量子電磁力学(経路積分)から
古典物理学(最小作用原理)へ

——要点と途中計算を分離——

理論物理学のノートを公開中

http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/

まえがき

本稿は第 I 部であらかじめ要点のみを述べ，細かい途中計算や補足を第 II 部で行うという構成をとっている．このため読者は第 I 部を読み物として読み進めることができる．第 I 部は以下のように進む．

第 1 章では QED(量子電磁力学) において，場が始状態から終状態に移行する確率振幅 (Green 関数) の経路積分表式を導く．

第 2 章は第 1 章の結果を踏まえ，場の量子論に古典物理学の原理がどのように含まれているのかを考察した，半ば冒険的な試論であり，その概要は以下の通りである．Green 関数の経路積分表式によれば，古典的極限での場の振る舞いは最小作用原理により決定論的に予言される．ここから物質場の満たすエネルギー・運動量保存則が見出される．ここで保存則に現れる電流密度と物質場のエネルギー・運動量テンソルを粒子系に対する表式に読み替えると，粒子の運動方程式が得られる．こうして自然を場に一元化する場の量子論の描像は，古典物理学における粒子と場の二元論に移行する．(古典物理学において自然は粒子と場 (電磁場と重力場) から成り，これらの時間発展に対する予言は，最小作用原理の下で作用の表式の中に完全に含まれていると言える．)

このように本稿の第 I 部は，以下の図式のように非相対論的な量子力学を経由しないコースをとって，量子電磁力学から古典物理学へと至る．

	相対論	非相対論
量子論	○	
	↓	
古典論	○	

最後に本稿には誤りや筆者の勘違いが潜んでいるかもしれないことを断っておく．至らぬ点は筆者の勉強不足である．

なお本稿の他にも理論物理の各種ノートを以下のページで公開している．

http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/

目次

■表記法等　本稿では以下の約束に従う.

- 素電荷を e と書く.
- 自然単位系を採用する.
  これは Planck 定数 h を 2π で割った値 $\hbar$, および真空中の光速 c が
  $$\hbar = 1, \qquad c = 1$$
  となる単位系である [2, pp.101–102].
- 慣性系での計量テンソルを $g_{\mu\nu}$ と書く.
  $$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

第 I 部

要点編

1　量子電磁力学 (QED) と経路積分

1.1　準備

1.1.1　可換な量 A, B に対する指数法則 $e^A e^B = e^{A+B}$

演算子 A の指数関数を $e^A \equiv \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ で定義する．このとき A, B が演算子であるか否かに関わらず交換する量であれば，指数法則 $e^A e^B = e^{A+B}$ が成り立つ (3.0.1 節参照)．

1.1.2　Weyl 順序にある Hamiltonian に対する公式

Hamilton 演算子 $H(\hat{\boldsymbol{q}}, \hat{\boldsymbol{p}}, t)$(以下，Hamiltonian) の Weyl 変換を

$$H_{\mathrm{W}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) \equiv \int \left(\prod_i \mathrm{d}v_i \right) e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}} \langle \boldsymbol{q} - \boldsymbol{v}/2 | H(\hat{\boldsymbol{q}}, \hat{\boldsymbol{p}}, t) | \boldsymbol{q} + \boldsymbol{v}/2 \rangle \tag{1}$$

で定義すると，

$$\langle \boldsymbol{q}_B | H(\hat{\boldsymbol{q}}, \hat{\boldsymbol{p}}, t) | \boldsymbol{q}_A \rangle = \int \left(\prod_i \frac{\mathrm{d}p_i}{2\pi} \right) e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{q}_B - \boldsymbol{q}_A)} H_{\mathrm{W}}(\bar{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{p}, t), \qquad \bar{\boldsymbol{q}} \equiv \frac{\boldsymbol{q}_A + \boldsymbol{q}_B}{2} \tag{2}$$

が満たされる (3.1.1 節参照) [3, pp.22–23]．

次に $H(\hat{\boldsymbol{q}}, \hat{\boldsymbol{p}}, t)$ における $\hat{q}_i, \hat{p}_i$ の並べ方の一つとして，Weyl 順序を導入する．k 個の $\hat{q}$ と l 個の $\hat{p}$ を並べる方法は全部で $\frac{n!}{k!l!}$ 通りあり ($n \equiv k + l$)，$\hat{q}, \hat{p}$ の単項式 $\hat{q}^k \hat{p}^l$ に対する Weyl 順序 $\{\hat{q}^k \hat{p}^l\}_{\mathrm{W}}$ を，その全ての並べ方の相加平均

$$\{\hat{q}^k \hat{p}^l\}_{\mathrm{W}} \equiv \frac{\hat{q}^k \hat{p}^l + \hat{q}^{k-1} \hat{p}^l \hat{q} + \cdots + \hat{p}^l \hat{q}^k}{n!/k!l!}$$

で定義すると，Weyl 順序にある Hamiltonian

$$H(\hat{\boldsymbol{q}}, \hat{\boldsymbol{p}}, t) = \sum_{\{n_i\},\{m_i\}} H(\{n_i\}, \{m_i\}) \{\hat{q}_1{}^{n_1} \hat{p}_1{}^{m_1}\}_{\mathrm{W}} \cdots \{\hat{q}_N{}^{n_N} \hat{p}_N{}^{m_N}\}_{\mathrm{W}}$$

は Weyl 変換によって形を変えないこと，すなわち $H_{\mathrm{W}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) = H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ が示される (3.1.1 節参照) [3, pp.26–27]．

よってあらかじめ Weyl 順序にある Hamiltonian を考えれば，式 (2) 右辺で $H_{\mathrm{W}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) = H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ とした

$$\langle \boldsymbol{q}_B | H(\hat{\boldsymbol{q}}, \hat{\boldsymbol{p}}, t) | \boldsymbol{q}_A \rangle = \int \left(\prod_i \frac{\mathrm{d}p_i}{2\pi} \right) e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{q}_B - \boldsymbol{q}_A)} H(\bar{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{p}, t), \qquad \bar{\boldsymbol{q}} \equiv \frac{\boldsymbol{q}_A + \boldsymbol{q}_B}{2} \tag{3}$$

が成立する．

1.1.3　汎関数

時空座標 x の関数 $\phi(x)$ に対し，汎関数 $F[\phi]$ とは関数 $\phi(x)$ の“関数”のことである．$\phi(x)$ の変化 $\phi \to \phi+\delta\phi$ に伴う $F[\phi]$ の 1 次の変化を $\delta F[\phi]$ として，汎関数微分 $\dfrac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)}$ を

$$\delta F[\phi] = \int \mathrm{d}^4x \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)}\delta\phi(x) \tag{4}$$

で定義する[*1]．特に汎関数 F が場 $\phi(x)$ の時空点 y での値 $\phi(y)$ を与えるような“関数”である場合を考えよう．このとき $F[\phi] = \phi(y)$ なので，上式 (4) から

$$\delta\phi(y) = \int \mathrm{d}^4x \frac{\delta\phi(y)}{\delta\phi(x)}\delta\phi(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta\phi(y)}{\delta\phi(x)} = \delta^4(x-y) \tag{5}$$

が得られる [4, pp.132–134].

