ_{AB} ($\epsilon_{01}=1$ で定義される) と縮約すると，U の行列式が 1 である条件

$$\det U = \epsilon_{AC}\epsilon^{BD}U^A{}_B U^C{}_D = 1 \tag{A.4}$$

が得られる，と言うのも

$$\epsilon_{AB}\epsilon^{AB} = 2 \tag{A.5}$$

だからである．$SU(2)$ 行列の逆は単に

$$(U^{-1})^A{}_B = -\epsilon_{BD}U^D{}_C\epsilon^{CA} \tag{A.6}$$

と書ける［本稿次節で確認]．

$SU(2)$ 表現理論のほとんどは ϵ_{AB} の不変性から直接帰結する．例えば，基本表現 $j=1/2$ とそれ自身とのテンソル積を考えよ．これは 2 つの添字を持つスピノル ψ^{AB}

$$(\psi\otimes\phi)^{AB} = \psi^A\phi^B \tag{A.7}$$

の空間上の可約表現を定義する．あらゆる 2 つの添字を持つスピノル ψ^{AB} を，その対称部分とその反対称部分に分解することができる：

$$\psi^{AB} = \psi_0\epsilon^{AB} + \psi_1^{AB}. \tag{A.8}$$

ここに

$$\psi_0 = \frac{1}{2}\epsilon_{AB}\psi^{AB} \tag{A.9}$$

であり，また ψ_1^{AB} は対称である［本稿次節で補足］．ϵ_{AB} の不変性により，この分解は $SU(2)$ 不変である．スカラー ψ_0 の成す 1 次元の不変部分空間は自明な表現 $j=0$ を定義する．対称スピノル ψ_1^{AB} の成す 3 次元の不変部分空間は随伴表現 $j=1$ を定義する．よって 2 つのスピン 1/2 表現のテンソル積はスピン 0 およびスピン 1 表現の和である：$1/2 \otimes 1/2 = 0 \oplus 1$．［文献 [421, pp.278–280,pp.294–295] [418, pp.113–114] も見よ．］

一般に，スピン j_1 の表現とスピン j_2 の表現をテンソル化すると，初めの $2j_1$ 個と後ろの $2j_2$ 個の添字に関して対称な $2j_1+2j_2$ 個の添字を持つスピノルの空間を得る．［2 つのスピノル (A.2) の積をとれば良い．再び式 (A.2) の箇所を考慮すると］全ての添字を対称化することにより，表現 j_1+j_2 において変換する不変部分空間を得る．代わりに，k 回テンソル ϵ_{AB} を用いて，1 つ目のグループの k 個の添字と 2 つ目のグループの k 個の添字を縮約し，次いで残り $2(j_1+j_2-k)$ 個の添字を対称化できる．これは $2(j_1+j_2-k)$ 次元の不変部分空間を定義する．k の最大値は明らかに $2j_1$ と $2j_2$ のうち大きくない方 (smallest) である．［$2j_1$ 個の添字と $2j_2$ 個の添字のどちらかを使い切るまで縮約できるから．］よって表現 j_1 と j_2 のテンソル積は，表現 $|j_1-j_2|, |j_1-j_2|+2, \cdots, (j_1+j_2)$ の和である．［得られる既約表現 $j=j_1+j_2-k$ において，$k=0,1,\cdots,\min(2j_1,2j_2)$ は正しくは 1 ずつ変化すると考えられる．］

このように，2 つの表現の積に現れる各々の既約な j_3 は，

$$j_1+j_2+j_3=N \tag{A.10}$$

が整数であって，かつ

$$|j_1-j_2| \le j_3 \le (j_1+j_2) \tag{A.11}$$

のとき，かつそのときに限り 1 回まで現れる．［実際 $j_3=j_1+j_2-k$ であって，2 つの半整数 j_1,j_2 との和 $2(j_1+j_2)-k$ は常に整数となる．］これら 2 つの条件は Clebsch–Gordan 条件［Clebsh–Gordon は誤記[*148]］と呼ばれる．それらは

$$2j_1=a+c, \qquad 2j_2=a+b, \qquad 2j_3=b+c \tag{A.12}$$

なる 3 つの非負整数 a,b および c が存在するという要求と等価である．［式 (A.12) が条件 (A.10–11) を満たすことは直ちに確認できる．逆証を含め，このことはすぐ後のグラフ的解釈 (図 44) において見やすい．また式 (A.12) のように書き換えれば，条件 (A.10–11) が実は j_1,j_2,j_3 に関して対称であることが明白となる．］

3 つの表現 j_1,j_2,j_3 があるとすると，1 つが残り 2 つの積にあるとき，かつそのときに限り，すなわち，Clebsch–Gordan 条件が満たされるときに限り，その 3 つのテンソル積は自明な表現を含む．［その理由が文献 [416, p.104] で丁寧に説明されている．］3 つの積の不変部分空間は，初めの $2j_1$ 個，次の $2j_2$ 個，および最後の $2j_3$ 個の添字に関して対称な，$2(j_1+j_2+j_3)$ 個の添字を持つ不変テンソルから成る．スケーリングを除き，1 つだけそのようなテンソルがある，と言うのも，それは単一の不変テンソル ϵ^{AB} の組合せから成らねばならないからである．それは単に a 個のテンソル ϵ^{AB}，b 個のテンソル ϵ^{BC}，および c 個のテンソル ϵ^{CA} をとることによって与えられる，すなわち，

$$\begin{aligned} &v^{A_1,\cdots,A_{2j_1},B_1,\cdots,B_{2j_2},C_1,\cdots,C_{2j_3}} \\ &\quad = (\epsilon^{A_1B_1}\cdots\epsilon^{A_aB_a})(\epsilon^{B_{a+1}C_1}\cdots\epsilon^{B_{a+b}C_b})(\epsilon^{C_{b+1}A_{a+1}}\cdots\epsilon^{C_{b+c}A_{a+c}}). \end{aligned} \tag{A.13}$$

これが表現 j_1,j_2,j_3 の間の結節因子である［本稿次節で補足］．結節因子が規格化されていることを要求することによって，すなわち $v^{A_1,\cdots,A_{2j_1},B_1,\cdots,B_{2j_2},C_1,\cdots,C_{2j_3}}$ に規格化因子 K (それは以下で与える) を掛けることによって，特別な結節因子を選ぶことができる．規格化された結節因子は Wigner の $3j$ 記号と呼ばれる．

[*148] 本文 p.283 などでは正しい．

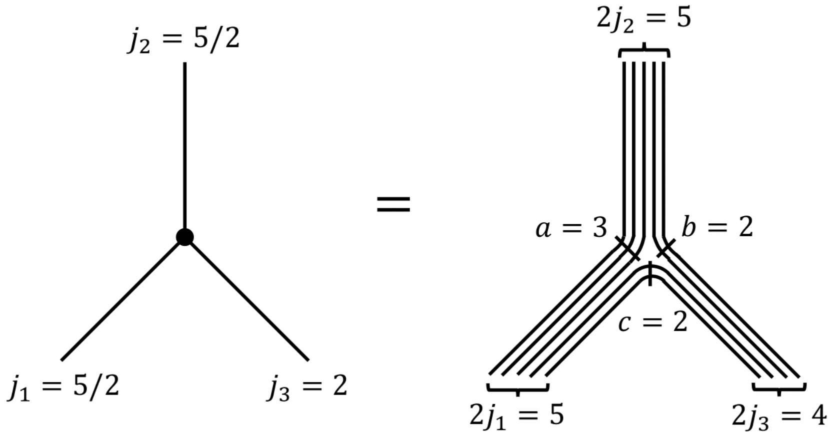


図 44　Clebsch–Gordan 条件

3 つの整数 a, b, c の存在によって示される，$SU(2)$ 既約［表現］のテンソル代数には，単純なグラフ的解釈がある (図 44 を見よ)．スピン j の表現は $2j$ 個の基本［表現］の対称化された積である．3 つの表現が合流すると，全ての基本はそれら自身の間で縮約されねばならない．j_1 と j_2 の間で縮約される a 個の基本がある，等々．スピン j の各既約を $2j$ 本の構成要素の線 (strands) から成る線 (a line) として表そう．不変テンソルは，3 本のそのような線が出会い，全ての構成要素の線が結節点を通じて繋がれるところの，3 価の結節点である：a 本の構成要素の線が j_1 から j_2 へ流れる，等々．Clebsch–Gordan 条件の意味はこのとき直ちに明らかである：式 (A.10) は単に構成要素の線の総数が偶数であり，よってそれらを組合せられることを要求している；式 (A.11) は j_3 が $j_1 + j_2$ よりも大きくなく (さもなくば j_3 の構成要素の線のいくつかは接続されずに余る)，$|j_1 - j_2|$ より小さくもない (さもなくば j_1 と j_2 のうち小さくない方 (largest) が接続されずに余る) ことを要求している．実際，この線と構成要素の線の関係はスピン・ネットワークとループの関係を正確に再現する．以下では，このグラフ的表現を詳しく発展させる．

直交基底　n 個の添字を持つ対称スピノルの空間は (複素) 次元 $2j+1$ を持つ［$n = 2j$］．しばしばこの空間において，$2j+1$ 個の直交するベクトル $e_\alpha^{\alpha_1 \cdots \alpha_n}$ から成る基底を選ぶと便利である．例えば，もし $j=1$ ならば，Pauli 行列を用いて定義される基底 $e_i^{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_i^{AB}$ は $SU(2)$ の下で，$SO(3)$ の基本表現で変換する［式 (6.31) の補足を参照］．行列 σ_i^{AB} は Pauli 行列

$$\sigma_{iB}^{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \tag{A.14}$$

から，ϵ^{CB} で添字を上げることによって得られる：

$$\sigma_i^{AB} = \sigma_{iC}^{A} \epsilon^{CB} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{A.15}$$

［行列 $\epsilon = (\epsilon^{CB}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ を掛けた．］一般に，もしスピン j が整数ならば，表現の実部分 (real section) は実の既約表現を定義する．

Wigner の $3j$ 記号　任意の直交基底において，規格化された不変テンソル (A.13) を

$$Kv^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \tag{A.16}$$

と書く．［式 (A.13) の結節因子 $K^{A_1,\cdots,B_1,\cdots,C_1\cdots}$ と上記の基底 $e_\alpha^{A_1\cdots}, e_\beta^{B_1\cdots}, e_\gamma^{C_1\cdots}$ の内積をとって，上式 $\sim v_{\alpha\beta\gamma}$ を得る [171, § 4.1].］以下で行うように，角運動量の第 3 成分 ($\alpha \equiv m$) を対角化する基底を選べば，これらは Wigner の $3j$ 記号に比例する．

note　Clebsch–Gordan 係数を

$$\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j, m\rangle = (-1)^{j_1-j_2+m}\sqrt{2j+1}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \tag{38}$$

と書いて Wigner の $3j$ 記号を定義する．$m = m_1 + m_2$ と条件 (A.11) が満たされなければ Clebsch–Gordan 係数は，したがって結節因子はゼロになる [421, pp.285–286]．文献 [171, § 4.1] では (そのような条件を満たす量の) 一意性から，式 (A.16) を $3j$ 記号に比例するものと同定している．

規格化 K は

$$\overline{Kv^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}}Kv_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = 1 \tag{A.17}$$

によって固定される［式 (5.157)］．例えば，容易に

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ A & B & i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\sigma^{iAB} \tag{A.18}$$

［本稿次節で補足］および

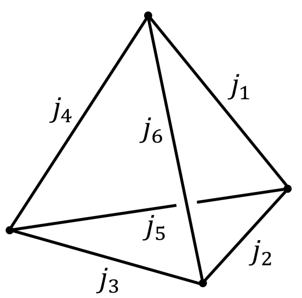
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & j & k \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\epsilon^{ijk} \tag{A.19}$$

［冒頭「術語と表記」で見た回転行列の生成子 $(v_i)^j{}_k \sim \epsilon_i{}^j{}_k$］を得る．

Wigner の $6j$ 記号　4 つの $3j$ 記号と不変テンソル $(-1)^{j-\alpha}$ との縮約は $6j$ 記号を定義する．

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} j_1 & j_4 & j_6 \\ j_3 & j_2 & j_5 \end{Bmatrix} = \sum_{\alpha_1\cdots\alpha_6}(-1)^{\sum_A(j_1-\alpha_1)}\begin{pmatrix} j_3 & j_6 & j_2 \\ \alpha_3 & \alpha_6 & \alpha_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_5 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_5 \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} j_6 & j_4 & j_1 \\ \alpha_6 & \alpha_4 & \alpha_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_4 & j_3 & j_5 \\ \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_5 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{A.20}$$

［指数 $j_1 - \alpha_1$ は $j_A - \alpha_A$ か.］添字は全て縮約されているので，この量は表現空間において選んだ基底に依存しない．縮約のパターンは四面体の幾何学で指定される．四面体の各頂点に 1 つの $3j$ 記号があり，各辺に 1 つの表現がある：



(A. 21)

［式 (A.20) の左辺に従って各辺に j を充て，次いで各頂点に集まる 3 つの j に関する $3j$ 記号を式 (A.20) 右辺に書けば良い.］

上のように，辺に関係したスピン $j_1, \cdots, j_6$ を持つ四面体を考えよ．スピン j の $SU(2)$ 既約表現の表現空間を $\mathcal{H}_j$ で表す．$SU(2)$ の可約表現 $\mathcal{H}$ が与えられたとき，そのスピン j の成分を $[\mathcal{H}]_j$ で表す．Wigner の $6j$ 記号は空間 $\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3}$ における部分空間

$$[[\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2}]_{j_6} \otimes \mathcal{H}_{j_3}]_{j_4} \qquad \text{および} \qquad [\mathcal{H}_{j_1} \otimes [\mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3}]_{j_5}]_{j_4} \tag{A.22}$$

の共通部分の次元である.

結節因子　全ての結節因子は 3 価のものから始めて構成できる．例えば表現 j_1, j_2, j_3 および j_4 の間の 4 価の結節点は，(規格化を除き) 2 つの 3 価の結節点を縮約することで得られ：

$$v_i^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} = i^{\alpha_1\alpha_2\alpha} i_\alpha{}^{\alpha_3\alpha_4}, \tag{A.23}$$

ここに α は表現 i における添字である．結節因子の空間はこのとき，i が 2 つの重要な Clebsch–Gordan 条件を満たす全ての表現にわたるときの，すなわち 3 価の結節点が存在するような，テンソル v_i によって張られる．表現 i は 4 価の結節点が分解されるところの，2 つの 3 価の結節点を繋いでいる“仮想的なリンク”に関係していると言われる.

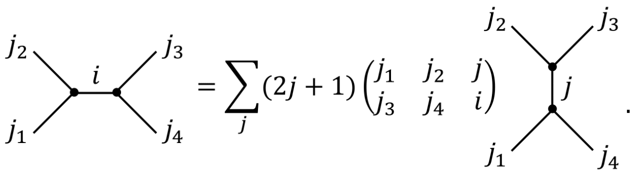
この同じ結節点の空間上の異なる基底が，第 1 と第 2 の脚の代わりに，第 1 と第 3 の脚を組合せることによって得られる．すなわち

$$w_i^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} = i^{\alpha_1\alpha_3\alpha} i_\alpha{}^{\alpha_2\alpha_4}. \tag{A.24}$$

v_i と w_i の間におけるこの基底の変更は，以下 (式 (A.65)) で示すように，Wigner の $6j$ 記号で与えられる：

$$v_i = \sum_j (2j+1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ j_3 & j_4 & i \end{pmatrix} w_j. \tag{A.25}$$

グラフ的には，



. (A.26)

5 価の結節因子は 3 価と 4 価の結節因子を縮約することによって構成でき，こうして 2 つの既約でラベルできる，等々．一般に，n 価の結節点は $n-2$ 本の仮想的なリンクで繋がった $n-2$ 個の 3 価の結節点に分解でき，対応して結節因子を構成でき：

$$v_{i_1\cdots i_{n-3}}^{\alpha_1\cdots\alpha_n} = i^{\alpha_1\alpha_2\beta_1} i_{\beta_1}{}^{\alpha_3\beta_2} i_{\beta_2}{}^{\alpha_4\beta_3} \cdots i_{\beta_{n-3}}{}^{\alpha_{n-1}\alpha_n}, \tag{A.27}$$

ここに添字 β_n は表現 i_n に属する．［図 45 を参照．植木算より仮想的なリンクは正しくは $(n-3)$ 本と考えられる.］

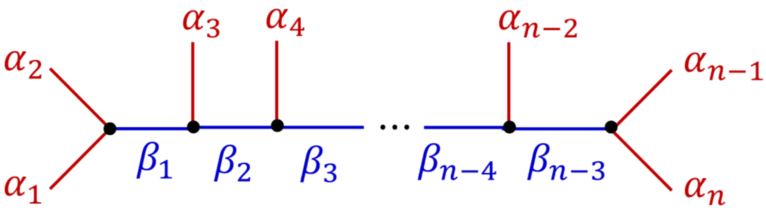


図 45　結節因子 (A.27) の図解

Pauli 行列の恒等式　σ_i を Pauli 行列 (A.14) として，$\tau_i = -\frac{i}{2}\sigma_i$ を定義する．以下の恒等式が得られ：

$$\mathrm{tr}[\tau_i\tau_j] = -\frac{1}{2}\delta_{ij}, \tag{A.28}$$

$$\mathrm{tr}[\tau_i\tau_j\tau_k] = -\frac{1}{4}\epsilon_{ijk}, \tag{A.29}$$

$$\delta^{ij}\tau_i{}^A{}_B\tau_j{}^C{}_D = -\frac{1}{4}(\delta^A{}_D\delta^B{}_C - \epsilon^{AC}\epsilon_{BD}), \tag{A.30}$$

$$\delta^{ij}\mathrm{tr}[A\tau_i]\mathrm{tr}[B\tau_j] = -\frac{1}{4}\left\{\mathrm{tr}[AB] - \mathrm{tr}[AB^{-1}]\right\}, \tag{A.31}$$

$$A^{-1A}{}_B = \epsilon^{AC}\epsilon_{BD}A^D{}_C, \tag{A.32}$$

$$\delta^A{}_B\delta^D{}_C = \delta^A{}_C\delta^D{}_B + \epsilon^{AD}\epsilon_{BC}, \tag{A.33}$$

$$\mathrm{tr}[A]\mathrm{tr}[B] = \mathrm{tr}[AB] + \mathrm{tr}[AB^{-1}], \tag{A.34}$$

ここに A と B は $SL(2,C)$ 行列である［本稿次節で補足］.

付録 A.1 について

■$SU(2)$ の既約表現のスピノル (A.2) について

$SU(2)$ の場合には，ϵ テンソルは単に二つの上付き添字を完全につぶすだけである．このことは既約表現が完全対称テンソルに対応することを意味する．何故なら，n 個の添字を持つテンソルが完全対称でなければ，二つの添字を ϵ で縮約して $n-2$ 個の添字を持つゼロでないテンソルを作れ，表現が簡約できるからである.［他方，完全対称テンソルと ϵ の縮約は消える.］明らかに，n 個の完全対称な添字を持つテンソルは，全ての添字が 1 である最高ウェイト状態が $J_3 = n/2$ を持つので，既約なスピン $n/2$ 表現に対応する [429, p.162].

■ϵ^{AB} の $SU(2)$ 不変性 (A.3) の確認　6.3.2 節 (p.237) にもあるように，反対称テンソル ϵ^{AB} と Kronecker のデルタは座標変換のみならず，$SU(2)$ 群の変換に関しても不変テンソルである [418, p.134]：

$$U^A{}_CU^B{}_D\epsilon^{CD} = (\det U)\,\epsilon^{AB} = \epsilon^{AB}, \qquad U^A{}_C(U^\dagger)^D{}_B\delta^C{}_D = U^A{}_C(U^\dagger)^C{}_B = \delta^A{}_B.$$

$U^\dagger$ を含まない第 1 式の変換則に限定して考えれば，これらのうち不変テンソルは ϵ^{AB} のみとなる.

■逆行列の表式 (A.6) の確認　一般に 2×2 行列

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対して

$$M^{-1}=\frac{1}{\mathrm{det}M}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix},\qquad \epsilon M^{\mathrm{T}}\epsilon^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

なので，

$$\epsilon M^{\mathrm{T}}\epsilon^{\mathrm{T}}=(\det M)M^{-1}$$

が恒等的に成立する [420, p.9]．ここで M を特に $SU(2)$ 行列 U に選ぶと

$$U^{-1}=\epsilon U^{\mathrm{T}}\epsilon^{\mathrm{T}},\qquad \therefore (U^{-1})^{A}{}_{B}=\epsilon^{AC}U^{D}{}_{C}\epsilon_{BD}=-\epsilon_{BD}U^{D}{}_{C}\epsilon^{CA}:\text{(A.6)}.$$

■ψ^{AB} の対称・反対称部分への分解 (A.8–9) について　恒等式

$$\psi^{AB}=\psi_0^{AB}+\psi_1^{AB},\qquad \psi_0^{AB}\equiv\psi^{[AB]},\qquad \psi_1^{AB}\equiv\psi^{(AB)}$$

において，反対称部分が

$$\psi^{[AB]}=\psi_0\epsilon^{AB},\qquad \psi_0\equiv\frac{1}{2}\epsilon_{CD}\psi^{CD}=\psi^{[01]}$$

と書けることを示せば良い [416, p.24]．ところが上式は両辺が同じ反対称性を持ち，$(A,B)=(0,1)$ に対して同じ値 $\psi^{[01]}$ をとるので，常に成立する．

■結節因子 (A.13) について　文献 [171] の 4.1 節に詳しい説明がある．表現 j_1,j_2,j_3 を充てられたリンク線が接続する 3 価の結節点が担う結節因子として，スピン・ネットワーク状態において，スピン 1/2 表現を持つ $2j_1,2j_2,2j_3$ 本のホロノミー (平行移動関数；paralell propagtors) と

$$U_{A_1}\cdots U_{A_{2j_1}}V_{B_1}\cdots V_{B_{2j_2}}W_{C_1}\cdots W_{C_{2j_3}}K^{A_1,\cdots,A_{2j_1},B_1,\cdots,B_{2j_2},C_1,\cdots,C_{2j_3}}$$

のように縮約される量 $K^{A_1,\cdots,A_{2j_1},B_1,\cdots,B_{2j_2},C_1,\cdots,C_{2j_3}}$ を考える．ただし結節点での縮約に関わらない，各ホロノミー $U_A^{A'},V_B^{B'},W_C^{C'}$ の片方の添字を省略した．そこで $K^{\cdots}$ として，最初の $2j_1$ 個，真ん中の $2j_2$ 個，最後の $2j_3$ 個の添字のそれぞれについて対称な不変テンソル $K^{A_1,\cdots,A_{2j_1},B_1,\cdots,B_{2j_2},C_1,\cdots,C_{2j_3}}$ を考えれば良い．さて，不変テンソルは ϵ^{AB} だけなので，$K^{\cdots}$ は ϵ^{AB} の積の和で表されるはずである．ところが ϵ の反対称性より，その 2 つの添字が同時に $K^{\cdots}$ の対称な A 添字 (同様に B,C 添字) をとることはできない．すると $K^{\cdots}$ は

- A 添字と B 添字を持つ ϵ^{AB} (a 個とする)
- B 添字と C 添字を持つ ϵ^{BC} (b 個とする)
- C 添字と A 添字を持つ ϵ^{CA} (c 個とする)

の積を含むことができる．このとき A,B,C 添字の個数がそれぞれ式 (A.12) で表されることから，個数 a,b,c が決まる．式 (A.13) はそのような項の 1 例である．ただし式 (A.13) そのものは A,B,C 添字の各々に関する対称性を持たない．実際そのことは，$a=b=c=1$ の簡単な場合に式 (A.13) を書き下すと

$$v^{A_1A_2B_1B_2C_1C_2}=\epsilon^{A_1B_1}\epsilon^{B_2C_1}\epsilon^{C_2A_2}$$

となることから明らかである．そこで結節因子は $(2j_1)!(2j_2)!(2j_3)!$ 個の項の線形結合を作って添字について対称化した量

$$K^{A_1,\cdots,A_{2j_1},B_1,\cdots,B_{2j_2},C_1,\cdots,C_{2j_3}}\sim\sum(\text{式 (A.13) の形})$$

で与えられる．

■結節因子 (A.18) について　まず結節因子 (A.13) に基底 $e_i^{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_i^{AB}$ を縮約すると，式 (A.18) 右辺の形が得られることを確かめる．結節因子は $2j_1 = 1$ 個の A 添字，$2j_2 = 1$ 個の B 添字，$2j_3 = 2$ 個の C 添字を持ち，式 (A.13) に従って

$$v^{ABC_1C_2} \sim \epsilon^{BC_1}\epsilon^{C_2A}$$

と書ける $(a=0, b=1, c=1)$．より正確にはこれを 2 つの C 添字について対称化し，

$$v^{ABC_1C_2} \sim \epsilon^{BC_1}\epsilon^{C_2A} + \epsilon^{BC_2}\epsilon^{C_1A}$$

としなければならない．ここで便宜的に添字を下げて

$$v^{AB}{}_{C_1C_2} = \epsilon_{C_1D_1}\epsilon_{C_2D_2}v^{ABD_1D_2} \sim \epsilon_{C_1D_1}\epsilon_{C_2D_2}(\epsilon^{BD_1}\epsilon^{D_2A} + \epsilon^{BD_2}\epsilon^{D_1A}) = -(\delta^B_{C_1}\delta^A_{C_2} + \delta^A_{C_1}\delta^B_{C_2})$$

と書く．その上で $e_i^{C_1C_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_i^{C_1C_2}$ との縮約をとると

$$v_i^{AB} \sim \sigma_i^{C_1C_2}v^{AB}{}_{C_1C_2} \sim \sigma_i^{BA} + \sigma_i^{AB}$$

を得る．このように初めに C 添字の対称化を施した結果，A と B について対称な結節因子が得られており，対称化を施さねば第 1 項 σ_i^{BA} しか現れない．それが式 (6.31) の箇所，あるいは式 (A.18) 右辺の結節因子である．

次に最低限，式 (A.18) 左辺における Wigner の $3j$ 記号の値が，右辺に一致しているかを調べる．スピン 1/2 を 2 つ合成して得られるスピン $j=1$ の状態は

$$|j=1, m=1\rangle = |{+}{+}\rangle, \qquad |j=1, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|{+}{-}\rangle + |{-}{+}\rangle), \qquad |j=1, m=-1\rangle = |{-}{-}\rangle$$

なので [421, p.279]，$3j$ 記号の定義式 (38) に基づき，ゼロでない Clebsch–Gordan 係数は

$$\begin{aligned}
1 &= \langle{+}{+}|j=1, m=1\rangle = -\sqrt{3}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}, \\
\frac{1}{\sqrt{2}} &= \langle\pm\mp|j=1, m=0\rangle = \sqrt{3}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ \pm1/2 & \mp1/2 & 0 \end{pmatrix}, \\
1 &= \langle{-}{-}|j=1, m=-1\rangle = -\sqrt{3}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & +1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

と書ける．これら $3j$ 記号の下段に左から並ぶ $m_1, m_2, -m$ のうち，$m_1, m_2 = +1/2, -1/2$ はそれぞれ適宜 $A, B = 0, 1$ に読み替えて良い．他方，1 階の球面テンソル T_m とベクトル V_i の関係は

$$\begin{aligned}
& T_0 = V_3, \qquad T_{\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(V_1 \pm \mathrm{i}\,V_2), \\
\text{i.e.} \qquad & V_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(T_1 - T_{-1}), \qquad V_2 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(T_1 + T_{-1}), \qquad V_3 = T_0
\end{aligned}$$

であり [421, p.321]，右下に値 $(-m)$ を持つ $3j$ 記号を T_{-m} と見てこれを適用すると

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ A & B & i=1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & +1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}\right\} = \begin{cases} -1/\sqrt{6} & ((A,B)=(0,0)) \\ +1/\sqrt{6} & ((A,B)=(1,1)) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ A & B & i=2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & +1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}\right\} = \begin{cases} -\mathrm{i}/\sqrt{6} & ((A,B)=(0,0),(1,1)) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ A & B & i=3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} +1/\sqrt{6} & ((A,B)=(0,1),(1,0)) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

を得る．これは式 (A.18) 右辺 $\sigma^{iAB}/\sqrt{6}$ ではなく，

$$\begin{aligned}\sigma_{iAB} \equiv& \sigma_{iB}^{C}\epsilon_{CA} = [\epsilon^{\mathrm{T}}\sigma_i]_{AB} \qquad \text{(この関係は式 (6.31) の補足においても成功裡に用いた)}\\ =& \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}\end{aligned}$$

の $1/\sqrt{6}$ 倍に一致している．

■Pauli 行列の恒等式 (A.28–34) について　Pauli 行列の性質

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + \mathrm{i}\,\epsilon_{ijk}\sigma_k, \qquad \mathrm{tr}[\sigma_i] = 0$$

より $\mathrm{tr}[\sigma_i\sigma_j] = 2\delta_{ij}$ であり，式 (A.28) はここから帰結する $SU(2)$ の生成子の規格直交性である．また上式を繰り返し用いると

$$\sigma_i\sigma_j\sigma_k = (\delta_{ij} + \mathrm{i}\,\epsilon_{ijl}\sigma_l)\sigma_k = \delta_{ij}\sigma_k + \mathrm{i}\,\epsilon_{ijl}(\delta_{lk} + \mathrm{i}\,\epsilon_{lkm}\sigma_m) = \delta_{ij}\sigma_k - \delta_{ik}\sigma_j + \delta_{jk}\sigma_i + \mathrm{i}\,\epsilon_{ijk}$$

となるので (ここでは第 3 辺までの変形で充分)，

$$\mathrm{tr}(\sigma_i\sigma_j\sigma_k) = 2\mathrm{i}\,\epsilon_{ijk}$$

を得る．これは τ_i に対する式 (A.29) に読み替えられる．

式 (A.30) について，表 8 に示した直接の成分計算より，$(A,B,C,D) = (0,1,0,1), (1,0,1,0)$ の場合を除けば

$$\delta^{ij}\sigma_{iB}^{A}\sigma_{jD}^{C} = 2(2\delta_D^A\delta_B^C - \delta_B^A\delta_D^C) = 2(\delta_D^A\delta_B^C - \epsilon^{AC}\epsilon_{BD})$$

が成立している．よって添字の上下の整合性をとるため，式 (A.30) の右辺で $\delta_C^B \to \delta_B^C$ と直さねばならないだけでなく (文献 [416, p.27] では修正されている)，式 (A.30–31) 右辺の係数を $-1/4 \to -1/2$ と直さねばならないと考えられる．いずれにせよ式 (A.30) は $(A,B,C,D) = (0,1,0,1), (1,0,1,0)$ のとき，明らかに成り立たない．

式 (A.30) が正しいと仮定して適用すると，

$$\begin{aligned}\delta^{ij}\mathrm{tr}[A\tau_i]\mathrm{tr}[B\tau_j] =& \delta^{ij}({A^A}_B\tau_{iA}^B)({B^C}_D\tau_{jC}^D) = {A^A}_B{B^C}_D(\delta^{ij}\tau_{iA}^B\tau_{jC}^D) = -\frac{1}{4}{A^A}_B{B^C}_D({\delta^B}_C{\delta^D}_A - \epsilon^{BD}\epsilon_{AC})\\ =& -\frac{1}{4}\left({A^A}_B{B^B}_A - {A^A}_B(\epsilon^{BD}\epsilon_{AC}{B^C}_D)\right).\end{aligned}$$

ところで逆行列の表式 (A.6) は，導出の際に U の行列式が 1 であることを用いたのに対し，U のユニタリー性は利用していないため，任意の $SL(2,C)$ 行列 A に対しても成り立つ (式 (A.32))．よって上式は，最右辺の第 2 項において $\epsilon^{BD}\epsilon_{AC}{B^C}_D = {(B^{-1})^B}_A$ となるので，式 (A.31) を与える．

式 (A.33) は

$$\epsilon^{AD}\epsilon_{BC} = \begin{vmatrix} \delta_B^A & \delta_C^A \\ \delta_B^D & \delta_C^D \end{vmatrix}$$

に他ならない．さらに添字を縮約すると，一連の公式

$$\epsilon^{AC}\epsilon_{BC} = \delta_B^A, \qquad \epsilon^{AB}\epsilon_{AB} = 2$$

が得られる．第 1 式は $\epsilon = (\epsilon^{AB}) = (\epsilon_{AB})$ の逆行列が転置行列 ϵ^{T} であることを意味している．

表 8　式 (A.30) 両辺の成分計算

	A	B	C	D	$\delta^{ij}\sigma^{A}_{iB}\sigma^{C}_{jD}$		$\delta^A_D\delta^C_B$	$\delta^A_B\delta^C_D$	$2\delta^A_D\delta^C_B - \delta^A_B\delta^C_D$
①	0	0	0	0	$(-1)^2+0^2+1^2$	$=2$	1	1	1
②	0	0	0	1	$(-1)\cdot 0+0\cdot(-\mathrm{i})+1\cdot 0$	$=0$	0	0	0
③	0	0	1	0	$(-1)\cdot 0+0\cdot(-\mathrm{i})+1\cdot 0$	$=0$	0	0	0
④	0	0	1	1	$(-1)\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot(-1)$	$=-2$	0	1	-1
⑤	0	1	0	0	②に同じ	$\to 0$	0	0	0
⑥	0	1	0	1	$0^2+(-\mathrm{i})^2+0^2$	$=-1$	0	0	0
⑦	0	1	1	0	$0\cdot 0+(-\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}+0\cdot 0$	$=1$	1	0	2
⑧	0	1	1	1	$0\cdot 1+(-\mathrm{i})\cdot 0+0\cdot(-1)$	$=0$	0	0	0
⑨	1	0	0	0	③に同じ	$\to 0$	0	0	0
⑩	1	0	0	1	⑦に同じ	$\to 1$	1	0	2
⑪	1	0	1	0	$0^2+\mathrm{i}^2+0^2$	$=-1$	0	0	0
⑫	1	0	1	1	$0\cdot 1+\mathrm{i}\cdot 0+0\cdot(-\mathrm{i})$	$=0$	0	0	0
⑬	1	1	0	0	④に同じ	$\to -2$	0	1	-1
⑭	1	1	0	1	⑧に同じ	$\to 0$	0	0	0
⑮	1	1	1	0	⑫に同じ	$\to 0$	0	0	0
⑯	1	1	1	1	$1^2+0^2+(-1)^2$	$=2$	1	1	1

最後に，式 (A.32–33) を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[A]\mathrm{tr}[B] =&(\delta^A_B A^B{}_A)(\delta^D_C B^C{}_D) = (\delta^A_C\delta^D_B + \epsilon^{AD}\epsilon_{BC})A^B{}_A B^C{}_D = A^B{}_A B^A{}_B + A^B{}_A (B^{-1})^A{}_B\\ =&\mathrm{tr}[AB] + \mathrm{tr}[AB^{-1}]\end{aligned}$$

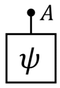
となって，式 (A.34) が導かれる．

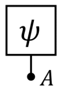
A.2　リカップリング理論

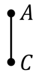
A.2.1　Penrose のバイノル (binor) 算法

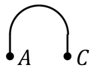
Roger Penrose は自身の博士論文において，添字の和があるテンソル表現をグラフ的な方法で書くアイデアを導入しており，それはスピン・ネットワークの起源となる美しいアイデアである[*149]．特にスピノル算法を考えよ．Penrose はスピノル算法の基本的要素を

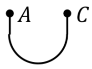
[*149] 私は最近，Penrose がこの表記を“ループ表記 (loop notation)”と呼んでいたことを知った！

$$\psi^A = $$  $$\text{(A.35)}$$

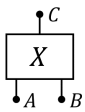
$$\psi_A = $$  $$\text{(A.36)}$$

$$\delta_C^A = $$  $$\text{(A.37)}$$

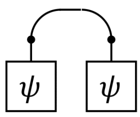
$$\epsilon_{AC} = $$  $$\text{(A.38)}$$

$$\epsilon^{AC} = $$  $$\text{(A.39)}$$

のように，また一般に，あらゆるテンソル対象を

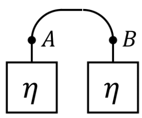
$$X_{AB}^C = $$  $$\text{(A.40)}$$

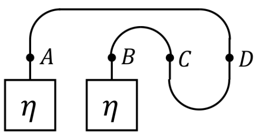
のように表す．アイデアは次いで添字の縮約を，単にむき出しの (open) 線の端点を繋ぎ添字を落とすことによって表すことである．この約束はあらゆる 2 つのテンソルの積をグラフ的な方法で書く可能性を与える．例えば：

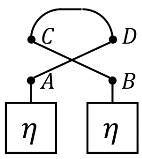
$$\epsilon_{AB}\psi^A\psi^B = $$  . $$\text{(A.41)}$$

note　ここから上付き添字と縮約する因子 ϵ_{AB} を式 (A.38) のように，端点を上側で繋ぐ線で表しておいたのは理に適っていることが納得できる．繋がれる端点にはダミー添字が対応するので，勝手な添字を充てて良い．

ところが，滑らかに線を変形しても，ダイアグラムの意味は不変であることに注意せよ．例えば

$$\epsilon_{AB}\eta^A\eta^B = $$  $$\text{(A.42)}$$

$$= -\epsilon_{AD}\epsilon_{BC}\epsilon^{CD}\eta^A\eta^B = -$$  $$\text{(A.43)}$$

$$= -\epsilon_{CD}\delta_A^D\delta_B^C\eta^A\eta^B = -$$  . $$\text{(A.44)}$$

［式 (A.44) 左辺は式 (A.42) 左辺から書き換えるのが容易である.］Penrose は彼がバイノル算法 (binor calculus) と言い表すところの，このグラフ的なスピノル算法を線の変形の下で不変にする修正を導入した．バイノル算法は上記の算法に 2 つの約束を加えることで得られる．ダイアグラムをテンソル表記に翻訳する際，我々は以下も守らねばならない.

