

R. ガムビーニ/J. プリン  
『初級講座 ループ量子重力』

$$\begin{aligned}
[\widehat{E}_i^3]_f(x)\psi_s &= -8i\pi G\beta \int_{\Sigma} d^2y f_{\varepsilon}(x,y) \frac{\delta\psi_s}{\delta A_3^i(y)} \\
&= -8i\pi G\beta \int_{\Sigma} d^2y f_{\varepsilon}(x,y) \text{Tr} \left[ \frac{\delta\psi_s}{\delta h^J} \frac{\delta}{\delta A_3^i(y)} \text{P exp} \left( \int dt \dot{\gamma}^a(t) A_a^{(J)}(t) \right) \right] \\
&= -8i\pi G\beta \int d^2y f_{\varepsilon}(x,y) \text{Tr} \left[ \int_{t_*}^{t_{\max}} dt h^J(t_k, t_{\max}) \dot{\gamma}^3(t_k) T^i \{ \delta^2(y_* - y_*) \delta(t_k - t_*) \} \right] \\
&= -8i\pi G\beta \dot{\gamma}^3(t_*) \left[ (T^i)_{\nu}^{\mu} (h^J(0, t_*))_{\beta}^{\nu} \left( \frac{\delta\psi_s}{\delta h^J} \right)_{\alpha}^{\beta} (h^J(t_*, t_{\max}))_{\mu}^{\alpha} \right] f_{\varepsilon}(x, y_*) \\
&= -8i\pi G\beta \dot{\gamma}^3(t_*) \text{Tr} [T^i h_c] f_{\varepsilon}(x, y_*)
\end{aligned}$$

図1 ループ量子重力理論によれば、空間は Planck 長さのオーダーで離散化されている (8.2 節)

本稿はループ量子重力理論の教科書

R. ガムビーニ/J. プリン, 2021, 初級講座 ループ量子重力 (樺沢宇紀訳),  
丸善プラネット株式会社, 東京

のノートである (教科書としても読める). 良くも悪くも教科書の説明が簡素であるため, 本稿では付録なども利用して, いくらか内容を肉付けした. ただし教科書と同程度に, 天下一にまとめざるを得なかった箇所も少なくない. また内容を多少, 取捨選択しており, 特に初等的な予備知識については本稿では省略した. それを補完する意味でも, 以下のページで公開している理論物理の各種ノートがいくらか役に立つだろう.

<http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/>

なお本稿には筆者の誤りや勘違いが潜んでいるかもしれないことをあらかじめ断っておく. 言うまでもなく, 原著を当てるに越したことはない.

## 「序」からの抜粋

弦理論に比べると小規模の分野ではあるにせよ, 現在, 弦理論の他に試みられている量子重力への主要なアプローチとして, ループ量子重力は重要な位置を占めている. 現時点では弦理論もループ量子重力理論も未完のパラダイムであり, それらに関する論争を踏まえることにより, さらに有望なアプローチも自然に現れてくるかもしれない.

(中略)

学部の学生や, その他の読者の中の“一部の”人々は, [本書が] より詳しく完全な描像を与えていないことに少々不満を感じるかもしれないが, 多数の読者は, この極めて難解になりがちな題材 [ループ量子重力] について書かれた薄くて読み易い入門書 [本書] を歓迎するであろうと我々は信じている. また, 一部の専門家は, 我々の都合のために, いくつかの問題を単純化しすぎることによって, 読者を騙していると感じるかもしれない. そのようなことを行う際には, 読者に対して注意深く警告を与えることを試みる.

(中略)

本書の構成は以下の通りである. 第 1 章では, 重力を量子化しなければならない理由について考察する. 第 2 章では Maxwell の電磁気学と, 特にその相対論的な定式化について復習する. 第 3 章では一般相対性理論に関する最低限の諸要素を導入する. 第 4 章では, ハミルトニアンを用いた, 拘束条件を含んだ力学や場の理論の定式化を扱う. 第 5 章では Yang-Mills (ヤン-ミルズ) 理論を論じる. 第 6 章では量子力学と, 場の量子論のいくつかの要素について調べる. 第 7 章において, 一般相対性理論に適用される Ashtekar (アシュテカー) の新たな変数を導入する. 第 8 章では一般相対性理論のループ表現による量子化を論じる. 第 9 章では, ひとつの応用としてループ量子宇宙について論じる. 第 10 章では各種の応用, すなわちブラックホール・エントロピーや, マスター拘束プログラムと均一離散化, スピン泡 (スピン・フォーム), 実験的徴候の可能性, 時間の問題などを論じる. 最終章では, ループ量子重力を取り巻く論争について述べる.

## 目次

第 1 章	何故, 重力の量子化を試みるのか?	4
第 2 章	特殊相対性理論と電磁気学	7
第 3 章	一般相対性理論入門	8
第 4 章	拘束条件と正準形式による場の力学	26
第 5 章	Yang-Mills 理論	40
第 6 章	量子力学と場の量子論の基礎	50
第 7 章	Ashtekar 変数を用いた一般相対性理論	58
第 8 章	ループ量子重力	77
第 9 章	ループ量子宇宙	105
第 10 章	発展的な話題	115
第 11 章	未解決問題と論争	132
付録 A	多様体とベクトル場, Lie 微分と Lie 群	134
付録 B	微分形式	147
付録 C	4 脚場 (テトラード)	151
付録 D	拘束系の正準力学	156
付録 E	拘束系としての電磁場 (QED)	180
付録 F	Yang-Mills 理論の局所ゲージ不変性	190
付録 G	ブラックホール	201

## 第1章 何故、重力の量子化を試みるのか？

量子力学は現在まで、重力に対して満足のいく形で応用されていない。ループ量子重力 (loop quantum gravity) は、それを実現するためのひとつの試みであるが、今のところ、不完全な理論である。

### 重力の量子化の困難

- 重力が力ではなく、時空の歪みであるという事実が、その量子化を困難なものにする。  
場の量子論における標準的な計算技法はすべて、与えられた背景時空の中での作業という位置づけになっている。(中略)しかしながら、重力理論においては時空自体が場であり、量子化の対象となるべき場は、その背景として、如何なる時空も持たない。背景構造の欠如は、理論を、時空点の微分同相写像 (微分同相変換) の下で不変なものへと自然に移行させることになる [脚注省略]。ある時空点を別の時空点と区別する要因が存在しないからである。
- 「重力は、量子効果が支配的になるような微視的な尺度領域においては、さほど重要な力ではない」ため、実験的な支援がない状態で量子重力理論の構築を試みなければならない。

### 重力の量子化を試みる理由

- 重力の量子論が必要になるであろうと想像される物理的な過程
  - 2つの粒子の衝突実験において、重力が関与するほど衝突エネルギーを高くした場合
  - ブラックホールが Hawking 放射によって蒸発してゆき、その質量が Planck 質量 ( $\sim 10^{-5}g$ ) と同等にまで減少したときの状況
  - ビッグバンに近い時点で宇宙に何が起こったかという問題
- 審美性  
概念的な明確さや物理学の理論的な統一という観点からも、4種類の基本的な相互作用のうち (中略) 重力だけが古典論のままで残されているという状況は不満足なものである。
- 暗黒エネルギー・暗黒物質 (重力理論に修正を要求か)
- 古典的な重力が量子場と相互作用するような無矛盾な理論を構築することは難しいとする議論がある。
- 重力の物理学と場の量子論のそれぞれが含んでいる特異性は、これらのパラダイムを統合することにより解消される可能性が明確に期待できる [図2]:
  - 一般相対性理論の下で必然的に現れる時空の特異点の近くでは、エネルギー密度が完全に古典的な方法では扱えないような水準になると考えられる。
  - 場の量子論の数学的な特異性の問題は、場と演算子の (デルタ関数のような) 分布的な性質に起因している。背景となる空間と時間の描像を変更するならば、場と演算子の分布的な性質も変わることは明白である。

量子重力はビッグバンやブラックホールに関する未解決の問題にも照明を当てる。

### 量子重力に対するアプローチ

#### 1. 正準量子化

- このアプローチでは時空を時間と空間に分離することになり、

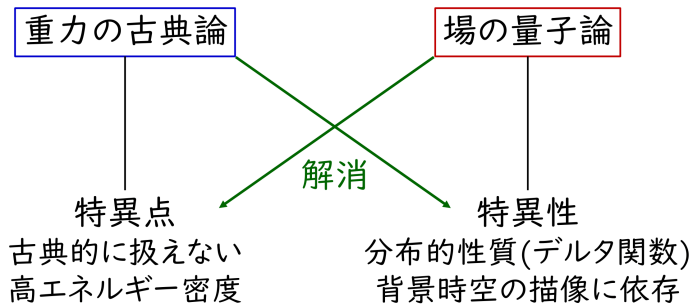


図2 重力の古典論と場の量子論を統合し、それぞれの特異性を解消

そのことに付随して複雑さが加わる。

2. 摂動論 (時空が、平坦な状態に小さな摂動が加えられた状態にあるものと仮定)

- 重力の摂動論には非繰り込み性 (non-renormalizability) の問題がある。

3. Feynman の経路積分

- ループ量子重力の技法——“スピン泡” (spin foam) ——は、この経路積分に厳密な方法で定義を与える試みに利用されている。

- 重力を他の相互作用と統合した統一理論によって、量子化を可能にする試み

– Karuza-Klein (カルーツァ-クライン) 理論, 超重力, 弦理論と M 理論

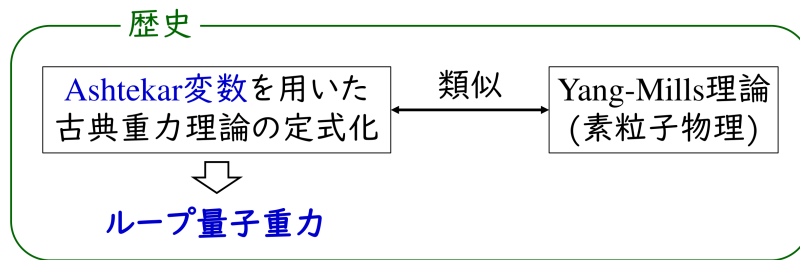
- 少数の研究者のグループが取り組んでいるアイデア

因果力学的三角区分法 (causal dynamical triangulation), 因果集合 (causal set) 理論, 行列模型 (matrix model), Regge 計算法 (Regge calculus), ツイスター (twistor), 非可換幾何学 (noncommutative geometry), 漸近安全性のシナリオ (asymptotic safety scenario) など

1980 年代の半ばに, Ashtekar は重力の式を変数を変更して書き直し, 素粒子物理の理論と似た理論にできることを示した。このことは, 素粒子物理の技法を重力の量子化へ持ち込めるのではないかという期待を高めた。その期待に基づいて得られた重力の量子化へのアプローチは“ループ量子重力”と呼ばれており, これこそが本書で扱う題材である。これは重力の量子化をそれ自体として, 他の相互作用との統合を必要としない形で理解しようとするひとつの試みである [図 3]。

## 第 1 章について

重力は時空の歪みであるにも関わらず, 弦理論では閉弦の量子化を平坦な時空 (Minkowski 空間) で行っても, 重力子が得られる [1, pp.286–287]。



ループ量子重力	弦理論
重力のみで量子化	力の統一
3次元空間	高次元空間

図3 ループ量子重力 (導入)

## 第 2 章 特殊相対性理論と電磁気学

第 2 章は特殊相対性理論と電磁気学に関する基本事項の復習であり、本稿では教科書の表記法などをメモするに留める。

- 断りのない限り,
  - 時空の 4 成分  $0, 1, 2, 3$  をとる添字にギリシア文字  $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots$  を用いる.
  - 空間成分  $1, 2, 3$  のみをとる添字にラテン文字  $i, j, k, \dots$  を用いる.
- 任意の 4 元反変ベクトルを  $a^\mu = (a^0, \vec{a})$  のように書く.
- 座標が  $\Delta x^\mu$  だけ隔たる 2 事象間の世界間隔  $\Delta s$  を

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2,$$
$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{Minkowski 計量}$$

で定義する ( $\Delta x^0 = c\Delta t$ ).

- 自然単位系を採用  $c = 1$
- Gauss 単位系を採用

$$\text{Maxwell 方程式 } \partial_\nu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\mu.$$

- ★  $\eta_{\mu\nu}$  を逆符号で定義した場合は、電磁テンソル  $F_{\mu\nu}$  が表す場の強度の符号が反転し、 $\partial_\nu F^{\mu\nu} = -4\pi J^\mu$  となる.
- ★ 結局、第 4 章以降は Heaviside 単位系が用いられている.

### 問題

#### 1 棒と物置 (pole in the barn) の逆理

地面 (物置) に固定した座標系から見ると、運動する棒は Lorentz 収縮を起こすため、棒が物置に差し掛かったときに物置の入口と出口を閉めれば、棒をその固有長さより短い奥行き物置に閉じ込め得る。しかしながら棒に固定した座標系で考えれば、棒を自分自身より狭い奥行き物置に閉じ込めることはできないはずである。実際このとき、棒に固定した座標系の座標時間で測ると、物置の入口と出口が閉まるのは同時ではないため、棒が物置に閉じ込められることはなく、パラドックスは生じない。棒固定系では、棒の背後で物置の入口が閉められたときには、棒の先端では既に閉じられた出口への衝突が始まっている (地面固定系では衝突は、棒を物置に閉じ込めてからしばらくすると起こる)。



### 第3章 一般相対性理論入門

3.1-3.4節は一般相対性理論の基礎が、半ば概説的に導入されている。この辺りは基本事項の復習であり、本稿では要約を省略する(代わりにスライドを1枚、図4に載せておく)。各節のタイトルは以下の通りである。

- 3.1 緒言
- 3.2 一般座標系とベクトル
- 3.3 曲率
- 3.4 Einstein 方程式と、その解の実例

特筆 円筒の2次元世界は、より高次元の空間から見てゼロでない“外部曲率”を持つものの、ベクトルを円筒表面の閉曲線に沿って1周、平行移動しても変化はなく、“内部曲率”はゼロである (p.30).

#### 3.4節について

Schwarzschild 解について [2, pp.390-398]

Schwarzschild 解

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.16)$$

(ただし  $c = 1, G = 1$ ) を考える。「その時空解に対する適切な解釈は、長い年月を経た後に、Kruskal (1960) と Szekeres (1960) によってようやく見いだされた」(p.33 下から 4,3 行) という点について、以下に詳しく補足する。

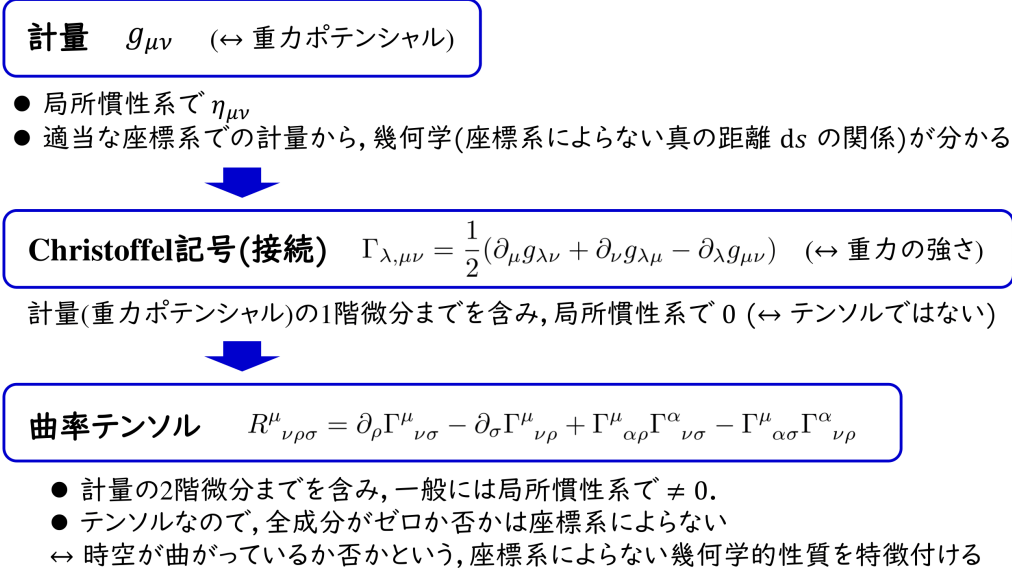


図4 一般相対性理論の基礎概念

■座標特異領域 Schwarzschild 座標では  $r = 2M$  のときメトリック  $g_{rr} = \frac{1}{1-2M/r}$  の分母がゼロになる。[座標に依らない] 幾何学的意味を調べ、この特異性が幾何学それ自体によるのか、座標の質が悪いことによるのかを考える。

■落下粒子  $r = R(\geq 2M)$  から  $r = 2M$  の面に、動径沿いにまっすぐ落下する粒子を考える。簡単のため  $\tilde{E} \equiv -p_0/m = 1$  の場合を考えると、落下に要する固有時間  $\Delta\tau$  は

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{2M}{r}, \quad \therefore \Delta\tau = -\int_R^{2M} \frac{dr}{(2M/r)^{1/2}} = \frac{2M}{3} \left[ \left(\frac{r}{2M}\right)^{3/2} \right]_{2M}^R \quad (1)$$

より有限である [立式の根拠は下記、これが座標系に依らない幾何学的性質に当たる]。一方、 $r = 2M$  の近くを考えて  $\varepsilon \equiv r - 2M(\geq 0)$  とおくと、対応する座標時間は

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= U^0 = g^{00}U_0 = g^{00}\frac{p_0}{m} = g^{00}(-\tilde{E}) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \tilde{E} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \quad (\because \tilde{E} = 1) \\ \therefore dt &= \frac{d\tau}{1 - \frac{2M}{r}} = \frac{dr}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2}} = \frac{-(\varepsilon + 2M)^{3/2}d\varepsilon}{(2M)^{1/2}\varepsilon} \end{aligned}$$

となって、 $\varepsilon \rightarrow 0$  とすると発散する。これは座標時間の質が悪いことを意味する。

■式 (1) の理由 [2, pp.369–371] 対称性と保存則の関係 [2, pp.230–233] を思い出すと、 $m \neq 0$  の粒子に対して、

- メトリックが時間に依らないことから、 $\tilde{E} \equiv -p_0/m$  が保存する
- メトリックが  $\phi$  に依らないことから、 $\tilde{L} \equiv p_\phi/m$  が保存する。

[ $g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta$  なので、メトリックは  $r$  と  $\theta$  には依存している。] 角運動量  $p_\phi$  の保存により運動は 1 つの平面上に拘束される。これを  $\theta = \pi/2$  の赤道面に選ぶと、 $\vec{p} \cdot \vec{p} = -m^2$  は

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \tilde{V}^2(r) = \tilde{E}^2, \quad \tilde{V}^2(r) \equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right)$$

を与える。[以降の議論は非相対論的力学において、中心対称な場の中を運動する粒子のエネルギーと角運動量の保存則を用いて、動径の時間変化  $\frac{dr}{dt}$  と軌道  $\frac{dr}{d\phi}$  を調べたのと類似の議論である。] ここから式 (1) を書き下せる。

■ $r = 2M$  の内側 次に  $r = 2M$  の内側を考えて  $\varepsilon \equiv 2M - r(\geq 0)$  とおくと [ $\varepsilon$  は微小でなくても良い]、Schwarzschild メトリックは

$$ds^2 = \frac{\varepsilon}{2M - \varepsilon} dt^2 - \frac{2M - \varepsilon}{\varepsilon} d\varepsilon^2 + (2M - \varepsilon)^2 d\Omega^2$$

で与えられる。よって  $r = 2M$  の内側では

- $r$  が変化して得られる座標曲線は時間的世界線 (線に沿って  $ds^2 < 0$ )
- $t$  が変化して得られる座標曲線は空間的世界線 (線に沿って  $ds^2 > 0$ )

となり、やはり座標の質が悪い。

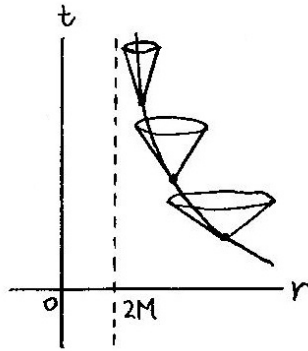


図5 Schwarzschild 座標で見た粒子の世界線と局所的な光円錐

落下粒子は時間的世界線をたどらなければならないから、 $r = 2M$  の内側ではたえず  $r$  が変化し、 $r = 0$  に到達する。また  $r = 0$  は  $r = 2M$  の内側のあらゆるヌル世界線の未来にあるから、光子もまた  $r = 0$  に戻される\*1。  $r = 2M$  を Schwarzschild 地平面と呼ぶ。

対応・関連する教科書の文を抜粋する (p.34)。

- 「注意深い考察によれば、 $r = 2M$  の表面は時間的 (タイムライク) な面ではなく、零 (ヌル) である。」
- 「 $r = 2M$  の外部では、 $t$  が増加すると、物体は『不可避的に未来へと向かう』けれども、 $r = 2M$  の内部では、物体は『不可避的に  $r = 0$  へと向かう』ことになる。」

■座標系 Schwarzschild 座標の座標図では、各点での光円錐の傾き  $dt/dr$  は

$$0 = ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2, \quad \therefore \frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}$$

なので ( $d\theta = 0, d\phi = 0$ )、遠方で  $\pm 1$  であり、 $r$  が  $2M$  に近づくにつれて傾きは急になり、 $r \rightarrow 2M$  のとき  $\pm\infty$  となる。粒子の世界線は光円錐の内側を通るので、その傾きはより急である。これが、粒子が面  $r = 2M$  に達するのに無限大の座標時間を要することの幾何学的描像である (図5参照)。

実は地平面は時空の一点であり、Schwarzschild 座標の質の悪さはこれを線  $r = 2M, -\infty < t < \infty$  に引きのばしていることに由来している。

■クルスカール-スゼッケル座標 Kruskal-Szekeres 座標  $u, v$  は、座標図上での局所的な光円錐の傾きが時空点の位置に依らないような座標であり、

$$(u, v) = \begin{cases} \left( \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \left( \cosh \frac{t}{4M}, \sinh \frac{t}{4M} \right) & (r > 2M) \\ \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \left( \sinh \frac{t}{4M}, \cosh \frac{t}{4M} \right) & (r < 2M) \end{cases} \quad (2)$$

によって定義される。実際、Kruskal-Szekeres 座標  $u, v$  を用いた場合の球対称時空のメトリックは

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (dv^2 - du^2) + r^2 d\Omega^2 \quad (3)$$

\*1 このことは Kruskal-Szekeres 座標を用いた座標図 (図5) において明らかになる。

によって与えられ [導出は下記], 座標図上の局所的な光円錐の傾き  $dv/du$  は

$$ds^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad dv = \pm du$$

より  $\pm 1$  となる. ただし  $ds^2$  の式における  $r$  は

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{r/2M} = u^2 - v^2$$

によって,  $u$  と  $v$  を用いて表されているものと見る.

Kruskal-Szekeres 座標  $u, v$  での座標図は図 6 のようである ( $\theta$  と  $\phi$  は一定として省略してある).

- $r = (\text{一定})$  の線
  - 領域 I の  $r = (\text{一定}) > 2M$  の線要素は  $\pm 1$  より急な傾きを持ち, 空間的.
  - 領域 II の  $r = (\text{一定}) < 2M$  の線要素は  $\pm 1$  より緩やかな傾きを持ち, 時間的.
- $t = (\text{一定})$  の線
  - 原点を通る直線となる\*2.
- 粒子の世界線は  $\pm 1$  よりも急な傾きを持つから,
  - $r > 2M$  の領域 I から  $r < 2M$  の領域 II に入ると再び戻ることなく  $r = 0$  の線に達する.
    - $r = 0$  は“点”であるが, それは特異領域であり次元を考えることはできないから,  $r = 0$  が線で表されていることは問題ない.
    - その境界線  $r = 2M, t = \infty$  が地平面である.
  - $(r, t)$  時空図ではこれが  $r = 2M, -\infty < t < \infty$  に引きのばされている.
- 物体は有限の固有時間で地平面に達する.
  - しかし固有時間の一定間隔ごとに物体が電波を出すと, それを遠方で受け取るとき長い座標時間に引きのばされるので, 遠方の観測者は物体が地平面に到達するまでに無限の時間がかかると結論する.

■Kruskal-Szekeres 座標でのメトリックの式 (3) の確認  $r > 2M$  のとき式 (2) より

$$\begin{aligned} du &= \frac{e^{r/4M}}{4M} \left\{ \frac{r/2M}{\sqrt{(r/2M) - 1}} \cosh(t/4M) dr + \sqrt{(r/2M) - 1} \sinh(t/4M) dt \right\}, \\ dv &= \frac{e^{r/4M}}{4M} \left\{ \frac{r/2M}{\sqrt{(r/2M) - 1}} \sinh(t/4M) dr + \sqrt{(r/2M) - 1} \cosh(t/4M) dt \right\} \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} du^2 - dv^2 &= \frac{e^{r/2M}}{(4M)^2} \left[ \frac{(r/2M)^2}{(r/2M) - 1} dr^2 - \{(r/2M) - 1\} dt^2 \right] \\ &= \frac{e^{r/2M}}{(4M)^2} \frac{r}{2M} \left[ \frac{1}{1 - (2M/r)} dr^2 - \{1 - (2M/r)\} dt^2 \right] \end{aligned}$$

を得る.

---

\*2 直線の式は

$$v/u = \tanh(t/4M) \quad (r > 2M)$$

で与えられる.

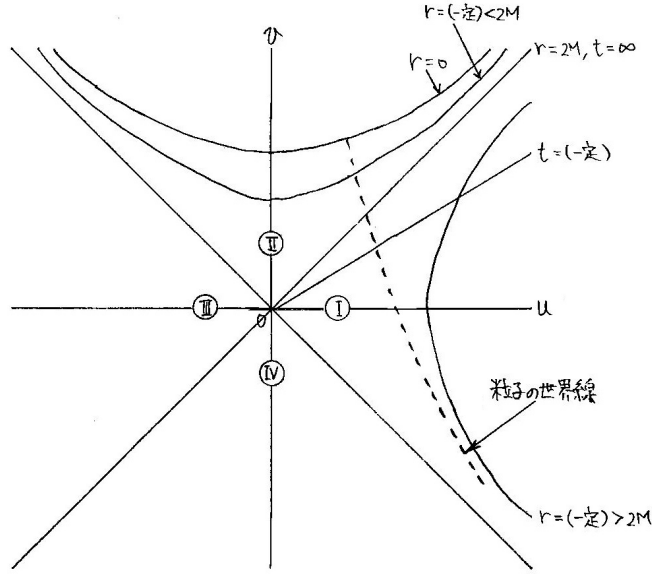


図6 Kruskal-Szekeres 座標  $u, v$  での座標図

一方,  $r < 2M$  のとき式 (2) より

$$du = \frac{e^{r/4M}}{4M} \left\{ -\frac{r/2M}{\sqrt{1-(r/2M)}} \sinh(t/4M) dr + \sqrt{1-(r/2M)} \cosh(t/4M) dt \right\},$$

$$dv = \frac{e^{r/4M}}{4M} \left\{ -\frac{r/2M}{\sqrt{1-(r/2M)}} \cosh(t/4M) dr + \sqrt{1-(r/2M)} \sinh(t/4M) dt \right\}$$

なので

$$du^2 - dv^2 = \frac{e^{r/2M}}{(4M)^2} \left[ -\frac{(r/2M)^2}{1-(r/2M)} dr^2 + \{1-(r/2M)\} dt^2 \right]$$

$$= \frac{e^{r/2M}}{(4M)^2} \frac{r}{2M} \left[ \frac{1}{1-(2M/r)} dr^2 - \{1-(2M/r)\} dt^2 \right]$$

を得る.

以上より  $r > 2M, r < 2M$  のいずれに対しても Schwarzschild メトリックの式 (3.16) は, Kruskal-Szekeres 座標  $u, v$  を用いた式 (3) に書き換えられる.

#### Friedmann-Robertson-Walker (FRW) 宇宙解について [2, pp.449-454]

一様等方な宇宙の時空は, Robertson-Walker メトリック

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (k = 0, \pm 1)$$

で与えられる [ $r$ は無次元]. “平坦な” 宇宙モデルに関して, 「式 (3.17) における計量を, 一様でありながら曲った空間を持たせるように変更することは容易であるが, 本書でそれを扱う必要はない」 (p.35 下から 5-3 行) とあるように, 教科書の式

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (3.17)$$

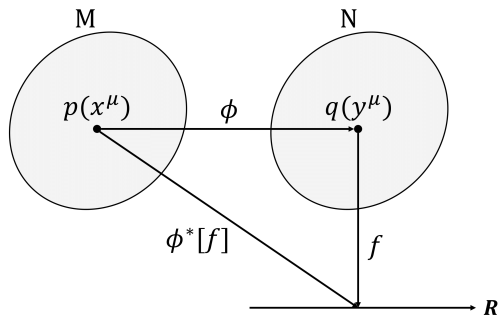


図7 押し出しと引き戻し

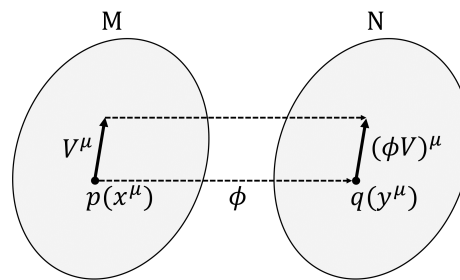


図8 ベクトルの押し出し

は  $k = 0$  の平坦モデルの場合である.

### 3.5 微分同相写像

座標変換を扱う 2 通りの方法

- “受動的な観点”  
多様体上の点 [物理系・時空点そのもの] をすべて固定しておき,  
 $R^n$  への写像 [各点の座標] を変更する.
- “能動的な観点”  
写像  $R^n$  [座標系] の方を固定して, 多様体上の点全体 [物理系・時空点そのもの] を動かす.
  - 近接性を保ちながら  
多様体上の点  $p$  を新たな点  $\phi(p)$  に移す 1 対 1 の写像を “微分同相写像” と呼ぶ.  
[正確には  $\phi, \phi^{-1}$  が微分可能な 1 対 1 の写像  $\phi$  を “微分同相写像” という [3, p.39].]
  - 能動的な観点は, 一般相対性理論のような重力を扱う理論の文脈において,  
より自然な記述を与える.
  - 理論の微分同相写像の下での不変性  $\leftrightarrow$  一般座標変換の下での不変性

[以上を粗くまとめると, 「能動的な座標変換  $\leftrightarrow$  微分同相写像」である.]

多様体  $M$  上の各点  $p$ (座標  $x^\mu$ ) を多様体  $N$  上の点  $q = \phi(p)$ (座標  $y^\mu$ ) に移す微分同相写像  $\phi$  を考える. この操作を,  $M$  上の点  $p$  を  $N$  の中へ「押し出す」(push forward) と言う. さらに  $N$  上の点  $q$  を実数  $f(q)$  に対応付ける写像  $f$  を定義する. これを

$$f(q) = f(\phi(p)) \equiv \phi^*[f](p)$$

と見ると,  $\phi^*[f]$  は  $M$  において作用する関数となる.  $\phi^*[f]$  を  $f$  の  $\phi$  による  $M$  上への「引き戻し」(pull back) という (図 7 参照).

次に  $M$  上のベクトル  $V^\mu$  を, 写像  $\phi$  によって  $N$  上のベクトル  $(\phi V)^\mu$  へと押し出すことを考える (図 8 参照).  $M$  上に引き戻した関数  $\phi^*[f](x)$  の,  $M$  上のベクトル  $V^\nu$  に沿った方向微分を

$$V^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \phi^*[f](x)$$

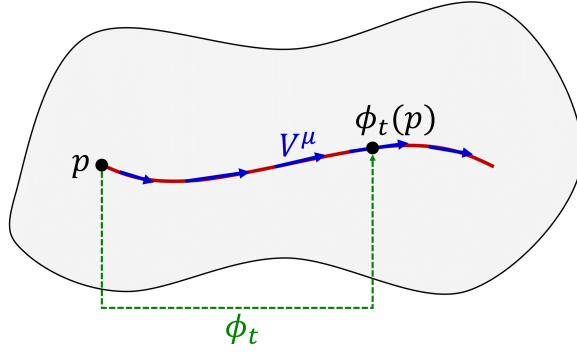


図9 連続的な微分同相写像の族  $\phi_t$  が作る曲線と、その正接ベクトル  $V^\mu$

と定義できる [ $V^\nu$  は単位ベクトルでなくても良い]. これが  $N$  上の関数  $f(y)$  の,  $N$  上に押し出したベクトル  $(\phi V)^\mu$  に沿った方向微分

$$(\phi V)^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} f(y)$$

に一致するように押し出し  $(\phi V)^\mu$  を定義しよう. すると

$$\begin{aligned} V^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \phi^*[f](x) &= V^\nu \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial y^\mu} f(y) \equiv (\phi V)^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} f(y), \\ \therefore (\phi V)^\mu &= \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu \end{aligned}$$

となる. [これらはそれぞれ本稿の付録 A.7 における式 (53), 式 (51) に対応しており,] 第2式はベクトル成分の変換則となっている (このように微分同相写像は座標変換と等価である).

$t=0$  で恒等写像と連続的に繋がる微分同相写像の1パラメータ族  $\phi_t$  によって, 多様体上の点  $p$  を  $\phi_t(p)$  に移すと, 1本の曲線が形成される. このとき  $V^\mu = dx^\mu/dt$  は曲線の正接ベクトルとなる (図9参照). ここでテンソル  $T$  の, ベクトル  $V^\mu$  に沿った Lie 導関数

$$\mathcal{L}_V T(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^*(T(\phi_t(p))) - T(p)}{t}$$

を定義する [点  $p$  において]. 右辺では  $t$  進んだ点  $\phi_t(p)$  でのテンソルの値  $T(\phi_t(p))$  を  $p$  に引き戻して, 点  $p$  におけるテンソルの値  $T(p)$  との差をとっている.

**note** 多様体上の異なる2点  $p, \phi(p)$  のテンソル成分の差は意味を持たない (スカラーは別として). と言うのも, 一般に多様体の異なる2点でのテンソル成分は異なる変換係数  $(\partial x'^\mu / \partial x^\nu), (\partial x^\nu / \partial x'^\mu)$  を持つため, それらの和や差はテンソル成分とならないからである [3, p.30].

$(k, l)$  テンソル  $T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}$  の Lie 微分は, 公式

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} &= V^\lambda \partial_\lambda T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} \\ &\quad - (\partial_\lambda V^{\mu_1}) T^{\lambda \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} - (\partial_\lambda V^{\mu_2}) T^{\mu_1 \lambda \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} - \dots \\ &\quad + (\partial_{\nu_1} V^\lambda) T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_l} + (\partial_{\nu_2} V^\lambda) T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \lambda \dots \nu_l} + \dots \end{aligned} \quad (3.21)$$

に従って実行できる (詳細は Carroll (2003) の本) [本稿次節で導出].

### 3.5 節について

■テンソルの Lie 微分の公式 (3.21) について スカラー場  $S$  の Lie 微分は方向微分

$$\mathcal{L}_V S = V^\mu \partial_\mu S \quad (4)$$

に他ならない (A.8 節). またベクトル  $V = V^\mu \partial_\mu$  に沿うベクトル  $U = U^\mu \partial_\mu$  の Lie 微分は, A.8 節の式 (56), (57):

$$\mathcal{L}_V U = [V, U]_L \equiv VU - UV = \{V^\nu \partial_\nu U^\mu - U^\nu \partial_\nu V^\mu\} \partial_\mu$$

で与えられる. この式の第  $\mu$  成分をとれば

$$\mathcal{L}_V U^\mu = V^\nu \partial_\nu U^\mu - U^\nu \partial_\nu V^\mu \equiv [V, U]_L^\mu \quad (5)$$

となる. これは確かに公式 (3.21) で  $T^{\dots} = U^\mu$  とおいた結果に一致している.

一般公式 (3.21) はテンソルの共変微分の公式と同様, Lie 微分に対して Leibniz ルール

$$\mathcal{L}_V (T^{\dots} S^{\dots}) = (\mathcal{L}_V T^{\dots}) S^{\dots} + T^{\dots} (\mathcal{L}_V S^{\dots})$$

が成り立つことを要求すると導ける. 例えば共変ベクトル  $\omega_\mu$  の Lie 微分の公式を調べるには, 反変ベクトル  $U^\mu$  との縮約によって得られるスカラー  $\omega_\mu U^\mu$  の Lie 微分を計算するのが有効である. すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V (\omega_\mu U^\mu) &= V^\nu \partial_\nu (\omega_\mu U^\mu) \quad (\because \text{式 (4)}) \\ &= V^\nu (\partial_\nu \omega_\mu) U^\mu + V^\nu \omega_\mu (\partial_\nu U^\mu) \end{aligned}$$

となる. 他方, Leibniz ルールを適用すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V (\omega_\mu U^\mu) &= (\mathcal{L}_V \omega)_\mu U^\mu + \omega_\mu (\mathcal{L}_V U)^\mu \\ &= (\mathcal{L}_V \omega)_\mu U^\mu + \omega_\mu V^\nu \partial_\nu U^\mu - \omega_\mu U^\nu \partial_\nu V^\mu \quad (\because \text{式 (5)}) \end{aligned}$$

と計算できる. これらを等置すると

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_V \omega)_\mu U^\mu &= V^\nu (\partial_\nu \omega_\mu) U^\mu + \omega_\mu V^\nu \partial_\nu U^\mu - \omega_\mu U^\nu \partial_\nu V^\mu + \omega_\mu U^\nu \partial_\nu V^\mu \\ &= (V^\nu \partial_\nu \omega_\mu + \omega_\nu \partial_\mu V^\nu) U^\mu \end{aligned}$$

を得る. これが任意の  $U^\mu$  に対して成り立つことを要求すると, 共変ベクトル  $\omega_\mu$  の Lie 微分の公式

$$\mathcal{L}_V \omega_\mu = V^\nu \partial_\nu \omega_\mu + \omega_\nu \partial_\mu V^\nu \quad (6)$$

が導かれる. 同様の手続きで,  $(k, l)$  テンソル  $T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}$  の Lie 微分の公式 (3.21) も導ける [4, p.137].

確認  $(k, l)$  テンソル  $T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}$  を共変ベクトル  $A_{\mu_1}, B_{\mu_2}, \dots, C_{\mu_k}$  および反変ベクトル



$X^{\nu_1}, Y^{\nu_2}, \dots, Z^{\nu_l}$  と縮約して得られるスカラーの Lie 微分を考える. すると

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_V(A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l}) \\
&= V^\lambda \partial_\lambda (A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l}) \quad (\because \text{式 (4)}) \\
&= A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} (V^\lambda \partial_\lambda T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l}) \\
&\quad + (V^\lambda \partial_\lambda A_{\mu_1}) B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots (V^\lambda \partial_\lambda C_{\mu_k}) X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \\
&\quad + A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} (V^\lambda \partial_\lambda X^{\nu_1}) Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots (V^\lambda \partial_\lambda Z^{\nu_l}) T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l}
\end{aligned}$$

となる. 他方, Leibniz ルールを適用すると

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_V(A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l}) \\
&= A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} (\mathcal{L}_V T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l}) \\
&\quad + (V^\lambda \partial_\lambda A_{\mu_1} + A_{\lambda} \partial_{\mu_1} V^\lambda) B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots (V^\lambda \partial_\lambda C_{\mu_k} + C_{\lambda} \partial_{\mu_k} V^\lambda) X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \\
&\quad + A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} (V^\lambda \partial_\lambda X^{\nu_1} - X^\lambda \partial_\lambda V^{\nu_1}) Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \\
&\quad \cdots \\
&\quad + A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots (V^\lambda \partial_\lambda Z^{\nu_l} - Z^\lambda \partial_\lambda V^{\nu_l}) T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l}
\end{aligned}$$

と計算できる (式 (5), 式 (6) を用いた). これらを等置し, 相殺する項を省いて整理すると

$$\begin{aligned}
& A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} (\mathcal{L}_V T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l}) \\
&= A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} (V^\lambda \partial_\lambda T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l}) \\
&\quad - (A_\lambda \partial_{\mu_1} V^\lambda) B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \quad [\lambda \leftrightarrow \mu_1] \\
&\quad - \cdots \\
&\quad - A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots (C_\lambda \partial_{\mu_k} V^\lambda) X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \quad [\lambda \leftrightarrow \mu_k] \\
&\quad + A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} (X^\lambda \partial_\lambda V^{\nu_1}) Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l} T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \quad [\lambda \leftrightarrow \nu_1] \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots (Z^\lambda \partial_\lambda V^{\nu_l}) T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \quad [\lambda \leftrightarrow \nu_l]
\end{aligned}$$

を得る. ここで右辺の各行に  $[\dots]$  で書き添えたダミー添字の入れ替え  $\lambda \leftrightarrow \mu_1, \text{etc.}$  を施すと, 右辺の各項を積  $A_{\mu_1} B_{\mu_2} \cdots C_{\mu_k} X^{\nu_1} Y^{\nu_2} \cdots Z^{\nu_l}$  に比例する形に書き換えられる. この等式が任意の  $A_{\mu_1}, B_{\mu_2}, \dots, C_{\mu_k}, X^{\nu_1}, Y^{\nu_2}, \dots, Z^{\nu_l}$  に対して成り立つことを要求すると, 式 (3.21):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_V T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} &= V^\lambda \partial_\lambda T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \\
&\quad - (\partial_\lambda V^{\mu_1}) T^{\lambda \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} - \cdots - (\partial_\lambda V^{\mu_k}) T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \lambda}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \\
&\quad + (\partial_{\nu_1} V^\lambda) T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\lambda \nu_2 \cdots \nu_l} + \cdots + (\partial_{\nu_l} V^\lambda) T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \lambda}
\end{aligned}$$

が導かれる.

なお、公式 (3.21) は共変性が明白な形

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} &= V^\lambda \nabla_\lambda T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} \\ &\quad - (\nabla_\lambda V^{\mu_1}) T^{\lambda \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} - \dots - (\nabla_\lambda V^{\mu_k}) T^{\mu_1 \mu_2 \dots \lambda}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} \\ &\quad + (\nabla_{\mu_1} V^\lambda) T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_l} + \dots + (\nabla_{\nu_l} V^\lambda) T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \lambda}\end{aligned}\quad (7)$$

に書き換えられる ( $\nabla_\mu$  は共変微分) [4, pp.137–138].

理由 共変微分の公式

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} &= \partial_\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} + \Gamma^{\mu_1}_{\lambda \sigma} T^{\sigma \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} + \dots + \Gamma^{\mu_k}_{\lambda \sigma} T^{\mu_1 \dots \sigma}_{\nu_1 \dots \nu_l} \\ &\quad - \Gamma^\sigma_{\lambda \nu_1} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\sigma \dots \nu_l} - \dots - \Gamma^\sigma_{\lambda \nu_l} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \sigma}\end{aligned}$$

を思い出すと、式 (3.21) 右辺を上式 (7) に置き換えた際に現れる付加的な項は

$$\begin{aligned}&V^\lambda (\Gamma^{\mu_1}_{\lambda \sigma} T^{\sigma \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} + \dots + \Gamma^{\mu_k}_{\lambda \sigma} T^{\mu_1 \dots \sigma}_{\nu_1 \dots \nu_l} \\ &- \Gamma^\sigma_{\lambda \nu_1} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\sigma \dots \nu_l} - \dots - \Gamma^\sigma_{\lambda \nu_l} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \sigma}) \\ &- (\Gamma^{\mu_1}_{\lambda \sigma} V^\sigma) T^{\lambda \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} - \dots - (\Gamma^{\mu_k}_{\lambda \sigma} V^\sigma) T^{\mu_1 \dots \lambda}_{\nu_1 \dots \nu_l} \\ &+ (\Gamma^\lambda_{\nu_1 \sigma} V^\sigma) T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\lambda \dots \nu_l} + \dots + (\Gamma^\lambda_{\nu_l \sigma} V^\sigma) T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \lambda} = 0\end{aligned}$$

となって、正確に打ち消し合うことが見て取れる。

テンソルの単なる微分は一般にテンソルではないが、テンソルの共変微分はテンソルだから、式 (7) は両辺が同種のテンソルであり、座標変換に対して共変的となる。

■共変微分と Lie 微分の違い それらの定義に用いられる、ベクトルの平行移動の定義の違いに起因している (A.8 節)。Lie 微分ではベクトルの平行移動の定義に接続を用いず、微分同相写像を用いる。

共変導関数は、曲率の概念を座標系に依存しない方法で規定するために決定的に重要であった。Lie 導関数だけを利用しても、そのような概念の抽出は行えない。(最終段落)

### 3.6 3 + 1 分解

一般相対性理論において、

- 空間と時間は同等に扱われる。
- 時空は任意の計量を持つだけでなく、任意の位相構造 (トポロジー) を持つ。

ところがハミルトニアン形式 (正準形式) では、

- 時刻  $t$  における共役な変数の組  $q, p$  (場  $\phi(x)$  と共役な運動量 [密度]  $\pi_\phi(x)$ ) が用いられ、変数 [空間と時間] に人為的な区別が設定される。
- 時間的 (タイムライク) な向きをひとつ選ぶと、その [時空の] トポロジーは自然に  $\Sigma \times R$  という形になる ( $\Sigma$  は 3 次元多様体)。

実はハミルトニアン形式は、変数の恣意的な区別の影響を補償する「洗練された」枠組みになっている。しかしながら、トポロジーに対する制約は残る。この問題は、後の章まで措いておかなければならない。

ここからは教科書の説明を肉付けしながらまとめよう [5, pp.8-99] [6, pp.1-3].

まず  $t = \text{const}$  の超曲面  $\Sigma$  の法単位ベクトル  $n^\mu$  (ただし  $n^\mu n_\mu = -1$ ) を導入する [計量テンソルの符号系  $(-+++)$ ].

このとき

$$P_\nu^\mu \equiv \delta_\nu^\mu + n^\mu n_\nu$$

は  $t = \text{const}$  の面への射影演算子となる. 実際, 任意のベクトル  $A^\mu$  の射影  $\tilde{A}^\mu \equiv P_\nu^\mu A^\nu = A^\mu + n^\mu n_\nu A^\nu$  は

$$n_\mu \tilde{A}^\mu = n_\mu (A^\mu + n^\mu n_\nu A^\nu) = 0 \quad (\because n^\mu n_\mu = -1) \quad (8)$$

となるので,  $\Sigma$  の法単位ベクトルに直交する\*3. また  $n^\mu, n_\mu$  の射影は

$$\begin{cases} P_\nu^\mu n^\nu = (\delta_\nu^\mu + n^\mu n_\nu) n^\nu = 0 \\ P_\nu^\mu n_\mu = (\delta_\nu^\mu + n^\mu n_\nu) n_\mu = 0 \end{cases} \quad (\because n^\mu n_\mu = -1) \quad (9)$$

である.

次に空間の同一の点を定義する時間的なベクトル  $t^\mu$  を導入する. 時間方向  $t^\mu$  は超曲面  $\Sigma$  に直交しているとは限らない. このことに注意し,

$$\begin{cases} q_{\alpha\beta} \equiv P_\alpha^\mu P_\beta^\nu g_{\mu\nu} (= q_{\beta\alpha}) : \text{“誘導された計量”} & [\text{計量テンソルの}\Sigma\text{への射影}] \\ N \equiv -n^\mu t^\nu g_{\mu\nu} : \text{“経時(ラプス)”} & [t^\mu\text{の}\mathbf{n}^\mu\text{方向成分}] \\ N^\alpha \equiv P_\mu^\alpha t^\mu : \text{“変位(シフト)ベクトル”} & [t^\mu\text{の}\Sigma\text{への射影}] \end{cases} \quad (10)$$

を定義する. 第1式は

$$q_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta \quad (11)$$

と書き換えることができる\*4. また式(9)より

$$n_\mu N^\mu = n_\mu (P_\nu^\mu t^\nu) = 0 \quad (12)$$

なので,  $N^\mu$  はその定義から期待されるように,  $t^\mu$  の  $\Sigma$  内の成分である. さらに式(9)より

$$q_{\mu\nu} n^\mu = (P_\mu^\rho P_\nu^\sigma g_{\rho\sigma}) n^\mu = 0 \quad (13)$$

である. 上式(12),(13)の意味で  $N^\mu$  と  $q_{\mu\nu}$  は  $n^\mu$  と“直交”するから, 本質的に  $\Sigma$  における場と見なせる. そこで  $a, b$  は  $1, 2, 3$  の値をとる添字として, 4次元時空座標の空間成分  $x^a$  を  $\Sigma$  上の座標に用いることにし, すぐ後で  $N^\mu, q_{\mu\nu} \rightarrow N^a, q_{ab}$  と添字の範囲を限定した場を考える.

式(10)より

$$t^\mu = N n^\mu + N^\mu \quad (14)$$

と書くことができる\*5. 上式(14)は  $t^\mu$  の  $\Sigma$  に平行な成分と垂直な成分への分解になっており, 経時(ラプス)  $N$  と変位ベクトル  $N^\mu$  の意味はこの中に含まれている(図10参照).

\*3  $\tilde{A}^\mu$  の式はベクトルの分解  $A^\mu = \tilde{A}^\mu - n^\mu n_\nu A^\nu$  を意味してもいい. 2回以上射影を行った結果が1回の射影と変わらない条件

$$P_\rho^\mu P_\nu^\rho = (\delta_\rho^\mu + n^\mu n_\rho)(\delta_\nu^\rho + n^\rho n_\nu) = \delta_\nu^\mu + n^\mu n_\nu = P_\nu^\mu$$

も確かに満たされている.

\*4 確認:  $q_{\alpha\beta} = P_\alpha^\mu P_\beta^\nu g_{\mu\nu} = (\delta_\alpha^\mu + n^\mu n_\alpha)(\delta_\beta^\nu + n^\nu n_\beta)g_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta + n_\alpha n_\beta - n_\alpha n_\beta = g_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta$ .

\*5 確認:  $N n^\mu + N^\mu = -(n^\nu t^\rho g_{\nu\rho}) n^\mu + (\delta_\nu^\mu + n^\mu n_\nu) t^\nu = -n_\rho t^\rho n^\mu + t^\mu - n^\mu n_\nu t^\nu$ .

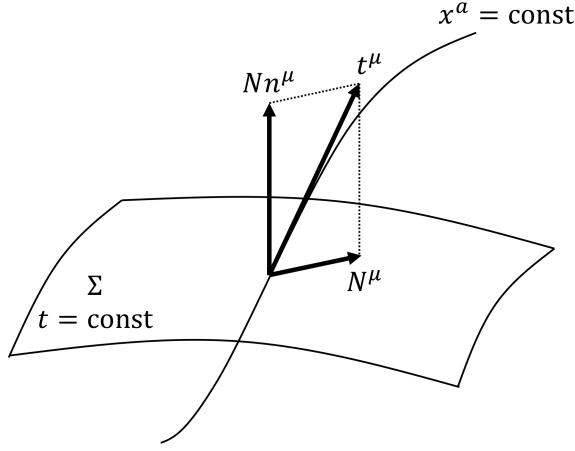


図 10 経時 (ラプス)  $N$  と変位 (シフト) ベクトル  $N^\mu$

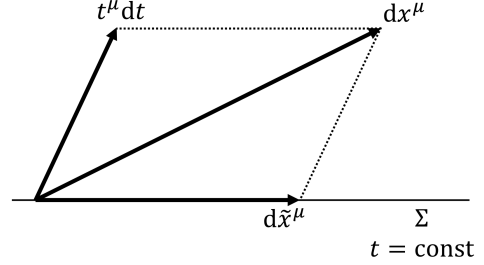


図 11 ベクトル  $dx^\mu$  の分解

ここで時空内の線要素  $dx^\mu$  に対して射影  $d\tilde{x}^\mu = P^\mu_\nu dx^\nu$  を定義すると, [時間方向のベクトル  $t^\mu$  を適当に規格化すれば]

$$dx^\mu = t^\mu dt + d\tilde{x}^\mu$$

と分解できる (図 11 参照)\*6. 式 (14) を代入すると

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= (-N^2 + q_{\mu\nu} N^\mu N^\nu) dt^2 + 2q_{\mu\nu} N^\mu d\tilde{x}^\nu dt + q_{\mu\nu} d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu \end{aligned} \quad (15)$$

が得られる.  
上式 (15) の導出

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} (t^\mu dt + d\tilde{x}^\mu) (t^\nu dt + d\tilde{x}^\nu) \\ &= (g_{\mu\nu} t^\mu t^\nu) dt^2 + 2g_{\mu\nu} t^\mu d\tilde{x}^\nu dt + g_{\mu\nu} d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu. \end{aligned}$$

最右辺の第 1 項において

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} t^\mu t^\nu &= g_{\mu\nu} (Nn^\mu + N^\mu) (Nn^\nu + N^\nu) \quad (\because \text{式 (14)} : t^\mu = Nn^\mu + N^\mu) \\ &= -N^2 + g_{\mu\nu} N^\mu N^\nu \quad (\because \text{式 (12)} : n_\mu N^\mu = 0) \\ &= -N^2 + q_{\mu\nu} N^\mu N^\nu, \quad (\because \text{式 (11)} : q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu, \text{ 式 (12)} : n_\mu N^\mu = 0) \end{aligned}$$

第 2 項において

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} t^\mu d\tilde{x}^\nu &= (q_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu) (Nn^\mu + N^\mu) \tilde{x}^\nu \quad (\because \text{式 (11)} : q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu, \text{ 式 (14)} : t^\mu = Nn^\mu + N^\mu) \\ &= (q_{\mu\nu} N^\mu + Nn_\nu) \tilde{x}^\nu \quad (\because \text{式 (13)} : q_{\mu\nu} n^\mu = 0, \text{ 式 (12)} : n_\mu N^\mu = 0) \\ &= q_{\mu\nu} N^\mu \tilde{x}^\nu, \quad (\because \text{式 (8)} : n_\nu d\tilde{x}^\nu = 0) \end{aligned}$$

第 3 項は

$$g_{\mu\nu} d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu = q_{\mu\nu} d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu \quad (\because \text{式 (11)} : q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu, \text{ 式 (8)} : n_\mu d\tilde{x}^\mu = 0)$$

となるので, 式 (15) を得る.

\*6 これは言わば斜交座標による分解であり, 第 1 項  $t^\mu dt$  が第 2 項  $d\tilde{x}^\mu$  に直交していないことは何ら問題ない.

$t = \text{const}$  の面  $\Sigma$  内のベクトル  $N^\mu = (0, N^a)$ ,  $d\tilde{x}^\mu = (0, dx^a)$  は時間成分を持たないから, 上式 (15) の和を空間成分に限定して

$$ds^2 = (-N^2 + q_{ab}N^aN^b)dt^2 + 2g_{ab}N^adx^bdt + q_{ab}dx^adx^b, \quad (16)$$

あるいは  $N_a \equiv q_{ab}N^b$  として

$$ds^2 = (-N^2 + N_aN^a)dt^2 + 2N_adx^adt + q_{ab}dx^adx^b \quad (3.23)$$

とできる. ここから定義式 (10) において,  $q_{ab}$  を  $\Sigma$  内に誘導された空間計量と解釈したことが正当化される.

note 1 特に Minkowski 空間 ( $N = 1, N^\mu = 0, q_{ab} = \delta_{ab}$ ) では, 式 (16), 式 (3.23) は

$$ds^2 = -dt^2 + (d\mathbf{r})^2$$

となる.

note 2 式 (3.23) は式 (15) の第 1 項, 第 2 項で  $q_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$  と戻せることに注意し,  $N_\mu \equiv g_{\mu\nu}N^\nu$  を用いて

$$ds^2 = (-N^2 + N_\nu N^\nu)dt^2 + 2N_\nu d\tilde{x}^\nu dt + q_{\mu\nu}d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu$$

と書いておき, 成分  $N^\mu = (0, N^a)$ ,  $d\tilde{x}^\mu = (0, dx^a)$  を代入しても得られる. この場合には  $N_a$  を, 空間計量との縮約  $q_{ab}N^b$  ではなく, 時空の計量との縮約によって得られるベクトル  $N_\mu = g_{\mu\nu}N^\nu$  の空間成分と見ていることに注意する.

最後に“外部曲率”を, 空間計量の  $n^\mu$  方向への Lie 微分

$$K_{ab} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_n q_{ab} \quad (3.24)$$

で定義する\*7. これは計量の“時間微分”と

$$\dot{q}_{ab} \equiv \mathcal{L}_t q_{ab} = 2NK_{ab} + \mathcal{L}_{\bar{N}}q_{ab} \quad (3.25)$$

のように関係する.

note —— 計量の“時間微分” (3.25) について Lie 微分の公式 (3.21) より,  $V = aU + bW$  のとき, 線形性

$$\mathcal{L}_V T^{\dots} = a\mathcal{L}_U T^{\dots} + b\mathcal{L}_W T^{\dots}$$

が満たされる.  $t^\mu = Nn^\mu + N^\mu$ :(14) なので,

$$\begin{aligned} \dot{q}_{ab} &\equiv \mathcal{L}_t q_{ab} \\ &= N\mathcal{L}_n q_{ab} + \mathcal{L}_{\bar{N}}q_{ab} \\ &= 2NK_{ab} + \mathcal{L}_{\bar{N}}q_{ab} : (3.25) \quad \left( K_{ab} \equiv \frac{1}{2}\mathcal{L}_n q_{ab} : (3.24) \right) \end{aligned}$$

となる. つまり計量の時間方向への Lie 微分に対する,  $n^\mu$  方向への変化率の寄与が, 外部曲率で与えられる.

\*7 “外部曲率”とは対象とする空間 (ここでは  $\Sigma$ ) を高次元の空間 (ここでは 4 次元時空) から見る立場で定義される曲率である (3.3 節).

3 + 1 分解まとめ

$$P_\nu^\mu \equiv \delta_\nu^\mu + n^\mu n_\nu \quad t = \text{const の超曲面} \Sigma \text{ への射影演算子}$$

$$\begin{cases} q_{\alpha\beta} \equiv P_\alpha^\mu P_\beta^\nu g_{\mu\nu} (= q_{\beta\alpha}) : \text{“誘導された計量”} & [\text{計量テンソルの} \Sigma \text{ への射影}] \\ \quad = g_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta \\ N \equiv -n^\mu t^\nu g_{\mu\nu} : \text{“経時 (ラプス)”} & [t^\mu \text{ の } n^\mu \text{ 方向成分}] \\ N^\alpha \equiv P_\mu^\alpha t^\mu : \text{“変位 (シフト) ベクトル”} & [t^\mu \text{ の} \Sigma \text{ への射影}] \end{cases}$$

↓

$$\begin{cases} \text{時間方向の分解} & t^\mu = N n^\mu + N^\mu \\ \text{計量の分解} & ds^2 = (-N^2 + N_a N^a) dt^2 + 2N_a dx^a dt + q_{ab} dx^a dx^b \end{cases}$$

$$\text{外部曲率} \quad K_{ab} \equiv \frac{1}{2} \mathcal{L}_n q_{ab}$$

### 3.7 3 脚場 (トライアド)

“3 脚場 (トライアド)”  $E_i^a$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 3 次元空間において, 互いに直交する 3 つのベクトル場  $E_i^a$  を導入する. [添字  $i = 1, 2, 3$  によって識別されるベクトル  $\mathbf{E}_i$  (場所ごとに異なり, 場を成す) の空間成分が  $E_i^a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) である.] 空間計量は

$$q^{ab} = E_i^a E_j^b \delta^{ij} \quad (3.26)$$

と書けるものとする. [第 7 章のノートで  $q_{ac} q^{cb} = \delta_a^b$  を満たす  $q_{ab}$  の逆テンソルとして  $q^{ab}$  を導入する.]

- “空間添字”  $a, b, c$ : 曲がった空間における通常のベクトル添字のように振舞う.
- “内部添字”  $i, j, k$ : 下付き添字を持ち上げるには平坦な計量  $\delta^{ij}$  を用いる.

[単にベクトル  $\mathbf{E}_i$  を区別する添字  $i$  についても縮約や計量  $\delta^{ij}$  による添字の上げ下げが定義される.

このとき添字の上下は概念的には区別されても, 値としては  $F^i = \delta^{ij} F_j = F_i$ .]

内部添字を持つ対象の微分  $D_a$  共変微分と類似の微分

$$D_a G^i = \partial_a G^i + \Gamma_a^i{}^j G^j, \quad (3.27)$$

$$D_a G_i = \partial_a G_i - \Gamma_a^j{}^i G_j, \quad (3.28)$$

$$D_a E_i^b = \partial_a E_i^b - \Gamma_a^j{}^i E_j^b + \Gamma_{ac}^b E_i^c \quad (3.29)$$

を導入する ( $\Gamma_a^i{}^j$ : “スピン接続”).  $\Gamma_a^i{}^j$  は外部から特定しなければならないが, 「この時点において, 具体的な式の形は重要ではない」(p.43, 1.1.2). [本稿次節で補足.]

スピン接続の曲率  $\Omega_{abj}^i$  Riemann テンソル (曲率テンソル)  $R^\lambda{}_{\rho\mu\nu}$  を用いて, ベクトル  $V^\lambda$  の共変微分の順序による違いを

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) V^\lambda = R^\lambda{}_{\rho\mu\nu} V^\rho$$

と書けたのと同様に (3.3 節),

$$(D_a D_b - D_b D_a) G^i = \Omega_{abj}^i G^j$$

と書いて, 上で導入した微分  $D_a$  に関する曲率 (スピン接続の曲率  $\Omega_{abj}^i$ ) を定義できる. 「これを Riemann テンソルと関係づけることができるが, 本書では具体的な式を使うわけではないので, 煩雑さ

を避けるために、その導出を省く」(p.43, 1.6-8). [教科書ではこれ以降,  $\Omega_{abj}^i$  を用いる機会はない.]  
 曲がった空間の体積要素 座標の範囲  $d^3x$  に対応する固有体積は

$$\sqrt{\det(q)}d^3x$$

で与えられ ( $\det(q)$  は空間計量  $q_{ab}$  の行列式), Jacobian に当たる因子  $\sqrt{\det(q)}$  はスカラー密度 [擬スカラー] として変換する [一般相対性理論の復習].

“加重量” 計量の行列式の平方根  $\sqrt{\det(q)}$  の  $n$  乗 (とスカラーの積) を, “加重量”  $+n$  を持つ量と称する.  
 加重量  $+1$  の 3 脚場  $\tilde{E}_i^a$  ループ量子重力では 3 脚場  $E_i^a$  の代わりに, 加重量  $+1$  の 3 脚場

$$\tilde{E}_i^a = \sqrt{\det(q)}E_i^a$$

を用いる. このとき上式 (3.26) より

$$\tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \delta^{ij} = \det(q)E_i^a E_j^b \delta^{ij} = \det(q)q^{ab}$$

となる. ここで最右辺を  $\det(q)q^{ab} \equiv \tilde{q}^{ab}$  と書けば (チルダの数は加重量  $+2$  を反映), 上式は式 (3.26) と似た形

$$\tilde{q}^{ab} = \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \delta^{ij} \quad (3.36)$$

に書ける.

### 3.7 節について

関連して 4 脚場 (テトラード) について本稿の付録 C にまとめる.

■スピン接続について 2 種類の添字を持つ対象の導関数 (3.29):

$$D_a E_i^b = \partial_a E_i^b - \Gamma_a^j E_j^b + \Gamma_{ac}^b E_i^c$$

には, 通常接続  $\Gamma_{ac}^b$  とスピン接続  $\Gamma_a^j E_j^b$  が用いられる. 特に  $E_i^b$  として 3 脚場を考え, 「3 脚場の導関数がゼロになる ( $D_a E_i^b = 0$ ) という便利な性質を要請するのであれば」(p.42 下 2 行),

$$0 = D_a E_i^b = \partial_a E_i^b - \Gamma_a^j E_j^b + \Gamma_{ac}^b E_i^c, \quad \therefore \Gamma_a^j E_j^b = \partial_a E_i^b + \Gamma_{ac}^b E_i^c$$

となる. 両辺に  $E_b^k$  を掛けて  $b$  で和をとり, 相反なベクトル  $E_b^k$  を定義する関係

$$E_j^b E_b^k = \delta_j^k$$

を利用すると (付録 C 参照) [7, p.424],

$$\Gamma_a^k E_i^k = E_b^k (\partial_a E_i^b + \Gamma_{ac}^b E_i^c)$$

が得られる. このように「スピン接続は, 共変導関数とともに導入した接続によって完全に決定される」(p.42 一番下). (着想は文献 [8, p.54]. )

内部添字を 1 つだけ持つ量  $F_i$  の微分には, スピン接続のみを用いて

$$D_a F_i = \partial_a F_i - \Gamma_a^j F_j : (3.28)$$

とすれば良い。ここでは内部添字の上下を区別しており、上付き添字を持つ量  $G^i$  の微分公式を得るには、「スカラー (たとえば  $G^i G_i$ ) の導関数が通常の偏導関数になる」(p.42 下から 7 行目) ことを要求すれば良い。すると

$$D_a(F_i G^i) = \partial_a(F_i G^i) = G^i \partial_a F_i + F_i \partial_a G^i.$$

他方、 $D_a$  が Leibniz 則を満たすことを要求すると

$$D_a(F_i G^i) = G^i (\partial_a F_i - \Gamma_a^j{}^i F_j) + F_i D_a G^i$$

であり、これらを等置すると

$$F_i D_a G^i = F_i \partial_a G^i + \Gamma_a^j{}^i G^i F_j = F_i (\partial_a G^i + \Gamma_a^i{}^j G^j)$$

となる。これが任意の  $F_i$  に対して成り立つことを要求すると、式 (3.27):

$$D_a G^i = \partial_a G^i + \Gamma_a^i{}^j G^j$$

が得られる。(以上の手順を逆にたどれば、式 (3.27) から式 (3.28) を導くこともできる。)

■スカラー密度  $\sqrt{\det(q)}$  の周辺議論 (pp.43-44) について ここでは 4 次元の時空を考え、 $\sqrt{-g}$  とデルタ関数がスカラー密度であり、Levi-Civita 記号がテンソル密度であることを復習しておこう。

固有体積要素 一般に任意の座標系で各座標が  $dx^\mu$  変化して作られる時空の体積要素は  $d^4x$  ( $\equiv dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ ) とならない。実際  $d^4x$  は時空の体積要素の次元を持つ保証すらない。しかし局所慣性系  $\{X^\mu\} \equiv \{cT, X, Y, Z\}$  では体積要素の表式は  $d^4X$  ( $\equiv cdT dX dY dZ$ ) であり、 $J \equiv \frac{\partial(X)}{\partial(x)}$  を Jacobian として任意の座標系での体積要素の表式は  $J d^4x$  となる。

ここで計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  は局所慣性系での成分が Minkowski 計量  $\eta_{\mu\nu}$  で与えられ、2 階共変テンソルの変換則に従うことから、行列  $(g_{\mu\nu})$  の行列式を  $g$  として

$$g = -J^2 < 0, \quad \therefore J = \sqrt{-g}$$

が帰結される。

以上より任意の座標系で各座標が  $dx^\mu$  変化して作られる時空の体積要素の真の体積は

$$\sqrt{-g} d^4x$$

である。これを固有体積要素と呼ぶ [2, pp.188-190].

なお上式  $J = \sqrt{-g}$  は、因子  $\sqrt{-g(x)} \left( = \frac{\partial(X)}{\partial(x)} \right)$  がスカラー密度の変換則  $\sqrt{-g'} = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \sqrt{-g}$  に従うことを含意している。したがってスカラー場  $S$  との積  $S\sqrt{-g}$  もまたスカラー密度である。これをスカラー密度と呼ぶのは、積分

$$\int S \sqrt{-g} d^4x$$

が不変量となるからである。任意のテンソル場  $T^{\mu\nu\dots}$  に対して  $T^{\mu\nu\dots} \sqrt{-g}$  と同じ変換則に従う量を同様にテンソル密度と呼ぶけれど、積分

$$\int T^{\mu\nu\dots} \sqrt{-g} d^4x$$

をテンソルと見なせるのは、積分範囲が小さい場合に限られることに注意しなければならない。と言うのもテンソルの変換則 (変換係数の値) は時空点ごとに異なるので、異なる時空点でのテンソルの和は一般にテンソルとはならないからである [9, p.130] [10, p.82].



完全反対称テンソル  $E^{\lambda\mu\nu\rho}$ , 完全反対称テンソル密度  $\tilde{E}^{\lambda\mu\nu\rho} = \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$  を局所慣性系  $\{X^\mu\}$  で  $\varepsilon^{0123} = 1$  となる添字に関して完全反対称な量とする.

このときこれを 4 階反変テンソルの変換則

$$E^{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\gamma} \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

に従って任意の座標系  $\{x^\mu\}$  に変換した量は  $E^{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}}{\sqrt{-g}}$  である [7, pp.258–259].

一方, これを 4 階反変テンソル密度の変換則

$$\tilde{E}^{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{\partial(X)}{\partial(x)} \frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\gamma} \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

に従って任意の座標系  $\{x^\mu\}$  に変換した量は  $\tilde{E}^{\lambda\mu\nu\rho} = \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$  となり, 座標系に依らず  $\tilde{E}^{0123} = 1$  となる [9, pp.62–63].

証明  $\frac{\partial x^\mu}{\partial X^\nu} \equiv \Lambda^\mu{}_\nu$  と略記すると 4 階反変テンソルの変換則は

$$E^{\lambda\mu\nu\rho} = \Lambda^\lambda{}_\alpha \Lambda^\mu{}_\beta \Lambda^\nu{}_\gamma \Lambda^\rho{}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{vmatrix} \Lambda^\lambda{}_0 & \cdots & \Lambda^\lambda{}_3 \\ \Lambda^\mu{}_0 & \cdots & \Lambda^\mu{}_3 \\ \Lambda^\nu{}_0 & \cdots & \Lambda^\nu{}_3 \\ \Lambda^\rho{}_0 & \cdots & \Lambda^\rho{}_3 \end{vmatrix}$$

と書ける. 最右辺は行列式  $|\Lambda^\mu{}_\nu| = \frac{\partial(x)}{\partial(X)}$  の行を入れ換えたものである. 行列式は行を入れ換えると符号が変わるから

$$E^{\lambda\mu\nu\rho} = \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \frac{\partial(x)}{\partial(X)} = \frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}}{\sqrt{-g}}, \quad \therefore \tilde{E}^{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{\partial(X)}{\partial(x)} E^{\lambda\mu\nu\rho} = \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$$

を得る ( $\frac{\partial(X)}{\partial(x)} = \sqrt{-g}$  を用いた).

デルタ関数 また座標変換  $x \rightarrow x'$  に伴うデルタ関数の変換則を調べると,

$$1 = \int \delta^4(x') d^4x' = \int \delta^4(x) d^4x = \int \delta^4(x) \frac{\partial(x)}{\partial(x')} d^4x', \quad \therefore \delta^4(x') = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \delta^4(x)$$

となるので, デルタ関数はスカラー密度である.

## 関連文献について

前章と同様に, 本章で扱った内容も, 残りの章を読み進むために最低限必要とされるものにすぎない. 一般相対性理論の初等的な側面については, Carroll (2003) によるオンライン・ノートと書籍によって補足することができる. 3 + 1 分解に関する読みやすい記述としては, Brown (2011) の解説, Kiefer (2006) の本, もしくは Romano (1993) の論文があるが, これは 3 脚場 (トライアド) に関するよい参考文献でもある. ADM の読みやすい原論文も最近再版された (Arnowitt, Deser, and Misner (2008)). 緒言で言及したように, 学部学生向けの一般相対性理論の教科書としては Hartle (2003) と Schutz (2009) が優れているが, これら書籍における取扱いは, 本章で採用した方法とは異なっている.

ここで言及されている関連文献を, 巻末の参考文献リスト (pp.171–176) から抜粋しておく.

- Arnowitt, R., Deser, S., and Misner, C. (2008) *Gen. Rel. Grav.* **40**, 1997.

- Brown, D. (2011) In preparation.
- Carroll, S. (2003) *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Benjamin Cummings. Based on notes available online at <http://preposterousuniverse.com/grnotes/> [accessed 11 March 2011].
- Hartle, J. (2003) *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. Benjamin Cummings. New York.
- Kiefer, C. (2006) *Quantum Gravity*. Oxford Science Publications, Oxford.
- Romano, J. (1993) *Gen. Rel. Grav.* **25**, 759.
- Schutz, B. (2009) *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, Cambridge.

## 第 4 章 拘束条件と正準形式による場の力学

### 4.1 力学の正準形式

特筆：

ラグランジアンが時間にあらわに依存するような系は、本章では考察の対象から外すことにする。そのような系は、基本的な相互作用を論じる際に必要になることがあまりないからである。

### 4.2 拘束条件

理論を系の本当の自由度よりも多い変数によって記述する場合、変数の間に拘束条件が課される。変数  $q_i$  と共役な正準運動量  $p_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) に対して拘束条件を

$$\phi_\alpha(p_i, q_i) = 0 \quad (\text{すべての時刻で, } \alpha = 1, \dots, M)$$

と書くならば、量  $\phi_\alpha(p_i, q_i)$  は系の保存量であるということもできる (その値はゼロであるにしても)。このため拘束条件は物理系における対称性をも含意することになる。[なお教科書では以降、上式左辺の関数  $\phi_\alpha(p_i, q_i)$  のことも単に拘束条件と呼んでいる (正確には「拘束量」という)。拘束量は物理的に等価な  $(q, p)$  間のゲージ変換を生成する (D.3.1 節).]

元のハミルトニアン  $H_{\text{orig}}$  に  $M$  個の“未定乗数”  $\lambda_\alpha$  (時間に依存して良い) を乗じた項を加えた“全ハミルトニアン”

$$H = H_{\text{orig}} + \sum_{\alpha=1}^M \lambda_\alpha \phi_\alpha \quad (4.11)$$

を考えると、

$$(2N + M) \text{ 個の変数 } p_i, q_i, \lambda_\alpha \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} 2N \text{ 本の正準方程式 } \dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i, \dot{q}_i = \partial H / \partial p_i \\ M \text{ 本の拘束条件の式 } \phi_\alpha = 0 \end{cases}$$

- 拘束条件を伴う一般的な系を扱う手続きは“Dirac の手続き”と呼ばれる。教科書では興味ある、Dirac の手続きに包括的に頼ることなく容易に扱えるいくつかの特例だけを取り上げる。[Dirac の手続きについては本稿の付録 D を参照.]
- 簡単な例：ラグランジアンにある変数の時間微分  $\dot{q}_i$  が含まれない場合、変数  $q_i$  は実のところ Lagrange の未定乗数である。[1 次拘束条件として  $p_i(q, \dot{q}) = \partial L / \partial \dot{q}_i = 0$  が課される (付録 D.1.1 参照)。このとき 1 次拘束量としての運動量  $p_i$  が生成する座標のゲージ変換は、 $p_i$  に充てられる Lagrange の未定乗数を  $\lambda$  として  $[q_i, \lambda p_i] = \lambda$  なので、座標  $q_i$  そのものを未定乗数のように見なせる (Maxwell 理論の対応する議論は 4.3 節の式 (4.27) の箇所).]
- 全ハミルトニアン (4.11) の下での解  $(q(t), p(t))$  は  $M$  個の未定乗数を含み、一意的には決まらない。それらの解は系の対称性を通じて等価に関係付けられており、背後にある物理現象は一意的に決まる [詳しくは付録 D.3.1 参照].
- Lagrange 方程式が一意的な解を持つ ( $\ddot{q}$  を  $q$  と  $\dot{q}$  で表せる) ためには、行列  $(\partial^2 L / \partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j)$  が正則でなければならず [本稿次節で補足]、そうでなければ解は Lagrange の未定乗数をパラメーターとして含

む. ところで行列  $(\partial^2 L / \partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j)$  が正則であることは,  $p_i = \partial L(q, \dot{q}) / \partial \dot{q}_i$  を  $\dot{q}_i$  について一意的に解けるための条件でもあり [本稿次節で補足], これが満たされなければ, 結果は  $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, v^\alpha)$  のように, Lagrange の未定乗数に関係した時間の任意関数  $v^\alpha$  を含んでしまう. [ $p_i = 0$  という 1 次拘束条件は,  $p_i$  を速度について解けない場合の簡単な例となっている.]

## 4.2 節について

■「一般相対性理論でも自由度は 2 であるが, ……16 個の成分を持つ 4 脚場 (tetrad) を用いたりする」(p.48 下から 4~2 行目) について 4 脚場について本稿の付録 C にまとめてある. 4 脚場  $e_{(a)}^\mu$  は 4 つのベクトルを識別する添字  $a$  とベクトル成分の添字  $\mu$  を持ち, 16 個の場を成す.

■保存量  $O$  の生成する流れ (式 (4.8),(4.9)) について  $O$  の生成する流れの式 (4.8),(4.9):

$$\frac{dq_i}{d\lambda} = \{q_i, O\}, \quad \frac{dp_i}{d\lambda} = \{p_i, O\}$$

は,  $d\lambda$  を無限小パラメーター  $\lambda$  に読み替えれば,  $O$  の生成する無限小変化

$$\delta q_i = \lambda \{q_i, O\}, \quad \delta p_i = \lambda \{p_i, O\}$$

を定義していることになる. これは無限小正準変換の母関数

$$F(q, P, t) = \sum_i q_i P_i + \lambda G(q, P, t)$$

における恒等変換からのズレを担う関数  $G(q, P, t)$  を用いて, 正準変換を

$$\delta q_i = \lambda \{q_i, G\}, \quad \delta p_i = \lambda \{p_i, G\}$$

と書けることから理解できる. ここで  $\lambda$  の 1 次までの近似では,  $G(q, P, t)$  は  $G(q, p, t)$  で代用できる. また能動的な変換  $q_i \rightarrow q_i + \delta q_i, p_i \rightarrow p_i + \delta p_i$  に伴う関数  $u(q, p)$  の変化は

$$\delta u = \lambda \{u, G\}$$

と表され, これは  $G$  の生成する無限小変換として言及される ( $u = q_i, p_i$  とおくと正準変換が再現される) [11, pp.553–554, p.557].

運動方程式  $\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \dot{p}_i = \{p_i, H\}$  はハミルトニアン  $H$  が時間的发展を生成することを表しているのに対し,  $H$  をすぐ後の全ハミルトニアン (4.11) で置き換えると,  $\phi_\alpha$  の生成する変化

$$\lambda_\alpha \{q_i, \phi_\alpha\}, \quad \lambda_\alpha \{p_i, \phi_\alpha\}$$

が得られることになる.

■保存量  $O$  の満たす式  $\{O, H\} = 0$  (p.49, 1.16) について 系の時間发展に伴う観測量  $O(p_i(t), q_i(t), t)$  の時間変化率は

$$\frac{dO}{dt} = \frac{\partial O}{\partial t} + \{O, H\}$$

と表されるので ( $\{, \}$  は Poisson 括弧), 保存量  $O$  に対しては

$$\frac{dO}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{H, O\} = \frac{\partial O}{\partial t}$$

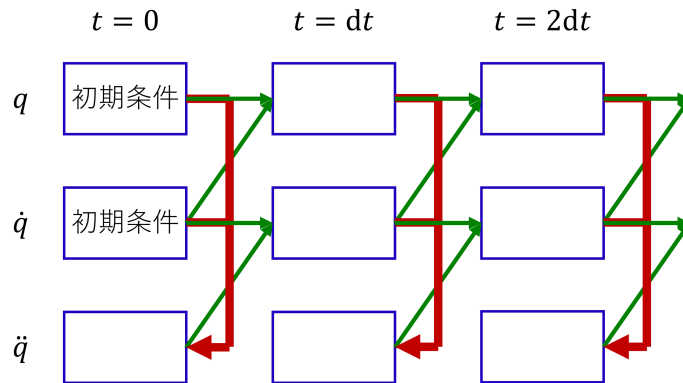


図 12 運動方程式を数値的に解く手順

が成り立つ. 特に  $O$  が時間に陽に依らない量である場合には,  $\{H, O\} = 0$  である [11, p.552].

この式は逆に,  $O$  をハミルトニアン,  $H$  を観測量と見れば, ハミルトニアン  $O$  によって生成される時間発展に伴い, 観測量  $H$  が不変に留まること (対称性) を意味する. これが「この最後の式を逆に捉えると,」 (p.49, 1.16,17) 以降で説明されていることである.

■最終段落 (行列  $(\partial^2 L / \partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j)$  の正則性) について ここではラグランジアンが時間に陽に依存する場合にも議論を適用できるように, 一般的に話を進める.

古典力学的因果律 初期条件として, ある時刻にすべての座標  $q$  と速度  $\dot{q}$  を与えると, その時刻における加速度  $\ddot{q}$  の値もまた一通りに決まるとき,

- 運動方程式を用いて, ある時刻での  $q$  と  $\dot{q}$  から, その時刻における  $\ddot{q}$  を求める
- ある時刻での  $\dot{q}$  と  $\ddot{q}$  から, 微小時間後の  $q$  と  $\dot{q}$  を求める

という手順を繰り返すことにより, 図 12 のように  $q(t)$  を逐次求めて時間追跡することが可能である. このため系のそれ以後の運動は原理的には予言できる (古典力学的因果律).

古典力学的因果律が満たされることは, ラグランジアンに対する制約を課す. と言うのも, Lagrange 方程式

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

を加速度  $\ddot{q}_j$  について解くことができるためには, ラグランジアンのヘス行列

$$A = (A_{ij}) = \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right)$$

に対して  $\det A \neq 0$  でなければならない. このときラグランジアンは正則であると言われ, 上式に逆行列の要素  $(A^{-1})_{ki}$  をかけて  $i$  について和をとることにより,

$$\ddot{q}_k = (A^{-1})_{ki} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} \right)$$

のように  $\ddot{q}_k$  について解くことができる [3, p.105].

一般化運動量と一般化速度の 1 対 1 対応の条件 古典力学的因果律の条件 (ラグランジアンの正則性)

$$\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) \neq 0$$

はまた、一般化運動量の定義式

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \phi_i(q, \dot{q}, t) \quad (17)$$

を速度  $\dot{q}_i$  について、一意的に解くことができる条件になっていることを説明する。はじめにラグランジアンの Legendre 変換

$$H = p_i \dot{q}_i - L$$

によって  $H$  を定義すると、Lagrange 方程式  $\dot{p}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$  (および一般運動量の定義 (17)) の下で

$$dH = d(p_i \dot{q}_i - L) = -p_i dq_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (18)$$

となり、Hamilton の正準方程式

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

が得られることを思い出そう [12, pp.166–167]. 上式 (18) は  $H$  が  $q$  と  $p$  の関数であることを意味する ( $\dot{q}$  の代わりに  $p$  を変数とできる).  $H = H(q, p, t)$  をハミルトニアンと呼ぶ<sup>\*8</sup>. そこで

$$L(q, \dot{q}, t) = \phi_i(q, \dot{q}, t) \dot{q}_i - H(q, \phi(q, \dot{q}, t), t)$$

と書いて、これを  $\dot{q}_i$  で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \phi_i + \frac{\partial \phi_j}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial \phi_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial \dot{q}_i} = \phi_i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \left( \dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial \phi_j} \right), \\ \therefore \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \left( \dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial \phi_j} \right) &= 0 \end{aligned}$$

を得る。よってラグランジアンが正則であれば

$$\dot{q}_j = \frac{\partial}{\partial \phi_j} H(q, \phi(q, \dot{q}, t), t)$$

となる。これは式 (17) を速度について一意的に  $\dot{q}_i = \psi_i(q, p, t)$  と解けることを意味している [3, pp.209–211].

### 4.3 Maxwell 理論の正準形式

前節の要点を具体的に見てみるために、我々の最初の理論である Maxwell 理論を調べよう。自由電磁場のラグランジアン  $L = \frac{1}{4} \int d^3x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  は  $\partial_0 A_0$  を含まないから、 $A_0$  は Lagrange の未定乗数であり、Maxwell 理論は拘束条件を持つ。

場の空間成分  $A_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) を配位変数 [力学変数  $q$ ] として、場の理論では場  $A_a$  に正準共役な運動量 [密度] を、汎関数微分

$$\pi^a = \frac{\delta L}{\delta \dot{A}_a} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_a} - \partial_b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_b \dot{A}_a)} \quad (4.15)$$

で定義する ( $\mathcal{L}$  はラグランジアン密度) [本稿次節で補足].

<sup>\*8</sup> このように  $H$  が  $q$  と  $p$  の関数であること自体は、ラグランジアンの正則性を仮定せずとも言えることに注意する。ただしラグランジアンが正則でなければ、すべての  $p_i$  が独立とはならない (D.1 節参照).

ラグランジアン密度の表記について 教科書ではラグランジアン密度を  $\mathcal{L}$  の代わりに、 $\tilde{\mathcal{L}}$  で表している。これはすぐ後の密度に関する説明 pp.53-54 から、曲がった空間でラグランジアンを

$$L = \int d^3x \sqrt{\det(q)} \mathcal{L} = \int d^3x \tilde{\mathcal{L}}$$

と書いたときのスカラー密度  $\tilde{\mathcal{L}} = \sqrt{\det(q)} \mathcal{L}$  をラグランジアン密度と見ているからであると想像される。(ここで 3.7 節の表記法 (3.34):  $\tilde{f} = \sqrt{\det(q)} f$  が踏襲されている。) しかしながら本稿では表記の煩雑さを避けるため、適宜チルダを省く。

場の第ゼロ成分に共役な場  $\pi^0 \equiv \delta L / \delta \dot{A}_0$  は恒等的にゼロになる [ $\pi^\mu = -F^{0\mu}$  より  $\pi^0 = 0$ , 本稿次節で補足].

自由電磁場のラグランジアン  $L = \frac{1}{4} \int d^3x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  に変分原理を適用すると, Maxwell 方程式  $\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$  が導かれる (復習).

正準運動量は電場になる:

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{A}_a} = E^a.$$

[ $\pi^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_a)} = -F^{0a} = E^a$  による. 本節では符号系 (+ ---) の計量を採用していることになる.] 正準変数間の Poisson 括弧は

$$\{A_b(x), E^a(y)\} = \delta_b^a \delta^3(x - y) \quad (4.20)$$

で与えられる [同時刻  $x^0 = y^0$  の共役な場に対して, 本稿次節で補足].

ここで第 3 章で導入した“密度”の概念を再考する. ラグランジアン密度がスカラー密度であるためには, 我々は適宜  $E^a$  を  $\tilde{E}^a [= \sqrt{\det(q)} E^a$  (3.7 節)] に置き換えなければならない. [ $\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sim (E^a)^2 \rightarrow E^a \tilde{E}^a$  とすれば,  $\mathcal{L} \rightarrow \sqrt{\det(q)} \mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}}$  となる.] また Poisson 括弧の式 (4.20) の左辺は  $E^a \rightarrow \tilde{E}^a$  とすると [テンソル] 密度となり, 右辺においてもデルタ関数が本来的に [スカラー] 密度 [なので (3.7 節のノート参照), 因子  $\delta_b^a$  と合わせてテンソル密度となるから, このとき式 (4.20) は共変的] である. もっとも平坦な空間では [ $\sqrt{\det(q)} = 1$  なので], この措置は不要である [そこでしばらくチルダを省いて表記を統一する].

さて, ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &\equiv \int (E^a \dot{A}_a - \mathcal{L}) d^3x \\ &= \int \left\{ \frac{1}{2} (E^a E^b \delta_{ab} + B^a B^b \delta_{ab}) - A_0 \partial_a E^a \right\} d^3x \end{aligned} \quad (4.22)$$

( $B^a = -\varepsilon^{abc} F_{bc} / 2$  は磁場 [計量の符号系 (+ ---) に応じた負号を補った]) となり [本稿次節参照], 運動方程式

$$\dot{\pi}^0 = \{\pi^0, H\} = \partial_a E^a$$

より拘束条件  $\pi^0 = 0$  [1 次拘束条件  $\pi^0 = 0$  (全時刻において) に対する整合性の条件 (付録 D.1.3)] は Gauss の法則  $\partial_a E^a = 0$  になる [本稿次節参照]. 実に Gauss の法則は電場に発散がないという拘束条件と言える. ここで拘束条件が各座標点で成り立つことを踏まえ,  $\lambda$  を  $x$  の関数として拘束条件の式の“不鮮明化”

$$G(\lambda) \equiv \int d^3x \lambda \partial_a E^a$$

を導入すると便利である.

$\{G(\lambda), H\} = 0$  となる。[本稿次節で導出する。  $G(\lambda) = 0$  であっても、一般に Poisson 括弧が  $\{G(\lambda), \dots\} = 0$  となるとは限らない (付録 D.1.3 参照)。  $\{G(\lambda), H\} = 0$  のとき  $G(\lambda)$  は保存量となる (4.2 節のノート参照).] この拘束条件によって生成される正準変数  $E^a, A_a$  の変化は

$$\{E^a, G(\lambda)\} = 0, \quad (4.25)$$

$$\{A_a, G(\lambda)\} = \partial_a \lambda \quad (4.26)$$

となる [Poisson 括弧の順を訂正した, 本稿次節で補足]. これは拘束量が拘束条件がゲージ変換を生成すること [4.2 節 (本稿の付録 D.3.1)] の具体例となっており, 第 1 式は場の強度  $E^a$  のゲージ不変性を, 第 2 式は場の正しいゲージ変換  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$  を再現している。[一般論ではゲージ変換を生成するのは 1 次拘束量と論じたが (付録 D.3.1), ここでは 2 次拘束量  $G(\lambda)$  がゲージ変換を生成している.]

