

H. ジョージアイ 『物理学におけるリー代数』

第2章まで

本稿は Lie 群の教科書

H. ジョージアイ, 2010, 物理学におけるリー代数——アイソスピンから統一理論へ—— (原著第 2 版) (九後汰一郎訳), 株式会社吉岡書店, 京都

の最初の 2 章を, 要点と途中計算の分離した見通しの良い自己完結的テキストへと再構成し, さらに補足・考察を加えたノートである。ただし本稿では章末問題をはじめとして, 教科書の内容を多少, 取捨選択してある。さらに本稿には筆者の誤りや勘違いが潜んでいるかもしれないことをあらかじめ断っておく。言うまでもなく, 原著を当てるに越したことはない。

なお本稿の他にも理論物理の各種ノートを以下のページで公開している。

<http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/>

似たような題材に関するよりコンパクトな教科書である, 佐藤光『群と物理』 [1] のノートも置いてある。

### 「改訂版の序文」より

- 「最初に読むときには読み飛ばしても構わない (中略) 節や, それに関連する問題には, タイトルに \* 印を付けた。」
- 本書を読む際の「重要な必要条件は, 量子力学と線形代数の十分な予備知識である。」

### 序章「なぜ群論か？」より

第 2 段落から抜粋する：

物理学者が対称性から情報を抽出しようとする際に使うのは, たいていは群そのものではなく, 群の表現である。これの意味している正確な内容は, 読者が読み進むにつれて詳しくわかってくるだろう。私が読者にこの本から得てほしいと期待することは, 特に量子力学の学習において, 労力を軽減する道具として群の表現を使うために十分なだけの, 群とリー代数とその表現の理論である。

### 「訳者あとがき」(pp.323–324) 全文の引用

訳者によるあとがきは本の内容紹介としても打って付けなので, 本稿では最初にこの場で全文を引用する：

訳者が未だ教養の学生だった頃, 将来物理をやるには群論が必要だということで, ポントリャーギンの「連続群論」を非常に苦勞して読んだことがある。実のところ, 大変忍耐強く何度もトライし直して読んだのだが, 遂に上巻のみで挫折してしまった。結局その内容は消化不良ですぐに忘れてしまい, 後に物理をやる際には全く役に立たなかった。ポントリャーギンの本は数学的には定評のある教科書であるが, やはり物理学者向きの本ではない。初めから選択が間違っていたのであるが, かと言って, 当時他に日本語で読めるこの方面の教科書も見あたらなかった。

1961 年以来 Benjamin/Cummings から出版されている FRONTIERS IN PHYSICS のシリーズは, 物理学専攻の大学院生に多くの優れた講義ノートを提供し続けてきたものであり, このレベルの教科書の殆んどない我が国でも多くの愛読者がいる。本書 “Lie Algebra in Particle Physics” (H. Georgi 著) はこのシリーズの一

巻として書かれたものであり、もとより数学者向けの本ではなく、物理学専攻の学生のためのリー代数の教科書である。著者の H. ジョージアイは、素粒子論の分野で S. グラシヨウと共に、SU(5) に基づくクオークとレプトンの大統一理論を初めて提唱した有名な物理学者である。この教科書には、彼がその大統一理論を打ち立てる苦闘の中から会得した、群論に関する“実用的”な知識がちりばめられている。

今でき上がった校正刷でもう一度この本を通読してみて、「あゝ、こういう教科書が自分の大学生の頃にもあったらなあ」と改めて思う。例外群も含めた全ての単純リー代数に関して、物理における豊富な実例を上げながら解説してゆく手際は見事である。実例は、初等的量子力学系、原子核理論、そして殆んどは最近の素粒子物理学からのものであるが、その手法や知識は多分物理学一般に有用と思われる。この点を考慮して邦訳の題名を、“素粒子物理学における…”とはせず、あえて“物理学における…”とした。

内容は非常に簡潔に書かれていて、初等的量子力学を学習した学生なら容易に理解できるだろう。非常に“数学的”な学生には論理の粗さが気になると思われるが、それでも、リー代数全般を先ず概観したり、あるいはそれらが最新の物理学でどのように使われているのかを知るためだけでも勧められる本である。

---

ここまででは、実は本書第 1 版の和訳の際に付けた「訳者あとがき」であるが、第 2 版の翻訳を終えた今でも依然として妥当であり、訳者の言いたいことでもあるので再録しておいた。(もっとも原著出版社は、今は Benjamin/Cummings ではなく、Perseus Books に変わっているが。)

第 2 版は、全部で 27 章ある章立ては第 1 版とほぼ完全に同じであるが、内容量は 2 倍くらいになっている。全ての章で増補改訂がなされ、さらに豊富な実例とより明快で詳しい説明が加えられた。とくに第 1 版では数ページで済まされていた、有限群、特に対称群 (置換群) の表現と応用、に関して、それ自身の重要性とリー群への準備の意味から、40 ページにわたり殆ど新たな書き下ろしとして加えられた。同じく、第 1 版では触れられていなかった Dynkin 係数を用いた表現の具体的構成法や、ニュートリノ振動の発見により大統一理論の群として近年より重要性を増してきた例外群  $E_6$  の表現なども、詳しい解説が書き加えられた。この第 2 版は、「簡潔さ・短さ」という第 1 版の魅力をいくぶんそなった感があるかもしれない。しかし、それを補って余りあるほど、自己充足的で分かり易い教科書になった。

翻訳は原著の雰囲気伝えるべくできる限り原文に忠実な訳を心掛けた。しかし明らかな誤植は訳者の責任で訂正しておいた。また幾分わかりにくいと思われる箇所には訳者注を加え読者の便宜をはかった。「奇妙な日本語」と認識しながら敢えて使ったのは、複数名詞であることを示す「たち」である。SU(2) たち、状態たち、 $X_a$  たち、等々。複数であることを特に明示しなかった箇所であるので、読者の寛恕を願う次第である。

最後になったが、なかなか翻訳作業を進めない訳者を辛抱強く叱咤激励し、遂にこの形にまでして頂いた吉岡書店の吉岡誠氏に心から感謝したい。

2010 年 8 月

九後 汰一郎

## 目次

第 1 章 有限群	4
第 2 章 リー群	54

本稿で扱っていない大部分の残りの章は以下の通りである.

第 3 章 $SU(2)$
第 4 章 テンソル演算子
第 5 章 アイソスピン
第 6 章 ルートとウェイト
第 7 章 $SU(3)$
第 8 章 単純ルート
第 9 章 さらに $SU(3)$
第 10 章 テンソル法
第 11 章 ハイパーチャージとストレンジネス
第 12 章 ヤング図形
第 13 章 $SU(N)$
第 14 章 3次元調和振動子
第 15 章 $SU(6)$ とクォーク模型
第 16 章 カラー
第 17 章 構成子クォーク
第 18 章 統一理論と $SU(5)$
第 19 章 古典群
第 20 章 分類定理
第 21 章 $SO(2n+1)$ とスピノール
第 22 章 $SO(2n+2)$ スピノール
第 23 章 $SU(n) \subset SO(2n)$
第 24 章 $SO(10)$
第 25 章 自己同型
第 26 章 $Sp(2n)$
第 27 章 半端物

# 第 1 章 有限群

序文を引用する：

有限群の理論の紹介から始めよう。ここでは、この膨大なそして美しい主題の自己充足した扱いを与えることは意図していない。我々は、コンパクト・リー代数を理解するのに役立つ 2,3 の簡単な事実だけに集中する。たくさんの定義を紹介し、時々証明を与えるが、多くは読者にその証明を任せる。

## 1.1 群と表現

群 (group)  $G$  とは、次の性質を満たす集合である。

- 1.A.1 任意の元  $f, g \in G$  に対して定義される積  $h = fg$  もまた  $G$  の元である。
- 1.A.2 任意の元  $f, g, h \in G$  に対して、積は結合則  $f(gh) = (fg)h$  を満たす。
- 1.A.3 任意の元  $f \in G$  に対し、 $ef = fe = f$  となる単位元  $e \in G$  が存在する。
- 1.A.4 任意の元  $f \in G$  に対し、 $ff^{-1} = f^{-1}f = e$  となる逆元  $f^{-1} \in G$  が存在する。

群の元が離散的な場合には、表 1 のように各元  $g_i$  の行と元  $g_j$  の列の交わる欄に、積  $g_i g_j$  を示した群表 (掛け算表) を作る事ができる [2, p.14].

$G$  の表現 (representation) とは、 $G$  の元  $f$  を線形演算子  $D(f)$  に移す写像  $D$  [あるいは  $D(f)$  そのもの] で、次の性質を満たすものを言う。

- 1.B.1  $D(e) = 1$  : 線形演算子が作用している空間での単位演算子。
- 1.B.2  $D(g_1 g_2) = D(g_1)D(g_2)$ , すなわち元  $g_1, g_2$  の積は、線形演算子の自然な掛け算に移される。

[条件 1.B.1 は条件 1.B.2 に含まれている [1, pp.31-32].]

## 1.2 例- $Z_3$

有限個の元から成る群は有限であると言われ、有限群  $G$  の元の個数は  $G$  の位数 (order) と呼ばれる。(これに対し元の個数が有限でない群を無限と形容する。)

ここで位数 3 の群の群表の例を表 2 に示す。特に非自明な積として、

$$a^2 = b, \quad b^2 = a, \quad ab = ba = e$$

表 1 一般の群表

	$e$	$g_1$	$g_2$	$\cdots$
$e$	$e$	$g_1$	$g_2$	$\cdots$
$g_1$	$g_1$	$g_1 g_1$	$g_1 g_2$	$\cdots$
$g_2$	$g_2$	$g_2 g_1$	$g_2 g_2$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

表 2 巡回群  $Z_3$  の群表

	$e$	$a$	$b$
$e$	$e$	$a$	$b$
$a$	$a$	$b$	$e$
$b$	$b$	$e$	$a$

の関係が規定されていることが見て取れる。この群の1つの表現として

$$D(e) = 1, \quad D(a) = e^{2\pi i/3}, \quad D(b) = e^{-2\pi i/3} \quad (1.4')$$

を採用できることが、群表2の構成の“種明かし”になる。上式(1.4')の表現は[通常の数(1×1の行列)に作用するので]、1次元である。一般にある表現が作用する空間の次元を、その表現の次元という。

具体的な表現(1.4')に依らずに、群表2で定義される群について言えることを挙げる。まず、表2の群は位数3の巡回群 $Z_3$ である。

**note** 巡回群とは、すべての元が1つの元のべき乗で作られている群である [2, p.12]。ここでは例えば、 $a = a^1, b = a^2, e = a^3$  である。(同様に全ての元を  $b$  のべきで表すこともできる。しかし単位元  $e$  は何乗しても  $e$  にしかならない。) 群表2の1行目(または1列目)に並んだ要素を巡回置換すると、2,3行目(または2,3列目)の要素が得られることが見て取れる。

次に  $Z_3$  は **Abel** (アーベル) 群、すなわち掛け算則が可換な群である ( $g_1g_2 = g_2g_1$ )。[このことは群表2が対角線に関して対称であることから見て取れる。]

最後に  $Z_3$  に限らず任意の有限群に対して、群表の各行と各列には表2のように、群の元が1回ずつ現れる [本稿次節で補足]。

## 1.2 節について

■ 「掛け算表の各行と各列が、群の各元をちょうど一回ずつ含んでいる……」(式(1.2)下3行)について 群  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_r\}$  の群表における任意の元  $g \in G$  の列に並んでいる要素

$$\{g_1g, g_2g, \dots, g_rg\} \quad (1)$$

には、すべての元  $g_k$  が1度だけ現れる。このことは組みかえ定理と呼ばれ、次のように証明できる [2, pp.15–16]。まず上式(1)の中に、任意に選んだ  $G$  の元  $g_k$  に一致する要素  $g_i g$  が(したがって  $g_i \in G$  が)存在するかを調べる。 $g_i g = g_k$  とおき、群の公理より逆元  $g^{-1} \in G$  が存在することに注意して、これを両辺に右から掛けると、 $g_i = g_k g^{-1}$  を得る。右辺  $g_k g^{-1}$  は  $G$  の元となっていることが見て取れるので、この  $g_i$  は群表の端の列に存在する(つまり群表における  $g_i$  の行に  $g_k$  が存在する)。次に  $g_i$  が一意であることを示す。もし  $g_i' g = g_k$  となる今一つの元  $g_i' (\neq g_i)$  があったとすると、再び両辺に右から  $g^{-1}$  を掛けて  $g_i' = g_k g^{-1}$  とできる。ところがこれは先ほど求めた  $g_i = g_k g^{-1}$  に等しいから、 $g_i' \neq g_i$  と仮定したことに矛盾する。よって式(1)の中には、 $g_k$  に一致する元は1つしかない。なお、群表の各行に並んでいる要素が全ての元を1個ずつ含むことも、同様に示される。

## 1.3 正則表現

一般に群の表現  $\hat{D}(g)$  が作用しているベクトル空間の基底  $\{|e_i\rangle\}$  を用いて、線形演算子  $\hat{D}(g)$  に関係付けられる行列

$$D(g) = ([D(g)]_{ij}) = \left( \langle e_i | \hat{D}(g) | e_j \rangle \right) \quad (1.8)$$

を定義できる．[このように本稿では 1.3 節において，ケット・ベクトルに作用する演算子  $\hat{D}(g)$  にハットを付けて，行列  $D(g)$  との区別を明確にしておく\*1.]

ここで任意の有限群に対して，その表現を構成する 1 つの一般的な手続きを与える．まず表現  $\hat{D}(g)$  の作用するベクトル空間の基底  $\{|e_i\rangle\}$  として，群の元  $\{g_i\}$  自身でラベルされる正規直交基底  $\{|g_i\rangle\}$  を採る．このとき

$$\hat{D}(g_1)|g_2\rangle = |g_1g_2\rangle \quad (1.6)$$

の関係を通じて，正則表現  $\hat{D}(g)$  ないし

$$D(g) = (\langle e_i|\hat{D}(g)|e_j\rangle) = (\langle e_i|ge_j\rangle)$$

を定義できる．実際，この行列  $D(g)$  は群の表現になっている [本稿次節で確認]．また正則表現の次元は群の位数に一致する [行列  $D(g)$  の次数は基底  $\{|e_i\rangle\} = \{|g_i\rangle\}$  の個数で決まる]．

1.2 節の表 2 で定義した巡回群  $Z_3$  に対して，基底ケット

$$|e_1\rangle \equiv |e\rangle, \quad |e_2\rangle \equiv |a\rangle, \quad |e_3\rangle \equiv |b\rangle \quad (1.7)$$

を用いて具体的に正則表現を構成すると，

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

となる [本稿次節で確認]．

### 1.3 節について

■「読者はこれが表現になっていることを確かめられたい」(教科書，式 (1.6) の 1 行下) について 式 (1.6) で定義される正則表現の行列  $D(g) = (\langle e_i|ge_j\rangle)$  が<sup>3</sup>，実際に群の表現になっていることを確かめる．1.1 節における表現の 2 つの条件 1.B が満たされていることを示せば充分である．

まず

$$D(e) = (\langle e_i|ee_j\rangle) = (\langle e_i|e_j\rangle) = (\delta_{ij})$$

は単位行列だから，条件 1.B.1 が成立している．

次に条件 1.B.2：

$$\hat{D}(g_1g_2) = \hat{D}(g_1)\hat{D}(g_2)$$

を考える．これは教科書の式 (1.9) のように行列要素をとると，両辺がそれぞれ

$$\begin{aligned} \langle e_i|\hat{D}(g_1g_2)|e_j\rangle &= [\hat{D}(g_1g_2)]_{ij}, \\ \langle e_i|\hat{D}(g_1)\hat{D}(g_2)|e_j\rangle &= \sum_k \langle e_i|\hat{D}(g_1)|e_k\rangle \langle e_k|\hat{D}(g_2)|e_j\rangle = \sum_k [D(g_1)]_{ik}[D(g_2)]_{kj} \quad (\because \{|e_k\rangle\} \text{ は完全系}) \end{aligned}$$

となるので，行列の関係

$$D(g_1g_2) = D(g_1)D(g_2)$$

\*1 とは言え，「演算子を表すのと行列を表すのに別の記号を使うこともできるが，文脈からどちらであるのかを判断することは常に容易である」(p.24 下 2 行)．本稿でも今後，演算子とその行列表現に同じ記号  $D(g)$  を充てることを許容する．

と等価である。ところが正則表現の行列  $D(g) = (\langle e_i | g e_j \rangle)$  に対して、この両辺の  $(i, j)$  成分はそれぞれ

$$[D(g_1 g_2)]_{ij} = \langle e_i | g_1 g_2 e_j \rangle = \delta_{e_i, g_1 g_2 e_j},$$

$$[D(g_1)D(g_2)]_{ij} = \sum_k \langle e_i | g_1 e_k \rangle \langle e_k | g_2 e_j \rangle = \sum_k \delta_{e_k, g_1^{-1} e_i} \delta_{e_k, g_2 e_j} = \delta_{g_1^{-1} e_i, g_2 e_j}$$

と表されるので、互いに一致している。

よって示された。

■  $Z_3$  の正則表現 (1.5) について  $D(e) = 1$  (単位行列) となることは、正則表現がその名の通り表現となることを示す際に、一般的に確認済みである。そこで例えば行列  $D(a)$  の各要素  $[D(a)]_{ij} = \langle e_i | a e_j \rangle$  を具体的に調べると、 $a^2 = b, b^2 = a, ab = ba = e$  に注意して

$$\begin{aligned} [D(a)]_{11} &= \langle e | a \rangle = 0, & [D(a)]_{12} &= \langle e | b \rangle = 0, & [D(a)]_{13} &= \langle e | e \rangle = 1, \\ [D(a)]_{21} &= \langle a | a \rangle = 1, & [D(a)]_{22} &= \langle a | b \rangle = 0, & [D(a)]_{23} &= \langle a | e \rangle = 0, \\ [D(a)]_{31} &= \langle b | a \rangle = 0, & [D(a)]_{32} &= \langle b | b \rangle = 1, & [D(a)]_{33} &= \langle b | e \rangle = 0 \end{aligned}$$

を得る。式 (1.5) の行列  $D(b)$  も同様に得られる。

なお正則表現が条件 1.B.2 :  $D(g_1 g_2) = D(g_1)D(g_2)$  を満たすことも、一般的に確認済みである。実際に式 (1.5) の行列に対して  $D(a)^2 = D(b)$ , etc. が成り立つことが、改めて直接確かめられる。

## 1.4 既約表現

群の表現は線形演算子なので、線形変換によって基底を採り直して、状態と群の表現をより便利な形に表すことができる。実際このとき群の表現は相似変換 (similarity transformation)

$$D(g) \rightarrow D'(g) = S^{-1}D(g)S \quad (1.10)$$

を受ける。すると相似変換の形より、新しい演算子  $D'(g)$  もまたもとの表現  $D(g)$  と同じ掛け算則を満たすので、群の表現となる。 $D'$  と  $D$  とは同値な表現と呼ばれる。

全ての  $D(g)$  がユニタリ演算子 (行列) のとき ( $D(g)^\dagger = D(g)^{-1}$ )、表現はユニタリという。具体例として挙げた表現 (1.4'), (1.5) はいずれもユニタリであることが見て取れる。一般に有限群の表現は全てユニタリ表現と同値である (証明は後述 [1.9 節])。

部分空間の任意のベクトルにどの  $D(g)$  が作用しても、得られるベクトルが部分空間に入っているとき、その部分空間を不変部分空間 (invariant subspace) という。不変部分空間を持つ表現は可約 (reducible) であるという。部分空間への射影演算子  $P$  を用いて、この条件は

$$PD(g)P = D(g)P \quad \forall g \in G \quad (1.11)$$

と書ける [本稿次節で補足]。他方、表現は可約でないとき、既約という。例えば  $Z_3$  の正則表現 (1.5) は、射影演算子

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

[係数  $1/3$  は  $P^2 = P$  から要請される] で射影される部分空間を持つ。実際、式 (1.5) の全ての  $D(g)$  に対して、[直接の計算で確かめられるように]  $D(g)P = P$  だから [不変部分空間を持つ条件 (1.11) が満たされる]。

行列要素がブロック対角な形

$$\begin{pmatrix} D_1(g) & 0 & \cdots \\ 0 & D_2(g) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

(ただし各正方行列  $D_j(g)$  は既約) を持つ表現と同値な表現は、完全可約という。またブロック対角な表現 (1.13) は部分表現  $D_j(g)$  の直和 (direct sum) といい、

$$D_1 \oplus D_2 \oplus \cdots \quad (1.14)$$

で表す。[以上の定義の動機付けを本稿次節で補足する。] すると完全可約な表現とは既約な表現の直和に分解できるもの、と言い換えることもできる。

のちに [1.9 節で] 我々は有限群の任意の表現が完全可約であることを示す。実際、例えば  $Z_3$  の正則表現 (1.5) は、行列

$$S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega \\ 1 & \omega & \omega^{-1} \end{pmatrix}, \quad \omega \equiv e^{2\pi i/3} \quad (1.15-16)$$

を用いた相似変換 (1.10) により、ブロック対角な形

$$D'(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D'(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}, \quad D'(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

にできる [本稿次節で確認]。

## 1.4 節について

■表現が可約である (すなわち不変部分空間を持つ) 条件 (1.11) について 任意のベクトル  $\mathbf{v} = |\cdots\rangle$  を部分空間に射影したベクトル  $P\mathbf{v}$  に  $D(g)$  を作用させて得られるベクトル  $D(g)P\mathbf{v}$  は、可約の定義より既に部分空間に属しているので、改めて射影演算子  $P$  を掛けても変わらない：

$$PD(g)P\mathbf{v} = D(g)P\mathbf{v}.$$

ここで  $\mathbf{v}$  は任意なので、演算子の関係として式 (1.11) が成り立つ。

■「……これは  $D(g) = 1$  の自明な表現 (trivial representation) となっている」(p.5 下から 3,2 行) について 任意のベクトル  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  に射影演算子 (1.12) を掛けると

$$\mathbf{r}' = P\mathbf{r} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix}$$

となるので、部分空間は  $x = y = z$  で表される直線  $l$  である。そこでパラメータ  $t$  を導入して、 $l$  上に制限された任意のベクトルを改めて  $\mathbf{r}' = (t \ t \ t)^T$  と書くと ( $T$  は転置)、式 (1.5) のいずれの  $D(g)$  に対しても

$$D(g)\mathbf{r}' = (t \ t \ t)^T = \mathbf{r}' \quad (g = e, a, b)$$

となるので、実際に  $D(g)\mathbf{r}'$  は不変部分空間  $l$  から出ない。しかも  $\mathbf{r}'$  は不変だから、 $D(g)$  の作用は単位行列のそれと変わらない。

なお全ての  $g_i$  に単位行列  $D(g_i) = 1$  を充てても、表現の条件 (1.1 節の 1.B) は満たされる。このときの  $D(g_i)$  を恒等表現と呼ぶ。他方、各  $g_i$  が相異なる行列  $D(g_i)$  で表される場合を忠実な表現という。もちろん、恒等表現と忠実な表現のいずれでもない表現もあり得る [2, p.65].