1.2　Dirac 場

1.2.1　Dirac 方程式

半整数のスピンを持つ粒子はフェルミオンと呼ばれる．スピン 1/2 の粒子は Dirac 場 $\psi(x)$ で表される．Dirac 場 $\psi(x)$ は 4 つの複素場 $\psi_\alpha(x)(\alpha = 1,2,3,4)$ を成分に持つスピノルであり，粒子の質量を m として Dirac 方程式

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$$

に従う．ここに 4×4 の行列 $\gamma^\mu(\mu = 0,1,2,3)$ は γ 行列と呼ばれ，

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \tag{6}$$

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \\ \gamma^{j\dagger} = -\gamma^j \quad (j = 1,2,3) \end{cases} \tag{7}$$

を満たす．

任意の 4 元ベクトル A_μ に対して Feynman のスラッシュ記法

$$\not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu$$

を導入すると，Dirac 方程式は

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0$$

とも書ける．さらに $\psi(x)$ に随伴する場 $\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0$ を定義する．

Dirac 方程式は Dirac 場の Lagrangian 密度

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi \tag{8}$$

[*1] 汎関数微分 $\delta F/\delta\phi$ は定義式 (4) より，通常の微分とは異なり

$$\frac{1}{L^4} \times \frac{[F]}{[\phi]} \qquad (L：長さ)$$

の次元を持つ．

から導かれる．実際スピノル添字 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ を明記すると，Euler-Lagrange 方程式は

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi}_\alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_\alpha} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_\alpha}\{\bar{\psi}_\gamma (i\partial\!\!\!/ - m)_{\gamma\beta}\psi_\beta\} = -(i\partial\!\!\!/ - m)_{\alpha\beta}\psi_\beta$$

となる [2, pp.67–69] [3, pp.210–211].

さらにフェルミオン場 ψ に共役な場

$$\pi_\psi \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)}$$

を定義する．

直ちに付け加えなければならないが，1.2.3 節で述べるようにフェルミオン場 ψ を (正準) 量子化する際，これは反交換関係 $\{\hat{\psi}, \hat{\psi}\} = 0$ を満たす演算子 $\hat{\psi}$ と見なされる．このためフェルミオン場 ψ は古典場としては反交換関係 $\{\psi, \psi\} = 0$ を満たす Grassmann 場となる．ここに現れた Lagrangian 密度 $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi$ の Grassmann 場 $\bar{\psi}$ や $\partial_0\psi$ による微分は通常の微分とは異なり，1.2.4 節で定義される左微分の約束に従って行うものとする．これは反交換関係を用いて Lagrangian 密度における $\bar{\psi}$ や $\partial_0\psi$ を Grassmann 場の積の左端まで移動し，微分によってそれを除去するというものである [3, pp.81–82] [4, pp.316–318][*2].

1.2.2 レプトン

量子電磁力学 (QED) では荷電レプトンと電磁場との相互作用が扱われる．荷電レプトンはスピン $\frac{1}{2}$ と電荷 $\mp e$ を持つ粒子であり (e は素電荷)，電子 $e^\mp$，ミュー粒子 $\mu^\mp$，タウ粒子 $\tau^\mp$ から成る．これらは異なる質量

$$m_e = 0.511\text{MeV}, \qquad m_\mu = 105.7\text{MeV}, \qquad m_\tau = (1776.84 \pm 0.17)\text{MeV}$$

を持つ[*3]．荷電レプトンの各種類 $l = e, \mu, \tau$ に対して Dirac 場 ψ_l が充てがわれる [2, p.141].

1.2.3 場の演算子と古典場 (Grassmann 場)

フェルミオン場 ψ_l を量子化するには ψ_l とこれに共役な場 π_{ψ_l} をそれぞれ演算子 $\hat{\psi}_l, \hat{\pi}_{\psi_l}$ と見なし，正準反交換関係

$$\begin{aligned} \{(\hat{\psi}_l)_\alpha(\boldsymbol{x}, t), (\hat{\pi}_{\psi_{l'}})_\beta(\boldsymbol{y}, t)\} =& i\delta_{ll'}\delta_{\alpha\beta}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), \\ \{(\hat{\psi}_l)_\alpha(\boldsymbol{x}, t), (\hat{\psi}_{l'})_\beta(\boldsymbol{y}, t)\} =& 0, \qquad \{(\hat{\pi}_{\psi_l})_\alpha(\boldsymbol{x}, t), (\hat{\pi}_{\psi_{l'}})_\beta(\boldsymbol{y}, t)\} = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

を課す ($\alpha, \beta, \cdots$ はスピノル添字である)．反交換関係 $\{(\hat{\psi}_l)_\alpha(\boldsymbol{x}, t), (\hat{\psi}_{l'})_\beta(\boldsymbol{y}, t)\} = 0$ より

$$(\hat{\psi}_l)_\alpha(x)\,|\psi\rangle = (\psi_l)_\alpha(x)\,|\psi\rangle \tag{10}$$

を満たす $(\hat{\psi}_l)_\alpha(x)$ の固有値 $(\psi_l)_\alpha(x)$ もまた反交換関係 $\{(\psi_l)_\alpha(\boldsymbol{x}, t), (\psi_{l'})_\beta(\boldsymbol{y}, t)\} = 0$ を満たさなければならない．そこでフェルミオン場 ψ_l は古典場としては，反交換関係

$$\{(\psi_l)_\alpha(x), (\psi_{l'})_\beta(y)\} = \{(\psi_l)_\alpha(x), (\hat{\psi}_{l'})_\beta(y)\} = \{(\psi_l)_\alpha(x), (\hat{\psi}_{l'}{}^\dagger)_\beta(y)\} = 0 \tag{11}$$

を満たす Grassmann 場であると考える [5, pp.104–105].

