算数 小教程

――教育の脱商品化に向けて――

理論物理学のノートを公開中

http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/

第 I 部 (基礎編) へのまえがき

本稿は中学受験レベルの内容を含めた小学校の算数の「基礎」を，(時にやや高次の視点から) コンパクトにまとめたノートである．本稿の内容は凡庸であるが，その叙述のスタイルはおそらく，初学者には適していない[*1]．また第 I 部は算数のあらゆる話題を，余すことなく完全に網羅することを意図してはいない．さらに第 I 部は入試対策を想定して書かれてはいないことを，はじめに断っておく．特に受験に特有の「思考力を問う問題」という名の，事実上，背景知識がなければ解けない無理難題や，パズル要素の強いペダンティックな知的お遊びは，基本的にあえて扱わない[*2]．もちろん高尚な問題が解けるのは結構なことだが，誤解を恐れずに書けば，入試の難問・奇問が解けなくても，必ずしもその後の勉学に支障はない．したがって受験勉強は決して「誰もが乗り越えるべき試練」だとは言えない．(そもそも一般論として，他人に何かを強制することを正当化できる根拠など存在し得ない (付録 B.3)．) なお算数全体を大幅に簡縮する代わりに，他方で本稿の内容の理解に資する限りで，中学以降で学ぶ数学の知識を部分的に取り込むことは行った．最後に本稿には誤りや筆者の勘違いが潜んでいるかもしれないことも断っておく．

第 II 部 (問題集) へのまえがき

算数をミニマルにまとめるとは言ったものの，サブタイトルとして教育の脱商品化を掲げる以上，ある程度，典型的な問題を一通り本稿に収録し，無償でアクセス可能にしておくことが肝要だろう．と言うのも，そのような領域こそ，知識を囲い込んで人工的に希少価値を生み出し，利潤を上げることが行われている主戦場であると考えられるからである．そこで改めて第 II 部として，問題集を載せることを決断するに至った．それは第 I 部で扱いきれなかった話題を補完する意味もある．そこには半ば不本意ながら，第 I 部で意図的に排除すると宣言した，必ずしも教育的とは言えない入試特有の問題も多かれ少なかれ含まれる．そのせいでトリッキーな問題やクイズ的な問題が，言わば入試の定番メニューとして定着することを助長してしまうことを恐れる．(もっとも，それらは既に定番メニューとして定着してしまっているのである．) とは言え，基本的に問題は文献 [1] から抜粋し，適宜アレンジしたものであり，それらは入試問題の中では基本的な問題に属している．また第 I 部で取り上げた問題は第 II 部からは省き，重複はなるべく避けた．

■**記号**　よく用いられる記法として，ひとまず「$\therefore$ (故に)」「$\because$ (何故ならば)」「i.e. (すなわち)」「$\parallel$ (平行)」「$\perp$ (垂直)」を挙げておく．また「$a \equiv b$」と書けば，a を b とおく (b で定義する)，または b を a とおく，という意味になる (本稿ではこの表記はなるべく用いないが，読者がこれを用いるのは勝手である)．

[*1] もちろん，だからと言って初学者が読んではいけないという意味では決してない．

[*2] それらは適当な受験参考書等に譲る．そのような題材を取り扱うことは，基本事項のみを知りたいと考える読者に余計な負担を強いることにもなる．

目次

第 I 部

基礎編

1　代数

1.1　自然数の加法，乗法，累乗

ここでは Feynman の説明に沿って，初等代数を概観する [2, pp.294–296]．その際，我々はすでに整数とは何か，ゼロとは何か，ある数を 1 単位だけ増すというのはどういうことなのかということ等については既に知っているものとする．整数の性質を導き出すのに，集合論の公理にまでさかのぼることはしない[*3]．

0 より大きい整数 $1, 2, 3, \cdots$ を自然数という[*4]．ここでは自然数を文字 $a, b, c, \cdots$ で表す．

まず自然数の**加法** (**足し算**)，**乗法** (**掛け算**)，**累乗** (**ベキ乗・連続乗法**) を定義する：

加法　ある整数 a から出発して，1 単位ずつ b 回進んだときに達する数を $a + b$ と表す．
乗法　0 に a を b 回続けて加えて得られる数を a の b 倍といい，ab と表す ($a \times b$ や $a \cdot b$ と書くこともある)．
累乗　1 に a を b 回続けて乗じて (掛けて) 得られる数を a^b (a の b 乗) と表す (このとき b を指数と呼ぶ)．

これらの定義から，以下の関係が成り立つことが容易に分かる：

$$
\begin{array}{llll}
\text{(a)} & a + b = b + a, & \text{(b)} & a + (b + c) = (a + b) + c, \\
\text{(c)} & ab = ba, & \text{(d)} & a(b + c) = ab + ac, \\
\text{(e)} & (ab)c = a(bc), & \text{(f)} & (ab)^c = a^c b^c, \\
\text{(g)} & a^c b^c = a^{(b+c)}, & \text{(h)} & (a^b)^c = a^{(bc)}, \\
\text{(i)} & a + 0 = a, & \text{(j)} & a \cdot 1 = a, \\
\text{(k)} & a^1 = a. & &
\end{array}
\tag{1}
$$

これらの関係式を吟味する前に，表記の約束について確認しておく．まず 2 数 a, b が等しいとき $a = b$，等しくないとき $a \neq b$ と書く．また和 (足し算) と積 (掛け算) の混在する式では，基本的に積の計算を優先して行う．ただし括弧で囲われた計算がある場合，そちらを優先して行う．例えば式 (d) の左辺は先に和 $(b + c)$ を計算してから，それを a 倍することを表し，右辺は先に積 ab と ac を計算してから，それらを足すことを表す．括弧が入れ子になる場合には，内側から順に丸括弧 $(\cdots)$，中括弧 $\{\cdots\}$，大括弧 $[\cdots]$ を用いるのが一般的である．しかしこの約束は括弧が 4 重以上になった場合に曖昧さを生じ，厳密には適用されない．実際，全ての括弧を丸括弧 $(\cdots)$ で書いても良く，このときにも式の意味は明確に理解できる．

さて，上式 (1) の説明に移ろう．まず初めの関係 (a–d) については，図 1 から充分，直観的に納得できる．例えば (c) について，図 1 のように縦に a 個，横に b 個の碁石を敷き詰めると，碁石の総数は

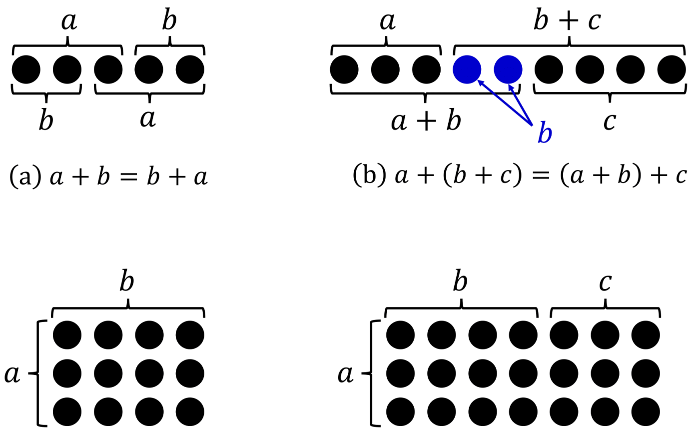
- 各列の碁石の個数 a に列の数 b を掛けても，
- 各行の碁石の個数 b に行の数 a を掛けても

得られることから，$ab = ba$ が成り立つ．同様に ab 個の碁石を高さ方向に c 段，積み上げれば，性質 (e) が成り立っていることが視覚的に把握できる．なお，

(a), (c) を交換法則，　　(b), (e) を結合法則，　　(d) を分配法則

[*3] 公理については付録 A を参照.
[*4] 0 を自然数に含める流儀もある.

という[*5][*6].



(a) $a+b=b+a$ (b) $a+(b+c)=(a+b)+c$

(c) $ab=ba$ (d) $a(b+c)=ab+ac$

図 1　式 (1) の性質 (a–d) の可視化

続く関係式

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{f}):\quad \underbrace{(ab)\times\cdots\times(ab)}_{c\text{ 個}}=\underbrace{(a\times\cdots\times a)}_{c\text{ 個}}\times\underbrace{(b\times\cdots\times b)}_{c\text{ 個}},\\
&(\mathrm{g}):\quad \underbrace{(a\times\cdots\times a)}_{b\text{ 個}}\times\underbrace{(a\times\cdots\times a)}_{c\text{ 個}}=\underbrace{(a\times\cdots\times a)}_{(b+c)\text{ 個}},\\
&(\mathrm{h}):\quad \overbrace{\underbrace{(a\times\cdots\times a)}_{b\text{ 個}}\times\cdots\times\underbrace{(a\times\cdots\times a)}_{b\text{ 個}}}^{c\text{ 個}}=\underbrace{(a\times\cdots\times a)}_{(bc)\text{ 個}}
\end{aligned}
$$

は指数法則と呼ばれ，交換法則 (c) と結合法則 (e) を繰り返し用いると導出できる．((g),(h) の導出には (e) だけを用いれば充分である．こうして式 (1) に書き並べた関係式は，すべてが独立というわけではない．) 残りの関係 (i–k) はほぼ自明であり，0 が和の，1 が積と累乗の単位元であることを意味している．

> 本当のことをいうと，ここの議論には連続性だとか順序づけだとかいうような他の二, 三の性質も仮定しなければならないのであるが，これらを定義するのは非常に難しい．それは厳密な理論に任せておくことにする [2, p.296].

note　以上の式 (1) の説明は，肩の指数がゼロにならない限り $a,b,c,\cdots$ をゼロとおいても妥当すると考えられる (0 乗の定義は 1.3.3 節を参照)．また $a\cdot 0=0$ である．

[*5] 実のところ，これらは法則というよりもむしろ定理にあたると考えられる (付録 A).
[*6] 括弧を外して式 (b),(e) の値をそれぞれ $a+b+c, abc$ と書いて良いことを，結合法則 (b),(e) 自身が保証している．

1.2　逆演算

加法，乗法，ベキ乗の逆演算を定義することもできる [2, p.296]．それは与えられた a, c に対して，方程式

$$a+b=c, \qquad ab=c, \qquad b^a=c, \qquad a^b=c$$

を満たす b を求める演算に他ならず，それぞれ順に**減法** (**引き算**)，**除法** (**割り算**)，**根**，**対数**と呼ぶ：

減法　$a+b=c$ を満たす b として，差 $b=c-a$ を定義する．右辺の計算 $c-a$ を，c から a を引く，という．

除法　$ab=c$ を満たす b として，比 $b=\frac{c}{a}$ を定義する．右辺 $\frac{c}{a}$ は c/a や $c \div a$ (c 割る a) とも書かれる．

注意　我々は自然数を考えているため，$a \neq 0$ である．もし $a=0$ であるとすると，どのような数 b を掛けても 0 になるため，$c \neq 0$ を得ることは不可能である．また $c=0$ に対しては b は不定となる．**このため 0 による割り算は定義されない**．実際，0 による除算は様々な矛盾を算術の体系に持ち込む．例えば任意の数 a に対する恒等式 $a \cdot 0 = 0$ の両辺を 0 で割ることを考える．この場合にも 1.3.2 節の式 (9) をはじめとする規則が成り立つことを要求して $0/0=1$ とすると，$a=1$ となるため，あらゆる数は (1 に) 等しいという不条理を生じる．

根　$b^a=c$ を満たす b として，c の a 乗根 $b=\sqrt[a]{c}$ を定義する．特に $\sqrt[2]{c}$ は c の平方根 (ルート) と呼ばれ，簡単に $\sqrt{c}$ と書かれる[*7]．

対数　$a^b=c$ を満たす b として，対数 $b=\log_a c$ を定義する[*8]．対数 $\log_a c$ において a を底，c を真数という．

逆演算の結果 b はもはや自然数となるとは限らない．この点については 1.3 節以降で改めて論じる．

簡単な例を挙げよう．まず $2^3=8$ という関係に着目する．すると

- 「どんな整数を 3 乗したら 8 になるか」という問の答は $\sqrt[3]{8}=2$ であり，
- 「8 を得るには 2 を何乗したらよいか」という問の答は $\log_2 8 = 3$ となる．

> この記号［log］は他のものにくらべて複雑であるが，それだからといって他の諸演算より高等だというわけではない．少なくとも整数の場合にはそうである．代数の講義では対数は終［わ］りの方で出てくるが，実際には，根に開くのと同じくらい簡単なものである; 対数は一つの代数方程式の別種の解だというだけのことである [2, p.296].

(ただし本稿では以降，対数を扱う予定はない．) 順演算と逆演算を以下にまとめておく：

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & \text{加法} \quad a+b=c, & \text{(a}'\text{)} & \text{減法} \quad b=c-a, \\ \text{(b)} & \text{乗法} \quad ab=c, & \text{(b}'\text{)} & \text{除法} \quad b=\frac{c}{a}, \\ \text{(c)} & \text{累乗} \quad b^a=c, & \text{(c}'\text{)} & \text{根} \quad b=\sqrt[a]{c}, \\ \text{(d)} & \text{ベキ} \quad a^b=c, & \text{(d}'\text{)} & \text{対数} \quad b=\log_a c. \end{array} \tag{2}$$

■移項について　減法の定義式 (2–a$'$):

$$b=c-a$$

は，1.3.1 節の式 (3):$a-a=0$ に注意すれば，もとの式 (2–a):$a+b=c$ の両辺から「a を引く」という共通の操作を行った結果と見なせる．

また除法の定義式 (2–b$'$):

$$b=\frac{c}{a}$$

[*7] ただし実数 $c>0$ に対して $\sqrt[a]{c}$ は正数として定義される．例えば代数方程式 $x^2=2$ は 2 解 $x=\pm\sqrt{2}$ を持ち，$\sqrt{2}>0$.

[*8] これは $a>0, a\neq 1$ かつ $c>0$ の場合にのみ定義される．

は，1.3.2 節の式 (9):$a/a=1$ 等に注意すれば，もとの式 (2–b):$ab=c$ の両辺に「a で割る」という共通の操作を施した結果と見なせる．

これらの式変形

$$a+b=c \ \Rightarrow \ b=c-a, \qquad ab=c \ \Rightarrow \ b=\frac{c}{a}$$

は機械的な操作としては，いずれも「a を右辺に移項する」と言われる．

同様に逆演算の式 (2–c$'$, d$'$) はそれぞれ，もとの式 (2–c, d) の両辺の a 乗根，または a を底とする対数をとった関係と見なせる．

1.3 抽象化と一般化 (整数，有理数，実数)

さて，式 (2) の逆演算の結果 b はもはや自然数となるとは限らない．そこで自然数の枠内にとどまらず，a, b, c を一般的な別種の数へと拡張しよう．その際の指針として，自然数の加法と乗法に対して成り立つ規則 (1),(2) はそのまま残しておいて，**新たな数も同じ規則に従わせる**ことを考える．言い換えれば我々は規則そのものを用いて，新たな数を定義するのである [2, pp.297–298].

1.3.1 負の整数

与えられた自然数 a に対し $a+b=0$ を満たす b は，式 (2) における減法の式 (a$'$) を適用すると

$$b=0-a$$

と書ける．右辺は普通，簡単に $-a$ と書く．こうして一連の負の整数 $-1,-2,-3,\cdots$ が定義される．これをもとの式に戻すと，

$$a+(-a)=0 \tag{3}$$

が得られる．これと規則 (1) と合わせると

$$\{a+(-b)\}+b=a+\{b+(-b)\}=a+0=a$$

であり，最左辺と最右辺を比較して再び式 (2–a$'$) を適用すると，

$$a+(-b)=a-b \tag{4}$$

が見出される．

次に乗法を調べる．上式 (3) の特例として $1+(-1)=0$ という関係式を考える．両辺に (-1) を掛けて規則 (1) と式 (4) を利用すると，$(-1)^2-1=0$ となる．ここで両辺に 1 を足し，規則 (1) と式 (3) を用いると，重要な公式

$$(-1)^2=1 \tag{5}$$

が得られる．また規則 (1) と式 (3) より，任意の自然数に対して

$$0=\{1+(-1)\}\times a=a+(-1)\times a$$

であり，最左辺と最右辺を比較して式 (2–a$'$) を適用すると，

$$(-1)\times a=-a \tag{6}$$

が見出される．これと上式 (5) を用いると $-(-a) = (-1)^2 \cdot a = a$ となる．よって我々がここまでに導いてきた関係，例えば式 (4) は，a や b が負の整数の場合でも意味を成す．

ここまで来れば，我々は次のような和 (差) や積の計算を実行できる．

$$
\begin{aligned}
&3-5 = -(5-3) = -2, \qquad (\text{あるいは } 3-5 = 3-(3-2) = (3-3)-2 = -2) \\
&(-2)\times 5 = -(2\times 5) = -10.
\end{aligned}
$$

本節の冒頭で予告したように，我々は自然数の加法と乗法と同じ規則を満たすように負の整数を定義した．このとき演算の記号の意味は，本来のそれとは変わっていることに注意する*9．

> 例えば -2 かける 5 というのは，実際に 5 を続けて -2 回加えることを意味するとはいえない．こういっても何の意味もなさない．しかしそれにもかかわらず，これらの規則に従えば，万事うまくいくのである [2, p.297].

1.3.2　有理数

除法の定義式 (2–b′) において，$b = \frac{c}{a}$ は自然数になるとは限らない (a, c を自然数に限定しても)．よってこれは一般に新たな数——**分数**——を定義していることになる．ここで a, c をそれぞれ分数 $\frac{c}{a}$ の分母と分子という．特に $b = 1$ とおくと，もとの式 (2–b) は

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \tag{7}$$

を与える．また除法の定義より直ちに $a/1 = a$ である．

あらかじめ分数に関する種々の計算規則を調べておこう．ひとまず引き続き $a, b, c, \cdots$ として，自然数を想定しても構わない．しかしながら公式の導出には規則 (1),(2) しか用いないから，$a, b, c, \cdots$ を負の整数や分数としても，得られた結果はそのまま成り立つことになる (分母がゼロでない限り)．

まず，有用な公式

$$\frac{ab}{cd} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a}{d} \cdot \frac{b}{c} \tag{8}$$

を証明できる．実際，第 1 の等号は分数もまた結合法則 (1–e):

$$ab = \left(\frac{a}{c} \cdot c\right) \cdot \left(\frac{b}{d} \cdot d\right) = \left(\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d}\right) \cdot (cd)$$

を満たすことを要求し，両辺を cd で割ると得られる．第 2 の等号は交換法則 (1–c) から理解される．

式 (8) の第 2 辺までに注目し，$b = c$ とおくと $\frac{a}{d} = a \cdot \frac{1}{d}$ が得られる．すると式 (7) は

$$\frac{a}{a} = 1 \tag{9}$$

と書き換えることもできる．

次に分数による除法を考える．式 (8)，式 (9) により $\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{bc}{bc} = 1$ であることに注意すると，

$$a = a \cdot \left(\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b}\right) = \left(a \cdot \frac{b}{c}\right) \cdot \frac{c}{b}$$

*9 これは通常の微分と同様に Leibniz 則が成り立つことを要求すると，任意の種類のテンソルに対する共変微分や Lie 微分が定まることを想起させる．

を得る．よって両辺を c/b で割ると

$$\frac{a}{c/b} = a \cdot \frac{b}{c} \tag{10}$$

が得られる．すなわち分数 c/b による割り算は，逆数 b/c を掛けることと等価である．(その特別な場合 $\frac{a}{d} = a \cdot \frac{1}{d}$ を既に式 (9) の直前で見た．)

分数 a/c は，a, c を負の整数としても有意味に定義できる．実際，式 (8) を負の整数に対しても適用し，以降 a, b を自然数とすると，分子が負の分数は

$$\frac{-a}{b} = \frac{(-1) \cdot a}{b} = (-1) \cdot \frac{a}{b} = -\frac{a}{b}$$

を意味することになる．ただし最右辺の $-(a/b)$ は a/b との和がゼロになる数として定義され，最後の等号は式 (6) が成り立つのと同じ理由による．また分母が負である分数についても，

$$(-a) \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) = (-1)^2 a \cdot \frac{b}{a} = b, \qquad \therefore \frac{b}{(-a)} = -\frac{b}{a}.$$

この式の両辺に (-1) を掛け，式 (6):$(-1)^2 = 1$ に注意すると，分母・分子がともに負の分数は

$$\frac{(-b)}{(-a)} = \frac{b}{a}$$

となる．これは (-1) による「約分」としても理解できる (後の式 (11) を参照).

今や我々は負の整数を含めた，任意の整数を分子・分母に持つ分数 a/b を扱うことができる (ただし分母 $b \neq 0$)．整数の比 a/b として表される数を**有理数**という[*10]．本節のはじめの方で指摘したように，我々が得た式 (8) などの公式は，$a, b, c, \cdots$ を有理数としても成り立つことになる (ただし分母 $\neq 0$).

式 (8)，式 (9) により，特に

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \tag{11}$$

となる．これは言わば左辺において分子と分母に共通の因子 c を“相殺”できることを意味しており，この式変形を**約分**という．上式 (11) はまた，2 つの分数が共通の分母を持つように書き換え，それらの和を計算する手法――**通分**――の基礎となる：

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cd}{db} = \frac{ad + bc}{bd}. \tag{12}$$

このように規則 (1),(2) が満たされることを仮定すれば，分数を足したり掛けたりすることに意味が生まれる．

■数直線 (直観との整合性)　ここまで我々は有理数とその演算規則を，機械的・抽象的に導いてきた．その結果を直観的に解釈するために，長さの概念を援用して[*11]，数直線を導入する．数直線とは 1 本の直線状の各点に，その位置を表す座標として数を割り当てたものである．これを用いると，有理数の大小関係は図 2 のように視覚的に整理できる．整数は単位長さ (= 1) おきに等間隔に並んでおり，図 2 において直線の右側ほど大きな数を表す．すると例えば 1/2 とは，それを 2 倍すると 1 になる数として定義されるから，原点 0 から 1 ま

[*10] 「有理数」は rational number の訳であり，比 (ratio) も持つ数というのが本来のおおよその語義と考えられる．したがって例えば“有比数”といった訳を充てる方が気が利いている．有理数は整数を含む．
[*11] ただし数学で扱う長さは現実のそれと違って，無次元量である．

での区間を 2 等分した位置に目盛られる[*12]．同様に考えると，それは 1/10 より大きい．また 7/3 は原点から右側に，長さ 1/3 を 7 回つなぎ合わせて到達する位置に目盛られる．さらに負の数 $(-a)$ は 0 から $a(>0)$ を引いた値に他ならないので，原点から左向きに長さ a だけ“戻った”位置に対応付けるのが自然である．したがって，それは原点に関して位置 a と対称な点に位置することになる．なお，任意の「実数」(数直線上の数 (1.3.5 節)) a に対して，原点からの距離

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

を a の**絶対値** (大きさ) という．

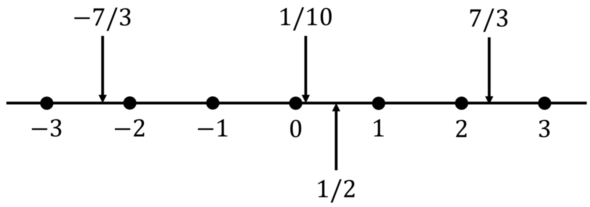


図 2　数直線と有理数

不等式　この辺りで不等式についても触れておくのが適切だろう．任意の実数 a, b に対して，b が a よりも大きい (すなわち a が b よりも小さい) ことを $b > a$ あるいは $a < b$ と書き表す．ここで不等号 $\gtrless$ を含む式を不等式という．b より小さい数 a は「b **未満**である」とも言われる (このとき $a \neq b$ であることに注意)．これに対し

- 「a は b よりも小さい」または「a は b に等しい」ことを「a は b **以下**である」といい，$a \leqq b$ で表す．
- 「b は a よりも大きい」または「b は a に等しい」ことを「b は a **以上**である」といい，$b \geqq a$ で表す．

★　これら 2 つは同値である．なお本稿では不等号 $\leqq, \geqq$ をそれぞれ $\leq, \geq$ と略記する．

ここで一般に言葉の定義として，「p または q」とは，命題 p, q の (両方が同時に成り立つ場合 (p かつ q) も含め)，少なくとも一方が成り立つことを主張する (3.6.2 節参照)．すると例えば $3 = 3$ は正しいので，$3 \geq 3$ もまた正しいことになる．こうして a 以上 (以下) の数には a 自身も含まれる．

不等式の変形では，特に実数 a, b, c に対し

$$a > b \text{ かつ } c < 0 \quad \Rightarrow \quad ac < bc,$$
$$a > b > 0 \quad \Rightarrow \quad (0 <)\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

となることに注意する．

以上を踏まえ，分数による割り算の公式 (10) を考える．この公式によると，例えば

$$2 \div \frac{3}{4} = 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

[*12] 原点 (origin) は 0 の代わりに，しばしば O (オー) や o (オミクロン) で表される．

となる．実際，図 3 から長さ 2 は，長さ 3/4 の $\left(2+\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{3}$ 倍となっていることが読み取れる．よってこの結果は理に適っている．もう 1 つの例として，通分の公式 (12) を用いた計算

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{4+3}{6}=\frac{7}{6}$$

を考える．これは実際に図 4 のように，1/6 を単位とすると，2/3 と 1/2 がそれぞれ 4 目盛りと 3 目盛りの長さに相当し，それ故，長さの和が $(1/6)\times(4+3)$ となることから納得できる．このように我々が得た公式は素朴な直観と整合した結果を与え，満足のいくものになっている．

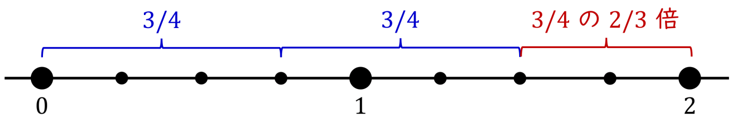


図 3　分数による割り算 $2\div\frac{3}{4}=2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$ の視覚的確認

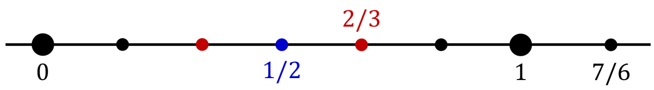


図 4　通分の計算 $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{4+3}{6}=\frac{7}{6}$ の視覚的確認

■比について　比 a/b を $a:b$ (a 対 b) と表記することもある．$a:b=a':b'$ は

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'} \tag{13}$$

を意味する．両辺に bb' を掛けて分母を払うと，$ab'=ba'$ が得られる．これは上式 (13) 両辺の対角線上の因子を“たすき掛け”した結果となっており，もとの記法 $a:b=a':b'$ では，外項 a,b' の積と内項 b,a' の積が等しくなることを意味する．また上式 (13) で対角線上の因子，例えば a と b' を入れ替えた式

$$\frac{b'}{b}=\frac{a'}{a} \tag{14}$$

も成り立つ．(式 (13) の両辺に b'/a を掛ければ証明できる．) この式変形 (13)→(14) は公式的に覚えておくのが便利である．ここで式 (14) の両辺の等しい値を r とおく．すると $a:b=a':b'$ という記法では，a' が a の r 倍ならば，b' も b の r 倍である，と見ることができる．ここで導入した表記を用いれば，3 つ以上の因子の比を表すこともできる．例えば

$$a:b:c=a':b':c' \quad\Rightarrow\quad \frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$$

である．

なお変数 x,y の比が一定値 $y/x=a$ をとるとき ($y=ax$)，y は x に **(正) 比例**すると言い，a を比例定数 (係数) と呼ぶ[*13]．このとき x と y の関係は xy 平面上において，図 5 のような原点を通る直線で表される．

[*13] ここで x,y は全ての実数値 (すなわち数直線上の全ての値) をとり得ると想定している．ただし $y/x=a$ と書いたときには分母 $x\neq 0$ である．

直線に沿って x 方向に $\varDelta x$ だけ進んだときの y 方向の変位 $\varDelta y$ と，$\varDelta x$ の比 $\varDelta y/\varDelta x = a$ を直線の傾きと呼ぶ．この直線を y 方向に b だけ平行移動した直線の方程式は

$$y = ax + b$$

であり，b は直線と y 軸の交点の座標 (y 切片という) に相当する．上式は

$$Ax + By = C$$

(ただし $B \neq 0$) という形に書き換えられる．ここで $B = 0$ とおけば y 軸に平行な直線 $x =$ (一定) が得られるので，この場合も含めて 1 次方程式は一般に直線を表すと言える*14．それを

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1 \qquad (x_0, y_0 \neq 0)$$

という形に書き換えられる場合 (x 軸と y 軸のいずれとも平行でない，原点を通らない直線に対応)，x 切片と y 切片はそれぞれ $x = x_0, y = y_0$ となることが見て取れる ($y = 0$ や $x = 0$ を代入してみよ)．最後に 2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る直線の方程式を考える (ただし $x_1 \neq x_2$ とする)．第 1 の点 (x_1, y_1) を座標原点とする座標 $x' = x - x_1, y' = y - y_1$ を導入すると，傾き $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ を用いて直線は $y' = ax'$ と表される．これをもとの座標で書けば，

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

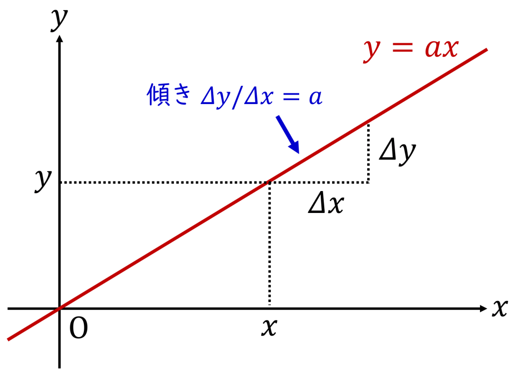


図 5　x と y の比例関係

■割合　全体に対して部分が占める数量の比率

$$\frac{(\text{部分の数量})}{(\text{全体の数量})}$$

を**割合**という．したがって第一義的には，割合は全体を 1 としていることになる．また上式を通じて，1 より大きい割合の値も定義される．

- 全体を 10 とした割合の表し方を**歩合**といい，
  1/10 を「1 割 (わり)」，1/100 を「1 部 (ぶ)」，1/1000 を「1 厘 (りん)」という単位で表す．
- 全体を 100 とする割合の表し方を**百分率**といい，% (パーセント) という単位を用いる．

例えば割合 0.237 は 2 割 3 部 7 厘であり，$0.237 \times 100 = 23.7$ %である．また質量 200g (グラム) の 23.7 %は $200\text{g} \times 0.237 = 47.4\text{g}$ にあたる．

*14 参考：この式はまた，ベクトル $\vec{N} = (A, B)$ を法線方向に持つ "超曲面" の式 $\vec{N} \cdot \vec{r} = C$ と見ることもできる ($\vec{r} = (x, y)$ は位置ベクトル)．

1.3.3　指数

n を自然数とする．またひとまず a を自然数として，a^0 や a^{-n} を考える．これらの量は，指数法則 (1–g) が成り立つように定義される．例えば $a^n \cdot a^0 = a^{n+0} = a^n$ より，

$$a^0 = 1$$

と定められる．すると $a^n \cdot a^{-n} = a^0 = 1$ より，

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

と決まる．また a^b における指数が有理数 $b = p/q$ の場合を考える．ここで p を整数，q を自然数としても一般性を失わない．このとき指数法則 (1–h) を適用すると $(a^{p/q})^q = a^p$ となるので，

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

と定義できる．

1.3.4　10 進法

日常においては数を表すのに，慣習的に **10 進法**が用いられる．10 進法では a_n, b_n を 0 以上 10 未満 (9 以下) の整数として，有理数

$$a_N 10^N + a_{N-1} 10^{N-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0 + b_1 10^{-1} + b_2 10^{-2} + \cdots + b_{M-1} 10^{-(M-1)} + b_M 10^{-M}$$

(ただし $a_N, b_M \neq 0$) を係数の並び (**10 進数**)

$$a_N\, a_{N-1}\, \cdots\, a_2\, a_1\, a_0\, .\, b_1\, b_2\, \cdots\, b_{M-1}\, b_M \tag{15}$$

として表記する．例えば

$$123.45 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 1 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100}$$

である．$b_M \neq 0$ と断ったが，もし全ての $b_n = 0$ であれば，上式 (15) は整数を表す．これに対しある $b_M \neq 0$ であれば，上式 (15) は**小数**と呼ばれる．この場合，$N = 0$ に対して $a_0 = 0$ であっても良い (0.24 など)．ここで a_n を 10^n の位，「.」を小数点，b_n を小数第 n 位という．この定義により特に $10^{-1} = 1/10 = 0.1$, $10^{-2} = 1/100 = 0.01, \mathrm{etc.}$ である．

N 進法　同様に 2 進数や 3 進数などを定義できる．3 進法では，各 3^n の位は $0, 1, 2$ の 3 通りの数値をとり得る．例えば 10 進数 197 を考えると，これを $3^4 = 81$ で割った商は 2, 余りは 35，35 を $3^3 = 27$ で割った商は 1, 余りは 6，8 を 3 で割った商は 2, 余りは 2 なので (1.4 節参照)，

$$197 = 2 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$$

と表される．よって 3 進法では

$$197 = 21022(3)$$

となる (右辺末尾の「(3)」は 3 進法での表示であることを表す)．感覚をつかむために，非負の整数を 3 進法で小さい順にいくらか書き出しておく．

$$0 = 0(3), \quad 1 = 1(3), \quad 2 = 2(3), \quad 3 = 10(3), \quad 4 = 11(3), \quad 5 = 12(3), \quad 6 = 20(3), \quad 7 = 21(3), \quad 8 = 22(3).$$

$9 = 100(3)$ 以降の 3 桁の 3 進数を網羅するには，0,1,2 のいずれかが 3 つ並んだ数を辞書に現れる順に書き出せば良い (ただし最高位の数 $\neq 0$).

注意　有理数であっても，有限の桁数の小数で表されるとは限らない．例えば小数部分が $\{2,7,3\}$ を際限なく繰り返す小数 (循環小数)

$$a = 0.273273273\cdots (= 0.\dot{2}7\dot{3} \text{ と書く})$$

を考えると，これは $1000a = 273.\dot{2}7\dot{3}$ と辺々差をとることにより

$$a = \frac{273}{999} = \frac{91}{333}$$

と表されるので，有理数である．

■四捨五入　10 進数の近似値を得る標準的な手法として，**四捨五入**が挙げられる．今，各位がとり得る値は 0 から 9 までの 10 個の整数であり，

- 前半 5 個の整数は　$0, \cdots, 4$
- 後半 5 個の整数は　$5, \cdots, 9$

であることに注目する[*15]．そこで 10 進数のある位の数が

- 4 以下であれば，その位以降の数を「切り捨て」て 0 とし，
- 5 以上であれば，1 つ上の位に 1 を足し (「切り上げ」)，その位以降の数を 0 とおいて，

10 進数の近似値とすることが考えられる．これを「(注目している位で) 四捨五入する」という．例えば 627.351 を 10 の位で四捨五入すると 600，小数第 2 位で四捨五入すると 627.4 となる．

■筆算　10 進数どうしの和や差を計算することを考える．有理数に対しても 1.1 節の規則 (1) が適用されることに注意すると，例えば

$$\begin{aligned} 16.7 \pm 2.53 =& (1 \cdot 10 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 0.1) \pm (2 \cdot 1 + 5 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.01) \\ =& 1 \cdot 10 + (6 \pm 2) \cdot 1 + (7 \pm 5) \cdot 0.1 + (0 \pm 1) \cdot 0.01 \end{aligned}$$

となるので (複号同順)，位の同じ数どうしの和や差を計算すればよい．この手続きは図 6 のような**筆算**の表記を導入すると，機械的に簡便に行うことができる．ただしある位において

- 和 (0 以上 18 以下である) が 2 桁となるときには，1 つ上の位に 1 を「繰り上げる」．
- 引かれる数が引く数より小さいときには，1 つ上の位から 1 を「繰り下げる」．

ここで繰り上がりや繰り下がりの影響を系統的に扱うには，小さい位の数から順に和や差を計算する方が適している．なお，このような筆算の手順は，3 つ以上の 10 進数の和の計算にも拡張し得る．

[*15] 数え間違いに注意せよ (3.3 節も参照)．1 から 10 までの整数に対しては，前半の整数は 1 から 5，後半の整数は 6 から 10 であるが，我々が考えているのは 0 から 9 までの整数である．

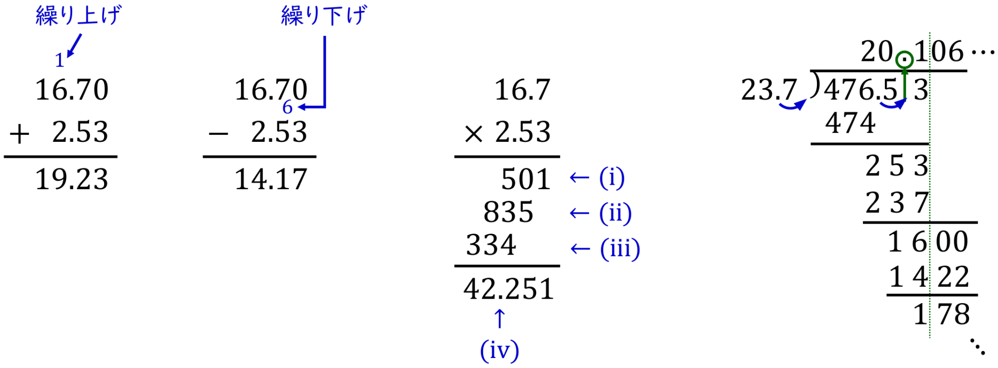


図 6　左から順に，足し算，引き算，掛け算，割り算の筆算

掛け算についても同様に規則 (1) を適用すると，例えば

$$
\begin{aligned}
16.7 \times 2.53 =& (167 \times 253) \times 10^{-(1+2)} \\
=& (3 + 5 \cdot 10 + 2 \cdot 10^2) \times (7 + 6 \cdot 10 + 1 \cdot 10^2) \times 10^{-(1+2)} \\
=& \{3 \times (7 + 6 \cdot 10 + 1 \cdot 10^2) && \text{(i)} \\
& + 10 \cdot 5 \times (7 + 6 \cdot 10 + 1 \cdot 10^2) && \text{(ii)} \\
& + 10^2 \cdot 2 \times (7 + 6 \cdot 10 + 1 \cdot 10^2)\} && \text{(iii)} \\
& \times 10^{-(1+2)} && \text{(iv)}
\end{aligned}
$$

となる．ここから掛け算を筆算に落とし込む方法が見えてくる．まず小数点を無視して積 167×253 を考える．最右辺の (i) は掛ける数の一の位の数 3 と 167 の積であり，繰り上がりに注意してその計算結果を図 6 の対応する行に書く[*16]．同様に十の位や百の位の数 5, 2 と 167 の積をすぐ下の対応する行に書く．ただし (ii),(iii) において式全体が 10 倍または 10^2 倍されていることに注意して，位を左に 1 つずつずらしてある．次いで足し算の筆算と同じ要領で (i),(ii),(iii) の数を足すと，167×253 の結果が求まる．最後に小数点を無視したことへの補償として，(iv) の因子を考える．この補正因子は最終的な答の小数点以下の桁数が，もとの 2 数の小数点以下の桁数の和 (今の場合，$1 + 2 = 3$) となるように，小数点を打てばよいことを意味している．

最後に，割り算を筆算で行うことを考える．系統的に話を進めるには，例えば与えられた割り算を，あらかじめ

$$
\frac{476.53}{23.7} = \frac{4765.3}{237} = 10^3 \times \frac{4.7653}{237} \tag{16}
$$

のように書き換えておく．次いで最右辺の分数において整数部分を分離し，その余りから 0.1 を括り出して得られる分数を対象として，改めて整数部分を分離するという操作を次々と繰り返せば，10 進数どうしの割り

[*16] 具体的には分配法則に基づいて計算すればよい (そのために $167 = 7 + 6 \cdot 10 + 1 \cdot 10^2$ と書いておいた)．最初に 3 と一の位の数 7 を掛けると 21 であり，2 を十の位に繰り上げて 1 を一の位に残す．次に 3 と十の位の数 6 を掛けた結果 18 を繰り上げた 2 と足して 20 とし，再び 2 を百の位に繰り上げて 0 を十の位に残す．最後に 3 と百の位の数 1 との積 3 を繰り上げた 2 と足し，百の位を 5 とする，といった具合である．なお図 6 では見た目が雑然とするのを防ぐため，繰り上がった数を掛け算の筆算中に書き留める作業は明示していない．

算を計算できる：

$$
\begin{aligned}
\frac{476.53}{23.7} = \cdots = 10\times\frac{476.53}{237} = 10\times\left(2+\frac{2.53}{237}\right) = 20+\cancel{10\times 0.1\times}\frac{25.3}{237}\\
=&20+0.1\times\frac{253}{237} = 20+0.1\times\left(1+\frac{16}{237}\right)\\
=&20+0.1+0.01\times\frac{160}{237} = 20+0.1+0.01\times\left(0+\frac{160}{237}\right)\\
=&20+0.1+0.001\times\frac{1600}{237} = 20+0.1+0.001\times\left(6+\frac{178}{237}\right)\\
=&20+0.1+0.006+\cdots.
\end{aligned}
$$

(つまり各段階において，より細かい目盛り $0.1, 0.01, \cdots$ を単位として，余りを測り直している．) この計算手順は図 6 のような筆算で表される．ただし上式 (16) の第 1 の等号では割る数が整数となるよう，分母と分子に 10 を最小限の回数 (ここでは 1 回) だけ乗じており，これは図 6 の青い矢印で示した小数点の移動に対応する．次いで割られる数の最も高い位から続く適当な数の並びを 10 進法の整数と見て，その商を推定する．そして実際に立てた商と割られる数の積を分配法則に基づいて計算し，引き算の筆算と同じ要領で余りを算出する．さらに割られる数の後続の位の数を“下ろして”新たな割られる数とし，改めて以上の手続きを繰り返せば良い．もしある段階で割られる数がゼロになれば，計算はそこで終了し，もとの割られる数は割る数で「割り切れた」ことになる．他方，手続きを途中で打ち切る場合，実際の余りを求めるにはもちろん，小数点の位置をもとに戻さなければならない (商の小数点の位置はそのままで良い)．

以上の筆算の手順は，任意の桁数の 10 進数に対しても直接的に一般化できる．

参考：速算 (基本形)　図 7 の例のように (ア) の 2 数かの 2 数が同じ，かつ (イ) 残りの 2 数の和が 10 である 2 桁どうしの積は，次の手順で求められる．

1. 10 の位の 2 数のに，(ア) の同じ数を加える．
2. 得られた数の後ろに 1 の位の 2 数の積をつける (ただし 1 の位の 2 数の積が 1 桁の数 a のときは $0a$ とする)．

何故ならば

$$A=(10a+b)(10c+d)=100ac+10(ad+bc)+bd$$

において，

① 一般に $a=c$，$b+d=10$ のとき

$$ad+bc=ad+ba=a(b+d)=10a, \qquad \therefore A=100(ac+a)+bd=100a(a+1)+bd.$$

② 一般に $a+c=10$，$b=d$ のとき

$$ad+bc=ab+bc=(a+c)b=10b, \qquad \therefore A=100(ac+b)+bd.$$

③ 一般に $a=b$，$c+d=10$ のとき

$$ad+bc=ad+ac=a(d+c)=10a, \qquad \therefore A=100(ac+a)+bd=100a(c+1)+bd.$$

④ 一般に $c=d$，$a+b=10$ のとき，③と同様に

$$A=100(ac+c)+bd=100c(a+1)+bd.$$

これはインド式計算と呼ばれる技法の一種であり，あくまで雑学として，本稿ではこの手の話題にはこれ以上立ち入らない．

(例) ① $\begin{array}{r} 47 \\ \times\, 43 \\ \hline 2021 \end{array}$ ② $\begin{array}{r} 74 \\ \times\, 34 \\ \hline 2516 \end{array}$ ③ $\begin{array}{r} 44 \\ \times\, 37 \\ \hline 1628 \end{array}$ ④ $\begin{array}{r} 73 \\ \times\, 44 \\ \hline 3212 \end{array}$

図 7　速算の例題

1.3.5　実数

10 進法における小数 (1.3.4 節) では数直線上の数を，長さ $1/10, 1/100, 1/1000\cdots$ ごとに刻んだ目盛りを用いて表していると言える．このとき一見すると，数直線上のあらゆる数——**実数**という——を 10 進法で，したがって有理数として表せそうである．しかしながら実数の中には，有理数として表せない数も無数に存在する．それらをまとめて**無理数**という．例えば $\sqrt{2}$ は無理数である．

証明　背理法にて証明する ($\sqrt{2}$ が有理数であると仮定して矛盾を導く)．$\sqrt{2}(\neq 0)$ が有理数ならば，その定義により互いに素な整数 $p, q(\neq 0)$ を用いて

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

と表される[17]．ところが上式の両辺を平方すると

$$2q^2 = p^2$$

が得られる．左辺は偶数だから右辺 p^2 も，したがって p 自身もまた偶数でなければならない．よって適当な整数 p' を用いて $p = 2p'$ と書ける．これを上式に代入すると $q^2 = 2p'^2$ となるので，先ほどと同じ理由で q も偶数であることになる．このとき p, q がともに偶数であることになり，p, q を互いに素としたことに矛盾する[18]．よって $\sqrt{2}$ は有理数でない，すなわち無理数である．

無理数が存在する以上，実数を数学的に厳密に定義することは難しい．しかしながら直観的には数直線上に連続的に分布している数の集まりとして，素朴に実数を理解することは充分可能であり，「実数とは何か」「連続とは何か」といった問題に頭を悩ませるには及ばない (そこに興味を持つ読者はおそらく，数学に向いている)．実際，我々は与えられた無理数にいくらでも近い有理数を求めることができる．例えば

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1.41421356\cdots, && \text{(一夜一夜に人見ごろ)} \\ \sqrt{3} &= 1.7320508\cdots, && \text{(人並みにおごれや)} \\ \sqrt{5} &= 2.2360679\cdots && \text{(富士山麓オーム鳴く)} \end{aligned}$$

である (読者の便宜のため，有名な語呂合わせを書き添えた)[19]．特に実数がはじめの規則 (1),(2) に従うことを要求すれば，これまでに導いてきた公式はそのまま実数に対しても適用できることになる．

ここまで，我々は自然数から始めて，数を実数にまで拡張してきた．実は実数もまた，複素数と呼ばれる種

[17] 「互いに素」については 1.4 節を参照．ここでは p, q が 1 以外に公約数を持たず，それ故に分数 p/q を (1 以外の) 共通の整数でこれ以上，約分できないことを断っている．そう仮定しても一般性を失わない．

[18] はじめに p, q を互いに素と仮定しなくとも，適当な整数 q' を用いて $q = 2q'$ と書けることから，$p/q = p'/q'$．同じ議論を繰り返せば，p/q は 2 で何度でも約分できることになる，という不条理を導ける．

[19] 納得のため，$(1.41)^2 < 2 < (1.42)^2$ などが成り立っていることを読者自ら確認されたい．

類の数の一部である (ただし本稿では複素数については扱わない)．まとめると，

$$
\text{複素数}\begin{cases}\text{実数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{自然数}\\ 0,\text{負の整数}\end{cases}\\ (\text{整数に等しくない})\ \text{分数}\end{cases}\\ \text{無理数}\end{cases}\\ \text{虚数}\end{cases}
$$

となる．

1.3.6　1 次方程式

前節までの知識を用いれば，読者は既に簡単な代数方程式を (実数の範囲で) 解くことができるはずである．初等的には，次のような未知数 x に関する 1 次方程式が解ければ充分である．

例題　次式を満たす x を求めよ．

$$\frac{7}{3}\left(\frac{1}{8}x+0.4\right)+\frac{1}{4}=2.$$

解　小数を $0.4=2/5$ のように分数に書き換え，与式を x について解くと

$$x=\left\{\left(2-\frac{1}{4}\right)\times\frac{3}{7}-\frac{2}{5}\right\}\times 8=\frac{14}{5}.$$

ここで注意事項をいくつか補足する．

まず具体的な数値計算を手際よく行うには，ある程度簡単な計算の結果――例えば 15 から 8 を引くと 7 になることや，9 以下の自然数どうしを掛けた結果 $4\times 5=20,\text{etc.}$ (いわゆる**九九**) など――を覚えておく必要がある．

次に，異なる答の表し方にも触れておく必要がある．$x=14/5$ のように分子の自然数が分母の自然数以上である分数を**仮分数**という．ところで 14 を 5 で割ったときの商は 2，余りは 4 であり (1.4 節参照)，これを

$$14\div 5=2\cdots 4$$

と書く．対応して分数 14/5 も整数部分を分離して

$$\frac{14}{5}=2+\frac{4}{5}$$

と書ける．初等的にはしばしば右辺を $2\frac{4}{5}$ のように表記する．このような記法を**帯分数**という[*20]．

最後に計算ミスについての私見を述べる．思うに計算ミスというのは，見かけと違ってそれほど初歩的な問題ではない．確かに計算の正確さを鍛えることはできないとまでは言わないが，ひたすら量をこなせば「計算力」(速さや正確さ) が身に付くというのは，やや素朴な発想であるように思われる．そのような訓練から得られる効果は，控えめに言っても限られている．そこで計算ミスを不可避なものと受け入れた上で，計算を間違ったときにどのようにすれば自分の間違いに気付けるかと考える方がより建設的となる．自分の得た結果を理解・納得する意味でも，答を吟味することは重要である (特に物理では次元のチェックが有用である)．ところが結果の吟味というのは，ときに考えている対象についての直観など学問に対する深い理解を必要とするよ

[*20] 帯分数 $2\frac{4}{5}$ は外見上，$2\times\frac{4}{5}$ と混同される恐れがある．どちらの意味で用いているかは，文脈で判断するしかない．

うな，高次の能力ではなかろうか．そうであるならば「計算力が身に付くまで先に進めない」と言うのは逆で，一生付きまとうであろうミスを補完するためにも速く先に進んだ方が良い．入試に関して言えば，しばしば冒頭に登場する単純な計算問題は，多少時間をかけてでも着実に取り組んだ方が得策と考える．焦ったところで，大した時短にはならない．

1.4　整数・倍数・約数

ここで整数について再論する．

整除の一意性　a を整数，b を 0 でない整数とすれば，

$$a = bq + r, \qquad 0 \leq r < |b| \tag{17}$$

を満たす整数の組 (q, r) がただ 1 つ定まる．(このことは具体例を通じて直観できるが，下記にて厳密な証明を与える．その前に用語の説明などを済ませておこう．)