■ブロック対角な行列 (1.13) と同値な表現を完全可約と呼ぶこと 表現がブロック対角な行列 (1.13) となる基底で、対応して任意の状態もブロックに分けて  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots)^T$  と書くと、

$$D(g)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 & \cdots \\ 0 & D_2(g) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1(g)\mathbf{v}_1 \\ D_2(g)\mathbf{v}_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

となる。よってブロック対角な  $D(g)$  は部分空間のベクトル、

$$(\mathbf{v}_1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots)^T, \quad (0 \quad \mathbf{v}_2 \quad 0 \quad \cdots)^T, \quad \text{etc.}$$

に作用して、同じ部分空間のベクトル

$$(D_1(g)\mathbf{v}_1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots)^T, \quad (0 \quad D_2(g)\mathbf{v}_2 \quad 0 \quad \cdots)^T, \quad \text{etc.}$$

を作ることになる。これは完全可約な表現  $D(g)$  が相似変換により、各々の部分空間に個別に作用する既約な  $D_i(g)$  に直和分解できることを意味する。そこで  $D_i(g)$  を「部分表現」(p.6, 1.5) と呼ぶのはもっともである。

ただし不変部分空間からはみ出すベクトルが常に、別の不変部分空間に属しているとは限らないため、可約な表現が完全可約であるとは限らないことに注意する。我々は 1.8 節でそのような例を見る。

なお各ブロック  $D_i(g)$  が既約であるとき、適当な相似変換によって対角部分のブロックをさらに細かいブロックに分割することはできない。実際もしできたとすると、上の議論より  $D_i(g)$  が作用するベクトル  $\mathbf{v}_i$  の空間は、その中に不変部分空間を持つことになり、既約の定義に反する。

このように「完全可約」「既約」という言葉使いは理に合っている。

■式 (1.17) の確認  $\omega^{\pm 2} = \omega^{\mp 1}$  に注意して行列 (1.15) の逆行列を求めると、

$$|S| = \frac{1}{9}(\omega - \omega^{-1}), \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\omega^{-1}-1}{\omega-\omega^{-1}} & \frac{1-\omega}{\omega-\omega^{-1}} \\ 1 & \frac{1-\omega}{\omega-\omega^{-1}} & \frac{\omega^{-1}-1}{\omega-\omega^{-1}} \end{pmatrix}$$

となる。検算として複素平面上の単位円を 3 等分する位置ベクトルの和が  $1 + \omega + \omega^{-1} = 0$  となることに注意すると、この  $S^{-1}$  が実際に  $S^{-1}S = 1$  を満たすことを確かめられる。これは表現の満たさねばならない性質  $D'(e) = S^{-1}D(e)S = 1$  (式 (1.17) 第 1 式) の確認にもなっている。

同様に  $D'(a)$  の表式 (式 (1.17) 第 2 式) も直接、確かめられる。確認作業の計算過程のメモとして、最低限の結果を書き残しておく、

$$S^{-1}D(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{\omega^{-1}-1}{\omega-\omega^{-1}} & \frac{1-\omega}{\omega-\omega^{-1}} & 1 \\ \frac{1-\omega}{\omega-\omega^{-1}} & \frac{\omega^{-1}-1}{\omega-\omega^{-1}} & 1 \end{pmatrix}.$$

最後に相似変換は表現の性質

$$D'(b) = S^{-1}D(b)S = S^{-1}D(a)^2S = (S^{-1}D(a)S)(S^{-1}D(a)S) = D'(a)^2$$

を保証することに注意して、式 (1.17) の  $D'(a)$  を 2 乗すると第 3 式の  $D'(b)$  を得る。

表3 パリティ変換の成す群  $Z_2$  の群表

	$e$	$p$
$e$	$e$	$p$
$p$	$p$	$e$

## 1.5 変換群

物理の文脈では積  $g_1 g_2$  は、まず変換  $g_2$  を行い、次に変換  $g_1$  を行うことを意味する。これは数学的な要請ではない。

note さて、量子力学における対称性は、ハミルトニアン  $H$  を不変に留めるユニタリー演算子  $D$  で表される：

$$D^{-1} H D = H.$$

これは  $[D, H] = 0$  を意味するので、Heisenberg の運動方程式より、 $D$  は運動の定数となる (対称性と保存則) [3, pp.342-343]。  $D$  のユニタリー性は確率の保存を保証する。

また  $H$  と可換な一連の演算子  $A, B, \dots$  は群を構成することが、次のように説明できる ( $A, B, \dots$  どうしが交換することは仮定しない) [2, pp.90-91]。 まず恒等演算子は  $H$  と可換である。次に  $A, B$  を  $H$  と可換な演算子とすると、

$$[A, H] = [B, H] = 0 \quad \Rightarrow \quad [AB, H] = 0$$

となるので、積  $AB$  も  $H$  と可換である。さらに  $AH = HA$  のとき、両辺に左右から  $A^{-1}$  を掛けると  $HA^{-1} = A^{-1}H$  となるので、 $A^{-1}$  も  $H$  と可換である。以上より群の公理が満たされる。

量子力学系に対する対称変換  $g_i$  は、繰り返し行っても対称変換となるので、群を成す。変換を表すユニタリー演算子  $D(g)$  により、物理系は等価な新しい量子状態に移される。よって量子状態の属する Hilbert 空間は、変換群の表現にしたがって変換する、とすることができる。また  $[D, H] = 0$  により、変換された状態  $D|n\rangle$  はもとの状態  $|n\rangle$  と同じエネルギー固有値  $E_n$  を持つ：

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle \quad \rightarrow \quad H(D|n\rangle) = D(H|n\rangle) = D(E_n|n\rangle) = E_n(D|n\rangle).$$

のちに詳しく見るように [1.14 節]、このことは我々がいつもエネルギー固有状態を群の既約表現として [によって] 変換するように選べることを意味している。

## 1.6 応用：量子力学におけるパリティ

パリティとは、鏡映の演算  $p$  である。2 回鏡映を行うと最初の状態に戻るので  $p^2 = e$ 。よってパリティ変換は群表 3 を持つ群  $Z_2$  [位数 2 の循環群 (1.2 節参照)] を成す。

この群には、既約表現が

$$\begin{cases} D_{\text{even}}(e) = 1, & D_{\text{even}}(p) = 1, & (\text{自明な [恒等] 表現}) \\ D_{\text{odd}}(e) = 1, & D_{\text{odd}}(p) = -1 \end{cases} \quad (2)$$

の 2 つしかない。[本稿次節で補足する。  $p$  の既約表現の各々を、それが作用する部分空間に属する状態  $\psi_{\text{even}}, \psi_{\text{odd}}$  の固有値  $\pm 1$  を識別する添字でラベルしておいた (固有方程式も本稿次節).] パリティ不変な系の  $D(p)$  は  $H$  と可換なので [1.5 節], パリティ固有状態  $\psi_{\text{even}}, \psi_{\text{odd}}$  はエネルギー固有状態でもある。これは 1.5 節末尾の一般論に関する、非相対論的量子力学で馴染みのある具体例である [本稿次節で補足].

## 1.6 節について

■パリティ変換群の既約表現 (2) について パリティ変換の群に対して 1.3 節の正則表現を作ると、

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(p) = (\langle e_i | p e_j \rangle) = \begin{pmatrix} \langle e | p \rangle & \langle e | e \rangle \\ \langle p | p \rangle & \langle p | e \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。これらの対称行列は、直交行列

$$S = S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

を用いた相似変換 (1.10) により、

$$D'(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} D_{\text{even}}(e) & 0 \\ 0 & D_{\text{odd}}(e) \end{pmatrix}, \quad D'(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} D_{\text{even}}(p) & 0 \\ 0 & D_{\text{odd}}(p) \end{pmatrix} \quad (3)$$

と対角化される。各ブロック  $D_{\text{even}}(g), D_{\text{odd}}(g)$  ( $g = e, p$ ) は 1 次元の表現なので、既約であることが明らかである。

■「…… $D(p)$  が 1 あるいは  $-1$  と表される既約表現のように振る舞う状態に分解できる」(p.7 下から 5~3 行目) について 表現行列がブロック対角な形 (3) となる基底で状態ベクトルを  $(\psi_{\text{even}} \ \psi_{\text{odd}})^T$  と書くと、

$$D'(p) \begin{pmatrix} \psi_{\text{even}} \\ \psi_{\text{odd}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{\text{even}}(p)\psi_{\text{even}} \\ D_{\text{odd}}(p)\psi_{\text{odd}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\psi_{\text{even}} \\ -\psi_{\text{odd}} \end{pmatrix}$$

となる。これは既約表現  $D_{\text{even}}(p), D_{\text{odd}}(p)$  の各々が作用する部分空間の状態  $\psi_{\text{even}}, \psi_{\text{odd}}$  がそれぞれ、 $D_{\text{even}}(p), D_{\text{odd}}(p)$  の固有値  $+1, -1$  の固有状態であることを意味する。

■「このことは一次元の非相対論的量子力学からおなじみであろう」(p.8, 1.2-3) について

$$\hat{P}\psi(\mathbf{r}) = \psi(-\mathbf{r})$$

のように、波動関数  $\psi(\mathbf{r})$  に作用して座標の符号を変える《反転演算子》 $\hat{P}$  を導入する。このとき固有方程式  $\hat{P}\psi(\mathbf{r}) = P\psi(\mathbf{r})$  における固有値は、

$$\psi(\mathbf{r}) = \hat{P}^2\psi(\mathbf{r}) = P^2\psi(\mathbf{r}), \quad \therefore P = \pm 1$$

と定まる。 $\hat{P}$  の固有値  $+1$  の波動関数を偶、固有値  $-1$  の波動関数を奇という。空間の対称性が  $\hat{P}$  に関するハミルトニアン  $\hat{H}$  の対称性に反映されている場合 ( $[\hat{P}, \hat{H}] = 0$ ),  $\hat{P}$  とエネルギーの同時固有状態が可能であり、状態の偶奇性は時間とともに保存される [4, p.97].

表 4 置換群  $S_3$  の群表

	$e$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$e$	$e$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$a_1$	$a_1$	$a_2$	$e$	$a_5$	$a_3$	$a_4$
$a_2$	$a_2$	$e$	$a_1$	$a_4$	$a_5$	$a_3$
$a_3$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$e$	$a_1$	$a_2$
$a_4$	$a_4$	$a_5$	$a_3$	$a_2$	$e$	$a_1$
$a_5$	$a_5$	$a_3$	$a_4$	$a_1$	$a_2$	$e$

## 1.7 例： $S_3$

3つの対象上の置換群 (対称群)  $S_3$  は、単位元  $e$  と次の元から成る。

番号が3つとも置き換わるもの： $a_1 = (1, 2, 3)$ ,  $a_2 = (3, 2, 1)$ , (巡回置換)

番号が2つだけ置き換わるもの： $a_3 = (1, 2)$ ,  $a_4 = (2, 3)$ ,  $a_5 = (3, 1)$ . (互換) (1.19)

$g_1 g_2$  を変換  $g_2$  に次いで  $g_1$  を行うことと約束するとき、群表は表4のようになる。

ここで注意事項を2点だけ挙げる。

- $g_1 g_2$  を変換  $g_1$  に次いで  $g_2$  を行うことと約束すれば、また異なる掛け算表が得られる。

note 新しい規則での  $g_i g_j$  はもとの規則での  $g_j g_i$  と同じ結果を与えるから、

群表は“転置”されるだけである。

- 場所1,2,3にある対象物を置換するのか、番号を置換される対象物の名前として扱うのかに応じて、異なる掛け算表が得られる。物理的な観点から、我々は前者の解釈を採用する。

note 図1のように対象物 A,B,C の置き場所 1,2,3 を順方向に巡回置換することは、A,B,C に割り当てた番号 1,2,3 を逆向きに巡回置換することと等価である。よって2つの解釈では巡回置換  $a_1, a_2$  の意味が入れ替わる。2つの番号の入れ替え (互換)  $a_3, a_4, a_5$  は、いずれの解釈でも同じことを表す。

[群表4が対角線に関して非対称であることから見て取れるように、]  $S_3$  は非 **Abel** 群である、すなわち群の掛け算則が非可換である。非 **Abel** 群の表現 (の少なくともあるもの) は数ではなく行列でなければならない。[例外として自明な表現が挙げられることを念頭に、「少なくともあるもの」と断ったものと推察される。このことは逆(裏)も正しい(1.14節の定理1.7).] 行列だけが非 **Abel** 的掛け算を再現できる。実際  $S_3$  のユニタリーな既約表現を天なりに与えると、2次元の表現

$$\begin{aligned}
 D(e) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & D(a_1) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, & D(a_2) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\
 D(a_3) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & D(a_4) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, & D(a_5) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

となる [本稿次節で補足].

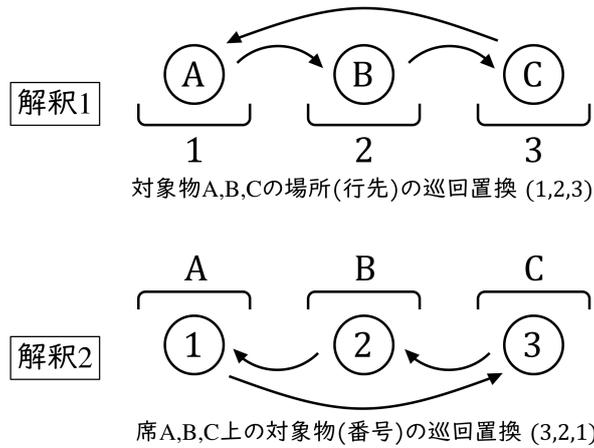


図1 我々は解釈1を採用する

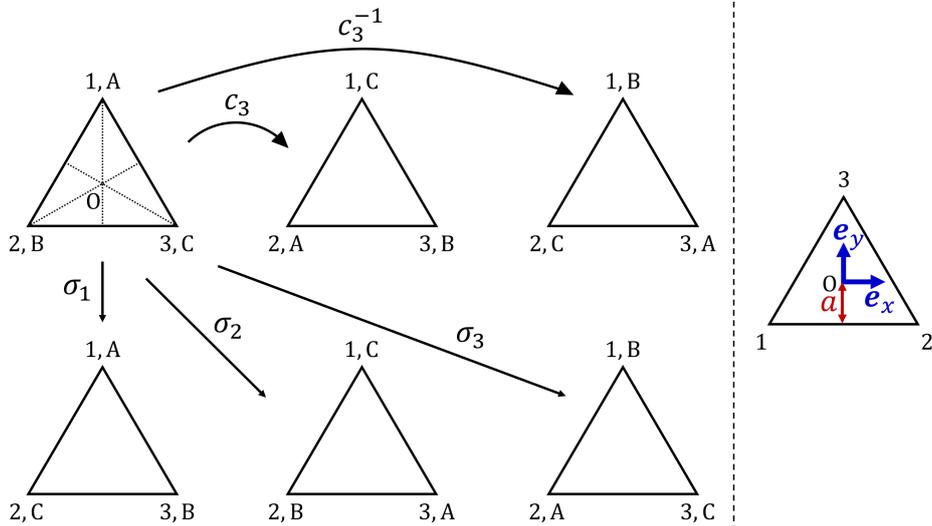


図2 正三角形の合同変換群  $C_{3v}$

### 1.7 節について

■  $S_3$  の既約なユニタリー表現 (1.21) について 式 (1.21) の構成の“種明かし”をしつつ、それが少なくとも  $S_3$  の表現となっていることを確かめよう。

まず正三角形の合同変換群  $C_{3v}$  を導入するところから始める [2, pp.13–14].  $C_{3v}$  は正三角形をそれ自身に移す変換の集合であり、図2のように恒等変換と、三角形を中心  $O$  の周りに角度  $\pm 2\pi/3$  だけ回転させる操作  $c_3, c_3^{-1}$ 、および頂点  $i$  と  $O$  を結ぶ軸に関して正三角形を反転させる鏡映変換  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) から成る。ただし本文で約束したように、ここでも頂点の位置 1, 2, 3 は平面に固定された番地と見なし、正三角形の頂点 A, B, C が位置 1, 2, 3 の上を動く場合を考える。

このとき合同変換は3つの頂点の位置の置換と、

$$e \leftrightarrow e, \quad c_3 \leftrightarrow a_1, \quad c_3^{-1} \leftrightarrow a_2, \quad \sigma_3 \leftrightarrow a_3, \quad \sigma_1 \leftrightarrow a_4, \quad \sigma_2 \leftrightarrow a_5$$

のように (1 対 1 に) 対応する. よって  $C_{3v}$  は  $S_3$  と同じ形の (すなわち元の名前を適当に付け替えると互いに一致する) 群表を持つ. (2 つの群が同型であるとは, 平たく言えばこういうことである [2, p.16,p.29]. 1.10 節も参照.) それ故, 共通の群の表現を用いることができる.

そこで行列 (1.21) を  $C_{3v}$  の表現として理解することを試みよう.  $D(a_1), D(a_2)$  はそれぞれ回転角  $\pm 2\pi/3$  の回転行列に他ならないから,  $c_3, c_3^{-1}$  の表現行列として適正である. 次に文献 [2, pp.65–66] に着想を得て, 図 2 のように  $O$  を原点とし, 頂点 1 から頂点 2 に向かう向きの単位ベクトル  $e_x$  と,  $O$  から頂点 3 に向かう向きの単位ベクトル  $e_y$  を (直交) 基底にとる. このとき例えば図 2 に示した長さ  $a$  を用いて, 平面上に固定された点 1,2,3 の位置ベクトルは

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} a, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} a, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} a$$

と成分表示される. すると直接の成分計算により

$$\begin{aligned} D(a_3)\mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_2, & D(a_3)\mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_1, & D(a_3)\mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}_3, \\ D(a_4)\mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_1, & D(a_4)\mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_3, & D(a_4)\mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}_2, \\ D(a_5)\mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_3, & D(a_5)\mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_2, & D(a_5)\mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}_1 \end{aligned}$$

が確かめられるので,  $D(a_3), D(a_4), D(a_5)$  は鏡映変換  $\sigma_3, \sigma_1, \sigma_2$  を引き起こす.

## 1.8 例：整数の足し算

整数は足し算

$$xy = x + y \tag{1.22}$$

を演算積として無限群を成す [本稿次節で補足]. これを整数の加法群と呼ぶ.

1 つの表現として, 行列

$$D(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

を採ることができる [本稿次節で補足]. この表現は可約であるが, 完全可約ではない [本稿次節で補足]. また  $D(x)$  はユニタリー表現と同値でもない [本稿次節で補足].

### 1.8 節について

■加 (法) 群について 整数, 実数, 複素数の集合は加 (法) 群を成す. 実際, 例えば実数の集合について

1. 2 つの実数の和は実数である.
2. 3 つの実数  $a, b, c$  は結合則  $a + (b + c) = (a + b) + c$  を満たす.
3. 単位元として 0 (ゼロ) を用いれば,  $a + 0 = 0 + a = a$ .
4.  $a$  の逆元として  $(-a)$  を用いれば,  $a + (-a) = (-a) + a = 0$ .

こうして群の公理は加法で満たすことができる [2, p.13].

■加法群の表現 (1.23) について 加法群の単位元 0 に対して  $D(0) = I$  (単位行列) である. また  $D(x)D(y) = D(x + y)$  が直接確かめられるので, 行列 (1.23) は 1.1 節における表現の条件 1.B を満たしている.

■式 (1.23) の表現が可約であって、完全可約でないことについて 教科書の説明を補足しつつ確認しよう。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q \equiv I - P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

はそれぞれ

$$P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad P^2 = P, \quad Q^2 = Q$$

を満たす射影演算子である。直接確かめられるように、この  $P$  に対して

$$D(x)P = P \quad (1.24)$$

が成り立つので、可約の条件 (1.11):  $PD(x)P = D(x)P$  が満たされる。すなわち  $P$  で射影される空間は  $D(x)$  の不変部分空間である。他方、 $x \neq 0$  に対しては

$$D(x)Q = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq Q \quad (1.26)$$

なので、 $Q$  で射影される空間は  $D(x)$  の不変部分空間ではない。これは  $D(x)$  をブロック対角な形にできることに反するから、 $D(x)$  は完全可約ではない。教科書 1.9 節の p.11, 1.14-17 も参照。

■式 (1.23) の表現がユニタリー表現と同値でないことについて 1.9 節における定理 1.2 の証明は実質、「ユニタリー表現と同値な表現は完全可約であること」の証明となっている。この対偶をとれば、完全可約でない表現はユニタリー表現と同値にはなり得ないことになる。ここから式 (1.23) の  $D(x)$  はユニタリー表現と同値でないことが理解される。

note 関連して、 $D^{-1}(x) = D(-x) \neq D^\dagger(x)$  なので、 $D(x)$  自身もユニタリーではない。

## 1.9 有用な定理

定理 1.1 有限群の表現は全てユニタリー表現と同値である。

証明 有限群  $G$  の表現  $D(g)$  に対して演算子

$$S = \sum_{g \in G} D(g)^\dagger D(g) \quad (1.27)$$

を作ると [ $D(g)$  や  $S$  は行列表示と見なす]、これは Hermite なので、適当なユニタリー行列  $U$  を用いて

$$USU^{-1} = d \equiv \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots \\ 0 & d_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.28-29)$$

と対角化できる (各  $d_j$  は  $S$  の固有値)。しかも式 (1.27) の  $S$  は半正定値なので [本稿次節で補足]、 $d_j \geq 0 \forall j$  である。

実のところ、群の性質により全ての  $d_j$  が正となる ( $d_j \geq 0$  の等号を外せる)。このことを背理的に示そう。今、1つの  $d_j$  がゼロだと仮定すると、 $S\lambda = 0$  となるベクトル  $\lambda$  [ $\neq 0$ ] があることになる。[実際、第  $j$  成分

だけがゼロでないベクトル  $\rho$  に対して  $d\rho = 0$  なので,  $0 = (U^{-1}dU)(U^{-1}\rho) = S\lambda$  なる  $\lambda \equiv U^{-1}\rho \neq 0$  を構成できる.] すると

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^\dagger S \lambda = \sum_{g \in G} \lambda_i^* (D_{ki}(g))^* D_{kj}(g) \lambda_j \\ &= \sum_{g \in G} \|D(g)\lambda\|^2 \quad [ \|v\|^2 \equiv v_i^* v_i \text{ と表記} ] \end{aligned} \quad (1.30)$$

であることになる. よって全ての  $g$  に対して  $D(g)\lambda = 0$  でなければならない. ところが  $D(e) = 1$  だから, これは起こり得ない. よって示された.

全ての  $d_j > 0$  を踏まえて,  $S$  の “平方根”

$$X = S^{1/2} \equiv U^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{d_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} U \quad (1.31)$$

を作ると, これは Hermite であり, 逆行列を持つ. [対角行列  $\text{diag}(\sqrt{d_1}, \dots)$  の行列式は  $\prod_j \sqrt{d_j}$ , 逆行列は  $\text{diag}(1/\sqrt{d_1}, \dots)$ . 定義式 (1.31) より  $S$  の “平方根”  $X$  は  $X^2 = S$  を満たす.]

そこで  $D(g)$  と同値な表現

$$D'(g) = XD(g)X^{-1} \quad (1.32)$$

を定義する. もし, これがユニタリー表現であることを証明できれば, 与えられた定理が示される. 実際,

$$D'(g)^\dagger D'(g) = (X^{-1}D(g)^\dagger X)(XD(g)X^{-1}) = X^{-1}D(g)^\dagger SD(g)X^{-1} \quad (1.33)$$

において

$$\begin{aligned} D'(g)^\dagger SD'(g) &= D(g)^\dagger \left( \sum_{h \in G} D(h)^\dagger D(h) \right) D(g) = \sum_{h \in G} D(hg)^\dagger D(hg) \\ &= \sum_{h \in G} D(h)^\dagger D(h) = S = X^2 \end{aligned} \quad (1.34)$$

である (第 3 の等号は  $h$  が群  $G$  の全ての元を走るとき,  $hg$  も全ての元を走ることによる). これを式 (1.33) に代入すると

$$D'(g)^\dagger D'(g) = 1$$

となるので,  $D'(g)$  はユニタリー表現である. 証明終.

前節では整数の加法群の表現 (1.23) が可約, すなわち不変部分空間への射影演算子  $P$  を持つものの,  $(1-P)$  は不変部分空間への射影演算子となっておらず, 表現 (1.23) は完全可約ではないことを見た. これは加法群が無限群であることと関係している. 対照的に, 次の定理が成立する.