[*2] 文献 [5, p.40] では $\partial_0\psi_l$ による微分については右微分の約束をとっている．このとき反交換関係を用いて Lagrangian 密度における Grassmann 場 $\partial_0\psi_l$ を Grassmann 場の積の左端まで移動させる必要がないため，共役な場の定義式 $\pi_{\psi_l} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi_l)}$ には負号が現れない．

[*3] 単位に MeV を用いているのは，自然単位系において質量とエネルギーの次元は等しくなるからである．

1.2.4 Grassmann 数

Grassmann 変数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ は次の反交換関係を満たすものとして定義される．

$$\{\theta_i, \theta_j\} = 0. \tag{12}$$

よって ${\theta_i}^2 = 0$ となるから，Grassmann 変数 $\{\theta_i\} \equiv \theta$ の“関数”は次の形を持つ．

$$f(\theta) = p_0 + \sum p_i\theta_i + \sum p_{ij}\theta_i\theta_j + \cdots + p_{12\cdots n}\theta_1\theta_2\cdots\theta_n. \tag{13}$$

ここで $\sum$ は $1 \leq i < j < \cdots \leq n$ を満たす添字 $i, j, \cdots$ に関する和を表す．また係数 $p_0, p_i, p_{ij}, \cdots$ は通常の数である [4, pp.315–316]．なお $f(\theta)$ の指数関数はベキ級数 $e^{f(\theta)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\{f(\theta)\}^n$ として定義される．このとき θ をある Grassmann 数とすると $\theta^2 = 0$ なので，$e^\theta = 1 + \theta$ となることを注意しておく [3, pp.87–88]．

次に Grassmann 変数 $\{\theta_i\} \equiv \theta$ の任意の関数 $f(\theta)$ の，Grassmann 変数 θ_i による微分を定義しよう [3, pp.81–82] [4, pp.316–318]．$f(\theta)$ は式 (13) の形を持つので，それには θ_i による微分が線形性を持つものとして式 (13) の各項の微分

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}(\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_\omega}) \tag{14}$$

を定義すれば十分である．ここで θ_i による微分は

$$\frac{\partial\theta_i}{\partial\theta_j} = \delta_{ij} \tag{15}$$

を満たすものとする．また通常の数の θ_i による微分はゼロとする．これを踏まえ，$\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_\omega}$ の θ_i による微分 (14) を定義する．まず $\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_\omega}$ が θ_i を含まないとき，式 (14) はゼロとする．次に $\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_\omega}$ が θ_i を 2 つ以上含むとき，反交換関係 (12) によりこれはゼロになるので，その θ_i による微分 (14) もゼロである．そこで $\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_\omega}$ が θ_i を 1 つだけ含む場合を考える．このとき θ_i による微分 (14) を実行するには，次のように反交換関係 (12) を用いて θ_i を積 $\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_\omega}$ の左端まで移動してから，式 (15) を適用すれば良い (左微分の約束)．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta_i}(\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_{k-1}}\theta_i\theta_{j_{k+1}}\cdots\theta_{j_\omega}) =&(-1)^{k-1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}\theta_i\right)\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_{k-1}}\theta_{j_{k+1}}\cdots\theta_{j_\omega}\\ =&(-1)^{k-1}\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_{k-1}}\theta_{j_{k+1}}\cdots\theta_{j_\omega}.\end{aligned}$$

最後に Grassmann 変数 $\{\theta_i\} \equiv \theta$ の任意の関数 $f(\theta)$ の，Grassmann 変数 θ_i による積分を定義しよう [4, pp.339–340]．$f(\theta)$ は式 (13) の形を持つので，それには θ_i による積分が線形性を持つものとして式 (13) の各項の積分

$$\int \mathrm{d}\theta_i(\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_\omega})$$

を定義すれば良い．そしてこれを計算するには，次の規則を与えれば十分である．

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\theta_i 1 =&0, \qquad \int \mathrm{d}\theta_i\theta_i = 1,\\ \int \mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1}\mathrm{d}\theta_n F(\theta) =& \int \mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1}\left\{\int \mathrm{d}\theta_n F(\theta)\right\},\\ \int \mathrm{d}\theta_i(\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_{k-1}}\theta_i\theta_{j_{k+1}}\cdots\theta_{j_\omega}) =&(-1)^{k-1}\left(\int \mathrm{d}\theta_i\theta_i\right)\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_{k-1}}\theta_{j_{k+1}}\cdots\theta_{j_\omega}\\ =&(-1)^{k-1}\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_{k-1}}\theta_{j_{k+1}}\cdots\theta_{j_\omega}.\end{aligned}$$

ただし第 3 式の $F(\theta)$ は Grassmann 変数 $\{\theta_i\} \equiv \theta$ の任意の関数であり，第 4 式の Grassmann 変数 $\theta_{j_1}, \theta_{j_2}, \cdots, \theta_{j_{k-1}}, \theta_{j_{k+1}}, \cdots, \theta_{j_\omega}$ は θ_i を含まないものとする．以上により，例えば p_0, p_1, p_2, p_{12} を通常の数として

$$\int \mathrm{d}\theta_1 \mathrm{d}\theta_2 (p_0 + p_1\theta_1 + p_2\theta_2 + p_{12}\theta_1\theta_2) = -p_{12} \int \mathrm{d}\theta_1 \mathrm{d}\theta_2 \theta_2\theta_1 = -p_{12}$$

となる．

Grassmann 数 θ_i は連続変数のようなものではなく，純粋に上述のような操作上の性質だけで定義された抽象的な対象であり，θ_i による微積分もまた通常のそれとは本来，全く異なるものである．

1.2.5 フェルミオンのコヒーレント状態

格子点 $\boldsymbol{x}$ を中心とする体積要素 $\varDelta^3 x$ に空間を分割し，レプトンの種類 l，スピノル添字 α，位置 $\boldsymbol{x}$ をまとめた添字 a を用いて各時刻 t での場 $(\psi_l)_\alpha(\boldsymbol{x}, t)$ を ψ_a と書こう．フェルミオン場 $\psi_l(x)$ が Grassmann 場であることに注意した上で，これに共役な場 $\pi_{\psi_l}(x)$ を計算すると

$$\pi_{\psi_l} \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi_l)} = i{\psi_l}^\dagger$$

となる (3.3 節参照) [3, p.211]．そこで

$$(\hat{\pi}_{\psi_l})_\alpha(\boldsymbol{x}, t)\varDelta^3 x \equiv i{\hat{\psi}_a}^\dagger \tag{16}$$

