

M. ストーン 『量子場の物理』〈新装版〉

本稿は場の量子論と多体物理の教科書

M. ストーン, 2012, 量子場の物理 [新装版] (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京

のまとめノートであり, ある程度, 要点と途中計算の分離した見通しの良い構成を心掛け, 教科書としても読み得る自己完結的なテキストを目指した. 他方で本稿は教科書の内容を取捨選択してあり, 特に素粒子論に関する話題は目新しい事項のみを集中的にまとめ, 既に F. マンドル/G. ショー『場の量子論』[1][2](のノート)で扱った内容(とその周辺)に関しては大幅に省略するか, メモ程度のノートに留めてある箇所も少なくない. まとめると本稿は素粒子論の“外伝”と, 物性・凝縮系物理の入門的な性格を持つ. 本稿には筆者の誤りや勘違いが潜んでいるかもしれないことをあらかじめ断っておく. 言うまでもなく, 原著を当たるに越したことはない. また筆者の学力では本稿に載せることのできなかつた内容も少なからずあることを告白しておく.

なお本稿の他にも理論物理の各種ノートを以下のページで公開している. (F. マンドル/G. ショー『場の量子論』のノートを含む.)

<http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/>

「序」の抜粋・まとめ

本書は一般的な場の量子論と多体物理の入門のためのテキストであり, (中略) 他の本格的なテキストとは異なり, 広範囲の事項を完全に網羅したものではない. 私は多くの学生が共通して難しく感じるような基本的な問題だけを集中的に扱った.

本書を2期にわたる講義に用いる場合,

- 第1期: 1–11章
 - 伝統的な量子力学的演算子の流儀・ハミルトン形式の量子力学に基づいて記述
- 第2期: 12–18章
 - 経路積分の手法を採用(繰り込みや臨界現象, 非摂動的現象の理解に不可欠)

とするのが自然な配分である.

本書は凝縮系物理に携わる学生を主な対象としたわけではないが, 凝縮系から多くの例を引いた. これは著者の関心が, この数年来, 格子ゲージ理論を介して, 高エネルギー物理から結晶格子までの間を行きつ戻りつしたことの反映である. しかし理由はもうひとつある. それは, 凝縮系は具体的に見たり感じたりすることができるものなので, 感覚的な把握が容易だという事情である. 私は量子色力学におけるカイラル対称性の破れの概念よりも, 超流体における自発的な対称性の破れの概念を理解するほうがやさしいと信じている. また凝縮系ではハミルトニアンが明確に定義され, 場の量子論の手法によって, 測定結果と直接比較できる結果が与えられる. 相対論的な系は通常このようになっておらず, 正則条件を満たす解の中から特定の解を選ぶために, 恣意的に補助条件を導入しなければならない. このような事情は, それ自体として何ら問題はないが, 初学者をしばしば混乱させる原因になる. かの Ken Wilson も凝縮系の臨界現象に注目することによって, 初めて摂動論における発散の起源を理解するに至ったのである [場の分布のフラクタル性 (17.4 節 p.254)].

目次

第 1 章	離散系	3
第 2 章	相対論的スカラー場	7
第 3 章	摂動論	13
第 4 章	Feynman 規則	24
第 5 章	ループ・ユニタリー性・解析性	31
第 6 章	形式的展開	49
第 7 章	Fermi 粒子	56
第 8 章	量子電磁力学	59
第 9 章	固体中の電子	69
第 10 章	非相対論的 Bose 粒子系	94
第 11 章	有限温度	123
第 12 章	径路積分	133
第 13 章	汎関数の方法	147
第 14 章	Fermi 粒子系の径路積分	163
第 15 章	格子場の理論	181
第 16 章	繰り込み群	204
第 17 章	場と繰り込み	222
第 18 章	$1/N$ 展開法	247

第 1 章 離散系

本章ではフォノン (固体の格子振動の量子化) について, 教科書の記述を取捨選択しつつまとめる.

1.1.1 基準振動

x 軸に沿って原子が平衡状態において間隔 a で並んでおり, 隣り合う原子が弾性定数 K のばねで相互に結合している, 1 次元結晶モデルにおける縦波を考え, n 番目の原子の x 軸に沿う平衡位置からの変位を η_n と書く (図 1 参照) [本稿では各原子の共通質量 m を 1 と置かず明示する]. 各原子を平衡位置近傍にピン止めするような調和ポテンシャル $\frac{1}{2}m\Omega^2\eta_n^2$ を導入すると, ラグランジアンは

$$\begin{aligned} L &= \sum_n \left\{ \frac{m}{2} \dot{\eta}_n^2 - \frac{K}{2} (\eta_n - \eta_{n+1})^2 - \frac{m}{2} \Omega^2 \eta_n^2 \right\} \\ &= m \sum_n \left\{ \frac{1}{2} \dot{\eta}_n^2 - \frac{\lambda}{2} (\eta_n - \eta_{n+1})^2 - \frac{1}{2} \Omega^2 \eta_n^2 \right\} \quad (\lambda \equiv K/m) \end{aligned} \quad (1.7')$$

となり, Lagrange 方程式

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_n} - \frac{\partial L}{\partial \eta_n} = m\ddot{\eta}_n + K(\eta_n - \eta_{n+1}) - K(\eta_{n-1} - \eta_n) + m\Omega^2\eta_n$$

は Newton の運動方程式

$$\begin{aligned} m\ddot{\eta}_n &= K(\eta_{n+1} - \eta_n) - K(\eta_n - \eta_{n-1}) - m\Omega^2\eta_n, \\ \therefore \ddot{\eta}_n &= \lambda(\eta_{n+1} + \eta_{n-1} - 2\eta_n) - \Omega^2\eta_n \end{aligned}$$

を与える. 弾性定数 K の項 $K(\eta_{n+1} - \eta_n) - K(\eta_n - \eta_{n-1})$ は n 番目の原子の両側のばねによる正しい弾性力を表していることが見て取れる. ここで平面波解

$$\eta_n \sim e^{i(kna - \omega t)}$$

[ただし本稿では指数に因子 a を補い, k に波数の次元を持たせた] を代入すると, 分散関係

$$-\omega^2 = \lambda(e^{ika} + e^{-ika} - 2) - \Omega^2, \quad \therefore \omega^2 = 2\lambda(1 - \cos ka) + \Omega^2 \quad (1.8)$$

が得られる. このとき図 2 のように Ω^2 に比例するピン止めのポテンシャルは, スペクトルの“ギャップ”を生じる. ただし図 2 では, $2\pi/a$ だけ異なる k は同じ e^{ikna} の値を与えることを踏まえ, 波数 k の定義域を周期 $-\pi/a \leq k \leq \pi/a$ (第 1 Brillouin 帯域) に選んだ*1. 長波長極限 $k \ll a$ では

$$\omega^2 \simeq \lambda(ka)^2 + \Omega^2$$

であり, $\Omega = 0$ であれば波の位相速度は $\omega/k = a\sqrt{\lambda}$ となる.

*1 このことは原子間距離 a より短い波長 $\lambda \lesssim a$ (すなわち波数 $|k| \gtrsim \pi/a$) が意味を成さないことと整合している.

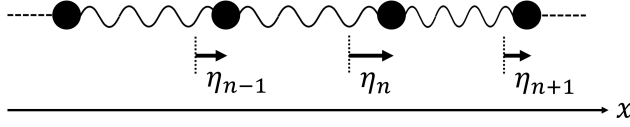


図1 1次元結晶モデルにおける縦波

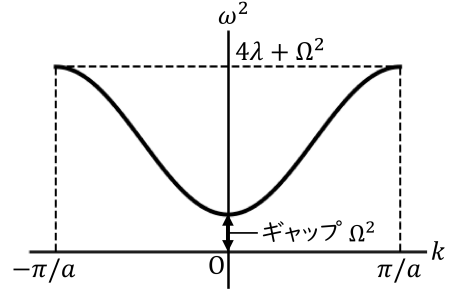


図2 格子振動の分散関係 (1.8)

1.2.2 連続場

本稿ではここで先に連続体近似に移る。

$$\frac{m}{a} \rightarrow \rho_0 : \text{平衡状態での質量密度}, \quad \frac{K}{a} \rightarrow \kappa : \text{弾性率}, \quad \eta_n(t) \rightarrow \eta(x, t) : \text{変位場}$$

とすると、式 (1.7') のラグランジアンは

$$\begin{aligned} L &= \sum_n a \left\{ \frac{(m/a)}{2} \dot{\eta}_n^2 - \frac{(K/a)}{2} (\eta_{n+1} - \eta_n)^2 - \frac{(m/a)}{2} \Omega^2 \eta_n^2 \right\} \\ &\rightarrow \int dx \left\{ \frac{\rho_0}{2} \dot{\eta}^2 - \frac{\kappa}{2} (\partial_x \eta)^2 - \frac{\rho_0}{2} \Omega^2 \eta^2 \right\} \end{aligned} \quad (1.52)$$

と書き換えられる。ここで運動エネルギーに関する第1項の係数が1/2となるように、場 $\varphi \equiv \sqrt{\rho_0} \eta$ を定義し、また $\kappa/\rho_0 \equiv c^2$ とおいて整理すると、

$$L = \int dx \left\{ \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{c^2}{2} (\partial_x \varphi)^2 - \frac{\Omega^2}{2} \varphi^2 \right\} \quad (1.53)$$

となる。これは Klein-Gordon 場に対するラグランジアンとなっており、場 φ は Klein-Gordon 方程式

$$\partial_t^2 \varphi = c^2 \partial_x^2 \varphi - \Omega^2 \varphi, \quad \text{i.e.} \quad \left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \partial_x^2 + \frac{\Omega^2}{c^2} \right) \varphi = 0$$

に従う。質量項 (Ω^2 の項) はピン止めのポテンシャルに起因しており (原子の質量とは無関係)、 $\Omega = 0$ で場の方程式は波動方程式になる (波の伝播速度は c)。[弾性体の運動方程式が縦波に対する波動方程式を再現することは、連続体の理論で既に学んでいる。] 分散関係 (1.8) は

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \Omega^2$$

に置き換わる。よって場 φ は Klein-Gordon 場と同様に量子化されることになる。

note : ピン止めのポテンシャル 原子間相互作用とは別にピン止めのポテンシャル $\frac{1}{2} m \Omega^2 \eta_n^2$ を導入することは、固体との対応を考えると恣意的ではないかという疑問が生じる。実際 2.2 節の第1段落では、分散関係が相対論的な粒子のそれ $E_p^2 = p^2 + m^2$ と同じを持つようにピン止め項を導入したとある。

1.1.3 基準振動の消滅演算子・生成演算子

量子化は連続体近似を施す前の段階で行うこともできる。周期境界条件 $x = na \sim (n + N)a$ の下で許容される波数

$$k_m = \frac{2\pi}{a} \frac{m}{N}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$

と、対応する振動数 ω_m を用いて、変位場を

$$\eta_n(t) = \sum_{m=0}^{N-1} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_m}} \frac{1}{\sqrt{N}} \{a_m e^{i(k_m a n - \omega_m t)} + a_m^\dagger e^{-i(k_m a n - \omega_m t)}\} \quad (1.33')$$

と Fourier 展開する。(便宜的に展開係数から適当な因子を括り出しており、分母の因子 N は系の“体積”に関係する。) これと共役な運動量

$$\pi_n(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_n} = m \dot{\eta}_n = \sum_{m=0}^{N-1} \sqrt{\frac{m\hbar}{2\omega_m}} \frac{1}{\sqrt{N}} i\omega_m \{-a_m e^{i(k_m a n - \omega_m t)} + a_m^\dagger e^{-i(k_m a n - \omega_m t)}\}$$

を Heisenberg 描像の演算子と見なして、正準交換関係

$$[\eta_m(t), \pi_m(t)] = i\hbar \delta_{nm}, \quad \text{etc.}$$

を課すと、調和振動子の交換関係 $[a_m, a_n^\dagger] = \delta_{mn}$, etc. が導かれ、展開係数は生成・消滅演算子となる(そうなるように Fourier 展開 (1.33') において、あらかじめ適当な係数を括り出した)。

note その確認作業は場の理論で行った証明と本質的に変わらないはずなので、ここでは(部分的に)逆証だけ行って満足する。すなわち生成・消滅演算子の交換関係を仮定すると、

$$\begin{aligned} [\eta_m(t), \pi_m(t)] &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\hbar}{2N \sqrt{\omega_k \omega_l}} i\omega_k \{ [a_k, a_l^\dagger] e^{i(k_k a n - \omega_k t)} e^{-i(k_l a m - \omega_l t)} - [a_k^\dagger, a_l] e^{-i(k_k a n - \omega_k t)} e^{i(k_l a m - \omega_l t)} \} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{i\hbar}{2N} (e^{ik_k a(n-m)} + e^{-ik_k a(n-m)}) \\ &= i\hbar \delta_{mn}. \end{aligned}$$

ただし最後の等号では、有限 Fourier 級数に関する恒等式

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{ik_m a(n-n')} = N \delta_{nn'} \quad (1.35')$$

を利用した。

このように格子振動を量子化して得られる、各モードの励起として現れる Bose 粒子をフォノンと呼ぶ。

note ピン止め項を導入せずに連続体近似を施した変位場を量子化して得られる Bose 粒子もフォノンと呼ぶ [3, pp.20–28]。ピン止め項や連続体近似の有無は本質的ではない。

note 3次元での量子化 (pp.11–12) は文献 [4, § 72] を参照。特に古典的な理論の形について、歪みと応力が線形関係を持つ等方的な弾性体の理論で学んだように、ある方向 x だけに依存する変位場を考えると、縦波と横波の各々が音速の異なる波動方程式を満たすことが導かれる (P 波と S 波に対応)。3次元空間

を満たす媒質の代わりに, xy 平面上の膜を伝播する 2 次元的な波動を考えることもできる. 膜は z 方向に微小変位 $u(x, y)$ を起こすと仮定すると, 膜上の線要素 dx, dy は

$$d\mathbf{r}_1 = \left(dx, 0, \frac{\partial u}{\partial x} dx \right), \quad d\mathbf{r}_2 = \left(0, dy, \frac{\partial u}{\partial y} dy \right)$$

に移る. よって膜の面要素 $dS = dx dy$ は

$$d\mathbf{S}' = d\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_2 = \left(-\frac{\partial u}{\partial x}, -\frac{\partial u}{\partial y}, 1 \right) dx dy$$

に移り, 面積は

$$\delta(dS) = \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2} - 1 \right\} dx dy \simeq \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

だけ変化する. 表面張力と同様, 膜のポテンシャルは面積変化に比例すると仮定すると, スカラー場のラグランジアンのパテンシャル項

$$U \propto \frac{1}{2} \int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

が得られる.

第 2 章 相対論的スカラー場

本章はある程度，場の理論の復習にあたるため，目新しい内容をいくらか特筆するに留める。

2.1 単位系と計量

- 自然単位系を採用する ($c = 1, \hbar = 1$).
- 符号系 (+ - - -) の Minkowski 計量を採用する.

2.2 Klein-Gordon 方程式

Schrödinger は原子内の電子を記述する相対論的な波動方程式として，既に Klein-Gordon [以下 KG] 方程式を調べていた．しかし水素原子スペクトルの正しい微細構造を導けなかったため，彼は KG 方程式を放棄した．KG 方程式から正しい微細構造を導けなかった理由は，KG 方程式ではスピンの考慮されていない点にある．

2.2.1 相対論的規格化

文献 [1, p.46] における (実)KG 場の Fourier 展開 (3.7):

$$\varphi(x) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} (a(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{ik \cdot x})$$

において，展開係数を $A(\mathbf{k}) = a(\mathbf{k})\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}$ と再定義すれば，

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} (A(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} + A^\dagger(\mathbf{k})e^{ik \cdot x}) \\ &\rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} (A(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} + A^\dagger(\mathbf{k})e^{ik \cdot x}) \quad (V \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (2.3)$$

は Lorentz 不変な測度 $d^3k/\omega_{\mathbf{k}}$ による積分になる．このとき調和振動子の交換関係は

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad \rightarrow \quad [A(\mathbf{k}), A^\dagger(\mathbf{k}')] = 2V\omega_{\mathbf{k}}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (2.4')$$

と置き換わる*2. すると 1 粒子状態 $|\mathbf{k}\rangle \equiv A^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle$ は

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}|\mathbf{k}' \rangle &= \langle 0|A(\mathbf{k})A^\dagger(\mathbf{k}')|0\rangle = \langle 0|\{A^\dagger(\mathbf{k}')A(\mathbf{k}) + [A(\mathbf{k}), A^\dagger(\mathbf{k}')]\}|0\rangle \\ &= 2V\omega_{\mathbf{k}}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \end{aligned} \quad (2.5')$$

と規格化されることになる．これを“Lorentz 不変な規格化”という．と言うのも，右辺は各因子が，粒子の静止系から運動量 \mathbf{k} (対応する速度パラメータを β とする) への単純な Lorentz ブーストに対して

$$V_0 \rightarrow V = V_0\sqrt{1 - \beta^2}, \quad m \rightarrow \omega_{\mathbf{k}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

*2 体積 $V = L^3 \rightarrow \infty$ の極限を想定すると $\frac{\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}}{(2\pi/L)^3} \rightarrow \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ ，すなわち $V\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \rightarrow (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ となるので，

$$[A(\mathbf{k}), A^\dagger(\mathbf{k}')] = 2\omega_{\mathbf{k}}(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (2.4)$$

と変換されるため、不変である。(詳細は付録 A [本稿では省略] も参照。[文献 [5, p.128] にも「 $k_0\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q})$ は Lorentz 不変」とある (しかし変換則は非自明である。)]) さらに上式 (2.5') を用いると、行列要素

$$\langle \mathbf{k} | \varphi(x) | 0 \rangle = \sum_{\mathbf{k}'} \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \langle \mathbf{k} | A^\dagger(\mathbf{k}') | 0 \rangle e^{i\mathbf{k}' \cdot x} = e^{i\mathbf{k} \cdot x} \quad (2.6)$$

は Lorentz スカラーとなることが分かる。

2.2.2 内積 / 2.2.3 複素スカラー場

複素 KG 場 $\varphi(x)$ について、ゲージ対称性と電荷保存則の関係を復習しよう。KG 場の大域的位相変換

$$\varphi(x) \rightarrow e^{-i\alpha} \varphi(x), \quad \varphi^*(x) \rightarrow e^{i\alpha} \varphi^*(x)$$

に対して、ラグランジアン

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi$$

は不変である。ところで一般に \mathcal{L} を不変に保つ場 ϕ_r の対称変換 $\phi_r \rightarrow \phi_r + \delta\phi_r$ に対して、保存するカレント

$$f^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \delta\phi_r \quad (\text{場の種類 } r \text{ で和をとる})$$

が導かれる [1, p.38]. 今の場合、これは具体的には

$$f^\mu = (\partial_\mu \varphi^*)(-i\alpha\varphi) + (\partial_\mu \varphi)(i\alpha\varphi^*) = i\alpha(\varphi^* \partial_\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \varphi^*) \equiv \alpha J^\mu \quad (2.19)$$

と計算され、保存する電荷

$$Q = \int J^0 d^3x = i \int (\varphi^* \partial_0 \varphi - \varphi \partial_0 \varphi^*) d^3x \quad (\text{積分は超曲面 } t = \text{const} \text{ にわたる})$$

を与える。そこで一般に内積

$$(a, b) \equiv i \int (a^* \partial_0 b - b \partial_0 a^*) d^3x \quad (\text{積分は超曲面 } t = \text{const} \text{ にわたる})$$

を定義することが動機付けられる。

note 右辺の被積分関数はしばしば $a \overleftrightarrow{\partial}_0 b^* \equiv a^* \partial_0 b - b \partial_0 a^*$ と略記される [5, p.22].

定義式より、これは性質

$$(a, b) = (b, a)^*, \quad (a, \lambda b) = \lambda(a, b), \quad (\lambda a, b) = \lambda^*(a, b)$$

を満たすことが見て取れる。ただしこの内積は正定値とはならない。実際、例えば負振動数解 $e^{ip \cdot x} = e^{i(E_{\mathbf{p}}t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}$, $E_{\mathbf{p}} \equiv \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ とうしの内積は

$$(e^{ip \cdot x}, e^{ip \cdot x}) = i \int \{e^{-ip \cdot x}(iE_{\mathbf{p}})e^{ip \cdot x} - e^{ip \cdot x}(-iE_{\mathbf{p}})e^{-ip \cdot x}\} d^3x = -2E_{\mathbf{p}}V < 0$$

となる ($V \equiv \int d^3x$ は空間の体積). 同様に正振動数解 $e^{-ip \cdot x} = e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - E_{\mathbf{p}}t)}$ とうしの内積は

$$\begin{aligned} (e^{-ip \cdot x}, e^{-ip' \cdot x}) &= i \int \{e^{ip \cdot x}(-iE_{\mathbf{p}'})e^{-ip' \cdot x} - e^{-ip' \cdot x}(iE_{\mathbf{p}})e^{ip \cdot x}\} d^3x \\ &= \begin{cases} 2E_{\mathbf{p}}V \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} & (\text{有限の } V) \\ 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') & (V \rightarrow \infty) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.24)$$

となる。

note ただし第 2 の等号では

$$\int e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}}d^3x = e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{p}'})t} \int e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}}d^3x = \begin{cases} e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{p}'})t}V\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = V\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} & (\text{有限の } V) \\ e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{p}'})t}(2\pi)^3\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') = (2\pi)^3\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') & (V \rightarrow \infty) \end{cases}$$

を用いた。

上式 (2.24) は調和振動子の交換関係 (2.4') の値に等しい :

$$[A(\mathbf{p}), A^\dagger(\mathbf{p}')] = (e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, e^{-i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}}). \quad (2.31')$$

また複素 KG 場の Fourier 展開を式 (2.3) や文献 [1, p.50] の式 (3.26) と同様,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} (a(\mathbf{k})e^{-ik\cdot x} + b^\dagger(\mathbf{k})e^{ik\cdot x}) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} (A(\mathbf{k})e^{-ik\cdot x} + B^\dagger(\mathbf{k})e^{ik\cdot x}) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} (A(\mathbf{k})e^{-ik\cdot x} + B^\dagger(\mathbf{k})e^{ik\cdot x}) \end{aligned} \quad (2.29)$$

と書くと, 展開係数を取り出す公式

$$A(\mathbf{k}) = i \int e^{ik\cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi d^3x, \quad \text{etc.}$$

(文献 [1, p.61](の問題 3.1 のノート) や文献 [5, p.35] を見よ) は

$$A(\mathbf{k}) = (e^{-ik\cdot x}, \varphi), \quad B(\mathbf{k}) = (e^{-ik\cdot x}, \varphi^\dagger), \quad A^\dagger(\mathbf{k}) = (\varphi, e^{-ik\cdot x}), \quad B^\dagger(\mathbf{k}) = (\varphi^\dagger, e^{-ik\cdot x}) \quad (2.30)$$

と書ける。

注意 以降, 教科書と同様に $A(\mathbf{k})$ のことを単に $a_{\mathbf{k}}$ と表記することもある。

2.3 対称性と Noether の定理

2.3.1 内部対称性

まず第 2 段落 (p.20) を抜粋・特筆する :

物理的な空間における回転以外に“内部空間”(internal space)における回転を考えることもできる。アイソスピン (isospin) はこの例である。3 種類のパイオン (pion) π^\pm, π^0 はアイソスピンの回転によって互いに変換し, アイソスピン代数 $SU(2)$ の $I=1$ 表現を形成する。この代数は角運動量 \hat{J}_i に関する Lie 代数と数学的に同型であるが, 物理的な意味は全く異なっている。この Lie 群 $SU(2)$ は強い相互作用に関する (ほぼ完全な) 対称性を表している。

さて, 本稿では 2.2 節で既に電荷保存則を理論の大域的位相変換に対する不変性と関連付けて論じた。ここでは $\alpha(x)$ が時空点に依存する局所位相変換 $\varphi \rightarrow e^{-i\alpha}\varphi$ を考えると, 複素スカラー場のラグランジアン $\mathcal{L} = (\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) - m^2\varphi^*\varphi$ は不変ではなく, $\delta\varphi = -i\alpha\varphi$ より

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= (\partial_\mu\delta\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) - m^2(\delta\varphi^*)\varphi + \text{c.c.} \quad (\text{c.c. は複素共役}) \\ &= \{i(\partial_\mu\alpha)\varphi^* + i\alpha\partial_\mu\varphi^*\}(\partial^\mu\varphi) - m^2(i\alpha\varphi^*)\varphi + \text{c.c.} \\ &= J^\mu\partial_\mu\alpha \quad (J^\mu \equiv i(\varphi^*\partial_\mu\varphi - \varphi\partial_\mu\varphi^*)) \end{aligned} \quad (2.35')$$

$$\rightarrow -\alpha\partial_\mu J^\mu \quad (\text{作用積分の下で部分積分}) \quad (2.36')$$

だけ変化する。[これは全体としては4元発散 $\partial_\mu(\dots)^\mu$ となっていないから運動方程式は不変でないと考えられ、ゲージ場を導入して初めて理論の不変性が回復する(そのとき対称性から導かれるカレント J^μ は変わらない)。しかしながらゲージ場を導入せずとも、] 最小作用原理より場の任意の変分 $\delta\varphi$ に対して、したがって位相の変分 $\alpha(x)$ に対して作用の変分が

$$0 = \delta S = - \int d^4x \alpha \partial_\mu J^\mu \quad (2.36)$$

とならなければならないことは確かであり、このとき運動方程式として再び保存則

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (2.37)$$

が導かれることになる [13.2 節でも同様の議論が繰り返される]。

後半は“カレント代数”に関する話題である。 ϵ_i を無限小パラメータの組とする複数の場 φ_α の無限小変換

$$\varphi_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha + i\epsilon_i \lambda_{\alpha\beta}^i \varphi_\beta \quad (2.43)$$

を考え、Hermite 行列 λ^i は交換関係

$$[\lambda^i, \lambda^j] = -if^{ij}_k \lambda^k \quad (2.44)$$

に基づく Lie 代数を形成すると仮定する。

note 無限小変換 (2.43) は単一の場の位相変換 $\varphi \rightarrow e^{-i\alpha}\varphi$ を特別な場合として含んでいる。交換関係 (2.44) の根拠については文献 [5, pp.5-7] を参照。

ラグランジアン密度 \mathcal{L} が複数の場 φ_α とその1階微分 $\partial_\mu\varphi_\alpha$ のみに依存するとき、場の変化 (2.43) に伴う作用の変分は

$$\delta S = i \int d^4x \left[\epsilon_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\alpha} \lambda_{\alpha\beta}^i \varphi_\beta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_\alpha)} \lambda_{\alpha\beta}^i \partial_\mu \varphi_\beta \right\} + (\partial_\mu \epsilon_i) \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_\alpha)} \lambda_{\alpha\beta}^i \varphi_\beta \right\} \right] \quad (2.45)$$

と計算される [教科書の訂正として、右辺全体に係数 i を補った(以下同じ)]。ここでもパラメータ ϵ_i が座標 x に依らない大域的変換に対してのみ、 \mathcal{L} は不変であるとする、上式 (2.45) の右辺第1項 (ϵ_i に比例する項) はゼロになる。よって局所的な変換に対しては、生き残る第2項を部分積分して最小作用原理を適用すると

$$0 = \delta S = \int d^4x \epsilon_i \partial_\mu J^{(i)\mu}, \quad J^{(i)\mu} \equiv -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_\alpha)} \lambda_{\alpha\beta}^i \varphi_\beta$$

となり、保存則 $\partial_\mu J^{(i)\mu} = 0$ が得られる。“電荷”密度は $J^{(i)0} = -i\pi_\alpha \lambda_{\alpha\beta}^i \varphi_\beta$ と同定され、演算子としては正準交換関係 $[\varphi_\alpha(x), \pi_\beta(x')] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta_{\alpha\beta}$ (ただし以降、同時刻 $x^0 = x'^0$ とする) より、交換関係

$$\begin{aligned} [J^{(i)0}(x), J^{(j)0}(x')] &= -i\hat{\pi}_\alpha(x) [\lambda^i, \lambda^j]_{\alpha\beta} \varphi_\beta(x) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &= if^{ij}_k J^{(k)0} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned} \quad (2.49)$$

を満たす (カレント代数)。

note : 上式 (2.49) の導出 行列 λ^i, λ^j は一般に交換しなくとも、その成分どうしは交換することに注意しよ

う. すると正準交換関係より,

$$\begin{aligned}
[J^{(i)0}(x), J^{(j)0}(x')] &= -[\pi_\alpha(x)\lambda_{\alpha\beta}^i\varphi_\beta(x), \pi_\gamma(x')\lambda_{\gamma\delta}^j\varphi_\delta(x')] \\
&= \dots \\
&= -\pi_\alpha(x)\lambda_{\alpha\beta}^i[\varphi_\beta(x), \pi_\gamma(x')\lambda_{\gamma\delta}^j\varphi_\delta(x')] - \pi_\gamma(x')\lambda_{\gamma\delta}^j[\pi_\alpha(x), \varphi_\beta(x)]\lambda_{\alpha\beta}^i \\
&= -i\pi_\alpha(x)\lambda_{\alpha\gamma}^i\lambda_{\gamma\delta}^j\varphi_\delta(x')\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + i\pi_\gamma(x')\lambda_{\gamma\alpha}^j\lambda_{\alpha\beta}^i\varphi_\beta(x)\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
&= -i\pi_\alpha(x)\underbrace{(\lambda_{\alpha\gamma}^i\lambda_{\gamma\beta}^j - \lambda_{\alpha\gamma}^j\lambda_{\gamma\beta}^i)}_{[\lambda^i, \lambda^j]_{\alpha\beta} = if_{ij}^k\lambda_{\alpha\beta}^k}\varphi_\beta(x)\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
&= if_{ij}^k[-i\pi_\alpha(x)\lambda_{\alpha\beta}^k\varphi_\beta(x)]\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
&= if_{ij}^k J^{(k)0}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') : (2.49)
\end{aligned}$$

となる.

上式 (2.49) の両辺を \mathbf{x}, \mathbf{x}' について積分すると, 保存する “電荷” $Q^{(i)} = \int d^3x J^{(i)0}$ は交換関係

$$[Q^{(i)}, Q^{(j)}] = if_{ij}^k Q^{(k)}$$

を満たすことが分かる. これは “電荷” $Q^{(i)}$ の交換子もまた Lie 代数を形成することを意味する.

2.3.2 時空の対称性

エネルギー・運動量テンソルに関する議論は文献 [1, pp.39–43] [6, pp.87–91, pp.301–304] などの復習である. またスカラー場の運動量 $\hat{\mathbf{P}}$ (ここでは教科書通り演算子にハットを付けておく) が空間並進

$$e^{-i\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{P}}}\hat{\varphi}(\mathbf{x})e^{+i\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{P}}} = \hat{\varphi}(\mathbf{x} + \mathbf{a}) \quad (2.64)$$

を生成することは, 文献 [1, p.44] の問題 2.5 で確認した.

note : 式 (2.66) 第 2 の等号について 1 行下の「 $\hat{\mathbf{P}}|0\rangle = 0$ 」は正しくは「 $\hat{\mathbf{P}}|0\rangle = |0\rangle$ 」である. また時刻 $x^0 = t \neq 0$ における場の演算子 $\hat{\varphi}(x)$ を考えれば, 場の Fourier 展開 (2.29) は

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x} = 0, t) = \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}'}} (A(\mathbf{k}')e^{-iE_{\mathbf{k}'}t} + B^\dagger(\mathbf{k}')e^{iE_{\mathbf{k}'}t})$$

を与えるので,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{k}|\hat{\varphi}(x)|0\rangle &= \langle \mathbf{k}|e^{-i\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{P}}}\hat{\varphi}(\mathbf{0}, t)e^{+i\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{P}}}|0\rangle = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \langle \mathbf{k}|\hat{\varphi}(\mathbf{0}, t)|0\rangle = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}'}} e^{iE_{\mathbf{k}'}t} \langle \mathbf{k}|\mathbf{k}'\rangle \\
&= e^{i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \quad (\because \text{式 (2.5)} : \langle \mathbf{k}|\mathbf{k}'\rangle = 2E_{\mathbf{k}}(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'))
\end{aligned}$$

となって, 改めて行列要素 (2.6) が得られる. (場の Fourier 展開を用いて行列要素を評価していること自体は式 (2.6) のときと変わらない.)

そこで本節では, 場の運動量 \mathbf{P} に関する最終段落の注意事項を引用すれば充分である :

しかし我々の扱う場が, 第 1 章で示したような媒質中 (結晶や流体) のフォノンを表す際には, 注意が必要である. この場合には 2 通りの異なる “並進” 対称性があり, これに対応して 2 通りの “運動量” の概念が生じる. 第 1 の概念は, ここで議論したような, 背景となる一様な媒質に対して波を移動

させる並進操作に伴う対称性である。第2の概念は、媒質と波と一緒に移動させる並進操作に関する対称性である。後者だけがNewton力学的な“運動量”の意味を持つ。前者の対称性は、流体力学で“擬運動量”(pseudomomentum)と呼ばれるものに対応する。結晶中のフォノンも擬運動量だけを持つが、流体中のフォノンは両方の運動量を担う。流体中の運動量密度 ρv は、質量の流れの密度と一致するので、流体中にはフォノンの“風”が存在する。このことは、また後から議論する。

第3章 摂動論

本章はある程度、場の理論の復習にあたるため、目新しい内容をいくらか特筆するに留める。

3.1 相互作用

実スカラー場 $\varphi(x)$ のラグランジアン密度に、c-数で表される外部の源 $J(x)$ との相互作用項 $J(x)\varphi(x)$ を付け加えると、場の方程式は

$$(\partial^2 + m^2)\varphi(x) = J(x)$$

となる。

- 第1章の結晶モデルでは、 J は原子に働く外力 [∴(ポテンシャル)~(外力)(変位)].
- 素粒子論的には、 J は “ $\hat{\varphi}(x)$ 量子” の源。
 - 結晶に力を及ぼすと、結晶弾性場の量子であるフォノンが生じることと整合。

粒子同士の相互作用を記述するには、非線形な相互作用項、例えば $\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{\lambda}{4!}\varphi^4$ が必要である。

素粒子物理において、必要な対称性を備えた相互作用項の中で、微分が最も少ないものが重要である。微分が多い項は相互作用を“繰り込み不可能”にし、“無効” (irrelevant) と言われる。

3.2 摂動論

3.2.1 相互作用描像

本節では Dyson 級数

$$U(t, 0) = \text{T exp} \left\{ -i \int_0^t dt' H(t') \right\} \equiv 1 - i \int_0^t dt' H(t') - \frac{1}{2!} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \text{T} \{ H(t') H(t'') \} + \dots \quad (3.11)$$

についてメモしておけば十分である。これは既に級数

$$1 - i \int_0^t dt' H(t') + (-i)^2 \int_0^t dt' \int_0^t dt'' H(t') H(t'') + \dots \quad (3.11')$$

を時間順序化 T で書き直した形をしており (式変形の方法は文献 [1, pp.107–108] のノート参照), Dyson 級数もまた時間によらないハミルトニアンに対する時間的発展の演算子 e^{-iHt} と同様、指数関数と似た形をとることを意味している。他方、細かい時間分割 $t \equiv t_n > t_{n-1} > \dots > t_1 > t_0 \equiv 0$ に対する表式

$$\text{T exp} \left\{ -i \int_0^t dt' H(t') \right\} \approx e^{-iH(t_{n-1})\delta t} e^{-iH(t_{n-2})\delta t} \dots e^{-iH(t_1)\delta t} e^{-iH(t_0)\delta t} \quad (3.13)$$

の右辺は明らかに時間順序化されており、これは時間的発展の演算子の性質

$$U(t, 0) = U(t_n, t_{n-1})U(t_{n-1}, t_{n-2}) \dots U(t_2, t_1)U(t_1, t_0)$$

から期待される関係式である。実際、式 (3.13) の右辺は

$$\begin{aligned} & e^{-iH(t_{n-1})\delta t} e^{-iH(t_{n-2})\delta t} \dots e^{-iH(t_1)\delta t} e^{-iH(t_0)\delta t} \\ & \approx [1 - iH(t_{n-1})\delta t][1 - iH(t_{n-2})\delta t] \dots [1 - iH(t_1)\delta t][1 - iH(t_0)\delta t] \\ & = 1 - i \sum_k H(t_k)\delta t + (-i)^2 \sum_{k>l} H(t_k)H(t_l)\delta t^2 + (-i)^3 \sum_{k>l>m} H(t_k)H(t_l)H(t_m)\delta t^3 + \dots \end{aligned}$$

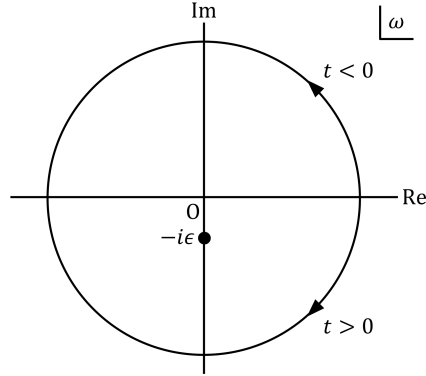


図3 階段関数の式 (3.20) を評価するための積分路

となり，最右辺の各項はそれぞれ，式 (3.11') の各項の正しい区分求積的な表現を与えている．このように式 (3.13) 右辺を δt の 2 次以降の項まで信用して良いことは，少なくとも上式の第 1 の等号が δt の 1 次までの近似であることを考えれば，非自明な結果であり，3.3.2 節の式 (3.33) ではこのことを踏まえている．

3.2.2 伝播関数と時間順序積

基本的に省略可能．

実スカラー場の伝播関数 (Green 関数) の表記

$$iG(x, x') = \langle 0 | T \{ \varphi(x) \varphi(x') \} | 0 \rangle \quad (3.16)$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \left\{ \theta(x'_0 - x_0) e^{-ik \cdot (x' - x)} + \theta(x_0 - x'_0) e^{+ik \cdot (x' - x)} \right\} \quad (3.19)$$

を導入しておく (式 (3.19) は文献 [1] の式 (3.39-41), (3.55-56) で確認済み)．

Heaviside の段差 (階段) 関数は

$$\theta(t) = i \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\epsilon} \quad (3.20)$$

と書ける．

note : 上式 (3.20) の確認 図 3 のように積分路を閉じると，

$$i \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\epsilon} = \theta(t) \frac{i}{2\pi} (-2\pi i \text{Res}[-i\epsilon]) = \theta(t). \quad (\because \text{Res}[-i\epsilon] = e^{-\omega\epsilon} \rightarrow 1)$$

なお式 (3.20) は階段関数の Fourier 成分が

$$\int dt e^{i\omega t} \theta(t) = \frac{i}{\omega + i\epsilon} \quad (3.20')$$

で与えられることを意味する．

また運動量空間の伝播関数 $iG(k)$ の式

$$iG(x, x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iG(k) e^{-ik \cdot (x - x')}, \quad iG(k) \equiv \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.23)$$

($\epsilon > 0$ は無限小パラメータ) も，後で必要なので書いておく．

3.3 Wick の定理

3.3.1 正規積

省略可能.

3.3.2 Wick の定理

自由場のみを対象としているが [従って反交換するフェルミオン因子は扱わない], 母関数の形で表した Wick の定理の証明を行っている (Wick の定理の直接的な導出は「長く退屈な作業になる」(p.33)). ここではスカラー場 $\varphi(x)$ の演算子を表すハットを省き, また縮約を $\langle 0 | T \{ \varphi(x) \varphi(y) \} | 0 \rangle \equiv \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle$ と略記する. その上でまず, 示したい定理を引用する.

定理: $J(x)$ を c -数の関数とすると, 次式が成り立つ.

$$T \left\{ e^{-i \int d^4 x J(x) \varphi(x)} \right\} = N \left\{ e^{-i \int d^4 x J(x) \varphi(x)} \right\} e^{-\frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y J(x) \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle J(y)}. \quad (3.32)$$

注意: $J(x) = iK(x)$ と置いて式を展開し, 係数を比較すると, 先に示した定理の式 [オリジナルの Wick の定理 (3.31), 本稿では省略] になる [本稿次節で補足]. i を挿入したのは, $J(x)$ が実であれば左辺がユニタリー演算子になるからである.

さて, 上式 (3.32) を証明しよう. 一般に A, B が $[A, B]$ と交換するならば,

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A, B]}$$

である [この定理の証明は文献 [7, pp.304–305] で確認済み]. 特に A, B が場の演算子 φ の線形結合のときには, $[A, B]$ は c -数となるから, この条件が満たされている. $H(t) \equiv \int d^3 x J(x) \varphi(x)$ と略記し [空間積分を補った], 上記の定理と式 (3.13) を用いると,

$$\begin{aligned} T \left\{ e^{-i \int d^4 x J(x) \varphi(x)} \right\} &= T \left\{ e^{-i \int dt H(t)} \right\} \approx e^{-i \delta t H(t_{n-1})} e^{-i \delta t H(t_{n-2})} \dots e^{-i \delta t H(t_0)} \\ &= \exp \left(-\delta t \sum_i H(t_i) - \frac{1}{2} \delta t^2 \sum_{k>l} [H(t_k), H(t_l)] \right) \end{aligned} \quad (3.33)$$

と近似できる [第 2 の等号を本稿次節で補足]. $\delta t \rightarrow 0$ の極限で

$$T \left\{ e^{-i \int d^4 x J(x) \varphi(x)} \right\} = e^{-i \int d^4 x J(x) \varphi(x)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y J(x) J(y) \theta(x_0 - y_0) [\varphi(x), \varphi(y)] \right\}. \quad (3.34)$$

[c -数 $[H(t_k), H(t_l)]$ の項の指数を通常の“指数法則”に従って括り出した.]

他方, 正規積は

$$\begin{aligned} N \left\{ e^{-i \int d^4 x J(x) \varphi(x)} \right\} &\equiv e^{-i \int d^4 x J(x) \varphi^{(-)}(x)} e^{-i \int d^4 x J(x) \varphi^{(+)}(x)} \\ &= e^{-i \int d^4 x J(x) \varphi(x)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y J(x) J(y) [\varphi^{(-)}(x), \varphi^{(+)}(y)] \right\} \end{aligned} \quad (3.35)$$

である. [第 1 の等号では, 正規積の定義より $\varphi^{(\pm)}$ をあたかも交換するものとして扱って良いため, 通常の“指数法則”が成り立つことを用いており, 第 2 の等号では再び冒頭の定理を適用し, 指数の $[\varphi^{(-)}(x), \varphi^{(+)}(y)]$

が c-数であることを考慮した.] これを式 (3.34) と比較すると

$$\begin{aligned} \mathbb{T} \left\{ e^{-i \int d^4 x J(x) \varphi(x)} \right\} &= \mathbb{N} \left\{ e^{-i \int d^4 x J(x) \varphi(x)} \right\} \\ &\times \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y J(x) J(y) \left([\varphi^{(-)}(x), \varphi^{(+)}(y)] - \theta(x_0 - y_0) [\varphi(x), \varphi(y)] \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

さらに右辺の指数 $[\varphi^{(-)}(x), \varphi^{(+)}(y)] - \theta(x_0 - y_0) [\varphi(x), \varphi(y)]$ は c-数なので, その真空期待値に一致することに注意すると,

$$\begin{aligned} &[\varphi^{(-)}(x), \varphi^{(+)}(y)] - \theta(x_0 - y_0) [\varphi(x), \varphi(y)] \\ &= \langle 0 | [\varphi^{(-)}(x), \varphi^{(+)}(y)] | 0 \rangle - \theta(x_0 - y_0) \langle 0 | [\varphi(x), \varphi(y)] | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | -\varphi(y)\varphi(x) - \theta(x_0 - y_0) [\varphi(x), \varphi(y)] | 0 \rangle \\ &= -\langle 0 | \mathbb{T} \{ \varphi(x)\varphi(y) \} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.37)$$

と書き換えられる [第 2, 第 3 の等号を本稿次節で確認]. これを上式 (3.36) に代入すると, 式 (3.32) が得られる. 証明終わり.

3.3.2 節について

■母関数で表した定理 (3.32) が Wick の定理を再現することの確認 $J(x) = iK(x)$ とおくと, 式 (3.32) 左辺の 2 つの因子はそれぞれ,

$$\begin{aligned} \mathbb{N} \left\{ e^{-i \int d^4 x J(x) \varphi(x)} \right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} N_n, \quad N_n \equiv \frac{1}{n!} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_n K(x_1) \cdots K(x_n) \mathbb{N}(\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)), \\ e^{\frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y K(x) \langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle K(y)} &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}, \quad C_{2n} \equiv \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y K(x) \langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle K(y) \right)^n \end{aligned}$$

と展開される (ただし $N_0 = 1$). よって例えば式 (3.32) の両辺において $K(x)$ の 5 次の項を考えると, 左辺は

$$\frac{1}{5!} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_5 K(x_1) \cdots K(x_5) \mathbb{T}(\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_5))$$

となるのに対し, 右辺の 5 次の項は

$$\begin{aligned} N_1 C_4 &= \frac{1}{5!} \cdot 15 \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_5 K(x_1) \cdots K(x_5) \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2) \rangle \langle \varphi(x_3)\varphi(x_4) \rangle \varphi(x_5) \\ &= \frac{1}{5!} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_5 K(x_1) \cdots K(x_5) \{ \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2) \rangle \langle \varphi(x_3)\varphi(x_4) \rangle \varphi(x_5) + \text{perms.} \}, \\ N_3 C_2 &= \frac{1}{5!} \cdot 10 \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_5 K(x_1) \cdots K(x_5) \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2) \rangle \mathbb{N}(\varphi(x_3)\varphi(x_4)\varphi(x_5)) \\ &= \frac{1}{5!} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_5 K(x_1) \cdots K(x_5) \{ \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2) \rangle \mathbb{N}(\varphi(x_3)\varphi(x_4)\varphi(x_5)) + \text{perms.} \}, \\ N_5 C_0 &= \frac{1}{5!} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_5 K(x_1) \cdots K(x_5) \mathbb{N}(\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_5)) \end{aligned}$$

の和である. ただし $N_1 C_4$ と $N_3 C_2$ の第 2 の等号では, 全体に係数 15 または 10 を掛ける代わりに, 等価的に被積分関数において, 積分変数を入れ替えて得られる

$$\frac{{}_5 C_2 \cdot {}_3 C_2}{2} = 15 \text{ 種類} \quad \text{または} \quad {}_5 C_2 = 10 \text{ 種類}$$

の置換項 (permutations) の和をとっても良いことを考慮した. (教科書の表記「+perms」の初出は, 式 (2.16) の「+permutations」である.) 被積分関数を比較すると, 見慣れた Wick の定理

$$\begin{aligned} T(\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_5)) &= N(\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_5)) \\ &\quad + \langle\varphi(x_1)\varphi(x_2)\rangle N(\varphi(x_3)\varphi(x_4)\varphi(x_5)) + \text{perms.} \\ &\quad + \langle\varphi(x_1)\varphi(x_2)\rangle\langle\varphi(x_3)\varphi(x_4)\rangle\varphi(x_5) + \text{perms.} \end{aligned}$$

が得られる.

■式 (3.33) 第 2 の等号について A, B, C, \dots を φ の線形結合とし,

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]} \quad ([A, B] \text{ は } c\text{-数})$$

を繰り返し用いると, $[[A, B], C] = 0$ より

$$e^A e^B e^C = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]} e^C = e^{A+B+C+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{2}[A,C]+\frac{1}{2}[B,C]}, \quad \text{etc.}$$

となり (最右辺の交換子はアルファベットの順に従うことに注意), 帰納的に式 (3.33) 最右辺の形が得られる.

■式 (3.37) 第 2, 第 3 の等号の確認 第 2 の等号は

$$\begin{aligned} \langle 0|\varphi(y)\varphi(x)|0\rangle &= \langle 0|[\varphi^{(-)}(y) + \varphi^{(+)}(y)][\varphi^{(-)}(x) + \varphi^{(+)}(x)]|0\rangle \\ &= \langle 0|\varphi^{(+)}(y)\varphi^{(-)}(x)|0\rangle \\ &= \langle 0|[\varphi^{(+)}(y), \varphi^{(-)}(x)]|0\rangle \\ &= -\langle 0|[\varphi^{(-)}(x), \varphi^{(+)}(y)]|0\rangle \end{aligned}$$

による. 第 3 の等号も

$$\begin{aligned} \varphi(y)\varphi(x) + \theta(x_0 - y_0)[\varphi(x), \varphi(y)] &= \begin{cases} \varphi(y)\varphi(x) + [\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi(x)\varphi(y) & (x_0 > y_0) \\ \varphi(y)\varphi(x) & (y_0 > x_0) \end{cases} \\ &= T\{\varphi(x)\varphi(y)\} \end{aligned}$$

より正しい.

3.3.3 応用

湯川ポテンシャル

まず公式

$$\langle 0|S|0\rangle = \langle 0|U(+\infty, -\infty)|0\rangle = e^{-i(E_J - E_0)T} \quad (3.42)$$

の証明を詳しくまとめる.

一般に結合定数 g で特徴付けられる, 相互作用のある理論 (ハミルトニアン $H(t)$) を考え, $g = 0$ の自由な理論のハミルトニアンを H_0 と書く.

- まず始状態を非摂動ハミルトニアン H_0 の基底状態 $|0\rangle$ (エネルギー固有値 E_0) とする.
- その後, 時刻 t_1 から長い時間をかけて結合定数 $g(t)$ が断熱的に $g(\neq 0)$ に移行し,
- 次いで系が相互作用のある理論のハミルトニアン H の下で長時間 T だけ発展し,

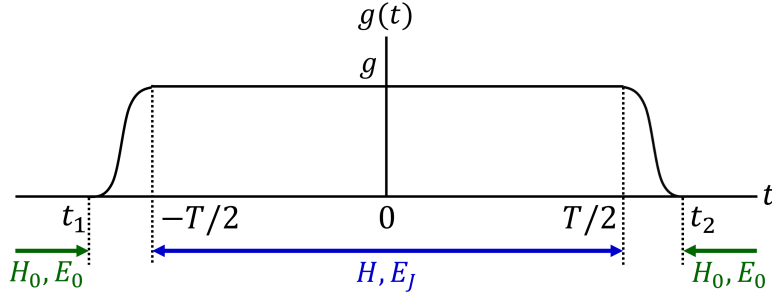


図4 相互作用の断熱的な導入

- さらに時刻 t_2 までに断熱的に $g(t) \rightarrow 0$ となって、
終状態が再び非摂動真空状態 $|0\rangle$ に戻る場合を考える (以上, 図4を参照).

このとき $U(t', t)$ を時間的发展の演算子として,

$$\begin{aligned} S &= U(+\infty, -\infty) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} U(+\tau, t_2)U(t_2, t_1)U(t_1, -\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-iH_0(\tau-t_2)} \mathsf{T} \left\{ e^{-i \int_{t_1}^{t_2} H(t) dt} \right\} e^{-iH_0(t_1+\tau)} \\ &= e^{iH_0 t_2} \mathsf{T} \left\{ e^{-i \int_{t_1}^{t_2} H(t) dt} \right\} e^{-iH_0 t_1} \end{aligned}$$

と表される (教科書 p.35 における $U(t_2, t_1)$ の引数は正しくは $\pm\infty$ と考えられる). (相互作用描像では, S は S 行列と呼ばれる (4.4.1 節).) その真空期待値

$$\langle 0|S|0\rangle = \langle 0|\mathsf{T} \left\{ e^{-i \int_{t_1}^{t_2} H(t) dt} \right\} |0\rangle e^{iE_0(t_2-t_1)} \quad (3.40)$$

($|0\rangle$ が H_0 の固有値 E_0 に属する固有状態であることに注意した) を真空偏極 (真空永年振幅) という [実際, 真空偏極には S 行列展開から現れる真空泡のみが寄与する (4.1.1 節 (の note) を参照)]. ここで $t_1 < t < -T/2, T/2 < t < t_2$ での断熱変化は緩慢なので,

$$\langle 0|\mathsf{T} \left\{ e^{-i \int_{t_1}^{t_2} H(t) dt} \right\} |0\rangle = e^{-\int_{t_1}^{t_2} E(g(t)) dt} \quad (3.41)$$

が良い近似で成り立つ. さらに $t_1 < t < t_2$ のうちほとんどの時間 T において $E(g(t))$ は, 源の存在するときのエネルギー E_J に等しいので, (式 (3.41) 右辺) $= e^{-iE_J T}$ と近似してしまい, 同様に式 (3.40) の指数でも $t_2 - t_1 = T$ と置き換えると, 冒頭の式 (3.42) が得られる.

次に式 (3.42) の 1 つの応用として, 2 つの源 (核子) が生成する仮想的な φ 量子の交換によって生じる核子間力を調べる. 核子の系は, 動かない 2 つの φ 場の源

$$J(x) = g_1 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + g_2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \quad (3.38)$$

による相互作用 $J(x)\varphi(x)$ で記述される.

note これは電荷密度に類似の量である. 実際, 場 φ に結合する外源場 J は, 電磁場 A_μ に対しては電流密度 j^μ であり (p.177 第 1 の訳註), これは電荷密度 ρ を時間成分に持つ.

このとき式 (3.42) の $U(+\infty, -\infty)$ を [系の存続時間 $T(\rightarrow \infty)$ における发展演算子として] 具体的に評価すると,

$$\Delta E \equiv E_J - E_0 = -g_1 g_2 \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-m|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \quad (3.48)$$

が得られる (導出は下記). これは $\Delta E < 0$ の引力相互作用となっており, $g_1 g_2$ を除いた因子は湯川ポテンシャルと呼ばれる [式 (3.48) より核子間力は距離 $1/m$ 程度 (Compton 波長程度) までしか届かない].

上式 (3.48) の導出 教科書の導出過程を補足しつつまとめる. 時間発展演算子を相互作用のある時間 T において考えると, 公式 (3.42) は

$$e^{-i\Delta ET} = \langle 0|U(+\infty, -\infty)|0\rangle = \langle 0|T \left\{ -i \int d^4x J(x)\varphi(x) \right\} |0\rangle$$

を与える. ここで最右辺は母関数で表した Wick の定理 (3.32) の真空期待値として評価できる. その際, 恒等演算子 $O = 1$ に対しては例外的に, 正規積 $N(O) = 1$ の真空期待値はゼロにならず (p.33 上 2 行),

$$\langle 0|N \left\{ e^{-i \int d^4x J(x)\varphi(x)} \right\} |0\rangle = \langle 0|N \{1 + \dots\} |0\rangle = 1$$

となることに注意する. すると,

$$e^{-i\Delta ET} = \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) \langle 0|T \{ \varphi(x)\varphi(y) \} |0\rangle J(y) \right] \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} &= \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y (g_1 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + g_2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)) \right. \\ &\quad \left. \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot (y-x)} (g_1 \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}_1) + g_2 \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}_2)) \right] \\ &= \exp \left[-\frac{1}{2} \int dx_0 dy_0 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik_0 \cdot (y_0 - x_0)} \right. \\ &\quad \left. \times (g_1^2 + g_2^2 + g_1 g_2 e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} + g_2 g_1 e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}) \right] \\ &= A \exp \left[-g_1 g_2 \int dx_0 dy_0 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik_0 \cdot (y_0 - x_0)} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \right] \quad (3.44) \end{aligned}$$

を得る. ただし最後の等号では積分変数の変更 $-\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}$ により, $g_1 g_2$ の項の寄与が $g_2 g_1$ の項の寄与に一致することに注意した. 上の計算に見てとれるように, 最右辺の係数 A は伝播関数 $G(x, y)$ の引数がともに \mathbf{x}_i ($i = 1, 2$) となる 2 つの項から生じており, これらの項は時間 x_0, y_0 間で源 \mathbf{x}_i から放出された φ 粒子が, 同じ源に吸収される過程に対応している. A は発散する “自己エネルギー” を含むが, ここではこの問題には深入りしない.

上式 (3.44) の時間積分を実行すると

$$\int dx_0 dy_0 e^{-ik_0(y_0 - x_0)} = \left(\int dx_0 e^{ik_0 x_0} \right) \left(\int dy_0 e^{-ik_0 y_0} \right) = (2\pi \delta(k_0))^2 = 2\pi T \delta(k_0)$$

となるので,

$$\begin{aligned} e^{-i\Delta ET} &= A \exp \left\{ -ig_1 g_2 T \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} dk_0 \delta(k_0) \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}}{k_0^2 - \mathbf{k}^2 - m^2 + i\epsilon} \right\} \\ &= A \exp \left\{ ig_1 g_2 T \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}}{\mathbf{k}^2 + m^2} \right\} \quad (3.45) \end{aligned}$$

を得る．ここで Fourier 展開を経由して Helmholtz 方程式の Green 関数を求める計算

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}}{k^2+m^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-m|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|} \quad (3.46)$$

(右辺は湯川ポテンシャルに他ならない) を式 (3.45) 最右辺に代入し、係数 A を無視すると、 ΔE を式 (3.48) のように同定できる．

note 湯川ポテンシャルに関する、より簡単な議論は文献 [8, pp.10–12] に見られる．

Mössbauer 効果

ここからは源 $J(x)$ が生成する量子の個数を論じる．場の Fourier 展開 [相互作用 $J\varphi$ があっても相互作用描像で成立 [1, p.105]] における正振動数部分 $\varphi^{(+)}(x)$ (消滅演算子 $a_{\mathbf{k}}$ から成る) を源 $J(x)$ と結合させた量

$$a(J) \equiv \int d^4x J(x) \varphi^{(+)}(x) = \int d^4x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} J(x) a_{\mathbf{k}} e^{-i(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{k}} J(k) \quad (3.50)$$

を定義する．ただし最右辺における $J(k) \equiv \int d^4x J(x) e^{-ik\cdot x}$ は質量殻上の k に関する $J(x)$ の Fourier 変換であり、 $J(x)$ の実性より $J(-k)^* = J(k)$ を満たす [教科書でも結局 $\tilde{J}(k)$ のチルダを省いている]．すると $a(J)$ と $a^\dagger(J)$ は交換関係

$$[a(J), a^\dagger(J)] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} |J(k)|^2 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi |J(k)|^2 \delta(k^2 - m^2) \theta(k_0) \quad (3.51)$$

を満たすので、特殊な規格化を施された消滅・生成演算子と考えることができる．

note : 上式 (3.51) 第 1 の等号の確認 $a(J)$ の定義式 (3.50) と交換関係 (2.4): $[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 2E_{\mathbf{k}} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ より、

$$[a(J), a^\dagger(J)] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}'}} [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] J(k) J^*(k') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} J(k) J^*(k)$$

となることによる．

note : 上式 (3.51) 第 2 の等号の確認 式 (3.51) 最右辺に

$$\delta(k^2 - m^2) \theta(k_0) = \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \{ \delta(k_0 - E_{\mathbf{k}}) + \delta(k_0 + E_{\mathbf{k}}) \} \theta(k_0) = \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \delta(k_0 - E_{\mathbf{k}})$$

を代入して k_0 に関する積分を実行すると、第 2 辺に戻る．

そこでパラメーター $\mu \equiv \langle 0 | [a(J), a^\dagger(J)] | 0 \rangle$ を導入して (その値は式 (3.51) (> 0) に一致)、 N 粒子状態

$$|N\rangle = \mu^{-N/2} \frac{(a^\dagger(J))^N}{\sqrt{N!}} |0\rangle \quad (3.52)$$

を構築すると、これは

$$\langle N | N \rangle = 1 \quad (3.53)$$

と規格化されていることが分かる．

note : 上式 (3.53) の確認

$$\langle N|N\rangle = \frac{\mu^{-N}}{N!} \langle 0|(a(J))^N (a^\dagger(J))^N |0\rangle$$

において, 1つの $a(J)$ を N 個の $a^\dagger(J)$ と次々と交換していき, $(a^\dagger(J))^N$ の右隣まで移動させよう. このときのおつりの項を交換関係 (3.51) に基づいて評価すると,

$$\begin{aligned} \langle 0|(a(J))^N (a^\dagger(J))^N |0\rangle &= \dots = \langle 0| \left[(a(J))^{N-1} (a^\dagger(J))^N a(J) + N\mu (a(J))^{N-1} (a^\dagger(J))^{N-1} \right] |0\rangle \\ &= N\mu \langle 0|(a(J))^{N-1} (a^\dagger(J))^{N-1} |0\rangle \end{aligned}$$

となる. これを繰り返し用いると,

$$\langle 0|(a(J))^N (a^\dagger(J))^N |0\rangle = \dots = N!\mu^N \quad (\because \langle 0|0\rangle = 1) \quad (1)$$

が得られるので, 示された.

次に J が系に作用して, 正確に N 個の量子を生成する確率 $|\langle N|S|0\rangle|^2$ を調べよう. S 行列は式 (3.32) で与えられるので,

$$S = e^{-K/2} e^{-i \int d^4x J \varphi^{(-)}} e^{-i \int d^4x J \varphi^{(+)}} = e^{-K/2} e^{-ia^\dagger(J)} e^{-ia(J)}, \quad (3.49)$$

$$K \equiv \int d^4x d^4y J(x) J(y) \langle 0|T\{\varphi(x)\varphi(y)\}|0\rangle \quad (3.54)$$

と表される. さらに計算を進めるために, μ が c -数 (3.54) の実部であることに注目しよう.

note : $\mu = \text{Re } K$ の確認 (1/2) まず 3 次元の波数 \mathbf{k} による Fourier 展開の形式を利用して確認を行う.

$$\mu = \langle 0|[a(J), a^\dagger(J)]|0\rangle = \int d^4x d^4y J(x) J(y) \langle 0|[\varphi^{(+)}(x), \varphi^{(-)}(y)]|0\rangle \quad (2)$$

の被積分関数において, 交換関係 (2.4): $[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 2E_{\mathbf{k}}(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ より,

$$\begin{aligned} \langle 0|[\varphi^{(+)}(x), \varphi^{(-)}(y)]|0\rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}'}} [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] e^{-ik \cdot x} e^{ik' \cdot y} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} e^{-ik \cdot (x-y)} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \{\cos k \cdot (y-x) + i \sin k \cdot (y-x)\} \end{aligned} \quad (3)$$

となる. 最右辺における虚数 $i \sin k \cdot (y-x)$ の項は x, y に関して反対称なので, 対称な量 $J(x)J(y)$ との積の積分 (2) に寄与しない*3. よって

$$\mu = \int d^4x d^4y J(x) J(y) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \cos k \cdot (y-x).$$

$\mu =$ (式 (3.51)) から期待されるように, これは実であることが明白である.

他方, 伝播関数の表式 (3.19) より

$$\text{Re} \langle 0|T\{\varphi(x)\varphi(y)\}|0\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \{\theta(y_0-x_0) + \theta(x_0-y_0)\} \cos k \cdot (y-x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \cos k \cdot (y-x)$$

となるので, $\mu = \text{Re } K$ が成り立っている.

*3 これは添字に関して対称な量と反対称な量の縮約が消えることと同じ理屈である. より説明的には, 式 (2) を

$$\mu = \int d^4x d^4y J(x) J(y) \frac{1}{2} \{ \langle 0|[\varphi^{(+)}(x), \varphi^{(-)}(y)]|0\rangle + (x \leftrightarrow y) \}$$

と書き換えておいて, 式 (3) を代入すれば良い.

note : $\mu = \text{Re } K$ の確認 (2/2) 次に教科書の説明を補足しつつ, 波数 4 元ベクトル k による Fourier 展開の形式での証明を行う. よく知られた公式

$$\frac{1}{x + i\epsilon} = \frac{P}{x} - i\pi\delta(x) \quad (3.56)$$

を用いると, 式 (3.54) の K は

$$K = \int d^4x d^4y J(x) J(y) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot (x-y)} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \underbrace{\left(\int d^4x J(x) e^{-ik \cdot x} \right)}_{J(k)} \underbrace{\left(\int d^4y J(y) e^{ik \cdot y} \right)}_{J(-k)=J^*(k)} \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} |J(k)|^2 (\pi\delta(k^2 - m^2) + \text{imaginary}) \end{aligned} \quad (3.57a)$$

と書き換えられる. ここで最右辺の被積分関数に $1 = \theta(k_0) + \theta(-k_0)$ を掛け, この第 2 項の寄与において積分変数を $-k \rightarrow k$ と改めれば,

$$K = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi |J(k)|^2 \delta(k^2 - m^2) \theta(k_0) + \text{imaginary} \quad (3.57b)$$

が得られる. これを μ の式 (3.51) と比較すると, 再び $\mu = \text{Re } K$ が確かめられる.

すると,

$$S = e^{-ia^\dagger(J)} e^{-ia(J)} e^{-\mu/2} \times (\text{phase}) \quad (3.58)$$

と書ける. ここから, 求める確率は Poisson 分布

$$|\langle N|S|0 \rangle|^2 = \frac{\mu^N}{N!} e^{-\mu} \quad (3.59)$$

となることが見出される (直接見て取れるように, これは確率の規格化条件 $\sum_{N=0}^{\infty} |\langle N|S|0 \rangle|^2 = 1$ を満たしている).

note : 上式 (3.59) の導出 $\langle N|S|0 \rangle = (\text{phase}) \times \frac{\mu^{-N/2} e^{-\mu/2}}{\sqrt{N!}} \langle 0|(a(J))^N e^{-ia^\dagger(J)} e^{-ia(J)}|0 \rangle$ において,

$$\begin{aligned} \langle 0|(a(J))^N e^{-ia^\dagger(J)} e^{-ia(J)}|0 \rangle &= \langle 0|(a(J))^N e^{-ia^\dagger(J)}|0 \rangle \quad (\because e^{-ia(J)}|0 \rangle = (1 + \dots)|0 \rangle = |0 \rangle) \\ &= \frac{(-i)^N}{N!} \langle 0|(a(J))^N (a^\dagger(J))^N|0 \rangle \\ &= (-i)^N \mu^N \quad (\because \text{式 (1)}) \end{aligned}$$

である. よって最右辺の $(-i)^N$ を (phase) に含めると,

$$\langle N|S|0 \rangle = (\text{phase}) \times \frac{\mu^{N/2} e^{-\mu/2}}{\sqrt{N!}}$$

となるので, 確率 (3.59) を得る.

note : Poisson 分布 (3.59) について これは希薄な理想気体に関して, 注目している領域の平均粒子数が μ のとき, その領域に実際に N 個の粒子を見出す確率と同じである [9, pp.237-238].

μ が有限であれば, 源が粒子を生成しない $N = 0$ の確率は $e^{-\mu}$ となる.

Mössbauer (メスバウアー) 効果は、このような粒子の生成の欠如による効果である。自由な原子核が γ 線を放出すると、核自身も反跳する。光子のエネルギーは原子核の準位差よりも、核子の反跳エネルギー分だけ小さくなるので、その光子が同位元素である他の原子核に入射しても、原子核を基底状態から別の状態へ励起させることはできない。一方、原子核が結晶中にあると、(中略) 反跳エネルギーは生成されるフォノンによって運び去られる [フォノンの源 $J(x)$ は原子核の崩壊の鋭い“衝撃”]。しかし、たまたまフォノンが生成されず、全エネルギー $E_\gamma = E_{N^*} - E_{N^0}$ [右辺は準位差] を持つ γ 線が放出されるような過程が生じた場合、そのとき発生した光子は、結晶中にある他の原子核を励起して消滅することができる。(p.39, 強調は本稿筆者)

もちろん、フォノンが擬運動量 [言わば結晶に対する運動量 (2.3.2 節末尾)] を運ばない場合にも、光子の生成に伴い、結晶全体 (質量 M_{crystal}) が空間に対して真の運動量を持って反跳するので、厳密には光子はエネルギーを失うというのは正しい。そこで光子の失った (したがって結晶の得た) エネルギーを ΔE として、光子のエネルギーを改めて $E_\gamma = (E_{N^*} - E_{N^0}) - \Delta E$ と書くと、光子は運動量 $|p| = E_\gamma/c$ を持つ。すると [重心系で] 結晶は同じ運動量 $|p|$ で反跳するので、エネルギー $\Delta E = |p|^2/2M_{\text{crystal}}$ を得ることになる [非相対論的な表式で充分]。ところが巨視的な結晶の質量 M_{crystal} は大きいので、失われるエネルギー ΔE は、励起 $N^0 \rightarrow N^*$ の共鳴エネルギーの幅に比べて無視できるほど小さい [つまり励起を起こせる]。

よく考えると、衝撃が結晶中で音速より速く伝えられることは有り得ないにもかかわらず、結晶全体が剛体のように反応できるのは何故かという問題は面白い。[実際、少なくとも古典論では、あらゆる信号が光速を超えないことから剛体は禁止される [6, p.50].] この逆理 (パラドックス) は不確定性原理に基づいて説明される。結晶中の N 個の原子のうち、ひとつの原子が衝撃 I [撃力による力積 (運動量変化に一致)] を受けたときにフォノンを生成しないという過程は、衝撃を受ける直前に他の $N - 1$ 個の原子のゼロ点振動が結晶全体で揃い、原子あたりの平均運動量が I/N になっているという稀な場合に起こるのである。自由な結晶にとって、運動量はいり量子数なので、衝撃を受ける直前の原子は $-(N - 1)(I/N)$ の運動量を持っている [重心系で全運動量はゼロ]。衝撃を受けた原子は、他の原子と同様に I/N の運動量を持つので [I を足した]、他の原子の運動量への影響を考える必要はない。この場合、与えられた衝撃によって、ひとつの原子が他の原子集団に追随するようになるだけである。(p.39)

第4章 Feynman 規則

本章はある程度、場の理論の復習にあたるため、目新しい内容をいくらか特筆するに留める。

4.1 Feynman ダイアグラム

4.1.1 時空におけるダイアグラム

特筆：S 行列の「S は散乱 scattering の意」(p.41).

相互作用描像を採用し、S 行列

$$S = U(\infty, -\infty) = T \left\{ \exp \left(-i \int \mathcal{H}_I d^4x \right) \right\} \quad (4.1)$$

[\mathcal{H}_I を相互作用ハミルトニアン密度 \mathcal{H}_I に訂正した] の各摂動次数の項に Wick の定理を適用すると、演算子対を縮約した伝播関数と、生成・消滅演算子を含む正規積が得られる。全ての場が縮約された項は、外線を持たない“真空泡”に対応する。

最も単純な相互作用 $\mathcal{H}_I = \lambda\varphi^4/4!$ に対する S 行列の 2 次の項

$$\frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x d^4x' T \{ \mathcal{H}_I(x) \mathcal{H}_I(x') \} = \frac{(-i\lambda)^2}{2!(4!)^2} \int d^4x d^4x' T \{ \varphi^4(x) \varphi^4(x') \}$$

に Wick の定理を適用すると、例えば

$$(-i\lambda)^2 \frac{1}{3!} \int d^4x d^4x' (iG(x, x'))^3 \frac{1}{2} N \{ \varphi(x) \varphi(x') \} \quad (4.4)$$

という項が現れる。

note 積分変数 x, x' は固定して考える。このとき

- 4 つの $\varphi(x), \varphi(x')$ から縮約されない場を 1 つずつ選ぶ方法の総数 $\dots 4^2$
- 残る 3 つずつの $\varphi(x), \varphi(x')$ を縮約する場合の数 $\dots 3!$

を掛けると、 $\frac{1}{2!(4!)^2} \cdot 4^2 \cdot 3! = \frac{1}{2 \cdot 3!}$ となることによる。積分変数の入れ替えに関する対称性は、Dyson 級数 (3.11) の因子 $1/2!$ において既に考慮されている。

上式 (4.4) は図 5 のダイアグラムに対応し、正規積の前にある $\frac{1}{2}$ は S 行列要素を作る際、外線を外部の状態に対応させる組合せの数と相殺する。また各点に各結節点を接続する方法 [図 5 では 3 本の内線の入れ替えに対応] の数に関する“対称性因子” $\frac{1}{3!}$ が、自然に現れている。[以上は $\mathcal{H}_I = \lambda\varphi^4/4!$ にあらかじめ係数 $1/4!$ を含めておいた結果である.]

note 対称性因子に関する Feynman 規則は QED には現れないのに対し、QCD ではグルーオンの閉ループが可能なので考慮する必要がある [2, pp.384-386].

真空泡の因数分解

note 文献 [1, pp.127–128] では QED の初等的な応用に関して, “真空ダイアグラム” を省いて良いことが天
下りに説明された. 次いで文献 [2, pp.303–305] では, 相互作用描像における QED の Green 関数

$$G^{\mu\dots}(x, \dots, y, \dots, z, \dots) = \frac{\langle 0 | T \{ S A^\mu(x) \dots \psi(y) \dots \bar{\psi}(z) \dots \} | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle}$$

(6.1 節の Gell-Mann Low の定理に対応) の分子の摂動展開から現れる非連結の “真空気泡” のグラフ
が, 分母 $\langle 0 | S | 0 \rangle$ の展開から現れる同じグラフによって正確に相殺されることが説明され, 実際にその
ことを最低次の摂動論の範囲で確認した. 以下では S 行列要素の計算において真空泡を省ける理由を,
別の角度から検討することになる.

n 個の結節点が外線を持つダイアグラムに含まれ, p 個の結節点が外線に結合していない泡に含まれるよう
な, 任意のダイアグラムを考える. $(n+p)$ 個の結節点を持つダイアグラムは S 行列の λ^{n+p} 次の項から現れ
るから, Dyson 級数 (3.11) に由来する因子 $1/(n+p)!$ を含む. また $(n+p)$ 個の結節点を泡とそれ以外の 2
組に分ける場合の数は $\binom{n+p}{p}$ なので, 考えているダイアグラムは

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n+p)!} \binom{n+p}{p} \times (\text{externally connected parts}) \times (\text{bubbles}) \\ &= \frac{1}{n!} (\text{externally connected parts}) \times \frac{1}{p!} (\text{bubbles}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

という因子を含む. よって [S 行列を表す] ダイアグラムの和は

$$\left\{ \sum_n \frac{1}{n!} (\text{externally connected parts}) \right\} \times \left\{ \sum_p \frac{1}{p!} (\text{bubbles}) \right\} \quad (4.7)$$

と分解できる. このため真空泡を省いて計算した S 行列を $S' \equiv \sum_n \frac{1}{n!} (\text{externally connected parts})$ として,
S 行列要素は

$$\langle a | S | b \rangle = \langle a | S' | b \rangle \langle 0 | U(\infty, -\infty) | 0 \rangle \quad (4.8)$$

と表される.

note (bubbles) は全ての場を縮約して伝播関数にした c-数なので,

$$\langle a | S | b \rangle = \langle a | S' | b \rangle \left\{ \sum_p \frac{1}{p!} (\text{bubbles}) \right\}.$$

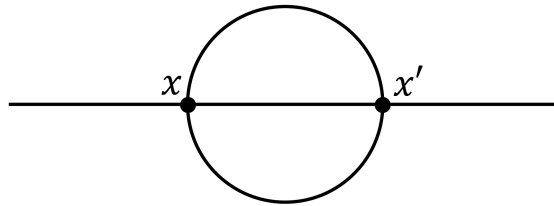


図 5 式 (4.4) に対応するダイアグラム

他方、正規化された演算子は真空期待値に寄与しないから、S 行列展開において真空期待値に寄与するのは全ての真空泡の和である。それは $\sum_p \frac{1}{p!}(\text{bubbles})$ と書けるから、

$$\langle 0|U(\infty, -\infty)|0\rangle = \langle 0|\sum_p \frac{1}{p!}(\text{bubbles})|0\rangle = \sum_p \frac{1}{p!}(\text{bubbles}). \quad (4)$$

2 式を組合せて上式 (4.8) を得る。

[式 (4.8) の] 後ろの因子は、前章で見た真空永年振幅である。非摂動の真空状態が安定で、自壊していかないものと仮定すると (常に正しいわけではないが、有用な仮定である)、真空永年振幅は位相だけに寄与を持ち [式 (3.42)], $|\langle a|S|b\rangle|^2$ で決まる断面積には影響しない。 (p.44)

この因数分解 [というよりもむしろ、真空偏極には真空泡のみが寄与すること (4)] の応用として、真空のエネルギー密度を評価しよう。式 (4) には複数の非連結の真空泡に対応する項も含む。そこでまず図 6 に示したような、連結した 1 つの真空泡の和を考える。すると各々のダイアグラムは 1 つの結節点の座標 x に関する積分と、伝播関数の引数にあたる結節点の相対座標に関する複数回の積分を施されることが見て取れる。そこで V を系の体積、 T を系の存続時間として

$$(\text{図 6}) = VT(\text{connected diagrams})$$

と書くと、(connected diagrams) は図 6 の連結ダイアグラムの和を、時空全体での積分は行わずに 1 つの結節点を固定して評価した量を意味することになる。同様に式 (4) における、 m 個の泡を持つダイアグラムは $(VT)^m$ に比例するから、

$$\langle 0|U(\infty, -\infty)|0\rangle = e^{-iW}, \quad (4.10)$$

$$W \equiv iT(\text{connected diagrams}) \quad (4.11)$$

と書ける。

note m 個の泡を持つ全てのダイアグラムは、図 6 のあらゆる非連結ダイアグラムの組合せ

$$(\text{図 6})^m = (-iW)^m$$

によって尽くされる。これは $(VT)^m$ に比例している点でも正しい。ただし泡どうしを入れ替えた同じグラフが $m!$ 個得られることになるから、 $1/m!$ で割る必要があると考えられる (式 (4) の $1/p!$ とは関係ない)。その m に関する和 $\sum_m \frac{(-iW)^m}{m!} = e^{-iW}$ が上式 (4.10) である*4。 $m = 1$ の項は図 6 を再現することが見て取れる。

上式 (4.10) を式 (3.42):

$$\langle 0|U(\infty, -\infty)|0\rangle = e^{-i(E-E_0)T} \quad (4.9)$$

(E, E_0 は H, H_0 の基底エネルギー) と等置すると、真空エネルギー密度の表式

$$\mathcal{E}_0 \equiv \frac{E - E_0}{V} = i(\text{connected diagrams})$$

が得られる。この結果は **Brueckner-Goldstone** (ブルックナー-ゴールドストーン)(もしくは **Bethe** (ベテ)-**Goldstone**) の定理と呼ばれる。

*4 実際、後で 1 つの連結した泡の和 (15.23) から、非連結ダイアグラムも含めたループの総和 (15.24) を得る際にも、同じ論法が用いられている

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8} \text{ (two circles touching at a point)} + \frac{1}{16} \text{ (three circles touching at two points)} + \frac{1}{48} \text{ (two circles with two internal arcs)} + \dots \\
& (-i\lambda)\{iG(x-x)\}^2 \quad + \quad \frac{(-i\lambda)^2\{iG(x-x)\}}{\times \{iG(x-x')\}^2\{iG(x'-x')\}} \quad + \quad (-i\lambda)^2\{iG(x-x')\}^4
\end{aligned}$$

図6 真空のエネルギー密度に寄与する連結ダイアグラム。対称性因子を各々のダイアグラムの前に付記してある。また敢えて $iG(x, x') \rightarrow iG(x - x')$ と表記を改めた。

外線の自己エネルギー

全文を引用する：

省くことが可能なもうひとつの種類のダイアグラムは、外線に“自己エネルギー”(self-energy)を挿入したダイアグラムである。(中略)他の外線を含まない相互作用は、相互作用のない“裸の”単一粒子の状態を正確な固有状態にするだけなので、無視することにする。

状態の発展に伴い、これらのダイアグラムは粒子の質量に繰り込みを施し、 φ が状態に結合する効率を修正する。この修正によって、真空と1粒子状態の間の Heisenberg 場の行列要素は、次のようになる。

$$\langle \mathbf{k} | \varphi(x) | 0 \rangle = \sqrt{Z} e^{-ik \cdot x} \quad (4.12)$$

行列要素の x 依存性が上式のようなことになることは、すでに第2章で見ている [式(2.6)]。係数の Z は必ず1以下であり、“波動関数の繰り込み定数”(wave function renormalization constant) と呼ばれる。これについては後の章 [6.2節, 特に式(6.24)の箇所] でも論じる。

note なお我々は \mathcal{H}_I を正規順序で定義してはいないから、ここでは S 行列展開の各項は混合 T 積にならず、同時刻縮約を省けるという議論 [1, pp.112–113] は適用されない。

4.1.2 運動量空間のダイアグラム

省略可能。

4.2 散乱の理論

$\lambda\varphi^3$ 理論における2体の散乱過程 $p_1, p_2 \rightarrow p'_1, p'_2$ の S 行列要素に対する最低次の寄与は、図7の3つのダイアグラムに対応し、

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2 | S | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle &= (2\pi)^4 \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) (-i\lambda)^2 \{iG(p_1 + p_2) + iG(p_1 - p'_1) + iG(p_1 - p'_2)\} \\
&= (2\pi)^4 \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) (-i\lambda)^2 \left\{ \frac{i}{s - m^2} + \frac{i}{t - m^2} + \frac{i}{u - m^2} \right\} \quad (4.17)
\end{aligned}$$

と表される。ここには標準的に用いられる Lorentz 不変量

$$\begin{aligned}
s &\equiv (p_1 + p_2)^2 = \text{squared center of mass energy,} \\
t &\equiv (p_1 - p'_1)^2 = \text{squared momentum transfer,}
\end{aligned}$$

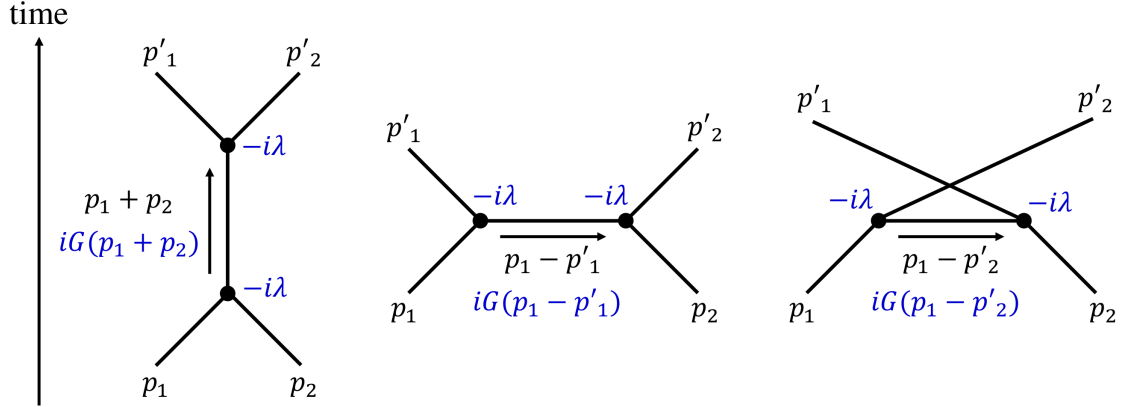


図7 3つの樹形ダイアグラム

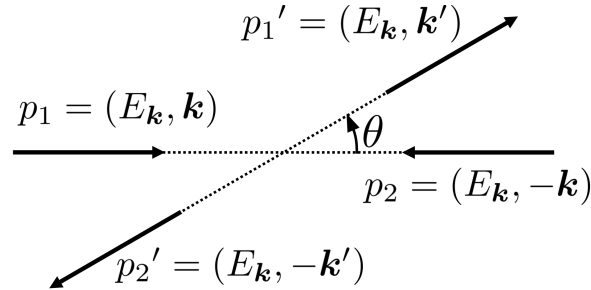


図8 重心系で見た粒子の4元運動量. $E_k \equiv \sqrt{m^2 + k^2}$, $|\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}|$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' = |\mathbf{k}|^2 \cos \theta$.

$$u \equiv (p_1 - p'_2)^2 \quad (4.18)$$

が現れており、これらの間には一定の関係

$$\begin{aligned} s + t + u &= p_1^2 + p_2^2 + p'^2_1 + p'^2_2 + 2p_1 \cdot (p_2 - p'_1 - p'_2 + p_1) \\ &= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

がある (m_i は各外線の粒子の質量).

4つの粒子の質量 m が等しければ、2体の散乱角を θ , 運動量を \mathbf{k} として、これらは単純な形

$$s = 4(m^2 + \mathbf{k}^2) (> 4m^2 > 0), \quad t = -2\mathbf{k}^2(1 - \cos \theta), \quad u = -2\mathbf{k}^2(1 + \cos \theta) (< 0) \quad (4.20)$$

になる.

note 上式 (4.20) では不変量 (4.18) を評価するのに重心系を採用している. 実際このとき粒子の4元運動量は図8のようにおけるので,

$$s = (2E_{\mathbf{k}})^2, \quad t = -(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2, \quad u = -(\mathbf{k} + \mathbf{k}')^2$$

となって、式 (4.20) を得る.

最終段落を引用する：

散乱振幅は, s, t, u が粒子の質量の自乗に等しくなるところで, それぞれに極を持つ. これらを s チャンネル, t チャンネル, u チャンネルからの寄与による極と称する. 中間状態の粒子が不安定であれば, s, t, u の極が複素数に移行し, 振幅は発散せずに大きな有限の値になる. この場合には, これらのチャンネルにおいて “共鳴” (resonance) が起こる. このことは, 次章で更に詳しく論じる.

4.2.1 散乱断面積

一般に散乱振幅は

$$\langle f|S|i\rangle = \langle f|i\rangle + (2\pi)^4 i \delta^4(p_f - p_i) T_{fi} \quad (4.22)$$

という形をとり [T_{fi} は Feynman 振幅と外線因子に対応], ここから得られる, 単位時間あたりの $i \rightarrow f$ の遷移頻度

$$\Gamma_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) |T_{fi}|^2 \quad (4.25)$$

は, **Fermi** の “黄金律” に合致する. 「読者は既に量子力学の授業で, 黄金律の導出方法を学んでいるであろう」(p.49). [例えば文献 [10, p.458] を参照. Fermi の黄金律とは対照的に, 場の理論から現れるデルタ関数はエネルギーだけでなく 4 元運動量を保存させる.]

2 粒子 (4 元運動量 p_1, p_2) の相対速度に関する Lorentz スカラー

$$I = (p_1 \cdot p_2)^2 - p_1^2 p_2^2 \quad (4.32)$$

は, 任意のベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} の張る平行四辺形の面積の 2 乗 $a^2 b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$ と同じ形をしている.

4.2.1 節について

■Heron の公式 (4.30) の導出 3 辺の長さが a, b, c の三角形の面積は, “半周長” $s \equiv (a + b + c)/2$ [不変量 (4.18) の s との混同に注意] を用いて, Heron (ヘロン) の定理

$$(\text{Area}) = \Delta(a, b, c) \equiv \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (4.30)$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} \quad (4.31)$$

で与えられる (導出は下記).

- Heron の公式は 3 辺 a, b, c に関する対称性が明白である.
- $\Delta(a, b, c)$ の表式 (4.31) の根号内は, 三角形の成立条件より正となっていることが見て取れる.

教科書を補足・訂正しつつ, 上式 (4.30) の導出を行う. 図 9 に示した一般の三角形の面積 (Area) は,

$$4(\text{Area})^2 = a^2 b^2 \sin^2 \theta = a^2 b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = a^2 b^2 - \left(\frac{(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 - a^2 - b^2}{2} \right)^2 = a^2 b^2 - \frac{1}{4} (c^2 - a^2 - b^2)^2 \quad (4.30')$$

$$= -\frac{1}{4} (a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2 b^2 - 2b^2 c^2 - 2c^2 a^2)$$

で与えられる. 他方 $\Delta(a, b, c)$ の表式 (4.31) の根号内を展開すると, $4(\Delta(a, b, c))^2$ が上式に一致し, 式 (4.30) が成立することを確認される. (常套的に 1 つの文字, 例えば a を選び, $\Delta(a, b, c)$ の根号内における a^4, a^3, \dots の係数を調べれば良い. 必要な多項式の展開の計算は退屈な作業となるものの, 直接的に行える.)

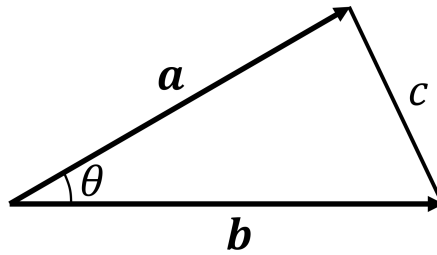


図9 Heron の公式 (4.30) 導出の状況設定

この s と 3 辺の長さで三角形の面積を表す式は、電卓の出現以前の時代には、高校で標準的に習う公式であった。しかし今日の学生は、この式にあまり馴染みがないようなので、証明を与えた。(p.51)

確かに中学・高校の数学の教科書において、Heron の公式は参考程度に形式的に載せてあるにすぎなかったと、筆者も記憶している。

■式 (4.29),(4.34): $\sqrt{I} = 2i\Delta(\sqrt{s}, m_1, m_2)$ について 式 (4.30'):

$$2\Delta(a, b, c) \equiv +\sqrt{a^2b^2 - \frac{1}{4}(c^2 - a^2 - b^2)^2}$$

は、式 (4.32) の $I \equiv (p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2$ と式 (4.18) の不変量 $s \equiv (p_1 + p_2)^2$ に対して、

$$2\Delta(m_1, m_2, \sqrt{s}) = \sqrt{m_1^2 m_2^2 - \frac{1}{4}((p_1 + p_2)^2 - m_1^2 - m_2^2)^2} = \sqrt{-I}, \quad \therefore \sqrt{I} = 2i\Delta(\sqrt{s}, m_1, m_2)$$

を与える。(なお不変量 I は実験室系で評価した式 (4.33) より正。)

4.2.2 不安定な粒子の崩壊

省略可能。

第5章 ループ・ユニタリー性・解析性

序文を引用する：

この章では、量子力学的な確率保存の要請に起因するユニタリー性が、摂動展開とどのように関係するかを調べる。

5.1 S 行列のユニタリー性

S 行列から、状態変化を起こさない成分を分離して

$$S = 1 + iT \quad (5.1)$$

と書き、遷移行列 (transition matrix) T を定義する [式 (4.22) に対応]. このとき S 行列のユニタリー性から、

$$2 \operatorname{Im} \langle n|T|n \rangle = \sum_m |\langle m|T|n \rangle|^2 \quad (5.4)$$

が帰結する (導出は下記). これは何らかの過程 (状態 $|n\rangle$ から、他の任意の状態への遷移) が起こる確率が、“元の状態に戻る振幅”の虚部に比例することを表しており [ただし式 (5.4) の導出の際、論理的には和の範囲 $m \neq n$ を仮定しない], いわゆる“光学定理” [Im (前方に散乱する波の振幅) \sim (全断面積) [10, p.539]] と同じ内容を表している.

上式 (5.4) の導出 S 行列のユニタリー性は、

$$1 = S^\dagger S = (1 - iT^\dagger)(1 + iT) = 1 - i(T^\dagger - T) + T^\dagger T, \quad (5.2)$$

$$\therefore T^\dagger T = i(T^\dagger - T) \equiv 2 \operatorname{Im} T \quad \left(\operatorname{Im} T \equiv \frac{T - T^\dagger}{2i} \right) \quad (5.3)$$

を与える [演算子の“虚部”を定義した]. 式 (5.3) の両辺をそれぞれ $\langle n|, |n\rangle$ で挟むと、

$$\langle n|T^\dagger T|n \rangle = \sum_m \langle n|T^\dagger|m \rangle \langle m|T|n \rangle = \sum_m |\langle m|T|n \rangle|^2,$$

$$(2 \langle n|\operatorname{Im} T|n \rangle \equiv) i(\langle n|T^\dagger|n \rangle - \langle n|T|n \rangle) = -i(\langle n|T|n \rangle - \langle n|T|n \rangle^*) = 2 \operatorname{Im} \langle n|T|n \rangle$$

となり、これらを等置して式 (5.4) を得る.

式 (5.4) のダイアグラムにおける意味を見るために、図 10 のような n 本の内線を持つ泡のグラフを考察する.

note スカラー場の 1 粒子過程 $p \rightarrow p'$ に対して遷移行列要素を具体的に評価することで、式 (5.4) が満たされていることを確かめる. $\lambda\phi^4$ 理論では、1 粒子過程 $p \rightarrow p'$ に寄与する λ の 2 次のダイアグラムは、自己エネルギーダイアグラムを除けば図 10 の形のグラフ (ただし $n = 3$, 本稿の図 5) に限られる. 教科書の図 4.2 (p.43) に網羅されている 2 次のダイアグラムを見よ.

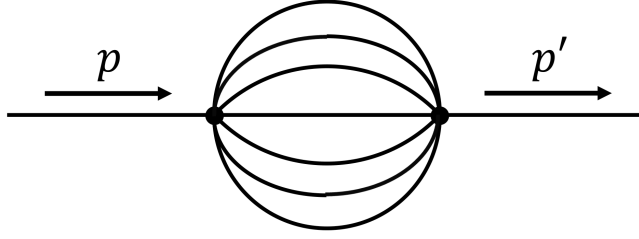


図 10 n 本の内線を持つ泡のグラフ

中間状態に対応する因子 $(-i\lambda)^2(iG(x_1, x_2))^n/n!$ (ただし $1/n!$ は対称性因子) の Fourier 変換は, [内向き運動量 $p, -p'$ を用いて]

$$\begin{aligned}
& \frac{(-i\lambda)^2}{n!} \int d^4x_1 d^4x_2 e^{-ip \cdot x_1 + ip' \cdot x_2} (iG(x_1, x_2))^n \\
&= \frac{(-i\lambda)^2}{n!} \int d^4x_1 d^4x_2 e^{-ip \cdot x_1 + ip' \cdot x_2} \\
& \quad \times \left[\theta(x_2^0 - x_1^0) \int \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}_i}} \right) e^{-i(k_1 + \dots + k_n) \cdot (x_2 - x_1)} \right. \\
& \quad \left. + \theta(x_1^0 - x_2^0) \int \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}_i}} \right) e^{+i(k_1 + \dots + k_n) \cdot (x_2 - x_1)} \right] \quad (5.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-i\lambda)^2}{n!} \int d^4z d^4x_1 e^{ip' \cdot z} e^{-i(p-p') \cdot x_1} [(x_1 - x_2) \rightarrow z \text{ と置き換えた式}] \quad (x_2 - x_1 = z) \\
&= (2\pi)^4 \delta^4(p - p') \frac{(-i\lambda)^2}{n!} \int d^4z e^{ip' \cdot z} [(x_1 - x_2) \rightarrow z \text{ と置き換えた式}] \quad (5.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^4 \delta^4(p - p') \frac{(-i\lambda)^2}{n!} \\
& \quad \times \left[\int \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}_i}} \right) (2\pi)^3 \delta^3 \left(\mathbf{p} - \sum_i \mathbf{k}_i \right) \frac{i}{p^0 - (E_{\mathbf{k}_1} + \dots + E_{\mathbf{k}_n}) + i\epsilon} \right. \\
& \quad \left. + \int \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}_i}} \right) (2\pi)^3 \delta^3 \left(\mathbf{p} - \sum_i \mathbf{k}_i \right) \frac{i}{-p^0 - (E_{\mathbf{k}_1} + \dots + E_{\mathbf{k}_n}) + i\epsilon} \right] \quad (5.7)
\end{aligned}$$

と計算される [式 (5.5), (5.7) の導出は本稿次節]. したがって中間状態では運動量は保存するが, エネルギーは保存せず, 分母にエネルギー差が現れる. これらの分数因子は図 11 のような「Rayleigh-Schrödinger 摂動」のダイアグラムに対応付けられる. すなわち, 中間状態 (図 11 の破線で示した時刻) でのエネルギーはそれぞれ

$$E_{\mathbf{k}_1} + \dots + E_{\mathbf{k}_n}, \quad 2p_0 + E_{\mathbf{k}_1} + \dots + E_{\mathbf{k}_n}$$

であり, これらの p_0 との差が式 (5.7) の 2 つの項における分母のエネルギー差を与える.

さて, 遷移行列要素の虚部を調べよう.

note 上式 (5.7) を $\langle \mathbf{p}' | S | \mathbf{p} \rangle$ の式 (4.22) と比較すると, $(-i\lambda)^2/n!$ 以降を $i \langle \mathbf{p}' | T | \mathbf{p} \rangle$ に同定できると考えられ

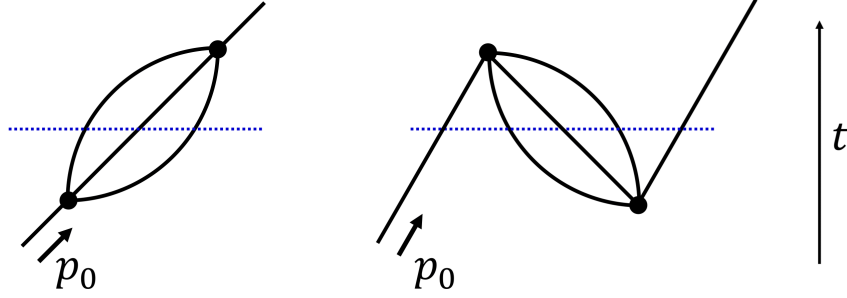


図 11 時間順序化した Rayleigh-Schrödinger ダイアグラム ($n = 3$)

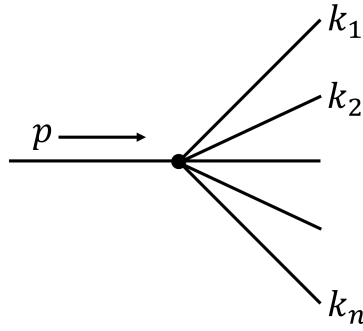


図 12 終状態

る. すなわち, 遷移行列要素は

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}' | T | \mathbf{p} \rangle = & \frac{i\lambda^2}{n!} \left[\int \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}_i}} \right) (2\pi)^3 \delta^3 \left(\mathbf{p} - \sum_i \mathbf{k}_i \right) \frac{i}{p^0 - (E_{\mathbf{k}_1} + \dots + E_{\mathbf{k}_n}) + i\epsilon} \right. \\ & \left. + \int \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}_i}} \right) (2\pi)^3 \delta^3 \left(\mathbf{p} - \sum_i \mathbf{k}_i \right) \frac{i}{-p^0 - (E_{\mathbf{k}_1} + \dots + E_{\mathbf{k}_n}) + i\epsilon} \right]. \end{aligned}$$

ここで良く知られた関係

$$\frac{1}{\omega + i\epsilon} = \frac{P}{\omega} - i\pi\delta(\omega) \quad (5.10)$$

を用いると, 2つのデルタ関数の項が虚部に寄与することになる. さらに $p^0 > 0$ を仮定すれば, ゼロでない値をとり得るのは, 第1項に由来するデルタ関数 $\delta(p^0 - (E_{\mathbf{k}_1} + \dots + E_{\mathbf{k}_n}))$ のみとなるので,

$$2 \text{Im} \langle \mathbf{p}' | T | \mathbf{p} \rangle = \frac{\lambda^2}{n!} \int \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}_i}} \right) (2\pi)^4 \delta^4 \left(\mathbf{p} - \sum_i \mathbf{k}_i \right) \quad (5.11)$$

が得られる. 右辺は図 12 に示すそれぞれの終状態に関する断面積の総和に関係しており [教科書の式 (4.28) を参照], したがって, この次数まで [λ^2 まで] で,

$$2 \text{Im} \langle \mathbf{p}' | T | \mathbf{p} \rangle = \sum_{\mathbf{k}} |\langle \{\mathbf{k}\} | T | \mathbf{p} \rangle|^2 \quad (5.12)$$

が成り立つ [式 (5.4) に整合].

5.1 節について

■式 (5.5) の導出 Green 関数の式 (3.19):

$$iG(x_1, x_2) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \left\{ \theta(x_2^0 - x_1^0) e^{-ik \cdot (x_2 - x_1)} + \theta(x_1^0 - x_2^0) e^{+ik \cdot (x_2 - x_1)} \right\}$$

の n 乗を代入すればよい。その際 $t = x_2^0 - x_1^0$ に対して $\theta(t)\theta(-t) = 0$ より、 $\theta^2(\pm t) = \theta(\pm t)$ の 2 項のみが生き残ることに注意する。また、各 k は on-shell である ($k^0 = E_{\mathbf{k}}$)。

なお、式 (3.16):

$$iG(x_1, x_2) = \theta(x_2^0 - x_1^0) \langle 0 | \varphi(x_2) \varphi(x_1) | 0 \rangle + \theta(x_1^0 - x_2^0) \langle 0 | \varphi(x_1) \varphi(x_2) | 0 \rangle$$

における $\varphi(x_1), \varphi(x_2)$ の間に、 n 粒子状態に限定した部分空間での完備関係式 (2.14):

$$1_n = \frac{1}{n!} \int \int \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}_i}} \right) |\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n\rangle \langle \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n|$$

(もっともらしい) を挿入し、式 (2.6): $\langle \mathbf{k} | \varphi(x) | 0 \rangle = e^{ik \cdot x}$ の代わりに

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n | \mathbf{k} \rangle &= \langle 0 | A(\mathbf{k}_1) \cdots A(\mathbf{k}_n) A^\dagger(\mathbf{k}) | 0 \rangle = \langle 0 | [2V\omega_{\mathbf{k}}(\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1} + \cdots + \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}_n}) + A^\dagger(\mathbf{k})A(\mathbf{k}_1) \cdots A(\mathbf{k}_n)] | 0 \rangle \\ &= 2V\omega_{\mathbf{k}}(\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1} + \cdots + \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}_n}), \\ \therefore \langle \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n | \varphi(x) | 0 \rangle &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \langle \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n | \mathbf{k} \rangle e^{ik \cdot x} = e^{i(k_1 + \cdots + k_n) \cdot x} \end{aligned}$$

が成り立つことを用いても、 $(-i\lambda)^2 iG(x_1, x_2)$ の Fourier 変換として式 (5.5) 右辺が得られる。ただしここでは真空への 1 つの寄与として、あらかじめ内線の本数 n を指定した量 $(iG(x_1, x_2))^n / n!$ を考えるのではなく、本来 n に依らない量 $iG(x_1, x_2)$ に人為的に 1_n を導入していることに注意する。

■式 (5.7) の導出

$$\begin{aligned} \text{(式 (5.6))} &= (2\pi)^4 \delta^4(p - p') \frac{(-i\lambda)^2}{n!} \int d^4z e^{ip \cdot z} \left[\theta(z^0) \int \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}_i}} \right) e^{-i(k_1 + \cdots + k_n) \cdot z} \right. \\ &\quad \left. + \theta(-z^0) \int \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}_i}} \right) e^{+i(k_1 + \cdots + k_n) \cdot z} \right] \end{aligned}$$

において、例えば第 1 項の積分は

$$\begin{aligned} &\int d^4z \theta(z^0) \int \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}_i}} \right) e^{i\{p - (k_1 + \cdots + k_n)\} \cdot z} \\ &= \int \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}_i}} \right) \int d^3z e^{-i\{p - (k_1 + \cdots + k_n)\} \cdot z} \int dz^0 e^{i\{p^0 - (E_{\mathbf{k}_1} + \cdots + E_{\mathbf{k}_n})\} z^0} \quad (\because k_i^0 = E_{\mathbf{k}_i} \text{ (on-shell)}) \\ &= \int \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}_i}} \right) (2\pi)^3 \delta^3 \left(\mathbf{p} - \sum_i \mathbf{k}_i \right) \frac{i}{p^0 - (E_{\mathbf{k}_1} + \cdots + E_{\mathbf{k}_n}) + i\epsilon} \end{aligned}$$

と計算できる。ただし最後の等号では、 z^0 に関する積分について公式 (3.20') を用いた。

5.2 解析的 S 行列

5.2.1 解析性の起源

物理系は“因果的” (causal) である, すなわち攪乱による変化は必ず攪乱の後に現れる. このことが, 系の解析的性質の起源となる.

この点を簡単な例で見てみよう. 減衰のある振動子の運動方程式

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + (\Omega^2 + \gamma^2)x = \frac{F(t)}{m} \quad (5.13)$$

[右辺に質量 m を補った] に対して, 解を

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, t') \frac{F(t')}{m} dt' \quad (5.14)$$

と書いて Green 関数を定義すると,

$$G(t, t') = \begin{cases} \frac{1}{\Omega} e^{-\gamma(t-t')} \sin \Omega(t-t') & (t > t') \\ 0 & (t < t') \end{cases} \quad (5.16)$$

となる [本稿次節で補足, これは因果律の要請を満たしている]. $G(t, 0)$ の Fourier 変換

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} e^{-\gamma t} \sin \Omega t dt \quad (5.17)$$

の積分範囲は, 因果律の結果として $t > 0$ となっている. このため [ω の定義域を複素平面に拡張することを考えるならば], 収束条件として $\text{Im} \omega > 0$ が課せられる. この下で

$$\tilde{G}(\omega) = -\frac{1}{(\omega + i\gamma)^2 - \Omega^2} \quad (5.18)$$

となる [本稿次節で確認]. これは ω の上半面に特異点を持たない [特異点 $\omega = \pm\Omega - i\gamma$ は下半面 (定義域の外)].

最終段落を引用する:

同様に因果的な応答関数の Fourier 変換は, ω の上半面において解析的な関数となる. この解析性は系の散乱を表す S 行列の k 空間行列要素にもあてはまる. 解析性は重要な概念である. 関数が解析的であれば, 任意の点の近傍に関する詳細な情報が分かるだけで, 関数が定義される全領域の関数形を決めることができる.

5.2.1 節について

■Green 関数 (5.16) について 減衰 $\gamma = 0$ の場合の議論 [11, pp.69–72, pp.93–95] を参考に, 式 (5.16) が正しい Green 関数であることを確かめる. それには $\omega^2 = \Omega^2 + \gamma^2$ と略記し,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial}{\partial t} + \omega^2 \right) G(t, t') = \delta(t - t') \quad (5)$$

を示せば良い*5. したがって少なくとも $t \geq t'$ に対しては

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\gamma\frac{\partial}{\partial t} + \omega^2\right)G(t, t') = 0 \quad (t \neq t') \quad (6)$$

なので, $G(t, t')$ は自由振動 ($F = 0$) の解でなければならず, 時に $t < t'$ では因果性より $G(t, t') = 0$ (自明な解) でなければならない. $t \geq t'$ に対する $G(t, t')$ の表式 (5.16) の各々はこれらを満たしており, 理に合っていることが納得できる. 実際とりわけ自由振動解が, 式 (5.16) の $t > t'$ に対する表式の形をとることはよく知られており, 減衰があれば運動は遅れるという直観に対応して, 振動数は $\omega = \sqrt{\Omega^2 + \gamma^2} \rightarrow \Omega$ と減少するのであった [12, pp.93–94].

Green 関数の条件 (5) が満たされることの完全な確認のために残された作業は, 任意の正数 a, b に対して

$$\begin{aligned} \int_{t'-b}^{t'+a} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\gamma\frac{\partial}{\partial t} + \omega^2\right)G(t, t')dt &= \frac{\partial G(t, t')}{\partial t} \Big|_{t=t'-b}^{t=t'+a} + 2\gamma G(t, t') \Big|_{t=t'-b}^{t=t'+a} + \frac{\omega^2}{\Omega} \int_{t'-b}^{t'+a} e^{-\gamma(t-t')} \sin \Omega(t-t')dt \\ &= e^{-\gamma a} \left(-\frac{\gamma}{\Omega} \sin \Omega a + \cos \Omega a\right) + 2\frac{\gamma}{\Omega} e^{-\gamma a} \sin \Omega a + \frac{\omega^2}{\Omega} I \end{aligned}$$

が 1 になることの確認である. ここで最右辺において

$$\begin{aligned} I &\equiv \int_{t'-b}^{t'+a} e^{-\gamma(t-t')} \sin \Omega(t-t')dt \\ &= -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma a} \sin \Omega a + \frac{\Omega}{\gamma} \int_{t'-b}^{t'+a} e^{-\gamma(t-t')} \cos \Omega(t-t')dt \\ &= -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma a} \sin \Omega a - \frac{\Omega}{\gamma^2} (e^{-\gamma a} \cos \Omega a - 1) - \frac{\Omega^2}{\gamma^2} I, \\ \therefore I &= -\frac{1}{\omega^2} \{\gamma e^{-\gamma a} \sin \Omega a + \Omega(e^{-\gamma a} \cos \Omega a - 1)\} \end{aligned}$$

なので, 実際に

$$\int_{t'-b}^{t'+a} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\gamma\frac{\partial}{\partial t} + \omega^2\right)G(t, t')dt = 1$$

が成立する. これと式 (6) より, 式 (5.16) の $G(t, t')$ は式 (5) を満たす Green 関数である.

なお, Green 関数 (5.16) を式 (5.14) に代入して得られる解

$$x_0(t) \equiv \int_{-\infty}^t G(t, t') \frac{F(t')}{m} dt' = \frac{1}{m\Omega} \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-t')} \sin \Omega(t-t') F(t') dt' \quad (5.15)$$

は特殊解であり, A, B を任意定数として, 自由振動 $x_1(t) \equiv e^{-\gamma t} (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t)$ を加えると, 一般解 $x(t) = x_0(t) + x_1(t)$ が得られる. 特殊解 (5.15) と対応する速度

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = G(t, t) \frac{F(t)}{m} + \int_{-\infty}^t \frac{\partial G(t, t')}{\partial t} \frac{F(t')}{m} dt'$$

の初期値は $x_0(-\infty) = 0, \dot{x}_0(-\infty) = 0$ なので, 初期条件として

$$x(-\infty) = 0, \quad \dot{x}(-\infty) = 0$$

を課せば, 一般解 $x(t) = x_0(t) + x_1(t)$ がこれを満たすのは, 自由振動 $x_1(t)$ が同じ条件を満たすように A, B を選んだときとなる*6.

*5 実際このとき上式 (5) に $F(t')$ を掛けて両辺を t' で積分すれば, $x(t)$ の式 (5.14) が運動方程式 (5.13) の解になることが分かる. これが Green 関数法のアイデアである.

*6 この場合, 具体的には $A = B = 0$ と考えられる.