このとき q, r をそれぞれ，b を a で割った**商**と**余り** (**剰余**) という．a や b が負の整数であっても，以上の定義が適用されることに注意しよう．例えば $62, -39, -56$ を -7 で割ったときの商 q と余り r はそれぞれ，

$$\begin{aligned}
62 &= (-7) \times (-8) + 6, \quad 0 \leq 6 < |-7| \quad \text{より} \quad (q, r) = (-8, 6), \\
-39 &= (-7) \times 6 + 3, \quad 0 \leq 3 < |-7| \quad \text{より} \quad (q, r) = (6, 3), \\
-56 &= (-7) \times 8 + 0, \quad 0 \leq 0 < |-7| \quad \text{より} \quad (q, r) = (8, 0)
\end{aligned}$$

となる．

特に余りが $r = 0$ であり，それ故

$$a = bq, \qquad b \neq 0$$

の関係が成り立つとき，「a は b で割り切れる」「a は b の**倍数**である」「b は a の**約数**である」などという[*21]．

整数 $a, b, \cdots$ に共通な約数をそれらの数の**公約数**という．例えば $12, 18$ では，$1, 2, 3, 6$ の他に，負の数 $-1, -2, -3, -6$ も公約数である．整数 $a, b, \cdots$ の中に 0 でないものがあれば，[その数の約数は有限個なので] これらの公約数は有限個だから，その中に最大なものがある．これを $a, b, \cdots$ の**最大公約数**という．それを $(a, b, \cdots)$ で表すことにすると，例えば

$$(15, 6) = 3, \qquad (-15, 6) = 3, \qquad (28, 35) = 7, \qquad (-28, -35) = 7$$

である．なお，最大公約数は常に正の数であることにも注意せよ．特に 2 つの整数 a, b が 0 でなく，しかも $(a, b) = 1$ のとき，a, b は**互いに素**であるという．

いくつかの整数 $a, b, \cdots$ の共通な倍数を，それらの数の**公倍数**という．例えば $-6, 4$ の公倍数は $0, \pm 12, \pm 24, \pm 36$ である．$a, b, \cdots$ のいずれも 0 でなければ，それらの公倍数のうち正のものについて見ると，それらの集合は自然数の部分集合で，空ではないから，最小なものが存在する．それを $a, b, \cdots$ の**最小公倍数**といい，$\{a, b, \cdots\}$ で表すことにする．最小公倍数も正の数である．例えば，

$$\{-4, 6\} = 12, \qquad \{12, -18, -30\} = 180.$$

[*21] このことを $b|a$ で表す．例えば

$$3|12, \quad -5|15, \quad -4|-12, \quad 7|0, \quad -3|0.$$

最後の 2 つの例について，定義より 0 はあらゆる整数の倍数である．

整除の一意性の証明　ここで予告通り，上式 (17) を満たす整数 q, r がただ 1 組存在することを示す．

まず式 (17) を満たす整数 q, r が存在することを示す．b の倍数を小さい順に並べると

$$\begin{aligned} &b > 0\text{ のとき} \qquad \cdots,\ -2b,\ -b,\ 0,\ b,\ 2b,\ \cdots \\ &b < 0\text{ のとき} \qquad \cdots,\ 2b,\ b,\ 0,\ -b,\ -2b,\ \cdots \end{aligned}$$

となるから，

$$b > 0\text{ のときは } qb \leq a < (q+1)b, \qquad b < 0\text{ のときは } qb \leq a < (q-1)b$$

となる整数 q が定まる．このとき $r = a - qb$ とおくと，$b > 0$ ならば $0 \leq r < b$，$b < 0$ ならば $0 \leq r < -b$ となるから，q, r は式 (17) を満たす．

次に，式 (17) を満たす q, r はただ 1 組だけであることを示す．今，

$$a = bq + r = bq' + r' \qquad (0 \leq r < |b|,\ 0 \leq r' \leq |b'|)$$

とすると

$$b(q - q') = r' - r \tag{18}$$

より $r' - r$ は b の倍数で，$-|b| < r' - r < |b|$ だから $r' - r = 0$ となる．このとき式 (18) より $q' - q = 0$ であるから，$q = q'$，$r = r'$．よって式 (17) を満たす q, r は 1 組ある．

問題　1 パック 16 個入りのタコ焼きを 3 人家族で 3 等分するには，少なくともタコ焼きを何パック買う必要があるか．(1 個のタコ焼きをそれ以上，分割することはしない．)

解　16 は 3 を約数に含まないから，パック数が 3 の倍数でなければならない．よって最小で 3 パック．

■素数と素因数分解　1 より大きい自然数のうち，1 とそれ自身以外に約数を持たない自然数を**素数**といい，小さい順に $2, 3, 5, 7, 11, 13, \cdots$ と続いてゆく (1 を含まないことに注意)．また与えられた自然数の約数のうち，素数であるものを (その自然数の) **素因数**といい，自然数を素因数の積で表すことを**素因数分解**という．例えば 11880 を素因数分解すると，

$$11880 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$$

となる[*22]．

1.4.1　最大公約数の求め方

与えられた自然数の最大公約数を系統的に求めるには，素因数分解が有用である．例えば 3 つの自然数 $3960, 3780, 2940$ をそれぞれ素因数分解すると

$$\begin{cases} 11880 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 = (2^2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 3^2 \cdot 11), \\ 102060 = 2^2 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7 = (2^2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot (3^5 \cdot 7), \\ 2940 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 = (2^2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 7^2) \end{cases} \tag{19}$$

となるので，これらの最大公約数は $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ であることが見て取れる．以上の手続きは図 8 のような図式――いわゆる**はしご算 (連除法)** ――を用いると，効率的に行うことができる．すなわち与えられた数を共通の素因数で割っていき，最終的に商が共通の素因数を持たなくなったとき，図 8 の色を付けた，左側に並んでいる素因数の積が求める最大公約数となる．(ただし，はしご算を利用する際には，必ずしも素因数を用いて割り算を行う必要はない．例えば今の例では，3 つの整数がいずれも 10 の倍数であることが容易に分かる．そこでいきなり 3 つの整数を公約数 10 で割っても，同じ図式を適用できることは明らかである．)

[*22] 小さい素数から始めて，与えられた自然数を 2 で何回割り切れるか，その商を 3 で何回割り切れるか，などを順に試せば良い．

図 8　はしご算と最大公約数

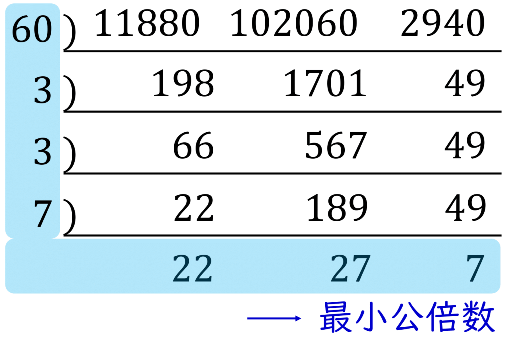


図 9　はしご算と最小公倍数

■Euclid の互除法　最大公約数を求める今 1 つの手法として，**Euclid の互除法**が有名である．これは次の事実に基づいている．

2 つの自然数 $a, b (a \geq b)$ について，a の b による剰余を r とすると，a と b との最大公約数 (a, b) は b と r の最大公約数 (b, r) に等しいという性質が成り立つ．

証明　商を q として

$$a = bq + r$$

と書ける．ここで a, b は (a, b) の倍数なので，上式より r も (a, b) の倍数である．よって (a, b) は b と r の公約数となるから，最大公約数 (b, r) 以下である：

$$(a, b) \leq (b, r).$$

他方 b, r は (b, r) の倍数なので，冒頭の式より a も (b, r) の倍数である．よって (b, r) は a と b の公約数となるから，最大公約数 (a, b) 以下である：

$$(b, r) \leq (a, b).$$

以上 2 つの不等式が同時に成り立つから，$(a, b) = (b, r)$．

この性質を利用して，b を r で割った剰余，除数 r をその剰余で割った剰余，などと剰余を求める計算を逐次繰り返すと，剰余が 0 になったときの除数が a と b との最大公約数となる．例えば 11880 と 2940 の最大公約数は

$$(11880, 2940) = (2940, 120) = (120, 60) = 60$$

より，60 と求まる[*23]．

1.4.2　最小公倍数の求め方

ある程度簡単な数，例えば 4 と 6 の最小公倍数は，小さい順に各々の倍数 $4, 8, 12, \cdots$ と $6, 12, \cdots$ を思い浮かべることで，12 と分かる．再び式 (19) の例を用いて説明すると，一般には自然数の最小公倍数は各素因

[*23] 最後の等号では 120 が 60 で割り切れるため，それらの最大公約数が $(120, 60) = 60$ と分かる．律儀に書けば

$$(120, 60) = (60, 0) = 60.$$

実際 60 の最大の約数は 60 であり，またあらゆる整数は 0 の約数だから，60 と 0 の最大公約数は $(60, 0) = 60$ である．得られた結果が正しいことは，冒頭の素因数分解 (19) からも改めて確認できる．

数の指数の最大値を拾って，

$$\{11880, 102060, 2940\} = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^1 \cdot 7^2 \cdot 11^1 (= 15717240)$$

と求めることができる．

■参考：はしご算と最小公倍数　ここで最小公倍数をはしご算で求める方法に言及しておく．ただし最小公倍数を求めるには素因数分解を利用すれば充分であり，無理してはしご算を利用する必要はない．実際，以下のはしご算の説明は形式的に載せているに過ぎない．

さて，はしご算で N 個の自然数の最小公倍数を求めるには，図 9 のようにまず最大公約数を求めるのと同じ手順で，除算を繰り返す．次いで得られた商のうちの適当な $n = 2, \cdots, N-1$ 個の数を，その公約数 $(\neq 1)$ で割る．n 個の数のすぐ下に得られた商を書き，他の数はそのまま下におろす．どの 2 対の数も公約数 $(\neq 1)$ を持たなくなるまで，この操作を繰り返す．このとき，図 9 で色を付けた L 字型の部分に並んだ数の積が求める最小公倍数である．

実際，これを素因数分解の具体例 (19) と比較すると，ある程度一般的な事情を推察できる．式 (19) の 3 つの数から最大公約数 60 を括り出すと，これらの最小公倍数を求めるには 60 に残りの因子として

$$2 \times 3^5 \times 7^2 \times 11$$

を乗じなければならない．ところが N 個の自然数では最大公約数を除くと，残りの素因数は $n = 2, \cdots, N-1$ 個の数だけに共通の素因数と，1 つの数にのみ含まれる素因数に分類される (N 個の数の全てに共通して含まれている素因数は，既に最大公約数として考慮済みである)．我々の例では残りの素因数は 2,3,7,11 の 4 種類であり，1 種類目の素因数は 3 と 7，2 種類目の素因数は 2 と 11 である．はしご算では 1 種類目の素因数の適当なベキを，重複のないよう，図式の左側の列に除数として巧妙に括り出していることになる．我々の例では

$$2 \times 3^5 \times 7^2 \times 11 = \underbrace{3^2 \times 7}_{\text{左側}} \times \underbrace{2 \times 3^3 \times 7 \times 11}_{\text{最下行}}.$$

特に 2 つの自然数 a, b に対しては，はしご算は $a = (a,b)a', b = (a,b)b'$ と表して，最小公倍数を

$$\{a, b\} = (a,b)a'b'$$

で与えることと等価である．

■参考：倍数の求め方

2 の倍数　1 の位が 2 の倍数 (偶数) であること．

$$100a + 10b + c = 2(50a + 5b) + c.$$

3 の倍数　各位の数の和が 3 の倍数であること．例；$x = 1456863 \ \rightarrow\ 1+4+5+6+8+6+3 = 33$ より x は 3 の倍数．

$$100a + 10b + c = (99+1)a + (9+1)b + c = 3(33a + 3b) + (a + b + c).$$

4 の倍数　下 2 桁の数が 4 の倍数であること．例；$x = 1456883 \ \rightarrow$ 下 2 桁の数 $y = 63$ は 4 の倍数でないから，x も 4 の倍数でない．

$$100a + 10b + c = 4 \times 25a + 10b + c.$$

5 の倍数　1 の位の数が 0 か 5 であること．

6 の倍数　各位の数の和が 3 の倍数で，なおかつ 1 の位が偶数であること．例;$x = 1456863 \ \rightarrow\ 1+4+5+6+8+6+3 = 33$ となり 3 の倍数であるが，偶数ではないので x は 6 の倍数ではない．6 の倍数は 2 の倍数かつ 3 の倍数であることから明らか．

7 の倍数　末位から 3 桁ごとに区切り，左端の区画を最初の区画とするとき，(奇数の区画の総和)$-$(偶数の区画の総和) が 7 の倍数であること．例；$x = 35123473 \ \rightarrow\ 35|123|473$ と区切ると，奇数の区画の総和 $= 35 + 473 = 508$，偶数の区画の和 $= 123$，$508 - 123 = 385$ は 7 の倍数なので x は 7 の倍数．

$$\begin{aligned}
&100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + f \\
=&1000(100a + 10b + c) + (100d + 10e + f) \\
=&\underbrace{143 \times 7}_{1001}(100a + 10b + c) - (100a + 10b + c) + (100d + 10e + f).
\end{aligned}$$

8 の倍数　下 3 桁が 000 か，8 の倍数であること．例；$x = 1456863 \ \to 863$ は 8 の倍数ではないので，x も 8 の倍数ではない．

$$10000a + 1000b + 100c + 10d + e = 1000(10a + b) + 100c + 10d + e.$$

9 の倍数　各位の数の和が 9 の倍数であること．例；$x = 1456803 \ \to \ 1 + 4 + 5 + 6 + 8 + 0 + 3 = 27$ より x は 9 の倍数．

$$100a + 10b + c = (99 + 1)a + (9 + 1)b + c = 9(11a + b) + a + b + c.$$

10 の倍数　1 の位の数が 0 であること．

11 の倍数　末位から奇数番目の数の和と，偶数番目の数の和の差が 11 の倍数であること．例：$x = 123456707 \ \to$ 123456707 の奇数番目の数の和 $= 1 + 3 + 5 + 7 + 7 = 23$，偶数番目の数の和 $= 2 + 4 + 6 + 0 = 12$，$23 - 12 = 11$ なので x は 11 の倍数．

$$\begin{aligned}
&10000a + 1000b + 100c + 10d + e \\
=&(10000a + 100c + e) + (1000b + 10d) \\
=&11(909a + 9c + e) + 11(91b + d) + (a + c + e) - (b + d).
\end{aligned}$$

13 の倍数　末位から 3 桁ごとに区切り，左の区画を最初の区画とするとき，奇数の区の総和 − 偶数の区画の和が 13 の倍数であること．例：$x = 35123473 \ \to \ 35|123|473$ と区切ると，奇数の区画の総和 $= 35 + 473 = 508$，偶数の区画の総和 $= 123$，$508 - 123 = 386$ は 13 の倍数ではないので x は 13 の倍数ではない．

$$\begin{aligned}
&100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + f \\
=&1000(100a + 10b + c) + (100d + 10e + f) \\
=&\underbrace{77 \times 13}_{1001}(100a + 10b + c) - (100a + 10b + c) + (100d + 10e + f).
\end{aligned}$$

2　幾何

2.1　角度

同一平面上で 2 つの直線が交わって作られる角の大きさを角度という．角度は (自然科学においても) 無次元量であるが，その主な測り方には度数法と弧度法の 2 通りの流儀があり，それぞれにおいて異なる単位が用いられる．

- 度数法では角度の単位に $^\circ$ (度) を用い，1 周を 360° と定める．
  - 半周，すなわち直線の片側の角度は 180° であり，その半分 90° を直角という．
- 弧度法では角度の単位に rad (ラジアン) を用い，1 周を 2π[rad] と定める (π は円周率)[*24]．

2.1.1　対頂角，同位角，錯角

図 10 のように 2 本の平行な直線 l_1, l_2 に，第 3 の直線 l_3 が交わって作られる角度を考える．このとき

A と C を**対頂角**，　A と D を**同位角**，　C と D を**錯角**

という．

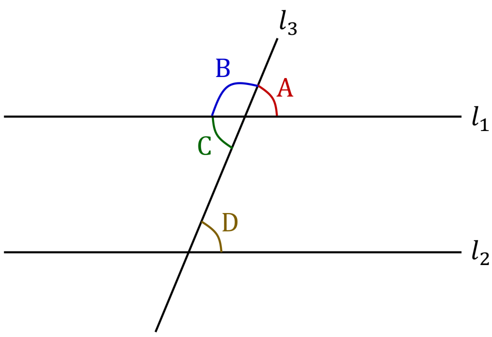


図 10　対頂角，同位角，錯角

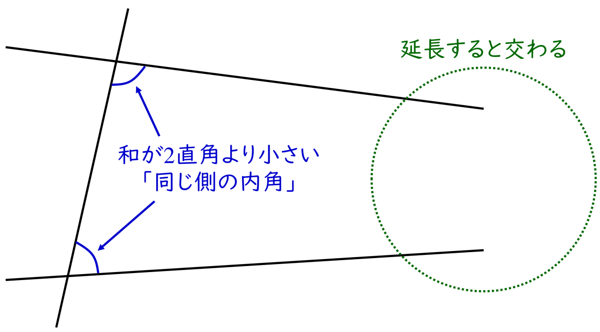


図 11　Euclid 幾何学の第 5 公準について

まず対頂角 A,C は等しい．これは直観的には，蝶の翅を閉じるように A と C を重ねられることから納得できる．実際，

$$\mathrm{A} = 180^\circ - \mathrm{B} = \mathrm{C}.$$

また同位角 A,D は等しい．これは実のところ，Euclid 幾何学の次の公理 (第 5 公準) とほぼ等価である (図 11 を併せて参照)[*25]．

[*24] 単位円 (半径 1 の円) の円周の長さは 2π である (2.3.5 節)．よって弧度法での角度は，2 直線の交点を中心とする単位円から，2 直線が切り取る円弧の長さであると言うこともできる．このような見方は，通常の角度 (平面角) の自然な一般化として，立体角の概念を理解するのに有用である．立体角とは 3 次元空間において，ある定点から見た方向の範囲を表す概念であり，考えている方向範囲が定点を中心とする単位球から切り取る球面上の面積として定義される．

[*25] 公理については付録 A を参照．この公理は通常の幾何学 (Euclid 幾何学) を他の非 Euclid 幾何学 (球面上の幾何学など) と区別して定義付ける役割をしており，それ故，公理として受け容れるしかない．

直線が 2 直線と交わるとき，同じ側の内角の和が 2 直角より小さい場合，その 2 直線が限りなく延長されたとき，内角の和が 2 直角より小さい側で交わる．

実際 A(= C) ≷ D を仮定すると，上記の公理より l_1, l_2 は遠方で交点を持つことになり，l_1, l_2 が平行であることに矛盾する．こうして背理的に A = D が示される．

さらにこのとき C は対頂角 A に等しく，また角 A は同位角 D に等しいことから，錯角 C,D も互いに等しいことになる．

注意　同位角と錯角は l_1, l_2 が平行でない場合にも定義できる．ただしその場合にはもはや，同位角や錯角が等しいとは言えない．

2.1.2　多角形の内角の和，外角の和

$n(\geq 3)$ 本の辺で囲まれた平面図形を n 角形という［ただし隣接する辺は平行でない］．

まず，任意の三角形の内角の和は 180° である．

証明　図 12 のように与えられた △ABC の頂点 A を通り，辺 BC に平行な直線 l を引く．そして ∠B と ∠C をそれぞれ錯角に移すと，三角形の内角は l の片側に集まるため，それらの和は 180° となる．

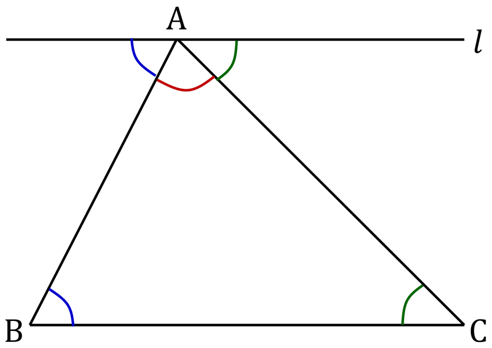


図 12　三角形の内角の和が 180° であることの証明

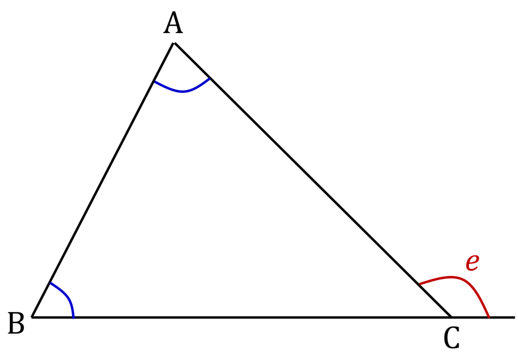


図 13　外角定理

ここから直ちに任意の三角形 ABC に対して，∠A と ∠B の和は頂点 C における外角 e に等しいことが分かる (**外角定理**，図 13 参照)：

$$\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{B} = 180^\circ - \angle \mathrm{C} = e.$$

次に一般の $n(\geq 3)$ 角形の内角や外角の和を考える．図 14 のように多角形の辺に沿って与えた反時計回りの向きに従い，各頂点において辺を延長する．次いでそれらを始線として，反時計回りを正とした各頂点の外角を定義する (図 14 の青い角)．このとき始線の向きは多角形の頂点をめぐると，1 周してもとに戻るので，

$$(\text{外角の和}) = 360^\circ$$

であることが分かる．また各頂点での内角は，その頂点から射出する辺を始線とし，反時計回りを正として測った，頂点に入射する辺の方位角にあたる (図 14 の緑の角)．各々の外角との和は 180° なので，

$$180^\circ \times n = \{(\text{外角}) + (\text{内角})\} \text{ の和} = 360^\circ + (\text{内角の和}).$$

ここから公式

$$(\text{内角の和}) = 180^\circ \times n - 360^\circ = 180^\circ \times (n-2) \tag{20}$$

が得られる．以上の議論は**凹多角形** (すなわち内角が 180° よりも大きい (それ故，内側に凹んでいる) 頂点を少なくとも 1 つ持つ多角形) **にも適用できる．**

図 15 のように凸多角形に対しては，外角の和が 360° であることは見やすい．また図 15 のように 1 つの頂点から (両隣を除く) 他の頂点に向けて対角線を引けば，凸 n 角形を $(n-2)$ 個の三角形に分割できることから，内角の和の公式 (20) であることも容易く理解できる[*26]．

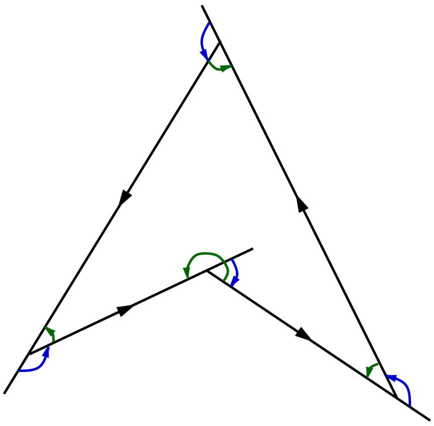


図 14　(凹) 多角形の内角と外角

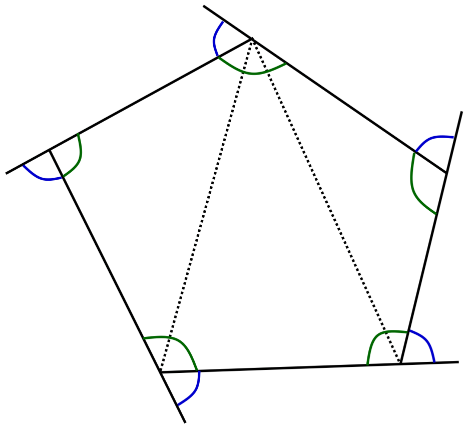


図 15　凸多角形の内角と外角

2.2　合同と相似

2.2.1　合同

大きさと形が全く同じであり，それ故，互いに重ね合わせることのできる 2 つの図形 A,B は**合同**であると言われ，A≡B と表される．

以下の条件のいずれかを満たす 2 つの三角形は，互いに合同である (この辺りは直観的に認めて良い)．

- 「三辺相等」(対応する 3 辺の長さが等しい)
- 「二辺夾角相等」(対応する 2 辺の長さとその間の角が等しい)
- 「一辺両端角相等」(1 辺の長さとその両端の対応する角が等しい)

また 2 つの**直角三角形**では[*27]，斜辺ともう 1 辺が等しければ合同である．(実際このとき 2.3.4 節の三平方の定理により，残りの 1 辺も等しいことになり，三辺相等または二辺夾角相等に帰着する．)

三角形の合同条件を踏まえて，基本的な平面図形に関するいくつかの性質を引き出すことができる．

■**平行四辺形**　2 組の向かい合う辺が互いに平行である四角形を**平行四辺形**という．このとき平行四辺形の向かい合う辺の長さは等しい．

[*26] よって公式を思い出すには，簡単な場合として凸多角形を調べれば良い．また凹多角形を含めた一般論を逆にたどって，内角の和の公式 (20) から外角の和が 360° であることを説明することもできる．

[*27] 1 つの内角が直角である三角形を直角三角形という．その 90° の角に向かい合う辺を直角三角形の斜辺という．

証明　与えられた平行四辺形 ABCD に対して，錯角 $\angle$BAC と $\angle$DCA，$\angle$ACB と $\angle$CAD は等しい (図 16 参照)．また $\triangle$ABC と $\triangle$CDA は共通の AC を持つので，二辺夾角相等だから，$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{CDA}$ である[*28]．よって，

$$\mathrm{AB} = \mathrm{CD}, \qquad \mathrm{BC} = \mathrm{DA}.$$

特に

- $\angle\mathrm{A} = 90^\circ$ である (したがって 4 つの角が全て直角である) 平行四辺形を**長方形**という．
- AB $=$ BC である (したがって 4 辺が全て等しい) 平行四辺形を**菱形** (**ひしがた**) という．
- 等価的に正方形は 4 辺の等しい長方形を**正方形**という．正方形は長方形かつ菱形であることになる．

以上，図 18 を参照．

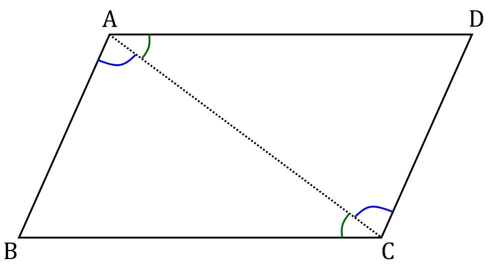


図 16　平行四辺形

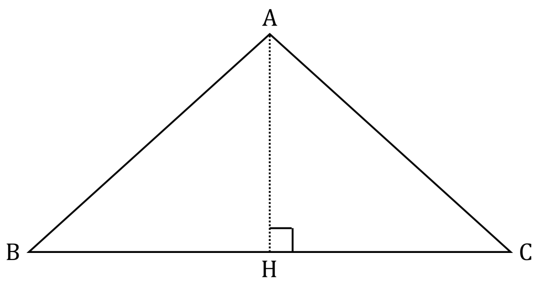


図 17　二等辺三角形

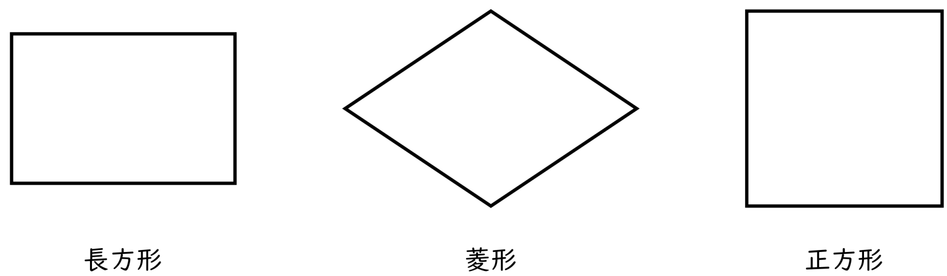


図 18　平行四辺形の特別な場合

■二等辺三角形　2 辺の長さが等しい三角形を**二等辺三角形**という．AB $=$ AC を満たす二等辺三角形の $\angle$B と $\angle$C は等しい (図 17 参照)．

証明　頂点 A から底辺 BC に下ろした垂線の足を H とすると，直角三角形 ABH,ACH は辺 AH を共有し，また AB $=$ AC なので，$\triangle\mathrm{ABH} \equiv \triangle\mathrm{ACH}$ が成り立つ．よって $\angle\mathrm{ABH} = \angle\mathrm{ACH}$ である．

[*28] この書き方において，一方の三角形の頂点 A,B,C がそれぞれ順に，もう一方の三角形の頂点 C,D,A に対応することが含意されている．

特に 3 辺の長さが全て等しい三角形を**正三角形**という[*29]．上の結果より，正三角形の 3 つの角はすべて等しく，$180°/3 = 60°$ である．

2.2.2　相似

ある図形を適当な倍率で拡大 (ないし縮小) して得られる図形は，もとの図形と**相似**であると言われる．
以下の条件のいずれかを満たす 2 つの三角形は，互いに相似である (この辺りは直観的に認めて良い)．

- 対応する 3 辺の比が全て等しい
- 対応する 2 辺の比と，その間の角がそれぞれ等しい
- 対応する 2 組の角がそれぞれ等しい

これらは 2.2.1 節に掲げた三角形の合同条件とよく似ている．相似な三角形の例を図 19 に示す．さらに 1 つの鋭角を共有する直角三角形は互いに相似である．

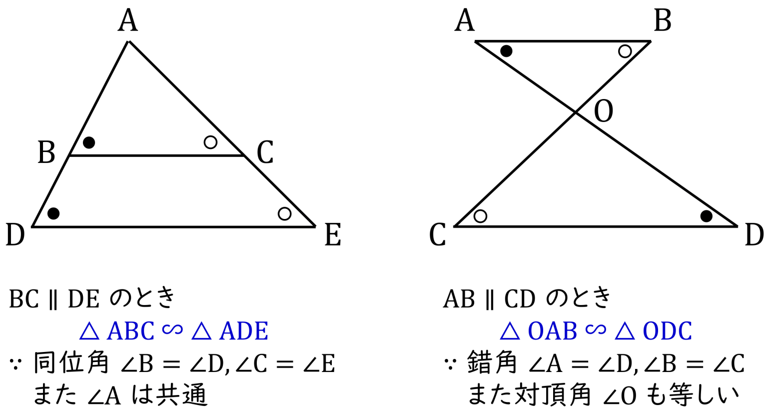


図 19　相似な三角形の例．記号「∥」は平行を，「∽」は相似を表す．例えば △ABC ∽ △ADE という書き方において，一方の三角形の頂点 A,B,C がそれぞれ順に，もう一方の三角形の頂点 A,D,E に対応することが含意されている．

練習問題　図 20 のように点 O を始点とする 2 本の半直線に，半径 $r_1, r_2(> r_1)$ の円 (中心 $\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2$) が内接している[*30]．また 2 つの円も図 20 のように外接しているとき，線分 OO_1 の長さ x を求めよ．

解　円が (半) 直線 l に接しているとき，接点 $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2$ は各々の円の中心 $\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2$ から l に下ろした垂線の足になっている．よって $\triangle\mathrm{OO}_1\mathrm{H}_1$ と $\triangle\mathrm{OO}_2\mathrm{H}_2$ は相似なので，$\mathrm{OO}_2 = x\frac{r_2}{r_1}$．これを $\mathrm{OO}_2 = x + r_1 + r_2$ と等置して x について解くと

$$x = \frac{r_2 + r_1}{r_2 - r_1} r_1 \tag{21}$$

が得られる．

結果の吟味　数学では無次元量のみを扱うものの，仮に r_1, r_2 に長さの次元を与えたとすると，x もまた長さの次元を持たなければならないことを検算に用いることができる．上で求めた x の表式 (21) は確かに，

[*29] 同様に n 本の辺の長さが全て等しい n 角形を正 n 角形という．
[*30] 円に関する用語の定義は 2.3.5 節を見よ．

長さの次元を持っている．また式 (21) によれば，$r_1 \to r_2$ のとき $x \to \infty$，$r_1 \ll r_2$ のとき $x \to r_1$ となる．これらは図形的に理に適っている．

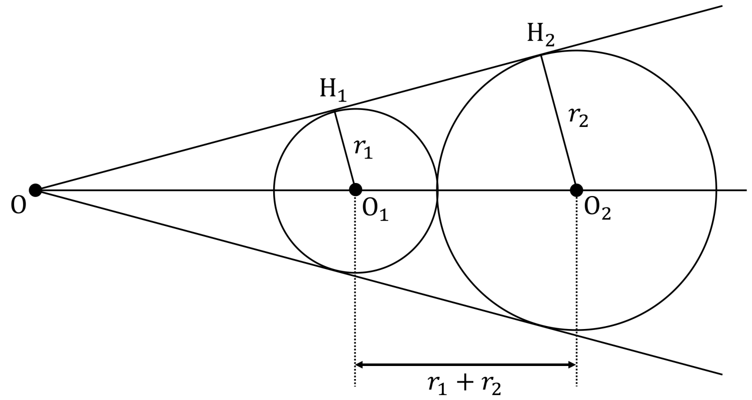


図 20　練習問題：$\mathrm{OO}_1 = x$ を求めよ．

2.3　面積

2.3.1　長方形の面積

縦の長さ a，横の長さ b を持つ長方形の面積 S を考えよう (図 21 参照)．直観的に言って，長方形の面積が縦と横の辺の長さそれぞれに比例することは認めて良いだろう．すると k を適当な比例係数として

$$S = kab \tag{22}$$

とおける．ここで係数 k の不定性は面積を測る単位のとり方の任意性に対応している．慣例に従い，1 辺が 1 の正方形の面積を単位面積 1 に選べば，上式 (22) に $a = b = 1$ および $S = 1$ を代入することにより $k = 1$ と定まる．よって長方形の面積の公式

$$S = ab \tag{23}$$

が得られる．

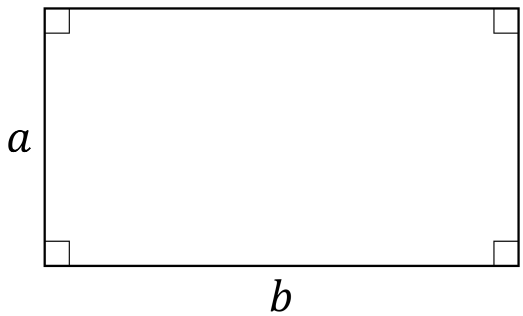


図 21　長方形

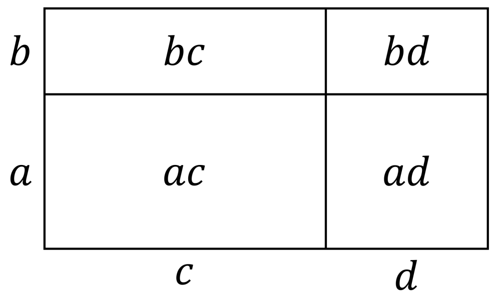


図 22　分配法則の図形的解釈

単位 数学は単位を持たない無次元の数値を研究対象とする．これに対し日常生活では長さを測るのに，m (メートル) などの単位が用いられる．1 辺が 1km,1m,1cm,1mm の正方形の面積はそれぞれ $1\text{km}^2, 1\text{m}^2, 1\text{cm}^2, 1\text{mm}^2$ と定義される．

$$1\text{km} = 10^3\text{m}, \qquad 1\text{m} = 10^2\text{cm}, \qquad 1\text{m} = 10^3\text{mm}$$

の両辺を平方すると，

$$1\text{km}^2 = 10^6\text{m}^2, \qquad 1\text{m}^2 = 10^4\text{cm}^2, \qquad 1\text{m}^2 = 10^6\text{mm}^2$$

などの関係が見出される*31．

参考 実数 a, b, c, d に対しても 1.1 節の分配法則 (1–d) を繰り返し適用すると，

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

と展開される*32．この結果は図 22 のように長方形の面積を用いて視覚的にも確認できる (1.1 節の図 1 でも類似の考察を行った)*33．

2.3.2 相似比と面積比

ある図形を適当な倍率 r で拡大 (ないし縮小) して得られる図形は，もとの図形と相似であると言われる (2.2.2 節)．このとき，もとの図形と新たな図形の**相似比**は $1 : r$ である．

任意の平面図形を倍率 r で拡大すると，面積は r^2 倍になることを説明しよう．もとの図形を微小な矩形に分けておけば，その各々は辺が r 倍に拡大されるため*34，面積は r^2 倍になる．ところが矩形による分割を細かくすれば，図形の面積は矩形の面積の和によって望むだけ高い精度で近似できるから，図形全体の面積も r^2 倍になる (図 23 参照)．このとき，もとの図形と新たな図形の**面積比**は $1 : r^2$ である，と言う．

2.3.3 平行四辺形，三角形，台形の面積

長方形の面積の公式 (23) から導かれる，基本的な平面図形の面積の公式を列挙する．まず底辺 a，高さ h を持つ平行四辺形を考える．図 24 のように直角三角形を切り取って移せば，横が a，縦が h の長方形が得ら

---

*31 その他に慣習的に用いられる面積の単位として，

$$1\,\text{a}\,(\text{アール}) = (10\,\text{m})^2 = 100\,\text{m}^2, \qquad 1\,\text{ha}\,(\text{ヘクタール}) = (100\,\text{m})^2 = 10000\,\text{m}^2 = 100\,\text{a}$$

が挙げられる (覚えるほどのことではない)．

*32 特に公式 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ (複号同順) や，$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (標語的には「和と差の積は平方の差」) は有用である．第 2 式の応用例として，

$$19 \times 21 = (20-1) \times (20+1) = 20^2 - 1^2 = 399$$

などと計算するのが便利である．

*33 よって $|b| \ll |a|, |d| \ll |c|$ のとき左辺の“第 0 近似”は ac であり，微小量 b, d に関する 1 次補正として $ad + bc$ を加えれば，左辺の近似値が得られる．第 2 項 bd は微小量に関して次であり，高次の補正となっている．1 つの応用として，21×22 を計算するには

$$21 \times 22 = (20+1) \times (20+2) = 400 + (20+40) + 2$$

とするのが便利である．また，このような感覚は微分の Leibniz ルールの直観的理解にも繋がってゆく．

*34 実際，与えられた平面図形の各点 $\text{P}(\vec{p})$ を $\text{P}'(r\vec{p})$ に移すことにより，この図形は相似比 r で拡大されることに注目する．このとき平面図形に固定された 2 点 $\text{A}(\vec{a}), \text{B}(\vec{b})$ を結ぶ任意の線要素 $\overrightarrow{\text{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$ もまた

$$(r\vec{b}) - (r\vec{a}) = r\overrightarrow{\text{AB}}$$

に移されるため，r 倍に拡大される．

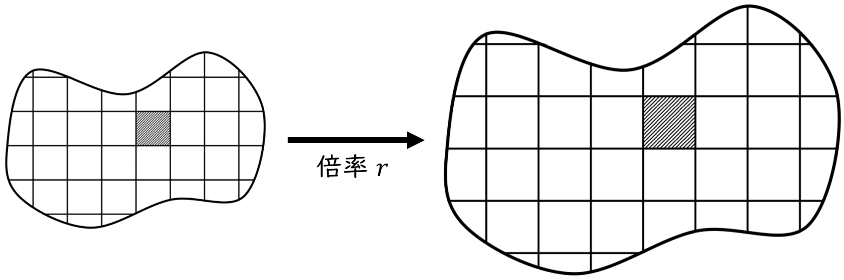


図 23　相似比と面積比

れるので，

$$(\text{平行四辺形の面積}) = ah = (\text{底辺}) \times (\text{高さ}).$$

次に底辺 a，高さ h を持つ三角形を考える．図 16 のように自身と合同な三角形を 180 度回転して繋ぎ合わせれば，底辺 a，高さ h の平行四辺形が得られる．よって

$$(\text{三角形の面積}) = \frac{1}{2}ah = (\text{底辺}) \times (\text{高さ}) \div 2.$$

さらに向かい合う 1 組の辺が平行な四角形を**台形**という．図 25 のように上底が a，下底が b，高さが h の台形を考え，2 つの合同な台形を組合せると，底辺が $(a+b)$，高さが h の平行四辺形が得られる．よって

$$(\text{台形の面積}) = \frac{1}{2}(a+b)h = \{(\text{上底}) + (\text{下底})\} \times (\text{高さ}) \div 2.$$

参考　2 本の対角線の長さが a, b の菱形の面積は $ab/2$ で与えられる．証明は読者の演習問題とする．

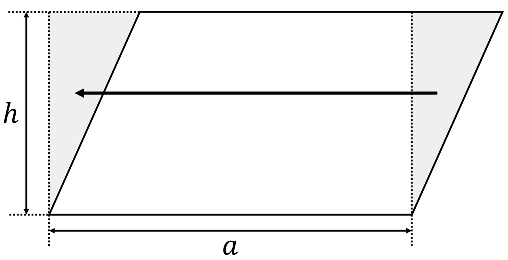


図 24　平行四辺形の面積

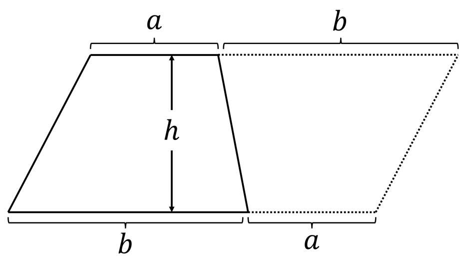


図 25　台形の面積

以上の帰結として，平行四辺形 (または三角形) の底辺と高さを一定に保って，底辺に向かい合う辺 (または頂点) を底辺に平行にスライドさせる変形は，面積を一定に留めることになる (**等積変形**).

また共通の高さを持つ 2 つの三角形の面積比は，底辺の比に一致することになる．1 つの応用例として，このことを繰り返し用いると，図 26 において点 P,Q がそれぞれ辺 OA,OB を $p:(1-p)$，$q:(1-q)$ に内分するとき (ただし $0<p,q<1$)，

$$\triangle\mathrm{OPQ} = \begin{cases} p\triangle\mathrm{OQA} \\ q\triangle\mathrm{OPB} \end{cases} = pq\triangle\mathrm{OAB}$$

であることが見出される．最右辺の表式が p と q の入れ替えに関して対称的であるのは理に適っている．この結果はある種の図形問題に取り組む際の，言わば便利な小定理として公式的に用いることができる．

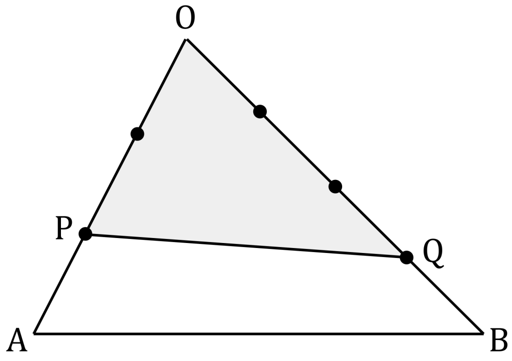


図 26　ここでは点 P,Q がそれぞれ辺 OA,OB を 2 : 1，3 : 1 に内分する場合を描いており，$p = 2/3, q = 3/4$ が対応する

2.3.4　三平方の定理

直角三角形の斜辺 c の自乗は，残りの 2 辺 a, b 各々の自乗の和に等しい：

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

これを**三平方の定理** (または Pythagoras の定理) という (図 27 参照)．ここでは 1 つの標準的な証明方法を載せておく．

証明　図 28 のように合同な 4 つの直角三角形を並べて，1 辺が $(a+b)$ の正方形を作る．そこから 4 つの直角三角形を取り除くと，1 辺が c の内接する正方形が得られる．よって面積について

$$c^2 = (a+b)^2 - 4 \times \frac{1}{2}ab = a^2 + b^2$$

の関係が成り立つ．これは三平方の定理に他ならない．

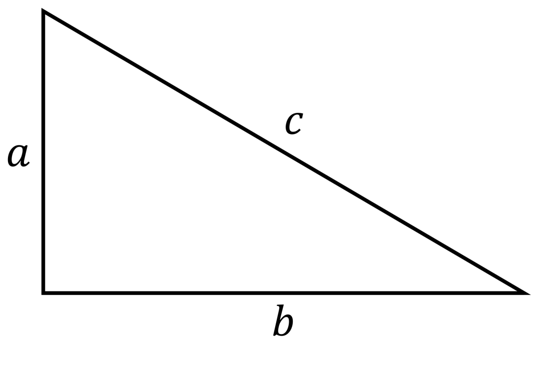


図 27　三平方の定理　$c^2 = a^2 + b^2$

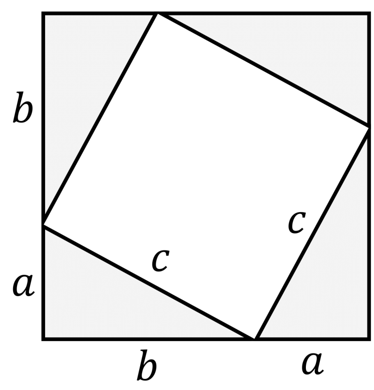


図 28　三平方の定理の証明

ここから例えば，いわゆる三角定規の 3 辺の比が求まる：

- 直角二等辺三角形 (内角は $45°, 45°, 90°$) の 3 辺の比は $1:1:\sqrt{2}$ である．
- 正三角形を 1 つの頂点から向かい合う辺に下ろした垂線で切って得られる，
  内角が $30°, 60°, 90°$ の直角三角形の 3 辺の比は $1:\sqrt{3}:2$ である．

また 3 辺が整数比をとる直角三角形として，辺の比が $3:4:5$ や $5:12:13$ の直角三角形が特筆される[*35]．

2.3.5 円

平面内において定点 O から等しい距離 r にある点の集まりを**円**という．このとき O は円の中心，r は円の半径と呼ばれる．半径 r の円は半径 1 の円 (単位円) を倍率 r で拡大すると得られるので[*36]，その円周の長さは r に比例する．そこで任意の半径 r の円に対して，

$$(\text{円周}) = 2\pi r$$

と書いて**円周率** π を定義する．円周率は円周の直径 $d = 2r$ に対する比として定義される，と言うこともできる．その値は

$$\pi = 3.1415\cdots$$

であることが知られている[*37]．

円の 2 つの半径が円から切り取る図形を**扇形**といい，2 つの半径のなす角を扇形の中心角という．ϕ を弧度法で測った扇形の中心角としよう．このとき扇形の弧の長さ l が中心角 ϕ に比例することは明らかであり，$\phi = 2\pi$ のとき l は円周の長さ $2\pi r$ となることから比例係数を定めると，

$$l = r\phi$$

を得る．

次に円や扇形の面積を調べる．以下ではここまでの我々の幾何学に関する初等的な知識だけで理解できる説明を採用する．準備として，図 29 のように円 (または扇形) を微小な中心角 $\varDelta\phi$ の扇形に分割する．このとき個々の細い扇形は弧 $\varDelta l = r\varDelta\phi$ を底辺，半径 r を高さとする三角形と見なせるので，その面積は $r\varDelta l/2 = r^2\varDelta\phi/2$ と表される．よって求める面積は

$$(\text{微小な扇形の面積の和}) = \frac{1}{2}r^2(\text{微小角}\varDelta\phi\text{の和}) = \begin{cases} \frac{1}{2}r^2\phi & (\text{中心角}\phi\text{の扇形に対して}) \\ \pi r^2 & (\text{円に対して}) \end{cases}$$

となる[*38*39]．面積が r^2 に比例していることは，あらかじめ期待される結果である (2.3.2 節)．

弧度法で測った中心角 ϕ は，度数法で測った中心角 φ (単位 ° を除く数値) と

$$\phi = \frac{2\pi}{360}\varphi$$

*35 これらが実際に三平方の定理を満たしていることを，各自で確認されたい．三平方の定理を満たす整数比として，他にも $6:8:10$，$7:24:25$，$8:15:17$，$12:16:20$ などがある．

*36 現実の長さに関して言えば，単位円の半径 1 は無次元であり，相似比 r が長さの次元を担っていることになる．

*37 しばしば $\pi \fallingdotseq 3.14$ と近似されるため，くだらないことではあるが，入試対策では $3.14 \times 2, 3.14 \times 3, \cdots, 3.14 \times 9$ の値を暗記しておくことが推奨されている．

*38 この結果は有限の中心角 ϕ を持つ扇形も，あたかも円弧 $l = r\phi$ を底辺，半径 r を高さとする三角形のように見なして，その面積を計算して良いことを意味している．得られた扇形の面積の公式に $\phi = 2\pi$ を代入すると，確かに円の面積 πr^2 が得られる．

*39 参考：この求め方は円周上の動点の面積速度を時間積分して，面積を得ることに対応している．

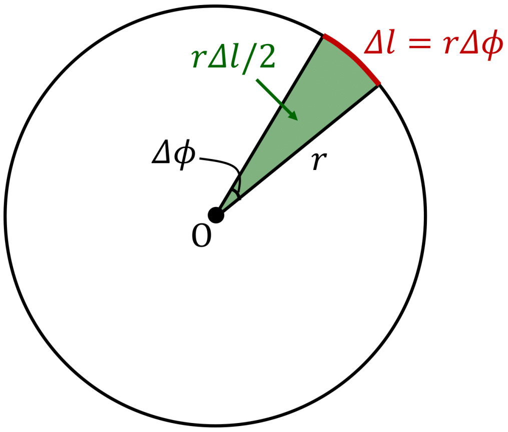


図 29　扇形と円の面積

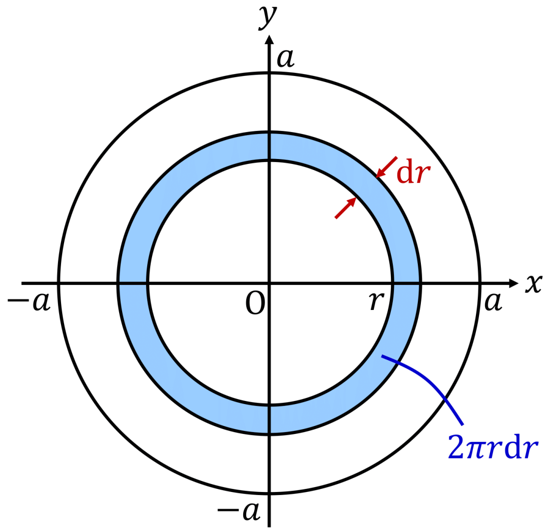


図 30　円環と円の面積

で関係付けられるため，度数法では上で得た扇形の公式は

$$(\text{弧長}) = 2\pi r \times \frac{\varphi}{360}, \qquad (\text{面積}) = \pi r^2 \times \frac{\varphi}{360}$$