と書くと，格子点 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots$ とこれを中心とする各無限小体積要素 $\varDelta^3 x$ に対して $\dfrac{{\delta^i}_j}{\varDelta^3 x} = \delta(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)$ なので [2, p.35]，場の演算子に対する正準反交換関係 (9) は

$$\{\hat{\psi}_a, {\hat{\psi}_b}^\dagger\} = \delta_{ab}, \qquad \{\hat{\psi}_a, \hat{\psi}_b\} = 0, \qquad \{{\hat{\psi}_a}^\dagger, {\hat{\psi}_b}^\dagger\} = 0$$

となる．よって ${\hat{\psi}_a}^\dagger, \hat{\psi}_a$ は，真空を $|0\rangle$ としてそれぞれ

$${\hat{\psi}_a}^\dagger |0\rangle \equiv |a\rangle, \qquad \hat{\psi}_a |0\rangle = 0$$

を満たす生成・消滅演算子と見なせる．ここからコヒーレント状態

$$|\psi\rangle \equiv \exp\left(-\sum_a \psi_a {\hat{\psi}_a}^\dagger\right)|0\rangle \tag{17}$$

を定義すると，これは固有方程式 (10):

$$\hat{\psi}_a |\psi\rangle = \psi_a |\psi\rangle$$

を満たす固有状態であり，これに対して

$$\langle\psi|\psi'\rangle = \exp\left(\sum_a {\psi_a}^* {\psi'}_a\right), \tag{18}$$

$$\int\left(\prod_{a'} \mathrm{d}{\psi_{a'}}^* \mathrm{d}\psi_{a'}\right)|\psi\rangle \exp\left(-\sum_a {\psi_a}^* \psi_a\right)\langle\psi| = 1 \tag{19}$$

が成り立つことが示される (3.2.1 節参照) [5, pp.108–109]．式 (16):$i\hat{\psi_a}^\dagger \equiv (\hat{\pi}_{\psi_l})_\alpha(\boldsymbol{x},t)\mathit{\Delta}^3x$ の略記に対応して $\psi_a{}^* = ({\psi_l}^\dagger)_\alpha(\boldsymbol{x},t)\mathit{\Delta}^3x$ と改めると，これらは

$$\langle\psi|\psi'\rangle = \exp\left\{\sum_l \int \mathrm{d}^3x {\psi_l}^\dagger(\boldsymbol{x},t){\psi_l}'(\boldsymbol{x},t)\right\}, \tag{20}$$

$$\int \left(\prod_{\boldsymbol{x},l} \mathrm{d}{\psi_l}^\dagger(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}\psi_l(\boldsymbol{x},t)\right)|\psi\rangle \exp\left\{-\int \mathrm{d}^3x' \sum_{l'} {\psi_{l'}}^\dagger(\boldsymbol{x}',t)\psi_{l'}(\boldsymbol{x}',t)\right\}\langle\psi| = 1, \tag{21}$$

$$\mathrm{d}{\psi_l}^\dagger \equiv \prod_\alpha \mathrm{d}({\psi_l}^\dagger)_\alpha, \qquad \mathrm{d}\psi_l \equiv \prod_\alpha \mathrm{d}(\psi_l)_\alpha$$

と書ける．

1.3 量子電磁力学 (QED) の Lagrangian 密度

QED の Lagrangian 密度

電磁ポテンシャル (または単に電磁場) を A^μ，電磁テンソルを $F_{\mu\nu}$ と書く．QED の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \sum_l \bar{\psi}_l(i\partial\!\!\!/ - m_l)\psi_l + e\sum_l \bar{\psi}_l A\!\!\!/\psi_l - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

で与えられる．ただし電磁気学の単位系として Heaviside 単位系を用いている．$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ は周知の自由電磁場項である [1, p.78]．Dirac 場を含む項は自由 Dirac 場の Lagrangian 密度 (8):$\mathcal{L} = \sum_l \bar{\psi}_l(i\partial\!\!\!/ - m_l)\psi_l$ において，極小置換

$$\partial_\mu \quad \to \quad D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu \tag{22}$$

を行うと得られる．言い換えると，この D_μ を用いて QED の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \sum_l \bar{\psi}_l(iD\!\!\!\!/ - m_l)\psi_l - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{23}$$

と書ける．

ゲージ不変性

電磁ポテンシャルを $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu f$ と変化させても導かれる電磁場 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ は変化しない) [1, p.56]．また電磁場のゲージ変換 $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu f$ と同時に Dirac 場に局所的な位相変換

$$\psi_l(x) \to \psi_l(x)e^{ief(x)}, \qquad \bar{\psi}_l(x) \to \bar{\psi}_l(x)e^{-ief(x)}$$

を施せば Lagrangian 密度 (23) は不変に留まる (この位相変換が局所的と呼ばれるのは，位相 $\pm ef(x)$ が x に依存するからである)．逆に言えば，Dirac 場の局所的位相変換に対して不変な Lagrangian 密度を得るには $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu f$ と変換するゲージ場 A_μ を導入して，極小置換 $\partial_\mu \to D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu$ を施せば良い (3.3 節参照) [2, pp.83–84,p.141] [3, pp.218–219].

特に $f(x)$ が x に依らない定数 ε であるような大域的位相変換に対して Lagrangian 密度 (23) が不変であることから，

$$s^\alpha(x) = -e\sum_l \bar{\psi}_l(x)\gamma^\alpha\psi_l(x) \tag{24}$$

を電流密度とするような電荷に対する保存則 (連続の式)

$$\partial_\alpha s^\alpha = 0 \tag{25}$$

が導かれる (3.3 節参照) [2, p.70].

QED の Hamiltonian 密度

Dirac 場 ψ_l, 電磁場 A_μ に共役な場

$$\begin{aligned} \pi_{\psi_l} &\equiv -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi_l)} = \bar{\psi}_l i\gamma^0 = i{\psi_l}^\dagger, \\ \pi^\mu &\equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu} = \begin{cases} 0 & (\mu=0) \\ -F^{0i} & (\mu=i=1,2,3) \end{cases} \end{aligned} \tag{26}$$

を用いて [2, p.69] [3, p.211,p.225]，Hamiltonian は

$$H = \int \mathcal{H}\mathrm{d}^3x, \qquad \text{Hamiltonian 密度：}\quad \mathcal{H} = \sum_l \pi_{\psi_l}\dot{\psi}_l + \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}$$

で定義される[*4]．ただし $\dot{A}^\mu$ は式 (26) を用いて共役な場 π^μ で表されており，具体的には

$$\mathcal{H} = \sum_l (i{\psi_l}^\dagger)\dot{\psi}_l - \sum_l \bar{\psi}_l(i\partial\!\!\!/ - m_l)\psi_l - e\sum_l \bar{\psi}_l A\!\!\!/\psi_l - \frac{1}{2}\pi_k\pi^k + \pi^k\partial_k A_0 + \frac{1}{4}F_{kl}F^{kl} \tag{27}$$

である (ラテン文字 $k, l, \cdots$ は空間成分 1,2,3 を動く，3.3 節参照) [3, p.225].