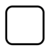
(i) 各々の最小 (minimum［下記の (iii) を見よ］) に負号を充てる；また
(ii) 各々の交差に負号を充てる.
(iii) 最大たちと最小たちは平面において固定された方向についてとる．(この方向は慣習的に紙面の縦 (vertical) 方向にとる．)
(iv) 縦の線分は Kronecker のデルタを表す.

これらの付加的な規則の利点は，それらが算法をトポロジカルに不変にすること，すなわち，その意味を変えることなくグラフ的表現を任意に滑らかに変形できることである.

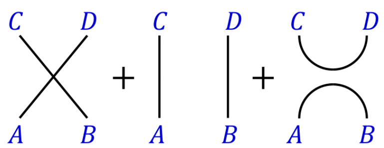
note　グラフの最も下には式 (A.42) では 2 つ，式 (A.43) では ϵ^{CD} の線も含めて 3 つの対象がある．また式 (A.44) のグラフには 2 つの最も下の対象と 1 箇所の交差がある．そこで規則を適用して，各々のグラフに順に $(-1)^2, (-1)^3, (-1)^3$ を充てれば良いと考えると，確かにグラフの変形に伴って現れる負号を再現できる．以下の式 (A.45–46) における各項の符号も同様に理解できる.

逆に言えば，任意の曲線は今や δ たちと ϵ たちの積として分解でき，また周囲同位的な (ambient isotopic)，すなわち一連のライデマイスター移動 (Reidemeister moves) によって互いに移せる任意の 2 つの曲線は，ϵ たちと δ たちの積としてテンソル表現を表す.

この約束における閉ループは値 -2 を持つ，と言うのも

 $= -\epsilon_{AB}\epsilon^{AB} = -2$　　(A.45)

であり，また

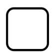


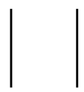
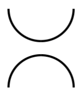
$= (-1)\delta_B^C\delta_A^D + \delta_A^C\delta_B^D + (-1)\epsilon_{AB}\epsilon^{CD} = 0$　　(A.46)

［青い添字を書き添えた］

と読み替えられる，基本的なバイノル恒等式［式 (A.33)］がある.

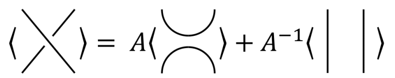
驚くべきことに，2 つのグラフ的な恒等式

 $= -2,$　　(A.47)

 $= -$  $-$ 　　(A.48)

は非常に豊かなグラフ的算法を生成するのに充分である.

Kauffman 括弧　方程式 (A.47)–(A.48) はより豊かな構造の特別な場合と見なせる．結び目理論の文脈において，Lou Kauffman はもつれ (tangles) の関数，すなわち今日では Kauffman 括弧と呼ばれる，結び目の平面でのグラフ的な表現を定義した．平面のもつれは交点で上側または下側を通る (overcross or undercross)，平面上の線の集合である．それは 3 次元の結び目の 2 次元への射影を表す．もつれ K の Kauffman 括弧は $\langle K\rangle$ で表され，2 つの関係



(A.49)

および　$$\langle \square \cup K\rangle = d\langle K\rangle \qquad \text{(A.50)}$$

で完全に決まり，ここに $d=-A^2-A^{-2}$，また K は付け加えたループと交差しないあらゆるダイアグラムである．式 (A.49) を全ての交差に適用することで，もつれの Kauffman 括弧は交差のないもつれに関する Kauffman 括弧の線形結合に簡略化される．式 (A.50) を繰り返し適用することで，我々は次いでもつれに数を関係付けることができる．Penrose のバイノル算法と式 (A.47)–(A.48) は $A=-1$ に対して復元される．この場合，上側での交差と下側での交差 (overcrossing or undercrossing) は区別されない．

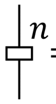
A.2.2　KL リカップリング理論

Kauffman と Lins の本 [174] に従って，以下の定義を提示できる．

反対称化作用素　n 本の平行な線を n でラベルされた単一の線

$$\Big| n \;\equiv\; \Big|\cdots\Big| \qquad \text{(A.51)}$$

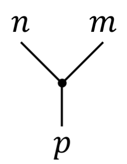
で書く．(これによって定義されるグラフ的な算法と以下の方程式，および式 (6.86) で定義される第 6 章で用いたグラフ的な算法の正確な関係は，以下の A.2.3 節で議論する．) 反対称化作用素 (antisymmetrizer) を



$$= \frac{1}{n!}\sum_p (-1)^{|p|}\, P_n^{(p)} \qquad \text{(A.52)}$$

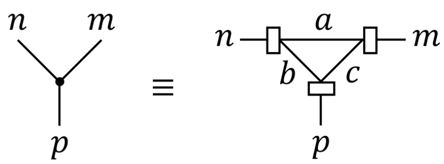
で定義する，ここに $P_n^{(p)}$, $p=1,\cdots,n!$ は $n!$ 通りの置換 (permutations) として得られる，n 本の入射する線を n 本の射出する線と結ぶ全ての可能な方法を表し，また $|p|$ は置換の符号である．

3-頂点　もつれの特別な和は 3-頂点 (3-vertex［3 価の，すなわち 3 本の線が集まる頂点のことと推察される］) によって指定される．頂点の各線



(A.53)

は正の整数 n,m または p でラベルされ，また a,b,c を正の整数として，$n=a+b, m=a+c$ および $p=b+c$ と仮定される．この最後の条件は 3-頂点 (m,n,p) に対する**許容性条件** (*admissibility condition*) と呼ばれる．3-頂点はこのとき，



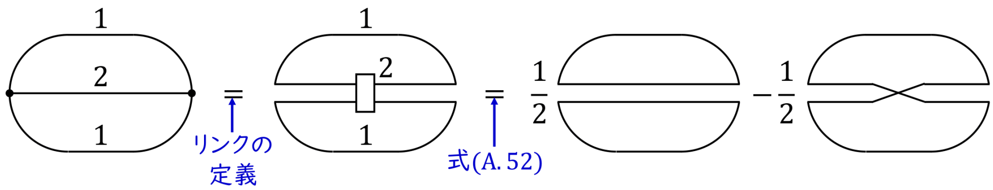
(A.54)

と定義される．この定義を上記の A.1 節で与えた，Clebsch–Gordan 係数と Wigner の $3j$ 記号の議論と比較せよ［ここでは $a, b, c \neq 0$］．Penrose のバイノル表記における 3-頂点が正確に，規格化されていない結節因子 (A.13) を表すことは明らかである．他方，Wigner の $3j$ 記号はこの結節因子を規格化することで得られる．(注意せよ！ KL 3-頂点は規格化されていない結節因子 (A.13) を表すのに対し，式 (6.86) で定義したスピン・ネットワークの頂点は Wigner の $3j$ 記号に対応する．したがって 2 つの頂点は規格化の違いがある．(以下の A.2.3 節を見よ．))

色評価　いくつかの 3 価の (trivalent) 頂点を辺で繋ぐと，3 価のスピン・ネットワークを得る．このように，今の文脈では 3 価のネットワークは，許容される色付けによってラベルされるリンクを持つ，3 価のグラフとして定義される．この文脈ではネットワークは 3 次元の空間に埋め込まれていないことに注意せよ．色 n のリンクは n 本の平行な線と反対称化作用素を表す．こうして，3 価のスピン・ネットワークは閉じたもつれを定める．このもつれの Penrose の評価 (あるいは $A = -1$ の Kauffman 括弧) は色評価 (chromatic evalutation)，あるいはネットワーク評価と呼ばれる．

結節因子と Wigner の $3j$ 記号の縮約は，したがって，関係 (A.47)–(A.48) のみを用いて，色付けされたダイアグラムの色評価として計算できる．［実例 (A.55) から，KL 理論ではその前の規則 (i)–(iv) を改めて考慮する必要はないように見える．］

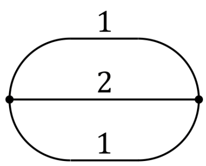
例として，互いに繋がれた 2 つの 3 価の頂点から成るスピン・ネットワークを考えよ．これは［文字 θ と同じ形状を持つことから (6.6.3 節)］θ ネットワークと呼ばれる．辺の色が 2, 1, 1 の場合を考えよ．与えられた定義を用いると，



$$= \frac{1}{2}(-2)^2 - \frac{1}{2}(-2) = 3 \qquad \text{(A.55)}$$ ［青字は本稿筆者］

式(A.47)．あらかじめ第2項に式(A.48)を適用しても $(-2)^2 + \frac{1}{2}(-2) = 3$．

を得る．したがって，

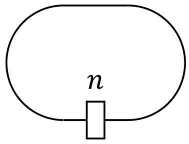


$$= 3. \qquad \text{(A.56)}$$

一般的な θ ネットワークの色評価の一般公式は以下の式 (A.59) で与えられる．

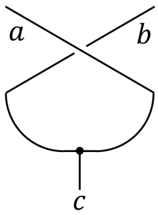
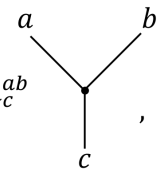
KL リカップリング理論による公式　上記の定義を用いた直接の計算により以下の公式が与えられる．([195] の付録も見よ．)

(1) 次元

$$\Delta_n =$$ 
$$= (-1)^n (n+1). \qquad (\mathrm{A}.57)$$

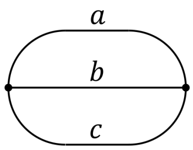
仮に $n = 2j$ と書けば，$(n+1) = (2j+1)$ は $SU(2)$ スピン j 表現の次元であることに注意せよ．

(2) 3-頂点における線の交換


$$= \lambda_c^{ab}$$ 
$$, \qquad (\mathrm{A}.58)$$

ここに $\lambda_c^{ab} = (-1)^{(a+b-c)/2}(-1)^{(a'+b'-c')/2}$，および $x' = x(x+2)$．［つまり $a' = a(a+2), \mathrm{etc.}$］

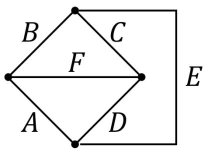
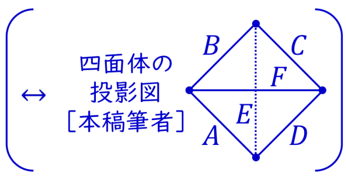
(3) θ 評価

$$\theta(a,b,c) =$$ 

$$= \frac{(-1)^{m+n+p}(m+n+p+1)!\,m!\,n!\,p!}{a!\,b!\,c!}, \qquad (\mathrm{A}.59)$$

ここに $m = (a+b-c)/2, n = (b+c-a)/2, p = (c+a-b)/2$.

(4) 四面体のネット

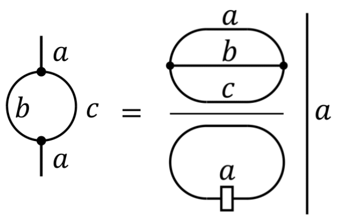
$$\mathrm{Tet}\begin{bmatrix} A & B & E \\ C & D & F \end{bmatrix} =$$ 
$\leftrightarrow$ 
$$(\mathrm{A}.60)$$

$$= \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{E}} \sum_{m \le S \le M} \frac{(-1)^S (S+1)!}{\prod_i (S-a_i)! \prod_j (b_j - S)!}, \qquad (\mathrm{A}.61)$$

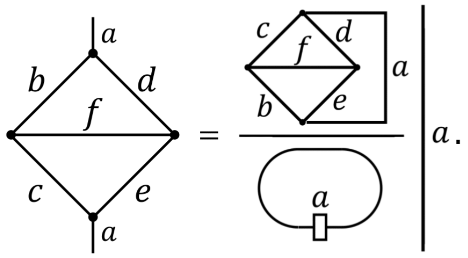
ここに

$$
\begin{aligned}
a_1 =& \frac{A+D+E}{2}, \qquad & b_1 =& \frac{B+D+E+F}{2}, \\
a_2 =& \frac{B+C+E}{2}, \qquad & b_2 =& \frac{A+C+E+F}{2}, \\
a_3 =& \frac{A+B+F}{2}, \qquad & b_3 =& \frac{A+B+C+D}{2}, \\
a_4 =& \frac{C+D+F}{2}, & & \\
m =& \max\{a_i\}, \qquad & M =& \min\{b_j\}, \\
\mathcal{E} =& A!B!C!D!E!F!, \qquad & \mathcal{I} =& \prod_{i,j}(b_j - a_i)!.
\end{aligned}
$$

(5) 簡約公式



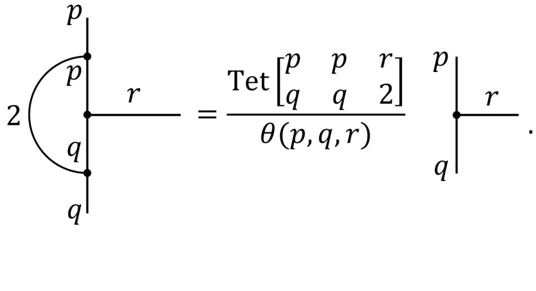
(A.62)



(A.63)

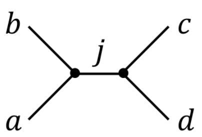
［ここで右辺の係数は分母と分子にグラフの値を持つ比である.］厳密に言えば，これらの方程式の両方における右辺の恒等因子 (交差しない a 本のもつれ) は，反対称化作用素を含まねばならない．スピン・ネットワークに埋め込まれたとき，それは最近接の頂点に吸収される．

さらに

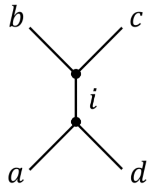


(A.64)

(6) リカップリング定理：



$$= \sum_i \begin{Bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{Bmatrix}$$



(A.65)

$$\begin{Bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{Bmatrix} = \frac{\Delta_i \mathrm{Tet}\begin{bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{bmatrix}}{\theta(a,d,i)\theta(b,c,i)}. \tag{A.66}$$

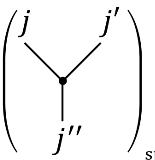
これらの公式はループ量子重力で行われるほとんどの計算にとって充分である．

A.2.3 規格化

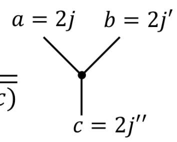
最後に，この付録で与えた Kauffman–Lins リカップリング理論のダイアグラムを，式 (6.86) で定義される第 6 章で用いた，スピン・ネットワークのリカップリングのダイアグラムと関係付ける時である．2 つの主な違いがある．1 つ目は些末である：スピン・ネットワークのリカップリングのダイアグラムにおいて線はスピン j でラベルされるのに対し，Kauffman–Lins のダイアグラムではそれは色 $n = 2j$ でラベルされる．こうして，

$$\left(\Big| \, j \right)_{\text{spin network}} = \left(\Big| \, n = 2j \right)_{\text{Kauffman-Lins}} . \tag{A.67}$$

2 つ目のより重要な違いは，スピン・ネットワーク・ダイアグラムの 3 価の結節点が規格化された結節因子を表すことである．したがって，それはリカップリング理論の 3 価の結節点に比例し，比例係数は式 (A.59) から容易に得られる．こうして，可能な位相因子を除き

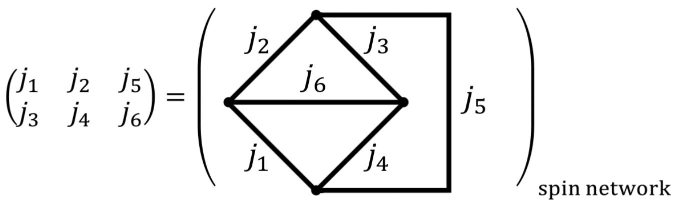


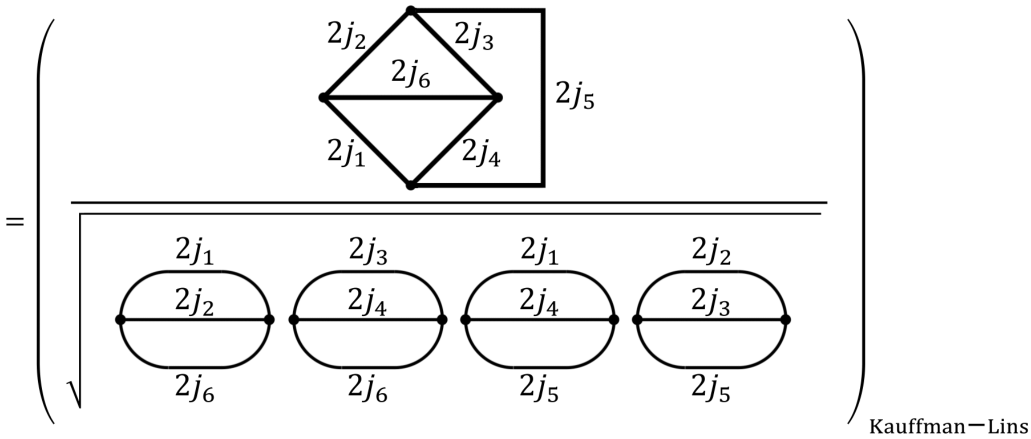
$$\Big(\quad \Big)_{\text{spin network}} = \left(\frac{1}{\sqrt{\theta(a,b,c)}} \quad \right)_{\text{Kauffman-Lins}} .$$



(A.68)

これら 2 つの方程式は完全な翻訳規則を与える．例えば，Wigner の $6j$ 記号は





$$= \frac{\mathrm{Tet}\begin{bmatrix} 2j_1 & 2j_2 & 2j_5 \\ 2j_3 & 2j_4 & 2j_6 \end{bmatrix}}{\sqrt{\theta(2j_1, 2j_2, 2j_6)\theta(2j_3, 2j_4, 2j_6)\theta(2j_1, 2j_4, 2j_5)\theta(2j_2, 2j_3, 2j_5)}} \tag{A.69}$$

で与えられることが帰結する．そしてリカップリング定理 (A.26) は式 (A.65) から帰結する．

ダイアグラムに対する 2 つの異なる規格化の約束を説明した理由は，それらがいずれもループ量子重力の文脈で利用されており，またいずれも有用だと判明することにある．この付録で発展させたダイアグラム的な表記は，[174] において Kauffman と Lins によって用いられたものである．この表記はループ演算子の行列要素を計算するのに，しばしば用いられてきた．

他方で一般的な文献には，Winger の $3nj$ 記号と $SU(2)$ 表現理論に対する優れて発達したグラフ的な算法に関する，多くの結果が見出される．これらの結果は例えば，原子と原子核の物理において常套的に用いられる．標準的な参考文献は，例えば，Brink と Satcheler [333] である．Brink–Satcheler ダイアグラムはスピン・ネットワークに対して第 6 章で用いた約束で書かれている[*150]．

A.3　$SO(n)$ と単純表現

ここでは $SO(n)$ の表現理論に関するいくつかの事実をまとめる．$SO(n)$ の有限次元の既約表現をその最高ウェイト Λ でラベルする．ここに，Λ は長さ $n=[d/2]$ ($[\cdot]$ は整数部分) のベクトルである：$\Lambda=(N_1,\cdots,N_n)$，ただし N_i は整数であって $N_1 \geq \cdots \geq N_n$［文献 [418, p.105] も参照］．もし $Spin(n)$［普遍被覆群 [418, p.155]］の表現に興味があれば，N_i を半整数とする．最高ウェイト $\Lambda=(N,0,\cdots,0)$ によってラベルされる表現は**単純** (*simple*) あるいは**球面** (*spherical*) と呼ばれる．$SO(n)$ の Lie 代数の基底を $X_{ij}, 1 \leq i,j \leq n$ とする．単

*150 わずかな違いはある：角運動量の文献では，Wigner の $6j$ 記号は一般に中括弧 (波括弧；curl brackets) で表されるのに対し，Kauffman にならい，私は $6j$ 記号を丸括弧で表し，式 (A.65) にて，$6j$ 記号と規格化因子 Δ_i だけ異なる 4 価の結節点のリカップリング行列を表すのに，中括弧をとっておいた．

純表現 (simple representations) は“単純性”関係

$$X_{[ij}X_{ij]}\cdot V_N=0 \tag{A.70}$$

が満たされるものである．単純表現の表現空間 V_N は球面調和関数，すなわち，R^n 上の調和同次多項式 (harmonic homogeneous polynomials) の空間として実現できる，球面上のあらゆる L_2 関数はこれら球面調和関数に一意的に分解できる：

$$L_2(S^{n-1})=\oplus_{N=0}^{\infty}V_N. \tag{A.71}$$

$SO(4)$ の場合，$Spin(4)=SU(2)\times SU(2)$ なので，$SU(2)$ の 2 つの表現 j' と j'' の積としての，代わりの表現の分解がある．最高ウェイト表現との関係は

$$N_1=j'+j'',\qquad N_2=j'-j'' \tag{A.72}$$

で与えられる．単純表現は，したがって，$j'=j''\equiv j$ となる表現である．こうして，我々は単純表現を半整数スピン j でラベルできる．整数の“色”$N=2j$ もまた表現の最高ウェイト (の消えない成分) であることに注意せよ．

単純表現の初等的な説明は以下のように与えられる．表現 $\Lambda=(j',j'')$ のベクトル v^α は，一方の $SU(2)$ の下で変換する j' 個の“ドットのない”対称化された添字 $A_i=1,2$，およびもう一方の下で変換する j'' 個の“ドットのある”対称化された添字 $\dot{B}_i=1,2$ を持つ，スピノル $\psi^{A_1\cdots A_{j'}\dot{B}_1\cdots\dot{B}_{j''}}$ として書ける．(スピノル表記で，与えられた基底で) 成分 $\psi^{A_1\cdots A_{j'}\dot{B}_1\cdots\dot{B}_{j''}}=\epsilon^{(A_1\dot{B}_1}\cdots\epsilon^{A_j)\dot{B}_j}$ ［上記の $j'=j''\equiv j$ を念頭に置く］を持つ特別なベクトル w^α を考えよ．ここに $\epsilon^{A\dot{B}}$ は単位の反対称テンソルであり，また対称化は A_i 添字のみにわたる．このベクトルを不変に留める $SO(4)$ の部分群は，(選んだ基底に依存する) $SO(4)$ の $SO(3)$ 部分群である．明らかに，$\epsilon^{A\dot{B}}$ はこの $SU(2)$ の下で不変な唯一の対象なので，この単純表現の中にのみ，規格化された $SO(3)$ 不変なベクトルが (しかもただ 1 つだけ) 存在する．

等価的に，$SO(4)$ の単純表現はランク N の，完全対称なトレースレスの 4 次元のテンソルである．不変ベクトル w はこのとき，(選んだ基底において) $w^{444\cdots}$ を除き全ての成分が消える，テンソルのトレースレス部分である．$SO(3)$ 部分群は第 4 の座標軸周りの回転で与えられる．ベクトルおよびスピノル表現の関係は，スピノル添字を (4 次元の) Pauli 行列で縮約することで得られる：$v^{\mu_1\cdots\mu_j}=\psi^{A_1\cdots A_{j'}\dot{B}_1\cdots\dot{B}_{j''}}\sigma^{\mu_1}_{A_1\dot{B}_1}\cdots\sigma^{\mu_j}_{A_j\dot{B}_j}$．

V_Λ を $SO(n)$ の表現としよう；$\omega\in V_\Lambda$ が $SO(n-1)$ の作用の下で不変ならば，我々はそれを球面ベクトルであると言う．そのようなベクトルは表現が単純であるとき，かつそのときに限って存在する．その場合このベクトルは規格化を除いて一意的である．

ω を V_Λ の表現とし，V_Λ の直交基底 v_i を考える．G 上の次の関数を構成できる：

$$\Theta_i(g)=\langle\omega|R^{-1}(g)|v_i\rangle\,. \tag{A.73}$$

これらの関数は $L_2(G)$ の部分空間を張る．群はこの部分空間に右正則表現 (right regular representation) によって作用し，対応する表現は表現 V_Λ と同値である．もし ω が球面［ベクトル］ならば，これらの関数は実際に商空間 $SO(n)/SO(n-1)=S^{n-1}$ 上の L_2 関数であり，V_Λ はそれ故，球面表現である．他方，もし表現が球面ならば球面ベクトルを構成できる：$\Theta_\omega(g)=\sum_i\Theta_i(g)\Theta_i(1)$．$\omega$ が球面であるとき，球面関数 Θ_ω は 2 重商空間 (double-quotient space) $SO(n-1)\backslash SO(n)/SO(n-1)=U(1)$ 上の関数である．$SO(n-1)$ によって不変な，与えられた次数の R^n 上の一意的な調和多項式があり，よって一意的な球面関数があることを示すのは，今や標準的な演習である．

$SO(4)$ の 3 つの表現に対する結節因子の空間は高々 1 次元である．3 つの表現 $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ の間における結節因子の空間の次元 $n_{\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3}$ は積分

$$n_{\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3} = \int \mathrm{d}g \, \chi_{\Lambda_1}(g)\chi_{\Lambda_2}(g)\chi_{\Lambda_3}(g) \tag{A.74}$$

で与えられ，ここに χ_Λ は表現 Λ の指標である．$SO(4)$ のあらゆる表現は $SU(2)$ の 2 つの表現の積なので，3 つの $SO(4)$ 表現の結節数 (intertwining number) は $SU(2)$ 結節数の積である．これらの数は $SU(2)$ に対して値 0 または 1 をとり得る．

$SO(n)$ の表現は実である．このことは表現行列が実となる V_Λ の基底を常に選べることを意味する．$Spin(n)$ の半整数スピン表現に対して，Λ がその複素共役あるいは双対と同値であることはなお真であるものの，同一視写像は非自明である．

——

文献ノート

Penrose の算法については，[181] と [334] を見よ．私がここで用いたリカップリング理論の基本的な参考文献は [174] であり，そこではここで与えた公式が任意の A の一般的な場合に導かれている；さらなる詳細については，[195] の付録も見よ．リカップリング理論とスピン・ネットワークの関係については，[335, 336] を見よ．例えば [337] では，$SU(2)$ Clebsch–Gordan 係数を計算するのに，色評価が用いられている．角運動量の理論に対して広く用いられているグラフ的な手法は，Yutsin, Levinson および Vanagas [339] によって発展した Levinson [338] のものと，Brink および Satcheler [333] のわずかに修正したバージョンである．

付録 B　歴史

本付録では 1930 年代 (1930s, the thirties) 初頭の初期の探求から現代に至る，量子重力における研究の発展の主要な路線をスケッチする．

この主題の全ての重要な仕事に対して完全な参考文献を提示するつもりはない；いくつかの引用は原著へのものであり，他は引用が見つかるレビューへのものである．誤りと省略は残念ながら不可避であり，私はそれらについて謝る．私はバランスをとるよう最善を尽くしたものの，まだ合意を得ることに成功していない分野にあって，私の観点は明らかに主観的である．発展の中期の歴史を書く試みは困難だった．時は経ち，土埃は晴れ，我々は正しいか，我々の中に正しい者はいるか，あるいは——忘れてはならない可能性だが——我々は皆誤っているのか，次第に明らかになるだろう．

この歴史的な観点に貢献してくれた多くの友人に，私は非常に恩がある．特に，John Stachel, Augusto Sagnotti, Gary Horowitz, Ludwig Feddeev, Alejandro Corichi, Jorge Pullin, Lee Smolin, Joy Christian, Bryce DeWitt, Cecile DeWitt, Giovanni Amelino-Camelia, Daniel Grumiller, Nikolaos Mavromatos, Stanley Deser, Ted Newman および Gennady Gorelik に感謝する．

B.1　3 つの主要な方向

量子重力の探求は 3 つの主要な研究路線に分けられる．これらの路線の比重は変化してきており，3 つの間には重要な相関と関連があり，また 3 つの路線のいずれにも当てはまらない研究もある．それにも関わらず，3 つの路線は 70 年の研究にわたり明確な独自性を保持してきた．それらはたとえ名称が誤解を招きやすく，しばしば交換可能なものとして用いられているにせよ，しばしば“共変”，“正準”，また“経歴にわたる和”と表される．それらは正確な定義によって特徴付けられないものの，各路線のうちには一定の方法論的な単一性と，研究の発展の論理における一定の整合性がある．

- **共変な研究路線**は平坦な Minkowski 空間，あるいは他の何らかの背景計量空間上の計量のゆらぎに対する場の量子論として，理論を構築する試みである．計画は 30 年代に Rosenfeld, Fierz および Pauli によって始まった．GR の Feynman 規則が 60 年代に DeWitt, Feynman および Faddeev により，骨を折って発見された．t'Hooft と Veltman，Deser と Van Nieuwenhuizen，およびその他は 70 年代初頭に，繰り込み不可能性のますます増える証拠を見つけた．次いで，繰り込み可能または有限の摂動展開を与える GR の拡張の探求が始まった．高階微分理論 (high-derivative theory) と超重力 (supergravity) を通じて，探求は 80 年代の終わりに弦理論へと成功裡に収束した．
- **正準な研究路線**は，いかなる背景の計量も固定することなく，Hilbert 空間が完全な計量，または計量の何らかの関数に対応する演算子の表現を担う量子論を構成する試みである．計画は 50 年代に Bergmann と Dirac によって始められた．GR の正準構造を解明することは骨が折れることが判明した．Dirac，Bergman と彼のグループ，および Peres は 50 年代に課題を完遂した．彼らの厄介な定式化は，新しい変数の導入によって劇的に簡単になった：まず 60 年代に Arnowit Deser と Misner によって，次いで 80 年代に Ashtekar によって．量子論の形式的な方程式が 60 年代半ばに，Wheeler と DeWitt によって書き下されたが，よく定義されないことが判明した．同じ方程式のよく定義されたバージョンは 80 年代の終わりにようやく，LQG の定式化によって成功裡に見つかった．
- **経歴にわたる和の研究路線**は理論を定義するのに，Feynman の汎関数積分量子化のあるバージョンを用いる試みである．アイデアは Wheeler の提案に従って，50 年代に Misner によって導入され，70 年代に Hawking によって Euclid 的な量子重力の形に発展した．より最近導入された，ほとんどの離散的 (格子的，半順序集合 (posets)，……) アプローチもまた，この路線に属する．

