

佐藤光 『群と物理』

本稿は物理数学としての群論の教科書

佐藤光, 2019, 群と物理, 丸善出版株式会社, 東京

のまとめノートであり, ある程度, 要点と途中計算 (証明) の分離した見通しの良い構成を心掛けた. ただし本稿は教科書全体を概ね網羅しているものの, 節末問題をはじめとして, 内容をいくらか取捨選択してある. (とりわけ第6章と第7章は大幅に省略した. 1つのポイントは数学・一般論に深入りしないことである.) さらに本稿には筆者の誤りや勘違いが潜んでいるかもしれないことをあらかじめ断っておく. 言うまでもなく, 原著を当てるに越したことはない.

なお本稿の他にも理論物理の各種ノートを以下のページで公開している.

<http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/>

## 「まえがき」の簡単なまとめ

- 群論は現代物理学をある程度体系的に学ぶためには不可欠
- 群論の流行 (グルッペン・ベスト)
  - 原子スペクトルの解析, 分子・結晶の電子状態 (1930 年頃)
  - 素粒子とその相互作用 (1960 年頃)標準理論は群論の言葉で書かれている
- 定理の証明などは物理への応用に必要な程度の厳密性に留めている
- 量子力学やゲージ理論において重要な Lie 群と Lie 代数に重点を置いて解説

## 目次

1	物理法則と対称性	2
2	群の基本概念	9
3	リー群とリー代数	22
4	リー代数の表現と分類	44
5	ユニタリ群とその表現	76
6	直交群とその表現	104
7	その他のコンパクト群の表現	114
8	ローレンツ群	115

# 1 物理法則と対称性

## 1.1 物理に現れる対称性

自然界に見られる (幾何学的な) 対称性の例 :

- 雪の結晶 (六角形的な対称性を持つ)
- 水素原子の基底状態における電子の波動関数 (空間的に球対称)

[既に古典論において学んだように,] 一般に物理量の保存法則にはある種の対称性がある。その背後に必ず存在している [量子力学における対称性と保存則の関係は 1.4 節].

例えば質点系の Newton 力学を考えると, 一様な空間並進の下で不変なポテンシャル  $V$  は重心の位置  $\mathbf{R}$  に依らず, 質点の相対位置  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$  のみの関数である (添字  $i, j$  は質点番号). これは外力が  $\mathbf{F} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{R}} = 0$  であり, 内力

$$\mathbf{F}_{ij} = -\frac{\partial V}{\partial(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} = -\mathbf{F}_{ji}$$

が作用・反作用の法則を満たすことを意味するので, このとき全運動量は保存する.

また原点周りの空間回転に対して不変なポテンシャル  $V$  は質点間の距離  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$  のみの関数であり, このとき内力

$$\mathbf{F}_{ij} = -\frac{\partial V}{\partial(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} = -\frac{\partial V}{\partial|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

は中心力となるので, 全角運動量が保存する.

note  $V$  の回転/並進対称性から直接, 角運動量/運動量の保存則を導く議論 (教科書 pp.4-5/節末問題 1.2) は, 文献 [1, p.17, pp.21-22] における解析力学の議論に対応している.

最後に系の時間並進対称性とエネルギー保存則の関係を Newton 力学の水準で見ると,

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \right) = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = - \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} = - \frac{dV}{dt}, \quad \therefore \frac{d}{dt} \left( \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 + V \right) = 0$$

とすれば良い. ここで第 1 式の最後の等号で,  $V$  が時刻  $t$  に陽に依らず質点の位置  $\mathbf{r}_i$  のみの関数であるという仮定を用いた.

## 1.2 対称性と群

物理系にある変換を施しても系の物理的性質が変わらないとき, 系はその変換に関する対称性を持つと言われる.

例えば正六角形をそれ自身に移す操作は合同変換と呼ばれ, その定義により正六角形は合同変換に関して対称である. 合同変換は正六角形の中心  $O$  周りの角度

$$\frac{2\pi}{6} n \quad (n = 1, \dots, 6)$$

の回転  $\theta^n$  [反時計回り] と, 6 本の対称軸に関する鏡映変換  $\{\sigma_i\}$  (図 1 参照) を合わせた, 12 の操作

$$\{e, \theta, \theta^2, \dots, \theta^5, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6\} \quad (1.19)$$

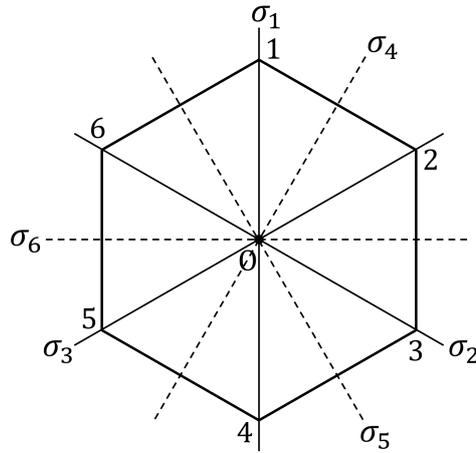


図1 正六角形の鏡映変換  $\sigma_i$  を定義する対称軸  $i = 1, \dots, 6$

表1 note: 例えば  $\sigma_1$  の行,  $\sigma_2$  の列に積  $\sigma_1\sigma_2$  の結果が記されている (群表). これを繰り返し利用すれば  $\theta^2\sigma_1 = \theta(\theta\sigma_1) = \theta\sigma_5 = \sigma_2$  なども分かる.

	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$	$\sigma_5$	$\sigma_6$	$\theta$
$\sigma_1$	$e$	$\theta^4$	$\theta^2$	$\theta$	$\theta^5$	$\theta^3$	$\sigma_4$
$\sigma_2$	$\theta^2$	$e$	$\theta^4$	$\theta^3$	$\theta$	$\theta^5$	$\sigma_5$
$\sigma_3$	$\theta^4$	$\theta^2$	$e$	$\theta^5$	$\theta^3$	$\theta$	$\sigma_6$
$\sigma_4$	$\theta^5$	$\theta^3$	$\theta$	$e$	$\theta^4$	$\theta^2$	$\sigma_3$
$\sigma_5$	$\theta$	$\theta^5$	$\theta^3$	$\theta^2$	$e$	$\theta^4$	$\sigma_1$
$\sigma_6$	$\theta^3$	$\theta$	$\theta^5$	$\theta^4$	$\theta^2$	$e$	$\sigma_2$
$\theta$	$\sigma_5$	$\sigma_6$	$\sigma_4$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\theta^2$

で尽くされる. ここに  $\theta \equiv \theta^1$  であり, また  $\theta^6 = e$  は恒等変換である. 実際, 任意の2つの合同変換を続けて行うことは, 集合 (1.19) の中にある操作を1回行うことと等価である. 例えば回転  $\theta^2$  の後に回転  $\theta^3$  を行うことは, 回転

$$\theta^3\theta^2 = \theta^5$$

と等価である (左辺のように先に行う操作を右側に書くものと約束する). また図2に示すように,

$$\sigma_2\sigma_1 = \theta^2, \quad \sigma_1\sigma_2 = \theta^4, \quad \theta\sigma_1 = \sigma_5$$

であることが読み取れる. ここで非可換性  $\sigma_2\sigma_1 \neq \sigma_1\sigma_2$  に注意しよう. 鏡映を含む2つの合同変換の積を表1に網羅的に示す.

このように対称変換の繰り返しもまた対称変換となる. ここで群の概念が有用となる; 一般に対称性を規定している変換あるいは操作全体の集合は群を成す.

**群の定義** 集合  $G$  の任意の元  $a, b \in G$  に対して定義される積  $ab$  もまた  $G$  の元であり<sup>\*1</sup>, 次の3条件が満た

<sup>\*1</sup> これを  $G$  は積の演算に関して閉じているという.

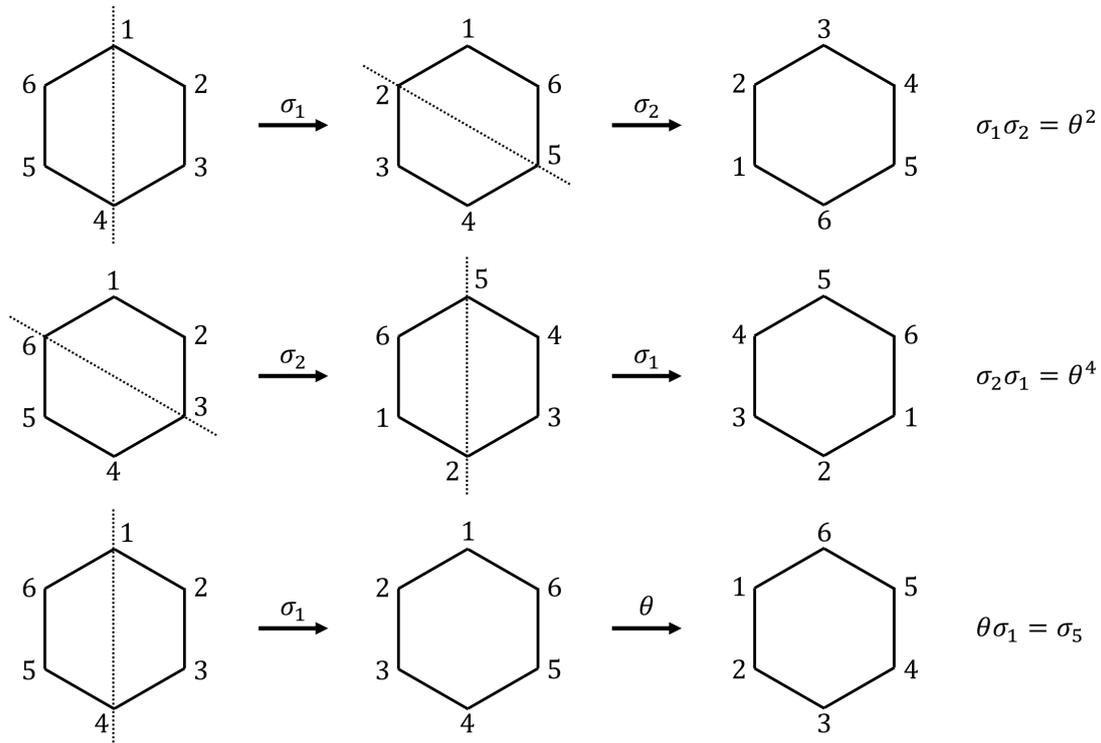


図2 note: 対称軸の番号  $i$  は正六角形ではなく背景の平面に固定されている. また鏡映を2回行くと正六角形の“表裏”が元に戻ることに注意する.

されるとき  $G$  を群 (group) という.

1. 任意の  $a, b, c \in G$  に対して結合律  $(ab)c = a(bc)$  が成り立つ.
2. 任意の  $a \in G$  に対して  $ae = ea = a$  となる単位元  $e \in G$  が存在する.
3. 任意の  $a \in G$  に対して  $aa^{-1} = a^{-1}a = e$  となる逆元  $a^{-1} \in G$  が存在する.

- 群  $G$  の位数 (order) ……  $G$  に含まれる元の個数
- 有限群 …… 位数が有限の群
- 無限群 …… 位数が有限でない群

群  $G$  の部分集合  $H$  もまた群を成すとき,  $H$  を  $G$  の部分群 (subgroup) という\*2.

群  $G$  の部分集合  $H$  が部分群となる必要十分条件は, 以下の式 (1.24) かつ式 (1.25) である.

$$h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 h_2 \in H, \tag{1.24}$$

$$h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H. \tag{1.25}$$

証明  $H$  が  $G$  の部分群であるとき, 群の定義より上式 (1.24-25) が成り立つことは明らかである. 逆に式 (1.24-25) が成り立つとき, 以下のことから  $H$  が群となることが確かめられる.

- 式 (1.24) より  $H$  は積の演算に関して閉じている.
- $H$  の元は  $G$  の元だから, 積の演算に関する結合律を満たす.

\*2 ただし群  $G, H$  を定義する乗法として, 共通の積演算を想定している.

- 式 (1.25) より逆元の存在は保証されている.
- 2 式 (1.24-25) より単位元  $hh^{-1} = e$  が  $H$  に含まれる.

特に元の積が交換律  $ab = ba$  を満たす群を可換群または **Abel** (アーベル) 群という. 例えば整数全体は加法を積演算として可換群 (かつ無限群) を成す. これを加群または加法群という [2, p.9].

群  $G$  の中心 (center) とは,  $G$  の全ての元と可換な  $G$  の元全ての集合である. 中心は常に  $G$  のアーベル不変部分群である. しかしながら, それは単位元のみ [の集合] や群全体といった自明な場合もある [2, p.13].

さて, 正六角形の合同変換の集合 (1.19) は位数 12 の有限群を成す. ただし逆元は

$$(\theta^a)^{-1} = \theta^{6-a}, \quad \sigma_i^{-1} = \sigma_i \quad (a = 1, \dots, 5; i = 1, \dots, 6)$$

である. この群 (1.19) は正六角形の合同変換群と呼ばれ, 回転操作から成る集合

$$\{e, \theta, \theta^2, \dots, \theta^5\}$$

を部分群に持つ.

また空間並進  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$  の全体  $\{\mathbf{a}\}$  は, 平行移動のベクトル  $\mathbf{a}$  の和を積演算とすると, ゼロベクトル  $\mathbf{a} = 0$  を単位元, 逆ベクトル  $-\mathbf{a}$  を逆元として可換群・無限群を成す. これを並進群という. またこのように連続パラメータを元を持つ群を連続群という.

最後に 2 つの群  $G, K$  に対して, 各々の元  $g \in G, k \in K$  の組  $(g, k)$  全体の集合  $G \otimes K$  は, 積の演算

$$(g_1, k_1)(g_2, k_2) = (g_1g_2, k_1k_2)$$

の下で群を作る [ほぼ自明 (節末問題 1.8)]. これを  $G$  と  $K$  の直積群, あるいは単に直積という.

note 節末問題の対称群 (置換群) と巡回群に関しては文献 [2] (のノート) を, 交代群に関しては文献 [3, p.32] を参照.

### 1.3 結晶群

この節は説明が天下一で, 固体物理のトピックへのおおきな言及という印象が強いため, 本稿では簡単に済ませる.

(無限に大きい) 結晶を不変に保つ変換には, 次の 2 つがある.

#### 1. 基本並進ベクトル

$$\mathbf{t} = n_1\mathbf{t}_1 + n_2\mathbf{t}_2 + n_3\mathbf{t}_3 \quad (\mathbf{t}_i \text{ は基本周期ベクトル, } n_i \text{ は整数}) \quad (1.29)$$

による並進

- 並進群を作る
- #### 2. 回転および反転, 鏡映
- 鏡映は回転と反転を組合せて作ることができる
  - 空間の 1 点を不変にする変換であり, 点群を作る

また結晶を不変に保つこれらの変換全体の作る群を空間群という。

結晶の並進対称性は点群に対して強い制約を与え\*3, この下で可能な種類の回転と反転を組合せて得られる群は, 全部で 32 個の「結晶点群」に限定される\*4. これらの点群が表す対称性は

三斜, 単斜, 直方(斜方), 三方, 正方, 六方, 立方

の 7 つの晶系に分類され, 各々に対して

単純格子, 底心格子, 面心格子, 体心格子

の 4 種類の格子を考慮すると, 可能な結晶格子として 14 種類の Bravais (ブラベ) 格子が得られる\*5.

### 1.3 節について

■ $\mathbf{t}^{(i)} - \mathbf{t}^{(j)}$ ,  $\mathbf{t}^{(1)} + \mathbf{t}^{(2)} + \dots + \mathbf{t}^{(n)}$  も基本並進ベクトルであること (p.13, 1.7-9) について 基本並進ベクトル (1.29) の定義より, その線形結合も基本並進ベクトルになることによる. ここでは証明の準備として, 回転軸に垂直な基本並進ベクトルが存在することを保証している.

### 1.4 群論と量子力学

ある変換に関する物理系の対称性は量子力学において, 変換に付随するユニタリー演算子による相似変換の下での, ハミルトニアン  $H$  の不変性として表される. 以下では系の並進対称性を例にとって, このことを説明する.

説明 物理系を  $\mathbf{a}$  だけ平行移動するとき [能動的変換], 座標  $\mathbf{r}$  の位置における操作後の波動関数の値は, 操作前の波動関数  $\psi$  の位置  $\mathbf{r} - \mathbf{a}$  における値

$$\psi'(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r} - \mathbf{a})$$

となる [スカラー場を仮定]. これを  $U_T(\mathbf{a})\psi(\mathbf{r})$  と書いて平行移動の演算子  $U_T(\mathbf{a})$  を定義すると, これは運動量演算子  $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$  を用いて  $U_T(\mathbf{a}) = \exp(-i\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}/\hbar)$  と表される. 実際, このとき

$$U_T(\mathbf{a})\psi(\mathbf{r}) = \exp(-\mathbf{a} \cdot \nabla)\psi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} a_{i_1} \dots a_{i_n} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} \psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r} - \mathbf{a}).$$

また  $\mathbf{p}$  の Hermite 性より  $U_T(\mathbf{a})$  はユニタリーである.

ここで系の並進不変性を仮定して, 平行移動前後の波動関数  $\psi(\mathbf{r}), \psi'(\mathbf{r})$  がともに (時間に依存しない) Schrödinger 方程式  $H\psi = E\psi$  を満たすことを要求すると ( $E$  はエネルギー固有値),

$$E\psi(\mathbf{r}) = H\psi(\mathbf{r}) \quad \rightarrow \quad E\psi'(\mathbf{r}) = U_T(\mathbf{a})H\psi(\mathbf{r}) = \{U_T(\mathbf{a})HU_T(\mathbf{a})^{-1}\}\psi'(\mathbf{r})$$

より,

$$U_T(\mathbf{a})HU_T(\mathbf{a})^{-1} = H, \quad \text{あるいは} \quad [U_T(\mathbf{a}), H] = 0 \quad (1.41)$$

でなければならない.

\*3 具体的には, ある格子点を通る軸の周りの角度  $2\pi/n$  回転の下で結晶が不変であるとする, 可能な  $n$  の値は  $n = 1, 2, 3, 4, 6$  に限られる (証明は教科書 p.13).

\*4 教科書 p.14 には全ての結晶点群が列記されている.

\*5 教科書の図 1.8 (p.16) には全ての Bravais 格子が図示されている.

[対称性 (1.41) から保存則を導く議論は、文献 [4, pp.342-343] における一般論と同じである。すなわち] 並進対称性 (1.41) は運動量がハミルトニアンと可換であること  $[\mathbf{p}, H] = 0$  を意味するので、運動量は保存量となる。

また物理系の微小回転  $\delta\boldsymbol{\theta}$  の演算子は、[軌道] 角運動量  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = -i\hbar\mathbf{r} \times \boldsymbol{\nabla}$  を用いて

$$U_R(\delta\boldsymbol{\theta}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\delta\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}\right) \quad (1.44)$$

と表される。

**確認** 実際、回転ベクトル  $\delta\boldsymbol{\theta}$  の 1 次までの近似で

$$\begin{aligned} \psi'(\mathbf{r}) &= \psi(\mathbf{r} - \delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}) = \{1 - (\delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\nabla}\}\psi(\mathbf{r}) = \{1 - \delta\boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\nabla})\}\psi(\mathbf{r}) \\ &= \exp\{-\delta\boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\nabla})\}\psi(\mathbf{r}) = U_R(\delta\boldsymbol{\theta})\psi(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

よって同様に系の回転対称性から、角運動量保存則が導かれる。

一般に物理系の対称性に関するユニタリ変換は群を成す。実際、ハミルトニアン  $H$  を不変に留めるユニタリ演算子の集合  $G = \{U, V, \dots\}$  が、1.2 節の群の条件を全て満たすことは容易に確かめられる。

**確認** 特に積の演算が閉じていることについて、 $UHU^{-1} = H, VHV^{-1} = H$  のとき

$$(UV)H(UV)^{-1} = UVHV^{-1}U^{-1} = H$$

より、確かに積  $UV$  も  $G$  に属する。

- 並進群 ..... 空間の平行移動全体の作る群
- 回転群 ..... 空間回転の作る群

次に不連続な変換として、空間反転を取り上げる。空間反転は物理系の全ての粒子の座標  $\mathbf{r}_i$  を、原点に関して反転させる変換

$$P: \mathbf{r}_i \longrightarrow -\mathbf{r}_i \quad (1.47)$$

として定義され、 $P^2 = I$  (恒等変換) である。また空間反転 (1.48) に付随して波動関数に作用するユニタリ演算子は

$$U_P\psi(\mathbf{r}) \equiv \psi'(\mathbf{r}) = \psi(-\mathbf{r}) \quad (1.48)$$

によって定義され、 $U_P$  の固有値は  $\pm 1$  である [本稿次節で補足]。空間反転に関する物理系の対称性  $[U_P, H] = 0$  が成り立つ場合、固有値  $\pm 1$  は保存量であり、パリティと呼ばれる。固有値が  $+1$  または  $-1$  の波動関数はそれぞれ、式 (1.48) より対称性/反対称性

$$\psi(-\mathbf{r}) = +\psi(\mathbf{r}), \quad \psi(-\mathbf{r}) = -\psi(\mathbf{r})$$

を満たし、偶パリティ/奇パリティの状態と言われる。なお  $\{P, I\}$  は位数 2 の巡回群である [文献 [2, § 1.6] (のノート) も参照]。

最後に時間反転を考える。古典力学では運動方程式  $m\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$  に従う運動  $\mathbf{r}(t)$  に対して、時間を巻き戻した運動  $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(-t)$  もまた運動方程式を満たすため、実現可能である。

**確認**  $m\frac{d^2\mathbf{r}'(t)}{dt^2} = m\frac{d^2\mathbf{r}(-t)}{d(-t)^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}(-t)) = \mathbf{F}(\mathbf{r}'(t)).$

他方，量子力学において時間反転を調べるために，時間に依存する Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}, t) \quad (1.50)$$

を考察する．ここで時間反転の演算子  $T$  を

$$T\psi(\mathbf{r}, t) = \psi'(\mathbf{r}, t) = \psi^*(\mathbf{r}, -t) \quad (1.52)$$

で定義すると [本稿次節で補足]，この式 (1.52) もまた Schrödinger 方程式を満たす [よって分布  $|\psi|^2$  の時間発展は可逆]．実際，式 (1.50) で  $t$  を  $-t$  に置き換え，さらに全体の複素共役をとると

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^*(\mathbf{r}, -t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi^*(\mathbf{r}, -t).$$

#### 1.4 節について

■ 「 $U_P$  の固有値  $\pm 1$ 」 (p.19 下から 13,12 行目) について 空間反転の演算子  $U_P$  の固有値を  $p$  とする：

$$U_P \psi(\mathbf{r}) = p\psi(\mathbf{r}).$$

このとき式 (1.48) を繰り返し用いると

$$\psi(\mathbf{r}) = U_P^2 \psi(\mathbf{r}) = p^2 \psi(\mathbf{r}), \quad \therefore p = \pm 1$$

と定まる ( $p^2 = 1$  を満たす複素数  $p$  は  $p = \pm 1$  のみである) [5, p.97].

■ 式 (1.52) で定義される時間反転の演算子が反ユニタリーであること (節末問題 1.14) について 文献 [4, p.370] では，むしろ式 (1.53-54) が反ユニタリー性の定義となっている．式 (1.53) はユニタリー変換に際して

$$\langle \alpha | \beta \rangle \rightarrow \langle \alpha | U^\dagger U | \beta \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle$$

となることと対照的である．

## 2 群の基本概念

### 2.1 同型と準同型

2つの群  $G, G'$  は, 元  $g_i \in G, g'_i \in G'$  の間に 1対1 の対応 (全単射) があり,

$$g_i g_j = g_k \quad \Rightarrow \quad g'_i g'_j = g'_k$$

が成り立つとき同型であるといい,  $G \simeq G'$  と書く. [つまり同型な群は同じ形の (すなわち元の名前を付け替えると互いに一致する) 群表 (掛け算表) を持つ [3, p.16].] 1.2 節の合同変換の例を挙げれば,

$$\{e, \theta, \theta^2, \dots, \theta^5\} \simeq \{1, e^{\pi i/3}, e^{2\pi i/3}, \dots, e^{5\pi i/3}\}.$$

他方で元  $g_i \in G$  と  $g'_i \in G'$  との対応  $g'_i = f(g_i)$  が全射であって (すなわち任意の  $g'_i \in G'$  に対して  $g'_i = f(g_i)$  なる  $g_i$  が存在して), 条件

$$g_i g_j = g_k \quad \Rightarrow \quad f(g_i) f(g_j) = f(g_k) \quad (2.1)$$

が成り立つとき, 群  $G$  と  $G'$  は準同型であるといい,  $G \sim G'$  と書く. また, このときの  $f$  を準同型 (写像) という. 同型との違いは, 対応  $f: G \rightarrow G'$  が一般に多対1となる点にある. 再び正六角形の合同変換群 (1.19) を例にとり, 位数2の巡回群  $\{c, c^2 = e\}$  との間に全射

$$\begin{aligned} f: (e, \theta, \dots, \theta^5) &\longrightarrow e, \\ (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6) &\longrightarrow c \end{aligned} \quad (2.2)$$

を定義すると, 1.2 節よりこれは明らかに条件 (2.1) を満たす. よって正六角形の合同変換群は位数2の巡回群に準同型である.

また, 群  $G$  から  $G$  自身への準同型を  $G$  の自己準同型, 同型を自己同型という [本稿次節で補足].

最後に, 写像  $f: G \rightarrow G'$  によって単位元  $e' \in G'$  に移る  $G$  の元の集合 (上式 (2.2) の例では  $(e, \theta, \dots, \theta^5)$ ) を, 写像  $f$  の核という.

### 2.1 節について

■自己同型について [2, pp.13–14] 本編で言及したように, 自己同型 (写像) とはある群  $G$  から自分自身への掛け算則を保つ 1対1 写像と言える. イメージをつかむために, 具体的に自己同型写像を構成する. 1つの固定した  $g$  に対する写像

$$G \rightarrow g^{-1}Gg \quad (1)$$

は自己同型である. 実際,

$$\begin{aligned} (g^{-1}g_1g)(g^{-1}g_2g) &= g^{-1}(g_1g_2)g, & (\text{掛け算則を保つ}) \\ g^{-1}g_1g &= g^{-1}g_2g \quad \Rightarrow \quad g_1 = g_2. & (1 \text{ 対 } 1) \end{aligned}$$

特に  $g$  が群の元るとき, 写像 (1) は内部自己同型と呼ばれる. これに対し群のどの元  $g$  を用いても  $g^{-1}Gg$  と書けない自己同型 (写像) を外部自己同型という.

## 2.2 共役元と類

文献 [3, pp.18–19] の記述を基にまとめる. 群  $G$  の 2 つの元  $a, b$  が

$$a = bg^{-1}$$

の関係を満たすような単位元以外の元  $g \in G$  があるとき,  $b$  は  $a$  の共役元という. このとき定義より

- $a$  は  $b$  の共役元となるから, 単に「 $a$  と  $b$  は共役」と言えば充分である.
- $a$  と  $b$ ,  $b$  と  $c$  が共役なら,  $a$  と  $c$  は共役である.

$a$  に共役な元の集合を  $a$  の共役類 (または単に類) という.

$G$  の部分群  $H = \{h_1, h_2, \dots\}$  と  $g \in G$  に対し

$$gHg^{-1} = \{gh_1g^{-1}, gh_2g^{-1}, \dots\}$$

もまた群を構成する (これを  $H$  の共役部分群という).

理由 実際,

$$h_1h_2 = h_3 \quad \Rightarrow \quad (gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1}) = gh_3g^{-1}$$

である. さらに  $hgh^{-1}$  の逆元  $(hgh^{-1})^{-1} = gh^{-1}g^{-1}$  も  $gHg^{-1}$  に属する.

特に

$$gHg^{-1} = H \quad \forall g \in G \quad (2.4)$$

を満たす  $H$  を  $G$  の不変部分群または正規部分群と呼ぶ.

### 2.2 節について

■共役類の具体例 教科書 p.25 では具体例として, 正六角形の合同変換群 (1.19) の共役類

$$C_1 = \{e\}, \quad C_2 = \{\theta, \theta^5\}, \quad C_3 = \{\theta^2, \theta^4\}, \quad C_4 = \{\theta^3\}, \quad C_5 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}, \quad C_6 = \{\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$$

が示されている. 文献 [2, § 1.10] (のノート) ではより簡単でアナログな例として, 正三角形の合同変換群に同型な置換群  $S_3$  の元を類別した. その際, 以下に示す群の元を類別する一般的な手法 [3, pp.18–19] のうち, 第 1 の方法を利用した.

1. 群表の各  $g_i$  列には上から順に元  $g_1g_i, g_2g_i, \dots, g_rg_i$  が並んでいる. ここに左から  $g_i^{-1}$  を掛けて新しい表を作ると (これを類別表という),  $g_i$  列に並ぶ元は上から順に

$$g_i^{-1}g_1g_i, g_i^{-1}g_2g_i, \dots, g_i^{-1}g_rg_i$$

となる. このとき表の  $j$  行目には左から順に

$$g_1^{-1}g_jg_1, g_2^{-1}g_jg_2, \dots, g_r^{-1}g_jg_r$$

が並ぶことになる ( $j = 1$  行目には単位元  $g_i = e$  しか現れない). これらはいずれも同じ類に属する. 実際,  $l, m$  番目の元  $f_l \equiv g_l^{-1}g_jg_l, f_m \equiv g_m^{-1}g_jg_m$  は

$$f_l = (g_l^{-1}g_m)f_m(g_l^{-1}g_m)^{-1}$$

で関係付けられるため, 互いに共役である.

2. 群表の単位元から始まる対角線に関して, 対称な位置にある元  $f_1 = g_1g_j, f_2 = g_jg_i$  は同一類に属する ( $f_2 = g_i^{-1}f_1g_i$  が成り立つから).

■不変部分群の具体例 教科書 p.25 では具体例として、正六角形の合同変換群 (1.19) の部分群  $\{e, \theta, \dots, \theta^5\}$  が不変部分群であることに言及している. 文献 [2, § 1.10] (のノート) ではより簡単でアナログな例として、正三角形の合同変換群に同型な置換群  $S_3$  が、巡回群  $Z_3 = \{e, a_1, a_2\}$  を不変部分群に持つことを確かめた.

## 2.3 剰余類と剰余類群

はじめに群  $G$  における部分群  $H$  の右剰余類について、文献 [3, pp.17-18] を参考にまとめる.  $G$  の部分群

$$H = \{h_1, h_2, \dots, h_s\} \quad (s \text{ は } H \text{ の位数})$$

の各元に、 $H$  には属さない  $G$  の元  $g_1$  を掛けて、集合

$$Hg_1 \equiv \{h_1g_1, h_2g_1, \dots, h_sg_1\}$$

を作る. これは  $G$  の部分集合であって、 $H$  の元を含まない.

理由  $h_a, g_1 \in G$  より  $h_ag_1 \in G$  なので ( $a = 1, \dots, s$ ),  $Hg_1$  は  $G$  の部分集合である. ここで  $Hg_1$  のある元  $h_bg_1$  が  $H$  の元  $h_a$  に等しいと仮定すると、 $h_bg_1 = h_a$  の両辺に左から  $h_b^{-1}$  を掛けることにより  $g_1 = h_b^{-1}h_a \in H$  を得る. これは  $g_1 \notin H$  に反するから、 $Hg_1$  の元は  $H$  の元ではあり得ない.

note 1 ここで  $Hg_1 \equiv \{h_1g_1, h_2g_1, \dots, h_sg_1\}$  が相異なる  $s$  個の元からなることにも注意したい. 実際  $h_a, h_b (\neq h_a)$  に対して  $h_ag_1 = h_bg_1$  と仮定すると、両辺に右から  $g_1^{-1}$  を掛けたとき  $h_a = h_b$  という矛盾を生じるので、 $h_ag_1 \neq h_bg_1$  である.

note 2  $Hg_1$  は単位元を含まないので、 $G$  の部分集合であっても、部分群にはならない.

同様に  $H$  にも  $Hg_1$  にも含まれない  $G$  の元  $g_2$  を用いて  $Hg_2$  を作ると、 $Hg_2$  の元は  $H$  にも  $Hg_1$  にも含まれない. この手続きを順次続けていくと [毎回  $G$  の元が新たに  $s$  個ずつ得られるから]、いずれ有限群  $G$  のすべての元をくみ尽くすことになる. このとき

$$G = Hg_1 \cup Hg_2 \cup \dots \cup Hg_m \quad (2.5)$$

と分解され、各集合  $Hg_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) を群  $G$  の  $H$  による右剰余類という (同様に左剰余類を定義できる). ただし  $Hg_1$  が  $H$  自身となるように、式 (2.5) 以降では  $g_1 = e$  と約束しておく ( $H$  自身も右剰余類である). 各剰余類  $Hg_i$  はそれらの作り方より  $s$  個の元から成り、異なる剰余類  $Hg_i, Hg_j$  ( $i \neq j$ ) は共通の元を含まない (図 3). このとき群  $G$  の位数を  $r$  とすると、

$$r = sm$$

が成り立つ. よって部分群  $H$  の位数  $s$  は  $G$  の位数の約数でなければならないことになる.

例 群  $G$  として正六角形の合同変換群 (1.19) をとると、 $H = \{e, \theta^2, \theta^4\}$  は明らかに部分群であり、1.2 節の群表 1 を繰り返し用いると

$$H\sigma_1 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}, \quad H\sigma_4 = \{\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}, \quad H\theta = \{\theta, \theta^3, \theta^5\}$$

が見出されるので、右剰余類分解

$$G = H \cup H\sigma_1 \cup H\sigma_4 \cup H\theta \quad (2.6)$$

が得られる.

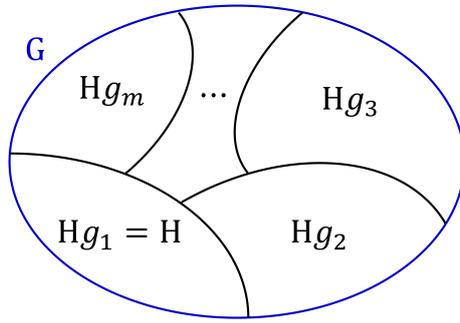


図3 部分群 H による群 G の (右) 剰余類への分解 (2.5)

ところで、不変部分群の定義式 (2.4) は

$$gH = Hg \quad \forall g \in G \quad (2.7)$$

と書き換えられる。すなわち不変部分群 H は左剰余類と右剰余類が等しい\*6。

式 (2.5) における各剰余類  $Hg_i$  を 1 つの元と見なすことによって定義される空間  $G/H$  を商空間という。これが特に有用となるのは、H が G の不変部分群の場合である。実際、このとき剰余類の集合は群を成し、商空間  $G/H$  は H による G の因子群 [商群, 剰余類群 [3, p.23]] と呼ばれる。

証明 [3, pp.22-23]

2 つの剰余類  $Hg_i, Hg_j$  の各々から任意の元  $h_a g_i, h_b g_j$  を選んで積をとると、

$$(h_a g_i)(h_b g_j) = h_a (g_i h_b g_i^{-1}) g_i g_j.$$

ここで H は不変部分群なので、 $(g_i h_b g_i^{-1})$  は、したがって  $h_a (g_i h_b g_i^{-1})$  は H の何らかの元  $h_c$  である。よって

$$(h_a g_i)(h_b g_j) = h_c g_i g_j \quad (2.8)$$

と書ける。これは剰余類  $Hg_i, Hg_j$  の元の積が剰余類  $Hg_i g_j$  に属することを意味する。[しかも  $h_a, h_b$  がそれぞれ H 全体を走るとき、 $h_c$  も H のすべての元を 1 回以上とるはずである。] したがって集合の関係として

$$(Hg_i)(Hg_j) = Hg_i g_j \quad (2.9)$$

が成り立つ。これは剰余類の集合が群を作ることを意味する。

上式 (2.9) は剰余類群の積の定義でもある。なお剰余類群の単位元は不変部分群 H である。

例 2.1 再び正六角形の合同変換群 (1.19) を考えると、 $H = \{e, \theta^2, \theta^4\}$  は不変部分群であることが分かる [本稿次節で補足]。するとたった今、一般論として示したように、式 (2.6) の箇所における剰余類

$$E \equiv H = \{e, \theta^2, \theta^4\}, \quad C_1 \equiv H\sigma_1 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}, \quad C_2 \equiv H\sigma_4 = \{\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}, \quad C_3 \equiv H\theta = \{\theta, \theta^3, \theta^5\}$$

\*6 式 (2.4),(2.7) はいずれも両辺が集合として等しいという条件であって、任意の  $g \in G$  と  $h_1 \in H$  に対して、

$$h_1 g = g h_2 \quad \text{あるいは} \quad g h_2 g^{-1} = h_1$$

となる  $h_2 \in H$  がある、という意味に理解しなければならない [2, p.12].

の集合  $\{E, C_1, C_2, C_3\}$  は群を成す. 実際, 剰余類群の掛け算則

$$C_i C_j = C_k, \quad (i, j, k \text{ は } 1, 2, 3 \text{ を巡回置換した値}) \quad (2.10)$$

$$C_i^2 = E \quad (2.10')$$

が直接確かめられる [本稿次節で補足].

一般に剰余類群への写像  $f: G \rightarrow G/H$  を  $f(g_i) = Hg_i$  で定義すると, 式 (2.9) より式 (2.1):  $f(g_i)f(g_j) = f(g_i g_j)$  が満たされる. したがって  $f$  は準同型写像であり,  $G \sim G/H$ . このとき不変部分群  $H$  は [剰余類群  $G/H$  の単位元だから], 写像  $f$  の核となっている.

さらに次の定理が成り立つ.

**定理 2.1 準同型定理** 群  $G, G'$  が準同型であるとし, 準同型写像  $f: G \rightarrow G'$  の核を  $H$  とすると,  $H$  は  $G$  の不変部分群となる. よって剰余類群  $G/H$  を定義できる\*7. そこで  $G/H$  から  $G'$  の上への写像  $\hat{f}: G/H \rightarrow G'$  を  $\hat{f}(Hg_i) = f(g_i)$  によって定義すれば,  $\hat{f}$  は同型写像である. したがって,  $G/H \simeq G'$  である. [この定理は後の定理 3.7 (3.3 節 p.60) の証明や 4.3 節後半 p.85 などで用いられている.]

**証明** まず定理の前半である, 「写像  $f$  の核  $H$  が不変部分群であること」を示す.  $H$  が部分群の条件 (1.24–25) を満たすことの確認から始めよう.  $h_1, h_2 \in H$  とすると,  $H$  が写像  $f$  の核であることから

$$f(h_1) = f(h_2) = e' : G' \text{ の単位元.}$$

すると [準同型写像の仮定とより],  $f(h_1 h_2) = f(h_1)f(h_2) = e'$  となるから, 第 1 の条件 (1.24):  $h_1 h_2 \in H$  が満たされる. また第 2 の条件 (1.25) が成り立つことも容易に言えるので [本稿次節で確認],  $H$  は  $G$  の部分群である. さらに任意の元  $g \in G, h \in H$  に対して

$$f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g^{-1}) = f(g)f(g^{-1}) = e', \quad \therefore ghg^{-1} \in H$$

となるから,  $H$  は不変部分群である.

さて, 定理の後半である「 $\hat{f}$  は同型写像であること」の証明に移ろう. 写像  $\hat{f}$  が準同型であることは  $\hat{f}$  の定義より明らかである.

$$[\text{実際, } \hat{f}(Hg_i)\hat{f}(Hg_j) = f(g_i)f(g_j) = f(g_i g_j) = \hat{f}(Hg_i g_j) = \hat{f}((Hg_i)(Hg_j)).]$$

そこで  $\hat{f}$  が 1 対 1 であって多対 1 ではないことを言えば充分である. 背理法にて証明しよう. 異なる剰余類  $Hg_1, Hg_2$  が  $\hat{f}$  により同じ元  $f(g_1) = f(g_2)$  に写像されたとすると,

$$f(g_1 g_2^{-1}) = f(g_1)f(g_2)^{-1} = e' \quad (2.14)$$

となって [本稿次節で補足],  $g_1 g_2^{-1} \in H$  であることになる. これは剰余類  $Hg_1, Hg_2$  が相異なるという仮定に反するので [本稿次節で補足], 示された.

**例 2.2** ここまで抽象的な数学的議論が続いた. そこで例として再び正六角形の合同変換群  $G$  を考えると, 2.1 節で見たようにこれは位数 2 の巡回群  $G' = \{e, c^2 = e\}$  と準同型であり, 準同型写像 (2.2) の核は

$$H = \{e, \theta, \dots, \theta^5\}$$

\*7 すぐ上で学んだことから, この時点で  $G \sim G/H$  が判明する. これと冒頭の仮定  $G \sim G'$  を合わせると, この定理の結論  $G/H \simeq G'$  は非自明でありながら分かりやすいものとなっている.

である. 定理より  $H$  は  $G$  の不変部分群となっているはずである [そのことは例 2.1 の箇所と同様に直接確かめられる]. このとき剰余類  $G/H$  は具体的には

$$E = H, \quad C = H\sigma_1 = \{\sigma_1, \dots, \sigma_6\}$$

であり [C については 1.2 節の群表 1 を見よ], これらの集合  $\{E, C\}$  は準同型定理から期待されるように, 巡回群  $G' = \{e, c\}$  と同型となっていることが見て取れる (同型写像  $\hat{f}: E \rightarrow e, C \rightarrow c$  が対応) [特に  $C^2 = H\sigma_1^2 = H = E$  に注意].

## 2.3 節について

■例 2.1 において  $H = \{e, \theta^2, \theta^4\}$  が  $G =$  (式 (1.19)) の不変部分群であることについて  $G$  の任意の元  $g$  に対して式 (2.4):  $gHg^{-1} = H$  が成り立っていることを確かめれば良い.  $g = e, \theta^n$  に対してこれが成り立つことは明らかである. また 1.2 節の群表 1 を繰り返し用いれば,

$$\sigma_i \theta^2 \sigma_i^{-1} = \theta^4, \quad \sigma_i \theta^4 \sigma_i^{-1} = \theta^2 \quad (i = 1, \dots, 6)$$

が直接確かめられる (これら 2 式は等価である). これは回転が言わば “鏡の中で逆回転した像を鏡の外に取り出す” ことと等価であることから, あらかじめ期待される結果である. よって鏡映  $g = \sigma_i$  に対しても式 (2.4):  $gHg^{-1} = H$  が成り立つ.

■式 (2.10), (2.10') の確認 剰余類群の積の定義式 (2.9) を, 1.2 節の群表 1 と併用すると

$$\begin{aligned} C_1 C_2 &= H\sigma_1 \sigma_4 = H\theta = C_3, \\ C_2 C_3 &= H\sigma_4 \theta = H\sigma_3 = \{e\sigma_3 = \sigma_3, \theta^2 \sigma_3 = \sigma_1, \theta^4 \sigma_3 = \sigma_2\} = C_1, \\ C_3 C_1 &= H\theta \sigma_1 = H\sigma_5 = \{e\sigma_5 = \sigma_5, \theta^2 \sigma_5 = \sigma_6, \theta^4 \sigma_5 = \sigma_4\} = C_2, \\ C_2 C_1 &= H\sigma_4 \sigma_1 = H\theta^5 = \{e\theta^5 = \theta^5, \theta^2 \theta^5 = \theta, \theta^4 \theta^5 = \theta^3\} = C_3, \\ C_3 C_2 &= H\theta \sigma_4 = H\sigma_1 = C_1, \\ C_1 C_3 &= H\sigma_1 \theta = H\sigma_4 = C_2 \end{aligned}$$

となるので, 式 (2.10) が成り立つ.

次に式 (2.10') について,  $C_1^2 = H\sigma_1^2 = H = E$ , etc. は容易に分かる. 唯一, 非自明な関係は

$$C_3^2 = H\theta^2 = \{e\theta^2 = \theta^2, \theta^2 \theta^2 = \theta^4, \theta^4 \theta^2 = e\} = H = E$$

である.

■定理 2.1 の証明にて, 核  $H$  が条件 (1.25) を満たすことの確認 任意の  $h \in H$  に対して

$$hh^{-1} = h^{-1}h = e : G \text{ の単位元} \quad (2)$$

なる逆元  $h^{-1} \in G$  が存在する. この  $h^{-1}$  が核  $H$  の元であること, すなわち  $f(h^{-1}) = e'$  を言えば良い. まず  $f$  が準同型写像であることより

$$he = h \rightarrow f(h)f(e) = f(h)$$

であり, ここで  $f(h) = e'$  を考慮すると

$$f(e) = e' \quad (3)$$

が見出される。すなわち単位元  $e$  は単位元  $e'$  に移される、あるいは単位元  $e$  は核  $H$  に属する。これを踏まえて上式 (2) の  $f$  をとり、再び  $f$  が準同型写像であることと  $f(h) = e'$  を考慮すると

$$e' = f(e) = f(h)f(h^{-1}) = e'f(h^{-1}) = f(h^{-1})$$

を得る。よって示された。

■式 (2.14) について 準同型写像  $f$  は群の掛け算則を保つので、 $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$  である。実際、上式 (3): $f(e) = e'$  に注意すると

$$f(g)f(g^{-1}) = f(gg^{-1}) = f(e) = e', \quad \therefore f(g^{-1}) = f(g)^{-1}. \quad (4)$$

すると式 (2.14) 第 1 の等号は  $f(g_1g_2^{-1}) = f(g_1)f(g_2^{-1}) = f(g_1)f(g_2)^{-1}$  と理解できる。

第 2 の等号では背理法の仮定  $f(g_1) = f(g_2)$  より

$$f(g_1)f(g_2)^{-1} = f(g_1)f(g_1)^{-1} = e'$$

とすれば良い。

■定理 2.1 の証明にて、 $g_1g_2^{-1} \in H$  が背理法の仮定に反することについて

$$\begin{aligned} g_1g_2^{-1} \in H &\Rightarrow g_1g_2^{-1} = h_a, \exists h_a \in H \\ &\Rightarrow g_1 = h_ag_2, \exists h_a \in H \quad (\Leftrightarrow g_1 \in Hg_2 \text{ (教科書 p.29, 1.9)}) \\ &\Rightarrow h_bg_1 = h_cg_2, \exists h_b, h_c = h_bh_a \in H \end{aligned}$$

最後の行は仮定に反して、 $Hg_1$  と  $Hg_2$  が共通の元を持つことを意味している。

## 2.4 群の表現

群の構造を調べるには、適当な座標系を導入し、系に対する“操作”を定量的に“表現”することが有用である。我々はベクトル空間の中での 1 次変換として群を表現する。

ベクトル空間とは、

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \quad \text{ならば} \quad a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \in V \quad (a, b \in \mathbf{C})$$

を満たすベクトルの集合  $V$  である。  $n$  次元のベクトル空間  $V$  の元  $\mathbf{x}$  は、1 次独立な  $n$  個のベクトル  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$  を基底に用い、それらの 1 次結合

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n$$

として一意的に表される。各係数  $\{x_i\}$  を用いて、ベクトルを  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  と成分表示できる。

任意の複素数  $a, b$  に対して演算子 (作用素)  $T$  が

$$T(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = T(a\mathbf{x}) + T(b\mathbf{y}) = aT\mathbf{x} + bT\mathbf{y}$$

を満たすとき、変換 (写像)  $\mathbf{x}' = T\mathbf{x}$  を 1 次変換 (線形変換) という。基底  $\mathbf{a}_k$  もこの変換によって同じベクトル空間内のベクトルに移されるから、その結果は基底の 1 次結合の形

$$T\mathbf{a}_k = \sum_i \mathbf{a}_i T_{ik} \quad (2.19)$$

に表すことができる。このときベクトル成分の変換則

$$T\mathbf{x} = T\left(\sum_k x_k \mathbf{a}_k\right) = \sum_k (T\mathbf{a}_k)x_k = \sum_i \left(\sum_k T_{ik}x_k\right) \mathbf{a}_i \equiv \sum_i x_i' \mathbf{a}_i, \quad \therefore x_i' = \sum_k T_{ik}x_k$$

が見出される。この係数の作る行列  $\hat{T} = (T_{ik})$  を 1 次変換  $T$  の変換行列という。これが正則行列であれば (すなわち  $\det \hat{T} \neq 0$  であれば), 逆行列  $\hat{T}^{-1}$  が存在して, 逆変換は  $\mathbf{x} = \hat{T}^{-1}\mathbf{x}'$  と書ける。

さて, 群  $G$  の各元  $g_i$  に対して

$$g_i g_j = g_k \quad \Rightarrow \quad D(g_i)D(g_j) = D(g_k) \quad (2.23-24)$$

のように, 掛け算則を保持する  $n$  次正則行列  $D(g_i)$  を与えるとき,  $D(g_i)$  を表現行列という。このとき群の単位元には単位行列が, 逆元には逆行列が対応する。

**note** このことは 2.3 節のノートにおける式 (3),(4) の導出と同様にして確認できる。したがって文献 [2, p.3] における表現の定義は過剰であり, 実際には条件 (2.23-24) を要求すれば充分である。なお逆行列の存在は表現行列として正則行列を想定していることから保証されている。

$D$  が作用するベクトル空間を表現空間といい, 行列の大きさ  $n$  (したがって表現空間の次元) を表現の次元という。

もう少し数学的に述べよう。  $n$  次正則行列の全体は通常の行列の積に関して群を成す。この群を (複素) 一般線形変換群と呼び,  $GL(n, \mathbf{C})$  と書き表す [教科書 p.43 も参照]。このとき群  $G$  から群  $GL(n, \mathbf{C})$  への準同型写像

$$D: G \longrightarrow GL(n, \mathbf{C}) : g_i \in G \longmapsto D(g_i) \in GL(n, \mathbf{C})$$

を  $G$  の (行列) 表現という。準同型写像  $D$  は一般には多対 1 であり, 特に群の全ての元に単位行列を対応させた表現を恒等表現という [3, p.64]。これに対し 1 対 1 対応  $D$  による表現を忠実な表現という。

正則行列  $V$  による同値変換 [相似変換]

$$D'(g) = V^{-1}D(g)V \quad (2.25)$$

で関係付けられる群  $G$  の 2 つの表現  $D, D'$  は同値と言われる [相似変換は掛け算則を保つ]。周知のように, 相似変換 (2.25) は, 表現空間の基底の変更

$$\mathbf{a}_i' = \sum_k \mathbf{a}_k V_{ki} \quad (2.28)$$

に伴う (座標) 変換則に他ならない。

行列要素がブロック対角な形

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2(g) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_l(g) \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

(ただし各正方行列  $D_j(g)$  は既約<sup>\*8</sup>) を持つ表現と同値な表現は, 完全可約と言われる。言い換えれば, 完全可約な表現とは相似変換によりブロック対角化できる表現をいう。式 (2.26) の各ブロック  $D_i(g)$  もまた群  $G$

<sup>\*8</sup> すなわち基底の変更によりそれ以上小さな正方行列のブロックに区分けできない。

の表現となっており，これらを既約表現と呼ぶ [本稿次節で補足]．さらにブロック対角な表現 (2.26) は表現  $D_j(g)$  の直和といい，

$$D = D_1 \oplus D_2 \oplus \cdots \oplus D_l \quad (2.27)$$

で表す．すると完全可約な表現とは既約な表現の直和に分解できるもの，と言い換えることもできる．

ここで例として図 4 に示す正三角形の合同変換群

$$\{e, \theta, \theta^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$$

の表現を考える．図 5 (a) のように  $xyz$  直交座標系を導入すると，正三角形に固定した点の座標は変換に際して

$$\theta: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \sigma_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{etc.}$$

と変化するから [特に頂点の位置ベクトル  $\mathbf{r} \propto (1, 0, 0)^T$ , etc. を考えると分かりやすい]，群の 3 次元表現

$$e \rightarrow E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta \rightarrow \Theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta^2 \rightarrow \Theta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_1 \rightarrow \Sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \rightarrow \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \rightarrow \Sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が見出される．これは完全可約である．実際，図 5 (b) のように  $x'y'z'$  直交座標系をとり直すと，期待されるように表現行列はそれぞれ

$$E' = E, \quad \Theta' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Theta'^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \Sigma'_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma'_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma'_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

とブロック対角化される [教科書の  $\Theta'$  と  $\Theta'^2$  の表式を入れ替えた，本稿次節で補足]．これは 2 次元表現 (実は既約である) と 1 次元の恒等表現の直和となっている．

参考 上式 (2.32) へのブロック対角化は，正則行列

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

を用いた相似変換 (2.25) によって実行できる．[教科書の  $V$  と  $V^{-1}$  を入れ替えた．このとき式 (2.32) において，上記のように  $\Theta'$  と  $\Theta'^2$  だけが入れ替わる ( $\Sigma_i = \Sigma_i^{-1}$  だから).]

部分空間の任意のベクトルにどの  $D(g)$  が作用しても，得られるベクトルが部分空間に入っているとき，その部分空間を不変部分空間 (invariant subspace) という．不変部分空間を持つ表現は可約 (reducible)，可約でない表現は既約という．

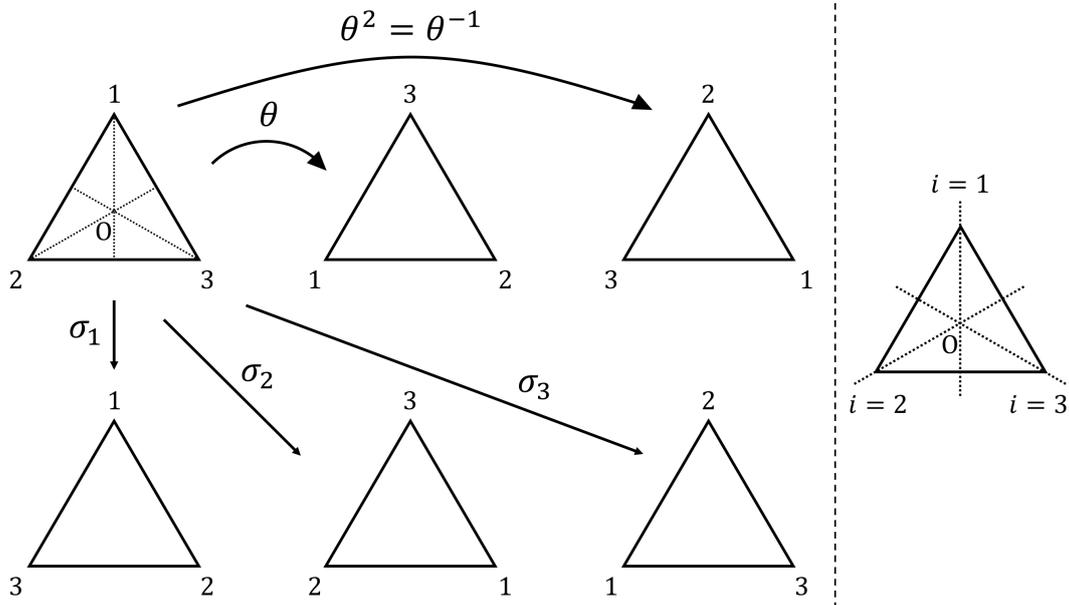


図4 正三角形の合同操作.  $\theta$  は正三角形の中心  $O$  周りの角度  $2\pi/3$  の回転 (反時計回り) を,  $\sigma_i$  は対称軸  $i = 1, 2, 3$  に関する鏡映を表す. [頂点の番号  $1, 2, 3$  は正三角形に, 対称軸  $i = 1, 2, 3$  は背景の紙面に固定されている.]

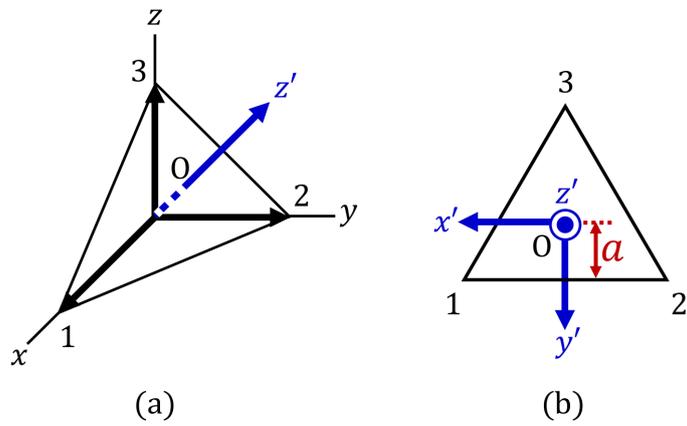


図5 正三角形の合同変換群に対する表現の基底

note これは式 (2.26) の箇所で既約表現  $D_i(g)$  を, 適当な相似変換によってさらに細かいブロックに分割することはできない表現行列として定義したことに整合する. 実際もし  $D_i(g)$  をさらに細かくブロック対角化できたとすると,  $D_i(g)$  が作用するベクトル  $v_i$  の空間は, その中に不変部分空間を持つことになり, 上記の既約の定義に反する.

なお不変部分空間からはみ出すベクトルが常に, 別の不変部分空間に属しているとは限らないため, 可約な表現が完全可約であるとは限らないことに注意する.