1.4 Green 関数 (確率振幅) の経路積分表式

時刻 t_I に場 $\psi \equiv \{\psi_e, \psi_\mu, \psi_\tau\}, A \equiv \{A^\mu\}$ の値が $\psi_\mathrm{I}, A_\mathrm{I}$ となる始状態 $|\psi_\mathrm{I}, A_\mathrm{I}, t_\mathrm{I}\rangle$ にあった系を，時刻 t_F に場の値が $\psi_\mathrm{F}, A_\mathrm{F}$ となる終状態 $|\psi_\mathrm{F}, A_\mathrm{F}, t_\mathrm{F}\rangle$ に見出す確率振幅 $\langle\psi_\mathrm{F}, A_\mathrm{F}, t_\mathrm{F}|\psi_\mathrm{I}, A_\mathrm{I}, t_\mathrm{I}\rangle$ を考え，これを Green 関数 $G[\psi_\mathrm{F}, A_\mathrm{F}; \psi_\mathrm{I}, A_\mathrm{I}; t_\mathrm{F} - t_\mathrm{I}]$ と定義する:

$$G[\psi_\mathrm{F}, A_\mathrm{F}; \psi_\mathrm{I}, A_\mathrm{I}; t_\mathrm{F} - t_\mathrm{I}] \equiv \langle\psi_\mathrm{F}, A_\mathrm{F}, t_\mathrm{F}|\psi_\mathrm{I}, A_\mathrm{I}, t_\mathrm{I}\rangle.$$

また $f(x)$ を任意の関数として，電磁場 $A_\mu(x)$ にゲージ条件

$$\partial^\mu A_\mu - f = 0$$

を課す．

1.3 節で述べたように QED の Lagrangian 密度は式 (23) で与えられ，したがって Hamiltonian 密度は式 (27) で与えられる．Hamiltonian における場を演算子に置き換えた Hamilton 演算子 $\hat{H} = H[\hat{\psi_l}^\dagger, \hat{\psi}_l, \hat{A}^\mu, \hat{\pi}^\mu]$ は時間を陽に含まないから，時間的発展の演算子は $U(t) = e^{-i\hat{H}t}$ と表される [6, pp.97–98]．量子ダイナミクスは $U(t)$ に支配される．このことを原理と見なして出発点にとると，Green 関数を経路積分で表した式

[*4] $\bar{\psi}_l$ は ψ_l に共役な場に当たるので ($\pi_{\psi_l} = i{\psi_l}^\dagger$)，これを ψ_l とは別にもう 1 種類の場と考えて，Hamiltonian 密度の式に $\sum_l \pi_{\bar{\psi}_l}\dot{\bar{\psi}}_l$ を加える必要はないだろう．$\sum_l \pi_{\bar{\psi}_l}\dot{\bar{\psi}}_l$ の項を考えたとしても，$\pi_{\bar{\psi}_l} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\bar{\psi}_l)} = 0$ により得られる Hamiltonian 密度は変わらない．

$$G[\psi_{\mathrm{F}}, A_{\mathrm{F}}; \psi_{\mathrm{I}}, A_{\mathrm{I}}; t_{\mathrm{F}} - t_{\mathrm{I}}] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}A \left(\prod_x \delta(\partial^\mu A_\mu - f)\right) |\det(\Box_i \delta^4(x_i - x_j))| \exp\left(i \int \mathrm{d}^4x \mathcal{L}\right),$$

$$\mathcal{L} \equiv \sum_l \bar{\psi}_l (i\partial\!\!\!/ - m_l)\psi_l + e\sum_l \bar{\psi}_l A\!\!\!/ \psi_l - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{28}$$

が導かれる．ただし格子点 $\boldsymbol{x}$ を中心とする体積要素 $\varDelta^3 x$ に空間を分割し，時間を $\varDelta t = \frac{t_{\mathrm{F}} - t_{\mathrm{I}}}{N}$ 刻みに $t = t_n \equiv t_{\mathrm{I}} + n\varDelta t (n = 0, 1, \cdots, N)$ と離散化すると，時空の体積要素 $\varDelta\Omega \equiv \varDelta t \varDelta^3 x$ を 1 つの代表点 x が占め，

$$\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \equiv \lim_{\substack{N\to\infty \\ \varDelta x \to 0}} \int \left(\prod_{n=1}^{N-1} \prod_{\boldsymbol{x},l} \mathrm{d}{\psi_l}^\dagger(\boldsymbol{x}, t_n) \mathrm{d}\psi_l(\boldsymbol{x}, t_n)\right) \exp\left\{\int \mathrm{d}^3x' \sum_{l'} {\psi_{l'}}^\dagger(\boldsymbol{x}', t_{\mathrm{F}})\psi_{l'}(\boldsymbol{x}', t_{\mathrm{F}})\right\} \tag{29}$$

$$= \lim_{\varDelta\Omega\to 0} \int \left(\prod_{x,l} \mathrm{d}{\psi_l}^\dagger(x) \mathrm{d}\psi_l(x)\right) \exp\left\{\int \mathrm{d}^3x' \sum_{l'} {\psi_{l'}}^\dagger(\boldsymbol{x}', t_{\mathrm{F}})\psi_{l'}(\boldsymbol{x}', t_{\mathrm{F}})\right\}$$

$$\left(\exp\left\{\int \mathrm{d}^3x' \sum_{l'} {\psi_{l'}}^\dagger(\boldsymbol{x}', t_{\mathrm{F}})\psi_{l'}(\boldsymbol{x}', t_{\mathrm{F}})\right\} \text{は指定された終状態の場の値で決まる定数}\right),$$

$$\mathcal{D}A \equiv \lim_{\varDelta\Omega\to 0} \prod_\mu \left(\prod_x \frac{\mathrm{d}A_\mu(x)}{C(\varDelta x, \varDelta t)}\right) \tag{30}$$