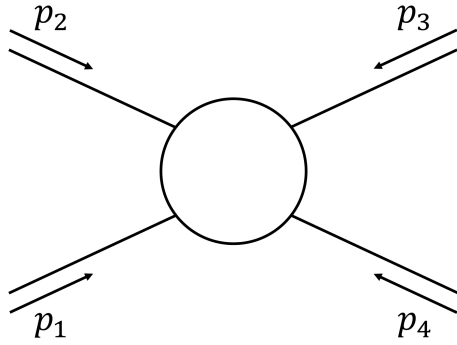


図 13 $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 + p_4)^2$,
 $u = (p_1 + p_3)^2$

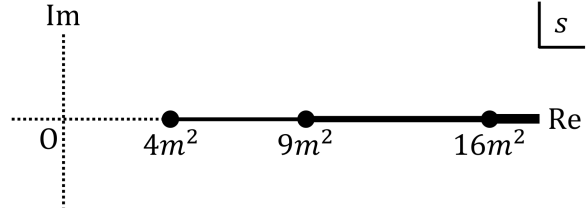


図 14 正常閾値切断線

■ $\tilde{G}(\omega)$ の式 (5.18) の確認 式 (5.17) 自体は通常の実数変数 t に関する積分であり，常套的に部分積分を繰り返して

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}(\omega) &= \frac{1}{\Omega} \int_0^\infty e^{(i\omega - \gamma)t} \sin \Omega t dt \\
 &= \frac{1}{\Omega} \left[\frac{e^{(i\omega - \gamma)t}}{i\omega - \gamma} \sin \Omega t \right]_0^\infty - \frac{1}{\Omega} \int_0^\infty \frac{e^{(i\omega - \gamma)t}}{i\omega - \gamma} \cos \Omega t dt \\
 &= - \left[\frac{e^{(i\omega - \gamma)t}}{(i\omega - \gamma)^2} \cos \Omega t \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{(i\omega - \gamma)t}}{(i\omega - \gamma)^2} (-\Omega \sin \Omega t) dt \\
 &= \frac{1}{(i\omega - \gamma)^2} - \frac{\Omega^2}{(i\omega - \gamma)^2} \tilde{G}(\omega), \\
 \therefore \tilde{G}(\omega) &= \frac{1}{\cancel{(i\omega - \gamma)^2}} \times \frac{\cancel{(i\omega - \gamma)^2}}{(i\omega - \gamma)^2 + \Omega^2} = -\frac{1}{(\omega + i\gamma)^2 - \Omega^2} : (5.18)
 \end{aligned}$$

とすれば良い。

5.2.2 ユニタリー性と分岐切断線

この節では，解析性とユニタリー性の組合せの帰結をいくつか見る。[教科書の説明がいくぶん天下りなこともあり，本稿では前半の内容を中心に結論だけをまとめる.] 質量 m の 2 粒子の衝突を考えよう。終状態も 2 粒子として図 13 のように 4 元運動量と，Lorentz 不変な運動学的不変量 (4.18) を定義する。S 行列は Lorentz 不変量なので，各外線の運動量によって作られる Lorentz 不変量を引数とする解析関数でなければならない。[ところが s, t, u は式 (4.19): $s + t + u = 4m^2$ を満たすことを踏まえ，独立変数として s, t を選ぶと，] このとき遷移行列は $T(s, t)$ と書ける。

さて，2 粒子の重心エネルギーの自乗 $s \equiv (p_1 + p_2)^2$ を徐々に増加させると，質量殻上に生成できる中間状態の粒子数が増えるような s の境界値は，

$$(2m)^2 = 4m^2, \quad (3m)^2 = 9m^2, \quad (4m)^2 = 16m^2, \quad \dots \quad (7)$$

与えられる [不変量 s を重心系で評価すると $s = (2E_p)^2 \geq (2m)^2$ が見出されることに注意]. これらを s の“正常閾値 (しきいち)” (normal threshold) という。

ここで“分岐点” (branch point) と“分岐切断線” (branch cut), “飛躍” (discontinuity) の概念を導入する。

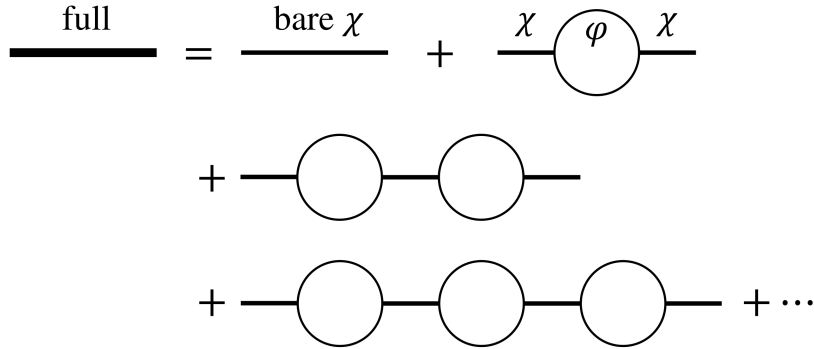


図 15 χ の伝播関数の級数

(p.58 の訳注を引用) 複素関数の特異点は、その近傍で多価性を生じない“単純極”と、多価性を生じる“分岐点”に大別される。(中略)“分岐切断線”は一般に分岐点同士 ($|z| = \infty$ も‘点’を考える) を結ぶように設定する曲線で、その径路には任意性があるが、応用上は実軸にある分岐点と実軸上の分岐切断線が重要となる場合が多い。解析関数 $f(z)$ の実軸 $z = x$ における“飛躍”の定義は、

$$\text{disc}_{z=x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(x + i\varepsilon) - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(x - i\varepsilon) = 2i \text{Im} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(x + i\varepsilon) \quad [\because [f(x + i\varepsilon)]^* = f(x - i\varepsilon)]$$

である。この飛躍がゼロでない領域が実軸上の分岐切断線になる。

ところで、伝播関数の $i\varepsilon$ を念頭に置くと、散乱振幅を求めるには無限小の虚部を持つ s での T の値、すなわち複素 s 平面において実軸のすぐ上での T の値を評価しなければならない。[しかもユニタリー性より、断面積を得るのに必要となるのは虚部 $\text{Im} T$ である (5.1 節).] 実は s の正常閾値 (7) は複素 s 平面において図 14 のように、[飛躍の値の異なる] 新しい分岐切断線が始まる分岐点となっており、実軸に沿う分岐切断線を横切ると、振幅を表す解析関数に飛躍が生じる。そして切断線の上下で T の値は、互いに複素共役となることを説明できる。よって s が実軸に沿って増加すると、分岐点を通過するとき、切断線のすぐ上での T の値は虚部 (興味のある $\text{Im} T$) が変化することになる。

5.2.3 共鳴と粒子の寿命

反応前の粒子対が、中間状態において質量殻上に 1 つの実粒子 (質量 M) を生成するのに十分なエネルギーを持つ場合、その粒子は反応前の粒子へ (場合によっては他の粒子にも) 崩壊できることに関係して、伝播関数 $1/(s - M^2)$ は修正を要する。

このことを具体的な例で見てみよう。相互作用 $\mathcal{L}_I = \frac{\lambda}{2} \chi \varphi^2$ によって記述される χ 粒子 (質量 M) と φ 粒子 (質量 m) を考える。2 つの φ 粒子が対消滅して、物理的な (すなわち質量殻上にある) χ 粒子を生成できる条件は、 $M^2 > 4m^2$ である。

note χ 粒子は静止系でエネルギー M を持つので、逆過程 $\chi \rightarrow \varphi\varphi$ が起きるには $M > 2m$ でなければならない。逆に 2 つの φ 粒子の重心系における全エネルギーは $2m$ ではないので、実粒子 χ が生成される条件は不等号を入れ替えた $M < 2m$ とはならない。

このとき χ 粒子の伝播関数は図 15 に示したように、 φ 粒子のループから成る自己エネルギー・ダイアグラ

ムを挿入した,

$$G(p^2) = \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon} + \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon} \{i\Pi(p^2)\} \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon} + \dots \quad (\text{無限等比級数}) \quad (5.21)$$

$$= \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon + \Pi(p^2)} \quad (5.22)$$

に修正される.

note 相互作用の形より, 摂動展開・Wick 展開から泡以外のグラフ (おたまじゃくしダイヤグラムなど) を作ることはできないと考えられる.

ここで φ 粒子の泡 $\Pi(p^2)$ は, [5.1 節と類似の計算により] 発散する実部を持つことが分かる [本稿次節で確認]. そこで $\Pi(p^2)$ の実部を質量項 M^2 に繰り込んで忘れてしまえば,

$$G(p^2) = \frac{1}{p^2 - M^2 + i\epsilon + i \operatorname{Im} \Pi(p^2)} \quad (5.22')$$

と書ける. 他方, 虚部は

$$2 \operatorname{Im} \Pi(p^2) = \theta(p^2 - 4m^2) \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}_1}} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}_2}} (2\pi)^4 \delta^4(p - k_1 - k_2) |\lambda|^2 \quad (5.23)$$

で与えられる [本稿次節で確認, $\Pi(p^2)$ (したがって $G(p^2)$) が実際に不変量 p^2 の関数となっていることは式 (5.48–49) にて判明する]. λ が, したがって虚部 (5.23) が小さいならば, 伝播関数 (5.22') は $p^2 = M^2$ の近くに極を持つ. そこで極を見出すために, 小さな $\operatorname{Im} \Pi(p^2)$ と $p^2 = M^2$ の近くを想定して, 式 (5.22') の分母を

$$\begin{aligned} p^2 - M^2 + i \operatorname{Im} \Pi(p^2) &\approx p^2 - \left(M - \frac{1}{2M} i \operatorname{Im} \Pi(p^2) \right)^2 \\ &\approx p^2 - \left(M - \frac{1}{2M} i \operatorname{Im} \Pi(M^2) \right)^2 \equiv p^2 - \left(M - i \frac{1}{2} \Gamma \right)^2 \end{aligned} \quad (5.24')$$

と近似すると, 極は $p = M - i \frac{1}{2} \Gamma$ と表される. ここに付加的な補正項の因子

$$\Gamma \equiv \frac{1}{M} \operatorname{Im} \Pi(M^2) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}_1}} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}_2}} (2\pi)^4 \delta^4(p - k_1 - k_2) |\lambda|^2 \quad (5.25)$$

は, χ 粒子の寿命の逆数に相当している [教科書 4.2.2 節における寿命の式 (4.36) を参照]. 実際この解釈は, 極 $p = M - i \frac{1}{2} \Gamma$ を χ 粒子の固有エネルギーと見なしたときの, χ 状態の時間発展が,

$$|\psi(t)|^2 \propto \left| e^{-i(M - i \frac{1}{2} \Gamma)t} \right|^2 = e^{-\Gamma t} \quad (5.26)$$

と表されることとも整合している (緩和時間 Γ^{-1}). 上式 (5.26) において, 指数関数的な減衰は質量 (固有エネルギー) が虚数成分を持つことに起因していることが見て取れる.

なお式 (5.22'), (5.24') より, χ 粒子の伝播関数は極の近くで, 近似的に

$$G(p^2) = \frac{1}{p^2 - (M - i \frac{1}{2} \Gamma)^2} \quad (5.27)$$

と表される. $\varphi\varphi$ 散乱の全断面積はその虚部に比例するので [5.1 節],

$$\sigma_{\text{tot}}(s) \propto \frac{1}{(\sqrt{s} - M)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2} \quad (5.28)$$

となる [本稿次節で補足]. これは $\sqrt{s} = M$ 周りのピーク幅 Γ の Lorentz 曲線を表しており, Γ が小さい (すなわち χ 粒子の寿命が長い) とき, 断面積に鋭いピークを生じることになる. この結果は **Breit-Wigner** (ブライト-ウィグナー) の公式 [文献 [10, p.580] にある] と整合している.

5.2.3 節について

■ φ 粒子の泡 $i\Pi(p^2)$ の計算 (1/2) 泡 $i\Pi(p^2)$ を第一原理から評価しよう. あらかじめ期待されるように, 泡の表式には φ 粒子の Green 関数が 2 つ含まれるはずである. ここでは相互作用ハミルトニアン $\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{2}\chi\varphi^2$ の理論を考えており, 1 つの泡に寄与するのは, S 行列の 2 次の項

$$S^{(2)} = \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x d^4y T\{\mathcal{H}_I(x)\mathcal{H}_I(y)\} = -\frac{\lambda^2}{8} \int d^4x d^4y T\{\chi(x)\varphi^2(x)\chi(y)\varphi^2(y)\}$$

に Wick の定理を適用して得られる, φ 粒子の Green 関数

$$iG_\varphi(x, y) = \langle 0|T\{\varphi(x)\varphi(y)\}|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iG_\varphi(k) e^{-ik\cdot(y-x)}, \quad iG_\varphi(k) = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

を 2 つ含む項

$$\begin{aligned} S_{\text{bubble}}^{(2)} &= -\frac{\lambda^2}{4} \int d^4x d^4y (iG_\varphi(x, y))^2 N\{\chi(x)\chi(y)\} \\ &= -\frac{\lambda^2}{4} \int d^4x d^4y \int \frac{d^4k d^4k'}{(2\pi)^{4\cdot 2}} iG_\varphi(k) iG_\varphi(k') e^{-i(k+k')\cdot(y-x)} \\ &\quad \times \int \frac{d^4q d^4q'}{(2\pi)^{3\cdot 2}} \frac{1}{2E_q 2E_{q'}} N[(a_\chi(\mathbf{q})e^{-iq\cdot x} + a_\chi^\dagger(\mathbf{q})e^{iq\cdot x})(a_\chi(\mathbf{q}')e^{-iq'\cdot y} + a_\chi^\dagger(\mathbf{q}')e^{iq'\cdot y})] \end{aligned}$$

である. ただし $a_\chi(\mathbf{q}), a_\chi^\dagger(\mathbf{q})$ は χ 粒子の生成・消滅演算子であり, χ 粒子の 4 元運動量 q, q' は on-shell である. ここで始・終状態を χ 粒子の 1 粒子状態 $|i\rangle = |\chi; \mathbf{p}\rangle, |f\rangle = |\chi; \mathbf{p}'\rangle$ に選ぶと, 最右辺の正規積の S 行列要素への寄与は

$$\begin{aligned} \langle f|N[\dots]|i\rangle &= \langle \chi; \mathbf{p}'|(a_\chi^\dagger(\mathbf{q}')a_\chi(\mathbf{q})e^{i(q'\cdot y - q\cdot x)}a_\chi^\dagger(\mathbf{q})a_\chi(\mathbf{q}')e^{i(q\cdot x - q'\cdot y)})|\chi; \mathbf{p}\rangle \\ &= 2E_p 2E_{p'} (2\pi)^{3\cdot 2} \{\delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{q}')\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q})e^{i(p'\cdot y - p\cdot x)} + \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{q})\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}')e^{i(p'\cdot x - p\cdot y)}\} \quad (\dots \text{式 (2.4)}) \end{aligned}$$

となるので, 行列要素は

$$\langle f|S_{\text{bubble}}^{(2)}|i\rangle = -\frac{\lambda^2}{4} \int \frac{d^4k d^4k'}{(2\pi)^{4\cdot 2}} iG_\varphi(k) iG_\varphi(k') \int d^4x d^4y e^{-i(k+k')\cdot(y-x)} \left(e^{i(p'\cdot y - p\cdot x)} + e^{i(p'\cdot x - p\cdot y)} \right) \quad (8)$$

と計算される. 時空点 x, y に関する積分は

$$(2\pi)^{4\cdot 2} \{\delta^4(k+k'-p)\delta^4(p'-k-k') + \delta^4(p'+k+k')\delta^4(p+k+k')\} = (2\pi)^{4\cdot 2} \delta^4(p-p') \{\delta^4(p-k-k') + \delta^4(p+k+k')\}$$

であり, 第 2 項は行列要素 $\langle f|S_{\text{bubble}}^{(2)}|i\rangle$ の式全体において, 積分変数の変更 $-k, -k' \rightarrow k, k'$ を行えば, 第 1 項の寄与に一致するので,

$$\langle f|S_{\text{bubble}}^{(2)}|i\rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p-p') \left[-\frac{i\lambda^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} G_\varphi(k) G_\varphi(p-k) \right]$$

が得られる. 右辺の $[\dots]$ 内を φ 粒子の泡に同定できると考えられる. この結果は理に合っている.

■ φ 粒子の泡 $i\Pi(p^2)$ の計算 (2/2) 以上の計算で $iG_\varphi(x, y)$ の Fourier 展開を施さなければ,

$$\langle f|S_{\text{bubble}}^{(2)}|i\rangle = -\frac{\lambda^2}{4} \int d^4x d^4y (iG_\varphi(x, y))^2 \left(e^{i(p' \cdot y - p \cdot x)} + e^{i(p' \cdot x - p \cdot y)} \right)$$

が得られていた. (実際, 式 (8) で運動量 k, k' の積分を実行すれば上式の戻る.) ここでは式 (5.5) の導出時と同様に, on-shell の $k = (E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$ による展開

$$iG_\varphi(x, y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \left(\theta(y^0 - x^0) e^{-ik \cdot (y-x)} + \theta(x^0 - y^0) e^{+ik \cdot (y-x)} \right)$$

を代入すると,

$$\begin{aligned} \langle f|S_{\text{bubble}}^{(2)}|i\rangle &= -\frac{\lambda^2}{4} \int d^4x d^4y \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}'}} \left(\theta(y^0 - x^0) e^{-i(k+k') \cdot (y-x)} + \theta(x^0 - y^0) e^{+i(k+k') \cdot (y-x)} \right) \\ &\quad \times \left(e^{i(p' \cdot y - p \cdot x)} + e^{i(p' \cdot x - p \cdot y)} \right) \quad (\because \theta^2(\pm t) = \theta(\pm t), \theta(\pm t)\theta(\mp t) = 0) \\ &= -\frac{\lambda^2}{4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}'}} \int d^4z \left(\theta(z^0) e^{-i(k+k') \cdot z} + \theta(-z^0) e^{+i(k+k') \cdot z} \right) \\ &\quad \times \int d^4x \left(e^{i(p' \cdot z + (p' - p) \cdot x)} + e^{i((p' - p) \cdot x - p \cdot z)} \right) \quad (z \equiv y - x) \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p' - p) \left(-\frac{\lambda^2}{4} \right) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}'}} \\ &\quad \times \int d^4z \left(\theta(z^0) (e^{i(p' - k - k') \cdot z} + e^{-i(p' + k + k') \cdot z}) + \theta(-z^0) (e^{i(p' + k + k') \cdot z} + e^{-i(p - k - k') \cdot z}) \right) \end{aligned}$$

と書き換えられる. 最右辺において, デルタ関数 $\delta^4(p' - p)$ 以降では $p' = p$ とおいてよく, また z に関する被積分関数の第 2 項は変数変換 $-z \rightarrow z$ により第 1 項に一致する. さらに階段関数の Fourier 変換の公式 (3.20'): $\int dt e^{i\omega t} \theta(t) = \frac{i}{\omega + i\epsilon}$ を利用すると,

$$\begin{aligned} \langle f|S_{\text{bubble}}^{(2)}|i\rangle &= (2\pi)^4 \delta^4(p' - p) \left(-\frac{\lambda^2}{4} \right) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}'}} \\ &\quad \times 2 \left(\frac{i}{E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}'} + i\epsilon} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}') + \frac{i}{E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}'} + i\epsilon} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} + \mathbf{k} + \mathbf{k}') \right) \end{aligned}$$

が得られる (式 (5.7) に対応). ただし

$$E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}, \quad E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, \quad E_{\mathbf{k}'} = \sqrt{\mathbf{k}'^2 + m^2}.$$

再び $(-\lambda^2/4)$ 以降の因子を $i\Pi(p^2)$ に同定できる. ここでも式 (5.10): $\frac{1}{\omega + i\epsilon} = \frac{\mathcal{P}}{\omega} - i\pi\delta(\omega)$ を想起すると, 「 Π は発散する実部を持」(p.60, 1.6) ち, 虚部は式 (5.23) で与えられる. ただし $p^0 = E_{\mathbf{p}} > 0$, etc. より, 第 2 項に由来するデルタ関数 $\delta^4(\mathbf{p} + \mathbf{k} + \mathbf{k}')$ は常にゼロとなることに注意した. また φ 粒子の Green 関数において on-shell の $k^0 = E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ を考えている以上, 中間状態に仮想的でない実粒子対を生成できる条件 $M^2 > 4m^2$ が満たされていないことを踏まえて, 階段関数 $\theta(p^2 - 4m^4)$ を導入した.

■全断面積 (5.28) について 重心エネルギーの自乗 $s \equiv p^2$ を用いると, 伝播関数 (5.27) は

$$G(s) = \frac{1}{s - (M - i\frac{1}{2}\Gamma)^2} = \frac{1}{\sqrt{s} - (M - i\frac{1}{2}\Gamma)} \frac{1}{\sqrt{s} - (M + i\frac{1}{2}\Gamma)}$$

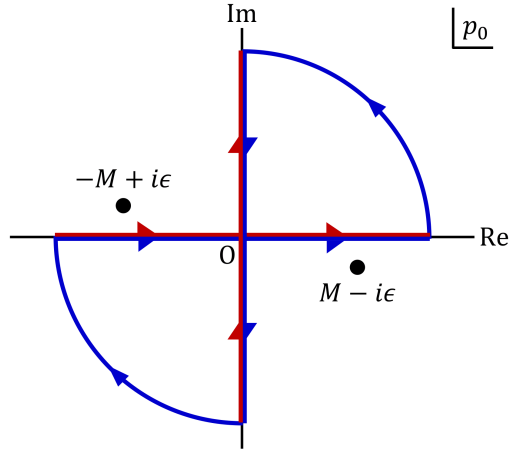


図 16 note : 青い閉曲線は極を含まないので, $0 = \oint = \int_{\text{実軸}} - \int_{\text{虚軸}}$

と書き換えられる. ここで最右辺において, 極に関係しない第 2 の小さな虚部 $i\Gamma/2$ を無視すると,

$$G(s) \sim \frac{1}{\sqrt{s} - (M - i\frac{1}{2}\Gamma)}, \quad \therefore \sigma_{\text{tot}}(s) \sim \text{Im} G(p^2) \sim \frac{1}{(\sqrt{s} - M)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} : (5.28)$$

が得られる.

5.3 ループのダイアグラム

5.3.1 Wick 回転

積分

$$I = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{[p^2 - M^2 + i\epsilon]^m} \quad (5.29)$$

を複素 p_0 平面において考えると, 図 16 のように積分路は, 実軸から虚軸に移すことができる (Wick 回転). 虚軸に沿う積分は, $p_0 = ip_0^E$ とおくと,

$$I = i(-1)^m \int \frac{d^d p^E}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(p^E)^2 + M^2]^m} \quad (5.30)$$

と表される.

note $p^E \equiv (p_0^E, \mathbf{p}), \therefore d^d p = id^d p^E$ であり, 虚時間 $x^4 \equiv ix^0$ を導入する場合と同様, 内積

$$p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2 = -((p_0^E)^2 + \mathbf{p}^2) \equiv -(p^E)^2$$

は Euclid 計量を用いて計算されることになる. これらを式 (5.29) に代入して上式 (5.30) を得る.

Wick 回転では, 無限遠で [図 16 の円弧に沿う] 積分が消えることを仮定しており, そのためには, 被積分関数の分母の次数 m が十分大きいことが必要である. 具体的には [単純に発散次数を考えれば],

$$2m > d$$

でなければならない. しかし,

$$\frac{1}{2 \cdot 1} \text{ (circle with 1 dot) } + \frac{1}{2 \cdot 2} \text{ (circle with 2 dots) } + \frac{1}{2 \cdot 3} \text{ (circle with 3 dots) } + \frac{1}{2 \cdot 4} \text{ (circle with 4 dots) } + \dots$$

図 17 質量相殺項 $\mathcal{H}_I = -\delta m^2 \varphi^2$ から現れる (connected diagrams). (結節点因子) $\sim \delta m^2$.

通常は $2m < d$ で積分が発散する条件においても、このような手法が必要になる。後からこの種の誤魔化しを正当化するための物理的な議論を行う。(p.62)

note 具体的にはすぐ後の真空のエネルギー密度 (5.31') において、各項に Wick 回転を適用できる条件は次数 $n > 2$ であるにも関わらず、 $n = 1, 2$ の項にも Wick 回転の公式を用いることになる。ところが結果的に得られるエネルギー密度の表式 (5.38) は、物理的に満足のいくものになっている。

Ouroboros のグラフ

Wick 回転の 1 つの応用として、自由場における真空エネルギー密度を計算しよう。

note : 復習 4.4.1 節で導いた、真空エネルギー密度の公式

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = i(\text{connected diagrams})$$

を思い出しておこう。ただし右辺の (connected diagrams) は、1 つの結節点を固定して評価した、真空泡を表す全ての連結ダイアグラムの和である。また 4.4.1 節では左辺のエネルギー密度のズレを $\mathcal{E}_0 \equiv (E - E_0)/V$ と書いていたのに対し、ここでは $\mathcal{E} = E/V, \mathcal{E}_0 = E_0/V$ と表記を改めている。さらに、この結果の証明には相互作用の具体的な形をあからさまに用いていないことに注意する。

note : 質量相殺項 そこで自由場のラグランジアン $\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^2$ における裸の質量の自乗 m^2 を、物理的な値 $m^2 + \delta m^2$ に置き換える代償として、質量相殺項

$$\mathcal{L}_I = \delta m^2 \varphi^2 (= -\mathcal{H}_I)$$

を相互作用として導入すると、ここから現れる (connected diagrams) として可能なグラフは、図 17 で尽くされると考えられる。

図 17 の n 次のグラフには「 n 重の巡回対称性と、円周を周回する 2 つの方向によって対称性因子 $1/(2n)$ が現れる」(p.63, 1.5,6) [数珠順列]。よって

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = i(\text{connected diagrams}) = i \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2n} \left((-i\delta m^2) \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right). \quad (5.31')$$

note $\mathcal{H}_I = -\delta m^2 \varphi^2$ における負号と Dyson 級数の虚数 i が結節点因子 $-i\delta m^2$ を成し、 φ^2 の縮約が伝播関数を作ると考えられる。また (connected diagrams) は伝播関数の相対座標だけに依存する量として定義されていることを踏まえて、運動量空間に移すと、上式 (5.31') が得られると考えられる。実際、式 (5.31') の最左辺と最右辺の次元は合っている。

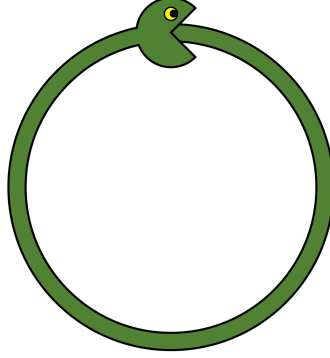


図 18 Ouroboros (ウロボロス). 教科書 p.64 にも挿絵があり, 著者の遊び心が窺える.

式 (5.31') に Wick 回転の公式 (5.30) を適用すると,

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k^E}{(2\pi)^4} (\ln((k^E)^2 + (m^2 + \delta m^2)) - \ln((k^E)^2 + m^2)) \quad (5.34)$$

が得られる.

上式 (5.34) の導出 Wick 回転の公式 (5.30) より, エネルギー密度 (5.31') は

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 k^E}{(2\pi)^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{\delta m^2}{(k^E)^2 + m^2} \right)^n = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k^E}{(2\pi)^4} \ln \left(1 + \frac{\delta m^2}{(k^E)^2 + m^2} \right)$$

と計算される. ここで対数を [真数が次元を持つ形を許容して]

$$\ln \left(1 + \frac{\delta m^2}{(k^E)^2 + m^2} \right) = \ln((k^E)^2 + (m^2 + \delta m^2)) - \ln((k^E)^2 + m^2)$$

と書き換えれば, 式 (5.34) が得られる.

式 (5.34) より, 自由場の基底エネルギー密度は

$$\mathcal{E}_0(m^2) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k^E}{(2\pi)^4} \ln((k^E)^2 + m^2) \quad (5.35)$$

と同定できる. [これは発散することが見て取れる $((k^E)^2 \equiv (k_0^E)^2 + \mathbf{k}^2$ に注意).]

$k^2 + m^2$ [本稿の $(k^E)^2 + m^2$ のこと] の対数は, 始点も終点もない “自分の尾に噛みついた伝播関数” を表すものと考えられる. 私はこのダイアグラムを, “tail eater” を意味するギリシャ語に因んで “Ouroboros (ウロボロス) ダイアグラム” と呼ぶことにしたい. Ouroboros は自分自身の尾に噛みついていて蛇として描かれ [図 18 参照], 果てしない生死の繰り返しを表象する. これは無限大の記号 ∞ の由来でもあり, 何も無いところから粒子-反粒子対が現れては, 再結合によって消滅することを繰り返している真空過程の寄与を表すのにふさわしい名称である. [前節では真空泡による伝播関数の修正が, 裸の質量を物理的な値に移行させたことを思い出そう.] (pp.63-64)

なお式 (5.35) の $\mathcal{E}_0(m^2)$ は, 各モードのゼロ点エネルギー $\omega_{\mathbf{k}}/2$ (ただし $\omega_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$) の総和

$$\mathcal{E}_0(m^2) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \quad (5.38)$$

となっている $[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \rightarrow \frac{1}{(\text{Vol})} \sum_{\mathbf{k}}$ とすると意味がはっきりする].

上式 (5.38) の導出 技巧的であるが, 敢えて式 (5.35) の $\mathcal{E}_0(m^2)$ の m^2 による微分を計算してから, それを改めて m^2 で積分する. まず m^2 による微分は

$$\frac{\mathcal{E}_0(m^2)}{\partial m^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4k^E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^E)^2 + m^2} = \frac{1}{2 \cdot 2\pi} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int dk_0^E \frac{1}{(k_0^E)^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2} \quad (5.36)$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} \quad (5.37)$$

となる. [第3辺における k_0^E による積分は, 常套的に $k_0^E = \omega_{\mathbf{k}} \tan \theta$ と変数変換して実行すると, $\pi/\omega_{\mathbf{k}}$ となる.] これを再び m^2 で積分し, m に依存しない定数項を省くと, 式 (5.38) が得られる.

5.3.2 Feynman のパラメーター積分公式

Schwinger の技法では, 恒等式

$$a_1^{-n_1} \dots a_m^{-n_m} = \frac{1}{\prod_{i=1}^m \Gamma(n_i)} \int_0^\infty dt_1 \dots dt_m t_1^{n_1-1} \dots t_m^{n_m-1} e^{-t_1 a_1} \dots e^{-t_m a_m} \quad (5.39)$$

を利用する [各指数において $t \rightarrow t_i$ と訂正した, 本稿次節で上式 (5.39) を証明]. 右辺をさらに “Feynman の技法” で書き換えると,

$$a_1^{-n_1} \dots a_m^{-n_m} = \frac{\Gamma\left(\sum_i n_i\right)}{\prod_i \Gamma(n_i)} \int_0^\infty d[\alpha] \delta\left(\sum_i \alpha_i - 1\right) \frac{\prod_i \alpha_i^{n_i-1}}{\left(\sum_i \alpha_i a_i\right)^{\sum_i n_i}} \quad (5.41)$$

となる. [本稿次節で教科書の説明を補足しつつ, 上式 (5.41) を導出する. $d[\alpha] \equiv \prod_i d\alpha_i$ であり, 和や積の範囲はいずれも $i = 1, \dots, m$ である.]

5.3.2 節について

■Schwinger の技法 (5.39) の確認 ガンマ関数の定義式

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty ds s^{n-1} e^{-s} = a^n \int_0^\infty dt t^{n-1} e^{-at} \quad (s = at) \quad (9)$$

の積をとると

$$\prod_{i=1}^m \Gamma(n_i) = a_1^{n_1} \dots a_m^{n_m} \int_0^\infty dt_1 \dots dt_m t_1^{n_1-1} \dots t_m^{n_m-1} e^{-t_1 a_1} \dots e^{-t_m a_m}$$

となるので, 式 (5.39) を得る.

■式 (5.41) の導出 $t \equiv \sum_i t_i$ に対して変数 $\alpha_i \equiv t_i/t$ を導入すると $\sum_i = 1$ が課されるので, 積分要素は

$$\prod_i dt_i = t^{m-1} dt \left(\prod_i d\alpha_i \right) \delta\left(\sum_i \alpha_i - 1\right)$$

となると考えられる．そこで $\prod_i d\alpha_i \equiv d[\alpha]$ と略記すると，式 (5.39) の右辺は

$$\frac{1}{\prod_i \Gamma(n_i)} \int_0^\infty dt \int d[\alpha] \delta\left(\sum_i \alpha_i - 1\right) t^{m-1} \cdot t^{\sum_i n_i - m} (\alpha_1^{n_1-1} \dots \alpha_m^{n_m-1}) e^{-t(\sum_i \alpha_i a_i)} \quad (5.40)$$

と書き換えられる．ここで右辺の t に関する積分は，式 (9) より

$$\int_0^\infty dt t^{\sum_i n_i - 1} e^{-t(\sum_i \alpha_i a_i)} = \frac{\Gamma\left(\sum_i n_i\right)}{\left(\sum_i \alpha_i a_i\right)^{\sum_i n_i}}$$

となるので，式 (5.41) を得る．

5.3.3 次元正則化

式 (5.41) は $a_1 = a_2 = 1, n_1 = x, n_2 = y$ の特別な場合として，ベータ関数のよく知られた公式

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(x, y) \equiv \int_0^1 d\alpha \alpha^{x-1} (1-\alpha)^{y-1} \quad (5.42)$$

を含んでいる [本稿次節で確認]．

note 式 (5.42) を利用するだけなら，**5.3.2** 節のより一般的な公式は不要である．それどころか，「この式 [(5.42)] を，次の積分に適用してみよう」(p.65 下から 2 行目) とあるにも関わらず，以下で見るように本節では，上式 (5.42) すら (少なくともあからさまには) 用いない．ガンマ関数の定義式の，積分変数をリスケールした公式 (9) さえあれば十分である．

ここからは Wick 回転済みの積分

$$I \equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p+k)^2 + m^2} \frac{1}{p^2 + m^2} \quad (5.43)$$

を考える．

note これは 5.2.3 節のノートで見た泡の表式

$$\Pi(k^2) = -\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G_\varphi(p) G_\varphi(k-p)$$

(ただし p と k の役割を入れ替えた) に現れた積分に他ならない．ただし式 (5.43) における変数 p や内積 p^2 などは，本稿ではそれぞれ $p^E, (p^E)^2$ と書いていたものであるものの，以下では教科書の表記に合わせて，煩わしい添字 E を省く． $(\dots)^2$ を Lorentz 内積と混同しないように注意せよ．

まず，Feynman のパラメーター積分公式

$$\frac{1}{xy} = \int_0^1 d\alpha \frac{1}{(\alpha x + (1-\alpha)y)^2} \quad (5.44)$$

[文献 [1, p.235] で確認済み] を用いて, 式 (5.43) を

$$I = \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[\alpha(p^2 + 2p \cdot k + k^2) + m^2 + (1-\alpha)p^2]^2} \quad (5.45)$$

と書き換えておく. これを't Hooft と Veltman (ヴェルトマン) の“次元正則化”の技法で評価しよう. 具体的には, d 次元時空における一般公式

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{[p^2 + 2p \cdot k + M^2]^m} = \frac{\Gamma(m-d/2)}{\Gamma(m)} \frac{1}{2^d \pi^{d/2}} (M^2 - k^2)^{(d/2)-m} \quad (5.46-47)$$

を用いる [教科書の説明を補足しつつ, 本稿次節で導出].

note これは文献 [1, p.234](のノート) で示した公式

$$\int \frac{d^d p}{(p^2 + 2p \cdot q + t + i\varepsilon)^n} = i\pi^2 \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{(t-q^2)^{n-2}}, \quad n \geq 3$$

を, d 次元時空に一般化した関係となっている. しかし文献 [1] では d 次元への一般化は天下りであったため, この機に上式 (5.46-47) の導出を確認しておくことは有意義である.

元の式 (5.46) は, $d > 2m$ の場合に発散する. この発散は, 因子 $\Gamma(m-d/2)$ によって表されている. ガンマ関数は, 引数がゼロおよび負の整数のところで極を持つ. (p.66 下から 3,2 行)

すると式 (5.45) の p に関する積分は, 上式 (5.46-47) で $d \rightarrow 4$, $m = 2$, “ k ” = αk , $M^2 = m^2 + \alpha k^2$ とおいたものなので [非整数次元 d に対しても式 (5.46-47) 左辺の積分を右辺で定義する [1, p.238]],

$$I = \lim_{d \rightarrow 4} \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{\Gamma(2)} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 d\alpha (m^2 + \alpha k^2 - \alpha^2 k^2)^{(d/2)-2} \quad (5.48)$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \left\{ \lim_{d \rightarrow 4} \frac{1}{2 - (d/2)} - \int_0^1 d\alpha \ln(m^2 + \alpha(1-\alpha)k^2) + \text{finite} \right\} \quad (5.49)$$

となる [第 2 の等号を本稿次節で示す]. [上式 (5.49) の第 1 項を見ると, $d \rightarrow 4$ において] 積分 I は発散することが分かる [発散を生じる項を適当なパラメータに繰り込んでから, 次元正則化を解除して元の理論を復元すれば良い]. 式 (5.49) の対数を発散させる, 真数をゼロにする根は

$$\alpha = \alpha_{\pm} \equiv \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + 4m^2/k^2} \right) \quad (5.50)$$

である. 2 つの極 α_{\pm} は $k^2 = -4m^2$ [中間状態の泡 $\Pi(k^2)$ が実粒子となる限界値] で互いに接近し, α の積分路を挟み込んでしまうため, 積分路を [どちらの側にも] ずらすことができなくなり, 特異性を生じる. これを“締めつけ特異性”という*7.

*7 パラメータのある極限で積分路に乗る特異点を, 積分路の変更によって回避できないもう 1 つの状況は, 特異点が積分路の始点または終点に近づく場合である. と言うのも, 途中の径路は変更できても, 始点・終点そのものを動かすことはできないからである. この場合に生じる複素積分の特異性を“端点特異性”という.

5.3.3 節について

■ベータ関数の公式 (5.42) の, 式 (5.41) からの導出 式 (5.41) で $a_1 = a_2 = 1, n_1 = x, n_2 = y$ とおくと,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)\Gamma(y)} \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 \delta(\alpha_1 + \alpha_2 - 1) \frac{\alpha_1^{x-1} \alpha_2^{y-1}}{(\alpha_1 + \alpha_2)^{x+y}} \\ &= \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)\Gamma(y)} \int_0^1 d\alpha_1 \int_{\alpha_1}^{\alpha_1+1} d\beta \frac{\alpha_1^{x-1} (\beta - \alpha_1)^{y-1}}{\beta^{x+y}} \quad (\beta \equiv \alpha_1 + \alpha_2) \\ &= \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)\Gamma(y)} \int_0^1 d\alpha_1 \alpha_1^{x-1} (1 - \alpha_1)^{y-1} \\ &= \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)\Gamma(y)} B(x, y) \end{aligned}$$

となるので, 式 (5.42) を得る. ただし第 3 の等号では, 0 と 1 の間で任意に固定した α_1 に対して, β の積分区間が 1 を含むことに注意した.

■式 (5.46–47) の導出 ガンマ関数の式 (9):

$$\Gamma(m) = a^m \int_0^\infty dt t^{m-1} e^{-at}, \quad \therefore \frac{1}{a^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty dt t^{m-1} e^{-at}$$

(これは式 (5.39) の特別な場合) を $a = p^2 + 2p \cdot k + M^2$ とおいて用いると,

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{[p^2 + 2p \cdot k + M^2]^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty dt \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} t^{m-1} e^{-t(p^2 + 2p \cdot k + M^2)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty dt t^{m-1} e^{-t(M^2 - k^2)} \int \frac{d^d p'}{(2\pi)^d} e^{-tp'^2} \quad (p' \equiv p + k) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m) 2^{d\pi^{d/2}}} \int_0^\infty dt t^{m-(d/2)-1} e^{-t(M^2 - k^2)} \quad \left(\because \text{Gauss 積分 } \int d^d p' e^{-tp'^2} = \left(\sqrt{\frac{\pi}{t}} \right)^d \right) \\ &= \frac{\Gamma(m - d/2)}{\Gamma(m)} \frac{1}{2^{d\pi^{d/2}}} (M^2 - k^2)^{(d/2)-m} : (5.46-47) \end{aligned}$$

を得る. ただし最後の等号では, 再び式 (9):

$$\Gamma(m - d/2) = (M^2 - k^2)^{m-(d/2)} \int_0^\infty dt t^{m-(d/2)-1} e^{-t(M^2 - k^2)}$$

を用いた.

■式 (5.48) の式 (5.49) への書き換え 時空の次元を $d = 4 - \eta$ と書いて, 小さな次元のズレ η を導入すると, 展開公式

$$\begin{aligned} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{2}{\eta} - \gamma + \dots, \\ (m^2 + \alpha(1 - \alpha)k^2)^{(d/2)-2} &= (m^2 + \alpha(1 - \alpha)k^2)^{-\eta/2} = 1 - \frac{1}{2}\eta \ln(m^2 + \alpha(1 - \alpha)k^2) + \dots \end{aligned}$$

(ただし $\gamma = 0.5772 \dots$ は Euler 定数) が成立する [1, p.239]. これと $\Gamma(2) = 1$ を使い, $d \rightarrow 4$ すなわち $\eta \rightarrow 0$ においてゼロにならない η^{-1} の項と定数項を残すと,

$$\frac{1}{\Gamma(2)} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 d\alpha (m^2 + \alpha(1 - \alpha)k^2)^{(d/2)-2} = \int_0^1 d\alpha \left(\frac{2}{\eta} - \ln(m^2 + \alpha(1 - \alpha)k^2) \right) + \text{finite}$$

となって, 式 (5.49) が得られる.

第 6 章 形式的展開

序文を引用する：

この章では形式論を扱う。一般化した Green 関数を導入し、それを摂動論的に評価する方法を示す。更に摂動論には依存しない一般的な性質を調べ、そこから S 行列を導く方法を与える。

6.1 Gell-Mann Low の定理

Heisenberg 描像の場を $\varphi_H(x)$ 、相互作用描像の場を $\varphi_I(x)$ と表記する。 $|0\rangle$ を相互作用のある理論の真空状態、 $|0\rangle_0$ を相互作用のない理論の真空状態として、一般化した Green 関数 (相関関数) は

$$\langle 0 | T \{ \varphi_H(x_1) \cdots \varphi_H(x_n) \} | 0 \rangle = \frac{{}_0\langle 0 | T \{ \varphi_H(x_1) \cdots \varphi_H(x_n) e^{-i \int H_I(t) dt} \} | 0 \rangle_0}{{}_0\langle 0 | T \{ e^{-i \int H_I(t) dt} \} | 0 \rangle_0} \quad (6.14)$$

と書き換えられる。これを **Gell-Mann Low** (ゲル-マン ロウ) の定理という。 [文献 [1, pp.127-128](のノート)において、既に QED の文脈でこの式を証明したため、本稿では導出過程は省略する.]

6.2 Lehmann-Källén スペクトル表示

相互作用のある場の Green 関数 $iG(x, y)$ や交換子 $\Delta(x, y) \equiv \langle 0 | [\varphi(x), \varphi(y)] | 0 \rangle$ [教科書に合わせ左辺に i を付けずに定義、少なくとも自由場では右辺の交換子は c -数なので真空期待値は不要] は、いろいろな質量 m を持った自由場のそれ (添字 0 で表す) の重ね合せ

$$iG(x, y) \equiv \langle 0 | T \{ \varphi(x) \varphi(y) \} | 0 \rangle = \int_0^\infty dm^2 \rho(m^2) iG_0(x, y; m^2), \quad (6.20)$$

$$\Delta(x, y) \equiv \langle 0 | [\varphi(x), \varphi(y)] | 0 \rangle = \int_0^\infty dm^2 \rho(m^2) \Delta_0(x, y; m^2) \quad (6.21)$$

の形に書ける。これを **Lehmann-Källén** (レーマン-チェレン) スペクトル表示といい、2 式に共通して現れる重み $\rho(m^2)$ をスペクトル関数という [5, p.64].

note : スペクトル条件 相互作用系に対する場の運動量 P の固有値 p に対して要請される一連の条件をスペクトル条件という。以下では特に p が “前方光円錐”

$$p^2 \geq 0 \quad \text{かつ} \quad p^0 \geq 0$$

にあることと、真空 $|0\rangle$ での固有値が $p = 0$ であることを用いる。さらに後半 (式 (6.24) の段落以降) では、on-shell の条件 $p^0 = \sqrt{m_\varphi^2 + \mathbf{p}^2}$ (m_φ は φ 粒子の質量) を満たす単一の φ 粒子状態 $|p\rangle$ が、安定な状態として存在することを利用する [5, p.60].

上式 (6.20) の導出 Green 関数を

$$\begin{aligned} iG(x, y) &\equiv \langle 0 | T \{ \varphi(x) \varphi(y) \} | 0 \rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \sum_\alpha \langle 0 | \varphi(x) | p, \alpha \rangle \langle p, \alpha | \varphi(y) | 0 \rangle + (x \leftrightarrow y) \end{aligned} \quad (6.15)$$

と書こう。ここに p, α はそれぞれ、中間状態 (一般に多粒子状態) を特徴付ける [全] 4 元運動量 [場の運動量 P の固有値] と、量子数である。ここで [文献 [1, p.44] の問題 2.5 で示した関係]

$$\varphi(x) = e^{iP \cdot x} \varphi(0) e^{-iP \cdot x} \quad (6.16)$$

より

$$\langle 0 | \varphi(x) | p, \alpha \rangle = \langle 0 | e^{iP \cdot x} \varphi(0) e^{-iP \cdot x} | p, \alpha \rangle = \langle 0 | \varphi(0) | p, \alpha \rangle e^{-ip \cdot x} \quad (6.17')$$

(第 2 の等号ではスペクトル条件に基づき $\langle 0 | e^{iP \cdot x} = \langle 0 |$ とした) となることを用いると、上式 (6.15) は

$$iG(x, y) = \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \sum_{\alpha} |\langle 0 | \varphi(0) | p, \alpha \rangle|^2 e^{-ip \cdot (x-y)} + (x \leftrightarrow y)$$

と書き換えられる。ここで α に関する和は、Lorentz 不変性と物理状態のエネルギーの正値性 [スペクトル条件 $p^0 \geq 0$] より、

$$\sum_{\alpha} |\langle 0 | \varphi(0) | p, \alpha \rangle|^2 = 2\pi \theta(p^0) \rho(p^2) \quad (6.19)$$

と表されるはずである (この式 (6.19) でスペクトル関数 $\rho(p^2)$ を定義する)。これを代入し、さらにスペクトル関数を

$$\rho(p^2) = \int_0^{\infty} dm^2 \rho(m^2) \delta(p^2 - m^2)$$

と書くと [$m^2 \geq 0$ とスペクトル条件 $p^2 \geq 0$ に注意して積分範囲を設定した]、

$$\begin{aligned} iG(x, y) &= \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} 2\pi \theta(p^0) \rho(p^2) e^{-ip \cdot (x-y)} + (x \leftrightarrow y) \\ &= \int_0^{\infty} dm^2 \rho(m^2) \left\{ \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) e^{-ip \cdot (x-y)} + (x \leftrightarrow y) \right\} \end{aligned}$$

となる [教科書の式 (6.20) 2 行目に階段関数を補った]。最右辺における p に関する積分は、自由場 $\phi(x)$ に関する交換子

$$\begin{aligned} \Delta_0^+(x, y; m^2) &\equiv [\phi^+(x), \phi^-(y)] = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) e^{-ip \cdot (x-y)}, \\ \Delta_0^-(x, y; m^2) &\equiv [\phi^-(x), \phi^+(y)] = -\Delta_0^+(y, x; m^2) \end{aligned}$$

なので [文献 [1, p.53] の式 (3.38) で確認済み]、 $\{\dots\}$ 内は質量 m を持つ自由場の Green 関数

$$iG_0(x, y; m^2) = \theta(x^0 - y^0) \Delta_0^+(x, y; m^2) - \theta(y^0 - x^0) \Delta_0^-(x, y; m^2)$$

である。よって式 (6.20) を得る。

note : 式 (6.21) の導出 式 (6.20) の導出と同様に行える。実際、式 (6.20) を導く際に見出した関係

$$\sum_{\alpha} \langle 0 | \varphi(x) | p, \alpha \rangle \langle p, \alpha | \varphi(y) | 0 \rangle = \sum_{\alpha} \langle 0 | \varphi(0) | p, \alpha \rangle \langle p, \alpha | \varphi(0) | 0 \rangle e^{-ip \cdot (x-y)} = [2\pi \theta(p^0) \rho(p^2)] e^{-ip \cdot (x-y)}$$

を再利用すると,

$$\begin{aligned}
\Delta(x-y) &\equiv \langle 0 | [\varphi(x), \varphi(y)] | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \sum_{\alpha} \langle 0 | \varphi(x) | p, \alpha \rangle \langle p, \alpha | \varphi(y) | 0 \rangle - (x \leftrightarrow y) \\
&= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [2\pi \theta(p^0) \rho(p^2)] e^{-ip \cdot (x-y)} - (x \leftrightarrow y) \\
&= \int_0^{\infty} dm^2 \rho(m^2) \left\{ \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) e^{-ip \cdot (x-y)} - (x \leftrightarrow y) \right\} \\
&= \int_0^{\infty} dm^2 \rho(m^2) \{ \Delta_0^+(x, y; m^2) + \Delta_0^-(x, y; m^2) \} \\
&= \int_0^{\infty} dm^2 \rho(m^2) \Delta_0(x, y; m^2) : (6.21)
\end{aligned}$$

を得る.

スペクトル表示の公式 (6.21) は, スペクトル関数 $\rho(m^2)$ に関する重要な “和則” (sum rule)

$$1 = \int_0^{\infty} dm^2 \rho(m^2) \quad (6.23)$$

を与える.

上式 (6.23) の導出 式 (6.21) の両辺を y^0 で微分してから $x^0 = y^0 \equiv t$ とおき, 自由場についても相互作用を持つ場についても, 同時刻交換関係

$$\partial_{y^0} \Delta(x, y) = [\varphi(\mathbf{x}, t), \partial_{y^0} \varphi(\mathbf{y}, t)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (6.22)$$

が成り立つことを利用すると, 和則 (6.23) が得られる.

さて, 単一の φ 粒子状態 $|p\rangle$ に対して, 式 (6.17'):

$$\langle 0 | \varphi(x) | p \rangle = \langle 0 | e^{iP \cdot x} \varphi(0) e^{-iP \cdot x} | p \rangle = \langle 0 | \varphi(0) | p \rangle e^{-ip \cdot x}$$

は常に成り立つものの, 最右辺が式 (2.66) (あるいは式 (2.6)) のように 1 粒子波動関数 $e^{-ip \cdot x}$ となるのは, 自由場に対してである (実際, 導出には自由場の Fourier 展開を利用した). 相互作用のある場合には係数を $\langle 0 | \varphi(0) | p \rangle = \sqrt{Z}$ と書き (ただし位相を無視して実数を仮定した), “波動関数の繰り込み定数” Z を導入する. すなわち,

$$\langle p | \varphi(x) | 0 \rangle = \sqrt{Z} e^{ip \cdot x}. \quad (6.24)$$

ところでスペクトル関数 $\rho(p^2)$ は [その定義式 (6.19) より], 確定した単一の φ 粒子状態からの寄与と, 多粒子状態からの寄与を含む. そして $\rho(m^2)$ に対する 1 粒子状態の寄与は, $\delta(m^2 - m_{\varphi}^2)$ に比例することが予想される. 実際, 式 (6.24) の箇所で導入した繰り込み定数 Z を用いて, 1 粒子状態の寄与は $Z\delta(m^2 - m_{\varphi}^2)$ と書ける.

note : 理由 例えば完備関係式 $1 = \sum_{\alpha} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} |p, \alpha\rangle \langle p, \alpha|$ 右辺における, 1 粒子状態部分 $\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} |p\rangle \langle p|$ (ただし $|p\rangle$ は on-shell) の, 交換子 $\Delta(x, y) = [\varphi(x), \varphi(y)]$ に対する寄与は

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \{ \langle 0 | \varphi(x) | p \rangle \langle p | \varphi(y) | 0 \rangle - (x \leftrightarrow y) \} \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} Z e^{-ip \cdot (x-y)} - (x \leftrightarrow y)
\end{aligned}$$

である。ただし変形の際、式 (6.24) を用いた。これを式 (6.21) の導出時に見出した関係

$$\Delta(x, y) = \int_0^\infty dm^2 \rho(m^2) \left\{ \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)} - (x \leftrightarrow y) \right\}$$

と比較すると、 $\rho(m^2)$ の 1 粒子部分への寄与は $Z\delta(m^2 - m_\varphi^2)$ と書けることが見て取れる。

そこで単一の φ 粒子状態からの寄与を分離して

$$\rho(m^2) = Z\delta(m^2 - m_\varphi^2) + \sigma(m^2) \quad (6.25)$$

と書き、連続した不変質量を持つ多粒子状態からの寄与 $\sigma(m^2)$ を定義する。すると他粒子中間状態からの寄与 $\sigma(m^2)$ には、($\lambda\varphi^3$ 理論では) $(2m_\varphi)^2 = 4m_\varphi^2$ 以上だけが寄与を持ち、和則 (6.23) は式 (6.25) を代入して

$$1 = Z + \int_{4m_\varphi^2}^\infty dm^2 \sigma(m^2) \quad (6.26)$$

と書き換えられる。一般に $\sigma(m^2) \geq 0$ なので [式 (6.19) 参照] (自由場では [式 (2.66): $Z = 1$ より] 等号が成立 [相互作用がなければ 1 粒子状態のみ]), 繰り込み定数には

$$(0 \leq) Z \leq 1$$

が課される。

note : 式 (6.26) の直観的な確率解釈 $Z [= |\langle p|\varphi(0)|0\rangle|^2 \geq 0]$ は $\phi(0)|0\rangle$ が 1 粒子状態にある確率を表すので、式 (6.26) は $\sigma(m^2)$ が、2 粒子以上の連続スペクトルの中で $p^2 = m^2$ を満たす状態に $\phi(0)|0\rangle$ が存在する確率(密度)を表すことを意味する。相互作用が存在する限り、多粒子成分が全くない ($\sigma(m^2) \equiv 0$) という事はあり得ないから、制約 $Z \leq 1$ において等号は除外される [5, p.65].

最後に、和則 (6.23) は量子力学における和則を一般化したものであることを指摘しておく。[自由場の対応物として] 固有振動数 Ω の調和振動子を考え (本稿ではその質量 m を明示), 伝播関数に類似した量

$$iG_0(t, \Omega) \equiv \langle 0|\mathbb{T}\{x(t)x(0)\}|0\rangle = \frac{e^{-i\Omega|t|}}{2m\Omega} \quad (6.30)$$

を定義する [古典的な Green 関数 (5.16) と類似している].

note : 上式 (6.30) 第 2 の等号の確認 Heisenberg 描像を採用し、調和振動子に対する演算子の表式

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2m\Omega}} \{a(t) + a^\dagger(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2m\Omega}} \{ae^{-i\Omega t} + a^\dagger e^{i\Omega t}\}$$

(ただし最右辺の $a \equiv a(0)$, etc. は Schrödinger 描像の演算子) を思い出そう [13, p.124,128]. すると $t > 0$ に対して

$$\langle 0|\mathbb{T}\{x(t)x(0)\}|0\rangle = \langle 0|x(t)x(0)|0\rangle = \frac{1}{2m\Omega} \langle 0|(ae^{-i\Omega t} + a^\dagger e^{i\Omega t})(a + a^\dagger)|0\rangle = \frac{1}{2m\Omega} e^{-i\Omega t}$$

となる。 $t < 0$ に対して $\langle 0|\mathbb{T}\{x(t)x(0)\}|0\rangle = \langle 0|x(0)x(t)|0\rangle$ は上式の複素共役であり、これらをまとめて式 (6.30) 最右辺を得る。

すると一般の 1 次元系に対する“伝播関数”は，調和振動子のそれ (6.30) を用いて

$$\langle 0 | T \{ x(t)x(0) \} | 0 \rangle = \int dE \rho(E) iG_0(t, E), \quad (6.31)$$

$$\rho(E) \equiv \sum_n \delta(E - (E_n - E_0)) 2mE |\langle 0 | x(0) | n \rangle|^2 \quad (6.32)$$

と表される [場の理論における ρ の定義式 (6.19)，スペクトル表示 (6.20) に対応].

上式 (6.31) の導出 教科書の導出過程を補足しつつまとめる. $x(t) = e^{iHt}x(0)e^{-iHt}$ であり [13, p.129], また $\langle 0 | e^{iHt} = \langle 0 | e^{iE_0t}$, $\langle n | e^{-iHt} = \langle n | e^{-iE_nt}$ となることに注意すると, $t > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \{ x(t)x(0) \} | 0 \rangle &= \langle 0 | \{ e^{iHt}x(0)e^{-iHt} \} x(0) | 0 \rangle = e^{iE_0t} \sum_n \langle 0 | x(0) | n \rangle \langle n | e^{-iHt} x(0) | 0 \rangle \\ &= \sum_n |\langle 0 | x(0) | n \rangle|^2 e^{i(E_n - E_0)t}. \end{aligned}$$

再び $t < 0$ に対して $\langle 0 | T \{ x(t)x(0) \} | 0 \rangle = \langle 0 | x(0)x(t) | 0 \rangle$ は上式の複素共役であることに注意すると,

$$\langle 0 | T \{ x(t)x(0) \} | 0 \rangle = \sum_n |\langle 0 | x(0) | n \rangle|^2 e^{i(E_n - E_0)|t|} = \int dE \left\{ \sum_n \delta(E - (E_n - E_0)) 2mE |\langle 0 | x(0) | n \rangle|^2 \right\} \frac{e^{-iE|t|}}{2mE}$$

と書けるので, 式 (6.31) を得る.

このとき式 (6.32) の $\rho(E)$ は, [和則 (6.23) に対応する] 関係

$$\int dE \rho(E) = 1 \quad (6.33)$$

を満たす. これは原子物理学において **Thomas-Reiche-Kuhn** (トーマス-ライヘ-クーン) の和則, 固体物理学において **f 値の総和則** (*f*-sum rule) と呼ばれている.

和則 (6.33) の導出 教科書の導出過程を補足しつつまとめる. $x(0) \equiv x$ (Schrödinger 描像の演算子) と略記すると

$$\begin{aligned} \langle 0 | [x, [H, x]] | 0 \rangle &= \sum_n \{ \langle 0 | x | n \rangle \langle n | [H, x] | 0 \rangle - \langle 0 | [H, x] | n \rangle \langle n | x | 0 \rangle \} \\ &= \sum_n 2(E_n - E_0) |\langle 0 | x | n \rangle|^2 \end{aligned}$$

なので, 式 (6.32) の $\rho(E)$ に対して

$$\int dE \rho(E) = \sum_n 2m(E_n - E_0) |\langle 0 | x | n \rangle|^2 = m \langle 0 | [x, [H, x]] | 0 \rangle$$

となる. ところが $[H = \frac{p^2}{2m} + V(x)]$ で記述される非相対論的な 1 次元粒子系に対し, 正準交換関係 $[x, p] = i$ より]

$$[H, x] = \frac{p}{m} [p, x] = -i \frac{p}{m}, \quad [x, [H, x]] = -\frac{i}{m} [x, p] = \frac{1}{m}$$

なので, 和則 (6.33) を得る.

6.3 LSZ 簡約公式

6.3.1 外線の処理

note 運動量空間の Green 関数もまた伝播関数を脚とするグラフに対応付けられ、Feynman 規則に従う。したがって、脚を表す伝播関数を適当な外線因子に置き換えれば、Feynman 振幅が得られることになる。文献 [2, pp.308–309] では QED の文脈で、いくつかの具体例を通じて、このことを確かめたことを思い出そう。このような Green 関数と Feynman 振幅 (S 行列要素) の関係は一般に、LSZ 簡約公式としてまとめられる。以下ではスカラー場を題材に LSZ 簡約公式を概観する。

S 行列要素は Green 関数と、**LSZ 簡約公式**

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n | S | \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m \rangle &= \frac{i^{(n+m)}}{(\sqrt{Z})^{n+m}} \int d^4[x] d^4[y] e^{-ip_i x_i + ik_j x_j} \prod_i (\partial_{x_i}^2 + m^2) \prod_j (\partial_{y_j}^2 + m^2) \\ &\quad \times \langle 0 | T \{ \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \varphi(y_1) \cdots \varphi(y_m) \} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (6.37)$$

で関係付けられる*8。部分積分により $\partial_{x_i}^2 \rightarrow -p_i^2$, etc. と置き換えると、式 (6.37) は

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n | S | \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m \rangle &= \left(\prod_i \frac{(-i)(p_i^2 - m^2)}{\sqrt{Z}} \right) \left(\prod_j \frac{(-i)(k_j^2 - m^2)}{\sqrt{Z}} \right) \\ &\quad \times \int d^4[x] d^4[y] e^{-ip_i x_i + ik_j x_j} \langle 0 | T \{ \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \varphi(y_1) \cdots \varphi(y_m) \} | 0 \rangle, \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned} &\int d^4[x] d^4[y] e^{-ip_i x_i + ik_j x_j} \langle 0 | T \{ \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \varphi(y_1) \cdots \varphi(y_m) \} | 0 \rangle \\ &= \left(\prod_i \frac{i\sqrt{Z}}{p_i^2 - m^2} \right) \left(\prod_j \frac{i\sqrt{Z}}{k_j^2 - m^2} \right) \langle \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n | S | \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m \rangle \end{aligned} \quad (6.36)$$

と書き換えられる。

note 上式 (6.36) 左辺の空間積分と右辺の S 行列要素からは、共通して反応全体のエネルギー・運動量の保存を保証するデルタ関数が現れる。デルタ関数を除けば、式 (6.36) は運動量空間の Green 関数と Feynman 振幅を関係付けており、Feynman 振幅における外線因子 (~ 1) を伝播関数 $i\sqrt{Z}/(p_i^2 - m^2)$, etc. に置き換えると、運動量空間の Green 関数が得られることを意味していると考えられる。ただし Green 関数の脚にあたる伝播関数では、運動量 p_i, k_j は必ずしも質量殻上になく、また因子 \sqrt{Z} において自己エネルギーを考慮していることになる。

*8 LSZ は Lehmann-Symanzik-Zimmermann (レーマン-シマンツィック-ツィンマーマン) の頭文字である。また式 (6.37) において $d^4[x] \equiv d^4x_1 \cdots d^4x_n$, etc. であり、指数 $e^{-ip_i x_i + ik_j x_j}$ では繰り返された添字に関して和をとる (p.75 訳注)。式 (6.37) 直後の注意書きを引用する：

式 (6.37) において、入射状態と放出状態が、ただ単一の直線的な伝播関数として繋がっていないことを暗黙のうちに仮定した。したがって、ここでは始状態と終状態におけるそれぞれの運動量が、すべて異なっている S 行列の行列要素だけを対象としている。

6.3.2 節では LSZ 簡約公式 (6.37) の導出の概略をスケッチし [完全な議論は, 例えば文献 [5, pp.71–76] に見られる (ゲージ場や Dirac 場への拡張にも言及されている)], 6.3.3 節で補足事項に言及する [本稿ではいずれも省略].

第 7 章 Fermi 粒子

本章はある程度、場の理論の復習にあたるため、目新しい内容をいくらか特筆するに留める。

7.1 Dirac 方程式

省略可能。

7.2 スピノル・テンソル・カレント

7.2.1 双一次形式

第 1 段落を特筆する：

付録 D [本稿では省略] において Euclid 計量 $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ を持つ偶数次元の空間に対する Dirac 行列の構築の仕方を示してある。1,2,3 の対角要素の計量が負である Minkowski 空間での Dirac 行列を得るには、 $a = 1, 2, 3$ に対して $\gamma_a^{\text{Minkowski}} = i\gamma_a^{\text{Euclid}}$, $\gamma_0^{\text{Minkowski}} = \gamma_0^{\text{Euclid}}$ とおけばよい。(後略)

最終段落を特筆する：

成分を数えあげると、6 個の $\sigma^{\mu\nu}$, 4 個の γ^μ , 4 個の $\gamma^5\gamma^\mu$, ひとつの γ^5 , そして最後に単位行列 1 である。Lorentz 成分は全部で 16 個ある。これは 4×4 行列の要素数でもある。実際に $\{\gamma^\mu, \gamma^5\gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^5, 1\}$ は互いに線形独立で、 4×4 行列の空間を張る。

7.2.2 保存則

軸性ベクトル・カレントに関する最終段落を特筆する。擬ベクトルのカレント $J_\mu^5 = \bar{\psi}\gamma^5\gamma_\mu\psi$ は

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^5\gamma_\mu\psi) = -2im\bar{\psi}\gamma^5\psi \quad (7.23)$$

を満たす [右辺に γ^5 を補った, 本稿次節で確認]。したがって質量 $m = 0$ の粒子に対しては、カレント J_μ^5 は保存する。

note J_μ^5 は弱い相互作用を記述するレプトン (荷電) カレント

$$J^\mu = \sum_l \bar{\psi}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l} \quad (l: \text{レプトン})$$

を構成する, 軸性ベクトルカレント $J_A^\mu = \sum_l \bar{\psi}_l \gamma^\mu \gamma_5 \psi_{\nu_l}$ と同じ形をしている [2, pp.436-439]. 保存する軸性ベクトル・カレント J_μ^5 は, θ を実パラメータとする大域的位相変換

$$\psi \rightarrow e^{i\gamma^5\theta}\psi, \quad \psi^\dagger \rightarrow \psi^\dagger e^{-i\gamma^5\theta} \quad (\gamma^5 \text{ は Hermite 行列})$$

に対して, 質量 $m = 0$ の Dirac 粒子のラグランジアン $\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ がゲージ不変に留まることに付随する Noether カレントとして得られることを, 文献 [1, p.85] の章末問題 4.5 で確認した。

7.2.2 節について

■式 (7.23) の Dirac 方程式からの導出 Dirac 方程式

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0, \quad i\partial_\mu\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$$

より,

$$\begin{aligned}\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^5\gamma_\mu\psi) &= -(\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu)\gamma^5\psi + \bar{\psi}\gamma^5(\gamma^\mu\partial_\mu\psi) \quad (\because \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0) \\ &= -2im\bar{\psi}\gamma^5\psi : (7.23).\end{aligned}$$

7.3 空孔と Dirac の海

7.3.1 正と負のエネルギー

Dirac 方程式 $(i\partial - m)\psi = 0$ は, 左から γ^0 を掛けて $\alpha^a \equiv \gamma^0\gamma^a, \beta \equiv \gamma^0, \mathbf{p} \equiv -i\nabla$ (ただし $a = 1, 2, 3$) とおくと

$$0 = \gamma^0\{i(\gamma^0\partial_t + \gamma^a\partial_a) - m\}\psi = \{i\partial_t - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m\beta)\}\psi$$

となるので, Schrödinger 方程式と同じ形

$$i\partial_t\psi = \hat{H}\psi, \quad \hat{H} \equiv \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m \quad (7.27)$$

に書き換えられる.

note 初等的にはこの変形を逆にたどって Dirac 方程式が“導出”される. 式 (7.27) の“ハミルトニアン” \hat{H} は, Dirac 場のラグランジアン密度を Legendre 変換して得られるハミルトニアン H と,

$$H = \int d^3x \bar{\psi}(-i\gamma^a\partial_a + m)\psi = \int d^3x \psi^\dagger \hat{H}\psi$$

で関係付けられる [1, p.69].

ここで“カイラル表示”もしくは“Weyl 表示”

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^a = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^a \\ \sigma^a & 0 \end{pmatrix}, \quad \therefore \gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7.28)$$

を採用すると,

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & m \\ m & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad (7.29)$$

となる. この表示が最も有用となるのは, 質量 $m = 0$ の粒子に対してである. 実際このとき γ^5 の固有値 (“カイラリティ”) ± 1 に属する固有状態

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_L \end{pmatrix} \quad (7.31-32)$$

として, \hat{H} との同時固有状態を選べる (γ^5 と \hat{H} は交換することに注意). 式 (7.29) より

$$\hat{H}\psi = \pm \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\psi \quad (\text{複号は右巻きの場合に対して } +, \text{ 左巻きの場合に対して } -) \quad (10)$$

となるので, カイラリティが ± 1 の粒子のエネルギー固有値は, $E = \pm \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$ の固有値である. よって正エネルギー E を持つ粒子は, ヘリシティ ≥ 0 である (以上, 複号同順).

note スピン $1/2$ の粒子に対してスピン演算子は $\boldsymbol{\sigma}/2$ で表されるので, ヘリシティ (の 2 倍) $\sigma_{\mathbf{p}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ は固有値 ± 1 を持つ. すると正エネルギーは $E = |\mathbf{p}|$ であることになる. これは質量 $m = 0$ の相対論的粒子の正しいエネルギーの表式となっている.

なお式 (7.31-32) の 2 成分スピノル ψ_R, ψ_L で記述される粒子は “Weyl フェルミオン” と呼ばれる. “Schrödinger 方程式” (7.27) に基づき, 上式 (10) を $i\partial_t\psi$ と等置すると, 特に右手型の Weyl フェルミオンが満たす方程式として, “Weyl 方程式”

$$i(\partial_t + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla})\psi_R = 0 \quad (7.33)$$

が得られる.

7.3.2 空孔

負のエネルギーを持つ状態の存在は, 粒子の最低エネルギーが決まらないことを意味するので, 当初は不都合に思われた. しかし Dirac 方程式が適用される Fermi 粒子は Pauli の排他律に従わねばならず, すべての負エネルギー状態があらかじめ占有された “Dirac の海” を考えることができる [現代的な理論には不要]. この概念を把握するために, 質量を持たないカイラリティ +1 の粒子を考えてみよう. このときエネルギーは $E = +\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$ なので [7.3.1 節], “海” の中の負エネルギーを持つ粒子は, スピンと運動量が反平行である. そこで粒子の運動量を $(-\mathbf{k})$, スピンを $\boldsymbol{\sigma} \parallel \mathbf{k}$ とおくと, エネルギーは $(-|E|) = +\boldsymbol{\sigma} \cdot (-\mathbf{k})$ と表される. これを “海” から取り除くと, 系はエネルギーが $+|E|$, 運動量が \mathbf{k} , スピンが $(-\boldsymbol{\sigma})$ だけ変化する. これらを生成される “空孔” (hole) が担うと考えると, “空孔” は正のエネルギー $+|E|$ を持つが, スピン $(-\boldsymbol{\sigma})$ と運動量 \mathbf{k} は反平行のままである. この “空孔” が “反粒子” に対応する.

より一般にヘリシティを問わず, 質量 m の Fermi 粒子系を考えよう. Dirac の海から運動量 $\mathbf{p} = -\mathbf{k}$, 負エネルギー $E = -E_{\mathbf{p}} \equiv -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ の粒子を取り除いたときに生じる “空孔” の速度は, 取り除いた粒子を表す波の群速度

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{\mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}}} = \frac{\mathbf{k}}{E_{\mathbf{p}}} \quad (7.41)$$

で与えられる. これは空孔の運動量 \mathbf{k} と同じ向きを向いている [非相対論では事情が異なる (9.2.1 節)].

note 運動量 \mathbf{p} には速度と同じ論法は適用されないことに注意する. すなわち空孔の運動量を取り除いた粒子の運動量 $-\mathbf{k}$ と考えてはならない. Dirac の空孔理論は見かけ以上に複雑である.

7.4 量子化

省略可能.

第 8 章 量子電磁力学

本章はある程度、QED の復習にあたるため、目新しい内容をいくらか特筆するに留める。

序文から抜粋：

光子と電子の相互作用を扱う Feynman の方法の成功によって、場の理論は特別に数学の素養を持つ者だけが扱える高度な技術ではなくなり、多くの物理学者たちが実際に利用できる技能となった。

8.1 Maxwell 方程式の量子化

8.1.1 節「ハミルトニアン形式」について

まず古典において、自由電磁場はゲージ条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ を課すと波動方程式に従うため、4 つの偏極ベクトルを用いて展開される。次いで量子論において再びゲージ条件を「Gupta の補助条件」 $\partial_\mu A^{+\mu}(x) |\text{physical}\rangle = 0$ によって考慮すると、合計 2 つの自由度が取り除かれ、2 つの横波成分だけが観測量に寄与を持つことが示される (8.1.3 節、あるいは文献 [1] の 5.1 節、5.2 節)。

一見すると 1 つのゲージ条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ を考慮しただけで、4 つの偏極状態から 2 つの自由度が除かるのは不思議である。しかしながら上記のように、実際には我々はゲージ条件を古典論と量子論の 2 段階で考慮している。このような事情は“軸性ゲージ”において、より見やすい。すなわち $A_0 = -\phi = 0$ と置くと、場 A_μ の成分は 3 つになり、ここで物理的な状態 $|\text{physical}\rangle$ に対する補助条件 $(\nabla \cdot \mathbf{E}) |\text{physical}\rangle = 0$ を課すと、さらに自由度が 1 つ減る (8.1.2 節)。

これに対して質量 $m_W \neq 0$ を持つベクトルボゾン場 W^α はゲージとは無関係に常に $\partial_\alpha W^\alpha = 0$ を満たすため、最初から電磁場よりも自由度が 1 だけ少ない ($m_W = 0$ では関係 $\partial_\alpha W^\alpha = 0$ が場の方程式 (Proca 方程式) から導かれなため、この論法は適用されない)。3 つの偏極ベクトルを用いて W^α を展開しなければならないのはこのためである [2, pp.440–443] [14, p.211]。

8.1.2 軸性ゲージ

省略可能。教科書ではベクトル積 \times を外積記号 \wedge で表している。本稿では基本的にベクトル積を \times で表すことにする。

8.1.3 Loren(t)z ゲージ

大部分、省略可能。第 1 段落から抜粋：

残念ながら共変ゲージへの伝統的なアプローチは、何れも単純な Hilbert 空間の解釈にうまく結びつけることができない。現代的なアプローチは BRST コホモロジー (Becchi-Rouet-Stora-Tyutin cohomology) を用いたものになるが、この話題には立ち入らない。ここでは量子電磁力学の Feynman 規則を導く目的で、早くから知られている Gupta-Bleuler 形式 (Gupta-Bleuler formalism) だけを示すことにする。

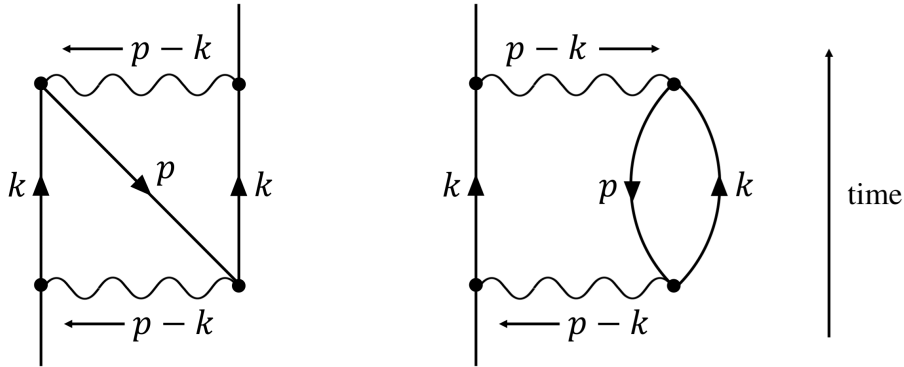


図 19 教科書の図 8.2 (p.100). 復習: 時間と逆向きのフェルミオン線は陽電子を表し, 陽電子の外線に付記した運動量は矢印と逆向きであるのに対し, 内線では時間の前後関係は固定されておらず, 付記された運動量は常に矢印と同じ向きと解釈する [1, p.81,p.134].

8.2 量子電磁力学における Feynman 規則

ここでは閉じた Fermi 粒子のループに与えられる因子 (-1) [トレースもとる [1, p.139]] に関する補足説明 (p.100) だけを抜粋・特筆すれば充分である.

[教科書の図 8.2, 本稿の図 19 の] 左側のダイアグラムでは, 中間状態において同じ運動量 k を持つ Fermi 粒子が存在する. これは Fermi 統計において許容されないことである. 右側のダイアグラムも中間状態は全く同じで, エネルギー分母 [内線に充てられる伝播関数] も同じである. しかし両者はトポロジ的に異なり, 右側のダイアグラムだけに閉じた Fermi 粒子のループがある. このループから生じる因子 (-1) によって, 右側のダイアグラムの計算結果は, 左側のそれと完全に相殺する [排他律を保証].

Feynman が初めに量子電磁力学のダイアグラム規則を書き下したとき, 彼は宇宙に存在するすべての電子と陽電子が, 実は時間の中を頻繁に行き来する単一粒子に過ぎない (図 8.2 の左図のように) というアイデアに執着していた. そこで当初, 彼は開じた Fermi 粒子のループは必要でないと主張した. 排他律の問題を指摘されて初めて, Feynman はしぶしぶ閉じたループの必要性を認めたのであった.

8.3 Ward 恒等式とゲージ不変性

8.3.1 Ward 恒等式

自由なフェルミオン場の伝播関数 $1/(q - m)$ [$(q - m)$ の逆行列] に対して, **Ward (ウォード) 恒等式**

$$\frac{1}{q - m} k_\mu \gamma^\mu \frac{1}{k + q - m} = \frac{1}{q - m} - \frac{1}{k + q - m} \quad (8.48)$$

が成立する. これは容易に証明できる. 実際, 左辺に自明な恒等式

$$k_\mu \gamma^\mu = k = (k + q - m) - (q - m)$$

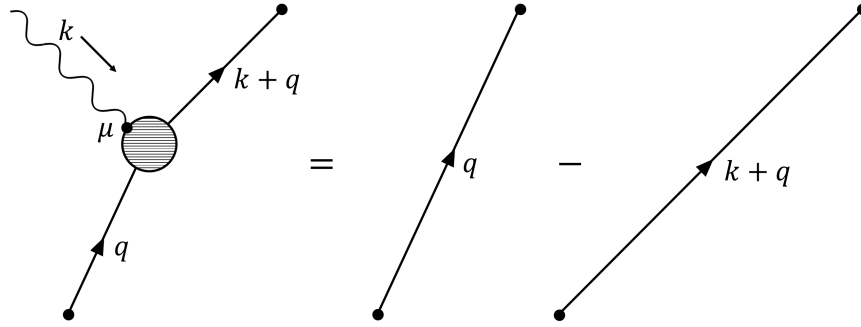


図 20 Ward-高橋恒等式 (8.49). 円い斜線部分が $\Gamma^\mu(q, k+q)$.

を代入しさえすれば良い. 次に相互作用を持つ場に対する Ward 恒等式を得るために, 自由場に対する式 (8.48) が恒等式

$$\partial_\mu \langle 0 | T \{ j^\mu(x) \bar{\psi}(y) \psi(z) \} | 0 \rangle = \delta^4(x-y) \langle 0 | T \{ \bar{\psi}(y) \psi(z) \} | 0 \rangle - \delta^4(x-z) \langle 0 | T \{ \bar{\psi}(y) \psi(z) \} | 0 \rangle \quad (8.47)$$

(ただし $j^\mu \equiv \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ は Fermi 粒子数のカレント, $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ は時空点 x に関する微分) [導出は本稿次節] を, 運動量空間に移した式になっていることに注目する [確認は本稿次節]. 上式 (8.47) はその導き方より自由場でも相互作用を持つ場でも成立し, 相互作用を持つ場に対しては式 (8.48) の代わりに, Ward 恒等式

$$k_\mu S(q) \Gamma^\mu(q, k+q) S(k+q) = S(q) - S(k+q) \quad (8.49)$$

を与える. ここに $\Gamma^\mu(q, k+q)$ は “既約な結節部分” である (図 24 参照). なお, 左から逆行列 $S^{-1}(q)$ を, 右から $S^{-1}(k+q)$ をかけると

$$S^{-1}(k+q) - S^{-1}(q) = k_\mu \Gamma^\mu(q, k+q) \quad (8.50)$$

と書き換えられる.

note 1 相互作用を持つ場に対する式 (8.49) を得るには, 式 (8.48) のフェルミオン伝播関数を, 輻射補正を施した $S(q)$ に置き換え, さらに結節部分の補正

$$\gamma^\mu \rightarrow \Gamma^\mu(q, k+q)$$

を行えば良いと考えられる.

note 2 文献 [1, p.208](のノート) で (2 次の摂動論の範囲で) 示した Ward 恒等式

$$\frac{\partial \Sigma(q)}{\partial q_\mu} = \Lambda^\mu(q, q)$$

は, フェルミオン自己エネルギー部分 $\Sigma(q)$ を, それにゼロエネルギー光子を接続させて得られる結節点補正 $\Lambda^\mu(q, q)$ に関係付けており, 式 (8.49) の 「 $k \rightarrow 0$ のときの微分式」 (p.104 訳註) に相当している. それを式 (8.49) へと一般化したのは高橋康であるため, 式 (8.48-50) は **Ward-高橋** の恒等式と呼ぶのが正確である (p.104 訳註).

note 3 Ward 恒等式 (8.47) の径路積分による定式化は 13.2 節.

8.3.1 節について

■式 (8.47) の導出 教科書の説明を補足しつつ導出過程をまとめる。相互作用を持つ系でも保存則 $\partial_\mu j^\mu = 0$ が、演算子の関係として成立する。しかしながら時間順序化によって不連続性がもたらされるため、単純に式 (8.47) の左辺 $\partial_\mu \langle 0 | T \{ j^\mu(x) \bar{\psi}(y) \psi(z) \} | 0 \rangle$ をゼロとおくことはできない。以下の計算を通して、この点を明らかにしよう。まずは $j^\mu(x)$ と $\bar{\psi}(y)$ の時間順序化による不連続を見るために、あらかじめ

$$\langle 0 | T \{ j^\mu(x) \bar{\psi}(y) \psi(z) \} | 0 \rangle = \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | T \{ j^\mu(x) \bar{\psi}(y) \psi(z) \} | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | T \{ \bar{\psi}(y) j^\mu(x) \psi(z) \} | 0 \rangle$$

と書いておく ($j^\mu(x)$ はフェルミオン因子を 2 つ含むため、時間順序化の際には $\bar{\psi}(y)$ と交換する)。これを x^μ で微分する際、階段関数の微分が

$$\partial_\mu \theta(x^0 - y^0) = \delta(x^0 - y^0) \delta_\mu^0, \quad \partial_\mu \theta(y^0 - x^0) = -\delta(x^0 - y^0) \delta_\mu^0$$

となることに注意すると、

$$\partial_\mu \langle 0 | T \{ j^\mu(x) \bar{\psi}(y) \psi(z) \} | 0 \rangle = \delta(x^0 - y^0) \langle 0 | T \{ j^0(x), \bar{\psi}(y) \} \psi(z) \} | 0 \rangle + \partial_\mu \langle 0 | T \{ j^\mu(x) \bar{\psi}(y) \psi(z) \} | 0 \rangle_{x^0 \geq y^0}$$

を得る。ただし右辺第 2 項の $\langle \dots \rangle_{x^0 \geq y^0}$ は時間 x^0, y^0 の前後関係が確定しており、もはや第 1 項のようなデルタ関数を生じない。よって、あとは x^0 と z^0 の前後関係だけ考えれば充分であり、同様に

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \langle 0 | T \{ j^\mu(x) \bar{\psi}(y) \psi(z) \} | 0 \rangle_{x^0 \geq y^0} \\ &= \partial_\mu [\theta(x^0 - z^0) \langle 0 | T \{ \bar{\psi}(y) j^\mu(x) \psi(z) \} | 0 \rangle + \theta(z^0 - x^0) \langle 0 | T \{ \bar{\psi}(y) \psi(z) j^\mu(x) \} | 0 \rangle]_{x^0 \geq y^0} \\ &= \delta(x^0 - z^0) \langle 0 | T \{ \bar{\psi}(y) [j^0(x), \psi(z)] \} | 0 \rangle + \partial_\mu \langle 0 | T \{ j^\mu(x) \bar{\psi}(y) \psi(z) \} | 0 \rangle_{x^0 \geq y^0, z^0} \end{aligned}$$

を得る。最右辺では保存則 $\partial_\mu j^\mu = 0$ を用いて第 2 項をゼロとおいて良い。以上をまとめると

$$\begin{aligned} \partial_\mu \langle 0 | T \{ j^\mu(x) \bar{\psi}(y) \psi(z) \} | 0 \rangle &= \delta(x^0 - y^0) \langle 0 | T \{ [j^0(x), \bar{\psi}(y)] \psi(z) \} | 0 \rangle \\ &\quad + \delta(x^0 - z^0) \langle 0 | T \{ \bar{\psi}(y) [j^0(x), \psi(z)] \} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (8.45)$$

となる。さらに反交換関係

$$\begin{aligned} \delta(x^0 - y^0) [j^0(x), \bar{\psi}(y)] &= \bar{\psi}(y) \delta^4(x - y), \\ \delta(x^0 - z^0) [j^0(x), \psi(z)] &= -\psi(z) \delta^4(x - z) \end{aligned} \quad (8.46)$$

を利用して、上式 (8.45) を評価しよう。

上式 (8.46) の確認 同時刻 $x^0 = y^0$ の条件下での反交換関係 $\{\psi(x), \psi^\dagger(y)\} = \delta^3(x - y)$ 、および恒等式

$$[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$$

より、

$$[j^0(x), \bar{\psi}(y)] = [\bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x), \bar{\psi}(y)] = \bar{\psi}(x) \gamma^0 \{\psi(x), \psi^\dagger(y)\} \gamma^0 = \bar{\psi}(y) \delta^3(x - y)$$

となるので、式 (8.46) 第 1 式が得られる (第 2 式も同様に確かめられる)。

反交換関係 (8.46) を式 (8.45) の右辺に代入すると、式 (8.47) が導かれる (デルタ関数は c-数なので、自由に T 積に出し入れできる)。

■式 (8.47) が自由場に対する Ward 恒等式 (8.48) を与えることの確認 式 (8.47) の両辺を 3 変数 x, y, z について Fourier 変換しよう。ここではスピノル添字 α, β, \dots を明記して、式 (8.47) 左辺における真空期待値を

$$\langle 0 | T \{ j^\mu(x) \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(z) \} | 0 \rangle, \quad j^\mu(x) \equiv \bar{\psi}_\gamma(x) \gamma_{\gamma\delta}^\mu \psi_\delta(x)$$

と書こう。また伝播関数の定義

$$\underbrace{\psi_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_2)} = -\underbrace{\bar{\psi}_\beta(x_2) \psi_\alpha(x_1)} = i S_{\alpha\beta}(x_1 - x_2)$$

を思い出しておく。Wick の定理を適用すると、真空期待値に寄与するのは全ての場を縮約した項のみだから、

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T \{ j^\mu(x) \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(z) \} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | T \{ \bar{\psi}_\gamma(x) \gamma_{\gamma\delta}^\mu \psi_\delta(x) \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(z) \} | 0 \rangle \\ &= \underbrace{\bar{\psi}_\gamma(x) \gamma_{\gamma\delta}^\mu \psi_\delta(x) \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(z)} + \underbrace{\bar{\psi}_\gamma(x) \gamma_{\gamma\delta}^\mu \psi_\delta(x) \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(z)} \\ &= -i S_{\alpha\gamma}(z-x) \gamma_{\gamma\delta}^\mu i S_{\delta\beta}(x-y) + (x \text{ に依らない項}) \end{aligned}$$

となる。よって式 (8.47) 左辺の x -微分の Fourier 変換は

$$\begin{aligned} & \int d^4x d^4y d^4z e^{ip \cdot x} e^{ip' \cdot y} e^{ip'' \cdot z} \partial_\mu [S_{\alpha\gamma}(z-x) \gamma_{\gamma\delta}^\mu S_{\delta\beta}(x-y)] \\ &= -ip_\mu \int d^4x d^4y d^4z e^{ip \cdot x} e^{ip' \cdot y} e^{ip'' \cdot z} [S_{\alpha\gamma}(z-x) \gamma_{\gamma\delta}^\mu S_{\delta\beta}(x-y)] \\ &= -ip_\mu \int d^4x d^4y' d^4z' e^{ip \cdot x} e^{ip' \cdot (x-y')} e^{ip'' \cdot (x+z')} S_{\alpha\gamma}(z') \gamma_{\gamma\delta}^\mu S_{\delta\beta}(y') \quad (y' \equiv x-y, z' \equiv z-x) \\ &= -(2\pi)^4 \delta^4(p+p'+p'') ip_\mu \int d^4y' d^4z' e^{-ip' \cdot y'} e^{ip'' \cdot z'} S_{\alpha\gamma}(z') \gamma_{\gamma\delta}^\mu S_{\delta\beta}(y') \\ &= -(2\pi)^4 \delta^4(p+p'+p'') ip_\mu S_{\alpha\gamma}(-p') \gamma_{\gamma\delta}^\mu S_{\delta\beta}(p'') \end{aligned}$$

と計算される。最右辺ではあらかじめ期待されるように、Green 関数の脚の内向き運動量 p, p', p'' に関する保存則に対応するデルタ関数が現れており、この下で伝播関数の引数を $-p' \rightarrow p+p''$ と置き換えても構わない。他方、式 (8.47) 右辺第 1 項

$$\delta^4(x-y) \langle 0 | T \{ \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(z) \} | 0 \rangle = -\delta^4(x-y) i S_{\alpha\beta}(z-y)$$

の Fourier 変換は

$$\begin{aligned} & \int d^4x d^4y d^4z e^{ip \cdot x} e^{ip' \cdot y} e^{ip'' \cdot z} [-\delta^4(x-y) i S_{\alpha\beta}(z-y)] \\ &= -\int d^4y d^4z e^{i(p+p') \cdot y} e^{ip'' \cdot z} i S_{\alpha\beta}(z-y) \\ &= -\int d^4y d^4w e^{i(p+p'+p'') \cdot y} e^{ip'' \cdot w} i S_{\alpha\beta}(w) \quad (w \equiv z-y) \\ &= -(2\pi)^4 \delta^4(p+p'+p'') i S_{\alpha\beta}(p''), \end{aligned}$$

同様に第 2 項 $\delta^4(x-z) \langle 0 | T \{ \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(z) \} | 0 \rangle = -\delta^4(x-z) i S_{\alpha\beta}(z-y)$ の Fourier 変換は

$$\int d^4x d^4y d^4z e^{ip \cdot x} e^{ip' \cdot y} e^{ip'' \cdot z} [-\delta^4(x-z) i S_{\alpha\beta}(z-y)] = -(2\pi)^4 \delta^4(p+p'+p'') i S_{\alpha\beta}(p+p'')$$

となる。よって式 (8.47) の Fourier 変換をとり，各項の共通因子 $-(2\pi)^4\delta^4(p+p'+p'')i$ を省くと，

$$S_{\alpha\gamma}(p+p'')\gamma_{\gamma\delta}^{\mu}S_{\delta\beta}(p'') = S_{\alpha\beta}(p'') - S_{\alpha\beta}(p+p'')$$

が得られる。最後に変数を $p'' \rightarrow q, p \rightarrow k$ と設定すると，行列の関係として式 (8.48):

$$S(q)kS(q+k) = S(q) - S(q+k)$$

が導かれる。

8.3.2 応用

真空偏極泡

省略可能。

外場

Ward 恒等式は，計算の過程においてゲージ不変性を保証するための手段を与える (教科書 8.3.1 節の第 1 文) [その導出は対応する保存則 $\partial_{\mu}j^{\mu} = 0$ に基づいていたことを思い出せ]。ここでは 1 つの応用として，電子と与えられた外場 $A_{\mu}^{\text{ext}}(x)$ の相互作用

$$H_I(t) = \int d^3x eA_{\mu}^{\text{ext}}(x)j^{\mu}(x)$$

[場の古典論と QED に共通の，電磁場と電流密度 $(-e)j^{\mu}$ の結合項] におけるゲージ不変性を示す。

まずは電子の伝播関数のゲージ変換を調べよう。外場中の電子の伝播関数は，

$$\begin{aligned} iS_{A^{\text{ext}}}(y, x) &\equiv \langle 0 | T \{ \psi(y) \bar{\psi}(x) \} | 0 \rangle_{A^{\text{ext}}} \\ &= \sum_n (-ie)^n \int d^4z_1 \cdots d^4z_n A_{\mu_1}^{\text{ext}}(z_1) \cdots A_{\mu_n}^{\text{ext}}(z_n) iS(y, z_n) \gamma^{\mu_n} iS(z_n, z_{n-1}) \gamma^{\mu_{n-1}} \cdots \gamma^{\mu_1} iS(z_1, x) \end{aligned} \quad (8.56)$$

と計算される。[教科書と統一するため，8.3.1 節のノートにおける伝播関数の表記を $S(x_1 - x_2) \rightarrow S(x_1, x_2)$ と改めた。また教科書の式 (8.56) 最右辺における余計な $1/n!$ を消した。この点も含めて，導出は本稿次節を参照。] 上式 (8.57) 最右辺は，図 21 のようなダイアグラムに対応付けられる。さて，微小なゲージ関数 $\delta\Lambda(x)$ に対して外場のゲージ変換 $A_{\mu}^{\text{ext}}(x) \rightarrow A_{\mu}^{\text{ext}}(x) + \partial_{\mu}\delta\Lambda(x)$ を考える。Ward 恒等式 (8.47) によれば，これに伴い伝播関数 (8.56) は

$$\delta \langle 0 | T \{ \psi(y) \bar{\psi}(x) \} | 0 \rangle_{A^{\text{ext}}} = ie (\delta\Lambda(x) - \delta\Lambda(y)) \langle 0 | T \{ \psi(y) \bar{\psi}(x) \} | 0 \rangle_{A^{\text{ext}}} \quad (8.57)$$

だけ変化する [本稿次節で確認]。これは変換

$$\langle 0 | T \{ \psi(y) \bar{\psi}(x) \} | 0 \rangle_{A^{\text{ext}}} \rightarrow e^{ie(\delta\Lambda(x) - \delta\Lambda(y))} \langle 0 | T \{ \psi(y) \bar{\psi}(x) \} | 0 \rangle_{A^{\text{ext}}} \quad (8.58)$$

を無限小のゲージ関数 $\Lambda(x) = \delta\Lambda(x)$ に対して書き下した関係であり，逆に式 (8.57) を有限の Λ まで積分すると式 (8.58) が得られる。上式 (8.58) は量子力学から予想される形の変更となっている [“波動関数” のゲージ変換 $\psi(x) \rightarrow e^{-ie\Lambda(x)}\psi(x)$ に整合]。

次に散乱振幅のゲージ変換を調べよう。準備として伝播関数 (8.56) を運動量空間に移す。運動量空間の伝播関数は，伝播関数 (8.56) に対応する座標空間のダイアグラム (図 21) を運動量空間のダイアグラムに置き換

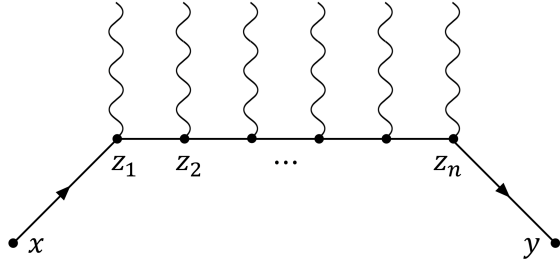


図 21 外場中の電子の伝播関数 (8.56)

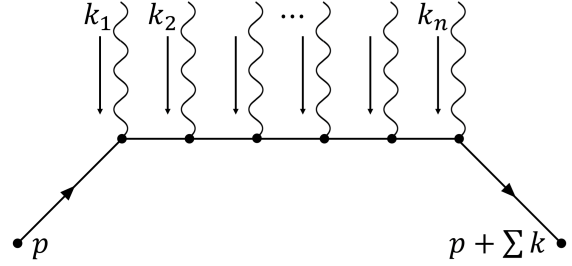


図 22 運動量空間の伝播関数 (8.59)

えた，図 22 に示すグラフに対応する式

$$S(p, p+k) \sim \sum_n e^n \int d^4 k_1 \cdots d^4 k_n \delta(k - \sum k_i) \times (S(p + \sum k_i) \gamma^{\mu_n} \cdots \gamma^{\mu_1} S(p)) A_{\mu_n}(k_n) \cdots A_{\mu_1}(k_1) \quad (8.59)$$

で与えられるはずである．[変数 k_i に関する積分とデルタ関数 $\delta(k - \sum k_i)$ を補った．結節点に因子 $\sim e\gamma^\mu$ (位相因子は以下では重要でないので省略) を，電子の内線に伝播関数 $S(q) \equiv 1/(\not{q} - m)$ (ただし保存則より $q = p + k_1 + \cdots$) を，外場との相互作用の線に $A_\mu^{\text{ext}}(x)$ の Fourier 変換 $A_\mu(k)$ (添字 ext とチルダを省く) を充てる．フェルミオン線に沿う因子はフェルミオン線の矢を逆にたどる向きに並べる．] 散乱振幅を求めるには，伝播関数を外線因子 $u(p), \bar{u}(p + \sum k_i)$ に置き換えれば良い．これは上式 (8.59) に左から $S^{-1}(p)u(p)$ を，右から $\bar{u}(p + \sum k_i)S^{-1}(p + \sum k_i)$ を掛ければ実現できる．その際，

$$S^{-1}(p)u(p) = (\not{p} - m)u(p) = 0, \quad \bar{u}(p + \sum k_i)S^{-1}(p + \sum k_i) = 0$$

ではあるけれども，これらを伝播関数 (8.59) に掛けても両端において S と S^{-1} が打ち消し合うので，ゼロにはならない．他方，Ward 恒等式 (8.48) と同様に

$$S(q+k)\not{k}S(q) = S(q) - S(q+k) \quad (8.48')$$

が成り立つことを用いると，ゲージ変換

$$\delta A_\mu^{\text{ext}}(x) = \partial_\mu \delta \Lambda(x), \quad \therefore \delta A_\mu(k) = -ik_\mu \delta \Lambda(k)$$

に伴う伝播関数 (8.59) の 2 行目の変化量は，運動量変数 k_i の積分の下で

$$(-i) \left\{ (S(p + \cdots + k_{n-1}) \gamma^{\mu_{n-1}} \cdots \gamma^{\mu_1} S(p)) \delta \Lambda(k_n) A_{\mu_{n-1}}(k_{n-1}) \cdots A_{\mu_1}(k_1) - (S(p + \sum k_i) \gamma^{\mu_n} \cdots \gamma^{\mu_2} S(p + k_1)) A_{\mu_n}(k_n) \cdots A_{\mu_2}(k_2) \delta \Lambda(k_1) \right\} \quad (8.60)$$

と計算される [本稿次節で補足]．ここでのポイントは Ward 恒等式 (8.48') を利用した結果，上式 (8.60) の 2 項における両端の一方がもはや $S(p + \sum k_i)$ または $S(p)$ ではないということである．このため散乱振幅の変化量を求めるために，式 (8.60) に左から $S^{-1}(p)u(p)(=0)$ を，右から $\bar{u}(p + \sum k_i)S^{-1}(p + \sum k_i)(=0)$ を掛けると，伝播関数 (8.59) のときは対照的にゼロになる．したがってゲージ変換で散乱振幅は変わらないことになる (伝播関数が式 (8.58) のように変わっても)．

8.3.2 節について

■外場中の電子の伝播関数 (8.56) の導出 教科書の式変形を補足しつつ導出を行う。基本的な方針として、Gell-Mann Low の定理 (6.14) を利用する。ただし分母による除算は非連結の真空泡を除くだけなので [2, p.305], あらかじめ真空泡の成分を省いて分子のみ計算すれば十分である (教科書 6.1 節の「注意」)。このことを念頭に、

$$\begin{aligned} iS_{A^{\text{ext}}}(y, x) &\equiv \langle 0 | T \{ \psi(y) \bar{\psi}(x) \} | 0 \rangle_{A^{\text{ext}}} \\ &= \langle 0 | T \{ \psi(y) \bar{\psi}(x) \exp \left(-ie \int d^4 z A_{\mu}^{\text{ext}}(z) j^{\mu}(z) \right) \} | 0 \rangle \\ &= \sum_n \frac{(-ie)^n}{n!} \int d^4 z_1 \cdots d^4 z_n A_{\mu_1}^{\text{ext}}(z_1) \cdots A_{\mu_n}^{\text{ext}}(z_n) \langle 0 | T \{ \psi(y) j^{\mu_1}(z_1) \cdots j^{\mu_n}(z_n) \bar{\psi}(x) \} | 0 \rangle \end{aligned}$$

と書く。

次に $j^{\mu}(z) = \bar{\psi}(z) \gamma^{\mu} \psi(z)$ に注意して、上式の最右辺に Wick の定理を適用する。その際、真空期待値に寄与するのは全ての場 $\bar{\psi}$ が ψ と縮約された項のみであり、非連結の真空泡を省くには、

- $\psi(y)$ と $\bar{\psi}(x)$ を縮約してはならない。
- 同じ引数の場 $\bar{\psi}(z_i)$ と $\psi(z_i)$ を縮約してはならない。

よって生き残る項は

$$\begin{aligned} iS_{A^{\text{ext}}}(y, x) &= \sum_n \frac{(-ie)^n}{n!} \int d^4 z_1 \cdots d^4 z_n A_{\mu_1}^{\text{ext}}(z_1) \cdots A_{\mu_n}^{\text{ext}}(z_n) \\ &\quad \times [iS(y, z_n) \gamma^{\mu_n} iS(z_n, z_{n-1}) \gamma^{\mu_{n-1}} \cdots \gamma^{\mu_1} iS(z_1, x) + \text{perms.}] \end{aligned}$$

で尽くされる。積分変数を入れ替えた項 (perms.) を含め、縮約の方法は $n!$ 通りあるので、先頭の「 $n!$ は消える」(p.106, 1.11) ことに注意すると、式 (8.56) を得る。(教科書ではそう言いながら、式 (8.56) 最右辺で分母の $n!$ を消し忘れてる。)

■式 (8.57) の確認 教科書には「式 (8.47) を繰り返し用いる」(p.106 下から 4 行目) とだけある。そこで式 (8.47) を利用しやすい形に書き換えるところから始めよう。式 (8.47) から式 (8.48) を導く過程で示したように、

$$\langle 0 | T \{ j^{\mu}(x) \bar{\psi}(y) \psi(z) \} | 0 \rangle = -iS(z, x) \gamma^{\mu} iS(x, y) + (x \text{ に依らない項})$$

なので、公式 (8.47) は

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (-iS(z, x) \gamma^{\mu} iS(x, y)) = (\delta^4(x - y) - \delta^4(x - z)) (-iS(z, y)) \quad (11)$$

を与える。

次に式 (8.57) の証明を詳しくまとめる。無限小ゲージ関数 $\delta\Lambda$ の 1 次までの近似では、伝播関数の変化は、

式 (8.56) の一連のゲージ場を 1 つだけ $\partial_\mu \Lambda$ に置き換えた量だけで表される。すなわち,

$$\begin{aligned}
& \delta \langle 0 | T \{ \psi(y) \bar{\psi}(x) \} | 0 \rangle_{A^{\text{ext}}} \\
&= \sum_n (-ie)^n \int d^4 z_1 \cdots d^4 z_n \left(\sum_{i=1}^n A_{\mu_1}^{\text{ext}}(z_1) \cdots (\partial_{\mu_i} \delta \Lambda(z_i)) \cdots A_{\mu_n}^{\text{ext}}(z_n) \right) iS(y, z_n) \gamma^{\mu_n} \cdots \gamma^{\mu_1} iS(z_1, x) \\
&= \sum_n (-ie)^n \int d^4 z_1 \cdots d^4 z_n \sum_{i=1}^n A_{\mu_1}^{\text{ext}}(z_1) \cdots \delta \Lambda(z_i) \cdots A_{\mu_n}^{\text{ext}}(z_n) \\
&\quad \times iS(y, z_n) \gamma^{\mu_n} \cdots \left(-\frac{\partial}{\partial z_i^{\mu_i}} [iS(z_{i+1}, z_i) \gamma^{\mu_i} iS(z_i, z_{i-1})] \right) \cdots \gamma^{\mu_1} iS(z_1, x).
\end{aligned}$$

ただし第 2 の等号では部分積分を行った。ここで冒頭の公式 (11) を用いると,

$$(\text{青い項}) = (\delta^4(z_i - z_{i+1}) - \delta^4(z_i - z_{i-1})) iS(z_{i+1}, z_{i-1})$$

となる。これを代入して z_i に関する積分を実行すると,

$$\begin{aligned}
\delta \langle 0 | T \{ \psi(y) \bar{\psi}(x) \} | 0 \rangle_{A^{\text{ext}}} &= \sum_n (-ie)^n \sum_{i=1}^n \int d^4 z_1 \cdots \widehat{d^4 z_i} \cdots d^4 z_n A_{\mu_1}^{\text{ext}}(z_1) \cdots \widehat{A_{\mu_i}^{\text{ext}}(z_i)} \cdots A_{\mu_n}^{\text{ext}}(z_n) \\
&\quad \times (\delta \Lambda(z_{i+1}) - \delta \Lambda(z_{i-1})) [iS(y, z_n) \gamma^{\mu_n} \cdots iS(z_{i+1}, z_{i-1}) \cdots \gamma^{\mu_1} iS(z_1, x)]
\end{aligned}$$

が得られる。ただし大きなハット ($\widehat{\cdots}$) はその下の因子 (\cdots) を除外することを意味する。 i に関する和をとると、2 つの項 $\delta \Lambda(z_{i\pm 1})$ の寄与は打消し合い、 $\delta \Lambda(z_{n+1})$ と $\delta \Lambda(z_0)$ の項が生き残る。一見これらの量は定義されていないが、それは表記上の問題にすぎず、実際の計算を見直せば、 $z_{n+1} \rightarrow y, z_0 \rightarrow x$ と見なせば良いことが分かる。よって

$$\begin{aligned}
& \delta \langle 0 | T \{ \psi(y) \bar{\psi}(x) \} | 0 \rangle_{A^{\text{ext}}} \\
&= -ie (\delta \Lambda(y) - \delta \Lambda(x)) \sum_n (-ie)^{n-1} \int d^4 z_1 \cdots \widehat{d^4 z_i} \cdots d^4 z_n A_{\mu_1}^{\text{ext}}(z_1) \cdots \widehat{A_{\mu_i}^{\text{ext}}(z_i)} \cdots A_{\mu_n}^{\text{ext}}(z_n) \\
&\quad \times [iS(y, z_n) \gamma^{\mu_n} \cdots iS(z_{i+1}, z_{i-1}) \cdots \gamma^{\mu_1} iS(z_1, x)] \\
&= ie (\delta \Lambda(x) - \delta \Lambda(y)) \langle 0 | T \{ \psi(y) \bar{\psi}(x) \} | 0 \rangle_{A^{\text{ext}}} : (8.57)
\end{aligned}$$

が成立する。

■式 (8.60) について ゲージ変換による変化量 $\delta A_\mu(k) = -ik_\mu \delta \Lambda(k)$ の 1 次までの近似では、伝播関数 (8.59) の 2 行目の変化量は

$$\begin{aligned}
& \delta \{ (S(p + \sum k_i) \gamma^{\mu_n} \cdots \gamma^{\mu_1} S(p)) A_{\mu_n}(k_n) \cdots A_{\mu_1}(k_1) \} \\
&= -i \sum_{i=1}^n (S(p + \sum k_i) \gamma^{\mu_n} \cdots S(p + \cdots + k_i) \not{k}_i S(p + \cdots + k_{i-1}) \cdots \gamma^{\mu_1} S(p)) A_{\mu_n}(k_n) \cdots \delta \Lambda(k_i) \cdots A_{\mu_1}(k_1)
\end{aligned}$$

と書ける。ここで右辺の因子に Ward 恒等式 (8.48') を適用して,

$$S(p + \cdots + k_i) \not{k}_i S(p + \cdots + k_{i-1}) = S(p + \cdots + k_{i-1}) - S(p + \cdots + k_i)$$

と書き換える。これら 2 項の積分 (8.59) への寄与は、 i について和をとる際に相殺し、“両端”の項 (8.60) だけが生き残る。

簡単のため $n = 3$ の場合に、このことを具体的に見てみよう。求める変化量は、Ward 恒等式を代入すると

$$\begin{aligned} & \{(S(p + k_1 + k_2) - S(p + \dots + k_3))\gamma^{\mu_2} S(p + k_1)\gamma^{\mu_1} S(p)\} A_{\mu_1}(k_1) A_{\mu_2}(k_2) \delta\Lambda(k_3) \\ & + \{S(p + \dots + k_3)\gamma^{\mu_3} (S(p + k_1) - S(p + k_1 + k_2))\gamma^{\mu_1} S(p)\} A_{\mu_1}(k_1) \delta\Lambda(k_2) A_{\mu_3}(k_3) \\ & + \{S(p + \dots + k_3)\gamma^{\mu_3} S(p + k_1 + k_2)\gamma^{\mu_2} (S(p) - S(p + k_1))\} \delta\lambda(k_1) A_{\mu_2}(k_2) A_{\mu_3}(k_3) \end{aligned}$$

と表される。ここで緑の項どうしと紫の項どうしはそれぞれ、積分変数 k_i とダミー添字 μ_i の入れ替えにより相殺する。最終的に生き残る青い項は、式 (8.60)| $_{n=3}$ に他ならない。

第 9 章 固体中の電子

序文を引用する：

ここからの 2 つの章では非相対論的な多体の物理を扱う。前章までに見てきた Wick の定理や Feynman ダイアグラムなどの基本概念は、少し修正を施すだけで非相対論的な多体系にも応用できる。主たる複雑さは Lorentz 不変性の欠如によって、運動量とエネルギーを 4 元ベクトルに統合できないことに起因する。

多体系には、それを記述するのに都合の良い座標系が、少なくともひとつある。それは多体の重心が静止している座標系である。エネルギー $\hbar\omega$ と運動量 $\hbar\mathbf{k}$ に関する物理量の振舞いは、 ω が大きく \mathbf{k} が小さい場合と、これと逆の場合とで、かなり異なる。 ω と \mathbf{k} の全域を単一の近似で扱うことは困難であり、計算手法は相対論的な場の理論ほど一貫したものにはならない。しかしその一方で、非相対論的な多体系は、物理過程に対する直観的な理解が容易であるという側面も持っている。

9.1 第二量子化

Fermi 系に対して Schrödinger の波動関数 $\psi(\mathbf{x})$ を場の演算子 $\hat{\psi}(\mathbf{x})$ に読み替える手続きを説明する。そのアイデアの基本的な部分は Jordan (ヨルダン) によって与えられた。

単一電子のハミルトニアン $H = -\frac{1}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{x}, t)$ の、エネルギー固有値 E_n に属する規格化された固有関数 $\psi_n(\mathbf{x})$ を用いて、(“第二量子化”された) Heisenberg 描像の電子場を

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}, t) = \sum_n \hat{a}_n \psi_n(\mathbf{x}) e^{-iE_n t} \quad (9.4)$$

と書こう。[ψ は複素場だが、電子だけを考えているので、粒子と反粒子の 2 種類の展開係数を用意しない。] ここでラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = i\hat{\psi}^\dagger \partial_t \hat{\psi} - \frac{1}{2m} |\nabla \hat{\psi}|^2 - \hat{\psi}^\dagger V(\mathbf{x}, t) \hat{\psi} \quad (9.6)$$

を採用すると [本稿次節で補足]、 $\hat{\psi}$ に共役な運動量密度は $\hat{\pi} = i\hat{\psi}^\dagger$ となるから [Dirac 場と同様]、正準反交換関係は

$$\{\hat{\psi}(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}', t)\} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad \text{etc.} \quad (9.5)$$

と書ける。これは展開係数に対する反交換関係

$$\{\hat{a}_n, \hat{a}_m^\dagger\} = \delta_{nm}, \quad \text{etc.} \quad (9.3)$$

を与える [本稿次節で補足]。

ここから、各状態 i の占有数 $m_i (= 0, 1)$ の N 粒子状態

$$|m_1, m_2, \dots\rangle = (\hat{a}_1^\dagger)^{m_1} (\hat{a}_2^\dagger)^{m_2} \dots |0\rangle \quad \text{with} \quad \sum_i m_i = N \quad (9.8)$$

が構築され、演算子 $\hat{\psi}, \hat{\psi}^\dagger$ が作用する“大きな”多粒子空間は、上式 (9.8) の N に関する「総和」となる。

“第二量子化”したハミルトニアンと、粒子数演算子はそれぞれ

$$\hat{H} = \int d^3x \hat{\psi}^\dagger(x) H \hat{\psi}(x) = \sum_n E_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n, \quad (9.9)$$

$$\hat{Q} = \int d^3x \hat{\rho}(x) = \int d^3x \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(x) = \sum_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \quad (9.10)$$

と表される。[本稿次節で補足。最右辺は時間依存性を持たず、また全エネルギー、粒子数の表式として理に適っている.]