と書き直される．これらは円周や円の面積と，扇形が円に占める割合 $\varphi/360$ の積となっている．

■参考　半径 a の円の面積は，半径 $r, r+\mathrm{d}r$ の同心円に挟まれた円環の面積 $2\pi r\mathrm{d}r$ を積分して

$$S = \int_0^a 2\pi r\mathrm{d}r = \pi a^2 \tag{24}$$

と求めることもできる (図 30 を参照)[*40]．

積分 (24) を小・中学生に説明するには，その基本的な考え方に立ち戻って次のようにすれば良い．まず半径 a を N 等分して，長さ $\Delta r = a/N$ おきに半径 $r_n = n\Delta r$ の同心円を定める ($n = 0, 1, \cdots, N$，$n = 0$ は中心に対応)．すると幅 Δr の微小区間 $r_n \leq r \leq r_{n+1}$ ($n = 0, \cdots, N-1$) に含まれる円環は，底辺が円周 $2\pi r_n$，高さ Δr の“長方形”と見なせるので，その面積は近似的に $2\pi r_n \Delta r$ で与えられる．円の面積 S は N 個の円環の面積の和なので，

$$\begin{aligned} S \fallingdotseq & 2\pi(r_0 + r_1 + \cdots + r_{N-1})\Delta r \\ = & 2\pi\{0 + 1 + \cdots + (N-1)\}(\Delta r)^2 \\ = & \pi a^2 \left(1 - \frac{1}{N}\right) \end{aligned}$$

と近似される．ただし最後の等号では $\Delta r = a/N$ を代入し，また和の公式

$$1 + 2 + \cdots + (N-1) = \frac{1}{2}(N-1)N$$

[*40] すると逆に半径 $r, r+\Delta r$ の 2 円に挟まれた円環の面積は，Δr の 1 次までの近似で

$$\pi\{(r+\Delta r)^2 - r^2\} = 2\pi r\Delta r$$

となる．円環の半径を $2\pi r\mathrm{d}r$ とするのは，直観的には円周 $2\pi r$ を底辺とする高さ $\mathrm{d}r$ の“長方形”の面積の表式として理解できる．これは円周方向と半径方向が局所的に直交することから正当化される．

を用いた (3.4.1 節の式 (37) を参照)．幅 Δr を小さくするほど近似の精度は増し，$N \to \infty$ の極限で $\fallingdotseq \to =$ となって，面積の公式

$$S = \pi a^2$$

が改めて得られる．(なお区分求積に基づき，積分 $\int_0^a r\mathrm{d}r = a^2/2$ を三角形の面積として説明することもできる．)

2.4　立体 (体積，表面積，展開図)

2.4.1　直方体の体積

6 つの長方形で囲まれた立体を**直方体**といい，特に 6 つの面が正方形であるものを**立方体**と呼ぶ．ここでの議論は長方形の面積に関する話の進め方とよく似たものになるので (2.3.1 節)，簡単に済ませる．まず 1 辺が 1 の立方体の体積を 1 と定義すると，縦 (奥行き) a，横 b，高さ c を持つ直方体の体積は

$$V = abc = (縦) \times (横) \times (高さ)$$

となる (図 31 参照)．また任意の立体と，それを倍率 r で拡大して得られる相似な立体との**体積比**は $1 : r^3$ となる．(これは 2.3.2 節と同様，立体を細かい立方体に分割すれば納得できる．)

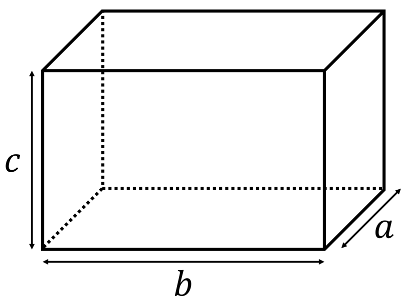


図 31　直方体

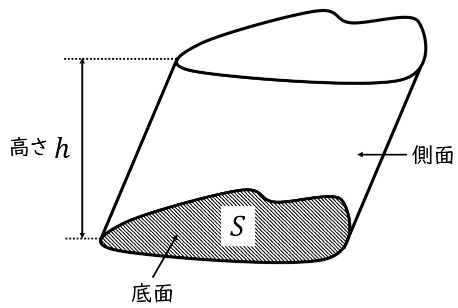


図 32　柱体

単位　慣習的に用いられる体積の単位として，

$1l$ (リットル) $= (10\mathrm{cm})^3 = 1000\mathrm{cm}^3$,　　$1\mathrm{m}l$ (ミリリットル) $= 1\mathrm{cm}^3$,　　$1\mathrm{d}l$ (デシリットル) $= 100\mathrm{cm}^3$

が挙げられる．化学ではしばしばリットルを大文字の L で表す．

2.4.2　柱体の体積

ある平面図形を，平面から飛び出す向きに一定の距離だけ平行移動させるとき，その平面が通過して得られる立体を**柱体**という．このときもとの平面図形を柱体の底面，底面とそれに向かい合う面の間の距離を柱体の高さ，それら 2 つの面のいずれでもない面を柱体の側面という (図 32 参照)．特に底面が三角形や四角形，円である場合，柱体はそれぞれ三角柱，四角柱，円柱と呼ばれる．また底面を自身に垂直な向きに平行移動して得られる柱体は直柱，それ以外の柱体は斜柱と呼ばれる．

まず直柱の体積を考える．底面積が S，高さが h の直柱の体積は

$$V = Sh = (底面積) \times (高さ) \tag{25}$$

で与えられる．実際，あらかじめ底面を微小な長方形 (面積 $\varDelta S$) に切り分けておけば，共通の高さ h を持つ細い直方体 (体積 $\varDelta S \cdot h$) の集まりが得られるので，

$$V = (\varDelta S \text{ の和}) \times h = Sh$$

が成り立つ．

次に x 軸に垂直な 2 つの平面 $x = a, b(> a)$ に挟まれた，位置 x における直断面 $S(x)$ を持つ立体を考える (図 33 参照)．このとき位置 x 周りの微小な幅 $\mathrm{d}x$ に含まれる薄片は，(近似的に) 底面積 $S(x)$，高さ $\mathrm{d}x$ の直柱 (体積 $S(x)\mathrm{d}x$) と見なせるので立体の体積は

$$V = (S(x)\mathrm{d}x \text{ の和}) \left[= \int_a^b S(x)\mathrm{d}x \right] \tag{26}$$

と表される．ここから理解されるように，断面積 $S(x)$ を一定に保って，各微小区間 $\mathrm{d}x$ 内で薄片を x 軸に垂直にスライドしても，得られる体積は不変である (**等積変形**)．言い換えれば，等しい断面積を持つ立体は等しい体積を持つ．これを Cavalieri (カヴァリエリ) の原理という*41．

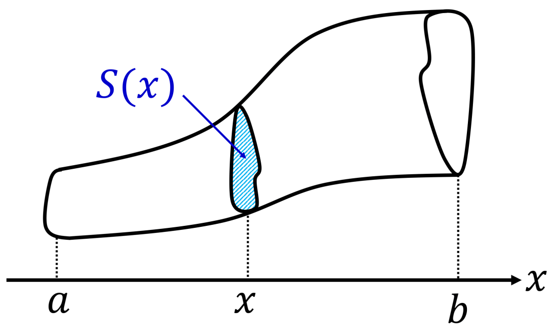


図 33　$a \leq x \leq b$ に横たわる“パイプ”の体積

特に斜柱は，底面を共有し，共通の高さを持つ直柱と等しい体積を持つ．このため公式 (25) は，斜柱に対しても適用できることになる．

■直柱の側面積　縁の長さ l の底面と高さ h を持つ直柱の側面積についても，ここで触れておこう．直柱から底面とそれに向かい合う面を除き，ハサミで高さ方向に沿って側面に切れ目を入れて平面上に広げると，縦が h，横が l の長方形が得られる．よって

$$(\text{直柱の側面積}) = hl$$

が成り立つ．

2.4.3　錐体の体積

図 34 のように平面上の閉曲線に囲まれた領域を底面として，閉曲線上の各点を平面の外部の頂点 O を結んで得られる立体を錐体という．特に底面が三角形や四角形，円である場合，錐体はそれぞれ三角錐，四角錐，円錐と呼ばれる．頂点 O から底面に下ろした垂線の足を H とするとき，長さ OH は錐体の高さと言われる．

*41 もちろん，これは原理というよりもむしろ定理である (付録 A を参照)．

ここでは底面積が S，高さが $\mathrm{OH}=h$ の錐体の体積を求める．今，垂線 OH に沿って O から測った長さを x とし，位置 x における OH に垂直な錐体の断面積を $S(x)$ と表す．すると x の増加とともに，面積比の因子 x^2 に比例して $S(x)$ は増大する．また $S(h)=S$ となることから比例係数を定めると

$$S(x)=S\frac{x^2}{h^2}$$

と書ける．高さ方向の微小な幅 $\mathrm{d}x$ に含まれる薄片の体積は，底面積 $S(x)$，高さ $\mathrm{d}x$ の柱の体積 $S(x)\mathrm{d}x$ で与えられるから，錐体の体積は

$$V=\int_0^h S(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}Sh \tag{27}$$

と求まる (一般公式 (26) を参照)．日本語で書けば (錐体の体積) = (底面積) × (高さ) ÷ 3．すなわち錐体の体積は，底面と高さが同じ柱体の体積の 1/3 である．

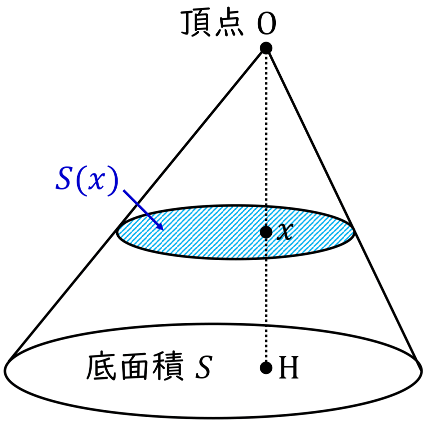


図 34　錐体 (ここでは円錐を描いた)

積分 (27) を小・中学生に説明するには，その基本的な考え方に立ち戻って次のようにすれば良い．まず高さ h を N 等分して，長さ $\Delta x=h/N$ おきに O からの距離 $x_n=n\Delta x$ の点を定める $(n=0,1,\cdots,N)$．すると幅 Δx の微小区間 $x_n\leq x\leq x_{n-1}\,(n\geq 1)$ に含まれる薄片は，底面積 $S(x_n)$，高さ Δx の柱と見なせるので，その体積は近似的に $S(x_n)\Delta x$ で与えられる．錐体の体積 V は N 個の薄片の体積の和なので，

$$\begin{aligned}V &\fallingdotseq S(x_1)\Delta x+S(x_2)\Delta x+\cdots+S(x_N)\Delta x\\ &=\frac{S\Delta x}{h^2}({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_N}^2)=\frac{S(\Delta x)^3}{h^2}(1^2+2^2+\cdots+N^2)\\ &=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{N}\right)\left(2+\frac{1}{N}\right)Sh\end{aligned}$$

と近似される．ただし最後の等号では $\Delta x=h/N$ を代入し，また和の公式

$$1^2+2^2+\cdots+N^2=\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)$$

を用いた (3.4 節の式 (38) を参照)．幅 Δx を小さくするほど近似の精度は増し，$N\to\infty$ の極限で $\fallingdotseq\to=$ となって，真の体積 (27):

$$V=\frac{1}{3}Sh$$

が改めて得られる．

公式 (27) より，錐体の底面を固定し，高さを一定に保って頂点を移動させる変形は，錐体の体積を不変に留めることになる (**等積変形**)．これは Cavalieri の原理 (2.4.2 節) に立ち戻り，その一例として理解することもできる．

2.4.4　球の表面積

3 次元空間において定点 O から等しい距離 r にある点の集まりを**球**といい，このとき O と r をそれぞれ球の中心と半径と呼ぶ．半径 r の球の表面積 S を求めよう．結論から述べると，球の表面積は図 35 のように，球に外接する (直) 円柱の側面積に一致する．

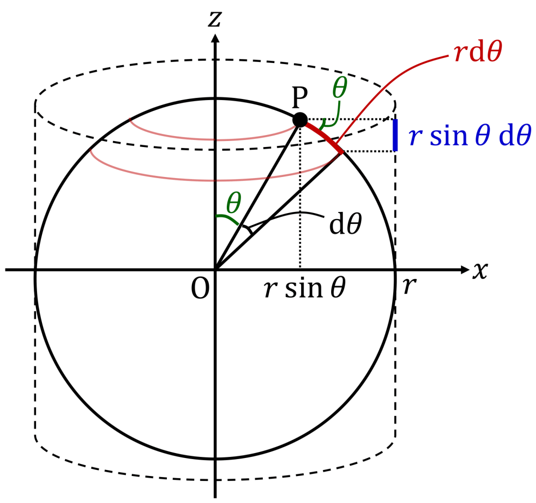


図 35　(球の表面積) = (外接する円柱の側面積) = $4\pi r^2$

証明　そのことを示すには，円柱の高さ方向の任意に選んだ微小な幅に含まれる球の表面積と，円柱の側面積が等しいことを確かめれば充分である．円柱の軸を z 軸にとり，z 軸を含む断面内に，球の中心を原点として (z, x) 座標を導入する．そして z 軸と角 θ (ただし $0 \leq \theta \leq \pi$) を成す動径を持つ円周上の点 P の x 座標を $r\sin\theta$ と書いて，正弦関数 $\sin\theta$ を定義する．さて，点 P から θ を微小角 $\mathrm{d}\theta$ だけ増大させて得られる円弧の長さは $r\mathrm{d}\theta$ である．これを z 軸の周りに 1 回転させて得られる帯は，円周 $2\pi r\sin\theta$ を底辺，弧長 $r\mathrm{d}\theta$ を高さとする“長方形”と見なせるので[*42]，その面積は

$$2\pi r\sin\theta \times r\mathrm{d}\theta$$

と表される．他方，中心角 $\mathrm{d}\theta$ の円弧を z 軸に平行な直線に正射影した長さは，図 35 より $r\mathrm{d}\theta \times \sin\theta$ で与えられる．よってこの線要素を z 軸の周りに 1 回転させて得られる側面積は

$$r\sin\theta\mathrm{d}\theta \times 2\pi r$$

となり，上式に一致する．よって示された．

[*42] これは円周方向 (緯線) と θ の増大する方向 (経線) が局所的に直交することによる．

ところで考えている円柱の側面積は $2r \times 2\pi r = 4\pi r^2$ である．こうして球の表面積の公式

$$S = 4\pi r^2$$

が得られる[*43]．

参考　以上は球の表面積を求める積分

$$S = \int_0^\pi 2\pi r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta = 4\pi r^2$$

の図形的な説明・解釈を与えている．

2.4.5　球の体積

円の面積の求め方 (2.3.5 節) と同様の考え方で，球の体積の公式を導くことができる．半径 r の球の体積 V を求めよう．球の表面を適当に微小な面積要素 $\mathit{\Delta} S$ へと切り分け，球の中心を頂点とし，各々の面積要素を底面とする錐体を考える．すると個々の錐体は共通の高さ r を持つので，その体積は $\mathit{\Delta} S \cdot r/3$ で与えられる．よって球の体積は

$$V = \frac{1}{3}r \times (\mathit{\Delta} S \text{ の和}) = \frac{1}{3}r \times (\text{球の表面積}) = \frac{4\pi}{3}r^3$$

となる[*44]．

■参考　共通の中心を持つ半径 r' と $r' + \mathrm{d}r'$ の球面に挟まれた球殻の体積は，球の表面積 $4\pi r'^2$ を“底面”，それに直交する厚み $\mathrm{d}r'$ を“高さ”として，積 $4\pi r'^2 \mathrm{d}r'$ で与えられる．よって半径 r の球を玉ネギのように多数の球殻に分割すると，球の体積は球を構成する全ての球殻の体積の和として

$$V = \int_0^r 4\pi r'^2 \mathrm{d}r' = \frac{4}{3}\pi r^3$$

と求まる．ここに現れた積分については，既に錐体の体積 (27) の箇所で説明済みである．

2.4.6　展開図

ある種の立体図形の問題は適当な断面図を考えることで，2 次元の平面図形の問題に帰着させることができる．我々は既に球の表面積を求める際に，そのような例を見ている (図 35 の箇所を参照)．

立体の**展開図**を考えることも有効である．例えば立方体は図 36 のように展開される．言い換えれば，逆に展開図を辺に沿って山折り (ないし谷折り) すれば，もとの立方体が復元される．ここで立方体は 6 つの面を持つことに注意しよう．仮に立方体の影を付けた面 ABCD が展開図において図 36 のように与えられたとすると，展開図の残りの面がもとの立方体とどのように対応するかを調べることができる．まず立方体と展開図を比較すると，面 ABCD と辺 BC,CD,DA を共有する 3 つの面の頂点が図 36 の青字で示した点に対応することが分かる．次いで同様に面 BCGF と辺 BF,FG を共有する 2 つの面の頂点を，図 36 の緑の字のように書き込むことができる．あるいは

- 正方形の 3 点が決まれば，4 点目も決まること

[*43] 表面積が面積比の因子 r^2 に比例することは，あらかじめ期待される結果である．このため r が現実の長さのとき，S は確かに面積の次元を持つ．なお右辺の語呂合わせとして，「心配 (4π) ある (r) 事情 (自乗)」が有名である．

[*44] 体積が体積比の因子 r^3 に比例することは，あらかじめ期待される結果である．このため r が現実の長さのとき，V は確かに体積の次元を持つ．なお右辺の語呂合わせとして，「身 (3) の上に心配 (4π) ある (r)・参上 (3 乗)」が有名である．

- 展開図から立方体を組み立てるとき，図 36 の赤い矢印で示した頂点は互いに一致すること

も，頂点を定める際の助けになる．また立方体の最も遠い 2 点の組，例えば点 A と G は，展開図において 2 つの正方形から成る長方形の対角線の位置にあることが見て取れる．

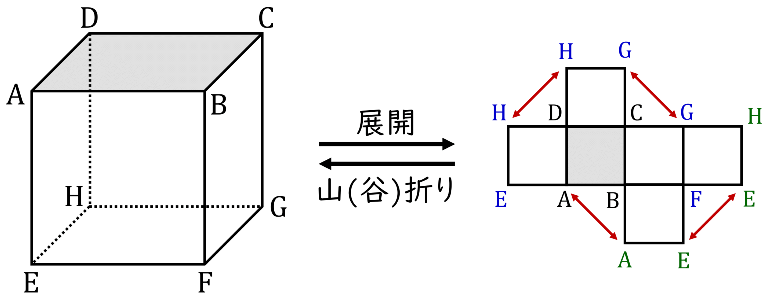


図 36　立方体の展開図の 1 例

なお立方体の展開図は，回転や裏返しによって互いに一致するものを同一視すると，全部で図 37 の 11 種類がある．

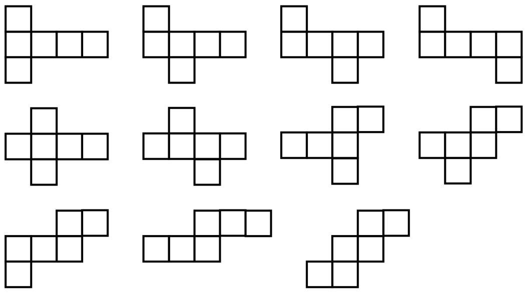


図 37　立方体の展開図 (全種類)

次に (直) 円錐の展開図について説明する．円錐の頂点 O と円周上の点 P を結ぶ**母線**の長さ l は，点 P の位置によらず一定である．このため適当に選んだ母線 OP にハサミで切れ目を入れて平面上に広げると，円錐の側面は図 38 のような半径 l の扇形となる．これと底面を表す円 (半径を r とする) を合わせたものが，円錐の展開図である．弧 AB はもともと底面の円周に一致しており，特に両端の 2 点 A,B はともに点 P に対応する．扇形の中心角 ϕ は，弧 AB が円周に等しい条件

$$l\phi = 2\pi r$$

から定まる ($l \to r$ のとき $\phi \to 2\pi$)[*45]．また円錐の側面積は，扇形の面積

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot l$$

として求められる．

[*45] 度数法で測った角度 (単位 ° を除いた数値) は

$$\varphi = \frac{360}{2\pi}\phi = 360 \times \frac{r}{l}.$$

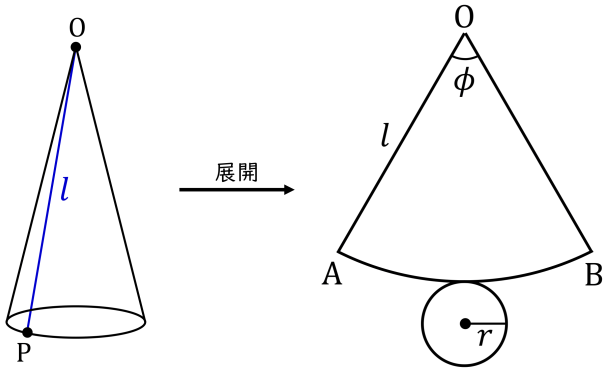


図 38　直円錐とその展開図

練習問題　$l = 6, r = 1$ とする．点 P を発し，円錐の側面に沿って 1 周して点 P に戻るように，円錐の側面に糸をかけとき，可能な糸の長さの最小値を求めよ．

解　扇形の中心角は $\phi = \pi/3$ $(60°)$ なので，本問では △OAB は正三角形になる．糸は展開図において，扇形の上で 2 点 AB を結ぶ曲線で表されるので，それが最短となるのは糸が線分 AB に一致するときである．よって求める長さは $\mathrm{AB} = l = 6$.

注　同様に図 39 のように直方体の側面に沿って点 A,G の間にかけた糸が最短となるのは，展開図において糸が線分 AG に一致するときである．

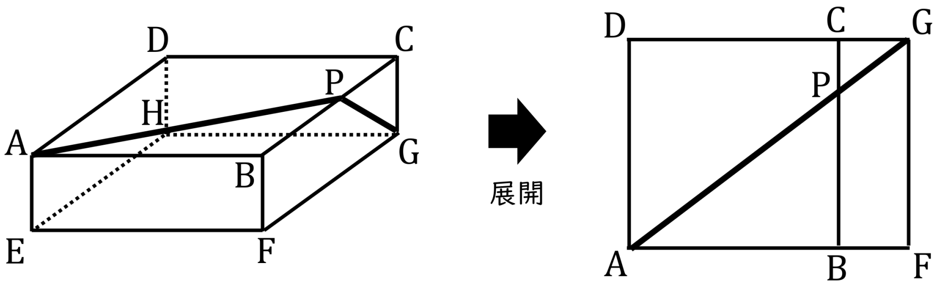


図 39　直方体の側面にかけた糸

3　その他の話題 (典型的な問題など)

3.1　連立 1 次方程式 (消去算，鶴亀算)

未知数 x, y に関する 2 つの 1 次方程式，例えば

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8, && (①) \\ 3x - y &= 1 && (②) \end{aligned}$$

を同時に満たす x, y を求めることを，式①, ②を連立して解くという．解法としては，変数 x, y のうちの一方を消去することが基本方針となる．(それ故この手の計算は，小学校の算数の水準では**消去算**と呼ばれている．)

例えば式②を y について解くと

$$y = 3x - 1 \qquad (②')$$

であり[*46]，これを式①に代入して y を消去すると，x のみを含む 1 次方程式

$$2x + 3(3x - 1) = 8$$

が得られる．これを解くと $x = 1$ と求まる．さらに式①, ②, ②′ に $x = 1$ を代入すると，いずれも $y = 2$ を与える．

はじめに x を消去したければ，式①の両辺を 3 倍した式と式②の両辺を 2 倍した式

$$\begin{aligned} 6x + 9y &= 24, && (3\times①) \\ 6x - 2y &= 2 && (2\times②) \end{aligned}$$

を辺々引いて，$11y = 22$, $\therefore y = 2$ とすれば良い．これを式① (または式②) に戻して，$x = 1$ を得る．

参考　a, b, c, d, A, B を定数係数として，2 変数 x, y に対する連立 1 次方程式は一般に

$$\begin{cases} ax + by = A, \\ cx + dy = B \end{cases} \tag{28}$$

という形をとる．$ad - bc \neq 0$ であれば，これは解

$$x = \frac{dA - bB}{ad - bc}, \qquad y = \frac{-cA + aB}{ad - bc}$$

を持つ (証明は読者に委ねる)[*47]．ところで式 (28) は xy 平面上の 2 本の直線を表しており，第 1 と第 2 の直線上の点の座標 (x, y) はそれぞれ，第 1 式と第 2 式を満たす．したがって 2 式を同時に満たす (x, y) を求めることは，両方の直線上に位置する点 (すなわち共有点) の座標を求めることに対応する．条件 $ad - bc \neq 0$ は 2 直線が平行でないことと等価であり，このとき 1 つの交点が定まる．これに対し 2 直線が平行のとき，それらが互いに離れていれば共有点は存在しないため，連立方程式の解はなく (不能)，2 直線が完全に一致していれば，その同一直線上の全ての点の座標 (x, y) が解となる (不定).

[*46] このとき (①かつ②) ⇔ (①かつ②′) である．

[*47] この結果は逆行列の公式としてよく知られている：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

3 変数 x, y, z に対する連立 1 次方程式を解く場合にも，一般には同様の手順を踏めばよい．すなわち 1 つの変数 (z とする) を消去すると，x と y に関する連立方程式が得られる．これを解いて (x, y) を求めれば，z も求まる．

例題　連立 1 次方程式

$$x+y+2z=9, \qquad 3x+2y+z=10, \qquad 2x+y+z=7$$

を解け．

解　第 3 式より

$$z = 7 - 2x - y \tag{29}$$

であり，これをはじめの 2 式に代入して z を消去すると，2 変数 x, y に関する連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 3x+y=5 \\ x+y=3 \end{cases}$$

が得られる．これを解くと $x=1, y=2$ であり，さらにこれを上式 (29) に代入すると $z=3$ と求まる．

次のような連立方程式は，特別に容易に解くことができる．

$$\begin{aligned} x+y \quad\quad &= 3, \\ y+z &= 5, \\ x \quad\quad + z &= 4. \end{aligned}$$

実際，3 式を辺々足して 2 で割ると $x+y+z=6$ となる．これともとの 3 式の差をとれば，直ちに

$$x=1, \qquad y=2, \qquad z=3$$

と求まる．

3.1.1　鶴亀算

オリジナルの鶴亀算の問題は——極めて人工的な設定であるが——次のような形をとる．

例題　ツルとカメが合計 10 匹いるとする (ここでは便宜的にツルも「匹」と数える)．ツルとカメの脚の合計が 32 本であるとき，ツルとカメはそれぞれ何匹いるか求めよ．(なお周知のように，ツルには脚が 2 本，カメには脚が 4 本ある．)

求めるツルとカメの個体数をそれぞれ x, y とおくと，合計が 10 匹であるから，可能性は

$$(x, y) = (0, 10), (1, 9), (2, 8), \cdots, (9, 1), (10, 0)$$

の 11 通りに限られる．その各々の場合に対して脚の合計本数 $(= 2x + 4y)$ の値を調べると，表 1 のようになる．よって脚が全部で 32 本となるのは，$(x, y) = (4, 6)$ のときであることが分かる．

このように鶴亀算では答の候補が有限個に絞られるため，**基本的な戦略としてしらみつぶしが有効**である．これは本質的には変数 x, y が整数値をとるという事情に基づいている．しかしながらツルとカメの個体数が非常に多いときには，しらみつぶしは実践的ではない．ところが表 1 のように脚の本数を調べると，欄を右に 1 つずつ進むたびに脚の合計が 2 本ずつ減っていくことに気付く．これはカメ 1 匹をツル 1 匹に置き換えるごとに，カメの脚 4 本が消滅しツルの脚 2 本が生成するため，正味では脚が 2 本減ることに起因しており，正確に成り立つ一般的な規則である．そこで鶴亀算の標準的な解法として，次のように考えることができる．

表 1　ツルとカメの個体数 x, y に対する合計の脚の本数

(x, y)	(0,10)	(1,9)	(2,8)	(3,7)	(4,6)	(5,5)	(6,4)	(7,3)	(8,2)	(9,1)	(10,0)
脚の合計	40	38	36	34	32	30	28	26	24	22	20

解　いま 10 匹がすべてカメであると仮定すると，脚の合計は 40 本である．実際の本数は 32 本であり，そこで脚をあと 8 本減らすには，カメをツルに置き換える操作を

$$8 \div 2 = 4 \text{ 回}$$

繰り返さなければならない．よって求めるツルの個体数は 4，カメの個体数は $10 - 4 = 6$.

もちろん問題の構造はツルとカメに関して対称なので，最初にツルが 10 匹と仮定し，次いでツル 1 匹をカメ 1 匹に置き換えるごとに，脚が 2 本ずつ増えることに基づいて解答しても良い (計算は読者に委ねる).

■参考　なお未知数が連続変数である場合につるかめ算の手法を応用することは，不可能ではないものの (8.1 の問題を参照)，一般には連立方程式を解く方が汎用性がある：本問では与えられた条件

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 4y = 32 \end{cases}$$

を連立して解くと，$x = 4, y = 6$ が得られる*48.

問題を変数が 3 つ以上の場合へと拡張することも考えられる．具体的には例えば，ツルとカメの他に，タコ (脚 8 本) がいる場合を考えれば良い．このとき定性的に言って，タコの数があまり多いと，脚の数が与えられた合計数に収まらくなるため，タコの数は限られる．整数問題ではこのような感覚が重要になる (例えば 7.5 節の最後の問題を参照).

3.2　運動学 (速さ，旅人算，時計算)

現実の物体の運動は経験科学の法則によって支配・決定されており，アプリオリには予言できない．しかしながら物体の運動を記述する道具立てを提供するのは，運動学と呼ばれる部門であり，それは数学に属している．

簡単のために動点が与えられた直線に沿って，1 次元的な運動を行う場合を考えよう．このとき直線に沿って x 軸 (単位を除けば数直線) を導入すれば，動点の位置は x 座標 (数直線の目盛り) を用いて指定することができる．また適当な時計を用いて，時刻 t を測ることができる．このとき動点がいつどこにいるかが分かれば，動点の運動が分かったと言える．言い換えれば運動の決定とは，動点の位置 x と時刻 t の関係が求めることに他ならず，概念的には，動点の位置を時刻の関数

$$x = x(t)$$

として表すことに帰着する．

*48 第 1 式を y について解くと $y = 10 - x$. これを第 2 式に代入して y を消去すると，

$$2x + 4(10 - x) = 32, \qquad \therefore x = 4.$$

これを第 1 式に戻すと，$y = 10 - 4 = 6$.

初等的に重要な運動形態の1つは，動点が一定の速度を持つ場合である (いわゆる**等速直線運動**)[*49]．この場合には適当な時刻 $t_0, t(> t_0)$ の間の時間 $\varDelta t = t - t_0$ における，動点の変位 (x 座標の変化) $\varDelta x = x(t) - x(t_0)$ を用いて，動点の速度は，

$$v = \frac{\varDelta x}{\varDelta t} \tag{30}$$

と定義できる．$v > 0$ のときには動点は $x > 0$ の向きに (x 座標が増大する向きに) 進んでおり，$v < 0$ は動点が $x < 0$ の向きに進んでいる場合に対応する．速度の大きさは**速さ**と呼ばれ[*50]，上式 (30) の絶対値をとると，

$$|v| = \frac{|\varDelta x|}{\varDelta t}, \qquad \text{すなわち} \qquad (\text{速さ}) = \frac{(\text{距離})}{(\text{時間})} \tag{31}$$

が得られる．速さの定義式 (31) は等価的に

$$(\text{距離}) = (\text{速さ}) \times (\text{時間}), \qquad (\text{時間}) = \frac{(\text{距離})}{(\text{速さ})}$$

と書き換えることができる．

- 第1式は動点の速さと移動時間が与えられたときに，移動距離を求めるのに有用である．
  - 定性的には長い時間をかければ，それだけ遠くまで行けると解釈できる．このような直観から直ちに第1式を書き下すことができるため，これを公式として暗記するには及ばない．
- 第2式は動点の速さと移動距離が与えられたときに，所要距離を求めるのに有用である．
  - 単位時間内には $|v|$ だけしか進めないから，与えられた距離 $|\varDelta x|$ 進むにはその $|\varDelta x|/|v|$ 倍の時間がかかる．このように考えれば直観的に第2式を書き下すことができるため，これを公式として暗記するには及ばない．

有限の時間 $\varDelta t$ のうちに速度が変化する場合には，以上の議論は修正が必要である．このとき式 (30) は時間 $\varDelta t$ における動点の平均の速度 $\bar{v} = \varDelta x/\varDelta t$ を定義していることになる．時刻 t_0 における瞬間的な速度 v は，その $\varDelta t \to 0$ の極限として定義できる．よって無限小時間 $\varDelta t$ に対しては，式 (30) 以降の関係は一般に正しい．

再び等速直線運動に話を戻す．簡単のために $t_0 = 0$ とおき，$x(t_0) = x(0) \to x_0$ (初期位置) と表記を改めると，速度の定義式 (30) は

$$v = \frac{x(t) - x_0}{t}, \qquad \therefore x(t) = x_0 + vt \tag{32}$$

と書き換えられる．このように等速直線運動では動点の位置 $x(t)$ は，時刻 t の1次式で表される．これは位置 x と時刻 t の関係が，x-t グラフにおいて図 40 のような傾き v の直線で表されることを意味している．

距離と道のり 言葉の定義として，距離と道のりの違いについて触れておく．移動距離とは始点と終点を結ぶ線分の長さを意味するのに対し，道のりは動点が実際に描いた軌跡に沿う長さを表す (図 41 参照)．したがって1次元的な運動を行う動点がもと来た道を戻る場合，道のりには往復の長さを含めなければならないのに対し，移動距離においては往路と復路の長さは相殺する．概念を半ば数式化すれば，距離は変位 $v\varDelta t$ の和の絶対値であるのに対し，道のりは変位の絶対値 $|v\varDelta t|$ の和である．

[*49] このように述べるとき，我々は既に速度とはどのような概念か，少なくとも日常用語の水準で理解していることを仮定している．そして以下で見る速度の定義は，我々の感覚的な理解に合致している．

[*50] 実際には「速度」と「速さ」，「時刻」と「時間」の区別は，そこまで厳密には用いられない．

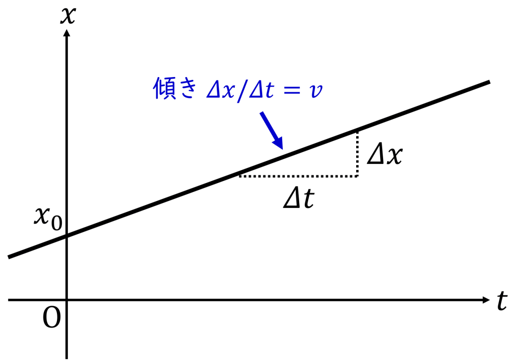


図 40　等速直線運動のグラフ

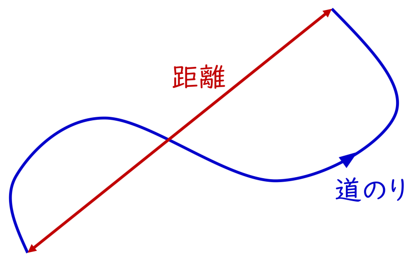


図 41　距離と道のり

3.2.1　旅人算

例題　x 軸上を運動する動点 A,B を考える．初期時刻 $t = 0\text{s}$ に A は $x = 0\text{m}$，B は $x = x_0 = 12\text{m}$ に位置していたとする．その後，A と B がそれぞれ一定の速度 (x 成分) $v_\text{A} = 3\text{m/s}$，$v_\text{B} = 1\text{m/s}$ で運動する場合，A と B はいつ，どこで出会うかを求めよ．また $v_\text{B} = -1\text{m/s}$ の場合に，同じ問題を解け．

解　$v_\text{B} = \pm 1\text{m/s}$ の複号に応じて，1 秒間に A と B は 2m または 4m 近づく．これは B に対する A の相対速度 (B から見た A の速度) が

$$v_\text{AB} = v_\text{A} - v_\text{B} = \{3 - (\pm 1)\}\text{m/s} = \begin{cases} 2\,\text{m/s} \\ 4\,\text{m/s} \end{cases}$$

であると言い表すこともできる．すると A と B が出会う時刻は

$$t = \frac{x_0}{v_\text{AB}} = \begin{cases} 6\,\text{s} \\ 3\,\text{s} \end{cases}$$

であり，出会う位置は

$$x = v_\text{A} t = \begin{cases} 18\,\text{m} \\ 9\,\text{m} \end{cases}$$

と求まる．($x = x_0 + v_\text{B} t$ を用いても同じ結果が得られる．)

参考　等速直線運動の式 (32) より，時刻 t における A と B の位置はそれぞれ

$$x_\text{A} = v_\text{A} t, \qquad x_\text{B} = x_0 + v_\text{B} t$$

と表される．これらを等置して t について解くと，A と B が出会う時刻 $t = x_0/(v_\mathrm{A} - v_\mathrm{B}) = x_0/v_\mathrm{AB}$ が得られる．これを $x_\mathrm{A}, x_\mathrm{B}$ の式に戻すと，いずれも出会う位置

$$x = x_0 \frac{v_\mathrm{A}}{v_\mathrm{AB}}$$

を与える．

ここで余談として，有名な**アキレスと亀**のパラドックスを取り上げよう．$v_\mathrm{B} = +1\mathrm{m/s}$ の場合を考える．このとき

- A が B の初期位置まで移動する $12/3 = 4$ 秒間に，B は 4m 進む
- A がさらに 4m 先まで進む 4/3 秒間に，B は 4/3m 進む
- A がさらに 4/3m 先まで進む $4/3^2$ 秒間に，B は $4/3^2$m 進む

$$\vdots$$

ということが繰り返される．このため A はいつまでたっても B に追いつけないというのが，パラドックスの内容である[*51]．しかしながら以上の考えに基づけば，A と B が出会う時刻と位置は

$$t = 4\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)\mathrm{s}, \qquad x = \left\{12 + 4\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)\right\}\mathrm{m}$$

と表すことができ，$(\cdots)$ 内の無限級数は有限値 $\frac{1}{1-(1/3)} = \frac{3}{2}$ を与えるので (3.4.2 節を参照)，再び

$$t = 6\mathrm{s}, \qquad x = 18\mathrm{m}$$

が得られる．(関連して，あらかじめ分かり切っていることを敢えて回りくどい方法で導出させることは，入試出題者のよくやることである．)

さて，ある種の旅人算の問題は，**グラフを描くことにより図形の問題に帰着**させることができる．(何よりグラフを描くことは，運動の様子を視覚的に把握することを可能にする．) そのような例を取り上げよう．

問題 はじめに A と B はそれぞれ，10m 離れた P 地点と Q 地点にいる．その後 A は P 地点から Q 地点に向けて一定の速度で運動する．A が P 地点を出発してから 4 秒後に，B もまた Q 地点から P 地点に向けて一定の速度で運動を始める．B が Q 地点を出発してから

- 2 秒後に B は P 地点に到達した．
- 4 秒後に A は Q 地点に到達した．

このとき A と B は P から何 m 離れた地点ですれ違うか．

解 A と B の運動は図 42 のようなダイヤグラムで表される．ここで影を付けた相似比 $6:4 = 3:2$ の相似な三角形に注目すると，A と B のすれ違う位置は線分 PQ を $3:2$ に内分することが読み取れる．よって P からの距離は 6m である．

[*51] オリジナルのバージョンでは，アキレスが A の役を，亀が B の役を演じる．

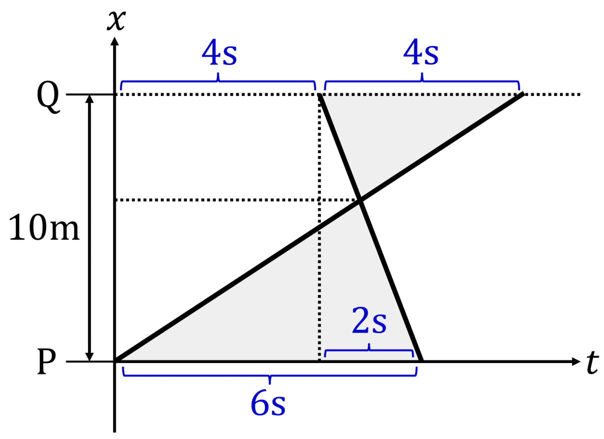


図 42　旅人算の図形問題への帰着

3.2.2　時計算

今一つの興味ある運動形態として，円 (半径 R) に沿う運動が挙げられる．ここでは新たな特徴として円に沿って距離 $2\pi R$ だけ進むと，もとの位置にもどるという条件が付け加わる[*52]．円周上の位置を指定する座標として，円に沿った座標 x の代わりに，円の適当な半径を始線として測った中心角 $\varphi = x/R$ を用いることができる．このとき対応して，動点の速度の代わりに角速度 ω を用いるのが便利である．角速度とは単位時間当たりの角度変化 $\omega = \Delta\varphi/\Delta t$ である．特に ω が一定である場合を，等速円運動という．

時計の針は等速円運動を行う物体の身近な一例である．慣習により，時計の短針，長針，秒針はそれぞれ決まった角速度

$$\omega_{短針} = \frac{30^\circ}{1\mathrm{h}} = 0.5^\circ/\mathrm{min}, \qquad \omega_{長針} = \frac{360^\circ}{1\mathrm{h}} = 6^\circ/\mathrm{min}, \qquad \omega_{秒針} = 360^\circ/\mathrm{min}$$

を持つ (時計回りを正とする)[*53]．ここで直線上の位置を円周における時計の針の位置に，速度を角速度に置き換えると，**旅人算の一形態として，時計算と呼ばれる一連の問題が作られる．**

例題　午後 1 時と午後 2 時の間で，時計の長針と短針がちょうど重なるのは 1 時何分か．

解　午後 1 時において，長針と短針は 30 度だけ離れている．1 分あたり長針は短針に $6 - 0.5 = 5.5 = 11/2$ 度だけ近づくから[*54]，長針が短針に追いつくのは $30 \div (11/2) = 60/11$ 分後のことである．よって $60/11 (\fallingdotseq 5.45)$ 分．(これは針が重なる位置としてもっともらしい結果である．)

3.3　ものを数えること (暦算，植木算)

ものを数えるというのは単純なようで，案外難しい．この点を納得してもらうために，例えば 3 以上 7 以下の整数がいくつあるかを考えてほしい．一見すると $7 - 3 = 4$ 個と考えたくなるが，これでは 3 自身を数え忘

[*52] これは x 軸上の 2 つの位置 $x, x + 2\pi R$ を同一視する場合に相当し，そのような条件は周期境界条件と呼ばれる．
[*53] あるいは，ここではそのような時計を考えているといった方が正確である．針が小刻みに動く時計などもあるからである．
[*54] このような具体的な値を覚えておくことは，計算ミスを防ぎ素早く問題を解くのに役立つが，本来それは覚えるほどのことではない．それは慣習的な時計に対してしか成り立たない規則である．

れており，正しくは 3, 4, 5, 6, 7 の 5 個である．この結果を公式的にまとめれば，最後に 1 を足さねばならないことになる：

$$(7-3)+1=5. \tag{33}$$

これは次のように考えれば納得がいく．まず 1 から 7 までの整数は 7 個である．実際，ここでは整数自身がそれを数えるための自然な番号になっている．そこから 3 の直前の整数までの個数 $3-1=2$ を引けば，3 以上 7 以下の整数の個数が

$$7-(3-1)=5 \tag{34}$$

と求まる (以下の図式を参照).

$$\overbrace{\underbrace{1,\quad 2,}_{(3-1)\text{ 個}}\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 7}^{7\text{ 個}}$$

これは上式 (33) と等価であり，このように考えれば上式 (33) を公式として暗記するには及ばない．

さて，このようなものを数えることに伴う難しさは，初等的には以下で見る「暦算」や「植木算」としても現れる．もっともこれらはそれ自体では単なる「ひっかけ問題」程度にしかならない．しかし**ものを数えることの難しさは**高等数学においても，数列の項数を数えたり，和の添字の動く範囲を改めたりする場面などに，**姿形を変えて現れる**．(3.4 節も参照．)

3.3.1 暦算

例題 今年の秋休みは 20 日間ある．その初日が 10 月 5 日であるとき，最終日は何日か．

解 最終日は 10 月 5 日の 19 日後だから (20 日後ではない)，10 月 24 日．実際，上式 (34) の箇所で見たように，10/5 から 10/24 までの日数は $24-(5-1)=20$ 日間ある．

なお月をまたぐ日数 (や曜日の数) を求める問題では，

- 1 月，3 月，5 月，7 月，8 月，10 月，12 月は 31 日まであること
- それ以外の 2 月，4 月，6 月，9 月，11 月 (「西向く士 (さむらい)」と覚える) は 2 月を除き，30 日まであること
- 2 月は基本的に 28 日までであり，4 年に 1 度のうるう年では 29 日となること[*55]

などの，暦に関する予備知識が前提とされる (9.2 節の問題を見よ)．とは言え，これらは慣習的な決まりごとに過ぎず，算数にとっては本質的ではない．

3.3.2 植木算

手を見ると，5 本の指に対して，隣り合う指の隙間は 4 箇所あることが分かる (5 箇所ではない，図 43 参照)．次に球をつかむようにして，5 本の指先を 1 つの輪の上に並べると，小指と親指の間に新たな隙間が生じるため，この場合の隙間は 5 箇所となる (図 44 参照).

これを踏まえると，植木算の典型的な問題を解くことができる：

[*55] 正確には，うるう年の西暦は 4 の倍数であるが，逆は必ずしも成り立たない；西暦が 100 の倍数であって 400 の倍数でない年 (1900 年や 2100 年など) はうるう年でない．

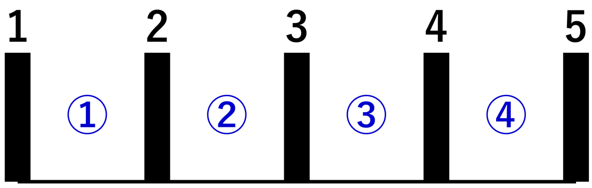


図 43　5 本の指の隙間は 4 箇所

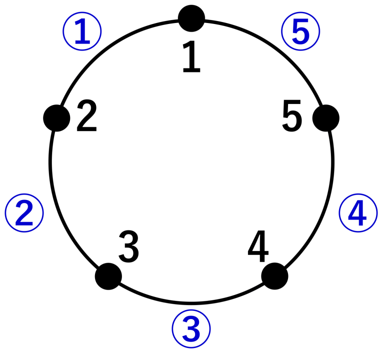


図 44　手を丸めると隙間は 5 箇所

例題 1　10m の直線状の道に 5 本の木を等間隔に植える．道の両端に木を 1 本ずつ植えるとき，隣り合う木の間隔は何 m とすれば良いか．

答　$10\mathrm{m} \div (5-1) = 2.5\mathrm{m}$.

例題 2　1 周 10m の池の縁に沿って 5 本の木を等間隔に植えるとき，隣り合う木の間隔は何 m とすれば良いか．

答　$10\mathrm{m} \div 5 = 2\mathrm{m}$.

3.4　数列

一定の規則に従って順に並べられた数のリストを数列，各々の数を項という．ここでは代表的な数列として，**等差数列**と**等比数列**を取り上げれば充分であろう．

隣り合う 2 項の差が一定値 d をとり，初項を a として

$$a, \quad a+d, \quad a+2d, \quad \cdots$$

と表される数列を等差数列という．このとき d を等差数列の公差と呼ぶ．初項を第 1 項と数えるとき，この数列の第 n 項 (一般項) は

$$a_n = a + (n-1)d \tag{35}$$

と表される．右辺の係数が n ではなく $(n-1)$ であることに注意せよ (3.3 節).

また隣り合う 2 項の比が一定値 r をとり，初項を a として

$$a, \quad ar, \quad ar^2, \quad \cdots$$

と表される数列を等比数列という．このとき r を等比数列の公比と呼ぶ．再び初項を第 1 項と数えれば，この数列の第 n 項 (一般項) は

$$a_n = ar^{n-1} \tag{36}$$

と表される．右辺の指数が n ではなく $(n-1)$ であることに注意せよ (3.3 節).