である．さらにこれを

$$G[\psi_{\mathrm{F}}, A_{\mathrm{F}}; \psi_{\mathrm{I}}, A_{\mathrm{I}}; t_{\mathrm{F}} - t_{\mathrm{I}}] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}A \exp\left[i \int \mathrm{d}^4x \left\{\mathcal{L} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2\right\}\right], \tag{31}$$

$$\mathcal{D}A \equiv \lim_{\varDelta\Omega\to 0} \prod_\mu \left(\prod_x \frac{\mathrm{d}A_\mu(x)}{C'(\varDelta x, \varDelta t; \xi)}\right) \tag{32}$$

と書き直すこともできる．ここに $C(\varDelta x, \varDelta t), C'(\varDelta x, \varDelta t; \xi)$ は空間の格子間距離 $\varDelta x$，時間刻み $\varDelta t$(および定数 ξ) で決まる規格化定数である [3, p.240]．

以上の導出過程は 3.4 節を見よ (経路積分 (28) における行列式 $\det(\Box_i \delta^4(x_i - x_j))$ の解釈もそこで述べる)．導出には次のことを用いている．

- Weyl 順序にある Hamiltonian に対する式

$$(3) : \langle \boldsymbol{q}_B | H(\hat{\boldsymbol{q}}, \hat{\boldsymbol{p}}, t) | \boldsymbol{q}_A \rangle = \int \left(\prod_i \frac{\mathrm{d}p_i}{2\pi}\right) e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{q}_B - \boldsymbol{q}_A)} H(\bar{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{p}, t).$$

- Fermi 系のコヒーレント状態に対する式

$$(20) : \langle \psi | \psi' \rangle = \exp\left\{\sum_l \int \mathrm{d}^3x {\psi_l}^\dagger(\boldsymbol{x}, t) {\psi_l}'(\boldsymbol{x}, t)\right\},$$

$$(21) : \int \left(\prod_{\boldsymbol{x},l} \mathrm{d}{\psi_l}^\dagger(\boldsymbol{x}, t) \mathrm{d}\psi_l(\boldsymbol{x}, t)\right) |\psi\rangle \exp\left\{-\int \mathrm{d}^3x' \sum_{l'} {\psi_{l'}}^\dagger(\boldsymbol{x}', t)\psi_{l'}(\boldsymbol{x}', t)\right\} \langle\psi| = 1.$$

- $\det \gamma^0 = 1$ となる γ 行列の具体的な表示．

– 例えば $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる Dirac-Pauli 表示 (1 は 2×2 の単位行列を表す).
– 3.4 節で指摘するように，
  式 (60):$\mathrm{d}\bar{\psi} = \mathrm{d}\psi^\dagger$ の説明において文献 [3, p.213] では $\det\gamma^0 = 1$ を用いているけれど，
  これは γ 行列の具体的な表示を指定して初めて成り立つ式と考えられる．
  実際，Dirac 代数 (6) から言えるのは

$$(\gamma^0)^2 = 1, \qquad \therefore \det\gamma^0 = \pm 1$$

  までである．

2　場の量子論から古典物理学への移行

量子電磁力学において Green 関数 $G[\psi_{\mathrm{G}}, A_{\mathrm{F}}; \psi_{\mathrm{I}}, A_{\mathrm{I}}; t_{\mathrm{F}} - t_{\mathrm{I}}]$ すなわち確率振幅 $\langle \psi_{\mathrm{F}}, A_{\mathrm{F}}, t_{\mathrm{F}} | \psi_{\mathrm{I}}, A_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{I}} \rangle$ は経路積分 (28):

$$G[\psi_{\mathrm{F}}, A_{\mathrm{F}}; \psi_{\mathrm{I}}, A_{\mathrm{I}}; t_{\mathrm{F}} - t_{\mathrm{I}}] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}A \left(\prod_x \delta(\partial^\mu A_\mu - f) \right) |\det(\Box_i \delta^4(x_i - x_j))| \exp\left(i \int \mathrm{d}^4 x \mathcal{L} \right)$$

で与えられる (1.4 節参照)．では粒子と場の時間発展を決定する古典物理学の原理はこの中にどのように含まれているのだろうか．

Dirac 場 ψ_l と電磁場 A_μ をまとめて ϕ_r と書くと作用 $S = \int \mathrm{d}^4 x \mathcal{L}$ の値は，場 ϕ_r の $t_{\mathrm{I}} \leq t \leq t_{\mathrm{F}}$ における時間変化の仕方，すなわち $\phi_r(x)$ の関数形に応じて決まる．そしてゲージ条件 $\partial^\mu A_\mu - f = 0$ を満たすあらゆる関数形の $\phi_r(x)$ に対する e^{iS} が確率振幅の式 (28) に寄与している*5．ここでどのような $\phi_r(x)$ に対しても $S \gg 1 (= \hbar)$ となるような古典的極限を考えよう．このとき基本的には $\phi_r(x)$ の僅かな変化に伴い e^{iS} の位相は大きく変化し激しく振動するため，互いに関数形の少しずつ異なる $\phi_r(x)$ からの確率振幅 (28) への寄与は互いに打ち消し合う．こうして確率振幅 (28) への寄与は，$\phi_r(x)$ の変分に伴う S の 1 次の変化が $\delta S = 0$ となる $\phi_r(x) = {\phi_r}^{\mathrm{cl}}(x)$ に近い関数形を持つような場の時間発展 $\phi_r(x)$ によりもたらされる．これは古典的極限で場の値が確実に ${\phi_r}^{\mathrm{cl}}$ に見出されることを意味する．

以上より古典的極限で場 $\phi_r(x)$ の時間発展は，作用

$$\begin{aligned} S = \int \mathrm{d}^4 x \mathcal{L} &= \int \mathrm{d}^4 x \left\{ \sum_l \bar{\psi}_l (i\not{D} - m_l)\psi_l - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right\} \\ &= \int \mathrm{d}^4 x \left\{ \sum_l \bar{\psi}_l (i\not{\partial} - m_l)\psi_l - s^\mu A_\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right\} \end{aligned} \tag{33}$$