[Schrödinger 方程式から確率保存則 (連続の式) が導かれたことを踏まえると、ラグランジアン密度 (9.6) あるいは \hat{H} の下で、それを演算子に置き換えた関係]

$$\partial_t \hat{\rho} + \nabla \cdot \hat{\mathbf{J}} = 0, \quad \hat{\mathbf{J}} \equiv \frac{1}{2mi} \left(\hat{\psi}^\dagger \nabla \hat{\psi} - (\nabla \hat{\psi}^\dagger) \hat{\psi} \right) : \text{粒子数流束} \quad (9.11-12)$$

が成り立つ。[ただし連続の式 (9.12) は今や確率ではなく、粒子数の保存を表す.]

次に電子場 $\hat{\psi}$ と 1 粒子波動関数の関係を調べる。まず 1 粒子状態 $|m\rangle = \hat{a}_m^\dagger |0\rangle$ に対して、行列要素

$$\langle 0 | \hat{\psi}(\mathbf{x}, t) | m \rangle = \sum_n \psi_n(\mathbf{x}) e^{-iE_n t} \langle 0 | \hat{a}_n \hat{a}_m^\dagger | 0 \rangle = \psi_m(\mathbf{x}) e^{-iE_m t} \quad (9.13)$$

[$\because \hat{a}_n \hat{a}_m^\dagger = -\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_n + \delta_{mn}$ (教科書の第 2 辺で $\hat{a}_n^\dagger \rightarrow \hat{a}_n$ と訂正した)] が波動関数となる。さらにエネルギーの低い方から N 個の粒子を埋めた N 粒子基底状態 $|\Psi_0\rangle$ に対して、

$$\langle 0 | \prod_{i=1}^N \hat{\psi}(x_i) | \Psi_0 \rangle = \begin{vmatrix} \psi_1(\mathbf{x}_1) & \dots & \psi_N(\mathbf{x}_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_1(\mathbf{x}_N) & \dots & \psi_N(\mathbf{x}_N) \end{vmatrix} \quad (9.14)$$

であり [本稿次節で補足]、右辺は **Slater** (スレーター) 行列式と呼ばれる。

N 粒子系に対する **Hartree-Fock** (ハートリー-フォック) の近似計算は、この部分集合 [N 粒子状態のうち、 $N \times N$ の Slater 行列式で表すことのできる状態の集合] の中から最良の試行関数を選ぶ作業にあたる。(p.111, 強調は本稿筆者)

[Dirac 場と同様、フェルミオン因子 $\hat{\psi}, \hat{\psi}^\dagger$ に対して] 時間順序積と正規積は、因子を反交換するものとして扱う形で定義される：

$$\langle 0 | T \{ \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(x') \} | 0 \rangle \equiv \theta(x_0 - x'_0) \langle 0 | \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(x') | 0 \rangle - \theta(x'_0 - x_0) \langle 0 | \hat{\psi}(x) \hat{\psi}^\dagger(x') | 0 \rangle. \quad (9.15)$$

9.1 節について

■ラグランジアン密度 (9.6) が Schrödinger 方程式を導くことの確認 電子場の演算子 $\hat{\psi}$ を波動関数 ψ に戻すと (したがって $\psi^\dagger \rightarrow \psi^*$),

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi)} = i\psi^*, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \psi)} = -\frac{1}{2m} \partial_k \psi^*, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -\psi^* V$$

と計算されるから、Euler-Lagrange 方程式

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = i\partial_t \psi^* - \frac{1}{2m} \partial_k^2 \psi^* + \psi^* V$$

は Schrödinger 方程式を与える. ψ^* を ψ と独立な場と見なして, 改めて ψ^* についての場の方程式を調べても,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi^*)} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \psi^*)} = -\frac{1}{2m} \partial_k \psi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = i\partial_t \psi - V\psi$$

より, やはり

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = -i\partial_t \psi - \frac{1}{2m} \partial_k^2 \psi + V\psi$$

が得られる.

■生成・消滅演算子の反交換関係 (9.3) の逆証による簡易的な確認 式 (9.3): $\{\hat{a}_n, \hat{a}_m^\dagger\} = \delta_{nm}$ が成り立つとき, 場の展開と (9.4) より

$$\{\hat{\psi}(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}', t)\} = \sum_n \psi_n(\mathbf{x}) \psi_n^*(\mathbf{x}')$$

となる. ここでエネルギー固有関数 $\psi_n(\mathbf{x})$ が満たす規格直交条件

$$\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \langle \mathbf{x} | \mathbf{x}' \rangle = \sum_n \langle \mathbf{x} | n \rangle \langle n | \mathbf{x}' \rangle = \sum_n \psi_n(\mathbf{x}) \psi_n^*(\mathbf{x}')$$

に注意すると, 正準反交換関係 (9.5) が再現される.

■“第二量子化”したハミルトニアン (9.9) について 式 (9.9) 第 1 の等号は, ラグランジアン密度 (9.6) から構築されるハミルトニアン密度

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\psi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2m} |\nabla \psi|^2 + \psi^* V \psi$$

(教科書の式 (9.7) における Hilbert 空間 \mathcal{H} との混同に注意) を用いて,

$$H_{\text{多体}} = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \psi^* H \psi$$

とすれば良い (Dirac 場に対する 7.3.1 節の note と同じ関係である). ただし上式第 2 の等号では部分積分を行っており, 最右辺の $H = -\frac{1}{2m} \nabla^2 + V$ は冒頭の単一電子のハミルトニアンであり, 最左辺の $H_{\text{多体}}$ との混同に注意する. (教科書では最初から $H_{\text{多体}} \rightarrow \hat{H}$ と演算子に置き換えてあるので, 表記の上で H と区別できている.)

式 (9.9) 第 2 の等号の確認に移ろう. 場の展開と (9.4) を第 2 辺に代入し, エネルギー固有関数 $\psi_n(\mathbf{x})$ の規格直交条件

$$\delta_{nm} = \langle n | m \rangle = \int d^3x \langle n | \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x} | m \rangle = \int d^3x \psi_n^*(\mathbf{x}) \psi_m(\mathbf{x})$$

に注意すると,

$$\int d^3x \hat{\psi}^\dagger H \hat{\psi} = \int d^3x \left(\sum_n \hat{a}_n^\dagger \psi_n^*(\mathbf{x}) e^{-iE_n t} \right) \left(\sum_m E_m \hat{a}_m \psi_m(\mathbf{x}) e^{-iE_m t} \right) = \sum_n E_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n$$

と書き換えられる (第 2 の等号で時間依存性が相殺した). 式 (9.10) の粒子数演算子 \hat{Q} も同様に変形できる.

■Slater 行列式 (9.14) について 排他律に従って N 粒子をエネルギーの低い方から順に, 状態 $|m\rangle = \hat{a}_m^\dagger |0\rangle$ (ただし $m = 1, \dots, N$) に詰めた N 粒子基底状態

$$|\Psi_0\rangle \sim \hat{a}_1^\dagger \cdots \hat{a}_N^\dagger |0\rangle = |1\rangle \cdots |N\rangle$$

を考えると, これは生成演算子の (したがって各 1 粒子状態 $|m\rangle$ の) 入れ替えに関して反対称である. このことは各 $|m\rangle$ を左から数えた番号を粒子番号と見なせば, 非相対論的量子力学における粒子の入れ替えに関する反対称性に対応する. このように N 粒子を番号で識別せずとも, 場の理論において粒子の入れ替えに関する反対称性は, より自然な形で満たされる. そこで $|\Psi_0\rangle$ を $N!$ 通りの $|m\rangle$ の順序の重ね合せ

$$|\Psi_0\rangle \equiv N! |1\rangle \cdots |N\rangle = \varepsilon_{m_1 \dots m_N} |m_1\rangle \cdots |m_N\rangle$$

の形に書こう. このとき簡単のために考えている時刻を $t = 0$ に選べば, 式 (9.13) とより

$$\langle 0 | \prod_{i=1}^N \hat{\psi}(x_i) | \Psi_0 \rangle = \varepsilon_{m_1 \dots m_N} \langle 0 | \hat{\psi}(x_1) | m_1 \rangle \cdots \langle 0 | \hat{\psi}(x_N) | m_N \rangle = \varepsilon_{m_1 \dots m_N} \psi_{m_1}(\mathbf{x}_1) \cdots \psi_{m_N}(\mathbf{x}_N)$$

となる. この最右辺は Slater 行列式 (9.14) に他ならない.

9.2 Fermi 気体と Fermi 流体

9.2.1 1 粒子密度行列

$V = 0$ の自由粒子系で, 系の体積 (Vol) が十分に大きい場合, 式 (9.4) を積分

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \varepsilon(\mathbf{k})t)}, \quad (9.16)$$

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}^2}{2m} \quad (9.18)$$

に置き換えることができる. (以降, 1 粒子波動関数をあらわに扱うことはないので, 演算子のハットは省く.)

[上式 (9.16) の $a_{\mathbf{k}}$ は式 (9.4) の展開係数 (無次元) に $(\text{Vol})^{1/2}$ の因子を含めて再定義してあり,] ここでの展開係数 $a_{\mathbf{k}}$ に対して反交換関係 (9.3) は

$$\{a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (9.17)$$

に置き換わる.

note 実際このとき場 (9.16) は反交換関係 (9.5) を満たす. 直接的には, 空間の体積 $V = L^3$ に対して固有関数 $\psi_n(\mathbf{x}) \rightarrow e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} / \sqrt{V}$, および和と積分の関係 $\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \rightarrow \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}}$ を念頭に, 場の展開 (9.4), (9.16) を比較すると,

$$\sqrt{V} a_n \rightarrow a_{\mathbf{k}}$$

と再定義されていることが分かる. また $\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \frac{\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}}{(2\pi/L)^3} = \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ なので, 反交換関係 (9.3) は式 (9.17) に置き換わる事が分かる.

Fermi エネルギー $\varepsilon_f = \varepsilon(\mathbf{k}_f)$ を差し引いたエネルギー $\xi_{\mathbf{k}} = \varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon_f$ を定義すると, $\xi_{\mathbf{k}}$ が負の 1 粒子状態は [有限温度 (第 11 章) でない限り] すべて占有されて “Fermi の海” となる. “Fermi の海” から運動量 $-\mathbf{k}$,

エネルギー $\xi_{-\mathbf{k}} = \xi_{\mathbf{k}} (< 0)$ の電子を取り去ったときに生じる空孔は、正のエネルギー $|\xi_{\mathbf{k}}|$ と運動量 \mathbf{k} を持つ。ところが Dirac の海における空孔 [7.3.2 節] とは対照的に、[取り除いた粒子の波の群速度、したがって] 空孔の速度

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \xi_{\mathbf{k}}}{\partial (-\mathbf{k})} = -\frac{\mathbf{k}}{m}$$

は空孔の運動量 \mathbf{k} と逆向きである (この意味で空孔は “負の質量” m を持つと言える)*9。

全粒子数 N は、波数空間における Fermi 面内の体積 $\frac{4}{3}\pi k_f^3$ を、1 つの状態 \mathbf{k} が占める体積 $(2\pi)^3/(\text{Vol})$ で割り、スピンの自由度 2 を掛けると

$$N = 2 \frac{k_f^3}{6\pi^2} (\text{Vol}) \quad (9.19)$$

と表される。ここから [実空間における] 粒子数密度

$$\rho = 2 \frac{k_f^3}{6\pi^2} \quad (9.20)$$

が得られる。

伝播関数を

$$iG_{\alpha\beta}(x, x') \equiv \langle \Psi_0 | T \{ \psi_{\alpha}(x) \psi_{\beta}^{\dagger}(x') \} | \Psi_0 \rangle \quad (9.21)$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \{ \theta(t-t') \theta(|\mathbf{k}| - k_f) - \theta(t'-t) \theta(k_f - |\mathbf{k}|) \} e^{i(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \varepsilon(\mathbf{k})(t-t'))} \delta_{\alpha\beta} \quad (9.24)$$

で定義する (α, β はスピン成分) [式 (9.24) を本稿次節で導出]。このとき

$$G_{\alpha\beta}(x, 0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (9.23)$$

[ただし $x = (t, \mathbf{x})$] と書いて Fourier 変換 $G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ を定義すると、

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{\omega - \varepsilon(\mathbf{k}) + i\epsilon \operatorname{sgn}(|\mathbf{k}| - k_f)} \delta_{\alpha\beta} \quad (9.25)$$

である [$\epsilon > 0$ は無限小パラメータ (ϵ との混同に注意)、本稿次節で確認]。以降、 $\epsilon \operatorname{sgn}(\dots) \rightarrow \epsilon(\dots)$ と略記する。ここから $G_{\alpha\beta}(x, x')$ は

$$\left(i\partial_t + \frac{1}{2m} \nabla^2 \right) G_{\alpha\beta}(x, x') = \delta^4(x - x') \delta_{\alpha\beta}, \quad \therefore (\omega - \varepsilon(\mathbf{k})) G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{\alpha\beta} \quad (9.22)$$

を満たす、Schrödinger 方程式の Green 関数となっていることが分かる (これが式 (9.21) 左辺から i を括り出した動機である)。

粒子数密度の期待値は、式 (9.24) で $\mathbf{x}' = \mathbf{x}, t' = t + \tau, \tau \rightarrow 0^+, \alpha = \beta$ とおくことにより、

$$\sum_{\alpha} \langle \Psi_0 | \psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{x}, t) \psi_{\alpha}(\mathbf{x}, t) | \Psi_0 \rangle = 2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \theta(|\mathbf{k}| - k_f) = \frac{2}{(2\pi)^3} \times \frac{4}{3} \pi k_f^3$$

と計算される。[このようにすれば、式 (9.25) の確認作業との二度手間を省ける。 $\tau \rightarrow 0^-$ とすると T 積 (9.21) において、密度の順序 $\psi^{\dagger} \psi$ が得られない。] これは正しい粒子数密度 (9.20) を与えている。

*9 これは「半導体においてエネルギーギャップの下の価電子帯 (valence band) に生じる空孔 (正孔) は正の質量を持つ」(p.112 脚注 2) と対照的である [違いは正孔が電子に占有されないエネルギー $\varepsilon(\mathbf{k})$ の極大に対応することに起因]。

より一般に \mathbf{x}, \mathbf{x}' が離れている場合 [および $\alpha \neq \beta$ の場合] を含め, “1 粒子密度行列” は同様に

$$\begin{aligned} \langle \Psi_0 | \psi_\beta^\dagger(\mathbf{x}', t) \psi_\alpha(\mathbf{x}, t) | \Psi_0 \rangle &= - \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \langle \Psi_0 | T \{ \psi_\alpha(\mathbf{x}, t) \psi_\beta^\dagger(\mathbf{x}', t + \tau) \} | \Psi_0 \rangle \\ &= \delta_{\alpha\beta} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} n(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (9.29)$$

と計算され, ここに Fourier 成分

$$n(\mathbf{k}) \equiv \theta(k_f - |\mathbf{k}|) \quad (9.30)$$

は運動量空間における粒子数分布になっている*10.

note 計算は Bose 粒子系において対応する式 (10.23) に詳しい. 教科書では式 (9.30): $n(\mathbf{k}) = \theta(k_f - |\mathbf{k}|)$ を「運動量空間における粒子数密度」(p.114, 1.8) と読んでいるが, これは正確には粒子数そのものである. (実際, 式 (9.29) において $n(\mathbf{k})$ は無次元でなければならないことが見て取れる.) また教科書では $n(\mathbf{k})$ が式 (9.30) 第 2 辺において $\langle \Psi_0 | a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} | \Psi_0 \rangle$ と等置されている. しかしながら, 式 (9.24) の導出時に見出した関係

$$\begin{aligned} \langle \Psi_0 | a_{\beta\mathbf{k}'}^\dagger a_{\alpha\mathbf{k}} | \Psi_0 \rangle &= \theta(k_f - |\mathbf{k}|) \{ - \langle \Psi_0 | a_{\alpha\mathbf{k}} a_{\beta\mathbf{k}'}^\dagger | \Psi_0 \rangle + (2\pi)^3 \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle \} \\ &= \theta(k_f - |\mathbf{k}|) (2\pi)^3 \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \end{aligned}$$

は粒子数密度の次元を持つため*11, これを粒子数 $n(\mathbf{k})$ と等置するのは不条理と判断する. もっとも式 (9.30) 第 2 辺 $\langle \Psi_0 | a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} | \Psi_0 \rangle$ は (少なくとも第 9 章では) 不要なので, この点は問題にならない. 数密度にまつわる曖昧さについては, 9.2.2 節冒頭の「note」も参照.

教科書 p.114, 1.15 から始まる段落を引用する:

相互作用のない Fermi 粒子の集合体は“Fermi 気体” (Fermi gas) と呼ばれる. しかし Landau (ランダウ) [脚注省略] は強い相互作用を持つ電子系であっても, 多くの場合, これと似た“Fermi 流体” (Fermi liquid) の描像が成立することを示した. Fermi 流体は, ほとんど自由な“準粒子” (quasiparticle) の集合体のように扱うことができ, その性質は Fermi 気体とよく似ている. これが固体物理において単一電子の描像が多大な成果を上げたことの原因である. Landau の元々の議論は, Fermi 面 (Fermi surface) 付近における散乱過程において, 利用できる相空間内の状態が制約されるという考え方に基づくものである. このことを現代的な言い方に直すと, 前方散乱はほとんど, 繰り込み群の見地からは“無効” (irrelevant) だということである [16.2 節も参照].

9.2.1 節について

■式 (9.24) の確認 教科書では省略されているスピンの添字 α, β を明示して計算を行う. 式 (9.21) で定義した Green 関数は, 場の Fourier 展開 (9.16) を代入すると

$$\begin{aligned} iG_{\alpha\beta}(x, x') &= \theta(t - t') \langle \Psi_0 | \psi_\alpha(x) \psi_\beta^\dagger(x') | \Psi_0 \rangle - \theta(t' - t) \langle \Psi_0 | \psi_\beta^\dagger(x') \psi_\alpha(x) | \Psi_0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^6} \{ \theta(t - t') \langle \Psi_0 | a_{\alpha\mathbf{k}} a_{\beta\mathbf{k}'}^\dagger | \Psi_0 \rangle - \theta(t' - t) \langle \Psi_0 | a_{\beta\mathbf{k}'}^\dagger a_{\alpha\mathbf{k}} | \Psi_0 \rangle \} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \varepsilon(\mathbf{k})t)} e^{-i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \varepsilon(\mathbf{k}')t')} \end{aligned}$$

*10 実はこのことは, 相互作用を持つ粒子系でも成立する.

*11 この関係式は両辺の次元が合っているので, 理に適っている (式 (9.16) で $\sqrt{V} a_n \rightarrow a_{\mathbf{k}}$ と再規格化したことに注意).

となる。ここで例えば行列要素 $\langle \Psi_0 | a_{\alpha\mathbf{k}} a_{\beta\mathbf{k}'}^\dagger | \Psi_0 \rangle$ について、 $|\Psi_0\rangle$ において占有されている Fermi 面内の状態に \mathbf{k} が含まれている場合、 $\langle \Psi_0 | a_{\alpha\mathbf{k}} = 0$ となることに注意すると、

$$\begin{aligned} \langle \Psi_0 | a_{\alpha\mathbf{k}} a_{\beta\mathbf{k}'}^\dagger | \Psi_0 \rangle &= \theta(|\mathbf{k}| - k_f) \langle \Psi_0 | a_{\alpha\mathbf{k}} a_{\beta\mathbf{k}'}^\dagger | \Psi_0 \rangle \\ &= \theta(|\mathbf{k}| - k_f) \{ -\langle \Psi_0 | a_{\beta\mathbf{k}'}^\dagger a_{\alpha\mathbf{k}} | \Psi_0 \rangle + (2\pi)^3 \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle \} \end{aligned}$$

と書ける。ただし第2の等号では式(9.17): $\{a_{\alpha\mathbf{k}} a_{\beta\mathbf{k}'}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ を用いた。次いで $|\Psi_0\rangle$ が規格化されていることを仮定し ($\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle = 1$)、また階段関数がゼロにならない条件 $|\mathbf{k}| > k_f$ の下で $a_{\alpha\mathbf{k}} |\Psi_0\rangle = 0$ であることに注意すると、

$$\langle \Psi_0 | a_{\alpha\mathbf{k}} a_{\beta\mathbf{k}'}^\dagger | \Psi_0 \rangle = \theta(|\mathbf{k}| - k_f) (2\pi)^3 \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

を得る。同様に、

$$\langle \Psi_0 | a_{\beta\mathbf{k}'}^\dagger a_{\alpha\mathbf{k}} | \Psi_0 \rangle = \theta(k_f - |\mathbf{k}|) \{ -\langle \Psi_0 | a_{\alpha\mathbf{k}} a_{\beta\mathbf{k}'}^\dagger | \Psi_0 \rangle + (2\pi)^3 \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle \} = \theta(k_f - |\mathbf{k}|) (2\pi)^3 \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

である。これは(規格化した生成・消滅演算子 $a_{\alpha\mathbf{k}} \sim (\text{Vol})^{3/2}$ に関する) 数演算子の期待値として理に合っている。これらを始めの Green 関数の表式に代入して \mathbf{k}' に関する積分を実行すると、

$$\begin{aligned} iG_{\alpha\beta}(x, x') &= \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6} \{ \theta(t - t') \theta(|\mathbf{k}| - k_f) - \theta(t' - t) \theta(k_f - |\mathbf{k}|) \} (2\pi)^3 \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \varepsilon(\mathbf{k})t)} e^{-i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \varepsilon(\mathbf{k}')t')} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \{ \theta(t - t') \theta(|\mathbf{k}| - k_f) - \theta(t' - t) \theta(k_f - |\mathbf{k}|) \} e^{i(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \varepsilon(\mathbf{k})(t - t'))} \delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

となる。このように教科書の式(9.24)最右辺には、 $\delta_{\alpha\beta}$ を掛ける必要がある。

■運動量空間の伝播関数(9.25)の確認 実際、式(9.25)の $G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ に対し、

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(x, 0) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (x = (t, \mathbf{x})) \\ &= \delta_{\alpha\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega - \varepsilon(\mathbf{k}) + i\epsilon \text{sgn}(|\mathbf{k}| - k_f)} \end{aligned}$$

であり、最右辺の ω に関する積分は図23の複素 ω 平面において考えると、

$$\begin{cases} -i\theta(t) \text{Res}[\varepsilon(\mathbf{k}) - i\epsilon] & (|\mathbf{k}| > k_f \text{ のとき}) \\ i\theta(-t) \text{Res}[\varepsilon(\mathbf{k}) + i\epsilon] & (|\mathbf{k}| < k_f \text{ のとき}) \end{cases} \\ = -ie^{-i\varepsilon(\mathbf{k})t} \{ \theta(t) \theta(|\mathbf{k}| - k_f) - \theta(-t) \theta(k_f - |\mathbf{k}|) \}$$

と評価できるので、式(9.24)が再現される。

9.2.2 線形応答

半古典的 Boltzmann 方程式

[$n(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t)$ の空間変化がゆるやかで]、系の不均一性の長さスケールが (Fermi 運動量 p_f に相当する波長に比べて) 充分大きい場合、[各位置 \mathbf{x} での局所的な運動量分布が式(9.30)の $n(\mathbf{p})$ で与えられると考えて、 \mathbf{x}, t 依存性をパラメーター的に導入し] $n(\mathbf{p})$ を分布関数 $n(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t)$ に直すことができる。ところで粒子の位置 \mathbf{x} と運動量 \mathbf{p} には不確定関係があるから、分布関数 $n(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t)$ は半古典的な概念である。

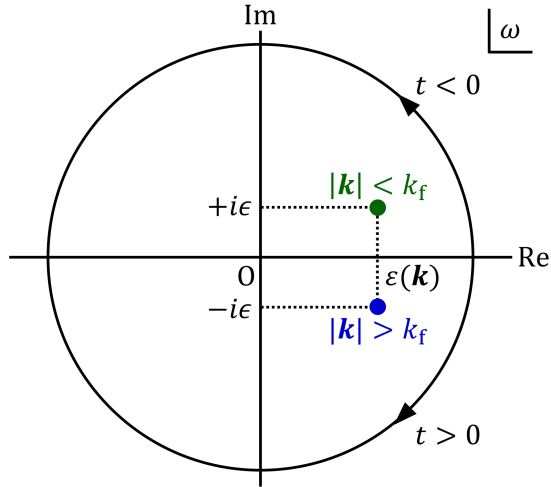


図 23 Fourier 成分 $G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ の積分路

note 本来, 2 種類の分布 $n(\mathbf{p}; t)$ と $n(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t)$ は

$$n(\mathbf{p}; t) = \int d^3x n(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t)$$

で関係付けられる. また教科書 p.116 における $n(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t)$ の平衡値 $n_0 = \theta(p_f - |\mathbf{p}|)$ (や式 (9.30)) にしても, 厳密には密度の次元を持っていないことに注意する.

さて, $I(n)$ を衝突項とすると, Boltzmann 方程式は

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{v}_p \cdot \nabla_p n + \mathbf{v}_x \cdot \nabla_x n = I(n) \quad (9.32)$$

と書ける. ここに \mathbf{p} と \mathbf{x} の変化率は, 単に状態 (\mathbf{p}, \mathbf{x}) における 1 粒子のエネルギー

$$\epsilon(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(x) \quad (9.34)$$

[左辺では $V(x)$ に由来する t 依存性が省略されている] に対して, Hamilton 方程式

$$\mathbf{v}_p = -\frac{\partial \epsilon(\mathbf{p}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{v}_x = \frac{\partial \epsilon(\mathbf{p}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{p}} \quad (9.33)$$

で与えられる. 上式 (9.33) 第 2 式の \mathbf{v}_x は群速度になっている.

★ Liouville の定理 $\nabla_p \cdot \mathbf{v}_p + \nabla_x \cdot \mathbf{v}_x = 0$ に注意すると, Boltzmann 方程式 (9.32) は通常の連続の式 $\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$ と同じ形

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_p \cdot n \mathbf{v}_p + \nabla_x \cdot n \mathbf{v}_x = I(n) \quad (9.36)$$

に書き換えられる.

しばらく [第 9 章末尾まで] Boltzmann 方程式から衝突項を省いた “Vlasov (ウラソフ) 方程式” を考える.

粒子密度の平衡値 $n_0 = \theta(p_f - |\mathbf{p}|)$ からのずれ $\delta n = n - n_0$ を考えよう。[冒頭の仮定より $\mathbf{v}_p = -\partial V/\partial \mathbf{x}$ は既に 1 次の微小量であると考えと、] Vlasov 方程式は

$$0 = \frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{v}_p \cdot \nabla_p n + \mathbf{v}_x \cdot \nabla_x n \simeq \frac{\partial}{\partial t} \delta n + \mathbf{v}_p \cdot \nabla_p n_0 + \mathbf{v}_x \cdot \nabla_x \delta n \quad (12)$$

となる ($\partial_t n_0 = 0, \nabla_x n_0 = 0$)。最右辺において、

$$\nabla_p n_0 = \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} = -\delta(|\mathbf{p}| - p_f) \frac{\mathbf{v}_x}{v_f} \quad (9.37)$$

[ただし $v_f \equiv p_f/m$, 第 2 の等号を本稿次節で補足] は Fermi 面 $|\mathbf{p}| = p_f$ のところにデルタ関数を含む。さらに $\delta n(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t), V(x)$ の Fourier 変換 $\delta \tilde{n}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega), \tilde{V}(\mathbf{k}, \omega)$ を

$$\delta n(\mathbf{p}, \mathbf{k}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \delta \tilde{n}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega), \quad \text{etc.} \quad (9.38)$$

で定義しよう [\mathbf{x} に関する Fourier 成分を指定する波数を \mathbf{k} と書き, \mathbf{p} と区別していることに注意]。このとき上式 (12) の $x = (t, \mathbf{x})$ に関する Fourier 変換をとると, [$\mathbf{v}_x = \mathbf{p}/m$ は \mathbf{p} のみに依存するので]

$$-i\omega \delta \tilde{n} + i\tilde{V}(\mathbf{k}, \omega) \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_x}{v_f} \delta(|\mathbf{p}| - p_f) + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_x \delta \tilde{n} = 0, \quad (9.39)$$

$$\therefore (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_x) \delta \tilde{n}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega) = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_x}{v_f} \delta(|\mathbf{p}| - p_f) \tilde{V}(\mathbf{k}, \omega) \quad (9.40)$$

となる。式 (9.40) より [$\delta \tilde{n}$ は, したがって] δn は Fermi 面のところだけでゼロでない。

9.2.2 節について

■式 (9.37) 第 2 の等号の確認

$$n_0 = \theta(p_f - |\mathbf{p}|) = \theta\left(\varepsilon_f - \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right) = \theta(\varepsilon_f - (\varepsilon(\mathbf{p}) - V(x)))$$

より、

$$\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} = -\delta(\varepsilon_f - (\varepsilon(\mathbf{p}) - V(x))) = -\delta\left(\frac{(p_f - |\mathbf{p}|)(p_f + |\mathbf{p}|)}{2m}\right) = -\frac{1}{p_f/m} \delta(p_f - |\mathbf{p}|)$$

となることによる (後の式 (9.44) である)。

9.2.3 ダイアグラムの方法

式 (9.40) を場の理論から導くこともできる。[本節ではスピンの自由度 α, β を省く.]

まず準備として, [式 (9.29–30) における] 平衡状態の粒子分布

$$n_0(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \int d^3 y \langle \Psi_0 | T \left\{ \psi^\dagger \left(\mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{y}, t + \epsilon \right) \psi \left(\mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{y}, t \right) \right\} | \Psi_0 \rangle e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}} = \theta(p_f - |\mathbf{p}|) \quad (9.41a)$$

を考える [階段関数の引数の符号を修正した, $\epsilon > 0$ は無限小パラメータ]。

note 1 粒子行列密度 (9.29) は差 $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ のみの関数なので, \mathbf{y} に関する Fourier 変換に他ならない粒子分布 (9.30): $n(\mathbf{p}) = \theta(p_f - |\mathbf{p}|)$ には \mathbf{x}, \mathbf{x}' いずれの依存性も残らない。ところが 1 粒子行列密度において \mathbf{x} 周りの 2 点 $\mathbf{x} \pm \frac{1}{2} \mathbf{y}$ を選べば, 概念的には \mathbf{y} に関する Fourier 変換にはパラメータ \mathbf{x} 依存性が残るため, 平衡分布関数 $n_0(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ を表すことになる。

上式 (9.41a) を使い勝手の良い公式に書き換えておく。第 2 辺の Green 関数 $\langle \Psi_0 | \{ \dots \} | \Psi_0 \rangle = -G(\mathbf{y}, \epsilon)$ に式 (9.25) の $G(\mathbf{q}, \omega)$ の Fourier 積分を代入すると、

$$\begin{aligned} n_0(\mathbf{x}, \mathbf{p}) &= -i \int d^3y \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{y}} e^{i\epsilon\omega}}{\omega - \varepsilon(\mathbf{q}) + i\epsilon(|\mathbf{q}| - p_f)} \\ &= -i \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{i\epsilon\omega}}{\omega - \varepsilon(\mathbf{p}) + i\epsilon(|\mathbf{p}| - p_f)}. \quad \left(\because \int \frac{d^3y}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{y}} = \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \right) \end{aligned} \quad (9.41b)$$

実は [自由粒子系の] 平衡粒子密度 (9.41) に対する、ポテンシャル $V(\mathbf{x}, t)$ の 1 次の補正は、図 24 のようなダイアグラムに対応付けられる。具体的には、ダイアグラムに運動量空間の因子を充てた式

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} [-iG(\mathbf{p} + \mathbf{k}/2, \omega + \omega_k)] [-i\tilde{V}(\mathbf{k}, \omega_k)] [iG(\mathbf{p} - \mathbf{k}/2, \omega)] e^{i\epsilon\omega}$$

が $\delta n(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega_k)$ を与える*12。[我々はこのことを第 1 原理から導くのではなく、式 (9.40) を再現することで、言わば“発見的に”確認する。] 実際、運動量空間の伝播関数の表式 (9.25) を代入すると、

$$\begin{aligned} \delta n(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega_k) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{-i}{\omega + \omega_k - \varepsilon(\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{k}) + i\epsilon(|\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{k}| - p_f)} \left(-i\tilde{V}(\mathbf{k}, \omega_k) \right) \frac{i}{\omega - \varepsilon(\mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{k}) + i\epsilon(|\mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{k}| - p_f)} e^{i\epsilon\omega} \\ &= -i \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\tilde{V}(\mathbf{k}, \omega_k)}{\omega_k - \{\varepsilon(\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{k})\}} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{\omega - \varepsilon(\mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{k}) + i\epsilon(|\mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{k}| - p_f)} - \frac{1}{\omega + \omega_k - \varepsilon(\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{k}) + i\epsilon(|\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{k}| - p_f)} \right] e^{i\epsilon\omega} \\ &\quad ([\dots] \text{内を通分し, 分子の } i\epsilon \text{ を省くと 1 つ前の式に戻る}) \\ &= \frac{-1}{\omega_k - \{\varepsilon(\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{k})\}} \left[n_0\left(\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{k}\right) - n_0\left(\mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{k}\right) \right] \tilde{V}(\mathbf{k}, \omega_k) \end{aligned} \quad (9.42)$$

(式 (9.41b) を用い, 分母の $i\epsilon$ を省いた)

ここで初めて、 $V(\mathbf{x}, t)$ の空間的変化がゆるやかであるという [前節の] 条件を考慮すると、 \mathbf{x} に Fourier 共役な波数 \mathbf{k} は大きくなるから、式 (9.42) 最右辺において

$$\begin{aligned} \varepsilon\left(\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{k}\right) - \varepsilon\left(\mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{k}\right) &= \frac{\partial\varepsilon(\mathbf{p})}{\partial\mathbf{p}} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial\varepsilon(\mathbf{p}, \mathbf{x})}{\partial\mathbf{p}} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{v}_x \cdot \mathbf{k}, \\ n_0\left(\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{k}\right) - n_0\left(\mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{k}\right) &= \frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon} \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{v}_x \cdot \mathbf{k} \frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon} \end{aligned}$$

と近似できる。よって

$$\delta n(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega_k) = -\frac{1}{\omega_k - \mathbf{v}_x \cdot \mathbf{k}} \mathbf{v}_x \cdot \mathbf{k} \frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon} \tilde{V}(\mathbf{k}, \omega_k) \quad (9.43)$$

を得る。ここに式 (9.37) の確認時に見出した関係

$$\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon} = -\delta(\varepsilon - \varepsilon_f) = -\frac{1}{v_f} \delta(p_f - |\mathbf{p}|) \quad (9.44)$$

を代入すると、再び式 (9.40) が得られる。

*12 エネルギー保存則のもとでも定まらない ω に関する積分は、時間差 ϵ に対し、式 (9.41)(したがって Fourier 展開 (9.23)) の形 $\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\epsilon\omega}$ の形で施されている (実際 Fourier 展開に由来するはずである)。

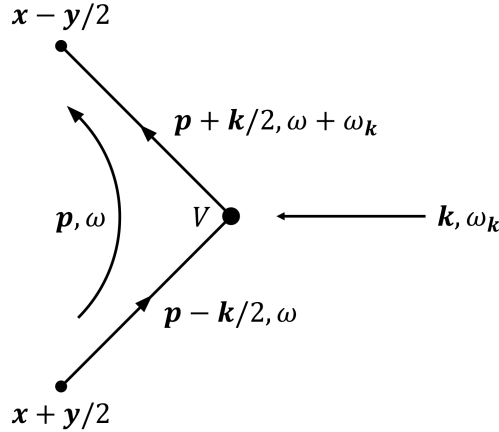


図 24 $n(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t)$ に対する $V(\mathbf{x}, t)$ の 1 次摂動. $(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}})$ は (\mathbf{x}, t) の Fourier 共役変数. 教科書の図 9.2 (p.117). 右端の矢印は単に接続する線の担う運動量の合計値 $\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}$ を指定しているに過ぎない (続く図 25, さらに教科書 p.260 にも同様の記法が見られる).

9.2.4 応用

第 1 段落を引用する：

この節では式 (9.43) の応用例を紹介する. ここで示したいのは, 場の理論だけから計算できるような例ではなく, 他の方法から得られるような物理的な記述が, 場の理論からも再現できるという例である. これを行う理由は, 読者が文献においてダイアグラムを用いた計算を見るときに, その計算の背後にある物理現象を把握できるようになってもらうためである.

多くの応用例において, 粒子-空孔泡 (電子-正孔泡)

$$\Pi(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) = - \left(\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}} - \{\varepsilon(\mathbf{p} + \mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{p})\}} [n_0(\mathbf{p} + \mathbf{k}) - n_0(\mathbf{p})] \right) \quad (9.45)$$

を用いる. これは図 25 のダイアグラムに対応付けられ, $\delta\tilde{n}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}})$ の式 (9.42) 最右辺から $\tilde{V}(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}})$ を除き, 電子の運動量を置き換え, ループにおいて固定されない運動量 \mathbf{p} に関する積分 $\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}$ を施した量になっている*13. したがって,

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) &\equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \delta\tilde{n}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (\text{式 (9.42) 最右辺}) \\ &= \Pi(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) \tilde{V}(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) \quad \left(\text{積分変数の置き換え } \mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{p} \right) \end{aligned} \quad (9.47)$$

の関係がある. [$\tilde{\phi} \rightarrow \tilde{V}$ と訂正した. 左辺は空間における密度変化 $\delta\rho(\mathbf{x}, t) \equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \delta n(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t)$ の Fourier 変換.]

なお式 (9.43) と同様, \mathbf{k} の小さい極限で

$$\Pi(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) = - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{v}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{k}} \mathbf{v}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{k} \frac{1}{v_f} \delta(|\mathbf{p}| - p_f) \quad (9.46)$$

*13 他方, 前節の図 24 に対応する $\delta\tilde{n}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}})$ では, 我々は \mathbf{p} の値を指定している.

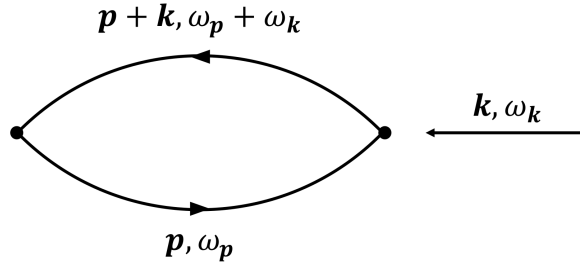


図 25 電子-正孔泡 $\Pi(\mathbf{k}, \omega_k)$. 教科書の図 9.3 (p.118).

と近似されることを後で用いる。

Debye 遮蔽

最初の応用として、電子気体による電荷の静的な遮蔽 (Debye-Hückel (デバイ-ヒュッケル) 遮蔽) を取り上げる。背景のイオン電荷が空間全体に一樣に拡がっているとすると (jellium (ジェリウム) モデル), 電子数密度の“変化分” $\delta\rho$ を用いて、正味の電荷密度は $(-e)\delta\rho$ と表される [背景イオンの一定の電荷密度 $(+e)\rho_0$ と、電子の電荷密度 $(-e)(\rho_0 + \delta\rho)$ の和]。これが作る静電ポテンシャル ϕ は、Poisson 方程式

$$-\nabla^2\phi = (-e)\delta\rho$$

に従う。他方、電子気体の密度変化 $\delta\rho$ を Thomas-Fermi 近似で見積もると

$$\delta\rho = \left. \frac{\partial\rho}{\partial\mu} \right|_{\varepsilon_f} e\phi \quad (9.51)$$

となる。 [$\phi \neq 0$ に対する化学ポテンシャル μ の ε_f からのズレが³, 1 電子の電位 $\delta\mu = e\phi$ で与えられることによる.] 2 式より ϕ に対する閉じた式として, [Helmholtz 方程式]

$$-\nabla^2\phi = \left. \frac{\partial\rho}{\partial\mu} \right|_{\varepsilon_f} e^2\phi \equiv -k_0^2\phi \quad \text{i.e.} \quad (\nabla^2 - k_0^2)\phi = 0, \quad (9.52)$$

$$\text{where } k_0^2 \equiv e^2 \left. \frac{\partial\rho}{\partial\mu} \right|_{\varepsilon_f} = \frac{e^2}{\pi^2} m k_f \quad (9.56)$$

が得られる。

上式 (9.56) の確認 $\mu = \varepsilon_f = k_f^2/2m$ と式 (9.20): $\rho_0 = k_f^3/3\pi^2$ より,

$$\rho_0 = \frac{(2m\mu)^{3/2}}{3\pi^2}, \quad \therefore \left. \frac{\partial\rho}{\partial\mu} \right|_{\varepsilon_f} = \frac{(2m)^{3/2}}{3\pi^2} \frac{3}{2}\mu^{1/2} = \frac{m k_f}{\pi^2}. \quad (\text{確認終わり})$$

[冒頭の Poisson 方程式に“外部の”電荷密度 q_{ext} を付加すると, 式 (9.52) にも非斉次項 q_{ext} が現れる。よく知られているように [15, pp.186–189], Fourier 変換を経由して求めた Green 関数]

$$\tilde{g}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mathbf{k}^2 + k_0^2}, \quad \therefore g(\mathbf{r}, 0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{g}(\mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi r} e^{-k_0 r} \quad (9.54-55)$$

を用いて, 解は

$$\phi(\mathbf{r}) = \int g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') q_{\text{ext}}(\mathbf{r}') d^3r' \quad (9.53)$$

と表される。これは Coulomb ポテンシャルの遮蔽を意味する。

note つまり Green 関数 (9.54): $g(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{4\pi r} e^{-k_0 r}$ は、本来、単位電荷が作る Coulomb ポテンシャル

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r} \quad \left(\tilde{\phi}_0(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mathbf{k}^2} \right) \quad (9.49-50)$$

に比べて、指数関数的に減少する因子 $e^{-k_0 r}$ を伴っている ($r \rightarrow 0$ では ϕ_0 に漸近)。よって式 (9.53) において外部電荷 $q_{\text{ext}}(\mathbf{r}') d^3 r'$ の作用は、実質的に $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \lesssim 1/k_0$ までしか届かないことになる。これは外部電荷が周りに引き寄せた電子によって遮蔽されるためと解釈できる。なお Green 関数 (9.54) は湯川ポテンシャルと同じ形である。

次に同じ結果をダイアグラムの技法から導く。具体的には [ここでも発見的に]、式 (9.55) の $\tilde{g}(\mathbf{k})$ が図 26 のダイアグラムに対応することを確かめる。静的な効果だけを考慮するために $\omega_{\mathbf{k}} = 0$ とおく。

note その上で図 26 のダイアグラムにおいて、

- 同時刻 Coulomb 相互作用を表す破線に $\tilde{\phi}_0(\mathbf{k}) = 1/|\mathbf{k}|^2$ を充てる。
- 電子-正孔泡のループに $\chi(\mathbf{k}) \equiv \Pi(\mathbf{k}, 0)$ を充てる (引数 $\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}$ の独立性に注意)。
 - この $\chi(\mathbf{k})$ を Lindhard (リントハルト) 関数という (p.119)。
- ループの 2 つの結節点に、正味の因子 $(ie)^2 = -e^2$ を充てる。

すると、

$$\tilde{g}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mathbf{k}^2} \left[1 - \frac{e^2}{\mathbf{k}^2} \chi(\mathbf{k}) + \left(-\frac{e^2}{\mathbf{k}^2} \chi(\mathbf{k}) \right)^2 + \dots \right] = \frac{1}{\mathbf{k}^2} \frac{1}{1 + \frac{e^2}{\mathbf{k}^2} \chi(\mathbf{k})} = \frac{1}{\mathbf{k}^2 + e^2 \chi(\mathbf{k})}.$$

ここで長波長 (小さな \mathbf{k}) を想定して $\Pi(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}})$ の式 (9.46) を利用すると、

$$\chi(\mathbf{k}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{v_f} \delta(|\mathbf{p}| - p_f).$$

であり、さらに式 (9.44): $\frac{1}{v_f} \delta(|\mathbf{p}| - p_f) = \delta(\varepsilon - \varepsilon_f)$ を考慮すると

$$\chi(\mathbf{k}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \delta(\varepsilon - \varepsilon_f) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_f} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \theta(\varepsilon_f - \varepsilon) = \frac{\partial \rho_0}{\partial \varepsilon_f} \quad (9.59)$$

と書き換えられる。よって

$$\tilde{g}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mathbf{k}^2 + e^2 \frac{\partial \rho_0}{\partial \varepsilon_f}} = \frac{1}{\mathbf{k}^2 + k_0^2} \quad (9.60)$$

となって、再び式 (9.55) が得られる。したがって長波長の近似は Thomas-Fermi 理論と等価である。

9.2.4 節 「Debye 遮蔽」について

静電気学と統計力学 (有限温度) による Debye 遮蔽の素朴な取り扱いについて復習しておく (詳細は文献 [9, § 41] のノートを参照)。完全に電離している気体を考え、正 [陽] イオンの電荷を $+qe$ 、負 [陰] イオンの電荷を $-qe$ とする。特定の正イオンが距離 r 隔たる位置に作る球対称な電位を $\phi(r)$ とすると、そこでの正・負イオンはそれぞれポテンシャル・エネルギー $\pm qe\phi$ を持ち、[数] 密度は M-B 分布

$$n_{\pm}(r) = n \frac{e^{\mp qe\phi/kT}}{e^{qe\phi/kT} + e^{-qe\phi/kT}}$$

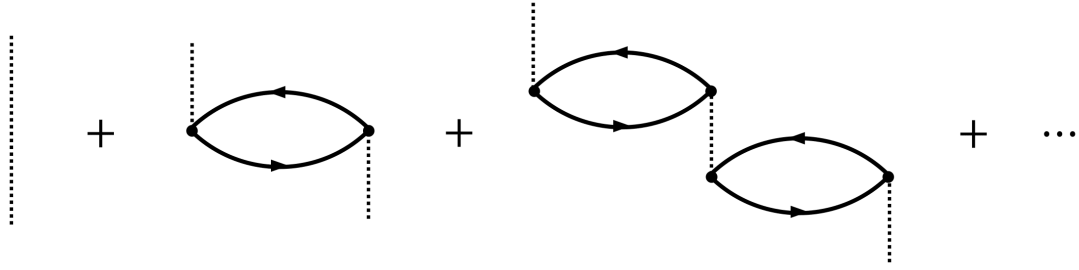


図 26 Debye-Hückel 遮蔽を与える一連のダイアグラム．垂直な破線は時間遅延のない Coulomb 相互作用を表す．

で与えられる．ただし [右辺は、したがって左辺の密度 n_{\pm} は r だけの関数であり、] 気体の密度 $n_+ + n_-$ が一様で一定値 n となるように規格化している．[これは一見するとイオン密度 $n_{\pm}(r)$ が原点の正イオンだけに影響されるように見えるけれど、すぐ後で見ると $n_{\pm}(r)$ は $\phi(r)$ を通して周りの電荷密度 $\rho(r)$ に依存している.] さて、このとき電荷密度

$$\rho(r) = qe\{n_+(r) - n_-(r)\} \quad (13)$$

は電位 $\phi(r)$ で決まる．ところが電磁気学によれば電位 $\phi(r)$ は電荷密度 $\rho(r)$ で決まり、 $\rho(r)$ は中心の正電荷を含まないものとするれば

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_1 + \phi_2, \\ \phi_1(r) &= \frac{qe}{r} + \frac{1}{r} \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr', \\ \phi_2(r) &= \int_r^{\infty} \frac{1}{r'} \rho(r') 4\pi r'^2 dr' \end{aligned} \quad (14)$$

と書ける [本稿次節で補足]．上式 (13), (14) は $\rho(r)$ を介して $\phi(r)$ に関する閉じた式が得られることを意味している．

$$\rho(r) \rightleftharpoons \phi(r).$$

$qe\phi \ll kT$ を仮定して $qe\phi/kT$ の 1 次までを考慮するとき、その解として

$$\phi = B \frac{e^{-\kappa r}}{r}, \quad \kappa^2 = 4\pi n \frac{(qe)^2}{kT}, \quad B = qe$$

が得られる．

- この結果は正イオンが引きつける負電荷の雲に覆われて遠くから見えなくなり、ポテンシャル qe/r が距離 $r \sim 1/\kappa$ 離れると消えてしまうと解釈できる．
- イオン間の相互作用の及ぶ距離 $1/\kappa$ は Debye-Hückel (デバイ-ヒュッケル) 長さと呼ばれ、中性原子の原子間力の作用域に比べて非常に長い．

この結果の適用条件 $qe\phi \ll kT$ が満たされるには、左辺の ϕ を Debye-Hückel 長さの位置で $\phi \sim qe\kappa$ と見積もり、 κ の具体的表式を代入すると、

$$kT \gg qe(qe\kappa) \sim \sqrt{\frac{n}{kT}} (qe)^3, \quad \therefore n \ll \left(\frac{kT}{q^2 e^2} \right)^3$$

の意味で気体が希薄であれば良いことが分かる．

プラズマ振動

[Debye 遮蔽は静的な現象であったのに対し、ここからは動的な問題へと話を進める.] プラズマ振動と呼ばれる、電子密度の動的な振動を考察しよう. ここでもまず古典的な理論を見ておく. [前項に引き続き一様不変な背景イオンの電荷分布下での、電子気体の密度ゆらぎを考える*14.] 電子数の流束は $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v} \simeq \rho_0\mathbf{v}$ と近似できる [平衡値からのズレ \mathbf{v} が既に 1 次の微小量だから]. この下で電子の運動方程式, Gauss の法則, 連続の式

$$m\dot{\mathbf{v}} = (-e)\mathbf{E}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = (-e)(\rho - \rho_0), \quad \partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

を組合せると,

$$\ddot{\rho} + \frac{e^2 \rho_0}{m} (\rho - \rho_0) = 0 \quad (9.66)$$

が得られる (導出は下記). これは電子数密度が “プラズマ振動数” $\omega_p = \sqrt{e^2 \rho_0 / m}$ で振動することを意味する.

上式 (9.66) の導出

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} &= \partial_t (-\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v})) = -\rho_0 \nabla \cdot \dot{\mathbf{v}} \quad (\text{連続の式}) \\ &= \frac{\rho_0 e}{m} \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (\text{運動方程式}) \\ &= -\frac{e^2 \rho_0}{m} (\rho - \rho_0). \quad (\text{Gauss の法則}) \end{aligned}$$

note 上記の導出過程を最右辺から逆にたどると、プラズマ振動の機構を定性的に解釈することができる. すなわち、局所的に電子数密度が薄まると ($\rho - \rho_0 < 0$), 露出した正電荷が電場のわき出しを生じる. すると電子は電場から力を受けて、電子の流入速度が増大する. これは密度を平衡値に戻す力が電子に働くことを意味する.

この純粋に古典的なモデルの下では振動数が波長に依存しないので、“プラズモン” (plasmon) モードの群速度はゼロである. [フォノンと同様、プラズマ振動の量子をプラズモンと呼ぶ.] しかし後から見るように [電子-正孔泡を、したがって] Fermi の海を考慮すると、この伝播性の欠如した描像は修正されることになる. (p.121)

note 波動方程式とは対照的に、式 (9.66) において空間位置 \mathbf{x} はパラメータ的に含まれているにすぎず、各位置 \mathbf{x} において式 (9.66) が成立することになる. すると空間の隣接する位置での密度の位相を適当に調節すれば、任意の波長の波を作ることができる. これは ω_p が波長に依存しないことと整合している (着想は文献 [16, pp.68–69]).

ダイアグラムからプラズモンがどのように現れるかを見てみよう. プラズマ振動は $\mathbf{k} = 0$ でもゼロでない振動数を持つので [そのことは修正された結果 (9.73) に対しても正しい], ここでも電子-正孔泡 $\Pi(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}})$ において、長波長極限 $k v_f \ll \omega_{\mathbf{k}}$ を考えることに意味がある*15. そこで $\Pi(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}})$ の式 (9.46) を $v_f k / \omega_{\mathbf{k}}$ のベキ

*14 イオンは重く動かないと想定すれば良い. このとき正味の電荷密度は $(-e)(\rho - \rho_0)$ で与えられることを思い出しておく.

*15 逆に大きな \mathbf{k} に興味はない. と言うのも、「電子と正孔が中間状態から実粒子状態に移れる十分なエネルギーがあれば、プラズモン励起は不安定になり、電子-正孔連続体の共鳴状態に移行するからである」(p.123).

に展開すると,

$$\Pi(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) = -\frac{3\rho_0}{mv_f^2} \left(\frac{v_f^2}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \frac{k^2}{3} + \left(\frac{v_f^2}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \right)^2 \frac{(k^2)^2}{5} + \dots \right) \quad (9.67)$$

となる [本稿次節で教科書の説明を補足しながら導出]. すると本節の図 26 に示した, Debye-Hückel 遮蔽を与える泡の和 $\tilde{g}(\mathbf{k})$ において, $\chi(\mathbf{k})$ を上式 (9.67) の $\Pi(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}})$ で置き換えた量は

$$\frac{1}{k^2} \frac{1}{1 + \frac{e^2}{k^2} \Pi(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}})} \simeq \frac{1}{k^2} \times \left[1 - \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \left(\omega_p^2 + \frac{3}{5} v_f^2 k^2 \right) \right]^{-1} \quad \left(\omega_p^2 \equiv \frac{e^2 \rho_0}{m} \right)$$

と表される (ただし $\Pi(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}})$ の展開を第 2 項までで打ち切り, 簡単のため第 2 項の $1/\omega_{\mathbf{k}}^4$ を $1/(\omega_{\mathbf{k}}^2 \omega_p^2)$ で置き換えた). この分母 [...] がゼロとなる極 $\omega_{\mathbf{k}}$ がプラズモンの振動数 $\omega(\mathbf{k})$ を与えると考えると, 修正されたプラズモンの分散関係

$$\omega^2(\mathbf{k}) = \omega_p^2 + \frac{3}{5} v_f^2 k^2 + \dots \quad (9.73)$$

が得られる. 最低次の近似ではプラズマ振動数 ω_p が再現されており, さらに我々は波数 k 依存性を持つ附加的な補正項を見出したことになる.

9.2.4 節「プラズマ振動」について

■ $\Pi(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}})$ の式 (9.67) の導出 ここではスピンの自由度 2 を考慮した表式 (9.20): $\rho_0 = 2 \times k_f^3 / 6\pi^2$ をあからさまに用いるので, 電子-正孔泡 $\Pi(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}})$ も 2 (= $\text{Tr}(\mathbf{1}_{2 \times s})$) 倍して再定義する必要があると考えられる. 実際このとき長波長極限での $\Pi(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}})$ の式 (9.46) は,

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_{\mathbf{x}}, \quad |\mathbf{v}_{\mathbf{x}}| \leq v_f$$

に注意して $v_f k / \omega_{\mathbf{k}}$ のべきに展開すると,

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) &= -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{v_f} \delta(|\mathbf{p}| - p_f) \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{v}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{k}} \\ &= - \int \frac{d\Omega_p dpp^2}{4\pi \cdot \pi^2} \frac{1}{v_f} \delta(|\mathbf{p}| - p_f) \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} \left\{ 1 + \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} + \left(\frac{\mathbf{v}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} \right)^2 + \left(\frac{\mathbf{v}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} \right)^3 + \dots \right\} \\ &= - \int \frac{d\Omega_p}{4\pi} \frac{m^2 v_f}{\pi^2} \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} \left\{ 1 + \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} + \left(\frac{\mathbf{v}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} \right)^2 + \left(\frac{\mathbf{v}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} \right)^3 + \dots \right\} \Bigg|_{|\mathbf{v}_{\mathbf{x}}|=v_f} \end{aligned}$$

となる. ここで式 (9.56) より最右辺の因子を

$$\frac{m^2 v_f}{\pi^2} = \frac{m k_f}{\pi^2} = \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \Bigg|_{\varepsilon_f}$$

と書き換えれば, 教科書の式 (9.67) や式 (9.70) と同じ表現が得られる. しかしここでは 2 度手間を省くために, 式 (9.20): $\rho_0 = 2 \times k_f^3 / 6\pi^2 = m^3 v_f^3 / 3\pi^2$ を用いて, あらかじめ

$$\frac{m^2 v_f}{\pi^2} = \frac{3\rho_0}{m v_f^2}$$

と書き換えておく．また上式最右辺における \mathbf{v}_x の向き $d\Omega_p$ に関する積分 (平均操作) は，速度成分を $v_{x\alpha} \rightarrow v_\alpha$ と略記すると，公式

$$\frac{1}{v_f^2} \int \frac{d\Omega_p}{4\pi} v_\alpha v_\beta = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta}, \quad (9.68)$$

$$\frac{1}{v_f^4} \int \frac{d\Omega_p}{4\pi} v_\alpha v_\beta v_\gamma v_\delta = \frac{1}{15} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) \quad (9.69)$$

を用いて実行できる ($\alpha = \beta$ および $\gamma = \delta$ において添字を縮約すると正しい関係が得られることを要求して，上式 (9.68),(9.69) 右辺の係数を定められることを，文献 [6, pp.211–212] のノートで確認した)．また v_α の奇数乗の項の平均はゼロになる．すると結局，

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) &= -\frac{3\rho_0}{mv_f^2} \left\{ \frac{k_\alpha k_\beta}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \int \frac{d\Omega_p}{4\pi} v_\alpha v_\beta + \frac{k_\alpha k_\beta k_\gamma k_\delta}{\omega_{\mathbf{k}}^4} \int \frac{d\Omega_p}{4\pi} v_\alpha v_\beta v_\gamma v_\delta + \dots \right\} \\ &= -\frac{3\rho_0}{mv_f^2} \left(\frac{v_f^2}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \frac{\mathbf{k}^2}{3} + \left(\frac{v_f^2}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \right)^2 \frac{(\mathbf{k}^2)^2}{5} + \dots \right) \end{aligned}$$

となって，式 (9.67) が得られる．

Landau 減衰 (古典論)

教科書の「Landau 減衰」の項 (pp.124–125) の準備・補論として，文献 [16, pp.189–193] における Landau 減衰の古典論 (かつ有限温度) をまとめておく (表記は同文献に準ずる)*16．

静止した重たいイオンを背景とする電子の分布関数 $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ に対する Vlasov 方程式 (衝突項をゼロとした Boltzmann 方程式)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{(-e)}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

を基に，プラズマ振動を再考する．

note 素朴に考えれば，電磁場を介した粒子間相互作用は衝突を表す．しかし Debye 長さ (Debye 遮蔽の下で Coulomb 相互作用が及ぶ実質的な長さスケール) に比べて大きな衝突パラメーターによる衝突は実のところ，多数の粒子の集団的な効果であり，ランダムな衝突として扱えない．そこで Boltzmann 方程式において，電荷が巨視的な平均の場 \mathbf{E}, \mathbf{B} から受ける力を衝突の寄与ではなく，上式のように外力の項として扱う．

一様なプラズマにおける Maxwell 分布

$$f_0(\mathbf{v}) \sim \exp\left(-\frac{mv^2/2}{k_B T}\right) \equiv e^{-(v/v_{th})^2}$$

(電磁場 $\mathbf{B} = \mathbf{E} = 0$ が対応) からのズレを $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ として

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{v}) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

と書くと，1 次のオーダーの方程式として

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_1 - \frac{e}{m} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

*16 複素線積分を用いない Landau 減衰の物理的導出も同文献 [16, pp.202–205] に見られる．

が得られる ($f_0(\mathbf{v})$ の等方性より $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \perp \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}$ となることに注意した). ここで x 方向の平面波

$$f_1 \sim e^{i(kx - \omega t)}, \quad \mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{x}}, \quad E_x \sim e^{i(kx - \omega t)}$$

(ただし $\hat{\mathbf{x}}$ は x 方向の単位ベクトル) を仮定すると, 上式は

$$-i\omega f_1 + ikv_x f_1 - \frac{e}{m} E_x \frac{\partial f_0}{\partial v_x} = 0, \quad \therefore f_1 = \frac{ieE_x}{m} \frac{\partial f_0 / \partial v_x}{\omega - kv_x}$$

を与える [以上は大まかに 9.2.2 節の議論と平行している]. これを Gauss の法則

$$ikE_x = \nabla \cdot \mathbf{E} = (-e)n_1 \equiv (-e) \int f_1 d^3v$$

(第 0 近似の電子数密度 $n_0 \equiv \int f_0 d^3v$ の電荷密度への寄与は, 背景のイオンの寄与と相殺することに注意した) に代入すると, 分散関係を規定する関係式

$$1 = -\frac{e^2}{km} \int \frac{\partial f_0 / \partial v_x}{\omega - kv_x} d^3v = -\frac{\omega_p^2}{k} \int \frac{\partial \hat{f}_0 / \partial v_x}{\omega - kv_x} d^3v = \frac{\omega_p^2}{k^2} \int \frac{\partial \hat{f}_0 / \partial v_x}{v_x - (\omega/k)} d^3v$$

が得られる. ただし第 2 の等号では確率密度 $\hat{f}_0 = f_0/n_0$ とプラズマ振動数 $\omega_p \equiv (n_0 e^2/m)^{1/2}$ を定義した. さらに 1 次元分布関数 $\hat{f}_0(v_x) = \int dv_y dv_z \hat{f}_0(\mathbf{v})$ を導入すると (引数で $\hat{f}_0(v_x)$ と $\hat{f}_0(\mathbf{v})$ を区別),

$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \int \frac{\partial \hat{f}_0(v_x) / \partial v_x}{v_x - (\omega/k)} dv_x \quad (15)$$

と書き換えられる.

これから見るように, 上式 (15) に基づけば, 振動数 ω は虚部 $\text{Im} \omega (< 0)$ を持つことが許される. これは $e^{-i\omega t} \sim e^{(\text{Im} \omega)t}$ より, 波の減衰を意味する. 衝突によるエネルギーの散逸がないにも関わらず波の減衰が起きることは, 今では簡単な物理的説明をすることができるが [次節], 当初としては予期せぬ結果であり, 積分 (15) の注意深い解析を通じて純粋に数学的に発見された. 応用数学の勝利と言える.

さて, 一般に波の減衰や増大を想定して ω を複素数とする. このとき上式 (15) を複素 v_x 平面における実軸に沿う積分と見なせば, 特異点 $v_x = \omega/k$ は積分路から外れている. しかしながら, その特異点の存在こそがプラズマ波の分散関係 $\omega = \omega_p$ の修正をもたらすことを, Landau は見出した.

被積分関数の因子 $\partial \hat{f}_0(v_x) / \partial v_x \sim v_x e^{-(v_x/v_{th})^2}$ は $v_x \rightarrow \pm i\infty$ に対して大きくなるので, 図 27 の無限遠の半円 C_2 に沿う積分は消えない. このため図 27 のように半円 C_2 を用いて積分路を閉じ, 留数定理を用いて積分を評価することはできない. Landau は, 初期値問題として問題を適切に取り扱うときには, 正確な積分路として, 特異点の下を通る曲線 C_1 を採用せねばならないことを示した.

波の位相速度 $v_\phi \equiv \omega/k$ が大きく, また減衰が弱い (虚部 $\text{Im} \omega (< 0)$ の絶対値が小さい) 場合には, 式 (15) の解析を近似的に行うことができる. このとき, 極 ω/k と Landau の積分路 C_1 は図 28 のようであり, 極の周りの小さな半円に沿う積分は $2\pi i \text{Res}(\omega/k)$ の半分になるので,

$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \left[\text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \hat{f}_0(v) / \partial v}{v - (\omega/k)} dv + i\pi \left. \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} \right|_{v=\omega/k} \right] \quad (16)$$

となる. ただし P は Cauchy の主値であり, 積分変数を $v_x \rightarrow v$ と改めた ($|v|$ との混同に注意).

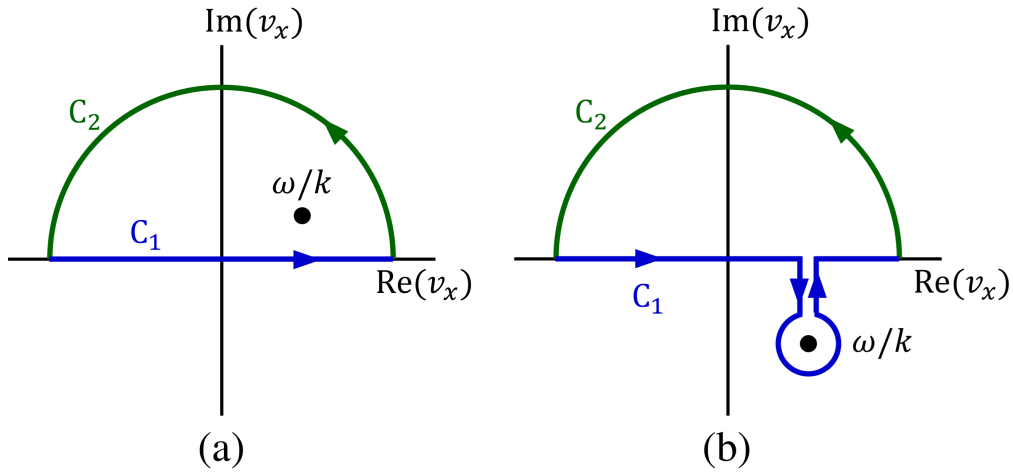


図 27 (a) $\text{Im } \omega > 0$ と, (b) $\text{Im } \omega < 0$ における Landau の問題に対する積分路

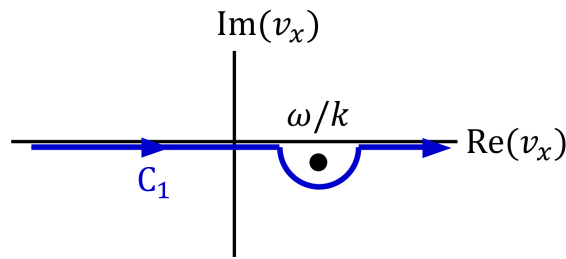


図 28 $\text{Im } \omega$ が小さい場合の複素 $v_x (= v)$ 面での積分路

note 半径 ϵ の半円を用いる代わりに, 等価的に被積分関数の分母に $-i\epsilon$ を補って, 極の位置を $v = (\omega/k) + i\epsilon$ にずらし, 公式

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \frac{\text{P}}{x} \mp i\pi\delta(x)$$

を用いて実軸に沿う積分を実行しても, 上式 (16) が得られる.

大きな位相速度 $v_\phi \equiv \omega/k$ を仮定したので, \hat{f}_0 と $\partial\hat{f}_0/\partial v$ は $v = v_\phi$ において非常に小さく, 主値の積分路から除いた $v = v_\phi$ における線分に沿う積分は無視できると考えられる. よって式 (16) の主値積分は実軸全体の積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\hat{f}_0(v)/\partial v}{v - v_\phi} dv = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}_0(v)dv}{(v - v_\phi)^2} \quad (17)$$

として評価して良い (部分積分した). 積分にとって重要な $|v| \ll v_\phi$ を考えて, さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}_0(v)dv}{(v - v_\phi)^2} \simeq \frac{1}{v_\phi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_0(v)dv = \frac{1}{v_\phi^2} = \frac{k^2}{\omega^2}$$

と簡単にできる*17. これを式 (16) に代入すると,

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + i\pi \frac{\omega_p^2}{k^2} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} \Big|_{v=v_\phi}, \quad \therefore \omega^2 \left(1 - i\pi \frac{\omega_p^2}{k^2} \left[\frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} \right]_{v=v_\phi} \right) = \omega_p^2$$

となる. 仮定より虚数項は小さいので (虚数項が正確にゼロであれば $\omega = \omega_p$), その係数では $\omega = \omega_p$ としてしまうと,

$$\omega^2 \simeq \omega_p^2 \left(1 + i\pi \frac{\omega_p^2}{k^2} \left[\frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} \right]_{v=v_\phi} \right), \quad \therefore \omega \simeq \omega_p \left(1 + i \frac{\pi}{2} \frac{\omega_p^2}{k^2} \left[\frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} \right]_{v=v_\phi} \right) \quad (18)$$

が得られる. 上式 (18) 右辺は $v_\phi = \omega/k$ 依存性が残っているため, あくまで ω を陰に与える式であることに注意する. とは言え, 式 (18) において, 大きな位相速度 $v_\phi \equiv \omega/k$ で右辺の微分係数 $\partial \hat{f}_0 / \partial v$ が小さい (しかも関数形より負と分かる) と仮定したことは, ω が小さな虚部 $\text{Im} \omega (< 0)$ を持つと仮定したことに整合していることが見て取れる.

Landau 減衰

「プラズマ振動」の項で言及したように, \mathbf{k} がある程度大きくなるとプラズモンは不安定になって電子-正孔対へと崩壊し, 電子-正孔連続体に移行する. 5.2.3 節に示した粒子の寿命の議論から類推されるように, この過程は電子-正孔泡 $\Pi(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}})$ が虚部を持つことに伴って現れる.

Landau の考えた高温では, 電子-正孔泡 (9.45) における分布は階段関数 $n_0(\mathbf{p})$ から Maxwell-Boltzmann 分布 $n_\beta(\mathbf{p}) \sim e^{-\beta \varepsilon(\mathbf{p})}$ に置き換わる. また \mathbf{k} が $n(\mathbf{p})$ の変化する範囲に比べて小さい場合,

$$\Pi(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) = - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} n_\beta(\mathbf{p})}{\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} + i\epsilon} \quad (9.77)$$

と近似できる (非自明だが $i\epsilon$ を補った). 数学公式 $\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \frac{P}{x} \mp i\pi \delta(x)$ より, これは虚部

$$\text{Im} \Pi(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} n_\beta(\mathbf{p})) \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \quad (9.78)$$

を持つ.

note 電子-正孔泡 (9.77) は古典論で予習した積分 (15) と同じ形を持っている. 電子-正孔泡 (9.77) が虚部 (9.78) を持つのと同様に, 積分 (15) が虚部を持つことから ω の虚部 (< 0 , 波の減衰) が現れたことを思い出そう. これを踏まえ, 以下では式 (9.78) を基に Landau 減衰の物理的な機構を解釈する.

デルタ関数によって, \mathbf{k} 方向の速度がプラズモン密度波の位相速度 ω/k に近い電子だけが減衰に関与する. このような電子は “プラズモンの波に乗る” ことができ, 波とエネルギーの授受を行う [図 29 を参照].

*17 式 (17) 最右辺は分布 $\hat{f}_0(v_x) \sim e^{-(v_x/v_{\text{th}})^2}$ による平均 $\overline{(v - v_\phi)^{-2}}$ を表している. より高い近似に進むには

$$\overline{(v - v_\phi)^{-2}} = v_\phi^{-2} \left(1 + \frac{2v}{v_\phi} + \frac{3v^2}{v_\phi^2} + \frac{4v^3}{v_\phi^3} + \dots \right) \simeq v_\phi^{-2} \left(1 + \frac{3v^2}{v_\phi^2} \right) = \frac{k^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2}{\omega^2} \frac{k_B T}{m} \right)$$

と展開すれば良い (奇数ベキの項の平均が消えることと $m \overline{v_x^2} = k_B T$ に注意した).

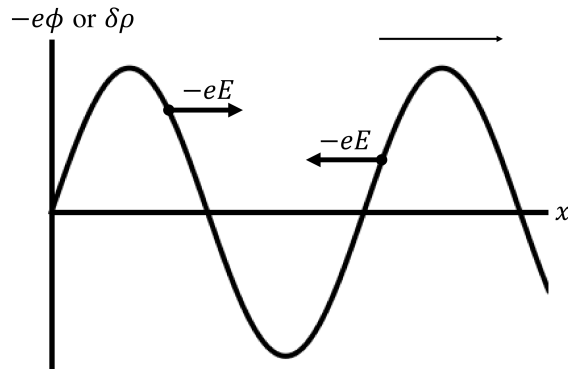


図 29 右向きに進むプラズモン密度波. 波が進む側の斜面上に乗った電子はエネルギーを得る. 波頭の後ろ側の斜面上に乗った電子はエネルギーを失う. 教科書の図 9.7 (p.125).

電子が密度波に“乗る”ことができる初速度の範囲は狭い. この範囲内で波よりも少し遅い速度を持つ電子は, まず波に対して相対的に後退し, 後から進行してくる波頭の前の斜面上に達すると, そこで波からエネルギーを与えられて波の速度まで加速する. 波よりも少し速い電子は, まず先行する波頭の後ろの斜面上にまで達し, そこで波にエネルギーを与えて減速する. 統計力学的な分布としては低速度の電子の方が多いので, 正味の効果としては, 密度波が電子にエネルギーを与えて減衰することになる. 減衰が起こるために電子速度の分布が必要であるという事情から, 式 (9.78) に $\mathbf{k} \cdot \nabla n_{\beta}(\mathbf{p})$ [本稿では $\nabla \rightarrow \nabla_{\mathbf{p}}$ と表記] という因子が現れている. (p.125)

9.2.4 節「Landau 減衰」について

■式 (9.74) の変形について 左辺の分子に

$$n(\mathbf{p}) - n(\mathbf{p} + \mathbf{k}) = n(\mathbf{p})\{1 - n(\mathbf{p} + \mathbf{k})\} - n(\mathbf{p} + \mathbf{k})\{1 - n(\mathbf{p})\}$$

を, 分母に

$$i\epsilon(|\mathbf{p} + \mathbf{k}| - p_f) = +i\epsilon, \quad i\epsilon(|\mathbf{p}| - p_f) = -i\epsilon$$

を代入し, $2\epsilon \rightarrow \epsilon$ と再定義すれば良い.

ゼロ音波

要約を省略する.

9.2.4 節「ゼロ音波」について

■デルタ関数型の斥力相互作用 (9.79) について 1 粒子系の理論における剛体球ポテンシャル $V(x)$ は, 粒子の位置 $\mathbf{x}_0(t)$ を中心とする“矩形”の形状を持つ (このとき剛体球の境界ではデルタ関数的な斥力が働く). ただし矩形パルスの障壁の高さは無限大である (このとき剛体球の内部には侵入できない). そこで剛体球の半径 (ないし直径) を $a \rightarrow 0$ とすると同時に, 矩形の高さを $1/a^3 \rightarrow \infty$ とすることを考えると, 矩形そのものがデルタ関数に移行するため,

$$V(x) \sim \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)) = (\text{粒子数密度}) = \psi^\dagger(x)\psi(x)$$

となる。摂動パラメータ λ を係数として導入し、 $V = \frac{\lambda}{2}\psi^\dagger\psi$ と書くと、式 (9.9) に基づき、相互作用ハミルトニアンは

$$H_I = \int d^3x \psi^\dagger V \psi = \frac{\lambda}{2} \int d^3x (\psi^\dagger\psi)^2 \quad (9.79)$$

となる。これを運動量空間に移した式 (10.28) 第 2 項は、2 体の散乱 $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \rightarrow \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4$ を記述する項として理に適っている。

9.3 電子とフォノン

第 2 段落から抜粋：

ここで電子とイオンの役割を入れ替えてみる。まず一様に分布する電子気体を背景として設定し、その中の各イオンを質量 M を持つ点電荷と考えて、金属中のフォノンに関する簡単なモデルを構築する。

イオンの平均数密度を N 、イオン 1 個の電荷を Ze とすると^{*18}、平衡状態における電気的中性の条件は $NZ = \rho_0$ である (ρ_0 は電子数密度) [左辺 $NZ \equiv \rho_{\text{ion}}$ はイオンが失った電子数密度]。また、イオン系の (長波長の) 微小変位 $\delta\mathbf{r}$ に伴って現れる過剰な電荷 [密度] は、

$$e\delta\rho_{\text{ion}} = -NeZ\nabla \cdot \delta\mathbf{r} \quad (9.85)$$

と表される [本稿次節で補足]。電子の動きを無視すれば、イオン密度はプラズマ振動するはずであり、[電子のプラズマ振動数の定義式 $\omega_p^2 = \rho_0 e^2 / m$ で文字を適当に置き換えると、] イオン・プラズマ振動数 Ω_p は $\Omega_p^2 = N(eZ)^2 / M$ で与えられる。

しかしこの振動数は、電子のプラズマ振動数よりもはるかに低いので [M が大きいことによる]、実際には電子がイオンの振動に追随して、イオン電荷をある程度まで遮蔽する。その結果、実効的なイオン電荷は小さくなり、イオンの振動数は更に小さくなる [この解釈は後の式 (9.91) から正当化される]。

イオンの運動方程式は

$$M\delta\ddot{\mathbf{r}} = Ze\mathbf{E} = -Ze\nabla\phi. \quad (9.86)$$

また静電場 ϕ の方程式は

$$-\nabla^2\phi + k_0^2\phi = e\delta\rho_{\text{ion}} + q_{\text{ext}}. \quad (9.87)$$

note : 上式 (9.87) について Poisson 方程式 $-\nabla^2\phi = (\text{総電荷密度})$ の右辺には、イオンの寄与 (9.85): $e\delta\rho_{\text{ion}}$ だけでなく、電子の寄与 $e\delta\rho = k_0^2\phi$ (式 (9.51), (9.56)) を含めるのが正確である。この電荷密度の表式において、イオンと電子の取扱いは非対称となっている。また本稿では「Debye 遮蔽」のときと同様に、 q_{ext} を外部電荷密度として導入し、教科書の式 (9.87) において $e q_{\text{ext}} \rightarrow q_{\text{ext}}$ と改める (このとき教科書の式 (9.88) 以降と同様、 q_{ext} には係数 e が付かない)。また分布 $q_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ が静的であるという仮定を以下ではあからさまに用いないので、本稿では引数も省略した。

式 (9.85–87) より、Fourier 空間における式

$$\phi(k, \omega) = \frac{1}{k^2} \left\{ 1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega^2} + \frac{k_0^2}{k^2} \right\}^{-1} q_{\text{ext}}(k, \omega) \equiv \frac{1}{\epsilon(k, \omega)} \frac{1}{k^2} q_{\text{ext}}(k, \omega) \quad (9.88-89)$$

^{*18} この記号の使い方は慣例に従ったものであるが、誤解を招きやすい。 Z は原子番号ではなく、各原子が結晶中で伝導帯へ供出して失っている電子の数である (p.127 脚注 5)。

が得られる [本稿次節で補足, 教科書では $\{\dots\}$ 内で k_0^2/k^2 の分子・分母が逆になっているのを訂正した].
 ここで [Coulomb ポテンシャル $e\phi_0(r) = e/4\pi r$ の Fourier 変換 (9.50): $e\phi(\mathbf{k}) = e/k^2$ を動機付けとして],
 振動数と波数に依存する “誘電関数” $\epsilon(k, \omega)$ を

$$\frac{1}{\epsilon(k, \omega)} \equiv \left\{ 1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega^2} + \frac{k_0^2}{k^2} \right\}^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{k_0^2}{k^2}} \left(\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega^2(k^2)} \right), \quad (9.90)$$

$$\omega^2(k^2) \equiv \frac{\Omega_p^2}{1 + \frac{k_0^2}{k^2}} \quad (9.91)$$

で定義する [式 (9.90) 第 2 の等号を本稿次節で確認].

(縦方向の) 密度ゆらぎの振動数は, 誘電関数の極 $\omega(k^2)$ で与えられる. 小さな k (長波長) では $\omega(k^2) = ck$ と近似され, 音速 c は

$$c^2 = \frac{\Omega_p^2}{k_0^2} \quad (9.92)$$

と同定される [本稿次節で確認]. ここに自由電子に関する値 (スピンを考慮) $\rho_0 = \frac{k_f^3}{3\pi^2}$, $\frac{1}{k_0^2} = \frac{1}{e^2} \frac{\pi^2}{mk_f}$ を代入すると, 上式 (9.92) は Fermi 速度と音速の関係 (**Bohm-Staver の関係**)

$$c^2 = \frac{1}{3} Z \frac{m}{M} v_f^2 \quad (9.94)$$

に書き換えられる [本稿次節で確認]. これは粗雑なモデルに基づく近似式ではあるが, 自由電子気体とほとんど等しい体積弾性率を持つアルカリ金属 (Na, K など) に対しては比較的よい近似になる.

また電子間の相互作用を媒介する実効的な Coulomb 伝播関数は,

$$g(k, \omega) = \frac{1}{k^2} \frac{1}{1 + \frac{k_0^2}{k^2}} \left(\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega^2(k^2)} \right) \quad (9.95)$$

となる. [本稿次節で補足. Debye 遮蔽の箇所で見た式 (9.55) の $\tilde{g}(\mathbf{k})$ に, 振動数に依存する因子が掛かった形となっている.]

これは振動数に依存する——すなわち相互作用は瞬時には伝わらない. 更に重要な点は, $\omega^2 < \omega^2(k^2)$ の低い振動数で “引力” が生じることである. 電子が周囲のイオンを引き寄せることによって生じたイオンの集まりが, その電子が去った後に残り, このイオンの集中に伴う正電荷が別の電子を引き寄せるといふ過程によって, 実効的に電子間引力が生じるのである. 通常, フォノンの振動数の最大値 (ここで示したモデルでは Ω_p , 一般には Debye 振動数) は Fermi エネルギー ε_f に比べて非常に小さいので, 引力相互作用は Fermi 面付近 [$|(k^2/2m) - \varepsilon_f| = \omega \leq \omega(k) \leq \Omega_p$] の電子だけに働く. この電子間引力が, 鉛, ニオブ, アルミニウムなどの金属超伝導体における超伝導現象の起源となっている [14.3 節で再論]. (最終段落)

9.3 節について

■電荷密度 (9.85) について ν 個のイオンの集団に固定した体積要素 v の変化率 $\delta v/v = \nabla \cdot \delta \mathbf{r}$ を用いて, イオンの数密度 $N = \nu/v$ の変化は

$$\delta N = \frac{\nu}{v + \delta v} - \frac{\nu}{v} \simeq -N \frac{\delta v}{v} = -N \nabla \cdot \delta \mathbf{r}$$

と表される．ところでイオンが失った電子数密度 $\rho_{\text{ion}} \equiv ZN$ の変化 $\delta\rho_{\text{ion}} = Z\delta N$ を用いて，過剰な電荷密度は

$$e\delta\rho_{\text{ion}} = eZ\delta N$$

と表される．2式より式(9.85)を得る．

■式(9.88)の導出 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ (式(9.85))と $\nabla \cdot$ (式(9.86))を比較すると，

$$e\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta\rho_{\text{ion}} = -NeZ\nabla \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{N(eZ)^2}{M}\nabla^2\phi = \Omega_p^2\phi, \quad \therefore e\omega^2\delta\rho_{\text{ion}}(k, \omega) = \Omega_p^2k^2\phi(k, \omega)$$

を得る．これを式(9.87)のFourier変換

$$k^2\phi(k, \omega) + k_0^2\phi(k, \omega) = e\delta\rho_{\text{ion}}(k, \omega) + q_{\text{ext}}(k, \omega)$$

における右辺第1項に代入し， $\phi(k, \omega)$ について解くと式(9.88)が得られる．

■式(9.90)第2の等号の確認

$$\frac{1}{\epsilon(k, \omega)} \equiv \left\{ 1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega^2} + \frac{k_0^2}{k^2} \right\}^{-1} = \left\{ \left(1 + \frac{k_0^2}{k^2} \right) \left(1 - \frac{\Omega_p^2/\omega^2}{1 + \frac{k_0^2}{k^2}} \right) \right\}^{-1},$$

$$\left(1 - \frac{\Omega_p^2/\omega^2}{1 + \frac{k_0^2}{k^2}} \right)^{-1} = \left\{ 1 - \frac{\omega^2(k^2)}{\omega^2} \right\}^{-1} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega^2(k^2)}$$

による．

■音速の式(9.92)について 小さな k では

$$\omega^2(k^2) = \frac{k^2}{k^2 + k_0^2}\Omega_p^2 \simeq \frac{k^2}{k_0^2}\Omega_p^2 \equiv c^2k^2.$$

■Bohm-Staverの関係(9.94)の確認

$$NZ = \rho_0 = \frac{k_f^3}{3\pi^2}$$

を用いてイオン・プラズマ振動数の式から N を消去し，

$$\Omega_p^2 = \frac{N(eZ)^2}{M} = Z\frac{e^2\rho_0}{M} = \frac{Z}{3\pi^2}\frac{e^2k_f^3}{M}$$

と表しておく．これと $\frac{1}{k_0^2} = \frac{1}{e^2}\frac{\pi^2}{mk_f}$ の積をとり， $k_f = mv_f$ に注意すると，

$$c^2 = \frac{\Omega_p^2}{k_0^2} = \frac{1}{3}Z\frac{k_f^3}{mM} = \frac{1}{3}Z\frac{m}{M}v_f^2 : (9.94)$$

を得る．

■ $g(k, \omega)$ の式 (9.95) について 式 (9.89):

$$\phi(k, \omega) = \frac{1}{\epsilon(k, \omega)} \frac{1}{k^2} q_{\text{ext}}(k, \omega)$$

の右辺における $q_{\text{ext}}(k, \omega)$ の係数を, Green 関数の Fourier 変換 $g(k, \omega)$ に同定できる. 実際, Green 関数を定義する式

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int d^3 r' dt' g(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') q_{\text{ext}}(\mathbf{r}', t')$$

に辺々

$$\int d^3 r dt e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \int d^3 r dt e^{-i\{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \omega(t - t')\}} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - \omega t')}$$

を作用させると, $\phi(\mathbf{k}, \omega) = g(\mathbf{k}, \omega) q_{\text{ext}}(\mathbf{k}, \omega)$ となる.

第 10 章 非相対論的 Bose 粒子系

序文を引用する：

非相対論的 Bose 粒子系として最もよく研究されているのは、超流動相の液体ヘリウム 4 (${}^4\text{He}$) である。本章ではこれを集中的に扱う。

[複合粒子も考えれば、物質粒子がフェルミオンとは限らない。 ${}^4\text{He}$ はフェルミオンを偶数個含むので (陽子, 中性子, 電子がそれぞれ 2 個ずつ), Fermi 統計に従う.]

10.1 Bose 粒子場

Bose 粒子の多体系は粒子の統計が異なるだけで、基本的に 9.1 節で見た Fermi 系と同様に扱うことができる。

1 粒子ハミルトニアン $H = -\frac{1}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{x}, t)$ の, エネルギー固有値 E_n に属する, 規格化された固有関数 $\varphi_n(\mathbf{x})$ を用いて, (“第二量子化”された) Heisenberg 描像の Bose 粒子場を

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t) = \sum_n \hat{a}_n \varphi_n(\mathbf{x}) e^{-iE_n t} \quad (10.4)$$

と書こう。ここで [式 (9.6) と同じ Schrödinger 方程式を導く] ラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = i\varphi^\dagger \partial_t \varphi - \frac{1}{2m} |\nabla \varphi|^2 - \varphi^\dagger V(\mathbf{x}, t) \varphi \quad (10.6)$$

を採用すると, $\hat{\varphi}$ に共役な運動量密度は $\hat{\pi} = i\hat{\varphi}^\dagger$ となるから, 正準交換関係は

$$[\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t), \hat{\varphi}^\dagger(\mathbf{x}', t)] = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad \text{etc.} \quad (10.5)$$

と書ける。これは展開係数に対する交換関係

$$[\hat{a}_n, \hat{a}_m^\dagger] = \delta_{nm}, \quad \text{etc.} \quad (10.3)$$

を与える [以上, 9.1 節との違いは反交換子が交換子に置き換わっている点だけである]。

ここから N 粒子状態

$$|m_1, m_2, \dots\rangle = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m_i!}} (a_i^\dagger)^{m_i} |0\rangle \quad \text{with} \quad \sum_i m_i = N \quad (10.8)$$

が構築され, Bose 統計では各状態 i の占有数がとり得る値は $m_i = 0, 1, \dots$ となる。

“第二量子化”したハミルトニアンと, 粒子数演算子はやはり, それぞれ

$$\hat{H} = \int d^3x \hat{\varphi}^\dagger(x) H \hat{\varphi}(x) = \sum_n E_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n, \quad (10.9)$$

$$\hat{Q} = \int d^3x \hat{\rho}(x) = \int d^3x \hat{\varphi}^\dagger(x) \hat{\varphi}(x) = \sum_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \quad (10.10)$$

と表される。また [式 (9.11–12) と同様の] 連続の式

$$\partial_t \hat{\rho} + \nabla \cdot \hat{\mathbf{J}} = 0, \quad \hat{\mathbf{J}} \equiv \frac{1}{2mi} (\hat{\varphi}^\dagger \nabla \hat{\varphi} - (\nabla \hat{\varphi}^\dagger) \hat{\varphi}) : \text{粒子数流束} \quad (10.11-12)$$

が、演算子の関係として成り立つ。

第9章と同様、これ以降は演算子 $\hat{\varphi}$ [と生成・消滅演算子] のハットを省く。

10.2 自発的な対称性の破れ

第1段落を引用する：

Bose 粒子系を扱う形式は Fermi 粒子系のそれとよく似ているが、違いはどこに現れるのであろうか？ Bose 統計では排他律が働かないので、Fermi の海のような状態は Bose 粒子系には存在しない。その代わりに多数の粒子が最低エネルギー準位を集中的に占有する Bose 凝縮 (もしくは Bose-Einstein 凝縮) が起こり得る。しかし粒子間に相互作用がある場合、多粒子による 1 状態の占有という見方は、現象の本質を最もよく捉えたものとは言い難い。[最終段落にあるように、低温における超流動 ^4He では、粒子間相互作用の効果のために、最低エネルギーの 1 粒子状態を占める粒子数の割合は、あまり多くない。] ここで“自発的な対称性の破れ (spontaneous symmetry breaking, ‘対称性の自壊’とも言う)”の概念を導入するのが適切であろう。Bose 凝縮に伴って破られるのは、粒子数の保存に関わる $U(1)$ 対称性である。[場の位相変換 (ゲージ変換) に関する理論の対称性から、電荷 (粒子数) の保存が導かれたことを思い出そう (第2章).]

[まず、第9章で見た Fermi の海 $|\Psi_0\rangle$ に似た状態を、Bose 粒子系にも導入しよう。] 基底状態 $|\Phi_0\rangle$ を粒子数演算子 \hat{Q} の固有値 Q_0 に属する固有状態とすると、この基底状態は $U(1)$ 対称 [$U(1)$ 変換に対して不変] である：

$$e^{i\alpha\hat{Q}}|\Phi_0\rangle = e^{i\alpha Q_0}|\Phi_0\rangle \propto |\Phi_0\rangle.$$

しかも $|\Phi_0\rangle$ は非縮退状態である^{*19}。また Bose 粒子場の期待値は

$$\langle\Phi_0|\varphi(x)|\Phi_0\rangle = 0$$

となる。

証明 Bose 粒子場 $\varphi(x)$ は

$$e^{i\alpha\hat{Q}}\varphi(x)e^{-i\alpha\hat{Q}} = e^{-i\alpha}\varphi(x) \quad (10.13)$$

を満たすので [本稿次節で補足],

$$\langle\Phi_0|e^{i\alpha\hat{Q}}\varphi(x)e^{-i\alpha\hat{Q}}|\Phi_0\rangle = e^{-i\alpha}\langle\Phi_0|\varphi(x)|\Phi_0\rangle \quad (10.15)$$

が成り立つ。これが

$$\langle\Phi_0|e^{i\alpha\hat{Q}}\varphi(x)e^{-i\alpha\hat{Q}}|\Phi_0\rangle = e^{i\alpha Q_0}e^{-i\alpha Q_0}\langle\Phi_0|\varphi(x)|\Phi_0\rangle = \langle\Phi_0|\varphi(x)|\Phi_0\rangle \quad (10.14)$$

と両立するためには、 $\langle\Phi_0|\varphi(x)|\Phi_0\rangle = 0$ でなければならない。

以上は総粒子数を指定した正準集団 [カノニカル集団] を扱うことに対応する。代わりに大正準集団 [グランド・カノニカル集団] を考え、粒子数の確定しない状態を許容すると、基底状態は縮退することを以下に見る。まず粒子間相互作用がない場合を考え、規格化波動関数 $\varphi_0(\mathbf{x}) = 1/\sqrt{V}$ の 1 粒子エネルギーを便宜的に

^{*19} Perron-Frobenius (ペロン-フロベニウス) の定理によると、有限自由度の系の基底状態は縮退しない。

$E_0 = 0$ とおく．これには φ_0 粒子がいくつあっても，系のエネルギーは 0 になるという利点がある．ここで $[\phi$ を場 $\varphi_0(\mathbf{x})$ の次元を持つ複素パラメータとして]，粒子数が確定していない状態

$$|\phi\rangle = e^{\sqrt{V}(\phi a_0^\dagger - \phi^* a_0)} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}V|\phi|^2} \sum_{N_0=0}^{\infty} (\sqrt{V}\phi)^{N_0} \frac{1}{\sqrt{N_0!}} |N_0\rangle \quad (10.16)$$

を構築する．

note 第 2 の等号を本稿次節で確認する．ただし 9.1 節ではハミルトニアン (10.9) などにおいて，1 粒子状態のラベルをエネルギーの低い順に $n = 1, 2, \dots$ としたのに対し，ここでは最低エネルギー $E_0 = 0$ にラベル $n = 0$ を充てていることに注意する．最右辺において $|N_0\rangle$ は状態 $n = 0$ を N_0 個の粒子が占有している状態であり (式 (10.8) 参照)，本稿では和の範囲に $N_0 = 0$ も含めた (本稿次節の導出過程も参照)．式 (10.16) と通常のコヒーレント状態 $|\lambda\rangle \sim e^{\lambda a^\dagger} |0\rangle$ の類似性にも注意する [1, p.11, pp.26–27] [13, pp.130–131, p.199]．

上式 (10.16) はエネルギーがゼロの固有状態 $|N_0\rangle$ の和になっており，総和としてもエネルギーはゼロである．またパラメータ ϕ は状態 $|\phi\rangle$ における $\varphi(x)$ の固有値という意味を持つ，すなわち

$$\varphi(x) |\phi\rangle = \phi |\phi\rangle \quad (10.17)$$

が成り立つことを証明できる [本稿次節で確認]．すると状態 $|\phi\rangle$ における場 $\varphi(x)$ の期待値と状態数密度は，それぞれ

$$\langle \phi | \varphi(x) | \phi \rangle = \phi \neq 0, \quad (10.18)$$

$$\langle \phi | \varphi^\dagger(x) \varphi(x) | \phi \rangle = |\phi|^2 \quad (10.21)$$

となる [本稿次節で $\langle \phi | \phi \rangle = 1$ と規格化されていることを確認]．さらに U(1) 操作は

$$e^{-i\alpha \hat{Q}} |\phi\rangle \propto |e^{-i\alpha} \phi\rangle \quad (10.19)$$

[本稿次節で確認，教科書では等号] のように，1 つのゼロエネルギー状態 $|\phi\rangle$ を， ϕ の位相の異なる別のゼロエネルギー状態に変換する．状態 (10.19) はもはや $|\phi\rangle$ とは異なる状態である (このことは $|\phi\rangle$ が \hat{Q} の固有状態では“ない”ことを意味する)．実際，

$$\langle \phi' | \phi \rangle = e^{iV\text{Im}(\phi'^* \phi)} e^{-\frac{1}{2}V|\phi - \phi'|^2} \quad (10.20)$$

なので [教科書の式 (10.20) に位相因子を補った，本稿次節で導出]，異なる値 $\phi, \phi' (\neq \phi)$ を持つ状態は体積が無限大の極限において直交する [$|\langle \phi' | \phi \rangle| = e^{-\frac{1}{2}V|\phi - \phi'|^2} \rightarrow 0$]．すると複素 ϕ 平面において， $|\phi|$ が一定の円周上の値 ϕ を持つ，無数のゼロエネルギー状態が得られることになる．こうして予告通り，基底状態として多数の状態が縮退していることが結論される．これは相互作用がある多体系に対しても正しい*20．

相互作用を持つ Bose 粒子系の基底状態が，このように縮退を生じると，変換操作に付随する選択則や，多重項の表現上の性質が単純なものではなくなる．このことを対称性が“自発的に破れた”と

*20 実際「相互作用によって粒子数は変わらないので， \hat{Q} はハミルトニアンと交換する」(p.134, 1.17–18)．ところで「ハミルトニアンと交換する任意の対称操作は，状態ベクトルを，同じエネルギー値に属する固有空間内のベクトルに変換する」(p.133, 1.10–12)．「したがって，ゼロでない [期待値 (10.18):] $\langle \phi \rangle = \phi$ の値を与える $|\phi\rangle$ が，エネルギー固有状態のひとつであるならば， $e^{-i\alpha \hat{Q}} |\phi\rangle = |e^{-i\alpha} \phi\rangle$ はそれと直交し，かつ同じエネルギー値に属する固有状態である」(p.134, 1.18–20)．

言う。[素朴には縮退した基底状態から、理論と同じ対称性を持たない特定の状態が選び出される機構を「自発的対称性の破れ」と呼ぶ [2, p.482].] $\langle \Phi_0 | \varphi(x) | \Phi_0 \rangle$ のように、基底状態が非縮退のときにゼロで、対称性が自発的に破れた場合にゼロでなくなる [式 (10.18)] 量を“秩序パラメーター” (order parameter) と呼ぶ。秩序パラメーターは対称性の破れの指標となる。(p.134)

次に、多数の粒子が最低エネルギー準位を占めるという Bose 凝縮の粗い描像と、自発的対称性の破れがどのように関係するのかを述べる。準備として、Oliver Penrose (ペンローズ)*21 による“非対角長距離秩序” (off-diagonal long-range order: ODLRO) を導入する。まず $[|\Phi_0\rangle$ または $|\phi\rangle$ を $|\Phi\rangle$ で表し]、行列要素

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \langle \Phi | \varphi^\dagger(\mathbf{x}, 0) \varphi(\mathbf{x}', 0) | \Phi \rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}')} \langle \Phi | a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'} | \Phi \rangle \quad (10.22)$$

を考えよう。この“対角成分” ($\mathbf{x} = \mathbf{x}'$) は粒子数密度である。

note : 上式 (10.22) について 大きな空間の体積を考えて、Bose 粒子場を Fourier 積分 (9.16) と同じ形

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \varepsilon(\mathbf{k})t)}$$

に書けば良い。このとき展開係数を $\sqrt{V} a_n \rightarrow a_{\mathbf{k}}$ と再定義したことになる (式 (9.17) の箇所の note を参照)。また本稿では場の引数 $x^0 = x'^0 = 0$ を明示し、最右辺において $a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'}^\dagger \rightarrow a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'}$ と訂正した (教科書の式 (10.23) についても同様に訂正した)。

式 (10.22) の空間平均は、運動量 \mathbf{k} を持つ粒子数 $n_{\mathbf{k}}$ を Fourier 係数として、Fermi 系の式 (9.29) と同様に差 $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ に関する Fourier 展開の形

$$\langle R(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rangle \equiv \frac{1}{\text{Vol}} \int d^3 y R(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x}' + \mathbf{y}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} n_{\mathbf{k}} \quad (10.23)$$

に書ける [平均操作を明示した、本稿次節で補足]。ここで $f(\mathbf{k})$ を滑らかな関数として

$$n_{\mathbf{k}} = n_0 (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}) + f(\mathbf{k}) \quad (10.24)$$

とおいてみる。[$n_{\mathbf{k}}$ とは対照的に、 n_0 は粒子数密度の次元を持つ。] これを式 (10.23) に代入すると、

$$\langle R(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rangle = n_0 + \tilde{f}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (10.25)$$

となる (\tilde{f} は f の Fourier 変換)。 \mathbf{x} と \mathbf{x}' が互いに遠ざかると、Riemann-Lebesgue (リーマン-ルベグ) の補題により、 $\tilde{f}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rightarrow 0$ となる [被積分関数において $e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}$ が素早く振動し、 $f(\mathbf{k})$ の寄与が打ち消し合う]。他方、このとき $\langle R(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rangle$ がゼロに近づかないならば、 $n_0 \neq 0$ であることになる。これは Bose 凝縮を意味する。

ところで任意の 2 つの演算子 $O_1(\mathbf{x}), O_2(\mathbf{x}')$ について、 \mathbf{x} と \mathbf{x}' を離していくと、

$$\langle \Phi | O_1(\mathbf{x}) O_2(\mathbf{x}') | \Phi \rangle \rightarrow \langle \Phi | O_1(\mathbf{x}) | \Phi \rangle \langle \Phi | O_2(\mathbf{x}') | \Phi \rangle \quad (10.26)$$

となるような状態 $|\Phi\rangle$ を、“クラスター分解性” (cluster decomposition property) を持つ状態と言う。我々の問題では、遠く離れた \mathbf{x} と \mathbf{x}' に対して、左辺 $\langle R(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rangle$ は n_0 に近づく。これに対し右辺について、

*21 Sir Roger Penrose (ロジャー・ペンローズ) の兄である。

- 粒子数が確定した状態 $|\Phi_0\rangle$ に対しては $\langle \Phi_0 | \varphi | \Phi_0 \rangle = 0$ なので, $|\Phi_0\rangle$ はクラスタ分解性を持たない.
- 対称性が自発的に破れた状態 $|\phi\rangle$ に対しては $\langle \phi | \varphi | \phi \rangle [\phi] = (\text{phase})\sqrt{n_0}$ なので, $|\phi\rangle$ はクラスタ分解が可能である.

10.2 節について

■式 (10.13) について 正準交換関係 (10.5) より

$$[\hat{Q}, \varphi(x)] = \int d^3x' [\varphi^\dagger(x'), \varphi(x)] \varphi(x) = - \int d^3x' \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varphi(x) = -\varphi(x)$$

であり (粒子数 (10.10) は時間に依らないので同時刻 $x'^0 = x^0$ で評価した), Baker-Housdorff の補助定理とより

$$\begin{aligned} e^{i\alpha\hat{Q}}\varphi(x)e^{-i\alpha\hat{Q}} &= \varphi(x) + i\alpha[\hat{Q}, \varphi(x)] + \frac{(i\alpha)^2}{2!}[\hat{Q}, [\hat{Q}, \varphi(x)]] + \dots \\ &= \varphi(x) - i\alpha\varphi(x) + \frac{(i\alpha)^2}{2!}\varphi(x) + \dots + \frac{(i\alpha)^n}{n!}(-1)^n\varphi(x) + \dots \\ &= e^{-i\alpha}\varphi(x) : (10.13) \end{aligned}$$

を得る. 以上は文献 [1, pp.38-39] で調べた複素 Klein-Gordon 場の無限小ゲージ変換の結果と平行である.

■ $|\phi\rangle$ の式 (10.16) 第 2 の等号の確認 a_0 と a_0^\dagger は $[a_0, a_0^\dagger] = 1$ と交換することを踏まえ, 公式

$$e^{\sqrt{V}\phi a_0^\dagger} e^{-\sqrt{V}\phi^* a_0} = e^{\sqrt{V}(\phi a_0^\dagger - \phi^* a_0) + \frac{1}{2}V|\phi|^2}$$

(初出は 3.3.2 節) を利用すると,

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &\equiv e^{\sqrt{V}(\phi a_0^\dagger - \phi^* a_0)} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}V|\phi|^2} e^{\sqrt{V}\phi a_0^\dagger} e^{-\sqrt{V}\phi^* a_0} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}V|\phi|^2} e^{\sqrt{V}\phi a_0^\dagger} |0\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}V|\phi|^2} \sum_{N_0=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{V}\phi)^{N_0}}{N_0!} (a_0^\dagger)^{N_0} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}V|\phi|^2} \sum_{N_0=0}^{\infty} (\sqrt{V}\phi)^{N_0} \frac{1}{\sqrt{N_0!}} |N_0\rangle \end{aligned}$$

を得る (最後の等号で式 (10.8) を考慮した).

■固有方程式 (10.17) の導出 $|\phi\rangle$ の式 (10.16) を確認する際に示したように,

$$|\phi\rangle = e^{-\frac{1}{2}V|\phi|^2} \sum_{N_0=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{V}\phi)^{N_0}}{N_0!} (a_0^\dagger)^{N_0} |0\rangle$$

と表される. ここに場の展開 (10.4): $\varphi(x) = \sum_n a_n \varphi_n(\mathbf{x}) e^{-iE_n t}$ を作用させると, 状態 $n \neq 0$ の a_n は $(a_0^\dagger)^{N_0}$ をすり抜けて $a_n |0\rangle = 0$ となるので, $n = 0$ の項 a_0/\sqrt{V} だけが寄与する:

$$\begin{aligned} \varphi(x) |\phi\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{V}} a_0 \right) \left(e^{-\frac{1}{2}V|\phi|^2} \sum_{N_0=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{V}\phi)^{N_0}}{N_0!} (a_0^\dagger)^{N_0} |0\rangle \right) \\ &= \phi e^{-\frac{1}{2}V|\phi|^2} \sum_{N_0=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{V}\phi)^{N_0-1}}{N_0!} a_0 (a_0^\dagger)^{N_0} |0\rangle. \end{aligned}$$

ここで $a_0 a_0^\dagger = a_0^\dagger a_0 + 1$ を繰り返し利用して, a_0 を $|0\rangle$ の左隣まで移動させると

$$a_0 (a_0^\dagger)^{N_0} |0\rangle = N_0 (a_0^\dagger)^{N_0-1} |0\rangle$$

となるから,

$$\varphi(x) |\phi\rangle = \phi \left(e^{-\frac{1}{2}V|\phi|^2} \sum_{N_0=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{V}\phi)^{N_0-1}}{(N_0-1)!} (a_0^\dagger)^{N_0-1} |0\rangle \right) = \phi |\phi\rangle : (10.17)$$

を得る.

■ $\langle\phi|\phi\rangle = 1$ と規格化されていることの確認 (式 (10.18),(10.21) に関連) 状態 (10.16) における指数の因子 $X \equiv \sqrt{V}(\phi a_0^\dagger - \phi^* a_0)$ は反 Hermite 性

$$X^\dagger = \sqrt{V}(\phi^* a_0 - \phi a_0^\dagger) = -X$$

を満たし, それ故 X^\dagger と交換するので,

$$e^{X^\dagger} e^X = e^{X^\dagger+X} = 1, \quad \therefore \langle\phi|\phi\rangle = \langle 0|e^{X^\dagger} e^X|0\rangle = \langle 0|0\rangle = 1.$$

■ 式 (10.19) の確認 状態 $e^{-i\alpha\hat{Q}} |\phi\rangle$ における $\varphi(x)$ の固有値は,

$$\varphi(x)(e^{-i\alpha\hat{Q}} |\phi\rangle) = e^{-i\alpha\hat{Q}}(e^{i\alpha\hat{Q}}\varphi(x)e^{-i\alpha\hat{Q}} |\phi\rangle) = (e^{-i\alpha}\varphi)(e^{-i\alpha\hat{Q}} |\phi\rangle) \quad (\because \text{式 (10.13), (10.17)})$$

より $e^{-i\alpha}\varphi$ なので, $e^{-i\alpha\hat{Q}} |\phi\rangle \propto |e^{-i\alpha}\phi\rangle$: (10.19) と書ける.

■ 式 (10.20) の導出

$$X \equiv \sqrt{V}(\phi a_0^\dagger - \phi^* a_0), \quad X'^\dagger \equiv \sqrt{V}(\phi'^* a_0 - \phi' a_0^\dagger) (\equiv -X')$$

に対して,

$$[X'^\dagger, X] = V(\phi'^* \phi [a_0, a_0^\dagger] + \phi' \phi^* [a_0^\dagger, a_0]) = V(\phi'^* \phi - \phi' \phi^*) = 2iV\text{Im}(\phi'^* \phi)$$

は c-数なので, X, X'^\dagger と交換する. よって,

$$\begin{aligned} \langle\phi'|\phi\rangle &= \langle 0|e^{X'^\dagger} e^X|0\rangle = \langle 0|e^{X'^\dagger+X+\frac{1}{2}[X'^\dagger, X]}|0\rangle = e^{iV\text{Im}(\phi'^* \phi)} \langle 0|e^{\sqrt{V}\{(\phi-\phi')a_0^\dagger - (\phi^*-\phi'^*)a_0\}}|0\rangle \\ &= e^{iV\text{Im}(\phi'^* \phi)} \langle 0|\phi - \phi'\rangle = e^{iV\text{Im}(\phi'^* \phi)} e^{-\frac{1}{2}|\phi-\phi'|^2} : (10.20) \end{aligned}$$

を得る (最後の等号では式 (10.16) 最右辺に着眼する).