既に論じたように [4.2 節], 我々がここで遭遇している状況は, かなり一般的なものである。もしあなたが, あるラグランジアンにおいて力学変数と見なしていたものが, Lagrange の未定乗数のように振舞うこと (その正準共役な運動量が恒等的にゼロになる) を見出したならば, それは拘束条件の存在を見出したことになる。その拘束条件は, あなたが扱う理論において “ゲージ対称性” と呼ばれる対称性を生成し, その理論の運動方程式の解は, 任意パラメーターを含むことになる。(p.55)

もとの [1 次] 拘束条件  $\pi^0 = 0$  に関しては, 関数  $\mu$  による不鮮明化  $\pi(\mu) \equiv \int d^3x \mu \pi^0$  を定義できる。[1 次拘束条件は “第 1 類” [第 1 種] (first class ; p.56, 1.3) の拘束条件とは異なる概念である (付録 D 参照).] すると, この拘束条件が生成する  $A_0$  の変化は

$$\{\pi(\mu), A_0\} = \mu \quad (4.27)$$

と計算される [本稿次節で確認]. これは  $A_0$  に任意関数を付加することができ, したがって  $A_0$  は物理的でない変数 (Lagrange の未定乗数) であることを意味する。

最後に [正準変数]  $A_a, E^a$  の運動方程式 [ $\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \dot{p}_i = \{p_i, H\}$  (4.1 節)] を調べると,

$$\dot{A}_a = \{A_a, H\} = E_a + \partial_a A_0 \quad (4.28)$$

$$\dot{E}^a = \{E^a, H\} = \varepsilon^{abc} \partial_b B_c \quad (4.29)$$

(ただし  $E_a \equiv \delta_{ab} E^b$ , etc.) が得られる [導出は本稿次節].

note 式 (4.28) は電場の式  $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi$  に他ならない (計量の符号系 (+ - - -) に注意). これは力学において運動量の定義式が, 正準方程式  $\dot{q}_i = \{q_i, H\}$  から得られるのと同じ事情である。式 (4.29) は Maxwell 方程式  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  に他ならず, 拘束条件としての Gauss の法則  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$  と合わせて, Maxwell 方程式の非自明な組 (ポテンシャルに対する恒等式として導かれない) を再現する。

時間発展方程式 (4.28) は Lagrange の未定乗数  $A_0$  を含んでおり, この任意性はゲージの選択の仕方に対応している。電場と磁場の時間発展は一意的である。

### 4.3 節について

■汎関数微分 (4.15) について 通常, 共役な場 (運動量密度) は式 (4.15) の右辺第 1 項のみ

$$\pi^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_a}$$



で定義される。Maxwell 理論のように、 $\mathcal{L}$  が  $\partial_b \dot{A}_a$  に依らなければそれで十分である (p.52, 1.9,10)。

場  $\phi(\vec{x})$  の変化  $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$  に伴う汎関数  $F[\phi]$  (関数  $\phi(\vec{x})$  の“関数”) の 1 次の変化を

$$\delta F[\phi] = \int d^3x \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(\vec{x})} \delta \phi(\vec{x}) \quad (19)$$

と書いて汎関数微分  $\delta F/\delta\phi$  を定義すると (したがって汎関数微分の次元は  $[F/(\phi \cdot x^3)]$ ) [13, pp.313–314],  $\dot{A}_a \rightarrow \dot{A}_a + \delta\dot{A}_a$  のとき

$$\begin{aligned} \delta L &= \int d^3x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_a} \delta \dot{A}_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_b \dot{A}_a)} \delta (\partial_b \dot{A}_a) \right\} \\ &= \int d^3x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_a} - \partial_b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_b \dot{A}_a)} \right\} \delta \dot{A}_a \quad (\text{部分積分した}) \end{aligned}$$

なので、汎関数微分  $\pi^a = \delta L/\delta \dot{A}_a$  は式 (4.15) のように同定される。(ただし  $\mathcal{L}$  の  $\dot{A}_a$  依存性  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{A}_a, \partial_b \dot{A}_a)$  を仮定した。) 教科書 p.52, 1.10–15 はこのことを説明していると考えられる。

■「共役運動量  $\pi^0 \equiv \delta L/\delta \dot{A}_0$  は恒等的にゼロになってしまう」(p.52, 1.18–19) について この式は 1 次拘束条件  $\pi^0(A_a, \dot{A}_a) = 0$  に他ならない (付録 D.1.1 参照)。このとき量子化の際に、変数  $A_0, \pi^0 (= 0)$  間に正準交換関係を課すことができなくなる [14, pp.88–89]。

■汎関数微分を用いた最小作用原理の定式化 (pp.52–53) について 場  $\{\phi_r\}$  の変分に伴う作用の変分は

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \delta \phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \delta (\partial_\mu \phi_r) \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \right\} \delta \phi_r \quad (\text{部分積分した}) \end{aligned}$$

と表されるので、Euler-Lagrange 方程式は

$$\frac{\delta S}{\delta \phi_r} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} = 0$$

と表現できる。

■場の Poisson 括弧 (4.20) について ひとまず、p.53 の訳註を引用する。

ここでは正準変数が座標のラベルを持つので、式 (4.20) の Poisson 括弧の定義は、

$$\{A_b(x), E^a(y)\} = \int d^3z \sum_c \left\{ \frac{\partial A_b(x)}{\partial A_c(z)} \frac{\partial E^a(y)}{\partial E^c(z)} - \frac{\partial A_b(x)}{\partial E^c(z)} \frac{\partial E^a(y)}{\partial A_c(z)} \right\}$$

である。ここでは第 1 項だけが残って、式 (4.20) の右辺の結果が得られる。

ただし同時刻  $x^0 = y^0 = z^0$  が仮定されている。また教科書本文には、「場に関する Poisson 括弧の定義は、通常の力学系における Poisson 括弧のそれと同じであるが、微分が汎関数微分に置き換わり、空間変数に関する積分が背景概念として存在する」(p.53, 1.20–23) とある。実際、文献 [15, p.183] では場の理論における Poisson 括弧を

$$\{F[\phi, \pi], G[\phi, \pi]\} \equiv \int d^3x \left\{ \frac{\delta F[\phi, \pi]}{\delta \phi(x)} \frac{\delta G[\phi, \pi]}{\delta \pi(x)} - \frac{\delta F[\phi, \pi]}{\delta \pi(x)} \frac{\delta G[\phi, \pi]}{\delta \phi(x)} \right\}$$

で定義している。ここで汎関数微分の定義式 (19) において、特に汎関数  $F$  が場  $\phi(x)$  の時空点  $y$  での値  $\phi(y)$  を与える“関数”である場合を考える (ただし  $y^0 = x^0$ )。すると  $F[\phi] = \phi(y)$  なので、

$$\delta\phi(y) = \int d^3x \frac{\delta\phi(y)}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x) \Rightarrow \frac{\delta\phi(y)}{\delta\phi(x)} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

が得られる。この公式を用いると

$$\begin{aligned} \{A_b(x), E^a(y)\} &= \int d^3z \sum_c \left\{ \frac{\delta A_b(x)}{\delta A_c(z)} \frac{\delta E^a(y)}{\delta E^c(z)} - \frac{\delta A_b(x)}{\delta E^c(z)} \frac{\delta E^a(y)}{\delta A_c(z)} \right\} \quad (x^0 = y^0 = z^0) \\ &= \int d^3z \sum_c \delta_b^c \delta^3(\vec{x} - \vec{z}) \delta_c^a \delta^3(\vec{y} - \vec{z}) \\ &= \delta_b^a \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) : (4.20) \end{aligned}$$

とできる。

いずれにせよ式 (4.20) は正準変数間の Poisson 括弧  $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$  に対応しており、量子化の際には正準交換関係に読み替えられる。

#### ■ハミルトニアン (4.22) の導出

$$\begin{aligned} H &= \int dV (\pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}) \\ &= \int dV \left( F^{\mu 0} \partial_0 A_\mu + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \quad \left( \because \pi^\mu = \frac{1}{c} F^{\mu 0} \right) \\ &= \int dV \left( \frac{E^2 + B^2}{2} + \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \phi \right) \\ &\quad \left( \because F^{\mu 0} \partial_0 A_\mu = E_a (-\partial_0 A_a) = \vec{E} \cdot (\vec{E} + \vec{\nabla} \phi), F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(B^2 - E^2) \right) \\ &= \int dV \left( \frac{E^2 + B^2}{2} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \phi \right) : (4.22). \quad (\because \text{部分積分により } \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \phi \rightarrow -(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \phi) \end{aligned}$$

最右辺の第 1 項は電磁場のエネルギーとして馴染みのある表式であり、第 2 項は電荷密度  $\rho$  がゼロでない場合には  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$  より位置エネルギー (の逆符号)  $-\sum e\phi$  となる。これは粒子系のハミルトニアン (場との相互作用項を含む) の寄与  $+\sum e\phi$  と相殺し、(見かけ上) 全エネルギーには現れない。

■式 (4.23):  $\dot{\pi}^0 = \{\pi^0, H\} = \partial_a E^a$  の確認  $H$  の代わりに全ハミルトニアン  $H' = H + \pi(\mu)$  を用いて

$$\dot{\pi}^0(x) = \{\pi^0(x), H'\}$$

とするのが正確である。ただし付加的な項  $\pi(\mu) \equiv \int d^3x' \mu(x') \pi^0(x')$  は右辺の Poisson 括弧に寄与せず、

$$\dot{\pi}^0(x) = \{\pi^0(x), H'\} = - \int d^3x' \{\pi^0(x), A_0(x') \partial_a' E^a(x')\} = \int d^3x' (\partial_a' E^a(x')) \delta^3(x - x') = \partial_a E^a(x)$$

となる。

■整合性の条件から生じる拘束条件が  $\partial_a E^a = 0$  だけであることの確認 全ハミルトニアン  $H' = H + \pi(\mu)$  を用いて、 $\dot{\pi}^0 = \partial_a E^a = \partial_a \pi^a$  の時間微分

$$\dot{\pi}^0(x) = \{\partial_a \pi^a(x), H'\}$$

を計算しよう． $H'$  において Poisson 括弧に寄与するのは磁場の 2 乗の項だけであり，

$$\{\partial_a \pi^a(x), H'\} = \delta_{bc} \partial_a \int d^3 x' \{E^a(x), B^b(x')\} B^c(x')$$

となる．ここで

$$\begin{aligned} \{E^a(x), B^b(x')\} &= -\frac{1}{2} \varepsilon^{bcd} \{E^a(x), F_{cd}(x')\} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{bcd} [\partial_c' \{E^a(x), A_d(x')\} - \partial_d' \{E^a(x), A_c(x')\}] \\ &= \varepsilon^{bca} \partial_c' \delta^3(x - x') \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \{\partial_a \pi^a(x), H'\} &= \delta_{bc} \partial_a \int d^3 x' \varepsilon^{bda} \{\partial_d' \delta^3(x - x')\} B^c(x') \\ &= -\varepsilon^{bda} \partial_a \int d^3 x' \{\partial_d' B^b(x')\} \delta^3(x - x') \\ &= -\varepsilon^{bda} \partial_a \partial_d B^b = 0 \end{aligned}$$

となる．よって整合性の条件  $\dot{\pi}^0(x) = 0$  は自明な関係  $0 = 0$  を与えるだけであり，これ以上新たな拘束条件は現れない．

なお，たった今得られた関係

$$\int d^3 x' \{\partial_a \pi^a(x), \vec{B}^2(x')\} = 0 \quad (20)$$

は， $F_{ab} F^{ab} = -2\vec{B}^2$  に注意すると次のように示すこともできる (付録 E.3.1)．

$$\begin{aligned} &\int d^3 y \{\partial_a \pi^a(x), \vec{B}^2(y)\} \\ &= -\frac{1}{2} \partial_a \int d^3 y \{\pi^a(x), F_{bc}(y) F^{bc}(y)\} \\ &= -\frac{1}{2} \partial_a \int d^3 y (\{\pi^a(x), F_{bc}(y)\} F^{bc}(y) + F_{bc}(y) \{\pi^a(x), F^{bc}(y)\}) \\ &= -\partial_a \int d^3 y \{\pi^a(x), F_{bc}(y)\} F^{bc}(y) \\ &= -\partial_a \int d^3 y (\{\pi^a(x), \partial_b A_c(y)\} F^{bc}(y) - \{\pi^a(x), \partial_c A_b(y)\} F^{bc}(y)) \\ &= \partial_a \int d^3 y (\{\pi^a(x), A_c(y)\} \partial_b F^{bc}(y) - \{\pi^a(x), A_b(y)\} \partial_c F^{bc}(y)) \quad (\text{部分積分した}) \\ &= -\partial_a \int d^3 y (\delta^a_c \delta(\vec{x} - \vec{y}) \partial_b F^{bc}(y) - \delta^a_b \delta(\vec{x} - \vec{y}) \partial_c F^{bc}(y)) \\ &= -\partial_a (\partial_b F^{ba}(x) - \partial_c F^{ac}(x)) = \partial_a \partial_b F^{ba}(x) = 0. \end{aligned}$$

■「上に示した不鮮明化を施した拘束条件とハミルトニアン の Poisson 括弧を考えると，実際にゼロになることが見いだされる」(p.55, 1.8-9) について Poisson 括弧  $\{G(\lambda), H\}$  を計算しよう．ハミルトニアン (4.22):

$$H = \int \left\{ \frac{1}{2} (E^a E^b \delta_{ab} + B^a B^b \delta_{ab}) - A_0 \partial_a E^a \right\} d^3 x$$

の第 1 項 ( $E^a E^b \delta_{ab}$  の項) との Poisson 括弧は，すぐ後で見える式 (4.25):  $\{G(\lambda), E^a\} = 0$  よりゼロである．また  $\pi^a = E^a$  に注意すると，上式 (20) はハミルトニアン の第 2 項 ( $B^a B^b \delta_{ab}$  の項) と  $G(\lambda) \equiv \int d^3 x \lambda \partial_a E^a$  の

Poisson 括弧がゼロであることを意味する。さらに第 3 項との Poisson 括弧は、 $A_0$  が正準変数ではないことに注意し、再び式 (4.25): $\{G(\lambda), E^a\} = 0$  を用いて

$$\left\{ G(\lambda), - \int A_0(x) \partial_a E^a(x) d^3x \right\} = - \int A_0(x) \partial_a \{G(\lambda), E^a(x)\} d^3x = 0$$

と計算できる。以上より  $\{G(\lambda), H\} = 0$  である。全ハミルトニアン  $H' = H + \pi(\mu)$  との Poisson 括弧も  $\{G(\lambda), H'\} = 0$ 。

■ $G(\lambda)$  との Poisson 括弧 (4.25),(4.26) の確認 式 (4.20): $\{E_b(x'), A^a(x)\} = \delta_b^a \delta^3(x - x')$ , および

$$\{E^b(x'), E^a(x)\} = \int d^3x'' \sum_c \left\{ \frac{\delta E^b(x')}{\delta A_c(x'')} \frac{\delta E^a(x)}{\delta E^c(x'')} - \frac{\delta E^b(x')}{\delta E^c(x'')} \frac{\delta E^a(x)}{\delta A_c(x'')} \right\} = 0$$

を用いると、

$$\begin{aligned} \{G(\lambda), E^a(x)\} &= \int d^3x' \lambda(x') \partial_b' \{E^b(x'), E^a(x)\} \\ &= 0 : (4.25), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{G(\lambda), A_a(x)\} &= \int d^3x' \lambda(x') \partial_b' \{E^b(x'), A_a(x)\} \\ &= - \int d^3x' \{\partial_b' \lambda(x')\} \{E^b(x'), A_a(x)\} \\ &= - \partial_a \lambda(x) : (4.26) \end{aligned}$$

が得られる。

■式 (4.27): $\{\pi(\mu), A_0\} = \mu$  の導出

$$\{\pi(\mu), A_0(x)\} = \int d^3x' \mu(x') \{\pi^0(x'), A_0(x)\}$$

において、ここでは  $A_0, \pi^0$  を正準変数として Poisson 括弧を

$$\begin{aligned} \{\pi^0(x'), A_0(x)\} &= \int d^3x'' \left\{ \frac{\delta \pi^0(x')}{\delta A_0(x'')} \frac{\delta A_0(x)}{\delta \pi^0(x'')} - \frac{\delta \pi^0(x')}{\delta \pi^0(x'')} \frac{\delta A_0(x)}{\delta A_0(x'')} \right\} \\ &= - \int d^3x'' \delta^3(x' - x'') \delta^3(x - x'') \\ &= - \delta^3(x - x') \end{aligned}$$

と計算すると、 $\{\pi(\mu), A_0(x)\} = -\mu(x)$  が得られ、実際には式 (4.27) 右辺にはこのように負号が付くと考えられる。(あるいは等価的に  $\{A_0(x), \pi(\mu)\} = \mu(x)$  と書くのが自然である。) いずれにせよ  $A_0$  には  $x$  の任意関数の違いが生じるという結果に変わりはない。

■Poisson 括弧  $\{A_a, H\}$  の式 (4.28) の導出 ハミルトニアン (4.22):

$$H = \int \left\{ \frac{1}{2} (E^a E^b \delta_{ab} + B^a B^b \delta_{ab}) - A_0 \partial_a E^a \right\} d^3x$$

の第 1 項 ( $E^a E^b \delta_{ab}$  の項) の寄与は

$$\{A_a(x), E^b(x') E^c(x')\} \delta_{bc} = 2E^b(x') \{A_a(x), E^c(x')\} \delta_{bc} = 2E^b(x') \delta_a^c \delta^3(x - x') \delta_{bc} = 2E_a(x') \delta^3(x - x')$$

より  $\int d^3x' \frac{1}{2} \{A_a(x), E^b(x') E^c(x')\} \delta_{bc} = E_a(x)$ , 第2項 ( $B^a B^b \delta_{ab}$  の項) の寄与は

$$\{A_a(x), B^b(x')\} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{bcd} \{A_a(x), F_{cd}(x')\} = -\varepsilon^{bcd} \partial_c' \{A_a(x), A_d(x')\} = 0$$

よりゼロ, 第3項の寄与は

$$\begin{aligned} \{A_a(x), A_0(x') \partial_b' E^b(x')\} &= A_0(x') \partial_b' \{A_a(x), E^b(x')\} \quad (A_0 \text{ は正準変数でない}) \\ &\rightarrow -\{\partial_b' A_0(x')\} \delta_a^b \delta^3(x-x') \quad (x' \text{ の空間積分の下で}) \\ &= -\{\partial_a' A_0(x')\} \delta^3(x-x') \end{aligned}$$

より  $-\int d^3x' \{A_a(x), A_0(x') \partial_b' E^b(x')\} = \partial_a A_0(x)$  なので, 式 (4.28):

$$\{A_a(x), H\} = E_a(x) + \partial_a A_0(x)$$

を得る. (全ハミルトニアン  $H' = H + \pi(\mu)$  を用いても結果は同じ.)

■Poisson 括弧  $\{E^a, H\}$  の式 (4.29) の導出 ハミルトニアン (4.22):

$$H = \int \left\{ \frac{1}{2} (E^a E^b \delta_{ab} + B^a B^b \delta_{ab}) - A_0 \partial_a E^a \right\} d^3x$$

の第1項 ( $E^a E^b \delta_{ab}$  の項) の寄与は

$$\{E^a(x), E^b(x') E^c(x')\} = 0$$

よりゼロ, 第2項 ( $B^a B^b \delta_{ab}$  の項) の寄与は

$$\begin{aligned} \{E^a(x), B^b(x') B^c(x')\} \delta_{bc} &= 2B^c(x') \{E^a(x), B^c(x')\} \delta_{bc} = 2B_b(x') \{E^a(x), B^b(x')\}, \\ \{E^a(x), B^b(x')\} &= -\frac{1}{2} \varepsilon^{bcd} \{E^a(x), F_{cd}(x')\} = -\varepsilon^{bcd} \partial_c' \{E^a(x), A_d(x')\} = \varepsilon^{bca} \partial_c' \delta^3(x-x'), \\ \therefore \{E^a(x), B^b(x') B^c(x')\} \delta_{bc} &= 2B_b(x') \varepsilon^{bca} \partial_c' \delta^3(x-x') \\ &\rightarrow -2\varepsilon^{abc} \{\partial_c' B_b(x')\} \delta^3(x-x') \quad (x' \text{ の空間積分の下で}) \\ &= 2\varepsilon^{abc} \{\partial_b' B_c(x')\} \delta^3(x-x') \end{aligned}$$

より  $\int d^3x' \frac{1}{2} \{E^a(x), B^b(x') B^c(x')\} \delta_{bc} = \varepsilon^{abc} \partial_b B_c(x)$ , 第3項の寄与は

$$\begin{aligned} \{E^a(x), A_0(x') \partial_b' E^b(x')\} &\rightarrow A_0(x') \partial_b' \{E^a(x), E^b(x')\} \quad (A_0 \text{ は正準変数でない}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

よりゼロと計算できる. 以上より式 (4.29) を得る. (全ハミルトニアン  $H' = H + \pi(\mu)$  を用いても結果は同じ.)

#### 4.4 完全拘束系

本節では一般相対性理論において重要となる特別な種類の拘束系を説明する. Newton 力学を例にとろう. Newton の法則  $\vec{F} = m\vec{a}$  が成り立つ時間  $T$  [真の時間] の代わりに, 狂った時計で測った時間  $t$  [座標時間] ( $T$  の既知関数) を用いることを考える.

ドットを  $t$  による微分とすると, [1 粒子の 1 次元的な運動に対して] 作用は

$$S = \int dTL \left( x, \frac{dx}{dT} \right) = \int dt \tilde{T} L \left( x, \frac{\dot{x}}{\tilde{T}} \right), \quad (4.31)$$

自由粒子に対しては

$$S = \int dt \frac{m \dot{x}^2}{2 \dot{T}}$$

であり [以降, 被積分関数  $\dot{T}L = \frac{m \dot{x}^2}{2 \dot{T}}$  を改めて  $L$  と書く], これは時計の変更  $t \rightarrow f(t)$  に対する“パラメーター付け替え不変性”を持つ [本稿次節で確認].  $x(t), T(t)$  を配位変数として, Lagrange の運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}}{\dot{T}} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}^2}{\dot{T}^2} \right) = 0 \quad (4.33)$$

となる. [本稿次節で確認. 第 1 式は運動量保存則を, 第 2 式はエネルギー保存則を表す.]  $t = T$  とすると, これらは自由粒子の運動方程式  $\ddot{x} = 0$  に帰着する.

$x$  と  $T$  に正準共役な運動量はそれぞれ

$$p_x \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \frac{\dot{x}}{\dot{T}}, \quad p_T \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{T}} = -\frac{m \dot{x}^2}{2 \dot{T}^2} \quad (4.34-35)$$

なので [符号の違いを除き, 通常運動量とエネルギーに対応], ハミルトニアン

$$H = p_T \dot{T} + p_x \dot{x} - \frac{m \dot{x}^2}{2 \dot{T}^2}$$

はゼロになる. したがって, このような系において“時間発展”はない. しかしながら拘束条件

$$\phi(x, p_x, T, p_T) = p_T + \frac{p_x^2}{2m} = 0$$

が存在しており, この拘束条件の生成する“流れ”だけが系の“力学”を表す. [式 (4.34-35) の下で  $H = \phi \dot{T}$  なので,  $H = 0$  となるのが拘束条件そのものである.] このような系を完全拘束系と呼ぶ. これは様々な狂った時計による等価な記述を関係付ける対称性だけが“力学”を生成しており, 真の力学からは時計の任意性の影響が除かれていると解釈できる.

このように敢えて狂った時計を用いることは, 恣意的で無意味に見えるかもしれない. しかし一般相対性理論では, 任意の時間変数を選ぶことができるため, これと驚くほどよく似た状況に直面することになる.

我々が考えている系ではハミルトニアンがゼロになるため, 全ハミルトニアン [式 (4.11)] は単に, 拘束条件の式  $\phi$  を用いて

$$H_{\text{Tot}} = N(t) \phi(x, p_x, T, p_T)$$

で与えられる. ここに Lagrange の未定乗数  $N(t)$  は通常, “経時因子” (lapse) と呼ばれる. このハミルトニアンの下での発展方程式は

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \{x, H_{\text{Tot}}\} = N \frac{p_x}{m}, & \dot{p}_x &= \{p_x, H_{\text{Tot}}\} = 0, \\ \dot{T} &= \{T, H_{\text{Tot}}\} = N, & \dot{p}_T &= 0 \end{aligned}$$

となり [未定乗数  $N(t)$  は微分しない],  $N = (\text{一定}) = 1$  とおけば通常の Newton 力学の結果が再現される [あるいは  $N(t) = \dot{T}$  と同定したことから (第 3 式と整合),  $\frac{dx}{dT} = \frac{p_x}{m}$ , etc].

どのような時計の時間  $t$  を用いても合意が得られる物理的な予言, つまりパラメーターの付け替えに関して不変な, よく定義された設問は, 「指定された Newton 時刻  $T$  における  $x$  の値は何か?」という類のものである. 宇宙論で我々が問うことのできる質問は, 「我々が時計を定義した宇宙の部分において 1776 年になったときに, その部分はどうなっているか?」といったものになる.

## 4.4 節について

■作用 (4.31) のパラメーター付け替え不変性の確認 パラメーターの付け替え  $t \rightarrow \tau$  に対して, 作用 (4.31) は

$$S = \int dt \dot{T} L \left( x, \frac{\dot{x}}{\dot{T}} \right) = \int \frac{d\tau}{\dot{\tau}} \left( \frac{dT}{d\tau} \dot{\tau} \right) L \left( x, \frac{(dx/d\tau)\dot{\tau}}{(dT/d\tau)\dot{\tau}} \right) = \int d\tau \frac{dT}{d\tau} L \left( x, \frac{(dx/d\tau)}{(dT/d\tau)} \right)$$

となるので, 不変に留まる. これは作用がもともと式 (4.31) 第 2 辺のように, 狂った時計の読みを用いずに表現できることから期待される結果である.

■Lagrange の運動方程式 (4.33) の確認 第 1 式は  $x(t)$  に関する Lagrange 方程式

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left( m \frac{\dot{x}}{\dot{T}} \right)$$

による. 第 2 式は  $T(t)$  に関する Lagrange 方程式

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{T}} - \frac{\partial L}{\partial T} = - \frac{d}{dt} \left( \frac{m \dot{x}^2}{2 \dot{T}^2} \right)$$

による. 第 1 式は自由粒子の運動方程式を表しているため, 第 2 式のエネルギー保存則を含んでいると期待できる. 実際,

$$\text{第 1 式: } 0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}}{\dot{T}} \right) = \frac{\ddot{x}\dot{T} - \dot{x}\ddot{T}}{\dot{T}^2}, \quad \text{第 2 式: } 0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}^2}{\dot{T}^2} \right) = \frac{2\dot{x}(\ddot{x}\dot{T} - \dot{x}\ddot{T})}{\dot{T}^3}$$

はいずれも  $\ddot{x}\dot{T} - \dot{x}\ddot{T} = 0$  と等価である.

■弦理論と完全拘束系 [16, pp.581–582] 弦理論の共変性が明白な定式化においても, 完全拘束系と遭遇する. 量子論では「拘束条件があれば, それ [拘束条件の式  $\phi$ ] も演算子へと移行し, それは波動関数を消滅させなければならない演算子となる」(p.72 下から 3,2 行) が, 実際, 共変な弦理論ではハミルトニアンはすべての物理的な状態を消滅させる. Schrödinger 方程式は状態の時間発展方程式ではなく, 状態  $|\Phi\rangle$  に対する制約の式  $H|\Phi\rangle = 0$  へと転化する. 共変な状態は時刻のラベルを備えており, この制約は——粗く言うならば——状態の時刻ラベルと位置ラベルの間の関係を固定する. 運動量空間ではエネルギー  $p^0$  と運動量  $\vec{p}$  の間の制約となり, 具体的には質量殻条件にあたる.

## 関連文献について

拘束条件を持つ系のハミルトニアン形式に関する優れた文献は, Hanson, Regge, and Teitelboim (1976) である. Dirac による元々の取扱い (2001) も読みやすい. もうひとつの参考文献は Henneaux and Teitelboim (1992) で, これにはパラメーター付けが為された系の扱いが含まれているが, この題材については Kiefer (2006) でも論じられている. Date (2010) の講義録も良質である.

ここで言及されている関連文献を, 巻末の参考文献リスト (pp.171–176) から抜粋しておく.

- Date, G. (2010) “Lectures on constrained systems”, arXiv: 1010.2062 [gr-qc] [accessed 11 March 2011].
- Dirac, P. (2001) “Lectures in Quantum Mechanics”, Dover.

- Hanson, A., Regge, T., and Teitelboim, C. (1976) “Constrained Hamiltonian Systems”. Accademia Nazionale Lincei, Rome. <https://scholarworks.iu.edu/dspace/handle/2022/3108>
- Henneaux, M. and Teitelboim, C. (1992) *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, Princeton.
- Kiefer, C. (2006) *Quantum Gravity*. Oxford Science Publications, Oxford.



## 第 5 章 Yang-Mills 理論

### 5.1 運動学的な構成と力学

Ashtekar 変数を用いて表した一般相対性理論は,  $su(2)$  Yang-Mills 理論に似たものになる. そこで Yang-Mills 理論のいくつかの側面について, ここで論じておく. ただし Lie 群や Lie 代数の知識を直接的に利用することは, なるべく避ける.

行列式が 1 の 2 次元のユニタリー行列は  $SU(2)$  群を成す. そのような行列は Pauli 行列

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

の指数関数をとると得られるので, Pauli 行列  $\sigma^i$  は  $su(2)$  代数を生成すると言われる.

ベクトルポテンシャル  $A_\mu$  は  $su(2)$  代数の要素として導入され,  $\sigma^i$  を代数の基底として

$$A_\mu = \sum_{i=1}^3 A_\mu^i \sigma^i$$

と書ける (群の  $SU(2)$  行列表現  $[\sim e^{i\theta^j \sigma^j / 2}]$  との混同に注意) [付録 F.2 の式 (170) に対応]. ここで  $A_\mu$  は添字  $\mu$  によって識別される 4 種類の行列であり,  $A_\mu^i$  はその基底  $\sigma^i$  に関する成分である. これを用いて共変微分

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - i \frac{g}{2} \sigma^i A_\mu^i, \quad g: \text{“結合定数”} \quad (5.3)$$

を定義する (これ以降, 繰り返された添字  $i, j, \dots$  についても和をとる).

**note** 共変微分の名前の由来は付録 F.2 参照. 式 (5.3) は  $2 \times 2$  の行列であり, 行列記法の物質場  $\phi^i$  に対する作用は

$$D_\mu \phi^i = \partial_\mu \phi^i - ig (A_\mu)_i^j \phi^j$$

となる (付録 F.2). p.62 訳註の式

$$(D_\mu \phi)^i \equiv \partial_\mu \phi^i + g \varepsilon^{ijk} A_\mu^j \phi^k \quad (5.3^*)$$

は付録 F.2 末尾の

$$(D_\mu)^{ac} = \partial_\mu \delta^{ac} - ig A_\mu^b [\text{ad}(T_b)]^{ac} (= \partial_\mu \delta^{ac} + g f_{abc} A_\mu^b)$$

に対応する.

Pauli 行列は [角運動量の交換関係に対応する] 交換関係

$$[\sigma^i, \sigma^j] = 2i \varepsilon^{ijk} \sigma^k$$

を満たし, 右辺の因子  $2\varepsilon^{ijk}$  は  $su(2)$  代数の構造定数にあたる.

共変微分の交換子は

$$[D_\mu, D_\nu] = -\frac{g}{2} F_{\mu\nu}^i \sigma^i, \quad (5.6)$$

$$F_{\mu\nu}^i \equiv \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g \varepsilon^{ijk} A_\mu^j A_\nu^k \quad (5.7)$$

と計算される [付録 F.2 の式 (175), 付録 F.3 の式 (187) に対応]. これは場のテンソル  $F_{\mu\nu}^i$  が “曲率” として現れることを意味している.

note 上式 (5.6) は曲率テンソルの導入に用いられる 3.2 節の式 (3.12): $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\lambda = R^\lambda_{\rho\mu\nu}V^\rho$  と比較される。

また式 (5.7) は曲率テンソルの定義式

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} \equiv \partial_\rho\Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \partial_\sigma\Gamma^\mu_{\nu\rho} + \Gamma^\mu_{\alpha\rho}\Gamma^\alpha_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu_{\alpha\sigma}\Gamma^\alpha_{\nu\rho}$$

に対応していることが見て取れる。

場のテンソルが“曲率” (2つの共変微分の交換子) として現れることは、美しい幾何学的な帰結であるが (脚注 2: 幾何学的な観点からは、Yang-Mills 理論におけるベクトルポテンシャルは‘接続’であり、場のテンソルは‘曲率’である。これ以降、このような幾何学的な呼称も併用する。), 本書の範囲内でこれを十分に扱うことはできない。Lie 群と Lie 代数に関して詳述しなければならないからである。我々は、この美的な暗示が、読者にとって、そのような話題を別の機会に掘り下げたための動機づけになることを期待したい。よい入門が Baez and Muniain (1994) によって与えられている [本稿章末の関連文献の抜粋を参照]。 (p.63)

この点について、本稿の付録 F.2 でフォローする。

また場のテンソル (5.7) における  $A_\mu^i$  の非線形項は Maxwell 理論にはない特徴であり、“ベクトルボゾン” 同士の相互作用を記述する。それを支配するパラメーター  $g$  が結合定数と呼ばれるのは、このためである。

ここまでの話は Yang-Mills 理論の運動学である。次に Yang-Mills 理論の力学に移ろう。それは形式的には Maxwell 理論のそれと正確に同じになることが判明する。まず、場のテンソルの発散と回転はゼロになる。

$$D_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (5.8)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} D_\nu \mathbf{F}_{\rho\sigma} = 0. \quad (5.9)$$

note  $\mathbf{F}_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu}^i \sigma^i$  である (付録 F.2 の式 (181) 参照)。式 (5.8) の導出は本稿次節で行う。式 (5.9) は付録 F.2 の式 (179) を参照。

ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{4} \int d^3x F_{\mu\nu}^i F^{\mu\nu i} \quad (5.10)$$

であり [付録 F.3 の式 (186) に対応],  $A_0^i$  は Lagrange の未定乗数として振舞う [ここでも  $L$  が  $A_0^i$  に依らないから ( $i$  は空間添字でではなく内部添字)]. 正準変数は  $A_a^i$  と  $E_i^a (\equiv -F^{0a,i})$  であり [本稿次節で確認 (計量の符号を 4.3 節と統一)], Gauss の法則に対応する拘束条件

$$D_a \mathbf{E}^a = 0 \quad (5.11)$$

がある。このとき Yang-Mills 理論の自由度は Maxwell 理論の 3 倍となる (表 1 参照)。

不鮮明化した Gauss の法則の条件式  $G(\lambda) = \int d^3x \lambda^i (D_a E^a)^i$  との Poisson 括弧を計算すると、

$$\{G(\lambda), A_a^i\} = \partial_a \lambda^i + g \varepsilon^{ijk} A_a^j \lambda^k = (D_a \lambda)^i \quad (5.12)$$

が得られる [本稿次節で導出]。これを Maxwell 理論の式 (4.26): $\{G(\lambda), A_a\} = \partial_a \lambda$  と比べると、生成されるゲージ変換がより複雑になっている。また Maxwell 理論 [の式 (4.25): $\{G(\lambda), E^a\} = 0$ ] とは異なり、Yang-Mills 理論において  $G(\lambda)$  と場のテンソル [電磁場そのもの] との Poisson 括弧はゼロにならない [本稿次節で導出]。これは Yang-Mills 理論における電場と磁場が観測量ではなく、ゲージ変換の下で変換する量であることを意味している。そこで我々は次節において、ゲージ不変な観測量の一例として“ホロノミー”を導入する。

表 1 Yang-Mills 理論の物理的な自由度

	$su(2)$ Yang-Mills 理論	Maxwell 理論
配位変数	$E_i^a$ ( $i = 1, 2, 3, a = 1, 2, 3$ ) (9 つ)	$E^a$ ( $a = 1, 2, 3$ ) (3 つ)
拘束条件	$D_a E^{ai} = 0$ ( $i = 1, 2, 3$ ) (3 つ)	$\partial_a E^a = 0$ (1 つ)
物理的な自由度	6	2

## 5.1 について

■Yang-Mills 理論における“Maxwell 方程式” (5.8) の導出 一般の  $SU(N)$ Yang-Mills 理論に対して証明を行おう。場の強度は付録 F.3 の式 (187):

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c$$

で与えられ、構造定数  $f_{abc}$  の添字に関する完全反対称性から、反対称性

$$F_{\mu\nu}^a = -F_{\nu\mu}^a$$

が従う。自由場のラグランジアン密度は付録 F.3 の式 (186):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$$

で与えられる。これに対し変分原理を適用すると、場  $A_\mu^a$  の変分に伴う作用  $S$  の変分は

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int d^4x \delta \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \int d^4x F^{a\mu\nu} \delta F_{\mu\nu}^a \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x F^{a\mu\nu} \{ \partial_\mu \delta A_\nu^a - \partial_\nu \delta A_\mu^a + gf_{abc} (A_\nu^c \delta A_\mu^b + A_\mu^b \delta A_\nu^c) \} \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \{ -(\partial_\mu F^{a\mu\nu}) \delta A_\nu^a + (\partial_\nu F^{a\mu\nu}) \delta A_\mu^a + gf_{abc} F^{a\mu\nu} (A_\nu^c \delta A_\mu^b + A_\mu^b \delta A_\nu^c) \} \end{aligned}$$

となる。最右辺  $\{\dots\}$  内の最初の 2 項は、第 2 項で添字の入れ替え  $\mu \leftrightarrow \nu$  を行くと

$$-(\partial_\mu F^{a\mu\nu}) \delta A_\nu^a + (\partial_\nu F^{a\mu\nu}) \delta A_\mu^a = -2(\partial_\mu F^{a\mu\nu}) \delta A_\nu^a = -2(\partial_\mu F^{a\mu\nu}) \delta_{ab} \delta A_\nu^b$$

とまとめられる。後ろの 2 項は、第 3 項で添字を  $\mu \leftrightarrow \nu$  と入れ替え、第 4 項で添字を  $b \leftrightarrow c$  と入れ替えると、

$$gf_{abc} F^{a\mu\nu} (A_\nu^c \delta A_\mu^b + A_\mu^b \delta A_\nu^c) = gf_{abc} F^{a\nu\mu} A_\mu^c \delta A_\nu^b + gf_{acb} F^{a\mu\nu} A_\mu^c \delta A_\nu^b = -2gf_{abc} F^{a\mu\nu} A_\mu^c \delta A_\nu^b$$

とまとめられる。よって

$$0 = \delta S = \int d^4x \{ (\partial_\mu F^{a\mu\nu}) \delta_{ab} + gf_{abc} F^{a\mu\nu} A_\mu^c \} \delta A_\nu^b$$

が任意の変分  $\{\delta A_\nu^b\}$  に対して成り立つため、運動方程式

$$\partial_\mu F^{b\mu\nu} + gf_{abc} F^{a\mu\nu} A_\mu^c = 0 \tag{21}$$

を得る。

次に、これが式 (5.8):  $D_\mu F^{\mu\nu} = 0$  と等価であることを確認しよう。場の強度の共変微分は、付録 F.2 の式 (179):

$$D_\nu F_{\rho\sigma} \equiv \partial_\nu F_{\rho\sigma} - ig[A_\nu, F_{\rho\sigma}],$$

あるいは書き換えて

$$\begin{aligned} (D_\nu F_{\rho\sigma}^a) T_a &= (\partial_\nu F_{\rho\sigma}^a) T_a - ig A_\nu^a F_{\rho\sigma}^b [T_a, T_b] \\ &= (\partial_\nu F_{\rho\sigma}^a) T_a + gf_{abc} A_\nu^a F_{\rho\sigma}^b T_c \end{aligned}$$

で定義される。ここに右から  $T_d$  を掛けてトレースをとり、基底の規格直交性 (158):  $\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}$  を用いると、成分の関係としては

$$\begin{aligned} D_\nu F_{\rho\sigma}^d &= \partial_\nu F_{\rho\sigma}^d + gf_{abd} A_\nu^a F_{\rho\sigma}^b \\ &= \partial_\nu F_{\rho\sigma}^d + gf_{bda} F_{\rho\sigma}^b A_\nu^a \end{aligned} \quad (22)$$

と書ける。すると

$$D_\mu F^{b\mu\nu} = \partial_\mu F^{b\mu\nu} + gf_{abc} F^{a\mu\nu} A_\mu^c$$

なので、上で得た運動方程式 (21) は  $D_\mu F^{b\mu\nu} = 0$  となっている。これは  $F^{\mu\nu} = F^{b\mu\nu} T_b$  に対する式 (5.8):

$$D_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

を意味する。

■運動量密度が  $E_a^i$  であることの確認 ( $i$ :空間添字,  $a$ :内部添字) Maxwell 理論と同様、

$$\pi_a^i = \frac{\delta L}{\delta \dot{A}_a^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_a^i)} = -F^{a,0i} \equiv E_a^i$$

で良い (Yang-Mills 理論のラグランジアンは付加的な項は寄与を持たない)。

■拘束条件 (5.11) の確認 場の強度の共変微分は上式 (22) で定義される。ただしここでも付録 F の表記に合わせて、空間添字を  $i, j, \dots$ 、内部添字を  $a, b, \dots$  で表す (教科書と逆であることに注意)。これは特に電場  $E_a^i = -F^{a,0i}$  に対して

$$D_\nu E_a^i = \partial_\nu E_a^i + gf_{bac} E_b^i A_\nu^c$$

となる。

さて、電場と同様に Yang-Mills 理論の磁場も、場の強度の成分として定義する。

$$E_a^i \equiv F_{0i}^a = \partial_0 A_i^a - \partial_i A_0^a + gf_{abc} A_0^b A_i^c, \quad B_a^i \equiv -\varepsilon_{ijk} F_{jk}^a.$$

するとハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x (\pi_a^\mu \dot{A}_\mu^a - \mathcal{L}) \\ &= \int d^3x \left( F^{a,\mu 0} \partial_0 A_\mu^a + \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a \right) \\ &= \int d^3x \left\{ E_a^i (E_a^i + \partial_i A_0^a - gf_{abc} A_0^b A_i^c) + \frac{1}{2} (\vec{B}_a^2 - \vec{E}_a^2) \right\} \\ &= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} (\vec{E}_a^2 + \vec{B}_a^2) - A_0^a \partial_i E_a^i - gf_{abc} E_a^i A_0^b A_i^c \right\} \end{aligned}$$

と修正される。(Maxwell 理論の式 (4.22) と比較すると、構造定数の項が新たに加わっている。) よって不鮮明化した 1 次拘束量  $\pi(\mu) \equiv \int d^3x \mu^a \pi_a^0$  を導入して全ハミルトニアン  $H' = H + \pi(\mu)$  を定義すると、整合性の条件は

$$\begin{aligned} 0 = \dot{\pi}_a^0 &= \{\pi_a^0(x), H'\} = - \int d^3x' [\{\pi_a^0(x), A_0^b(x')\} \partial_i' E_a^i(x') + g f_{bcd} E_b^i(x') \{\pi_a^0(x), A_0^c(x')\} A_i^d(x')] \\ &= \partial_i E_a^i + g f_{bad} E_b^i A_i^d = D_i E_a^i \end{aligned}$$

を与える。

■場  $A_\mu^i, F_{\mu\nu}^i$  と拘束条件の式  $G(\lambda)$  の Poisson 括弧の計算 引き続き付録 F の表記に合わせて、空間添字を  $i, j, \dots$ , 内部添字を  $a, b, \dots$  で表す (教科書と逆であることに注意)。拘束条件の式は

$$G(\lambda) = \int d^3x \lambda^b (D_j E^j)^b = \int d^3x \lambda^b (\partial_j E_b^j + g f_{cbd} E_c^j A_j^d)$$

である。また、ここでは添字  $a, b, \dots$  で指定される複数種類のゲージ場を扱っており、基本的な Poisson 括弧 (4.20) は

$$\{A_i^a(x), E_b^j(x')\} = \delta_b^a \delta_i^j \delta^3(x - x')$$

と一般化されることに注意する。

するとゲージ場  $A_i^a$  との Poisson 括弧は、

$$\begin{aligned} \{G(\lambda), A_i^a(x)\} &= \int d^3x' \lambda^b(x') [\partial_j' \{E_b^j(x'), A_i^a(x)\} + g f_{cbd} \{E_c^j(x') A_j^d(x'), A_i^a(x)\}] \\ &= \int d^3x' \lambda^b(x') [\partial_j' \{-\delta_b^a \delta_i^j \delta^3(x - x')\} + g f_{cbd} \{-\delta_c^a \delta_i^j \delta^3(x - x')\} A_j^d(x')] \\ &= \partial_i \lambda^a(x) - g f_{abd} A_i^d(x) \lambda^b(x) \\ &= \partial_i \lambda^a(x) + g f_{abc} A_i^b(x) \lambda^c(x) \\ &\equiv D_i \lambda^a(x) : (5.12) \end{aligned}$$

と計算される。これは付録 F.2 における、ゲージ場  $A_\mu^i$  の無限小変換の式 (183):

$$\delta A_\mu^a(x) = \partial_\mu \theta^a(x) + g f_{abc} A_\mu^b(x) \theta^c(x) \equiv D_\mu \theta^a(x)$$

と整合している (教科書の  $\lambda^a$  が無限小パラメーター  $\theta^a$  の役割を果たす)。

また電場  $E_a^i$  との Poisson 括弧は

$$\begin{aligned} \{G(\lambda), E_a^i(x)\} &= \int d^3x' \lambda^b(x') [\partial_j' \{E_b^j(x'), E_a^i(x)\} + g f_{cbd} \{E_c^j(x') A_j^d(x'), E_a^i(x)\}] \\ &= \int d^3x' \lambda^b(x') \times g f_{cbd} E_c^j(x') \{\delta_a^d \delta_i^j \delta^3(x - x')\} \\ &= g f_{cba} \lambda^b(x) E_c^j(x) \\ &= g f_{abc} E_b^j(x) \lambda^c(x) \end{aligned} \tag{23}$$

と計算される。ところで付録 F.2 における場の強度  $F_{\mu\nu}^i$  の変換則 (178) をゲージ場  $A_\mu^i$  の変換則 (173) と比較すると、 $F_{\mu\nu}^i$  の無限小変換では  $A_\mu^i$  の無限小変換 (183) の第 2 項に対応する項だけが現れることが分かる：

$$\delta F_{\mu\nu}^a = g f_{abc} F_{\mu\nu}^b \theta^c.$$

これは上の結果 (23) と整合している。

## 5.2 ホロノミー

直観的に明らかなように、Maxwell 理論では、多様体上の“あらゆる”閉曲線  $C$  に関して周回積分  $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{s}$  の値を特定すると、多様体全体における場  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  が決まる。[ $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$  は  $C$  を縁とする面  $S$  を貫く磁束である。] またゲージ変換  $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda$  は周回積分  $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{s}$  の値を変えない。

他方、Yang-Mills 理論における場のテンソル [式 (5.7)] は単なるベクトルポテンシャルの回転よりも複雑である。またゲージ変換も Maxwell 理論より複雑であり [式 (5.12)], ベクトルポテンシャルの周回積分はもはやゲージ不変にはならない, そこでベクトルポテンシャルの周回積分に代わる概念として, “ホロノミー”を導入する。

$E^b$  を空間内の曲線  $\gamma^a(t)$  に沿って平行移動することを考える。曲がった空間でのベクトルの平行移動と同様, ここでの平行移動とは, 曲線に沿う  $E^b$  の Yang-Mills 共変微分が

$$\dot{\gamma}^a D_a E^b = 0 \quad (5.14)$$

となることとして定義される。上式は

$$\dot{\gamma}^a(t) \partial_a E^b(t) = +ig \dot{\gamma}^a(t) A_a(t) E^b(t), \quad (5.15)$$

$$\therefore E^b(t) = E^b(0) + ig \int_0^t ds \dot{\gamma}^a(s) A_a(s) E^b(s) \quad (5.16)$$

と書き換えられる [係数を  $-ig \rightarrow +ig$  と修正した (以下同じ), 本稿次節で補足]. [Dyson 級数 (6.3 節) の導出と同じく] 逐次代入により,

$$E^b(t) = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (+ig)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \right. \right. \\ \left. \left. \times \dot{\gamma}^{a_1}(t_1) A_{a_1}(t_1) \dot{\gamma}^{a_2}(t_2) A_{a_2}(t_2) \cdots \dot{\gamma}^{a_n}(t_n) A_{a_n}(t_n) \right\} \right] E^b(0) \quad (5.19)$$

が得られる [導出は本稿次節を参照\*9]. 上式 (5.19) の和は収束し, [...] の部分は  $E^b(0)$  に作用して平行移動した結果  $E^b(t)$  を与えるため, “平行移動関数” (parallel propagator) と呼ばれる。特に  $\gamma^a(t) = \gamma^a(0)$  となる閉曲線に対して, 平行移動関数は“ホロノミー”と呼ばれる\*10。ホロノミーは行列であって, その対角和 (トレース) はゲージ不変である [本稿次節を参照].

ここで“径路順序化積” (path ordered product)

$$P(\mathbf{A}_{a_1}(t_1) \cdots \mathbf{A}_{a_n}(t_n))$$

を, 引数  $t_i$  が大きい因子  $\mathbf{A}_{a_i}(t_i)$  ほど左側に来るように並べ替えた積として導入する。[つまり径路に沿って始点に近い位置の因子から先に, 右側の行列に作用することになる。  $\mathbf{A}_a = A_a^i \sigma^i$  どうしは非可換であるが,

\*9 [...] の部分は  $n=0$  に対して 1,  $n=1$  に対して  $+ig \int_0^t dt_1 \dot{\gamma}^{a_1}(t_1) \mathbf{A}_{a_1}(t_1)$  と約束する。

\*10 時に任意の曲線  $\gamma^a(t) (\neq \gamma^a(0))$  に対する平行移動関数もホロノミーと呼ばれる。本書の後の方では, このような不正確な用法を許容する。

あたかも可換であるかのように並び替えれば良い (式 (5.22)).] すると式 (5.19) において

$$\begin{aligned}
& \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \dot{\gamma}^{a_1}(t_1) \mathbf{A}_{a_1}(t_1) \dot{\gamma}^{a_2}(t_2) \mathbf{A}_{a_2}(t_2) \cdots \dot{\gamma}^{a_n}(t_n) \mathbf{A}_{a_n}(t_n) \\
&= \frac{1}{n!} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \mathbf{P}(\dot{\gamma}^{a_1}(t_1) \mathbf{A}_{a_1}(t_1) \dot{\gamma}^{a_2}(t_2) \mathbf{A}_{a_2}(t_2) \cdots \dot{\gamma}^{a_n}(t_n) \mathbf{A}_{a_n}(t_n)) \\
&= \frac{1}{n!} \mathbf{P} \left( \int_0^t ds \dot{\gamma}^a(s) \mathbf{A}_a(s) \right)^n \tag{5.23}
\end{aligned}$$

と書き換えられるので [理由は本稿次節],

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^b(t) &= \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(+ig)^n}{n!} \mathbf{P} \left( \int_0^t ds \dot{\gamma}^a(s) \mathbf{A}_a(s) \right)^n \right] \mathbf{E}^b(0) \\
&\equiv \mathbf{P} \left[ \exp \left( +ig \int_0^t ds \dot{\gamma}^a(s) \mathbf{A}_a(s) \right) \right] \mathbf{E}^b(0)
\end{aligned}$$

を得る. Maxwell 理論ではホロノミーは単に循環  $\oint \vec{A} \cdot d\vec{s}$  の指数関数となる. したがって我々は循環の概念を Yang-Mills 理論の場合へと一般化したことになる. [自然単位系で  $[\vec{A}] = L^{-1}$  より, 指数関数の中身は無次元 (Maxwell 理論での結合は電荷  $q$  であり,  $[q] = 1$ ).]

証明抜きに述べると, 多様体のあらゆるループに関するホロノミーの対角和が分かれば, 与えられたベクトルポテンシャルに含まれるゲージ不変なすべての情報を再構築することが可能である. このことは Giles (ガイルズ) の定理と呼ばれる (Giles (1981)).

[本節の議論は  $SU(N)$  Yang-Mills 理論全般で成り立ち,  $N = 2$  を仮定していない.]

## 5.2 節について

■式 (5.14),(5.15) について

$$\text{式 (5.14)} : \dot{\gamma}^a D_a \mathbf{E}^b = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{式 (5.15)} : \dot{\gamma}^a \partial_a \mathbf{E}^b = -ig \dot{\gamma}^a \mathbf{A}_a \mathbf{E}^b$$

は, 場の強度の共変微分の定義式

$$D_a \mathbf{E}^b = \partial_a \mathbf{E}^b - ig [\mathbf{A}_a, \mathbf{E}^b]$$

(付録 F.2 の式 (178) と食い違う. しかしながら我々の目的は平行移動関数を定義することであり, そのためには必ずしも電場  $\mathbf{E}^b$  の平行移動を考える必要はない. そこで物質場  $\varphi(x)$  の平行移動を考えることにしよう.

場  $\varphi(x)$  を時空点  $x + dx$  へ無限小平行移動した場 (169)(付録 F.2) は, 行列表記で

$$\varphi_{\parallel}(x + dx) = (1 + ig A_{\mu} dx^{\mu}) \varphi(x)$$

となる. 特に 3 次元空間内の変位  $dx^{\mu} = (0, dx^a)$  を考えると, ここから無限小の平行移動の関数が

$$h(dx) = 1 + ig A_a dx^a \tag{24}$$

となることが読み取れる.

ここで平行移動した場  $\varphi_{\parallel}(x + dx)$  を位置  $x + dx$  での場  $\varphi(x + dx)$  と定義するならば, 差 (171):

$$\begin{aligned}
\varphi(x + dx) - \varphi_{\parallel}(x + dx) &= \{\partial_a \varphi(x) - ig A_a(x) \varphi(x)\} dx^a \\
&\equiv D_a \varphi(x) dx^a
\end{aligned}$$

(付録 F.2, 空間的な変位  $dx^\mu = (0, dx^a)$  に対して) がゼロになる. 曲線  $\gamma^a(t)$  に沿う要素  $dx^a = \dot{\gamma}^a dt$  をとると, この条件は式 (5.14),(5.15) で  $\mathbf{E}^b \rightarrow \varphi$  と改めた関係

$$\dot{\gamma}^a D_a \varphi = 0, \quad \dot{\gamma}^a \partial_a \varphi = +ig \dot{\gamma}^a A_a \varphi$$

を与える. ただし式 (5.15) と比較すると右辺の符号は異なっており, このため教科書における平行移動関数の式 (5.19),(5.24) においても,  $-ig \rightarrow +ig$  と符号を改める必要があると考えられる (本稿では修正済み). 実際, このとき短い経路  $dx^a$  に沿う平行移動関数を考えると, 要素  $dx^a$  の 1 次までの近似で上式 (24) が再現され, 第 2 項の符号は教科書の無限小の平行移動関数の表式 (8.24) とも整合している.

■式 (5.19) の導出 式 (5.16) をそれ自身の右辺に逐次代入すると

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^b(t) &= \mathbf{E}^b(0) + ig \int_0^t dt_1 \dot{\gamma}^{a_1}(t_1) \mathbf{A}_{a_1}(t_1) \mathbf{E}^b(t_1) \\ &= \mathbf{E}^b(0) + ig \int_0^t dt_1 \dot{\gamma}^{a_1}(t_1) \mathbf{A}_{a_1}(t_1) \mathbf{E}^b(0) \\ &\quad + (+ig)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dot{\gamma}^{a_1}(t_1) \mathbf{A}_{a_1}(t_1) \dot{\gamma}^{a_2}(t_2) \mathbf{A}_{a_2}(t_2) \mathbf{E}^b(t_2) \\ &= \mathbf{E}^b(0) + ig \int_0^t dt_1 \dot{\gamma}^{a_1}(t_1) \mathbf{A}_{a_1}(t_1) \mathbf{E}^b(0) \\ &\quad + (+ig)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dot{\gamma}^{a_1}(t_1) \mathbf{A}_{a_1}(t_1) \dot{\gamma}^{a_2}(t_2) \mathbf{A}_{a_2}(t_2) \mathbf{E}^b(0) \\ &\quad + (+ig)^3 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \dot{\gamma}^{a_1}(t_1) \mathbf{A}_{a_1}(t_1) \dot{\gamma}^{a_2}(t_2) \mathbf{A}_{a_2}(t_2) \dot{\gamma}^{a_3}(t_3) \mathbf{A}_{a_3}(t_3) \mathbf{E}^b(t_3) \\ &= \dots \end{aligned}$$

となるため, 式 (5.19) を得る.

■ホロノミーの対角和のゲージ不変性 閉曲線の始・終点を  $\gamma^a(0) = \gamma^a(t) \equiv x^a$ ,  $x \equiv (x^0, \vec{x})$  と書き, ホロノミーを  $h_\gamma(\mathbf{A})$  とおく. 式 (5.19) より

$$\mathbf{E}^b(x) = h_\gamma(\mathbf{A}) \mathbf{E}^b(x)$$

であり, ゲージ変換に際して両辺の場の強度は  $\mathbf{E}^b(x) \rightarrow U(x) \mathbf{E}^b(x) U^{-1}(x)$  と変換するので (付録 F.2 の式 (178) を参照), ホロノミーもまた

$$h_\gamma(\mathbf{A}) \rightarrow U(x) h_\gamma(\mathbf{A}) U^{-1}(x)$$

と変換しなければならない.

我々は電場ではなく物質場  $\varphi(x)$  の平行移動を考えたため,

$$\varphi(x) = h_\gamma(\mathbf{A}) \varphi(x)$$

である. ところが物質場のゲージ変換はユニタリー変換  $\varphi'(x) = U \varphi(x)$  なので,

$$\varphi'(x) = \{U h_\gamma(\mathbf{A}) U^\dagger\} \varphi'(x)$$

となり, いずれにせよホロノミーの変換則が

$$h'_\gamma(\mathbf{A}) = U(x) h_\gamma(\mathbf{A}) U^{-1}(x)$$



であることに変わりはない．(同様に始点  $x_i$  から終点  $x_f$  への平行移動関数  $h(x_f, x_i)$  は,  $h'(x_f, x_i) = U(x_f)h(x_f, x_i)U^{-1}(x_i)$  と変換する [17, p.45]. )

するとホロノミーの対角和は

$$\begin{aligned} \text{tr}(h_\gamma) &\rightarrow \text{tr}(Uh_\gamma U^{-1}) = \begin{cases} \text{tr}(U^{-1}Uh_\gamma) \\ \text{tr}(h_\gamma U^{-1}U) \end{cases} \\ &= \text{tr}(h_\gamma) \end{aligned}$$

となり, 不変に留まる.

■式 (5.23) の説明 式 (5.23) 第 2 辺

$$\frac{1}{n!} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \cdots \int_0^t dt_n \mathbf{P}(\dot{\gamma}^{a_1}(t_1)\mathbf{A}_{a_1}(t_1)\dot{\gamma}^{a_2}(t_2)\mathbf{A}_{a_2}(t_2)\cdots\dot{\gamma}^{a_n}(t_n)\mathbf{A}_{a_n}(t_n))$$

の積分範囲は  $n$  次元空間  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  の“直方体領域”  $0 \leq t_i \leq t$  全体である．これは  $n!$  通りの置換

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \end{pmatrix}$$

に対して, 不等式  $(0 \leq) t_{\pi n} \leq t_{\pi(n-1)} \leq \cdots \leq t_{\pi 2} \leq t_{\pi 1} (\leq t)$  で表される  $n!$  個の領域に分けられる．その各々にわたる積分は

$$\frac{1}{n!} \int_0^t dt_{\pi 1} \int_0^{t_{\pi 1}} dt_{\pi 2} \cdots \int_0^{t_{\pi(n-1)}} dt_{\pi n} \mathbf{P}(\dot{\gamma}^{a_1}(t_1)\mathbf{A}_{a_1}(t_1)\dot{\gamma}^{a_2}(t_2)\mathbf{A}_{a_2}(t_2)\cdots\dot{\gamma}^{a_n}(t_n)\mathbf{A}_{a_n}(t_n))$$

なので

$$\begin{aligned} & \text{(式 (5.23) 第 2 辺)} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi} \int_0^t dt_{\pi 1} \int_0^{t_{\pi 1}} dt_{\pi 2} \cdots \int_0^{t_{\pi(n-1)}} dt_{\pi n} \mathbf{P}(\dot{\gamma}^{a_1}(t_1)\mathbf{A}_{a_1}(t_1)\dot{\gamma}^{a_2}(t_2)\mathbf{A}_{a_2}(t_2)\cdots\dot{\gamma}^{a_n}(t_n)\mathbf{A}_{a_n}(t_n)) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi} \int_0^t dt_{\pi 1} \int_0^{t_{\pi 1}} dt_{\pi 2} \cdots \int_0^{t_{\pi(n-1)}} dt_{\pi n} \dot{\gamma}^{a_{\pi 1}}(t_{\pi 1})\mathbf{A}_{a_{\pi 1}}(t_{\pi 1})\dot{\gamma}^{a_{\pi 2}}(t_{\pi 2})\mathbf{A}_{a_{\pi 2}}(t_{\pi 2})\cdots\dot{\gamma}^{a_{\pi n}}(t_{\pi n})\mathbf{A}_{a_{\pi n}}(t_{\pi n}) \\ &= \frac{1}{n!} \times n! \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \dot{\gamma}^{a_1}(t_1)\mathbf{A}_{a_1}(t_1)\dot{\gamma}^{a_2}(t_2)\mathbf{A}_{a_2}(t_2)\cdots\dot{\gamma}^{a_n}(t_n)\mathbf{A}_{a_n}(t_n) \\ &= \text{(式 (5.23) 最左辺)} \end{aligned}$$

となるから確かに式 (5.23) が成り立つ.

## 関連文献について

Yang-Mills 理論を扱う本は多いが, それらは大抵, 素粒子物理に關係する多くの付加的な題材を同時に扱っている．余分の話題を伴わない読みやすい文献として, Abers and Lee (1973) の論文, Huang (1992) や Gambini and Pullin (1996) の本を薦める．ホロノミーについては Baez and Muniain (1994) の本がよい.

ここで言及されている関連文献を, 巻末の参考文献リスト (pp.171–176) から抜粋しておく.

- Abers, E. and Lee, B. (1973) *Phys. Rep.* **9**, 1.

- Baez, J. and Muniain, J. (1994) *Gauge Fields, Knots and Gravity*. World Scientific, Singapore.
- Gambini, R. and Pullin, J. (1996) *Loops, Knots, Gauge Theories and Quantum Gravity*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Huang, K. (1992) *Quarks, Leptons and Gauge Fields*. World Scientific, Singapore.

## 第 6 章 量子力学と場の量子論の基礎

### 6.1 量子化

量子力学の基礎の復習であり、本稿では目新しい内容を特筆するに留める。

ある種の状況においては、波動関数が運動量の関数であるような極化 [文脈から、基底の選択と推測される (場の理論 (6.2 節) では真空の定義)] を選ぶことが、より便利となる可能性もある。正準変数が沢山ある場合、極化の選択にも多くの方法が生じる。有限個の自由度を備えた系を扱う場合、Stone-von Neumann (ストーン-フォン ノイマン) の定理と呼ばれる命題があって、得られる結果はすべて等価なものになることが知られている (脚注 3: 拘束条件がある系では、Stone-von Neumann 定理は、有限次元 (有限自由度) の状況下においてさえ適用できなくなる。 )。

#### 6.1 節について

■「この理由から、…… $\hbar$  の 1 次までに限られる」(p.72, 1.20,21) について これは因子順序化の曖昧さのためというよりもむしろ、そもそも「古典的な方程式が、演算子の間の恒等式としても ( $\hbar$  の 1 次までにおいて) 成立するという要請を課」(p.72, 1.14,15) しているからと考えられる。

### 6.2 場の量子論の基礎

自由なスカラー場 (Klein-Gordon 場) の量子論の復習であり、本稿では目新しい内容を特筆するに留める。

これでハミルトニアンは、次のように書き直される。

$$\hat{H} = \int d^3p \omega(\vec{p}) \left\{ \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \frac{1}{2} [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] \right\}$$

最後の項は、同じ  $\vec{p}$  を添字に持つ演算子の交換子であり、 $\delta^3(0)$  に比例する。つまり発散する。これは、それぞれの調和振動子の基底エネルギーの総和を表しているに過ぎず、煩わしくはあるけれども、容易に予想されるものである。場に関する実験 (重力を除く) においてはエネルギーの差だけが関心の対象となるので、この発散定数が実験的に検出されることはない。しかし重力を対象に含めると、状況は著しく悪くなり、この発散項を無視することが許されなくなる。ここでは詳しい議論を行わないが、量子場に関する応力-エネルギーテンソルの計算を行うと、それが宇宙定数の形を持つことが見いだされる。観測される宇宙定数の値は極めて小さいので、場の量子論において (少なくとも粗い推測としては) 運動量に切断 (カットオフ) を導入しないかぎり、この項が無限大になるという事実は、明らかに不都合な問題である。これは最終的には、量子重力理論によって克服されるべき最重要問題のひとつと考えられている (これに代わる観点について Bianchi and Rovelli (2010) も参照されたい)。

ここで言及されている関連文献を、巻末の参考文献リスト (pp.171–176) から抜粋しておく。

Bianchi, E. and Rovelli, C. (2010) “Why all these prejudices against a constant?”, arXiv: 1002.3966 [astro-ph.CO] [accessed 11 March 2011].

この段階において、真空状態に対する場の作用  $\hat{\varphi}(x)|0\rangle$  について考察しておくことに意義がある。場の量子論における真空の定義は、量子力学の場合よりも少々微妙なものになる。先ほど言及したように、有限次元系においては Stone-von Neumann の定理が成立し、あらゆる量子力学的な表示が等価であることが保証されている。場の量子論ではこれが成立せず、互いに等価ではない多くの表示が見いだされることになる。本節で行っているように、平坦な時空において場を量子化する際に、通常は真空状態が Poincaré 不変 (脚注 4 : Lorentz 変換と時空内推進 (並進) の下で不変という意味である。) になるような表示が選ばれる。そのような真空状態に対して、因子の順序は、場の運動量の期待値と、ハミルトニアン期待値がゼロになるように選ばれる。

そのような真空に関して、 $\hat{a}_{\vec{p}}|0\rangle = 0$  となる。真空を選ぶために Poincaré 不変性を利用したという事実から、曲った時空における場の量子論を研究する際に困難に直面することが予想される。一般的な曲った時空においては、Poincaré 不変性のような規準の類似物がないからである。これが量子場の理論を重力に適用する際の主要な問題になる。この問題については 10.1 節において再び言及する。

### 6.3 量子場の相互作用と発散

本稿では場の量子論の予備知識の説明は省略し、要点だけをまとめる。

相互作用を導入するために、自由スカラー場のハミルトニアン  $H_0$  に対して

$$H_{\text{int}} = \int d^3x \frac{\lambda}{4!} \varphi^4(\vec{x})$$

という項を付加した “ラムダ-ファイ 4 乗 (lambda phi fourth) 理論” を考える [相互作用ハミルトニアン密度は  $\lambda\varphi^4/4!$ ]。この文脈において、“結合定数”  $\lambda$  は小さいものと仮定される。

相互作用描像における、場と相互作用ハミルトニアン

$$\begin{aligned} \varphi_I(x) &= U(t, t_0) \varphi(x) U^\dagger(t, t_0), & (\varphi(x) : \text{Heisenberg 描像の演算子}) \\ H_I &= e^{iH_0(t-t_0)} H_{\text{int}} e^{-iH_0(t-t_0)} & (H_{\text{int}} : \text{Schrödinger 描像の演算子}) \end{aligned}$$

を定義する。ここに

$$U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}$$

は相互作用描像における時間発展演算子であり [ $|A, t\rangle_I = U(t, t_0) |A, t_0\rangle_I$  となることによる], Dyson 級数

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= T \left( \exp \left[ -i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') \right] \right) \\ &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T(H_I(t_1) H_I(t_2)) + \dots \end{aligned} \quad (6.37)$$

へと展開される (T は時間順序化を表す)。[以上、詳しくは例えば文献 [14, pp.25-26, p.108] を参照.]

ここから、相互作用を持つ系の真空状態 [ $|\Omega\rangle$  ( $H$  の固有状態)] は、相互作用のない自由な理論の真空状態 [ $|0\rangle$  ( $H_0$  の固有状態)] とは異なるという事実を扱う必要がある。煩雑さを避けるために、ここではこの問題を詳しく論じることは行わない。詳細について知りたい読者は、たとえば本節でも参考に行っている Peskin and Schroeder (1995) [の 4.2 節 (本稿章末の関連文献の抜粋を参照)] を見ればよい。 (p.81)

2点相関関数は  $|\Omega\rangle$  に関する真空期待値  $\langle\Omega|T\{\varphi(x)\varphi(y)\}|\Omega\rangle$  として定義される。これを

$$\langle\Omega|T\{\varphi(x)\varphi(y)\}|\Omega\rangle = \lim_{T^* \rightarrow \infty} \frac{\langle 0|T\left(\varphi_I(x)\varphi_I(y)\exp\left[-i\int_{-T^*}^{T^*} dt H_I(t)\right]\right)|0\rangle}{\langle 0|T\left(\exp\left[-i\int_{-T^*}^{T^*} dt H_I(t)\right]\right)|0\rangle} \quad (6.38)$$

のように、自由な理論における真空期待値に関係付けることができる。

**note** この式は Gell-Mann Low の定理と呼ばれ、証明は文献 [18, pp.69–71] にある。QED の文脈では、この式の導出を既に文献 [13, p.297] で行っている。ただし  $|\Omega\rangle$  と  $|0\rangle$  を区別する場合には、教科書で説明されているように (p.82, 1.1),  $T^*$  に小さい虚部を与えて  $T^* \rightarrow \infty(1 - i\varepsilon)$  とする (同じく Peskin の本の 4.2 節)。

式 (6.38) の右辺の指数を展開すると

$$\langle 0|T\{\varphi_I(x_1)\varphi_I(x_2)\cdots\varphi_I(x_n)\}|0\rangle \quad (6.39)$$

という形の因子が現れる。ここで場の正振動数部分 (消滅演算子を含む項)

$$\varphi_I^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} a_{\vec{p}} e^{ip \cdot x}$$

を自由場の真空状態  $|0\rangle$  に作用させるとゼロになるため、式 (6.39) の時間順序化積に Wick の定理を適用すると、正規順序化積は真空期待値に寄与せず、すべての場が縮約された項だけが生き残る。場の縮約

$$\langle\varphi_I(x)\varphi_I(y)\rangle \equiv \langle 0|T\{\varphi_I(x)\varphi_I(y)\}|0\rangle$$

[右辺はユニタリ変換の下で不変なので、描像に依らない] は Feynman 伝播関数

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2 + m^2 - i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}$$

に他ならない。式 (6.38) の右辺の分母を無視すると、 $\lambda$  に関する最低次の補正項は

$$\begin{aligned} & \langle 0|T\left(\varphi_I(x)\varphi_I(y)(-i)\int_{-\infty}^{\infty} dt H_I(t)\right)|0\rangle \\ &= -i\frac{\lambda}{4!} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3z \langle 0|T\{\varphi_I(x)\varphi_I(y)\varphi_I^4(z)\}|0\rangle \\ &= -\frac{3i\lambda}{4!} D_F(x-y) \int d^4z D_F(z-z) - i\lambda \int d^4z D_F(x-z) D_F(y-z) D_F(z-z) \end{aligned} \quad (6.44)$$

となる [最右辺第 2 項の係数を訂正した (同じく Peskin の本の式 (4.44))].

**note** 上式第 2 辺の時間順序化積  $T\{\varphi_I(x)\varphi_I(y)\varphi_I^4(z)\}$  に Wick の定理を適用したときに現れる、すべての場が縮約された項を考える。

1.  $\varphi_I(x)$  を  $\varphi_I(y)$  と縮約する場合、残る 4 つの  $\varphi_I(z)$  をすべて縮約する方法は 3 通りである。(同じ種類の 4 個のものを 2 つの部屋に分ける方法は  $\binom{4}{2} = 6$  通りであるが、2 つの部屋を区別しなければ、方法は  $6/2 = 3$  通りとなるから。)

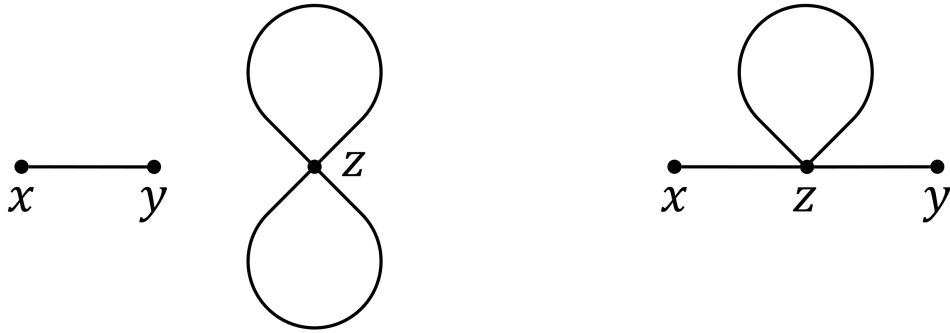


図 13 式 (6.44) に対応する Feynman ダイアグラム

2.  $\varphi_I(x)$  を  $\varphi_I(z)$  と縮約する場合,  $\varphi_I(y)$  は  $\varphi_I(z)$  と縮約し, 残った 2 つの  $\varphi_I(z)$  を縮約することになる.  $\varphi_I(x)$  と縮約される  $\varphi_I(z)$  の選び方は 4 通りあり, このとき  $\varphi_I(y)$  と縮約される  $\varphi_I(z)$  の選び方は 3 通りとなるから, 場合の数は全部で  $4 \times 3 = 12$  通りである.

こうして式 (6.44) の最右辺を得る.

式 (6.44) 最右辺の 2 つの項はそれぞれ図 13 の Feynman ダイアグラムで表される. いずれの項も因子

$$D_F(z-z) = D_F(0) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2 + m^2 - i\epsilon}$$

を含んでおり (図 13 の点  $z$  から出て点  $z$  に入る “おたまじゃくし” (tadpole) の部分に対応), これは運動量  $p$  が大きいところで発散する (“紫外発散”).

## 6.4 繰り込み可能性

$\lambda\varphi^4$  理論に関しては, すべての発散は質量と結合定数, 波動関数に繰り込むことができることが知られている. しかしながら重力理論では結合定数が単位を持っており, 状況は劇的に悪化することを説明する.

計量  $g_{\mu\nu}$  の平坦な時空における値  $\eta_{\mu\nu}$  からのズレ  $h_{\mu\nu}$  を摂動として扱おう.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1.$$

すると重力場の作用 (Einstein-Hilbert 作用) は, 模式的には

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4 x \sqrt{-\det g} R \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4 x [(\partial h)^2 + (\partial h)^2 h + \dots] \end{aligned} \quad (6.50)$$

と展開される [本稿次節で補足, 数係数を訂正]. ここに  $G$  は Newton 定数であり, 自然単位系において長さの自乗の単位を持つ:

$$[G] = L^2. \quad [\text{通常の単位系では } [G] = L^3/MT^2, \text{ 自然単位系では } L = T = M^{-1}.]$$

ところでスカラー場  $\phi$  は長さの逆数の次元を持つ:

$$[\phi] = L^{-1}. \quad [\text{通常の単位系では } [\phi] = M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}.]$$

そこで  $h = \sqrt{G}\tilde{h}$  としてスカラー場と同じ単位を持つ場  $\tilde{h}$  を定義すると、作用 (6.50) は

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \left[ (\partial\tilde{h})^2 + \sqrt{G}(\partial\tilde{h})^2\tilde{h} + \dots \right]$$

と書き換えられる。これは重力子を記述する“自由な理論”の項  $(\partial\tilde{h})^2$  と、 $\sqrt{G}$  を結合定数とする“相互作用”の項から成る。ここでの結合定数は長さの単位を持つので、摂動の次数を上げてゆくと、単位の整合を保つために、被積分関数の分子に、摂動次数に応じて運動量因子を増やしてゆかなければならず、重力の量子論は繰り込み不可能となる [本稿次節で補足]。

これらの項 [発散項] の大部分は低エネルギーにおいて重要ではないので、摂動的な量子重力理論は、低エネルギーにおける有効理論としては意味を持つ (たとえば Donoghue (1994) を参照)。しかしながら高エネルギーにおいて、よい処方は見当たらない。 (p.87)

最後に“漸近安全性 (asymptotic safety) の筋書き (シナリオ)”について言及する。

一般相対性理論のような量子場の繰り込みが不可能な理論においては、発散を相殺するために、原理的には作用汎関数に無限個の相殺項を加える必要があり、そのような事情から理論としての予言能力を欠くことになる。漸近安全性の背後にある概念は、無限個の相殺項が何らかの方法で組み合わされて、理論からの予言が可能になるかもしれない、ということである。 (p.87)

最近になって、このような線に沿った進展が見られたが、ここから量子重力理論として存立可能なものが導けるかどうかについて、一般的な合意は成立していない (Lauscher and Reuter (2002, 2005), Percacci (2006) を参照)。 (p.88)

最後に引用箇所で言及されている関連文献を、巻末の参考文献リスト (pp.171–176) から抜粋しておく。

- Donoghue, J. (1994) *Phys. Rev. D* **50**, 3874.
- Lauscher, O. and Reuter, M. (2002) *Phys. Rev. D* **66**, 025026; *Int. J. Mod. Phys. A* **17**, 993-1002; *Class. Quan. Grav.* **19**, 483-492; *Phys. Rev. D* **65**, 025013.
- Lauscher, O. and Reuter, M. (2005) *JHEP* 0510, 050.
- Percacci, R. (2006) *Phys. Rev. D* **73**, 041501.

## 6.4 節について

■「但し、第 1 項の方は、……発散が相殺されて問題は生じない (……分母も含めて計算すればよい)」 (p.85, 1.2-5) について 文献 [13, p.305] に QED の文脈での説明がある。

Green 関数の式 (12.8) [ $\lambda\phi^4$  理論の式 (6.38) に対応] の分子の摂動展開において現れる非連結の“真空気泡” (vacuum-bubble) のグラフは、必ず Green 関数の分母の  $\langle 0|S|0\rangle$  の展開から現れる同じグラフによって正確に相殺される。

このように分母の寄与を計算に含めることは“真空気泡”を、したがって真空の自由な理論との違いを考慮することになると考えられる。

■式 (6.50) について Einstein-Hilbert 作用

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int R \sqrt{-\det(g)} d^4x$$

と等価な, 計量 (重力ポテンシャル) の 1 階微分までを含む作用 [7, pp.298-300, p.307]

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int \mathcal{G} \sqrt{-\det(g)} d^4x, \quad \mathcal{G} \equiv g^{\mu\nu} (\Gamma^\sigma_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\rho\sigma})$$

を用いた方が簡明な表現が得られる (同文献にならい, 教科書とは逆符号の作用を採用した).  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  とすると,  $\mathcal{G}$  の表式において

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\nu\sigma} &= g^{\mu\nu} g^{\sigma\alpha} g^{\rho\beta} \Gamma_{\alpha,\mu\rho} \Gamma_{\beta,\nu\sigma} \\ &= g^{\mu\nu} g^{\sigma\alpha} g^{\rho\beta} \frac{1}{2} (h_{\alpha\mu,\rho} + h_{\rho\alpha,\mu} - h_{\mu\rho,\alpha}) \frac{1}{2} (h_{\beta\nu,\sigma} + h_{\sigma\beta,\nu} - h_{\nu\sigma,\beta}) \\ &= \frac{1}{4} (h_{\alpha\mu,\beta} + h_{\alpha\beta,\mu} - h_{\beta\mu,\alpha}) (-h^{\alpha\mu,\beta} + h^{\alpha\beta,\mu} + h^{\beta\mu,\alpha}) \\ &= \frac{1}{4} (-h_{\alpha\beta,\mu} h^{\alpha\beta,\mu} + 2h_{\alpha\mu,\beta} h^{\beta\mu,\alpha}), \\ g^{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\rho\sigma} &= g^{\mu\nu} g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} \Gamma_{\alpha,\mu\nu} \Gamma_{\beta,\rho\sigma} \\ &= g^{\mu\nu} g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} \frac{1}{2} (h_{\alpha\mu,\nu} + h_{\nu\alpha,\mu} - h_{\mu\nu,\alpha}) \frac{1}{2} (h_{\beta\rho,\sigma} + h_{\sigma\beta,\rho} - h_{\rho\sigma,\beta}) \\ &= \frac{1}{4} (h_{\alpha\mu}{}^{,\mu} + h^\mu{}_{\alpha,\mu} - h_{,\alpha}) (h_\beta{}^{\alpha,\beta} + h^{\alpha}{}_{,\beta} - h^{\alpha\beta}{}_{,\beta}) \\ &= \frac{1}{4} (2h_{\alpha\mu}{}^{,\mu} - h_{,\alpha}) h^{,\alpha} \end{aligned}$$

となる. ただしここでは  $\eta_{\mu\nu}$  ではなく  $g_{\mu\nu}$  を用いて添字の上げ下げをしており,  $h \equiv h^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$  である. よって

$$\mathcal{G} = -\frac{1}{4} h_{\alpha\beta,\mu} h^{\alpha\beta,\mu} + \frac{1}{2} h_{\alpha\mu,\beta} h^{\beta\mu,\alpha} - \frac{1}{2} h_{\alpha\mu}{}^{,\mu} h^{,\alpha} + \frac{1}{4} h_{,\alpha} h^{,\alpha} \quad (25)$$

を得る. これは  $h_{\mu\nu}$  の 2 次の量である. そこで  $\sqrt{-\det(g)}$  に関しては  $h_{\mu\nu}$  の 1 次まで拾うと,

$$\begin{aligned} \det(g) &= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\eta_{0\mu} + h_{0\mu})(\eta_{1\nu} + h_{1\nu})(\eta_{2\rho} + h_{2\rho})(\eta_{3\sigma} + h_{3\sigma}) \\ &= -1 + (\varepsilon^\mu{}_{123} h_{0\mu} + \varepsilon_0{}^\nu{}_{23} h_{1\nu} + \varepsilon_{01}{}^\rho{}_3 h_{2\rho} + \varepsilon_{012}{}^\sigma h_{3\sigma}) + O(h_{\alpha\beta}{}^2) \\ &= -1 + (-h_{00} + h_{11} + h_{22} + h_{33}) + O(h_{\alpha\beta}{}^2) \\ &= -1 - h + O(h_{\alpha\beta}{}^2), \quad (\because h \simeq \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = h_{00} - h_{11} - h_{22} - h_{33}) \\ \sqrt{-\det(g)} &= 1 + \frac{1}{2} h + O(h_{\alpha\beta}{}^2) \end{aligned}$$

となる. 我々の興味があるのは  $\mathcal{G}$  の式 (25) における第 4 項  $(\partial h)^2/4$  であり, その作用に対する寄与

$$-\frac{1}{16\pi G} \int \frac{1}{4} (\partial h)^2 \left(1 + \frac{1}{2} h + \dots\right) d^4x = -\frac{1}{16\pi G} \int \left(\frac{1}{4} (\partial h)^2 + \frac{1}{8} (\partial h)^2 h + \dots\right) d^4x$$

は無次元の数係数の違いを除いて, 式 (6.50) に一致する.  $\mathcal{G}$  の式 (25) 第 1 項の寄与も「模式的」(p.86, 1.22-23) には同じ形をとる.



■「ここでの結合定数は長さの単位を持つので、……重力の量子論は繰り込み不可能となり……」(p.87, l.3-8) について 運動量空間における Feynman ダイアグラムを考える。対応する運動量空間の積分が  $\int d^{\nu_1} p / p^{\nu_2}$  のように振舞うとき、 $K = \nu_1 - \nu_2$  によって発散次数を定義する。単純な次元の議論では  $K > 0$  に対して、積分は  $p^K$  のように発散する恐れがある ( $K = 0$  の積分 ( $\sim \int dp/p$ ) は対数発散)。

さて、結合  $g_i$  ( $i$  は結合の種類指標) の摂動を次数  $n_i$  まで考慮すると、グラフには因子  $g_i$  を充てられる結節点が  $n_i$  個導入される。 $g_i$  の自然次元 (自然単位系での次元を (質量) $^\alpha$  と表したときの指数  $\alpha$ ) を  $[g_i]$  で表そう。すると摂動次数を  $\Delta n_i$  変更すれば、グラフから外線を除いた結節部分の自然次元への寄与は  $+\Delta n_i [g_i]$  だけ変化する。ところが結節部分の自然次元は摂動の次数に依らず一定でなければならない。今、グラフの外線を固定していることを踏まえ、結節部分の自然次元を不変に保つには、内部運動量の因子の数が  $-\Delta n_i [g_i]$  変化しなければならない。よって一般に、発散次数は

$$K = K_0(b_e, f_e) - \sum_i n_i [g_i]$$

であれば良い。ここに  $b_e, f_e$  はそれぞれボゾンとフェルミオンの外線の本数であり、 $K_0(b_e, f_e)$  は摂動次数に依存しない。このときある結合定数の次元が  $[g_i] < 0$  となる理論では、発散次数  $K$  は摂動次数  $n_i$  とともに増大することになり、繰り込み不可能となる [13, pp.284-287]。重力理論は結合定数の次元が  $[\sqrt{G}] = -1$  なので、そのような場合に該当する。

■Woodard が導入した系 (6.52) について 適当な係数をくくり出して結合定数  $g$  を定義しているため、 $g$  は無次元となっている。しかし係数を吸収させた次元を持つ結合定数を考えれば、ここでも「単位の整合性を保つために」(p.87 下から 3,2 行) 高階導関数  $\ddot{q}$  を導入したと見ることができる。

■摂動の次数ごとの方程式 (6.54-56) について 最小作用原理

$$0 = \delta S = \int \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \delta \ddot{q} \right) dt = \int \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \delta q dt$$

より (部分積分の境界項がゼロになる境界条件を仮定した)、運動方程式が

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} = -m\omega^2 q - m\ddot{q} - \frac{gm}{\omega^2} \frac{d^4 q}{dt^4}, \quad \therefore \ddot{q} + \omega^2 q = -\frac{g}{\omega^2} \frac{d^4 q}{dt^4}$$

となることによる。

## 関連文献について

我々は、広大な場の量子論の分野の中から、ほとんど無限小の部分を紹介したにすぎない。Paskin and Schroeder (1995) は、大変よい入門書であり、本章の記述でもこの文献を基礎に置いた。Woodard (2009) も、摂動的量子重力の問題について特別に明快な解説をしており、いくつかの有用な類例にも言及してある。

ここで言及されている関連文献を、巻末の参考文献リスト (pp.171-176) から抜粋しておく。

- Peskin, M. and Schroeder, D. (1995) *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison Wesley, New York.

- Woodard, R. (2009) “How far are we from the quantum theory of gravity?” , *Rept. Prog. Phys.* **72**, 126002, 200

## 第7章 Ashtekar 変数を用いた一般相対性理論

### 7.1 正準重力

一般相対性理論のハミルトン形式による定式化の詳細な取扱いは、本書の想定範囲外である。ここでは、それが50年以上の年月を要したことを述べておけば充分であろう。それはMaxwell理論に対して行った取扱いと劇的に異なるようなものではないのだが、必要とされる計算が遥かに複雑である。本節では、そのような定式化におけるいくつかの要点を概観するにとどめる。(p.91)

- Einstein-Hilbert 作用  $S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x R \sqrt{-\det(g)}$  において、 $R$  は  $\partial_0 g^{00}, \partial_0 g^{0i}$  を含まない。  
 $\rightarrow g^{00} = 1/N^2, g^{0i} = N^i/N^2$  [本稿次節で補足] は Lagrange の未定乗数、配位変数は  $g^{ij}$ .
- $g^{ij}$  の正準共役運動量  $\tilde{\pi}_{ij}$  (チルダは密度を表す)  $\leftrightarrow$  外部曲率  $K_{ij}$  (式 (3.24)).