- **その他．** もちろん探求されている他のアイデアもある．
  - 非可換幾何学 (Noncommutative geometry) は Planck 尺度の幾何学を記述する重要な数学的道具として提案され，最近とりわけ Connes と共同研究者の研究によって，非常に驚くべき結果を得た．
  - ツイスター理論 (Twistor theory) は厳密に物理的な側面よりも数学的な側面においてより有意義であるものの，それはなお発展している．
  - Finkelstein, Sorkin，およびその他は勇敢で興味ある独立な道を追求している．
  - 重力場によって引き起こされる量子状態の収縮に関する Penrose のアイデアは最近，可能な実験的検証の見通しにより活路を見出した．
  - ……

  今のところ，しかしながら，これらの代案はいずれも詳細な重力の量子論へと発展していない．

B.2　5 つの時代

歴史的には，量子重力における研究の発展は大まかに，図 46 に示した 5 つの時代に分けられる．

- **前史：1930–1957．** 3 つの研究路線の全ての基本的なアイデアは早くも 30 年代に現れていた．50 年代の終わりには，3 つの研究計画は明確に定式化された．
- **古代：1958–1969．** 60 年代は 3 つの計画の 2 つ，共変と正準の強力な発展を目の当たりにした．10 年の終わりに，2 つの計画はいずれも各々の理論の基本的な構成—— 一方は重力場に対する Feynman 規則，他方は Wheeler–DeWitt 方程式——に到達した．これらの見事な結果に到達するには，感心するほどの技術的労力と才覚が必要であることが判明した．16 世紀は——多くのことに関してそうであるように——輝かしい新たな世界の約束とともに終わった．
- **中世：1970–1983．** 70 年代は 60 年代の希望を失望させた．Wheeler–DeWitt 方程式は本物の場の理論計算にとって，あまりによく定義されないことが次第に明らかになった．また GR の繰り込み不可能性の証拠が積み重なった．両方の取り組みの路線はその障害を見出した．

  1974 年に，Stephen Hawking はブラックホール・放射を導いた．Wheeler–DeWitt 方程式を扱おうとして，彼は “Euclid 的” (Riemann 的) 幾何学にわたる和としての，経歴にわたる和のバージョンを発展させた．宇宙の波動関数というアイデアに関心が高まり，このアプローチはトポロジーの変化を考察し計算する道を拓いた．しかし場の理論的な量に対しては，Euclid 的な汎関数積分は Wheeler–DeWitt 方程式と同様に，貧弱な計算手段であることが判明する．

  共変なサイドでは，GR の繰り込み不可能性に対する主な反応は理論を修正することである．強い希望と続く失望は超重力と GR に対する高階微分の作用の，大規模な開発を動機付けた．量子重力の展望は薄暗い．
- **ルネッサンス：1984–1994．** 光明は 80 年代の半ばに戻ってきた．共変な陣営では，GR を修正して無限大を取り除く多様な試みは，弦理論に取り込まれた．摂動的な弦理論はついに，量子重力的な散乱振幅に対する計算可能な摂動論の長い研究を成し遂げた．確かに，時空の誤った次元や，発見されると年々期待されながら，今のところ発見されていない超対称性粒子の導入のような，払わねばならない代償がある．しかし有限の摂動展開という，長く希求されてきた結果は，単に世界が我々の理論と異なって見えるという理由で捨てるには，あまりにも優れている．

  光明は正準なサイドも照らした．Wheeler–DeWitt 方程式の 20 年後，ついに LQG が，あからさまな

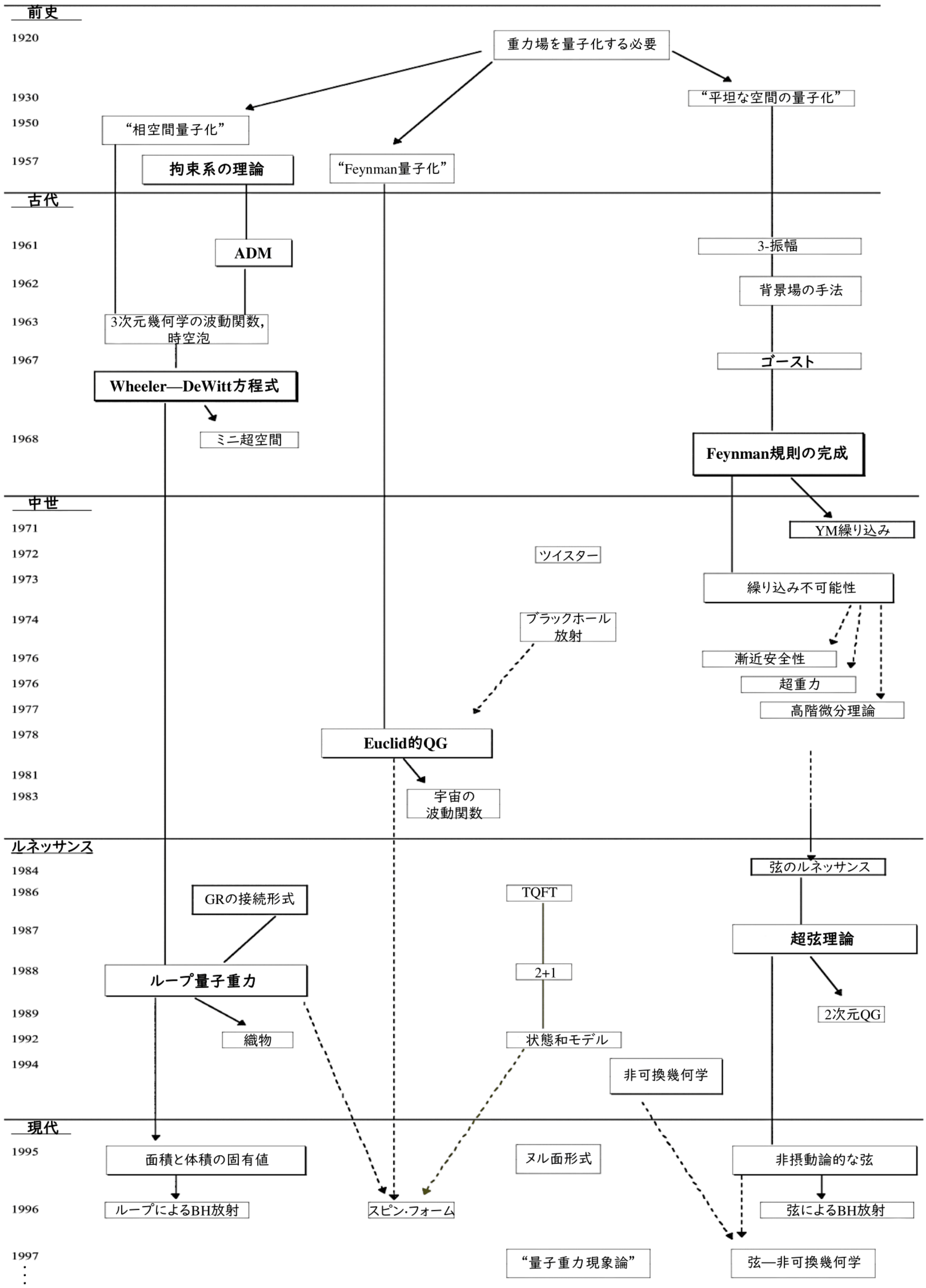


図 46　重力場の量子論の研究［原著 p.396 の表 B.1 に対応するが，本稿では図として掲載］

計算を実行するのに充分よく定義された理論のバージョンを与えた．ここでも，我々は完全で現実的な理論のはるか遠くにおり，散乱振幅は今しばらく全く計算できないものの，物理的な期待値を計算できる，厳密に定義され，非摂動的で，一般共変的で背景独立な場の量子論を得たことの高揚は強力である．

- **現代：1995 年頃**．19 世紀半ばまでは 10 年間，弦理論と LQG はいずれも力強く成長し，物理的な結果を生み出し始めた．Bekenstein–Hawking ブラックホール・エントロピー公式がほぼ同時に，両方のアプローチで導かれた．LQG は最初の Planck 尺度の定量的で物理的な予言——面積と体積の固有値のスペクトル——へと導いた．

  経歴にわたる和の伝統はその間，途絶えてはいなかった．Euclid 的な積分の困難にも関わらず，それは参照されるアイデアに留まり，離散的な格子的アプローチからトポロジカルな理論の“状態和 (state sum)”形式に至る，いくつかの研究路線の発達を主導した．ついに，最後のものはスピン・フォーム形式，すなわち Feynman の経歴にわたる和への LQG の翻訳を動機付けた．

  その間に他のアイデア，とりわけ著しいものとして，弦理論との関連に対する興味ある点を発見した非可換幾何学が，10 年の終わりに向けて発達した．

  重力の量子論に対する 2 つのよく発達したライバル——弦理論と LQG ——，また非可換幾何学から GR のヌル面形式 (null surfaces formulation)，弦とループを融合する試みに至る一連の興味ある新しいアイデアで，世紀は終わった．さらに非常に希望的なノート：Planck 尺度のタイプの測定が到達範囲内にある可能性を調べる，自称“量子重力現象論 (quantum gravity phenomenology)”の，新しい研究路線の誕生．延いては，もしかすると我々は最終的に，どの理論的仮説が，もしあればだが，意味を成すのかが分かる可能性．

ここで様々な時代とそれらの主要な段階をより詳しく説明する．

B.2.1　前史：1930–1957

一般相対性理論は 1915 年に発見された；量子力学は 1926 年に発見された．数年後，1930 年頃，Bohr, Jordan および Dirac は既に電磁場の量子力学的性質を定式化できた．重力場もまたおそらく量子力学的に振舞うはずだと理解されるのに，どれだけかかったか？ ほとんど一瞬である：既に 1916 年に，量子効果は一般相対性理論の修正へと導くはずだと Einstein は指摘した [340]．1927 年に，量子重力は究極的に空間と時間の概念を修正するはずだと Oskar Klein は提案した [341]．30 年代初頭に，Rosenfeld [342] は量子重力に関する最初の学術論文を書き，ゲージ群を用いて場の量子化に対する Pauli の手法を線形化された Einstein 方程式に適用した．線形のスピン 2 の量子場との関係がすぐに Fierz と Pauli の研究 [343] によって明らかになり，重力場のスピン 2 の量子は 30 年代には既に馴染みある概念になっていた．その名称“重力子”は，それが Blokhintsev と Gal’perin の論文 [344](イデオロギー性のある雑誌 *Under the Banner of Marxism* に出版された) に現れた 1934 年には，既に用いられていた．Bohr はニュートリノと重力子を同一視するアイデアを考えた．1938 年に Heisenberg [345] は，重力的な結合定数が次元を持つ事実が重力場の量子論に問題を引き起こしそうであることを指摘した．

時空の量子力学的性質に関するこれらの初期の探求の歴史は最近，John Stachel [346] によって再構成された．特に John は彼の論文で，ロシアの物理学者 Matvei Petrovich Bronstein によって 30 年代半ばに行われた，大規模だが広く無視されている研究を記述している．根強い噂は Bronstein が Leon Trotsky の甥であり，彼は危険になったこの関係を隠したと主張しているが，(Boston 大学における科学の哲学と歴史の中央施設と，科学のロシア・アカデミーにおける科学と技術の歴史の学会の) Gennady Gorelik は，この噂が誤り

であることを私に保証してくれた．Bronstein は線形理論の Rosenfeld–Pauli 量子化を再導出したものの，完全な非線形理論を考慮したとき，重力に独特の特徴は特別な取り扱いを要求することに気付いた．場の量子化の技法は，背景の幾何学がない場合にも適用できるような仕方で一般化されねばならないことに彼は気付いた．特に，一般相対性理論が質量密度に課す制約は，理論を量子電磁力学から劇的に区別し，究極的には“Riemann 幾何学を拒否”し，おそらくまた“空間と時間に関する我々の通常の概念を拒否”する必要性へと導くことに，彼は気付いた [347]．Bronstein がこれほど長く知られないままでいた理由の一端は，彼が 32 歳でソビエト連邦安全機関 (Soviet State Security Agency; NKVD) に処刑された事実に関係している．ロシアではまだ Bronstein を“Landau より賢い”と記憶している人がいると聞く (しかしこの意見は真面目な物理学者に共有されないだろうと，Gorelik は疑っている)．量子重力の Bronstein の初期の研究に関する議論については， [348] を見よ．

この先駆的な時代に関する参考文献と多くの詳細は，上で言及した John Stachel の魅力的な論文にある．ここでは，第二次世界大戦後の歴史的な発展を取り上げる．特に，量子重力の歴史にとって重要な年である 1949 年から始める．

1949

– Peter Bergmann は彼の，非線形な場の理論の相空間量子化 (phase psace quantization) の計画を始めた [349]．物理的な量子力学的観測量は座標に依存しない量のみに対応せねばならないことに，彼はすぐに気付いた [350]．これらのゲージ独立な量の探求は Brooklyn 工科大学 (Brooklyn Polytechnic) で，その後 Syracus で Bergmann の周りに集まったグループで始まった．例えば，Ted Newman はゲージ不変な観測量を次数ごとに (order by order) 見つけるのに，摂動論的なアプローチを発展させた [351]．グループは拘束のある系から生じる問題を研究し，残念ながらしばしば後に忘れられる，一般老体性理論における観測量は何かという問題に関する著しい明確性に到達した．量子重力の正準なアプローチが誕生した．

– Bryce DeWitt は彼の定理を完成させせた．彼は Schwinger の共変な量子化を重力場に適用した．

– Dirac は拘束 Hamilton 系を取り扱う彼の手法を提示した [113]．

1952

– Rosenfeld の先駆的な研究に従って Fierz と Pauli, Gupta [352] は重力場の“平坦な空間の量子化 (flat-space quantization)”を系統的に発展させた．アイデアは単に虚構的な“平坦な空間”，すなわち Minkowski 計量 $\eta_{\mu\nu}$ を導入し，Minkowski 周りの計量の小さなゆらぎ $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ を量子化することである．共変なアプローチが完全に生まれた．伝播関数を調べているときに，最初の困難が直ちに現れた：ゲージ不変性により，電磁場に対するように，ラグランジアンの 2 次の項が特異的となる．Gupta の取り扱いは電磁場に対するように，無限大のノルムの状態空間を用いている．

1957

– Charles Misner は“一般相対性理論の Feynman 量子化”を導入した [353]．彼は表現

$$\int \exp\{(\mathrm{i}/\hbar)(\text{Einstein 作用})\}\, \mathrm{d}(\text{経歴}) \tag{B.1}$$

を提案するのに John Wheeler を引用し，またどのようにこの表現のよく定義されたバージョンを得るかを研究している．Misner の論文 [353] は多くの面で非常に著しい．それは完全な明晰さで，量子ハミルトニアンがゼロでなければならない理由，個々の時空点が量子論において定義されない理由，積分においてゲージ不変性を扱う必要性といった概念を説明している．さらにより著しいことに，論文は重力を量子化する可能な方向の議論で始まり，3 つの路線——共変，正準，経歴にわたる和——を列挙し，それらを我々が今日用いるのと

ほとんど正確に同じ言葉で説明している[*151]！

50 年代の終わりに，全ての基本的なアイデアと研究計画は明確になった．あとはそれらを実装し，それらが上手くいくかを確かめるだけの問題である．実装は，しかしながら，共変なサイドでは Feynman と DeWitt の，正準なサイドでは Dirac と DeWitt の知能という人々の才覚を必要とする，かなり超人的な課題であることが判明する．

B.2.2　古代：1958–1969

1958

– Bergmann のグループ [129]，および Dirac [113,114] は，拘束系の一般的な Hamilton 形式の理論を確立した．この達成の歴史的な再構成については， [354] を見よ．最初，Dirac と Bergmann のグループは独立に研究をした．1 次と 2 次の拘束条件 (primary and secondary constraints)，および第 1 種と第 2 種の拘束条件 (first- and second-class) への現在の二重の分類は未だ，この元々の分離を反映している．

1959

– 1959 年には，Dirac は GR の正準構造を完全に明らかにした [130].

1961

– Arnowitt, Deser および Misner は我々が今日 GR の ADM 形式と呼ぶものすなわち，その適切な変数での Hamilton 形式バージョンを完成させ，それは Hamilton 形式を非常に簡単にし，その幾何学的解釈を明瞭にした [131].

量子化との関係では Arnowitt, Deser および Misner は，古典的な GR における点粒子の自己エネルギーの有限性に対する影響力のある議論を提示し，それを用いて非摂動的な量子重力は有限に違いないと論じた．

– Tullio Regge は Regge 計算法 (Regge calculus) を定義した [285].

1962

– Feynman は量子重力において遷移振幅を計算する課題に取り組んだ．彼は樹木振幅 (tree amplitudes) が，古典論から期待される物理に導くことを示した [355].

– DeWitt は摂動論的な遷移振幅の計算に対して，彼の背景独立な場の手法を発展させ始めた [357].

– ADM の手法に従って，Peres は GR の Hamilton–Jacobi 形式

$$G^2\left(q_{ab}q_{cd}-\frac{1}{2}q_{ac}q_{bd}\right)\frac{\delta S(q)}{\delta q_{ac}}\frac{\delta S(q)}{\delta q_{bd}}+\det q\,R[q]=0 \tag{B.2}$$

を書いたが [358]，これは計量変数で書き表した我々の基礎方程式 (4.9) に他ならず，すぐに Wheeler–DeWitt 方程式へと導いた；ここに q_{ab} は ADM の 3 次元計量である．

1963

– John Wheeler は，重力場の量子ゆらぎは幾何学の短いスケールのゆらぎに違いないことに気付き，時空泡 (spacetime foam) の物理的なアイデアを導入した [359]．Wheeler の *Les Houches* での講義ノートは多くの面で著しく，今なお分野において多くのアイデアの源である．他の 2 点に言及する：“問題 56”は $2+1$ 次元における重力が全く自明でないかもしれないことを提起し，それは探求するに値する興味あるモデルかもしれないことを示唆している．“問題 57”は時空の格子にわたる Feynman 積分の方法で，量子重力を研究することを提起している．

[*151] 確かに，伝播関数の変種に対する Schwinger 方程式に基づき，Misner は 4 番目のアプローチも挙げているものの，“この手法は独立には一般相対性理論に適用されていない”と注意しており，これはごく最近に初めて代わるかもしれない状況である．

Julian Schwinger は量子重力においてテトラード・スピン接続形式を導入した [80]．この定式化と Yang–Mills 理論の密接な関係について，彼は書いている：

> 電磁的なゲージ不変性原理の創始者である Weyl もまた，重力場はある種のゲージ変換で特徴付けられることを認識していた [79]．これは何らかの重力的なポテンシャルを適切に変換しつつ，各点で局所 Lorentz 座標系の向きを自由に変更する可能性である．続く発展では，Yang と Mills は任意に向き付けされた 3 次元の荷電空間 (isotopic space) を各時空点に導入した．重力場は Yang–Mills 場と見なせるという時々の見解はこのように，かなり時代錯誤である．

1964

– Penrose はスピン・ネットワークのアイデアと，$SU(2)$ 表現理論によって制御される空間の離散的な構造のアイデアを導入した．構成は手書きの草稿の形でのみ存在した．それはようやく 1971 年に出版された [181]．アイデアは驚くべきことに 25 年後に，スピン・ネットワークが LQG の状態をラベルすることが発見されたときに再出現した．

– GR の振幅に対するループ相関の研究の初めに，素朴なダイアグラム規則に対してユニタリー性が失われると Feynman は述べた．DeWitt [360] は量子化を修正するために，(伝播関数の縦の (longitudinal) 部分からのダイアグラムの独立性を要求して) 組合せ的な方法を発展させた．修正項は虚構的なフェルミオン的粒子，Faddeev–Popov ゴーストのループの形にできる [361]．この文脈における DeWitt の重要な役割は，Veltman によって 1974 年に強調された [362]：

> ……本質的にこれにより，また彼の組合せ的な手法のある欠陥により，Feynman は 1 つの閉じたループの先へ行くことができなかった．DeWitt は彼の 1964 年の手紙と続く記念碑的な論文において，我々が現在知っていることのほとんどを導いた．すなわち，彼はゲージの選択と関係するゴースト粒子の疑問を考えた．実に彼はゴーストの寄与を，Fermi 統計に従う複素スカラー場を含む局所的なラグランジアンの形に書いている．いくらか不条理なことに，このゴーストは今では Faddeev–Popov ゴーストと呼ばれている．

名称“Faddeev–Popov ゴースト”は全く不条理ではない：DeWitt の複雑な組合せ論と比べて，Faddeev–Popov のアプローチにははるかに優れた技術的簡潔さと明瞭な幾何学的解釈の利点があり，このことは名称の普及性を正当化する．真の力学変数としてのゲージ軌道によって演じられる重要な役割が解明されるのは，Faddeev の成果においてのみである [363].

1967

– Bryce DeWitt は“Einstein–Schrödinger 方程式” [214]

$$\left((\hbar G)^2\left(q_{ab}q_{cd}-\frac{1}{2}q_{ac}q_{bd}\right)\frac{\delta}{\delta q_{ac}}\frac{\delta}{\delta q_{bd}}-\det q\,R[q]\right)\Psi(q)=0 \tag{B.3}$$

を公表したが，それは計量変数で表した主要な量子重力方程式 (6.1) に他ならない．Bryce は長らくこの方程式を Wheeler に帰属させて“Einstein–Schrödinger 方程式”と呼ぶつもりだった――他方で John Wheeler はそれを DeWitt 方程式と呼んだ――，結局 1988 年に Osgood Hill 会議で DeWitt が諦め，それを最初から他の皆が呼んでいた名前――“Wheelet–DeWitt 方程式”――で呼ぶまでは．

Wheelet–DeWitt 方程式の誕生の物語は語る価値がある．1965 年に，飛行機での移動の際，John は短い時間，North Carolina の Raleigh–Durhman 空港で止まらねばならなかった．Bryce は近くに住んでいた．John は Bryce に電話し，2 つのフライトの間の待ち時間に空港で会う提案をした．Bryce は 1962 年に Peres によって公表された，GR に対する Hamilton–Jacobi 方程式を携えて現れ，Schrödinger が水素原子に対して行ったのとちょうど同じことを行うアイデアをもごもごと言った：微分の 2 乗を 2 階微分に置き換える［2 式 (B.2–3) における汎関数微分の項を比較せよ］．Bryce の驚いたことに，John は熱心であり (もちろん John はしばしば熱心である)，直ちにまさに (*the*) 量子重力の方程式が見つかったと宣言した．方程式の載った論文，Bryce の祝福すべき 1967 年の量子重力の 3 部作の 1 つ目 [214, 364] は 1966 年の春に提出されたが，そ

の刊行は 1967 年まで遅れた．遅れの理由は専ら，明らかに出版費だった．

– John Wheeler は“3 次元幾何学 (3-geometry)” q の空間上の波動関数 $\Psi(q)$ のアイデアと，超空間 (superspace)，3 次元幾何学の空間の概念を，[38] で議論した．

– Roger Penrose がツイスター理論を始めた [365].

– DeWitt と Feynman の計画が終結した．GR に対する Feynman 規則の完全で整合的な組が書き下された [361,364].

1968

– Ponzano と Regge は 3 次元の Euclid 的な GR の量子化を定義した [283]．そのモデルは大いに発展を導くことになる．

1969

– 正準量子重力に関する Bryce の論文をアイデアを発展させ，Charles Misner は量子宇宙論を始めた：Wheeler–DeWitt 方程式を有限の自由度に切り詰めるゲームである [366]．アイデアは見事だが，それはしばらくの間そこから理解できる新しいことがほとんどない，長く続く大研究へと発展した．

明確に定義された共変および正準な理論の主要な路線で，10 年は終わった．いずれの理論も上手くいかないことが，まもなく判明することになる．

B.2.3　中世：1970–1983

1970

– 70 年代の 10 年は警告の言葉で始まった．Pauli によって成された論点をよみがえらせ，Zumino による論文 [367] は，GR の量子化が問題含みかもしれず，GR をより一般的な理論の低エネルギー極限と見なして初めて意味を成すかもしれないと提案した．30 年以上後もこれが正しいかについては意見がまだ分かれている．

1971

– DeWitt と Feynman が重力に対して発展させた技法を用いて，t'Hooft と Veltman は GR の繰り込み可能性を研究することを決めた．ほとんど準備運動として，彼らは Yang–Mills 理論の繰り込みを考え，理論は繰り込み可能であることを発見した——彼らが Nobel 賞を受賞した結果である [368]．ある意味，量子重力の研究における最初の物理的な結果は，Yang–Mills 理論が繰り込み可能であることの証明だと言える．

– David Finkelstein は彼の論文の興味をかき立てる“時空コード”シリーズ [369] を書いた (それは，他にもアイデアがある中で，量子群を論じている)．

1973

– Veltman によって 1971 年に始められた計画に従って，t'Hooft は物質場を伴う GR における繰り込み不可能な発散の証拠を見つけた．すぐ後に，t'Hooft と Veltman，また Deser と Van Nieuwenhuizen は証拠を裏付けた [370].

1974

– Hawking はブラックホール放射の導出を公表した [248]．質量 M の (巨視的な) Schwarzschild ブラックホールは，温度 (8.25) における熱的な放射を放出する．この結果は驚きとして現れ，エントロピーはブラックホールに自然に関係付けられ，それ故それらは何らかの不明瞭な意味で“温かい”と見なし得るという，1 年早い Bekenstein による見解 [247] と，熱力学とブラックホールの力学的な振舞いの法則間のアナロジーに関する Bardeen–Carter–Hawking 解析によってのみ予期されていた [246]．Hawking の結果は量子重力と直接関係しないものの——それは曲がった時空における場の量子論の技巧的な応用である——，分野に非常に強い

影響を与えた．それは曲がった時空における場の量子論での真剣な活動を促し，“ブラックホール熱力学”に新しい研究分野を拓き，ブラックホール (Bekenstein–Hawking) エントロピー (8.27) の統計的な起源を理解する量子重力的な問題を拓いた．

影響力があり，明瞭で同時に興味ある論文が 2 年後に Bill Unruh によって書かれた．論文は加速する観測者，量子論，重力と熱力学の間の，一般的な関係の存在を指摘した [371]．自然に関する深遠な何かが，このもつれた問題に隠れているはずだが，我々はまだそれが何かを知らない．

1975

– 物質と結合した GR は繰り込み可能でないことが，一般に受け入れられるようになった．Rosenfeld, Fierz および Pauli によって始まった研究計画は終わった．

1976

– 共変な計画を救う最初の試みは，漸近安定性のアイデア [39] を探求していた，Steven Weinberg によって成され，Giorgio Parisi [372], Kenneth Wilson とその他による初期のアイデアを発達させ，繰り込み不可能な理論はそれでも意味を成し得ると提案した．

– たとえ修正された形であっても，共変な理論を復活させるには，道は既に示されている：GR の高エネルギーの修正を見つけることである．一般共変性を保持すると，GR を修正するのにできることはさほど多くない．大いに情熱を惹くアイデアは超重力である [373]：単にスピン 3/2 の粒子を GR に結合することで，すなわち (1 次のオーダーの形で) 作用

$$S[g,\Gamma,\psi]=\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2G}R-\frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\psi_\mu\gamma_5\psi_\nu\mathrm{D}_\rho\psi_\sigma\right) \tag{B.4}$$

を用いることで，2 ループにおいてさえも有限な理論が得られるように見える．

– 超対称な弦理論が誕生した [349]．

1977

– 今一つの独立なアイデアは，同じ運動学を保持し作用を変更することである．成すべき明らかなことは，発散に比例する項を加えることである．曲率に関して 2 次の項を持つ作用

$$S=\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\left(\alpha R+\beta R^2+\gamma R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\right) \tag{B.5}$$

は，結合定数の適切な値に対して繰り込み可能であることを，Stelle は証明した [375]．残念ながら，まさにこれらの定数の値に対して，理論は上手くいかない．それは Minkowski 真空の周りでそれを不安定にする負のエネルギー・モードを持ち，量子論の領域においてユニタリーでない．問題は繰り込み可能で同時にユニタリーな理論を見つけるか，または非ユニタリー性を回避することとなる．

1978

– Hawking 放射はすぐに数々の方法で再導出され，その信頼性を強力に強化した．これらの導出のいくつかは熱的技法 [376] を示し，こうして Hawking [40] に Wheeler–Misner の“一般相対性理論の Feynman 量子化” [353] を，**Riemann** 的な 4 次元の幾何学 g にわたる“Euclid 的な”積分

$$Z=\int \mathrm{D}g\,\mathrm{e}^{-\int\sqrt{g}R} \tag{B.6}$$

の形に復活させることを動機付けた．時間順序化と正の振動数の概念は，Euclid 的なセクターへの“解析接続”に組み入れられる．希望は二重である：トポロジーの変化を扱うことと，Euclid 的な汎関数積分が Wheeler–DeWitt 方程式よりも優れた計算手段だと判明することである．

1980

– 正準なアプローチでは，議論は Wheeler–DeWitt 方程式からの時間座標の消失を理解することに集中した．問題は実際のところ**量子**重力とは関係ない，と言うのも時間座標は GR の**古典的な** Hamilton–Jacobi 方程式からも消失するからである；そして，あらゆる場合において，物理的な観測量は座標に依存せず，したがって特に，何であれ GR の正しい定式化において，座標時間に依存しない．ところが量子力学的な粒子に対する軌道はないので，量子力学的な文脈では単一の時空はなく，まさに空間と時間の概念は曖昧になる．この事実は多大な混乱と，時間の基礎的な概念がない場合に意味のある基礎物理を行う可能性に関する広範な興味ある議論 (その多くの貢献を私はおそらくここで要約できない) を引き起こした．その主題に関する初期の参考文献については，例えば [42, 44] を見よ．

1981

– 弦の作用

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\sqrt{g}g^{\mu\nu}\partial_\mu X^a\partial_\nu X^b\eta_{ab} \tag{B.7}$$

の量子化における共形 (conformal) アノマリーの相殺が，危機的な次元へ導くことを Polyakov [377] は示した．新たな問題が生じた：その危機的な次元で定義されている弦理論から，どのように我々の 4 次元的な世界を復元するか．

1983

– 当時，多様なバリエーションに存在した超重力，またその非ユニタリー性からの救出が数多くの巧妙な方法 (大 N 展開［$1/N$ 展開 [427, p.263]］，大 d 展開，Lee–Wick 機構，……) を用いて探求されていた，高階微分理論に対する希望はなお高かった．1983 年の Padova の第 10 回 GRG 会議で，疑いなく誠実な 2 人の物理学者，Gary Horowitz と Andy Strominger は，彼らの貢献した論文 [378] を次の言葉で要約した．

> まとめると，高階微分の重力理論は量子重力の問題の解消にとって，有効な選択肢である……．

同会議で，量子重力の困難の究極的な解決策として，超重力は活発に宣伝された．ところが直後に，超重力はさらに高いループにおいて繰り込み不可能であり，また高階微分理論は有効な摂動展開へと導かないことが明らかになった．高揚，希望そして誇大宣伝は消え去った．

その 11 次元のバージョンにおいて，超重力は 1990 年代の終わりに，弦理論との関連において新たな重要性を見出すことになる．高階微分の修正もまた，弦理論の低エネルギー極限において再登場することになる．

– Hartle と Hawking [157] は“宇宙の波動関数”と Hawking 積分に対する“境界のない”境界条件の概念を導入し，量子重力と量子宇宙論に対する新たな直観を拓いた．しかし Euclid 的な積分は，Wheeler–DeWitt 方程式よりも何ら優れた，量子重力における一般的な場の理論的な量を計算する方法を与えず，80 年代半ばの雰囲気は再びかなり暗かった．他方，Jim Hartle [26] は GR の経歴にわたる和の定式化のアイデアを，量子力学の一般共変的な枠組みへの完全に成熟した拡張へと発展させた．アイデアは後に Chris Isham [379] によって発展させられ定式化されることになる．

– Sorkin は量子重力に対する彼の半順序集合 (poset) のアプローチを導入した [380].