■ 式 (10.23) について 空間の体積を $\text{Vol} \rightarrow V$ と略記すると,

$$\langle R(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rangle \equiv \frac{1}{V} \int d^3y R(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x}' + \mathbf{y}) = \frac{1}{V} \int d^3y \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y})-\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{x}'+\mathbf{y}))} \langle \Phi | a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'} | \Phi \rangle.$$

ここで \mathbf{y} -積分は, あらかじめ $V = \infty$ の極限を想定すると, Fourier 積分として直ちに

$$\int d^3y e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{y}} = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

と分かる。有限の体積 V を想定しても、 $\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \frac{\delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}}{(2\pi/L)^3}$ に注意すれば、同じ結論

$$\int d^3y e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{y}} = V \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

が得られる。このため、いずれにせよ

$$\begin{aligned} \langle R(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rangle &= \frac{1}{V} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}')} \langle \Phi | a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'} | \Phi \rangle \\ &= \frac{1}{V} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \langle \Phi | a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} | \Phi \rangle \end{aligned}$$

となる。このように教科書の式 (10.23)2 行目には、係数 $1/V$ を補う必要があると考えられる (そのとき、はじめて式の次元も合う)。ここで最右辺の期待値は

$$\langle \Phi | a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} | \Phi \rangle = V \langle \Phi | a_n^\dagger a_n | \Phi \rangle$$

と書き換えられ、係数 V は積分の前の $1/V$ と相殺する。よって運動量 \mathbf{k} の粒子数を $n_{\mathbf{k}} = \langle \Phi | a_n^\dagger a_n | \Phi \rangle$ とおけば、式 (10.23) が得られる。教科書では $n_{\mathbf{k}}$ を「運動量 \mathbf{k} を持つ粒子の、単位体積あたりの密度」(p.135, 1.12) としているものの、式 (10.23) において $n_{\mathbf{k}}$ は無次元でなければならないことが見て取れる。やはり $n_{\mathbf{k}}$ は数密度ではなく粒子数そのものであり、ここには Fermi 系において対応する式 (9.29-30) のときと同じ用語の混乱がある。

10.3 希薄な Bose 気体

本節では相互作用を持つ Bose 粒子系の簡単なモデルを扱う。

10.3.1 Bogoliubov 変換

第 1 段落を引用する：

希薄な Bose 気体のモデルは超流動 ^4He のモデルとして、Bogoliubov (ボゴリユーボフ) によって考案された。これは現実の複雑なヘリウム液体を扱う際に必ずしも最良のモデルとは言えないが^{*22}、物理的に示唆に富む内容を含んでいる。このモデルは液体ヘリウムよりも、むしろ現在さかんに研究されているアルカリ金属原子気体の Bose 凝縮に適したモデルであるかも知れない。

大きさが有限で、それ故、運動量が離散的な系を考える。このとき最低の φ_0 モードを他のモードと区別することが可能になる。 μ を化学ポテンシャル、 λ を小さなパラメーターとして、ハミルトニアンを

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\mathbf{k}^2}{2m} - \mu \right) a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{\lambda}{2V} \sum_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4} a_{\mathbf{k}_4}^\dagger a_{\mathbf{k}_3}^\dagger a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_1} \quad (10.28)$$

と設定する。第 2 項 (相互作用項) はデルタ関数的な斥力 $\frac{\lambda}{2}(\varphi^\dagger \varphi)^2$ を (離散) 運動量空間に移したものになっている [9.2.4 節「ゼロ音波」の項のノートと本稿次節を参照]。

相互作用がない系の基底状態 $|\Phi_0\rangle$ を式 (10.16) の $|\phi\rangle$ で与える。ただし全粒子数 N のうち、 $\mathbf{k} = 0$ の状態を N_0 個の粒子が占めていると仮定して、

$$\phi = \sqrt{N_0/V}$$

^{*22} 主な問題点は、液体ヘリウムのモデルとしては、粒子間相互作用の与え方が適切でないことである (p.136 脚注 1)。

とおく. [このとき数密度の期待値は $|\phi|^2 = N_0/V$. 式 (10.16) の和をとられる N_0 との混同に注意する.] ここで採用した基底 $|\Phi_0\rangle =$ (式 (10.16)) は $a_{\mathbf{k}}|\Phi_0\rangle = 0$ ($\mathbf{k} \neq 0$) を満たす. [相互作用が弱ければ] 大多数の粒子が $\mathbf{k} = 0$ の状態に入っているので, ハミルトニアン (10.28) の相互作用項 (H_I で表す) において, 運動量保存則の因子 $\delta_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4}$ に注意しつつ, 次の項だけを考慮することにする.

- 衝突前の 2 粒子の状態がともに $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = 0$,
または, 衝突後の 2 粒子の状態がともに $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_4 = 0$ の項.
- 一方だけ $\mathbf{k} = 0$ でない粒子対の相互作用を表す項.
(\mathbf{k}_1 と \mathbf{k}_2 , \mathbf{k}_3 と \mathbf{k}_4 のそれぞれ一方だけゼロとおく方法は $2^2 = 4$ 通りある.)

このとき

$$H_I \approx \frac{\lambda}{2V} \left[a_0^\dagger a_0^\dagger a_0 a_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left\{ 4a_{\mathbf{k}}^\dagger a_0^\dagger a_{\mathbf{k}} a_0 + a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}^\dagger a_0 a_0 + a_0^\dagger a_0^\dagger a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} \right\} \right] \quad (10.29)$$

と近似される. さらに, $|\Phi_0\rangle$ に $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ ($\mathbf{k} \neq 0$) を作用させて得られる状態に関しては, a_0 と a_0^\dagger をそれらの固有値 $\sqrt{N_0}$ で置き換えることができる [本稿次節で補足]. すると

$$H \approx \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left(\frac{\mathbf{k}^2}{2m} - \mu \right) a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} - \mu N_0 + \frac{\lambda}{2V} \left\{ N_0^2 + 4N_0 \sum_{\mathbf{k} \neq 0} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + N_0 \sum_{\mathbf{k} \neq 0} (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}^\dagger - a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}}) \right\} \quad (10.30)$$

となる. ここで上式 (10.30) の c-数の項 $\frac{\lambda}{2V} N_0^2 - \mu N_0$ は, N_0 の関数と見なすと,

$$\frac{\lambda}{V} N_0 = \mu \quad (19)$$

のときに最小になる. 与えられた化学ポテンシャル μ に対して, N_0 は上式 (19) のように決まるものと仮定しておく*23. 条件 (19) を利用してハミルトニアンから N_0 を消去すると,

$$H \approx \sum_{\mathbf{k} \neq 0} (\varepsilon(\mathbf{k}) + \mu) a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \mu \sum_{\mathbf{k} \neq 0} (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}^\dagger - a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}}) \quad (10.31)$$

とまとめられる ($\varepsilon(\mathbf{k}) \equiv \mathbf{k}^2/2m$) [式 (10.30) の c-数の項は落とした].

ここで “Bogoliubov 変換”

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}} &= b_{\mathbf{k}} \cosh \theta + b_{-\mathbf{k}}^\dagger \sinh \theta, \\ a_{\mathbf{k}}^\dagger &= b_{-\mathbf{k}} \sinh \theta + b_{\mathbf{k}}^\dagger \cosh \theta \end{aligned} \quad (10.32)$$

を施す. 実数パラメーター $\theta(\mathbf{k})$ は, ハミルトニアン (10.31) が対角化される [$b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}$ の項だけで表される (式 (10.36))] ように, すぐ後で決定する. 式 (10.32) より, 新しい演算子 $b_{\mathbf{k}}^\dagger, b_{\mathbf{k}}$ も元の $a_{\mathbf{k}}^\dagger, a_{\mathbf{k}}$ と同じ生成・消滅演算子の交換関係を満たすことが見て取れる [本稿次節で確認]. 実は Bogoliubov 変換はユニタリー変換 $b_{\mathbf{k}} = U a_{\mathbf{k}} U^{-1}$ になっている [このとき交換関係が保持されるのは自明である]*24. 対応して, 新しい基底状態は

$$|\Phi\rangle = U |\Phi_0\rangle \quad (10.38)$$

*23 この仮定は得られた結果 (10.38) を $\mathbf{k} = 0$ に対しても適用すると, $E_0 = 0$ となることから正当化される. もし運動量がゼロの励起エネルギーがゼロでなければ, そのような粒子を加えたり取り除いたりして, 基底状態のエネルギーを下げられることになってしまう (p.138). また 10.3.2 節のモデルからも式 (10.43): $\rho_0 = \varphi_c^\dagger \varphi_c = \mu/\lambda$ が得られる.

*24 ユニタリー演算子 U の具体形はここでは必要ない.

と定義すれば良い (このとき $b_{\mathbf{k}}|\Phi\rangle = 0$ が満たされる).

さて, 式 (10.32) を代入すると, ハミルトニアン (10.31) は

$$H \approx \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left[b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \{(\varepsilon(\mathbf{k}) + \mu) \cosh 2\theta + \mu \sinh 2\theta\} + \frac{1}{2} (b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}}^\dagger + b_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}) \{(\varepsilon(\mathbf{k}) + \mu) \sinh 2\theta + \mu \cosh 2\theta\} \right] \quad (10.33)$$

と書き換えられる (正規順序化に伴う c-数は捨てた) [本稿次節で補足]. 後ろの項が消えるように θ を選ぶと, ($\mathbf{k} \neq 0$ に対して)

$$\tanh 2\theta(\mathbf{k}) = -\frac{\mu}{\varepsilon(\mathbf{k}) + \mu}, \quad (10.34)$$

$$\text{i.e. } \cosh 2\theta(\mathbf{k}) = \frac{\varepsilon(\mathbf{k}) + \mu}{\sqrt{(\varepsilon(\mathbf{k}) + \mu)^2 - \mu^2}}, \quad \sinh 2\theta(\mathbf{k}) = \frac{-\mu}{\sqrt{(\varepsilon(\mathbf{k}) + \mu)^2 - \mu^2}} \quad (10.35)$$

であり, ハミルトニアン (10.33) は

$$H = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \sqrt{(\varepsilon(\mathbf{k}) + \mu)^2 - \mu^2} \quad (10.36)$$

と簡単になる. これは自由 Bose 粒子系のハミルトニアンの形をしており, ここから新たに定義された個々の Bose 粒子のエネルギー

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{(\varepsilon(\mathbf{k}) + \mu)^2 - \mu^2} \quad (10.37)$$

が読み取れる. これは \mathbf{k} が小さいとき,

$$E_{\mathbf{k}} \approx [\sqrt{2\varepsilon(\mathbf{k})\mu} =] |\mathbf{k}| \sqrt{\frac{\mu}{m}} = |\mathbf{k}| \sqrt{\frac{\lambda\rho_0}{m}} \quad (\rho_0 \equiv N_0/V : \text{数密度}) \quad (10.39)$$

[最後に式 (19) を利用した] となり, 流体中の“音波”と同様, $|\mathbf{k}|$ に比例する*25. 他方, 大きな \mathbf{k} では分散関係 (10.37) は通常自由粒子のそれ $E_{\mathbf{k}} \approx \mathbf{k}^2/2m$ に移行する.

長波長の固有状態を“音波”と捉えるのは, 一見奇妙な感じがする. 前章で見た Fermi 粒子系では, 相互作用のない極限で単一電子に対応するような準粒子励起と, 粒子-空孔対の集団的な挙動によるプラズモンやゼロ音波のような音波的な励起の間には明確な区別があった. しかし Bose 粒子系では両者に本質的な区別がない. 音波と 1 粒子状態の分散関係は, 徐々に互いの状態へと移行するように接続して, ひとつの分散曲線を形成している. この 2 つの特性の融合は, 粒子数を保存する U(1) 対称性が自発的に破れていることに関係がある. 前章の Fermi 粒子系における準粒子励起と集団励起は, 電荷の量子数によって区別できるものであった——電子的な準粒子は U(1) 電荷 +1 を持ち, 集団の音波的なモードの U(1) 電荷は中性である. しかし Bose 粒子系において U(1) 対称性が破れていれば, 励起は基底状態との間で電荷をやり取りできるので, 励起状態が電荷の固有状態にはならない. (p.139)

*25 10.3.3 節 (p.142) にあるように, 実際のヘリウム液体に対する音速 $c = \sqrt{\lambda\rho_0/m}$ の測定値 230m/s とヘリウム原子の質量 $m = 6.647 \times 10^{-27}\text{kg}$, 液体ヘリウムの質量密度 $m\rho_0 = 145\text{kg/m}^3$ から, パラメーター λ を決定できる. このとき治癒長 [式 (10.79)] などは実測値に近い値が求まる.

我々のモデルでは、全粒子数は

$$\begin{aligned}
N &= \langle \Phi | a_0^\dagger a_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} | \Phi \rangle \\
&= N_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \sinh^2 \theta \langle \Phi | b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger | \Phi \rangle \quad (\because \text{式 (10.32)}) \\
&= N_0 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left\{ \frac{\varepsilon + \mu}{\sqrt{(\varepsilon + \mu)^2 - \mu^2}} - 1 \right\} \quad \left(\sinh^2 \theta = \frac{1}{2} (\cosh 2\theta - 1), \text{式 (10.35)} \right) \quad (10.40)
\end{aligned}$$

と計算される。しかしこれでは N_0 に対する補正項が小さく [$\mu \sim \lambda$: 小は $\theta(\mathbf{k})$: 小を意味する], 超流動 ^4He では 8% 程度の原子しか 1 粒子基底状態に入らないという結果を正しく再現できない。そこで「次節でこれとは別の方法を示すことにする」(最終文) [とあるものの、以降、第 10 章において本質的に新しいモデルが導入されることはない]。

10.3.1 節について

■ハミルトニアン (10.28) の相互作用項について 式 (9.79) と同じデルタ関数型の斥力相互作用

$$H_I = \frac{\lambda}{2} \int d^3x (\varphi^\dagger \varphi)^2$$

を採用する。ここで式 (10.22) の箇所で用いた場の Fourier 展開

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \varepsilon(\mathbf{k})t)}$$

において、 $\sqrt{V} a_n \rightarrow a_{\mathbf{k}}$ と再定義したことを思い出そう。以降、もとの交換関係 (10.3) を満たす無次元の a_n を改めて $a_{\mathbf{k}}$ と書くことにする。また積分 $\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$ を離散的な和 $\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}}$ に置き換えると、場の展開は

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \varepsilon(\mathbf{k})t)}$$

となる。これを代入して、 H_I を運動量空間に移すと

$$\begin{aligned}
H_I &= \frac{\lambda}{2V^2} \sum_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_4} a_{\mathbf{k}_4}^\dagger a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_3}^\dagger a_{\mathbf{k}_1} \int d^3x e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \cdot \mathbf{x}} e^{-i\{\varepsilon(\mathbf{k}_1) + \varepsilon(\mathbf{k}_2) - \varepsilon(\mathbf{k}_3) - \varepsilon(\mathbf{k}_4)\}t} \\
&= \frac{\lambda}{2V} \sum_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4} a_{\mathbf{k}_4}^\dagger a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_3}^\dagger a_{\mathbf{k}_1} e^{-i\{\varepsilon(\mathbf{k}_1) + \varepsilon(\mathbf{k}_2) - \varepsilon(\mathbf{k}_3) - \varepsilon(\mathbf{k}_4)\}t}
\end{aligned}$$

を得る。時間に依存する目障りな因子を (少なくとも見かけ上) 消す 1 つの方法は、

$$a_{\mathbf{k}} e^{-i\varepsilon(\mathbf{k})t} \rightarrow a_{\mathbf{k}}(t) \quad (\text{Heisenberg 描像の演算子})$$

と改めることである。この $a_{\mathbf{k}}(t)$ もまた交換関係 (10.3) を満たす。さらに正規順序化を行う際に、 $a_{\mathbf{k}_2}$ と $a_{\mathbf{k}_3}$ の入れ替えに伴って現れるおつりの項は

$$\frac{\lambda}{2V} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_4} a_{\mathbf{k}_4}^\dagger a_{\mathbf{k}_1} \propto \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}$$

という形をとるので、ハミルトニアン (10.28) の第 1 項に繰り込むことができる。以上より式 (10.28) の相互作用項を得る。

■ 「 a_0 と a_0^\dagger をそれらの固有値 $\sqrt{N_0}$ で置き換えることができる」 (p.137, 1.6-7) について 式 (10.17) の導出時に見出した関係

$$\frac{1}{\sqrt{V}} a_0 |\phi\rangle = \phi |\phi\rangle$$

より, 状態 $|\Phi_0\rangle = |\phi\rangle$ (したがって状態 $a_{\mathbf{k}} |\Phi_0\rangle$ ($\mathbf{k} \neq 0$)) における a_0 の固有値は $\sqrt{V}\phi = \sqrt{N_0}$ である. しかし a_0^\dagger の固有値は $\sqrt{N_0}$ とは言えないと考えられる. ただし後の式 (10.40) のような期待値 $\langle \Phi_0 | (\dots) | \Phi_0 \rangle$ だけを対象とする限り, 上式の Hermite 共役

$$\langle \phi | a_0^\dagger = \langle \phi | \sqrt{N_0}$$

を根拠に a_0^\dagger も $\sqrt{N_0}$ に置き換えられる.

■ $b_{\mathbf{k}}^\dagger, b_{\mathbf{k}}$ が調和振動子の交換関係を満たすことの確認 Bogoliubov 変換 (10.32) は, 第 2 式で $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ と置き換えると,

$$\begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}} \\ a_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix} = M(\theta) \begin{pmatrix} b_{\mathbf{k}} \\ b_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix}, \quad M(\theta) \equiv \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}$$

とまとめられる. 両辺に左から逆行列

$$M^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta \\ -\sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} (= M(-\theta))$$

(“逆回転”を表す) を掛けて $b_{\mathbf{k}}^\dagger, b_{\mathbf{k}}$ について逆に解くと,

$$\begin{pmatrix} b_{\mathbf{k}} \\ b_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix} = M^{-1}(\theta) \begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}} \\ a_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix}, \quad \therefore \begin{cases} b_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}} \cosh \theta - a_{-\mathbf{k}}^\dagger \sinh \theta \\ b_{\mathbf{k}}^\dagger = -a_{-\mathbf{k}} \sinh \theta + a_{\mathbf{k}}^\dagger \cosh \theta \end{cases}$$

となる. よって $b_{\mathbf{k}}^\dagger, b_{\mathbf{k}}$ もまた, 調和振動子の交換関係

$$[b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}^\dagger] = [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}^\dagger] \cosh^2 \theta + [a_{-\mathbf{k}}^\dagger, a_{-\mathbf{k}}] \sinh^2 \theta = \cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1, \quad \text{etc.}$$

を満たす.

■ 式 (10.33) の導出 双曲線関数の“倍角公式”

$$\cosh 2\theta = \cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta, \quad \sinh 2\theta = 2 \sinh \theta \cosh \theta$$

を思い出しておく. さて, ハミルトニアン (10.31) の各項に Bogoliubov 変換の式 (10.32) を代入しよう. \mathbf{k} に関する和の下で $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ と置き換えて良いことに注意し, 正規順序化を施すと, 式 (10.31) の第 1 項は

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} &\rightarrow b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} (\cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta) + (b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}}^\dagger + b_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}) \cosh \theta \sinh \theta \\ &= b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \cosh 2\theta + \frac{1}{2} (b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}}^\dagger + b_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}) \sinh 2\theta \end{aligned}$$

と置き換えられる. 第 2 項についても同様に,

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}^\dagger &\rightarrow b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \underbrace{2 \cosh \theta \sinh \theta}_{\sinh 2\theta} + b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}}^\dagger \cosh^2 \theta + b_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}} \sinh^2 \theta \\ \therefore a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}^\dagger + \text{h.c.} &\rightarrow 2b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \sinh 2\theta + (b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}}^\dagger + b_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}) \cosh 2\theta \end{aligned}$$

とすると, 式 (10.33) を得る.

10.3.2 場の方程式

note 文献 [2, pp.481–496] では自発的に対称性を破る簡単なモデルとして、複素 Klein-Gordon 場 φ に $\lambda|\varphi|^4$ 型の相互作用を付け加えた、Goldstone モデルを見た。本節では Goldstone モデルと同じ形のポテンシャル (10.42): $V(\varphi) = \frac{\lambda}{2}|\varphi|^4 - \mu|\varphi|^2$ を持つ、非相対論的 Bose 粒子系を記述する Schrödinger 場のモデルを取り上げる。

μ を Bose 粒子系の化学ポテンシャルとして、ラグランジアン密度を

$$\mathcal{L} = \varphi^\dagger \left(i\partial_t + \frac{1}{2m}\nabla^2 + \mu \right) \varphi - \frac{\lambda}{2}(\varphi^\dagger\varphi)^2 \quad (10.41)$$

と置く。この式のポテンシャル部分は

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{2}(\varphi^\dagger\varphi)^2 - \mu\varphi^\dagger\varphi \quad (10.42)$$

と表される [以上、本稿次節で補足].

note するとエネルギー密度

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\varphi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2m}|\nabla\varphi|^2 + V(\varphi) \quad (\because \pi = i\varphi^\dagger)$$

(空間微分の項は式 (10.6) の形に戻した) が最小となるのは、 φ が空間的に一定で、かつ $V(\varphi)$ の最小を与える場合となる。以降の解析では時間的にも一定の定常解 φ_c を考える。

$V(\varphi)$ を密度 $\rho = \varphi^\dagger\varphi$ について平方完成すると

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{2} \left(\varphi^\dagger\varphi - \frac{\mu}{\lambda} \right)^2 - \frac{\mu^2}{2\lambda} \quad (10.42')$$

となるので、これは $\varphi^\dagger\varphi = \mu/\lambda$ において最小となる [図 30 参照]。よって

$$\langle \varphi \rangle = \varphi_c = e^{i\theta} \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \quad (10.43)$$

の定常解が予想される [前節の仮定 (19): $\lambda\rho_0 = \mu$ と整合]。一般性を失うことなく、簡単のために任意の実数 θ をゼロとおく。

定常解 $\varphi = \varphi_c$ からの小さなズレ η の振舞いを近似的に調べよう。 η について線形な場の方程式を得るために、 $V(\varphi)$ の式 (10.42') に $\varphi = \varphi_c + \eta$ を代入して、 η の 2 次まで正確に計算すると、

$$V(\varphi) = \mu\eta^\dagger\eta + \frac{\mu}{2}\eta\eta + \frac{\mu}{2}\eta^\dagger\eta^\dagger + O(\eta^3) + \text{const.} \quad (10.44)$$

となる [本稿次節で補足]。 $\mu = \lambda\rho_0$ において ρ_0 は凝縮体の粒子密度を表すので、これらの項は図 31 のような η 場と凝縮体の相互作用を表すダイアグラムに対応する。このときラグランジアン密度 (10.41) から運動方程式

$$\begin{aligned} i\partial_t\eta &= -\frac{1}{2m}\nabla^2\eta + \mu\eta + \mu\eta^\dagger, \\ -i\partial_t\eta^\dagger &= -\frac{1}{2m}\nabla^2\eta^\dagger + \mu\eta^\dagger + \mu\eta \end{aligned} \quad (10.45)$$

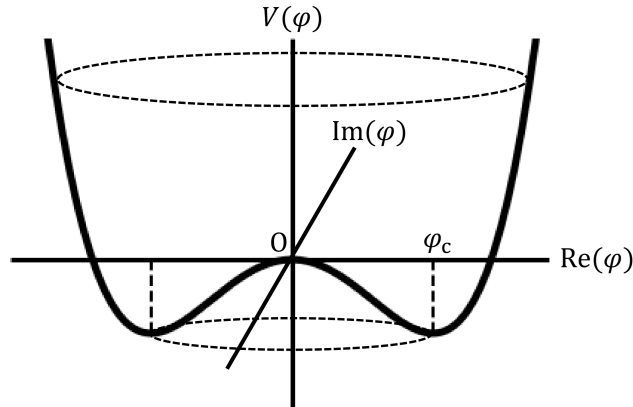


図 30 ポテンシャル (10.42): $V(\varphi) = \frac{\lambda}{2}|\varphi|^4 - \mu|\varphi|^2$ の概形

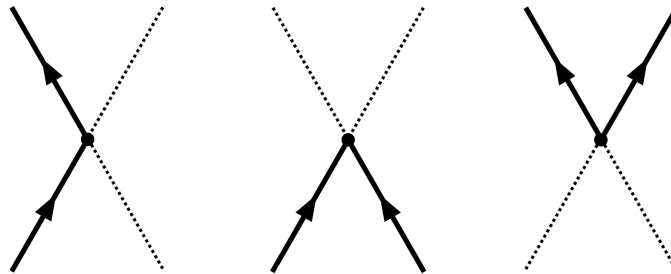


図 31 粒子と凝縮体の相互作用項 (10.44) を表すダイアグラム [時間は上向き]

が導かれる [本稿次節で導出].

分散関係を求めるにあたって, 平面波解

$$\eta = ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} + b^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \quad (10.46)$$

を考える.

note η は複素場なので, 独立な係数 a, b^\dagger を充てた. ただしこれらは異なる 2 種類の粒子の生成・消滅演算子に対応するのではなく, 単一種類の粒子に対する異なるモードの演算子に対応する.

平面波解 (10.46) を式 (10.45) に代入すると,

$$\begin{pmatrix} \frac{k^2}{2m} - \omega + \mu & \mu \\ \mu & \frac{k^2}{2m} + \omega + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \quad (10.47)$$

が得られる [本稿次節で導出]. ここで [常套的に非自明な解 $(a, b) \neq (0, 0)$ を考えて] 行列式をゼロとみると, 再び式 (10.37) と同じ分散関係

$$\omega^2 = \left(\frac{k^2}{2m} + \mu \right)^2 - \mu^2 \quad (10.48)$$

が導かれる. このとき式 (10.47) から決まる a, b に対して, 平面波解 (10.45) は φ が複素 φ 平面において φ_c 周りに楕円運動を行うことを意味する.

10.3.2 節について

■ラグランジアン密度 (10.41) とポテンシャル部分 (10.42) について Schrödinger 方程式を導くラグランジアン密度 (10.6):

$$\mathcal{L} = i\varphi^\dagger \partial_t \varphi - \frac{1}{2m} |\nabla \varphi|^2 - \varphi^\dagger V(x) \varphi$$

と比べると, 作用積分の下での部分積分を念頭に, 空間微分の項を

$$|\nabla \varphi|^2 = (\partial_k \varphi^\dagger)(\partial_k \varphi) \rightarrow -\varphi^\dagger \partial_k \partial_k \varphi = \varphi^\dagger \nabla^2 \varphi$$

と書き換えてある. また 1 粒子系のポテンシャルを

$$V(x) = \frac{\lambda}{2} \varphi^\dagger \varphi - \mu$$

と置いてある (場のポテンシャル密度 (10.42): $V(\varphi) = \varphi^\dagger V(x) \varphi$ との混同に注意). この第 1 項は前節でも見たデルタ関数型の斥力相互作用

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{\lambda}{2} (\varphi^\dagger \varphi)^2 = -\mathcal{H}_1$$

である.

■ $V(\varphi)$ の式 (10.44) の確認 教科書の式変形を補足しつつまとめる. $\varphi = \varphi_c + \eta$ を $V(\varphi)$ の式 (10.42') に代入すると,

$$\begin{aligned} V(\varphi) &= \frac{\lambda}{2} (\varphi^\dagger \varphi - \varphi_c^\dagger \varphi_c)^2 - \frac{\mu^2}{2\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{2} ((\varphi_c^\dagger + \eta^\dagger)(\varphi_c + \eta) - \varphi_c^\dagger \varphi_c)^2 - \frac{\mu^2}{2\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{2} \left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \eta + \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \eta^\dagger + \eta^\dagger \eta \right)^2 - \frac{\mu^2}{2\lambda} \\ &= \frac{\mu}{2} (\eta \eta + \eta^\dagger \eta^\dagger + \eta \eta^\dagger + \eta^\dagger \eta) + O(\eta^3) + \text{const.} \\ &= \mu \eta^\dagger \eta + \frac{\mu}{2} \eta \eta + \frac{\mu}{2} \eta^\dagger \eta^\dagger + O(\eta^3) + \text{const.} : (10.44) \end{aligned}$$

を得る. ただし第 3 の等号では $\varphi_c = \sqrt{\mu/\lambda}$ が実の c-数であることに注意した. また最後の等号では, 正準交換関係 (10.5):

$$\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = [\varphi(\mathbf{x}), \varphi^\dagger(\mathbf{x}')] = [\varphi_c + \eta(\mathbf{x}), \varphi_c + \eta^\dagger(\mathbf{x}')] = [\eta(\mathbf{x}), \eta^\dagger(\mathbf{x}')] \quad (x^0 = x'^0)$$

(これは 10.3.3 節の式 (10.49) である) より, $\eta \eta^\dagger = \eta^\dagger \eta + \text{const.}$ となることに注意した (この付加的な定数は無限大).

■運動方程式 (10.45) の導出 改めてラグランジアン密度 (10.41):

$$\mathcal{L} = (\varphi_c + \eta^\dagger) i \partial_t \eta - \frac{1}{2m} (\partial_k \eta^\dagger)(\partial_k \eta) - V(\varphi), \quad V(\varphi) = (\text{式 (10.44)})$$

(空間微分の項を式 (10.6) の形に戻した) に対して, Euler-Lagrange 方程式を書き下す. η と η^\dagger を独立な場と見なすと,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \eta)} = i(\varphi_c + \eta^\dagger), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \eta)} = -\frac{1}{2m} \partial_k \eta^\dagger, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = -\mu(\eta + \eta^\dagger)$$

より, η 場に対する運動方程式は,

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \eta)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = i\partial_t \eta^\dagger - \frac{1}{2m} \nabla^2 \eta^\dagger + \mu(\eta + \eta^\dagger)$$

となる. これは式 (10.45) の第 2 式である. また

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \eta^\dagger)} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \eta^\dagger)} = -\frac{1}{2m} \partial_k \eta, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^\dagger} = i\partial_t \eta - \mu(\eta + \eta^\dagger)$$

より, η^\dagger 場に対する運動方程式は,

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \eta^\dagger)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^\dagger} = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \eta - i\partial_t \eta + \mu(\eta + \eta^\dagger)$$

となる. これは式 (10.45) の第 1 式である. もっとも, こちらの η^\dagger に関する場の方程式を書き下すだけならば, ラグランジアン密度の空間微分の項を式 (10.41) の形に書いておいた方が便利である. なお, 式 (10.45) の 2 式は互いに Hermite 共役の関係にあることが見て取れる.

■式 (10.47) の導出 平面波解 (10.46) を運動方程式 (10.45) の第 1 式に代入すると,

$$\begin{aligned} \omega a e^{-ik \cdot x} - \omega b^\dagger e^{ik \cdot x} &= \left(\frac{k^2}{2m} + \mu \right) (a e^{-ik \cdot x} + b^\dagger e^{ik \cdot x}) + \mu (a^\dagger e^{ik \cdot x} + b e^{-ik \cdot x}), \\ \therefore \left\{ \left(\frac{k^2}{2m} - \omega + \mu \right) a + \mu b \right\} e^{-ik \cdot x} &+ \left\{ \left(\frac{k^2}{2m} + \omega + \mu \right) b^\dagger + \mu a^\dagger \right\} e^{ik \cdot x} = 0 \end{aligned}$$

を得る. あらかじめ予期されるように, 式 (10.45) の第 2 式からは上式の Hermite 共役が得られるだけである. 上式が任意の x に対して成り立つことを要求して, $e^{\mp k \cdot x}$ の係数をそれぞれゼロとおくと式 (10.47) を得る.

10.3.3 量子化

η 場に正準交換関係

$$[\eta(x), \eta^\dagger(x')]_{t=t'} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (10.49)$$

[式 (10.44) の導出時に確認済み] を課して, 量子化を行う. 伝播関数を

$$\langle \Phi | T \{ \eta^\dagger(x) \eta(x) \} | \Phi \rangle = \langle \eta^\dagger \eta \rangle \quad (10.50)$$

などと略記すると, 運動量空間に移した伝播関数は

$$\begin{pmatrix} \langle \eta \eta^\dagger \rangle & \langle \eta^\dagger \eta^\dagger \rangle \\ \langle \eta \eta \rangle & \langle \eta^\dagger \eta \rangle \end{pmatrix} = \frac{-i}{(\varepsilon + \mu)^2 - \mu^2 - \omega^2} \begin{pmatrix} \varepsilon + \omega + \mu & -\mu \\ -\mu & \varepsilon - \omega + \mu \end{pmatrix} \quad (10.51)$$

と表される. [導出は本稿次節. 左辺において対角成分を入れ替え, 右辺に位相因子 $-i$ を補った (実際このときはじめて後の式 (10.54) が導かれる).] $\langle \eta^\dagger \eta^\dagger \rangle$ や $\langle \eta \eta \rangle$ もゼロでない値を持つのは, ポテンシャル (10.44) で記述される「凝縮体との相互作用によって η と η^\dagger が混合するからである」(p.141 下から 4,3 行).

[本稿のように訂正した] 伝播関数 (10.51) に対して, 最低次の補正を含めた粒子数密度は

$$\langle \rho \rangle = |\varphi_c|^2 + \langle \eta^\dagger \eta \rangle = |\varphi_c|^2 + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \left\{ \frac{\varepsilon + \mu}{\sqrt{(\varepsilon + \mu)^2 - \mu^2}} - 1 \right\} \quad (10.54)$$

と計算される [係数 1/2 を補った, 導出は本稿次節]. これは式 (10.40) と一致している [$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \rightarrow \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}}$ と読み替える].

10.3.3 節について

■運動量空間の伝播関数 (10.51) の導出 正準交換関係 (10.49) より, η 場の Fourier 係数 $a_\eta(\mathbf{k})$ もまた生成・消滅演算子になるというのは正しい. しかしながら, 固体中の電子に対する伝播関数の計算 (9.24-25) と同様に, η 場の Fourier 展開を用いて伝播関数の計算を試みると, φ 粒子系の基底状態 $|\Phi\rangle$ に関する行列要素

$$\langle\phi|a_\eta(\mathbf{k})a_\eta^\dagger(\mathbf{k}')|\Phi\rangle, \quad \langle\phi|a_\eta^\dagger(\mathbf{k})a_\eta^\dagger(\mathbf{k}')|\Phi\rangle, \quad \langle\phi|a_\eta(\mathbf{k})a_\eta(\mathbf{k}')|\Phi\rangle, \quad \langle\phi|a_\eta^\dagger(\mathbf{k})a_\eta(\mathbf{k}')|\Phi\rangle$$

が非自明であるという困難に直面する. そこで以下では, 求める運動量空間の伝播関数は「式 (10.47) の行列の逆行列を構成する」(p.141 下から 3,2 行) ことを説明するというアプローチを採用する. 場の方程式 (10.45) より, $x \neq x'$ に対して

$$\begin{aligned} i\partial_t \langle\eta^\dagger(x)\eta(x')\rangle &= \frac{1}{2m} \nabla^2 \langle\eta^\dagger(x)\eta(x')\rangle - \mu \langle\eta^\dagger(x)\eta(x')\rangle - \mu \langle\eta(x)\eta(x')\rangle, \\ i\partial_t \langle\eta^\dagger(x)\eta^\dagger(x')\rangle &= \frac{1}{2m} \nabla^2 \langle\eta^\dagger(x)\eta^\dagger(x')\rangle - \mu \langle\eta^\dagger(x)\eta^\dagger(x')\rangle - \mu \langle\eta(x)\eta^\dagger(x')\rangle, \\ i\partial_t \langle\eta(x)\eta(x')\rangle &= -\frac{1}{2m} \nabla^2 \langle\eta(x)\eta(x')\rangle + \mu \langle\eta(x)\eta(x')\rangle + \mu \langle\eta^\dagger(x)\eta(x')\rangle, \\ i\partial_t \langle\eta(x)\eta^\dagger(x')\rangle &= -\frac{1}{2m} \nabla^2 \langle\eta(x)\eta^\dagger(x')\rangle + \mu \langle\eta(x)\eta^\dagger(x')\rangle + \mu \langle\eta^\dagger(x)\eta^\dagger(x')\rangle \end{aligned}$$

となる (微分はいずれも時空点 x に作用). ここで電子の Green 関数の満たす式 (9.22) と同様に, $x = x'$ においてゼロにならない項として, 第 1 式の右辺に $-i\delta^4(x-x')$ を, 第 4 式の右辺に $+i\delta^4(x-x')$ を付け加えよう. その上で 4 式の両辺を運動量空間に移す. その際, $\langle\eta^\dagger(x)\eta(x')\rangle$, etc. を差 $(x-x')$ の関数と仮定して, あるいは基準点 $x' = 0$ を固定して, 差 $(x-x')$ (または変数 x) に関する Fourier 変換 $\langle\eta^\dagger\eta\rangle(k)$ を定義すると, $\varepsilon(\mathbf{k}) = k^2/2m$ として

$$\begin{aligned} \omega \langle\eta^\dagger\eta\rangle &= -\varepsilon(\mathbf{k}) \langle\eta^\dagger\eta\rangle - \mu \langle\eta^\dagger\eta\rangle - \mu \langle\eta\eta\rangle - i, \\ \omega \langle\eta^\dagger\eta^\dagger\rangle &= -\varepsilon(\mathbf{k}) \langle\eta^\dagger\eta^\dagger\rangle - \mu \langle\eta^\dagger\eta^\dagger\rangle - \mu \langle\eta\eta^\dagger\rangle, \\ \omega \langle\eta\eta\rangle &= \varepsilon(\mathbf{k}) \langle\eta\eta\rangle + \mu \langle\eta\eta\rangle + \mu \langle\eta^\dagger\eta\rangle, \\ \omega \langle\eta\eta^\dagger\rangle &= \varepsilon(\mathbf{k}) \langle\eta\eta^\dagger\rangle + \mu \langle\eta\eta^\dagger\rangle + \mu \langle\eta^\dagger\eta^\dagger\rangle + i \end{aligned}$$

となる. 第 1 式と第 3 式, 第 2 式と第 4 式はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} \varepsilon(\mathbf{k}) - \omega + \mu & \mu \\ \mu & \varepsilon(\mathbf{k}) + \omega + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle\eta\eta\rangle \\ \langle\eta^\dagger\eta\rangle \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon(\mathbf{k}) - \omega + \mu & \mu \\ \mu & \varepsilon(\mathbf{k}) + \omega + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle\eta\eta^\dagger\rangle \\ \langle\eta^\dagger\eta^\dagger\rangle \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とまとめられる. さらに列ベクトルを並べて,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon(\mathbf{k}) - \omega + \mu & \mu \\ \mu & \varepsilon(\mathbf{k}) + \omega + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle\eta\eta^\dagger\rangle & \langle\eta\eta\rangle \\ \langle\eta^\dagger\eta^\dagger\rangle & \langle\eta^\dagger\eta\rangle \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と書ける. これを伝播関数について解くと,

$$\begin{pmatrix} \langle\eta\eta^\dagger\rangle & \langle\eta\eta\rangle \\ \langle\eta^\dagger\eta^\dagger\rangle & \langle\eta^\dagger\eta\rangle \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \varepsilon(\mathbf{k}) - \omega + \mu & \mu \\ \mu & \varepsilon(\mathbf{k}) + \omega + \mu \end{pmatrix}^{-1} = \frac{-i}{(\varepsilon(\mathbf{k}) + \mu)^2 - \mu^2 - \omega^2} \begin{pmatrix} \varepsilon(\mathbf{k}) + \omega + \mu & -\mu \\ -\mu & \varepsilon(\mathbf{k}) - \omega + \mu \end{pmatrix}$$

となる. これは式 (10.51) に他ならない.

備考 時間順序化の定義では, Bose 粒子場は互いに交換するものとして扱われるので, $\langle \eta(x)\eta^\dagger(x') \rangle$ と $\langle \eta^\dagger(x)\eta(x') \rangle$ は互いに引数 x, x' を入れ替えた関係にある. すると

$$\begin{aligned} \langle \eta(x)\eta^\dagger(x') \rangle &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \langle \eta\eta^\dagger \rangle(k) e^{-ik \cdot (x-x')} \\ \Rightarrow \langle \eta^\dagger(x)\eta(x') \rangle &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \langle \eta\eta^\dagger \rangle(k) e^{+ik \cdot (x-x')} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \langle \eta\eta^\dagger \rangle(-k) e^{-ik \cdot (x-x')} \end{aligned}$$

となり,

$$\langle \eta^\dagger\eta \rangle(k) = \langle \eta\eta^\dagger \rangle(-k)$$

の関係が見出される. 式 (10.51) はこの条件を満たしている.

■粒子数密度 (10.54) の導出 分散関係 (10.48) を満たす振動数を $\omega(\mathbf{k})$ と書くと ($\varepsilon(\mathbf{k}) = k^2/2m$ との混同に注意), 運動量空間の伝播関数 (10.51) の分母は $(\omega(\mathbf{k}) - \omega)(\omega(\mathbf{k}) + \omega)$ と書ける. そこで Feynman 伝播関数を得るために分母に $+i\epsilon$ を加えて, 極を $\omega = \pm\omega(\mathbf{k}) \mp i\epsilon'$ にずらそう. このとき伝播関数 (10.51) を実空間に戻す Fourier 積分

$$\langle \eta(x)\eta^\dagger(x') \rangle = -i \int \frac{d^3k d\omega}{(2\pi)^4} \frac{\varepsilon(\mathbf{k}) + \omega + \mu}{(\omega(\mathbf{k}) - \omega)(\omega(\mathbf{k}) + \omega) + i\epsilon} e^{i\{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \omega(t-t')\}}$$

を, 教科書 p.142 のように Wick 回転 (5.3.1 節) を用いて書き換えられる. しかし本稿では素直に, これを留数定理で評価しよう. すると,

$$\begin{aligned} \langle \eta(x)\eta^\dagger(x') \rangle &= (-i) \cdot i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \{ \theta(t - t') \text{Res}[\omega(\mathbf{k})] + \theta(t' - t) \text{Res}[-\omega(\mathbf{k})] \} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \left\{ \theta(t - t') \frac{\varepsilon(\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k}) + \mu}{2\omega(\mathbf{k})} e^{-i\omega(\mathbf{k})(t-t')} + \theta(t' - t) \frac{\varepsilon(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}) + \mu}{2\omega(\mathbf{k})} e^{i\omega(\mathbf{k})(t'-t)} \right\} \end{aligned}$$

となる. これこそは式 (10.51) の確認の際, 場の Fourier 展開と正準交換関係に基づく直接的な導出を断念した結果である. ここで $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ とおき, また時間差を $t' - t = \tau \rightarrow +0$ とすると, 粒子数密度 (10.54) における補正項

$$\langle \Phi | \eta^\dagger(x)\eta(x) | \Phi \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon(\mathbf{k}) + \mu}{\omega(\mathbf{k})} - 1 \right)$$

を得る.

10.3.4 超流動の Landau 臨界条件

Landau は超流動状態にある流体中を運動する巨視的物体 (質量 M) が, フォノンを生成することで流体から抵抗力を受けるための, 物体の速度 \mathbf{V} の臨界値を論じている. 図 32 のように物体が流体中に運動量 \mathbf{k}_i , エネルギー $\omega(\mathbf{k}_i)$ のフォノン ($i = 1, 2, \dots$) を励起するとき, 物体が失うエネルギーと運動量はそれぞれ

$$\delta E = - \sum_i \omega(\mathbf{k}_i), \quad \delta \mathbf{k} = - \sum_i \mathbf{k}_i \quad (10.56)$$

であり, これらの間には

$$\delta E = \delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{V} + O\left(\frac{1}{M}\right) \quad (10.55)$$

の関係がある [本稿次節で補足]. ところで, 例えば実際のヘリウムにおける音波の分散曲線は, 図 33b のように “ロトンの極小点” (roton minimum) と呼ばれる極小を持つ. [そしてロトンの極小点への正接を $\omega = v_0 k$

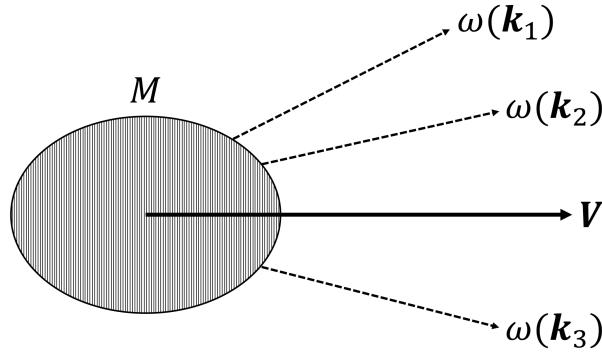


図 32 流体中を移動する物体からのフォノンの放出

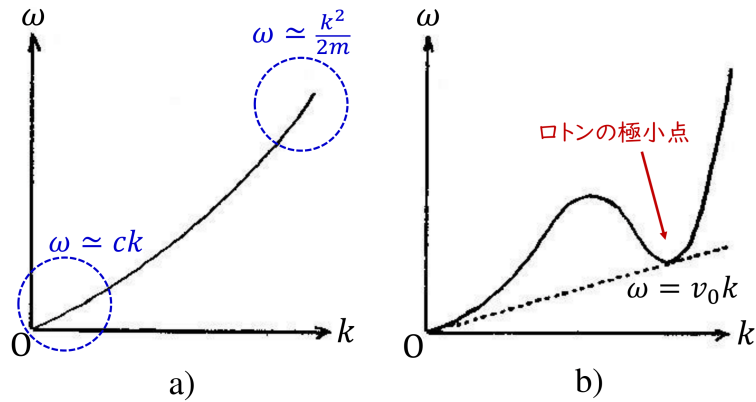


図 33 a) 希薄な Bose 粒子気体モデルにおける励起の分散曲線 (式 (10.37),(10.48)). b) 実際の超流動 ^4He における音波の分散曲線 (破線 $\omega = v_0 k$ はロトンの極小点への正接).

とすると、常に $\omega/k \geq v_0$ が成立していることが読み取れる.] そこでフォノンの位相速度はゼロでない下限 $v_0 = \inf \left(\frac{\omega(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|} \right)$ を持つと仮定する:

$$\frac{\omega(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|} \geq v_0. \quad (10.57)$$

以上より

$$|\delta\mathbf{k}||\mathbf{V}| \geq |\delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}| = |\delta E| = \sum_i \omega(\mathbf{k}_i) \geq v_0 \sum_i |\mathbf{k}_i| \geq v_0 \left| \sum_i \mathbf{k}_i \right| = v_0 |\delta\mathbf{k}| \quad (10.58)$$

が成り立つことになる。したがってフォノンの生成に伴う散逸・抵抗が生じるためには、物体は充分大きな速度

$$|\mathbf{V}| \geq v_0$$

を持たねばならない。[物体の静止系に移れば、これは流体に散逸・抵抗が生じない超流動の条件 $|\mathbf{V}| < v_0$ を与えると考えられる.]

この Landau の臨界条件を古典的な見地から解釈しよう。経験的によく知られているように、船が波を立てて進むとき、波は船とともに並進する (船の進行方向に関する波の位相速度の成分は、船自身の速度と等し

い)^{*26}. Landau 臨界条件 $|\mathbf{V}| \geq v_0$ は, 物体の速度に一致する位相速度を持つ音波が存在するための条件となっている [実際この条件が破られると, 常に (位相速度) $\geq v_0 > |\mathbf{V}|$ となる].

しかしながら Landau による臨界条件は, 実際の臨界速度の実測値をうまく説明できない.

Landau の議論の問題点は, フォノンを超流体における唯一の低エネルギー励起と考えたことである. 次節 [10.4.2 節] で見るように, 実際には渦糸が関与する別の種類の励起も存在する. 流体中を移動する物体が渦糸を生成したり, 既に存在する渦糸を物体が引き伸ばしたり, もつれさせたりする過程も, 物体の運動エネルギーを消耗させる抵抗力の原因となるのである. (最終段落 (p.144))

10.3.4 節について

■式 (10.55) の確認

$$\delta E = \frac{1}{2}M \left\{ \mathbf{V}^2 - \left(\mathbf{V} - \frac{\delta \mathbf{k}}{M} \right)^2 \right\} = \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{k} - \frac{(\delta \mathbf{k})^2}{2M}$$

による. $\delta E = \frac{1}{2M} \{ (M\mathbf{V})^2 - (M\mathbf{V} - \delta \mathbf{k})^2 \}$ と立式しても同じことである.

10.3.5 常流体と超流体の密度

凝縮体に流れがあるときのフォノンの分散関係を見出すために, Galilei 変換によってエネルギーと運動量がどのように変換するかを調べよう. 流体の静止系において, 図 34 のように速度 \mathbf{v} で入射した質量 m の外部物体 (たとえば中性子) が, 流体に衝撃を与えてフォノンを生成し, 速度 \mathbf{v}' になる過程を考える. このとき生成されるフォノンのエネルギーと運動量は, それぞれ

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(v')^2, \quad \mathbf{p} = m(\mathbf{v} - \mathbf{v}')$$

である. 流体が速度 \mathbf{V} を持つ座標系に移ると, フォノンの運動量

$$m((\mathbf{v} + \mathbf{V}) - (\mathbf{v}' + \mathbf{V})) = m(\mathbf{v} - \mathbf{v}') = \mathbf{p} \quad (10.60)$$

は変わらず, エネルギーは

$$\tilde{E}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}m|\mathbf{v} + \mathbf{V}|^2 - \frac{1}{2}m|\mathbf{v}' + \mathbf{V}|^2 = E(\mathbf{p}) + m(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \cdot \mathbf{V} \quad (10.59)$$

$$= E(\mathbf{p}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{V} \quad (10.61)$$

となる. この変換則は Doppler シフト

$$\omega(\mathbf{k}) \rightarrow \tilde{\omega}(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}) + \mathbf{k} \cdot \mathbf{V} \quad (10.62)$$

としても理解できる.

note 既に (流体の静止系で) 分散関係を調べたように, フォノンのエネルギーは一般には $E(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m$ と表せない. そこで中性子のエネルギー変化として, 間接的にフォノンのエネルギーを調べている. 式 (10.59–61) は等価的に, 文献 [12, pp.19–21] で調べたエネルギー・運動量の Galilei 変換の公式を中性子に適用し, その変化量をとっても得られる.

^{*26} このことは, 媒質中を一定の速度で進む物体からの, 波の放射現象に関して常に成立する.

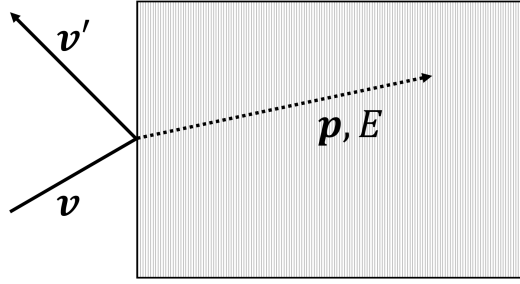


図 34 粒子の散乱とフォノンの生成

Doppler シフト (10.62) に関しては, x 方向への速度 $-V$ で等速推進する座標系への Lorentz 変換

$$\tilde{\omega}(\mathbf{k}) = \frac{\omega(\mathbf{k}) + k_x V}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}$$

の非相対論的極限をとって得られる. 単に空間内で座標軸を回転させる際には, 振動数は変わらない.

教科書 pp.145–146 から引用:

この変換則は, 有限温度 [$T \neq 0$] において重要な結果を導く. [超流動の典型的な設定として,] 毛细管の中を流れる Bose 流体を考えよう. 熱励起されたフォノンは, 管の壁の散乱を受けて平衡状態に戻る [そこで平衡分布 (B-E 分布 (10.64)) を考える]. 流れと同じ方向のフォノンは, 流れと反対向きのフォノンよりも高いエネルギーを持つので [式 (10.61–62)], 反対向きのフォノンの方が多く発生し, これによって流体の全運動量は下がる [式 (10.67)].

実際, 温度 T での Bose 分布関数

$$n_\beta(\omega) = \frac{1}{e^{\beta(\hbar\omega)} - 1}, \quad \beta \equiv \frac{1}{k_B T} \quad (10.64)$$

[以降 \hbar を明示する] を用いて, フォノンの運動量密度は

$$\mathbf{P}_{\text{phonon}} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (\hbar \mathbf{k}) n_\beta(\omega(\mathbf{k}) + \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}) \quad (10.63)$$

と表される. [$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \rightarrow \frac{1}{(\text{Vol})} \sum_{\mathbf{k}}$ と読み替えれば, 意味を取れる. 対称性から期待されるように, $\mathbf{V} = 0$ であれば式 (10.63) は奇関数の積分となり, $\mathbf{P}_{\text{phonon}} = 0$ となる. よって] 小さな \mathbf{V} に対して

$$\mathbf{P}_{\text{phonon}} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (\hbar \mathbf{k}) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}) \frac{\partial n_\beta}{\partial \omega} = -\rho_n \mathbf{V}, \quad (10.65)$$

$$\rho_n(T) \equiv -\frac{\hbar}{3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} k^2 \frac{\partial n_\beta}{\partial \omega} (> 0) \quad \left(\because \frac{\partial n_\beta}{\partial \omega} < 0 \right) \quad (10.66)$$

となる [式 (10.65) 第 2 の等号を本稿次節で確認]. したがって流れに伴う全運動量 [密度] は,

$$\mathbf{P}_{\text{tot}} = \rho \mathbf{V} - \rho_n \mathbf{V} \equiv \rho_s \mathbf{V}, \quad (10.67)$$

$\rho_s \equiv \rho - \rho_n$: “超流動質量密度” (superfluid mass density)

[ρ は凝縮体の質量密度] で与えられる (ここでは ρ は数密度ではないことに注意). ここで “超流動速度” \mathbf{v}_s は, 背景となる凝縮体の速度 \mathbf{V} として定義される. このとき運動量密度 (10.67) は, この速度で運ばれる質量の流れの密度

$$\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s \quad (10.68)$$

に一致する.

管壁自体が速度 \mathbf{v}_n で動く場合には, フォノンの運動量密度 (10.65) は「流体が局所的に平衡状態にあると見なせる座標系」(p.146 下2行)での流体の速度 ($\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n$) を用いて,

$$\mathbf{P}_{\text{phonon}} = -\rho_n (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n) \quad (10.69)$$

と置き換える [負号を補った, フォノンの運動量の不変性 (10.60) にも注意]. すると [全運動量密度は, したがって] 質量の流れの密度は

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}_s - \rho_n (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n) = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n \quad (10.70)$$

となる [もちろん $\mathbf{v}_n = 0$ とおけば式 (10.68) に戻る]. この式は超流動を担う密度 ρ_s の項と, 密度 ρ_n の “常流動成分” (normal component) から成ると解釈され, Tisza (ティサ), London および Landau による “2 流体モデル” の基礎となる. ここで管壁の速度 \mathbf{v}_n をフォノンの平均速度と誤解してはならない (実際 $\mathbf{v}_n = 0$ であってもフォノンの運動量密度 (10.65) $\neq 0$). [また超流動質量密度 $\rho_s \equiv \rho - \rho_n$ にも, 既にフォノンの寄与 ρ_n が含まれている.]

10.3.5 節について

■式 (10.65) 第 2 の等号について 式 (10.65) の第 a 成分をとって

$$P_a = \left(\hbar \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} k_a k_b \frac{\partial n_\beta}{\partial \omega} \right) V_b$$

と書こう ($a, b = 1, 2, 3$). 微分係数 $\frac{\partial n_\beta}{\partial \omega}$ は $\omega = \omega(\mathbf{k})$ で評価されており, \mathbf{k} に関して偶関数であることに注意すると^{*27}, V_b に掛かる積分は δ_{ab} に比例する. 比例係数は, $a = b$ において縮約したときに正しい関係が再現されるように定めれば良い. すると

$$\hbar \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} k_a k_b \frac{\partial n_\beta}{\partial \omega} = \left(\frac{\hbar}{3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} k^2 \frac{\partial n_\beta}{\partial \omega} \right) \delta_{ab}$$

となるので,

$$P_a = \left(\frac{\hbar}{3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} k^2 \frac{\partial n_\beta}{\partial \omega} \right) V_a$$

を得る. よって式 (10.65) 第 2 の等号が示された.

10.4 荷電 Bose 粒子系

10.4.1 Gross-Pitaevskii 方程式

ラグランジアン密度 (10.41) から導かれる非線形の Schrödinger 方程式は “Gross-Pitaevskii (グロス-ピタエフスキー) 方程式” と呼ばれ, 超流動状態にある凝縮体のモデルとしてしばしば用いられる. 電荷 e [素電荷

^{*27} 実際このとき既に言及したように, 式 (10.63) において $\mathbf{V} = 0$ ならば $\mathbf{P}_{\text{phonon}} = 0$ となることが保証される.

とは無関係 (一般の電荷 q の意味) を持ち, 電磁場と相互作用する Bose 粒子系に対しては, Gross-Pitaevskii 方程式は

$$i\hbar(\partial_t - ieA_0/\hbar)\varphi = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{a=1}^3 (\partial_a - ieA_a/\hbar)^2 \varphi + \lambda(|\varphi|^2 - \rho_0)\varphi \quad (10.71)$$

と一般化される (\hbar を明示した) [本稿次節で導出, ラグランジアン密度 (10.41) から直接導かれるのは $e = 0$ と置いた式]. ここで粒子流密度

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\varphi^*(\nabla - ie\mathbf{A}/\hbar)\varphi - ((\nabla + ie\mathbf{A}/\hbar)\varphi^*)\varphi) \quad (10.72)$$

を定義する [本稿次節で補足]. さらに [粒子数密度 (質量密度ではない)] $\rho = |\varphi|^2$ を用いて $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ と書き, 速度場 \mathbf{v} を定義する. このとき $\varphi = \sqrt{\rho}e^{i\theta}$ と書くと (これを “Madelung (マードルング) 変換” という),

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m}(\nabla\theta - e\mathbf{A}/\hbar) \quad (10.73)$$

と表される [本稿次節で補足].

すると φ が渦糸による特異性を持たない場合には, “渦度ベクトル”

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{v} = -\frac{e}{m} \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{e\mathbf{B}}{m}$$

はゲージ場 \mathbf{B} から完全に決定されることになる. 上式を

$$m\boldsymbol{\omega} + e\mathbf{B} = 0 \quad (10.74)$$

と書き換えておく.

いずれにせよ, ここから中性 Bose 流体 [$e = 0$] は必然的に “非回転的運動” [渦無し運動 ($\boldsymbol{\omega} = 0$)] を行うことになる. このとき圧縮性を無視できる低速では, [流体力学で学んだように [17, p.73], 流体中の物体には] 抵抗力が働かない (D'Alembert のパラドックス).

一方, 電荷 Bose 流体に対して, 式 (10.74) は “Meissner (マイスナー) 効果” [超流体の内部に磁場が侵入しないこと] をもたらす. 実際, Maxwell 方程式 $\nabla \times \mathbf{B} = e\mathbf{j}$ [定常的な場を考え変位電流の項を落とした] と $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}_s$ を式 (10.74) に適用すると,

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{\Lambda^2} \mathbf{B} = 0, \quad \Lambda \equiv \left(\frac{e^2 \rho}{m} \right)^{-1/2} : \text{London (ロンドン) 侵入長} \quad (10.75)$$

が得られる [本稿次節で確認]. これは磁束の遮蔽効果 (Meissner 効果) を含意する. [1 次元的な解 $\mathbf{B} \sim e^{\pm x/\Lambda}$ は, 磁場が超流体の内部に長さ Λ 程度までしか侵入できないことを意味する.] 式 (10.74) にも London 侵入長 Λ にも \hbar は含まれないことに注意する.

圧縮性の流体が電荷を持っていれば, 静電場の遮蔽も可能である. Meissner 効果と Debye 遮蔽の組み合わせによって, 流体中の光子 [電磁場の量子] には有効質量が付与される [Debye 遮蔽は電子系の Coulomb 伝播関数 (9.55) の質量項 k_0^2 をもたらしたことから類推]. これは “Higgs-Kibble (ヒッグス-キブル) 機構” の, 非相対論系における実例である. (最終段落 (p.148))

10.4.1 節について

■Gross-Pitaevskii 方程式 (10.71) の導出 古典的極限 $\hbar \rightarrow 0$ が見やすいように \hbar を明示すると, ラグランジアン密度 (10.41) は

$$\mathcal{L} = \varphi^\dagger \left(i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \mu \right) \varphi - \frac{\lambda}{2}(\varphi^\dagger\varphi)^2$$

となるので, Euler-Langange 方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^\dagger)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\dagger} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\dagger} = -\left(i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \mu \right) \varphi + \lambda(\varphi^\dagger\varphi)\varphi, \\ \therefore i\hbar\partial_t \varphi &= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \varphi - \mu\varphi + \lambda(\varphi^\dagger\varphi)\varphi \end{aligned}$$

を与える. このように φ^\dagger に関する場の方程式を書き下すには, ラグランジアン密度の空間微分の項は式 (10.6) の形 $(\partial_a \varphi^\dagger)(\partial_a \varphi)$ よりも, 上式のように書いておく方が便利である. ここでこれまで通り $\mu = \rho_0\lambda$:(19) と設定し, また P_μ を正準運動量として, 電磁場との相互作用がある場合への粒子の力学的運動量の変更 (極小置換)

$$P_\mu \rightarrow P_\mu - eA_\mu \quad \text{i.e.} \quad i\hbar\partial_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu - eA_\mu$$

(ただし \hbar とは対照的に c は明示しない*28) を施すと, Gross-Pitaevskii 方程式 (10.71) が得られる.

■粒子数流束 (10.72) について これは確率と粒子数という解釈の違いを除けば, 文献 [13, p.177] で見た, 確率の流れの密度 (2.6.31):

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{m} \text{Im}(\varphi^* \nabla \varphi) - \frac{e}{\hbar} \mathbf{A} |\varphi|^2 = \frac{\hbar}{2mi} \left(\varphi^* \nabla \varphi - \varphi \nabla \varphi^* - \frac{2ie}{\hbar} \mathbf{A} |\varphi|^2 \right)$$

と全く同じ表式である. 粒子数流束を式 (10.72) のように同定したことは, Gross-Pitaevskii 方程式 (10.71) のように, Schrödinger 方程式が場 φ 自身に依存するポテンシャルの項 (λ の項) を持つ場合にも, 連続の式 (10.81):

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

が満たされることから正当化される. 以下では Schrödinger 方程式から連続の式を導出する作業を, Gross-Pitaevskii 方程式 (10.71):

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t \varphi &= -eA_0\varphi - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla - \frac{ie}{\hbar} \mathbf{A} \right)^2 \varphi + \lambda(|\varphi|^2 - \rho_0)\varphi \\ &= -eA_0\varphi - \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \nabla^2 \varphi - \frac{ie}{\hbar} (\nabla \cdot \mathbf{A})\varphi - \frac{2ie}{\hbar} \mathbf{A} \cdot \nabla \varphi - \left(\frac{e\mathbf{A}}{\hbar} \right)^2 \varphi \right\} + \lambda(|\varphi|^2 - \rho_0)\varphi \end{aligned}$$

*28 c を明示すると $P_\mu \rightarrow P_\mu - \frac{e}{c} A_\mu$.

に対して改めてやり直そう。上式に左から φ^* を掛けた式と、その複素共役を辺々引くと、 λ に関する項は相殺し、荷電粒子に対する Schrödinger 方程式の場合と同様に、連続の式

$$\begin{aligned}\partial_t \rho &= \varphi^* \partial_t \varphi - \varphi \partial_t \varphi^* \\ &= -\frac{\hbar}{2im} \left[(\varphi^* \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \varphi^*) - \frac{2ie}{\hbar} (\nabla \cdot \mathbf{A}) |\varphi|^2 - \frac{2ie}{\hbar} \{ \varphi^* (\nabla \cdot \mathbf{A}) \varphi - \varphi (\nabla \cdot \mathbf{A}) \varphi^* \} \right] \\ &= -\frac{\hbar}{2im} \nabla \cdot \left\{ (\varphi^* \nabla \varphi - \varphi \nabla \varphi^*) - \frac{2ie}{\hbar} \mathbf{A} \varphi^* \varphi \right\} \\ &= -\nabla \cdot \mathbf{j}\end{aligned}$$

が導かれる。

■速度場 (10.73) について Madelung 変換 $\varphi = \sqrt{\rho} e^{i\theta}$ において位相を $\theta = S/\hbar$ と書くと、 S は (古典的極限で) 作用 (Hamilton 主関数) になる。これを粒子数流束 (10.72) に代入すると

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \equiv \frac{1}{m} (\nabla S - e\mathbf{A}) : (10.73)$$

と書けることは、文献 [13, p.177] の式 (2.6.33) において既に確認済みである。ここで $(\nabla S - e\mathbf{A})$ は力学的運動量なので、 \mathbf{v} を速度と見なすのは理に適っている。ただし 1 粒子系の量子力学の文脈では、 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ はあくまで確率分布の流体的な速度であり ($\cdot: \mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$)、これを各位置 \mathbf{x} ごとに定まった粒子の速度と解釈するのは、不確定 (性) 原理に反する [13, p.138].

■「……電荷を持つ圧縮性流体の運動方程式が得られる」(式 (10.71) 下 2 行) について 10.4.3 節の Euler 方程式 (10.82) を指すと考えられる。我々は既に式 (10.73) の \mathbf{v} が²⁹、粒子数分布の流体的な速度場の適正な表式であることを納得しており、流体の運動方程式の導出に取り組める段階に達している。基本的な方針は、Schrödinger 方程式から古典的な Hamilton-Jacobi 方程式を導く過程を、Gross-Pitaevskii 方程式 (10.71) に対してやり直すことである。 $\varphi = \sqrt{\rho} e^{iS/\hbar}$ を式 (10.71) に代入し、各項の共通因子 $e^{iS/\hbar}$ を落とすと

$$\begin{aligned}i\hbar \partial_t \sqrt{\rho} - (\partial_t S) \sqrt{\rho} &= -eA_0 \sqrt{\rho} - \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ (\nabla^2 \sqrt{\rho}) + (\nabla \sqrt{\rho}) \cdot \left(\frac{i\nabla S}{\hbar} \right) + \sqrt{\rho} \frac{i\nabla^2 S}{\hbar} + \sqrt{\rho} \left(\frac{i\nabla S}{\hbar} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{ie}{\hbar} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \sqrt{\rho} - \frac{2ie}{\hbar} \mathbf{A} \cdot \left((\nabla \sqrt{\rho}) + \sqrt{\rho} \frac{i\nabla S}{\hbar} \right) - \left(\frac{e\mathbf{A}}{\hbar} \right)^2 \sqrt{\rho} \right\} + \lambda(\rho - \rho_0) \sqrt{\rho}\end{aligned}$$

となる²⁹。この式の実部を拾い集め、各項を $\sqrt{\rho}$ で割ると、

$$\begin{aligned}-\partial_t S &= -eA_0 - \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} + \left(\frac{i\nabla S}{\hbar} \right)^2 + \frac{2e}{\hbar^2} \mathbf{A} \cdot \nabla S - \left(\frac{e\mathbf{A}}{\hbar} \right)^2 \right\} + \lambda(\rho - \rho_0) \\ &= -eA_0 + \frac{1}{2m} (\nabla S - e\mathbf{A})^2 + \zeta, \\ \zeta &\equiv \lambda(\rho - \rho_0) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} : (10.83)\end{aligned}$$

を得る³⁰。古典的極限 $\hbar \rightarrow 0$ で生き残る項は全て、この実部の中に含まれていることに注意しよう。付加的な項 ζ (λ に比例する項と、 \hbar を含む量子力学的な項から成る) を除けば、これは非相対論的な荷電粒子に対する、馴染みある Hamilton-Jacobi 方程式である [6, p.52].

²⁹ $\sqrt{\rho}$ の微分を実行する必要はない。また Leibniz の公式 $(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$ が有用である。

³⁰ 他方、虚部からは再び連続の式 (10.81) が得られる (教科書 p.150).

さて、ここから運動方程式を導く。上式両辺の勾配 ∇ をとり、定義式 (10.73): $\mathbf{v} = (\nabla S - e\mathbf{A})/m$ を用いて S を消去すると、

$$-m\partial_t(\mathbf{v} + e\mathbf{A}) = -e\nabla A_0 + \frac{m}{2}\nabla v^2 - \nabla\zeta$$

を得る。ここで電磁場の定義より

$$\mathbf{E} = -\nabla A_0 - \partial_t\mathbf{A},$$

$$\nabla v^2 = 2(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + 2\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = 2(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \frac{2}{m}\mathbf{v} \times \{\nabla \times (\nabla S - e\mathbf{A})\} = 2(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \frac{2}{m}e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

となることを利用して整理すると*31, 運動方程式 (10.82):

$$m\{\partial_t\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}\} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla\zeta$$

を得る。

- 左辺における Lagrange 微分 (物質微分) の項 $\{\dots\}$ は、速度 \mathbf{v} を持つ粒子の加速度に他ならず、
- 右辺は 1 個の粒子に働く力を与えている。

ここで Lorentz 力に対する付加的な力

$$-\nabla\zeta = -\nabla\left(\lambda(\rho - \rho_0) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right)$$

の第 1 項 (λ の項) は、数密度の高い側から低い側へ働き、数密度を平均値 ρ_0 に還元させる力となっている。このことは λ に比例する力が、デルタ関数的な斥力相互作用 (点状の剛体球の衝突) に由来することを考えれば、理に適っている。運動方程式 (10.82) を流体方程式と解釈するには、両辺に数密度 ρ を掛ける方が正確である。このとき

- 左辺において質量密度 ($m\rho$) が現れ、
- 右辺は単位体積に含まれる全粒子に働く力の和になる。

■ “非回転的運動” (p.147 下から 8 行目) について 流れが渦無しとなることは、運動方程式 (10.82) が粘性項を含まない時点である程度、期待される結論である。粘性に伴って現れる物体表面の境界層は渦の層に他ならない [17, pp.100–102, pp.158–161].

■ 「均一な磁場 \mathbf{B} が……生じることはない」 (p.147 下から 5~2 行目) について 式 (10.74) より超流体中に均一な磁場 \mathbf{B} があれば、流体は一様な渦度 $\boldsymbol{\omega}$ を持つことになる。ここで純粋に運動学的な帰結として、流体がある位置で渦度 $\boldsymbol{\omega}$ を持つことは、その位置で流体要素が、角速度 $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}/2$ の剛体的な回転を行っていることを意味することを思い出そう [17, p.33]. 今、長さ l 程度の流体の領域に注目すると、その慣性モーメントは $I \sim (\rho_0 l^3)l^2$, 回転による運動エネルギーは $I\Omega^2 \sim \rho_0 l^5 \omega^2$ のオーダーなので、これは $l \rightarrow \infty$ で体積 l^3 より急激に発散し、不条理である。よって「熱力学的な極限で、このような運動が生じることはない」 (p.147 下から 3,2 行). これは Meissner 効果に対する背理的な説明を与えている。

*31 第 2 式の第 1 の等号は

$$[\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})]_i = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}v_j\partial_l v_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})v_j\partial_l v_m = v_j\partial_i v_j - v_j\partial_j v_i = \left[\nabla\frac{v^2}{2} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}\right]_i$$

による。この恒等式は流体力学で、Bernoulli の定理の導出にも用いられる [17, p.34].

■式 (10.75) の導出 Maxwell 方程式 $\nabla \times \mathbf{B} = e\mathbf{j}$ (右辺は電流密度) において定常的な電磁場を仮定したのに加えて, $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}_s$ において数密度 ρ も空間的に一様と仮定しよう. (London 侵入長の表式においても, $\rho \rightarrow \rho_0$ とすれば, その値が物性値として確定する.) すると,

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}_s = \frac{1}{e\rho} \nabla \times (e\mathbf{j}) = \frac{1}{e\rho} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{1}{e\rho} \nabla^2 \mathbf{B}$$

となる (最後の等号で $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を用いた). これを $\boldsymbol{\omega} = -\frac{e\mathbf{B}}{m}$ と等置すると (あるいは等価的に式 (10.74) に代入すると), 式 (10.75) が得られる.

10.4.2 渦糸

この節は説明がほとんど天下りなため, 本稿でも要点をいくつか書き留めるだけにする.

荷電 Bose 流体でも中性 Bose 流体の場合でも, Gross-Pitaevskii 方程式は, 渦糸の中心で φ がゼロになり, 渦糸の周りを周回すると φ の位相が 2π [の整数 n 倍 (φ の一価性による, 以下同様)] だけ変化する特異な解を持つ.

中性 Bose 流体の場合 [式 (10.73) で $e = 0$ とおくと], 位相 θ の変化が $2\pi n$ であることは, 渦糸の周りの循環が

$$\kappa \equiv \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\hbar}{m} \oint (\nabla\theta) \cdot d\mathbf{r} = 2\pi \frac{\hbar}{m} n \quad (10.76-77)$$

と量子化されることを意味する.

- 循環の量子化の概念は Onsager によって初めて言及された (1949).
多数の離散的な渦糸という正しい描像に最初に達したのは Feynman である (1955).
- 式 (10.77) の m が単純にヘリウム原子の裸の質量 M_{He} に一致するのか, あるいは多体効果によって m に補正が生じるのかという問題は興味深い.
実験的には循環において, m と M_{He} は最良の精度で一致している.

渦糸に対応する場として,

$$|\varphi(r)| \approx \left(\frac{r^2}{r^2 + 2\xi^2} \right)^{1/2}, \quad (10.78)$$

$$\xi \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{2m\lambda\rho_0}} : \text{治癒長 (コヒーレンス長)} \quad (10.79)$$

という形の近似解が見出されている. [本稿次節で補足. ξ は London 侵入長とは対照的に, \hbar を含んでいる (式 (10.83) の量子圧力に関係 (p.150)).]

次に電荷を持つ流体における Meissner 効果 (10.4.1 節) を, 渦糸の観点から再解釈しよう. 図 35 のように荷電 Bose 流体中に磁力線があるとすると (これを z 軸に選ぶ). これは式 (10.74) より, 磁場 \mathbf{B} と逆向きの渦度 $\boldsymbol{\omega}$ を持つ渦糸が存在することを意味する (①). 渦糸はその周りに荷電粒子の循環, したがって電流を生じる (②). この電流は (Maxwell 方程式に従って), もとの磁場と逆向きの磁場を作る (③). このことは z 軸から遠ざかると, 式 (10.75) に従って磁場が指数関数的に減衰することと整合しており (Meissner 効果), その定性的な解釈を与えている. 再び式 (10.74) より, これはもとの渦糸の周りに逆向きの“反渦糸”が作られること, そして反渦糸による遮蔽のために, 循環 (したがって流速) もまた指数関数的に減衰することを意味す

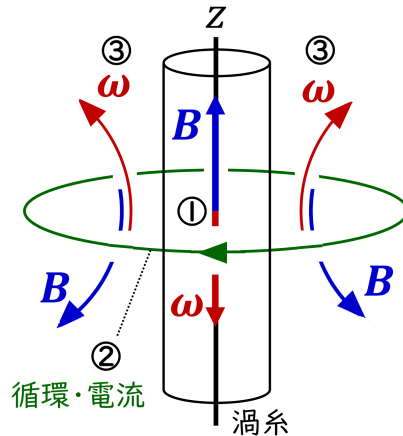


図 35 渦糸の“反渦糸”による遮蔽としての Meissner 効果の定性的解釈

る．無限遠で速度 (10.73) は $0 = \mathbf{v} = (\hbar \nabla \theta - e \mathbf{A})/m$ となることに注意すると，全磁束は

$$\int B_z dx dy = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\hbar}{e} \oint (\nabla \theta) \cdot d\mathbf{r} = 2\pi \frac{\hbar}{e} n \quad (10.80)$$

と量子化されることになる．このように量子化された磁束の“管”を“Abrikosov (アブリコソフ) の渦糸”と呼ぶ．

10.4.2 節について

■古典的な渦糸に対応する近似解 (10.78-79) について まず「古典的な渦糸」(p.149, 1.3) について，循環 κ の直線的な渦糸は 2 次元流を作り，複素速度ポテンシャル

$$f = -i \frac{\kappa}{2\pi} \ln z$$

を持つ (渦糸の中心は $z = 0$)．対応する流速は円周方向に $v = \kappa/2\pi r$ である [17, pp.67-68]．これは渦糸を中心とする半径 r の円に沿う循環

$$\kappa = v \cdot 2\pi r$$

が，円を貫く渦糸だけで決まり，半径 r に依らない一定値をとることから期待される結果である．また「孤立した渦糸が無限大の大きさを持つ系の中にあると，運動エネルギーが対数的に発散する」(p.149, 1.5-6) ことについて，実際，単位体積の厚みに含まれる 2 次元流の全運動エネルギーは

$$\int_0^\infty \frac{1}{2} \rho v^2 \cdot 2\pi r dr \sim \int_0^\infty \frac{1}{r^2} \cdot 2\pi r dr = [\ln r]_0^\infty$$

と計算される．渦糸に有限の大きさ a を与えて積分の下限を $r = a$ に改めれば，渦糸の中心 $r \rightarrow 0$ での発散は回避できるものの，遠方 $r \rightarrow \infty$ での対数的な発散は避けられない．

次に，このような渦糸に対応する式 (10.71) の近似解 (10.78-79) について，正確には式 (10.78) の右辺には

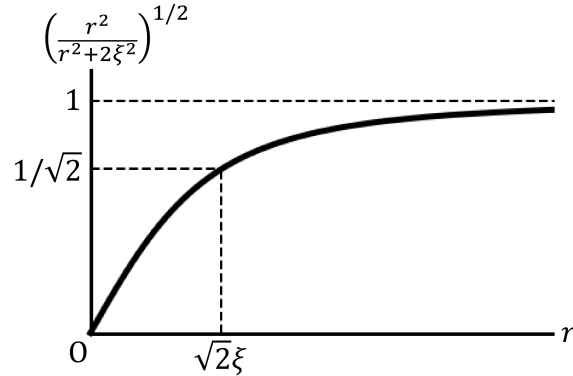


図 36 渦糸に対応する近似解 (10.78) の概形. $r = \sqrt{2}\xi$ は $|\varphi(r)|^2$ が最大値の $1/2$ となる位置.

(長さ) $^{-3/2}$ の次元を持つ係数が必要と考えられる. 右辺の因子の概形は,

$$r \ll \xi \text{ のとき } \left(\frac{r^2}{r^2 + 2\xi^2} \right)^{1/2} \approx \frac{r}{\sqrt{2}\xi},$$

$$r \gg \xi \text{ のとき } \left(\frac{r^2}{r^2 + 2\xi^2} \right)^{1/2} \approx \left(\frac{1}{1 + 2(\xi^2/r^2)} \right)^{1/2} \approx 1 - \frac{\xi^2}{r^2}$$

となることから推察されるように, 図 36 のようになる. ここから治癒長 ξ は, 「渦糸においてゼロになっている超流動密度が, 凝縮体内部の平衡値にまで回復する距離の指標」(p.150, 1.11-12) となっていることが分かる. (この解釈と整合させるには, 式 (10.78) の右辺に補う係数として $\sqrt{\rho_0}$ を選べば良い.) 解 (10.78) が密度の非一様性を持つことは, 渦糸を複素速度ポテンシャル f で記述する古典論が, 渦無し(non-vorticity)の非圧縮性流体に対する理論であるのとは対照的である (f の定義される $z \neq 0$ では流れは渦無し). また式 (10.73): $\mathbf{v} = \hbar(\nabla\theta)/m$ より, つまらない係数の違いを除けば, 速度ポテンシャルは φ の位相 θ に対応する. これらを踏まえれば, 近似解 (10.78) から古典的な渦糸との類似性を直接, 読み取ることは困難である.

■磁束量子化 (10.80) について 文献 [8, pp.22-23] では, 磁束を捕獲している超伝導リング内の電子対に対する波動関数

$$\psi = \psi^{(0)} \exp \left[\frac{2ie}{\hbar c} \int^{\mathbf{s}(\mathbf{x})} \mathbf{A}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{s}' \right]$$

が一価であることを要求して, 同じ結論を導いている.

10.4.3 流体力学との関係

式 (10.73) で定義した速度場 \mathbf{v} に対して, Gross-Pitaevskii 方程式から, 連続の式と Euler 方程式

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (10.81)$$

$$m \{ \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \zeta \quad (10.82)$$

が導かれる [10.4.1 節のノートで導出・解釈済み]. 運動方程式 (10.82) の右辺第 2 項は通常の Euler 方程式における圧力項 ($\sim \nabla P$) に対応し, 圧力にあたる量

$$\zeta \equiv \lambda(\rho - \rho_0) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \quad (10.83)$$

は密度 ρ だけで決まる (バロトロピック流体). この第 2 項は流体方程式の中で唯一 \hbar を含むところであり, “量子圧力” と呼ばれる.

Euler 方程式は等価的に, Bernoulli 方程式

$$m(\partial_t \mathbf{v} - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \left(\frac{1}{2} m v^2 + \zeta \right) \quad (10.84)$$

に書き換えられる [本稿次節で補足]. 式 (10.74) より $m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$ と $e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ の 2 項は相殺し, \mathbf{B} にも $\boldsymbol{\omega}$ にも依存しない, 超伝導体に対する伝統的な流体力学的描像が導かれる. しかしながら超流体と古典的な流体の力学の違いが, 式 (10.74) の制約だけに依っていることが明確に分かるように, 式 (10.84) の $\boldsymbol{\omega}$ と \mathbf{B} を残し, 式 (10.82) のように書いておくことを著者は推奨している.

10.4.3 節について

■ Bernoulli 方程式 (10.84) の導出 Euler 方程式 (10.82) の導出時にも用いた恒等式

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$$

を, 改めて式 (10.82) の移流項に代入すると, 式 (10.84) が得られる. あるいは, 上式と同じ箇所で見出した関係

$$m(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \nabla \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$$

を利用すれば, 最初から式 (10.84) の 2 項 $m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$, $e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ が相殺した式に直接たどり着ける (いずれにせよ 2 度手間の感がある).

定常流 ($\partial_t \mathbf{v} = 0$) を仮定した上で, 式 (10.84) を Bernoulli 面内で線積分すれば, Bernoulli の定理の対応物

$$\frac{1}{2} m v^2 + \zeta = \int^r e \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

が得られる. ここで補助条件 (10.74): $m\boldsymbol{\omega} + e\mathbf{B} = 0$ を考慮しなくとも, $m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$ と $e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ の項はいずれも線積分に寄与しないことに注意する (磁場は仕事をしない).

第 11 章 有限温度

11.1 分配関数

有限温度 T (逆温度 $\beta = 1/k_B T$), 化学ポテンシャル μ における多粒子系は, 大分配関数

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} \left\{ e^{\beta(\mu\hat{N} - \hat{H})} \right\} \quad (11.1)$$

で記述される.

note : Tr について 量子力学において演算子 X のトレースは, 適当な基底 $\{|a'\rangle\}$ での行列表示の対角和

$$\text{Tr}(X) = \sum_{a'} \langle a' | X | a' \rangle$$

で定義される. この定義によりトレースの値は, それを評価する基底 $\{|a'\rangle\}$ の選び方に依らないことが示される [13, p.51]. すると系の粒子数とエネルギーの固有値 N_α, E_α に属する, 規格化された同時固有状態 $\{|\alpha\rangle\}$ を基底に選べるならば, 上式 (11.1) は通常の大分配関数の定義

$$\mathcal{Z} = \sum_{\alpha} e^{\beta(\mu N_{\alpha} - E_{\alpha})} \quad (11.1')$$

に帰着する. ここで仮定したように, \hat{N}, \hat{E} が両立可能な観測量である条件 $[\hat{N}, \hat{E}] = 0$ の下では, 大分配関数 (11.1) を $\mathcal{Z} = \text{Tr} \left\{ e^{\beta\mu\hat{N}} e^{-\beta\hat{H}} \right\}$: (11.11) と書き換えられる.

p.151 の 1 つ目の訳註を引用 分配関数 (状態和 sum of state とも言う) は “統計力学的ハミルトニアン” \hat{K} を用いて $\mathcal{Z} = \text{Tr} e^{-\beta\hat{K}}$ と表される. 正準集団では $\hat{K} = \hat{H}$, 大正準集団では $\hat{K} = \hat{H} - \mu\hat{N}$ と置く (式 (11.1)). 両者を区別したい場合には, 後者に対して “大 [正準] 分配関数” の呼称を用い, \mathcal{Z} の代わりに \mathcal{Z}_G もしくは Ξ と表記するのが通例であるが, 本書の記述ではこのような区別があまり明確ではない.

[統計力学においてグランド・カノニカル分布から B-E 分布や F-D 分布を導く際に, 既に学んだように [9, pp.185–187],] 相互作用を持たない量子力学的な自由粒子系に対して, 状態 n のエネルギーを E_n とすると, 大分配関数 (11.1') は

$$\mathcal{Z} = \prod_n \left(1 \mp e^{\beta(\mu - E_n)} \right)^{\mp 1} \quad (11.2/11.6)$$

と表される. ただし以降, 複号は Bose 粒子系に対して上側を, Fermi 粒子系に対して下側を選ぶものと約束する. Bose 粒子系では和が収束する条件として, $\mu < E_{\min}$ が課せられる. 空間の体積を V とすると, 質量 m の非相対論的な自由粒子系では, 上式は

$$\mathcal{Z} = \exp \left\{ \mp V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln \left(1 \mp e^{\beta(\mu - k^2/2m)} \right) \right\} \quad (11.3/11.7)$$

となる.

note : 式 (11.3), (11.7) の導出

$$\ln \mathcal{Z} = \sum_{\mathbf{k}} \ln \left(1 \mp e^{\beta(\mu - k^2/2m)} \right)^{\mp 1} \simeq \mp \int \frac{d^3k}{(2\pi/L)^3} \ln \left(1 \mp e^{\beta(\mu - k^2/2m)} \right)$$

による (ただし $V = L^3$).

ここで大正準ポテンシャル (grand potential) Ω の公式

$$\Omega = -PV = -\frac{1}{\beta} \ln \mathcal{Z} \quad (\because \mathcal{Z} = e^{-\beta\Omega})$$

を思い出すと [9, pp.184–185],

$$\Omega = -V \times \left\{ \mp \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln \left(1 \mp e^{\beta(\mu - k^2/2m)} \right) \right\} \quad (11.4/11.8)$$

と同定される. 上式において, 圧力 $P = \{\dots\}$ は正になっていることが見てとれる.

11.2 世界線

Bose 粒子系と Fermi 粒子系に対する前節の結果には類似性があり, 両者の違いは単一粒子のエネルギー準位を占めることができる粒子数の制約 (排他律) の有無に起因している. さらにこのような統計性の違いの起源は, 生成・消滅演算子の (反) 交換関係にまで遡ることができる. 他方, 以下では正準量子化の代わりに, Feynman による粒子の世界線を扱う描像を説明する. この定式化は径路積分 (第 12 章) と関係しており, やはり Bose 粒子系と Fermi 粒子系を統一的に扱える.

準備として, 1 つの非相対論的な粒子が “Euclid 時間” τ [虚時間 it のこと] をかけて, 位置 \mathbf{y} から \mathbf{x} へ移動する振幅 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau)$ を導入する. これは Schrödinger 方程式

$$\frac{1}{2m} \nabla_{\mathbf{x}}^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) = \partial_{\tau} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) \quad (11.9)$$

[$\partial_{\tau} = -i\partial_t$ に注意] と初期条件

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) \rightarrow \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \text{as} \quad \tau \rightarrow 0_+ \quad (11.10)$$

[$\tau = it$ において $t \rightarrow +0$ の意味と推察される] を満たす. [実際, 遷移振幅 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau)$ は Schrödinger 方程式の Green 関数に他ならない [13, pp.149–151, pp.164–165].]

ここで大分配関数

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} \left[e^{\beta\mu\hat{N}} e^{-\beta\hat{H}} \right] \quad (11.11)$$

[式 (11.1) の note を参照] を得るには, 図 37 のように n 粒子が虚時間 β をかけて, 初期時刻と同じ配置に戻るいろいろな過程の寄与を足し合わせる必要がある^{*32}. Fermi 粒子系について Feynman は, 虚時間 β 後の配置への n 粒子の置換

$$P: \{\mathbf{x}_i\} \rightarrow \{\mathbf{x}_{P(i)}\}$$

の符号 $\text{sgn}(P)$ (偶置換のとき +1, 奇置換のとき -1 と定義) を含めて,

$$\mathcal{Z} = \sum_n \frac{1}{n!} e^{\beta\mu n} \sum_P \text{sgn}(P) \int d^3x_1 \cdots d^3x_n G(\mathbf{x}_{P(1)}, \mathbf{x}_1) \cdots G(\mathbf{x}_{P(n)}, \mathbf{x}_n) \quad (11.12)$$

と定めた [以上, 本稿次節で補足]. Bose 粒子系では, 単に $\text{sgn}(P)$ を省けば良い.

トレースを評価するのに平面波の基底を選び, 置換に関する数学公式を用いて式 (11.12) を変形すると, 再び自由 Fermi 粒子系の大分配関数 (11.7):

$$\mathcal{Z} = \exp \left\{ V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln(1 + e^{\beta(\mu - k^2/2m)}) \right\} \quad (11.22)$$

^{*32} このような過程は Euclid 時間に関して周期 β を持つ, 周期的な履歴と言われる.

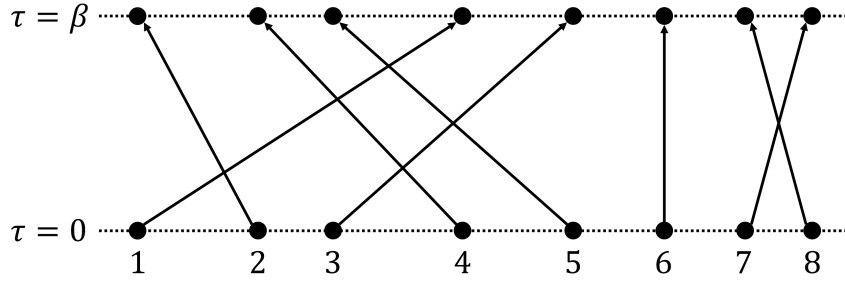


図 37 $n = 8$ 粒子の置換の例 (11.13')

が得られる.

自由 Fermi 粒子系の大分配関数 (11.22) の導出 まず式 (11.12) における置換 P の数学的性質を調べる. 任意の置換は (互いに共通の番号を含まない) 巡回の積で表される [ほぼ自明]. 例えば図 37 に示した $n = 8$ 粒子の置換では

$$P = (142)(35)(6)(78) \quad (11.13')$$

である [各々の丸括弧内で番号を巡回置換する]. この例では, 1 要素巡回が $r_1 = 1$ 個, 2 要素巡回が $r_2 = 2$ 個, 3 要素巡回が $r_3 = 1$ 個含まれている. 一般に m 要素巡回の個数を r_m とすると, 和 $\sum_m m r_m$ は式 (11.13') のように横に並んだ番号の個数を数えていることになるので,

$$\sum_m m r_m = n$$

が成り立つ. [ここで m の上限は高々 n なので, 和 (や積) の範囲は $m = n$ までとして良く, P に $m = n, n-1, \dots$ 要素巡回が含まれない場合, 単に $r_m = 0$ とおけば以降の式はそのまま成り立つ.] また容易に確かめられるように,

$$\text{sgn}(P) = (+1)^{r_1} (-1)^{r_2} (+1)^{r_3} \dots = \prod_{m=1}^n \{(-1)^{m+1}\}^{r_m} \quad (11.15)$$

が成り立つ [本稿次節で確認]. さらに同じ型を持つ, すなわち同じ $\{r_m\}$ で特徴付けられる置換の数は,

$$N(\{r_m\}) = \frac{n!}{1^{r_1} 2^{r_2} \dots n^{r_n} r_1! r_2! \dots r_n!} = \frac{n!}{\prod_{m=1}^n m^{r_m} \cdot r_m!} \quad (11.16)$$

で与えられる [本稿次節で確認]. これらの置換に関する公式を用いると, 大分配関数 (11.12) を

$$\mathcal{Z} = \sum_n e^{\beta \mu n} \frac{1}{n!} \sum_{\{r_m\}} \left[(\text{Tr } G)^{r_1} (-\text{Tr } G^2)^{r_2} \dots ((-1)^{n+1} \text{Tr } G^n)^{r_n} \right] N(\{r_m\}), \quad (11.17)$$

$$\text{Tr } G^m \equiv \int d^3 x_1 \dots d^3 x_m G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_m) G(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m-1}) \dots G(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (11.18)$$

と書き換えることができる [本稿次節で導出]. 式 (11.17) において $\{r_m\}$ に関する和 [教科書で抜け落ちている] は条件 $\sum_m m r_m = n$ の下でとる. [またトレースの定義式 (11.18) は $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を行列の “ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) 成分” と見ることから動機付けられる (演算子のトレース (11.11) とは意味が異なることに注

意.) さらに $N(\{r_m\})$ の式 (11.16) を代入して変形すると,

$$\mathcal{Z} = \exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} e^{\beta\mu m} \text{Tr} G^m \right) \quad (11.20)$$

が得られる [本稿次節で導出]. トレースを評価するのに平面波の基底を用いると, $G \sim \exp(-\beta k^2/2m)$ は対角的に表され, 大分配関数 (11.22) が得られる [本稿次節で補足].

[同様に自由 Bose 粒子系の大分配関数 (11.5) を再導出できる (本稿次節).]

導出過程で得た大分配関数の式 (11.20) が, $(-1)^{m+1} \text{Tr} G^m$ という因子を含んでいるのも興味ある結果である. G が熱 [伝導] 方程式の Green 関数であることに注意すると [式 (11.9–10)], $\text{Tr} G^m$ は周期 β の円筒を複数回, 周回する “熱” を表すと解釈できる. また G の冪に付随する負号は, 熱が円筒を周回するたびに負号が変わる “反周期境界条件” に対応する (14.2 節も参照) [Bose 粒子系ではこの負号は現れない]. なお相互作用がある場合にも, 式 (11.20) 自体はその導き方より成り立ち, 単に G が相互作用のある場合の Green 関数に置き換わる.

最後に 15.3 節の準備として, 11.2 節の最終段落をいくらかまとめておく. 低温では “時間” β が長くなるので, その間に粒子は十分に遍歴して, 識別性を失うようになる. ところで Bose 凝縮は, 時間の円環面 (torus) を何回でもまわるような, 長い世界線のループが生じることに対応する. と言うのも, これが起ると任意の Bose 粒子は他の任意の Bose 粒子と同じになり, $\varphi^\dagger(x)$ によって点 x に生成させた世界線を, これと十分に離れた x' における $\varphi(x')$ で終端させることができるようになる. したがって相関関数 $\langle \varphi^\dagger \varphi \rangle$ に “長距離秩序” (long range order) が生じるからである. [これが Bose 凝縮を特徴付けることは 10.2 節で学んだ.]

11.2 節について

■Euclid 時間 $\tau = \beta$ について $\tau = it$ は虚時間であるものの, 教科書の式 (11.22) の段落にあるように, 式 (11.9) を熱伝導方程式と見る場合には, τ は時間変数そのものに他ならない. これを踏まえ, τ を実数である逆温度 β と等置しているものと考えられる. 12.1.2 節にも 「Euclid 時間 τ を実数と考える」 (p.163, 1.4) とある. 本来, 虚数であったものを実数と見なすことに手品がある.

■大分配関数 (11.12) の説明 統計力学で学んだように, 大分配関数 (11.1') は

$$\mathcal{Z} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta\mu n} Z_n, \quad Z_n \equiv \sum_{\alpha} e^{-\beta E_{\alpha}(n)} : n \text{ 粒子系の分配関数}$$

と表される [9, p.183]. 大分配関数の量子力学的な定義 (11.11) から, これと対応した表現が得られる. 実際, 様々な粒子数 n を持つ状態 $\{|\alpha_n\rangle\}$ を基底に選ぶと,

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} \left[e^{\beta\mu \hat{N}} e^{-\beta \hat{H}} \right] = \sum_n \sum'_{\alpha_n} \langle \alpha_n | e^{\beta\mu \hat{N}} e^{-\beta \hat{H}} | \alpha_n \rangle = \sum_n e^{\beta\mu n} Z_n, \quad Z_n \equiv \sum'_{\alpha_n} \langle \alpha_n | e^{-\beta \hat{H}} | \alpha_n \rangle$$

となる. ただし \sum'_{α_n} は与えられた粒子数 n の下での和である. 次に n 粒子状態 $|\alpha_n\rangle$ を, 粒子の位置の組

$$|\alpha_n\rangle = |\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\rangle$$

に選ぼう. ここで $e^{-\beta \hat{H}}$ は, 虚時間 $\tau = \beta$ の時間発展演算子 $e^{-\tau \hat{H}} = e^{-i\hat{H}t}$ と見なせることに注意すると, 行列要素

$$\langle \alpha_n | e^{-\beta \hat{H}} | \alpha_n \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n | e^{-\beta \hat{H}} | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \rangle$$

は n 粒子が虚時間 β をかけて、初期時刻と同じ配置に戻る確率振幅と解釈できる。ただし同種粒子は互いに識別できないので、図 37 のように粒子の終状態として、最初の状態の粒子に置換 $P: \{\mathbf{x}_i\} \rightarrow \{\mathbf{x}_{P(i)}\}$ を施して得られる、全ての配置を考慮する必要がある。さらに初期時刻における n 粒子に番号を充てる際、実際には同一の状態を $n!$ 通りの方法で区別していることになる。そこで n 粒子状態 $\alpha_n = \{\mathbf{x}_i\}$ に関する和をとる際、式全体を $n!$ で割って

$$Z_n \sim \frac{1}{n!} \int d^3x_1 \cdots d^3x_n \langle \mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n | e^{-\beta \hat{H}} | \mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n \rangle,$$

$$\langle \mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n | e^{-\beta \hat{H}} | \mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n \rangle = \sum_P \text{sgn}(P) G(\mathbf{x}_{P(1)}, \mathbf{x}_1) \cdots G(\mathbf{x}_{P(n)}, \mathbf{x}_n)$$

とする。ただし第 2 式では Feynman に従って、Fermi 粒子系に対する符号 $\text{sgn}(P)$ を導入した。この措置はそれ自体で充分もってもらしく、正しい大分配関数 (11.22) が導かれることから正当化できる。また第 1 式で和を積分に置き換える際に必要な乗法的な定数係数は、(大) 分配関数から導かれる熱力学的量に影響しないので、省略して良い。そこで \sim を $=$ と置いてしまい、以上を冒頭の Z の式に代入すると、式 (11.12) が得られる。なお、式 (11.12) 以降では Green 関数の時間の引数 $\tau = \beta$ が省略されている。

■置換の符号 (11.15) の確認 m 要素巡回は例えば、先頭の番号を隣接する後続の番号と順次、互換して、末尾に移動させることで実現できる。このとき互換の回数は $(m-1)$ なので、 m 要素巡回は符号 $(-1)^{m-1} = (-1)^{m+1}$ を持つ。よって m 要素巡回を r_m 個ずつ含む置換の符号は、式 (11.15) のように表される。

■「巡回の数」(11.16) の導出 共通の $\{r_m\}$ を持つ置換 P の数 $N(\{r_m\})$ を調べよう [18, pp.40–41]。図 38 の図式において、縦棒で仕切られた各部屋 m に mr_m 個の番号を配る場合の数は

$$C(\{r_m\}) = \frac{n!}{\prod_{m=1}^n (mr_m)!}$$

である。次いで各部屋 m において、 \square で表した空席に mr_m 個の番号を配置しよう。各々の丸括弧内で番号を巡回しても、得られる置換は変わらない。ところが番号を巡回する方法は、1つの丸括弧につき m 通り、したがって r_m 個の丸括弧では m^{r_m} 通りある。また丸括弧ごとと番号を入れ替えても、得られる置換は変わらない。ところが r_m 個の丸括弧を入れ替える方法は $r_m!$ 通りある。以上を踏まえて重複を取り除くと、独立な置換に対応する、部屋 m における番号の配置の総数は

$$\Lambda_m = \frac{(mr_m)!}{m^{r_m} \cdot r_m!}$$

だけある。よって、

$$N(\{r_m\}) = C(\{r_m\}) \cdot \prod_{m=1}^n \Lambda_m = \frac{n!}{\prod_{m=1}^n m^{r_m} \cdot r_m!} : (11.16)$$

を得る。

■大分配関数の式 (11.17) の導出 同じ巡回の型 $\{r_m\}$ を持つ $N(\{r_m\})$ 個の置換は同じ符号 (11.15) を持ち、大分配関数 (11.12) において積分変数を入れ替えただけの、同じ寄与を持つと考えられる。そこで型 $\{r_m\}$ で特徴付けられる置換の 1 つに対して積分を評価すれば充分である。例えば式 (11.13') と同じ $\{r_m\}$ を持つ 1 つの置換を

$$P = (\mathbf{x})(y_1 y_2)(z_1 z_2)(w_1 w_2 w_3)$$

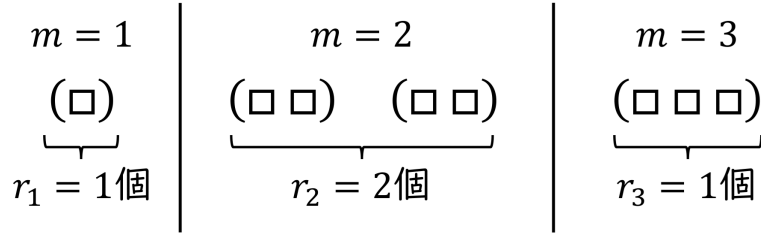


図 38 m 要素巡回の個数 $\{r_m\}$ で特徴付けられる置換の形

と書いて積分変数を定義すると、式 (11.12) における積分は

$$\begin{aligned} & \left[\int d^3 x G(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right] \left[\int d^3 y_1 d^3 y_2 G(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) G(\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1) \right] \left[\int d^3 z_1 d^3 z_2 G(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) G(\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_1) \right] \\ & \times \left[\int d^3 w_1 d^3 w_2 d^3 w_3 G(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3) G(\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_2) G(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1) \right] \\ & = (\text{Tr } G) (\text{Tr } G^2)^2 (\text{Tr } G^3) \end{aligned}$$

となる。同様に型 $\{r_m\}$ の置換に対する 1 つの積分は、一般に

$$\int d^3 x_1 \cdots d^3 x_n G(\mathbf{x}_{P(1)}, \mathbf{x}_1) \cdots G(\mathbf{x}_{P(n)}, \mathbf{x}_n) = (\text{Tr } G)^{r_1} (\text{Tr } G^2)^{r_2} \cdots (\text{Tr } G^n)^{r_n}$$

となることが容易に推察される。これと $\text{sgn}(P)$ の式 (11.15) を大分配関数 (11.12) に代入し、冒頭の方針にしたがって $\sum_P \rightarrow \sum_{\{r_m\}} N(\{r_m\})$ とすると、式 (11.17) を得る。

■大分配関数の式 (11.20) の導出 大分配関数の式 (11.17) に、 $N(\{r_m\})$ の具体的な式 (11.16) と

$$e^{\beta\mu n} = \prod_{m=1}^n (e^{\beta\mu m})^{r_m} \quad \left(\because n = \sum_{m=1}^n m r_m \right)$$

を代入すると、

$$\mathcal{Z} = \sum_n e^{\beta\mu n} \frac{1}{n!} \sum_{\{r_m\}} \left[((-1)^{m+1} \text{Tr } G^m)^{r_m} \right] N(\{r_m\}) = \sum_n \sum_{\{r_m\}} \prod_{m=1}^n \frac{1}{r_m!} \left(\frac{(-1)^{m+1}}{m} e^{\beta\mu m} \text{Tr } G^m \right)^{r_m}$$

と書き換えられる。ここで大分配関数の常套的な計算方法として、 $n = 0, 1, \dots, \infty$ の和の下では、制約条件 $\sum_{m=1}^n m r_m = n$ を解除して

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \prod_{m=1}^{\infty} \sum_{r_m=0}^{\infty} \frac{1}{r_m!} \left(\frac{(-1)^{m+1}}{m} e^{\beta\mu m} \text{Tr } G^m \right)^{r_m} \quad (11.19') \\ &= \prod_{m=1}^{\infty} \exp \left(\frac{(-1)^{m+1}}{m} e^{\beta\mu m} \text{Tr } G^m \right) = \exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} e^{\beta\mu m} \text{Tr } G^m \right) : (11.20) \end{aligned}$$

とできる。

■大分配関数 (11.20) の式 (11.22) への書き換え 最初に大分配関数 \mathcal{Z} の式 (11.12) を書き下した時点で、トレースの基底 $|\alpha_n\rangle$ を自由な n 粒子の運動量固有状態 $|\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n\rangle$ に選んでいたならば、 \mathcal{Z} の式 (11.20) における G が単に、運動量空間の Green 関数

$$G(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \beta) = \langle \mathbf{k}, \tau = \beta | \mathbf{q}, \tau = 0 \rangle = e^{-\beta k^2/2m} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q})$$

に置き換わる。このとき再び引数 β を省略すると、例えば

$$\begin{aligned} \text{Tr } G^3 &\equiv \int d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3 G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3) G(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2) G(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1) \\ &= \int d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3 e^{-\beta k_1^2/2m} e^{-\beta k_2^2/2m} e^{-\beta k_3^2/2m} \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \delta^3(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2) \delta^3(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \end{aligned}$$

となる。すると2つのデルタ関数 $\delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \delta^3(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2)$ の下では、 $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$ として第3のデルタ関数を

$$\delta^3(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) = \frac{\delta_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}}{(2\pi/L)^3} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3}$$

と置き換えて良いので (空間の体積 $V = L^3$ を想定),

$$\text{Tr } G^3 = V \int \frac{d^3k_3}{(2\pi)^3} \left(e^{-\beta k_3^2/2m} \right)^3.$$

この結果は直ちに

$$\text{Tr } G^l = V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(e^{-\beta k^2/2m} \right)^l \quad (l = 1, 2, \dots)$$

と一般化できる。これを式 (11.20) に代入すると、

$$\mathcal{Z} = \exp \left\{ V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{l} \left(e^{-\beta(\mu - k^2/2m)} \right)^l \right\} = \exp \left\{ V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln(1 + e^{\beta(\mu - k^2/2m)}) \right\} : (11.22)$$

を得る。

■「よく知られた恒等式 $\ln \det(1 + e^\mu G) = \text{Tr} \ln(1 + e^\mu G)$ 」(p.155, 1.5,6) について 明らかに $e^\mu \rightarrow e^{\beta\mu}$ である (指数は無次元). 教科書では 12.5.1 節で一般公式

$$\ln \det A = \text{tr} \ln A \quad (12.72)$$

として、再度言及されている。これを証明しよう [19, pp.88–90] [18, p.116, pp.226–227]. 任意の n 次正方行列 $B(x)$ に対し

$$\frac{d}{dx} (\det B) = \frac{d}{dx} (\varepsilon_{i_1 \dots i_n} B_{1i_1} \dots B_{ni_n}) = \sum_{k=1}^n \varepsilon_{i_1 \dots i_n} B_{1i_1} \dots \frac{dB_{ki_k}}{dx} \dots B_{ni_n} = \sum_{k,l} \Delta_{kl} \frac{dB_{kl}}{dx}$$

が成り立つ ($\{i_k\}$ でも和をとる). ただし最右辺における Δ_{kl} は B の (k, l) 余因子であり、最後の等号は、第3辺を

$$\sum_{k=1}^n \det \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{k1}' & B_{k2}' & \dots & B_{kn}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{pmatrix} \quad \left(\text{ただし } B_{kl}' \equiv \frac{dB_{kl}}{dx} \right)$$

と書いて k 行目で展開することを考えれば分かりやすい. 特に逆行列を持つ B に対しては, 両辺を $\det B (\neq 0)$ で割り, $B^{-1} = \frac{1}{\det B} (\Delta_{kl})$ と表されることに注意すると,

$$\frac{1}{\det B} \frac{d}{dx} (\det B) = \text{tr} \left(B^{-1} \frac{dB}{dx} \right)$$

と書き換えられる. ここで任意の n 次正方行列 C を用いて $B(x) = e^{xC}$ とおくと*33, $\frac{dB}{dx} = BC$ となるので, 上式は

$$\text{tr} C = \frac{1}{\det(e^{xC})} \frac{d}{dx} \det(e^{xC}) = \frac{d}{dx} \ln |\det(e^{xC})|$$

を与える*34. 両辺を x で積分すると $\det(e^{xC}) = \text{const} \times e^{x \text{tr} C}$ であり, $x = 0$ を代入すると $\text{const} = 1$ と定まるので, 公式

$$\det(e^{xC}) = e^{x \text{tr} C}, \quad \therefore \det(e^C) = e^{\text{tr} C} (> 0)$$

を得る. ここで $e^C (= B(1)) = A$ とおくと, C は“行列 A の対数” $C = \ln A$ と書くことが許される. このように $\ln A$ を定義できる A に対して, 上式は冒頭の式 (12.72) に書き換えられる.