4.4 節で述べたように、理論の全ハミルトニアンは拘束条件の組合せになる。

- 変位  $N^i$  に関する拘束条件  $\rightarrow$  空間的な微分同相写像に関する対称性,  
 経時  $N$  に関する拘束条件  $\rightarrow$  3+1 分解における3次元の断面空間の変形に関する対称性.  
 ((超)ハミルトニアン拘束)

配位変数  $g^{ij}$  の独立な成分数 (配位自由度)  $\dots\dots 6$ ,  
 拘束条件の個数  $\dots\dots 4$ ,  
 物理的な自由度  $\dots\dots 2$  (Maxwell 理論と同じ)

### 7.1 節について

■p.91, 1.12 の式  $g^{00} = 1/N^2, g^{0i} = N^i/N^2$  について 文献 [19, p.4] によれば  $g^{00} = -1/N^2$  のように負号が付く。また  $q^{ij}$  を  $q_{ij}$  の逆テンソルとして ( $q^{ik}q_{kj} = \delta_j^i$ ),  $g^{ij} = q^{ij} - (N^i N^j / N^2)$  である。まとめると

$$g^{00} = -\frac{1}{N^2}, \quad g^{0i} = \frac{N^i}{N^2}, \quad g^{ij} = q^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2}.$$

これが確かに、3.6 節の式 (16) から読み取られる計量テンソル

$$g_{00} = -N^2 + q_{ab}N^a N^b, \quad g_{0i} = q_{ai}N^a, \quad g_{ij} = q_{ij}$$

の逆テンソルとなっていることが、次のように示される。ブロック行列の積を計算することにより、

$$\begin{aligned} (g_{\mu\rho})(g^{\rho\nu}) &= \begin{pmatrix} -N^2 + q_{ab}N^a N^b & q_{ai}N^a \\ q_{ai}N^a & q_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^i}{N^2} \\ \frac{N^i}{N^2} & q^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-N^2 + q_{ab}N^a N^b) \left(-\frac{1}{N^2}\right) + q_{ai}N^a \frac{N^i}{N^2} & (-N^2 + q_{ab}N^a N^b) \frac{N^i}{N^2} + q_{aj}N^a \left(q^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2}\right) \\ q_{ai}N^a \left(-\frac{1}{N^2}\right) + q_{ij} \frac{N^j}{N^2} & q_{ai}N^a \frac{N^i}{N^2} + q_{ik} \left(q^{kj} - \frac{N^k N^j}{N^2}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_i^j \end{pmatrix} = (\delta_\mu^\nu), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(g^{\mu\rho})(g_{\rho\nu}) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^i}{N^2} \\ \frac{N^i}{N^2} & q^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -N^2 + q_{ab} N^a N^b & q_{ai} N^a \\ q_{ai} N^a & q_{ij} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-\frac{1}{N^2}) \left( -N^2 + q_{ab} N^a N^b \right) + \frac{N^i}{N^2} q_{ai} N^a & -\frac{1}{N^2} q_{aj} N^a + \frac{N^i}{N^2} q_{ji} \\ \frac{N^i}{N^2} \left( -N^2 + q_{ab} N^a N^b \right) + \left( q^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} \right) q_{aj} N^a & \frac{N^i}{N^2} q_{aj} N^a + \left( q^{ik} - \frac{N^i N^k}{N^2} \right) q_{kj} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_j^i \end{pmatrix} = (\delta_\nu^\mu).
\end{aligned}$$

なお  $g^{ij} = q^{ij} - N^i N^j / N^2$  は文献 [7, p.262] における 3 次元空間の計量

$$\gamma_{ij} = -g_{ij} + g_{0i} g_{0j} / g_{00}$$

に類似している。

## 7.2 Ashtekar 変数 : 古典論

- Ashtekar 変数  $\tilde{E}_i^a, A_a^i$ 
  - 配位変数 …… SU(2) Yang-Mills 接続のように振舞う変数  $A_a^i$
  - 正準共役な運動量 …… 加重量 +1 の 3 脚場  $\tilde{E}_i^a$
  - 正準変数間の Poisson 括弧

$$\{A_a^i, \tilde{E}_j^b\} = 8\pi G \beta \delta_a^b \delta_j^i \delta^3(x-y). \quad (7.2)$$

$\beta$  は “Barbero-Immirzi パラメーター” と呼ばれ、

ゼロ以外の任意の値 (複素数でもよい) にとることができる (正準変換の自由度に対応)。

[デルタ関数はスカラー密度なので、正準交換関係が共変的であるためには、運動量密度はその名の通り密度として変換しなければならない。加重量 +1 の 3 脚場  $\tilde{E}_i^a$  はこの条件を満たしている。]

- Ashtekar 変数と重力の関係

$$\tilde{q}^{ab} = \det(q) q^{ab} = \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \delta^{ij}, \quad (\text{式 (3.36)}) \quad (7.3)$$

$$A_a^i = \Gamma_a^i + \beta K_a^i. \quad (\Gamma_a^i \equiv \Gamma_{ajk} \varepsilon^{jki}, K_a^i \equiv K_{ab} \tilde{E}^{bi} / \sqrt{\det(q)}) \quad [\text{右辺の文字定義は第 3 章}] \quad (7.4)$$

[重力理論からいかにして SU(2) Yang-Mills 接続  $A_a^i$  が得られるかの答.]

- 一般相対性理論のラグランジアン

$$L = \frac{1}{8\pi G \beta} \int d^3x \left( \tilde{E}_i^a \dot{A}_a^i + N \varepsilon_{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{ab}^k + N^a \tilde{E}_i^b F_{ab}^i + \lambda^i (D_a \tilde{E}^a)^i \right). \quad (7.5)$$

式 (7.1) [Einstein-Hilbert 作用] からこのラグランジアンを導くのは骨の折れる作業であるが、その過程は以下の議論に必要ではないので、詳細をここで論じることはしない。特に指摘しておくべき点は、我々は Lagrange の未定係数の定義において、 $N$  に計量の行列式の平方根の因子を吸収させて、これを加重量  $-1$  の量に変更し [ $\tilde{N} \sim N / \sqrt{-\det(g)}$  (3.7 節)], 併せて因子  $\beta$  もひとつ吸収させたことである (脚注 1 を省略)。そして、ここでは仮に  $\beta = i$  と設定しておくが、この点については後から論じることにする。(p.93)

- ★ 順序としては

$$3 \text{ 脚場 } \tilde{E}_i^a \text{ を導入} \rightarrow A_a^i = \Gamma_a^i + \beta K_a^i \text{ が定まる} \rightarrow L = (7.15) \rightarrow \text{共役な場 } \frac{\delta L}{\delta \dot{A}_a^i} = \tilde{E}_i^a \text{ は 3 脚場}$$

と考えられる。ここから 3 脚場  $\tilde{E}_i^a$  を電場のように見なすことが動機付けられる (ただし場の強度  $F_{ab}^i$  ではない)。

● 自由度の勘定

配位変数  $A_i^a$  の個数 (配位自由度) …… 9,  
 拘束条件の個数 …… 7,  
 $\therefore \begin{cases} \text{経時 } N \text{ に関して } 1 \text{ 個} \\ \text{変位 } N^a \text{ に関して } 3 \text{ 個} \\ \text{ゲージパラメーター } \lambda^i \text{ に関して } 3 \text{ 個} \end{cases}$   
 物理的な自由度 …… 2 (Maxwell 理論と同じ)

● 拘束条件 [式 (7.5) と見比べよ]

- 真空中の Gauss の法則  $\mathcal{G}^i = D_a \tilde{E}_i^a = 0$  [ただし  $\tilde{E}_i^a$  は電場ではなく 3 脚場]
- “運動量拘束” または “ベクトル拘束”  $V_a = \tilde{E}_i^b F_{ab}^i = 0$
- “ハミルトニアン拘束”  $H = \varepsilon_{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{ab}^k = 0$

理論の全ハミルトニアンは、これらの拘束条件の式の線形結合

$$H_T = \int d^3x \left( N \varepsilon_{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{ab}^k + N^a \tilde{E}_i^b F_{ab}^i + \lambda^i (D_a \tilde{E}^a)^i \right) \quad (7.11)$$

で与えられる。

(p.93 訳註を引用) ここでは、Yang-Mills 理論の結合定数  $g$  にあたる因子を 1 と置く。たとえば、 $F_{ab}^i = \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + \varepsilon^{ijk} A_a^j A_b^k$  (式 (5.7) 参照)。 $D_a$  の定義 (式 (5.3\*)) 参照) から同様に  $g$  を省く。Thiemann (2008) [本稿章末の関連文献の抜粋を参照] の 4.2 節を参照されたい。

● 拘束条件の生成する対称性

- Gauss の法則  $\rightarrow su(2)$  ゲージ変換
- 運動量拘束  $\rightarrow$  空間的な微分同相写像とゲージ変換
  - \* 純粋な微分同相写像は線形結合

$$C_a = V_a - A_a^i (D_b \tilde{E}_i^b)$$

から生成される ( $C_a = 0$  は “微分同相拘束” と呼ばれる)。実際、不鮮明化した微分同相拘束の式

$$C(\vec{N}) \equiv \int d^3x N^a C_a$$

( $\vec{N}$  は試験ベクトル場) と正準共役変数の関数  $f(\vec{E}, A)$  との Poisson 括弧は

$$\{C(\vec{N}), f(\vec{E}, A)\} \sim \mathcal{L}_{\vec{N}} f \quad (7.10)$$

のように、[空間内の] ベクトル  $\vec{N}$  に沿った Lie 微分になる。[本稿次節で導出。ここで Lie 微分は変化率というよりもむしろ、変化量そのものに当たる (3.5 節のノート, 付録 A.8).]

- ハミルトニアン拘束  $\rightarrow x^0$  による “時間発展” [“ハミルトニアン拘束” の名前の由来]
  - \* ただし座標時間  $x^0$  は任意に選べるため (実際パラメーター  $x^0$  の付け替えの下で作用は不変), これは真の時間発展とは言えない。[このため  $H$  はハミルトニアンそのものではなく、あくまで拘束量であり、やはり我々は完全拘束系を扱っていることになる.]

(p.94 訳註を引用) 4.4 節の単純な自由粒子系の例とは違って、ここでのハミルトニアン拘束 (7.8) [ $H = \varepsilon_{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{ab}^k = 0$ ] は時間のパラメーター付け  $T(t)$  のようなものがあらわに見えない形をしているが、Ashtekar 変数の導入自体が、断面空間の導入の仕方の任意性に伴って、全空間における時間パラメーターを、より複雑な形で付け替え得る自由度を含意しているわけである。3.6-3.7 節と式 (7.4) を参照。

- Yang-Mills 理論との相違

- 一般相対性理論を, Gauss の法則の他に 4 つの拘束条件が加わり,  
全ハミルトニアンがゼロになるような別種の Yang-Mills 理論と捉えることができる.
- Yang-Mills 理論を扱うための技法のすべてを,  
そのまま一般相対性理論に応用することはできない.

- $\beta = i$  (Ashtekar の選択) について

- この選択は式が簡単になるという利点があるけれども, 理論の量子化の際,  
複素数ではなく実数の一般相対性理論を再現しているということの確認に苦勞を強いられる.
- 最近の解析により,  $\beta$  を実数に選んだ場合でも,  
それに伴う余計な複雑さに対処できることが示された. その場合, ハミルトン拘束だけは

$$H = \varepsilon_{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{ab}^k + 2 \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2} (\tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b - \tilde{E}_j^a \tilde{E}_i^b) (A_a^i - \Gamma_a^i) (A_b^j - \Gamma_b^j) = 0 \quad (7.12)$$

で置き換える必要がある ( $\beta = i$  とおくと第 2 項が消えて  $H = \varepsilon_{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{ab}^k$  に戻る).

Berbero, F. (1995) *Phys. Rev. D* **51**, 5507.

- “拘束代数”

拘束条件が系の発展の下で保持されるには, 拘束条件の式と全ハミルトニアンの Poisson 括弧はゼロでなければならない. ところが全ハミルトニアンは拘束条件 (の式) の線形結合で与えられるから, 各拘束条件間の Poisson 括弧は拘束条件の線形結合にならねばならない. 実際, 不鮮明化した拘束条件

$$G(\lambda) = \int d^3x \lambda^i (D_a \tilde{E}^a)^i, \quad C(\vec{N}) \equiv \int d^3x N^a C_a, \quad H(N) = \int d^3x N \frac{\tilde{E}^{ai} \tilde{E}^{bj} F_{ab}^k \varepsilon_{ijk}}{\sqrt{\det(q)}}$$

を導入すると (いずれも被積分関数の加重度は +1), これらの間の Poisson 括弧は以下ようになる.

– まず

$$\{G(\lambda), G(\mu)\} = G([\lambda, \mu]) \quad ([\lambda, \mu]^i \equiv \lambda_j \mu_k \varepsilon^{ijk}) \quad (7.14)$$

である [本稿次節で導出]. つまり不鮮明化した Gauss の法則  $G(\lambda), G(\mu)$  同士の “交換子” は, 不鮮明化関数同士の交換子  $[\lambda, \mu]^i$  による Gauss の法則になる.  $[[\lambda, \mu]^1 = \lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2, \text{etc.}]$

– また

$$\{C(\vec{N}), C(\vec{M})\} = C(\mathcal{L}_{\vec{N}} \vec{M}) \quad (7.15)$$

となる [参考: 7.3 節のノート]. これは一方の微分同相拘束  $C(\vec{N})$  の, もう一方の  $C(\vec{M})$  への影響が, 試験場  $\vec{M}$  (正準変数の関数ではない) 以外のすべての微分同相変換であり, したがって試験場  $\vec{M}$  だけをずらすことと等価であることを意味している. 同様に

$$\{C(\vec{N}), G(\lambda)\} = G(\mathcal{L}_{\vec{N}} \lambda), \quad \{C(\vec{N}), H(M)\} = H(\mathcal{L}_{\vec{N}} M)$$

となる.

– さらに残りの Poisson 括弧の組合せは

$$\{G(\lambda), H(M)\} = 0,$$

$$\{H(N), H(M)\} = C(\vec{K}), \quad K^a \equiv \frac{\tilde{E}_i^a \tilde{E}^{bi} (N \partial_b M - M \partial_b N)}{\det(q)} \leftarrow \text{正準変数を含む}$$

で与えられる.

## 7.2 節について

■式 (7.10):  $\{C(\vec{N}), f(\vec{E}, A)\} \sim \mathcal{L}_{\vec{N}} f$  の導出 はじめに  $SU(N)$  Yang-Mills 理論の場の強度と, その共変微分の定義式

$$F_{ab}^i = \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + g f_{ijk} A_a^j A_b^k, \quad D_a \tilde{E}_i^b = \partial_a \tilde{E}_i^b + g f_{jik} \tilde{E}_j^b A_a^k$$

を思い出しておく (付録 F.2).

注意: 3 脚場の共変微分 ここで 3 脚場の共変微分 (式 (3.29) のようにスピン接続を用いる) を, 電場の微分と同様に計算できると仮定した (本稿のこれ以降でもこの仮定を度々用いている (式 (7.14), (7.28), (7.30) の箇所など)). 実際このとき, 微分同相拘束

$$\begin{aligned} C_a &= V_a - A_a^i (D_b \tilde{E}_i^b) = \tilde{E}_i^b F_{ab}^i - A_a^i (D_b \tilde{E}_i^b) \\ &= \tilde{E}_i^b (\partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + g f_{ijk} A_a^j A_b^k) - A_a^i (\partial_b \tilde{E}_i^b + g f_{jik} \tilde{E}_j^b A_b^k) \end{aligned}$$

の不鮮明化

$$\begin{aligned} C(\vec{N}) &= \int d^3x N^a C_a = \int d^3x N^a \{ \tilde{E}_i^b (\partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i) - A_a^i \partial_b \tilde{E}_i^b \} \\ &= \int d^3x \tilde{E}_i^b (N^a \partial_a A_b^i + A_a^i \partial_b N^a) \quad (\text{第 3 項を部分積分した}) \end{aligned} \quad (26)$$

は, 共変ベクトルの Lie 微分の公式 (6) に注意すると, Thiemann の本の式 (I.3.3. 3):

$$C(\vec{N}) = \int d^3x (\mathcal{L}_{\vec{N}} A^i)_b \tilde{E}_i^b$$

に一致している [8].

また  $f(\vec{E}(y), A(y)) \equiv f(y)$  と略記すると, ここで正準変数と  $f(y)$  との Poisson 括弧は

$$\{A_a^i(x), f(y)\} = \int d^3z \sum_{b,j} \left\{ \frac{\delta A_a^i(x)}{\delta A_b^j(z)} \frac{\delta f(y)}{\delta \tilde{E}_j^b(z)} - \frac{\delta A_a^i(x)}{\delta \tilde{E}_j^b(z)} \frac{\delta f(y)}{\delta A_b^j(z)} \right\} = \frac{\delta f(y)}{\delta \tilde{E}_i^a(x)}, \quad \{\tilde{E}_i^a(x), f(y)\} = -\frac{\delta f(y)}{\delta A_a^i(x)}$$

と計算できる. (これらは力学で馴染みある関係式であり, ただし微分が汎関数微分に置き換わっている.)

注意: Poisson 括弧の比例係数 しかしながらこれは  $f$  を正準変数  $A_b^j, \tilde{E}_j^b$  自身に選ぶと, 正準変数間の Poisson 括弧 (7.2) を再現できないため, 適当な係数  $8\pi G\beta$  を補わねばならない可能性がある.

さらに場  $A_b^i, \tilde{E}_i^b$  それ自体を場の汎関数と見て

$$\frac{\delta f(y)}{\delta A_b^i(x)} = \frac{\partial f(y)}{\partial A_a^j(y)} \frac{\delta A_a^j(y)}{\delta A_b^i(x)} = \frac{\partial f(y)}{\partial A_b^i(y)} \delta^3(x-y), \quad \frac{\delta f(y)}{\delta \tilde{E}_i^b(x)} = \frac{\partial f(y)}{\partial \tilde{E}_i^b(y)} \delta^3(x-y)$$

とできる.

このとき

$$\begin{aligned}
\{C(\vec{N}), f(y)\} &= \int d^3x \{(\mathcal{L}_{\vec{N}} A_b^i) \tilde{E}_i^b, f(y)\} \\
&= \int d^3x \left[ \mathcal{L}_{\vec{N}} \{A_b^i, f(y)\} \tilde{E}_i^b + (\mathcal{L}_{\vec{N}} A_b^i) \{ \tilde{E}_i^b, f(y) \} \right] \\
&= \int d^3x \left[ \mathcal{L}_{\vec{N}} (\{A_b^i, f(y)\} \tilde{E}_i^b) - \{A_b^i, f(y)\} \mathcal{L}_{\vec{N}} \tilde{E}_i^b + (\mathcal{L}_{\vec{N}} A_b^i) \{ \tilde{E}_i^b, f(y) \} \right] \\
&\quad (\because \text{Lie 微分は Leibniz 則を満たすように定義したため}) \\
&= \int d^3x \left[ N^a \partial_a \left( \frac{\partial f(y)}{\partial \tilde{E}_i^b(y)} \delta^3(x-y) \tilde{E}_i^b(x) \right) - \frac{\partial f(y)}{\partial \tilde{E}_i^b(y)} \delta^3(x-y) \mathcal{L}_{\vec{N}} \tilde{E}_i^b(x) - (\mathcal{L}_{\vec{N}} A_b^i) \frac{\partial f(y)}{\partial A_b^i(y)} \delta^3(x-y) \right] \\
&\quad (\because \text{スカラーの Lie 微分は方向微分}) \\
&= -(\partial_a N^a) \tilde{E}_i^b \frac{\partial f}{\partial \tilde{E}_i^b} - \frac{\partial f}{\partial \tilde{E}_i^b} \mathcal{L}_{\vec{N}} \tilde{E}_i^b - \frac{\partial f}{\partial A_b^i} \mathcal{L}_{\vec{N}} A_b^i \quad (\text{第 1 項を部分積分した})
\end{aligned}$$

と計算できる。ただし最右辺の量の引数はすべて  $y$  であり、後ろの 2 項は Lie 微分  $-\mathcal{L}_{\vec{N}} f$  と見なせる。あるいは Poisson 括弧の順序を入れ替えて

$$\{f, C(\vec{N})\} = \mathcal{L}_{\vec{N}} f + (\partial_a N^a) \tilde{E}_i^b \frac{\partial f}{\partial \tilde{E}_i^b}.$$

**注意** 式 (7.10) と比べて余計な第 2 項は、付加条件  $\partial_a N^a = 0$  を課せば消すことができる。しかし任意のベクトル場は無発散場と回転のない場に分解されることを踏まえると (Helmholtz の定理)、このように恣意的に無発散場  $\vec{N}$  を仮定することは、微分同相変換の一般性を損ねることが懸念される。

なお Lie 微分の性質に頼らず、 $C(\vec{N})$  の式 (26) に立ち戻って計算を行っても、同じ結果が得られる。実際、

$$\begin{aligned}
\{C(\vec{N}), f\} &= \int d^3x N^a \left[ \{ \tilde{E}_i^b, f \} (\partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i) + \tilde{E}_i^b (\partial_a \{A_b^i, f\} - \partial_b \{A_a^i, f\}) \right. \\
&\quad \left. - \{A_a^i, f\} \partial_b \tilde{E}_i^b - A_a^i \partial_b \{ \tilde{E}_i^b, f \} \right] \\
&= \int d^3x N^a \left[ -\frac{\delta f}{\delta A_b^i} (\partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i) + \tilde{E}_i^b \left( \partial_a \frac{\delta f}{\delta \tilde{E}_i^b} - \partial_b \frac{\delta f}{\delta \tilde{E}_i^a} \right) - \frac{\delta f}{\delta \tilde{E}_i^a} \partial_b \tilde{E}_i^b + A_a^i \partial_b \frac{\delta f}{\delta A_b^i} \right] \\
&= \int d^3x N^a \left[ -\frac{\delta f}{\delta A_b^i} \partial_a A_b^i + \tilde{E}_i^b \partial_a \frac{\delta f}{\delta \tilde{E}_i^b} + \partial_b \left( \frac{\delta f}{\delta A_b^i} A_a^i \right) - \partial_b \left( \frac{\delta f}{\delta \tilde{E}_i^a} \tilde{E}_i^b \right) \right]
\end{aligned}$$

となる。次いで色の付いた項を部分積分した後、 $x$  に関する積分を実行すると、

$$\begin{aligned}
\{C(\vec{N}), f\} &= -N^a \left( \frac{\partial f}{\partial A_b^i} \partial_a A_b^i + \frac{\partial f}{\partial \tilde{E}_i^b} \partial_a \tilde{E}_i^b \right) - (\partial_a N^a) \tilde{E}_i^b \frac{\partial f}{\partial \tilde{E}_i^b} - (\partial_b N^a) \frac{\partial f}{\partial A_b^i} A_a^i + (\partial_b N^a) \frac{\partial f}{\partial \tilde{E}_i^a} \tilde{E}_i^b \\
&= -\frac{\partial f}{\partial \tilde{E}_i^b} \underbrace{(N^a \partial_a \tilde{E}_i^b - \tilde{E}_i^b \partial_b N^a)}_{\mathcal{L}_{\vec{N}} \tilde{E}_i^b} - \frac{\partial f}{\partial A_b^i} \underbrace{(N^a \partial_a A_b^i + A_a^i \partial_b N^a)}_{\mathcal{L}_{\vec{N}} A_b^i} - (\partial_a N^a) \tilde{E}_i^b \frac{\partial f}{\partial \tilde{E}_i^b} \\
&= -\mathcal{L}_{\vec{N}} f - (\partial_a N^a) \tilde{E}_i^b \frac{\partial f}{\partial \tilde{E}_i^b}
\end{aligned}$$

を得る。

■式 (7.14):  $\{G(\lambda), G(\mu)\} = G([\lambda, \mu])$  の導出

$$G(\lambda) = \int d^3x \lambda^i (D_a \tilde{E}^a)^i = \int d^3x \lambda^i (\partial_a \tilde{E}_i^a + g f_{jik} \tilde{E}_j^a A_a^k)$$



より,

$$\begin{aligned}
\{G(\lambda), G(\mu)\} &= \int d^3x d^3x' \lambda^i(x) \lambda^j(x') \{ \partial_a \tilde{E}_i^a(x) + g f_{kil} \tilde{E}_k^a(x) A_a^l(x), \partial_b' \tilde{E}_j^b(x') + g f_{mjn} \tilde{E}_m^b(x') A_b^n(x') \} \\
&= \int d^3x d^3x' \lambda^i(x) \lambda^j(x') \left[ g f_{mjn} \partial_a \{ \tilde{E}_i^a(x), A_b^n(x') \} \tilde{E}_m^b(x') + g f_{kil} \partial_b' \{ A_a^l(x), \tilde{E}_j^b(x') \} \tilde{E}_k^a(x) \right. \\
&\quad \left. + g^2 f_{kil} f_{mjn} \left( \tilde{E}_k^a(x) \{ A_a^l(x), \tilde{E}_m^b(x') \} A_b^n(x') + \tilde{E}_m^b(x') \{ \tilde{E}_i^a(x), A_b^n(x') \} A_a^l(x) \right) \right] \\
&= \int d^3x d^3x' \lambda^i(x) \lambda^j(x') \left[ -g f_{mji} \{ \partial_a \delta^3(x-x') \} \tilde{E}_m^a(x') + g f_{kij} \{ \partial_a' \delta^3(x-x') \} \tilde{E}_k^a(x) \right. \\
&\quad \left. + g^2 f_{kil} f_{ljn} \tilde{E}_k^a(x) \delta^3(x-x') A_b^n(x') + g^2 f_{kil} f_{mjk} \tilde{E}_m^a(x') \delta^3(x-x') A_a^l(x) \right] \\
&= \int d^3x \left[ (\partial_a \lambda^i) \mu^j \cdot g f_{mji} \tilde{E}_m^a - \lambda^i (\partial_a \mu^j) \cdot g f_{kij} \tilde{E}_k^a \right. \\
&\quad \left. + \lambda^i \mu^j \cdot g^2 (f_{kil} f_{ljn} \tilde{E}_k^a A_a^n - f_{kil} f_{mjk} \tilde{E}_m^a A_a^l) \right] \\
&= \int d^3x \left[ -g \partial_a (\lambda^i \mu^j f_{kij}) \tilde{E}_k^a + g^2 \lambda^i \lambda^j (f_{mil} f_{ljn} - f_{kin} f_{mjk}) \tilde{E}_m^a A_a^n \right].
\end{aligned}$$

ここで付録 F.1 の式 (160):

$$f_{bcd} f_{ade} + f_{cad} f_{bde} + f_{abd} f_{cde} = 0$$

で内部添字を  $a \rightarrow i, b \rightarrow j, c \rightarrow m, d \rightarrow k, e \rightarrow n$  と置き換えると, 上式最右辺において

$$f_{mil} f_{ljn} - f_{kin} f_{mjk} = f_{ijk} f_{mkn}$$

となることが見出される. また SU(2) Yang-Mills 理論における構造定数は  $f_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$  である. よって p.93 の訳註を踏まえて  $g = 1$  とおくと,

$$\begin{aligned}
\{G(\lambda), G(\mu)\} &= \int d^3x \left\{ -(\partial_a [\lambda, \mu]^k) \tilde{E}_k^a + [\lambda, \mu]^k \varepsilon_{mkn} \tilde{E}_m^a A_a^n \right\} \\
&= \int d^3x [\lambda, \mu]^k (\partial_a \tilde{E}_k^a + \varepsilon_{mkn} \tilde{E}_m^a A_a^n) \\
&= \int d^3x [\lambda, \mu]^k (D_a \tilde{E}_k^a) \\
&= G([\lambda, \mu]) : (7.14)
\end{aligned}$$

を得る.

### 7.3 物質との結合

第9章の準備として, スカラー場  $\varphi$  で記述される物質と結合する理論を考える. 曲がった時空でのスカラー場の作用は, 形式的に  $d^4x \rightarrow \sqrt{-\det(g)} d^4x$  とすると得られ,

$$S = \int d^4x \left( -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right) \sqrt{-\det(g)} \quad (7.19)$$

となる. [係数 1/2 を補った (式 (7.20), (7.21), (7.23) も同様). スカラー場  $\varphi$  に対して  $\nabla_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi$  なので, 微分はあからさまに共変微分に置き換えなくても良い.] 正準運動量 [密度]  $\tilde{\pi} = \delta L / \delta \dot{\varphi}$  と経時  $N$ , 変位  $N^a$

を用いて、対応するハミルトニアンは

$$H = \int d^3x \left\{ N \left( \frac{1}{2} \frac{\tilde{\pi}^2}{\sqrt{\det(q)}} + \sqrt{\det(q)} \left( \frac{1}{2} q^{ab} \partial_a \varphi \partial_b \varphi + V(\varphi) \right) \right) + N^a \tilde{\pi} \partial_a \varphi \right\} \quad (7.20)$$

$$= \int d^3x \left\{ \frac{N}{\sqrt{\det(q)}} \left( \frac{1}{2} \tilde{\pi}^2 + \frac{1}{2} \tilde{E}_i^a \tilde{E}^{bi} \partial_a \varphi \partial_b \varphi + \det(q) V(\varphi) \right) + N^a \tilde{\pi} \partial_a \varphi \right\} \quad (\because \text{式 (7.3)}) \quad (7.21)$$

と表される [本稿次節で式 (7.20) を導出]\*<sup>11</sup>.

重力をスカラー場に結合させるには、上式 (7.21) から読み取られるスカラー場の微分同相拘束とハミルトニアン拘束

$$C(\vec{N})_\varphi = \int d^3x N^a \tilde{\pi} \partial_a \varphi, \quad (7.22)$$

$$H(N)_\varphi = \int d^3x \frac{N}{\sqrt{\det(q)}} \left( \frac{1}{2} \tilde{\pi}^2 + \frac{1}{2} \tilde{E}_i^a \tilde{E}^{bi} \partial_a \varphi \partial_b \varphi + \det(q) V(\varphi) \right) \quad (7.23)$$

[本稿次節で補足] (の  $8\pi G\beta$  倍) を重力場のそれに加えれば良い。

### 7.3 節について

■スカラー場のハミルトニアン (7.20) の導出 はじめに 3 + 1 分解の公式

$$\begin{aligned} g_{00} &= -N^2 + N_a N^a, & g_{0a} &= N_a, & g_{ab} &= q_{ab}, \\ g^{00} &= -\frac{1}{N^2}, & g^{0a} &= \frac{N^a}{N^2}, & g^{ab} &= q^{ab} - \frac{N^a N^b}{N^2} \end{aligned}$$

を思い出しておく (7.1 節のノート参照). 式 (7.19) から同定されるスカラー場のラグランジアンに対し、共役な運動量密度は

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} &= \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\varphi}} - \partial_a \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_a \dot{\varphi})} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} (g^{00} \dot{\varphi}^2 + 2g^{0a} \dot{\varphi} \partial_a \varphi) \sqrt{-\det(g)} \\ &= -(g^{00} \dot{\varphi} + g^{0a} \partial_a \varphi) \sqrt{-\det(g)} \\ &= -\frac{1}{N^2} (-\dot{\varphi} + N^a \partial_a \varphi) \sqrt{-\det(g)} \end{aligned}$$

と計算される.  $\dot{\varphi}$  について逆に解くと

$$\dot{\varphi} = \frac{N^2}{\sqrt{-\det(g)}} \tilde{\pi} + N^a \partial_a \varphi.$$

またラグランジアン密度は

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}} &= -\left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + V(\varphi) \right) \sqrt{-\det(g)} \\ &= -\left[ \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{N^2} \dot{\varphi}^2 + 2\frac{N^a}{N^2} \dot{\varphi} \partial_a \varphi + \left( q^{ab} - \frac{N^a N^b}{N^2} \right) \partial_a \varphi \partial_b \varphi \right\} + V(\varphi) \right] \sqrt{-\det(g)} \end{aligned}$$

\*<sup>11</sup> 平坦な時空では式 (7.20) は  $H = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} (\pi^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2) + V(\varphi) \right\}$  に帰す (導出過程参照).

であり、最右辺の最初の 2 項から  $\dot{\varphi}$  を消去すると

$$-\frac{1}{N^2}\dot{\varphi}^2 + 2\frac{N^a}{N^2}\dot{\varphi}\partial_a\varphi = -\frac{N^2}{(-\det(g))}\tilde{\pi}^2 + \frac{N^aN^b}{N^2}\partial_a\varphi\partial_b\varphi$$

となるので、

$$\tilde{\mathcal{L}} = -\left\{\frac{1}{2}\left(-\frac{N^2}{(-\det(g))}\tilde{\pi}^2 + q^{ab}\partial_a\varphi\partial_b\varphi\right) + V(\varphi)\right\}\sqrt{-\det(g)}$$

を得る。よってハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x(\tilde{\pi}\dot{\varphi} - \tilde{\mathcal{L}}) \\ &= \int d^3x\left[\frac{N^2}{\sqrt{-\det(g)}}\tilde{\pi}^2 + N^a\tilde{\pi}\partial_a\varphi + \left\{\frac{1}{2}\left(-\frac{N^2}{(-\det(g))}\tilde{\pi}^2 + q^{ab}\partial_a\varphi\partial_b\varphi\right) + V(\varphi)\right\}\sqrt{-\det(g)}\right] \\ &= \int d^3x\left\{\frac{1}{2}\frac{N^2}{\sqrt{-\det(g)}}\tilde{\pi}^2 + \sqrt{-\det(g)}\left(\frac{1}{2}q^{ab}\partial_a\varphi\partial_b\varphi + V(\varphi)\right) + N^a\tilde{\pi}\partial_a\varphi\right\} \end{aligned} \quad (27)$$

と計算される。

ここで  $\sqrt{-\det(g)}$  と  $\sqrt{\det(q)}$  の関係を調べよう。 $(g_{\mu\nu})$  の逆行列成分  $g^{00}$  は、 $g_{00}$  の余因子  $\det(q)$  を用いて

$$g^{00} = \frac{\det(q)}{\det(g)}$$

で与えられる。ところが  $g^{00} = -1/N^2$  だから、

$$-\det(g) = N^2\det(q), \quad \therefore \sqrt{-\det(g)} = N\sqrt{\det(q)}$$

が見出される。これは時空の固有体積要素  $\sqrt{-\det(g)}d^4x$  が、空間の固有体積要素  $\sqrt{\det(q)}d^3x$  と経時の因子  $Ndt$  の積で与えられることを意味する。

これをハミルトニアンの式 (27) に代入して、式 (7.20) を得る。

■不鮮明化した拘束条件の式 (7.22),(7.23) について 重力場の全ハミルトニアンが式 (7.11):

$$H_T = \int d^3x(N\underline{H} + N^a(C_a - A_a^i\mathcal{G}^i) + \lambda^i\mathcal{G}^i) = H(N) + C(\vec{N}) + G(\lambda - N^a A_a)$$

で与えられるのと同じく、物質場のハミルトニアンにおいてシフト  $N^a$  とラプス  $N$  を未定乗数 (不鮮明化関数) に持つ項がそれぞれ微分同相拘束とハミルトニアン拘束になっている。(ただし各々がゼロになる理由は見当たらない。しかし 9.1 節や 9.5 節では  $H(N)_\varphi$  を含めた全ハミルトニアン拘束をゼロとおく。)

実際に式 (7.22) の  $C(\vec{N})_\varphi$  が、スカラー場の関数  $f(\varphi)$  における微分同相変換を生成することを確認しよう (章末の問題 2)。

$$\begin{aligned} \{C(\vec{N})_\varphi, f(\varphi(x))\} &= \int d^3x'N^a(x')\{\tilde{\pi}(x')\partial_a'\varphi(x'), f(\varphi(x))\} \\ &= \int d^3x'N^a(x')[\tilde{\pi}(x')\partial_a'\{f(\varphi(x')), f(\varphi(x))\} + \{\tilde{\pi}(x'), f(\varphi(x))\}\partial_a'\varphi(x')] \end{aligned}$$

において,

$$\begin{aligned}
\{\varphi(x'), f(\varphi(x))\} &= \int d^3x'' \left\{ \frac{\delta\varphi(x')}{\delta\varphi(x'')} \frac{\delta f(\varphi(x))}{\delta\tilde{\pi}(x'')} - \frac{\delta\varphi(x')}{\delta\tilde{\pi}(x'')} \frac{\delta f(\varphi(x))}{\delta\varphi(x'')} \right\} \\
&= 0, \\
\{\tilde{\pi}(x'), f(\varphi(x))\} &= \int d^3x'' \left\{ \frac{\delta\tilde{\pi}(x')}{\delta\varphi(x'')} \frac{\delta f(\varphi(x))}{\delta\tilde{\pi}(x'')} - \frac{\delta\tilde{\pi}(x')}{\delta\tilde{\pi}(x'')} \frac{\delta f(\varphi(x))}{\delta\varphi(x'')} \right\} \\
&= -\frac{\delta f(\varphi(x))}{\delta\varphi(x')} \\
&= -\frac{\partial f(\varphi(x))}{\partial\varphi(x)} \frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi(x')} \\
&= -\frac{\partial f(\varphi(x))}{\partial\varphi(x)} \delta^3(x-x')
\end{aligned}$$

なので,

$$\{C(\vec{N})_\varphi, f(\varphi(x))\} = -N^a(x) \frac{\partial f(\varphi(x))}{\partial\varphi(x)} \partial_a\varphi(x) = -N^a(x) \partial_a f(x) = -\mathcal{L}_{\vec{N}} f(\varphi(x)).$$

最終的な結果は, Poisson 括弧の順序を入れ替えて

$$\{f(\varphi(x)), C(\vec{N})_\varphi\} = \mathcal{L}_{\vec{N}} f(\varphi(x))$$

と書くのが自然である.

また式 (7.23) の  $H(N)_\varphi$  が, スカラー場の発展に伴う関数  $f(\varphi)$  の変化を生成することも確かめられる. まず,

$$\begin{aligned}
&\{H(N)_\varphi, f(\varphi(x))\} \\
&= \int d^3x' \frac{N(x')}{\sqrt{\det(q(x'))}} \left\{ \frac{1}{2} \tilde{\pi}^2(x') + \frac{1}{2} \tilde{E}_i^a(x') \tilde{E}^{bi}(x') (\partial_a' \varphi(x')) (\partial_b' \varphi(x')) + \det(q(x')) V(\varphi(x')), f(\varphi(x)) \right\}
\end{aligned}$$

において,

$$\begin{aligned}
\{\tilde{\pi}^2(x'), f(\varphi(x))\} &= 2\tilde{\pi}(x') \{\tilde{\pi}(x'), f(\varphi(x))\} = -2\tilde{\pi}(x') \frac{\partial f(\varphi(x))}{\partial\varphi(x)} \delta^3(x-x'), \\
\tilde{E}_i^a(x') \tilde{E}^{bi}(x') \{(\partial_a' \varphi(x')) (\partial_b' \varphi(x')), f(\varphi(x))\} &= 2\tilde{E}_i^a \tilde{E}^{bi} (\partial_b' \varphi(x')) \partial_a' \{\varphi(x'), f(\varphi(x))\} = 0, \\
\{V(\varphi(x')), f(\varphi(x))\} &= 0
\end{aligned}$$

なので,

$$\{H(N)_\varphi, f(\varphi)\} = -\frac{N}{\sqrt{\det(q)}} \tilde{\pi} \frac{\partial f}{\partial\varphi}$$

を得る. ここで既に調べた関係

$$\tilde{\pi} = -\frac{1}{N^2} (-\dot{\varphi} + N^a \partial_a \varphi) \sqrt{-\det(g)} = \frac{1}{N} (\dot{\varphi} - N^a \partial_a \varphi) \sqrt{\det(q)}$$

を代入すると,

$$\{H(N)_\varphi, f(\varphi)\} = -(\dot{\varphi} - N^a \partial_a \varphi) \frac{\partial f}{\partial\varphi}$$

となる. これは時間微分  $\dot{\varphi}$  に対する付加的な項も含んでおり, 外部曲率の式 (3.24), (3.25) の箇所と同様に

$$\dot{\varphi} = \mathcal{L}_t \varphi = N \mathcal{L}_n \varphi + \mathcal{L}_{\vec{N}} \varphi = N \mathcal{L}_n \varphi + N^a \partial_a \varphi$$

と考えると、超曲面  $\Sigma$  の法線方向への Lie 微分

$$\{H(N)_\varphi, f(\varphi)\} = -N(\mathcal{L}_n \varphi) \frac{\partial f}{\partial \varphi} = -N(n^\mu \partial_\mu \varphi) \frac{\partial f}{\partial \varphi} = -N n^\mu \partial_\mu f = -N \mathcal{L}_n f$$

が生成されていることが分かる。最終的な結果は、Poisson 括弧の順序を入れ替えて

$$\{f(\varphi), H(N)_\varphi\} = N \mathcal{L}_n f$$

と書くのが自然である。

まとめると  $C(\vec{N})_\varphi$  と  $H(N)_\varphi$  はそれぞれ、シフト  $N^a$  とラプス  $N$  方向への移動に伴う場の変化を生成する。それらの未定乗数 (不鮮明化関数) がシフト  $N^a$  とラプス  $N$  であるのは理に適っている。このとき全ハミルトニアンは時間発展を生成する：

$$\{f, H\} = \{f, C(\vec{N})_\varphi + H(N)_\varphi\} = \mathcal{L}_{\vec{N}} f + N \mathcal{L}_n f = \dot{f}.$$

■微分同相拘束どうしの Poisson 括弧 重力理論における式 (7.15):

$$\{C(\vec{N}), C(\vec{M})\} = C(\mathcal{L}_{\vec{N}} \vec{M})$$

の直接的確認には、煩雑な計算を要する。しかしながらスカラー場に対する微分同相拘束 (7.22) が同様の関係を満たすことは、無理なく確かめられる (章末の問題 1 で要求されているのはこのことか)。実際、

$$\begin{aligned} \{C(\vec{N})_\varphi, C(\vec{M})_\varphi\} &= \int d^3x d^3x' N^a(x) M^b(x') \{\tilde{\pi}(x) \partial_a \varphi(x), \tilde{\pi}(x') \partial_b' \varphi(x')\} \\ &= \int d^3x d^3x' N^a(x) M^b(x') [\tilde{\pi}(x') \partial_b' \{\tilde{\pi}(x), \varphi(x')\} \partial_a \varphi(x) + \tilde{\pi}(x) \partial_a \{\varphi(x), \tilde{\pi}(x')\} \partial_b' \varphi(x')] \\ &= \int d^3x d^3x' N^a(x) M^b(x') [-\tilde{\pi}(x') \{\partial_b' \delta^3(x-x')\} \partial_a \varphi(x) + \tilde{\pi}(x) \{\partial_a \delta^3(x-x')\} \partial_b' \varphi(x')] \\ &= \int d^3x d^3x' [N^a(x) \partial_b' (M^b(x') \tilde{\pi}(x')) \partial_a \varphi(x) - M^b(x') \partial_a (N^a(x) \tilde{\pi}(x)) \partial_b' \varphi(x')] \delta^3(x-x') \\ &= \int d^3x \{N^a \partial_b (M^b \tilde{\pi}) \partial_a \varphi - M^b \partial_a (N^a \tilde{\pi}) \partial_b \varphi\} \\ &= \int d^3x \{-M^b \tilde{\pi} \partial_b (N^a \partial_a \varphi) + N^a \tilde{\pi} \partial_a (M^b \partial_b \varphi)\} \\ &= \int d^3x (N^a \partial_a M^b - M^a \partial_a N^b) \tilde{\pi} (\partial_b \varphi) \\ &= \int d^3x (\mathcal{L}_{\vec{N}} \vec{M})^b \tilde{\pi} (\partial_b \varphi) \quad (\because 3.5 \text{ 節のノートの式 (5)}) \\ &= C(\mathcal{L}_{\vec{N}} \vec{M})_\varphi. \end{aligned}$$

## 7.4 量子化

Ashtekar 変数では接続  $A_a^i$  が配位変数であり、共役な場は 3 脚場  $\tilde{E}_i^a$  となる。3 脚場は計量  $q^{ab}$  と関係するため、これは  $q^{ab}$  を配位変数とする伝統的な取扱いと、ある意味反対の方法となっている。

$A_a^i$  を配位変数とすると、自然な波動関数は  $\Psi(A_a^i)$  である。そのような“接続表示” [波動関数  $\Psi(x)$  を用いる定式化を“位置表示”と呼ぶのと同じ用法] では、正準変数は

$$\hat{A}_a^i \Psi(A) = A_a^i \Psi(A), \quad (7.24)$$

$$\hat{E}_i^a \Psi(A) = -i \frac{\delta \Psi(A)}{\delta A_a^i} \quad (7.25)$$

を満たす演算子  $\hat{A}_a^i, \hat{E}_i^a$  に移行し、正準交換関係は

$$[\hat{A}_b^j(y), \hat{E}_i^a(x)] = i \delta_b^a \delta_i^j \delta^3(x-y) \quad (7.26)$$

となる (ここでは  $8\pi G = \beta = 1$ )。 [正準量子化の手続きに基づき、Poisson 括弧 (7.2) を交換関係 (7.26) に置き換える。上式 (7.25) は  $\hat{p} = -i \frac{\partial}{\partial q}$  と比較され、正準交換関係の帰結と考えられる (本稿次節で補足).]

次に拘束条件を演算子の式へ移行させることを考える。

- Gauss の法則

Gauss の法則の式  $\mathcal{G}^i = D_a \tilde{E}_i^a$  は

$$\hat{\mathcal{G}}^i \Psi(A) = D_a \hat{E}_i^a \Psi(A) = -i D_a \frac{\delta \Psi(A)}{\delta A_a^i}$$

を満たす演算子  $\hat{\mathcal{G}}^i$  となる\*12。演算子についても不鮮明化した Gauss の法則

$$\hat{G}(\lambda) = \int d^3x \lambda^i(x) \hat{\mathcal{G}}^i(x)$$

を導入すると、 $\lambda^i$  を無限小パラメーターとして

$$\left[1 + \hat{G}(\lambda)\right] \Psi(A) = \Psi(A + D\lambda) \quad (7.28a)$$

となることが見出される [導出は本稿次節]。これは拘束条件の  $\Psi$  に対する作用が引数のゲージ変換  $A \rightarrow A + D\lambda$  (式 (5.12) 参照) であることを意味する。他方、拘束条件  $G(\lambda) = 0$  より量子力学においても  $\hat{G}(\lambda)$  は状態を消滅させることを要求すると ( $\hat{G}(\lambda)\Psi(A) = 0$ ),

$$\left[1 + \hat{G}(\lambda)\right] \Psi(A) = \Psi(A) \quad (7.28b)$$

となる。上式 (7.28a,b) より

$$\Psi(A + D\lambda) = \Psi(A) \quad (7.28c)$$

が得られる。これは波動関数が、接続の“ゲージ不変な”関数でなければならないことを意味する。

- ベクトル拘束

ベクトル拘束の式  $V_a = \tilde{E}_i^b F_{ab}^i$  は

$$\hat{V}_a \Psi(A) = \hat{F}_{ab}^i \hat{E}_i^b \Psi(A) = -i \hat{F}_{ab}^i \frac{\delta \Psi(A)}{\delta A_b^i}$$

\*12 3 脚場を接続の (したがって  $D_a$  の) 右側に配置する“因子順序化” (factor ordering) を採用した [古典的な式を演算子の式に置き換える際には演算子の順序が問題になる].

となる [Gauss の法則と同様に因子順序化した]. ベクトル拘束 (正確には微分同相拘束) に関して, 式 (7.28a-c) に対応する式は

$$\left[1 + \hat{C}(\vec{N})\right] \Psi(A) = \Psi(A + \mathcal{L}_{\vec{N}}A) = \Psi(A) \quad (7.30')$$

となる [本稿次節で補足]. 第 2 の等号は量子状態が微分同相変換の下で不変な関数でなければならないことを意味する.

ハミルトニアン拘束  $H = \varepsilon_{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{ab}^k$  については, いくつかの問題に直面する.

- 古典論の水準でも, ハミルトニアン拘束は  $x^0$  方向の発展を生成し, 断面空間における単純な幾何的作用を生成しない.
- 一般に量子状態は

$$\Psi(A) = \int d^3x \psi(A(x)) \quad \psi(A(x)) : A_a^i \text{のゲージ不変な関数}$$

という形をとる. 空間積分により, 微分同相変換 [積分変数の変更に帰着] に対する不変性も自動的に満たされている. [ただし循環論法に陥るのを避けるため, 式 (7.28),(7.30) の箇所では積分は空間全体からの場の値の寄与を表し,  $x$  依存性を消す自然な措置と考えた.] すると量子論ではハミルトニアン拘束における 2 つの 3 脚場が汎関数微分に置き換わるので,

$$\begin{aligned} \hat{H}(N)\Psi(A) &\sim \frac{\delta^2 \Psi(A)}{\delta A_a^i(x) \delta A_b^j(x)} = \frac{\delta}{\delta A_a^i(x)} \frac{\partial \psi(A(x))}{\partial A_b^j(x)} = \frac{\partial^2 \psi(A(x))}{\partial A_c^k(x) \partial A_b^j(x)} \frac{\delta A_c^k(x)}{\delta A_a^i(x)} \\ &= \frac{\partial^2 \psi(A(x))}{\partial A_a^i(x) \partial A_b^j(x)} \delta^3(x-x) \sim \delta^3(0) (= \infty) \end{aligned}$$

となる. このように演算子は一般に分布 (デルタ関数) となり, よく定義された量とはならない (第 1 章).

- 背景時空が固定された場の量子論では, この問題は “正則化” によって対処できる. これは演算子積  $\hat{O}_1(x)\hat{O}_2(x)$  の代わりに

$$\int d^3y \hat{O}_1(x)\hat{O}_2(y) f_\varepsilon(x,y) \quad (\varepsilon \rightarrow 0 \text{ で } f_\varepsilon(x,y) \rightarrow \delta^3(x-y))$$

を用いて計算を行い, 最後に  $\varepsilon \rightarrow 0$  として有限の結果が得られるようにする技法である. しかし背景の幾何が固定されていない場合には, このような措置は背景独立性を壊してしまう. 例えばハミルトニアン拘束は, もはや微分同相変換の下でスカラーではなくなり, 拘束代数の整合性を損なう. 背景独立性に関する p.100 の訳註を引用 background independence. 背景 (として仮に設定する座標系) から, 時空幾何的な影響を受けないような理論構造を持つ量子重力理論を背景独立な理論と称する. ループ量子重力理論 (次章) では, 背景座標からではなく, そこで量子力学的に実現される状態に依存して初めて空間的な面積や体積が現れる形になるので, これは背景独立な理論であると言える. 他方, 弦理論は現在までのところ, 背景独立な理論形態を実現していない (背景時空が恣意的に設定され, 背景時空に依存した有効理論が得られる).

- 量子論では内積の利用が不可欠である. ループ量子重力の技法を導入することによって初めて, 接続の波動関数を扱う上で適切な, ゲージ変換と微分同相変換の下で不変な内積が自然に定義された (8.1 節).
- 背景幾何を持たない多様体で自然に定義される対象は加重度 +1 である (Dirac のデルタ関数). このた

め不鮮明化した拘束条件も加重度 +1 を持たねばならず<sup>\*13</sup>, そこで 7.2 節では  $\sqrt{\det(q)}$  を分母に導入して, 不鮮明化したハミルトニアン拘束を

$$H(N) = \int d^3x N \frac{\tilde{E}^{ai} \tilde{E}^{jb} F_{ab}^k \varepsilon_{ijk}}{\sqrt{\det(q)}}$$

とした. しかし分母に  $\sqrt{\det(q)}$  が含まれると, 拘束条件が変数に対して非多項式的になってしまう [すると演算子としての意味を明確にとれない]. Thiemann にならって, 体積

$$V = \int d^3x \sqrt{\det(q)} = \int d^3x \sqrt{\frac{1}{6} |\tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \tilde{E}_k^c \varepsilon^{ijk} \underline{\varepsilon}_{abc}|} \quad (7.31)$$

[最右辺や積分範囲について本稿次節で補足] と接続  $A_a^i$  の Poisson 括弧

$$\{A_c^k, V\} = \frac{\tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \underline{\varepsilon}_{abc} \varepsilon^{kij}}{\sqrt{\det(q)}} \quad (7.32)$$

[本稿次節を参照] を用いれば, 加重度 +1 のハミルトニアン拘束を多項式的な形

$$H(N) = \int d^3x N \{A_c^k, V\} F_{ab}^k \tilde{\varepsilon}^{abc} \quad (7.33)$$

に書くことができる. [本稿次節を参照. これが「多項式的」であるのは体積の式 (7.31) の第 2 辺による.]

同様の技法を用いて, ハミルトニアン [拘束の式 (7.12)] の第 2 項 (Barbero-Immirzi パラメーター  $\beta$  を実数と置いたときに現れる項) の生成も行うことができる. 記述の煩雑さを避けるために, ここでは論じないが, 詳しい議論は Thiemann の論文と彼の本に載っている. これ以降は, Barbero-Immirzi パラメーターを実数値に設定することにする. (p.101)

- この Thiemann の技法が導入されるまでの 1988 年から 1996 年の期間に為された試みは, 正当な理論の座を奪われたものの, 現在の理論を理解する上で微妙な役割を果たしている.

ゲージ不変 (Gauss 拘束不変) かつ微分同相不変であって, 適切な内積も定義し得る, 数学的に制御可能な接続の関数  $\Psi(A)$  を扱う方法が知られておらず, ハミルトニアン拘束を演算子化することが困難であるという事情が, ループ表現と呼ばれる代替表現の開発につながっていった. これについて次章で論じることにする. (pp.101-102)

## 7.4 節について

■接続表示での演算子の作用 (7.24-25) について 一般に 1 粒子系の量子力学から場の理論へ移行するには, 次のように理論の定式化を改める必要がある [18, p.169]. まず Schrödinger 描像の場の演算子  $\hat{\varphi}(\vec{x})$  (時間に陽に依らない) に対して,  $\hat{\varphi}(\vec{x})|\varphi\rangle = \varphi(\vec{x})|\varphi\rangle$  を満たす固有状態  $|\varphi\rangle$  を基底にとる. すると状態  $|\Psi\rangle$  を表す波動関数  $\Psi(\varphi) = \langle\varphi|\Psi\rangle$  は場の汎関数になる. そこで  $\varphi$ -表示における場と共役な運動量密度の演算子は

$$\hat{\varphi}(\vec{x}) \rightarrow \varphi(\vec{x}), \quad \hat{\pi}(\vec{x}) \rightarrow -i \frac{\delta}{\delta\varphi(\vec{x})}$$

<sup>\*13</sup> 7.2 節では「多様体上での積分ができるように, 被積分関数の加重度を +1 にしておく必要がある」(p.96, 1.4) と説明されている [このとき積分  $H(N)$  はスカラーになる (スカラー密度に関する 3.7 節のノートも参照)].



のように、微分が汎関数微分に置き換わると考える。この措置は正準交換関係

$$[\hat{\varphi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{x}')] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$

が満たされることから正当化される。実際、上式は1粒子系の量子力学において、 $x$ -表示を採用して初等的に正準交換関係  $[x, p] = i$  を導いたときと同様に、波動関数に対する演算子の作用を調べれば確かめられる：

$$[\hat{\varphi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{x}')] \Psi(\varphi) = -i\varphi(\vec{x}) \frac{\delta \Psi(\varphi)}{\delta \varphi(\vec{x}')} + i \frac{\delta}{\delta \varphi(\vec{x}')} (\varphi(\vec{x}) \Psi(\varphi)) = i \frac{\delta \varphi(\vec{x})}{\delta \varphi(\vec{x}')} \Psi(\varphi) = i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \Psi(\varphi).$$

■式 (7.28a) の導出 左辺に虚数単位  $i$  を補って、示したい関係式は

$$\left[1 - i\hat{G}(\lambda)\right] \Psi(A) = \Psi(A + D\lambda)$$

であると考え (そうすれば以下のように計算の辻褄が合う)。これは  $e^{-iG(\lambda)} \Psi(A) = \Psi(A + D\lambda)$  を無限小変換に対して書き下した式となっている。

note すると p.72 の訳註をアレンジしてまとめれば、

$$\begin{aligned} \Psi(A) \text{ が物理的状態} &\Leftrightarrow G(\lambda) \Psi(A) = 0 \Leftrightarrow e^{-iG(\lambda)} \Psi(A) \simeq [1 - i\hat{G}(\lambda)] \Psi(A) = \Psi(A) \\ &\Leftrightarrow \Psi(A) \text{ は } e^{-iG(\lambda)} \text{ の固有状態.} \end{aligned}$$

さて、式 (7.28a) の両辺はそれぞれ

$$\begin{aligned} \left[1 - i\hat{G}(\lambda)\right] \Psi(A) &= \left[1 + (-i)^2 \int d^3x \lambda^i D_a \frac{\delta}{\delta A_a^i}\right] \Psi(A) \\ &= \Psi(A) - \int d^3x \lambda^i D_a \frac{\delta \Psi(A)}{\delta A_a^i}, \\ \Psi(A + D\lambda) &= \Psi(A) + \int d^3x \frac{\delta \Psi(A)}{\delta A_a^i} (D_a \lambda)^i \quad (\text{汎関数微分の定義 [13, p.314]}) \\ &= \Psi(A) + \int d^3x \frac{\delta \Psi(A)}{\delta A_a^i} (\partial_a \lambda^i + g \varepsilon^{ijk} A_a^j \lambda^k) \quad (\text{式 (5.12)}) \end{aligned}$$

となる。計算を進めるために、教科書の p.99, 1.24, 25 にある一般的な汎関数の形

$$\Psi[A] = \int d^3x \psi(A(x))$$

を仮定する。このとき

$$\frac{\delta \Psi[A]}{\delta A_a^i(x)} = \frac{\partial \psi(A(x))}{\partial A_a^i(x)}$$

なので [13, p.314], 式 (7.28a) の右辺はさらに

$$\begin{aligned} \Psi(A + D\lambda) &= \Psi(A) + \int d^3x \frac{\partial \psi(A)}{\partial A_a^i} (\partial_a \lambda^i + g \varepsilon^{ijk} A_a^j \lambda^k) \\ &= \Psi(A) + \int d^3x \left( -\lambda^i \partial_a \frac{\partial \psi(A)}{\partial A_a^i} + g \varepsilon^{kji} A_a^j \lambda^i \frac{\partial \psi(A)}{\partial A_a^k} \right) \\ &= \Psi(A) - \int d^3x \lambda^i (\partial_a \delta^{ik} + g \varepsilon^{ijk} A_a^j) \frac{\partial \psi(A)}{\partial A_a^k} \end{aligned}$$

と書き換えられる. ここで式 (5.3\*):  $(D_\mu\phi)^i \equiv \partial_\mu\phi^i + g\varepsilon^{ijk}A_\mu^j\phi^k$  ないし付録 F.2 末尾の式

$$(D_\mu)^{ac} = \partial_\mu\delta^{ac} - igA_\mu^b[\text{ad}(T_b)]^{ac} (= \partial_\mu\delta^{ac} + gf_{abc}A_\mu^b) \quad (\text{ここでは } a, b, c \text{ が内部添字})$$

と同様に, 接続の関数  $\frac{\partial\psi(A)}{\partial A_a^k}$  の共変微分が

$$(D_a)^{ik} \equiv \partial_a\delta^{ik} + g\varepsilon^{ijk}A_a^j$$

で定義されると考えると, これは式 (7.28a) の左辺に一致する.

■式 (7.30) について 左辺に虚数単位  $i$  を補って, 示したい関係式は

$$\left[1 + i\hat{C}(\vec{N})\right] \Psi(A) = \Psi(A + \mathcal{L}_{\vec{N}}A)$$

であると考え (そうすれば以下のように計算の辻褄が合う). 式 (7.28a) の導出と同様の仮定の下で,

$$\begin{aligned} \left[1 + i\hat{C}(\vec{N})\right] \Psi(A) &= \Psi(A) + i \int d^3x N^a \left( \hat{V}_a - \hat{A}_a^i (D_b \tilde{E}_i^b) \right) \Psi(A) \\ &= \Psi(A) + i \int d^3x N^a \left( -iF_{ab}^i \frac{\delta\Psi(A)}{\delta A_b^i} - A_a^i (-iD_b) \frac{\delta\Psi(A)}{\delta A_b^i} \right) \\ &= \Psi(A) + \int d^3x N^a (F_{ab}^i - A_a^i D_b) \frac{\partial\psi}{\partial A_b^i} \\ &= \Psi(A) + \int d^3x N^a \left\{ (\partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + g\varepsilon^{ijk} A_a^j A_b^k) \frac{\partial\psi}{\partial A_b^i} - A_a^i (\partial_b \delta^{ik} + g\varepsilon^{ijk} A_b^j) \frac{\partial\psi}{\partial A_b^k} \right\} \\ &= \Psi(A) + \int d^3x \left[ \{ N^a (\partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i) + \partial_b (N^a A_a^i) \} \frac{\partial\psi}{\partial A_b^i} + g \left\{ \cancel{\varepsilon^{ijk} A_a^j A_b^k \frac{\partial\psi}{\partial A_b^i}} - \cancel{\varepsilon^{ijk} A_a^i A_b^j \frac{\partial\psi}{\partial A_b^k}} \right\} \right] \\ &\quad (\text{最後の項で添字の巡回置換 } i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i \text{ を行えば良い}) \\ &= \Psi(A) + \int d^3x (N^a \partial_a A_b^i + A_a^i \partial_b N^a) \frac{\partial\psi}{\partial A_b^i} \\ &= \Psi(A) + \int d^3x (\mathcal{L}_{\vec{N}} A^i)_b \frac{\delta\Psi(A)}{\delta A_b^i} \quad (\because \text{共変ベクトルの Lie 微分の公式 (6)}) \\ &= \Psi(A + \mathcal{L}_{\vec{N}} A) \end{aligned}$$

と書き換えられる.

■体積の式 (7.31) 最右辺について Levi-Civita 記号  $\underline{\varepsilon}_{abc}$  に下付きチルダが付いているのは, 加重度に関する見かけの整合性を保つためと考えられる. 実際にはこれは  $\underline{\varepsilon}_{abc} = \frac{\varepsilon_{abc}}{\sqrt{\det(q)}}$  ではなく, 通常の完全反対称テンソル密度  $\varepsilon_{abc}$  と見て良い. 誤解を避けるため, ここでは Levi-Civita 記号に関してはチルダを省いて表記する\*14. 他方, 3脚場に関しては  $E_i^a$  と  $\tilde{E}_i^a = E_i^a \sqrt{\det(q)}$  を区別する. そして  $E = (E_i^a), \tilde{E} = (\tilde{E}_i^a)$  をそれぞれ  $3 \times 3$  行列と見て, 各々の行列式  $\det(E), \det(\tilde{E})$  を定義する. すると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \tilde{E}_k^c \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{abc} &= \frac{1}{6} \varepsilon^{ijk} \cdot \varepsilon_{abc} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \tilde{E}_k^c = \frac{1}{6} \varepsilon^{ijk} \cdot \varepsilon_{ijk} \det(\tilde{E}) = \frac{1}{6} \cdot 3! \det(\tilde{E}) \\ &= \det(\tilde{E}) \end{aligned} \tag{28}$$

$$= [\det(q)]^{3/2} \det(E) \tag{29}$$

となる.

\*14 教科書でも例えば  $H(M)$  の式 (7.33) における  $\tilde{\varepsilon}^{abc}$  のチルダが, 後の式 (8.23) では省かれている.

第 2 の等号について

$$\varepsilon_{abc} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \tilde{E}_k^c = \begin{vmatrix} \tilde{E}_i^1 & \tilde{E}_i^2 & \tilde{E}_i^3 \\ \tilde{E}_j^1 & \tilde{E}_j^2 & \tilde{E}_j^3 \\ \tilde{E}_k^1 & \tilde{E}_k^2 & \tilde{E}_k^3 \end{vmatrix}$$

であり、右辺は  $\tilde{E}$  の行を入れ替えた行列の行列式である。ところが行を入れ替えると、行列式は符号が変わるから、これは  $\varepsilon_{ijk} \det(\tilde{E})$  に等しい。

第 3 の等号について  $\varepsilon^{ijk}, \varepsilon_{ijk}$  はいずれも反対称なので、縮約  $\varepsilon^{ijk} \varepsilon_{ijk}$  は添字の相異なる 3! 個の項の和である。それらの項は  $(i, j, k)$  が  $(1, 2, 3)$  の偶置換か奇置換のいずれかであり、

$$\begin{aligned} \text{偶置換} &\rightarrow \varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{ijk} = +1, \\ \text{奇置換} &\rightarrow \varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{ijk} = -1 \end{aligned}$$

なので、3! 個の項は全て  $(\pm 1)^2 = 1$  に等しい。よって  $\varepsilon^{ijk} \varepsilon_{ijk} = 3!$ 。

ところで 3 脚場の性質 (3.26):

$$(q^{ab}) = E_i^a E_j^b \delta^{ij}$$

を行列の関係  $(q_{ab})^{-1} = (E_i^a)(\delta^{ij})(E_j^b)^T$  と見て ( $T$  は転置)、両辺の行列式をとると

$$\frac{1}{\det(q)} = [\det(E)]^2 \quad (30)$$

が見出される\*15。これを上式 (29) に代入して  $\det(E)$  を消去すると、

$$\sqrt{\det(q)} = \sqrt{\left| \frac{1}{6} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \tilde{E}_k^c \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{abc} \right|} = \sqrt{|\det(\tilde{E})|} \quad (31)$$

が得られる (第 2 の等号は式 (28) による)。ただし上式 (30) より  $\det(q) \geq 0$  であることに注意して、絶対値を導入した。よって式 (7.31) の係数は  $1/6 \rightarrow 1/\sqrt{6}$  と改めなければならない (本稿では訂正済み) [20, pp.3–4]。

■Thiemann の恒等式 (7.32) について 式 (31) を用いて体積 (7.31) を

$$V = \int d^3x \sqrt{|\det(\tilde{E})|}$$

と書き換えておくと便利である。次に式 (7.10) の導出時に用いた一般公式

$$\{A_a^i(x), f(x')\} = \frac{\delta f(x')}{\delta \tilde{E}_i^a(x')} = \frac{\partial f(x')}{\partial \tilde{E}_i^a(x')} \delta^3(x - x'), \quad f(x') \equiv f(\tilde{E}(x'), A(x'))$$

を利用して\*16、体積 (7.31) と接続の Poisson 括弧  $\{A_d^l(x), V\}$  を計算する。その際、既に指摘したように  $\varepsilon_{abc}$  は単なる Levi-Civita 記号  $\varepsilon_{abc}$  であって、Poisson 括弧の外に出せると仮定する。また計算過程で現れる数係数 (や絶対値を除く際の負号) は、最終的にハミルトニアン拘束 (7.33) における不鮮明化関数  $M$  に吸収させ

\*15 3 脚場  $E_i^a$  に相反なベクトル  $E_a^i$  を導入すると (付録 C)、定義により  $E = (E_i^a)$  と  $E^{-1} = (E_a^i)$  は互いに逆行列なので、これは  $\det(q) = [\det(E^{-1})]^2$  と書くこともできる。

\*16 本節では  $8\pi G = \beta = 1$  とおいたので (p.98 脚注 3)、余計な定数係数は現れないと考えられる。

ることができるので、正確に計算する必要はない。すると

$$\begin{aligned}
\{A_d^l(x), V\} &= \int d^3x' \left\{ A_d^l(x), \sqrt{|\det(\tilde{E}(x'))|} \right\} = \int d^3x' \frac{\partial \sqrt{|\det(\tilde{E}(x'))|}}{\partial \tilde{E}_l^d(x')} \delta^3(x-x') \\
&= \frac{1}{2\sqrt{|\det(\tilde{E})|}} \frac{\partial}{\partial \tilde{E}_l^d} |\det(\tilde{E})| \sim \frac{1}{\sqrt{\det(q)}} \frac{\partial}{\partial \tilde{E}_l^d} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \tilde{E}_k^c \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{abc} \quad (\because \text{式 (31)}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(q)}} \{ \delta_d^a \delta_i^l \tilde{E}_j^b \tilde{E}_k^c \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{abc} + (a, b, c \text{ を巡回置換した項}) \} \\
&= \frac{3}{\sqrt{\det(q)}} \varepsilon^{ljk} \varepsilon_{abc} \tilde{E}_j^b \tilde{E}_k^c \sim \frac{\varepsilon^{ljk} \varepsilon_{abc} \tilde{E}_j^b \tilde{E}_k^c}{\sqrt{\det(q)}}
\end{aligned}$$

となるので、(興味のない数係数の違いを除いて) 式 (7.32) が成立する。

■式 (7.33) の確認 式 (7.32) の導出過程を踏まえ、その右辺に適当な定数係数  $C$  を補ってから、式 (7.33) の右辺に代入すると、

$$\begin{aligned}
\int d^3x N \{A_c^k, V\} F_{ab}^k \varepsilon^{abc} &= C \int d^3x N \frac{\tilde{E}_i^d \tilde{E}_j^e \varepsilon_{dec} \varepsilon^{kij} F_{ab}^k \varepsilon^{abc}}{\sqrt{\det(q)}} \\
&= C \int d^3x N \frac{\tilde{E}_i^d \tilde{E}_j^e (\delta_d^a \delta_e^b - \delta_e^a \delta_d^b) \varepsilon^{kij} F_{ab}^k}{\sqrt{\det(q)}} \\
&= C \int d^3x N \frac{(\tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b - \tilde{E}_i^b \tilde{E}_j^a) \varepsilon^{kij} F_{ab}^k}{\sqrt{\det(q)}} \\
&= 2C \int d^3x N \frac{\tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \varepsilon^{kij} F_{ab}^k}{\sqrt{\det(q)}} \\
&= H(2CN)
\end{aligned}$$

となる。最右辺において予告通り、数係数  $2C$  を不鮮明化関数に吸収させた。こうして式 (7.31)、式 (7.32) と同様、数係数の違いを除いて式 (7.33) が成立する。

■体積 (7.31) の積分範囲について 以上の計算から分かるように、体積 (7.31) の積分変数  $x'$  の範囲が位置  $x$  を含んでいない限り、接続  $A_c^k(x)$  との Poisson 括弧はゼロとなり、Thiemann の恒等式 (7.32) は成立しない。ところがハミルトニアン拘束 (7.33) において変数  $x$  は空間全体を動かすから、ここでは  $V$  として実質、空間全体の体積をとらねばならないと考えられる。

## 関連文献について

Ashtekar (1988) の本は、重力の接続による表示と、Ashtekar 変数を導入する古い方法について、よい説明を与えている。より現代的な取扱いは、Rovelli (2007) や Thiemann (2008) において見いだされる。

ここで言及されている関連文献を、巻末の参考文献リスト (pp.171–176) から抜粋しておく。

- Ashtekar, A. (1988) *New Perspectives in Canonical Gravity*. Bibliopolis, Naples.
- Rovelli, C. (2007) *Quantum Gravity*. Cambridge University Press, Cambridge.

- Thiemann, T. (2008) *Modern Canonical Quantum General Relativity*. Cambridge University Press, Cambridge.

## 第 8 章 ループ量子重力

### 8.1 ループ変換とスピン・ネットワーク

- 多様体のあらゆるループ  $\gamma$  に関してホロノミーの対角和 (Wilson ループ)

$$W_\gamma[A] = \text{Tr} \left( P \left[ \exp \left( + \oint_\gamma \dot{\gamma}^a(s) \mathbf{A}_s ds \right) \right] \right)$$

[5.2 節の係数  $ig$  が省かれている (p.93 訳註も参照), 5.2 節と同様に符号を  $- \rightarrow +$  と改めた] を指定すると, 接続のゲージ不変なすべての情報が与えられる (Giles の定理 (5.2 節)).

- Gauss の法則による拘束条件は, 接続表示の波動関数が接続のゲージ不変な関数であることを要求する (7.4 節).

↓

波動関数  $\Psi[A]$  は  $W_\gamma[A]$  を基底として

$$\Psi[A] = \sum_\gamma \Psi[\gamma] W_\gamma[A] \quad (8.1)$$

と展開できる ( $\sum_\gamma$  はすべての可能なループに関する形式的な和).

上式 (8.1) は位置表示から運動量表示への移行

$$\Psi(x) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \Psi(k) e^{ikx} \rightarrow \Psi(k)$$

と比較される関係であり, 式 (8.1) を “ループ変換”, また展開係数  $\Psi[\gamma]$  による定式化を “ループ表現 (表示)” と呼ぶ.

例えばループ表示で微分同相拘束 [ $\Psi[A]$  が微分同相変換の下で不変な関数であることを要求 (7.4 節)] を解くには, 単にループの滑らかな変形の下で不変な関数  $\Psi[\gamma]$  を考えれば良い. 結び目不変 (knot invariant) な関数はこの性質を満たす関数であり, 例として 3 次元の平坦な空間では, 2 つの閉曲線  $\gamma^a(s_1)$  と  $\eta^b(s_2)$  に対する Gauss のリンク数 (‘まつわり数’: linking number)

$$\text{Linking}(\gamma, \eta) = \frac{1}{4\pi} \oint_\gamma ds_1 \oint_\eta ds_2 \partial^a \left( \frac{1}{|\gamma^d(s_1) - \eta^d(s_2)|} \right) \varepsilon_{abc} \dot{\gamma}^b(s_1) \dot{\eta}^c(s_2) \quad (8.3)$$

[左辺の引数を訂正した,  $|\gamma^d - \eta^d| \equiv |\vec{\gamma} - \vec{\eta}|$ ] が挙げられる. これは 2 つの閉曲線がリンクしていれば 1, そうでなければ 0 になる (図 14 参照, それ故ループの滑らかな変形の下で不変な関数である). [証明は本稿次節. 我々が最初に考えていたのはループの関数  $\Psi[\gamma]$  であるのに対し, リンク数 (8.3) は単一のループではなく, 2 つの閉曲線  $\gamma, \eta$  に関する量となっている. ただし式 (8.5) の箇所で見ると, 別個に同時に設置した  $\gamma \cup \eta$  というループは Wilson ループにおいて, それらを繋いだループ  $\gamma \circ \eta, \gamma \circ \eta^{-1}$  と無関係ではあり得ない.]

ここでループ基底は過完備 (over-complete) であるという問題を取り上げる. 3 次元空間において 4 つの基底ベクトルを用いると, これらの基底 (に関する 4 つのベクトル成分) は全てが独立とはならない. ループ基底に関してもこれと状況は似ており, 多様体におけるすべての  $W_\gamma[A]$  が独立とはならない. この過完備性は,  $su(2)$  行列  $\mathbb{A}, \mathbb{B}$  の対角和に関する恒等関係

$$\text{Tr}(\mathbb{A})\text{Tr}(\mathbb{B}) = \text{Tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) + \text{Tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}^{-1}) \quad (8.4)$$

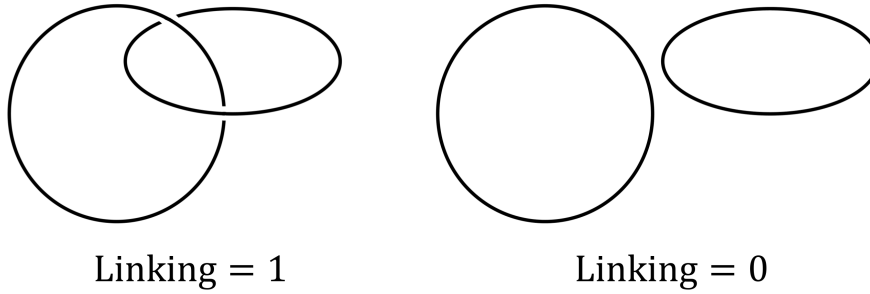


図 14 Gauss のリンク数 (8.3)

[本稿次節で確認] の帰結として,

$$W_\gamma[A]W_\eta[A] = W_{\gamma \circ \eta}[A] + W_{\gamma \circ \eta^{-1}}[A] \quad (8.5)$$

などの関係が成り立つことに由来する [本稿次節で導出]. ここに  $\eta^{-1}$  は  $\eta$  の向きを反転させたループであり,  $\gamma \circ \eta$  はまず  $\gamma$  を巡り, 次いで  $\eta$  を巡るループを表す.

(p.105 の訳註を引用) 章末の問題 2(p.121) [本稿次節] を参照. 式 (8.5) の左辺は,  $\gamma$  と  $\eta$  を互いに繋がずに別個に同時に設置した “ $\gamma \cup \eta$  というループ” に関する Wilson 指標と見なされる (ループの追加は, 状態関数において乗法的な操作である). この等式があるために, 3 種類のループ  $\gamma \cup \eta$ ,  $\gamma \circ \eta$ ,  $\gamma \circ \eta^{-1}$  のすべてを独立なループ基底として扱うことはできないわけである.

ループ基底の過完備性の問題を扱うために, “スピン・ネットワーク” (spin network) を導入する.  $su(2)$  代数

$$[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon^{ijk}\sigma^k$$

を満たす行列  $\sigma^i$  ( $su(2)$  代数の表現) は  $2 \times 2$  の Pauli 行列に限らず, 一般には  $(N+1) \times (N+1)$  行列を用いることができる ( $N = 1, 2, 3, \dots$ ). スピン・ネットワークは図 15 のようなグラフであり, 各々の線は, その線に沿う平行移動関数に用いている行列の次元  $(N+1)$  における数  $N$  によって “色付け” (coloring) されている<sup>\*17</sup>.  $su(2)$  の高次元表現は基本表現 (Pauli 行列)  $\sigma^i$  のテンソル積 (単に  $\sigma^i$  を並べたもの) と 1 対 1 の関係を持つことが知られており, 高次元表現の平行移動関数は基本表現の平行移動関数が束になって平行に走っているものと等価と見なせる. このとき別々の線を結ぶ結節点では, それぞれの線に関する平行移動関数の行列の添字を縮約するための “結節因子” (intertwiner) として,  $\epsilon_{ijk}$  と  $\delta_j^i$  の適切な形のテンソル積を用い, 曲線を「結び付ける」(tie up) ことができる. [これはスピン・ネットワーク  $s$  の状態 (波動関数)  $\psi_s$  のことを述べていると考えられる. 実際, 次節には「状態  $\psi_s$  が, 結節因子によって結節点につながっているそれぞれの閉曲線に沿った平行移動関数の集まりである」(p.111 下 2 行) とある. 具体的には本稿次節を参照.]

- 詳細は Rovelli and Upadhyaya (1998) の論文の付録を見るとよい.  
Rovelli, C. and Upadhyaya, P. (1998) “Loop quantum gravity and quanta of space: A primer”, arXiv: gr-qc/9806079 [accessed 11 March 2011].
- pp.106–107 の訳註を一部抜粋する:  
スピン・ネットワーク表現においては, 潜在的に考えるループ線の ‘向き’ の区別を指定するわけではないので, 元々のループ表現における向きの反転に関する冗長性 (式 (8.5) 参照) が低減される. (多価ネットワークでは, 冗長性が完全に解消されるわけではないけれども.)

スピン・ネットワークは, ループ基底の過完備な自由度を最小化して (3 価, すなわち 3 本の線を結ぶ結節点では余計な自由度が完全になくなる) すべてのゲージ不変な関数の基底を構成する仕掛けになるが, さらに量子重力状態を展開するためにも適した基底を提供する. このことを最も簡単に見るには, 空

<sup>\*17</sup>  $N$  の代わりに半整数  $J = N/2$  を添えることもある.

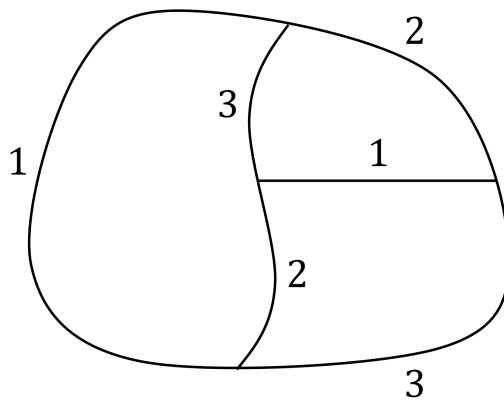


図 15 スピン・ネットワークの一例. 各線に付した数字  $N$  は, その線に沿った平行移動関数が  $(N + 1)$  次元行列であることを意味する.

間において新たな内積を導入すればよい. 内積の構築は, 接続の空間において Ashtekar-Lewandowski (レワンドフスキー) 測度 (1997) として知られる測度を導入することによって具体的に行うことができる. (p.107)

Ashtekar, A. and Lewandowski, J. (1997) *Class. Quan. Grav.* **14**, A55.

結果的に 2 つのスピン・ネットワーク  $s, s'$  が互いに微分同相写像で関係付けられるならば (滑らかな変形によって互いに移行できるならば), これらの状態  $\psi_s, \psi_{s'}$  の内積は 1 になり, そうでなければ 0 になる.

(p.107 の訳註を引用) つまり, 背景独立なスピン・ネットワークの概念は, (1) Gauss 拘束  $\rightarrow$  ループ表現 (スピン・ネットワーク表現) の導入, および (2) 微分同相拘束  $\rightarrow$  Ashtekar-Lewandowski 測度の導入 (滑らかな変形によって互いに移行できるネットワークを区別しない), という 2 段階の手続きによって得られている. (1) はどちらかというとな面的な表示の変更にすぎず, (2) において本質的な概念変更が行われていると見るべきであろう. 固定された背景座標の下でネットワーク・グラフを考えるならば, 同じトポロジー的構造を持つグラフからできえ無限の可能性が出てきてしまうが (場の量子論における発散はそういう性質のものである), ここで話を逆転させて, グラフの '構造' ('滑らかな' 変形しか許容されないので純粋なトポロジー以外の '構造' 情報も少々含まれるが) こそがむしろ空間の本質であると捉え直し, 背景座標が含んでいる潜在的な自由度を大幅に削ぎ落としていることになる.

このとき異なる (すなわち微分同相写像の関係にない) スピン・ネットワーク状態  $\psi_s$  は互いに線形独立となる. 実際,  $\psi_s$  と異なる一連の状態  $\{\psi_{s_m}\}$  に対して線形従属性

$$\psi_s = \sum_m c_m \psi_{s_m}$$

を仮定し, 両辺の  $\psi_s$  との内積を作ると,  $1 = 0$  という矛盾を生じる. よって異なる  $\psi_s$  は互いに線形独立である. [このように予告通り, スピン・ネットワーク状態  $\psi_s$  は基底として好ましい性質を備えている.]

上述の結果は, 3 個のスピン・ネットワーク (ネットワークに含まれる結節点が, 最大で 3 本の線結び付けているようなネットワークという意味である) に関して厳密に正しい. ネットワークが 4 個以上の結節点を含んでいる場合は (そのような状態も必要になることを後から見る予定である), 結節因子 (インターツイナー) の選び方に



冗長性が生じ、上のような状態の構築のために、基底として独立なスピン・ネットワークの組を意識的に選ぶ必要が生じる。(p.108)

- Ashtekar-Lewandowski 内積を用いて、厳密なやり方でループ変換とその逆変換をつくれる  
Thiemann, T. (1998) *J. Math. Phys.* **39**, 1236.
- 「Ashtekar-Lewandowski 測度について我々が行った説明が、過度に単純化されたものであることを強調しておきたい。」(p.108, 1.15,16)

学部水準の読者の読みやすさを考えて、本節では数学的な議論の詳細を大幅に省いた。より詳しい内容に関心のある読者は、Thiemann (2008) の本 [本稿章末の関連文献の抜粋を参照] を見てもらいたい。(中略) “LOST-F 定理” [脚注 2 を省略] として知られる強力な数学的結果によれば (Lewandowski, *et al.* (2006), Fleischhack (2006) [下記にて抜粋]), いくつかの穏当な仮定 (ホロノミーに基礎を置く代数と背景独立性を利用する) の下で、この測度の決め方 [Ashtekar-Lewandowski 測度の採用] が “一意的” であることが示されている。したがって、ループ量子重力の運動学的な土台は極めて堅固なものであって、少なくとも微分同相変換不変性を伴う文脈においては、利用可能な唯一の選択が用意されているのである。(p.109)

- Lewandowski, J., Okolów, A., Sahlmann, H., and Thiemann, T. (2006) *Commun. Math. Phys.* **267**, 703.
- Fleischhack, C. (2006) *Phys. Rev. Lett.* **97**, 061302.

## 8.1 節について

■ Gauss のリンク数 (8.3) がリンク数を表すことの証明 章末問題 5 のヒントを踏まえ、静磁気学とのアナロジーを利用して証明を行う。(もちろん物理的な意味付けを取り除けば、純粋に数学的な証明が得られる。) 自然単位系と Heaviside 単位系を採用して、Ampère の法則と Biot-Savart の法則を

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}) = \vec{j}(\vec{x}), \quad \vec{H}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x'$$

と書こう [7, pp.116–117].

閉曲線  $\gamma^a, \eta^b$  に割り当てるパラメーター  $s_1, s_2$  の正の向きを、図 16 の矢印のように定める。 $s_1 > 0$  の向きを正として、閉曲線  $\gamma^a(s_1)$  に定常電流  $I$  を流すと、もう一方の閉曲線上の位置  $\eta^b(s_2)$  には、Biot-Savart の法則に従う磁場

$$\vec{H}(\vec{\eta}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \vec{\eta}} \times \oint_{\gamma} \frac{I d\vec{\gamma}}{|\vec{\gamma} - \vec{\eta}|} \quad \text{i.e.} \quad H_c(\vec{\eta}) = \frac{I}{4\pi} \oint_{\gamma} \varepsilon_{cab} \frac{\partial}{\partial \eta_a} \frac{\dot{\gamma}^b ds_1}{|\vec{\gamma} - \vec{\eta}|}$$

が作られる。よって閉曲線  $\eta^b(s_2)$  に沿う磁場の循環は、2 重の線積分

$$\begin{aligned} \oint_{\eta} \vec{H} \cdot d\vec{\eta} &= \oint_{\eta} H_c(\vec{\eta}) \dot{\eta}^c ds_2 \\ &= \frac{I}{4\pi} \oint_{\gamma} ds_1 \oint_{\eta} ds_2 \varepsilon_{cab} \left( \frac{\partial}{\partial \eta_a} \frac{1}{|\vec{\gamma} - \vec{\eta}|} \right) \dot{\gamma}^b \dot{\eta}^c \\ &= I \times (\text{式 (8.3)}) \end{aligned}$$

で与えられる。ところが Biot-Savart の法則の基となる Ampère の法則に立ち戻れば、循環  $\oint_{\eta} \vec{H} \cdot d\vec{\eta}$  は閉曲線  $\eta^b(s_2)$  を貫く電流に等しいから、これを一定の電流  $I$  で割った量 (8.3) は閉曲線  $\gamma^a(s_1)$  が  $\eta^b(s_2)$  を (決まった向きに) 貫く回数を与えることになる (図 14 では 1 と 0)。

閉曲線  $\eta^b(s_2)$  に定常電流  $I$  を流したならば、閉曲線  $\gamma^a(s_1)$  に沿う磁場の循環は式 (8.3) で  $\gamma \leftrightarrow \eta$  と入れ替

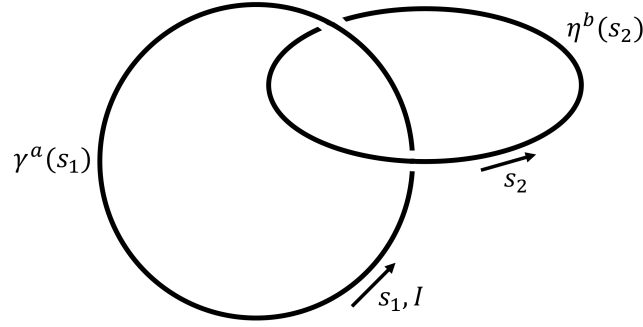


図 16 Gauss のリンク数 (8.3) に関する状況設定

えた式 (の  $I$  倍) で与えられる. しかし式 (8.3) は 2 つの閉曲線の入れ替えに関して対称である:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \oint_{\gamma} ds_1 \oint_{\eta} ds_2 \varepsilon_{abc} \left( \frac{\partial}{\partial \gamma_a} \frac{1}{|\vec{\gamma} - \vec{\eta}|} \right) \dot{\eta}^b \dot{\gamma}^c &= \frac{1}{4\pi} \oint_{\gamma} ds_1 \oint_{\eta} ds_2 (-\varepsilon_{acb}) \left( -\frac{\partial}{\partial \eta_a} \frac{1}{|\vec{\gamma} - \vec{\eta}|} \right) \dot{\gamma}^c \dot{\eta}^b \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint_{\gamma} ds_1 \oint_{\eta} ds_2 \varepsilon_{abc} \left( \frac{\partial}{\partial \eta_a} \frac{1}{|\vec{\gamma} - \vec{\eta}|} \right) \dot{\gamma}^b \dot{\eta}^c. \end{aligned}$$

■  $su(2)$  行列の対角和に関する恒等式 (8.4) の確認 一般的な  $su(2)$  行列 (行列式が 1 の  $2 \times 2$  のユニタリー行列) は

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d^* & c^* \end{pmatrix}$$

と表される. ただし

$$\det(\mathbb{A}) = |a|^2 + |b|^2 = 1, \quad \det(\mathbb{B}) = |c|^2 + |d|^2 = 1$$

である [21, p.229]. すると

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{pmatrix} ac - bd^* & ad - bc^* \\ -b^*c - a^*d^* & -b^*d + a^*c^* \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}\mathbb{B}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^* & -d \\ d^* & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac^* + bd^* & -ad + bc \\ -b^*c^* + a^*d^* & b^*d + a^*c \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathbb{A})\text{Tr}(\mathbb{B}) &= (a + a^*)(c + c^*) = ac + ac^* + a^*c + a^*c^*, \\ \text{Tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) &= ac - bd^* - b^*d + a^*c^*, \\ \text{Tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}^{-1}) &= ac^* + bd^* + b^*d + a^*c \end{aligned}$$

となるので, 式 (8.4):  $\text{Tr}(\mathbb{A})\text{Tr}(\mathbb{B}) = \text{Tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) + \text{Tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}^{-1})$  が成立する.

■ 式 (8.5) の導出 平行移動関数は

$$\mathbf{h}_{\gamma}[A] = \text{P} \left[ \exp \left( \int_{\gamma} \dot{\gamma}^a(s) \mathbf{A}_a(s) ds \right) \right]$$

で定義され, これは閉曲線  $\gamma$  に対してホロノミーとなる (5.2 節). 接続  $\mathbf{A}_a(s)$  は  $su(2)$  行列であり, Pauli 行列を用いて展開される. ところで Pauli 行列は, したがって  $\int_{\gamma} \dot{\gamma}^a(s) \mathbf{A}_a(s) ds$  はトレースレスの Hermite 行

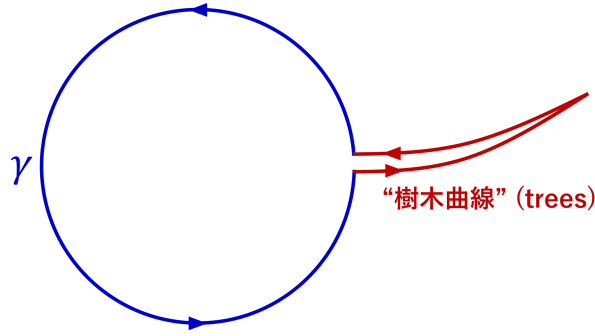


図 17 “樹木曲線” (trees) は 1 本の線を往復する径路である.

列なので [21, p.222], その指数関数 (の径路順序化)  $\mathbf{h}_\gamma[A]$  は行列式が 1 のユニタリ行列 ( $su(2)$  行列) となる (行列式が 1 となることについては本稿の付録 F.1 の計算を参照).