表現の既約性に関して, 次の定理が有用である.

定理 2.2  $D_1$  と  $D_2$  が互いに同値でない既約表現としたとき,  $\forall g \in G$  に対して  $D_1(g)A = AD_2(g)$  が成立すれば  $A = 0$  である.

注解 文献 [2, § 1.11] では次の定理 2.3 と合わせて, これも **Schur** (シュール/シューア) の補題 (レンマ) と呼んでいる. 証明は文献 [2, § 1.11] のノートにまとめた. なお「 $A$  は  $V_1$  から  $V_2$  への同型写像」(教科書 p.36), したがって 1 対 1 対応の場合,  $A^{-1}$  が存在して  $D_1, D_2$  は相似変換で関係付けられるため, 同値となる.

定理 2.3 (Schur の補題)  $D$  が有限次元の既約表現の場合,  $\forall g \in G$  に対し  $D(g)A = AD(g)$  が成り立てば  $A \propto I$  である. 言葉で言えば, 有限次元既約表現の全ての元と可換な行列は単位行列に比例する, ということである.

注解 証明は文献 [2, § 1.11] のノートにまとめた. いすれにせよ, 前定理 2.2 を証明に用いる. 教科書 p.37 のように逆証も可能である. Schur の補題は 6.1 節 p.156 で用いられている.

最後に, 1.2 節末尾では 2 つの群の直積を定義したのに対し, ここでは単一の群  $G$  に対する 2 つの表現  $D^{(a)}, D^{(b)}$  の直積を考える. それぞれの表現の基底を  $\mathbf{a}_i (i = 1, \dots, n)$ ,  $\mathbf{b}_j (j = 1, \dots, m)$  とし, これらの  $nm$  個の積  $\mathbf{a}_i \mathbf{b}_j$  を作ろう [基底  $|a_i\rangle, |b_j\rangle$  から組  $|a_i, b_j\rangle$  を作ることに対応]. するとこれらは群  $G$  の作用により

$$g : \mathbf{a}_i \mathbf{b}_j \longrightarrow \sum_{k,l} \mathbf{a}_k \mathbf{b}_l D_{ki}^{(a)}(g) D_{lj}^{(b)}(g) = \sum_{k,l} \mathbf{a}_k \mathbf{b}_l [D^{(a \times b)}(g)]_{kl,ij}, \quad (2.33)$$

$$[D^{(a \times b)}(g)]_{kl,ij} \equiv D_{ki}^{(a)}(g) D_{lj}^{(b)}(g) : \text{行列 } D_{ki}^{(a)}(g), D_{lj}^{(b)}(g) \text{ の直積 (テンソル積)} \quad (2.34)$$

と変換する.

note 式 (2.19) と同様, 基底には行列が右から掛かる. 実際, 一般に

$$|j\rangle \longrightarrow D(g)|j\rangle = \sum_k |k\rangle \langle k|D(g)|j\rangle = \sum_k |k\rangle D_{kj}(g)$$

である [2, pp.24–25]. 基底は状態と“逆向きに”変化することを思い出そう [6, pp.116–119].

テンソル積 (2.34) は  $(k, l)$  と  $(i, j)$  を添字とする  $nm$  次行列であり, これもまた積  $\mathbf{a}_i \mathbf{b}_j$  を基底とする群  $G$  の表現となることが容易に分かる. [文献 [2, § 1.15] のノートで確認済み (教科書では節末問題 2.12).] これを表現  $D^{(a)}, D^{(b)}$  の直積表現と呼び,  $D^{(a)} \otimes D^{(b)}$  と書く.

## 2.4 節について

■ブロック対角な行列 (2.26) における既約表現  $D_i(g)$  について 表現がブロック対角な行列 (2.26) となる基底で, 対応して任意の状態もブロックに分けて  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots)^T$  と書くと (T は転置を表す),

$$D(g)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 & \cdots \\ 0 & D_2(g) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1(g)\mathbf{v}_1 \\ D_2(g)\mathbf{v}_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

となる. よってブロック対角な  $D(g)$  は部分空間のベクトル,

$$(\mathbf{v}_1 \ 0 \ 0 \ \cdots)^T, \quad (0 \ \mathbf{v}_2 \ 0 \ \cdots)^T, \quad \text{etc.}$$

に作用して、同じ部分空間のベクトル

$$(D_1(g)v_1 \ 0 \ 0 \ \cdots)^T, \quad (0 \ D_2(g)v_2 \ 0 \ \cdots)^T, \quad \text{etc.}$$

を作ることになる。これは完全可約な表現  $D(g)$  が相似変換により、各々の部分空間に個別に作用する既約な  $D_i(g)$  に直和分解できることを意味する。

■正三角形の合同変換群に対する既約分解 (2.32) について 合同操作は  $z' = \text{const.}$  の面内で行われ、正三角形の  $z'$  座標を変えないから、群の表現は  $x'y'$  空間に作用する 2 次元表現と  $z'$  空間に作用する 1 次元の恒等表現に分解されると期待される。そこで特に式 (2.32) における 2 次元表現に注目すると、 $\Theta, \Theta^2$  に関して、それらはそれぞれ  $x'y'$  面内における回転角  $\pm 2\pi/3$  の回転行列に他ならないから、回転  $\theta, \theta^{-1}$  の表現行列として適正である。

次に図 5 (b) に示した長さ  $a$  を用いると、点 1,2,3 の初期位置の  $x'y'$  座標は

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} a, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} a, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} a$$

と成分表示される。すると  $\Sigma'_1$  の  $2 \times 2$  のブロックはこれらに作用して、鏡映  $\sigma_1$ :

$$\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_3 \rightarrow \mathbf{r}_2$$

を引き起こすことなどが、直接の成分計算により確かめられる。

## 2.5 量子論と群の表現

1.4 節で見たように、ハミルトニアン  $H$  と可換なユニタリー演算子  $U$  で変換された波動関数  $U\psi$  もまた、Schrödinger 方程式  $H\psi = E\psi$  を満たす (対称性)。すると  $U\psi$  が  $\psi$  の定数倍でなければ、このエネルギー固有状態は縮退していることになる。またエネルギー固有値  $E$  に属する固有関数  $\psi_1$  から始めて、系の対称性に付随する変換の成す群  $G = \{U, V, \dots\}$  の全ての元を  $\psi_i$  に作用させると、独立な固有関数の組

$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n \quad (n \leq g: \text{群 } G \text{ の位数})$$

が得られる。このとき、これらの関数は群  $G$  の基底となる。

例 2.3 教科書を補足しつつまとめる。

1.4 節で見た空間反転の群  $G = \{I, P\}$  に対して、いわゆる正則表現  $D(g) = (\langle e_i | g e_j \rangle)$  [2, § 1.3] を構成すると、

$$D(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(P) = \begin{pmatrix} \langle I|P \rangle & \langle I|I \rangle \\ \langle P|P \rangle & \langle P|I \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

となる。これらの対称行列は、直交行列

$$V = V^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

を用いた相似変換 (2.25) により、

$$D'(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} D_e(I) & 0 \\ 0 & D_o(I) \end{pmatrix}, \quad D'(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} D_e(P) & 0 \\ 0 & D_o(P) \end{pmatrix} \quad (5)$$

と対角化される．各ブロック  $D_e(g), D_o(g)$  ( $g = I, P$ ) は 1 次元の表現なので，既約であることが明らかである．また  $D_e(g)$  は恒等表現である．さらに表現行列がブロック対角な形 (5) となる基底で状態ベクトルを  $(\psi_e \ \psi_o)^T$  と書くと，

$$D'(I) \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_e(I)\psi_e \\ D_o(I)\psi_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_o \end{pmatrix}, \quad D'(P) \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_e(P)\psi_e \\ D_o(P)\psi_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\psi_e \\ -\psi_o \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

となる．第 2 式は既約表現  $D_e(P), D_o(P)$  の各々が作用する部分空間の状態  $\psi_e, \psi_o$  がそれぞれ， $D_e(P), D_o(P)$  の固有値  $+1, -1$  の (すなわち偶/奇パリティの) 固有状態であることを意味する．

#### 例 2.4 水素原子における球対称な Coulomb ポテンシャル

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

の下での電子はエネルギー固有値

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots \text{は主量子数, } m_e \text{は電子質量})$$

を持ち，対応する波動関数は

$$u_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (l = 0, 1, 2, \dots \text{は方位量子数, } m = -l, \dots, l \text{は磁気量子数})$$

という形に表される．エネルギー固有状態の

- $l$  に関する縮退は，Coulomb ポテンシャルの形  $1/r$  に起因する [文献 [6, p.270] を見よ].
- $m$  に関する縮退は，系の回転対称性に起因する [6.6 節で再論].

与えられた量子数  $l$  の各値に対して，球面調和関数  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  は空間回転の演算子

$$U_R(\boldsymbol{\theta}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}\right) \quad (2.42)$$

が作る回転群の既約表現となっており，異なる  $m$  の値に応じた  $(2l + 1)$  個の  $Y_{lm}$  が  $l$  で指定される既約表現の基底となる．すると  $Y_{lm}$  に回転演算子 (2.42) を作用させた結果も基底の線形結合の形

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar} \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}\right) Y_{lm} = \sum_{m'=-l}^l Y_{lm'} D_{m'm}(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.45)$$

で表され，ここで右辺の係数  $D_{m'm}(\boldsymbol{\theta})$  は回転演算子 (2.42) の  $(2l + 1)$  次表現を与える [上式 (2.45) は文献 [6, p.322] で確認済み].

### 3 リー群とリー代数

#### 3.1 線形変換群

- 複素一般線形変換群  $GL(n, \mathbf{C})$  ……  $n$  次複素正則行列全体の作る群 (2.4 節)
  - 特に行列式が 1 の行列全体が成す部分群は複素特殊線形変換群  $SL(n, \mathbf{C})$
- 実一般線形変換群  $GL(n, \mathbf{R})$  ……  $n$  次実正則行列全体の作る群
  - 特に行列式が 1 の行列全体が成す部分群は実特殊線形変換群  $SL(n, \mathbf{R})$

$n$  次元複素ベクトル空間に長さ (あるいは内積) を導入しよう (距離の定義されたベクトル空間を計量ベクトル空間という).  $n$  個の基底  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  を用いてベクトルを

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + \dots + v_n \mathbf{e}_n$$

と表したときの成分  $v_i \in \mathbf{C}$  に対して, 2 つのベクトル  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  の内積を

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1^* v_1 + u_2^* v_2 + \dots + u_n^* v_n \quad (3.2)$$

で定義する. これは

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij} \quad (3.3)$$

を合意する.

上式 (3.3) の確認  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_i, \mathbf{v} = \mathbf{e}_j$  に対してベクトル成分はそれぞれ  $u_k = \delta_{ki}, v_k = \delta_{kj}$  なので, 式 (3.2) は

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \sum_k u_k^* v_k = \sum_k \delta_{ki} \delta_{kj} = \delta_{ij} : (3.3)$$

を与える.

ベクトル  $\mathbf{v}$  の長さは  $(\mathbf{v}, \mathbf{v})^{1/2}$  で定義される. そこで 1 次変換

$$u'_i = \sum_{j=1}^n U_{ij} u_j, \quad v'_i = \sum_{k=1}^n U_{ik} u_k \quad (3.4)$$

が内積  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  を不変に保つことを要求すると,  $U = (U_{ij})$  はユニタリ行列 (したがって上式 (3.4) はユニタリ変換) でなければならないことが見出される.

証明 内積の不変性

$$(\mathbf{u}', \mathbf{v}') = \sum_i u'_i{}^* v'_i = \sum_{j,k} \left( \sum_i U_{ij}{}^* U_{ik} \right) u_j^* v_k = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

を要求すると, ユニタリ性

$$\delta_{jk} = \sum_i U_{ij}{}^* U_{ik} = \sum_i (U^\dagger)_{ji} U_{ik} \quad \text{i.e.} \quad U^\dagger U = 1, \quad U U^\dagger = 1 \quad (3.6-8)$$

が見出される.

note 節末問題 3.1 の略解では第 1 式  $U^\dagger U = 1$  から  $U^{-1} = U^\dagger$  となることを暗に用いており, ここから第 2 式  $UU^\dagger = 1$  を導くのはほとんど循環論法と言える. 教科書 3.2 節 (pp.49–50) でもユニタリ行列の自由度の勘定の際, ユニタリ条件として  $U^\dagger U = 1$  しか考慮していない.

- $n$  次元のユニタリ群  $U(n)$  ……  $n$  次ユニタリ行列全体の成す群
- $n$  次元の特殊ユニタリ群  $SU(n)$  …… 行列式が 1 である  $n$  次ユニタリ行列全体の成す群

また実ベクトル空間において内積を不変に保つ 1 次変換は直交行列  $A$  による直交変換であり, ユニタリ性の条件 (3.8) は直交行列の条件  $A^T A = A A^T = 1$  に置き換わる ( $A^T$  は転置行列).

- $n$  次元の直交群  $O(n)$  ……  $n$  次直交行列全体の成す群
- $n$  次元の特殊直交群または回転群  $SO(n)$  …… 行列式が 1 である  $n$  次直交行列全体の成す群  
– これは  $n$  次元実ベクトル空間における回転の成す群に他ならない

なお複素ベクトル空間において

$$v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 \quad (v_i \in \mathbf{C})$$

を不変に保つ複素直交変換の成す群を複素直交群  $O(n, \mathbf{C})$  という.

さらに条件

$$A^T J A = J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1} : n \times n \text{ 単位行列} \quad (3.11)$$

を満たす  $2n$  次の実行列  $A$  全体の作る群をシンプレクティック群と呼び,  $\text{Sp}(n, \mathbf{R})$  で表す [本稿次節で補足].

- 複素シンプレクティック群  $\text{Sp}(n, \mathbf{C})$   
→ 式 (3.11) を満たす  $2n$  次の複素行列  $A$  全体の作る群
- ユニタリ・シンプレクティック群  $\text{Sp}(n)$   
→ 式 (3.11) を満たす  $2n$  次のユニタリ行列  $A$  全体の作る群

特殊相対論における Lorentz 変換は Minkowski 空間における内積

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4 \quad (3.12)$$

を不変にする 1 次変換であり, その全体は Lorentz 群を作る. これを一般化して,  $(m+n)$  次元実ベクトル空間における内積

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_m y_m - x_{m+1} y_{m+1} - \cdots - x_{m+n} y_{m+n}$$

を不変にする 1 次変換全体が作る群を  $O(n, m)$  と表す. 特に Lorentz 群は  $O(3, 1)$  である.

ここまで挙げた線形変換群は一般に線形 Lie 群と呼ばれる.

### 節末問題

3.3 シンプレクティック群  $\text{Sp}(n, \mathbf{R})$  の式 (3.11) について  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{2n})^T, \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{2n})^T$  に対する 2 次形式

$$\mathbf{x}^T J \mathbf{y} = x_1 y_{n+1} + \cdots + x_n y_{2n} - x_{n+1} y_1 - \cdots - x_{2n} y_n$$

は,  $A \in \text{Sp}(n, \mathbf{R})$  による 1 次変換  $\mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x}$  の下で不変に留まる. 実際, 条件 (3.11):  $A^T J A = J$  より

$$\mathbf{x}^T J \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}^T (A^T J A) \mathbf{y} = \mathbf{x}^T J \mathbf{y}.$$

なお、この2次形式は Poisson 括弧

$$\{u, v\} \equiv \sum_i \left( \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right) = \left( \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right)^T J \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\eta}}$$

と同じ形である ( $\boldsymbol{\eta} \equiv (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)^T$  は正準変数) [7, p.540].

3.5 Lorentz 群 相対論で学んだように、2次元の Minkowski 空間における Lorentz 変換は内積 (3.12) を不変に留める線形変換として、空間回転と類似の形

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = V(\psi) \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}, \quad V(\psi) \equiv \begin{pmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi \\ \sinh \psi & \cosh \psi \end{pmatrix} \quad (\tanh \psi = -\beta)$$

に表される [8, pp.11–12]. 双曲線関数の加法定理より

$$V(\psi_1)V(\psi_2) = V(\psi_1 + \psi_2)$$

が成り立つので、Lorentz 変換は群を成し、単位元は  $V(0)$ 、逆元は  $V(-\psi)$  であることが分かる。

### 3.1 節について

■シンプレクティック群について 正準変数をまとめてシンプレクティックな記法

$$\boldsymbol{\eta} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)^T$$

で書こう ( $T$  は転置を表す). これに応じて行列

$$J \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad O : n \times n \text{ 零行列}, \quad 1 : n \times n \text{ 単位行列}$$

を導入する [7, pp.478–480]. このとき変数変換  $\boldsymbol{\eta} \rightarrow \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta})$  (時間をパラメーターに含んでも良い) が正準変換であるためには、Jacobi 行列

$$M = (M_{\alpha\beta}) = \left( \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \eta_\beta} \right)$$

が「シンプレクティック条件」

$$MJM^T = J \tag{6}$$

を満たさねばならない\*9. また、上式 (6) を満たす  $M$  をシンプレクティック行列という [7, pp.532–534, pp.538–539]. [詳しくは『力学』のノートの付録にまとめた. シンプレクティック条件 (6) は  $J$  の正準変換に対する不変性のように見ることができる\*10.] (なお逆にシンプレクティック条件を満たす変換は正準変換であることも証明できる [9, pp.296–298]. )

### 3.2 無限小変換とリー代数

$t = 0$  で単位元  $A(0) = 1$  と連続的につながる、実変数  $t$  で特徴付けられる線形 Lie 群の元  $A(t)$  を考える. 無限小変換に対しては  $A(t) \simeq A(0) + Xt$  であり、ここで微係数  $X = A'(0)$  が与えられていれば、任意の  $t$  に対する行列  $A(t)$  も知ることができる. 実際  $A(t)$  は微分方程式

$$\frac{d}{dt} A(t) = XA(t) \tag{3.15}$$

\*9 特に定数係数による線形変換では Jacobi 行列は変換行列に他ならないので、これは本編の式 (3.11) に対応する.

\*10 これは Lorentz 変換に対して Minkowski 計量が不変であること (式 (3.36)) を想起させる.

の解として、一意的に

$$A(t) = e^{tX} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (tX)^n \quad (3.16-17)$$

と定まる (初期条件  $A(0) = 1$  の下で). この意味で  $X$  を線形 Lie 群の生成子と呼ぶ.

**note 1** ここでは 3.3 節の冒頭を先取りして, 上式 (3.15-17) を説明する.  $t^1 = \dots = t^d = 0$  で単位元  $1$  と連続的につながる,  $d$  個の実数パラメータ  $(t^1, \dots, t^d)$  に依存する線形 Lie 群  $G$  の元  $g$  を考える.  $t^i = \lambda x^i$  とおいて元を 1 変数関数  $g(\lambda)$  と見なすと, 与えられた微係数  $X_i$  の 1 次結合  $X \equiv \sum_{i=1}^d x^i X_i$  を用いて, 群の掛け算則

$$g(\lambda + \delta\lambda) = g(\delta\lambda)g(\lambda) \simeq \left(1 + \sum_{i=1}^d \delta t^i \cdot X_i\right) g(\lambda) = (1 + \delta\lambda \cdot X) g(\lambda) \quad (\delta\lambda \text{ の 1 次近似})$$

は微分方程式

$$\frac{d}{d\lambda} g(\lambda) = Xg(\lambda) \quad (3.43)$$

を与える. 再び  $g(0) = 1$  を考慮すると, 解は指数

$$g = \exp(\lambda X) = \exp\left(\sum_{i=1}^d t^i X_i\right) \quad (3.44)$$

で表される.

**note 2** ただし, ここでは微分方程式 (3.15) が任意の  $t$  に対して成り立つことを前提としていることに注意する. この場合には有限の変換を言わば無限小変換の繰り返しとして構成できる. 他方で単位元の近くでの 1 次近似  $A(t) \simeq A(0) + Xt$  しか与えられていない場合には, もちろん恒等元から離れるにつれて, 群の元をパラメータ化するやり方には膨大な自由度が生じる [2, § 2.1].

**例** 2次元回転群  $SO(2)$  に対しては

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \therefore X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

であり, 逆にこの生成子  $X$  に対して級数 (3.16-17) は, もとの回転行列  $A(t)$  を再現することが直接確かめられる.

3次元回転群  $SO(3)$  の元は行列式が 1 である  $3 \times 3$  の直交行列  $O$  である. 単位元の近くの元を  $O = 1 + M$  と表すと,  $M$  の 1 次までの近似で

$$1 = O^T O = (1 + M^T)(1 + M) \simeq 1 + M + M^T, \quad \therefore M^T = -M \quad (3.23-24)$$

が課せられるので,  $M$  は実交代行列である. その一般形は 3 つの実パラメータ  $t^1, t^2, t^3$  を用いて

$$M = \begin{pmatrix} 0 & t^3 & -t^2 \\ -t^3 & 0 & t^1 \\ t^2 & -t^1 & 0 \end{pmatrix}$$

と表すことができ (これは空間回転の自由度が 3 であることに整合する), ここでは仮定より各  $t^i$  は微小である. これを  $M = \sum_i t^i X_i$  と書くと, 3 つの  $t^i$  に対応する微係数は

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

と同定される. 任意の大きさの  $t^i$  に対しても, 単位元と連続的につながる  $SO(3)$  の元は, これら  $X_i$  を生成子として  $\exp(\sum_i t^i X_i)$  で与えられる.

note 1 ここでも無限小変換を繰り返し合成すれば,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( 1 + \sum_i \frac{t^i}{N} X_i \right)^N = \exp \left( \sum_i t^i X_i \right)$$

のように有限の  $t^i$  に対する元が得られる [2, § 2.1].

note 2  $\text{Tr} X_i = 0$  となっているので, 行列式の条件は自動的に満たされている (下記参照).

特に  $\exp(t^1 X_1), \exp(t^2 X_2), \exp(t^3 X_3)$  は [式 (3.14) から類推されるように], それぞれ  $x, y, z$  軸周りの回転を表し, 部分群  $SO(2)$  を成す. これは 1 助変数 [径数] 部分群の例である.

一般に線形 Lie 群の元である行列の独立成分の数を  $d$  とすると,  $d$  個のパラメータ  $t^i (i = 1, \dots, d)$  に対応して  $d$  個の独立な生成子  $X_i$  がある.

- 線形 Lie 群の Lie 代数 ……  $X_i$  の張るベクトル空間

- 例えば  $GL(n, \mathbf{C})$  の Lie 代数は  $n$  次の複素正方行列の全体

note 1 群 ( $SU(2)$  など) の表現  $\exp(\sum_i t^i X_i)$  と, その生成子  $X_i$  の代数 ( $su(2)$  など) の違いに注意する. 指数  $\exp(\sum_i t^i X_i)$  は群の値を, 生成子を基底とした線形結合  $\sum_i t^i X_i$  は代数の値をとると言われる [10, pp.61–62].

note 2 文献 [2, § 2.2] では生成子の交換関係 (4.2):  $[X_i, X_j] = \sum_k f_{jk}^i X_k$  のことを Lie 代数と呼んでいる. これは Lie 代数の構造が交換関係  $[X_i, X_j]$  を規定する構造定数  $f_{jk}^i$  で決まること (4.1 節冒頭) を踏まえれば納得できる.

- Lie 群の次元 ……  $d$

等価的に次のように定義しても良い.

定義 線形 Lie 群  $G$  が与えられたとき, 任意の実数  $t$  に対して,

$$\exp(tX) \in G$$

となる  $X$  の全体を  $G$  の Lie 代数という.

ここですまず  $SL(n, \mathbf{C})$  を考え, 単位元の近くの元を  $T = 1 + M$  と表すと,  $M$  の 1 次までの近似では行列式の条件として

$$1 = \det T = \sum_{i_1, \dots, i_n} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} (\delta_{1i_1} + M_{1i_1}) (\delta_{2i_2} + M_{2i_2}) \cdots (\delta_{ni_n} + M_{ni_n}) \simeq 1 + \text{Tr} M, \quad \therefore \text{Tr} M = 0$$

が課せられる. したがって行列式が 1 の行列に対する生成子は  $\text{Tr} X_i = 0$  を満たさねばならない. こうして  $SL(n, \mathbf{C})$  の Lie 代数は,  $\text{Tr} X = 0$  を満たす  $n$  次実正方行列  $X$  の全体となる.

次にユニタリー群  $U(n)$  を取り上げる.  $n$  次複素行列  $U$  は  $2n^2$  個の実パラメータで指定される. ところがユニタリー条件  $U^\dagger U = 1$  は  $[\sum_i U_{ij}^* U_{ik} = \delta_{jk}$  のフリーな添字の組  $(j, k)$  に応じた]  $n^2$  個の条件を課すので,  $n$  次ユニタリー行列  $U$  の独立な成分の数は  $d = 2n^2 - n^2 = n^2$  である. 再び単位元の近くの元を  $U = 1 + M$  と書いてユニタリー性を要求すると, 直行列に対する式 (3.23–24) は反 Hermiticity  $M^\dagger = -M$  に置き換わる. よって生成子は

$$X_i^\dagger = -X_i$$

を満たす  $n^2$  個の Hermite 交代行列  $X_i (i = 1, \dots, n^2)$  であり,  $U(n)$  の Lie 代数は  $n$  次 Hermite 交代行列の全体である.

note 逆に  $X_i$  が Hermite 交代行列のとき, 有限の実パラメータ  $t^i$  に対して  $U = \exp(\sum_i t^i X_i)$  はユニタリー行列である. 実際,  $U^\dagger = \exp(\sum_i t^i X_i^\dagger) = \exp(-\sum_i t^i X_i)$  であり\*11, 共通の指数の中身  $\sum_i t^i X_i$  どうしは交換することに注意すると, “指数法則”

$$U^\dagger U = \exp\left(-\sum_i t^i X_i\right) \exp\left(\sum_i t^i X_i\right) = 1 \quad (\text{同様に } UU^\dagger = 1)$$

が成り立つ. これはユニタリー性に他ならない (教科書では節末問題 3.6). なお  $X_i = iH_i$  と虚数単位をくり出して生成子  $H_i$  を再定義すると,  $H_i$  は Hermite 行列となる (4.2 節も参照). ここで  $n$  次 Hermite 行列もまた  $n^2$  個の独立な実パラメータを持つことに注意しよう\*12.

特殊ユニタリー群  $SU(n)$  に対してはさらに (行列式) = 1 という条件が課せられるから, 独立な行列成分の数は  $d = n^2 - 1$  である. 対応して生成子  $X_i$  には  $\text{Tr } X_i = 0$  の条件が加わり,  $SU(n)$  の Lie 代数はトレースレスの  $n$  次 Hermite 交代行列の全体となる.

複素直交群  $O(n, \mathbf{C})$  または (実) 直交群  $O(n)$  の元は直交行列  $O$  である. 直交行列の条件  $O^T O = 1$  は  $[\sum_i O_{ij} O_{ik} = \delta_{jk}$  の対称な添字の組  $(j, k)$  に応じた]  $n(n+1)/2$  個の条件を課す. よって群の次元は

$$\begin{aligned} O(n, \mathbf{C}) \text{ に対して} \quad d &= 2n^2 - 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n-1), \\ O(n) \text{ に対して} \quad d &= n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

である. また直交行列に対する条件 (3.24):  $M^T = -M$  は  $n$  に依らずに成り立つので, 生成子  $X_i$  は  $d$  個の複素ないし実の  $n$  次交代行列となる. ところで実直交行列の行列式は常に  $\pm 1$  である [ $O^T O = 1$  より  $(\det O)^2 = 1$ ]. しかるに [冒頭の  $SO(3)$  の例に関して言及したように], 実交代行列  $X_i$  は対角成分がゼロでトレースレスとなるので, 我々は  $\det O = +1$  の回転群  $SO(n)$  を得たことになる. つまり  $SO(n)$  もまた  $O(n)$  と同じく  $d = n(n-1)/2$  であり, その Lie 代数は  $n$  次実交代行列の全体である.

note このように (実) 直交群として回転群が得られるのは,  $O = 1 + M$  において単位元 1 と連続的につながる行列を考えたためだと考えられる. 他方  $\det O = -1$  となる直交行列  $O$  は空間反転を含む変換を表し, 恒等変換と連続的につながっていないと考えられる (教科書の 3.3 節 (pp.55–56) にこの点への言及がある).

シンプレクティック群  $Sp(n, \mathbf{R})$  の元は式 (3.11) を満たす  $2n$  次の実行列  $A$  である.  $A$  は  $4n^2$  個の実数成分を持ち, 式 (3.11) はそれらの間に  $n(2n-1)$  個の関係を与えるから,  $Sp(n, \mathbf{R})$  の次元は  $d = n(2n+1)$  である [節末問題 3.7]. また  $Sp(n, \mathbf{R})$  の Lie 代数は

$$X_i^T J + J X_i = 0$$

を満たす  $2n$  次の実行列  $X_i$  全体である [ $A = 1 + M$  を式 (3.11) に代入して  $M$  の 1 次まで残せば良い].

\*11 第 1 の等号では, 行列の指数を定義する級数展開を考えよ.

\*12 Hermite 性より  $n$  個の対角成分は全て実数であり,  $n(n-1)/2$  個の上三角成分を与えると, 下三角成分はそれらの複素共役として定まる. よって  $n$  次 Hermite 行列は  $n + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n^2$  個の実パラメータで特徴付けられる.

さらに相対論で学んだように、1 次変換  $x' = Ax$  が Lorentz 変換となる (すなわち内積 (3.12) を不変に留める) 条件は、Minkowski 空間の計量

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

の変換則

$$A^T g A = g \tag{3.36}$$

で与えられる [12, p.40]. 上式 (3.36) に微小変換  $A = 1 + M$  を代入すると分かるように、Lorentz 群の Lie 代数は

$$M^T g + g M = 0 \tag{3.37}$$

を満たす行列  $M$  の全体である.

**note** Lorentz 群は 3.1 節で導入した記法  $O(3,1)$  で表される. ただし空間回転の場合と同様、Lorentz 変換が恒等変換と連続的につながることを要求すると、得られる変換は本義 (ないし固有) Lorentz 変換 (すなわち時間反転と空間反転を含まない Lorentz 変換) に限られる. 本義 Lorentz 変換は  $\det A = +1$  を必要条件とするから、 $SO(3,1)$  に属する [11, p.3,p.5]. 教科書の問題 3.13 と第 8 章も参照.

以上の結果を表 2 にまとめる.

**note**  $SL(n, \mathbf{C})$  の次元  $2n^2 - 2$  について、 $n$  次複素行列  $A$  に対する条件  $\det A = 0$  は実部と虚部を持つので、 $2n^2$  個の実パラメータの間に 2 つの条件を課す. ユニタリー・シンプレクティック群  $Sp(n)$  については 3.1 節も参照. Lorentz 群の回転 6 について、変換行列  $A$  は  $4^2 = 16$  の成分を持つ. ところが式 (3.36):  $A_{\rho\mu} A_{\sigma\nu} g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu}$  は対称な添字の組  $(\mu, \nu)$  の選び方に応じた、10 個の条件を課すので、独立な成分は 6 個である. これは直観的には時空における“回転”として、 $tx$  面内、 $yz$  面内などの  ${}_4C_2 = 6$  通りを選べることと整合している.

Lie 代数は次の性質を持つ.

1.  $X$  が Lie 代数に属するなら、任意の実数  $a$  に対し  $aX$  も Lie 代数に属する.
2.  $X, Y$  が Lie 代数に属するなら、 $X + Y$  も Lie 代数に属する.
3.  $X, Y$  が Lie 代数に属するなら、交換子  $[X, Y] \equiv XY - YX$  も Lie 代数に属する.

最初の 2 つの性質は、行列を定数倍しても行列の和をとっても、Lie 代数を規定する行列の性質 (例えばトレースの Hermite 交代行列であることなど) は保持されることから分かる. これらの性質は Lie 代数がベクトル空間であることを意味する (生成子  $X_i$  がその基底を成す).

**第 3 の性質の確認**  $X, Y$  が Lie 代数に属するとき、 $\exp(\pm tX), \exp(\pm sY)$  は Lie 群の元であるから、それらの積も Lie 群の元でなければならない. ところが実パラメータ  $s, t$  の 2 次までの近似では

$$\exp(sX) \exp(tY) \exp(-sX) \exp(-tY) \simeq 1 + st[X, Y]$$

となる.

表2 Lie 群と Lie 代数

群	記号	群の元	次元	Lie 代数の元
複素一般 1 次変換群	$GL(n, \mathbf{C})$	複素正則行列	$2n^2$	任意の複素行列
実一般 1 次変換群	$GL(n, \mathbf{R})$	実正則行列	$n^2$	任意の実行列
複素特殊 1 次変換群	$SL(n, \mathbf{C})$	複素正則行列 (行列式) = 1	$2n^2 - 2$	任意の複素行列 (トレース) = 0
実特殊 1 次変換群	$SL(n, \mathbf{R})$	実正則行列 (行列式) = 1	$n^2 - 1$	任意の実行列 (トレース) = 0
ユニタリー群	$U(n)$	ユニタリー行列	$n^2$	Hermite 交代行列
特殊ユニタリー群	$SU(n)$	ユニタリー行列 (行列式) = 1	$n^2 - 1$	Hermite 交代行列 (トレース) = 0
複素直交群	$O(n, \mathbf{C})$	複素直交行列	$n(n-1)$	複素交代行列
直交群	$O(n)$	実直交行列	$n(n-1)/2$	実交代行列
特殊直交群, 回転群	$SO(n)$	実直交行列 (行列式) = 1	$n(n-1)/2$	実交代行列
ユニタリー・ シンプレクティック群	$Sp(n)$	$2n$ 次ユニタリー行列 $A^T J A = J$	$n(2n+1)$	$2n$ 次 Hermite 交代行列 $X^T J + J X = 0$
Lorentz 群	$O(3,1)$	4 次実行列 $A^T g A = g$	6	4 次実行列 $X^T g + g X = 0$

note 教科書では「 $s, t$  それぞれについて 1 次までの範囲で」(p.53, l.2) とあるものの、積  $st$  と同程度の 2 次の項まで考慮しなければ近似の一貫性がない。そして直接の計算で確かめられるように、このとき  $s^2$  と  $t^2$  の項は正確にゼロになる [3, p.107]。2 つの回転演算子  $\exp(i\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\phi/\hbar)$  が交換しないことを特徴付ける角運動量の交換関係  $[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$  を導くには、無限小回転角  $\phi$  の 2 次まで考慮する必要があったことが思い出される [6, § 3.1]。

右辺が微小変換を表す群の元であるためには、微小パラメータ  $u$  と Lie 代数の元  $Z$  を用いて  $1 + uZ$  と表されなければならないので、 $Z \propto [X, Y]$  と同定される。これは交換子  $X, Y$  が Lie 代数に属することを意味する。

交換子は次の性質を満たす。

1. 双線形

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z], \quad [X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]. \quad (a, b \in \mathbf{R})$$

2. 歪対称

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

3. Jacobi (ヤコビ) の恒等式

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

このとき多様体上のベクトル場の作るベクトル空間は、Lie 括弧を積演算として **Lie 代数** (あるいは **Lie 環**) を構成することを説明する。一般にベクトル空間  $W$  の任意の 2 個の要素  $x, y \in W$  を要素  $x \times y \in W$  に対応付ける双線形・歪対称な写像 (演算) が、Jacobi の恒等式

$$(x \times (y \times z)) + (y \times (z \times x)) + (z \times (x \times y)) = 0$$

を満たすとき、ベクトル空間  $W$  はこの演算を演算積として Lie 代数を構成するという [9, p.56]。よって Lie 群の Lie 代数 (生成子  $X$  の張る空間) は、この一般的な意味での Lie 代数——**抽象 Lie 代数** (教科書 p.59) ——にもなっている。

### 節末問題

3.7 シンプレクティック群  $\text{Sp}(n, \mathbf{R})$  の次元 本文で言及したように、式 (3.11) が  $A \in \text{Sp}(n, \mathbf{R})$  の  $4n^2$  個の実数成分の間に、 $n(2n-1)$  個の関係を課すことを確認する。 $2n$  次行列  $A$  もブロックに分けて

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と書くと

$$A^T J A = \begin{pmatrix} a^T & c^T \\ b^T & d^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^T c - c^T a & a^T d - c^T b \\ b^T c - d^T a & b^T d - d^T b \end{pmatrix}$$

なので (これは最左辺から期待されるように実交代行列となっている)、式 (3.11) は

$$a^T c = c^T a, \quad b^T d = d^T b, \quad a^T d - c^T b = 0$$

に帰す。第 1 式、すなわち

$$\sum_i a_{ij} c_{ik} = \sum_i c_{ij} a_{ik}$$

は  $j < k$  なるフリーな添字の組  $(j, k)$  と同じ数  $n(n-1)/2$  の独立な関係を与える。第 2 式も同様であり、第 3 式は  $n^2$  個の関係式なので、 $A$  の成分に課せられる条件数は合計

$$\frac{n(n-1)}{2} \times 2 + n^2 = n(2n-1)$$

である。

教科書 7.1 節における、Lie 代数に対する条件式 (7.2) も参照。

3.9  $n$  次正方行列  $A$  に対する公式  $\det(\exp A) = \exp(\text{Tr} A)$  の証明 [3, p.116, pp.226–227] [13, pp.88–90] 任意の  $n$  次正方行列  $B(x)$  に対し

$$\frac{d}{dx}(\det B) = \frac{d}{dx}(\varepsilon_{i_1 \dots i_n} B_{1i_1} \dots B_{ni_n}) = \sum_{k=1}^n \varepsilon_{i_1 \dots i_n} B_{1i_1} \dots \frac{dB_{ki_k}}{dx} \dots B_{ni_n} = \sum_{k,l} \Delta_{kl} \frac{dB_{kl}}{dx}$$

が成り立つ ( $\{i_k\}$  でも和をとる)。ただし最右辺における  $\Delta_{kl}$  は  $B$  の  $(k, l)$  余因子であり、最後の等号は、第 3 辺を

$$\sum_{k=1}^n \det \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{k1}' & B_{k2}' & \dots & B_{kn}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{pmatrix} \quad \left( \text{ただし } B_{kl}' \equiv \frac{dB_{kl}}{dx} \right)$$

と書いて  $k$  行目で展開することを考えれば分かりやすい. 特に逆行列を持つ  $B$  に対しては, 両辺を  $\det B (\neq 0)$  で割り,  $B^{-1} = \frac{1}{\det B} (\Delta_{kl})$  と表されることに注意すると,

$$\frac{1}{\det B} \frac{d}{dx} (\det B) = \text{Tr} \left( B^{-1} \frac{dB}{dx} \right)$$

と書き換えられる. ここで任意の  $n$  次正方行列  $C$  を用いて  $B(x) = e^{xC}$  とおくと<sup>\*13</sup>,  $\frac{dB}{dx} = BC$  となるので, 上式は

$$\text{Tr} C = \frac{1}{\det(e^{xC})} \frac{d}{dx} \det(e^{xC}) = \frac{d}{dx} \ln |\det(e^{xC})|$$

を与える<sup>\*14</sup>. 両辺を  $x$  で積分すると  $\det(e^{xC}) = \text{const} \times e^{x \text{Tr} C}$  であり,  $x = 0$  を代入すると  $\text{const} = 1$  と定まるので, 公式

$$\det(e^{xC}) = e^{x \text{Tr} C}, \quad \therefore \det(e^C) = e^{\text{Tr} C} (> 0)$$

を得る.

帰結 1  $\text{Tr} C = 0$  なる行列  $C$  に対して,  $e^C$  は行列式が 1 となること (およびその逆) が, 1 次近似に頼らず直接読み取れる.

帰結 2  $e^C (= B(1)) = A$  とおくと,  $C$  は “行列  $A$  の対数”  $C = \ln A$  と書くことが許される. このように  $\ln A$  を定義できる  $A$  に対して, 上式は

$$\ln \det A = \text{Tr} \ln A$$

と書き換えられる.

### 3.3 リー代数によるリー群の構成

本稿では 3.2 節で見たように,  $t^1 = \dots = t^d = 0$  で単位元  $\mathbf{1}$  と連続的につながる,  $d$  個の実数パラメータ  $(t^1, \dots, t^d)$  に依存する線形 Lie 群  $G$  の元は式 (3.44):

$$g = \exp \left( \sum_{i=1}^d t^i X_i \right)$$

で与えられる. この表式はその導き方より, 少なくとも単位元の充分近くでは正しい. [教科書ではこれを定理 3.1 としている. 繰り返せば, 微分方程式 (3.43) が任意の  $t^i$  で成り立てば, 有限の  $t^i$  でも正しいと考えられる.] 他方で単位元の近くにない元は上式のように書けるとは限らない. そのような例を 2 つ挙げる.

例 3.1  $U(n)$  や  $O(n)$  のように群のパラメータの変域が有限である群をコンパクト群という. 他方で  $SL(2, \mathbf{R})$  や Lorentz 群のようにパラメータの変域が無限区間にわたるものをノンコンパクト群という. ノンコンパクト群では全ての元が Lie 代数  $X$  を用いて  $\exp X$  と表せるとは限らない. 例えば実数全体を動くパラメータ  $t$  で特徴付けられる 2 字の実数行列

$$g(t) = \begin{pmatrix} -e^t & 0 \\ 0 & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

<sup>\*13</sup> 逆行列は  $B^{-1}(x) = e^{-xC}$  である. 実際  $C$  どうしは交換するので, “指数法則”  $e^{\pm xC} e^{\mp xC} = 1$  が成り立つ.

<sup>\*14</sup> 最右辺の  $|\dots|$  は絶対値を表す. 行列式は一貫して  $\det$  で表してきた.

は、行列式が 1 の正則行列なので  $SL(2, \mathbf{R})$  の元である。ところが常に  $(-e^{\pm t}) < 0$  なので、 $t$  をどのように選んでもこれを単位行列に一致させることはできない。また、これを  $SL(2, \mathbf{R})$  の Lie 代数  $X$  によって  $\exp X$  と表すことはできない。

note 教科書の言葉を補いつつ、このことを背理的に示す。もし  $g = \exp X$  と表せたとすると、3.2 節で見た Lie 代数の性質より  $X$  の定数倍  $X/2$  も Lie 代数に属する。これは

$$g^{1/2} \equiv \exp(X/2) \in SL(2, \mathbf{R})$$

を意味する。他方  $X$  どうしは交換するので、“指数法則”  $[\exp(X/2)]^2 = \exp X = g$  が成り立つ。これは  $g^{1/2}$  が見た目の通り、2 乗すると  $g$  になる“平方根”

$$g^{1/2} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{-e^t} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{-e^{-t}} \end{pmatrix} \quad (\text{複号任意})$$

に他ならないことを意味する。ところがこれは成分が実でないから、 $g^{1/2} \in SL(2, \mathbf{R})$  に矛盾する。よって示された。

例 3.2 3.2 節で見たように、単位元 1 と連続的につながる  $O(2)$  の元として得られるのは、行列式が +1 の回転群  $SO(2)$  の元 (3.14):

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = \exp(tX), \quad X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。他方、行列式が -1 の  $O(2)$  の元は空間反転の行列は空間反転の行列

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

を用いて

$$TA(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ -\sin t & -\cos t \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

と表され、[3.2 節の note で予想したように] これは連続的に単位元に近づけることができない。しかもこれは、指数  $\exp(tX)$  の形に表せないことが判明する。

一般に  $n$  次直交群  $O(n)$  のうち部分群  $SO(n)$  の元だけが、 $d = n(n-1)/2$  個の実数  $t^i$  で指数 (3.44) の形にパラメトライズされ、単位元と連続的につながることを示せる。 $O(n)$  の部分群  $SO(n)$  は単位元を含む  $O(n)$  の連結成分である。

ここで連結成分は次のように定義される。まず集合  $A$  の 2 つの元  $a, b$  に対して、 $a$  を始点、 $b$  を終点とする  $A$  中の連続曲線があるとき、すなわち  $A$  中に値をとる連続関数  $f(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) が存在して  $f(0) = a, f(1) = b$  であるとき、 $a, b$  は  $A$  内で結ばれているといい、 $a \sim b$  と表す。この定義により直ちに

1.  $a \sim a$
2.  $a \sim b$  ならば  $b \sim a$
3.  $a \sim b$  かつ  $b \sim c$  ならば  $a \sim c$

が成り立つ。例えば

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

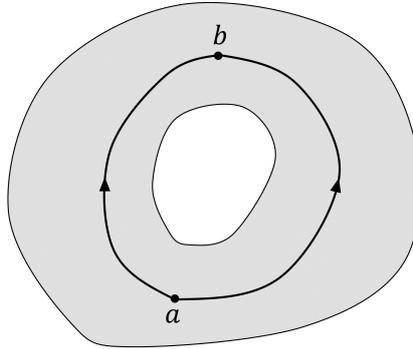


図6 中央の孔を横切ることなく、2点  $a, b$  を結ぶ一方の曲線を、もう一方の曲線に連続的に移行させることはできない

は回転行列

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos \pi t & -\sin \pi t \\ \sin \pi t & \cos \pi t \end{pmatrix} \quad (\text{したがって } f(0) = a, f(1) = b)$$

によって  $SO(2)$  の中で結ばれている。さて、集合  $A$  の元  $a$  と  $A$  内で結べる元の集合を、 $a$  を含む  $A$  の連結成分と呼び、 $C(a)$  で表す。特に単一の連結成分だけから成る集合を連結な集合という。また連結集合  $A$  の任意の2点を結ぶ曲線を  $A$  内での連続的な変形によって、同じ2点を結ぶ他の任意の曲線に移せるとき、 $A$  は単連結であると言われる。視覚的には、連結であって単連結でない集合の例として、図6のような円環状の領域が挙げられる。

以下では線形 Lie 群  $G$  に対して、単位元を含む連結成分を  $G_0$  で表す。

**定理 3.2**  $G_0$  は  $G$  の不変部分群である。

**証明** はじめに  $G_0$  が  $G$  の部分群であることを示す。ここで部分群の必要条件 (1.24–25) を思い出そう。[本稿ではこれら2条件が満たされていることを、個別に確認する。] まず  $G_0$  の任意の元  $a, b$  に対し積  $ab \in G_0$  を示す。 $a, b \in G_0$  の仮定より、これらを単位元  $\mathbf{1}$  と結ぶ  $G$  内の連続曲線  $f(t), g(t)$  がとれて、

$$f(0) = g(0) = \mathbf{1}, \quad f(1) = a, \quad g(1) = b.$$

そこで  $h(t) = f(t)g(t)$  を定義すると、これは  $G$  内の連続曲線で、 $h(0) = \mathbf{1}, h(1) = ab$  を満たす。これは積  $ab \in G_0$  を意味する。また  $f(t)$  は  $G$  の値をとるため逆元  $f(t)^{-1}$  を定義できることに注意すると、同様に  $a \in G_0$  ならば  $a^{-1} \in G_0$  が言える。以上より  $G_0$  は  $G$  の部分群である。

次に  $G_0$  が不変部分群であること、すなわち任意の  $g \in G_0$  に対して  $gG_0g^{-1} = G_0$  であることを示す。任意の元  $a \in G_0$  に対して再び上記のように  $f(t)$  を導入すると、 $f'(t) = gf(t)g^{-1}$  は  $G$  内の連続曲線であって  $f'(0) = \mathbf{1}, f'(1) = gag^{-1}$  を満たすから、 $gag^{-1} \in G_0$  となる。したがって集合の関係として  $gG_0g^{-1} \subset G_0$  が成り立つ。同様に  $g^{-1}G_0g \subset G_0$  すなわち  $G_0 \subset gG_0g^{-1}$  が言えるので、 $gG_0g^{-1} = G_0$  である。

**定理 3.3**  $G$  の元  $g$  を含む連結成分  $C(g)$  について、 $C(g) = gG_0 = G_0g$  である。

**証明** 任意の元  $a \in G_0$  に対して前定理の証明時と同様に  $f(t)$  を導入すると、 $f'(t) = gf(t)$  は  $G$  内の連続曲線であって  $f'(0) = g, f'(1) = ga$  を満たすから、

$$ga \sim g, \quad \therefore gG_0 \subset C(g).$$

他方  $h$  を  $C(g)$  の任意の元とすると,  $G$  内で  $h$  と  $g$  を結ぶ連続曲線  $k(t)$  がとれる [ $k(0) = g, k(1) = h$ ]. このとき  $k'(t) = g^{-1}k(t)$  は  $G$  内の連続曲線であって  $k'(0) = \mathbf{1}, k'(1) = g^{-1}h$  を満たすから,

$$g^{-1}h \sim \mathbf{1}, \quad \therefore g^{-1}C(g) \subset G_0, \quad \therefore C(g) \subset gG_0.$$

以上より  $C(g) = gG_0$  である.

さらに [定理 3.2 より]  $G_0$  は不変部分群なので,  $gG_0 = G_0g$  が成り立つ [式 (2.7) を見よ].

**定理 3.4**  $G_0$  はそれ自身線形 Lie 群であり, 線形 Lie 群とその単位元を含む連結成分  $G_0$  の Lie 代数は同一である.

**証明**  $G_0$  は線形 Lie 群  $G$  の部分群であり, 一般に特定の性質を持った行列全体から成る線形変換群であるから, 3.1 節の定義により線形 Lie 群である. また  $G_0$  の単位元およびその近傍は  $G$  の単位元とその近傍でもあるから, 両者の微係数  $X_i$ , したがって Lie 代数が一致することは明らかである.

定理 3.2 および定理 3.3 より, 一般の線形 Lie 群  $G$  はいくつかの連結成分の和集合

$$G = G_0 \cup gG_0 \cup g'G_0 \cup g''G_0 \cup \dots \quad (\text{式 (2.5) を参照})$$

へと剰余類分解される (教科書 p.58 の図 3.2) [3, p.111].

次に単位元近傍以外の元に関する有用な定理を, 証明抜きで紹介する.

**定理 3.5 (ii)** コンパクトで連結な線形 Lie 群  $G$  の任意の元  $g$  は, その Lie 代数の適当な元  $X$  を用いて  $\exp X$  と書ける. したがって Lie 代数の基底  $X_1, \dots, X_d$  と適当な実数パラメータ  $t^1, \dots, t^d$  を用いて,

$$g = \exp \left( \sum_{i=1}^d t^i X_i \right)$$

と表される.

そこでコンパクトで連結な線形 Lie 群に対して  $X, Y$  をその Lie 代数の元とすると,  $\exp X$  と  $\exp Y$  の積も群の元となるから, 適当な Lie 代数の元  $Z$  を用いて

$$\exp X \exp Y = \exp Z$$

と表されねばならない. ここで  $Z$  はよく知られているように, 具体的には **Campbell-Hausdorff** の公式

$$Z = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]]) + \dots$$

で与えられる. [ここから特に  $[X, Y] = 0$  のとき, 通常の指数法則が成り立つことが見て取れる. また,] Lie 代数の元  $X, Y$  の交換子  $[X, Y]$  もまた Lie 代数に属するから [3.2 節], 確かに  $Z$  も Lie 代数の元となることが読み取れる.

なお教科書では 3.3 節の後半において, Lie 代数が与えられたとき逆に Lie 群が一意的に定まるかという問題について, いくつかの数学的な定理が紹介されている. 本稿ではそれらには立ち入らない.

### 3.4 リー群と多様体

本節では Lie 群を幾何学的な観点から説明する. 例えば Lie 群  $GL(n, \mathbf{C})$  の元は  $2n^2$  個の実数成分で特徴付けられる  $n$  次複素正則行列だから,  $2n^2$  次元数空間  $\mathbf{R}^{2n^2}$  の点と見なすこともできる. 正確には  $GL(n, \mathbf{C})$  は

$\mathbf{R}^{2n^2}$  そのものではなく、条件  $\det A = 0$  で決まる超曲面  $N = \{A, \det A = 0\}$  を除いた (開) 集合に対応付けられる。

$$\mathrm{GL}(n, \mathbf{C}) = \mathbf{R}^{2n^2} - N.$$

一般に線形 Lie 群は  $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$  の部分群だから、 $\mathbf{R}^{2n^2}$  の中の滑らかな超曲面で表され、微分可能多様体を成す。

### 微分可能多様体 [9, pp.37–38]

本稿では多様体の数学的に厳密ではあるが堅苦しい定義を与える代わりに、その意味合いを簡単にくみ取ってまとめよう。  $m$  次元 (無限回) 微分可能体  $M$  は  $m$  次元空間であって\*15、次の条件を満たす。

1.  $M$  の各点  $Q$  のまわりに一価連続な局所座標  $(q^1, \dots, q^m)$  を割り当てられる。
  - ↔ 同相写像  $\phi(Q) = (q^1, \dots, q^m)$  がある。
    - $\phi, \phi^{-1}$  が連続な 1 対 1 写像  $\phi$  を同相写像という。
2. 2 通りの座標系  $(q^1, \dots, q^m), (\bar{q}^1, \dots, \bar{q}^m)$  の間の座標変換が滑らかである。
  - ↔ 関数  $\bar{q}^k = \varphi^k(q^1, \dots, q^m)$  が無限回微分可能である。
    - $r$  回だけ微分可能であることを要求した場合、 $M$  は  $r$  回微分可能多様体と呼ばれる。物理では特に  $r = \infty$  の場合が重要である。

結局  $m$  次元微分可能多様体とは、何枚ものスムーズに重なる近傍で覆われ、どの点でもその点のまわりに局所座標系  $(q^1, q^2, \dots, q^m)$  が書き込め、したがって局所的にはユークリッド空間のように扱うことができる空間 (連続的な点の集合) である。

### 多様体上の関数と曲線 [9, pp.39–40]

多様体  $M$  の性質 → すべての座標系に共通した性質,  
幾何学的対象 → 座標変換によって変わらない対象。

$\Phi$  が 1 対 1 の写像で  $\Phi, \Phi^{-1}$  が微分可能のとき、 $\Phi$  を微分同相写像という。以降では多様体間の写像について必要なだけの微分可能性を仮定する。

- ★ 微分可能多様体  $M$  から  $N$  への微分同相写像があるとき、 $M$  と  $N$  は微分同相であるといい、一方の多様体を滑らかな変形により他方へ移行させることができる。例えばマグカップの表面とトーラス (ドーナツの表面) は微分同相である (図 7 参照, 教科書 pp.67–68).
- $M$  上の関数  $f: Q \rightarrow f(Q)$   
多様体  $M$  上の点  $Q$  を実数  $f(Q)$  に対応付ける写像  $f$  を、 $M$  上の関数という。
  - 点  $Q$  に充てられた座標  $q = (q^1, \dots, q^m)$  を用いて、  
簡単に  $f(Q) = f(q)$  と記しても構わない (物理学ではむしろこれが普通である)。
  - $f$  の連続性や微分可能性はその局所座標表示  $q \rightarrow f(q)$  についていう。

\*15 厳密には Hausdorff 空間 (任意の異なる 2 点を別々の開近傍に分けられる位相空間) である。もっとも物理で扱う空間 (配位空間, 状態空間, 相空間など) はすべてこの条件を満たしているから、あまり気にしなくてよい。



図7 マグカップの表面は連続的な変形によって、トーラス (ドーナツの表面) に移行させることができる

● N 上の曲線  $c: t \rightarrow c(t)$

実数  $t$  を多様体  $N$  上の点  $c(t)$  に対応付ける写像  $c$  を、 $N$  上の曲線という。

– このように本来、数学用語としての「曲線」は写像そのものを指す。

しかし曲線  $c(t)$  として、動点の軌跡をイメージした方が分かりやすいこともある。

方向微分と微分作用素 [9, pp.41–43]

多様体上での速度ベクトルと接空間を定義するために、方向微分を導入する。たった今導入した  $M$  上の「関数」 $f$  と「曲線」 $c$  を用いて、図8のような合成写像を考える。これは1変数  $t$  の単なる実数値関数  $f(c(t))$  だから、その導関数  $\frac{df(c(t))}{dt}$  を定義できる。そこで対応

$$f \mapsto v[f] \equiv \frac{df(c(t))}{dt}$$

を曲線  $c$  に沿った方向微分と呼び、方向微分作用素 (演算子)  $v$  を定義する。このとき  $v$  は  $M$  の局所座標系と無関係に定義されることになる。

次に点  $c(t)$  をその座標  $q(t)$  と同一視すると、

$$f \mapsto v[f] \equiv \frac{df(c(t))}{dt} = \dot{q}^i \partial_i f \tag{7}$$

(ただし  $\dot{q}^i \equiv \frac{dq^i}{dt}$ ,  $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial q^i}$ ) なので\*16, 方向微分作用素は局所座標を用いて

$$v = \frac{d}{dt} = \dot{q}^i \partial_i \tag{8}$$

と表される。

note 1  $f(q)$  を多様体上の定常的な場と解釈すると、式 (7) は動点 (粒子) の位置で評価した場の値の時間変化率 (いわゆる物質微分, Lagrange 微分) に他ならない。

note 2 本節の結果は、方向単位ベクトル  $\mathbf{n}$  を用いた通常方向微分の表式  $\mathbf{n} \cdot \nabla f$  と比較される。ただしここでは単位ベクトルの代わりに、速度  $(\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  を用いて方向が指定されている。

\*16 表記の煩わしさを厭わず、式 (7) が点  $Q = c(\tau)$  における値であることを明示すると、

$$v_Q[f] = \left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=\tau} = \dot{q}^i(\tau) (\partial_i f)_Q.$$

添字に関する和の記号は省略。

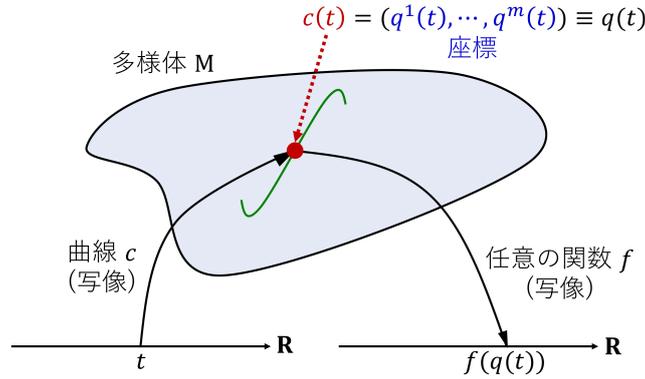


図8 合成写像  $t \in \mathbf{R} \mapsto c(t) \in M \mapsto f \circ c(t) \equiv f(c(t)) \in \mathbf{R}$

接ベクトルと接空間 [9, pp.43-46]

3次元空間内の曲面を座標  $q = (q^1, q^2)$  でパラメトライズすると、曲面上の動点の速度は

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(q(t)) = \dot{q}^i (\partial_i \mathbf{r}) \quad (9)$$

と表される。ここで位置ベクトル  $\mathbf{r}$  は曲面の外の3次元空間に突き出している。これに対し一般の多様体では、それを超曲面として内に含む高次元の空間が存在するとは限らない。そこで上式(9)から  $\mathbf{r}$  を形式的に取り除くと、式(8):  $v = \dot{q}^i \partial_i$  の形になる。そこで微分作用素(8)を速度ベクトルと見なすことが動機付けられる。

note つまり以下で見るように、 $c(t)$  に応じて(つまり動点の運動に応じて)  $\{\partial_i\}$  を基底とする様々な速度  $\{\dot{q}^i\}$  を持つ作用素  $v$  が得られる。その全体が接空間を張る。

実際、(与えられた点  $Q$  において) 微分作用素  $v_Q$  は和と実数倍に関してベクトル空間を張る：

$$\begin{cases} v = v^i \partial_i \\ u = u^i \partial_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v + u = (v^i + u^i) \partial_i \\ av = av^i \partial_i \quad (a \in \mathbf{R}) \end{cases}$$

そこで微分作用素  $v_Q$  を点  $Q$  における接ベクトル、 $v_Q$  の集合の張るベクトル空間  $TM_Q$  を点  $Q$  における接空間と呼ぶ。

また  $\{(\partial_i)_Q\}$  は接空間  $TM_Q$  の基底となる<sup>\*17</sup>。

理由  $\{(\partial_i)_Q\}$  は  $TM_Q$  の元であり、また  $TM_Q$  の元は  $\{(\partial_i)_Q\}$  の1次結合  $v_Q = v^i_Q (\partial_i)_Q$  で表される。そこで  $\{(\partial_i)_Q\}$  が1次独立であることを示せば十分である。以下では添字  $Q$  を省こう。

$$v[f] = v^i (\partial_i f(q)) = 0$$

を仮定する。ここで  $f$  を

$$f(q) = q^j(q) = q^j$$

で定義される座標関数  $q^j$  にとる(上式の最右辺における  $q^j$  は関数名ではなく座標そのものである)。すると

$$0 = v^i (\partial_i f(q)) = v^i (\partial_i q^j) = v^i \delta^j_i = v^j$$

となるので、 $\{\partial_i\}$  は1次独立である。

<sup>\*17</sup>  $\{(\partial_i)_Q\}$  における添字の  $Q$  は、微分演算子を任意の関数  $f$  に作用させた後で点  $Q$  における値  $(\partial f / \partial q^i)_Q$  をとることを表す。

$\{(\partial_i)_Q\}$  を自然基底といい,  $(\partial_i)_Q = (e_i)_Q$  とも表す.