■自由 Bose 粒子系の大分配関数 (11.5) の再導出 自由 Fermi 粒子系の大分配関数 (11.22) の導出過程を, Bose 粒子系に対して修正しよう. Bose 粒子系に対しては, 式 (11.12) から $\text{sgn}(P)$ を除いた \mathcal{Z} の表式から出発すれば良い. その際, あらかじめトレースを評価する基底を平面波状態に選び直しておく,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{\beta \mu n} \sum_P \int d^3 k_1 \cdots d^3 k_n G(\mathbf{k}_{P(1)}, \mathbf{k}_1) \cdots G(\mathbf{k}_{P(n)}, \mathbf{k}_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{\beta \mu n} \sum_{\{r_l\}} N(\{r_l\}) \prod_{l=1}^n (\text{Tr} G^l)^{r_l} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\{r_l\}} \prod_{l=1}^n \frac{1}{r_l!} \left(\frac{1}{l} e^{\beta \mu l} \text{Tr} G^l \right)^{r_l} \\ &= \prod_{l=1}^{\infty} \sum_{r_l=0}^{\infty} \frac{1}{r_l!} \left(\frac{1}{l} e^{\beta \mu l} \text{Tr} G^l \right)^{r_l} \\ &= \exp \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l} e^{\beta \mu l} \text{Tr} G^l \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \left(e^{\beta(\mu - k^2/2m)} \right)^l \right\} \\ &= \exp \left\{ -V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \ln \left(1 - e^{\beta(\mu - k^2/2m)} \right) \right\} \end{aligned}$$

となる. こうして再び大分配関数 (11.5) に到達する.

11.3 松原の和

5.3.1 節では Bose 粒子系の真空エネルギー密度の公式 (5.38):

$$\mathcal{E}(m^2) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} \quad (m \text{ に依らない定数を除いた}) \quad (11.27)$$

*33 逆行列は $B^{-1}(x) = e^{-xC}$ である. 実際 C どうしは交換するので, “指数法則” $e^{\pm xC} e^{\mp xC} = 1$ が成り立つ.

*34 最右辺の $|\dots|$ は絶対値を表す. 混乱を避けるため, 行列式は一貫して \det で表してきた.

を導いた [$\omega_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ が m 依存性を担う]. これを有限温度 $T = 1/k_B\beta \neq 0$ の場合に修正するには, 式 (5.36):

$$\frac{\partial \mathcal{E}(m^2)}{\partial m^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m^2} \quad (11.25)$$

から出発すれば充分である ($k^2 \equiv (k_0)^2 + \mathbf{k}^2$ は Euclid 空間における内積). ただし前節で見たように, 有限温度では Euclid 時間が周期 $\beta (\neq \infty)$ を持つと見なすのが適当である. そこで上式 (11.25) における [運動量の Euclid 時間成分の虚部] k_0 に関する積分を, 周期境界条件の下で許容される “松原振動数” $\omega_n \equiv 2\pi n/\beta$ に関する離散的な和に置き換える:

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} f(k_0) \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n f(\omega_n). \quad (\text{松原の和}) \quad (11.28)$$

このとき真空エネルギー密度は,

$$\mathcal{E}(m^2) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{2} \omega_{\mathbf{k}} + \frac{\ln(1 - e^{-\beta \omega_{\mathbf{k}}})}{\beta} \right\} \quad (20)$$

と修正される (再び m に依らない定数を除いた).

式 (20) の導出 式 (11.25) における k_0 での積分を松原の和に置き換えると,

$$\frac{\partial \mathcal{E}(m^2)}{\partial m^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \sum_n \frac{1}{\omega_n^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2}$$

となる. ここで恒等式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2} = \frac{\pi}{z} \coth(\pi z) \quad (11.29)$$

[本稿次節で確認] に $z = \frac{\beta}{2\pi} \omega_{\mathbf{k}}$ を代入すると, n に関する和は

$$\sum_n \frac{1}{\omega_n^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2} = \frac{\beta}{2} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \coth \frac{\beta}{2} \omega_{\mathbf{k}} \quad (11.30)$$

と評価できる. よって,

$$\frac{\partial \mathcal{E}(m^2)}{\partial m^2} = \frac{1}{4} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \coth \frac{\beta}{2} \omega_{\mathbf{k}}$$

を得る [これは低温の極限 $\beta \rightarrow \infty$ で式 (5.37) に戻る]. 次に, これを m^2 で積分することを考える. 被積分関数の因子 $\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \coth \frac{\beta}{2} \omega_{\mathbf{k}}$ を m^2 で積分すると, m に依らない積分定数を除いて $\frac{4}{\beta} \ln \left(\sinh \frac{\beta}{2} \omega_{\mathbf{k}} \right)$ となる (微分により確かめられる). さらに

$$\ln \left(\sinh \frac{\beta}{2} \omega_{\mathbf{k}} \right) = \ln \left(\frac{1}{2} \cdot e^{\beta \omega_{\mathbf{k}}/2} \cdot (1 - e^{-\beta \omega_{\mathbf{k}}}) \right) = \frac{\beta}{2} \omega_{\mathbf{k}} + \ln(1 - e^{-\beta \omega_{\mathbf{k}}}) - \ln 2 \quad (11.31')$$

と書き換えられる. [最右辺の定数項 $\ln 2$ の $\mathcal{E}(m^2)$ への寄与は, m に依らないので落として良い.] 以上より結局 m^2 による積分に伴って, 被積分関数の因子が

$$\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \coth \frac{\beta}{2} \omega_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{4}{\beta} \left\{ \frac{\beta}{2} \omega_{\mathbf{k}} + \ln(1 - e^{-\beta \omega_{\mathbf{k}}}) \right\}$$

と置き換わることになるので, 有限温度でのエネルギー密度 (20) を得る.

[エネルギー密度 (20) は低温の極限 $\beta \rightarrow \infty$ で式 (11.27) に戻り,] β に関する付加的な項は, 自由 Bose 粒子系の大正準ポテンシャル (11.5) と同じ形を持つ. [具体的には Ω/V と表される (ただしエネルギー $(\mu - k^2/2m)$ を相対論的な表式 $\omega_{\mathbf{k}}$ に置き換える).]

Dirac 場で記述される Fermi 粒子系に対しても同様の議論ができる [本稿では省略].

11.3 節について

■数学公式 (11.29) の導出 実数 z に対して示せば充分である. Fourier 級数展開

$$f(x) \equiv \cosh(\alpha x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

を考えるとところから始めよう. Fourier 係数は

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} f(x) dx = \frac{1}{2 \cdot 2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}) dx \\ &= \frac{1}{2 \cdot 2\pi} \left\{ \frac{e^{(\alpha-im)\pi} - e^{-(\alpha-im)\pi}}{\alpha - im} - \frac{e^{(\alpha+im)\pi} - e^{-(\alpha+im)\pi}}{\alpha + im} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} (-1)^m \sinh(\pi\alpha) \left(\frac{1}{\alpha - im} + \frac{1}{\alpha + im} \right) \quad (\because e^{\pm im\pi} = (-1)^m) \\ &= \frac{1}{\pi} (-1)^m \sinh(\pi\alpha) \frac{\alpha}{\alpha^2 + m^2} \end{aligned}$$

と計算されるので,

$$\cosh(\alpha x) = \frac{\alpha \sinh(\pi\alpha)}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2} e^{inx} = \frac{\sinh(\pi\alpha)}{\pi\alpha} \left(1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2} \cos nx \right).$$

ここに $x = \pi$ を代入し, 最右辺の $\sinh(\pi\alpha)$ を最左辺に移項すると,

$$\coth(\pi\alpha) \equiv \frac{\cosh(\pi\alpha)}{\sinh(\pi\alpha)} = \frac{1}{\pi\alpha} \left(1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2} \right) = \frac{\alpha}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + m^2}$$

を得る. 実パラメータ α を変数 z に改めれば, これは式 (11.29) に他ならない.

第 12 章 径路積分

序文を引用する：

本章では Feynman の径路積分 (path integral) を紹介する。(中略) 読者は、この技法に慣れ親しむにつれて、おそらく径路積分の技法こそが物理の本質を捉えたものであり、むしろハミルトニアンと Hilbert 空間を用いる伝統的な方法は、径路積分を評価するための数学的な便法に過ぎないという Feynman の考え方にも共感を持てるようになるかもしれない。

12.1 1 粒子の量子力学

12.1.1 実時間

本節は基本的に文献 [13, § 2.5] の復習にあたるため、詳細は同文献のノートに譲ることにし、ここでは簡単な要約で済ませる。

ハミルトニアン $\hat{H} = -\frac{1}{2m}\partial_x^2 + V(x)$ で記述される 1 次元の 1 粒子系に対して、[11.2 節で導入した] 伝播関数 $G(x_2, x_1, t)$ は径路積分

$$\langle x_2, t | x_1, 0 \rangle = \mathcal{N} \int_{x_1(0)}^{x_2(t)} d[x(t)] e^{iS[x(t)]/\hbar} \quad (12.19/12.21)$$

で与えられる (次節以降は \hbar を省略)。ここに微小時間 $\delta t = t/N$ おきに離散化した各時刻 $t_i = i\delta t$ における、粒子の位置 x_i を指定して得られる径路 $x(t)$ に対して

$$d[x(t)] \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} dx_{N-1} dx_{N-2} \cdots dx_1 : \text{径路の“体積要素”(“測度”)} \quad (12.20)$$

$$S[x(t)] \equiv \int_0^t dt \left\{ \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x) \right\} : \text{“古典的な”作用} \quad (N \rightarrow \infty \text{を想定})$$

である。また $\mathcal{N} \approx (m/2\pi i\hbar\delta t)^{N/2}$ は規格化定数であり、 $N \rightarrow \infty, \delta t \rightarrow 0$ の極限で発散する。これを「記号 $d[x(t)]$ に含めて省略することもできるが、 \mathcal{N} を残しておいても、物理量を計算する際に発散は相殺される」(p.162, 1.8–9)。 $\mathcal{N} \int d[x(t)] \cdots$ の代わりに $\int \mathcal{D}x \cdots$ と表記する文献が多い (p.162 訳註)。

12.1.2 Euclid 時間

伝播関数 (12.19) は、虚時間 $\tau = it$ を用いて書き換える扱いやすくなる。[指数 $i \int_0^t dt \left\{ \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x) \right\}$ において $i \int_0^t dt \rightarrow \int_0^\tau d\tau$, $(dx/dt)^2 = -(dx/d\tau)^2$ と置き換わるので、] 改めて $dx/d\tau \equiv \dot{x}$ と表記すると、

$$\begin{aligned} \langle x_2 | e^{-\hat{H}\tau} | x_1 \rangle &= \sum_n \varphi_n(x_2) \varphi_n^*(x_1) e^{-E_n \tau} \\ &= \mathcal{N} \int_{x_1(0)}^{x_2(\tau)} d[x(\tau)] e^{-\int_0^\tau d\tau \left\{ \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) \right\}} \end{aligned} \quad (12.22)$$

と書き換えられる。ここで第 2 辺の $\varphi_n(x) \equiv \langle x | n \rangle$ はエネルギー固有値 E_n の固有関数であり (教科書の初出は 12.1.1 節)、以降、Euclid 時間 τ は実数と考える。Euclid 時空への移行に伴って、指数の被積分関数がラグランジアン $\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x)$ から、負号付きエネルギーの形 $-\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x)\right)$ に変わったことに注意する。「こ

のことに、統計力学との間に、数学的構造の類似関係が生じる (p.168 [式 (12.53) の箇所] 参照) (p.163 訳註).

第2, 第3段落を引用:

式 (12.22) は、式 (12.19) よりも数学的に扱いやすい。新しい指数関数は、ぎざぎざの径路を抑制する傾向を持つ。しかし“典型的な”径路 $x(\tau)$ は連続関数であっても微分可能ではない。指数に現れる \dot{x}^2 は文字通りの意味のものではない。式 (12.22) は実際の多重積分を容易に記憶するための省略記法なのである。

虚時間に関する形而上学的な思弁は (その誘惑は強いけれども) 控えておこう。式 (12.22) は、通常の実時間の世界における波動関数やエネルギー等のさまざまな量を導き出すための、形式的な公式であると考えてもらいたい。

例えば式 (12.22) を用いると、基底状態のエネルギーに対する“Feynman-Kac 公式”

$$E_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{T} \ln \int_{x_1(0)}^{x_2(T)} d[x(\tau)] e^{-\int_0^T d\tau \left\{ \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) \right\}} \right\} \quad (12.23)$$

を簡単に導ける [本稿次節を参照]。 E_0 の値は、右辺における人為的に設定した両端の位置 x_1, x_2 に依存してはならない。実際、「対数を取ると、結果は端点 x_1 と x_2 の値の選択には無関係に決まる」 (式 (12.23) の下2,3行)。 [始・終時刻を含む微小区間 $\delta\tau$ からの寄与は、振幅の中で乗法的に分離され (後の式 (12.23')) のように)、それ故に対数のもとで加法的に分離できるので、 T で割って $T \rightarrow \infty$ とした結果に影響しないと考えられる。]

Heisenberg 描像を採用すると、演算子の時間発展は

$$\hat{x}(\tau) = e^{\hat{H}\tau} x(0) e^{-\hat{H}\tau} \quad (12.24)$$

に従う。また基底ケットの組 $\{|x, \tau\rangle\}$ は [Schrödinger 描像の状態と“逆向きに”変化する [13, pp.116–119], すなわち]

$$\langle x, \tau | = \langle x, 0 | e^{-\hat{H}\tau}, \quad |x, \tau\rangle = e^{\hat{H}\tau} |x, 0\rangle \quad (12.25)$$

を満たす。このように Euclid 世界における発展はユニタリーではなく、それ故、 $\{|x, \tau\rangle\}$ の規格化は保持されない。それでも完備関係式

$$\int dx |x, \tau\rangle \langle x, \tau| = \int dx e^{\hat{H}\tau} |x, 0\rangle \langle x, 0| e^{-\hat{H}\tau} = I \quad \left(\because \int dx |x, 0\rangle \langle x, 0| = I \right) \quad (12.26)$$

は、各 τ で成立している。

12.1.2 節について

■Feynman-Kac 公式 (12.23) の導出 「 T が大きいと、最低エネルギー状態が、和 $\sum_n \varphi_n(x_2) \varphi_n^*(x_1) \exp\{-E_n \tau\}$ を支配する」 (p.163)。実際 $n \geq 1$ の項は $n = 0$ の最低エネルギーの項に比べて指数関数的に小さい。そこで式 (12.22) の第2辺を $n = 0$ の項だけで近似し、第3辺とともに対数をとると

$$E_0 \simeq -\frac{1}{T} \left[-\ln \varphi_0(x_2) \varphi_0^*(x_1) + \ln \left\{ \mathcal{N} \int_{x_1(0)}^{x_2(T)} d[x(\tau)] e^{-\int_0^T d\tau \left\{ \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) \right\}} \right\} \right]$$

となる。ここでは (真数 $\varphi_0(x_2)\varphi_0^*(x_1)$) を無次元化するための因子を括り出すとともに、目障りな規格化定数 \mathcal{N} を経路積分要素 $d[x(t)]$ に吸収させることにする。さらに $\varphi_0(x_2)\varphi_0^*(x_1)$ が指定した空間位置 x_1, x_2 で決まる、時間 T によらない定数であることに注意して、 $T \rightarrow \infty$ の極限をとると式 (12.23) を得る。

■Wiener 測度 (12.27): $d\mu[x(\tau)] = d[x(\tau)]e^{-\int d\tau \frac{m\dot{x}^2}{2}}$ について 「これについては後から論じる」 (12.1 節の最終文) とあるのは、12.2 節についてノートで補足したように、因子 $e^{-\int d\tau \frac{m\dot{x}^2}{2}}$ のため積分への主要な寄与が、拡散やランダム・ウォークの変位と同じ性質 $|\delta x| \lesssim \delta\tau^{1/2}$ を満たす経路に限定されることを指すと考えられる。

実は、このように Euclid 化を行 [な] った後の経路積分測度は、Wiener 測度となり、経路積分は Wiener 積分として厳密に定式化できるのである。残念ながら元の経路積分は、現在のところ数学的には厳密な定式化が完成していない。従って、Euclid 化した後で計算を実行し、後で [Euclid 化の操作を] 元に戻せば、現実の Minkowski 空間での結果が得られるというわけである。もちろんこれは τ を it に置き戻すことに相当する [7, p.195].

なおオーバードンプな Langevin 系では、微小な時間ステップ Δt における Brown 粒子の変位が、揺動力を表す期待値 0、分散 Δt のガウシアン・ホワイト・ノイズ ΔW に比例する。 ΔW を Wiener 増分、

$$W(t) = \int_0^t dW(t') \sim (\text{粒子の変位})$$

を Wiener 過程という。 $W(t)$ は時間について微分不可能な「ギザギザ」した関数になる [20, pp.158–160].

12.2 ゲージ不変性と演算子の順序

実は同じ古典的な作用に対しても、経路積分は離散化の方法に応じて、異なる量子力学系を定義し得る。このことを見るために、ラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x}) + e\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}} - eA_0 \quad (12.28')$$

で記述される、電磁場中の荷電粒子 (電荷 e) を考える。

note : 式 (12.28') について $\dot{\mathbf{x}} \rightarrow \dot{\mathbf{x}}$ と訂正した。他方ポテンシャル $V(\mathbf{x})$ が時間に依存する場合を考えて、その引数 x を 4 元ベクトルと見ても、以降の議論はそのまま成立する。また本稿では粒子の質量 m を明示し、 A_0 を導入する。教科書では $m = 1$ とおき、また磁場のみを考え $A_0 = 0$ としている。もっとも以下では eA_0 はポテンシャル V と同列に扱われるため、 V に吸収させることもできる。

このとき経路積分における指数に対するゲージ場との結合項の寄与は、Euclid 時間を用いて

$$ie \int (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} - A_0 dt) = ie \int \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} d\tau - e \int A_0 d\tau \quad (12.30')$$

と書き換えられる。そこで改めて $\dot{\mathbf{x}} \equiv d\mathbf{x}/d\tau$ と表記すると、振幅関数 [終状態の関数と見た遷移振幅] は

$$\psi(\mathbf{x}, \tau) = \mathcal{N} \int_{\mathbf{x}(0)}^{\mathbf{x}(\tau)} d[\mathbf{x}(\tau)] \exp \left[- \int d\tau \left\{ \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + V + eA_0 - ie\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}} \right\} \right] \quad (12.29')$$

と表される．ここで [1 次元系の規格化定数 $\mathcal{N} \simeq (m/2\pi i \delta t)^{N/2} = \prod_i (m/2\pi \delta \tau)^{1/2}$ (i は中間時刻のラベル) を念頭に], 経路積分を

$$\psi(\mathbf{x}, \tau) \simeq \lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \int \left[\prod_i \frac{d^3 x_i}{(2\pi \delta t/m)^{3/2}} \right] \exp \left[- \sum_i \left\{ \frac{m(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i)^2}{2\delta\tau} + (V(\mathbf{x}_i) + eA_0(\mathbf{x}_i)) \delta\tau - ie(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{A} \left(\frac{\mathbf{x}_{i+1} + \mathbf{x}_i}{2}, \tau \right) \right\} \right] \quad (12.31')$$

と離散化しよう．ここでのポイントは， \mathbf{A} の引数を区間 $(\mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_i)$ の“中点”に選んでいることである [教科書の引数 $\frac{1}{2}(\mathbf{x}_{i+1} + \mathbf{x}_i)$ を修正した]．これに比べて V [と eA_0] を評価する方法は，さほど重要ではない．このとき経路積分から Schrödinger 方程式を導く過程を，電磁場との相互作用があり，Euclid 時間 τ を利用した今の場合にやり直すと，ゲージ不変な方程式

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{1}{2m} (\nabla - ie\mathbf{A})^2 \psi - (V + eA_0) \psi \quad (12.37')$$

が導かれる (導出は下記)．“中点則”を採らないと，[導出過程より] 共変微分 $(\nabla - ie\mathbf{A})$ の形は現れず，ゲージ不変な方程式は得られない．

note : 式 (12.37') について 電磁場をゼロとおくと熱伝導方程式 (11.9) に戻る．また左辺に $\partial_\tau = -i\partial_t$ を代入すると分かるように，式 (12.37') は電磁場と相互作用する荷電粒子に対する，本来の Schrödinger 方程式

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m} (\nabla - ie\mathbf{A})^2 \psi + (V + eA_0) \psi$$

になっている．上式のゲージ不変性は，既に文献 [14, pp.401–402, p.411] (のノート) で確認済みである．式 (12.37') の導出 経路積分 (12.31) は，“時刻” τ から $\tau + \delta\tau$ の区間より前の全ての中間変数 \mathbf{x}_i に関する積分を実行すると，

$$\psi(\mathbf{x}, \tau + \delta\tau) = \int \frac{d^3 \eta}{(2\pi \delta\tau/m)^{3/2}} \exp \left[-\frac{m}{2\delta\tau} \boldsymbol{\eta}^2 - (V(\mathbf{x}) + eA_0(\mathbf{x})) \delta\tau - ie\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{A} \left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}, \tau \right) \right] \psi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, \tau) \quad (12.32')$$

となる [本稿次節で補足]．Gauss 分布の因子 $e^{-\frac{m}{2\delta\tau} \boldsymbol{\eta}^2}$ によって，大きな $\boldsymbol{\eta}$ からの寄与抑制されるので， $O(\delta\tau) \sim O(\boldsymbol{\eta}^2)$ を想定して良い [本稿次節で補足]．これを踏まえると， $O(\delta\tau)$ 程度の項までを残すには，ひとまず

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, \tau + \delta\tau) &= \int \frac{d^3 \eta}{(2\pi \delta\tau/m)^{3/2}} e^{-\frac{m}{2\delta\tau} \boldsymbol{\eta}^2} \left(\psi(\mathbf{x}, \tau) + \eta_a \partial_a \psi + \frac{1}{2} \eta_a \eta_b \partial_a \partial_b \psi + \dots \right) \\ &\quad \times (1 - (V(\mathbf{x}) + eA_0(\mathbf{x})) \delta\tau + \dots) \\ &\quad \times \left(1 - ie\eta_c A_c + \frac{(ie)^2}{2} \eta_c \eta_d A_c A_d - \frac{ie}{2} \eta_c \eta_d \partial_d A_c + \dots \right) \end{aligned} \quad (12.33')$$

とすれば良い [空間成分 $a, b, \dots = 1, 2, 3$ で和をとる]．青字の $1/2$ は式 (12.31') における，場 \mathbf{A} を評価する際の“中点則”に起因している．ここで Gauss 積分 (に準ずる積分)

$$\int \frac{d^3 \eta}{(2\pi \delta\tau/m)^{3/2}} e^{-\frac{m}{2\delta\tau} \boldsymbol{\eta}^2} = 1, \quad (12.34')$$

$$\int \frac{d^3 \eta}{(2\pi \delta\tau/m)^{3/2}} e^{-\frac{m}{2\delta\tau} \boldsymbol{\eta}^2} \eta_a \eta_b = \frac{\delta\tau}{m} \delta_{ab} \quad (12.35')$$

[本稿次節で補足] を実行すると,

$$\psi(\mathbf{x}, \tau + \delta\tau) = \psi(\mathbf{x}, \tau) + \delta\tau \left\{ \frac{1}{2m} (\nabla - ie\mathbf{A})^2 \psi - (V(x) + eA_0(x)) \psi \right\} + \dots \quad (12.36')$$

となるので [本稿次節で確認], 式 (12.37') を得る.

このように中点則が理論のゲージ不変性を保証する理由は, 次のように解釈できる. すなわちゲージ変換 $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ に伴って, 経路積分における指数の因子 (12.30') $-ie \int A_\mu dx^\mu$ が

$$-ie \int (\partial_\mu \Lambda) dx^\mu = (-ie) (\Lambda(\mathbf{x}, \tau) - \Lambda(0, 0)) \quad (12.38')$$

だけ変化する. [このように経路積分による定式化では, 電磁場のゲージ変換に伴って振幅 $\psi(\mathbf{x}, \tau)$ の位相も自動的に変化する.] ところが式 (12.31') で単純な差分 $dx^\mu A_\mu \rightarrow (x_{i+1} - x_i)^\mu A_\mu(x_i)$ を採用していたならば, 空間成分の寄与は各ステップ $\delta\tau$ での誤差 $O(\delta\mathbf{x}^2) = O(\delta\tau)$ をもたらすので, 正しい位相の変化 (12.38') が得られない. 他方, 中点則における各ステップの誤差は $O(\delta\mathbf{x}^3) = O(\delta\tau^{3/2}) = o(\delta\tau)$ なので, $\delta\tau \rightarrow 0$ の極限で得られる積分 (12.31') に影響しない.

最後に, 最終段落を引用する:

一般に, 経路積分に対する異なる離散化のやり方は, ハミルトニアンの中の非可換な演算子積の異なる順序化に対応するものと考えられる. 量子化すべき作用量が新たに与えられた場合, できるだけ望ましい対称性を残すという観点が, 離散化の方法を選ぶ指針になる.

12.2 節について

■式 (12.32') について 完全性条件 (12.26) を利用すると,

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, \tau + \delta\tau) &\equiv \langle \mathbf{x}, \tau + \delta\tau | \mathbf{x}_0, 0 \rangle = \int d^3\eta \langle \mathbf{x}, \tau + \delta\tau | \mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, \tau \rangle \langle \mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, \tau | \mathbf{x}_0, 0 \rangle \\ &= \int d^3\eta \langle \mathbf{x}, \tau + \delta\tau | \mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, \tau \rangle \psi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, \tau) \end{aligned}$$

を得る (教科書の式 (12.38) では $\mathbf{x}_0 = 0$). 次いで最右辺の微小時間における遷移振幅 $\langle \mathbf{x}, \tau + \delta\tau | \mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, \tau \rangle$ に式 (12.31') を適用すると, 式 (12.32') を得る. その際, 各微小時間の振幅に充てられる規格化定数が $(2\pi\delta/m)^{-3/2}$ であること, 中継地点 $\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}$ から終点 \mathbf{x} への変位が $(-\boldsymbol{\eta})$ であることに注意する.

■「 $O(\delta\tau) \sim O(\boldsymbol{\eta}^2)$ 」 (p.165, l.18) について ランダム・ウォーク, あるいは Brown 運動の変位と同じ性質である. このことは Euclid 時間を用いた Schrödinger 方程式 (11.9) が, Brown 粒子を記述する拡散方程式と同じ形を持つことを考えれば, 理に適っている. 通常の時間 t を用いる場合にも Gauss 積分が Fresnel 積分に置き換わるだけで, 経路積分から Schrödinger 方程式を導く際に, 微小時間 δt の 1 次と空間における変位 $(-\boldsymbol{\eta})$ の 2 次を残す必要があることには変わらない [13, pp.164–165].

■積分公式 (12.34'–35') について Gauss 積分の公式

$$\int dX e^{-\alpha X^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \int dX \alpha^2 e^{-\alpha X^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha^{-3/2}$$

による。特に第2式(12.35')は、 $a \neq b$ のとき奇関数の積分となってゼロになるので、 δ_{ab} に比例する。 $a = b$ のときの値は、

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3\eta}{(2\pi\delta\tau/m)^{3/2}} e^{-\frac{m}{2\delta\tau}\eta^2} \eta_x^2 \\ &= \left(\int \frac{d\eta_x}{(2\pi\delta\tau/m)^{1/2}} e^{-\frac{m}{2\delta\tau}\eta_x^2} \eta_x^2 \right) \left(\int \frac{d\eta_y}{(2\pi\delta\tau/m)^{1/2}} e^{-\frac{m}{2\delta\tau}\eta_y^2} \right) \left(\int \frac{d\eta_z}{(2\pi\delta\tau/m)^{1/2}} e^{-\frac{m}{2\delta\tau}\eta_z^2} \right) \\ &= \int \frac{d\eta_x}{(2\pi\delta\tau/m)^{1/2}} e^{-\frac{m}{2\delta\tau}\eta_x^2} \eta_x^2 = \frac{1}{(2\pi\delta\tau/m)^{1/2}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2\delta\tau}{m} \right)^{3/2} = \frac{\delta\tau}{m}. \end{aligned}$$

■式(12.36')の導出 式(12.33')から、さらに $O(\delta\tau)$ までの近似に不要な項を捨てると、

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, \tau + \delta\tau) &= (1 - (V(x) + eA_0(x))\delta\tau + \dots) \\ &\quad \times \int \frac{d^3\eta}{(2\pi\delta\tau/m)^{3/2}} e^{-\frac{m}{2\delta\tau}\eta^2} \left(\psi(\mathbf{x}, \tau) + \eta_a \partial_a \psi + \frac{1}{2} \eta_a \eta_b \partial_a \partial_b \psi + \dots \right) \\ &\quad \times \left(1 - ie\eta_c A_c + \frac{(ie)^2}{2} \eta_c \eta_d A_c A_d - \frac{ie}{2} \eta_c \eta_d \partial_d A_c + \dots \right) \\ &= (1 - (V(x) + eA_0(x))\delta\tau) \\ &\quad \times \int \frac{d^3\eta}{(2\pi\delta\tau/m)^{3/2}} e^{-\frac{m}{2\delta\tau}\eta^2} \left\{ \psi(\mathbf{x}, \tau) \left(1 - ie\eta_c A_c + \frac{(ie)^2}{2} \eta_c \eta_d A_c A_d - \frac{ie}{2} \eta_c \eta_d \partial_d A_c \right) \right. \\ &\quad \left. + (\eta_a \partial_a \psi)(1 - ie\eta_c A_c) + \frac{1}{2} \eta_a \eta_b \partial_a \partial_b \psi \right\} + \dots \end{aligned}$$

となる。次いで Gauss 型の積分(12.34'-35')を実行し、奇関数の積分が消えることにも注意すると、

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, \tau + \delta\tau) &= (1 - (V(x) + eA_0(x))\delta\tau) \left\{ \psi(\mathbf{x}, \tau) + \frac{\delta\tau}{2m} \underbrace{((ie)^2 \mathbf{A}^2 - ie(\nabla \cdot \mathbf{A}) - 2ie\mathbf{A} \cdot \nabla + \nabla^2)}_{(\nabla - ie\mathbf{A})^2} \psi \right\} + \dots \\ &= \psi(\mathbf{x}, \tau) + \delta\tau \left\{ \frac{1}{2m} (\nabla - ie\mathbf{A})^2 \psi - (V(x) + eA_0(x))\psi \right\} + \dots : (12.36') \end{aligned}$$

を得る。

12.3 1粒子系の相関関数

1粒子系の量子力学で、場の理論における n 点 Green 関数 [6.1 節] に相当する量

$$G^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) = \langle 0 | T \{ \hat{x}(\tau_1) \cdots \hat{x}(\tau_n) \} | 0 \rangle \quad (12.42)$$

を定義できる [12.1 節に引き続き Heisenberg 描像を用いている]。ここで $|0\rangle$ は基底状態であり、時間順序化は Euclid 時間 τ_i について行う。この Euclid 時空における Green 関数は、経路積分を用いて次のように表される。

定理：

$$\langle 0 | T \{ \hat{x}(\tau_1) \cdots \hat{x}(\tau_n) \} | 0 \rangle = \frac{1}{Z} \int_{x(-\infty)}^{x(\infty)} d[x(\tau)] \{ x(\tau_1) \cdots x(\tau_n) \} e^{-S[x]}, \quad (12.50)$$

$$S[x] = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) \right\}, \quad (12.51)$$

$$Z = \int_{x(-\infty)}^{x(\infty)} d[x(\tau)] e^{-S[x]}. \quad (12.52)$$

注意： 上式は統計力学における変数の熱平均の式

$$\langle X_1 X_2 \cdots X_N \rangle = \frac{1}{Z} \sum \{ X_1 X_2 \cdots X_N \} e^{-\beta H} \quad (12.53)$$

と類似している。

さて、定理 (12.50) を証明しよう。

まず n 点 Green 関数を、 $\hat{x}(\pm T)$ の固有値 $x_{\pm T}$ の固有状態 $|x_{\pm T}, \pm T\rangle$ に関する行列要素

$$\langle x_T, T | T \{ \hat{x}(\tau_1) \cdots \hat{x}(\tau_n) \} | x_{-T}, -T \rangle \quad (12.43)$$

に関係付ける。[Heisenberg 描像の基底ケットの時間発展 (12.25) より]

$$|x_{-T}, -T\rangle = e^{-\hat{H}T} |x_{-T}\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n | x_{-T} \rangle e^{-E_n T}, \quad (12.46)$$

$$|x_T, T\rangle = e^{-\hat{H}T} \langle x_T | = \sum_n e^{-E_n T} \langle x_T | n \rangle \langle n | \quad (12.47)$$

である。ここで大きな T を想定すると $n = 0$ の項が支配的となるので、

$$\langle x_T, T | T \{ \hat{x}(\tau_1) \cdots \hat{x}(\tau_n) \} | x_{-T}, -T \rangle \approx \langle x_T | 0 \rangle \langle 0 | T \{ \hat{x}(\tau_1) \cdots \hat{x}(\tau_n) \} | 0 \rangle \langle 0 | x_{-T} \rangle e^{-2E_0 T} \quad (12.48)$$

と近似できる。これを

$$\langle x_T, T | x_{-T}, -T \rangle \approx \langle x_T | 0 \rangle \langle 0 | x_{-T} \rangle e^{-2E_0 T}$$

で辺々割ると、

$$\langle 0 | T \{ \hat{x}(\tau_1) \cdots \hat{x}(\tau_n) \} | 0 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle x_T, T | T \{ \hat{x}(\tau_1) \cdots \hat{x}(\tau_n) \} | x_{-T}, -T \rangle}{\langle x_T, T | x_{-T}, -T \rangle} \quad (12.49)$$

が得られる。[上式 (12.49) は Gell-Mann Low の定理 (6.1 節) とよく似ている。]

次に式 (12.49) の右辺の量を、経路積分で表すことを考える。分母の振幅 $\langle x_T, T | x_{-T}, -T \rangle$ は式 (12.52) の Z と、規格化定数 \mathcal{N} の積で与えられる。よって分子の量 (12.43) を評価すれば充分である。Euclid 時間の引数を $T > \tau_n > \tau_{n-1} > \cdots > \tau_1 > -T$ となるようにラベルし直すと、

$$\begin{aligned} & \langle x_T, T | T \{ \hat{x}(\tau_1) \cdots \hat{x}(\tau_n) \} | x_{-T}, -T \rangle \\ &= \int dx(\tau_n) \cdots dx(\tau_1) \langle x_T, T | \hat{x}(\tau_n) | x(\tau_n), \tau_n \rangle \langle x(\tau_n), \tau_n | \hat{x}(\tau_{n-1}) | x(\tau_{n-1}), \tau_{n-1} \rangle \cdots \\ & \quad \times \langle x(\tau_2), \tau_2 | \hat{x}(\tau_1) | x(\tau_1), \tau_1 \rangle \langle x(\tau_1), \tau_1 | x_{-T}, -T \rangle \\ &= \int dx(\tau_n) \cdots dx(\tau_1) \{ x(\tau_n) \cdots x(\tau_1) \} \\ & \quad \times \langle x_T, T | x(\tau_n), \tau_n \rangle \langle x(\tau_n), \tau_n | x(\tau_{n-1}), \tau_{n-1} \rangle \cdots \langle x(\tau_2), \tau_2 | x(\tau_1), \tau_1 \rangle \langle x(\tau_1), \tau_1 | x_{-T}, -T \rangle. \end{aligned} \quad (12.44)$$

[ただし時間間隔 $\tau_i - \tau_{i-1}$ が微小であることは仮定されていない．そこで] 各振幅 $\langle x(\tau_i), \tau_i | x(\tau_{i-1}), \tau_{i-1} \rangle$ を経路積分表示に直すと、もとの変数 $x(\tau_1), \dots, x(\tau_n)$ による積分と合わせて x_{-T} から x_T までの経路積分が得られる：

$$\begin{aligned} & \langle x_T, T | T \{ \hat{x}(\tau_1) \cdots \hat{x}(\tau_n) \} | x_{-T}, -T \rangle \\ &= \mathcal{N} \int_{x_{-T}}^{x_T} d[x(\tau)] \{ x(\tau_n) \cdots x(\tau_1) \} \exp \left[- \int d\tau \left\{ \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (12.45)$$

右辺における固有値 $x(\tau_i)$ は c-数なので、これらを並べる順序は任意である．[よって最初に τ_i をラベルし直したことは、得られる結果 (12.45) に影響しない．] 以上より定理 (12.50) が示された．

12.4 場の相関関数

はじめに文献 [2, pp.344–352] における QED の議論を復習しよう．正準形式の場の量子論では、Green 関数と生成汎関数をそれぞれ

$$\begin{aligned} G^{\mu \cdots} (x, \cdots, y, \cdots, z, \cdots) &\equiv_{\text{H}} \langle 0 | T \{ A^{\mu \text{H}}(x) \cdots \psi^{\text{H}}(y) \cdots \bar{\psi}^{\text{H}}(z) \cdots \} | 0 \rangle_{\text{H}}, \\ Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] &\equiv \frac{\langle 0 | S' | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle} \end{aligned} \quad (21)$$

によって定義したところ^{*35}、生成汎関数から Green 関数を導く式

$$\begin{aligned} G^{\mu \cdots} \left(\underbrace{x_1, \cdots, y_1, \cdots, z_1, \cdots}_{\substack{\bar{n} \text{ 個} \\ n \text{ 個}}} \right) &= \frac{\langle 0 | T \{ S A^\mu(x_1) \cdots \psi(y_1) \cdots \bar{\psi}(z_1) \cdots \} | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle} \\ &= (-1)^{\bar{n}} \left(\frac{1}{i} \right)^n \frac{\delta^n Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x_1) \cdots \delta \bar{\sigma}(y_1) \cdots \delta \sigma(z_1) \cdots} \Big|_0 \end{aligned} \quad (22)$$

が示された^{*36}．他方、Feynman による経路積分形式の場の量子論では、生成汎関数は

$$Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX'}, \quad X' = \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_S) : \text{源を含む作用} \quad (23)$$

で与えられる．ただし

$$N = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX} : \text{規格化定数}, \quad X \equiv \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1) : \text{QED の作用}$$

である^{*37}．実際に上式 (23) が正準形式において定義した生成汎関数 (21) に一致することを証明した．よって 2 つの形式で生成汎関数が一致するので、生成汎関数を源で (汎関数) 微分して Green 関数を得る式 (22) を経路積分形式での Green 関数の定義と見れば、2 つの形式で Green 関数は一致し、したがって理論の予言もまた一致することになる．あるいは等価的に、式 (23) を式 (22) に代入して得られる経路積分の表式

$$G^{\mu \cdots} (x_1, \cdots, y_1, \cdots, z_1, \cdots) = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \{ e^{iX} A^\mu(x_1) \cdots \psi(y_1) \cdots \bar{\psi}(z_1) \cdots \} \quad (24)$$

で Green 関数を定義しても良い．

以上の話の進め方は「議論が簡潔にすむというだけでなく、2 通りの定式化の関係を理解できるという重要な利点がある」．しかし「通常は、馴染みのある正準形式による場の量子論から Feynman による経路積分形式の場の量子論を導き、

^{*35} 添字の H は Heisenberg 描像を表し、添字 H のない量は相互作用描像での量を表す．S は S 行列であり、S' は各場 $A^\mu, \psi, \bar{\psi}$ と結合する、虚構的に導入した“古典的な”源 $J_\mu, \bar{\sigma}, \sigma$ を含む理論での S 行列である．

^{*36} 最右辺の $(\cdots)|_0$ は虚構的な場をゼロとおくことを表す．

^{*37} ここに経路積分要素は $\mathcal{D}A = \prod_{\mu=0}^3 \mathcal{D}A^\mu$, $\mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi = \prod_\alpha \mathcal{D}\bar{\psi}_\alpha \mathcal{D}\psi_\alpha$ (α はスピノル添字) であり、規格化条件は $Z[0, 0, 0] = 1$ ．

それを一般化して Green 関数の式を得ることになる」 [2, p.344]. 教科書 (M. ストーン『量子場の物理』) の 12.3 節, 12.4 節の議論はその線に沿っている.

ラグランジアン密度 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - V(\varphi)$ で記述されるスカラー場 $\varphi(x)$ に対しても, Heisenberg 描像において Green 関数は [上式 (24) と類似の] 径路積分

$$\langle 0|T\{\hat{\varphi}(x_1)\cdots\hat{\varphi}(x_n)\}|0\rangle = \frac{1}{Z} \int_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} d[\varphi(x)] \{\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\} e^{-S[\varphi]}, \quad (12.57)$$

$$S[\varphi] = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + V(\varphi) \right\}, \quad (12.58)$$

$$Z = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} d[\varphi(x)] e^{-S[\varphi]}, \quad (12.59)$$

で与えられる (d は時空の次元). [ここでは Euclid 時間 (虚時間) $\tau = it$ を用いているため, 式 (12.57) もまた統計力学における熱平均の式 (12.53) と同じ形を持ち, “生成汎関数” (12.59) は分配関数に相当することが見て取れる (どちらも文字 Z で表される).] 径路積分 (12.57) は回転不変性が明白であり, これはもとの Minkowski 時空における Lorentz 不変性に対応する. この不変性はラグランジアン密度が Lorentz スカラーであることに依っている.

前節の量子力学の結果 (12.50–52) を場の理論の式 (12.57–59) に拡張することは, 形式的には単純である. ただし [1 粒子系の量子力学では粒子の位置 \mathbf{x} が変数であったのに対し, 場の理論において場を評価する位置 \mathbf{x} は単なるパラメーターである. このことに関して] 場の理論において対応する式 (12.57–59) を得るには, 次のように理論の定式化を改める必要があることに言及されている. すなわち “Schrödinger 表示” の場の演算子 $\hat{\varphi}(\mathbf{x})$ [時間に陽に依らない] に対して, $\hat{\varphi}(\mathbf{x})|\varphi\rangle = \varphi(\mathbf{x})|\varphi\rangle$ を満たす固有状態 $|\varphi\rangle$ を基底にとる. すると状態 $|\Psi\rangle$ を表す波動関数 $\Psi(\varphi) = \langle\varphi|\Psi\rangle$ は場の汎関数になる. そこで φ -表示における場と共役な運動量密度の演算子は

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}) \rightarrow \varphi(\mathbf{x}), \quad \hat{\pi}(\mathbf{x}) \rightarrow -i \frac{\delta}{\delta\varphi(\mathbf{x})}$$

のように, 微分が汎関数微分に置き換わると考える. 実際この措置は, 正準交換関係

$$[\hat{\varphi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{x}')] = i \frac{\delta\varphi(\mathbf{x})}{\delta\varphi(\mathbf{x}')} = i\delta^{d-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (12.56)$$

が満たされることから正当化される.

note : 上式 (12.56) について 1 粒子系の量子力学において, x -表示を採用して初等的に正準交換関係 $[x, p] = i$ を導いたときと同様に, 波動関数に対する演算子の作用を調べれば良い:

$$[\hat{\varphi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{x}')] \Psi(\varphi) = -i\varphi(\mathbf{x}) \frac{\delta\Psi(\varphi)}{\delta\varphi(\mathbf{x}')} + i \frac{\delta}{\delta\varphi(\mathbf{x}')} (\varphi(\mathbf{x})\Psi(\varphi)) = i \frac{\delta\varphi(\mathbf{x})}{\delta\varphi(\mathbf{x}')} \Psi(\varphi).$$

最後に最終段落を引用する:

注意: 量子力学の径路積分に現れた径路は, 微分不可能であっても連続であったが, 場の量の和は “典型的には” 更に滑らかさを欠く. この滑らかさの欠如が, 摂動展開における積分の発散の原因になる. 一般の n 次元において, この発散の問題を回避して $\delta\tau \rightarrow 0$ (連続極限) の操作を行うためには, 何らかの処置が必要である.

12.5 Gauss 積分と自由場

12.5.1 実場

本稿では教科書の難解な記述を大幅にアレンジしつつ、主要な結果を導出する。

文献 [2, pp.333-334] では時空を微小なセル (胞) に分割して、場の径路積分 (汎関数積分) を定義する代わりに、等価的に実場 ϕ による径路積分を次のように定義した。すなわち完全正規直交関数系 $\{u_i(x)\}$ で実場を

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i(x)$$

と展開し、右辺の級数を第 n 項で打ち切る。このとき ϕ の汎関数 $F[\phi] = F(\alpha)$ はパラメーターの組 $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ で指定される。 $F[\phi]$ の汎関数積分は

$$\int \mathcal{D}\phi F[\phi] \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_i}{\sqrt{2\pi}} \right) F(\alpha) \quad (25)$$

で定義され、これはあらゆる $\phi(x)$ の関数形 (したがって、あらゆる場の時間発展の仕方) についての $F[\phi]$ の “和” を表す。次に場の理論において重要になる、“Gauss 型” の汎関数積分の公式を復習しよう [2, pp.333-335]。ここで略記法

$$[AKB] \equiv \int d^4x \int d^4y A(x)K(x,y)B(y)$$

を導入すると、実対称な積分核 $K(x,y) = K(y,x)$ に対して、

$$I \equiv \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\phi K \phi] \right\} = (\det K)^{-1/2} \quad (26)$$

が示される。ここに $\det K \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \det K_n$ であり、 K_n は n 番目までの関数 $u_i(x) (i = 1, \dots, n)$ に対して、

$$K_{ij} = [u_i K u_j] \equiv \int d^4x \int d^4y u_i(x) K(x,y) u_j(y) \quad (27)$$

を行列要素に持つ n 次元正方行列 $K_n = (K_{ij})$ である*38

公式 (26) は通常の対称行列 $A = (A_{ij})$ に対する教科書 (M. ストーン 『量子場の物理』) の式

$$\int \frac{d^N x}{(\sqrt{2\pi})^N} e^{-\frac{1}{2} x^i A_{ij} x^j} = \int \frac{d^N y}{(\sqrt{2\pi})^N} e^{-\frac{1}{2} \lambda_i y_i^2} = \left(\prod_i \lambda_i \right)^{-1/2} = \det^{-1/2} A \quad (12.63)$$

に対応しており (直交変換 $\mathbf{y} = O^T \mathbf{x}$ により対称行列 A を対角行列 $O^T A O = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ に変換した), これは通常の Gauss 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} a x^2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \quad (12.60)$$

の一般化に当たる。ところで公式 (26) はその導き方より、空間の次元を問わず、また Minkowski 空間でも Euclid 空間でも成り立つと考えられる。そこで式 (26) を利用して、式 (12.59) の径路積分

$$\begin{aligned} Z &= \int d[\varphi(x)] e^{-S[\varphi(x)]} = \int d[\varphi(x)] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^d x ((\partial_\mu \varphi)^2 + m^2 \varphi^2) \right\} \\ &= \int d[\varphi(x)] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^d x (\varphi(-\partial^2 + m^2) \varphi^2) \right\} \equiv \int d[\varphi(x)] \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\varphi K \varphi] \right\} \end{aligned}$$

*38 $\det K \equiv \det(\lim_{n \rightarrow \infty} K_n)$ と定義するわけにはいかない。なお公式 (26) の係数が簡単になるように、汎関数積分の定義式 (25) において “加重因子” を $1/\sqrt{2\pi}$ に選んである。

を評価しよう。ここでの積分核は

$$K(x, y) = \delta^d(x - y)(-\partial^2 + m^2)(= K(y, x)) \quad (28)$$

である。デルタ関数の下で微分 ∂^2 は時空点 x, y のいずれに関するものと考えても良く、2乗は Euclid 空間での内積を表す。ここで有限の時空の体積 $\Omega = L^d$ を想定すると (教科書の表記では $\Omega = (\text{Vol})$)、運動量は

$$k_n = \frac{2\pi}{L}n$$

と離散化される (n は正数を成分に持つ d 次元ベクトル)。さらに計算を進めるために、文献 [2, p.334] で設定されている規格直交条件

$$\int d^d x u_i(x) u_j(x) = \delta_{ij}$$

を満たす完全系として、関数形

$$u_n(x) = \frac{e^{ik_n \cdot x}}{\sqrt{\Omega}}$$

を採用する (内積は Euclid 空間で定義)^{*39}。このとき行列要素

$$K_{ln} \equiv [u_l K u_n] = \frac{1}{\Omega} \int d^d x d^d y e^{ik_l \cdot x} \delta^d(x - y)(-\partial^2 + m^2) e^{ik_n \cdot y} = (k_n^2 + m^2) \cdot \frac{1}{\Omega} \int d^d x e^{i(k_l + k_n) \cdot x} = (k_n^2 + m^2) \delta_{ln}$$

は対角的なので、

$$\det(K_{ln}) = \prod_n' (k_n^2 + m^2), \quad \therefore \det K = \prod_k (k^2 + m^2)$$

を得る。ここに \prod_n' は利用できる関数 $\{u_n(x)\}$ を制限したときの積であり、第2の積 \prod_k は制限を解除して、可能な全ての離散的波数 k についてとる。以上より公式 (26) から、最終的な結果

$$Z = \int d[\varphi(x)] e^{-S[\varphi(x)]} = \int d[\varphi(x)] \varphi \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\varphi K \varphi] \right\} = \left(\prod_k (k^2 + m^2) \right)^{-1/2} \quad (29)$$

が得られる。

ところで Feynman-Kac 公式 (12.23) は、場の理論では

$$E_0 = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\Omega} \ln \int d[\varphi(x)] e^{-S[\varphi(x)]} \right]$$

という形をとると考えられる。ここに上式 (29) を代入すると、再び

$$E_0 = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{1}{\Omega} \sum_k \ln(k^2 + m^2) = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \ln(k^2 + m^2) : (5.35)$$

が導かれる (p.172, 1.9-10)。

次に今一つの径路積分

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T \left\{ \exp \left(- \int d^d x J(x) \varphi(x) \right) \right\} | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{Z} \int d[\varphi(x)] \exp \left\{ - \int d^d x \left(\frac{1}{2} \varphi(x) (-\partial^2 + m^2) \varphi(x) + J(x) \varphi(x) \right) \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

を考える。

^{*39} 正確を期すには、展開係数 (積分変数) α_i が実数となることが保証されるように、三角関数を採用した方が好ましいと考えられる。しかしながら計算を簡単にするために、ナイーブに指数関数を利用する。

上式 (30) の導出 式 (12.57) より,

$$\begin{aligned}
& \langle 0|T \left\{ \exp \left(- \int d^d x J(x) \varphi(x) \right) \right\} |0\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int d^d x_1 \cdots d^d x_n J(x_1) \cdots J(x_n) \langle 0|T \{ \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \} |0\rangle \\
&= \frac{1}{Z} \int d[\varphi(x)] \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int d^d x_1 \cdots d^d x_n J(x_1) \varphi(x_1) \cdots J(x_n) \varphi(x_n) \right) e^{-S[\varphi]} \\
&= \frac{1}{Z} \int d[\varphi(x)] \exp \left\{ - \left(S[\varphi] + \int d^d x J(x) \varphi(x) \right) \right\} : (30)
\end{aligned}$$

を得る.

上式 (30) 右辺の径路積分を評価するための公式を復習しよう [2, pp.337-339]. 実スカラー源 $J(x)$ と実対称な積分核 $K(x, y) = K(y, x)$ に対し, 汎関数

$$I[J] = N \int \mathcal{D}\phi \exp(A[J\phi]), \quad A[J, \phi] \equiv -\frac{1}{2}[\phi K \phi] + [J\phi] \quad (31)$$

を考える. ただし $[J\phi] \equiv \int d^d x J(x)\phi(x)$ であり, また N は規格化定数である. ここで

$$\int d^d x' K(x, x') K^{-1}(x', x'') = \delta^d(x - x'') \quad (32)$$

によって定義される K の“逆演算子” K^{-1} を用いて, $I[J]$ は汎関数積分を含まない Gauss 型の式

$$I[J] = \exp \left\{ \frac{1}{2} [JK^{-1}J] \right\} \quad (33)$$

に書き換えられる (規格化条件 $I[J=0] = 1$ を課す).

公式 (31),(33) は d 次元の Euclid 時空でも成り立ち, 教科書 (M. ストーン『量子場の物理』) の式

$$\int \frac{d^N x}{(\sqrt{2\pi})^N} e^{-\frac{1}{2} x^i A_{ij} x^j + i b_i x^i} = (\det A)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} b_i A_{ij}^{-1} b_j} \quad (12.64)$$

に対応する ($A = (A_{ij})$ は対称行列). これは式 (12.63) と同様に証明でき, 通常の Gauss(型の) 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} a x^2 + i b x} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{1}{2} \frac{b^2}{a}} \quad (12.61)$$

の一般化に当たる (指数を平方完成し, 変数 $z = x - i b/a$ の積分路を実軸に移す). 再び積分核を式 (28) のように選ぶと, 求める径路積分 (30) は公式 (31),(33) と同じ形

$$(\text{式 (30)}) \sim I[-J] = \exp \left\{ \frac{1}{2} [JK^{-1}J] \right\} \quad (34)$$

を持つ. 式 (30) も左辺の表式から分かるように $J=0$ で 1 となるので, 上式において \sim を $=$ に直して良い. ところで積分核 (28) に対して, “逆演算子” は Green 関数

$$K^{-1}(x, y) = G(x, y) = \int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} \frac{e^{i k \cdot (x-y)}}{k^2 + m^2} \quad (12.70')$$

となる. 実際, Green 関数の定義式

$$(-\partial_y^2 + m^2)G(y, z) = \delta^d(y - z)$$

[本稿次節で補足] の両辺に $\delta^d(x-y)$ を掛けて y で積分すると, “逆演算子” を定義する式 (32):

$$\int d^4y K(x,y)G(y,z) = \delta^4(x-z)$$

が満たされる. 以上より式 (34) は,

$$\begin{aligned} & \langle 0|T \left\{ \exp \left(- \int d^d x J(x)\varphi(x) \right) \right\} |0\rangle \\ &= \frac{1}{Z} \int d[\varphi(x)] \exp \left\{ - \int d^d x \left(\frac{1}{2}\varphi(x)(-\partial^2 + m^2)\varphi(x) + J(x)\varphi(x) \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^d x d^d y J(x)G(x,y)J(y) \right\} \end{aligned} \quad (12.74')$$

を与える. 最後に空間積分の各要素において $d\tau = idt$ とおくと, Wick の定理 (3.32) の真空期待値をとった関係が得られる. QED において上式 (12.74') と類似した結果として, 文献 [2, pp.350-351] では虚構的な古典場とのみ結合する自由場の生成汎関数を経路積分で表した式 (13.95),(13.105) を得ている.

12.5.1 節について

■Green 関数 (12.70') について 自由場 Green 関数 (3.23):

$$G(x, x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik \cdot (x-x')}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

は式 (3.24-25): $(\partial_x^2 + m^2)G(x, x') = -\delta^4(x - x')$ を満たす (文献 [1, p.62] で確認済み). ここで (d 次元の)Euclid 空間に移ると, 指数の因子

$$k \cdot (x - x') = \omega(t - t') - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -(i\omega)(i(t - t')) - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -[k \cdot (x - x')]^{\text{Euclid}}$$

における符号の変化は, 積分変数の変更 $k \rightarrow -k$ によって解消される. ところが分母の因子もまた,

$$k^2 - m^2 = -[k^2 + m^2]^{\text{Euclid}}$$

と符号を変える (発散の恐れがなくなるので, $i\epsilon$ は省いて良い). よって式 (12.70') のように全体の符号を入れ替えて Green 関数を再定義すると,

$$(-\partial_x^2 + m^2)G(x, x') = \delta^4(x - x')$$

となり, 右辺のデルタ関数に負号は付かない.

12.5.2 複素場

複素測度

$$dz^* dz = (dx - idy)(dx + idy) = 2idxdy, \quad \therefore \frac{dz^* dz}{2i} = dx dy \quad (12.75-76)$$

[本稿次節で補足] に対して, 基本となる Gauss 積分

$$\int \frac{dz^* dz}{2\pi i} e^{-|z|^2} = \int \frac{dx dy}{\pi} e^{-(x^2+y^2)} = 1 \quad (12.77)$$

を考えると, a を実数として

$$\begin{aligned} \int \frac{dz^* dz}{2\pi i} e^{-a|z|^2 + b^* z + z^* b} &= \int \frac{dz^* dz}{2\pi i} e^{-a(z-b/a)(z^*-b^*/a) + |b|^2/a} \\ &= \frac{1}{a} \exp\left(\frac{1}{a}|b|^2\right) \end{aligned} \quad (12.78)$$

が見出される. これは多重積分の公式

$$\int \left[\frac{dz_i^* dz_i}{2\pi i} \right] e^{-z_i^* A_{ij} z_j + b_i^* z_i + z_i^* b_i} = (\det A)^{-1} \exp\{b_i^* A_{ij}^{-1} b_j\} \quad (12.79)$$

へと一般化される. 上式 (12.79) は複素場に関する Gauss 型の径路積分に対する類推を与える.

12.5.2 節について

■式 (12.75) について 複素数 z, z^* による 2 重積分は非自明であり, 「 dx と dy は反交換する」(式 (12.75) の 1 行下) とあるように, 実は外積

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0, \quad dx \wedge dy = -dy \wedge dx$$

と同じ規則に従わねばならない. なお Jacobi 行列式は $\frac{\partial(z^*, z)}{\partial(x, y)} = 2i$. 式 (12.75) は z と z^* を独立な変数として扱うことが, 実部 x と虚部 y を独立に扱うことと等価であることを踏まえれば, 理に適っている.

12.6 摂動論

数学の色が強いため, 要約を省略する.

第 13 章 汎関数の方法

序文を引用する：

この章では、熱力学ポテンシャルに類似した、いくつかの有用な汎関数を導入する。それらを用いて自発的な対称性の破れと Goldstone の定理を調べることにする。

13.1 生成汎関数

[Euclid 時間を用いたときの] スカラー場の作用

$$S[\varphi] + \int d^d x J(x)\varphi(x) = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2 + V(\varphi) + J(x)\varphi(x) \right\} \quad (13.1)$$

を考える。ただしここでの「外源場」 $J(x)$ は、Green 関数を導き出すための、仮想的な“探針 (プローブ)”の役割を果たす (13.1 節 5,6 行目)。[そこで本稿では式 (13.1) の左辺において、本来の理論に対する作用 $S[\varphi]$ から、虚構的な古典場 $J(x)$ との相互作用項を分離した。また質量項を除いた、理論にもとから備わる相互作用項として $V(\varphi)$ を再定義してある。この下で Z の式 (12.59) を]

$$\mathcal{Z}(J) = \int d[\varphi] \exp \left(-S[\varphi] - \int d^d x J(x)\varphi(x) \right) \quad (13.2)$$

と書いて、 $\mathcal{Z}(J)$ を定義する。[文献 [2, pp.344–345] で QED の文脈で確認したように、] $\mathcal{Z}(J)$ は (n 点) Green 関数の“生成汎関数 (母関数)”となる：

$$\langle \hat{\varphi}(x_1) \cdots \varphi(x_n) \rangle = (-1)^n \frac{\delta^n \mathcal{Z}}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (13.4)$$

[以降 $\langle \cdots \rangle \equiv \langle 0|T\{\cdots\}|0 \rangle$ と略記。ここでは生成汎関数 (13.2) に規格化条件 $\mathcal{Z}(0) = 1$ を課している (次式 (13.5) において明らか。)] 上式 (13.4) と整合して、生成汎関数は

$$\mathcal{Z}(J) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int d^d x_1 \cdots d^d x_n \langle \hat{\varphi}(x_1) \cdots \hat{\varphi}(x_n) \rangle J(x_1) \cdots J(x_n) \quad (13.5)$$

と書ける。

ここで文献 [5, pp.99–100] の記述を参考に、“連結 Green 関数”の生成汎関数 $W(J)$ の説明をまとめる。上式 (13.5) の $\mathcal{Z}(J)$ は必ずどこかで外場 J につながっているグラフの寄与の総和 (に $n = 0$ の項 1 を加えたもの) であって、外場 J と全くつながっていない真空泡グラフを含まない。(ダイアグラムでは伝播関数の各結節点 x に、外源場 $J(x)$ を表す \times 印を付ければ良い。)

注意： n 点 Green 関数 $\langle \cdots \rangle$ は相互作用 V のある理論で定義 一見すると n 点 Green 関数 $\langle \hat{\varphi}(x_1) \cdots \hat{\varphi}(x_n) \rangle$ は相互作用 V と無関係で、通常の Wick の定理 (3.3.2 節) を適用して場を 2 個ずつ伝播関数に置き換えていっても、全体がつながった連結グラフが得られないように思われるかもしれない。しかしながら Wick の定理は自由場展開に基づいている上に、縮約によって得られる伝播関数は、我々が既知っている自由場 Green 関数 $G(x, y)$ ではなく、相互作用がある場合の伝播関数である。そこで QED の文脈

で学んだように、あらかじめ相互作用 (ハミルトニアン密度) V を持つ理論の n 点 Green 関数 $\langle \dots \rangle$ を,

$$\langle ABC \dots \rangle = \frac{\left\langle \exp \left\{ - \int d^d x V(x) \right\} (ABC \dots) \right\rangle_0}{\left\langle \exp \left\{ - \int d^d x V(x) \right\} \right\rangle_0}$$

のように、相互作用のない $V = 0$ の自由場 Green 関数 $\langle \dots \rangle_0$ と関係付けておく. その上で右辺の指数関数を展開すれば、各摂動次数の項に対して Wick の定理を適用でき、得られるのは自由場の伝播関数となる [2, pp.352–357]. このとき例えば相互作用 $V \sim \lambda \varphi^4$ に対して右辺の分子を見ると、 n 点 Green 関数 $\langle \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n) \rangle$ から連結ダイアグラムが現れることが分かる. 分子からは外場 J と結合していない真空泡のダイアグラムも現れることになるが、それは分母による除算によって正確に除かれる [5, p.100].

ただし $\mathcal{Z}(J)$ は連結ダイアグラムと非連結ダイアグラムの両方を含む (いずれも全ての点が J に結合). そこで連結ダイアグラムだけの寄与の総和

$$W(J) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int d^d x_1 \dots d^d x_n \langle \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n) \rangle_{\text{con}} J(x_1) \dots J(x_n) \quad (13.9)$$

を定義すると (添字 con は連結を表す), 式 (4.10–11) の note と同じ理由で $\mathcal{Z}(J) = e^{-W(J)}$ と書ける. これは $\mathcal{Z}(J) = e^{-W(J)}$ と書いて定義した $W(J)$ が, 上式 (13.9) で与えられると言うのと同じである. 式 (13.9) より

$$(-1)^{n+1} \frac{\delta^n W(J)}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} = \langle \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n) \rangle_{\text{con}} \quad (13.8)$$

が成り立つので, $W(J)$ は “連結 Green 関数” の生成汎関数となっている.

ここで符号を含めて式 (13.8) を納得するためにも, 具体的に汎関数微分を実行すると, 例えば

$$-\left. \frac{\delta^2 W(J)}{\delta J(x) \delta J(y)} \right|_{J=0} = \langle \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(y) \rangle - \langle \hat{\varphi}(x) \rangle \langle \hat{\varphi}(y) \rangle \quad (13.6)$$

となる [本稿次節で確認]. 右辺は 2 点 Green 関数から非連結グラフを除く計算となっているので, 連結 Green 関数 $\langle \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(y) \rangle_{\text{con}}$ を表すと考えられる. この下でさらに汎関数微分を行うと,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^3 W(J)}{\delta J(x) \delta J(y) \delta J(z)} \right|_{J=0} &= \langle \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(y) \hat{\varphi}(z) \rangle \\ &\quad - \langle \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(y) \rangle_{\text{con}} \langle \hat{\varphi}(z) \rangle - \langle \hat{\varphi}(y) \hat{\varphi}(z) \rangle_{\text{con}} \langle \hat{\varphi}(x) \rangle - \langle \hat{\varphi}(z) \hat{\varphi}(x) \rangle_{\text{con}} \langle \hat{\varphi}(y) \rangle \\ &\quad - \langle \hat{\varphi}(x) \rangle \langle \hat{\varphi}(y) \rangle \langle \hat{\varphi}(z) \rangle \end{aligned} \quad (13.7)$$

が得られる [本稿次節で確認]. 右辺はやはり連結 Green 関数 $\langle \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(y) \hat{\varphi}(z) \rangle_{\text{con}}$ の計算になっていると考えられる.

$W(J)$ のダイアグラム展開に関する洞察を得るために, 古典論の水準で場の方程式

$$(-\partial^2 + m^2)\varphi(x) + \frac{\lambda}{3!}\varphi^3(x) + J(x) = 0 \quad (13.10)$$

[相互作用項を $V(\varphi) = \lambda \varphi^4/4!$ とした (本稿次節で補足)] の解を考えよう. 第ゼロ近似として摂動パラメーター λ の項 (非線形項) を完全に無視すると, $[(-\partial_x^2 + m^2)G(x, y) = \delta^d(x - y)]$ を満たす式 (12.70') の自由

場] 伝播関数 $G(x, y)$ を用いて,

$$\varphi(x) = - \int G(x, y) J(y) d^d y + O(\lambda) \quad (13.11)$$

となる (与えられた外源場に対して) [式 (13.10) への直接の代入により確かめられる]. これは図 39 のようなダイアグラムに対応付けられる. [以下で見るように, 高い摂動次数に進んでも $\varphi(x)$ は真空泡を含まない連結グラフで表される. そこで $W(J)_{\text{classical}}$ を, 古典的な解 $\varphi(x)$ を与える生成汎関数として導入することが動機付けられる (この点を本稿次節で詳しく補足する).] 式 (13.11) は

$$W(J)_{\text{classical}}^{(0)} = -\frac{1}{2} \int J(y) G(y, z) J(z) d^d y d^d z \quad (13.12)$$

を $J(x)$ で汎関数微分すると得られ, 上式 (13.12) の $W(J)_{\text{classical}}^{(0)}$ は図 39 のようなダイアグラムに対応付けられる. 1 次の摂動論に進むと,

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & - \int d^d y G(x, y) J(y) \\ & + \frac{\lambda}{3!} \int d^d y d^d x_1 d^d x_2 d^d x_3 J(x_1) J(x_2) J(x_3) G(x, y) G(y, x_1) G(y, x_2) G(y, x_3) + O(\lambda^2) \end{aligned} \quad (13.13)$$

が得られる [J を補った, 本稿次節で補足]. 1 次補正の項は図 39 のようなダイアグラムに対応付けられ,

$$W(J)_{\text{classical}}^{(1)} = \frac{\lambda}{4!} \int d^d y d^d x_1 d^d x_2 d^d x_3 d^d x_4 J(x_1) J(x_2) J(x_3) J(x_4) G(y, x_1) G(y, x_2) G(y, x_3) G(y, x_4) \quad (13.14)$$

を $J(x)$ で汎関数微分すると得られる. [4 つの J のうち例えば $J(x_4)$ だけを汎関数微分して $\delta^d(x_4 - x)$ に変え, 積分を実行し, 最後に式全体を 4 倍すれば良い.] 生成汎関数は図 39 のようなダイアグラムに対応付けられる. [式 (13.13) の導き方より, 枝の本数は相互作用項 $V = \lambda \varphi^4/4!$ における φ のべきに依っていることが分かる.] このような作業を続けると, $W(J)_{\text{classical}}$ が, それぞれの枝の端に $J(x)$ の因子を持つ, “樹形 (tree) ダイアグラム” (すなわちループを含まないダイアグラム) の和として与えられることが分かる. ひるがえってループを持つダイアグラムは, 量子力学に特有の補正を表している.

13.1 節について (「13.1.1 節について」は節を改めて掲載)

■生成汎関数の式 (13.5) について これは 12.5.1 節の式 (30) の導出過程における関係式と似ているものの, ここでは $\mathcal{Z}(J=0) = 1$ が課されている. いずれにせよ上式 (13.5) の右辺は, “真空偏極”

$$\langle 0|T \left\{ \exp \left(- \int d^d x J(x) \varphi(x) \right) \right\} |0\rangle$$

(相互作用 $V \neq 0$ での真空状態に関する期待値) の展開になっている. この点について, 後の式 (36) の箇所でも再論する.

■ $W(J)$ の汎関数微分 (13.6-7) の確認 まず

$$\frac{\delta W}{\delta J(x)} = - \frac{\delta}{\delta J(x)} \ln \mathcal{Z}(J) = - \frac{1}{\mathcal{Z}(J)} \frac{\delta \mathcal{Z}(J)}{\delta J(x)}$$

であり, $\mathcal{Z}(J=0) = 1$ と式 (13.4) に注意して $J=0$ を代入すると,

$$\left. \frac{\delta W}{\delta J(x)} \right|_{J=0} = \langle \hat{\varphi}(x) \rangle$$

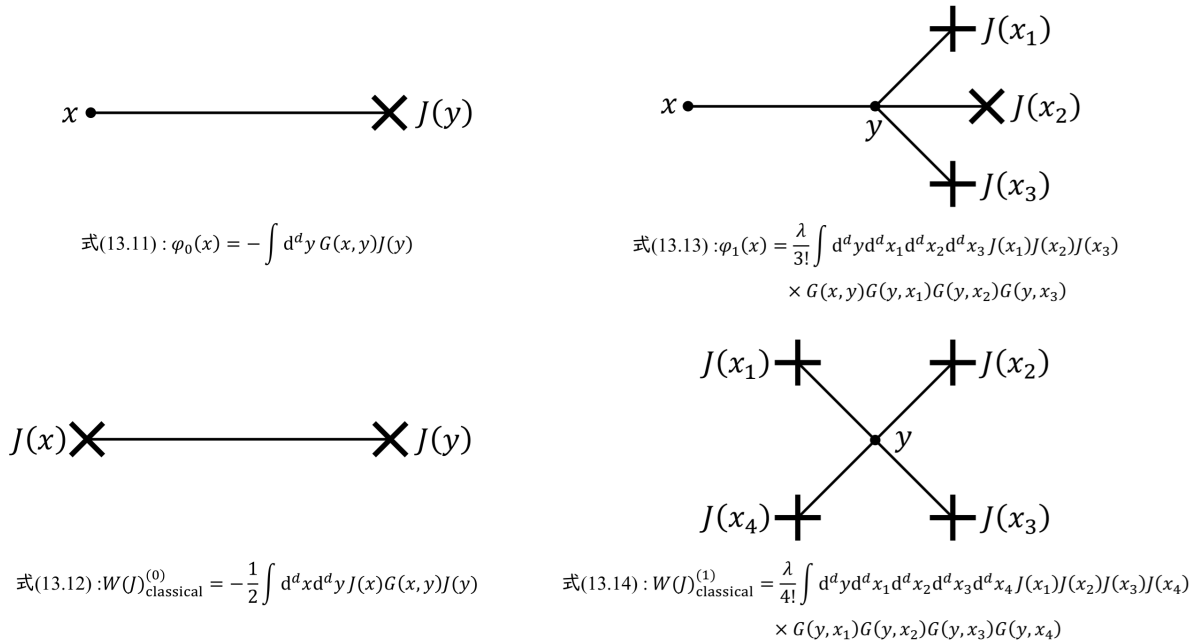


図 39 ×印は外源場 J の配置を表す

を得る。これは教科書の式 (13.3) に対応しており，規格化条件 $Z(0) = 1$ を課さなくとも，式 (12.57), (13.2) より

$$-\frac{1}{Z(J)} \frac{\delta Z(J)}{\delta J(x)} \Big|_{J=0} = \langle \hat{\varphi}(x) \rangle$$

は正しい (以降の計算でも分母に $Z(J)$ の適切なべきが現れていることが見て取れる)。次いで上式を $J(y)$ で汎関数微分すると，

$$-\frac{\delta^2 W(J)}{\delta J(x) \delta J(y)} = \frac{\delta}{\delta J(y)} \left(\frac{1}{Z(J)} \frac{\delta Z(J)}{\delta J(x)} \right) = \frac{1}{Z(J)} \frac{\delta^2 Z(J)}{\delta J(x) \delta J(y)} - \frac{1}{Z(J)^2} \frac{\delta Z(J)}{\delta J(x)} \frac{\delta Z(J)}{\delta J(y)}$$

となるので，先ほどと同様にして式 (13.6) を得る。さらに上式を $J(z)$ で汎関数微分すると，

$$\frac{\delta^3 W(J)}{\delta J(x) \delta J(y) \delta J(z)} = -\frac{1}{Z(J)} \frac{\delta^3 Z(J)}{\delta J(x) \delta J(y) \delta J(z)} + \left(\frac{1}{Z(J)^2} \frac{\delta Z(J)}{\delta J(z)} \frac{\delta^2 Z(J)}{\delta J(x) \delta J(y)} + \text{cyclic} \right) - 2 \frac{1}{Z(J)^3} \frac{\delta Z(J)}{\delta J(x)} \frac{\delta Z(J)}{\delta J(y)} \frac{\delta Z(J)}{\delta J(z)}$$

となる。ここで $J=0$ とおくと，

$$\begin{aligned} \frac{\delta^3 W(J)}{\delta J(x) \delta J(y) \delta J(z)} \Big|_{J=0} &= \langle \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(y) \hat{\varphi}(z) \rangle - (\langle \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(y) \rangle \langle \hat{\varphi}(z) \rangle + \text{cyclic}) + 2 \langle \hat{\varphi}(x) \rangle \langle \hat{\varphi}(y) \rangle \langle \hat{\varphi}(z) \rangle \\ &= (\text{式 (13.7) 右辺}) \quad (\because \langle \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(y) \rangle = \langle \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(y) \rangle_{\text{con}} + \langle \hat{\varphi}(x) \rangle \langle \hat{\varphi}(y) \rangle) \end{aligned}$$

を得る。4 階以上の汎関数微分に対する結果も，容易に推察される。

■場の方程式 (13.10) について 相互作用項を $V(\varphi) = \lambda \varphi^4 / 4!$ とおくと，Euclid 空間の作用 (13.1) に対応するラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 + J \varphi$$

に対して, Euler-Lagrange 方程式は

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial^2 \varphi - m^2 \varphi - \frac{\lambda}{3!} \varphi^3 - J : (13.10)$$

となる. Minkowski 空間における通常の KG 方程式に戻るには, 内積を $-\partial^2 \rightarrow \partial^2$ と改めさえすれば良い*40.

■1 次の摂動論における $\varphi(x)$ の式 (13.13) の導出 逐次代入により λ に関して摂動論的に $\varphi(x)$ を求めることを考え,

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \dots$$

とおく. ここに φ_0, φ_1 はそれぞれ λ の 0 次と 1 次の項であり, φ_0 は式 (13.11) において既に求まっている. 次に λ に関する 1 次補正 φ_1 を求めよう. 上式 $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \dots$ を場の方程式 (13.10) に代入して λ の 1 次の項だけを拾うと, φ_1 に対する方程式

$$(-\partial^2 + m^2)\varphi_1 = -\frac{\lambda}{3!}\varphi_0^3$$

が得られる. これは φ_0 の満たす式 $(-\partial^2 + m^2)\varphi_0 = -J$ と比べて, 単に源の項が φ_0 に置き換わっているだけであり, 再び Green 関数法により

$$\varphi_1(x) = \int G(x, y) \left(-\frac{\lambda}{3!}\varphi_0^3(y) \right) d^d y = (\text{式 (13.13) 第 2 項})$$

を得る.

■ $W_{\text{classical}}(J)$ の式 (13.12),(13.14) を古典的な生成汎関数と見なす動機

$$W_{\text{classical}}(J) = W_{\text{classical}}^{(0)}(J) + W_{\text{classical}}^{(1)}(J) + \dots$$

に対して, 汎関数微分 $\left. \frac{\delta^2 W_{\text{classical}}(J)}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right|_{J=0}$ を計算することを考える. 式 (13.12) の $W_{\text{classical}}^{(0)}(J)$ は外源場 J を 2 つ含むので, J の 2 階微分にのみ寄与を持つ. $W_{\text{classical}}^{(0)}(J)$ の 1 階微分は第ゼロ近似の場 (13.11) であり, これをさらに $J(x')$ で汎関数微分すると, Green 関数

$$\left. \frac{\delta W_{\text{classical}}^{(0)}(J)}{\delta J(x) \delta J(x')} \right|_{J=0} = -G(x, x')$$

を得る. これは第ゼロ近似の場 (13.11) を表す図 39 のダイアグラムの骨格を変えることなく, 頂点 y から外源場 J を表す \times 印を除く操作に対応する (時空点 y は x' に固定される).

次に式 (13.14) の $W_{\text{classical}}^{(1)}(J)$ は外源場 J を 4 つ含むので, J の 4 階微分にのみ寄与を持つ. $W_{\text{classical}}^{(1)}(J)$ を 1 階微分して場 (13.13) の 1 次補正の項を導いたのと同様の計算を繰り返すと, 4 階微分

$$\left. \frac{\delta^4 W_{\text{classical}}^{(0)}(J)}{\delta J(x) \delta J(x') \delta J(x'') \delta J(x''')} \right|_{J=0} = \lambda \int d^d y G(x, y) G(y, x') G(y, x'') G(y, x''')$$

*40 実際 Minkowski 空間において作用 (13.1) に対応するラグランジアン密度と運動方程式は, それぞれ

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2}m^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 - J\varphi, \quad \therefore 0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial_\mu \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi + \frac{\lambda}{3!}\varphi^3 + J.$$

は再び, 場 (13.13) の 1 次補正を表す図 39 のダイアグラムの骨格を変えることなく, 枝の端の頂点を x', x'', x''' に固定して外源場「 \times 」を取り除いた“連結 Green 関数”になっている.

これらが連結 Green 関数であることの意味は, 各グラフの枝の端に外源場 J を結合させて摂動展開を構築すると, Green 関数法による古典場の解 $\varphi(x)$ が得られることに含まれている. ここから $W_{\text{classical}}(J)$ を古典的な連結 Green 関数の生成汎関数と見なすことが動機付けられる.

13.1.1 有効作用

しばしば Legendre 変換によって $\varphi_c(x) \equiv \langle \hat{\varphi}(x) \rangle$ と $J(x)$ の役割を入れ替えると都合が良い^{*41}. そこで新たな変数 $\varphi_c(x)$ の汎関数

$$\Gamma(\varphi_c) = W(J) - \int d^d x J(x) \varphi_c(x) \quad (13.15)$$

を定義する. W を外源場 J で汎関数微分すると

$$\frac{\delta W}{\delta J(x)} = \langle \hat{\varphi}(x) \rangle = \varphi_c(x) \quad (13.17)$$

が得られたのとは対照的に [本稿次節で補足], $\Gamma(\varphi_c)$ を φ_c で汎関数微分すると外源場 J が得られる:

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi_c(x)} = -J(x) \quad \text{i.e.} \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi_c(x)} + J(x) = 0. \quad (13.16/13.18)$$

(導出は下記. [力学において Legendre 変換で, $\partial L/\partial \dot{q} = p$ が $\partial H/\partial p = \dot{q}$ に置き換わるのに似ている.]) 上式 (13.18) は古典論での [虚構的な源を含む完全な作用 (13.1): $S[\varphi] + \int d^d x J \varphi$ における] 作用 S に対する, 最小作用原理

$$\frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi(x)} + J(x) = 0 \quad (13.19)$$

と比較される. このため $\Gamma(\varphi_c)$ は“有効作用”と呼ばれる. [式 (13.15) において $\Gamma(\varphi_c)$ は作用の次元 (無次元) を持つことが見て取れる.] 作用 S が式 (13.19) を通じて古典場 $\varphi(x)$ を決定するのと同様に, 有効作用 $\Gamma(\varphi_c)$ は式 (13.18) を通じて場の期待値 $\varphi_c(x)$ を決定する.

上式 (13.16) の導出

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi_c(y)} &= \frac{\delta W}{\delta \varphi_c(y)} - \int d^d x \frac{\delta J(x)}{\delta \varphi_c(y)} \varphi_c(x) - \int d^d x \frac{\delta \varphi_c(x)}{\delta \varphi_c(y)} J(x) \\ &= \int d^d x \frac{\delta W}{\delta J(x)} \frac{\delta J(x)}{\delta \varphi_c(y)} - \int d^d x \frac{\delta J(x)}{\delta \varphi_c(y)} \varphi_c(x) - J(y) \\ &= -J(y) \end{aligned} \quad (35)$$

とすれば良い [本稿次節で補足]. ただし最後の等号では式 (13.17) により, 第 3 辺の第 1 項と第 2 項が相殺することを考慮した.

有効ポテンシャル

我々は既に J が定数のときに, 外源場 J を伴う系の基底エネルギー密度を $\mathcal{E}_0(J)$ として,

$$W(J) = (\text{Vol})(\text{Time})\mathcal{E}_0(J) \quad (36)$$

^{*41} φ_c の値は, 現実の物理系で実現される $\langle \varphi \rangle$ の値に固定されているわけではなく, 任意の値を設定できる. この任意性は, 未定の仮想外源場 J を導入したことによって生じている (p.180 第 2 の訳註).

と書けることを知っている [本稿次節で補足]. 同様に φ_c が定数ならば, $\Gamma(\varphi_c)$ もエネルギー密度と解釈できる. [再び結論の式 (13.24) における (Vol)(Time) の因子を除けば, 有効作用 $\Gamma(\varphi_c)$ はその名の通り作用の次元 (無次元) を持つことに注意する.] 実際, このことは次のように説明できる. まず, 条件

$$\frac{1}{(\text{Vol})} \int d^3x \langle \Psi | \hat{\varphi} | \Psi \rangle = \varphi_c \quad (13.21)$$

[左辺は場の期待値の空間平均であり, 論理的には右辺の φ_c も時間だけの関数] を満たす, 規格化された全ての状態 $|\Psi\rangle$ に関する下限 (infimum)

$$\mathcal{V}(\varphi_c) = \frac{1}{(\text{Vol})} \inf \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle \quad (13.20)$$

を導入しよう. すると定数の J, φ_c に対して,

$$\mathcal{V}(\varphi_c) = \mathcal{E}_0(J) - J\varphi_c \quad (13.23)$$

と書けることが導かれる (導出は下記). [上式 (13.20),(13.23) において $\mathcal{V}(\varphi_c)$ はエネルギー密度の次元を持つことが見て取れる.] ここから

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \varphi_c} + J = 0 \quad (13.25)$$

となるので [本稿次節で補足], 関数 $\mathcal{V}(\varphi_c)$ の停留点が, 外源場 J をゼロとおいたときの $\langle \hat{\varphi} \rangle$ の可能な値を与える. このため $\mathcal{V}(\varphi_c)$ は “有効ポテンシャル” と呼ばれる.

note これは 10.3.2 節の古典的ポテンシャル $V(\varphi)$ に類似しているものの, $\mathcal{V}(\varphi_c)$ では量子論が考慮されており, これらは概念的に異なる. 13.1.1 節のこれ以降の議論も参照.

他方, 式 (13.23) の両辺に (Time)(Vol) を掛けて, 式 (36) と有効作用 Γ の定義式 (13.15) を考慮すると,

$$\begin{aligned} (\text{Time})(\text{Vol})\mathcal{V}(\varphi_c) &= W(J) - (\text{Time})(\text{Vol})J\varphi_c \\ &= \Gamma(\varphi_c) \end{aligned} \quad (13.24)$$

が得られる. ここから冒頭の解釈が正当化される.

上式 (13.23) の導出 教科書における Lagrange の未定乗数法を補足しつつまとめる. 式 (13.21) と規格化条件 $\langle \Psi | \Psi \rangle = \text{const}$ (式 (13.21) より右辺は無次元) の下で, 式 (13.20) の右辺の因子 $\frac{1}{(\text{Vol})} \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle$ が極小となることを要求しよう. E, J を Lagrange の未定乗数として, $\frac{1}{(\text{Vol})} \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle$ の極値性は, $|\Psi\rangle$ の変化に伴う変化量が

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{(\text{Vol})} \delta \langle \Psi | \left(\hat{H} + J \int d^3x \hat{\varphi} - E \right) | \Psi \rangle \\ &= \frac{1}{(\text{Vol})} (\delta \langle \Psi |) \left(\hat{H} + J \int d^3x \hat{\varphi} - E \right) | \Psi \rangle + \text{h.c.} \end{aligned}$$

となることを課す. よって極小値を与える状態 $|\Psi\rangle$ は,

$$\left(\hat{H} + J \int d^3x \hat{\varphi} - E \right) | \Psi \rangle = 0 \quad (13.22)$$

を満たさねばならない. そのためには $\hat{H} + J \int d^3x \hat{\varphi}$ の固有状態 $|\Psi\rangle$ を選び, E をそのエネルギー固有値にとれば良い. しかも十分性として, $\frac{1}{(\text{Vol})} \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle$ の最小性を改めて要求すれば, 最低エネルギー

$E = E_0(J)$ の状態 $|\Psi\rangle$ を選ばねばならないと考えられる。このとき状態 $|\Psi\rangle$ は未定乗数 J に依存しており、 J はこの $|\Psi\rangle$ が式 (13.21) を満たすように決める。その際 J は定数なので、式 (13.21) における φ_c も定数となることが期待される。(ちなみに φ_c が定数でなければ自発的な対称性の破れとなる。) この下で下限 (13.20) を与える $|\Psi\rangle$ の固有方程式

$$\left(\hat{H} + J \int d^3x \hat{\varphi} \right) |\Psi\rangle = E_0(J) |\Psi\rangle$$

と条件式 (13.21) を用いると、

$$\mathcal{V}(\varphi_c) = \frac{1}{(\text{Vol})} \inf \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle = \frac{1}{(\text{Vol})} \langle \Psi | \left\{ \left(\hat{H} + J \int d^3x \hat{\varphi} \right) - J \int d^3x \hat{\varphi} \right\} | \Psi \rangle = \mathcal{E}_0(J) - J\varphi_c : (13.23)$$

を得る (エネルギー密度は $\mathcal{E}_0 \equiv E_0(J)/(\text{Vol})$)。)

自発的な対称性の破れ

[10.3.2 節の例で言えば、式 (10.42) の] 回転不変な“メキシコ帽子型”の古典的ポテンシャル $V(\varphi)$ は、複素 φ 平面上の原点から離れた円周において最小となる。そして円周上の特定の $\langle \hat{\varphi} \rangle$ が選ばれると、自発的に対称性が破れる。同様に反転操作 $\varphi \rightarrow -\varphi$ に関して対称な双井戸型ポテンシャルは、古典的な扱いにおいて対称性の破れを誘発する^{*42}。

他方、有効ポテンシャル $\mathcal{V}(\varphi_c)$ を用いて対称性の破れを調べる場合には、少々注意が必要である。実際 $\mathcal{V}(\varphi_c)$ の曲線は任意の φ_c で下に凸の条件

$$\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \varphi_c^2} \geq 0 \quad (13.29)$$

を満たすため、有効ポテンシャルは決して双井戸構造を持たない。

上式 (13.29) の導出

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_0}{\partial J^2} \sim -\langle \hat{\varphi}^2 - \varphi_c^2 \rangle = -\langle (\hat{\varphi} - \varphi_c)^2 \rangle \quad (13.26)$$

であり [本稿次節で補足]、最右辺の因子 $\langle (\hat{\varphi} - \varphi_c)^2 \rangle$ は、平均操作を径路積分の形で明示すると $\int (\varphi - \varphi_c)^2 e^{-S[\varphi]}$ のようになるので、非負である。よって、

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_0}{\partial J^2} \leq 0. \quad (13.27)$$

つまり $\mathcal{E}_0(J)$ のグラフは常に“凹” (concave) [上に凸] である。上式 (13.27) はまた [式 (37): $\frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial J} = \varphi_c$ とより]、

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_0}{\partial J^2} = \frac{\partial \varphi_c}{\partial J} \leq 0 \quad (13.27)$$

を意味する。したがって [これを式 (13.25) と組合せると]、

$$\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \varphi_c^2} = -\frac{\partial J}{\partial \varphi_c} \geq 0 : (13.29)$$

が得られる。

^{*42} 量子論による補正を考慮すると、基底状態の $\langle \hat{\varphi} \rangle$ の値が変更され、古典的には破れるはずの対称性が回復する可能性がある。

実は古典論の水準でも、双井戸ポテンシャルから“真の”有効ポテンシャルを作るには、2つの最小点を水平線で結んで、2つの井戸の間の障壁を除かなければならない。これは統計力学で2つの相が共存する系の自由エネルギーを得ることに相当する。このことはまた、量子論において次のように理解できる。すなわち $\langle \hat{\varphi} \rangle = \varphi_c$ の真空状態 $|\varphi_c\rangle$ が存在するならば、同じエネルギーを持つ $\langle \hat{\varphi} \rangle = -\varphi_c$ の状態 $|- \varphi_c\rangle$ も存在しなければならない。すると実数 α で特徴付けられる線形結合の状態

$$|\alpha\rangle = \sqrt{\alpha} |\varphi_c\rangle + \sqrt{1-\alpha} |-\varphi_c\rangle \quad (0 \leq \alpha \leq 1) \quad (13.30)$$

も、期待値 $\langle \alpha | \varphi | \alpha \rangle = (2\alpha - 1)\varphi_c$ を持つ真空状態となり得る。 α が $0 \leq \alpha \leq 1$ の範囲を動くとき、この期待値は $\pm\varphi_c$ の間の値をとる [古典的な双井戸ポテンシャルの極小を結んだ平坦部分に対応]。

$\Gamma(\varphi_c)$ のダイアグラム展開

この項は説明がほとんど天下りなため、本稿では要約を省略する。詳しい議論は例えば文献 [5, pp.112–116, pp.119–125] に見られる。

13.1.1 節について

■式 (13.17) について 式 (13.6–7) の導出過程で言及したように、

$$\frac{\delta W}{\delta J(x)} = -\frac{1}{\mathcal{Z}(J)} \frac{\delta \mathcal{Z}(J)}{\delta J(x)} = \langle \hat{\varphi}(x) \rangle$$

が成り立つ。ここでも第2の等号は式 (12.57), (13.2) によるものの、ここでは関関数微分の後で $J = 0$ と書いていないため、右辺 $\langle \hat{\varphi}(x) \rangle (= \varphi_c(x))$ は虚構的な源 J を持つ理論での期待値を表すことになる (p.180 第2の訳註はこの点に関係すると考えられる)。

■式 (13.16) の導出過程 (35)(教科書の式 (13.16)) について まず第1の等号において、たった今式 (13.17) に関連して言及したように、 $\varphi_c(x)$ は虚構的な源 J の存在下での場の期待値である。そこで J の、したがって $W(J)$ の $\varphi_c(y)$ による汎関数微分をゼロとおいてはならない。

次に式 (35) の第2の等号で、第1項の変形に用いた汎関数微分の公式

$$\frac{\delta W}{\delta \varphi_c(y)} = \int d^d x \frac{\delta W}{\delta J(x)} \frac{\delta J(x)}{\delta \varphi_c(y)}$$

を復習する。汎関数微分の定義より

$$\begin{aligned} \delta W &= \int d^d y \frac{\delta W}{\delta \varphi_c(y)} \delta \varphi_c(y), \\ \delta W &= \int d^d x \frac{\delta W}{\delta J(x)} \delta J(x) = \int d^d x \frac{\delta W}{\delta J(x)} \left(\int d^d y \frac{\delta J(x)}{\delta \varphi_c(y)} \delta \varphi_c(y) \right) \\ &= \int d^d y \left(\int d^d x \frac{\delta W}{\delta J(x)} \frac{\delta J(x)}{\delta \varphi_c(y)} \right) \delta \varphi_c(y) \end{aligned}$$

であり、2式を比較すると上式が得られる。

13.1.1 節「有効ポテンシャル」について

■定数 J に対する式 (36): $W(J) = (\text{Vol})(\text{Time})\mathcal{E}_0(J)$ について 生成汎関数の式 (13.5) について補足したように、

$$\mathcal{Z}(J) = (\text{式 (13.5) 右辺}) = \langle 0 | T \left\{ \exp \left(- \int d^d x J(x) \varphi(x) \right) \right\} | 0 \rangle$$

(相互作用 $V \neq 0$ での真空状態に関する期待値) は“真空偏極”である。他方, 真空偏極の公式 (3.42):

$$\langle 0|U(+\infty, -\infty)|0\rangle = e^{-i(E_J - E_0)T}$$

を導く際に, 我々は暗に J が定常的な場であることを仮定した。そこで特に定数の外源場 J を考えて, これを $\mathcal{Z}(J) = e^{-W(J)}$ と等置すると,

$$W(J) = (\text{Vol})(\text{Time})\mathcal{E}_0(J), \quad (\text{Time}) \equiv iT : \text{Euclid 時空の全時間}, \quad \mathcal{E}_0(J) \equiv \frac{E_J - E_0}{(\text{Vol})} : \text{真空エネルギー密度}$$

を得る。

なお 4.1.1 節の Brueckner-Goldstone の定理に関する議論の繰り返しになるが, $\mathcal{Z}(J)$ は“真空偏極”なので, 式 (4.10-11) より

$$\mathcal{Z}(J) = e^{-V(iT)(\text{connected diagrams})} = e^{-(\text{Vol})(\text{Time})(\text{connected diagrams})}$$

と書ける。これを $\mathcal{Z}(J) = e^{-W(J)}$ と比較すると,

$$W(J) = (\text{Vol})(\text{Time})(\text{connected diagrams})$$

と同定され, この右辺は 4.1.1 節で見たように, $(\text{Vol})(\text{Time})$ の因子も含めて図 6 の連結した真空泡ダイアグラムの和である。教科書 p.178 ではこのことが式 (13.8-9) に関係していると説明されている。

■式 (13.23)→式 (13.25) において, あたかも J を φ_c で微分しなくとも良い理由 後の式 (13.26) の導出と同様に,

$$\frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial J} = \frac{1}{(\text{Vol})(\text{Time})} \frac{\partial W}{\partial J} = \frac{\delta W}{\delta J} = \langle \hat{\varphi} \rangle = \varphi_c \quad (37)$$

が成り立つ。よって式 (13.23) を φ_c で微分すると

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \varphi_c} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_0(J)}{\partial \varphi_c} - \frac{\partial J}{\partial \varphi_c} \varphi_c \right) - J$$

における右辺第 1 項がゼロになるため, あたかも J が φ_c に依存しないかのように見なして微分を実行した場合と同じ結果が得られる。しかし, それはあくまで見かけ上の結果論であって, これまでの定式化より J と φ_c は連動している。実際, 後の式 (13.28), (13.29) では微分係数 $\partial \varphi_c / \partial J$, $\partial J / \partial \varphi_c$ をあからさまに書いている。そしてこの点を理解していれば, 教科書のように式 (13.29) の第 1 の等号を定義「 \equiv 」と見なす必要はどこにもない。

13.1.1 節「自発的な対称性の破れ」について

■式 (13.26) について 定数の J に対して, 式 (36): $W(J) = (\text{Vol})(\text{Time})\mathcal{E}_0(J)$ より

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_0(J)}{\partial J^2} = \frac{1}{(\text{Vol})(\text{Time})} \frac{\partial^2 W(J)}{\partial J^2}$$

となる。ここで J が x に依らなければ, 汎関数 $W(J)$ はパラメーター J の単なる関数となるので, 右辺の偏微分が意味を成す。ここで J による微分と汎関数微分の関係を調べよう。 x に依らない J に対して, 汎関数微分の定義式は

$$\Delta W(J) = \int d^d x \frac{\delta W(J)}{\delta J(x)} \Delta J(x) = (\text{Vol})(\text{Time}) \frac{\delta W(J)}{\delta J} \Delta J$$

となる。ところが J の変化 ΔJ に伴う $W(J)$ の変化 $\Delta W(J)$ に対して、両者の比 $\Delta W(J)/\Delta J$ は偏微分 $\partial W(J)/\partial J$ の意味になる。(これを表記の上で汎関数微分 $\delta W(J)/\delta J$ と区別するために、大文字の Δ を用いた。) そこで上式最右辺の ΔJ を移項すると、

$$\frac{\partial W(J)}{\partial J} = (\text{Vol})(\text{Time}) \frac{\delta W(J)}{\delta J}$$

の関係が見出される。(これは汎関数微分の次元 $[\frac{\delta}{\delta J}] = \left[\frac{1}{(\text{Vol})(\text{Time})} \frac{\partial}{\partial J} \right]$ と整合している。) これを繰り返して用いると、2階微分では

$$\frac{\partial^2 W(J)}{\partial J^2} = \{(\text{Vol})(\text{Time})\}^2 \frac{\delta^2 W(J)}{\delta J^2}$$

となる。よって冒頭の式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_0(J)}{\partial J^2} &= (\text{Vol})(\text{Time}) \frac{\delta^2 W(J)}{\delta J^2} \\ &= -(\text{Vol})(\text{Time}) \left(\langle \hat{\varphi}^2 \rangle - \langle \hat{\varphi} \rangle^2 \right) \end{aligned}$$

と書き換えられる。ここで第2の等号は式(13.6)による。ただし式(3.17)に関して述べたのと同様に、ここでは微分の後に $J = 0$ とおいていないため、 $\langle \dots \rangle$ (したがって $\varphi_c \equiv \langle \hat{\varphi} \rangle$) は $J \neq 0$ での期待値と理解しなければならない。教科書の式(13.26)の第2辺以降には、上式のように $(\text{Vol})(\text{Time})$ が付くと考えられる。(実際そのときはじめて式の次元が合う。ただしこの点は以降の符号の議論に影響しない。)

13.2 Ward 恒等式

2.3.1 節で見たように、Euclid 空間における作用量

$$S = \int d^d x \{ (\partial_\mu \varphi^*) (\partial_\mu \varphi) + m^2 |\varphi|^2 + V(|\varphi|^2) \} \quad (13.38)$$

で記述される複素場 φ に対して、無限小の局所的位相変換

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x)(1 + i\delta\alpha(x)), \quad \varphi^*(x) \rightarrow \varphi^*(x)(1 - i\delta\alpha(x)) \quad (13.43)$$

に対する作用の不変性 $\delta S = 0$ から、保存するカレント

$$j_\mu = \frac{1}{i} (\varphi^* \partial_\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \varphi^*)$$

が導かれる。

他方で径路積分

$$I = \int d[\varphi^*] d[\varphi] \{ \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \varphi^*(y_1) \cdots \varphi^*(y_m) \} e^{-S[\varphi, \varphi^*]} \quad (13.42)$$

には、運動方程式を“満たさない” ($\delta S \neq 0$) 場の時間発展も寄与する。しかしながら位相変換(13.43)は径路積分(13.42)における積分変数の変更と見なせるため [式(12.75): $dz^* dz = 2idxdy$ における虚部 y の変更にあたる]、このとき径路積分(13.42)は不変に留まると考えられる。そこで無限小の局所的位相変換(13.43)に伴う径路積分(13.42)の変化量 δI をゼロとおくと、

$$\begin{aligned} & i \sum_{i=1}^n \delta^d(x - x_i) \langle 0 | T \{ \hat{\varphi}(x_1) \cdots \hat{\varphi}^\dagger(y_m) \} | 0 \rangle - i \sum_{i=1}^m \delta^d(x - y_i) \langle 0 | T \{ \hat{\varphi}(x_1) \cdots \hat{\varphi}^\dagger(y_m) \} | 0 \rangle \\ &= -\partial_\mu \langle 0 | T \{ \hat{j}_\mu(x) \hat{\varphi}(x_1) \cdots \hat{\varphi}^\dagger(y_m) \} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (13.45)$$

が見出される (導出は下記). これは 8.3.1 節で正準形式に基づき導出した, QED における Ward 恒等式 (8.47) と似ている. [Ward 恒等式 (8.47) もゲージ不変性に付随する保存則 $\partial_\mu j^\mu = 0$ の帰結として導かれたことを思い出そう.]

上式 (13.45) の導出 位相変換 (13.43) に対して径路積分 (13.42) の測度は不変である [径路積分の並進 (平行移動) 不変性より [2, pp.336–337]]. すると

$$0 = \delta I = \int d[\varphi^*]d[\varphi] (\delta\{\varphi(x_1)\cdots\varphi^*(y_m)\}e^{-S} + \{\varphi(x_1)\cdots\varphi^*(y_m)\}\delta e^{-S})$$

となる.

ここで最右辺の第 1 項は,

$$\begin{aligned} & \int d[\varphi^*]d[\varphi]\delta\{\varphi(x_1)\cdots\varphi^*(y_m)\}e^{-S} \\ &= \int d[\varphi^*]d[\varphi] \left(\sum_{i=1}^n \varphi(x_1)\cdots[i\delta\alpha(x_i)\cdot\varphi(x_i)]\cdots\varphi^*(y_m) + \sum_{i=1}^m \varphi(x_1)\cdots[-i\delta\alpha(y_i)\cdot\varphi^*(y_i)]\cdots\varphi^*(y_m) \right) e^{-S} \\ &= \int d[\varphi^*]d[\varphi] \int d^d x i\delta\alpha(x) \left(\sum_{i=1}^n \delta^d(x-x_i) - \sum_{i=1}^m \delta^d(x-y_i) \right) \{\varphi(x_1)\cdots\varphi^*(y_m)\}e^{-S} \end{aligned}$$

と書き換えられる.

次に第 2 項を考える. d 次元の Euclid 時空において式 (2.36) は $\delta S/\delta\alpha(x) = -\partial_\mu j_\mu(x)$ に置き換わる. すると $\delta e^{-S} = -e^{-S}\delta S$ において, 汎関数微分の定義より

$$\delta S = \int d^d x \frac{\delta S}{\delta\alpha(x)} \delta\alpha(x) = - \int d^d x \partial_\mu j_\mu(x) \cdot \delta\alpha(x) \quad (13.40)$$

となるので,

$$\int d[\varphi^*]d[\varphi]\{\varphi(x_1)\cdots\varphi^*(y_m)\}\delta e^{-S} = \int d[\varphi^*]d[\varphi] \left\{ \varphi(x_1)\cdots\varphi^*(y_m) \int d^d x \delta\alpha(x) \partial_\mu j_\mu(x) \right\} e^{-S}.$$

以上をまとめると

$$\begin{aligned} 0 = \delta I &= \int d[\varphi^*]d[\varphi] \int d^d x \delta\alpha(x) \left\{ i \left(\sum_{i=1}^n \delta^d(x-x_i) - \sum_{i=1}^m \delta^d(x-y_i) \right) + \partial_\mu j_\mu(x) \right\} \{\varphi(x_1)\cdots\varphi^*(y_m)\}e^{-S} \\ &= \int d^d x \delta\alpha(x) \left[i \left(\sum_{i=1}^n \delta^d(x-x_i) - \sum_{i=1}^m \delta^d(x-y_i) \right) \int d[\varphi^*]d[\varphi] \{\varphi(x_1)\cdots\varphi^*(y_m)\}e^{-S} \right. \\ &\quad \left. + \partial_\mu \int d[\varphi^*]d[\varphi] \{j_\mu(x)\varphi(x_1)\cdots\varphi^*(y_m)\}e^{-S} \right] \\ &\sim \int d^d x \delta\alpha(x) \left\{ i \left(\sum_{i=1}^n \delta^d(x-x_i) - \sum_{i=1}^m \delta^d(x-y_i) \right) \langle 0|T\{\hat{\varphi}(x_1)\cdots\hat{\varphi}^\dagger(y_m)\}|0\rangle \right. \\ &\quad \left. + \partial_\mu \langle 0|T\{\hat{j}_\mu(x)\hat{\varphi}(x_1)\cdots\hat{\varphi}^\dagger(y_m)\}|0\rangle \right\} \end{aligned}$$

となる (最後の等号は式 (12.57) に基づく). これが任意の変分 $\delta\alpha(x)$ に対して成り立つことを要求して, 最右辺で $\delta\alpha(x)$ の係数 $\{\cdots\}$ をゼロとおくと, 式 (13.45) を得る. [上式の 1 行目で径路積分の中の因子 $\{i(\cdots) + \partial_\mu j_\mu\}$ だけが単独でゼロになるとは限らない (径路積分を施してはじめてゼロになる). また運動方程式を満たさない径路 (場の時間発展) からの寄与 $\partial_\mu j_\mu \neq 0$ に注意する.]

経路積分を，時間順序化した演算子積の真空期待値に関係付ける定理 [式 (13.45)] は， $\hat{\varphi}$ の多項式だけに適用できるもので， φ と正準共役な場 $\pi(x)$ [$\sim \dot{\hat{\varphi}}(x)$] を含む演算子積に用いることはできない (p.187 下から 8~6 行目)。

13.2.1 Goldstone の定理

式 (13.45) を，すべての x_i, y_i を含む領域 Ω で積分すると，

$$(n - m) \langle 0 | T \{ \hat{\varphi}(x_1) \cdots \hat{\varphi}^\dagger(y_m) \} | 0 \rangle \sim \int_{\partial\Omega} dS^\mu \langle 0 | T \{ \hat{j}_\mu(x) \hat{\varphi}(x_1) \cdots \hat{\varphi}^\dagger(y_m) \} | 0 \rangle \quad (13.48)$$

となる (dS^μ は境界 $\partial\Omega$ の外向き面積要素)。ここで境界 $\partial\Omega$ は無限遠にあり，それ故，境界積分を無視できると仮定しよう。この場合 $n \neq m$ である限り，

$$\langle 0 | T \{ \hat{\varphi}(x_1) \cdots \hat{\varphi}^\dagger(y_m) \} | 0 \rangle = 0$$

となる。ところが Ward 恒等式を成立させる連続対称性が自発的に破れて $\langle 0 | \hat{\varphi} | 0 \rangle = 0$ となる場合には，たとえ $\partial\Omega$ が遠方であっても式 (13.48) の境界積分は消えず，

$$\langle 0 | T \{ \hat{\varphi}(x_1) \cdots \hat{\varphi}^\dagger(y_m) \} | 0 \rangle \neq 0$$

となり得る。実はこれは自発的な連続対称性の破れが，質量ゼロの粒子——Goldstone ボゾン——を生成することに伴い，系が境界条件に対して敏感になることに起因する [式 (13.58) 直後の note も参照]。

以下では具体例を通じて，Ward 恒等式を用い，対称性の破れが常に Goldstone ボゾンの生成を伴うことを示す。複素場を $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ と書いて実部 φ_1 と虚部 φ_2 を定義し，作用量を

$$S[\varphi_1, \varphi_2] = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} (\partial\varphi_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial\varphi_2)^2 + \frac{\lambda}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \kappa)^2 - \epsilon\varphi_1 \right\} \quad (13.50)$$

と設定しよう。 ϵ の項を除けば，ここで採用したポテンシャルは円周 $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = \kappa$ 上で最小となる“メキシコ帽子型”である (図 40)。ポテンシャルの底付近における放射方向 [円と直交する方向 (図 40)] への振動モードに対応する粒子は，質量を持つ。

note 極小の位置 $(\varphi_1, \varphi_2) = (\kappa, 0)$ から「放射方向」への微小変位 $(\delta\varphi, 0)$ を導入すると，「放射方向」に関して極小の周りで，ポテンシャルは放物線

$$\frac{\lambda}{2} \{ (\kappa + \delta\varphi)^2 - \kappa^2 \}^2 \simeq 2\lambda\kappa^2 (\delta\varphi)^2$$

で近似される。これは $\delta\varphi$ 場を記述するポテンシャルが質量項を持つことを意味する。

他方，ポテンシャルは円に沿ったギャップを持たないため，接線方向の振動モードに対応する粒子は，質量を持たない Goldstone ボゾンとなる。小さな $\epsilon (\neq 0)$ の項 [$+\varphi_1$ 向きに下降する傾斜面 $-\epsilon\varphi_1$] を加えると，回転対称性が破られ，ポテンシャルの最小を与える点は $(\varphi_1, \varphi_2) = (\kappa, 0)$ 付近の 1 点に限られる。

note 直観的には $-\epsilon\varphi_1$ を加えても，依然としてポテンシャルは φ_2 方向には局所的に水平であると想像される。しかしながら実際には， φ_2 粒子の伝播関数に対する場の方程式 (13.57) は小さな質量 (の自乗) $m^2 = \epsilon / \langle \varphi_1 \rangle$ の項を持つ。

ϵ の項を導入したのは，最終的に $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を調べるための単なる数学的な技法であって，自発的対称性の破れの有無はあくまで $\epsilon \rightarrow 0$ の極限で $\langle \hat{\varphi}_1 \rangle$ がゼロか否かで判定される。

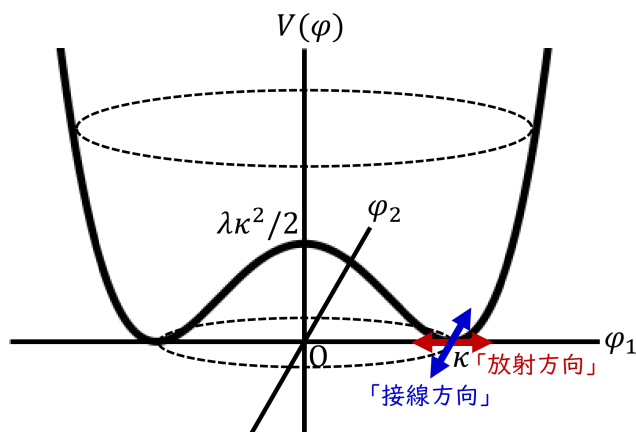


図 40 式 (13.50) における “メキシコ帽子型” ポテンシャル [式 (10.42) の $V(\varphi)$ と同じ形]

我々がこれから示したいのは、量子化の後もこのモードが Goldstone ボゾンを生じることである。

回転

$$\delta\varphi_1(x) = -\alpha(x)\varphi_2(x), \quad \delta\varphi_2(x) = \alpha(x)\varphi_1(x) \quad (13.51)$$

[無限小の局所的位相変換 $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x)e^{i\alpha(x)}$ に対応] に対する作用量 (13.50) の不変性を要求すると、

$$j_\mu \equiv \varphi_1 \partial_\mu \varphi_2 - \varphi_2 \partial_\mu \varphi_1 \quad (13.54)$$

に対して運動方程式

$$\partial_\mu j_\mu = \epsilon \varphi_2 \quad (13.53)$$

が導かれる (したがって j_μ は $\epsilon = 0$ のときに保存するカレントという意味を持つ) [本稿次節で補足・導出].

ところで径路積分

$$\langle \hat{\varphi}_2(y) \rangle = \frac{1}{Z} \int d[\varphi_1] d[\varphi_2] \varphi_2(y) e^{-S[\varphi_1, \varphi_2]} \quad (13.49)$$

の変換 (13.51) に対する不変性を要求すると、Ward 恒等式 (13.45) に対応する関係として

$$\int d^d x \alpha(x) \left\{ \delta^d(x-y) \langle \hat{\varphi}_1 \rangle + \partial_\mu \langle \hat{j}_\mu(x) \hat{\varphi}_2(y) \rangle - \epsilon \langle \hat{\varphi}_2(x) \hat{\varphi}_2(y) \rangle \right\} = 0 \quad (13.55)$$

が得られる [本稿次節で導出].