2 つの閉曲線  $\gamma, \eta$  が共有点を持たない場合に,  $\gamma \circ \eta$  を定義する方法を考えよう (章末問題 2). それには閉曲線  $\gamma$  に, 図 17 のような往復径路 (往路  $C$ , 復路  $C^{-1}$  とする “樹木曲線” (trees)) を付け加えても, ホロノミーの値は変わらないことに注目すれば良い.

$$\mathbf{h}_{\gamma \circ C \circ C^{-1}}[A] = P \left[ \exp \left( \int_{\gamma \circ C \circ C^{-1}} \dot{x}^a(s) \mathbf{A}_a(s) ds \right) \right] = P \left[ \exp \left( \int_\gamma \dot{x}^a(s) \mathbf{A}_a(s) ds \right) \right] = \mathbf{h}_\gamma[A].$$

すると, このような径路を付け加えて 2 曲線  $\gamma, \eta$  に共有点を持たせることで,  $\gamma \circ \eta$  を定義することができる. さて, 径路順序化の下では接続を交換して良いので, 閉曲線  $\gamma, \eta$  に対して “指数法則”

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_\gamma[A] \mathbf{h}_\eta[A] &= P \left[ \exp \left( \int_\gamma \dot{\gamma}^a(t) \mathbf{A}_a(t) dt \right) \right] P \left[ \exp \left( \int_\eta \dot{\eta}^b(s) \mathbf{A}_b(s) ds \right) \right] \\ &= P \left[ \exp \left( \int_{\gamma \circ \eta} \dot{x}^a(t) \mathbf{A}_a(t) dt \right) \right] \\ &= \mathbf{h}_{\gamma \circ \eta}[A] \end{aligned}$$

が成り立つ. これは

$$\begin{cases} \mathbf{h}_\gamma[A] \mathbf{h}_{\gamma^{-1}}[A] = 1 \\ \mathbf{h}_{\gamma^{-1}}[A] \mathbf{h}_\gamma[A] = 1 \end{cases} \quad \therefore (\mathbf{h}_\gamma[A])^{-1} = \mathbf{h}_{\gamma^{-1}}[A]$$

を含意する.

以上より  $\mathbb{A} = \mathbf{h}_\gamma[A], \mathbb{B} = \mathbf{h}_\eta[A]$  において公式 (8.4) を適用すると,

$$\begin{aligned} W_\gamma[A] W_\eta[A] &= \text{Tr}(\mathbf{h}_\gamma[A]) \text{Tr}(\mathbf{h}_\eta[A]) \\ &= \text{Tr}(\mathbf{h}_\gamma[A] \mathbf{h}_\eta[A]) + \text{Tr}(\mathbf{h}_\gamma[A] (\mathbf{h}_\eta[A])^{-1}) \\ &= \text{Tr}(\mathbf{h}_{\gamma \circ \eta}[A]) + \text{Tr}(\mathbf{h}_{\gamma \circ \eta^{-1}}[A]) \\ &= W_{\gamma \circ \eta}[A] + W_{\gamma \circ \eta^{-1}}[A] : (8.5) \end{aligned}$$

が得られる.

■ “Mandelstam (マンデルシュタム) 恒等式” (章末問題 1) 式 (8.5) からさらに複雑な恒等式を次々と作ることができる. そのような一連の恒等式は “Mandelstam (マンデルシュタム) 恒等式” と呼ばれる. 一例として章末の問題 1 では,

$$W_{\gamma_1} W_{\gamma_2} W_{\gamma_3} = W_{\gamma_1 \circ \gamma_2} W_{\gamma_3} + W_{\gamma_2 \circ \gamma_3} W_{\gamma_1} + W_{\gamma_3 \circ \gamma_1} W_{\gamma_2} - W_{\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_3} - W_{\gamma_1 \circ \gamma_3 \circ \gamma_2} \quad (8.28)$$

の関係を証明するよう要求されている (以降, すべての  $W\dots$  に共通の引数  $A$  を省略する). ここではこの問題に取り組もう.

式 (8.5) を繰り返し用いると,

$$\begin{aligned} W_{\gamma_1} W_{\gamma_2} W_{\gamma_3} &= \begin{cases} (W_{\gamma_1 \circ \gamma_2} + W_{\gamma_1 \circ \gamma_2^{-1}}) W_{\gamma_3} \\ W_{\gamma_1} (W_{\gamma_2 \circ \gamma_3} + W_{\gamma_2 \circ \gamma_3^{-1}}) \end{cases} \\ &= W_{\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_3} + W_{\gamma_1 \circ \gamma_2^{-1} \circ \gamma_3^{-1}} + W_{\gamma_1 \circ \gamma_2^{-1} \circ \gamma_3} + W_{\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_3^{-1}} \end{aligned} \quad (32)$$

を得る.

ここで  $su(2)$  行列は一般に

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad (\text{ただし } \det(\mathbb{A}) = |a|^2 + |b|^2 = 1)$$

と表され [21, p.229], それ故, 逆行列

$$\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix}$$

とトレースが等しいことに着目する.

$$\text{Tr}(\mathbb{A}) = \text{Tr}(\mathbb{A}^{-1}) = a + a^*.$$

するとホロノミー  $h_\gamma$  は  $su(2)$  行列なので, 任意の閉曲線  $\gamma$  に対して

$$W_{\gamma^{-1}} = \text{Tr}(h_{\gamma^{-1}}) = \text{Tr}((h_\gamma)^{-1}) = \text{Tr}(h_\gamma) = W_\gamma$$

の関係が見出される. これを上式 (32) 最右辺の第 2 項に適用すると,

$$W_{\gamma_1} W_{\gamma_2} W_{\gamma_3} = W_{\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_3} + W_{\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 \circ \gamma_3} + W_{\gamma_1 \circ \gamma_2^{-1} \circ \gamma_3} + W_{\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_3^{-1}} \quad (33)$$

と書き換えられる.

他方, 式 (8.5) より

$$W_{\gamma_1 \circ \gamma_2} W_{\gamma_3} = W_{\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_3} + W_{\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_3^{-1}}$$

であり, 添字 1, 2, 3 を巡回置換した項を加えると

$$W_{\gamma_1 \circ \gamma_2} W_{\gamma_3} + W_{\gamma_2 \circ \gamma_3} W_{\gamma_1} + W_{\gamma_3 \circ \gamma_1} W_{\gamma_2} = 3W_{\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_3} + \{W_{\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 \circ \gamma_3} + W_{\gamma_1 \circ \gamma_2^{-1} \circ \gamma_3} + W_{\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_3^{-1}}\} \quad (34)$$

となる. ただし任意の閉曲線  $\gamma, \eta$  に対して, ホロノミー  $h_{\gamma \circ \eta}$  における周回積分は始点の選び方に依らないので,

$$W_{\gamma \circ \eta} = W_{\eta \circ \gamma}$$

のように  $\gamma$  と  $\eta$  の順番を入れ替えられることを利用した. 上式 (34) を用いて式 (33) 右辺の後ろの 3 項を消去すると,

$$W_{\gamma_1} W_{\gamma_2} W_{\gamma_3} = W_{\gamma_1 \circ \gamma_2} W_{\gamma_3} + W_{\gamma_2 \circ \gamma_3} W_{\gamma_1} + W_{\gamma_3 \circ \gamma_1} W_{\gamma_2} - 2W_{\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_3} \quad (35)$$

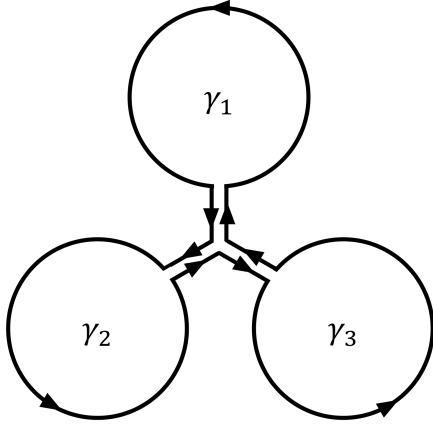


図 18 ホロノミー  $h_{\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_3}$  の積分路

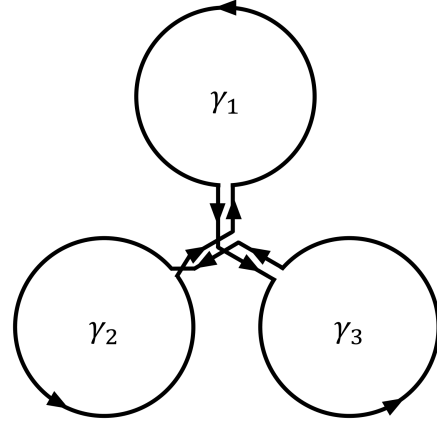


図 19 ホロノミー  $h_{\gamma_1 \circ \gamma_3 \circ \gamma_2}$  の積分路

を得る.

ところで図 18, 図 19 の 2 種類の積分路に関するホロノミー  $h_{\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_3}, h_{\gamma_1 \circ \gamma_3 \circ \gamma_2}$  の値は, 従ってその対角和  $W_{\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_3}, W_{\gamma_1 \circ \gamma_3 \circ \gamma_2}$  は等しいと考えられる (いずれも 3 つのループ  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  に関する周回積分の和である). そこで上式 (35) 右辺の第 4 項を取って

$$2W_{\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_3} = W_{\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_3} + W_{\gamma_1 \circ \gamma_3 \circ \gamma_2}$$

と書けば, 与式 (8.28) に到達する.

■スピン・ネットワーク状態  $N$  個の頂点と  $L$  本の線 (リンク) を持つスピン・ネットワーク  $s$  を考える. 各リンク  $l (= 1, \dots, L)$  には  $J_l = N_l/2$  表現のホロノミー

$$[h_l^{(J_l)}(A)]_{\beta_l}^{\alpha_l}$$

が (したがって向きが) 充てられており, ここに  $\alpha_l, \beta_l$  は行列成分を指定する添字である. ここで

- $L$  個の添字  $\alpha_1, \dots, \alpha_L$  のうち, 頂点  $n$  を始点に持つホロノミーの添字を  $\alpha_{1'(n)}, \alpha_{2'(n)}, \dots$
- $L$  個の添字  $\beta_1, \dots, \beta_L$  のうち, 頂点  $n$  を終点に持つホロノミーの添字を  $\beta_{1''(n)}, \beta_{2''(n)}, \dots$

と書き, 各頂点  $n (= 1, \dots, N)$  に適当な結節因子 (intertwiner)

$$v_n^{\beta_{1''(n)} \beta_{2''(n)} \dots}_{\alpha_{1'(n)} \alpha_{2'(n)} \dots}$$

を充てる. このとき得られるスピン・ネットワーク状態は, ホロノミーと結節因子の縮約

$$\psi_s(A) = v_1^{\beta_{1''(1)} \beta_{2''(1)} \dots}_{\alpha_{1'(1)} \alpha_{2'(1)} \dots} \dots v_N^{\beta_{1''(N)} \beta_{2''(N)} \dots}_{\alpha_{1'(N)} \alpha_{2'(N)} \dots} [h_1^{(J_1)}(A)]_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots [h_N^{(J_N)}(A)]_{\beta_N}^{\alpha_N} \quad (36)$$

と与えられる. ただし各添字  $\alpha_l, \beta_l$  は, 各々の定義域で和をとられる\*18.

具体的に本文中のスピン・ネットワークの例 (図 15) を考える. まず問題設定を明確にするために, 各リンク ( $l = 1, \dots, 6$  と名付ける) に図 20 のような向きを与え, ホロノミー  $h_l^J$  を充てる (以降, 引数の接続  $A$  を

\*18 文献 [17, p.230, p.235] の式 (6.30) に  $|S\rangle$  の式 (6.29) を代入し, 内積を式 (6.16) で評価して得られる.

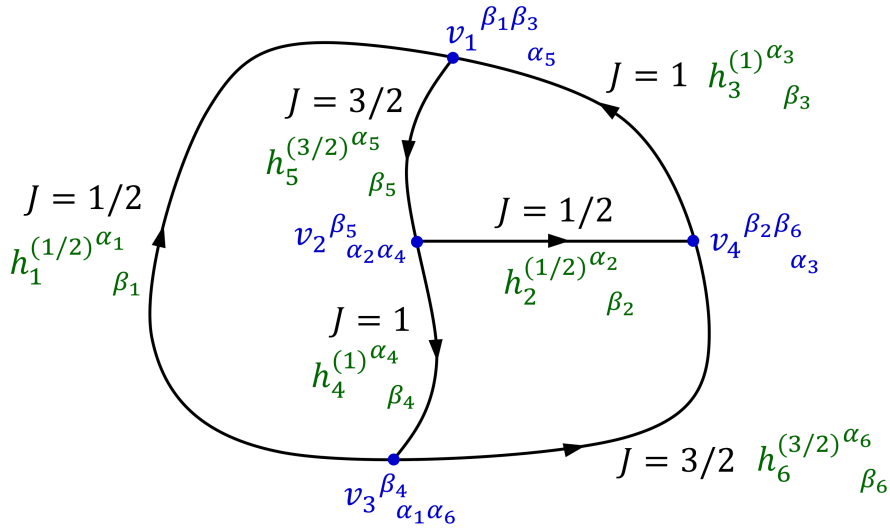


図 20 スピン・ネットワーク  $s$  の対応する式  $\psi_s$  への翻訳

#### 7.4節

- ① Gaussの法則  $G(\lambda) = 0 \rightarrow$  ゲージ不変性  $\Psi(A + D\lambda) = \Psi(A)$
- ② 微分同相拘束  $C(\vec{N}) = 0 \rightarrow$  微分同相不変性  $\Psi(A + \mathcal{L}_{\vec{N}}A) = \Psi(A)$
- ③ 量子論において, ゲージ変換と微分同相変換の下で不変な内積が必要
- ④ ハミルトニアン拘束の演算子化の困難 ( $\rightarrow$ 8.3節)

#### ループ表現

- ループ基底  $W_\gamma(A)$  はゲージ不変( $\rightarrow$ ①), しかし過完備
- 滑らかな変形の下で不変な関数  $\Psi(\gamma)$  ( $\rightarrow$ ②)

#### スピン・ネットワーク表現

- スピン・ネットワーク状態  $\psi_s(A)$  はゲージ不変( $\rightarrow$ ①)
- 滑らかな変形で移行できるネットワークを区別しない (Ashtekar-Lewandowski内積( $\rightarrow$ ②, ③))
- $\rightarrow \psi_s(A)$  は線形独立な基底 [ $\leftrightarrow$  過完備な自由度を最小化]

図 21 7.4節と 8.1節の要約

省略する). 次に各頂点を  $n = 1, 2, 3, 4$  と名付け, 図 20 のように適切な結節因子  $v_n \dots$  を充てる. このとき対応する状態  $\psi_s$  は

$$\psi_s = v_1^{\beta_1\beta_3} \alpha_5 v_2^{\beta_5} \alpha_2\alpha_4 v_3^{\beta_4} \alpha_1\alpha_6 v_4^{\beta_2\beta_6} \alpha_3 h_1^{(1/2)\alpha_1} \beta_1 h_2^{(1/2)\alpha_2} \beta_2 h_3^{(1)\alpha_3} \beta_3 h_4^{(1)\alpha_4} \beta_4 h_5^{(3/2)\alpha_5} \beta_5 h_6^{(3/2)\alpha_6} \beta_6$$

と書き下せる.

■まとめ いったん, 7.4節からの話の流れを図 21 に要約しておく.

## 8.2 ホロノミー演算子と幾何的演算子

演算子をループ表現に移行することを考える.

[拘束条件による] ゲージ対称性のある理論では、ゲージ不変な演算子、すなわち [古典的には] 拘束条件との Poisson 括弧がゼロになる量 (“Dirac の観測可能量” と呼ばれる) だけが関心の対象となる。しかしながら重力理論ではこれは難問であり、少なくとも真空における理論に関して、すべての拘束条件との Poisson 括弧がゼロになる量を我々は知らない。

参考 物質と結合した重力理論において、物質を“参照座標”として利用し、Dirac の観測可能量を構築した仕事：

Giesel, K., Hoffmann, S., Thiemann, T., and Winkler, O. (2007) *Class. Quan. Grav.* **27**, 055005; 055006.

上述の問題は措いておき、まずループ表現で定義できる最も単純な演算子として、ホロノミー演算子に言及する。あるスピン・ネットワーク  $s'$  に沿ったホロノミー  $\hat{h}_{s'}$  を別のスピン・ネットワーク状態  $|s\rangle$  に作用させると、 $s$  と  $s'$  から構成されるスピン・ネットワーク状態  $|s \cup s'\rangle$  が得られる (教科書の水準では証明はできない)。

(p.110 の訳註を引用) ホロノミー演算子の作用は、元々のホロノミーの定義から推察することもできる。元のネットワーク状態の波動関数は  $|s\rangle$  は [原文ママ]、 $s$  を構成するホロノミー (と結節因子) から成り立っている。そこに  $s'$  のホロノミーを作用させることになるが、ホロノミーの定義式 (8.16) には 3 脚場が含まれず接続だけが含まれるので、 $s'$  のホロノミー演算子の作用としても、単に乗法的な形で  $s'$  のホロノミーを波動関数に付け加えるものと考えればよい (式 (7.24),(7.25) [ $\hat{A}_a^i \Psi(A) = A_a^i \Psi(A)$ , etc.] 参照)。

但し [ここでは接続ありきでホロノミーの作用を考察したが ( $A \rightarrow h$ )], 背景独立性を重視するループ量子重力理論の立場からすると、背景座標の下で接続からホロノミーが定義されるというよりも、見方を逆転させて、ホロノミー演算子こそが第一義的に重要な基本的演算子であると見なすことになる。場の量子論における生成演算子が、場 (のエネルギー量子) を生成する最も基礎的な演算子であるということとかなり近い意味合いで (あるいは、むしろそれよりも重要な意味合いで)、ループ量子重力理論においてはホロノミー演算子が、‘空間計量の量子’(3 脚場の量子) を生成するための最も基礎的な演算子と位置づけられる。そして、3 脚場を通じて、空間の面積や体積が現れる (式 (8.13),(8.22) [=式 (7.31)]) 。

次に幾何的演算子 (geometrical operator) を導入する。これは幾何学の要素に関係する量子力学的な演算子のことである。

“面積演算子” (area operator) から始めよう。与えられた面  $\Sigma$  が  $x^3 = 0$  となる座標系で、面の面積は

$$A_\Sigma = \int_\Sigma dx^1 dx^2 \sqrt{\det q^{(2)}}, \quad (8.8)$$

$\det q^{(2)} = q_{11}q_{22} - q_{12}^2$  : 2次元空間の計量の行列式

と表される。ただし [簡単のために特定の座標系でのみ成り立つ式を書いたので、] このとき対応する面積演算子は、スピン・ネットワーク状態において微分同相不変ではない作用を持つ。式 (7.3):  $\tilde{E}_i^a \tilde{E}^{bi} = \det(q)q^{ab}$  より、これは [正準変数を用いて]

$$A_\Sigma = \int_\Sigma dx^1 dx^2 \sqrt{\tilde{E}_i^3 \tilde{E}^{3i}} \quad (8.10)$$

と書き換えられる [導出は本稿次節]。ここで 3 脚場  $\tilde{E}_i^3$  を演算子

$$-8i\pi G\beta \frac{\delta}{\delta A_i^3}$$

に移行させる<sup>\*19</sup>。[この点はループ表示でも接続表示でも同じである。] このとき面積は [同一点の場による汎関数微分の] 演算子積になり (その問題点は既に [7.4 節で<sup>\*20</sup>] 論じた)、しかもその演算子積は根号の中に入っている。このような問題を扱うために、 $\varepsilon \rightarrow 0$  で 2次元のデルタ関数  $\delta^2(x-y)$  になる不鮮明化関数

<sup>\*19</sup> ここでは正準交換関係 (7.26) の右辺において、対応する Poisson 括弧 (7.2) の因子  $8\pi G\beta$  を復活させる。このとき [正準交換関係から導かれる] 3 脚場の作用 (7.25) の右辺にも同じ因子  $8\pi G\beta$  が追加される。

<sup>\*20</sup> ただしここでのデルタ関数の現れ方は異なる。本稿次節を参照。

$f_\varepsilon(x, y)$  [7.4 節でもこのような関数に言及] を導入して, 不鮮明化した 3 脚場

$$[\tilde{E}_i^3]_f(x) = \int_\Sigma d^2y f_\varepsilon(x, y) \tilde{E}_i^3(y)$$

を定義する ( $\varepsilon \rightarrow 0$  で  $[\tilde{E}_i^3]_f \rightarrow \tilde{E}_i^3$ ). これを [量子化した演算子  $[\hat{E}_i^3]_f$ ] を用いて, 面積演算子を

$$\hat{A}_\Sigma = \int_\Sigma dx^1 dx^2 \sqrt{[\hat{E}_i^3]_f [\hat{E}_i^3]_f} \quad (8.13)$$

で与えることにする. ところで不鮮明化した 3 脚場の演算子  $[\hat{E}_i^3]_f$  の, スピン・ネットワーク状態  $\psi_s$  への作用は

$$[\hat{E}_i^3]_f(x) \psi_s = -8i\pi G \beta \int_\Sigma d^2y f_\varepsilon(x, y) \frac{\delta \psi_s}{\delta A_3^i(y)} \quad (8.14)$$

= ...

$$= 8i\pi G \beta \gamma^3(t_*) \text{Tr}(T^i \psi_s) f_\varepsilon(x, y_*) \quad (8.20)$$

と計算される (導出 (と対角和  $\text{Tr}$  の意味) は下記) [式 (8.20) ではループの関数  $\psi_s$  の引数  $x$  を消し, また  $\gamma^3$  と  $f_\varepsilon$  の引数を  $s$  と  $\Sigma$  の交点での値  $y = y_*, t = t_*$  に改めた (本稿次節)]. ここに  $\gamma$  は面  $\Sigma$  を通る曲線であり (図 22 参照),  $T^i$  は  $su(2)$  代数の  $J (= N/2)$  表現での基底である. つまりあらかじめ理解できるように,  $A_3^i(y)$  によるスピン・ネットワーク状態の汎関数微分は,  $y$  が交点  $y_*$  に一致するときのみゼロでない結果を与える. もし交点が複数あれば, それぞれの点からの寄与を足し合わせる必要がある [本稿次節の導出過程から理解できる]. さらに  $[\hat{E}_i^3]_f(x)$  をもう 1 つ作用させると同様の寄与が及び, 2 つの生成子の積の和  $T^i T^i = J(J+1)1$  [1 は単位行列] を生じる [本稿次節で補足]. このため面積演算子のスピン・ネットワークへの作用は

$$\hat{A}_\Sigma \psi_s = 8\pi l_{\text{Planck}}^2 \beta \sum_I \sqrt{j_I(j_I+1)} \psi_s \quad (8.21)$$

$$\begin{cases} j_I : \text{線 } I \text{ の “色”} \\ l_{\text{Planck}} = \sqrt{G\hbar/c^3} \sim 10^{-33} \text{cm} : \text{“Planck 長さ”} \end{cases}$$

となる (和は面  $\Sigma$  を貫くすべての線  $I$  にわたる) [本稿次節で補足]. Planck 長さは  $G, c, \hbar$  から作られる長さの尺度であり, 素粒子物理の尺度と比べても極めて小さい. 上式 (8.21) はスピン・ネットワーク状態  $\psi_s$  が面積演算子  $\hat{A}_\Sigma$  の固有状態であることを意味しており, つまらない係数の違いを除けば, その固有値は  $l_{\text{Planck}}^2$  を単位として量子化されていることになる. 因子  $\sqrt{j_I(j_I+1)}$  は角運動量の自乗  $\hat{L}^2$  の固有値  $[l(l+1)\hbar^2]$  を想起させ, 固有値の離散化は等間隔ではない.

式 (8.21) における面積の固有値は Barbero-Immirzi パラメーター  $\beta$  に依存しているため,  $\beta$  の値が異なれば物理も異なることになる. このように  $\beta$  の異なる理論は, 古典的には正準変換で関連付けられており等価であるにも関わらず, 量子力学的には等価ではなくなるということが起きる. 第 10 章 [10.1.3 節] で見ると, ブラックホールのエントロピーの計算結果を半古典的なそれに整合させるには, 特定の  $\beta$  を選ばなければならない.

面積演算子の固有値は, スピン・ネットワークを構成する線が指定した面に交わるかどうかということと, その線の色に依存して決まる [背景独立性]. あたかもスピン・ネットワークに含まれるそれぞれの線がすべて “面積の量子” を担っており, 指定された面は, スピン・ネットワークの線がその面を通ることによって面積を獲得する, というように解釈することができる (p.112, 図 8.3 [本稿の図 22] 参照). (p.115)



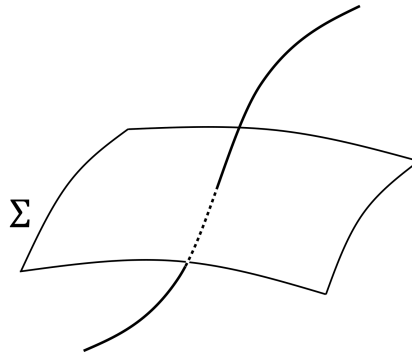


図 22 面  $\Sigma$  は 1 本のスピンのネットワークの線と交わると，“面積の量子”を獲得する。

[リンク線の色が基本表現のホロノミーを持つ線の束の本数と解釈できることを思い出すと (8.1 節), 色の依存性も含めて, 面積は面を貫くネットワーク線の本数で決まると言える.]

ここまで我々は, 面  $\Sigma$  が

- 線と点で交わるだけでなく, 線の一部を含む場合
- 2 本の線の結節点を含む場合

を無視してきた. 完全な議論に関しては Ashtekar and Lewandowski (1997) や Thiemann (2008) の本を参照せよ.

- Ashtekar, A. and Lewandowski, J. (1997) *Class. Quan. Grav.* **14**, A55.
- Thiemann, T. (2008) *Modern Canonical Quantum General Relativity*. Cambridge University Press, Cambridge.

3次元領域の体積 (7.31) を量子力学的な演算子へ移行させる方法は, 大体のところ面積演算子の場合と同じである.

現れてくる描像は, スピン・ネットワークが, 線の部分に“面積の量子”を, 結節点の部分に“体積の量子”を担っており, これらが量子的幾何を構成する要素になっている, というものである. 指定された領域は, もしその中にスピン・ネットワークのしかるべき結節点が含まれるならば, 体積を付与され, 指定された面は, もしそこにスピン・ネットワークの線が通っていれば, 面積を付与される. こうして図 8.4 [本稿の図 23] のように, 空間の“基礎建築用ブロック” (elementary building block) の描像が見いだされる. (pp.115–116)

[空間を言わば各頂点の“守備範囲”へと適当に分割すれば\*21, 各々のブロックは決まった体積 (と表面積) を持ち, それらを空間の構成単位ないし“基礎建築用ブロック”と見なすことができるということ.] ここで

- 体積演算子がゼロ以外になるためには, 少なくとも 4 価の結節点が必要であることが判明している.
- 線や結節点の数がまばらになる Planck 長さ程度の領域においては, 奇妙な量子的性質 (体積の伴わない面積 [領域が線に貫かれ, 結節点を内に含まない場合] など) が顕在化する.

\*21 もちろんそのような方法は一意的ではないが, 代表的な手法として Voronoi (ボロノイ) 分割が挙げられる (図 24 参照).

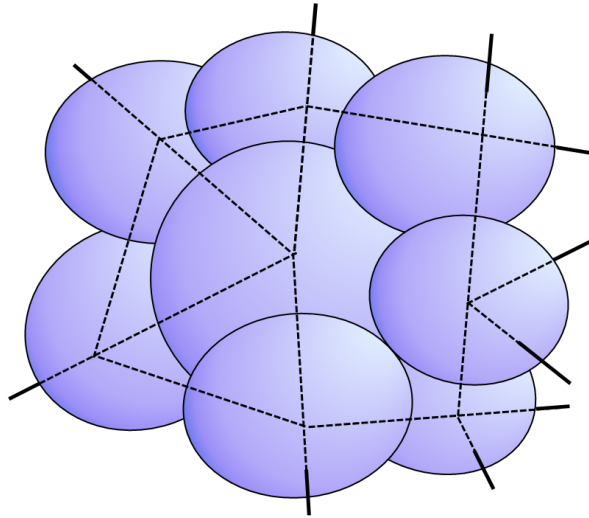


図 23 スピン・ネットワークを“空間の基礎建築用ブロック”の集まりとして捉えることもできる．4 個以上の結節点は“体積ブロック”を形成しており，それぞれのブロックの表面積は，ブロックの表面を貫くネットワーク線によって決まる．

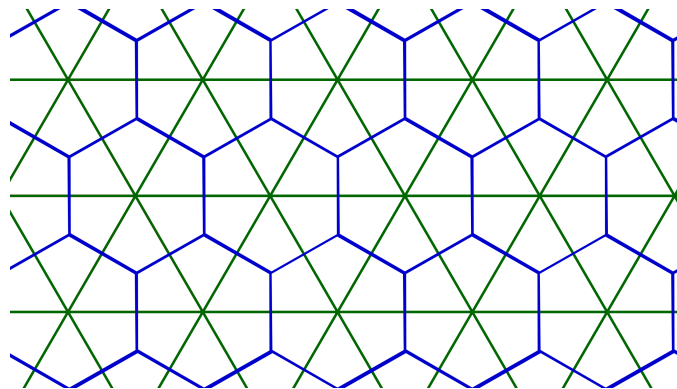


図 24 この 2 次元的なパターンでは緑の線をネットワーク線とすると個々の青い正六角形が各頂点の Voronoi 領域に，青い線をネットワーク線とすると個々の緑の正三角形が各頂点の Voronoi 領域になる．このときネットワーク線は Voronoi 領域に対する Delaunay (ドロネー) 図になっている．

## 8.2 節，式の導出など

■式 (8.20) の導出 状態  $\psi_s$  が，結節因子によって結節点につながっているそれぞれの閉曲線に沿った平行移動関数の集まりであることを思い出そう [本稿の式 (36)]．すると式 (8.14) 右辺における， $\Sigma$  上の点  $y$  での接続  $A_3^i(y)$  による汎関数微分は，スピン・ネットワーク上の線が面  $\Sigma$  を通るとき (図 22 参照)，ゼロでない値

$$\frac{\delta\psi_s}{\delta A_3^i(y)} = \text{Tr} \left( \frac{\delta h^J}{\delta A_3^i(y)} \frac{\delta\psi_s}{\delta h^J} \right) \quad (8.15)$$

を持つ．[しかも期待されるように， $y$  が交点  $y_*$  に一致しなければ，これは自動的にゼロになる (後の式 (8.19) におけるデルタ関数による).]

$h^J$  は、面  $\Sigma$  を貫く線に関係する平行移動関数を、適切な  $J$  表現で与えたものである ( $J = N/2$ )。ここでは  $\text{Tr}$  (対角和) を一般化された意味で使っている。つまり  $\psi_s$  を  $h^J$  で微分すると、 $h^J$  が抜き取られて始点と終点に開いた結節因子 (インターツイナー) が残り、そこに  $\delta h^J / \delta A_3^i(y)$  の構造が整合して入り、最終的には自由な添字のない量が与えられる [本稿次節で補足]. (p.112)

ここで点  $y [= y_*]$  を通る曲線  $\gamma$  に沿ったホロノミー

$$\mathbf{h} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1 \geq \dots \geq t_n \geq 0} \dot{\gamma}^{a_1}(t_1) \mathbf{A}_{a_1}(t_1) \cdots \dot{\gamma}^{a_n}(t_n) \mathbf{A}_{a_n}(t_n) dt_1 \cdots dt_n \quad (8.16)$$

に対して、式 (8.15) 右辺の汎関数微分  $\frac{\delta h^J}{\delta A_3^i(y)}$  を考える [ $\mathbf{h} = h^J$ ].  $su(2)$  代数の  $J (= N/2)$  表現の基底を  $T^i$  とすると  $\mathbf{A}_a = A_a^i T^i$  であり、また  $\mathbf{A}_a(t_k) \equiv \mathbf{A}_a(\gamma(t_k))$  なので、

$$\frac{\delta \mathbf{A}_{a_k}(t_k)}{\delta A_3^i(y)} = \frac{\delta A_{a_k}^j(\gamma(t_k))}{\delta A_3^i(y)} T^j = T^i \delta^3(y - \gamma(t_k)) \delta_{a_k}^3 \quad (8.17)$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbf{h}}{\delta A_3^i(y)} &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1 \geq \dots \geq t_k \geq \dots \geq t_n \geq 0} dt_1 \cdots dt_n \\ &\quad \times \dot{\gamma}^{a_1}(t_1) \mathbf{A}_{a_1}(t_1) \cdots \{ \dot{\gamma}^3(t_k) \delta^3(y - \gamma(t_k)) T^i \} \cdots \dot{\gamma}^{a_n}(t_n) \mathbf{A}_{a_n}(t_n) \end{aligned} \quad (8.18)$$

$$\sim \int dt_k h^J(t_k, t_{\max}) \dot{\gamma}^3(t_k) T^i \delta^3(y - \gamma(t_k)) h^J(0, t_k) \quad [\text{教科書では } t_{\max} = 1] \quad (8.19)$$

ようになる。[式 (8.19) では行列  $h^J(t_k, t_{\max}), h^J(0, t_k)$  の位置を入れ替えた。  $\frac{\delta \mathbf{h}}{\delta A_3^i(y)}$  = (式 (8.19) 右辺) は厳密に成り立つ。以上、本稿次節における導出を参照。] 以上の式 (8.14), (8.15), (8.19) より、式 (8.20) を得る [本稿次節で補足].

## 8.2 節について

■Dirac の観測可能量 (8.2 節 1.4,5) について 1 次と 2 次を合わせたすべての拘束量との Poisson 括弧がゼロである量は、第 1 種 (first class) の量と呼ばれる (D.2.1 節)。しかしながら Dirac の観測可能量は「ゲージ不変な」(8.2 節 1.2) 量とある。そして系統的に作られる第 1 種拘束量の全体  $\{\phi^l\}$  が物理量  $F$  のゲージ変換

$$\Delta F = \varepsilon_l \{F, \phi^l\}$$

を生成するから、Dirac 観測量  $F$  とは第 1 種の量のことでなく、全ての  $\phi^l$  との Poisson 括弧がゼロになる量のことと考えられる。(ただしゲージ変換の定義より、変換前後の  $F$  の値は、差が  $\Delta F \neq 0$  であっても物理的には等価である。) Dirac は  $\{\phi^l\}$  が第 1 種の拘束量 (1 次も 2 次も含む) 全体になってしまうと予想したが、その場合にも Dirac 観測量  $F$  は、2 次の拘束量との Poisson 括弧がゼロになる保証はないから、第 1 種の量とは言えない。しかも Dirac の予想は一般には成り立たない。以上、詳しくは D.3.2 節を参照。

■教科書の式 (8.8) の 2 行下における  $\det q^{(2)}$  の式について 行列式の定義式が

$$\det q^{(2)} = \frac{1}{2} \varepsilon^{AB} \varepsilon^{CD} q_{AC} q_{BD}$$

と書けるのは、式 (7.31) 導出過程における式 (28):

$$\det(\tilde{E}) = \frac{1}{3!} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \tilde{E}_k^c$$

において、既に見た通りである。

ここでは  $q^{(2)} = (q_{AB})$  が  $2 \times 2$  の行列なので、成分計算による直接的な確認も可能である。Levi-Civita 記号がゼロにならない添字の組

$$(A, B, C, D) = (1, 2, 1, 2), (1, 2, 2, 1), (2, 1, 1, 2), (2, 1, 2, 1)$$

を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varepsilon^{AB} \varepsilon^{CD} q_{AC} q_{BD} &= \frac{1}{2} \{ (+1)(+1)q_{11}q_{22} + (+1)(-1)q_{12}q_{21} + (-1)(+1)q_{21}q_{12} + (-1)(-1)q_{22}q_{11} \} \\ &= q_{11}q_{22} - q_{12}^2. \end{aligned}$$

■逆行列成分  $q^{ab}$  の表式 (8.9) について 分母において  $3! \rightarrow 2!$  と訂正する。その上で行列式を移項して

$$\det(q) q^{ab} = \frac{1}{2} \varepsilon^{acd} \varepsilon^{bef} q_{ce} q_{df}$$

と書いたとき、右辺が  $(q_{ab})$  の第  $(a, b)$  余因子  $\Delta^{ab}$  となっていれば良い。まず Levi-Civita 記号の反対称性より、右辺に寄与するのは  $q_{..}$  の第 1 添字  $c, d$  が  $a$  と異なり、第 2 添字  $e, f$  が  $b$  と異なる項のみである。そのような  $q_{..}$  は行列  $(q)$  から  $a$  行目と  $b$  列目を除いた小行列  $(\hat{q}^{(ab)})$  の成分 (大文字の添字  $C, D, \dots$  で指定する) をとるので、

$$\frac{1}{2} \varepsilon^{acd} \varepsilon^{bef} q_{ce} q_{df} = (-1)^{a+b} \frac{1}{2} \varepsilon^{CD} \varepsilon^{EF} q_{CE} q_{DF} = (-1)^{a+b} \det(\hat{q}^{(ab)}) = \Delta^{ab}.$$

よって示された。

なお上の結果で  $a = b = 3$  とおけば、これは既に示したかった式 (8.10):

$$(\tilde{E}_i^3 \tilde{E}^{3i}) \det(q) q^{33} = \frac{1}{2} \varepsilon^{3ab} \varepsilon^{3cd} q_{ac} q_{bd} = \frac{1}{2} \varepsilon^{AB} \varepsilon^{CD} q_{AC} q_{BD} = \det q^{(2)}.$$

を与えている。

■面積の式 (8.10) の導出 面  $\Sigma$  を  $x^3 = 0$  に選んだので、

$$\begin{aligned} \tilde{E}_i^3 \tilde{E}^{3i} &= \det(q) q^{33} \\ &= (\text{行列 } (q_{ab}) \text{ の第 } (3, 3) \text{ 余因子}) \\ &= (-1)^{3+3} \det q^{(2)} \\ &= \det q^{(2)} \end{aligned}$$

とすれば十分である。

教科書では余因子 (ないし逆行列成分  $q^{33}$ ) の表式

$$q^{ab} = \frac{\varepsilon^{acd} \varepsilon^{bef} q_{ce} q_{df}}{2! \det(q)} \quad (8.9)$$

[分母において  $3! \rightarrow 2!$  と訂正した] をあからさまに書き、

$$\begin{aligned} \det q^{(2)} &= q_{11}q_{22} - q_{12}^2 = \frac{1}{2} \varepsilon^{AB} \varepsilon^{CD} q_{AC} q_{BD} = \frac{1}{2} \varepsilon^{3ab} \varepsilon^{3cd} q_{ac} q_{bd} \\ &\quad (\text{ただし } A, \dots, D = 1, 2, a, \dots, d = 1, 2, 3) \\ &= \det(q) q^{33} \quad (\because \text{式 (8.9)}) \\ &= \tilde{E}_i^3 \tilde{E}^{3i} \quad (\because \text{式 (7.3)} : \tilde{E}_i^a \tilde{E}^{bi} = \det(q) q^{ab}) \end{aligned}$$

としている。

■「因子  $8\pi G\beta$  を復活させるので、……面積が正しい単位を持つことが明白に判る」(p.111, l.7,8) について 我々は自然単位系を採用しており、あらゆる物理量は長さ  $L$  のべきとして表される。Newton 定数の次元は  $[G] = L^2$  である (6.4 節)。また長さの次元を持つ座標を採用する限り、空間計量  $q_{ab}$  は無次元であり、式 (7.3):  $\tilde{E}_i^a \tilde{E}^{bi} = \det(q)q^{ab}$  より、3 脚場  $\tilde{E}_i^a$  もまた無次元となる。Yang-Mills 理論のゲージ場の次元は  $[A_a^i] = 1/L$  であり [14, p.103], Ashtekar 変数の接続も同じ次元を持つものと見て良い。実際このとき  $[\beta] = 1$  の下で、例えば正準交換関係 (7.26):

$$[\hat{A}_b^j(y), \hat{E}_i^a(x)] = 8\pi i G\beta \delta_b^a \delta_i^j \delta^3(x-y)$$

の両辺は等しい次元  $1/L$  を持っていることが見てとれる。以上をまとめると、

$$[G] = L^2, \quad [\beta] = 1, \quad [q_{ab}] = 1, \quad [\tilde{E}_i^a] = 1, \quad [A_a^i] = \frac{1}{L}.$$

すると  $[\tilde{E}_i^a] = 1$  より、古典的な面積の式 (8.10) は確かに  $L^2$  の次元を持っている。汎関数微分の次元は

$$\left[ \frac{\delta}{\delta A_a^i} \right] = \frac{1}{[A_a^i]L^3} = \frac{1}{L^2}$$

となるので (通常の微分とは次元が異なることを思い出そう), 3 脚場は演算子への移行

$$\tilde{E}_i^3 \rightarrow -8i\pi G\beta \frac{\delta}{\delta A_3^i}$$

の後にも無次元となることが保証され、それ故、面積演算子は適正な次元を持つ。

■「面を何回も突き抜けていれば、追加の寄与も生じる」(p.112, l.6,7) について ネットワークの線が面  $\Sigma$  と何回も交わる場合、式 (8.15) は面上の積分 (8.14) に対して、点  $y$  が各交点に一致するたびに自動的に寄与を持つ。このように式 (8.15) 自体は、線が面を何度も突き抜ける場合にも正しいと考えられる。下記の式 (8.15') を参照。

■式 (8.15) について 添字  $\alpha_l, \beta_l$  を省略して、スピン・ネットワーク状態 (36) を簡単に

$$\psi_s = \left( \prod_n v_n \right) \left( \prod_l h_l^{(J_l)} \right)$$

と書く。このときリンク線  $l$  のうち面  $\Sigma$  を貫くものを添字  $I$  で指定すると、

$$\frac{\delta \psi_s}{\delta A_3^i(y)} = \sum_I \underbrace{\left( \prod_n v_n \right) \left( \prod_{l \neq I} h_l^{(J_l)} \right)}_{\delta \psi_s / \delta h_I^{(J_I)}} \frac{\delta h_I^{(J_I)}}{\delta A_3^i(y)}$$

のようになる。ただし上式において添字の縮約が含意されており、その雰囲気を表すために、教科書の式 (8.15) にならって  $\text{Tr}$  を拡大解釈し、これを

$$\frac{\delta \psi_s}{\delta A_3^i(y)} = \sum_I \text{Tr} \left( \frac{\delta h_I^{(J_I)}}{\delta A_3^i(y)} \frac{\delta \psi_s}{\delta h_I^{(J_I)}} \right) \quad (8.15')$$

と書くことができる。このような速記術を用いても、式の意味は曖昧さなく理解できるはずである。

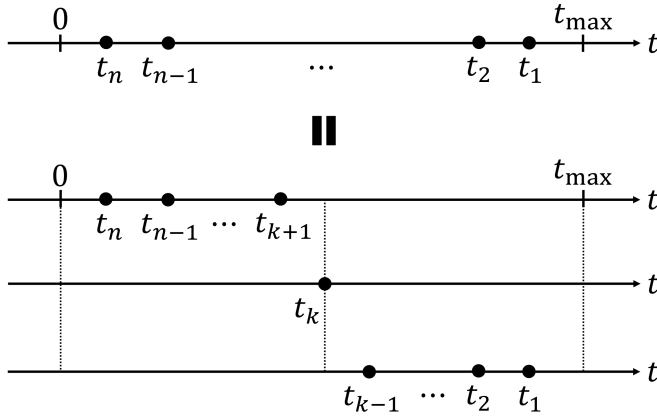


図25 式(8.19) 両辺の積分範囲

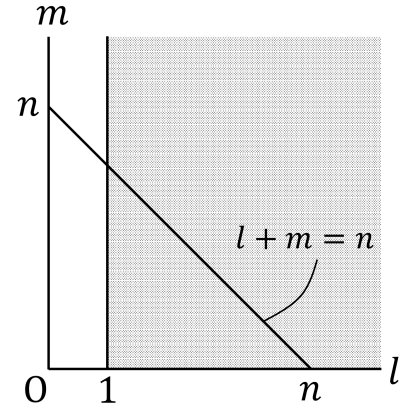


図26 式(8.19)の2重和の範囲(影を付けた領域(境界を含む)上の格子点にわたる)

■式(8.18),(8.19)について  $f(t_i) \equiv \dot{\gamma}^a(t_i) \mathbf{A}_a(t_i)$  と略記する.

式(8.18)について, 実際には全ての  $\mathbf{A}(t_k)$  の汎関数微分が寄与する形

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta \mathbf{h}}{\delta A_3^i(y)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \int_{t_{\max} \geq t_1 \geq \dots \geq t_n \geq 0} dt_1 \cdots dt_n f(t_1) \cdots \{ \dot{\gamma}^3(t_k) \delta^3(y - \gamma(t_k)) T^i \} \cdots f(t_n) \\
 &\quad (n=0 \text{ の項 } 1 \text{ は汎関数微分に寄与しない}) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \int_{t_{\max} \geq t_1 \geq \dots \geq t_{k-1} \geq 0} dt_1 \cdots dt_{k-1} f(t_1) \cdots f(t_{k-1}) \\
 &\quad \times \int_0^{t_{k-1}} dt_k \dot{\gamma}^3(t_k) \delta^3(y - \gamma(t_k)) T^i \\
 &\quad \times \int_{t_k \geq \dots \geq t_n \geq 0} dt_{k+1} \cdots dt_n f(t_{k+1}) \cdots f(t_n)
 \end{aligned} \tag{37}$$

になると考えられる. 実際, 曲面上の位置  $y$  が線との交点  $y_*$  に一致しているならば, 大小関係  $t_1 \geq \dots \geq t_n \geq 0$  を守りながら各積分変数  $t_k$  が  $0$  (始点) から  $t_{\max}$  (終点) まで動くとき, どの動点  $\gamma(t_k)$  も交点  $y_*$  を踏むはずである. よって上式(37)の全ての項が  $\frac{\delta \mathbf{h}}{\delta A_3^i(y_*)}$  に寄与を持つ.

さて, 図25を参考にすると, 上式(37)の積分は

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta \mathbf{h}}{\delta A_3^i(y)} &= \int_0^{t_{\max}} dt_k \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left[ \int_{t_{\max} \geq t_1 \geq \dots \geq t_{k-1} \geq t_k} dt_1 \cdots dt_{k-1} f(t_1) \cdots f(t_{k-1}) \right] \\
 &\quad \times \dot{\gamma}^3(t_k) \delta^3(y - \gamma(t_k)) T^i \\
 &\quad \times \left[ \int_{t_k \geq t_{k+1} \geq \dots \geq t_n \geq 0} dt_{k+1} \cdots dt_n f(t_{k+1}) \cdots f(t_n) \right]
 \end{aligned} \tag{38}$$

と書き換えられると考えられる.

他方,

$$\begin{aligned}
(\text{式 (8.19) 右辺}) &= \int dt_k h^J(t_k, t_{\max}) \dot{\gamma}^3(t_k) T^i \delta^3(y - \gamma(t_k)) h^J(0, t_k) \\
&= \int dt_k \left[ \sum_{l=1}^{\infty} \int_{t_{\max} \geq s_1 \geq \dots \geq s_l \geq t_k} ds_1 \dots ds_{l-1} f(s_1) \dots f(s_{l-1}) \right] \\
&\quad \times \dot{\gamma}^3(t_k) \delta^3(y - \gamma(t_k)) T^i \\
&\quad \times \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \int_{t_k \geq s_1 \geq \dots \geq s_m \geq 0} ds_1 \dots ds_m f(s_1) \dots f(s_m) \right]
\end{aligned}$$

である。ここで  $l + m = n$  とおくと、図 26 より 2 重和は

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^n$$

と書き直せるので,

$$\begin{aligned}
(\text{式 (8.19) 右辺}) &= \int dt_k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^n \left[ \int_{t_{\max} \geq s_1 \geq \dots \geq s_l \geq t_k} ds_1 \dots ds_{l-1} f(s_1) \dots f(s_{l-1}) \right] \\
&\quad \times \dot{\gamma}^3(t_k) \delta^3(y - \gamma(t_k)) T^i \\
&\quad \times \left[ \int_{t_k \geq s_1 \geq \dots \geq s_{n-l} \geq 0} ds_1 \dots ds_{n-l} f(s_1) \dots f(s_{n-l}) \right]
\end{aligned}$$

となる。さらに右辺 3 行目の  $(n-l)$  個の積分変数を

$$s_1, \dots, s_{n-l} \rightarrow s_{k+1}, \dots, s_n$$

と改めると,

$$\begin{aligned}
(\text{式 (8.19) 右辺}) &= \int dt_k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^n \left[ \int_{t_{\max} \geq s_1 \geq \dots \geq s_l \geq t_k} ds_1 \dots ds_{l-1} f(s_1) \dots f(s_{l-1}) \right] \\
&\quad \times \dot{\gamma}^3(t_k) \delta^3(y - \gamma(t_k)) T^i \\
&\quad \times \left[ \int_{t_k \geq s_{k+1} \geq \dots \geq s_n \geq 0} ds_{k+1} \dots ds_n f(s_{k+1}) \dots f(s_n) \right]
\end{aligned}$$

となって式 (38) に一致するので、式 (8.19) が成立する。

「これと似た定義」(p.113, l.15,16) について 空間位置  $x$  から  $y$  までの平行移動関数  $h_{y \leftarrow x}$  (教科書の表記では  $h(x, y)$ ) は、その定義より性質

$$h_{z \leftarrow y} h_{y \leftarrow x} = h_{z \leftarrow x}$$

を満たすことが要求される。ところで無限小の経路に沿う平行移動関数は、5.2 節のノートの式 (24):

$$h_{x+dx \leftarrow x} = 1 + A_a(x) dx^a$$

で与えられる (ここでも  $ig$  を省略)。よって曲線  $\gamma$  を始点  $x_0 = \gamma(0)$  から終点  $x_n = \gamma(t_{\max})$  まで  $n$  分割すると、ホロノミーを

$$h_{x_n \leftarrow x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} [n][n-1] \dots [2][1], \quad [k] \equiv 1 + A_{a_k}(x_k)(x_k - x_{k-1})^{a_k}$$

と書ける [22, p.10]. 「これと似た定義」(p.113, 1.15,16) とはこのことを述べていると考えられる.

なお, これに対応する簡単な式「 $e^x = \lim_{N \rightarrow \infty} (1 + x/N)^N$ 」(p.113, 1.14) について,  $N \rightarrow \infty$  のとき

$$\left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} \frac{N!}{(N-n)!N^n} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \left(\because \frac{N!}{(N-n)!N^n} = \frac{N}{N} \cdot \frac{N-1}{N} \cdots \frac{N-n+1}{N} \rightarrow 1\right)$$

となる. 最右辺は指数関数の Taylor 展開だから,

$$\left(1 + \frac{x}{N}\right)^N \rightarrow e^x$$

である\*22.  $x = 1$  とすると, これは  $e$  の定義式になる. 直観的には

$$e^x = \left(e^{\frac{x}{N}}\right)^N \simeq \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N \quad (N \gg 1)$$

である.

上式を用いて, 再び式 (8.19) を導出できる (式 (8.19) の下 7 行). 実際,

$$\frac{\delta h}{\delta A_3^i(y)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n [n] \cdots [k+1] \frac{\delta[k]}{\delta A_3^i(y)} [k-1] \cdots [1] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n h^J(t_k, t_{\max}) \frac{\delta[k]}{\delta A_3^i(y)} h^J(0, t_k)$$

において

$$\frac{\delta[k]}{\delta A_3^i(y)} = (x_k - x_{k-1})^3 \delta^3(y - \gamma(t_k)) T^i, \quad (x_k - x_{k-1})^3 = \dot{\gamma}^3(t_k) dt_k$$

なので,

$$\frac{\delta h}{\delta A_3^i(y)} = \int dt_k h^J(t_k, t_{\max}) \dot{\gamma}^3(t_k) T^i \delta^3(y - \gamma(t_k)) h^J(0, t_k) : (8.19)$$

を得る. このように全ての  $[k]$  を微分しなければならないので, 式 (8.19) における  $t_k$  の積分が現れる.

■式 (8.14),(8.15),(8.19) から式 (8.20) の導出 簡単のために面  $\Sigma$  とネットワーク線がただ 1 つの交点を持つ場合を考える. 交点の位置を  $y = y_*$  とし, 交点に対応する線のパラメーターを  $t = t_*$  とする. 面  $\Sigma$  や線に限らず, 任意の空間位置に座標  $(y^1, y^2, t)$  を割り当てよう (線上で 2 次元座標  $y = y_*$ , 面上で  $t = t_*$ ). するとホロノミー (8.19) の右辺におけるデルタ関数は

$$\delta^3(y - \gamma(t_k)) = \delta^2(y - y_*) \delta(t_* - t_k)$$

と分解できる. これを踏まえ, 式 (8.19) → 式 (8.15) → 式 (8.14) と正直に代入すると,

$$\begin{aligned} [\hat{E}_i^3]_f(x) \psi_s &= -8i\pi G\beta \int_{\Sigma} d^2y f_{\varepsilon}(x, y) \text{Tr} \left[ \left( \int dt_k h^J(t_k, t_{\max}) \dot{\gamma}^3(t_k) T^i \delta^3(y - \gamma(t_k)) h^J(0, t_k) \right) \frac{\delta \psi_s}{\delta h^J} \right] \\ &= -8i\pi G\beta \int d^2y \delta^2(y - y_*) \int dt_k \delta(t_k - t_*) \dot{\gamma}^3(t_k) \text{Tr} \left[ (h^J(t_k, t_{\max}) T^i h^J(0, t_k)) \frac{\delta \psi_s}{\delta h^J} \right] f_{\varepsilon}(x, y) \end{aligned}$$

となる. このように「結局は 3 次元 Dirac デルタ関数の 3 次元積分が実行される」(p.113 下から 5,4 行). p.114 の訳註には, 「式 (8.20) の右辺は,  $\int dy^1 dy^2 dt$  という 3 重積分の表記が省略されている」とあるけれど, 我々は  $(y^1, y^2, t_k)$  に関する空間積分を実行すると (代わりに式 (8.20) の引数を本稿のように訂正することになる),

$$[\hat{E}_i^3]_f(x) \psi_s = -8i\pi G\beta \dot{\gamma}^3(t_*) \text{Tr} \left[ (h^J(t_*, t_{\max}) T^i h^J(0, t_*)) \frac{\delta \psi_s}{\delta h^J} \right] f_{\varepsilon}(x, y_*)$$

\*22 通常の数に限らず, 演算子  $x$  に対してもその指数関数を級数展開の形  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  で定義すれば, この結果は正しい.



となる．ここでトレースの意味を再考する． $\psi_s$  からホロノミー  $h^J$  を抜き取った因子  $\left(\frac{\delta\psi_s}{\delta h^J}\right)_\alpha^\beta$  は， $h^J$  の始点と終点に関する結節因子の生きた添字  $\alpha, \beta$  を行列添字に持つ行列である．他方， $h^J$  の汎関数微分 (8.19) も同じ行列添字を持つので，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr} \left[ (h^J(t_*, t_{\max}) T^i h^J(0, t_*)) \frac{\delta\psi_s}{\delta h^J} \right] &\equiv (h^J(t_*, t_{\max}) T^i h^J(0, t_*))_\beta^\alpha \left(\frac{\delta\psi_s}{\delta h^J}\right)_\alpha^\beta \\ &= (T^i)^\mu{}_\nu (h^J(0, t_*))_\beta^\nu \left(\frac{\delta\psi_s}{\delta h^J}\right)_\alpha^\beta (h^J(t_*, t_{\max}))_\mu^\alpha\end{aligned}$$

と書ける．最右辺における  $T^i$  の係数は  $\psi_s$  からホロノミー  $h^J$  を抜き取った因子  $\left(\frac{\delta\psi_s}{\delta h^J}\right)_\alpha^\beta$  を結節因子として，始点から交点まで，交点から終点までのホロノミー  $h^J(0, t_*)$ ,  $h^J(t_*, t_{\max})$  を両端において繋ぎとめたものである．したがって大まかにはもとの  $\psi_s$  が復元されるものの，交点においてホロノミーが途切れていることに対応して，新たなダミー添字  $\mu, \nu$  が生じている．そこでこれを

$$(\psi_s)^\nu{}_\mu \equiv (h^J(0, t_*))_\beta^\nu \left(\frac{\delta\psi_s}{\delta h^J}\right)_\alpha^\beta (h^J(t_*, t_{\max}))_\mu^\alpha$$

と書き， $(T^i)^\mu{}_\nu$  との縮約を改めて  $(T^i)^\mu{}_\nu (\psi_s)^\nu{}_\mu = \mathrm{Tr}(T^i \psi_s)$  で表すと，式 (8.20) が得られる．

■ 「 $T^i T^i = J(J+1)\mathbf{1}$ 」 (p.114, 1.7) について  $(N+1)$  次行列の生成子  $T^i$  (ただし  $N = 1, 2, \dots$ ) は  $su(2)$  代数 (角運動量の交換関係)

$$[T^i, T^j] = i\varepsilon^{ijk} T^k \quad (\hbar = 1) \quad (39)$$

を満たすため，角運動量  $\mathbf{J}$  の固有状態  $|j, m\rangle \equiv |m\rangle$  を基底とする行列表現

$$T^i = (\langle m | J_i | m' \rangle)$$

と見なせる．ここで磁気量子数  $m$  は  $(2j+1)$  通りの値をとり得るから，

$$N+1 = 2j+1, \quad j = \frac{N}{2} (\equiv J)$$

と同定される．このとき角運動量の“大きさ”  $j$  に属する任意の状態  $|\alpha\rangle = \sum_m c_m |m\rangle$  に関しては，固有方程式

$$\mathbf{J}^2 |\alpha\rangle = j(j+1) |\alpha\rangle$$

が成り立つから，演算子の関係として

$$\mathbf{J}^2 = j(j+1)\mathbf{1}$$

が満たされると考えられる ( $\mathbf{1}$  は恒等演算子)．これは完備関係式  $\sum_m |m\rangle \langle m| = \mathbf{1}$  を挿入して，直ちに行列の関係

$$T^i T^i = J(J+1)I \quad (40)$$

に読み替えられる ( $I$  は単位行列)．実際，以上の性質は角運動量  $\mathbf{J}$  の交換関係 (と Hermite 性) だけから導かれるから [21, pp.253–259]，生成子  $T^i$  も同様の関係を満たさなければならない．

なお基本表現 ( $N = 1$ ) では，生成子  $T^i$  はスピン  $1/2$  の行列表現 ( $(\pm|S^i|\pm) \rightarrow S^i$ ) に対応し，Pauli 行列と

$$\sigma^i = \frac{(\pm|S^i|\pm)}{1/2} \rightarrow 2S^i$$

で関係付けられる。このとき上式 (40) はスピン演算子の表式  $\mathbf{S}^2 = \frac{3}{4}\mathbf{1}$  (恒等演算子 1 に比例) [21, p.37] と整合した結果  $S^i S^i = \frac{3}{4}I$  (教科書 p.114, 1.8) を与える。また交換関係 (39) は  $T^i = S^i = \sigma^i/2$  を代入すると、式 (8.6):

$$[\sigma^i, \sigma^k] = 2i\varepsilon^{ijk}\sigma^k$$

を再現する。

■面積演算子の固有方程式 (8.21) について

$$\begin{aligned} [\hat{E}_i^3]_f(x)[\hat{E}_i^3]_f(x)\psi_s &\sim \sum_{y_*, y_{**}} (8\pi G\beta)^2 \dot{\gamma}^3(t_*)\dot{\gamma}^3(t_{**}) \text{Tr}(T^i T^i \psi_s) f_\varepsilon(x, y_*) f_\varepsilon(x, y_{**}) \\ &\sim \sum_{y_*} (8\pi G\beta)^2 \{\dot{\gamma}^3(t_*)\}^2 j_I(j_I+1) \psi_s \{f_\varepsilon(x, y_*)\}^2, \\ &\quad (\text{“デルタ関数” の積 } f_\varepsilon(x, y_*) f_\varepsilon(x, y_{**}) \text{ の下で } y_* = y_{**} \text{ のみ寄与を持つ}) \\ \hat{A}_\Sigma \psi_s &\sim \int_\Sigma d^2x \sqrt{(\text{上式})} \\ &\quad (\sqrt{[\hat{E}_i^3]_f[\hat{E}_i^3]_f} \text{ の固有値は } [\hat{E}_i^3]_f[\hat{E}_i^3]_f \text{ の固有値の平方根と考える}) \\ &= \sum_{y_*} 8\pi G\beta |\dot{\gamma}^3(t_*)| \sqrt{j_I(j_I+1)} \psi_s \int_\Sigma d^2x f_\varepsilon(x, y_*) \\ &\sim \sum_{y_*} 8\pi G\beta \sqrt{j_I(j_I+1)} \psi_s : (8.21). \\ &\quad (\text{自然単位系で } l_{\text{Planck}}^2 = G, \text{ パラメーター付けの条件 } |\dot{\gamma}^3(t)| = 1) \end{aligned}$$

このように演算子  $\hat{O}$  の固有値が 0 のとき、 $\sqrt{\hat{O}}$  の固有値を  $\sqrt{O}$  と考えるのは自然である。

■「特に  $j_I$  が小さいところでは固有値の間隔の差が著しい」(p.114, 1.18–19) について 差分

$$\Delta\sqrt{j_I(j_I+1)} \equiv \sqrt{\left(j_I + \frac{1}{2}\right)\left(j_I + \frac{3}{2}\right)} - \sqrt{j_I(j_I+1)}$$

に対して相対誤差

$$\frac{\Delta\sqrt{j_I(j_I+1)}}{\sqrt{j_I(j_I+1)}} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2j_I}\right)\left(1 + \frac{3}{2j_I}\right)\left(1 + \frac{1}{j_I}\right)^{-1}} - 1$$

は、 $j_I \sim 1$  のとき 1 程度の値を取り得るのに対し、 $j_I \gg 1$  では

$$\sqrt{j_I(j_I+1)} \simeq j_I, \quad \therefore \Delta\sqrt{j_I(j_I+1)} \simeq \frac{1}{2}$$

より、相対誤差は

$$\frac{\Delta\sqrt{j_I(j_I+1)}}{\sqrt{j_I(j_I+1)}} \sim \frac{1}{j_I} \ll 1$$

に過ぎない。ただし差分  $\Delta\sqrt{j_I(j_I+1)}$  そのものは常に 1 程度である (図 27 参照)。

■「演算子をどのようにしてよく定義し、発散が現れないようにしたかに注意されたい」(p.115, 1.4,5) について 不鮮明化を施さない場合、式 (8.14) は単に

$$\hat{E}_i^3(x)\psi_s = -8i\pi G\beta \frac{\delta\psi_s}{\delta A_3^i(x)}$$

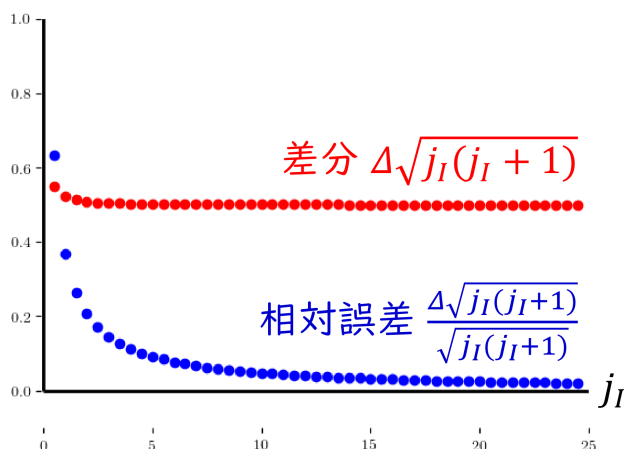


図 27 面積の固有値における因子  $\sqrt{j_I(j_I+1)}$  の間隔

となる．ここに  $x$  は面積演算子 (8.13) の積分変数であり，面  $\Sigma$  上にあると想定される．不鮮明化を施さない場合にも，式 (8.15),(8.19) で  $y \rightarrow x$  と置き換えた式が成り立つ（導出過程で  $y \rightarrow x$  とすれば良い）．これを上式に代入すると，面  $\Sigma$  と線の交点を  $x_*(=y_*)$  として，式 (8.20) で  $f_\varepsilon(x,y) \rightarrow \delta^2(x-x_*)$  と置き換えた式

$$\hat{E}_i^3(x)\psi_s = 8i\pi G\beta\dot{\gamma}^3(t_*)\text{Tr}(T^i\psi_s)\delta^2(x-x_*)$$

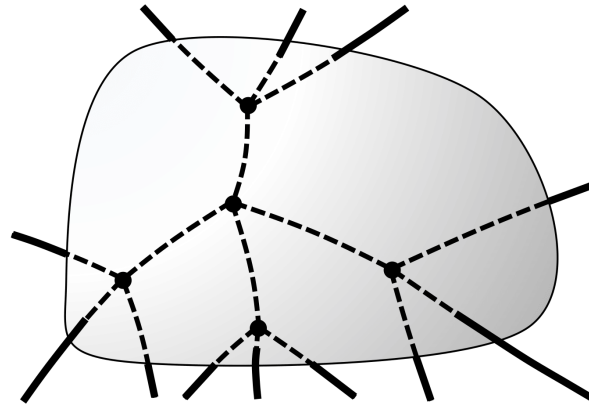
が得られる（式 (8.20) の導出過程と見比べれば良い）．これは  $x$  が交点  $x_*$  に一致するときのみ， $\psi_s$  の  $A_3^i(x)$  による汎関数微分がゼロでない値を持ち得ることを考えれば，理に適っている．すると式 (8.21) の導出過程は依然として成立するが，不鮮明化した関数は全て  $f_\varepsilon(x,y_*) \rightarrow \delta(x-x_*)$  と置き換わることになる．結局，不鮮明化の利点は，デルタ関数を用いた証明と同じことを，代わりに有限の関数  $f_\varepsilon$  を用いて行えることにあると考えられる．ここで特に式 (8.21) の導出にて，積  $f_\varepsilon(x,y_*)f_\varepsilon(x,y_{**})$  の下で  $y_* = y_{**}$  のみ寄与を持つとしたことは，充分すそ野の狭い関数  $f_\varepsilon$  を用いれば正しく，必ずしも  $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限  $f_\varepsilon(x,y_*) \rightarrow \delta(x-x_*)$  を想定しなくても良いことに注意する．

■「それぞれの不鮮明化された 3 脚場の作用は……」（p.115 下から 12~9 行目）について

$$\varepsilon_{abc}\tilde{E}_i^a\tilde{E}_j^b\tilde{E}_k^c \rightarrow T^iT^jT^k \times \varepsilon_{abc}\dot{\gamma}^a\dot{\gamma}^b\dot{\gamma}^c$$

における，正接  $\dot{\gamma}^a, \dot{\gamma}^b, \dot{\gamma}^c$  の張る平行 6 面体の体積がゼロでないのは，「スピン・ネットワークを構成する線の 3 本以上が非平面的に結び付く点だけである」（p.115 下から 10,9 行目）．

■空間の離散化について 離散的な空間として素朴にイメージし得るのは，格子点が空間中に分布している状況だろう．このとき，なお格子点の間の空間を想像・定義し得るため，実際には空間が離散化されている状況を考えられないのではないかという疑問が生じる．（数値シミュレーションにおいても，格子点上でのみ物理量を定義することが行われるが，それは便宜的な措置である．）すなわち「空間における格子点」あるいは「空間におけるスピン・ネットワーク」と言うとき，既に空間が生成される前から（連続的な）空間の概念が密輸入されていることになる．しかしながらスピン・ネットワークは抽象的なグラフであって，空間の中にあるのではなく，正しくは空間そのものである．確かに第 1 義的には 3 次元の多様体に埋め込まれたスピン・ネッ



曲面の面積	↔	面を貫くネットワーク線の“本数”
領域の体積	↔	領域に含まれる(しかるべき)結節点の個数

図 28 空間の離散化

トワークが定義されるものの、微分同相不変性の観点から連続的な変形によって互いに移行できるグラフを同一視することで、“抽象的なスピン・ネットワーク”が定義される。空間の量子状態はこの抽象的なスピン・ネットワークによって決まり、その空間における形状や位置は重要ではない [17, pp.20–21].

このように我々が得た描像 (図 23) はスピン・ネットワークを基調とする量子論の帰結であり、それほど単純なものではない。確かに頭の中では空間における 3 次元の領域を、連続的に変形してゆくことができる。しかしその領域が含む結節点の個数や表面を貫く線の本数が変わらない限り、量子力学的にはその領域が持つ体積や表面積は一定であることになる (図 28 参照)。ちょうど領域の境界が頂点にさしかかって、新しい頂点が領域の中に取り込まれると、領域の体積は不連続的に増加する。また表面積も、リンク線の枝分かれする頂点を境として、不連続的に変化する。

### 8.3 ハミルトニアン拘束のループ表現

本節ではハミルトニアン拘束 (7.33):

$$H(N) = \int d^3x N \{A_c^k, V\} F_{ab}^k \varepsilon^{abc} \quad (8.23)$$

[本稿次節で補足] を、ループ表現の量子力学的な演算子へと移行させたい。その際、格子正則化 (lattice regularization) の手続きを利用する。格子正則化ではまず、空間を互いに隣接する四面体によって分割する。

最初にいくつかの表記を導入する。各四面体  $\Delta$  において 1 つの頂点  $v(\Delta)$  を選び、そこに端を持つ 3 本の辺を  $s_i(\Delta)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) で表す。また  $s_i$  と  $s_j$  を結ぶ、頂点  $v$  と向かい合う辺を  $s_{ij}$  と書く。さらに辺  $s_i, s_{ij}, s_j$  をこの順に沿って進むループ

$$\alpha_{ij}(\Delta) = s_i(\Delta) \cup s_{ij}(\Delta) \cup s_j(\Delta)^{-1}$$

を定義する (図 29 参照)。

四面体  $\Delta$  全体を点  $v(\Delta)$  へと縮める極限で、辺  $s_k$  に沿う平行移動関数は

$$\lim_{\Delta \rightarrow v(\Delta)} h_{s_k} = \mathbf{1} + \mathbf{A}_c s_k^c \quad (8.24)$$

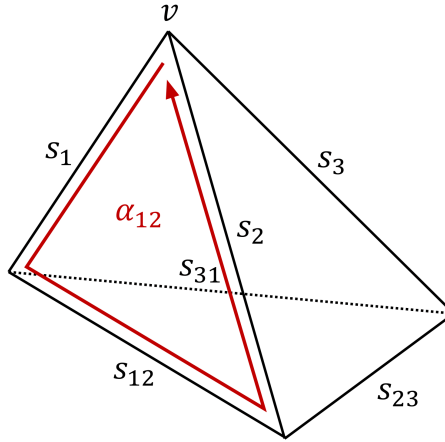


図 29 格子正則化の“三角形分割”における 1 つの四面体と辺の名称

となる [5.2 節のノートにおける無限小の平行移動関数 (24) で,  $ig \rightarrow 1, dx^a \rightarrow s_k^a$  とすれば良い]. またループ  $\alpha_{ij}$  に沿うホロノミーは, 同じ極限で

$$\lim_{\Delta \rightarrow v(\Delta)} h_{\alpha_{ij}} = \mathbf{1} + \frac{1}{2} \mathbf{F}_{ab} s_i^a s_j^b \quad (8.25)$$

となる [本稿次節を参照]. 以上を用いると, 三角形分割の下で定義された量

$$H_{\Delta}(N) = \sum_{\Delta} N(v(\Delta)) \varepsilon^{ijk} \text{Tr}(h_{\alpha_{ij}} h_{s_k} \{h_{s_k}^{-1}, V\}) \quad (8.26)$$

は,  $\Delta \rightarrow v(\Delta)$  の極限でハミルトニアン拘束の式 (8.23) に帰着することが示される [本稿次節で確認]. 背景構造の情報 (四面体の辺の長さなど) は, この手続きの最後において消失している. ハミルトニアン拘束の式 (8.26) はホロノミーや体積演算子で表されているから, 即座にループ表現における演算子へと移行させることができる.

拘束条件は体積を含むため, 結節点に非平面的に少なくとも 3 本の線が結び付いている場合にのみ寄与を持ち得る. そこで三角形分割の頂点  $v(\Delta)$  と辺  $s_i, s_j, s_k$  は, ネットワーク状態におけるそのような結節点と線に重なるようにとらなければならない (図 30 参照)<sup>\*23</sup>. [極限  $\Delta \rightarrow v(\Delta)$  を想定して, 結節点に集まるネットワーク線を局所的に真っ直ぐな線と見なしていると考えられる. あるいは微分同相不変なネットワークのトポロジカルな構造だけが重要であり, 真っ直ぐな線を仮定して構わないということか.]

このようにしてハミルトニアン拘束の作用を計算できる. 3 価の結節点への作用を考えた場合の正味の効果は,  $s_{ij}$  に対応する余分の線を付加することによって結節点に「衣を着せて»,  $s_i$  と  $s_j$  の色を変え, 全体に掛かる因子を生成する, というものである. 図 8.6 [本稿の図 30] を参照してもらいたい. 価数が高くなると, ハミルトニアン拘束の作用はさらに複雑になる. (中略) 参考文献としては Borissov, De Pietri, and Rovelli (1997) を薦める. (p.119)

ここで言及されている関連文献を, 巻末の参考文献リスト (pp.171–176) から抜粋しておく :

Borissov, R., De Pietri, R., and Rovelli, C. (1997) *Class. Quan. Grav.* **14**, 2793.

<sup>\*23</sup> 極限操作  $\Delta \rightarrow v(\Delta)$  の際に, スピン・ネットワークにおける結節点と線に対応しない三角形分割の頂点と線が多数, 現れることは問題ない.

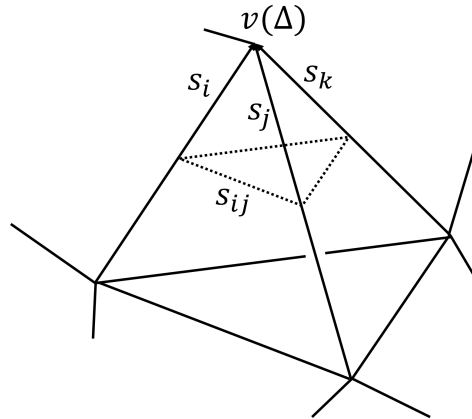


図 30 ハミルトニアン拘束の正則化に用いられる三角形分割は、演算子の作用するスピン・ネットワーク状態における結節点と線が、四面体の頂点と辺に載るように施される。結節点  $v(\Delta)$  へのハミルトニアン拘束の作用により、線分  $s_{ij}$  がネットワークに加わる。

(p.119 訳註を引用) ハミルトニアン拘束 (8.26) に含まれる平行移動関数は、ホロノミー演算子として状態関数に対して単に乗法的に作用する (そのホロノミーを追加する) と考えればよい。p.110 脚註参照。それでも式 (8.26) 全体の作用の解析は、3 個の結節点に作用させる場合でさえ、少々込み入ったものになる。具体的な解析手順を知りたい読者は、文中にも挙げてある Borissov *et al.* (1997) [arXiv:gr-qc/9703090] の Section 5 を参照すればよい。

ハミルトニアン拘束は微分同相変換の下で不変ではないため、その作用は、微分同相変換の下で不変ではない“運動学的” (kinematical) なスピン・ネットワーク状態  $|k\rangle$  の空間においてのみ定義できる。その作用を、微分同相不変な状態に対する作用へ移行させることができる\*24。その結果、ハミルトニアン拘束がスピン・ネットワーク状態に対して付け加える線は、何処でも構わないことになる。微分同相不変な状態を扱うので、加える線がその頂点から“近い”としても“遠い”としても、演算子の作用としては変わらない。

よく定義されたハミルトニアン拘束を得たことは、発散量がなく有限な、非摂動的な量子重力理論を構築するための基礎となる。[6.4 節では摂動的な量子重力理論が無限大の問題を持つことを見た。]

我々はさらに、この理論が正しい物理を捉えているかを判断しなければならない。そのためには、次の点を検討することが考えられる。

- 物理的な状態、すなわちハミルトニアン拘束によって消滅するような量子状態を構築すること。
  - しかしその後には、完全拘束の理論から、“時間” 発展を解明するという難問がある。これは一般相対性理論については解決されていない (10.5 節参照)。
- 導入されたハミルトニアン拘束によって、正しい代数を量子力学的に再現すること。
  - しかし Ashtekar-Lewandowski 測度を導入したスピン・ネットワークにおいて、

\*24 具体的には互いに微分同相写像で関係付けられるスピン・ネットワーク  $s, s'$  に対して、 $\langle \Psi | s \rangle = \langle \Psi | s' \rangle$  となる状態  $|\Psi\rangle$  を考える。[これは  $|\Psi\rangle$  が微分同相不変な状態であることを意味すると考えられる。しかしながら]  $|\Psi\rangle$  は、ある極限において運動学的空間の中にあるように定義される。そこで状態  $\Psi$  を用いて、 $\hat{H}(N)$  の  $\Psi$  への作用を

$$\langle \hat{H}(N) \Psi | s \rangle = \lim_{\Delta \rightarrow v} \sum_{\Delta} \langle \Psi | \hat{H}_{\Delta}(N) s \rangle$$

で定義する。

微分同相拘束は演算子によって表されず、すべての拘束代数を証明することは望めない。

拘束条件の作用については、特に 4 価にグラフについて [原文ママ]、もうすこし技術的な詳細があること、あるいは拘束条件の作用の対象となる状態の空間を特徴付けた方法が、かなり粗っぽいものであったことは、強調しておく必要がある。(中略) また、我々は  $\beta \neq i$  の場合に現れる、難物に見えるハミルトニアン第 2 項に関する議論もすべて省いた。(中略) この先の議論については、読者に対して Thiemann (2008) [本稿章末の関連文献の抜粋を参照] を薦めておく。(後略) (p.121)

### 8.3 節について

■ハミルトニアン拘束の式 (8.23) について 7.4 節で、以降  $\beta$  を実数値にとると約束したので (p.101)、正確にはハミルトニアン拘束として式 (7.33)=(8.23) の代わりに、付加項を伴う式 (7.12) を用いる必要がある (節末 (p.121))。関連：章末問題 3。

式 (7.33) と比べると、 $\varepsilon^{abc}$  の加重度がゼロになっている。これについては式 (7.31) のノートを参照。

■ホロノミー  $h_{\alpha_{ij}}$  の式 (8.25) について 付録 F.2 で示したように、図 47 の 2 つの経路に沿って場  $\varphi$  を平行移動した結果の差は、式 (174)：

$$\Delta\varphi(x) = [D_\mu, D_\nu]\varphi(x)dx^\mu dy^\nu = -igF_{\mu\nu}(x)\varphi(x)dx^\mu dy^\nu$$

で与えられる。これは図 47 の平行四辺形 (記号  $\diamond$  で表そう) に沿って反時計回りに場  $\varphi$  を 1 周、平行移動したときの変化が、

$$(\Delta\varphi)_\diamond = -\Delta\varphi = igF_{\mu\nu}\varphi dx^\mu dy^\nu$$

と表されることを意味する。上式は四辺形に沿う周回積分 ( $\sim (\Delta\varphi)_\diamond$ ) が<sup>25</sup>、内部の面積 ( $\sim dx^\mu dy^\nu$ ) に比例するという、Stokes の定理に対応している<sup>\*25</sup>。

さて、ここからは空間内の経路  $dx^\mu = (0, dx^a)$  を考え、また  $ig \rightarrow 1$  とおく：

$$(\Delta\varphi)_\diamond = F_{ab}\varphi dx^a dy^b.$$

四辺形の代わりにループ  $\alpha_{ij}$  に沿って平行移動を行う場合、場の変化は右辺の面積要素  $dx^a dy^b$  を、三角形  $\alpha_{ij}$  の作る面積要素  $s_i^a s_j^b / 2$  で置き換えた式

$$(\Delta\varphi)_{\alpha_{ij}} = F_{ab}\varphi \frac{1}{2} s_i^a s_j^b \tag{41}$$

で与えられると考えられる。

式 (41) の説明 微小な三角形のループ  $\alpha_{ij}$  の内部を、さらに細かい平行四辺形に分割し (図 31 参照)、すべての四辺形に関して  $(\Delta\varphi)_\diamond$  の和をとる。すると隣接する四辺形に共有される辺では、逆向きの平行移動による場の変化が相殺するので、ループ  $\alpha_{ij}$  に沿う平行移動による場の変化

$$(\Delta\varphi)_{\alpha_{ij}} = \sum_{\diamond} (\Delta\varphi)_\diamond = F_{ab}\varphi \sum_{\diamond} dx^a dy^b$$

<sup>\*25</sup> 実際、曲がった時空中におけるベクトルの平行移動の経路による差 (3.12)：

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\lambda = R^\lambda_{\rho\mu\nu}V^\rho$$

は、4 次元時空中における Stokes の定理を用いて導かれる [7, p.289]。また、ここでは曲率テンソル  $R_{\dots}$  の役割を場の強度  $F_{\mu\nu}$  が担っている (付録 F.2 も参照)。

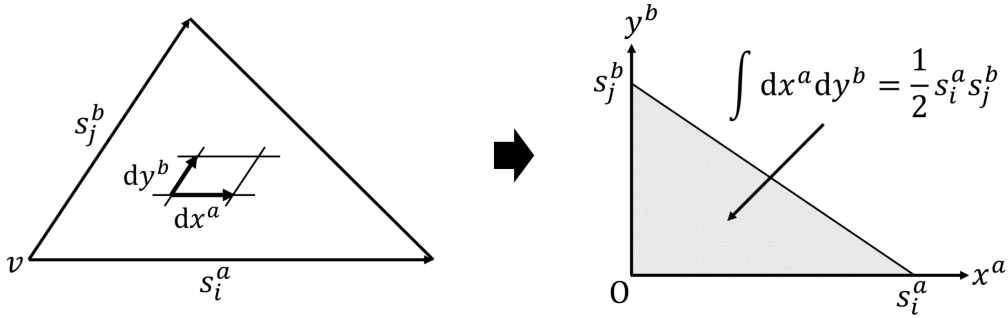


図 31 微小な三角形  $\alpha_{ij}$  内部の, さらに細かい平行四辺形への分割

が得られる (Stokes の定理のアイデアに対応). ただし第 2 の等号では三角形  $\alpha_{ij}$  が微小なので, 場  $F_{ab}, \varphi$  を頂点  $v$  で評価して和の外に出した. 最右辺の面積要素  $dx^a dy^b$  の和は, 三角形  $\alpha_{ij}$  の作る面積要素  $s_i^a s_j^b / 2$  を与えると考えれば, 式 (41) が得られる.

上式 (41) を場の変化  $(h_{\alpha_{ij}} - 1)\varphi$  と等置して, ホロノミー  $h_{\alpha_{ij}}$  の式 (8.25) を得る.

■  $H_{\Delta}(N)$  の式 (8.26) が  $\Delta \rightarrow v(\Delta)$  の極限で  $H(N)$  の式 (8.23) に帰着することの確認 (章末問題 6) p.118 の筋書きに従って計算する. 式 (8.26) において

$$\{h_{s_k}^{-1}, V\} = \{h_{s_k^{-1}}, V\} = \{\mathbf{1} - \mathbf{A}_c s_k^c, V\} = -s_k^c \{\mathbf{A}_c, V\}$$

なので,

$$\text{Tr} [h_{\alpha_{ij}} h_{s_k} \{h_{s_k}^{-1}, V\}] = -\text{Tr} \left[ \left( \mathbf{1} + \frac{1}{2} \mathbf{F}_{ab} s_i^a s_j^b \right) (\mathbf{1} + \mathbf{A}_d s_k^d) s_k^c \{\mathbf{A}_c, V\} \right]$$

となる. ここで  $h_{s_k} = \mathbf{1} + \mathbf{A}_d s_k^d$  における微小な  $s_k^d$  の項を無視して,

$$\text{Tr} [h_{\alpha_{ij}} h_{s_k} \{h_{s_k}^{-1}, V\}] = -\text{Tr} \left[ \left( \mathbf{1} + \frac{1}{2} \mathbf{F}_{ab} s_i^a s_j^b \right) s_k^c \{\mathbf{A}_c, V\} \right]$$

とする\*26. また Pauli 行列のトレースが

$$\text{Tr}(\{\mathbf{A}_c, V\}) = \{A_c^l, V\} \text{Tr}(\sigma^l) = 0, \quad \text{Tr}(\sigma^l \sigma^m) = \text{Tr}(\delta^{lm} + i\varepsilon^{lmn} \sigma^n) = 2\delta^{lm}$$

であることに注意すると, 生き残る項は

$$\begin{aligned} \text{Tr} [h_{\alpha_{ij}} h_{s_k} \{h_{s_k}^{-1}, V\}] &= -\text{Tr} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{F}_{ab} s_i^a s_j^b s_k^c \{\mathbf{A}_c, V\} \right] \\ &= -\frac{1}{2} s_i^a s_j^b s_k^c F_{ab}^l \{A_c^m, V\} \text{Tr}(\sigma^l \sigma^m) \\ &= -s_i^a s_j^b s_k^c F_{ab}^l \{A_c^l, V\} \end{aligned}$$

\*26 最終的に体積要素を構成する  $s_i^a$  の 3 次の項を許容するにも関わらず, 2 次の項

$$-\text{Tr}[\mathbf{A}_d s_k^d s_k^c \{\mathbf{A}_c, V\}] = -s_k^c s_k^d A_d^l \{A_c^m, V\} \text{Tr}(\sigma^l \sigma^m) = -2s_k^c s_k^d A_d^l \{A_c^l, V\} \quad (\because \text{Tr}(\sigma^l \sigma^m) = 2\delta^{lm})$$

を捨てていることになる.



と計算される。線要素  $s_i^a, s_j^b, s_k^c$  は式 (8.26) の Levi-Civita 記号と合わせて、体積要素を構成する。具体的には、3 辺  $s_i^a, s_j^b, s_k^c$  の張る平行 6 面体の体積が<sup>27</sup>、四面体の体積  $|\Delta|$  の 6 倍なので、

$$\varepsilon^{ijk} s_i^a s_j^b s_k^c = 6\varepsilon^{abc} |\Delta|$$

と書ける<sup>\*27</sup>。よって、ここでも数係数を無視すれば、

$$\begin{aligned} H_\Delta(N) &\sim \sum_{\Delta} |\Delta| V(v(\Delta)) \varepsilon^{abc} F_{ab}^l \{A_c^l, V\} \\ &\rightarrow \int d^3x N(x) \varepsilon^{abc} F_{ab}^l \{A_c^l, V\} : (8.23) \quad \left( \text{連続極限 } \sum_{\Delta} |\Delta| \rightarrow \int d^3x \right) \end{aligned}$$

となる。

## 関連文献について

Rovelli (2007) と Thiemann (2008) の本が<sup>28</sup>、本章の題材を含んでいる。

ここで言及されている関連文献を、巻末の参考文献リスト (pp.171–176) から抜粋しておく。これらは第 7 章の関連文献としても挙げられている。

- Rovelli, C. (2007) *Quantum Gravity*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Thiemann, T. (2008) *Modern Canonical Quantum General Relativity*. Cambridge University Press, Cambridge.

---

<sup>\*27</sup> 実際、両辺を  $\varepsilon_{abc}$  と縮約すれば、これは

$$|\Delta| = \det(s_i^a) = \frac{1}{3!} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{ijk} s_i^a s_j^b s_k^c$$

と整合していることが分かる。

## 第9章 ループ量子宇宙

### 9.1 古典論

量子重力理論に対する期待のひとつとして、量子重力は何らかの形で、ビッグバン特異点を消滅させる仕組みを与えるのではないかと考えられている。本章では、ループ量子重力を宇宙論に応用する方法を学ぶ。大筋において、前章で概説した考察を継続し、ハミルトニアン拘束によって消滅するような量子状態を見出すことになるが、更にここに付け加わる条件は、状態が近似的に一様かつ等方的であるということである。量子的な水準において、正確に一様で等方的な状態を期待することはできない。それは自由度の凍結を意味してしまい、動的な状態としては、量子力学における不確定性原理の観点から許容されないものである。(中略)

正攻法に代わる研究方法がひとつ考えられる。理論を古典的に一様で等方的なものに還元しておいて、それから量子化を施したら如何だろう？ このようにすると、有限の自由度を持つ力学系が得られる [9.1 節]。これは“ミニ超空間”(mini-superspace)の近似と呼ばれる。(中略) Stone-von Neumann 定理によれば、有限個の多自由度を持つ系において、あらゆる量子力学的な表示は互いに等価である [6.1 節]。古典的な宇宙モデルを一様等方に還元してから、伝統的な変数を用いて量子化する方法で量子宇宙論を研究した人々は、特異点が除去されないことを見出した(たとえば Kiefer (1988)) [9.2 節]。Stone-von Neumann 定理を考慮すると、この限定された文脈の中で、異なる方法を工夫しても、異なる結果が導かれる望みはほとんどない。(中略)しかしながら Bojowald (ボジョワルド)(2000) は、一様な宇宙論の文脈において、ループ量子重力の鍵となる挙動を模倣するような技法を導入できるという重要な発見をした。そして、この技法は Stone-von Neumann 定理の前提とされた連続の仮定のひとつを破るものなので、新たな結果への扉が開かれた [9.3 節]。ここから人々は、ループ量子宇宙論において特異点は解消されるであろう [と] という注目すべき予言を行った [9.4–9.5 節]。本章では、これらの結果のいくつかを吟味する。(pp.123–124)

引用箇所で言及されている関連文献を、巻末の参考文献リスト (pp.171–176) から抜粋しておく。

- Kiefer, C. (1988) *Phys. Rev. D* **38**, 1761.
- Bojowald, M. (2000) *Class. Quan. Grav.* **17**, 1489.

一様性と等方性を備えた平坦な宇宙モデル (3.17):

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (9.1)$$

を考える。この計量を再現する Ashtekar 変数として、対角的な形

$$A_a^i = c\delta_a^i, \quad (9.2)$$

$$\tilde{E}_i^a = p\delta_i^a \quad (9.3)$$

を選ぶことができる(ただし  $|p| = a^2, c \propto \dot{a}$ ) [本稿次節参照]。この設定には自動的に Gauss 拘束が満たされるという利点がある [本稿次節参照]。正準変数  $A_a^i, \tilde{E}_i^a$  の Poisson 括弧の関係は  $c, p$  間の Poisson 括弧

$$\{c, p\} = \frac{6}{3}\pi G\beta [= 2\pi G\beta] \quad (9.4)$$

に引き継がれるので,  $c, p$  は正準共役になっている.