B.2.4　ルネッサンス：1984–1994

1984

– Green と Schwarz は弦が“我々の宇宙”を記述するかもしれないと気付いた [381]．予期せぬアノマリーの相殺とヘテロティック弦の発見との関係で [382]，高揚が弦理論の周りに立ち上がり始めた．

– 10 次元の超弦理論と 4 次元の低エネルギー物理との関係が，Calaby–Yau 多様体 [383] 上のコンパクト化とオービフォールドを用いて研究された．真空の選択のダイナミクスは不明のままだが，コンパクト化は低エ

ネルギー物理に似た 4 次元のカイラル・モデルを導いた．

– Belavin, Polyakov および Zamolodchikow は彼らの共形場理論の解析を公表した [384]．

1986

– Goroff と Sagnotti [29] はついに純粋な GR の 2 ループの発散を計算し，純粋な GR の摂動論的な場の量子論にとどめを刺した：有効作用における発散する項は

$$\Delta S = \frac{209}{737280\pi^4}\frac{1}{\epsilon}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}R^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma}{}_{\epsilon\theta}R^{\epsilon\theta}{}_{\mu\nu}. \tag{B.8}$$

– 量子力学における波動関数の収縮は量子重力的な起源を持つかもしれないと Penrose は提案した [385]．アイデアはラディカルで力学の基礎の再考を意味する．著しいことに，アイデアは検証できるかもしれない：実験的な検証の実現可能性を調べるために，研究が今日進行している．

– 弦の場の理論は弦理論の主要な問題——理論の基本的で背景独立な定義を見つけること——に取り組む一般的な試みを提示している [386]．弦の場の道は，しかしながら，困難であることが判明する．

– GR の接続形式は，Amitaba Sen [82] によるいくつかの結果を基に，Abhay Ashtekar [132] によって発展した．当時，これは“新しい変数”の定式化と表現された．それは古典的な一般相対性理論における発展であるものの，LQG の基礎としての，量子重力に対する遠大な帰結を持つ．

1987

– Fredenhagen と Haag は一般共変性が場の量子論に課す一般的な拘束を探求した [387]．

– Green, Schwarz および Witten は超弦理論に関する彼らの本を出版した．計量が超対称パートナー (superpartner) を持たないゲージでは，超弦理論の作用は

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu X^a\partial_\nu X^b - \mathrm{i}\psi^a\gamma^\mu\partial_\mu\psi^b\right)\eta_{ab}. \tag{B.9}$$

理論への興味は非常に急速に高まった．確かに，1991 年の Marcel Grossmann 会議では弦理論はまだ非常に小さな居場所しか得ていなかった [388]．しかし超重力と高階微分理論の研究が弦に取り込まれ，弦理論は次第に重力場の量子論の強力な競合する候補と見なされた．副作用として，多くの素粒子物理学者が一般相対性理論，または少なくともその一部を研究し始めた．弦は整合的な摂動論を与える．共変な計画は完全に復活した．問題は理論の表す世界が我々のものとこれだけ異なって現れる理由を理解することとなった．

1988

– Ted Jacobson と Lee Smolin は接続形式で定式化された Wheeler–DeWitt 方程式に対するループ的な解を発見し [178]，LQG への道を拓いた．

– “量子一般相対性理論のループ表現”が [176, 177] で導入された．それは GR の新しい接続形式 [132]，Jacobson–Smolin 解 [178]，また量子重力における非 Gauss 的あるいは非 Fock 表現の必要性に関する Chris Isham のアイデア [43] に基づいている．ループ量子化は先に独立に Rodolfo Gambini と彼の共同研究者によって，Yang–Mills 理論に対して発展させられていた [179]．重力的な文脈では，ループ表現は直ちに 2 つの驚くべき結果に導く：Wheeler–DeWitt 方程式の厳密解の無限の族が見つかり，また結び目理論が重力場の物理的な量子状態を制御する．古典的な結び目理論はその拡張とともに，量子時空の微分同相不変な状態の記述にとって重要な数学の分野となった [215]．理論は旧来の Wheeler–DeWitt 理論を，量子重力において物理量を計算するのに具体的に用いることのできる定式化へと変換する．正準な計画は完全に復活した．現在，理論は“ループ量子重力”と呼ばれている．

– Ed Witten はトポロジカルな場の量子論 (TQFT) の概念を導入した [389]．祝福すべき論文 [390] で，彼は TQFT を用いて Jones 多項式，結び目不変量に対する場の理論的な表現を与えた．Witten の用いた表現

は LQG における解釈を持つ：それは Chern–Simon 汎関数の指数によって与えられる量子状態の“ループ変換”と見なせる [215].

Atiyah によって定式化され [391]，TQFT のアイデアは見事な発展を得て，量子重力における後の発展に強力な影響を与えることになる．任意の次元と特定の BF 理論における一般的なトポロジカルな理論が，すぐ後に Gary Horowitz によって導入された [392].

– Witten は $2+1$ 時空次元において GR を量子化する巧妙な方法を発見し [393](そうして 1963 年の Wheeler の *Les Houches* 講義の“問題 56”を解決し)，理論の解析の大研究を拓いた (レビューとしては，[394] を見よ)．量子化の手法は部分的には経歴にわたる和であり，部分的には正準である．共変な摂動論的な量子化はこの理論には機能しないように見える．理論は数年早く Deser, Jackiw, t'Hooft, Achucarro, Townsend，およびその他によって研究されていた [395].

1989

– Amati, Ciafaloni および Veneziano は，Planck 尺度より小さいスケールは調べられないことを弦理論が意味することの証拠を見つけた [396].

– 弦の世界では，2 次元の量子重力と等価な“0 次元における”弦のある非摂動的なモデルへの高揚があった [397]．高揚は，ありがちなことだが，すぐに止んだものの，モデルは 90 年代に再登場し [398]，量子重力のスピン・フォーム形式を触発することにもなる [278].

1992

– Turaev と Viro [286] は状態和を定義したが，それは一方では厳密に定義された TQFT であり，また他方では，$2+1$ 重力の Ponzano–Regge [283] 量子化の正則化されよく定義されたバージョンと見なせる．Turaev と大栗 [289] はすぐに 4 次元の拡張を見つけ，それは後の発展に著しい影響を与えることになる．

– **織物** (*weave*) の概念が LQG において導入された [189]．それは LQG から現れる時空の離散的な構造の証拠である．考えられた織物の最初の例は，絡み合った輪の 3 次元の網目である．驚くなかれ，その直観は既に Wheeler にあった！ (Misner, Thorne および Wheeler [399] からとった，図 47 を見よ．)

1993

– Gerard 't Hooft は Lenny Susskind [375] によって発展した，ホログラフィーのアイデアを導入した．“ホログラフィーの原理”によれば，領域の内部における物理的状態の情報は，領域の境界上で表すことができ，この境界の面積によって制限される．この原理は領域の**外側からアクセスできる**系に関する情報に言及していると解釈することもでき，その方が私にとっては断然理解できる．

1994

– しばしば Planck 尺度の幾何学の一定の側面を記述する道具と示唆される非可換幾何学は，Alain Connes の研究において GR との密接な関係を見出した．著しいことに，f を $[0,1]$ 区間の典型的な関数として，Connes–Chamseddine“スペクトル的な作用”，すなわち適切に定義される Dirac 的な演算子 D の単純な関数の単なるトレース

$$S = \mathrm{tr}[f(\mathrm{D}^2/(\hbar G))] \tag{B.10}$$

は，標準模型の作用とともに Einstein–Hilbert 作用を含むことが判明する [401].

B.2.5　現代：1995–

1995

– 弦理論の非摂動的な側面が現れ始めた：ブレーン [402]，双対性 [403]，M 理論の行列モデル形式 [404]，……(レービューとしては，例えば [405] を見よ)．弦への関心が流行した．Baltimore でのアメリカ数学会の会議

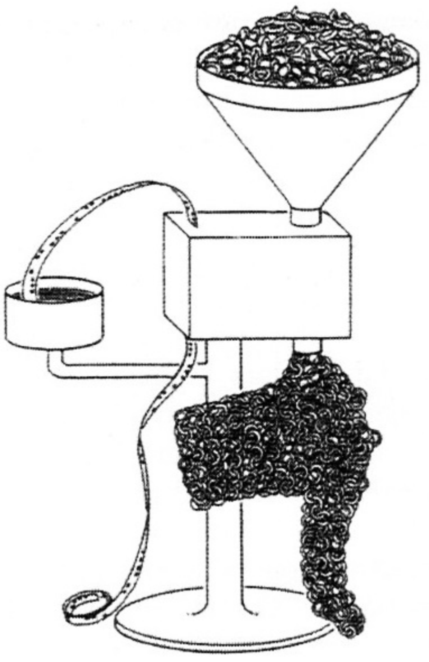


図 47　Wheeler のビジョンでの織物．参考文献 [374] より．［本稿では教科書 p.410 の図 B.1 をスキャンした．］

の正式な会合にて，Ed Witten は

数学の次の千年は弦理論に支配されるだろう

と主張し，注目を呼んだ．

様々な双対性が理論の異なるバージョンに関係することが判明し，単一の基本的な理論の存在が示唆された．基本的な背景独立な理論の実際の構成は，しかしながら，まだ欠けており，弦理論は今のところ指定した背景上の数々の (関係する) 展開の形で存在する．

– ループ重力における 2 つの結果が現れた：(i) ループ基底の過完備性がスピン・ネットワーク基底の発見によって解消された [171]；(ii) 面積と体積の固有値が計算された [191]．後者の結果は急速に拡張され，数々の代わりの方法で導かれた．

LQG に対する厳密な数学的枠組みが発展し始めた [200, 201]．

– Ted Newmann と彼の共同研究者は GR のヌル面形式を導入した [406]．

1996

– Bekenstein–Hawking ブラックホール・エントロピー (8.22) がほぼ同時に，LQG と弦理論とで計算された．

ループの結果は与えられた面積を持つ 2 次元の球面に寄与する (スピン・ネットワーク) 状態の数を計算することで [239, 249]，またホールの外側の古典場をループ量子化し境界状態を研究することで [238] 得られた．これらの重力的な面の状態 [254] は孔 (punctures) を持つ面上の Chern–Simon 理論の状態に同定できる [253]．計算は様々な現実的なブラックホールに対して有効である．式 (8.27) における 1/4 因子は Immirzi パラメータを定めることで得られる．

弦理論では，計算は適当な超対称な配位において状態数を与える，強い結合/弱い結合の双対性を援用する：物理的なブラックホールは強い結合状態にあるものの，その微視的状態の数は無限遠に同じ電荷を持つ弱い

場の配位において計算できる．式 (8.27) の 1/4 因子と，Hawking 放射の現象論の他の側面が正確に得られる [407]．しかしながら，計算手法は間接的であり，極限 (extreme) または，ほとんど極限の (near-extremal) ブラックホールに対してしか機能しない．

– 厳密に定義された，有限でアノマリーのないハミルトニアン拘束演算子が LQG において，Thomas Thiemann によって構成された [133]．この理論の古典的な極限が本当に GR かについて，いくつかの疑義が挙げられたものの (この問題は未解決のままである)，構成は整合的で一般共変な 4 次元における場の量子論を定義している．

– TQFT を修正して得られる興味ある状態和モデルが，Barrett と Crane, Reisenberger, Iwasaki およびその他によって，量子 GR に対する仮説的なモデルとして提案された．これら全てのモデルは“スピン・フォーム”——スピンを担う分岐する面——の和として現れる．

– ループ表現は Feynman の方法で (*à la* Feynman)“指数化され (exponentiated)”，正準 LQG に対応するスピン・フォーム・モデルを再びもたらした．これらの発展は経歴にわたる和のアプローチを復活させた．

1997

– 非可換幾何学と弦理論の間の興味ある関係が明らかになった [408]．

– 2 次の相転移を見つける格子のアプローチの困難に関する活発な議論がある [409]．

1998

– 一定の共形場理論の大 N 極限は，反 deSitter 時空と球面の積上の超重力を記述するセクターを含むことを，Juan Maldacena は示した [410]．反 deSitter 時空上の M 理論/弦理論のコンパクト化は，時空の境界上の共形場理論と双対であると彼は予想した．これは境界の理論を用いた M 理論自体の定義に対する新たな提案へと導いた：(協会の理論に対する) 背景独立な手法を用いて，(M 理論に対する) 背景独立性に達する試みである．

この“Maldacena 予想”の帰結は't Hooft と Susskind のホログラフィーの原理にとって興味ある探求である (1993 年を見よ)．

– 影響力のある専門誌 *Nature* の 2 つの論文 [265] は，時空泡の効果を確かめ量子重力理論を検証することが，通常考えられているほど制約されていないかもしれないという希望を生んだアイデアは，現在利用されている測定または観測デバイス，あるいは器具が，じきに Planck 尺度と比較される——あるいはさほど遠く離れていない——感知尺度を含むように構成される，数々の異なる例 (中性 K 中間子，ガンマ線バースト現象論，干渉計……) があるということである [266]．もしこの方向が誤りならば，量子重力の検証は非常に初期の宇宙論の調査を必要とするかもしれない [411]．

1999……

私はここで終える，と言うのも，あまりに最近の歴史はまだ歴史ではないからである．

B.3　分断

付録 B.2 に要約した研究路線はその発展の道のりにおいて接触点を見出し，しばしば交わってきた．例えば，経歴にわたる和の定式化を正準理論から導く形式的な方法があり，逆も然り；摂動展開は経歴にわたる和を展開することによっても得られる；弦理論は今日その非摂動的な定式化を見つける問題に，したがって正準理論の典型的な問題に直面している；また LQG は 90 年代初頭の弦理論の発展に遡ることのできる技法を用いて，経歴にわたる和の定式化であるスピン・フォーム・モデルに変異した．しかしながら，この絶え間ない交流にも関わらず，3 つの主要な発展路線はそれらの本質的な独自性を保ってきた．

3 つの研究路線は 1959 年に Charles Misner によって既に明確に識別された [353]．1963 年の *Conérence Internationable sur les Théories Relativistes de la Gravitation* における結論の言明で，Peter Bergmann は次のように述べた [412]．

> この計画の多大な困難の観点からは，問題についてこれほど多くの異なるアプローチが生み出されようとしているのは，非常に好ましいことだと考える．確かに，我々が望むのは，アプローチが 1 つの終着点に収束することである．

これは 40 年前だった……．

素粒子物理の伝統により関係する共変な研究路線と，相対性理論の伝統により関係する正準/経歴にわたる和の研究路線の間で，分断は特に強い．この分断は量子重力における 70 年の研究を通して持続した．以下は多くの中から任意に選んだ，典型的な比較である．素粒子物理サイドでは，*First Marcel Grossmann Meeting* において，Peter van Neuwenhuizen は次のように書いている [413]．

> ……重力子は光子や電子のような他の粒子と全く同じ土台で扱われる．特に，粒子 (重力子を含む) は常に平坦な Minkowski 空間にあり，あたかもそれらは曲がった時空における測地線に沿うかのように運動する，と言うのも，複合的な (multiple) 重力子は交換するからである．純粋な相対論家たちは，以下の 2 つの重力子に完全に特有の側面のために，しばしばこの点に何かと不安になる：(1)……どの点たちが空間的に隔たっているかを量子化の前に決めねばならないが，量子化の後に初めて，完全に量子化された計量の場は我々にこの時空構造を伝え得る……．(2)……古典的な曲がった背景では正および負の振動数解が必要だが，非定常的な時空ではそのような解を定義できるか明らかでない．素粒子物理学者の戦略はこれらの問題を，最終的な理論ではそれらは究極的に解決されるという期待の下に，差し当たり無視することだった．したがって我々はそれらをこれ以上は一切議論しない．

相対性理論サイドでは，Peter Bergmann は次のように述べている [414]．

> 世界点はそれ自体では物理的な現実性を何ら生み出さない．それは時空多様体に課される物理的な場の特定の性質の担い手 (bearer) になる限りで，初めて現実性を獲得する．

概念的な分断は巨大である．部分的には，それは一方では素粒子物理の共同体によって，他方では相対性理論の共同体によって支持される，世界の異なる理解を反映している．2 つの共同体は互いに対話し理解し合うための継続的で誠実な努力を行ってきた．しかし分断は残っている．両サイドは相手サイドが基本的で本質的な何かを正しく理解できていないという感覚を抱いている：素粒子物理サイドでは，半世紀にわたる研究にわたってそれが理解されてきた形での QFT の構造；相対性理論サイドでは，GR によって現れた空間と時間の新しい物理的な理解．両サイドは相手の観点が最終的には，さほど重要ではないと判明すると期待している．一方は，QFT の実験が固定された計量の時空上のものであり，したがって一般的な背景独立な文脈では重要でないという理由で．他方は，GR がはるかにより複雑な理論の低エネルギー極限に過ぎず，したがって自然の深遠な構造に関する示唆として，過度に真剣に受け取ることはできないという理由で．上手くいけば，両方の路線の最近の成功は 2 つのサイドに，最終的に，他方のサイドが優先的に考えている問題と向き合うことを強いるかもしれない：一方では背景独立性，他方では摂動展開の制御．

70 年の研究の後，合意，確立された理論，既に何であれ直接的または間接的な実験的支持を得た理論はない．70 年の道のりにおいて，多くのアイデアが探求され，流行がやって来ては過ぎ去り，聖杯の発見がこれまでに何度も告知されてきたが，後に大いに嘲笑されることになった．技芸は長く人生は短し (*Ars longa, vita brevis*)．

しかしながら，その年の長さにも関わらず，全体として見れば，量子重力の研究は無意味に彷徨ってきたようには見えない．それどころか，問題と研究の方向の 50 年代における初期の定式から現代まで，研究の発展を導いてきた論理が見て取れる．計画の実行は極めて骨の折れることだったが，成し遂げられてきた．困難が現れ，多くの困難の後に，最初の希望の少なくとも部分的な実現へと導いた，解決策が提案された．70 年代初頭に，GR はもしかすると制御不可能な発散のない理論の，低エネルギー理論と見なせるかもしれないと提案された；今日，30 年後，そのような理論——弦理論——が知られている．1957 年に，正準な枠組みにおいて

固有値を計算できなければならないと Charles Misner は示唆した；そして 1995 年，37 年後に，固有値が計算された——ループ量子重力において．道のりはまだ終わりではなく，理解せねばならない多くのことが残っており，最近の発展の一部はどこへも導かないかもしれない．しかし主題に関する全体的な発展を見ると，進歩があったことは否定し難い．

付録 C　方法と真理について

本付録では量子重力にとって重要な，科学の方法論と科学的理論の内容に関する簡単な反省をまとめる．特に，本書で説明した研究の一部の根底にある方法論的な仮定をより明確にし，それにいくらか正当化を与えるよう努めた．

私は専門的な哲学者ではなく，以下にはそのような意味の大望はない．しかしながら，物理学と哲学の対話の有用性を私は確信している．科学が根本的な問題に直面した他の時期において，この対話は主要な役割を演じてきた．ほとんどの物理学者は自身の研究に対する認識論的な偏見の影響を過小評価していると私は考える．また多くの哲学者は彼らが基礎的な研究に与える影響——肯定的であれ否定的であれ——を過小評価している．一方では，より正確な哲学的な気付きは，物理学者が基礎研究に従事するのに大いに役に立つ．第 1 章で論じたように，20 世紀の後半では理論物理学において基礎は明らかであり問題は技術的なものだったが，今日，基礎的な問題は Newton, Faraday, Heisenberg および Einstein の時代にそうであったように，俎上に戻ってきた．もし物理学者らが (良きまたは悪しき) 哲学に促されなかったならば，彼らが成し遂げたことを間違いなく成し遂げられなかっただろう．他方では，科学に関係する同時代の哲学者が，今日科学の直面している基礎的な問題の情熱の炎 (ardent lava) により関心を持つことを望む．刺激的で活気のある問題はここにあると私は信じる．

C.1　科学的知識の蓄積的な側面

過去 10 年の科学の反省の一部は，科学的知識の発展における“非蓄積的な”側面を強調してきた：科学理論の発展は，大まかに言えば実験的事実が，ある程度その前例と“通約不可能 (incommensurable)”な新しい理論において認識される，大なり小なりの限界点 (breaking point) で特徴付けられる．このアイデア——正しく理解されるか誤解されている——は物理学者に強い影響を与えてきた．

本書で説明した量子重力へのアプローチは，科学的知識の発展の異なる理解を仮定している．実に私は量子重力の議論を，QM と GR の中心的な物理的教義が，最先端で探求されていない量子重力の領域の範囲にさえ踏み入る際の最善の案内を表しているという期待の上に基礎付けた．私見では，理論の間の通約不可能性の強調は科学の重要な側面を明らかにしたが，それによって歴史的に物理学者が知識を拡張してきたところの，内的な論理に関する何かを覆い隠す危険を冒している．物理学の進歩には微妙ではあるが非常に確実な蓄積的な側面があり，それは理論の実験的な内容の有効性と正確性における成長のはるかかなたを行く．理論からそれに取って代わる理論に移行する際，我々は古い理論の立証された実験的内容だけでなく，より多くを保持する．この“より多く”が優れた物理学の中心的な関心事である．それは思うに，理論物理学の壮観で否定し難い予言能力の源である．それを軽視すると，理論研究をより役に立たない方法論へと誤って導く危険を冒すことになると，私は考える．

歴史的な事例でこの点を説明しよう．Maxwell 方程式と Galilei 変換の間には問題があった．脱する 2 つの自明な方法があった．Maxwell 理論を有効性の制限された理論——まだ発見されていない何らかのエーテル (aether) のダイナミクスの現象論的な理論——と考えること．あるいは慣性系の Galilei 的な等価性は有効性が制限されていると考え，そうして慣性系は電磁気的な現象に関して等価でないというアイデアを受け入れること．両方の方向は論理的であり，19 世紀の終わりに追求された．両方は，科学的革命は古い理論が世界に関して我々に教えていたことを根底から変えるという，健全なアイデアの応用である．2 つの道のどちらを，Einstein は成功裡に採ったか？

どちらでもない．Einstein にとって，Maxwell 理論は畏敬の源だった．彼は理論に対する賞賛を熱く語っている．彼にとって，Maxwell は世界の新しい窓を開いた．実験的 (電磁波)，技術的 (ラジオ)，また概念的 (光の本性の理解) な，Maxwell 理論の驚くべき成功の前に，Einstein の賞賛は全面的だった．ところが Einstein

は Galileo の洞察にもまた多大な敬意を抱いていた．若き Einstein は実質的に Galilei の不変性だけから出る衝突理論の，Huygens による導出のある本に驚いた．Galileo の偉大な直観——速度の概念はあくまで相対的であるという——は**誤りではあり得ない**と Einstein は理解した．偉大な Galilei の発見の核心に対するこの Einstein の信念には，科学哲学者と同時代の理論物理学者にとって，学ぶところが非常に大いにあると私は確信している．こうして，Einstein は **2 つの理論，Maxwell と Galieo を信じ，それらの教義はそれらが検証されていない，守備範囲のはるかかなたでも成り立つと仮定した**．Galileo は物理的世界に関する，単に**正しい**何かを掴んだのだと彼は考えた，Maxwell もそうである．もちろん，詳細は調整されねばならない．Galileo の洞察の核心は，全ての慣性系が等価であり速度は相対的だということであり，Galilei 変換の詳細ではない．Einstein は (Poincaré によって発見された) Lorentz 変換を知っており，それが Galileo の洞察と矛盾しないことを理解できた．その 2 つを合わせる際に矛盾があるならば，問題は我々の側にある：我々は演繹に何らかの誤った仮定を密輸入している．彼は誤った仮定を理解したが，それはもちろん，同時性をよく定義できるということだった．Einstein を彼の壮観な発見へと導いたのは，古い理論の**本質的な物理的正しさ**への彼の信念だった．

物理学の歴史には等しくこの点を説明することのできる，非常に多くの似た例がある．一方には Newton 理論を，他方には特殊相対性理論——あらゆる相互作用は場に媒介されるという理解——を得て，Einstein は“純粋な思考の外で”GR を発見した；Dirac は Maxwell 方程式と量子力学から場の量子論を発見した；Newton は加速がダイナミクスを支配するという Galileo の洞察を，惑星の運動を支配する力の源は太陽であるという Kepler の洞察と組合せた……．一覧は長くなり得る．これら全ての事例において，ある理論に由来する洞察への確信，あるいは“理論を真剣に受け止めること”が，元の理論そのものを大いに拡張する重大な発展を導いた．僭越ながら，正しい洞察たちがどこにあるのか理解し，それらを同時に機能させる方法を見つける際に，単純で自動的なことは何もない．むしろ私の言っていることは，正しい洞察たちがどこにあるのか理解し，それらを同時に機能させる方法を見つけることが，基礎物理学の仕事だということである．この仕事は新しい理論の無作為な研究ではなく，古い理論への**確信**に基づいている．

現代の科学哲学の中心的な関心事の 1 つは，科学理論は変化するが，それにも関わらず信頼できるという，あからさまなパラドックスと向き合うことである．現代の科学哲学はある程度，Newton 力学の没落の反動 (aftershock reaction) である．極めて成功している理論がそれにも関わらず誤りであり得るという，悩ましい認識である．しかし成功している物理学理論が，より成功しているものに取って代わられることによって揺らぐような真理の概念は，偏狭な真理の概念であると私は考える．

物理学理論は世界を組織化し読み解き理解し，また世界についての予言を行うために，我々が発達させ用いる概念的構造である．成功している物理学理論はそれを有効に整合的に行う理論である．我々の経験に照らせば，より有効な概念的構造が常に存在するかもしれないと期待しない理由はない．有効な理論は常にその限界を示し，より優れたものに置き換えられ得る．しかしながら，新しい概念化は以前のものが既に理解したことに依拠せずにはいられない．思考は不断の発展と不断の再組織化にある．それは静的な存在ではない．科学はそれ自体，思考の発展の過程である．

新しい都市に移るとき，我々は最初その地理について混乱する．次いで我々はいくつかの基準点を見つけ，これらの点を用いて最初の粗い頭の中の都市の地図を作る．例えば丘の上の都市の一部と，平原の一部がある．時間が経つにつれ，地図は改善する．突然，我々はそれを間違って捉えていたと気付く瞬間がある．例えば丘には 2 つの地域があり，我々は以前その 2 つを混同していた．あるいは地球街区 (Earth square) と呼ばれる巨大な街区を都心と取り違えており，他方で都心は遠くの太陽街区 (Sun square) と呼ばれる街区の周辺にあった．そこで我々は頭の中の地図を更新する．少し後で，近所と通りの名前と特徴を学び，基準としての

丘は次第に消える．知識において近所の構造は丘/平原のものより有効である……．構造は変化するが，知識は増える．そして地球街区は，今では知っているように，都心ではなく，我々はそのことを永遠に知っている．

永遠の発見がある．地球が宇宙の中心ではないこと，同時性は相対的であること，絶対速度は無意味であること．踊りでは雨を得られないこと．これらは人類が進んできた，そして戻らない歩みである．これらの発見には単に我々の思考から，誤った，殻に覆われた，暫定的な信頼を取り除くことに相当するものがある．しかし古典力学の発見，または電磁気学や量子力学の発見もまた永遠である．それはこれらの理論の詳細が変わり得ないからではなく，世界の大部分が一定の観点から理解されることを許容することを，我々が発見したからであり，そしてこれは我々が永遠に向き合い続けなければならない**事実**である．

本書の主要なテーマの 1 つは，一般相対性理論が“永遠に”我々とともにある，これらの洞察の 1 つの表現だということである．その洞察は，物理的世界には舞台がないこと，位置付けと運動はあくまで相対的であること，我々の世界のあらゆる基本的な記述に対して背景独立性が要求されることである．

いかにして理論はそれが発見された領域の外部でさえ有効であり得るのか？ いかにして Maxwell はラジオ波を予言し，Dirac は反物質を予言し GR はブラックホールを予言することができたのか？ いかにして理論的な思考はこれほど魔法のように強力なのか？

これらの成功は偶然に依っており，単に歴史的に歪められた見方のおかげで偉大に見えるということが唱えられてきた．理論に対するある種の Darwin 的な自然淘汰が唱えられてきた：提起された数百の理論があり，それらのほとんどは死に，生き残るものは記憶されるものである．宝くじに当たる誰かは常にいるが，そのことは人間が魔法のように宝くじの結果を予言できることの徴ではない．私見では，科学の発展のそのような解釈は不当であり，さらに質の悪いことに，誤解を招く．宝くじに挑戦する者は何万人もいるが，光は太陽によって正確に 1.75 アーク秒の角度だけ曲げられると Einstein が予言した 1916 年に，重力の相対論的な理論は 2 つだけだった．物理学の歴史への精通は，自信を持って主張するが，宝くじの描像を除外する．

答はより単純だと私は考える．明日太陽が昇ると誰かが予言し，太陽が昇ったとしよう．この成功した予言は偶然の問題ではない：地平線から現れるあらゆる種類の奇妙な物体に関するでたらめな予言を行う，数百もの人々はいなかった．明日太陽が昇るという予言は健全である．しかしながら，それは当然視できない．中性子星がほとんど光速で突撃し，太陽をたたき飛ばすかもしれない．誰が，あるいは何が，帰納の正当性を認めるのか？ 何故過去に太陽が実に何度も昇ってきたというだけの理由で，太陽は昇るだろうと確信できるのか？ 私には**この問題**の答は分からない．しかし私に分かっていることは，理論自身の領域を超えた理論の予言能力が**まさに同じ類の問題**だということである．単に，我々は自然について何かを学び，学んだことは自然の振舞いを我々が予言するのを指南するのに有効である．このように，理論物理学の壮大な予言能力は，一般的な帰納であって，それ以上でもそれ以下でもない：それはあらゆる水準において自然には規則性があるという，上手くいく仮定から帰結する．まだ探求されていない領域に関する予言を行う際の科学の壮大な成功は，明日太陽が昇ると予言する私の能力と同じくらい理解できる (あるいは理解できない)．単に我々の周りの自然は，いったい何故，規則性が存在するのかを我々が理解しているか否かに関わらず，たまたま**我々の認識する**規則性で満ちている．これらの規則性は——確実ではないものの——，明日太陽が昇り，同様に QM と GR によって発見された世界に関する基本的な事実が，まだ実験的に調べていない量子重力の領域において破られるのではなく，確認されるという，強力な確信を我々に与える．

現在この見方は理論物理学において支配的ではない．他の態度が支配的である．“悲観的な”科学者は理論物理学の可能性をほとんど信頼しない，と言うのも，あらゆる可能性が開かれており，ここと Planck 尺度の間であらゆることが起こり得ると彼は心配するからである．“ワイルドな”科学者は，偉大な科学者には“古くて尊重されている仮定”を破り，何らかの新しく“奇抜な”仮説を探求する勇気があったのだ述べる．この

見解から“ワイルドな”科学者は，偉大な科学をするにはあらゆる種類の奇抜な仮説を探求し，尊重されているアイデアを破らねばならないと結論付ける．仮説はワイルドであるほど良い．物理におけるワイルドさは不毛だと私は考える．科学における最も偉大な革命は極めて，ほとんど神経症的に，保守的である．最も偉大な革命，Copernicus と Planck において確かにそうであったように．Copernicus は，Ptolemy 体系の技術的な詳細 (エカント (equant) の修正) に関する彼のペダンティックな仕事から，偉大な跳躍へと促された．Kepler は火星の軌道の詳細に関する彼の極めて技術的な研究から，円を放棄することを強いられた．近似が正確と想定される曲線よりもデータにフィットすることが分かりはじめたとき，彼が周転円の異なる系に対して楕円を近似として用いていた．Einstein と Dirac もまた極めて保守的だった．彼らの目眩を引き起こす前進は唐突に出てきたのではない．それらは尊重されているアイデアを破るスリルや，新しく面白いアイデアの試みに起因するのではない．それらは従来の物理的な洞察への尊重から強制的に出てきた．今日では代わりに，決まってすぐに忘れられ新しい流行に取って代わられる，“新しく面白いアイデア”に関するありあまるセミナーがある．物理では，新奇性は常に新しいデータ，または古い理論への謙虚で献身的な取り調べから現れてきた．作業を通じて欠けている歯車が見えるまで，それらの理論を何度も何度も頭の中で反復し，それらに没頭し，それらを衝突，融合，対話させることから，新奇性は現れてきた．

最後に，“プラグマティックな”科学者は概念的な問と物理的な洞察を無視し，理論を発展させることだけに関心を払う．これは 60 年代に標準模型に達する際には，上手くいく態度だった．しかし 60 年代では実験データが日々流通して，研究を軌道上に保っていた．今日，理論家には新しいデータがない．“プラグマティックな”科学者は構わない．彼は古い理論の洞察を信じない．彼は新しい理論の発展だけに注目し，もし理論によって予言される世界が我々の見る世界とますます似つかなくなっても，さほど心配できない．彼は理論が世界と非常に異なって見えることを，知識において彼がいかに前に進んだかの証拠と考えて高揚さえするが，これは完全なナンセンスである．理論物理学はそれ自体で完結した頭脳ゲームになり，現実との繋がりは失われる．

私見では，貴重な研究労力が今日ではこれらの態度において無駄遣いされている．物理学理論における現実の知識の要素を過小評価する科学哲学にも責任の一端があるかもしれない．

C.2 実在論について

科学理論は知識の何らかの水準において，我々が世界を読み解き，組織化し，理解するために用いる概念的な構造である．知識が増えるので，それは前進に向けた一歩である．私から見れば，科学的思考は常識的な思考とさほど異ならない．実際，それは同じ活動——世界について考え，我々の知的体系を更新すること——のより優れた例に過ぎない．科学は世界について考える可能な方法を不断に探求し，最も上手くいくものを不断に選ぶ，組織化されたエンタープライズである．

もしこれが正しいならば，科学によって導入された理論的概念と，我々の日常用語における術語の間には，いかなる質的な違いもあり得ない．古典的な経験主義の基本的な直観は，我々が知覚を組織化するのに用いる概念が，“現実の”存在に言及していることを保証するものは何もないということである．一部の現代の科学哲学はこの直観を，科学によって導入された概念に適用することを強調してきた．こうして，我々は理論的な対象 (電子，場，ブラックホール，……) の“実在性 (realty)”を疑うよう警告されている．私はこうした警告を偏狭だと考える．それらがよく基礎付けられていないからではなく，それらが首尾一貫して適用されていないからである．経験主義の父はこの直観をあらゆる物理的対象に対して，首尾一貫して適用した．誰が椅子の実在性を保証するのか？ 何故，椅子は自分の知覚に一定の規則性を組織化する，理論的な概念以上のもので