3.4.1 等差数列の和の公式

一般項が式 (35):$a_n = a + (n-1)d$ で表される等差数列の，第 n 項までの和 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を考える．これを，和の順序を逆転させた式と並べて

$$\begin{array}{cccccccccc} S_n = & a_1 & + & a_2 & +\cdots+ & a_k & +\cdots+ & a_{n-1} & + & a_n \\ S_n = & a_n & + & a_{n-1} & +\cdots+ & a_{n-k+1} & +\cdots+ & a_2 & + & a_1 \end{array}$$

と書こう．すると右辺において 1 項ずつ進むたびに，1 行目では値が d ずつ増大するのに対し，2 行目では値が d ずつ減少するので，縦に並んだ 2 項の和は全て $a_1 + a_n$ に等しい．実際，左から数えて $k(=1, \cdots, n)$ 番目の 2 項の和

$$a_k + a_{n-k+1} = \{a + (k-1)d\} + \{a + (n-k)d\} = a + \{a + (n-1)d\} = a_1 + a_n$$

は k によらない．よって 2 式を辺々足すと，和の公式

$$S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) \left[= \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\} \right]$$

が得られる[*56]．あるいは数列の番号付けによらない形に書けば，

$$(\text{等差数列の和}) = \{(\text{初項}) + (\text{末項})\} \times (\text{項数}) \div 2$$

である．

特に初項と交差を $a = 1, d = 1$ とおくと，1 から n までの整数の和

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{37}$$

が得られる．右辺において，分子 $n(n+1)$ は連続 2 整数の積なので，常に 2 で割り切れることに注意しよう．

■参考：奇数の和　等差数列の和の公式を適用すると，奇数の和は

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2N-1) = N^2$$

となる．この結果は図 45 のように図形的に解釈できる．逆に平方数から成る数列 $1, 4, 9, 16, \cdots$ の階差数列の一般項は

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

と表される．

■参考：和 $1^2 + 2^2 + \cdots$ の公式　ここでは上式 (37):

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

から，公式

$$T_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \tag{38}$$

*56 参考：和の記号を用いて対応する計算を書けば，$k = n - l + 1$ とおくことにより

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{l=1}^{n} a_{n-l+1}, \qquad \therefore S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k + a_{n-k+1}) = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n).$$

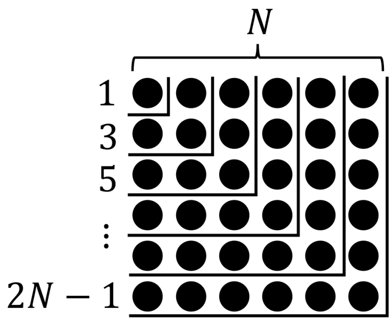


図 45　奇数の和の図形的解釈

を導いてみよう．

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

において，$k = 1, \cdots, n$ について両辺の和をとると

$$(n+1)^3 - 1 = 3T_n + \frac{3}{2}n(n+1) + n$$

となる．ただし左辺の計算は図 46 で $a_k = k^3$ とおけばよく，また右辺の第 2 項において式 (37) を用いた．よって

$$T_n = \frac{1}{3}\left\{(n+1)^3 - 1 - \frac{3}{2}n(n+1) - n\right\} = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

を得る[*57]．

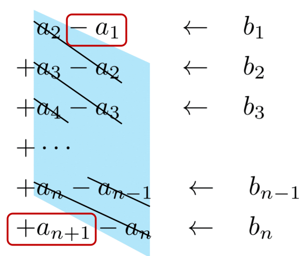


図 46　階差数列 $b_k = a_{k+1} - a_k$ の和は $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = a_{n+1} - a_1$

★　この方法は，逐次的に k^3 の和や k^4 の和などの公式を求めるのに応用が利く．

参考

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2.$$

*57 最右辺の因子 $n(n+1)(2n+1)$ が常に 6 で割り切れることの証明は読者に委ねる．連続 2 整数の積 $n(n+1)$ は偶数だから，あとは $n(n+1)(2n+1)$ が 3 の倍数であることを確認すれば十分である．n を 3 で割った余りが 0,1,2 の 3 通りに場合分けして，$n = 3m, 3m+1, 3m+2$ を代入すればよい (m は適当な整数)．

★　本稿では 2.3.5 節と 2.4.4 節の求積において，公式 $\int_0^x x'\mathrm{d}x' = x^2/2, \int_0^x x'^2\mathrm{d}x' = x^3/3$ を説明するのに式 (37),(38) を利用した．実際，級数和 (37),(38) とこれらの積分公式は既によく似ていることに注意されたい．(同様に差分と微分の公式にも類似性がある．)

3.4.2　等比数列の和の公式

一般項が式 (36):$a_n = ar^{n-1}$ で表される等比数列の，第 n 項までの和 $S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1}$ を考える．これを両辺 r 倍した式と辺々引くと，

$$(1-r)S_n = a(1-r^n)$$

となる．$r=1$ の場合は単なる定数数列に対応する．そこで $r \neq 1$ を仮定し，両辺を $1-r(\neq 0)$ で割ると，等比数列の和の公式

$$S_n = a\frac{1-r^n}{1-r} \qquad (r \neq 1)$$

が得られる．右辺が各項の共通因子 a に比例することは，あらかじめ期待される結果である．また n として項数を用いれば，この公式は数列の番号がずれている場合にもそのまま適用できる．なお $|r| < 1$ であれば $n \to \infty$ のとき，この和は一定値

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

に収束することが見て取れる (無限等比級数和の公式)．

3.4.3　規則性の問題と帰納的推論

限られたデータから一般的な規則を予測する推論の様式は帰納的推論と呼ばれ，そこには必ず蓋然性 (不確実性) が伴う．従って数列の一般項の推測に代表されるような，このタイプの推論を要求する「規則性の問題」は本来，厳密に言えば**数学的によく定義された問題ではない**．(詳しくは付録 A を参照．)

3.5　場合の数

3.5.1　順列

n 個の相異なるものから r 個を選び，順番を決めて 1 列に並べたものを**順列** (permutation) といい，その総数を ${}_n\mathrm{P}_r$ で表す．1 番目のものの選び方は n 通りあり，その各々に対して残りの選択肢は $(n-1)$ 個だから，2 番目のものの選び方は $(n-1)$ 通りある．同様に 3 番目，4 番目，……のものの選び方は $(n-2)$ 通り，$(n-3)$ 通り，……あるから，

$${}_n\mathrm{P}_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}_{r\,\text{個}}$$

と表される[*58]．ここで任意の自然数 n の**階乗**

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1$$

*58 右辺が r 個の因子の積であることについて，3.3 節も参照．

を定義すると[*59]，上式は

$$
{}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{39}
$$

と書き換えられる．ところで ${}_n\mathrm{P}_n$ は n 個の相異なるものを 1 列に並べる方法の総数だから，${}_n\mathrm{P}_n = n!$ である．よって上式 (39) が $r = n$ の場合にも成り立つためには，$0! = 1$ と定義すればよい．実際このとき，様々な数学公式を統一的に書き表すことができる．

重複順列 もし同じ選択肢を繰り返し用いて良いなら，2 番目，3 番目……のものの選び方も n 通りとなるため，場合の数は n^r となる．このように異なる n 個のものから重複を許して r 個を取り出して 1 列に並べる並べ方を**重複順列**といい，${}_n\Pi_r$ で表す．

$$
{}_n\Pi_r = n^r.
$$

円順列 異なる n 個のものを円形に並べる並べ方を**円順列**という．言い換えれば円順列は円形テーブルに n 人を (等間隔に) 着席させる場合の数である．ただし円順列では円 (に沿って並べたもの) を回転させて互いに一致させることができる配置を区別しない．そこで円周上のある席に特定の人物が座る場合だけを考えて，円の回転を“固定”すれば，残る $(n-1)$ 箇所の席に関する順列に帰着するから，円順列は $(n-1)!$ 通りある．なおある円順列を“紙面の裏から”見た，左右の反転した配置と区別しない場合は**数珠 (じゅず) 順列**と言われ (数珠をひっくり返しても元の数珠と変わらない)，場合の数は円順列の数の半分 $(n-1)!/2$ となる (ただし $n \geq 3$)．

n 個のものの中に互いに等しいものがある場合には，同じ配置を重複して数えないよう注意が必要である (3.5.2 節の例題も参照)．

3.5.2 組合せ

n 個の相異なるものから r 個を選ぶ**組合せ** (combination) の数を ${}_n\mathrm{C}_r$ で表す．組合せは順列において，互いに r 個のものの順番を入れ替えただけの関係にある $r!$ 通りの配列を区別しないので，

$$
{}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{C}_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \left(= \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} \right) \tag{40}
$$

と表される (そこで ${}_n\mathrm{C}_0 = 1$ と定義する)．上式 (40) の第 3 辺から ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$ が成り立つことが直接，見て取れる．このことは n 個の相異なるものから r 個を選ぶことが，残りの $(n-r)$ 個を取り除くことと等価であることから，あらかじめ期待される結果である．

順列や組合せを具体的に書き出すには，**樹形図**を利用するのが便利である．これは 1 番目の選択肢の各々に対して，2 番目の可能な選択肢を枝分かれさせて書き，続けて 2 番目までの選択の各々に対して，3 番目の可能な選択肢を枝分かれさせて書く，ということを繰り返して得られる図式のことである．ただし組合せを考える場合には，選択肢 (A,B,C,$\cdots$ で表そう) の順番を入れ替えただけの配列は区別されない．そこでそれらの重複を防ぐには，選択肢に適当な順序 A$\to$B$\to$C$\to\cdots$ を与え，ある文字を用いたら，それ以降はそれより後ろの文字を選ばなければならないというルールを課せば良い．実際この措置により，例えば A-B-C と同じ

[*59] 例えば

$$
1! = 1, \qquad 2! = 2, \qquad 3! = 6, \qquad 4! = 24, \qquad ,5! = 120, \qquad \text{etc}
$$

である ($(n+1)! = (n+1)\cdot n!$ に注意して逐次的に計算すれば良い)．

組合せを表す A-C-B や C-B-A などは，A→B→C→ ⋯ の順番に違反する配列として除外される．図 47 では A,B,C,D,E の 5 文字から 3 文字を選ぶ ${}_5\mathrm{C}_3 = 10$ 通りの組合せを樹形図で示している．順列にせよ組合せにせよ，あらゆる可能性を余すことなく網羅するには，適当に設けた選択肢の順序 A→B→C→ ⋯ の下で，A,B,C,⋯ の配列を辞書に現れる順番に書き出せば良い．

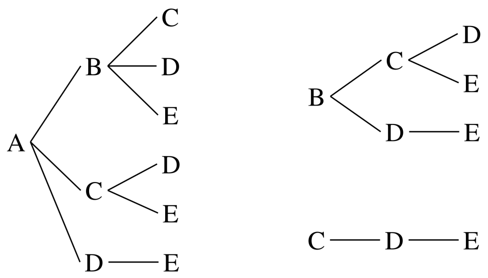


図 47　樹形図の一例．A,B,C,D,E の 5 文字から 3 文字を選ぶ ${}_5\mathrm{C}_3 = 10$ 通りの組合せを書き出した．

例題 1　physics の 7 文字から 3 文字を選ぶ方法の総数と，選んだ 3 文字を並べて得られる文字列の総数をそれぞれ求めよ (2 つの s は区別しない)．

解　同じ文字 s が 2 つ含まれていることに応じて場合分けを行う：

1. s を 1 つも選ばない場合．s 以外の 5 文字から 3 文字を選ぶ場合の数は ${}_5\mathrm{C}_3 = {}_5\mathrm{C}_2 = \frac{5\cdot4}{2\cdot1} = 10$．その各々に対して 3 文字の並べ方は $3! = 6$ 通りあるから，得られる文字列は $6 \times 10 = 60$ 通り．
2. s を 1 つだけ選ぶ場合．s 以外の 5 文字から残り 2 文字を選ぶ場合の数は ${}_5\mathrm{C}_2 = 10$．その各々に対して 3 文字の並べ方は $3! = 6$ 通りあるから，得られる文字列は $6 \times 10 = 60$ 通り．
3. s を 2 つとも選ぶ場合．s 以外の 5 文字から残り 1 文字を選ぶ場合の数は ${}_5\mathrm{C}_1 = 5$．その各々に対して 3 文字の並べ方は $3!/2! = 3$ 通りあるから，得られる文字列は $3 \times 5 = 15$ 通り．

以上を合わせると，

$$3\text{ 文字の選び方は }\ 10+10+5 = 25\text{ 通り，}\qquad 3\text{ 文字の並べ方は }\ 60+60+15 = 135\text{ 通り．}$$

例題 2　正 n 角形の対角線の本数はいくつあるか．

解　n 個の頂点から 2 点を選んで線で結ぶ方法は ${}_n\mathrm{C}_2 = n(n-1)/2$ 通りある．このとき得られる線分から n 本の辺を除けばすべての対角線が得られるから，その本数は

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

これは $n = 3$ の場合にも正しい結果 (0 本) を与える．また右辺は n が偶数・奇数のいずれの場合にも分子 $n(n-3)$ が 2 で割り切れることから，常に整数となることが保証される．(各自 $n = 3, 4, 5, \cdots$ の場合の図を描き，この公式が上手くいくことを確認せよ．この公式を覚える必要はない；考え方に立ち戻って，${}_N\mathrm{C}_2 - N$ と立式すればよい．)

別解　1 つの頂点からは両隣の頂点を除く $(n-3)$ 個の頂点に向けて対角線を引くことができる．そこで頂点の個数 n を掛けて $n(n-3)$ 本とすると，同じ対角線を“行き”と“帰り”とで重複して数えていることになる．よってこれを 2 で割り，対角線の本数 $n(n-3)/2$ を得る．

参考：2 項係数とその性質　${}_n\mathrm{C}_r$ は 2 項係数とも呼ばれる．これは ${}_n\mathrm{C}_r$ が 2 変数 x, y の多項式

$$(x+y)^n = {}_n\mathrm{C}_0 x^n y^0 + {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1} y^1 + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} x^1 y^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n x^0 y^n$$

の展開係数となることに由来している[*60]．実際 $(x+y)^n$ を展開する際，n 個の $(x+y)$ のうち r 個から y を選ぶとき，残り $(n-r)$ 個からは x を選ばなければならないので，$x^{n-r}y^r$ が得られ，その係数は場合の数 ${}_n\mathrm{C}_r$ となる．特に $x=1, y=1$ を代入すると，興味ある公式

$$2^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n \tag{41}$$

が見出される．
2 項係数はまた，恒等式

$${}_k\mathrm{C}_i + {}_k\mathrm{C}_{i-1} = {}_{k+1}\mathrm{C}_i \tag{42}$$

を満たす．この関係は直接の計算によって確かめられるが，次のように意味付けして解釈することもできる．すなわち，$(k+1)$ 両編成の列車のうち i 両を選んで色を塗る方法の総数 ${}_{k+1}\mathrm{C}_i$ のうち，

- 先頭の 1 両を塗る方法は ${}_k\mathrm{C}_{i-1}$ 通り，
- 先頭の 1 両を塗らない方法は ${}_k\mathrm{C}_i$ 通り

である．ところで図 48 のように，上から $k(=1, 2, \cdots)$ 段目，左から $i(=1, \cdots, n)$ 番目の数が ${}_k\mathrm{C}_i$ となるように，2 項係数をピラミッド状に並べた図式を Pascal の三角形という．このとき公式 (42) は Pascal の三角形において，k 段目の数から $(k+1)$ 段目の数を得る規則になっている (図 48 参照)．これを利用すれば Pascal の三角形の上段から下段に向けて，2 項係数を逐次的に求めることができる (各段の両端の数は常に ${}_k\mathrm{C}_0 = {}_k\mathrm{C}_k = 1$)．さらに k 段目の数の和は 2^k となっており，公式 (41) が成り立っていることも見て取れる．
なお類似の公式に

$${}_k\mathrm{C}_i \times {}_i\mathrm{C}_1 = {}_k\mathrm{C}_1 \times {}_{k-1}\mathrm{C}_{i-1}$$

がある．これは

- k 人の生徒から i 人の学級委員を選び，その中から 1 人のリーダーを選ぶ方法 (左辺)
- k 人の生徒から 1 人のリーダーを選び，
  残りの $(k-1)$ 人の中から (リーダーでない) 学級委員 $(i-1)$ 人を選ぶ方法 (右辺)

が等しいことを意味している．

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
{}_k\mathrm{C}_{i-1} \arrow[dr] & & {}_k\mathrm{C}_i \arrow[dl] \\
 & {}_{k+1}\mathrm{C}_i &
\end{tikzcd}$$

図 48　Pascal の三角形

ここで m 種類のものを考え，$k(=1, \cdots, m)$ 種類目のものが n_k 個あるとき，$N = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ 個のものすべてを横一列に並べる方法の総数を調べよう．仮に N 個のものが互いに相異なるとすると，場合の数は $N!$ である．しかし実際には各 n_k 個のものは同種であり，それらを入れ替えた配列は区別されないから，求める場合の数は

$$\frac{N!}{n_1! n_2! \cdots n_m!} \tag{43}$$

[*60] 特に $n=2$ とおくと，見慣れた式 $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ となる (2.3.1 節の脚注を見よ)．$n=3$ のときは

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

であり，y を $-y$ で置き換えると $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ が得られる．

と表される[*61][*62].

例題　図 49 のように縦に m 個，横に n 個のマスが並んだ碁盤の目状の通路に沿って，左下の隅の点 S から右上の点 G まで最短距離で行く方法は何通りあるか.

解　各マス目の辺に沿って m 回上に，n 回右に進めばよいので，求める場合の数は「↑」m 個と「→」n 個を時系列の順に並べる方法の総数に一致する．したがって式 (43) より

$$\frac{(m+n)!}{m!n!}\text{ 通り.}$$

注解　この方法は $m, n \gg 1$ の場合でも手早い立式を可能にし，また通路がジャングルジムのように 3 次元的な格子状の場合にも応用できる.

ところである格子点に最短で達するには，その真下または左側の隣接する点からその点に向かわなければならない．よって

$$(\text{任意の格子点までの最短ルートの総数}) = (\text{それら直前の 2 点までの最短ルートの総数の和}) \tag{44}$$

が成り立つ．このことを利用すると，与えられた (m, n) に対して個別に，最短ルートの総数を地道に数え上げることができる．まず $m \times n$ の大きな長方形において，底辺と左端の 2 辺上の各点まで行く方法は 1 通りである (S からその点まで真っ直ぐ突き進むしかない)．そこで各点に図 49 のように，場合の数として緑色の「1」を書き添える．すると式 (44) の事実を逐次用いて，下から (または左から) 2 本目の横線 (または縦線) 上の各点までの最短ルートの数を，左側の点 (または下側の点) から順に書き添えて行くことができる．同様に 3 本目，4 本目……の線上にも場合の数を書き込んでゆけば，最終的に G までの最短ルートの総数が求まる (図 49 を参照).

同様にして，例えば図 50 の青い斜めの線より上側に飛び出すことなく S から G に向かう最短ルートの総数を求めることができる．一般にこのような条件を満たす場合の数を **Catalan (カタラン) 数**といい，ここでは 14 通りである．この結果は例えば，次のような問題を考えるのに応用できる.

> 常に教室内の男の人数が女の人数より多くならないように，男 3 人と女 4 人が 1 人ずつ教室に入る方法は何通りあるか.

まず 3 人の男どうしと，4 人の女どうしを互いに区別せず，3 文字の「男」と 4 文字の「女」を教室に入る順番に並べる方法を考える．図 50 の通路において，「男」を上向きに 1 マス進むことに，「女」を右向きに 1 マス進むことに対応させると，条件を満たす「男」と「女」の並べ方の総数は，上で求めた Catalan 数 14 に一致する．次いで個々人の違いを考慮すると，求める場合の数は

$$3! \times 4! \times 14 = 2016.$$

本稿では Catalan 数の話題にはこれ以上，立ち入らない.

式 (43) を踏まえ，組合せの数 ${}_n\mathrm{C}_r$ を再考する．n 個の相異なるものから r 個を選ぶには，見方を変えれば，横一列に並べた n 個のものに r 個の「当選」のくじと $(n-r)$ 個の「落選」のくじを割り当てれば良い．よって公式 (43) において $N = r + (n-r) = n$ として，くじの並べ方の総数を求めると，再び式 (40):

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

が導かれる.

[*61] この結果は ${}_N\mathrm{C}_{n_1} \times {}_{N-n_1}\mathrm{C}_{n_2} \times \cdots \times {}_{n_m}\mathrm{C}_{n_m}$ としても得られる.

[*62] 2 項係数の場合と同様に考えれば，これは m 変数 $x_1, \cdots, x_m$ に対して $(x_1 + \cdots x_m)^N$ を展開したときの，${x_1}^{n_1} \cdots {x_m}^{n_m}$ の係数となることが分かる.

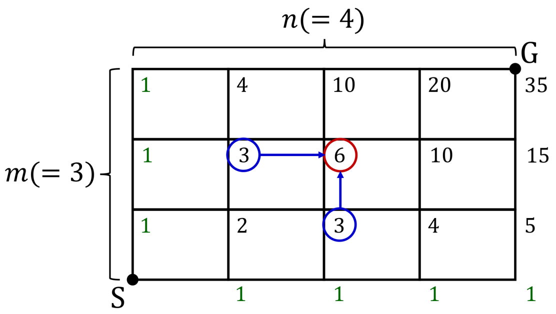


図 49　碁盤の目に沿う最短ルート数

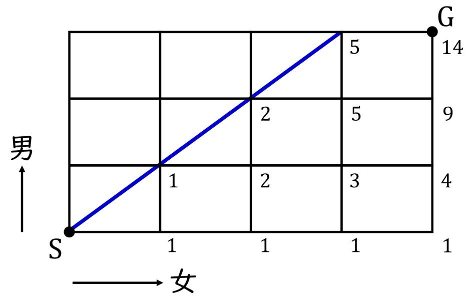


図 50　Catalan 数

3.5.3　重複組合せ (発展)

異なる n 個のものから重複を許して k 個とる組合せを**重複組合せ**といい，その総数を ${}_n\mathrm{H}_k$ と表す．

例として，3 種類の数字 1,2,3 から重複を許して 5 個取り出す組合せについて考えてみる．取り出した 5 個の数字を小さい順にならべると，

$$(1,1,1,1,1),\ (1,1,2,2,2),\ (1,2,2,3,3),\ (2,2,3,3,3) \tag{45}$$

などがある．選んだ 5 つの数字を小さい順に a,b,c,d,e とすると，これは

$$1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq 3 \tag{46}$$

を満たす．このままでは扱いにくいから，文字間の等号を無くしたい．それには次のことを用いるのが常套手段である．

$$x,y \in \mathbb{Z}\,(\text{整数})\ \text{のとき} \qquad x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x < y+1.$$

式 (46) で a,b,c,d の順に逐次この関係を用いて書き換えると

$$1 \leq a < b+1 < c+2 < d+3 < e+4 \leq 7$$

式 (45) の例で述べると

$$\begin{aligned}
(1,1,1,1,1) &\quad\Leftrightarrow\quad (1,2,3,4,5)\\
(1,1,2,2,2) &\quad\Leftrightarrow\quad (1,2,4,5,6)\\
(1,2,2,3,3) &\quad\Leftrightarrow\quad (1,3,4,6,7)\\
(2,2,3,3,3) &\quad\Leftrightarrow\quad (2,3,5,6,7)
\end{aligned}$$

結局，(a,b,c,d,e) と $(a,b+1,c+2,d+3,e+4)$ とは 1 対 1 に対応しているから，後の組の数を考えればよい．これは 1 から 7 までの $7(=3+5-1)$ 個の数字から 5 つとった組合せにほかならない．よって，その数は

$$ {}_3\mathrm{H}_5 = {}_{3+5-1}\mathrm{C}_5 = 21.$$

一般公式として書けば

$$ {}_n\mathrm{H}_k = {}_{n+k-1}\mathrm{C}_k.$$

この組合せの個数はまた，○ 5 個と | (棒) 2 本を 1 列に並べる順列の個数に等しいことが，次のようにして分かる．

$$\begin{gathered}\text{左の棒より左にある○の個数だけ 1}\\ \text{2 本の棒の間にある○の個数だけ 2}\\ \text{右の棒より右にある○の個数だけ 3}\end{gathered}$$

を取り出すことにすれば，求める組合せと 1 対 1 に対応する．

式 (45) の例で言えば

$$\begin{aligned}(1,1,1,1,1) &\quad\Leftrightarrow\quad \text{○○○○○ | |}\\ (1,1,2,2,2) &\quad\Leftrightarrow\quad \text{○○ | ○○○ |}\\ (1,2,2,3,3) &\quad\Leftrightarrow\quad \text{○ | ○○ | ○○}\\ (2,2,3,3,3) &\quad\Leftrightarrow\quad \text{| ○○ | ○○○}\end{aligned}$$

○ 5 個と | (棒) 2 本を 1 列に並べる順列の個数は，7 ヵ所の場所から○の入る 5 ヵ所を選ぶ場合の数に等しいから，${}_7\mathrm{C}_5$ (| の入る 2 ヵ所ならば ${}_7\mathrm{C}_2$) 通りある．

これはまた，りんご 5 つを 3 人に分配する仕方の数になっていることを示す．式 (45) の例で，A 君は選んだ 1 の数字の個数だけ，B 君は 2 の数字の個数だけ，C 君は 3 の数字の個数だけりんごを分配すると考えれば良い．

		A 君	B 君	C 君
		「1」の部屋	「2」の部屋	「3」の部屋
$(1,1,1,1,1)$	$\Leftrightarrow$	5 コ	0 コ	0 コ
$(1,1,2,2,2)$	$\Leftrightarrow$	2 コ	3 コ	0 コ
$(1,2,2,3,3)$	$\Leftrightarrow$	1 コ	2 コ	2 コ
$(2,2,3,3,3)$	$\Leftrightarrow$	0 コ	2 コ	3 コ

また，3 人に分配されたりんごの個数に着目すると，A,B,C それぞれの分配の個数を x, y, z とすると

$$\begin{cases} x+y+z=5 \\ x,y,z \text{ は非負な整数} \end{cases} \tag{47}$$

を満たす．したがって，(x,y,z) の組の数も ${}_3\mathrm{H}_5$ となっていることが分かる．

さらに，1,2,3 の数字をそれぞれ a, b, c と書き換え，選んだ 5 つをすべて掛け合わせると，また式 (45) の例で言えば，順に $a^5, a^2b^3, ab^2c^2, b^2c^3$ であり，一般的には $a^xb^yc^z$ で x, y, z は式 (47) を満たしている．結局，$(a+b+c)^5$ を展開して同類項をまとめると，${}_3\mathrm{H}_5$ 種類の項が現れることになる．

3.6 集合と論理

3.6.1 集合

ある条件を満たすものの集まり A を**集合**，集合に属しているもの a を**要素**または**元**という．要素 a が集合 A に属していることを

$$a \in A$$

と表す．通常，整数全体は $\mathbb{Z}$，自然数全体は $\mathbb{N}$，実数全体は $\mathbb{R}$，複素数全体は $\mathbb{C}$ で表され，例えば $1.2 \in \mathbb{R}, 1.2 \notin \mathbb{N}$ である．要素を持たない集合を**空集合**と言い，ϕ と書く．

2 つの集合 A, B に対して，A の要素がすべて B に含まれている，すなわち「$x \in A$ ならば $x \in B$」が成り立つとき，A は B の**部分集合**であると言い，

$$A \subset B$$

と表す．例えば $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$．もし $A \subset B$ かつ $B \subset A$ であれば A と B は集合として**等しく**，$A = B$ と書ける．他方，$A \subset B$ であって $A \neq B$ のときには，A は B の**真部分集合**であると言われる，

さて，U を**全体集合**として 2 つの集合 $A, B(\subset U)$ を考える．このとき A に含まれない U の要素の集合を A の**補集合**と言い，$\overline{A}$ で表す．また

- A, B のどちらにも属している要素の全体を A と B の**共通部分 (交わり)** と言い，$A \cap B$ で表す．
- A, B の少なくとも一方に属している要素の全体を A と B の**和集合 (結び)** と言い，$A \cup B$ で表す．

種々の集合の包含関係は，図 51 のように各々の集合を平面上の領域として描画すると，直観的・視覚的に把握・整理することができる．そのような表示方法は **Venn (ベン) 図**と呼ばれ，ここでは各要素を平面上の点 (ないし面積要素) に対応付けていることになる．U の要素 x は A に属しているか否かの 2 通り，B に属しているか否かの 2 通りで，合計 $2^2 = 4$ 通りの可能性があることに対応して，図 51 のベン図も 4 種類の領域を持っていることが見て取れる．$A \subset B$ は $A \cap \overline{B} = \phi$ の場合に対応し，このとき A の領域は B の領域に含まれる (特に $A = B$ のときには 2 つの領域は互いに一致する)．3 つの集合 A, B, C に対するベン図は図 52 のように描くことができ，同様に $2^3 = 8$ 種類の領域を持つ．(4 つ以上の集合に対してもベン図を描くことは可能であるが，図が複雑になるため便利ではない．)

ここで **de Morgan (ド・モルガン) の法則**

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

を紹介しておく[*63]．確かに 2 式それぞれに関して，順に

- 「部活動 A,B の両方に所属」を否定すると，「部活動 A,B の少なくとも一方には所属していない」
- 「部活動 A,B のどちらかには所属」を否定すると，「部活動 A,B のいずれにも所属していない」

となるため，これらは意味レベルで充分，納得できる．実際にド・モルガンの法則が成り立っていることは，図 51 のベン図からも確認できる．例えば第 1 式について，A と B の共通部分の外側は，A の外側と B の外側の和集合となっていることが見て取れる．

次に集合の要素の個数を考える．有限個の要素を持つ集合を**有限集合**，無限の要素を持つ集合を**無限集合**と言う．以下では任意の有限集合 A に対し，その要素数を $n(A)$ で表す．ここで図 51 のベン図の助けを借りると，和集合 $A \cup B$ の要素数を得るには，まずそれぞれの要素数 $n(A), n(B)$ を足し，その際に重複して数えてしまっている (ダブル・カウント) 共通部分の要素数 $n(A \cap B)$ を後から差し引けばよいことが分かる．すなわち

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \tag{48}$$

が成り立つ．これと補集合の要素数 $n(\overline{A \cup B})$ を合わせると，全体集合 U (有限集合とする) の要素数が得られる：

$$n(U) = n(A \cup B) + n(\overline{A \cup B}).$$

[*63] これは法則と言うよりも定理である (付録 A)．

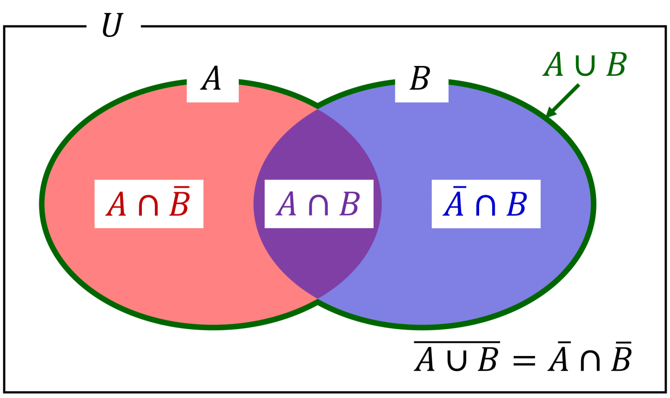


図 51　集合 $A, B(\subset U)$ のベン図

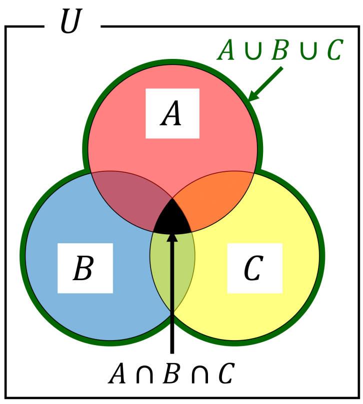


図 52　集合 $A, B, C(\subset U)$ のベン図

また図 52 のベン図に基づき，式 (48) と同様に

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \tag{49}$$

が成り立つことを説明できる．すなわちダブル・カウントを防ぐには，単純な和 $n(A) + n(B) + n(C)$ から $n(A \cap \overline{B} \cap \overline{C})$, etc. を 1 回ずつ，また中央の要素数 $n(A \cap B \cap C)$ を 2 回だけ引かねばならない．そこで $n(A \cap B)$, etc. を引くと，中央の要素数 $n(A \cap B \cap C)$ を 3 回引くことになるので，最後に余計に引きすぎた $n(A \cap B \cap C)$ を加えて補正する．

上式 (49) の手堅い説明　補集合 $\overline{A \cup B \cup C}$ を除く $2^3 - 1 = 7$ 種類の領域の要素数は

$$n(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = n(A) - n(A \cap \overline{B} \cap C) - n(A \cap B \cap \overline{C}) - n(A \cap B \cap C), \text{ etc.}$$
$$n(\overline{A} \cap B \cap C), \text{ etc,} \qquad n(A \cap B \cap C)$$

であり (ただし etc. は集合の文字を $A \to B \to C \to A$ と巡回置換して得られる残りの 2 式を表す)，これらの和は

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(\overline{A} \cap B \cap C) - n(A \cap \overline{B} \cap C) - n(A \cap B \cap \overline{C}) - 2n(A \cap B \cap C)$$

となる．ここに $n(\overline{A} \cap B \cap C) = n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)$, etc. を代入して式 (49) を得る．

3.6.2　論理

真偽の定まる文章のことを**命題**と言い，普通 p, q, r などの文字で表す．命題 p の**否定**を $\bar{p}$ で表す．2 つの命題 p, q に対し，新たに命題「p かつ q」(and) と「p または q」(or) を作ることができる．

- 「p かつ q」は p と q の両方が同時に真であるときにのみ真である．
- 「p または q」は p と q の少なくとも一方が真であるとき真である．

例えば命題 p が真，命題 q が偽であるとき，「p かつ q」は偽であるのに対し，「p または q」は真である．

また一方の命題 p を仮定，他方の命題 q を結論とする**条件命題**「$p \Rightarrow q$」を作ることができる．ここで記号「$\Rightarrow$」は「ならば」と読む．さらに「$p \Rightarrow q$」かつ「$q \Rightarrow p$」が成り立つとき，命題 p, q は同じことを表している．これを p, q は**同値**であると言い，「$p \Leftrightarrow q$」と表す．実際このことは，直観的には次のように理解できる．すなわち x に関する命題 $p(x), q(x)$ を満たす要素 x から成る集合 P, Q を考えると，「$p \Rightarrow q$」は $P \subset Q$ を意味する (P の要素が Q からこぼれ落ちない，図 53 参照)．同時に「$q \Rightarrow p$」のとき $Q \subset P$ が成り立つので，$P = Q$ である．よって p, q は命題として等価と言える．

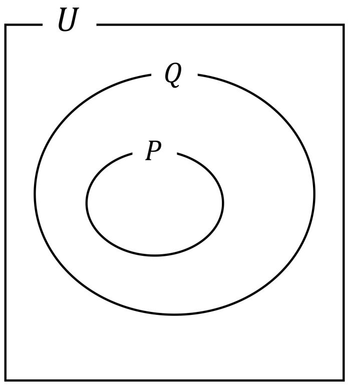


図 53　$p \Rightarrow q$ のとき $P \subset Q$

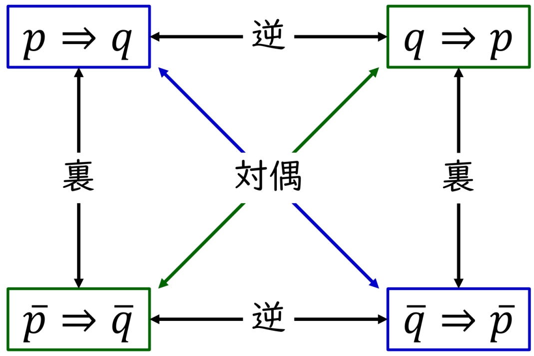


図 54　命題の逆の裏は対偶．対偶な命題は同値．

引き続き集合 P, Q を考えると，「p かつ q」は $P \cap Q$ に，「p または q」は $P \cup Q$ に対応している．ところで 3.6.1 節の図 51 のベン図に見て取れるように，$P \cap Q \subset P \cup Q$ なので，

$$\text{「}p \text{ かつ } q\text{」} \quad \Rightarrow \quad \text{「}p \text{ または } q\text{」}$$

が成り立つことが分かる．

命題「$p \Rightarrow q$」に対し，

「$q \Rightarrow p$」を**逆**，　「$\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$」を**裏**，　「$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$」を**対偶**

と言う．ここでもとの命題「$p \Rightarrow q$」が真であっても，その逆や裏が真になるとは限らない[*64]．例えば人気の女性アイドルグループ「乃木坂 46」を考えると，乃木坂のメンバーは女である．ところが

- その逆は「女ならば乃木坂のメンバー」
- その裏は「乃木坂のメンバーでなければ男」

であり，これらは偽となる．実際，**反例**として，乃木坂のメンバーでない女性をいくらでも挙げることができる．他方，対偶は「男なら乃木坂のメンバーでない」となり，真である．このように一般的に言って，任意の命題とその対偶は同値であり，それ故，それらの真偽は一致する．と言うのも，再び集合 P, Q を持ち出せば $p \Rightarrow q$ のとき $P \subset Q$ であり，図 53 のベン図の助けを借りると，このとき $\overline{Q} \subset \overline{P}$ となっている．よって対偶 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ が成り立つ．同様に p, q と $\bar{p}, \bar{q}$ の役割を入れ替えれば，その逆

$$\text{「}\bar{q} \Rightarrow \bar{p}\text{」} \quad \Rightarrow \quad \text{「}p \Rightarrow q\text{」}$$

も成り立つことが言える．よって対偶な命題は同値である．なお定義により，命題の逆と裏も互いに対偶な関係にあることに注意しよう (図 54 参照)．

最後に関連して，**必要条件**と**十分条件**について述べる．$p \Rightarrow q$ のとき，p を q の十分条件，q を p の必要条件という．また $p \Leftrightarrow q$ のとき，p は q にとっての (q は p にとっての) **必要十分条件**であるという．これらは日常的な語感に整合している．実際「乃木坂メンバー $\Rightarrow$ 女」において，乃木坂メンバーであるためには少なくとも女であることが「必要」である．(しかし女であるだけでは「十分」ではない．これは命題の逆「女 $\Rightarrow$

[*64] したがって「逆に言えば……」や「裏を返せば……」といった言い回しには要注意である．

乃木坂メンバー」が成り立たないことに対応していることが，十分条件の定義から分かる．）同じことを図 53 のベン図を用いて説明できる．$p \Rightarrow q$ のとき $P \subset Q$ であり，このもとで要素 x が集合 P に属しているためには，少なくとも $x \in Q$ でなければならないから，命題 p が成り立つには q が成り立つことが「必要」である．さらに別の例を挙げる．仮に毎日 12 時間以上，勉強することが受験に合格するための十分条件だとしても，それは必要条件だとは言えない．これは「12 時間以上勉強 $\Rightarrow$ 合格」が真であっても，その逆「合格 $\Rightarrow$12 時間以上勉強」が成り立たないことに対応していることが，必要条件の定義から分かる．なお付録 B では決定論が自由意志を否定するための十分条件であるが，必要条件ではないと考えられることを説明する．

参考：トートロジー　日常用語としてのトートロジーは $p \Rightarrow p$ のようなナンセンスな同語反復を意味するのに対し，数学用語としてのトートロジーは「p または $\bar{p}$」なども含め，一般に常に成り立つ命題を指す．

第 II 部

問題集

第 II 部では読者は既に，第 I 部の知識を習得していることを前提としている．

4　割合と比の問題

基本事項としては，主に 1.3.2 節における割合と比の説明や，1.3.6 節と 3.1 節における (連立)1 次方程式の解法を中心に復習すると良い．また全般的に応用の効く方法として，**未知数を文字で置いて立式する**習慣を身に付けると良い (本稿では基本的にそのような解法を示す)．これは「相当算」「年令算」といった各論の解法を個別的に覚えずとも，それらを統一的に理解することを可能にする．このことは問題の意味レベルの個別的な文脈に依らずに，計算を機械的に行うことができるという事情に依っている．それは良い意味での思考の省略である．逆にそうした代数計算を迂回するには，奇抜な発想 (や，場合によっては帰納的推論などによるごまかし) が必要であり，それを「思考力を問う問題」として小学生に押し付けるのは責任転嫁というものである．

なお物理では数値と単位を合わせた，次元を持つ物理量を文字で表すのが一般的であり，このとき文字には既に単位が含まれているものと見なされる．しかしながら本稿では単位を除いた無次元の数値を文字でおく場合もある．また文字の一部に数値を代入した形の，文字と数値が混在した式においては，式のパラメーターに依存した振舞いが見づらくなる．このため文字式のまま変形し，数値の代入は最後にまとめて行うのが好ましいとされる．しかしながら実際問題，算数においてこの立場を貫き通すことは困難である．

4.1　割合と比 [1, pp.6–7]

問題　A の 75 %と B の $\frac{3}{5}$ 倍が等しいとき，2 つの数量 A と B の比を求めよ．

解　75 %は 3/4 なので

$$\frac{3}{4}A = \frac{3}{5}B, \qquad \therefore \frac{A}{B} = \frac{3/5}{3/4} = \frac{4}{5}, \qquad \therefore A : B = 4 : 5.$$

問題　$A : B = 2 : 3$，$B : C = 4 : 5$ のとき，$A : C$ を求めよ．

解

$$\frac{A}{B} = \frac{2}{3}, \qquad \frac{B}{C} = \frac{4}{5}, \qquad \therefore \frac{A}{C} = \frac{A}{B} \times \frac{B}{C} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}, \qquad \therefore A : C = 8 : 15.$$

あるいは B の比の大きさを 3 と 4 の最小公倍数 12 にそろえると

$$A : B = 8 : 12, \qquad B : C = 12 : 15, \qquad \therefore A : C = 8 : 15.$$

問題　50 円玉と 100 円玉が合わせて 10 枚ある．50 円玉だけの金額と 100 円玉だけの金額の比が 3:4 であるとき，50 円玉と 100 円玉の枚数をそれぞれ求めよ．

解　比を題材とした連立 1 次方程式の問題である．50 円玉と 100 円玉の枚数をそれぞれ x, y とすると，

$$x + y = 10$$

である．また
$$\frac{3}{4}=\frac{50x}{100y}=\frac{x}{2y}, \qquad \therefore 2x=3y$$
であり，2 式を連立して解くと $x=6, y=4$ を得る．

問題 3 本の棒 A,B,C の長さの和が 116cm であり，A の 1/2 と B の 2/3 と C の 3/4 の長さがすべて等しいとき，A,B,C の長さを求めよ．

解 A,B,C の長さを順に a,b,c とすると，
$$a+b+c=116\,\mathrm{cm}, \qquad \frac{1}{2}a=\frac{2}{3}b=\frac{3}{4}c(=l\text{ とおく})$$
であり，第 2 式は
$$a=2l, \qquad b=\frac{3}{2}l, \qquad c=\frac{4}{3}l \tag{50}$$
と書き換えられる．これを第 1 式に代入すると
$$116\,\mathrm{cm}=\left(2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\right)l=\frac{29}{6}l, \qquad \therefore l=116\,\mathrm{cm}\times\frac{6}{29}=24\,\mathrm{cm}$$
を得る．さらにこれを上式 (50) に戻すと
$$a=48\,\mathrm{cm}, \qquad b=36\,\mathrm{cm}, \qquad c=32\,\mathrm{cm}$$
と求まる．

図 55 のように部分の数量が全体に占める割合を，扇形の円に占める中心角 φ (度数法で測った値，単位 ° を除く) に対応付けて表示したグラフを**円グラフ**という．すなわち
$$(\text{割合})=\frac{\varphi}{360}.$$

問題 図 55 の円グラフはある学年の部活加入者の割合を表している．このとき釣り部の人数を求めよ．

解 「娯楽部」と「その他」を合わせた人数 $105+30=135$ は，中心角 $360^\circ-(50^\circ+40^\circ)=270^\circ$ に対応する．よって釣り部は
$$135\times\frac{50^\circ}{270^\circ}=25\text{ 人}.$$

4.2 相当算・還元算 [1, pp.8–9]

問題 持っているお金の 1/4 より 30 円多く使ったところ，残りのお金が 330 円になったとする．このとき，はじめに持っていたお金は何円か．

解 はじめのお金を x 円とすると，
$$x-\left(\frac{x}{4}+30\right)=330, \qquad \therefore x=480$$
より 480 円．

注 本問の状況は図 56 のような**線分図**を用いると視覚的に把握できる．しかしながら本稿では基本的に，線分図の利用を解法の中心に据えることはしない．

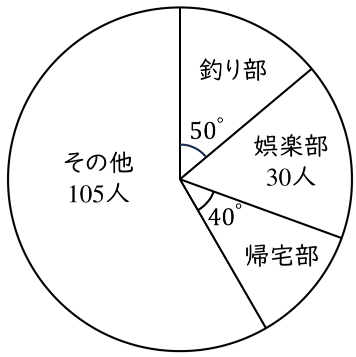


図 55　円グラフの一例．ここでは帰宅部の人数は全体の $40°/360° = 1/9$ を占める．

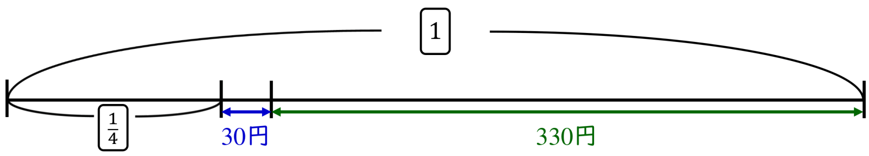


図 56　線分図の一例

問題　初日にある本全体の 1/3 を読み，2 日目に残りの 1/4 だけ読んだところ，60 ページ残ったとする．このとき本は全部で何ページあるか．

解　x ページとすると，

$$x \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = 60, \qquad \therefore x = 60 \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = 120$$

より 120 ページ．

問題　ある学校の生徒数は，男子が全体の 3/5 より 40 人少なく，女子は全体の 3/7 より 24 人多いという．このとき女子の人数を求めよ．

解　男女合わせた全体の人数を x とすると，

$$x = \left(\frac{3}{5}x - 40\right) + \left(\frac{3}{7}x + 24\right), \qquad \therefore x = 560.$$

よって女子は $\frac{3}{7} \cdot 560 + 24 = 264$ 人．

問題　落とした高さの 75 %だけ跳ね上がるボールを高さ h の位置から落としたところ，2 回目に跳ね上がった高さが 45cm であった．このとき h を求めよ．

解

$$h \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 45\,\mathrm{cm}, \qquad \therefore h = 80\,\mathrm{cm}.$$

問題 A,B の 2 人が持っているお金の合計は 800 円である．今 A が持っているお金の 1/5 を B に渡したところ，2 人の持っているお金は等しくなったとする．このとき A,B がはじめに持っていたお金はいくらか．

解 A,B がはじめに持っていたお金をそれぞれ a 円，b 円とすると，

$$a+b=800.$$

また

$$\frac{4}{5}a=b+\frac{1}{5}a, \qquad \therefore 3a=5b$$

であり，2 式を連立して解くと $a=500, b=300$ を得る．よって A は 500 円，B は 300 円持っていたことになる．

問題 3 つの水槽 A,B,C がある．A の水の 2/5 を B に移し，次いで B の水の 1/4 を C に移し，最後に C の水の 1/3 を A に移したところ，A は 26L，B は 24L，C は 16L になったとする．はじめ A,B,C に入っていた水はそれぞれ何 L か．

解 はじめ A,B,C に入っていた水の体積をそれぞれ a,b,c とおくと，A,B,C の水の体積は

$$\begin{aligned}
&(a,b,c) \ \to\ \left(\frac{3}{5}a, b+\frac{2}{5}a, c\right) \ \to\ \left(\frac{3}{5}a, \frac{3}{4}\left(b+\frac{2}{5}a\right), c+\frac{1}{4}\left(b+\frac{2}{5}a\right)\right) \\
&\to \left(\frac{3}{5}a+\frac{1}{3}\left\{c+\frac{1}{4}\left(b+\frac{2}{5}a\right)\right\}, \frac{3}{4}\left(b+\frac{2}{5}a\right), \frac{2}{3}\left\{c+\frac{1}{4}\left(b+\frac{2}{5}a\right)\right\}\right) \\
&=\left(\frac{19}{30}a+\frac{1}{12}b+\frac{1}{3}c, \frac{3}{10}a+\frac{3}{4}b, \frac{1}{15}a+\frac{1}{6}b+\frac{2}{3}c\right)
\end{aligned}$$

と推移する．最終的な体積の組を (24L,26L,16L) と等置して得られる連立方程式を解くと

$$a=30\,\mathrm{L}, \qquad b=20\,\mathrm{L}, \qquad c=16\,\mathrm{L}$$

が得られるものの，その計算は煩雑である．また A,B,C の水量の合計が不変であることも，あからさまには用いていない．そこで**本問に関しては小学生流に，図 57 のような図式を利用する方が容易である**．ここで本質的なのは，終状態から 1 段階ずつ逆算するということである．

4.3 倍数算・年令算 [1, pp.10–11]

問題 はじめに妹と姉の持っているお金の比は 3:4 であり，妹がお小遣いを 400 円もらい，姉が 200 円使った後，妹と姉のお金の比は 5:3 になったとする．このとき姉妹がはじめに持っていたお金はいくらか．

解 はじめの妹と姉のお金はそれぞれ $3x, 4x$ とおける．このとき

$$\frac{3x+400}{4x-200}=\frac{5}{3}, \qquad \therefore x=200$$

となるので，妹は $3x=600$ 円，姉は $4x=800$ 円持っていた．

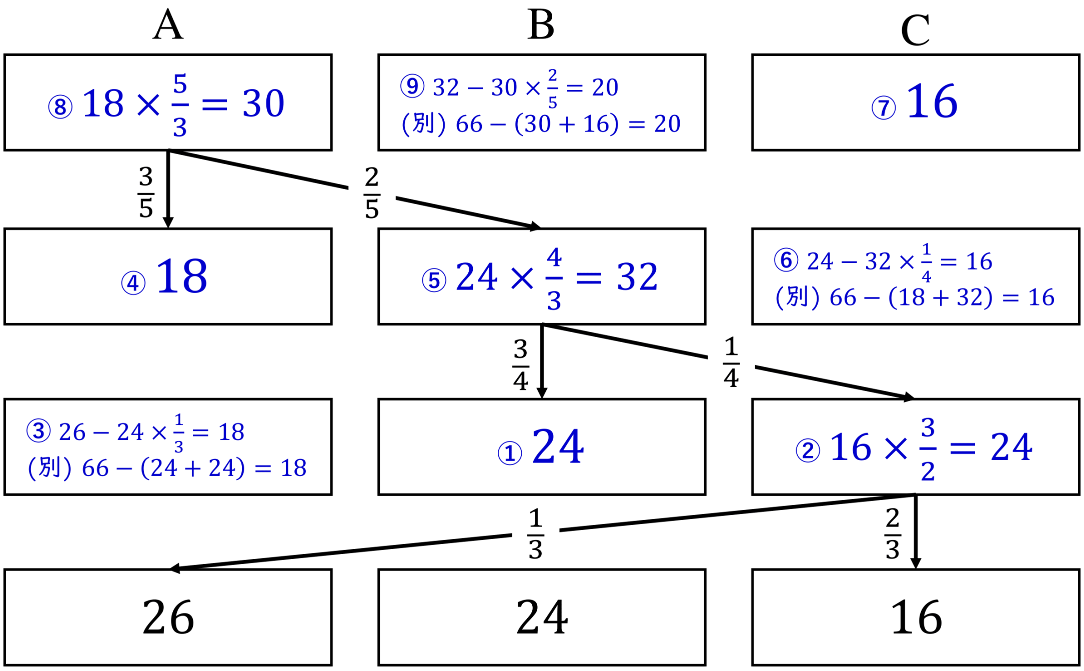


図 57　A,B,C に含まれる水量 (単位は L) の推移図．各段の合計値は常に 66 であり，丸囲みの数字の順に体積の値を逆算できる．

問題　現在，父の年令は 47 才で，2 人の子供の年令は 10 才と 6 才である．父の年令が 2 人の子供の年令の和の 2 倍となるのは，今から何年後か．

解　x 年後とすると

$$47 + x = \{(10 + x) + (6 + x)\} \times 2, \qquad \therefore x = 5$$

となるので，5 年後．

4.4　売買損益 [1, pp.12–13]

問題　ある商品に仕入れ値［または原価］の 2 割の利益を見込んで定価を付けた．しかし売れないので，定価の 1 割引きで売ったところ，40 円の利益があった．この商品の仕入れ値はいくらか．

解　仕入れ値を x 円とすると，利益について

$$x \times 1.2 \times 0.9 - x = 40$$

が成り立つので，$x = 500$ 円．

注　本問ような“商売用語”にもある程度，慣れておく必要がある．特に**利益とは売り上げそのものではなく，**

$$(\text{利益}) = (\text{売り上げ}) - (\text{仕入れ値})$$

として定義されることに注意する．

問題　ある商品を定価の 1 割引きで売ると 300 円の利益があり，定価の 2 割 5 部引きで売ると 100 円の損失になる．このとき商品の仕入れ値はいくらか．

解　仕入れ値を x 円，定価を y 円とすると

$$\frac{90}{100}y = x + 300, \qquad \frac{75}{100}y = x - 100.$$

$5 \times$ (第 1 式) と $6 \times$ (第 2 式) を等置して

$$\left(\frac{450}{100}y =\right) 5x + 1500 = 6x - 600, \qquad \therefore x = 2100.$$

よって 2100 円．

問題　コップ 20 個を 5000 円で仕入れて，そのうち何個かのコップを割ってしまった．残りのコップを 1 個 400 円で売ったところ，利益は全部で 1000 円となった．割れたコップの個数を求めよ．

解　n 個のコップを割ったとすると，利益について

$$400(20 - n) - 5000 = 1000$$

が成り立つので，$n = 5$ 個．

問題　原価 200 円の品物を 100 個仕入れて，2 割の利益を見込んで定価をつけて売り始めた．ところが売れ残りが出たので，残りを定価の 1 割引きにしたところ全部売れて，全体の利益が 3040 円になった．定価で売れた品物の個数を求めよ．

解　n 個を定価 $200 \times 1.2 = 240$ 円で，残り $(100 - n)$ 個を 1 割引きの $240 \times 0.9 = 216$ 円で売ったとすると，売り上げについて

$$240n + 216(100 - n) = 200 \times 100 + 3040$$

が成り立つ．これを解いて $n = 60$ 個．

問題　みかんを 1 個 40 円で何個か仕入れた．くさっていた 20 個は捨て，残りを 1 個 80 円で売ったところ，全体の利益が 2400 円になった．このとき仕入れたみかんの個数を求めよ．

解　n 個とすると，売り上げについて

$$80(n - 20) = 2400 + 40n$$

が成り立つ．これを解いて $n = 100$ 個．

4.5　食塩水の濃さ [1, pp.14–15]

食塩水の濃さ (濃度) に関する問題では，暗に経験科学の知識が前提とされている．すなわち食塩を水に入れてよくかき混ぜると，食塩は微粒子 (イオン) に分かれて水中に一様に分布し，食塩水が得られる．これを食塩が水に「溶ける」という．(ただし食塩の量がある一定値より多いと，食塩のすべては溶け切らず，溶け残

りが生じる．）このとき得られる食塩水の質量 (重さ) は，もとの水と食塩の質量の和に等しい．より一般に，食塩水にさらに食塩や水，食塩水を加えても，変化の前後で質量の総量は不変である (**質量保存則**)．このことは実験を通してはじめて確認できる立派な**自然法則**であって，数学の内部だけでアプリオリに理解されるような自明の理ではないことに注意を促しておく．

最後に濃度の定義を述べる．通常，濃度と言えば質量パーセント濃度のことを指し，

$$(\text{食塩水の濃度}) = \frac{(\text{溶けている食塩の質量})}{(\text{食塩水の質量})} \times 100\ \%$$

で定義される．右辺は食塩水に占める食塩の質量の割合を百分率で表した値に他ならない．

問題 5 %の食塩水 300g と 25 %の食塩水 100g を混ぜると何%の食塩水が得られるか．

解 それぞれの食塩水に溶けている食塩の質量は

$$300\text{g} \times 0.05 = 15\text{g}, \qquad 100\text{g} \times 0.25 = 25\text{g}$$

なので，

$$\frac{15\text{g} + 25\text{g}}{300\text{g} + 100\text{g}} \times 100 = 10\ \%.$$

ここで左辺において単位 g は，分母と分子で相殺されることに注意する．

問題 10 %の食塩水 500g から食塩水を何 g か取り除き，同じ重さの水を加えたところ，濃さが 6 %になったとする．このとき加えた水 (あるいは捨てた食塩水) の重さは何 g か．

解 求める重さを xg とすると，食塩水とその中に溶けている食塩の重さは図 58 のように変化するので，最終的な食塩水の濃度について

$$\frac{(500 - x)\text{g} \times \frac{10}{100}}{500\text{g}} \times 100 = 6$$

が成り立つ．これを解くと $x = 200$ が得られるので，200g.