(p.124 訳註を引用) 変数記号  $c$  は, おそらく configuration variable (配位変数) の頭文字から採ったものである.  $p$  はその正準共役運動量にあたる.

Ashtekar 接続 (9.3) に対して, 曲率 (場の強さ) は

$$F_{ab}^k = c^2 \varepsilon_{ab}^k \quad (9.5)$$

と計算される [本稿次節参照]. これらを用いてハミルトニアン拘束は

$$H_G = -\frac{6}{\beta^2} c^2 \sqrt{|p|} \quad (9.7)$$

と書き直される. [本稿次節参照. すぐ後のスカラー場の寄与  $H_\varphi$  と区別するため, gravitational の頭文字  $G$  を添えていると想像される.] 重力理論を, 一様なスカラー場で記述される物質と結合させよう. スカラー場の微分同相拘束への寄与 [式 (7.22) の  $8\pi G\beta$  倍] は, 一様性のためゼロになる. また簡単のために  $V(\varphi) = 0$  とすると, ハミルトニアン拘束への寄与は  $H_\varphi \sim p_\varphi^2/|p|^{3/2}$  となり [ $p_\varphi$  の定義を含めて本稿次節で補足], ハミルトニアン拘束は  $H \sim H_G + H_\varphi$  である.

ハミルトニアン拘束はスカラー場  $\varphi$  を陽に含まないで,  $p_\varphi$  は運動の定数となる.

$$\begin{aligned} \text{運動方程式} \quad \dot{p} &= \{p, H\} \sim -\frac{\partial H}{\partial c} \sim \sqrt{|p|}c, \\ \text{拘束条件} \quad H &\sim H_G + H_\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad c \sim \frac{1}{p} \end{aligned}$$

より,

$$\dot{p} \sim \frac{1}{\sqrt{|p|}}, \quad \therefore p^{3/2} \sim t$$

となる. 上式は  $t = 0$  において宇宙の体積がゼロになることを示しており (ビッグバン特異点), Hubble パラメーター  $\mathcal{H} = \dot{p}/(2p)$  とスカラー場の物質密度  $\rho = p_\varphi^2/(2|p|^3)$  に対する Friedmann 方程式

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad (9.12)$$

[文献 [2, p.466](のノート) を参照] に対応する.

(p.125 訳註を引用)  $p$  の正準運動方程式に適用するハミルトニアンには, 経時 (ラプス) を  $N = 1$  と置いて, 全ハミルトニアンを (ここではハミルトニアン拘束を) 充てればよい. 4.4 節の自由粒子の取扱いを参照. 重力を一般的な形で扱おうとすると, 時間発展を考えることは容易ではないが (式 (7.11) の後の部分の記述を参照 [Ashtekar 変数で定式化した一般相対性理論の真の“力学”を, ひとつの任意パラメーター  $x^0$  (もしくは  $t$ ) に関する発展によって捉えることができない]), ここでは宇宙モデルを平坦化することによって問題を著しく単純にしているために, このような措置によって簡便に運動方程式を利用することができる.

## 9.1 節について

■平坦な FRW モデルに対する Ashtekar 変数 (9.2),(9.3) について 式 (3.36),(7.3):

$$\tilde{q}^{ab} = \det(q) q^{ab} = \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \delta^{ij}$$

に式 (9.3):  $\tilde{E}_i^a = p \delta_i^a$  を代入すると,

$$\det(q) q^{ab} = p^2 \delta_i^a \delta_j^b \delta^{ij} = p^2 \delta^{ab}$$

となる。ここで

$$(\delta_c^a) = (q^{ab})(q_{bc}), \quad \therefore 1 = |q^{ab}||q_{bc}| = |q^{ab}| \det(q)$$

に注意して両辺の行列式をとると,

$$\{\det(q)\}^3 \frac{1}{\det(q)} = p^6, \quad \therefore \det(q) = |p|^3$$

であり ( $\det(q) > 0$  を考慮した), これを上式に戻すと

$$q^{ab} = \frac{\delta^{ab}}{|p|}$$

を得る。これが式 (9.1) の計量

$$q_{ab} = a^2 \delta_{ab}, \quad \therefore q^{ab} = \frac{\delta^{ab}}{a^2}$$

に一致することを要求すると,  $|p| = a^2$  が得られる。

次に Ashtekar 接続の式 (9.3) について, 定義式 (7.4):

$$A_a^i = \Gamma_a^i + \beta K_a^i$$

においてスピン接続の定義が明記されていないが (3.7 節), 今考えている平坦な時空では

$$\Gamma_a^i = \Gamma_{ajk} \varepsilon^{jki} = 0$$

であると考え<sup>\*28</sup>. すると

$$A_a^i = \beta K_a^i = \beta K_{ab} \tilde{E}^{bi} / \sqrt{\det(q)}$$

であり, ここに

$$\begin{aligned} \tilde{E}^{bi} &= p \delta^{bi} = \pm a^2 \delta^{bi}, \\ K_{ab} &= \frac{1}{2N} (\dot{q}_{ab} - \mathcal{L}_{\vec{N}} q_{ab}) = \frac{a\dot{a}}{N} \delta_{ab}, \quad (\because q_{ab} = a^2 \delta_{ab}) \\ \det(q) &= |p|^3 = a^6, \quad \therefore \frac{1}{\sqrt{\det(q)}} = \pm \frac{1}{a^3} \quad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

を代入すると

$$A_a^i = c \delta_a^i : (9.3), \quad c \equiv \frac{\beta \dot{a}}{N}$$

が得られる。

「古典論の解においては, 以下で見えるように  $a^2 = |p|$  で,  $c$  は  $\dot{a}(t)$  に比例する」(p.124, 1.16,17) とあるが, そのことは以上のように, この段階 (幾何学のレベル) で確かめられる。式 (9.1) の計量と同様,  $c, p$  は時刻  $t$  だけの関数であり, Ashtekar 変数 (9.2),(9.3) は空間位置には依存しないことになる。

<sup>\*28</sup> 性質  $D_a E_i^b = 0$  を要求した場合のスピン接続

$$\Gamma_a^k{}_i = E_b^k (\partial_a E_i^b + \Gamma_{ac}^b E_i^c)$$

(3.7 節のノート参照) は, 通常の接続が  $\Gamma_{ac}^b = 0$  であることに加えて, 一様な 3 脚場をとれることから ( $\partial_a E_i^b = 0$ ), ゼロになる。

■「この設定には自動的に Gauss 拘束が満たされるという利点がある」(p.124, 1.19)について Ashtekar 変数 (9.2),(9.3) に対して,

$$D_a \tilde{E}_i^a = \partial_a \tilde{E}_i^a + g \varepsilon_{jik} \tilde{E}_j^a A_a^k = \partial_a (p \delta_i^a) + p c \varepsilon_{jik} (p \delta_j^a) (c \delta_a^k) = 0.$$

ただしここでは  $g$  を明記してあり, 最後の等号では添字  $j, k$  について対称な項  $\delta_j^a \delta_a^k = \delta_j^k$  と反対称な項  $\varepsilon_{jik}$  の縮約が消えることを用いた.

■曲率 (9.5) の導出 Ashtekar 接続 (9.3):  $A_a^i = c \delta_a^i$  に対して, 曲率 (場の強さ) (5.7) は

$$F_{ab}^k = \partial_a A_b^k - \partial_b A_a^k + \varepsilon^{kij} A_a^i A_b^j = \varepsilon^{kij} (c \delta_a^i) (c \delta_b^j) = c^2 \varepsilon_{ab}^k$$

と計算される. ただしここでも  $g = 1$  とおいた.

■ハミルトニアン拘束 (9.7) について ハミルトニアン拘束の式 (7.12):

$$H = \varepsilon_{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{ab}^k + 2 \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2} (\tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b - \tilde{E}_j^a \tilde{E}_i^b) (A_a^i - \Gamma_a^i) (A_b^j - \Gamma_b^j)$$

において,

$$\begin{aligned} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{ab}^k &= p^2 c^2 \delta_i^a \delta_j^b \varepsilon_{ab}^k = p^2 c^2 \varepsilon_{ij}^k, & \therefore \varepsilon_{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{ab}^k &= 3! p^2 c^2, \\ (\tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b - \tilde{E}_j^a \tilde{E}_i^b) (A_a^i - \Gamma_a^i) (A_b^j - \Gamma_b^j) &= p^2 c^2 (\delta_i^a \delta_j^b - \delta_j^a \delta_i^b) \delta_a^i \delta_b^j = p^2 c^2 (9 - 3) = 6 p^2 c^2 \end{aligned}$$

なので,

$$H = 6 p^2 c^2 \left( 1 + 2 \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2} \right) = 6 \frac{3\beta^2 + 2}{\beta^2} p^2 c^2$$

となって, ハミルトニアン拘束の式 (9.7) と  $p$  の次数, 係数が一致しない. これはもとのハミルトニアン拘束の式

$$H_G = \frac{\varepsilon^{abc} \varepsilon_{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{ab}^k}{\sqrt{\det(q)}} + \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2} \frac{(\tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b - \tilde{E}_j^a \tilde{E}_i^b) (A_a^i - \Gamma_a^i) (A_b^j - \Gamma_b^j)}{\sqrt{\det(q)}} \quad (9.6)$$

が, 式 (7.12) とは異なっているからであると考えられる. 実際, 式 (9.6) のように全体を

$$\sqrt{\det(q)} = |p|^{3/2}$$

で割ると,  $p$  の次数は合う. しかしながら数係数の辻褃は合わない. そもそも式 (9.6) 第 1 項にはダミー添字  $a, b$  が 3 回繰り返されていることを許容しても, フリーな添字  $c$  が生き残るという致命的な問題がある. そこで式 (9.6) を

$$H_G = \frac{\varepsilon_{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{ab}^k}{\sqrt{\det(q)}} - \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2} \frac{(\tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b - \tilde{E}_j^a \tilde{E}_i^b) (A_a^i - \Gamma_a^i) (A_b^j - \Gamma_b^j)}{\sqrt{\det(q)}} \quad (9.6')$$

と修正すれば,

$$H_G = 6 |p|^{1/2} c^2 \left( 1 - \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2} \right) = -\frac{6}{\beta^2} c^2 \sqrt{|p|}$$

となって, ハミルトニアン拘束の式 (9.7) が正確に再現される.

■スカラー場のハミルトニアン拘束への寄与  $H_\varphi = 8\pi G p_\varphi^2 / |p|^{3/2}$  (p.125, 1.8) について  $p_\varphi$  の定義が明記されていないが、これはスカラー場  $\varphi$  に共役な運動量密度に関係すると考えられる。(その証拠に 9.2 節では力学系の相空間変数を  $c, p, \varphi, p_\varphi$  としている。) 実際、7.3 節のノートで見出した関係

$$\tilde{\pi} = -\frac{1}{N^2}(-\dot{\varphi} + N^a \partial_a \varphi) \sqrt{-\det(g)} = \frac{1}{N} \dot{\varphi} \sqrt{\det(q)} \quad (\because \partial_a \varphi = 0, \sqrt{-\det(g)} = N \sqrt{\det(q)})$$

は、 $\sqrt{\det(q)} = |p|^{3/2}$  とすぐ後の選択  $N = 1$  を用いると、「 $\varphi$  の運動方程式」 $\dot{\varphi} = p_\varphi / p^{3/2}$  (p.125, 1.15) に一致する。「ここでは密度を表すチルダ記号をすべて省いた」(p.125, 1.8-9) とあることにも注意する。

スカラー場のハミルトニアン拘束への寄与は、式 (7.23):

$$\begin{aligned} H(N)_\varphi &= \int d^3x \frac{N}{\sqrt{\det(q)}} \left\{ \tilde{\pi}^2 + \tilde{E}_i^a \tilde{E}^{bi} \partial_a \varphi \partial_b \varphi + \det(q) V(\varphi) \right\} \\ &= \int d^3x \frac{N}{\sqrt{\det(q)}} \tilde{\pi}^2 \quad (\because \partial_a \varphi = 0, V(\varphi) = 0) \end{aligned}$$

の  $8\pi G \beta$  倍である。再び  $\sqrt{\det(q)} = |p|^{3/2}$  とおくと、 $H_\varphi \sim p_\varphi^2 / |p|^{3/2}$  が得られる。ここで一様な場を考えているので、空間積分は重要ではない。

## 9.2 伝統的な Wheeler-De Witt 量子化

相空間変数  $(c, p, \varphi, p_\varphi)$  を持つ前節で考察した力学系を、ループ量子重力の概念を用いずにそのまま量子化すると、伝統的な量子宇宙論が再現される。

- $p, \varphi$  表示での演算子の作用

$$\hat{p}\Psi = p\Psi, \quad \hat{\varphi}\Psi = \varphi\Psi, \quad \hat{c}\Psi = i\hbar \frac{8\pi\beta G}{3} \frac{\partial\Psi}{\partial p}, \quad \hat{p}_\varphi\Psi = -i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}.$$

- ハミルトニアン拘束の量子力学版 = “Wheeler-De Witt (ホイーラー・ド・ウィット) 方程式”
  - $p_\varphi$  は運動の定数
  - $\varphi$  は単調増加する “時間”
- この文脈での完全な Dirac 観測量の組:  $p_\varphi$  と、指定された時刻における宇宙の体積  $V_\varphi$
- Dirac 観測量が自己共役 [Hermitic] であることを要求 → 内積が一意的に決まる
  - Ashtekar, A., Pawłowski, T., and Singh, P., (2006) *Phys. Rev. D* **74**, 084003.
- 古典的な解の付近にピークを持つ波束を作ると、ビッグバンに至るまで不確定性の小さい状態が保持
  - このモデルでは量子効果によって特異点を解消することはできない

## 9.3 ループ量子宇宙論

一様な空間を扱うので“基本胞”(elementary cell) における力学を考察すれば良く、Ashtekar 変数 (9.2):  $A_a^i = c\delta_a^i$  に対して胞の縁 (長さ  $\lambda$ ) に沿うホロノミーは  $h_\lambda = \exp(i\lambda c)$  となる。我々は宇宙論モデルをループ量子重力と並行して考えるので、ホロノミーは  $\lambda$  に対して連続的とは見なせず [素朴には空間に最小単位があり長さ  $\lambda$  を連続変数と見なせない (9.4 節), 厳密には本節末尾],  $\hat{h}_\lambda$  の  $\lambda$  に関する微分を考えることで演算子  $\hat{c}$  を定義することはできなくなる。[ここで接続よりもホロノミーの方が基本的な量と見なされることを思い出す

(8.2 節 p.110 の訳註を参照).] これは変数  $c$  で表される接続がよく定義された量子力学的演算子にならないことに対応している :

閉曲線を少し変形させても, 変形前後の曲線が微分同相写像の関係にあれば, 得られる結果 [Ashtekar-Lewandowski 内積] に全く違いはないし, そうでなければ完全に異なる結果になる. その意味することとは, この測度を用いるならば, 滑らかな関数になっているような接続ではなく, ループの構造を特徴づける部分 (ネットワークの構造の区別を生じる部分) への “分布” になっているような接続を扱うということである. (中略) ここには重要な含意がある. ホロノミーはよく定義された量子力学的演算子になるにもかかわらず, 接続はそうならないということである. (p.108)

(p.127 訳註を引用) 巨視的には空間を一様と見なす宇宙モデルであっても, 元々の接続  $A_a^i$  の ‘分布’ としての性質 (8.1 節の末尾 [p.108] の記述を参照) が  $c$  にも潜在的に備わっているとする立場を取るならば,  $\exp(i\lambda c)$  が連続的であるとは言えない.  $A_a^i$  は, よく定義された演算子とは言えないまでも, (乗法的な) 演算子と見ることが一応は可能であったが, その ‘分布的’ な性質を形式的に ‘平均化’ した  $c$  は, もはや演算子としての定義を与えることが不可能である.

この部分において Stone-von Neumann 定理の前提となる仮定が破られ, 非自明な状況の現れる余地が生じる. このような通常の量子力学には見られない事情は専ら, 演算子  $\hat{A}_a^i$  そのものではなく, その指数  $\hat{h}$  (ホロノミー) を用いた表現 (表示) だけが, 背景独立な微分同相不変性が導入された, 利用できる “唯一の” 表現であることによっている.

表示の構築へと議論を進めよう. 通常の量子力学とよく似た運動学的な Hilbert 空間 (kinematical Hilbert space) を導入すると,  $\hat{p}$  は

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$$

を満たす乗法的な演算子として定義され, 自ずと自己共役 [Hermitic] になる. 運動学的な Hilbert 空間の重力的な部分において一般の状態  $|\Psi\rangle$  は,  $\hat{p}$  の固有状態  $|p_i\rangle$  (規格直交性  $\langle p_i|p_j\rangle = \delta_{ij}$  を満たす) を基底として

$$|\Psi\rangle = \sum_i \Psi_i |p_i\rangle$$

と表される. 既に慣れ親しんでいる量子力学 (1 粒子系の  $p$  表示 [空間の体積  $V \rightarrow \infty$ ]) と違い, 固有状態  $|p_i\rangle$  は離散的である.

(p.128 訳註を引用) 運動量変数  $p$  は, 3 脚場  $\tilde{E}_i^a$  に対応している (式 (9.3)). 3 脚場が連続的ではなく, 離散的 (分布的) であることは, 8.2 節において見た.

ここから宇宙論における深遠な帰結が導かれることになる. すなわち通常の量子力学における関係  $\exp(i\lambda\hat{x})|p\rangle = |p+\lambda\rangle$  と同様に

$$\hat{h}_\lambda|p\rangle = |p+\lambda\rangle$$

が成り立つことを踏まえると, 固有値  $p$  が離散的であることは,  $\lambda$  が連続では “ない” ことを含意する. まとめると,

ループ量子重力の形式による量子化は, 連続性の欠如のために, 宇宙論モデルのような単純な設定においてさえ Stone-von Neumann 定理の前提を崩すのである. (p.129)

### 9.3 節について

■ 「3 脚場流束」(9.3 節 1.2,13) について 初出は 8.1 節の p.109 である.

このことは3脚場(トライアド)に関する演算子, すなわち“3脚場流束”(トライアド・フラックス)の演算子を考えることによって容易に確認される. この演算子は3脚場を面積分することによって得られる. これについては, 次節で論じることにする.

引用箇所は面積(8.10)ないし, それを不鮮明化した演算子(8.13)に言及しているものと考えられる.

■ホロノミー  $h_\lambda$  におけるループについて ホロノミー  $h_\lambda$  は, 固有状態として空間に与えられているスピン・ネットワークではなく, 人為的に導入した基本胞について定義されていることに注意する. 9.4節では胞の側面が面積を担うように胞の大きさを選んでおり, そこでは胞の縁が囲う側面をネットワークの線が貫く状況が考えられていることになる.

## 9.4 ハミルトニアン拘束

運動学の形式の準備ができたところで, 次に, ハミルトニアン拘束 [ $H \sim H_G + H_\varphi$  (9.1節)]を表す, よく定義された演算子を構築しなければならない.  $c$  に対応する演算子が存在しないので, 式(9.7):  $H_G = -\frac{6}{\beta^2}|p|^{1/2}c^2$  を単純に量子力学的な演算子へ移行させることはできない. そこで

$$(H_G)_{\text{effective}} = -\frac{6}{\beta^2}|p|^{1/2}\frac{\sin^2(\mu_0 c)}{\mu_0^2} \quad (9.17)$$

と書けば,  $\mu_0 \rightarrow 0$  の極限で元々のハミルトニアン拘束  $H_G$  が再現される ( $H_\varphi$  については細工は不要). そして正弦関数は [ $\sin(\mu_0 c) = \frac{e^{i\mu_0 c} - e^{-i\mu_0 c}}{2i} = \frac{h_{\mu_0} - h_{-\mu_0}}{2i}$  のように] ホロノミー  $h_{\mu_0}$  で表されるので, 演算子への移行は直接的に行える. しかしながらループ表現がもつ本来的な離散性のために, 量子論ではループの長さ  $\mu_0 \rightarrow 0$  という極限操作が許容されない. これは根源的には, 現実の面積を囲うことのできる大きさのループを扱わねばならないことに関係していると考えられる. 実際, ループ量子重力において面積が量子化されることを思い出すと, このときループの大きさをゼロまで縮ませることはできず,  $\mu_0$  の自然な値は, 面積固有値 ( $\sim l_{\text{Planck}}^2 \beta$ ) の最小値から決まるものと考えられる. その値は  $\mu_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2} [\times l_{\text{Planck}} \text{ か}]$  である.

式(9.17)に関する p.129 脚注の引用 このやり方の代わりに(そしてより正確に) Thiemann がその完全な理論の中で導入した方法と似た手続きにしたがって, 量子力学的なハミルトニアン拘束を得ることもでき, 最終的な結果は同じになる. Ashtekar, Pawłowski, and Singh (2006) を参照.

引用箇所の参考文献の詳細 Ashtekar, A., Pawłowski, T., and Singh, P., (2006) *Phys. Rev. D* **74**, 084003.

## 9.5 半古典的な理論

我々はここで, 完全な量子論を紹介するわけではない. 完全に量子化された理論の取扱いについては Ashtekar, Pawłowski, and Singh (2006) [文献の詳細は9.4節]を見てもらいたい. 本節で紹介するのは, 極めて有用であることが判明している別の手続きについてである. (p.130)

式(9.17)の有効ハミルトニアン拘束で  $\mu_0$  を前節末尾の値に設定した, 半古典的なハミルトニアンを考える[古典的な極限は  $\mu_0 \rightarrow 0$ ]. 運動方程式は

$$\dot{p} = \{p, (H_G)_{\text{effective}} + H_\varphi\} \sim -\frac{\partial}{\partial c}(H_G)_{\text{effective}} \sim |p|^{1/2} \sin(\mu_0 c) \cos(\mu_0 c) \quad (9.18)$$



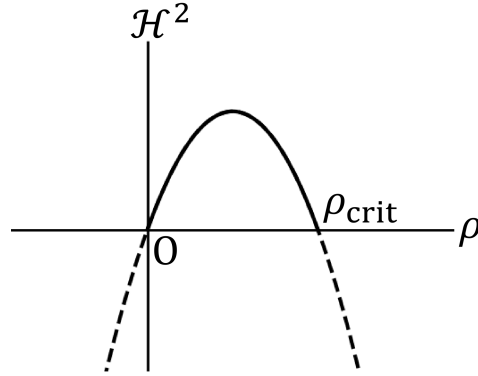


図 32 式 (9.19) のグラフ

となり，これは Friedmann 方程式を修正した形

$$\mathcal{H}^2 = \frac{\dot{p}^2}{4p^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}}\right), \quad (9.19)$$

$$\rho_{\text{crit}} \equiv \frac{3}{8\pi G \beta^2 \mu_0^2 p} : \text{臨界密度} \quad (9.20)$$

に書ける．[本稿次節参照．式 (9.19) は低密度の極限で式 (9.12) に戻る．また古典的極限  $\mu_0 \rightarrow 0, \therefore \rho_{\text{crit}} \rightarrow \infty$  で式 (9.12) に戻る．]  $\mathcal{H}^2$  の式 (9.19) は正定値ではなく，宇宙の時間発展を逆に遡っていくと [密度  $\rho$  の増大に伴っていずれ  $\mathcal{H}^2(> 0)$  は減少し]，

$$\rho = \rho_{\text{crit}} = \left(\frac{3}{8\pi G \beta^2 \mu_0^2}\right)^{3/2} \frac{\sqrt{2}}{p_\varphi} \quad (9.21)$$

[最右辺の表式を本稿次節で確認] に達したところで  $\mathcal{H}^2$  はゼロになる [図 32 参照]．

そこからさらに遡ってゆくならば，宇宙は再び膨張に転じる．つまり，ビッグバンが“反跳” (bounce) に置き換えられている． $\rho_{\text{crit}}$  の値は  $p_\varphi$  に依存し，任意であることに注意してもらいたい．このことは，反跳が任意の密度で起こり得ることを意味する．これはループ量子宇宙論を構築するための初期の試みにおいて，深刻な欠点であった．しかしながら，その後，理論が洗練されて， $\mu_0$  パラメーターが正準変数に依存する形で扱われるようになり，その結果として臨界密度の値も確定した (Ashtekar, Pawlowski, and Singh (2007))．方程式の形に変更はなかったが，臨界密度は  $\rho_{\text{crit}} \sim \rho_{\text{Planck}} \sim 10^{100} \text{kg/m}^3$  に固定された．これが，宇宙の縮小が終わって“反跳”が起こるときの密度である．(p.130)

Ashtekar, A., Pawlowski, T., and Singh, P., (2007) *Phys. Rev. D* **75**, 024035.

反跳の起源として，面積や体積の最小量子を持つ理論によって扱われる対象が，最小量子よりも小さく縮むことを拒むという描像を思い描くことができる．

上記のように，現代的な取扱いにおいて  $\mu_0$  が力学変数であるのは，

基本ループの長さが計量に依存することは明らかで，かつ計量は力学変数だからである．このことを考慮に入れると，ループ量子宇宙論はさらに改善されたものになる．たとえば  $\rho_{\text{crit}}$  が正準変数に依存しなくなり，単なる基礎定数の組合せによって与えられる定数になる．(p.131)

ただし半古典的な取扱いは  $\rho \sim \rho_{\text{crit}}$  となる領域までよい近似であるとは考えにくいため，

ここでの解析から，ビッグバン特異点が解消されると自信を持って結論づけることはできない．しか

しながら、ループ量子重力の完全に量子力学的な取扱いからも、同様の結論が導かれる。そのような議論は Ashtekar, Pawłowski, and Singh (2007) [文献の詳細は上記] に見られる。ビッグバンは、やはり“ビッグバウンス”に置き換えられ、さらなる過去に向けて宇宙は再び膨張を始める。(p.131)

現在までに調べられたモデルは、何れもまだ極めて単純なものであり、ループ量子重力によって特異点が除かれることが確定したと受け取るべきではない。今後、一様でないモデルを含めたさらなる検討が必要である。

## 9.5 節について

■式 (9.19) について ここでも

$$\mathcal{H} \equiv \frac{\dot{p}}{2p}, \quad \rho \equiv \frac{p_\varphi^2}{2|p|^3}$$

であり、ハミルトニアン拘束 (9.17):

$$16\pi G H_{\text{effective}} [= 16\pi G \{(H_G)_{\text{effective}} + H_\varphi\}] = -\frac{6}{\beta^2} |p|^{1/2} \frac{\sin^2(\mu_0 c)}{\mu_0^2} + 8\pi G \frac{1}{|p|^{3/2}} p_\varphi^2$$

がゼロになることと、運動方程式 (9.18):

$$\dot{p} = \frac{2|p|^{1/2}}{\beta\mu_0} \sin(\mu_0 c) \cos(\mu_0 c)$$

を用いると、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2 &= \frac{\dot{p}^2}{4p^2} = \frac{1}{4p^2} \frac{4|p|}{\beta^2 \mu_0^2} \sin^2(\mu_0 c) \cos^2(\mu_0 c) \\ &= \frac{1}{4p^2} \frac{4|p|}{\beta^2 \mu_0^2} \cdot \frac{\beta^2 \mu_0^2}{6|p|^{1/2}} \frac{8\pi G}{|p|^{3/2}} p_\varphi^2 \cdot \left(1 - \frac{\beta^2 \mu_0^2}{6|p|^{1/2}} \frac{8\pi G}{|p|^{3/2}} p_\varphi^2\right) \\ &= \frac{8\pi G}{3} \cdot \frac{p_\varphi^2}{2|p|^3} \left(1 - \frac{p_\varphi^2/2|p|^3}{3/8\pi G \beta^2 \mu_0^2 p}\right) \\ &= \frac{8\pi G}{3} \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}}\right) : (9.19) \end{aligned}$$

を得る。

■式 (9.21) について  $\rho = \rho_{\text{crit}}$  は、両辺の定義式を思い出すと

$$\frac{p_\varphi^2}{2|p|^3} = \frac{3}{8\pi G \beta^2 \mu_0^2 p}, \quad \therefore p = \left(\frac{8\pi G \beta^2 \mu_0^2}{3}\right)^{1/2} \frac{p_\varphi}{\sqrt{2}}$$

を意味する。これを改めて  $\rho_{\text{crit}}$  の式 (9.20) に代入して  $p$  を消去すると、式 (9.21) の最右辺を得る。

■Planck 密度 (p.130 下から 5 行目) について  $\rho_{\text{Planck}} = c^\alpha \hbar^\beta G^\gamma$  とおいて両辺の次元をとると、

$$ML^{-3} = \left(\frac{L}{T}\right)^\alpha \left(\frac{ML^2}{T}\right)^\beta \left(\frac{L^3}{MT^2}\right)^\gamma = M^{\beta-\gamma} L^{\alpha+2\beta+3\gamma} T^{-\alpha-\beta-2\gamma}$$

( $M$ : 質量,  $L$ : 長さ,  $T$ : 時間) より

$$\alpha = 5, \beta = -1, \gamma = -2, \quad \therefore \rho_{\text{Planck}} = \frac{c^5}{\hbar G^2}$$

と定まる。

## 関連文献について

Ashtekar and Singh (2011) と Singh (2011) のレビュー論文は、ループ量子宇宙論の教育的な紹介になっている。Bojowald (2008) による *Living Reviews* の論文も、この分野をよくまとめている。

ここで言及されている関連文献を、巻末の参考文献リスト (pp.171–176) から抜粋しておく。

- Ashtekar, A. and Singh, P. (2011) “Loop cosmology” in preparation for *Class. Quan. Grav.*
- Bojowald, M. (2008) *Liv. Rev. Rel.* **11**, 4.
- Sing, P. (2011) “A pedestrian guide to loop quantum cosmology” in preparation for *Pap. in Phys.*

## 第 10 章 発展的な話題

### 10.1 ブラックホール・エントロピー

#### 10.1.1 ブラックホールの熱力学

ブラックホールは質量  $M$ 、電荷  $Q$ 、角運動量  $L$  の 3 つのパラメーターだけによって特徴づけられる。実際ブラックホールに星 [電荷と角運動量はゼロと仮定] を 1 つ投入すると、質量の増加以外の追加的な情報は重力波の放射によって逃避する。

注意深く条件を整えれば、ブラックホールに荷電粒子を落とし込むことで、ブラックホールからエネルギーを引き出すことも可能である (“Penrose 過程” [本稿の付録 G.1 参照])。ただしブラックホールには、それ以上に質量を減らせない “既約質量” (irreducible mass)

$$M_{\text{irr}} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}\right)^2 + a^2} \quad \left(a \equiv \frac{L}{M} : \text{Kerr パラメーター}\right) \quad (10.2)$$

があり ( $G = 1, c = 1$ )、この方法で引き出せるエネルギーには限度がある (Christodoulou and Ruffini (1971))\*<sup>29</sup>。ところでブラックホールの表面積 (事象の地平の面積) は  $A = 16\pi M_{\text{irr}}^2$  で与えられる。すると [ $M_{\text{irr}}$  はその定義により物質の投入過程で減少させることができないので]、表面積  $A$  もまた減らすことはできず、増やすことだけが可能である。Hawking (1971) も独立に、きわめて一般的な論法によって同じ結論に達した。ここからブラックホールの表面積を、熱力学のエントロピーに関係付けることが動機づけられる (Bekenstein (1973))。

以上で言及されている関連文献を、巻末の参考文献リスト (pp.171–176) から抜粋しておく。

- Christodoulou, D. and Ruffini, R. (1971) *Phys. Rev. D* **4**, 3552.
- Hawking, S. (1971) *Phys. Rev. Lett.* **26**, 1344.
- Bekenstein, J. (1973) *Phys. Rev. D* **7**, 2333.

実際、ブラックホールのエントロピーを考えることは理に合っている：

- エントロピーは、物理系に関する情報の欠如に関係する概念である [本稿次節で補足]  
↔ ブラックホールを形成する物質の情報は、 $M, Q, L$  の情報以外、獲得されない
- エントロピーの増大は、  
エネルギーの劣化 (仕事に変換できない部分の増加) を意味する [本稿次節で補足]  
↔ ブラックホールの表面積 (従って  $M_{\text{irr}}$ ) の増大は、引き出せないエネルギーの増大を意味する

ブラックホールは

“外部の” 地平  $r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} \dots\dots$  引き返すことができなくなる表面

“内部の” 地平  $r_- = M - \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} \dots\dots$  宇宙の初期データがすべて与えられたとしても、  
そこから先へは幾何学を拓げて適用できない面

\*<sup>29</sup> 特に電荷も角運動量も持たないブラックホール ( $Q = 0, a = 0$ ) では  $M_{\text{irr}} = M$  となるので、エネルギーを引き出し質量を減らすことはできない。

を持つ。[ここでは  $r_{\pm}$  は単に式を整理するために導入したパラメーターと見て良い。角運動量と電荷を持たない Schwarzschild ブラックホールでは  $r_+ = 2M, r_- = 0$ .] ここで表面積  $A = 16\pi M_{\text{irr}}^2$  を微分すると、

$$dM = \Theta \frac{dA}{4\pi} + \vec{\Omega} \cdot d\vec{L} + \Phi dQ, \quad (10.6)$$

$$\Theta \equiv \frac{r_+ - r_-}{4(r_+^2 + a^2)}, \quad \vec{\Omega} \equiv \frac{\vec{a}}{r_+^2 + a^2}, \quad \Phi \equiv \frac{Qr_+}{r_+^2 + a^2}$$

が得られる [ $\vec{L}$  は角運動量ベクトル,  $\vec{a} \equiv \vec{L}/M$ , 導出は本稿次節]. 上式 (10.6) は熱力学第 1 法則  $dE = TdS - pdV$  と比較される関係であり, 右辺の第 2 項と第 3 項はそれぞれ, ブラックホールの角運動量と電荷を  $dQ, d\vec{L}$  変化させる仕事と解釈される. また右辺第 1 項において  $\Theta$  を温度と見ると, ブラックホールのエントロピーは  $S = A/4\pi$  と同定でき, 予想通り表面積  $A$  に比例している.

### 10.1.1 節について

■ 「Hawking (1971) も彼らとは独立に, ……表面積を減らせないことを証明した」(p.134 下から 4,3 行) について [2, pp.403–404]

ブラックホールを含んだいかなる動的過程においても,

すべての地平面の面積の総和は時間とともに減少することはない (Hawking の面積定理).

→ ブラックホールの合体は可能だが, 分裂は不可能.

- 定理の仮定は物質の局所的なエネルギー密度 ( $\rho$ ) が正であることだけである.
- 定理とエントロピー増大則の類似性
- ブラックホールは自然な形で熱力学に組み込まれる.

■ 「エントロピーは, 物理系に関する情報の欠如に関係する概念」(p.135, l.12,13) について 情報熱力学における Shannon エントロピーは Shannon 情報量とも呼ばれ, 系の確率分布がランダムになる (したがって情報が減じる) ほど増大する [23, pp.137–140].

関連して, ゆらぎの熱力学と情報熱力学の教科書 [23, pp.137–140] のハイライトを以下に要約する.

熱力学は非平衡状態にも適用できる一般的な枠組みへと拡張されつつあり, その際エントロピー  $S$  として「Shannon 情報量」が採用される (少なくとも平衡状態 (カノニカル分布) では Shannon 情報量は平衡系で定義されるエントロピーに一致する). Shannon エントロピー  $S$  は「自己情報量」のアンサンブル平均であり, 自己情報量は確率的にゆらぐ量としての系のエントロピー  $\hat{s}$  にあたる. そして熱浴も含めた孤立系全体の確率的なエントロピー生成  $\hat{\sigma}$  は, 負の値も取り得る. その確率を特徴付けるのが「ゆらぎの定理」である. ゆらぎの定理には様々な派生的な表現があり, それらの出発点を「詳細ゆらぎの定理」にとることができる. 詳細ゆらぎの定理が成り立つことは, Hamilton 系で (そして Markov ジャンプ過程と Langevin 系に対しても個別的に) 証明できる. しかしながら直観的に意味を捉えやすいのは派生形の「Crooks のゆらぎの定理」であり, 大まかにはエントロピー生成のある正の値  $\hat{\sigma} = a$  が得られる確率と比べて, 逆符号の値  $-a$  をとる確率が  $e^{-a}$  倍も小さいことを意味する (エントロピー生成  $a$  は  $k_B$  を単位として無次元化した値). また詳細ゆらぎの定理から, エントロピー生成のアンサンブル平均は第二法則  $\sigma \equiv \langle \hat{\sigma} \rangle \geq 0$  を満たすことが導かれる.

さて, Shannon エントロピーを考えることは, 情報熱力学において「Maxwell のデーモン」のパラドックスを解決する足掛かりとなる. まずは仕事の観点から考えよう.  $\sigma \geq 0$  に基づくと, デーモンが系の測定により得た情報 (相互情報量  $I$ ) を用いてフィードバックを行うとき,  $k_B T I$  までの仕事を取り出すことができる ( $T$

は熱浴の温度). これは一見すると, 単一の熱浴と接する系からサイクルで仕事を取り出すことはできないという, Kelvin の原理 (第二法則) に反している. しかしデーモンに対しても「測定」と「初期化 (情報消去)」を合わせた過程で,  $k_B T I$  以上の仕事をしなければならず, パラドックスは解消される. (なお測定と消去の一方の仕事は個別的にゼロにできるため, 測定と消去に要する仕事にはトレード・オフの関係がある.) 次にエントロピーの観点から考えると, デーモンも熱力学系と見なしたとき, 系とデーモン (と熱浴) の全エントロピー生成は非負であり, はじめから第二法則は満たされている. しかし系だけの「エントロピー生成」に注目すると, それはフィードバックの過程で  $-k_B T I$  まで負になり得るので, あたかも第二法則が破れているように見えていたにすぎない. 以上の仕事とエントロピーの観点は等価であることを式の上で見て取ることができ, これらをもって Maxwell のデーモンのパラドックスは完全に理解されたと言える.

■「通常の熱力学において, エントロピーの増大は, 系のエネルギーの劣化に関係している」(p.135, l.14,15) について Thomson は熱力学第 2 法則を, エネルギーの「散逸」ないし「低級化」, つまり「利用可能性」の喪失と解釈した [24, p.202]. エントロピーの増大とエネルギーの散逸の関係は, 次のように定式化できる [24, pp.220-224]. 複数の恒温熱源を考え,  $i$  番目の熱源の温度を  $T_i'$ , そのなかの最低温度を  $T_0'$  とする. これらの熱源の間でサイクルを働かせて仕事を取り出すときに,  $i$  番目の熱源から作業物質に与えられる熱を  $\Delta q_i$  と書こう (作業物質から熱源に熱が与えられるときは  $\Delta q_i < 0$ ). [作業物質が熱源  $i$  から  $\Delta q_i$  の熱を得て  $-\Delta q_0$  の熱を熱源 0 に捨てる場合の理想機関の熱効率は  $1 - T_0'/T_i'$  なので (図 33 参照),] 得られる最大仕事は

$$W_{\max} = \sum_i \Delta q_i \left(1 - \frac{T_0'}{T_i'}\right)$$

である. 式の上でも見て取れるように,  $i = 0$  の項は仕事に寄与しない. 熱源が無制限あり, それらの温度が連続的に変化している場合には, 上式は積分

$$W_{\max} = \oint dq \left(1 - \frac{T_0'}{T'}\right)$$

に置き換えられる. 他方, 現実には得られる仕事は, [サイクルを 1 周すると内部エネルギー変化はゼロなので] 第 1 法則より

$$W = \sum_i \Delta q_i = \oint dq.$$

よって無駄に捨てられる熱 (エネルギー散逸) は

$$D = W_{\max} - W = -T_0' \oint \frac{dq}{T'} = T_0' \Delta S_{\text{total}}$$

となる. ここに

$$\Delta S_{\text{total}} = - \oint \frac{dq}{T'}$$

は系全体のエントロピー変化である\*30. このようにエネルギーの散逸  $D$  はエントロピーの増大  $\Delta S_{\text{total}}$  をもたらす. ただし逆に, エントロピーの増大が常にエネルギーの散逸を意味するとは限らない. 実際, 同温・同圧の気体の混合や過冷却した水の凍結のように, 温度もエネルギーも変わらないがエントロピーは増大する非可逆過程が存在する.

\*30 サイクルを 1 周すると作業物質はもとに戻るため, 作業物質自体のエントロピー変化はないのに対し, 熱源は温度  $T'$  で  $-dq$  の熱を得るから.

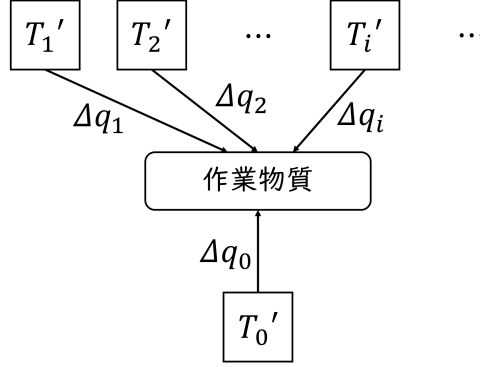


図 33 エントロピー増大に関する Thomson のエネルギー散逸論

■式 (10.5) の確認 既約質量の式 (10.2) より,

$$\frac{A}{4\pi} = 4M_{\text{irr}}^2 = \left(M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}\right)^2 + a^2 \quad (42)$$

$$= 2M^2 - Q^2 + 2M\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} \quad (43)$$

となる. 定義式  $r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}$  より,

$$(\text{式 (42)}) = r_+^2 + a^2, \quad (\text{式 (43)}) = 2Mr_+ - Q^2$$

と書き換えられる. これは本稿の付録 G.1 における, Kerr ブラックホールに対する地平面の計算結果 (189):  $A = 4\pi(r_+^2 + a^2)$  とあっている.

■式 (10.6) の確認  $\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} \equiv \sqrt{\dots}$  と略記しよう. 式 (43) の微分をとり,

$$\vec{a} = \frac{\vec{L}}{M}, \quad \therefore d\vec{a} = \frac{d\vec{L}}{M} - \vec{L} \frac{dM}{M^2} = \frac{d\vec{L}}{M} - \frac{\vec{a}dM}{M}$$

に注意すると,

$$\begin{aligned} \frac{dA}{4\pi} &= 4M dM - 2Q dQ + 2\sqrt{\dots} \cdot dM + 2M \frac{M dM - Q dQ - \vec{a} \cdot d\vec{a}}{\sqrt{\dots}} \\ &= 2 \left( 2M + \sqrt{\dots} + \frac{M^2 + a^2}{\sqrt{\dots}} \right) dM - 2Q \left( 1 + \frac{M}{\sqrt{\dots}} \right) dQ - \frac{2\vec{a} \cdot d\vec{L}}{\sqrt{\dots}} \end{aligned} \quad (44)$$

となる. 他方, 式 (10.5):  $r_+^2 + a^2 = (M + \sqrt{\dots})^2 + a^2$  より

$$\Theta \equiv \frac{r_+ - r_-}{4(r_+^2 + a^2)} = \frac{\sqrt{\dots}}{2 \left\{ (M + \sqrt{\dots})^2 + a^2 \right\}}$$

であり, これは上式 (44) 最右辺における  $dM$  の係数

$$2 \left( 2M + \sqrt{\dots} + \frac{M^2 + a^2}{\sqrt{\dots}} \right) = 2 \frac{2M\sqrt{\dots} + (\sqrt{\dots})^2 + M^2 + a^2}{\sqrt{\dots}} = 2 \frac{(M + \sqrt{\dots})^2 + a^2}{\sqrt{\dots}}$$

の逆数に一致している。そこで式 (44) は

$$dM = \Theta \frac{dA}{4\pi} + 2\Theta Q \left( 1 + \frac{M}{\sqrt{\dots}} \right) dQ + 2\Theta \frac{\vec{a} \cdot d\vec{L}}{\sqrt{\dots}} \quad (45)$$

と書き換えられる。すると

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv Q \frac{r_+}{r_+^2 + a^2} = Q\Theta \frac{4r_+}{r_+ - r_-} = Q\Theta \frac{2(M + \sqrt{\dots})}{\sqrt{\dots}}, \\ \vec{\Omega} &\equiv \frac{\vec{a}}{r_+^2 + a^2} = \Theta \frac{4}{r_+ - r_-} \vec{a} = 2\Theta \frac{\vec{a}}{\sqrt{\dots}} \end{aligned}$$

はそれぞれ、式 (45) における  $dQ, d\vec{L}$  の係数に一致するので、式 (10.6) が成立する。

### 10.1.2 Hawking 輻射

Hawking はブラックホールの背景下での量子場を研究し、ブラックホールが輻射を放ち、その輻射温度がまさに 10.1.1 節の  $\Theta$  で与えられることに気付いた (詳しくは Carroll (2003) の本)。

Carroll, S. (2003) *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Benjamin Cummings.

Based on notes available online at <http://preposterousuniverse.com/grnotes/> [accessed 11 March 2011].

Hawking 輻射について簡単に説明する。曲った時空におけるスカラー場を考えると、その波動方程式は微分が共変微分に置き換わり、

$$g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \varphi - m^2 \varphi = 0 \quad (10.8)$$

となる [本稿次節で、式 (7.19) のラグランジアンから導出する]。すると場の Fourier 展開に用いる平面波  $\exp(ik_\mu x^\mu)$  [分散関係  $k^2 = -m^2$ ] は、場の方程式 (10.8) の解にならない。しかし代わりに式 (10.8) の適当な解  $f_i$  を基底関数に選んで、場を

$$\hat{\varphi} = \sum_i \left( \hat{a}_i f_i + \hat{a}_i^\dagger f_i^* \right)$$

と表すことは可能であり、展開係数  $\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger$  は生成・消滅演算子となる。ただし異なるモード  $g_i$  の組を選んで量子場を構築することも可能であり、量子場の構築方法に応じて決まる真空状態は異なる。このような真空状態の非一意性は、次のような事態を引き起こす。すなわち平坦な時空において、慣性系における粒子検出器が、我々が真空状態の中にいることを示しているとしても、同じ状況下において加速している粒子検出器は粒子を検出する (“Unruh (ウンルー) 効果”)。Schwarzschild ブラックホールの重力下でもこれと同様のことが起こる。ここでは真空状態は、ブラックホールの中心に向かって自由落下する慣性系で自然に定義され则认为られる。ところがこの真空状態を、固定された位置にいる観測者の座標系で見ると、観測者は粒子を観測することになる。これが Hawking 輻射として放たれる粒子である。

Hawking 輻射は略式の描像では、次のように説明できる。まずブラックホールの事象の地平付近で粒子の対が生成すると、一方はブラックホールに落ち込む。このときもう一方の粒子は無限遠へと飛び去り、Hawking 輻射を成す。[詳しくは本稿の付録 G.2 を参照。]

Schwarzschild ブラックホールの Hawking 温度

$$T = \frac{hc^3}{8\pi GMk_b} = 10^{-6} \left( \frac{M_{\text{Sun}}}{M} \right) \text{°K} \quad (10.10)$$

( $k_b$  は Boltzmann 定数) [本稿の付録 G.2 を参照] は質量に反比例するため、ブラックホールが輻射によって蒸発する過程で質量が減ると、温度は上がってゆき、蒸発過程が徐々に加速していく。



Hawking 輻射の熱力学的では、温度は曲った時空における場の量子論から現れているのに対し、その他の要素は完全に古典的な描像に基づいている。ところがエントロピーの式には Planck 定数が含まれるから [我々はそれを  $\hbar = 1$  と置いてきた]、エントロピーは量子力学的な起源を持たなければならない。次項ではこれを量子重力理論によって説明する問題を取り上げる。

ブラックホールが蒸発の過程で小さくなると、事象の地平における曲率は大きくなるため、重力場自体の量子ゆらぎを無視できなくなる。このことから、最終的には完全な量子重力による記述が必要であると考えられる。半古典的な描像を最後まで貫こうとすると生じる有名な問題に、“情報の逆理 (パラドックス)”がある。量子力学的なユニタリーの時間発展では、情報は保持されなければならない。ところがブラックホールが完全に蒸発しきったときに残される輻射は純粋に熱的なものであり、温度  $T$  だけで完全に特徴づけられるため、そこからブラックホールを形成したすべての物質に関する情報を復元することは原理的に不可能である、というのがパラドックスの内容である。この矛盾を解決することも、量子重力理論の主要な目標である。

なお、何人かの研究者は、熱力学から一般相対性理論が導かれることを論じている。

- Jacobson, T. (1995) *Phys. Rev. Lett.* **75** 1260.
- Padmanabhan, T. (2010) *Rept. Prog. Phys.* **73**, 046901.

現時点ではこの観点にループ量子重力が貢献するようには見えない。

### 10.1.2 節について

■場の方程式 (10.8) の導出 式 (7.19) のラグランジアン密度は、7.3 節のノートと同様に係数 1/2 を補うと

$$\tilde{\mathcal{L}} = -\frac{1}{2} (g^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi) (\partial_\nu \varphi) + m^2 \varphi^2) \sqrt{-g}$$

である。ただし  $\det(g) \rightarrow g$  と略記しており、また教科書 p.137, 1.5 の“ポテンシャル”の式にも 1/2 を掛けて  $V(\varphi) = m^2 \varphi^2 / 2$  とした (もっとも  $\tilde{\mathcal{L}}$  全体の係数の違いは運動方程式に影響しない)。すると

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \varphi} = -m^2 \varphi \sqrt{-g}, \quad \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_\alpha \varphi)} = -g^{\mu\alpha} (\partial_\mu \varphi), \quad \partial_\alpha \left( \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_\alpha \varphi)} \right) = -\partial_\alpha \{g^{\mu\alpha} (\partial_\mu \varphi)\}$$

より、Euler-Lagrange 方程式は

$$0 = \partial_\alpha \left( \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_\alpha \varphi)} \right) - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \varphi} = -\partial_\alpha \{g^{\mu\alpha} (\partial_\mu \varphi)\} + m^2 \varphi \sqrt{-g}, \quad \therefore \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha \{g^{\mu\alpha} (\partial_\mu \varphi)\} - m^2 \varphi = 0$$

となる。ここでスカラー  $\varphi$  に対する公式

$$\varphi_{;\alpha}^\alpha \equiv (\varphi^{;\alpha})_{;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha \{g^{\alpha\beta} (\partial_\beta \varphi)\}$$

を思い出すと [7, p.272],

$$\varphi_{;\alpha}^\alpha - m^2 \varphi = 0.$$

さらにスカラー  $\varphi$  に対しては  $\nabla_\alpha \varphi = \partial_\alpha \varphi$  であること、また  $g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$  であることに注意すると、第 1 項は

$$\varphi_{;\alpha}^\alpha \equiv (\varphi^{;\alpha})_{;\alpha} = (g^{\alpha\beta} \partial_\beta \varphi)_{;\alpha} = g^{\alpha\beta} \{(\partial_\beta \varphi)_{;\alpha}\} = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi$$

と書き換えられるので、場の方程式 (10.8) を得る。

■「……エントロピーは無単位量なので、……エントロピーは  $S \sim [\text{面積}] \times 10^{70}$  である」(p.139, l.10-14) について「我々が採用している単位系」(p.139, l.10) では暗に  $k_b = 1$  としているため、「エントロピーは無単位」(p.139, l.10-11) であると考えられる。ところで自然単位系を採用して  $c = 1, \hbar = 1, G = 1$  と置いているため、長さとしては、Planck 長さ  $l_P \sim 10^{-33} \text{cm} = 10^{-35} \text{m}$  を単位として測った無次元量を考えていることになる。よってブラックホールの地平の面積  $A$  は  $l_P^2 = 10^{-70} \text{m}^2$  を単位として測った数値であり、 $\text{m}^2$  を単位として測った面積 (数値) を  $A^*$  と書くと、

$$A = \frac{A^* \text{m}^2}{l_P^2} = A^* \times 10^{70}$$

と表される。

### 10.1.3 ループ量子重力によるブラックホール・エントロピー

現在までのループ量子重力理論によるブラックホール・エントロピーの計算は、ブラックホールが Planck 寸法に比べて大きいという (穏当な) 仮定の下での近似計算であり、Hawking 輻射を完全に無視している。事象の地平に対応した境界  $S$  を持つ時空をとり、ブラックホールの外部と境界を調べ、それらの間の相互作用を考えることが基本的なアイデアとなる。これは“分離した地平” (isolated horizon) と呼ばれる枠組みによって可能になった (Ashtekar and Krishnan (2004))。

この枠組みにおいて、

- 境界が事象の地平と対応する条件が確立された。
- 境界における分離した正準理論が見出された。
  - 作用が境界において微分不可能になる問題を解消。
- 境界における経時 (lapse) がゼロになることを要求できる。
  - ↔ ハミルトニアン拘束は如何なる発展も生成せず、地平は“分離”。
    - 事象の地平の面積 ( $\sim$  エントロピー) が自動的に Dirac 観測量になる。
    - エントロピーは境界における量だけに依存し、時空の広がり (バルク) におけるループ量子重力の複雑な問題に関わる必要はなくなる。

ブラックホールのエントロピーは微視的正準集団 [ミクロカノニカル・アンサンブル] の観点から計算できる。すなわち表面積  $a_0$  のブラックホールを考えると、面積演算子の固有値が適当な幅  $2\delta$  の範囲  $[a_0 - \delta, a_0 + \delta]$  に含まれる量子状態の数  $N$  を用いて、エントロピーは  $N$  の対数で与えられる。ここで各々の状態としては図 34 のように、地平面がスピン・ネットワークの線で貫かれた状態が考えられており、面積固有値の計算には分離した地平の枠組みを用いる。Agulló *et al.* (2010) は状態を正確に数え上げ、Bekenstein の公式 [ $S \sim a_0/l_P^2$  ( $l_P$ : Planck 長さ)] に整合するエントロピー

$$S(a_0) = \frac{a_0}{4l_P^2} - \frac{3}{2} \log \left( \frac{a_0}{l_P^2} \right) + O(1) + \dots$$

を得た。(明示してある項は面積の大きい極限の計算結果であるため、後ろに「+…」を付けてある。) この結果を得るためには、Barbero-Immirzi パラメーターを

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \exp \left( -\frac{1}{2} \beta \sqrt{k(k+2)} \right)$$

の解  $\beta = 0.274067$  に選ばなければならない (Meissner (2004))。[こうして 8.2 節で予告したように、 $\beta$  の値が決定される。]

最後に、以上で言及した関連文献を、巻末の参考文献リスト (pp.171-176) から抜粋しておく。

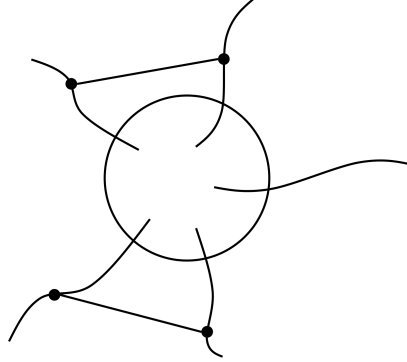


図 34 ブラックホールの事象の地平が境界となり，その境界をスピン・ネットワークの線が貫いている。

- Ashtekar, A. and Krishnan, B. (2004) *Liv. Rev. Rel.* **7**, 10.
- Agulló, I., Barbero, J. F., Borja, E., Díaz-Polo, J., and Villasenor, E. (2010) *Phys. Rev. D* **82**, 084029.
- Meissner, K. (2004) *Class. Quan. Grav.* **21**, 5245.

## 10.2 マスター拘束と均一離散化

### 10.2.1 マスター拘束プログラム

一般相対性理論の拘束代数を量子論の水準において行うことは，重要な挑戦課題であり続けている。

1. ループ量子重力においては，微分同相変換の拘束を演算子として実行できない (8.3 節)。
2. 一般相対性理論の真空における Dirac 観測量が見つかっていないことと併せて (8.2 節冒頭)，古典的な極限を定義することが困難となっている。

ハミルトニアン拘束 (8.23) は，不鮮明化しない形で書けば， $[x$  に応じた] 無数の拘束

$$\tilde{H}(x) = \{A_c^k, V\} F_{ab}^k e^{abc}$$

である。Thomas Thiemann らが開発したマスター拘束プログラム (master constraint program) では，これを単一の “マスター拘束”

$$M = \frac{1}{2} \int d^3x \frac{\tilde{H}^2(x)}{\sqrt{\det(q)}}$$

で置き換え，状況の改善を試みる。

$$M = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{H}(x) = 0 \quad (\text{all } x)$$

が見て取れる。  $O$  が Dirac 観測量である条件  $\{\tilde{H}(x), O\} = 0$  は，マスター拘束を用いて

$$\{\{M, O\}, O\} = 0 \tag{10.16}$$

と書ける [本稿次節参照]。

マスター拘束と微分同相拘束は簡単な代数

$$\{C(\vec{N}), M\} [\sim \mathcal{L}_{\vec{N}} M] = 0, \quad [\text{式 (7.10) 参照}] \quad (10.17)$$

$$\{M, M\} = 0, \quad (10.18)$$

$$\{C(\vec{N}), C(\vec{M})\} = C(\mathcal{L}_{\vec{N}} \vec{M}) : (7.15)$$

を満たす。式 (10.17) はマスター拘束が微分同相変換の下で不変であることを意味する。

[量子化の際に] 為すべき作業は、マスター拘束を量子力学的な演算子へ移行させ、それによって消滅するような量子状態を見いだすことである。その利点は、これが微分同相不変な量なので、微分同相不変な状態の空間において演算子へ移行させ得ることに疑いは無いという点にある [冒頭の問題点 1 の改善]。そして拘束代数が構造定数でなく構造関数を持ってしまうという問題 (7.2 節末尾参照) [式 (7.18): $\{H(N), H(M)\} = C(\vec{K})$  の右辺が正準変数の関数であること] も回避される。このように量子化されたものは、必ずしもすべての場合において正準量子化と等価ではない。したがって、この作業を Dirac の正準量子化の手続きの一般化として捉えることができる。(p.144)

マスター拘束を適当な自己共役 [Hermite] 演算子  $\hat{M}$  に移行できたとすると、ユニタリー演算子  $\hat{U}(t) = \exp(it\hat{M})$  を用いて量子力学的な Dirac 観測量を構築することが可能である [冒頭の問題点 2 の改善]。具体的にはいくぶん形式的ではあるが、空間的な微分同相変換の下で不変な演算子  $\hat{O}$  に対して、“時間平均演算子”

$$\hat{O} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \hat{U}(t) \hat{O} \hat{U}(t)^{-1} \quad (10.19)$$

を作れば良い [本稿次節参照]。

### 10.2.1 節について

■Dirac 観測量  $O$  の満たす式 (10.16) について 式 (7.32) の確認作業と同様、 $\sqrt{\det(q)}$  は Poisson 括弧の外に出せると仮定する。また  $\tilde{H}(x) = 0$  であっても  $\{\tilde{H}(x), O\} = 0$  とはできないことに注意すると (付録 D.1.3 参照),

$$\begin{aligned} 0 = \{\{M, O\}, O\} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3x}{\sqrt{\det(q)}} \{\{\tilde{H}^2(x), O\}, O\} \\ &= \int \frac{d^3x}{\sqrt{\det(q)}} \{\{\tilde{H}(x), O\} \tilde{H}(x), O\} \\ &= \int \frac{d^3x}{\sqrt{\det(q)}} \left[ \left( \{\tilde{H}(x), O\} \right)^2 + \{\{\tilde{H}(x), O\}, O\} \tilde{H}(x) \right] \\ &= \int \frac{d^3x}{\sqrt{\det(q)}} \left( \{\tilde{H}(x), O\} \right)^2 \end{aligned}$$

となる。これは確かに  $O$  が Dirac 観測量であること  $\{\tilde{H}(x), O\} = 0$  と等価である。

■時間平均演算子 (10.19) が量子力学的な Dirac 観測量であることの確認 Dirac 観測量の条件として、Poisson 括弧を交換子に置き換えた関係

$$[\hat{M}, \hat{O}] = 0, \quad [\hat{C}(\vec{N}), \hat{O}] = 0$$

が成り立てば良い。第2式は  $\hat{O}$  が微分同相不変であることを意味し、これは式 (10.19) における  $\hat{O}$  を微分同相不変と仮定していることから直ちに保証される。

そこで第1式を考える。  $\hat{M}$  の Hermite 性より  $\hat{U}(t)^{-1} = \exp(-it\hat{M})$  であることに注意すると、

$$\begin{aligned} [\hat{M}, \hat{O}] &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \left( \hat{M} \hat{U}(t) \hat{O} \hat{U}(t)^{-1} - \hat{U}(t) \hat{O} \hat{U}(t)^{-1} \hat{M} \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2iT} \int_{-T}^T dt \frac{d}{dt} \left( \hat{U}(t) \hat{O} \hat{U}(t)^{-1} \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2iT} \left[ \hat{U}(t) \hat{O} \hat{U}(t)^{-1} \right]_{-T}^T \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。ただし最後の等号では  $\hat{U}(t) \hat{O} \hat{U}(t)^{-1}$  が時刻  $t$  の有限な関数 (演算子) であることを用いた。これはよく知られているように、時間の有限な関数の、時間微分の時間平均がゼロであることの証明にあたる [12, p.28]。教科書 p.145 の定性的な説明は、以上の計算の解釈になっていると考えられる：

得られる演算子  $[\hat{O}]$  がマスター拘束と可換であることは自明である。何故なら、マスター拘束との交換子は無限小の時間推進と等価であり、ここでは、そのような推進のすべての和をとってあるからである。これは負の無限大から正の無限大までの実軸を“少し右へずらす”ことと等価であり、変化が生じないことは明らかである。

### 10.2.2 均一離散化

はじめに問題提起として、第1段落 (pp.145–146) をすべて引用する。

場の理論を、その量子化のために離散化する技法は、Yang-Mills 理論の文脈において大きな成功を収めている。その技法は格子ゲージ理論として知られ、特に計算機による取扱いに適している。対称性を持つ理論を離散化するには、対称性を損なわずに保持することが、細心の注意を要する課題になる。一般相対性理論の場合は特にそうである。時空を離散化してしまうと、微分同相不変性が直ちに失われる。正準理論の水準において、これには以下のような含意がある。同じ時刻における諸変数に関係して、本来は時間発展の下で自動的に保存されるような拘束条件の式が、保存されなくなってしまふ。すなわち拘束条件と運動方程式を同時に課することが不可能になる。同じ時刻においてすべての式を成立させるための唯一の方法は、Lagrange の未定係数の値を選ぶことである。しかしそのようにすると、未定のはずの係数が任意ではなくなり、理論の性格が著しく変わってしまう。さらに悪いことに、Lagrange の未定係数を決める式が代数方程式になる (離散化の下で、すべての微分が有限の差分に置き換えられる)。その代数方程式は非線形であり、一般に複素解を持ち得る。もちろん、一旦、Lagrange の未定係数が複素数になってしまうと、それはもはや出発点となった実数変数による連続な理論に対する近似ではない。そして Lagrange の未定係数、特に経時 (ラプス) は、状態の発展の速さを表している。理論の式から経時 (ラプス) が大きいことが示されるならば、それは離散的な時間発展において、直近の時刻の間に大きな飛躍があり、離散的な理論による連続理論への近似を、よく制御する方法がなくなることを意味する。これらの問題が、ハミルトニアン形式の一般相対性理論の格子ゲージ理論版を展開する上で、本質的な障害となってきた。

連続な理論の差分化には様々な方法が考えられ，“均一差分化” (uniform discretization) では変数  $A$  の発展の式を，マスター拘束によって生成される形

$$A_{n+1} = A_n + \{A_n, M\} + \{\{A_n, M\}, M\} + \dots$$

にする [ $n$  は離散時間のラベル]. これにはマスター拘束  $M$  の値が正確に保存されるという利点がある. そこで連続な理論ではマスター拘束がゼロであることを踏まえ, 最初に  $M$  を小さい値  $\delta^2/2$  に選べば, 変数の発展の下でも連続な理論に近い状態が保持されることになる. また  $N$  個の拘束  $\phi_i(q, p) = 0$  を持つ理論では,  $\lambda_i = \phi_i/\delta$  と定義すると, 力学変数  $q$  の発展は  $\delta$  の 1 次まででは, 全ハミルトニアン  $H_T = \sum_{i=1}^N \lambda_i \phi_i$  の下での完全拘束系の発展に一致する.

$$q_{n+1} = q_n + \sum_{i=1}^N \{q_n, \phi_i\} \lambda_i \delta + O(\delta^2).$$

ここで  $\delta$  は発展の“ステップ”の役割を果たしている.

## 10.3 スピン泡

### 10.3.1 量子力学の径路積分形式

量子力学において, 粒子の遷移振幅が径路積分

$$P(x_N, t, x_0, 0) = \int \mathcal{D}x \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x]\right) \quad (10.34)$$

で与えられることの復習. この話題については文献 [21, pp.148–166] のノートでまとめたので, 本稿では要約を省略し, 以下の点を補足するに留める. すなわち配位空間における径路積分 (10.34) とは一見, 対照的に, 次節の式 (10.35) では配位変数  $A_a^i$  だけでなく, 共役な場  $\tilde{E}_i^a$  についても積分が施されている. 実際, 粒子の遷移振幅 (10.34) も元々は位相空間における径路積分で表され, 次いで運動量変数に関する積分を実行して得られる [15, pp.32–41]. 教科書では式 (10.25–27) において, 運動量に関する積分を行っている.

### 10.3.2 一般相対性理論による径路積分とスピン泡

3次元断面空間における幾何の, 始状態から終状態への遷移確率  $P$  は, 径路積分を用いて

$$P((A_a^i)_{\text{final}}, (A_a^i)_{\text{initial}}) = \int \mathcal{D}N \mathcal{D}N^a \mathcal{D}\lambda^i \mathcal{D}\tilde{E} \mathcal{D}A \exp\left(-\frac{i}{\hbar} S(\tilde{E}, A)\right), \quad (10.35)$$

$$S(\tilde{E}, A) = \int d^4x (\tilde{E}_i^a \dot{A}_a^i - NC - N^a C_a - \lambda^i \mathcal{G}^i)$$

と書けるだろう. [作用  $S(\tilde{E}, A)$  をラグランジアン (7.12) と比べると, 細かい係数や符号は異なっている.] ただし

- 径路積分における“軌跡” (幾何の発展) に拘束条件を反映させなければならない
- Lagrange の未定乗数の積分範囲が不明である

という問題のため, 径路積分の量子重力への適用が妨げられてきた.

ループ量子重力に用いられる数学的な道具の発展に伴い, それらの技法を径路積分の定義に利用する可能性について, 自然に関心が生じてきた. その結果, 量子重力に対する“スピン泡” (spin foam) の

アプローチが、まず Reisenberger and Rovelli (1997) によって開拓され、それに続いて多くの研究者が、この方法の発展に貢献している。スピン泡は、頂点、辺、多角形の面から構築される幾何学的な構造である [脚注 1 を省略]。それぞれの面には、スピン・ネットワークにおける線とよく似た方法で、群表現のラベルが付与される。それぞれの辺には、結節演算子のラベルが付く。これは全体として石鹸の泡のかたまりのように見えるので、“スピン泡”と名づけられている。スピン泡の断面は、スピン・ネットワークになる。スピン泡に含まれる多角形の面が切断された部分は、断面のスピン・ネットワークにおいて群表現を伴った線分となり、スピン泡に含まれる線分が切断された部分は、断面のスピン・ネットワークにおいて結節因子を伴った結節点になる。ここで目標となる課題は、ひとつのスピン・ネットワークから、別のスピン・ネットワークへ移行する遷移振幅を、両者をつなぐすべての可能なスピン泡に関する加算によって計算することである。一般相対性理論に関して、このような方法は今日でも完全に理解されるに至っていないが、より単純な BF 理論と呼ばれる理論の文脈において、多くの進展が見られている。(pp.150–151)

以上の引用箇所而言及されている関連文献を、巻末の参考文献リスト (pp.171–176) から抜粋しておく。

Reisenberger, M. and Rovelli, C. (1997) *Phys. Rev. D* **56**, 3490.

- 泡の中の頂点に重みを対応させる提案
  - Engle, J., Pereira, R., and Rovelli, C. (2007) *Phys. Rev. Lett.* **99**, 161301.
  - Freidel, L. and Krasnov, K. (2008) *Class. Quan. Grav.* **25**, 125018.
  - 頂点の定義は良い性質を示すようになった
- スピン泡を利用した重力の伝播関数の計算 → 適正な Newton 極限を持つ関数を得た
  - Alesci, E., Bianchi, E., and Rovelli, C. (2009) *Class. Quan. Grav.* **26**, 215001.
  - その参考文献

このような研究活動の大多数は、時空の代わりに 4 次元 Euclid 空間を扱うものである
- Regge (レッジ) 計算法
  - 曲った時空を平坦な単体で近似 (↔ 2 次元球面を三角形の組合せから成るドーム構造で近似)
  - すべての単体の辺の長さ  $l_i$  を指定すれば、元の多様体の形 (したがって曲率) が指定される
  - この観点では長さ  $l_i$  を積分変数とする径路積分を考える

## 10.4 観測可能な効果？

現在、量子重力理論の検証に用いることができる実験がないのは、重力の結合定数と Planck 定数から決まる自然な尺度が、実験によって検証可能な範囲から、大きくかけ離れているという事情による。

(Planck エネルギー)  $\sim 10^{19}$  GeV ……素粒子加速器で到達可能なエネルギーより 15 桁も高い、  
 観測される宇宙線の最高エネルギーより 10 桁も高い、  
 (Planck 長さ)  $\sim 10^{-33}$  cm ……陽子半径より 20 桁も小さい、  
 (Planck 時間)  $\sim 10^{-44}$  s ……数年後に実現が予想される高精度の原子時計の精度から  
 20 桁の隔たりがある。

#### 10.4.1 量子重力とガンマ線バーストからのガンマ線到着時間

Amelino-Camelia *et al.* (1998) はガンマ線バーストの観測において、量子重力効果の痕跡が見いだされる可能性を指摘した。時空が Planck 長さ  $l_P$  程度の粒状構造を持つならば、波長  $\lambda$  の光は 1 波長あたり  $l_P/\lambda$  程度の量子重力効果を受けると考えられる。これは波長の短いガンマ線 ( $\lambda \sim 10^{-12}\text{m}$ ) に対しても  $l_P/\lambda \sim 10^{-23}$  に過ぎない。しかしながら  $L \sim 10^{25}\text{m}$  ( $10^6$  光年程度) 遠方で発生したガンマ線バーストでは、光が長距離を伝播する過程で、量子効果の影響が観測可能な水準にまで増幅する可能性がある。Amelino-Camelia *et al.* は弦理論のモデルを利用して、粒状構造との相互作用により光の分散関係が

$$c^2 p^2 = E^2 \left[ 1 + \chi \frac{E}{E_P} + O\left(\frac{E^2}{E_P^2}\right) \right], \quad \chi \sim 1 \quad (10.37)$$

となると推測した。 [ $E_P$  は Planck エネルギー。通常の分散関係は  $E = cp$ .]  $\chi$  [したがって量子重力効果の最低次の項] がゼロでなければ、異常な分散関係により、異なるエネルギーのガンマ線は検出器への到達時間が異なるため、その時間差を検出できるはずである。

Amelino-Camelia, G., Ellis, J., Mavromatons, N., Nanopoulos, D, and Sarkar, S. (1998) *Nature* **393**, 763.

ただし上式 (10.37) の平方根をとると、Planck エネルギーの分数幂が現れることになる。一部の研究者はこの点が不自然であると考え、 $\chi$  がゼロでないという仮定に疑義を表明している。

Gambini and Pullin (1999) は単純な“おもちゃ模型” (toy model) によるループ量子重力の計算を行い、光の分散関係が

$$\Omega_{\pm} \sim |k|(1 \mp 2\chi l_P |k|) + \dots \quad (\chi \sim 1) \quad (10.47)$$

となる可能性を示した [本稿では説明を省略]。ここに  $\Omega$  は波の振動数、複号  $\pm$  はそれぞれ右巻きと左巻きの波を表し、上式 (10.47) は通常分散関係  $\Omega_{\pm} = |k|$  に対して、ヘリシティに応じて符号の異なる  $l_P/\lambda$  程度の補正が得られている。

Gambini, R. and Pullin, J. (1999) *Phys. Rev. D* **59**, 124021.

ただしこの計算は制限付きであり、ループ量子重力に基づく確定的な予言とは言えない。したがって式 (10.47) の効果の可能性が、実験的な制約から既にある程度まで排除されているからといって、「ループ量子重力は否定された」と結論することはできない。

#### 10.4.2 時間と距離の測定精度限界

量子重力効果が生じる特徴的な距離尺度は、Planck 尺度に比べてかなり大きいかもしれないという提案がある。

まず「時計が実現できる正確さの究極的な限界は何処か」という問題を考えよう。2枚の鏡の間を光子が反射して行き来するような理想的な時計においても、鏡の波動関数それ自体が時間発展により拡がるため、不正確さは生じ得る。測りたい時間を  $t$ 、鏡の質量を  $M$  として、Salecker and Wigner (1958) はその精度を  $\delta t \sim \sqrt{t/M}$  と見積もった。これは測りたい時間が長くなるほど不正確さが増すことを意味する。また正確な時計を得るには、質量を大きくすれば良いことになる。

Salecker, H. and Wigner, E. (1958) *Phys. Rev.* **109**, 571.



しかし上述の議論は、重力を考慮に入れていない。重力を考慮すると、質量がある程度大きくなると時計はブラックホールに転化してしまう。そこで時計が高密度になってブラックホールに転じるのを防ぐために、時計を重くすると同時に大きくすると、光速の制約のために時計は劣化していく。実際には時計がその寸法の下で、ブラックホールに転化する寸前の質量を持つときに、最高の正確さ

$$\delta t \sim t_P^{2/3} t^{1/3} = \sqrt[3]{\frac{t}{t_P}} t_P$$

が実現される ( $t_P$  は Planck 時間).

- Károlyházy F., Frenkel A., and Lukás, B. (1986) “Gravity in the reduction of the wavefunction”, in R. Penrose and C. Isham, (eds.), *Quantum Concepts in Space and Time*. Oxford University Press, Oxford.
- Ng, Y. and van Dam, H. (1995) *Annals N. Y. Acad. Sci.* **755**, 579.

このとき  $t \sim 1$  日, 1 時間とすると  $\delta t$  は  $t_P$  の  $10^{10}$  倍程度となる。[したがって冒頭の予告に対応して, Planck 尺度より大きな重力効果の時間スケールが得られたことになる.] このことは何らかの巧妙な工夫によって, 精度の限界を検出できるかもしれないという期待を抱かせる。ただし上述の議論は重力を古典的な概念として導入するものであり, 本質的に難しい部分を誤魔化している気味があることに注意されたい。

## 10.5 時間に関する問題

一般相対性理論において Dirac 観測量は, 拘束条件との, したがって全ハミルトニアンとの Poisson 括弧がゼロになる量なので, それらは発展しない定数となってしまふ。本節では, この問題を扱った最近の提案について, いくらか論じてみる。

### 10.5.1 運動の定数のパラメーター発展

簡単な例として, 1 次元的な運動を行う相対論的な粒子を考え, 正準座標  $p_0, p, q^0, q$  をとる。[時間成分も座標に用いている。時空のダイナミクスも念頭に置いてか, あるいは拡大状態空間に引き上げた正準力学を考えているのか [3, pp.216–217].] 4 元運動量は拘束条件

$$\phi \equiv p_0^2 - p^2 - m^2 = 0$$

を満たす。このとき  $p$  および

$$X \equiv q - \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} q^0 \quad (10.50)$$

は Dirac 観測量となる [本稿次節で確認]。[ $p, X$  が一定の Dirac 観測量であることは, 一定速度  $v \equiv \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}}$  で粒子が直線運動  $q = X + vq^0$  を行うことを意味しており,]  $Q(t = q^0) = q$  とおけば, 2 つの Dirac 観測量から, 発展する運動の定数 (evolving constant of the motion)

$$Q(t, q^0, q, p) = X + \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} t$$

を構築したことになる。このように正準な配位変数の 1 つと同じ値をとるパラメーター  $t$  を選べば, 拘束条件との Poisson 括弧がゼロであって, なお発展する Dirac 観測量  $Q(t)$  が得られるという提案がなされている。

このアプローチに対して, 2 つの批判があり得る。

- パラメーター  $t$  の役割は何か。
  - このパラメーターによる発展が、何故、我々が自然界において見るものに対応するのか。
  - 物理的な観測量にあたる変数に、時間の記述の基礎を置くべきではないのか。
- 量子化の際、 $t = q^0$  という要請はどうなるのか。
  - 正準変数  $q^0$  は量子化しなければならないのに対し、 $t$  は古典的な連続変数のままなのか。
  - 連続パラメーター  $t$  に同定するための、量子化しない正準変数  $q^0$  を 1 つ選ぶのか。

これらの難点について、我々は古典的なパラメーター  $t$  を参照せずに、発展する観測量を扱う方法が存在することを見る予定である [10.5.3 節].

### 10.5.1 節について

■  $p$  および式 (10.50) の  $X$  が Dirac 観測量であることの確認

$$\begin{aligned} \{\phi, p\} &= \frac{\partial \phi}{\partial q} \cdot 1 - \frac{\partial \phi}{\partial p} \cdot 0 = 0, \\ \{\phi, X\} &= \{\phi, q\} - \{\phi, q^0\} \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} \quad \left( \because \left\{ \phi, \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} \right\} = 0 \right) \\ &= -\frac{\partial \phi}{\partial p} + \frac{\partial \phi}{\partial p^0} \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} \\ &= 2p - 2p_0 \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} \\ &= 0. \quad \left( \because \phi = 0, \text{ i.e. } p_0 = \sqrt{p^2 + m^2} \right) \end{aligned}$$

ただし第 2 式の 2 行目では Poisson 括弧が  $p_0$  ではなく、 $p^0 (= -p_0)$  による微分で定義されているものと考えた。

### 10.5.2 条件付き確率の解釈

Page and Wootters (1983) は一般相対性理論のような完全拘束系における時間の問題に関して、条件付き確率の解釈 (conditional probabilities interpretation) と呼ばれる提案を行った。それは時間の変数  $T$  も演算子へと移行し、時刻が  $T_0$  になるという条件下で、量子力学的な変数  $X$  が  $X_0$  という値をとる条件付き確率

$$P(X = X_0 | T = T_0) = \frac{\langle \Psi | P_{T_0} P_{X_0} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | P_{T_0} | \Psi \rangle}$$

を問う、というものである。ここに  $\Psi$  は量子状態であり、 $P_{T_0}, P_{X_0}$  はそれぞれ固有値  $T_0, X_0$  を持つ固有空間への射影演算子を表す。Page と Wootters は  $X$  と  $T$  として、拘束条件との Poisson 括弧がゼロにならない量 (したがって Dirac 観測量ではない) を選ぶことで、時間  $T$  が定数とならないようにした。そして拘束条件によって消滅する状態を状態  $\Psi$  に選ぶことで、理論に拘束条件を取り込んだ。しかしながらこのとき、一般に射影  $P_{X_0} | \Psi \rangle, P_{T_0} | \Psi \rangle$  は拘束条件によって消滅しない状態へと移行するという問題が生じる。この問題に起因して、Kuchař (1992) はパラメーター付けされた粒子の不適切な伝播関数

$$\langle t, x | t', x' \rangle = \delta(t - t') \delta(x - x')$$

が導かれてしまうことを示した。上式は粒子が伝播しないことを意味している。

以上で言及されている関連文献を、巻末の参考文献リスト (pp.171–176) から抜粋しておく。

- Page, D. and Wootters, W. (1983) *Phys. Rev. D* **27**, 2885.
- Kuchař, K. (1992) “Time and Interpretations of Quantum Gravity”, in G. Kunstatter, D. Vincent, and J. Williams (eds.), *Proceeding of the 4th Canadian Conference on General Relativity and Relativistic Astrophysics*. World Scientific, Singapore. To be reprinted in *Int. J. Mod. Phys. D*.

### 10.5.3 発展する運動の定数を用いた条件付き確率

最近、ここまでに示した2つの提案を組み合わせるならば、個別の提案において遭遇するいくつかの困難を解消できることが示された (Gambini *et al.* (2009a)). そのアイデアは、条件付き確率を構築するけれども、そこで条件付き確率を計算する対象となる量を、発展する運動の定数にするというものである. (p.162)

具体的には拘束条件のある正準系において、まず、発展する運動の定数  $X(t)$  を構築する. 次に  $X(t)$  との Poisson 括弧がゼロになるような、もう1つの発展する定数  $T(t)$  を時間の変数にとり、条件付き確率

$$P(X = X_0 | T = T_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\int_{-\tau}^{\tau} dt \langle \Psi | P_{T_0} P_{X_0} | \Psi \rangle}{\int_{-\tau}^{\tau} dt \langle \Psi | P_{T_0} | \Psi \rangle}$$

を計算する.

- Dirac 観測量 [の射影演算子  $P_{T_0}, P_{X_0}$ ] を拘束条件によって消滅する状態  $|\Psi\rangle$  に作用させると、拘束条件によって消滅する状態が得られる [本稿次節で補足].
- 観測できない古典パラメーター  $t$  は、積分変数に過ぎない.
- 時計の役割を担う変数を注意深く選べば、通常の伝播関数が導かれることが、簡単な例によって示される.

一般に、真空における一般相対性理論において、発展する運動の定数を構築することは不可能であるが、

発展する運動の定数を構築するための近似的な体系 (スキーム) も提案されており (Dittrich (2006)), この文脈において、時間に関する問題を解決できる可能性はあり得る. (p.163)

以上で言及されている関連文献を、巻末の参考文献リスト (pp.171–176) から抜粋しておく.

- Gambini, R., Porto, R., Pullin, J., and Tortorolo, S. (2009a) *Phys. Rev. D* **79**, 041501(R).
- Dittrich, B. (2006) *Class. Quan. Grav.* **23**, 6155.

### 10.5.3 節について

■ 「発展する運動の定数は……拘束条件によって消滅するような状態を生成する」 (p.163, l.1–3) について拘束条件の式を  $C$  と書くと、量子力学では Dirac 観測量  $P = P_{X_0}, P_{T_0}$  の条件は、交換関係

$$[C, P] = 0$$

で与えられる. すると  $C|\Psi\rangle = 0$  を満たす (物理的) 状態  $|\Psi\rangle$  に対して、

$$C(P|\Psi) = P(C|\Psi) = 0$$

となる。

## 関連文献について

本章で扱った題材の大部分は、現在研究が進みつつあるものなので、教育的な入門書はほとんどない。推奨できる文献は、本文中に挙げたものくらいである。[しかも本稿では、その全てを載せてはいない。] ブラックホールに関する熱力学の一般的な議論は Carroll (2003) において簡潔に扱われている。量子力学における経路積分の良い入門書は Feynman and Hibbs (1965) である。幾分古さはあるが、スピン泡に関する良い入門が Perez (2004) に見られ、これには改訂の予定がある (Perez (2011))。Rovelli (2007) と Thiemann (2008) の本には、スピン泡と、ブラックホールエントロピーを扱う章が含まれている。特に Rovelli の本では、ブラックホールのエントロピーが何を表しているのかという問題について、物理的に優れた議論がなされている。時間に関する問題は、Kuchař (1992) のレビューに美しくまとめられている。

ここで言及されている関連文献を、巻末の参考文献リスト (pp.171–176) から抜粋しておく。

- Carroll, S. (2003) *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Benjamin Cummings. Based on notes available online at <http://preposterousuniverse.com/grnotes/> [accessed 11 March 2011].
- Feynman, R. and Hibbs, A. (1965) *Quantum Mechanics and Path Integrals*. McGraw-Hill.
- Kuchař, K. (1992) “Time and Interpretations of Quantum Gravity”, in G. Kunstatter, D. Vincent, and J. Williams (eds.), *Proceeding of the 4th Canadian Conference on General Relativity and Relativistic Astrophysics*. World Scientific, Singapore. To be reprinted in *Int. J. Mod. Phys. D*.
- Perez, A. (2004) “Introduction to loop quantum gravity and spin foams” , [arXiv:gr-qc/0409061] [accessed 11 March 2011].
- Perez, A. (2011) “The spin foams approach to quantum gravity” , In preparation for *Liv. Rev. Rel.* and “Recent advances in spin foam models” in preparation for *Pap. in Phys.*
- Rovelli, C. (2007) *Quantum Gravity*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Thiemann, T. (2008) *Modern Canonical Quantum General Relativity*. Cambridge University Press, Cambridge.

## 第 11 章 未解決問題と論争

幸い、ループ量子重力に対する批判の一部は、注意深い査読を通すような雑誌に掲載されている。Nicolai, Peeters, and Zamaklar (2005) は、科学者たちのいくつかの立場を概観する論文を書いた。彼らの論文は少々古くなっているが、現在も読まれるべき価値がある。Thiemann (2007) もいくつかの批判について論じている。Nicolai and Peeters (2007) は、彼らの議論を更新した。ここでは、これらの論文で注目されている問題のいくつかに照明をあててみる。(p.165)

- Nicolai, H., Peeters, K., and Zamaklar, M. (2005) *Class. Quan. Grav.* **22**, R193.
- Thiemann, T. (2007) *Lect. Notes Phys.* **721**, 185.
- Nicolai, H. and Peeters, K. (2007) *Lect. Notes Phys.* **721**, 151.

■運動学的な構造に関する反論 ループ量子宇宙論における有限の数の自由度を持つ力学系でさえ、Ashtekar-Lewandowski 内積を持つ表現 (表示) における不連続性によって、Stone-von Neumann の定理からの制約を回避し、非自明な結果を得ることができる [第 9 章]。しかしながら同様の表現を、たとえば調和振動子などの馴染み深い物理系に適用すると、適正な物理的結果を得ることができないという反論がある。

### ■Thiemann の構築したハミルトニアン拘束への反論

- それ自体の構築方法の曖昧さ
- 因子の順序化の曖昧さ
  - 体積をホロノミーの左側に置くと問題に突き当たる
- 三角形分割を縮小する極限においてハミルトニアン拘束の中に曲率と接続を生み出すような項を構築するために、結節点にどのような種類のループを加えるかという曖昧さ
  - 三角形分割をゼロに縮小させた極限を取る際に、得られる演算子は無限に多くの寄与を含み、発散する
  - ホロノミーを  $SU(2)$  の基本表現によって加えると決めたことの曖昧さ

ループ量子重力の研究者たちは、いくつかの理由から、ハミルトニアン拘束の定義における曖昧さは、繰り込み不可能な摂動論における無数の相殺項の導入と類似のものではないと考える傾向にある。

### ■物質との結合

Thiemann は、純粋な重力理論のためのハミルトニアン拘束を書くための技法と同じ方法を、重力と素粒子の標準模型 (フェルミオン, スカラー場, ゲージ場を含み, 超対称性を備えたもの) を組み合わせたモデルにも応用できることを示した。それによれば、物質との結合は、特段の制約なしに行うことができ、量子異常 (アノマリー) や発散が引き起こされることもないように見える。このことは、他の量子重力へのアプローチとは著しい対照をなしている。(中略) しかしながら、ループ量子重力が物質との結合に無矛盾性の要請を課することがないように見えるのは、運動学的な水準の話にすぎないということも強調しておかなければならない。(pp.167–168)

### ■その他の問題

- 摂動的な量子重力に現れる無限大が，ループ量子重力の何処に対応するのか，ということ
- Lorentz 不変性や微分同相不変性を破る可能性の問題
  - － 拘束代数を微分同相拘束とハミルトニアン拘束の両方を含んだ形で実行できないという不都合

まとめると，ループ量子重力の，理論として不完全な状態と，通常の場合の理論の取扱いとは異なる諸側面のために，ループ量子重力には何か問題が含まれているという懸念を持つ人々もいる．現在まで，よく定義された具体的な批判が，ループ量子重力に対してなされたわけではない．このことは，しかしながら正直な科学者が，この理論のアプローチ全体に対して懐疑を持たないということの意味するわけでもない．この理論に主体的に携わる研究者には，さらに物理的に複雑さの増した状況をよく調べて，究極的に，判定感度の高い物理的な予言を生み出す義務がある．この文脈において，ループ量子重力の中に，実験事実との整合のために作為的に決めるような要因が多くないことは心強いことである．我々が見てきた運動学的な枠組みは，独特の一意性を備えたものである．時空次元も固定されている．物質場を加えることもできるが，それらは純粋に重力的な部分からの予言に影響を与えず，後者の部分は厳しい制約を受けている．このような事情は弦理論とは対照的である．弦理論の研究は，かなり多様な展開を見せており，あまりにも自由度が多くなりすぎるために，予言的な理論にはなり得ないと考える人々もいる．ループ量子重力が存立可能な理論か否かを知るためには，さらなる研究と時間が必要であろう．あるいはまた，この理論が最終的な量子重力理論となり得るかどうかに関わらず，ここから場の量子論に対する非摂動的なアプローチの構築方法について得られる多くの教訓は，この分野に費やされる努力を，価値のある魅力的なものに転化させるであろう．(p.169)

## 付録 A 多様体とベクトル場, Lie 微分と Lie 群

3.5 節の補足として, 多様体上のベクトル場に関する数学についてまとめる. Lie 微分との関連で Lie 群についても言及する. 任意の階数のテンソルに対する Lie 微分の公式は, 3.5 節のノートを参照.

### A.1 微分可能多様体 [3, pp.37–38]

本稿では多様体の数学的に厳密ではあるが堅苦しい定義を与える代わりに, その意味合いを簡単にくみ取ってまとめよう.  $m$  次元 (無限回) 微分可能体  $M$  は  $m$  次元空間であって<sup>\*31</sup>, 次の条件を満たす.