特に $\epsilon \neq 0$ および、大域的位相変換 $\alpha(x) = \text{const.}$ の場合を考えよう [教科書では「 $\alpha = 1$ 」(p.190, l.1) とあるが、我々は無限小パラメーター $|\alpha| \ll 1$ を想定している]. このとき上式 (13.55) は、発散の項が境界積分となって落ちるので*43, 運動量がゼロの Fourier 成分

$$\langle \hat{\varphi}_2 \hat{\varphi}_2 \rangle_{p=0} = \frac{1}{\epsilon} \langle \hat{\varphi}_1 \rangle \quad (13.56)$$

を与える [本稿次節で補足].

*43 冒頭で Goldstone ボゾンが生成されるとき、境界項がノンゼロになり得ることに言及した。ただし $\epsilon \neq 0$ のときには、すべての粒子は質量を持つので (特に φ_2 粒子についてはすぐ後で見る), 境界項を無視することができる。

note 右辺の $\langle \hat{\varphi}(\cdot) \rangle$ も左辺と同様, 引数の時空点に依らない定数であることになる (このことを以下の式 (13.57) でも用いる). 左辺に関しては Green 関数 $\langle \hat{\varphi}_2(x)\hat{\varphi}_2(y) \rangle$ の並進対称性を仮定したため, 1 変数 x に関する Fourier 変換 $\langle \hat{\varphi}_2\hat{\varphi}_2 \rangle_p$ が p だけの関数となる (導出過程を参照).

よって対称性が破れていれば [$\langle \hat{\varphi}_1 \rangle \neq 0$ ならば], $\epsilon \rightarrow 0$ で式 (13.56) の左辺が特異性を持つ.

この特異性を理解するために, [式 (13.55) $\alpha(x)$ の係数 $\{\dots\} = 0$ において] $\hat{\varphi}_1$ を真空期待値 $\langle \varphi_1 \rangle$ で近似しよう. すると [$\hat{j}_\mu \rightarrow \langle \varphi_1 \rangle \partial_\mu \hat{\varphi}_2$ より],

$$\delta^d(x-y) \langle \varphi_1 \rangle + \langle \varphi_1 \rangle \partial_x^2 \langle \hat{\varphi}_2(x)\hat{\varphi}_2(y) \rangle - \epsilon \langle \hat{\varphi}_2(x)\hat{\varphi}_2(y) \rangle \quad (13.57)$$

となる. これは [対称性が破れており $\langle \hat{\varphi}_1 \rangle \neq 0$ ならば], $\langle \hat{\varphi}_2(x)\hat{\varphi}_2(y) \rangle$ が質量の自乗 $m^2 = \frac{\epsilon}{\langle \varphi_1 \rangle}$ を持つ自由な Klein-Gordon 場の Green 関数であること

$$\left(-\partial_x^2 + \frac{\epsilon}{\langle \varphi_1 \rangle} \right) \langle \hat{\varphi}_2(x)\hat{\varphi}_2(y) \rangle = \delta^d(x-y)$$

を意味する. 運動量空間に移せば,

$$\langle \hat{\varphi}_2\hat{\varphi}_2 \rangle_p = \frac{1}{p^2 + \frac{\epsilon}{\langle \varphi_1 \rangle}}. \quad (13.58)$$

いずれにせよ $\epsilon \rightarrow 0$ とすると, $\hat{\varphi}_2$ 場の粒子の質量はゼロになる. こうして予告通り Goldstone ボゾンが現れる [この議論は対称性が破れていない $\langle \hat{\varphi}_1 \rangle = 0$ の場合には適用できない].

- note
- こうして冒頭で述べたように, 自発的に対称性が破れていると $\langle \hat{\varphi}_2\hat{\varphi}_2 \rangle \neq 0$ である.
 - 式 (13.58) は式 (13.56) と整合している. すると長波長 $p = 0$ での相関 (13.56) の特異性は, 質量 $\propto \epsilon \rightarrow 0$ の粒子の長距離力によると解釈できる (教科書の最終段落 (p.191) も参照). 湯川ポテンシャルの箇所 (3.3.3 節) で見たように, 質量 m のボゾンの媒介する力は Compton 波長 $1/m$ 程度までしか及ばない.

Goldstone は, $\hat{\varphi}_1$ を期待値に置き換える近似には依らず, 一般に Goldstone ボゾンが存在することを論じた (本稿では省略).

この議論が成立しなくなり得る状況として, 広範囲に及ぶゲージ場が存在する場合の相対論的な系が挙げられる. これについて p.191 第 2 の訳註を引用する:

結局 Goldstone ボゾンは現れず, 代わりにゲージ場が質量を持つことになる. A. Salam の言い方に倣えば「質量ゼロのゲージ場が Goldstone ボゾンを“食べて”質量を獲得する」のである. (中略) 弱い相互作用は, この Higgs-Kibble 機構によって短距離力になっているのである.

[詳しくは文献 [2, pp.486–491] も参照.]

13.2.1 節について

■式 (13.53) の導出 まず式 (13.54) の j_μ は, Ward 恒等式 (13.45) におけるカレント ($j_\mu^{(\text{Ward})}$) と表記すると

$$j_\mu^{(\text{Ward})} \equiv \frac{1}{i} (\varphi^* \partial_\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \varphi^*) = 2(\varphi_1 \partial_\mu \varphi_2 - \varphi_2 \partial_\mu \varphi_1) = 2j_\mu$$

で関係付けられる. よってこれが $\epsilon = 0$ のときの保存するカレントとなることは, あらかじめ分かっている. 次に式 (13.50) で $\epsilon = 0$ とおいた作用量 $S_{\epsilon=0}$ を考えると, ポテンシャルにおいて残る“メキシコ帽子型”の

項は $|\varphi|^2$ の関数である。そこでこれを式 (13.38) と比較すると、係数が $1/2$ だけ異なる。これを踏まえて式 (13.40) を再利用すると、

$$\delta S_{\varepsilon=0} = -\frac{1}{2} \int d^d x \alpha (\partial_\mu j_\mu^{(\text{Ward})}) = - \int d^d x \alpha (\partial_\mu j_\mu)$$

となる。ここに変換 (13.51) に伴う変化量 δS に対する、 ε の項の寄与を加えると、

$$\delta S = \int d^d x \alpha (-\partial_\mu j_\mu + \varepsilon \varphi_2).$$

$\alpha(x)$ の係数をゼロとおいて運動方程式 (13.53) を得る。

■式 (13.55) の導出 $\langle \hat{\varphi}_2(y) \rangle$ の式 (13.49) における規格化因子 \mathcal{Z} を表す経路積分と、後ろの経路積分

$$I_2 \equiv \int d[\varphi_1] d[\varphi_2] \varphi_2(y) e^{-S[\varphi_1, \varphi_2]}$$

の各々が個別に不変に留まる。そこで I_2 の不変性だけを要請しよう。Ward 恒等式 (13.45) の導出過程と同様に

$$\begin{aligned} \delta \varphi_2(y) &= \alpha(y) \varphi_1(y) = \int d^d x \delta^d(x-y) \alpha(x) \varphi_1(y), \\ \delta e^{-S} &= -e^{-S} \delta S = -e^{-S} \int d^d x \alpha(x) \frac{\delta S}{\delta \alpha(x)} \quad (\because \text{汎関数微分の定義}) \\ &= -e^{-S} \int d^d x \alpha(x) (-\partial_\mu j_\mu(x) + \varepsilon \varphi_2(x)) \quad (\because \text{運動方程式 (13.53) の導出過程}) \end{aligned}$$

と変形すると、

$$\begin{aligned} 0 &= \delta I_2 = \int d[\varphi_1] d[\varphi_2] \{ \delta \varphi_2(y) \cdot e^{-S} + \varphi_2(y) \delta e^{-S} \} \\ &= \int d^d x \alpha(x) \int d[\varphi_1] d[\varphi_2] \{ \delta^d(x-y) \varphi_1(y) + \varphi_2(y) \partial_\mu j_\mu(x) - \varepsilon \varphi_2(x) \varphi_2(y) \} e^{-S} \\ &= \int d^d x \alpha(x) \{ \delta^d(x-y) \langle \hat{\varphi}_1 \rangle + \partial_\mu \langle \hat{j}_\mu(x) \hat{\varphi}_2(y) \rangle - \varepsilon \langle \hat{\varphi}_2(x) \hat{\varphi}_2(y) \rangle \} : (13.55) \end{aligned}$$

を得る。

■式 (13.56) について Green 関数 $\langle \hat{\varphi}_2(x) \hat{\varphi}_2(y) \rangle$ (差 $x-y$ の関数) の Fourier 変換は

$$\langle \hat{\varphi}_2 \hat{\varphi}_2 \rangle_p = \int d^d x \langle \hat{\varphi}_2(x) \hat{\varphi}_2(y) \rangle e^{-ip \cdot (x-y)}, \quad \therefore \langle \hat{\varphi}_2 \hat{\varphi}_2 \rangle_{p=0} = \int d^d x \langle \hat{\varphi}_2(x) \hat{\varphi}_2(y) \rangle$$

で定義されるので、式 (13.55) は

$$0 = \int d^d x \{ \delta^d(x-y) \langle \hat{\varphi}_1 \rangle - \varepsilon \langle \hat{\varphi}_2(x) \hat{\varphi}_2(y) \rangle \} = \langle \hat{\varphi}_1 \rangle - \varepsilon \langle \hat{\varphi}_2 \hat{\varphi}_2 \rangle_{p=0} : (13.56)$$

を与える。

■「状態が質量を…… N がゼロでなくともよい」(式 (13.59) 下3行) について 式 (13.59) より

$$0 = \langle p | \partial_\mu \hat{j}_\mu(x) | 0 \rangle = iN p^2 e^{ip \cdot x}$$

であり、右辺において $p^2 = 0$ であれば、 $N \neq 0$ であってもこの関係は満たされる。

第 14 章 Fermi 粒子系の径路積分

14.1 Berezin 積分

Grassmann 数 (または Grassmann 場) の (汎関数) 微・積分については, 既に文献 [2, pp.315–320, pp.339–343] で最小限の基本事項を学んでいるものの, 本節では目新しい内容が多く見られる. それらを順にまとめていこう. なお Grassmann 数に関する積分は Berezin (ベレジン) によって導入されたため, Berezin 積分とも呼ばれる.

N 個の Grassmann 代数の生成子 ξ_i と完全反対称な通常の数係数 $a_{ij\dots}$ を用いて, 一般の Grassmann 代数の要素は

$$A = a + a_i \xi_i + \frac{1}{2} a_{ij} \xi_i \xi_j + \frac{1}{3!} a_{ijk} \xi_i \xi_j \xi_k + \dots + \frac{1}{N!} a_{i_1 \dots i_N} \xi_{i_1} \dots \xi_{i_N} \quad (14.2)$$

と書ける. ここで Grassmann 数 ξ_i 同士が反交換することに注意すると, 例えば

$$\frac{1}{3!} a_{ijk} \xi_i \xi_j \xi_k = \sum_{i < j < k} a_{ijk} \xi_i \xi_j \xi_k$$

なので, 上式 (14.2) は文献 [2, p.316] の式 (12.60) と同じである.

- 偶数次の項だけから成る級数は, 代数のすべての要素と交換し, “偶要素” “ボゾンの要素” と呼ばれる.
- 奇数次の項だけから成る級数は, 互いに反交換し, “奇要素” “フェルミオンの要素” と呼ばれる.

物理学の文脈では偶要素同士, もしくは奇要素同士の加算しか必要でない.

さて, Grassmann 数に関する積分を形式的に定義すると, すべての ξ_i に関する N 重積分は

$$\begin{aligned} \int d\xi_N \dots d\xi_1 (a_{i_1 \dots i_N} \xi_{i_1} \dots \xi_{i_N}) &= \varepsilon_{i_1 \dots i_N} a_{i_1 \dots i_N} \\ &= N! a_{1 \dots N} \end{aligned} \quad (14.4)$$

となるので, 代数要素 (14.2) から “最高次項” の係数 $a_{1 \dots N}$ を取り出す.

note : 上式 (14.4) について 第 1 の等号では

$$\xi_{i_1} \dots \xi_{i_N} = \varepsilon_{i_1 \dots i_N} \xi_1 \dots \xi_N$$

を用いる. 文献 [2, pp.340–342] とは対照的に $d[\xi] \equiv d\xi_N \dots d\xi_1$ において $\{d\xi_i\}$ を添字の降順に並べて定義したため, 積分を容易に実行できることが見て取れる. なお完全反対称な因子同士の “縮約” を最初から

$$a_{i_1 \dots i_N} \xi_{i_1} \dots \xi_{i_N} = N! a_{1 \dots N} \xi_1 \dots \xi_N$$

と書けば, 直ちに式 (14.4) の最右辺が得られる.

さらに荷電 Dirac 粒子を扱うことを念頭に, $\{\xi_i\}$ と同数の, $\{\xi_i^*\}$ とは独立な Grassmann 数の組 $\{\xi_i^*\}$ を導入する. このとき “Gauss 型” の積分公式

$$\begin{aligned} \int d[\xi] d[\xi^*] e^{\xi_i^* A_{ij} \xi_j} &= \int d[\xi] d[\xi^*] A_{1i_1} \dots A_{Ni_N} \xi_1^* \xi_{i_1} \dots \xi_N^* \xi_{i_N} \\ &= \det A \end{aligned} \quad (14.6)$$

が成り立つことは, 文献 [2, pp.341–342] (とそのノート) で確認済みである.

note : 上式 (14.6) について 比較の際には, 独立な変数 ξ_i^*, ξ_j が反交換するので [2, p.319], 指数において $\xi_i^* A_{ij} \xi_j = -\xi_i A_{ij} \xi_j^*$ となることを念頭に置く. また $d\xi_1 d\xi_1^* \cdots d\xi_N d\xi_N^*$ における要素 $\{d\xi_i, d\xi_i^*\}$ を反交換して

$$d[\xi]d[\xi^*] \equiv d\xi_N d\xi_N^* \cdots d\xi_1 d\xi_1^*$$

へと並べ替える操作は常に偶置換となることが, N に関して帰納的に理解できる*44.

実変数の Gauss 積分 (12.63) に汎関数積分の公式 (26) が対応したように, 式 (14.6) についても Grassmann 場 $\theta(x), \tilde{\theta}(x)$ に関する類似の汎関数積分の公式

$$\int \mathcal{D}\theta \mathcal{D}\tilde{\theta} e^{-[\theta A \tilde{\theta}]} = \det A$$

が成立する (ただし $\det A$ は式 (26) の箇所と同様に定義) [2, p.343]. なおすぐ後の式 (14.7) では反対称な A_{ij} を考えるのに対し, 式 (14.6) は任意の A_{ij} に対して成立する.

“実の” [つまり 1 組の] $\{\xi_i\}$ に対しても指数関数の積分の公式が作られる. A_{ij} を $2N$ 次の反対称な行列とすると [対応して $2N$ 個の生成子 ξ_i を想定],

$$\begin{aligned} \int d[\xi] e^{\frac{1}{2} \xi_i A_{ij} \xi_j} &= \frac{1}{2^N N!} \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_{2N}} A_{i_1 i_2} A_{i_3 i_4} \cdots A_{i_{2N-1} i_{2N}} \\ &\equiv \text{Pf} A \end{aligned} \quad (14.7)$$

が成り立つ. 最後の等号は, A の “Pfaff (パッフ) 多項式” (Pfaffian) $\text{Pf} A$ の定義となっている.

上式 (14.7) の導出 $2N$ 個の変数 $d[\xi] \equiv d\xi_{2N} \cdots d\xi_1$ に関する積分に寄与し得るのは, 指数の展開における, ξ_i について $2N$ 次の項

$$\frac{1}{N!} (\xi_i A_{ij} \xi_j)^N = \frac{1}{2^N N!} A_{i_1 i_2} \cdots A_{i_{2N-1} i_{2N}} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{2N}}$$

のみである. 式 (14.4) のときと同様に $\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{2N}} = \varepsilon_{i_1 \cdots i_{2N}} \xi_1 \cdots \xi_{2N}$ であり, これらを代入すると式 (14.7) が得られる.

note : Pfaff 多項式 $\text{Pf} A$ の定義 (14.7) について 各 A_{ij} の添字 i, j が入れ替わった, あるいは A_{ij} 同士が入れ替わっただけの関係にある $2^N N!$ 個の項は互いに等しく, $2^N N!$ による除算はそのうち 1 つの項だけを選ぶ役割を担っていることが見て取れる.

$\text{Pf} A$ の意味は, 反対称な A に対する性質

$$(\text{Pf} A)^2 = \det A \quad (14.8)$$

に含まれている [本稿次節で補足].

さらに式 (14.7) を, Gauss(型の) 積分 (12.61), (12.64) と類似の積分

$$\int d[\xi] e^{\frac{1}{2} \xi_i A_{ij} \xi_j + \eta_i \xi_i} \quad (14.10)$$

44 要素 $\{d\xi_i, d\xi_i^\}$ 同士は反交換するものと考えないと, Berezin 積分は自己矛盾を生じ, よく定義されない. 実際, 例えば

$$\int d\xi_1 d\xi_2 \xi_1 \xi_2 = - \int d\xi_1 d\xi_2 \xi_2 \xi_1 = -1, \quad \int d\xi_2 d\xi_1 \xi_1 \xi_2 = 1$$

が両立するためには, $d\xi_1 d\xi_2 = -d\xi_2 d\xi_1$.

に拡張することを考える．ここに η_i は ξ_i と同反交換する Grassmann 数である (η_i 同士も反交換する)．計算の方針は式 (14.10) を“平方完成”し，シフトした積分変数 $\xi'_i = \xi_i + A_{ik}^{-1}\eta_k$ に関する積分に書き換えて，もとの公式 (14.7) を適用することである．その際，一般に被積分関数の ξ_i の多項式において変数のシフト $\xi_i \rightarrow \xi_i + \eta_i$ (我々の例では $\eta_i \rightarrow A_{ik}^{-1}\eta_k$) を行うと， η_i は ξ_i のない単項式の中だけに現れ [多項式は特定の ξ_i について高々 1 次だから]，それらは ξ_i による積分によってゼロになるので，積分は変数のシフトの下で不変となることに注意する．さらに逆行列 A_{ik}^{-1} もまた反対称となることを考慮すると，

$$\begin{aligned} \int d[\xi] e^{\frac{1}{2}\xi_i A_{ij} \xi_j + \xi_i \eta_i} &= \int d[\xi] e^{\frac{1}{2}(\xi_i + A_{ik}^{-1}\eta_k) A_{ij} (\xi_j + A_{jl}^{-1}\eta_l) + \frac{1}{2}\eta_i A_{ij}^{-1}\eta_j} \\ &= (\text{Pf} A) e^{+\frac{1}{2}\eta_i A_{ij}^{-1}\eta_j} \propto \sqrt{\det A} e^{+\frac{1}{2}\eta_i A_{ij}^{-1}\eta_j} \end{aligned} \quad (14.12)$$

を得る [本稿次節で補足]．Grassmann 数に関する積分 (14.7), (14.12) $\propto \sqrt{\det A}$ は，対応する実変数に関する積分 (12.63), (12.64) と比べて， $\sqrt{\det A}$ が分母ではなく分子にあるという違いがある．

また線形の変数変換 $\xi'_i = M_{ij}\xi_j$ を行うと，測度は

$$d[\xi'] = (\det M) d[\xi] \quad (14.13)$$

と変換する [本稿次節で補足]．ここでも Jacobi 行列式の付き方は，実変数の積分の場合とは逆である．

“複素 Grassmann 数” に対しては，[式 (14.12) と同様の変形を行った後に，式 (14.7) の代わりに式 (14.6) を用いると]

$$\begin{aligned} \int d[\xi] d[\xi^*] e^{\xi_i^* A_{ij} \xi_j + \xi_i^* \eta_i + \eta_i^* \xi_i} &= \int d[\xi] d[\xi^*] e^{(\xi_i^* + \eta_k^* A_{ki}^{-1}) A_{ij} (\xi_j + A_{jl}^{-1}\eta_l) - \eta_i^* A_{ij}^{-1}\eta_j} \\ &= (\det A) e^{-\eta_i^* A_{ij}^{-1}\eta_j} \end{aligned} \quad (14.14)$$

が得られる．

14.1.1 超対称性 (BRS 対称性)

N 個の実変数の組 $\{\mathcal{F}^i\}$ を，もう 1 組の N 個の変数 $\{\varphi^\mu\} \equiv \varphi$ の関数と見なして ($i, \mu = 1, \dots, N$)，

$$M_\mu^i(\varphi) \equiv \frac{\partial \mathcal{F}^i(\varphi)}{\partial \varphi^\mu}$$

を定義する．また実変数に関する積分要素を $d[\mathcal{F}] \equiv \prod_{i=1}^N \frac{d\mathcal{F}^i}{\sqrt{2\pi}}$, etc. と表記する．[念のため，ここで考えるのは場による経路積分ではなく，実変数による通常の積分であることを注意しておく．ただし 14.2 節のように i, μ を離散時刻も含めたラベルと見なせば，多重積分は経路積分に移行する．] さらに 2 組の Grassmann 数 $\{\bar{\psi}_i\}, \{\psi^\mu\}$ ，および [以上全ての因子と] 交換する変数 $\{\omega_i\}$ を導入する ($i, \mu = 1, \dots, N$)．ここでも Grassmann 変数に対しては

$$d[\psi] d[\bar{\psi}] = d\psi^N d\bar{\psi}_N \cdots d\psi^1 d\bar{\psi}_1$$

である．既にギリシャ文字 μ とローマン体 i の添字によって，表記の上でも区別されているように， $\bar{\psi}$ を ψ の複素共役と考えてはいけない．このとき“任意の”行列 g^{ij} と関数形 $\mathcal{F}^i(\varphi)$ に対して，恒等式

$$1 = \int d[\varphi] d[\psi] d[\bar{\psi}] d[\omega] e^{\bar{\psi}_i M_\mu^i \psi^\mu + \frac{1}{2} g^{ij} \omega_i \omega_j - \omega_i \mathcal{F}^i(\varphi)} \quad (14.19)$$

が成立する (導出は下記)．ただし各変数 ω_i に関する積分は，虚軸に沿って行う [導出過程を参照]．上式 (14.19) は単なる 1 という数を，手の込んだ非自明な方法で表している．

恒等式 (14.19) の導出 任意の行列 g_{ij} に対して^{*45}, Gauss 積分の公式 (12.63):

$$I \equiv \int d[\mathcal{F}] e^{-\frac{1}{2}g_{ij}\mathcal{F}^i\mathcal{F}^j} = \det^{-1/2}(g_{ij}) \quad (14.15)$$

を考えるとところから始めよう. 上式の第 2 辺は通常の変数変換により,

$$I = \int d[\varphi] J(\varphi) e^{-\frac{1}{2}g_{ij}\mathcal{F}^i(\varphi)\mathcal{F}^j(\varphi)}, \quad (14.16)$$

$$J \equiv \det \left(\frac{\partial \mathcal{F}^i}{\partial \varphi^\mu} \right) = \det(M_\mu^i) \quad (14.17)$$

と書き換えられる. ここで [公式 (14.6) を利用して], Jacobi 行列式 (14.17) を Grassmann 変数 $\bar{\psi}_i, \psi^\mu$ による積分で表すと,

$$\begin{aligned} I &= \int d[\varphi] \left(\int d[\psi] d[\bar{\psi}] e^{\bar{\psi}_i M_\mu^i \psi^\mu} \right) e^{-\frac{1}{2}g_{ij}\mathcal{F}^i(\varphi)\mathcal{F}^j(\varphi)} \\ &= \int d[\varphi] d[\psi] d[\bar{\psi}] e^{\bar{\psi}_i M_\mu^i \psi^\mu - \frac{1}{2}g_{ij}\mathcal{F}^i(\varphi)\mathcal{F}^j(\varphi)} \end{aligned} \quad (14.18)$$

となる. [ただし Grassmann 数と実数の 2 次形式 $\bar{\psi}_i M_\mu^i \psi^\mu, -\frac{1}{2}g_{ij}\mathcal{F}^i\mathcal{F}^j$ が交換することに注意して, “指数法則” を用いた.] さらに g^{ij} を g_{ij} の逆行列として,

$$I = \det^{-1/2}(g_{ij}) \int d[\varphi] d[\psi] d[\bar{\psi}] d[\omega] e^{\bar{\psi}_i M_\mu^i \psi^\mu + \frac{1}{2}g^{ij}\omega_i\omega_j - \omega_i\mathcal{F}^i(\varphi)} \quad (38)$$

と書く [本稿次節で補足]. 最後にこれを冒頭の式:(14.15): $I = \det^{-1/2}(g_{ij})$ と等置して式 (14.19) を得る.

式 (14.19) の被積分関数は “超対称性” 変換 (*supersymmetry transformation*) に関する不変性を持っている. ここで無限小の超対称性変換は,

$$\begin{aligned} \delta\varphi^\mu &= \epsilon\psi^\mu, & \delta\psi^\mu &= 0, \\ \delta\bar{\psi}_i &= \epsilon\omega_i, & \delta\omega_i &= 0 \end{aligned} \quad (14.20)$$

で定義される. これは交換する変数と反交換する変数を混合する変換となっており, 無限小パラメーター ϵ は反交換する変数 ψ^μ を交換する変分 $\delta\varphi^\mu$ に, 交換する変数 ω_i を反交換する変分 $\delta\bar{\psi}_i$ に関係付けるので, [Grassmann 数と] “反交換する定数” と見なさねばならない. このとき実際, 式 (14.19) における指数 (作用の対応物) は, 超対称性変換 (14.20) の下で不変である.

確認

$$\begin{aligned} \delta \left\{ \bar{\psi}_i M_\mu^i(\varphi)\psi^\mu + \frac{1}{2}g^{ij}\omega_i\omega_j - \omega_i\mathcal{F}^i(\varphi) \right\} &= (\delta\bar{\psi}_i)M_\mu^i(\varphi)\psi^\mu + \bar{\psi}_i(\delta M_\mu^i(\varphi))\psi^\mu - \omega_i\delta\mathcal{F}^i(\varphi) \\ &= \epsilon \left\{ \omega_i M_\mu^i(\varphi)\psi^\mu - \bar{\psi}_i \frac{\partial M_\mu^i(\varphi)}{\partial \varphi^\nu} \psi^\nu \psi^\mu - \omega_i \frac{\partial \mathcal{F}^i(\varphi)}{\partial \varphi^\mu} \psi^\mu \right\} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (14.21)$$

^{*45} すぐ後でこの g_{ij} の逆行列として, 式 (14.19) の g^{ij} を導入する.

ここで第3辺において [第1項と第3項は相殺する。また第2項では ϵ を $\bar{\psi}_i$ と反交換する際に負号が生じている。いずれにせよ] 第2項は、添字 μ, ν について反対称な積 $\psi^\nu \psi^\mu$ と対称な量 $\frac{\partial M_\mu^i}{\partial \varphi^\nu} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}^i}{\partial \varphi^\mu \partial \varphi^\nu}$ の結合を含むため、消えることに注意した。

上記の特別な超対称性変換は、これをゲージ理論の文脈において Becchi (ベッキ), Rouet (ルエ) および Stora (ストラ) に因んで、BRS 変換と呼ばれる。

[変分 (14.20) における ϵ の係数を与える演算子として] 操作 s を、

$$\begin{aligned} s\varphi^\mu &= \psi^\mu, & s\psi^\mu &= 0, \\ s\bar{\psi}_i &= \omega_i, & s\omega_i &= 0 \end{aligned} \quad (14.22)$$

で定義することも有用である。Grassmann 数 ϵ を外したので、通常の Leibniz 規則と異なり、 s は (Grassmann) 奇の (すなわち奇数個の Grassmann 数を含む) 量を跳び越すときに負号が出る [5, p.170] :

$$s(AB) = s(A)B + (-1)^{g(A)} As(B). \quad (14.23)$$

ここに

$$\text{“等級” (grading) } g(A) \equiv \begin{cases} 0 & (A \text{ が偶のとき}) \\ 1 & (A \text{ が奇のとき}) \end{cases} \quad \therefore (-1)^{g(A)} = \begin{cases} +1 & (A \text{ が偶のとき}) \\ -1 & (A \text{ が奇のとき}) \end{cases}$$

である。この変則的な Leibniz 規則から、 s は反微分と呼ばれる^{*46}。

note : 式 (14.23) について 実際、操作 s の定義 $\delta(A) = \epsilon s(A)$ より、

$$\begin{aligned} \epsilon s(AB) &= \delta(AB) = (\delta A)B + A\delta B = \epsilon s(A) \cdot B + A \cdot \epsilon s(B) \\ &= \epsilon \{s(A) \cdot B + (-1)^{g(A)} As(B)\} \end{aligned}$$

となる。ただし最後の等号では第2項で Grassmann 数 ϵ を A と入れ替える必要性から、符号 $(-1)^{g(A)}$ が生じている。最左辺と最右辺を比較して、式 (14.23) を得る^{*47}。

反微分 s は $s^2 = 0$ の性質を持つ。

note 任意の量 A に対して $s(A)$ は、式 (14.23) を繰り返し利用すると式 (14.22) 左辺の線形結合で書ける。また式 (14.22) より、その各々はさらに s をとるとゼロになることが見て取れる。よって $s^2(A) = 0$ 。

これを踏まえると、式 (14.21) で見た作用の超対称性は、恒等式 $s^2 = 0$ の観点から改めて理解することができる。実際、作用 (式 (14.19) の指数) は

$$\left\{ \bar{\psi}_i M_\mu^i \psi^\mu + \frac{1}{2} g^{ij} \omega_i \omega_j - \omega_i \mathcal{F}^i(\varphi) \right\} = s \left\{ \bar{\psi}_i \left(\frac{1}{2} g^{ij} \omega_j - \mathcal{F}^i(\varphi) \right) \right\} \quad (14.24)$$

と書けるので [本稿次節で補足]、その s はゼロになる。

さらに \mathcal{F}^i が “超ポテンシャル” と呼ばれる関数 $W(\varphi)$ から、

$$\mathcal{F}^i = \frac{\partial W}{\partial \varphi_i} \quad (14.25)$$

^{*46} ここでは一般に Leibniz 規則に従う操作を “微分” と呼んでおり、それは必ずしも導関数を含んでいなくて良い。

^{*47} この議論を抽象的で取っつきにくく感じる場合、式 (14.20) を適用して変分を直接評価できる簡単な例として、 $A = \bar{\psi}_i, B = \varphi^\mu$ とおいて同様の計算を行い、感覚をつかむと良い。

のように導かれる特別な場合を考えよう。ただしこれ以降は添字 i, μ の区別をなくし、

$$\varphi^\mu \rightarrow \varphi_i, \quad \psi^\mu \rightarrow \psi_i, \quad M_\mu^i \rightarrow M^{ij}$$

と書く。このとき Grassmann 数の対 $\theta, \bar{\theta}$ を座標を持つ“超空間” (superspace) における、超場 (superfield) $\Phi_i(\theta, \bar{\theta})$ を考えることに意味が生じる。[そのことはすぐ後の式 (14.27) において納得できる。もっとも超場自体は式 (14.25) とは無関係に定義できる。] $\theta^2 = \bar{\theta}^2 = 0$ なので、超場 $\Phi_i(\theta, \bar{\theta})$ の原点周りの Taylor 展開はすぐに終わる。それを全ての因子 $\varphi_i, \psi_i, \bar{\psi}_i, \omega_i$ の線形結合の形

$$\Phi_i(\theta, \bar{\theta}) = \varphi_i + \bar{\theta}\psi_i + \bar{\psi}_i\theta + \bar{\theta}\theta\omega_i \quad (14.26)$$

に書いて、超場 $\Phi_i(\theta, \bar{\theta})$ を定義する。[展開の項数と変数の種類の個数がうまく合っている (いずれも 4 つ).] すると式 (14.24) の作用は

$$S = \int d\theta d\bar{\theta} \left\{ \frac{1}{2} g^{ij} \Phi_i \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \bar{\theta}} \Phi_j - W(\Phi) \right\} \quad (14.27)$$

と書ける。[導出は本稿次節。上式 (14.27) はスカラー場の作用と類似の形となっている.]

ところで $\bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta} + \epsilon$ という変換により、

$$\Phi_i \rightarrow (\varphi_i + \epsilon\psi_i) + \bar{\theta}\psi_i + (\bar{\psi}_i + \epsilon\omega_i)\theta + \bar{\theta}\theta\omega_i \quad (14.28)$$

となる。各係数は超対称性変換 (14.20) に従って変化していることが分かる。すると作用 S の超対称性は、式 (14.27) においては、変数のシフトに対する Berezin 積分の不変性 [初出は式 (14.12) の箇所] として理解できる。なるほど [実空間全体における通常の積分が変数の並進に対して不変であるのと同様に]、作用 (14.28) は超空間全域での積分なので、超空間での並進に他ならない超対称性変換に対して不変になる、と解釈できる。

14.1 節について

■対合変換 $\xi_i \rightarrow \xi_i^*$ の説明 (p.194 「Dirac 場の荷電フェルミオンを……」で始まる段落) について 対合変換 $\xi_i \rightarrow \xi_i^*$ は 2 回繰り返し行くと元の要素 $(\xi_i^*)^* = \xi_i$ に戻る変換であって、 ξ_i^* は 14.2 節の式 (14.31): $(e^{\hat{a}^\dagger \xi})^\dagger = e^{\xi^* \hat{a}}$ のように、Grassmann 数を含む因子の Hermite 共役が、あたかも ξ_i, ξ_i^* を複素共役な数であるかのごとく見なして、通常の規則に従って書けるように定義されている。これが「要素 ξ_i を対応する要素 ξ_i^* に変え、積の順序を逆にして係数の複素共役をとる」(p.194, 1.15) という言い回しの意味するところと推察される。ただし ξ_i^* を文字通り ξ_i の複素共役と考えてはならず、「 ξ_i^* の実体は ξ_i とは独立の、まったく別のもものと見なさなければならない」(p.194, 1.18–19)。

■式 (14.8) の証明 教科書でスケッチされている方針に従って、反対称な A_{ij} に関する Pfaff 多項式の公式 (14.8): $(\text{Pf} A)^2 = \det A$ を示そう。「ほとんどすべての反対称な A 」(p.195, 1.10) は適当な直交行列 O によって、

$$A' \equiv O^T A O = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \quad (14.9)$$

の形に変換できることを利用する ($\lambda \equiv \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ は N 次の対角行列)^{*48}。

^{*48} つまり真面目に書けば、

$$A'_{ij} = -(\lambda_r \delta_{rs}) \delta_{ir} \delta_{j, N+s} + (\lambda_r \delta_{rs}) \delta_{i, N+r} \delta_{js}$$

である ($r, s = 1, \dots, N$ で和をとらない)。文献 [19, p.319]。を見ると、式 (14.9) が成り立つ条件は $\text{rank } A = 2N$ と考えられる。

準備として任意の O (直交行列に限らない) に対して, $\text{Pf}(O^T A O)$ と $\text{Pf} A$ の関係を調べると,

$$\begin{aligned}\text{Pf}(O^T A O) &\equiv \frac{1}{2^N N!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{2N}} (O^T A O)_{i_1 i_2} (O^T A O)_{i_3 i_4} \cdots (O^T A O)_{i_{2N-1} i_{2N}} \\ &= \frac{1}{2^N N!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{2N}} (O_{j_1 i_1} A_{j_1 j_2} O_{j_2 i_1}) (O_{j_3 i_3} A_{j_3 j_4} O_{j_4 i_3}) \cdots (O_{j_{2N-1} i_{2N-1}} A_{j_{2N-1} j_{2N}} O_{j_{2N} i_{2N}}) \\ &= \underbrace{(\varepsilon_{i_1 \dots i_{2N}} O_{j_1 i_1} O_{j_2 i_2} \cdots O_{j_{2N} i_{2N}})}_{(\det O) \times \varepsilon_{j_1 \dots j_{2N}}} \left(\frac{1}{2^N N!} A_{j_1 j_2} A_{j_3 j_4} \cdots A_{j_{2N-1} j_{2N}} \right) \\ &= (\det O) (\text{Pf} A).\end{aligned}$$

特に O を直交行列に選べば $\det O = \pm 1$ なので,

$$(\text{Pf} A)^2 = (\text{Pf} A')^2.$$

そこで次に式 (14.9) の A' に対して

$$\text{Pf} A' \equiv \frac{1}{2^N N!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{2N}} A'_{i_1 i_2} \cdots A'_{i_{2N-1} i_{2N}}$$

を評価する. Levi-Civita 記号は添字 i_1, \dots, i_{2N} に 1 から $2N$ の相異なる値が全て 1 度ずつ現れるときに限ってゼロでなく, また各 A'_{ij} は添字 i, j の一方が $r = 1, \dots, N$, もう一方が $N+r$ のときにのみゼロでない. ところが N 個の添字の組 $(r, N+r)$ ($r = 1, \dots, N$) を各 A'_{ij} に割り当てる方法は $N!$ 通りあり, その上で各 r と $N+r$ を 2 つの添字 i, j に充てる方法は 2^N 通りあるので, $2^N N!$ 個の項が得られることになる. しかも添字 $(r, N+r)$ の入れ替えと添字の組同士の入れ替えに関して, A'_{ij} の積と Levi-Civita 記号は同じ (反対称性を持つので, $2^N N!$ 個の項は全て等しい. こうして,

$$\begin{aligned}\text{Pf} A' &= \varepsilon_{1, N+1, 2, N+2, \dots, N, 2N} \times A'_{1, N+1} A'_{2, N+2} \cdots A'_{N, 2N} \\ &= (-1)^\kappa \times \{(-1)^N \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_N\} \\ &= (-1)^{\kappa+N} \det \lambda, \\ \therefore (\text{Pf} A')^2 &= (\det \lambda)^2\end{aligned}$$

を得る*49.

他方,

$$\begin{aligned}\det A &= (\det O^T) (\det A) (\det O) \quad (\because \det O = \det O^T = \pm 1) \\ &= \det A' = \det \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{N^2} \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \quad (\text{列を } N^2 \text{ 回入れ替えた}) \\ &= (-1)^{N^2} \cdot \det \lambda \cdot (-1)^N \det \lambda \\ &= (\det \lambda)^2 \quad (\because N \text{ の偶奇に依らず } (-1)^{N^2} (-1)^N = (-1)^{N(N+1)} = 1)\end{aligned}$$

*49 $\varepsilon_{1, N+1, 2, N+2, \dots, N, 2N} = (-1)^\kappa \varepsilon_{12 \dots 2N} = (-1)^\kappa$ において, 指数 $\kappa (\in \mathbb{Z})$ の具体的な値は最終的な結論に必要な. とは言え, 数列 $1, N+1, 2, N+2, \dots, N, 2N$ を昇順 $1, \dots, 2N$ に並び替えるのに要する, 隣り合う番号を入れ替える回数は, まず 2 を 1 の右隣に移動するのに 1 回, 次いで 3 を 2 の右隣に移動するのに 2 回, ……となるので, 合計

$$\kappa = 1 + 2 + \cdots + (N-1) = \frac{N(N-1)}{2}$$

と求まる.

である。

以上をまとめると

$$(\text{Pf}A)^2 = (\text{Pf}A')^2 = (\det \lambda)^2 = \det A$$

となるので、式 (14.8) が示された。

■式 (14.12) について 第 1 の等号における“平方完成”は、文献 [2, pp.350–351] で自由なスピノル場の生成汎関数を計算した際に、汎関数積分の文脈で“シフトした” Grassmann 場を導入した技法と似ている。ここでは式 (14.12) 第 2 辺の指数

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\xi_i + A_{ik}^{-1}\eta_k)A_{ij}(\xi_j + A_{jl}^{-1}\eta_l) + \frac{1}{2}\eta_i A_{ij}^{-1}\eta_j \\ &= \frac{1}{2}\xi_i A_{ij}\xi_j + \frac{1}{2}\xi_i A_{ij}A_{jl}^{-1}\eta_l + \frac{1}{2}A_{ik}^{-1}\eta_k A_{ij}\xi_j + \frac{1}{2}A_{ik}^{-1}\eta_k A_{ij}A_{jl}^{-1}\eta_l + \frac{1}{2}\eta_i A_{ij}^{-1}\eta_j \end{aligned}$$

において、

$$\begin{aligned} (\text{第 2 項}) &= \xi_i \eta_i / 2, & (\text{第 3 項}) &= -\eta_k (A_{ki}^{-1} A_{ij}) \xi_j / 2 = -\eta_j \xi_j / 2 = \xi_i \eta_i / 2, \\ (\text{第 4 項}) &= A_{lk}^{-1} \eta_k \eta_l / 2 = -\eta_i A_{ij}^{-1} \eta_j / 2 \end{aligned}$$

とすれば、式 (14.12) 最左辺に戻ることができる。

第 2 の等号では偶要素 $\xi'_i A_{ij} \xi'_j / 2$ と $\eta_i A_{ij}^{-1} \eta_j / 2$ が交換することに注意して“指数法則”を用い、シフトした変数 ξ'_i に関する積分

$$\int d[\xi'] e^{\frac{1}{2}\xi'_i A_{ij} \xi'_j} = \text{Pf}A \quad (\because \text{式 (14.7)})$$

を分離すれば良い。

■測度の変換 (14.13) について Grassmann 数の測度 $d[\xi] = \xi_N \cdots \xi_1$ での積分に寄与するのは、 N 次の項 $\sim (\xi_1 \cdots \xi_N)$ だけである。ところで文献 [2, p.342] で見たように、これは

$$\xi'_1 \cdots \xi'_N = (\det M) \xi_1 \cdots \xi_N$$

と変換する。よって積分

$$\int d[\xi] \xi_1 \cdots \xi_N$$

が不変に留まるには、測度は被積分関数とは逆に式 (14.13) のように変換しなければならない。

14.1.1 節について

■式 (38)(教科書 p.197, 1.7 の式) の導出 Gauss 積分の公式 (12.64) において

$$A_{ij} \rightarrow g^{ij}, \quad \therefore A_{ij}^{-1} \rightarrow g_{ij}, \quad \det A \rightarrow \{\det(g_{ij})\}^{-1},$$

および $x^i \rightarrow \omega_i, b_i \rightarrow \mathcal{F}^i$ とおくと、

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2}g_{ij}\mathcal{F}^i\mathcal{F}^j} &= \{\det(g_{ij})\}^{-1/2} \int d[\omega] e^{-\frac{1}{2}g^{ij}\omega_i\omega_j + i\omega_i\mathcal{F}^i} \\ &= \{\det(g_{ij})\}^{-1/2} \int d[\omega] e^{\frac{1}{2}g^{ij}\omega_i\omega_j + \omega_i\mathcal{F}^i} \end{aligned}$$

が得られる。ただし第2の等号では積分変数を $i\omega_i \rightarrow \omega_i$ と改めた。これに伴い積分要素

$$d[\omega] \equiv \prod_{i=1}^N \frac{d\omega_i}{\sqrt{2\pi}}$$

は形を変えずに、新しい変数 ω_i の各々が純虚数と見なされる。(それ故 Wick 回転の式 (5.30) とは対照的に、ここでは見かけ上、係数 i^N が伴わず、変数 ω_i による複素積分は虚軸に沿って行われる。) そこで式 (14.18) の指数を再び

$$e^{\bar{\psi}_i M_\mu^i \psi^\mu - \frac{1}{2} g_{ij} \mathcal{F}^i(\varphi) \mathcal{F}^j(\varphi)} = e^{\bar{\psi}_i M_\mu^i \psi^\mu} e^{-\frac{1}{2} g_{ij} \mathcal{F}^i(\varphi) \mathcal{F}^j(\varphi)}$$

と戻して上式を代入すると、式 (38) が得られる。

■作用を s で表した式 (14.24) について “Leibniz 規則” (14.23) を用いて

$$s \left\{ \bar{\psi}_i \left(\frac{1}{2} g^{ij} \omega_j - \mathcal{F}^i(\varphi) \right) \right\} = s(\bar{\psi}_i) \cdot \left(\frac{1}{2} g^{ij} \omega_j - \mathcal{F}^i(\varphi) \right) + \bar{\psi}_i s(\mathcal{F}^i)$$

と書いておき、

$$\epsilon s(\mathcal{F}^i) = \delta \mathcal{F}^i = \frac{\partial \mathcal{F}^i}{\partial \varphi^\mu} \delta \varphi^\mu = \frac{\partial \mathcal{F}^i}{\partial \varphi^\mu} \epsilon s(\varphi^\mu) = \epsilon \frac{\partial \mathcal{F}^i}{\partial \varphi^\mu} s(\varphi^\mu) \quad \rightarrow \quad s(\mathcal{F}^i) = \frac{\partial \mathcal{F}^i}{\partial \varphi^\mu} s(\varphi^\mu)$$

が成り立つことに注意して式 (14.22) を代入すれば良い。

■超空間の積分で表した作用 (14.27) の導出

$$\mathcal{F}^i = \frac{\partial W}{\partial \varphi_i}, \quad M^{ij} = \frac{\partial \mathcal{F}^i}{\partial \varphi_j} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j}$$

より、式 (14.24) の作用は

$$S = \frac{1}{2} g^{ij} \omega_i \omega_j - \mathcal{F}^i \omega_i + \bar{\psi}_i M^{ij} \psi_j = \frac{1}{2} g^{ij} \omega_i \omega_j - \frac{\partial W}{\partial \varphi_i} \omega_i + \bar{\psi}_i \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \psi_j \quad (39)$$

と書ける。これが式 (14.27) の超空間にわたる積分に一致することを確認する。まず超場の定義式 (14.26) より $\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \bar{\theta}} \Phi_j = \omega_j$ なので、式 (14.27) の第1項

$$S_1 \equiv \int d\theta d\bar{\theta} \frac{1}{2} g^{ij} \Phi_i \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \bar{\theta}} \Phi_j = \int d\theta d\bar{\theta} \frac{1}{2} g^{ij} \Phi_i \omega_j = \int d\theta d\bar{\theta} \bar{\theta} \theta \frac{1}{2} g^{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} g^{ij} \omega_i \omega_j$$

は上式 (39) 最右辺の第1項に一致する。次に式 (14.27) の第2項について、超場の原点での値 $\Phi_i(0,0) = \varphi_i$ からのズレ $(\Phi_i - \varphi_i)$ で、 $W(\Phi)$ を Taylor 展開しよう。すると3次以上の項は $\theta^2 = \bar{\theta}^2 = 0$ によって消えるので、

$$W(\Phi) = W(\varphi) + \frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi_i} (\Phi_i - \varphi_i) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W(\varphi)}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} (\Phi_i - \varphi_i) (\Phi_j - \varphi_j)$$

である。ここで積分に寄与する、 θ と $\bar{\theta}$ を1つずつ含む項だけを拾うと

$$(\Phi_i - \varphi_i) \rightarrow \bar{\theta} \theta \omega_i,$$

$$(\Phi_i - \varphi_i) (\Phi_j - \varphi_j) = (\bar{\theta} \psi_i + \bar{\psi}_i \theta + \bar{\theta} \theta \omega_i) (\bar{\theta} \psi_j + \bar{\psi}_j \theta + \bar{\theta} \theta \omega_j) \rightarrow -\bar{\theta} \theta (\bar{\psi}_i \psi_j + \bar{\psi}_j \psi_i)$$

となるので (Grassmann 数を反交換した)、

$$S_2 \equiv - \int d\theta d\bar{\theta} W(\Phi) = - \frac{\partial W}{\partial \varphi_i} \omega_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} (\bar{\psi}_i \psi_j + \bar{\psi}_j \psi_i)$$

は式 (39) 最右辺の残りの2項に一致する。以上より超空間における積分 (14.27): $S_1 + S_2$ は作用 (39) を再現する。

■BRS 対称性について (Faddeev-Popov の方法との類似性など) Jacobi 行列式 (14.17) を Grassmann 変数に関する Gauss 積分に置き換える技法 (式 (14.18)) は, 経路積分にゲージ固定を施す Faddeev-Popov の方法でも行った [2, pp.364–366]. また式 (38) のように積分に定数を与える積分を掛けて重積分にする変形も, Faddeev-Popov の方法において経路積分からデルタ汎関数を取り除くのに用いたトリックとよく似ている [2, p.368].

ゲージ理論の量子系の Lagrangian $\tilde{\mathcal{L}}$ の BRS 対称性は非常に基本的なもので, 歴史的にはそれに先行していたゲージ固定の方法, くりこみ可能性・ユニタリー性の証明など, ゲージ理論の構造全般に関して大変透徹した理解を与える [5, pp.168–169].

14.2 Fermi 粒子系のコヒーレント状態

Fermi 粒子の消滅・生成演算子 \hat{a}, \hat{a}^\dagger を用いた記述との関係を調べる. ξ, ξ^* を a, a^\dagger のいずれとも反交換する Grassmann 数とする. このとき ξ [と ξ^*] は $|0\rangle$ と交換し, $|1\rangle = \hat{a}^\dagger |0\rangle$ と反交換する [本稿次節で補足]. ここで “Fermi 粒子系のコヒーレント状態”

$$|\xi\rangle = e^{\hat{a}^\dagger \xi} |0\rangle = (1 + \hat{a}^\dagger \xi) |0\rangle = |0\rangle - \xi |1\rangle \quad (14.29)$$

を定義する. これは \hat{a} の固有値 ξ に属する固有状態である:

$$\begin{aligned} \hat{a} |\xi\rangle &= \hat{a}(|0\rangle - \xi |1\rangle) = \xi |0\rangle \quad (\because \hat{a} |0\rangle = 0, -\hat{a} \xi |1\rangle = \xi \hat{a} |1\rangle = \xi |0\rangle) \\ &= \xi(|0\rangle - \xi |1\rangle) \quad (\because \xi^2 = 0) \\ &= \xi |\xi\rangle. \end{aligned} \quad (14.30)$$

さらに Grassmann 数 ξ, ξ^* の関係

$$\left(e^{\hat{a}^\dagger \xi} \right)^\dagger = e^{\xi^* \hat{a}} \quad (14.31)$$

に注意する [14.1 節のノート参照]. このとき得られる, コヒーレント状態 $|\xi\rangle$ の満たす性質を, 証明とともにまとめておく:

- 内積

$$\begin{aligned} \langle \xi_1 | \xi_2 \rangle &= \langle 0 | e^{\xi_1^\dagger \hat{a}} e^{\hat{a}^\dagger \xi_2} |0\rangle = \langle 0 | (1 + \xi_1^\dagger \hat{a})(1 + \hat{a}^\dagger \xi_2) |0\rangle \\ &= \langle 0 | 0 \rangle + \xi_1^\dagger \xi_2 \langle 0 | \hat{a} \hat{a}^\dagger |0\rangle \quad (\text{第 2 項で因子を (反) 交換した}) \\ &= 1 + \xi_1^\dagger \xi_2 = e^{\xi_1^\dagger \xi_2}. \end{aligned} \quad (14.32)$$

- 完全性の関係式

$$\begin{aligned} \int d\xi^* d\xi e^{-\xi^* \xi} |\xi\rangle \langle \xi| &= \int d\xi^* d\xi (1 - \xi^* \xi)(|0\rangle - \xi |1\rangle)(\langle 0| + \xi^* \langle 1|) \quad [\text{本稿次節で補足}] \\ &= \int d\xi^* d\xi (1 - \xi^* \xi)(|0\rangle \langle 0| + \xi \xi^* |1\rangle \langle 1|) \\ &\quad (\xi^2 = \xi^{*2} = 0 \text{ を用い, また積分に寄与する項のみを残した}) \\ &= |0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1| = I. \quad (\text{恒等演算子}) \end{aligned} \quad (14.33)$$

[実際, 最左辺が Berezin 積分である点を除けば, 被積分関数に内積 (14.32) の “逆数” $e^{-\xi^* \xi}$ が必要なことはもっともらしい.]

note ここまでは文献 [7, pp.114–117] の復習である．表記の対応は

$$\xi \leftrightarrow \psi, \quad \xi^* \leftrightarrow \psi^*, \quad \hat{a} \leftrightarrow \hat{\psi}, \quad \hat{a}^\dagger \leftrightarrow \hat{\psi}^\dagger.$$

Bose 粒子系でもコヒーレント状態は式 (14.32) と類似の関係 $\langle \lambda | \lambda \rangle = e^{|\lambda|^2}$ を満たす，式 (14.29) と類似の， \hat{a} の固有値 λ に属する固有状態

$$|\lambda\rangle \equiv e^{\lambda \hat{a}^\dagger} |0\rangle$$

として定義されたことを思い出そう [1, p.11, pp.26–27] [13, pp.130–131, p.199].

これを踏まえ，単純なハミルトニアン $\hat{H} = \hat{a}^\dagger h \hat{a}$ (h は単なる数) で記述される Fermi 粒子系の，分配関数 $\text{Tr}\{e^{-\beta \hat{H}}\}$ を経路積分で表すことを考えよう．

note 教科書では (おそらく教育的な配慮から)，試行錯誤の形式で発見的な議論を行っている．本稿では話の進め方を演繹的なスタイルにアレンジしてまとめ直す．いずれにせよポイントとしては，やはり β を Euclid 時間と見なすと経路積分の手法を導入でき，また対角和 (トレース) により始・終状態が繋がっているという解釈に導かれるということである．分配関数 (14.39) は生成汎関数 (12.59), (13.2) と同じ形であることにも注意する．

一般に占有数表示を用いて対角和を

$$\text{Tr}\{\hat{A}\} \equiv \langle 0 | \hat{A} | 0 \rangle + \langle 1 | \hat{A} | 1 \rangle$$

と定義するならば，Grassmann 偶の演算子 \hat{A} に対しては，コヒーレント状態 $|\xi\rangle$ を基底に選ぶと

$$\text{Tr}\{\hat{A}\} = \int d\xi^* d\xi \langle \xi | \hat{A} | (-\xi) \rangle e^{-\xi^* \xi} \quad (14.43)$$

と表されることになる．[確認は本稿次節．指数の因子は式 (14.33) のそれと同じである．] すぐ後で判明するように，行列要素の $(-\xi)$ における負号は，Grassmann 数に“反周期境界条件”を課さねばならないことを意味している (11.2 節の解釈とも整合)．[その際 β を Euclid 時間と見なす (11.2 節)．ここで微小時間 $\Delta\tau = \beta/N$ ごとの離散時刻 $\tau = i\Delta\tau$ における Grassmann 数 ξ_i を導入しておこう．すると $e^{-\beta \hat{H}}$ もまた Grassmann 偶であることに注意して] 上式 (14.43) を適用すれば，分配関数は

$$\text{Tr}\{e^{-\beta \hat{H}}\} = \int d\xi^* d\xi e^{-\xi_N^* \xi_N} \langle \xi_N | e^{-\beta \hat{H}} | (-\xi_N) \rangle$$

と書ける．次いで中間状態における完全性の関係式 (14.33):

$$\int d\xi_i^* d\xi_i |\xi_i\rangle e^{-\xi_i^* \xi_i} \langle \xi_i | = I \quad (i = 1, \dots, N-1, \text{ただし } i \text{ で和をとらない})$$

を挿入すると，

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{e^{-\beta \hat{H}}\} &= \int d[\xi^*] d[\xi] e^{-\xi_N^* \xi_N} \langle \xi_N | e^{-\frac{\beta}{N} \hat{H}} | \xi_{N-1} \rangle e^{-\xi_{N-1}^* \xi_{N-1}} \langle \xi_{N-1} | e^{-\frac{\beta}{N} \hat{H}} | \xi_{N-2} \rangle \cdots \\ &\quad \times e^{-\xi_2^* \xi_2} \langle \xi_2 | e^{-\frac{\beta}{N} \hat{H}} | \xi_1 \rangle e^{-\xi_1^* \xi_1} \langle \xi_1 | e^{-\frac{\beta}{N} \hat{H}} | (-\xi_N) \rangle \quad (\text{ここでも } d[\xi^*] d[\xi] \equiv d\xi_N^* d\xi_N \cdots d\xi_1^* d\xi_1) \end{aligned}$$

を得る。ここで各行列要素は

$$\begin{aligned}
\langle \xi_{i+1} | e^{-\frac{\beta}{N} \hat{H}} | \xi_i \rangle &= \langle \xi_{i+1} | \left(1 - \frac{\beta}{N} \hat{H} \right) | \xi_i \rangle = \langle \xi_{i+1} | \left(1 - \frac{\beta}{N} \hat{a}^\dagger h \hat{a} \right) | \xi_i \rangle \\
&\quad [\text{微小時間 } \beta/N \text{ の 1 次「近似」(p.200) だが, } \hat{a}^2 = (\hat{a}^\dagger)^2 = 0 \text{ より厳密に成立}] \\
&= \langle \xi_{i+1} | \xi_i \rangle \left(1 - \frac{\beta}{N} \xi_{i+1}^* h \xi_i \right) \quad [\because \text{固有方程式 (14.30), コヒーレント状態 (14.29) は偶}] \\
&= e^{\xi_{i+1}^* \xi_i - \frac{\beta}{N} \xi_{i+1}^* h \xi_i} \quad [\because \text{式 (14.32)}]
\end{aligned} \tag{14.38}$$

と評価できるので,

$$\begin{aligned}
\text{Tr}\{e^{-\beta \hat{H}}\} &= \int d[\xi^*] d[\xi] e^{-\xi_N^* (\xi_N - \xi_{N-1}) - \frac{\beta}{N} \xi_N^* h \xi_{N-1}} \times e^{-\xi_{N-1}^* (\xi_{N-1} - \xi_{N-2}) - \frac{\beta}{N} \xi_{N-1}^* h \xi_{N-2}} \times \dots \\
&\quad \times e^{-\xi_2^* (\xi_2 - \xi_1) - \frac{\beta}{N} \xi_2^* h \xi_1} \times e^{-\xi_1^* (\xi_1 - (-\xi_N)) - \frac{\beta}{N} \xi_1^* h (-\xi_N)}
\end{aligned} \tag{40}$$

となる。これは径路積分

$$\int d[\xi^*] d[\xi] \exp \left\{ - \sum_i \left(\xi_{i+1}^* (\xi_{i+1} - \xi_i) + \frac{\beta}{N} \xi_{i+1}^* h \xi_i \right) \right\} = \int d[\xi^*] d[\xi] \exp \left\{ - \int_0^\beta (\xi^* \partial_\tau \xi + \xi^* h \xi) d\tau \right\} \tag{14.39}$$

に“反周期境界条件” $\xi_1 = -\xi_N$ を課したものと見なせる [5, p.135].

note Grassmann 数 ξ, ξ^* をフェルミオン場 $\psi, \psi^\dagger (\sim \pi)$ に対応付け, 1 粒子系のハミルトニアン $\hat{H} \sim h$ に対して $\xi^* h \xi$ をハミルトニアン密度に対応付ければ, 上式の被積分関数は (Euclid 時間を用いた記述での) ラグランジアン密度の形をしているのが分かる*50. しかし単純なハミルトニアンで記述される系を考えている以上, 場の理論との対応は完全にはとれない.むしろ式 (14.39) は場の理論の式 (14.45) のような分配関数を簡略化したモデルと理解できる.

複数のモード α を持ち, ハミルトニアン $\hat{H} = \hat{a}_\alpha^\dagger H_{\alpha\beta} \hat{a}_\beta$ で記述される系に対しては [各 \hat{a}_α ごとに固有状態 $|\xi_\alpha\rangle$ が定義されることを踏まえ], 上式 (14.39) を直接

$$\int d[\xi^*] d[\xi] \exp \left\{ - \int_0^\beta (\xi_\alpha^* \partial_\tau \xi_\alpha + \xi_\alpha^* H_{\alpha\beta} \xi_\beta) d\tau \right\} \tag{14.44}$$

と一般化し [積分の上限の逆温度 β とダミー添字 β の混同の恐れはなかりょう], ξ に反周期境界条件を課せば分配関数が得られる.

ここで得た結果の正当性を確認するために, [公式 (14.6) を用いて] 式 (40) の積分を具体的に実行すると,

$$\text{Tr}\{e^{-\beta \hat{H}}\} = 1 + e^{-\beta h} \tag{14.34}$$

が得られる [本稿次節で確認]. ところが \hat{H} の固有値は 0 または h なので, 上式 (14.34) は正しい分配関数となっていることが分かる [我々は既に同じ論法で, Fermi 粒子系の分配関数に対する類似の式 (11.6) を得ている]. このように式 (14.43) で自然に導入される“反周期境界条件”を考慮してはじめて, 符号も含めて正確な分配関数が得られることになる.

50 よって一様な場の単位体積でのダイナミクスを考えれば, 指数は作用に比例する. 一般の非一様な場を扱うには, 空間の各格子点 \mathbf{x} で変数 $\xi_{\mathbf{x}}, \xi_{\mathbf{x}}^$ を定義し, すべての格子点 \mathbf{x} で和をとれば良い. その際, 胞 (セル) の体積に関する因子を適当に括り出して変数を再定義すれば, ラグランジアン密度の空間積分が自然に現れ, 指数は作用そのものになることが期待される.

14.2 節について

■ 「 ξ が $|0\rangle$ と交換し, $|1\rangle = \hat{a}^\dagger |0\rangle$ と反交換する」 (14.2 節 1.3,4) について $|0\rangle$ が Grassmann 偶であり, ξ と交換すると仮定すると,

$$\xi |1\rangle = \xi \hat{a}^\dagger |0\rangle = -\hat{a}^\dagger \xi |0\rangle = -\hat{a}^\dagger |0\rangle \xi = -|1\rangle \xi$$

より, $|1\rangle$ は ξ と反交換する. 同様に $|1\rangle$ が ξ と反交換すると仮定すれば, ξ は $|0\rangle = \hat{a} |1\rangle$ と交換することが導かれる. ただし循環論法に陥らないためには, $|0\rangle$ が Grassmann 偶であることは仮定しなければならない [5, p.108].

■ 式 (14.33) において, $|\xi\rangle = |0\rangle - \xi |1\rangle$ ならば $\langle \xi| = \langle 0| + \xi^* \langle 1|$ であることについて

$$\begin{aligned} \langle \xi| &= \langle 0| (1 + \xi^* \hat{a}) && \text{(式 (14.32) の 1 行目で確認済み)} \\ &= \langle 0| + \xi^* \langle 0| \hat{a} = \langle 0| + \xi^* \langle 1|. \end{aligned}$$

■ 対角和の公式 (14.43) の確認

$$\begin{aligned} \text{(式 (14.43) 右辺)} &= \int d\xi^* d\xi (\langle 0| + \xi^* \langle 1|) \hat{A} (|0\rangle + \xi |1\rangle) (1 - \xi^* \xi) \\ &= \int d\xi^* d\xi (\langle 0| \hat{A} |0\rangle + \xi \xi^* \langle 1| \hat{A} |1\rangle) (1 + \xi \xi^*) && (\hat{A} \text{ が偶という仮定を用いた)} \\ &= \langle 0| \hat{A} |0\rangle + \langle 1| \hat{A} |1\rangle = \text{Tr} \hat{A} \end{aligned}$$

による.

■ 積分 (40) を実行して分配関数 (14.34) を導くこと 式 (40) は指数が Grassmann 偶なので, “指数法則” でまとめられる. その上で公式 (14.6) と比較すると,

$$d[\xi^*] d[\xi] \equiv d\xi_N^* d\xi_N \cdots d\xi_1^* d\xi_1 = (-1)^N d[\xi] d[\xi^*]$$

の関係があり, 指数の 2 次形式を定義する行列は

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -\left(1 - \frac{\beta h}{N}\right) \\ 1 - \frac{\beta h}{N} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\beta h}{N} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\beta h}{N} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{\beta h}{N} & -1 \end{pmatrix} \quad (14.40')$$

と同定される. ただしここでは $N = 5$ の場合の行列 A を示しているにも関わらず, 各行列要素には $N = 5$ をあからさまに代入していない. とは言え, これでも任意の $N (\gg 1)$ に対する一般化の方法は充分に見て取ることができ, また具体例による確認が容易になるので, この “どっちつかず” な書き方で計算を進める. まず行列式を 1 行目で展開すると,

$$\det A = (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \frac{\beta h}{N} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\beta h}{N} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\beta h}{N} & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{N+1} \left\{ -\left(1 - \frac{\beta h}{N}\right) \right\} \begin{vmatrix} 1 - \frac{\beta h}{N} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\beta h}{N} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\beta h}{N} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{\beta h}{N} \end{vmatrix}$$

となる。右辺の第1の行列式は、1行目で展開することを繰り返すと $(-1)^{N-1}$ となることが分かる。第2の行列式は、一番下の行で展開することを繰り返すと $\left(1 - \frac{\beta h}{N}\right)^{N-1}$ になる。よって

$$\det A = (-1)^N \left\{ 1 + \left(1 - \frac{\beta h}{N}\right)^N \right\} = (-1)^N (1 + e^{-\beta h/N}), \quad \therefore \text{(式 (40))} = (-1)^N \det A = (1 + e^{-\beta h/N}) : (14.34)$$

が得られる。

14.3 超伝導

1つの応用として、超伝導のBCS理論に現れるBerezin積分に触れておく。非相対論的なスピン1/2のFermi粒子気体の分配関数は、[簡単なモデル(14.39),(14.44)から類推されるように] Berezin 経路積分

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \text{Tr}(e^{-\beta H}) \\ &= \int d[\psi]d[\psi^\dagger] \exp \left[- \int_0^\beta d^3x d\tau \left\{ \sum_{\alpha=1}^2 \psi_\alpha^\dagger \left(\partial_\tau - \frac{1}{2m} \nabla^2 - \mu \right) \psi_\alpha - g \psi_1^\dagger \psi_2^\dagger \psi_2 \psi_1 \right\} \right] \end{aligned} \quad (14.45)$$

で表される [指数の因子について本稿次節で補足]。ただし Grassmann 場 $\psi_\alpha, \psi_\alpha^\dagger$ は $\tau \rightarrow \tau + \beta$ のシフトに関して反周期的と見なさねばならない。また $\alpha = 1, 2$ はスピン状態の指標であり、 $g > 0$ の項は粒子間の引力相互作用を表す。充分低温になると、粒子間引力を与えられた系は超伝導転移を起こす [9.3節]。そこで超伝導秩序パラメーターとなる補助的な複素スカラー場 Δ を導入して、

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int d[\psi]d[\psi^\dagger]d[\Delta]d[\Delta^*] \\ &\times \exp \left[- \int_0^\beta d^3x d\tau \left\{ \sum_{\alpha=1}^2 \psi_\alpha^\dagger \left(\partial_\tau - \frac{1}{2m} \nabla^2 - \mu \right) \psi_\alpha - \Delta^* \psi_2 \psi_1 - \Delta \psi_1^\dagger \psi_2^\dagger + \frac{1}{g} |\Delta|^2 \right\} \right] \end{aligned} \quad (14.46)$$

と書く [本稿次節で補足]。 Δ の運動方程式から、[古典的には] $\Delta \equiv g \psi_2 \psi_1$ と定まる [本稿次節で確認]。

次に温度 $\beta^{-1} = 0$ の場合にフェルミオン場の Berezin 経路積分を実行して、 Δ 場に対する「有効作用 (単位時空体積あたりの作用)」 [13.1.1節も参照] を見出すと、「 Δ の平衡値」 (p.204)

$$|\Delta| = |\Delta_0| = \varepsilon_D \exp \left\{ - \frac{1}{g\rho(0)} \right\} \quad (14.55)$$

が得られる。ここに $\rho(\varepsilon)$ は電子のエネルギー $\varepsilon(\mathbf{k}) \equiv \frac{\mathbf{k}^2}{2m} - \mu$ に関する状態密度であり、 ε_D は Debye 振動数に相当するエネルギーである。 [本稿次節で式 (14.55) の導出過程を補足しつつまとめる。秩序パラメーター $|\Delta| \neq 0$ は自発的対称性の破れ (この場合は超伝導) を意味する。]

14.3.1 節 有効作用

省略する。

14.3 節について

■Berezin 経路積分 (14.45) の指数について スピンの自由度 $\alpha = 1, 2$ を考慮して, Schrödinger 場のラグランジアン密度を

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \left(i\psi^\dagger \partial_t \psi - \frac{1}{2m} |\nabla \psi|^2 - \psi^\dagger V \psi \right) : (9.6) \\ &\rightarrow \sum_\alpha \psi_\alpha^\dagger \left(i\partial_t + \frac{1}{2m} \nabla^2 - V \right) \psi_\alpha = - \sum_\alpha \psi_\alpha^\dagger \left(\partial_\tau - \frac{1}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi_\alpha \quad (\because \partial_\tau = -i\partial_t)\end{aligned}$$

と書き, 式 (10.41) と同様ポテンシャルを $V(x) = \frac{\lambda}{2} \sum_\beta \psi_\beta^\dagger \psi_\beta - \mu$ と設定すると,

$$\mathcal{L} = - \sum_\alpha \psi_\alpha^\dagger \left(\partial_\tau - \frac{1}{2m} \nabla^2 - \mu \right) \psi_\alpha - \frac{\lambda}{2} \sum_{\alpha, \beta} \psi_\alpha^\dagger \psi_\beta^\dagger \psi_\beta \psi_\alpha$$

となる. ここで斥力相互作用の項は, Grassmann 場の反対称性のもとで生き残る項を残すと

$$\sum_{\alpha, \beta} \psi_\alpha^\dagger \psi_\beta^\dagger \psi_\beta \psi_\alpha = 2\psi_1^\dagger \psi_2^\dagger \psi_2 \psi_1$$

であり, 係数 $\lambda > 0$ を $g = -\lambda < 0$ に改めると引力相互作用が得られる. このときの作用

$$S = \int d^3x dt \mathcal{L} = \frac{1}{i} \int d^3x d\tau \mathcal{L} = \frac{1}{i} \int d^3x d\tau \left\{ - \sum_\alpha \psi_\alpha^\dagger \left(\partial_\tau - \frac{1}{2m} \nabla^2 - \mu \right) \psi_\alpha + g \psi_1^\dagger \psi_2^\dagger \psi_2 \psi_1 \right\}$$

を用いて, 分配関数 (14.45) の指数は通常の経路積分と同様, $+iS$ となっている. ただし Euclid 時間を用いた理論では式 (12.57) のように, この指数を改めて $-S$ と書いて, “作用量” S を再定義する (式 (14.47) とも整合).

■ Δ 場の経路積分で表した分配関数 (14.46) について 場が離散的な時空点 x で定義されていると考えて, 式 (12.79):

$$\int \left[\frac{dz_i^* dz_i}{2\pi i} \right] e^{-z_i^* A_{ij} z_j + b_i^* z_i + z_i^* b_i} = (\det A)^{-1} \exp \{ b_i^* A_{ij}^{-1} b_j \}$$

を適用し, 式 (14.46) の場 Δ に関する経路積分を実行すると

$$\begin{aligned}& \int \left(\prod_x d\Delta(x) d\Delta^*(x) \right) \exp \left\{ \sum_x d^4x \left(-\frac{1}{g} \Delta^* \Delta + \psi_1^\dagger \psi_2^\dagger \Delta + \psi_2 \psi_1 \Delta^* \right) \right\} \\ & \sim \left\{ \det \left(\frac{d^4x}{g} \delta_{xy} \right) \right\}^{-1} \exp \left\{ \sum_{x,y} (\psi_1^\dagger \psi_2^\dagger)_x d^4x \cdot \left(\frac{g}{d^4x} \delta_{xy} \right) \cdot (\psi_2 \psi_1)_y d^4y \right\} \\ & \sim \exp \left(\int d^4x g \psi_1^\dagger \psi_2^\dagger \psi_2 \psi_1 \right)\end{aligned}$$

となって, もとの式 (14.45) における相互作用項を再現する. (このように本稿では以降, 分配関数の規格化には執着せず, 積分の測度を粗く扱う.)

■「 Δ の運動方程式から、 $\Delta \equiv g\psi_2\psi_1$ と与えられる」(p.202 下から8行目)について 式(14.46)からラグランジアン密度における、 Δ 場を記述する項を読み取ると

$$\mathcal{L}_\Delta = -\frac{1}{g}\Delta^*\Delta + \psi_1^\dagger\psi_2^\dagger\Delta + \psi_2\psi_1\Delta^*$$

であり、古典的には Euler-Lagrange 方程式より

$$0 = \frac{\partial\mathcal{L}_\Delta}{\partial\Delta^*} = \psi_2\psi_1 - \frac{1}{g}\Delta, \quad 0 = \frac{\partial\mathcal{L}_\Delta}{\partial\Delta} = \psi_1^\dagger\psi_2^\dagger - \frac{1}{g}\Delta^*$$

となる。これは $\Delta = g\psi_2\psi_1$ (および等価な関係 $\Delta^* = g\psi_1^\dagger\psi_2^\dagger$) を与える。

なお、この結果 $\Delta = g\psi_2\psi_1$ を代入すると、

$$\mathcal{L}_\Delta = g\psi_1^\dagger\psi_2^\dagger\psi_2\psi_1$$

は最初に設定した相互作用項に戻る。

■ $|\Delta|$ の式(14.55)の導出 分配関数(14.46)の作用積分において、時間の原点を改めて積分範囲を $-\beta/2 \leq \tau \leq \beta/2$ ととり直した上で低温極限 $\beta \rightarrow \infty$ をとり、積分範囲を Euclid 時空全体にしておく。次にフェルミオン場に関する Berezin 径路積分を分離して

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int d[\Delta]d[\Delta^*] \mathcal{Z}_F[\Delta, \Delta^*] \exp\left(-\frac{1}{g}|\Delta|^2\right), \quad \mathcal{Z}_F[\Delta, \Delta^*] \equiv \int d[\psi]d[\psi^\dagger] e^{-S_F}, \\ S_F &\equiv \int d^3x d\tau \left\{ \sum_{\alpha=1}^2 \psi_\alpha^\dagger \left(\partial_\tau - \frac{1}{2m} \nabla^2 - \mu \right) \psi_\alpha - \Delta^* \psi_2 \psi_1 - \Delta \psi_1^\dagger \psi_2^\dagger \right\} \\ &= \int d^3x d\tau \begin{pmatrix} \psi_1^\dagger, \psi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\tau - \frac{1}{2m} \nabla^2 - \mu & \\ & -\Delta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \partial_\tau + \frac{1}{2m} \nabla^2 + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1^\dagger \\ \psi_2^\dagger \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (14.47')$$

と書く。ただしフェルミオン系の作用量(14.47')の最右辺における中央の行列について、右下の $(\alpha, \beta) = (2, 2)$ 成分では部分積分を行い、Grassmann 場の反交換性に注意した。また教科書の式(14.47)の非対角成分 Δ, Δ^* と比べて、負号を補った(この訂正は後で行列式に現れる $|\Delta|^2$ に影響しない)。

さて、本稿では微分演算子を含む行列式を厳密に扱うための難解な数学を迂回するために、式(14.47')中央の行列における微分演算子を単なる数に置き換えたい。そのためには Fourier 展開

$$\psi_\alpha(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot x} \psi_\alpha(k), \text{ etc.} \quad (k \cdot x = \omega\tau + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \text{ は Euclid 空間での内積})$$

を行って、式(14.47')をあらかじめ運動量空間に移せば良い。その際、式(14.47')の行列における場 Δ, Δ^* の、位置 x 依存性が問題になる。径路積分(14.46)では古典的な制約 $\Delta = g\psi_2\psi_1$ が課せられていないとは言え、本来、式(14.47')のラグランジアン密度における Δ 場はフェルミオン場と共通の時空点 x で評価されている。しかしながら(全)ラグランジアン密度には Δ 場の微分が導入されていないこともあり、ここでは一様不変な場 Δ の平衡値に興味があると考えて、場 Δ, Δ^* は位置 x に依らないパラメーターと見なす。この注意

のもとでフェルミオン場を Fourier 展開すると,

$$\begin{aligned}
S_F &= \int d^4x \frac{d^4k d^4k'}{(2\pi)^{4 \cdot 2}} \left(\psi_1^\dagger(k') e^{-ik' \cdot x}, \psi_2(k') e^{ik' \cdot x} \right) \begin{pmatrix} i\omega + \frac{\mathbf{k}^2}{2m} - \mu & -\Delta \\ -\Delta^* & i\omega - \frac{\mathbf{k}^2}{2m} + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(k) e^{ik \cdot x} \\ \psi_2^\dagger(k) e^{-ik \cdot x} \end{pmatrix} \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\psi_1^\dagger(k), \psi_2(k) \right) \begin{pmatrix} i\omega + \varepsilon & -\Delta \\ -\Delta^* & i\omega - \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(k) \\ \psi_2^\dagger(k) \end{pmatrix}, \quad \left(\because \varepsilon(\mathbf{k}) \equiv \frac{\mathbf{k}^2}{2m} - \mu \right) \\
\therefore \mathcal{Z}_F[\Delta, \Delta^*] &= \prod_k \int d\psi_1(k) d\psi_1^\dagger(k) d\psi_2(k) d\psi_2^\dagger(k) \exp \left\{ \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sum_{\alpha, \beta} \psi_\alpha^\dagger(k) A_{\alpha\beta}(k) \psi_\beta(k) \right\}, \\
A(k) \equiv (A_{\alpha\beta}(k)) &\equiv - \begin{pmatrix} i\omega + \varepsilon & -\Delta \\ -\Delta^* & i\omega - \varepsilon \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる. ここで後の式 (15.8) で行われているように, 測度を

$$d[\psi(x)] d[\psi^\dagger(x)] \rightarrow d[\psi(k)] d[\psi^\dagger(k)]$$

と運動量空間に移した. 次いで便宜的に離散化した各 k に関する通常の Berezin 積分に公式 (14.6) を適用すると,

$$\mathcal{Z}_F[\Delta, \Delta^*] \sim \prod_k \det A(k) \sim \prod_k (\omega^2 + |\Delta|^2 + \varepsilon^2).$$

したがって, もとの分配関数

$$\mathcal{Z} = \int d[\Delta] d[\Delta^*] \mathcal{Z}_F[\Delta, \Delta^*] \exp \left(-\frac{1}{g} |\Delta|^2 \right)$$

における作用量 (指数の逆符号) への寄与

$$\sim \ln \mathcal{Z}_F[\Delta, \Delta^*] \sim \sum_k \ln(\omega^2 + |\Delta|^2 + \varepsilon^2)$$

は, 余計な係数を \mathcal{Z} の規格化因子に吸収させると,

$$I \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} \ln(\omega^2 + |\Delta|^2 + \varepsilon^2) = \int d\varepsilon \rho(\varepsilon) \frac{d\omega}{2\pi} \ln(\omega^2 + |\Delta|^2 + \varepsilon^2) \quad (14.50-51)$$

となると考えられる. (この教科書の式もまた, 対数を無次元化するのに必要な付加定数を捨てているという点では, 本稿と同様いくぶん乱暴である.)

そこで Δ 場に対する有効ポテンシャルを $V_{\text{eff}} = \frac{|\Delta|^2}{g} + I$ と同定し, 最小性の条件

$$0 = \frac{dV_{\text{eff}}}{d|\Delta|} = \frac{|\Delta|}{g} + \frac{dI}{d|\Delta|}, \quad \frac{dI}{d|\Delta|} = \int d\varepsilon \rho(\varepsilon) \frac{d\omega}{2\pi} \frac{|\Delta|}{\omega^2 + |\Delta|^2 + \varepsilon^2}$$

を満たす $|\Delta|$ の値を調べれば良い (本稿では Δ ではなく $|\Delta|$ による微分としておいた). また教科書の式 (14.52) ではこの段階で, $\frac{dI}{d|\Delta|}$ の被積分関数における $\rho(\varepsilon)$ を $\rho(0)$ に置き換えている. しかしながら, その正当性を見るには先に ω に関する積分を実行し,

$$\frac{dI}{d|\Delta|} = \frac{1}{2} \int d\varepsilon \rho(\varepsilon) \frac{|\Delta|}{\sqrt{|\Delta|^2 + \varepsilon^2}}$$

と書き換えておくのが好ましかろう. 実際このとき右辺の被積分関数において, $\rho(\varepsilon)$ に掛かる因子は「Fermi 面 $\varepsilon = 0$ のところにピークを持つ」(p.203) ことがはっきりする. 他方で状態数密度は, エネルギー $E = \mu + \varepsilon$

を用いると、例えば自由粒子系に対して $\rho(\varepsilon) \sim E^{1/2}$ なので、Fermi 面 $E = \mu$ では有限値をとる^{*51}。そこで $\rho(\varepsilon)$ を積分にとって重要な Fermi 面での値 $\rho(0)$ に置き換えて、積分の外に出す。また有限の結果を得るために、積分範囲を切断しなければならない。(実際に以下の計算 (14.53') から分かるように、考えている積分は上限 $\sim \varepsilon_D$ に対して、対数的に発散する。) ところでフォノンが電子間引力を媒介する BCS 超伝導体では、9.3 節で見たように、電子のエネルギー $|\varepsilon| \lesssim \varepsilon_D$ で引力相互作用が生じる。そこで $\pm \varepsilon_D/2$ を切断の値とする。 $\varepsilon < 0$ を積分範囲に含めるのは、Fourier 展開において $\omega < 0$ を定義域に含めたことと整合する措置と考えられる^{*52}。また本稿では教科書の式 (14.53) 最右辺との辻褄を合わせるために、 ε_D を 2 で割っておいた。実際このとき変数変換 $\varepsilon = |\Delta| \sinh \theta$ により、

$$\frac{dI}{d|\Delta|} = \frac{\rho(0)}{2} \int_{-\varepsilon_D/2}^{\varepsilon_D/2} \frac{|\Delta| d\varepsilon}{\sqrt{|\Delta|^2 + \varepsilon^2}} = \rho(0) |\Delta| \theta_{\max} \simeq \rho(0) |\Delta| \ln \frac{\varepsilon_D}{|\Delta|} \quad (14.53')$$

を得る。ただし $\varepsilon_D/2 = |\Delta| \sinh \theta_{\max}$ であり、最後の近似では $\varepsilon_D/|\Delta| \gg 1$ を想定して、

$$\frac{\varepsilon_D}{2|\Delta|} = \sinh \theta_{\max} \simeq \frac{1}{2} e^{\theta_{\max}}, \quad \therefore \theta_{\max} \simeq \ln \frac{\varepsilon_D}{|\Delta|}$$

とした。以上より

$$0 = \frac{dV_{\text{eff}}}{d|\Delta|} = \frac{|\Delta|}{g} + \rho(0) |\Delta| \ln \frac{\varepsilon_D}{|\Delta|}$$

となるので、 $|\Delta|$ の式 (14.55) を得る。

^{*51} 状態数分布 $\rho(\varepsilon)$ を粒子数分布 (F-D 分布) と混同しないように注意する。

^{*52} もっともこの措置は偶関数の積分の結果を 2 倍にするだけである。

第 15 章 格子場の理論

序文を引用する：

相対論的な場の理論において Feynman ダイアグラムを展開すると、短距離 (大きな運動量) において発散する積分が現れる [紫外発散]. よく定義された理論を得るためには、これらの発散を“正則化”する必要がある. これを行う方法はいろいろあるが、理論を時空内の離散的な格子の上に構築する方法 (格子正則化) が、概念的にも実践的にも有効である. 本章では格子場の理論を扱う.

note p.66 の訳註にもあるように、場の理論から現れる (紫外) 発散を物理的な量と裸の量との観測不可能な関係に繰り込むために、一時的に理論の形を修正して、発散を操作可能な有限の量にする措置を正則化という. このときはじめて、発散を引き起こす因子を適当なパラメーターに吸収させることが可能になる. もちろん、その後で恣意的な正則化を解除して、もとの理論を回復させる必要がある. しかしながら正則化は発散を抑えるための単なる人為的・数学的な技法であるに留まらず、より深遠な理論に基づき場の理論を修正する方法を示唆・反映したものとなっている可能性もある. 格子正則化に関して言えば、ループ量子重力理論では時空が“実際に” Planck 尺度のオーダーで離散化されていると考えられている [21, pp.115–116].

15.1 Bose 粒子場

整数の組 $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ で指定される位置 $a\mathbf{n}$ に格子点を持つ、格子間隔 a の d 次元正方格子 (図 41 参照) において定義された実スカラー場 $\varphi(\mathbf{n})$ を考える. Euclid 時空における作用量

$$S = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right\} \quad (15.2)$$

を、素直に

$$S = \sum_{\mathbf{n}} a^d \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \left(\frac{\varphi(\mathbf{n} + \mathbf{i}) - \varphi(\mathbf{n})}{a} \right)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2(\mathbf{n}) \right\}$$

と離散化 (差分化) しよう. ここに $\mathbf{i} = (\dots 1 \dots)$ は i 番目の成分が 1 である [方向単位] ベクトルを表す. 経路積分測度も $d[\varphi] = \prod_{\mathbf{n}} d\varphi(\mathbf{n})$ と離散化し、分配関数と Green 関数

$$\mathcal{Z} = \int d[\varphi] e^{-S}, \quad \langle \hat{\varphi}(\mathbf{n}_1) \cdots \hat{\varphi}(\mathbf{n}_n) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int d[\varphi] \{ \varphi(\mathbf{n}_1) \cdots \varphi(\mathbf{n}_n) \} e^{-S} \quad (15.1/15.3)$$

を考える [式 (12.57–59) を参照]. 簡単のため、以降しばらく $a = 1$ と置く (いつでも次元解析によって a を復元できる).

格子が離散的なので、運動量 \mathbf{k} の値は Brillouin 領域 $|k_i| \leq \pi$ の中 (以下 BZ と表記, 図 42 参照) に制約される. [空間が有限のとき波数が離散化されるのに対し、空間を離散化すると波数が有限となる (1.1.1 節も参照). 実際、格子定数 a より短い波長を考えることに意味はなく、この時点で紫外発散は除去できている.] そこで場の Fourier 展開を

$$\varphi(\mathbf{n}) = \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}} \quad (15.4)$$

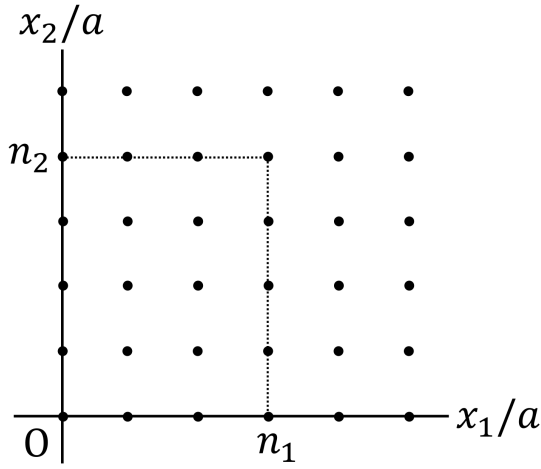


図 41 正方格子

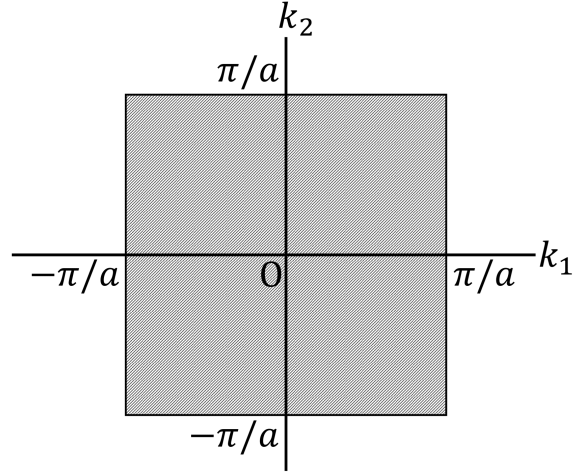


図 42 Brillouin 領域 (Brillouin zone)

と書くと、格子 Fourier 変換における恒等式

$$\int_{\text{BZ}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i(\mathbf{n}-\mathbf{n}')\cdot\mathbf{k}} = \delta_{\mathbf{n}\mathbf{n}'}, \quad (15.5)$$

$$\sum_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} = \sum_{\mathbf{m}} (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{k}-\mathbf{k}'+2\pi\mathbf{m}) \quad (15.6)$$

により、Fourier 係数は

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{n}} e^{-i\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}} \varphi(\mathbf{n}) \quad (15.7)$$

で与えられる [本稿次節で補足].

さて、分配関数 (15.1) を運動量空間に移すと、

$$\mathcal{Z} = \int d[\tilde{\varphi}] \exp \left[- \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} \left\{ m^2 + 2 \sum_{i=1}^d (1 - \cos k_i) \right\} |\tilde{\varphi}(\mathbf{k})|^2 \right] \quad (15.8)$$

となる [本稿次節で確認]. 2点 [Green] 関数は、指数の2次形式を定義する行列の逆行列

$$\langle \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_1) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_2) \rangle = \delta^d(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \frac{(2\pi)^d}{m^2 + 2 \sum_{i=1}^d (1 - \cos k_i)} \quad (15.9)$$

で与えられ、格子空間に戻すと

$$\langle \hat{\varphi}(\mathbf{n}_1) \hat{\varphi}(\mathbf{n}_2) \rangle = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{i(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2)\cdot\mathbf{k}}}{m^2 + 2 \sum_{i=1}^d (1 - \cos k_i)} \quad (15.10)$$

となる [本稿次節で補足]. 式 (15.10) は \mathbf{k} が小さいとき [つまり長波長極限で、期待されるように] 被積分関数の分母が $m^2 + \mathbf{k}^2$ に近づき、連続な空間での結果 [Green 関数 (12.70')] を再現する.

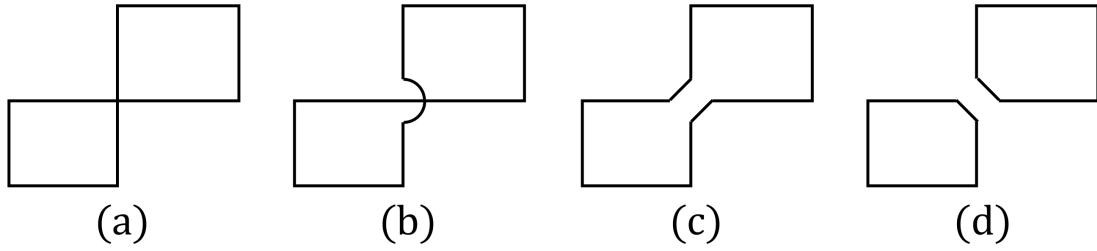


図 43 格子におけるループ線の交差

分配関数 (15.1) は

$$\mathcal{Z} = \int d[\varphi] \exp \left\{ \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{i}} \varphi(\mathbf{n} + \mathbf{i})\varphi(\mathbf{n}) - \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{2}(2d + m^2)\varphi^2(\mathbf{n}) \right\} \quad (15.12)$$

$$\rightarrow \int d \left[\frac{\varphi}{\sqrt{2\pi}} \right] \exp \left\{ \frac{1}{2d + m^2} \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{i}} \varphi(\mathbf{n} + \mathbf{i})\varphi(\mathbf{n}) - \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{2}\varphi^2(\mathbf{n}) \right\} \quad (15.13)$$

と書き換えられる (スケール変換 $\sqrt{2d + m^2}\varphi \rightarrow \varphi$ を行った) [本稿次節で補足]. こう書いておくと, m^2 の大きい極限は隣接格子点の項 $\varphi(\mathbf{n} + \mathbf{i})\varphi(\mathbf{n})$ [Ising モデルの相互作用項にあたり, これが小さい極限は“高温” (p.211, 1.15) に対応] の指数の展開

$$\mathcal{Z} = \int d \left[\frac{\varphi}{\sqrt{2\pi}} \right] \left(1 + \frac{1}{2d + m^2} \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{i}} \varphi(\mathbf{n} + \mathbf{i})\varphi(\mathbf{n}) + \dots \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{n}} \varphi^2(\mathbf{n}) \right) \quad (15.14)$$

によって扱える. 展開の各項は Gauss 型の積分公式

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varphi^2} = 1, \quad \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\pi}} \varphi^{2n+1} e^{-\frac{1}{2}\varphi^2} = 0, \quad \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\pi}} \varphi^2 e^{-\frac{1}{2}\varphi^2} = 1, \quad \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\pi}} \varphi^4 e^{-\frac{1}{2}\varphi^2} = 3, \quad \text{etc.} \quad (15.15)$$

で評価できる [本稿次節で補足].

note ところで格子場についても, 分配関数はあらゆる真空ループ (Ouroboros グラフ) からの寄与として与えられると期待される. (特に『13.1.1 節「有効ポテンシャル」について』の項を参照. 実際, 15.2 節では改めて分配関数を, 真空ループの和として計算し直す.)

[実に天下りに述べれば] 分配関数 (15.14) の各項の Gauss 積分は, 閉じたループのダイアグラムに関係付けて解釈できる. ここでは教科書と同様 (p.212), その際の注意点について簡単に言及するに留める. 例えば $\varphi^4(\mathbf{n})$ の項は図 43 (a) のように [4 本の線を点 \mathbf{n} で繋いだ], 1 つの交差を持つループを作る. [2 本の世界線の点接触型相互作用 (教科書 p.243). Wick 展開を考えれば良いか (13.2 節の「注意」).] ところが [連続的な空間では“立体交差”を曖昧さなく描画できるのとは対照的に], 格子空間における図 43 (a) の交差は, 図 43 (b-d) の 3 通りに解釈できる [いずれも同じ図 43 (a) としてしか描きようがない ($d \geq 3$ 次元でも)]. 実は [式 (15.15) における] φ^4 の積分結果は, これら 3 種類の線の接続方法に関する和として理解できる.

15.1 節について

■格子 Fourier 変換の式 (15.4-7) について Fourier 成分 (15.7) を逆変換すると式 (15.4) の $\varphi(\mathbf{n})$ が得られることを示すには、次のように式 (15.5) を用いれば充分である。

$$\begin{aligned} \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}} &= \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\sum_{\mathbf{n}'} e^{-i\mathbf{n}'\cdot\mathbf{k}} \varphi(\mathbf{n}') \right) e^{i\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{n}'} \varphi(\mathbf{n}') \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i(\mathbf{n}-\mathbf{n}')\cdot\mathbf{k}} \\ &= \varphi(\mathbf{n}). \quad (\because \text{式 (15.5)}) \end{aligned}$$

格子 Fourier 変換のもう 1 つの公式 (15.6) は、デルタ関数の Fourier 展開の公式における空間積分を格子点にわたる和に移行させて

$$(2\pi)^d \delta^d(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \int d^d x e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \rightarrow \sum_{\mathbf{n}} a^d e^{i\mathbf{n}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')}$$

と書き、 $a = 1$ と置いたものになっている。ただし仮に $\mathbf{k}, \mathbf{k}' \in \text{BZ}$ であっても、 $\mathbf{k} - \mathbf{k}' \notin \text{BZ}$ となる危険がある。そこで \mathbf{k} -積分の範囲を BZ に限定する場合には、上式最左辺のデルタ関数を $\sum_{\mathbf{m}} \delta^d(\mathbf{k} - \mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{m})$ (この 2π は $2\pi/a$ の意味) と書き換えて、等価な波数 $\mathbf{k} - \mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{m}$ がちょうど 1 つ BZ に含まれることを保証しなければならない。

もっともこの目障りな $2\pi\mathbf{m}$ の項は、積分変数を $\mathbf{k}' - 2\pi\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{k}'$ と変更すれば、消すことができる。この点を見る意味でも、公式 (15.6) を用いて Fourier 展開 (15.4) から展開係数 (15.7) を取り出せることを確かめよう：

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n}} e^{-i\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}} \varphi(\mathbf{n}) &= \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k'}{(2\pi)^d} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}') \sum_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n}\cdot(\mathbf{k}'-\mathbf{k})} \\ &= \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k'}{(2\pi)^d} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}') \sum_{\mathbf{m}} (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{k} - \mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{m}) \quad (\because \text{式 (15.7)}) \\ &= \tilde{\varphi}(\mathbf{k}). \end{aligned}$$

■運動量空間に移した S の式 (15.8) の確認 作用量

$$S = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{n}} \left\{ \sum_{\mathbf{i}} (\varphi(\mathbf{n} + \mathbf{i}) - \varphi(\mathbf{n}))^2 + m^2 \varphi^2(\mathbf{n}) \right\}$$

の微分の項を運動量空間に移すと、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{i}} (\varphi(\mathbf{n} + \mathbf{i}) - \varphi(\mathbf{n}))^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{i}} \left\{ \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}) (e^{i(\mathbf{n}+\mathbf{i})\cdot\mathbf{k}} - e^{i\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}}) \right\}^2 \quad (\text{Fourier 展開 (15.4)}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k d^d k'}{(2\pi)^{2d}} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}') \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{i}} \left\{ e^{i(\mathbf{n}+\mathbf{i})\cdot(\mathbf{k}+\mathbf{k}')} - 2e^{i\{(\mathbf{n}+\mathbf{i})\cdot\mathbf{k} + \mathbf{n}\cdot\mathbf{k}'\}} + e^{i\mathbf{n}\cdot(\mathbf{k}+\mathbf{k}')} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k d^d k'}{(2\pi)^{2d}} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}') \left[\sum_{\mathbf{i}} (e^{i(k_i+k'_i)} - 2e^{ik_i} + 1) \right] \left[\sum_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n}\cdot(\mathbf{k}+\mathbf{k}')} \right] \quad (k_i \equiv \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} \text{ は方向成分}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}) \tilde{\varphi}(-\mathbf{k}) \sum_i 2(1 - e^{ik_i}) \quad (\because \text{式 (15.6)}) \\
&= \frac{1}{2} \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} 2 \sum_i (1 - \cos k_i) |\tilde{\varphi}(\mathbf{k})|^2
\end{aligned}$$

となる。ただし最後の等号では、理論の形 (15.2) において暗に $\varphi(\mathbf{n})$ を実スカラー場と仮定していることを踏まえ、実数条件 $\tilde{\varphi}(-\mathbf{k}) = \tilde{\varphi}^*(\mathbf{k})$ を用いた。また指数 e^{ik_i} から現れる $\sin k_i$ の項の寄与は、BZ にわたる奇関数の積分となって落ちることに注意した。同様に質量項は

$$\frac{m^2}{2} \sum_{\mathbf{n}} \varphi^2(\mathbf{n}) = \frac{m^2}{2} \sum_{\mathbf{n}} \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k d^d k'}{(2\pi)^{2d}} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{n} \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{k}')} = \frac{m^2}{2} \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} |\tilde{\varphi}(\mathbf{k})|^2$$

と書き換えられる (第 2 の等号で再び式 (15.6) を用いた)。よって式 (15.8) の指数の因子

$$S = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} \left\{ m^2 + 2 \sum_{i=1}^d (1 - \cos k_i) \right\} |\tilde{\varphi}(\mathbf{k})|^2$$

が得られる。

測度 $d[\varphi] = \prod_{\mathbf{n}} d\varphi(\mathbf{n})$ についても、場の分布のあらゆる時間発展 $\{\varphi(\mathbf{n})\}$ からの寄与は、線形変換 (15.7) を通じてあらゆる Fourier 成分からの寄与を意味するから、 $d[\tilde{\varphi}]$ に置き換えて良いと考えられる (規格化の違いはあり得るが)。こうして式 (15.8) を得る。

■式 (15.9),(15.10) の粗いスケッチ 式 (15.9) から式 (15.10) を導く際の根拠として、運動量空間の Green 関数は Fourier 展開

$$\langle \hat{\varphi}(\mathbf{n}_1) \hat{\varphi}(\mathbf{n}_2) \rangle = \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k d^d k'}{(2\pi)^{2d}} e^{i\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{k}} e^{i\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{k}'} \langle \tilde{\varphi}(\mathbf{k}) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}') \rangle$$

を通じて定義されていることに注意しよう^{*53}。すると Green 関数の定義式 (15.3) を辺々 Fourier 変換すれば、運動量空間の Green 関数も同様の式

$$\langle \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_1) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_2) \rangle = \frac{1}{Z} \int d[\tilde{\varphi}] \{ \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_1) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_2) \} e^{-S}$$

で表されると考えられる。このとき実空間で定義された場の理論の生成汎関数による定式化は、運動量空間で定義された場に対してもそのままの形で流用できると考えられる。ここでは空間変数が離散的であるのに対し運動量は連続変数なので、連続的な場の理論 (12.5 節や 13.1 節) との類推が成立するのは、むしろ運動量表示においてだと期待される。すなわち式 (15.8) における運動量空間に移した作用量を

$$S = \frac{1}{2} \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k d^d k'}{(2\pi)^{2d}} \varphi(\mathbf{k}) A(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \varphi(\mathbf{k}')$$

と書いたときの積分核

$$A(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \equiv (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \left[m^2 + 2 \sum_i (1 - \cos k_i) \right]$$

に対して、

$$\int_{\text{BZ}} \frac{d^d k'}{(2\pi)^d} A(\mathbf{k}, \mathbf{k}') G(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') = (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{k} - \mathbf{k}'')$$

^{*53} ここで文献 [2, p.298] とは対照的に、ここでは式 (15.9) のようにエネルギー・運動量保存則を表すデルタ関数も含めて、運動量空間の Green 関数を定義している。

を満たす“逆行列” $G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ は、式 (15.9) の右辺で与えられる (直接の代入で確認できる)。この $G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ を用いて、 $\tilde{\varphi}(\mathbf{k})$ と結合する虚構的・古典的な外源場 $J(\mathbf{k})$ を導入したときの生成汎関数は、式 (12.74):

$$[\mathcal{Z}(J)] = \frac{1}{Z} \int d[\varphi] \exp \left[- \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \varphi (-\partial^2 + m^2) \varphi + iJ\varphi \right\} \right] = \exp \left\{ \mp \frac{1}{2} \int d^d x d^d y J(x) G(x, y) J(y) \right\}$$

(や文献 [2, pp.350–351] の式 (13.95),(13.105)) と同様,

$$\mathcal{Z}(J) \sim \exp \left\{ \mp \frac{1}{2} \int d^d k d^d k' J(\mathbf{k}) G(\mathbf{k}, \mathbf{k}') J(\mathbf{k}') \right\}$$

と表される。よってこれを J で汎関数微分すると、2点 Green 関数 (15.9):

$$\langle \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_1) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_2) \rangle = \frac{\delta^2 \mathcal{Z}(J)}{\delta \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_1) \delta \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_2)} \Big|_{J=0} = G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \equiv (\text{式 (15.9) 右辺})$$

を得る。

実空間の2点 Green 関数 (15.10) は、冒頭で言及したように式 (15.9) の Fourier 逆変換によって得られる。Green 関数 (15.10) はやはり、式 (12.70):

$$(-\partial^2 + m^2)_{xy}^{-1} = G(x, y) = \int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik \cdot (x-y)}}{k^2 + m^2}$$

に対応する伝播関数と解釈できる。

■分配関数の書き換え (15.12),(15.13) について まず式 (15.12) を得るには、指数の作用量

$$S = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{n}} \left\{ \sum_{\mathbf{i}} (\varphi(\mathbf{n} + \mathbf{i}) - \varphi(\mathbf{n}))^2 + m^2 \varphi^2(\mathbf{n}) \right\} = - \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{i}} \varphi(\mathbf{n} + \mathbf{i}) \varphi(\mathbf{n}) + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{i}} (\varphi^2(\mathbf{n} + \mathbf{i}) + \varphi^2(\mathbf{n})) + m^2 \sum_{\mathbf{n}} \varphi^2(\mathbf{n}) \right\}$$

において、

$$\sum_{\mathbf{n}, \mathbf{i}} \varphi^2(\mathbf{n} + \mathbf{i}) = \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{n}} \varphi^2(\mathbf{n} + \mathbf{i}) = \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{n}'} \varphi^2(\mathbf{n}') = d \sum_{\mathbf{n}'} \varphi^2(\mathbf{n}'), \quad \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{i}} \varphi^2(\mathbf{n}) = d \sum_{\mathbf{n}} \varphi^2(\mathbf{n})$$

と書き換えれば良い。次いで $\sqrt{2d+m^2}\varphi \rightarrow \varphi$ と再定義すれば、式 (15.12) の指数は式 (15.13) のそれにそのまま移行する。また式 (15.13) では「Jacobi 行列式 $[\sqrt{2d+m^2}]$ を測度に吸収させる」(p.211, 1.12) だけでなく、Gauss 型の積分を容易にするために、測度 $d\varphi$ から $1/\sqrt{2\pi}$ の因子を括り出している。(これは分配関数の規格化の任意性から許容される。)

■式 (15.14–15) について 分配関数の展開 (15.14):

$$\mathcal{Z} = \int d \left[\frac{\varphi}{\sqrt{2\pi}} \right] \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{n}} \varphi^2(\mathbf{n}) \right) + \frac{1}{2d+m^2} \int d \left[\frac{\varphi}{\sqrt{2\pi}} \right] \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{i}} \varphi(\mathbf{m} + \mathbf{i}) \varphi(\mathbf{m}) \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{n}} \varphi^2(\mathbf{n}) \right) + \dots$$

の各項を、Gauss 型の積分公式 (15.15)^{*54}で評価する。まず最初の項は

$$\mathcal{Z}_0 \equiv \int d \left[\frac{\varphi}{\sqrt{2\pi}} \right] \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{n}} \varphi^2(\mathbf{n}) \right) = \prod_{\mathbf{n}} \left(\int \frac{d\varphi(\mathbf{n})}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(\mathbf{n})} \right) = 1$$

^{*54} Gauss 積分の公式

$$\int d\varphi e^{-\alpha\varphi^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \int d\varphi \varphi^2 e^{-\alpha\varphi^2} = -\frac{d}{d\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha^{-3/2}, \quad \int d\varphi \varphi^2 e^{-\alpha\varphi^2} = -\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha^{-3/2} \right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \alpha^{-5/2}$$

において $\alpha = 1/2$ とおけば良い。

である。次に 1 次の項

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_1 &\equiv \frac{1}{2d+m^2} \int d \left[\frac{\varphi}{\sqrt{2\pi}} \right] \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{i}} \varphi(\mathbf{m} + \mathbf{i}) \varphi(\mathbf{m}) \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{n}} \varphi^2(\mathbf{n}) \right) \\ &= \frac{1}{2d+m^2} \left(\prod_{\mathbf{n}} \int \frac{d\varphi(\mathbf{n})}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(\mathbf{n})} \right) \left(\sum_{\mathbf{m}, \mathbf{i}} \varphi(\mathbf{m} + \mathbf{i}) \varphi(\mathbf{m}) \right) \end{aligned}$$

について、各方向単位ベクトル \mathbf{i} はゼロでないことに注意すると、2つの格子点 $\mathbf{m}, \mathbf{m} + \mathbf{i}$ は常に互いに異なる。すると \mathcal{Z}_1 は分離された奇関数の積分を生じ、ゼロになる：

$$\begin{aligned} &\left(\prod_{\mathbf{n}} \int \frac{d\varphi(\mathbf{n})}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(\mathbf{n})} \right) \left(\sum_{\mathbf{m}, \mathbf{i}} \varphi(\mathbf{m} + \mathbf{i}) \varphi(\mathbf{m}) \right) \\ &= \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{i}} \left(\prod_{\mathbf{n}(\neq \mathbf{m}, \mathbf{m} + \mathbf{i})} \int \frac{d\varphi(\mathbf{n})}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(\mathbf{n})} \right) \left(\int \frac{d\varphi(\mathbf{m})}{\sqrt{2\pi}} \varphi(\mathbf{m}) e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(\mathbf{m})} \right) \left(\int \frac{d\varphi(\mathbf{m} + \mathbf{i})}{\sqrt{2\pi}} \varphi(\mathbf{m} + \mathbf{i}) e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(\mathbf{m} + \mathbf{i})} \right) = 0. \end{aligned}$$

なお展開の第 N 項は

$$\mathcal{Z}_N = \frac{1}{N!} \frac{1}{(2d+m^2)^N} \left(\prod_{\mathbf{n}} \int \frac{d\varphi(\mathbf{n})}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(\mathbf{n})} \right) \sum_{\{\mathbf{n}_a, \mathbf{i}_a\}} \varphi(\mathbf{n}_1 + \mathbf{i}_1) \varphi(\mathbf{n}_1) \cdots \varphi(\mathbf{n}_N + \mathbf{i}_N) \varphi(\mathbf{n}_N)$$

と表される。被積分関数に現れた $2N$ 個の格子点 $\{\mathbf{n}_a, \mathbf{n}_a + \mathbf{i}_a\}$ ($a = 1, \dots, N$) のうち同一点がちょうど奇数個ある場合、 \mathcal{Z}_1 の計算で見たように奇関数の積分が分離される。よって積分への寄与がゼロでないのは、互いに一致する格子点が偶数個ずつとなる格子点の配置 $\{\mathbf{n}_a, \mathbf{n}_a + \mathbf{i}_a\}$ を持つ項に限られる。

例えば後続の項 \mathcal{Z}_2 を考えると、各単位ベクトル \mathbf{i}_a はゼロでないから、4つの格子点

$$\mathbf{n}_1, \quad \mathbf{n}_1 + \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{n}_2, \quad \mathbf{n}_2 + \mathbf{i}_2$$

が全て同一点を表すことはあり得ない。すると考慮しなければならないのは、4つの格子点のうち2点が互いに一致し、残りの2点もまた、それとは異なる点に一致する場合のみである。ここで $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2$ か否かで場合分けしてみよう。もし $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2$ であれば、残りの2点が一致するのは $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2$ のときである (図 44 (a) 参照)。次に $\mathbf{n}_1 \neq \mathbf{n}_2$ の場合を考える。再び $\mathbf{n}_a \neq \mathbf{n}_a + \mathbf{i}_a$ に注意すると、4点を互いに一致する2点ずつの組に分けるには、 \mathbf{n}_1 を $\mathbf{n}_2 + \mathbf{i}_2$ に、 \mathbf{n}_2 を $\mathbf{n}_1 + \mathbf{i}_1$ に一致させるしかない。このとき $\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 = 0$ 、つまり図 44 (b) のように \mathbf{i}_1 と \mathbf{i}_2 が互いに逆ベクトルであることになる。ところが方向単位ベクトル \mathbf{i}_a は必ずいずれかの座標成分が増加する向きに進むから、 \mathbf{i}_a 同士が逆ベクトルとなることはあり得ない。よって \mathcal{Z}_2 への寄与は第 1 の格子点の配置

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2, \quad \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2$$

に限定され、

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_2 &= \frac{1}{2!} \frac{1}{(2d+m^2)^2} \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{i}} \left(\prod_{\mathbf{n}(\neq \mathbf{m}, \mathbf{m} + \mathbf{i})} \int \frac{d\varphi(\mathbf{n})}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(\mathbf{n})} \right) \\ &\quad \times \left(\int \frac{d\varphi(\mathbf{m})}{\sqrt{2\pi}} \varphi^2(\mathbf{m}) e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(\mathbf{m})} \right) \left(\int \frac{d\varphi(\mathbf{m} + \mathbf{i})}{\sqrt{2\pi}} \varphi^2(\mathbf{m} + \mathbf{i}) e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(\mathbf{m} + \mathbf{i})} \right) \\ &= \frac{1}{2!} \frac{1}{(2d+m^2)^2} \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{i}} 1 = \frac{1}{2!} \frac{Nd}{(2d+m^2)^2} \end{aligned}$$

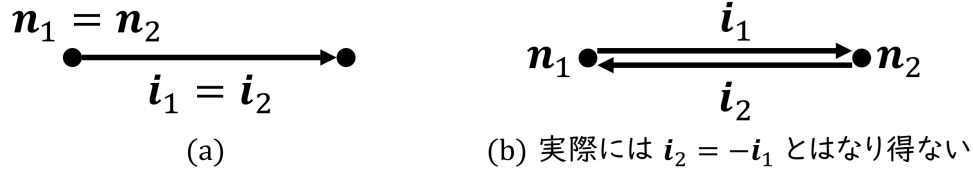


図 44 分配関数 (15.14) の 2 次の項に寄与する格子点の配置の候補

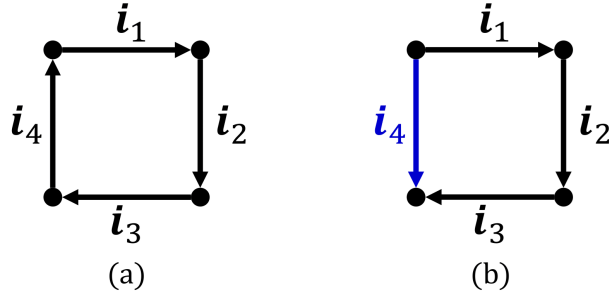


図 45 方向単位ベクトル i_a の不可能な相対的配置の例

が得られる。ただし $N \equiv \sum_m 1$ は格子点の総数であり (15.2 節), ここでは $a^d = 1$ とおいているので, それは時空の体積 (Vol) でもある。いずれにせよ, その値は無限大である。

最後に, Z のさらに高次の項に寄与する格子点の配置を考察する際の注意点を書き留めておく。繰り返しになるが, 各方向単位ベクトル i_a は必ずいずれかの座標成分が増加する向きに進む。このことから直観的に理解できるように, $N (\geq 3)$ 個の i_a を繋いで, 図 45 (a) のような閉じた輪を形成することはできない。実際, 輪ができたとして $\sum_a i_a = 0$ を両辺 2 乗し, $i_a \cdot i_b = \delta_{i_a i_b} \geq 0$ に注意すると*55,

$$0 = \left(\sum_{a=1}^N i_a \right)^2 = \sum_{a=1}^N |i_a|^2 + \sum_{a \neq b} i_a \cdot i_b \geq N (\geq 3)$$

という矛盾を生じる。同様にして図 45 (b) のように閉ループの中で 1 本のベクトル, 例えば i_N だけを逆転させた相対位置ベクトル $\{i_a\}$ の配置

$$i_N = \sum_{a=1}^{N-1} i_a$$

も不可能であることが示される。

15.2 酔歩

式 (15.13) の箇所で行ったスケール変換 $\sqrt{2d+m^2}\varphi \rightarrow \varphi$ で再定義した場に関して, 2 点 Green 関数は式 (15.10) 右辺の $(2d+m^2)$ 倍

$$\langle \hat{\varphi}(\mathbf{n}_1) \hat{\varphi}(\mathbf{n}_2) \rangle_{\text{rescaled}} = (2d+m^2) \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{i(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{k}}}{m^2 + 2 \sum_{i=1}^d (1 - \cos k_i)} \quad (41)$$

*55 たとえ $a \neq b$ であっても $i_a = i_b$ となり得るので, 内積を単に δ_{ab} と書くことはできない。

で与えられる。ここで始点 \mathbf{n}_1 と終点 \mathbf{n}_2 を結ぶ、 t ステップ分の長さを持つ径路の数

$$\Gamma(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1, t) \equiv \Gamma(\mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1, 0, t) \quad (15.15)$$

を定義すると [相対ベクトル $\mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1$ で決まることに注意], 伝播関数 (41) は

$$\langle \hat{\varphi}(\mathbf{n}_1) \hat{\varphi}(\mathbf{n}_2) \rangle_{\text{rescaled}} = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m^2 + 2d} \right)^t \Gamma(\mathbf{n}, 0, t) \quad (\mathbf{n} = \mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1) \quad (42)$$

と表される (証明は下記)。これは \mathbf{n}_1 から \mathbf{n}_2 に至る個々の径路に重み $(m^2 + 2d)^{-1}$ を与え、全ての径路について和をとると格子伝播関数が得られることを意味している。

上式 (42) の証明 まず t ステップで $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d)$ だけ変位する径路の総数 $\Gamma(\mathbf{n}, 0, t)$ が,

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1} + x_2 + \frac{1}{x_2} + \dots + x_d + \frac{1}{x_d} \right)^t = \left(\sum_{i=1}^d x_i + \frac{1}{x_i} \right)^t \quad (15.17)$$

を展開したときに現れる $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_d^{n_d}$ の係数であることに注目する [本稿次節で補足]。 $x_i = e^{ik_i}$ と置くと、Fourier 積分によってこの係数を取り出せるので、

$$\Gamma(\mathbf{n}, 0, t) = \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}} \left(\sum_{i=1}^d 2 \cos k_i \right)^t. \quad (15.18)$$

ここで

$$G(\mathbf{n}, 0, \mu) \equiv \sum_{t=0}^{\infty} e^{-\mu t} \Gamma(\mathbf{n}, 0, t) \quad (15.19)$$

$$= \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}}}{1 - e^{-\mu} \sum_{i=1}^d (2 \cos k_i)} \quad (15.20)$$

を定義して $e^{-\mu} = (m^2 + 2d)^{-1}$ とおくと、

$$G(\mathbf{n}, 0, \mu) = (2d + m^2) \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}}}{m^2 + 2 \sum_{i=1}^d (1 - \cos k_i)} = (\text{式 (41) 右辺})|_{(\mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1) = \mathbf{n}} \quad (15.21)$$

が得られる [本稿次節で補足]。これをもとの定義式 (15.19) で $e^{-\mu} = (m^2 + 2d)^{-1}$ とおいた式と等置すると

$$\sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m^2 + 2d} \right)^t \Gamma(\mathbf{n}, 0, t) = (\text{式 (41) 右辺})|_{(\mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1) = \mathbf{n}}$$

なので、伝播関数 (41) は式 (42) のように書ける。

note 径路数 (15.18) は歩数 $t = 0$ に対して自動的にゼロになるので、Green 関数 (15.19) には $t = 0$ の項は寄与しない。後の分配関数 (15.24) の導出過程では、分母 $2t$ がゼロになるのが不都合なので、あらかじめ t に関する和から $t = 0$ の項を除いてある。

次に [15.1 節末尾の note で予告したように], 分配関数を全ての真空ループ (Ouroboros グラフ) の和と考えて計算し直すと, N を全格子点数として

$$\mathcal{Z} = \text{const} \times \exp \left(-\frac{N}{2} \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \ln \left(m^2 + 2 \sum_{i=1}^d (1 - \cos k_i) \right) \right) \quad (15.24)$$

が得られる (導出は下記).

note 式 (15.24) の指数は連続極限 $a \rightarrow 0$ (したがって引数 $|k_i a| \ll 1$, 積分範囲 $|k_i| \leq \pi/a \rightarrow \infty$) で, 連結した Ouroboros グラフの和として求めた自由 Bose 粒子場の真空エネルギー密度 (5.35):

$$\mathcal{E}(m^2) = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \ln(\mathbf{k}^2 + m^2) \quad (d \text{ 次元時空に一般化した})$$

と空間の体積 (Vol) $\sim N$ の積 (つまり真空のエネルギー) に移行する. よって指数が「格子場における, 結合した Ouroboros グラフを表すことは明らかである」(p.214, 1.10–11). また分配関数 (15.24) は非相対論的自由 Bose 粒子系の大分配関数 (11.3) とも比較される表式である.