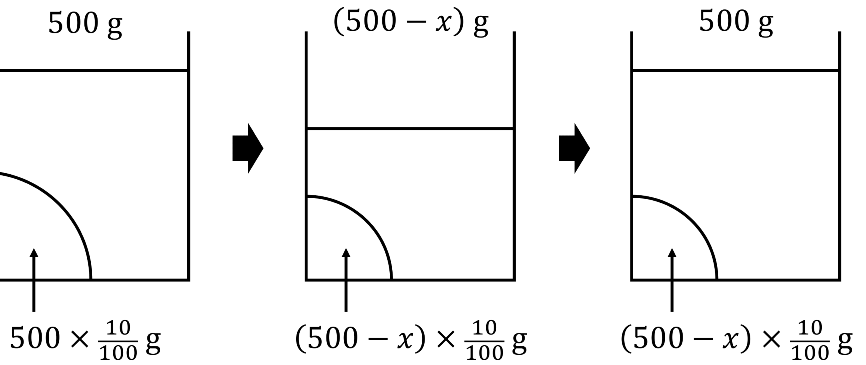


図 58　仮想的に食塩水を食塩と水に分けて描くと便利である

問題 6 %の食塩水 150g に 14 %の食塩水を混ぜて 12 %の食塩水を作るには，14 %の食塩水を何 g 混ぜる必要があるか．

解　xg とすると最終的な食塩水の濃度について

$$\frac{150\mathrm{g}\times\frac{6}{100}+x\mathrm{g}\times\frac{14}{100}}{(150+x)\mathrm{g}}\times 100=12$$

が成り立つ．これを解くと $x=450$ が得られるので，450g．

注　本問は小学生流では，図 59 のような**面積図**を用いて解くこともできる．

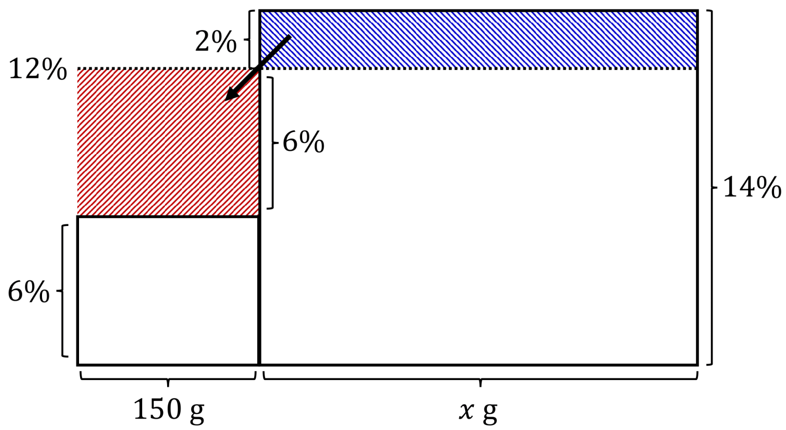


図 59　色を付けた 2 つの長方形の面積が等しく，その底辺の比 $150:x$ は高さの逆比 $1:3$ に一致する．よって $x=450$.

問題　1 %の食塩水と 6 %の食塩水を 3:2 の割合で混ぜると，何%の食塩水が得られるか．

解　食塩水の質量はそれぞれ $3m, 2m$ とおける．このとき求める食塩水の濃度は

$$\frac{3m\times\frac{1}{100}+2m\times\frac{6}{100}}{3m+2m}\times 100=3\ \%$$

となり，結果は m によらない．

4.6　仕事算 [1, pp.16–17]

仕事量の概念はやや抽象的であるが，適当な単位を用いて数量として測ることができることだけを仮定すれば充分である．

ところで 3 変数の間に 2 本の独立な関係式が課されたとき，それらの変数は一般に単一のパラメーターで特徴付けられる．実際，以下では各種の仕事量が 1 つの共通の任意定数に比例する状況に遭遇する．これは仕事を測る単位の選び方の任意性に対応している．

問題　A 1 人ですると 10 日，B 1 人ですると 30 日かかる仕事を，最初の 6 日は 2 人で一緒に行い，残りを A 1 人ですると，この仕事は (2 人が仕事をはじめてから) 何日で終わるか．

解　A,B の 1 日あたりの仕事量をそれぞれ a, b とおくと，全体の仕事量は

$$W=10a=30b$$

と表される．特に第 2 の等号より $a = 3b$ である．ここで求める日数を t とおくと

$$W = 6(a + b) + (t - 6)a$$

であり，各項を b で表すと

$$30b = 6 \cdot 4b + 3(t - 6)b$$

が得られる．両辺を $b(\neq 0)$ で割って t について解くと $t = 8$ となるから，8 日．

問題 A 1 人ですると 30 日，A と B の 2 人ですると 18 日かかる仕事を，はじめ A 1 人で何日か行った後，途中から B 1 人で行ったところ，全部で 34 日かかった．このとき B は何日働いたことになるか．

解 A,B の 1 日あたりの仕事量をそれぞれ a, b とおくと，全体の仕事量は

$$W = 30a = 18(a + b)$$

と表される．特に第 2 の等号より $2a = 3b$ である．ここで求める日数を t とおくと

$$W = (34 - t)a + bt, \qquad \therefore 30a = (34 - t)a + \frac{2}{3}ta$$

であり，両辺を $a(\neq 0)$ で割って t について解くと $t = 12$ となるから，12 日．

問題 (要注意) 5 人で電車に 1 時間乗った．席が 3 つしか空いていなかったので，交代で同じ時間ずつ座ることにした．1 人が座る時間は何分か．

注 直観的に 60 分 $\times (3/5) = 36$ 分である．この直観は次のように裏付けられる．すなわち 3 つの席に加えて 2 箇所の“待機場所”を設け，表 2 のように 5 箇所を等間隔の 60 分 $\div 5 = 12$ 分おきにローテーションすれば良い．このとき特定の 1 人が座席に座っている時間は確かに 12 分 $\times 3 = 36$ 分となっていることが見て取れる．なお模範解答では次のように説明している．

解 1 つの席に 60 分ずつ座ることができるため，3 つの席に座ることのできる時間の合計は

$$60 \text{ 分} \times 3 = 180 \text{ 分}. \qquad \text{(のべの時間)}$$

これを 5 人に等分配すると，1 人が座る時間は 180 分 $\div 5 = 36$ 分．

表 2　A,B,C,D,E の 5 人で 3 つの席に交代で座る

時間	立	立	座	座	座
12 分	A	B	C	D	E
12 分	E	A	B	C	D
12 分	D	E	A	B	C
12 分	C	D	E	A	B
12 分	B	C	D	E	A

問題 3 人が 8 日働いて予定の仕事の 1/4 をした．残りの仕事を 5 人増やして行うと，仕事を仕上げるのに全部で何日かかるか (最初の 8 日も含めて).

解 1 人の 1 日あたりの仕事量を w，全体の仕事を W，求める日数を t とおくと

$$3w \times 8 = \frac{1}{4}W, \qquad (3+5)w \times (t-8) = \frac{3}{4}W$$

であり，2 式から W を消去すると

$$\left(\frac{3}{4}W = \right) 72w = 8w(t-8)$$

を得る．両辺を $w(\neq 0)$ で割って t について解くと $t = 17$ となるので，17 日.

問題 はじめにチケット売り場に 600 人が並んでおり，その後も毎分 20 人のペースで人が行列に加わってゆく．窓口が 1 つのときは 30 分で行列がなくなるとすると，窓口が 2 つのときは何分で行列がなくなるか.

解 1 つの窓口が 1 分あたりに消化できる人数を n とすると，

$$600 + 20 \times 30 = 30n, \qquad \therefore n = 40.$$

よって求める時間を t 分とすると

$$600 + 20t = 2 \times 40t, \qquad \therefore t = 10$$

となるので，10 分.

問題 ある牧場で牛 (cow) を 5 頭放牧すると 10 日で草 (grass) を食べつくし，7 頭放牧すると 6 日で草を食べつくす．ただし，草は毎日一定の割合でのびるものとする．このとき牛を 12 頭放牧すると，何日で草を食べつくすか.

解 はじめに生えていた草の量を G，また 1 日に牛が食べる草の量を c，生える草の量を g とおくと

$$5c \cdot 10 = G + 10g, \qquad 7c \cdot 6 = G + 6g.$$

2 式を辺々引いて G を消去すると $g = 2c$ が得られ，これをもとの式に戻すと $G = 30c$ が見出される．ここで求める日数を t とおくと

$$12ct = G + gt, \qquad \therefore 12ct = 30c + 2ct$$

であり，両辺を $c(\neq 0)$ で割って t について解くと $t = 3$ となる．よって 3 日.

4.7 割合と比の利用 [1, pp.18–19]

問題 つるまきバネにおもりをつるしたときにバネののびる長さは，おもりの重さ (質量) に比例することが知られている (Hooke の法則)．あるバネに 20g のおもりをつるすと全長が 16cm になり，35g のおもりをつるすと全長が 19cm になったとすると，このバネの自然長 (おもりをつるしていないときの長さ) は何 cm か.

解　質量 m のおもりをつるしたときのバネの長さを l，バネの自然長を l_0，k を適当な比例係数として

$$l = l_0 + km$$

とおける．今，

$$16\,\mathrm{cm} = l_0 + k \cdot 20\,\mathrm{g}, \qquad 19\,\mathrm{cm} = l_0 + k \cdot 35\,\mathrm{g}$$

であり，2 式を辺々引いて l_0 を消去すると $k = 0.2\,\mathrm{cm/g}$ が得られる．これをもとの式に戻すと $l_0 = 12\,\mathrm{cm}$ と求まる．なお図 60 のようなグラフを描けば，三角形の相似比を利用して l_0 を求めることもできる．

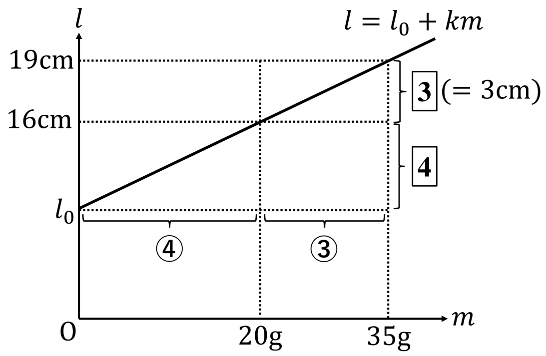


図 60　おもりの質量 m とバネの長さ l の関係

問題　歯数 30 の歯車 A と歯数 45 の歯車 B がかみ合っている．このとき歯車 A を 60 回転させると，歯車 B は何回転するか．

解　歯車 A を N 回転すると，歯数 $30N$ だけ進む．このとき A とかみ合う歯車 B も同じ歯数 $30N$ だけ進むから，B は $30N/45$ 回転することになる．(本問では $N = 60$ なので，求める回転数は 40．) さて，このとき回転数の比は $N : (30N/45) = 45 : 30$ となる．このように一般に，かみ合う歯車の回転数の比は，歯数の逆比になる[*65]．これは直観的に納得のいく結論であり，解答の際にはいきなりこの事実から始めても構わない：

$$\text{歯数の比}\ \ 30 : 45 = 2 : 3 \qquad \to \qquad \text{回転数の比}\ \ 3 : 2 = 60 : 40 \qquad \to \qquad (\text{求める歯数}) = 40.$$

問題　ある学校の生徒数は，昨年は男女合わせて 100 人であった．今年は男子が 10 %減り，女子が 10 %増えたため，全体としては 2 人減った．このとき昨年の男子と女子の人数をそれぞれ求めよ．

解　昨年の男女の人数をそれぞれ m, f とおくと

$$m + f = 100, \qquad 0.9m + 1.1f = 98$$

[*65] 実際，歯車 A,B の歯数を $n_\mathrm{A}, n_\mathrm{B}$，回転数を $N_\mathrm{A}, N_\mathrm{B}$ とすると，進んだ歯数について $n_\mathrm{A}N_\mathrm{A} = n_\mathrm{B}N_\mathrm{B}$ なので，

$$\frac{N_\mathrm{A}}{N_\mathrm{B}} = \frac{n_\mathrm{B}}{n_\mathrm{A}} \qquad \text{i.e.} \qquad N_\mathrm{A} : N_\mathrm{B} = n_\mathrm{B} : n_\mathrm{A}.$$

であり，2 式を連立して解くと $m = 60, f = 40$ を得る．

5　平面図形の問題

第 2 章を中心に復習せよ．未知の量を文字でおいて立式することは，幾何学においても有効である．

5.1　角度 [1, pp.20–21]

角度の問題を解答と合わせて図 61 に示す．

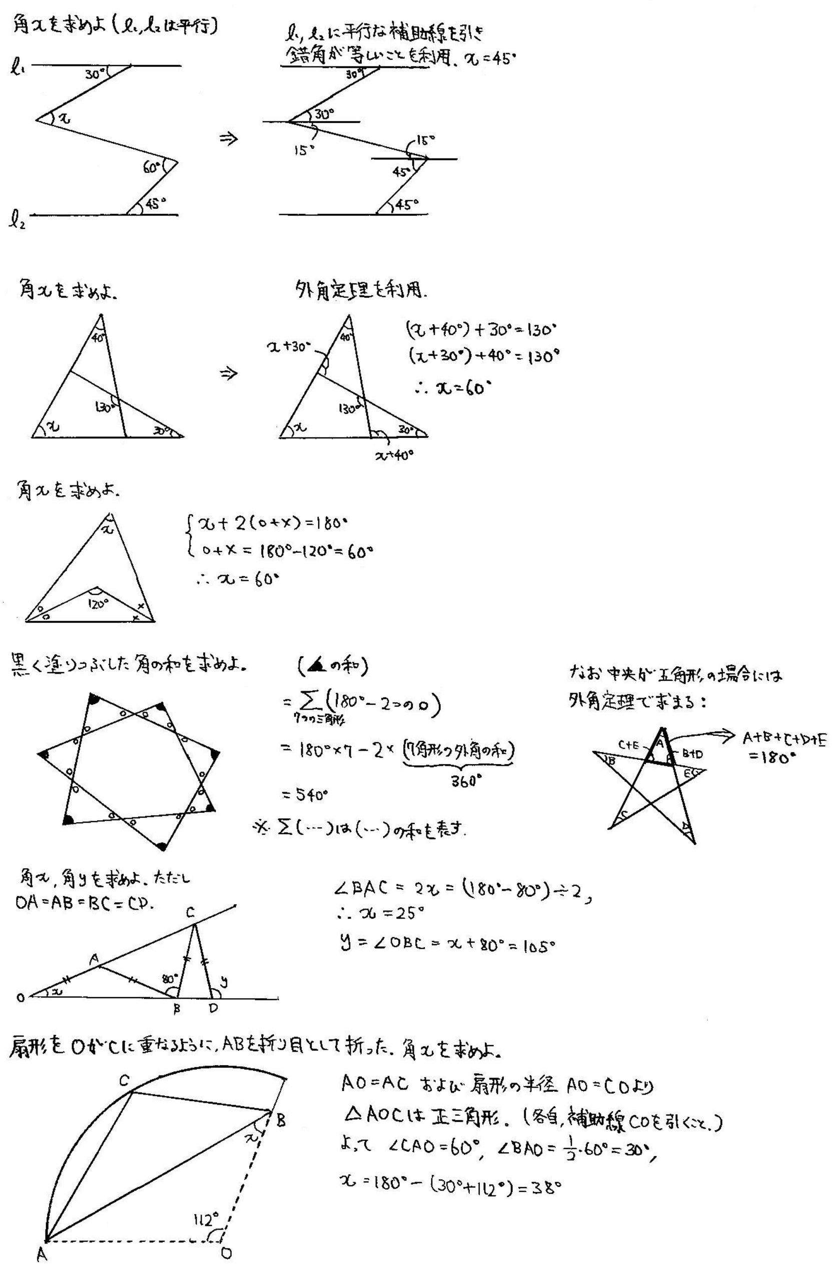


図 61　角度の問題

5.2 面積・長さ [1, pp.22–25]

面積と長さの問題を解答と合わせて図 62，図 63 に示す．

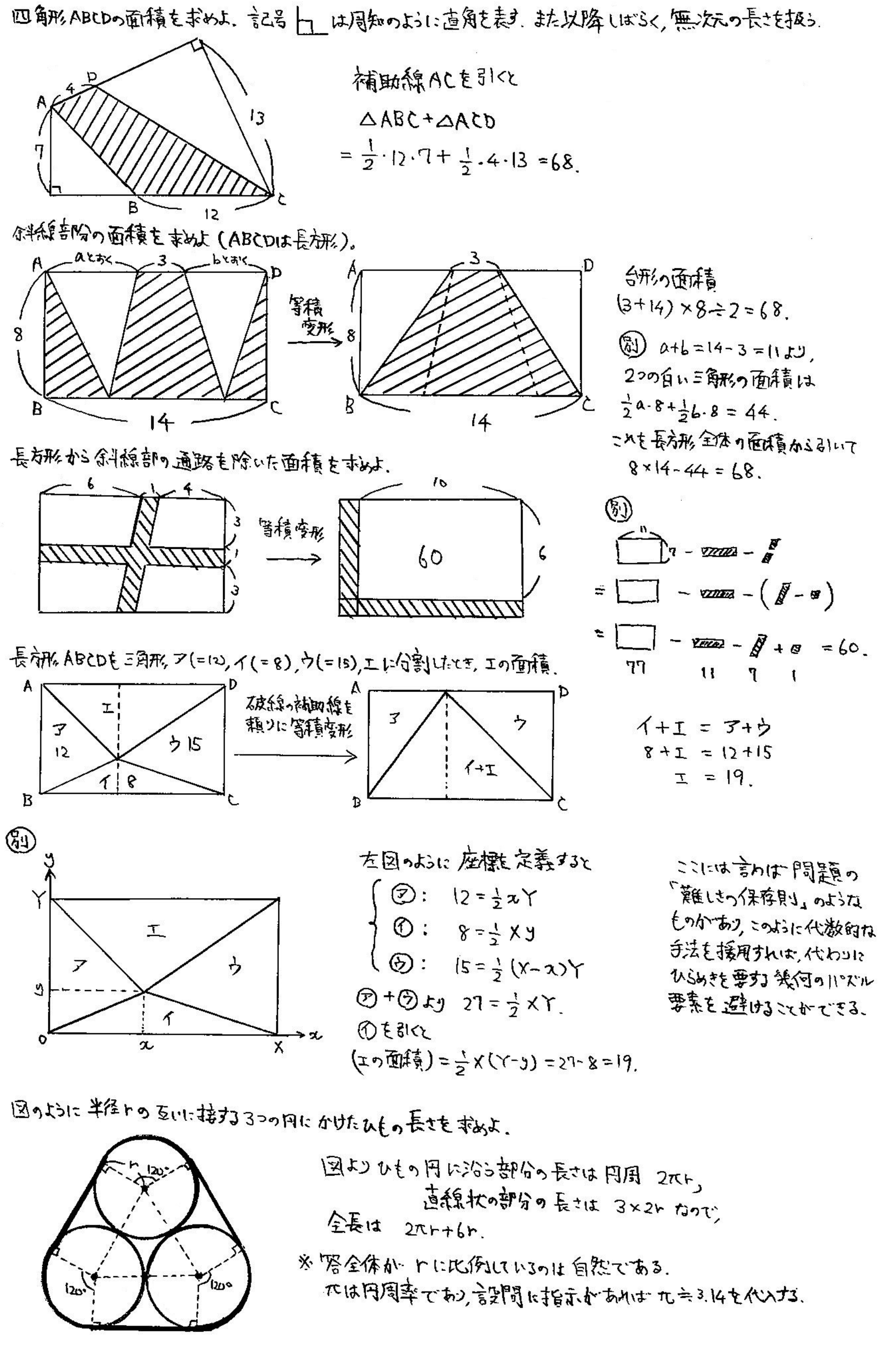


図 62　面積と長さの問題 (その 1)．$\pi \fallingdotseq 3.14$ の代入は計算の最後に行うのが容易である．

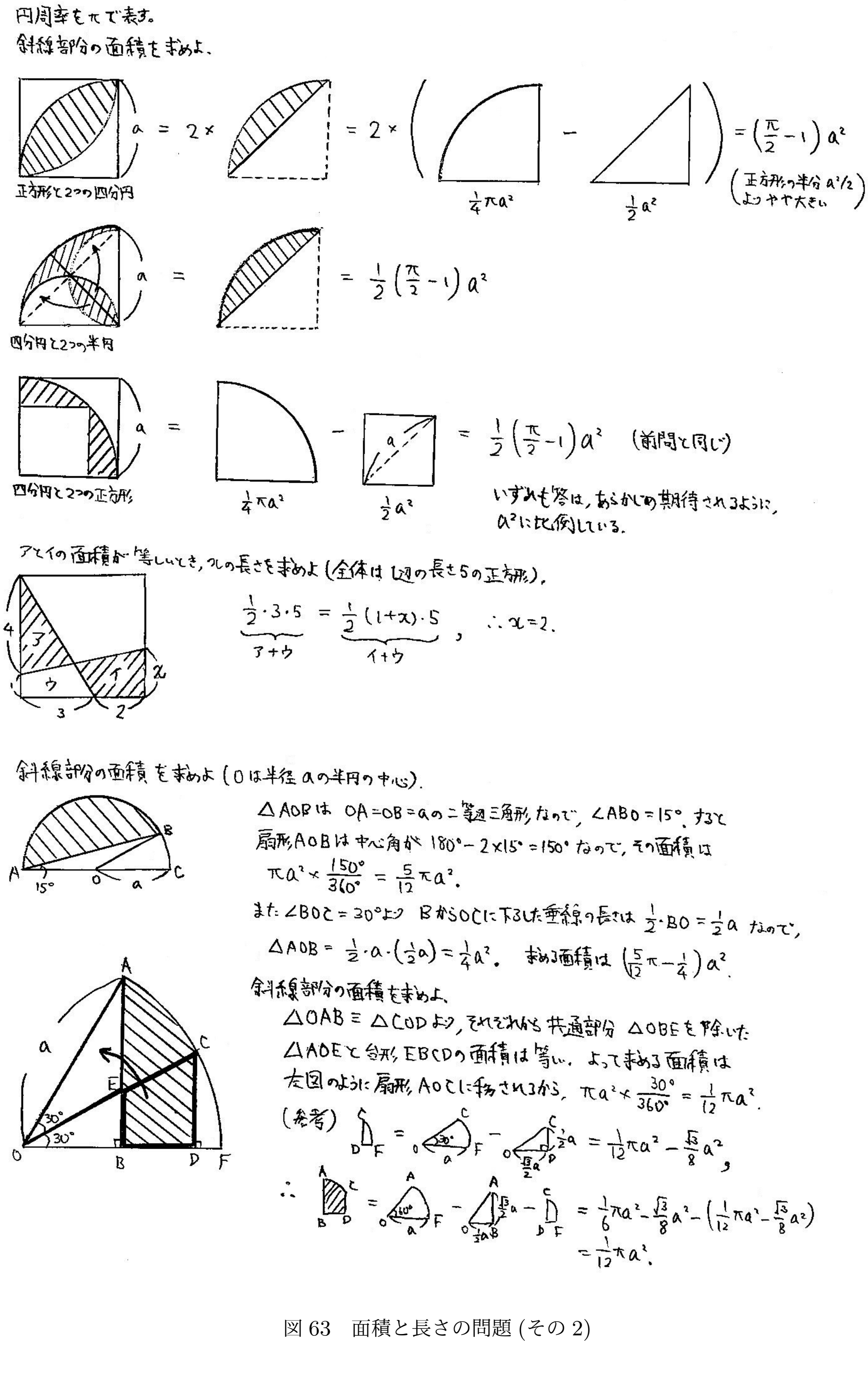


図 63　面積と長さの問題 (その 2)

5.3　辺の長さと面積 [1, pp.26–27]

辺の長さと面積の問題を解答と合わせて図 64 に示す.

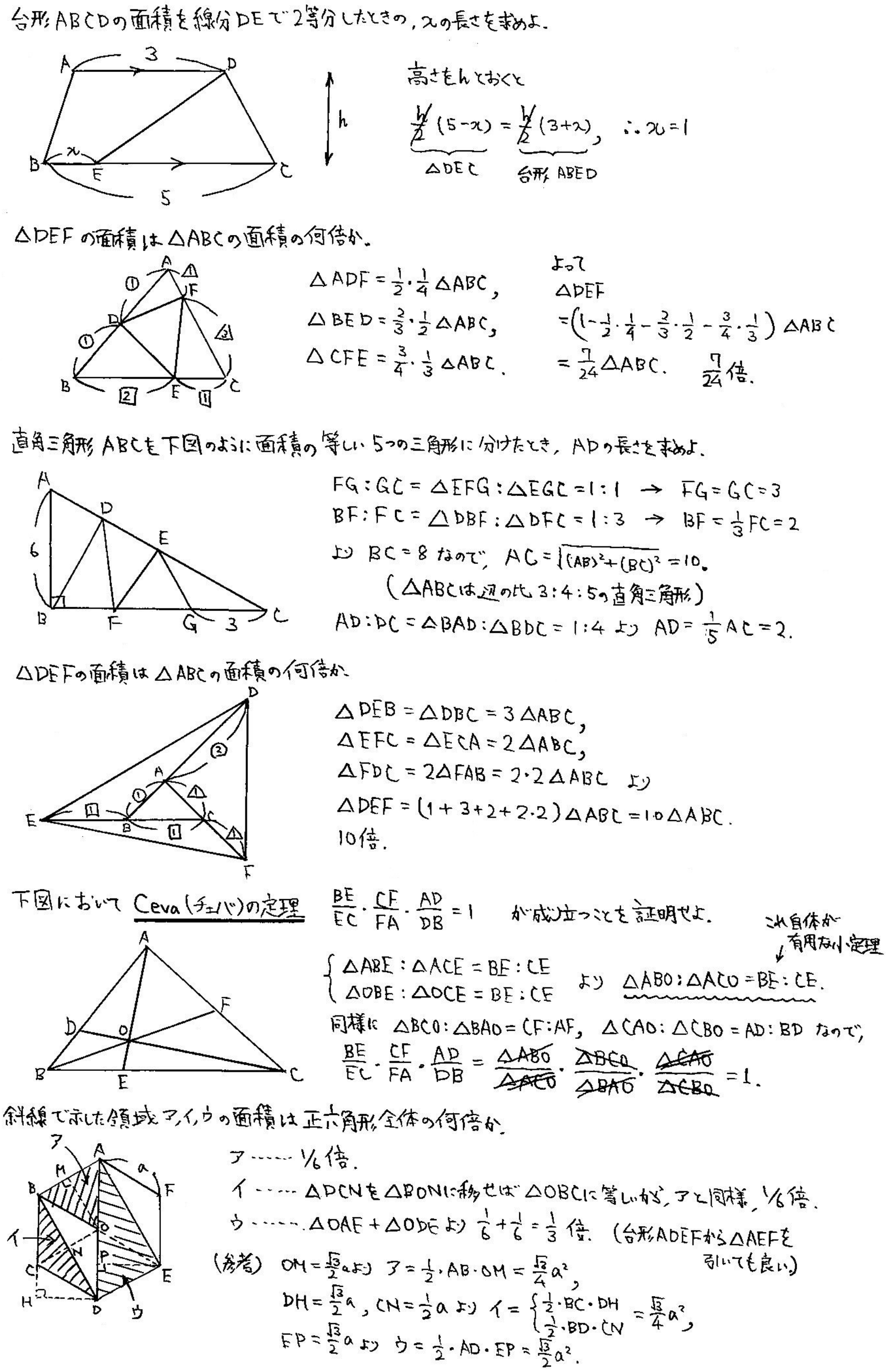


図 64　辺の長さと面積

図 64 における Ceva (チェバ) の定理に関連して，**Menelaus** (**メネラウス**) **の定理**を紹介する．図 65 のように $\triangle$ABC の 3 辺 (の延長線) と 1 本の直線から作られる“キツネの顔”の形 (実線) に対して，

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=1 \qquad \text{(Menelaus の定理)}$$

が成り立つ (左辺では頂点 A から始めて，図 65 の青い矢印に沿って順に辺の長さを書き並べれば良い)．

証明　実際，図 65 のように平行線 CG を引くと

$$\triangle\mathrm{ADF}\backsim\triangle\mathrm{AGC}\ \rightarrow\ \mathrm{AD}:\mathrm{DG}=\mathrm{AF}:\mathrm{FC}, \qquad \triangle\mathrm{BCG}\backsim\triangle\mathrm{BFD}\ \rightarrow\ \mathrm{CE}:\mathrm{BE}=\mathrm{GD}:\mathrm{BD}$$

なので，$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=\dfrac{\cancel{\mathrm{AD}}}{\cancel{\mathrm{DB}}}\cdot\dfrac{\cancel{\mathrm{BD}}}{\cancel{\mathrm{GD}}}\cdot\dfrac{\cancel{\mathrm{DG}}}{\cancel{\mathrm{AD}}}=1.$

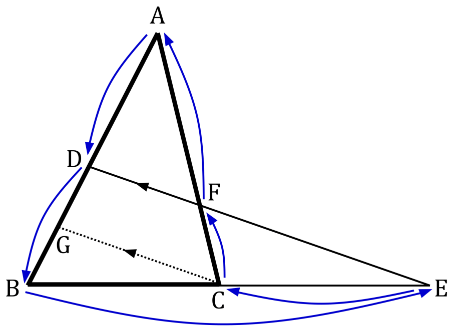


図 65　Menelaus の定理

5.4　相似 [1, pp.28–31]

ここで地図の**縮尺**の定義を述べておく．縮尺は相似比に対応し，(縮尺) = (地図上の長さ)/(実際の長さ) で定義される．次に相似の問題を解答と合わせて図 66，図 67 に示す．

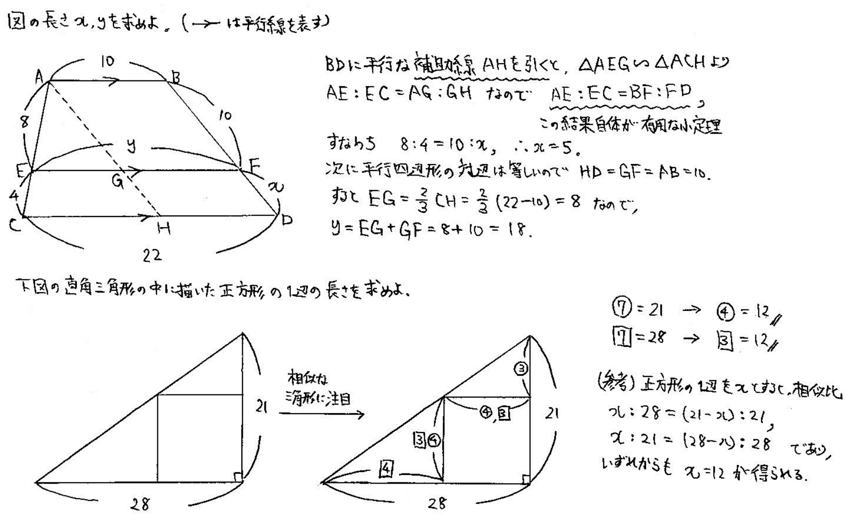
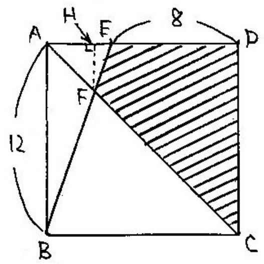


図 66　相似の問題 (その 1)

正方形ABCDにおける斜線部分の面積をもとめよ。



$AF : CF = AE : CB = 4 : 12 = 1 : 3$ なので

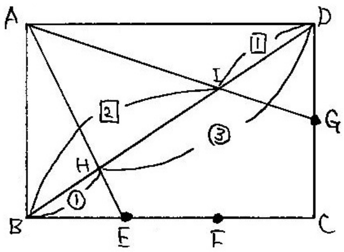
$\triangle AFE = \dfrac{AE}{AD} \cdot \dfrac{AF}{AC} \triangle ACD = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{4} \triangle ACD = \dfrac{1}{12} \triangle ACD$,

$\therefore$ (斜線部分) $= \left(1 - \dfrac{1}{12}\right) \triangle ACD = \dfrac{11}{12} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 12^2 = 66$.

別 垂線 $FH = \dfrac{1}{4} AB = 3$ より $\triangle AEF = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$.

これを $\triangle ACD = 72$ から引いても良い。

下図のように長方形ABCD上の点E, Fが辺BCを3等分, 点Gが辺CDを2等分するとき,
長さの比 BH : HI : ID をもとめよ。



$\begin{cases} \triangle ADH \backsim \triangle EBH \rightarrow DH : BH = AD : EB = 3 : 1 \\ \triangle ABI \backsim \triangle GDI \rightarrow BI : DI = AB : GD = 2 : 1 \end{cases}$

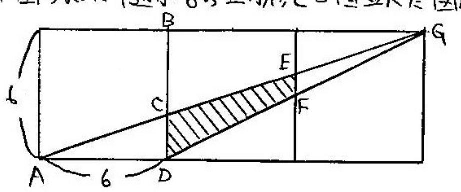
より左図のようにおける。このとき AD = ④ = 回を(最小)公倍数にそろえて△12とすると, ① = △3, 回 = △4 より

HI = △5 なので, $BH : HI : ID = 3 : 5 : 4$.

(参考) 等価的に $HI = \begin{cases} BI - BH = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) AD \\ DH - DI = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) AD \end{cases} = \dfrac{5}{12} AD$

より $BH : HI : ID = \frac{1}{4} AD : \frac{5}{12} AD : \frac{1}{3} AD = 3 : 5 : 4$.

下図のように1辺が6の正方形を3個並べた図形における, 斜線部分の面積をもとめよ。

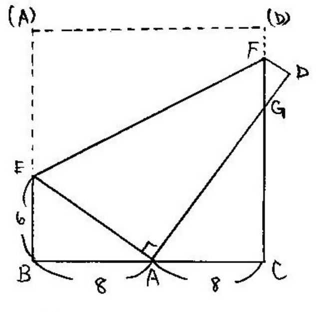


$\triangle ADC \backsim \triangle GBC$ より $CD = \frac{1}{3} BD = 2$.

$\triangle GEF \backsim \triangle GCD$ より $EF = \frac{1}{2} CD = 1$.

よって (台形 CDFE) $= \frac{1}{2} \cdot (2 + 1) \cdot 6 = 9$.

下図のように直線EFを折り目として正方形ABCDを折り返したとき, AGの長さをもとめよ。



$AE = (A)E = (8 + 8) - 6 = 10$

(または △ABE が辺の比 3 : 4 : 5 の直角三角形なので $AE = 10$) である。

また $\triangle ABE \backsim \triangle GCA$ であり

$\left(\because \begin{matrix} \angle EAB = 90^\circ - \angle GAC = \angle AGC, \\ \angle AEB = 90^\circ - \angle BAE = \angle GAC \end{matrix} \right)$

相似比 $10 : AG = 6 : 8$ から $AG = \dfrac{40}{3}$.

(参考) △GDF も △ABE, △GCA と相似である。

図 67　相似の問題 (その 2)

5.5　図形の移動 [1, pp.32–35]

図形の移動の問題を解答と合わせて図 68，図 69 に示す．ここでは領域 (線や面) が境界を含むか否かにはこだわらない．

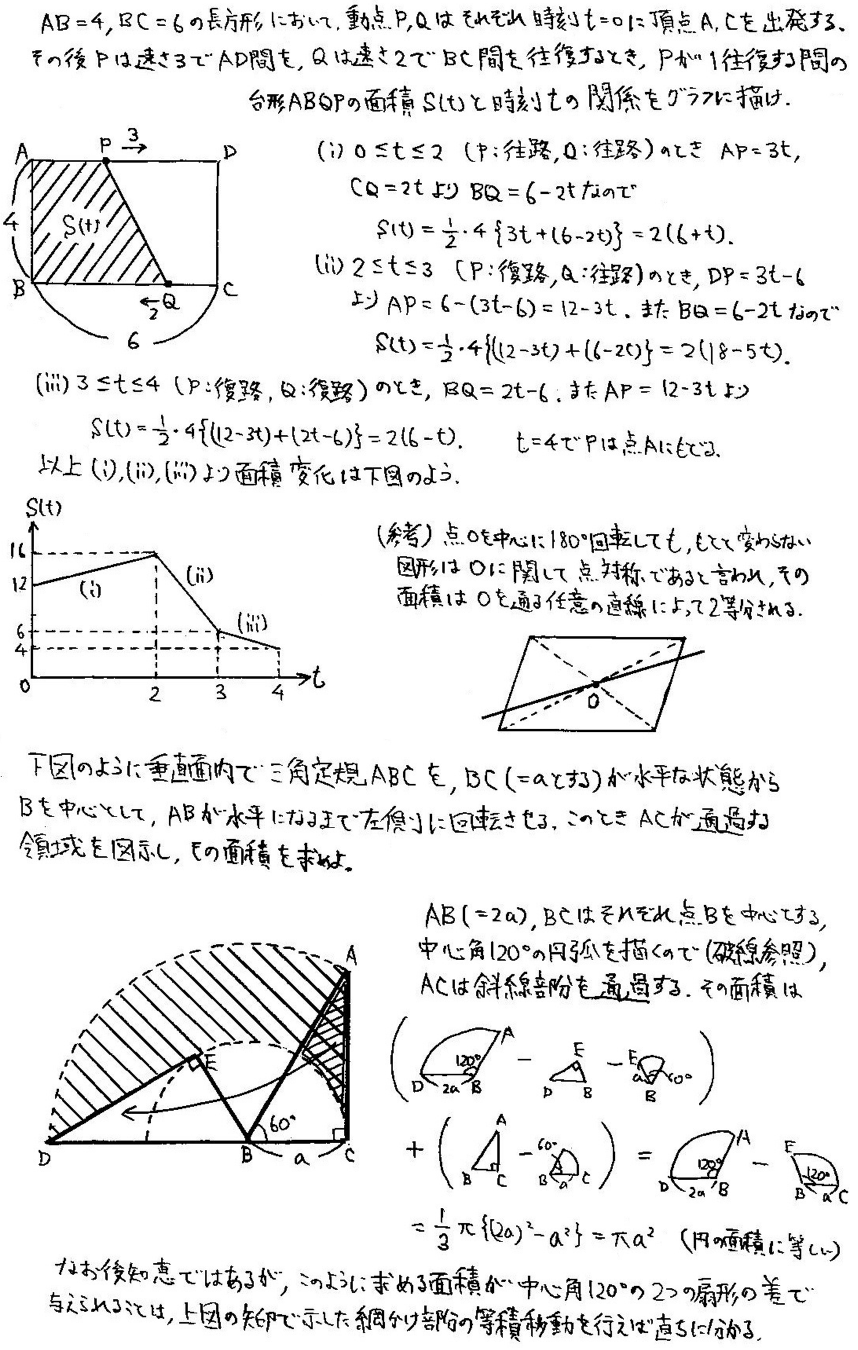
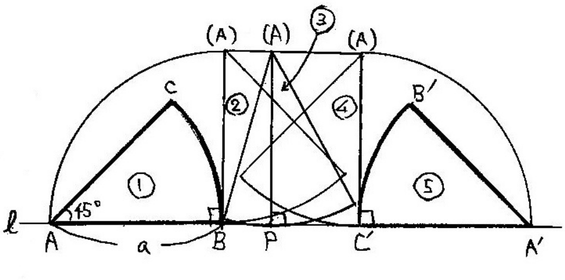


図 68　図形の移動 (その 1)

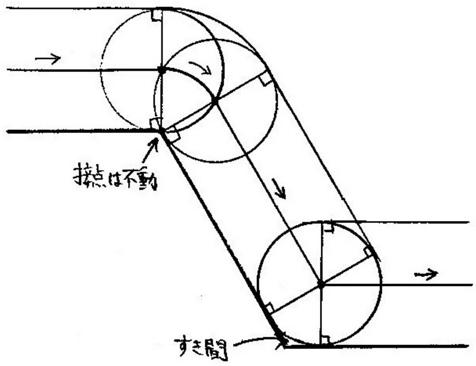
下図のように中心角45°で半径 a の扇形ABCを，直線 ℓ に沿って A'B'C'の位置まで，すべらないように転がした。このとき点Aの軌跡を図示せよ。



①→②ではAはBを中心とした半径 a の四分円を描き，
④→⑤ではAはCを中心とした半径 a の四分円を描く．
途中の状態③では各瞬間の ℓ との接点をPとすると，常に $AP=a$，$AP\perp\ell$ なので，Aは ℓ に平行な線を描く．
その長さは $\underbrace{\overset{\frown}{BC}} = \frac{1}{8}\cdot 2\pi a$ に等しい．
弧BCを表す．

関連

下図のように折れ線に沿って円がすべることなく転がるとき，円が180°より大きい側の角を曲がる際には，折れ線の頂点との接点を不動の中心として円（とその中心）は扇形を描く．
また180°より小さい角で方向転換する際には，通過領域と角の間にすき間ができる．



下図のような1辺の長さ5の正方形の柵ABCDがある。辺AB上のAE＝2を満たす点Eに長さ8の綱で牛（点Pで表す）がつながれている。牛は柵の中に入れないとするとき，牛の動くことのできる範囲を図示せよ。

右図の四分円の弧と，正方形ABCDに挟まれた領域（見やすさのため，斜線は引かない）．

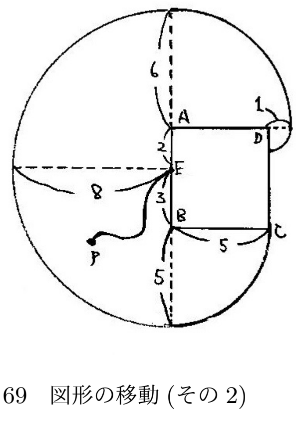


図 69　図形の移動 (その 2)

6　和と差の問題

本章で扱う問題は基本的に，未知数を文字で置けば (連立)1 次方程式 (1.3.6 節と 3.1 節を見よ) を解くことに帰着する (第 4 章でも既に似たような問題を扱っている)．このため冗長な記述を避けるには少数の限られた例題を取り上げれば充分であり，いたずらに多くの類題を載せるには及ばない．6.4 節の問題では 3.6.1 節で導入したベン図の知識も必要となる．

6.1　和差算・分配算 [1, pp.36–37]

問題　春香，夏奈，千秋の 3 人で 310 個のアメ玉を分けたところ，春香のアメ玉は千秋の 3 倍より 10 個少なく，夏奈のアメ玉は千秋の 2 倍より 20 個多くなった．3 人の持っているアメ玉の個数を求めよ．

解　春香，夏奈，千秋のアメ玉の個数をそれぞれ順に x, y, z とおくと，

$$x + y + z = 310, \qquad x = 3z - 10, \qquad y = 2z + 20.$$

後ろの 2 式を第 1 式に代入して x, y を消去すると $z = 50$ が得られる．これをもとの 2 式に戻すと $x = 140, y = 120$ と求まる．

6.2　消去算 [1, pp.38–39]

問題　リンゴ 2 個とミカン 3 個の値段は合計 340 円，リンゴ 5 個とミカン 2 個の値段は合計 520 円である．このとき，リンゴとミカンそれぞれの値段を求めよ．

解　リンゴとミカンの 1 個あたりの値段をそれぞれ x 円，y 円とすると，

$$2x + 3y = 340, \qquad 5x + 2y = 520.$$

2 式を連立して解くと $x = 80, y = 60$ が得られるので，リンゴ 1 個は 80 円，ミカン 1 個は 60 円である．

6.3　つるかめ算 [1, pp.40–41]

つるかめ算の標準的な問題は 3.1.1 節で既に取り上げた．係数が負の値をとる問題も考えられるが，本質的に何ら新しい特徴は付け加わらない：

問題　1 題正解すると 3 点もらえ，まちがえると 1 点引かれる問題を 10 題解いたところ，総得点が 18 点となった．このとき何題正解したことになるか．

解　正解した回数を x とすると，間違えた回数は $10 - x$ とおけるので，

$$3x + (-1)(10 - x) = 18, \qquad \therefore x = 7.$$

次に本質的に異なるタイプの問題を取り上げる．

問題　1 本 30 円のえんぴつと 1 本 70 円のボールペンを何本か合わせると，合計金額は 370 円となった．このとき可能なえんぴつとボールペンの本数の組合せを全て求めよ．ただしどちらも少なくとも 1 本は選ぶものとする．

解 (と解説)　えんぴつとボールペンの本数をそれぞれ x, y とおくと

$$30x + 70y = 370, \qquad \therefore 3x + 7y = 37. \tag{51}$$

さて，ここでは変数 x, y に対して条件式は 1 つしかないので，本来 (x, y) を一意的に決定することはできない．ところが本問は x, y がそれぞれ自然数をとる整数問題であって，上式 (51) を満たす解 (x, y) の組は有限となる．その際，定性的に言って，ボールペンの本数 y があまりにも多いと上式 (51) を満たす x が存在し得なくなるという感覚が重要である．実際，このことに対応して y に対する制約

$$3 \leq 3x = 37 - 7y, \qquad \therefore y \leq \frac{34}{7} = 4.85\cdots$$

が見出される．そこで $y = 1, 2, 3, 4$ を上式 (51) に代入すると，x が自然数となるのは

$$(x, y) = (3, 4), (10, 1)$$

の 2 通りに限られることが分かる．

ここで**平均**の定義を述べる．通常，平均と言えばいわゆる相加平均のことを指し，N 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ の平均は

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N}$$

で定義される．右辺の平均操作では総和 $x_1 + x_2 + \cdots + x_N$ を N 変数に等分配し，$\{x_i\}$ の分布を一様に均 (なら) していると解釈できる．

問題　生徒 20 人に 5 点満点の小テストを解かせたところ，その結果は表 3 のようになった．全体の平均点が 2.7 点であるとき，x, y にあてはまる人数を求めよ．

解　まず合計の生徒数について

$$1 + 3 + x + 7 + y + 2 = 20$$

が成り立つ．また平均点は全生徒の点数の合計値を人数で割った値だから，

$$\frac{1}{20}(0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2x + 3 \cdot 7 + 4y + 5 \cdot 2) = 2.7$$

と表される．2 式を連立して解くと $x = 4, y = 3$ を得る．

表 3　小テストの結果．生徒は合計 20 人，平均点は 2.7 点．

点数 (点)	0	1	2	3	4	5
人数 (人)	1	3	x	7	y	2

6.4　平均と集合 [1, pp.42–43]

問題　A 君がこれまでに受けた定期テストの平均点は 65 点である．次のテストで 85 点をとると平均点が 70 点になるとすると，A 君はこれまでに何回テストを受けたことになるか．

解　n 回とすると，次のテストも含めた平均点は

$$\frac{65n+85}{n+1}=70$$

と表される．これを解いて，$n=3$ 回．

問題　ある試験の受験者数は 100 人であり，そのうち 20 人が合格した．合格者の平均点は不合格者の平均点より 30 点高かった．受験者全体の平均点が 51 点のとき，合格者の平均点は何点か．

解　x 点とすると，受験者全体の平均点は

$$\frac{20x+80(x-30)}{100}=51$$

と表される．これを解いて，$x=75$ 点．

以上の 2 問では 4.5 節で紹介した，図 59 のような面積図を活用することもできる．

問題　生徒 50 人に対して国語と算数のテストを行ったところ，算数の合格者は 35 人，国語の合格者は 25 人となった．このとき算数と国語の両方を合格した生徒は何人以上何人以下となるか．

解　両方の合格者を $x(\geq 0)$ 人とすると，$x\leq 25$ かつ $x\leq 35$．また国語と算数の少なくとも一方のテストに合格した人数に対して，

$$0\leq 35+25-x\leq 50$$

が成り立つので，$10\leq x\leq 60$．以上の不等式の全てが成り立つことを要求すると，最も厳しい評価として

$$10\leq x\leq 25$$

が得られる．なお本問では図 70 のように線分図を利用するのが，おそらく最も便利である．

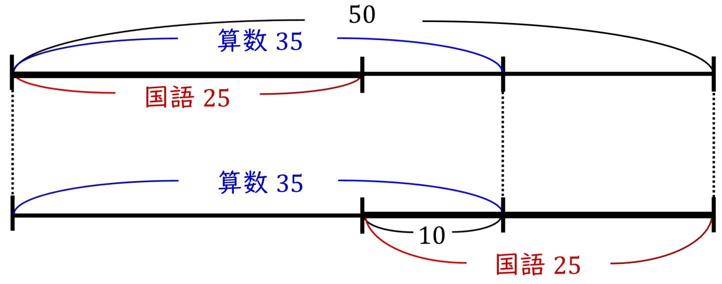


図 70　国語の人数を表す太い線分は，全体の人数を表す線分からはみ出ない範囲で動かすことができる．このとき算数と国語の人数の共通部分は，上段の状態で最大，下段の状態で最小となる．

問題　中学 3 年生を対象とした哲学のアンケートで，「自由意志の存在を信じるか」と「量子力学的な不確定性 (非決定論) を信じるか」を問うたところ，

- 自由意志を信じると答えた人は全体の $3/4$

- 非決定論を信じると答えた人は全体の 5/6
- 自由意志と非決定論のどちらも信じると答えた人は 85 人
- 自由意志と非決定論のどちらも信じないと答えた人は 15 人

であった．このとき非決定論は認めるが自由意志は信じていない学生は何人か．

解　全体の人数 N は，図 71 に示すベン図の助けを借りると

$$N = \left(\frac{3}{4}N + \frac{5}{6}N - 85\right) + 15$$

と表される．これを解くと $N = 120$ が得られる．よって求める人数は $\frac{5}{6}N - 85 = 15$.