- 接空間  $TM_Q$  は幾何学的対象である.

理由

$$\begin{cases} (\partial_i)_Q = (\partial/\partial q^i)_Q & \rightarrow TM_Q \text{を張る} \\ (\bar{\partial}_i)_Q = (\partial/\partial \bar{q}^i)_Q & \rightarrow \overline{TM}_Q \text{を張る} \end{cases}$$

とすると,

$$\bar{\partial}_i = \frac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^i} \partial_j, \quad \therefore \overline{TM}_Q \subset TM_Q.$$

同様に  $TM_Q \subset \overline{TM}_Q$  なので,  $TM_Q = \overline{TM}_Q$ .

- 接ベクトル  $v_Q$  は幾何学的対象である.

理由

$$\begin{cases} \dot{q}^i = (\partial \bar{q}^i / \partial q^j) \dot{q}^j : \text{反変ベクトル} \\ \bar{\partial}_i = \frac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^i} \partial_j : \text{共変ベクトル} \end{cases} \Rightarrow v = \dot{q}^i \partial_i = \dot{\bar{q}}^i \bar{\partial}_i.$$

### 接バンドルとベクトル場 [9, pp.46–49]

多様体  $M$  の各点  $Q$  に接ベクトル  $v_Q$  を 1 つずつ対応付ける写像

$$v : Q \mapsto v_Q$$

を  $M$  上のベクトル場という\*18.

例 1  $fv : Q \mapsto f(Q)v_Q$

例 2  $vf : Q \mapsto v_Q[f]$  ( $v_Q[f]$  は方向微分)

例 3  $\partial_i : Q \mapsto (\partial_i)_Q$  ( $\partial_i$  を基底場という)

操作的には,

$$\text{各点 } Q \text{ のベクトルの関係} \xrightleftharpoons[\text{添字 } Q \text{ を付ける}]{\text{添字 } Q \text{ を除く}} \text{ベクトル場の関係}$$

とできる. 例えば各点のベクトルと多様体上のベクトル場の局所座標表示はそれぞれ,

$$v_Q = v^i_Q (\partial_i)_Q, \quad v = v^i \partial_i.$$

さて, ここで幾何学的な観点から Lie 群の定義を述べる [大まかには文献 [9, § 1.4.10] の議論に対応].

1. Lie 群  $G$  とはその元全体の集合が微分可能多様体であり,
2. 群の元  $a, x$  に対して  $G$  自身への変換

$$\text{左移動 } L_a : x \longrightarrow ax,$$

$$\text{右移動 } R_a : x \longrightarrow xa$$

が座標  $x$  に関する無限回微分可能な関数  $L_a(x) = ax, R_a(x) = xa$  となるものをいう. 言い換えれば左移動および右移動は微分同相写像である.

\*18 これは多様体  $M$  から,  $M$  上のすべての点の接空間の集合

$$TM = \bigcup_{Q \in M} (TM)_Q$$

(接バンドルという) への写像である.

これまで見てきた線形 Lie 群は、この意味でも Lie 群になっていることを確認できる (本稿では証明を省略する)。

Lie 群  $G = \left\{ \exp \left( \sum_{i=1}^d x^i X_i \right) \right\}$  中の曲線  $g(t) = \exp \left( t \sum_{i=1}^d c^i X_i \right)$  を考えると、これは  $t = 0$  において単位元  $e$  を通る。単位元におけるこの曲線の接ベクトル  $d/dt$  は、

$$\left. \frac{d}{dt} g(t) \right|_{t=0} = \left( \sum_{i=1}^d c^i X_i \right) g(0)$$

より  $V_e = \sum_{i=1}^d c^i X_i$  と同定される。よって Lie 代数の基底  $X_i$  は群多様体  $G$  の単位元における接空間  $T_e(G)$  の基底でもあることになる。次に  $G$  の元  $a$  による左移動  $L_a : g \rightarrow ag$  を考えると、単位元  $e$  の近傍は  $a$  の近傍に、また  $e$  を通る曲線  $g(t)$  は  $a$  を通る曲線  $ag(t)$  に移る。曲線  $ag(t)$  の  $a$  における接ベクトル  $d/dt$  は、

$$\left. \frac{d}{dt} ag(t) \right|_{t=0} = \left( \sum_{i=1}^d c^i (aX_i a^{-1}) \right) ag(0)$$

より

$$V_a = \sum_{i=1}^d c^i (aX_i a^{-1}) = aV_e a^{-1}$$

と同定される。よって  $\{aX_i a^{-1}\}$  が点  $a$  における接空間  $T_a(G)$  の基底となる。また  $G$  の各点  $a$  にベクトル  $V_a$  を対応させることによって得られるベクトル場を左不変ベクトル場という (同様に右不変ベクトル場  $V_a = a^{-1}V_e a$  も得られる)。左不変ベクトル場  $V_a = aV_e a^{-1}$  はその表式より、単位元における接空間  $T_e(G)$  [Lie 代数の基底  $X_i$  の張る空間に他ならない] と同型である。そこで一般にはこの左不変ベクトル場を Lie 群  $G$  の Lie 代数と呼ぶ。

### 節末問題

3.17 Lie 括弧 多様体上のベクトル場  $u = u^i \partial_i$  のベクトル  $v = v^i \partial_i$  に沿う Lie 微分 (ベクトル場  $v$  の積分曲線に沿う  $u$  の変化率) は、公式

$$\mathcal{L}_v(u) = vu - uv \equiv [v, u]_L$$

で与えられる。最右辺をベクトル場  $v, u$  の **Lie 括弧** という。Lie 括弧は

$$\begin{aligned} [v, u]_L &= vu - uv = (v^k \partial_k)(u^i \partial_i) - (u^k \partial_k)(v^i \partial_i) = \{(v^k \partial_k u^i) - (u^k \partial_k v^i)\} \partial_i \\ &= \{(vu^i) - (uv^i)\} \partial_i \end{aligned}$$

と書き換えられるので、Lie 括弧  $[v, u]_L$  もまた各点で接ベクトルを与えるベクトル場である<sup>\*19</sup>。したがって Lie 括弧は、2つのベクトル場  $u, v$  をベクトル場  $[v, u]_L$  に対応付ける写像となっている。しかも Lie 括弧は明らかに交換子と同様、双線形性、歪対称性、および Jacobi の恒等式を満たすから、多様体上のベクトル場の作るベクトル空間は、Lie 括弧を積演算として **Lie 代数** を構成する [9, pp.53-56]。

<sup>\*19</sup> しかも各点  $Q$  での値について、ベクトル  $u = u^i \partial_i, v = v^i \partial_i$  そのものは不変量なので、 $\{\dots\}$  内の因子  $(vu^i) - (uv^i)$  はベクトル成分の変換則に従う。

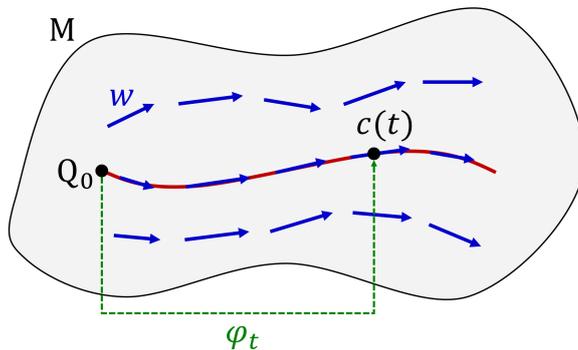


図9 多様体上のベクトル場と積分曲線

3.18 指数写像 多様体 M 上にベクトル場  $w$  が与えられているとき，初期位置  $q(0) = Q_0$  からベクトル場  $w$  に導かれて運動する動点の軌跡，すなわち

$$\frac{dq^i}{dt} = w^i(q) \quad (10)$$

の解  $q = c(t)$  が表す曲線を， $w$  の積分曲線（解曲線）という（図9 参照）\*20．[平たく言えば，積分曲線はベクトルを滑らかに繋いで得られる曲線であり，例えば流体の速度場の積分曲線は流線，電場の積分曲線は電気力線である．]

動点の初期位置  $Q_0$  を時間  $t$  後の位置  $Q_t = c(t)$  に対応付ける写像

$$\varphi_t : Q_0 \mapsto Q_t$$

の全体  $\{\varphi_t | t \in \mathbf{R}\}$  を相流ないし流れ（フロー）という．

$$\varphi_0 = \text{id. (恒等写像),}$$

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s,$$

$$\varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1}$$

より相流は群を成す．この群をベクトル場  $w$  が定める 1 径数変換群という [9, pp.49–50].

さて，多様体上の与えられた接ベクトルの場  $d/d\lambda = X$  に対する積分曲線  $x^i(\lambda)$  を求める問題を考えよう．接ベクトルを辺々左から  $x^i(\lambda)$  に作用させると

$$\frac{d}{d\lambda} x^i(\lambda) = X x^i(\lambda)$$

なので， $x^i(\lambda) = \exp(\lambda X) x^i(0)$ .

### 3.4 節について

■式 (3.69) の確認 式 (3.68):

$$1 + \sum_j y^j X_j = \left( 1 + \sum_j x^j X_j \right) a$$

\*20 式 (10) は，各点でのベクトル  $w^i \partial_i$  が動点の速度  $\dot{q}^i \partial_i$  に一致する条件  $\dot{q}^i \partial_i = w^i \partial_i$  と等価である．

の両辺に右から  $X_i^\dagger$  を掛けてトレースをとり、規格直交条件  $\text{tr}(X_j X_i^\dagger) = \delta_{ij}$  を適用すると

$$\text{tr}(X_i^\dagger) + y^i = \text{tr}(a X_i^\dagger) + \sum_j x^j \text{tr}(X_j a X_i^\dagger)$$

となる。これを整理して式 (3.69) を得る。

### 3.5 群上の積分

Lie 群  $G$  上の関数  $f(g)$  ( $g \in G$ ) の、群上での積分を定義することを考える。左移動と右移動は  $G$  自身への変換であって、積分変数にあたる群の座標  $g$  の変更と見なせる。そこで群多様体上の積分を、左移動あるいは右移動に対して不変な群上の積分——不変積分——として定義しよう。左移動に対して不変な積分

$$\int f(ag) dg_L = \int f(g) dg_L$$

を与える積分測度  $dg_L$  を左不変 **Haar** (ハール) 測度という (右不変 Haar 測度も同様に定義される)。Lie 群に対しては、このような積分測度は定数倍を除いてただ 1 つ存在することが知られている。

例 3.5 実数全体  $\mathbf{R}$  は和を積演算として加法群を成す。これは Abel 群だから左右の区別はない。しかるに

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+a) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

が任意の  $a \in \mathbf{R}$  に対して成り立つから、この群の不変測度は  $dx$  であり、不変積分は実数直線上の通常の積分となる。

また正の実数全体  $\mathbf{R}^+$  は乗法に関して群を成す。ところが

$$\int_0^{\infty} f(ax) \frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} f(x) \frac{dx}{x}$$

が任意の  $a \in \mathbf{R}^+$  に対して成り立つから、この群の不変測度は  $dx/x$  である。

ここで一般の Lie 群に対する左不変 Haar 測度を求めよう。まず  $n$  次元微分可能多様体上の点  $P$  における体積要素は、点  $P$  における  $n$  個の 1 次独立な微小接ベクトル  $dt_1, \dots, dt_n$  の張る体積

$$dV_n(P) = \begin{vmatrix} dt_1^1 & \cdots & dt_n^1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ dt_1^n & \cdots & dt_n^n \end{vmatrix} = \det [dt_1, \dots, dt_n] \quad (3.76)$$

として構成されることに注意しよう ( $n=2$  に対してこれは通常の平行四辺形の面積である)。体積要素 (3.76) の符号は、点  $P$  における局所座標系が右手系か左手系かを定義している。連結な Lie 群あるいは Lie 群の連結成分は、その全体にわたって右手系/左手系いずれか一定の向き付けが可能な、「向き付け可能多様体」である。なお向き付け可能でない多様体として、Möbius (メビウス) の帯が挙げられる (図 10 参照)。

さて、Lie 群  $G$  の単位元  $e$  近傍の元  $g = \exp\left(\sum_{i=1}^d \delta t^i X_i\right)$  の、 $h = \exp\left(\sum_{i=1}^d u^i X_i\right)$  による左移動は

$$\exp\left(\sum_{i=1}^d u^i X_i\right) \exp\left(\sum_{i=1}^d \delta t^i X_i\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^d \phi^i(u, \delta t) X_i\right) \quad (3.77)$$

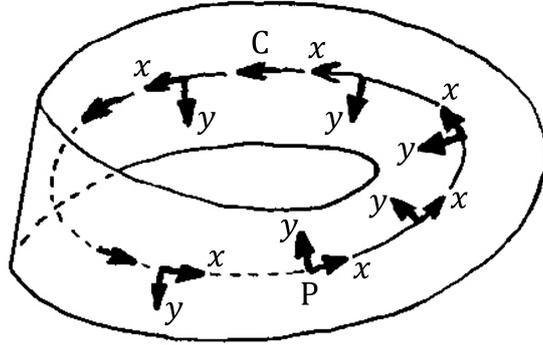


図 10 Möbius の帯. 点 P での右手座標系を曲線 C に沿って 1 周させると, 左手座標系になる. [局所座標系は 1 周すると言わば“裏面”に回り込み, 反転している.]

と書ける ( $d$  は Lie 群  $G$  の次元)  $[u \equiv \{u^i\}, \delta t \equiv \{\delta t^i\}]$ . この  $\phi^i(u, \delta t)$  に対して

$$C_{L_j}^i(h) = \left. \frac{\partial \phi^i(u, x)}{\partial x^j} \right|_{x=0}$$

を定義すると [ $h$  は  $u$  で決まることに注意], 左移動  $L_h$  に対して不変な Haar 測度は

$$dg_L = (\det [C_{L_j}^i(h)])^{-1} dV_d(h) \quad (3.82)$$

で与えられる.

理由

note まず上式 (3.77) は, Lie 代数に属するベクトル  $\sum_i \delta t^i X_i$  が左移動により, 有限の (位置) ベクトル  $\sum_i \phi^i X_i$  に移されると解釈できる. すると左移動した微小ベクトルを得るには, ベクトルの始点 ( $\delta t = 0$  に対応) と終点 ( $\delta t$  に対応) を移したベクトルの差をとる必要がある. (より一般に多様体間の接ベクトルを対応付ける自然な写像として, 「微分写像」を定義できる [9, pp.50-52].) なお「 $\phi^i(u, 0) = u^i$ 」(教科書 p.75 一番下の行) であることは, 上式 (3.77) で  $\delta t^i = 0$  とおくと分かるものの, 証明であからさまには用いない.

単位元  $e$  における微小ベクトル  $dt_a(e)$  ( $a = 1, \dots, d$ ) は [その成分  $dt_a^i(e)$  を Lie 代数の基底  $X_i$  に関する展開係数と同一視できるので (3.4 節末尾)],  $e$  を左移動した先  $h$  における微小ベクトル

$$dt_a^i(h) = \phi^i(u, dt_a) - \phi^i(u, 0) = \sum_{j=1}^d C_{L_j}^i(h) dt_a^j(e)$$

に移される. 両辺の行列式をとって体積要素の定義式 (3.76) を考慮すると, 単位元周りの体積要素は左移動に際して

$$dV_d(h) = \det [C_{L_j}^i(h)] dV_d(e)$$

と変化することが分かる. したがって式 (3.82) のように定義した積分測度は左不変 Haar 測度となる.

右不変 Haar 測度  $dg_R$  は, 左不変 Haar 測度 (3.82) における行列要素  $C_{L_j}^i(h)$  を

$$C_{R_j}^i(h) = \left. \frac{\partial \phi^i(x, u)}{\partial x^j} \right|_{x=0}$$

に置き換えて得られる.

note 右移動  $R_h$  に対しては, 式 (3.77) の代わりに

$$gh = \exp\left(\sum_{i=1}^d \delta t^i X_i\right) \exp\left(\sum_{i=1}^d u^i X_i\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^d \phi^i(\delta t, u) X_i\right)$$

のように,  $\phi^i$  の引数の順序を入れ替えた関係が成り立つことによる (それ以降の議論は同様).

$GL(n, \mathbf{C})$  の有界 (閉) 集合となる部分群をコンパクト群, 有界でないような群をノンコンパクト群という. コンパクト群では群のパラメータの範囲も有界 (閉) 区間となり [3.3 節の定義に整合], 群多様体の体積  $\int_G dg_L$  も有限である. [すぐ後で見ると, コンパクト群に対して  $dg_L$  は右不変測度でもある.] そこでコンパクト群  $G$  に対しては, 左不変測度を有限の全体積で割って再定義することにより,  $\int_G dg_L = 1$  として良い [規格化条件を課して不変測度の定数倍の不定性を除いた]. このとき  $G$  上の連続関数  $f$  の左不変積分

$$I(f) = \int_G f(g) dg_L$$

はただ 1 つ存在することが知られている. このことから左不変積分  $I(f)$  は右不変でもあること

$$\int_G f(gg_0) dg_L = \int_G f(g) dg_L, \quad (\forall g_0 \in G) \quad (3.86)$$

すなわちコンパクト群の左不変 Haar 測度は両側不変であることが示せる.

上式 (3.86) の証明 任意の元  $g_0 \in G$  に対して新しい積分

$$I^*(f) = \int_G f(gg_0) dg_L$$

を定義すると, これもまた  $G$  上の左不変積分である. ところが左不変積分はただ 1 つだから,

$$I^*(f) = I(f)$$

でなければならない. これは上式 (3.86) に他ならない.

## 4 リー代数の表現と分類

### 4.1 リー代数の一般的性質

Lie 代数は Lie 群の単位元近傍の局所的な性質によって決まるのに対し [3.2 節], 逆に 3.3 節の定理 3.5 で述べたように, コンパクトで連結な線形 Lie 群 ( $d$  次元とする) の任意の元は, その Lie 代数の基底  $\{X_i\}$  と実数パラメータ  $\{t^i\}$  を用いて

$$g = \exp \left( \sum_{i=1}^d t^i X_i \right) \quad (4.1)$$

と与えられる.

交換子  $[X_i, X_j]$  も Lie 代数に属するから [3.2 節末尾], 基底の 1 次結合

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^d f_{ij}^k X_k \quad (4.2)$$

で表される. この実数係数  $f_{ij}^k$  を構造定数という. Lie 代数の構造は, したがって対応する連結 Lie 群の性質は構造定数によって完全に決まる.

note 実際このことと整合して, 裏を返せば

構造定数自体は, 群  $G$  自身の掛算則から決まっているので, どのような表現 [基底  $X_i$  の表現行列] の上で計算しても同じである [11, p.139].

もっとも本節の後半で改めて Lie 代数の表現  $\rho(X_i)$  を定義していることを踏まえると, ここでは  $X_i$  として抽象的な Lie 代数の基底を想定していると考えられる.

以降しばらく Lie 代数に関する基本的な定義を列挙する.

部分代数 Lie 代数  $W$  の部分代数  $K$  とは,

$$X, Y \in K \quad \Rightarrow \quad [X, Y] \in K$$

となるような  $W$  の部分空間である. すると直ちに, 線形 Lie 群  $G$  の部分群 (Lie 群)  $H$  の Lie 代数  $K$  は,  $G$  の Lie 代数  $W$  の部分代数となる.

イデアル Lie 代数  $W$  のイデアル  $K$  とは,

$$X \in W, Y \in K \quad \Rightarrow \quad [X, Y] \in K$$

となるような  $W$  の部分代数である. 次の定理はその含意を教えてくれる.

参考: 教科書 p.80 の定理 4.1 (2) 連結線形 Lie 群  $G$  の連結な部分群  $H$  が  $G$  の不変部分群であるための必要十分条件は,  $H$  の Lie 代数  $K$  が  $G$  の Lie 代数  $W$  のイデアルとなることである (証明は節末問題 4.1).

(Lie 代数の) 直和 Lie 代数  $K, L$  の任意の元  $X \in K, Y \in L$  が可換であるとき ( $[X, Y] = 0$ ),  $X + Y$  の全体も Lie 代数になる [本稿次節で補足]. この Lie 代数を  $K$  と  $L$  の直和といい,  $K \oplus L$  と表す.

参考: 教科書 p.80 の定理 4.1 (3) 連結線形 Lie 群  $G$  が連結な部分群  $H_1, H_2$  の直積  $G = H_1 \times H_2$  であるための必要十分条件は,  $G$  の Lie 代数が  $H_1, H_2$  の Lie 代数  $K_1, K_2$  の直和  $W = K_1 \oplus K_2$  となることである (証明は節末問題 4.1) [群の直積は 1.2 節で定義].

可換 Lie 代数または Abelian (アーベリアン) Lie 代数 全ての元  $X, Y \in W$  が可換 (すなわち  $[X, Y] = 0$ ) である Lie 代数  $W$  のこと. 可換な線形 Lie 群の Lie 代数は Abel(ian) である.

Lie 代数  $W$  の全ての元と可換な部分集合  $S$  は可換なイデアルになる.

証明  $W$  は Lie 代数だから, 任意の元  $X, Y \in S, A \in W$  に対して Jacobi の恒等式

$$[A, [X, Y]] + [Y, [A, X]] + [X, [Y, A]] = 0 \quad (4.3)$$

が成り立つ. ところが仮定より第 2 項と第 3 項において  $[A, X] = 0, [Y, A] = 0$  なので,

$$[A, [X, Y]] = 0$$

が任意の  $A \in W$  に対して成り立つ. これは  $S$  が  $W$  の部分代数であることを意味する. その上で,  $S$  が可換なイデアルであることは,  $S$  の定義より明らかである.

$S$  を Lie 代数  $W$  の中心という. [これを 1.2 節で定義した群の中心と混同しないよう注意しよう.] 線形 Lie 群  $G$  の中心  $Z$  の Lie 代数は, 群  $G$  の Lie 代数  $W$  の中心  $S$  である.

- 半単純 Lie 代数 …… 可換なイデアルを含まない Lie 代数
- 単純 Lie 代数 …… いかなるイデアルをも含まない Lie 代数

note とは言え, いかなる Lie 代数も明らかに自分自身をイデアルに持つ (教科書 p.82). 全体の代数, および 0 (だけから成る代数) は, 自明な部分代数であって, 正確には単純 Lie 代数は自明でない不変部分代数を 1 つも含まない Lie 代数と言える [2, p.52].

同様に群に対しても,

- 半単純 Lie 群 …… Lie 代数が半単純である連結 Lie 群
- 単純 Lie 群 …… Lie 代数が単純である連結 Lie 群

と形容する (教科書では p.84). 実は半単純 Lie 代数は単純 Lie 代数の直和になっている [本節の定理 4.3].

構造定数は, その定義式 (4.2) より反対称性

$$f_{ij}^k = -f_{ji}^k \quad (4.4)$$

を持つ. また Jacobi の恒等式

$$[X_i, [X_j, X_k]] + [X_j, [X_k, X_i]] + [X_k, [X_i, X_j]] = 0$$

は, 式 (4.2) を用いると構造定数に対する恒等式

$$f_{jk}^n f_{in}^m + f_{ki}^n f_{jn}^m + f_{ij}^n f_{kn}^m = 0 \quad (4.6)$$

に焼き直される [文献 [2, p.49] [11, pp.139–140] で学習済み (教科書では節末問題 4.2)]. ただし以降, 繰り返された上下の添字に関して和をとるものと約束する.

ここで Cartan (カルタン) 計量

$$g_{ij} \equiv f_{in}^m f_{jm}^n (= g_{ji}) \quad (4.7)$$

を定義する. Abelian 代数に対しては  $[f_{ij}^k]$  は, したがって  $g_{ij}$  はゼロである. 行列  $g \equiv (g_{ij})$  は行列式が  $\det g \neq 0$  のとき,

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$$

なる逆行列 ( $g^{ij}$ ) が存在する. そこで  $g_{ij}$  および  $g^{ij}$  を用いて添字の上げ下げを定義できる. 例えば

$$f_{jki} = g_{in} f_{jk}^n \quad (4.9)$$

を定義すると, これは添字  $i, j, k$  に関して完全反対称となる [節末問題 4.3].

以上を踏まえて, 定理を導入する.

**定理 4.2** 半単純 Lie 代数  $\Leftrightarrow \det g \neq 0$ .

**証明**  $\det g \neq 0$  となる Lie 代数は半単純であることの証明を, 教科書を補足しつつまとめる (逆証は教科書と同様, 省略する).

既に指摘したように, あらゆる Lie 代数は少なくとも自分自身をイデアルに持つ. よって Lie 代数  $W = \{X_i, i = 1, \dots, d\}$  がイデアル  $K = \{X_a, a = 1, \dots, r, r \leq d\}$  を持つとしても一般性を失わない. するとイデアルの定義より, 交換子  $[X_i, X_a] \in K$  は  $\{X_a\}$  のみの線形結合で表される. これは

$$[X_i, X_a] = f_{ia}^b X_b$$

のように, 和の範囲が  $b = 1, \dots, r$  に限定されることを意味する. 言い換えれば  $r < d$  の場合に残りの値  $r + 1, \dots, d$  をとる添字を  $\alpha, \beta, \dots$  で表すと, 構造定数は

$$f_{ia}^\alpha = 0 \quad (11)$$

を満たす (以降の議論は  $r = d$  でも正しい).

ここで  $K$  を Abelian とすると

$$0 = [X_a, X_b] = f_{ab}^c X_c, \quad \therefore f_{ab}^c = 0$$

なので,

$$g_{ai} = f_{ab}^c f_{ic}^b = 0$$

となる (第 1 の等号では上式 (11) より, 和の範囲が限定されることに注意した). これは行列  $g = (g_{ij})$  の  $a$  行目 (したがって対称性より  $a$  列目) の成分が全てゼロであることを意味する. このとき行列式は  $\det g = 0$  となる [13, pp.52–53]. 対偶をとると,  $\det g \neq 0$  を満たす Lie 代数  $W$  はイデアルが Abelian でない, すなわち  $W$  は半単純 Lie 代数である.

さらに Cartan 計量を用いて, Lie 代数 [の元]  $A = a^i X_i, B = b^i X_i$  の双 1 次形式

$$(A, B) \equiv g_{ij} a^i b^j (\equiv (a, b)) \quad (4.11)$$

を定義する. これを **Killing** (キリング) 形式という. [計量の対称性  $g_{ij} = g_{ji}$  より, Killing 形式も対称性  $(A, B) = (B, A)$  を満たすことが見て取れる.] このとき Cartan 計量は Lie 代数の基底  $X_i$  を用いて

$$g_{ij} = (X_i, X_j) \quad (4.12)$$

とも表される [本稿次節で補足]. また Lie 代数 [の元]  $A, B, C$  の交換子と Killing 形式に対して,

$$(A, [B, C]) = (B, [C, A]) = (C, [A, B]) = f_{ijk} a^i b^j c^k \quad (4.13)$$

が成り立つ [節末問題 4.4].

これまでの準備で, 我々は次の定理に取り組める段階に達した.

定理 4.3 半単純 Lie 代数は単純 Lie 代数の直和である。

証明 半単純 Lie 代数  $W$  が [その定義により一般性を失うことなく] イデアル  $K$  を含むとして,  $K$  の全ての元  $B$  と Cartan 計量の下で直交する  $W$  の元の集合

$$K^\perp = \{A \in W; (A, B) = 0, \forall B \in K\}$$

を定義する. ここで  $X, Y \in K^\perp, Z \in K$  に式 (4.13) を適用すると,  $[X, Y] \in K^\perp$  が判明するので,  $K^\perp$  は  $W$  の部分代数である.

note : 確認 実際

$$(X, [Y, Z]) = (Y, [Z, X]) = (Z, [X, Y])$$

において  $X, Y, Z \in W$  なので, 最初の 2 つの交換子  $[Y, Z], [Z, X]$  も Lie 代数  $W$  の元である. すると  $K^\perp$  の定義より上式の第 1 辺と第 2 辺は

$$(X, [Y, Z]) = (Y, [Z, X]) = 0$$

だから, 最右辺もまた  $(Z, [X, Y]) = 0$  となる. これは  $[X, Y] \in K^\perp$  を意味する.

参考 :  $K^\perp$  の基底 [定理 4.2 の証明と同じ記法で]  $K$  の基底を  $X_a (a = 1, \dots, r)$ , 半単純 Lie 代数  $W$  の残りの基底を  $X_\alpha (\alpha = r + 1, \dots, d)$  と書こう. このとき  $\det(g_{ab}) \neq 0$  より  $g_{ab}$  の逆行列  $g^{ab}$  が存在して,

$$\tilde{X}_\alpha = X_\alpha - (X_\alpha, X_a) X_b g^{ab}$$

は  $K$  の基底  $X_a$  に直交する  $K^\perp$  の基底である.

note :  $\det(g_{ab}) \neq 0$  について 定理 4.2 の証明では, イデアル  $K$  が Abelian のとき  $g_{ai} = 0$ であることを示した. これは  $\det(g_{ij}) = 0$  のみならず  $\det(g_{ab}) = 0$  も含意するから, 対偶をとれば定理 4.2 の代わりに

$$\det(g_{ab}) \neq 0 \Rightarrow \text{Lie 代数 } W \text{ は半単純}$$

まで言える (厳密にはその逆を利用した).

note : 基底  $\tilde{X}_\alpha$  と  $X_a$  の直交性の確認

$$\begin{aligned} (X_a, \tilde{X}_\alpha) &= (X_a, X_\alpha - (X_\alpha, X_b) X_c g^{bc}) \\ &= (X_a, X_\alpha) - (X_\alpha, X_b) (X_a, X_c) g^{bc} \\ &= (X_a, X_\alpha) - (X_a, X_\alpha) = 0. \quad (\because (X_a, X_c) g^{bc} = g_{ac} g^{bc} = \delta_a^b) \end{aligned}$$

なお  $\tilde{X}_\alpha$  の表式は Schmidt の直交化を想起させる.

さて,  $A \in K^\perp, B \in K, C \in W$  として再び式 (4.13) を適用すると,

$$(B, [C, A]) = (C, [A, B]) = (A, [B, C]). \quad (4.14)$$

ところが  $K$  はイデアルなので  $[B, C] \in K$  であることに注意すると,  $[K^\perp$  の定義とより] 上式 (4.14) 最右辺は  $(A, [B, C]) = 0$  となる. すると最左辺もまた  $(B, [C, A]) = 0$  なので  $[C, A] \in K^\perp$  となるから,  $K^\perp$  もイデアルであることが分かる. [ここで冒頭で示したように,  $K^\perp$  が  $W$  の部分代数であることも考慮した.]

ところでベクトル空間  $W$  の任意の元は  $K$  の元と  $K^\perp$  の元の和に分解できるから, 常に  $W = K \cup K^\perp$  と書ける [現に  $W$  の基底  $\{X_a, \tilde{X}_\alpha\}$  をとれる]. ここまでで我々はイデアル  $K$  に対し,  $K^\perp$  もイデアル

となることを示したことになる。次にこれが直和  $W = K \oplus K^\perp$  になっていることを証明しよう。[本節冒頭の直和の定義より]  $[A, B] = 0$  を示せば良い。式 (4.14) の第 2 辺も  $(C, [A, B]) = 0$  であることに注目すると、 $[A, B]$  は  $W$  の全ての元と直交している。[また  $W$  は半単純 Lie 代数と仮定しているので、定理 4.2 より  $\det g \neq 0$  である。] そこで一般に「ベクトル空間  $W$  の計量  $g_{ij}$  が  $\det g \neq 0$  を満たすとき、 $W$  の全ての元と直交する元は 0 しかない」ことが言えれば、 $[A, B] = 0$  となって証明が完了する。この一般論は次のように示される。 $W$  の基底  $\{X_i\}$  を用いて任意の元を  $X = x^i X_i$  と書こう。これが  $W$  の任意の元と直交することを仮定すると、全ての基底  $X_i$  に対し

$$0 = (X_i, X) = x^j (X_i, X_j) = g_{ij} x^j.$$

ところが  $\det g \neq 0$  のとき  $g = (g_{ij})$  の逆行列が存在するので、確かに  $x^i = 0, \therefore X = 0$  となる。こうして予告通り、 $W$  を 2 つのイデアルの直和  $K \oplus K^\perp$  に分解できることが示された。 $K$  または  $K^\perp$  がなおイデアルを含んでいる場合にも\*21、ここまでの処方を書き返せば、それ以上イデアルを含まない部分代数の直和、すなわち単純 Lie 代数の直和に  $W$  を分解できる。[ $W$  の次元が有限である以上、この手続きはいずれ終わると考えられる。]

この定理 4.3 を定理 4.1(3) と合わせると、半単純 Lie 群は単純 Lie 群の直積と言える。

2.4 節では群  $G$  の掛け算則を保つように、元  $g \in G$  の表現  $D(g) \in GL(n, \mathbf{C})$  を定義した。同様に Lie 代数  $W$  の元  $A$  に  $n$  次正方行列  $\rho(A)$  を対応させる準同型写像 (掛け算則を保つ写像)  $\rho$  を、Lie 代数の表現という。すると Lie 代数の基底の交換関係 (4.2) に対応して、

$$[\rho(X_i), \rho(X_j)] = f_{ij}^k \rho(X_k) \quad (4.15)$$

が成り立つ。また Lie 群の元 (4.1) の表現は、Lie 代数の表現  $\rho$  を用いて

$$D(g) = \exp [t^i \rho(X_i)] \quad (4.16)$$

と表される。

ここで成分が

$$\{\rho(X_i)\}_j^k = f_{ij}^k \quad (4.17)$$

で与えられる行列  $\rho(X_i)$  を定義すると、これは Jacobi の恒等式 (4.6) より上式 (4.15) を満たすことが確かめられるので、Lie 代数の表現行列となっている。[文献 [2, pp.49–50] [11, pp.139–140] で学習済み。本節冒頭で見たように、Lie 代数の構造は構造定数で完全に決定されることを思い出そう。] この表現を随伴表現といい、 $\text{ad}(X_i)$  と表す。随伴表現を用いて、Cartan 計量 (4.7) と Killing 形式 (4.11) は

$$g_{ij} = \text{Tr}\{\text{ad}(X_i)\text{ad}(X_j)\}, \quad (4.18)$$

$$(A, B) = \text{Tr}\{\text{ad}(A)\text{ad}(B)\} \quad (4.19)$$

と表される [本稿次節で確認]。

Lie 代数の元と表現行列が特に 1 対 1 に対応する表現を忠実な表現という。Lie 代数の中心、すなわち Lie 代数の全ての元と可換なイデアル [式 (4.3) の箇所を参照] に対しては、[構造定数がゼロなので] 任意の元  $X$  について  $\text{ad}(X) = 0$  となるから、随伴表現は 1 対 1 対応にならない。しかしながら実は、随伴表現は Lie 代

\*21 本稿では「イデアル  $K$  はそれ自身、単純リー代数として一般性を失わない」(p.83, 1.8–9) という教科書の但し書きを省略したため、ここで  $K$  がイデアルを含む可能性も考えた [3, p.144]。

数の中心を除いて忠実な表現になっている。半単純 Lie 代数は中心を持たないので [式 (4.3) の箇所を参照], その随伴表現は忠実である。Lie 代数の随伴表現  $\rho(X_i) = \text{ad}(X_i)$  に対して, 式 (4.16) は Lie 群  $G$  の随伴表現  $\text{Ad}(G)$  を与える。これは群の中心  $Z$  [1.2 節] を除いて群の忠実な表現である。  $g \in Z$  に対しては [指数 (4.16) の中身  $\text{ad}(X) = 0$  より]  $\text{Ad}(g) = 1$  だから,  $Z$  は準同型写像  $G \rightarrow \text{Ad}(G)$  の核 [2.1 節] である。よって準同型定理 2.1 [2.3 節] より, 随伴表現  $\text{Ad}(G)$  は剰余類群  $G/Z$  の忠実な表現になる。

例 4.1 3.2 節で見たように,  $\text{SO}(3)$  の Lie 代数の基底  $X_i$  は表現行列 (3.26) で与えられる。交換子の反対称性より, 非自明な交換子  $[X_i, X_j]$  は  $(i, j) = (1, 2), (2, 3), (3, 1)$  のみである。直接の計算で確かめられるように, それらは

$$[X_i, X_j] = -X_k, \quad (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \quad (4.20)$$

を満たす [本稿次節で確認, 角運動量代数に対応]。よってゼロでない構造定数は

$$f_{12}^3 = f_{23}^1 = f_{31}^2 = -1, \quad \therefore f_{21}^3 = f_{32}^1 = f_{13}^2 = +1$$

に限られる。すると Cartan 計量は

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -2, \quad \text{その他の } g_{ij} = 0$$

となる [本稿次節で補足]。このとき  $\det g = -8 \neq 0$  だから, [本節の定理 4.2 とより]  $\text{SO}(3)$  の Lie 代数は半単純である。(実際には  $\text{SO}(3)$  の Lie 代数はいかなるイデアルも含まず, 単純である。) また随伴表現  $\text{ad}(X_i)$  は式 (3.26) の行列そのもので与えられる [本稿次節で確認]。

## 節末問題

4.1 定理 4.1 の証明 本稿ではひとまず定理 4.1 (2) の必要性「 $H$  が不変部分群  $\Rightarrow K$  はイデアル」の証明を, 巻末の略解 (や文献 [3, p.142]) よりも正確にまとめる [2, p.52]。適当な Lie 代数の元  $X \in K, Y \in W$  を用いて, 少なくとも単位元の近くでは群の元を  $h = e^X \in H, g = e^Y \in G$  と書ける (このとき  $g^{-1} = e^{-Y}$ )。不変部分群の条件は

$$ghg^{-1} = e^Y e^X e^{-Y} = e^Y \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} \right) e^{-Y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (e^Y X e^{-Y})^n = e^{X'} \in H \quad (12)$$

であり, 最後の等号では

$$X' \equiv e^Y X e^{-Y} = X + [Y, X] + \frac{1}{2}[Y, [Y, X]] + \dots \quad (13)$$

を定義した (上式 (13) 第 2 の等号は Baker-Hausdorff の公式による)。式 (12):  $e^{iX'} \in H$  のためには  $X'$  が, したがって式 (13) 最右辺の各交換子が部分代数  $K$  に入っている必要がある。  $[X, Y] \in K$  でなければならない。これは  $K$  がイデアルであることに他ならない。逆にこのとき  $e^{iX'} \in H$  であって, 同値性が崩れているのは, はじめに表式  $h = e^X, g = e^Y$  を仮定したからに過ぎない。

なお定理 4.1 (3) の十分性, すなわち「Lie 代数が直和  $W = K_1 \oplus K_2 \Rightarrow$  群は直積  $G = H_1 \times H_2$ 」であることは, 変換群の元が生成子の指数で表される場合は簡単に分かる。実際, 直和  $W = K_1 \oplus K_2$  の定義より  $X \in K_1, Y \in K_2$  に対して  $[X, Y] = 0$  なので, “指数法則”

$$\exp(X + Y) = \exp(X) \exp(Y) \quad (X + Y \in W)$$

が成り立つ。これは群  $H_1, H_2$  の元の組 (積 [3, pp.24–25], 表現では文字通りの積) が群  $G$  の元となることを, 表現の水準で表している。

4.3  $f_{ijk}$  の反対称性 構造定数  $f_{jk}^n$  の前2つの添字  $j, k$  に関する反対称性 (4.4) は, 式 (4.9):  $f_{jki} = g_{in} f_{jk}^n$  にも引き継がれる:

$$f_{jki} = -f_{kji}.$$

そこで後ろ2つの添字に関する反対称性  $f_{jik} = -f_{jki}$  を示せば充分である. 実際このとき, 前2つおよび後ろ2つの添字の入れ替えを繰り返すことにより, 第1と第3の添字に関する反対称性  $f_{jki} = -f_{ikj}$  も言えるので,  $f_{jik}$  は完全反対称であることになる.

まず定義式 (4.7), (4.9) を組合せると

$$f_{jki} = g_{in} f_{jk}^n = f_{il}^m f_{nm}^l f_{jk}^n$$

となる. ここで構造定数に対する Jacobi の関係式 (4.6) を  $i \rightarrow m, m \rightarrow l$  と置き換えて用いると, 最右辺における後ろ2つの  $f$  は

$$f_{nm}^l f_{jk}^n = -f_{jk}^n f_{mn}^l = f_{km}^n f_{jn}^l + f_{mj}^n f_{kn}^l$$

と書き換えられるので,

$$f_{jki} = f_{il}^m f_{km}^n f_{jn}^l + f_{il}^m f_{mj}^n f_{kn}^l \quad (14)$$

を得る. すると後ろ2つの添字を入れ替えた量は

$$f_{jik} = f_{kl}^m f_{im}^n f_{jn}^l + f_{kl}^m f_{mj}^n f_{in}^l$$

であり,

- 右辺第1項はダミー添字の逆向きの巡回置換  $l \rightarrow n, n \rightarrow m, m \rightarrow l$  により上式 (14) の第2項と逆符号
- 右辺第2項はダミー添字の順方向の巡回置換  $l \rightarrow m, m \rightarrow n, n \rightarrow l$  により上式 (14) の第1項と逆符号

であることが判明するので, 反対称性  $f_{jik} = -f_{jki}$  が示される.

参考 文献 [2, pp.51-52] [11, pp.138-139] では式 (4.2) の代わりに, 添字の上下の区別なく  $[X_i, X_j] \sim f_{ijl} X_l$  と書いて構造定数  $f_{ijl}$  を定義した. その上で両辺に右から  $X_k$  を掛けてトレースをとり, 規格直交条件  $\text{Tr}(X_i X_j) \sim \delta_{ij}$  を課して

$$f_{ijk} \sim \text{Tr}([X_i, X_j] X_k)$$

を導いた. これは右辺の表式より添字に関して完全反対称となっていることが見て取れる. (なお基底の“内積”  $\text{Tr}(X_i X_j) \sim \delta_{ij}$  は Killing 形式 (4.11-12) に対応する [11, p.139].) 4.2 節の定理 4.5 も見よ.

4.4 恒等式 (4.13) の確認

$$[B, C] = b^j c^k [X_j, X_k] = b^j c^k f_{jk}^l X_l$$

より, その基底  $X_l$  に関する第  $l$  成分は  $f_{jk}^l b^j c^k$  と同定される. これを定義式 (4.9), (4.11) と  $f_{ijk}$  の完全反対称性と考え合わせると,

$$(A, [B, C]) = g_{il} a^i (f_{jk}^l b^j c^k) = f_{jki} a^i b^j c^k = f_{ijk} a^i b^j c^k$$

を得る. なお式 (4.12) に関して補足したように, 機械的に Killing 形式の丸括弧の外に数係数を出して

$$(A, [B, C]) = (a^i X_i, f_{jk}^l b^j c^k X_l) = f_{jk}^l a^i b^j c^k (X_i, X_l)$$

としても、上式第2辺に合流する。

得られた結果  $(A, [B, C]) = f_{ijk}a^ib^jc^k$  において、 $A, B, C$  を (したがって  $a, b, c$  を) 順 (または逆) に巡回置換し、次いで添字  $i, j, k$  を順 (または逆) に巡回置換しよう。このとき再び  $f_{ijk}$  の完全反対称性を考慮すると、

$$\begin{aligned}(B, [C, A]) &= f_{ijk}b^ic^ja^k = f_{jki}a^ib^jc^k = f_{ijk}a^ib^jc^k, \\ (C, [A, B]) &= f_{ijk}c^ia^jb^k = f_{kij}a^ib^jc^k = f_{ijk}a^ib^jc^k\end{aligned}$$

となるので、式 (4.13) が示された。

#### 4.1 節について

■直和  $K \oplus L$  が Lie 代数になること (p.80) の確認 3.2 節末尾の Lie 代数の条件が全て満たされていることを確かめれば良い。仮定より  $X_i \in K, Y_j \in L$  に対して  $[X_i, Y_j] = 0$  であることに注意すると、双線形性は例えば

$$\begin{aligned}[a(X_1 + Y_1) + b(X_1 + Y_2), X_3 + Y_3] &= a[X_1, X_3] + a[Y_1, Y_3] + b[X_2, X_3] + b[Y_2, Y_3] \\ &= a[X_1 + Y_1, X_3 + Y_3] + b[X_2 + Y_2, X_3 + Y_3]\end{aligned}$$

のように確認できる。歪対称性も同様に

$$[X_1 + Y_1, X_2 + Y_2] = [X_1, X_2] + [Y_1, Y_2] = -[X_2, X_1] - [Y_2, Y_1] = -[X_2 + Y_2, X_1 + Y_1]$$

と確かめられる。最後に Jacobi の恒等式についても、

$$[X_1 + Y_1, [X_2 + Y_2, X_3 + Y_3]] = [X_1, [X_2, X_3]] + [Y_1, [Y_2, Y_3]]$$

に注意すると、

$$[X_1 + Y_1, [X_2 + Y_2, X_3 + Y_3]] + \text{cyclic} = ([X_1, [X_2, X_3]] + \text{cyclic}) + ([Y_1, [Y_2, Y_3]] + \text{cyclic}) = 0$$

と示される。

■Cartan 計量を Killing 形式で表した式 (4.12) について 基底  $X_i = \delta_i^k X_k$  の展開係数は Kronecker のデルタなので、

$$(X_i, X_j) = g_{kl}\delta_i^k\delta_j^l = g_{ij} : (4.12)$$

が成り立つ。これは操作的には、丸括弧内に Lie 代数の元  $X_i$  だけを残して式 (4.12) を適用し

$$(A, B) = (a^i X_i, b^j X_j) = a^i b^j (X_i, X_j) = g_{ij} a^i b^j$$

とすれば、Killing 形式の正しい値 (4.11) を計算できることを意味している。

■随伴表現に対する公式 (4.18–19) の確認

$$\text{Tr}\{\text{ad}(X_i)\text{ad}(X_j)\} = \{\text{ad}(X_i)\}^k_l \{\text{ad}(X_j)\}^l_k = f_{il}^k f_{jk}^l = g_{ij} : (4.18).$$

また随伴表現を  $\text{ad}(A) = a^i \text{ad}(X_i)$  と書いて展開係数  $a^i$  を定義すると、たった今示した式 (4.18) より

$$\text{Tr}\{\text{ad}(A)\text{ad}(B)\} = a^i b^j \text{Tr}\{\text{ad}(X_i)\text{ad}(X_j)\} = g_{ij} a^i b^j = (A, B) : (4.19).$$

■例 4.1 における交換子  $[X_i, X_j]$  の式 (4.20) の確認 式 (3.26) の表現行列  $X_i$  に対して,

$$\begin{aligned} X_1 X_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & X_2 X_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & X_3 X_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ X_2 X_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & X_3 X_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & X_1 X_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることによる.

■例 4.1 において「カルタン計量は  $g_{ii} = -2 (i = 1, 2, 3)$ , そのほかの成分は 0 となる」(p.86, 1.3.4) ことの確認 Cartan 計量の定義式 (4.7):  $g_{ij} = f_{in}^m f_{jm}^n$  の右辺において, ここでは構造定数は 3 つの添字が相異なる値 1, 2, 3 を 1 つずつとる場合のみゼロでないことに注意すると,

$$g_{11} = \sum_{\substack{(n,m) \\ =(2,3),(3,2)}} f_{1n}^m f_{1m}^n = 2f_{12}^3 f_{13}^2 = -2, \quad \text{同様に } g_{22} = g_{33} = -2.$$

また  $g_{ij}$  の非対角成分はゼロであることが分かる.

■例 4.1 で「随伴表現  $\text{ad}(X_i)$  は式 (3.26) の行列そのもので与えられることも容易に確かめられる」(p.86, 1.6.7) ことについて 例えば  $X_1$  について, 随伴表現の行列  $\rho(X_1) = \text{ad}(X_1)$  の  $(k, j)$  成分は, 定義式 (4.17) より  $\{\rho(X_1)\}^k_j = f_{1j}^k$  で与えられる. するとゼロでない成分は

$$\{\rho(X_1)\}^3_2 = f_{12}^3 = -1, \quad \{\rho(X_1)\}^2_3 = f_{13}^2 = +1$$

のみとなるから, 表現行列  $\rho(X_1)$  は式 (3.26) の  $X_1$  に一致する ( $X_2, X_3$  も同様).

## 4.2 コンパクト群とそのリー代数

物理で興味を持たれる  $\text{SO}(n), \text{SU}(n)$  といったコンパクト群は, その分類と表現に関して, Lie 代数に基づく非常に単純で美しい理論がある [4.3 節後半と 4.4 節]. ここでは準備として, コンパクト群の表現に関する基本的な定理を挙げる.

**定理 4.4** コンパクト群  $G$  の任意の表現  $D$  は, その表現空間  $V$  における適当な内積  $\langle x, y \rangle$  ( $x, y \in V$ ) を定義すれば, その内積に関してユニタリー表現となる. ここで表現  $D$  が内積に関してユニタリーとは, 任意の元  $h \in G$  の作用  $x \rightarrow D(h)x$  の下で内積  $\langle x, y \rangle$  が不変に留まることを言う.

**証明** 3.5 節 [末尾] で見たように, コンパクト群 (多様体) の積分測度は両側不変なので, 単に  $dg$  と書いて構わない\*22.  $V$  の 1 つの内積  $\langle x, y \rangle$  ( $x, y \in V$ ) に対して, 今 1 つの  $V$  上の内積

$$\langle x, y \rangle = \int_G \langle D(g)x, D(g)y \rangle dg \quad (4.21)$$

を定義できる. このとき群上の積分は [その定義により (3.5 節)] 右不変であることに注意すると, 群

\*22 さらに教科書では積分測度をコンパクト群の有限の体積で割って,  $\int_G dg = 1$  と規格化している (同じく 3.5 節の末尾を参照).