なければならないのか？ 私はここで敢えてこの教義に反論することも同意することもしない．私が偏狭だと考えるのは，硬い性質の実在性を椅子に対しては認めても，電子に対しては認めない人々の立場である．電子の実在性に反対する議論は椅子にも同様に当てはまる．椅子の実在性を肯定する議論は電子にも同様に当てはまる．椅子も電子も，我々が世界を読み解き，組織化し，理解するのに用いる概念である．それらは等しく現実的である．それらは等しく不安定で不確実である．

おそらく，電子については反実在論者であり椅子については鉄の (iron-) 実在論者であるという，この奇妙な一貫性のない態度は，“形而上学”に対する反発によって始まり，それに伴って科学のみに信頼を寄せるようになったという，歪んだ歴史的発展の結果である．この観点からは，椅子の実在性に関する形而上学的な問は不毛である——知識は科学にある．こうして，我々が経験主義者の厳密性を適用するのは科学的知識となる．ところが経験主義者の観点から科学を理解することは，科学が基づくところの生の実験データの意味を理解することを必要とする．時とともに，生の実験データのアイデアはますますその限界を示した．世界の常識的な見方は，我々の知識の描像における役者として再考された．常識的な見方は，そこから出発するところの言語と定式化を我々に与えねばならない——古い反形而上学の偏見が，しかしながら，経験主義者の厳密性をこの世界の常識的な見方に適用することを未だに妨げている．しかしもし椅子の実在性を問うことに興味がないならば，まさに同じ理由で，どうして“電子の実在性”を問うことに興味を持ち得るのか？

改めて，私はこの点が科学そのものにとって重要だと考える．理論の現実の内容が我々の最善の道具である．もし新しい実験的な証拠，または世界について**我々が知っている**他のことや，それについて**我々が学んだ**こととの関係において理論を捉えることにより，我々がそうするよう充分に促されるならば，この現実の内容への信念は，理論それ自体を問う準備を整えることを妨げない．科学的な反実在論は，私見では，深い古典的な経験主義者の洞察の近視眼的な適用であるだけではない：それは科学の発展に対する否定的な影響でもある．H. Stein (個人的な対話) は最近，偉大な科学者 Poincaré が，彼自身の発見を“真剣に受け止める”ことを禁じた哲学によって，重要な発見 (特殊相対性理論) を得ることを阻まれた事例を見事に説明した．

科学は我々の素朴な世界の見方が不正確で，不適切で，偏っていることを教える．それはより優れた世界の見方を構成する．(もちろん，ある目的には優れ，別の目的には劣る見方であって，このことは恋人を電子の集まりと考えることが馬鹿げている理由である．) 電子は，それらが世界を概念化する方法を多くの観点においてより強力に下から支えるという意味では，どちらかと言うと，椅子よりも“より現実的”であって，“より非現実的”ではない．他方で科学的発見の過程，またとりわけ 20 世紀の経験は，**あらゆる**形の知識の暫定的な性格を痛いほど認識させた．我々の世界の観念的および数学的な描像は，観念的および数学的な描像に過ぎない．我々の現実のイメージと我々の現実の経験の間には，常に溝がある．これは抽象的な科学的理論と食堂に対して我々が抱くイメージに対しても当てはまる (恋人に対して我々が抱くイメージは言うまでもない)．それでも，描像は有効であり，それ以上のいかなることもできない．

C.3 真理について

では，“現実の物理的世界”について自信を持って言えることは何かあるか？ 科学に対する最近の反省の大部分は，生のデータが存在しないこと，世界に関するあらゆる情報が既に理論によって大いに取捨選択され解釈されていること，理論は全て取って代わられる可能性があることを，我々に教えてきた．このことを学ぶことは有益で新鮮だった．月並みだが，ヨーロッパの反省，またアメリカの反省の一部は，真理が常に理論に内在し，我々が言語から逃れられることはなく，我々が話す会話の循環から解脱できることはないという事実を強調してきた．科学者として，私は認め，これらのアイデアを共有する．

しかし真理の概念が我々の会話に内在するに過ぎないという事実は，我々がそれに自信を失わなければならないことを意味しない．もし真理が我々の会話に内在するならば，**この内在する真理**が，我々が真理という言葉で意味することである．実に我々自身の会話の外に真理の妥当な概念はないかもしれないが，我々が世界の実在性の真理と，それについて学んだことの真理を主張でき主張するのは，まさにこの会話の“内部から”であって，会話なくしてではない．さらに一層重要なことだが：我々の言語が世界について語る言語であること，また我々の思考が世界についての思考であることは，構造的である[*152]．

したがって，まさに我々自身の会話に内在するものを除いて審理の概念はないという理由で，我々が世界について学んだことの真理を否定することに意味はない．もし言語の外部に我々の行けるところがないならば，我々の見つけた真理を疑う人々はどこに立っているのか？ それは我々がしばらくの間喜んで留まり，あたかも我々が賢いかのように笑い，次いで現実に立ち返る，快い短い夢のような場所であり得るに過ぎない．世界はまさに言語，我々の唯一の拠点がそのように述べているという理由で，現実的であり，確固としており，理解可能である．物理的世界について，また何が物理的現実であるかについて言える最善のことは，優れた物理学者がそれについて述べることである[*153]．

同時に，我々の世界の知覚，理解，概念化が普段の発展にないという理由はない．科学はこの発展の形態である．全ての段階において，世界の現実性に関して我々が言える最善のことは，我々が言っていることである．我々は後でそれをより良く理解するだろうという事実は，我々の現在の理解の価値と信頼を貶めない．山の中を歩くとき，我々が持っていない，より優れた地図が存在するかもしれないというだけの理由で，我々は自分の地図を捨てない．我々の落ち着きのなさを休めるための固定点を探すことは，知識の発展にとって，愚かで役に立たず逆効果である．我々が前に進めるのは，我々の洞察を信じ，同時に我々の思考の習慣を問うことによってのみである．この注意深い信念と自己充足的な疑いの過程は，科学的な思考の確信であると私は信じる．科学は世界を考える可能な方法を探求することから成る，人類の発展である．またこれまで考えてきたことを，必要ならば全て覆す覚悟を持つことから成る．

中でもこれは人類の発展の最善と私は考える．量子重力における，その量子時空を概念化し，そうすることで空間と時間の概念を深く修正する試みにおける研究は，この発展の歩みである．

[*152] 世界の合理的な研究は，宇宙とともに人間が宇宙について推論することと話すことを支配する，(我々が探し求める) 原理である，Socrates 以前の $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ (logos［ロゴス］) で始まった：それは真理であると同時に，心理に対する我々の推論である．

[*153] 私は決して世界の物理的予言がそれを網羅すると唱えるつもりはない．それはもしレンガの物理を理解すれば，直ちに大聖堂が立っている理由，またはそれが輝いている理由が分かると言うようなものである．

付録 D　微分形式 (筆者補論)

ここでは微分形式 (それは写像である) を導入する [424, pp.37–46,pp.67–76,pp.79–99].

接ベクトル　多様体 M (座標 $q = \{q^i\}$ を持つ) の各点における微分作用素 $v = v^i \partial_i$．ただし $\partial_i \equiv \partial/\partial q^i$．

$$\begin{aligned} &\text{図 48 の曲線 } c \text{ に沿った方向微分} \quad \frac{\mathrm{d}f(q(t))}{\mathrm{d}t} = \dot{q}^i \partial_i \\ \to \quad &\text{方向微分作用素 } v = \dot{q}^i \partial_i \end{aligned}$$

$c(t)$ に応じて (つまり動点の運動に応じて) $\{\partial_i\}$ を基底とする様々な速度 $\{\dot{q}^i\}$ を持つ作用素 v が得られる．その全体が接空間を張る．

次に多様体の接空間に限らず，抽象的ベクトル空間 V を考える．その基底を $\{e_i\}$，元を $u_{(i)} = u_{(i)}{}^j e_j$ と書く．

p ベクトル　p 個のベクトル $u_{(1)}, \cdots, u_{(p)}$ を実数に対応させる写像のうち，引数となるベクトルについて

$$\begin{aligned} p \text{ 重線形：} \quad & \omega^p[u_{(1)}, \cdots, au_{(i)} + bv_{(i)}, \cdots, u_{(p)}] = a\omega^p[u_{(1)}, \cdots, u_{(i)}, \cdots, u_{(p)}] + b\omega^p[u_{(1)}, \cdots, v_{(i)}, \cdots, u_{(p)}] \\ \text{歪対称：} \quad & \omega^p[u_{(1)}, \cdots, u_{(i)}, \cdots, u_{(j)}, \cdots, u_{(p)}] = -\omega^p[u_{(1)}, \cdots, u_{(j)}, \cdots, u_{(i)}, \cdots, u_{(p)}] \end{aligned}$$

となる ω^p のこと．

- 例えば 1 ベクトル ω は
$$\omega : V \to \boldsymbol{R} : u \in V \mapsto \omega[u] \in \boldsymbol{R}$$
という線形写像．
- 特に 1 ベクトル $\mathcal{E}^i$ を，
$$\mathcal{E}^i[u^j e_j] = u^i$$
で定義しておく．これはベクトル $u = u^j e_j$ の第 i 成分 u^i を取り出す写像である．

1 ベクトル $\omega_{(1)}, \cdots, \omega_{(p)}$ から p ベクトルを構成することを考える．

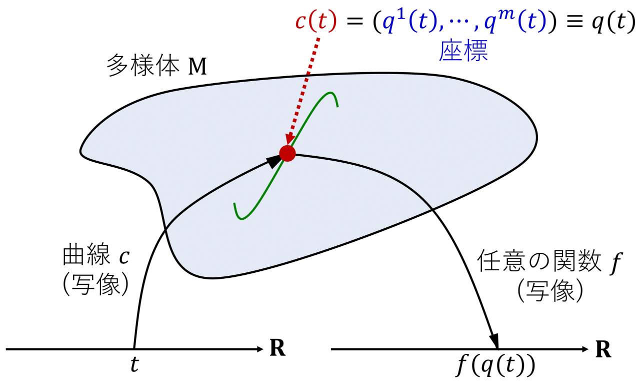


図 48　合成写像 $t \in \mathbf{R} \mapsto c(t) \in \mathrm{M} \mapsto f \circ c(t) \equiv f(c(t)) \in \mathbf{R}$

テンソル積 $\omega_{(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{(p)}$

テンソル積 $\omega_{(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{(p)}$ を

$$(\omega_{(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{(p)})[u_{(1)}, \cdots, u_{(p)}] = \omega_{(1)}[u_{(1)}] \cdots \omega_{(p)}[u_{(p)}]$$

で定義する．

外積 $\omega_{(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{(p)}$

テンソル積 $\omega_{(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{(p)}$ を用いて外積 $\omega_{(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{(p)}$ を

$$(\omega_{(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{(p)})[u_{(1)}, \cdots, u_{(p)}] = \sum_{\pi} \mathrm{sgn}(\pi)(\omega_{(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{(p)})[u_{(\pi 1)}, \cdots, u_{(\pi p)}]$$

で定義する．ここに

$$\text{置換}\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ \pi 1 & \pi 2 & \cdots & \pi p \end{pmatrix}, \qquad \text{その符号 } \mathrm{sgn}(\pi) = \begin{cases} +1 & (\text{偶置換}) \\ -1 & (\text{奇置換}) \end{cases}$$

である．

これは行列式

$$\begin{vmatrix} \omega_{(1)}[u_{(1)}] & \cdots & \omega_{(1)}[u_{(p)}] \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \omega_{(p)}[u_{(1)}] & \cdots & \omega_{(p)}[u_{(p)}] \end{vmatrix}$$

であり，$u_{(1)}, \cdots, u_{(p)}$ について歪対称だから p ベクトルである．

また，ここから外積は $\omega_{(1)}, \cdots, \omega_{(p)}$ についても歪対称であることが分かる．

さらにこれは転置行列の行列式にも一致するから

$$\sum_{\pi} \mathrm{sgn}(\pi)(\omega_{(\pi 1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{(\pi p)})[u_{(1)}, \cdots, u_{(p)}]$$

とも書け，

$$\omega_{(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{(p)} = \sum_{\pi} \mathrm{sgn}(\pi)(\omega_{(\pi 1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{(\pi p)}).$$

p ベクトル ω^p が

$$\omega^p = {\sum}' a_{i_1 \cdots i_p} \mathcal{E}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathcal{E}^{i_p} \tag{39}$$

と展開されることを示す (ただし $\sum'$ は $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq \dim V$ の和)．$a_{i_1 \cdots i_p} \equiv \omega^p[e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}]$ とおくと，これは添字に関して反対称である．

$$\begin{aligned} \omega^p[u_{(1)}, \cdots, u_{(p)}] =& \omega^p[e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}] {u_{(1)}}^{i_1} \cdots {u_{(p)}}^{i_p} \qquad (\omega^p \text{の線形性}) \\ =& a_{i_1 \cdots i_p} \mathcal{E}^{i_1}[u_{(1)}] \cdots \mathcal{E}^{i_p}[u_{(p)}] \\ =& a_{i_1 \cdots i_p} \mathcal{E}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}^{i_p}[u_{(1)}, \cdots, u_{(p)}] \end{aligned}$$

なので，

$$\omega^p = a_{i_1 \cdots i_p} \mathcal{E}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}^{i_p}$$

と書ける．よって

$$
\begin{aligned}
\omega^p =& \sum{}' \sum_{\pi} a_{\pi i_1 \cdots \pi i_p} \mathcal{E}^{\pi i_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}^{\pi i_p} \\
& \text{(ここで} \textstyle\sum{}' \text{で } 1 \le i_1 < \cdots < i_p \le \dim V \text{ と大小関係を指定する代わりに，} \\
& \text{置換}\pi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ \pi i_1 & \pi i_2 & \cdots & \pi i_p \end{pmatrix} \text{で順序を混ぜている)} \\
=& \sum{}' \sum_{\pi} \mathrm{sgn}(\pi) a_{i_1 \cdots i_p} \mathcal{E}^{\pi i_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}^{\pi i_p} \qquad (a_{i_1 \cdots i_p} \text{の反対称性}) \\
=& \sum{}' a_{i_1 \cdots i_p} \mathcal{E}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathcal{E}^{i_p}.
\end{aligned}
$$

V として多様体の接空間をとり p ベクトル $\omega^p = \sum' a_{i_1 \cdots i_p} \mathcal{E}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathcal{E}^{i_p}$ を考える．

微分 $\mathrm{d}f$　接ベクトル $v = v^i \partial_i$ に作用して方向微分 $v^i \partial_i f$ を与える 1 ベクトル (従って写像)

$$
\mathrm{d}f[v] = v^i \partial_i f = (\partial_i f) \mathcal{E}^i [v], \qquad \therefore \mathrm{d}f = (\partial_i f) \mathcal{E}^i \tag{40}
$$

を導入する．

$$
q^j(q) = q^j
$$

で定義される座標関数 q^j を f にとると，微分 $\mathrm{d}f$ の式 (40) に現れる $\partial_i f$ における $f(q) = q^j(q) = q^j$ は座標関数ではなく座標成分となることに注意して

$$
\partial_i f = \delta_i^{\ j}, \qquad \therefore \mathrm{d}q^j = \mathcal{E}^j
$$

を得る．

よって p ベクトルは

$$
\omega^p = \sum{}' a_{i_1 \cdots i_p} \mathrm{d}q^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{i_p}
$$

と表される．ω^p は多様体のある点 Q の接ベクトルに作用する (点 Q の接ベクトルを引数とする) 写像であることを明記するため，これを $(\omega^p)_{\mathrm{Q}}$ と書く．

p(次微分) 形式 ω^p　多様体の各点で p ベクトル $(\omega^p)_{\mathrm{Q}}$ を与える“場”

$$
\omega^p = \sum{}' a_{i_1 \cdots i_p} \mathrm{d}q^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{i_p}.
$$

全微分 $\mathrm{d}f$　微分 $(\mathrm{d}f)_{\mathrm{Q}}$ の“場”である 1 形式 $\mathrm{d}f = (\partial_i f) \mathrm{d}q^i$．

座標関数の全微分は $\mathrm{d}\bar{q}^i = \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^j} \mathrm{d}q^j$ より反変ベクトル成分の変換則に従うため，p 形式 $\sum' a_{i_1 \cdots i_p} \mathrm{d}q^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{i_p}$ が座標系に依らない意味を持つには $a_{i_1 \cdots i_p}$ は p 階共変テンソルの変換則に従わなければならない．

外微分　p 形式

$$
\omega = \sum{}' f_{i_1 \cdots i_p} \mathrm{d}q^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{i_p}
$$

を外微分すると，$\mathrm{d}f_{i_1 \cdots i_p}$ を $f_{i_1 \cdots i_p}$ の全微分 (従って 1 形式) として $p+1$ 形式

$$
\mathrm{d}\omega = \sum{}' \mathrm{d}f_{i_1 \cdots i_p} \wedge \mathrm{d}q^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{i_p}
$$

を得る．

■微分形式の積分　以下では $\omega^p[u_{(1)},\cdots,u_{(p)}]\equiv\langle\omega^p|u_{(1)},\cdots,u_{(p)}\rangle$ という記法を用いる．多様体上の積分領域 A を $(\xi^1,\cdots,\xi^p)$ でパラメトライズし，領域 A に対応する $(\xi^1,\cdots,\xi^p)$ の範囲を $\bar{A}$ とする．このとき p 形式 ω^p の積分は

$$\int_A\omega^p\equiv\int_{\bar{A}}\left\langle\omega^p\,\middle|\,\frac{\partial}{\partial\xi^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\xi^p}\right\rangle\mathrm{d}\xi^1\cdots\mathrm{d}\xi^p$$

で定義される．ここで

$$\frac{\partial}{\partial\xi^j}=\frac{\partial q^k}{\partial\xi^j}\frac{\partial}{\partial q^k},\qquad\therefore\mathrm{d}q^i\left[\frac{\partial}{\partial\xi^j}\right]=\mathcal{E}^i\left[\frac{\partial q^k}{\partial\xi^j}\frac{\partial}{\partial q^k}\right]=\frac{\partial q^i}{\partial\xi^j}$$

なので

$$\begin{aligned}\left\langle\omega^p\,\middle|\,\frac{\partial}{\partial\xi^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\xi^p}\right\rangle&=\sum{}'f_{i_1\cdots i_p}\left\langle\mathrm{d}q^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{i_p}\,\middle|\,\frac{\partial}{\partial\xi^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\xi^p}\right\rangle\\&=\sum{}'f_{i_1\cdots i_p}\begin{vmatrix}\mathrm{d}q^{i_1}[\partial/\partial\xi^1]&\cdots&\mathrm{d}q^{i_1}[\partial/\partial\xi^p]\\\cdots&\cdots&\cdots\\\mathrm{d}q^{i_p}[\partial/\partial\xi^1]&\cdots&\mathrm{d}q^{i_p}[\partial/\partial\xi^p]\end{vmatrix}\\&=\sum{}'f_{i_1\cdots i_p}\frac{\partial(q^{i_1},\cdots,q^{i_p})}{\partial(\xi^1,\cdots,\xi^p)},\\\therefore\int_A\omega^p&=\int_{\bar{A}}\sum{}'f_{i_1\cdots i_p}\frac{\partial(q^{i_1},\cdots,q^{i_p})}{\partial(\xi^1,\cdots,\xi^p)}\mathrm{d}\xi^1\cdots\mathrm{d}\xi^p\end{aligned}\tag{41}$$

と書き換えられる．なお

$$\frac{\partial(q^{i_1},\cdots,q^{i_p})}{\partial(\xi^1,\cdots,\xi^p)}\mathrm{d}\xi^1\cdots\mathrm{d}\xi^p\equiv\frac{\partial(q)}{\partial(\xi)}\mathrm{d}^p\xi=\frac{\partial(q)}{\partial(\xi)}\frac{\partial(\xi)}{\partial(\bar{\xi})}\mathrm{d}^p\bar{\xi}=\frac{\partial(q)}{\partial(\bar{\xi})}\mathrm{d}^p\bar{\xi}$$

より，この積分はパラメータ $(\xi^1,\cdots,\xi^p)$ の取り方に依らない．

■Stokes の定理　n 次元の領域 D と境界 ∂D に向きのつけられるとき，任意の $p\equiv(n-1)$ 形式 ω に対して

$$\int_D\mathrm{d}\omega=\int_{\partial D}\omega\tag{42}$$

が成り立つ．

■面積要素を構成する　領域 D の境界 ∂D を $(\xi^1,\cdots,\xi^p)$ でパラメトライズする．1 つのパラメータ ξ^j が動いてできる座標曲線上の 2 点 $q(\xi^j),q(\xi^j+\mathrm{d}\xi^j)$ を結ぶ ∂D の接ベクトルを $\mathrm{d}^{(j)}q$ とすると，その第 i 成分は $\mathrm{d}^{(j)}q^i=\frac{\partial q^i}{\partial\xi^j}\mathrm{d}\xi^j$($j$ について和をとらない) なので，∂D にわたる ω^p の積分から

$$\frac{\partial(q^{i_1},\cdots,q^{i_p})}{\partial(\xi^1,\cdots,\xi^p)}\mathrm{d}\xi^1\cdots\mathrm{d}\xi^p=\begin{vmatrix}\frac{\partial q^{i_1}}{\partial\xi^1}\mathrm{d}\xi^1&\cdots&\frac{\partial q^{i_1}}{\partial\xi^p}\mathrm{d}\xi^p\\\cdots&\cdots&\cdots\\\frac{\partial q^{i_p}}{\partial\xi^1}\mathrm{d}\xi^1&\cdots&\frac{\partial q^{i_p}}{\partial\xi^p}\mathrm{d}\xi^p\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathrm{d}^{(1)}q^{i_1}&\cdots&\mathrm{d}^{(p)}q^{i_1}\\\cdots&\cdots&\cdots\\\mathrm{d}^{(1)}q^{i_p}&\cdots&\mathrm{d}^{(p)}q^{i_p}\end{vmatrix}$$

が現れる．これは無限小ベクトル $\mathrm{d}^{(1)}q,\cdots,\mathrm{d}^{(p)}q$ の張る面積要素を与える．

■外微分の公式　ω^p,σ^p を p 形式，f をスカラー関数とすると，外微分の定義より以下の公式が成り立つ．

$$\mathrm{d}(\omega^p+\sigma^p)=\mathrm{d}\omega^p+\mathrm{d}\sigma^p,\tag{43}$$

$$\mathrm{d}(f\omega^p)=\mathrm{d}f\wedge\omega^p+f\mathrm{d}\omega^p,\tag{44}$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f)=0,\tag{45}$$

$$\mathrm{d}(\omega^p\wedge\sigma^q)=\mathrm{d}\omega^p\wedge\omega^q+(-1)^p\omega^p\wedge\mathrm{d}\omega^q.\tag{46}$$

式 (43–44) はほとんど自明である．

式 (45) は

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial q^j}\mathrm{d}q^j\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial q^j}\mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}q^j$$

の最右辺が，添字 i, j に関して対称な量と反対称な量の縮約となって消えることによる．

最後に式 (46) について，任意の微分形式は

$$\omega^p = f\mathrm{d}q^{i_1} \wedge \mathrm{d}q^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{i_p}, \qquad \omega^q = g\mathrm{d}q^{j_1} \wedge \mathrm{d}q^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{j_q}$$

という形の項の線形結合で書ける．ところが外積は線形性

$$(a\omega^p + b\sigma^p) \wedge \omega^q = a(\omega^p \wedge \omega^q) + b(\sigma^p \wedge \omega^q),$$
$$\omega^p \wedge (a\omega^q + b\sigma^q) = a(\omega^p \wedge \omega^q) + b(\omega^p \wedge \sigma^q)$$

を満たすから (a, b は定数)，上記の単項式に対して式 (46) を示せば十分である．すると外微分の定義より

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\omega^p \wedge \omega^q) =& \mathrm{d}\{fg(\mathrm{d}q^{i_1} \wedge \mathrm{d}q^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{i_p}) \wedge (\mathrm{d}q^{j_1} \wedge \mathrm{d}q^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{j_q})\} \\ =& \{(\mathrm{d}f)g + f(\mathrm{d}g)\} \wedge (\mathrm{d}q^{i_1} \wedge \mathrm{d}q^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{i_p}) \wedge (\mathrm{d}q^{j_1} \wedge \mathrm{d}q^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{j_q})\end{aligned}$$

であり，最右辺において $\mathrm{d}g$ と $\mathrm{d}q^{i_1}, \cdots, \mathrm{d}q^{i_p}$ の外積を次々と反交換してゆくと符号 $(-1)^p$ が出るので，式 (46) が得られる．

付録 E　Lie 微分 (筆者補論)

ここでは 4.1 節のノートで用いた Lie 微分の公式を補足する．

E.1　Lie 微分の概念的導入

E.1.1　積分曲線と 1 径数変換群 [424, pp.49–50]

多様体 M 上にベクトル場 w が与えられているとき，初期位置 $q(0) = \mathrm{Q}_0$ からベクトル場 w に導かれて運動する動点の軌跡，すなわち

$$\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} = w^i(q) \tag{47}$$

の解 $q = c(t)$ が表す曲線を，w の**積分曲線 (解曲線)** という (図 49 参照)*154．［平たく言えば，積分曲線はベクトルを滑らかに繋いで得られる曲線であり，例えば流体の速度場の積分曲線は流線，電場の積分曲線は電気力線である.］

動点の初期位置 Q_0 を時間 t 後の位置 $\mathrm{Q}_t = c(t)$ に対応付ける写像

$$\varphi_t : \mathrm{Q}_0 \mapsto \mathrm{Q}_t$$

の全体 $\{\varphi_t | t \in \mathbf{R}\}$ を**相流ないし流れ (フロー)** という．

$$\begin{aligned}
&\varphi_0 = \mathrm{id.}\ (\text{恒等写像}),\\
&\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s,\\
&\varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1}
\end{aligned}$$

より相流は群を成す．この群をベクトル場 w が定める **1 径数変換群**という．

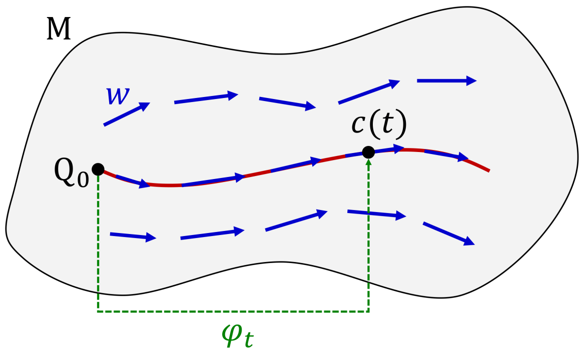


図 49　多様体上のベクトル場と積分曲線

*154 式 (47) は，各点でのベクトル $w^i\partial_i$ が動点の速度 $\dot{q}^i\partial_i$ に一致する条件 $\dot{q}^i\partial_i = w^i\partial_i$ と等価である．

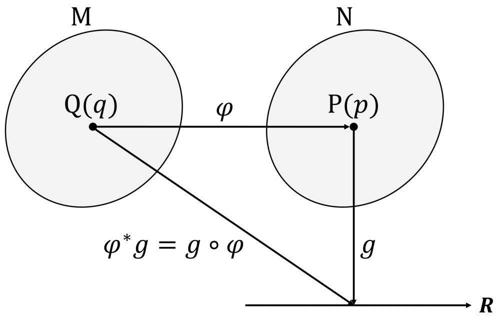


図 50　引き戻し

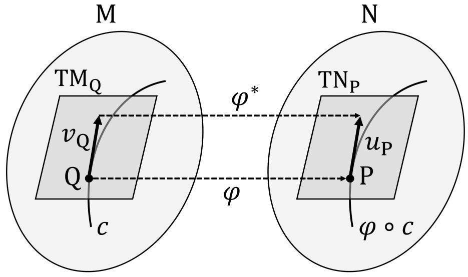


図 51　微分写像

E.1.2　引き戻しと微分写像 [424, pp.50–51]

多様体 M 上の各点 Q (座標 q) を多様体 N 上の点 $\mathrm{P} = \varphi(\mathrm{Q})$ (座標 p) に移す微分同相写像 ϕ を考える．さらに N 上の点 P を実数 $g(\mathrm{P})$ に対応付ける写像 g を定義する．これを

$$g(\mathrm{P}) = g(\varphi(\mathrm{Q})) = g \circ \varphi(\mathrm{Q}) \equiv (\varphi^* g)(\mathrm{Q}) \tag{48}$$

と見ると，$\varphi^* g$ は M において作用する関数となる．$\varphi^* g$ を g の ϕ による M 上への**引き戻し** (pull back) という (図 50 参照)．

M 上の曲線 $q = c(t)$ に沿う動点の運動は，微分同相写像 φ を用いて，N 上の曲線 $p = (\varphi \circ c)(t)$ に沿う動点の運動に対応付けられる．すると M の点 Q における接ベクトル v_Q を，N の点 $\mathrm{P} = \varphi(\mathrm{Q})$ における接ベクトル $u_\mathrm{P} = (\varphi_* v)_\mathrm{P}$ に移す写像を定義できる (図 51 参照)．一時的に添字 Q, P を省略すると，局所座標表示では $v^j = \dot{q}^j$ に対して

$$v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = v^j \frac{\partial}{\partial q^j} = v^j \frac{\partial p^i}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial p^i}, \qquad u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = u^i \frac{\partial}{\partial p^i}$$

であり，2 式を比較すると

$$u^i = \frac{\partial p^i}{\partial q^j} v^j$$

となる．あるいは添字を復元して

$$u^i{}_\mathrm{P} = \frac{\partial p^i}{\partial q^j} v^j{}_\mathrm{Q}. \tag{49}$$

これは (反変) ベクトル成分の変換則となっており，微分の変換 $\mathrm{d}p^i = \frac{\partial p^i}{\partial q^j} \mathrm{d}q^j$ と同じ変換則なので，写像

$$\varphi_* : v_\mathrm{Q} \mapsto u_\mathrm{P} \tag{50}$$

を**微分写像**という．

note　ここでは共変ベクトル $\partial/\partial q^i \to \partial/\partial p^i$ の変換則の下で，ベクトルの不変性 $v = u$ が成り立つことを要求して，$v^i \to u^i$ が反変ベクトル成分の変換則となることを導いたことになる．同じことは直接，

$$u^i = \dot{p}^i = \frac{\partial p^i}{\partial q^j} \dot{q}^j = \frac{\partial p^i}{\partial q^j} v^j$$

としても示される．つまり $v^i = \dot{q}^i, u^i = \dot{p}^i$ は座標の微分だから，反変ベクトル成分の変換則に従う．(このときベクトルの不変性 $u = v$ が保証される．)

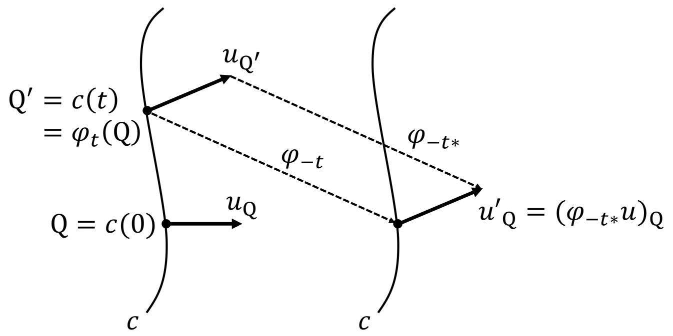


図 52　ベクトル場 u の Lie 微分

E.1.3　Lie 微分 [424, pp.53–55]

多様体上のベクトル場 v に対して，Q を始点とする積分曲線を $\varphi_t(\mathrm{Q}) = c(t)$ と書こう (E.1.1 項参照)．多様体上の関数 f の積分曲線に沿う変化率は，点 $\mathrm{Q} = c(0)$ において

$$\mathcal{L}_v(f) \equiv \lim_{t\to 0} \frac{f(c(t)) - f(c(0))}{t} = v_{\mathrm{Q}}[f]$$

と表される．これを **Lie** (リー) **微分**という．つまり関数の Lie 微分は，積分曲線に沿った方向微分に他ならない．

ベクトル場 u の Lie 微分も，積分曲線に沿う u の変化率

$$\mathcal{L}_v(u) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_{-t*}u - u}{t} \tag{51}$$

として定義できる．ここで第 1 項の $(\varphi_{-t*}u)_{\mathrm{Q}}$ は，ベクトル場 u を積分曲線に沿って時間 t だけ逆向きにずらして得られるベクトル場 $u' = \varphi_{-t*}u$ の，点 Q での値である (φ_{-t*} は E.1.2 項の式 (50) の微分写像)．これは時間 t だけ進んだ点 $\varphi_t(\mathrm{Q}) = \mathrm{Q}'$ でのベクトル $u_{\mathrm{Q}'}$ を，点 Q に移したベクトルに他ならない (図 52 参照)．このように式 (51) では，同一の点 Q でのベクトル $u_{\mathrm{Q}}, u'_{\mathrm{Q}}$ を比較している．

注意　多様体上の異なる 2 点 Q, Q' のベクトル $u_{\mathrm{Q}}, u_{\mathrm{Q}'}$ の差は意味を持たない．と言うのも，一般に多様体の異なる 2 点でのベクトル成分は異なる変換係数 $(\partial\bar{q}^i/\partial q^j)$ を持つため，それらの和や差はベクトル成分とならないからである [424, p.30].