分配関数の表式 (15.24) は 2 点関数 (15.10) の形からある程度期待される結果であり, 2 点関数 (15.10) と同様に導出し得る. 教科書の式 (15.24) の下 2 行「Gauss 積分を実行して得られる式と全く同じ形になっている」というのは, 式 (15.14–15) よりもむしろ, このことに言及していると考えられる.

式 (15.24) の導出 始・終点を \mathbf{n} に固定した (歩数 t の) ダイアグラムの総数

$$\Gamma(\mathbf{n}, \mathbf{n}, t) = \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\sum_{i=1}^d 2 \cos k_i \right)^t \quad (\because \text{式 (15.18)})$$

に重み $e^{-\mu} = (m^2 + 2d)^{-1}$ を付けて, 全ての真空ループ (Ouroboros ダイアグラム) からの寄与を足し上げたい. その際, 経路数 $\Gamma(\mathbf{n}, \mathbf{n}, t)$ において [図 46 のように] 同一の真空泡ダイアグラムを,

- ループ上のどの点に結節点 \mathbf{n} が来るかで t 通り
- ループをどちらの向きに周回するかで 2 通り

重複して数えていることになる*56. そこで経路数を $2t$ で割っておく. [ここで並進によって重なる t 通りのグラフを区別した代わりに] 次いで固定した点 \mathbf{n} に関する和をとるには, 単に格子点の総数 N を掛ければ良い. こうして 1 つの結合 [連結] したループの和は,

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= N \sum_{t=1}^{\infty} e^{-\mu t} \frac{\Gamma(\mathbf{n}, \mathbf{n}, t)}{2t} = N \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{2t} e^{-\mu t} \left(2 \sum_{i=1}^d \cos k_i \right)^t \\ &= -\frac{N}{2} \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \ln \left(1 - e^{-\mu} \sum_{i=1}^d (2 \cos k_i) \right) \\ &= \text{const} \times \left[-\frac{N}{2} \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \ln \left(m^2 + 2 \sum_{i=1}^d (1 - \cos k_i) \right) \right] \quad (15.23) \end{aligned}$$

と表される [本稿次節で式変形を補足]. さらに n 個の泡を含む非連結ダイアグラムは \mathcal{W}^n で尽くされるものの, 各ループを識別できないので $n!$ による除算が必要である. こうして [式 (4.10–11) の箇所と同じ論法で] 分配関数を $\mathcal{Z} = \sum_n \frac{1}{n!} \mathcal{W}^n = e^{\mathcal{W}}$ とすると, 式 (15.24) を得る.

*56 他方, 荷電粒子を記述する複素場では結合線が向きを持つので, 2 通りの巡回方向は区別される.

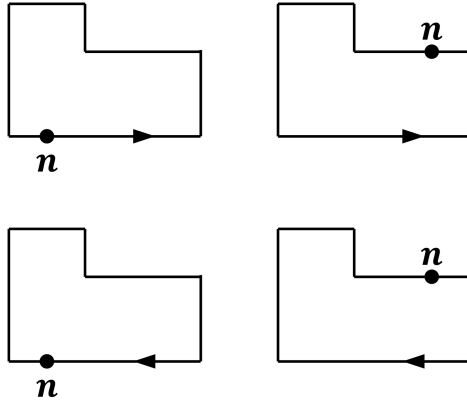


図 46 経路数 $\Gamma(\mathbf{n}, \mathbf{n}, t)$ において重複して数えられている $2t$ 通りのループの例

15.2 節について

■経路数 $\Gamma(\mathbf{n}, 0, t)$ が多項式 (15.17) の展開係数であること 式 (15.17) を展開して積 $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_d^{n_d}$ を得るには、 t 個の

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1} + x_2 + \frac{1}{x_2} + \cdots + x_d + \frac{1}{x_d} \right)$$

から、各 x_i を $1/x_i$ よりも n_i 個多く選べば良く、その方法の総数が展開係数となる。ところが $s (= 1, 2, \dots, t)$ 番目の因子から $x_i^{\pm 1}$ を選ぶことを、 s ステップ目に x_i 方向に ± 1 だけ進むことに対応付ければ、場合の数は t ステップにおける各 x_i 方向の正味の変位が n_i となる経路の総数 $\Gamma(\mathbf{n}, 0, t)$ に一致する。

■ $G(\mathbf{n}, 0, \mu)$ の式 (15.20–21) について まず式 (15.18–19) より

$$G(\mathbf{n}, 0, \mu) \equiv \sum_{t=0}^{\infty} e^{-\mu t} \Gamma(\mathbf{n}, 0, t) = \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}} \sum_{t=0}^{\infty} e^{-\mu t} \left(\sum_{i=1}^d 2 \cos k_i \right)^t$$

である。最右辺における t に関する和は、初項 1、公比 $e^{-\mu} \sum_i 2 \cos k_i$ の無限等比級数である。よって $e^{-\mu} = (m^2 + 2d)^{-1}$ とおくならば、級数が収束するには、分配関数の展開展開 (15.14) を考えたときと同様、質量が十分大きい必要があると考えられる。この下で

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} e^{-\mu t} \left(\sum_i 2 \cos k_i \right)^t &= \frac{1}{1 - e^{-\mu} \sum_i (2 \cos k_i)} = \frac{1}{1 - (m^2 + 2d)^{-1} \sum_i (2 \cos k_i)} \\ &= (m^2 + 2d) \frac{1}{(m^2 + 2d) - \sum_i (2 \cos k_i)} = (m^2 + 2d) \frac{1}{m^2 + 2 \sum_i (1 - \cos k_i)} \end{aligned}$$

と書き換えられる。この第 2 辺と最右辺がそれぞれ、式 (15.20), (15.21) の被積分関数に現れる因子となる。

■式 (15.23) の計算について 式 (15.23) の 2 行目への書き換えでは、Green 関数の導出過程 (15.20–21) に引き続き $r \equiv e^{-\mu} \sum_i 2 \cos k_i$ を (1 に比べて) 小さな量と仮定し、

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t} r^t = r + \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} + \cdots = -\ln(1 - r)$$

とすれば良い。

式 (15.23) の 3 行目に移るには、式 (15.20-21) の導出過程で行ったように、真数を

$$1 - e^{-\mu} \sum_i (2 \cos k_i) = (m^2 + 2d)^{-1} \left\{ m^2 + 2 \sum_i (1 - \cos k_i) \right\}$$

と書き換えれば良い。

15.3 相互作用と Bose 凝縮

ここは教科書と同様，“お話”程度にまとめておく。とは言え 15.3 節のタイトルからすると、ここは続く小節 (15.3.1 項) よりも重要と考えられる。

自由スカラー場の分配関数や Green 関数は、格子上的世界線に対応付けて解釈できることを見てきた。これは高分子溶液のモデルとよく似ている。

note 高分子 (ポリマー) 溶液の格子モデルでは、各格子点を溶媒分子またはモノマーが占める。隣接するモノマーを線で結んで得られる鎖をポリマーと見なす (線の引き方は一意的ではない) [9, pp.227-228].

次に $\lambda > 0$ として [斥力] 相互作用項 $\lambda \varphi^4$ を導入し、

$$\mathcal{Z} = \int d[\varphi] \exp \left[- \sum_{\mathbf{n}} a^d \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{(\varphi(\mathbf{n} + \mathbf{i}) - \varphi(\mathbf{n}))^2}{a^2} + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2(\mathbf{n}) + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4(\mathbf{n}) \right\} \right] \quad (15.25)$$

とする。実はこのとき、ループ内およびループ間に短距離の反発がもたらされる。

仮に $\lambda < 0$ とおくと、積分 (15.25) は発散する。世界線の間には引力が働くと解釈でき、真空は世界線がもつれた雑然とした状態になる。高分子溶液に関しても、要素間の実効的な力が引力であれば、高分子は溶液から析出する。

$\lambda > 0$ であっても $m^2 < 0$ (タキオンの) であれば、同様の描像が成り立つ。確かに一見すると、[Green 関数 (15.19) などにおいて] 歩数 t の長い径路の寄与は因子 $e^{-\mu t}$ によって抑制されるように見える。しかし $m^2 < 0$ は

$$e^{-\{\mu - (\ln 2d)\}} = 2de^{-\mu} = \frac{2d}{2d + m^2} > 1 \quad (15.28)$$

を意味する。すると酔歩の各ステップでの、 $2d$ 通りの方向が選択できることに伴う配位エントロピー ($-\ln 2d$) の効果が、ステップ毎のエネルギー代償 μ の効果を上回ることになる。ここでも真空は、長い径路がもつれ合った“スパゲッティ”で満たされる。この“スパゲッティ相”は、[11.2 節末尾で言及した] 世界線の描像における Bose 凝縮である。

note $m^2 < 0$ での Bose 凝縮は、ポテンシャルが式 (10.42) のメキシコ帽子型となり、「自発的な対称性の破れが生じ」(p.215, 1.16) るからだと理解することもできる。

15.3.1 回転不変性

格子系は回転不変性を破っている。以下で見るように、実際このことを反映して、格子場の 2 点関数は回転不変性を持たない。しかし m^2 が小さくなると、回転不変性が回復する。

note このことは次のようにして、あらかじめ直観的に予期できる。すなわち連続的な空間における自由スカラー場の球対称な Green 関数 (3.46):

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sim \frac{e^{-mr}}{r} \quad (r \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \text{湯川ポテンシャルの形})$$

によれば、場の相関長は Compton 波長 $1/m$ 程度である。(Green 関数 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \hat{\varphi}(\mathbf{x})\hat{\varphi}(\mathbf{y}) \rangle$ は相関を表す。) これが格子間隔 a よりも充分長ければ (言い換えれば m が $1/a$ に比べて極めて小さければ), 実際の球対称な Green 関数は格子場 Green 関数でよく近似できると期待される。逆に m が大きくなると, 空間の離散化に伴う回転対称性の欠如が著しく現れると考えられる。

以下では簡単のために, 時空が 2 次元の場合の 2 点関数 (15.10):

$$G(\mathbf{n}, m^2) = \int_{\text{BZ}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}}}{m^2 + 2 \sum_{i=1}^2 (1 - \cos k_i)} \quad (15.29)$$

を, 方向単位ベクトル \mathbf{e} [座標軸方向に限らない] の方向に伸びるベクトル

$$\mathbf{n} = r\mathbf{e} \quad (\mathbf{e}^2 = 1) \quad (15.30)$$

に対して考える。そして $|r|$ が大きくなると, これが指数関数的に減衰することを説明し,

$$G(r\mathbf{e}, m^2) \sim e^{-\kappa(\mathbf{e})|r|} \quad (|r| \gg 1) \quad (15.31)$$

[近似記号 \sim を比例関係 \sim に置き換えた] で定義される相関長の逆数 $\kappa(\mathbf{e})$ が, 実際に m^2 の大きいとき向き \mathbf{e} に依存すること (異方性), m^2 の小さいとき向き \mathbf{e} に依らなくなることを (等方性) を示す。

まず $\kappa(\mathbf{e})$ がどのように決まるのかを調べておこう。準備として関数

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{-ir\xi} G(r\mathbf{e}, m^2) \quad (15.32)$$

を定義する。

note これは $G(r\mathbf{e}, m^2)$ の “波数” ξ に関する Fourier 成分であるものの, 指数関数的減衰 (15.31) を予期している時点で, 波数 ξ は複素数になり得ると想定している。実際すぐ後の Fourier 逆変換 (43) では ξ に関する積分を実軸に沿って行うものの, 複素 ξ 平面における解析から, 複素数の波数 $\xi = i\xi_0$ が現れる。

このとき r が大きい場合の $G(r\mathbf{e}, m^2)$ の漸近的な振舞いは, ξ の実軸に最も近い特異点によって決まる。この特異点は, G が振動しないならば虚軸上のどこか, 例えば $\xi = i\xi_0$ にあり, このとき $G \propto e^{-\xi_0 r}$ となる。

note 素朴にはこれは, 単純に $G \sim e^{i\xi r}$ に $\xi = i\xi_0$ を代入すると期待される結果である。(特異点 (極) が実部 α を持てば, G には振動する因子 $e^{i\alpha r}$ が掛かる。) この点を Fourier 展開

$$G(r\mathbf{e}, m^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi} e^{i\xi r} f(\xi) \quad (43)$$

に基づいて丁寧に説明しよう。文献 [12, pp.202-203] で行ったように, 形式的に ξ を複素変数と見なす。そして $f(\xi)$ は「 ξ の実軸近傍で解析的でなければならず」(p.216, 1.10) とあることを踏まえ, ξ

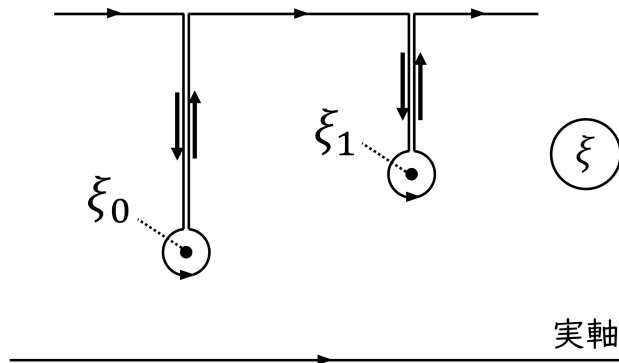


図 47 ここでは概念図として、複素 ξ 平面上の適当な位置に 2 つの特異点 ξ_0, ξ_1 を示した

の実軸上には特異点がないものと仮定して、積分路を実軸から ξ の上半面内または下半面内に移そう。 $r > 0$ のときには Jordan の補助定理により (p.113), 積分路を ξ の上半面内に移すことができる。すると図 47 のように積分路は特異点に“ひっかかり”, 積分は上半面内の全ての特異点に関する留数の和として評価できる。実軸に最も近い特異点 $\xi = i\zeta_0$ の寄与を調べよう。関数 $e^{i\xi r}/2\pi$ は $\xi = i\zeta_0$ で正則なので, $i\zeta_0$ が $f(\xi)$ の k 位の特異点ならば, $i\zeta_0$ は積 $F(\xi) \equiv f(\xi)e^{i\xi r}/2\pi$ の k 位の特異点でもある。ここで簡単のため, 教科書の式 (15.33) で暗に仮定しているように, $i\zeta_0$ を 1 位の特異点と仮定して Laurent 展開を

$$f(\xi) = \frac{a_{-1}}{\xi - i\zeta_0} + a_0 + a_1(\xi - i\zeta_0) + \dots$$

と書けば, 積分 (43) への寄与は

$$2\pi i \text{Res}[F(\xi), i\zeta_0] = 2\pi i \lim_{\xi \rightarrow i\zeta_0} [(\xi - i\zeta_0)F(\xi)] = i \lim_{\xi \rightarrow i\zeta_0} (a_{-1} + a_0(\xi - i\zeta_0) + \dots) e^{i\xi r} = ia_{-1}e^{-\zeta_0 r}$$

と求まる。他の特異点 (虚部 ζ_1, ζ_2, \dots) の寄与も同様に $e^{-\zeta_1 r}, e^{-\zeta_2 r}, \dots$ のようになり, $r > 0$ が大きいとき, これらは $e^{-\zeta_0 r}$ に比べてさらに指数関数的に小さい。よって $r > 0$ が大きいときの主要な寄与は $e^{-\zeta_0 r}$ に比例する。

note すぐ後の $f(\xi)$ の式 (15.34) から, ξ が $f(\xi)$ の極ならば $-\xi$ も極となることが見て取れる。よって極は 2箇所 $\xi = \pm i\zeta_0$ に現れる。すると $r < 0$ では積分路を ξ の下半面に移して, 極 $\xi = -i\zeta_0$ の留数を拾えば良い。その結果 $G \sim e^{i(-i\zeta_0)r} = e^{\zeta_0 r}$ となるので, $r > 0$ の場合と合わせて

$$G \sim e^{-\zeta_0|r|} \quad (|r| \gg 1)$$

とまとめられる。ここまでの $\kappa(\mathbf{e})$ は与えられた \mathbf{e} に対して, $f(\xi)$ の極 (の虚部) ζ_0 として求められるという方針が立ったことになる。

これを踏まえ, $f(\xi)$ の特異点の位置を調べよう。[式 (15.29) で積分変数を $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ と変更して, 式 (15.32) に代入すると]

$$f(\xi) = \int_{\text{BZ}} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dr e^{-ir(\xi - \mathbf{k} \cdot \mathbf{n})} \right) \frac{1}{D(\mathbf{k})} = 2\pi \int_{\text{BZ}} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{\delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e} - \xi)}{D(\mathbf{k})}, \quad (15.34)$$

$$D(\mathbf{k}) \equiv m^2 + 2 \sum_{i=1}^2 (1 - \cos k_i) = 4 + m^2 - 2(\cos k_1 + \cos k_2)$$

となる [教科書では積分の前の係数 2π が π になっているが, それは極の位置を決める以降の議論に影響しない]. ここで洞察を得るために連続場を考える. このとき [方向成分 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}$ に関する積分を実行し, \mathbf{e} に垂直な波数成分 k に関する積分を残すと, Fourier 成分 (15.34) は]

$$f(\xi = i\zeta) \sim \int d^2k \frac{\delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e} - i\zeta)}{m^2 + k^2} = \int dk \frac{1}{m^2 + k^2 - \zeta^2} \quad (15.35)$$

となる. 被積分関数は実軸を挟む 2 点 $k = \pm i\sqrt{m^2 - \zeta^2}$ に極を持つ. これらは $\zeta = \pm m$ のとき実軸を締めつけるので, [特異点を回避できなくなり] 積分 (15.35) に特異性を生じる [5.3.3 節末尾]. よって $f(\xi)$ の特異点は $\xi = \pm im$ であり, 伝播関数は $e^{-m|r|}$ にしたがって減衰する.

note この結果は冒頭で復習した湯川ポテンシャルの形を想起させる. 格子場においても式 (15.34) の \mathbf{k} -積分に締めつけ特異性を生じる $\xi = i\zeta$ の値が, $f(\xi)$ の特異点となる. 式 (15.34) において考えているのは 2 つの特異点 $\xi = \pm i\zeta_0$ の一方であり, \mathbf{k} -空間の特異点による積分路の締めつけを, 2 点 $\pm i\zeta_0$ の接近と誤解してはならない. 議論を確定させるために, 以降では虚部 $\zeta_0 > 0$ を持つ特異点の位置 $\xi = i\zeta_0$ を調べよう.

note さて, 式 (15.34) におけるデルタ関数より $f(\xi)$ に寄与するのは, 与えられた ξ に対し $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e} = \xi$ を満たす \mathbf{k} のみである. このうち被積分関数の分母 $D(\mathbf{k})$ をゼロにする \mathbf{k} が (あれば, それが) 特異点の値 $\xi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}$ の候補となる. しかしながら $D(\mathbf{k})$ の表式より, $D(\mathbf{k})$ をゼロにする \mathbf{k} は純虚数なので, それを実 \mathbf{k} -空間に表示することはできない.

note そこで「 $\mathbf{k} = i\mathbf{K}$ と置いて k の積分を実軸から外してみる」(p.216 下から 3,2 行目) と, 式 (15.34) は

$$f(\xi = i\zeta) \propto \int \frac{d^2K \delta(\mathbf{K} \cdot \mathbf{e} - \zeta)}{(2\pi)^2 D(\mathbf{K})}$$

と書き換えられる. ただし (任意の複素数 z に対して $\cos(iz) = \cosh z, \cosh(iz) = \cos z$ に注意して)

$$D(i\mathbf{k}) = 4 + m^2 - 2(\cosh K_1 + \cosh K_2) \rightarrow D(\mathbf{K}) \quad (15.38)$$

と再定義した. また Wick 回転が可能であると (したがって \mathbf{K} は実変数)^{*57}, 積分範囲も $|k_i| \leq \pi$ から \mathbf{K} -空間全体に広げた^{*58}. すると (K_1, K_2) 平面における曲線 $D(\mathbf{K}) = 0$ と直線 $\mathbf{K} \cdot \mathbf{e} = \zeta_0$ の交点が, 特異点の虚部 $\zeta_0 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{e}$ を与える \mathbf{K} の候補となる.

note 話の見通しを良くするために, ここで曲線 $D(\mathbf{K}) = 0$ の概形を調べてしまおう. しばらく図 48 を参照しつつ読み進めてほしい. $D(\mathbf{K})$ の式 (15.38) は入れ替え $K_i \rightarrow -K_i$ や $K_1 \leftrightarrow K_2$ に対して不変なので, 曲線 $D(\mathbf{K}) = 0$ は K_1 軸と K_2 軸, 直線 $K_2 = K_1$ に関して対称である. そこで第 1 象限の方位角 45 度の範囲 ($K_i \geq 0, K_2 \leq K_1$) でグラフの概形を調べれば充分である. $K_2 = 0$ のとき K_1 は最大値

$$K_m \equiv \cosh^{-1} \left(\frac{4 + m^2}{2} - 1 \right) = \cosh^{-1} \left(1 + \frac{m^2}{2} \right) \quad (44)$$

をとる. 点 $(K_m, 0)$ から K_2 が増大するに従って, 曲線に沿って K_1 は減少していき, 斜め 45 度の線 $K_2 = K_1$ との交点 $P(K, K)$ に達する. その座標は

$$0 = D(K, K) = 4 + m^2 - 4 \cosh K, \quad \therefore K = \cosh^{-1} \left(1 + \frac{m^2}{4} \right)$$

^{*57} 5.3.1 節の Wick 回転ではもとの積分路である実軸付近に極があったのに対し, ここでは虚軸上に $D(\mathbf{k}) = 0$ の極 k_i がある. その場合にも極を虚軸から ϵ ずらせば, Wick 回転に支障はないと考えられる.

^{*58} 「 k の積分が $k = \pm\pi$ に端を持っていても, 締めつけの位置には関係がない」(p.216 下から 2 行目) とあることにも注意する.

と求まるので、腕の長さは

$$K_M \equiv OP = \sqrt{2}K = \sqrt{2} \cosh^{-1} \left(1 + \frac{m^2}{4} \right) \quad (45)$$

である。 m^2 の大きい場合を想定して、式 (14.53') の箇所で見た近似式

$$y = \cosh x \simeq \frac{e^x}{2}, \quad \therefore x \simeq \ln 2y \quad (x \gg 1, \text{したがって } y \gg 1 \text{ のとき}) \quad (46)$$

を利用すると、

$$K_m \rightarrow \ln(2 + m^2), \quad K_M \rightarrow \ln \left\{ \left(2 + \frac{m^2}{2} \right)^{\sqrt{2}} \right\}$$

が見出される。(これは K_m が m^2 とともに対数的に (ゆっくりと) 発散することを意味する。) すると m^2 の増大に伴って K_m よりも K_M の方が素早く増大するため、曲線は斜め 45 度の方向に張り出していくと予想される。他方 m^2 が小さければ、 $D(\mathbf{K}) = 0$ を満たす $|K_i|$ も 1 程度に小さいから、曲線は K_i の 2 次近似で円

$$K_1^2 + K_2^2 = m^2 \quad (47)$$

となる。よって逆に m^2 が減少すると、曲線は丸みを帯び、回転対称性を増していくと想像される。実際、さまざまな m^2 の値に対する曲線 $D(\mathbf{K}) = 0$ の概形は図 49 のようであり、 m^2 が大きいときグラフは正方形に近づく。ただしその辺の位置を式 (44) の $K_i = \pm K_m$ とは同定せず、あえて教科書 p.217 下から 5 行目の記述に従い、曲線のすぐ外側の位置

$$K = \pm K_e, \quad K_e \equiv \cosh^{-1} \left(\frac{4 + m^2}{2} \right)$$

と見なす。(これは式 (15.38) の $D(\mathbf{K}) = 0$ において一方の $\cosh K_i$ をゼロとおき、もう一方の K_i について解いた位置である。実際には常に $\cosh K_i \geq 1$ だから、 K_e は曲線 $D(\mathbf{K}) = 0$ の外側に来る。) この措置は後の式 (15.40) において、15.2 節で得た正しい重み $(m^2 + 2d)^{-1}$ (ここでは $d = 2$) が再現されることから正当化される。

他方で直線 $\mathbf{K} \cdot \mathbf{e} = \zeta$ は \mathbf{e} に垂直で、原点からの距離が $|\zeta|$ の位置にある。その曲線 $D(\mathbf{K}) = 0$ との交点 \mathbf{K} は最大で 2 個のあり、これらが \mathbf{K} -積分の 2 つの極を与える。 $\zeta = \zeta_0 (> 0)$ での締めつけ特異性は、2 つの \mathbf{K} が一致するときに生じる。それは直線 $\mathbf{K} \cdot \mathbf{e} = \zeta_0$ が曲線 $D(\mathbf{K}) = 0$ に接する場合に実現・対応する^{*59}。

note この時点で本節の主要な目的として掲げていた、相関長 $1/\kappa(\mathbf{e})$ の異方性を定性的に理解できる。すなわち m^2 が大きくなるほど、曲線 $D(\mathbf{K}) = 0$ は回転対称性を失っていくため、接点までの距離 ζ_0 (したがって $\kappa(\mathbf{e})$) は向き \mathbf{e} に応じて大きく異なることになる。

m^2 が大きいときの接点までの距離 ζ_0 を求めよう。曲線 $D(\mathbf{K}) = 0$ を $K_i = \pm K_e$ の位置に辺を持つ正方形と見なせば、図 50 のように接点は正方形の頂点に一致し、その原点との距離は幾何学的に

$$\zeta_0 \approx (\cos \theta + \sin \theta) K_e \approx (\cos \theta + \sin \theta) \ln(4 + m^2) \quad (15.39)$$

^{*59} したがって、この条件は

$$D(\mathbf{K}) = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial \mathbf{K}} = 0, \quad \text{on } \mathbf{K} \cdot \mathbf{e} = \zeta_0 \quad (15.36)$$

と書ける。

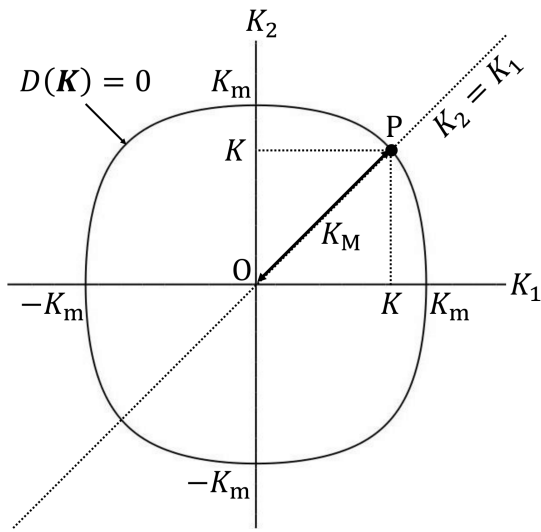


図 48 曲線 $D(\mathbf{K}) = 0$ とその典型的な長さ

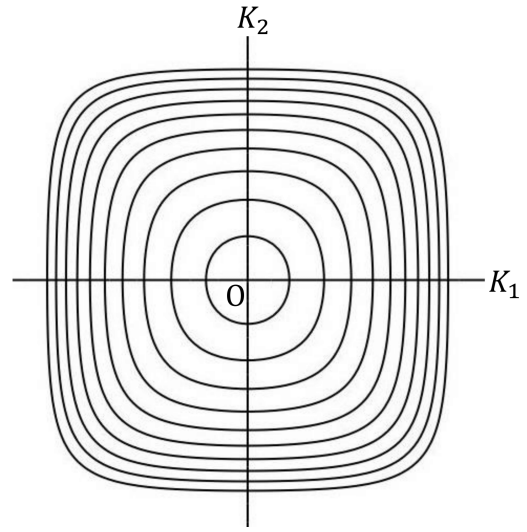
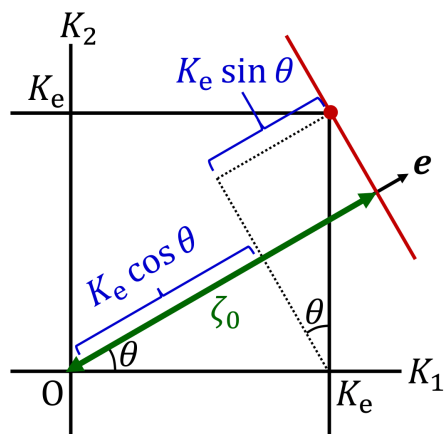
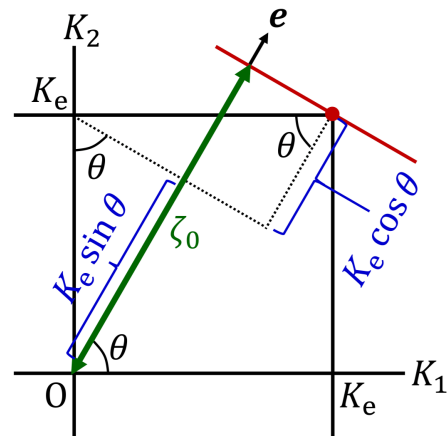


図 49 内側から順に無次元化した質量 $m = 1, 2, 3, \dots, 10$ に対する曲線 $D(\mathbf{K}) = 0$



(a) $0 \leq \theta \leq \pi/4$



(b) $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$

図 50 大きな m^2 での“正方形” $D(\mathbf{K}) = 0$ に直線 $\mathbf{K} \cdot \mathbf{e} = \zeta_0$ が接するとき、締めつけ特異性が生じ、 ζ_0 は原点から接点までの距離となる

と表される.

note 本稿では教科書の図 15.4 (p.217) に加えて、 \mathbf{e} と K_1 軸のなす角 θ の範囲が $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$ の場合も図示した (図 50 (b)). 例えば $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/4$ のときには、角度 $\theta' \equiv \theta - \pi/2$ に対して再び図 50 (a) と同様に考えられるので、式 (15.39) で θ を θ' に置き換えた関係

$$\zeta = K_e(\sin \theta - \cos \theta) \quad (48)$$

が成り立つ. よって式 (15.39) は $0 \leq \theta \leq \pi/2$ の範囲で有効と考えられる. 上式 (48) もまた、考えて

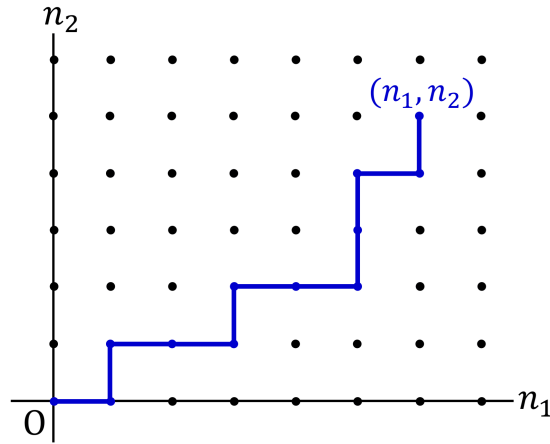


図 51 原点から $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ までの最短経路は、すべて $|n_1| + |n_2|$ の長さを持つ

いる範囲 $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/4$ では r の掛かった因子

$$r(\sin \theta - \cos \theta) = |n_1| + |n_2|$$

が後の式 (15.40) における最短距離を与えるので、理に適っている。

式 (15.39) の第 2 の等号では、大きな m^2 に対し再び公式 (46) を用いて、

$$\frac{4 + m^2}{2} = \cosh K_e \approx \frac{e^{K_e}}{2}, \quad \therefore K_e \approx \ln(4 + m^2)$$

と近似した。

したがって m^2 が大きいときの 2 点関数は、近似的に

$$\begin{aligned} G(|\mathbf{r}|, m^2) &\sim e^{-\zeta_0 |\mathbf{r}|} = \exp \left[\ln \left\{ (4 + m^2)^{-(|n_1| + |n_2|)} \right\} \right] \quad (\because |\mathbf{r}|(\cos \theta + \sin \theta) = |n_1| + |n_2|) \\ &= \frac{1}{(4 + m^2)^{|n_1| + |n_2|}} \end{aligned} \quad (15.40)$$

となる。ここで因子 $|n_1| + |n_2|$ は、原点から $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ までの最短経路の長さである (図 51 参照)。

note ところで 2 点関数はスケールの違いを除いて、式 (15.19):

$$G(\mathbf{n}, 0, \mu) = \sum_{t=0}^{\infty} e^{-\mu t} \Gamma(\mathbf{n}, 0, t)$$

のようにも表されることを思い出そう。 m^2 が大きいと、経路の長さ t の大きい項の寄与が因子 $e^{-\mu t}$ によって抑制されるので、最短経路の項のみを残して、

$$G \sim e^{-\mu t} \Big|_{t=|n_1|+|n_2|} = \frac{1}{(4 + m^2)^{|n_1| + |n_2|}}$$

と近似できる。このように考えれば、確かに式 (15.40) は「驚くべき結果ではない」(p.218 下から 3 行目)。

K_1, K_2 軸に沿った 4 方向と, 軸に対して 45° の方向については, それぞれ

$$\kappa = \zeta_0 = \cosh^{-1} \left(1 + \frac{1}{2} m^2 \right) \quad [:\cdot K_m \text{の式 (44)}] \quad (15.41)$$

$$\kappa = \zeta_0 = \sqrt{2} \cosh^{-1} \left(1 + \frac{1}{4} m^2 \right) \quad [:\cdot K_M \text{の式 (45)}] \quad (15.42)$$

である. これらは m^2 が小さいと, ともに m に近づく.

note 小さな m^2 , したがって小さな ζ_0 に対して, 上式 (15.41),(15.42) がそれぞれ

$$1 + \frac{1}{2} m^2 = \cosh \zeta_0 \simeq 1 + \frac{1}{2} \zeta_0^2, \quad 1 + \frac{1}{4} m^2 = \cosh \left(\frac{\zeta_0}{\sqrt{2}} \right) \simeq 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta_0}{\sqrt{2}} \right)^2$$

となることによる. この結果は既に同じ近似で導いた, 半径 m の円の式 (47) に整合している.

連続極限

格子間隔を $a = 1$ とおいたため, 我々が扱ってきた質量 m は本来の質量 $m_{\text{連続}}$ を $m = m_{\text{連続}} a$ と無次元化した値であることになる. したがって連続極限 $a \rightarrow 0$ をとる際には, $m_{\text{連続}} = m/a$ を一定に保って同時に $m \rightarrow 0$ としなければならない. ところが m を小さくすると回転不変性が回復するから, 連続極限では正方格子の痕跡が残らない.

15.4 格子フェルミオン

Dirac 場を格子に載せることは, 今なお十分に納得のいく形で解決されていない問題も含んでいる. ひとまず [Euclid 時空における] Dirac 場の作用

$$S = \int d^d x \{ m \bar{\psi} \psi + \bar{\psi} \gamma^i \partial_i \psi \} \quad (15.45)$$

[本稿次節で補足] を離散化して, “単純” 作用 (‘naive’ action)

$$S = \sum_{\mathbf{n}} a^d \left\{ m \bar{\psi}(\mathbf{n}) \psi(\mathbf{n}) + \frac{1}{2a} \bar{\psi}(\mathbf{n}) \sum_{\mathbf{i}} \gamma^i (\psi(\mathbf{n} + \mathbf{i}) - \psi(\mathbf{n} - \mathbf{i})) \right\} \quad (15.46)$$

を作る. ここでも以降, $a = 1$ とおく. [次いで式 (15.13) と同様, 隣接格子点への “ホッピング項” だけに独立なパラメーター K が付くようにスケール変換を行おう.] $m = 1/2K$ によってパラメーター K を導入し, $\psi/\sqrt{2K} \rightarrow \psi$ とスケール変換すると,

$$S = \sum_{\mathbf{n}} \left\{ \bar{\psi}(\mathbf{n}) \psi(\mathbf{n}) + K \bar{\psi}(\mathbf{n}) \sum_{\mathbf{i}} \gamma^i (\psi(\mathbf{n} + \mathbf{i}) - \psi(\mathbf{n} - \mathbf{i})) \right\} \quad (15.48)$$

と書き換えられる. K は [ホッピング項の係数となっているので] ホッピングパラメーターと呼べる.

Bose 格子場の伝播関数 (15.10) と同様に, 格子フェルミオンの伝播関数は

$$\langle \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) \psi_\beta(\mathbf{x} + \mathbf{n}) \rangle = \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}} \frac{(1 + \sum_{\mathbf{i}} \gamma^i 2iK \sin k_i)_{\alpha\beta}}{1 + \sum_{\mathbf{i}} 4K^2 \sin^2 k_i} \quad (49)$$

と求まる．小さな \mathbf{k} [正確には連続極限 $a \rightarrow 0$ (積分範囲 $\pi/a \rightarrow \infty$, 引数 $k_i a \rightarrow 0$)] に対しては [1 次近似 $\sin k_i \simeq k_i$ により]

$$\langle \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{x})\psi_\beta(\mathbf{x} + \mathbf{n}) \rangle \simeq m \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}} \frac{(m + i\mathbf{k})_{\alpha\beta}}{m^2 + k^2} \quad (\because 2K = 1/m)$$

となる [$\mathbf{k} \equiv \sum_i \gamma^i k_i$ と再定義した]．これは連続場の伝播関数 (7.66),(7.68):

$$iS_{\alpha\beta}(x, y) \equiv \langle 0 | T \{ \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \} | 0 \rangle = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(x-y)} \frac{(\mathbf{k} + m)_{\alpha\beta}}{k^2 - m^2 + i\epsilon},$$

すなわち [Wick 回転を施し, $k^2 \rightarrow -k^2$, etc. のように Euclid 空間での内積で書き直した式]

$$\langle \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{x})\psi_\beta(\mathbf{y}) \rangle = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{(m + i\mathbf{k})_{\alpha\beta}}{m^2 + k^2} \quad (15.53')$$

の m 倍となっている．[ただし時空を d 次元に拡張し, 作用量 (15.45) の導出時に見出した置き換えの規則 $\mathbf{k} \rightarrow i\mathbf{k}$ を用いた．また ψ と $\bar{\psi}$ を入れ替えて全体に掛かる負号を消化した.] このことは

$$m \langle \bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(y) \rangle = \frac{1}{2K} \langle \bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(y) \rangle \rightarrow \langle \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{x})\psi_\beta(\mathbf{y}) \rangle$$

とスケール変換されることを踏まえると, 理に適っている．

しかしながら [Brillouin 領域全体で見ると], 上式 (49) は問題を含んでいる．実際, 例えば [行列要素 (49) で $\mathbf{n} = 0$ とおいてトレースをとり, 奇関数の積分が消えることに注意すると], 式 (49) からは

$$\langle \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{x})\psi_\alpha(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\text{tr}(1)}{1 + \sum_i 4K^2 \sin^2 k_i} \quad (15.54)$$

が得られる．すると積分への寄与は $\mathbf{k} = 0$ だけでなく, $k_i = \pm\pi$ の近くでも大きくなる．そのような場所は Brillouin 領域内に 2^d 箇所ある (図 52 参照)．

したがって, 正確な連続場の式の 2^d 倍に相当する結果が出てきてしまう．すなわち, ひとつの“種類” (species) の Fermi 粒子から始めたはずの話が, あたかも“ 2^d 種類の粒子”の話のようになってしまっている．別の物理量を計算するときにも, 同様の問題が起こる．これが悪名高い“Fermi 粒子の重複問題” (fermion doubling problem) である．

Fermi 粒子の重複問題を回避するために, いろいろなアプローチが試みられた．最も有名な方法は“Wilson (ウィルソン) フェルミオン”および“Kogut (コガット)-Susskind (サスキント) フェルミオン” (もしくは‘staggered fermion’) の方法である [本稿では省略]. (p.222)

note Kogut と Susskind は格子ゲージ理論の文脈において, 異なるスピン・ネットワーク状態が必ず互いに線形独立であることを見出した (1975) [21, pp.107–108]. なお同訳者による文献 [21, p.108] での Susskind の読みは「サスキンド」となっている (1 冊の本の中で統一されていれば問題ない)．

最後に Bose 格子場の伝播関数 (15.19): $G(\mathbf{n}, 0, \mu) = \sum_{\text{paths}} e^{-\mu t}$ と同様に格子フェルミオンの伝播関数 (49) が, 与えられたベクトル \mathbf{n} だけ隔たる始点と終点を結ぶあらゆる径路に関する和

$$\sum_{\text{paths}} K^L \prod \gamma^i \quad (15.49)$$

で書けることに言及しておく (証明は下記)．ここに各径路の担う重みにおいて, L は径路の長さであり, また $\prod \gamma^i$ では $\pm i$ 方向のステップが因子 $\pm \gamma^i$ (複号同順) を伴うと考え, 全ステップでの積をとる．

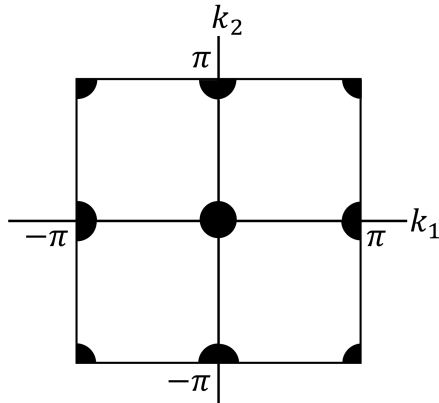


図 52 Brillouin 領域において、式 (15.54) に対して $\mathbf{k} = 0$ 付近と同じ寄与を持つ領域 (1 つの黒丸●)
 [は、 2^d 個の象限に 1 個ずつある]

フェルミオン伝播関数の表式 (15.49) の証明

$$\begin{aligned}
 \sum_{\text{paths}} K^L \prod \gamma^i &= \sum_L \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}} \left(\sum_i \gamma^i 2iK \sin k_i \right)^L \\
 &= \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}} \frac{1}{1 - \sum_i \gamma^i 2iK \sin k_i} \\
 &= \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}} \frac{1 + \sum_i \gamma^i 2iK \sin k_i}{1 + \sum_i 4K^2 \sin^2 k_i} = (\text{式 (49)}). \quad (15.52)
 \end{aligned}$$

[本稿次節で補足する.]

参考：交差する径路について 伝播関数の径路展開 (15.49) において、「一見、径路を自分自身に重ならないものに限定しないと、Grassmann 数の $\psi^2 = \bar{\psi}^2 = 0$ の条件から支障が生じるように思えるかもしれない」(p.220 下から 5,4 行目). [と言うのも 15.1 節でも補足したように、2 本の線が交差する (4 本の線が 1 点で交わる) グラフは、伝播関数の径路積分表式において作用 (15.48) を K で展開したときの、 $\bar{\psi}$ と ψ の 4 次の項から現れると考えられる.] しかし実は図 53 のように、伝播関数に寄与する (禁止された) グラフは、真空ループを伴うダイヤグラムと合わせると相殺される [8.2 節の特筆事項を連想]. このため和の対象となる径路に制約を課する必要はなくなる.

15.4.1 カイラル格子フェルミオンの欠如

現実の世界には“カイラルフェルミオン”が存在する. ニュートリノは左手型で、反ニュートリノは右手形である. 右手型のニュートリノが存在していても、それは弱い相互作用に関与せず、我々がその存在を検知することはできない. Nielsen (ニールセン) と Ninomiya (二宮) によって提唱され、Friedan (フリーダン) によって拡張された定理によると、Dirac 方程式を周期格子上で離散化した場合、そのようなカイラルフェルミオンを表すことができなくなる. (中略) このような事情が弱い相互作用の数値計算にもたらす現実的な困難はさて置いて、神学的な慰安を見いだすならば、我々の宇宙はスーパーコンピューター上のシミュレーションとは違うので、研究助成金の満了のために計算が途中で打ち切られるような心配はない. (pp.224-225)

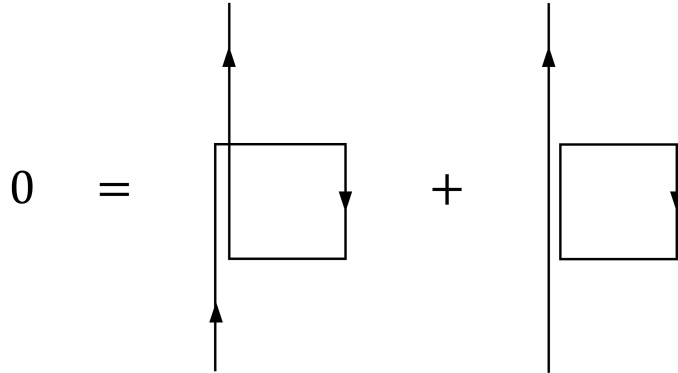


図 53 伝播関数に寄与するグラフと，真空ダイアグラムに寄与する閉じたグラフの競合効果

15.4 節について

■Euclid 時空中における Dirac 場の作用 (15.45) について 7.2.1 節で言及した，

$$\gamma_a^{\text{Minkowski}} = i\gamma_a^{\text{Euclid}}, \quad \gamma_0^{\text{Minkowski}} = \gamma_0^{\text{Euclid}} \quad (a = 1, 2, \dots)$$

で与えられる Euclid 時空の γ 行列 $\gamma_i^{\text{Euclid}} \equiv \gamma_i$ ($i = 0, 1, \dots$) を用いると， $\partial_0 = i\partial_\tau$ とより

$$\not{\partial} = (\gamma^0)^{\text{Minkowski}} \partial_0 + (\gamma^a)^{\text{Minkowski}} \partial_a = i\gamma^i \partial_i$$

となる．同様に一般のベクトル A_μ に対しては

$$A \rightarrow i\gamma^i A_i (\equiv iA \text{ と再定義})$$

と置き換わる．よって Minkowski 時空中における作用 S (の i 倍) は

$$iS = i \int d^{d-1}x dt \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi = - \int d^d x \bar{\psi}(\gamma^i \partial_i + m)\psi \quad (d^d x \equiv d^{d-1}x dt)$$

と書き換えられる．これまで通り最右辺を $-S$ と書いて，Euclid 時空中における作用量 (15.45) を再定義する．

なお Euclid 時空中における γ 行列 γ_i はもともと，付録 D (本稿では省略) の反交換関係 (D.1):

$$\{\gamma_n, \gamma_m\} = 2\delta_{mn}$$

で定義される (計量が Euclid 時空のそれに置き換わる)．実際この γ_i を用いてはじめて， S は Euclid 時空での直交変換に対して不変になると想像される．

■式 (15.52) について まず第 1 の等号について，式 (15.52) 第 2 辺は

$$\begin{aligned} & \sum_L \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}} \left(\sum_i \gamma^i 2iK \sin k_i \right)^L \\ &= \sum_L K^L \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}} \{ \gamma^1 e^{ik_1} + (-\gamma^1) e^{-ik_1} + \dots + \gamma^d e^{ik_d} + (-\gamma^d) e^{-ik_d} \}^L \end{aligned}$$

と書き換えられる。ここで 15.2 節と似た考え方として、ステップ数 L の酔歩において i 番目のステップを $\pm i$ 方向に選ぶことを、 $i(=1, \dots, L)$ 番目の因子 $\{\gamma^1 e^{ik_1} + \dots\}$ から $\pm \gamma^i e^{\pm ik_i}$ を選ぶことに対応付ける (複号同順)。すると 1 つの経路からは、各方向 i の正味の変位を n_i として、積

$$\left(\prod \gamma^i \right) e^{i(k_1 n_1 + \dots + k_d n_d)}$$

が作られる。展開から現れる、指数の因子 $e^{i(k_1 n_1 + \dots + k_d n_d)}$ を持つ項はすべて、ちょうど変位 $\{n_i\}$ が同じ L 歩の経路から得られるものの、各々の経路は異なる係数 $\prod \gamma^i$ を作る (γ 行列は交換しないことにも注意)。よって $e^{i(k_1 n_1 + \dots + k_d n_d)}$ の展開係数は、これら $\Gamma(\mathbf{n}, 0, L)$ 通りの経路に関する和 $\sum_{\Gamma(\mathbf{n}, 0, L)} \prod \gamma^i$ で与えられる。この係数は上式の Fourier 積分で取り出せる：

$$\begin{aligned} & \sum_L K^L \int_{\text{BZ}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}} \{ \gamma^1 e^{ik_1} + (-\gamma^1) e^{-ik_1} + \dots + \gamma^d e^{ik_d} + (-\gamma^d) e^{-ik_d} \}^L \\ &= \sum_L K^L \sum_{\Gamma(\mathbf{n}, 0, L)} \prod \gamma^i = \sum_{\text{paths}} K^L \prod \gamma^i. \end{aligned}$$

こうして式 (15.52) の最左辺に戻ることができるから、第 1 の等号が成立している。

次に第 2 の等号では、再び m が大きく (すなわち $K = 1/2m$ が小さく)、それ故、公比 $r \equiv \sum_i \gamma^i 2iK \sin k_i$ が 1 に比べて小さいと仮定して、 $L = 1, 2, \dots$ に関する無限等比級数和の公式を用いる (15.2 節の note で言及したように、 $L = 0$ の項は和から外して良い)。無限等比級数和の公式はその導き方より、 $1/(1-r)$ が $(1-r)$ の逆行列を意味するという理解の下で、行列に対してもそのまま成り立つ。

式 (15.52) 第 3 辺の分母は

$$\begin{aligned} & \left(1 - \sum_i \gamma^i 2iK \sin k_i \right) \left(1 + \sum_i \gamma^i 2iK \sin k_i \right) = 1 - \left(\sum_i \gamma^i 2iK \sin k_i \right)^2 \\ &= 1 + 4K^2 \sum_{i,j} \gamma^i \gamma^j \sin k_i \sin k_j = 1 + 4K^2 \left(\sum_i (\gamma^i)^2 \sin^2 k_i + \sum_{i>j} \{\gamma^i, \gamma^j\} \sin k_i \sin k_j \right) \\ &= 1 + 4K^2 \sum_i \sin^2 k_i \quad (\text{Euclid 時空での } \gamma \text{ 行列の反交換関係 (D.1) : } \{\gamma^i, \gamma^j\} = 2\delta^{ij}, \therefore (\gamma^i)^2 = 1 \text{ による}) \end{aligned}$$

とすると得られる。式 (15.52) 第 3 の等号は、連続的な場の伝播関数に対する変形

$$\frac{1}{\not{k} - m} = \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2}$$

と比較される。

第 16 章 繰り込み群

長くなるが、序文を全て引用する：

相対論的な場の理論における繰り込み群 (renormalization group) は、Stückleberg (シュテュッケルベルク) および Gell-Mann と Low によって独立に発見された。後に Leo Kadanoff (カダノフ) は、場の理論における繰り込み群と似たものが、臨界現象における普遍性の起源となっていることを見いだした。そして Ken Wilson (ウィルソン) は、1970 年代初頭に出した一連の論文において、連続場の理論と格子統計力学の視点を融合し、繰り込み群を実際の計算に役立つ道具に仕立て上げた。Kadanoff と Wilson は、場の量子論に対する我々の姿勢を全面的に変えさせたと言えよう。彼らの仕事以前には、場の理論は摂動展開を書き下す Feynman 規則と、発散する Feynman 積分から有限の答えを引き出すための繰り込み処方だけから構成されており、摂動論の適用範囲外にある場の理論について、明確な概念は存在していなかった。摂動級数は漸近展開になる場合もあるが、一意的な結果を与えるとは限らないため、非摂動的な効果に対して、どのような計算方法が正当なのかという問題に関する統一的な考え方はなかった。同等の計算技術と誠意を持った研究者が、全く別々の結論に到達することも有り得たのである。しかし繰り込み群の概念が発達した今日では、そのような混乱は無くなった。

この章では、統計力学の文脈における繰り込み群を調べることにする。ここから引き出そうとしている教訓は、適正な理論において連続極限をとるためには、パラメーター空間において、相関長 (correlation length) が巨視的になる点を求めなければならないことである。これは連続的な相転移が起こる“臨界点” (critical point) にあたる。そのような点に照準を合わせて、相関関数が有限に留まるように、場のスケールを変更することができる。連続的な相転移には“普遍性” (universality) があるので、結果として得られる連続な理論は、それを導くために用いた手続きの詳細には依存しない。

16.1 伝送行列

連続的な相転移を示す 1 つの単純なモデルとして、強磁性体の Ising (イジング) モデルを紹介する。格子上の各点にスピンの配置されており、個々のスピンは「上向き」または「下向き」の 2 状態をとり得る。 i 番目のスピンを上向きするとき変数 $\sigma_i = +1$ で、下向きするとき $\sigma_i = -1$ で表す。隣接するスピンの対は、互いに逆向き (σ_i が異符号) のときエネルギー $-I (> 0)$ を持ち、同じ向き (σ_i が同符号) のときエネルギー $(-I)$ を持つとする。また系に一様不変な“下向き”の外部磁場 H が加えられているとすると、1 個のスピンの磁気モーメントを μ として、系全体は磁場によるエネルギー $+H \sum_i \mu \sigma_i$ を持つ。よって 1 次元系でのエネルギーは

$$E = -I \sum_i \sigma_i \sigma_{i-1} + \mu H \sum_i \sigma_i = - \sum_i \left(I \sigma_i \sigma_{i-1} - \frac{1}{2} \mu H (\sigma_i + \sigma_{i-1}) \right)$$

と書ける [22, pp.437–439].

β を逆温度として、分配関数は

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{-\beta E} = \sum_{\{\sigma_i\}} \exp \left(J \sum_i \sigma_i \sigma_{i-1} - h \sum_i \sigma_i \right) = \sum_{\{\sigma_i\}} \prod_i \exp \left(J \sigma_i \sigma_{i-1} - \frac{h}{2} (\sigma_i + \sigma_{i-1}) \right) \quad (16.1')$$

と表される [ただし $J \equiv \beta I, h \equiv \beta \mu H$ と無次元化].

参考 これは

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\sigma_i\}} \prod_i (\cosh J + \sigma_i \sigma_{i-1} \sinh J) e^{-\frac{h}{2} \sigma_i} e^{-\frac{h}{2} \sigma_{i-1}} \quad (16.2)$$

と書き換えることもできる。[指数の符号を訂正した。本稿次節で確認.]

ここで“伝送 [転送] 行列” (transfer matrix) を用いた分配関数の計算法を示す。式 (16.1') 最右辺の因子を行列要素

$$\langle \sigma_i | T | \sigma_{i-1} \rangle = \exp \left(J \sigma_i \sigma_{i-1} - \frac{h}{2} (\sigma_i + \sigma_{i-1}) \right) \quad (50)$$

に持つ対称行列

$$\begin{aligned} \hat{T} &= (\langle \sigma_i | T | \sigma_{i-1} \rangle) = \begin{pmatrix} \langle +1 | T | +1 \rangle & \langle +1 | T | -1 \rangle \\ \langle -1 | T | +1 \rangle & \langle -1 | T | -1 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{J-h} & e^{-J} \\ e^{-J} & e^{J+h} \end{pmatrix} \\ &= e^{-\frac{h}{2} \hat{\sigma}_z} (e^J + \hat{\sigma}_x e^{-J}) e^{-\frac{h}{2} \hat{\sigma}_z} \end{aligned} \quad (16.3)$$

として、伝送行列 \hat{T} を導入する。ここに $\hat{\sigma}_{x,z}$ は Pauli 行列である。[Pauli 行列と表記を統一するために、伝送行列 \hat{T} にハットを付けて対応する演算子 T と区別した。上式 (16.3) 最右辺を本稿次節で確認する.]

参考 $\tanh \Theta = e^{-2J}$ なるパラメーター Θ を用いて、伝送行列は

$$\hat{T} = e^{-\frac{h}{2} \hat{\sigma}_z} e^{\Theta \hat{\sigma}_x} e^{-\frac{h}{2} \hat{\sigma}_z} \sqrt{2 \sinh 2J} \quad (16.5)$$

と書くこともできる [本稿次節で確認.]

さて定義式 (50) より、スピン $i = 0, \dots, N$ に対して分配関数 (16.1') は

$$\mathcal{Z} = \prod_{\{\sigma_i\}} \langle \sigma_N | T | \sigma_{N-1} \rangle \langle \sigma_{N-1} | T | \sigma_{N-2} \rangle \cdots \langle \sigma_1 | T | \sigma_0 \rangle \quad (16.6)$$

となる。ここで周期境界条件 $\sigma_N = \sigma_0$ を課すと (したがってスピンは $i = 1, \dots, N$ の N 個), 上式 (16.6) は \hat{T}^N の対角和 (トレース) に他ならない。よって \hat{T} の 2 つの固有値

$$\lambda_{\pm} = e^J \left(\cosh h \pm \sqrt{\cosh^2 h - 2e^{-2J} \sinh 2J} \right) \quad (16.8)$$

を用いて、分配関数は

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} \left(\hat{T}^N \right) = \lambda_+^N + \lambda_-^N \quad (16.7)$$

と求まる [本稿次節で補足]。熱力学的な極限 $N \gg 1$ では、大きい方の固有値 λ_+ が支配的になる。

ここで

$$\mathcal{Z} = e^{-NF} \quad \text{i.e.} \quad F = -\frac{1}{N} \ln \mathcal{Z} \quad (16.9)$$

で定義される自由エネルギーを考えよう。[これは通常の自由エネルギー $\tilde{F} = -\frac{1}{\beta} \ln \mathcal{Z}$ と $F = \frac{\beta \tilde{F}}{N}$ の関係にある。つまり F は $k_B T$ を単位として自由エネルギーを測り、スピン 1 個あたりの量に換算した値と解釈できる。] $\mathcal{Z} \simeq \lambda_+^N$ と近似すると、この自由エネルギーは

$$F \simeq -\ln \lambda_+ = -J - \ln \left(\cosh h + \sqrt{\cosh^2 h - 2e^{-2J} \sinh 2J} \right) \quad (16.10a)$$

$$= -J - \cosh^{-1} \left(\frac{\cosh h}{\sqrt{2e^{-J} \sqrt{\sinh 2J}}} \right) + \text{const.} \quad (16.10b)$$

となる。[式 (16.10b) において $\sinh 2J$ を根号に入れ、 J のみにパラメーター的に依存する付加的な定数項を補った。本稿次節の導出過程を参照.] 自由エネルギーを“磁場”で微分すると、磁化

$$M(J, h) \sim -\langle \sigma_i \rangle = -\frac{\partial F}{\partial h} = \frac{\sinh h}{\sqrt{\cosh^2 h - 2e^{-2J} \sinh 2J}} \quad (16.11)$$

が得られる。[磁気モーメントやスピン数密度の違いを念頭に、第 1 の等号を比例関係に置き換えた。また磁場 H と同様“下向き”を正とする磁化を表すため、第 2 辺に負号を補った (このときはじめて第 3 辺以降が得られる)。本稿次節の導出過程を参照.] この 1 次元模型では、有限の J [したがって有限温度] の下で自発的な磁化 [ノンゼロの $M(J, h = 0)$] は生じない。すなわち M は h に対して連続な関数 [であって、 $h \rightarrow 0$ のとき $M \rightarrow 0$ (常磁性)] である。絶対零度 $J \equiv \beta I \rightarrow \infty$ [同時に $h \equiv \beta \mu H \rightarrow \pm \infty$] では、

$$-\langle \sigma_i \rangle \simeq \tanh h \rightarrow \operatorname{sgn} h, \quad (16.12')$$

すなわち全てのスピンは磁場の向きにそろふ。

周期境界条件の代わりに、例えば一端のサイトを上向きスピン、他端のサイトを下向きスピんに固定すると、分配関数 (16.6) は

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \langle \uparrow | \hat{T}^N | \downarrow \rangle \\ &= \langle \uparrow | + \rangle \lambda_+^N \langle + | \downarrow \rangle + \langle \uparrow | - \rangle \lambda_-^N \langle - | \downarrow \rangle \\ &= \sum_{\pm} \varphi_{\pm}^*(\uparrow) \varphi_{\pm}(\downarrow) e^{-N(-\ln \lambda_{\pm})} \end{aligned} \quad (16.13)$$

となる [本稿次節で補足].

上式はエネルギー固有値が $-\ln \lambda_{\pm}$ の、2 準位系量子力学系における伝播関数を思い起こさせる。伝送行列は $e^{-\hat{H}}$ の役割を担う。ここではハミルトニアン演算子と Hilbert 空間の方法が、スピン配置に関する和を調べる道具となる——径路積分による量子力学において、配置に関する和 (径路積分) がハミルトニアンを調べる道具となるのとは反対である。(p.230, 1.6-10)

スピン-スピン相関関数

$$\langle \sigma_i \sigma_{i-m} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{\{\sigma_k\}} \sigma_i \sigma_{i-m} e^{-\beta E} \quad (16.14)$$

は、“磁場” $h = 0$ の場合には正確に評価することができ、

$$\langle \sigma_i \sigma_{i-m} \rangle = \frac{(2 \cosh J)^{N-|m|} (2 \sinh J)^{|m|}}{(2 \cosh J)^N} = (\tanh J)^{|m|} \quad (16.20)$$

が得られる [ただし $N \gg |m|, 1$, 本稿次節で導出]. この結果は [格子場の 2 点関数 (15.31) と同様], 相関が

$$\langle \sigma_i \sigma_{i-m} \rangle = e^{-|m|/\xi} \quad (16.21)$$

にしたがって指数関数的に減衰することを意味しており、上式 (16.21) における相関長 ξ は

$$\xi^{-1} = -\ln(\tanh J)$$

と同定される ($0 < \tanh J < 1$ なので $\xi > 0$). [この相関長 $\xi(J)$ は $\xi(0) = 0$ から $\xi(\infty) = \infty$ まで単調増加する.]

16.1.1 連続極限

場の値 $\sigma_i = \pm 1$ そのものは連続変数と見なすことはできない。しかし相関関数 (16.21):

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = e^{-|i-j|\{-\ln(\tanh J)\}} \quad (16.22)$$

に関しては、相関長 ξ がサイト間隔 a に比べて充分に長くなる場合として連続極限を想定できる。その際、空間座標 $x = ia, x' = ja$ を導入して上式 (16.22) を

$$\langle \sigma(x) \sigma(x') \rangle = e^{-m|x-x'|} \quad (16.23)$$

と書くと、“質量” m は

$$m = -\frac{1}{a} \ln(\tanh J) \quad (16.24)$$

で与えられる。[式 (16.23) の m を質量と呼ぶ動機付けは、式 (3.46): $G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = e^{-m|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} / 4\pi|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ や 15.3 節を参照。] その上で我々は連続極限を、 m を一定に保ちながら $a \rightarrow 0$ (したがって $J \rightarrow \infty$) とする操作と定義する。[このとき $\xi(J) \rightarrow \infty$ となるので $\xi(J) \gg a$ も満たされる。] この極限操作を行った後には、 x を連続変数と見なせる。

相関を J ではなく m によって決めてしまえば、連続極限の表式は J や a にあらわに依存しなくなる。 J が微小な長さ a によって定義された切断と関係する“裸の”パラメーターであるのに対し、 m を“繰り込まれた” (renormalized) 量と見なすことができる。(p.231 下から 8~5 行目)

note つまり発散を引き起こす量 J は有限の質量 m に繰り込まれて、連続極限には露骨に現れない。逆にサイト間隔 a を有限の値に設定すると、 J の発散が解除される。この意味で a を切断因子と見なせる。

連続極限を念頭に大きな J を想定すると

$$ma \approx 2e^{-2J} \quad (16.25)$$

であり [本稿次節で補足]、このとき J と a の変化に伴って m が変化しない条件は、

$$0 = dm = -\frac{2e^{-2J}}{a^2}(da + 2adJ), \quad \therefore a \frac{\partial J}{\partial a} = -\frac{1}{2} \quad (16.26)$$

と書ける [右辺 -2 を逆数 $-1/2$ に訂正した]。さらに温度 $T = J^{-1}$ を導入すると、

$$a \frac{\partial T}{\partial a} = \frac{1}{2} T^2 \equiv \beta(T) \quad (16.27)$$

と書き換えられる [式 (16.26) に連動して T^2 の係数を $2 \rightarrow 1/2$ と訂正した]。これは“繰り込み群方程式” (renormalization group equation) の一例であり、 $\beta(T)$ は“ β 関数”と呼ばれる。

note 本稿の 16.1 節冒頭で導入した逆温度 $\beta = 1/k_B T$ との混同に注意。

$J \equiv I\beta$ より、本来の温度は $T = 1/k_B \beta = I/k_B J (\sim J^{-1})$ と表される。

第 17 章以降では場の理論の文脈で繰り込み群方程式を再論する。

β 関数 (16.27) は場の理論の式 (17.38) と比較される。

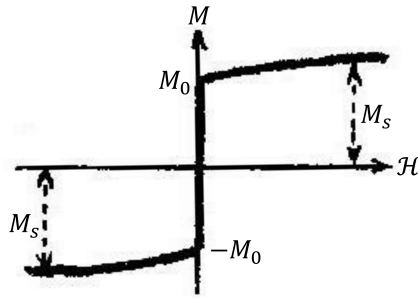


図 54 強磁性体の磁化曲線 ($T \ll T_c$: Curie 温度). $M_s = N\mu_B$ は飽和磁化, $\pm M_0$ は磁場 $\mathcal{H} = 0$ での磁化 [9, p.251].

16.1.2 2次元 Ising 模型

[磁化 (16.11) の箇所で見たとように] 1次元 Ising 模型は, 有限温度において 1 種類の相しか持たない. 他方 Onsager の解によれば, 2次元 Ising 模型は自由エネルギーが解析的でなくなる臨界点

$$J_{\text{crit}} = -\frac{1}{2} \ln(\sqrt{2} - 1) \approx 0.4406$$

を持つ. J を小さい方から徐々に増大させるとき [温度を下げることに対応], $J > J_{\text{crit}}$ となると系は自発的に磁化し, $h = 0$ において $+M$ から $-M$ への不連続的な飛躍を持つようになる. [図 54 参照. $h = 0$ において可能な“上向き”と“下向き”の磁化の 1 方が選ばれているため,] これは $\sigma \rightarrow -\sigma$ の対称性が自発的に破れていることを表す. また磁化 $M(J)$ は臨界点近傍で, 非解析的な挙動

$$M(J) \propto (J - J_{\text{crit}})^\beta, \quad \beta = \frac{1}{8} \quad (16.29)$$

を示す. [$\beta < 1$ より M - J グラフは J が J_{crit} を超えると, $J = J_{\text{crit}}$ での傾き無限大で急激に立ち上がる.]

J が J_{crit} に近づくと, J_{crit} の上下どちら側でも, スピン-スピン相関

$$\langle \sigma_n \sigma_m \rangle \propto e^{-|n-m|/\xi} \quad (16.33)$$

における相関長は

$$\xi \propto |J - J_{\text{crit}}|^{-\nu}, \quad \nu = 1$$

のように発散する.

note 高温極限 $J = 0$ と絶対零度 $J = \infty$ では相関長は $\xi = 0$ である. 一見すると絶対零度ではすべてのスピンのそろいなので $\xi = \infty$ と考えたくなるが, 繰り込み群では (平均の秩序周りの) ゆらぎの相関を考えるので, 完全な秩序状態でも相関長は 0 となる [23, p.146] [24, p.117].

したがって $J \rightarrow J_{\text{crit}}$ で連続極限が達成される [16.1.1 節]. 実際, 相関長 ξ が十分に伸びると, スピン-スピン相関 (16.33) は回転対称性に近づき, 系の離散性は目立たなくなる.

2次元 Ising 模型に限らず, 実は一般的な原理として

$$(\text{連続極限}) = (\text{臨界点})$$

が成り立つ.

16.1 節について

■分配関数の表式 (16.2) の確認 式 (16.1') の最右辺の因子 $e^{J\sigma_i\sigma_{i-1}}e^{-\frac{h}{2}\sigma_i}e^{-\frac{h}{2}\sigma_{i-1}}$ において,

$$\begin{aligned} e^{J\sigma_i\sigma_{i-1}} &= 1 + J\sigma_i\sigma_{i-1} + \frac{J^2}{2!}(\sigma_i\sigma_{i-1})^2 + \frac{J^3}{3!}(\sigma_i\sigma_{i-1})^3 + \frac{J^4}{4!}(\sigma_i\sigma_{i-1})^4 + \frac{J^5}{5!}(\sigma_i\sigma_{i-1})^5 + \cdots \\ &= \left(1 + \frac{J^2}{2!} + \frac{J^4}{4!} + \cdots\right) + \sigma_i\sigma_{i-1} \left(J + \frac{J^3}{3!} + \frac{J^5}{5!} + \cdots\right) \quad (\because (\sigma_i\sigma_{i-1})^2 = 1) \\ &= \cosh J + \sigma_i\sigma_{i-1} \sinh J \end{aligned}$$

と書き換えれば, 式 (16.2) が得られる.

■伝送行列 (16.3) 最右辺の確認 Pauli 行列の具体的表式

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と性質 $\{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j\} = 2\delta_{ij}$, $\therefore \hat{\sigma}_i^2 = 1$ (i で和をとらない) に注意すると, 式 (16.3) 最右辺の因子は

$$\begin{aligned} e^J + \hat{\sigma}_x e^{-J} &= \begin{pmatrix} e^J & e^{-J} \\ e^{-J} & e^J \end{pmatrix}, \quad e^{-\frac{h}{2}\hat{\sigma}_z} = \cosh \frac{h}{2} - \hat{\sigma}_z \sinh \frac{h}{2} \quad (\text{式 (16.2) の導出過程と同様}) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-h/2} & 0 \\ 0 & e^{-h/2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と計算される. これらを代入して行列の積を直接計算すると, 式 (16.3) 最後の等号:

$$e^{-\frac{h}{2}\hat{\sigma}_z} (e^J + \hat{\sigma}_x e^{-J}) e^{-\frac{h}{2}\hat{\sigma}_z} = \begin{pmatrix} e^{J-h} & e^{-J} \\ e^{-J} & e^{J+h} \end{pmatrix}$$

を確かめられる.

■伝送行列の表式 (16.5) の確認 $\tanh \Theta = e^{-2J}$ のとき,

$$(1 \leq) \cosh \Theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \Theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-4J}}} = \frac{e^J}{\sqrt{2 \sinh 2J}}, \quad \therefore \sinh \Theta = \frac{e^{-J}}{\sqrt{2 \sinh 2J}}$$

である. よって

$$\begin{aligned} e^{\Theta \hat{\sigma}_x} &= \cosh \Theta + \hat{\sigma}_x \sinh \Theta = \begin{pmatrix} \cosh \Theta & \sinh \Theta \\ \sinh \Theta & \cosh \Theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh 2J}} \begin{pmatrix} e^J & e^{-J} \\ e^{-J} & e^J \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 \sinh 2J}} (e^J + \hat{\sigma}_x e^{-J}) \quad (\because \text{式 (16.3) 最右辺の確認過程}) \end{aligned}$$

となるので, 式 (16.5) は伝送行列の式 (16.3) に戻る.

■分配関数 (16.7) 最右辺と固有値 (16.8) について \hat{T} は対称行列なので, 適当な直交行列 \hat{P} を用いて

$$\hat{P}^{-1} \hat{T} \hat{P} = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \equiv \hat{\lambda}$$

と対角化できる. ここに λ_{\pm} は \hat{T} の固有値であり, 固有方程式

$$0 = \lambda^2 - (e^{J-h} + e^{J+h})\lambda + (e^{2J} - e^{-2J}) = \lambda^2 - 2(e^J \cosh h)\lambda + 2 \sinh 2J$$

の根として式 (16.8) のように定まる. するとトレースの巡回対称性に注意して

$$\mathrm{Tr}(\hat{T}^N) = \mathrm{Tr}(\hat{P}^{-1}\hat{T}^N\hat{P}) = \mathrm{Tr}((\hat{P}^{-1}\hat{T}\hat{P})^N) = \mathrm{Tr}(\hat{\lambda}^N) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} \lambda_+^N & 0 \\ 0 & \lambda_-^N \end{pmatrix} = \lambda_+^N + \lambda_-^N$$

を得る. ここでは \hat{T} を対角化する基底でトレースを評価していることになる.

なお固有値 (16.8) は “磁場” を $h = 0$ とおくと,

$$\lambda_{\pm} = e^J(1 \pm \sqrt{1 - 2e^{-2J} \sinh 2J}) = e^J \pm e^{-J}, \quad \therefore \lambda_+ = 2 \cosh J, \quad \lambda_- = 2 \sinh J$$

と簡略化されるため, 分配関数 (16.7) は

$$\mathcal{Z} = 2^N (\cosh^N J + \sinh^N J)$$

となる.

■伝送行列を用いない分配関数の導出 ここでは “磁場” $h = 0$ の場合に限り, 伝送行列を用いずに分配関数 $\mathcal{Z} = 2^N (\cosh^N J + \sinh^N J)$ を導く方法を載せておく [9, p.254, p.292]. 式 (16.2):

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\sigma_i\}} \prod_i (\cosh J + \sigma_i \sigma_{i-1} \sinh J)$$

から始めよう. σ_1 は $i = 1, 2$ の項の積

$$(\cosh J + \sigma_2 \sigma_1 \sinh J)(\cosh J + \sigma_1 \sigma_0 \sinh J) = \cosh^2 J + \sigma_2 \sigma_0 \sinh^2 J + (\sigma_1 \text{の1次の項})$$

にしか現れない. この $\sigma_1 = \pm 1$ に関する和をとると

$$2(\cosh^2 J + \sigma_2 \sigma_0 \sinh^2 J)$$

となる. 次いで $i = 3$ の項を掛けると

$$2(\cosh J + \sigma_3 \sigma_2 \sinh J)(\cosh^2 J + \sigma_2 \sigma_0 \sinh^2 J) = 2(\cosh^3 J + \sigma_3 \sigma_0 \sinh^3 J) + (\sigma_2 \text{の1次の項})$$

であり, 積において σ_2 を含む因子は他に現れない. そこで $\sigma_2 = \pm 1$ に関する和をとると

$$2^2(\cosh^3 J + \sigma_3 \sigma_0 \sinh^3 J)$$

となる. 同様に $i = N$ までの因子を掛けて $\sigma_3, \sigma_4, \dots, \sigma_{N-1} = \pm 1$ で和をとると, 帰納的に

$$2^{N-1}(\cosh^N J + \sigma_N \sigma_0 \sinh^N J)$$

を得る. 最後に周期境界条件を考慮して $\sigma_N \sigma_0 = (\sigma_0)^2 = 1$ とおき, 残る $\sigma_0 (= \sigma_N) = \pm 1$ に関する和を実行すると, 再び

$$\mathcal{Z} = 2^N (\cosh^N J + \sinh^N J)$$

を得る. この導出方法は伝送行列を用いる技法と比べて素朴でありながら, (少なくとも $h = 0$ の場合には) 決して難しくない.

■自由エネルギーの表式 (16.10b) について

$$u \equiv \cosh^{-1} \left(\frac{\cosh h}{\sqrt{2e^{-J}\sqrt{\sinh 2J}}} \right)$$

とおくと,

$$\frac{\cosh h}{\sqrt{2e^{-J}\sqrt{\sinh 2J}}} = \cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

と書き換えられる. これを改めて u について解こう. 与えられた $\cosh u$ の値に対して 2 つの解 $u \geq 0$ が得られるはずである. ところが逆関数 \cosh^{-1} の定義域は $u \geq 0$ だから, 大きい方の解を採らねばならない. そこで

$$e^{2u} - \frac{\sqrt{2}\cosh h}{e^{-J}\sqrt{\sinh 2J}}e^u + 1 = 0,$$

$$\therefore e^u = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}\cosh h}{e^{-J}\sqrt{\sinh 2J}} \pm \sqrt{\frac{2\cosh^2 h}{e^{-2J}\sinh 2J} - 4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2e^{-J}\sqrt{\sinh 2J}}} \left(\cosh h \pm \sqrt{\cosh^2 h - 2e^{-2J}\sinh 2J} \right)$$

として, 複号 \pm から正号を選ぶと,

$$u = \ln \left(\cosh h + \sqrt{\cosh^2 h - 2e^{-2J}\sinh 2J} \right) - \frac{1}{2} \ln (2e^{-2J}\sinh 2J)$$

が見出される. 右辺第 1 項は式 (16.10a) における対数に一致しているから, 式 (16.10b) への書き換えが成立する.

なお本稿のように式 (16.10b) の $\sinh 2J$ を根号に入れてはじめて, 磁化 (16.11) を導くことができる (この後の導出過程を参照).

■磁化 (16.11) について まず $\langle \sigma_i \rangle = \partial F / \partial h$ を確認する.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial h} &= -\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial h} \ln \mathcal{Z} = -\frac{1}{N\mathcal{Z}} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial h} = -\frac{1}{N\mathcal{Z}} \frac{\partial}{\partial h} \sum_{\{\sigma_i\}} \exp \left(-J \sum_i \sigma_i \sigma_{i-1} - h \sum_i \sigma_i \right) \\ &= \frac{1}{N\mathcal{Z}} \sum_{\{\sigma_i\}} \left(\sum_i \sigma_i \right) \exp(\text{同上}) = \langle \sigma_i \rangle. \end{aligned}$$

次に表式 (16.10a) を用いて自由エネルギーの微分を計算すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial h} &= -\frac{1}{\cosh h + \sqrt{\cosh^2 h - 2e^{-2J}\sinh 2J}} \times \left(\sinh h + \frac{\cosh h \sinh h}{\sqrt{\cosh^2 h - 2e^{-2J}\sinh 2J}} \right) \\ &= -\frac{\cosh h - \sqrt{\cosh^2 h - 2e^{-2J}\sinh 2J}}{2e^{-2J}\sinh 2J} \times \sinh h \frac{\cosh h + \sqrt{\cosh^2 h - 2e^{-2J}\sinh 2J}}{\sqrt{\cosh^2 h - 2e^{-2J}\sinh 2J}} \\ &= -\frac{\sinh h}{\sqrt{\cosh^2 h - 2e^{-2J}\sinh 2J}} \end{aligned}$$

が得られるので, 式 (16.11) が示された.

もちろん, 自由エネルギーの表式 (16.10b) を用いても同じ結果が得られる.

$$v \equiv \frac{\cosh h}{\sqrt{2e^{-J}\sqrt{\sinh 2J}}}$$

とにおいて自由エネルギー (16.10b) の h に依存する項を $F_h \equiv -\cosh^{-1} v$ と略記しよう。このとき $v = \cosh F_h$ であり, J を固定して逆関数の微分法を適用すると,

$$\frac{\partial F}{\partial h} = \frac{\partial F_h}{\partial h} = \frac{\partial F_h}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial h} = \frac{1}{\partial v / \partial F_h} \frac{\partial v}{\partial h} = \frac{1}{\sinh F_h} \frac{\partial v}{\partial h}$$

となる。最右辺に

$$\sinh F_h = -\sqrt{\cosh^2 F_h - 1} = -\sqrt{v^2 - 1} = -\sqrt{\left(\frac{\cosh h}{\sqrt{2e^{-J}\sqrt{\sinh 2J}}}\right)^2 - 1}, \quad \frac{\partial v}{\partial h} = \frac{\sinh h}{\sqrt{2e^{-J}\sqrt{\sinh 2J}}}$$

を代入すると, 再び

$$\frac{\partial F}{\partial h} = -\frac{\sinh h}{\sqrt{\cosh^2 h - 2e^{-2J}\sinh 2J}}$$

を得る。

■式 (16.13) について ここではスピンの向きと下向きの状態 $|\sigma_i = \pm 1\rangle$ をそれぞれ, $|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ で表している。また \hat{T} を対角化する基底 $|\pm\rangle$ に関するこれらの“波動関数”を

$$\varphi_{\pm}(\uparrow\downarrow) = \langle \pm | \uparrow\downarrow \rangle$$

で定義している。実際, このとき

$$\begin{aligned} \langle \uparrow | \hat{T}^N | \downarrow \rangle &= \sum_{a,b=\pm} \langle \uparrow | a \rangle \langle a | \hat{T}^N | b \rangle \langle b | \downarrow \rangle \\ &= (\varphi_+^*(\uparrow) \quad \varphi_-^*(\uparrow)) \begin{pmatrix} \lambda_+^N & 0 \\ 0 & \lambda_-^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_+(\downarrow) \\ \varphi_-(\downarrow) \end{pmatrix} \\ &= \varphi_+^*(\uparrow)\varphi_+(\downarrow)\lambda_+^N + \varphi_-^*(\uparrow)\varphi_-(\downarrow)\lambda_-^N \\ &= \sum_{\pm} \varphi_{\pm}^*(\uparrow)\varphi_{\pm}(\downarrow)e^{-N(-\ln \lambda_{\pm})} : (16.13) \end{aligned}$$

となる。

■スピン-スピン相関関数 (16.20) の導出 相関関数 (16.14) における分母の分配関数は, 式 (16.10):

$$\mathcal{Z} = \langle \sigma_N | \hat{T}^N | \sigma_0 \rangle$$

で与えられる (与えられた両端の値 σ_N, σ_0 に対して)。また伝送行列の定義 (50): $e^{-\beta E} = \prod_k \langle \sigma_k | T | \sigma_{k-1} \rangle$ にさかのぼると, 相関関数 (16.14) から規格化定数 $1/\mathcal{Z}$ を除いた因子は

$$(\text{式 (16.14) 分子}) \equiv \sum_{\{\sigma_k\}} \sigma_i \sigma_{i-m} e^{-\beta E} = \sum_{\{\sigma_k\}} \sigma_i \sigma_{i-m} \prod_k \langle \sigma_k | T | \sigma_{k-1} \rangle$$

と書ける。例えば $i = 5, i - m = 3, N = 7$ の場合 (したがって $m = 2$)、固定端の境界条件を想定すると

$$\begin{aligned} (\text{式 (16.14) 分子}) &= \sum_{\{\sigma_1, \dots, \sigma_6\}} \sigma_5 \sigma_3 \langle \sigma_7 | T | \sigma_6 \rangle \langle \sigma_6 | T | \sigma_5 \rangle \langle \sigma_5 | T | \sigma_4 \rangle \langle \sigma_4 | T | \sigma_3 \rangle \langle \sigma_3 | T | \sigma_2 \rangle \langle \sigma_2 | T | \sigma_1 \rangle \langle \sigma_1 | T | \sigma_0 \rangle \\ &= \sum_{\sigma_3, \sigma_5 = \pm 1} \langle \sigma_7 | T^2 | \sigma_5 \rangle \sigma_5 \langle \sigma_5 | T^2 | \sigma_3 \rangle \sigma_3 \langle \sigma_3 | T^3 | \sigma_0 \rangle \end{aligned}$$

である。以降 $m \geq 0$ を仮定すると、一般には

$$(\text{式 (16.14) 分子}) = \sum_{\sigma_i, \sigma_{i-m} = \pm 1} \langle \sigma_N | T^{N-i} | \sigma_i \rangle \sigma_i \langle \sigma_i | T^m | \sigma_{i-m} \rangle \sigma_{i-m} \langle \sigma_{i-m} | T^{i-m} | \sigma_0 \rangle$$

となる ($m < 0$ の場合には計算結果で $m \rightarrow -m$ と置き換えさえすれば良い)。

さて、伝送行列要素 (50) は $h = 0$ のとき、式 (16.2) の確認と同様の手法により

$$\langle \sigma | T | \sigma' \rangle = e^{J\sigma\sigma'} = \cosh J + \sigma\sigma' \sinh J \quad (16.18)$$

と表される。次いで

$$\sum_{\sigma = \pm 1} \sigma = 0, \quad \sum_{\sigma = \pm 1} \sigma^2 = 2 \quad (16.19)$$

に注意すると

$$\begin{aligned} \langle \sigma | T^2 | \sigma' \rangle &= \sum_{\sigma'' = \pm 1} \langle \sigma | T | \sigma'' \rangle \langle \sigma'' | T | \sigma' \rangle = \sum_{\sigma'' = \pm 1} (\cosh J + \sigma\sigma'' \sinh J)(\cosh J + \sigma''\sigma' \sinh J) \\ &= 2(\cosh^2 J + \sigma\sigma' \sinh^2 J) \end{aligned}$$

であり、同様の計算を繰り返すと、帰納的に

$$\langle \sigma | T^n | \sigma' \rangle = 2^{n-1}(\cosh^n J + \sigma\sigma' \sinh^n J)$$

が示される。これは既に紹介した、伝送行列を用いない分配関数の導出方法と同じ計算になっている。
すると

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= 2^{N-1}(\cosh^N J + \sigma_N \sigma_0 \sinh^N J), \\ (\text{式 (16.14) 分子}) &= \sum_{\sigma_i, \sigma_{i-m} = \pm 1} 2^{N-i-1}(\cosh^{N-i} J + \sigma_N \sigma_i \sinh^{N-i} J) \cdot \sigma_i \cdot 2^{m-1}(\cosh^m J + \sigma_i \sigma_{i-m} \sinh^m J) \\ &\quad \times \sigma_{i-m} \cdot 2^{i-m-1}(\cosh^{i-m} J + \sigma_{i-m} \sigma_0 \sinh^{i-m} J) \\ &= \sum_{\sigma_i, \sigma_{i-m} = \pm 1} 2^{N-3}(\sinh^m J \cosh^{N-m} J + \sigma_N \sigma_0 \cosh^m J \sinh^{N-m} J) \\ &\quad (\text{和に寄与しない } \sigma_i, \sigma_{i-m} \text{ の 1 次の項を落とし, } (\sigma_i)^2 = (\sigma_{i-m})^2 = 1 \text{ を用いた}) \\ &= 2^{N-1}(\sinh^m J \cosh^{N-m} J + \sigma_N \sigma_0 \cosh^m J \sinh^{N-m} J), \\ \therefore \langle \sigma_i \sigma_{i-m} \rangle &= \frac{(\text{式 (16.14) 分子})}{\mathcal{Z}} = \frac{\tanh^m J + \sigma_N \sigma_0 \tanh^{N-m} J}{1 + \sigma_N \sigma_0 \tanh^N J} \simeq \tanh^m J \end{aligned}$$

と計算できる。ただし最後の等号では恒等的に $|\tanh J| < 1$ であることに注意して、 $N \gg m, 1$ の極限をとった。 $m < 0$ の場合と合わせると式 (16.20) を得る。

周期境界条件を課して $\sigma_N = \sigma_0 = \pm 1$ に関する和をとった場合にも、

$$\mathcal{Z} = 2^N(\cosh^N J + \sinh^N J), \quad (\text{式 (16.14) 分子}) = 2^N(\sinh^m J \cosh^{N-m} J + \cosh^m J \sinh^{N-m} J)$$

となって、同じ結果

$$\langle \sigma_i \sigma_{i-m} \rangle = \frac{(\text{式 (16.14) 分子})}{\mathcal{Z}} = \frac{\tanh^m J + \tanh^{N-m} J}{1 + \tanh^N J} \simeq \tanh^m J$$

が得られる。

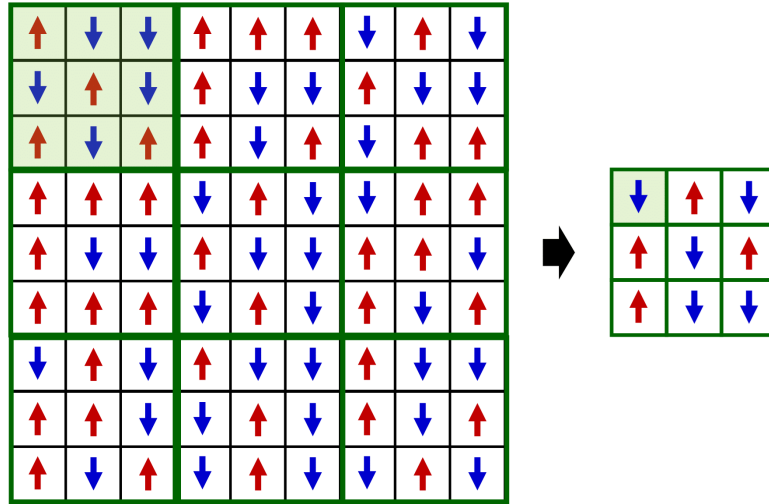


図 55 2次元 Ising 模型のブロック化

■式 (16.25) の確認 $J \gg 1$ に対して

$$\tanh J = \frac{1 - e^{-2J}}{1 + e^{-2J}} \simeq 1 - 2e^{-2J}, \quad \therefore -\ln(\tanh J) \simeq -\ln(1 - 2e^{-2J}) \simeq 2e^{-2J}$$

となることによる.

16.2 スピンのブロック化と繰り込み群

ここでは 2 次元 Ising 模型を例に繰り込み群の概念を導入する. 図 55 の緑の枠線で示した 3×3 個のサイトから成るブロックに注目して, ブロック内で上向きスピンとした向きスピンの“多数決”をとり, 各ブロックを多数派の向きのスピン 1 個で代表させる. 次にそれぞれのブロックを相似比 $1/3$ で縮小してサイト 1 個の面積にすると, 新しいスピンの配置が得られる (ブロック化). これはスピンの配置に対する解像度を下げる“ぼかし” (blurring), または“粗視化” (coarse graining) の操作と見なすことができ, ブロック化の過程で長距離の物理は保持される. 実際ブロック化は 16.1.1 項で導入した“物理を変えずに切断 (cut-off) を変更する操作” [連続極限での相関長 $1/m$ を変えずに a を変更する操作] と等価である. [このことが「繰り込み」という術語の所以と考えられる.]

note Ising 系のブロック化による粗視化は画像のモザイク処理に通じるものがある. モザイク処理では複数の画素を含む領域を代表的な単一の色で塗りつぶして粗い画像を得る.

note スピンの“多数決”が“引き分け”とならないためには, ブロックの含むサイトの個数 R^2 (したがって 1 辺に並ぶサイト数 R) が奇数であれば良い. よって意味のある結果を与える最小の R は 3 である.

さて, 臨界温度 [16.1.2 節の J_{crit} に対応する温度] を T_c と書こう. ブロック化を繰り返すと,

- T_c よりわずかでも温度の高い系は, スピンの完全にランダムな配置に移行していく.
- T_c よりわずかでも温度の低い系は, 全スピンの向きが上下のいずれかに揃った状態に移行していく.
- 温度がちょうど T_c を持つ系のスピン分布の様子は変わらない.

これは臨界点でのスピン分布がスケール不変なフラクタル (fractal) になっていることを意味する。

[16.1.2 節末尾の「(連続極限) = (臨界点)」を思い出そう.]

こうしてブロック化を繰り返すと、臨界温度の状態からその近傍の状態を区別することができる。

ブロック化はハミルトニアンの変更として定式化できる。ここでは本稿での分配関数の表記 (16.1'): $\mathcal{Z} = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{-\beta E}$ を

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\sigma\}} e^{-H(\{\sigma\})} \quad (16.34)$$

と改めて、多スピン系のハミルトニアン $H(\{\sigma\})$ を定義しよう。このときスピン分布 $\{\sigma\}$ の実現確率は

$$P(\sigma) = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-H(\{\sigma\})} \quad (16.35)$$

で与えられる。さらに元のスピン分布 $\{\sigma\}$ を与えたときに、“ブロックスピン” の分布が $\{\sigma'\}$ となる条件付き確率

$$P(\{\sigma'\}|\{\sigma\}) = \prod_I \delta\left(\sigma'_I - \text{sgn} \sum_{i \in I} (\sigma_i)\right) \quad (I \text{ はブロック番号}) \quad (16.36)$$

[本稿次節で補足] を導入すると、[条件付き確率の常として] これは規格化条件

$$\sum_{\{\sigma'\}} P(\{\sigma'\}|\{\sigma\}) = 1 \quad (16.37)$$

を満たす。そこで分配関数 (16.34) を

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \sum_{\{\sigma'\}} \sum_{\{\sigma\}} P(\{\sigma'\}|\{\sigma\}) e^{-H(\{\sigma\})} \quad (\because \text{式 (16.37)}) \\ &\equiv \sum_{\{\sigma'\}} e^{-H'(\{\sigma'\}) + G} \end{aligned} \quad (16.38)$$

と書いて新しいハミルトニアン H' を定義することができる*60。このとき (定数 G の違いを除いて) 分配関数の形は変わらない。するとブロック化の操作 (ブロックの縮小を含む) の繰り返しは、離散的な繰り込み群の流れ

$$H(\{\sigma\}) \rightarrow H'(\{\sigma'\}) \rightarrow H''(\{\sigma''\}) \rightarrow \dots \quad (16.39)$$

で表される*61。

一般にあるハミルトニアン H^* が

$$H^* \rightarrow H^* \quad (16.40)$$

を満たすとき、そのハミルトニアンは繰り込み群変換の“固定点” (fixed point) にあると言う。ひと組の演算子 O^i を用いて、 H^* 付近のハミルトニアンを

$$H = H^* + \sum_i a_i O^i \quad (16.41)$$

*60 ただし H' に関して [磁場がない系が満たすであろう関係 $\sum_{\{\sigma\}} H(\{\sigma\}) = 0$ と同様の] 条件 $\sum_{\{\sigma'\}} H'(\{\sigma'\}) = 0$ 、もしくはこれに類する条件を課して、指数の H' と G の分割の仕方を決めねばならない。

*61 繰り込み“群”という術語を使うのが通例となっているが、この呼称は、ブロック化操作の“冪 (べき)”が、操作の繰り返しとして与えられることを強調するために採用されたものである。しかしブロック化の過程は非可逆なので、繰り込み群は本当は“群”ではなく、“半群” (semigroup) であるにすぎない (教科書 p.235 脚注 2)。

と書くと, $[H^*$ は不変なので決まった O^i を用いることにすれば,] これは繰り込み群変換により

$$H \rightarrow H^* + \sum_i a'_i O^i \quad (16.42)$$

のように, 係数 a_i が変化する. ところが H^* の近くでは, この係数変換は

$$a_i \rightarrow a'_i = \sum_j A_{ij} a_j + O(a^2)$$

のように, 近似的に線形でなければならない.

note H^* からのズレ a_i の 1 次近似である. アナロジーとして, 連続変数の組 $\mathbf{x} = (x_1, \dots)$ に対する流れ

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

を考えよう. すなわち動点 $\mathbf{x}(t)$ は与えられた速度場 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ に導かれて運動 (時間変化) する. $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0$ となる固定点 \mathbf{x}^* の近くで, 速度場 (変数 \mathbf{x} の単位時間当たりの変化) は

$$f_i(\mathbf{x}) \simeq \sum_j \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}^*} (x_j - x_j^*)$$

と近似される (右辺の微分係数は固定点 \mathbf{x}^* で評価する).

特殊な場合を除けば A_{ij} は対角化が可能である. そこで A_{ij} が対角化されて Λ_i と表されるように O^i を選ぶと, 係数の流れは

$$a_i \rightarrow \Lambda_i a_i \rightarrow \Lambda_i^2 a_i \rightarrow \dots \quad (16.44)$$

と書ける (i で和をとらない).

- $|\Lambda_i| < 1$ ならば係数 a_i は減少 $\leftrightarrow O^i$ は (赤外で) “無効 (irrelevant) な摂動”
note 粗視化の流れは長波長 (低エネルギー) の極限をとることに対応するため, 「赤外で」と書いていると考えられる.
- $|\Lambda_i| > 1$ ならば係数 a_i は増大 $\leftrightarrow O^i$ は H^* に対して “有効 (relevant) な摂動”
- $|\Lambda_i| = 1$ $\leftrightarrow O^i$ は “境界的 (marginal) な摂動”

特に H^* が質量のない自由場のハミルトニアンならば, これらの術語はそれぞれ

- “繰り込み不可能 (nonrenormalizable) な摂動”
- “超繰り込み可能 (superrenormalizable) な摂動”
- “繰り込み可能 (renormalizable) な摂動”

といった術語と等価である. 関連して, 教科書 pp.236–237 にまたがる訳註を全文, 引用する:

場の理論に繰り込み群の手法を導入するひとつの考え方は, まず $a = 1$ の格子理論のような, 連続ではないけれども正則な理論をつくり (格子正則化. p.66 訳註も参照 [本稿では省略]), 適当な繰り込み処方をしてから, 本節に示されているような粗視化の流れを逆に “遡って” 連続極限の理論を得る (粗視化の結果, 望ましい形の格子理論へと流れて来るような ‘上流の’ 連続理論を見いだす) というものである. 粗視化の流れの下流に影響を及ぼさない “無効な摂動” があると, 下流側から正しく上流へ

遡ることができない (半群の変換を逆に辿ろうとするのだから, 当然このような事態も生じ得る) ので, そのような摂動は“繰り込み不可能”ということになる. しかし一般に, 繰り込み不可能な摂動は無視しておいても, 低エネルギー領域 (下流) の物理の議論に実質的な支障は生じない. 1940 年代に場の理論における発散の困難を回避するための半経験的処方として開発された摂動的な繰り込み理論が成功を収めた背景には, 上述のように低エネルギー領域の物理は必然的に繰り込み可能 (および超繰り込み可能) な摂動だけに支配されるという原理的な事情があったのだが, 1970 年代以降の繰り込み群理論の発達によって, 初めてこのような普遍的な事情が理解されるようになった.

相関長

繰り込み群変換のたびに系を R^{-1} 倍に縮小するとき (先の例では $R = 3$), 相関長も

$$\xi \rightarrow R^{-1}\xi \quad (16.45)$$

のように変換する. H の変わらない固定点では ξ も変わらないため, $\xi = 0, \infty$ のいずれかである. 臨界点には $\xi = \infty$ が対応する.

一般にハミルトニアンを式 (16.41) の形

$$H = H^* + aO \quad (16.46)$$

におき, [臨界点を念頭に] O を有効な摂動と考える. 係数変換 $a \rightarrow \Lambda a$ の変換係数が

$$\Lambda = R^y, \quad y > 0 [\cdot: \text{有効な摂動}]$$

と表されるとき, 相関長は a の変化に伴い

$$\xi = \xi_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-\nu}, \quad \nu = \frac{1}{y} \quad (16.47)$$

にしたがって変化する (証明は下記). ただし a_0, ξ_0 はそれぞれ, 繰り込み群変換の流れにおける a, ξ の初期値である. ここで物理的に測定される指数 ν を決めるのは y であって, 固有値 Λ そのものではないことに注意しよう.

スケーリング則 (16.47) の証明 仮定より $a = a_0, \xi = \xi_0$ から N ステップ後の値は $a = R^{Ny}a_0, \xi = R^{-N}\xi_0$ なので,

$$Ny \ln R = \ln \left(\frac{a}{a_0} \right), \quad -N \ln R = \ln \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right), \quad (16.48)$$

$$\therefore -y \ln \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right) = \ln \left(\frac{a}{a_0} \right) \quad (16.49)$$

が得られる. これは式 (16.47) に他ならない.

note 1 回の変換を考えて式 (16.47) に仮定 $a/a_0 = \Lambda = R^y$ を代入すると, 式 (16.45):

$$\xi = R^{-1}\xi_0$$

が再現される. (証明にこのことを用いたのだから当然である.)

以上が典型的なスケーリングの議論の方法である. 異なるブロック化の方法を用いても (例えば 2 次元 Ising 模型に対し 5×5 のサイトをブロックに選んでも), 同じ ν の値が得られなければならない.

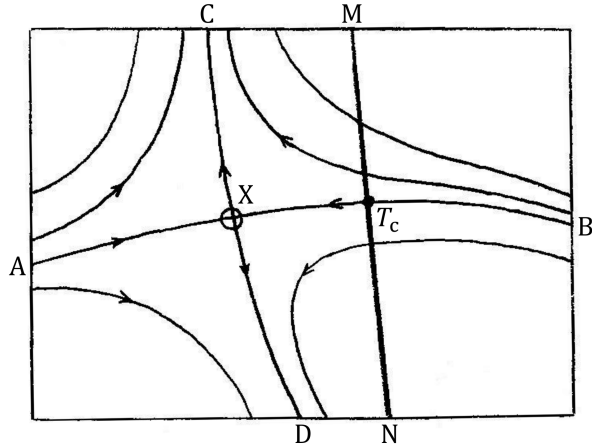


図 56 全パラメーター空間における繰り込み群の流れ

2次元 Ising 模型は 2つのパラメーター J, h で特徴付けられる. [ところが繰り込み群変換 $H(\{\sigma\}) \rightarrow H'(\{\sigma'\})$ は J, h の値の変更と見なせるので, 繰り込み群の流れは図 56 のようなパラメーター空間上の流れを定義する.] 図 56 の X は $\xi = \infty$ の固定点を表しており, 曲線 $AX(T_c)B$ はその上の全ての点が X に流れ込むような吸引的な多様体 (attractive manifold) である. ξ は繰り込み群の流れに沿って縮小するものの, X において $\xi = \infty$ なので, 多様体上の全ての点で $\xi = \infty$ でなければならない. したがって吸引的な多様体は“臨界面” (critical surface) になっている*62. すると 1つのパラメーター, 例えば J を変えて得られるパラメーター空間上の線 (図 56 の MN) は, 臨界温度 T_c において多様体と交わることになる. 2次元 Ising 模型に限らず, パラメーター空間と, 固定点に付随する臨界面との交点によって臨界温度が決まるという上記の描像は, “普遍性” (universality) を持つ.

16.2.1 相関関数

任意の演算子 $O(\mathbf{r})$ の相関関数

$$G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \langle O(\mathbf{r}_1)O(\mathbf{r}_2) \rangle_{\text{conn}}$$

は, ハミルトニアンを $H \rightarrow H - \sum_{\mathbf{r}} h(\mathbf{r})O(\mathbf{r})$ とおいて, 汎関数微分

$$G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2; H, h) = \frac{\delta^2 \ln \mathcal{Z}(H, h)}{\delta h(\mathbf{r}_1)\delta h(\mathbf{r}_2)} \quad (16.51)$$

から求めることができる. [13.1 節参照. 式 (16.51) で $h(\mathbf{r}) = 0$ とおくと $G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ になる.] ここでは空間的に一様な h に関して, 繰り込み群変換を

$$H \rightarrow H', \quad h \rightarrow h' = \Lambda_O h, \quad \Lambda_O = R^{y_O}$$

と仮定する.

note 一様な磁場 h の項はもとのハミルトニアン H に含まれており, $h(\mathbf{r})$ は一様な磁場からのズレと見なせば良い. 相互作用ハミルトニアンにおける $O(\mathbf{r})$ と $h(\mathbf{r})$ は, それぞれ式 (16.41) の摂動 O^i と係数 a_i に対応する.