の任意の元  $h$  に対し

$$\begin{aligned}\langle D(h)x, D(h)y \rangle &= \int_G (D(g)D(h)x, D(g)D(h)y) dg = \int_G (D(gh)x, D(gh)y) dg \\ &= \int_G (D(g)x, D(g)y) dg = \langle x, y \rangle\end{aligned}$$

が成り立つ。これは  $D(h)$  が内積  $\langle x, y \rangle$  を変えないことを意味するから、示された。

**note** 内積 (4.21) を式 (3.2) のような成分計算で表せると仮定すれば、群のユニタリー表現  $D(h)$  は 3.1 節より通常のユニタリー行列でなければならない。次の定理 4.5 の証明ではこのことを暗に用いる。

**定理 4.5** コンパクト群の Lie 代数 (以下、コンパクト Lie 代数) の構造定数  $f_{ij}^k$  は  $i, j, k$  について完全反対称である。[note: 前節の問題 4.3 における「参考」も見よ.]

**証明** [構造定数は実数なので (式 (4.2) の箇所を参照)] Lie 代数の随伴表現 (4.17) は、したがって対応する群の随伴表現 (4.16) は実数行列である。他方、定理 4.4 よりコンパクト群の表現はユニタリーである。これらを合わせると、コンパクト群の随伴表現は直交行列となる。このとき Lie 代数は実交代行列でなければならない (3.2 節)。したがって行列要素 (4.17) に他ならない構造定数には、

$$f_{ij}^k = -f_{ik}^j \quad (4.23)$$

が課せられる。よって [前 2 つの添字に関する反対称性 (4.4) と考え合わせると]、構造定数は完全反対称となる。

コンパクト Lie 代数に対しては反対称性 (4.23) より、Cartan 計量の対角要素は

$$g_{ii} = \sum_{j,k} f_{ij}^k f_{ik}^j = \sum_{j,k} (f_{ij}^k)^2 \leq 0 \quad (i \text{ で和をとらない}) \quad (4.24)$$

となって、正の値をとり得ないことが分かる (等号は可換 Lie 代数に対応)。

**note** すぐ後に本節で見ると、これは基底を  $X_i = iT_i$  で再定義すれば、Killing 形式 (4.12) に他ならない“内積” ( $T_i, T_j$ ) (対称行列より対角化できる) が (半) 正定値であることを意味する。このことは文献 [11, p.139] の脚注において、「Killing (キリング) 形式と呼ばれる“内積”が  $\text{tr}(T_a T_b) = \delta_{ab}/2$  のように「正定値であるのは群  $G$  がコンパクト (compact) の場合だけである」とあることに整合する。文献 [2, p.51] ではこのことをコンパクト Lie 代数の定義に用いている。

**定理 4.6** 任意のコンパクト Lie 代数は単純 Lie 代数と 1 次元 Lie 代数の直和である。

**証明** コンパクト Lie 代数  $W$  をその中心  $W_c$  と、中心を含まない部分代数  $W_0$  の直和  $W = W_0 \oplus W_c$  に分解しよう。[中心  $W_c$  の定義より、その元  $X$  は任意の元  $Y \in W - W_c \equiv W_0$  と可換なので、直和で書ける (4.1 節冒頭の直和の定義を参照).] このとき  $W_0$  は半単純であることを、背理法にて証明できる。実際  $W_0$  が半単純でないと仮定すると、 $W_0$  は可換なイデアル  $K$  を含むため、 $X_a, X_b \in K, X_i \in W_0$  に対して

$$0 = [X_a, X_b] = f_{ab}^i X_i, \quad \therefore f_{ab}^i = 0$$

となる。すると [コンパクト Lie 代数に対する構造定数の反対称性 (4.23) とより]  $f_{ai}^b = -f_{ab}^i = 0$  である。またイデアルの性質 [より、交換子  $[X_a, X_i] \in K$  はイデアル  $K$  の基底  $\{X_b\}$  だけの線形結合で表されること] も考慮すると、

$$[X_a, X_i] = f_{ai}^b X_b = 0.$$

これは  $W_0$  が中心を含まないという仮定に反するから、 $W_0$  は半単純である。

ここまででコンパクト Lie 代数  $W$  は中心  $W_c$  と半単純 Lie 代数  $W_0$  の直和  $W = W_0 \oplus W_c$  であることが言えた。ここで前節 [の定理 4.3] で述べたように、半単純 Lie 代数  $W_0$  は単純 Lie 代数の直和である。また [中心  $W_c$  はその定義によって可換な Lie 代数であり]、可換な Lie 代数は明らかに 1 次元 Lie 代数の直和である。[実際 Lie 代数の基底  $X_i, X_j$  が可換だから  $([X_i, X_j] = 0)$ 、各基底の張る 1 次元 Lie 代数の直和になる。このとき群の元は  $\exp(t^1 X_1 + t^2 X_2 + \dots) = \exp(t^1 X_1) \exp(t^2 X_2) \dots$  となって、定理 4.1 (3) が満たされるのは見やすい。] 以上より示された。

1 次元 Lie 代数に対応するコンパクト Lie 群は [定理 4.4 より] 1 次元ユニタリー群  $U(1)$  である。よって定理 4.6 は任意のコンパクトな連結線形 Lie 群が一般に、単純 Lie 群と  $U(1)$  の直積であることを意味している。[文献 [11, pp.137–138] には  $U(N) \simeq U(1) \otimes SU(N)$  の手際良い説明がある (「 $\simeq$ 」は 2.3 節で導入した「同型」記号と推察される)。] こうして任意のコンパクト Lie 代数は単純 Lie 代数 [ $U(1)$  の代数を含む] に分解できるので、以下では単純 Lie 代数のみを考える。

コンパクト群はユニタリー表現を持つから (定理 4.4)、コンパクト Lie 代数の基底  $X_i$  の表現は Hermite 交代行列となる。そこで Lie 代数の基底を新たに  $\hat{X}_i = -iX_i (i = 1, \dots, d)$  で定義すると  $[X_i = i\hat{X}_i]$ 、その表現は Hermite 行列となる [3.2 節 (とその note)]。また構造定数を  $\hat{f}_{ij}^k = -if_{ij}^k$  [純虚数] と再定義すると、交換関係 (4.2) は

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = \hat{f}_{ij}^k \hat{X}_k$$

と書き換えられる。Cartan 計量も改めて  $\hat{g}_{ij} = (\hat{X}_i, \hat{X}_j) = -g_{ij}$  と再定義すれば、式 (4.24) より  $\hat{g}_{ii} \geq 0$  となる [コンパクト Lie 代数に対して ( $i$  で和をとらない)]。さらに  $A = a^i X_i = \hat{a}^i \hat{X}_i$  と書いて Lie 代数の新たな基底に関するベクトル成分  $\hat{a}^i = ia^i \in \mathbf{C}$  を導入すると、Killing 形式 (4.11) は

$$(A, B) = \hat{g}_{ij} \hat{a}^i \hat{b}^j$$

となって、形を変えない。

**note** 虚数単位をくり出すことに限らず、基底の任意の変更  $X_i \rightarrow \hat{X}_i$  の下で Killing 形式の表式 (4.11) は不変に留まる。実際、

$$g_{ij} = (X_i, X_j), \quad \hat{g}_{ij} = (\hat{X}_i, \hat{X}_j), \quad a^i X_i = \hat{a}^i \hat{X}_i, \quad b^i X_i = \hat{b}^i \hat{X}_i$$

さえ仮定すれば、

$$\hat{g}_{ij} \hat{a}^i \hat{b}^j = (\hat{a}^i \hat{X}_i, \hat{b}^j \hat{X}_j) = (a^i X_i, b^j X_j) = g_{ij} a^i b^j.$$

ここで  $\{\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_d\}$  の中から互いに可換なものを全て選び、それらを  $\hat{X}_a = H_a (a = 1, \dots, r)$  としよう。このとき

$$[H_a, H_b] = 0, \quad \therefore \hat{f}_{ab}^k = 0 \quad (a, b = 1, \dots, r; k = 1, \dots, d) \quad (4.26)$$

である。 $\{H_a\}$  の張る Lie 代数の部分空間を **Cartan 部分代数**、その次元  $r$  を Lie 代数の階数 (rank) という。

いい換えればリー代数の階数とは、対応するリー群の 1 次独立な生成子のうちで、互いに可換なもの最大の個数である。階数はリー代数の基底のとり方によらず、リー代数に固有な量である。(p.89, 1.15–17)

$$\begin{aligned}
\text{ad}(H_a) &= \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} r \\ \hline 0 \quad 0 \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{c} d-r \\ \hline 0 \\ \hline \text{---} \end{array} \\ \hline \end{array} \quad (4.28) \quad T^{-1}\text{ad}(H_a)T = \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} r \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{c} d-r \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \lambda_1^{(a)} \\ \hline -\lambda_1^{(a)} & 0 \end{array} \\ \hline \vdots \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \lambda_s^{(a)} \\ \hline -\lambda_s^{(a)} & 0 \end{array} \\ \hline \end{array} \quad (4.31) \\
& \quad (a = 1, \dots, r)
\end{aligned}$$

図 11 教科書の式 (4.28) と式 (4.31)

Cartan 部分代数の随伴表現は図 11 の式 (4.28) の形を持つことが分かる\*23.

式 (4.28) の理由 式 (4.26) とコンパクト Lie 代数における構造定数の完全反対称性 (式 (4.23) の箇所) を考え合わせると、随伴表現は

$$\{\text{ad}(\hat{X}_k)\}_b^a = \hat{f}_{kb}^a = 0 \quad (a, b = 1, \dots, r; k = 1, \dots, d) \quad (4.27)$$

となる。式 (4.27) および構造定数の反対称性より

$$\{\text{ad}(H_a)\}_k^b = \hat{f}_{ak}^b = 0, \quad \{\text{ad}(H_a)\}_b^k = \hat{f}_{ab}^k = 0$$

となるから。

さて、 $H_a$  の定義よりその表現行列  $\text{ad}(H_a)$  ( $a = 1, \dots, r$ ) も全て互いに可換だから、それらは適当な基底を選び同时对角化できる。随伴表現  $\text{ad}(iH_a) = \text{ad}(X_a)$  は定義式 (4.17) より実交代行列である。

note これは  $\text{ad}(H_a)$  の Hermite 性を表している：

$$-i\{\text{ad}(H_a)\}_i^j = -\{\text{ad}(iH_a)\}_i^j = \{\text{ad}(iH_a)\}_j^{*i} = -i\{\text{ad}(H_a)\}_j^{*i}, \quad \therefore \{\text{ad}(H_a)\}_i^j = \{\text{ad}(H_a)\}_j^{*i}.$$

これが文字  $H$  を採用している動機と推察される。

すると線形代数の定理により適当な直交行列  $T$  を用いて図 11 の式 (4.31) の形にできる。これは  $(d-r)$  が偶数でなければならないことを含意しており、この行列のゼロでない固有値は純虚数  $\pm i\lambda_1^{(a)}, \dots, \pm i\lambda_s^{(a)}$  ( $s = (d-r)/2$ ) で与えられる [以上、文献 [13, p.179] を見よ]。このとき  $\text{ad}(H_a)$  のゼロでない固有値は実数  $\pm\lambda_1^{(a)}, \dots, \pm\lambda_s^{(a)}$  であり、そのうちの 1 つを  $\alpha_a$  で表すと、 $-\alpha_a$  も固有値である。そこで固有値  $\pm\alpha_a$  に属する固有ベクトルを  $v_{\pm\alpha}$ 、その縦ベクトル成分を  $v_{\pm\alpha}^i$  ( $i = 1, \dots, d$ ) で表そう。 $[\{\text{ad}(H_a)\}]$  は同时对角化できるから、同時固有状態  $v_{\pm\alpha}$  にラベル  $a$  は不要である (教科書 p.103, 1.19) [3, p.146.] すると固有方程式は

$$\{\text{ad}(H_a)\}_j^i v_\alpha^j = \alpha_a v_\alpha^i, \quad \{\text{ad}(H_a)\}_j^i v_{-\alpha}^j = -\alpha_a v_{-\alpha}^i. \quad (4.32)$$

\*23 よって Cartan 部分代数のベクトル  $H = h^c H_c$  は  $\text{ad}(H_a)$  によりゼロベクトルに写像される：

$$\{\text{ad}(H_a)\}_b^c h^c = 0.$$

言い換えれば Cartan 部分代数は 1 次写像  $\text{ad}(H_a)$  の核である。

ところが  $\{\text{ad}(H_a)\}_j^i = -if_{aj}^i$  は純虚数であり  $\alpha_a$  は実数であることに注意して、上式 (4.32) 第 1 式の複素共役をとると

$$\{\text{ad}(H_a)\}_j^i v_\alpha^{j*} = -\alpha_a v_\alpha^{j*} \quad (4.33)$$

を得る。これを式 (4.32) 第 2 式と比較すると、 $v_{-\alpha} = v_\alpha^*$  が見出される [固有ベクトルの定数倍の任意性を除いて、本稿次節で補足]。[他方  $\alpha$  でラベルされる 1 つの同時固有状態  $v_\alpha$  について、 $\{\text{ad}(H_a)\}$  の固有値  $\{\alpha_a\}$  は一般に相異なる。そこで] 固有値  $\alpha_a (a = 1, \dots, r)$  を  $r$  次元空間のベクトル  $\alpha$  と見なして、ルートと呼ぶ。

ここで固有ベクトルには規格直交条件

$$(v_\beta, v_\alpha) = \delta_{\alpha+\beta, 0} \quad (4.34)$$

を課することができる。

上式 (4.34) の理由

$$\begin{aligned} \alpha_a(v_\beta, v_\alpha) &= (v_\beta, \text{ad}(H_a)v_\alpha) \quad (\because \text{固有方程式 (4.32)}) \\ &= \{\text{ad}(H_a)\}_k^j v_{\beta j} v_\alpha^k \quad (\because \text{killing形式の定義式 (4.11), } v_{\beta j} = g_{ij} v_\beta^i) \\ &= -\{\text{ad}(H_a)\}_j^k v_{\beta j} v_\alpha^k \quad (\because \{\text{ad}(H_a)\}_k^j = -if_{ak}^j \text{の反対称性 [本稿次節で補足])} \\ &= -(\text{ad}(H_a)v_\beta, v_\alpha) \quad (\because \text{第 2 の等号の再利用}) \\ &= -\beta_a(v_\beta, v_\alpha) \quad (\because \text{固有方程式 (4.32)}) \end{aligned} \quad (15)$$

より  $(\alpha_a + \beta_a)(v_\beta, v_\alpha) = 0$  なので、固有ベクトルを適当に規格化すれば、規格直交性 (4.34) を満たすことができる。

上式 (4.34) から直ちに、 $\text{ad}(H_a)$  の固有値  $\alpha_a$  は縮退していないことが言える。

背理法による論証 実際もし固有値  $\alpha_a$  に属する  $v_\alpha$  以外の固有ベクトル  $u_\alpha$  があるとすると、差  $v_\alpha - u_\alpha (\neq 0)$  も固有値  $\alpha_a$  に属する固有ベクトルとなる。他方で [上式 (15), したがって式 (4.34) で  $\beta = -\alpha$  とおいた式と、さらに  $v_\alpha \rightarrow u_\alpha$  と置き換えた式が成り立って]

$$(v_{-\alpha}, v_\alpha) = (v_{-\alpha}, u_\alpha) = 1$$

となる。[線形性に注意して辺々差をとると]  $(v_{-\alpha}, v_\alpha - u_\alpha) = 0$  であり、上式 (4.34) よりこれは  $v_\alpha - u_\alpha (\neq 0)$  が固有値  $\alpha$  に属さないことを意味するので、矛盾が生じる。よって示された。

[したがって  $(d-r)$  個の同時固有状態  $\alpha$  は相異なる。] そこで Lie 代数の新しい基底を

$$\begin{cases} H_a = \hat{X}_a & (r \text{ 個}) \\ E_\alpha = v_\alpha^i \hat{X}_i & (s = (d-r)/2 \text{ 個}) \\ E_{-\alpha} = v_{-\alpha}^i \hat{X}_i = v_\alpha^{i*} \hat{X}_i & (s = (d-r)/2 \text{ 個}) \end{cases}$$

と選ぼう。このとき式 (4.34) より

$$(E_\alpha, E_\beta) = (v_\beta, v_\alpha) = \delta_{\alpha+\beta, 0} \quad (4.35)$$

となる。ところで Cartan 部分代数の Cartan 計量に対して公式

$$\hat{g}_{ab} = (H_a, H_b) = \sum_\alpha \alpha_a \alpha_b \quad (4.36)$$

が成り立つ。

上式 (4.36) の導出

$$\begin{aligned}
\hat{g}_{ab} &= \{\text{ad}(H_a)\}^i_j \{\text{ad}(H_b)\}^j_i \quad (\because \text{式 (4.18)}) \\
&= \sum_{\alpha} \{\text{ad}(H_a)\}^i_j v_{\alpha}^j v_{\alpha k}^* \{\text{ad}(H_b)\}^k_i \quad \left( \because \text{固有ベクトルの完全性 } \sum_{\alpha} v_{\alpha}^j v_{\alpha k}^* = \delta^j_k \right) \\
&= \sum_{\alpha} \alpha_a \alpha_b v_{\alpha}^i v_{\alpha i}^* \quad (\because \text{式 (4.32), (4.33)}) \\
&= \sum_{\alpha} \alpha_a \alpha_b. \quad (\because \text{式 (4.34) : } 1 = (v_{\alpha}, v_{-\alpha}) = v_{\alpha}^i v_{-\alpha, i} = v_{\alpha}^i v_{\alpha i}^*,
\end{aligned}$$

和の記号を明示しない限り  $\alpha$  では和をとらない (以下同じ))

ただし上式 [したがって式 (4.36)] の和には固有値ゼロの固有関数  $v_0$  も含まれる [ものの, 最右辺へのゼロ固有値の寄与は自動的に除かれる]. これを式 (4.12) と合わせて, 式 (4.36) を得る.

基底  $\{H_a, E_{\alpha}, E_{-\alpha}\}$  の交換関係を調べよう. まず

$$\begin{aligned}
[H_a, E_{\alpha}] &= v_{\alpha}^j [\hat{X}_a, \hat{X}_j] = \hat{f}_{aj}^i v_{\alpha}^j \hat{X}_i = \{\text{ad}(H_a)\}^i_j v_{\alpha}^j \hat{X}_i = \alpha_a v_{\alpha}^i \hat{X}_i \\
&= \alpha_a E_{\alpha}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

である [ $\alpha \rightarrow -\alpha$  とした式も含意]. 次いで

$$[E_{\alpha}, E_{-\alpha}] = \alpha^a H_a \tag{4.38}$$

が見出される.

上式 (4.38) の導出

$$\begin{aligned}
[H_a, [E_{\alpha}, E_{-\alpha}]] &= [E_{\alpha}, [H_a, E_{-\alpha}]] + [[H_a, E_{\alpha}], E_{-\alpha}] \quad (\because \text{Jacobi の恒等式}) \\
&= 0 \quad (\because \text{式 (4.37)})
\end{aligned}$$

より  $[E_{\alpha}, E_{-\alpha}]$  は Cartan 部分代数に属するので,

$$[E_{\alpha}, E_{-\alpha}] = v_{\alpha}^i v_{-\alpha}^j [\hat{X}_i, \hat{X}_j] = v_{\alpha}^i v_{-\alpha}^j \hat{f}_{ij}^k \hat{X}_k$$

の最右辺における和は  $k = a = 1, \dots, r$  に限定される. すると

$$[E_{\alpha}, E_{-\alpha}] = v_{\alpha}^i v_{-\alpha}^j \hat{f}_{ij}^a H_a = -\{\text{ad}(H^a)\}_{ij} v_{\alpha}^i v_{-\alpha}^j H_a = \alpha^a H_a : \tag{4.38} \tag{16}$$

を得る [本稿次節で補足].

さらにルート  $\alpha, \beta$  に依存する適当な係数  $N_{\alpha, \beta}$  を用いて,

$$[E_{\alpha}, E_{\beta}] = N_{\alpha, \beta} E_{\alpha + \beta} \tag{4.39}$$

と書ける (和  $\alpha + \beta$  がルートでない場合は  $N_{\alpha, \beta} = 0$ ).

上式 (4.39) の理由

$$\begin{aligned}
[H_a, [E_{\alpha}, E_{\beta}]] &= [E_{\alpha}, [H_a, E_{\beta}]] + [[H_a, E_{\alpha}], E_{\beta}] \quad (\because \text{Jacobi の恒等式}) \\
&= (\alpha_a + \beta_a) [E_{\alpha}, E_{\beta}] \quad (\because \text{式 (4.37)})
\end{aligned}$$

が成り立つことに注目しよう。ここでルートの和  $\alpha_a + \beta_a$  もまたルートである，すなわち  $\text{ad}(H_a)$  の固有値であると仮定する。このとき固有値に縮退がないことを思い出せば，式 (4.37) とより  $[E_\alpha, E_\beta]$  は  $E_{\alpha+\beta}$  に比例しなければならない。[別証が節末問題 4.6 にある.]

以上で得られた Lie 代数の基底  $\{H_a, E_\alpha, E_{-\alpha}\}$  に対する関係 (4.26), (3.35-39) を，改めてまとめておく：

$$\begin{aligned} [H_a, H_b] &= 0, & [H_a, E_{\pm\alpha}] &= \pm\alpha_a E_{\pm\alpha}, & [E_\alpha, E_{-\alpha}] &= \alpha^a H_a, & [E_\alpha, E_\beta] &= N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}, \\ E_\alpha^\dagger &= E_{-\alpha}, & (E_\alpha, E_\beta) &= \delta_{\alpha+\beta,0}, & (H_a, H_b) &= \hat{g}_{ab} = \sum_\alpha \alpha_a \alpha_b. \end{aligned} \quad (4.40)$$

一連の交換関係 (4.40) を **Cartan** の標準形という。もとの基底  $\hat{X}_i$  の交換関係が構造定数  $\hat{f}_{ij}^k$  で決まるのに対し，新しい基底の交換関係は  $\alpha_a$  と  $N_{\alpha,\beta}$  で規定されていることが見て取れる。

note：式 (4.40) について 和の記号を明示しない限り  $\alpha$  では和をとらないことに，改めて注意を促しておく。特に式 (4.40) の関係式  $E_\alpha^\dagger = E_{-\alpha}$  については，定義式

$$E_\alpha = v_\alpha^i \hat{X}_i, \quad E_{-\alpha} = v_\alpha^{i*} \hat{X}_i$$

を比較すれば分かる。ただし既に本節の note で言及した  $\text{ad}(H_a)$  の Hermite 性と同じ論法で，任意の基底  $\hat{X}_i$  が随伴表現では Hermite になると考える (少なくとも節末の例 4.2 とは整合)。実際これは定理 4.5 の証明の繰り返しであり，後の 4.4 節 (教科書 p.103) にも次のようにある。

定理 4.4 によりコンパクト群の表現は適当な内積に関してユニタリ表現となるから，リー代数の基底として  $\hat{X}_i = -iX_i$  をとれば  $\rho(X_i)$  はエルミート行列による表現となる。

$E_{\pm\alpha}$  を含む (交換) 関係は，角運動量の理論における昇・降演算子 (はじご演算子)  $J_\pm$  の (交換) 関係 [6, p.254]

$$[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm, \quad [J_+, J_-] = 2\hbar J_z, \quad J_\pm^\dagger = J_\mp$$

を想起させる (5.1 節も参照)。実に本節後半 (Cartan 代数以降) の議論の動機は， $SU(2)$  代数を解析する手法を任意の単純 Lie 代数へ応用することにあった：

すなわち，可換なエルミートな観測可能量の可能な最大の組を見つけ，それらの固有値を状態をラベルするのに使う。今の場合に観測可能量というのは，互いに可換な，それゆえ同時に対角化できる，エルミート生成子の見つけうる最大の組である。それらの固有値は  $J_3$  の類似物であり，残りの生成子は， $SU(2)$  の昇・降演算子の類似物である [2, p.95]。

Cartan 部分代数の計量は Euclid 計量  $\hat{g}_{ab} = \delta_{ab}$  に選べる。[このとき添字の上下の区別は不要になる.]

方法  $\hat{g}_{ab}$  は実対称行列だから，

$$\hat{g}_{ab} = c_a c_b \delta_{ab}, \quad \hat{g}^{ab} = c_a^{-1} c_b^{-1} \delta_{ab}$$

と対角化できる [ $a, b$  で和をとらない]。そこで式 (4.36):  $\hat{g}_{ab} = (H_a, H_b)$  において  $cH_a \rightarrow H_a$  と再定義すれば，計量は  $\hat{g}_{ab} = \delta_{ab}$  となる。このとき [ $\text{ad}(H_a)$  の固有値に他ならない] ルート  $\alpha_a$  [および  $\alpha^a = \hat{g}^{ab}\alpha_b$ ] は

$$c_a \alpha_a \rightarrow \alpha_a, \quad c_a^{-1} \alpha^a \rightarrow \alpha^a$$

と置き換わる。

計量の選択とは無関係に,  $c$  を適当な実数として  $cE_\alpha \rightarrow E_\alpha$  と再定義することもできる. このとき式 (4.40) は

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = c^2 \alpha^a H_a, \quad [E_\alpha, E_\beta] = c N_{\alpha, \beta} E_{\alpha+\beta}, \quad (E_\alpha, E_\beta) = c^2 \delta_{\alpha+\beta, 0}$$

となる (その他の関係式は不変).

例 4.2 [4.1 節末尾の例 4.1 で調べた]  $SO(3)$  の Lie 代数 (4.20):  $[X_i, X_j] = -\varepsilon_{ijk} X_k$  を Cartan 標準形に書こう. 基底  $\hat{X}_i = -iX_i$  での Cartan 計量は

$$\hat{g}_{ij} = -g_{ij} = +2\delta_{ij}$$

である.

note 例 4.1 で言及したように, 式 (3.26) の行列  $X_i$  は随伴表現そのものであり, このとき

$$\hat{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は Hermite 行列となる.

[異なる  $\hat{X}_i$  は非可換であることを踏まえ,] Cartan 部分代数として

$$H_1 = \hat{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

をとる. その固有値は  $\alpha = \pm 1, 0$ , 対応する固有ベクトルは

$$v_+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad v_{-0} = v_+^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad v_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる [本稿次節で補足].

note  $H_1$  は既に図 11 の式 (4.31) の形をしていることにも注意しよう.  $SO(3)$  の次元は  $d = 3$ , 階数 (Cartan 部分代数の次元) は  $r = 1$  であり,  $H_a$  のラベル  $a = 1, \dots, r$  のとる値は  $a = 1$  に限定される. 図 11 の行列 (4.31) に対するゼロ固有値でない固有状態は

- $s = (d - r)/2 = 1$  個のラベル  $\alpha = +$  を持つ, 固有値  $\alpha_1 = +1$  に属する  $v_+$
  - $s = (d - r)/2 = 1$  個のラベル  $\alpha = -$  を持つ, 固有値  $\alpha_1 = -1$  に属する  $v_-$
- のみとなる.

そこで新しい Lie 代数の基底として, 一般論に従って  $H_1$  および

$$E_\pm = v_\pm^i \hat{X}_i = \frac{1}{2} (\hat{X}_2 \pm i \hat{X}_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & i \\ \mp 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

をとると, 式 (4.40) の  $E_- = E_+^\dagger$  および交換関係

$$[H_1, E_\pm] = \pm E_\pm, \quad [E_+, E_-] = \frac{1}{2} H_1 \quad (4.42)$$

(複号同順) が満たされることが, 直接確かめられる [節末問題 4.8]. 上式 (4.42) が Cartan 標準形の交換関係 (4.40) となっていることを納得するには,  $\alpha_1 = 1$  ならば  $\alpha^1 = 1/2$  であることに注意する.

note 式 (4.40) の他の関係に関しても、例えば  $(E_\alpha, E_\beta) = (v_\alpha, v_\beta) = \delta_{\alpha+\beta, 0}$  の第 2 の等号は、固有ベクトルの規格直交性として本稿次節で確認した。また

$$\sum_{\alpha=\pm} \alpha_1 \alpha_1 = (+1)^2 + (-1)^2 = 2 = g_{11}$$

も成り立っている。

#### 節末問題

4.8 Cartan 標準形の交換関係 (4.42) の確認 例 4.2 で構成した基底  $\{H_1, E_+, E_-\}$  に対して行列の積を計算すると、

$$H_1 E_\pm = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \mp i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_\pm H_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & \mp i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる (以下、複号同順)。これらを辺々引いて第 1 式  $[H_1, E_\pm] = \pm E_\pm$  を得る。第 2 式も同様に

$$E_\pm E_\mp = \frac{1}{2^2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mp i \\ 0 & \pm i & 1 \end{pmatrix}, \quad \therefore [E_+, E_-] = \frac{1}{2} H_1$$

と確かめられる。

#### 4.2 節について

■行列 (4.31) のゼロでない固有値が純虚数  $\pm i \lambda_1^{(a)}, \dots$  であること (p.90) について 文献 [13, p.179] で一般的に議論されているものの、1つのブロックとそれが作用する部分空間のベクトルに関する固有方程式

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix} \quad (k \text{ は固有値})$$

を考えれば、事後的にいくらか素朴な理解が可能である。これを解くと、確かに固有値は  $k = \pm i \lambda$  と求まる。また対応する固有ベクトル成分は  $u = \pm i$  であり (以降、複号同順)、固有ベクトル  $v_\pm \equiv (1, \pm i)^T$  の満たす関係  $v_- = v_+^*$  は「 $v_{-\alpha} = v_\alpha^*$ 」(p.90 下から 5 行目) と整合している。

■教科書 pp.90–91 にまたがる式 (本稿の式 (15)) における第 3 の等号について そもそも構造定数の反対称性 (4.23):  $f_{ij}^k = -f_{ik}^j$  が添字の上下に関する一貫性を持たない。この見かけ上の困難は、随伴表現の定義式 (4.17):  $\{\text{ad}(X_i)\}_j^k = f_{ij}^k$  の左辺で行列要素を上下の添字で指定したことに起因していると考えられる。実際、行列要素を指定するだけならば、添字の上下の区別は不要である。そこで  $\{\text{ad}(X_i)\}_j^k = \{\text{ad}(X_i)\}_k^j$  という 2通りの表記法を認めて、式 (4.23) の代わりに

$$\{\text{ad}(X_i)\}_j^k = -\{\text{ad}(X_i)\}_j^k \Rightarrow f_{ij}^k = -f_i^k{}_j$$

と書けば、添字の上下の矛盾なく式 (15) 第 3 の等号の変形を行える。

■教科書 p.92, 1.7–9 の式 (本稿の式 (16)) について 後ろから 2 番目の等号に関して、教科書には「 $\text{ad}(H^a)_{ij} = \hat{f}_{ji}^a = -\hat{f}_{ij}^a$  を用いた」(p.92, 1.12) とある。実際  $\{\text{ad}(\hat{X}_k)\}_j^i = f_{kj}^i$  の両辺に  $g^{kk'} g_{ii'}$  を縮約して、

$$f_{ji'}^{k'} = f_{j'i'}^{k'} = g_{ii'} \{\text{ad}(g^{kk'} \hat{X}_k)\}_j^i = g_{ii'} \{\text{ad}(\hat{X}^{k'})\}_j^i \equiv \{\text{ad}(\hat{X}^{k'})\}_{i'j}$$

とすれば、この関係式が得られる。添字の上下に関する以上の措置は、式 (15) の箇所におけるそれとは無関係なので、それぞれ独立に成立し得る。

最後の等号では固有方程式 (4.32) と規格直交条件 (4.34) を用いて、

$$\{\text{ad}(H^a)\}_{ij} v_\alpha^i v_{-\alpha}^j = -\alpha^a v_\alpha^i v_{-\alpha,i} = -\alpha^a$$

とすれば良い。

■節末の例 4.1 における  $H_1$  の固有値と固有ベクトルについて 固有値  $\alpha = \pm 1, 0$  は特性方程式

$$0 = \det(H_1 - \alpha \mathbf{1}) = -\alpha(\alpha^2 - 1)$$

の根である。また与えられた固有ベクトル  $v = v_\pm, v_0$  はいずれも固有方程式  $H_1 v = \alpha v$  を満たし、また既に規格化されていて正規直交性 (4.34):

$$(v_+, v_+) = (v_-, v_-) = (v_\pm, 0) = 0, \quad (v_+, v_-) = (v_0, v_0) = 1$$

が成り立つことが、直接の計算で確かめられる。実際、 $(v_+, v_-) = g_{ij} v_\alpha^i v_\beta^j = 2\delta_{ij} v_\alpha^i v_\beta^j$  に注意すると、例えば

$$(v_+, v_-) = 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = 1.$$

### 4.3 ルート空間とディンキン図

導入 (概要) として、冒頭の文を引用する。

カルタンの標準形 (4.40) では、リー代数の構造はルート  $\alpha$  と  $N_{\alpha,\beta}$  によって決まる。しかし以下で見ると  $N_{\alpha,\beta}$  もルートによって決まることがわかるので、結局リー代数の構造はそのルートによって完全に決まるのである。そこで  $N_{\alpha,\beta}$  を決めることから始めよう。

note 引き続き 4.2 節の note で言及した角運動量の理論とのアナロジーを考えると、この後の議論は  $J_z$  の固有値  $m\hbar$  のとり得る値の範囲  $m = -j, \dots, j$  などの導出に、とりわけ結論にあたる式 (4.51) は

$$J_+ |j, m\rangle = \sqrt{(j-m)(j+m+1)\hbar} |j, m+1\rangle$$

における平方根の因子に類似している [6, pp.256–260]。4.4 節の式 (4.60–63)、さらには 5.1 節の式 (5.11) の箇所との方が対応関係が明瞭である。

まず係数  $N_{\alpha,\beta}$  を定義する式 (4.39):

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta} \quad (4.43)$$

を含め、式 (4.40) の関係を用いると、 $N_{\alpha,\beta}$  には条件

$$N_{\alpha,\beta} = -N_{\beta,\alpha} = -N_{-\alpha,-\beta}^* \quad (4.44)$$

$$N_{\alpha,\beta} = N_{\beta,-\alpha-\beta} = N_{-\alpha-\beta,\alpha} \quad (4.45)$$

が課せられることが判明する [本稿次節で導出]。ここから漸化式

$$|N_{\alpha,\beta-\alpha}|^2 = |N_{\alpha,\beta}|^2 + \alpha^a \beta_a \quad (4.46)$$

が見出される [本稿次節で導出]. ところで [式 (4.43) が示唆するように [3, pp.147-148]] 2つのルート  $\alpha, \beta$  に対して  $\beta \pm \alpha, \beta \pm 2\alpha, \dots$  もまたルートになる可能性がある. ところがルートの数 [固有状態の数 ( $d-r$ )] は有限である. そこで  $n, m \geq 0$  を整数としてルートのシリーズ [系列]

$$\beta - m\alpha, \beta - (m-1)\alpha, \dots, \beta, \beta + \alpha, \dots, \beta + n\alpha \quad (4.47)$$

があるとし,  $\beta - (m+1)\alpha, \beta + (n+1)\alpha$  はルートにならないと仮定する. このとき漸化式 (4.46) より, シリーズ (4.47) の上端から逐次的に

$$|N_{\alpha, \beta+k\alpha}|^2 = (n-k) \left[ \alpha^a \beta_a + \frac{1}{2}(n+k+1)\alpha^a \alpha_a \right] \quad (4.48)$$

と定まる [本稿次節で導出]. さらにシリーズ (4.47) が下端で自動的に切れることを要求すると,

$$2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = m - n \quad (4.49)$$

が見出される [本稿次節で導出]. ここに

$$(\alpha, \beta) \equiv \alpha^a \beta_a = \hat{g}^{ab} \alpha_a \alpha_b = \hat{g}_{ab} \alpha^a \alpha^b$$

は Cartan 計量による内積である. 式 (4.49) の逆符号 ( $n-m$ ) は  $-m$  以上  $n$  以下の整数だから, ルート  $\alpha, \beta$  に対して

$$\beta' = \beta - 2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \alpha \quad (4.50)$$

もまた, シリーズ (4.47) に含まれるルートである [幾何学的な意味を本節で後述]. 式 (4.49) を用いて式 (4.48) から  $(\alpha, \beta)$  を消去すると, 最終的な結果として

$$|N_{\alpha, \beta+k\alpha}|^2 = \frac{1}{2}(n-k)(m+k+1)(\alpha, \alpha) \quad (4.51)$$

を得る. こうして [本節冒頭で予告したように],  $N_{\alpha, \beta}$  を実数に選ぶと, それは (したがって Lie 代数の構造は) ルート  $\alpha$  によって完全に決まることになる.

ルート  $\alpha$  が張る  $r$  次元ベクトル空間をルート空間, この空間にベクトル  $\alpha$  が作る図形をルート図という.

**note** ベクトル空間に内積  $(\alpha, \beta)$  を定義してはじめて, ベクトルの長さや成す角といった幾何学的な解釈が可能となる.

ルート図は著しい性質を持つ. まず式 (4.49) で  $\alpha, \beta$  を入れ替えた式も成り立ち, その各々は [非負の] 整数  $n_1, n_2$  を用いて

$$2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = n_1, \quad 2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\beta, \beta)} = n_2$$

と書ける. これらを辺々掛けると

$$\cos^2 \theta_{\alpha\beta} \equiv \frac{(\alpha, \beta)^2}{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)} = \frac{1}{4} n_1 n_2 \quad (4.52)$$

が, 辺々割ると

$$\frac{(\beta, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = \frac{n_2}{n_1} \quad (4.53)$$

表 3 表 4.1 (教科書 p.98) と文献 [3, p.149] の表を基に作成した [ $n_1 n_2 = 4$  の場合 ( $(n_1, n_2) = (1, 4), (4, 1), (2, 2)$  が対応) の比  $|\alpha|/|\beta|$  はこちらで埋めた (教科書 p.97 にも言及なし,  $|\alpha| \equiv \sqrt{(\alpha, \alpha)}$ )]

$n_1 n_2$	$\theta_{\alpha\beta}$	$ \alpha / \beta $
0	$\frac{\pi}{2}$	—
1	$\frac{\pi}{3}, \pi - \frac{\pi}{3}$	1
2	$\frac{\pi}{4}, \pi - \frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$
3	$\frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}$	$\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}$
4	$0, \pi$	$2, \frac{1}{2}, 1$

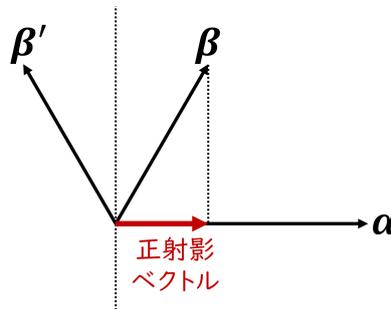


図 12 Weyl 鏡映 (4.50). [ $|\alpha| \equiv \sqrt{(\alpha, \alpha)}$  として, 図の正射影ベクトルは  $(\beta, \frac{\alpha}{|\alpha|}) \frac{\alpha}{|\alpha|} = \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \alpha$  と表される.]

が得られる. ただし式 (4.52) における  $\theta_{\alpha\beta}$  はベクトル  $\alpha, \beta$  の成す角である [第 1 の等号は角度  $\theta_{\alpha\beta}$  の定義にあたる]. 式 (4.52) を満たす非負整数の積は  $n_1 n_2 = 0, 1, 2, 3, 4$  のみであり, 対応する角度  $\theta_{\alpha\beta}$  は表 3 に示した値に限られる (ルートの長さの比  $\sqrt{(\text{式 (4.53)})}$  も併記した).

さらに式 (4.50) の  $\beta'$  は, ルート  $\alpha$  に垂直な面に関するルート  $\beta$  の鏡映——Weyl (ワイル) 鏡映という一——を表しており (図 12 参照), 前述のように鏡映  $\beta'$  もまたルートである. ルートの Weyl 鏡映の全体は群を成し, この群を **Weyl 群** と呼ぶ. 例えば階数が 2 のときルート空間は 2 次元であり, その全てのルート図は図 13 のようである [5.3 節と 7.2 節も見よ].

ここで  $(d - r)$  個のルートから  $r$  個の 1 次独立なルート空間の基底を選ぼう. 準備として次のように約束する.

- ルート  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  の最初のゼロでない成分  $\alpha_a$  ( $1 \leq a \leq r$ ) が正 (負) のとき, これを正 (負) ルートという.
  - 合計  $(d - r)$  個のルートのうち半分は正ルート, 残りの半分は負ルートである [固有値  $\pm \alpha_a$  が対で現れるから (4.2 節)].
- ルートの大小関係  $\alpha > \beta$  を,  $\alpha - \beta$  の最初のゼロでない成分  $\alpha_a - \beta_a$  が正であることとして定義する. [ $\alpha - \beta$  が正ルートとも言える. このとき  $\alpha - \beta$  が負ルートならば  $\alpha < \beta$  となる.]

そこで 1 次独立な正ルートを小さい順に  $r$  個とって, ルート空間の基底  $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(r)}$  とする ( $\alpha^{(1)} < \dots < \alpha^{(r)}$ ). これらを単純ルートという. [論証抜きに述べると] 一般の正 (負) ルートは, ゼロまたは正 (負) の整

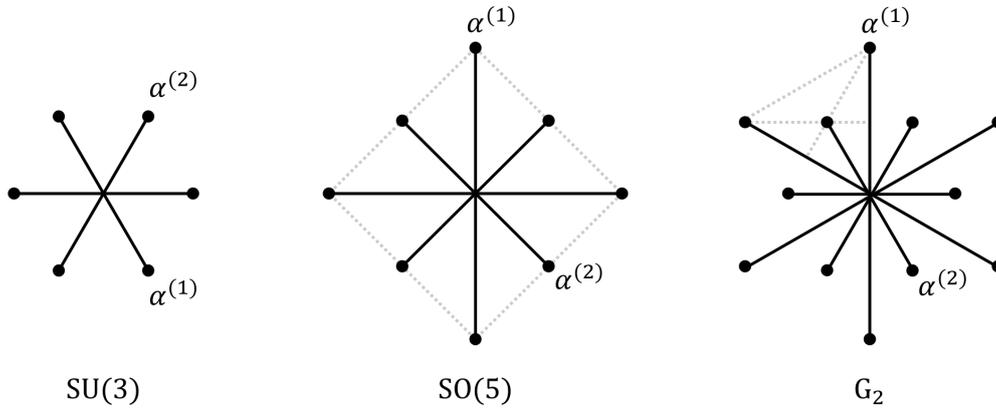


図 13 階数 2 の単純 Lie 代数のルート図 [表 3 を考慮して補助線 (破線) を入れてあり,  $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}$  は本節後半の単純ルート]

数係数による単純ルートの 1 次結合

$$\alpha = \pm \sum_{i=1}^r n_i \alpha^{(i)} \quad (n_i \text{ は非負の整数}) \quad (4.54)$$

で表される.

こうして原理的には全てのルート  $\alpha$  は, したがってコンパクト単純 Lie 代数の構造は, 単純ルートによって一意に決まる. そこで単純ルートの構造を図式化する便利な手法として, **Dynkin** (ディンキン) 図を導入しよう. 準備として, 単純ルートには次の性質があることに注目する.

(i)  $\alpha, \beta$  が単純ルートのとき,  $\alpha - \beta$  はルートにはなり得ない.

実際  $\alpha - \beta$  がルートであるとする, それは正ルートと負ルートのいずれかである. 正ルートとすると, それは大小関係  $\alpha > \beta$  の定義に他ならない. また  $[\alpha - \gamma = \beta$  が正ルート, すなわち]  $\alpha > \gamma$  も成り立つから,  $\gamma$  も単純ルートでなければならないこれは単純ルートが 1 次独立であることに反する.  $\alpha - \beta$  が負ルートの場合にも同様に矛盾を導けるから, 示された.

(ii)  $\alpha, \beta$  が単純ルートのとき,  $(\alpha, \beta) \leq 0$ .

単純ルート  $\alpha, \beta$  に対してルートのシリーズ (4.47) は, (i) より  $m = 0$  でなければならない. すると式 (4.49) から,  $(\alpha, \beta) \leq 0$  となる.

性質 (ii) と表 3 から, 単純ルート  $\alpha, \beta$  の成す角は  $\theta_{\alpha\beta} = \pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/6$  の 4 通りに限られる. [単純ルートはいずれも正ルートだから, あるいは 1 次独立だから,  $\theta_{\alpha\beta} = \pi$  は除外される.] これを踏まえて Dynkin 図では,

1. 各々の単純ルートを小さな丸印  $\circ$  で表す.
2. 2 つの単純ルートの成す角  $\theta_{\alpha\beta}$  を, 対応する丸印  $\circ$  を結ぶ線分の本数で表す. その際, 本数は

$$\theta_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \text{ 本}, \quad \theta_{\alpha\beta} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow 1 \text{ 本}, \quad \theta_{\alpha\beta} = \frac{3\pi}{4} \rightarrow 2 \text{ 本}, \quad \theta_{\alpha\beta} = \frac{5\pi}{6} \rightarrow 3 \text{ 本}$$

と約束する. さらに 2 つの単純ルートの長さ  $|\alpha| \equiv \sqrt{(\alpha, \alpha)}$  が異なるときは, 線上に不等号を添えて大小関係を表す [上記の大小関係  $\alpha > \beta$  との混同に注意].

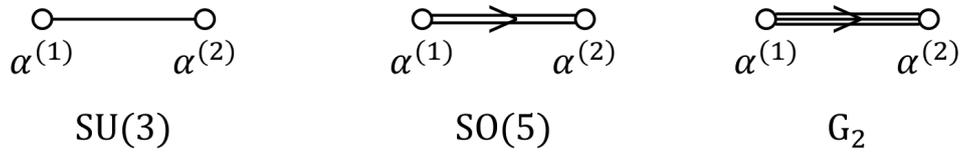


図 14 階数 2 の単純 Lie 代数の Dynkin 図

こうして階数  $r$  のコンパクト単純 Lie 代数には、 $r$  個の丸印  $\circ$  を結んだ Dynkin 図が対応する。例えば階数 2 の単純 Lie 代数の Dynkin 図は図 14 のようである [図 13 と見比べよ]。結局、コンパクト単純 Lie 代数を分類する問題は、あらゆる可能な Dynkin 図を分類することに帰着する。その結果は教科書 pp.99–102 にまとめられているものの、天下りの感が強いので、本稿では省略する [文献 [3] ではこの話題は第 10 章に分離され、いくぶん詳しく説明されている]。

最後に教科書と話の順序がやや前後するが、**Cartan 行列**について言及しておく。単純ルートの相対的な大きさと成す角を間接的に、行列要素

$$C_{ij} = 2 \frac{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(j)})}{(\alpha^{(j)}, \alpha^{(j)})} \quad [j \text{ で和をとらない}] \quad (4.55)$$

で表すこともできる。この  $(C_{ij})$  を Cartan 行列という。定義よりその対角成分はいずれも常に 2 であり、非対角成分だけが非自明である。図 13 に示した単純ルートに対して、Cartan 行列は幾何学的に

$$\text{SU}(3) : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{SO}(5) : \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{G}_2 : \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

と定まる。

note 逆に 2 次元のルート空間に対して Cartan 行列要素

$$C_{12} = 2 \frac{(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})}{|\alpha^{(2)}|^2}, \quad C_{21} = 2 \frac{(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})}{|\alpha^{(1)}|^2}$$

の値が与えられたとき、基準として 1 つのベクトルの長さ  $|\alpha^{(1)}|$  をあらかじめ決めておけば、2 式を辺々割った関係  $|\alpha^{(2)}|^2/|\alpha^{(1)}|^2 = C_{21}/C_{12}$  から他方の長さ  $|\alpha^{(2)}|$  も求まる。すると 2 式を辺々掛けた関係

$$(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})^2 = \frac{1}{4} C_{12} C_{21} |\alpha^{(1)}|^2 |\alpha^{(2)}|^2 = \frac{1}{4} C_{21}^2 |\alpha^{(1)}|^4, \quad \therefore (\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}) = \frac{1}{2} C_{21} |\alpha^{(1)}|^2$$

(ただし  $(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})$ ,  $C_{21} \leq 0$  を考慮した) から、 $\alpha^{(1)}$ ,  $\alpha^{(2)}$  の成す角も定まる。

全ての  $\alpha^{(i)}$  に共通の定数 ( $> 0$ ) を掛けても Cartan 行列 (4.55) は変わらないから、Cartan 行列の値は  $\alpha^{(i)}$  の規格化に依らない。

#### 4.3 節について

■式 (4.44) の導出 教科書の説明を (大幅に) 補足しつつ導出を行う。まず第 1 の等号は、式 (4.43):

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha, \beta} E_{\alpha+\beta}$$

を繰り返し用いると

$$N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta} = [E_{\alpha}, E_{\beta}] = -[E_{\alpha}, E_{\beta}] = -N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta}$$

となることから直ちに分かる (つまり交換子の反対称性が  $N_{\alpha,\beta}$  の反対称性に引き継がれる).

次に式 (4.43) 両辺の Hermite 共役をとり式 (4.40):  $E_{\alpha}^{\dagger} = E_{-\alpha}$  を考慮すると,

$$[E_{\beta}^{\dagger}, E_{\alpha}^{\dagger}] = N_{\alpha,\beta}^* E_{\alpha+\beta}^{\dagger} \quad \text{i.e.} \quad [E_{-\alpha}, E_{-\beta}] = -N_{\alpha,\beta}^* E_{-\alpha-\beta}, \quad \therefore [E_{\alpha}, E_{\beta}] = -N_{-\alpha,-\beta}^* E_{\alpha+\beta}$$

となる. これをもとの式 (4.43) を比較すると  $N_{\alpha,\beta} = -N_{-\alpha,-\beta}^*$  を得る.

■式 (4.45) の導出 教科書の説明を (大幅に) 補足しつつ導出を行う. Lie 代数の基底に対して, Jacobi の恒等式

$$\begin{aligned} 0 &= [E_{\alpha}, [E_{\beta}, E_{-\alpha-\beta}]] + [E_{\beta}, [E_{-\alpha-\beta}, E_{\alpha}]] + [E_{-\alpha-\beta}, [E_{\alpha}, E_{\beta}]] \\ &= N_{\beta,-\alpha-\beta}[E_{\alpha}, E_{-\alpha}] + N_{-\alpha-\beta,\alpha}[E_{\beta}, E_{-\beta}] + N_{\alpha,\beta}[E_{-\alpha-\beta}, E_{\alpha+\beta}] \\ &= \{\alpha^a N_{\beta,-\alpha-\beta} + \beta^a N_{-\alpha-\beta,\alpha} - (\alpha^a + \beta^a) N_{\alpha,\beta}\} H_a \end{aligned}$$

が成り立つことに注目しよう (変形には式 (4.40) を用いた). ここで  $\{H_a\}$  は 1 次独立で,  $\alpha, \beta$  は独立な任意のルートであることに注意して, 最右辺における  $\alpha^a, \beta^a$  の係数の各々をゼロとおくと, 式 (4.45) を得る.

■漸化式 (4.46) の導出 教科書の説明を (大幅に) 補足しつつ導出を行う. Jacobi の恒等式と交換関係 (4.40),  $N_{\alpha,\beta}$  の反対称性 (4.44) より,

$$\begin{aligned} 0 &= [E_{\alpha}, [E_{-\alpha}, E_{\beta}]] + [E_{-\alpha}, [E_{\beta}, E_{\alpha}]] + [E_{\beta}, [E_{\alpha}, E_{-\alpha}]] \\ &= N_{-\alpha,\beta}[E_{\alpha}, E_{-\alpha+\beta}] + N_{\beta,\alpha}[E_{-\alpha}, E_{\alpha+\beta}] + \alpha^a [E_{\beta}, H_a] \\ &= (N_{-\alpha,\beta} N_{\alpha,\beta-\alpha} + N_{\beta,\alpha} N_{-\alpha,\alpha+\beta} - \alpha^a \beta_a) E_{\beta} \\ &= (-N_{\beta,-\alpha} N_{\alpha,\beta-\alpha} - N_{\alpha,\beta} N_{-\alpha,\alpha+\beta} - \alpha^a \beta_a) E_{\beta} \end{aligned}$$

となる. 最右辺における  $E_{\beta}$  は, 内積 (4.40):  $(E_{\beta}, E_{\gamma}) = \delta_{\beta+\gamma,0}$  を作れば取り除けるので, その係数をゼロとおくと, 教科書 p.95, 1.9 の式

$$N_{\alpha,\beta} N_{-\alpha,\alpha+\beta} + N_{\beta,-\alpha} N_{\alpha,\beta-\alpha} = -\alpha^a \beta_a \quad (17)$$

を得る. すると左辺における第 2 の  $N$  の各々が, 式 (4.44-45) を用いると, 教科書 p.95, 1.10 の式

$$N_{-\alpha,\alpha+\beta} = N_{\alpha,\beta}^*, \quad N_{\beta,-\alpha} = -N_{\alpha,\beta-\alpha}^* \quad (18)$$

のように書き換えられることを示せば充分である. (実際このとき上式 (17) は, 漸化式 (4.46) へと書き換えられる.)

式 (18) の第 1 式は

$$\begin{aligned} N_{\alpha,\beta}^* &= N_{-\beta,-\alpha} \quad (\text{式 (4.44) 第 2 の等号}) \\ &= N_{-\alpha,\alpha+\beta} \quad (\text{式 (4.45) 第 1 の等号で } \alpha \rightarrow -\beta, \beta \rightarrow -\alpha \text{ と置き換えた関係}) \end{aligned}$$

とすれば得られる. また式 (18) の第 2 式は

$$\begin{aligned} -N_{\alpha,\beta-\alpha}^* &= -N_{\alpha-\beta,-\alpha} \quad (\text{式 (4.44) 第 2 の等号}) \\ &= N_{-\alpha,\beta} \quad (\text{式 (4.45) の最左辺と最右辺を等置して } \alpha \rightarrow -\alpha \text{ と置き換えた関係}) \\ &= N_{\beta,-\alpha} \quad (\text{式 (4.44) 第 1 の等号}) \end{aligned}$$

とすれば得られる. 以上より示された.

■式 (4.48–49) の導出 教科書の説明を (大幅に) 補足しつつ導出を行う。式 (4.39) の箇所で述べたように、和  $\alpha + \beta$  がルートでない場合は  $N_{\alpha, \beta} = 0$  である。ところが仮定より  $\beta - (m+1)\alpha, \beta + (n+1)\alpha$  はルートでないから、

$$N_{\alpha, \beta+n\alpha} = 0, \quad N_{-\alpha, \beta-m\alpha} = 0 \quad (19)$$

でなければならない\*24。これに注意して漸化式 (4.46) で  $\beta \rightarrow \beta + n\alpha$  とおくと、まず

$$\begin{aligned} |N_{\alpha, \beta+(n-1)\alpha}|^2 &= |N_{\alpha, \beta+n\alpha}|^2 + \alpha^a (\beta + n\alpha)_a \\ &= \alpha^a (\beta + n\alpha)_a \quad (\because \text{式 (19) 第 1 式}) \end{aligned}$$

と定まる (式 (4.48) で  $k = (n-1)$  とした結果に一致)。この結果も含め、一般に  $k = -m, \dots, n-1$  に対して漸化式 (4.46) を繰り返し用いると、

$$\begin{aligned} |N_{\alpha, \beta+k\alpha}|^2 &= |N_{\alpha, \beta+(k+1)\alpha}|^2 + \alpha^a \{\beta + (k+1)\alpha\}_a \quad (\text{式 (4.46) で } \beta \rightarrow \beta + (k+1)\alpha) \\ &= |N_{\alpha, \beta+(k+2)\alpha}|^2 + \alpha^a \{\beta + (k+2)\alpha\}_a + \alpha^a \{\beta + (k+1)\alpha\}_a \quad (\text{式 (4.46) で } \beta \rightarrow \beta + (k+2)\alpha) \\ &= \dots \\ &= \underbrace{|N_{\alpha, \beta+n\alpha}|^2}_{=0 \text{ (式 (19))}} + \alpha^a \underbrace{[\{\beta + (k+2)\alpha\}_a + \{\beta + (k+1)\alpha\}_a + \dots + \{\beta + n\alpha\}_a]}_{(n-k) \text{ 項の } \beta_a \text{ と等差数列}} \\ &= (n-k) \left[ \alpha^a \beta_a + \frac{1}{2}(n+k+1)\alpha^a \alpha_a \right] : (4.48) \end{aligned}$$

が得られる。なお、これは  $k = n$  に対しても正しいので、シリーズは上端で自動的に切れることになる。

他方でシリーズが下端で切れることを保証するには、漸化式の結果 (4.48) が  $k = -(m+1)$  に対して式 (19):第 2 式

$$0 = |N_{\alpha, \beta-(m+1)\alpha}|^2 = (n+m-1) \left[ \alpha^a \beta_a + \frac{1}{2}(n-m)\alpha^a \alpha_a \right]$$

が再現されれば良い。最右辺の係数  $(n+m-1)$  は一般にノンゼロと考え、後ろの角括弧内がゼロになることを要求すると、式 (4.49) が得られる。

#### 4.4 リー代数の表現

コンパクトな連結 Lie 群の表現は指数 (4.16):

$$D(g) = \exp \left[ it^i \rho(\hat{X}_i) \right] \quad (4.56)$$

の形に与えられ ( $t^i (i = 1, \dots, d)$  は実数パラメータ)、しかも定理 4.4 [4.2 節] より、これは適当な内積に関してユニタリーとなるから、Lie 代数の基底  $\hat{X}_i = -iX_i$  の表現  $\rho(\hat{X}_i)$  は Hermite 行列となる。Cartan の標準形では Lie 代数の表現は

$$\rho(H_a), \quad \rho(E_\alpha), \quad \rho(E_{-\alpha}) = \rho^\dagger(E_\alpha)$$

であり、以降誤解の恐れのない限り、表現行列の記号  $\rho$  は省略する。このとき

$$H_a, \quad E_\alpha + E_{-\alpha}, \quad i(E_\alpha - E_{-\alpha})$$

\*24 第 2 式に関して、教科書 p.95 下から 2 行目の式

$$N_{-\alpha, \beta-m\alpha} = N_{\alpha, \beta-(m+1)\alpha}^* = 0$$

における第 1 の等号は、式 (18) 第 2 式で  $\beta \rightarrow \beta - m\alpha$  とおくと得られるものの、第 2 辺の表式は必要ない。

は Hermite 行列である.

note これは  $J_{\pm}$  の線形結合として Hermite 演算子  $J_x, J_y$  を作ることに対応している.

このため基底の表現行列が Hermite であるという一般論と矛盾はない.

Lie 代数の表現行列が作用するベクトル空間は群の表現行列が作用する空間なので [指数 (4.56) を定義する級数を考えよ], それは Lie 代数の表現空間とも群の表現空間 [2.4 節] とも呼べる. また群の表現に対する「完全可約」「既約」という形容 [2.4 節] は, Lie 代数の表現にも同様に適用される. Lie 代数の既約表現は式 (4.56) を通じて, 対応する Lie 群の既約表現を与える [本稿次節で補足]. 各々の既約表現を, その表現の次元  $D$  を太字にした記号  $\mathbf{D}$  で表すことにする. 例えば 3 次元表現は  $\mathbf{3}$  と表す [ただし一般には  $D$  次元表現が複数あっても良いはずである].

ここで可換な行列  $\{H_a\}$  たちの同時固有状態を, 固有値の組  $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_a\}$  でラベルして  $|\boldsymbol{\mu}, \mathbf{D}\rangle$  と表そう\*25. [角運動量  $J^2, J_z$  の固有状態  $|j, m\rangle$  と同様に, 一般に状態は表現のラベル  $\mathbf{D}$  も持つ ( $j \leftrightarrow \mathbf{D}, m \leftrightarrow \boldsymbol{\mu}$ ) [3, p.154]. 5.1 節も参照.] 固有方程式は

$$H_a |\boldsymbol{\mu}, \mathbf{D}\rangle = \mu_a |\boldsymbol{\mu}, \mathbf{D}\rangle. \quad (a = 1, \dots, r)$$

随伴表現では Lie 代数の次元が  $d$  なので  $|\boldsymbol{\mu}, \mathbf{D}\rangle \rightarrow |\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{d}\rangle \propto v_{\alpha}$  となる. ところで  $H_a$  は Hermite なので, 固有値  $\mu_a$  は実数であり, 異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する [6, pp.22–23]. そこで固有ベクトルを規格化して

$$\langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{D} | \boldsymbol{\nu}, \mathbf{D} \rangle = \delta_{\mu_1 \nu_1} \cdots \delta_{\mu_r \nu_r} \quad (4.59)$$

を課することができる. また固有値の組  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_r)$  をベクトルと見なして, 表現のウエイトと呼び, これが  $r$  次元空間に作る図形をウエイト図と呼ぶ. 特にルートとルート図はそれぞれ, 随伴表現のウエイトとウエイト図に他ならない.