注　自由意志と (非) 決定論の (無) 関係性については付録 B も参照．

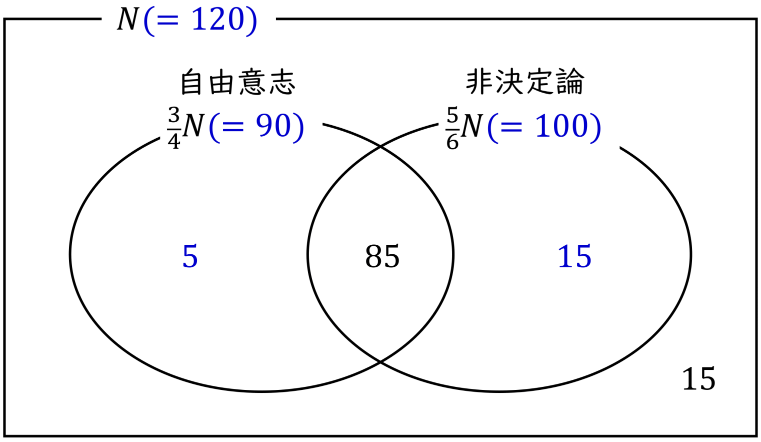


図 71　アンケート結果をまとめたベン図．青字は問題を解いた後で求まる数値．

6.5　差集め算 [1, pp.44–45]

問題　1 本 50 円の鉛筆を何本か買う予定でお金を用意した．しかし 1 本 70 円の鉛筆しかなかったので，それを予定より 4 本少なく買ったところ，40 円余った．このとき用意したお金は何円か．

解　50 円の鉛筆を n 本買う予定だったとすると，$50n$ 円用意していたことになる．実際に使ったお金は $70(n-4)$ 円なので，

$$50n = 70(n-4) + 40, \qquad \therefore n = 12.$$

よって $50n = 600$ 円．

問題　1 個 80 円のドーナツと 1 個 100 円のケーキを合わせて 15 個買う予定だった．しかし，ドーナツとケーキの個数を予定とは逆にしたため (取り違え)，予定より 60 円安くなった．このときドーナツは何個買ったか．

解　実際に買ったドーナツの個数を n とおくと，ケーキは $(15-n)$ 個買ったことになるので，

$$80(15-n) + 100n = \{80n + 100(15-n)\} + 60, \qquad \therefore n = 9.$$

7　数の性質の問題

主に 1.3.4 節や 1.4 節を中心に復習せよ．以下では断りのない限り，負の数は考えない．

7.1　約数・倍数 [1, pp.46–47]

問題　38 を割ると 2 あまり，57 を割ると 3 あまる整数の中で，最も小さい数を求めよ．

解　求める数は $38-2=36$ と $57-3=54$ の公約数のうち，**あまりの 3 よりも大きい**整数である (必要条件)．ここで $36=2\times 18$ と $54=3\times 18$ の最大公約数は 18 であり，**公約数は最大公約数の約数**なので，18 の約数 $\{1,2,3,6,9,18\}$ が答の候補となる．このうち 3 より大きい最小のものは 6 である．

問題　6 で割っても 8 で割っても 5 あまる 3 桁の整数の中で，最も小さい数を求めよ．

解　条件を満たす数は 6 と 8 の公倍数より 5 だけ大きい (必要条件)．ここで 6 と 8 の最小公倍数は 24 であり，**公倍数は最小公倍数の倍数**なので，答の候補を小さい順にあげると

$$24+5,\quad 2\times 24+5,\quad 3\times 24+5,$$

となる．このうち最も小さい 3 桁の数は $4\times 24+5=101$ である．

問題 (要注意)　3 で割ると 2 あまり，4 で割ると 1 あまる整数のうち，100 に最も近い数を求めよ．

解　$m, n(\geq 0)$ を適当な整数として，求める数は

$$N=3m+2=4n+1$$

とおける．第 2 の等号より

$$m=\frac{4n-1}{3}=n+\frac{n-1}{3}$$

であり，最左辺の m は整数なので，最右辺における $(n-1)$ は 3 の倍数でなければならない．そこで初めの式に $n-1=3l$ (l は整数) を代入して n を消去すると，

$$N=12l+5$$

を得る．(これは確かに「3 で割ると 2 あまり，4 で割ると 1 あまる」という条件を満たしている．) 100 に最も近い N には $l=8$ が対応し，求める数は $N=101$ である．

注　模範解答は 3 で割ると 2 あまる数と，4 で割ると 1 あまる数を小さい順に書き出し，帰納的に両方の条件を満たす数が，3 と 4 の最小公倍数 12 で割ると 5 あまる数であることを予想するにとどまっている．

最後の問題に関連して**百五減算**を取り上げる．

問題　1 から 1000 までの自然数のうち，3 で割って余りが 2，5 で割って余りが 3，7 で割って余りが 4 である整数は何個あるか．

解 1　7 で割って余りが 4 である整数 $7n+4$ において，$n=5m+r$ $(r=0,1,2,3,4)$ とすると，

$$7n+4=7(5m+r)+4=35m+7r+4.$$

これを 5 で割ったとき，余りが 3 となるのは $r=2$ のときに限る．このとき

$$7n+4=35m+18.$$

次に，$m=3l+r'$ $(r'=0,1,2)$ とすると

$$7n+4=35(3l+r')+18=105l+35r'+18=3(35l+11r'+6)+2r'.$$

これを 3 で割ったとき余りが 2 となるのは $r'=1$ のときである．よって，$7n+4=105l+53$ の形となる．このうち 1 から 1000 までのものは $l=0,1,2,\cdots,9$．したがって，求める個数は 10 個である．

解 2　題意を満たす整数を N とすると，

$$N=3a+2=5b+3=7c+4 \qquad (a,b,c \text{ は } 0 \text{ か自然数})$$

とおける．$3a+2=5b+3$ より $a=\frac{5b+1}{3}=2b-\frac{b-1}{3}$ であるから，$b-1$ は 3 の倍数．よって

$$b-1=3d\ (d \text{ は整数}), \qquad \therefore b=3d+1, \qquad \therefore N=5b+3=5(3d+1)+3=15d+8.$$

同様に $15d+8=7c+4$ より $c=\frac{15d+4}{7}=2d+\frac{d+4}{7}$ であるから，

$$d+4=7e\ (e \text{ は整数}), \qquad \therefore N=15(7e-4)+8=105ee-52.$$

このうち 1 から 1000 までのものは $e=1,2,\cdots,10$．したがって，求める個数は 10 個である．

解 3　7 で割れば 4 余る整数は $7n+4$ $(n=0,1,2,\cdots)$ で表される．したがって，これを小さい方から順に並べると

$$4,\ 11,\ 18,\ 25,\ 32,\ 39,\ 46,\ 53,\ 60,\ \cdots\cdots$$

である．これらのうちで，3 で割れば 2 余り，5 で割れば 3 余る数のうち，最小のものは 53 である．すなわち，53 は題意を満たす最小の数である．そこで，題意を満たす任意の数を N とすると，$N-53$ は 3 でも 5 でも割り切れる整数である．3,5,7 の最小公倍数は 105 であるから，m を任意の整数として

$$N-53=105m, \qquad \therefore N=105m+53\ (m=0,1,2,\cdots).$$

このうち 1 から 1000 までのものは $m=0,1,2,\cdots,9$．したがって，求める個数は 10 個である．

7.2 約数・倍数の利用 [1, pp.48–49]

実数 x を超えない最大の整数を **Gauss (ガウス) 記号** $[x]$ で表す．例えば，

$$[3.14]=3, \qquad [3]=3, \qquad [-3.14]=-4.$$

問題　1 から 100 までの整数のうち，3 の倍数であって 5 の倍数でない整数は何個あるか．

解　3 の倍数は $\left[\frac{100}{3}\right]=33$ 個あり，このうち 5 の倍数でもあるものは，3 と 5 の最小公倍数 15 の倍数なので，$\left[\frac{100}{15}\right]=6$ 個ある．よって求める個数は $33-6=27$．

注　5 の倍数は $\left[\frac{100}{5}\right]=20$ 個．図 72 のように，3.6.1 節で紹介したベン図を用いて倍数の集合を表すのも便利である．

問題　2 桁の整数 $A,B(>A)$ の最大公約数が 13，最小公倍数が 156 であるとき，A,B を求めよ．

解　互いに素な整数 $a,b(>a)$ を用いて $A=13a, B=13b$ とおける．このとき 1.4 節のすだれ算 (連除法) の箇所で学んだように，A,B の最小公倍数は

$$156=13ab$$

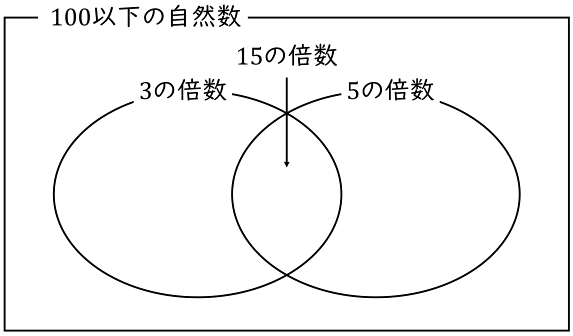


図 72　倍数の集合に対するベン図

と表されるので (図 73 も参照)，$ab = 12 = 2^2 \cdot 3$ となる．ここで a, b は互いに素で $a < b$ を満たすから

$$(a, b) = (1, 12), (3, 4)$$

のいずれかであり，このうち A, B が 2 桁となるのは

$$(a, b) = (3, 4), \qquad (A, B) = (13a, 13b) = (39, 52)$$

のときである．

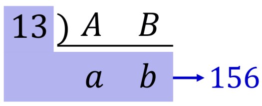


図 73　すだれ算 (連除法) の利用

7.3　素因数分解 [1, pp.50–51]

問題　1.　20! には素因数 2 は何個含まれているか．

2.　50! を計算すると，その末尾に何個の 0 が続くか．

問題 1 の解　まず 20! について，1 から 20 までの素因数 2 を含む整数 (したがって偶数) と，そこに含まれる素因数 2 を書き出すと図 74 のようである．①の列に並んでいる 2 の個数は，20 までの自然数のうち 2 の倍数の個数に等しいから，$\left[\frac{20}{2}\right]$．②の列に並んでいる 2 の個数は，20 までの自然数のうち $2^2 = 4$ の倍数の個数に等しいから，$\left[\frac{20}{2^2}\right]$．同様にして，③, ④の列に並んでいる 2 の個数は $\left[\frac{20}{2^3}\right], \left[\frac{20}{2^4}\right]$．よって求める個数は

$$\left[\frac{20}{2}\right] + \left[\frac{20}{2^2}\right] + \left[\frac{20}{2^3}\right] + \left[\frac{20}{2^4}\right] = 10 + 5 + 2 + 1 = 18.$$

注　ここで得られた結果 (上式の最左辺) は公式のように利用してよい (一般化は直接的である)．

問題 2 の解　50! を $10(= 2 \times 5)$ で何回，割り切れるかを調べれば良い．50! に含まれる素因数 5 の個数の方が，2 の個数より明らかに少なく，その個数は前問と同様，

$$\left[\frac{50}{5}\right] + \left[\frac{50}{5^2}\right] + \left[\frac{50}{5^3}\right] + \left[\frac{50}{5^4}\right] + \cdots = 10 + 2 + 0 + 0 + \cdots = 12$$

と求まる．よって 12 個.

	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
①	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
		×		×		×		×		×
②		2		2		2		2		2
				×				×		
③				2				2		
								×		
④								2		

図 74　階乗に含まれる素因数の数

問題　540 の約数は何個あるか.

解　$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1$ と素因数分解されるので，その約数は

$$2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \qquad (0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 3,\ 0 \leq z \leq 1)$$

と表される ($2^0 = 1, \mathrm{etc.}$ に注意，1.3.3 節)．整数 x, y, z のとり得る値はそれぞれ $(2+1) = 3$ 個，$(3+1) = 4$ 個，$(1+1) = 2$ 個あり，各々の選び方に応じて $3 \times 4 \times 2 = 24$ 通りの約数が得られる.

注　これにより約数の個数だけでなく，全ての約数を網羅的に求めることができる (計算の手間を厭わなければ)．一般的に述べれば，整数 A が

$$A = {a_1}^{n_1}{a_2}^{n_2} \cdots {a_N}^{n_N}$$

と素因数分解されるとき (各 a_i は互いに素な素数，各 n_i は自然数)，A の約数の個数は

$$n = (n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_N + 1) \tag{52}$$

と表される.

問題 (要注意)　約数が 3 個の整数は 1 から 50 までに何個あるか.

解　前問を通じて見出した約数の個数の公式 (52) において，各 $(n_i + 1) \geq 2$ であることに注意すると，$n = 3$ となるのは $N = 1, n_1 = 2$ の場合，すなわち a を素数として $A = a^2$ と表される場合に限られることが分かる ($N \geq 2$ とすると $n \geq 2^2 = 4$ となり，$n = 3$ を実現できないから)．よって

$$2^2 = 4, \qquad 3^2 = 9, \qquad 5^2 = 25, \qquad 7^2 = 49$$

の 4 個.

注　同様に約数が $n = 2$ 個となるのは $N = 1, n_1 = 1$，すなわち $A = a$ (素数) のときのみである．また約数が $n = 4$ 個となるのは $N = 2, n_1 = n_2 = 1$ または $N = 1, n_1 = 3$ のときのみであり，それぞれ a, b を互いに素な素因数として $A = ab$ または $A = a^3$ と表される.

問題　50 個の分数

$$\frac{1}{50},\ \frac{3}{50},\ \frac{3}{50},\ \cdots,\frac{49}{50},\ \frac{50}{50}$$

のうち約分できない分数は何個あるか．

解　分母は $50 = 2 \cdot 5^2$ と素因数分解できるため，分子を成す 1 から 50 までの整数のうち 2 でも 5 でも割り切れない整数の個数を求めれば良い．2 で割り切れる整数は $\left[\frac{50}{2}\right] = 25$ 個，5 で割り切れる整数は $\left[\frac{50}{5}\right] = 10$ 個，2 と 5 の両方で割り切れる整数 (10 の倍数) は $\left[\frac{50}{10}\right] = 5$ 個なので，求める個数は (3.6.1 節の式 (48) などに基づき)，$50 - (25 + 10 - 5) = 20$.

7.4　整数と小数 [1, pp.52–53]

問題　整数 N を 17 で割って小数第 1 位を四捨五入した結果が 6 であるとき，N のとり得る最小値と最大値を求めよ．

解

$$5.5 \leq \frac{N}{17} < 6.5, \qquad \therefore 5.5 \times 17 (= 93.5) \leq N < 6.5 \times 17 (= 110.5)$$

であり，これを満たす整数 N の最小値は 94，最大値は 110.

注　$5.5 \leq \frac{N}{17} \leq 6.4$ ではないことに注意．例えば 6.499 の小数第 1 位を四捨五入すると 6 になる．

問題　ある整数 N を 7 で割った商と余りが等しいとき，考え得る N の最大値を求めよ．

解　整数を 7 で割った余りは $r = 0, 1, \cdots, 6$ をとり得る．商 q と余り r が等しいとき，割られる数は

$$N = 7q + r = 8r$$

と表されるので，その最大値は $8 \times 6 = 48$.

問題　ある小数の小数点を取り除いてできた整数からもとの小数を引くと 121.77 になった．このときもとの小数を求めよ．

解　もとの小数を a とおくと，整数と a の差が小数第 2 位までの数なので，a もまた小数第 2 位までの数と分かる．すると小数点を取り除いた数は $100a$ と表されるから，

$$100a - a = 121.77, \qquad \therefore a = \frac{121.77}{99} = 1.23$$

と求まる．

注　1.3.4 節における循環小数を分数に直す計算が思い出される．

問題　次式 (ア),(イ),(ウ) を同時に満たす (正数) A, B, C を求めよ．

$$AB = 42 \cdots (\text{ア}), \qquad BC = 56 \cdots (\text{イ}), \qquad CA = 48 \cdots (\text{ウ}).$$

解　ここでも連立方程式の正攻法として**1文字消去**の基本に則り，例えば C を消去することを考える．$A=0$ とすると与式 (ア),(ウ) に矛盾するので $A\neq 0$ であり (同様に $B,C\neq 0$)，そこで式 (ウ) を $C=48/A$ と書き直して式 (イ) に代入・整理すると，

$$\frac{B}{A}=\frac{56}{48}=\frac{7}{6}$$

を得る．上式より k を適当な正数として $A=6k, B=7k$ とおける．これを式 (ア) に代入すると $42k^2=42$, $\therefore k=1$ となるので，

$$A=6\cdot 1=6,\qquad B=7\cdot 1=7,\qquad C=\frac{48}{A}=8$$

と求まる．

注　式 (ア),(ウ) を辺々掛けると $A^2BC=42\cdot 48$ であり，これを式 (イ)($\neq 0$) で辺々割ると

$$A^2=\frac{42\cdot 48}{7\cdot 8}=6^2,\qquad \therefore A=6$$

が得られる．なお本問は「整数と小数」の節に分類されているが，ここでは正数 A,B,C が整数であるまでは，あらかじめ仮定していないことに注意．

問題　ある2桁の整数の一の位と十の位の数の和は10で，一の位と十の位の数を入れ替えて得られる2桁の整数は，もとの整数よりも36だけ大きくなる．このときもとの2桁の整数を求めよ．

解　もとの整数は一の位を a，十の位を b として $a+10b$ と表される．すると

$$(10a+b)=(a+10b)+36,\qquad \therefore a-b=4$$

であり，これを $a+b=10$ と連立して解くと $a=7, b=3$ を得る．よって求める整数は37．

7.5　分数 [1, pp.54–55]

問題　$\frac{2}{7}, 0.3, \frac{1}{3}$ の大小関係を調べよ．

解　$\frac{2}{7}=0.285\cdots, \frac{1}{3}=0.333\cdots$ より $\frac{2}{7}<0.3<\frac{1}{3}$．あるいは

$$\frac{2}{7}=\frac{60}{210},\qquad 0.3=\frac{3}{10}=\frac{63}{210},\qquad \frac{1}{3}=\frac{70}{210}$$

より $\frac{2}{7}<0.3<\frac{1}{3}$．

注　$\frac{1}{3}=0.333\cdots$ という書き方を認める以上，両辺を3倍した式 $1=0.999\cdots$ も成り立つことになる．

問題　99個の分数 $\frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \frac{3}{100}, \cdots, \frac{98}{100}, \frac{99}{100}$ のうち，約分すると分子が1になる分数は $\frac{1}{100}$ を含めて何個あるか．

解　1から99までの整数のうち，100の約数の個数を数えれば良い．7.3節における約数の個数の公式 (52) より，$100=2^2\cdot 5^2$ の約数は $(2+1)\times(2+1)=9$ 個あり，ここから100自身を除くと，求める個数は8．

問題　分子と分母の差が 20 で，約分すると $\frac{3}{7}$ になる分数を求めよ．

解　求める分数は分母の方が大きいことに注意すると，$\frac{a}{a+20}$ とおける．これを $\frac{3}{7}$ と等置して a について解くと $a=15$ が得られるので，$\frac{15}{35}$．

問題　$\frac{2}{3}$ と $\frac{3}{4}$ の間にある，分母が 15 の分数を求めよ (分子は整数とする)．

解　整数 x を用いて求める分数を $\frac{x}{15}$ とおくと，

$$\frac{2}{3} < \frac{x}{15} < \frac{3}{4}, \qquad \therefore 10 < x < 11.25$$

であり (各辺を 15 倍して分母を払った)，これを満たす整数 x は 11 に限られるので，$\frac{11}{15}$．

注　自然数 $n(\geq 2)$ に対して

$$\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0, \qquad \therefore \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$$

なので，$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \cdots$ が成り立つ．

問題　$\frac{15}{4}$ と $\frac{25}{6}$ のいずれとの積も整数になる分数のうち，最小のものを求めよ．

解　a, b を整数として求める分数を $\frac{b}{a}$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\frac{15}{4} \times \frac{b}{a} &= (\text{整数}) \quad \rightarrow \quad a \text{ は 15 の約数，} b \text{ は 4 の倍数，} \\
\frac{25}{6} \times \frac{b}{a} &= (\text{整数}) \quad \rightarrow \quad a \text{ は 25 の約数，} b \text{ は 6 の倍数}
\end{aligned}$$

より a は 15 と 25 の公約数，b は 4 と 6 の公倍数となる．ところが分数 $\frac{b}{a}$ が最小となるのは，分母 a が最大かつ分子 b が最小となるときであり，15 と 25 の最大公約数は 5，4 と 6 の最小公倍数は 12 だから，求める最小の分数は $\frac{12}{5}$．

問題　$\dfrac{3}{5} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ を満たす整数 a, b (ただし $a < b$) を求めよ．

解　定性的に言って a, b があまり大きくなりすぎると与式を満たせなくなるため，a, b はある程度小さい数に限られる．このことを具体的に定式化しよう．仮に $a \geq 3$ とすると

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = \frac{35}{60} < \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$$

より，与式を満たす (a, b) は存在しない．よって $a = 1, 2$ のいずれかに限られる．$a = 1$ とすると

$$\frac{1}{b} = \frac{3}{5} - 1 = -\frac{2}{5}, \qquad \therefore b = -\frac{5}{2}$$

より，b は整数とならない．次に $a = 2$ とすると

$$\frac{1}{b} = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}, \qquad \therefore b = 10$$

となる．以上より $(a, b) = (2, 10)$ と定まる．

7.6 計算の工夫 [1, pp.56–57]

本稿では既に

- 小数と分数の混ざった 1 次方程式の解法 (1.3.6 節)
- 分配法則を利用した計算の工夫と，その図形的解釈 (2.3.1 節の脚注)
- $\pi \fallingdotseq 3.14$ の代入は計算の最後に行うのが便利であること (5.2 節)

に言及した．また結合則に基づく

$$124-36=\begin{cases}100+(24-36)\\(124-30)-6\end{cases}=88, \qquad 24\times 15=6\times(4\times 15)=360$$

などの計算の工夫も，読者は日常的に無意識のうちに行っていることだろう．

ここでは**部分分数分解**の利用について触れておけば十分である．部分分数分解とは通分の逆操作であり，例えば定数係数 $a,\cdots,f$ を適当に選べば

$$\frac{(x\text{ の 5 次以下の多項式})}{(x-\alpha)^2(x-\beta)(x-\gamma)^3}=\frac{a}{x-\alpha}+\frac{b}{(x-\alpha)^2}+\frac{c}{x-\beta}+\frac{d}{x-\gamma}+\frac{e}{(x-\gamma)^2}+\frac{f}{(x-\gamma)^3}$$

と変形できる．また自然数 n に対して

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

と部分分数分解できる．

考え方 $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}$ とおいて右辺を通分すると $\dfrac{(a+b)n+a}{n(n+1)}$ となる．分子の係数を左辺と比較すると $\begin{cases}a+b=0\\a=1\end{cases}$ より，$a=1, b=-1$ と定まる．

これを利用すると

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\=&\left(\frac{1}{1}\cancel{-\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{-\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}\cancel{-\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\\=&1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

と計算できる (図 75 も参照)．

$$\begin{aligned}
&\boxed{\frac{1}{1}} - \cancel{\frac{1}{2}} \\
&+ \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} \\
&+ \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} \\
&+ \cdots \\
&+ \cancel{\frac{1}{n}} - \boxed{\frac{1}{n+1}}
\end{aligned}$$

図 75　部分分数分解の和

8　速さの問題

3.2 節を中心に復習せよ．なお第 4 章の冒頭でも断ったように，理論物理では数値と単位から成る，次元を持つ量を文字で置くのが一般的であるが，算数では単位を除く数値を文字で置いた方が便利なこともある．以下でも適宜，両方の流儀を使い分ける．

8.1　速さの 3 公式 [1, pp.58–59]

まず単位換算について補足説明を行う．$1\mathrm{km} = 10^3\mathrm{m}$，$1\mathrm{h} = 60\mathrm{min} = 60 \times 60\mathrm{s}$ なので (h は時間，min は分を表す)，例えば

$$36\mathrm{km/h} = \frac{36 \times 10^3\mathrm{m}}{60 \times 60\mathrm{s}} = 10\mathrm{m/s}$$

となる．これは機械的には $36\mathrm{km/h}$ に

$$\frac{10^3\mathrm{m}}{1\mathrm{km}}(=1), \qquad \frac{1\mathrm{h}}{60\mathrm{min}} \times \frac{1\mathrm{min}}{60\mathrm{s}}(=1 \times 1 = 1)$$

を掛ける操作と理解できる．

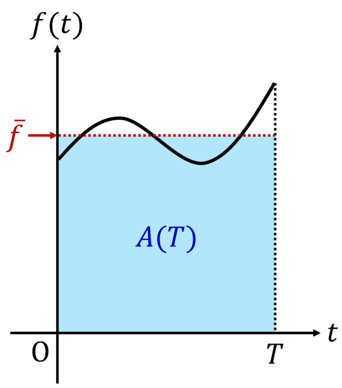


図 76　時間変化する量 $f(t)$ の時間平均 $\bar{f}$ の定義

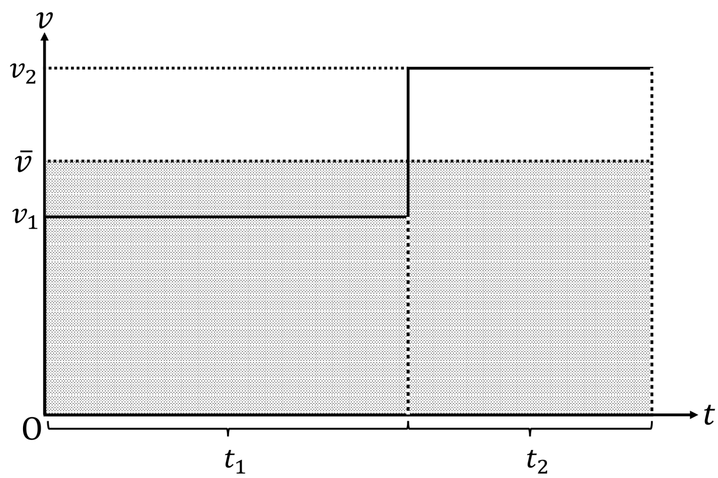


図 77　往復の平均の速さ $\bar{v}$

次に**平均の速さ**を定義する．一般に時刻 t とともに連続的に変化する量 $f(t)$ の与えられた時間区間 $0 \leq t \leq T$ における平均値は，f-t グラフの曲線の下の面積 $A(T)\left(= \int_0^T f(t)\mathrm{d}t\right)$ を不変に保って矩形 (長方形) へと均した (等積変形した) ときの，水平線の高さ

$$\bar{f} = \frac{A(T)}{T}$$

として定義できる (図 76 参照)．特にある距離 l の道を行きは一定の速さ v_1 で，帰りは一定の速さ v_2 で往復する場合を考える．このとき行きの時間を $t_1(= l/v_1)$，帰りの時間を $t_2(= l/v_2)$ とすると，v-t グラフの下の面積は $v_1t_1 + v_2t_2 = 2l$ なので，往復の平均の速さは

$$\bar{v} = \frac{2l}{t_1 + t_2} = \frac{(\text{往復の道のり})}{(\text{往復の所要時間})}$$

で与えられることになる (図 76 参照，この結果は直観的にも納得がいく)．ここに $t_1 = l/v_1, t_2 = l/v_2$ を代入して距離 l を消去すると，平均の速さは v_1, v_2 だけを用いて

$$\bar{v} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$$

と表される．これはさらに

$$\frac{2}{\bar{v}} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}$$

と書き換えられる[*66]．これはここでの平均が，速さの逆数に関して言えば，単なる相加平均に他ならないことを意味している．

最後に標準的な問題を取り上げる．

問題　A さんの歩く速さは分速 60m，走る速さは分速 120m である．家から 1.5km 離れた学校まで 15 分で行くには，A さんは何分間走れば良いか．

解　走る時間を t 分とすると，歩く時間は $(15 - t)$ 分とおけるので，

$$60\,\mathrm{m/min} \times (15 - t)\,\mathrm{min} + 120\,\mathrm{m/min} \times t\,\mathrm{min} = 1500\,\mathrm{m}.$$

これを解いて $t = 25$ (分) を得る．

注　本問は 15 分間ずっと歩いた (または走った) と仮定するところから始めて，つるかめ算を利用して解くこともできる (3.1.1 節)．このようにつるかめ算は，未知数が連続変数である場合にも応用できる．

8.2　旅人算 [1, pp.60–61]

問題　A さんは P 地点から Q 地点に向かって分速 50m で，B さんは Q 地点から P 地点に向かって分速 75m で同時に出発したところ，2 人は PQ 間の中点から 100m 離れた地点で出会った．PQ 間の道のりを求めよ．

解　2 人が出会う地点は PQ 間を速さの比 $50 : 75 = 2 : 3$ に内分するので，求める道のりを l とおくと，図 78 より

$$100\,\mathrm{m} = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) l = \frac{1}{10} l, \qquad \therefore l = 1000\,\mathrm{m}.$$

問題　弟が家を出てからしばらくして，兄が忘れ物を持って自転車で弟を追いかけた．兄は毎分 150m で走れば 10 分で，毎分 200m で走れば 6 分で弟に追いつくとき，弟の速さは毎分何 m か．

解　兄が家を出た時点で弟は距離 l m だけ先に進んでおり，弟の速さを v m/min とすると，兄が弟に追いつくまでの時間 (分を単位として測る) は

$$\frac{l}{150 - v} = 10, \qquad \frac{l}{200 - v} = 6$$

[*66] 以上の平均の速さの定義式は，力学における 2 つの質点 m_1, m_2 の換算質量 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ を想起させる．あるいは固体の比熱の理論における，縦波と横波 (速度 v_l, v_t) の平均速度 v の定義式

$$\frac{3}{v^3} = \frac{1}{{v_l}^2} + \frac{2}{{v_t}^2}$$

とも似ている．

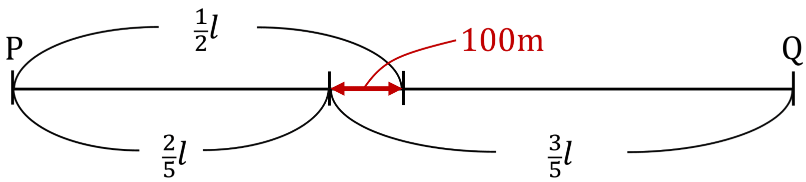


図 78　PQ を 2:3 に内分する地点で A,B は出会う

と表される．したがって

$$(l =)10(150 - v) = 6(200 - v)$$

であり，これを v について解くと $4v = 300, \therefore v = 75$ を得る．よって分速 75m.

問題　A さん，B さん，C さんの速さはそれぞれ順に毎分 80m，70m，60m である．A さんと B さんは P 地点から Q 地点に向かって，C さんは Q 地点から P 地点に向かって同時に出発したところ，C さんは A さんと出会ってから 2 分後に B さんと出会った．このとき PQ 間の道のりを求めよ．

解　PQ 間の道のりを l m とすると，3 人が出発してから A と C，B と C が出会う時間 (分を単位として測る) はそれぞれ

$$t_{\mathrm{AC}} = \frac{l}{80+60} = \frac{l}{140}, \qquad t_{\mathrm{BC}} = \frac{l}{70+60} = \frac{l}{130}$$

と表される．これを $t_{\mathrm{BC}} = t_{\mathrm{AC}} + 2$ に代入して l について解くと，$l = 3640$ を得る．よって 3640m.

問題　A さんは P 地点を，B さんは Q 地点を同時に出発して，5.6km 離れた PQ 間を自転車で 1 往復した．2 人は出発してから 20 分後にはじめて出会い，P 地点から 1.6km 離れた地点で 2 回目に出会った．このとき A さんの速さは毎分何 m か．

解　A,B の速さをそれぞれ毎分 $v_{\mathrm{A}}, v_{\mathrm{B}}$ m とすると，

$$(v_{\mathrm{A}} + v_{\mathrm{B}}) \times 20 = 5600, \qquad \therefore v_{\mathrm{A}} + v_{\mathrm{B}} = 280.$$

また図 79 を参考に道のりを読み取ると，A,B が出発してから 2 回目に出会うまでの時間について

$$\frac{5600+4000}{v_{\mathrm{A}}} = \frac{5600+1600}{v_{\mathrm{B}}}, \qquad \therefore v_{\mathrm{A}} : v_{\mathrm{B}} = 4:3$$

が成り立つ．これは速さの比が 2 回目に出会うまでの道のりの比に一致すると考えても得られる．2 式より $v_{\mathrm{A}} = 160, v_{\mathrm{B}} = 120$ となるので，A の速さは分速 160m.

別解　A,B が 2 回目に出会うとき，図 79 より 2 人の道のりの和は PQ 間の距離の 3 倍なので，出発してから $20 \times 3 = 60$ 分後である．よって A の速さは

$$\frac{(5600+4000)\,\mathrm{m}}{60\,\mathrm{min}} = 160\,\mathrm{m/min}.$$

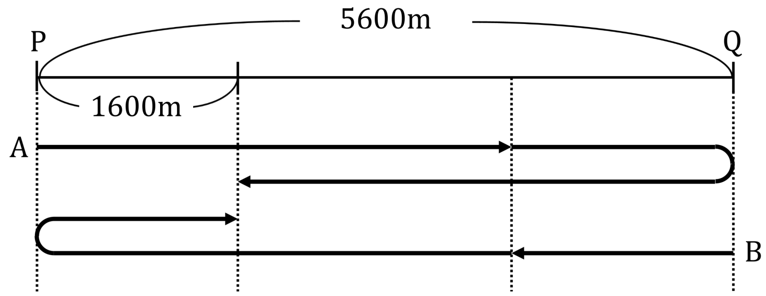


図 79　A,B が PQ 間を往復するときの道のり

8.3　速さと比 (1) [1, pp.62–63]

問題　A さんと B さんが 50m 競走をしたところ，A さんがゴールしたとき，B さんはゴールより 10m 手前にいた．このとき 2 人が同時にゴールするには，A さんのスタート地点を何 m 後ろにすれば良いか．

解　求める長さを l とすると，A,B の速さ $v_{\mathrm{A}}, v_{\mathrm{B}}$ の比は，

$$v_{\mathrm{A}} : v_{\mathrm{B}} = 50\,\mathrm{m} : (50 - 10)\,\mathrm{m} = (50\,\mathrm{m} + l) : 50\,\mathrm{m}$$

なので，$l = 12.5$m．

問題　家から駅まで歩くと 20 分かかり，走ると 10 分かかる．このとき家から駅までの $\frac{2}{5}$ を歩き，残りを走ると何分かかるか．

解　家から駅までの道のりを l とおくと，歩きと走りの速さはそれぞれ

$$v_1 = \frac{l}{20\,\mathrm{min}}, \qquad v_2 = \frac{l}{10\,\mathrm{min}}$$

と表されるので，求める時間は

$$t = \frac{\frac{2}{5}l}{v_1} + \frac{\frac{3}{5}l}{v_2} = \left(\frac{2}{5} \cdot 20 + \frac{3}{5} \cdot 10\right)\,\mathrm{min} = 14\,\mathrm{min}.$$

(もちろん，これは 10 分と 20 分の間の時間となっている．)

問題　あるコースを分速 120m で走ると制限時間の 2 分前にゴールにたどり着き，分速 100m で走るとゴールするのに制限時間を 3 分オーバーする．このとき制限時間は何分か．

解　t 分とすると，コースの全長は m を単位として

$$120(t - 2) = 100(t + 3)$$

と表される．これを解くと $t = 27$ が得られるので，27 分．

問題 図 80 のような水平な道 AB と坂道 BC があり，AB 間は分速 80m，坂道 BC の登りは分速 60m，下りは分速 100m で歩く．このとき A 地点を出発して AC 間を往復したところ，行きは 35 分，帰りは 27 分かかったとすると，AB 間の道のりは何 m か.

解 坂道 BC の登りの時間を t_1 分，下りの時間を t_2 分とすると，

$$t_1 - t_2 = 35 - 27 = 8, \qquad 60t_1 = 100t_2$$

であり，2 式を連立すると $t_1 = 20, t_2 = 8$ と求まる．すると AB 間の片道の所要時間は $35 - 20 = 15$ 分 (あるいは $17 - 12 = 15$ 分) となるので，AB 間は $80 \times 15 = 1200$m.

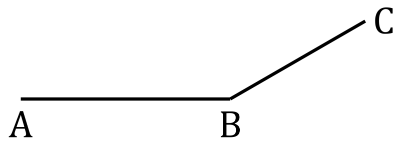


図 80　水平な道 AB と坂道 BC

8.4 速さと比 (2) [1, pp.64–65]

問題 A さんは P 地点から Q 地点に向かって，B さんは Q 地点から P 地点に向かって同時に出発したところ，2 人は出発の 20 分後にすれ違い，その 10 分後に A は Q 地点に着いた．B が P 地点に着くのは出発から何分後か.

解 A,B の速さをそれぞれ毎分 $v_{\mathrm{A}}, v_{\mathrm{B}}$m とおくと，PQ 間の道のりは

$$l = (v_{\mathrm{A}} + v_{\mathrm{B}}) \times 20 = v_{\mathrm{A}} \times (20 + 10)$$

と表される．第 2 の等号より $v_{\mathrm{A}}/v_{\mathrm{B}} = 2$ なので，求める時間は

$$\frac{l}{v_{\mathrm{B}}} = \frac{30v_{\mathrm{A}}}{v_{\mathrm{B}}} = 60 \text{ 分}.$$

問題 A さんと B さんが池の縁を，同じ地点から出発して周回する．反対向きに周ると 2 人は出発してから 2 分後にはじめて出会い，同じ向きに周ると出発してから 10 分後に A さんが B さんを追い抜く．このとき B さんがこの池を 1 周するのにかかる時間は何分か.

解 池の縁の長さを l とし，A と B が 1 分あたりに進む距離をそれぞれ $v_{\mathrm{A}}, v_{\mathrm{B}}$ とおく．2 人が反対向きに進む場合，各々の進んだ距離の和が 1 周の長さ l になったときに出会うので

$$(v_{\mathrm{A}} + v_{\mathrm{B}}) \times 2 = l.$$

また同じ向きに進む場合，2 人の道のりの差が 1 周 l になったとき追いつくので (いわゆる 1 周遅れ，図 81 参照)，

$$(v_{\mathrm{A}} - v_{\mathrm{B}}) \times 10 = l.$$

第 1 式の 5 倍と第 2 式を辺々引いて v_{A} を消去すると $20v_{\mathrm{B}} = 4l$ となるので，求める時間は $l/v_{\mathrm{B}} = 5$ 分.

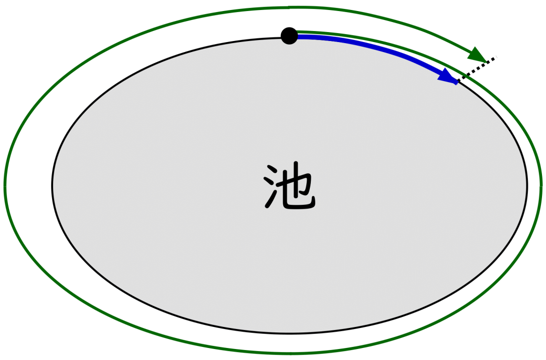


図 81　1 周遅れの概念図

問題　A,B,C の 3 人が与えられた直線上の定点 O を出発して，直線に沿って決まった向きに移動する．

- B は A より 5 分遅れて O を出発すると，B が出発してから 10 分後に A に追いつく．
- C は B より 5 分遅れて O を出発すると，C が出発してから 10 分後に B に追いつく．

このとき A,B,C の速さの比を求めよ．

解　A,B,C の速さをそれぞれ毎分 $v_{\mathrm{A}}, v_{\mathrm{B}}, v_{\mathrm{C}}$m とおくと，B が A に，追いつくまでの移動距離について

$$(10+5)v_{\mathrm{A}} = 10v_{\mathrm{B}}, \qquad \therefore v_{\mathrm{A}} : v_{\mathrm{B}} = 2 : 3$$

が，C が B に追いつくまでの移動距離について

$$(10+5)v_{\mathrm{B}} = 10v_{\mathrm{C}}, \qquad \therefore v_{\mathrm{B}} : v_{\mathrm{C}} = 2 : 3$$

が成り立つので，$v_{\mathrm{A}} : v_{\mathrm{B}} : v_{\mathrm{C}} = 4 : 6 : 9$.

問題　線路に沿った道を分速 200m で自転車で走ったところ，12 分間隔で運行している電車と 10 分おきにすれ違った．このとき電車の速さは時速何 km か．

解　電車の速さを分速 vm とすると，隣り合う電車の間隔は m を単位として

$$12v = (200+v) \times 10$$

と表されるので，$v = 1000$ を得る．よって電車の速さは $1000\,\mathrm{m/min} = 60\,\mathrm{km/h}$.

問題　父が 3 歩であるく距離を子供は 5 歩であるく．また父が 2 歩あるく間に子供は 3 歩あるく．このとき子供が 50 歩先まであるいてから，あるき続ける子供を父が追いかけると，父は子供に何歩で追いつくか．

解　父と子供の歩幅 (1 歩あたりの進む距離) はそれぞれ $5a, 3a$，単位時間当たりの歩数はそれぞれ $2n, 3n$ とおける (n は時間の逆数の次元を持つことに注意)．このとき父と子供のあるく速さはそれぞれ

$$v_1 = 5a \cdot 2n = 10an, \qquad v_2 = 3a \cdot 3n = 9an$$

とおける．よって父が出発してから子供に追いつくまでの時間を t とおくと

$$50 \cdot 3a = (v_1 - v_2)t, \qquad \therefore t = \frac{150}{n}$$

となるので，求める歩数は $2n \cdot t = 300$.

8.5　通過算 [1, pp.66–67]

いわゆる通過算では，運動している物体の大きさを考慮する．

問題　ある列車が一定の速さで走っている．この列車は，長さ 500m の鉄橋を渡り始めてから渡り終えるまでに 20 秒かかる．また長さ 2300m のトンネルを通過するとき，列車が完全に隠れている時間は 60 秒である．このとき列車の速さと長さを求めよ．

解　図 82 において列車の先頭 (または末尾) に注目すると，列車は

- 鉄橋を通過する際に (鉄橋の長さ) + (列車の長さ) だけ進み，
- トンネルに隠れている間，(トンネルの長さ) − (列車の長さ) だけ進む

ことが分かる．よって列車の速さを v m/s，長さを l m とおくと，

$$500 + l = 20v, \qquad 2300 - l = 60v$$

が成り立つ．2 式を辺々足して l を消去すると $v = 35$ が得られるので，列車の速さは ($35\,\mathrm{m/s} = 126\,\mathrm{km/h}$)．また $v = 35$ を上式のいずれかに戻すと $l = 200$ となる．よって列車の長さは 200 m．

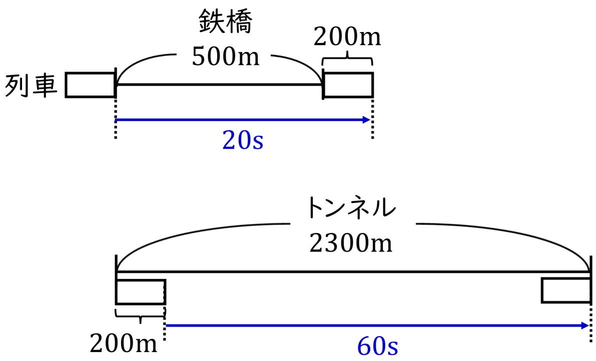


図 82　通過算では列車の長さを考慮する (図では長さを適当にデフォルメしてある)

ここで列車 A (長さ l_A，速さ v_A) と列車 B (長さ l_B，速さ v_B) のすれ違いと追い越しにかかる時間を調べる．2 つの列車が向かい合って走っているとき，列車 B に乗っている人から見ると列車 A は相対速度 $v = v_\mathrm{A} + v_\mathrm{B}$ で迫ってきており，列車 B 自身はその場に静止している．よって列車のすれ違いに要する時間は，長さ l_B の静止した“鉄橋”を速さ v の列車 A が通過する時間

$$t = \frac{l_\mathrm{A} + l_\mathrm{B}}{v} = \frac{l_\mathrm{A} + l_\mathrm{B}}{v_\mathrm{A} + v_\mathrm{B}} = \frac{(\text{電車の長さの和})}{(\text{電車の速さの和})} \tag{53}$$

として求めることができる．他方，$v_\mathrm{A} > v_\mathrm{B}$ として列車 A が列車 B を追い越す場合を考えると，相対速度は $v = v_\mathrm{A} - v_\mathrm{B}$ に置き換わるから，追い越しに要する時間は

$$t = \frac{l_\mathrm{A} + l_\mathrm{B}}{v} = \frac{l_\mathrm{A} + l_\mathrm{B}}{v_\mathrm{A} - v_\mathrm{B}} = \frac{(\text{電車の長さの和})}{(\text{電車の速さの差})} \tag{54}$$

で与えられる．

問題　列車 A (長さ 120m，速さ 30m/s) と列車 B (長さ 180m，速さ 20m/s) が全長 1700m のトンネルの両側から同時に入る．2 つの列車の最後尾がすれ違うのはトンネルに入ってから何秒後か．

解　図 83 より 2 つの列車の末尾は合わせて $(1700+120+180)\,\mathrm{m}=2000\,\mathrm{m}$ 進むので (先頭に着目しても良い)，求める時間は

$$\frac{2000\,\mathrm{m}}{(30+20)\,\mathrm{m/s}}=40\,\mathrm{s}.$$

注　電車のすれ違いや追い越しの時間に関する上記の公式 (53),(54) も，図 83 と同様に地面に対する運動を考えて，改めて導くことができる (確認作業は読者に委ねる)．

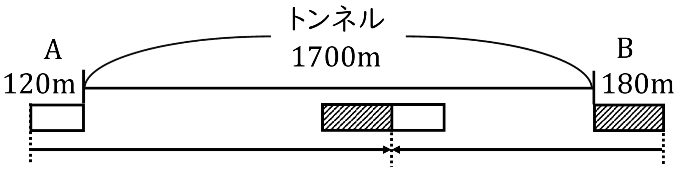


図 83　トンネル内での列車のすれ違い

問題　長さ 150m の列車 A が通過するのに 30 秒かかる鉄橋を，長さ 200m の列車 B が列車 A の 2 倍の速さで通過するには 16 秒かかる．このとき，鉄橋の長さと列車 A の速さを求めよ．

解　鉄橋の長さを L m，列車 A の速さを v m/s とおくと，

$$L+150=30v, \qquad L+200=16\cdot 2v$$

であり，2 式を連立して解くと $L=600, v=25$ を得る．よって鉄橋は 600m，列車 A の速さは 25m/s.