の停留値を与える条件から定まる．ここに

$$s^\mu \equiv -e \sum_l \bar{\psi}_l \gamma^\mu \psi_l$$

は Dirac 場の電流密度である [2, p.70]．言い換えると Dirac 場と電磁場は

$$\text{Euler-Lagrange 方程式：} \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi}_l)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_l} = 0 \tag{34}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (i\not{D} - m_l)\psi_l = 0 \\ \partial_\mu s^\mu = 0 \qquad \text{(3.3 節参照)} \end{cases},$$

$$\text{Maxwell 方程式} \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = -s^\mu \tag{35}$$

に従って相互作用し時間発展する．

では以上の場の量子論の帰結から，古典物理学の原理はどのように導かれるのだろうか．古典物理学において自然界は物質 (粒子) と場から成るから，これは場の一元論から場と粒子の二元論への移行がどのように達成されるかという問題を含んでいる．これを考えよう．ただし古典物理学は重力場を扱うのに対し，量子電磁力学は重力場を扱わない．そこで以降も本章では重力場を考えないことにする．

*5 ここで Grassmann 場である Dirac 場の経路積分についても，Dirac 場のあらゆる関数形の寄与として素朴に解釈した．

物質場に対する作用を

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{M}} &= \int \mathcal{L}_{\mathrm{M}} \mathrm{d}^4 x, \\
\mathcal{L}_{\mathrm{M}} &\equiv \sum_l \bar{\psi}_l (i\not{D} - m_l)\psi_l = \sum_l \bar{\psi}_l (i\not{\partial} - m_l)\psi_l - s^\mu A_\mu
\end{aligned}
\tag{36}
$$

と書く．今，時空の与えられた点の座標が無限小 $\xi^\mu(x)$ だけ変化する受動的な変換を考える．これは計量テンソルの成分も慣性系での値から変え得るような一般座標変換であるとする．これに対する物質場の作用 S_{M} の不変性を要求すると，物質場の作るエネルギー・運動量テンソルを

$$
T_{\mathrm{M}}{}^{\mu\nu} \equiv 2\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial(\partial_\lambda g_{\mu\nu})}\right) \tag{37}
$$

として，保存則

$$
\partial_\nu T_{\mathrm{M}}{}^\nu{}_\mu = F_{\mu\nu} s^\nu \tag{38}
$$

が導かれる (4.2 節参照) [7, pp.93–94]．

文献 [7, pp.181–185] の議論を参考にしてここから次のように質点の運動方程式を導ける．そのために物質場を点在する荷電粒子の集団と考える．そして k 番目の粒子の質量を m_k，電荷を e_k，固有時間を τ_k，座標を $z^\mu(\tau_k)$ または単に $z^\mu(k)$，$\dot{z}^\mu(k) \equiv \mathrm{d}z^\mu(k)/\mathrm{d}\tau_k$ として

$$
s^\mu(x) = \sum_i e_i \int \dot{z}^\mu(i) \delta^4(x - z(i)) \mathrm{d}\tau_i, \tag{39}
$$

$$
T_{\mathrm{M}}{}^\mu{}_\nu(x) = \sum_i m_i \int \dot{z}^\mu(i) \dot{z}_\nu(i) \delta^4(x - z(i)) \mathrm{d}\tau_i \tag{40}
$$

と表されると考えれば良い．実際こうすると場に対する保存則 (38) を粒子の運動方程式

$$
m\ddot{z}^\mu = eF^{\mu\nu}\dot{z}_\nu \tag{41}
$$

に書き換えることができる．ここで粒子の番号を省いた (4.3 節参照) [8, pp.106–108][*6]．これと Maxwell 方程式 (35) を合わせて物質と電磁場の時間発展が決定される．

これらは作用

$$
S = -\sum m \int \mathrm{d}s - \sum e \int A_\mu \mathrm{d}x^\mu - \frac{1}{4}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \mathrm{d}^4 x
$$

に対する最小作用原理と等価である．そして，これに

- レプトンに限らない巨視的な物質粒子への適用
- 重力場がある場合への一般化

を行ったものが，“古典的統一理論”における完全な作用

[*6] このように粒子の運動方程式を引き出すために，電流密度と物質場のエネルギー・運動量テンソルを粒子の系に対する表式 (39), (40) に読み替えることは，論点を先取りしており，循環論法に陥っている感を免れない．しかしながらここでの議論は，場と粒子の 2 元論への移行を実現するように，電流密度と物質場のエネルギー・運動量テンソルを同定できることを示した点で意義がある．

$$S = -\sum m \int \mathrm{d}s - \sum e \int A_\mu \mathrm{d}x^\mu - \frac{1}{4}\int F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x - \frac{1}{16\pi k}\int G\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x$$

である [1, p.304,pp.306–308] [9, pp.115–116] [13, pp.261–262,pp.266–267]．ここに

$$m : \text{粒子の質量}, \qquad e : \text{粒子の電荷}, \qquad k : \text{万有引力定数},$$
$$G \equiv g^{\mu\nu}({\Gamma^\rho}_{\mu\sigma}{\Gamma^\sigma}_{\nu\rho} - {\Gamma^\sigma}_{\mu\nu}{\Gamma^\rho}_{\sigma\rho}), \qquad {\Gamma^\mu}_{\nu\rho} : \text{Christoffel 記号}$$

である．

第 II 部

導出編

3　量子電磁力学 (QED) と経路積分 (補足)

3.0.1　可換な量 A, B に対する指数法則 $e^A e^B = e^{A+B}$(補足)

1.1.1 節で述べたように，可換な量 A, B に対しては指数法則 $e^A e^B = e^{A+B}$ が成り立つことを示す．まず,

$$e^A e^B = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} B^m\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{m!} A^n B^m$$

の最右辺において和をとられる項 $\frac{1}{n!}\frac{1}{m!}A^n B^m$ をいくつか書き出すと以下のようになる．

	1	B	$\frac{1}{2}B^2$	$\frac{1}{3!}B^3$	$\frac{1}{N!}B^N$
1	1	B	$\frac{1}{2}B^2$	$\frac{1}{3!}B^3$	$\frac{1}{N!}B^N$
A	A	AB	$\frac{1}{2}AB^2$	$\frac{1}{(N-1)!}AB^{N-1}$	
$\frac{1}{2}A^2$	$\frac{1}{2}A^2$	$\frac{1}{2}A^2B$	$\iddots$		
$\frac{1}{3!}A^3$	$\frac{1}{3!}A^3$	$\frac{1}{(N-1)!}A^{N-1}B$			
$\frac{1}{N!}A^N$	$\frac{1}{N!}A^N$				