さて, [行列表示を持つ演算子としての]  $E_{\alpha}$  は, [固有値  $\boldsymbol{\mu}$  を  $\boldsymbol{\alpha}$  だけ増加させる昇 (はしご) 演算子としての性質]

$$E_{\alpha} |\boldsymbol{\mu}, \mathbf{D}\rangle = N_{\alpha, \boldsymbol{\mu}} |\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{D}\rangle \quad (4.60)$$

を満たす (この式で係数  $N_{\alpha, \boldsymbol{\mu}}$  を定義する).

上式 (4.60) の説明 状態  $E_{\alpha} |\boldsymbol{\mu}, \mathbf{D}\rangle$  は固有方程式

$$\begin{aligned} H_a E_{\alpha} |\boldsymbol{\mu}, \mathbf{D}\rangle &= (E_{\alpha} H_a + [H_a, E_{\alpha}]) |\boldsymbol{\mu}, \mathbf{D}\rangle \\ &= (\mu_a + \alpha_a) |\boldsymbol{\mu}, \mathbf{D}\rangle \quad (\because \text{交換関係 (4.40)}) \end{aligned}$$

より,  $H_a$  の固有値  $(\mu_a + \alpha_a)$  に属する固有状態と分かる. よって適当な比例係数  $N_{\alpha, \boldsymbol{\mu}}$  を用いて, 式 (4.60) のように表される.

すると [式 (4.39):  $[E_{\alpha}, E_{\beta}] = N_{\alpha, \beta} E_{\alpha+\beta}$  で定義した係数  $N_{\alpha, \beta}$  に対する漸化式 (4.46) と類似の], 漸化式

$$|N_{\alpha, \boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\alpha}}|^2 = |N_{\alpha, \boldsymbol{\mu}}|^2 + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\mu}) \quad (4.61)$$

が得られる.

\*25 教科書では  $D$  次元表現の基底に関するベクトル成分を  $|\boldsymbol{\mu}, \mathbf{D}\rangle^i \equiv u_{\boldsymbol{\mu}}^i (i = 1, \dots, D)$  と書いている (p.103, 1.18–19).

上式 (4.61) の導出

$$\begin{aligned}
\alpha^a \mu_a &= \langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{D} | \alpha^a H_a | \boldsymbol{\mu}, \mathbf{D} \rangle = \langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{D} | [E_\alpha, E_{-\alpha}] | \boldsymbol{\mu}, \mathbf{D} \rangle \quad (\because \text{交換関係 (4.40)}) \\
&= \langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{D} | E_\alpha, E_{-\alpha} | \boldsymbol{\mu}, \mathbf{D} \rangle - \langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{D} | E_{-\alpha}, E_\alpha | \boldsymbol{\mu}, \mathbf{D} \rangle \\
&= |N_{-\alpha, \boldsymbol{\mu}}|^2 - |N_{\alpha, \boldsymbol{\mu}}|^2 \quad (\because \text{式 (4.60)})
\end{aligned}$$

の最右辺に

$$N_{-\alpha, \boldsymbol{\mu}} = \langle \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\alpha} | E_{-\alpha} | \boldsymbol{\mu}, \mathbf{D} \rangle = \langle \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\alpha} | E_\alpha^\dagger | \boldsymbol{\mu}, \mathbf{D} \rangle = \langle \boldsymbol{\mu} | E_\alpha | \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{D} \rangle^* = N_{\alpha, \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\alpha}}^*$$

を代入すると, 式 (4.61) を得る. 以上, 規格化条件 (4.59) を用いた.

**note** 式 (4.60) で定義される係数  $N_{\alpha, \boldsymbol{\mu}}$  で  $\boldsymbol{\mu} \rightarrow \boldsymbol{\beta}$  と置いたものが, 表記の見え目通り式 (4.39) で定義した係数  $N_{\alpha, \boldsymbol{\beta}}$  に一致することは, 式 (4.51) と後の式 (4.63) を比べると結果的に正しいことが分かる. このため「随伴表現の場合にはこれ [漸化式 (4.61)] は式 (4.46) に帰着する」(p.104, 1.24).

そこで 4.3 節と同様に,  $E_{\pm\alpha}$  の作用 (4.60) によって得られる一連のウエイトのシリーズ

$$\boldsymbol{\mu} - m\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\mu} - (m-1)\boldsymbol{\alpha}, \dots, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\alpha}, \dots, \boldsymbol{\mu} + n\boldsymbol{\alpha} \quad (n, m \geq 0) \quad (4.62)$$

に対して漸化式 (4.61) を適用すると,

$$\text{式 (4.51)} \quad \rightarrow \quad |N_{\alpha, \boldsymbol{\mu} + k\boldsymbol{\alpha}}|^2 = \frac{1}{2}(n-k)(m+k+1)(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}), \quad (4.63)$$

$$\text{式 (4.49)} \quad \rightarrow \quad 2 \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\mu})}{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})} = m - n \quad (4.64)$$

が導かれる. さらにウエイト  $\boldsymbol{\mu}$  に対して

$$\boldsymbol{\mu}' = \boldsymbol{\mu} - 2 \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\mu})}{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})} \boldsymbol{\alpha} \quad (4.65)$$

もウエイトとなる [Weyl 鏡映 (4.50) に対応]. 式 (4.65) より, Weyl 鏡映はウエイトの長さを変えないこと  $(\boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}') = (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})$  が直接確かめられる [幾何学的に明らか].

ウエイトの正負や大小をルートのとき [4.3 節] と同じように定義する. この大小関係の意味で, 既約表現におけるウエイトのうち最も大きいものを最高ウエイトという.

最高ウエイトには縮退はない, すなわち対応する固有ベクトルはただ 1 つ存在する.

**証明** 既約表現の最高ウエイト  $\boldsymbol{\mu}$  に対応する 2 つの固有ベクトル  $|\boldsymbol{\mu}, \mathbf{D}\rangle, |\boldsymbol{\mu}, \mathbf{D}\rangle'$  があったとすると, これらは同一既約表現に属するから, 適当な比例係数  $c$  を用いて

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{\mu}, \mathbf{D}\rangle' &= c E_{\alpha_1} E_{\alpha_2} \cdots E_{\alpha_l} |\boldsymbol{\mu}, \mathbf{D}\rangle, \\
\text{with } \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_l &= 0
\end{aligned}$$

と関係付けられるはずである. ここで  $E_{\alpha_i}$  の並びのうち  $\alpha_i$  が正ルートであるものは, 交換関係 (4.39) を利用して右端に移動させ,  $|\boldsymbol{\mu}, \mathbf{D}\rangle$  に直接作用させる.

**note** 例えば  $l = 4$ ,  $\alpha_2$  を正ルートとし,

$$E_{\alpha_2} E_{\alpha_3} = E_{\alpha_3} E_{\alpha_2} + N_{\alpha_2, \alpha_3} E_{\alpha_2 + \alpha_3}, \quad E_{\alpha_2} E_{\alpha_4} = E_{\alpha_4} E_{\alpha_2} + N_{\alpha_2, \alpha_4} E_{\alpha_2 + \alpha_4}$$

を順次用いて  $E_{\alpha_2}$  を  $|\mu, D\rangle$  のすぐ隣へ移動させると,

$$|\mu, D\rangle' = cE_{\alpha_1}E_{\alpha_2}E_{\alpha_3}E_{\alpha_4}|\mu, D\rangle = cE_{\alpha_1}E_{\alpha_3}E_{\alpha_4}E_{\alpha_2}|\mu, D\rangle + cE_{\alpha_1}(N_{\alpha_2, \alpha_4}E_{\alpha_3}E_{\alpha_2+\alpha_4} + N_{\alpha_2, \alpha_3}E_{\alpha_2+\alpha_3}E_{\alpha_4})|\mu, D\rangle$$

となる (最右辺 2 行目は交換子に由来する “おつり” の項).

すると最高ウェイト  $\mu$  の定義より

$$E_{\alpha}|\mu, D\rangle = 0 \quad (\text{正ルート } \alpha > 0 \text{ に対して}) \quad (4.66)$$

となるので [本稿次節で補足], この作業を繰り返すと, 正ルート  $\alpha$  の  $E_{\alpha}$  を全て除ける. この結果  $|\mu, D\rangle'$  は  $|\mu, D\rangle$  に比例することになるから, 示された.

note 負ルート  $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots$  の並び  $E_{\alpha'_1}E_{\alpha'_2} \dots$  だけが残ったときのことを考える. 上の例で具体的に見たように, このときも和が  $\alpha'_1 + \alpha'_2 + \dots = 0$  であることに変わりはない. ところが負ルート  $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots$  のみで和をゼロにすることはできないから, 実際には生き残るおつりの項が

$$\text{const} \times E_{\alpha_1+\dots+\alpha_l=0}|\mu, D\rangle \sim |\mu, D\rangle$$

となる場合しかあり得ないと考えられる.

最高ウェイトの固有ベクトル  $|\mu, D\rangle$  に負ルート (4.54):  $\alpha = -\sum_i n_i \alpha^{(i)}$  の  $E_{\alpha}$  を繰り返し掛けることによって, 既約表現の任意の固有ベクトルは

$$E_{-\alpha^{(i)}}E_{-\alpha^{(j)}} \dots E_{-\alpha^{(k)}}|\mu, D\rangle \quad (4.67)$$

という形に与えられる. 言い換えれば既約表現のウェイトは全て, 最高ルート  $\mu$  から単純ルート  $\alpha^{(i)}$  を引いていくことで得られる. [最高ウェイトに縮退はないことと合わせると, 既約表現は最高ウェイトを指定することで一意に定まる [3, p.156].]

単純ルート  $\alpha^{(i)}$  と任意のウェイト  $\mu$  に対して, 式 (4.64):

$$2 \frac{(\alpha^{(i)}, \mu)}{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)})} = m^i \quad (4.68)$$

を考えよう [ $i$  で和をとらない].  $\alpha^{(i)}$  は 1 次独立だから, ウェイト  $\mu$  はゼロまたは正負の整数の組  $[m^1, \dots, m^r]$  によって完全に決まる. これを **Dynkin** インデックスという. 特に  $\mu$  が最高ウェイトの場合を考えると,  $\mu + \alpha^{(i)}$  はウェイトにならない [本稿次節で補足]. よって [シリーズ (4.62), したがって式 (4.64) で  $n = 0$  の場合が対応するから], 上式 (4.68) において  $m^i$  は非負の整数となる. 既約表現は最高ウェイト [によって, したがってそ] の Dynkin インデックスによって一意に定まる.

$i$  番目の成分のみが 1 である Dynkin インデックス  $m^j = \delta_{ij}$ , すなわち  $[0, \dots, 1, 0, \dots]$  を持つ最高ウェイト  $\mu^{(i)}$  で特徴付けられるような [既約 [2, p.129]] 表現  $\rho_i$  を考える.  $\mu^{(i)}$  を基本ウェイト,  $\rho_i$  を基本表現という. 基本ウェイト  $\mu^{(j)}$  に対して  $m^i = \delta_{ij}$  より, 上式 (4.68) は

$$2 \frac{(\alpha^{(i)}, \mu^{(j)})}{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)})} = \delta_{ij} \quad (4.69)$$

となる. また任意の Dynkin インデックス  $[m^1, \dots, m^r]$  を持つウェイトは

$$\mu = \sum_{i=1}^r m^i \mu^{(i)} \quad (4.70)$$

と表される.

note 1 実際、式 (4.70) の  $\mu$  に対する Dynkin インデックスは、上式 (4.69) を用いて式 (4.68) の左辺を評価することにより

$$2 \frac{(\alpha^{(i)}, \mu)}{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)})} = \sum_j m^j 2 \frac{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(j)})}{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)})} = \sum_j m^j \delta_{ij} = m^i$$

となる。

note 2 基本ウエイト  $\mu^{(i)}$  は表現  $\rho_i$  ごとに決まり、異なる  $\mu^{(i)}$  が同時に最高ウエイトとなることはないことに注意する。と言うのも 2 つの  $\mu^{(i)}, \mu^{(j)}$  が  $i \neq j$  とき、定義よりそれらは異なる Dynkin インデックスを持つため、相異なるベクトルである。すると大小関係  $\mu^{(i)} \succeq \mu^{(j)}$  が確定するため、 $\mu^{(i)}, \mu^{(j)}$  の両方が最高ウエイトとはなり得ない。

一般に与えられた表現の最高ウエイトはただ 1 つである。実際 2 つの最高ウエイト  $\mu, \nu$  があるとすると、これらに間に大小関係は定まらないため、差は  $\mu - \nu = 0$  でなければならない。すると結局、これらは同一のベクトル  $\mu = \nu$  であることになる。

式 (4.70) のウエイト  $\mu : [m^1, \dots, m^r]$  を最高ウエイトに持つ表現は、

$$m^1 \text{個の基本表現 } \rho_1, \quad m^2 \text{個の基本表現 } \rho_2, \quad \dots, \quad m^r \text{個の基本表現 } \rho_r$$

の直積表現で与えられる。

説明 2.4 節における群の直積表現の定義式 (2.34) を Lie 群の表現 (4.56) に適用すると、

$$\{\exp[it^m \rho^{(a \times b)}(\hat{X}_m)]\}_{ik,jl} = \{\exp[it^m \rho^{(a)}(\hat{X}_m)]\}_{ij} \{\exp[it^n \rho^{(b)}(\hat{X}_m)]\}_{kl}.$$

[群 (表現ではない) の直積に関する 4.1 節の定理 4.1(3) や、本節冒頭の既約表現の直和 (直積ではない) との混同に注意.] 両辺、独立なパラメータ  $\{t^m\}$  の 1 次までとると、Lie 代数の直積表現

$$\{\rho^{(a \times b)}(\hat{X}_m)\}_{ik,jl} = \{\rho^{(a)}(\hat{X}_m)\}_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ij} \{\rho^{(b)}(\hat{X}_m)\}_{kl} \quad (4.71)$$

が得られる。

さて  $[a, b]$  表現をそれぞれ  $N, M$  次元として、 $\rho^{(a)}(H_c), \rho^{(b)}(H_c)$  の固有をそれぞれ  $|\mu^{(a)}, N\rangle, |\mu^{(b)}, M\rangle$  と書こう。このとき  $\rho^{(a \times b)}(H_c)$  は、その固有状態  $|\mu^{(a)}, N\rangle |\mu^{(b)}, M\rangle$  に作用して

$$\begin{aligned} \rho^{(a \times b)}(H_c) |\mu^{(a)}, N\rangle |\mu^{(b)}, M\rangle &= \rho^{(a)}(H_c) |\mu^{(a)}, N\rangle |\mu^{(b)}, M\rangle + |\mu^{(a)}, N\rangle \rho^{(b)}(H_c) |\mu^{(b)}, M\rangle \\ &= [\mu^{(a)} + \mu^{(b)}]_c |\mu^{(a)}, N\rangle |\mu^{(b)}, M\rangle \end{aligned} \quad (4.72)$$

となる [第 1 の等号では行列表示 (4.71) に従っている]。よって直積表現のウエイトは、各々の表現におけるウエイトの和となるから。

例 4.3 随伴表現でのウエイトはルートに他ならず、階数 2 の単純 Lie 代数に対して、それらは 4.3 節の図 13 に示した通りである。

まず  $SU(3)$  について、正ルートは  $x > 0$  側の 3 つのベクトル

$$\alpha^{(1)} \sim \left( \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad \alpha^{(2)} \sim \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} \sim (1, 0)$$

であり、このうち最高ウェイトは  $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\alpha}^{(1)} + \boldsymbol{\alpha}^{(2)}$  となる。すると式 (4.68) で定義される  $\boldsymbol{\mu}$  の Dynkin インデックス  $[m^1, m^2]$  は、Cartan 行列  $C_{ij}$  の定義式 (4.55) とその直後の具体的な値とより、

$$m^1 = 2 \frac{(\boldsymbol{\alpha}^{(1)}, \boldsymbol{\mu})}{(\boldsymbol{\alpha}^{(1)}, \boldsymbol{\alpha}^{(1)})} = C_{11} + C_{21} = 2 + (-1) = 1,$$

$$m^2 = 2 \frac{(\boldsymbol{\alpha}^{(2)}, \boldsymbol{\mu})}{(\boldsymbol{\alpha}^{(2)}, \boldsymbol{\alpha}^{(2)})} = C_{12} + C_{22} = (-1) + 2 = 1$$

と求まる。

次に SO(5) について、正ルートは

$$\boldsymbol{\alpha}^{(1)} \sim (0, \sqrt{2}), \quad \boldsymbol{\alpha}^{(2)} \sim \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \boldsymbol{\alpha}^{(1)} + \boldsymbol{\alpha}^{(2)} \sim \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$(\boldsymbol{\alpha}^{(1)} + \boldsymbol{\alpha}^{(2)}) + \boldsymbol{\alpha}^{(2)} = \boldsymbol{\alpha}^{(1)} + 2\boldsymbol{\alpha}^{(2)} \sim (\sqrt{2}, 0)$$

であり\*26、最高ウェイトは  $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\alpha}^{(1)} + 2\boldsymbol{\alpha}^{(2)}$ 、その Dynkin インデックスは同様に

$$[m^1, m^2] = [C_{11} + 2C_{21}, C_{12} + 2C_{22}] = [0, 2].$$

最後に  $G_2$  について、正ルートは

$$\boldsymbol{\alpha}^{(1)} \sim (0, \sqrt{3}), \quad \boldsymbol{\alpha}^{(2)} \sim \left( \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad \boldsymbol{\alpha}^{(1)} + \boldsymbol{\alpha}^{(2)} \sim \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$(\boldsymbol{\alpha}^{(1)} + \boldsymbol{\alpha}^{(2)}) + \boldsymbol{\alpha}^{(2)} = \boldsymbol{\alpha}^{(1)} + 2\boldsymbol{\alpha}^{(2)} \sim (1, 0),$$

$$(\boldsymbol{\alpha}^{(1)} + \boldsymbol{\alpha}^{(2)}) + (\boldsymbol{\alpha}^{(1)} + 2\boldsymbol{\alpha}^{(2)}) = 2\boldsymbol{\alpha}^{(1)} + 3\boldsymbol{\alpha}^{(2)} \sim \sqrt{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

$$(\boldsymbol{\alpha}^{(1)} + 2\boldsymbol{\alpha}^{(2)}) + \boldsymbol{\alpha}^{(2)} = \boldsymbol{\alpha}^{(1)} + 3\boldsymbol{\alpha}^{(2)} \sim \sqrt{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

であり、最高ウェイトは  $\boldsymbol{\mu} = 2\boldsymbol{\alpha}^{(1)} + 3\boldsymbol{\alpha}^{(2)}$ 、その Dynkin インデックスは同様に

$$[m^1, m^2] = [2C_{11} + 3C_{21}, 2C_{12} + 3C_{22}] = [1, 0].$$

[式 (4.67) の箇所で言及したように] 既約表現の全てのウェイトは、最高ウェイト  $\boldsymbol{\mu}$  から単純ルート  $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$  を次々と引いた

$$\boldsymbol{\mu}' = \boldsymbol{\mu} - \sum_{j=1}^n k_j \boldsymbol{\alpha}^{(j)} \quad (k_j (\geq 0) \text{ は整数}) \quad (4.73)$$

という形に与えられる。上式 (4.73) の  $\boldsymbol{\mu}'$  に対して、式 (4.55), (4.68) よりインデックス

$$p^i \equiv 2 \frac{(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}, \boldsymbol{\mu}')}{(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}^{(i)})} = m^i - \sum_{j=1}^n k_j C_{ji} \quad (4.74)$$

は、最高ウェイトの Dynkin インデックス  $m^i$  から Cartan 行列要素  $C_{ji}$  を次々と引いた値をとる。[上式 (4.74) の第 2 辺までに注目すると、] 単純ルート  $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$  は 1 次独立なので、ウェイト  $\boldsymbol{\mu}'$  は  $[p^1, \dots, p^r]$  で表される。式 (4.74) の  $p^i$  が正のときは式 (4.64) より、さらに  $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$  を少なくとも  $p^i$  回 [教科書では「 $p^i$  回だけ」(p.108 下から 5 行目)], 引くことができる。なお  $\sum_{j=1}^r k_j$  [単純ルートを引いた回数の合計] をウェイトのレベルという。

\*26 単純ルート  $\boldsymbol{\alpha}^{(1)} \sim (0, \sqrt{2})$  は第 1 成分がゼロであるものの、ゼロでない最初の成分が  $\sqrt{2} > 0$  なので正ルートである。

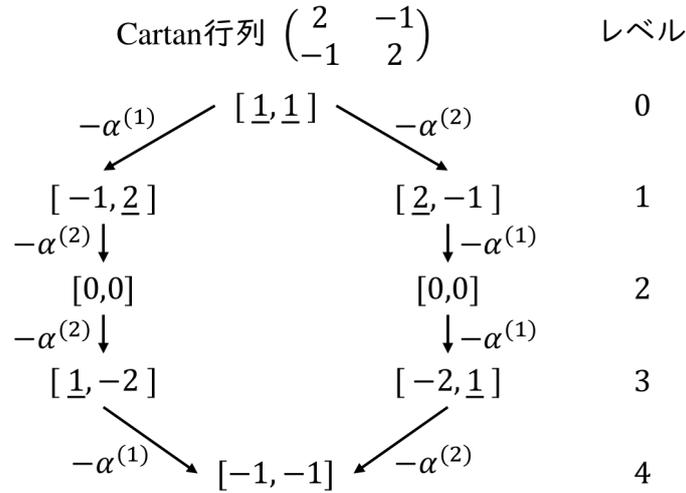


図 15 正のインデックス  $p^i$  (アンダーラインで強調) に対応した単純ルート  $\alpha^{(i)}$  を  $p^i$  回、引くことができる

note 先ほどの例 4.3 では既知のルート  $\{\alpha\}$  から最高ウェイトの Dynkin インデックス  $[m^1, m^2]$  を求めた。次に Cartan 行列 (したがって単純ルート  $\{\alpha^{(i)}\}$ ) と最高ウェイト  $\mu : [m^1, m^2]$  が与えられたとき、全てのウェイト  $\mu' : [p^1, p^2]$  を求めることを考える。本稿では SU(3) の既約表現の例 (下記) のみを取り上げる。

例 4.4 SU(3) の既約表現のウェイト  $[p^1, p^2]$  は、例 4.3 で求めた最高ウェイト  $[1, 1]$  から始めて、上記の手順に従い図 15 の図式のように求められる。  $[0, 0]$  は 2 重に縮退している。 [以上、本稿次節で補足.] SU(3) の随伴表現は 8 つのウェイトによって構成されているので、8 次元表現 **8** である。 [一般に  $D$  次元の表現行列は縮退を含めて  $D$  個の固有値・固有ベクトルを持つ.]

#### 4.4 節について

■ 「式 (4.56) よりリー代数の既約表現は対応するリー群の既約表現を与える」 (p.163, l.15) について 一般にブロック対角行列の積もまた

$$\begin{pmatrix} D_1(g) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2(g) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_l(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1(h) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2(h) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_l(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1(g)D_1(h) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2(g)D_2(h) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_l(g)D_l(h) \end{pmatrix}$$

のように、ブロック対角行列になる。すなわち積において異なる部分表現は混ざらない。すると Lie 代数  $\hat{X}_i$  の既約表現の直和  $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \cdots \oplus \rho_l$  に対して、群の表現 (4.56):

$$\exp \left[ it^i \begin{pmatrix} \rho_1(\hat{X}_i) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_2(\hat{X}_i) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_l(\hat{X}_i) \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \exp[it^i \rho_1(\hat{X}_i)] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp[it^i \rho_2(\hat{X}_i)] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \exp[it^i \rho_l(\hat{X}_i)] \end{pmatrix}$$

は群の既約表現の直和になる。

■式 (4.66) および「ウエイト  $\mu$  が最高ウエイトであるための必要十分条件は、……」(p.106, l.17-18) について  $E_\alpha |\mu, D\rangle \sim |\mu', D\rangle$  なるウエイト  $\mu' = \mu + \alpha$  があるとすると、正ルート  $\alpha > 0$  は  $\mu' - \mu$  と表される。これは  $\mu' > \mu$  を意味し、 $\mu$  が最高ウエイトであることに矛盾するから、式 (4.66) が成り立たねばならない。特に任意の単純ルート  $\alpha = \alpha^{(i)}$  を考えると、

$$\mu \text{ が最高ウエイト} \Rightarrow \mu + \alpha^{(i)} \text{ はウエイトでない.}$$

この逆も成立する。実際、対偶として  $\mu' = \mu + \alpha^{(i)}$  がウエイトとなる単純ルート  $\alpha^{(i)}$  があれば、 $\mu$  は最高ルートとなり得ないことは、たった今示した通りである。

■節末の例 4.4 の図式 (本稿の図 15) について 最高ウエイト  $\mu$  は Dynkin インデックス  $[m^1, m^2] = [1, 1]$  を持つので、 $\alpha^{(1)}$  を  $m^1 = 1 > 0$  回、または  $\alpha^{(2)}$  を  $m^2 = 1 > 0$  回引くことができる。 $\alpha^{(1)}$  を引いて得られるウエイト  $\mu'$  を考えると、式 (4.73) において  $k_1 = 1, k_2 = 0$  が対応するので、そのインデックス (4.74) は

$$p^1 = m^1 - C_{11} = -1, \quad p^2 = m^2 - C_{12} = 2$$

と計算される。 $p^2 > 0$  なので、さらに  $\alpha^{(2)}$  を  $p^2 = 2$  回引くことができる。 $\alpha^{(2)}$  を 1 回引いたウエイトには、式 (4.73) において  $k_1 = 1, k_2 = 1$  が対応するので、そのインデックス (4.74) は

$$p^1 = m^1 - C_{11} - C_{21} = 0, \quad p^2 = m^2 - C_{12} - C_{22} = 0$$

と求まる。また  $\alpha^{(2)}$  を 2 回引いたウエイトには、式 (4.73) において  $k_1 = 1, k_2 = 2$  が対応するので、そのインデックス (4.74) は

$$p^1 = m^1 - C_{11} - 2C_{21} = 1, \quad p^2 = m^2 - C_{12} - 2C_{22} = -2$$

である。すると  $p^1 > 0$  なので、 $\alpha^{(1)}$  をあと  $p^1 = 1$  回引くことができる。このとき得られるウエイトには、式 (4.73) において  $k_1 = 2, k_2 = 2$  が対応するので、そのインデックス (4.74) は

$$p^1 = m^1 - 2C_{11} - 2C_{21} = -1, \quad p^2 = m^2 - 2C_{12} - 2C_{22} = -1$$

となり、いずれも負である。こうして図 15 の左側の矢印を経由してレベル 4 に至る、一連のウエイト  $[p^1, p^2]$  が求まる。初めに最高ウエイトから  $\alpha^{(2)}$  を引いた場合も同様に考えれば、図 15 の右側の  $[p^1, p^2]$  たちが得られる。

ここで得られた随伴表現でのウエイト  $\mu'$  が、実際に 4.3 節の図 13 に示した 6 つのルート

$$\pm\alpha^{(1)} \sim \pm\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \pm\alpha^{(2)} \sim \pm\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \pm(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) \sim \pm(1, 0) \quad (\text{以降, 複号同順})$$

に一致しているか確認しよう。これらのルートに対して式 (4.74) の内積を評価すると、 $[p^1, p^2]$  は

$$\mu' = \pm\alpha^{(1)} : \pm[2, -1], \quad \mu' = \pm\alpha^{(2)} : \pm[-1, 2], \quad \mu' = \pm(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) : \pm[1, 1]$$

となる。よって図 15 で得られた  $[p^1, p^2]$  のうち  $[0, 0]$  以外の 6 つが、ちょうど図 13 で見た 6 つのルートに対応していることが分かる。指数  $[0, 0]$  を持つウエイトは式 (4.74) より、1 次独立な  $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}$  のいずれとも内積がゼロになるので、 $\mu' = 0$  である。このゼロ固有値に 2 つの状態が縮退していることについて、このことは一般に  $E_\alpha$  が非可換なので (式 (4.40)), 状態 (4.67) において単純ルートを引く順序の入れ替えに対応した  $E_{-\alpha^{(i)}}$  の交換を行うと、同じ固有値に属する異なる状態が得られることによって [3, p.157].

なお正のインデックス  $p^i$  を持つウェイトからは単純ルート  $\alpha^{(i)}$  を少なくとも  $p^i$  回引けると述べるだけでは、それ以上  $\alpha^{(i)}$  を引ける可能性が排除されず、いつまで経っても全てのウェイトが得られた保証は得られないのではないかという疑問が生じる。ただし  $SU(3)$  に関しては  $[n, m]$  表現の最低ウェイトは  $-m\mu^{(1)} - n\mu^{(2)}$  であることが示され (5.3 節 p.126), 式 (4.68) とよりそのインデックスは  $[-m, -n]$  であることから, 単純ルートを引いていくとある時点で最低ウェイトに達したことが分かる。したがってレベル  $k \equiv \sum_{j=1}^r k_j$  (単純ルートを引いた回数の合計, p.108) の上限も分かる。

## 5 ユニタリ群とその表現

### 5.1 SU(2)

SU(2) の元 (2 次の特殊ユニタリー行列) を  $U = \exp(i\hat{X})$  と書くと

$$U \text{ のユニタリー性} \rightarrow \hat{X} \text{ は Hermite,} \quad \det U = 1 \rightarrow \text{Tr } \hat{X} = 0$$

であり, 3 つの実数パラメータ  $t^1, t^2, t^3$  を用いて  $\hat{X} = \sum_{i=1}^3 t^i J_i$  と表される [3.2 節]. ここで基底として **Pauli** 行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

の 1/2 倍  $J_i = \sigma_i/2$  を採ることができ, これらは [角運動量の] 交換関係

$$[J_i, J_j] = i \sum_k \varepsilon_{ijk} J_k \quad (5.4)$$

を満たす (反対称因子は  $\varepsilon_{123} = +1$ ). 構造定数は  $\hat{f}_{ij}^k = i\varepsilon_{ijk}$  と同定される. Cartan 計量 [定義式 (4.7) と 4.2 節を見よ] は

$$\hat{g}_{ij} = [f_{in}^m f_{jm}^n = \varepsilon_{inm} \varepsilon_{jnm} = ] 2\delta_{ij}.$$

[式変形は文献 [8, pp.20–21] の脚注を参照. 逆行列は  $\hat{g}^{ij} = \frac{1}{2}\delta_{ij}$  であり, これらはすぐ後の  $v_{\pm}$  の規格化などにおける内積や, ルート  $\alpha_1$  の添字の上げ下げの定義に必要となる.]

交換関係 (5.4) より異なる Lie 代数の元  $J_i$  は非可換だから, SU(2) の階数は 1 である. そこで Cartan 部分代数として  $H_3 = J_3$  を選ぼう. [その上で 4.2 節のように, 新しい基底  $E_{\pm}$  を採ることを考える. 随伴表現の定義式 (4.17) より]

$$\{\text{ad}(H_3)\}_j^i = i\varepsilon_{3ji} \quad \text{i.e.} \quad \text{ad}(H_3) = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であり, この行列のゼロでない固有値は  $\alpha = \pm 1$ , 対応する [規格直交条件 (4.34) を満たす] 固有ベクトルは

$$v_{\pm} = \frac{1}{2} (1 \quad \pm i \quad 0)^T$$

と求まる [4.2 節の例 4.1 と同様に確認可能]. すると新しい基底

$$E_+ = v_+^i J_i = \frac{1}{2}(J_1 + iJ_2), \quad E_- = v_-^i J_i = \frac{1}{2}(J_1 - iJ_2) = E_+^\dagger$$

を構成でき, これらは [式 (5.4) より] 交換関係

$$[H_3, E_{\pm}] = \pm E_{\pm}, \quad [E_+, E_-] = \frac{1}{2} H_3 \quad (5.7)$$

を満たす [ $J_{\pm}$  の満たす交換関係 (5.8) として導出済み [6, p.254]]. これは SO(3) の Lie 代数の交換関係 (4.42) と同じ形なので, 少なくとも群の元が指数  $\exp(i \sum_i t^i J_i)$  の形に書ける単位元の近くでは, SU(2) と SO(3) の構造はまったく同一 (局所同型) である. (群全体の大域的な構造は異なる. [文献 [6, pp.230–231] で



図 16 SU(2) のルート図

は具体的に SU(2) の元と O(3) の元が 2 対 1 に対応付けられることが説明されている。これについて教科書では 6.1 節でさらに詳しく説明されている。]

物理の慣例に従って  $E_{\pm}$  の代わりに  $J_{\pm} \equiv \sqrt{2}E_{\pm}$  を用いると、交換関係 (5.7) は

$$[J_3, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}, \quad [J_+, J_-] = J_3 \quad (5.8)$$

と置き換わる。ルートおよびウエイトは  $r = 1$  次元ベクトルであり、[正ルート  $\alpha \rightarrow \alpha = \alpha_1$  は]

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha^1 = \frac{1}{2}, \quad (\alpha, \alpha) = \frac{1}{2}$$

である (図 16 参照, Cartan 計量を考慮した)。そこで SU(2) の既約表現  $N$  の最高ウエイトは  $\mathbf{j} = j\alpha$ 、一般のウエイトは  $\boldsymbol{\mu} = \mu\alpha$  とおくことができる。このときウエイト  $\boldsymbol{\mu}$  の固有ベクトルを  $|\mu, N\rangle$  として 4.4 節の一般論を適用すると、[角運動量の理論で学んだように [6, pp.256–260]]

$$J_- |\mu, N\rangle = \tilde{N}_{\mu} |\mu - 1, N\rangle, \quad |\tilde{N}_{\mu}|^2 = \frac{1}{2}(j + \mu)(j - \mu + 1) \quad (\mu = j, j - 1, \dots, -j) \quad (5.11)$$

であり、最高ウエイトのとり得る値は  $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ 、対応する既約表現の次元は  $N = 2j + 1$  であることが改めて導かれる\*27。

導出 ウエイトのシリーズ (4.62) を考えると、式 (4.60),(4.63) より

$$J_- |\mu, N\rangle = \sqrt{2}N_{\mu} |\mu - 1, N\rangle, \quad |N_{\mu}|^2 = \frac{1}{4}m(n + 1) \quad (5.10)$$

となる [本稿次節で補足]。ところが最低ウエイトは明らかに最高ウエイト  $\mathbf{j} = j\alpha$  の Weyl 鏡映

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} - 2\frac{(\alpha, \mathbf{j})}{(\alpha, \alpha)}\alpha = -\mathbf{j}$$

だから\*28、ウエイトのシリーズ (4.62) の両端は

$$\boldsymbol{\mu} + n\alpha = \mathbf{j}, \quad \boldsymbol{\mu} - m\alpha = -\mathbf{j}$$

と決まる。[ $\mathbf{j} = j\alpha, \boldsymbol{\mu} = \mu\alpha$  を代入して]  $n, m$  について解くと

$$n = j - \mu, \quad m = j + \mu$$

であり、これらを上式 (5.10) に代入して式 (5.11) を得る。[ただし  $|\tilde{N}_{\mu}|^2 \equiv |\sqrt{2}N_{\mu}|^2$ 。再びウエイト  $\boldsymbol{\mu}$  が  $\pm\mathbf{j}$  の間であることに注意すると]  $\mu = j, j - 1, \dots, -j$ 。また最高ウエイト  $\mathbf{j}$  を持つ既約表現の次元は [シリーズ (4.62) のウエイトの数 (縮退はないと仮定)]  $N = n + m + 1 = 2j + 1$ 。さらに  $j = \frac{1}{2}(n + m)$  なので、その値はゼロ以上の整数または半整数と分かる。

\*27 固有ベクトルの位相の任意性を利用して、 $\tilde{N}_{\mu}$  は実数に選ぶことができる。

\*28 一般にウエイト  $\boldsymbol{\mu} = \mu\alpha$  の Weyl 鏡映は同様に  $-\boldsymbol{\mu}$  である。

既約表現の Dynkin インデックス (4.68) は

$$m = 2 \frac{(\alpha, j)}{(\alpha, \alpha)} = 2j \quad (5.12)$$

なので, 基本表現 [ $m = 1$  で定義される (4.4 節)] は  $j = 1/2$  の表現  $\rho_{1/2}$  となる. 任意の既約表現は基本表現  $\rho_{1/2}$  の直積で与えられる. [言い換えれば角運動量  $j$  の状態はスピン  $1/2$  を  $2j$  個合成した状態として得られる. 関連して角運動量を表す Schwinger の振動しモデルも参照 [6, § 3.8].]

例 5.1 Cartan 部分代数を  $H_3 = \sigma_3/2$  に選ぶと, 基本表現  $\rho_{1/2}$  の基底ベクトルは [ $H_3$  の固有値  $\pm 1/2$  でラベルされる固有ベクトル]

$$|\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle = \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle = \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

である. [これは Pauli の 2 成分形式に他ならない [6, p.220]. 以降, 対応するケットと列ベクトル, 演算子と行列を同一視する.]

次に 2 つの基本表現の直積表現  $\rho_{1/2}^{(1)} \otimes \rho_{1/2}^{(2)}$  を考えよう.

**note** 直積表現は一般に既約表現ではないので, ただ 1 つの最高ウエイトでは指定されない. 実際スピン  $j^{(1)} = j^{(2)} = 1/2$  の合成系の角運動量  $j$  に対して, 交換関係 (5.4) の帰結として三角不等式  $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$  が成り立つので,  $j = 0, 1$  の 2 通りがあり得る ( $j = \frac{1}{2}$  が除外される理由は文献 [6, § 3.7] のノートを参照). 式 (5.12) より  $j = 0, 1$  を最高とする既約表現の次元は  $N = 2j + 1 = 0, 3$  となる. また固有方程式 (4.72) より, 最高ウエイト (最大固有値)  $j = 1$  には固有値  $1/2$  の状態 (5.13):  $\alpha = |\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle \equiv |+\rangle$  の積  $|+\rangle|+\rangle = |+, +\rangle$  が対応する. これを教科書では  $\alpha^{(1)}\alpha^{(2)}$  と書いている (p.113 下から 6 行目).

[まとめると] 直積表現  $\rho_{1/2}^{(1)} \otimes \rho_{1/2}^{(2)}$  に対して, 最高ウエイト  $j = 1$  を持つ既約表現の固有ベクトルは  $|1, \mathbf{3}\rangle = \alpha^{(1)}\alpha^{(2)}$  である. [ここから先の議論は 2 つのスピン  $1/2$  を合成する手続き [6, pp.278–280] と同じである. すなわち] 既約表現  $\mathbf{3}$  の残りの基底は

$$\begin{aligned} |0, \mathbf{3}\rangle &= J_- |1, \mathbf{3}\rangle \quad [\text{式 (5.11) で } j = \mu = 1] \\ &= [J_- \alpha^{(1)}] \alpha^{(2)} + \alpha^{(1)} [J_- \alpha^{(2)}] \quad [\text{式 (4.72) を見よ}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha^{(1)} \beta^{(2)} + \beta^{(1)} \alpha^{(2)}), \quad [\text{式 (5.11) で } j = \mu = 1/2] \\ | -1, \mathbf{3}\rangle &= J_- |0, \mathbf{3}\rangle \quad [\text{式 (5.11) で } j = 1, \mu = 0] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \beta^{(1)} [J_- \alpha^{(2)}] + [J_- \alpha^{(1)}] \beta^{(2)} \} = \beta^{(1)} \beta^{(2)} \quad (\text{最低ウエイトの固有ベクトル}) \end{aligned} \quad (5.14)$$

と求まる. また状態 (5.14) に直交する [ $j = 0$  の] 固有ベクトルとして

$$|0, \mathbf{1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha^{(1)} \beta^{(2)} - \beta^{(1)} \alpha^{(2)})$$

が得られる.

**note** 内積は例えば

$$(\alpha^{(1)} \beta^{(2)}, \beta^{(1)} \alpha^{(2)}) = (\alpha^{(1)}, \beta^{(1)}) (\beta^{(2)}, \alpha^{(2)}) = 0$$

のように計算する (これは  $\langle +, - | - , + \rangle = \langle + | - \rangle \langle - | + \rangle = 0$  に対応). 公式 (5.11) からは, その前提である規格化条件 (4.59) を満たす状態が得られる.

規格直交性 (4.59) に加えて, 異なる  $D$  (したがって  $j$ ) の値を持つ状態間の内積はゼロになるので [6, p.261], 直交性を要求して良い.

例 5.2 次に  $j = 1/2$  の表現と  $j = 1$  の表現の直積を考える. 最高ウェイトが  $j = 3/2$  の固有ベクトル

$$|\frac{3}{2}, \mathbf{4}\rangle = |\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle |1, \mathbf{3}\rangle$$

に  $J_-$  を次々と作用させて式 (5.11) を考慮すると,

$$\begin{aligned} |\frac{1}{2}, \mathbf{4}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} J_- |\frac{3}{2}, \mathbf{4}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \left( J_- |\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle \right) |1, \mathbf{3}\rangle + |\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle (J_- |1, \mathbf{3}\rangle) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} |-\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle |1, \mathbf{3}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle |0, \mathbf{3}\rangle, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} |-\frac{1}{2}, \mathbf{4}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |\frac{1}{2}, \mathbf{4}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} |-\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle (J_- |1, \mathbf{3}\rangle) + \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \left( J_- |\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle \right) |0, \mathbf{3}\rangle + |\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle (J_- |0, \mathbf{3}\rangle) \right\} \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} |-\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle |0, \mathbf{3}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle |-\mathbf{1}, \mathbf{3}\rangle, \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} |-\frac{3}{2}, \mathbf{4}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} J_- |-\frac{1}{2}, \mathbf{4}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} |-\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle (J_- |0, \mathbf{3}\rangle) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left( J_- |\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle \right) |-\mathbf{1}, \mathbf{3}\rangle \right\} \\ &= |-\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle |-\mathbf{1}, \mathbf{3}\rangle \end{aligned}$$

が得られる.

note 期待される最低ウェイトの状態  $|-\frac{3}{2}, \mathbf{4}\rangle = |-\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle |-\mathbf{1}, \mathbf{3}\rangle$  を書き加えておいた (後の式 (5.19) には明記されている). 以上が  $j = \frac{3}{2}$  の既約表現  $\mathbf{4}$  の基底となる. なお計算では式 (5.11) より, 特に

$$J_- |\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |-\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle, \quad J_- |1, \mathbf{3}\rangle = |0, \mathbf{3}\rangle, \quad J_- |0, \mathbf{3}\rangle = |-\mathbf{1}, \mathbf{3}\rangle$$

が成り立つことを繰り返し用いる.

最高ウェイトが  $j = 1/2$  の固有ベクトルは, 式 (5.15) に直交する状態

$$|\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |-\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle |1, \mathbf{3}\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle |0, \mathbf{3}\rangle \quad (5.17)$$

である [本稿次節で補足]. これに  $J_-$  を作用させると

$$\begin{aligned} |-\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle &= \sqrt{2} J_- |\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle = \sqrt{2} \left[ \sqrt{\frac{2}{3}} |\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle (J_- |1, \mathbf{3}\rangle) - \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \left( J_- |\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle \right) |0, \mathbf{3}\rangle + |\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle (J_- |0, \mathbf{3}\rangle) \right\} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} |-\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle |0, \mathbf{3}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle |-\mathbf{1}, \mathbf{3}\rangle \end{aligned} \quad (5.18)$$

を得る (これは状態 (5.16) に直交している).

note  $j^{(1)} = \frac{1}{2}, j^{(2)} = 1$  に対する三角不等式  $|j^{(1)} - j^{(2)}| \leq j \leq j^{(1)} + j^{(2)}$  より,  $j = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$  の3通りの値があり得る. しかしここでも各既約表現の最高ウェイト  $\mu = j$  は1ずつ減少するので,  $j = 1$  は通り過ぎることになる. 実際, 任意の  $j^{(1)}, j^{(2)}$  に対して, このようにして独立な状態を全て汲み尽くすことができる [6, p.285] [3, pp.126–129]. 少なくとも上の例では  $j = \frac{1}{2}$  の2次元表現と  $j = 1$  の3次元表現の直積は6次元表現であり, 対応して合計6つの基底が得られている.

以上の式 (5.15–18) を直積表現の状態について逆に解くと,

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle |1, \mathbf{3}\rangle &= |\frac{3}{2}, \mathbf{4}\rangle, \\
|-\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle |1, \mathbf{3}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} |\frac{1}{2}, \mathbf{4}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle, \\
|\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle |0, \mathbf{3}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |\frac{1}{2}, \mathbf{4}\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle, \\
|-\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle |0, \mathbf{3}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |-\frac{1}{2}, \mathbf{4}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |-\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle, \\
|\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle |-1, \mathbf{3}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} |-\frac{1}{2}, \mathbf{4}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |-\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle, \\
|-\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle |-1, \mathbf{3}\rangle &= |-\frac{3}{2}, \mathbf{4}\rangle
\end{aligned} \tag{5.19}$$

となる. [手早く確認するには右辺に式 (5.15–18) を代入すれば良い. 左辺においてウエイト  $\mu^{(1)} = \pm\frac{1}{2}$  と  $\mu^{(2)} = \pm 1, 0$  の組合せが全て網羅されている.] このとき  $j = 1/2$  と  $j = 1$  の既約表現の直積を  $j = 3/2$  と  $j = 1/2$  の既約表現の直和に分解できたといひ,

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{4} \oplus \mathbf{2}$$

と表す.

**note** 実際, 直積表現の基底 (5.19) を式 (5.15–18) のように選び直せば, 群の表現行列は式 (2.26) のようにブロック対角化されるため, 2.4 節の意味での既約表現への直和分解が得られる [6, pp.294–295].

一般に最高ウエイトが  $j_1, j_2$  の 2 つの既約表現の直積表現は, 最高ウエイト  $J$  を持つ既約表現の直和

$$|\mu_1, \mathbf{2j}_1 + \mathbf{1}\rangle |\mu_2, \mathbf{2j}_2 + \mathbf{1}\rangle = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \langle \mu_1 + \mu_2, J | \mu_1, j_1; \mu_2, j_2 \rangle |\mu_1 + \mu_2, \mathbf{2J} + \mathbf{1}\rangle \tag{5.20}$$

に分解できる. ここで展開係数  $\langle M, J | \mu_1, j_1; \mu_2, j_2 \rangle$  (実数にとる) は **Clebsch-Gordan** (クレブシュ-ゴルダ) ン係数と呼ばれ,  $M \neq \mu_1 + \mu_2$  のときゼロになる. これを  $(M, J) = a$ ,  $(\mu_1, \mu_2) = b$  で指定される行列要素  $M_{ab}$  と見なすと, 行列  $(M_{ab})$  は

$$\begin{aligned}
M_{ba} &= \langle \mu_1, j_1; \mu_2, j_2 | M, J \rangle = \langle M, J | \mu_1, j_1; \mu_2, j_2 \rangle = M_{ab}, \\
\sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{M=-J}^J \langle \mu_1, j_1; \mu_2, j_2 | M, J \rangle \langle M, J | \mu'_1, j_1; \mu'_2, j_2 \rangle &= \delta_{\mu_1 \mu'_1} \delta_{\mu_2 \mu'_2}, \\
\sum_{\mu_2=-j_2}^{j_2} \sum_{\mu_1=-j_1}^{j_1} \langle M, J | \mu_1, j_1; \mu_2, j_2 \rangle \langle \mu_1, j_1; \mu_2, j_2 | M', J' \rangle &= \delta_{MM'} \delta_{JJ'}
\end{aligned}$$

を満たす対称直交行列であり, 上式 (5.20) の逆の関係もまた Clebsch-Gordan 係数を用いて

$$|M, \mathbf{2J} + \mathbf{1}\rangle = \sum_{\mu_2=-j_2}^{j_2} \sum_{\mu_1=-j_1}^{j_1} \langle \mu_1, j_1; \mu_2, j_2 | M, J \rangle |\mu_1, \mathbf{2j}_1 + \mathbf{1}\rangle |\mu_2, \mathbf{2j}_2 + \mathbf{1}\rangle$$

と書ける. [以上, 文献 [6, pp.284–286] (のノート) を参照.]

## 節末問題

Pauli 行列  $\sigma_i$  に対する関係式

$$\begin{aligned}\sigma_i^2 &= I : \text{単位行列}, & (i \text{ で和をとらない}) \\ [\sigma_i, \sigma_j] &= 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \\ \exp(i\theta\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) &= \cos\theta I + i\sin\theta\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, & (\mathbf{n} : \text{単位ベクトル}) \\ \exp(i\sigma_3\phi/2)\sigma_1\exp(-i\sigma_3\phi/2) &= \sigma_1\cos\phi - \sigma_2\sin\phi, & (\text{角運動量の交換関係のみの帰結})\end{aligned}$$

および角運動量  $\mathbf{J}$  に対する交換関係  $[\mathbf{J}^2, J_i] = 0$  は、文献 [6, pp.214–215, pp.222–225, p.253] (のノート) で導出済み。

## 5.1 節について

■式 (5.10) について 正ルート  $\alpha = \alpha_1 = +1$  に対して式 (4.60) より

$$J_- |\mu, \mathbf{N}\rangle = \sqrt{2}E_- |\mu, \mathbf{N}\rangle = \sqrt{2}N_{-\alpha, \mu} |\mu - 1, \mathbf{N}\rangle$$

であり、最右辺の係数は式 (4.61):  $N_{-\alpha, \mu} = N_{\alpha, \mu - \alpha}^*$  のように書き換えられる。そこで式 (4.63) において  $k = -1$  とおき  $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = 1/2$  を考慮すると、

$$|N_\mu|^2 \equiv |N_{\alpha, \mu - \alpha}|^2 = \frac{1}{4}m(n+1)$$

となる。

■式 (5.17) について 最高ウェイト  $\mu$  が  $j = \frac{1}{2}$  の状態  $|j = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}\rangle$  は、ウェイトの和が  $\frac{1}{2}$  となる組合せの線形結合

$$|\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle = a|-\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle|1, \mathbf{3}\rangle + b|\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle|0, \mathbf{3}\rangle$$

で与えられる。右辺は式 (5.15) と同じ形を持つ。そこでこれが状態 (5.15) と直交すること、および規格化条件 (4.59):

$$1 = \langle \frac{1}{2}, \mathbf{2} | \frac{1}{2}, \mathbf{2} \rangle = |a|^2 + |b|^2$$

を要求すると、式 (5.17) を得る (全体の位相の任意性を除いて)。あるいは直交性の代わりに、

$$\begin{aligned}0 &= J_+ |\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle = a \left( J_+ |-\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle \right) |1, \mathbf{3}\rangle + b |\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle (J_+ |0, \mathbf{3}\rangle) \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}}a + b \right) |\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle |1, \mathbf{3}\rangle\end{aligned}$$

に注目しても  $a = \sqrt{\frac{2}{3}}, b = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  となって、式 (5.17) が得られる [3, p.127]。ただし昇演算子  $J_+$  に対しては式 (5.11) の代わりに、

$$J_+ |\mu, \mathbf{2j} + \mathbf{1}\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}(j - \mu)(j + \mu + 1)} |\mu + 1, \mathbf{2j} + \mathbf{1}\rangle$$

が成り立つことに注意した。

■教科書の表 5.1 (p.116) について Clebsch-Gordan 係数の値を系統的に求める方法は、文献 [6, pp.287-289] に見出される。

## 5.2 アイソスピン

原子核は核子 (陽子 p と中性子 n) が核力で結合してできている。ここで核子を、最高ウエイトが  $I = 1/2$  の SU(2) の基本表現  $\rho_{1/2}$  における  $I_3 = \pm 1/2$  の基底状態

$$\text{陽子 p: } |\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle \equiv |+\rangle, \quad \text{中性子 n: } |-\frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle \equiv |-\rangle$$

と見なそう。量子数  $(I, I_3)$  はある種のスピンであり、アイソスピンと呼ばれる。そして通常のスピンの場合と同様に [6, p.277], 核子 N の一般的な状態  $|\alpha\rangle$  を 2 成分の波動関数

$$\psi_N(x) = \begin{pmatrix} \langle x, +|\alpha\rangle \\ \langle x, -|\alpha\rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix}$$

で表す。ここに  $\phi_1(x)$  と  $\phi_2(x)$  はそれぞれ陽子 ( $I_3 = +1/2$ ) と中性子 ( $I_3 = -1/2$ ) の波動関数と解釈できる。2 成分波動関数は SU(2) 変換

$$\phi'_i(x) = U_i^j \phi_j(x), \quad U = (U_i^j) = \exp\left(i \sum_{i=1}^3 t^i I_i\right)$$

を受ける。通常のスピン 1/2 の系に対する回転と同様に、この SU(2) 変換は陽子を中性子へと回転する (変換のユニタリ性より核子の存在確率  $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2$  が保証される)。ところで陽子と中性子はよく似た性質を持っており、特に核子間の相互作用は pp 間, pn 間, nn 間で等しく働くことが知られている (核力の荷電不変性)。そこで我々は核子が SU(2) 変換に関して対称であり [2, p.83,p.85], それ故 1.4 節で見たように

$$UHU^{-1} = H, \quad \therefore [U, H] = 0, \quad \therefore [I_i, H] = 0$$

が成り立つと考える。これはアイソスピン  $(I, I_3)$  が保存量であることを意味する。なお複数の核子から成る系は基本表現の直積表現で、したがって 5.1 節の例 5.1-2 で見たように、適当な既約表現  $|I_3, \mathbf{2I} + \mathbf{1}\rangle$  の直和で表される。

核子のみならず、核子と中間子の相互作用も SU(2) 不変であることが知られている。パイ中間子は  $I = 1$  の粒子

$$\pi^+ : |1, \mathbf{3}\rangle, \quad \pi^0 : |0, \mathbf{3}\rangle, \quad \pi^- : |-1, \mathbf{3}\rangle$$

と考えることができる。

核子・中間子系の相互作用に関する SU(2) 不変性の帰結を見るために、核子・中間子散乱を考えよう。核子のアイソスピンは  $I = 1/2$ , パイ中間子のアイソスピンは  $I = 1/2$  なので、それらの合成系のアイソスピンは

$I = 3/2$  または  $I = 1/2$  であり, 式 (5.19) で見た 6 つの状態

$$\begin{aligned}
|\pi^+p\rangle &= |1, \mathbf{3}\rangle \left| \frac{1}{2}, \mathbf{2} \right\rangle = \left| \frac{3}{2}, \mathbf{4} \right\rangle, \\
|\pi^+n\rangle &= |1, \mathbf{3}\rangle \left| -\frac{1}{2}, \mathbf{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2}, \mathbf{4} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \mathbf{2} \right\rangle, \\
|\pi^0p\rangle &= |0, \mathbf{3}\rangle \left| \frac{1}{2}, \mathbf{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \mathbf{4} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2}, \mathbf{2} \right\rangle, \\
|\pi^0n\rangle &= |0, \mathbf{3}\rangle \left| -\frac{1}{2}, \mathbf{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| -\frac{1}{2}, \mathbf{4} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| -\frac{1}{2}, \mathbf{2} \right\rangle, \\
|\pi^-p\rangle &= |-1, \mathbf{3}\rangle \left| \frac{1}{2}, \mathbf{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left| -\frac{1}{2}, \mathbf{4} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \mathbf{2} \right\rangle, \\
|\pi^-n\rangle &= |-1, \mathbf{3}\rangle \left| -\frac{1}{2}, \mathbf{2} \right\rangle = \left| -\frac{3}{2}, \mathbf{4} \right\rangle
\end{aligned} \tag{5.19'}$$

を持つ. 各々の相互作用の SU(2) 対称性より, 散乱過程において合成系のアイソスピン  $I_3$  は不変なので, これらを始・終状態に持つ核子・中間子散乱として次の 6 つのプロセスが可能である.

$$\begin{aligned}
\pi^+p &\rightarrow \pi^+p, & \pi^-p &\rightarrow \pi^-p, & \pi^-p &\rightarrow \pi^0n, \\
\pi^-n &\rightarrow \pi^-n, & \pi^+n &\rightarrow \pi^+n, & \pi^+n &\rightarrow \pi^0p.
\end{aligned} \tag{20}$$

各々の散乱振幅は S 演算子  $S = \exp[-iH(t_f - t_i)]$  の始・終状態に関する行列要素  $S_{fi} = \langle f|S|i\rangle$  で与えられる [14, pp.106–107]. ところで既約表現の状態  $|I_3, \mathbf{2I} + \mathbf{1}\rangle$  (ないし  $|I_3, I\rangle$ ) に関する S 行列要素は, アイソスピン  $(I, I_3)$  の不変性より

$$S_{fi} = \langle I', I'_3; f|S|I, I_3; i\rangle = \delta_{II'} \delta_{I_3I'_3} M_I$$

と表され, 散乱振幅  $M_I$  はアイソスピンの大きさ  $I$  のみによって決まる [SU(2) 変換 (回転) の下での対称性より  $I_3$  には依らないと考えられる]. すると上式 (5.19') とより, 6 つのプロセスの散乱振幅には

$$\begin{aligned}
\langle \pi^+p; f|S|\pi^+p; i\rangle &= \langle \pi^-n; f|S|\pi^-n; i\rangle = M_{3/2}, \\
\langle \pi^-p; f|S|\pi^-p; i\rangle &= \langle \pi^+n; f|S|\pi^+n; i\rangle = \frac{1}{3}M_{3/2} + \frac{2}{3}M_{1/2}, \\
\langle \pi^0n; f|S|\pi^-p; i\rangle &= \langle \pi^0p; f|S|\pi^+n; i\rangle = \frac{\sqrt{2}}{3}M_{3/2} - \frac{\sqrt{2}}{3}M_{1/2}
\end{aligned}$$

の関係があることが見出される. これらは  $\sigma(i \rightarrow f) \sim |S_{fi}|^2$  を通じて [14, pp.148–151], 断面積  $\sigma$  の関係に反映される (その結果の正当性は実験的に裏付けられている).