1.  $M$  の各点  $Q$  のまわりに一価連続な局所座標  $(q^1, \dots, q^m)$  を割り当てられる.  
↔ 同相写像  $\phi(Q) = (q^1, \dots, q^m)$  がある.
  - $\phi, \phi^{-1}$  が連続な 1 対 1 写像  $\phi$  を同相写像という.
2. 2 通りの座標系  $(q^1, \dots, q^m), (\bar{q}^1, \dots, \bar{q}^m)$  の間の座標変換が滑らかである.  
↔ 関数  $\bar{q}^k = \varphi^k(q^1, \dots, q^m)$  が無限回微分可能である.
  - $r$  回だけ微分可能であることを要求した場合,  $M$  は  $r$  回微分可能多様体と呼ばれる.  
物理では特に  $r = \infty$  の場合が重要である.

結局  $m$  次元微分可能多様体とは, 何枚ものスムーズに重なる近傍で覆われ, どの点でもその点のまわりに局所座標系  $(q^1, q^2, \dots, q^m)$  が書き込め, したがって局所的にはユークリッド空間のように扱うことができる空間 (連続的な点の集合) である.

### A.2 多様体上の関数と曲線 [3, pp.39–40]

多様体  $M$  の性質 → すべての座標系に共通した性質,  
幾何学的対象 → 座標変換によって変わらない対象.

$\Phi$  が 1 対 1 の写像で  $\Phi, \Phi^{-1}$  が微分可能のとき,  $\Phi$  を微分同相写像という. 以降では多様体間の写像について必要なだけの微分可能性を仮定する.

- $M$  上の関数  $f: Q \rightarrow f(Q)$   
多様体  $M$  上の点  $Q$  を実数  $f(Q)$  に対応付ける写像  $f$  を,  $M$  上の関数という.
  - 点  $Q$  に充てられた座標  $q = (q^1, \dots, q^m)$  を用いて,  
簡単に  $f(Q) = f(q)$  と記しても構わない (物理学ではむしろこれが普通である).
  - $f$  の連続性や微分可能性はその局所座標表示  $q \rightarrow f(q)$  についていう.
- $N$  上の曲線  $c: t \rightarrow c(t)$   
実数  $t$  を多様体  $N$  上の点  $c(t)$  に対応付ける写像  $c$  を,  $N$  上の曲線という.

<sup>\*31</sup> 厳密には Hausdorff 空間 (任意の異なる 2 点を別々の開近傍に分けられる位相空間) である. もっとも物理で扱う空間 (配位空間, 状態空間, 相空間など) はすべてこの条件を満たしているから, あまり気にしなくてよい.

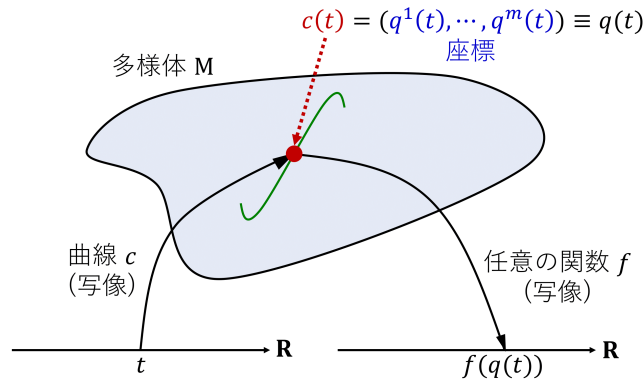


図 35 合成写像  $t \in \mathbf{R} \mapsto c(t) \in M \mapsto f \circ c(t) \equiv f(c(t)) \in \mathbf{R}$

- このように本来，数学用語としての「曲線」は写像そのものを指す。  
しかし曲線  $c(t)$  として，動点の軌跡をイメージした方が分かりやすいこともある。

### A.3 方向微分と微分作用素 [3, pp.41–43]

多様体上での速度ベクトルと接空間を定義するために，方向微分を導入する．たった今導入した  $M$  上の「関数」 $f$  と「曲線」 $c$  を用いて，図 35 のような合成写像を考える．これは 1 変数  $t$  の単なる実数値関数  $f(c(t))$  だから，その導関数  $\frac{df(c(t))}{dt}$  を定義できる．そこで対応

$$f \mapsto v[f] \equiv \frac{df(c(t))}{dt}$$

を曲線  $c$  に沿った方向微分と呼び，方向微分作用素 (演算子)  $v$  を定義する．このとき  $v$  は  $M$  の局所座標系と無関係に定義されることになる．

次に点  $c(t)$  をその座標  $q(t)$  と同一視すると，

$$f \mapsto v[f] \equiv \frac{df(c(t))}{dt} = \dot{q}^i \partial_i f \tag{46}$$

(ただし  $\dot{q}^i \equiv \frac{dq^i}{dt}$ ,  $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial q^i}$ ) なので<sup>\*32</sup>，方向微分作用素は局所座標を用いて

$$v = \frac{d}{dt} = \dot{q}^i \partial_i \tag{47}$$

と表される．

note 1  $f(q)$  を多様体上の定常的な場と解釈すると，式 (46) は動点 (粒子) の位置で評価した場の値の時間変化率 (いわゆる物質微分, Lagrange 微分) に他ならない．

note 2 本節の結果は，方向単位ベクトル  $\mathbf{n}$  を用いた通常方向微分の表式  $\mathbf{n} \cdot \nabla f$  と比較される．ただしここでは単位ベクトルの代わりに，速度  $(\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  を用いて方向が指定されている．

<sup>\*32</sup> 表記の煩わしさを厭わず，式 (46) が点  $Q = c(\tau)$  における値であることを明示すると，

$$v_Q[f] = \left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=\tau} = \dot{q}^i(\tau) (\partial_i f)_Q.$$



#### A.4 接ベクトルと接空間 [3, pp.43–46]

3次元空間内の曲面を座標  $q = (q^1, q^2)$  でパラメトライズすると、曲面上の動点の速度は

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(q(t)) = \dot{q}^i (\partial_i \mathbf{r}) \quad (48)$$

と表される。ここで位置ベクトル  $\mathbf{r}$  は曲面の外の3次元空間に突き出している。これに対し一般の多様体では、それを超曲面として内に含む高次元の空間が存在するとは限らない。そこで上式(48)から  $\mathbf{r}$  を形式的に取り除くと、式(47):  $v = \dot{q}^i \partial_i$  の形になる。そこで微分作用素(47)を速度ベクトルと見なすことが動機付けられる。

note つまり以下で見るように、 $c(t)$  に応じて(つまり動点の運動に応じて)  $\{\partial_i\}$  を基底とする様々な速度  $\{\dot{q}^i\}$  を持つ作用素  $v$  が得られる。その全体が接空間を張る。

実際、(与えられた点  $Q$  において) 微分作用素  $v_Q$  は和と実数倍に関してベクトル空間を張る：

$$\begin{cases} v = v^i \partial_i \\ u = u^i \partial_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v + u = (v^i + u^i) \partial_i \\ av = av^i \partial_i \quad (a \in \mathbf{R}) \end{cases}$$

そこで微分作用素  $v_Q$  を点  $Q$  における接ベクトル、 $v_Q$  の集合の張るベクトル空間  $\text{TM}_Q$  を点  $Q$  における接空間と呼ぶ。

また  $\{(\partial_i)_Q\}$  は接空間  $\text{TM}_Q$  の基底となる\*33。

理由  $\{(\partial_i)_Q\}$  は  $\text{TM}_Q$  の元であり、また  $\text{TM}_Q$  の元は  $\{(\partial_i)_Q\}$  の1次結合  $v_Q = v^i (\partial_i)_Q$  で表される。そこで  $\{(\partial_i)_Q\}$  が1次独立であることを示せば十分である。以下では添字  $Q$  を省こう。

$$v[f] = v^i (\partial_i f(q)) = 0$$

を仮定する。ここで  $f$  を

$$f(q) = q^j(q) = q^j$$

で定義される座標関数  $q^j$  にとる(上式の最右辺における  $q^j$  は関数名ではなく座標そのものである)。すると

$$0 = v^i (\partial_i f(q)) = v^i (\partial_i q^j) = v^i \delta^j_i = v^j$$

となるので、 $\{\partial_i\}$  は1次独立である。

$\{(\partial_i)_Q\}$  を自然基底といい、 $(\partial_i)_Q = (e_i)_Q$  とも表す。

- 接空間  $\text{TM}_Q$  は幾何学的対象である。

理由

$$\begin{cases} (\partial_i)_Q = (\partial/\partial q^i)_Q \rightarrow \text{TM}_Q \text{を張る} \\ (\bar{\partial}_i)_Q = (\partial/\partial \bar{q}^i)_Q \rightarrow \overline{\text{TM}}_Q \text{を張る} \end{cases}$$

とすると、

$$\bar{\partial}_i = \frac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^i} \partial_j, \quad \therefore \overline{\text{TM}}_Q \subset \text{TM}_Q.$$

同様に  $\text{TM}_Q \subset \overline{\text{TM}}_Q$  なので、 $\text{TM}_Q = \overline{\text{TM}}_Q$ 。

- 接ベクトル  $v_Q$  は幾何学的対象である。

理由

$$\begin{cases} \dot{\bar{q}}^i = (\partial \bar{q}^i / \partial q^j) \dot{q}^j : \text{反変ベクトル} \\ \bar{\partial}_i = \frac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^i} \partial_j : \text{共変ベクトル} \end{cases} \Rightarrow v = \dot{q}^i \partial_i = \dot{\bar{q}}^i \bar{\partial}_i.$$

\*33  $\{(\partial_i)_Q\}$  における添字の  $Q$  は、微分演算子を任意の関数  $f$  に作用させた後で点  $Q$  における値  $(\partial f / \partial q^i)_Q$  をとることを表す。

## A.5 接バンドルとベクトル場 [3, pp.46–49]

多様体  $M$  の各点  $Q$  に接ベクトル  $v_Q$  を 1 つずつ対応付ける写像

$$v : Q \mapsto v_Q$$

を  $M$  上のベクトル場という<sup>\*34</sup>.

例 1  $fv : Q \mapsto f(Q)v_Q$

例 2  $vf : Q \mapsto v_Q[f]$  ( $v_Q[f]$  は方向微分)

例 3  $\partial_i : Q \mapsto (\partial_i)_Q$  ( $\partial_i$  を基底場という)

操作的には,

$$\text{各点 } Q \text{ のベクトルの関係} \xrightleftharpoons[\text{添字 } Q \text{ を付ける}]{\text{添字 } Q \text{ を除く}} \text{ベクトル場の関係}$$

とできる. 例えば各点のベクトルと多様体上のベクトル場の局所座標表示はそれぞれ,

$$v_Q = v^i_Q(\partial_i)_Q, \quad v = v^i\partial_i.$$

## A.6 積分曲線と 1 径数変換群 [3, pp.49–50]

多様体  $M$  上にベクトル場  $w$  が与えられているとき, 初期位置  $q(0) = Q_0$  からベクトル場  $w$  に導かれて運動する動点の軌跡, すなわち

$$\frac{dq^i}{dt} = w^i(q) \tag{49}$$

の解  $q = c(t)$  が表す曲線を,  $w$  の積分曲線 (解曲線) という (図 36 参照)<sup>\*35</sup>. [平たく言えば, 積分曲線はベクトルを滑らかに繋いで得られる曲線であり, 例えば流体の速度場の積分曲線は流線, 電場の積分曲線は電気力線である.]

動点の初期位置  $Q_0$  を時間  $t$  後の位置  $Q_t = c(t)$  に対応付ける写像

$$\varphi_t : Q_0 \mapsto Q_t$$

の全体  $\{\varphi_t | t \in \mathbf{R}\}$  を相流ないし流れ (フロー) という.

$$\varphi_0 = \text{id. (恒等写像)},$$

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s,$$

$$\varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1}$$

より相流は群を成す. この群をベクトル場  $w$  が定める 1 径数変換群という.

<sup>\*34</sup> これは多様体  $M$  から,  $M$  上のすべての点の接空間の集合

$$TM = \bigcup_{Q \in M} (TM)_Q$$

(接バンドルという) への写像である.

<sup>\*35</sup> 式 (49) は, 各点でのベクトル  $w^i\partial_i$  が動点の速度  $\dot{q}^i\partial_i$  に一致する条件  $\dot{q}^i\partial_i = w^i\partial_i$  と等価である.

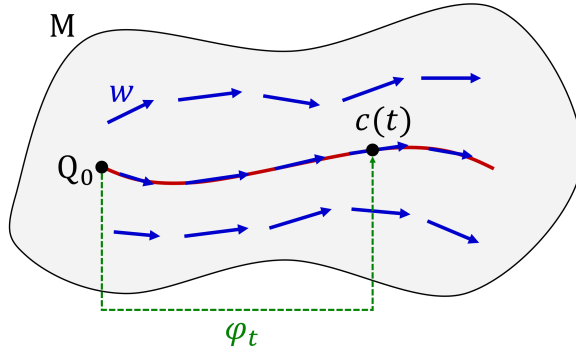


図 36 多様体上のベクトル場と積分曲線

### A.7 引き戻しと微分写像 [3, pp.50–52]

多様体  $M$  上の各点  $Q$ (座標  $q$ ) を多様体  $N$  上の点  $P = \varphi(Q)$ (座標  $p$ ) に移す微分同相写像  $\varphi$  を考える. さらに  $N$  上の点  $P$  を実数  $g(P)$  に対応付ける写像  $g$  を定義する. これを

$$g(P) = g(\varphi(Q)) = g \circ \varphi(Q) \equiv (\varphi^*g)(Q) \quad (50)$$

と見ると,  $\varphi^*g$  は  $M$  において作用する関数となる.  $\varphi^*g$  を  $g$  の  $\varphi$  による  $M$  上への引き戻し (pull back) という (図 37 参照).

$M$  上の曲線  $q = c(t)$  に沿う動点の運動は, 微分同相写像  $\varphi$  を用いて,  $N$  上の曲線  $p = (\varphi \circ c)(t)$  に沿う動点の運動に対応付けられる. すると  $M$  の点  $Q$  における接ベクトル  $v_Q$  を,  $N$  の点  $P = \varphi(Q)$  における接ベクトル  $u_P = (\varphi_*v)_P$  に移す写像を定義できる (図 38 参照). 一時的に添字  $Q, P$  を省略すると, 局所座標表示では  $v^j = \dot{q}^j$  に対して

$$v = \frac{d}{dt} = v^j \frac{\partial}{\partial q^j} = v^j \frac{\partial p^i}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial p^i}, \quad u = \frac{d}{dt} = u^i \frac{\partial}{\partial p^i}$$

であり, 2 式を比較すると

$$u^i = \frac{\partial p^i}{\partial q^j} v^j$$

となる. あるいは添字を復元して

$$u^i_P = \frac{\partial p^i}{\partial q^j} v^j_Q. \quad (51)$$

これは (反変) ベクトル成分の変換則となっており, 微分の変換  $dp^i = \frac{\partial p^i}{\partial q^j} dq^j$  と同じ変換則なので, 写像

$$\varphi_* : v_Q \mapsto u_P \quad (52)$$

を微分写像という.

**note** ここでは共変ベクトル  $\partial/\partial q^i \rightarrow \partial/\partial p^i$  の変換則の下で, ベクトルの不変性  $v = u$  が成り立つことを要求して,  $v^i \rightarrow u^i$  が反変ベクトル成分の変換則となることを導いたことになる. 同じことは直接,

$$u^i = \dot{p}^i = \frac{\partial p^i}{\partial q^j} \dot{q}^j = \frac{\partial p^i}{\partial q^j} v^j$$

としても示される. つまり  $v^i = \dot{q}^i, u^i = \dot{p}^i$  は座標の微分だから, 反変ベクトル成分の変換則に従う. (このときベクトルの不変性  $u = v$  が保証される.)

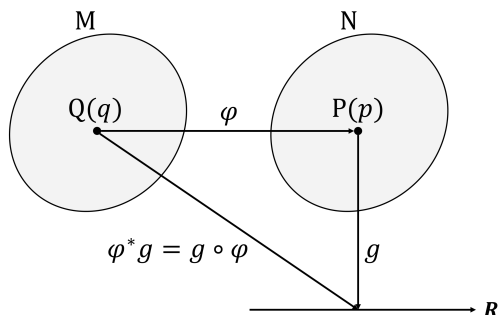


図 37 引き戻し

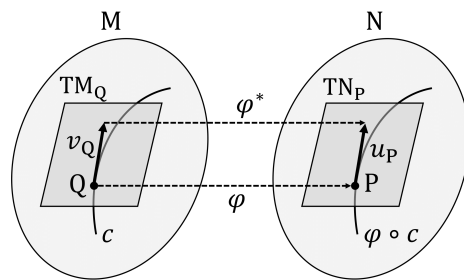


図 38 微分写像

$N$  上の関数  $g$  の、 $N$  におけるベクトル  $u_P = (\varphi_*v)_P$  に沿う方向微分は、 $M$  上に引き戻した関数  $\varphi^*g$  の、 $M$  におけるベクトル  $v_Q$  に沿う方向微分に一致する：

$$u_P[g] = \left. \frac{dg(\varphi(c(t)))}{dt} \right|_{t=\tau} = \left. \frac{d(g \circ \varphi)(c(t))}{dt} \right|_{t=\tau} = v_Q[g \circ \varphi] = v_Q[\varphi^*g]. \quad (53)$$

ただし  $\tau$  は点  $Q$  (したがって点  $P$ ) に対応する  $t$  の値である。

最後に A.10 節の準備として、上式 (53) を便利な形に書き換えておこう。まず A.5 節で導入した表記法  $v_Q[f] = v_Q[f]$  を用いると、

$$((\varphi_*v)g) \circ \varphi(Q) = (v(\varphi^*g))(Q)$$

となる (左辺において  $P = \varphi(Q)$  を考慮した)。次いで式 (50) を用いて左辺を書き換えると、

$$\varphi^*((\varphi_*v)g)(Q) = (v(\varphi^*g))(Q) \quad (54)$$

が得られる。

## A.8 Lie 微分 [3, pp.53–55]

多様体上のベクトル場  $v$  に対して、 $Q$  を始点とする積分曲線を  $\varphi_t(Q) = c(t)$  と書こう (A.6 節参照)。多様体上の関数  $f$  の積分曲線に沿う変化率は、点  $Q = c(0)$  において

$$\mathcal{L}_v(f) \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c(t)) - f(c(0))}{t} = v_Q[f]$$

と表される。これを **Lie** (リー) 微分という。つまり関数の Lie 微分は、積分曲線に沿った方向微分に他ならない。

ベクトル場  $u$  の Lie 微分も、積分曲線に沿う  $u$  の変化率

$$\mathcal{L}_v(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_{-t*}u - u}{t} \quad (55)$$

として定義できる。ここで第 1 項の  $(\varphi_{-t*}u)_Q$  は、ベクトル場  $u$  を積分曲線に沿って時間  $t$  だけ逆向きにずらして得られるベクトル場  $u' = \varphi_{-t*}u$  の、点  $Q$  での値である ( $\varphi_{-t*}$  は A.7 節の式 (52) の微分写像)。これは時間  $t$  だけ進んだ点  $\varphi_t(Q) = Q'$  でのベクトル  $u_{Q'}$  を、点  $Q$  に移したベクトルに他ならない (図 39 参照)。このように式 (55) では、同一の点  $Q$  でのベクトル  $u_Q, u'_Q$  を比較している。

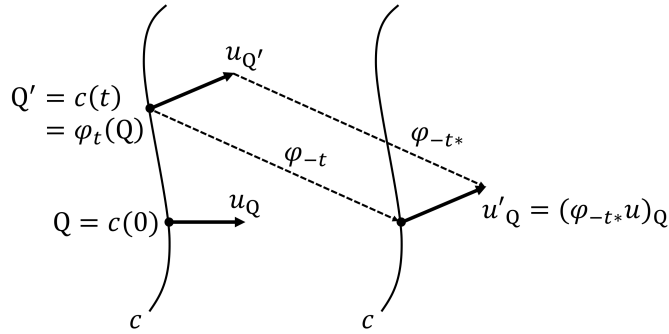


図 39 ベクトル場  $u$  の Lie 微分

**注意** 多様体上の異なる 2 点  $Q, Q'$  のベクトル  $u_Q, u_{Q'}$  の差は意味を持たない. と言うのも, 一般に多様体の異なる 2 点でのベクトル成分は異なる変換係数 ( $\partial \bar{q}^i / \partial q'^j$ ) を持つため, それらの和や差はベクトル成分とならないからである [3, p.30].

ベクトル場の Lie 微分に対して, 公式

$$\mathcal{L}_v(u) = vu - uv \quad (56)$$

が成り立つ.

公式 (56) の証明 ベクトル場  $v$  の積分曲線上の 2 点  $Q = \{q^i\}, \varphi_t(Q) = Q' = \{q'^i\}$  に対して,

$$u_Q = u^i(q) \partial_i,$$

$$u'_{Q'} = u^j(q') \partial_{j'} = u^j(q') \frac{\partial q^i}{\partial q'^j} \partial_i \equiv (\varphi_{-t*} u)_Q$$

なので,

$$\mathcal{L}_v(u)_Q = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left\{ u^j(q') \frac{\partial q^i}{\partial q'^j} - u^i(q) \right\} \partial_i.$$

ここで点  $Q'$  を始点  $Q$  の近くにとると,

$$q'^i = q^i + tv^i + O(t^2), \quad \therefore u^j(q') = u^j + tv^k \partial_k u^j + O(t^2), \quad \frac{\partial q^i}{\partial q'^j} = \delta^i_j - t \frac{\partial v^i}{\partial q'^j} + O(t^2) = \delta^i_j - t \partial_j v^i + O(t^2)$$

より

$$\begin{aligned} \left\{ u^j(q') \frac{\partial q^i}{\partial q'^j} - u^i(q) \right\} \partial_i &= \left\{ (u^j + tv^k \partial_k u^j) (\delta^i_j - t \partial_j v^i) - u^i \right\} \partial_i + O(t^2) \\ &= t \left\{ (v^k \partial_k u^i) - (u^k \partial_k v^i) \right\} \partial_i + O(t^2) \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v(u)_Q &= \left\{ (v^k \partial_k u^i) - (u^k \partial_k v^i) \right\} \partial_i \\ &= (v^k \partial_k)(u^i \partial_i) - (u^k \partial_k)(v^i \partial_i) \\ &= (vu - uv)_Q \end{aligned} \quad (57)$$

を得る. これをベクトル場の関係として書いたのが式 (56) である.

## A.9 Lie 括弧と Lie 代数 [3, pp.55–57]

式 (56) の右辺

$$vu - uv \equiv [v, u]_{\text{L}} \quad (58)$$

をベクトル場  $v, u$  の **Lie** 括弧ないし交換子という。これを用いて式 (56) は改めて

$$\mathcal{L}_v(u) = [v, u]_{\text{L}}$$

と書ける。

Lie 括弧は式 (57):

$$[v, u]_{\text{L}} = \{(vu^i) - (uv^i)\} \partial_i$$

のように書けるので, Lie 括弧  $[v, u]_{\text{L}}$  もまた各点で接ベクトルを与えるベクトル場である<sup>\*36</sup>。

したがって Lie 括弧は, 2つのベクトル場  $u, v$  をベクトル場  $[v, u]_{\text{L}}$  に対応付ける写像となっている。そして Lie 括弧は [量子力学における交換子と同様], 次の性質を満たす。

1. 双線形

$$[au + bv, w]_{\text{L}} = a[u, w]_{\text{L}} + b[v, w]_{\text{L}}, \quad [u, av + bw]_{\text{L}} = a[u, v]_{\text{L}} + b[u, w]_{\text{L}}.$$

2. 歪対称

$$[u, v]_{\text{L}} = -[v, u]_{\text{L}}.$$

3. Jacobi の恒等式

$$[u, [v, w]_{\text{L}}]_{\text{L}} + [v, [w, u]_{\text{L}}]_{\text{L}} + [w, [u, v]_{\text{L}}]_{\text{L}} = 0.$$

このとき多様体上のベクトル場の作るベクトル空間は, Lie 括弧を積演算として **Lie** 代数を構成することを説明する。一般にベクトル空間  $V$  の任意の2個の要素  $x, y \in V$  を要素  $x \times y \in V$  に対応付ける双線形・歪対称な写像 (演算) が, Jacobi の恒等式

$$(x \times (y \times z)) + (y \times (z \times x)) + (z \times (x \times y)) = 0$$

を満たすとき, ベクトル空間  $V$  はこの演算を演算積として Lie 代数を構成するという。なお Lie 代数の次元を  $n = \dim V$  として  $V$  の基底ベクトルを  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  とすると,  $e_i \times e_j \in V$  だから

$$e_i \times e_j = c_{ij}^k e_k$$

と表される。右辺の  $n^3$  個の定数の組  $\{c_{ij}^k\}$  を **Lie** 代数の構造定数という。

## A.10 Lie 群と Lie 代数 [3, pp.57–60]

リー代数と関係の深いリー群を考える。リー群 (Lie group) とは, 群  $G$  の各元が連続な有限個のパラメータの組で指定され, 群  $G$  自体がこのパラメータの組を座標とする微分可能多様体を成し, かつ群の演算が微分可能な写像であるものをいう。群演算が微分可能な写像であるとは, 積  $g_i g_j$  の座標が  $g_i$  と  $g_j$  の座標の微分可能な関数であり, 逆元  $g_i^{-1}$  の座標が  $g_i$  の座標の微分可能な関数になっていることである。なお多様体としての  $G$  の次元をリー群の次元という。

<sup>\*36</sup> しかも A.7 節のノートで指摘したように, 各点  $Q$  での値について, ベクトル  $u = u^i \partial_i, v = v^i \partial_i$  そのものは不変量なので,  $\{\dots\}$  内の因子  $(vu^i) - (uv^i)$  はベクトル成分の変換則に従う。

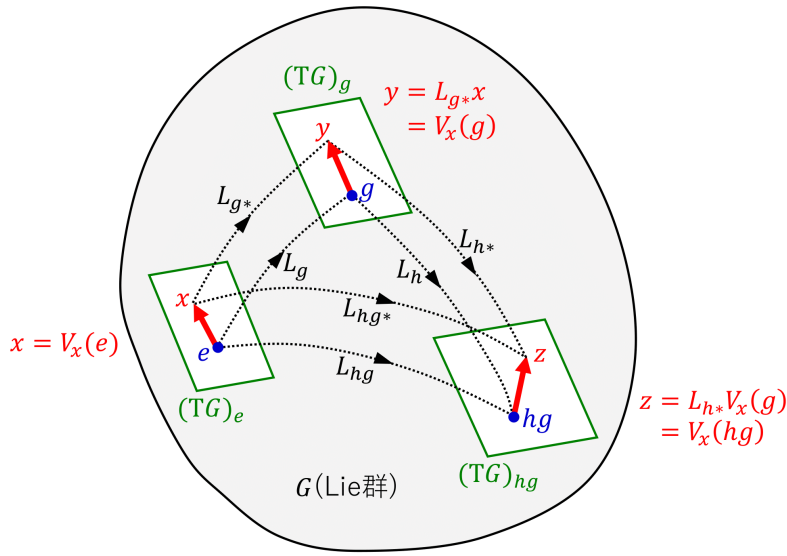


図 40  $x$  により定義される, Lie 群  $G$  上の左不変ベクトル場

$G$  をリー群とする. ただし簡単のため以下では  $G$  は連結, すなわち  $G$  の任意の元  $g$  を単位元と結ぶ  $G$  上の連続曲線が必ず存在するとする.

$G$  の任意の元  $g$  に対して,  $G$  の左移動

$$L_g : h \mapsto L_g h = gh \quad \text{for } \forall h \in G$$

を定義する. すると Lie 群 (多様体)  $G$  の単位元  $e$  は  $L_g e = ge = g$  に移る. このため  $e$  における接平面  $(TG)_e$  上の接ベクトル  $x$  を 1 つとると, これは  $L_g$  の微分写像  $L_{g*}$  (A.7 節の式 (52) を参照) によって, 点  $g$  の接ベクトル  $L_{g*}x$  に移される. そこで  $g$  を  $G$  全体に動かせば, ベクトル場

$$V_x : g \mapsto V_x(g) = L_{g*}x$$

が得られる [このベクトル場  $V_x$  は最初に選んだベクトル  $x$  で特徴付けられる]. このときベクトル場  $V_x$  の  $g$  での値  $V_x(g) = L_{g*}x$  を微分写像  $L_{h*}$  で移した先

$$L_{h*}V_x(g) = L_{h*} \circ L_{g*}x = L_{hg*}x = V_x(hg) \quad (\because L_h \circ L_g = L_{hg})$$

は同じベクトル場  $V_x$  の  $hg$  での値となる (図 40 参照). この意味でベクトル場  $V_x$  は左からの  $G$  の作用 [すなわち  $L_{h*}$ ] に関して不変だから, 左不変ベクトル場と呼ばれる. (全く同様に右移動  $R_g : h \mapsto hg$  に対して, 微分写像  $R_{g*}$  を用いて右不変ベクトル場が作られる.)

次に Lie 群  $G$  上で定義された左不変ベクトル場の全体が作る集合を  $\mathcal{G}$  とする. このときベクトル場  $V, W \in \mathcal{G}$  に対して Lie 括弧  $[V, W]_L$  を定義することができ,  $[V, W]_L$  もまたベクトル場になる (A.9 節). 以下,  $\mathcal{G}$  は Lie 括弧を積演算として Lie 代数を成すことを証明する ( $\mathcal{G}$  を Lie 群  $G$  の Lie 代数という, 右不変ベクトル場についても同様).

証明 Lie 括弧  $[V, W]_L$  が左不変であり, それ故  $\mathcal{G}$  の元であることを示せば十分である. 実際このとき Lie 括弧は (i) 双線形, (ii) 歪対称, (iii) Jacobi の恒等式を満たすから, Lie 代数が構成される. ここで特に双線形の条件 (i):

$$[au + bv, w]_L = a[u, w]_L + b[v, w]_L, \quad [u, av + bw]_L = a[u, v]_L + b[u, w]_L$$

において, 例えば  $V \equiv [u, w]_L \in \mathcal{G}, W \equiv [v, w]_L \in \mathcal{G}$  ならば

$$aV + bW \in \mathcal{G}$$

であることに注意する.

さて, Lie 括弧が左不変であることの証明に移ろう.  $f$  を  $G$  上で定義された任意の微分可能な関数として, 式 (54) で  $\varphi \rightarrow L_g, v \rightarrow [V, W]_L, g \rightarrow f$  とおくと

$$L_g^* \{(L_{g^*}[V, W]_L)f\} = [V, W]_L(L_g^*f)$$

が見出される. さらに上式右辺は

$$\begin{aligned} [V, W]_L(L_g^*f) &= V\{W(L_g^*f)\} - W\{V(L_g^*f)\} \quad (\because \text{Lie 括弧の定義式 (58)}) \\ &= V(L_g^*\{(L_{g^*}W)f\}) - W(L_g^*\{(L_{g^*}V)f\}) \\ &\quad (\text{式 (54) で } v \rightarrow W, \varphi \rightarrow L_g, g \rightarrow f \text{ として第 1 項を得る. } V \leftrightarrow W \text{ として第 2 項を得る.}) \\ &= L_g^*[(L_{g^*}V)\{(L_{g^*}W)f\}] - (L_{g^*}W)\{(L_{g^*}V)f\} \\ &\quad (\text{式 (54) で } v \rightarrow V, \varphi \rightarrow L_g, g \rightarrow \{(L_{g^*}W)f\} \text{ として第 1 項を得る. } V \leftrightarrow W \text{ として第 2 項を得る.}) \\ &= L_g^*([L_{g^*}V, L_{g^*}W]_L f) \quad (\because \text{Lie 括弧の定義式 (58)}) \\ &= L_g^*([V, W]_L f) \quad (\because \text{左不変性 } L_{g^*}V(g') = V(gg') \forall g, g' \in \mathcal{G}, \text{ etc, 引数を省略}) \end{aligned}$$

と書き換えられるので,

$$L_g^* \{(L_{g^*}[V, W]_L)f\} = L_g^*([V, W]_L f)$$

を得る. ところが  $L_g^*$  は全単射であり,  $f$  は (微分可能な) 任意関数なので,

$$L_{g^*}[V, W]_L = [V, W]_L$$

が成り立つ. これは Lie 括弧が左不変であることを意味している.

最後に接平面  $(TG)_e$  が  $\mathcal{G}$  と, ベクトル空間としても Lie 代数としても同じものと見なせることを説明する ( $(TG)_e$  を Lie 群  $G$  に付随する Lie 代数という).

ベクトル空間として 写像

$$x \in (TG)_e \mapsto V_x \in \mathcal{G}$$

は全射 (上への写像) である [任意の  $V_x$  に写像されるベクトル  $x = V_x(e)$  をとれるから]. また写像

$$V \in \mathcal{G} \mapsto V(e) \in (TG)_e$$

は単射である. 実際, 左不変ベクトル場  $V, W \in \mathcal{G}$  に対して  $V(e) = W(e)$  とすると, 任意の  $g \in G$  に対して

$$V(g) = L_{g^*}V(e) = L_{g^*}W(e) = W(g)$$

なので, ベクトル場として  $V = W$  が成り立つ. [対偶をとると,  $V \neq W$  ならば  $V(e) \neq W(e)$  である (単射).] 以上よりベクトル空間として  $\mathcal{G}$  と  $(TG)_e$  は同型である.

基底ベクトル そこで

$$\dim \mathcal{G} = \dim (TG)_e = \dim G (\text{多様体 } G \text{ の次元}) \equiv n$$

として  $\mathcal{G}$  の基底を  $(V_1, \dots, V_n)$  と書くと,

$$(x_1, \dots, x_n) \equiv (V_1(e), \dots, V_n(e))$$

は  $(TG)_e$  の基底ベクトルになる.

Lie 代数として  $[V_i, V_j]_L \in \mathcal{G}$  より

$$[V_i, V_j]_L = c_{ij}^k V_k, \quad \{c_{ij}^k\}: \text{構造定数}$$

と書ける. 上式両辺のベクトル場の単位元  $e$  での値をとると

$$[x_i, x_j] = c_{ij}^k x_k$$

となる. ここで定義した括弧積  $[x_i, x_j] \equiv [V_i, V_j]_L(e)$  もまた, A.9 節に挙げた Lie 括弧の 3 つの性質を満たす. よってベクトル空間  $(TG)_e$  はこの括弧積を積演算として  $\mathcal{G}$  と同型の Lie 代数になる.



## A.11 1 径数部分群と指数写像 [3, pp.60–66]

ベクトル場  $V \in \mathcal{G}$  の積分曲線  $c_V(\lambda)$  は

$$\frac{dc_V(\lambda)}{d\lambda} = V(c_V(\lambda))$$

を満たす. このうち Lie 群  $G$  の単位元  $e$  を通るものを考えると, 一般性を失うことなく  $c_V(0) = e$  として良い. このとき  $c_V(\lambda)$  は

$$c_V(\sigma + \lambda) = c_V(\sigma)c_V(\lambda) \quad (\sigma, \lambda \in \mathbf{R}) \quad (59)$$

を満たすため (右辺の積は Lie 群  $G$  の積演算, 証明は下記), 集合  $\{c_V(\lambda) | \lambda \in \mathbf{R}\}$  は  $G$  の部分群となる. [しかも集合  $\{c_V(\lambda)\}$  は単一のパラメーター  $\lambda$  で特徴付けられるから,]  $\{c_V(\lambda)\}$  を Lie 群  $G$  の 1 径数部分群という.

式 (59) の証明  $\sigma$  を固定し, 式 (59) の両辺を  $\lambda$  で微分すると, 左辺は

$$\frac{d}{d\lambda} c_V(\sigma + \lambda) = V(c_V(\sigma + \lambda))$$

となる. 他方, 右辺も

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} (c_V(\sigma)c_V(\lambda)) &= L_{c_V(\sigma)*} \frac{d}{d\lambda} c_V(\lambda) \\ &= L_{c_V(\sigma)*} V(c_V(\lambda)) \\ &= V(c_V(\sigma)c_V(\lambda)) \quad (\because \text{左不変性 } L_{g*}V(g') = V(gg') \forall g, g' \in \mathcal{G}) \end{aligned} \quad (60)$$

となるので, 式 (59) の両辺は同一の微分方程式を満たす. しかも式 (59) の両辺は  $\lambda = 0$  で同一の初期値  $c_V(\sigma)$  を持つので, (微分方程式の解の一意性より) 両者は一致する.

note — 式 (60) の第 1 の等号について 左移動  $L_{c_V(\sigma)*}$  により

$$c_V(\lambda) \mapsto L_{c_V(\sigma)*} c_V(\lambda) = c_V(\sigma)c_V(\lambda)$$

となるので,  $c_V(\lambda)$  におけるベクトル  $\frac{dc_V(\lambda)}{d\lambda} = V(c_V(\lambda))$  は対応する微分写像  $L_{c_V(\sigma)*}$  により

$$\frac{dc_V(\lambda)}{d\lambda} \mapsto L_{c_V(\sigma)*} \frac{d}{d\lambda} c_V(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} (c_V(\sigma)c_V(\lambda))$$

と移される.

特にベクトル場  $V$  として, 単位元  $e$  における任意の接ベクトル  $x$  により決まる左不変ベクトル場  $V_x$  をとる. このときの 1 径数部分群  $\{c_{V_x}(\lambda)\}$  は,

$$\exp : x \in (\mathbf{T}G)_e \mapsto c_{V_x}(1) = \exp(x) \in G \quad (61)$$

で定義される指数写像で与えられる (名前の由来は後述), すなわち

$$\exp(\lambda x) = c_{V_x}(\lambda) \quad (62)$$

が成り立つ (証明は下記). (積分曲線が原点 (単位元) を通るという仮定  $c_{V_x}(0) = e$  とより,  $\exp(0x) = e$  であることになる.)

式 (62) の証明  $\lambda \in \mathbf{R}$  を任意に固定すると

$$\left. \frac{d}{d\sigma} c_{V_x}(\sigma\lambda) \right|_{\sigma=0} = \lambda \left. \frac{d}{d\sigma} c_{V_x}(\sigma) \right|_{\sigma=0} = \lambda V_x(e) = \lambda x$$

となる。これは  $\sigma \in \mathbf{R}$  を変数と見たとき、 $c_{V_x}(\sigma\lambda)$  が接ベクトル  $\lambda x \in (TG)_e$  により生成される 1 径数部分群の元  $C_{V_{\lambda x}}(\sigma)$  になることを意味する：

$$c_{V_x}(\sigma\lambda) = C_{V_{\lambda x}}(\sigma).$$

ここで  $\sigma = 1$  とおくと

$$c_{V_x}(\lambda) = c_{V_{\lambda x}}(1) = \exp(\lambda x) : (62)$$

を得る (第 2 の等号は指数写像の定義 (61) による)。

### 例 1

具体例を通して、式 (61) を指数写像と呼んで  $\exp$  と書く動機を説明する。 $n$  次の正則な実行列の全体  $GL(n, \mathbf{R})$  は Lie 群である<sup>\*37</sup>。単位元  $I$  (単位行列) での“接ベクトル”として行列  $X$  をとる。(単位元  $I$  を通る曲線  $A(\lambda) \in GL(n, \mathbf{R})$  (ただし  $A(0) = I$ ) に対して  $X = A'(0)$  とすれば良い。) 行列  $B \in GL(n, \mathbf{R})$  による左移動  $L_B X = BX$  を定義すると、左不変ベクトル場

$$V_X : B \mapsto V_x(B) = BX$$

が得られる。単位元を通るその積分曲線は

$$\frac{d}{d\lambda} C(\lambda) = V_X(C(\lambda)) = C(\lambda)X, \quad C(0) = I$$

の解

$$C(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\lambda X)^k \equiv e^{\lambda X} \quad (\text{ただし } X^0 = I)$$

で与えられる。すなわち一般論としての指数写像は、ここでは指数関数である。

### 例 2

簡単な例として、デカルト座標を用いて

$$v_1 = -\omega y \frac{\partial}{\partial x} + \omega x \frac{\partial}{\partial y}, \quad v_2 = \lambda x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda y \frac{\partial}{\partial y}$$

と表される  $\mathbf{R}^2$  上の 2 つのベクトル場を考える。これらの場はそれぞれ図 41, 図 42 のようであり、以下の結果はここから直観的に理解できる。極座標表示では  $v_1, v_2$  はそれぞれ

$$u_1 = \omega \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad u_2 = \lambda r \frac{\partial}{\partial r}$$

となる。

ベクトル場  $u_1$  の積分曲線は

$$(\dot{r}, \dot{\theta}) = (0, \omega), \quad \therefore (r, \theta) = (a, \omega t + \delta) \quad (63)$$

<sup>\*37</sup> Lie 群の定義は A.10 節の冒頭を参照。ただしこの場合の積演算は行列の積であり、 $n^2$  個の行列要素  $a_{ij}$  が多様体  $GL(n, \mathbf{R})$  の局所座標となる [3, p.57].

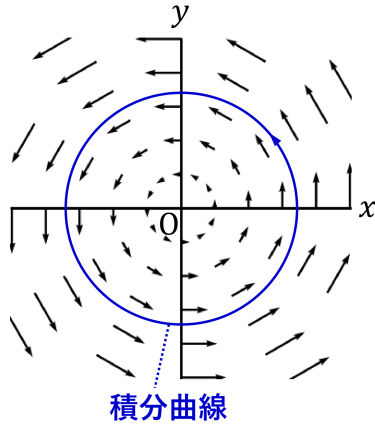


図 41 ベクトル場  $v_1$

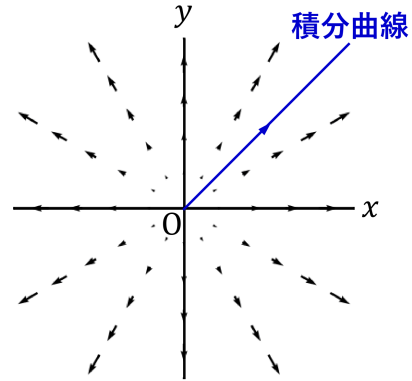


図 42 ベクトル場  $v_2$

と求まる (始点  $(r, \theta) = (a, \delta)$ ). またベクトル場  $u_2$  の積分曲線は

$$(\dot{r}, \dot{\theta}) = (\lambda r, 0), \quad \therefore (r, \theta) = (ae^{\lambda r}, \delta) \quad (64)$$

と求まる (始点  $(r, \theta) = (a, \delta)$ ).

例えばベクトル場  $u_2$  の  $u_1$  に沿った変化率を与える Lie 微分は

$$\mathcal{L}_{u_1}(u_2) = [u_1, u_2]_L = \omega\lambda \left[ \frac{\partial}{\partial \theta}, r \frac{\partial}{\partial r} \right]_L = 0$$

となる. これはベクトル場  $u_1, u_2$  が直交していることから期待される結果である.

最後に積分曲線 (63), (64) を改めてデカルト座標表示で求める問題を考える. ベクトル場  $v_1$  に対しては

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \omega J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad J \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

なので, 再び始点を  $(x_0, y_0) = a(\cos \delta, \sin \delta)$  とすると, 解曲線は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \exp(\omega t J) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \left\{ \left( 1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \dots \right) I + \left( \omega t - \frac{(\omega t)^3}{3!} + \frac{(\omega t)^5}{5!} - \dots \right) J \right\} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &\quad (\because J^2 = -I, I: \text{単位行列}) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cos \delta \\ a \sin \delta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cos(\omega t + \delta) \\ a \sin(\omega t + \delta) \end{pmatrix} \quad (\Leftrightarrow \text{式 (63)}) \end{aligned} \quad (65)$$

と計算できる. 同様にベクトル場  $v_2$  については,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \lambda I \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \exp(\lambda t I) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cos \delta \\ a \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{\lambda t} \cos(\delta) \\ ae^{\lambda t} \sin(\delta) \end{pmatrix}. \quad (\Leftrightarrow \text{式 (64)}) \end{aligned} \quad (66)$$

上式 (65), (66) は指数写像の具体例である.

## 付録 B 微分形式

ここでは微分形式と呼ばれる写像を導入する [3, pp.37–46, pp.67–76, pp.79–99].

接ベクトル 多様体  $M$  の各点における微分作用素  $v = v^i \partial_i$ .

$$\begin{aligned} \text{図 35 の曲線 } c \text{ に沿った方向微分 } \frac{df(q(t))}{dt} &= \dot{q}^i \partial_i \quad (\partial_i \equiv \partial/\partial q^i) \\ \rightarrow \text{方向微分作用素 } v &= \dot{q}^i \partial_i \end{aligned}$$

$c(t)$  に応じて (つまり動点の運動に応じて)  $\{\partial_i\}$  を基底とする様々な速度  $\{\dot{q}^i\}$  を持つ作用素  $v$  が得られる. その全体が接空間を張る (付録 A).

次に多様体の接空間に限らず, 抽象的ベクトル空間  $V$  を考える. その基底を  $\{e_i\}$ , 元を  $u_{(i)} = u_{(i)}^j e_j$  と書く.

$p$  ベクトル  $p$  個のベクトル  $u_{(1)}, \dots, u_{(p)}$  を実数に対応させる写像のうち, 引数となるベクトルについて

$$\begin{aligned} p \text{ 重線形: } \omega^p[u_{(1)}, \dots, au_{(i)} + bv_{(i)}, \dots, u_{(p)}] &= a\omega^p[u_{(1)}, \dots, u_{(i)}, \dots, u_{(p)}] + b\omega^p[u_{(1)}, \dots, v_{(i)}, \dots, u_{(p)}] \\ \text{歪対称: } \omega^p[u_{(1)}, \dots, u_{(i)}, \dots, u_{(j)}, \dots, u_{(p)}] &= -\omega^p[u_{(1)}, \dots, u_{(j)}, \dots, u_{(i)}, \dots, u_{(p)}] \end{aligned}$$

となる  $\omega^p$  のこと.

- 例えば 1 ベクトル  $\omega$  は

$$\omega : V \rightarrow \mathbf{R} : u \in V \mapsto \omega[u] \in \mathbf{R}$$

という線形写像.

- 特に 1 ベクトル  $\mathcal{E}^i$  を,

$$\mathcal{E}^i[u^j e_j] = u^i$$

で定義しておく. これはベクトル  $u = u^j e_j$  の第  $i$  成分  $u^i$  を取り出す写像である.

1 ベクトル  $\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(p)}$  から  $p$  ベクトルを構成することを考える.

テンソル積  $\omega_{(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{(p)}$

テンソル積  $\omega_{(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{(p)}$  を

$$(\omega_{(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{(p)})[u_{(1)}, \dots, u_{(p)}] = \omega_{(1)}[u_{(1)}] \cdots \omega_{(p)}[u_{(p)}]$$

で定義する.

外積  $\omega_{(1)} \wedge \dots \wedge \omega_{(p)}$

テンソル積  $\omega_{(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{(p)}$  を用いて外積  $\omega_{(1)} \wedge \dots \wedge \omega_{(p)}$  を

$$(\omega_{(1)} \wedge \dots \wedge \omega_{(p)})[u_{(1)}, \dots, u_{(p)}] = \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) (\omega_{(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{(p)})[u_{(\pi_1)}, \dots, u_{(\pi_p)}]$$

で定義する. ここに

$$\text{置換 } \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_p \end{pmatrix}, \quad \text{その符号 } \text{sgn}(\pi) = \begin{cases} +1 & (\text{偶置換}) \\ -1 & (\text{奇置換}) \end{cases}$$

である.

これは行列式

$$\begin{vmatrix} \omega_{(1)}[u_{(1)}] & \cdots & \omega_{(1)}[u_{(p)}] \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{(p)}[u_{(1)}] & \cdots & \omega_{(p)}[u_{(p)}] \end{vmatrix}$$

であり,  $u_{(1)}, \dots, u_{(p)}$  について歪対称だから  $p$  ベクトルである.

また, ここから外積は  $\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(p)}$  についても歪対称であることが分かる.

さらにこれは転置行列の行列式にも一致するから

$$\sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) (\omega_{(\pi_1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{(\pi_p)}) [u_{(1)}, \dots, u_{(p)}]$$

とも書け,

$$\omega_{(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{(p)} = \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) (\omega_{(\pi_1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{(\pi_p)}).$$

$p$  ベクトル  $\omega^p$  が

$$\omega^p = \sum' a_{i_1 \dots i_p} \mathcal{E}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathcal{E}^{i_p} \quad (67)$$

と展開されることを示す (ただし  $\sum'$  は  $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq \dim V$  の和).  $a_{i_1 \dots i_p} \equiv \omega^p[e_{i_1}, \dots, e_{i_p}]$  とおくと, これは添字に関して反対称である.

$$\begin{aligned} \omega^p[u_{(1)}, \dots, u_{(p)}] &= \omega^p[e_{i_1}, \dots, e_{i_p}] u_{(1)}^{i_1} \cdots u_{(p)}^{i_p} \quad (\omega^p \text{ の線形性}) \\ &= a_{i_1 \dots i_p} \mathcal{E}^{i_1}[u_{(1)}] \cdots \mathcal{E}^{i_p}[u_{(p)}] \\ &= a_{i_1 \dots i_p} \mathcal{E}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}^{i_p}[u_{(1)}, \dots, u_{(p)}] \end{aligned}$$

なので,

$$\omega^p = a_{i_1 \dots i_p} \mathcal{E}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}^{i_p}$$

と書ける. よって

$$\begin{aligned} \omega^p &= \sum' \sum_{\pi} a_{\pi i_1 \dots \pi i_p} \mathcal{E}^{\pi i_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}^{\pi i_p} \\ &\quad (\text{ここで } \sum' \text{ で } 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq \dim V \text{ と大小関係を指定する代わりに,} \\ &\quad \text{置換 } \pi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ \pi i_1 & \pi i_2 & \cdots & \pi i_p \end{pmatrix} \text{ で順序を混ぜている}) \\ &= \sum' \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) a_{i_1 \dots i_p} \mathcal{E}^{\pi i_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}^{\pi i_p} \quad (a_{i_1 \dots i_p} \text{ の反対称性}) \\ &= \sum' a_{i_1 \dots i_p} \mathcal{E}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathcal{E}^{i_p}. \end{aligned}$$

$V$  として多様体の接空間をとり  $p$  ベクトル  $\omega^p = \sum' a_{i_1 \dots i_p} \mathcal{E}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathcal{E}^{i_p}$  を考える.

微分  $df$  接ベクトル  $v = v^i \partial_i$  に作用して方向微分  $v^i \partial_i f$  を与える 1 ベクトル (従って写像)

$$df[v] = v^i \partial_i f = (\partial_i f) \mathcal{E}^i[v], \quad \therefore df = (\partial_i f) \mathcal{E}^i \quad (68)$$

を導入する.

$$q^j(q) = q^j$$

で定義される座標関数  $q^j$  を  $f$  にとると、微分  $df$  の式 (68) に現れる  $\partial_i f$  における  $f(q) = q^j(q) = q^j$  は座標関数ではなく座標成分となることに注意して

$$\partial_i f = \delta_i^j, \quad \therefore dq^j = \mathcal{E}^j$$

を得る.

よって  $p$  ベクトルは

$$\omega^p = \sum' a_{i_1 \dots i_p} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p}$$

と表される.  $\omega^p$  は多様体のある点  $Q$  の接ベクトルに作用する (点  $Q$  の接ベクトルを引数とする) 写像であることを明記するため、これを  $(\omega^p)_Q$  と書く.

$p$ (次微分) 形式  $\omega^p$  多様体の各点で  $p$  ベクトル  $(\omega^p)_Q$  を与える “場”

$$\omega^p = \sum' a_{i_1 \dots i_p} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p}.$$

全微分  $df$  微分  $(df)_Q$  の “場” である 1 形式  $df = (\partial_i f) dq^i$ .

座標関数の全微分は  $dq^i = \frac{\partial q^i}{\partial q^j} dq^j$  より反変ベクトル成分の変換則に従うため、 $p$  形式  $\sum' a_{i_1 \dots i_p} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p}$  が座標系に依らない意味を持つには  $a_{i_1 \dots i_p}$  は  $p$  階共変テンソルの変換則に従わなければならない.

外微分  $p$  形式

$$\omega = \sum' f_{i_1 \dots i_p} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p}$$

を外微分すると、 $df_{i_1 \dots i_p}$  を  $f_{i_1 \dots i_p}$  の全微分 (従って 1 形式) として  $p+1$  形式

$$d\omega = \sum' df_{i_1 \dots i_p} \wedge dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p}$$

を得る.

■微分形式の積分 以下では  $\omega^p[u_{(1)}, \dots, u_{(p)}] \equiv \langle \omega^p | u_{(1)}, \dots, u_{(p)} \rangle$  という記法を用いる. 多様体上の積分領域  $A$  を  $(\xi^1, \dots, \xi^p)$  でパラメトライズし、領域  $A$  に対応する  $(\xi^1, \dots, \xi^p)$  の範囲を  $\bar{A}$  とする. このとき  $p$  形式  $\omega^p$  の積分は

$$\int_A \omega^p \equiv \int_{\bar{A}} \left\langle \omega^p \left| \frac{\partial}{\partial \xi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi^p} \right. \right\rangle d\xi^1 \dots d\xi^p$$

で定義される. ここで

$$\frac{\partial}{\partial \xi^j} = \frac{\partial q^k}{\partial \xi^j} \frac{\partial}{\partial q^k}, \quad \therefore dq^i \left[ \frac{\partial}{\partial \xi^j} \right] = \mathcal{E}^i \left[ \frac{\partial q^k}{\partial \xi^j} \frac{\partial}{\partial q^k} \right] = \frac{\partial q^i}{\partial \xi^j}$$

なので

$$\begin{aligned}
 \left\langle \omega^p \left| \frac{\partial}{\partial \xi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi^p} \right. \right\rangle &= \sum' f_{i_1 \dots i_p} \left\langle dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p} \left| \frac{\partial}{\partial \xi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi^p} \right. \right\rangle \\
 &= \sum' f_{i_1 \dots i_p} \begin{vmatrix} dq^{i_1}[\partial/\partial \xi^1] & \dots & dq^{i_1}[\partial/\partial \xi^p] \\ \dots & \dots & \dots \\ dq^{i_p}[\partial/\partial \xi^1] & \dots & dq^{i_p}[\partial/\partial \xi^p] \end{vmatrix} \\
 &= \sum' f_{i_1 \dots i_p} \frac{\partial(q^{i_1}, \dots, q^{i_p})}{\partial(\xi^1, \dots, \xi^p)}, \\
 \therefore \int_A \omega^p &= \int_A \sum' f_{i_1 \dots i_p} \frac{\partial(q^{i_1}, \dots, q^{i_p})}{\partial(\xi^1, \dots, \xi^p)} d\xi^1 \dots d\xi^p \tag{69}
 \end{aligned}$$

と書き換えられる。なお

$$\frac{\partial(q^{i_1}, \dots, q^{i_p})}{\partial(\xi^1, \dots, \xi^p)} d\xi^1 \dots d\xi^p \equiv \frac{\partial(q)}{\partial(\xi)} d^p \xi = \frac{\partial(q)}{\partial(\xi)} \frac{\partial(\xi)}{\partial(\bar{\xi})} d^p \bar{\xi} = \frac{\partial(q)}{\partial(\bar{\xi})} d^p \bar{\xi}$$

より、この積分はパラメータ  $(\xi^1, \dots, \xi^p)$  の取り方に依らない。

■Stokes の定理  $n$  次元の領域  $D$  と境界  $\partial D$  に向きのつけられるとき、任意の  $p \equiv (n-1)$  形式  $\omega$  に対して

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega \tag{70}$$

が成り立つ。

■面積要素を構成する 領域  $D$  の境界  $\partial D$  を  $(\xi^1, \dots, \xi^p)$  でパラメトライズする。1つのパラメータ  $\xi^j$  が動いてできる座標曲線上の2点  $q(\xi^j), q(\xi^j + d\xi^j)$  を結ぶ  $\partial D$  の接ベクトルを  $d^{(j)}q$  とすると、その第  $i$  成分は  $d^{(j)}q^i = \frac{\partial q^i}{\partial \xi^j} d\xi^j$  ( $j$  について和をとらない) なので、 $\partial D$  にわたる  $\omega^p$  の積分から

$$\frac{\partial(q^{i_1}, \dots, q^{i_p})}{\partial(\xi^1, \dots, \xi^p)} d\xi^1 \dots d\xi^p = \begin{vmatrix} \frac{\partial q^{i_1}}{\partial \xi^1} d\xi^1 & \dots & \frac{\partial q^{i_1}}{\partial \xi^p} d\xi^p \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial q^{i_p}}{\partial \xi^1} d\xi^1 & \dots & \frac{\partial q^{i_p}}{\partial \xi^p} d\xi^p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d^{(1)}q^{i_1} & \dots & d^{(p)}q^{i_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ d^{(1)}q^{i_p} & \dots & d^{(p)}q^{i_p} \end{vmatrix}$$

が現れる。これは無限小ベクトル  $d^{(1)}q, \dots, d^{(p)}q$  の張る面積要素を与える。

## 付録 C 4 脚場 (テトラード)

3.7 節の 3 脚場 (トライアド) に関連して, 4 脚場 (テトラード) についてまとめる [7, pp.325-328].

Einstein 方程式を書き下すには, 計量から曲率テンソルを (もっと言えば Ricci テンソルを) 計算する必要がある. その計算を簡略化する公式として, 曲率テンソルのテトラード形の表現が挙げられる.

添字  $a$  で番号付けられる 4 つのベクトル  $e_{(a)}^\mu$  (テトラード, 4 脚場) を,

$$e_{(a)}^\mu e_{(b)\mu} = \eta_{ab} \quad (71)$$

を満たす 4 つの線形独立な基本 (標構) 4 元ベクトルとして導入する. ここに  $\eta_{ab}$  は符号系 + --- を持つ一定の ( $x^\mu$  に依らない) 対称行列であり, 必ずしも

$$(\eta_{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である必要はない. 問題に応じて便利な  $\eta_{ab}$  を用いて  $e_{(a)}^\mu$  を定義すれば良い. またテトラード  $e_{(a)}^\mu$  に相反であるベクトル  $e^{(a)\mu}$  (上付きの標構添字 ( $a$ ) で番号付けられる) を

$$e_{(a)}^\mu e_{(b)\mu} = \delta_a^b \quad (72)$$

で定義する. 上式 (72) は  $e_{(a)}^\mu$  が 3 つのベクトル  $e_{(b)}^\mu$  ( $b \neq a$ ) と直交することを意味する. さらに式 (72) の両辺に  $e_{(a)}^\nu$  を掛けて  $a$  で和をとると  $(e_{(a)}^\nu e_{(a)}^\mu) e_{(b)\mu} = e_{(b)}^\nu$  となるから, 式 (71) と同時に

$$e_{(a)}^\mu e_{(a)\mu} = \delta_a^a \quad (73)$$

も自動的に成り立つことになる [3 脚場の式 (3.26):  $q^{ab} = E_i^a E_j^b \delta^{ij}$  に対応].

$\eta^{ab}$  を  $\eta_{ab}$  の逆行列として, 式 (71):  $e_{(a)}^\mu e_{(c)\mu} = \eta_{ac}$  の両辺に  $\eta^{bc}$  を掛けて  $c$  で和をとると,

$$e_{(a)}^\mu (\eta^{bc} e_{(c)\mu}) = \delta_a^b$$

となる. これを式 (72) と比較すると

$$e_{(a)}^\mu = \eta^{bc} e_{(c)\mu}, \quad e_{(b)\mu} = \eta_{bc} e_{(a)}^\mu \quad (74)$$

が見出される [第 2 式は第 1 式  $e_{(a)}^\mu = \eta^{ca} e_{(c)\mu}$  両辺に  $\eta_{bc}$  を掛けて  $c$  で和をとって得られる]. これは基本ベクトルの添字の上げ下げが,  $\eta^{bc}$  および  $\eta_{bc}$  によって行われることを意味する.

基本ベクトルを導入した意義は, それによって計量テンソルを表すことができる点にある. 実際  $e_{(a)}^\mu = g_{\mu\rho} e^{(a)\rho}$  の両辺に  $e_{(a)\nu}$  を掛けて  $a$  で和をとり, 式 (73), 式 (74) を用いると

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_{(a)}^\mu e_{(b)\nu} \quad (75)$$

となる (導出は下記). すると線要素の 2 乗は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{ab} (e_{(a)}^\mu dx^\mu) (e_{(b)\nu} dx^\nu)$$

と表される.



上式 (75) の確認 式 (74) より左辺は

$$e_{(a)\nu}e_{\mu}^{(a)} = \eta_{ab}e_{\mu}^{(a)}e_{\nu}^{(b)}$$

となる。他方,  $\eta^{ab}, \eta_{ab}$  により添字  $(a)$  を上げ下げして, 式 (73) を  $e_{(a)\mu}e^{(a)\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$  と書き直して用いると, 右辺は

$$g_{\mu\rho}e_{(a)\nu}e^{(a)\rho} = g_{\mu\rho}\delta_{\nu}^{\rho} = g_{\mu\nu}$$

となる。これらを等置して式 (75) を得る。

4 元ベクトル  $A^{\mu}$  のテトラード成分は, 基本ベクトルへの“射影”

$$A_{(a)} = e_{(a)\mu}^{\mu}A_{\mu} [= e_{(a)\mu}A^{\mu}], \quad A^{(a)} = e_{\mu}^{(a)}A^{\mu} [= (\eta^{ab}e_{(b)\mu})A^{\mu}] = \eta^{ab}A_{(b)} \quad (76)$$

によって定義される (任意の階数の 4 元テンソルに対しても同様)。逆に

$$e_{\mu}^{(a)}A_{(a)} [= e_{\mu}^{(a)}(e_{(a)\nu}^{\nu}A_{\nu}) = \delta_{\mu}^{\nu}A_{\nu}] = A_{\mu}, \quad \therefore e_{(a)}^{\mu}A^{(a)} = A^{\mu}.$$

同様に“ $a$  の方向に沿う”微分演算

$$\phi_{,a} = e_{(a)}^{\mu}\partial_{\mu}\phi \quad (77)$$

を定義する。

ここで **Ricci** の回転係数と呼ばれる量

$$\gamma_{abc} = e_{(a)\mu;\nu}e_{(b)}^{\mu}e_{(c)}^{\nu}$$

を導入しておく。

曲率テンソルのテトラード成分  $R_{(a)(b)(c)(d)}$  を決定しよう。はじめに任意の共変ベクトル  $A_{\mu}$  の共変微分の順序による差が, 曲率テンソルを用いて

$$A_{\mu;\nu;\rho} - A_{\mu;\rho;\nu} = A_{\sigma}R^{\sigma}_{\mu\nu\rho}$$

と書けることに注目する。[こうすれば, 計量テンソル (75) から曲率テンソルを計算せずに済む。] 特に  $A_{\mu}$  とし基本ベクトル  $e_{(a)\mu}$  を選ぶと,

$$e_{(a)\mu;\nu;\rho} - e_{(a)\mu;\rho;\nu} = e_{(a)}^{\sigma}R_{\sigma\mu\nu\rho}.$$

ここから

$$\begin{aligned} R_{(a)(b)(c)(d)} &\equiv e_{(a)}^{\sigma}e_{(b)}^{\mu}e_{(c)}^{\nu}e_{(d)}^{\rho}R_{\sigma\mu\nu\rho} \quad (\text{式 (76) の箇所を参照}) \\ &= (e_{(a)\mu;\nu;\rho} - e_{(a)\mu;\rho;\nu})e_{(b)}^{\mu}e_{(c)}^{\nu}e_{(d)}^{\rho} \end{aligned} \quad (78)$$

を得る。右辺を  $\gamma_{abc}$  で表すと

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = \gamma_{abc,d} - \gamma_{abd,e} + \gamma_{abf}(\gamma_{cd}^f - \gamma_{dc}^f) + \gamma_{afc}\gamma_{bd}^f - \gamma_{afd}\gamma_{bc}^f \quad (79)$$

(ただし  $\gamma_{bc}^a \equiv \eta^{ad}\gamma_{abc}$ ) となる (導出は下記)。これが冒頭で述べた, 曲率テンソルのテトラード表現である。これを添字  $a, c$  について縮約すると, Ricci テンソルのテトラード成分  $R_{(b)(d)} = \eta^{ac}R_{(a)(b)(c)(d)}$  が得られる。

上式 (79) の導出 準備として

$$\begin{aligned}\gamma_{abc}e_{\mu}^{(b)}e_{\nu}^{(c)} &= \{e_{(a)\rho;\sigma}e_{(b)}^{\rho}e_{(c)}^{\sigma}\}e_{\mu}^{(b)}e_{\nu}^{(c)} = e_{(a)\rho;\sigma}\delta_{\mu}^{\rho}\delta_{\nu}^{\sigma} \\ &= e_{(a)\mu;\nu}\end{aligned}\quad (80)$$

および、両辺に  $\eta^{aa'}$  を縮約して得られる関係

$$e_{\mu;\nu}^{(a')} = \gamma_{bc}^{a'}e_{\mu}^{(b)}e_{\nu}^{(c)} \quad (81)$$

が成り立つことに注意する。すると

$$\begin{aligned}R_{(a)(b)(c)(d)} &= (e_{(a)\mu;\nu;\rho} - e_{(a)\mu;\rho;\nu})e_{(b)}^{\mu}e_{(c)}^{\nu}e_{(d)}^{\rho} \quad (\because \text{式 (78)}) \\ &= \{(\gamma_{ab'c'}e_{\mu}^{(b')}e_{\nu}^{(c')})_{;\rho} - (\nu \leftrightarrow \rho)\}e_{(b)}^{\mu}e_{(c)}^{\nu}e_{(d)}^{\rho} \quad (\because \text{式 (80)}) \\ &= [\{\gamma_{ab'c',\rho}e_{\mu}^{(b')}e_{\nu}^{(c')} + \gamma_{ab'c'}(e_{\mu;\rho}^{(b')}e_{\nu}^{(c')} + e_{\mu}^{(b')}e_{\nu;\rho}^{(c')})\} - \{\nu \leftrightarrow \rho\}]e_{(b)}^{\mu}e_{(c)}^{\nu}e_{(d)}^{\rho} \\ &\quad (\gamma_{abc} \equiv e_{(a)\mu;\nu}e_{(b)}^{\mu}e_{(c)}^{\nu} \text{ はスカラーなので, その共変微分は通常の微分に一致}) \\ &= [\{\gamma_{ab'c',\rho}e_{\mu}^{(b')}e_{\nu}^{(c')} + \gamma_{ab'c'}((\gamma_{b''c''}^{b'}e_{\mu}^{(b'')}e_{\nu}^{(c'')})e_{\rho}^{(c')} + e_{\mu}^{(b')}(\gamma_{b''c''}^{c'}e_{\nu}^{(b'')}e_{\rho}^{(c'')}))\} \\ &\quad - \{\nu \leftrightarrow \rho\}]e_{(b)}^{\mu}e_{(c)}^{\nu}e_{(d)}^{\rho} \quad (\because \text{式 (81)}) \\ &= (\gamma_{abc,d} + \gamma_{ab'c'}\gamma_{bd}^{b'} + \gamma_{abc'}\gamma_{cd}^{c'}) - (c \leftrightarrow d) \\ &\quad (\mu, \nu, \rho \text{ の縮約を実行, 定義式 (77) : } \gamma_{abc,d} \equiv \gamma_{abc,\rho}e_{(d)}^{\rho}) \\ &= (\gamma_{abc,d} - \gamma_{abd,c}) + (\gamma_{ab'c'}\gamma_{bd}^{b'} - \gamma_{ab'd'}\gamma_{bc}^{b'}) + \gamma_{abc'}(\gamma_{cd}^{c'} - \gamma_{dc}^{c'}) : (79)\end{aligned}$$

となる。

テトラード (4 脚場) の代わりにトライアド (3 脚場) と呼ばれる 3 つの基本ベクトルの組を用いれば、3 次元計量における Riemann テンソルや Ricci テンソルを計算できる。(その際、以上で得た全ての結果はトライアド表現に適用できる [7, p.424]. )

■参考——  $\lambda_{abc}$  の導入  $\gamma_{abc}$  の 1 次結合

$$\lambda_{abc} \equiv \gamma_{abc} - \gamma_{acb} = (e_{(a)\mu;\nu} - e_{(a)\nu;\mu})e_{(b)}^{\mu}e_{(c)}^{\nu} = (e_{(a)\mu,\nu} - e_{(a)\nu,\mu})e_{(b)}^{\mu}e_{(c)}^{\nu} \quad (82)$$

を導入する。上式 (82) の最右辺のように、 $\lambda_{abc}$  は基本ベクトルの単なる微分によって計算できる。このため Ricci テンソルを  $\gamma_{abc}$  の代わりに  $\lambda_{abc}$  で表しておけば、応用の際に便利であることを言い添えておく。そこで  $\lambda_{abc}$  の性質などについて、以下に証明とともにまとめる。

$\gamma_{abc}$  と  $\lambda_{abc}$  は反対称性

$$\gamma_{abc} = -\gamma_{bac}, \quad \lambda_{abc} = -\lambda_{acb} \quad (83)$$

を持つ。

反対称性 (83) の確認

$$\begin{aligned}\gamma_{abc} &= e_{(a)\mu;\nu}e_{(b)}^{\mu}e_{(c)}^{\nu} \\ &= \{(e_{(a)\mu}e_{(b)}^{\mu})_{;\nu} - e_{(b);\nu}^{\mu}e_{(a)\mu}\}e_{(c)}^{\nu}.\end{aligned}$$

最右辺において

$$\begin{aligned}e_{(a)\mu}e_{(b)}^{\mu} &= (\eta_{ac}e_{\mu}^{(c)})e_{(b)}^{\mu} = \eta_{ac}\delta_a^c = \eta_{ab} \rightarrow (e_{(a)\mu}e_{(b)}^{\mu})_{;\nu} = \eta_{ab;\nu} = 0, \\ g^{\mu\rho}_{(b);\nu} = 0 &\rightarrow e_{(b);\nu}^{\mu}e_{(a)\mu} = (g^{\mu\rho}e_{(b)\rho})_{;\nu}e_{(a)\mu} = e_{(b)\rho;\nu}(g^{\mu\rho}e_{(a)\mu}) = e_{(b)\rho;\nu}e_{(a)}^{\rho}\end{aligned}$$

なので、

$$\gamma_{abc} = -e_{(b)\rho;\nu}e_{(a)}^{\rho}e_{(c)}^{\nu} = -\gamma_{bac}$$

となる.

第2式  $\lambda_{abc} \equiv \gamma_{abc} - \gamma_{acb} = -\lambda_{acb}$  は明らか.

逆に  $\gamma_{abc}$  を  $\lambda_{abc}$  で表すと

$$\gamma_{abc} = \frac{1}{2}(\lambda_{abc} + \lambda_{bca} - \lambda_{cab}) \quad (84)$$

となる.

上式 (84) の確認

$$\frac{1}{2}(\lambda_{abc} + \lambda_{bca} - \lambda_{cab}) = \frac{1}{2}(\cancel{\gamma_{abc} - \gamma_{acb} + \gamma_{bca}} - \cancel{\gamma_{bac} - \gamma_{cab} + \gamma_{cba}}) = \gamma_{abc}.$$

ただし第2の等号では, 反対称性 (83):  $\gamma_{abc} = -\gamma_{bac}$  を用いた.

最後に、以上の議論を図 43, 図 44 に要約する。

## テトラード(4脚場)

定義

テトラード  $e_{(a)}^\mu$  添字  $a$  で番号付けられる4つの線形独立なベクトルで、

$$e_{(a)}^\mu e_{(b)\mu} = \eta_{ab} \quad \text{を満たす.}$$

符号系 (+---) の任意の対称行列

$e_{(a)}^\mu$  に相反なベクトル  $e^{(a)\mu}$   $e_\mu^{(a)} e_{(b)}^\mu = \delta_b^a$  ( $b \neq a$  の  $e_{(b)}^\mu$  と直交)

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e_\mu^{(a)} e_{(a)}^\nu = \delta_\mu^\nu \\ e_\mu^{(b)} = \eta^{bc} e_{(c)\mu}, \quad e_{(b)\mu} = \eta_{bc} e_\mu^{(c)} \\ (\eta_{ab} \text{ とその逆行列 } \eta^{ab} \text{ による内部添字の上げ下げ}) \\ \text{計量 } g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^{(a)} e_\nu^{(b)} \end{array} \right.$$

ランダウ=リフシッツ『場の古典論』§98

図 43 要約 (1/2)

## テトラード(4脚場)

テンソルのテトラード成分は  $e_{(a)}^\mu$  への射影で定義

4元ベクトル  $A^\mu$  のテトラード成分

$$A_{(a)} = e_{(a)\mu} A^\mu [= e_{(a)\mu} A^\mu], \quad A^{(a)} = e_\mu^{(a)} A^\mu [= (\eta^{ab} e_{(b)\mu}) A^\mu] = \eta^{ab} A_{(b)}$$

$$\text{逆に } e_\mu^{(a)} A_{(a)} [= e_\mu^{(a)} (e_{(a)}^\nu A_\nu) = \delta_\mu^\nu A_\nu] = A_\mu, \quad \therefore e_{(a)}^\mu A^{(a)} = A^\mu$$

$$\text{“}a\text{”の方向に沿う”微分演算 } \phi_{,a} = e_{(a)}^\mu \partial_\mu \phi$$

$$\text{曲率テンソルのテトラード成分 } R_{(a)(b)(c)(d)} \equiv e_{(a)}^\sigma e_{(b)}^\mu e_{(c)}^\nu e_{(d)}^\rho R_{\sigma\mu\nu\rho}$$

曲率テンソルのテトラード表現

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = \gamma_{abc,d} - \gamma_{abd,c} + \gamma_{abf}(\gamma_{cd}^f - \gamma_{dc}^f) + \gamma_{afc}\gamma_{bd}^f - \gamma_{afd}\gamma_{bc}^f$$

$$\gamma_{abc} \equiv e_{(a)\mu;\nu} e_{(b)}^\mu e_{(c)}^\nu : \text{Ricciの回転係数} \quad \gamma_{bc}^a \equiv \eta^{ad} \gamma_{dbc}$$

$$\text{Ricciテンソルのテトラード成分 } R_{(b)(d)} = \eta^{ac} R_{(a)(b)(c)(d)}$$

ランダウ=リフシッツ『場の古典論』§98

図 44 要約 (2/2)

## 付録 D 拘束系の正準力学

主に 4.2 節の補足として、拘束系の正準力学についてまとめる。

### D.1 Dirac の処方

#### D.1.1 特異ラグランジアンと 1 次拘束条件 [25, pp.498–499]

ラグランジアンが正則、すなわちヘス行列  $(A_{ij}) = (\partial^2 L / \partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j)$  が逆行列を持つとき、一般化運動量の定義式

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}^i}$$

は  $\dot{q}^i = \psi^i(q, p, t)$  のように、速度について一意的に解けることを 4.2 節のノートで示した ( $i = 1, 2, \dots, N$ )。この章ではラグランジアンが正則でない場合に、Hamilton 形式の力学への移行がどのように成されるのかを論じる。

ヘス行列  $(A_{ij})$  の階数 (rank) を  $N - r (< N)$  と仮定する (この場合の  $L$  を特異ラグランジアンという)。  $q, t$  をパラメーターとして固定すると、 $\dot{q}$  の微小変化  $\delta \dot{q}^i$  に伴う運動量  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$  の変化は、ヘス行列要素を変換係数とする線形変換

$$\delta p_i = \frac{\partial^2 L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \delta \dot{q}^j = A_{ij} \delta \dot{q}^j$$

で与えられる [15, p.130]。よって状態空間から相空間への写像  $(q, \dot{q}) \mapsto (q, p = \partial L / \partial \dot{q})$  による像は、相空間の中の  $N + (N - r) = 2N - r$  次元の超曲面  $M_1$  を成す。(もしラグランジアンが正則であれば  $\text{rank}(A_{ij}) = N$  だから、再び対応  $\dot{q} \leftrightarrow p$  は 1 対 1 という結論が得られる。) この超曲面  $M_1$  は  $r$  個の拘束条件

$$\phi^m(q, p, t) = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, r) \quad (85)$$

によって特定でき [ホロノミックな拘束の相空間への一般化]、 $N$  個の  $p_i$  のうち  $(N - r)$  個だけが独立となる。このようにラグランジアン  $L$  の  $q, \dot{q}$  への依存性に由来する拘束条件を、Dirac にならって 1 次拘束条件、また  $\phi^m$  を 1 次の拘束量、このときの系を拘束系という。

#### D.1.2 Hamilton の原理と正準方程式 [25, pp.499–501]

特異ラグランジアンに対してもハミルトニアンを

$$H = p_i \dot{q}^i - L$$

で定義する。この場合にも  $H$  を  $q$  と  $p$  の関数として表すこと自体は可能である (4.2 節のノート参照)。ここで作用積分を Hamilton 主関数の形

$$S = \int (p_i dq^i - H dt)$$

に書き、これが相空間  $(q, p)$  上の軌道の変分 (端点で  $\delta q^i = 0$ ) に対して停留値をとること

$$0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left( \dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left( \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) \delta q^i \right\} dt$$

を要求すると、Hamilton 方程式

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

が導かれたことを思い出そう (修正 Hamilton の原理) [12, pp.177–178].

ここでは変分  $(\delta q, \delta p)$  は  $2N$  個の成分すべてが独立ではなく, 拘束条件 (85) より

$$\frac{\partial \phi^m}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial \phi^m}{\partial q^i} \delta q^i = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, r)$$

の関係がある. そこで未定乗数  $u_1, u_2, \dots, u_r$  を導入して

$$0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left( \dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_{m=1}^r u_m \frac{\partial \phi^m}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left( \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} + \sum_{m=1}^r u_m \frac{\partial \phi^m}{\partial q^i} \right) \delta q^i \right\} dt$$

とすれば, 運動方程式として

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_{m=1}^r u_m \frac{\partial \phi^m}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \sum_{m=1}^r u_m \frac{\partial \phi^m}{\partial q^i} \quad (86)$$

が得られる. 上式 (86) の第 1 式は  $\dot{q}$  が  $q, p$  だけでなく,  $r$  個のパラメータ  $\{u_m\}$  に依存することを意味する. これは  $(2N - r)$  次元の  $(q, p)$  空間から,  $r$  だけ次元の高い  $(q, \dot{q})$  空間への逆写像が一意的に決まらないことに関係している.

**note** ランダウ=リフシツ 『力学』 § 38 では Lagrange 形式の力学において, 最小作用原理に立ち戻って未定乗数法を適用した [12, pp.156–157]. ここでは Hamilton 形式において同様の議論を行ったことになる.

変数  $z = (q, p)$ , すなわち

$$(z^1, \dots, z^N, z^{N+1}, \dots, z^{2N}) = (q^1, \dots, q^N, p_1, \dots, p_N)$$

を導入すると,

$$(\Omega^{\mu\nu}) \equiv \begin{pmatrix} 0_N & I_N \\ -I_N & 0_N \end{pmatrix}, \quad 0_N : N \text{ 次零行列}, \quad I_N : N \text{ 次単位行列}$$

として, 上式 (86) は

$$\begin{aligned} \dot{z}^\mu &= \sum_{\nu=1}^{2N} \Omega^{\mu\nu} \left( \frac{\partial H}{\partial z^\nu} + \sum_{m=1}^r u_m \frac{\partial \phi^m}{\partial z^\nu} \right) \\ &= \{z^\mu, H\} + \sum_{m=1}^r u_m \{z^\mu, \phi^m\} \quad (\mu = 1, 2, \dots, 2N) \end{aligned} \quad (87)$$

とまとめられる ( $\{, \}$  は Poisson 括弧).

上式 (87) 第 2 の等号の確認 まず Poisson 括弧は

$$\{f, g\} \equiv \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} = \frac{\partial f}{\partial z^\alpha} \Omega^{\alpha\beta} \frac{\partial g}{\partial z^\beta} \quad (88)$$

と書けることに注意する ( $\alpha, \beta = 1, \dots, 2N$  で和をとる) [25, p.314]. 実際, 第 2 の等号は

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z^\alpha} \Omega^{\alpha\beta} \frac{\partial g}{\partial z^\beta} &= \frac{\partial f}{\partial z^i} \Omega^{i, N+j} \frac{\partial g}{\partial z^{N+j}} + \frac{\partial f}{\partial z^{N+i}} \Omega^{N+i, j} \frac{\partial g}{\partial z^j} \quad (\because \Omega^{ij} = 0, \Omega^{N+i, N+j} = 0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial q^i} \delta^i_j \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial p_i} (-\delta^j_i) \frac{\partial g}{\partial q^j} \\ &= \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \end{aligned}$$

と確かめられる. すると

$$\{z^\mu, H\} = \frac{\partial z^\mu}{\partial z^\alpha} \Omega^{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial z^\beta} = \Omega^{\mu\beta} \frac{\partial H}{\partial z^\beta}, \quad \{z^\mu, \phi^m\} = \Omega^{\mu\beta} \frac{\partial \phi^m}{\partial z^\beta}$$

となるので, 上式 (87) 第 2 の等号が成立する.

すると一般の力学量  $f(q, p, t)$  に対する運動方程式は

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} + \sum_{m=1}^r u_m \{f, \phi^m\} \quad (89)$$

となる.

上式 (89) の導出 式 (87) より

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z^\mu} \frac{dz^\mu}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z^\mu} \Omega^{\mu\nu} \left( \frac{\partial H}{\partial z^\nu} + \sum_{m=1}^r u_m \frac{\partial \phi^m}{\partial z^\nu} \right)$$

であり ( $\mu, \nu = 1, \dots, 2N$  で和をとる), 再び最右辺に公式 (88) を適用すると上式 (89) が導かれる.

さらに超曲面  $M_1$  上では式 (85):  $\phi^m = 0$  が満たされているので,

$$\{f, u_m \phi^m\} = u_m \{f, \phi^m\} + \{f, u_m\} \phi^m = u_m \{f, \phi^m\}$$

として良い [ $\phi^m = 0$  であっても一般には  $\{f, \phi^m\} = 0$  とはならない (D.1.3 節)]. そこで新しいハミルトニアンを

$$H' = H + \sum_{m=1}^r u_m \phi^m$$

と定義すれば [4.2 節の全ハミルトニアン (4.11):  $H = H_{\text{orig}} + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \phi_{\alpha}$  に対応 (整合性の条件から未定乗数を可能な限り決定すると, 後の式 (108) になる)], 上式 (89) は通常の正準方程式の形

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H'\} \quad (90)$$

に書ける.

超曲面  $M_1$  上では  $H$  と  $H'$  は同じものである. このことはもともとは  $M_1$  上で定義されたハミルトニアン  $H$  を相空間  $M$  全体に拡張する際に,  $\sum u_m \phi^m$  の形の付加項の任意性があることを意味している.

[未定乗数  $u_m$  に応じた解  $(q(t), p(t))$  の不定性があることは, ラグランジアン of 正則性が古典的因果律の満たされる条件であることから理解できる.]

### D.1.3 整合性の条件 [25, pp.501–506]

未定乗数  $u_m$  は, 式 (86) を満たす  $(q(t), p(t))$  が, その後もずっと  $M_1$  上から外に出ないという条件から決定される. [実際,  $2N$  本の運動方程式 (86) と  $r$  本の拘束条件の式 (85) から,  $(2N+r)$  個の変数  $q^i, p_i, u_m$  が定まる. 本節と次節で未定乗数を具体的に決定する.] この条件は, 場合によっては, 新しい拘束条件を与える ( $M_1$  がさらに限定される) ことを説明する.

まず, 点  $(q, p)$  が拘束条件 (85):  $\phi^m(q, p) = 0$  を満たす ( $M_1$  上にある) 場合にも,  $\{f, \phi^m\} = 0$  が成り立つとは限らないことに注意する. と言うのも, この Poisson 括弧を計算する際に必要な,  $p_i$  軸や  $q^i$  軸方向への微分  $\partial \phi^m / \partial p_i, \partial \phi^m / \partial q^i$  は, 一般には  $M_1$  から飛び出す方向への微分なので, ゼロにならないからである.

また, Dirac にならって

- 相空間のある超曲面  $\Lambda$  の上でのみ成り立つ等式を弱い等式と呼び、弱い等号「 $\overset{\Lambda}{\approx}$ 」(あるいは単に「 $\approx$ 」) で表す。
  - 拘束条件 (85) は  $\phi^m(q, p, t) \overset{M_1}{\approx} 0$  と書ける。これを  $\phi^m(q, p, t)|_{M_1} = 0$  と書く。
- 相空間の全体で成り立つ等式を強い等式と呼び、通常の数号「 $=$ 」 で表す。

さて、1次拘束条件 (85):  $\phi^m(q, p) = 0$  が任意の時刻で成り立つためには、

$$\frac{d^k}{dt^k} \phi^m \approx 0 \quad (m = 1, 2, \dots, r) \quad (91)$$

が ( $k=0$  はもちろん) すべての  $k = 1, 2, \dots$  に対して成立しなければならない。  $\phi^m$  の微係数に関する上記の注意を踏まえると、一般には条件 (91) はもとの条件 (85) から自動的に出てこないから、系の運動を超曲面  $\bar{M} \subseteq M_1$  に拘束することになる。この付加条件を1次拘束条件に対する整合性の条件という。

$k=1$  に対する式 (91) は、運動方程式 (89) を用いて

$$\frac{\partial \phi^m}{\partial t} + \{\phi^m, H\} + \sum_{n=1}^r \{\phi^m, \phi^n\} u_n \approx 0 \quad (92)$$

と書き換えられる。以降、拘束量  $\{\phi^m\}$  は時間  $t$  に陽によらない場合を仮定する\*38。このとき上式 (92) は

$$BU = h$$

となる。ここに

$$B = (B^{mn}) = (\{\phi^m, \phi^n\}) : r \times r \text{ 反対称行列,} \\ U = {}^t(u_1, u_2, \dots, u_r), \quad h = {}^t(\{H, \phi^1\}, \{H, \phi^2\}, \dots, \{H, \phi^r\})$$

である。行列  $B$  の階数を  $b$  とすると、同次方程式  $BU = 0$  の解空間は  $(r-b)$  次元であり、基底として  $(r-b)$  個の基本解  $U = U_0^{(\lambda)}$  ( $\lambda = 1, 2, \dots, r-b$ ) をとることができ [26, p.116]。このとき非同次方程式  $BU = h$  のすべての解は、1つの特殊解  $U_1$  と  $(r-b)$  個の任意定数  $\{a_\lambda\}$  を用いて、 $U = U_1 + \sum_\lambda a_\lambda U_0^{(\lambda)}$  の形に表される [26, pp.117–118]。これは  $r$  個の未定乗数  $\{u_m\}$  が  $(r-b)$  個の任意定数を含む形で解かれることを意味している。ここから式 (92):  $BU = h$  は、適当な1次変換を施せば、未定乗数のうちの  $b$  個を決定する方程式と新しい拘束条件を与える残りの式に分かれると期待される。

実際、このことは次のように具体的に確かめられる。[以下の式 (100):  $u_m^{(1)} \approx v_m^{(1)}$  ( $m = 1, 2, \dots, 2s_1$ ) (正確には強い等号の式 (101)) が  $b (= 2s_1)$  個の未定乗数を定め、新しい拘束条件は式 (99) から生じ得る。]

■具体的な議論 一般に実反対称行列の階数は偶数であることが知られており、そこで  $B$  の階数を  $b = 2s_1$  とおくと、適当な  $r$  次の正方正則行列  $P$  を用いて

$${}^tPBP = \begin{pmatrix} 0 & I_{s_1} & 0 \\ -I_{s_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv B'$$

とすることができる ( $I_{s_1}$  は  $s_1$  次単位行列) [26, p.180]。  $B'$  における左上の  $s_1 \times s_1$  の部分

$$\Omega'_{s_1} \equiv \begin{pmatrix} 0 & I_{s_1} \\ -I_{s_1} & 0 \end{pmatrix}$$

\*38  $\{\phi^m\}$  が時間  $t$  に陽による場合には、以下の議論で単に  $\{\phi^m, H\} \rightarrow \frac{\partial \phi^m}{\partial t} + \{\phi^m, H\}$  と置き換えれば良い [25, p.509] [15, p.136].



は,  $2N$  次の行列  $\Omega' \equiv (\Omega^{\mu\nu})$  で  $N \rightarrow s_1$  とおいた行列になっている.

ここで

$$\phi^{m(1)} = \sum_{n=1}^r ({}^tP)^m_n \phi^n = \sum_{n=1}^r P_n^m \phi^m, \quad (93)$$

$$u_m^{(1)} = \sum_{n=1}^r (P^{-1})_m^n u_n \quad (94)$$

を導入する.

添字の位置について ここでは  $P_m^n, (P^{-1})_m^n$  のように, 添字は基本的に右上がりに付けている. このとき  $({}^tP)$  の  $(m, n)$  成分は  $P_n^m$  なので,  $({}^tP)$  の添字は  $m$  が上付き,  $n$  が下付きとするのが自然である. しかも  $(m, n)$  成分を表すには,  $m$  を左側,  $n$  を右側に置かなければならないから, 添字の位置は  $({}^tP)^m_n$  のように右下がりに決まる.