ベクトル場の Lie 微分に対して，公式

$$\mathcal{L}_v(u) = vu - uv \tag{52}$$

が成り立つ．

公式 (52) の証明　ベクトル場 v の積分曲線上の 2 点 $\mathrm{Q} = \{q^i\}, \varphi_t(\mathrm{Q}) = \mathrm{Q}' = \{q'^i\}$ に対して，

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{Q}} &= u^i(q)\partial_i, \\ u'_{\mathrm{Q}} &= u^j(q')\partial_j{}' = u^j(q')\frac{\partial q^i}{\partial q'^j}\partial_i \equiv (\varphi_{-t*}u)_{\mathrm{Q}} \end{aligned}$$

なので，

$$\mathcal{L}_v(u)_{\mathrm{Q}} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left\{u^j(q')\frac{\partial q^i}{\partial q'^j} - u^i(q)\right\}\partial_i.$$

ここで点 Q' を始点 Q の近くにとると，

$$q'^i = q^i + tv^i + O(t^2), \qquad \therefore u^j(q') = u^j + tv^k\partial_k v^j + O(t^2), \quad \frac{\partial q^i}{\partial q'^j} = \delta^i{}_j - t\frac{\partial v^i}{\partial q'^j} + O(t^2) = \delta^i{}_j - t\partial_j v^i + O(t^2)$$

より

$$\begin{aligned}\left\{u^j(q')\frac{\partial q^i}{\partial q'^j} - u^i(q)\right\}\partial_i =& \left\{\left(u^j + tv^k\partial_k v^j\right)\left(\delta^i{}_j - t\partial_j v^i\right) - u^i\right\}\partial_i + O(t^2)\\ =& t\left\{(v^k\partial_k u^i) - (u^k\partial_k v^i)\right\}\partial_i + O(t^2)\end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_v(u)_{\mathrm{Q}} =& \left\{(v^k\partial_k u^i) - (u^k\partial_k v^i)\right\}\partial_i \\ =& (v^k\partial_k)(u^i\partial_i) - (u^k\partial_k)(v^i\partial_i) \\ =& (vu - uv)_{\mathrm{Q}}\end{aligned} \tag{53}$$

を得る．これをベクトル場の関係として書いたのが式 (52) である．

■Lie 括弧 [424, pp.55–56]　式 (52) の右辺

$$vu - uv \equiv [v, u]_{\mathrm{L}} \tag{54}$$

をベクトル場 v, u の **Lie 括弧**ないし**交換子**という．これを用いて式 (52) は改めて

$$\mathcal{L}_v(u) = [v, u]_{\mathrm{L}}$$

と書ける．

Lie 括弧は式 (53):

$$[v, u]_{\mathrm{L}} = \{(vu^i) - (uv^i)\}\partial_i$$

のように書けるので，Lie 括弧 $[v, u]_{\mathrm{L}}$ もまた各点で接ベクトルを与えるベクトル場である[*155]．

E.2　Lie 微分の一般公式

以降では多様体の座標の成分をギリシャ文字でラベルする．一般に (k, l) テンソル $T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}$ の Lie 微分は，公式

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} =& V^\lambda\partial_\lambda T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} \\ & - (\partial_\lambda V^{\mu_1})T^{\lambda\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} - (\partial_\lambda V^{\mu_2})T^{\mu_1\lambda\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} - \cdots \\ & + (\partial_{\nu_1}V^\lambda)T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\lambda\nu_2\cdots\nu_l} + (\partial_{\nu_2}V^\lambda)T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\lambda\cdots\nu_l} + \cdots\end{aligned} \tag{55}$$

に従って実行できる [415, p.39]．

実際まず，スカラー場 S の Lie 微分は方向微分

$$\mathcal{L}_V S = V^\mu\partial_\mu S \tag{56}$$

---

*155 しかも E.1.2 項のノートで指摘したように，各点 Q での値について，ベクトル $u = u^i\partial_i, v = v^i\partial_i$ そのものは不変量なので，$\{\cdots\}$ 内の因子 $(vu^i) - (uv^i)$ はベクトル成分の変換則に従う．

に他ならない (E.1.3 項)．またベクトル $V=V^\mu\partial_\mu$ に沿うベクトル $U=U^\mu\partial_\mu$ の Lie 微分は，E.1.3 項の式 (52)，(53):

$$\mathcal{L}_V U=[V,U]_{\mathrm{L}}\equiv VU-UV=\{V^\nu\partial_\nu U^\mu-U^\nu\partial_\nu V^\mu\}\partial_\mu$$

で与えられる．この式の第 μ 成分をとれば

$$\mathcal{L}_V U^\mu=V^\nu\partial_\nu U^\mu-U^\nu\partial_\nu V^\mu\equiv[V,U]^\mu_{\mathrm{L}} \tag{57}$$

となる．これは確かに公式 (55) で ${T^{\cdots}}_{\cdots}=U^\mu$ とおいた結果に一致している．

一般のテンソルに対する公式 (55) は，テンソルの共変微分の公式と同様，Lie 微分に対して Leibniz ルール

$$\mathcal{L}_V({T^{\cdots}}_{\cdots}{S^{\cdots}}_{\cdots})=(\mathcal{L}_V{T^{\cdots}}_{\cdots}){S^{\cdots}}_{\cdots}+{T^{\cdots}}_{\cdots}(\mathcal{L}_V{S^{\cdots}}_{\cdots})$$

が成り立つことを要求すると導ける．例えば共変ベクトル ω_μ の Lie 微分の公式を調べるには，反変ベクトル U^μ との縮約によって得られるスカラー $\omega_\mu U^\mu$ の Lie 微分を計算するのが有効である．すると

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V(\omega_\mu U^\mu)=&V^\nu\partial_\nu(\omega_\mu U^\mu)\qquad(\because \text{式 (56)})\\=&V^\nu(\partial_\nu\omega_\mu)U^\mu+V^\nu\omega_\mu(\partial_\nu U^\mu)\end{aligned}$$

となる．他方，Leibniz ルールを適用すると

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V(\omega_\mu U^\mu)=&(\mathcal{L}_V\omega)_\mu U^\mu+\omega_\mu(\mathcal{L}_V U)^\mu\\=&(\mathcal{L}_V\omega)_\mu U^\mu+\omega_\mu V^\nu\partial_\nu U^\mu-\omega_\mu U^\nu\partial_\nu V^\mu\qquad(\because \text{式 (57)})\end{aligned}$$

と計算できる．これらを等置すると

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_V\omega)_\mu U^\mu=&V^\nu(\partial_\nu\omega_\mu)U^\mu\cancel{+V^\nu\omega_\mu(\partial_\nu U^\mu)}\cancel{-\omega_\mu V^\nu\partial_\nu U^\mu}+\omega_\mu U^\nu\partial_\nu V^\mu\\=&(V^\nu\partial_\nu\omega_\mu+\omega_\nu\partial_\mu V^\nu)U^\mu\end{aligned}$$

を得る．これが任意の U^μ に対して成り立つことを要求すると，共変ベクトル ω_μ の Lie 微分の公式

$$\mathcal{L}_V\omega_\mu=V^\nu\partial_\nu\omega_\mu+\omega_\nu\partial_\mu V^\nu \tag{58}$$

が導かれる．同様の手続きで，(k,l) テンソル ${T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}$ の Lie 微分の公式 (55) も導ける [432, p.137]．

確認 (k,l) テンソル ${T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}$ を共変ベクトルたち $A_{\mu_1},B_{\mu_2},\cdots,C_{\mu_k}$ および反変ベクトルたち $X^{\nu_1},Y^{\nu_2},\cdots,Z^{\nu_l}$ と縮約して得られるスカラーの Lie 微分を考える．すると

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_V(A_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots C_{\mu_k}X^{\nu_1}Y^{\nu_2}\cdots Z^{\nu_l}{T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l})\\=&V^\lambda\partial_\lambda(A_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots C_{\mu_k}X^{\nu_1}Y^{\nu_2}\cdots Z^{\nu_l}{T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l})\qquad(\because \text{式 (56)})\\=&A_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots C_{\mu_k}X^{\nu_1}Y^{\nu_2}\cdots Z^{\nu_l}(V^\lambda\partial_\lambda{T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l})\\&+(V^\lambda\partial_\lambda A_{\mu_1})B_{\mu_2}\cdots C_{\mu_k}X^{\nu_1}Y^{\nu_2}\cdots Z^{\nu_l}{T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}\\&+\cdots\\&+A_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots(V^\lambda\partial_\lambda C_{\mu_k})X^{\nu_1}Y^{\nu_2}\cdots Z^{\nu_l}{T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}\\&+A_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots C_{\mu_k}(V^\lambda\partial_\lambda X^{\nu_1})Y^{\nu_2}\cdots Z^{\nu_l}{T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}\\&+\cdots\\&+A_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots C_{\mu_k}X^{\nu_1}Y^{\nu_2}\cdots(V^\lambda\partial_\lambda Z^{\nu_l}){T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}\end{aligned}$$

となる．他方，Leibniz ルールを適用すると

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_V(A_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots C_{\mu_k}X^{\nu_1}Y^{\nu_2}\cdots Z^{\nu_l}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l})\\
=&A_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots C_{\mu_k}X^{\nu_1}Y^{\nu_2}\cdots Z^{\nu_l}(\mathcal{L}_V T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l})\\
&+(V^\lambda\partial_\lambda A_{\mu_1}+A_\lambda\partial_{\mu_1}V^\lambda)B_{\mu_2}\cdots C_{\mu_k}X^{\nu_1}Y^{\nu_2}\cdots Z^{\nu_l}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}\\
&+\cdots\\
&+A_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots(V^\lambda\partial_\lambda C_{\mu_k}+C_\lambda\partial_{\mu_k}V^\lambda)X^{\nu_1}Y^{\nu_2}\cdots Z^{\nu_l}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}\\
&+A_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots C_{\mu_k}(V^\lambda\partial_\lambda X^{\nu_1}-X^\lambda\partial_\lambda V^{\nu_1})Y^{\nu_2}\cdots Z^{\nu_l}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}\\
&\cdots\\
&+A_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots C_{\mu_k}X^{\nu_1}Y^{\nu_2}\cdots(V^\lambda\partial_\lambda Z^{\nu_l}-Z^\lambda\partial_\lambda V^{\nu_l})T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}
\end{aligned}$$

と計算できる (式 (57)，式 (58) を用いた)．これらを等置し，相殺する項を省いて整理すると

$$\begin{aligned}
&A_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots C_{\mu_k}X^{\nu_1}Y^{\nu_2}\cdots Z^{\nu_l}(\mathcal{L}_V T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l})\\
=&A_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots C_{\mu_k}X^{\nu_1}Y^{\nu_2}\cdots Z^{\nu_l}(V^\lambda\partial_\lambda T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l})\\
&-(A_\lambda\partial_{\mu_1}V^\lambda)B_{\mu_2}\cdots C_{\mu_k}X^{\nu_1}Y^{\nu_2}\cdots Z^{\nu_l}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} && [\lambda\leftrightarrow\mu_1]\\
&-\cdots\\
&-A_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots(C_\lambda\partial_{\mu_k}V^\lambda)X^{\nu_1}Y^{\nu_2}\cdots Z^{\nu_l}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} && [\lambda\leftrightarrow\mu_k]\\
&+A_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots C_{\mu_k}(X^\lambda\partial_\lambda V^{\nu_1})Y^{\nu_2}\cdots Z^{\nu_l}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} && [\lambda\leftrightarrow\nu_1]\\
&+\cdots\\
&+A_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots C_{\mu_k}X^{\nu_1}Y^{\nu_2}\cdots(Z^\lambda\partial_\lambda V^{\nu_l})T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} && [\lambda\leftrightarrow\nu_l]
\end{aligned}$$

を得る．ここで右辺の各行に $[\cdots]$ で書き添えたダミー添字の入れ替え $\lambda\leftrightarrow\mu_1$, etc. を施すと，右辺の各項を積 $A_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots C_{\mu_k}X^{\nu_1}Y^{\nu_2}\cdots Z^{\nu_l}$ に比例する形に書き換えられる．この等式が任意の $A_{\mu_1},B_{\mu_2},\cdots,C_{\mu_k},X^{\nu_1},Y^{\nu_2},\cdots,Z^{\nu_l}$ に対して成り立つことを要求すると，式 (55):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_V T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}=&V^\lambda\partial_\lambda T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}\\
&-(\partial_\lambda V^{\mu_1})T^{\lambda\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}-\cdots-(\partial_\lambda V^{\mu_k})T^{\mu_1\mu_2\cdots\lambda}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}\\
&+(\partial_{\nu_1}V^\lambda)T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\lambda\nu_2\cdots\nu_l}+\cdots+(\partial_{\nu_l}V^\lambda)T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\lambda}
\end{aligned}$$

が導かれる．

なお，公式 (55) は共変性が明白な形

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_V T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}=&V^\lambda \mathrm{D}_\lambda T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}\\
&-(\mathrm{D}_\lambda V^{\mu_1})T^{\lambda\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}-\cdots-(\mathrm{D}_\lambda V^{\mu_k})T^{\mu_1\mu_2\cdots\lambda}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}\\
&+(\mathrm{D}_{\nu_1}V^\lambda)T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\lambda\nu_2\cdots\nu_l}+\cdots+(\mathrm{D}_{\nu_l}V^\lambda)T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\lambda}
\end{aligned}\tag{59}$$

に書き換えられる (D_μ は共変微分) [432, pp.137–138].

理由　共変微分の公式

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_\lambda T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}=\partial_\lambda T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}&+\Gamma^{\mu_1}{}_{\lambda\sigma}T^{\sigma\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}+\cdots+\Gamma^{\mu_k}{}_{\lambda\sigma}T^{\mu_1\cdots\sigma}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\\
&-\Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu_1}T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\sigma\cdots\nu_l}-\cdots-\Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu_l}T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\sigma}
\end{aligned}$$

を思い出すと，式 (55) 右辺を上式 (59) に置き換えた際に現れる付加的な項は

$$
\begin{aligned}
&V^{\lambda}(\Gamma^{\mu_1}{}_{\lambda\sigma}T^{\sigma\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}+\cdots+\Gamma^{\mu_k}{}_{\lambda\sigma}T^{\mu_1\cdots\sigma}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\\
&-\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu_1}T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\sigma\cdots\nu_l}-\cdots-\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu_l}T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\sigma})\\
&-(\Gamma^{\mu_1}{}_{\lambda\sigma}V^{\sigma})T^{\lambda\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}-\cdots-(\Gamma^{\mu_k}{}_{\lambda\sigma}V^{\sigma})T^{\mu_1\cdots\lambda}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\\
&+(\Gamma^{\lambda}{}_{\nu_1\sigma}V^{\sigma})T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\lambda\cdots\nu_l}+\cdots+(\Gamma^{\lambda}{}_{\nu_l\sigma}V^{\sigma})T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\lambda}=0
\end{aligned}
$$

となって，正確に打ち消し合うことが見て取れる．

テンソルの単なる微分は一般にテンソルではないが，テンソルの共変微分はテンソルだから，式 (59) は両辺が同種のテンソルであり，座標変換に対して共変的となる．

■共変微分と Lie 微分の違い　一連の公式の基本となるベクトルの微分に関して言えば，異なる点でのベクトルを比較する際に共変微分では接続で定義されるベクトルの平行移動を利用するのに対し，Lie 微分では微分写像を用いること (E.1.3 項) が，定義の違いに繋がっていると考えられる．

共変導関数は，曲率の概念を座標系に依存しない方法で規定するために決定的に重要であった．Lie 導関数だけを利用しても，そのような概念の抽出は行えない [415, p.39].

参考文献

序文，および術語と表記

[1] C. Rovelli, Loop space representation. In *New Perspectives in Canonical Gravity*, ed. A. Ashtekar *et al.* (Napoli: Bibliopolis, 1988).

[2] C. Rovelli, Ashtekar formulation of general relativity and loop space non-perturbative Quantum Gravity: a report. *Class. and Quantum Grav.* **8** (1991) 1613–1675.

[3] A. Ashtekar, *Non-perturbative Canonical Gravity* (Singapore: World Scientific, 1991).

[4] L. Smolin, Time measurement and information loss in quantum cosmology. In *Brill Feschrift Proceedings*, ed. B. Hu and T. Jacobson (Cambridge: Cambridge University Press, 1993); Recent developments in nonperturbative quantum gravity. In *Quantum Gravity and Cosmology*, ed. J. Perez-Mercader, J. Sola and E. Verdaguer (Singapore: World Scientific, 1993).

[5] J. Baez, *Knots and Quantum Gravity* (Oxford: Oxford University Press, 1994).

[6] B. Brügmann, Loop representations. In *Canonical Gravity: from Classical to Quantum.* ed. J. Ehlers and H. Friedrich (Berlin: Springer-Verlag, 1994).

[7] R. Gambini and J. Pullin, *Loops, Knots, Gauge Theories and Quantum Gravity* (Cambridge: Cambridge University Press, 1996).

[8] J. Kowalski-Glikman, Towards quantum gravity, *Lecture Notes in Physics* **541** (2000) (Berlin: Springer).

[9] A. Ashtekar, Background independent quantum gravity: A Status report. *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) R53.

[10] L. Smolin, An invitation to loop quantum gravity, hep-th/0408048.

[11] T. Thiemann, Lectures on loop quantum gravity, *Lecture Notes in Physics* **631** (2003) 41–135, gr-qc/0210094.

[12] C. Rovelli, Loop quantum gravity, *Living Reviews in Relativity*, electronic journal, `http://www.livingreviews.org/Articles/Volume1/1998-1rovelli`.

[13] A. Ashtekar, Quantum geometry and gravity: recent advances, to appear in the *Proc. 16th Int. Conf. on General Relativity and Gravitation, Durban, S Africa, July 2001*, gr-qc/9901023.

[14] M. Gaul and C. Rovelli, Loop quantum gravity and the meaning of diffeomorphism invariance, *Lecture Notes in Physics* **541** (2000) 277–324 (Berlin: Springer), gr-qc/9910079.

[15] C. Rovelli and P. Upadhya, Loop quantum gravity and quanta of space: a primer, gr-qc/9806079.

[16] J. Baez and J. Muniain, *Gauge Fields, Knots and Gravity* (Singapore: World Scientific, 1994).

[17] J.C. Baez, An introduction to spin foam models of BF theory and quantum gravity. In *Geometry and Quantum Physics*, ed. H. Gausterer and H. Grosse, *Lecture Notes in Physics* **543** (1999) 25–94 (Berlin: Springer-Verlag), gr-qc/9905087.

[18] D. Oriti, Spacetime geometry from algebra: spin foam models for non-perturbative quantum gravity, *Rept. Prog. Phys.* **64** (2001) 1489, gr-qc/0106091.

[19] A. Perez, Spin foam models for quantum gravity, *Class. and Quantum Grav.* **20** (2002), gr-

qc/0301113.

[20] T. Thiemann, *Modern Canonical Quantum General Relativity* (Cambridge: Cambridge University Press, 2004, in press), a preliminary version is in gr-qc/0110034.

[21] J. Ambjorn, B. Durhuus and T. Jonsson, *Quantum Geometry* (Cambridge: Cambridge University Press, 1997).

第１章：一般的なアイデアと発見的な描像

[22] M. Gell-Mann, *Strange Beauty* (London: Vintage, 2000), pp. 303–304.

[23] L. Smolin, Towards a background independent approach to M theory, hep-th/9808192; The cubic matrix model and duality between strings and loops, hep-th/0006137; A candidate for a background independent formulation of M theory, *Phys. Rev.* **D62** (2000) 086001, hep-th/9903166.

[24] L. Smolin, Strings as perturbations of evolving spin networks, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **88** (2000) 103–113, hep-th/9801022.

[25] D. Amati, M. Ciafaloni and G. Veneziano, Can spacetime be probed below the string size?, *Phys. Lett.* **B216** (1989) 41.

[26] J. Hartle, Spacetime quantum mechanics and the quantum mechanics of spacetime. In *Proceedings 1992 Les Houches School, Gravitation and Quantisation*, ed. B. Julia and J. Zinn-Justin (Paris: Elsevier Science, 1995), p. 285.

[27] S.A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Spacetime* (Cambridge: Cambridge University Press, 1989).

[28] R.M. Wald, *Quantum Field Theory on Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics* (Chicago: University of Chicago Press, 1994).

[29] M.H. Goroff and A. Sagnotti, Quantum gravity at two loops, *Phys. Lett.* **B160** (1985) 81; The ultraviolet behaviour of Einstein gravity, *Nucl. Phys.* **B266** (1986) 709.

[30] G. Horowitz, Quantum gravity at the turn of the millenium, plenary talk at the *Marcell Grossmann Conf., Rome, 2000*, gr-qc/0011089.

[31] S. Carlip, Quantum gravity: a progress report, *Rept. Prog. Phys.* **64** (2001) 885, gr-qc/0108040.

[32] C.J. Isham, Conceptual and geometrical problems in quantum gravity. In *Recent Aspects of Quantum Fields*, ed. H. Mitter and H. Gausterer (Berlin: Springer-Verlag, 1991), p. 123.

[33] C. Rovelli, Strings, loops and the others: a critical survey on the present approaches to quantum gravity. In *Gravitation and Relativity: At the turn of the Millenium*, ed. N. Dadhich and J. Narlikar (Pune: Inter-University Centre for Astronomy and Astrophysics, 1998), pp. 281–331, gr-qc/9803024.

[34] C. Callender and N. Hugget, eds., *Physics Meets Philosophy at the Planck Scale* (Cambridge: Cambridge University Press, 2001).

[35] C. Rovelli, Halfway through the woods. In *The Cosmos of Science*, ed. J. Earman and J.D. Norton (University of Pittsburgh Press and Universitäts Verlag-Konstanz, 1997).

[36] C. Rovelli, Quantum spacetime: what do we know? In *Physics Meets Philosophy at the Planck Length*, ed. C. Callender and N. Hugget (Cambridge: Cambridge University Press, 1999), gr-

qc/9903045.

[37] C. Rovelli, The century of the incomplete revolution: searching for general relativistic quantum field theory, *J. Math. Phys., Special Issue 2000* **41** (2000) 3776; hep-th/9910131.

[38] J.A. Wheeler, Superspace and the nature of quantum geometrodynamics. In *Batelle Rencontres, 1967*, ed. C. DeWitt and J.W. Wheeler, *Lectures in Mathematics and Physics*, **242** (New York: Benjamin, 1968).

[39] S. Weinberg, Ultraviolet divergences in quantum theories of gravitation. In *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, ed. S.W. Hawking and W. Israel (Cambridge: Cambridge University Press, 1979).

[40] S.W. Hawking, The path-integral approach to quantum gravity. In *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, ed. S.W. Hawking and W. Israel (Cambridge: Cambridge University Press, 1979).

[41] S.W. Hawking, Quantum cosmology. In *Relativity, Groups and Topology, Les Houches Session XL*, ed. B. DeWitt and R. Stora (Amsterdam: North Holland, 1984).

[42] K. Kuchar, Canonical methods of quantization. In *Oxford 1980, Proceedings, Quantum Gravity 2* (Oxford: Oxford University Press, 1984).

[43] C.J. Isham, Topological and global aspects of quantum theory. In *Relativity Groups and Topology. Les Houches 1983*, ed. B.S. DeWitt and R. Stora (Amsterdam: North Holland, 1984).

[44] C.J. Isham, Quantum gravity: an overview. In *Oxford 1980, Proceedings, Quantum Gravity 2* (Oxford: Oxford University Press, 1984).

[45] C. J. Isham, Structural problems facing quantum gravity theory. In *Proc. 14th Int. Conf. on General Relativity and Gravitation*, ed. M. Francaviglia, G. Longhi, L. Lusanna and E. Sorace (Singapore: World Scientific, 1997), pp. 167–209.

[46] M.B. Green, J. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory* (Cambridge: Cambridge University Press, 1987); J. Polchinski, *String Theory* (Cambridge: Cambridge University Press, 1998).

[47] C. Rovelli, A dialog on quantum gravity, *Int. J. Mod. Phys.* **12** (2003) 1, hep-th/0310077.

[48] L. Smolin, How far are we from the quantum theory of gravity?, hep-th 0303185.

[49] A. Connes, *Non Commutative Geometry* (New York: Academic Press, 1994).

[50] L. Smolin, *Three Roads to Quantum Gravity* (Oxford: Oxford University Press, 2000).

[51] K.S. Robinson, *Blue Mars* (New York: Bantam, 1996).

[52] G. Egan, *Schild Ladder* (London: Gollancz, 2001).

[53] E. Palandri, *Anna prende il volo* (Milano: Feltrinelli, 2000).

第 2 章：一般相対性理論

[54] S. Holst, Barbero's Hamiltonian derived from a generalized Hilbert- Palatini action, *Phys. Rev.***D53** (1996) 5966–5969.

[55] L. Russo, *La rivoluzione dimenticata* (Milano: Feltrinelli, 1997).

[56] J.P. Bourguignon and P. Gauduchon, Spineurs, operateurs de Dirac et variations de metriques, *Comm. Math. Phys.* **144** (1992) 581.

[57] T. Schücker, Forces from Connes' geometry, hep-th/0111236. Lectures at the Autumn School *Topology and Geometry in Physics, Rot an der Rot, 2001*, ed. E. Bick and F. Steffen (*Lecture Notes in Physics*, Springer, 2004).

[58] L. Russo, *Flussi e riflussi* (Feltrinelli, Milano, 2003).

[59] M. Faraday, *Experimental Researches in Electricity* (London: Bernard Quaritch, 1855), pp. 436–437.

[60] R. Descartes, *Principia Philosophiae* (1644), Translated by V.R. Miller and R.P. Miller (Dordrecht: Reidel, 1983).

[61] I. Newton, *De Gravitatione et Aequipondio Fluidorum*, translation in *Unpublished Papers of Isaac Newton*, ed. A.R. Hall and M.B. Hall (Cambridge: Cambridge University Press, 1962).

[62] I. Newton, *Principia Mathematica Philosophia Naturalis*, 1687, English translation *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy* (City? University of California Press, 1999).

[63] A. Einstein and M. Grossmann, Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation, *Z. für Mathematik und Physik* **62** (1914) 225.

[64] A. Einstein, Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, *Ann. der Phys.* **49** (1916) 769–822.

[65] M. Pauri and M. Vallisneri, Ephemeral point-events: is there a last remnant of physical objectivity?, *DIALOGOS*, **79** (2002), 263–303; L. Lusanna and M. Pauri, General covariance and the objectivity of space-time point-events: the physical role of gravitational and gauge degrees of freedom, `http://philsci-archive.pitt.edu/archive/00000959/` (2002).

[66] P. Hajicek, *Lecture Notes in Quantum Cosmology* (Bern: University of Bern, 1990).

[67] A.S. Eddington, *The Nature of the Physical World* (New York: MacMillan, 1930), pp. 99–102.

[68] S.J. Earman, *A Primer on Determinism* (Dordrecht: D. Reidel, 1986).

[69] B. DeWitt, in *Gravitation: An Introduction to Current Research*, ed. L. Witten (New York: Wiley, 1962).

[70] J.D. Brown and D. Marolf, On relativistic material reference systems, *Phys. Rev.* **D53** (1996) 1835.

[71] C. Rovelli, What is observable in classical and quantum gravity?, *Class. and Quantum Grav.* **8** (1991) 297; Quantum reference systems, *Class. and Quantum Grav.* **8** (1991) 317.

[72] P.G. Bergmann, *Phys. Rev.* **112** (1958) 287; Observables in general covariant theories, *Rev. Mod. Phys.* **33** (1961) 510.

[73] B.W. Parkinson and J.J. Spilker, eds., *Global Positioning System: Theory and Applications, Prog. in Astronautics and Aeronautics, Nos. 163–164* (Amer. Inst. Aero. Astro., Washington: 1996); E.D. Kaplan, *Understanding GPS: Principles and Applications*, Mobile Communications Series (Boston: Artech House, 1996); B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger and J. Collins, *Global Positioning System Theory and Practice* (New York: Springer-Verlag, 1993).

[74] B. Guinot, Application of general relativity to metrology, *Metrologia* **34** (1997) 261; F. de Felice, M.G. Lattanzi, A. Vecchiato and P.L. Bernacca, General relativistic satellite astrometry: I. A non-perturbative approach to data reduction, *Astron. Astrophy.* **332** (1998) 1133; T.B. Bahder, *Fermi Coordinates of an Observer Moving in a Circle in Minkowski Space: Apparent Behavior of Clocks*, Army Research Laboratory, Adelphi, Maryland, USA, Technical Report ARL-TR-2211, May 2000; A.R. Thompson, J.M. Moran and G.W. Swenson, *Interferometry and Synthesis in Radio*

Astronomy, (Malabar, Florida: Krieger Pub. Co., 1994), pp. 138–139; P.N.A.M. Visser, Gravity field determination with GOCE and GRACE, *Adv. Space Res.* **23** (1999) 771.

[75] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (New York: Wiley, 1972).

[76] R.M. Wald, *General Relativity* (Chicago: The University of Chicago Press, 1989).

[77] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette and M. Dillard-Bleick, Analysis, *Manifolds and Physics* (Amsterdam: North Holland, 1982).

[78] I. Ciufolini and J. Wheeler, *Gravitation and Inertia* (Princeton: Princeton University Press, 1996).

[79] H. Weyl, Electron and gravitation *Z. Physik* **56**, (1929) 330.

[80] J. Schwinger, Quantized gravitational field *Phys. Rev.*, **130**, (1963) 1253.

[81] J.F. Plebanski, On the separation of Einsteinian substructures, *J. Math. Phys.* **18** (1977) 2511.

[82] A. Sen, Gravity as a spin system, *Phys. Lett.* **119B** (1982) 89.

[83] J. Samuel, A lagrangian basis for Ashtekar's reformulation of canonical gravity, *Pramana J. Phys.* **28** (1987) L429; T. Jacobson and L. Smolin, Covariant action for Ashtekar's form of canonical gravity, *Class. and Quantum Grav.* **5** (1988) 583.

[84] R. Capovilla, J. Dell and T. Jacobson, General relativity without the metric, *Phys. Rev. Lett.* **63** (1991) 2325; R. Capovilla, J. Dell, T. Jacobson and L. Mason, Self–dual 2–forms and gravity, *Class. and Quantum Grav.***8** (1991) 41.

[85] J.D. Norton, How Einstein found his field equations: 1912–1915, *Historical Studies in the Physical Sciences*, **14** (1984) 253–315. Reprinted in *Einstein and the History of General Relativity: Einstein Studies*, ed. D. Howard and J. Stachel, Vol. I (Boston: Birkhäuser, 1989), pp. 101-159.

[86] J. Stachel, Einstein's search for general covariance 1912–1915. In *Einstein and the History of General Relativity: Einstein Studies*, ed. D. Howard and J. Stachel, Vol. 1 (Boston: Birkhäuser, 1989), pp. 63–100.

[87] E. Kretschmann, Über den physikalischen Sinn der Relativitätpostulate, *Ann. Phys. Leipzig* **53** (1917) 575.

[88] J.L. Anderson, *Principles of Relativity Physics* (New York: Academic Press, 1967).

[89] J. Barbour, *Absolute or Relative Motion?* (Cambridge: Cambridge University Press, 1989).

[90] J. Earman and J. Norton, What price spacetime substantivalism? The hole story, *Brit. J. Phil. Sci.* **38** (1987), 515–525.

[91] J. Earman, *World Enough and Space-time: Absolute Versus Relational Theories of Spacetime* (Cambridge: MIT Press, 1989).

[92] G. Belot, Why general relativity does need an interpretation, *Phil. Sci.* **63** (1998) S80–S88.

[93] J. Earman and G. Belot, Pre-Socratic quantum gravity. In *Physics Meets Philosphy at the Planck Scale*, ed. C. Callander (Cambridge: Cambridge University Press, 2001).

[94] C. Rovelli, Analysis of the different meaning of the concept of time in different physical theories, *Il Nuovo Cimento* **110B** (1995) 81.

[95] J.T. Fraser, *Of Time, Passion, and Knowledge* (Princeton: Princeton University Press, 1990).

[96] H. Reichenbach, *The Direction of Time* (Berkeley: University of California Press, 1956); P.C.W. Davies, The *Physics of Time Asymmetry* (England: Surrey University Press, 1974); R. Penrose, in *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, ed. S.W. Hawking and W. Israel (Cambridge:

Cambridge University Press, 1979); H.D. Zee, *The Physical Basis of the Direction of Time* (Berlin: Springer, 1989); J. Halliwel and J.A. Perez-Mercader, eds., *Proceedings of the International Workshop: Physical Origins of Time Asymmetry, Huelva Spain, September 1991* (Cambridge: Cambridge University Press, 1992).

[97] C.J. Isham, Canonical quantum gravity and the problem of time, Lectures presented at the NATO Advanced Institute *Recent Problems in Mathematical Physics, Salamanca, June 15, 1992*; K. Kuchar, Time and interpretations of quantum gravity. In *Proc. 4th Canadian Conference on General Relativity and Relativistic Astrophysics*, ed. G. Kunstatter, D. Vincent and J. Williams (Singapore: World Scientific, 1992); A. Ashtekar and J. Stachel, eds., *Proc. Osgood Hill Conference: Conceptual Problems in Quantum Gravity, Boston 1988* (Boston: Birkhäuser, 1993).

[98] C. Rovelli, Time in quantum gravity: an hypothesis, *Phys. Rev.* **D43** (1991) 442.

[99] J. Hartle, Classical physics and hamiltonian quantum mechanics as relics of the big bang, *Physica Scripta* **T36** (1991) 228.