## 5.2 節について

$I_3$  の不変性からは, 核子・中間子散乱として式 (20) の他に,

$$\pi^0p \rightarrow \pi^0p, \quad \pi^0n \rightarrow \pi^0n, \quad \pi^0p \rightarrow \pi^+n, \quad \pi^0n \rightarrow \pi^-p$$

という過程が許容されるはずである. 実際, 初めの 2 つの反応に対する確率振幅は

$$\langle \pi^0p|S|\pi^0p\rangle = \langle \pi^0n|S|\pi^0n\rangle = \frac{2}{3}M_{3/2} + \frac{1}{2}M_{1/2}$$

と計算され, ノンゼロである. また後ろ 2 つの過程は式 (20) の逆反応となっているので, その確率振幅は S 行列のユニタリー性  $S_{if} = S_{fi}^*$  から求まる.

### 5.3 SU(3)

[SU(3) に関して, しばらく 5.1 節と同様に議論を進める. QCD (量子色力学) は SU(3) 変換に関してゲージ不変な理論であり, いわゆる SU(3) Yang-Mills 理論の実例にあたる [11, p.145].]

SU(3) の元 (3 次の特殊ユニタリー行列) を  $U = \exp(i\hat{X})$  と書くと

$$U \text{ のユニタリー性} \rightarrow \hat{X} \text{ は Hermite,} \quad \det U = 1 \rightarrow \text{Tr } \hat{X} = 0$$

であり,  $3^2 - 1 = 8$  個の実数パラメータ  $t^1, \dots, t^8$  を用いて  $\hat{X} = \sum_{i=1}^8 t^i F_i$  と表される [3.2 節]. ここで基底として [Pauli 行列の一般化にあたる [2, p.105]] **Gell-Mann 行列**

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

の  $1/2$  倍  $F_i = \lambda_i/2$  を採ることができる. これらの交換関係を

$$[F_i, F_j] = if_{ij}^k F_k \quad (5.32)$$

と書いて定義される SU(3) の構造定数  $f_{ij}^k$  は添字について完全反対称であり, ゼロでない独立な成分は

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = \frac{1}{2}, \quad f_{156} = f_{367} = -\frac{1}{2}, \quad f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (21)$$

のみである [文献 [15, § 11.2.1] のノートも参照]. Cartan 計量 [定義式 (4.7) と 4.2 節を見よ] は

$$\hat{g}_{ij} = -f_{in}^m f_{jm}^n = 3\delta_{ij}, \quad \therefore \hat{g}^{ij} = \frac{1}{3}\delta_{ij} \quad (22)$$

となる [本稿次節で補足]. Gell-Mann 行列のうち  $\lambda_3$  と  $\lambda_8$  のみが可換な組 (そしてまた対角的) であり [15, p.273], そこで

$$H_1 = F_3, \quad H_2 = F_8$$

を Cartan 部分代数に選ぶことができる. SU(3) の階数は, したがってルート空間の次元は  $r = 2$  である.

**note** 一般に SU( $N$ ) の生成子 (Lie 代数の基底) のうち対角的に選べる独立な行列は  $(N - 1)$  個である. と言うのも, 対角的な Hermite 行列は  $N$  個の実数の対角成分で特徴付けられ, トレースレスの条件より独立な成分数は  $(N - 1)$  となるからである. よって SU( $N$ ) の階数は  $r = N - 1$  となる (教科書 5.5 節 p.137).

随伴表現の行列

$$(\text{ad}H_1)^i_j = if_{3j}^i, \quad (\text{ad}H_2)^i_j = if_{8j}^i \quad (23)$$

のゼロでない固有値と, 対応する [規格直交条件 (4.34) を満たす] 固有ベクトルは表 4 のように求まる (固有値  $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0)$  は 2 重に縮退) [本稿次節で補足]. こうして 4.2 節の図 13 に示したルート図が得られる. そこで 4.2 節に従って新しい基底  $E_\alpha = v_\alpha^i F_i$ , すなわち

$$E_{(\pm 1, 0)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(F_1 \pm iF_2), \quad E_{(\pm 1/2, \pm\sqrt{3}/2)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(F_4 \pm iF_5), \quad E_{(\mp 1/2, \pm\sqrt{3}/2)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(F_6 \pm iF_7)$$

表4 (adH<sub>1</sub>, adH<sub>2</sub>) のゼロでない固有値と固有ベクトル

$(\alpha_1, \alpha_2)$	$v_\alpha$
$(\pm 1, 0)$	$(1, \pm i, 0, 0, 0, 0, 0, 0)/\sqrt{6}$
$(\pm 1/2, \pm\sqrt{3}/2)$	$(0, 0, 0, 1, \pm i, 0, 0, 0)/\sqrt{6}$
$(\mp 1/2, \pm\sqrt{3}/2)$	$(0, 0, 0, 0, 0, 1, \pm i, 0)/\sqrt{6}$

を定義できる。

ところで SU(3) の表現はウエイト  $\mu = (\mu_1, \mu_2)$  ( $H_1, H_2$  の固有値) を与えることで決まる (4.4 節)。そこで Dynkin インデックス  $[1, 0], [0, 1]$  を持つ最高ウエイト  $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}$  で特徴付けられる 2 つの基本表現 [4.4 節] に対して、全てのウエイトを求めよう。それには例 4.4 [4.4 節] と同様に最高ウエイトから始めて、全てのウエイトのインデックス  $[p^1, p^2]$  を求めれば良い。次いで SU(3) の単純ルートが

$$\alpha^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \alpha^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (5.35)$$

であることに注意して式 (4.68) を用いると、インデックス  $[p^1, p^2]$  を持つウエイト  $(\mu_1, \mu_2)$  が得られる。すると基本表現  $\mu^{(1)} : [1, 0]$  のウエイトは

$$[1, 0] : \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right), \quad [-1, 1] : \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad [0, -1] : \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right), \quad (5.36)$$

基本表現  $\mu^{(1)} : [1, 0]$  のウエイトは

$$[0, 1] : \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right), \quad [1, -1] : \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad [-1, 0] : \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \quad (5.37)$$

と求まる [本稿次節で補足]。いずれの基本表現も 3 次元表現であり [3 つのウエイトから構成されるから (例 4.4 を見よ)],  $[0, 1]$  表現を **3**,  $[1, 0]$  表現を **3**<sup>\*</sup> と表す。各々の表現のウエイト図は図 17 のようである。

ここで表記 **3**<sup>\*</sup> の動機付けを述べる。一般に  $[F_i$  を改めて抽象的な Lie 代数の元と見なすと], 表現  $\rho(F_i)$  に対して  $-\rho^*(F_i)$  も群の表現となる。

**理由** 実際、式 (5.32) における構造定数  $f_{ij}^k$  が実数であることに注意すると、交換関係 (5.32) を満たす [表現行列]  $F_i$  に対して  $-F_i^*$  も交換関係 (5.32) を満たす。

**note** 確認:  $[(-F_i^*), (-F_j^*)] = [F_i, F_j]^* = (if_{ij}^k F_k)^* = if_{ij}^k (-F_k^*)$ 。

この  $-\rho^*(F_i)$  を表現  $\rho$  の複素共役表現といい、 $\rho^*$  (または  $\bar{\rho}$ ) で表す。このとき表現  $\rho$  のウエイト  $\mu$  に対し、 $-\mu$  は複素共役表現  $\rho^*$  のウエイトとなる。

**理由** 実際もとの表現の Cartan 部分代数  $H_a$  は Hermite 行列なので、複素共役表現の Cartan 部分代数  $-H_a^*$  と逆符号の固有値を持つ。

**note** Hermite 行列  $H$  の固有値  $\alpha$  は実数なので、固有ベクトルを  $v$  として固有方程式  $Hv = \alpha v$  の複素共役をとると、 $(-H^*)v^* = (-\alpha)v^*$  を得る。これは  $(-H^*)$  の固有値が  $(-\alpha)$  であることを意味する。

しかるに  $[1, 0]$  表現は、固有値 (5.36) が  $[0, 1]$  表現の固有値 (5.37) と逆符号なので、 $[0, 1]$  表現 **3** の複素共役

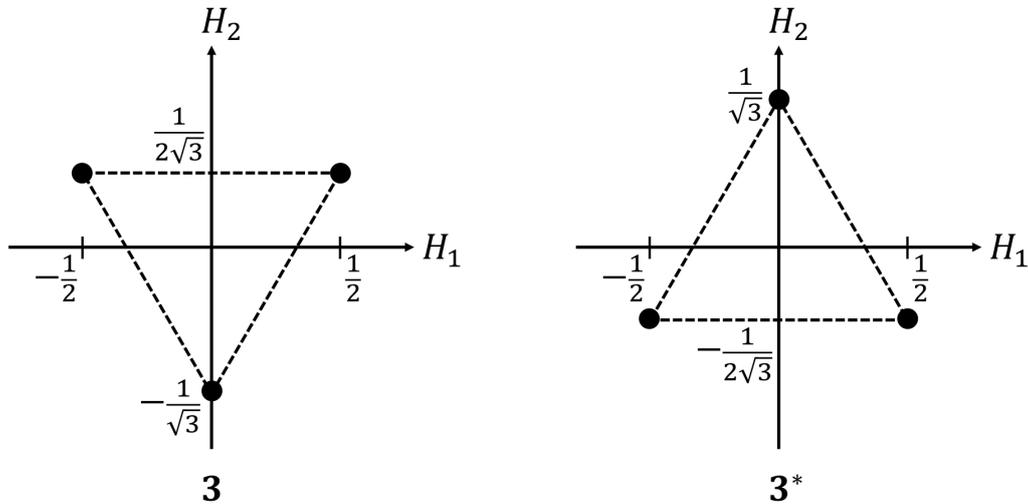


図 17 SU(3) の  $\mathbf{3}, \mathbf{3}^*$  表現のウェイト図 [座標原点は正三角形の重心に一致]

表現  $\mathbf{3}^*$  である<sup>\*29</sup>。また一般に互いに複素共役な表現の一方の最高ウェイトは、他方の最低ウェイトである。このことは式 (5.36–37) の具体例に対して直接確かめられる。

複素共役表現  $\rho^*$  がもとの表現  $\rho$  と同等のとき、 $\rho$  を実表現という。ところで既約表現  $[n, m]$  の複素共役表現は  $[m, n]$  である。

理由 既約表現  $[n, m]$  は最高ウェイトが  $n\boldsymbol{\mu}^{(1)} + m\boldsymbol{\mu}^{(2)}$ 、最低ウェイトが  $-n\boldsymbol{\mu}^{(2)} - m\boldsymbol{\mu}^{(1)}$  である。

note 我々は SU(3) の表現を論じており、上記で見出した  $[1, 0] = \mathbf{3}^*$  表現と  $[0, 1] = \mathbf{3}$  表現が複素共役である。よって

- $[1, 0]$  表現の最高ウェイトは  $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$ 、最低ウェイトは  $-\boldsymbol{\mu}^{(2)}$  である。
- $[0, 1]$  表現の最高ウェイトは  $\boldsymbol{\mu}^{(2)}$ 、最低ウェイトは  $-\boldsymbol{\mu}^{(1)}$  である。

となる事実を用いれば良い。

すると既約表現  $[n, m]$  複素共役表現は最高ウェイト  $m\boldsymbol{\mu}^{(1)} + n\boldsymbol{\mu}^{(2)}$  を持ち、それ故  $[m, n]$  表現となる。

このため  $[n, n]$  表現は実表現となる。

さて、SU(3) は SU(2) を部分群として含んでいる。[4.1 節の序盤より] 等価的に、SU(3) の Lie 代数は SU(2) の Lie 代数を部分群として含んでいると述べても良い。実際 [構造定数の値 (21) と反対称性より]、例えば  $\{F_1, F_2, F_3\}$  に対して交換関係 (5.32) は SU(2) の交換関係 (5.4):

$$[F_i, F_j] = i \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} F_k$$

になる。よって  $\{F_1, F_2, F_3\}$  は SU(3) の中の SU(2) 部分代数である。これらは Gell-Mann 行列の表式より可約であり、2次元空間と1次元空間の直和に分解される ( $\mathbf{3} = \mathbf{2} \oplus \mathbf{1}$ )。

SU(2) 部分群のとり方 (および、その既約表現分解) は一意的ではない。他にも次のような Lie 代数を持つ

<sup>\*29</sup> 現に Gell-Mann 行列 (の 1/2 倍)  $F_i = \lambda_i/2$  に対して、式 (5.36) は  $(-F_3^*, -F_8^*)$  の固有値となっている。

SU(2) 部分群が挙げられる.

$$\begin{aligned} \text{SU}(2)_U &: \left\{ F_6, F_7, \frac{1}{2}(-F_3 + \sqrt{3}F_8) \right\}, & \text{SU}(2)_V &: \left\{ F_4, F_5, \frac{1}{2}(F_3 + \sqrt{3}F_8) \right\}, \\ \text{SU}(2)_1 &: \{2F_1, 2F_4, 2F_7\}, & \text{SU}(2)_2 &: \{2F_1, 2F_6, 2F_5\}, & \text{SU}(2)_3 &: \{2F_2, 2F_4, 2F_6\}, & \text{SU}(2)_4 &: \{2F_2, 2F_5, 2F_7\}. \end{aligned}$$

最後に **Casimir** (カシミヤ) 演算子について述べる. 群の生成子  $X_i$  の組合せによって作られる, 全ての生成子  $X_i$  と可換で, [それ故 Baker-Hausdorff の公式より] 群の変換  $[U = \exp(it^i X_i)]$  による相似変換] の下で不変な演算子を Casimir 演算子という. 一般に階数  $r$  のコンパクト単純 Lie 代数には  $r$  個の Casimir 演算子がある. 例えば SU(2) [階数は  $r = 1$  (5.1 節)] には Casimir 演算子  $\mathbf{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$  がある.

SU(3) には  $r = 2$  個の Casimir 演算子がある. その 1 つは

$$C^{(2)} = \sum_{i=1}^8 F_i^2 \quad (5.41)$$

であり [本稿次節で補足], これを 2 次の Casimir 演算子という [ $F_i$  について 2 次]. もう 1 つの Casimir 演算子について説明する準備として, Gell-Mann 行列の反交換関係を

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = 2d_{ij}{}^k \lambda_k + \frac{4}{3}\delta_{ij} \quad (5.42)$$

と書いて係数  $d_{ij}{}^k$  を定義する [右辺第 2 項には単位行列 1 が掛かっている]. すると

$$d_{ij}{}^k = \frac{3}{4}\text{Tr}(\{\lambda_i, \lambda_j\}\lambda^k) \quad (5.43)$$

と定まる. [ただし  $\lambda^k \equiv \hat{g}^{kl}\lambda_l$  であり, 本稿次節で上式 (5.43) の導出を行う. ここから実際に反交換子を式 (5.42) の形に書けることが保証される. また式 (5.43) 右辺の表式より]  $d_{ij}{}^k$  は添字に関して完全対称である (その値を表 5 に挙げる). 係数  $d_{ij}{}^k$  を用いて, 今一つの Casimir 演算子は

$$C^{(3)} = \sum_{i,j,k=1}^8 d_{ij}{}^k F^i F^j F_k \quad (5.44)$$

(ただし  $F^i \equiv \hat{g}^{ij}F_j$ ) で与えられる [節末問題 5.14(1)]. これは 3 次の Casimir 演算子である.

### 節末問題

5.13 (次の設問で有用な) 恒等式  $F_i \rightarrow i$  と略記し, (反) 交換子を正直に展開すると

$$\begin{aligned} [i, \{j, k\}] &= ijk + ikj - jki - kji, \\ \{[j, i], k\} &= jik - ijk + kji - kij, \\ \{[k, i], j\} &= kij - ikj + jki - jik \end{aligned}$$

となる. これらを辺々足すと, 全ての項が正確に相殺することが見て取れる:

$$[F_i, \{F_j, F_k\}] + \{[F_j, F_i], F_k\} + \{[F_k, F_i], F_j\} = 0.$$

ここまでは  $F_i$  を SU(3) の Lie 代数の基底と仮定していないことに注意しよう.

次に  $F_i$  を SU(3) の Lie 代数の基底として, 交換関係 (5.32) と反交換関係 (5.42):

$$\{F_i, F_j\} = d_{ij}{}^k F_k + \frac{1}{3}\delta_{ij}$$

表5 完全対称な  $d_{ij}^k$  の値

$i$	$j$	$k$	$d_{ij}^k$	$i$	$j$	$k$	$d_{ij}^k$
1	1	8	$1/\sqrt{3}$	3	5	5	$1/2$
1	4	6	$1/2$	3	6	6	$-1/2$
1	5	7	$1/2$	3	7	7	$-1/2$
2	2	8	$1/\sqrt{3}$	4	4	8	$-1/2\sqrt{3}$
2	4	7	$-1/2$	5	5	8	$-1/2\sqrt{3}$
2	5	6	$1/2$	6	6	8	$-1/2\sqrt{3}$
3	3	8	$1/\sqrt{3}$	7	7	8	$-1/2\sqrt{3}$
3	4	4	$1/2$	8	8	8	$-1/\sqrt{3}$

を用いて (反) 交換子を具体的に評価すると,

$$\begin{aligned}
 0 &= [F_i, \{F_j, F_k\}] + \{[F_j, F_i], F_k\} + \{[F_k, F_i], F_j\} \\
 &= d_{jk}^l [F_i, F_l] + i f_{ji}^l \{F_l, F_k\} + i f_{ki}^l \{F_l, F_j\} \\
 &= i(d_{jk}^l f_{il}^m + d_{lk}^m f_{ji}^l + d_{lj}^m f_{ki}^l) F_m + \frac{i}{3}(f_{ji}^l \delta_{lk} + f_{ki}^l \delta_{lj})
 \end{aligned}$$

を得る. 最右辺の  $F_m$  は規格直交性  $\text{Tr}(F_m F_n) = \frac{1}{2} \delta_{mn}$  を利用して取り除けるので [11, p.138],

$$d_{jk}^l f_{il}^m + d_{lk}^m f_{ji}^l + d_{lj}^m f_{ki}^l = 0 \quad (24)$$

が見出される.

5.14(1) 3 次の Casimir 演算子 (5.44) が実際に全ての  $F_i$  と可換であることの確認 和の記号を省略して

$$C^{(3)} = d_{ij}^k F^i F^j F_k = d_{ij}^k \hat{g}^{im} \hat{g}^{jn} F_m F_n F_k \equiv d^{mnk} F_m F_n F_k$$

と書く. 最右辺の  $d^{mnk} \equiv \hat{g}^{im} \hat{g}^{jn} d_{ij}^k$  は単なる数係数であることに注意すると\*30,

$$\begin{aligned}
 [F_i, C^{(3)}] &= d^{jkl} [F_i, F_j F_k F_l] \\
 &= d^{jkl} (F_j F_k [F_i, F_l] + F_j [F_i, F_k] F_l + [F_i, F_j] F_k F_l) \\
 &= i d^{jkl} (f_{il}^m F_j F_k F_m + f_{ik}^m F_j F_m F_l + f_{ij}^m F_m F_k F_l) \\
 &= i(d^{jkm} f_{im}^l + d^{jml} f_{im}^k + d^{mkl} f_{im}^j) F_j F_k F_l
 \end{aligned}$$

と変形できる. 最右辺の括弧内は, 全問で得た公式 (24) で  $m \leftrightarrow l$  とし, 係数  $d$  の添字を上げた関係

$$\begin{aligned}
 0 &= d^{jkm} f_{im}^l + d^{mkl} f_{ji}^m + d^{jml} f_{ki}^m \\
 &= d^{jkm} f_{im}^l + d^{mkl} f_{im}^j + d^{jml} f_{im}^k
 \end{aligned}$$

によって消えるので,  $[F_i, C^{(3)}] = 0$  が示された.

\*30 もとの係数  $d_{ij}^k$  の完全対称性も引き継がれている.

### 5.3 節について

■教科書 p.123 下から 8 行目の Cartan 行列 (本稿の式 (22)) について 構造定数のゼロでない値 (21) に注意すると, 例えば

$$\begin{aligned}\hat{g}_{11} &= -f_{1n}^m f_{1m}^n = -2(f_{12}^3 f_{13}^2 + f_{14}^7 f_{17}^4 + f_{15}^6 f_{16}^5) \quad (\text{係数 2 は入れ替え } m \leftrightarrow n \text{ による}) \\ &= -2 \left\{ 1 \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \right\} = 3\end{aligned}$$

となる. 同様にゼロでない  $f_{1n}^m$  のみ考慮すると,

$$\hat{g}_{12} = -f_{1n}^m f_{2m}^n = -2(f_{12}^3 f_{23}^2 + f_{14}^7 f_{27}^4 + f_{15}^6 f_{26}^5) = 0$$

が確かめられる (第 2 辺のいずれの  $f_{2m}^n$  もゼロだから).

■表 4 の固有値  $\alpha$  と固有ベクトル  $v_\alpha$  について 構造定数のゼロでない値 (21) に注意すると, 行列要素 (23) を持つ随伴表現の行列は

$$\text{ad}H_1 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}H_2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となることによる.

■基本表現のウェイト (5.36–37) について はじめに  $SU(3)$  の Cartan 行列は, 4.3 節後半 (あるいは 4.4 節の例 4.4) で見た

$$(C_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

であることを思い出しておこう. さて, 基本表現  $\mu^{(1)} : [1, 0]$  に対して最高ウェイトから  $\alpha^{(1)}$  を 1 回引くことができる. このとき得られるウェイトは式 (4.73) において  $k_1 = 1, k_2 = 0$  が対応するので, そのインデックス (4.74) は

$$p^1 = m^1 - C_{11} = 1 - 2 = -1, \quad p^2 = m^2 - C_{12} = 0 - (-1) = 1$$

と計算される. するとこのウェイトからさらに  $\alpha^{(2)}$  を引くことができ, 得られるウェイト ( $k_1 = 1, k_2 = 1$  が対応) のインデックスは

$$p^1 = m^1 - C_{11} - C_{21} = 1 - 2 - (-1) = 0, \quad p^2 = m^2 - C_{21} - C_{22} = 0 - 2 - (-1) = -1$$

である. 基本表現  $\mu^{(2)} : [0, 1]$  に対する全てのウェイトのインデックス  $[p^1, p^2]$  も同様に得られる.

さらにいずれの基本表現に関しても, インデックス  $[p^1, p^2]$  を持つウェイト  $\mu = (\mu_1, \mu_2)$  は式 (4.68):

$$p^1 = 2(\alpha^{(1)}, \mu) = \mu_1 - \sqrt{3}\mu_2, \quad p^2 = 2(\alpha^{(2)}, \mu) = \mu_1 + \sqrt{3}\mu_2$$

(ただし単純ルート (5.35) の長さが 1 であることに注意した) より,

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(p^1 + p^2), \quad \mu_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(p^2 - p^1)$$

と求まる.

ここから特に基本表現の最高ウェイトは

$$\boldsymbol{\mu}^{(1)} = \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right), \quad \boldsymbol{\mu}^{(2)} = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$$

であり, すると上式は後の教科書 p.127 上 2 行にもあるように, インデックス  $[p^1, p^2]$  を持つウェイトが式 (4.70):

$$\boldsymbol{\mu} = p^1 \boldsymbol{\mu}^{(1)} + p^2 \boldsymbol{\mu}^{(2)}$$

で与えられることと整合する.

■2 次の Casimir 演算子 (5.41) が実際に全ての  $F_i$  と可換であることの確認 和の記号を省略して  $C^{(2)} = F_k^2$  と書くと

$$[F_i, C^{(2)}] = F_k[F_i, F_k] + [F_i, F_k]F_k = if_{ik}{}^l(F_k F_l + F_l F_k) = 0$$

となる. ただし最後は添字  $k, l$  について対称な項と反対称な項の“縮約”が消えることによる. 以上は  $SU(2)$  における交換関係  $[J_i, J^2] = 0$  の証明方法と何ら変わらない.

■ $d_{ij}{}^k$  の式 (5.43) の導出  $SU(3)$  の Lie 代数の基底はつまらない数係数の違いを除いて, Gell-Mann 行列  $\lambda_i$  で与えられる. それらはトレースレスであり ( $\text{Tr}(\lambda_i) = 0$ ), 規格直交性

$$\text{Tr}(\lambda_i \lambda_j) = 2\delta_{ij}$$

を満たす [11, p.138]. そこで式 (5.42) の両辺に右から  $\lambda^l = \hat{g}^{lm} \lambda_m = \frac{1}{3} \delta_{lm} \lambda_m$  を掛けてトレースをとると,

$$\text{Tr}(\{\lambda_i, \lambda_j\} \lambda^l) = \frac{2}{3} d_{ij}{}^k \delta_{lm} \text{Tr}(\lambda_k \lambda_m) = \frac{4}{3} d_{ij}{}^l$$

となって式 (5.43) が得られる.

## 5.4 既約表現とヤング図

Dynkin インデックス  $[m^1, m^2, \dots, m^r]$  で特徴付けられる最高ウェイトを持つ Lie 代数 (したがって Lie 群) の既約表現は,  $m^i$  個ずつの基本表現  $\rho_i$  の直積 (テンソル積) によって得られる (4.4 節). 本節では具体的に  $SU(3)$  の任意の既約表現を, 基本表現のテンソル積として作る.

$SU(3)$  の基本表現  $\mathbf{3}$  の基底は, この表現における 3 つのウェイト (5.37) に対応して,

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle = \mathbf{e}_1, \quad \left| 0, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle = \mathbf{e}_2, \quad \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle = \mathbf{e}_3$$

と選べる [左辺は  $H_1, H_2$  の同時固有状態  $|\mu_1, \mu_2\rangle$ ]. 3 次元表現  $\mathbf{3}$  の表現空間におけるベクトルは, これらの 1 次結合  $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$  として表される. 同様に基本表現  $\mathbf{3}^*$  の基底を, ウェイト (5.36) に対応した

$$\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle = \mathbf{e}^1, \quad \left| 0, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle = \mathbf{e}^2, \quad \left| -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle = \mathbf{e}^3$$

にとる。これらの積

$$e_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_n} \equiv e^{i_1} e^{i_2} \dots e^{i_n} e_{j_1} e_{j_2} \dots e_{j_m}$$

[右辺は  $|\rangle|\rangle|\dots$  と見る] は基本表現のテンソル積 [表現  $[n, m]$ ] の基底ベクトルを成す。基底の張る  $nm$  次元空間のベクトルは

$$\mathbf{v} = v_{i_1 i_2 \dots i_n}^{j_1 j_2 \dots j_m} e_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_n}$$

と表され、テンソル成分  $v_{i_1 i_2 \dots i_n}^{j_1 j_2 \dots j_m}$  を持つ。実際、群の変換に伴う基底の変更

$$e'_i = U^{\dagger j}_i e_j, \quad e'^i = U^i_j e^j \quad (U \in \text{SU}(3)) \quad (5.49)$$

[本稿次節で補足] の下でのベクトル  $\mathbf{v}$  の不変性から、テンソルを定義する成分の変換則

$$v_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_n} = U^{i_1}_{k_1} \dots U^{i_n}_{k_n} U^{\dagger l_1}_{j_1} \dots U^{\dagger l_m}_{j_m} v_{l_1 l_2 \dots l_m}^{k_1 k_2 \dots k_n} \quad (5.50)$$

が見出される [ユニタリー変換 (5.50) は座標変換に際するテンソル成分の変換則と同じ形をしている]。また上式 (5.50) から例えば  $v_{l_1 l_2 \dots l_m}^{k_1 k_2 \dots k_n}$  が  $k_1$  と  $k_2$  の入れ替えに関して対称であるとする、変換後の  $v_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_n}$  もまた  $i_1$  と  $i_2$  の入れ替えに関して対称となることが見て取れる。このようにテンソルの添字に関する対称性は群の変換の下で保たれる。

note 式 (5.51) の例で考慮するように、反対称性も保持される。また式 (5.53) の例で考慮するように、トレースや  $\delta^i_i$  は不変量である：

$$v'^i_j = U^i_k U^{\dagger l}_j v^k_l \Rightarrow v'^i_i = U^i_k U^{\dagger l}_i v^k_l = v^k_k, \\ U^i_k U^{\dagger l}_j \delta^k_l = U^i_k U^{\dagger k}_j = \delta^i_j.$$

さらに教科書 p.134 で後述されているように、

$$U^l_i U^m_j U^n_k \varepsilon^{ijk} = (\det U) \varepsilon^{lmn} = \varepsilon^{lmn} \quad (5.56)$$

となるので<sup>\*31</sup>,  $\varepsilon^{ijk}$  も不変である。こうしてテンソルの一般論で学んだように、 $\varepsilon^{ijk}, \varepsilon_{ijk}, \delta^i_i$  は (SU(3) の) 変換に対して不変であり、これらを不変テンソルという (教科書 p.134 を先取り)。

したがって特定の対称性を持ったテンソルの張る空間は、群の変換に対して不変部分空間になっている。ところで与えられた表現を既約表現の直和に分解できるとき、各々の既約表現は不変部分空間に作用する。このため直積表現を既約表現に分解する上で、テンソル積の基底ベクトルあるいはテンソル成分の添字の対称性を考えることが有用となる。

簡単な例として 2 つの基本表現の直積  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$  を考えよう。直積空間のテンソル成分  $v^{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) は

$$v^{ij} = v^{(ij)} + v^{[ij]}, \quad v^{(ij)} \equiv \frac{1}{2}(v^{ij} + v^{ji}) : \text{対称部分}, \quad v^{[ij]} \equiv \frac{1}{2}(v^{ij} - v^{ji}) : \text{反対称部分} \quad (5.51)$$

と書ける。対称テンソル  $v^{(ij)}$  は [対称な添字  $i, j$  の独立な選び方が 6 通りなので] 6 次元の不変部分空間を張る。これは SU(3) の既約表現 **6** の表現空間に他ならない。また反対称テンソル  $v^{[ij]}$  は [代わりに対偶 (双

<sup>\*31</sup> 第 1 の等号は行列式  $\det U = \varepsilon^{ijk} U^1_i U^2_j U^3_k$  の符号が、行を入れ替える度に反転することによる。

対) テンソル [8, pp.20–21]]  $v_i = \varepsilon_{ijk} v^{[jk]}$  の 3 成分で指定できる. これは [テンソルの変換則 (5.50) に基づいて証明できるように]  $\mathbf{3}^*$  の変換性を持つ<sup>\*32</sup>. ここから [示唆されるように],

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \mathbf{3}^* \quad (5.52)$$

と直和分解できる.

もう 1 つの例として, 直積  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^*$  を取り上げる. 直積空間のテンソル成分は

$$v_j^i = \left( v_j^i - \frac{1}{3} \delta_j^i v_k^k \right) + \frac{1}{3} \delta_j^i v_k^k \quad (5.53)$$

と分けられる. 右辺の第 1 項はトレースレス [であり, 添字の選択の自由度は  $3^2 - 1 = 8$  なので], 既約表現  $\mathbf{8}$  の表現テンソルである. [また第 2 項は単一のトレース  $v_k^k$  だけで特徴付けられる.] よって

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^* = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} \quad (5.54)$$

と直和分解できる.

以上のことを図形的に表現しよう. 基本表現  $\mathbf{3}$  の表現ベクトル  $v^i$  に  $\square$  を対応させ, 必要に応じてベクトル成分を指定する番号  $i$  を  $\square$  の中に書き込む. またテンソル成分の

- 対称な添字は横並び (行) の  $\square$
- 反対称な添字は縦並び (列) の  $\square$

で表す. 例えば式 (5.51) の対称テンソル  $v^{(ij)}$  と反対称テンソル  $v^{[ij]}$  には, それぞれ順に

$$\begin{array}{|c|c|}, & \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline j \\ \hline \end{array} \end{array}$$

を対応させる. [ゼロでないテンソルの] 反対称な添字は相異なるから,  $SU(3)$  では 4 個以上の  $\square$  が縦に並ぶことはない. またちょうど 3 個だけ縦に並んだ  $\square$  は [ $\varepsilon^{ijk}$  に対応するので [2, p.188]] 恒等表現に対応し (p.133), Young 図から落とすことができるか, [それ単独では] 1 次元表現である [表現の次元に他ならない独立なテンソルの成分数 (式 (5.59) の導出を見よ) が  $\varepsilon^{123} = +1$  の 1 つだから] (p.136).

8 次元表現  $\mathbf{8}$  の表現テンソルとしては, [式 (5.53) 第 1 項に対偶 (双対) なテンソル]

$$u^{[ij]l} = \varepsilon^{ijk} \left( v_k^l - \frac{1}{3} \delta_k^l v_n^n \right)$$

を考えれば良い. これは添字  $i, j$  について反対称なので [そこで左辺において反対称化の記号を施した],

$$\begin{array}{|c|c|} \hline i & l \\ \hline j & \\ \hline \end{array}$$

を対応させることができる.

ここで一般に既約表現  $[m, n]$  の表現空間のテンソル  $v_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_n}$  に対応する図形を考える. テンソル  $v_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_n}$  は  $n$  個の基本表現  $[0, 1]$  のベクトル  $v^i$  と  $m$  個の基本表現  $[1, 0]$  のベクトル  $v_j$  の直積によって得られるから, 上付き添字と下付き添字の各々について完全対称である. また既約表現の仮定より, トレースは

$$\delta_{i_1}^{j_1} v_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_n} = 0 \quad (5.57)$$

でなければならない.

<sup>\*32</sup> そしてテンソルの変換性は不変テンソル  $\varepsilon_{ijk}$  が掛かっても保たれる (p.134, 1.6–7).

$k_1$	$\cdots$	$k_m$	$i_1$	$\cdots$	$i_n$
$l_1$	$\cdots$	$l_m$			

図 18 既約な  $[m, n]$  表現のテンソル (5.58) に対応する Young 図

理由 もしトレースがゼロでないとする、 $[m-1, n-1]$  表現に属するテンソルが得られることになり、既約性に反するから。

note  $v_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_n}$  の上下の添字に関する対称性と合わせると、上式 (5.57) は任意に選んだ上下の添字の組に関する縮約が消えることを意味する。これはテンソルの既約性の定義に他ならず [8, p.112], それは上記のように表現の既約性と関係していることになる。

再び  $\varepsilon^{ijk}$  を用いて下付き添字を全て上げると、既約な  $[m, n]$  表現のテンソルは

$$u^{[k_1 l_1] \dots [k_m l_m] i_1 \dots i_n} = \varepsilon^{k_1 l_1 j_1} \dots \varepsilon^{k_m l_m j_m} v_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_n} \quad (5.58)$$

と書ける。これは添字の (反) 対称性を反映した、図 18 のような図形に対応させることができる。ただし重複を避けるために、

- 各行では右に進むにつれて数字が減少しないように ( $k_1 \leq \dots \leq k_m \leq i_1 \leq \dots \leq i_n$ )
- 各列では下に進むにつれて数字が大きくなるように ( $k_i < l_i$ )

番号を付ける [本稿次節で補足]。この図 18 を **Young (ヤング) 図** という。

図 18 の箱口の数  $m, n$  を持つ、既約表現  $[m, n]$  の次元は

$$D(n, m) = \frac{1}{2}(n+1)(m+1)(n+m+2) [= D(m, n)] \quad (5.59)$$

で与えられる。

上式 (5.59) の導出 既約表現  $[m, n]$  の次元は、 $[m, n]$  表現におけるテンソル  $v_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_n}$  の独立な成分数として求められる。上付き添字  $(i_1, \dots, i_n)$  はいずれも 1, 2, 3 のいずれか [であり、入れ替えに関して対称] である。よってその配列は

$$\frac{(n+2)!}{n!2!} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \text{ 通り}$$

だけある。[3 個の数字 1, 2, 3 から重複を許して  $n$  個選ぶ方法の数  ${}_3H_n = {}_{n+2}C_n$ , すなわち  $n$  個の  $\circ$  と仕切り 2 本の並べ方の総数である [3, p.173].] よって下付き添字  $(j_1, \dots, j_n)$  と合わせて

$$B(n, m) \equiv \frac{(n+2)(n+1)}{2} \cdot \frac{(m+2)(m+1)}{2} \text{ 通り}$$

の添字の並べ方がある。ところがトレースレスの条件 (5.57) は [上下の添字を縮約して得られる独立な  $B(n-1, m-1)$  個のテンソルが全て消えることを意味するので [3, pp.173-174]],  $B(n-1, m-1)$  個の条件を課す。よって求める次元は

$$D(n, m) = B(n, m) - B(n-1, m-1) = (\text{上式 (5.59)}).$$

$$\begin{array}{c} \square \\ \mathbf{3} \end{array} \otimes \begin{array}{c} a \\ \square \\ \mathbf{3} \end{array} = \begin{array}{c} \square \quad a \\ \mathbf{6} \end{array} \oplus \begin{array}{c} \square \\ a \\ \mathbf{3}^* \end{array}$$
  

$$\begin{array}{c} \square \\ \mathbf{3} \end{array} \otimes \begin{array}{c} a \\ b \\ \square \\ \mathbf{3}^* \end{array} = \underbrace{\begin{array}{c} \square \quad a \quad b \\ \square \quad b \end{array} \oplus \begin{array}{c} \square \quad a \\ b \end{array}}_{\begin{array}{c} \square \quad a \\ \mathbf{8} \end{array} + \text{箱 } b} \oplus \underbrace{\begin{array}{c} \square \quad b \\ a \end{array} \oplus \begin{array}{c} \square \\ a \\ b \\ \square \\ \mathbf{1} \end{array}}_{\begin{array}{c} \square \\ a \\ \text{箱 } b \end{array}}$$

図 19 教科書の例 5.4 (p.135)

note 公式 (5.59) は  $SU(3)$  の  $[1, 1]$  表現の次元  $D(1, 1) = 8$  (4.4 節の例 4.4) や, 基本表現  $[1, 0], [0, 1]$  の次元  $D(0, 1) = D(1, 0) = 3$  (5.3 節) を再現する.

Young 図を用いればテンソル成分に頼らずとも, 直積表現を既約表現に分解することができる. 以下その手順を証明抜きに述べる [2, pp.188-191] [3, pp.174-176]. 与えられた 2 つの既約表現  $A, B$  の Young 図を単に  $A$  図,  $B$  図と呼ぼう.

1.  $B$  図の 1 行目の箱全てに文字  $a$  を, 2 行目の箱全てに文字  $b$  を書き込む.
2.  $B$  図の 1 行目から箱  $\begin{array}{c} a \\ \square \end{array}$  を取り,  $A$  図に可能な方法で付けた図を全て描く.  
 $B$  図の箱  $\begin{array}{c} a \\ \square \end{array}$  を取り尽くすまで, この操作を繰り返す.
3. 次に  $B$  図の箱  $\begin{array}{c} \square \\ b \end{array}$  を同様に付ける. ただし各行に沿って右から左へ, また上から下へ進んだとき, どの時点でも  $a$  の個数が  $b$  の個数を下回ってはならない.

こうして得られた Young 図が直積  $A \otimes B$  に含まれる既約表現を与える.

具体例を図 19-20 に示す.  $a, b$  の個数の大小関係に関する制約から禁止される Young 図は斜線で打ち消してあり, 恒等表現に対応する縦に並んだ 3 つの箱は縦線で落としてある. 図 19 は既に得た結果 (5.52), (5.54) と整合しており, また図 20 で初めて現れる Young 図に対応する既約表現の次元は, 公式 (5.59) から

$$D(2, 2) = 27, \quad D(3, 0) = 10$$

と求められる. [Young 図 20 を得る手順の詳細は図 21 に改めてまとめる [2, pp.188-191].]

## 5.4 節について

■基底の変換 (5.49) について まず第 1 式に関しては, 式 (2.34) の箇所でも述べたように, 基底は状態と“逆向きに”変化することを思い出そう [6, pp.116-119]. 次に第 2 式を考える. 表現  $\mathbf{3}$  におけるユニタリー演算

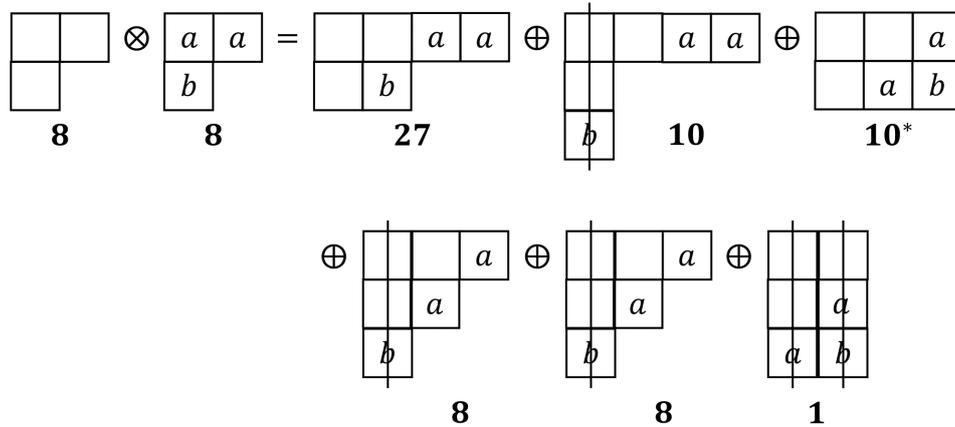


図 20 教科書の例 5.4 (p.136)

子が  $U = \exp[it^i \rho(X_i)]$  であるとき、複素共役表現はその定義 (5.3 節) よりユニタリー演算子

$$\exp[-it^i \rho^*(X_i)] = U^*$$

を持つ。よって基底  $e_i$  が  $U^\dagger$  で変換されるとき、基底  $e^i$  は  $(U^*)^\dagger = U^T$  で変換される。

■式 (5.51),(5.53) について 関連して、一般に 2 つの添字  $i, j (= 1, \dots, n)$  を持つ量  $R_{ij}$  は対称部分  $S_{ij} = (R_{ij} + R_{ji})/2$  と反対称部分  $A_{ij} = (R_{ij} - R_{ji})/2$  に分けた上で、さらに  $S_{ij}$  をトレースレスの対称部分  $\hat{S}_{ij} = S_{ij} - S' \delta_{ij}$  (ただし  $S' = \text{tr}(S_{ij})/n$ ) と単位行列に比例する部分  $S' \delta_{ij}$  に分解できる [16, p.286].

$$R_{ij} = S_{ij} + A_{ij} = \hat{S}_{ij} + A_{ij} + S' \delta_{ij}.$$

■Young 図 18 (教科書 p.134) について  $v_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_n}$  の

- $i$  添字に関する対称性はそのまま、式 (5.58) の  $i$  添字に関する対称性を意味する。
- $j$  添字に関する対称性は式 (5.58) において、組  $[kl]$  どうしの入れ替えに関する対称性を意味する。

それだけでなく式 (5.58) 右辺は  $v_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_n} = v^{i_1} \dots v_{j_i} \dots$  のテンソル積の構造より、各  $v^i$  と  $\varepsilon^{klj} v_j \equiv u^{[kl]}$  の入れ替えに対しても対称となる。よって式 (5.58) は  $i$  添字と  $k$  添字を合わせた全ての添字に関して対称である。そこで Young 図において、 $i$  添字と  $k$  添字の大小関係  $k_m \leq i_1$  も要請される。他方  $\varepsilon^{klj}$  の反対称性より、式 (5.58) は  $k$  と  $l$  の入れ替えに関して反対称である。

## 5.5 SU(N)

本稿では省略する。

## 5.6 素粒子の対称性

ハドロン (陽子や中性子, 中間子など) はクォークの複合粒子であり, 現在までに知られているクォークは表 6 に示した通りである ( $e$  は素電荷であり, 括弧内に有効質量を静止エネルギー  $mc^2$  として併記した).

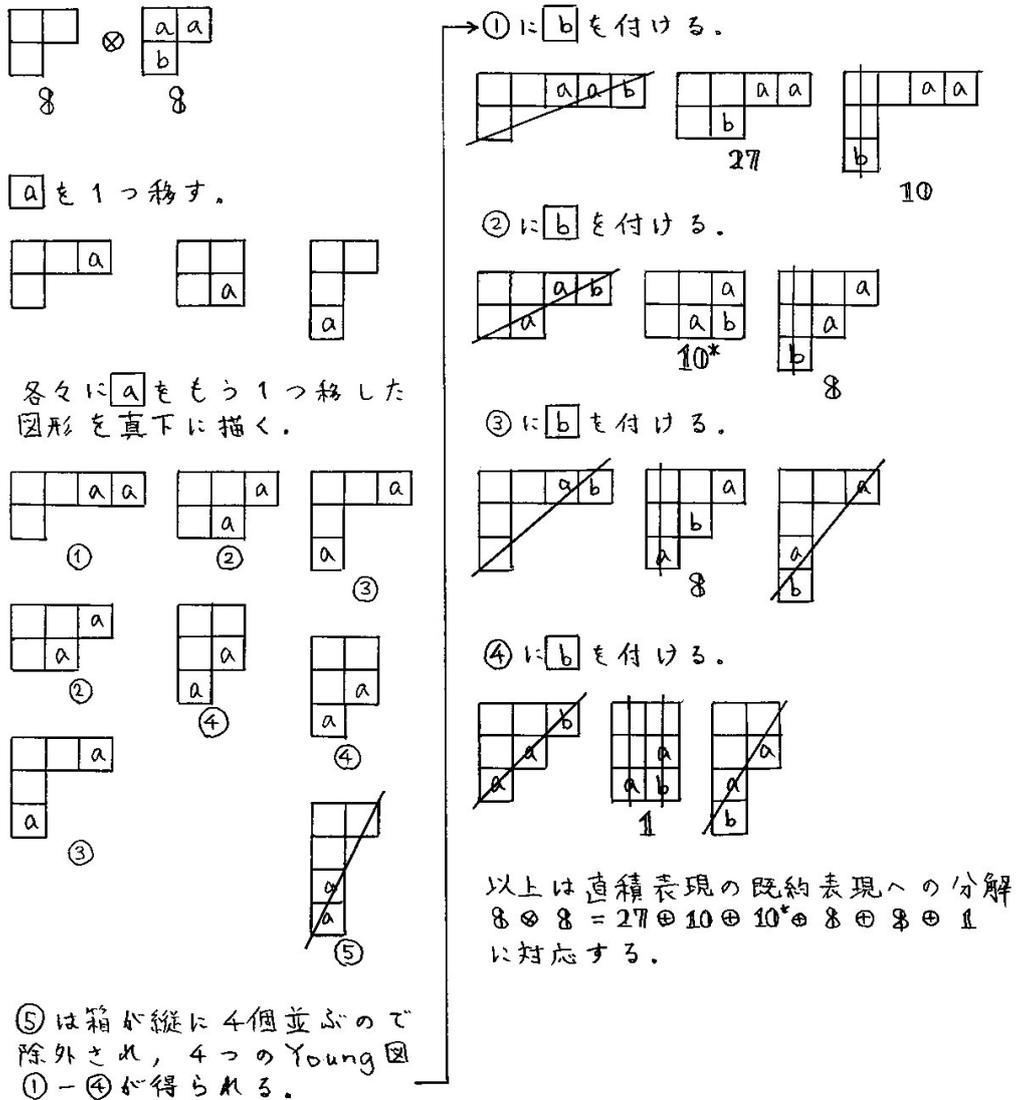


図 21 Young 図 20 を得る手順の詳細

表 6 クォークの周期表

電荷\世代	1	2	3
$\frac{2}{3}e$	u (2.3MeV)	c (1.28GeV)	t (173GeV)
$-\frac{1}{3}e$	d (4.8MeV)	s (95MeV)	b (4.18GeV)

表 6 から読み取れるように, u [アップ], d [ダウン] クォークは質量差が比較的小さい, そこで 5.2 節で [陽子と中性子に対して] 行ったように, これらをそれぞれ順に SU(2) の基本表現 **2** における, アイソスピンが  $I_3 = 1/2$  と  $I = -1/2$  の状態と考える.

さて, 陽子と中性子はクォーク 3 体の複合粒子

$$\text{陽子 } p = (uud), \quad \text{中性子 } n = (udd)$$

である. [よって構成粒子の電荷とアイソスピン  $I_3$  の総和は, 陽子と中性子の正しい電荷とアイソスピン (5.2 節) を与える.] そこで直積表現  $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$  を考えよう. まず  $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$  の既約表現への分解は Young 図において,

$$\begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} \quad (25)$$

と行える. 次に第 3 の **2** との直積をとると

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline c \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline c \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline a & c \\ \hline b & \\ \hline \end{array} \quad (5.71)$$

となる. ここで右辺において, 縦に並んだ 2 つの箱は恒等表現として落とせるので, 2 つの 


 はいずれも基本表現 **2** である. こうして直和分解

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{4} \oplus \mathbf{2} \oplus \mathbf{2} \quad (26)$$

が見出される [以上, 本稿次節で補足].

上式 (5.71) の 1 行目における ([初め 2 つの **2** の状態]  $a, b$  に関して対称な) 表現 **2** では, 式 (5.17-18) より陽子と中性子の状態は

$$p : (2uud - udu - duu)/\sqrt{6}, \quad n : (udd + dud - 2ddu)/\sqrt{6} \quad (5.72)$$

と表される [本稿次節で補足]. 上式 (5.71) の 2 行目における ( $a, b$  に関して反対称な) 表現 **2** では, 陽子と中性子の状態は

$$p : (udu - duu)/\sqrt{2}, \quad n : (udd - dud)/\sqrt{2} \quad (5.73)$$

と表される [本稿次節で補足]. さらに式 (5.71) における 

$a$	$b$	$c$
-----	-----	-----

 からは, 状態

$$\begin{aligned} \Delta^{++} &: uuu, \\ \Delta^+ &: (uud + udu + duu)/\sqrt{3}, \\ \Delta^0 &: (udd + dud + ddu)/\sqrt{3}, \\ \Delta^- &: ddd \end{aligned} \quad (5.74)$$

が得られる [本稿次節で補足]. これらは質量が約 1230MeV の  $\Delta$  粒子に同定され, 素電荷  $e$  を単位とした電荷はそれぞれ順に 2, 1, 0, -1 であることが見て取れる.

中間子はクォーク  $q$  と反クォーク  $\bar{q}$  の複合粒子であり、反クォークはクォークの状態の複素共役表現 [5.3 節] で表される．ところが  $SU(2)$  では複素共役な表現は、各々の基底  $\sigma_i/2, -\sigma_i^*/2$  が  $U = -i\sigma_2$  によるユニタリー変換

$$U \begin{pmatrix} \sigma_i^* \\ -2 \end{pmatrix} U^\dagger = \frac{\sigma_i}{2} \quad (5.75)$$

で関係付けられるから [本稿次節で補足]、同値な表現である [式 (2.25) の箇所を見よ]．よって  $SU(2)$  の表現は実である．また [状態も対応するユニタリー変換を受けるから]、反クォークの表現は

$$U\bar{q} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix} \quad (5.76)$$

となる．上式 (5.76) は  $I_3 = 1/2$  の状態が  $-\bar{d}$ 、 $I_3 = -1/2$  の状態が  $\bar{u}$  であることを意味している．[よってクォーク  $q = u, d$  と反クォーク  $\bar{q}$  は逆符号のアイソスピンを持つことになる.] パイ中間子は  $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$  に含まれる既約表現  $\mathbf{3}$  の状態

$$\begin{aligned} \pi^+ &: -u\bar{d}, \\ \pi^0 &: (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}, \\ \pi^- &: d\bar{u} \end{aligned} \quad (5.77)$$

である．[本稿次節で補足する．素電荷  $e$  を単位とした電荷はそれぞれ順に  $1, 0, -1$  であることが見て取れる.]