すると下の図式より, 整合性の条件 (92) は

$$0 \approx \left[ \frac{d\phi^{m(1)}}{dt} = \right] \left\{ \phi^{m(1)}, H + \sum_{n=1}^r u_n \phi^n \right\} \quad (95)$$

と書ける.

$$\begin{array}{ccc} \phi^m = 0 & \xleftrightarrow{\text{正則な変換 (93)}} & \phi^{m(1)} = 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ d\phi^m/dt = 0 & \longleftrightarrow & d\phi^{m(1)}/dt = 0 \\ \downarrow \text{式 (89)} & \longleftrightarrow & \text{式 (90)} \downarrow \\ \text{式 (92)} : \{\phi^m, H\} + \sum_n \{\phi^m, \phi^n\} = 0 & & \text{式 (95)} : \{\phi^{m(1)}, H + \sum_n u_n \phi^n\} = 0 \end{array}$$

上式 (95) に

$$\sum_n u_n^{(1)} \phi^{n(1)} = \sum_{l,m,n} (P_l^n \phi^l) ((P^{-1})_n^m u_m) = \sum_m u_m \phi^m \quad (\because \text{式 (93), 式 (94)}) \quad (96)$$

を代入すると,

$$0 \approx \left[ \frac{d\phi^{m(1)}}{dt} = \right] \left\{ \phi^{m(1)}, H \right\} + \sum_{n=1}^r \left\{ \phi^{m(1)}, u_n^{(1)} \phi^{n(1)} \right\} \quad (97)$$

と書き換えられる. さらに右辺第 2 項は

$$\begin{aligned} \sum_n \left\{ \phi^{m(1)}, u_n^{(1)} \phi^{n(1)} \right\} &\approx \sum_n \left\{ \phi^{m(1)}, \phi^{n(1)} \right\} u_n^{(1)} \quad (\because \phi^{n(1)} \approx 0) \\ &\approx \sum_{k,l,m} P_k^m P_l^n \left\{ \phi^k, \phi^l \right\} u_n^{(1)} = \sum_{k,l,m} P_k^m P_l^n B^{kl} u_n^{(1)} = \sum_n ({}^tPBP)^{mn} u_n^{(1)} \\ &= \sum_n B'^{mn} u_n^{(1)} \end{aligned}$$

となるので, 式 (97) は

$$\begin{pmatrix} \{\phi^{1(1)}, H\} \\ \vdots \\ \{\phi^{2s_1(1)}, H\} \\ \{\phi^{2s_1+1(1)}, H\} \\ \vdots \\ \{\phi^{r(1)}, H\} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \dot{\phi}^{1(1)} \\ \vdots \\ \dot{\phi}^{2s_1(1)} \\ \dot{\phi}^{2s_1+1(1)} \\ \vdots \\ \dot{\phi}^{r(1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Omega'_{2s_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ \vdots \\ u_{2s_1}^{(1)} \\ u_{2s_1+1}^{(1)} \\ \vdots \\ u_r^{(1)} \end{pmatrix}$$

とまとめられる ( $\dot{\phi}^{m(1)} \equiv d\phi^{m(1)}/dt$ ). この列ベクトルの関係において,

- 最初の  $2s_1$  個の成分は [ $\dot{\phi}^{m(1)} \approx 0$  とおけば],

$$\begin{pmatrix} \{\phi^{1(1)}, H\} \\ \vdots \\ \{\phi^{2s_1(1)}, H\} \end{pmatrix} \approx -\Omega'_{2s_1} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ \vdots \\ u_{2s_1}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (98)$$

- 残りの成分は [ $\dot{\phi}^{m(1)}$  を明示すれば],

$$\dot{\phi}^{m(1)} = \{\phi^{m(1)}, H\} \approx 0 \quad (m = 2s_1 + 1, 2s_1 + 2, \dots, r) \quad (99)$$

となる. 第1の式(98)は, 左から  $\Omega'_{2s_1}$  の逆行列

$$\Omega_{2s_1} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -I_{s_1} \\ I_{s_1} & 0 \end{pmatrix}$$

をかけると,

$$\begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ \vdots \\ u_{s_1}^{(1)} \\ u_{s_1+1}^{(1)} \\ \vdots \\ u_{2s_1}^{(1)} \end{pmatrix} \approx -\Omega_{2s_1} \begin{pmatrix} \{\phi^{1(1)}, H\} \\ \vdots \\ \{\phi^{s_1(1)}, H\} \\ \{\phi^{s_1+1(1)}, H\} \\ \vdots \\ \{\phi^{2s_1(1)}, H\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{\phi^{s_1+1(1)}, H\} \\ \vdots \\ \{\phi^{2s_1(1)}, H\} \\ -\{\phi^{1(1)}, H\} \\ \vdots \\ -\{\phi^{s_1(1)}, H\} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ \vdots \\ v_{s_1}^{(1)} \\ v_{s_1+1}^{(1)} \\ \vdots \\ v_{2s_1}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (100)$$

と書き換えられる<sup>\*39</sup>.

そこで初めの  $2s_1$  個の未定乗数を

$$u_m^{(1)} = v_m^{(1)} \quad (m = 1, 2, \dots, 2s_1) \quad (101)$$

と定めると, 式(100): $u_m^{(1)} \approx v_m^{(1)}$  ( $m = 1, 2, \dots, 2s_1$ ) の弱い等号も満たされる.

このとき式(96)とより

$$\sum_{n=1}^r u_n \phi^n = \sum_{n=1}^r u_n^{(1)} \phi^{n(1)} = \sum_{m=1}^{2s_1} v_m^{(1)} \phi^{m(1)} + \sum_{\sigma=2s_1+1}^r u_\sigma^{(1)} \phi^{\sigma(1)}$$

となるので, 新しいハミルトニアン

$$H_1 \equiv H + \sum_{m=1}^{2s_1} v_m^{(1)} \phi^{m(1)}$$

を定義すると, 運動方程式(90)は

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H_1\} + \sum_{\sigma=2s_1+1}^r \{f, \phi^{\sigma(1)}\} u_\sigma^{(1)} \quad (\because \phi^{\sigma(1)} \approx 0) \quad (102)$$

と書ける. ただしこの段階では, 右辺における  $r - 2s_1$  個の乗数  $\{u_\sigma^{(1)}\}$  は未定である.

<sup>\*39</sup> 添字の上下が不揃いであるのは, 添字を下げるのに用いている  $\Omega_{2s_1}$  の成分  $0, \pm 1$  を具体的に代入したためであり, これは見かけ上の問題である.

次に、残りの式 (99) について考察する。本節冒頭で指摘したように、 $\phi^{m(1)}|_{M_1} = 0$  であっても

$$\dot{\phi}^{m(1)}|_{M_1} = \{\phi^{m(1)}, H\}|_{M_1} \neq 0 \quad (103)$$

となり得るため、式 (99) からは新しい拘束条件が生じ得る。したがって式 (99) は、一般には  $M_1$  の部分空間  $M_2 (\subseteq M_1)$  を規定しており、弱い等号は  $\overset{M_2}{\approx}$  の意味と見なければならぬ。これに対し、特に

$$\dot{\phi}^{m(1)}|_{M_1} = \{\phi^{m(1)}, H\}|_{M_1} = 0 \quad (104)$$

(ただし  $m = 2s_1 + 1, \dots, r$ ) が成り立つ場合には、新たな拘束条件は生じないことを説明する (これは  $M_2 = M_1$  の場合にあたる)。超曲面  $M_1$  は  $r$  個の 1 次拘束条件  $\phi^{m(1)} = 0$  で定義されているから、式 (104) のケースに分類される  $\dot{\phi}^{m(1)} = \{\phi^{m(1)}, H\}$  は  $r$  個の  $\{\phi^{m(1)}\}$  の 1 次結合

$$\dot{\phi}^{m(1)} = \sum_{n=1}^r a_n^m(q, p) \phi^{n(1)} \quad (m = 2s_1 + 1, \dots, r) \quad (105)$$

で表される。[ $r$  個の 1 次拘束条件の式  $\phi^{m(1)} = 0$  は  $M_1$  上で成り立つ独立な式だから、 $M_1$  上でゼロになる任意の関数は、 $r$  個の  $\{\phi^{m(1)}\}$  を“基底”として展開できると考えている.] 他方、[式 (100) はゼロと置いてきた  $\dot{\phi}^{m(1)}$  を明示すれば  $\dot{\phi}^{m(1)} \approx 0$  に他ならないから、これを強い等号に置き換えた式 (101) は  $\dot{\phi}^{m(1)} = 0$  を意味する。よって] 初めの  $2s_1$  個の  $\dot{\phi}^{m(1)}$  は

$$\dot{\phi}^{m(1)} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, 2s_1)$$

を満たしている。これと式 (105) を合わせて用いると

$$\ddot{\phi}^{m(1)} = \sum_{n=1}^r \dot{a}_n^m \phi^{n(1)} + \sum_{n=1}^r a_n^m \dot{\phi}^{n(1)} = \sum_{n=1}^r \left( \dot{a}_n^m + \sum_{l=1}^r a_n^m a_l^m \right) \phi^{n(1)}$$

となる。最右辺において 1 次拘束条件  $\phi^{n(1)} \approx 0$  を考慮すると、2 次拘束条件  $\ddot{\phi}^{m(1)} \approx 0$  も自動的に満たされることが分かる [弱い等号は  $\overset{M_1}{\approx}$  の意味]。同様に  $\ddot{\phi}^{m(1)} \approx 0, \text{etc.}$  も成り立つので話はここで完結し、この場合  $(r - 2s_1)$  個の乗数  $\{u_\sigma^{(1)}\}$  は未定のままに残される。

#### D.1.4 2 次拘束条件 [25, pp.506–508]

それに対して式 (103) のケースに分類される  $\dot{\phi}^{m(1)} = \{\phi^{m(1)}, H\}$  が存在するときには、そのうち独立な  $\{\phi^{m(1)}, H\}$  を順に並べて  $\chi^{l(1)}$  ( $l = 1, 2, \dots, r_1$ ) とすると (ただし  $r_1 \leq r - 2s_1$ )、新しい拘束条件

$$\chi^{l(1)} \approx 0 \quad (l = 1, 2, \dots, r_1) \quad (106)$$

が生じることになる [弱い等号は  $\overset{M_2}{\approx}$  の意味]。これを **2 次拘束条件**、 $\{\chi^{l(1)}\}$  を **2 次の拘束量** と呼ぶ。式 (106) は 1 次拘束条件  $\phi^{m(1)} = 0$  と合わせて、超曲面  $M_2 \subset M_1$  を定義する。

式 (106):  $\dot{\phi}^{l(1)} = \chi^{l(1)} \approx 0$  より、 $k = 2$  に対する整合性の条件 (91) は  $\ddot{\phi}^{l(1)} = \dot{\chi}^{l(1)} \approx 0$  を与える。運動方程式 (102) を適用すれば、

$$\{\chi^{l(1)}, H_1\} + \sum_{\sigma=2s_1+1}^r \{\chi^{l(1)}, \phi^{\sigma(1)}\} u_\sigma^{(1)} \approx 0 \quad (l = 1, 2, \dots, r_1) \quad (107)$$

と書き換えられる。ここで Poisson 括弧

$$C^{lm} = \{\chi^{l(1)}, \phi^{\sigma(1)}\} \quad (\sigma = m + 2s_1 = 1 + 2s_1, \dots, r)$$

を  $(l, m)$  要素を持つ  $r_1 \times (r - 2s_1)$  行列  $C$  を定義し, その階数を  $s_2 (\leq r_1)$  とする. すると式 (107) において再び  $u_\sigma^{(1)}$  に適当な 1 次変換  $u^{(1)} \mapsto u^{(2)}$  を施すことにより,

- $s_2$  個の未定乗数を決定する式  $u_l^{(2)} = v_l^{(2)} \quad (l = 1, 2, \dots, s_2)$
- 新しい拘束条件を生じ得る (さもなくば, これまでの拘束条件に含まれる), 残り  $(r_1 - s_2)$  個の式

が得られる.

具体的には, 適当な  $r_1$  次と  $r - 2s_1$  次の正方正則行列  $Q, R$  を用いて

$$QCR^{-1} = \begin{pmatrix} I_{s_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv C'$$

とできる [26, pp.127–128]. そこで

$$u_m^{(2)} = \sum_{n=1}^{r-2s_1} R_m^n u_{n+2s_1}^{(1)}, \quad \chi^{l(2)} = \sum_{k=1}^{r_1} Q_k^l \chi^{k(1)}$$

を導入すると, 拘束条件 (106) は  $\chi^{l(2)} \approx 0$  と等価であり, 式 (107) は

$$\begin{aligned} 0 &\approx \sum_{k=1}^{r_1} Q_k^l \left( \{\chi^{k(1)}, H_1\} + \sum_{m=1}^{r-2s_1} C^{km} u_{m+2s_1}^{(1)} \right) \\ &= \{\chi^{l(2)}, H_1\} + \sum_{m=1}^{r-2s_1} (QC)^{lm} u_{m+2s_1}^{(1)} \\ &= \{\chi^{l(2)}, H_1\} + \sum_{m, m'} (QC)^{lm} (R^{-1}R)_m^{m'} u_{m'+2s_1}^{(1)} \\ &= \{\chi^{l(2)}, H_1\} + \sum_{m, m', m''} (QC)^{lm} (R^{-1})_m^{m''} R_{m''}^{m'} u_{m'+2s_1}^{(1)} \\ &= \{\chi^{l(2)}, H_1\} + \sum_{m''} C'^{lm''} u_{m''}^{(2)} \end{aligned}$$

と書き換えられる.  $C'$  の成分を代入して, 最右辺の行列の成分計算を実行すると

$$\begin{aligned} u_l^{(2)} &\approx -\{\chi^{l(2)}, H_1\} \equiv v_l^{(2)}, \quad (l = 1, 2, \dots, s_2) \\ \{\chi^{l(2)}, H_1\} &\approx 0 \quad (l = s_2 + 1, \dots, r_1) \end{aligned}$$

が得られる. ここでも第 1 式を強い等式に置き換えて未定乗数を決定する. 第 2 式から新しい拘束条件

$$\chi^{l(2)} \stackrel{M_3}{\approx} 0 \quad (l = 1, 2, \dots, r_2)$$

が生じ得る.

**note** ここでは  $\chi^{l(2)} = \{\chi^{l(2)}, H_1\} \rightarrow \chi^{l(2)}$  と再定義していると考えられる. 実際, 単振り子の例 [25, pp.509–511] では  $\chi^{(2)} \sim \frac{d\chi^{(1)}}{dt}$  としている.

なお 1 次変換  $u^{(1)} \mapsto u^{(2)}$  に伴って,  $\phi^{(1)}$  は

$$\phi^{m(2)} = \sum_{n=1}^{r-2s_1} ({}^tR^{-1})_n^m \phi^{n+2s_1(1)}$$

と変換する.

このとき改めて新しいハミルトニアン

$$H_2 \equiv H_1 + \sum_{l=1}^{s_2} v_l^{(2)} \phi^{l(2)}$$

を定義すると、運動方程式は

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H_2\} + \sum_{m=s_2+1}^{r-2s_1} \{f, \phi^{m(2)}\} u_m^{(2)}$$

と書ける。

拘束条件の数は有限 ( $2N - r$  以下 [1 次・2 次の拘束条件の合計は空間の次元  $2N$  を超えない] ) だから、この操作を繰り返してゆけば、いずれは新しい拘束条件が得られなくなる。  $K$  回までは新たな拘束条件が生じるとし [いずれも 2 次拘束条件と呼ぶ]、また、ここまでの記法を踏襲する。すると、最終的に整合性の条件から  $s = 2s_1 + s_2 + \dots + s_K$  個の未定乗数が決定され ( $u_l^{(K)} = v_l^{(K)}$ )、残り  $(r - s)$  個の乗数  $u_\sigma^{(K)}$  ( $\sigma = s_K + 1, \dots, r - s + s_K$ ) は未定のままとなる。全ハミルトニアン

$$H_T \equiv H + \sum_{m=1}^{2s_1} v_m^{(1)} \phi^{m(1)} + \sum_{k=2}^K \left( \sum_{l=1}^{s_k} v_l^{(k)} \phi^{l(k)} \right) + \sum_{\sigma=s_K+1}^{r-s+s_K} u_\sigma^{(K)} \phi^{\sigma(K)} \quad (108)$$

を定義すると、運動方程式 (89) は

$$\frac{df}{dt} \approx \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H_T\} \quad (109)$$

と書ける。全ての整合性の条件  $\frac{d^k}{dt^k} \phi^m = 0$  を満たす運動空間は、超曲面  $\bar{M} (= M_K \subset \dots \subset M_1 \subset M)$  である。未定乗数  $u_\sigma^{(K)}$  の任意性はゲージ変換の自由度に対応する (D.3 節)。

まとめ

2N 次元相空間 M

$$\text{rank} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right) = N - r \rightarrow 1 \text{ 次拘束条件 } \phi^m(q, p, t) = 0 \ (m = 1, 2, \dots, r) \rightarrow \text{超曲面 } M_1$$

未定乗数  $u_m \ (m = 1, 2, \dots, r)$

$$H' = H + \sum_{m=1}^r u_m \phi^m, \quad (M_1 \text{ 上で } H' = H)$$

$$\text{運動方程式 } \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H'\} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{m=1}^r u_m \{f, \phi^m\}$$

整合性の条件  $\frac{d^k}{dt^k} \phi^m \Big|_{M_1} \approx 0$

$k = 1$ :

$$\frac{\partial \phi^m}{\partial t} + \{\phi^m, H\} + \sum_{n=1}^r \{\phi^m, \phi^n\} u_n \Big|_{M_1} \approx 0, \quad \text{rank}(\{\phi^m, \phi^n\}) = 2s_1$$

↓ 1 次変換  $u \rightarrow u^{(1)}, \phi \rightarrow \phi^{(1)}$

$$\begin{cases} u_m^{(1)} \approx v_m^{(1)} \ (m = 1, 2, \dots, 2s_1) \rightarrow \text{強い等式で未定乗数を決定} \\ \dot{\phi}^{m(1)} = \frac{\partial \phi^{m(1)}}{\partial t} + \{\phi^{m(1)}, H\} \approx 0 \ (m = 2s_1 + 1, \dots, r) \rightarrow 2 \text{ 次拘束条件 } \chi^{l(1)} \Big|_{M_2} \approx 0 \ (l = 1, 2, \dots, r_1) \end{cases}$$

$$H_1 = H + \sum_{m=1}^{2s_1} v_m^{(1)} \phi^{m(1)}, \quad \text{運動方程式 } \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H_1\} + \sum_{\sigma=2s_1+1}^r \{f, \phi^{\sigma(1)}\} u_{\sigma}^{(1)}$$

$k = 2$ :

$$\frac{\partial \chi^{l(1)}}{\partial t} + \{\chi^{l(1)}, H_1\} + \sum_{\sigma=2s_1+1}^r \{\chi^{l(1)}, \phi^{\sigma(1)}\} u_{\sigma}^{(1)} \Big|_{M_2} \approx 0, \quad \text{rank}(\{\chi^{l(1)}, \phi^{\sigma(1)}\}) = s_2 (\leq r_1)$$

↓ 1 次変換  $u^{(1)} \rightarrow u^{(2)}, \phi^{(1)} \rightarrow \phi^{(2)}, \chi^{(1)} \rightarrow \chi^{(2)}$

$$\begin{cases} u_l^{(2)} \approx v_l^{(2)} \ (l = 1, 2, \dots, s_2) \rightarrow \text{強い等式で未定乗数を決定} \\ \dot{\chi}^{l(2)} = \frac{\partial \chi^{l(2)}}{\partial t} + \{\chi^{l(2)}, H\} \approx 0 \ (l = s_2 + 1, \dots, r_1) \\ \rightarrow 2 \text{ 次拘束条件 } \left[ \frac{\partial \chi^{l(2)}}{\partial t} + \{\chi^{l(2)}, H\} \rightarrow \right] \chi^{l(2)} \Big|_{M_3} \approx 0 \ (l = 1, 2, \dots, r_2) \end{cases}$$

$$H_2 = H_1 + \sum_{l=1}^{s_2} v_l^{(2)} \chi^{l(2)}, \quad \text{運動方程式 } \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H_2\} + \sum_{\sigma=2s_1+1}^r \{f, \phi^{\sigma(1)}\} u_{\sigma}^{(1)}$$

⋮

$k = K \ (k > K \text{ の整合性の条件からは, 新たな拘束条件が生じない})$ :

$$\begin{cases} s = 2s_1 + s_2 + \dots + s_K \text{ 個の乗数 } u_l^{(K)} = v_l^{(K)} \rightarrow \text{決定} \\ \text{残り } (r - s) \text{ 個の乗数 } u_{\sigma}^{(K)} \ (\sigma = s_K + 1, \dots, r - s + s_K) \rightarrow \text{未定} \end{cases}$$

$$H_T \equiv H + \sum_{m=1}^{2s_1} v_m^{(1)} \phi^{m(1)} + \sum_{k=2}^K \left( \sum_{l=1}^{s_k} v_l^{(k)} \phi^{l(k)} \right) + \sum_{\sigma=s_K+1}^{r-s+s_K} u_{\sigma}^{(K)} \phi^{\sigma(K)} : \text{全ハミルトニアン,}$$

$$\text{運動方程式 } \frac{df}{dt} \approx \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H_T\}, \quad \text{運動空間 } \bar{M} (= M_K \subset \dots \subset M_1 \subset M)$$

D.1.5 表記の整理と要約 [25, pp.508–509]

これまで行ってきた一連の1次変換を図45に模式的に示す。

- 青色で示されている  $s$  個の決定された乗数  $v_l^{(k)}$  を一列に並べたものを  $v_j$  と書く ( $j = 1, \dots, s$ )。未定の  $(r - s)$  個の乗数  $u_\sigma^{(K)}$  (赤色) は  $w_\sigma$  と改める ( $\sigma = s + 1, \dots, r$ )。
- 色を付けた  $\phi^{l(k)}$  は全部で、もとの拘束量  $\{\phi^m\}$  と同じ個数  $r$  だけあり、以降ではこれら  $r$  個の  $\phi^{l(k)}$  を一列に並べたものも簡単のために  $\phi^m$  と書く ( $m = 1, \dots, r$ )。これらは決定された乗数  $v_j$  と対になる  $\phi^j$  (青色) と、未定の  $w_\sigma$  と対になる  $\phi^\sigma$  (赤色) から成る。

このとき全ハミルトニアン (108) は

$$H_T = H + \sum_{j=1}^s v_j \phi^j + \sum_{\sigma=s+1}^r w_\sigma \phi^\sigma \quad (110)$$

と書ける。また  $r' = r_1 + r_2 + \dots + r_K$  個の2次拘束量

$$\underbrace{\chi^{1(1)}, \dots, \chi^{r_1(1)}}_{r_1}, \underbrace{\chi^{1(2)}, \dots, \chi^{r_2(2)}}_{r_2}, \dots, \underbrace{\chi^{1(K)}, \dots, \chi^{r_K(K)}}_{r_K}$$

についても、まとめて  $\chi^l$  ( $l = 1, \dots, r'$ ) と書く。

ところで行列  $B', C'$  の形から分かるように、

$$\begin{aligned} \{\phi^m, \phi^\sigma\} &\approx 0, & \{\chi^l, \phi^\sigma\} &\approx 0 \\ (m = 1, \dots, r; l = 1, \dots, r'; \sigma = s + 1, \dots, r) \end{aligned} \quad (111)$$

が成り立つ。

上式 (111) の確認

$$\{\phi^{m(1)}, \phi^{n(1)}\} = P_i^m \{\phi^i, \phi^j\} P_j^n = ({}^t P B P)^{mn} = (B')^{mn}$$

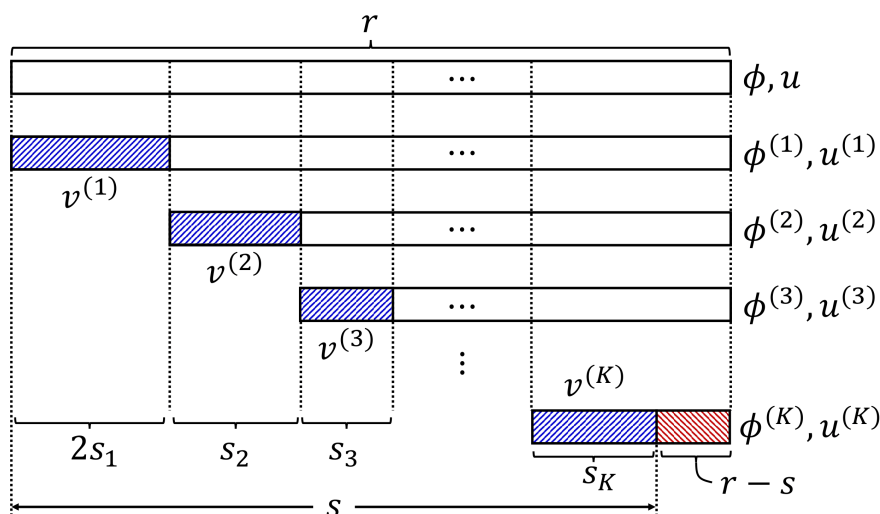


図45 1次の拘束量  $\{\phi^m\}$  と未定乗数  $\{u_m\}$  の1次変換の模式的整理

より, 行列  $B'$  の下  $(r - 2s_1)$  個の成分について

$$0 = (B')^{m\sigma} = \{\phi^{m(1)}, \phi^{\sigma(1)}\} \quad (\sigma = 2s_1 + 1, \dots, r)$$

が成り立っている.  $(r - s)$  個の  $\phi^{\sigma(K)}$  は  $(r - 2s_1)$  個の  $\phi^{\sigma(1)}$  の 1 次変換から得られているから (図 45),

$$\{\phi^{m(1)}, \phi^{\sigma(K)}\} = 0 \quad (\sigma = s + 1, \dots, r)$$

が成り立つ. これが式 (111) 第 1 式に他ならない ( $\phi^{l(k)} \rightarrow \phi^m$  と表記を改めたことを思い出そう).

次に

$$\{\chi^{l(2)}, \phi^{m(2)}\} = Q^l_k \{\chi^{l(1)}, \phi^{n+2s_1(1)}\} ({}^t R^{-1})^m_n = (QCR^{-1})^{lm} = (C')^{lm}$$

なので, 行列  $(C')$  の右  $\{(r - 2s_1) - s_2\}$  行の成分について

$$0 = (C')^{l\sigma} = \{\chi^{l(2)}, \phi^{\sigma(2)}\} \quad (l = 1, \dots, r_1; \sigma = s_2 + 1, \dots, r - 2s_1)$$

が成り立っている. 同様に

$$\{\chi^{l(3)}, \phi^{\sigma(3)}\} = 0 \quad (l = 1, \dots, r_2; \sigma = s_3 + 1, \dots, r - 2s_1 - s_2), \quad \text{etc.}$$

が成り立つから, 式 (111) 第 2 式が得られる.

式 (111) を用いると, 整合性の条件 (97),(107) などは, 未定の乗数が関係する後ろの  $(r - s)$  個の項が消えて,

$$\{\phi^m, H\} + \sum_{j=1}^s \{\phi^m, \phi^j\} v_j \approx 0, \quad (m = 1, 2, \dots, r) \quad (112)$$

$$\{\chi^l, H\} + \sum_{j=1}^s \{\chi^l, \phi^j\} v_j \approx 0, \quad (l = 1, 2, \dots, r') \quad (113)$$

となる. (時間に陽による  $\phi^m, \chi^l$  に対しては, 左辺に  $\partial\phi^m/\partial t, \partial\chi^l/\partial t$  を足す.) ここで  $v_j$  に掛かる Poisson 括弧

$$D^{ij} \equiv \begin{cases} \{\phi^i, \phi^j\} & (i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, s) \\ \{\chi^{i-r}, \phi^j\} & (i = r + 1, \dots, r + r', j = 1, \dots, s) \end{cases} \quad (114)$$

を要素に持つ  $(r + r') \times s$  行列  $D = (D^{ij})$  を定義しておく. [整合性の条件による  $v_j$  の定め方より,] 上式 (112),(113) は  $v_j$  について (弱い等号の範囲で) 一意的に解けるので,  $D$  の階数は  $s$  である [26, pp.114–118].

## D.2 Dirac 括弧と相空間の簡約

### D.2.1 第 1 種と第 2 種の拘束量 [25, pp.511–513]

- $f$  が第 1 種の量

↔ すべての 1 次と 2 次の拘束量  $\phi^k, \chi^l$  に対して

$$\{f, \phi^k\} = 0, \quad \{f, \chi^l\} = 0. \quad (k = 1, 2, \dots, r; l = 1, 2, \dots, r') \quad (115)$$

- $f$  が第 2 種の量

↔ 上式 (115) の少なくとも 1 つの Poisson 括弧  $\neq 0$ .

- 第 1 種の拘束条件 …… 第 1 種の量  $f \approx 0$
- 第 2 種の拘束条件 …… 第 2 種の量  $f \approx 0$



1 次の拘束量  $\phi^m$  は次のように分類される.

- 未定の乗数  $w_\sigma$  の相手  $\phi^\sigma$  ( $\sigma = s+1, \dots, r$ ) は第 1 種の量 ( $\cdot$ : 式 (111))
- 定めた乗数  $v_j$  の相手  $\phi^j$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ) の任意の 1 次結合は第 2 種の量

( $\cdot$ ) 1 次結合  $\Phi = \sum_{k=1}^s a_k \phi^k$  が第 1 種の量だとすると,

$$0 = \{\phi^i, \Phi\} = \sum_{k=1}^s \{\phi^i, \phi^k\} a_k = \sum_{k=1}^s D^{ik} a_k, \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

$$0 = \{\chi^{i-r}, \Phi\} = \sum_{k=1}^s \{\chi^{i-r}, \phi^k\} a_k = \sum_{k=1}^s D^{ik} a_k, \quad (i = r+1, r+2, \dots, r+r')$$

が満たされねばならない. ところが行列  $D$  の階数は  $s$  なので, このときすべての  $a_k$  はゼロであり [26, pp.116–117],  $\Phi = 0$  となる.

2 次の拘束量  $\chi^l$  についても同様の分類を行おう. 今, 拘束量の 1 次結合

$$\chi^l = \sum_{i=1}^{r'} a^l_i \chi^i + \sum_{k=1}^s b^l_k \phi^k \quad (l = 1, 2, \dots, r')$$

を考える. ただし係数行列  $a = (a^l_i)$  は  $\det a \neq 0$  を満たすものとする, 拘束条件  $\phi^k \approx 0, \chi^l \approx 0$  は

$$\phi^k \approx 0, \quad \chi^l \approx 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r; l = 1, 2, \dots, r')$$

と等価である. すると  $\{\chi^l\}$  の代わりに  $\{\chi^{l'}\}$  を改めて 2 次拘束量にとることができる. ところで第 2 種の量の適当な線形結合が第 1 種の量になることがある. そこで可能な限り多くの  $\chi^{l'}$  が第 1 種の量になるように, 係数  $a^l_i, b^l_k$  を選ぶ. このとき

- 第 1 種の 2 次拘束量  $\chi^{\nu'}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, R'$ )
- 第 2 種の 2 次拘束量  $\chi^{i'}$  ( $i = R'+1, \dots, r'$ )

が得られる. そして第 2 種の量  $\chi^{i'}, \phi^j$  のいかなる 1 次結合も第 1 種の量になることはない [さもなければ仮定に反する].

結局, 1 次と 2 次の拘束量  $\phi^k, \chi^{l'}$  は

- 第 1 種の拘束量  $(\{\phi^\sigma\}\{\chi^{\nu'}\})$  ( $\sigma = s+1, \dots, r; \nu = 1, 2, \dots, R'$ )
  - 第 2 種の拘束量  $(\{\phi^j\}\{\chi^{i'}\})$  ( $j = 1, 2, \dots, s; i = R'+1, \dots, r'$ )
- まとめて  $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{r'-R'+s}$  と書く

に分類される. 実はこの第 1 種と第 2 種の拘束量の区別は, 1 次と 2 次の拘束量の区別より重要である. なお本節ではこれ以降, 簡単のために

- 第 1 種の拘束量がない場合を考える.
- 拘束量はすべて時間  $t$  に陽に依らないと仮定する.
- 繰り返された上下の添字については, 適切な範囲で和をとるものと約束する.

## D.2.2 Dirac 括弧 [25, pp.513–515]

任意の物理量  $f(q, p, t)$  は  $\bar{M}$  上でのみ意味を持つ。しかし  $\bar{M}$  上では  $f(q, p, t)$  と、拘束量 [仮定より第 2 種の拘束量  $\{\xi^m\}$  のみ] の 1 次結合を加えた

$$f_T(q, p, t) = f(q, p, t) + \lambda_m \xi^m \quad (116)$$

は同じものである。そこでこの自由度を利用して、拘束量  $\xi^n$  が Poisson 括弧  $\{f, \xi^n\}$  の中であってもゼロとできるように  $f$  を再定義することを考える。すなわち

$$\{f_T, \xi^n\} = \{f, \xi^n\} + \lambda_m \{\xi^m, \xi^n\} \approx 0 \quad (\because \xi^m \approx 0) \quad (117)$$

が成り立つように付加項  $\lambda_m \xi^m$  を決めることが我々の目標である\*40。

上式 (117) を未知数  $\{\lambda^m\}$  に対する連立方程式と見ると、その係数  $\{\xi^m, \xi^n\} \equiv \Delta^{mn}$  は  $(r' - R' + s)$  次反対称行列  $\Delta = (\Delta^{mn})$  を作る。このとき  $\Delta$  は正則 ( $\det \Delta \neq 0$ ) で、 $\Delta^{-1}$  が存在する。

**理由** 仮に  $\det \Delta = 0$  とすると、同次方程式  $\Delta^{lm} X_m = 0$  は非自明な解  $\{X_m\} = \{X_m^0\} (\neq \{0\})$  を持つ。すると

$$\{\xi^l, X_m^0 \xi^m\} = \{\xi^l, \xi^m\} X_m^0 + \xi^m \{\xi^l, X_m^0\} \approx \{\xi^l, \xi^m\} X_m^0 = \Delta^{lm} X_m^0 = 0$$

となる。これは  $\{\xi^m\}$  の 1 次結合から、これ以上、第 1 種の量を作れないこと [D.2.1 節] に反するので、 $\det \Delta \neq 0$  である。

[したがって  $\text{rank} D = r' - R' + s$  であり、] 再び (実) 反対称行列の階数が偶数であること [26, p.180] を思い出すと、 $r' - R' + s = 2R$  とおける。また、たった今導入した  $\Delta$  を以下では  $\Delta_{2R}$  と書く。

式 (117):  $\Delta^{nm} \lambda_m \approx \{f, \xi^n\}$  より

$$\lambda_m = (\Delta_{2R}^{-1})_{mn} \{f, \xi^n\} = -\{f, \xi^n\} (\Delta_{2R}^{-1})_{nm}, \quad (118)$$

$$f_T = f - \{f, \xi^n\} (\Delta_{2R}^{-1})_{nm} \xi^m \quad (119)$$

となる [強い等式で  $\lambda_m$  を定めた]。こうして定めた  $M$  上の関数  $f_T, g_T$  に対して

$$\{f_T, g_T\} \approx \{f, \xi^n\} (\Delta_{2R}^{-1})_{nm} \{\xi^m, g\} \quad (120)$$

が成り立つ。

上式 (120) の確認 式 (118) の  $\lambda_m$  が関数  $f$  に応じて定まる量であることを明示するために  $\lambda_m^{(f)}$  と書くと、

$$\begin{aligned} \{f_T, g_T\} &= \{f_T, g + \lambda_n^{(g)} \xi^n\} \approx \{f_T, g\} + \lambda_n^{(g)} \{f_T, \xi^n\} \quad (\because \xi^n \approx 0) \\ &\approx \{f + \lambda_m^{(f)} \xi^m, g\} \quad (\because \text{式 (117)} : \{f_T, \xi^n\} \approx 0) \\ &\approx \{f, g\} + \lambda_m^{(f)} \{\xi^m, g\} \quad (\because \xi^m \approx 0) \\ &= \{f, \xi^n\} (\Delta_{2R}^{-1})_{nm} \{\xi^m, g\} : (120). \quad (\because \text{式 (118)}) \end{aligned}$$

式 (120) の右辺を  $f$  と  $g$  の間の **Dirac 括弧**  $\{f, g\}_D$  と定義する：

$$\{f, g\}_D \equiv \{f, \xi^n\} (\Delta_{2R}^{-1})_{nm} \{\xi^m, g\}. \quad (121)$$

\*40 第 1 種の拘束量がある場合に、その 1 次結合を式 (116) を加えたとしても、そのような項は定義より Poisson 括弧  $\{f_T, \xi^n\}$  には寄与しないから、条件 (117) は変わらない。

なお、はじめの条件 (117): $\{f_T, \xi^n\} = 0$  は  $f_T$  の生成する  $\xi^n$  の変化率がゼロであることを意味するから [11, p.557], 我々は  $\bar{M}$  上で  $f$  に一致する無数の関数  $f + \lambda_m \xi^m$  のうち、拘束条件  $\xi^n \approx 0$  を保存する関数  $f_T$  を選んだことになる。

実は式 (110) の全ハミルトニアン  $H_T$  もまた、それが生成する変換 (時間発展) に対して拘束条件が変わらないようなハミルトニアンへの拡張になっている [これが  $f_T$  という表記を採用している動機と推察される]。実際、

$$H_T \text{の式 (110)} \leftrightarrow f_T \text{の式 (116),} \quad \left( \begin{array}{l} \text{第 1 種の拘束量 } \phi^\sigma \text{ なし, } \lambda_m = \begin{cases} v_m (m = 1, \dots, s) \\ 0 (m = s + 1, \dots, 2R) \end{cases} \end{array} \right)$$

$$\text{整合性の条件 (112), (113)} \leftrightarrow f_T \text{の条件 (117).}$$

したがって  $v_m, H_T$  もそれぞれ、式 (118), 式 (119) と同じ形

$$v_m \approx -\{H, \xi^n\}(\Delta_{2R}^{-1})_{nm}, \quad (m = 1, \dots, s) \quad (122)$$

$$0 \approx -\{H, \xi^n\}(\Delta_{2R}^{-1})_{nm}, \quad (m = s + 1, \dots, 2R) \quad (123)$$

$$H_T = H - \{\xi^n, H\}(\Delta_{2R}^{-1})_{nm} \xi^m = H - \xi^m (\Delta_{2R}^{-1})_{mn} \{\xi^n, H\} \quad (124)$$

に書けることになる (行列  $(\Delta_{2R}^{-1})$  と Poisson 括弧の反対称性に注意)<sup>\*41</sup>。上式 (124) より運動方程式 (109) は

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &\approx \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} - \{\xi^m\}(\Delta_{2R}^{-1})_{mn} \{\xi^n, H\} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}_D \end{aligned} \quad (125)$$

と書き換えられる<sup>\*42</sup>。つまり  $\{f, H_T\} \rightarrow \{f, H\}_D$  と置き換わる (第 1 種拘束量がなければ)。

### D.2.3 相空間の簡約 [25, pp.515–518]

Poisson 括弧は  $M$  全体で定義されているため、 $\bar{M}$  上で  $\xi^m = 0$  であっても必ずしも  $\{f, \xi^m\} = 0$  とはならない。これに対し Dirac 括弧の定義式 (121) より、第 2 種の量  $\xi^m$  と任意の関数  $f$  の間の Dirac 括弧については、

$$\{f, \xi^m\}_D = 0$$

が強い等式として成り立つ。

確認

$$\{f, \xi^m\}_D = \{f, \xi^m\} - \{f, \xi^l\}(\Delta_{2R}^{-1})_{ln} \underbrace{\{\xi^n, \xi^m\}}_{(\Delta_{2R})^{nm}} = 0.$$

ここから Dirac 括弧は  $\bar{M}$  上に限られた Poisson 括弧になっていると期待される。このことは運動方程式が Dirac 括弧を用いて式 (125) のように書けることから示唆される。

実際にこの予想が正しいことは、次の 2 点を示すことで確認できる (文字の定義などは後述)。

<sup>\*41</sup> このことはもちろん、 $f_T$  の条件 (117) の代わりに整合性の条件 (112), (113) から出発して、式 (118) の導出と同様の手順で式 (122), (123) を導き、これを  $H_T$  の式 (110) に代入すれば直接確かめられる。

<sup>\*42</sup>  $\xi^m \approx 0$  に注意して

$$\{f, \xi^m (\Delta_{2R}^{-1})_{mn} \{\xi^n, H\}\} = \{f, \xi^m\} (\Delta_{2R}^{-1})_{mn} \{\xi^n, H\}$$

とした。

1.  $\bar{M}$  上に誘導された 2 形式

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2} \bar{\omega}_{ab} d\eta^a \wedge d\eta^b$$

が  $\bar{M}$  上のシンプレクティック形式であること.

→  $\bar{M}$  を簡約された相空間と見なせる.

2.  $\bar{M}$  上に限定された Dirac 括弧  $\{f, g\}_D|_{\xi=0}$  が<sup>3</sup>,  $\bar{M}$  上の Lagrange 括弧  $[\bar{f}, \bar{g}]$  と逆数関係にあること.

→  $\bar{M}$  上の Dirac 括弧  $\{f, g\}_D|_{\xi=0}$  は,  $\bar{M}$  上で計算された Poisson 括弧である.

これらの証明に入る前に, 以上 2 点に関する予備知識を導入しておく.

正準 2 形式とシンプレクティック形式 [3, pp.217–220]

正準変数  $\{z^\mu\} = (q, p)$  に対して, 正準 2 形式

$$\Omega = dp_i \wedge dq^i = \frac{1}{2} \Omega_{\mu\nu} dz^\mu \wedge dz^\nu \quad \text{with} \quad (\Omega_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0_N & -I_N \\ I_N & 0_N \end{pmatrix} \quad (126)$$

を定義する. (微分形式については付録 B を参照. 本稿では行列  $\hat{\Omega} = (\Omega_{\mu\nu})$  のハットを省いてきたため, 正準 2 形式  $\Omega$  と同じ記号を用いていることになるが, 誤解の恐れはないだろう.)

幾何学的には, 閉じた非退化な交代 2 形式 (2 階交代テンソル場)  $\Omega$  が備わっている偶数次元の多様体  $M$  を, シンプレクティック多様体といい, この  $\Omega$  をシンプレクティック形式という. ここで

- $\Omega$  が閉じた形式 (閉形式) であるとは, 外微分が  $d\Omega = 0$  となることをいう.
- $\Omega$  が非退化とは,  $\langle \Omega | v, \bullet \rangle = 0$  であれば必ず  $v = 0$  となることをいう.

( $\bullet$  はブラंक (空白) であり,  $M$  上のベクトル場を入れると実数値関数を返す [3, p.83]. )

– 一般の座標系  $x = (x^1, x^2, \dots, x^{2n})$  を用いれば<sup>\*43</sup>,

$$\Omega = \frac{1}{2} \Omega_{\rho\sigma} dz^\rho \wedge dz^\sigma = \frac{1}{2} \Omega_{\rho\sigma} \left( \frac{\partial z^\rho}{\partial x^\mu} dx^\mu \right) \wedge \left( \frac{\partial z^\sigma}{\partial x^\nu} dx^\nu \right) = \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (127)$$

$$\omega_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial z^\rho}{\partial x^\mu} \Omega_{\rho\sigma} \frac{\partial z^\sigma}{\partial x^\nu} = -\omega_{\nu\mu} \quad (\Omega_{\rho\sigma} \text{ の反対称性より}) \quad (128)$$

より  $\langle \Omega | v, \bullet \rangle = \omega_{\mu\nu} v^\mu dx^\nu$  となる<sup>\*44</sup>. したがって 2 形式  $\Omega$  が非退化とは, すべての  $\nu$  に対して  $\omega_{\mu\nu} v^\mu = 0$  となるとき  $v = v^\mu \partial_\mu$  はゼロ・ベクトルであることを意味し, それ故, 行列  $\omega = (\omega_{\mu\nu})$  が正則 ( $\det \omega \neq 0$ ) と言い換えられる.

正準 2 形式はシンプレクティック形式である. 実際, 正準 2 形式 (126) を定義する反対称行列  $(\Omega_{\mu\nu})$  は一定だから, 外微分は

$$d\Omega = \frac{1}{2} (\partial_\rho \Omega_{\mu\nu}) dz^\rho \wedge dz^\mu \wedge dz^\nu = 0$$

となる. また, 正準 2 形式に対して式 (128) で定義される行列  $\omega_{2N} = (\omega_{\mu\nu})$  は

$$\det \omega_{2N} = \left( \det \left( \frac{\partial z^\mu}{\partial x^\nu} \right) \right)^2 \times \det(\Omega_{\rho\sigma}) \neq 0$$

<sup>\*43</sup> ただし  $\det(\partial z^\mu / \partial x^\nu) \neq 0$  とする. さもなくば [1 次変換  $dz^\mu = (\partial z^\mu / \partial x^\nu) dx^\nu$  は非可逆であって, 1 対 1 の対応とならず ( $\text{rank}(\partial z^\mu / \partial x^\nu) < 2n$ )],  $x$  は局所座標にならない [25, p.516].

<sup>\*44</sup> 途中計算を補足すれば,

$$(dx^\mu \wedge dx^\nu)[v, \bullet] = \begin{vmatrix} dx^\mu[v] & dx^\mu[\bullet] \\ dx^\nu[v] & dx^\nu[\bullet] \end{vmatrix} = v^\mu dx^\nu - v^\nu dx^\mu, \quad (\because dx^\mu[v] = v^\mu)$$

$$\therefore \langle \Omega | v, \bullet \rangle = \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} (v^\mu dx^\nu - v^\nu dx^\mu) = \omega_{\mu\nu} v^\mu dx^\nu.$$

を満たすから\*45, 正則であり, 正準 2 形式 (127) は非退化である [25, p.516].

このため相空間はシンプレクティック多様体であり, そこで正準変数  $\{z^\mu\}$  はシンプレクティック変数と呼ばれる.

Lagrange 括弧 [3, p.301] [25, pp.316–317]

相空間の 2 次元の超曲面に導入されたパラメータ  $(\xi, \eta)$  に対して, Lagrange 括弧を

$$[\xi, \eta] = \frac{\partial z^\rho}{\partial \xi} \Omega_{\rho\sigma} \frac{\partial z^\sigma}{\partial \eta} = \frac{\partial p_i}{\partial \xi} \frac{\partial q^i}{\partial \eta} - \frac{\partial p_i}{\partial \eta} \frac{\partial q^i}{\partial \xi} \quad (129)$$

で定義する. 正準 2 形式に対して式 (128) で定義される  $\omega_{\mu\nu}$  は

$$\omega_{\mu\nu} = [x^\mu, x^\nu] \quad (130)$$

と表されることになる.

さて, Poisson 括弧と Lagrange 括弧は, その定義 (88), (129) より, ある種の逆数関係にあることが予想される. 実際, 相空間上の  $2N$  個の独立な関数  $f^1, f^2, \dots, f^{2N}$  を考えると, Poisson 括弧と Lagrange 括弧を要素とする  $2N \times 2N$  行列

$$P = (P^{\alpha\beta}) \equiv (\{f^\alpha, f^\beta\}), \quad L = (L_{\alpha\beta}) \equiv ([f^\alpha, f^\beta])$$

は互いに逆行列の関係にある:

$$P^{\alpha\beta} L_{\beta\gamma} = \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial z^\rho} \Omega^{\rho\sigma} \frac{\partial f^\beta}{\partial z^\sigma} \right) \left( \frac{\partial z^\mu}{\partial f^\beta} \Omega_{\mu\nu} \frac{\partial z^\nu}{\partial f^\gamma} \right) = \delta^\alpha_\gamma.$$

特に  $\{f^\alpha\}$  として一般の座標  $x = (x^1, x^2, \dots, x^{2N})$  (正準変数でなくても良い) をとると, これは行列

$$\Delta = (\Delta^{\alpha\beta}) \equiv (\{x^\alpha, x^\beta\}), \quad \omega \equiv \omega_{2N} = (\omega_{\alpha\beta}) = ([x^\alpha, x^\beta])$$

が逆の関係にあること

$$\Delta^{\alpha\beta} \omega_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma \quad \text{i.e.} \quad \Delta = \omega^{-1} \quad (131)$$

を意味する.

以上を踏まえ, 本節冒頭で予告した証明に移ろう.

■Dirac 括弧が  $\bar{M}$  上の Poisson 括弧であることの証明 以下,

- ギリシャ文字  $\mu, \nu, \rho, \sigma$  は  $1, \dots, 2N (= \dim M)$  を動く
- 添字  $k, l, m, n$  は  $1, \dots, 2R$  を動く ( $2R$  は第 2 種の拘束条件  $\xi^m = 0$  の数)
- 添字  $a, b, c$  は  $2R+1, \dots, 2N$  を動く ( $\dim \bar{M} = 2N - 2R$  個の値)

とする. また拘束関数  $\xi^1, \dots, \xi^{2R}$  と  $\bar{M}$  上の適当な局所座標  $\eta^{2R+1}, \dots, \eta^{2N}$  を合わせて,  $M$  の局所座標

$$x = (\xi, \eta), \quad (x^m = \xi^m, x^a = \eta^a)$$

(正準座標とは限らない) とする. [ $\xi^m = \text{const}$  が表す超曲面は相空間  $M$  にメッシュを張るから, 拘束関数  $\xi^m$  を座標に用いることができる. 特に部分空間  $\bar{M}$  は全ての  $\xi^m = 0$  で規定される.] さらに Poisson 括弧  $\{x^\mu, x^\nu\} \equiv \Delta^{\mu\nu}$  を要素とする行列  $\Delta_{2N} = (\Delta^{\mu\nu})$  を定義する. (その  $mn$  要素の部分は既に導入した  $\Delta_{2R} = (\Delta^{mn}) = (\{\xi^m, \xi^n\})$  である.)

\*45 ここで相空間の座標  $x$  は正準変数でなくても良い.

Poisson 括弧の作る行列  $\Delta_{2N}$  と Lagrange 括弧の作る行列  $\omega_{2N}$  は互いに逆行列の関係にあるから (式 (131)),  $\text{rank}\Delta_{2N} = 2N$  である. そして式 (131):  $\omega_{2N}\Delta_{2N} = I_{2N}$  の  $ab$  要素,  $an$  要素をとると

$$\begin{aligned}\omega_{a\mu}\Delta^{\mu b} &= \omega_{ac}\Delta^{cb} + \omega_{am}\Delta^{mb} = \delta_a^b, \\ \omega_{a\mu}\Delta^{\mu n} &= \omega_{ac}\Delta^{cn} + \omega_{am}\Delta^{mn} = 0\end{aligned}$$

となる. ここで  $\Delta_{2R} = (\Delta^{mn})$  が逆行列  $\Delta_{2R}^{-1}$  を持つこと [(D.2.2 節), および  $\Delta^{ln} = (\Delta_{2R})^{ln}$ ] に注意すると, 第 2 式から

$$\omega_{am} = \omega_{al}(\Delta_{2R})^{ln}(\Delta_{2R}^{-1})_{nm} = \omega_{al}\Delta^{ln}(\Delta_{2R}^{-1})_{nm} = -\omega_{ac}\Delta^{cn}(\Delta_{2R}^{-1})_{nm}$$

が得られ, これを第 1 式に代入すると

$$\omega_{ac}\{\Delta^{cb} - \Delta^{cn}(\Delta_{2R}^{-1})_{nm}\Delta^{mb}\} = \delta_a^b$$

が導かれる. このため  $2(N-R)$  次行列  $\omega_{2(N-R)} \equiv (\omega_{ab})$  も逆行列を持つ ( $\det\omega_{2(N-R)} \neq 0$ ). この行列  $\omega_{2(N-R)}$  の  $\bar{M}$  上での値を  $\bar{\omega}_{2(N-R)} \equiv \omega_{2(N-R)}|_{\xi=0} = (\bar{\omega}_{ab})$  とすると,  $\bar{\omega}_{2(N-R)}$  も逆行列

$$\bar{\omega}_{2(N-R)}^{-1} \quad \left( \text{その要素 } (\bar{\omega}_{2(N-R)}^{-1})^{ab} = (\Delta^{ab} - \Delta^{an}(\Delta_{2R}^{-1})_{nm}\Delta^{mb})|_{\xi=0} \right) \quad (132)$$

を持ち,  $\det\bar{\omega}_{2(N-R)} \neq 0$  である. したがって  $\bar{M}$  上の正準 2 形式

$$\Omega = \frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu}dz^\mu \wedge dz^\nu = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$$

から  $\bar{M}$  上に誘導された 2 形式

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2}\bar{\omega}_{ab}d\eta^a \wedge d\eta^b$$

は非退化である. しかも  $\bar{\Omega}$  は  $\Omega$  と同様, 閉形式である. このことは  $\bar{\Omega}$  が, 正準変数の  $\bar{M}$  の値  $\bar{z} = z(\xi=0, \eta)$  を用いて,  $\Omega$  と同じ形

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu}d\bar{z}^\mu \wedge d\bar{z}^\nu$$

と書けることから分かる. 以上より  $\bar{\Omega}$  は  $\bar{M}$  上のシンプレクティック形式である. これが証明したいことの 1 点目であった.

次に Dirac 括弧と簡約された相空間  $\bar{M}$  の関係を調べる. 一般の座標  $x = (x^1, x^2, \dots, x^{2N})$  を導入すると,  $\bar{M}$  上の関数  $f(z) = f(\xi(z), \eta(z)), g(z) = g(\xi(z), \eta(z))$  に対して Poisson 括弧と Lagrange 括弧の定義 (88), (129) は

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial z^\rho}\Omega^{\rho\sigma}\frac{\partial g}{\partial z^\sigma} = \frac{\partial f}{\partial x^\gamma}\left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial z^\rho}\Omega^{\rho\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial z^\sigma}\right)\frac{\partial g}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial f}{\partial x^\gamma}\Delta^{\gamma\delta}\frac{\partial g}{\partial x^\sigma}, \quad (133)$$

$$[f, g] = \frac{\partial z^\rho}{\partial f}\Omega_{\rho\sigma}\frac{\partial z^\sigma}{\partial g} = \frac{\partial x^\gamma}{\partial f}\left(\frac{\partial z^\rho}{\partial x^\gamma}\Omega_{\rho\sigma}\frac{\partial z^\sigma}{\partial x^\sigma}\right)\frac{\partial x^\sigma}{\partial g} = \frac{\partial x^\gamma}{\partial f}\omega_{\gamma\delta}\frac{\partial x^\sigma}{\partial g} \quad (134)$$

と書き換えられる (式 (130) に注意した) [25, p.317]. 式 (133) を用いると, Dirac 括弧 (121) は

$$\begin{aligned}\{f, g\}_D &= \{f, g\} - \{f, \xi^m\}(\Delta_{2R}^{-1})_{mn}\{\xi^n, g\} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\Delta^{\mu\nu}\frac{\partial g}{\partial x^\nu} - \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\Delta^{\mu\rho}\frac{\partial \xi^m}{\partial x^\rho}(\Delta_{2R}^{-1})_{mn}\frac{\partial \xi^n}{\partial x^\sigma}\Delta^{\sigma\nu}\frac{\partial g}{\partial x^\nu} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\Delta^{\mu\nu}\frac{\partial g}{\partial x^\nu} - \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\Delta^{\mu m}(\Delta_{2R}^{-1})_{mn}\Delta^{n\nu}\frac{\partial g}{\partial x^\nu} \quad \left( \because x = (\xi, \eta) \text{ より } \frac{\partial \xi^m}{\partial x^\rho} = \delta^m_\rho \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(\Delta^{\mu\nu} - \Delta^{\mu m}(\Delta_{2R}^{-1})_{mn}\Delta^{n\nu})\frac{\partial g}{\partial x^\nu}\end{aligned}$$

と表される. さらに最右辺において  $\mu, \nu = m, n$  の項は, 中括弧内が

$$\begin{aligned}\mu = m : \quad & \Delta^{m\nu} - \Delta^{mk}(\Delta_{2R}^{-1})_{kl}\Delta^{l\nu} = 0 \quad \text{for } \nu = n, b, \\ \nu = n : \quad & \Delta^{\mu n} - \Delta^{\mu k}(\Delta_{2R}^{-1})_{kl}\Delta^{ln} = 0 \quad \text{for } \mu = m, a\end{aligned}$$

となるので,

$$\{f, g\}_D = \frac{\partial f}{\partial \eta^a} (\Delta^{ab} - \Delta^{am} (\Delta_{2R}^{-1})_{mn} \Delta^{nb}) \frac{\partial g}{\partial \eta^b}$$

が得られる. よって Dirac 括弧の  $\bar{M}$  上での値は,  $\bar{f}(\eta) = f(\xi = 0, \eta), \bar{g}(\eta) = g(\xi = 0, \eta)$  と書くと

$$\{f, g\}_D|_{\xi=0} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \eta^a} (\bar{\omega}_{2(N-R)}^{-1})^{ab} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \eta^b} \quad (135)$$

と表される (式 (132) を考慮した). 他方, 式 (134) より  $\bar{M}$  上での Lagrange 括弧は

$$[\bar{f}, \bar{g}] = \frac{\partial \eta^a}{\partial \bar{f}} \bar{\omega}_{ab} \frac{\partial \eta^b}{\partial \bar{g}} \quad (136)$$

である. 上式 (135), (136) より,  $\bar{M}$  上に限定された Dirac 括弧は,  $\bar{M}$  上の Lagrange 括弧と逆数関係にあることが言える. これが証明したいことの 2 点目であった.

#### D.2.4 正準変数の導入 [25, pp.519–521]

本稿では証明を省略し, 結論だけを引用しよう.

以上の議論は一般の座標を用いたものであるが,  $\bar{M}$  が相空間であるから, 座標として正準変数 (シンプレクティック変数) を導入することができ, またその上での運動方程式も正準変数で表される (後略)

以上の議論は第 1 種の拘束量が存在しない場合のものであるが, 第 1 種の拘束量が存在する場合にも,  $\bar{M}$  が相空間で, ディラック括弧が  $\bar{M}$  上に限定されたポアソン括弧であることが示され, さらに  $\bar{M}$  に正準変数が導入できる.

結局, 第 2 種拘束条件  $\xi_m \approx 0$  ( $m = 1, 2, \dots, 2R$ ) が定める  $2(N - R)$  次元空間  $\bar{M} \subset M$  は簡約された相空間であり, 拘束系はその上での正準力学系と見ることができる.

## D.2.5 まとめ

- $f$  が第 1 種の量  $\leftrightarrow \{f, \phi^k\} = 0, \{f, \chi^l\} = 0$
- $f$  が第 2 種の量  $\leftrightarrow$  少なくとも 1 つの Poisson 括弧  $\neq 0$

1 次と 2 次の拘束量  $\phi^k, \chi^l$  を

- 第 1 種の拘束量  $(\{\phi^\sigma\}\{\chi^{\nu'}\})$
- 第 2 種の拘束量  $(\{\phi^j\}\{\chi^i\}) \rightarrow$  まとめて  $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{2R}$  と書ける

と分類できる。(可能な限り多くの  $\chi^l$  が第 1 種の量になるように, 2 次拘束量を  $\chi^l \rightarrow \chi^{l'}$  と再定義した。) ここで簡単のために

- 第 1 種の拘束量がない場合を考える.
- 拘束量はすべて時間  $t$  に陽に依らないと仮定する.

任意の物理量  $f(q, p, t)$  に対して, 拘束量 (仮定より第 2 種のみ) の 1 次結合を加えた

$$f_T = f - \{f, \xi^m\}(\Delta_{2R}^{-1})_{mn}\xi^n \quad (\Delta_{2R} \equiv (\{\xi^m, \xi^n\}))$$

を定義すると, これは  $\bar{M}$  上で  $f$  と一致する. そして  $\xi^m$  との Poisson 括弧は

$$\{f_T, \xi^m\} \approx 0$$

となる (Poisson 括弧の中でも  $\xi^m$  をゼロとおける). これは  $f_T$  の生成する  $\xi^n$  の変化率がゼロであることを意味するから, 我々は拘束条件  $\xi^m \approx 0$  を保存する関数  $f_T$  を選んだことになる. (実は全ハミルトニアン  $H_T$  は, そのような  $f_T$  の 1 例になっている.)

さて, こうして定めた  $M$  上の関数  $f_T, g_T$  に対して

$$\{f_T, g_T\} \approx \{f, \xi^n\}(\Delta_{2R}^{-1})_{nm}\{\xi^m, g\} \equiv \{f, g\}_D : \text{Dirac 括弧}$$

が成り立つ. ここで定義した Dirac 括弧については,

$$\{f, \xi^m\}_D = 0$$

が強い等式として成り立つ. (他方 Poisson 括弧は  $M$  全体で定義されているため, その中では  $\xi^m$  をゼロとおけない.) さらに Dirac 括弧を用いて運動方程式は

$$\frac{df}{dt} \approx \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}_D$$

と書ける (第 1 種拘束量がなければ). これらのことから, Dirac 括弧は  $\bar{M}$  上に限られた Poisson 括弧になっていることが示唆される.

実際, 第 1 種の拘束量が存在する場合にも,  $\bar{M}$  が (簡約された) 相空間で, Dirac 括弧が  $\bar{M}$  上に限定された Poisson 括弧であることが示され, さらに  $\bar{M}$  に正準変数が導入できる.



### D.3 第1種の拘束量とゲージ変換

#### D.3.1 ゲージ変換 [25, pp.521–523]

D.1節で見たように、全ハミルトニアン(110)には、整合性の条件を用いてもなお未定のまま残る乗数  $w_\sigma$  が含まれている。したがって同じ初期値  $(q, p)$  から出発しても、運動方程式(109)にしたがう時間発展では、後の時刻での  $(q, p)$  は  $w_\sigma$  に応じて様々な値をとり得る。これは同一の物理的状態を表す相空間の点がいくつも存在することを意味する。

そこで、同一の物理的状態に対応する異なる力学変数の間の関係を調べよう。与えられた力学量  $F(t) \equiv F(q(t), p(t))$  の初期時刻  $t = t_0$  における値を決めたとき、 $w_\sigma$  の2通りの値  $w_\sigma^1, w_\sigma^2$  に応じた  $F(t)$  の微小時間  $\delta t$  後の値  $F^1, F^2$  は、式(109),(110)より

$$F^i \approx F(t_0) + \delta t \{F(t_0), H' + w_\sigma^i \phi^\sigma(t_0)\} \quad (i = 1, 2)$$

と表される。よって

$$F^1 - F^2 \approx \delta t (w_\sigma^1(t_0) - w_\sigma^2(t_0)) \{F(t_0), \phi^\sigma(t_0)\}$$

が得られる。[ $F$  が時間に陽に依る場合にも、 $\partial F / \partial t$  の項は相殺するから、この結果に変わりはない。]これは同一の物理的状態に対応する  $F^1$  と  $F^2$  が、第1種の1次拘束量  $\phi^\sigma$  の生成する(1径数正準)変換で結び付いていることを意味する。もし物理的状態を変えない変換を広くゲージ変換と呼ぶならば、 $\phi^\sigma$  はゲージ変換の生成関数であると言える。

第1種の1次拘束量  $\phi^\sigma, \phi^\rho$  に対して、Poisson括弧  $\{\phi^\sigma, \phi^\rho\}, \{H', \phi^\sigma\}$  もゲージ変換を生成する。

■証明  $w_\sigma^1, w_\sigma^2$  に応じた2種類の全ハミルトニアン  $H^i_{\text{T}} = H' + w_\sigma^i \phi^\sigma$  ( $i = 1, 2$ ) を考えよう。物理量  $F$  の時刻  $t = 0$  での値が与えられているとき、

- これを  $H^1_{\text{T}}$  で微小時間  $t$  だけ発展させ(その結果を  $F^1(t)$  とする)、  
次いで  $H^2_{\text{T}}$  で微小時間  $t'$  だけ発展させた結果を  $F^{12}$  とする。
- これを  $H^2_{\text{T}}$  で微小時間  $t'$  だけ発展させ(その結果を  $F^2(t')$  とする)、  
次いで  $H^1_{\text{T}}$  で微小時間  $t$  だけ発展させた結果を  $F^{21}$  とする。

このとき  $F^{12}$  と  $F^{21}$  は同一の物理的状態に対応しなければならないことに注目する。

微小時間  $t, t'$  の2次までの近似で、差  $\Delta F = F^{12} - F^{21}$  を計算しよう。 $H^1_{\text{T}}$  による時間変化を考えると、Poisson括弧  $\{F, H^1_{\text{T}}\} (= \dot{F})$  もまた正準変数の関数なので、

$$\ddot{F} = \frac{d}{dt} \{F, H^1_{\text{T}}\} = \{\{F, H^1_{\text{T}}\}, H^1_{\text{T}}\}$$

が成り立つ。よって

$$F^1(t) \simeq F(0) + \dot{F}(0)t + \frac{1}{2} \ddot{F}(0)t^2 = F + \{F, H^1_{\text{T}}\}t + \frac{1}{2} \{\{F, H^1_{\text{T}}\}, H^1_{\text{T}}\}t^2$$

とできる。ただし  $F, H^1_{\text{T}}$  のように引数を省略した量は、 $t = 0$  で評価されているものと見なす。この結果を再利用すると、

$$\begin{aligned} F^{12} &\simeq F^1(t) + \{F^1(t), H^2_{\text{T}}(t)\}t' + \frac{1}{2} \{\{F^1(t), H^2_{\text{T}}(t)\}, H^2_{\text{T}}(t)\}t'^2 \\ &\simeq F + \{F, H^1_{\text{T}}\}t + \frac{1}{2} \{\{F, H^1_{\text{T}}\}, H^1_{\text{T}}\}t^2 + \{F + \{F, H^1_{\text{T}}\}t, H^2_{\text{T}} + \{H^2_{\text{T}}, H^1_{\text{T}}\}t\}t' + \frac{1}{2} \{\{F, H^2_{\text{T}}\}, H^2_{\text{T}}\}t'^2 \\ &\simeq F + \{F, H^1_{\text{T}}\}t + \{F, H^2_{\text{T}}\}t' + \frac{1}{2} \{\{F, H^1_{\text{T}}\}, H^1_{\text{T}}\}t^2 + \frac{1}{2} \{\{F, H^2_{\text{T}}\}, H^2_{\text{T}}\}t'^2 \\ &\quad + \{F, H^1_{\text{T}}\}, H^2_{\text{T}}\}tt' + \{F, \{H^2_{\text{T}}, H^1_{\text{T}}\}\}tt'. \end{aligned}$$

$F^{21}$  は上式最右辺で,  $H^1_{\text{T}}$  と  $H^2_{\text{T}}$ ,  $t$  と  $t'$  を入れ替えた式で与えられるので, 差  $\Delta F = F^{12} - F^{21}$  において  $tt'$  に比例する項以外は相殺し,

$$\begin{aligned}\Delta F &= \{\{F, H^1_{\text{T}}\}, H^2_{\text{T}}\}tt' + \{F, \{H^2_{\text{T}}, H^1_{\text{T}}\}\}tt' - \{\{F, H^2_{\text{T}}\}, H^1_{\text{T}}\}tt' - \{F, \{H^1_{\text{T}}, H^2_{\text{T}}\}\}tt' \\ &= [\{\{F, H^1_{\text{T}}\}, H^2_{\text{T}}\} + \{\{H^2_{\text{T}}, F\}, H^1_{\text{T}}\} + \{\{H^1_{\text{T}}, H^2_{\text{T}}\}, F\}]tt' + \{F, \{H^2_{\text{T}}, H^1_{\text{T}}\}\}tt'\end{aligned}$$

となる. 最右辺の  $[\dots]$  でまとめた 3 項は Jacobi の恒等式によって消えるから,

$$\Delta F \simeq \{F, \{H^2_{\text{T}}, H^1_{\text{T}}\}\}tt'$$

を得る. さらに

$$\begin{aligned}\{H^2_{\text{T}}, H^1_{\text{T}}\} &= \{H' + w_\sigma{}^2\phi^\sigma, H' + w_\rho{}^1\phi^\rho\} \\ &= w_\rho{}^1\{H', \phi^\rho\} + w_\sigma{}^2\{\phi^\sigma, H'\} + w_\rho{}^1w_\sigma{}^2\{\phi^\sigma, \phi^\rho\} \\ &= (w_\rho{}^1 - w_\rho{}^2)\{H', \phi^\sigma\} + w_\rho{}^1w_\sigma{}^2\{\phi^\sigma, \phi^\rho\}\end{aligned}$$

となるので,

$$\Delta F \simeq tt'(w_\rho{}^1 - w_\rho{}^2)\{F, \{H', \phi^\sigma\}\} + tt'w_\rho{}^1w_\sigma{}^2\{F, \{\phi^\sigma, \phi^\rho\}\}$$

が導かれる. ところが最初に述べたように,  $F^{12}$  と  $F^{21}$  は同一の物理的状態に対応するから, この結果は  $\{\phi^\sigma, \phi^\rho\}$  や  $\{H', \phi^\sigma\}$  がゲージ変換の生成関数であることを意味する. ( $w_\sigma{}^i$  は任意だから, 上式右辺の各項が独立なゲージ変換に対応する.)

### D.3.2 Dirac の予想 [25, pp.523–525]

まず一般に 2 つの第 1 種の量  $F, G$  について, Poisson 括弧  $\{F, G\}$  もまた第 1 種の量となることを証明する.

証明 1 次と 2 次の拘束量をまとめて  $\psi^i$  ( $i = 1, 2, \dots, r + r'$ ) と書くと, 第 1 種の量の定義より

$$\{F, \psi^i\} \approx 0, \quad \{G, \psi^i\} \approx 0.$$

したがって適当な  $(q, p)$  の関数  $f_j^i, g_j^i$  を用いて

$$\{F, \psi^i\} \approx f_j^i\psi^j, \quad \{G, \psi^i\} \approx g_j^i\psi^j$$

と書ける [式 (105) と同じ論法である]. すると

$$\begin{aligned}\{\{F, G\}, \psi^i\} &= \{\{F, \psi^i\}, G\} - \{\{G, \psi^i\}, F\} \quad (\because \text{Jacobi の恒等式}) \\ &= \{f_j^i\psi^j, G\} - \{g_j^i\psi^j, F\} \\ &= -f_j^i g_k^j \psi^k + g_j^i f_k^j \psi^k + \{f_j^i, G\}\psi^j - \{g_j^i, F\}\psi^j \approx 0\end{aligned}$$

となるので,  $\{F, G\}$  は第 1 種の量である.

ところで  $\phi^\sigma$  は第 1 種拘束量であり, また式 (112), (113) より  $H' = H + v_j\phi^j$  も第 1 種の量なので,  $\{\phi^\sigma, \phi^\rho\}$  や  $\{H', \phi^\sigma\}$  は第 1 種拘束量であることになる\*46.

[D.3.1 節ではこれらの Poisson 括弧  $\{\phi^\sigma, \phi^\rho\}, \{H', \phi^\sigma\}$  がゲージ変換を生成することを示した. しかるに]  $\{\phi^\sigma, \phi^\rho\}, \{H', \phi^\sigma\}$  は [第 1 種拘束量であるからと言って] 1 次の第 1 種拘束量  $\phi^\sigma$  だけの 1 次結合で表されるときは限らず,  $\phi^\sigma$  とは独立な新しいゲージ変換を生み出し得る.

\*46 第 1 種拘束量  $\phi^\sigma, H'$  はその定義より  $\{\phi^\sigma, \phi^\rho\} \approx 0, \{H', \phi^\sigma\} \approx 0$  を満たさなければならないので,  $\{\phi^\sigma, \phi^\rho\}$  や  $\{H', \phi^\sigma\}$  が拘束量であることまではすぐに分かる.

そこで、このような手続き [第 1 種拘束量や  $H'$  間の Poisson 括弧を作ること] を繰り返して得られる第 1 種拘束量の集まり (1 次の第 1 種拘束量  $\phi^j$  ( $j = 1, \dots, r - s$ ) と  $H'$  を含む) で、最小のもの  $G = \{\phi^l\}$  を考える ( $l = 1, \dots, G$ )<sup>\*47</sup>. この  $G$  がゲージ変換の生成関数の全体を特徴付け、ゲージ変換は

$$\Delta F = \varepsilon_l \{F, \phi^l\} \quad (137)$$

で与えられる ( $\varepsilon_l$  は無限小パラメータ). [D.3.1 節の議論を繰り返せば、次々と作られる  $\phi^l$  もゲージ変換の生成関数になると考えられる.]

全ハミルトニアン (110) を一般化して、

$$H_G \equiv H' + \sum \bar{w}_l \phi^l$$

をハミルトニアンとして用いても良い ( $\sum$  は  $G$  のすべての元についての和). [ $\bar{w}_l$  は  $(q, p)$  の関数であって良い (D.3.3 節).] ここでも  $G$  個の  $\bar{w}_l$  の不定性はゲージ変換の自由度に対応している. そこで  $\bar{M}$  上の点  $P$  とゲージ変換で結び付く、同じ状態を表す点の全体  $\bar{M}_P$  を考えると、それは  $P$  を通るゲージ軌道と呼ばれる、 $\bar{M}$  の  $G$  次元部分多様体となる.

**Dirac の予想** なお Dirac は  $G$  が第 1 種の拘束量の全体になってしまうと予想した. Dirac の予想は物理的に意味のある多くの例で実際に成り立っているが、Dirac の予想が成り立たない人工的な例も多く見つかっている.

### D.3.3 ゲージ固定 [25, pp.525–527]

物理的な状態が  $\bar{w}_l$  のとり方によらないならば、 $\bar{w}_l$  の関数形を適当に定めて良いことになる (ゲージ固定). これは同一の物理的な状態を表すゲージ軌道  $\bar{M}_P$  から、適当な代表点を 1 つ選び出すことにあたる.

そこで“外から”新しい拘束条件

$$\gamma^n(q, p) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, G') \quad (138)$$

を付け加えて、ゲージ固定を行うことを考える. (それは物理量 (観測可能量) に対しては何の制約にもならない.) 上式 (138) の規定する超曲面  $\Gamma$  がすべてのゲージ軌道  $\bar{M}_P$  とそれぞれ唯一の点で交わるならば、 $\Gamma$  と  $\bar{M}$  の交わりで定義される超曲面  $\bar{M}_\Gamma$  は各  $\bar{M}_P$  の点を 1 つずつしか含まないから、ゲージを固定できたことになる (図 46 参照). このようなことが可能であるためには、式 (138) の個数は  $G' = G$  でなければならない.

$G' = G$  の証明 まず  $\Gamma$  はすべての  $\bar{M}_P$  と交わるから、 $\bar{M}$  上の任意の点  $(q, p)$  は適当なゲージ変換で  $\Gamma$  上の点に移せる. ところがゲージ変換 (137) の独立にとれるパラメータは  $G$  個だから、その自由度を用いて  $G'$  個の  $\Gamma$  の方程式 (138) を満たせるためには、 $G' \leq G$  でなければならない.

一方、 $\Gamma$  は各  $\bar{M}_P$  と唯一の点で交わっているから、 $\Gamma$  に沿ったゲージ変換は恒等変換しかあり得ない.  $\phi^l$  の生成するゲージ変換  $(q, p) \rightarrow (q', p')$  が  $\Gamma$  に沿っているならば、 $\gamma^n(q, p) = \gamma^n(q', p') = 0$  より  $\gamma^n$  の変化量はゼロでなければならない ( $\gamma^n$  の保存):

$$\varepsilon_l \{\gamma^n, \phi^l\} = 0. \quad (n = 1, \dots, G', l \text{ は } 1, \dots, G \text{ で和をとる}) \quad (139)$$

そのようなゲージ変換が恒等変換に限られることは、このとき

$$\varepsilon_l = 0 \quad (l = 1, \dots, G) \quad (140)$$

<sup>\*47</sup> ただしそれらの要素は Poisson 括弧で閉じている、すなわち

$$\{\phi^l, \phi^m\} = c^{lm}_n \phi^n, \quad \{H', \phi^l\} = h^{lm}_n \phi^n$$

を満たすものとする.

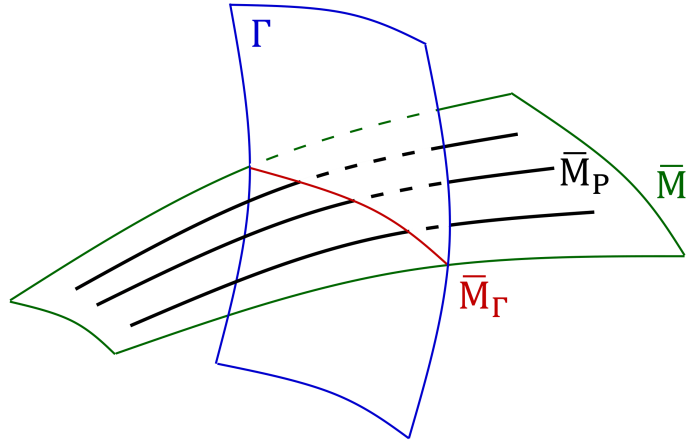


図 46  $\Gamma$  はすべてのゲージ軌道  $\bar{M}_P$  とそれぞれ唯一の点で交わる

となることを意味する。よって

$$(\text{方程式 (139) の個数 } G') \geq (\text{未知数 } \varepsilon_i \text{ の個数 } G)$$

でなければならない。これと先の  $G' \leq G$  とより、 $G' = G$  である。

式 (139) から式 (140) が導かれるためには、 $G$  次正方行列

$$D = (D^{lm}) = (\{\gamma^l, \phi^m\})$$

は正則でなければならない ( $\det D \neq 0$ )。そこで整合性の条件

$$0 \approx \dot{\gamma}^l = \{\gamma^l, H_G\} = \{\gamma^l, H'\} + D^{lm} \bar{w}_m \quad (141)$$

から未定乗数を

$$\bar{w}_l = -(D^{-1})_{lm} \{\gamma^m, H'\} \quad (l = 1, \dots, G)$$

と定めれば、式 (141) は強い等式として満たされ、それ以上新しい拘束条件は現れない。

注意  $\gamma^l$  に対する制約  $\det D \neq 0$  はあくまで、 $\Gamma$  が  $\bar{M}_P$  と唯一の点で交わるための必要条件であって、有限ゲージ変換で結ばれる 2 つの点とともに式 (138) を満たす可能性を排除できない。よってここでは“少なくとも局所的にはゲージが固定された”と述べるのが正確である。

## 付録 E 拘束系としての電磁場 (QED)

ここでは 4.3 節で示した自由電磁場の拘束系としての取り扱い, 特に

- $\dot{\pi}^0 = 0 \rightarrow \partial_a E^a = 0$
- $\{G(\lambda), H\} = 0$

を, 量子電磁力学 (QED) の場合へと一般化し, Dirac 場と相互作用する電磁場を想定してまとめる. 拘束系の一般的な取り扱いについては, 付録 D を参照.

### E.1 量子電磁力学 (QED)

■QED の Lagrangian 密度 電磁ポテンシャル (または単に電磁場) を  $A^\mu$ , 電磁テンソルを  $F_{\mu\nu}$  と書く. QED の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \sum_l \bar{\psi}_l (i\partial\!\!\!/ - m_l) \psi_l + e \sum_l \bar{\psi}_l \mathbf{A} \psi_l - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

で与えられる ( $l$  は荷電レプトンに関する和であり, 中性レプトンは考察の対象から除く). ただし電磁気学の単位系として Heaviside 単位系を用いている.  $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  は周知の自由電磁場項である [7, p.78]. Dirac 場を含む項は自由 Dirac 場の Lagrangian 密度:  $\mathcal{L} = \sum_l \bar{\psi}_l (i\partial\!\!\!/ - m_l) \psi_l$  において, 極小置換

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu \quad (142)$$

を行うと得られる. 言い換えると, この  $D_\mu$  を用いて QED の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \sum_l \bar{\psi}_l (i\mathcal{D} - m_l) \psi_l - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (143)$$

と書ける.

■ゲージ不変性 電磁ポテンシャルを  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$  と変化させても導かれる電磁場  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  は変化しない [7, p.56]. また電磁場のゲージ変換  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$  と同時に Dirac 場に局所的な位相変換

$$\psi_l(x) \rightarrow \psi_l(x) e^{ief(x)}, \quad \bar{\psi}_l(x) \rightarrow \bar{\psi}_l(x) e^{-ief(x)}$$

を施せば Lagrangian 密度 (143) は不変に留まる (この位相変換が局所的と呼ばれるのは, 位相  $\pm ef(x)$  が  $x$  に依存するからである). 逆に言えば, Dirac 場の局所的位相変換に対して不変な Lagrangian 密度を得るには  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$  と変換するゲージ場  $A_\mu$  を導入して, 極小置換  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu$  を施せば良い (E.2 節参照) [14, pp.83-84, p.141] [15, pp.218-219].

特に  $f(x)$  が  $x$  に依らない定数  $\varepsilon$  であるような大域的位相変換に対して Lagrangian 密度 (143) が不変であることから,

$$s^\alpha(x) = -e \sum_l \bar{\psi}_l(x) \gamma^\alpha \psi_l(x) \quad (144)$$

を電流密度とするような電荷に対する保存則 (連続の式)

$$\partial_\alpha s^\alpha = 0 \quad (145)$$

が導かれる (E.2 節参照) [14, p.70].

■QED の Hamiltonian 密度 Dirac 場  $\psi_l$ , 電磁場  $A_\mu$  に共役な場

$$\begin{aligned}\pi_{\psi_l} &\equiv -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi_l)} = \bar{\psi}_l i\gamma^0 = i\psi_l^\dagger, \\ \pi^\mu &\equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu} = \begin{cases} 0 & (\mu = 0) \\ -F^{0i} & (\mu = i = 1, 2, 3) \end{cases}\end{aligned}\quad (146)$$

を用いて [14, p.69] [15, p.211,p.225], Hamiltonian は

$$H = \int \mathcal{H} d^3x, \quad \text{Hamiltonian 密度: } \mathcal{H} = \sum_l \pi_{\psi_l} \dot{\psi}_l + \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}$$

で定義される\*48. ただし  $\dot{A}^\mu$  は式 (146) を用いて共役な場  $\pi^\mu$  で表されており, 具体的には

$$\mathcal{H} = \sum_l (i\psi_l^\dagger) \dot{\psi}_l - \sum_l \bar{\psi}_l (i\partial\!\!\!/ - m_l) \psi_l - e \sum_l \bar{\psi}_l \mathbf{A} \psi_l - \frac{1}{2} \pi_k \pi^k + \pi^k \partial_k A_0 + \frac{1}{4} F_{kl} F^{kl} \quad (147)$$

である (ラテン文字  $k, l, \dots$  は空間成分 1,2,3 を動く, E.2 節参照) [15, p.225].

## E.2 量子電磁力学 (QED) の Lagrangian 密度 (補足)

■ゲージ不変性 (補足) E.1 節で述べた QED の Lagrangian 密度 (143) のゲージ不変性を確かめる. 電磁テンソル  $F_{\mu\nu}$  は, 従って Lagrangian 密度 (143) における自由電磁場の項  $-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$  はゲージ変換  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$  に対して不変である:

$$F'_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu f) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu f) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}.$$

そこで自由 Dirac 場の項  $\mathcal{L}_0 \equiv \sum_l \bar{\psi}_l (i\partial\!\!\!/ - m_l) \psi_l$  と相互作用項  $\mathcal{L}_I \equiv e \sum_l \bar{\psi}_l \mathbf{A} \psi_l$  に対して  $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$  の不変性を示せば十分である. ゲージ変換

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f, \quad \psi_l \rightarrow \psi_l e^{ief}, \quad \bar{\psi}_l \rightarrow \bar{\psi}_l e^{-ief} \quad (148)$$

に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &\rightarrow \sum_l (\bar{\psi}_l e^{-ief})(i\partial\!\!\!/ - m_l)(\psi_l e^{ief}) = \mathcal{L}_0 + \sum_l \bar{\psi}_l i(e\partial\!\!\!/ f) \psi_l = \mathcal{L}_0 - e \sum_l \bar{\psi}_l (\partial\!\!\!/ f) \psi_l, \\ \mathcal{L}_I &\rightarrow e \sum_l (\bar{\psi}_l e^{-ief})(\mathbf{A} + \partial\!\!\!/ f)(\psi_l e^{ief}) = \mathcal{L}_I + e \sum_l \bar{\psi}_l (\partial\!\!\!/ f) \psi_l\end{aligned}$$

だから  $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$  は不変である.

次に電荷保存則 (145) を導く.

一般に場  $\phi_r(x)$  の変化  $\phi_r(x) \rightarrow \phi_r(x) + \delta\phi_r(x)$  の下で Lagrangian 密度  $\mathcal{L}$  が不変であるとき,

$$f^\alpha \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)} \delta\phi_r \quad (149)$$

\*48  $\bar{\psi}_l$  は  $\psi_l$  に共役な場に当たるので ( $\pi_{\psi_l} = i\psi_l^\dagger$ ), これを  $\psi_l$  とは別にもう 1 種類の場と考えて, Hamiltonian 密度の式に  $\sum_l \pi_{\bar{\psi}_l} \dot{\bar{\psi}}_l$  を加える必要はないだろう.  $\sum_l \pi_{\bar{\psi}_l} \dot{\bar{\psi}}_l$  の項を考えたとしても,  $\pi_{\bar{\psi}_l} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\bar{\psi}_l)} = 0$  により得られる Hamiltonian 密度は変わらない.

は連続の式  $\partial_\alpha f^\alpha = 0$  を満たし、保存する流れ (4 元流束密度) と呼ばれる:

$$\begin{aligned} 0 = \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} \delta\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)} \delta(\partial_\alpha\phi_r) \\ &= \left( \partial_\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)} \right) \delta\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)} \delta(\partial_\alpha\phi_r) \\ &\quad \left( \because \text{Euler-Lagrange 方程式 } \partial_\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} = 0 \right) \\ &= \partial_\alpha f^\alpha. \end{aligned}$$

以上、場の種類  $r$  についても和をとる [14, pp.37–38].

式 (148) で  $f$  を無限小の定数  $\varepsilon$  としたゲージ変換

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A_\mu & \therefore \delta A_\mu &= 0, \\ \psi_l &\rightarrow e^{i\varepsilon}\psi_l \simeq (1+i\varepsilon)\psi_l & \therefore \delta\psi_l &= i\varepsilon\psi_l, \\ \bar{\psi}_l &\rightarrow e^{-i\varepsilon}\bar{\psi}_l \simeq (1-i\varepsilon)\bar{\psi}_l & \therefore \delta\bar{\psi}_l &= -i\varepsilon\bar{\psi}_l \end{aligned}$$

に対して Lagrangian 密度 (143) は不変である.

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\psi_l)} = i\bar{\psi}_l\gamma^\alpha, \quad \delta A_\mu = 0$$

に注意すると保存する流れ (149) は

$$f^\alpha = \sum_l (i\bar{\psi}_l\gamma^\alpha)(i\varepsilon\psi_l) = -\varepsilon \sum_l \bar{\psi}_l\gamma^\alpha\psi_l$$

となるので\*49,

$$s^\alpha \equiv -e \sum_l \bar{\psi}_l\gamma^\alpha\psi_l$$

は連続の式  $\partial_\alpha s^\alpha = 0$  を満たす.

■QED の Hamiltonian 密度 (補足) E.1 節における Dirac 場  $\psi_l$ , 電磁場  $A^\mu$  に共役な場の式 (146) を確かめる.  $\psi_l$  に共役な場  $\pi_{\psi_l}$  の定義式 (146) における Dirac スピノル場による微分は, スピノル添字を  $\alpha, \beta, \dots$  と明記すると  $(\pi_{\psi_l})_\alpha \equiv -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi_l)_\alpha}$  を意味する. また Grassmann 場  $(\bar{\psi}_l)_\beta, (\psi_l)_\gamma$  が反交換することに注意すると, 左微分の約束に従い

$$(\pi_{\psi_l})_\alpha = -\frac{\partial}{\partial(\partial_0\psi_l)_\alpha} \{ (\bar{\psi}_l)_\beta i(\gamma^0)_{\beta\gamma} \partial_0(\psi_l)_\gamma \} = \frac{\partial(\partial_0\psi_l)_\gamma}{\partial(\partial_0\psi_l)_\alpha} (\bar{\psi}_l)_\beta i(\gamma^0)_{\beta\gamma} = i(\bar{\psi}_l)_\beta (\gamma^0)_{\beta\alpha} = i(\psi_l^\dagger)_\alpha$$

を得る. さらに

$$\pi^\lambda \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

において,

$$F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}) = (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu}) \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} F_{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} F_{\alpha\beta}$$

\*49  $\bar{\psi}_l$  は  $\psi_l$  に共役な場に当たるので  $(\pi_{\psi_l})_\alpha = i\psi_l^\dagger$ , 保存する流れの式 (149) においてこれを  $\psi_l$  とは別にもう 1 種類の場  $\phi_r$  として考慮する必要はないだろう. 考慮した場合にも  $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\psi_l)} = 0$  なのでこの結果に変わりはない.