[100] A. Grunbaum, *Philosophical Problems of Space and Time* (New York: Knopf, 1963); T. Gold and D.L. Shumacher, eds., *The Nature of Time* (Ithaca: Cornell University Press, 1967); P. Kroes, *Time: its Structure and Role in Physical Theories* (Dordrecht: D. Reidel, 1985).

[101] C. Rovelli, GPS observables in general relativity, *Phys. Rev.* **D65** (2002) 044017, gr-qc/0110003.

[102] T.B. Bahder, Navigation in curved space-time, *Amer. J. Phys.* **69** (2001) 315–321.

[103] M. Blagojevic, J. Garecki, F.W. Hehl and Yu. N. Obukhov, Real null coframes in general relativity and GPS type coordinates, gr-qc/0110078.

第 3 章：力学

[104] V.I. Arnold, *Matematičeskie Metody Klassičeskoj Mechaniki* (Moskow: Mir, 1979). See in particular Chapter IX, Section C.

[105] J.M. Souriau, *Structure des Systemes Dynamiques* (Paris: Dunod, 1969).

[106] J.L. Lagrange, *Mémoires de la Première Classe des Sciences Mathematiques et Physiques* (Paris: Institute de France, 1808).

[107] W.R. Hamilton, On the application to dynamics of a general mathematical method previously applied to optics, *British Association Report* (1834), 513–518.

[108] Č. Crnković and E. Witten, Covariant description of canonical formalism in geometrical theories, In *Newton's Tercentenary Volume*, ed. S.W. Hawking and W. Israel (Cambridge: Cambridge University Press, 1987); A. Ashtekar, L. Bombelli and O. Reula. In *Mechanics, Analysis and Geometry: 200 Years after Lagrange*, ed. M. Francaviglia (Amsterdam: Elsevier, 1991)

[109] M.J. Gotay, J. Isenberg and J.E. Marsden (with the collaboration of R. Montgomery, J. Sniatycki and P.B. Yasskin), Momentum maps and classical relativistic fields. Part 1: covariant field theory, physics/9801019.

[110] T. DeDonder, *Théorie Invariantive du Calcul des Variationes* (Paris: Gauthier-Villars, 1935).

[111] Hesiod, *Theogony*, translated by H.G. Evelyn-White (London: Harvard University Press, 1914), pp. 125–130. [Instigated by mother Γαῖα, Κρόνος then slaughters and castrates father, Οὐρανός.]

[112] C. Rovelli, The statistical state of the universe, *Class. and Quantum Grav.* **10** (1993) 1567.

[113] P.A.M. Dirac, Generalized Hamiltonian dynamics, *Can. J. Math. Phys.* **2** (1950) 129–148.

[114] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (New York: Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, 1964).

[115] A. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems* (Roma: Accademia nazionale dei Lincei, 1976); M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems* (Princeton: Princeton University Press, 1972).

[116] C. Rovelli, Partial observables, *Phy. Rev.* **D65** (2002) 124013, gr-qc/0110035.

[117] C. Rovelli, A note on the foundation of relativistic mechanics. I: Relativistic observables and relativistic states. In *Proc. 15th SIGRAV Conference on General Relativity and Gravitational Physics, 2002* (Bristol: IOP Publishing, 2004) in press, gr-qc/0111037.

[118] C. Rovelli, Covariant hamiltonian formalism for field theory: symplectic structure and Hamilton–Jacobi equation on the space G. In *Decoherence and Entropy in Complex Systems, Selected Lectures from DICE 2002. Lecture Notes in Physics* **633**, ed. H.T. Elze (Berlin: Springer–Verlag, 2003), gr-qc/0207043.

[119] M. Montesinos, C. Rovelli and T. Thiemann, $SL(2,R)$ model with two Hamiltonian constraints, *Phys. Rev.* **D60** (1999) 044009.

[120] H. Weil, Geodesic fields in the calculus of variations, *Ann. Math.* **36** (1935) 607–629.

[121] J. Kijowski, A finite dimensional canonical formalism in the classical field theory, *Comm. Math. Phys.* **30** (1973) 99–128; M. Ferraris and M. Francaviglia, The Lagrangian approach to conserved quantities in general relativity. In *Mechanics, Analysis and Geometry: 200 Years after Lagrange*, ed. M. Francaviglia (Amsterdam: Elsevier Sci. Publ., 1991), pp. 451–488; I.V. Kanatchikov, Canonical structure of classical field theory in the polymomentum phase space, *Rep. Math. Phys.* **41** (1998) 49; F. Hélein and J. Kouneiher, Finite dimensional Hamiltonian formalism for gauge and field theories, math-ph/0010036; H. Rund, *The Hamilton–Jacobi Theory in the Calculus of Variations* (New York: Krieger, 1973); H. Kastrup, Canonical theories of Lagrangian dynamical systems in physics, *Phys. Rep.* **101** (1983) 1.

[122] C. Rovelli, Statistical mechanics of gravity and thermodynamical origin of time, *Class. and Quantum Grav.* **10** (1993) 1549.

[123] A. Connes and C. Rovelli, Von Neumann algebra automorphisms and time versus thermodynamics relation in general covariant quantum theories, *Class. and Quantum Grav.* **11** (1994) 2899.

[124] P. Martinetti and C. Rovelli, Diamonds' temperature: Unruh effect for bounded trajectories and thermal time hypothesis, *Class. and Quantum Grav.* **20** (2003) 4919–4932, gr-qc/0212074.

[125] M. Montesinos and C. Rovelli, Statistical mechanics of generally covariant quantum theories: a Boltzmann-like approach, *Class. and Quantum Grav.* **18** (2001) 555–569.

第 4 章：Hamilton 形式の一般相対性理論

[126] D. Giulini, Ashtekar variables in Classical General Relativity. In *Canonical Gravity: From Classical to Quantum*, ed. J. Ehlers and H. Friedrich (Berlin: Springer-Verlag, 1994), p. 81.

[127] S. Alexandrov, E. Buffenoir, P. Roche, Plebanski theory and covariant canonical formulation, gr-qc/0612071.

[128] A. Perez, C. Rovelli, Physical effects of the Immirzi parameter. *Phys. Rev.* **D73** (2006) 044013.

[129] P. Bergmann, *Phys. Rev.* **112** (1958) 287; *Rev. Mod. Phys.* **33** (1961); P. Bergmann and A. Komar, The phase space formulation of general relativity and approaches towards quantization, *Gen. Rel. Grav.*, **1** (1981), pp. 227–254; In *General Relativity and Gravitation*, ed. A. Held (1981), pp. 227–254; A. Komar, General relativistic observables via Hamilton–Jacobi functionals, *Phys. Rev.* **D4** (1971) 923–927.

[130] P.A.M. Dirac, The theory of gravitation in Hamiltonian form, *Proc. Royal Soc. London* **A246** (1958) 333; *Phys. Rev.* **114** (1959) 924.

[131] R. Arnowitt, S. Deser and C.W. Misner, The dynamics of general relativity. In *Gravitation: An Introduction to Current Research*, ed. L. Witten (New York: Wiley, 1962), p. 227.

[132] A. Ashtekar, New variables for classical and quantum gravity, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 2244; New Hamiltonian formulation of general relativity, *Phys. Rev.* **D36** (1987) 1587.

[133] T. Thiemann, Anomaly-free formulation of nonperturbative 4-dimensional Lorentzian quantum gravity, *Phys. Lett.* **B380** (1996) 257.

[134] F. Barbero, Real Ashtekar variables for Lorentzian signature spacetimes, Phys. Rev. D51 (1995) 5507, gr-qc/9410014; *Phys. Rev.* **D51** (1995) 5498.

[135] G. Immirzi, Quantum gravity and Regge calculus, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **57** (1997) 65; Real and complex connections for canonical gravity, *Class. and Quantum Grav.* **14** (1997) L177–L181.

[136] L. Fatibene, M. Francaviglia, C. Rovelli, On a Covariant Formulation of the Barbero-Immirzi Connection, gr-qc/0702134.

[137] C. Rovelli and T. Thiemann, The Immirzi parameter in quantum general relativity, *Phys. Rev.* **D57** (1998) 1009–1014, gr-qc/9705059.

[138] G. Esposito, G. Gionti and C. Stornaiolo, Space-time covariant form of Ashtekar's constraints, *Nuovo Cimento* **110B** (1995), 1137–1152.

[139] C. Rovelli, A note on the foundation of relativistic mechanics. II: Covariant hamiltonian general relativity, gr-qc/0202079.

[140] M. Ferraris and M. Francaviglia, The Lagrangian approach to conserved quantities in General Relativity. In *Mechanics, Analysis and Geometry: 200 Years after Lagrange*, ed. M. Francaviglia (Amsterdam: Elsevier Sci. Publ., 1991), pp. 451–488; W. Szczyrba, A symplectic structure of the set of Einstein metrics: a canonical formalism for general relativity, *Comm. Math. Phys.* **51** (1976) 163–182; J. Sniatcki, On the canonical formulation of general relativity. In *Proc. Journées Relativistes* (Caen: Faculté des Sciences, 1970); J. Novotny, On the geometric foundations of the Lagrange formulation of general relativity. In *Differential Geometry*, ed. G. Soos and J. Szenthe (Amsterdam: North-Holland, 1982).

[141] A. Peres, *Nuovo Cimento* **26** (1962) 53; U. Gerlach, *Phys. Rev.* **177** (1969) 1929. K. Kuchar, *J. Math. Phys.* **13** (1972) 758; P. Horava, On a covariant Hamilton–Jacobi framework for the Einstein–Maxwell theory, *Class. and Quantum Grav.* **8** (1991) 2069; E.T. Newman and C. Rovelli, Generalized lines of force as the gauge invariant degrees of freedom for general relativity and Yang–

Mills theory *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 1300; J. Kijowski and G. Magli, Unconstrained Hamiltonian formulation of General Relativity with thermo-elastic sources, *Class. and Quantum Grav.* **15** (1998) 3891–3916.

第 5 章：量子力学

[142] E. Schrödinger, Quantisierung als Eigenwertproblem, *Ann. der Phys.* **79** (1926) 489, Part 2, English translation in *Collected Papers on Quantum Mechanics* (Chelsea Publications, 1982).

[143] E. Schrödinger, Quantisierung als Eigenwertproblem, *Ann. der Phys.* **79** (1926) 361, Part 1, English translation, op cit.

[144] M. Reisenberger and C. Rovelli, Spacetime states and covariant quantum theory, *Phys. Rev.* **D65** (2002) 124013, gr-qc/0111016; D. Marolf and C. Rovelli, Relativistic quantum measurement, *Phys. Rev.* **D66** (2002) 023510, gr-qc/0203056.

[145] F. Conrady, L. Doplicher, R. Oeckl, C. Rovelli and M. Testa, Minkowski vacuum from background independent quantum gravity, *Phys. Rev.* **D164** (2004) 064019, gr-qc/0307118.

[146] F. Conrady and C. Rovelli, Generalized Schrödinger equation in Euclidean quantum field theory, *Int. J. Mod. Phys., in press*, hep-th/0310246.

[147] M. Montesinos, The double role of Einstein's equations: as equations of motion and as vanishing energy-momentum tensor, gr-qc/0311001.

[148] P.A.M. Dirac, *Principles of Quantum Mechanics*, 1st edition (Oxford: Oxford University Press, 1930).

[149] C. Rovelli, Is there incompatibility between the ways time is treated in general relativity and in standard quantum mechanics? In *Conceptual Problems of Quantum Gravity*, ed. A. Ashtekar and J. Stachel (New York: Birkhauser, 1991).

[150] J. Halliwell, The Wheeler–deWitt equation and the path integral in mini-superspace quantum cosmology. In *Conceptual Problems of Quantum Gravity*, A. Ashtekar and J. Stachel (New York: Birkhauser, 1991).

[151] C. Rovelli, Quantum mechanics without time: a model, *Phys. Rev.* **D42** (1991) 2638.

[152] C. Rovelli, Quantum evolving constants, *Phys. Rev.* **D44** (1991) 1339.

[153] R. Oeckl, A 'general boundary' formulation for quantum mechanics and quantum gravity, hep-th/0306025; Schroedinger's cat and the clock: lessons for quantum gravity, gr-qc/0306007.

[154] L. Doplicher, Generalized Tomonaga–Schrödinger equation, from the Hadamard formula, gr-qc/0405006

[155] S. Tomonaga, *Prog. Theor. Phys.* **1** (1946) 27; J. Schwinger, Quantum electrodynamics. I: A covariant formulation, *Phys. Rev.* **74** (1948) 1439.

[156] N.C. Tsamis and R.P. Woodard, Physical Green's functions in quantum gravity, *Annals of Phys.* **215** (1992) 96.

[157] J.B. Hartle and S.W. Hawking, Wave function of the Universe, *Phys. Rev.* **D28** (1983) 2960.

[158] D. Marolf, Group averaging and refined algebraic quantization: where are we? In *Proceedings of the IXth Marcel Grossmann Conference, Rome, Italy, July 2–9, 2000*, ed. R.T. Jantzen, G.M. Keiser

and R. Ruffini (World Scientific, 1996), gr-qc/0011112.

[159] C. Rovelli, Relational quantum mechanics, *Int. J. Theor. Phys.* **35** (1996) 1637–1678.

[160] C. Rovelli, Incerto tempore, incertisque loci: Can we compute the exact time at which a quantum measurement happens?, *Foundations of Physics*, **28** (1998) 1031–1043.

[161] F. Laudisa, The EPR argument in a relational interpretation of quantum mechanics, *Foundations of Physics Letters*, **14** (2) (2001) 119–132.

[162] A. Grinbaum, Elements of information theoretic derivation of the formalism of quantum theory, *Int. J. Quant. Information* **1** (2003) 1.

[163] F. Laudisa and C. Rovelli, Relational quantum mechanics. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2002 Edition)*, ed. Edward N. Zalta, URL `http://plato.stanford.edu/archives/spr2002/entries/qm-relational/`.

[164] M. Bitbol, Relations et corrélations en Physique Quantique. In *Un Siècle de Quanta*, ed. M. Crozon and Y. Sacquin (Paris: EDP Sciences, 2000).

[165] J. Wheeler, Information, physics, quantum: the search for the links, *Proc. 3rd Int. Symp. Foundations of Quantum Mechanics, Tokyo 1989*, p. 354.

[166] J. Wheeler, It from Bit. In *Sakharov Memorial Lectures on Physics*, Vol. 2, ed. L. Keldysh and V. Feinberg (New York: Nova Science, 1992).

[167] C.U. Fuchs, Quantum foundations in the light of quantum information. In *Proc. NATO Advanced Research Workshop on Decoherence and its Implications in Quantum Computation and Information Transfer*, ed. A. Gonis (New York: Plenum, 2001), quant-ph/0106166,quant-ph/0205039.

[168] D. Finkelstein, *Quantum Relativity* (Berlin: Springer, 1996).

第 6 章：量子空間

[169] L. Freidel and E.R. Livine, Spin networks for non-compact groups, *J. Math. Phys.* **44** (2003) 1322–1356.

[170] C. Rovelli, Loop representation in quantum gravity. In *Conceptual Problems of Quantum Gravity*, ed. A. Ashtekar and J. Stachel (New York: Birkhäuser, 1991).

[171] C. Rovelli and L. Smolin, Spin networks and quantum gravity, *Phys. Rev.* **D52** (1995) 5743–5759, gr-qc/9505006.

[172] J. Lewandowski, E.T. Newman and C. Rovelli, Variations of the parallel propagator and holonomy operator and the Gauss law constraint, *J. Math. Phys.* **34** (1993) 4646.

[173] A. Ashtekar and J. Lewandowski, Quantum theory of geometry. I: Area operators, *Class. and Quantum Grav.* **14** (1997) A55; II: Volume operators, *Adv. Theor. Math. Phys.* **1** (1997) 388–429.

[174] L.H. Kauffman and S.L. Lins, *Temperley-Lieb Recoupling Theory and Invariant of 3-Manifolds* (Princeton: Princeton University Press, 1994).

[175] R. De Pietri and C. Rovelli, Geometry eigenvalues and scalar product from recoupling theory in loop quantum gravity, *Phys. Rev.* **D54** (1996) 2664, gr-qc/9602023; T. Thiemann, Closed formula for the matrix elements of the volume operator in canonical quantum gravity, *J. Math. Phys.* **39** (1998) 3347–3371, gr-qc/9606091.

[176] C. Rovelli and L. Smolin, Knot theory and quantum gravity, *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988) 1155.

[177] C. Rovelli and L. Smolin, Loop space representation for quantum generality, *Nucl. Phys.*, **B331** (1990) 80.

[178] T. Jacobson and L. Smolin, Nonperturbative quantum geometries, *Nucl. Phys.* **B299** (1988) 295.

[179] R. Gambini and A. Trias, *Phys. Rev.* **D22** (1980) 1380; On the geometrical origin of gauge theories, *Phys. Rev.* **D23** (1981) 553; *Nucl. Phys.* **B278** (1986) 436; C. di Bartolo, F. Nori, R. Gambini and A. Trias, Loop space formulation of free electromagnetism, *Nuovo Cimento Lett.* **38** (1983) 497.

[180] B. Brügmann, R. Gambini and J. Pullin, Knot invariants as nondegenerate quantum geometries, *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992) 431; Jones polynomials for intersecting knots as physical states of quantum gravity, *Nucl. Phys.* **B385** (1992) 587; *Gen. Rel. Grav.* **25** (1993) 1; J. Pullin, in *Proc. 5th Mexican School of Particles and Fields*, ed. J. Lucio (Singapore: World Scientific, 1993).

[181] R. Penrose, Theory of quantized directions, unpublished manuscript; Angular momentum: an approach to combinatorial spacetime. In *Quantum Theory and Beyond*, ed. T. Bastin (Cambridge: Cambridge University Press, 1971), pp. 151–180.

[182] L. Smolin, The future of spin networks, gr-qc/9702030.

[183] J.C. Baez, Spin networks in gauge theory, *Adv. Math.* **117** (1996) 253; J.C. Baez, Spin networks in nonperturbative quantum gravity. In *Interface of Knot Theory and Physics*, ed. L. Kauffman (Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1996), gr-qc/9504036.

[184] N. Grott and C. Rovelli, Moduli spaces structure of knots with intersections, *J. Math. Phys.* **37** (1996) 3014.

[185] W. Fairbairn and C. Rovelli, Separable Hilbert space in loop quantum gravity, *J. Math. Phys.*, to appear, gr-qc/0403047.

[186] J. Zapata, A combinatorial approach to diffeomorphism invariant quantum gauge theories, *J. Math. Phys.* **38** (1997) 5663–5681; A combinatorial space for loop quantum gravity, *Gen. Rel. Grav.* **30** (1998) 1229.

[187] J. Lewandowski, A. Okolow, H. Sahlmann, T. Thiemann, *Comm. Math. Phys.* **267** (2006) 703–733.

[188] C. Fleischhack Representations of the Weyl Algebra in Quantum Geometry, math-ph/0407006.

[189] A. Ashtekar, C. Rovelli and L. Smolin, Weaving a classical metric with quantum threads, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 237, hep-th/9203079.

[190] C. Rovelli, A generally covariant quantum field theory and a prediction on quantum measurements of geometry, *Nucl. Phys.* **B405** (1993) 797.

[191] C. Rovelli and L. Smolin, Discreteness of area and volume in quantum gravity, *Nucl. Phys.* **B442** (1995) 593; Erratum, *Nucl. Phys.* **B456** (1995) 734.

[192] S. Frittelli, L. Lehner and C. Rovelli, The complete spectrum of the area from recoupling theory in loop quantum gravity, *Class. and Quantum Grav.* **13** (1996) 2921.

[193] R. Loll, The volume operator in discretized quantum gravity, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 3048; Spectrum of the volume operator in quantum gravity, *Nucl. Phys.* **B460** (1996) 143–154, gr-qc/9511030.

[194] J. Lewandowski, Volume and quantizations, *Class. and Quantum Grav.* **14** (1997) 71–76.

[195] T. Tsushima, The expectation value of the Gaussian weave state in loop quantum gravity, gr-qc/0212117.

[196] T. Thiemann, A length operator for canonical quantum gravity, *J. Math. Phys.* **39** (1998) 3372–3392, gr-qc/9606092.

[197] A. Ashtekar, A. Corichi and J. Zapata, Quantum theory of geometry. III: Noncommutativity of Riemannian structures, *Class. and Quantum Grav.* **15** (1998) 2955.

[198] S. Major, Operators for quantized directions, *Class. Quant. Grav.* **16** (1999) 3859–3877.

[199] S. Major, A Spin Network Primer, *Am. J. Phys.* **67** (1999) 972–980.

[200] A. Ashtekar and C.J. Isham, Representations of the holonomy algebra of gravity and non-abelian gauge theories, *Class. and Quantum Grav.* **9** (1992) 1433, hep-th/9202053.

[201] A. Ashtekar and J. Lewandowski, Representation theory of analytic holonomy C^*-algebras. In *Knots and Quantum Gravity*, ed. J. Baez (Oxford: Oxford University Press, 1994); Differential geometry on the space of connections via graphs and projective limits, *J. Geom. and Phys.* **17** (1995) 191.

[202] A. Ashtekar, Mathematical problems of non-perturbative quantum general relativity. In *Les Houches Summer School on Gravitation and Quantizations, Les Houches, France, Jul 5–Aug 1, 1992*, ed. J. Zinn-Justin and B. Julia (Amsterdam: North-Holland, 1995), gr-qc/9302024.

[203] J. Baez, Generalized measures in gauge theory, *Lett. Math. Phys.* **31** (1994) 213–223.

[204] A. Ashtekar, J. Lewandowski, D. Marolf, J. Mourao and T. Thiemann, Quantization of diffeomorphism invariant theories of connections with local degrees of freedom, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 6456, gr-qc/9504018.

[205] R. De Pietri, On the relation between the connection and the loop representation of quantum gravity, *Class. and Quantum Grav.* **14** (1997) 53, gr-qc/9605064.

[206] A. Ashtekar, C. Rovelli and L. Smolin, Gravitons and loops, *Phys. Rev.* **D44** (1991) 1740–1755, hep-th/9202054; J. Iwasaki and C. Rovelli, Gravitons as embroidery on the weave, *Int. J. Mod. Phys.* **D1** (1993) 533; Gravitons from loops: non-perturbative loop-space quantum gravity contains the graviton-physics approximation, *Class. and Quantum Grav.* **11** (1994) 1653; M. Varadarajan, Gravitons from a loop representation of linearized gravity, *Phys. Rev.* **D66** (2002) 024017, gr-qc/0204067.

[207] A. Corichi and J.M. Reyes, A Gaussian weave for kinematical loop quantum gravity, *Int. J. Mod. Phys.* **D10**, (2001) 325, gr-qc/0006067.

第 7 章：ダイナミクスと物質

[208] R. Borissov, R. De Pietri and C. Rovelli, Matrix elements of Thiemann's hamiltonian constraint in loop quantum gravity, *Class. and Quantum Grav.* **14** (1997) 2793, gr-qc/9703090.

[209] T. Thiemann, The phoenix project: master constraint programme for loop quantum gravity, gr-qc/0305080.

[210] M. Gaul and C. Rovelli, A generalized hamiltonian constraint operator in loop quantum gravity and its simplest euclidean matrix elements, *Class. and Quantum Grav.* **18** (2001) 1593–1624, gr-qc/0011106.

[211] T. Thiemann, QSD V: Quantum gravity as the natural regulator of the hamiltonian constraint of

matter quantum field theories, *Class. and Quantum Grav.* **15** (1998) 1281–1314, gr-qc/9705019.

[212] S. Alexandrov, $SO(4;C)$-covariant Ashtekar-Barbero gravity and the Immirzi parameter, *Class. and Quantum Grav.* **17** (2000) 4255–4268; S. Alexandrov and E.R. Livine, $SU(2)$ loop quantum gravity seen from covariant theory, *Phys. Rev.* **D67** (2003) 044009, gr-qc/0209105.

[213] S. Alexandrov and D.V. Vassilevich, Area spectrum in Lorentz covariant loop gravity, gr-qc/0103105.

[214] B.S. DeWitt, Quantum theory of gravity. I: the canonical theory, *Phys. Rev.* **160** (1967) 1113.

[215] B. Brügmann, R. Gambini and J. Pullin, Jones polynomials for intersecting knots as physical states of quantum gravity, *Nucl. Phys.* **B385** (1992) 587; Knot invariants as nondegenerate quantum geometries, *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992) 431; C. Di Bartolo, R. Gambini, J. Griego and J. Pullin, Consistent canonical quantization of general relativity in the space of Vassiliev knot invariants, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 2314.

[216] K. Ezawa, Nonperturbative solutions for canonical quantum gravity: an overview, *Phys. Repts.* **286** (1997) 271–348, gr-qc/9601050.

[217] C. Rovelli and L. Smolin, The physical hamiltonian in nonperturbative quantum gravity, *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994) 44.

[218] C. Rovelli, Outline of a general covariant quantum field theory and a quantum theory of gravity, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 6529.

[219] T. Thiemann, Quantum spin dynamics (QSD), *Class. and Quantum Grav.* **15** (1998) 839–73, gr-qc/9606089; QSD II: The kernel of the Wheeler–DeWitt constraint operator, *Class. and Quantum Grav.* **15** (1998) 875–905, gr-qc/9606090; QSD III: Quantum constraint algebra and physical scalar product in quantum general relativity, *Class. and Quantum Grav.* **15** (1998) 1207–1247, gr-qc/9705017; QSD IV: $2+1$ euclidean quantum gravity as a model to test $3+1$ lorentzian quantum gravity, *Class. and Quantum Grav.* **15** (1998) 1249–1280, gr-qc/9705018; QSD VI: Quantum Poincaré algebra and a quantum positivity of energy theorem for canonical quantum gravity, *Class. and Quantum Grav.* **15** (1998) 1463–1485, gr-qc/9705020; QSD VII: Symplectic structures and continuum lattice formulations of gauge field theories, *Class. and Quantum Grav.* **18** (2001) 3293-3338, hep-th/0005232.

[220] L. Smolin, Quantum gravity with a positive cosmological constant, hep- th/0209079; L. Freidel and L. Smolin, The linearization of the Kodama state, hep-th/0310224.

[221] T Thiemann Loop Quantum Gravity: An Inside View, hep-th/0608210.

[222] C. Rovelli and H. Morales-Tecotl, Fermions in quantum gravity, *Phys. Rev. Lett.* **72** (1995) 3642; Loop space representation of quantum fermions and gravity, *Nucl. Phys.* **B451** (1995) 325.

[223] J. Baez and K. Krasnov, Quantization of diffeomorphism-invariant theories with fermions, *J. Math. Phys.* **39** (1998) 1251–1271, hep-th/9703112.

[224] T. Thiemann, Kinematical Hilbert spaces for fermionic and Higgs quantum field theories, *Class. and Quantum Grav.* **15** (1998) 1487–1512, gr-qc/9705021

[225] M. Montesinos and C. Rovelli, The fermionic contribution to the spectrum of the area operator in nonperturbative quantum gravity, *Class, and Quantum Grav.* **15** (1998) 3795–3801.

[226] S. O. Bilson-Thompson, F. Markopoulou, L. Smolin, hep-th/0603022.

[227] A. Alekseev, A.P. Polychronakos and M. Smedback, On area and entropy of a black hole, *Phys. Lett.* **B574** (2003) 296; A.P. Polychronakos, Area spectrum and quasinormal modes of black holes, hep-th/0304135.

[228] S. Major and L. Smolin, Quantum deformations of quantum gravity, *Nucl. Phys.* **B473** (1996) 267–290, gr-qc/9512020; R. Borissov, S. Major and L. Smolin, The geometry of quantum spin networks, *Class. and Quantum Grav.* **13** (1996) 3183–3196.

[229] L.H. Kauffman, Map coloring, q-deformed spin networks and Turaev–Viro invariants for three manifolds, *Int. J. Mod. Phys.* **B6** (1992) 1765–1794; Erratum, **B6** (1992) 3249.

[230] N. Reshetikhin and V. Turaev, Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups, *Comm. Math. Phys.* **127** (1990) 1–26.

[231] K. Noui and Ph. Roche, Cosmological deformation of Lorentzian spin foam models, *Class. and Quantum Grav.* **20** (2003) 3175–3214, gr-qc/0211109.

第 8 章：応用

[232] M. Bojowald and H.A. Morales-Tecotl, Cosmological applications of loop quantum gravity, to appear in *Proc. 5th Mexican School (DGFM), The Early Universe and Observational Cosmology*, gr-qc/0306008.

[233] M. Domagala, L. Lewandowski, Black-hole entropy from quantum geometry, *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) 52335243.

[234] K. A. Meissner, Black-hole entropy in loop quantum gravity, *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) 52455252.

[235] A. Ashtekar, An Introduction to Loop Quantum Gravity Through Cosmology. gr-qc/0702030.

[236] L. Modesto, Disappearance of Black Hole Singularity in Quantum Gravity, *Phys. Rev.* **D70** (2004) 124009.

[237] A. Ashtekar and M. Bojowald, Quantum geometry and Schwarzschild singularity, *Class. Quant. Grav.* **23** (2006) 391–411.

[238] A. Ashtekar, J. Baez, A. Corichi and K. Krasnov, Quantum geometry and black hole entropy, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 904, gr-qc/9710007; A. Ashtekar, J.C. Baez and K. Krasnov, Quantum geometry of isolated horizons and black hole entropy, *Adv. Theor. Math. Phys.* **4** (2001) 1–94, gr-qc/0005126.

[239] C. Rovelli, Black hole entropy from loop quantum gravity, *Phys. Rev. Lett.* **14** (1996) 3288; Loop quantum gravity and black hole physics, *Helv. Phys. Acta.* **69** (1996) 583.

[240] G.H. Hardy and S. Ramanujan, *Proc. London Math. Soc.* **2** (1918) 75.

[241] G. Amelino-Camelia, Are we at dawn with quantum gravity phenomenology? *Lectures given at 35th Winter School of Theoretical Physics: From Cosmology to Quantum Gravity, Polanica, Poland, 2–12 Feb, 1999, Lecture Notes in Physics* **541** (2000) 1–49, gr-qc/9910089.

[242] C. Rovelli and S. Speziale, Reconcile Planck-scale discreteness and the Lorentz–Fitzgerald contraction, *Phys. Rev.* **D67** (2003) 064019.

[243] M. Bojowald, Absence of singularity in loop quantum cosmology, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 5227–

5230, gr-qc/0102069.

[244] M. Bojowald, Inflation from quantum geometry, *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 261301, gr-qc/0206054.

[245] S.W. Hawking, Black holes in general relativity, *Comm. Math. Phys.* **25** (1972) 152.

[246] J.M. Bardeen, B. Carter and S.W. Hawking, The four laws of black hole mechanics, *Comm. Math. Phys.* **31** (1973) 161.

[247] J.D. Bekenstein, Black holes and the second law, *Nuovo Cimento Lett.* **4** (1972) 737–740; Black holes and entropy, *Phys. Rev.* **D7** (1973) 2333–2346; Generalized second law for thermodynamics in black hole physics, *Phys. Rev.* **D9** (1974) 3292–3300.

[248] S.W. Hawking, Black hole explosions, *Nature* **248** (1974) 30; Particle creation by black holes, *Comm. Math. Phys.* **43** (1975) 199.

[249] K. Krasnov, Geometrical entropy from loop quantum gravity, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 3505; On statistical mechanics of gravitational systems, *Gen. Rel. Grav.* **30** (1998) 53–68, gr-qc/9605047; On statistical mechanics of a Schwarzschild black hole, *Gen. Rel. Grav.* **30** (1998) 53.

[250] J.W. York, Dynamical origin of black hole radiance, *Phys. Rev.* **D28** (1983) 2929.

[251] G. 't Hooft, Horizon operator approach to black hole quantization, gr-qc/ 9402037; L. Susskind, Some speculations about black hole entropy in string theory, hep-th/9309145; L. Susskind, L. Thorlacius and J. Uglum, *Phys. Rev.* **D48** (1993) 3743; C. Teitelboim, Statistical thermodynamics of a black hole in terms of surface fields, *Phys. Rev.* **D53** (1996) 2870–2873; A. Buonanno, M. Gattobigio, M. Maggiore, L. Pilo and C. Ungarelli, Effective Lagrangian for quantum black holes, *Nucl. Phys.* **B451** (1995) 677.

[252] A. Ashtekar, C. Beetle, O. Dreyer *et al.*, Isolated horizons and their applications, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 3564–3567, gr-qc/0006006; A. Ashtekar, Classical and quantum physics of isolated horizons, *Lect. Notes Phys.* **541** (2000) 50–70

[253] L. Smolin, Linking topological quantum field theory and nonperturbative quantum gravity, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 6417–6455.

[254] A.P. Balachandran, L. Chandar and A. Momen, Edge in gravity and black hole physics, *Nucl. Phys.* **B461** (1996) 581–596; A. Momen, Edge dynamics for BF theories and gravity, *Phys. Lett.* **394** (1997) 269–274; S. Carlip, Black hole entropy from conformal field theory in any dimension, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 2828–2831.

[255] S. Hod, Bohr's correspondence principle and the area spectrum of quantum black holes, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 4293; *Gen. Rel. Grav.* **31** (1999) 1639; Kerr black hole quasinormal frequencies, *Phys. Rev.* **D67** (2003) 081501.

[256] O. Dreyer, Quasinormal modes, the area spectrum, and black hole entropy, *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003) 081301.

[257] A. Corichi, On quasinormal modes, black hole entropy, and quantum geometry, *Phys. Rev.* **D67** (2003) 087502, gr-qc/0212126.

[258] J.D. Bekenstein and V.F. Mukhanov, Spectroscopy of the quantum black hole, *Phys. Lett.* **B360** (1995) 7–12.