**定理 1.2** 有限群のあらゆる表現は完全可約である.

**証明** 定理 1.1 より, 「任意のユニタリー表現  $D(g)$  は完全可約である」ことを示せば充分である. さて,  $D(g)$  は既約か可約かのいずれかである. 既約ならば, それはすでにブロック対角な形なので証明は終わっている. 可約ならば, 式 (1.11):

$$PD(g)P = D(g)P \quad \forall g \in G$$

を満たす,  $D(g)$  の不変部分空間への射影演算子  $P$  が存在する. 両辺の Hermite 共役をとると

$$PD(g)^\dagger P = PD(g)^\dagger \quad \forall g \in G$$

となる [射影演算子  $P$  は Hermite である [5, p.176]]. ところが  $D(g)$  はユニタリーなので, 上式に

$$D(g)^\dagger = D(g)^{-1} = D(g^{-1})$$

を代入して良い. その上で  $g$  が  $G$  全体を走るとき,  $g^{-1}$  も全体を走ること注意到,

$$PD(g)P = PD(g) \quad \text{i.e.} \quad (1-P)D(g)(1-P) = D(g)(1-P) \quad \forall g \in G$$

が従う. 再び可約の条件 (1.11) より, これは  $(1-P)$  が不変部分空間への射影演算子となっていることを意味する. この事実を繰り返し用いると, 表現を完全に既約な所にまで帰着させられる [本稿次節で補足]. 証明終.

## 1.9 節について

■式 (1.27) の  $S$  が半正定値であること (教科書 p.10) について 一般に  $G = A^\dagger A$  という形をとる行列 (グラム行列という) に対し, 任意の複素ベクトル  $x$  に関する 2 次形式は

$$x_i^* G_{ij} x_j = x_i^* (A_{ki})^* A_{kj} x_j = y_k^* y_k \geq 0 \quad (y_k \equiv A_{ki} x_i)$$

となる. この不等式は  $G$  が半正定値であることの定義に他ならない.

■定理 1.2 の証明末尾「この帰納法を続ける……最終的には表現を完全に既約な所にまで帰着させられる」(p.12, 1.2.3) について 我々が示したことは, 与えられたベクトル空間  $V$  が,  $P$  と  $(1-P)$  をそれぞれ射影演算子に持つ不変部分空間  $V_1, V_2$  の直和

$$V = V_1 + V_2$$

へと分解できるということである [5, pp.101–104, p.176]. 次に  $V_i$  ( $i = 1, 2$ ) に作用する部分表現  $D_i(g)$  が, さらに  $V_i$  の内部に不変部分空間を持つとき, 同じ論法で  $V_i = V_1^{(i)} + V_2^{(i)}$  のように表される. この作業を繰り返せば, もとのベクトル空間  $V$  は内部に不変部分空間を含まない不変部分空間  $W_i$  の直和

$$V = W_1 + W_2 + \dots$$

で表すことができる. このとき各  $W_i$  に作用する部分表現  $D_i(g)$  は既約であり, ブロック対角な行列 (1.13) を成す.

## 1.10 部分群

群  $H$  に属する全ての元が群  $G$  の元であるとき,  $H$  は  $G$  の部分群と呼ばれる.

- $\{e\}$  および  $G$  自身は,  $G$  の自明な部分群である (それ以外の部分群を非自明な部分群と呼ぶ).
- 1.7 節の置換群  $S_3$  は非自明な部分群として,  $Z_3$  部分群  $\{e, a_1, a_2\}$  を含む.  
note 巡回置換  $a_1, a_2$  が角度  $\pm 2\pi/3$  の回転に対応付けられることを踏まえれば, 群  $\{e, a_1, a_2\}$  が 1.2 節の巡回群  $Z_3$  に同型であることは容易に理解できる (1.7 節のノートを参照).

■右剰余類 次に群  $G$  における部分群  $H$  の右剰余類について、文献 [2, pp.17–18] を参考にまとめる\*2。  $G$  の部分群

$$H = \{h_1, h_2, \dots, h_s\} \quad (s \text{ は } H \text{ の位数})$$

の各元に、  $H$  には属さない  $G$  の元  $g_1$  を掛けて、集合

$$Hg_1 \equiv \{h_1g_1, h_2g_1, \dots, h_sg_1\}$$

を作る。これは  $G$  の部分集合であって、  $H$  の元を含まない。

理由  $h_a, g_1 \in G$  より  $h_ag_1 \in G$  なので ( $a = 1, \dots, s$ )、  $Hg_1$  は  $G$  の部分集合である。ここで  $Hg_1$  のある元  $h_bg_1$  が  $H$  の元  $h_a$  に等しいと仮定すると、  $h_bg_1 = h_a$  の両辺に左から  $h_b^{-1}$  を掛けることにより  $g_1 = h_b^{-1}h_a \in H$  を得る。これは  $g_1 \notin H$  に反するから、  $Hg_1$  の元は  $H$  の元ではあり得ない。

note 1 ここで  $Hg_1 \equiv \{h_1g_1, h_2g_1, \dots, h_sg_1\}$  が相異なる  $s$  個の元からなることにも注意したい。実際  $h_a, h_b (\neq h_a)$  に対して  $h_ag_1 = h_bg_1$  と仮定すると、両辺に右から  $g_1^{-1}$  を掛けたとき  $h_a = h_b$  という矛盾を生じるので、  $h_ag_1 \neq h_bg_1$  である。

note 2  $Hg_1$  は単位元を含まないので、  $G$  の部分集合であっても、部分群にはならない。

同様に  $H$  にも  $Hg_1$  にも含まれない  $G$  の元  $g_2$  を用いて  $Hg_2$  を作ると、  $Hg_2$  の元は  $H$  にも  $Hg_1$  にも含まれない。この手続きを順次続けていくと [毎回  $G$  の元が新たに  $s$  個ずつ得られるから]、いずれ有限群  $G$  のすべての元をくみ尽くすことになる。このとき

$$G = Hg_1 + Hg_2 + \dots + Hg_m \quad (4)$$

と分解され、各集合  $Hg_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) を群  $G$  の  $H$  による右剰余類という (同様に左剰余類を定義できる)。ただし  $Hg_1$  が  $H$  自身となるように、式 (4) 以降では  $g_1 = e$  と約束しておく ( $H$  自身も右剰余類である)。各剰余類  $Hg_i$  はそれらの作り方より  $s$  個の元から成り、異なる剰余類  $Hg_i, Hg_j$  ( $i \neq j$ ) は共通の元を含まない (図 3)。このとき群  $G$  の位数を  $r$  とすると、

$$r = sm$$

が成り立つ。よって部分群  $H$  の位数  $s$  は  $G$  の位数の約数でなければならないことになる。

再び式 (1.19) の  $S_3$  群を例にとると、部分群  $Z_3 = \{e, a_1, a_2\}$  の剰余類は残りの元の集合  $\{a_3, a_4, a_5\}$  となる。 [実際、1.7 節の群表 4 より、  $Z_3$  に右または左から  $a_3, a_4, a_5$  のいずれを掛けても、集合  $\{a_3, a_4, a_5\}$  が得られることが見て取れる。]

■不変部分群  $G$  の部分群  $H = \{h_1, h_2, \dots\}$  と  $g \in G$  に対し

$$gHg^{-1} = \{gh_1g^{-1}, gh_2g^{-1}, \dots\}$$

もまた群を構成する。実際、

$$h_1h_2 = h_3 \quad \Rightarrow \quad (gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1}) = gh_3g^{-1}$$

\*2 教科書 p.12 の訳者注では「原著の剰余類の左右の呼び方が、数学の通常定義と逆であったので和訳では通常のものに直してある」とある。しかし文献 [2, pp.17–18] もまた、和訳とは逆に  $Hg$  を右剰余類と呼んでおり、本稿もそちらの流儀に準ずることにする。

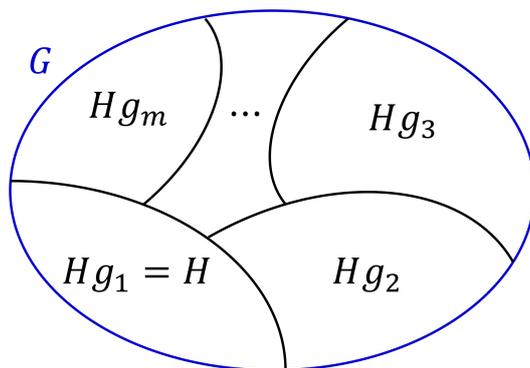


図3 部分群  $H$  による群  $G$  の (右) 剰余類への分解 (4)

だからである [2, p.22]\*<sup>3</sup>. 特に

$$gHg^{-1} = H \quad \forall g \in G \quad (1.37)$$

を満たす  $H$  を  $G$  の不変部分群または正規部分群と呼ぶ. 上式 (1.37) は

$$gH = Hg \quad \forall g \in G \quad (1.35)$$

と書き換えられる. すなわち不変部分群  $H$  は左剰余類と右剰余類が等しい. 式 (1.35),(1.37) はいずれも両辺が集合として等しいという条件であって, 任意の  $g \in G$  と  $h_1 \in H$  に対して,

$$h_1g = gh_2 \quad \text{あるいは} \quad gh_2g^{-1} = h_1$$

となる  $h_2 \in H$  がある, という意味に理解しなければならない.

例えば式 (1.19) の  $S_3$  群は  $Z_3 = \{e, a_1, a_2\}$  を不変部分群に持つ.

note 1.7 節の群表 4 から直接確認できる. 特に巡回置換  $a_1, a_2$  は互いに逆元になっていること, 互換  $a_3, a_4, a_5$  の逆元は自分自身であることに注意すると, 群表 4 より例えば部分群  $a_1Z_3a_1^{-1}, a_3Z_3a_3^{-1}$  は, 元がそれぞれ

$$\begin{aligned} a_1ea_1^{-1} &= e, & a_1a_1a_1^{-1} &= a_1, & a_1a_2a_1^{-1} &= a_2, \\ a_3ea_3^{-1} &= e, & a_3a_1a_3^{-1} &= a_4a_3 = a_2, & a_3a_2a_3^{-1} &= a_5a_3 = a_1 \end{aligned}$$

となるため,  $Z_3$  に一致する.

他方で集合  $\{e, a_4\}$  は  $G$  の部分群ではあるが, 不変でない. 実際, 左剰余類と右剰余類

$$a_5\{e, a_4\} = \{a_5, a_2\}, \quad \{e, a_4\}a_5 = \{a_5, a_1\}$$

は一致しない. [上式において教科書 p.13, 1.1-2 を修正した (群表 4 の方が正しい).]

■商空間と因子群 式 (4) における各剰余類  $Hg_i$  を 1 つの元と見なすことによって定義される空間  $G/H$  を商空間という. これが特に有用となるのは,  $H$  が  $G$  の不変部分群の場合である. 実際, このとき剰余類の集合は群を成し, 商空間  $G/H$  は  $H$  による  $G$  の因子群 [商群, 剰余類群 [2, p.23]] と呼ばれる.

\*<sup>3</sup> さらに  $hgh^{-1}$  の逆元  $(hgh^{-1})^{-1} = gh^{-1}g^{-1}$  も  $gHg^{-1}$  に属する [1, pp.25-26].

表 5 群  $S_3$  をその不変部分群  $Z_3$  によって商空間に分解すると, 因子群として  $Z_2$  を得る

	$Z_3$	$Z_3a_3$
$Z_3$	$Z_3$	$Z_3a_3$
$Z_3a_3$	$Z_3a_3$	$Z_3$

証明 [2, pp.22-23]

2つの剰余類  $Hg_i, Hg_j$  の各々から任意の元  $h_ag_i, h_bg_j$  を選んで積をとると,

$$(h_ag_i)(h_bg_j) = h_a(g_i h_b g_i^{-1}) g_i g_j.$$

ここで  $H$  は不変部分群なので,  $(g_i h_b g_i^{-1})$  は, したがって  $h_a(g_i h_b g_i^{-1})$  は  $H$  の何らかの元  $h_c$  である. よって

$$(h_ag_i)(h_bg_j) = h_c g_i g_j$$

と書ける. これは剰余類  $Hg_i, Hg_j$  の元の積が剰余類  $Hg_i g_j$  に属することを意味する. [しかも  $h_a, h_b$  がそれぞれ  $H$  全体を走るとき,  $h_c$  も  $H$  のすべての元を 1 回以上とるはずである (以下の具体例も見よ).] したがって集合の関係として

$$(Hg_i)(Hg_j) = Hg_i g_j \tag{1.36'}$$

が成り立つ. これは剰余類の集合が群を作ることを意味する.

上式 (1.36') は剰余類群の積の定義でもある. なお剰余類群の単位元は不変部分群  $H$  である [1, p.27].

例えば因子群  $S_3/Z_3$  は  $Z_2$  になる.

note 本節で見てきたように, 置換群  $S_3$  は不変部分群  $Z_3 = \{e, a_1, a_2\}$  による右剰余類を用いて

$$S_3 = Z_3 + Z_3a_3, \quad Z_3a_3 = \{a_3, a_4, a_5\}$$

と分解できる. このとき  $Z_3 = Z_3e$  と見て式 (1.36') を適用すると, 因子群  $S_3/Z_3 = \{Z_3, Z_3a_3\}$  に関する群表として表 5 を得る. これは 1.6 節で見た, 位数 2 の巡回群  $Z_2$  と同型となっている [2, p.23]. なお, 1.7 節の群表 4 を  $3 \times 3$  のセルから成る 4 つのブロックに分割すれば, 例えば  $Z_3 = \{e, a_1, a_2\}$  と  $Z_3a_3 = \{a_3, a_4, a_5\}$  の元の積が, 確かに  $\{a_3, a_4, a_5\}$  のいずれかとなっていることは一目瞭然である.

### ■中心

群  $G$  の中心 (center) とは,  $G$  の全ての元と可換な  $G$  の元全ての集合である. 中心は常に  $G$  のアーベル不変部分群である. しかしながら, それは単位元のみ [の集合] や群全体といった自明な場合もある. (p.13)

■共役類 文献 [2, pp.18-19] の記述を基にまとめる. 群  $G$  の 2 つの元  $a, b$  が

$$a = bgb^{-1}$$

の関係を満たすような単位元以外の元  $g \in G$  があるとき,  $b$  は  $a$  の共役元という. このとき定義より

表 6 置換群  $S_3$  の類別表

	$e$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$e$						
$a_1$	$a_1$	$a_1$	$a_2$	$a_2$	$a_2$	$a_2$
$a_2$	$a_2$	$a_2$	$a_1$	$a_1$	$a_1$	$a_1$
$a_3$	$a_5$	$a_4$	$a_3$	$a_5$	$a_4$	$a_3$
$a_4$	$a_3$	$a_5$	$a_5$	$a_4$	$a_3$	$a_5$
$a_5$	$a_4$	$a_3$	$a_4$	$a_3$	$a_5$	$a_4$

- $a$  は  $b$  の共役元となるから、単に「 $a$  と  $b$  は共役」と言えば充分である。
- $a$  と  $b$ ,  $b$  と  $c$  が共役なら、 $a$  と  $c$  は共役である。

$a$  に共役な元の集合を  $a$  の共役類または単に類という。

次に群の元を類別する方法を 2 つ紹介する。

1. 群表の各  $g_i$  列には上から順に元  $g_1g_i, g_2g_i, \dots, g_rg_i$  が並んでいる。ここに左から  $g_i^{-1}$  を掛けて新しい表を作ると (これを類別表という),  $g_i$  列に並ぶ元は上から順に

$$g_i^{-1}g_1g_i, g_i^{-1}g_2g_i, \dots, g_i^{-1}g_rg_i$$

となる。このとき表の  $j$  行目には左から順に

$$g_1^{-1}g_jg_1, g_2^{-1}g_jg_2, \dots, g_r^{-1}g_jg_r$$

が並ぶことになる ( $j = 1$  行目には単位元  $g_i = e$  しか現れない)。これらはいずれも同じ類に属する。実際,  $l, m$  番目の元  $f_l \equiv g_l^{-1}g_jg_l, f_m \equiv g_m^{-1}g_jg_m$  は

$$f_l = (g_l^{-1}g_m)f_m(g_l^{-1}g_m)^{-1}$$

で関係付けられるため、互いに共役である。

2. 群表の単位元から始まる対角線に関して、対称な位置にある元  $f_1 = g_i g_j, f_2 = g_j g_i$  は同一類に属する ( $f_2 = g_i^{-1} f_1 g_i$  が成り立つから)。

ここでは第 1 の方法を採用して、置換群  $S_3$  の元を類別する。1.7 節の群表 4 に対して類別表を作ると、表 6 のようになる。2,3 行目から  $a_2$  と  $a_3$  が共役であり、4,5,6 行目から  $a_3, a_4, a_5$  は共役であることが読み取れる。こうして  $S_3$  の共役類は  $\{e\}, \{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4, a_5\}$ 。

note 1 ある元  $g_j$  と共役な元  $g_k$  の条件は、定義より  $g_k = g^{-1}g_jg$  なる  $g \in G$  が存在することである。すると教科書における共役類  $S$  の定義式

$$g^{-1}Sg = S \quad \forall g \in G \tag{1.38}$$

は一見、 $\forall \rightarrow \exists$  と訂正する必要があると考えたくなる。しかし  $g_j$  と共役なあらゆる元は  $g^{-1}g_jg \forall g \in G$  によって尽くされる。それらは類別表の第  $j$  行に並ぶ要素に他ならず、一般には重複があるから、その

全体  $(g_j$  の共役類) は  $G$  の部分集合  $S$  を成す. そして  $g_k = g^{-1}g_jg \in S$  は相似変換

$$g_k \rightarrow g'g_kg'^{-1} = (g'')^{-1}g_jg'' \quad (g'' \equiv gg'^{-1})$$

を行っても  $g_j$  と共役であり, それ故  $S$  の元である. そこで共役類  $S$  の定義を上式 (1.38) のように, 不変部分群の条件 (1.37) と似た形に書けると考えられる.

note 2

「のちに我々は, 共役類と既約表現が一对一の対応を持つことを見るだろう」(p.13) というのは, 具体的には 1.13 節における「既約表現の数は共役類の数に等しい」(p.22, 1.8) という箇所を指すと考えられる (本稿の式 (7)).

### ■内部自己同型

同型写像 ある群から別の群への一对一の写像で掛け算則を保つもの [1.7 節のノートで既に言及]

自己同型 (写像) ある群から自分自身への掛け算則を保つ一对一写像

1 つの固定した  $g$  に対する写像

$$G \rightarrow g^{-1}Gg \quad (1.39)$$

は自己同型である. 実際,

$$\begin{aligned} (g^{-1}g_1g)(g^{-1}g_2g) &= g^{-1}(g_1g_2)g, & (\text{掛け算則を保つ}) \\ g^{-1}g_1g = g^{-1}g_2g &\Rightarrow g_1 = g_2. & (\text{一对一}) \end{aligned}$$

特に  $g$  が群の元するとき, 写像 (1.39) は内部自己同型と呼ばれる. これに対し群のどの元  $g$  を用いても  $g^{-1}Gg$  と書けない自己同型 (写像) を外部自己同型という.

## 1.11 Schur の補題

**Schur** (シュール) の補題は本節の定理 1.3 と定理 1.4 から成る.

定理 1.3  $D_1$  と  $D_2$  が互いに同値でない既約表現としたとき,  $\forall g \in G$  に対して  $D_1(g)A = AD_2(g)$  が成立すれば  $A = 0$  である.

証明 文献 [2, pp.67–69] の方が記述が明快な部分もあるため, そちらも参考にしつつまとめる.

$D_2$  の作用するベクトル空間  $V$  の中に, 一般には  $A|\mu\rangle = 0$  を満たすベクトル  $|\mu\rangle$  が存在する. 言い換えれば,  $|\mu\rangle$  は  $A$  の右から掛かって消えるベクトルである. そのようなベクトル  $|\mu\rangle$  の成す  $V$  の部分空間を  $N$ , また  $N$  への射影演算子を  $P$  とすると, 任意の  $|\cdots\rangle \in V$  に対して  $|\mu\rangle \equiv P|\cdots\rangle \in N$  であって,

$$0 = A|\mu\rangle = AP|\cdots\rangle, \quad \therefore AP = 0.$$

これと定理の仮定  $D_1(g)A = AD_2(g)$  を合わせると,

$$AD_2(g)P = D_1(g)AP = 0 \quad \forall g \in G \quad (1.40)$$

を得る. このため  $|\mu\rangle \equiv P|\cdots\rangle \in N$  に対して

$$A(D_2(g)|\mu\rangle) = (AD_2(g)P)|\cdots\rangle = 0$$

である。このとき  $|\mu\rangle \in N$  に対し  $D_2(g)|\mu\rangle$  もまた  $N$  に属することになる。これは  $D_2(g)$  が不変部分空間  $N$  を持つことを意味する。ところが  $D_2(g)$  は既約だから、 $V$  の中に不変部分空間を持ってはならない。よって  $N = 0, V$  のいずれかである。

$N = 0$  と仮定すると、 $A|\mu\rangle = 0$  なるベクトル  $|\mu\rangle (\neq 0)$  は存在しない。すると行列表示では、 $A$  は逆行列  $A^{-1}$  を持つ正方行列でなければならない。このとき定理の仮定  $D_1(g)A = AD_2(g)$  に左から  $A^{-1}$  を掛けると

$$A^{-1}D_1(g)A = D_2(g) \quad \forall g \in G \quad (1.42)$$

となり、 $D_1$  と  $D_2$  が互いに同値でないことに反する。よって  $N$  は空間  $V$  全体となる。このときゼロでないベクトル  $|\mu\rangle \in N = V$  に対して  $A|\mu\rangle = 0$  が成り立つので、 $A = 0$  でなければならない。証明終。

**定理 1.4**  $D$  が有限次元の既約表現の場合、 $\forall g \in G$  に対し  $D(g)A = AD(g)$  が成り立てば  $A \propto I$  である。言葉で言えば、有限次元既約表現の全ての元と可換な行列は単位行列に比例する、ということである。

**証明** 有限次数の行列  $A$  は、特性方程式  $\det(A - \lambda I) = 0$  が少なくとも 1 つは根を持つ。よって固有方程式  $A|\mu\rangle = \lambda|\mu\rangle$  を満たす固有値  $\lambda$  と固有ベクトル  $|\mu\rangle$  を 1 つはとることができ、この  $\lambda$  と  $|\mu\rangle$  に対して

$$(A - \lambda I)|\mu\rangle = 0 \quad (5)$$

が成り立つ。他方、 $A$  がすべての  $D(g)$  と可換であるという仮定は、

$$D(g)(A - \lambda I) = (A - \lambda I)D(g) \quad (6)$$

と書き換えられる。すると定理 1.3 の証明と同様にして、2 式 (5),(6) から

$$A - \lambda I = 0$$

が言える。

**note**  $A - \lambda I$  を定理 1.3 の  $A$  と見れば良い。 $N = 0, V$  の場合分けにおいて、ここでは  $\det(A - \lambda I) = 0$  より  $A - \lambda I$  が逆行列を持たないことから、 $N = 0$  の可能性が排除される。

上式は  $A \propto I$  を意味する。証明終。

定理 1.4 は [ $A$  の逆  $A^{-1}$  があれば]、

$$A^{-1}D(g)A = D(g) \quad \forall g \in G \quad \Rightarrow \quad A \propto I \quad (1.43)$$

と書き換えられる。これは既約表現  $D(g)$  に対して、自明でない相似変換を行う自由度が残されていないことを意味する。

量子力学における Schur の補題の含意を見るために、準備として対称変換の群  $G$  のユニタリー表現  $D(g)$  を与えるところから始めよう。 $D(g)$  が完全可約であると仮定すると、適当な基底

$$|a, j, x\rangle \quad (1.45)$$

を選んで、 $D(g)$  の行列表現を行列要素

$$\langle a, j, x | D(g) | b, k, y \rangle = \delta_{ab} \delta_{xy} [D_a(g)]_{jk} \quad [a \text{ で和をとらない}] \quad (1.47)$$

から成る、ブロック対角な形にできる。ただし  $a$  は既約表現  $D_a(g)$  のラベルであり、 $j = 1, \dots, n_a$  は各表現  $D_a(g)$  内の要素を指定するラベルであり、 $x$  は他の存在する物理的パラメータをまとめた指標である。

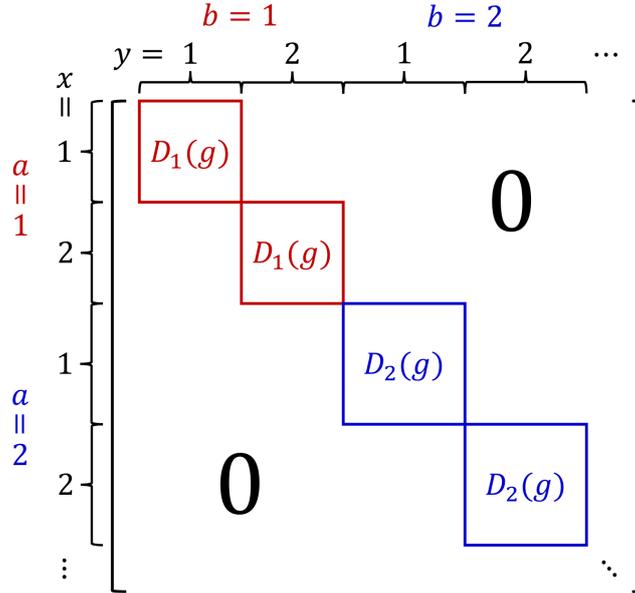


図4 行列要素 (1.47) を持つ,  $D(g)$  のブロック対角な形の表現行列

note 上式 (1.47) は図 4 のようなブロック対角な形の行列の要素を表す. ここで暗に「各々の既約表現  $a$  は, 何度現れても同じ表現行列  $D_a(g)$  で記述される, ということを仮定して」(p.16, 1.9,10) おり, 繰り返し現れる既約表現  $D_a(g)$  は異なる  $x (= y)$  の値で指定されている. これは異なる物理的  $x$  で記述されるものの, 同じ  $D_a(g)$  で変換される状態があることに対応する. また「もしある特定の既約表現が  $D$  に一回だけ現れるなら, その状態をラベルする  $x$  変数は実際必要なかった」(p.16 下から 4-2 行) ことになる.