表 6 に示したように、 $u, d, s$  クォークは他のクォークに比べて質量が格段に小さい．そこで  $s$  [ストレンジ] クォークも加えて、 $SU(3)$  の下での対称性——ユニタリー対称性と呼ばれる——を考えよう． $u, d, s$  クォークの状態は、 $SU(3)$  における基本表現  $\mathbf{3}$  の変換性を持つ．

陽子や中性子のように、3つのクォークから成る複合粒子はバリオンと呼ばれる．バリオンは  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$  に含まれる既約表現の状態として得られる．[5.4 節の] 例 5.4 より

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \mathbf{3}^*, \quad \mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}_a$$

であり、また Young 図の方法より

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline c \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c \\ \hline \end{array} : \quad \mathbf{6} \times \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8}_s$$

なので [再び 5.4 節を見よ]、直和分解

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8}_a \oplus \mathbf{8}_s \oplus \mathbf{1} \quad (5.78)$$

を得る．ただし  $\mathbf{8}_a, \mathbf{8}_s$  はそれぞれ、初め 2 つの  $\mathbf{3}$  [における状態  $a, b$  (Young 図に記入した)] に関して反対称、対称な組合せを意味しており、陽子  $p$  と中性子  $n$  の状態 (5.72) は  $\mathbf{8}_s$  に、状態 (5.73) は  $\mathbf{8}_a$  に含まれている． $p$  と  $n$  の 2 状態 (5.73) は  $\mathbf{8}_a$  に属する他の粒子の状態

$$\begin{aligned} \Lambda &: (2uds - 2dus + sdu - dsu + usd - sud)/\sqrt{12}, \\ \Sigma^+ &: (suu - usu)/\sqrt{2}, \\ \Sigma^0 &: (sdu - dsu + sud - uds)/2, \\ \Sigma^- &: (sdd - dsd)/\sqrt{2}, \\ \Xi^0 &: (sus - uss)/\sqrt{2}, \\ \Xi^- &: (sds - dss)/\sqrt{2} \end{aligned}$$

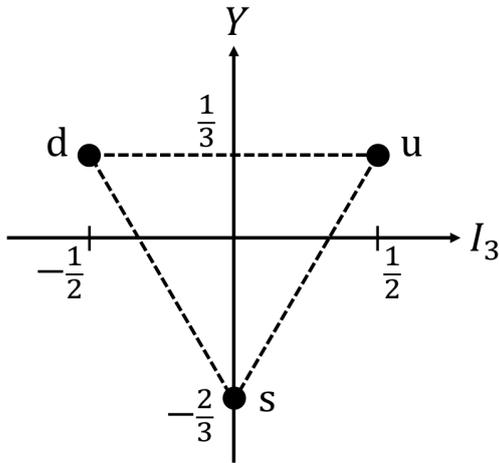


図 22 クォークのウエイト図

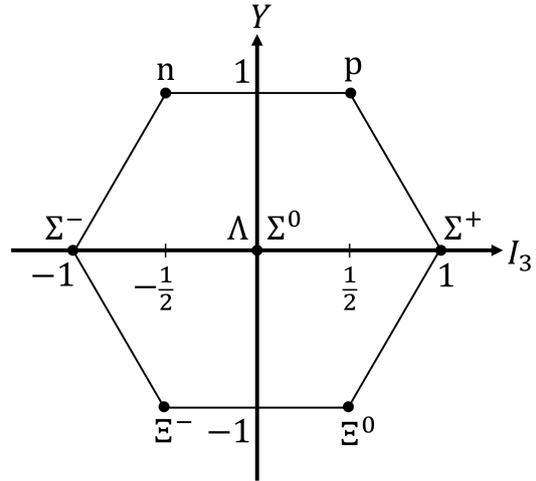


図 23 バリオン 8 重項

と合わせて、バリオン 8 重項を構成している。これら 8 個の粒子は  $SU(3)$  の随伴表現に属している [4.4 節の例 4.4 にて  $SU(3)$  の随伴表現が **8** であることを見た]。

$SU(3)$  は  $(F_3, F_8)$  を Cartan 部分代数を持つ。特に  $F_3$  は  $SU(2)$  部分群の Cartan 部分代数だから、その固有値  $\pm 1/2$  はアイソスピン成分  $I_3$  である [5.3 節]。また  $(2/\sqrt{3})F_8$  の固有値  $Y$  をハイパーチャージという。クォークおよびバリオン 8 重項の各粒子に対する  $(I_3, Y)$  の値は、図 22-23 のウエイト図のようにまとめられる。[図 22 は 5.3 節の図 17 と比べて、縦軸が  $Y = (2/\sqrt{3})F_8$  とリスケールされていることに注意する。] また素電荷  $e$  を単位として測った粒子の電荷  $Q$  は、 $(I_3, Y)$  と

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y \quad (5.79)$$

の関係にある。[ウエイト図 22-23 より、上式 (5.79) が各粒子に対して成り立っていることが直接確かめられる。]

他方、式 (5.78) の既約表現 **10** に含まれる多重項を Young 図の形で列挙すると、

$$\begin{aligned} \Delta^{++} &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline u & u & u \\ \hline \end{array}, & \Delta^+ &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline u & u & d \\ \hline \end{array}, & \Delta^0 &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline u & d & d \\ \hline \end{array}, & \Delta^- &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline d & d & d \\ \hline \end{array}, \\ \Sigma^{*+} &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline u & u & s \\ \hline \end{array}, & \Sigma^{*0} &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline u & d & s \\ \hline \end{array}, & \Sigma^{*-} &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline d & d & s \\ \hline \end{array}, \\ \Xi^{*0} &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline u & s & s \\ \hline \end{array}, & \Xi^{*-} &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline d & s & s \\ \hline \end{array}, \\ \Omega^- &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline s & s & s \\ \hline \end{array} \end{aligned}$$

となる。これらはバリオン **10** 重項と呼ばれ、 $SU(2)$  の 4 重項 (5.74) を含んでいる。各粒子の  $(I_3, Y)$  の値は図 24 のようである [式 (5.79) が成り立っている]。

次にメソンを考察する。メソンはクォークと反クォークの複合粒子である。我々は **3** 表現に属するクォーク  $q^i = (u, d, s)$  を考えており、その反クォーク  $\bar{q}_i = (\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$  は複素共役表現 **3\*** に属する。すると直和分解  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^* = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$  からメソン 8 重項

$$M_j^i = q^i \bar{q}_j - \frac{1}{3} \delta_j^i q^k \bar{q}_k$$

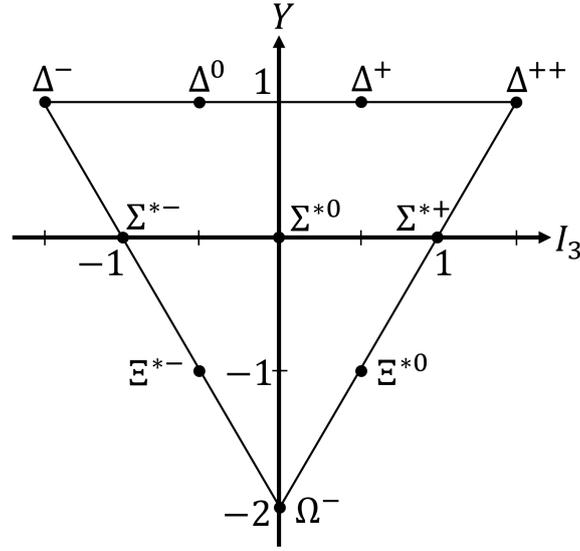


図 24 バリオン 10 重項

が得られる [式 (5.53–54) を参照]. このうち

$$\pi^+ : -M_2^1 = -u\bar{d}, \quad \pi^0 : \frac{1}{\sqrt{2}}(M_1^1 - M_2^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}), \quad \pi^- : M_1^2 = d\bar{u}$$

は式 (5.77) で見たパイ中間子を表しており, 残りの 5 つの状態として

$$\begin{aligned} K^+ : M_3^1 &= u\bar{s}, & K^0 : M_3^2 &= d\bar{s}, & \bar{K}^0 : -M_2^3 &= -s\bar{d}, & K^- : M_1^3 &= s\bar{u}, \\ \eta : -\frac{3}{\sqrt{6}}M_3^3 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \end{aligned}$$

がある. [トレースレスの条件より  $3^2 = 9$  個の  $M_j^i$  のうち 8 成分が独立であることに対応して,  $M_1^1, M_2^2$  に関しては線形結合が 1 つの状態  $\pi^0$  を成している. また] 式 (5.76):  $(-\bar{d}, u)$  で状態を表すために,  $\pi^+$  と  $\bar{K}^0$  の表式には負号を導入してある. メソン 8 重項のウエイト図は図 25 のようである. [ウエイト図 23 との類似性より, ここでも式 (5.79) が満たされていることが分かる.] さらに 1 重項は [式 (5.53) 第 2 項に対応した]

$$\eta : \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$$

である.

本稿では続くバリオンの質量公式 (5.85) に関する議論 (pp.148–150) を省略する. またカラー自由度の導入によりバリオンのスピン-統計の問題が解消されること (節末 p.151) については, 文献 [15, § 11.2.1] を復習せよ.

## 5.6 節について

■直和分解 (26) と関連する Young 図について 5.4 節で SU(3) の文脈において導入した Young 図の技法を, SU(2) に適用しよう [6, pp.512–515]. 基本表現 **2** における (アイソ) スピン上向きの状態を  $\boxed{1}$ , (アイソ) スピン下向きの状態を  $\boxed{2}$  で表す. SU(2) における Young 図では縦に 3 つ以上の箱を並べることはできない.

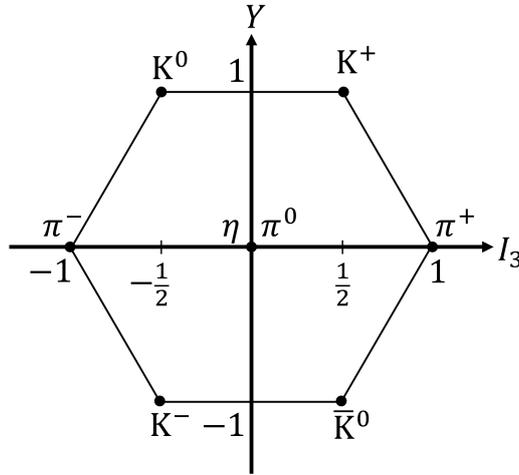


図 25 メソン 8 重項

また後の式 (5.75) の箇所にあるように,  $SU(2)$  は実表現であることにも注意する. 実際  $SU(3)$  における一般的な Young 図 18 における縦に箱が 2 個並んだ部分は, 複素共役表現との直積に起因している. ところが縦並びの箱は  $SU(2)$  では恒等表現となるので削って良く, (単独で 1 次元表現を表す Young 図を除けば) 実質, 1 行だけの Young 図を考えれば充分である. このことは  $SU(2)$  が実表現であることと整合している.

まず  $2 \otimes 2$  の直和分解を表す Young 図 (25) を見ると, 右辺第 1 項  $\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline \end{array}$  は対称な文字  $a, b (= 1, 2)$  の選び方が  ${}_2H_2 = 3$  通りあるので, 3 次元表現  $\mathbf{3}$  を表す. 実際, 5.1 節の例 5.1 で見出した表現  $\mathbf{3}$  の 3 つの基底は対称な状態である. また第 2 項  $\begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array}$  は 1 次元表現  $\mathbf{1}$  である. 例 5.1 で見出した表現  $\mathbf{1}$  の基底は確かに反対称な状態である. 以上より Young 図 (25) は例 5.1 で既に得た結果

$$2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$$

と整合している.

次に式 (5.71) 第 1 式について, 右辺第 1 項  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline \end{array}$  は対称な文字  $a, b, c$  の選び方が  ${}_2H_3 = 4$  通りあるので, 4 次元表現  $\mathbf{4}$  を表す. よって第 1 式は 5.1 節の例 5.2 で得た結果

$$3 \otimes 2 = 4 \oplus 2$$

を再現している. 他方, 第 2 式は

$$1 \otimes 2 = 2$$

を表している (改めて縦に箱が 3 つ並んだ図形が除外されることに注意せよ).

以上より直和分解 (26) が得られる. この結果は上式を繰り返し用いて,

$$2 \otimes 2 \otimes 2 = 2 \otimes (3 \oplus 1) = (2 \otimes 3) \oplus (2 \otimes 1) = (4 \oplus 2) \oplus 2$$

としても得られる. 教科書でも後の式 (5.78) の箇所で同じ考え方を用いている.

なお式 (5.71) で唯一, 非自明な  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline \end{array}$  の既約表現の次元を  $D$  とすると, 直和分解の両辺の次元が一致する条件

$$2 \otimes 2 \otimes 2 = D \oplus 2 \oplus 2, \quad \therefore 2 \times 2 \times 2 = D + 2 + 2$$

より間接的に、 $D = 4$  でなければならないことが直ちに分かる。

■式 (5.72) について 上式 (5.71) の 1 行目における  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{2}$  から得られる表現  $\mathbf{2}$  の基底状態は、5.1 節の例 5.2 で見た  $\mathbf{2} \otimes \mathbf{3}$  表現の状態 (5.17–18) で直積の順序を入れ替えた

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2}, \mathbf{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left( 2 \left| 1, \mathbf{3} \right\rangle \left| -\frac{1}{2}, \mathbf{2} \right\rangle - \sqrt{2} \left| 0, \mathbf{3} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \mathbf{2} \right\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} (2 |+\rangle |+\rangle |-\rangle - |+\rangle |-\rangle |+\rangle - |-\rangle |+\rangle |+\rangle), \\ \left| -\frac{1}{2}, \mathbf{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left( \sqrt{2} \left| 0, \mathbf{3} \right\rangle \left| -\frac{1}{2}, \mathbf{2} \right\rangle - 2 \left| -1, \mathbf{3} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \mathbf{2} \right\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} (|+\rangle |-\rangle |-\rangle + |-\rangle |+\rangle |-\rangle - 2 |-\rangle |-\rangle |+\rangle) \end{aligned}$$

で与えられる。ただしいずれも第 2 の等号では  $|\pm \frac{1}{2}, \mathbf{2}\rangle \equiv |\pm\rangle$  と略記し、5.1 節の例 5.1 の結果

$$|1, \mathbf{3}\rangle = |+\rangle |+\rangle, \quad |0, \mathbf{3}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle |-\rangle + |-\rangle |+\rangle), \quad |-1, \mathbf{3}\rangle = |-\rangle |-\rangle$$

を代入した。上式の最左辺は複合粒子のアイソスピンが  $I_3 = \pm 1/2$  の状態を表しており、順に陽子と中性子の状態に同定される。最右辺においてアイソスピン  $I_3 = \pm 1/2$  の状態を  $|+\rangle \rightarrow u, |-\rangle \rightarrow d$  と置き換えると、陽子と中性子の状態 (5.72) が得られる。状態 (5.72) は u,d クォークの正しい内訳

$$\text{陽子 } p = (uud), \quad \text{中性子 } n = (udd)$$

を持っている。

■式 (5.73) について 上式 (5.71) の 2 行目における表現  $\mathbf{2}$  は直積  $\mathbf{1} \otimes \mathbf{2}$  から得られている。よってその基底状態は、5.1 節の例 5.1 で見出した表現  $\mathbf{1}$  の状態

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle |-\rangle - |-\rangle |+\rangle)$$

に、表現  $\mathbf{2}$  の状態  $|\pm\rangle$  を (右から直積の意味で) 掛けて得られる。次いで  $|+\rangle \rightarrow u, |-\rangle \rightarrow d$  と置くと、式 (5.73) を得る。

■ $\Delta$  粒子の状態 (5.74) について 式 (5.71) の 1 行目の図形  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline \end{array}$  は  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{2}$  から得られる表現  $\mathbf{4}$  に対応しているので、その基底状態は 5.1 節の例 5.2 における式 (5.15–16) 等で、直積の順序を入れ替えた

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2}, \mathbf{4} \right\rangle &= |1, \mathbf{3}\rangle \left| \frac{1}{2}, \mathbf{2} \right\rangle = |+\rangle |+\rangle |+\rangle, \\ \left| \frac{1}{2}, \mathbf{4} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left( |1, \mathbf{3}\rangle \left| -\frac{1}{2}, \mathbf{2} \right\rangle + \sqrt{2} |0, \mathbf{3}\rangle \left| \frac{1}{2}, \mathbf{2} \right\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|+\rangle |+\rangle |-\rangle + |+\rangle |-\rangle |+\rangle + |-\rangle |+\rangle |+\rangle), \\ \left| -\frac{1}{2}, \mathbf{4} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \sqrt{2} |0, \mathbf{3}\rangle \left| -\frac{1}{2}, \mathbf{2} \right\rangle + |-1, \mathbf{3}\rangle \left| \frac{1}{2}, \mathbf{2} \right\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|+\rangle |-\rangle |-\rangle + |-\rangle |+\rangle |-\rangle + |-\rangle |-\rangle |+\rangle), \\ \left| -\frac{3}{2}, \mathbf{4} \right\rangle &= |-1, \mathbf{3}\rangle \left| -\frac{1}{2}, \mathbf{2} \right\rangle = |-\rangle |-\rangle |-\rangle \end{aligned}$$

で与えられる。再び  $|+\rangle \rightarrow u, |-\rangle \rightarrow d$  とおくと、これらは式 (5.74) に読み替えられる。

■ユニタリ変換 (5.75) について Pauli 行列の具体的な表式を用いて, 式 (5.75), すなわち

$$\sigma_2 \sigma_i^* \sigma_2 = -\sigma_i$$

が確かめられる ( $\sigma_i$  の Hermite 性に注意). これは文献 [11, p.9] で見た 2 次の行列  $M$  の余因子行列を与える公式

$$\varepsilon M^T \varepsilon^T = (\det M) M^{-1}, \quad \varepsilon = (\varepsilon^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2$$

において,  $M = \sigma_i^\dagger$  とおいた関係に他ならない (その際  $\varepsilon^T = -i\sigma_2$  と  $\det \sigma_i = -1$  に注意).

■パイ中間子の状態 (5.77) について  $SU(2)$  は実表現なので, 反クォーク  $\bar{q}$  もクォークと同じく基本表現  $\mathbf{2}_{\bar{q}}$  を持つ. そこで 5.1 節の例 5.1 で見た直和分解  $\mathbf{2}_q \otimes \mathbf{2}_{\bar{q}} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{1}$  を考えると, 既約表現  $\mathbf{3}$  の基底状態は

$$|1, \mathbf{3}\rangle = |+\rangle_q |+\rangle_{\bar{q}}, \quad |0, \mathbf{3}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |+\rangle_q |-\rangle_{\bar{q}} + |-\rangle_q |+\rangle_{\bar{q}} \right), \quad |-1, \mathbf{3}\rangle = |-\rangle_q |-\rangle_{\bar{q}}$$

である. これまで通り  $|+\rangle_q \rightarrow u, |-\rangle_q \rightarrow d$  である. また式 (5.76) に基づき  $|+\rangle_{\bar{q}} \rightarrow (-\bar{d}), |-\rangle_{\bar{q}} \rightarrow u$  とおくと式 (5.77) を得る.

## 6 直交群とその表現

### 6.1 SO(3)

5.1 節で局所同型であることが判明した SU(2) と SO(3) の関係について、詳しく説明されている。本稿では省略する。

### 6.2 量子力学における角運動量

本節は量子力学の復習なので、簡単に済ませる。

量子力学において角運動量  $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3)$  は、交換関係

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k \quad (6.10)$$

を満たす Hermite 演算子として定義される。軌道角運動量  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times (-i\hbar\nabla)$  はこの条件を満たす。

$\mathbf{L}/\hbar$  は空間回転 SO(3) の生成子となり (式 (1.44)), 回転ベクトル  $\boldsymbol{\theta}$  で特徴付けられる有限の回転に対する演算子は,

$$U(\boldsymbol{\theta}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}\right)$$

で与えられる。

軌道角運動量の固有状態  $|l, m\rangle$  は, SO(3) の既約表現の最高ウェイト  $l$  とウェイト  $m$  で指定される。Cartan 部分代数  $L_z$  と Casimir 演算子  $L^2$  に対し, 固有方程式は

$$\begin{aligned} L_z |l, m\rangle &= m\hbar |l, m\rangle, & L^2 |l, m\rangle &= l(l+1)\hbar^2 |l, m\rangle \\ (m &= l, l-1, \dots, -l, l = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

である。これらは固有値  $l, m$  がそれぞれ, 軌道角運動量の大きさと  $z$  成分に対応していることを意味する。

球座標  $(r, \theta, \phi)$  を用いると,

$$L^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right]$$

はラプラシアン of 角度部分であり, その固有方程式

$$L^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = l(l+1)\hbar^2 Y_{lm}(\theta, \phi), \quad L_z Y_{lm}(\theta, \phi) = m\hbar Y_{lm}(\theta, \phi)$$

を満たす固有関数  $Y_{lm}(\theta, \phi) = \langle \theta, \phi | l, m \rangle$  は球面調和関数

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \varepsilon \left[ \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}, \quad \varepsilon \equiv \begin{cases} (-1)^m & (m > 0) \\ 1 & (m \leq 0) \end{cases}$$

で与えられる ( $P_l^m(\cos\theta)$  は Legendre 陪関数)。

他方スピン角運動量  $\mathbf{S}$  (を  $\hbar$  で割ったもの) は SU(2) の Lie 代数であり, スピン角運動量の固有状態  $|s, s_z\rangle$  は SU(2) の既約表現における

$$\text{最高ウェイト } s = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, \quad \text{ウェイト } s_z = s, s-1, \dots, -s$$

で指定される.

全角運動量  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$  の固有ベクトルは  $\mathbf{L}$  と  $\mathbf{S}$  の固有ベクトルの直積として構成される. それを  $\mathbf{J}$  の既約表現 (最高ウェイト  $j$ ) の直和に分解できる (式 (5.20) の特例) :

$$|l, m\rangle |s, s_z\rangle = \sum_{j=|l-s|}^{l+s} \langle m + s_z; j | m, l; s_z, s \rangle |j, m + s_z\rangle.$$

### 6.3 $SO(N)$ と $Spin(N)$

本稿では省略する.

#### 6.3 節について

教科書 p.163, 1.1 における  $SO(N)$  の生成子  $(X_{ab})_{jk} = \delta_{aj}\delta_{bk} - \delta_{bj}\delta_{ak}$  とその交換関係 (6.31):

$$[T_{ab}, T_{cd}] = -i(\delta_{bc}T_{ad} - \delta_{ac}T_{bd} - \delta_{bd}T_{ac} + \delta_{ad}T_{bc})$$

は, 文献 [11, pp.4-5] で見出した Lorentz 変換の生成子  $(M_{\rho\sigma})^{\mu\nu} \equiv i(\delta^{\mu\rho}g^{\sigma\nu} - \delta^{\mu\sigma}g^{\rho\nu})$  とその交換関係

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho})$$

の対応物であることが見て取れる (後の式 (8.23) を参照).

### 6.4 クリフォード代数

本稿では省略する. 8.3 節では Clifford (クリフォード) 代数の代わりに, Dirac 代数を取り上げる.

### 6.5 テンソル演算子とウィグナー-エッカートの定理

文献 [6, pp.322-323] で見たように, 空間回転  $|\mathbf{n}\rangle \rightarrow \mathcal{D}(R)|\mathbf{n}\rangle$  において球面調和関数のように振舞う演算子  $Y_l^m(\mathbf{n})$  の変換則

$$Y_l^m(\mathbf{n}) \rightarrow \mathcal{D}^\dagger(R)Y_l^m(\mathbf{n})\mathcal{D}(R) = \sum_{m'} \mathcal{D}_{mm'}^{(l)*}(R)Y_l^{m'}$$

(ただし  $\mathcal{D}_{mm'}^{(l)*}(R) = \langle l, m | \mathcal{D}(R) | l, m' \rangle$  は回転演算子の行列要素 [6, p.261]) と同じ変換則

$$\mathcal{D}^\dagger(R)T_q^{(k)}\mathcal{D}(R) = \sum_{q'=-k}^k \mathcal{D}_{qq'}^{(k)*}(R)T_{q'}^{(k)} \quad (6.109')$$

で, 球面テンソル演算子  $T_q^{(k)}$  が定義される.

続いて文献 [6, pp.326-330] で示したように, テンソル演算子  $T_q^{(k)}$  の角運動量固有状態に関する行列要素  $\langle \alpha', j' m' | T_q^{(k)} | \alpha, j m \rangle$  は

$$\langle \alpha', j' m' | T_q^{(k)} | \alpha, j m \rangle = \langle j k; m q | j k; j' m' \rangle \frac{\langle \alpha' j' || T^{(k)} || \alpha j \rangle}{\sqrt{2j+1}} \quad (6.114')$$

という形をとる (**Wigner-Eckart** (ウィグナー・エッカルト) の定理).

- $\langle jk; mq | jk; j' m' \rangle$  は Clebsch-Gordan 係数であり,  
 $m$  や  $m', q$  (幾何学的関係) のみに依り, テンソル演算子  $T_q^{(k)}$  の固有の性質には依らない.  
 - Clebsch-Gordan 係数に対する  $m$ -選択則と三角関係式  $|j - k| \leq j' \leq j + k$   
 → テンソル演算子の行列要素に対する  $m$ -選択則

$$\langle \alpha', j' m' | T_q^{(k)} | \alpha, j m \rangle = 0 \quad (m' \neq q + m)$$

と三角関係式  $|j - k| \leq j' \leq j + k$ .

- 二重線の行列要素  $\langle \alpha' j' || T^{(k)} || \alpha j \rangle$  は  $m$  や  $m', q$  (幾何学的関係) に依らず, ダイナミクスに依存する.

## 6.6 水素原子の隠れた対称性

2.5 節で述べたように, 水素原子のエネルギー準位の磁気量子数  $m$  に関する縮退は, 系の回転対称性に起因している. 実際, 水素原子に磁場を加えると, 回転対称性の破れに伴い, エネルギー準位の  $m$  に関する縮退は解ける (Zeeman (ゼーマン) 効果). 他方でエネルギー固有値の  $l$  に関する縮退は, 水素原子が回転対称性 (したがって幾何学的対称性) の他にも, 隠れた対称性を持つことを示唆している. この対称性は Coulomb ポテンシャル  $(-\kappa)/r$  の形に起源を持つ力学的対称性であることを以下で見る (水素原子では  $\kappa = e^2/4\pi\epsilon_0 = \hbar c\alpha$  であり,  $\alpha$  は微細構造定数).

ここで正準交換関係の帰結として, 軌道角運動量  $\mathbf{L}$  が交換関係 (6.10) を満たすことなど

$$\begin{aligned} [x_i, p_j] &= i\hbar\delta_{ij}, & [L_i, x_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}x_k, & [L_i, p_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}p_k, & [L_i, L_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}L_k, \\ \left[ p_i, \frac{1}{r} \right] &= i\hbar\frac{x_i}{r^3}, & \left[ L_i, \frac{1}{r} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (6.117)$$

を思い出しておこう.

note 教科書の式 (6.117) における最後の式を訂正した<sup>\*33</sup>. 導出を含め, 本稿次節を見よ.

さて, 古典力学で学んだように, Coulomb ポテンシャルの下での運動では Runge-Lenz (ランゲ-レンツ) ベクトル

$$\mathbf{B} = \frac{1}{m_e} \mathbf{L} \times \mathbf{p} + \kappa \frac{\mathbf{r}}{r}$$

が保存する [1, p.47]. ただし  $m_e$  は質点 (ここでは電子) の質量である. そこで量子力学においても,  $\mathbf{L}$  と  $\mathbf{p}$  に関して対称化した Hermite 演算子として

Lenz ベクトルを

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2m_e} (\mathbf{L} \times \mathbf{p} - \mathbf{p} \times \mathbf{L}) + \frac{\kappa}{r} \mathbf{r}$$

で定義すると, 交換関係 (6.117) より, これは水素原子のハミルトニアン

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} - \frac{\kappa}{r}$$

と可換であることが示される. [本稿次節で確認する. これは古典論の場合と同様,  $\mathbf{B}$  が運動の定数であることを意味する.]

<sup>\*33</sup> 単純な誤記  $p_i \rightarrow L_i$  である. 実際, 教科書の式は次元が合っていない.

$H$  が  $L_i$  および  $B_i$  と可換であることは、 $L_i$  と  $B_i$  を生成子とする変換が  $H$  を不変にする対称変換であることを意味する [1.4 節]。  $L_i$  は空間回転を生成する。そこで  $B_i$  が生成する変換を調べよう。手始めに式 (6.117) を用いて  $B_i$  と  $L_i$  の交換関係を計算すると、

$$[B_i, B_j] = -\frac{2i\hbar}{m_e} \varepsilon_{ijk} L_k H, \quad (6.119)$$

$$[L_i, B_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} B_k \quad (6.120)$$

となる [本稿次節で導出\*34]。  $L_i$  と  $B_i$  は  $H$  と可換だから、同時固有状態を考える限り  $H$  をエネルギー固有値  $E$  で置き換えて良い。そこで水素原子では  $E < 0$  であることに注意して [これは結果 (6.128) から正当化できる]、  $B_i$  の代わりに

$$A_i = \left(-\frac{m_e}{2E}\right)^{1/2} B_i$$

を定義しよう。すると上式 (6.119–120) の係数が簡略化され、角運動量の交換関係と合わせて

$$[L_i, L_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k, \quad [L_i, A_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} A_k, \quad [A_i, A_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k \quad (6.122)$$

が成立する。さらに

$$M_i = \frac{1}{2}(L_i + A_i), \quad N_j = \frac{1}{2}(L_j - A_j) \quad (6.123)$$

を定義すると、上式 (6.122) よりこれらは

$$[M_i, M_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} M_k, \quad [N_i, N_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} N_k, \quad [M_i, N_j] = 0 \quad (6.124)$$

を満たす [本稿次節で確認]。すなわち  $\{M_i\}$  と  $\{N_i\}$  はそれぞれ  $SU(2)$  の Lie 代数 (角運動量代数) として閉じている。

**note** 教科書の言葉を補いつつ結論をまとめよう。  $L_i$  と  $B_i$  の適当な線形結合 (6.123) をとり直すと、互いに可換な  $SU(2)$  の Lie 代数 (角運動量代数) の元  $M_i, N_i$  が得られることは、  $L_i$  と  $B_i$  の張る Lie 代数が 2 つの  $SU(2)$  の Lie 代数の直和になることを意味している。したがって  $L_i$  と  $B_i$  の生成する変換は、直積  $SU(2) \otimes SU(2)$  となる。(以上、4.1 節の冒頭を見よ。)

[最後に以上の定式化から改めて、初頭量子力学による固有値に関する結果が再現されることを見る.] 固有状態は“角運動量”  $M, N$  の固有値

$$\begin{aligned} M^2 &= a(a+1)\hbar^2, & M_3 &= \mu\hbar, & (\mu &= a, a-1, \dots, -a), \\ N^2 &= b(b+1)\hbar^2, & N_3 &= \nu\hbar & (\nu &= b, b-1, \dots, -b) \end{aligned}$$

(ただし  $a, b = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ ) で指定される。ところが [古典論と同様に [1, p.47]],

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{B}$$

が成り立つことに注意すると

$$M^2 = N^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{L}^2 + \mathbf{A}^2)$$

\*34 教科書の式 (6.120) の符号を訂正した。実際このとき初めて、後の式 (6.122) が得られる。

となるので、量子数の関係  $a = b$  が見出される。また

$$\mathbf{A}^2 = -\frac{m_e}{2E}\mathbf{B}^2 = -(\mathbf{L}^2 + \hbar^2) - \frac{m_e\kappa^2}{2E} \quad (6.127)$$

が成り立つので [本稿次節で確認],

$$a(a+1)\hbar^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{L}^2 + \mathbf{A}^2) = -\frac{1}{4}\left(\hbar^2 + \frac{m_e\kappa^2}{2E}\right), \quad \therefore E = -\frac{m_e\kappa^2}{2\hbar^2(2a+1)^2} \quad (6.128)$$

を得る。  $a = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$  より

$$n \equiv 2a + 1 = 1, 2, 3, \dots$$

は主量子数となる。 [このとき上式 (6.128) は初頭量子力学による結果と一致する [5, p.164].]

式 (6.123) を逆に解くと、軌道角運動量は 2 つの “角運動量”  $\mathbf{M}, \mathbf{N}$  の合成

$$\mathbf{L} = \mathbf{M} + \mathbf{N}$$

で与えられることが分かる。すると  $a = b, n = 2a + 1$  とより、量子数  $l$  のとり得る値は

$$0 = |a - b| \leq l \leq a + b = 2a = n - 1, \quad \therefore l = 0, 1, \dots, n - 1$$

となる。 [これも初頭量子力学による結果と同じである [5, p.164]. また本節冒頭で述べたように、 $l$  に関する縮退が隠れた対称性の帰結であることを説明している.]

## 6.6 節について

■式 (6.117) における  $1/r$  を含む交換関係について 文献 [6, p.113] (のノート) で示した公式

$$[p_i, F(\mathbf{r})] = -i\hbar\partial_i F(\mathbf{r}) \quad (F(\mathbf{r}) \text{ は任意の関数})$$

を用いると、

$$\left[p_i, \frac{1}{r}\right] = i\hbar\frac{x_i}{r^3}, \quad \therefore \left[L_i, \frac{1}{r}\right] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\left[p_k, \frac{1}{r}\right] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\frac{x_j x_k}{r^3} = 0$$

を得る。最後の等号は添字  $j, k$  に関して対称な項  $x_j x_k$  と反対称な項  $\varepsilon_{ijk}$  の縮約が消えることによる。また位置演算子  $x_i$  と  $1/r^3$  は可換なので、それらの積を分数の形  $x_i/r^3$  のように書いても曖昧さは生じない。なお第 2 式  $[L_i, \frac{1}{r}] = 0$  は回転演算子  $\exp(-i\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\theta}/\hbar)$  による相似変換の下で  $1/r$  が不変であることを意味しており、それは因子  $1/r$  の回転対称性から期待される結果である。

■ $[H, B_i] = 0$  の確認 ハミルトニアンと Lenz ベクトル

$$H = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{\kappa}{r}, \quad B_i = \frac{1}{2m_e}\varepsilon_{ijk}(L_j p_k - p_j L_k) + \frac{\kappa}{r}x_i$$

の交換関係

$$[H, B_i] = \frac{1}{2m_e}[p^2, B_i] - \kappa\left[\frac{1}{r}, B_i\right]$$

の右辺における 2 つの交換子を、式 (6.117) を用いて評価しよう。

まず

$$\begin{aligned}
[p_l, B_i] &= \frac{1}{2m_e} \varepsilon_{ijk} ([p_l, L_j] p_k - p_j [p_l, L_k]) + \kappa \left( \left[ p_l, \frac{1}{r} \right] x_i + \frac{1}{r} [p_l, x_i] \right) \\
&= -\frac{i\hbar}{2m_e} \varepsilon_{ijk} (\varepsilon_{jlm} p_m p_k - \varepsilon_{klm} p_j p_m) + i\hbar \kappa \left( \frac{x_l x_i}{r^3} - \frac{1}{r} \delta_{il} \right) \\
&= \frac{i\hbar}{m_e} (\delta_{il} p^2 - p_i p_l) + i\hbar \kappa \left( \frac{x_i x_l}{r^3} - \frac{1}{r} \delta_{il} \right) \quad (\because \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} = -(\delta_{il} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kl}), \text{ etc.})
\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}
[p^2, B_i] &= p_l [p_l, B_i] + [p_l, B_i] p_l \\
&= i\hbar \kappa \left\{ \left( p_l \frac{x_i x_l}{r^3} + \frac{x_i x_l}{r^3} p_l \right) - \left( p_i \frac{1}{r} + \frac{1}{r} p_i \right) \right\} \quad (27)
\end{aligned}$$

を得る。これは教科書 p.184 下から 8 行目の式に対応しているものの、教科書では全体に掛かる係数  $\kappa$  が抜け落ちている。

次に交換子

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{1}{r}, B_i \right] &= \frac{1}{2m_e} \varepsilon_{ijk} \left( \left[ \frac{1}{r}, L_j \right] p_k + L_j \left[ \frac{1}{r}, p_k \right] - \left[ \frac{1}{r}, p_j \right] L_k - p_j \left[ \frac{1}{r}, L_k \right] \right) \\
&= \frac{i\hbar}{2m_e} \varepsilon_{ijk} \left( -L_j \frac{x_k}{r^3} + \frac{x_j}{r^3} L_k \right) = -\frac{i\hbar}{2m_e} \varepsilon_{ijk} \left( L_j \frac{x_k}{r^3} + \frac{x_k}{r^3} L_j \right)
\end{aligned}$$

を調べよう。ただし最後の等号では第 2 項でダミー添字を  $j \leftrightarrow k$  と入れ替えた。最右辺に  $L_j = \varepsilon_{jlm} x_l p_m$  を代入すると,

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{1}{r}, B_i \right] &= -\frac{i\hbar}{2m_e} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \left( x_l p_m \frac{x_k}{r^3} + \frac{x_k}{r^3} x_l p_m \right) \\
&= \frac{i\hbar}{2m_e} \left( x_i p_k \frac{x_k}{r^3} - x_k p_i \frac{x_k}{r^3} + \frac{x_k}{r^3} x_i p_k - \frac{x_k}{r^3} x_k p_i \right) \quad (\because \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} = -(\delta_{il} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kl}))
\end{aligned}$$

と書き換えられる。さらに上式最右辺の第 4 項において  $x_k x_k = r^2$  であり、第 1 項と第 2 項は運動量を左端に移動させてそれぞれ

$$x_i p_k \frac{x_k}{r^3} = (p_k x_i + [x_i, p_k]) \frac{x_k}{r^3} = p_k \frac{x_i x_k}{r^3} + i\hbar \frac{x_i}{r^3}, \quad x_k p_i \frac{x_k}{r^3} = (p_i x_k + [x_k, p_i]) \frac{x_k}{r^3} = p_i \frac{x_k}{r} + i\hbar \frac{x_i}{r^3}$$

と書くと、おつりの項が正確に相殺する。よって

$$\left[ \frac{1}{r}, B_i \right] = \frac{i\hbar}{2m_e} \left\{ \left( p_k \frac{x_i x_k}{r^3} + \frac{x_i x_k}{r^3} p_k \right) - \left( p_i \frac{1}{r} + \frac{1}{r} p_i \right) \right\} \quad (28)$$

が成り立つ。これは教科書 p.184 下から 9 行目の式に対応している。

2 式 (27),(28) は共通の因子  $\{\dots\}$  を持つことに注意すると,

$$[H, B_i] = \frac{1}{2m_e} (\text{式 (27)}) - \kappa (\text{式 (28)}) = 0$$

を得る。

■  $[H, L_i] = 0$  の確認 式 (6.17) より

$$[H, L_i] = \frac{1}{2m_e} [p^2, L_i] - \kappa \left[ \frac{1}{r}, L_i \right] = \frac{1}{2m_e} (p_j [p_j, L_i] + [p_j, L_i] p_j) = \frac{1}{2m_e} \cdot 2(-i\hbar) \varepsilon_{ijk} p_j p_k = 0.$$

これは系の回転対称性を表している (1.4 節).

■ $B_i$  どうしの交換関係 (6.119) の導出 式 (6.120) の結果を用いて式 (6.119) を証明するという手順は、必ずしも見通しが良いとは言えない。そこで最初から式 (6.119) を直接示すことを考える。その際、Lenz ベクトルの表式

$$B_i = \frac{1}{2m_e} \varepsilon_{ijk} (L_j p_k - p_j L_k) + \frac{\kappa}{r} x_i$$

における、煩わしい  $\mathbf{L}$  と  $\mathbf{p}$  の対称部分をあらかじめ簡略化しておくとう便利である。そこで

$$p_j L_k = L_k p_j + [p_j, L_k] = L_k p_j + i\hbar \varepsilon_{ikl} p_l$$

を代入し、 $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jkl} = 2\delta_{il}$  に注意して整理すると、

$$B_i = C_i + \frac{\kappa}{r} x_i, \quad C_i \equiv \frac{1}{m_e} (\varepsilon_{ijk} L_j p_k - i\hbar p_i)$$

と書き換えられる。このとき求める交換子は

$$[B_i, B_j] = [C_i, C_j] + \left[ C_i, \frac{\kappa}{r} x_j \right] + \left[ \frac{\kappa}{r} x_i, C_j \right] \quad (29)$$

と表される。

ここで

$$m_e^2 [C_i, C_j] = \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} [L_k p_l, L_m p_n] - i\hbar \varepsilon_{ikl} [L_k p_l, p_j] - i\hbar \varepsilon_{jmn} [p_i, L_m p_n] \quad (30)$$

における第 1 項は、

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} [L_k p_l, L_m p_n] &= \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} (L_m [L_k, p_n] p_l + L_k [p_l, L_m] p_n + [L_k, L_m] p_l p_n) \\ &= i\hbar \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} (\varepsilon_{knq} L_m p_q p_l + \varepsilon_{lmq} L_k p_q p_n + \varepsilon_{kmq} L_q p_l p_n) \\ &= i\hbar \varepsilon_{ikl} \{ (-\delta_{jk} L_m p_m p_l + \cancel{L_k p_j p_l}) + (\delta_{jl} L_k p^2 - \cancel{L_k p_j p_l}) + (\delta_{jk} L_n p_l p_n - L_j p_l p_k) \} \\ &= -i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k p^2 \end{aligned}$$

と計算される。ただし最後の等号では 3 行目の表式において、第 1 項と第 5 項の各々が  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{p} = 0$  により消え (しかも互いに相殺し)、第 6 項が添字  $k, l$  に関して対称な因子  $p_l p_k$  と反対称な因子  $\varepsilon_{ikl}$  の縮約を含むため落ちることに注意した。また上式 (30) の第 2 項と第 3 項はそれぞれ

$$\begin{aligned} -i\hbar \varepsilon_{ikl} [L_k, p_j] p_l &= -i\hbar \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{kjm} p_m p_l = +i\hbar (\delta_{ij} p^2 - p_i p_j), \\ -i\hbar \varepsilon_{jmn} [p_i, L_m] p_n &= -i\hbar \varepsilon_{jmn} \varepsilon_{imq} p_q p_n = -i\hbar (\delta_{ij} p^2 - p_i p_j) \end{aligned}$$

となるので、互いに相殺する。以上より

$$[C_i, C_j] = -\frac{i\hbar}{m_e^2} \varepsilon_{ijk} L_k p^2 \quad (31)$$

を得る。

次に上式 (29) における後続の項

$$\left[ C_i, \frac{\kappa}{r} x_j \right] = \frac{\kappa}{m_e} \varepsilon_{ikl} \left[ L_k p_l, \frac{1}{r} x_j \right] - \frac{i\hbar \kappa}{m_e} \left[ p_i, \frac{1}{r} x_j \right] \quad (32)$$

を計算しよう。右辺第 1 項における交換子は

$$\left[ L_k p_l, \frac{1}{r} x_j \right] = L_k \left[ p_l, \frac{1}{r} \right] x_j + L_k \frac{1}{r} [p_l, x_j] + \left[ L_k, \frac{1}{r} \right] x_j p_l + \frac{1}{r} [L_k, x_j] p_l = i\hbar \left( L_k \frac{x_l x_j}{r^3} - \delta_{jl} L_k \frac{1}{r} + \varepsilon_{kjm} \frac{x_m}{r} p_l \right)$$

と評価される．ここで最右辺の第 1 項の上式 (32) に対する寄与は，

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ikl}L_kx_l &= -(x_ip_l - x_l p_i)x_l = -p_l x_i x_l - i\hbar\delta_{il}x_l + r^2 p_i + i\hbar\delta_{il}x_l, \\ \therefore \frac{i\hbar\kappa}{m_e}\varepsilon_{ikl}L_k \frac{x_l x_j}{r^3} &= \frac{i\hbar\kappa}{m_e}(-p_l x_i x_l + r^2 p_i) \frac{x_j}{r^3} = \frac{i\hbar\kappa}{m_e} \left\{ -p_l \frac{x_i x_j}{r^3} x_l + \frac{1}{r}(x_j p_i + i\hbar\delta_{ij}) \right\}, \end{aligned}$$

また第 2 項以降の寄与は

$$\frac{\kappa}{m_e}\varepsilon_{ikl} \times i\hbar \left( -\delta_{jl}L_k \frac{1}{r} + \varepsilon_{kjm} \frac{x_m}{r} p_l \right) = \frac{i\hbar\kappa}{m_e} \left( \varepsilon_{ijk}L_k \frac{1}{r} - \delta_{ij} \frac{x_l}{r} p_l + \frac{x_i}{r} p_j \right)$$

となる．また上式 (32) の第 2 項における交換子

$$\left[ p_i, \frac{1}{r} x_j \right] = i\hbar \left( \frac{x_i x_j}{r^3} - \delta_{ij} \frac{1}{r} \right)$$

の寄与は添字  $i, j$  に関して対称である．以上より

$$\left[ C_i, \frac{\kappa}{r} x_j \right] = \frac{i\hbar\kappa}{m_e} \left( \frac{1}{r} x_j p_i + \varepsilon_{ijk}L_k \frac{1}{r} + \frac{x_i}{r} p_j \right) + (i, j \text{ に関して対称な項})$$

とまとめられる．すると式 (29) の後ろの 2 項は

$$\begin{aligned} \left[ C_i, \frac{\kappa}{r} x_j \right] + \left[ \frac{\kappa}{r} x_i, C_j \right] &= \left[ C_i, \frac{\kappa}{r} x_j \right] - (i \leftrightarrow j) \\ &= \frac{i\hbar\kappa}{m} \left( -\frac{1}{r}(x_i p_j - x_j p_i) + 2\varepsilon_{ijk}L_k \frac{1}{r} + \frac{1}{r}(x_i p_j - x_j p_i) \right) \\ &= 2\frac{i\hbar\kappa}{m}\varepsilon_{ijk}L_k \frac{1}{r} \end{aligned}$$

と書ける<sup>\*35</sup>．

これと式 (31) を冒頭の式 (29) に代入すると，

$$[B_i, B_j] = -\frac{2i\hbar}{m_e}\varepsilon_{ijk}L_k \left( \frac{p^2}{2m_e} - \frac{\kappa}{r} \right) = -\frac{2i\hbar}{m_e}\varepsilon_{ijk}L_k H : (6.119)$$

を得る．

#### ■ $B_i$ と $L_i$ の交換関係 (6.120) の導出

$$B_j = \frac{1}{2m_e}\varepsilon_{jkl}(L_k p_l - p_k L_l) + \frac{\kappa}{r} x_j$$

に対して

$$\begin{aligned} [L_i, B_j] &= \frac{1}{2m_e}\varepsilon_{jkl}([L_i, L_k]p_l + L_k[L_i, p_l] - [L_i, p_k]L_l - p_k[L_i, L_l]) + \kappa \left( \left[ L_i, \frac{1}{r} \right] x_j + \frac{1}{r}[L_i, x_j] \right) \\ &= \frac{i\hbar}{2m_e}\varepsilon_{jkl}(\varepsilon_{ikm}L_m p_l + \varepsilon_{ilm}L_k p_m - \varepsilon_{ikm}p_m L_l - \varepsilon_{ilm}p_k L_m) + i\hbar\kappa\varepsilon_{ijk} \frac{x_k}{r} \\ &= \frac{i\hbar}{2m_e} \{ (\delta_{ij}L_l p_l - L_j p_i) + (-\delta_{ij}L_l p_l + L_i p_j) + (-\delta_{ij}p_l L_l + p_j L_i) + (-\delta_{ij}p_l L_l - p_i L_i) \} + i\hbar\kappa\varepsilon_{ijk} \frac{x_k}{r}, \\ i\hbar\varepsilon_{ijk}B_k &= i\hbar\varepsilon_{ijk} \left\{ \frac{1}{2m_e}\varepsilon_{kml}(L_l p_m - p_l L_m) + \frac{\kappa}{r} x_k \right\} \\ &= \frac{i\hbar}{2m_e}(L_i p_j - L_j p_i - p_i L_j + p_j L_i) + i\hbar\kappa\varepsilon_{ijk} \frac{x_k}{r} \end{aligned}$$

であり，2 式の最右辺は互いに一致しているので，式 (6.120) が成立する．

<sup>\*35</sup> 最後の等号で相殺した項もまた， $x_i p_j - x_j p_i = \varepsilon_{ijk}L_k$  が  $\frac{1}{r}$  と交換するため， $\varepsilon_{ijk}L_k \frac{1}{r}$  という形を持つ．

■  $M_i, N_i$  の交換関係 (6.124) の確認

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} [M_i, M_j] \\ [N_i, N_j] \end{Bmatrix} &= \frac{1}{4}([L_i, L_j] \pm [L_i, A_j] \pm [A_i, L_j] + [A_i, A_j]) = \frac{1}{4}i\hbar\varepsilon_{ijk}(L_k \pm A_k \pm A_k + L_k) = i\hbar\varepsilon_{ijk} \begin{Bmatrix} M_k \\ N_k \end{Bmatrix}, \\ [M_i, N_j] &= \frac{1}{4}([L_i, L_j] - [L_i, A_j] + [A_i, L_j] - [A_i, A_j]) = \frac{1}{4}i\hbar\varepsilon_{ijk}(L_k - A_k + A_k - L_k) = 0. \end{aligned}$$

■ 式 (6.127) 第 2 の等号の確認 交換関係 (6.119) の導出時と同様に,

$$B_i = C_i + \frac{\kappa}{r}x_i, \quad C_i \equiv \frac{1}{m_e}(\varepsilon_{ijk}L_jp_k - i\hbar p_i) + \frac{\kappa}{r}x_i \quad (33)$$

と書こう。

$$B^2 = B_i B_i = C_i C_i + \kappa \left( C_i \frac{x_i}{r} + \frac{x_i}{r} C_i \right) + \kappa^2$$

において

$$\begin{aligned} C_i C_i &= \frac{1}{m_e^2}(\varepsilon_{ijk}L_jp_k - i\hbar p_i)(\varepsilon_{ilm}L_l p_m - i\hbar p_i) \\ &= \frac{1}{m_e^2} \{ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}L_jp_kL_l p_m - i\hbar\varepsilon_{ijk}L_jp_k p_i - i\hbar\varepsilon_{ilm}p_i L_l p_m + (i\hbar)^2 p^2 \} \end{aligned}$$

であり, 最右辺の第 2 項は添字  $i, k$  に関して対称な因子  $p_k p_i$  と反対称な因子  $\varepsilon_{ijk}$  の縮約を含むから消える。また第 1 項は

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}L_jp_kL_l p_m &= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})L_jp_kL_l p_m = L_jp_kL_jp_k - L_jp_kL_kp_j \\ &= L_jp_kL_jp_k \quad (\because p_kL_k = \mathbf{p} \cdot \mathbf{L} = 0) \\ &= L_j(L_jp_k + i\hbar\varepsilon_{kjl}p_l)p_k \\ &= L^2p^2, \quad (\because \varepsilon_{kjl}p_l p_k = 0) \end{aligned}$$

第 3 項は

$$\begin{aligned} -i\hbar\varepsilon_{ilm}p_i L_l p_m &= -i\hbar\varepsilon_{ilm}(p_i p_m L_l + i\hbar\varepsilon_{lmn}p_i p_n) \\ &= -2(i\hbar)^2 p^2 \quad (\because \varepsilon_{ilm}p_i p_m = 0, \varepsilon_{ilm}\varepsilon_{lmn} = 2\delta_{in}) \end{aligned}$$

と変形できるので,

$$C_i C_i = \frac{1}{m_e^2}(L^2 + \hbar^2)p^2. \quad (34)$$

次に

$$C_i \frac{x_i}{r} = \frac{1}{m_e} \left( \varepsilon_{ijk}L_jp_k \frac{x_i}{r} - i\hbar p_i \frac{x_i}{r} \right)$$

の右辺における各々の項について,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}p_k x_i &= \varepsilon_{ijk}(x_i p_k - i\hbar\delta_{ik}) = -L_j, \\ p_i \frac{x_i}{r} &= (x_i p_i - 3i\hbar) \frac{1}{r} = \frac{x_i}{r} p_i + x_i \left[ p_i, \frac{1}{r} \right] - 3i\hbar \frac{1}{r} = \frac{x_i}{r} p_i - 2i\hbar \frac{1}{r} \end{aligned}$$

と書き換えると,

$$C_i \frac{x_i}{r} = \frac{1}{m_e} \left( -\frac{L^2}{r} - i\hbar \frac{x_i}{r} p_i - 2\frac{\hbar^2}{r} \right) \quad (35)$$

を得る ( $L^2$  と  $1/r$  は可換なので積を  $L^2/r$  と書いても差支えない).

さらに

$$\frac{x_i}{r} C_i = \frac{1}{m_e} \left( \varepsilon_{ijk} \frac{x_i}{r} L_j p_k - i\hbar \frac{x_i}{r} p_i \right)$$

の右辺第 1 項に  $L_j p_k = p_k L_j + i\hbar \varepsilon_{jkl} p_l$  を代入し,

$$\varepsilon_{ijk} x_i p_k = -L_j, \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jkl} = 2\delta_{il}$$

を用いて整理すると

$$\frac{x_i}{r} C_i = \frac{1}{m_e} \left( -\frac{L^2}{r} + i\hbar \frac{x_i}{r} p_i \right) \quad (36)$$

を得る.

得られた式 (34),(35),(36) を冒頭の式 (33) に代入すると

$$\mathbf{B}^2 = \frac{2}{m_e} (L^2 + \hbar^2) E + \kappa^2, \quad E = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{\kappa}{r}$$

となるので, 式 (6.127) 第 2 の等号が成立する.

## 7 その他のコンパクト群の表現

この章は (前章と同様), 各トピックへの形式的な言及といった性格が強いため, 本稿では全面的に省略する. 各節のタイトルは以下のとおりである.

- 7.1 ユニタリ・シンプレクティック群
- 7.2 例外群
- 7.3 拡大ディンキン図と部分群
- 7.4 素粒子の統一理論

7.4 節について, 極小置換を通じてゲージ場を導入すると局所ゲージ変換に関して対称な理論が得られることに関しては文献 [15, § 11.1] [11, pp.140–145] を, 電弱統一理論に関しては文献 [15] の第 16–19 章を見よ.

## 8 ローレンツ群

### 8.1 特殊相対論とローレンツ変換

特殊相対性理論の復習にあたるため、本稿では省略する (8.2 節の冒頭も同様). 3.1 節と 3.2 節の Lorentz 群に関する記述も参照.

### 8.2 ローレンツ群とそのリー代数

Lorentz 変換  $x'^{\mu} = A^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$  における変換係数は、無限小変換に対しては

$$A^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu}$$

という形をとる. ここに  $\omega_{\mu\nu}$  は添字に関して反対称な無限小パラメーターである [8, pp.45–46].  $(\mu, \nu)$  成分

$$(M_{\rho\sigma})^{\mu}_{\nu} \equiv -(\delta^{\mu}_{\rho} g_{\sigma\nu} - \delta^{\mu}_{\sigma} g_{\rho\nu}) \quad (37)$$

を持つ  $4 \times 4$  行列  $M_{\rho\sigma} (= -M_{\sigma\rho})$  を定義すると、無限小 Lorentz 変換は

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \omega^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = \left(1 - \frac{1}{2} \omega^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma}\right)^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

と書き直され (最右辺の 1 は  $4 \times 4$  の単位行列), これを繰り返し合成して得られる有限の変換は

$$x'^{\mu} = \left[ \exp \left( -\frac{1}{2} \omega^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma} \right) \right]^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

と表される [11, p.4].

ところで 3.2 節で見たように、無限小の Lorentz 変換に対する変換行列  $A = 1 + M$  は式 (3.37):

$$M^T g + g M = 0 \quad (8.21)$$

を満たし, [式 (3.37) 直後の note で述べたように]  $M$  の独立な成分は ( $\omega_{\mu\nu}$  と同じく) 6 個である. そして行列式 (37) はその導入方法により, 上式 (8.21) を満たす 6 個の独立な行列となっている. その成分を定義式 (37) に基づいて具体的に書き下すと,

$$\begin{aligned} M_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & M_{23} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & M_{31} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ M_{01} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & M_{02} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & M_{03} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる [これが教科書 p.217 の行列たちである]. 式 (3.26) と比較すると,  $\{M_{12}, M_{23}, M_{31}\}$  は  $O(3)$  の Lie 代数であり, 通常の空間回転を生成することが分かる. このように Lorentz 群  $O(3,1)$  は直交群  $O(3)$  を部分群として含んでいる.

note また  $M_{01}$  と  $\tanh = -\beta$  なる有限の“回転角”  $\psi$  から, Lorentz 変換の変換係数

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & \psi & 0 & 0 \\ \psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi & 0 & 0 \\ \sinh \psi & \cosh \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が得られる.

さて, Lie 代数  $\{M_{\rho\sigma}\}$  は交換関係

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = (g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}) \quad (8.23)$$

を満たす [本稿次節で確認]. ここで空間回転と等速推進 (Lorentz ブースト) の生成子をそれぞれ

$$M_i \equiv -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}M_{jk}, \quad N_i \equiv M_{0i}(= -M_{i0}) \quad (8.24)$$

とまとめると (したがって  $\mathbf{M} = -(M_{23}, M_{31}, M_{12})$ ),  $M_{\mu\nu}$  の交換関係 (8.23) は  $M_i, N_i$  に対する交換関係

$$[M_i, M_j] = \varepsilon_{ijk}M_k, \quad [N_i, N_j] = -\varepsilon_{ijk}M_k, \quad [M_i, N_j] = \varepsilon_{ijk}N_k \quad (8.25)$$

に焼き直される [本稿次節で確認]. この交換関係は  $\text{SL}(2, \mathbf{C})$  の交換関係と同じであることを以下にて説明する.

$\text{SL}(2, \mathbf{C})$  は行列式が 1 である 2 次の複素行列全体である. その Lie 代数はトレースレスの複素行列であり, その独立な [実数] 成分の数は 6 である (3.2 節の表 2). よって Pauli 行列  $\sigma_i$  を用いて,  $\text{SL}(2, \mathbf{C})$  の Lie 代数を 6 つの行列

$$M_i = -i\frac{\sigma_i}{2}, \quad N_i = -\frac{\sigma_i}{2} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (8.26)$$

に選ぶことができる [ $\text{Tr}(\sigma_i) = 0$  に注意 [6, p.222]]. これらは [Pauli 行列の交換関係  $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$  より [6, p.222]], 式 (8.25) と同じ交換関係を満たす. このように Lorentz 群と  $\text{SL}(2, \mathbf{C})$  の各々の Lie 代数は同型である.