[259] L. Smolin, Macroscopic deviations from Hawking radiation? In *Matters of Gravity* **7**, gr-qc/9602001.

[260] M. Barreira, M. Carfora and C. Rovelli, Physics with loop quantum gravity: radiation from quantum black hole, *Gen. Rel. Grav.* **28** (1996) 1293.

[261] R. Gambini and J. Pullin, Nonstandard optics from quantum spacetime, *Phys. Rev.* **D59** (1999) 124021, gr-qc/9809038; Quantum gravity experimental physics?, *Gen. Rel. Grav.* **31** (1999) 1631–1637.

[262] J. Alfaro, H.A. Morales-Tecotl and L.F. Urrutia, Quantum gravity corrections to neutrino propagation, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 2318–2321, gr-qc/9909079; Loop quantum gravity and light propagation, *Phys. Rev.* **D65** (2002) 103509, hep-th/0108061.

[263] C. Kozameh and F. Parisi, Lorentz invariance and the semiclassical approximation of loop quantum gravity, gr-qc/0310014.

[264] J. Collins, A. Perez, D. Sudarsky, L. Urrutia, H. Vucetich, Lorentz invariance: An Additional fine tuning problem. *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 191301.

[265] G. Amelino-Camelia, J. Ellis, N.E. Mavromatos, D.V. Nanopoulos and S. Sarkar, Potential sensitivity of gamma-ray buster observations to wave disperion in vacuo, *Nature* **393** (1998) 763, astro-ph/9712103; G. Amelino- Camelia, An interferometric gravitational wave detector as a quantum gravity apparatus, *Nature* **398** (1999) 216.

[266] J. Ellis, J. Hagelin, D. Nanopoulos and M. Srednicki, Search for violations of quantum mechanics, *Nucl. Phys.* **B241** (1984) 381; J. Ellis, N.E. Mavromatos and D.V. Nanopoulos, Testing quantum mechanics in the neutral kaon system, *Phys. Lett.* **B293** (1992) 142; I.C. Percival and W.T. Strunz, Detection of space-time fluctuations by a model matter interferometer, quant-ph/9607011; G. Amelino-Camelia, J. Ellis, N.E. Mavromatos and D.V. Nanopoulos, Distance measurement and wave dispersion in a Liouville string approach to quantum gravity, *Int. J. Mod. Phys.* **A12** (1997) 607.

第 9 章：スピン・フォーム

[267] J. Barrett, Quantum gravity as topological quantum field theory, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 6161–6179, gr-qc/9506070.

[268] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Reading: Addison Wesley, 1995).

[269] J.W. Barrett and L. Crane, Relativistic spin networks and quantum gravity, *J. Math. Phys.* **39** (1998) 3296–3302.

[270] M. Bojowald and A. Perez, Spin foam quantization and anomalies, gr-qc/0303026.

[271] J.C. Baez, J.D. Christensen, T.R. Halford and D.C. Tsang, Spin foam models of riemannian quantum gravity, *Class. and Quantum Grav.* **19** (2002) 4627–4648, gr-qc/0202017.

[272] G. Roepstorff, *Path Integral Approach to Quantum Physics: An Introduction* (Berlin: Springer-Verlag, 1994).

[273] A.S. Wightman, Quantum field theory in terms of vacuum expectation values, *Phys. Rev.* **101** (1956) 860; R.F. Streater and A.S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and All That*, Mathematical Physics Monograph Series (Reading MA: Benjamin-Cummings, 1964); K. Osterwalder and R.

Schrader, Axioms for euclidean Green's functions, *Comm. Math. Phys.* **31** (1973) 83; Axioms for euclidean Green's functions: 2, **42** (1975) 281.

[274] A. Perez and C. Rovelli, Observables in quantum gravity, gr-qc/0104034.

[275] A. Ashtekar, D. Marolf, J. Mourao and T. Thiemann, Constructing Hamiltonian quantum theories from path integrals in a diffeomorphism invariant context, *Class. and Quantum Grav.* **17** (2000) 4919–4940, quant-ph/9904094.

[276] J. Baez, Strings, loops, knots and gauge fields. In *Knots and Quantum Gravity*, ed. J. Baez (Oxford: Oxford University Press, 1994).

[277] J. Iwasaki, A reformulation of the Ponzano–Regge quantum gravity model in terms of surfaces, gr-qc/9410010; A definition of the Ponzano–Regge quantum gravity model in terms of surfaces, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 6288.

[278] M. Reisenberger, Worldsheet formulations of gauge theories and gravity, talk given at the *7th Marcel Grossmann Meeting Stanford, July 1994*, gr-qc/9412035; A lattice worldsheet sum for 4-d Euclidean general relativity, gr-qc/9711052.

[279] M. Reisenberger and C. Rovelli, Sum over surfaces form of loop quantum gravity, *Phys. Rev.* **D56** (1997) 3490–3508, gr-qc/9612035.

[280] C. Rovelli, Quantum gravity as a 'sum over surfaces', *Nucl. Phys. (Proc. Suppl.)* **B57** (1997) 28–43.

[281] C. Rovelli, The projector on physical states in loop quantum gravity, *Phys. Rev.* **D59** (1999) 104015, gr-qc/9806121.

[282] F. Markopoulou, Dual formulation of spin network evolution, gr-qc/9704013.

[283] G. Ponzano and T. Regge, Semiclassical limit of Racah coefficients. In *Spectroscopy and Group Theoretical Methods in Physics*, ed. F. Bloch (Amsterdam: North-Holland, 1968).

[284] L. Crane and D. Yetter, On the classical limit of the balanced state sum, gr-qc/9712087; J.W. Barrett, The classical evaluation of relativistic spin networks, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 593–600; J.W. Barrett and R.M. Williams, The asymptotics of an amplitude for the 4-simplex, *Adv. Theor. Math. Phys.* **3** (1999) 209–214; L. Freidel and K. Krasnov, Simple spin networks as Feynman graphs, *J. Math. Phys.* **41** (2000) 1681–1690.

[285] T. Regge, General relativity without coordinates, *Nuovo Cimento* **19** (1961) 558–571.

[286] V.G. Turaev and O.Y. Viro, State sum invariants of 3-manifolds and quantum $6j$ symbols, *Topology* **31** (1992) 865; V.G. Turaev, *Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds* (New York: de Gruyter, 1994).

[287] D. V. Boulatov, A model of three-dimensional lattice gravity, *Mod. Phys. Lett.* **A7** (1992) 1629–1648.

[288] E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi and J. Zuber, *Comm. Math. Phys.* **59** (1978) 35; F. David, *Nucl. Phys.* **B257** (1985) 45; J. Ambjorn, B. Durhuus and J. Frölich, *Nucl. Phys.* bf B257 (1985) 433; V.A. Kazakov, I.K. Kostov and A.A. Migdal, *Phys. Lett.* **157** (1985) 295; D.V. Boulatov, V.A. Kazakov, I.K. Kostov and A.A. Migdal, *Nucl. Phys.* **B275** (1986) 641; M. Douglas and S. Shenker, *Nucl. Phys.* **B335** (1990) 635; D. Gross and A.A. Migdal, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 635; E. Brezin and V.A. Kazakov, *Phys. Lett.* **B236** (1990) 144; O. Alvarez, E. Marinari and P. Windey, *Random Surfaces and Quantum Gravity* (New York: Plenum Press, 1991).

[289] H. Ooguri, Topological lattice models in four dimensions, *Mod. Phys. Lett.* **A7** (1992) 2799.

[290] V.G. Turaev, *Quantum Invariants of Knots and 3-manifolds* (New York: de Gruyter, 1994).

[291] A.S. Schwartz, The partition function of degenerate quadratic functionals and Ray–Singer invariants, *Lett. Math. Phys.* **2** (1978) 247–252; G. Horowitz, Exactly soluble diffeomorphism-invariant theories, *Comm. Math. Phys.* **125** (1989) 417–437; D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski and G. Thompson, Topological field theories, *Phys. Rep.* **209** (1991) 129–340.

[292] L. Crane and D. Yetter, A categorical construction of 4-D topological quantum field theories. In *Quantum Topology*, ed. L. Kauffman and R. Baadhio (Singapore: World Scientific, 1993), pp. 120–130, hep-th/9301062; L. Crane, L. Kauffman and D. Yetter, State-sum invariants of 4-manifolds I, *J. Knot. Theor. Ramifications.* **6** (1997) 177–234, hep-th/9409167; J.D. Roberts, Skein theory and the Turaev–Viro invariants, *Topology* **34** (1995) 771–787.

[293] C. Rovelli, Basis of the Ponzano–Regge–Turaev–Viro–Ooguri quantum gravity model is the loop representation basis, *Phys. Rev.* **D48** (1993) 2702.

[294] R. De Pietri and L. Freidel, $SO(4)$ Plebanski action and relativistic state sum models, *Class. and Quantum Grav.* **16** (1999) 2187–2196, gr-qc/9804071.

[295] M. Reisenberger, Classical Euclidean GR from left-handed area = right-handed area, *Class. and Quantum Grav.* **16** (1999) 1357-1371, gr-qc/9804061; On relativistic spin network vertices, *J. Math. Phys.* **40** (1999) 2046–2054, gr-qc/9711052.

[296] A. Perez, Spin foam quantization of Plebanski's action, *Adv. Theor. Math. Phys.* **5** (2002) 947-968, gr-qc/0203058.

[297] A. Barbieri, Quantum tetrahedron and spin networks, *Nucl. Phys.* **B518** (1998) 714–728.

[298] J. Baez and J. Barrett, The quantum tetrahedron in 3 and 4d, *Adv. Theor. Math. Phys.* **3** (1999) 815, gr-qc/9903060.

[299] J. Baez, Spin foam models, *Class. and Quantum Grav.* **15** (1998) 1827–1858, gr-qc/9709052.

[300] R. De Pietri, L. Freidel, K. Krasnov and C. Rovelli, Barrett–Crane model from a Boulatov–Ooguri field theory over a homogeneous space, *Nucl. Phys.* **B574** (2000) 785–806, hep-th/9907154.

[301] A. Perez and C. Rovelli, A spinfoam model without bubble divergences, *Nucl. Phys.* **B599** (2001) 255–282.

[302] D. Oriti and R.M. Williams, Gluing 4-simplices: a derivation of the Barrett–Crane spinfoam model for Euclidean quantum gravity, *Phys. Rev.* **D63** (2001) 024022.

[303] M. Reisenberger and C. Rovelli, Spinfoam models as Feynman diagrams, gr-qc/0002083; Spacetime as a Feynman diagram: the connection formulation, *Class. and Quantum Grav.* **18** (2001) 121–140, gr-qc/0002095.

[304] A. Mikovic, Quantum field theory of spin networks, gr-qc/0102110.

[305] A. Perez, Finiteness of a spinfoam model for euclidean GR, *Nucl. Phys.* **B599** (2001) 427–434.

[306] L. Freidel, Group field theory: An Overview. *Int. J. Theor. Phys.* **44** (2005) 1769–1783.

[307] D. Oriti, The group field theory approach to quantum gravity, gr-qc/0607032.

[308] L. Freidel, E.R. Levine, 3d Quantum Gravity and Effective Non-Commutative Quantum Field Theory, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 221301.

[309] L. Freidel, and D. Louapre, Nonperturbative summation over 3d discrete topologies, hep-

th/0211026.

[310] L. Freidel, A Ponzano–Regge model of lorentzian 3-dimensional gravity, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **88** (2000) 237–240, gr-qc/0102098.

[311] J.W. Barrett and L. Crane, A lorentzian signature model for quantum general relativity, *Class. and Quantum Grav.* **17** (2000) 3101–3118, gr-qc/9904025.

[312] A. Perez and C. Rovelli, Spin foam model for lorentzian general relativity, *Phys. Rev.* **D63** (2001) 041501, gr-qc/0009021.

[313] L. Crane, A. Perez and C. Rovelli, Perturbative finiteness in spin foam quantum gravity, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 181301; A finiteness proof for the lorentzian state sum spin foam model for quantum general relativity, gr-qc/0104057.

[314] A. Perez and C. Rovelli, $3+1$ spin foam model of quantum gravity with spacelike and timelike components, *Phys. Rev.* **D64** (2001) 064002, gr-qc/0011037.

[315] L. Freidel, E.R. Livine and C. Rovelli, Spectra of length and area in $2+1$ lorentzian loop quantum gravity, *Class. and Quantum Grav.* **20** (2003) 1463–1478, gr-qc/0212077.

[316] L. Freidel and K. Krasnov, Spin foam models and the classical action principle, *Adv. Theor. Phys.* **2** (1998), 1221–1285, hep-th/9807092.

[317] J. Ambjorn, J. Jurkiewicz and R. Loll, Lorentzian and euclidean quantum gravity: analytical and numerical results, hep-th/0001124; A non-perturbative lorentzian path integral for gravity, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 924, hep-th/0002050; J. Ambjorn, A. Dasgupta, J. Jurkiewicz and R. Loll, A lorentzian cure for euclidean troubles, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **106** (2002) 977–979, hep-th/0201104; R. Loll and A. Dasgupta, A proper time cure for the conformal sickness in quantum gravity, *Nucl. Phys.* **B606** (2001) 357–379, hep-th/0103186.

[318] E.R. Livine and D. Oriti, Implementing causality in the spin foam quantum geometry, *Nucl. Phys.* **B663** (2003) 231–279, gr-qc/0210064.

[319] M. Arnsdorf, Relating covariant and canonical approaches to triangulated models of quantum gravity, *Class. and Quantum Grav.* **19** (2002) 1065–1092, gr-qc/0110026.

[320] E.R. Livine, Projected spin networks for lorentz connection: linking spin foams and loop gravity, *Class. and Quantum Grav.* **19** (2002) 5525–5542, gr-qc/0207084.

[321] K. Noui, A. Perez, Three-dimensional loop quantum gravity: Physical scalar product and spin foam models. *Class. Quant. Grav.* **22** (2005) 1739–1762.

[322] R. Capovilla, M. Montesinos, V.A. Prieto and E. Rojas, BF gravity and the Immirzi parameter, *Class. and Quantum Grav.* **18** (2001) L49–L52.

[323] T. Thiemann and O. Winkler, Coherent states for canonical quantum general relativity and the infinite tensor product extension, *Nucl. Phys.* **B606**(2001) 401–440, gr-qc/0102038.

[324] F. Markopoulou, An insider's guide to quantum causal histories, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **88** (2000) 308–313, hep-th/9912137.

[325] A. Mikovic, Spin foam models of matter coupled to gravity, *Class. and Quantum Grav.* **19** (2002) 2335; Spinfoam models of Yang–Mills theory coupled to gravity, *Class. and Quantum Grav.* **20** (2003) 239–246.

[326] D. Oriti and H. Pfeiffer, A spin foam model for pure gauge theory coupled to quantum gravity,

Phys. Rev. **D66** (2002) 124010.

[327] N.J. Vilenkin, *Special Functions and the Theory of Group Representations* (Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1968).

[328] W. Ruhl, *The Lorentz Group and Harmonic Analysis* (New York: WA Benjamin Inc., 1970).

[329] L. Modesto, C. Rovelli, Particle scattering in loop quantum gravity, *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 191301.

[330] C. Rovelli, Graviton propagator from background-independent quantum gravity, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 151301 (2006) E. Bianchi, L. Modesto, C. Rovelli and S. Speziale, Graviton propagator in loop quantum gravity, *Class. Quant. Grav.* **23**, 6989 (2006).

[331] S. Speziale, Towards the graviton from spinfoams: The 3-D toy model. *JHEP* (2006) 0605:039. E.R. Livine, S. Speziale, J.L. Willis, Towards the graviton from spinfoams: Higher order corrections in the 3-D toy model. *Phys. Rev.* **D75** (2007) 024038. E.R. Livine, S. Speziale, Group Integral Techniques for the Spinfoam Graviton Propagator, gr-qc/0608131.

第 10 章：結論，および付録

[332] G. Galilei, *Dialogo dei massimi system* (Firenze, 1632).

[333] D.M. Brink and G.R. Satchler, *Angular Momentum* (Oxford: Clarendon Press, 1968).

[334] R. Penrose, In *Combinatorial Mathematics and its Application*, ed. D. Welsh (New York: Academic Press, 1971).

[335] L.H. Kauffman, *Int. J. Mod. Phys.* **A5** (1990) 93.

[336] L.H. Kauffman, In *Knots, Topology and Quantum Field Theories*, ed. L. Lusanna (Singapore: World Scientific, 1991).

[337] J.P. Moussoris, in *Advances in Twistor Theory, Research Notes in Mathematics*, ed. J.P. Huston and R.S. Ward (Boston: Pitman, 1979), pp. 308–312.

[338] I. Levinson, *Liet. TSR Mokslu. Acad. Darbai B Ser.* **2** (1956) 17.

[339] A.P. Yutsin, J.B. Levinson and V.V. Vanagas, *Mathematical Apparatus of the Theory of Angular Momentum* (Jerusalem: Israel Program for Scientific Translation, 1962).

[340] A. Einstein, Naeherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation, *Preussische Akademie der Wissenschaften (Berlin) Sitzungsberichte* (1916), p. 688.

[341] O. Klein, Zur Fünfdimensionalen Darstellung der Relativitaetstheorie, *Z. für Physik* **46** (1927) 188.

[342] L. Rosenfeld, Zur Quantelung der Wellenfelder, *Ann. der Physik* **5** (1930) 113; Über die Gravitationswirkungen des Lichtes, *Z. für Physik* **65** (1930) 589.

[343] M. Fierz, *Hel. Physica Acta.* **12** (1939) 3; W. Pauli and M. Fierz, On relativistic field equations of particles with arbitrary spin in an electromagnetic field, *Hel. Physica Acta* **12** (1939) 297.

[344] D.I. Blokhintsev and F.M. Gal'perin, *Pod Znamenem Marxisma* **6** (1934) 147.

[345] W. Heisenberg, *Z. für Physik* **110** (1938) 251.

[346] J. Stachel, Early history of quantum gravity (1916–1940), Presented at the *HGR5, Notre Dame, July 1999*; Early history of quantum gravity. In *Black Holes, Gravitational Radiation and the Universe*, ed. B.R. Iyer and B. Bhawal (Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1999).

[347] M.P. Bronstein, Quantentheories schwacher Gravitationsfelder, *Physikalische Z. der Sowietunion* **9** (1936) 140.

[348] G.E. Gorelik, First steps of quantum gravity and the planck values. In *Studies in the History of General Relativity. [Einstein Studies, Vol. 3]*, ed. J. Eisenstaedt and A.J. Kox (Boston: Birkhäuser, 1992), pp. 364–379; G.E. Gorelik and V.Y. Frenkel, *Matvei Petrovic Bronstein and the Soviet Theoretical Physics in the Thirties* (Boston: Birkhäuser-Verlag, 1994).

[349] P.G. Bergmann, Non-linear field theories, *Phys. Rev.* **75** (1949) 680; Non-linear field theories II: canonical equations and quantization, *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949).

[350] P.G. Bergmann, *Nuovo Cimento* **3** (1956) 1177.

[351] E.T. Newman and P.G. Bergmann, Observables in singular theories by systematic approximation, *Rev. Mod. Phys.* **29** (1957) 443.

[352] S. Gupta, *Proc. Phys. Soc.* **A65** (1952) 608.

[353] C. Misner, Feynman quantization of general relativity, *Rev. Mod. Phys.* **29** (1957) 497.

[354] P. Bergmann, The canonical formulation of general relativistic theories: the early years, 1930–1959. In *Einstein and the History of General Relativity*, ed. D. Howard and J. Stachel (Boston: Birkhäuser, 1989).

[355] R. Feynman, Quantum theory of gravitation, *Acta Physica Polonica* **24** (1963) 697.

[356] B. DeWitt, In *Conférence Internationale sur les Théories Relativistes de la Gravitation*, ed. Gauthier-Villars (Warsaw: Editions Scientifiques de Pologne, 1964).

[357] P.G. Bergmann and A. Komar, The coordinate group symmetries of general relativity, *Int. J. Theor. Phys.* **5** (1972) 15.

[358] A. Peres, *Nuovo Cimento* **26** (1962) 53.

[359] J.A. Wheeler, Geometrodynamics and the issue of the final state. In *Relativity, Groups and Topology*, ed. C. DeWitt and B.S. DeWitt (New York and London: Gordon and Breach, 1964), p. 316.

[360] B.S. DeWitt, *Phys. Rev. Lett.* **12** (1964) 742; In *Dynamical Theory of Groups and Fields* (New York: Wiley, 1965).

[361] L.D. Faddeev and V.N. Popov, Feynman diagrams for the Yang–Mills field, *Phys. Lett.* **25B** (1967) 30.

[362] M. Veltman, in *Proc. 6th Int. Symp. Electron and Photon Interactions at High Energies*, ed. H. Rollnik and W. Pfeil (Amsterdam: North Holland, 1975).

[363] L.D. Faddeev and V.N. Popov, Perturbation theory for gauge invariant fields, *Kiev Inst. Theor. Phys. Acad. Sci.* 67-036 (Fermilab Publication 72-057-T).

[364] B.S. DeWitt, Quantum theory of gravity. II: The manifestly covariant theory, *Phys. Rev.* **162** (1967) 1195; Quantum theory of gravity. III: Applications of the covariant theory, *Phys. Rev.* **162** (1967) 1239.

[365] R. Penrose, Twistor theory, *J. Math. Phys.* **8** (1967) 345.

[366] C. Misner, Quantum cosmology, *Phys. Rev.* **186** (1969) 1319.

[367] B. Zumino, Effective lagrangians and broken symmetries. In *Brandeis University Lectures On Elementary Particles And Quantum Field Theory, Vol 2*, ed. S. Deser (MIT Press, Cambridge MA, 1971), pp. 437–500.

[368] G. 't Hooft, Renormalizable lagrangians for massive Yang–Mills fields, *Nucl. Phys.* **B35** (1971) 167; G. 't Hooft and M. Veltman, Regularization and renormalization of gauge fields, *Nucl. Phys.* **B44** (1972) 189.

[369] D. Finkelstein, Space-time code, *Phys. Rev.* **184** (1969) 1261–1279.

[370] G. t'Hooft, An algorithm for the poles at dimension four in the dimensional regularization, *Nucl. Phys.* **B62** (1973) 444; G. t'Hooft and M. Veltman, One-loop divergencies in the theory of gravitation, *Ann. Inst. Poincaré* **20** (1974) 69; S. Deser and P. Van Nieuwenhuizen, One loop divergences of the quantized Einstein–Maxwell fields, *Phys. Rev.* **D10** (1974) 401; Non-renormalizability of the quantized Dirac–Einstein system, *Phys. Rev.* **D10** (1974) 411.

[371] W.G. Unruh, Notes on black hole evaporation, *Phys. Rev.* **D14** (1976) 870.

[372] G. Parisi, The theory of non-renormalizable interactions. 1: the large-N expansion, *Nucl. Phys.* **B100** (1975) 368.

[373] S. Ferrara, P. van Nieuwenhuizen and D.Z. Freedman, Progress toward a theory of supergravity, *Phys. Rev.* **D13** (1976) 3214; S. Deser and P. Zumino, Consistent supergravity, *Phys. Lett.* **B62** (1976) 335. For a review, see P. van Nieuwenhuizen, Supergravity, *Physics Reports* **68** (1981) 189.

[374] L. Brink, P. Di Vecchia and P. Howe, A locally supersymmetric and reparameterization-invariant action for the spinning string, *Phys. Lett.* **B65** (1976) 471–474; S. Deser and B. Zumino, A complete action for the spinning string, *Phys. Lett.* **B65** (1976) 369.

[375] K.S. Stelle, Renormalization of higher derivatives quantum gravity, *Phys. Rev.* **D16** (1977) 953.

[376] J.B. Hartle and S.W. Hawking, Path integral derivation of the black hole radiance, *Phys. Rev.* **D13** (1976) 2188.

[377] A.M. Polyakov, Quantum geometry of the bosonic string, *Phys. Lett.* **103B** (1981) 207; Quantum geometry of the fermionic string, *Phys. Lett.* **103B** (1981) 211.

[378] G. Horowitz and A. Strominger, in *10th Int. Conf. on General Relativity and Gravitation – Contributed Papers*, ed. B. Bertotti, F. de Felice and A. Pascolini (Padova: Università di Padova, 1983).

[379] C.J. Isham, Quantum logic and the histories approach to quantum theory, *J. Math. Phys.* **35** (1994) 2157, gr-qc/9308006.

[380] R.D. Sorkin, Posets as lattice topologies. In *General Relativity and Gravitation: Proceedings of the GR10 Conference. Volume I*, ed. B. Bertotti, F. de Felice and A. Pascolini, (Rome: Consiglio Nazionale Delle Ricerche, 1983), p. 635.

[381] M.B. Green and J.H. Schwarz, Anomaly cancellation in supersymmetric $d = 10$ gauge theory requires $SO(32)$, *Phys. Lett.* **149B** (1984) 117.

[382] D.J. Gross, J.A. Harvey, E. Martinec and R. Rohm, The heterotic string, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 502–505.

[383] P. Candelas, G.T. Horowitz, A. Strominger and E. Witten, Vacuum configurations for superstrings, *Nucl. Phys.* **B258** (1985) 46.

[384] A.A. Belavin, A.M. Polyakov and A.B. Zamolodchikov, Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory, *Nucl. Phys.* **B241** (1984) 333.

[385] R. Penrose, Gravity and state vector reduction. In *Quantum Concepts in Space and Time*, ed. R.

Penrose and C.J. Isham (Oxford: Clarendon Press, 1986), p. 129.

[386] G.T. Horowitz, J. Lykken, R. Rohm and A. Strominger, A purely cubic action for string field theory, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 283.

[387] K. Fredenhagen and R. Haag, Generally covariant quantum field theory and scaling limits, *Comm. Math. Phys.* **108** (1987) 91.

[388] H. Sato and T. Nakamura, eds., *Marcel Grossmann Meeting on General Relativity* (Singapore: World Scientific, 1992).

[389] E. Witten, Topological quantum field theory, *Comm. Math. Phys.* **117** (1988) 353.

[390] E. Witten, Quantum field theory and the Jones polynomial, *Comm. Math. Phys.* **121** (1989) 351.

[391] M.F. Atiyah, Topological quantum field theories, *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. Paris* **68** (1989) 175; *The Geometry and Physics of Knots*, ed. Accademia Nazionale dei Lincei (Cambridge: Cambridge University Press, 1990).

[392] G.T. Horowitz, Exactly soluble diffeomorphism invariant theories, *Comm. Math. Phys.* **125** (1989) 417.

[393] E. Witten, $(2+1)$-dimensional gravity as an exactly soluble system, *Nucl. Phys.* **B311** (1988) 46.

[394] S. Carlip, Lectures on $(2+1)$-dimensional gravity, (lecture given at the *First Seoul Workshop on Gravity and Cosmology, February 24–25, 1995).*

[395] S. Deser and R. Jackiw, Three-dimensional cosmological gravity: dynamics of constant curvature, *Ann. Phys.* **153** (1984) 405; S. Deser, R. Jackiw and G. 't Hooft, Three-dimensional Einstein gravity: dynamics of flat space, *Ann. Phys.* **152** (1984) 220; A. Achucarro and P.K. Townsend, A Chern–Simon action for three-dimensional antidesitter supergravity theories, *Phys. Lett.* **B180** (1986) 89.

[396] D. Amati, M. Ciafaloni and G. Veneziano, Can spacetime be probed below the string size?, *Phys. Lett.* **B216** (1989) 41.

[397] D. Gross and A. Migdal, Nonperturbative two-dimensional quantum gravity, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 635; M. Douglas and S. Shenker, *Nucl. Phys.* **B335** (1990) 635; E. Brezin and V.A. Kazakov, *Phys. Lett.* **B236** (1990) 144; *Random Surfaces and Quantum Gravity*, ed. O. Alvarez, E. Marinari and P. Windey (New York: Plenum Press, 1991).

[398] C.G. Callan, B.S. Giddings, J.A. Harvey and A. Strominger, Evanescent black holes, *Phys. Rev.* **D45** (1992) 1005.

[399] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, *Gravitation* (San Francisco: Freeman, 1973).

[400] G. 'tHooft, Dimensional reduction in quantum gravity, Utrecht Preprint THU-93/26, gr-qc/9310026; L. Susskind, The world as a hologram, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 6377.

[401] A.H. Chamseddine and A. Connes, Universal formula for noncommutative geometry actions: unification of gravity and the standard model, *Phys. Rev. Lett.* **24** (1996) 4868; The spectral action principle, *Comm. Math. Phys.* **186** (1997) 731.

[402] J. Polchinski, Dirichlet branes and Ramon–Ramon charges, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 4724.

[403] C.M. Hull and P.K. Townsend, Unity of superstring dualities, *Nucl. Phys.* **B438** (1995) 109.

[404] T. Banks, W. Fischler, S.H. Shenker and L. Susskind, M-theory as a matrix model: a conjecture, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 5112.

[405] M.J. Duff, M-Theory (the theory formerly known as strings), *Int. J. Mod. Phys.* **A11** (1996) 5623.

[406] S. Frittelli, C. Kozameh and E.T. Newman, GR via characteristic surfaces, *J. Math. Phys.* **5** (1995) 4984, 5005, 6397; T. Newman, in *On Einstein's Path*, ed. A. Harvey (New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1999).

[407] A. Strominger and G. Vafa, Microscopic origin of the Bekenstein–Hawking entropy, *Phys. Lett.* **B379** (1996) 99; G. Horowitz and A. Strominger, Black strings and p-branes, *Nucl. Phys.* **B360** (1991) 197; J. Maldacena and A. Strominger, Black hole grey body factor and D-brane spectroscopy, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 861; G. Horowitz, Quantum states of black holes. In *Proc. Symp. Black Holes and Relativistic Stars, in Honor of S. Chandrasekhar, December 1996*; gr-qc/9704072.

[408] A. Connes, M.R. Douglas and A. Schwarz, Noncommutative geometry and matrix theory: compactification on tori, *JHEP* **9802** (1998) 003.

[409] J. Ambjorn, M. Carfora and A. Marzuoli, *The Geometry of Dynamical Triangulations, Lecture Notes in Physics*, (Berlin: Springer-Verlag, 1997).

[410] J.M. Maldacena, The large-N limit of superconformal field theories and supergravity, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231; *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 1113; E. Witten, Anti-deSitter space and holography, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 253.

[411] M. Gasperini and G. Veneziano, Pre-Big Bang in string cosmology, *Astropart. Phys.* **1** (1993) 317.

[412] P. Bergmann, in *Conférence Internationale sur les Théories Relativistes de la Gravitation*, ed. Gauthier-Villars (Warsaw: Scientifiques de Pologne, 1964).

[413] P. van Nieuwenhuizen, in *Proc. First Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*, ed. R. Ruffini (Amsterdam: North Holland, 1977).

[414] P. Bergmann, in *Cosmology and Gravitation*, ed. P. Bergmann and V. De Sabbata (New York: Plenum Press, 1980).

本稿独自の参考文献

[415] R. ガムビーニ/J. プリン，2021，初級講座 ループ量子重力 (樺沢宇紀訳)，丸善プラネット株式会社，東京.

[416] C. Rovello and F. Vidotto, 2020, Covariant Loop Quantum Gravity: An elementary introduction to Quantum Gravity and Spinfoam Theory, Cambridge University Press, Cambridge.

[417] エリ・デ・ランダウ，イェ・エム・リフシッツ，2015，ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 場の古典論 (原書第 6 版)(恒藤敏彦，広重徹訳)，東京図書株式会社，東京.

[418] 佐藤光，2019，群と物理，丸善出版株式会社，東京.

[419] B. ツヴィーバッハ，2013，初級講座 弦理論《基礎編》(樺沢宇紀訳)，丸善プラネット株式会社，東京.

[420] 九後汰一郎，2018，新物理学シリーズ 23 ゲージ場の量子論 I，株式会社培風館.

[421] J.J.Sakurai，2017，現代の量子力学 (上)(桜井明夫訳)，株式会社吉岡書店，京都.

[422] 江沢洋，中村孔一，山本義隆，2022，演習詳解 力学 [第 2 版]，株式会社 筑摩書房，東京.

[423] シュッツ，2010，第 2 版シュッツ 相対論入門 (江里口良治，二間瀬敏史訳)，丸善株式会社，東京.

[424] 山本義隆，中村孔一，2013，朝倉物理学大系 1 解析力学 I，株式会社朝倉書店，東京.

[425] エリ・デ・ランダウ，イェ・エム・リフシッツ，2013，ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 力学 (増

訂第 3 版)(広重徹，水戸巌訳)，東京図書株式会社，東京.
[426] F. マンドル，G. ショー，2011，場の量子論 第 1 巻 量子電磁力学 (樺沢宇紀訳)，丸善プラネット株式会社，東京.
[427] M. ストーン，2012，量子場の物理〔新装版〕(樺沢宇紀訳)，丸善プラネット株式会社，東京.
[428] 吉川圭二，2022，理工系の基礎数学 新装版 群と表現，株式会社岩波書店，東京.
[429] H. ジョージァイ，2010，物理学におけるリー代数——アイソスピンから統一理論へ—— (原著第 2 版) (九後汰一郎訳)，株式会社吉岡書店，京都.
[430] 石坂智ほか，2024，量子情報科学入門 第 2 版，共立出版株式会社，東京.
[431] B. ツヴィーバッハ，2018，初級講座 弦理論《発展編》(樺沢宇紀訳)，丸善プラネット株式会社，東京.
[432] Sean M. Carroll, 1997, Lecture Notes on General Relativity.