基底 (1.45) には規格直交条件

$$\langle a, j, x | b, k, y \rangle = \delta_{ab} \delta_{jk} \delta_{xy} \quad (1.46)$$

を課することができる. このとき完全性条件 (完備関係式)

$$I = \sum_{a,j,x} |a, j, x\rangle \langle a, j, x| \quad (1.48)$$

が成立し, これを利用すると, ブロック対角な行列 (1.47) に対応する演算子は [外積]

$$\begin{aligned} D(g) &= \sum_{\substack{a,j,x \\ b,k,y}} |a, j, x\rangle \langle a, j, x| D(g) |b, k, y\rangle \langle b, k, y| \\ &= \sum_{\substack{a,j,x \\ b,k,y}} |a, j, x\rangle \delta_{ab} \delta_{xy} [D_a(g)]_{jk} \langle b, k, y| \\ &= \sum_{a,j,k,x} |a, j, x\rangle [D_a(g)]_{jk} \langle a, k, x| \end{aligned} \quad (1.49)$$

となる. 式 (1.46-49) の物理的変数  $x, y$  への依存性は自明であり, 群論は全く  $x$  や  $y$  に依存しない.

さて, 対称性の変換

$$|\mu\rangle \rightarrow D(g) |\mu\rangle, \quad \langle \mu| \rightarrow \langle \mu| D(g) \quad (1.50)$$

( $|\mu\rangle$  は状態ベクトル) の下で

$$O \rightarrow D(g)OD(g)^\dagger = O \quad (1.52)$$

のように不変に留まる観測量  $O$  を考える. このとき Schur の補題の帰結として,  $O$  の行列要素は

$$\langle a, j, x | O | b, k, y \rangle = f_a(x, y) \delta_{ab} \delta_{jk} \quad (1.57)$$

という形をとる (証明は下記). 群論のラベルへの依存性は対称性で完全に決まっており, 物理が関数  $f_a(x, y)$  を決める. 上式 (1.57) は Wigner-Eckart 定理の簡単な例である [一般的な定理は 4.3 節].

**証明** 教科書の説明を多少アレンジ・補足しつつまとめる.  $O$  の不変性 (1.52) は, 両辺に右から  $D(g)$  を掛けて  $D(g)$  のユニタリー性を考慮すると,  $O$  と  $D(g)$  が可換であること

$$[O, D(g)] = 0 \quad \forall g \in G \quad (1.53)$$

を意味する. よって行列要素  $\langle a, j, x | O | b, k, y \rangle$  には次の条件が課せられる.

$$\begin{aligned} 0 &= \langle a, j, x | [O, D(g)] | b, k, y \rangle \\ &= \sum_{c, l, z} (\langle a, j, x | O | c, l, z \rangle \langle c, l, z | D(g) | b, k, y \rangle - \langle a, j, x | D(g) | c, l, z \rangle \langle c, l, z | O | b, k, y \rangle) \quad (\because \text{式 (1.48)}) \\ &= \sum_{c, l, z} (\langle a, j, x | O | c, l, z \rangle \delta_{bc} \delta_{yz} [D_b(g)]_{lk} - \delta_{ac} \delta_{xz} [D_a(g)]_{jl} \langle c, l, z | O | b, k, y \rangle) \quad (\because \text{式 (1.47)}) \\ &= \sum_l (\langle a, j, x | O | b, l, y \rangle [D_b(g)]_{lk} - [D_a(g)]_{jl} \langle a, l, x | O | b, k, y \rangle). \end{aligned} \quad (1.56)$$

これは  $a, b, x, y$  を固定すると, 成分が添字  $j, k$  で指定される行列

$$\hat{O}^{(a, b, x, y)} \equiv (\langle a, j, x | O | b, k, y \rangle), \quad \hat{D}_a(g) \equiv ([D_b(g)]_{jk})$$

の関係

$$\hat{O}^{(a, b, x, y)} \hat{D}_b(g) = \hat{D}_a(g) \hat{O}^{(a, b, x, y)}$$

を意味する.

$a \neq b$  ならば  $\hat{D}_a(g)$  と  $\hat{D}_b(g)$  は互いに同値でないから<sup>\*4</sup>, 定理 1.3 より  $\hat{O}^{(a, b, x, y)} = 0$  となる. よって  $\hat{O}^{(a, b, x, y)} \propto \delta_{ab}$ . そこで次に  $a = b$  とおくと, 定理 1.4 より  $\hat{O}^{(a, b, x, y)}$  は単位行列に比例する. しかしながら対称性は物理変数  $x, y$  への依存性は何も教えてくれない. 以上より何らかの関数  $f_a(x, y)$  を用いて

$$\hat{O}^{(a, b, x, y)} = f_a(x, y) \delta_{ab} I : (1.57)$$

とおける.

<sup>\*4</sup> 互いに同値な  $\hat{D}_a(g)$  で変換される, したがって同じ変換性を持つ状態は, 物理変数  $x$  で識別されるものの, それらをラベル  $a$  で区別することには意味がない. 実際, 1.12 節にもあるように「我々は各表現について正準形 [p.16] を選んでおり, よって同値な表現は全く同じに書かれている」(p.18 下 2 行).

## 1.12 \* 直交関係式

Schur の補題を用いると, 群  $G$  の (有限次元の) 既約表現  $D_a(g), D_b(g)$  の行列要素に対する直交関係式

$$\sum_{g \in G} \frac{n_a}{N} [D_a(g^{-1})]_{kj} [D_b(g)]_{lm} = \delta_{ab} \delta_{jl} \delta_{km} \quad (1.68)$$

が得られる (証明は下記). ここに  $n_a$  は表現  $D_a$  の次元,  $N$  は群  $G$  の位数である.  $D_a(g)$  がユニタリーであれば,

$$\sum_{g \in G} \frac{n_a}{N} [D_a(g)]_{jk}^* [D_b(g)]_{lm} = \delta_{ab} \delta_{jl} \delta_{km} \quad (1.69)$$

と書き換えられる. [上式 (1.69) は種類が  $(a, j, k)$  で指定される,  $N$  成分  $g = 1, 2, \dots, N$  を持つベクトル  $[D_a(g)]_{jk}$  の直交性を見なせる [2, p.75]. このとき規格化されたベクトル, あるいは] 群の元  $g$  の正規直交関数は

$$\sqrt{\frac{n_a}{N}} [D_a(g)]_{jk} \quad (1.70)$$

である.

上式 (1.68) の証明 線形演算子

$$A_{jl}^{ab} \equiv \sum_{g \in G} D_a(g^{-1}) |a, j\rangle \langle b, l| D_b(g) \quad (1.58)$$

を定義する. 任意の  $g_1 \in G$  をとって, 左から  $D_a(g_1)$  を掛けよう.

$$D_a(g_1) D_a(g^{-1}) = D_a(g_1 g^{-1}) = D_a((g g_1^{-1})^{-1})$$

に注意すると,

$$D_a(g_1) A_{jl}^{ab} = \sum_{g \in G} D_a((g g_1^{-1})^{-1}) |a, j\rangle \langle b, l| D_b(g) \quad (1.61)$$

となる. ここで定理 1.1 の証明 (1.9 節) でも用いたように,  $g$  が群  $G$  の全ての元を走るとき,  $g' \equiv g g_1^{-1}$  も全ての元を走ること注意到,

$$\begin{aligned} D_a(g_1) A_{jl}^{ab} &= \sum_{g' \in G} D_a(g'^{-1}) |a, j\rangle \langle b, l| D_b(g' g_1) \quad (\because g = g' g_1) \\ &= \sum_{g' \in G} D_a(g'^{-1}) |a, j\rangle \langle b, l| D_b(g') D_b(g_1) \\ &= A_{jl}^{ab} D_b(g_1) \end{aligned} \quad (1.63)$$

と書き換えられる. ここで再び Schur の補題 (1.11 節) を用いると,  $a \neq b$  のとき  $D_a$  と  $D_b$  は異なるので  $A_{jl}^{ab} = 0$  となり (定理 1.3),  $a = b$  のとき  $A_{jl}^{aa} \propto I$  となる (定理 1.4). したがって

$$A_{jl}^{aa} = \delta_{ab} \lambda_{jl}^a I \quad (1.64)$$

と書ける. [右辺の恒等演算子  $I$  は  $D_a$  と同じ空間に作用すると見なす ( $I$  はラベル  $a$  に依存).]  $\lambda_{jl}^a$  [c-数である] を決定するために, 与えられた  $a$  に対し基底ケット  $\{|a, k\rangle\}$  で張られる空間での  $A_{jl}^{aa}$  のトレース

$$\text{Tr}(A_{jl}^{aa}) = \sum_k \langle a, k| A_{jl}^{aa} |a, k\rangle$$

を2通りに計算する．まず上式 (1.64) より

$$\mathrm{Tr}(A_{jl}^{aa}) = \lambda_{jl}^a \mathrm{Tr}(I) = \lambda_{jl}^a \sum_k 1 = \lambda_{jl}^a n_a \quad (1.65')$$

である．他方，定義式 (1.58) からは

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(A_{jl}^{aa}) &= \sum_k \sum_{g \in G} \langle a, k | D_a(g^{-1}) | a, j \rangle \langle a, l | D_a(g) | a, k \rangle = \sum_{g \in G} \langle a, l | D_a(g) D_a(g^{-1}) | a, j \rangle \\ &\quad (\text{ここまではトレースの巡回対称性の証明にあたる計算となっている}) \\ &= \delta_{jl} \sum_{g \in G} 1 = N \delta_{jl} \end{aligned} \quad (1.66')$$

と計算される．これらを等置すると  $\lambda_{jl}^a = N \delta_{jl} / n_a$  と求まるので，上式 (1.64) は

$$\sum_{g \in G} D_a(g^{-1}) | a, j \rangle \langle b, l | D_b(g) = \frac{N}{n_a} \delta_{ab} \delta_{jl} I \quad (1.67)$$

を与える．両辺を  $\langle a, k |$  と  $| b, m \rangle$  で挟んで行列要素を作り，右辺において  $\langle a, k | b, m \rangle = \delta_{ab} \delta_{km}$  および  $\delta_{ab}^2 = \delta_{ab}$  となることに注意すると，直交関係式 (1.68) を得る．

ここまでは既約表現  $D_a(g)$  の行列要素の直交性を論じてきた．次に行列要素の完全性へと話を進める．正則表現 [1.3 節] を  $D_R(g)$  と書く (対応する正規直交基底は  $\{|g\rangle\}$ )．このとき  $g$  の任意の関数は

$$F(g) = \sum_{g' \in G} F(g') [D_R(g)]_{g'e} \quad (1.73)$$

のように，正則表現の行列要素で展開できる．

上式 (1.73) の証明  $g$  の任意の関数  $\{F(g)\}$  を定義することは，それを展開係数として，正則表現の作用する空間におけるブラ・ベクトル

$$\langle F | \equiv \sum_{g' \in G} F(g') \langle g' | \quad (1.72)$$

を与えることに対応する．このとき正則表現の基底  $\{|g\rangle\}$  の正規直交性，および正則表現を定義する式 (1.6):  $D_R(g_1) | g_2 \rangle = | g_1 g_2 \rangle$  に注意すると，

$$F(g) = \langle F | g \rangle = \left( \sum_{g' \in G} F(g') \langle g' | \right) \cdot (D_R(g) | e \rangle) = \sum_{g' \in G} F(g') [D_R(g)]_{g'e} : (1.73)$$

を得る．

以上の2点 (式 (1.69), (1.73)) は，次の定理にまとめられる．

**定理 1.5**  $G$  のユニタリーな既約表現の行列要素は，正則表現のベクトル空間，あるいは  $g \in G$  の関数，に対して完全直交系を与える．

**note** 定理 1.5 の文面からして，1つの既約表現  $D_a(g)$  を考えてラベル  $a$  を省略し，その正則表現を単に  $D_R(g)$  と書いているように考えたくもなる．しかしそうすると次元数  $n_a = N$  となり，後の式 (1.74) と食い違う． $D_R(g)$  はむしろ  $D(g)$  のことである (1.13 節の式 (9) も参照)．また行列とは対照的に演

算子そのものは基底に依らないから、添字  $R$  は省いても差し支えないと考えられる。さらに式 (1.73) はあくまで行列要素  $[D_R(g)]_{g'e}$  による展開であって、ここから式 (1.74) の右辺を直接説明することは困難である。

そこで基底  $\{|g\rangle\}$  から  $\{|a, j\rangle\}$  に移るために、完備関係式 (1.48) と  $\langle a, j|D(g)|b, k\rangle$  の式 (1.47) を利用すると、

$$[D(g)]_{g'e} = \langle g'|D(g)|e\rangle = \sum_{a,j,b,k} \langle g'|a, j\rangle \langle a, j|D(g)|b, k\rangle \langle b, k|e\rangle = \sum_{a,j,k} \langle g'|a, j\rangle \langle a, k|e\rangle [D_a(g)]_{jk}$$

となる。よって式 (1.73) は教科書 1.13 節の式

$$F(g) = \sum_{a,j,k} c_{jk}^a [D_a(g)]_{jk} \left( \because c_{jk}^a \equiv \sum_{g' \in G} F(g') \langle g'|a, j\rangle \langle a, k|e\rangle \text{ とおける} \right) \quad (1.81)$$

に書き換えられる。これは既約表現の行列要素で任意の関数  $F(g)$  を展開できることを直接的に表しており、最終的な結論として我々が求めていたのは式 (1.73) よりもむしろ式 (1.81) である。

さて、上式 (1.81) において再び左辺の  $F(g)$  を  $N$  次元空間のベクトルと見なすと、独立なベクトル  $F(g)$  は  $N$  個とれる。他方、右辺の展開係数  $\{c_{jk}^a\}$  は  $\sum_a n_a^2$  個ある\*5。

よって

$$N = \sum_a n_a^2 \quad (1.74)$$

が成立する [1.13 節の式 (1.91) の箇所で再導出]。

例：Fourier 級数 巡回群  $Z_N$  の元

$$a_0 = e, \quad a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_{N-1}$$

は掛け算則

$$a_j a_k = a_{(j+k) \bmod N} \quad (1.75)$$

を満たす。[右辺の添字  $(j+k) \bmod N$  は  $(j+k)$  を  $N$  で割った余り  $(0, \dots, N-1)$  と推察される。] 1 次元表現

$$D_n(a_j) = e^{2\pi i n j / N} \quad (1.76)$$

は  $Z_N$  の既約表現であり、これに対して直交関係式 (1.69) は、単なる Fourier 級数の基本的関係式

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i n' j / N} e^{2\pi i n j / N} = \delta_{n'n} \quad (1.77)$$

になる。

---

\*5 これは  $D(g)$  をブロック対角な形にしたときの、ブロック対角な部分の成分数に一致している。また  $N$  次元空間を張る正規直交系 (1.70) は  $\sum_a n_a^2$  個のベクトルから成る [2, p.75]。

### 1.13 指標

群の表現  $D$  の指標

$$\chi_D(g) \equiv \text{Tr}D(g) = \sum_i [D(g)]_{ii} \quad (1.78)$$

を定義する.

- 同値な表現は同じ指標を持つ.
  - トレースの巡回対称性より, 相似変換  $D(g) \rightarrow S^{-1}D(g)S$  に対して指標 (1.78) は不変だから.
- 同値でない既約表現  $D_a$  は指標も異なる.
  - 直交関係式 (1.69) を  $j = k, l = m$  と置いて足しあげると

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \left( \sum_j [D_a(g)]_{jj}^* \right) \left( \sum_l [D_b(g)]_{ll} \right) &= \delta_{ab} \frac{1}{n_a} \sum_{j,l} \delta_{jl} \delta_{lj} \\ \text{i.e.} \quad \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \chi_{D_a}(g)^* \chi_{D_b}(g) &= \delta_{ab} \end{aligned} \quad (1.79)$$

となる. すると異なる既約表現の指標は  $[g = 1, \dots, N$  の  $N$  成分を持つベクトルと見ると], 直交しているのだから.

指標は共役類 [1.10 節] の上では定数である. 実際, ある元  $g_1$  に共役な元は, 適当な  $g$  を用いて  $g^{-1}g_1g$  と表される. 再びトレースの巡回対称性に注意すると, これらの指標は等しい:

$$\text{Tr}D(g^{-1}g_1g) = \text{Tr}(D(g^{-1})D(g_1)D(g)) = \text{Tr}D(g_1). \quad (1.80)$$

また共役類の上の定数関数, すなわち与えられた  $g_1$  と共役なあらゆる元  $g^{-1}g_1g$  に対し

$$F(g_1) = F(g^{-1}g_1g)$$

を満たす関数は

$$F(g_1) = \sum_{a,j} \frac{1}{n_a} c_{jj}^a \chi_{D_a}(g_1) \quad (1.85)$$

のように, 指標  $\{\chi_{D_a}(g_1)\}$  で展開できる.

上式 (1.85) の証明 [本稿では 1.12 節で示したように] 任意の関数は既約表現の行列要素を用いて式 (1.81):

$$F(g_1) = \sum_{a,j,k} c_{jk}^a [D_a(g_1)]_{jk}$$

と展開できる。これを共役類の上での定数関数  $F(g_1)$  に適用すると

$$\begin{aligned}
F(g_1) &= \frac{1}{N} \sum_{g \in G} F(g^{-1}g_1g) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{g \in G \\ a, j, k}} c_{jk}^a [D_a(g^{-1}g_1g)]_{jk} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{\substack{g \in G \\ a, j, k, l, m}} c_{jk}^a [D_a(g^{-1})]_{jl} [D_a(g_1)]_{lm} [D_a(g)]_{mk} \\
&= \sum_{\substack{a, j, k \\ l, m}} \frac{1}{n_a} c_{jk}^a [D_a(g_1)]_{lm} \delta_{jk} \delta_{lm} \quad (\text{式 (1.68) を用いて } g \text{ に関する和をとった}) \\
&= \sum_{a, j, l} \frac{1}{n_a} c_{jj}^a [D_a(g_1)]_{ll} = \sum_{a, j} \frac{1}{n_a} c_{jj}^a \chi_{D_a}(g_1) : (1.85)
\end{aligned}$$

を得る。

よって独立な既約表現の指標  $\chi_a(g)$  たちは、共役類上で定数の関数に対する完全正規直交基底を成す [「全体の因子  $N$  を除いて正規直交である」 (p.21, 1.6-7) ことは式 (1.79), 完全性は式 (1.85)].

**note** ところで上式 (1.85) 左辺において、独立に選べる共役類上の定数関数  $F(g_1)$  は、共役類の数に一致する。(例えば 1.10 節で見た  $S_3$  群の共役類は  $\{e\}, \{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4, a_5\}$  の 3 個。) 他方、左辺の展開係数  $\frac{1}{n_a} \sum_j c_{jj}^a$  はフリーな添字  $a$  で特徴付けられ、既約表現の数だけある。

したがって

$$(\text{既約表現の数}) = (\text{共役類の数}) \quad (7)$$

が成り立つ。

これを踏まえると、 $g \in G$  の和に関する指標の直交性 (1.79) はまた、既約表現にわたる和に関する指標の直交条件

$$\sum_a \chi_{D_a}(g_\alpha)^* \chi_{D_a}(g_\beta) = \frac{N}{k_\alpha} \delta_{\alpha\beta} \quad (1.87)$$

に読み替えられる (証明は下記)。ここに整数  $\alpha$  は共役類のラベルであり、 $k_\alpha$  は各共役類  $\alpha$  に含まれる元の数を表す。また  $g_\alpha$  は共役類  $\alpha$  の [何らかの] 元である。

**note** 1.10 節で見た  $S_3$  群の共役類は、 $C_1 = \{e\}, C_2 = \{a_1, a_2\}, C_3 = \{a_3, a_4, a_5\}$  とおける。このとき各  $C_\alpha$  の元の個数  $k_\alpha$  は  $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 3$  である。また共役類  $\alpha$  のどの元  $g_\alpha$  に対しても指標は同じなので (式 (1.80)), 指標は適当な  $g_\alpha$  を引数として  $\chi_{D_a}(g_\alpha)$  と書いておけば十分である。

上式 (1.87) の証明 教科書の説明を補足しつつまとめる。まず行列要素

$$V_{\alpha a} = \sqrt{\frac{k_\alpha}{N}} \chi_{D_a}(g_\alpha) \quad (1.89)$$

を持つ行列  $V = (V_{\alpha a})$  を定義する。このとき直交関係式 (1.79) は

$$\delta_{ab} = \sum_\alpha \frac{k_\alpha}{N} \chi_{D_a}(g_\alpha)^* \chi_{D_b}(g_\alpha) = \sum_\alpha V_{\alpha a}^* V_{\alpha b} = (V^\dagger V)_{ab}$$

と書き換えられるので、行列の関係式  $V^\dagger V = 1$  が成立する。ところが式 (7) より  $V = (V_{\alpha a})$  は正方行列なので、ユニタリーであり、 $VV^\dagger = 1$  も成立する。これを具体的な成分計算に書き直すと、今度は

$$\delta_{\alpha\beta} = (VV^\dagger)_{\beta\alpha} = \sum_a V_{\beta a} V_{\alpha a}^* = \frac{\sqrt{k_\alpha k_\beta}}{N} \sum_a \chi_{D_a}(g_\alpha)^* \chi_{D_a}(g_\beta)$$

が得られる。係数を移項して式 (1.87) を得る。

任意の表現  $D'(g)$  の相似変換による既約分解を

$$S^{-1}D'(g)S = D(g) = \sum_a m_a^D D_a(g) \quad (8)$$

と書こう。ここに  $m_a^D$  は既約表現  $D_a(g)$  の現れる回数である\*<sup>6</sup>。すると直交関係式 (1.79) の帰結として、指標  $\chi_D(g) (= \chi_{D'}(g))$  と  $\chi_{D_a}(g)$  から  $m_a^D$  を求める公式

$$\frac{1}{N} \sum_{g \in G} \chi_{D_a}(g)^* \chi_D(g) = m_a^D \quad (1.88)$$

が得られる (導出は下記)。  $m_a^D$  が「基底の取り方によらず、一意的に決まっていることにも注意」(p.23, 1.4-5) しよう [左辺の指標 (トレース) は基底の選択に依らない [6, p.51]]。

公式 (1.88) の導出 上式 (8) のトレースをとると  $\chi_D(g) = \sum_b m_b^D \chi_{D_b}(g)$  となる。両辺に  $\chi_{D_a}(g)^*$  を掛けて  $g$  で和をとり、直交関係式 (1.79) を用いると

$$\sum_{g \in G} \chi_{D_a}(g)^* \chi_D(g) = \sum_b m_b^D \sum_{g \in G} \chi_{D_a}(g)^* \chi_{D_b}(g) = N m_a^D$$

が得られるので、式 (1.88) が成り立つ [2, pp.71-72]。

特に正則表現  $D_R(g)$  [1.3 節] の既約分解を上式 (8) にしたがって

$$D_R(g) \rightarrow S^{-1}D_R(g)S = D(g) = \sum_a m_a^R D_a(g) \quad (9)$$

と書くと、公式 (1.88) は

$$m_a^R = n_a \quad (1.91)$$

を与える (証明は下記)。つまり各既約表現は、その次元  $n_a$  と同じ回数だけ、正則表現に現れる。すると

$$N = \sum_a m_a^R n_a = \sum_a n_a^2$$

となって、改めて式 (1.74) が再現される。

---

\*<sup>6</sup> 既約表現  $D_a(g)$  [演算子] に対し、最右辺の  $m_a^D D_a(g)$  は直和

$$\sum_a \overbrace{D_a \oplus \cdots \oplus D_a}^{m_a^D \text{個}} \quad (1.89)$$

の意味を理解しなければならない。

note 準備として、正則表現の指標が

$$\chi_R(e) = N, \quad \chi_R(g) = 0 \quad (g \neq e \text{ に対して}) \quad (1.90)$$

で与えられることを確認しておく.

$$\chi_R(g) = \sum_i \langle e_i | D_R(g) | e_i \rangle = \sum_i \langle e_i | g e_i \rangle$$

において、最右辺の内積  $\langle e_i | g e_j \rangle$  は  $g = e$  に対して 1 になり、 $g \neq e$  に対して  $|e_i\rangle$  と  $|g e_i\rangle$  ( $\neq |e_i\rangle$ ) が直交してゼロになる. よって上式 (1.90) が成立する.