62 固定点 X での H^ と多様体上の X から外れた点の H の違いは, 無効な演算子だけである. 臨界面以外にある点は, 大抵の場合, 相関長がゼロになるような (温度が無量大もしくはゼロにあたる) 他の固定点へと流れる.

このとき

$$G\left(\frac{1}{R}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2); H', h'\right) = R^{2d-2y_0} G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2; H, h) \quad (16.56)$$

の関係が見出される [d は空間 (時空) 次元].

上式 (16.56) の導出 繰り込み群は分配関数 \mathcal{Z} を保存するので [式 (16.38): $\mathcal{Z}(H', h') = \mathcal{Z}(H, h)$],

$$\frac{\delta^2 \ln \mathcal{Z}(H', h')}{\delta h'(\mathbf{r}_1) \delta h'(\mathbf{r}_2)} = \frac{\delta^2 \ln \mathcal{Z}(H, h)}{\delta h(\mathbf{r}_1) \delta h(\mathbf{r}_2)} \quad (16.52)$$

が成立する. 左辺は単なるブロックスピン理論の相関関数を表す. ところがブロック化によって長さスケールは R^{-1} 倍に縮小するので,

$$(\text{式 (16.52) 左辺}) = G\left(\frac{1}{R}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2); H', h'\right) \quad (16.53)$$

である.

note ここで R^{-1} 倍の縮小の有無に関わらず, ブロックスピン理論の相関関数が式 (16.52) の左辺で与えられることに変わりはない. 他方で相関関数 (16.52) は実際の長さ $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ を引数として定義されていることに注意した.

一方, $h' = R^{y_0} h$ に注意すると

$$(\text{式 (16.52) 右辺}) = R^{-2y_0} \sum_{\mathbf{x} \in \text{block 1}} \sum_{\mathbf{y} \in \text{block 2}} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}; H, h) \quad (16.54)$$

となる [本稿次節で補足]. さらにブロックの中心 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ は十分に離れていて, ブロック内での位置の違いは問題にならないとすると,

$$(\text{式 (16.52) 右辺}) = R^{2d-2y_0} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}; H, h) \quad (16.55)$$

とできる. [ブロック内のサイト数は R^d なので, 格子点 \mathbf{x} と \mathbf{y} の組合せは R^{2d} 通りある.] 最後に式 (16.53) と式 (16.55) を等置して, 式 (16.56) を得る.

式 (16.56) で $h = 0, H = H^*$ とおくと

$$G\left(\frac{\mathbf{r}}{R}; H^*, 0\right) = R^{2(d-y_0)} G(\mathbf{r}; H^*, 0) \quad (16.56')$$

となるので, 固定点の相関関数は

$$G(\mathbf{r}; H^*, 0) \sim |\mathbf{r}|^{-2(d-y_0)} \quad (16.57)$$

にしたがって冪 (べき) 減衰する.

note : ベキ関数 実際, 式 (16.56') は相関関数の関数形が空間のスケールの変更に對して不変であることを意味しており, この性質を満たす関数はベキ乗則 (16.57) に限られる (本稿次節で証明). このベキ分布 (16.57) のスケール・フリー性は, 既に 2 次元 Ising 模型に関して言及した, 「臨界点における場の分布が, 自己相似なフラクタル性を持つこと」 (p.240 下 2 行) と整合している. またベキ分布は広いすそ野を持つので, $G \sim e^{-|\mathbf{r}|/\xi}$ における相関長 ξ が臨界点で発散することとも整合している.

固定点での相関関数 $G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \langle O(\mathbf{r}_1)O(\mathbf{r}_2) \rangle_{\text{conn}}$ の式 (16.57) は, それぞれの O が, ある意味で, あたかも [自然] 次元 $[O] = M^{d-y_0}$ を持つように振舞うことを示している. そこで $d - y_0$ を演算子 O の “スケーリング次元” (scaling dimension) と呼ぶ. O が繰り込み可能な摂動である条件 $y_0 > 0$ は, 演算子のスケーリング次元が時空次元より小さいことを意味する.

16.2 節について

■条件付き確率 (16.36) について I 番目のブロックのスピン σ_i に対して,

$$\sigma_I \equiv \text{sgn} \sum_{i \in I} (\sigma_i) = \begin{cases} +1 & (\text{多数派が上向きするとき}) \\ -1 & (\text{多数派が下向きするとき}) \end{cases}$$

は元のスピン分布 $\{\sigma_i\}$ から作られる I 番目のブロックスピンである。これに対して Kronecker のデルタ

$$\delta(\sigma'_I - \sigma_I) \equiv \delta_{\sigma'_I, \sigma_I}$$

は, σ_I が与えられたスピンブロックの値 σ'_I に一致するとき 1 であり, 一致しないとき 0 となる。 I についての積をとると, 結局, 条件付き確率 (16.36) は, 元のスピン分布 $\{\sigma_i\}$ から作られるブロックスピンの分布に $\{\sigma'\}$ が一致するときだけ 1 になり, それ以外の $\{\sigma'\}$ に対しては 0 となる。これは「ブロックスピンは元のスピンから確定的に決まる関数である」(p.235, 1.5,6) ことを表している。このとき条件確率一般に対する規格化条件 (16.37) が満たされることも明らかである。もっとも以降の議論では, 条件付き確率の具体的な表式 (16.36) は重要ではない。

■式 (16.54) の導出 長さスケールを R^{-1} 倍に縮小する前の系に対して, 点 \mathbf{r} を中心とするブロック内の各サイトの位置を \mathbf{x} で表そう。また格子場 $h(\mathbf{x})$ の任意の汎関数 W に対する汎関数微分 $\delta W / \delta h(\mathbf{x})$ は,

$$\delta W = \sum_{\mathbf{x}} \frac{\delta W}{\delta h(\mathbf{x})} \delta h(\mathbf{x})$$

と書いて定義すれば十分である。ここで通常の汎関数微分の定義と比べて, 右辺において体積要素 a^d を省略したため, $\delta W / \delta h(\mathbf{x})$ は通常の微分と同じ次元を持つことになる。このとき

$$\delta W = \sum_{\mathbf{x}} \frac{\delta W}{\delta h(\mathbf{x})} \left(\sum_{\mathbf{r}} \frac{\delta h(\mathbf{x})}{\delta h'(\mathbf{r})} \delta h'(\mathbf{r}) \right) = \sum_{\mathbf{r}} \left(\sum_{\mathbf{x}} \frac{\delta W}{\delta h(\mathbf{x})} \frac{\delta h(\mathbf{x})}{\delta h'(\mathbf{r})} \right) \delta h'(\mathbf{r})$$

となるので, ブロック系の磁場 $h'(\mathbf{r})$ による汎関数微分は

$$\frac{\delta W}{\delta h'(\mathbf{r})} = \sum_{\mathbf{x}} \frac{\delta W}{\delta h(\mathbf{x})} \frac{\delta h(\mathbf{x})}{\delta h'(\mathbf{r})}$$

と同定される。これは式 (13.16) の導出過程 (35) で用いた汎関数微分の公式 $\frac{\delta W}{\delta \varphi_c(\mathbf{y})} = \int d^d x \frac{\delta W}{\delta J(\mathbf{x})} \frac{\delta J(\mathbf{x})}{\delta \varphi_c(\mathbf{y})}$ の, 格子場に関する対応物である。

今の場合, $\mathbf{x} \in \text{block } \mathbf{r}$ (点 \mathbf{r} を中心とするブロック) に対して

$$h(\mathbf{x}) = R^{-y_0} h'(\mathbf{r})$$

なので

$$\frac{\delta h(\mathbf{x})}{\delta h'(\mathbf{r})} = \begin{cases} R^{-y_0} & (\mathbf{x} \in \text{block } \mathbf{r}) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin \text{block } \mathbf{r}) \end{cases}$$

と考えると*63,

$$\frac{\delta W}{\delta h'(\mathbf{r})} = R^{-y_0} \sum_{\mathbf{x} \in \text{block } \mathbf{r}} \frac{\delta W}{\delta h(\mathbf{x})}.$$

この公式を繰り返し用いると, 式 (16.52) 右辺は

$$\frac{\delta^2 \ln \mathcal{Z}(H, h)}{\delta h'(\mathbf{r}_1) \delta h'(\mathbf{r}_2)} = R^{-2y_0} \sum_{\mathbf{x} \in \text{block } 1} \sum_{\mathbf{y} \in \text{block } 2} \frac{\delta^2 \ln \mathcal{Z}(H, h)}{\delta h(\mathbf{x}) \delta h(\mathbf{y})} = R^{-2y_0} \sum_{\mathbf{x} \in \text{block } 1} \sum_{\mathbf{y} \in \text{block } 2} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}; H, h) : (16.54)$$

と書き換えられる.

■ベキ乗則 (16.57) について 一般に引数のスケールの変更に際して

$$f(R^a x) = R^b f(x)$$

のように関数形が不変に留まる関数 $f(x)$ を求めよう. x に応じて $R^a x = c$ (x に依らない定数) を満たす $R = \left(\frac{c}{x}\right)^{1/a}$ を選び, 上式から x に依存する R を消去すると

$$f(c^a) R^b f(x) = \left(\frac{c}{x}\right)^{b/a} f(x), \quad \therefore f(x) = \frac{f(c^a)}{c^{b/a}} x^{b/a} \sim x^{b/a} : \text{ベキ関数}$$

を得る. 固定点の相関関数 (16.56'-57) には $a = -1, b = 2(d - y_0)$ が対応する.

*63 実際, これを汎関数微分の定義式に代入すると

$$\delta h(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{r}} \frac{\delta h(\mathbf{x})}{\delta h'(\mathbf{r})} \delta h'(\mathbf{r}) = R^{-y_0} h'(\mathbf{r})$$

が得られる.

第 17 章 場と繰り込み

序文を引用する：

本章では、ブロックスピンの描像から得られた繰り込み群に対する洞察を応用して、連続な Feynman ダイアグラムの計算を理解するための指針を与える。

17.1 自由場固定点

自然単位系 ($c = 1, \hbar = 1$) では、あらゆる物理量 Q の次元が質量のべき $[Q] = M^y$ で表される。このとき単に Q が次元 y を持つということもある。 d 次元 [Euclid] 時空におけるスカラー場 φ の次元は、作用積分の表式

$$S[\varphi] = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 + V(\varphi) \right\} \quad (17.1)$$

から、

$$[\varphi] = M^{\frac{d}{2}-1} \quad (17.4)$$

であることが見て取れる。

$V = 0$ の自由場は質量を持たないため、相関長が無遠慮に及ぶ。このとき理論はスケール不変な臨界点——“自由場固定点” (free-field fixed point) ——に位置する。質量を持たない自由場の相関関数は、

$$\langle \varphi(x)\varphi(x') \rangle = \frac{\Gamma(\frac{d}{2}-1)}{4\pi^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\frac{d}{2}-1} \quad (17.5)$$

と計算される。[本稿次節で補足する。これはべき関数であり、] ここから 16.2.1 節で定義した φ の“スケールリング次元”は $\frac{d}{2}-1$ であることが読み取れる。これは φ の時空次元 [自然次元 (17.4) のこと] に一致している。 $(\varphi$ の自然次元とスケールリング次元が一致するのは、あくまで自由場固定点の特徴である。) よって自由場固定点において、単項 φ^n のスケールリング次元 (および自然次元) は $n(\frac{d}{2}-1)$ である。ところで 16.2.1 節で示したように、演算子が“有効”である条件は、そのスケールリング次元が時空次元 [= d] よりも小さいことである。すると例えば相互作用項 $\lambda\varphi^4$ が有効となるのは、

$$2d - 4 < d, \quad \therefore d < 4 \quad (17.6)$$

の場合に限られる。

ちょうど 4 次元では、この相互作用が“境界的”になる。4 次元よりも次元が高くなると、この摂動は無効になる。後者の声明は、自由場固定点の近傍で連続な $\lambda\varphi^4$ 理論を構築する場合に、 $\lambda\varphi^4$ 相互作用は粗視化の極限において効果を持たないことを意味している。伝統的な術語で言えば、このような無効な相互作用は“繰り込み不可能”である。繰り込み不可能な相互作用は、簡単な方法で“有限に”，もしくはエネルギー切断に依存しない形にすることができないので問題視される。現代的に表現すると、無効な相互作用は、切断に比べて十分に低いエネルギー領域の物理には何の影響も及ぼさない。(中略 [この部分は本稿次節で批判的に考察]) これは単なる計算技術上の問題ということではなく、物理の在り方が、まさにそうなっていると見なさなければならないのである。(p.242)

他方、自由場の理論において質量項 $\frac{1}{2}m^2\varphi^2$ が有効となる条件

$$2\left(\frac{d}{2}-1\right) = d-2 < d \quad (17.7)$$

は、任意の d に対して常に成立する。

$d = 2$ 次元では、

$$\lambda_{\alpha\beta}(\varphi)\partial_\mu\varphi^\alpha\partial_\mu\varphi^\beta \quad (17.8)$$

という形の相互作用密度に興味を持たれる ($\lambda_{\alpha\beta}(\varphi)$ は場の組 $\varphi = \{\varphi^\alpha\}$ の任意の関数)。ところで $d = 2$ のとき、 φ は無次元となる。よって $[\lambda_{\alpha\beta}(\varphi)]$ のスケーリング次元も無次元なので、自由場の理論に対する摂動 (17.8) のスケーリング次元は空間 (時空) 次元 $d = 2$ に一致する。このため] 相互作用 (17.8) は境界的となる。我々は後で、いわゆる“非線形 σ 模型”において、 $\delta_{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha\beta}(\varphi)$ が N -球面の計量となる場合を扱う [式 (17.49–50) を見よ]。

17.1 節について

■自由場の相関関数 (17.5) の導出 「質量を持たない自由場の相関関数 $\langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle$ の計算方法を、付録 C に示してある」 (p.242, 1.1–2) とある。該当する式 (C.13) は、より一般的な計算となっている。式 (17.5) を導くだけなら、それを次のように簡略化すれば充分である。

$$\begin{aligned} \langle\varphi(0)\varphi(x)\rangle &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik\cdot x}}{k^2} = \int_0^\infty ds \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-sk^2+ik\cdot x} \\ &= \int_0^\infty ds \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \exp\left\{-s\left(k - \frac{ix}{2s}\right)^2 - \frac{x^2}{4s}\right\} \\ &= \frac{1}{2^d\pi^{d/2}} \int_0^\infty ds s^{-d/2} e^{-x^2/4s} \quad \left(\because \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \exp\left\{-s\left(k - \frac{ix}{2s}\right)^2\right\} = \left(\frac{\pi}{s}\right)^{d/2}\right) \\ &= \frac{1}{2^d\pi^{d/2}} \left(\frac{4}{x^2}\right)^{d/2-1} \int_0^\infty ds' s'^{d/2-2} e^{-s'} \quad \left(s' \equiv \frac{x^2}{4s}\right) \\ &= \frac{\Gamma(d/2-1)}{4\pi^{d/2}} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{d/2-1} : (17.5). \quad \left(\because \Gamma(x) \equiv \int_0^\infty dt t^{x-1} e^{-t}\right) \end{aligned}$$

■p.242 の繰り込み (不) 可能性の説明について 一見すると粗視化は、場の長距離の様子 (ないし長波長成分) を見ることを意味するため、繰り込み群変換の流れの下流へ行くことが連続極限をとることに対応すると考えたくもなる。しかしながら 16.2 節で引用した pp.236–237 の訳註に「‘上流の’連続理論」とあるように、格子間隔 $a \rightarrow 0$ (したがってエネルギー切断 $\Lambda = a^{-1} \rightarrow \infty$) の意味での連続極限はむしろ、繰り込み群変換の流れを逆に遡ることである。実際、直観的にも場の分布の粗視化は、例えばより大きなサイズ a の格子の中で場を平均することで達成される。これは切断 a の導入による系の離散化を意味する。

これを踏まえると、教科書 p.242 における“無効”あるいは“繰り込み不可能”な摂動についての次の一節には、疑義が生じる。

現代的に表現すると、無効な相互作用は、切断に比べて十分に低いエネルギー領域の物理には何の影響も及ぼさない。つまり切断を無限に高いエネルギーまで引き上げると、無効な相互作用は消失してしまう。したがって切断依存性をあらわに導入しなければ、無効な相互作用を扱うことはできない。

なるほど、第1文は問題ない。しかし無効な相互作用が繰り込み群変換の下流で消失し、低エネルギーの物理に影響しないのは、むしろ繰り込み群変換の下流ほどエネルギー切断 Λ が低下し、摂動の高エネルギー領域に対する寄与が大部分、無視されるからであると考えられる。そして繰り込み群変換の流れを逆に遡って $\Lambda \rightarrow \infty$ としたときにこそ、(同じく p.242 にあるように) 無効な相互作用はよく定義されなくなるため、「切断依存性をあらわに導入しなければ、無効な相互作用を扱うことはできない」と言える。

■繰り込み可能性(まとめ) 繰り込み可能性は、摂動論の次数を上げるにつれて理論から現れる発散が際限なく増えることがなく、それ故それらを有限個の物理定数に吸収できることとして理解できる。以下ではまず、この点を説明する。

運動量空間における Feynman ダイアグラムを考えよう。対応する運動量空間の積分が $\int d^{\nu_1} p / p^{\nu_2}$ のように振舞うとき、 $K = \nu_1 - \nu_2$ によって発散次数を定義する。単純な次元の議論では $K > 0$ に対して、積分は p^K のように発散する恐れがある ($K = 0$ の積分 ($\sim \int dp/p$) は対数発散)。

さて、結合 g_i (i は結合の種類を指標) の摂動を次数 n_i まで考慮すると、グラフには因子 g_i を充てられる結節点が n_i 個導入される。 g_i の自然次元 (自然単位系での次元を (質量) $^\alpha$ と表したときの指数 α) を $[g_i]$ で表そう。すると摂動次数を Δn_i 変更すれば、グラフから外線を除いた結節部分の自然次元への寄与は $+\Delta n_i [g_i]$ だけ変化する。ところが結節部分の自然次元は摂動の次数に依らず一定でなければならない。今、グラフの外線を固定していることを踏まえると、結節部分の自然次元を不変に保つには、内部運動量の因子の数が $-\Delta n_i [g_i]$ 変化しなければならない。よって一般に、発散次数は

$$K = K_0(b_e, f_e) - \sum_i n_i [g_i]$$

であれば良い。ここに b_e, f_e はそれぞれボゾンとフェルミオンの外線の本数であり、 $K_0(b_e, f_e)$ は摂動次数に依存しない。このときある結合定数の次元が $[g_i] < 0$ となる理論では、発散次数 K は摂動次数 n_i とともに増大することになり、繰り込み不可能となる [2, pp.284-287]。

他方で我々は繰り込み可能性を、異なる観点(繰り込み群の見地)から検討してきたことになる。ここで第16章から続く、ここまでの議論を振り返っておこう。

例えば2次元 Ising 模型では、自発磁化を生じる臨界温度において、スピンの空間配置はフラクタルとなる。このときスピン-スピン相関関数は距離のべき関数で表される。実際、べき分布はスケール不変である(フラクタル性に整合)。またべき分布は広いすそ野を持つため、相関長がサイト間隔に比べて長距離に及ぶ。よって臨界点は格子場の理論の連続極限に対応すると言える。一般に相関長が巨視的となるパラメーター空間の“臨界点”において、場 $\varphi(x)$ の典型的な空間分布はフラクタル性を持つ。

フラクタルな場の分布は解像度を下げて見ても——粗視化を施しても——様子が変わらない。再び2次元 Ising 模型を考えれば、粗視化の方法の1例として、16.2節の図55に示したスピンのブロック化を採用することができる。ところで場の分布の粗視化は長距離(したがって長波長・低エネルギー)の物理を見ることに対応している。また粗視化の操作は繰り返し行うことができ、“繰り込み群”を成す*64。一般に1回の繰り込み群変換(粗視化)はハミルトニアン H を変更することに相当し、臨界点では例外的に H は不変に留まる。そこで不変なハミルトニアン H^* に対する摂動を V として

$$H = H^* + V$$

*64 ここで“群”という術語は操作の繰り返しという意味を強調しているに過ぎない。また粗視化の過程は非可逆なので、繰り込み群は正確には“半群”である。

と書くと、繰り込み群変換のたびに

- $|V|$ が減少するとき, V は H^* に対して (赤外で) “無効 (irrelevant) な摂動”
- $|V|$ が増大するとき, V は H^* に対して (赤外で) “有効 (relevant) な摂動”

と言われる. 特に質量 m を持つ場は相関長が $1/m$ で表されるため (Compton 波長に対応), 質量ゼロの自由場は相関長が無限遠に及ぶ臨界点にある. そこで $V(\varphi)$ を自由場に対する摂動と見なした場合には,

- V が “無効 (irrelevant) な摂動” $\leftrightarrow V$ は “繰り込み不可能 (nonrenormalizable) な摂動”
- V が “有効 (relevant) な摂動” $\leftrightarrow V$ は “繰り込み可能 (renormalizable) な摂動”

と言い換えられる. 実際, 例えば格子正則化を採用すれば (第 15 章), 繰り込み処方を実施した後に, 粗視化の流れを逆に “遡って”, “上流の” 連続理論を回復する必要がある. ところが “無効な摂動” は定義により, 粗視化の流れの下流に影響を及ぼさないため, 上流の理論へ遡ることができなくなり, そのような摂動は “繰り込み不可能” ということになる. 実際このことは繰り込み不可能な相互作用が, 格子間隔 $a \rightarrow 0$, エネルギー切断 $\Lambda = a^{-1} \rightarrow \infty$ の連続極限に対応する上流でよく定義されず, 切断依存性をあらわに導入しなければ扱えないという, 伝統的な理解に整合している. もっとも “無効な摂動” が下流に影響しないことは, 裏を返せば低エネルギー領域 (下流) の物理を考える際には, 繰り込み不可能な摂動を無視しても差し支えないことを意味してもいる.

“有効” または “繰り込み可能” な摂動 $O(x)$ の相関関数は, 臨界点においてべき関数

$$\langle O(x)O(x') \rangle \sim |x - x'|^{-2(d-y)} \quad (y > 0)$$

に従う. ここに d は考えている空間 (時空) の次元であり, y は摂動 O に応じて決まる. ここでは場 $O(x)$ があたかも自然次元 $[M]^{d-y}$ を持つように振舞っていることから, $(d-y)$ を O の “スケーリング次元” と呼ぶ. すると摂動が “有効” である条件は

$$(\text{スケーリング次元}) < (\text{時空次元})$$

と表されることになる. これは発散次数の議論と似たところがある.

なお 17.3 節以降で再論する 「繰り込み群方程式」 にも, 「繰り込み群」という用語が含まれてはいる. もっともこれから見るように, これはもとの裸の相関関数が, 繰り込みの際に導入される質量尺度 μ に依存しないことから, 繰り込まれた場の相関関数の μ 依存性を規定する方程式である.

■ $\lambda\varphi^4$ 相互作用が $d > 4$ 次元で無効になることの直観的・発見的説明 (pp.242–243) について 多様体の交わりの一般的な次元を与える公式 $D_1 + D_2 - d$ (p.242 下から 4 行目) に, Euclid 時空における粒子の世界線 (酔歩の軌跡) のフラクタル次元 $D_1 = D_2 = 2$ を代入すると,

$$D_1 + D_2 - d = 4 - d$$

であり, これは $d > 4$ では負となる. このことは $d > 4$ 次元時空において, 世界線同士が交わらないことを意味している. よって 2 本の世界線同士の点接触型相互作用に他ならない $\lambda\varphi^4$ 項は, $d > 4$ 次元で無効になるということ.

17.2 Gauss 模型

2次元の空間において、絶対値が1に固定されている複素 [スカラー] 場を考えると [φ の自然次元 (17.4) は $d = 2$ で無次元], 分配関数は

$$\mathcal{Z} = \int d[\varphi]d[\varphi^*]\delta(|\varphi|^2 - 1)e^{-\frac{1}{2g^2} \int d^2x |\partial\varphi|^2} \quad (17.9)$$

という形をとる.

$$\varphi(x) = e^{i\theta(x)}, \quad \varphi^*(x) = e^{-i\theta(x)} \quad (17.10)$$

とおくと,

$$\mathcal{Z} = \int d[\theta]e^{-\frac{1}{2g^2} \int d^2x (\partial\theta)^2} \quad (17.11)$$

と簡略化される [タイトル「Gauss 模型」の所以と推察される]. このとき

$$\langle e^{i\theta(x_1)} e^{i\theta(x_2)} \dots \rangle \quad (17.12)$$

のような相関関数を計算するには, Gauss 積分の恒等式 (12.74'):

$$\left\langle e^{i \int d^2x J(x)\theta(x)} \right\rangle = e^{-\frac{1}{2} \int d^2x d^2y J(x)G(x,y)J(y)} \quad (17.13)$$

において, $J(x)$ を適当なデルタ関数の和に設定すれば良い. 右辺の伝播関数 $G(x,y)$ を考えるにあたり, 便宜的に式 (17.11) の指数に質量項を補って, 作用を

$$S = \frac{1}{g^2} \int d^2x \left\{ \frac{1}{2}(\partial\theta)^2 + \frac{1}{2}m_0^2\theta^2 \right\} \quad (17.14)$$

としよう. このとき θ 場の伝播関数は

$$\begin{aligned} G(x, m_0^2) &= g^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{e^{ik \cdot x}}{k^2 + m_0^2} \\ &= g^2 \left(-\frac{1}{2\pi} \ln m_0|x| + \text{const.} + O(m_0|x|) \right) \end{aligned} \quad (17.15)$$

となり [最右辺を本稿次節で補足], $m_0 \rightarrow 0$ とすると対数的に発散する. [$m_0 = 0$ での伝播関数の表式 (17.5) も $d = 2$ とおくと (ガンマ関数が) 発散する.] この発散は式 (17.15) の1行目の k -積分に戻ると, 小さい k に起因している (赤外発散). そこで我々は赤外切断として, 小さい質量 m_0 をゼロと置かずに計算を進める.

相関関数 $\langle \varphi(x_1)\varphi^*(x_2) \rangle = \langle e^{i\theta(x_1)} e^{-i\theta(x_2)} \rangle$ を得るには, 式 (17.13) の左辺で $J(x) = \delta(x - x_1) - \delta(x - x_2)$ とおけば良い. このとき右辺を計算すると

$$\langle \varphi(x_1)\varphi^*(x_2) \rangle = \exp(-G(0) + G(|x_1 - x_2|)) \quad (17.16)$$

となる [式 (17.13),(17.19) と整合するよう, 指数の符号を入れ替えた]. ところが $G(0)$ は [式 (17.15) 最右辺より] $\propto \ln 0$ のように発散する. [$m_0 = 0$ の伝播関数 (17.5) も $x = 0$ で発散することは分かる.] 今度の無限大は“短距離”の, したがって“紫外”の発散である. 紫外発散を取り除くために, $\varphi(x_1) = \exp\{i\theta(x_1)\}$ を不鮮明化した場

$$\varphi_a(x) = e^{i \int d^2x \rho_a(x-x_1)\theta(x)} \quad (17.17)$$

に置き換える．ここに $\rho_a(x)$ は $x = 0$ を中心に a 程度の拡がりを持ち，

$$\int d^2x \rho_a(x) = 1 \quad (17.18)$$

を満たす“不鮮明化関数”である．[ここでは特に $a \rightarrow 0$ でデルタ関数に移行する不鮮明化関数が想定されていると考えられる [21, p.100, p.111].] これには a を短距離切断として，発散する $\ln m_0 0$ を有限の $\ln m_0 a$ に置き換える意味がある*65．このとき伝播関数は

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x_1) \varphi^*(x_2) \rangle &= \exp\left(\frac{g^2}{2\pi} (\ln a m_0 - \ln m_0 |x_1 - x_2|)\right) \\ &= \left(\frac{a}{|x_1 - x_2|}\right)^{\frac{g^2}{2\pi}} \end{aligned} \quad (17.19)$$

となる．[本稿次節で補足する．最左辺では場 φ の添字 a を省略してある．] ここで赤外切断 m_0 が相殺したため，結果は m_0 に依らないことに注意しよう (短距離切断 a は残る)．

“繰り込み点” (renormalization point) ないし “繰り込み質量” (renormalization mass) μ を導入して a 依存性を

$$\left(\frac{a}{|x_1 - x_2|}\right)^{\frac{g^2}{2\pi}} = \left(\frac{1}{\mu |x_1 - x_2|}\right)^{\frac{g^2}{2\pi}} (a\mu)^{\frac{g^2}{2\pi}} \quad (17.20)$$

と分離し，右辺のはじめの a に依存しない因子を“繰り込まれた場” (renormalized field) $\varphi^{(R)}(x)$ の相関関数

$$\langle \varphi^{(R)}(x_1) \varphi^{*(R)}(x_2) \rangle = \left(\frac{1}{\mu |x_1 - x_2|}\right)^{\frac{g^2}{2\pi}} \quad (17.23)$$

と見なす [μ を導入して初めて相関関数 (17.23) もまた無次元であることが保証されている]．これは $a \rightarrow 0$ で発散しない．

ここで教科書 p.245 の訳注を一部抜粋する：

時空間に切断 a を導入すると理論は連続な性質を欠くことになるが，切断の役割を“波数”のパラメーター [μ のこと] に移し替え，同時に時空間内で連続な取り扱いができる関数をつくるという意図で μ を導入するのである (式 (17.35) 参照)． μ を導入した関数において“波長”が $1/\mu$ 以下の紫外成分は，切断されるかわりに繰り込まれているという扱いになる．[17.4.2 節では漸近的に自由な理論において， $|x| < 1/\mu$ のとき繰り込まれた相関関数 G_R を摂動論で計算できることが説明される． μ は次元正則化を採用した場合には，式の自然次元を合わせるために必然的に導入される質量尺度である (18.1 節も参照).]

さて， $\varphi^{(R)}(x)$ と“裸の (bare) 場” $\varphi(x)$ の関係を

$$\varphi(x) = \sqrt{Z} \varphi^{(R)}(x) \quad (17.21)$$

と書くと，上式 (17.20) より

$$\sqrt{Z} = (a\mu)^{\frac{g^2}{4\pi}} = e^{\frac{g^2}{4\pi} \ln \mu a} \quad (17.22)$$

*65 等価的に a を格子定数として格子正則化を行っても，同じ結果が得られる．[直観的には伝播関数の引数は格子間隔 a より小さくなり得ないと解釈できよう.]

と同定される。

\sqrt{Z} が相関関数全体ではなく、個々の $\varphi(x)$ に付随することを明示するために [式 (17.28) の箇所を見よ]、一般的な相関関数

$$G_{\text{bare}}^{(n,m)}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) \equiv \langle \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \varphi^*(y_1) \cdots \varphi^*(y_m) \rangle \quad (17.24)$$

を調べる。相関関数 (17.19) の導出と同様にして、

$$G_{\text{bare}}^{(n,m)}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) \propto (m_0)^{\frac{g^2}{4\pi}(n-m)^2} (a)^{\frac{g^2}{4\pi}(n+m)} \left(\frac{\prod_{i \neq j}^n |x_i - x_j|^{1/2} \prod_{i' \neq j'}^m |y_{i'} - y_{j'}|^{1/2}}{\prod_{i,j} |x_i - y_j|} \right)^{\frac{g^2}{2\pi}} \quad (17.25)$$

が得られる。[$m_0, |x_i - x_j|, |y_{i'} - y_{j'}|$ の指数を訂正した。本稿次節の導出を参照。上式のように訂正して初めて、後の式 (17.27) が成立する.]

$n = m$ に対する相関関数 $\langle e^{i\theta(x_1)} \cdots e^{i\theta(x_n)} e^{-i\theta(y_1)} \cdots e^{-i\theta(y_n)} \rangle$ は大域的な $O(2)$ 回転

$$e^{i\theta(x)} \rightarrow e^{i\alpha} e^{i\theta(x)}, \quad e^{-i\theta(x)} \rightarrow e^{-i\alpha} e^{-i\theta(x)} \quad (17.26)$$

の下で不変である。ただし $n = m$ の場合は特殊であり、一般には質量項 $\frac{1}{2} m_0^2 \theta^2$ [ポテンシャル密度] はこの対称性を破って、向きを $\theta = 0$ に揃わせる傾向を持つ。ところが $n \neq m$ のとき、相関関数 (17.25) は $m_0 \rightarrow 0$ とするとゼロになることが見て取れる。 $O(2)$ 対称性が自発的に破れないことを意味する [自発的対称性の破れは相関関数の長距離秩序で特徴付けられるから (10.2 節)].

そこで $m_0 \rightarrow 0$ のときゼロにならない、 $n = m$ の相関関数を考えると、式全体を変えずに、すべての a と相対距離のところ因子 μ を持ち込んで、

$$G_{\text{bare}}^{(n,n)} \propto (\mu a)^{\frac{g^2}{4\pi}(2n)} \left(\frac{\prod_{i \neq j}^n (\mu |x_i - x_j|)^{1/2} \prod_{i' \neq j'}^n (\mu |y_{i'} - y_{j'}|)^{1/2}}{\prod_{i,j} (\mu |x_i - y_j|)} \right)^{\frac{g^2}{2\pi}} \quad (17.27)$$

とできる。再び式 (17.21–22) の関係を通じて繰り込まれた場 $\varphi^{(R)}(x)$ を導入すると、その相関関数は

$$G_{\text{R}}^{(n,n)} \equiv \langle \varphi^{(R)}(x_1) \cdots \varphi^{(R)}(x_n) \varphi^{*(R)}(y_1) \cdots \varphi^{*(R)}(y_n) \rangle \\ \propto \left(\frac{\prod_{i \neq j}^n (\mu |x_i - x_j|)^{1/2} \prod_{i' \neq j'}^n (\mu |y_{i'} - y_{j'}|)^{1/2}}{\prod_{i,j} (\mu |x_i - y_j|)} \right)^{\frac{g^2}{2\pi}} \quad (17.28)$$

となって、切断 a に依存しない。

繰り込まれた場 $\varphi^{(R)}(x)$ は [式 (17.21–22) より] 繰り込み点 μ に依存し、自然次元は M^0 である。また $\varphi^{(R)}(x)$ のスケーリング次元は $M^{\frac{2}{4\pi}}$ である [2 点関数 (17.23) と式 (16.57) を比較せよ]。

繰り込まれた相関関数の μ 依存性は、“裸の場” の相関関数が μ に依存しないこと

$$0 = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} G_{\text{bare}}^{(n,n)} = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \left((\sqrt{Z})^{2n} G_{\text{R}}^{(n,n)} \right) = Z^n \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + 2n\mu \frac{\partial \ln \sqrt{Z}}{\partial \mu} \right) G_{\text{R}}^{(n,n)} \quad (17.29) \\ \left[\because \mu \frac{\partial}{\partial \mu} (\sqrt{Z})^{2n} = 2n\mu (\sqrt{Z})^{2n-1} \frac{\partial \sqrt{Z}}{\partial \mu} = Z^n \cdot 2n\mu \frac{1}{\sqrt{Z}} \frac{\partial \sqrt{Z}}{\partial \mu} = Z^n \cdot 2n\mu \frac{\partial \ln \sqrt{Z}}{\partial \mu} \right]$$

を用いて求めることができる。上式 (17.29) 最右辺において [式 (17.22) より]

$$\gamma(g^2) \equiv \mu \frac{\partial \ln \sqrt{Z}}{\partial \mu} = \frac{g^2}{4\pi} : \text{場の“異常次元” (スケーリング次元と自然次元の差 (ずれ))} \quad (17.30/17.32)$$

なので,

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + 2n\mu \frac{\partial \ln \sqrt{Z}}{\partial \mu} \right) G_R^{(n,n)} = 0 \quad (17.31)$$

を得る.

上式は、素粒子物理学で用いられる繰り込み群方程式の一例である。これは前章の繰り込み群方程式 (16.27) とは異なり、裸の場の理論を一定に保ちながら、繰り込み点を変えたときの、繰り込まれた量の変化を表している。統計物理学では、逆に繰り込まれた量を一定に保ちながら切断 a を変える方が普通であるが、これらの 2 種類の操作は互いに等価なものである。(pp.247-248)

17.2 節について

■式 (17.9) を「スピン系の分配関数」(17.2 節の 1.2,3) と見なすことについて 複素場 φ を実部と虚部に分けて $\varphi_1 + i\varphi_2$ と書くと、単位長さのベクトル (φ_1, φ_2) に対応付けられる。よって「 φ を x - y 平面内の古典的スピン場と考えることができる」(17.2 節の 1.1,2)。 J を「交換係数」、 T を温度として $1/g^2 = J/T$ とおけば(教科書 17.2 節の 1.5 と分母・分子が逆)、分配関数 (17.9) において系のエネルギーを

$$E \sim \frac{J}{2} \int d^2x |\partial\varphi|^2$$

と同定できる。このときスピン場 φ が空間的に急激に変化するほど、エネルギー的に損をすることになる。言い換えれば、これは近くのスピン同士の向きがそろった方がエネルギー的に得となることを表している。

$\varphi(x) = e^{i\theta(x)}$:(17.10) と書き分配関数 (17.11) から作用量を読み取ると、この理論の場の方程式は Laplace 方程式 $\partial^2\theta = 0$ である。

■伝播関数 (17.15) の最右辺について $m_0 \rightarrow m$ と略記し d 次元の空間を仮定すると、伝播関数 (17.15) の 1 行目における k -積分は付録 C の式 (C.16):

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik \cdot x}}{k^2 + m^2} &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik \cdot x} \int_0^\infty ds e^{-(k^2 + m^2)s} \\ &= \int_0^\infty ds \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \exp \left\{ -s \left(k - \frac{ix}{2s} \right)^2 - \frac{x^2}{4s} - m^2 s \right\} \\ &= \frac{1}{2^d \pi^{d/2}} \int_0^\infty ds s^{-d/2} e^{-x^2/4s - m^2 s} \end{aligned}$$

に一致する。ここで $s = e^t |x|/2m$ とおくと

$$\begin{aligned} ds &= s dt, \quad \therefore s^{-d/2} ds = s^{1-d/2} dt = \left| \frac{x}{2m} \right|^{1-d/2} e^{(1-d/2)t} dt, \\ \frac{x^2}{4s} + m^2 s &= m|x| \frac{e^t + e^{-t}}{2} = m|x| \cosh t \end{aligned}$$

より,

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik \cdot x}}{k^2 + m^2} = \frac{1}{2^d \pi^{d/2}} \left| \frac{x}{2m} \right|^{1-d/2} \int_{-\infty}^\infty dt e^{(1-d/2)t - m|x| \cosh t} \quad (C.17)$$

と書き換えられる。改めて $d = 2, m = m_0$ と置いて我々の問題に戻ると

$$\int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{e^{ik \cdot x}}{k^2 + m_0^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dt e^{-m_0|x| \cosh t} = \frac{1}{2\pi} K_0(m_0|x|)$$

であり (式 (C.18) に対応), 小さな引数 $m_0|x|$ に対してゼロ次の修正 Bessel 関数は $K_0(m_0|x|) \simeq -\ln m_0|x| + \text{const.}$ と近似されるので, 式 (17.15) の最右辺を得る.

■最終的な結果が赤外切断 m_0 に依存しないこと (p.245) について QED の文脈でも, 軟光子の制動放射と弾性散乱の人為的な区別から赤外発散が現れること, 繰り込みの手法を用いずとも, 弾性散乱といくらかの制動放射散乱を合わせた過程の断面積は有限になることを見た [1, p.181].

■紫外切断 a を導入した伝播関数 (17.19) について 式 (17.17) は θ 場を

$$\theta_a(x_1) \equiv \int d^2 x \rho_a(x - x_1) \theta(x)$$

と不鮮明化することを意味する. このとき伝播関数は

$$\begin{aligned} G_a(\xi) &\equiv \langle \theta_a(\xi) \theta_a(0) \rangle \\ &= \int d^2 x d^2 y \rho_a(x - \xi) \rho_a(y) \langle \theta(x) \theta(y) \rangle \\ &= \int d^2 x d^2 z \rho_a(x - \xi) \rho_a(x - z) G(z) \quad (z = x - y, G(z) = \langle \theta(x) \theta(y) \rangle) \end{aligned}$$

に置き換わる. これは $a \rightarrow 0$ として 2 つの不鮮明化関数をともにデルタ関数にすると, 短距離の発散を引き起こす式 (17.15) の伝播関数 $G(\xi)$ に戻る. そこで一方の不鮮明化関数だけを近似的に $\rho_a(x - \xi) \rightarrow \delta(x - \xi)$ と置き換えて x -積分を実行し, 式を簡単にすると

$$\begin{aligned} G_a(\xi) &\simeq \int d^2 z \rho_a(z - \xi) G(z) \simeq \int d^2 z \rho_a(z - \xi) \times g^2 \left(-\frac{1}{2\pi} \ln m_0|z| + \text{const.} \right) \\ &= -\frac{g^2}{2\pi} \int d^2 z \rho_a(z - \xi) \ln m_0|z| + \text{const.} \end{aligned}$$

となる. 第 2 辺において不鮮明化関数 $\rho_a(z - \xi)$ は与えられた点 ξ の周りに a 程度の拡がりを持ち, $G(z) \sim \ln m_0|z|$ の真数における $|z|$ を $|\xi|$ から a 程度ずらす働きをすると期待される. よって $\xi \rightarrow 0$ としても対数の因子は有限の値 $\ln m_0 a$ に留まる. (そのような ρ_a の関数形を選ぶと言った方が正確である.) 他方で式 (17.16) 第 2 の伝播関数 $G(|x_1 - x_2|)$ では, 短距離の発散の恐れがないので, この a をゼロとおいて差し支えない. さらに上式より, 式 (17.16) の 2 つの伝播関数 $G(0), G(|x_1 - x_2|)$ における定数項「const.」の値は共通なので, 差をとると相殺する. 以上より式 (17.19) の第 2 辺が得られる.

■一般的な相関関数 (17.25) の導出 相関関数 (17.24):

$$\langle \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \varphi^*(y_1) \cdots \varphi^*(y_m) \rangle = \langle e^{i\theta(x_1)} \cdots e^{i\theta(x_n)} e^{-i\theta(y_1)} \cdots e^{-i\theta(y_m)} \rangle$$

は, 式 (17.13) の左辺において

$$J(x) = \sum_{i=1}^n \delta(x - x_i) - \sum_{j=1}^m \delta(x - y_j)$$

と設定すると得られる。このとき式 (17.13) 右辺の指数部分は

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}[JGJ] &\equiv -\frac{1}{2} \int d^2x d^2y J(x)G(x,y)J(y) \\
&= -\frac{1}{2} \int d^2x d^2y \left(\sum_{i=1}^n \delta(x-x_i) - \sum_{j=1}^m \delta(x-y_j) \right) \left(\sum_{k=1}^n \delta(y-x_k) - \sum_{l=1}^m \delta(y-y_l) \right) G(x,y) \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n G(x_i, x_k) - \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m G(x_i, y_l) - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n G(y_j, x_k) + \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m G(y_j, y_l) \right\} \\
&= -\frac{n+m}{2}G(0) - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^n G(|x_i - x_j|) - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^m G(|y_i - y_j|) + \sum_{i,j} G(|x_i - y_j|)
\end{aligned}$$

と計算される。各項に伝播関数 G の式 (17.15) を代入し、ここでも $G(0)$ は紫外切断 a を導入して $G(a)$ に置き換えると、

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}[JGJ] &\rightarrow \frac{g^2}{2\pi} \left(\frac{n+m}{2} \ln m_0 a + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^n \ln m_0 |x_i - x_j| + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^m \ln m_0 |y_i - y_j| - \sum_{i,j} \ln m_0 |x_i - y_j| \right) + \text{const.} \\
&= \frac{g^2}{2\pi} \left\{ \left(\frac{n+m}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2} - nm \right) \ln m_0 + \frac{n+m}{2} \ln a \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^n \ln |x_i - x_j| + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^m \ln |y_i - y_j| - \sum_{i,j} \ln |x_i - y_j| \right\} + \text{const.} \quad (\text{真数が次元を持つ形を許容})
\end{aligned}$$

を得る。最右辺における $\ln m_0$ の係数は $(\dots) = (n-m)^2/2$ とまとめられる。よって上式を指数の肩に乗せると、式 (17.25) が得られる。ただし式 (17.16) の場合とは対照的に、ここでは伝播関数 (17.15) の定数項は各 G から合計

$$n^2 + m^2 - 2nm = (n-m)^2 \text{ 個}$$

現れ、 $n \neq m$ の限り相殺しない。よって上式のように指数において、無次元の定数が付加的に現れる。これは相関関数に乘法的に寄与することを踏まえ、本稿の式 (17.25) ではこの定数係数を無視する代わりに、比例記号「 \propto 」を明示した。

場 $\varphi(x)$ は無次元だから、相関関数 (17.24) もまた無次元でなければならない。実際、本稿の式 (17.25) 右辺の次元 M^y は

$$y = \frac{g^2}{4\pi} \underbrace{[(n-m)^2]}_{m_0 \text{ の寄与}} \underbrace{-(n+m)}_a \underbrace{-\{n(n-1) + m(m-1) - 2nm\}}_{\text{相対距離の寄与}} = 0$$

となっている。他方で教科書の式 (17.25) の次元は、同様に計算すると

$$\frac{g^2}{4\pi}(n+m-2nm)$$

であり、これは (n, m) の選び方によってはノンゼロとなる。

17.3 一般的な方法

繰り込みの一般的な手続きでは、まず、ある大きな運動量 $\Lambda = a^{-1}$ における切断を導入する。[17.2 節の具体例の赤外切断に対応 (以下のように繰り込み点 μ は別途、導入する).] その上で、裸 (添字 B で表す) の場

に関する相関関数

$$G = G_B^{(n)}(x, g_B, \Lambda) \quad (x \equiv \{x_1, \dots, x_n\}) \quad (17.33)$$

[具体例 (17.27) に対応] を、裸の結合定数 g_B の冪 (べき) 級数展開として計算する。自由場固定点において“有効”で、理論が持つべき対称性を満たす結合を、すべて計算に含めなければならない。さて、ある繰り込み点 μ における理論のパラメータ計算から、繰り込まれた結合 g_R が決まる。このとき裸の相関関数は、 g_R と繰り込まれた場を含む相関関数 $G_R^{(n)}$ と

$$G_B^{(n)}(x, g_B, \Lambda) = Z^{\frac{n}{2}} \left(g_B, \frac{\mu}{\Lambda} \right) G_R^{(n)}(x, g_R, \mu, \Lambda) \quad (17.34)$$

のように関係付けられる。[$G_B^{(n)}$ は裸の場を n 個含み、各々に \sqrt{Z} が充てられると考えれば良い。式 (17.22) の例でも \sqrt{Z} には切断が $\mu a = \mu/\Lambda$ の組合せでのみ含まれている。]

もし $x \gg \Lambda^{-1}$ であれば、裸の理論における“無効な”結合の効果をすべて無視することができるので、 $G_R^{(n)}$ は Λ に依存しない。

$$G_B^{(n)}(x, g_B, \Lambda) = Z^{\frac{n}{2}} \left(g_B, \frac{\mu}{\Lambda} \right) G_R^{(n)}(x, g_R, \mu). \quad (17.35)$$

[ここで「切断を無限に高いエネルギーまで引き上げると、無効な相互作用は消えてしまう。したがって切断依存性をあらわに導入しなければ、無効な相互作用は扱うことができない」(17.1 節 p.242) ことを思い出す。上式 (17.35) はまた、切断 Λ を場と結合定数に繰り込んだ関係式となっている。]

再び $G_B^{(n)}$ に対する自明な恒等式

$$\mu \frac{\partial G_B^{(n)}}{\partial \mu} \Big|_{g_B, \Lambda} = 0 \quad (17.36)$$

から、 $G_R^{(n)}$ に対する繰り込み群方程式

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g_R) \frac{\partial}{\partial g_R} + n\gamma(g_R) \right) G_R^{(n)}(x, g_R, \mu) = 0, \quad (17.37)$$

$$\beta(g_R) \equiv \mu \frac{\partial g_R}{\partial \mu} \Big|_{g_B, \Lambda}, \quad \gamma(g_R) \equiv \mu \frac{\partial \ln \sqrt{Z}}{\partial \mu} \Big|_{g_B, \Lambda} \quad (17.38)$$

が得られる [本稿次節で補足]。これらの β と γ は明らかに x に依存せず、また [式 (17.37) における $G_R^{(n)}$ と同様]、 Λ にも依存しない。[ところが式 (17.37) において β, γ は無次元であることが見て取れるので、] このとき β, γ は μ にも依存しない (μ を含んだ無次元量 $[\mu/\Lambda]$ を作ることはできない)。したがって β, γ は無次元の結合定数 g_R の単純な冪級数で表される [具体例 (17.32) も参照]。

他方で $G_R^{(n)}$ が Λ に依存しないことを要求すると、式 (17.36–38) と類似の関係

$$\Lambda \frac{\partial G_R^{(n)}}{\partial \Lambda} \Big|_{g_R, \mu} = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \tilde{\beta}(g_B) \frac{\partial}{\partial g_B} - n\tilde{\gamma}(g_B) \right) G_B^{(n)}(x, g_B, \Lambda) = 0, \quad (17.39-40)$$

$$\tilde{\beta}(g_B) \equiv \Lambda \frac{\partial g_B}{\partial \Lambda} \Big|_{g_R}, \quad \tilde{\gamma}(g_B) \equiv \Lambda \frac{\partial \ln \sqrt{Z}}{\partial \Lambda} \Big|_{g_R} \quad (17.41)$$

が見出される。

後者の $G_R^{(n)}$ を一定にして $G_B^{(n)}$ の変化を見る方法は、式 (16.27) の方法に近いものであり、統計力学的な文脈において、しばしばこの方法が用いられる。(p.249, 1.6–7)

17.3 節について

■繰り込み群方程式 (17.37) の導出

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} G_{\mathbf{R}}^{(n)}(x, g_{\mathbf{R}}, \mu) \Big|_{g_{\mathbf{B}, \Lambda}} = \mu \left(\frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{\partial g_{\mathbf{R}}}{\partial \mu} \Big|_{g_{\mathbf{B}, \Lambda}} \frac{\partial}{\partial g_{\mathbf{R}}} \right) G_{\mathbf{R}}^{(n)} = \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g_{\mathbf{R}}) \frac{\partial}{\partial g_{\mathbf{R}}} \right) G_{\mathbf{R}}^{(n)}$$

(第 2 辺以降の $\partial/\partial \mu$ は $G_{\mathbf{R}}^{(n)}$ に陽に含まれる μ の微分),

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \sqrt{Z}^n \Big|_{g_{\mathbf{B}, \Lambda}} = \mu n \sqrt{Z}^n \frac{\partial \ln \sqrt{Z}}{\partial \mu} \Big|_{g_{\mathbf{B}, \Lambda}} = \sqrt{Z}^n \cdot n \gamma(g_{\mathbf{R}}) \quad (\text{式 (17.29) と同様の計算})$$

より,

$$0 = \mu \frac{\partial G_{\mathbf{B}}^{(n)}}{\partial \mu} \Big|_{g_{\mathbf{B}, \Lambda}} = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\sqrt{Z}^n G_{\mathbf{B}}^{(n)} \right) \Big|_{g_{\mathbf{B}, \Lambda}} = \sqrt{Z}^n \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g_{\mathbf{R}}) \frac{\partial}{\partial g_{\mathbf{R}}} + n \gamma(g_{\mathbf{R}}) \right) G_{\mathbf{R}}^{(n)}(x, g_{\mathbf{R}}, \mu) : (17.37)$$

を得る.

17.4 非線形 σ 模型

繰り込み群が役立つ具体例として, $d = 2$ 次元の $O(N)$ 非線形 σ 模型を考察する. “ σ 模型” (σ model) という呼称は, 3 つの軽い π 中間子 π^\pm, π^0 を自発的なカイラル対称性の破れに伴う Goldstone ボゾン [13.2.1 節] と捉える, 素粒子物理の枠組みに因む. まずは N 成分実場 $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ に対する $O(N)$ 対称な相互作用ポテンシャル

$$V(\varphi_i) = \frac{\lambda}{4!} (|\varphi|^2 - 1)^2 \quad (17.42)$$

で定義される, $O(N)$ “線形” σ 模型を導入しよう. [ここに $|\varphi|^2 \equiv \sum_{i=1}^N \varphi_i^2$ である (p.249 訳註). 場 φ_i が無次元量として扱われているのは, 空間次元 $d = 2$ を仮定したためである (17.1 節).] “ σ 模型” の名は, 対称性を破った場 $\varphi_0 = (1, 0, \dots)$ からのズレ (励起場) を

$$\varphi = (\sigma, \pi_1, \dots, \pi_{N-1})$$

と書く習慣に由来しており,

- $(N - 1)$ 個の π 場 \rightarrow Goldstone ボゾン (π 中間子)
- σ 場 \rightarrow 質量を持つ, 残された放射状モード [13.2.1 節の図 40 を参照]

となる. “非線形” σ 模型は, $\lambda \rightarrow \infty$ と置き, 条件 $|\varphi|^2 = 1$ を課した模型である. [$\lambda \rightarrow \infty$ とするとポテンシャル (17.42) の谷 $|\varphi| = 1$ は無限に深くなるので, 場の絶対値は実効的に $|\varphi| = 1$ に固定されると考えられる.]

そこで “非線形” σ 模型の場を改めて $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)$ と書くと ($n^2 = 1$), これは球面 S^{N-1} 上の座標と見なせる. [例えば S^2 は $N = 3$ 次元空間における通常の球面. 場の成分数 N と空間次元 $d = 2$ の混同に注意.]

分配関数は

$$\mathcal{Z} = \int d[\mathbf{n}] \delta(\mathbf{n}^2 - 1) e^{-\frac{1}{2g^2} \int d^2x (\partial_\mu \mathbf{n}) \cdot (\partial_\mu \mathbf{n})} \quad (17.43)$$

で与えられる。[ポテンシャル (17.42) とは別に, Gauss 模型 (17.9) と同じ形の相互作用を仮定した。式 (17.9) との違いは, \mathbf{n} が N 成分実場であることだけである。] 結合定数 g^2 は無次元であることが見て取れる。[上式 (17.43) で $d^2x \rightarrow d^d x$ と置き換え, 他方で \mathbf{n} は依然 $\mathbf{n}^2 = 1$ を満たす無次元の場と見なせば,] d 次元では $[g^2] = M^{2-d}$ である。

note 作用 (17.1) と違って式 (17.43) の指数には $1/g^2$ が掛かっているから, 自由場の次元は式 (17.4) と異なっていて良い。実際ここでは \mathbf{n} が無次元である代わりに, 場の 2 乗の次元 M^{d-2} を因子 $1/g^2$ が担っているのである。

[式 (17.8) の箇所而言及したように,] $d = 2$ のとき相互作用は自由場固定点での境界的摂動となる。

摂動級数を導くには, $\mathbf{n}/g \rightarrow \mathbf{n}$ と置き換えると都合がよい。すると分配関数は

$$\mathcal{Z} = \int d[\mathbf{n}] \delta\left(\mathbf{n}^2 - \frac{1}{g^2}\right) e^{-\frac{1}{2} \int d^2x (\partial_\mu \mathbf{n}) \cdot (\partial_\mu \mathbf{n})} \quad (17.44)$$

となる。また半径 $1/g$ の S^{N-1} 上の座標は

$$\begin{aligned} n_i &= \pi^i, & (i = 2, \dots, N) \\ n_1 &= \sqrt{\frac{1}{g^2} - \pi^2} = \frac{1}{g} \sqrt{1 - g^2 \pi^2} & [\pi^2 \equiv \pi^i \pi^i (\leq 1/g^2)] \end{aligned} \quad (17.45)$$

とおける。[つまり $(N-1)$ 個の座標 π^i でパラメトライズできる。] 場の一様分布からの小さな摂動を扱うので, 上式 (17.45) が球面の [点 $(1/g, 0, \dots)$ を中心とする $n_1 \geq 0$ 側の] 半分しか表さないことは問題にならない。[場の非一様性が著しく, 空間の異なる 2 点での場 \mathbf{n} の値が, 球面 S^{N-1} の異なる半球に位置する場合は考えなくて良い。] このとき分配関数は

$$\mathcal{Z} = \int d[\pi] e^{-\frac{1}{2} \int d^2x \left\{ \left(\delta_{ij} + g^2 \frac{\pi^i \pi^j}{1 - g^2 \pi^2} \right) \partial \pi^i \partial \pi^j + \delta^2(0) \ln(1 - g^2 \pi^2) \right\}} \quad (17.50)$$

と書き換えられる (導出は下記)。ただし $[\partial \pi^i \partial \pi^j \equiv \partial_\mu \pi^i \partial_\mu \pi^j$ であり], 指数における因子

$$g_{ij} = \delta_{ij} + g^2 \frac{\pi^i \pi^j}{1 - g^2 \pi^2} \quad (17.47)$$

は, S^{N-1} 上の座標 π^i に関する計量テンソルである [導出過程にて補足]。第 1 項 δ_{ij} は指数において自由な π 場の項を作り, 第 2 項が結合定数 g^2 で展開される相互作用項を作る。指数における後続のデルタ関数 $\delta^2(0)$ の項は, 実は Ward 恒等式 [13.2 節] を保つために必要な, 余分の点接触型相互作用を与えている。

分配関数 (17.50) の導出 教科書を補足しつつ導出過程をまとめる。式 (17.45) を分配関数 (17.44) の指数に代入すると,

$$\partial_\mu \mathbf{n} = \left(-\frac{g}{\sqrt{1 - g^2 \pi^2}} \pi^k \partial_\mu \pi^k, \partial_\mu \pi^i \right), \quad \therefore (\partial_\mu \mathbf{n})^2 = \left(\delta_{ij} + g^2 \frac{\pi^i \pi^j}{1 - g^2 \pi^2} \right) (\partial_\mu \pi^i) (\partial_\mu \pi^j)$$

となる。これは球面上のベクトル $\partial_\mu \mathbf{n}$ の内積 $(\partial_\mu \mathbf{n})^2$ (ただし μ でも和をとる) を, 球面上の座標 π^i で表した式となっており, ここから係数 (17.47) を計量テンソルに同定できる。条件 $\mathbf{n}^2 = 1/g^2$ を満たす座標 (17.45) を用いると, \mathbf{n} に関する汎関数積分 (17.44) は, デルタ関数が不要になり, π 場に関する径路積分にできると考えられる。ただし与えられた位置 x での変数 $\pi^i(x)$ に関する積分は Jacobi 行列

式 $\sqrt{\det(g_{ij}(x))}$ を伴い、積分要素として固有体積 $\sqrt{\det(g_{ij}(x))}d\pi^i(x)$ を用いなければならない。ここで g_{ij} の式 (17.47) より

$$\sqrt{\det(g_{ij})} = \frac{1}{\sqrt{1-g^2\pi^2}} \quad (17.48)$$

である。

note 微小量 $g^2/(1-g^2\pi^2)$ の 1 次近似で良ければ、

$$\det(g_{ij}) = \det\left(\delta_{ij} + g^2 \frac{\pi^i \pi^j}{1-g^2\pi^2}\right) \simeq 1 + \frac{g^2}{1-g^2\pi^2} \text{tr}(\pi^i \pi^j) = \frac{1}{1-g^2\pi^2} : (17.48) \quad (\because \text{tr}(\pi^i \pi^j) = \pi^2)$$

とできる (しかし後でこの結果を基に g^2 による幕展開を行う)。

なお $g \equiv \det(g_{ij})$ という表記は、結合定数 g との混同の恐れがあるので、本稿では避ける。

よって

$$\prod_x \sqrt{\det(g_{ij}(x))}d\pi^i(x) = \prod_x \frac{d\pi(x)}{\sqrt{1-g^2\pi^2(x)}} \equiv \frac{d[\pi]}{\sqrt{1-g^2\pi^2}}$$

を経路積分要素として、分配関数は

$$\mathcal{Z} = \int \frac{d[\pi]}{\sqrt{1-g^2\pi^2}} e^{-\frac{1}{2} \int d^2x (\delta_{ij} + g^2 \frac{\pi^i \pi^j}{1-g^2\pi^2}) \partial\pi^i \partial\pi^j} \quad (17.49)$$

と書ける。さらに

$$(\text{Vol 中の状態数}) = \int \frac{(\text{Vol})d^2k}{(2\pi)^2} \rightarrow (\mathbf{R}^2 \text{中の点密度}) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{ik \cdot 0} = \delta^2(0)$$

に注意すると

$$-\frac{1}{2} \int d^2x \delta^2(0) \ln(1-g^2\pi^2) = \int \underbrace{d^2x \delta^2(0)}_{\text{状態数}} \ln \frac{1}{\sqrt{1-g^2\pi^2}} = \sum_x \ln \frac{1}{\sqrt{1-g^2\pi^2}},$$

$$\therefore \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^2x \delta^2(0) \ln(1-g^2\pi^2)\right) = \prod_x \frac{1}{\sqrt{1-g^2\pi^2}}$$

が成り立つので、分配関数 (17.49) は式 (17.50) へと書き換えられる。

次に $O(N)$ 不変な相関関数 $\langle \mathbf{n}(x) \cdot \mathbf{n}(y) \rangle$ を考えよう。結合定数 g^2 による展開

$$\sqrt{1-g^2\pi^2} = 1 - \frac{1}{2}g^2\pi^2 - \frac{1}{8}g^4(\pi^2)^2 - \frac{1}{16}g^6(\pi^2)^3 + \dots \quad (17.55)$$

を利用する。

note g^6 の項の符号を訂正した。もっとも、ひとまず必要なのは g^4 の項までの表式である。なお π^2 における 2 乗は内積を表すため、 $(\pi^2)^2$ を安直に π^4 と書くわけにはいかない。 ($\pi^4 \equiv (\pi^2)^2$, etc. と書くにしても、それは速記術と理解しなければならない。)

すると

$$\langle \mathbf{n}(x) \cdot \mathbf{n}(y) \rangle = \langle \pi^i(x) \pi^i(y) \rangle + \frac{1}{g^2} \left\langle \sqrt{1 - g^2 \pi^2(x)} \sqrt{1 - g^2 \pi^2(y)} \right\rangle \quad (\cdot: \text{式 (17.45)}) \quad (17.51)$$

$$= \langle \pi^i(x) \pi^i(y) \rangle + \frac{1}{g^2} \left\{ 1 - \frac{g^2}{2} (\langle \pi^2(x) \rangle + \langle \pi^2(y) \rangle) \right. \quad (17.52)$$

$$\left. + g^4 \left(\frac{1}{4} \langle \pi^2(x) \pi^2(y) \rangle - \frac{1}{8} \langle (\pi^2(x))^2 \rangle - \frac{1}{8} \langle (\pi^2(y))^2 \rangle \right) + O(g^6) \right\} \quad (17.56)$$

となる. 式 (17.56) は $O(g^2)$ の項であり, 最低次の近似では式 (17.52) だけを残せば充分である. 同じ近似で [式 (17.50) の指数における $O(g^2)$ の相互作用項を無視すると], 各 $\langle \pi^i(x) \pi^j(y) \rangle$ は [自由場伝播関数]

$$\langle \pi^i(x) \pi^j(y) \rangle = \delta_{ij} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{e^{ik \cdot (x-y)}}{k^2 + m_0^2} \simeq \delta_{ij} \left(-\frac{1}{2\pi} \ln m_0 |x-y| + \text{const.} \right) \equiv \delta_{ij} G(x-y) \quad (17.53)$$

として評価すれば良い.

note 式 (17.44) の箇所ですケール変換 $n_i^{(\text{new})} = n_i^{(\text{old})}/g$ を行ったことを念頭に,

$$\langle \pi^{i(\text{new})}(x) \pi^{i(\text{new})}(y) \rangle = \frac{1}{g^2} \langle \pi^{i(\text{old})}(x) \pi^{i(\text{old})}(y) \rangle \quad (i \text{ で和をとらない})$$

を自由場伝播関数 $G(x, y)$ の式 (17.15) の $1/g^2$ 倍で与えた. 最右辺ではこれを $G(x-y)$ と再定義している. また第 3 辺では式 (17.15) と同様に, 教科書の真数 $m_0(x-y)$ を絶対値に訂正し, 定数項「+const.」を補っておいた.

ここでも赤外切断 m_0 を導入した. ただし m_0 は, やはり最終的な結果には現れない. 実際, 例えば最低次の相関関数 (17.52) に式 (17.53) を代入すると

$$g^2 \times (\text{式 (17.52)}) = 1 + (N-1)g^2 (G(x-y) - G(0)) \quad (17.54)$$

であり, 2 つの G における m_0 は相殺する [定数項も相殺].

相関関数の $O(g^2)$ の項 (17.56) に進もう. 同じ近似で, 式 (17.50) における相互作用項

$$\frac{g^2}{2} \frac{\pi^i \pi^j}{1 - g^2 \pi^2} \partial \pi^i \partial \pi^j = \frac{g^2}{2} \pi^i \pi^j \partial \pi^i \partial \pi^j + O(g^4), \quad (17.61)$$

$$\frac{1}{2} \delta^2(0) \ln(1 - g^2 \pi^2) = -\frac{g^2}{2} \delta^2(0) \pi^2 + O(g^4) \quad (17.62)$$

の取り扱いが始まる.

note 実際, このとき相互作用項 (17.61-62) に基づき, $\langle \pi^i(x) \pi^j(y) \rangle$ にも自由場伝播関数 (17.53) に対する補正を導入しなければならないと考えられる. ただし式 (17.56) には既に全体に $\frac{1}{g^2} \cdot g^4 = g^2$ が掛かっているため, $O(g^2)$ までの近似では各 π 場の相関関数を自由場の理論で評価して良い.

このとき式 (17.56) の g^4 の項は

$$\begin{aligned} & g^4 \left(\frac{1}{4} \langle \pi^2(x) \pi^2(y) \rangle - \frac{1}{8} \langle (\pi^2(x))^2 \rangle - \frac{1}{8} \langle (\pi^2(y))^2 \rangle \right) \\ & = g^4 \times \frac{1}{2} (N-1) \{ G^2(x-y) - G^2(0) \} \end{aligned} \quad (17.57)$$

となる [ここでも G は式 (17.53) における自由場伝播関数を表す].

上式 (17.57) の導出 Wick の定理を適用して、全ての π 場が縮約された項だけを残すと、

$$\begin{aligned}
\langle \pi^2(x)\pi^2(y) \rangle &= \langle \pi^i(x)\pi^i(x)\pi^j(y)\pi^j(y) \rangle \\
&= \langle \pi^i(x)\pi^i(x) \rangle \langle \pi^j(y)\pi^j(y) \rangle + 2 \langle \pi^i(x)\pi^j(y) \rangle \langle \pi^i(x)\pi^j(y) \rangle \\
&= (N-1)^2 G^2(0) + 2(N-1)G^2(x-y), \\
\langle (\pi^2(x))^2 \rangle &= \langle \pi^i(x)\pi^i(x)\pi^j(x)\pi^j(x) \rangle \\
&= \langle \pi^i(x)\pi^i(x) \rangle \langle \pi^j(x)\pi^j(x) \rangle + 2 \langle \pi^i(x)\pi^j(x) \rangle \langle \pi^i(x)\pi^j(x) \rangle \\
&= (N-1)^2 G^2(0) + 2(N-1)G^2(0) \\
&= \langle (\pi^2(y))^2 \rangle
\end{aligned}$$

が得られる (教科書の式 (17.58–60) に対応). これらを代入すれば良い.

次に相互作用項

$$V(x) \equiv (\text{式 (17.61)}) + (\text{式 (17.62)})$$

による伝播関数 $\langle \pi^i(x)\pi^j(y) \rangle$ への補正を調べると、

$$\langle \pi^i(x)\pi^j(y) \rangle = (N-1)G(x-y)(1 + g^2 G(0)) + O(g^4) \quad (51)$$

となる (導出は下記).

note 13.1 節の「注意」に書いたように、自由場 Green 関数 $\langle \dots \rangle_0$ への置き換え

$$\begin{aligned}
\langle \pi^i(x)\pi^j(y) \rangle &\rightarrow \left\langle \exp \left\{ - \int d^2z V(z) \right\} \pi^i(x)\pi^j(y) \right\rangle_0 \\
&= \langle \pi^i(x)\pi^j(y) \rangle_0 - \int d^2z \langle V(z)\pi^i(x)\pi^j(y) \rangle_0 + O(g^4)
\end{aligned}$$

を行い、各摂動次数の項に Wick の定理を適用すれば良い. ただしその際、非連結の真空ダイアグラムは省かねばならない. 自由場伝播関数 $\langle \pi^i(x)\pi^j(y) \rangle_0$ は式 (17.53) で与えられており、次に計算したいのは $O(g^2)$ の補正項

$$\begin{aligned}
- \int d^2z \langle V(z)\pi^i(x)\pi^j(y) \rangle_0 &= - \frac{g^2}{2} \int d^2z \langle \pi^k(z)\pi^l(z)\partial\pi^k(z)\partial\pi^l(z)\pi^i(x)\pi^j(y) \rangle_0 \\
&\quad + \frac{g^2}{2} \delta^2(0) \int d^2z \langle \pi^k(z)\pi^k(z)\pi^i(x)\pi^j(y) \rangle_0
\end{aligned} \quad (52)$$

である. 連結ダイアグラムを得るには、Wick の定理を適用する際、 $\pi^i(x)$ と $\pi^j(y)$ をそれぞれ引数 z の場と縮約しなければならない. すると

$$\begin{aligned}
\langle \pi^k(z)\pi^l(z)\partial\pi^k(z)\partial\pi^l(z)\pi^i(x)\pi^j(y) \rangle_0 &\rightarrow \{ 2 \langle \pi^i(x)\pi^k(z) \rangle_0 \langle \pi^j(y)\partial\pi^k(z) \rangle_0 \langle \pi^l(z)\partial\pi^l(z) \rangle_0 \\
&\quad + 2 \langle \pi^i(x)\pi^k(z) \rangle_0 \langle \pi^j(y)\partial\pi^l(z) \rangle_0 \langle \pi^k(z)\partial\pi^l(z) \rangle_0 \} \\
&\quad + \{ x \leftrightarrow y \} \quad (a) \\
&\quad + 2 \langle \pi^i(x)\pi^k(z) \rangle_0 \langle \pi^j(y)\pi^l(z) \rangle_0 \langle \partial\pi^k(z)\partial\pi^l(z) \rangle_0 \quad (b) \\
&\quad + 2 \langle \pi^i(x)\partial\pi^k(z) \rangle_0 \langle \pi^j(y)\partial\pi^l(z) \rangle_0 \langle \pi^k(z)\pi^l(z) \rangle_0, \quad (c) \\
\langle \pi^k(z)\pi^k(z)\pi^i(x)\pi^j(y) \rangle_0 &\rightarrow 2 \langle \pi^i(x)\pi^k(z) \rangle_0 \langle \pi^j(y)\pi^k(z) \rangle_0 \quad (d)
\end{aligned}$$

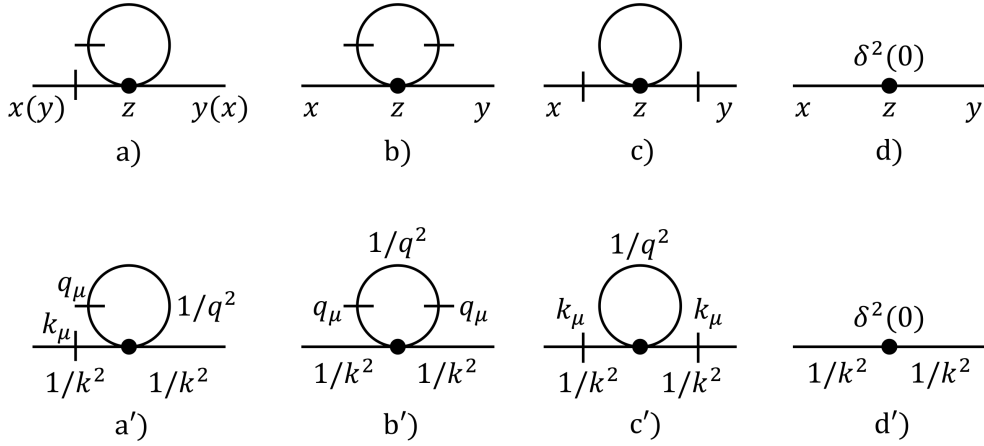


図 57 a)-d) は式 (a-d) に対応する実空間のダイアグラムであり，短線の印は微分する伝播関数を表す．
下段に運動量空間のダイアグラムも描き加えておいた．

とでき，上式 (a-d) はそれぞれ図 57 の a) から d) のダイアグラムに対応付けられる．ここでダイアグラム d) は相互作用項 (17.62) に由来しており，分配関数 (17.50) の導出過程まで遡れば「測度から生じるダイアグラム」(p.252 下から 2 行目) と呼べる．

式 (51) の導出 以上を踏まえて，教科書の説明を (補足しつつ) まとめる．図 57 のダイアグラム a) を運動量空間に移すと，[図に示したように]

$$\frac{k_\mu}{k^2} \left(\int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{q_\mu}{q^2} \right) \frac{1}{k^2} \quad (17.63)$$

となる．これは q に関する奇関数の積分を含むためゼロになる．ダイアグラム b) は

$$\frac{1}{k^2} \left(\int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{q^2}{q^2} \right) \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^2} \delta^2(0) \frac{1}{k^2} \quad (17.64)$$

となり，ダイアグラム d) と相殺する [上式 (52) において式 (b),(d) の寄与が逆符号となることに注意]．残る

$$(\text{式 (c)}) = 2\delta_{ij}\partial_z G(z-y) \cdot \partial_z G(x-z)G(0)$$

の式 (52) への寄与は，

$$-\frac{g^2}{2} \int d^2z (\text{式 (c)}) = -\delta_{ij}g^2 \int d^2z \partial_z G(z-y) \cdot \partial_z G(x-z)G(0) \quad (17.65')$$

$$\begin{aligned} &= \delta_{ij}g^2 \int d^2z \partial_z^2 G(z-y) \cdot G(x-z)G(0) \\ &= \delta_{ij}g^2 G(x-y)G(0) \quad (\because \partial_z^2 G(z-y) = \delta^2(z-y)) \end{aligned} \quad (17.66')$$

と計算される．そこで

$$\langle \pi^i(x)\pi^j(y) \rangle = (\text{式 (17.53)}) + (\text{式 (17.66')}) + O(g^4)$$

の添字を $i=j$ と置いて， $i=2, \dots, N$ で和をとると式 (51) を得る．

ここまでの結果をまとめよう。相関関数

$$\langle \mathbf{n}(x) \cdot \mathbf{n}(y) \rangle = (\text{式 (17.52)}) + (\text{式 (17.56)}) = (\text{式 (17.52)}) + (\text{式 (17.57)}) + O(g^6)$$

の最低次の項 (17.52) に、 $O(g^2)$ まで正確に求めた $\langle \pi^i(x)\pi^i(y) \rangle$ の式 (51) を代入すると、

$$\begin{aligned} g^2 \langle \mathbf{n}(x) \cdot \mathbf{n}(y) \rangle &= 1 + g^2(N-1)\{G(x-y) - G(0)\} \\ &\quad + \frac{g^4}{2}(N-1)\{G(x-y) - G(0)\}^2 + O(g^6) \end{aligned} \quad (17.67)$$

となる。[最低次の結果 (17.54) と同様、] ここでも差 $\{G(x-y) - G(0)\}$ において、 G に含まれる赤外切断 m_0 [と定数項のそれぞれ] が相殺する。

note 上式 (17.67) 左辺に g^2 を掛けた動機は、左辺をスケール変換する前の場 $\mathbf{n}^{(\text{old})} = g\mathbf{n}$ に関する相関関数と見なせることにある。条件 $\mathbf{n}^{(\text{old})} \cdot \mathbf{n}^{(\text{old})} = 1$ を思い出せば、右辺の初項が 1 であるのは期待される結果である。

[17.2 節の式 (17.19),(17.25) で紫外切断 $\Lambda = a^{-1}$ を導入して $G(0) \rightarrow G(a)$ と置き換えたのと同様に、] 相関関数 (17.67) において $G(0) \rightarrow G(\Lambda^{-1})$ とし、また式 (17.53): $G(x-y) = -\frac{1}{2\pi} \ln m_0|x-y| + \text{const.}$ を代入すると

$$\begin{aligned} g^2 \langle \mathbf{n}(x) \cdot \mathbf{n}(y) \rangle &= 1 - \frac{g^2}{2\pi}(N-1) \ln \Lambda|x-y| \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{g^2}{2\pi} \right)^2 (N-1) \ln^2 \Lambda|x-y| + \dots \end{aligned} \quad (17.68)$$

が得られる。洞察を得るために上式 (17.67-68) で $N=2$ とおくと、少なくとも展開の初めの数項までは

$$g^2 \langle \mathbf{n}(x) \cdot \mathbf{n}(y) \rangle = \exp \{g^2 (G(x-y) - G(0))\} = \exp \left(-\frac{g^2}{2\pi} \ln \Lambda|x-y| \right) = \frac{1}{(\Lambda|x-y|)^{g^2/2\pi}} \quad (17.69)$$

と同じ結果を与える。ここから場のスケール次元は [17.2 節と同じく] $M^{g^2/4\pi}$ であることが読み取れる。なるほど、典型的な場の分布が持つフラクタルな性質は相関関数の冪則 (17.69) に反映されており [16.2.1 節の note も参照]、これが切断 $\Lambda \rightarrow \infty$ における相関関数 (17.68) の対数的な発散の起源にもなっている。

17.4.1 繰り込み

[一般論 (17.35) のように] 切断運動量 Λ を、繰り込まれた場 \mathbf{n}_R と結合定数 g_R に吸収させよう ($\mathbf{n} = \sqrt{Z}\mathbf{n}_R$)。 $g\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}$ において \mathbf{n} をスケール変換する前の場に戻すと、裸の相関関数は最低次で

$$\begin{aligned} G_B(x-y) &\equiv \langle \mathbf{n}(x) \cdot \mathbf{n}(y) \rangle \\ &= 1 - \frac{g^2}{2\pi}(N-1) \ln \Lambda|x-y| + O(g^4) \quad [\because \text{式 (17.68)}] \end{aligned} \quad (17.70a)$$

$$= \left(1 + \frac{g_R^2}{2\pi}(N-1) \ln \left(\frac{\mu}{\Lambda} \right) \right) \left(1 - \frac{g_R^2}{2\pi}(N-1) \ln \mu|x-y| \right) + O(g^4) \quad (17.70b)$$

となる (ただし $g^2 = g_R^2 + O(g_R^4)$)。

note 逐次代入により $g_R^2 = g^2 + O(g_R^4) = g^2 + O(g^4)$ なので、

$$(\text{式 (17.70b)}) = 1 - \frac{g^2}{2\pi}(N-1) \left\{ \ln \mu|x-y| - \ln \left(\frac{\mu}{\Lambda} \right) \right\} + O(g^4) = (\text{式 (17.70a)})$$

と戻る．式 (17.70b) の第 2 の因子

$$G_R(x-y) \equiv \left(1 - \frac{g_R^2}{2\pi}(N-1) \ln \mu|x-y|\right)$$

は式 (17.70a) と同じ形であることに注意すると，これを繰り込まれた場の相関関数に同定することが動機付けられる．このとき，その係数が Z となる（一般式 (17.35) の関数形とも整合）．

そこで

$$Z = 1 + \frac{g_R^2}{2\pi}(N-1) \ln \left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) + O(g_R^4) \quad (17.71)$$

とおく．ここまでの近似では $G_R(x) = Z^{-1}G_B(x)$ が $|x| = \mu^{-1}$ で 1 になること，および

$$\left.\frac{\partial G_R(x)}{\partial \ln|x|}\right|_{|x|=\mu^{-1}} = -(N-1)\frac{g_R^2}{2\pi} \quad (17.73)$$

の関係が自動的に成り立っている．高い近似に進んでもこれらが成り立つことを要求すると，

$$g_R^2 = \left(1 + (N-2)\frac{g_B^2}{2\pi} \ln \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)\right) g_B^2 + O(g_B^6), \quad (17.75)$$

$$Z = 1 - (N-1)\frac{g_R^2}{2\pi} \ln \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) + (N-1)\left(N - \frac{3}{2}\right) \frac{g_R^4}{(2\pi)^2} \ln^2 \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) + O(g_R^6), \quad (17.78)$$

$$G_R = 1 - (N-1)\frac{g_R^2}{2\pi} \ln \mu|x| + \frac{1}{2}(N-1)\frac{g_R^4}{(2\pi)^2} \ln^2 \mu|x| + O(g_R^6) \quad (17.81)$$

と定義できる（導出は下記）．ただし g が裸の結合定数であることを明確にするため， $g \rightarrow g_B$ と表記を改めた．[式 (17.70) に関して言及したように] $O(g_R^4)$ まで正確な式 (17.81) もまた，[$G_B =$ (式 (17.68)) と比べると] 単に

$$g_B^2 \rightarrow g_R^2, \quad \Lambda \rightarrow \mu$$

と置き換わったに過ぎず，繰り込みを行うと意気込んだ割には，大山鳴動 (*montes parturiunt, nascetur ridiculus mus*) の感がある．しかしながら，これはあくまで我々が選んだ g_R^2 の定義による結果であり，高次で同様の置き換えは成立しない．

証明 教科書の説明・計算を多少，補足しつつまとめる． Z が座標 x に依らないことに注意すると， $|x| = \mu^{-1}$ において $G_R(x) = Z^{-1}G_B(x)$ が 1 になることは， $Z = G_B|_{|x|=\mu^{-1}}$ を意味する．そこで式 (17.68) の G_B に $|x| = \mu^{-1}$ を代入すると，

$$Z(g_B^2) = G_B|_{|x|=\mu^{-1}} = 1 - (N-1)\frac{g_B^2}{2\pi} \ln \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) + \frac{(N-1)}{2} \frac{g_B^4}{(2\pi)^2} \ln^2 \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \quad (17.72)$$

を得る．このとき式 (17.73) の左辺は

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial G_R(x)}{\partial \ln|x|}\right|_{|x|=\mu^{-1}} &= Z^{-1}(g_B^2) \left.\frac{\partial G_B(x)}{\partial \ln|x|}\right|_{|x|=\mu^{-1}} \\ &= -(N-1)\frac{g_B^2}{2\pi} Z^{-1}(g_B^2) \left\{1 - \frac{g_B^2}{2\pi} \ln \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)\right\} + O(g_B^6) \end{aligned} \quad (17.74)$$

と計算される。これと式 (17.73) の右辺を等置して

$$\begin{aligned}
g_{\text{R}}^2 &= Z^{-1}(g_{\text{B}}^2) \left\{ 1 - \frac{g_{\text{B}}^2}{2\pi} \ln \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) \right\} g_{\text{B}}^2 + O(g_{\text{B}}^6) \\
&= \left(1 + (N-1) \frac{g_{\text{B}}^2}{2\pi} \ln \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) \right) \left\{ 1 - \frac{g_{\text{B}}^2}{2\pi} \ln \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) \right\} g_{\text{B}}^2 + O(g_{\text{B}}^6) \quad (\because \text{式 (17.72)}) \\
&= \left(1 + (N-2) \frac{g_{\text{B}}^2}{2\pi} \ln \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) \right) g_{\text{B}}^2 + O(g_{\text{B}}^6) : (17.75)
\end{aligned}$$

を得る。

上式 (17.75) を g_{B}^2 について逆に解くと、逐次代入により

$$\begin{aligned}
g_{\text{B}}^2 &= g_{\text{R}}^2 - (N-2) \frac{g_{\text{B}}^4}{2\pi} \ln \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) + O(g_{\text{B}}^6) \\
&= g_{\text{R}}^2 - (N-2) \frac{g_{\text{R}}^4}{2\pi} \ln \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) + O(g_{\text{B}}^6, g_{\text{B}}^4 g_{\text{R}}^2) \\
&= \left(1 - (N-2) \frac{g_{\text{R}}^2}{2\pi} \ln \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) \right) g_{\text{R}}^2 + O(g_{\text{R}}^6) \tag{17.76}
\end{aligned}$$

となる。これを式 (17.72) に代入して $O(g_{\text{R}}^4)$ の項まで拾うと、 Z の式 (17.78) を得る。

最後に $G_{\text{R}} = Z^{-1}G_{\text{B}}$ を求めよう。恒等式

$$\begin{aligned}
(1 + ax + bx^2 + \dots)^{-1} &= 1 - (ax + bx^2 + \dots) + (ax + bx^2 + \dots)^2 + \dots \\
&= 1 - ax + (a^2 - b)x^2 + \dots \tag{17.79}
\end{aligned}$$

(ただし $|x|$ は小) を

$$x \rightarrow \frac{g_{\text{R}}^2}{2\pi} \ln \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right), \quad a \rightarrow -(N-1), \quad b \rightarrow (N-1) \left(N - \frac{3}{2} \right)$$

とにおいて利用すると、式 (17.78) の Z の逆数は

$$Z^{-1} = 1 + (N-1) \frac{g_{\text{R}}^2}{2\pi} \ln \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) + \frac{1}{2} (N-1) \frac{g_{\text{R}}^4}{(2\pi)^2} \ln^2 \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) + O(g_{\text{R}}^6) \tag{17.80a}$$

と計算される。他方、式 (17.68) の G_{B} に g_{B}^2 の式 (17.76) を代入すると

$$\begin{aligned}
G_{\text{B}}(x) &= 1 - (N-1) \frac{g_{\text{R}}^2}{2\pi} \ln \Lambda |x| + \frac{1}{2} (N-1) \frac{g_{\text{R}}^4}{(2\pi)^2} \ln^2 \Lambda |x| \\
&\quad + (N-1)(N-2) \frac{g_{\text{R}}^4}{(2\pi)^2} (\ln \Lambda |x|) \ln \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) + O(g_{\text{R}}^6) \tag{17.80b}
\end{aligned}$$

を得る。これらを掛けて $O(g_{\text{R}}^4)$ の項まで拾うと、 $G_{\text{R}}(x)$ の式 (17.81) が導かれる。

このとき繰り込み群方程式 (17.37):

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g_{\text{R}}^2) \frac{\partial}{\partial g_{\text{R}}^2} + 2\gamma(g_{\text{R}}^2) \right) G_{\text{R}}(\mu, x, g_{\text{R}}^2) = 0 \tag{17.82}$$

の係数は

$$\beta(g_{\text{R}}^2) = -(N-2) \frac{g_{\text{R}}^4}{2\pi} + O(g_{\text{R}}^6), \quad \gamma(g_{\text{R}}^2) = (N-1) \frac{g_{\text{R}}^2}{2\pi} + O(g_{\text{R}}^6) \tag{17.88}$$

と同定される。

上式 (17.88) の導出 このことは定義式 (17.38):

$$\beta(g_{\mathbf{R}}^2) = \mu \frac{\partial g_{\mathbf{R}}^2}{\partial \mu} \Big|_{g_{\mathbf{B}}^2, \Lambda}, \quad \gamma(g_{\mathbf{R}}^2) = \mu \frac{\partial \ln \sqrt{Z}}{\partial \mu} \Big|_{g_{\mathbf{B}}^2, \Lambda} \quad (53)$$

の右辺に, $g_{\mathbf{R}}^2$ の式 (17.75) や $Z(g_{\mathbf{B}}^2)$ の式 (17.72) を代入すれば直接確かめられる。(最後に式 (17.76) を代入して $g_{\mathbf{B}}^2$ を消去する。) 教科書には (珍しく) その式変形も詳細に書いてある。しかしここでは計算を簡単に済ませるために, あらかじめ

$$\beta(g_{\mathbf{R}}^2) = b g_{\mathbf{R}}^4 + O(g_{\mathbf{R}}^6), \quad \gamma(g_{\mathbf{R}}^2) = a g_{\mathbf{R}}^2 + O(g_{\mathbf{R}}^6) \quad (17.83')$$

を仮定し, 繰り込み群方程式 (17.82) が満たされるように展開係数 a, b を定めると, 式 (17.88) が得られることを示して満足しよう*66。式 (17.81), (17.83') を繰り込み群方程式 (17.82) に代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g_{\mathbf{R}}^2) \frac{\partial}{\partial g_{\mathbf{R}}^2} + 2\gamma(g_{\mathbf{R}}^2) \right) G_{\mathbf{R}}(\mu, x, g_{\mathbf{R}}^2) \\ &= \left(-\frac{N-1}{2\pi} + 2a \right) g_{\mathbf{R}}^2 + \frac{N-1}{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} - b - 2a \right) g_{\mathbf{R}}^4 \ln \mu |x| \end{aligned}$$

となる。そこで $g_{\mathbf{R}}^2, g_{\mathbf{R}}^4$ の係数の各々がゼロになることを要求すると,

$$a = \frac{N-1}{4\pi}, \quad b = -\frac{N-2}{2\pi}$$

と定まる。これらを式 (17.83') に戻して, 式 (17.88) を得る。

17.4.2 繰り込み群方程式の解

[具体例 (17.81) で見たように] $G_{\mathbf{R}}(x)$ の摂動展開における第 n 項は $(g_{\mathbf{R}}^2)^2 (\ln \mu |x|)^n$ のような因子を含む。結合定数 $g_{\mathbf{R}}^2$ が小さくとも, $|x| \gg \mu^{-1}$ でこの対数は大きくなり, 高次補正を無視できなくなる。繰り込み群の重要性は, このような対数因子を, 少なくともある x の範囲において制御可能にすることにある。

この点を見るために, 繰り込み群方程式 (17.82):

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g_{\mathbf{R}}^2) \frac{\partial}{\partial g_{\mathbf{R}}^2} + 2\gamma(g_{\mathbf{R}}^2) \right) G_{\mathbf{R}}(\mu x, g_{\mathbf{R}}^2) = 0 \quad (17.96)$$

の解を“特性曲線の方法”で調べよう。[上式 (17.96) では式 (17.81) と同様, $G_{\mathbf{R}}$ が積 $\mu |x|$ の形でのみ μ と x に依存すると仮定しており (p.259), 以降, 単に $|x| \rightarrow x$ と書いてしまう。]

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \mu(t), \quad \frac{dg_{\mathbf{R}}^2(t)}{dt} = \beta(g_{\mathbf{R}}^2(t)) \quad (17.98)$$

を満たすように μ と $g_{\mathbf{R}}^2$ をパラメトライズする。こうして得られる曲線 $(\mu(t), g_{\mathbf{R}}^2(t))$ を, 偏微分方程式の“特性曲線” (characteristic) と呼ぶ。すると特性曲線の方法 (17.96) は

$$\left[\frac{d}{dt} + 2\gamma(g_{\mathbf{R}}^2(t)) \right] G_{\mathbf{R}}(\mu(t)x, g_{\mathbf{R}}^2(t)) = 0 \quad (17.97)$$

*66 実際, 証明としてはそれで充分である。 $g_{\mathbf{R}}^2$ によるべき展開 (17.83') で全ての係数をゼロとおかなければ, 一般性は失われない。

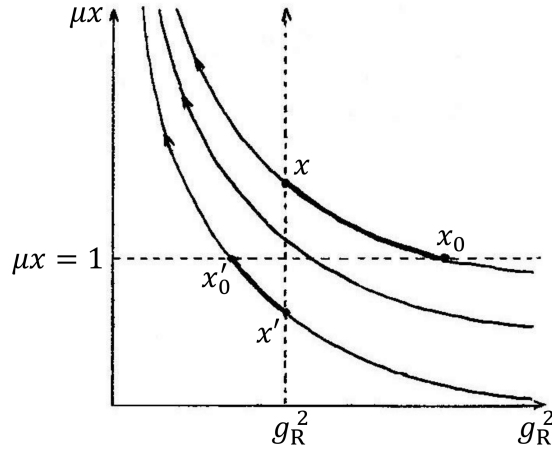


図 58 漸近的に自由な理論に対する繰り込み群方程式の特性曲線 [x は $|x|$ の意味]

と書き直せる. これは直ちに特性曲線に沿って $[t_0$ から t まで] 積分でき, [与えられた $x = x_0$ と初期値 $\mu(t_0) \equiv \mu$ に対して] 解は

$$G_R(\mu x_0 e^{t-t_0}, g_R^2(t)) = G_R(\mu x_0, g_R^2(t_0)) e^{-2 \int_{t_0}^t \gamma(g_R^2(t')) dt'}, \quad (17.99)$$

$$\text{ただし } t \text{ と } g_R^2(t) \text{ の関係} \quad t - t_0 = \int_{g_R^2(t_0)}^{g_R^2(t)} \frac{dg^2}{\beta(g^2)} \quad (17.100)$$

と表される [線形微分方程式の一般的な解法に従う [25, p.14]].

結果を解釈するには, 解の表式 (17.99) そのものよりも, むしろ解法を視覚的・定性的に把握することが役に立つ. β 関数が負の場合の μ - g_R^2 平面上の特性曲線を図 58 に示す. [$\beta(g_R^2) < 0$ のとき, 式 (17.98) より t の増大に伴って μ は増加し, g_R^2 は減少するため, 右肩下がりの曲線が得られることに注意する.] 縦軸を μx と無次元化して, μ の代わりに x を変化させても良い. $x = \mu^{-1}$ のときに $G_R = 1$ となるよう G_R を定めたので [17.4.1 節], $\mu x = 1$ の水平な破線上で G_R の初期値が与えられる. このとき与えられた g_R^2 の値 (図 58 の縦の破線) に対する $G_R(\mu x, g_R^2)$ を求めるには, 点 $(g_R^2, \mu x)$ を通る特性曲線に沿って, その水平線 $\mu x = 1$ との交点 (図 58 の x_0) から積分を行わねばならない. すると積分 (17.99) における $\gamma(g_R^2)$ を評価するために必要な積分路 (図 58 の x_0 と x を結ぶ太線) 上での $g_R^2(t')$ の値は, x が増加するにつれて大きくなることが読み取れる. ところが摂動論では小さな g_R^2 に対する $\gamma(g_R^2)$ を近似的に求めることしかできないため, 大きな x に対する $G_R(\mu x)$ を計算することはできない. 他方, $x < \mu^{-1}$ を満たす x (x' とする) に対する積分路は, 図 58 の x'_0 と x' を結ぶ太線であり, その上での $g_R^2(t')$ は小さな値に限られる. このため小さい x では $G_R(\mu x)$ を正確に求めることができる. このように β 関数が負であり, それ故, 短距離における振舞いが [自由場の周りの] 摂動論で扱える理論のことを, 短距離において “漸近的に自由 (asymptotically free) な” 理論と言う.

note 文献 [2] の第 15 章では, まず QED の文脈で繰り込み群方程式を導入し, 質量尺度 μ を増大させることが短距離の相互作用を考えることに対応することを示した. また QCD では繰り込まれた結合 $g_r(\mu)$ が μ に対して減少するため, 強い相互作用は短距離ほど弱まること (漸近的自由性) が示された.

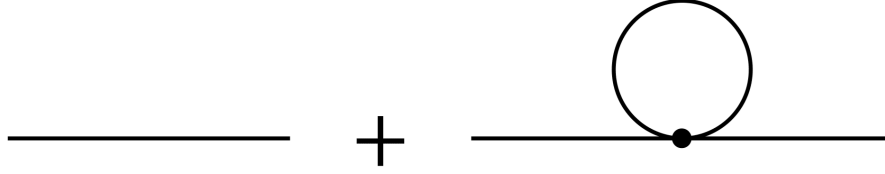


図 59 $\lambda\varphi^4$ 理論における 1 ループまでの伝播関数 (式 (17.104'))

17.5 $\lambda\varphi^4$ の繰り込み

作用

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}(\partial\varphi_B)^2 + \frac{1}{2}m_B^2\varphi_B^2 + \frac{1}{4!}\lambda_B\varphi_B^4 \right\} \quad (17.101)$$

で記述される $\lambda\varphi^4$ 理論において, “無限大” もしくは [それを正則化によって有限にした] 切断 Λ に依存する項を,

$$\lambda_B = Z_1 \left(\frac{\mu}{\Lambda}, \lambda_R \right) \lambda_R, \quad \varphi_B = \sqrt{Z} \left(\frac{\mu}{\Lambda}, \lambda_R \right) \varphi_R, \quad m_B^2 = \Lambda^2 Z_2 \left(\frac{\mu}{\Lambda}, \lambda_R \right) \quad (17.103)$$

の形に繰り込もう. これは繰り込まれた質量 m_R を定義する代わりに, 繰り込み点 μ を導入するアプローチとなっている.

まず裸の質量を

$$m_B^2 = -\frac{\lambda_B}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2} \quad (17.105)$$

とおくと, 図 59 に示した 1 ループまでの伝播関数は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p^2 + m_B^2} - \frac{\lambda_B}{2} \left(\frac{1}{p^2 + m_B^2} \right)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m_B^2} \quad [\text{自由場伝播関数に質量項を補った}] \quad (17.104') \\ & \simeq \frac{1}{p^2} \left(1 + \frac{1}{p^2} \cdot \frac{\lambda_B}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \right) - \left(\frac{\lambda_B}{2} \left(\frac{1}{p^2} \right)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \right) = \frac{1}{p^2} \quad (O(\lambda_B) \text{ まで考慮}) \end{aligned}$$

となって, この次数までで質量は現れない. [冒頭で述べたように, 我々の目標は質量によらない理論を得ることである.] またこの次数 (1 ループ) まででは, 波動関数 [場] の繰り込みが不要なので $Z = 1$ である.

次に結合定数 λ_R を定義する指針として, 図 60 に示した 1 ループまでの 4 点結節部分関数を考える. 例えば図 61 に示した 1 つの結節部分ダイアグラム①は, 実空間において

$$\int d^4x G^2(x, y) e^{ip \cdot (x-y)} = \frac{1}{(4\pi^2)^2} \int d^4x e^{ip \cdot x} \frac{1}{|x^2|^2} \quad (17.106)$$

と評価される [式 (17.5) を用いた]. 振動する因子 $e^{ip \cdot x}$ は積分を長距離 $|x| \approx |p|^{-1}$ で切断する役割を果たすと見なせる. また短距離切断 $|x| = a = \Lambda^{-1}$ も導入すると,

$$\begin{aligned} \int d^4x G^2(x, y) e^{ip \cdot (x-y)} & \approx \frac{1}{(4\pi^2)^2} \int_{|x|=a}^{|x|=|p|^{-1}} d^4x \frac{1}{|x^2|^2} \\ & = \frac{1}{(4\pi^2)^2} \int_a^{|p|^{-1}} \frac{1}{r^4} \cdot 2\pi^2 r^3 dr = \frac{1}{8\pi^2} \ln \left(\frac{\Lambda}{|p|} \right) \end{aligned} \quad (17.107-108)$$

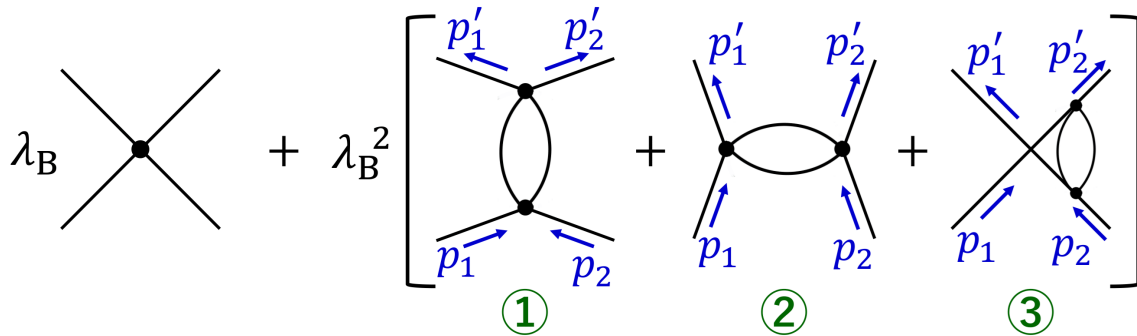


図 60 1 ループまでの 4 点結節部分関数 [青字で運動量変数を書き添えた]

となる [$2\pi^2 r^3$ は半径 r の 3 次元球面の体積 [26, pp.50–52]]. したがって裸の 4 点結節部分関数は

$$\Gamma^{(4)}(s, t, u) = \lambda_B + \lambda_B^2 \frac{1}{16\pi^2} \left(\ln \frac{\sqrt{s}}{\Lambda} + \ln \frac{\sqrt{t}}{\Lambda} + \ln \frac{\sqrt{u}}{\Lambda} \right) + O(\lambda_B^3) \quad (17.109)$$

となる. ここに

$$s \equiv (p_1 + p_2)^2, \quad t \equiv (p_1 - p'_1)^2, \quad u \equiv (p_1 - p'_2)^2$$

は運動学的不変量 (4.18) である.

note : 上式 (17.109) について 図 60 のように 1 ループを持つダイアグラム①, ②, ③に, 入射する運動量 p_1, p_2 と射出する運動量 p'_1, p'_2 を添えると, 我々が調べてきたダイアグラム①の式 (17.106–108) において,

$$p = p_1 + p_2, \quad \therefore |p| = \sqrt{s}$$

と同定される. 次に②, ③の式は, ①のグラフと比べると, それぞれ式 (17.108) で

$$p = p_1 - p'_1, p_1 - p'_2 \quad \text{i.e.} \quad |p| = \sqrt{t}, \sqrt{u}$$

とおけば得られると考えられる*67. ところで 3 つのダイアグラム①, ②, ③はいずれも対称性因子 $1/2$ を持つ. さらに「裸の結節点は $-\lambda_B$ に等しい」(p.260, 1.12) ことに注意すると, 図 60 の結節部分の総和は

$$-\lambda_B + \frac{1}{2}(-\lambda_B)^2 \sum (\text{式 (17.108)}) \quad \left(\sum \text{は } |p| = \sqrt{s}, \sqrt{t}, \sqrt{u} \text{ に関する和} \right)$$

と表されることになり, これを $-\Gamma^{(4)}(s, t, u)$ に同定しなければならない (最低次で $\Gamma^{(4)} = \lambda_B$). こうして上式 (17.109) を得る.

改めて内向きの運動量 $p_3 = -p'_1, p_4 = -p'_2$ を定義し ($p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$),

$$(p_i + p_j)^2 = \mu^2$$

*67 ただし③のグラフの左側における運動量 p_1, p'_1 の交点は結節点 (黒丸) ではなく, 実際には“立体交差”になっていることに注意する. また図 60 で時間を上向きではなく右向きと解釈してしまうと, ③のグラフは①と区別されない.

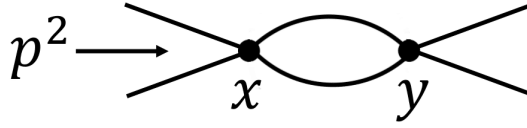


図 61 図 60 の 1 ループダイアグラムの 1 つ [矢印の p^2 は始状態 (ここでは左側) の全運動量の自乗,]

を満たす 4 つの運動量 p_1, p_2, p_3, p_4 の対称的な組を選ぶ*68. このときの 4 点結節部分関数 (17.109) を λ_R と定義しよう. すなわち [$t = (p_1 + p_3)^2 = \mu^2, u = (p_1 + p_4)^2 = \mu^2$ に注意すると],

$$\lambda_R = \lambda_B + \lambda_B^2 \frac{3}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) + \dots \quad (17.110)$$

[ただし真数の分子・分母を入れ替えて訂正した (式 (17.112) も同様). 実際, このとき初めて以下の式 (17.111), (17.113) が成立する.] このとき β 関数は

$$\beta(\lambda_R) = \mu \frac{\partial \lambda_R}{\partial \mu} \Big|_{\Lambda, \lambda_B} = \frac{3}{16\pi^2} \lambda_B^2 + \dots \simeq \frac{3}{16\pi^2} \lambda_R^2 \quad (17.111)$$

となる. 最右辺は正なので, $\lambda\phi^4$ 理論は漸近的に自由な理論ではない.

式 (17.110) を λ_B について逆に解くと, 1 ループの次数まででは [逐次代入により]

$$\lambda_B = \lambda_R - \lambda_R^2 \frac{3}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) + O(\lambda_R^3) \quad (17.112)$$

となる. これを 4 点関数 (17.109) に代入すると, 発散を引き起こす因子 Λ を含まない “有限” な表式

$$\Gamma^{(4)}(s, t, u) = \lambda_R \left\{ 1 + \frac{1}{16\pi^2} \lambda_R \left(\ln \frac{\sqrt{s}}{\mu} + \ln \frac{\sqrt{t}}{\mu} + \ln \frac{\sqrt{u}}{\mu} \right) \right\} + O(\lambda_R^3) \quad (17.113)$$

が得られる.

note $Z = 1$ と式 (17.105), (17.112) で以って, 冒頭の目標 (17.103) が達成されたことになる. 非線形 σ 模型の相関関数 (17.81) のときと同様, ここでも 1 ループの次数まででは 4 点結節部分関数 (17.113) が, もとの式 (17.109) で単に $\lambda_B \rightarrow \lambda_R, \Lambda \rightarrow \mu$ と置き換えただけとなるように, 繰り込まれた量を定義することに成功している.

*68 そのためには $p_i \cdot p_j = \frac{\mu^2}{4} (4\delta_{ij} - 1)$ であれば良い (直接の代入により確認できる).

第 18 章 1/N 展開法

序文を引用する：

この章では、線形および非線形の $O(N)$ σ 模型における臨界現象を調べる。内部空間次元 N が大きい条件下での近似 [訳註：“large N expansions” は慣例に従い “1/N 展開 (法)” と訳す] を利用して、2つの模型がその形式的な違いにもかかわらず、同じ物理を記述していることを示す。これは普遍性の一例である。

本章では次元正則化の手法を利用して、計算を簡略化する。しかしこの簡略化は、ある種の犠牲を伴う。次元正則化は発散を効果的に数物の下に隠してしまうので、ともすると理論を定義するときの切斷の役割を見失う恐れがある。

18.1 $O(N)$ 線形 σ 模型

結論にあたる式だけを簡単にまとめる。線形 σ 模型の $O(N)$ 対称な相互作用ポテンシャル (17.42) を、改めて $\lambda\varphi^4$ 理論の形

$$V(\varphi) = \frac{\lambda_B}{4!} \left(\sum_{a=1}^N (\varphi_a)^2 \right)^2 \quad (18.1)$$

に書くことができる。次元正則化を採用して $d = 4 - \epsilon$ 次元の空間 (時空) を考えよう。このとき、 μ を繰り込み点の役割を担う質量尺度として

$$\lambda_B = \mu^{4-d} \lambda_R \left\{ 1 + \lambda_R \frac{N+8}{48\pi^2} \frac{1}{4-d} + O(\lambda_R^2) \right\} \quad (18.10)$$

とおくと、 β 関数は

$$\beta(\lambda_R) \equiv \mu \frac{\partial \lambda_R}{\partial \mu} \Big|_{\lambda_B} = (d-4)\lambda_R + \frac{N+8}{48\pi^2} \lambda_R^2 + O(\lambda_R^3) \quad (18.15)$$

と求まる。

18.2 1/N 展開

N が大きい極限に関するここでの議論は、E. Brèzin, J. Zinn-Justin, Physical Review **B14** (1976) pp.3110-3120 に基づいている。(教科書 p.267 脚注 2)

参考文献

- [1] F. マンドル, G. ショー, 2011, 場の量子論 第1巻 量子電磁力学 (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [2] F. マンドル, G. ショー, 2013, 場の量子論 第2巻 素粒子の相互作用 (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [3] 御子柴宣夫, 1995, 半導体工学シリーズ2 半導体の物理, 株式会社培風館, 東京.
- [4] ランダウ=リフシッツ『統計物理学 第1部』.
- [5] 九後汰一郎, 2018, 新物理学シリーズ23 ゲージ場の量子論 I, 株式会社培風館.
- [6] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, 2015, ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 場の古典論 (原書第6版)(恒藤敏彦, 広重徹訳), 東京図書株式会社, 東京.
- [7] 杉田勝実ほか, 2005, 経路積分と量子電磁力学 [POD版], 森北出版株式会社, 東京.
- [8] J.J. サクライ, 2013, 上級量子力学 第I巻 輻射と粒子 (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [9] 中村伝, 1997, 統計力学 物理テキストシリーズ10, 株式会社岩波書店, 東京.
- [10] J.J.Sakurai, 2014, 現代の量子力学 (下)(桜井明夫訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [11] 江沢洋, 中村孔一, 山本義隆, 2022, 演習詳解 力学 [第2版], 株式会社 筑摩書房, 東京.
- [12] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, 2013, ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 力学 (増訂第3版)(広重徹, 水戸巖訳), 東京図書株式会社, 東京.
- [13] J.J.Sakurai, 2017, 現代の量子力学 (上)(桜井明夫訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [14] B. ツヴィーバッハ, 2018, 初級講座 弦理論《発展編》(樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [15] 小野寺嘉孝, 2014, 物理のための応用数学, 株式会社裳華房, 東京.
- [16] Francis F. Chen, 2017, プラズマ物理入門 (内田岱二郎訳), 丸善出版株式会社, 東京.
- [17] 今井功, 2003, 流体力学 物理テキストシリーズ9, 株式会社岩波書店, 東京.
- [18] 吉川圭二, 2022, 理工系の基礎数学 新装版 群と表現, 株式会社岩波書店, 東京.
- [19] 佐武一郎, 2017, 数学選書1 線型代数学 (新装版), 株式会社裳華房, 東京.
- [20] 沙川貴大, 2022, 非平衡統計力学——ゆらぎの熱力学から情報熱力学まで——, 共立出版株式会社, 東京.
- [21] R. ガムビーニ/J. プリン, 2021, 初級講座 ループ量子重力 (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [22] W. グライナー他, 2002, 熱力学・統計力学 (伊藤伸泰, 青木圭子訳), シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社, 東京.
- [23] 宮下精二, 2020, 基幹講座物理学 統計力学, 東京図書株式会社, 東京.
- [24] 宮下精二, 今田正俊, 2019, 東京大学 工学教程 基礎系 物理学 統計力学 II, 丸善出版株式会社, 東京.
- [25] 矢野健太郎, 石原繁, 2013, 基礎解析学 (改訂版), 株式会社裳華房, 東京.
- [26] B. ツヴィーバッハ, 2013, 初級講座 弦理論《基礎編》(樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.