すると Lorentz 群と  $\text{SL}(2, \mathbf{C})$  は準同型であることが期待される. このことを具体的に見るために, 2 次の Hermite 行列  $H$  の全体を考える.  $H$  は 4 つの独立な実数成分を持つから [3.2 節の note を参照],

$$H(x) = x^\mu\sigma_\mu = g_{\mu\nu}x^\mu\sigma^\nu = x^0\sigma^0 - x^1\sigma^1 - x^2\sigma^2 - x^3\sigma^3 \quad (8.27)$$

と表せる. ここに  $\sigma_0$  は単位行列であり, 行列のラベルに対しても添字の上げ下げを  $\sigma^\mu = g^{\mu\nu}\sigma_\nu$  で定義する. 上式 (8.27) を通じて, Minkowski 空間のベクトル  $x^\mu$  は Hermite 行列  $H$  と 1 対 1 に対応付けられる. ところが行列  $H$  の  $a \in \text{SL}(2, \mathbf{C})$  による変換

$$H' = aHa^\dagger \quad (8.28)$$

もまた Hermite 行列だから, 適当な 4 元ベクトル  $x'^\mu$  を用いて

$$H'(x') = x'^\mu\sigma_\mu \quad (8.29)$$

と書ける. これは上式 (8.28) を通じて  $\text{SL}(2, \mathbf{C})$  の元  $a$  と座標の (線形) 変換

$$x'^\mu = A^\mu{}_\nu x^\nu \quad (8.30)$$

が対応していることを意味する。しかも  $\det H(x) = x^\mu x_\mu$  であることと [本稿次節で補足], 式 (8.28) [と  $\det a = 1$ ] より  $\det H' = \det H$  であることを考え合わせると, 変換 (8.28) は内積  $x^\mu x_\mu$  を変えないから, 式 (8.30) は Lorentz 変換である。以上より  $SL(2, \mathbf{C})$  の変換は Lorentz 変換に対応している。

ここで  $\rho_\mu = (\sigma_0, -\boldsymbol{\sigma})$  を導入する ( $\boldsymbol{\sigma} \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ )。このとき  $\text{Tr}(\sigma_\mu \rho_\nu) = 2g_{\mu\nu}$  が成り立つことに注意すると, Lorentz 変換の係数  $A^\mu{}_\nu$  と  $a \in SL(2, \mathbf{C})$  の具体的な関係

$$A^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \text{Tr}(\rho^\mu a \sigma_\nu a^\dagger) \quad (8.31)$$

が見出される [以上, 本稿次節を参照]。これは  $a \rightarrow 1$  のとき  $A^\mu{}_\nu \rightarrow \delta^\mu{}_\nu$  を満たす。

参考 上式 (8.31) で  $\mu = \nu = 0$  とおくと

$$A_{00} = \frac{1}{2} \text{Tr}(aa^\dagger).$$

ここで  $M \equiv aa^\dagger$  は Hermite で  $\det M = 1$  を満たすから,

$$M = m_0 \sigma_0 + m_1 \sigma_1 + m_2 \sigma_2 + m_3 \sigma_3 = \begin{pmatrix} m_0 + m_3 & m_1 - im_2 \\ m_1 + im_2 & m_0 - m_3 \end{pmatrix}$$

と表される。すると再び

$$1 = \det M = m_0^2 - m_1^2 - m_2^2 - m_3^2, \quad \therefore |m_0| \geq 1$$

なので,  $A_{00} = \frac{1}{2} \text{Tr} M = m_0$  は 1 以上または -1 以下である [既知のように [11, p.3]]. 教科書 p.219 では展開係数  $m_0 \geq 0$  を仮定して,  $SL(2, \mathbf{C})$  は  $\Lambda_{00} \geq 1$  の固有 Lorentz 変換に対応していると結論している。

$a \in SL(2, \mathbf{C})$  に対して  $(-a) \in SL(2, \mathbf{C})$  であり, それらは式 (8.31) より同一の係数  $A^\mu{}_\nu$  を与える。このように  $A^\mu{}_\nu$  と  $a \in SL(2, \mathbf{C})$  の対応は 1 対 2 である。

## 8.2 節について

■行列  $M_{\rho\sigma}$  の交換関係 (8.23) の確認 行列  $M_{\rho\sigma}$  の定義式 (37):

$$(M_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu \equiv -(\delta^\mu{}_\rho g_{\sigma\nu} - \delta^\mu{}_\sigma g_{\rho\nu})$$

より交換子  $[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}]$  の  $(\alpha, \beta)$  成分は

$$\begin{aligned} & ([M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}])^\alpha{}_\beta \\ &= (M_{\mu\nu})^\alpha{}_\gamma (M_{\rho\sigma})^\gamma{}_\beta - (M_{\rho\sigma})^\alpha{}_\gamma (M_{\mu\nu})^\gamma{}_\beta \\ &= (\delta^\alpha{}_\mu g_{\nu\gamma} - \delta^\alpha{}_\nu g_{\mu\gamma})(\delta^\gamma{}_\rho g_{\sigma\beta} - \delta^\gamma{}_\sigma g_{\rho\beta}) - (\mu \leftrightarrow \rho, \nu \leftrightarrow \sigma) \\ &= (\delta^\alpha{}_\mu g_{\nu\rho} g_{\sigma\beta} - \delta^\alpha{}_\mu g_{\nu\sigma} g_{\rho\beta} - \delta^\alpha{}_\nu g_{\mu\rho} g_{\sigma\beta} + \delta^\alpha{}_\nu g_{\mu\sigma} g_{\rho\beta}) \\ &\quad - (\delta^\alpha{}_\rho g_{\sigma\mu} g_{\nu\beta} - \delta^\alpha{}_\rho g_{\sigma\nu} g_{\mu\beta} - \delta^\alpha{}_\sigma g_{\rho\mu} g_{\nu\beta} + \delta^\alpha{}_\sigma g_{\rho\nu} g_{\mu\beta}) \\ &= -g_{\mu\rho}(\delta^\alpha{}_\nu g_{\sigma\beta} - \delta^\alpha{}_\sigma g_{\nu\beta}) + g_{\nu\rho}(\delta^\alpha{}_\mu g_{\sigma\beta} - \delta^\alpha{}_\sigma g_{\mu\beta}) + g_{\mu\sigma}(\delta^\alpha{}_\nu g_{\rho\beta} - \delta^\alpha{}_\rho g_{\nu\beta}) - g_{\nu\sigma}(\delta^\alpha{}_\mu g_{\rho\beta} - \delta^\alpha{}_\rho g_{\mu\beta}) \\ &= g_{\mu\rho}(M_{\nu\sigma})^\alpha{}_\beta - g_{\nu\rho}(M_{\mu\sigma})^\alpha{}_\beta - g_{\mu\sigma}(M_{\nu\rho})^\alpha{}_\beta + g_{\nu\sigma}(M_{\mu\rho})^\alpha{}_\beta \end{aligned}$$

と計算される。これは交換関係 (8.23) を意味する。

■演算子  $M, N$  の交換関係 (8.25) の導出 Lorentz 変換の生成子  $M_{\rho\sigma}$  が満たす交換関係 (8.23), および演算子  $M, N$  の定義式 (8.24):

$$M_i \equiv -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}M_{jk}, \quad N_i \equiv M_{0i} (= -M_{i0})$$

を思い出そう. すると

$$\begin{aligned} [M_i, M_j] &= \frac{1}{4}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}[M_{kl}, M_{mn}] \\ &= \frac{1}{4}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}(g_{km}M_{ln} - g_{lm}M_{kn} - g_{kn}M_{lm} + g_{ln}M_{km}) \\ &= -\frac{1}{4}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}(\delta_{km}M_{ln} - \delta_{lm}M_{kn} - \delta_{kn}M_{lm} + \delta_{ln}M_{km}) \\ &= -\frac{1}{4}\{(\delta_{ij}\delta_{ln} - \delta_{in}\delta_{lj})M_{ln} + (\delta_{ij}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{kj})M_{kn} + (\delta_{ij}\delta_{lm} - \delta_{im}\delta_{lj})M_{lm} + (\delta_{ij}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kj})M_{km}\} \\ &= -\frac{1}{4} \times 4 \times (-M_{ji}) \quad (M_{ij} \text{ は反対称}) \\ &= -M_{ij} \\ &= \varepsilon_{ijk}M_k, \\ [M_i, N_j] &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}[M_{kl}, M_{j0}] \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}(g_{kj}M_{l0} - g_{lj}M_{k0} - g_{k0}M_{lj} + g_{l0}M_{kj}) \\ &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}(\delta_{kj}M_{l0} - \delta_{lj}M_{k0}) \\ &= -\frac{1}{2}(\varepsilon_{ijl}M_{l0} - \varepsilon_{ikj}M_{k0}) \\ &= -\varepsilon_{ijl}M_{l0} \\ &= \varepsilon_{ijk}N_k, \\ [N_i, N_j] &= [M_{i0}, M_{j0}] \\ &= (g_{ij}M_{00} - g_{0j}M_{i0} - g_{i0}M_{0j} + g_{00}M_{ij}) \\ &= M_{ij} \\ &= -\varepsilon_{ijk}M_k \end{aligned}$$

となって, 交換関係 (8.25) を得る.

■ $\det H = x^\mu x_\mu$  (教科書 p.218 下から 3 行目) となることの確認 行列 (8.27):

$$H(x) = x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}$$

の行列式をとると,

$$\det H(x) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = x^\mu x_\mu$$

となる.

■「 $\text{Tr}(\sigma_\mu \rho_\nu) = 2g_{\mu\nu}$  である」(p.219, 1.3) ことの確認  $(\mu, \nu) = (0, 0)$  のときには両辺がともに 2 となるので, これは成立する. また  $(\mu, \nu) = (0, i), (i, 0)$  のとき左辺は  $\pm \frac{1}{2}\text{Tr}(\sigma_i) = 0$  となるから, 与式は成立している. 最後に  $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$  を用いると

$$\text{Tr}(\rho_i \sigma_j) = -\text{Tr}(\sigma_i \sigma_j) = -\delta_{ij}\text{Tr}(1) = -2\delta_{ij}$$

となるから,  $(\mu, \nu) = (i, j)$  のときにも与式は成立する. 以上より示された.

■式 (8.31) の導出  $\text{SL}(2, \mathbf{C})$  の元は Lie 代数 (8.26) を用いて

$$a = \exp(-\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{M} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{N}) = \exp\left(i\theta_k \frac{\sigma_k}{2} - \omega_k \frac{\sigma_k}{2}\right)$$

と表せる. この下で無限小変換の場合を考えれば充分である. すると

$$\begin{aligned} a\sigma_\nu a^\dagger &\simeq \left(1 + \frac{i}{2}\theta_k \sigma_k - \frac{1}{2}\omega_k \sigma_k\right) \sigma_\nu \left(1 + \frac{i}{2}\theta_l \sigma_l - \frac{1}{2}\omega_l \sigma_l\right) \\ &\simeq \sigma_\nu + \frac{i}{2}\theta_k [\sigma_k, \sigma_\nu] - \frac{1}{2}\omega_k \{\sigma_k, \sigma_\nu\} \end{aligned}$$

となる. ここで Pauli 行列の交換関係と反交換関係

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$$

を思い出すと,

$$a\sigma_\nu a^\dagger \simeq \begin{cases} 1 - \omega_k \sigma_k & (\nu = 0) \\ \sigma_i - \varepsilon_{kil}\theta_k \sigma_l - \omega_i & (\nu = i) \end{cases}$$

が得られる. 他方,

$$\begin{aligned} \sigma_\mu A^\mu_\nu &\simeq \sigma_\mu (\delta^\mu_\nu + \varepsilon^\mu_\nu) \\ &= \begin{cases} 1 + \sigma_i \varepsilon^{i0} & (\nu = 0) \\ \sigma_i - \varepsilon^{0i} - \sigma_k \varepsilon^{ki} & (\nu = i) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - \omega_k \sigma_k & (\nu = 0) \\ \sigma_i - \omega_i + \varepsilon_{kil}\theta_l \sigma_k & (\nu = i) \end{cases} \end{aligned}$$

であり, 最右辺において  $\varepsilon_{kil}\theta_l \sigma_k = \varepsilon_{lik}\theta_k \sigma_l = -\varepsilon_{kil}\theta_k \sigma_l$  と書き換えられる. これらを等置して

$$\sigma_\mu A^\mu_\nu = a\sigma_\nu a^\dagger \quad (8.38)$$

を得る [11, p.10]. 上式 (38) に  $\rho_\lambda$  を左から掛けてトレースをとり,  $\text{Tr}(\rho^\lambda \sigma_\mu) = 2\delta^\lambda_\mu$  を用いると式 (8.31) が導かれる.

なお上式 (38) に  $x^\nu$  を掛けると, 改めて式 (8.28) が得られる. 文献 [11, pp.10–11] ではこの式 (8.28) から  $A^\mu_\nu$  と  $a \in \text{SL}(2, \mathbf{C})$  の 1 対 2 対応を説明している.

### 8.3 ローレンツ群の表現とディラック代数

Lorentz 群の Lie 代数を, 新たに式 (8.24) の線形結合

$$\mathbf{J} \equiv \frac{1}{2}i(\mathbf{M} + i\mathbf{N}), \quad \mathbf{K} \equiv \frac{1}{2}i(\mathbf{M} - i\mathbf{N}) \quad (8.35)$$

で定義すると, これらは  $\text{SU}(2) \otimes \text{SU}(2)$  の交換関係

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k, \quad [K_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k, \quad [J_i, K_j] = 0 \quad (8.36)$$

を満たす. [本稿次節で確認する. 式 (6.124) の箇所の note も見よ.] 実際, 式 (8.24) における  $M_i$  の反 Hermite 性と  $N_i$  の Hermite 性より Lie 代数 (8.35) は Hermite なので, 表現のユニタリー性が保証さ

れる．そこで 5.1 節で見た最高ウェイト  $j, k = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$  を持つ  $SU(2)$  の表現から， $SU(2) \otimes SU(2)$  の  $(2j+1)(2k+1)$  次元の表現  $D(j, k)$  が得られる．

$SL(2, \mathbf{C})$  の基本表現は  $D(1/2, 0)$  と  $D(0, 1/2)$  であり [4.4 節を見よ]，これらは Lie 代数

$$\begin{aligned} D\left(\frac{1}{2}, 0\right) : M_i &= -\frac{1}{2}i\sigma_i, & N_i &= -\frac{1}{2}\sigma_i, \\ D\left(0, \frac{1}{2}\right) : M_i &= -\frac{1}{2}i\sigma_i, & N_i &= \frac{1}{2}\sigma_i \end{aligned} \quad (8.38)$$

を持つ．[式 (8.26) の箇所で見たとように，これらは交換関係 (8.23) を満たす.]

note 式 (8.35) を逆に解いた関係

$$M_i = -i(J_i + K_i), \quad N_i = K_i - J_i \quad (8.37)$$

において  $J_i = \sigma_i/2, K_i = 0$  とおくと  $D(1/2, 0)$  表現の Lie 代数が<sup>36</sup>， $J_i = 0, K_i = \sigma_i/2$  とおくと  $D(0, 1/2)$  表現の Lie 代数が得られる [11, pp.8-9]．

表現  $D(1/2, 0)$  の下で変換する場  $\xi$  を **2 成分スピノル**，表現  $D(0, 1/2)$  の下で変換する場  $\eta$  を **共役スピノル** と呼ぶ． $[\xi$  の 2 成分は  $j$ -スピンのウェイト  $\pm 1/2$  で， $\eta$  の 2 成分は  $k$ -スピンのウェイト  $\pm 1/2$  で指定される [11, pp.7-9].] このとき  $N_i$  によって生成される無限小 Lorentz 変換の下で，これらのスピノルは

$$\xi \rightarrow \xi' = \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon\sigma_i\right)\xi, \quad \eta \rightarrow \eta' = \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\sigma_i\right)\eta \quad (8.39)$$

と変換する．よって

$$\xi^\dagger \eta \rightarrow \xi'^\dagger \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon\sigma_i\right) \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\sigma_i\right) \eta = \xi^\dagger \eta \quad (\text{一貫して } \varepsilon \text{ の } 1 \text{ 次までの近似})$$

はスカラーである (他方  $\xi^\dagger \xi$  はスカラーにならない)．そこで Lorentz 変換の下で決まった変換性を持つ量を作るために，4 成分スピノル  $(\xi, \eta)$  を導入するのが便利である．これは直和  $D(1/2, 0) \oplus D(0, 1/2)$  の変換性に従う．

ところで座標  $x^\mu$  による行列  $\gamma^\mu$  の線形結合が

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^0\gamma^0 - x^1\gamma^1 - x^2\gamma^2 - x^3\gamma^3)^2 \quad (8.40)$$

を満たすためには， $\gamma^\mu$  は反交換関係

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (8.41)$$

に従えば良い [本稿次節で確認]<sup>\*36</sup>．これを満たす行列  $\gamma^\mu$  の全体を **Dirac 代数** という<sup>\*37</sup>．

$\gamma$  行列の表示として， $4 \times 4$  行列

$$\gamma^0 = -\sigma_1 \otimes \sigma_0 = -\begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = i\sigma_2 \otimes \sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (8.43)$$

をとる ( $i = 1, 2, 3$ )．

<sup>\*36</sup> ただし  $\{, \}$  は反交換子であり，右辺には単位行列 1 が掛かっているものと解する．

<sup>\*37</sup> 他方 Euclid 空間では式 (8.40) は  $\{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij}$  に置き換わる．これを満たす行列  $\gamma_i$  の全体を Clifford 代数と呼ぶ (6.4 節)．

note 例えば直積表現  $\sigma_1 \otimes \sigma_0$  の行列要素を定義式 (2.34) に基づいて書き下すと,  $\sigma_1$  と同じブロック構造に  $\sigma_0$  のコピーを置いた行列が得られる (詳しくは文献 [2, § 1.16] のノートを参照). もっとも第 2 辺の直積はひとまず読み飛ばしても差支えない.

$\gamma$  行列 (8.43) は実際に反交換関係 (8.41) を満たし, 性質

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \\ \gamma^{j\dagger} = -\gamma^j \quad (j = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (8.49)$$

を満足する [本稿次節で確認]. 上式 (8.49) は  $\gamma^0$  が Hermite であるのに対し,  $\gamma^j$  は反 Hermite であることを意味している. [また上式 (8.49) が  $(\gamma^0)^2 = 1$  を含意していることを覚えておくのは有用である.]

ここで

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (8.42)$$

を定義する. 相異なる  $\gamma$  行列は反交換することに注意すると, これは

$$\gamma_5 = \frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma$$

と書くこともできる (ここでは  $\varepsilon_{0123} = +1$ ) [14, p.250]. 具体的には

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix} (= \sigma_3 \otimes \sigma_0) \quad (8.44)$$

と成分計算される [本稿次節で確認].  $\gamma$  行列の表示 (8.43–44) をカイラル表示という. また  $\gamma_5$  の固有値はカイラリティと呼ばれ, 2 成分スピノル  $\xi, \eta$  はカイラリティがそれぞれ  $+1, -1$  の固有状態に対応している.

$$\gamma_5 \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}.$$

カイラリティが  $\pm 1$  の成分への 4 成分スピノル  $\psi = (\xi, \eta)^T$  の分解は, 射影演算子  $P_\pm \equiv (1 \pm \gamma_5)/2$  で行われる [11, p.26].

$$\frac{1 + \gamma_5}{2} \psi = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}.$$

言い換えれば  $P_\pm$  は,  $D(1/2, 0) \oplus D(0, 1/2)$  から  $D(1/2, 0)$  や  $D(0, 1/2)$  を取り出す射影演算子である. [ $P_\pm \equiv (1 \pm \gamma_5)/2$  は質量ゼロの Dirac 粒子に対するヘリシティ射影演算子でもある [14, pp.255–256].]

さらに 4 次元化した Pauli 行列

$$\sigma_\mu \equiv (1, \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}_\mu \equiv (1, -\boldsymbol{\sigma})$$

(あるいは  $\sigma^\mu = (1, -\boldsymbol{\sigma}), \bar{\sigma}^\mu = (1, \boldsymbol{\sigma})$ ) に対して,  $2 \times 2$  の行列  $\sigma^{\mu\nu}, \bar{\sigma}^{\mu\nu}$  を

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu), \quad \bar{\sigma}^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu) \quad (39)$$

で定義する [11, p.12]. すると  $\gamma$  行列の交換関係は

$$M^{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix} \quad (40)$$

と計算される [本稿次節で確認]. これは交換関係 (8.23) を満たし, 4 成分スピノル  $\psi = (\xi, \eta)^T$  は

$$S = \exp \left( -\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \right) \quad (8.48)$$

( $M^{ij}$  の反 Hermitic 性によりユニタリーではない) により

$$\psi'(x') = S\psi(x) \quad (41)$$

と変換する [本稿次節を参照]. また行列 (8.48) は

$$\bar{S}\gamma^\mu S = A^\mu{}_\nu\gamma^\nu, \quad \bar{S} \equiv \gamma_0 S^\dagger \gamma_0 \quad (8.51)$$

を満たす [本稿次節で証明\*38].

カイラル表示 (8.43) の  $\gamma^0$  を用い,  $\psi$  に随伴する場

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \quad (8.47)$$

を定義する. このとき  $\bar{\psi}\psi$  は式 (8.39) の箇所で述べたスカラー  $\xi^\dagger\eta$  を含む. そして上式 (41),(8.51) より,

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\psi}\psi \\ \bar{\psi}\gamma_5\psi \\ \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \\ \bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi \\ \bar{\psi}M_{\mu\nu}\psi \end{array} \right\} \text{はそれぞれ} \left\{ \begin{array}{l} \text{スカラー} \\ \text{擬スカラー} \\ \text{ベクトル} \\ \text{軸性ベクトル (擬ベクトル)} \\ \text{(反対称な 2 階) テンソル} \end{array} \right\} \text{として変換する} \quad (42)$$

ことが示される [本稿次節で証明 (教科書の節末問題 8.6 の解答を兼ねる)]. これらは順に直和分解

$$\begin{aligned} & \left[ D\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus D\left(0, \frac{1}{2}\right) \right] \otimes \left[ D\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus D\left(0, \frac{1}{2}\right) \right] \\ & = D(0, 0) \oplus D(0, 0) \oplus D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus [D(1, 0) \oplus D(0, 1)] \end{aligned}$$

に現れる既約表現に属している.

note 第 5 章で見た  $SU(2)$  の既約表現への直和分解  $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{1} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{2}$  を思い出すと, 左辺の直積からは

$$\begin{aligned} D\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes D\left(\frac{1}{2}, 0\right) &= D(1, 0) \oplus D(0, 0), \\ D\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes D\left(0, \frac{1}{2}\right) &= D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\ D\left(0, \frac{1}{2}\right) \otimes D\left(\frac{1}{2}, 0\right) &= D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\ D\left(0, \frac{1}{2}\right) \otimes D\left(0, \frac{1}{2}\right) &= D(0, 1) \oplus D(0, 0) \end{aligned}$$

が現れる. 既約表現とテンソル成分の関係は 5.4 節を見よ.

### 8.3 節について

■演算子  $A, B$  の交換関係 (8.36) の導出 演算子 (8.35):

$$\mathbf{J} \equiv \frac{1}{2}i(\mathbf{M} + i\mathbf{N}), \quad \mathbf{K} \equiv \frac{1}{2}i(\mathbf{M} - i\mathbf{N})$$

\*38 これは教科書 p.222 にあるように, 「 $\gamma^\mu$  はローレンツ変換の下で  $x^\mu$  と同じ変換をする」ことを意味する.

に対して

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= -\frac{1}{4}([M_i, M_j] + i[M_i, N_j] + i[N_i, M_j] + (+i)^2[N_i, N_j]), \\ [K_i, K_j] &= -\frac{1}{4}([M_i, M_j] - i[M_i, N_j] - i[N_i, M_j] + (-i)^2[N_i, N_j]), \\ [J_i, K_j] &= -\frac{1}{4}([M_i, M_j] - i[M_i, N_j] + i[N_i, M_j] + (+i)(-i)[N_i, N_j]) \end{aligned}$$

であり, ここに交換関係 (8.25):

$$[M_i, M_j] = -[N_i, N_j] = \varepsilon_{ijk}M_k, \quad [M_i, N_j] = [N_i, M_j] = \varepsilon_{ijk}N_k$$

を代入すると, 式 (8.36):

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k, \quad [K_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k, \quad [J_i, K_j] = 0$$

が得られる.

■式 (8.40) ⇒ 式 (8.41) の確認  $\gamma_\mu \equiv g_{\mu\nu}\gamma^\nu$  を定義すると, 式 (8.40) は

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu &= (g_{\mu\nu}x^\mu\gamma^\nu)^2 = (x^\mu\gamma_\mu)^2 = x^\mu x^\nu\gamma_\mu\gamma_\nu \\ &= \frac{1}{2}x^\mu x^\nu\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} \quad (\gamma_\mu\gamma_\nu \text{の反対称部分は寄与しない}) \end{aligned}$$

となる. 両辺を比較すると, これが任意の  $x^\mu$  に対して成り立つ条件は

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$$

である. 計量テンソルを用いて全ての添字を上げると, 式 (8.41) を得る.

■ $\gamma$  行列 (8.43) が性質 (8.41), (8.49) を満たすことの確認 4次元化した Pauli 行列

$$\sigma_\mu \equiv (1, \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}_\mu \equiv (1, -\boldsymbol{\sigma})$$

(あるいは  $\sigma^\mu = (1, -\boldsymbol{\sigma}), \bar{\sigma}^\mu = (1, \boldsymbol{\sigma})$ ) を用いて,  $\gamma$  行列 (8.43) は

$$\gamma^\mu = -\begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

と表される. すると

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\nu \\ \bar{\sigma}^\nu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu \end{pmatrix} \quad (43)$$

である. ここで  $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$  からほぼ明らかなように, 4次元 Pauli 行列が

$$\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu + \sigma_\nu\bar{\sigma}_\mu = \bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu + \bar{\sigma}_\nu\sigma_\mu = 2g_{\mu\nu}$$

を満たすことに注意すると, 反交換関係 (8.41):  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g_{\mu\nu}$  を得る [11, p.25].

また  $\gamma$  行列 (8.43) に対して

$$\gamma^{\mu\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & (\bar{\sigma}^\mu)^\dagger \\ (\sigma^\mu)^\dagger & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

となるので, 式 (8.49):  $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$  が満たされる.

$(\gamma^0)^2 = 1$  より, 式 (8.49) の  $\mu = 0$  成分は  $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$  を意味する. また空間成分  $\mu = j = 1, 2, 3$  は

$$\gamma^{j\dagger} = \gamma^0\gamma^j\gamma^0 = \{\gamma^0, \gamma^j\}\gamma^0 - \gamma^j(\gamma^0)^2 = 2g^{0j}\gamma^0 - \gamma^j = -\gamma^j$$

となる.

■ $\gamma^5$  の具体的な表示 (8.44) の確認 カイラル表示の  $\gamma$  行列 (8.43) に対して,

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_1\sigma_2\sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{pmatrix}$$

である. ここで  $\sigma_{ij} = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$  より

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = (i\sigma_3)\sigma_3 = i$$

なので, 式 (8.44):

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を得る.

■ $\gamma$  行列の交換関係 (40) の確認 既に得た式 (43):

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\nu \\ \bar{\sigma}^\nu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu \end{pmatrix}$$

と  $\sigma^{\mu\nu}, \bar{\sigma}^{\mu\nu}$  行列の定義式 (39) により, 交換関係 (40):

$$\frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix}$$

を得る.

■式 (40) の  $M^{\mu\nu}$  が交換関係 (8.23) を満たすことの確認 [11, p.12] 行列 (40) の各ブロック  $\sigma^{\mu\nu}, \bar{\sigma}^{\mu\nu}$  が交換関係 (8.23) を満たすことを示せば充分である.

$\sigma^{\mu\nu}$  行列 (39) の要素は定義より

$$(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta \equiv \frac{i}{2}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_\alpha^\beta, \quad (\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \equiv \frac{i}{2}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}$$

で与えられる. 上式のスピノル添字の位置はを行列  $\sigma^{\mu\nu}, \bar{\sigma}^{\mu\nu}$  のスピノル添字の標準位置と約束する. また行列  $\sigma^{\mu\nu}, \bar{\sigma}^{\mu\nu}$  は Lorentz 添字  $\mu, \nu$  に関して反対称であることが見て取れる. そしてゼロでない独立な  $\sigma^{\mu\nu}$  行列は

$$(\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}) = \boldsymbol{\sigma}, \quad (\sigma_{10}, \sigma_{20}, \sigma_{30}) = i\boldsymbol{\sigma} \quad (44)$$

である.

上式 (44) の確認 行列  $\sigma^\mu, \bar{\sigma}^\mu, \sigma^{\mu\nu}$  の定義式 (39):

$$(\sigma_{\mu\nu}) \equiv \frac{i}{2}(\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu\bar{\sigma}_\mu) \quad \text{with} \quad \sigma_\mu \equiv (1, \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}_\mu \equiv (1, -\boldsymbol{\sigma})$$

および Pauli 行列の交換関係  $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$  より,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{i}{2}(\sigma_i\bar{\sigma}_j - \sigma_j\bar{\sigma}_i) = -\frac{i}{2}[\sigma_i, \sigma_j] = \varepsilon_{ijk}\sigma_k, \\ \sigma_{i0} &= \frac{i}{2}(\sigma_i\bar{\sigma}_0 - \sigma_0\bar{\sigma}_i) = i\sigma_i \end{aligned}$$

となる. これらは式 (44) を意味する.

ところが式 (44) はそれぞれ、式 (8.38) に示した  $(1/2, 0)$  表現の Lie 代数の  $i/2$  倍となっているから、交換関係 (8.23) を満たす。

また式 (44) と同様に

$$\bar{\sigma}_{ij} = \varepsilon_{ijk}\sigma_k, \quad \bar{\sigma}_{i0} = -i\sigma_i$$

が得られる。これは式 (8.38) に示した  $(0, 1/2)$  表現の Lie 代数の  $i/2$  倍となっているから、交換関係 (8.23) を満たす。

■4 成分スピノル  $\psi$  の変換則 (41) について たった今見たように  $\sigma^{\mu\nu}, \bar{\sigma}^{\mu\nu}$  はそれぞれ、 $(1/2, 0)$  表現のスピノル  $\xi$  と  $(0, 1/2)$  表現のスピノル  $\eta$  の変換の生成子となる。よって 4 成分スピノル  $\psi = (\xi, \eta)^T$  はこれらの直和 (40) を生成子とする行列 (8.48) によって変換する (式 (41))。

■式 (8.48) の行列  $S$  に対する性質 (8.51) の導出 [11, p.27] はじめに準備としていくつかの事実を述べる。反対称テンソルの行列  $\epsilon = (\epsilon^{\alpha\beta}) (= i\sigma_2)$  を用いると、任意の 2 次正方行列  $M$  の余因子行列は

$$\epsilon M^T \epsilon^T = (\det M) M^{-1} \quad (45)$$

と表される [11, p.9]。

確認 一般に  $2 \times 2$  行列

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対して

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \epsilon M^T \epsilon^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

なので、上式 (45) が恒等的に成立する。

ここで

$$a = \exp\left(-\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right) = \exp(-\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{M} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{N}) \in \text{SL}(2, \mathbf{C})$$

に対して、公式 (45) を  $M = a, a^\dagger$  とおいて適用し、 $\det a = 1$ 、それ故  $\det(a^\dagger) = 1$  であることを用いると、

$$\epsilon a^T \epsilon^T = a^{-1}, \quad \epsilon a^* \epsilon^T = \epsilon (a^\dagger)^T \epsilon^T = (a^\dagger)^{-1}$$

となる。また  $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$  の Hermite 共役をとった式

$$(a^{-1})^\dagger a^\dagger = a^\dagger (a^{-1})^\dagger = 1$$

は、 $(a^{-1})^\dagger$  が  $a^\dagger$  の逆行列であることを示している。

$$(a^{-1})^\dagger = (a^\dagger)^{-1}.$$

さらに式 (38) を  $A \rightarrow A^{-1}, a \rightarrow a^{-1}$  として書き下すと

$$a^{-1}\sigma_\mu(a^{-1})^\dagger = (A^{-1})^\nu{}_\mu\sigma_\nu$$

である。

さて、式 (8.48) で定義した  $S$  の成分を  $2 \times 2$  のブロックに分けて書くと、

$$\begin{aligned} S &= \exp\left(-\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right) = \exp\left[-\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\right) \end{pmatrix} \quad \left(\because \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (\sigma^{\mu\nu})^n & 0 \\ 0 & (\bar{\sigma}^{\mu\nu})^n \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \epsilon a^T \epsilon^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{\dagger-1} \end{pmatrix} \\ \therefore S^\dagger &= \begin{pmatrix} a^\dagger & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

第 4 の等号について [11, p.13]

$a = \exp\left(-\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right)$  を定義する Taylor 展開を考えると、最右辺において

$$\epsilon a^* \epsilon^T = \epsilon \left[ \exp\left(-\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right) \right]^* \epsilon^T = \exp\left(-\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu*}(\epsilon\sigma_{\mu\nu}^* \epsilon^T)\right)$$

となる。さらに式 (44):

$$(\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}) = \boldsymbol{\sigma}, \quad (\sigma_{10}, \sigma_{20}, \sigma_{30}) = i\boldsymbol{\sigma}$$

および公式 (45) の帰結  $\epsilon(-\boldsymbol{\sigma}^*)\epsilon^T = \boldsymbol{\sigma}$  を思い出すと、 $\epsilon\sigma_{\mu\nu}^* \epsilon^T$  について

$$\begin{aligned} \epsilon\sigma_{ij}^* \epsilon^T &= \varepsilon_{ijk}\epsilon\sigma_k^* \epsilon^T = -\varepsilon_{ijk}\sigma_k = -\sigma_{ij}, \\ \epsilon\sigma_{i0}^* \epsilon^T &= -i\epsilon\sigma_i \epsilon^T = i\sigma_i = \sigma_{i0} \end{aligned}$$

である。ところが既出の式 (44) など

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_{ijk}\sigma_k, \quad \sigma_{i0} = i\sigma_i, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \varepsilon_{ijk}\sigma_k, \quad \bar{\sigma}_{i0} = -i\sigma_i$$

を比較すると、

$$(\sigma_{ij})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} = (\bar{\sigma}_{ij})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}, \quad (\sigma_{i0})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} = -(\bar{\sigma}_{i0})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}$$

が見出されるから、上式は  $(\epsilon\sigma_{\mu\nu}^* \epsilon^T)_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} = -(\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}$  とまとめられる。

よって

$$\bar{S}\gamma_\mu S = (\gamma_0 S^\dagger \gamma_0)\gamma_\mu S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^\dagger & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \bar{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{\dagger-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a^{-1}\sigma_\mu a^{\dagger-1} \\ a^\dagger \bar{\sigma}_\mu a & 0 \end{pmatrix}$$

と計算できる。最右辺の行列について、右上のブロックは  $(A^{-1})^\nu{}_\mu \sigma_\nu$  である。左下のブロックについては、 $\epsilon^T \sigma_\mu \epsilon = \bar{\sigma}_\mu^T$  を用いると [11, p.11]

$$\begin{aligned} a^\dagger \bar{\sigma}_\mu a &= a^\dagger (\epsilon^T \sigma_\mu \epsilon)^T a = a^\dagger \epsilon^T \sigma_\mu^T \epsilon a = \epsilon^T (\epsilon a^\dagger \epsilon^T) \sigma_\mu^T (\epsilon a \epsilon^T) \epsilon = \epsilon^T (\epsilon a^\dagger \epsilon^T) \sigma_\mu^T (\epsilon a^\dagger \epsilon^T)^\dagger \epsilon \\ &= \epsilon^T (a^{\dagger-1})^T \sigma_\mu^T (a^{-1})^T \epsilon \end{aligned}$$

となる。これは

$$(A^{-1})^\nu{}_\mu \bar{\sigma}_\nu = (A^{-1})^\nu{}_\mu (\epsilon^T \sigma_\nu \epsilon)^T = (A^{-1})^\nu{}_\mu \epsilon^T \sigma_\nu^T \epsilon = \epsilon^T (a^{-1} \sigma_\mu a^{\dagger-1})^T \epsilon = \epsilon^T (a^{\dagger-1})^T \sigma_\mu^T (a^{-1})^T$$

に一致する。以上より

$$\bar{S}\gamma_\mu S = (A^{-1})^\nu{}_\mu \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\nu \\ \bar{\sigma}_\nu & 0 \end{pmatrix} = (A^{-1})^\nu{}_\mu \gamma_\nu, \quad \therefore \bar{S}\gamma^\mu S = (A^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

を得る。

最後に  $(A^{-1})^\nu{}_\mu = A^\mu{}_\nu$  の関係があることに注意する [11, p.2]. 実際, 計量テンソルの Lorentz 変換

$$g_{\mu\nu} A^\mu{}_\rho A^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}$$

の両辺に  $g^{\tau\rho}$  を掛けて  $\rho$  で和をとると,

$$\delta^\tau{}_\sigma = (g^{\tau\rho} g_{\mu\nu} A^\mu{}_\rho) A^\nu{}_\sigma = A_\nu{}^\tau A^\nu{}_\sigma, \quad \therefore A_\nu{}^\tau = (A^{-1})^\tau{}_\nu$$

が見出される。こうして式 (8.51):  $\bar{A}\gamma^\mu A = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$  に到達する。

■ Dirac スピノルについて双一次の基本量に対する Lorentz 変換性 (42) の証明 [11, p.27] Dirac スピノルの変換則 (41):  $\psi' = S\psi$  より, 共役な場は

$$\bar{\psi}' = \psi'^\dagger \gamma^0 = (S\psi)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 = (\psi^\dagger \gamma^0)(\gamma^0 S^\dagger \gamma^0) = \bar{\psi} \bar{S}$$

と変換する。ここで式 (8.51) の証明で確認したように

$$S = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{\dagger-1} \end{pmatrix}$$

であり, ここから  $\bar{S}$  は  $S$  の逆行列に他ならないこと

$$\bar{S} = (\gamma_0 S^\dagger \gamma_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^\dagger & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a^\dagger \end{pmatrix} = S^{-1}$$

が導かれる。

するとまず  $\bar{\psi}\psi$  は

$$\bar{\psi}'\psi' = (\bar{\psi}\bar{S})(S\psi) = \bar{\psi}\psi$$

と変換するので, Lorentz スカラーである。

次に  $\bar{\psi}\gamma_5\psi$  は

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'\gamma_5\psi' &= (\bar{\psi}\bar{S})\gamma_5(S\psi) \\ &= \bar{\psi}i(\bar{S}\gamma^0 S)(\bar{S}\gamma^1 S)(\bar{S}\gamma^2 S)(\bar{S}\gamma^3 S)\psi \\ &= A^0{}_\mu A^1{}_\nu A^2{}_\rho A^3{}_\sigma \bar{\psi}(i\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma)\psi \quad (\because \text{式 (8.51)}) \end{aligned}$$

と変換する。ここで相異なる  $\gamma$  行列は反交換するので

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

と書けることに気付くと,

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'\gamma_5\psi' &= (\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A^0{}_\mu A^1{}_\nu A^2{}_\rho A^3{}_\sigma) \bar{\psi}(i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)\psi \\ &= \det(A) \bar{\psi}\gamma_5\psi \end{aligned}$$

を得る。ところが Lorentz 変換  $x \rightarrow x'$  では

$$\det(A) \equiv \det(A^\mu{}_\nu) = \frac{\partial(x')}{\partial(x)} = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} (= \pm 1)$$

なので、これは擬スカラーの変換則となっている。

この結果は応用しやすい公式

$$\bar{S}\gamma_5 S = \det(A^{-1})\gamma_5$$

にまとめられる。

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' &= (\bar{\psi}\bar{S})\gamma^\mu(S\psi) \\ &= A^\mu{}_\nu(\bar{\psi}\gamma^\nu\psi), \\ \bar{\psi}'\gamma_5\gamma^\mu\psi' &= (\bar{\psi}\bar{S})\gamma_5\gamma^\mu(S\psi) \\ &= \bar{\psi}(\bar{S}\gamma_5 S)(\bar{S}\gamma^\mu S)\psi \\ &= \det(A^{-1})A^\mu{}_\nu(\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\nu\psi), \\ \bar{\psi}'M^{\mu\nu}\psi' &= -\frac{1}{4}(\bar{\psi}\bar{S})[\gamma^\mu, \gamma^\nu](S\psi) \\ &= -\frac{1}{4}\bar{\psi}(A^\mu{}_\rho A^\nu{}_\sigma - A^\nu{}_\rho A^\mu{}_\sigma)\gamma^\rho\gamma^\sigma\psi \\ &= A^\mu{}_\rho A^\nu{}_\sigma - \frac{1}{4}\bar{\psi}[\gamma^\rho, \gamma^\sigma]\psi \\ &= A^\mu{}_\rho A^\nu{}_\sigma(\bar{\psi}M^{\rho\sigma}\psi)\end{aligned}$$

はそれぞれベクトル, 擬 (軸性) ベクトル, 2 階テンソルの変換則となっている。

## 8.4 ポアンカレ群

Minkowski 空間における (原点の) 平行移動と, Lorentz 変換を合わせた変換

$$x'^\mu = A^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \quad (8.52)$$

は **Poincaré 群** (あるいは非斉次 **Lorentz 群**) を成す。Poincaré 群 P は Minkowski 空間の 2 点間の距離を不変にする実 1 次変換全体の作る群とすることもでき, その元は変換 (8.52) を規定する定数の組  $(a, A)$  で指定される。変換を続けて行くと, 群の掛け算則は

$$(a_2, A_2)(a_1, A_1) = (a_2 + A_2 a_1, A_2 A_1) \quad (8.53)$$

となることが分かる [本稿次節で確認]。単位元は  $(0, 1)$  であり,  $(a, A)$  の逆元は

$$(a, A)^{-1} = (-A^{-1}a, A^{-1}) \quad (8.54)$$

で与えられる [本稿次節で確認]。

- Lorentz 群 L は変換  $(0, A)$  より成る部分群である。
- 並進群 T は平行移動  $(a, 1)$  全体の成す不変部分群である。実際, 任意の元  $(a, A) \in P$  に対し

$$(a, A)(b, 1)(a, A)^{-1} = (Ab, 1) \in T \quad (46)$$

が成り立つ [本稿次節で確認 (不変部分群は 2.2 節で定義)]。

Poincaré 群の元  $(a, A)$  に Lorentz 変換の元  $(0, A)$  を対応させる写像は，明らかに準同型写像であって並進群  $T$  を核に持つから，準同型定理 2.1 [2.3 節] により

$$P/T \simeq L.$$

4 元運動量の演算子

$$P_\mu = i\hbar\partial_\mu \quad (8.55-56)$$

[教科書の符号を訂正した，これは右辺より Hermite] は，並進群のユニタリー表現

$$U(a) = \exp(ia^\mu P_\mu/\hbar) \quad (8.57)$$

を与える．生成子は

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \quad (8.58)$$

を満たすので，並進群は [期待されるように] Abel 群である．

並進群の Lie 代数 (8.55-56) と同様，Lorentz 群の Lie 代数も微分演算子を用いて

$$M_{\mu\nu} = x_\nu\partial_\mu - x_\mu\partial_\nu (= -M_{\nu\mu}) \quad (8.59)$$

と表すことができる．実際これは交換関係 (8.23):

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} \quad (8.60)$$

を満たす [本稿次節で確認]．

note これは Lorentz 対称性に付随する保存量に他ならない 4 元角運動量  $M_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu$  が [8, pp.45-46]，Lorentz 変換の生成子になることを意味する．

特に空間成分

$$M_{ij} = \frac{1}{i\hbar}\varepsilon_{ijk}L_k \quad (8.61)$$

[式 (8.56) と連動して符号を訂正した] は (つまらない係数の違いを除けば) 軌道角運動量だから，空間回転を生成する．Poincaré 群の生成子は  $\{P_\rho, M_{\mu\nu}\}$  であり， $M_{\mu\nu}$  と  $P_\rho$  の交換関係は

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = g_{\mu\rho}P_\nu - g_{\nu\rho}P_\mu \quad (8.62)$$

で与えられる [式 (8.60) の導出過程を参照]．

Poincaré 群の表現は Casimir 演算子 [5.3 節] の固有値で類別できる． $P^2 = P^\mu P_\mu$  は

$$[P^2, P_\rho] = 0, \quad [P^2, M_{\mu\nu}] = 0 \quad (8.63)$$

を満たすので [本稿次節で確認]，Casimir 演算子の 1 つである． $P^2$  の固有値  $p^2$  によって，Poincaré 群の表現は次の 4 つに類別される．

クラス I :  $p_\rho = 0$ ， クラス II :  $p^2 > 0$  (時間的)， クラス III :  $p^2 = 0$  (光的)， クラス IV :  $p^2 < 0$  (空間的)．

[ここに  $p_\rho$  は  $P_\rho$  の固有値である.] 各々の表現は  $p_\rho$  を不変にする [ベクトルとして (下記のように成分は変換する)] 変換に帰着し，小群と呼ばれる Poincaré 群の部分群  $G_p$  を成す [ $p^2$  が Lorentz スカラーであることと方程式  $p_\rho = 0$  が共変的であることに注意]．

クラス I では  $p_\rho = 0$  なので、並進群に関しては恒等表現である。よって小群  $G_p$  は固有 Lorentz 群になる。ここで演算子

$$W_\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu M^{\rho\sigma} \quad (8.64)$$

(ただし  $\varepsilon_{0123} = +1$ ) を導入すると、これは  $P_\rho$  と可換であり、 $W^2 = W^\mu W_\mu$  は今 1 つの Casimir 演算子となる [節末問題]。そこで  $p_\rho$  と  $W_\mu$  の同時固有状態を考える。

クラス II では  $p^\rho = (m, 0, 0, 0)$  となる座標系をとることができる。このとき式 (8.64) は [特に  $\mu = i$  に対して  $W_i = \frac{1}{2}m\varepsilon_{ijk}M^{jk}$  と簡略化されるので]、

$$W_0 = 0, \quad W_1 = mM^{23}, \quad W_2 = mM^{31}, \quad W_3 = mM^{12} \quad (8.65)$$

を与える。これらは生成子 (8.61) に比例しているので、クラス II の小群は  $G_p = \text{SO}(3)$  である。

クラス III では  $p^\rho = (m, 0, 0, m)$  となる座標系をとることができる [運動量  $p = E/c$  の光子が  $+z$  向きに運動している座標系を選ぶことに対応]。このとき式 (8.64) は

$$W_0 = -W_3 = -mW^{12}, \quad W_1 = m(W^{23} - M^{20}), \quad W_2 = m(W^{13} - M^{01}) \quad (8.66)$$

となる [本稿次節で確認]。そこで  $S_i = W_i/m$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を定義すると、これらは交換関係

$$[S_1, S_2] = 0, \quad [S_2, S_3] = -S_1, \quad [S_3, S_1] = -S_2 \quad (8.67)$$

を満たす。

note  $M_{\mu\nu}$  の交換関係 (8.60) に基づいて確認する代わりに、等価的に式 (8.24) を通じて定義した  $M_i, N_i$  が交換関係 (8.25) を満たすことから交換子を評価する方が容易である。

上式 (8.67) は  $xy$  面内の平行移動と回転の生成子

$$S_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad S_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad S_3 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \quad (8.68)$$

が満たす交換関係と同じだから、クラス III の小群  $G_p$  は 2 次元面内の平行移動と回転の作る群  $E_2$  である。

クラス IV では  $p^\rho = (0, 0, 0, m)$  となる座標系をとることができる [原点と空間的に隔たる時空点が原点と同時刻となる座標系をとれる]。このとき

$$W_0 = -mM^{12}, \quad W_1 = -mM^{20}, \quad W_2 = -mM^{01}, \quad W_3 = 0 \quad (8.69)$$

となる。これらは小群  $G_p = \text{SO}(2, 1)$  を生成することが見て取れる。

## 節末問題

8.7  $W_\mu$  の交換関係  $[W_\mu, P_\nu] = 0$  などの証明 式 (8.64) の  $W_\mu$  が満たす交換関係

$$[W_\mu, W_\nu] = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\rho W^\sigma, \quad [W_\mu, P_\nu] = 0, \quad [W_\mu, M_{\rho\sigma}] = g_{\mu\sigma}W_\rho - g_{\mu\rho}W_\sigma \quad (47)$$

を示す (第 1 式の符号を訂正した)。

まず第 2 式は、

$$\begin{aligned} [W_\mu, P_\nu] &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\rho\sigma\tau}P^\rho[M^{\sigma\tau}, P_\nu] \\ &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\rho\sigma\tau}P^\rho(\delta_\nu^\sigma P^\tau - \delta_\nu^\tau P^\sigma) \quad (\because \text{式 (8.62)}) \\ &= -\frac{1}{2}(\varepsilon_{\mu\rho\nu\tau}P^\rho P^\tau - \varepsilon_{\mu\rho\sigma\nu}P^\rho P^\sigma) = 0 \end{aligned}$$

と確かめられる。ただし最後の等号では添字の組  $(\rho, \tau)$  (または  $(\rho, \sigma)$ ) について、対称な因子と反対称な因子の縮約が消えることを考慮した。

次に第3式は、やや間接的ではあるが

$$P^\mu W_\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\mu P^\nu M^{\rho\sigma} = 0$$

に注意すると、

$$\begin{aligned} 0 &= [P^\mu W_\mu, M_{\rho\sigma}] = P^\mu [W_\mu, M_{\rho\sigma}] + [P^\mu, M_{\rho\sigma}] W_\mu \\ &= P^\mu [W_\mu, M_{\rho\sigma}] - (\delta_\rho^\mu P_\sigma - \delta_\sigma^\mu P_\rho) W_\mu \quad (\cdot: \text{式 (8.62)}) \\ &= P^\mu [W_\mu, M_{\rho\sigma}] - (P_\sigma W_\rho - P_\rho W_\sigma) \\ &= P^\mu \{ [W_\mu, M_{\rho\sigma}] - (g_{\mu\sigma} W_\rho - g_{\mu\rho} W_\sigma) \} \end{aligned}$$

となることから分かる。

最後に第2式と第3式を用いると

$$[W_\mu, W_\nu] = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\nu\rho\sigma\tau}P^\rho [W_\mu, M^{\sigma\tau}] = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\nu\rho\sigma\tau}P^\rho (\delta_\mu^\tau W^\sigma - \delta_\mu^\sigma W^\tau) = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\rho W^\sigma$$

となって、第1式が得られる。

8.8  $W^2$  が Casimir 演算子であること  $[W^2, P_\mu] = 0, [W^2, M_{\mu\nu}] = 0$  の証明 全問で示した式 (47) の第2式  $[W_\mu, P_\nu] = 0$  から、直ちに

$$[W^2, P_\mu] = 0.$$

また式 (47) の第3式を用いると、

$$\begin{aligned} [W^2, M_{\mu\nu}] &= W^\rho [W_\rho, M_{\mu\nu}] + [W_\rho, M_{\mu\nu}] W^\rho \\ &= W^\rho (g_{\rho\nu} W_\mu - g_{\rho\mu} W_\nu) + (g_{\rho\nu} W_\mu - g_{\rho\mu} W_\nu) W^\rho \\ &= W_\nu W_\mu - W_\mu W_\nu + W_\mu W_\nu - W_\nu W_\mu \\ &= 0. \end{aligned}$$

## 8.4 節について

■空間並進を伴う変換 (8.52) について 等速推進 (Lorentz ブースト) においても、2つの空間座標の原点  $O, O'$  に固定した時計が示す座標時間がそれぞれゼロになるとき、原点  $O, O'$  が一致しているという設定の下では、Minkowski 空間で見ると2つの座標系は原点を共有するため、座標変換則は単なる“回転”  $x'^\mu = A^\mu_\nu x^\nu$  になる。最初の仮定を外せば、 $a^\mu \neq 0$  の変換 (8.52) が得られると考えられる。

■Poincaré 群の掛け算則 (8.53) の確認 変換 (8.52) を  $(a_1, A_1) \rightarrow (a_2, A_2)$  の順に繰り返すと、

$$x''^\mu = (A_2)^\mu_\nu x'^\nu + (a_2)^\mu = (A_2)^\mu_\nu \{ (A_1)^\nu_\rho x^\rho + (a_1)^\nu \} + (a_2)^\mu = (A_2)^\mu_\nu (A_1)^\nu_\rho x^\rho + \{ (A_2)^\mu_\nu (a_1)^\nu + (a_2)^\mu \}$$

となることによる。

■逆元の式 (8.54) の確認 群の掛け算則 (8.53) を公式的に用いると、

$$\begin{aligned} (-A^{-1}a, A^{-1})(a, A) &= (-A^{-1}a + A^{-1}a, A^{-1}A) = (0, 1), \\ (a, A)(-A^{-1}a, A^{-1}) &= (a + A(-A^{-1}a), AA^{-1}) = (0, 1) \end{aligned}$$

となることによる。

■式 (46) の確認

$$(a, A)(b, 1)(a, A)^{-1} = (a + Ab, A)(-A^{-1}a, A^{-1}) = ((a + Ab) + A(-A^{-1}a), AA^{-1}) = (Ab, 1).$$

■Lie 代数 (8.59) が交換関係 (8.60) を満たすことの確認  $T_\mu \equiv \partial_\mu$  に対して交換子  $[x_\mu, T_\nu]$  を座標の任意の関数に作用させると, 交換関係

$$[x_\mu, T_\nu] = -(\partial_\nu x_\mu) = -g_{\mu\rho}\partial_\nu x^\rho = -g_{\mu\nu}$$

が見出される.  $P_\mu = i\hbar T_\mu$  に注意すると, これは正準交換関係を一般化した

$$[x_\mu, P_\nu] = -i\hbar g_{\mu\nu}$$

を意味する. これを用いると, ひとまず

$$\begin{aligned} [M_{\mu\nu}, x_\rho] &= x_\nu[T_\mu, x_\rho] - x_\mu[T_\nu, x_\rho] = g_{\mu\rho}x_\nu - g_{\nu\rho}x_\mu, \\ [M_{\mu\nu}, T_\rho] &= [x_\nu, T_\rho]T_\mu - [x_\mu, T_\rho]T_\nu = -g_{\nu\rho}T_\mu + g_{\mu\rho}T_\nu \end{aligned}$$

を得る. 第 2 式は  $P_\rho$  との交換関係 (8.62) に他ならない. さらにこれを繰り返し用いると

$$\begin{aligned} [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= [M_{\mu\nu}, x_\sigma]T_\rho + x_\sigma[M_{\mu\nu}, T_\rho] - [M_{\mu\nu}, x_\rho]T_\sigma - x_\rho[M_{\mu\nu}, T_\sigma] \\ &= (g_{\mu\sigma}x_\nu - g_{\nu\sigma}x_\mu)T_\rho + x_\sigma(-g_{\nu\rho}T_\mu + g_{\mu\rho}T_\nu) - (g_{\mu\rho}x_\nu - g_{\nu\rho}x_\mu)T_\sigma - x_\rho(-g_{\nu\sigma}T_\mu + g_{\mu\sigma}T_\nu) \\ &= g_{\mu\rho}(x_\sigma T_\nu - x_\nu T_\sigma) + g_{\nu\sigma}(x_\rho T_\mu - x_\mu T_\rho) - g_{\nu\rho}(x_\sigma T_\mu - x_\mu T_\sigma) - g_{\mu\sigma}(x_\rho T_\nu - x_\nu T_\rho) \\ &= g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} \end{aligned}$$

となって, 交換関係 (8.60) が導かれる.

■ $P^2$  に対する交換関係 (8.63) の確認 非自明な第 2 式について,

$$\begin{aligned} [P^2, M_{\mu\nu}] &= P^\rho[P_\rho, M_{\mu\nu}] + [P_\rho, M_{\mu\nu}]P^\rho \\ &= -P^\rho(g_{\mu\rho}P_\nu - g_{\nu\rho}P_\mu) - (g_{\mu\rho}P_\nu - g_{\nu\rho}P_\mu)P^\rho \quad (\because \text{式 (8.62)}) \\ &= -P_\mu P_\nu + P_\nu P_\mu - P_\nu P_\mu + P_\mu P_\nu \\ &= 0. \end{aligned}$$

■式 (8.66) の確認  $W_\mu$  の定義式 (8.64) において  $P^\nu = (m, 0, 0, m)$  の  $\nu = 0, 3$  番目の成分のみが寄与することに注意すると,

$$\begin{aligned} W_0 &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{0\nu\rho\sigma}P^\nu M^{\rho\sigma} = -\frac{m}{2}\varepsilon_{03\rho\sigma}M^{\rho\sigma} = -mM^{12}, \\ W_1 &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{1\nu\rho\sigma}P^\nu M^{\rho\sigma} = -\frac{m}{2}\varepsilon_{10\rho\sigma}M^{\rho\sigma} - \frac{m}{2}\varepsilon_{13\rho\sigma}M^{\rho\sigma} = m(M^{23} - M^{20}), \\ W_2 &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{2\nu\rho\sigma}P^\nu M^{\rho\sigma} = -\frac{m}{2}\varepsilon_{20\rho\sigma}M^{\rho\sigma} - \frac{m}{2}\varepsilon_{23\rho\sigma}M^{\rho\sigma} = m(M^{13} - M^{01}), \\ W_3 &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{3\nu\rho\sigma}P^\nu M^{\rho\sigma} = -\frac{m}{2}\varepsilon_{30\rho\sigma}M^{\rho\sigma} = mM^{12} \end{aligned}$$

となるので, 式 (8.66) が成り立つ.

## 参考文献

- [1] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, 2013, ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 力学 (増訂 第3版)(広重徹, 水戸巖訳), 東京図書株式会社, 東京.
- [2] H. ジョージアイ, 2010, 物理学におけるリー代数——アイソスピンから統一理論へ—— (原著第2版) (九後汰一郎訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [3] 吉川圭二, 2022, 理工系の基礎数学 新装版 群と表現, 株式会社岩波書店, 東京.
- [4] J.J.Sakurai, 2014, 現代の量子力学 (下)(桜井明夫訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [5] L.D. ランダウ, E.M. リフシッツ, 2019, 量子力学 ランダウ=リフシッツ物理学小教程 (好村滋洋, 井上健男訳), 株式会社筑摩書房, 東京.
- [6] J.J.Sakurai, 2017, 現代の量子力学 (上)(桜井明夫訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [7] ゴールドスタインほか, 2009, 古典力学 (下) 原著第3版 (矢野忠ほか訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [8] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, 2015, ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 場の古典論 (原書第6版)(恒藤敏彦, 広重徹訳), 東京図書株式会社, 東京.
- [9] 山本義隆, 中村孔一, 2013, 朝倉物理学大系 1 解析力学 I, 株式会社朝倉書店, 東京.
- [10] R. ガムビーニ/J. プリン, 2021, 初級講座 ループ量子重力 (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [11] 九後汰一郎, 2018, 新物理学シリーズ 23 ゲージ場の量子論 I, 株式会社培風館.
- [12] 内山龍雄, 2014, 相対性理論 物理テキストシリーズ 8, 株式会社岩波書店, 東京.
- [13] 佐武一郎, 2017, 数学選書 1 線型代数学 (新装版), 株式会社裳華房, 東京.
- [14] F. マンドル, G. ショー, 2011, 場の量子論 第1巻 量子電磁力学 (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [15] F. マンドル, G. ショー, 2013, 場の量子論 第2巻 素粒子の相互作用 (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [16] B. ツヴィーバツハ, 2013, 初級講座 弦理論《基礎編》(樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.