公式 (1.91) の導出 さて、式 (1.90) より  $\chi_D(g) = \chi_R(g) = N \delta_{ge}$  と書けることに注意すると、式 (1.88) は

$$m_a^R = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \chi_{D_a}(g)^* \chi_D(g) = \chi_{D_a}(e)^* = n_a$$

を与えるので、式 (1.91) が得られる.

例:  $S_3$  群の 2 次元表現は式 (1.21) に与えてあり、ここから共役類  $\{e\}, \{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4, a_5\}$  [1.10 節] の上での指標は、それぞれ順に

$$\chi_2(g) = 2, -1, 0$$

であることが読み取れる. ここでは直交関係式 (1.79) を用いても、同じ結果が得られることを説明する. まず恒等表現  $D_0(g) = 1 \forall g$  [1 次元表現] を考えると、その指標は  $\chi_0(g) = 1$  となる. 次に条件 (1.74):  $N = \sum_a n_a^2$  から、他の 2 つの表現は次元 1 と 2 であることが分かる.

note 異なる既約表現を  $a = 0, 1, 2, \dots$  でラベルすると (0 は恒等表現を表し  $n_0 = 1$ )、式 (1.79) は条件

$$6 = N = \sum_a n_a^2 = 1 + n_1^2 + n_2^2 + \dots$$

を課す. 2 次元表現が可能なので 1 つの  $n_a = 2$  であることに注意すると、 $n_1 = 1, n_2 = 2$  に限られる (他に既約表現はない). 式 (7) より (既約表現の数) = (共役類の数) = 3 が成り立つことにも注意.

今ひとつの 1 次元表現  $D_1(g)$  は、1.10 節で見た因子群  $S_3/Z_3 = Z_2$  を思い出すと容易に書き下せる. 実際 [ $Z_2$  の表現 (1.6 節) を念頭に]、 $\{e, a_1, a_2\}$  に対しては  $D_1(g) = 1$  を、 $\{a_3, a_4, a_5\}$  に対しては  $D_1(g) = -1$  を充てれば良い [それらのトレース (指標) もまた  $\chi_1(g) = 1, -1$ ]. さらに 2 次元表現  $D_2(g)$  についても  $\chi_2(e) = n_2 = 2$  であることは、あらかじめ分かっている. ここまで得られた指標は表 7 のようにまとめられる. 残った空欄は直交関係式 (1.79) から、 $x = -1, y = 0$  と定まる (これが冒頭で予告した結果である).

note 表 7 の指標に対して直交関係式 (1.79):  $\frac{1}{N} \sum_{\alpha} k_{\alpha} \chi_{D_a}(g_{\alpha})^* \chi_{D_b}(g_{\alpha}) = \delta_{ab}$  は

$$\begin{aligned} (a, b) = (0, 2): \quad 0 &= \frac{1}{6} (1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 3 \cdot 1 \cdot y), \\ (a, b) = (1, 2): \quad 0 &= \frac{1}{6} (1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 3 \cdot (-1) \cdot y) \end{aligned}$$

を与える. 2 式を連立して解くと  $x = -1, y = 0$  を得る. このとき他の全ての組  $(a, b)$  に対しても式 (1.79) が満たされていることが、直接確かめられる.

表 7  $S_3$  の共役類ごとの指標. [左の欄の番号  $a = 0, 1, 2$  は既約表現のラベル (本文参照).] 直交関係式 (1.79) から, 空欄は  $x = -1, y = 0$  と定まる.

	$\{e\}$	$\{a_1, a_2\}$	$\{a_3, a_4, a_5\}$
0	1	1	1
1	1	1	-1
2	2	$x$	$y$

任意の表現  $D$  に対し, 和

$$P_a = \frac{n_a}{N} \sum_{g \in G} \chi_{D_a}(g)^* D(g) \quad (1.94)$$

は表現  $a$  の下で変換する部分空間への射影演算子である (証明は下記). よって与えられた表現  $D_a$  をブロック対角な形に持って行く方法を知らずとも, 指標  $\chi_{D_a}(g)$  さえ分かっていたら, 射影演算子 (1.94) を用いて既約分解を行うことができる.

式 (1.94) が射影演算子であること 直交関係式 (1.69) で  $j = k$  とおいて和をとると

$$\frac{n_a}{N} \sum_{g \in G} \chi_{D_a}(g)^* [D_b(g)]_{lm} = \delta_{ab} \delta_{lm} \quad (1.95)$$

を得る. 上式 (1.95) は  $D$  がブロック対角な形に書かれたとき,

$$[P_a \text{ の第 } b \text{ ブロック}]_{lm} = \delta_{ab} \delta_{lm} \quad \text{i.e.} \quad [P_a \text{ の第 } b \text{ ブロック}] = \delta_{ab}$$

となる. よってこれは  $D_a$  のように変換する部分空間では 1 を与え, その他ではゼロになるような射影演算子である.

例——再び  $S_3$  以下に  $S_3$  群の 3 次元表現  $D_3(g)$  を天なりに与える.

$$\begin{aligned} D_3(e) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & D_3(a_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & D_3(a_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ D_3(a_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & D_3(a_4) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & D_3(a_5) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.96)$$

これは群の定義表現と呼ばれている. [正則表現ではない.  $S_3$  群の正則表現は 6 次元である.] 実際, 式 (1.96) が  $S_3$  群の表現になっていることは, 次のように納得できる. すなわち, この表現の基底  $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$  に対する作用は

$$D_3(g) |j\rangle = \sum_k |k\rangle \langle k| D_3(g) |j\rangle = \sum_k |k\rangle [D_3(g)]_{kj} \quad (1.98)$$

のように、行列の右からの掛け算で表される\*7。すると式 (1.96) とより、例えば

$$\begin{aligned} D_3(a_1) |1\rangle &= \sum_k |k\rangle [D_3(a_1)]_{k1} = |2\rangle, \\ D_3(a_1) |2\rangle &= \sum_k |k\rangle [D_3(a_1)]_{k2} = |3\rangle, \\ D_3(a_1) |3\rangle &= \sum_k |k\rangle [D_3(a_1)]_{k3} = |1\rangle \end{aligned} \quad (1.99)$$

となる。ここから  $D_3(a_1)$  は確かに巡回置換  $(1, 2, 3)$  を引き起こしていることが見て取れる。

note 同様に

$$D_3(a_3) |1\rangle = |2\rangle, \quad D_3(a_3) |2\rangle = |1\rangle, \quad D_3(a_3) |3\rangle = |3\rangle$$

となり、 $D_3(a_3)$  は互換  $a_3 = (1, 2)$  を引き起こすことなども確かめられる。

さて、表 7 で調べた指標に対して、式 (1.94) にしたがって射影演算子を構成すると

$$P_0 = \frac{1}{6} \left( D_3(e) + \sum_{j=1}^5 D_3(a_j) \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.100)$$

$$P_1 = \frac{1}{6} \left( D_3(e) + \sum_{j=1}^2 D_3(a_j) - \sum_{j=3}^5 D_3(a_j) \right) = 0, \quad (1.101)$$

$$P_2 = \frac{2}{6} \left( 2D_3(e) - \sum_{j=1}^2 D_3(a_j) \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.102)$$

となる。

note これらは  $P_a^2 = P_a$  および  $P_0 + P_1 + P_2 = 1$  を満たしている。特に  $P_0$  は式 (1.12) と同じものである。

ここから教科書 1.13 節の終わりまでの内容を大幅に補足しつつまとめる。基底ケットとその成分表示を区別せずに  $|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ , etc. と書いてしまおう\*8。このとき任意の位置ベクトル  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T$  は、恒等演算子  $1 = P_0 + P_1 + P_2$  を作用させると、

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_2$$

と分解される。ここに

$$\mathbf{r}_0 \equiv P_0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y + z) |0\rangle$$

は、置換に対して不変な方向

$$|0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle)$$

\*7 ここでも演算子とその行列表現に同じ記号  $D_3(g)$  を用いているが、誤解の恐れはあるまい。[最右辺を行列要素が左から掛かる形  $\sum_k [D_3(g)]_{kj} |k\rangle$  に書いたとき、和をとる添字が隣り合わないと言っても良い.]

\*8 この方が式 (1.99) に比べて行列 (1.96) の作用も見やすい。その際

$$D_3(g) |j\rangle = |k\rangle \quad \rightarrow \quad \sum_{l'} \langle l | D_3(g) |l'\rangle \langle l' | j\rangle = \langle l | k\rangle$$

より、基底ベクトルも行列表示にしてしまえば行列は通常通り左側から作用させれば良いことに注意する。1.19 節も参照。

へ射影されたベクトルである。この部分空間(直線)内のベクトル(状態)は自明な表現  $D_0(g) = 1$  で変換される。また

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 \equiv P_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ -x + 2y - z \\ -x - y + 2z \end{pmatrix} \\ &= x\{(|1\rangle - |2\rangle) + (|1\rangle - |3\rangle)\} + y\{(|2\rangle - |3\rangle) + (|2\rangle - |1\rangle)\} + z\{(|3\rangle - |1\rangle) + (|3\rangle - |2\rangle)\} \end{aligned}$$

は位置  $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$  を頂点とする正三角形を含む, 2次元の平面内に射影されたベクトルである(図5参照)。この部分空間内の状態ベクトルは  $D_2(g)$  で変換される。この構成は, 定義表現  $D_3$  が既約表現の直和

$$D_3 = D_0 \oplus D_2 \quad (1.103)$$

に分解されることを示している。

note 1 式(1.101)の  $P_1 = 0$  より, 既約表現  $D_1$  は現れない。他方で式(1.91)によれば, 6次元の正則表現には1次元表現  $D_0, D_1$  がそれぞれ  $n_0 = n_1 = 1$  回ずつ, そして2次元表現  $D_2$  が  $n_2 = 2$  回だけ含まれる(教科書 p.30)。

note 2 得られた不変部分空間を基にして, 与えられた表現  $D_3(g)$  をブロック対角な形に持って行くこともできる [2, pp.64–66]。まず正三角形を含む2次元の平面内に, 新しい基底ベクトル

$$|1'\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle - |1\rangle), \quad |2'\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{6}}\{(|3\rangle - |1\rangle) + (|3\rangle - |2\rangle)\} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2|3\rangle - |1\rangle - |2\rangle)$$

を導入する。すると  $|0\rangle, |1'\rangle, |2'\rangle$  は正規直交系を成すことが, もとの基底  $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$  の規格直交性を用いて容易に確認できる(図5参照\*9)。このとき基底の変換

$$(|0\rangle \quad |1'\rangle \quad |2'\rangle) = (|1\rangle \quad |2\rangle \quad |3\rangle) T = \sum_{k=1}^3 (|k\rangle T_{k1} \quad |k\rangle T_{k2} \quad |k\rangle T_{k3})$$

における直交行列は

$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

と同定される。これを用いて式(1.96)の定義表現  $D_3(g)$  は

$$D_R(g) = T^{-1} D_3(g) T = \begin{pmatrix} D_0(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}$$

と変換され\*10, 最右辺のようにブロック対角な形になることが直接確かめられる。ここに  $D_0(g) = 1$  は自明な恒等表現であり(1次元), 2次元の既約表現  $D_2(g)$  は式(1.21)と全く同じ行列で与えられる。

\*9 最終的に2次元表現として式(1.21)を得るにはこのように, 1.7節のノートの  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  と同じ基底  $|1'\rangle, |2'\rangle$  を選ぶ必要がある。

\*10 基底の変換

$$|e'_i\rangle = \sum_k |e_k\rangle T_{ki} = \sum_k (T^{-1})_{ik} |e_k\rangle$$

に対して, 任意の演算子  $O$  の行列要素は

$$\langle e'_i | O | e'_j \rangle = \left( \sum_k \langle e_k | (T^{-1})_{ik} \right) O \left( \sum_l |e_l\rangle T_{lj} \right) = \sum_{k,l} (T^{-1})_{ik} \langle e_k | O | e_l \rangle T_{lj}$$

と変換する。

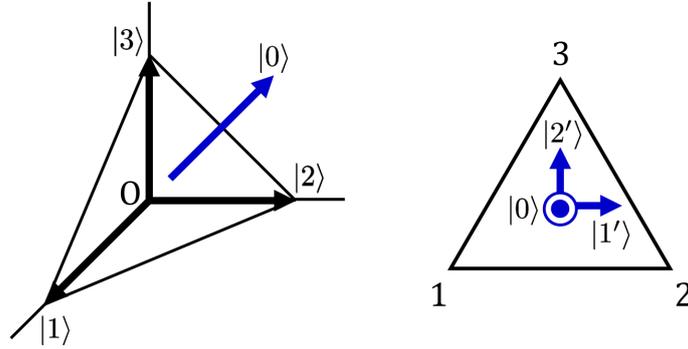


図5 基底を Euclid 空間のベクトルとして描画 (長さは適当に調整した)

### 1.14 固有状態

1.5 節の note で見たように, ハミルトニアン  $H$  と可換な対称変換の演算子  $g_1, g_2, \dots$  は群  $G$  を成す. ここで  $\{|i\rangle\}$  を  $H$  の固有値  $E$  に属する  $d$  個のエネルギー固有状態とすると, 1.5 節で見たように  $g_1 |i\rangle$  も同じ固有エネルギー  $E$  を持つので,  $\{|i\rangle\}$  の線形結合

$$g_1 |i\rangle = \sum_{j=1}^d |j\rangle D_{ji}(g_1)$$

で表される. これはエネルギー固有状態への  $g_1$  の作用を,  $d$  次元表現  $D_{ji}(g_1)$  で表した関係と見なせる. 実際, 上式を繰り返し用いると

$$g_2 g_1 |i\rangle = g_2 \sum_{j=1}^d |j\rangle D_{ji}(g_1) = \sum_{j=1}^d \left( \sum_{k=1}^d |k\rangle D_{kj}(g_2) \right) D_{ji}(g_1)$$

であり, これを  $g_2 g_1 |i\rangle = \sum_k |k\rangle D_{ki}(g_2 g_1)$  と比較すると

$$D_{ki}(g_2 g_1) = \sum_{j=1}^d D_{kj}(g_2) D_{ji}(g_1)$$

となるので,  $D$  は群  $G$  の  $d$  次元表現である. エネルギー  $E$  に縮退した固有状態  $\{|i\rangle\}$  はその基底ベクトルを構成している. 一般的にはこの表現  $D$  は既約とは限らないが, 偶発的な場合を除いて既約になっている [2, p.91]. しかも「我々は各々の [エネルギー固有状態の] 部分空間において表現を完全に既約分解できる」(p.26, 1.5).

**note** 相似変換  $D(g) \rightarrow S^{-1} D(g) S$  によって交換関係  $[D(g), H] = 0$  は変わらない. この自由度を利用できると考えられる. その際  $d$  が有限ならば, 「有限群のあらゆる表現は完全可約である」こと (1.9 節の定理 1.2) が適用される.

関連して,  $a$  でラベルされる既約表現が作用する空間の基底  $|a, j, x\rangle$  を一連のエネルギー固有状態にとる. [1.11 節の表記と同様,  $j$  は既約表現  $a$  内の状態をラベルし, 繰り返し現れる同じ既約表現  $a$  はラベル  $x$  で識

別される.] すると  $H|a, j, x\rangle$  も同じ固有エネルギーに属するので,

$$H|a, j, x\rangle = \sum_y c_y |a, j, y\rangle \quad (1.104)$$

と書ける. ここでもしある既約表現  $a$  が 1 回しか現れなければ, 右辺の  $y$  は 1 つだけの値  $x$  をとるので,  $|a, j, x\rangle$  は  $H$  (および任意の他の不変な演算子) の固有状態でなければならない.

**note** 1 つの不変な演算子  $g$  は定義により  $H$  と可換なので,  $|a, j, x\rangle$  は  $H$  と  $g$  の同時固有状態となる. ただしこの後で論じるように, 全ての  $\{g_i\}$  どうしが可換とは限らないことに注意する.

以上の結果は次の定理にまとめられる.

**定理 1.6** ある Hermite 演算子  $H$  が群  $G$  の表現の全ての元  $D(g)$  と可換であるならば,  $H$  の固有状態を  $G$  の既約表現として変換するように採ることができる. もしある既約表現が Hilbert 空間の中で一回しか現れなければ, その既約表現に属する状態はみな同じ固有値を持つ.

ところで有限群の元を表す演算子はユニタリーに選べるものの [1.9 節の定理 1.1], 一般には Hermite ではない. このため与えられた  $D(g)$  を対角化できるとは限らない. 実際 [ $H$  と各  $g_i$  は交換するものの,  $\{g_i\}$  どうしは非可換であるような] 非 Abel 群に対しては, 全ての  $D(g)$  たちを同時に対角化することはできず [同時固有状態を作れないことに対応],  $H$  が定数の各々の部分空間で表現を完全に既約分解できるにすぎない [定理 1.6 の第 1 文]. これに対し  $H$  と可換な Abel 群に対しては, 群の元たちを  $H$  と同時に対角化できる. [このことは量子力学で学んでいる [6, pp.39–41].] このことは [ $H$  自身も可換な演算子  $g_i$  の 1 つと見なしてしまえば], 次の定理と等価である.

**定理 1.7** 有限 Abel 群の既約表現は全て 1 次元である.

実際そうであるならば, Abel 群の表現を既約表現に分解することは [1.9 節の定理 1.2 より可能であり], 群の全ての元に対する表現行列を対角化することに他ならない.

**定理 1.7 の証明** ここでは共役類の議論と式 (1.74) を用いた証明を載せる. Abel 群では任意の元  $g, g'$  に対し

$$gg' = g'g, \quad \therefore gg'g^{-1} = g'$$

だから, 各々の元は自分自身とのみ共役である. つまり Abel 群の共役類は,  $N$  を群の位数として

$$\{g_1\}, \{g_2\}, \dots, \{g_N\}$$

と書ける. すると 1.13 節の式 (7) とより,

$$(\text{既約表現の数}) = (\text{共役類の数}) = N$$

が成り立つ. このとき式 (1.74) は, 和の範囲を書くと

$$N = \sum_{a=1}^N n_a^2$$

となる. これを満たすには全ての既約表現  $a$  の次元を  $n_a = 1$  とするしかない. 証明終.

最後に最終段落を引用する [本稿次節で補足].

量子力学でハミルトニアンを対角化する問題と全く類似の古典論の問題は、力学系の安定点周りの微小振動の基準モードを見つけることである。そこでは、角振動数の二乗が  $M^{-1}K$  行列の固有値であり、基準モードは  $M^{-1}K$  の固有ベクトルである。次の三つの節では一つの例を研究する。

### 1.14 節について

■基準モードに関する最終段落について 多自由度  $s$  の系の微小振動は、平衡位置からのズレを表す一般座標  $\mathbf{x} = (x_1 \ \cdots \ x_s)^T$  の 1 次までの近似では、適当な  $s$  次の係数行列  $M = (m_{ij}), K = (k_{ij})$  を用いて、

$$M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = 0$$

という形の運動方程式で記述される。全ての座標が共通の角振動数  $\omega$  で振動する解  $\mathbf{x} = \mathbf{A}e^{i\omega t}$  を仮定すると

$$(-\omega^2 M + K)\mathbf{A} = 0, \quad \therefore (-\omega^2 + M^{-1}K)\mathbf{A} = 0$$

である。これは  $\omega^2$  が  $M^{-1}K$  の固有値  $\omega_1, \dots, \omega_s$  (の 2 乗) で、 $\mathbf{A}$  が対応する固有ベクトルで与えられることを意味する。(  $M^{-1}$  を導入せずとも、固有値は特性方程式  $|K - \omega^2 M| = 0$  から定まる。 ) また  $M$  と  $K$  (したがって  $M^{-1}K$ ) を同時に対角化する基底を用いると、新しい座標  $\{Q_\alpha\}$  は

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, s)$$

を満たす基準座標となる。また各々の基準座標の単純な周期的振動を基準振動 (基準モード) という。固有値  $\omega_\alpha$  に重根がある場合には、等しい振動数にいくつかの基準座標が対応することになる [7, pp.81-85].