8.6　流水算 [1, pp.68–69]

地面に固定した x 軸に沿う 1 次元的な水流を考え，その流速の x 成分を V で表す．また x' 軸を持つ水流の静止系 (水とともに運動する座標系) を導入する ($x'>0$ の向きは $x>0$ の向きに一致するようにとる)．このとき水流の静止系に対して水上の船は静水時の速さ (言わば船固有の速さ) と同じ大きさの速度成分 v_0 を持ち，x' 軸で測って時間 Δt のうちに $v_0\Delta t$ だけ変位する．同じ時間 Δt のうちに水は x 軸で測って $V\Delta t$ だけ変化するので，船は地面に対し $(v_0+V)\Delta t$ だけ変位する．よって地面に対する船の速度成分 v は，合成則

$$v=v_0+V$$

で与えられる (図 84 参照)[*67]．したがって結局，

$$\begin{aligned}(\text{川を上る速さ}) &= (\text{静水時の速さ})-(\text{流れの速さ}),\\ (\text{川を下る速さ}) &= (\text{静水時の速さ})+(\text{流れの速さ})\end{aligned}$$

として良いことになる。

[*67] 船が流れに逆らって進むのは v_0 と V が逆符号の場合に対応する．各速度が一定でない場合にも Δt を微小時間に選べばここでの議論は依然として成り立つため，合成則 $v=v_0+V$ は各瞬間ごとに成立する．なお我々は暗に与えられた 2 事象間の，2 つの座標系で測った時間間隔 Δt が共通であることを仮定しており，これは実は非相対論的な近似にあたる．

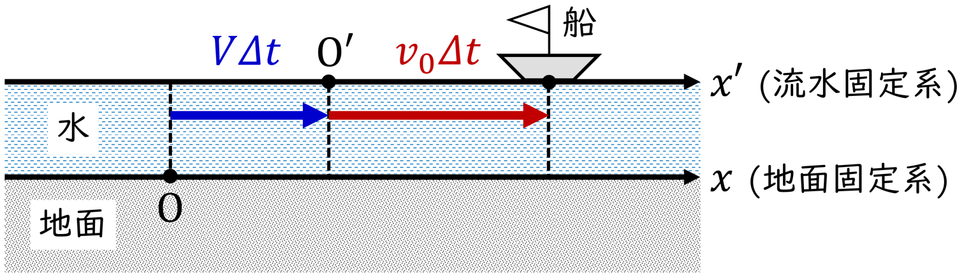


図 84　はじめ地面固定系の座標原点 O と流水固定系 (水流の静止系) の座標原点 O′ は一致していたとする．

問題　流速が一定の川の上流にある P 地点と下流にある Q 地点を往復するのに，A 船は 36 分で上り，24 分で下った．また B 船は 48 分で上った．このとき PQ 間を B 船が下るのに何分かかるか．

解　m/min を単位として測った川の流れの速さと，静水時の A 船，B 船の速さをそれぞれ順に $V, v_{\mathrm{A}}, v_{\mathrm{B}}$ とおく．また PQ 間の距離を l m とすると

$$l = 36(v_{\mathrm{A}} - V), \qquad l = 24(v_{\mathrm{A}} + V)$$

であり，2 式から v_{A} を消去すると $V = l/144$ を得る．これを $l = 48(v_{\mathrm{B}} - V)$ の V に代入すると $v_{\mathrm{B}} = l/36$ が得られるので，求める時間は

$$t = \frac{l}{v_{\mathrm{B}} + V} = \frac{l}{\left(\frac{1}{36} + \frac{1}{144}\right) l} = \frac{144}{5} = 28.8$$

より 28.8 分．

問題　1 階から 2 階まで 50 段の (登り用の) エスカレーターがある．A さんは 1 階からエスカレーターに乗って 20 段歩いて上ったところ，ちょうど 2 階に着いた．このときエスカレーターの速さと A さんの歩く速さの比を求めよ．

解　単位時間あたりのエスカレーターの進む段数と A さんが上る段数をそれぞれ N, n とおく[*68]．また 2 階に達するまでの時間を T とおくと，

$$(N + n)T = 50, \qquad nT = 20, \qquad \therefore NT = 30$$

なので，求める速さの比は $N : n = 30 : 20 = 3 : 2$．

8.7　時計に関する問題 [1, pp.70–71]

本稿では時計算の典型的な問題を既に 3.2.2 節で取り上げたので，ここでは応用問題を載せれば充分である．

問題　午前 6 時に 2 分進んでいた時計が，午後 3 時には 1 分遅れていた．この時計が正しい時刻を示すとき，その時刻を求めよ．(ただし時計は一定のペースで遅れていくものと仮定せよ．)

[*68] 1 段あたりの進む距離を a とおくと，エスカレーターと A さんの速さ自体はそれぞれ Na, na と表される．

解　午前 6 時から午後 3 時までの 9 時間のうちに，時計は $(2+1)=3$ 分遅れる．よってこの時計が 2 分遅れるには $9\times\frac{2}{3}=6$ 時間を要するので，時計が正しい時刻を示すのは，午前 6 時の 6 時間後の午前 12 時 (正午) である．

問題　図 85 の時計で 2 つの角度 θ_1, θ_2 が等しくなるのは 1 時何分か．

解　求める時刻を 1 時 t 分とすると，短針は 1 分で $0.5°$ 進むので

$$\theta_1 = 30° + 0.5° \times t.$$

また長針は 1 分で $6°$ 進むので，

$$\theta_2 = 360° - 6° \times t.$$

これらを等置して t について解くと $t=\frac{660}{13}(\fallingdotseq 51)$ を得る．

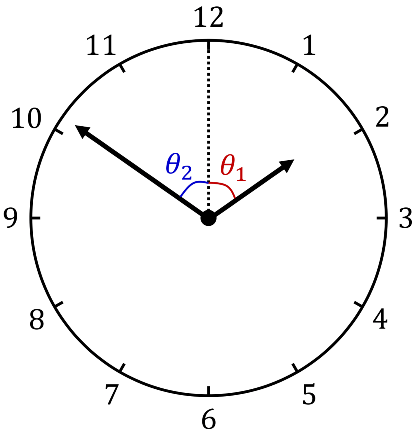


図 85　1 時と 2 時の間で，時計の針が V 字型を成す時刻 (なお売り物の時計はしばしば 10 時 10 分の状態で展示されている)

8.8　速さとグラフ [1, pp.72–73]

旅人算におけるグラフの有用性については既に 3.2.1 節で言及した．ここでは練習問題を 1 問だけ載せておく．

問題　ある船が A 地点から 30km 上流の B 地点に向けて川を上っていたところ，途中でエンジンが故障して 20 分だけ流された．その後，速さを増して再び川を上ったところ，B 地点に予定より 10 分遅れて到着した．図 86 はこのときの船の位置の時間変化を表している．エンジンの故障が直った後の，この船の静水時の速さは毎時何 km か．

解　船は 20 分間で $20-18=2$ km 流されているから，川の流れは分速 $2\div 20=0.1$ km．また予定通り，はじめの船の速さ $20\div(60+40)=0.2$ km/h のまま川を上っていれば，B 地点にたどり着くには $30\div 0.2=150$ 分かかるから，予定到着時刻は 8:30，実際の到着時刻は 8:40 と分かる．するとエン

ジンが復活した後の船の速さは分速 $(30-18)\div 40=0.3$ km なので，川の流れがないときの速さは $(0.3+0.1)\,\mathrm{km/min}=24\,\mathrm{km/h}$.

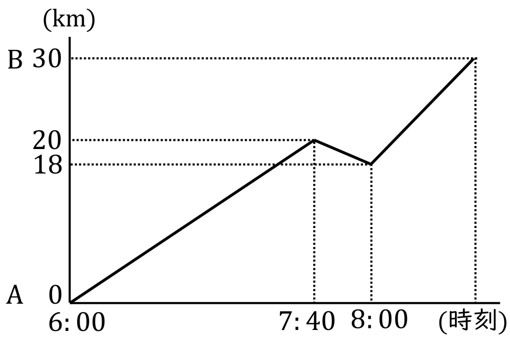


図 86　川を上る船の位置と時刻の関係

ここでグラフの**重ね合せ**について説明する．既知のグラフ $y=f(x), g(x)$ に対して和 $y=f(x)+g(x)$ のグラフは，図 87 の左側のように，各位置 x ごとにグラフの“高さ” $f(x), g(x)$ を足した“高さ” $f(x)+g(x)$ にグラフ上の点をプロットすると得られる．この操作を 2 つのグラフの重ね合せという．特に与えられた 2 つの直線のグラフを重ね合せることを考える．まず $f(x)=ax+b$ と $g(x)=cx+d$ に対して

$$f(x)\pm g(x)=(a\pm c)x+(b\pm d)$$

だから，2 つの 1 次関数の和 (や差) は 1 次関数である．よって各々の 1 次関数を表す 2 直線の重ね合せもまた，直線であることになる．ところで 2 点を通る直線は 1 通りに決まるから，重ね合せた直線を得るには，直線上の特別な 2 点の位置を求めれば充分である．そこで 2 つの直線の一方の高さがゼロになる位置 x に注目すると，この点での重ね合せによる“高さ”はもう一方の直線の“高さ”に一致する．よって 2 直線 $y=f(x), g(x)$ を重ね合せたグラフは，図 87 の右側のように赤い丸印で示した 2 点を結んだ直線である．

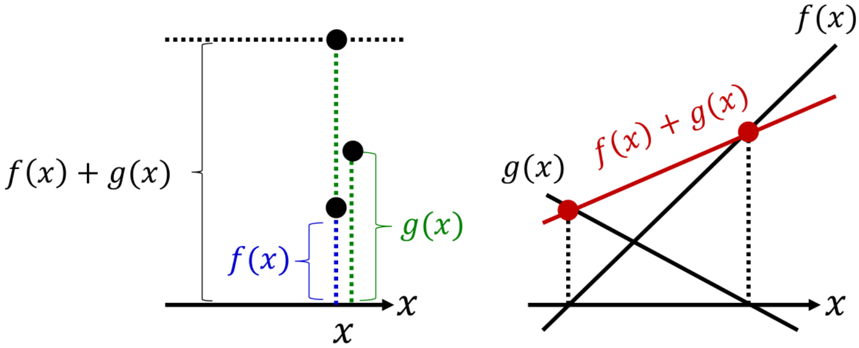


図 87　グラフの重ね合せ

次に旅人算への応用に移ろう．A さんが初期時刻 $t=0$ に原点 $x=0$ にある家を出て一定の速さで $+x$ 向きに進み，その後 A さんの忘れ物に気が付いた B さんが時刻 $t=t_1(>0)$ に家を出て，一定の速さで A さんを追いかける場合を考える．このとき B が A に追いつく時刻 $t=t_2$ までの A,B の運動は図 88 のような x-t グ

ラフで表され，ここに青い線分が A の位置 $x = x_\mathrm{A}(t)$ に，緑の折れ線が B の位置 $x = x_\mathrm{B}(t)$ に対応する．すると 2 人の間隔 $x = x_\mathrm{A}(t) - x_\mathrm{B}(t)$ のグラフは赤い折れ線のようになる．実際，B が家にいる $0 \le t \le t_1$ の間は 2 人の距離は A と家の間隔 $x_\mathrm{A}(t)$ に一致する．また B が A を追いかける $t_1 \le t \le t_2$ について，先ほど論じたように，2 本の線分 $x = x_\mathrm{A}(t), x_\mathrm{B}(t)$ の差もまた線分で表されることはあらかじめ分かっている．そして $t = t_1$ では差は $x_\mathrm{A}(t_1)$，$t = t_2$ では差はゼロだから，求める線分はこれら両端の点を結んで得られる．このようにグラフの差をとることは重ね合せの逆操作であり，ここでは黒い縦線で示した 2 直線の高さの差をそのまま真下に下ろせば，赤い線の高さが得られる．

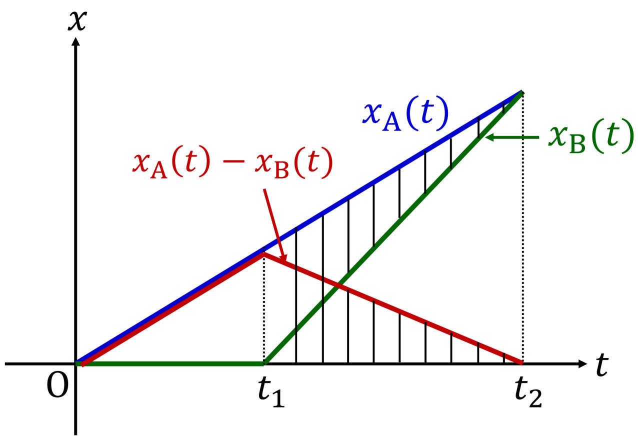


図 88　グラフの差

9　規則性の問題

3.4.3 節で既に指摘したように，帰納的推論を要する「規則性の問題」は実のところ，数学的によく定義された問題とは言えないことに改めて注意を促しておく．

9.1　植木算 [1, pp.74–75]

本稿では植木算の典型的な問題を既に 3.3.2 節で取り上げた．ここではいくつかのバリエーションを紹介する．

問題　のりしろを全て 1cm として長さ 5cm のテープを 10 本つなげるとき，全体の長さは何 cm となるか．

解　のりしろは $10-1=9$ 箇所となることに注意すると，

$$5\,\mathrm{cm}\times 10 - 1\,\mathrm{cm}\times 9 = 41\,\mathrm{cm}.$$

別解　はじめの 5cm の 1 本目に対し残りの 9 本をつなげていくと，のりしろの長さを除く 4cm ずつ増えていくので，

$$5\,\mathrm{cm} + 4\,\mathrm{cm}\times 9 = 41\,\mathrm{cm}$$

となる (各自で図を描き，このことを納得せよ*69)．

問題　12m の材木を 2m ずつに切り分ける．1 回切るのに 3 分かかり，1 回切り終わってから次に切るまでに 1 分休むとき，全部切るのに何分かかるか．

解　材木を $12\div 2=6$ 等分するので，5 回切れば良く，このとき途中休憩は 4 回である．よって

$$3\,分\times 5 + 1\,分\times 4 = 19\,分.$$

問題　1 階から 5 階まで上がるのに 20 秒かかるエレベーターが，1 階から 10 階まで上がるのには何秒かかるか．

解　1 階から 10 階までは $5-1=4$ 階上がることになるので，1 階上がるのにかかる時間は $20\,秒\div 4=5$ 秒である (各自で図を描き，このことを納得せよ)．よって 10 階まで上がる時間は $5\,秒\times(10-1)=45$ 秒となる．

注　20 秒の 2 倍の 40 秒としてはいけない．同様に鐘を等間隔に打つ場合，1 回目を打ち始めてから 5 回目を打ち終わるのに 5 秒かかるならば，鐘の鳴る間隔は $5\div(5-1)=1.25$ 秒である (1 秒ではない)．

問題　池の周りに 20m おきに木を植えるのと，25m おきに木を植えるのとでは，木の本数が 10 本違う．このとき池の周りの長さは何 m か．

*69 10 本のテープを描くのが大変であれば，少ない本数で試してみよ．

解　求める長さを l m とおき，20m おきに木を植えるときの木の本数を n とする．今の場合，木の本数と隣り合う木の間隔の数が一致することに注意すると，

$$l = 20n = 25(n-10)$$

として良い．第 2 の等号より $n = 50$ と求まるので，$l = 20 \cdot 50$．よって 1000m.

9.2　周期算 [1, pp.76–77]

問題　2^{2023} の一の位の数を求めよ．

解　$2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \cdots$ の一の位の数を順に書き出すと $2, 4, 8, 6, 2, \cdots$ となる．(ここで十の位以上の数は一の位の数に寄与しないから，考慮しなくてよい．) よってこの数列は $\{2, 4, 8, 6\}$ を周期的に繰り返す．ところで $2023 = 4 \times 505 + 3$ だから，求める数は 506 周期目の 3 番目の数，すなわち 8 である．

次に 3.3.1 節では簡単に言及するにとどめた暦算の問題を扱う．

問題　ある年の 8 月 6 日は日曜日である．この年の 6 月 27 日は何曜日か．

解　6 月は 30 日まで，7 月は 31 日までであり，6/27 から 6/30 までは 4 日間あるので，6/27 から 8/6 までは

$$4 + 31 + 6 = 41 \text{ 日間}$$

ある．言い換えれば 6/27 は 8/6 の

$$41 - 1 = 40 = \begin{cases} 7 \times 5 + 5 \\ 7 \times 6 - 2 \end{cases} \quad \text{日前}$$

であり (8/6 自身を除いた)，5 週間前 (日曜日) のさらに 5 日前，あるいは 6 週間前 (日曜日) の 2 日後なので，火曜日．

問題　ある月の水曜日の数字の和は 80 である．この月の最初の土曜日は何日か．

解　最初の水曜日を n 日とすると，水曜日の数字は公差 7 の等差数列

$$n,\ n+7,\ n+2\cdot 7,\ \cdots$$

を成す．ところで **1 ヶ月に水曜日は 4 回または 5 回ある**．そこでまず，この月の水曜日が 4 回とすると，3.4.1 節で説明した等差数列の和の公式より

$$\frac{4\{n + (n + 3\cdot 7)\}}{2} = 80, \qquad \therefore n = \frac{19}{2}$$

となって不適．次に水曜日が 5 回とすると，

$$\frac{5\{n + (n + 4\cdot 7)\}}{2} = 80, \qquad \therefore n = 2$$

となるので，この月の最初の水曜日は 2 日．よって最初の土曜日は 5 日．

問題　西暦 2000 年の 1 月 1 日は土曜日であった．2023 年の 1 月 1 日は何曜日か．ただし 2000 年から 2023 年までの，西暦が 4 の倍数の年はいずれもうるう年である．

解　翌年の 1/1 は前の年の 1/1 の $365 = 7 \times 52 + 1$ 日後なので，曜日が 1 つ進む．ただし，うるう年は 366 日あるので，その翌年の 1/1 は前の (うるう) 年と比べて曜日が 2 つ進む．これを踏まえると各年の 1/1 の曜日が土曜日から進んだ数は，以下のようになる．

$$\begin{array}{cccc|cccc|c} 00 & 01 & 02 & 03 & 04 & 05 & 06 & 07 & \cdots \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 & \end{array}$$

ただし例えば上段の 02 は西暦 2002 年を，下段の数 $0, 7$ は土曜日，$2, 9$ は月曜日を表す．縦線で示したように下段の数列を 4 項ごとの群に分けると (**群数列**)，第 n 群の $k(= 1, 2, 3, 4)$ 番目の数よりも第 $(n+1)$ 群の k 番目の数の方が必ず 5 だけ大きいことになる (1 回のうるう年と 3 回のそうでない年を経るから)．2023 年の数は数列の第 24 項なので，第 6 群の 4 番目の数である (2000 年を第 1 項，はじめの 4 年を第 1 群と数える)．よってその数は

$$4 + 5 \times (6 - 1) = 29 = 7 \times 4 + 1$$

であり，日曜日を表す．したがって 2023 年の 1/1 は日曜日．

注　2023 年までの 24 個程度の曜日ならば，力づくで書き出すこともできる．

9.3　数列・数表 [1, pp.78–79]

9.2 節で既に触れたように，ある規則にしたがって群 (グループ) に分けられた数列を群数列という．

問題　以下のように第 $n(= 1, 2, \cdots)$ 群が n 個の項を含み，その $k(= 1, \cdots, n)$ 番目の数が k/n であるような数列

$$\frac{1}{1}, \left| \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \right| \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \left| \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \right| \cdots$$

を考える．この数列の第 1 項から第 50 項までの分数の和はいくらか．

解　まず第 50 項が第何群の何番目の数かを調べる．第 n 群までの項数は

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

であり，$S_9 = 45, S_{10} = 55$ なので，第 50 項は第 10 群の 5 番目の数である[*70]．第 n 群の項の和は

$$\frac{1 + 2 + \cdots + n}{n} = \frac{n+1}{2}$$

なので，第 9 群までの項の和は

$$\frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \cdots + \frac{10}{2} = 27.$$

よって第 50 項までの項の和は

$$27 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} + \frac{5}{10} = \frac{57}{2}.$$

[*70] 第 50 項が第 n 群に含まれる条件は $S_{n-1} < 50 \leq S_n$ と表される．

注　答案全体を通じて，3.4.1 節における等差数列の和の公式を用いた．

数を 1 次元的に配列したものが数列であるとすれば，**数表**とは数を 2 次元の格子状に配列して得られる表である．図 89 では青い矢印に沿って自然数を順に書き込んで得られる典型的な数表を示している．上段の数表では，1 列目には平方数 $1^2, 2^2, 3^2, 4^2$ が並ぶことが見て取れる．実際 n 行 1 列目の数は，左上の隅から n 行 n 列までに含まれるセル (マス) の個数 n^2 を数えた結果である．他方，下段の数表では，k 行 1 列目から 1 行 k 列目に伸びる $k(=1,2,\cdots)$ 本目の矢印に沿って k 個の数が並んでおり，その $l(=1,\cdots,k)$ 番目の数は $(k-l+1)$ 行 l 列目に属している．また矢印の末尾の 1 行 k 列目の数 ($l=k$ が対応) は，k 本目までの矢印が貫くマスの数

$$a_k = 1+2+\cdots+k = \frac{1}{2}k(k+1)$$

であり，これが 1 列目に並ぶ数の一般項を与える．その階差数列

$$b_k = a_{k+1} - a_k = (1+\cdots+k+1) - (1+\cdots+k) = k+1$$

は公差 1 の等差数列である．これは新しい矢印に移るごとに，その上の数が 1 個ずつ増えることから期待される結果である．

	1列	2列	3列	4列	⋯
1行	1	2	5	10	
2行	4	3	6	11	
3行	9	8	7	12	
4行	16	15	14	13	
⋮					

	1列	2列	3列	4列	⋯
1行	1	3	6	10	
2行	2	5	9		
3行	4	8			
4行	7				
⋮					

図 89　典型的な数表

9.4　図形の規則性 [1, pp.80–81]

長さの等しい竹ひごを周期的に並べて作られるパターンと，そこに含まれる竹ひごの本数を図 90，図 91 にまとめる．

次に碁石を正方形に敷き詰めて得られる図 92(a) のようなパターンを考える．最も外側の 1 辺に $N(\geq 2)$ 個の碁石が並んでいるとき，外側の 1 周には図 92(a) より

$$4(N-1) \text{ 個}$$

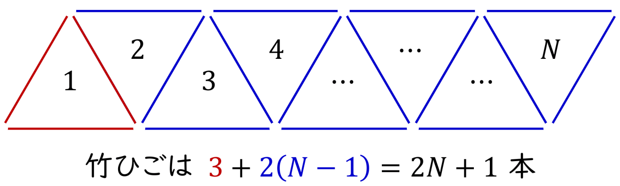


図 90　正三角形の繰り返しパターン

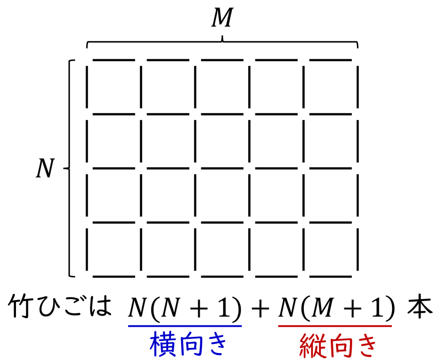


図 91　正方形の繰り返しパターン

の碁石が並ぶことになる．この結果は 4 辺の $4N$ 個の碁石から重複する 4 隅の碁石を除いても得られる．よって図 92(b) のように外側の 1 辺が $2M$ 個になるまで碁石を隙間なくならべたときの碁石の総数は，3.4.1 節における等差数列の和の公式を用いて $N = 2, 4, 6, \cdots, 2M$ に関する和をとると，

$$4\{1 + 3 + 5 + \cdots + (2M - 1)\} = (2M)^2$$

と求まる．これはあらかじめ期待される通りの結果である．他方，図 92(c) のように中央に碁石 1 個分の隙間のある“中空方陣”に対して碁石の総数を得るには，和は $N = 3, 5, 7, \cdots$ にわたってとる必要がある．もっとも図 92(c) の例では，紫の長方形で囲まれた碁石は $3 \times 4 = 12$ 個なので，碁石の総数は $4 \times 12 = 48$ 個と求めるのが容易である (これは図 92(a) で外縁の碁石の個数を求めた手法の一般化である)．あるいは $7^2 - 1 = 48$ 個．以上のように

- 1 周の碁石を数え，その和をとること
- 周期的な繰り返しパターンの基本構造を見出すこと

は，正方形に限らず碁石が正多角形状に並んでいる場合にも応用し得る．

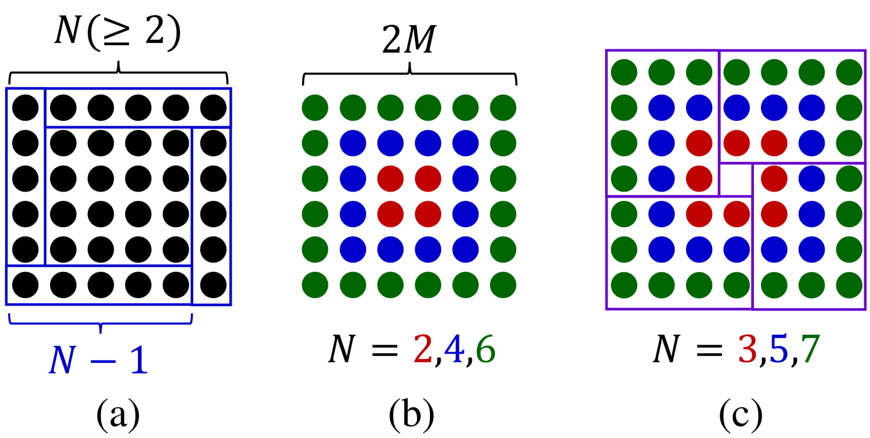


図 92　碁石を正方形に敷き詰めたパターン (中央のいくつかの碁石が空いているものを中空方陣という)

最後に，図 93 の黒線で示したような N 個の正五角形の入れ子構造を考えると，最も外側の 1 辺には $(N+1)$

個の玉が並ぶ．ここに青で示した線と玉を付け加えて $(N+1)$ 番目の正五角形を作ると，新たに付け加わる玉の数は

$$3(N+2)-2=3N+4$$

である．

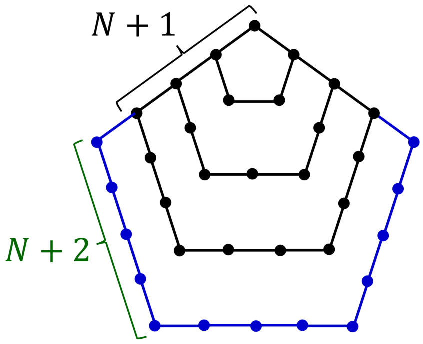


図 93　正五角形の入れ子構造 (図では $N=3$ の場合を描いた)

9.5　規則性の利用 [1, pp.82–83]

問題　3 または 5 の倍数を小さい順に列挙して得られる数列 $3,5,6,9,10,12,15,\cdots$ において，100 は第何項か (初項 3 を第 1 項と数える)．

解　3 と 5 の最小公倍数 15 以下の数列に含まれる数は，問題文に書き出してある通りである．次に自然数 $m(=1,2,\cdots)$ に対して $15(m-1)$ より大きく $15m$ 以下の整数

$$15(m-1)+n \qquad (1\leq n\leq 15)$$

が 3(または 5) の倍数であるための必要十分条件は，n が 3(または 5) の倍数であることだから，n のとり得る値はちょうど $\{3,5,6,9,10,12,15\}$ の 7 通りとなる．こうして考えている数列は，第 $m(=1,2,\cdots)$ 群が

$$15(m-1)+3,\ 15(m-1)+5,\ 15(m-1)+6,\ 15(m-1)+9,\ 15(m-1)+10,\ 15(m-1)+12,\ 15(m-1)+15$$

の 7 個の整数から成る群数列であることが示される．よって $100=6\times 15+10$ は第 7 群の 5 番目の数だから，数列全体で $7\times 6+5=47$ 番目の数 (第 47 項) である．

問題　ある病院のベッドには，(「死」を連想させる) 数字の 4 を含む数字をとばして，

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 15,\cdots$$

のように 1 から小さい順に番号が付けられている．病院には番号 97 のベッドまであるとき，ベッドは全部でいくつあることになるか．

解　ベッドの番号の各位に用いられる数をそれぞれ

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9 \quad \to \quad 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$$

と置き換えると，**ベッドの番号は 9 進数を小さい順に網羅する**ことになる．97 は 86 に置き換えられ，$86(9) = 8 \times 9 + 6 = 78$ なので，ベッドの総数は 78.

注　この解法はベッドの数が桁違いに多い場合にも応用が利くものの，ひらめきを要する．他方，本問ではベッドの数は高々 97 程度であるから，97 までに現れる 4 を含む数を根気よく書き出すことも困難ではない：

$$4,\ 14,\ 24,\ 34,\ \underbrace{40, \cdots, 49}_{10\text{ 個}},\ 54,\ 64,\ 74,\ 84,\ 94.$$

4 の付く数字は以上の 19 個だから，ベッドの個数は $97 - 19 = 78$．こうした作業を系統的に行うには，4 の付く数字を「1 の位が 4 の倍数」または「10 の位が 4 の倍数」である数として集合論的に (3.6.1 節の式 (48) 参照) 数えれば良い (44 は両方に該当することに注意).

10　立体図形の問題

2.4 節を中心に復習せよ．

10.1　体積と表面積 [1, pp.84–85]

問題　図 94 の実線は直方体を斜めに切断して得られる立体を表している．図 94 における長さ x と，この図形の体積を求めよ．

解　図 94 の破線のように**同じ立体を合体させると直方体が得られる**から，

$$(\text{直方体の高さ}) = x + 4 = 2 + 7 (= 9), \qquad \therefore x = 5.$$

また求める立体の体積は直方体の半分 $5 \times 5 \times 9 \div 2 = 112.5$.

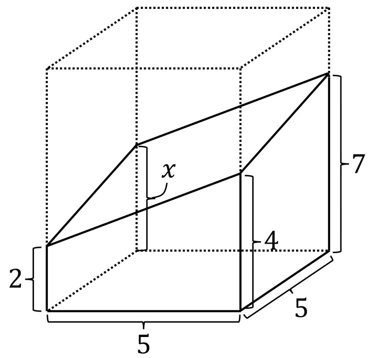


図 94　直方体を斜めに切断して得られる立体

問題　図 95 の左側のように，1 辺 $2a$ の立方体から，3 点 P,Q,R を通る平面で切り取られる三角錐の体積と表面積を求めよ．

解　体積は

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OPR} \times \mathrm{OQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot 2a = \frac{1}{3}a^3.$$

次に二等辺三角形 PQR の面積を考える．$\triangle$OPQ, $\triangle$ORQ, $\triangle$OPR に三平方の定理を適用すると，

$$\mathrm{PQ} = \mathrm{PR} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = \sqrt{5}a, \qquad \mathrm{PR} = \sqrt{2}a.$$

ところで点 Q から底辺 PR に下ろした垂線の足は PR の中点 M なので，再び三平方の定理より

$$\mathrm{QM} = \sqrt{\mathrm{PQ}^2 - \mathrm{PM}^2} = \sqrt{(\sqrt{5}a)^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{3}{\sqrt{2}}a.$$

よって

$$\triangle\mathrm{PQR} = \frac{1}{2}\mathrm{PR} \times \mathrm{QM} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}a \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}a = \frac{3}{2}a^2.$$

これと残りの面の面積

$$\triangle\mathrm{OPQ} = \triangle\mathrm{ORQ} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot 2a = a^2, \qquad \triangle\mathrm{OPR} = \frac{1}{2}a^2$$

を合わせると，三角錐の表面積は

$$\left(\frac{3}{2}+1+1+\frac{1}{2}\right)a^2 = 4a^2$$

と求まる．

注　ここでは確実な手法として三平方の定理を駆使して力づくで解いたが，三角錐が図 95 の右側のような正方形に展開されることに気付けば，直ちに表面積は $(2a)^2$ と求まる．

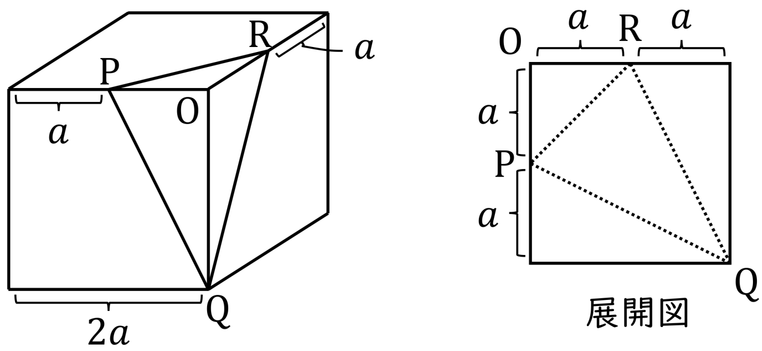


図 95　立方体から切り取られる三角錐とその展開図

10.2　立方体 [1, pp.86–87]

問題　1 辺の長さ 1 の立方体を 7 個積み上げて得られる，図 96 のような立体の表面積を求めよ．

解　図 12 において前後から見える正方形は 5 個ずつ，左右から見える正方形は 3 個ずつ，上下から見える正方形は 5 個ずつである．さらに左右の正面から隠れている，図 96 の影を付けた 2 面を考慮すると，表面積は

$$(5+3+5)\times 2+2 = 28.$$

注　立方体を 7 個と断ってあるのは，図 96 だけでは正面から見えない背後に何個の立方体が並んでいるか，曖昧さが残るからである．

問題　図 97(a) のように $4^3 = 64$ 個の白い立方体を積み上げ，大きな立方体を作ってから表面を赤く塗り，再び立方体をバラバラにした．このとき 2 面だけが赤色の立方体は何個あるか．

解　2 面だけが赤い立方体は，図 97(b) に青色で示した，大きな立方体の 12 本の辺に沿って並ぶ，角を除く立方体だから，$2\times 12 = 24$ 個．

注　なお 3 面だけが赤い立方体は，大きな立方体の頂点に位置する 8 個である．1 面だけが赤い立方体は，大きな立方体の 6 面の各々から 4 つずつ見えている，図 97(b) に緑色で示した立方体であり，全部で

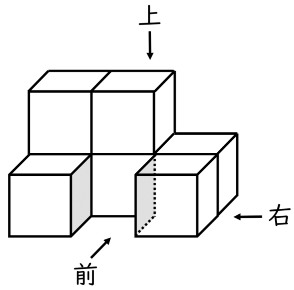


図 96　立方体を 7 個積み上げた様子

$4 \times 6 = 24$ 個．最後に赤色に塗られていない立方体は，大きな立方体の内側に隠れた $2^3 = 8$ 個である．(以上を合わせると確かに合計 64 個になる．)

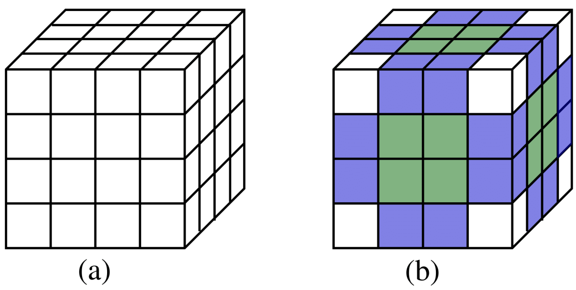


図 97　大きな立方体を作ってから表面を赤く塗ってバラバラにする

問題　図 98 上段のように 1 辺が 1 の $4^3 = 64$ 個の立方体を積み上げ，大きな立方体を作る．次いで影を付けた面を反対側の面までくり抜くと，1 辺が 1 の立方体は何個残るか．

解　図 98 下段に示すように，大きな立方体の 1 段目と 4 段目にはそれぞれ 14 個，2 段目と 3 段目にはそれぞれ 8 個の立方体が生き残るから，全部で 44 個．

問題　図 99 のように 1 辺が 6 の立方体の辺 AD,CD 上に，$AP = CQ = 4$ を満たす 2 点 P,Q をとる．立方体を 3 点 E,P,Q を通る平面で切って得られる，点 H を含む側の立体の体積を求めよ．

解　面 ABCD と切断面の交線は線分 PQ である．ところで平行な 2 つの面 ABCD と EFGH と切断面の交わりは平行なので，底面 EFGH と切断面の交線は対角線 EG となる．よって切り口は図 99 のような台形 PEGQ となる．ここで図 99 のように辺を延長した交点 R をとると，求める体積は三角錐 R-HEG から三角錐 R-DPQ を差し引いて得られる．相似な $\triangle$RPD と $\triangle$REH (または $\triangle$RQD と $\triangle$RGH) に注目すると，$RD = 3$ と定まる．(いずれの相似な三角形の組からも $RD = 3$ が得られることは，EP と HD，GQ と HD の延長線が同一の点 R で交わることの証拠である．) すると三角錐 R-DPQ の体積は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2 \times 2}{2} \cdot 3 = 2$$

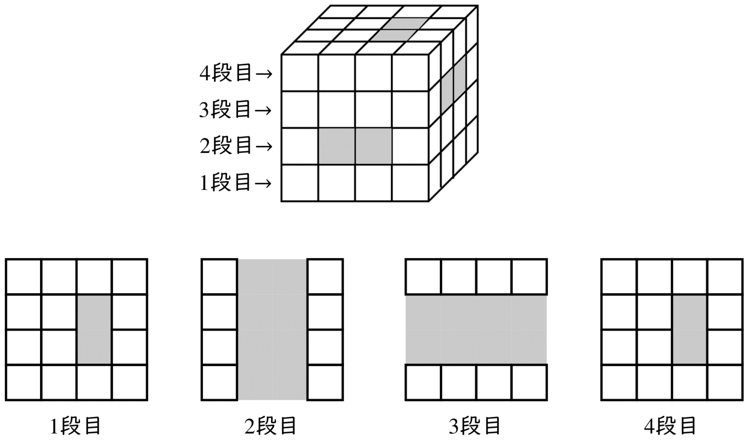


図 98　大きな立方体をくり抜く (下段は各層を真上から見た様子)

であり，三角錐 R-DPQ と三角錐 R-HEG の体積比は $1 : 3^3$ なので，求める体積は

$$2 \times (3^3 - 1) = 52.$$

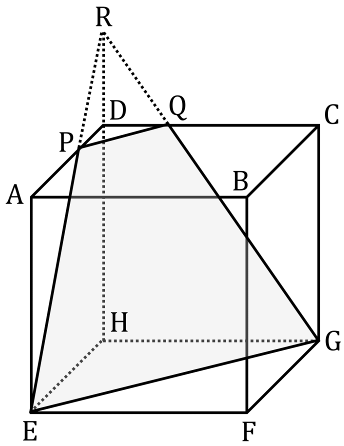


図 99　立方体の切断

問題 (要注意)　図 100 上段のように 1 辺が 1 の $4^3 = 64$ 個の立方体を積み上げて作った大きな立方体を，3 点 A,B,C を通る平面で切断したとき，切断される 1 辺が 1 の立方体は何個か.

解　大きな立方体の水平な各層を真上から見ると，水平面と切断面の交線は図 98 下段に示したようになる. 切断面は 2 本の交線の間を通るので，各層において影を付けた立方体が切断されていることになる. よって求める個数は

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16.$$

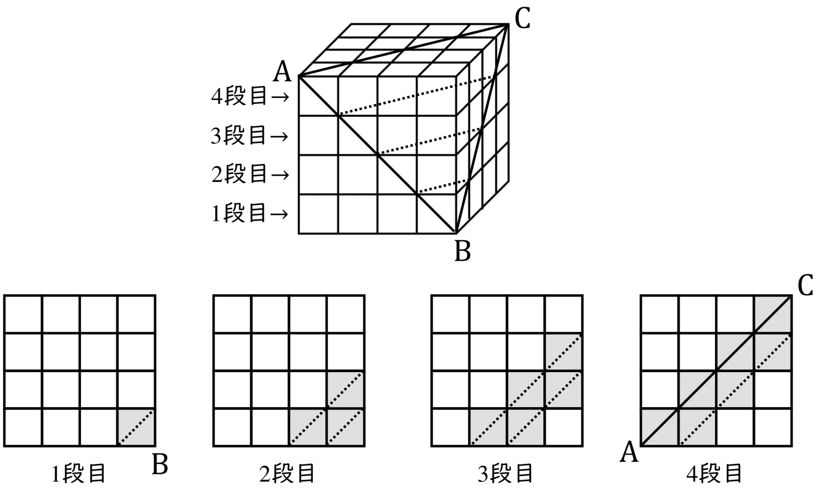


図 100　$4^3 = 64$ 個の立方体から成る大きな立方体を切断する

10.3　展開図・投影図 [1, pp.88–89]

問題　図 101 のように底面の半径 a の (直) 円錐を，頂点 O を中心として平面上で滑らずに転がしたところ，4 回転してもとの位置に戻った．この円錐の母線の長さ l を求めよ．

解　円錐が 1 回転するとき，その母線は平面上に中心 O，半径 l の四分円を描く (これは円錐の側面の展開図に一致する)．その弧長は底面の円周に一致するから，

$$\frac{1}{4} \cdot 2\pi l = 2\pi a, \qquad \therefore l = 4a.$$

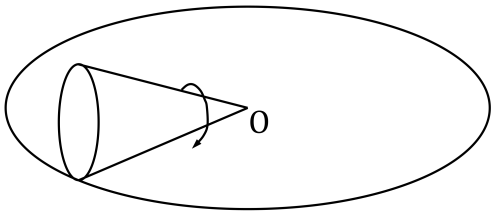


図 101　(直) 円錐を平面上で転がす

ここで**投影図**について説明する．与えられた立体を適当な平面に投影 (正射影) して得られる図形を投影図と呼ぶ．例として正四角錐の投影図を図 102 に示す．

問題 (要注意)　単位の立方体を積み重ねた立体を正面，真上，右横から見た投影図が図 103(a) のようであるとき，単位の立方体の個数の可能な最大値と最小値を求めよ．

解　立体を真上から見たときの，各位置に積み上げられている立方体の個数をそれぞれ図 103(b) のように $A, \cdots, I$ とおく．図 103(b) には立体を正面と右横から見た投影図を踏まえ，各行と各列の数の最大値を書き添えてある．1 行目の A, B, C (または 1 列目の A, D, G) の最大値は 3 なので，これらのいず

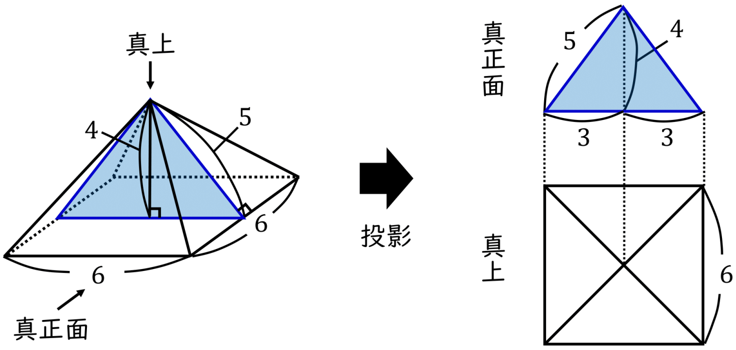


図 102　正四角錐の投影図 (真正面と真上から見た図)

れかは 3 である．そこで $B, C = 3$ (または $D, G = 3$) を仮定すると，2 列目と 3 列目 (または 2 行目と 3 行目) の最大値が 2 であることに矛盾する．よって $A = 3$ と定まる．このとき残りの $B, \cdots, I$ はいずれも 1 または 2 であり，ただし 2 列目と 3 列目，2 行目と 3 行目の少なくとも 1 つの数は 2 である．立方体の個数が最大となるのは，$B, \cdots, I$ のすべてが 2 となるときであり，このときの個数は 19．次に個数の最小値を考える．$B = C = D = G = 1$ としても投影図に矛盾しない．この下で残る 4 数 E, F, H, I について，例えば $E = 1$ を仮定すると，2 列目の最大値が 2 となるには $F = 2$ とならねばならない．このとき 3 列目の最大値が 2 となることは自動的に満たされるから，$I = 1$ として良い．最後に 2 行目と 3 列目の最大値が 2 となることを要求すると，$H = 2$ と定まる．(仮に $I = 2$ としても $H = 2$ でなければならないことには変わりないので，この場合の個数は最小でない．) 同様に $F = 1$ を仮定すると，取り得る最小値は $E = 2, H = 1, I = 2$ となる．いずれの場合も立方体の総数は 13 であり，これが最小値の候補である．B, C, D, G のいずれか，例えば B を 2 とすると，2 列目と 3 列目にも少なくとも 2 が 1 つずつ含まれなければならないので，2 は 3 箇所以上に現れることになる．よってさらに立方体の個数が少ない状況を実現することはできないから，個数の最小値は 13 に確定する．

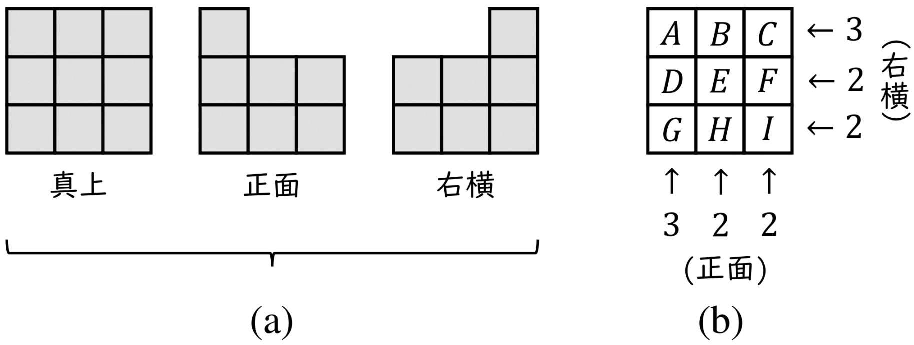


図 103　立方体を積み上げた立体の投影図

10.4　底面積の変化 [1, pp.90–91]

問題　直方体の容器に深さ 6 まで水が入っている．以下では容器の高さは十分長く，水が容器からあふれ出すことはないものとする．まず 1 辺が 10 の立方体のおもりを 1 個，容器の底まで沈めたところ，図 104(a) のように容器の高さは 8 となった．

1. このおもりを図 104(b) のように容器の底から鉛直に高さ 3 だけ引き上げたときの水の深さを求めよ．
2. 1 つ目のおもりを底まで沈めた状態から，同じおもりをもう 1 個底まで沈めたときの水の深さを求めよ．

問題 1 の解　おもりの底面積は 100 なので，容器の底面積を S とおくと，水の体積は

$$6S = 8(S - 100)$$

と表される．よって $S = 400$．するとおもりを 3 だけ持ち上げたときの水の深さを h_1 として，水の体積は

$$6 \cdot 400 = \underbrace{3 \cdot 400}_{\text{高さ 3 までの水}} + \underbrace{(h_1 - 3) \cdot (400 - 100)}_{\text{高さ 3 以上の水}}$$

と表されるので，$h_1 = 7$ を得る．

問題 2 の解　2 個のおもりを沈めた後の水の深さを $h_2 \leq 10$ と仮定すると，水の体積は

$$6 \cdot 400 = h_2(400 - 2 \cdot 100)$$

となるので，$h_2 = 12$ を得る．これは $h_2 \leq 10$ の仮定に矛盾するから，実際には 2 個のおもりは完全に水に浸かっていることになる．そこで改めて求める深さを $h_2 > 10$ とすると，おもりと水を合わせた体積は

$$400h_2 = 6 \cdot 400 + 2 \cdot 10^3$$

と表されるので，$h_2 = 11$ を得る．

別解　あるいは水のみの体積が

$$6 \cdot 400 = \underbrace{10 \cdot (400 - 2 \cdot 100)}_{\text{高さ 10 までの水}} + \underbrace{400 \cdot (h_2 - 10)}_{\text{高さ 10 以上の水}}$$

と表されることに着目しても良い．

10.5　水の入った容器 [1, pp.92–93]

問題　図 105 のように幅 10 の直方体の仕切りを持つ，底面の縦 50，横 80，深さ 50 の水槽がある．A の部分に一定の割合で水を入れたところ，時間と A の部分の水の深さの関係は図 105 下段のグラフのようになった．このときグラフの x の値を求めよ．

解　はじめの時間 15 では A の部分 (横幅を a とおく) のみに仕切りの高さ x まで水がたまり，続く時間 $35 - 15 = 20$ では B の部分 (横幅を b とおく) のみに仕切りの高さ x まで水がたまり，最後の時間

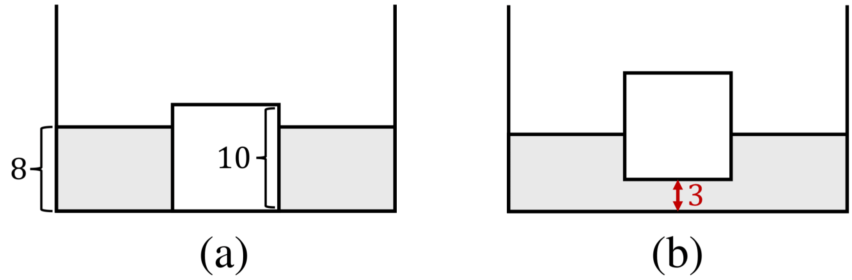


図 104　水の入った容器におもりを沈める

$95-35=60$ では仕切りより上側の部分に水が注がれる．よって単位時間あたりに注がれる水の体積を v とおくと，それぞれの体積は

$$15v=50ax, \qquad 20v=50bx, \qquad 60v=50\cdot 80\cdot(50-x)$$

と表される．はじめの 2 式の比をとると

$$a:b=15:20=3:4$$

が見出される．これは A,B の底面積の比が，底面 A,B に仕切りの高さ x まで水が注がれる時間の比に一致することを意味している．$a+b=80-10=70$ とより $a=30, b=40$ と定まる．そこで例えば冒頭の第 1 式 ($a=30$ を代入する) と第 3 式から v を消去して，x について解くと

$$(60v=)4\cdot 50\cdot 30x=50\cdot 80\cdot(50-x), \qquad \therefore x=20$$

を得る．

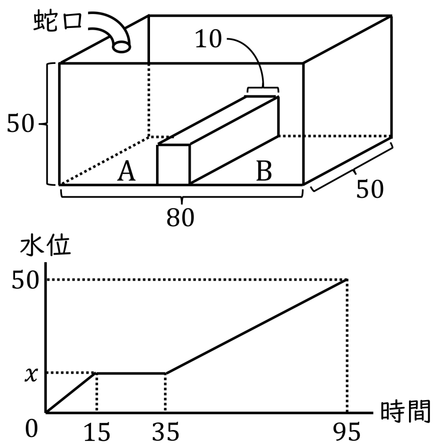


図 105　仕切りの付いた水槽に水を入れたときの時間と A における水位の関係

11　場合の数の問題

3.5 節を中心に復習せよ．

11.1　順列・組合せ (1) [1, pp.94–95]

問題　A,B,C,D,E の 5 人が長いすに座るとき，A と B が隣り合う座り方は全部で何通りあるか．

解　**A,B をまとめて 1 人と見なすと，**“4 人”の並び方は 4! 通りあり，その各々について A,B の並び順は AB と BA の 2 通りがあるから，全部で $4! \times 2 = 48$ 通り．

注　素朴には A,B が隣り合う位置の選び方は図 106 に示す 4 通りがあり，その各々について A,B の並び順は 2 通り，残り 3 人の着席の仕方は 3! 通りあるから，$4 \times 2 \times 3! = 48$ 通り．

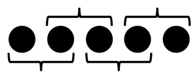


図 106　5 人用の長いすから隣り合う 2 箇所を選ぶ方法

問題　A,B,C,D,E,F の 6 人が 4 人部屋と 2 人部屋に分かれるとき，A と B が同じ部屋になる場合の数を求めよ．

解　A,B がともに 2 人部屋に入るとき，4 人部屋には残りの 4 人が入ることになるので，方法は 1 通り．A,B がともに 4 人部屋に入るとき，残り 4 人を 2 人ずつに分けることになるので，その方法は ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 通り．以上より，合計 7 通り．