に注意すると

$$\begin{aligned}\pi^\lambda &= -2 \times \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} F_{\mu\nu} \right\} F^{\mu\nu} = -2 \times \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \right\} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= -2 \times \frac{1}{4} (\delta^0_\mu \delta^\lambda_\nu - \delta^0_\nu \delta^\lambda_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= -(\partial^0 A^\lambda - \partial^\lambda A^0) = -F^{0\lambda}\end{aligned}$$

となるので、電磁場  $A^\mu$  に共役な場の表式 (146):  $\pi^\mu = -F^{0\mu}$  が導かれる。

電磁場  $A_\mu$  の場合と異なり、Grassmann 場  $\psi_l$  に共役な場  $\pi_{\psi_l}$  が式 (146):  $\pi_{\psi_l} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_l}$  のように負号の付く形で定義されているのは次の事情による [15, pp.94–95]。すなわち Hamiltonian 密度を

$$\mathcal{H}[\psi_l, \pi_{\psi_l}, A_\mu, \pi^\mu] = \sum_l \pi_{\psi_l} \dot{\psi}_l + \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}[\psi_l, \dot{\psi}_l, A_\mu, \dot{A}_\mu]$$

のように  $\pi_{\psi_l}$  が  $\dot{\psi}_l$  の左に置かれる形で定義したため、 $\psi_l, \dot{\psi}_l$  の変化  $\psi_l \rightarrow \psi_l + \delta\psi_l, \dot{\psi}_l \rightarrow \dot{\psi}_l + \delta\dot{\psi}_l$  に伴う  $\pi_{\psi_l}, \mathcal{H}$  の変化量  $\delta\pi_{\psi_l}, \delta\mathcal{H}$  に対して

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{H} &= \sum_l (\delta\pi_{\psi_l}) \dot{\psi}_l + \sum_l \pi_{\psi_l} \delta\dot{\psi}_l - \sum_l \left\{ (\delta\psi_l) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_l} + (\delta\dot{\psi}_l) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_l} \right\} \\ &= \sum_l (\delta\pi_{\psi_l}) \dot{\psi}_l - \sum_l (\delta\psi_l) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_l} - \sum_l (\delta\dot{\psi}_l) \left( \pi_{\psi_l} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_l} \right) \quad (\because \pi_{\psi_l} \delta\dot{\psi}_l = -(\delta\dot{\psi}_l) \pi_{\psi_l})\end{aligned}$$

となる。よって  $\pi_{\psi_l} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_l}$  とすれば  $\mathcal{H}$  が  $\psi_l, \pi_{\psi_l}$  (および  $A_\mu, \pi^\mu$ ) の関数であり、 $\dot{\psi}_l$  の関数ではないことが保証される。一方、Hamiltonian 密度を

$$\mathcal{H}[\psi_l, \pi_{\psi_l}, A_\mu, \pi^\mu] = \sum_l \dot{\psi}_l \pi_{\psi_l} + \dot{A}_\mu \pi^\mu - \mathcal{L}[\psi_l, \dot{\psi}_l, A_\mu, \dot{A}_\mu]$$

のように  $\pi_{\psi_l}$  が  $\dot{\psi}_l$  の右に置かれる形で定義した場合

$$\delta\mathcal{H} = \sum_l \dot{\psi}_l \delta\pi_{\psi_l} - \sum_l \delta\psi_l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_l} + \sum_l (\delta\dot{\psi}_l) \left( \pi_{\psi_l} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_l} \right)$$

となるので、 $\mathcal{H}$  が  $\dot{\psi}_l$  に依存しないためには  $\pi_{\psi_l} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_l}$  と定義すれば良い [27, p.41]。

E.1 節に記した QED の Hamiltonian 密度の式 (147) を導く。以下、ラテン文字  $k, l, \dots$  は空間成分 1, 2, 3 を動くものとする。Lagrangian 密度の式 (143)、共役な場の式 (146) より Hamiltonian 密度は

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \sum_l \pi_{\psi_l} \dot{\psi}_l + \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L} \\ &= \sum_l (i\psi_l^\dagger) \dot{\psi}_l + \pi^k \dot{A}_k - \sum_l \bar{\psi}_l (i\cancel{\partial} - m_l) \psi_l - e \sum_l \bar{\psi}_l \mathbf{A} \psi_l + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\end{aligned}$$

となる。最右辺に現れる  $\dot{A}_\mu$  を  $\pi^\mu$  で表すと

$$\begin{aligned}\pi^k \dot{A}_k &= \pi^k (-\pi_k + \partial_k A_0), \quad (\because \text{式 (146)}) \\ \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} F_{0k} F^{0k} + \frac{1}{4} F_{kl} F^{kl} \quad (\because F_{k0} F^{k0} = F_{0k} F^{0k}) \\ &= \frac{1}{2} \pi_k \pi^k + \frac{1}{4} F_{kl} F^{kl} \quad (\because \text{式 (146)})\end{aligned}$$



なので, Hamiltonian 密度の式 (147):

$$\mathcal{H} = \sum_l (i\psi_l^\dagger)\dot{\psi}_l - \sum_l \bar{\psi}_l(i\partial\!\!\!/ - m_l)\psi_l - e \sum_l \bar{\psi}_l A \psi_l - \frac{1}{2}\pi_k\pi^k + \pi^k\partial_k A_0 + \frac{1}{4}F_{kl}F^{kl}$$

を得る [15, p.225].

### E.3 電磁場の拘束条件

QED の Lagrangian 密度 (143) から導かれる電磁場に共役な場  $\pi^\mu$  には拘束条件 (146):

$$\pi^0 = 0$$

が課せられる. よって式 (147) の Hamiltonian 密度には  $\lambda(y)$  を未定乗数として  $\lambda(y)\pi^0(y)$  を加えるだけの不定性がある:

$$\tilde{H} \equiv H + \int d^3y \lambda(y)\pi^0(y). \quad (150)$$

さらに拘束条件 (146):  $\pi^0 = 0$  は各時刻で成り立つから  $\dot{\pi}^0 = 0, \ddot{\pi}^0 = 0, \dots$  でなければならず, 正準方程式を用いて時間微分を計算するとさらなる拘束条件

$$\partial_k\pi^k = -e \sum_l \psi_l^\dagger\psi_l$$

が見出される (E.3.1 節参照). ただしラテン文字  $k, l, \dots$  は空間成分 1, 2, 3 を動く (以下同じ). 以上の拘束条件を

$$\phi_1 \equiv \pi^0 = 0, \quad \phi_2 \equiv \partial_k\pi^k + e \sum_l \psi_l^\dagger\psi_l = 0$$

と書くと, 式 (147) の Hamiltonian 密度には  $\lambda^1(y), \lambda^2(y)$  を未定乗数として  $\lambda^j(y)\phi_j(y)$  を加えるだけの不定性がある:

$$H_{\text{tot}} \equiv H + \int d^3y \lambda^j(y)\phi_j(y). \quad (151)$$

電磁場の満たすゲージ条件を決めると未定乗数  $\lambda^j(y)$  を, 従って Hamiltonian を定めることができる. これは電磁場の時間発展が, 考えている電磁場の満たすゲージ条件に応じて定まることを意味する. ここでは初めに, Coulomb 条件

$$\varphi_1 \equiv A_0 = 0, \quad \varphi_2 \equiv \partial^k A_k = 0 \quad (152)$$

を満たす電磁場を考える (このとき実際に未定乗数  $\lambda^j(y)$  が定まることを E.3.1 節で示す).

以上の拘束条件をまとめて書くと

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\equiv (\{A_0(\mathbf{x}, t)\}, \{\partial^k A_k(\mathbf{x}, t)\}), \\ \phi(t) &\equiv \left( \{\pi^0(\mathbf{x}, t)\Delta^3x\}, \left\{ \left( \partial_l\pi^l(\mathbf{x}, t) + e \sum_l \psi_l^\dagger(\mathbf{x}, t)\psi_l(\mathbf{x}, t) \right) \Delta^3x \right\} \right), \\ \chi(t) &\equiv (\varphi(t), \phi(t)) = 0 \end{aligned} \quad (153)$$

となる. ただし  $\{\cdot\}$  は空間を体積要素  $\Delta^3x$  に分割したときの, 体積要素の中心を成す格子点  $\mathbf{x}$  についての集合を表す [15, pp.225–226, pp.231–232] [28, pp.134–138].

Dirac 場と Dirac 場に共役な場に加えて,

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \equiv (\{A_\mu(\mathbf{x}, t)\}, \{\pi^\mu(\mathbf{x}, t)\Delta^3 x\})$$

を正準変数にとる. ただし  $\{\cdot\}$  は  $\mu = 0, 1, 2, 3$  および格子点  $\mathbf{x}$  についての集合を表す<sup>\*50</sup>. そして拘束条件量  $\phi(t)$  を座標変数  $\mathbf{q}'(t)$  にとり ( $\mathbf{q}'(t) \equiv \phi(t)$ ), これに共役な運動量を  $\mathbf{p}'$  と書くと, 拘束条件の下で独立な変数を  $(\mathbf{q}^*, \mathbf{p}^*)$  として点  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  の運動は

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\mathbf{q}^*, \mathbf{q}' = 0, \mathbf{p}^*, \mathbf{p}' = \mathbf{p}'(\mathbf{q}^*, \mathbf{p}^*))$$

に制約されると見て良い [28, pp.139–141].

### E.3.1 電磁場の拘束条件 (補足)

E.3 節で述べたように,  $\dot{\pi}^0 = 0, \ddot{\pi}^0 = 0, \ddot{\pi}^0 = 0, \dots$  から拘束条件  $\partial_k \pi^k = -e \sum_l \psi_l^\dagger \psi_l$  が導かれることを示す. 時間に陽に依らない量  $f$  の時間微分は Poisson 括弧を用いて

$$\dot{f} = \{f, H\}_P$$

と書ける [12, p.171]. ここで格子点  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$  を中心とする各体積要素  $\Delta^3 x$  が無限小であると想定すると  $\frac{\delta_{ij}}{\Delta^3 x} = \delta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$  なので [14, p.35], 正準変数間の Poisson 括弧  $\{q_i, p_j\}_P = \delta_{ij}$ , etc [12, p.172] は

$$\begin{aligned} \{A_\mu(\mathbf{x}_i, t), \pi^\nu(\mathbf{x}_j, t)\Delta^3 x\}_P &= \delta^\nu_\mu \delta_{ij} = \delta^\nu_\mu \delta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)\Delta^3 x \\ \{A_\mu(\mathbf{x}_i, t), A_\nu(\mathbf{x}_j, t)\}_P &= \{\pi^\mu(\mathbf{x}_i, t)\Delta^3 x, \pi^\nu(\mathbf{x}_j, t)\Delta^3 x\}_P = 0 \end{aligned}$$

<sup>\*50</sup> 体積要素  $\Delta^3 x$  を付けて  $\mathbf{p}$  の成分を定義するとこれは  $A_\mu$  を力学変数と見たときの一般化運動量の次元

$$[\pi^\mu \Delta^3 x] = \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} \Delta^3 x \right] = \frac{[L]}{[A_\mu]}$$

を持ち, さらに格子点についての和  $\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \sum_{\mathbf{x}} \Delta^3 x \pi^\mu \dot{A}_\mu$  を体積積分  $\int d^3 x \pi^\mu \dot{A}_\mu$  に置き換えることができる.

となる<sup>\*51\*52</sup>. これと Poisson 括弧の性質 (154) を用いると<sup>\*53</sup>, 式 (150) の  $\tilde{H}$  に対して

$$\begin{aligned}
0 = \dot{\pi}^0(x) &= \{\pi^0(x), \tilde{H}(x^0)\}_P \\
&= - \int d^3y \left\{ \pi^0(x), e \sum_l \bar{\psi}_l(y) \gamma^0 A_0(y) \psi_l(y) + (\partial_k \pi^k(y)) A_0(y) \right\}_P \quad (\text{ただし } y^0 = x^0 \text{ とする}) \\
&= \int d^3y \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left( e \sum_l \psi_l^\dagger(y) \psi_l(y) + \partial_k \pi^k(y) \right) \\
&= e \sum_l \psi_l^\dagger(x) \psi_l(x) + \partial_k \pi^k(x)
\end{aligned}$$

となるから  $\partial_k \pi^k = -e \sum_l \psi_l^\dagger \psi_l$  を得る. ただし Hamiltonian 密度 (147) における  $\pi^k \partial_k A_0$  の項は部分積分して  $-(\partial_k \pi^k) A_0$  とした. 共役な場の式 (146):  $\pi^k = -F^{0k}$  より左辺は  $\partial_k \pi^k = \nabla \cdot \mathbf{E}$  なので, 右辺を電荷密度  $\rho$  と解釈すればこれは Gauss の法則  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$  である [15, p.226] [28, pp.135–136].

次に条件  $\dot{\pi}^0 = 0$  を考える.

$$\begin{aligned}
\dot{\pi}^0(x) &= \partial_0 \left( e \sum_l \psi_l^\dagger(x) \psi_l(x) + \partial_k \pi^k(x) \right) \\
&= \partial_0 \left( e \sum_l \bar{\psi}_l(x) \gamma^0 \psi_l(x) \right) + \{\partial_k \pi^k(x), \tilde{H}(x^0)\}_P \\
&= \partial_0 \left( e \sum_l \bar{\psi}_l(x) \gamma^0 \psi_l(x) \right) + \int d^3y \left\{ \partial_k \pi^k(x), -e \sum_l \bar{\psi}_l(y) \gamma^m A_m(y) \psi_l(y) + \frac{1}{4} F_{mn}(y) F^{mn}(y) \right\}_P \\
&\quad (\text{ただし } y^0 = x^0 \text{ とする}) \\
&= \partial_0 \left( e \sum_l \bar{\psi}_l(x) \gamma^0 \psi_l(x) \right) + \partial_k \int d^3y \left\{ \pi^k(x), -e \sum_l \bar{\psi}_l(y) \gamma^m A_m(y) \psi_l(y) + \frac{1}{4} F_{mn}(y) F^{mn}(y) \right\}_P
\end{aligned}$$

<sup>\*51</sup> Dirac 場による微分の項は Poisson 括弧に寄与しない. 以下, 同様.

<sup>\*52</sup> 文献 [15, p.183] では場の理論における Poisson 括弧を

$$\{F[\phi, \pi], G[\phi, \pi]\}_P \equiv \int d^3x \left\{ \frac{\delta F[\phi, \pi]}{\delta \phi(x)} \frac{\delta G[\phi, \pi]}{\delta \pi(x)} - \frac{\delta F[\phi, \pi]}{\delta \pi(x)} \frac{\delta G[\phi, \pi]}{\delta \phi(x)} \right\}$$

で定義しており, このとき

$$\{\phi(x), \pi(y)\}_P = \int d^3z \left\{ \frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(z)} \frac{\delta \pi(y)}{\delta \pi(z)} - \frac{\delta \phi(x)}{\delta \pi(z)} \frac{\delta \pi(y)}{\delta \phi(z)} \right\} = \int d^3z \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{z}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

となつて ( $x^0 = y^0$ ) [15, p.314], 正準交換関係が導かれることと整合している.

<sup>\*53</sup>  $q, p, t$  の任意の関数  $f, g$  に対して Poisson 括弧を

$$\{f, g\}_P = \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right)$$

と定義する. ここから直ちに Poisson 括弧が次の性質を満たすことが分かる.

$$\begin{cases} \{f, g\}_P = -\{g, f\}_P \\ \{f, c\}_P = 0 \\ \{f, a g_1 + b g_2\}_P = a \{f, g_1\}_P + b \{f, g_2\}_P \\ \{f, g_1 g_2\}_P = g_1 \{f, g_2\}_P + \{f, g_1\}_P g_2 \end{cases} \quad (154)$$

ただし  $a, b, c$  は定数,  $g_1, g_2$  は  $q, p, t$  の任意の関数である [12, pp.171–172].

である ( $\partial_k$  が時空点  $x$  の空間座標による微分であることに注意した). 最右辺において

$$\begin{aligned}\partial_k \int d^3y \left\{ \pi^k(x), -e \sum_l \bar{\psi}_l(y) \gamma^m A_m(y) \psi_l(y) \right\}_P &= \partial_k \int d^3y \left( \delta^k_m \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) e \sum_l \bar{\psi}_l(y) \gamma^m \psi_l(y) \right) \\ &= \partial_k \left( e \sum_l \bar{\psi}_l(x) \gamma^k \psi_l(x) \right)\end{aligned}$$

であり電荷保存則 (145) より

$$\begin{aligned}\partial_0 \left( e \sum_l \bar{\psi}_l(x) \gamma^0 \psi_l(x) \right) + \partial_k \int d^3y \left\{ \pi^k(x), -e \sum_l \bar{\psi}_l(y) \gamma^m A_m(y) \psi_l(y) \right\}_P \\ = \partial_0 \left( e \sum_l \bar{\psi}_l(x) \gamma^0 \psi_l(x) \right) + \partial_k \left( e \sum_l \bar{\psi}_l(x) \gamma^k \psi_l(x) \right) = \partial_\mu \left( e \sum_l \bar{\psi}_l(x) \gamma^\mu \psi_l(x) \right) = 0\end{aligned}$$

となる. よって Poisson 括弧の性質 (154) を用いると

$$\begin{aligned}\ddot{\pi}^0(x) &= \frac{1}{4} \partial_k \int d^3y \{ \pi^k(x), F_{mn}(y) F^{mn}(y) \}_P \\ &= \frac{1}{4} \partial_k \int d^3y ( \{ \pi^k(x), F_{mn}(y) \}_P F^{mn}(y) + F_{mn}(y) \{ \pi^k(x), F^{mn}(y) \}_P ) \\ &= \frac{1}{2} \partial_k \int d^3y \{ \pi^k(x), F_{mn}(y) \}_P F^{mn}(y) \\ &= \frac{1}{2} \partial_k \int d^3y ( \{ \pi^k(x), \partial_m A_n(y) \}_P F^{mn}(y) - \{ \pi^k(x), \partial_n A_m(y) \}_P F^{mn}(y) ) \\ &= -\frac{1}{2} \partial_k \int d^3y ( \{ \pi^k(x), A_n(y) \}_P \partial_m F^{mn}(y) - \{ \pi^k(x), A_m(y) \}_P \partial_n F^{mn}(y) ) \quad (\text{部分積分した}) \\ &= \frac{1}{2} \partial_k \int d^3y ( \delta^k_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \partial_m F^{mn}(y) - \delta^k_m \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \partial_n F^{mn}(y) ) \\ &= \frac{1}{2} \partial_k ( \partial_m F^{mk}(x) - \partial_n F^{kn}(x) ) = \partial_k \partial_m F^{mk}(x) = 0\end{aligned}$$

となるので, 条件  $\ddot{\pi}^0 = 0, \ddot{\pi}^0 = 0, \dots$  からは自明な関係式  $0 = 0$  が得られるだけで新たな拘束条件は現れない [15, p.323] [28, p.136]. なお最後の等号では添字  $k, m$  について  $\partial_k \partial_m$  は対称,  $F^{mk}$  は反対称なので, 消えることを用いた<sup>\*54</sup>.

さらに E.3 節で述べたように, 電磁場の満たすゲージ条件を決めると全 Hamiltonian の式 (151) における未定乗数  $\lambda^j(y)$  が定まることを示す. ゲージ固定条件 (152):  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  は任意の時刻で成り立つので, 式 (151) の  $H_{\text{tot}}$  に対して

$$0 = \dot{\varphi}_l(z) = \{ \varphi_l(z), H_{\text{tot}} \}_P = \{ \varphi_l(z), H \}_P + \int d^3y \{ \varphi_l(z), \phi_j(y) \}_P \lambda^j(y) \quad (155)$$

となる. ただし  $y^0 = z^0$  である.

<sup>\*54</sup> 一般に添字  $\alpha, \beta$  について対称な量  $A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}$  と反対称な量  $B_{\alpha\beta} = -B_{\beta\alpha}$  に対して  $A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}$  は

$$\begin{aligned}A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} &= \sum_{\alpha > \beta} (A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} + A^{\beta\alpha} B_{\beta\alpha}) \quad (\because \alpha = \beta \Rightarrow B_{\alpha\beta} = 0) \\ &= \sum_{\alpha > \beta} A^{\alpha\beta} (B_{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta}) = 0\end{aligned}$$

となって消える.

ここで  $C_{lj}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \equiv \{\varphi_l(z), \phi_j(y)\}_{\mathbf{P}}$  を成分に持つ行列  $C$  は逆行列  $C^{-1}$  を持つことを示そう。ただし逆行列とはその成分  $(C^{-1})^{il}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  が

$$\int d^3z (C^{-1})^{il}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) C_{lj}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta^i_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (156)$$

を満たすという意味である。拘束条件量  $\chi = (\varphi, \phi)$  の定義式 (153) を思い出し、

$$\left\{ A_0, e \sum_l \psi_l^\dagger \psi_l \right\}_{\mathbf{P}} = 0, \quad \left\{ \partial^m A_m, e \sum_l \psi_l^\dagger \psi_l \right\}_{\mathbf{P}} = 0$$

となることに注意すると

$$C \equiv \{\varphi_k(z), \phi_l(y)\}_{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} (\{A_0(i), \pi^0(j)v\}_{\mathbf{P}}) & (\{A_0(i), \partial_l \pi^l(j)v\}_{\mathbf{P}}) \\ (\{\partial^m A_m(i), \pi^0(j)v\}_{\mathbf{P}}) & (\{\partial^m A_m(i), \partial_l \pi^l(j)v\}_{\mathbf{P}}) \end{pmatrix}, \\ i \equiv (\mathbf{x}_i, t), j \equiv (\mathbf{x}_j, t), t \equiv y^0 = z^0, v \equiv \Delta^3 x$$

である (ただし例えば  $(\{A_0(i), \pi^0(j)v\}_{\mathbf{P}})$  は  $\{A_0(i), \pi^0(j)v\}_{\mathbf{P}}$  を  $(i, j)$  成分に持つ行列である)。格子点  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$  を中心とする各体積要素  $\Delta^3 x$  が無限小であると想定すると  $\frac{\delta^i_j}{\Delta^3 x} = \delta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$  なので [14, p.35], 正準変数間の Poisson 括弧  $\{q_i, p_j\}_{\mathbf{P}} = \delta_{ij}$ , etc [12, p.172] は

$$\{A_\mu(\mathbf{x}_i, t), \pi^\nu(\mathbf{x}_j, t)\Delta^3 x\}_{\mathbf{P}} = \delta^\nu_\mu \delta^i_j = \delta^\nu_\mu \delta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \Delta^3 x \\ \{A_\mu(\mathbf{x}_i, t), A_\nu(\mathbf{x}_j, t)\}_{\mathbf{P}} = \{\pi^\mu(\mathbf{x}_i, t)\Delta^3 x, \pi^\nu(\mathbf{x}_j, t)\Delta^3 x\}_{\mathbf{P}} = 0$$

となる。これを用いると行列  $C = (\{\varphi_k, \phi_l\}_{\mathbf{P}})$  において

$$\{A_0(\mathbf{x}_i, t), \pi^0(\mathbf{x}_j, t)\Delta^3 x\}_{\mathbf{P}} = \delta^i_j = \delta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \Delta^3 x, \\ \{\partial^k A_k(\mathbf{x}_i, t), \partial_l \pi^l(\mathbf{x}_j, t)\Delta^3 x\}_{\mathbf{P}} = - \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \right)_k \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} \right)_l \delta^l_k \delta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \Delta^3 x = \nabla_i^2 \delta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \Delta^3 x \\ \left( \because \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} \right)_l \delta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = - \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \right)_l \delta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j), \nabla_i \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \right)$$

であり (ラテン文字  $k, l, \dots$  は空間成分 1, 2, 3 を動くものとする), これ以外の成分はゼロなので

$$C \equiv (\{\varphi_k, \phi_l\}_{\mathbf{P}}) = \begin{pmatrix} (\delta^i_j) & 0 \\ 0 & (\nabla_i^2 \delta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \Delta^3 x) \end{pmatrix} \quad (157)$$

を得る。これは  $\det C \neq 0$  を満たすので

$$\sum_{\mathbf{z}} \tilde{C}^{il}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) C_{lj}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta^i_j \delta_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = \delta^i_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Delta^3 x$$

なる  $\tilde{C}^{il}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  を成分に持つ逆行列  $\tilde{C}$  が存在する (最左辺では  $l$  についても和をとっている)。両辺を  $\Delta^3 x$  で割ると

$$\delta^i_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{z}} \Delta^3 x \frac{\tilde{C}^{il}(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{(\Delta^3 x)^2} C_{lj}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \int d^3z \frac{\tilde{C}^{il}(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{(\Delta^3 x)^2} C_{lj}(\mathbf{z}, \mathbf{y})$$

となるので  $(C^{-1})^{il}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \equiv \frac{\tilde{C}^{il}(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{(\Delta^3 x)^2}$  とすればこれは確かに式 (156) を満たす。

以上より未定乗数  $\lambda^i(x)$  が次のように定まる.

$$\begin{aligned}
 & - \int d^3z (C^{-1})^{il}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \{\varphi_l(z), H\}_{\mathbb{P}} \\
 &= \int d^3z (C^{-1})^{il}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \int d^3y C_{lj}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \lambda^j(\mathbf{y}) \quad (\because (155)) \\
 &= \int d^3y \delta^i_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \lambda^j(\mathbf{y}) \quad (\because (156)) \\
 &= \lambda^i(\mathbf{x}).
 \end{aligned}$$

ただし  $x^0 = y^0 = z^0$  である [15, p.232].

## 付録 F Yang-Mills 理論の局所ゲージ不変性

ここでは Yang-Mills 理論に関する 5.1 節の議論を掘り下げる。

### F.1 内部対称性と群 [27, pp.137–140]

$N$  種類の Dirac 場

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = (\bar{\psi}_1 \quad \bar{\psi}_2 \quad \cdots \quad \bar{\psi}_N)$$

に対するラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi = \sum_{i=1}^N \bar{\psi}_i(i\cancel{\partial} - m)\psi_i$$

は、 $N \times N$  のユニタリー行列  $U = e^{iH}$  (したがって  $H$  は Hermite 行列) による大域的位相変換  $\psi \rightarrow U\psi$  の下で不変に留まる。このような対称変換は 2 回繰り返して行っても、 $\mathcal{L}$  を不変に保つ単一の  $N$  次ユニタリー行列による変換となるから、 $U(N)$  群と呼ばれる群を成す。ところで一般に  $N \times N$  の Hermite 行列  $H$  は  $N^2$  個の独立な実数によって特定できる [29, p.254].

証明 Hermite 性より  $H$  の  $N$  個の対角成分は全て実数であり、また下三角成分は上三角成分を与えると完全に定まる。上三角成分は全部で  $(N^2 - N)/2$  個あり、その各々が 2 つの実数で指定されるので、Hermite 行列  $H$  は合計

$$N + 2 \times \frac{N^2 - N}{2} = N^2 \text{ 個}$$

の実数パラメーターを持つ。

そこで  $N^2$  個の適当な Hermite 行列  $T_a$  と実パラメーター  $\theta_a$  を用いて、一般に

$$H = \sum_a \theta_a T_a, \quad U = \exp\left(i \sum_a \theta_a T_a\right)$$

と書くことができる (このとき  $T_a$  を変換の生成子と呼ぶ)。

$U(N)$  変換の  $N^2$  個の生成子  $T_a$  は、規格直交条件

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (158)$$

を満たすようにするのが慣例となっている。単位行列  $\mathbf{1}$  に比例する  $T_0 = k\mathbf{1}$  を選ぶと、 $T_0$  を生成子とするユニタリー行列

$$\begin{aligned} \exp(i\theta_0 T_0) &= \exp(i\theta_0 k \mathbf{1}) = 1 + (i\theta_0 k) \mathbf{1} + \frac{1}{2!} (i\theta_0 k)^2 \mathbf{1}^2 + \cdots = \left[ 1 + (i\theta_0 k) + \frac{1}{2!} (i\theta_0 k)^2 + \cdots \right] \mathbf{1} \\ &= \exp(i\theta_0 k) \mathbf{1} \end{aligned}$$

による変換

$$\psi \rightarrow \exp(i\theta_0 T_0) \psi, \quad \text{i.e.} \quad \psi_i \rightarrow \exp(i\theta_0 k) \psi_i$$

は  $U(1)$  部分群を成す。式 (158) より、残りの  $N^2 - 1$  個の  $T_a$  ( $a = 1, \dots, N^2 - 1$ ) は特に

$$\text{Tr}(T_a) = 0 \quad (a \neq 0)$$

を満たすため、 $\exp\left(i \sum_{a=1}^{N^2-1} \theta_a T_a\right)$  は行列式が 1 となることが分かる。

証明 一般に  $\theta_a$  を無限小パラメーターとして, 生成子  $T_a$  によるユニタリー変換の演算子を

$$1 + i \sum_a \theta_a T_a$$

と書くと, 有限の  $\theta_a$  による変換の演算子は無限小変換を合成して

$$U = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + i \sum_a \frac{\theta_a}{n} T_a \right)^n = \exp \left( i \sum_a \theta_a T_a \right)$$

と求まる [21, p.64]. また行列式は

$$\begin{aligned} \det U &= \det \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + i \sum_a \frac{\theta_a}{n} T_a \right)^n \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \det \left( 1 + i \sum_a \frac{\theta_a}{n} T_a \right) \right]^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + i \frac{\theta_a}{n} \text{Tr}(T_a) + O \left( \left( \frac{\theta_a}{n} \right)^2 \right) \right]^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + i \theta_a \text{Tr}(T_a) + O \left( \left( \frac{\theta_a}{n} \right)^2 \right) \right] \\ &= 1 + i \theta_a \text{Tr}(T_a) \end{aligned}$$

と表される. ただし第3の等号では,  $\theta_a/n$  程度の  $N \times N$  行列  $A = i \sum_a \frac{\theta_a}{n} T_a$  に対して

$$\begin{aligned} &\det(\mathbf{1} + A) \\ &= \varepsilon^{i_1 \cdots i_N} (\mathbf{1} + A)_{1i_1} \cdots (\mathbf{1} + A)_{Ni_N} \\ &= \varepsilon^{i_1 \cdots i_N} \delta_{1i_1} \cdots \delta_{Ni_N} \\ &\quad + \varepsilon^{i_1 \cdots i_N} \{ (A_{1i_1} \delta_{2i_2} \cdots \delta_{Ni_N}) + (\delta_{1i_1} A_{2i_2} \delta_{3i_3} \cdots \delta_{Ni_N}) + \cdots + (\delta_{1i_1} \cdots \delta_{N-1, i_{N-1}} A_{Ni_N}) \} + O((\theta_a/n)^2) \\ &= \varepsilon^{1 \cdots N} + (\varepsilon^{i_1 2 \cdots N} A_{1i_1} + \varepsilon^{1 i_2 3 \cdots N} A_{2i_2} + \cdots + \varepsilon^{1 \cdots (N-1) i_N} A_{Ni_N}) + O((\theta_a/n)^2) \\ &= 1 + \varepsilon^{1 \cdots N} (A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{NN}) + O((\theta_a/n)^2) \\ &= 1 + \text{Tr} A + O((\theta_a/n)^2) \\ &= 1 + \sum_a \frac{\theta_a}{n} \text{Tr}(T_a) + O((\theta_a/n)^2) \end{aligned}$$

となることを用いた ( $\varepsilon^{i_1 \cdots i_N}$  は  $\varepsilon^{1 \cdots N} = 1$  を満たす反対称テンソル) [30, pp.70–71]. 以上より

$$\text{Tr}(T_a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det \left[ \exp \left( i \sum_a \theta_a T_a \right) \right] = 1.$$

したがって  $N^2 - 1$  個の  $T_a$  ( $i \neq 0$ ) は  $SU(N)$  変換を生成する. こうして半ば直観的に述べると,  $U(N)$  群は  $U(1)$  群と  $SU(N)$  群に分解される:

$$U(N) = U(1) \times SU(N).$$

また  $N^2 - 1$  個の  $T_a$  は交換関係

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \tag{159}$$

を満たし, 上式 (159) で定義される構造定数  $f_{abc}$  は

$$i f_{abc} = 2 \text{Tr}([T_a, T_b] T_c)$$



と書けることになるから\*55, トレースの巡回対称性 (と交換子の反対称性) より,  $f_{abc}$  は添字に関して完全対称であることが結論される.

例 1  $N = 2$  のとき Pauli 行列  $\sigma_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) を用いて

$$T_1 = \frac{1}{2}\sigma_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{1}{2}\sigma_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \frac{1}{2}\sigma_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad T_0 = \frac{1}{2}\mathbf{1}.$$

角運動量代数でよく知られているように, 構造定数は  $\varepsilon_{abc}$ .

例 2  $N = 3$  のとき このとき  $N^2 = 9$  個の  $T_a$  として, Gell-Mann 行列

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

の  $1/2$  倍

$$T_a = \frac{1}{2}\lambda_a (\equiv \hat{F}_a) \quad (i = 1, 2, \dots, 8)$$

と, 単位行列  $\mathbf{1}$  に比例した  $T_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{1}$  を選ぶことができる. 残りの 8 個の生成子  $\hat{F}_a$  はいずれもトレースがゼロになっているため,  $\exp\left(i\sum_{a=1}^8\theta_a\hat{F}_a\right)$  は行列式が 1 となり, 行列  $\exp\left(i\sum_{a=1}^8\theta_a\hat{F}_a\right)$  による位相変換は特殊ユニタリ群  $SU(3)$  を成す. QCD (量子色力学) は  $SU(3)$  変換に関してゲージ不変な理論であり, いわゆる  $SU(3)$  Yang-Mills 理論の実例にあたる. クォークの各香り  $f = d, u, s, c, b, t$  について 3 種類の色状態  $i = r, g, b$  の Dirac 場  $\psi_i^f$  が定義され, 8 種類の色演算子  $\hat{F}_a = \lambda_a/2$  が  $SU(3)$  変換の生成子となる [27, p.145].

交換関係 (159) より交換子は群  $G = SU(N)$  の元  $T_a, T_b$  を  $G$  の元  $[T_a, T_b]$  に対応付ける. ところが任意の行列  $A, B, \dots$  に対して交換子  $[A, B]$  は

- 双線形性  $[aA + bB, C] = a[A, C] + b[B, C], [C, aA + bB] = a[C, A] + b[C, B]$
- 反対称性 (歪対称性)  $[A, B] = -[B, A]$
- Jacobi 恒等式  $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$

を満たすから,  $G$  は交換子を積演算として Lie 代数を構成する\*56. そこで特に  $T_a$  の交換子が Jacobi の恒等式

$$[T_a, [T_b, T_c]] + [T_b, [T_c, T_a]] + [T_c, [T_a, T_b]] = 0$$

が成り立つことを要求し, ここに交換関係 (159) を代入すると,

$$f_{bcd}f_{ade} + f_{cad}f_{bde} + f_{abd}f_{cde} = 0 \quad (160)$$

が満たされなければならないことが見出される.

\*55 右辺に式 (159) を代入し, 式 (158) を用いれば確かめられる.

\*56 Lie 代数の定義については A.9 節を参照.

上式 (160) の証明 式 (159) より

$$[T_a, [T_b, T_c]] = if_{bcd}[T_a, T_d] = -f_{bcd}f_{ade}T_e$$

となるので, Jacobi の恒等式は

$$\begin{aligned} 0 &= [T_a, [T_b, T_c]] + [T_b, [T_c, T_a]] + [T_c, [T_a, T_b]] \\ &= -(f_{bcd}f_{ade} + f_{cad}f_{bde} + f_{abd}f_{cde})T_e \end{aligned}$$

と書き換えられる. ここに  $T_{e'}$  を掛けてトレースをとり, 規格直交条件 (158) を用いれば最右辺の  $T_e$  を取り除くことができるので, その係数 ( $\dots$ )(で  $e \rightarrow e'$  と改めたもの) がゼロにならなければならない. こうして式 (160) を得る.

[本節のこれ以降の随伴表現に関する議論は抽象的であるが, それは表面的には, F.2 節で後半の補足説明程度に用いるだけである.]

ここで生成子の表現行列として,  $T_a$  の代わりに

$$[\text{ad}(T_a)]_b^c \equiv if_{bac}$$

で定義される行列  $\text{ad}(T_a)$  を用いる, 随伴表現 (adjoint representation) を導入する. このとき式 (160) より  $\text{ad}(T_a)$  もまた式 (159) と同じ交換関係を満たすため,  $\text{ad}(T_a)$  も Lie 代数の 1 つの表現となる\*57.

証明 式 (160) の左辺第 1 項の 2 つの  $f$  と第 2 項の後ろの  $f$  を反対称性によって書き換え, 第 3 項を移項して

$$f_{cbd}f_{dae} - f_{cad}f_{dbe} = -f_{abd}f_{cde}$$

と書こう. 両辺を  $i^2$  倍し  $\text{ad}(T_a)$  の定義を用いると

$$[\text{ad}(T_b)]_c^d [\text{ad}(T_a)]_d^e - [\text{ad}(T_a)]_c^d [\text{ad}(T_b)]_d^e = -if_{abd}[\text{ad}(T_d)]_c^e,$$

すなわち  $[\text{ad}(T_a), \text{ad}(T_b)]_c^e = if_{abd}[\text{ad}(T_d)]_c^e$  を得る.

[ $T_a$  が  $N$  次正方行列であるのに対し,  $\text{ad}(T_a)$  は  $N^2$  次正方行列であることに注意すると,] 随伴表現  $\text{ad}(T_a)$  での表現ベクトルは添字  $a$  を持つ量  $\phi_a$  で, 群  $G = \text{SU}(N)$  の変換で

$$\phi'_b = \exp[i\theta^a \text{ad}(T_a)]_b^c \phi_c \quad (161)$$

と変換する. このように  $\phi_a$  を縦に並べた “ベクトル表示” を用いる代わりに, 生成子の任意の表現行列  $(T_a)_i^j$  に対して,

$$(\phi)_i^j = \sum_{a=1}^{\dim G} \phi^a (T_a)_i^j \quad (162)$$

なる  $N \times N$  行列  $\phi$  を用いることもできる\*58. そのような “行列記法” では, 式 (161) の変換は

$$\phi' = U\phi U^\dagger, \quad U_i^j \equiv [\exp(i\theta^a T_a)]_i^j \quad (163)$$

と書ける (ただし  $U$  における  $T_a$  は式 (162) で考えた表現行列  $(T_a)_i^j$ ).

上式 (163) の証明 式 (162):  $\phi = \phi^a T_a$  より式 (163) の左辺は

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi'^a T_a = \exp[i\theta^b \text{ad}(T_b)]_a^c \phi_c T_a \\ &= \left[ 1 + i\theta^b \text{ad}(T_b) + \frac{(i\theta^b \text{ad}(T_b))^2}{2!} + \dots \right]_a^c \phi_c T_a \\ &= \left[ \delta_a^c + i\theta^b (if_{abc}) + \frac{1}{2!} (i\theta^b)(i\theta^{b'}) (if_{abc'})(if_{c'b'c}) + \dots \right] \phi_c T_a \end{aligned} \quad (164)$$

\*57 構造定数は群の掛け算則から決まっています. 全ての表現で同じであり, 逆に構造定数は実質的に群の掛け算則を規定しているから [27, p.139] [31, p.48].

\*58 ただし随伴表現ベクトル  $\phi_a$  の添字の上下は区別しない: すなわち  $\phi_a = \phi^a, T_a = T^a$ .

となる。他方, Baker-Hausdorff の公式

$$e^Y X e^{-Y} = X + [Y, X] + \frac{1}{2!}[Y, [Y, X]] + \dots$$

( $X, Y$  は任意の行列) より式 (163) の右辺は

$$U\phi U^\dagger = \phi + [i\theta^b T_b, \phi] + \frac{1}{2!}[i\theta^{b'} T_{b'}, [i\theta^b T_b, \phi]] + \dots \quad (165)$$

と展開される。式 (162): $\phi = \phi^a T_a$  より式 (164),(165) それぞれの (最) 右辺第 1 項は等しい。そこで式 (164) における  $n(\geq 1)$  次の項 (の  $n!$  倍)

$$\begin{aligned} [(i\theta^b \text{ad}(T_b))^n]_a^c \phi_c T_a &= (i\theta^{b_1})(i\theta^{b_2}) \dots (i\theta^{b_n}) [\text{ad}(T_{b_1})]_a^{c_1} [\text{ad}(T_{b_2})]_{c_1}^{c_2} \dots [\text{ad}(T_{b_n})]_{c_{n-1}}^c \phi_c T_a \\ &= (i\theta^{b_1})(i\theta^{b_2}) \dots (i\theta^{b_n}) (if_{ab_1 c_1})(if_{c_1 b_1 c_2}) \dots (if_{c_{n-1} b_n c}) \phi_c T_a \end{aligned} \quad (166)$$

と, 式 (165) における  $n(\geq 1)$  次の項 (の  $n!$  倍)

$$[i\theta^{b_n} T_{b_n}, \dots, [i\theta^{b_2} T_{b_2}, [i\theta^{b_1} T_{b_1}, \phi]] \dots] \quad (167)$$

が一致していれば良い。このことを数学的帰納法にて証明しよう。 $n = 1$  のとき式 (166) は  $i\theta^b \cdot if_{abc} \phi_c T_a$  である。他方, 式 (167) は

$$[i\theta^b T_b, \phi] = i\theta^b \phi^c [T_b, T_c] = i\theta^b \phi^c \cdot if_{bca} T_a = i\theta^b \cdot if_{abc} \phi_c T_a$$

となるので, これら是一致的。次にある  $n$  に対して式 (166),(167) が等しいと仮定すると, 式 (167) で  $n \rightarrow n+1$  と置き換えた量は

$$\begin{aligned} &(i\theta^{b_1}) \dots (i\theta^{b_n})(if_{ab_1 c_1}) \dots (if_{c_{n-1} b_n c}) \phi_c \times i\theta^{b_{n+1}} [T_{b_{n+1}}, T_a] \\ &= (i\theta^{b_1}) \dots (i\theta^{b_n})(i\theta^{b_{n+1}})(if_{ab_1 c_1}) \dots (if_{c_{n-1} b_n c})(if_{bb_{n+1} a}) \phi_c T_a \quad (\because [T_{b_{n+1}}, T_a] = if_{b_{n+1} a b} T_b = if_{bb_{n+1} a} T_b) \\ &= (i\theta^{b_1}) \dots (i\theta^{b_n})(i\theta^{b_{n+1}})(if_{ab_{n+1} b})(if_{ab_1 c_1}) \dots (if_{c_{n-1} b_n c}) \quad (\because \text{ダミー添字の入れ替え } a \leftrightarrow b) \end{aligned}$$

と計算される。最右辺でさらにダミー添字の置き換え

$$b_{n+1} \rightarrow b_1 \rightarrow b_2 \rightarrow \dots \rightarrow b_n \rightarrow b_{n+1} : \text{巡回置換}, \quad b \rightarrow c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow \dots \rightarrow c_{n-1} \rightarrow c_n$$

を施せば, これは式 (166) で  $n \rightarrow n+1$  と置き換えた量に等しいことが判明する。以上より示された。

## F.2 局所ゲージ変換 [27, pp.140–144]

ここまでは Dirac 場の大局的位相変換を考えてきた。次に考えている場  $\varphi_i(x)$  の大局的変換

$$\varphi'_i(x) = U_i^j \varphi_j(x) = [\exp(i\theta^a T_a)]_i^j \varphi_j(x)$$

を局所的位相変換

$$\varphi'_i(x) = U_i^j(x) \varphi_j(x) = [\exp(ig\theta^a(x) T_a)]_i^j \varphi_j(x) \quad (168)$$

に一般化したとき (後の都合上,  $\theta^a$  から結合定数  $g$  をくくり出した), 理論のゲージ不変性を回復するには, 極小置換 (微分の共変微分への置き換え) により物質場と相互作用する  $N^2 - 1$  種類のゲージ場を導入すれば良いことを, 本節と F.3 節で説明する。これ以降,  $\varphi_i$  を縦に並べたベクトルを  $\varphi$ ,  $U_i^j$  を並べた行列を  $U = (U_i^j)$  と書く。

まず, 点  $x$  におけるベクトル  $\varphi_i(x)$  を近接する点  $x + dx$  に平行移動したベクトル

$$\varphi_{\parallel i}(x + dx) = \varphi_i(x) + ig(A_\mu)_i^j(x) \varphi_j(x) dx^\mu \quad (169)$$

を定義すると、これは点  $x+dx$  での変換行列  $U(x+dx)$  で変換するベクトルであって、右辺の行列  $A_\mu = (A_\mu)_i^j$  は接続場と呼ばれる。

物理的には  $A_\mu$  はゲージ場であり、 $T_a$  を基底として

$$(A_\mu)_i^j(x) = \sum_{a=1}^{\dim G} A_\mu^a(x)(T_a)_i^j \quad (170)$$

と展開できる。これにより ( $G = \text{SU}(N)$  では)  $\dim G = N^2 - 1$  種類のゲージ場  $A_\mu^a(x)$  ( $a = 1, \dots, N^2 - 1$ ) が導入されたことになる。

さて、 $x + dx$  におけるベクトル  $\varphi(x + dx), \varphi_{\parallel}(x + dx)$  は、したがってその差

$$\begin{aligned} \varphi(x + dx) - \varphi_{\parallel}(x + dx) &= (\partial_\mu \varphi(x) - igA_\mu(x)\varphi(x))dx^\mu \\ &\equiv D_\mu \varphi(x)dx^\mu \end{aligned} \quad (171)$$

は  $U(x + dx)$  で変換する：

$$\begin{aligned} (D_\mu \varphi)'(x)dx^\mu &= U(x + dx)D_\mu \varphi(x)dx^\mu \simeq U(x)D_\mu \varphi(x)dx^\mu, \quad (\text{dx の 1 次まで}) \\ \therefore (D_\mu \varphi)'(x) &= U(x)D_\mu \varphi(x). \end{aligned} \quad (172)$$

実際、上式 (172):  $D_\mu'(U\varphi) = UD_\mu\varphi$  が任意の場  $\varphi$  に対して成り立つためには

$$D_\mu' = UD_\mu U^{-1}$$

であれば良く [ただし右辺の  $D_\mu$  は  $U^{-1}$  の右側の因子にも作用する]、これは

$$\begin{aligned} \partial_\mu - igA_\mu' &= U(\partial_\mu - igA_\mu)U^{-1} \\ &= \partial_\mu + U\partial_\mu U^{-1} - igUA_\mu U^{-1} \end{aligned}$$

[ただし最右辺第 2 項  $U\partial_\mu U^{-1}$  の  $\partial_\mu$  はすぐ右隣の  $U^{-1}$  のみに作用する] よりゲージ場が

$$A_\mu \rightarrow A_\mu' = \frac{i}{g}U\partial_\mu U^{-1} + UA_\mu U^{-1} \quad (173)$$

と変換することを意味する。物質場とゲージ場の変換 (168),(173) を合わせて局所ゲージ変換と呼ぶ。

note [9, pp.140–144] [10, pp.27–37] [3, pp.30–35]

曲がった空間においてベクトル  $V^\mu(x)$  を位置  $x + dx$  に平行移動したベクトル

$$V_{\parallel}^\mu(x + dx) = V^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\nu\rho}(x)V^\rho(x)dx^\nu$$

と、式 (169) を比較すると、 $(A_\mu)_i^j$  は接続係数 (Christoffel 記号)  $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$  に対応していることが見て取れる。

位置  $x + dx$  にもとからあるベクトル  $V^\mu(x + dx)$  との差

$$\begin{aligned} V^\mu(x + dx) - V_{\parallel}^\mu(x + dx) &= V^\mu(x + dx) - \{V^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\nu\rho}V^\rho dx^\nu\} \\ &= (\partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho}V^\rho)dx^\nu \\ &\equiv (\nabla_\nu V^\mu)dx^\nu \end{aligned}$$

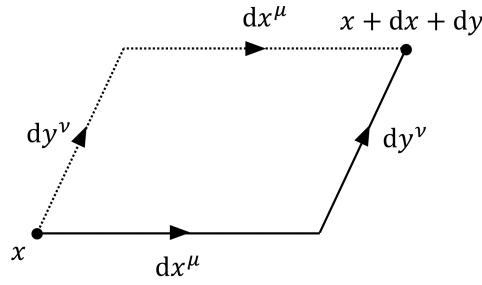


図 47 2つの無限小の経路

がベクトルとして変換するのと同様，平行移動した場との差 (171) も  $U(x + dx)$  によって“ベクトル”として変換するように，式 (169) で導入した接続場  $A_\mu$  の変換則 (173) を決定できる．場の平行移動 (169) の意味はこの中に含まれている．

上式の最右辺  $(\nabla_\nu V^\mu)dx^\nu$  を式 (171) の最右辺 (の第  $i$  成分)  $D_\nu \varphi_i(x)dx^\nu$  と比較すると，ここで定義した共変微分  $D_\nu$  は通常のテンソルの共変微分  $\nabla_\nu$  に対応していることが分かる．

次に場の強さ  $F_{\mu\nu}(x)$  を導入しよう．それは数学的には曲率テンソルと呼ばれ，場  $\varphi(x)$  を図 47 の2つの経路に沿って平行移動した結果の差

$$\Delta\varphi(x) = [D_\mu, D_\nu]\varphi(x)dx^\mu dy^\nu \quad (174)$$

(文字定義と導出は下記) において

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \quad (175)$$

で定義される (第2の等号の確認は下記)．このように交換子  $[D_\mu, D_\nu]$  は見かけと違って，もはや微分演算子ではない [行列  $A_\mu, A_\nu$  は交換しないことにも注意]．

note これは曲がった空間の曲率テンソル  $R_{\dots}$  が<sup>3</sup>，ベクトルの平行移動の経路による差，したがって共変微分の順序による差と

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\lambda = R^\lambda_{\rho\mu\nu}V^\rho$$

のように関係することと比較される．

また式 (175) は曲率テンソルの定義式

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} \equiv \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho} + \Gamma^\mu_{\alpha\rho} \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} \Gamma^\alpha_{\nu\rho}$$

に対応していることが見て取れる．

ここまでの曲がった空間の幾何学とゲージ理論の対応関係は次のようにまとめられる．

座標変換	↔	ゲージ変換,
ベクトル $V^\mu$	↔	物質場 $\varphi_i$ ,
接続 $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$	↔	ゲージ場 $(A_\mu)_i^j$ ,
共変微分 $\nabla_\mu$	↔	共変微分 $D_\mu$ ,
曲率 $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$	↔	場の強さ $(F_{\mu\nu})_i^j$ .

式 (174) の導出 図 47 の実線の経路に沿って場  $\varphi(x)$  を点  $x + dx$  に移すと, 式 (160) より

$$\varphi_{\parallel}(x + dx) = \varphi(x + dx) - D_{\mu}(x)\varphi(x)dx^{\mu} \quad (176)$$

が得られる [本稿では共変微分  $D_{\mu}(x)$  の引数を明示して計算を進める]. 次いでこれを点  $x + dx + dy$  に移した結果は

$$\varphi_{\parallel}^{\parallel}(x + dx + dy) = \varphi_{\parallel}(x + dx + dy) - D_{\nu}(x + dx)dy^{\nu}$$

である (下付きの  $\parallel$  は線要素  $dx$  に沿う, 上付きの  $\parallel$  は線要素  $dy$  に沿う平行移動を表す). 右辺に式 (176) を代入すると,

$$\begin{aligned} \varphi_{\parallel}^{\parallel}(x + dx + dy) &= \varphi(x + dx + dy) - D_{\mu}(x + dy)\varphi_{\parallel}(x + dy)dx^{\mu} - D_{\nu}(x + dx)\varphi_{\parallel}(x + dx)dy^{\nu} \\ &\quad + D_{\nu}(x + dx)D_{\mu}(x)\varphi(x)dx^{\mu}dy^{\nu} \end{aligned} \quad (177)$$

と書き換えられる. 他方, 図 47 の破線の経路に沿って場  $\varphi(x)$  を点  $x + dx + dy$  に移した結果は, 式 (177) で置き換え  $dx \leftrightarrow dy$  を行った式で与えられ, ダミー添字の入れ替え  $\mu \leftrightarrow \nu$  も施せば

$$\begin{aligned} \varphi_{\parallel}^{\parallel}(x + dx + dy) &= \varphi(x + dx + dy) - D_{\mu}(x + dy)\varphi_{\parallel}(x + dy)dx^{\mu} - D_{\nu}(x + dx)\varphi_{\parallel}(x + dx)dy^{\nu} \\ &\quad + D_{\mu}(x + dy)D_{\nu}(x)\varphi(x)dx^{\mu}dy^{\nu} \end{aligned}$$

と書ける. よってこれらの差は

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(x) &\equiv \varphi_{\parallel}^{\parallel}(x + dx + dy) - \varphi_{\parallel}^{\parallel}(x + dx + dy) \\ &= \{D_{\mu}(x + dy)D_{\nu}(x) - D_{\nu}(x + dx)D_{\mu}(x)\}\varphi(x)dx^{\mu}dy^{\nu} \end{aligned}$$

となる. 曲率にとって重要な微小量  $dx, dy$  の 2 次までの近似では, 最右辺において共変微分の引数をすべて  $x$  に置き換えて良いので, 式 (174) を得る.

式 (175) の導出

$$\begin{aligned} D_{\mu}D_{\nu}\varphi &= (\partial_{\mu} - igA_{\mu})(\partial_{\nu} - igA_{\nu})\varphi \\ &= \partial_{\mu}\partial_{\nu}\varphi - ig(\partial_{\mu}A_{\nu})\varphi - ig\{A_{\nu}\partial_{\mu} + A_{\mu}\partial_{\nu}\}\varphi + (ig)^2A_{\mu}A_{\nu}\varphi, \\ \therefore [D_{\mu}, D_{\nu}]\varphi &= -ig(\partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} - ig[A_{\mu}, A_{\nu}])\varphi \end{aligned}$$

による.

さて, 平行移動した場  $\varphi_{\parallel}^{\parallel}(x + dx + dy), \varphi_{\parallel}^{\parallel}(x + dx + dy)$  は, したがってその差

$$\Delta\varphi(x) = \frac{g}{i}F_{\mu\nu}(x)\varphi(x)dx^{\mu}dy^{\nu}$$

は  $U(x + dx + dy)$  で変換される :

$$\begin{aligned} (\Delta\varphi')(x) &= U(x + dx + dy)\Delta\varphi(x) \simeq U(x)\Delta\varphi(x), \quad (dx, dy \text{ の 2 次までの近似}) \\ \therefore F'_{\mu\nu}\varphi' &= F'_{\mu\nu}(U\varphi) = U(F_{\mu\nu}\varphi). \end{aligned}$$

これが任意の場  $\varphi$  に対して成り立つことから, 場の強さの変換則

$$F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^{-1} \quad (178)$$

が見出される.

ところで電磁場では、ポテンシャルから導かれる場の強さ  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  は恒等式として、Maxwell 方程式の自明な組  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0$  を満たした。一般のゲージ場で、これに対応する式は

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} D_\nu F_{\rho\sigma} \equiv \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\nu F_{\rho\sigma} - ig[A_\nu, F_{\rho\sigma}]) = 0 \quad (179)$$

となる (導出は下記)。これは Bianchi (ビアンキ) 恒等式と呼ばれ、Jacobi 恒等式

$$[D_\nu, [D_\rho, D_\sigma]] + [D_\rho, [D_\sigma, D_\nu]] + [D_\sigma, [D_\nu, D_\rho]] = 0 \quad \text{i.e.} \quad \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} [D_\nu, [D_\rho, D_\sigma]] = 0 \quad (180)$$

から導かれる。

Bianchi 恒等式 (179) の導出

$$0 = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} [D_\nu, [D_\rho, D_\sigma]] = \frac{g}{i} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} [D_\nu, F_{\rho\sigma}] = \frac{g}{i} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} [\partial_\nu - igA_\nu, F_{\rho\sigma}].$$

ところで Jacobi 恒等式 (180) は演算子の関係である。そこで演算子が作用するベクトル  $\varphi$  (ないし行列) を明記すると、上式最右辺において

$$[\partial_\nu, F_{\rho\sigma}]\varphi = \partial_\nu(F_{\rho\sigma}\varphi) - F_{\rho\sigma}\partial_\nu\varphi = (\partial_\nu F_{\rho\sigma})\varphi + F_{\rho\sigma}\partial_\nu\varphi - F_{\rho\sigma}\partial_\nu\varphi = (\partial_\nu F_{\rho\sigma})\varphi$$

となるので、式 (179):

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\nu F_{\rho\sigma} - ig[A_\nu, F_{\rho\sigma}]) = 0$$

を得る。

場の強さ  $F_{\mu\nu}$  もゲージ場  $A_\mu$  と同様、

$$(F_{\mu\nu})_i^j = \sum_{a=1}^{\dim G} F_{\mu\nu}^a (T_a)_i^j \quad (181)$$

と展開される。式 (170),(181) は式 (162) と比較される式である。そこで変換則 (173),(178) を式 (163) と比べると、 $F_{\mu\nu}^a$  は群  $G$  の随伴表現として変換するのに対し、ゲージ場  $A_\mu^a$  自身の変換則には付加的な項が伴っている。

ここで変換パラメータ  $\theta^a(x)$  が無限小の場合を想定して、変換則 (168),(173) を  $\theta^a(x)$  の 1 次までの近似で書き下しておこう。まず  $U(x) \simeq 1 + ig\theta^a(x)T_a$  より、物質場の変換則 (168) は

$$\delta\varphi_i(x) = ig\theta^a(x)(T_a)_i^j \varphi_j(x)$$

となる。またゲージ場の変換則 (173) は、行列表記で

$$\delta A_\mu = \partial_\mu(\theta^b T_b) + ig[(\theta^b T_b), A_\mu] \quad (182)$$

となる。

上式 (182) の導出 式 (173) の第 1 項は

$$\frac{i}{g} U \partial_\mu U^{-1} = \frac{i}{g} (1 + ig\theta^a T_a) \{-ig(\partial_\mu \theta^b) T_b\} \simeq (\partial_\mu \theta^b) T_b,$$

第 2 項は

$$U A_\mu U^{-1} = (1 + ig\theta^a T_a) A_\mu (1 - ig\theta^b T_b) \simeq A_\mu + ig[(\theta^b T_b), A_\mu]$$

となることによる。

式 (182) を成分  $A_\mu^a$  に対する変換則として書けば,

$$\delta A_\mu^a = \partial_\mu \theta^a + g f_{abc} A_\mu^b \theta^c \quad (183)$$

となる.

上式 (183) の導出 式 (182) に式 (170):  $A_\mu = A_\mu^c T_c$  を代入し, 左から  $T_a$  を掛けると

$$\begin{aligned} (\delta A_\mu^c) T_a T_c &= (\partial_\mu \theta^b) T_a T_b + i g \theta^b A_\mu^c T_a [T_b, T_c] \\ &= (\partial_\mu \theta^b) T_a T_b - g f_{bcd} \theta^b A_\mu^c T_a T_d. \end{aligned}$$

トレースをとると

$$\delta A_\mu^a = \partial_\mu \theta^a - g f_{bca} \theta^b A_\mu^c = \partial_\mu \theta^a + g f_{abc} A_\mu^b \theta^c : (183).$$

式 (183) の右辺は  $D_\mu = \partial_\mu - i g (A_\mu^b T_b)$  の随伴表現

$$(D_\mu)^{ac} = \partial_\mu \delta^{ac} - i g A_\mu^b [\text{ad}(T_b)]^{ac}$$

による共変微分  $(D_\mu)^{ac} \theta^c$  となっている.

### F.3 ゲージ不変なラグランジアン密度 [27, pp.144–145]

ゲージ場  $A_\mu$  と相互作用する物質場  $\varphi$  のラグランジアン密度は, 自由な物質場のそれにおいて, 微分の共変微分への置き換え [極小置換]  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$  を施して得られる:

$$\mathcal{L}_{\text{matter}} = \begin{cases} (D_\mu \varphi)^\dagger D_\mu \varphi - V(\varphi^\dagger \varphi) & \text{スカラー場} \\ \bar{\psi} (i \gamma^\mu D_\mu - m) \psi & \text{Dirac 場} \end{cases} \quad (184)$$

実際, 局所ゲージ変換 (168),(173) の下で物質場の共変微分  $D_\mu \varphi$  は, 式 (172) のように場  $\varphi$  と同様に変換されるので, ラグランジアン密度 (184) はゲージ不変である. また局所ゲージ変換に際して, 場の強さは式 (178) に従って変換するから, ゲージ場のラグランジアン密度を

$$\mathcal{L}_{\text{gauge field}} = -\frac{1}{4} N^{-1} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad (185)$$

とすると, これはゲージ不変である [トレースの巡回対称性に注意]. ここに  $N$  は行列  $T_a$  の規格直交性を  $\text{Tr}(T_a T_b) = N \delta_{ab}$  と書いて定義される規格化因子であり, 我々の定式化 (式 (158)) では  $N = 1/2$  である. ラグランジアン密度 (185) は

$$\mathcal{L}_{\text{gauge field}} \left[ = -\frac{1}{4} N^{-1} F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} \text{Tr}(T_a T_b) \right] = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (186)$$

と書き換えられる.

ここで場の強さ  $F_{\mu\nu}$  の展開 (181) における成分  $F_{\mu\nu}^a$  を具体的に調べると

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (187)$$

が見出される.



上式 (187) の導出 展開 (181):  $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^b T_b$  から成分  $F_{\mu\nu}^a$  をとり出すには,

$$N^{-1} \text{Tr}(T_a F_{\mu\nu}) = N^{-1} F_{\mu\nu}^b \text{Tr}(T_a T_b) = F_{\mu\nu}^a$$

とすれば良い. そこでこの公式  $F_{\mu\nu}^a = N^{-1} \text{Tr}(T_a F_{\mu\nu})$  に式 (175):

$$F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu^b - \partial_\nu A_\mu^b) T_b - ig A_\mu^b A_\nu^c [T_b, T_c] = (\partial_\mu A_\nu^b - \partial_\nu A_\mu^b) T_b + gf_{bcd} A_\mu^b A_\nu^c T_d$$

を代入すると,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= N^{-1} \{ (\partial_\mu A_\nu^b - \partial_\nu A_\mu^b) \text{Tr}(T_a T_b) + gf_{bcd} A_\mu^b A_\nu^c \text{Tr}(T_a T_d) \} \\ &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc} A_\mu^b A_\nu^c : (187) \end{aligned}$$

を得る.

note 構造定数  $f_{abc}$  の添字に関する完全反対称性から, 反対称性

$$F_{\mu\nu}^a = -F_{\nu\mu}^a$$

が従う.

一般には生成子  $T_a$  は非可換なので,  $a$  種類目のゲージ場の強さ (187) における構造定数  $f_{abc}$  の項はゼロでなく, ラグランジアン密度 (186) は  $A_\mu$  の 3 次と 4 次の自己相互作用項を持つことになる (係数  $g$  はこれらの項を特徴付けるため, 結合定数と呼ばれる). この場合のゲージ理論を Yang-Mills 理論という.

なお, ゲージ場は式 (173) のように変換するため, ゲージ不変性を破ることなくラグランジアン密度にゲージ場の質量項

$$\frac{1}{2} m^2 A_\mu^a A^{a\mu} = \frac{1}{2} m^2 N^{-1} \text{Tr}(A_\mu A^\mu)$$

を付け加えることはできないことに注意する.

## 付録 G ブラックホール

### G.1 一般のブラックホール [2, pp.406–418]

ここでは Kerr ブラックホールを例にとり、10.1 節の議論を具体化する。Kerr 解は質量  $M$  と角運動量  $J$  を持つブラックホールを記述する (電荷はゼロ、10.1.1 節)\*59。

■Kerr ブラックホール Kerr ブラックホールは角運動量の周りに軸対称であり、Boyer-Lindquist (ボイヤー-リンキスト) 座標  $(t, r, \theta, \phi)$  を用いると、そのメトリックは

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} dt^2 - 2a \frac{2Mr \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho^2} \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2,$$

$$a \equiv J/M, \quad \Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2, \quad \rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

によって与えられる。メトリックは対称軸周りの角  $\phi$  と座標時間  $t$  に依らないことが見て取れる。角運動量がゼロのとき ( $a \equiv J/M = 0$ )、これは Schwarzschild 時空の式

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + r^2(\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2$$

になる。

■慣性系の引きずり Kerr メトリックに対して  $g_{t\phi}$  はゼロでない値を持つから、質量  $m \neq 0$  の粒子に対して

$$p^t \equiv m \frac{dt}{d\tau} = g^{tt} p_t + g^{t\phi} p_\phi, \quad p^\phi \equiv m \frac{d\phi}{d\tau} = g^{\phi\phi} p_\phi + g^{\phi t} p_t$$

である。ところでメトリックは  $\phi$  に依存しないから、粒子の角運動量  $p_\phi$  は保存する (対称性と保存則 [2, pp.230–233])。そこで無限遠から一直線に落ちてくる粒子 ( $p_\phi = 0$ ) を考えると、

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{p^\phi}{p^t} = \frac{g^{\phi t}}{g^{tt}} \equiv \omega(r, \theta) \quad (188)$$

となる。これは粒子が重力に“引きずられ”，ゼロでない角運動量を獲得することを意味する。[このように  $p_\phi = 0$  と  $d\phi/dt \neq 0$  は矛盾しない。]

■エルゴ領域  $g_{tt} > 0$  となる領域はエルゴ領域と呼ばれ、ここでは強い引きずりが起こる [エルゴ領域の名前の由来 (定義) は後述の「Penrose 過程」の箇所を参照]。この点を見るために、赤道面  $\theta = \pi/2$  上で  $r =$  (一定) の円に沿って放出された光子を考えると、

$$0 = ds^2 = g_{tt} dt^2 + 2g_{t\phi} dt d\phi + g_{\phi\phi} d\phi^2, \quad \frac{d\phi}{dt} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}}$$

となる。これは特に  $g_{tt} = 0$  となる位置では

$$\frac{d\phi}{dt} = 0, \quad -2\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}$$

\*59 文字  $L$  はブラックホールの背景下で運動する粒子の角運動量を表すためにとっておく。

を与える。[ $g_{\phi\phi} > 0$  であり (確認は下記),  $g_{t\phi}$  は  $a$  と異符号だから,] 第 2 の解  $\frac{d\phi}{dt} = -2\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}$  は光子がブラックホールの回転と同じ方向に引きずられることを表し, 第 1 の解  $\frac{d\phi}{dt} = 0$  はブラックホールの回転と“逆向きに”放出された光子が動かないことを意味する。 $g_{tt} > 0$  となる領域では [2 解はいずれも  $a$  と同符号だから], 光子は (したがって質量を持つ粒子も) ブラックホールと同じ向きに回転しなければならない。

$g_{\phi\phi} \geq 0$  の確認

$$\begin{aligned} (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta &\geq (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \\ &= r^4 + r^2 a^2 + 2Mra^2 \quad (\because \Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

による。

note 以上の結果は議論の進め方より,

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2$$

という形のメトリックを持つ軸対称な重力場一般に成り立つと考えられる。

Kerr 解の場合, エルゴ領域は

$$r \leq r_0 \equiv M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$$

与えられる。 $r = r_0$  はエルゴ球と呼ばれる。

■Kerr ブラックホールの地平面 Kerr 解の場合の地平面は  $g_{rr} = \infty$  となる半径

$$r = r_+ \equiv M + \sqrt{M^2 - a^2}$$

である (証明は行わない)。よって  $r_+ \leq r_0$  であり, 等号は極  $\theta = 0, \pi$  に対して成り立つ。

地平面  $r = r_+$  では

$$dt = 0, \quad dr = 0, \quad g_{rr} = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \Delta = 0$$

なので, 地平面は

$$dl^2 = \frac{(r_+^2 + a^2)^2}{\rho^2} \sin^2 \theta d\phi^2 + \rho^2 d\theta^2$$

与えられる内在的メトリック ( $\gamma_{ij}$ ) を持つ。よって地平面の表面積は

$$A = \int d\phi d\theta \sqrt{|\gamma_{ij}|} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta (r_+^2 + a^2) \sin \theta = 4\pi(r_+^2 + a^2) \quad (189)$$

と計算される。

■Kerr メトリックの赤道面での光子の運動 Kerr 解に対して, 無限遠から一直線に落ちてくる粒子の引きずりによる角速度 (188):  $\omega = \frac{g_{t\phi}}{g_{tt}}$  右辺におけるメトリックの反変成分を調べると,

$$\omega = \frac{2Mra}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta} \quad (190)$$

となる (導出は下記)。これは常に (分母が正だから<sup>\*60</sup>) ブラックホールの角運動量  $a \equiv J/M$  と同じ符号を持ち, また  $r$  の大きなところで  $r^{-3}$  のように小さくなる。

<sup>\*60</sup>  $g_{\phi\phi}$  の符号を調べた際に確認済み。

$\omega$  の式 (190) の導出 メトリックの反変成分  $g^{\mu\nu}$  を計算しよう. ( $g_{\mu\nu}$ ) のゼロでない非対角成分は  $g_{t\phi}(=g_{\phi t})$  のみなので,

$$g^{rr} = \frac{1}{g_{rr}} = \Delta\rho^{-2}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{g_{\theta\theta}} = \rho^{-2}.$$

また

$$\begin{pmatrix} g^{tt} & g^{t\phi} \\ g^{t\phi} & g^{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{t\phi} \\ g_{t\phi} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} g_{\phi\phi} & -g_{t\phi} \\ -g_{t\phi} & g_{tt} \end{pmatrix}$$

において, 行列式は

$$D = g_{tt}g_{\phi\phi} - (g_{t\phi})^2 = -\Delta \sin^2 \theta \quad (191)$$

と計算されるので (確認は下記),

$$g^{tt} = -\frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho^2 \Delta}, \quad g^{t\phi} = -a \frac{2Mr}{\rho^2 \Delta}, \quad g^{\phi\phi} = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \Delta \sin^2 \theta}$$

となる. これを式 (188):  $\omega = \frac{g^{\phi t}}{g^{tt}}$  に代入すれば良い. より簡単には,

$$\omega = \frac{g^{\phi t}}{g^{tt}} = \frac{-g_{t\phi}/D}{g_{\phi\phi}/D} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}$$

として最右辺を評価できる.

$D$  の式 (191) の確認

$$\begin{aligned} D &= \left( -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho^2} \sin^2 \theta - \left( -a \frac{2Mr \sin^2 \theta}{\rho^2} \right)^2 \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\rho^4} [(a^2 \sin^2 \theta - \Delta) \{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta\} - 4a^2 M^2 r^2 \sin^2 \theta] \end{aligned}$$

の最右辺において,  $\sin^2 \theta$  の係数

$$\begin{aligned} &a^2(r^2 + a^2)^2 + a^2 \Delta^2 - 4a^2 M^2 r^2 \\ &= a^2(r^2 + a^2)^2 + a^2(\Delta + 2Mr)(\Delta - 2Mr) \\ &= a^2(r^2 + a^2)^2 + a^2(r^2 + a^2)(r^2 - 4Mr + a^2) \end{aligned}$$

は

$$\begin{aligned} &2a^2(r^2 + a^2)\Delta \\ &= a^2(r^2 + a^2)(r^2 - 2Mr + a^2) + a^2(r^2 + a^2)(r^2 - 2Mr + a^2) \\ &= a^2(r^2 + a^2)^2 + a^2(r^2 + a^2)\{(-2Mr) + (r^2 - 2Mr + a^2)\} \end{aligned}$$

に一致する. よって  $D$  の式の [...] 内は

$$-a^4 \Delta \sin^4 \theta + 2a^2(r^2 + a^2)\Delta \sin^2 \theta - \Delta(r^2 + a^2)^2$$

であり, これは

$$\begin{aligned} -\Delta \rho^4 &= -\Delta(r^2 + a^2 - a^2 \sin^2 \theta)^2 \\ &= -\Delta\{(r^2 + a^2)^2 - 2a^2(r^2 + a^2) \sin^2 \theta + a^4 \sin^4 \theta\} \end{aligned}$$

に等しいから

$$D = \frac{\sin^2 \theta}{\rho^4} (-\Delta \rho^4) = -\Delta \sin^2 \theta : (191)$$

を得る.

Kerr 時空の赤道面  $\theta = \pi/2$  を運動する  $p^\theta = 0$  の光子に対して  $\vec{p} \cdot \vec{p} = 0$  を書き下すと

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta}{r^4} (E - V_+)(E - V_-), \quad (192)$$

$$V_{\pm}(r) = \left[ \omega \pm \left( \omega^2 - \frac{g^{\phi\phi}}{g^{tt}} \right)^{1/2} \right] L \quad (193)$$

$$= \frac{2Mra \pm r^2 \Delta^{1/2}}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta} L \quad (194)$$

となる [導出は下記].

式 (192)–(194) の導出

$$0 = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = g^{tt} p_t^2 + g^{rr} p_r^2 + g^{\theta\theta} p_\theta^2 + g^{\phi\phi} p_\phi^2 + 2g^{t\phi} p_t p_\phi$$

において,  $p^r = \frac{dr}{d\lambda}$  と書き ( $\lambda$  は適当なパラメーター),

$$p_t = -E, \quad g^{rr} p_r^2 = g_{rr} p^{r2} = g_{rr} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2, \quad p_\theta = 0, \quad p_\phi = L$$

とおくと

$$g^{tt} E^2 + g_{rr} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + g^{\phi\phi} L^2 - 2g^{t\phi} EL = 0$$

となるので,

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 &= g^{rr} [(-g^{tt})E^2 + 2g^{t\phi}EL - g^{\phi\phi}L^2] \\ &= g^{rr} (-g^{tt}) \left[ E^2 - 2\omega EL + \frac{g^{\phi\phi}}{g^{tt}} L^2 \right] \end{aligned} \quad (195)$$

を得る.

式 (193) の  $V_{\pm}(r)$  に対して

$$V_+ + V_- = 2\omega L, \quad V_+ V_- = \frac{g^{\phi\phi}}{g^{tt}} L^2$$

となるので  $(E - V_+)(E - V_-)$  は式 (195) 最右辺の  $[\dots]$  内に一致するから, 式 (192) が成立する.

ここで式 (193) の

$$\omega^2 - \frac{g^{\phi\phi}}{g^{tt}} = \frac{(2Mra)^2 - \{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta\}(\Delta - a^2)}{\{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta\}^2}$$

において,

$$(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta = r^4 + r^2 a^2 + 2Mra^2, \quad \Delta - a^2 = r^2 - 2Mr$$

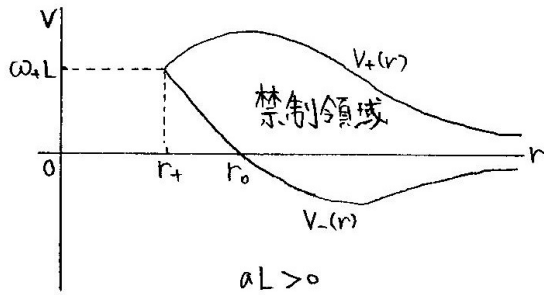


図 48  $aL > 0$  でのポテンシャル図

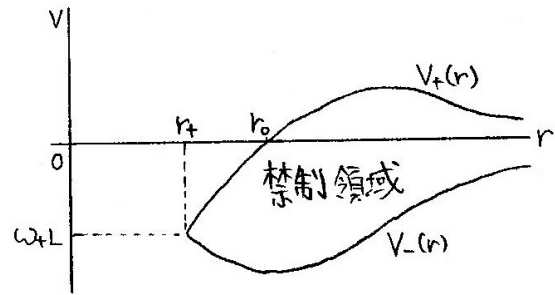


図 49  $aL < 0$  でのポテンシャル図

より

$$\begin{aligned}
 & (2Mra)^2 - \{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta\}(\Delta - a^2) \\
 &= r^4 \left\{ \left( \frac{2Ma}{r} \right)^2 - \left( r^2 + a^2 + \frac{2M}{r} a^2 \right) \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \right\} \\
 &= -r^4 (r^2 + a^2 - 2Mr) \\
 &= -r^4 \Delta
 \end{aligned}$$

となることに注意すると、式 (194) へと書き換えられる。

$aL > 0$  (光子の角運動量  $L$  がブラックホールの角運動量  $a = J/M$  と同じ向き) の場合、 $V_{\pm}(r)$  の概形は図 48 のようであり、運動は  $(dr/d\lambda)^2 > 0$  となる  $E > V_+$  または  $E < V_-$  の領域でのみ可能である。  $E > 0$  を持つ粒子は  $V_+$  の頂上にぶつかる場合、無限遠に引き返し、 $V_+$  の頂上を超える場合、ブラックホールの中に落ち込んでいく。

■ Penrose 過程  $aL < 0$  (粒子の角運動量  $L$  がブラックホールの角運動量  $a = J/M$  と逆向き) の場合、 $V_{\pm}(r)$  の概形は図 49 のようになるので、運動可能領域  $E > V_+, E < V_-$  のうち地平面の近くの観測者に対するエネルギーが正となる  $E > V_+$  の領域は、 $E < 0$  となり得る範囲  $r < r_0$  を含むことになる。  $r < r_0$  がエルゴ領域と呼ばれるのはこのためである (“エルゴ” はギリシャ語でエネルギーを意味する)。

粒子がエルゴ領域で 2 個の光子に分裂したとすると、そのうち一方はエネルギー  $E < 0$  を持ち得る。このときエネルギー保存則によりもう一方は  $E > 0$  を持つ。  $aL < 0$  の場合には、 $V_{\pm}(r)$  の概形 (図 49) により  $E < 0$  の光子は  $r < r_0$  に留まるのに対し、 $E > 0$  の光子は  $r > r_0$  へ抜け出し得る。するとこの Penrose (ペンローズ) 過程において、ブラックホールのエネルギーは減少する。

- クェーサーのジェットは Penrose 過程で放出された荷電粒子かもしれない。
- Penrose 過程は Kerr ブラックホールに限らず、エルゴ領域が存在すればいつも起こる。

● エルゴ領域を持つ星の不安定性

星の持つエルゴドロイド [ドーナツ状のエルゴ領域] に捕捉された重力波は負のエネルギーを持つ。しかし波というのは完全には局在せず、正のエネルギーを持って外にもれ出す。これによりエルゴ領域の波は強くなり (絶対値のより大きな負のエネルギーを持ち)、

無限遠に逃げる波の振幅もまた増大する。

波は角運動量を持ち去るので、星の回転は減速し、いずれエルゴ領域は消失する。

- Kerr ブラックホールの安定性

一方、Kerr ブラックホールの場合、エルゴ領域の波は無限遠に逃げるだけでなく、地平面を抜けてブラックホールの中へも伝わることができる

( $r_+ \leq r_0$ ,  $r = r_+$ : 地平面,  $r = r_0$ : エルゴ球).

Kerr ブラックホールが安定なのはこのためと考えられる。

## G.2 ブラックホールによる量子力学的輻射放出：Hawking 過程 [2, pp.426–432]

Hawking はブラックホールの近くの電磁場に量子力学を適用し、ブラックホールはエネルギーを連続的に放射していることを示した。これに対する初等的な“もっともらしい議論”を与えよう。場の量子論によれば、真空では光子対 (エネルギー  $\pm E$ ) が対生成し、エネルギー保存則を破る。しかしこれは  $\Delta t = \hbar/(2\Delta E)$  以下の短い時間の後に対消滅するため、エネルギー保存則は大きなスケールでは厳密に成り立っている。さて、一方が  $E(\geq 0)$ 、他方が  $-E$  のエネルギーを持つ光子対が地平面のすぐ外側で作られると、負エネルギー光子は時間  $\hbar/(2E)$  が経つ前に地平面の中に入る可能性がある。このとき負エネルギー光子はいったん地平面の中に入ると自由に伝播することができ、正エネルギー光子は無限遠に逃げられる。これがブラックホールからの輻射を成す。

- 負エネルギー光子が地平面内を自由に伝播できること

簡単のために Schwarzschild メトリックを考える。

地平面内を光子が伝播できるためには、地平面内  $r < 2M$  の観測者

$$\vec{U} = (0, U^r, 0, 0) \quad \left( \vec{U} \cdot \vec{U} = -1 \Rightarrow U^r = - \left( \frac{2M}{r} - 1 \right)^{1/2} \right)$$

が観測する光子のエネルギー

$$-\vec{p} \cdot \vec{U} = - \left( \frac{2M}{r} - 1 \right)^{-1/2} p^r$$

が正、したがって  $p^r < 0$  でなければならない。

ところが動径方向に運動するゼロ角運動量  $L = 0$  の光子に対して  $E = \pm p^r$  なので\*61,

この条件  $p^r < 0$  は  $E$  [Schwarzschild 座標におけるエネルギー  $-p_0$ ] の符号に制約を与えない。

よって  $E < 0$  の光子は地平面内を自由に伝播できる。

- ブラックホールの放射する光子のエネルギー

\*61 保存量は  $p_0 = -E, p_\phi = L = 0$  であり、また  $p^r = dr/d\lambda$  と書いて光子軌道上のパラメーター  $\lambda$  を定義できる。Schwarzschild メトリックを用いると反変成分  $p^\mu$  は

$$p^0 = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} E, \quad p^\theta \sim \frac{d\theta}{d\lambda} \text{ (赤道面 } \theta = \pi/2 \text{ 上)}, \quad p^\phi = \frac{L}{r^2} = 0$$

となるので、 $\vec{p} \cdot \vec{p} = 0$  は  $(p^r)^2 = E^2$  を与える。

はじめ地平面付近  $r = 2M + \varepsilon (\varepsilon > 0)$  に瞬間的に静止していた観測者

$$\vec{U} = (U^0, 0, 0, 0),$$

$$\left( \vec{U} \cdot \vec{U} = -g^{00}U_0^2 = -1 \Rightarrow -U_0 = \left( -\frac{1}{g^{00}} \right)^{1/2} = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{1/2} \simeq \left( \frac{\varepsilon}{2M} \right)^{1/2} \right)$$

が地平面に落下する固有時間は

$$\Delta\tau \simeq 2(2M\varepsilon)^{1/2} \quad (196)$$

なので [導出は下記], この系に対する光子のエネルギーは

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar}{\Delta\tau} = \frac{\hbar}{2}(2M\varepsilon)^{-1/2}$$

である\*62.

これを  $-\vec{p} \cdot \vec{U} = -g^{00}p_0U_0$  と等置すると, 光子の軌道上の保存エネルギー,

したがって無限遠に届いたときに測定されるエネルギー [Schwarzschild 座標におけるエネルギー] は

$$E \equiv -p_0 = \frac{h}{8\pi M} \quad (197)$$

となる.

これはブラックホールを温度

$$T = \frac{h}{8\pi k M} \quad (k: \text{Boltzmann 定数}) \quad (198)$$

の黒体としたときの黒体放射に特徴的なスペクトルとよく合っている.

- Penrose 過程との違い

Hawking 過程は

- エルゴ領域を持たないブラックホールでも起こる
- 不安定な暴走を起こさない

という点で Penrose 過程と異なる.

- ブラックホールの輻射率は,

$$\begin{aligned} \text{地平面の表面積} \quad A &= 16\pi M^2 \quad (\text{式 (189) で } a = 0 \text{ とおく}), \\ \text{ブラックホールの温度} \quad T &= \frac{h}{8\pi k M} \end{aligned}$$

に対して  $AT^4$  に比例するので\*63, これは  $M^{-2}$  に比例する.

よって  $\frac{dM}{dt} \sim M^{-2}$  であり, ここからブラックホールの寿命は  $\tau \sim M^3$  となる.

これが宇宙の年齢  $10^{10}$  に収まるには, ブラックホールの質量は  $M \lesssim 10^{12}\text{kg}$  でなければならない.

これは太陽質量 ( $\sim 10^{30}\text{kg}$ ) に比べて小さいけれど,

宇宙のごく初期には  $10^{12}\text{kg}$  のブラックホールができる可能性がある.

$10^{12}\text{kg}$  のブラックホールの温度は  $10^{11}\text{K}$  で  $[T = \frac{h}{8\pi k M}]$ , 主に  $\gamma$  線を放出する.

しかし観測される  $\gamma$  線バーストは, ブラックホールの蒸発によるものと考えするには明るすぎる.

\*62  $\frac{h/2}{\varepsilon}$  となっていない. 因子  $1/2$  の違いは結論 (197),(198) の数係数に影響する. しかし温度 (198) を  $1/2$  倍しても, 後の Hawking 温度  $T_H = h/8\pi k M$  と正確には一致しない.

\*63  $T^4$  の温度依存性は, 黒体放射に関する Stefan-Boltzmann の法則による.



- Hawking の議論は光子の伝播が時空を変化させないことを仮定しており、典型的な光子のエネルギー  $E$  に対して  $E \ll M$  が満たされるときにのみ正しい。
- 重力と熱力学の統一  
Schwarzschild ブラックホールに対して  
質量  $M$  はそのエネルギー  $E$ ,  $T_H = \hbar/(8\pi kM)$  はその温度なので、

$$A = 16\pi M^2, \quad \therefore dM = \frac{\hbar}{8\pi kM} d\left(\frac{kA}{4\hbar}\right)$$

は  $S = kA/4\hbar$  をエントロピー  $S$  とする解釈の下で、熱力学第一法則

$$dE = T_H dS$$

を表す [一般のブラックホールに対する議論は 10.1 節]\*64。

このとき Hawking の面積定理  $\frac{dA}{dt} \geq 0$  は熱力学第二法則  $\frac{dS}{dt} \geq 0$  と見なせる。

- ブラックホールからの輻射は、地平面の形成の際に、古典的な描像では消し去られた情報を運ぶことができるかもしれない。

#### 式の導出など

■系の落下時間 (196) について 動径方向に落下する質量  $m (\neq 0)$  の粒子に対して、 $\tilde{E} \equiv -p_0/m, \tilde{L} \equiv p_\phi/m = 0$  が保存する。  $p^r = m \frac{dr}{d\tau}$  であり、Schwarzschild メトリックに対して反変成分

$$p^0 = m \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \tilde{E}, \quad p^\phi = m \frac{\tilde{L}}{r^2} = 0$$

が得られる。よって  $\vec{p} \cdot \vec{p} = -m^2$  は

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - 1 + \frac{2M}{r}$$

を与える。 [粒子の質量  $m$  が結果に残らないことに注目する。] よって

$$d\tau = \frac{dr}{\tilde{E}^2 - 1 + \frac{2M}{r}}$$

であり [2, pp.369-371, p.391], はじめ瞬間的に静止していた系 ( $\frac{dr}{d\tau} = 0$ ) に対する一定値  $\tilde{E}^2 = 1 - \frac{2M}{2M+\varepsilon}$  を代入すると、

$$\Delta\tau = - \int_{2M+\varepsilon}^{2M} \frac{dr}{\left(\frac{2M}{r} - \frac{2M}{2M+\varepsilon}\right)^{1/2}}$$

を得る。この積分は

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= \left(\frac{2M+\varepsilon}{2M}\right)^{1/2} \int_{2M}^{2M+\varepsilon} \frac{r^{1/2} dr}{(2M+\varepsilon-r)^{1/2}} \\ &= 2 \left(\frac{2M+\varepsilon}{2M}\right)^{1/2} \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} (2M+\varepsilon-X^2)^{1/2} dX \quad (X \equiv (2M+\varepsilon-r)^{1/2}) \\ &= 2\{1 + O(\varepsilon)\} \{(2M\varepsilon)^{1/2} + O(\varepsilon^{3/2})\} \\ &= 2(2M\varepsilon)^{1/2} + O(\varepsilon^{3/2}) : (196) \end{aligned}$$

\*64  $T_H = \hbar/(8\pi kM)$  (ただし  $G = 1, c = 1$ ) は式 (10.10) の Hawking 温度であり、これは式 (198):  $T = \hbar/(8\pi kM)$  の  $h$  を  $\hbar$  に置き換えたものである。

と評価できる.

■ $E$  の式 (197) について  $E = \mathcal{E} \cdot \frac{1}{-U_0} \cdot \frac{1}{-g^{00}}$  において

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\sqrt{2M\varepsilon}}, \quad \frac{1}{-U_0} = \sqrt{\frac{2M}{\varepsilon}}, \quad \frac{1}{-g^{00}} = 1 - \frac{2M}{2M + \varepsilon} \simeq \frac{\varepsilon}{2M}$$

である.

## 参考文献

- [1] B. ツヴィーバッハ, 2013, 初級講座 弦理論《基礎編》(樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [2] シュッツ, 2010, 第2版シュッツ 相対論入門 (江里口良治, 二間瀬敏史訳), 丸善株式会社, 東京.
- [3] 山本義隆, 中村孔一, 2013, 朝倉物理学大系 1 解析力学 I, 株式会社朝倉書店, 東京.
- [4] Sean M. Carroll, 1997, Lecture Notes on General Relativity.
- [5] Joseph D. Romano, 1993, GEOMETRODYNAMICS VS. CONNECTION DYNAMICS.
- [6] tomocci, 2006, 時空の  $3+1$  分解.
- [7] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, 2015, ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 場の古典論 (原書第6版)(恒藤敏彦, 広重徹訳), 東京図書株式会社, 東京.
- [8] Thiemann, T. (2008) Modern Canonical Quantum General Relativity, arXiv:gr-qc/0110034v1
- [9] 内山龍雄, 2014, 相対性理論 物理テキストシリーズ 8, 株式会社岩波書店, 東京.
- [10] P.A.M. ディラック, 2012, 一般相対性理論 (江沢洋訳), 株式会社筑摩書房, 東京.
- [11] ゴールドスタインほか, 2009, 古典力学 (下) 原著第3版 (矢野忠ほか訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [12] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, 2013, ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 力学 (増訂第3版)(広重徹, 水戸巖訳), 東京図書株式会社, 東京.
- [13] F. マンドル, G. ショー, 2013, 場の量子論 第2巻 素粒子の相互作用 (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [14] F. マンドル, G. ショー, 2011, 場の量子論 第1巻 量子電磁力学 (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [15] 杉田勝実ほか, 2005, 経路積分と量子電磁力学 [POD版], 森北出版株式会社, 東京.
- [16] B. ツヴィーバッハ, 2018, 初級講座 弦理論《発展編》(樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [17] Rovelli, C. (2010) *Quantum Gravity*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [18] M. ストーン, 2012, 量子場の物理 [新装版] (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [19] Masud Chaichian, et.al, 2013, Arnowitt-Deser-Misner representation and Hamiltonian analysis of covariant renormalizable gravity.
- [20] Thiemann, T. (1996) Closed formula for the matrix elements of the volume operator in canonical quantum gravity, arXiv:gr-qc/9606091v1
- [21] J.J.Sakurai, 2017, 現代の量子力学 (上)(桜井明夫訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [22] Renate Loll, Gauge theory and gravity in the loop formulation, Center for Gravitational Physics and Geometry, The Pennsylvania State University.
- [23] 沙川貴大, 2022, 非平衡統計力学——ゆらぎの熱力学から情報熱力学まで——, 共立出版株式会社, 東京.
- [24] 山本義隆, 2021, 熱学思想の史的展開 3 熱とエントロピー, 株式会社筑摩書房, 東京.
- [25] 山本義隆, 中村孔一, 2012, 朝倉物理学大系 2 解析力学 II, 株式会社朝倉書店, 東京.
- [26] 佐武一郎, 2017, 数学選書 1 線型代数学 (新装版), 株式会社裳華房, 東京.
- [27] 九後汰一郎, 2018, 新物理学シリーズ 23 ゲージ場の量子論 I, 株式会社培風館.
- [28] 坂井典佑, 2002, 裳華房フィジックスライブラリー 場の量子論, 裳華房, 東京.
- [29] W.N. コッティンガム, D.A. グリーンウッド, 2013, 素粒子標準模型入門 (樺沢宇紀訳), 丸善出版株式会社, 東京.

- [30] 香取眞理, 2016, 裳華房テキストシリーズ-物理学, 非平衡統計力学, 株式会社裳華房, 東京.
- [31] H. ジョージアイ, 2010, 物理学におけるリー代数——アイソスピンから統一理論へ—— (原著第 2 版)  
(九後汰一郎訳), 株式会社吉岡書店, 京都.