### 1.15 テンソル積

ここまでは可約な表現を小さな表現の直和に分解できることを見てきた [特に 1.9 節の定理 1.2 を見よ]. 逆に

- 基底ベクトル  $|j\rangle$  ( $j = 1, \dots, m$ ) を持つ空間に働く  $m$  次元表現  $D_1$
- 基底ベクトル  $|x\rangle$  ( $x = 1, \dots, n$ ) を持つ空間に働く  $n$  次元表現  $D_2$

をくっつけた大きな表現として、テンソル積表現  $D_1 \otimes D_2$  を作ることもできる。テンソル積表現は、2 つのラベルを持つ基底  $|j, x\rangle$  に関する行列要素が、 $D_1$  と  $D_2$  の行列要素の積

$$\langle j, x | D_{D_1 \otimes D_2}(g) | k, y \rangle \equiv \langle j | D_1(g) | k \rangle \langle x | D_2(g) | y \rangle \quad (1.105)$$

となるように定義される。これが実際に群  $G$  の表現となっていることは容易に分かる [本稿次節で確認]. また基底  $|j, x\rangle$  で張られる  $m \times n$  次元の空間をテンソル積空間という。我々はテンソル積表現を既約表現に分解することに興味がある。

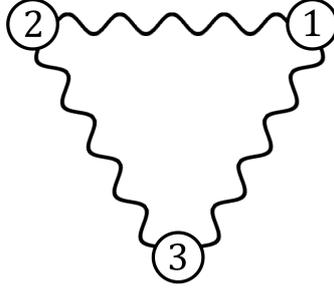


図6 バネでつながれた石ころ，あるいは三角形の分子

### 1.15 節について

■テンソル積表現が群の表現となっていることの確認  $D_1, D_2$  が 1.1 節の表現の条件 1.B を満たしているとき，

$$\begin{aligned}
 \langle j, x | D_{D_1 \otimes D_2}(e) | k, y \rangle &= \langle j | D_1(e) | k \rangle \langle x | D_2(e) | y \rangle = \delta_{jk} \delta_{xy} = \delta_{(j,k), (x,y)}, \\
 \langle j, x | D_{D_1 \otimes D_2}(g_1 g_2) | k, y \rangle &= \langle j | D_1(g_1 g_2) | k \rangle \langle x | D_2(g_1 g_2) | y \rangle \\
 &= \left( \sum_l \langle j | D_1(g_1) | l \rangle \langle l | D_1(g_2) | k \rangle \right) \left( \sum_z \langle x | D_2(g_1) | z \rangle \langle z | D_2(g_2) | y \rangle \right) \\
 &= \sum_{l,z} \langle j, x | D_{D_1 \otimes D_2}(g_1) | l, z \rangle \langle l, z | D_{D_1 \otimes D_2}(g_2) | k, y \rangle
 \end{aligned}$$

となるので，テンソル積表現も条件 1.B を満たす。

### 1.16 テンソル積の例

$xy$  平面上を (摩擦なく) 運動する，図 6 のように互いにバネでつながれた 3 つの質点の系を考えよう．この系の  $S_3$  対称性に注意して定理 1.6 [1.15 節] を適用すると，基準モードに関する情報を引き出すことができる。

note  $S_3$  対称性と言うとき，系は同種粒子から成り，それ故つり合いの位置で正三角形を成すことが暗に仮定されている．簡単な例はオゾン  $O_3$  の分子モデルである。

準備として，3 つの質点の  $x, y$  座標

$$(x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ x_3 \ y_3) \tag{1.107}$$

で記述される 6 次元空間における  $S_3$  群の表現を調べるところから始めよう．この空間は質点のラベル  $j = 1, 2, 3$  を持つ 3 次元空間と，座標  $x_\mu$  ( $\mu = 1, 2$ ) を持つ 2 次元空間 ( $xy$  平面) とのテンソル積の構造を持つ．そして  $S_3$  変換は 3 次元空間では [式 (1.96) の]  $D_3$  で表され，2 次元空間では式 (1.21) の  $D = D_2$  で表される．そこで

$$(x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ x_3 \ y_3) = (r_{11} \ r_{12} \ r_{21} \ r_{22} \ r_{31} \ r_{32}) \tag{1.108}$$

と書いて，2 つのラベルを持つ 6 次元空間の座標  $r_{j\mu}$  を導入すると，式 (1.105) に従って  $S_3$  群の 6 次元表現

$$[D_6(g)]_{j\mu k\nu} = [D_3(g)]_{jk} [D_2(g)]_{\mu\nu} \tag{1.110}$$

表 8  $S_3$  の共役類ごとの指標

	$\{e\}$	$\{a_1, a_2\}$	$\{a_3, a_4, a_5\}$
$D_3$	3	0	-1
$D_2$	2	-1	0
$D_6$	6	0	0

を定義できる. このとき例えば  $D_6(a_1)$  は,  $D_3(a_1)$  の 3 つの 1 たちの代わりに  $D_2(a_1)$  のコピーを置いた構造

$$D_6(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.111)$$

を持つ. 他の  $D_6(g)$  も同様な構造である [本稿次節で補足].

次に  $D_6$  に既約表現が何回現れるかを調べるために,  $D_6$  の指標  $\chi_6$  を求めよう. それには次の一般的結果が有用となる.

定理 1.8 テンソル表現の指標は, 因子の指標の積である.

証明 テンソル積の定義 (1.105) より直ちに

$$\begin{aligned} \chi_{D_1 \times D_2}(g) &\equiv \sum_{j,x} \langle j, x | D_{D_1 \otimes D_2}(g) | j, x \rangle \\ &= \left( \sum_j \langle j | D_1(g) | j \rangle \right) \left( \sum_x \langle x | D_2(g) | x \rangle \right) = \chi_{D_1}(g) \chi_{D_2}(g). \end{aligned} \quad (1.112)$$

今の場合

$$\chi_6(g) = \chi_3(g) \chi_2(g) \quad (1.113)$$

であり, 右辺における  $D_2$  表現の指標  $\chi_2(g)$  は 1.13 節の表 7 で調べてある. また  $D_3$  表現の指標  $\chi_3(g)$  は式 (1.21) からすぐに読み取ることができる. こうして  $\chi_6$  は表 8 下段のようになることが分かる. これは正則表現の指標と同じである [式 (1.90)]. よって  $D_6$  表現は正則表現と同値で [1.13 節冒頭], 既約表現として  $D_0, D_1$  を 1 回ずつ, そして  $D_2$  を 2 回含む [式 (1.91) による (1.13 節末尾の note)].

さて, つり合いの位置における系は  $S_3$  対称性を持つので, 系の基準モードも  $S_3$  群の既約表現として変換しなければならない<sup>\*11</sup>. よって既約表現によって変換する部分空間への射影演算子を構成すれば, 基準モードを見つけるのにいくらか役立つ. 特にある既約表現が 1 度しか現れなければ, それは定理 1.6 [1.14 節] より基準モード [ $M^{-1}K$  ( $D_6$  と可換と想定) の固有ベクトル (1.14 節末尾)] でなければならない. ある表現が 2 回以上現れる場合には, そのモードを決めるのにいくらか余分の情報が必要となる. この点を 1.7 節で具体的に見てゆく.

<sup>\*11</sup> 一般には可約でもよいが, それは特別な選択則が存在する場合で, ここでは考えないこととする [2, pp.98–99].

$kv \rightarrow$	11	12	21	22	31	32	$j\mu$ ↓
							11
							12
							21
							22
							31
							32

図7 テンソル積表現  $D_6(g)$  の構造

### 1.16 節について

■  $D_6(g)$  の具体形 (1.111) について 6次正方行列  $D_6(g)$  の行はラベルの組  $j\mu$  で、列はラベルの組  $kv$  で指定される。このとき図7のように  $3 \times 3$  個のブロックの位置が  $(j, k)$  でラベルされ、ブロック内の  $2 \times 2$  個の成分が  $(\mu, \nu)$  で指定されることになる。式 (1.110) 右辺の  $[D_3(a_1)]_{jk}$  は影を付けたブロック

$$(j, k) = (1, 3), (2, 1), (3, 2)$$

で1となる (他のブロックではゼロ)。よってこれら3つのブロックに  $D_2(a_1)$  のコピーを置けば良い。

なお同様の考察により、添字を逆の順序  $\mu j$  にして行列成分を指定する場合、 $D_6(a_1)$  は  $2 \times 2$  個のブロックに3次元表現  $D_3(a_1)$  を入れた行列

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}D_3(a_1) & -\frac{\sqrt{3}}{2}D_3(a_1) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}D_3(a_1) & -\frac{1}{2}D_3(a_1) \end{pmatrix}$$

になる。

### 1.17 \* 基準モードを見つける

1.16 節では  $D_6$  に  $D_0$  と  $D_1$  が1回ずつ含まれるため、それらによって変換する状態は基準モードであることを見た。そこで基準振動の様子を調べるために、式 (1.94) に従って射影演算子

$$P_a = \frac{n_a}{6} \sum_{g \in S_3} \chi_{D_a}(g) D_6(g) \quad (a = 0, 1, 2)$$

を構成しよう (指標  $\chi_{D_a}(g)$  は 1.13 節の表7を見よ)。すると

$$P_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{12} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (1.115)$$

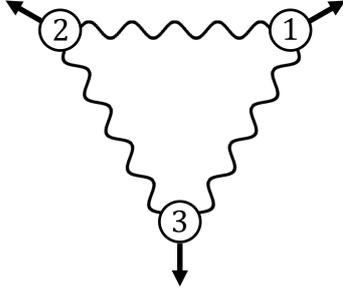


図8 息づかいモード

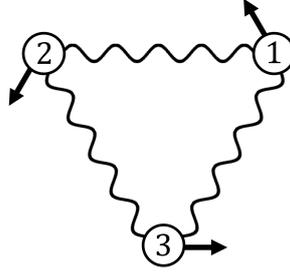


図9 回転モード

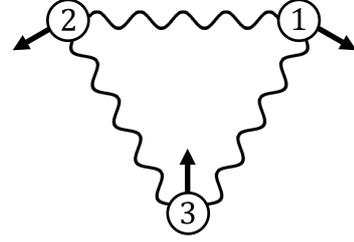


図10 屈曲を伴うモード

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (1.116)$$

となる．[式 (1.115) の (2,6), (4,6) 成分<sup>\*12</sup>の  $-\sqrt{3}/6$  を  $-1/6$  に訂正した．本稿次節で式 (1.115) を確認する．] これは図8のように，三角形が形を保ちながら大きくなったり小さくなったりする運動——いわゆる「息づかいモード (breathing mode)」——に対応する [本稿次節で補足]．

同様に

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{12} & \frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 \\ \frac{1}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{12} & \frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.118-119)$$

であり，これは図9のように三角形が回転する運動に対応する．復元力が存在しないので，これは振動数がゼロの基準モードである．[各質点の変位は，質点に接続するバネの垂直二等分線に直交している.]

さらに

$$P_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad (1.121)$$

である．ところが  $D_2$  は  $D_6$  に2回現れるので， $P_2$  で射影される空間から  $D_2$  で変換する基準モードを見つけるには，さらに物理的な考察が必要となる [1.16 節]．そこで  $x$  方向と  $y$  方向への並進運動が，それぞれ射

\*12 つまり  $(j\mu k\nu) = (1232), (2232)$  成分．

影演算子

$$T_x = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (1.122-123)$$

を持つことに注目しよう [本稿次節で補足]. すると非自明なモードは

$$P_2 - T_x - T_y = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (1.124)$$

で射影される. 例えば単位ベクトル  $(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)^T$  を射影して得られるベクトル

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \quad (1.125)$$

は, 図 10 の運動に対応する. これを  $2\pi/3$  回転したのも線形独立なモードを与える [本稿次節で補足].

## 1.17 節について

■  $P_0$  の式 (1.115) の確認 全ての指標  $\chi_{D_0}(g) = 1$  なので,

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{6} \sum_{g \in S_3} D_6(g) \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \begin{pmatrix} D_2(e) & 0 & 0 \\ 0 & D_2(e) & 0 \\ 0 & 0 & D_2(e) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & D_2(a_1) \\ D_2(a_1) & 0 & 0 \\ 0 & D_2(a_1) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & D_2(a_2) & 0 \\ 0 & 0 & D_2(a_2) \\ D_2(a_2) & 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{pmatrix} 0 & D_2(a_3) & 0 \\ D_2(a_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_2(a_3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_2(a_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_2(a_4) \\ 0 & D_2(a_4) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & D_2(a_5) \\ 0 & D_2(a_5) & 0 \\ D_2(a_5) & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} D_2(e) + D_2(a_4) & D_2(a_2) + D_2(a_3) & D_2(a_1) + D_2(a_5) \\ D_2(a_1) + D_2(a_3) & D_2(e) + D_2(a_5) & D_2(a_2) + D_2(a_4) \\ D_2(a_2) + D_2(a_5) & D_2(a_1) + D_2(a_4) & D_2(e) + D_2(a_3) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる. ここに 2 次元表現  $D_2(g)$  の式 (1.21) を代入すれば良い. 特に教科書の式 (1.115) の訂正に関わる  $(j, k) = (1, 3), (2, 3)$  ブロックについて,

$$D_2(a_1) + D_2(a_5) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_2(a_2) + D_2(a_4) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である.

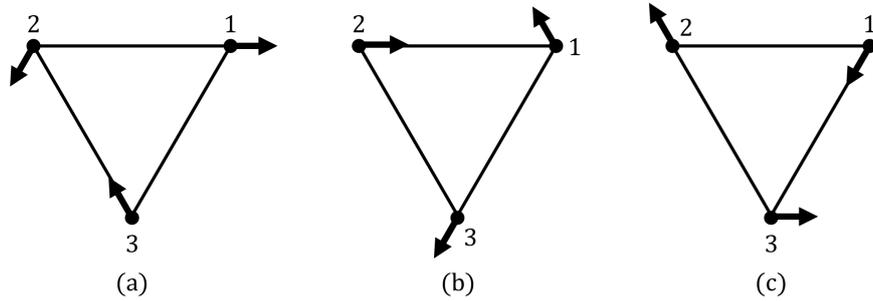


図 11  $e_1, e_3, e_5$  を式 (1.124) で射影して得られる基準振動. 図 10 の基準振動と線形独立ではない.

■図 8 の息づかいモードについて 射影演算子 (1.116) は, そこに現れる縦ベクトル

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & \sin \frac{\pi}{6} & -\cos \frac{\pi}{6} & \sin \frac{\pi}{6} & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$$

を用いて  $P_0 = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$  と書ける. また 6 個の座標 (1.107) を縦ベクトル  $\mathbf{X}$  にまとめると,  $P_0$  で射影されたベクトル

$$P_0\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{X} = \mathbf{A}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{X})$$

は  $\mathbf{A}$  に比例する. すなわち

$$(x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ x_3 \ y_3) \propto (\cos \frac{\pi}{6} \ \sin \frac{\pi}{6} \ -\cos \frac{\pi}{6} \ \sin \frac{\pi}{6} \ 0 \ -1).$$

こうして基準振動の図 8 を得る.

■式 (1.122–123) の射影演算子  $T_x, T_y$  について 例えば  $T_x$  によって射影されるベクトル  $T_x\mathbf{X}$  は

$$(x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ x_3 \ y_3) \propto (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0).$$

なので,  $x$  軸に沿う並進運動を表す.  $T_x$  のゼロでない成分が  $1/3$  であるのは,  $T_x^2 = T_x$  からの要請である.

■射影演算子 (1.124) に対応する基準モードについて 第  $i (= 1, \dots, 6)$  成分が 1 の単位ベクトル  $e_i$  に射影演算子 (1.124) を作用させると, 行列 (1.124) の第  $i$  成分が抜き取られる. よって  $e_2, e_4$  を射影したベクトルは,  $e_6$  の射影 (1.125) の成分を 2 個ずつずらした成分を持ち, それ故, 図 10 の基準モードを角度  $\pm 2\pi/3$  だけ回転した振動に対応する. ところが図 10 とそれを  $+2\pi/3$  回転した図の変位を重わせると, 図 10 を  $-2\pi/3$  回転した図で表されるモードが得られるから, 線形独立なモードは 2 つまでと考えられる. 残る  $e_1, e_3, e_5$  を射影したベクトルは, それぞれ順に図 11 の (a),(b),(c) に示した運動に対応する. ところが図 11 (b) の変位を逆向きにして図 11 (a) の変位と重わせると, 図 10 と同じ振動状態が得られる. よって新しい基準モードは得られないと考えられる.

以上より回転 (図 9) と並進 (射影演算子 (1.122–123)) を除いた純粋な振動は, 図 8 の息づかいモード (1 つ) と図 10 の屈曲を伴うモード (2 つ) の合計 3 つとなる. これは  $n = 3$  個の原子から成る分子の, 同一平面内における基準振動の数が  $2n - 3 = 3$  であることと整合している [7, p.89].

## 1.18 \* $2n + 1$ 角形の対称性

正  $(2n + 1)$  角形の対称性の群は,

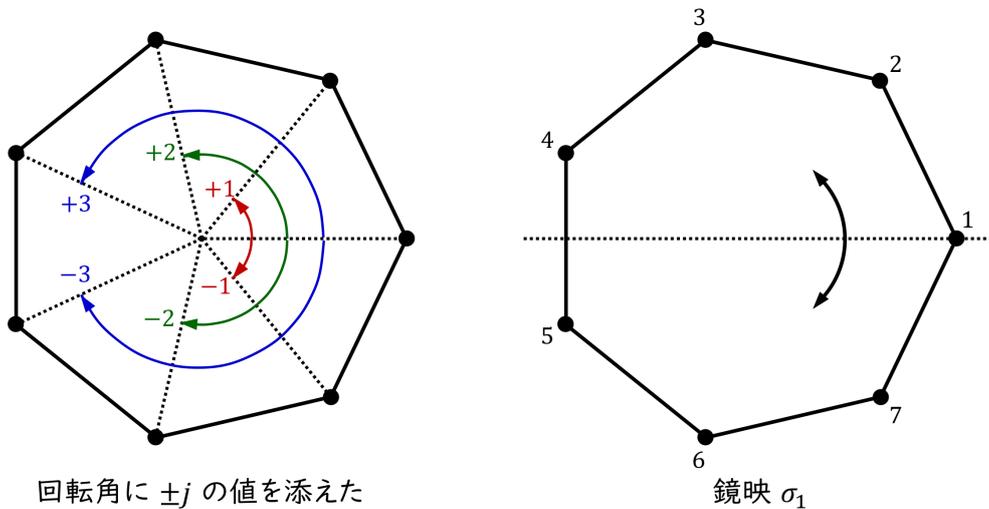


図 12 正  $(2n + 1)$  角形の頂点上における対象物の回転と鏡映. ここでは正 7 角形 ( $n = 3$ ) を描いた.

- 単位元  $e$
- 角度  $\pm \frac{2\pi j}{2n+1}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) [図 12 を参照] の  $2n$  個の回転  $r_{\pm j}$
- 図 12 のような中心と各頂点  $k = 1, \dots, 2n + 1$  を通る線による  $(2n + 1)$  個の鏡映  $\sigma_k (= \sigma_k^{-1})$

から成る. [教科書の式 (1.133) では鏡映  $\sigma = \{\sigma_k\}$  を  $r$  で表している (reflection の頭文字か).] したがって, この群の位数は  $N = 2(2n + 1)$  である.

note この群は  $n = 1$  の場合, 1.7 節のノートで紹介した正三角形の合同変換群  $C_{3v}$  に他ならず, それは  $S_3$  群と同型である. しかし  $n \geq 2$  では, 1.19 節の置換群  $S_{2n+1}$  と同型ではない. 例えば上記の対称変換は, 隣り合う 2 頂点間だけでの対象物の互換を含まない.

次にこの群の共役類について, 教科書をいくらか補足しつつまとめる. まず, 任意の回転  $r_j$  (ここでは  $j = \pm 1, \dots, \pm n$ ) の元  $g (g \neq e)$  による共役は

$$r_k^{-1} r_j r_k = r_j, \quad \sigma_k^{-1} r_j \sigma_k = r_{-j}$$

である. 第 2 式は各頂点上の対象物を適当な対称線  $k$  に関して裏返し, 次いで回転  $r_j$  を施してから, 再び同じ軸  $k$  に関して裏返すと, 正味の結果が逆回転  $r_{-j}$  となることを意味している. よって  $r_j$  は自分自身および逆回転  $r_{-j}$  とのみ共役である. この時点で鏡映  $\sigma_k$  はどの回転  $r_{\pm j}$  とも共役にはなり得ない. また 2 つの鏡映, 例えば  $\sigma_1$  と  $\sigma_3$  を考えよう. 第 3 軸に関する鏡映  $\sigma_3$  を行うには, 等価的に対象物を  $r_{-2}$  回転しておいてから第 1 軸に関する鏡映  $\sigma_1$  を施し, 最後に逆回転  $r_2$  を行えば良い. したがって

$$\sigma_3 = r_2 \sigma_1 r_{-2} = r_2 \sigma_1 r_2^{-1}$$

が成り立つ. これは  $\sigma_1$  と  $\sigma_3$  が共役であることを意味する. 同様にあらゆる鏡映  $\sigma_k$  は互いに共役である. 以上より共役類は

$$\{e\}, \{\sigma_k\}, \{r_{\pm 1}\}, \{r_{\pm 2}\}, \dots, \{r_{\pm n}\}$$

の  $(n + 2)$  個である.

表 9 正  $(2n+1)$  角形の対称変換の指標

	$e$	$\sigma$	$r_{\pm 1}$	$r_{\pm 2}$	$\cdots$	$r_{\pm j}$	$\cdots$	$r_{\pm n}$
$a = 0$	1	1	1	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1
$a = 1$	1	-1	1	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1
$a = (2, m)$	2	0	$2 \cos \frac{2\pi m}{2n+1}$	$2 \cos \frac{4\pi m}{2n+1}$	$\cdots$	$2 \cos \frac{2\pi mj}{2n+1}$	$\cdots$	$2 \cos \frac{2\pi mn}{2n+1}$

各共役類に対する指標は表 9 のようになる [本稿次節で補足]. 最後の行は  $m (= 1, \dots, n)$  の値に応じた,  $n$  個の異なる 2 次元表現の指標を表している.

### 1.18 節について

■表 9 の指標について 表 9 は  $S_3$  群の指標 (表 7) の一般化になっており, 本稿では引き続き 2 つの 1 次元表現を  $a = 0, 1$  で, また  $m (= 1, \dots, n)$  で特徴付けられる  $n$  個の 2 次元表現を  $a = (2, m)$  で表した. ただし  $a = 0$  は恒等表現であり, それ故, 指標は全て 1 である. 表現  $a = 1$  の指標も表 7 と同様である.

2 次元表現  $a = (2, m)$  に話を進めよう. 回転  $r_{\pm j}$  の 2 次元表現には, 式 (1.76) も参考に

$$D_{2,m}(r_{\pm j}) = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi mj}{2n+1} & \mp \sin \frac{2\pi mj}{2n+1} \\ \pm \sin \frac{2\pi mj}{2n+1} & \cos \frac{2\pi mj}{2n+1} \end{pmatrix} \quad (m = 1, \dots, n)$$

を用いることができる. このトレースをとると, 表 9 に示された指標  $2 \cos \frac{2\pi mj}{2n+1}$  が得られる. また単位元  $e$  は 2 次の単位行列で表されるので, 指標が 2 となることは自明である. 最後に残る鏡映  $\sigma \equiv \{\sigma_k\}$  の指標  $\chi_{2,m}(\sigma)$  は, 直交性 (1.79) から求めることができる. 2 つの表現  $(a, b) = (0, (2, m))$  の間で式 (1.79) を適用すると,

$$\frac{1}{N} \left\{ 1 \cdot 1 \cdot 2 + (2n+1) \cdot 1 \cdot \chi_{2,m}(\sigma) + \sum_{j=1}^n 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos \frac{2\pi mj}{2n+1} \right\} = 0$$

となる. ところが

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n 2 \cos \frac{2\pi mj}{2n+1} &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \left\{ \exp \left( +i \frac{2\pi mj}{2n+1} \right) + \exp \left( -i \frac{2\pi mj}{2n+1} \right) \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \underbrace{(\text{中心から } (2n+1) \text{ 個の頂点に向かう位置ベクトルの総和})}_0 - \underbrace{(\text{始線のベクトル})}_1 \right\} \\ &= -1 \end{aligned}$$

なので,  $\chi_{2,m}(\sigma) = 0$  と求まる.