問題　1 段上がり (1 歩で 1 段) と 2 段上がり (1 歩で 2 段) を組合せて 6 段の階段を上がる方法は全部で何通りあるか．(1 段上がりのみ，または 2 段上がりのみの場合も含める．)

解
- 1 段上がりのみで上がる方法は，1 通り．
- 2 段上がり 1 回と 1 段上がり 4 回で上がる方法は，
  5 歩から 2 段上がりを 1 箇所選ぶ方法の数だけあるので，5 通り．
- 2 段上がり 2 回と 1 段上がり 2 回で上がる方法は，
  4 歩から 2 段上がりを 2 箇所選ぶ方法の数だけあるので，${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 通り．
- 2 段上がり 3 回 (したがって 1 段上がりなし) で上がる方法は 1 通り．

以上，合計 13 通り．

最後の問題について研究する．n 段の階段を 1 段上がりまたは 2 段上がりで上がる方法の総数を a_n とおくと，

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 2.$$

(ここで 2 段の階段を上がるには 1 段ずつ上がるか，2 段上がり 1 回で上がるかの 2 通りしかあり得ないことを考えた．) 次に $n(\geq 3)$ に対して，最後の n 段目には $(n-1)$ 段目から 1 段上がりで達するか，$(n-2)$ 段

目から 2 段上がりで達するかのいずれかしかない．その各々について，直前の段までの上がり方はそれぞれ a_{n-1} 通りと a_{n-2} 通りだから，

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad (n \geq 3)$$

が成り立つ．このように数列のいくつかの項の間に成り立つ関係式を**漸化式**という．これを逐次用いると

$$a_3 = 1+2 = 3, \qquad a_4 = 2+3 = 5, \qquad a_5 = 3+5 = 8, \qquad a_6 = 5+8 = 13, \qquad a_7 = 8+13 = 21, \qquad \cdots$$

が得られ，改めて $a_6 = 13$ が導かれる．

漸化式の今一つの応用例として，パズル「ハノイの塔」を取り上げよう．円盤が n 枚の場合，全ての円盤を別の棒に移し終えるのに要するステップ数を a_n とすると，図 107 より漸化式

$$a_{n+1} = 2a_n + 1$$

が得られる．すると $a_1 = 1$ から始めて，逐次的に

$$a_2 = 3, \qquad a_3 = 7, \qquad a_4 = 15, \qquad a_5 = 31, \qquad a_6 = 63, \qquad \cdots$$

が得られる[*71]．

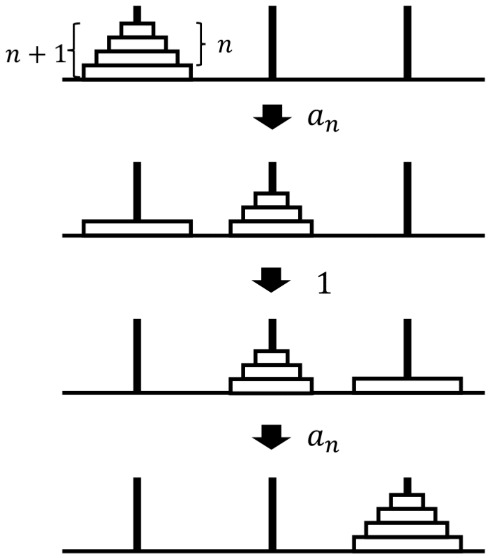


図 107　パズル「ハノイの塔」

[*71] 参考：漸化式を $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$ と書き換えると，$\{a_n + 1\}$ は公比 2 の等比数列であることが分かるので，$a_1 = 1$ の下で

$$a_n + 1 = 2^{n-1}(a_1 + 1) = 2^n, \qquad \therefore a_n = 2^n - 1$$

と求まる．よってステップ数 a_n は段数 n とともに指数関数的に増大する．

11.2　順列・組合せ (2) [1, pp.96–97]

問題　大，中，小の 3 個のサイコロを同時にふるとき，出た目の数の和が 7 になるのは全部で何通りあるか．

解　合計が 7 となる目の組は

$$(1,1,5),\qquad (1,2,4),\qquad (1,3,3),\qquad (2,2,3)$$

の 4 通りあり，このうち $(1,2,4)$ を除く 3 組は同じ数を 2 つ含むので，3 つの目の数を大，中，小の 3 個のサイコロにあてがう方法は 3 通りずつある．また目の数 $(1,2,4)$ を大，中，小の 3 個のサイコロにあてがう方法は $3! = 6$ 通りあるから，全部で

$$3 \times 3 + 6 = 15 \text{ 通り．}$$

問題　$\{0,1,2,3,4\}$ と数字の書かれた 5 枚のカードのうち 3 枚を並べて 3 桁の整数を作るとき，3 の倍数は全部で何通りできるか．

解　3 桁の数の和が 3 の倍数となれば良く，そのようなカードの数の組合せは

$$(0,1,2),\qquad (0,2,4),\qquad (1,2,3),\qquad (2,3,4)$$

の 4 通りがある．はじめの 2 組のそれぞれについて，3 桁の整数を得るには 0 を百の位に用いることはできないことに注意すると，百の位は 2 通り，その各々に対して十の位は 2 通り，一の位は 1 通りとなり，$2 \times 2 \times 1 = 4$ 通りの数が作られる．他方，後ろの 2 組の各々からは $3! = 6$ 通りの数が作られるので，

$$4 \times 2 + 6 \times 2 = 20 \text{ 個．}$$

注　5 の倍数を得るには，一の位が 0 または 5 の場合を考えれば良い (本問では 5 のカードはない)．

問題　100 円硬貨 2 枚，50 円硬貨 1 枚，10 円硬貨 2 枚の一部，または全部を使って支払うことのできる金額は何通りか．

解　100 円硬貨の枚数は $0,1,2$ の 3 通り，50 円硬貨の枚数は $0,1$ の 2 通り，10 円硬貨の枚数は $0,1,2$ の 3 通りが可能なので，全てが 0 枚の場合を除くと硬貨の組合せとしては $3 \times 2 \times 3 - 1 = 17$ 通りが考えられる．そして，これらの金額が互いに一致することはない．と言うのも，100 円硬貨 1 枚を 50 円硬貨 1 枚と 10 円硬貨 2 枚の組合せで代用することはできず，また 50 円硬貨 1 枚を 10 円硬貨 2 枚の組合せで代用することもできないからである．よって金額の種類も 17 通りである．

問題　10 円切手，50 円切手，80 円切手をいずれも 1 枚以上使って，合計 330 円とする方法は何通りあるか．

解　図 108 の樹形図に示す 7 通りがある．

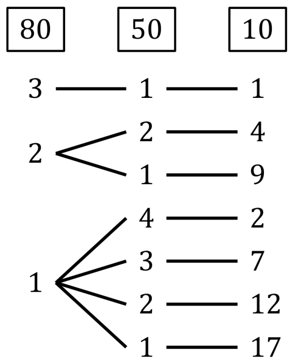


図 108　80 円切手，50 円切手，10 円切手の枚数の組合せ．80 円切手は 3 枚以下であることから可能性は限られる．

11.3　いろいろな場合の数 (1) [1, pp.98–99]

問題　{ 赤，青，黄，緑，紫 } の 5 色を用いて，図 109 に示す 3 つの領域ア, イ, ウを，隣り合う領域が異なる色となるように塗り分ける方法は何通りあるか．ただし使わない色は何色あっても良い．

解　ア, イ, ウを全て相異なる色で塗り分ける方法は ${}_5\mathrm{P}_3 = 60$ 通りある．またアとウに同じ色を用いても，イにそれと異なる色を用いれば塗り分けの条件は満たされる．そのような塗り方は 5 色から 2 色を選ぶ方法の数だけあるから，${}_5\mathrm{P}_2 = 20$ 通り．以上より合計 80 通り．

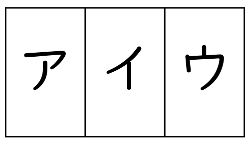


図 109　領域の色分け

問題　図 110 のような格子状の道に沿って点 A から B まで最短距離で行く方法は何通りあるか．ただし $\times$ 印の箇所は通れないものとする．

解　各頂点までの最短ルート数を書き出すと図 110 のようになる．ここでは $\times$ 印のすぐ右の交差点には，左隣の交差点から来ることができないから，すぐ下の交差点までの最短ルート数をそのまま書き込めば良いことに注意しさえすれば良い．よって 52 通り．
あるいは次のように考えても良い．通行止めがなければ，A から B へ行く最短ルート数は $\frac{8!}{4!4!} = 70$ 通りある．ここから $\times$ 印を通る最短ルート数

$$\frac{4!}{2!2!} \times \frac{3!}{2!1!} = 18 \qquad \text{(図 110 の青い線を参照)}$$

を引くと，求める場合の数は 52 通りとなる．

最後に**勝ち抜き戦 (トーナメント戦)** と**総当たり戦 (リーグ戦)** の回数について論じる．$N(\geq 2)$ 人が勝ち抜き戦を行うとき，1 試合ごとに 1 人ずつ敗者が脱落していくので，優勝者を決めるのに必要な試合の回数は，

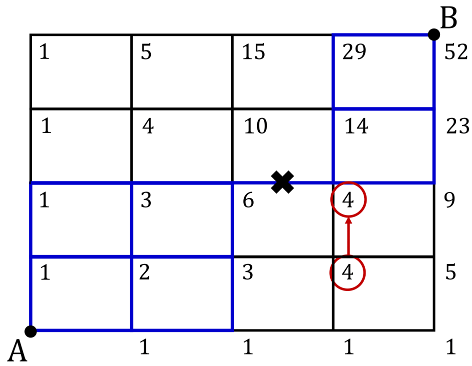


図 110　通行止めがある場合の，碁盤の目に沿う最短ルート数

最終的な敗者の総数 $(N-1)$ で与えられる (これは N の偶奇に依らない)．他方，$N(\geq 2)$ 人が総当たり戦を行うときの試合の総数は，N 人から 2 人を選ぶ方法の総数

$$_N\mathrm{C}_2 = \frac{N(N-1)}{2}$$

に一致する．あるいは 11.5 節の表 4 に示すような，$N \times N$ マスの対戦表に試合結果を記録することを考えても良い．このとき自分自身との対戦を表す対角線上の N マスは意味がないので除外すると，$N^2 - N = N(N-1)$ マス残る．ところが対角線に関して対称な 2 マスは同じ試合結果を表すので (実際 A が B に勝ったということは B が A に負けたということに他ならない)，試合の総数は対角線より上側 (あるいは下側) 半分のマスの数 $N(N-1)/2$ で与えられる (これは上で得た結果に一致している)．

11.4　いろいろな場合の数 (2) [1, pp.100–101]

ここで**三角形の成立条件**について (半ば直観的に) 説明する．3 つの線分 AB$= c$，BC$= a$，CA$= b$ を辺として △ABC を作ることができるための必要十分条件は，任意の 1 辺よりも残り 2 辺の和の方が長いこと，すなわち

$$a < b + c, \qquad b < c + a, \qquad c < a + b$$

である．実際，△ABC の任意の 2 辺，例えば AB と AC の和が残りの 1 辺 BC の長さ以下であれば，図 111 のように 2 辺 AB,AC は互いに届かず，三角形を作ることができない．(ちょうど $a = b + c$ のときは，“三角形”ABC は線分 BC へと潰れてしまう．) 上式は見かけ上 3 つの条件から成るが，実質

$$(\text{最も長い辺の長さ}) < (\text{残り 2 辺の長さの和})$$

と等価である (このとき残り 2 つの条件は自動的に満たされるから)．これは三角形の 2 辺上または 3 辺が等しいときも含めて正しい．

問題　長さ 2,3,4,5,6 の 5 本の棒から 3 本を辺に選んで作ることのできる三角形は何種類あるか．

解　異なる棒の組合せは異なる三角形に対応する．最大の棒よりも残り 2 本の長さの和の方が長くなる棒の長さの組合せは図 112 の樹形図に示す 7 通りがあるので，7 種類．

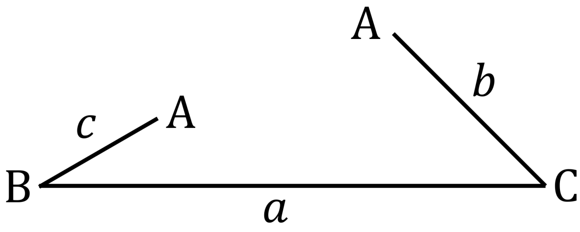


図 111　三角形の成立条件 (図解)

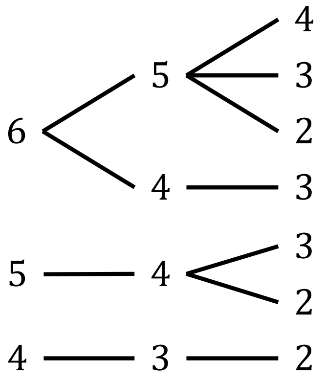


図 112　三角形の成立条件を満たす長さの組合せ

11.5　条件整理 (1) [1, pp.102–103]

問題　A,B,C,D が 100m 競走をしたところ，

1. A は 1 位になれなかったが，D には勝った．
2. B の 2 人前に C がいた．

このとき A,B,C,B の順位を求めよ．

解　条件 2 より 4 人を速い順に並べると (i) C ○ B ○，または (ii) ○ C ○ B となる．(「C ○ B」の前後に 4 人目の○を付け加えれば良い．) すると条件 1 より A は D より速いから，(i) のとき CABD となる．他方 (ii) のときは ACDB となって A が 1 位でないことに矛盾する．以上より 1 位 C，2 位 A，3 位 B，4 位 D と定まる．

問題　A,B,C,D の 4 チームで総当たり戦をしたところ，A は C に勝った．また A も B も 1 勝 2 敗で，3 勝したチームはなかった．このとき C と D ではどちらが勝ったか．

解　試合結果を表 4 のような対戦表にまとめる．まず A は C に勝ったことから，黒字の○ × を書き込める．次に A の横 1 列には○が 1 つだけであることから，青の○ × を書き込める．さらに B の横 1 列には○が 1 つだけであることから，緑の○ × を書き込める．最後に D が 3 勝してはならないことから，赤の○ × を書き込める．よって C は D に勝った．

ここで投票により代表者を選ぶ問題を考える．もし 1 人の代表を選ぶのであれば，(立候補者が何人であろうと) 自分が確実に当選するには票の過半数を獲得すればよい．より一般に N 人が投票して A 人を選ぶとき，確実に当選するための得票数は

$$\{N \div (A+1) \text{ の商 }\} + 1 \left(= \left[\frac{N}{A+1} \right] + 1 \right)$$

である．例えば複数人の立候補者に対して 50 人が 1 人 1 票ずつ投票して 2 人の代表を選ぶとき，$50 \div 3 = 16 \cdots 2$ だから，ある候補者が確実に当選するには 17 票獲得すればよいことになる．ただし投票結果が既に途中まで開示されている場合はもちろん，話は違ってくる．例えば A,B,C,D の 4 人の候補者に 40 人が 1 人 1

表 4　対戦表 (○：勝ち，×：負け)

-	A	B	C	D
A	-	×	○	×
B	○	-	×	×
C	×	○	-	○
D	○	○	×	-

票ずつ投票したところ，18 票までの開示結果が表 5 のようになったとする．このとき B が当選するには，A の票数を追い越さねばならない．そのためには B は残り 22 票のうち b 票以上を獲得しなければならないとすると，

$$8 + (22 - b) \leq b + 5, \qquad \therefore b \geq 12.5$$

より，13 票以上必要である．(このとき残り $22 - 13 = 9$ 票を A ではなく C や D に入れても，C,D に勝ち目はない．)

表 5　18 票までの投票結果

候補者	A	B	C	D
得票数 (票)	8	5	3	2

問題　$0 < A < B < C < D$ を満たす 4 整数 A, B, C, D から 2 整数を選び和をとると，15,17,19,20,22,24 の 6 種類の整数が得られる．このとき A を求めよ．

解　${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 種類の 2 整数の和を小さい順に書き出すと，

$$\begin{array}{ccccccccc} A+B & < & A+C & < & \begin{array}{c} A+D \\ B+C \end{array} & < & B+D & < & C+D \\ 15 & & 17 & & 19,\ 20 & & 22 & & 24 \end{array}$$

となる ($A + D$ と $B + C$ の大小関係はまだ確定しない)．まず $A + D = 19, B + C = 20$ を仮定すると

$$A = \frac{1}{2}\{(A + B) + (A + C) - (B + C)\} = 6$$

であり，このとき $B = 9, C = 11, D = 13$ となって上式は満たされる．他方 $A + D = 20, B + C = 19$ を仮定すると

$$A = \frac{1}{2}\{(A + B) + (A + C) - (B + C)\} = \frac{13}{2}$$

となって，A が整数であることに反する．よって $A = 6$.

注　結果を得るのに $B + D = 22$ や $C + D = 24$ は用いておらず，本問は条件過剰となっている．

11.6　条件整理 (2) [1, pp.104–105]

問題　図 113(a) の筆算における 3 桁の割られる数 ABC を求めよ．

解　39 のすぐ上の数は $4+39=43$．また割る数は 65 と 39 の公約数なので，最大公約数 13 の約数 1 または 13 である．ところが割る数は 2 桁となっているから，13 と定まる．すると商は 53 に決まり，筆算は図 113(b) のようになる．よって割られる数は 693．

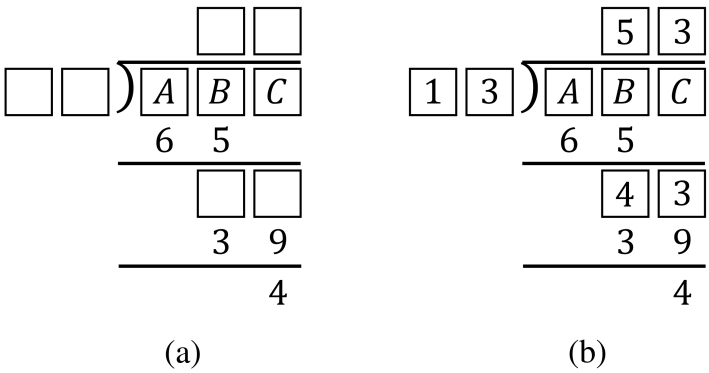


図 113　筆算における“虫食い算”

問題　A,B,C,D,E,F,G は 1 から 7 までの相異なる整数であり，

$$\text{ア}:AC=E,\qquad \text{イ}:C^2=D,\qquad \text{ウ}:GF=G,\qquad \text{エ}:B<G$$

を満たす．このとき B を求めよ．

解　条件式ウより $F=1$．またイより $C=2, D=4$ と定まる ($C\geq 3$ とすると $D>7$ となるから)．このとき A,B,E,G は残る 3,5,6,7 のいずれかであり，アは $2A=E$ となる．これを満たす整数の組は $A=3, E=6$ に限られる ($A\geq 5$ とすると $E=2A>7$ となるから)．よって B,G は残る 5,7 のいずれかであり，エの不等式より $B=5$ と決まる ($G=7$)．

問題　図 114(a) のマスに 1 から 9 までの整数を 1 つずつ入れて，縦，横，斜めに並ぶ 3 つの数の合計がすべて等しくなるようにする．このとき図 114(a) の x にあてはまる数はいくらか．

解　1 から 9 までの整数の和は $(1+9)\times 9\div 2=45$ なので，縦，横，斜めの 1 列に並ぶ数の合計は $45\div 3=15$ となる．すると図 114(b) の①, ②, ③, ④に示す順に数を書き込むことができ，$x=9$ と求まる[*72]．

[*72] ①, ②の数を入れた段階で，9 を 1 列目 (縦) または 2 行目 (横) に入れると 1 列目と 2 行目の数の合計が 15 を超えるので，9 は x の位置に入れるしかないと分かる．最終的に 2 行 1 列目は 3，3 行 1 列目は 4 となる．

8	1	
		7
	x	

(a)

8	1	①6
	③5	7
	④9	②2

(b)

図 114　3 × 3 の魔法陣

第 III 部

付録

付録 A　科学哲学

ここでは月並みな内容ではあるが，数学と自然科学 (とりわけ物理学) の成り立ちと，その周辺について簡単に確認する．また科学的な真理とはどのような意味での真理であるのかを論じる．科学哲学のさらなる話題については以下のページを参照されたい．

http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/preamble/s-okasha-philosophy-of-science

まず数学と自然科学のいずれにおいても，「定義」とは言葉の意味の約束を表す．また数学では，自明と見なされる命題として，いくつかの「公理」が設定される．そして「定義」と「公理」から証明・導出される一連の命題を「定理」という．

他方，物理学の営みは大まかには以下の図式にまとめられる．まず実験や観察を通して得られる経験的事実から自然法則が帰納される．そして諸法則は最も根本的な法則である原理へと統一される．逆に原理から出発して諸法則を導き，自然現象を矛盾なく説明することが物理学の目標とする理想的な形であると考えられる．

$$\text{自然現象} \quad \underset{\text{説明・予言}}{\overset{\text{帰納}}{\rightleftarrows}} \quad \text{自然法則} \quad \underset{\text{導出}}{\overset{\text{統一}}{\rightleftarrows}} \quad \text{原理}$$

ここで原理に対してさらにその起源を問うことはできない．原理から導かれた法則が現象を矛盾なく説明できる限り，原理は正しいと見なされる．これは科学的な真理が絶対ではないことを意味する．このような理論の蓋然性は帰納的推論の産物としての宿命である．

■「原理」「定理」　Archimedes (アルキメデス) の「原理」などは今日では「法則」と言えるだろう．なお Bernoulli (ベルヌーイ) の「定理」のように，「法則」の代わりに「定理」という言葉が用いられることもあるけれど，これも実質的には「法則」である．

A.1　演繹と帰納

演繹と帰納について述べる [3, pp.21–23,p.44].

演繹とは前提が真ならば結論も必ず真になるような推論のことである．演繹的推論を用いれば，数学に見られるような厳密な議論を組み立てることができる．ただし演繹的推論において， 前提が真であること自体は保証されない．数学は演繹的推論のみから構成された体系であり，議論の出発点となる前提が現実を反映している保証がないため，現実について語ることができない．

一方，帰納的推論とは，実験や観察を通してすでに調べ終わった対象に関しては真であると分かったことを前提として，一般的な結論を探り当てるものである．これを用いれば現実世界に関する何らかの結論が得られる可能性がある．科学の知識とはまさにそのようなものである．しかしこれはある種の飛躍であるため，誤った結論に行き着くこともあり得る．実際これまで太陽が毎日昇ってきたからと言って，絶対に明日も太陽が昇ってくるとは言い切れない．

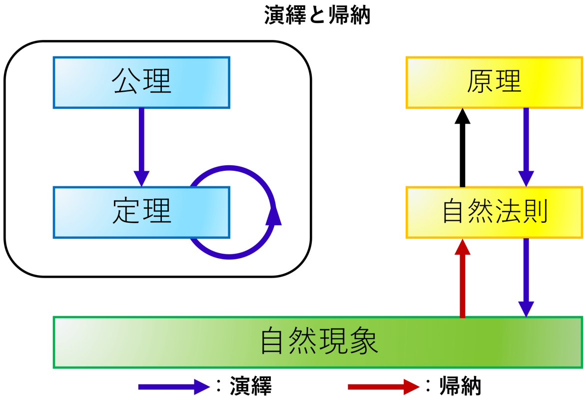
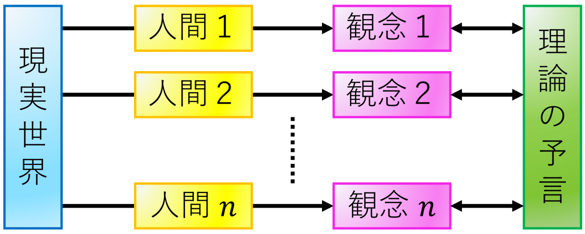


図 115　演繹と帰納，数学と科学



(観念 1) = (観念 2) = ⋯ = (観念n) ≡ (観念),

「(理論の予言) = (観念)」　⇒　理論は正しい

図 116　真理の対応説，Kant の Copernicus 的転回

以上をまとめると，数学は厳密であるが現実世界について語り得ないのに対し，科学は現実世界について語り得る代わりに絶対確実な知識とはなり得ないと言えるだろう (図 115 参照).

なお，数列の一般項の推測などは帰納的推論であるけれど，この予想が正しいことの証明に用いられる数学的帰納法は，その名に反して演繹的な手法である．

A.2　認識論

科学的真理は帰納的推論の産物であるため，蓋然的である．しかしそれは事実命題の形をとり，現実世界と一致するかを確かめて真偽を判断できる可能性がある．このように現実世界と一致する観念を真理と考える立場は，真理の対応説と呼ばれる [4, pp.47–48]．もちろんこれは客観的な現実世界なるものが，私たちの認識するありのままの形で主観の外側に実在していることを前提としていることになるだろう (素朴実在論).

私たちが現実世界をありのままに認識していないとしても，科学的な探求は意味を持つ．現実世界の認識の仕方が私たちに共通していれば，理論の予言が私たちの認識と一致するかについて合意が得られると考えられるからである (図 116 参照)．このような考え方は Kant の Copernicus 的転回として知られる．

付録 B　Spinoza 描像——受験の正義をめぐって

いわゆる「受験戦争」の激化の背後には，資本主義の下での競争原理があると考えられる．しかるに試験の難度に関わらず，「敗者が落ちぶれるのは努力を怠った本人の自己責任であり，それは人間としての価値が低い証拠である」という資本主義的 (とりわけ新自由主義的) イデオロギーはそれ自体で，事実認識として容認できない．そこには哲学のかけらもないことを，本付録で手短に説明する．また資本主義に代わる社会像として，コミュニズム論を展開する．それは社会の富が脱商品化され，コモン (共有財産) として民主的に自治・管理される社会であり，そこでは「各人は能力に応じて貢献し，各人は必要に応じて取る」ことが許される．本稿のサブタイトルは「教育の脱商品化に向けて」であるが，本稿を書き始める動機の 1 つは，確かにそのようなところにあったのである．(もっとも本稿を公開したところで「焼け石に水」であることは承知している．ただし表紙にリンクを載せたページで公開している理論物理のノート群を合わせれば，多少，事情は変わってくると期待したい．) いずれにせよ，資本の増殖を目的とした強制的な勉強や労働が将来，各人の自由な発展に置き換えられ，それが他人からの怨嗟を招く現在の能力主義・格差社会と違い，万人の自由な発展ともなるような社会が訪れることを強く願っている．

■Spinoza 描像　「**Spinoza 描像**」は資本主義・新自由主義のイデオロギーに対抗する哲学的な理論体系であり，「**自由意志の否定**」と「**当為命題の虚構性**」を 2 大柱として図 117 のように要約される．ここでは受験戦争の周辺について Spinoza 描像の観点から批判的に検討し，ポスト資本主義を構想する．

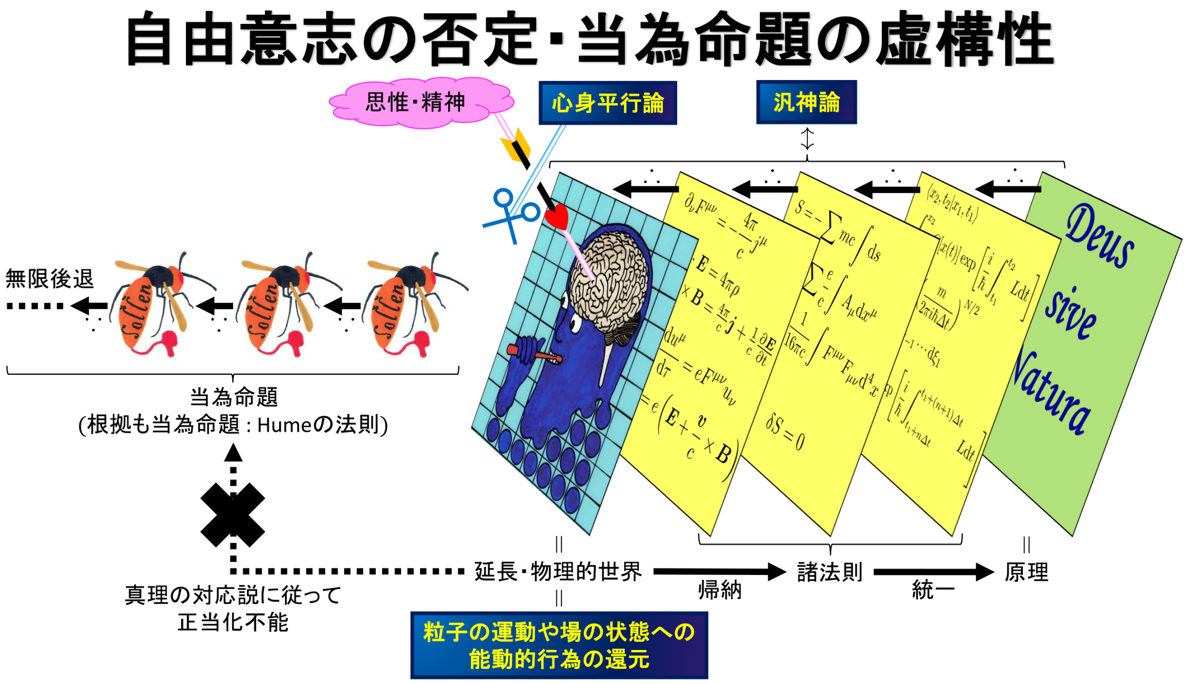


図 117

Spinoza 描像についての詳細：

http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/preamble

ポスト資本主義についての詳細：

http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/post-capitalism

B.1　資本主義・新自由主義のイデオロギー

背景として，我々の社会を取り巻く資本主義は図 118 のように特徴付けられる．詳しく順番に見ていこう [5] [6].

- 資本主義
  - かつては誰もがアクセス可能だった社会の富を商品化
  - 生産手段・共同体から切り離され，自給自足できない賃労働者
- 資本=(交換)価値の自己増殖運動
  - 人間・環境を酷使・破壊
  - 手段と目的の倒錯（「遊びとしての勉強」は「役に立たない」）
- 新自由主義
  - 市場の競争原理に委ねて利潤獲得を追求する政策
  - 「競争が社会を発展させる」は事実認識からして誤り

図 118　資本主義とその周辺

■資本主義　近代に特有の資本主義社会においては，社会の「富」は悉く「商品」に姿を変え，我々はお金を稼いで商品を手に入れなければ，もはや生きていくことはできない．かつては誰もがアクセスできるコモン (共有財産) だった富は，資本家によって私的財産として囲い込まれ，独占された．そして囲い込みによって農地などを締め出され，生産手段や共同体の相互扶助の関係から切り離された人々は，資本家に労働力を (商品として) 提供する「賃労働者」とならざるを得ず，さらに生産された商品の買い手となって資本家に市場をも提供した．こうして我々が生きていく上で必要な物質代謝が，商品を通じて行われるようになった社会の体制を資本主義という．なお労働者が資本の需要に対して過剰となれば，「代わりの人間はいくらでもいる」ため，低賃金で過酷な労働を強いることができる．

■資本の運動と弊害　資本の目的はあくまで価値――貨幣によって測られる「交換価値」――の自己増殖であって，人間を幸福にすることではない．実際，価値増殖あるいは市場の自由競争で勝つことのみを目的とした商品生産は，質 (使用価値) を蔑ろにし，本当に必要な物やサービスを劣化させたり削ったりして，社会の富を貧しくしさえする．また技術革新によって生産性は向上しているにも関わらず，いまだに人類は長時間労働から解放されていない．それどころか，高給取りの仕事を中心に近年，いわゆる「ブルシット・ジョブ (クソどうでもいい仕事)」が急増し，労働者の精神を蝕んでいる．さらに格差は拡大する一方であり，環境破壊にも歯止めがかからない．

資本の価値増殖運動に組み込まれた人間は，本来手段であるはずのお金の増殖 (金儲け) それ自体を目的として行動するようになる．これは端的に言って倒錯であるが，お金の普遍性の下では，個々の具体的な事物そのものが持つ固有の価値は色褪せてしまい，「役に立たない」ものや必ずしもお金にならないものの価値を理解できなくなる．例えば「将来のために勉強しろ」という大人も，学問そのものに価値を認めているとは限ら

ず，「それ自体が喜びをもたらす自己充足的な遊び」としての勉強のあり方にはかえって嫌悪感を示すことさえあり得る．その遊びこそはおそらく勉強の本質であり，資本主義の論理から自由であるための鍵なのだが．

■新自由主義　資本主義経済の停滞が顕著になった 20 世紀後半では，各国で「新自由主義 (ネオリベラリズム)」が台頭し，公共事業の民営化や規制緩和による市場の自由化が進められた．新自由主義は詮ずるところ，市場の競争原理に委ねて利潤獲得を追求する政策であり，「小さな政府」「福祉削減」「緊縮財政」「自己責任」「選択と集中」「アウトソーシング」などのスローガンによって特徴付けられる．

社会を発展させる合理的な原動力として競争を正当化できるという発想はあまりに単純であり，事実認識からして既に誤っている．アイデアには限りがある以上，絶えざる競争のペースに合わせた商品開発を強いられている限り，希少価値を生み出すには無理やり知恵を絞り出す他なくなる．このためスマホや冷蔵庫を見れば分かるように，新商品の開発は小手先の変化ばかりになってしまう．また画期的な新技術もすぐに模倣されるため，一時的な利潤しかもたらさず，イノベーション競争はイタチごっこの様相を呈する．

新自由主義はグローバル化を後押しした．その主要な目的は途上国の安価な労働力を使い倒すことにある．

■資本主義・新自由主義のイデオロギー　今や資本にとって役立つ能力 (あるいはその結果と見られるところの経済的成功・報酬) によって人の価値を定義する新自由主義的な発想は自明視され，「稼ぎが低いのはスキルがないからであり，それは人として価値がない証拠である」という通念が社会に浸透している．そして「スキルや能力がないのは，それを身につける努力を怠った“負け組”の自業自得だ」という論法は，現代社会を伏流し，幅を利かせている支配的なイデオロギーとなっている．しかしながら，このような**新自由主義的な自己責任論**は哲学的に容認できない．と言うのも，形而上学的なレベルに遡って考えれば，人間は決して行為の自由な主体ではあり得ないからである．それは動かし得ない根源的な真理であるが故に，「言い訳だ」などの一言で片付けたり，括弧に入れて考えたりすることが許されない．

職業選択の自由もまた形式的なものである．それにも関わらず労働者は「自分で選んで，自発的に働いている」と錯覚し，資本家にとって都合の良い労働者像を，あたかも自分が目指すべき姿，人間として優れた姿だと思い込むようになっていく (例えば現代では忙しさは美徳とされる)．これは労働者の責任感や向上心，主体性といった精神性までもが，資本の論理に「包摂」される過程と言える．

このように資本主義的な価値観を内面化させた人間は周りの人間にも，**理不尽な労働倫理を「あるべき姿」として強要**するだろう．そのような理念は当為命題の形をとる．当為命題とは「……べきだ」という形に帰着できる，規範を表す命題のことである．ところが一般的に言って，当為命題は事実だけからは導くことができず，恣意性を免れない．例えば仕事が充実しているに越したことはないが，「社会人は仕事こそが生き甲斐であるべきだ」「仕事は全力で取り組まなければならない」とまでは言えない．また会社の命令には素直に従うのが日本人の当たり前の働き方だったからと言って，それに従うべきだとは言えない．あるいは現代社会が市場の競争原理で動いているというだけの理由で，「競争するべきだ」「グローバルな世界で通用する人材になるべきだ」とは言えない．これらはいずれも本質的には「資本に奉仕する人材になるべきだ」と述べているのであり，与えられた資本制社会の論理を無批判に受容しているにすぎない．なるほど，もちろん同じ理由で資本主義を終わらせる「べきだ」とまでは言えない．しかし「資本主義が終わってほしい」と言えば，嘘にはならない．

■Spinoza 描像　以上のように，新自由主義的な自己責任論と理不尽な労働倫理には，それぞれ「自由意志の否定」と「当為命題の虚構性」でもって対抗できる (図 119 参照)．私はこれらをまとめて Spinoza 描像と呼んでいる．以下では Spinoza 描像をより詳細に導入するための最小限の議論を行う．

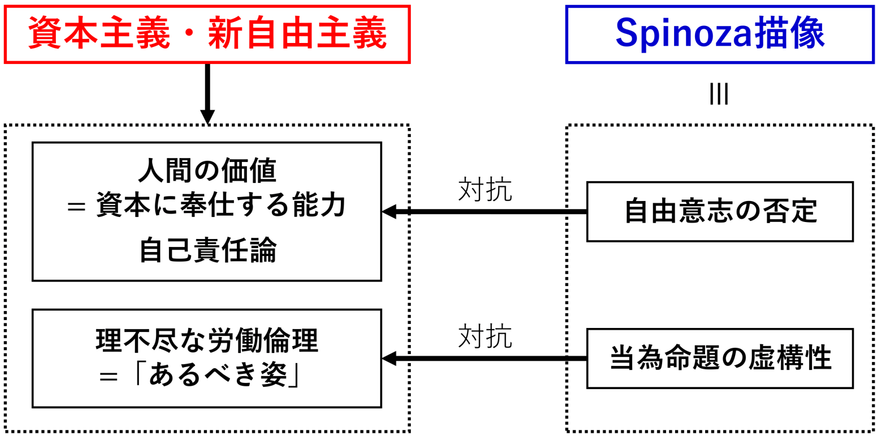


図 119　新自由主義的イデオロギーのアンチテーゼとしての Spinoza 描像

B.2　自由意志の否定

自由意志の否定から始めよう．自由意志を行使することが重要とされる人生の局面の最も象徴的な例は，おそらく受験勉強という形をとる．ところが実際には勉強しなくてはいけないと思いつつもやる気が出ず，一向に行動を起こせないという金縛りのような無気力状態を，誰しも少なからず経験したことがあるだろう．ここで注目されることは，そのような場合，常識に反して主観的には他の選択をすることが全く不可能に思われるということである．このような直観の正しさは，哲学的考察によって裏付けられる．もし意志の力で言うことを聞かない身体を強制的に行動へと駆り立てられるならば，それは無気力の中でも自由に発動させることができる精神の作用，すなわち自由意志でなければならない．言い換えれば自由意志は，過去からの影響，または物理法則の支配を断ち切り，自発的な行動を引き起こす超自然的な能力，あるいは行為の純粋かつ絶対的な始まりとして定義される．つまり自由意志とは言わば無からの創造であり，不可能を可能にするという自己矛盾であり，その定義により存在し得ないことが明らかである．

自由意志が存在しないことは，科学的・物理学的世界観からも導き出される．

- 実際，自由意志は精神が身体に影響を及ぼし得ることを前提としている．
  しかし精神と身体は異質な存在であるため，その相互作用を考えることはできない．
- また一見すると能動的・主体的・自発的な人間の行為も
  渾然一体としたミクロな粒子の運動や場の時間変化に還元されるため，
  自由意志を行使し得るような行為の主体は見出せない (**要素還元論**)．
- さらにあらゆる出来事は自然法則に従って必然的に生起していると考えられ，
  そこに自由意志の入り込む余地はない．

もちろん以上の議論は形而上学に属しており，信じるか信じないかという問題だとも言える．形而上学的命題の正しさは，帰納的推論の産物である蓋然的な経験科学の知見によって証明できるものではない．むしろその

ような形而上学的な思想が，物理学を始めとする自然科学の前提を成していると言った方が正確である．とは言え，これらは説得力があり，充分もっともらしく思われる．(付け加えると，物理学が自由意志の否定と整合していることは，理論物理学を学ぶ 1 つの原動力にもなり得る．)

以上のアイデアは哲学者 Spinoza の思想とも重なる．Spinoza によれば神はこの世界そのものであり，それ故，**神即自然**と呼ばれる．(したがって Spinoza の考える神は人格を持たない．) そしてあらゆる事物は神の必然性に従って生起している．このような考え方は**汎神論**と呼ばれ，自由意志や目的論の否定へと導く．Spinoza の汎神論は次の『エティカ』第 1 部定理 29 の言葉に端的に表されている．

> 自然の中には何一つ偶然的なものは存在しない，いっさいは神の本性の必然性から一定の仕方で存在や作用へと決定されている [7, p.54].

意志を抱くことや努力することは，それが可能な場合には神即自然の必然性に従って自動的に達成されるのに対し，それが神の時間発展に含まれていない場合には，空から自由意志でも降ってこない限り不可能である．ところが自由意志は存在しないため，それは絶対に不可能である．

Spinoza 哲学においても，精神と身体の相互作用は否定されている．それにも関わらず心と身体の状態に対応関係が見られるのは，これらが同一の神の異なる 2 つの側面を表しているからであると説明される．このように精神的状態と身体的状態は対応しているけれども，精神と身体は相互作用せず，物理的な出来事と精神的な出来事は独立に進行するという立場は**心身平行論**と呼ばれる．これは勿論，自由意志の否定と整合している．

なお Spinoza の自然観は決定論的であり，決定論が正しければ自由意志は存在しないと考えられる．しかし量子力学の描くような非決定論的な自然観を導入しても，自由意志を救うことにはならない．事物がランダムに確率的に生起するとしても，人は世界のなすがままに振り回されてしまうのであれば，そこにも自由意志は見出せない：

$$
\begin{aligned}
\text{決定論} \quad &\Rightarrow \quad \text{自由意志なし} \quad (p \Rightarrow q), \\
\text{非決定論} \quad &\not\Rightarrow \quad \text{自由意志あり} \quad (\bar{p} \not\Rightarrow \bar{q}).
\end{aligned}
$$

B.3 当為命題の虚構性

次に当為命題の虚構性に移ろう．当為命題はいかに論理で武装しようとも，独断論であることを免れないと考えられる．このことはほとんど自明だと思われるが，あえてその理由を述べれば次のようになるだろう．まず，ある当為命題を導く論理が循環論法や無限後退に陥らないためには，何らかの前提条件を出発点として認めなければならない．ところで当為命題は事実命題だけからは，導けないと考えられる．(端的に言えば，「である」から「すべき」は導けない．このことは **Hume の“法則”**と呼ばれる．) よって出発点を成す前提条件にもまた何らかの当為命題が含まれることになる．もし前提条件が当為命題を含まず，単に事実命題だけから構成されるのであれば，その主張は現実世界と一致するかを確かめて真偽を判断できる可能性がある．しかし当為命題は事実命題と違って，そのような方法で真偽を判断できるものではないため，前提条件に含まれる当為命題は無条件に認めることになる．これはあらゆる当為命題が独断論であることを免れないことを意味している．

Spinoza 哲学は絶対的な善悪を認めない．これは当為命題の虚構性に対応するものと見ることができる．

B.4　ポスト資本主義

最後に文献 [5] の章ごとの要約を載せ，ポスト資本主義の構想を示す (図 120 参照).

第 1 章　「商品」に振り回される私たち　かつては誰もがアクセスできるコモン (共有財産) だった社会の「富」を，資本主義は悉く「商品」に変え，今では私たちは必死にお金を手に入れないと生きていけない．また「使用価値」よりも「(交換) 価値」を優先する資本主義は，社会の「富」を劣化させ破壊していき，人間は「商品」に振り回されるようになる (物象化).

第 2 章　なぜ過労死はなくならないのか　資本家は単に労働時間を延ばすことで絶対的剰余価値を手にできるため，長時間労働が蔓延することになる．そして生産手段や共同体の相互扶助から「自由」になり (切り離され)，また自分は「自由」で自発的に働いていると思い込んでいる労働者は，過酷な長時間労働から逃げ出せない．資本主義を弱めるには，賃上げよりも労働時間の短縮が重要であり，世界では資本主義に挑む大胆な労働時間短縮の動きも出てきている.

第 3 章　イノベーションが「クソどうでもいい仕事」を生む　単に生産力の観点からは私たちはとっくに長時間労働から解放されていても良いはずだが，資本主義の下では技術革新 (イノベーション) による生産力の向上は，「仕事を奪われる」というディストピアとして現れてしまう[*73]．また技術革新により労働者は単純作業だけを「実行」するようになり，自ら「構想」する機会を奪われ，資本家の労働者に対する「支配」が強化されてしまう．さらにエッセンシャル・ワーカーが低賃金に苦しめられている一方で，際限なく価値増殖を求める資本主義は，高給取りの仕事を中心に「ブルシット・ジョブ (クソどうでもいい仕事)」を大量に生み出し，私たちを長時間労働から解放しない.

第 4 章　緑の資本主義というおとぎ話　資本は人間だけでなく自然からも掠奪し，その代償を将来世代や途上国へと「外部化」し，見せかけの環境対策をしながら自然の商品化をさらに進めている．資本主義に代わる新たな社会において大切なのは，「アソシエート」した労働者が，人間と自然との物質代謝を合理的に，持続可能な形で制御することだ，とマルクスは述べている.

第 5 章　グッバイ・レーニン！　社会主義を標榜するソ連や中国の実態は，生産手段を国有化し，官僚が労働者を搾取する独裁的な「国家資本主義」であり，社会主義の理想からかけ離れている．またベーシックインカム (BI) や現代貨幣理論 (MMT) のような，国家の力を介したトップダウン型の資本主義改革は，資本の側の抵抗や物象化を解決できないだろう．私たちの目指す未来社会は，民主的なボトムアップ型の自発的連帯 (アソシエーション) を通じて「脱商品化」を推し進め，貨幣なしで暮らせる社会の領域を広げることであり，これこそがマルクスの構想する「社会主義」ないし「コミュニズム」である.

第 6 章　コミュニズムが不可能だなんて誰が言った？　エコロジー研究と原古的な共同体研究を行っていた晩年のマルクスは，やがて自然の「持続可能性」と人間社会における「平等」の連関に気付いていく．彼が構想していた将来社会は，社会の「富」が「商品」として現れないように，みんなでシェアして，自治管理していく，平等で持続可能な定常型経済社会 (したがって「脱成長」型経済) であり，コモンに基づいた社会であるため，コミュニズムと呼べる.

[*73] A. ベナナフによれば技術革新は衰退しており，実際に雇用を破壊しているのはテクノロジーの進歩ではなく経済の長期低迷である．とは言え，オートメーション化がなくとも社会運動を通じて民主的に必要労働を再配分し，ポスト希少性と自由な余暇社会を実現することは既に可能であるとするベナナフの見解は，斎藤幸平がポスト資本主義として構想する民主的な脱商品コミュニズムと軌を一にする [8].

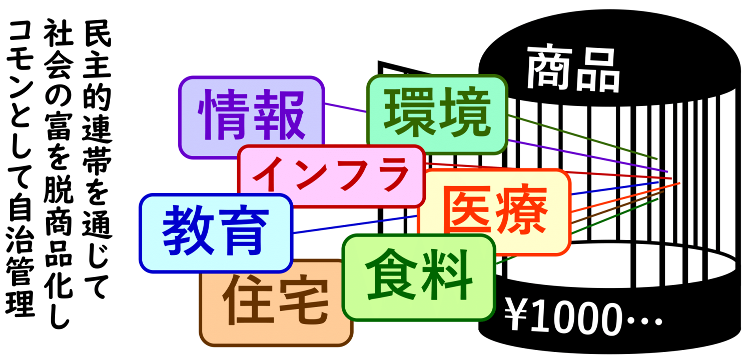


図 120　ポスト資本主義＝脱商品コミュニズム

付録 C　受験をめぐる家庭内の問題

まえがきで述べたように，受験問題が「思考力を問う問題」という名の，事実上，背景知識がなければ解けない無理難題や，パズル要素の強いペダンティックな知的お遊びなどの理不尽さを伴っていることを，現場の受験生本人らはよく熟知している．他方で周りの人間 (家族など) が，たとえ教育熱心であっても目が節穴で，勉強の中身についてはまるで理解しておらず，そのような問題を素朴に「やればできる」と思い込んでいるとすれば，それは受験勉強を単なる「やる気の問題」へと矮小化し，結果を出せず万策尽きている受験生を怠慢な悪者へと不当に仕立て上げ，彼または彼女に形ばかりの的外れな「正論」を吐きかけることへと繋がる危険がある．あるいはそうすることで，自分の子ともに対する優位性を保持しようとしているのかもしれない．いずれにせよ，そのような無知や頑迷さは時として，親を話し合いの通用しない分からず屋にする．子供の反論を「言い訳」や「屁理屈」の一言で片付け，本人が悪いという結論ありきで一切，聞く耳を持たない．あるいは子供の言い分を頑なに否定しようとして躍起になるあまり，自分が直前に述べたことを都合良く失念したり，自分の言っていることが明らかに支離滅裂な自己撞着に陥っていても，それを理解できなかったりする．さらには子供を朝早くにたたき起こし，下校時刻と同時に校門前から車で塾へ連れ出し (本人の意向や周りの目は無視)，家では常に監視されているというプレッシャーを与えながら，四六時中，机に張りつかせる．しかしながら学問では (とりわけ行き詰ったときには) 立ち止まって考えることも必要である以上，その一見「無駄で非生産的な時間」を徹底的に排除し，常に机に向かって鉛筆を動かし続けさせることは，かえって無内容な作業や「勉強している振り」を強いることになり，勉強の足枷にすらなる．それ以前に，そのような子供に対する支配や過干渉，虐使はそれ自体で不正義である——たとえそれが善意からの行為だとしても (地獄への道は善意で敷き詰められている)．子供の立場は弱く，自力でそのような状況から逃げ出すのは困難である．このとき追い詰められた子供が怒りから物を壊したりするのは当然のことであるが，それすらも本人の落ち度とされ，子供に自制心を求める有様である．一部の家庭ではこのような，児童虐待として摘発することのできないグレーゾーンの問題を抱えている．それはもはや受験の問題ではない．

参考文献

[1] 山田和毅ほか，四科のまとめ 算数，(株) 四谷大塚出版，東京．
[2] ファインマンほか，2014，ファインマン物理学 I(坪井忠二訳)，株式会社岩波書店，東京．
[3] S.Okasha，2011，1 冊でわかる　科学哲学 (廣瀬覚訳)，株式会社岩波書店，東京．
[4] 上野修，2012，スピノザの世界–神あるいは自然，株式会社講談社，東京．
[5] 斎藤幸平，2021，NHK 100 分 de 名著 カール・マルクス 資本論 蘇る，実践の書，NHK 出版，東京．
[6] 白井聡，2020，武器としての「資本論」，東洋経済新報社，東京．
[7] スピノザ，2011，エティカ (工藤喜作，斎藤博訳)，中央公論新社，東京．
[8] A. ベナナフ，2022，オートメーションと労働の未来 (佐々木隆治監訳)，堀之内出版，東京．