### 1.19 $n$ 個の対象の置換群

$n$  個の対象に対する置換は群を成す. [ほぼ自明. 詳しい確認は文献 [2, pp.27–29] に見られる.] この群を置換群  $S_n$  と呼ぶ. 置換群の任意の元, すなわち任意の置換は, (互いに共通の番号を含まない) 巡回 (サイクル) の積で表される [ほぼ自明]. 例えば  $n = 8$  個の対象の置換は,

$$P = (142)(35)(6)(78) \tag{10}$$

のように表される (各々の丸括弧内で番号を巡回置換する). 同じ記法で  $S_n$  群の単位元は

$$e = (1)(2) \cdots (n)$$

と書ける. 上式 (10) の例では, 1-サイクルが  $k_1 = 1$  個, 2-サイクルが  $k_2 = 2$  個, 3-サイクルが  $k_3 = 1$  個含まれている. 一般に  $j$ -サイクル ( $j$  要素巡回) の個数を  $k_j$  とすると, 和  $\sum_j j k_j$  は式 (10) のように横に並んだ番号の個数を数えていることになるので,

$$\sum_j j k_j = n \quad (1.134)$$

が成り立つ\*13.

$S_n$  の簡単な表現に定義表現がある. それは要素  $j$  を  $k$  に移す置換に対して,  $n$  次元空間の基底  $|j\rangle$  ( $j = 1, \dots, n$ ) が表現演算子  $D$  によって, 対応する置換

$$D|j\rangle = |k\rangle \quad (1.136)$$

を受けように定義されており, したがって行列要素は

$$\langle l|D|k\rangle = \delta_{kl} \quad (1.137)$$

と表される. [我々はこの具体例として, 既に  $S_3$  群の定義表現 (1.96) を見ている.] なお, 定義表現は可約である [章末問題 1.C.].

## 1.20 共役類

1.20 節の前半では, 置換群の共役類が共通の  $\{k_j\}$  で特徴付けられるサイクル構造を持った全ての置換から成ることが, 例示的・説得的に説明されている. 本稿次節ではこのことの, 文献 [2, pp.37-38] に基づく証明を載せておく.

また同じ共役類に属する, すなわち同じ  $\{k_j\}$  で特徴付けられる置換の数は,

$$N(\{k_j\}) = \frac{n!}{1^{k_1} 2^{k_2} \cdots n^{k_n} k_1! k_2! \cdots k_n!} = \frac{n!}{\prod_{j=1}^n j^{k_j} \cdot k_j!} \quad (1.141)$$

で与えられる [本稿次節で確認].

### 1.20 節について

■置換群の共役類 [2, pp.37-38]  $n$  個の対象の置換は, 互いに同一文字を含まない巡回の積

$$P = (a_1 \cdots a_{\lambda_1})(b_1 \cdots b_{\lambda_2}) \cdots (c_1 \cdots c_{\lambda_n}) \quad (11)$$

で表せる. ここで一般性を失うことなく,

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = n \quad (12)$$

とできる. このような整数の組  $[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$  を整数  $n$  の分割 (partition) という\*14. 条件 (12) の下ではいくつかの  $\lambda_i$  はゼロとなり得る. そこで式 (11) における  $\lambda_i = 0$  の巡回は  $(0) = 1$  と約束しておく.

\*13 ここで  $j$  の上限は高々  $n$  なので, 和 (や積) の範囲は  $j = n$  までとして良く,  $P$  に  $j = n, n-1, \dots$  要素巡回が含まれない場合, 単に  $k_j = 0$  とおけば以降の式はそのまま成り立つ.

\*14 整数の組  $\{\lambda_j\}$  は置換のサイクル構造  $\{k_j\}$  と 1 対 1 に対応するため, 以下では  $\{\lambda_j\}$  を考える.

さて、任意の置換  $\mu \in S_n$  による置換 (11) の共役  $\mu P \mu^{-1}$  もまた、分割  $\{\lambda_j\}$  を持つ元

$$P' = (a'_1 \cdots a'_{\lambda_1})(b'_1 \cdots b'_{\lambda_2}) \cdots (c'_1 \cdots c'_{\lambda_n}) \quad (13)$$

となることを証明しよう。

$$P' = \mu(a_1 \cdots a_{\lambda_1})\mu^{-1} \cdot \mu(b_1 \cdots b_{\lambda_2})\mu^{-1} \cdots \mu(c_1 \cdots c_{\lambda_n})\mu^{-1}$$

なので、1つの巡回  $(a_1 \cdots a_\lambda)$  について

$$\mu(a_1 \cdots a_\lambda)\mu^{-1} = (a'_1 \cdots a'_\lambda) \quad (14)$$

を示せば、式 (13) が成り立つ。そこで  $(a_1 \cdots a_\lambda)$  に含まれない文字を  $\bar{a}_{\lambda+1}, \dots, \bar{a}_n$  として、

$$\pi \equiv (a_1 \cdots a_\lambda) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_\lambda & \bar{a}_{\lambda+1} & \cdots & \bar{a}_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 & \bar{a}_{\lambda+1} & \cdots & \bar{a}_n \end{pmatrix}$$

と任意の置換

$$\mu = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \bar{a}_n \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \bar{a}_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

に対して上式 (14) を示せば充分である。

$$\mu\pi\mu^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \bar{a}_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \pi \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & \bar{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

において、右辺の中央に並ぶ3つの巡回の積は

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \bar{a}_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_\lambda & \bar{a}_{\lambda+1} & \cdots & \bar{a}_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 & \bar{a}_{\lambda+1} & \cdots & \bar{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & \bar{a}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_2 & a_3 & \cdots & a_\lambda & a_1 & \bar{a}_{\lambda+1} & \cdots & \bar{a}_n \\ 2 & 3 & \cdots & \lambda & 1 & \lambda+1 & \cdots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \lambda-1 & \lambda & \lambda+1 & \cdots & n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_\lambda & a_1 & \bar{a}_{\lambda+1} & \cdots & \bar{a}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \lambda & \lambda+1 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & 1 & \lambda+1 & \cdots & n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と計算される。よって同様の変形を繰り返せば

$$\begin{aligned} \mu\pi\mu^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \lambda & \lambda+1 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & 1 & \lambda+1 & \cdots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & \cdots & \lambda & 1 & \lambda+1 & \cdots & n \\ d_2 & d_3 & \cdots & d_\lambda & d_1 & d_{\lambda+1} & \cdots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_{\lambda-1} & d_\lambda & d_{\lambda+1} & \cdots & d_n \\ 2 & 3 & \cdots & \lambda & 1 & \lambda+1 & \cdots & n \end{pmatrix} \\ &= (d_1 d_2 \cdots d_\lambda) \end{aligned}$$

となるので、式 (14) が導かれる。

逆に同一の分割  $\{\lambda_j\}$  を持つ置換 (11),(13) は共役である。実際これらは

$$\mu = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{\lambda_1} & b_1 & \cdots & b_{\lambda_2} & \cdots \\ a'_1 & \cdots & a'_{\lambda_1} & b'_1 & \cdots & b'_{\lambda_2} & \cdots \end{pmatrix}$$

を用いて、

$$\begin{aligned} & \mu P \mu^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{\lambda_1} & b_1 & \cdots & b_{\lambda_2} & \cdots \\ a'_1 & \cdots & a'_{\lambda_1} & b'_1 & \cdots & b'_{\lambda_2} & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{\lambda_1} & b_1 & \cdots & b_{\lambda_2} & \cdots \\ a_2 & \cdots & a_1 & b_2 & \cdots & b_1 & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_1 & \cdots & a'_{\lambda_1} & b'_1 & \cdots & b'_{\lambda_2} & \cdots \\ a_1 & \cdots & a_{\lambda_1} & b_1 & \cdots & b_{\lambda_2} & \cdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{\lambda_1} & b_1 & \cdots & b_{\lambda_2} & \cdots \\ a'_1 & \cdots & a'_{\lambda_1} & b'_1 & \cdots & b'_{\lambda_2} & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{\lambda_1} & a'_1 & \cdots & a'_{\lambda_1-1} & b'_{\lambda_2} & b'_1 & \cdots & b'_{\lambda_2-1} & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{\lambda_1} & b_1 & b_2 & \cdots & b_{\lambda_2} & \cdots \end{pmatrix} = P' \end{aligned}$$

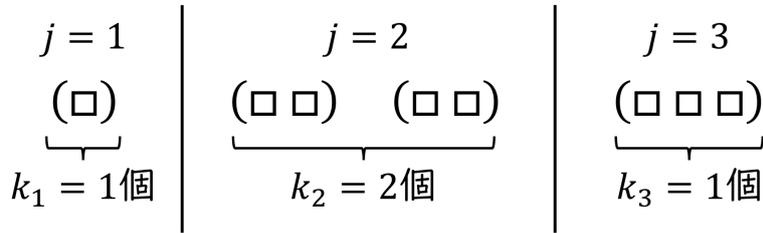


図 13  $j$ -サイクルの個数  $\{k_j\}$  で特徴付けられる置換の形

で関係付けられる.

以上より置換群の各々の共役類はちょうど, 同じ構造  $\{\lambda_j\}$  を持つ全ての置換から成る.

■式 (1.141) の導出 共通の  $\{k_j\}$  を持つ置換  $P$  の数  $N(\{k_j\})$  を調べよう [2, pp.40–41]. 図 13 の図式において, 縦棒で仕切られた各部屋  $j$  に  $jk_j$  個の番号を配る場合の数は

$$C(\{k_j\}) = \frac{n!}{\prod_{j=1}^n (jk_j)!}$$

である. 次いで各部屋  $j$  において,  $\square$  で表した空席に  $jk_j$  個の番号を配置しよう. 各々の丸括弧内で番号を巡回しても, 得られる置換は変わらない. ところが番号を巡回する方法は, 1 つの丸括弧につき  $j$  通り, したがって  $k_j$  個の丸括弧では  $j^{k_j}$  通りある. また丸括弧ごと番号を入れ替えても, 得られる置換は変わらない. ところが  $k_j$  個の丸括弧を入れ替える方法は  $k_j!$  通りある. 以上を踏まえて重複を取り除くと, 独立な置換に対応する, 部屋  $j$  における番号の配置の総数は

$$\Lambda_j = \frac{(jk_j)!}{j^{k_j} \cdot k_j!}$$

だけある. よって,

$$N(\{k_j\}) = C(\{k_j\}) \cdot \prod_{j=1}^n \Lambda_j = \frac{n!}{\prod_{j=1}^n j^{k_j} \cdot k_j!} : (1.141)$$

を得る.

## 1.21 ヤング図形

図 14 のように  $n$  個の対象の置換に含まれる  $j$ -サイクルの各々に, 1 列に並んだ  $j$  個の箱を対応させ, それらを頭の位置をそろえて,  $j$  の減る順に右方向へ並べて得られる図を **Young (ヤング) 図形** という\*15. Young 図形は  $n$  個の箱から成る. Young 図形はそれぞれ異なるサイクル構造を, したがって異なる共役類を表し, それ故, 既約表現と一対一に対応する [1.13 節の式 (7)].

恒等変換は常にそれ自身で共役類であり,  $n = 4$  では図 15 のような Young 図形で表される.

\*15 Young 図形 (Young diagram) の箱に 1 から  $n$  までの番号を入れたものを数学では Young 盤 (Young Tableaux) と呼ぶ. しかし原著ではこれらを区別していないので, いずれも Young 図形と訳す (p.39 訳者注).

サイクル構造  $k_5 = 1, k_3 = 2, k_2 = 1, k_1 = 2$  を持つ  $n = 15$  要素の置換  
 $P = (\circ\circ\circ\circ\circ)(\circ\circ\circ)(\circ\circ\circ)(\circ\circ)(\circ)(\circ)$

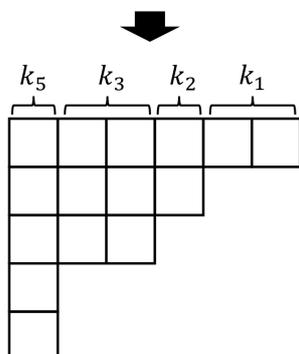


図 14 Young 図形の一例

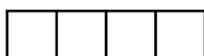


図 15 恒等変換を表す、縦 (列) の長さが 1 の Young 図形

### 1.22 例——昔なじみの $S_3$

$S_3$  群の共役類は  $\{e\}, \{a_3, a_4, a_5\}, \{a_1, a_2\}$  であり [1.10 節], それらのサイクル構造は順に図 16 (a),(b),(c) の Young 図形で表される. Young 図形から改めて, それぞれの元の数

$$(a) \frac{3!}{3!} = 1, \quad (b) \frac{3!}{2} = 3, \quad (c) \frac{3!}{3} = 2 \quad (1.147)$$

が求められる.

note : 式 (1.147) について いずれも 3 つの箱に 1 から 3 までの数字を入れる方法は  $3!$  通りある. このうち

- (a) 3 箇所の数字を入れ替えた  $3!$  通りの数の並びは全て恒等変換を表す.
- (b) 1 列目に並んだ 2 つの数を入れ替えて得られる 2 通りの数の割り当ては同じ互換を表す.
- (c) 1 列に並んだ 3 つの数字を巡回置換して得られる 3 通りの数の並びは同じ巡回置換を表す.

以上より式 (1.147) 分母の因子を理解できる. なお式 (1.147) の結果はもちろん, 冒頭に示した元の個数を正しく再現していることが見て取れる.

### 1.23 もう一つの例 —— $S_4$

$S_4$  の共役類は [整数  $n = 4$  を分割する方法 (1.20 節のノート) を考えると], 図 17 の Young 図形で表される. それぞれの元の数は順に

$$(a) \frac{4!}{4!} = 1, \quad (b) \frac{4!}{4} = 6, \quad (c) \frac{4!}{8} = 3, \quad (d) \frac{4!}{3} = 8, \quad (e) \frac{4!}{4} = 6 \quad (1.149)$$

である.

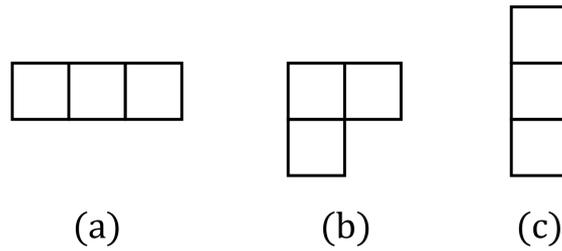


図 16  $S_3$  の共役類を表す Young 図形

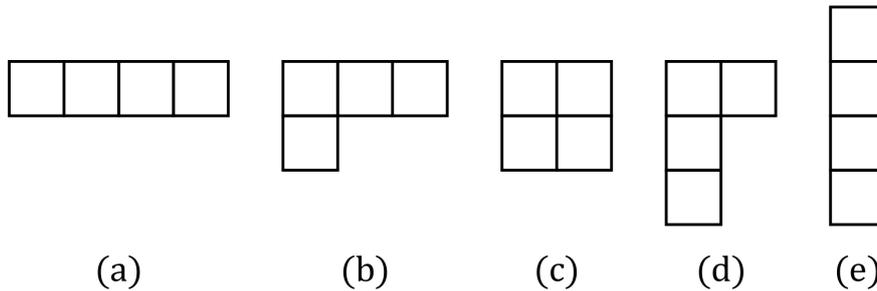


図 17  $S_4$  の共役類を表す Young 図形

note : 式 (1.149) について 図 17 の Young 図形 (b) では 1 列目の 2 箱の間, 2 列目と 3 列目の 2 箱の間で数字を入れ替えただけの同じ置換が  $2^2 = 4$  通りある. Young 図形 (c) では 1 列目の 2 箱の間, 2 列目の 2 箱の間, 1 列目と 2 列目の間で数字を入れ替えただけの同じ置換が  $2^3 = 8$  通りある. これらが式 (1.149) 分母の因子の起源である.

### 1.24 \* ヤング図形と $S_n$ の表現

我々は  $n$  個の箱を持った Young 図形が  $S_n$  の既約表現に対応していることを見た [1.21 節]. ここでは Young 図形を用いて, 実際に  $S_n$  の既約表現を構成する方法を説明する. 与えられた Young 図形に 1 から  $n$  までの整数を割当てる方法は  $n!$  通りある. これらを  $S_n$  の正則表現 [基底  $|g\rangle$  もまた元の数  $n!$  だけある] の作用する状態に同定するところから始めよう. まず Young 図形に記入された数字を, 本を読むときと同様に左から右へ, そして上から下へたどる順序に並び替えて

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 5 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 7 & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} \rightarrow |6532174\rangle \tag{1.151}$$

のように翻訳する. 右辺は置換

$$1234567 \rightarrow 6532174 \tag{1.152}$$

に対応した状態である.

note これはもとの Young 図形 (1.151) の表す置換  $(614)(57)(3)(2)$  とはもはや異なることに注意する.

次に得られた状態を,

1. 各行の数字に関して対称化し,
2. 各列の数字に関して反対称化する.

例えば Young 図形

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \rightarrow |123\rangle$$

に対しては, 1 行目の数字 1 と 2 を入れ替えた状態と足して対称な状態

$$|123\rangle + |213\rangle \tag{1.153'}$$

とし, さらに上式 (1.153') で Young 図形の 1 列目の数字 1 と 3 を入れ替えた状態との差を作れば良い:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \rightarrow |123\rangle + |213\rangle - |321\rangle - |231\rangle. \tag{1.154}$$

1 つの Young 図形に対する  $n!$  通りの数字の割り当ての各々について, このようにして構成した状態の組は, 実は既約表現として変換する正則表現の部分空間を張る.

例えば  $S_3$  の共役類を表す Young 図形 16 において,

- 図形 (a) は完全対称な状態を与え, 自明な表現として変換する 1 次元部分空間に対応している.
- 図形 (c) は完全反対称な状態を与え, 互換が  $-1$  で表される表現として変換する 1 次元部分空間に対応している.

残る図形 (b) について, 上式 (1.154) で数字を入れ替えて得られる 3! 個全ての状態は

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \rightarrow |123\rangle + |213\rangle - |321\rangle - |231\rangle, \tag{1.158}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \rightarrow |321\rangle + |231\rangle - |123\rangle - |213\rangle, \tag{1.159}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \rightarrow |231\rangle + |321\rangle - |132\rangle - |312\rangle, \tag{1.160}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \rightarrow |132\rangle + |312\rangle - |231\rangle - |321\rangle, \tag{1.161}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \rightarrow |312\rangle + |132\rangle - |213\rangle - |123\rangle, \tag{1.162}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \rightarrow |213\rangle + |123\rangle - |312\rangle - |132\rangle \tag{1.163}$$

である. 状態の構成方法からして, 同じ列の 2 つの数字を入れ替えると状態は符号を変える. すなわち,

$$(\text{式 (1.158)}) = -(\text{式 (1.159)}), \quad (\text{式 (1.160)}) = -(\text{式 (1.161)}), \quad (\text{式 (1.162)}) = -(\text{式 (1.163)}).$$

また巡回置換でつながる 3 つの状態は, 足すとゼロになることが見て取れる:

$$(\text{式 (1.158)}) + (\text{式 (1.160)}) + (\text{式 (1.162)}) = 0, \quad (\text{式 (1.159)}) + (\text{式 (1.161)}) + (\text{式 (1.163)}) = 0.$$

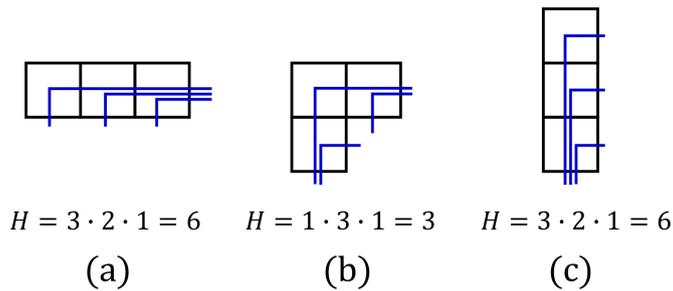


図 18  $S_3$  の共役類を表す Young 図形 16 に対するフック (青線) とフック因子  $H$

すると式 (1.158–163) は独立な状態が 2 つまでだから、これらの張る部分空間は 2 次元で、 $S_3$  の 2 次元既約表現として変換する。

note 以上の結果は既に 1.13 節で見た  $S_3$  の既約表現に整合している。

Young 図形に対応した既約表現の次元は

$$\frac{n!}{H} \tag{1.164}$$

で与えられる。ここで「フック因子」 $H$  について説明する。ある列の底から垂直に壁を昇ってゆき、ある箱で 1 度だけ右折してその行の箱を横切っていく、かぎ形の線をフックという。フック因子は

$$H \equiv \prod_{\text{全フック}} (\text{フックが通過する箱の数 } h)$$

で定義される。

note  $S_3$  の共役類を表す Young 図形 16 に対するフックとフック因子  $H$  を図 18 に示す。このとき公式 (1.164) は確かに対応する既約表現の正しい次元 (順に 1,2,1) を与えている。

最終段落を引用する：

有限群やその表現に関してもっと述べたいこともあるが、我々の第一の主題は連続群であるので、差し当たり有限群を離れる。しかしながら我々は、置換群の表現が連続群の表現において重要な役割を果たすことを見るだろう。それ故、時折  $S_n$  に戻る。

## 第2章 リー群

本章はある程度、文献 [8, pp.137-140] の復習にあたる。ただしコンパクト Lie 代数は 2.4 節ではじめて導入される。

### 2.1 生成子

群の元  $g \in G$  が  $N$  個の実パラメータ  $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$  になめらかに依存し、 $\alpha = 0$  で単位元と連続的につながる場合を考える\*<sup>16</sup>。

$$g(\alpha)|_{\alpha=0} = e. \quad (2.2)$$

このとき群の表現  $D(\alpha)$  もまた

$$D(\alpha)|_{\alpha=0} = 1 \quad (2.3)$$

を満たす。そこで単位元の近傍では無限小パラメータの組  $\{d\alpha_a\}$  の 1 次までを考慮し、

$$D(d\alpha) = 1 + id\alpha_a X_a + \dots \quad (2.4)$$

と書ける (繰り返された添字で和をとる)。ここに各係数

$$X_a \equiv -i \frac{\partial}{\partial \alpha_a} D(\alpha) \Big|_{\alpha=0} \quad (a = 1, \dots, N) \quad (2.5)$$

は群の生成子 (generators) と呼ばれる。異なる群の元を区別するのに全てのパラメータ  $\{\alpha_a\}$  が実際必要ならば、 $X_a$  たちは独立である。表現 (2.4) がユニタリーの場合には、 $X_a$  は Hermite 演算子となることが見て取れる。

ソーファス・リー (Sophus Lie) は、表現に全く言及せず抽象的な群において生成子が実際どのように定義できるかを示した。彼の仕事の結果、この種の群はリー群 (Lie group) と呼ばれる。私はリー群についてそのように語るつもりはない。なぜなら、ここでは群よりも、その表現の方に興味があるからである。しかし、それは美しい理論的構築物であり、未だ見たことがない人は一度見ておきたいと思うかもしれない。(p.45, 1.9-14)

有限の  $\alpha$  に対する表現は、無限小  $d\alpha_a = \alpha_a/k$  ( $k \gg 1$ ) の群の元に対する表現 (2.4) の冪乗

$$D(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{i\alpha_a X_a}{k} \right)^k = e^{i\alpha_a X_a} \quad (2.7)$$

で定義するのが便利である。このように書くと  $D(\alpha)$  が一意的に定まるような印象を与えかねない。しかしながら恒等元から離れるにつれて、群の元をパラメータ化するやり方には膨大な自由度が生じるのであり、我々の採用した方法 (2.7) は指数パラメータ化と呼ばれる\*<sup>17</sup>。

\*<sup>16</sup> ここで互いに近い  $\alpha$  で記述される元  $g(\alpha)$  は、群の元の空間でも何らかの意味で「互いに近い」ことが想定されている。

\*<sup>17</sup> 数学では式 (2.7) の  $(\alpha_a)$  を第一種標準座標系と呼ぶ (p.45 訳者注)。

## 2.2 リー代数

単位元から決まった方向  $\{\alpha_a\}$  に離れていく元

$$U(\lambda) = e^{i\lambda\alpha_a X_a} \quad (2.8)$$

の掛け算則は単純である：

$$U(\lambda_1)U(\lambda_2) = U(\lambda_1 + \lambda_2). \quad (2.9)$$

しかしながら一般には異なる生成子が交換しないため、

$$e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} \neq e^{i(\alpha_a + \beta_b) X_a} \quad (2.10)$$

である。とは言え、上式 (2.10) 左辺の指数の積もまた群の表現だから、生成子の適当な指数関数で書けるはずである：

$$e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} = e^{i\delta_a X_a}. \quad (2.11)$$

このとき生成子たちは交換関係の下で代数を成していなければならない、つまり適当な定数  $f_{abc}$  を用いて

$$[X_a, X_b] = i f_{abc} X_c \quad (2.18)$$

と書けることが分かる (証明は下記)。代数における交換子は、群に対する掛け算則に類似の役割を果たしている。

**証明** 上式 (2.11) の対数をとると、パラメータ  $\alpha, \beta$  に関して 2 次までの計算では

$$i\delta_a X_a = \ln(1 + K) = K - \frac{1}{2}K^2 + \dots \quad (2.12)$$

において

$$\begin{aligned} K &\equiv e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} - 1 = \left(1 + i\alpha_a X_a - \frac{1}{2}(\alpha_a X_a)^2 + \dots\right) \left(1 + i\beta_b X_b - \frac{1}{2}(\beta_b X_b)^2 + \dots\right) - 1 \\ &= i\alpha_a X_a + i\beta_b X_b - \alpha_a X_a \beta_b X_b - \frac{1}{2}(\alpha_a X_a)^2 - \frac{1}{2}(\beta_b X_b)^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.13)$$

なので、

$$i\delta_a X_a = i\alpha_a X_a + i\beta_b X_b - \alpha_a X_a \beta_b X_b - \frac{1}{2}(\alpha_a X_a)^2 - \frac{1}{2}(\beta_b X_b)^2 + \frac{1}{2}(\alpha_a X_a + \beta_b X_b)^2 + \dots \quad (2.14)$$

$$= i\alpha_a X_a + i\beta_b X_b - \frac{1}{2}\alpha_a \beta_b [X_a, X_b] + \dots \quad (2.15)$$

を得る。上式 (2.15) において生成子が交換するなら ( $[X_a, X_b] = 0$ )、式 (2.11) は [期待されるように] 単なる指数法則に帰着する (式 (2.10) の等号が成り立つ)。式 (2.15) を移項すると

$$\alpha_a \beta_b [X_a, X_b] = -2i(\delta_c - \alpha_c - \beta_c) X_c + \dots \equiv i\gamma_c X_c \quad (2.16)$$

となる。これが任意の  $\alpha$  と  $\beta$  に対して成り立つためには、最右辺の  $\gamma_c$  も  $\alpha_a \beta_b$  の線形結合でなければならない。そこで  $f_{abc}$  を定数として

$$\gamma_c = \alpha_a \beta_b f_{abc} \quad (2.17)$$

と書き、上式 (2.16) に代入すると式 (2.18) を得る。

なお生成子が交換する場合、式 (2.16) において  $\gamma_c = 0$  である。ところが式 (2.16) 第 2 の等号を変形すると

$$\delta_a = \alpha_a + \beta_a - \frac{1}{2}\gamma_a + \cdots \quad (2.20)$$

なので、 $\gamma_a$  やより高次の項が消えれば、やはり式 (2.10) の等号が成り立つことになる。

**注意** 以上の証明では元  $e^{i\alpha_a X_a}$  が群を成し、滑らかで Taylor 展開を許すことだけを用いた。

$\alpha$  と  $\beta$  の高次の項に進んでも、掛け算則 (2.11) を保持するには交換関係 (2.18) だけで充分であり、さらなる条件は必要にならない。実際、交換関係 (2.18) の右辺の因子  $f_{abc}$  は実質的に群の掛け算則全てを要約しており [以上、章末問題 3.C. を参照]、群の構造定数 (structure constant) と呼ばれる。交換関係 (2.18) において  $[X_a, X_b] = -[X_b, X_a]$  なので、構造定数には

$$f_{abc} = -f_{bac} \quad (2.19)$$

が課される。

交換子関係 (2.18) は、群のリー代数と呼ばれる。リー代数は構造定数によって完全に決定される。群の各表現は、明らかな仕方で代数の表現を与え、構造定数は、群の掛け算則と滑らかさだけで決まるので、全ての表現に対し同じである [後の構造定数の線形変換 (2.32) にも関わらず]。同値性や、既約・可約性は、群から代数へ変更なしに移される。(p.48, 1.19-22)

最後に Hermite な  $X$  たちを持つユニタリー表現に対して、 $f_{abc}$  たちは実数になる。このことは式 (2.18) の Hermite 共役

$$-if_{abc}^* X_c = [X_a, X_b]^\dagger = [X_b, X_a] = if_{bac} X_c = -if_{abc} X_c \quad (2.21)$$

の両辺を比較すれば分かる。我々はユニタリー表現を持つ群に興味があるので、以降  $f_{abc}$  を実数と仮定する。

## 2.3 ヤコビ恒等式

生成子の行列表現は **Jacobi 恒等式**

$$[X_a, [X_b, X_c]] + \text{巡回置換項} = 0 \quad (2.22)$$

を満たす。[実際 Jacobi 恒等式は任意の演算子に対する交換子に対して成立する。] 式 (2.22) は交換関係に対する積の規則

$$[X_a, X_b, X_c] = [X_a, X_b]X_c + X_b[X_a, X_c] \quad (2.24)$$

と似た形

$$[X_a, [X_b, X_c]] = [[X_a, X_b], X_c] + [X_b, [X_a, X_c]] \quad (2.23)$$

に書き直すこともできる。

## 2.4 随伴表現

Jacobi 恒等式 (2.22) において、代数 (2.18) より

$$[X_a, [X_b, X_c]] = if_{bcd}[X_a, X_d] = -f_{bcd}f_{ade}X_e \quad (2.25)$$

であり, 各  $X_e$  は独立である. よって Jacobi 恒等式 (2.26) は構造定数に対するそれ

$$f_{bcd}f_{ade} + f_{abd}f_{cde} + f_{cad}f_{bde} = 0 \quad (2.26)$$

に書き換えられる. ところがこれは

$$[T_a]_{bc} \equiv -if_{abc} \quad (2.27)$$

で定義される一組の行列  $T_a$  も, 交換関係

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c \quad (2.28)$$

を満たすことを意味する. よって行列  $T_a$  (したがって構造定数自身) が随伴表現と呼ばれる, 代数の 1 つの表現を成す. 随伴表現の次元 (それが働く線形空間の次元) は [式 (2.27) の添字  $b, c$  がとる値の範囲だから] ちょうど独立な生成子  $X_a$  の個数と同じで, それは群の元を記述するのに必要な実パラメータの個数である.

**note**  $X_a$  を  $N$  次の Hermite 行列とすると, それは  $N^2$  個の実数で特徴付けられる. よって基本表現・定義表現として  $N^2$  個の独立な生成子  $X_a$  ( $a = 1, \dots, N^2$ ) を採ることができる.

$f_{abc}$  は実数なので, 随伴表現の生成子 (2.27) は純虚数であることにも注意する.

随伴表現の生成子  $T_a$  に対する便利なスカラー積として, トレース

$$\text{Tr}(T_a T_b) \quad (2.29)$$

を導入したい.  $X_a$  に線形変換を行えば, これを対角形

$$\text{Tr}(T_a T_b) = k^a \delta_{ab} \quad (a \text{ で和をとらない}) \quad (2.36)$$

に持って行くことができる.

**証明**  $X_a$  の線形変換

$$X_a \rightarrow X'_a = L_{ab}X_b \quad (2.30)$$

に伴い

$$[X'_a, X'_b] = iL_{ad}L_{be}f_{dec}X_c = iL_{ad}L_{be}f_{deg}(L^{-1})_{gh}L_{hc}X_c = iL_{ad}L_{be}f_{deg}(L^{-1})_{gc}X'_c \quad (2.31)$$

となるので, 構造定数もまた線形変換

$$f_{abc} \rightarrow f'_{abc} = L_{ad}L_{be}f_{deg}(L^{-1})_{gc} \quad (2.32)$$

を受ける. これは式 (2.27) を通じて,  $T_a$  の再定義

$$[T_a]_{bc} \rightarrow [T'_a]_{bc} = L_{ad}L_{be}[T_d]_{eg}(L^{-1})_{gc}, \quad (2.33)$$

$$\text{i.e.} \quad T_a \rightarrow T'_a = L_{ad}L T_d L^{-1} \quad (2.34)$$

を意味する. ところが上式 (2.34) の相似変換の部分はトレースに効かないので

$$\text{Tr}(T_a T_b) \rightarrow \text{Tr}(T'_a T'_b) = L_{ac}L_{bd}\text{Tr}(T_c T_d) \quad (2.35)$$

となる. また  $\text{Tr}(T_a T_b)$  は実対称行列なので [ $T_a$  は純虚数], 適当な直交行列  $L$  を用いればトレースを対角化できる.

対角的な  $L$  による変換の自由度を利用して、さらに式 (2.36) のゼロでない係数  $k^a$  の絶対値を 1 にできる。しかし式 (2.35) に  $L$  は 2 乗で入っているため、 $k^a$  たちの符号を変えることはできない。そこで我々は  $k^a$  たちが正であることを仮定する。この仮定はコンパクト Lie 代数を定義する<sup>\*18</sup>。このとき適当な  $\lambda > 0$  を用いて

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \lambda \delta_{ab} \quad (2.37)$$

として良い。

**note** 実は Killing 形式と呼ばれる“内積”  $\text{Tr}(T_a T_b)$  が正定値であるのは、群がコンパクトな場合だけである [8, p.139]。文献 [1, p.55, pp.88-89] ではコンパクト群をパラメータの変域が有限の群 (例えば  $U(n)$  や  $O(n)$ ) として定義した上で、Lie 代数の基底  $T_a$  に対する Killing 形式  $g_{ab} = (T_a, T_b)$  (対称行列より対角化できる) がコンパクト群に対して、(半) 正定値となることを示している。

すると構造定数は

$$f_{abc} = -i\lambda^{-1} \text{Tr}([T_a, T_b] T_c) \quad (2.38)$$

と書ける [右辺に式 (2.28) を代入して式 (2.37) を用いると確かめられる]。右辺は添字  $a, b$  に関する反対称性 (2.19) を自動的に満たしている。またトレースの巡回対称性と合わせると、構造定数は完全反対称であることが分かる。

$$f_{abc} = f_{bca} = f_{cab} = -f_{bac} = -f_{acb} = -f_{cba}. \quad (2.41)$$

これは式 (2.27) より随伴表現  $T_a$  が反対称であることも意味する。ところが  $T_a$  は純虚数だから、Hermite 行列となる。

## 2.5 単純代数と単純群

不変部分代数とは、生成子の部分集合で、その代数の任意の元との交換関係の下で自分自身に写されるものをいう。すなわち、 $X$  を不変部分代数の任意の生成子、 $Y$  を全体の代数の任意の生成子とすれば、 $[Y, X]$  はその不変部分代数の生成子となる。

指数関数の肩にのせれば、不変部分代数は不変部分群 [1.10 節] を生成する。

**証明**

$$h = e^{iX}, \quad g = e^{iY} \quad (2.42)$$

とおくと

$$g^{-1} h g = e^{-iY} e^{iX} e^{iY} = e^{-iY} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iX)^n}{n!} \right) e^{iY} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (e^{-iY} iX e^{iY})^n = e^{iX'} \quad (2.43')$$

となる。ただし最後の等号では

$$X' \equiv e^{-iY} X e^{iY} = X - i[Y, X] - \frac{1}{2}[Y, [Y, X]] + \dots \quad (2.44)$$

<sup>\*18</sup>  $k^a$  たちのいくつかを負にする代数は、非自明な有限次元ユニタリー表現を持たない (Lorentz 群はその一例, 教科書 p.51 脚注 4)。

を定義しており，上式 (2.44) 第 2 の等号は Baker-Hausdorff の公式による\*19．上式 (2.44) 最右辺の各交換子は部分代数に入っているので， $e^{iX'}$  はその部分群に入っているから，示された。

全体の代数，および 0 (だけから成る代数) は，自明な部分代数である．自明でない不変部分代数を 1 つも含まない代数は，単純 (simple) と呼ばれる．単純代数は単純群を生成する．

式 (2.37) を満たす単純 Lie 代数の随伴表現は既約である．

**証明** 背理法にて証明する．既約でないと仮定すると，随伴表現の中に不変部分空間が存在する [1.4 節の定義より]．そこで不変部分集合を張る生成子が  $T_r$  ( $r = 1, \dots, K$ )，残りの生成子が  $T_x$  ( $x = K+1, \dots, N$ ) となる適当な基底がとれる．このとき

$$[T_a]_{xr} = 0, \quad \therefore f_{axr} = 0 \quad (2.46)$$

が，全ての  $a, x, r$  に対して成り立たねばならない．

**note** 式 (2.46) の第 1 式は  $T_a$  がブロック対角な形であることを意味する．これは生成子の張る空間における内積 (2.37) が，異なる種類の生成子  $T_r, T_x$  の張る空間の直交性

$$\text{Tr}(T_r T_x) = 0$$

を意味することと関係していると考えられる (ここで式 (2.37) の仮定を用いた)．第 2 式への書き換えは随伴表現の定義式 (2.27) による．

すると構造定数の完全反対称性とより， $r$  添字が 2 つと  $x$  添字が 1 つ，および  $r$  添字が 1 つと  $x$  添字が 2 つの構造定数は消える．よってゼロでない構造定数は，3 つの添字が全て  $r$  添字か，全て  $x$  添字の場合だけとなる．これは代数が 2 つの非自明な不変部分代数に分かれることを意味し，単純代数の仮定に反するから，示された．

群 (あるいは興味のある部分群) の全ての生成子と可換な 1 つの生成子から成る特別な Abel 不変部分代数を議論することが，しばしば有用になる．我々はそのような代数を，群の  $U(1)$  因子と呼ぶ．Abel 不変部分代数を持たない代数は半単純 (semisimple) と呼ばれる．我々は特に断らない限り半単純代数を議論し，ユニタリー演算子による表現を扱うことにする．

**note** 文献 [1, p.88] では一般に任意のコンパクト Lie 群が単純 Lie 群と 1 次元ユニタリー群  $U(1)$  の直積となることを証明した．また文献 [8, p.138] では  $U(N) \simeq U(1) \times SU(N)$  を手際良く説明している．これについて簡単に補足しておく． $T_0 = k\mathbf{1}$  は明らかに他の  $T_a$  と交換するため， $\{T_a\}$  を基底とする Lie 代数は  $T_0$  を基底とする Lie 代数とその他の  $T_a$  を基底を持つ Lie 代数の直和に分解される．このとき対応する Lie 群は，各々の Lie 代数が生成する Lie 群の直積  $U(N) \simeq U(1) \times SU(N)$  になる (記号「 $\simeq$ 」は同型を表す)．変換群の元が生成子の指数で表される場合は簡単である．実際  $[T_0, T_a] = 0$  のとき “指数法則”

$$\exp\left(i\sum_a \theta^a T_a\right) = \exp(i\theta^0 T_0) \exp\left(i\sum_{a(\neq 0)} \theta^a T_a\right)$$

\*19 これを理解する簡単な方法は，

$$X'(\epsilon) = e^{-i\epsilon Y} X e^{i\epsilon Y} \quad (2.45)$$

を考えて， $\epsilon$  で Taylor 展開した後  $\epsilon = 1$  と置くことである．微分する毎に，交換子がもう 1 つ現れる (教科書 p.52)．

が成り立つ。これは  $U(1)$  群と  $SU(N)$  群の元の組 (積 [2, pp.24–25], 表現では文字通りの積) が  $U(N)$  群の元となることを, 表現の水準で表している。以上, Lie 代数の直和や Lie 群の直積の定義を含め, 文献 [1, p.11,p.23,p.80,p.86,p.240] を参照。

## 2.6 状態と演算子

第 1 章 (有限群) のときと同様, 与えられた表現の生成子  $X_a$  は線形演算子とも行列とも見なせる。演算子と見た群の元  $e^{i\alpha_a X_a}$  の, 状態  $|i\rangle$  や演算子  $O$  に対する作用

$$|i\rangle \rightarrow |i'\rangle = e^{i\alpha_a X_a} |i\rangle, \quad (2.48)$$

$$\langle i| \rightarrow \langle i'| = \langle i| e^{-i\alpha_a X_a}, \quad (2.49)$$

$$O \rightarrow O' = e^{i\alpha_a X_a} O e^{-i\alpha_a X_a} \quad (2.51)$$

は, 変換と見なせる。この変換は全ての行列要素を不変に保つ。無限小変換に伴う状態と演算子の変化量は

$$\delta |i\rangle = i\alpha_a X_a |i\rangle, \quad \delta \langle i| = \langle i| (-i\alpha_a X_a), \quad \delta O = i\alpha_a [X_a, O] \quad (2.52-54)$$

と表される。

## 2.7 指数関数の愉しみ

行列  $X_a$  の指数関数は常に冪級数

$$e^{i\alpha_a X_a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha_a X_a)^n}{n!} \quad (2.60)$$

で定義できる。このとき一般には  $X_a$  たちは非可換なので,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_b} e^{i\alpha_a X_a} \neq iX_b e^{i\alpha_a X_a} \quad (2.61)$$

である。しかしながら和  $\alpha_a X_a$  どうしは可換なので,

$$\frac{d}{ds} e^{is\alpha_a X_a} = i\alpha_b X_b e^{is\alpha_a X_a} = i e^{is\alpha_a X_a} \alpha_b X_b \quad (2.62)$$

は正しい。また指数を展開すれば分かるように,

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha_b} e^{i\alpha_a X_a} \right|_{\alpha=0} = iX_b \quad (2.63)$$

も成立する。

上式 (2.61) に代わる正しい一般公式は

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_b} e^{i\alpha_a X_a} = \int_0^1 ds e^{is\alpha_a X_a} (iX_b) e^{i(1-s)\alpha_a X_a} \quad (2.64)$$

である [本稿次節で導出]。これは非自明でありながら覚えやすい関係式になっている。すなわち被積分関数は微分が指数関数の「内部」における任意の場所に作用した結果を表しており, 微分が作用する全ての場所からの寄与 (平均) が積分で表されている。

## 2.7 節について

■式 (2.64) の導出 まず指数関数 (2.60) を等価的に

$$e^{i\alpha_a X_a} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{i\alpha_a X_a}{k} \right)^k \quad (2.65)$$

で定義し、両辺を微分する方法で示す。すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_b} e^{i\alpha_a X_a} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial \alpha_b} \left( 1 + \frac{i\alpha_a X_a}{k} \right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{k-1} \left( 1 + \frac{i\alpha_a X_a}{k} \right)^l \frac{iX_b}{k} \left( 1 + \frac{i\alpha_c X_c}{k} \right)^{k-l-1} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{k-1} \left\{ \left( 1 + \frac{i\alpha_a X_a}{k} \right)^k \right\}^{\frac{l}{k}} \frac{iX_b}{k} \left\{ \left( 1 + \frac{i\alpha_c X_c}{k} \right)^k \right\}^{1-\frac{l+1}{k}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{k-1} (e^{i\alpha_a X_a})^{\frac{l}{k}} \frac{iX_b}{k} (e^{i\alpha_c X_c})^{1-\frac{l+1}{k}} \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{k-1} \Delta s (e^{i\alpha_a X_a})^{l\Delta s} iX_b (e^{i\alpha_c X_c})^{1-l\Delta s} \quad \left( \Delta s \equiv \frac{1}{k} \right) \\ &= \int_0^1 ds e^{is\alpha_a X_a} (iX_b) e^{i(1-s)\alpha_c X_c} : (2.64) \end{aligned}$$

が得られる。ただし最後の等号では積分変数  $s = l\Delta s$  に関する区分求積を考えた。

次に式 (2.64) の両辺を展開し、「有名な公式」

$$\int_0^1 ds s^m (1-s)^n = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \quad \left[ \text{ベータ積分 } B(m+1, n+1) = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)} \right] \quad (2.66)$$

を用いる方法で証明を行う。すると

$$\begin{aligned} &\int_0^1 ds e^{is\alpha_a X_a} (iX_b) e^{i(1-s)\alpha_c X_c} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{m+n+1}}{m!n!} \left[ \int_0^1 ds s^m (1-s)^n \right] (\alpha_a X_a)^m X_b (\alpha_c X_c)^n \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{m+n+1}}{(m+n+1)!} (\alpha_a X_a)^m X_b (\alpha_c X_c)^n \\ &= \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{m=0}^N \frac{i^N}{N!} (\alpha_a X_a)^m X_b (\alpha_c X_c)^{N-m-1} \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha_b} e^{i\alpha_a X_a} \end{aligned}$$

となって、再び式 (2.64) が導かれる。

## 問題

2.A.

$$A = A^3 = A^5 = \dots = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = A^4 = A^6 = \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して,

$$e^{i\alpha A} = 1 + i \sin \alpha A + (\cos \alpha - 1)A^2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & i \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ i \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

2.B.

$[A, B] = B$  のとき, Baker-Hausdorff の公式 (式 (2.44)) とより

$$\begin{aligned} e^{i\alpha A} B e^{-i\alpha A} &= B + i\alpha[A, B] + \frac{(i\alpha)^2}{2!}[A, [A, B]] + \frac{(i\alpha)^3}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \dots \\ &= \left(1 + i\alpha + \frac{(i\alpha)^2}{2!} + \frac{(i\alpha)^3}{3!} + \dots\right) B = e^{i\alpha} B. \end{aligned}$$

2.C.

式 (2.15) は Baker-Hausdorff の公式

$$e^A e^B = \exp \left( A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A - B, [A, B]] + \dots \right)$$

で  $A = i\alpha_a X_a, B = i\beta_b X_b$  とおけば直ちに得られていた. ここでは  $\alpha$  と  $\beta$  に関して 3 次の項も含めて, 交換子を式 (2.18):  $[X_a, X_b] = if_{abc} X_c$  で評価すると, 付加的な項は

$$\begin{aligned} & - \frac{i}{12}(\alpha_c - \beta_c)\alpha_a\beta_b[X_c, [X_a, X_b]], \\ [X_c, [X_a, X_b]] &= if_{abd}[X_c, X_d] = -f_{abdfcde} X_e \quad (\text{式 (2.25)}) \end{aligned}$$

となるので,

$$e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} = \exp \left[ i \left\{ \alpha_e + \beta_e + \frac{1}{2}\alpha_a\beta_b f_{abe} - \frac{1}{12}(\alpha_c - \beta_c)\alpha_a\beta_b f_{abdfcde} \right\} X_e \right]$$

を得る. よって高い近似に進んでも, 掛け算則 (2.11) の形は保持される.

## 参考文献

- [1] 佐藤光, 2019, 群と物理, 丸善出版株式会社, 東京.
- [2] 吉川圭二, 2022, 理工系の基礎数学 新装版 群と表現, 株式会社岩波書店, 東京.
- [3] J.J.Sakurai, 2014, 現代の量子力学 (下)(桜井明夫訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [4] L.D. ランダウ, E.M. リフシッツ, 2019, 量子力学 ランダウ=リフシッツ物理学小教程 (好村滋洋, 井上健男訳), 株式会社筑摩書房, 東京.
- [5] 佐武一郎, 2017, 数学選書 1 線型代数学 (新装版), 株式会社裳華房, 東京.
- [6] J.J.Sakurai, 2017, 現代の量子力学 (上)(桜井明夫訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [7] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, 2013, ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 力学 (増訂第 3 版)(広重徹, 水戸巖訳), 東京図書株式会社, 東京.
- [8] 九後汰一郎, 2018, 新物理学シリーズ 23 ゲージ場の量子論 I, 株式会社培風館.