$n+m=N$ となる項の和 $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!(N-n)!}A^n B^{N-n}$ は上の図式で 1 列に並ぶ青い字で示した項の和であることに注意すると,

$$e^A e^B = \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!(N-n)!}A^n B^{N-n} = \sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}\sum_{n=0}^{N}\frac{N!}{n!(N-n)!}A^n B^{N-n}$$

となることが分かる (ただし上の図式は $N=4$ として書いている)．上式の最右辺は A, B が交換すれば

$$\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}(A+B)^N = e^{A+B}$$

に等しいから指数法則 $e^A e^B = e^{A+B}$ が成り立つ．

3.1　準備 (補足)

3.1.1　Weyl 順序にある Hamiltonian に対する公式 (補足)

■Hamiltonian の Weyl 変換に対する式 (2) の証明　1.1.2 節で述べたように，Hamiltonian の Weyl 変換に対して

$$\text{式 (2)} : \langle \boldsymbol{q}_B | H(\hat{\boldsymbol{q}}, \hat{\boldsymbol{p}}, t) | \boldsymbol{q}_A \rangle = \int \left(\prod_i \frac{\mathrm{d}p_i}{2\pi}\right) e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{q}_B - \boldsymbol{q}_A)} H_{\mathrm{W}}(\bar{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{p}, t), \qquad \bar{\boldsymbol{q}} \equiv \frac{\boldsymbol{q}_A + \boldsymbol{q}_B}{2}$$

が成り立つことを示す [3, p.23]．Weyl 変換の定義式 (1) は積分変数を $\boldsymbol{v}' \equiv -\boldsymbol{v}$ に変換すると

$$H_{\mathrm{W}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) = \int \left(\prod_i \mathrm{d}v'_i\right) e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}'} \langle \boldsymbol{q} + \boldsymbol{v}'/2 | H(\hat{\boldsymbol{q}}, \hat{\boldsymbol{p}}, t) | \boldsymbol{q} - \boldsymbol{v}'/2 \rangle$$

なので

$$
\begin{aligned}
&\int\left(\prod_i \frac{\mathrm{d}p_i}{2\pi}\right) e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}} H_{\mathrm{W}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) \\
=&\int\left(\prod_i \mathrm{d}v'_i\right)\langle \boldsymbol{q}+\boldsymbol{v}'/2|H(\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}},t)|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{v}'/2\rangle \int\left(\prod_j \frac{\mathrm{d}p_j}{2\pi}\right) e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}')} \\
=&\int\left(\prod_i \mathrm{d}v'_i\right)\langle \boldsymbol{q}+\boldsymbol{v}'/2|H(\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}},t)|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{v}'/2\rangle\,\delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}') \\
=&\langle \boldsymbol{q}+\boldsymbol{v}/2|H(\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}},t)|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{v}/2\rangle
\end{aligned}
$$

となる．よって

$$
\begin{cases}\boldsymbol{q}_A \equiv \boldsymbol{q}-\boldsymbol{v}/2 \\ \boldsymbol{q}_B \equiv \boldsymbol{q}+\boldsymbol{v}/2\end{cases} \qquad \therefore \begin{cases}\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}_A+\boldsymbol{q}_B)/2 \equiv \bar{\boldsymbol{q}} \\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{q}_B-\boldsymbol{q}_A\end{cases}
$$

と書けば式 (2) を得る．

■準備　1.1.2 節で述べたように，Weyl 順序にある Hamiltonian は Weyl 変換に対して不変である．ここではその証明の準備として次のことを確認しておく．

- $[\hat{q},\hat{p}]=i$ のとき，
$$e^{\alpha\hat{q}}e^{\beta\hat{p}} = e^{i\alpha\beta/2}\exp(\alpha\hat{q}+\beta\hat{p}). \tag{42}$$
- Weyl 変換の定義式 (1) は
$$H_{\mathrm{W}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) = \int\left(\prod_i \mathrm{d}u_i\right) e^{i\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{q}}\,\langle \boldsymbol{p}+\boldsymbol{u}/2|H(\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}},t)|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{u}/2\rangle \tag{43}$$
と書き換えられる．

まず，$\exp(\alpha\hat{q}+\beta\hat{p})$ の式 (42) は次のように示される [3, pp.304–305]．$X\equiv\alpha\hat{q}, Y\equiv\beta\hat{p}$ とおくと

$$[X,Y]=i\alpha\beta, \qquad \therefore [X,[X,Y]]=[[X,Y],Y]=0$$

なので (X,Y はハットを付けていないけれど，演算子であることに注意する)，$G(\lambda)\equiv e^{\lambda X}Ye^{-\lambda X}$ に対して

$$G'(\lambda) = (Xe^{\lambda X})Ye^{-\lambda X} + e^{\lambda X}Y(-Xe^{-\lambda X}) = e^{\lambda X}[X,Y]e^{-\lambda X}$$

となる (最後の等号では X と $e^{\lambda X}$ が交換することを用いた)．同様に $G''(\lambda)=e^{\lambda X}[X,[X,Y]]e^{-\lambda X}=0$ だから

$$G'''(\lambda)=G^{(4)}(\lambda)=\cdots=0, \qquad \therefore G(\lambda)=G(0)+G'(0)\lambda+\cdots=Y+[X,Y]\lambda$$

を得る．よって $F(\lambda)\equiv e^{\lambda X}e^{\lambda Y}$ に対して

$$
\begin{aligned}
F(0) =& 1 : \text{恒等演算子}, \\
F'(\lambda) =& (Xe^{\lambda X})e^{\lambda Y} + e^{\lambda X}(Ye^{\lambda Y}) = (X+G(\lambda))F(\lambda) = (X+Y+[X,Y]\lambda)F(\lambda)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．第 2 式の第 2 の等号では $-\lambda X$ と λX が交換するため $e^{-\lambda X}e^{\lambda X}=1$ となることを用いた (1.1.1 節参照)．これらは $F(\lambda)=\exp\left\{(X+Y)\lambda+\frac{1}{2}[X,Y]\lambda^2\right\}$ とすれば満たされ，

$$e^{\alpha\hat{q}}e^{\beta\hat{p}} = e^Xe^Y = F(1) = \exp\left\{(X+Y)+\frac{1}{2}[X,Y]\right\} = e^{i\alpha\beta/2}\exp(\alpha\hat{q}+\beta\hat{p}) : (42)$$

を得る．

また，Weyl 変換の定義の別表現 (43) は次のように確かめられる [3, p.22]．Weyl 変換の定義式 (1) は

$$
\begin{aligned}
H_{\mathrm{W}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) &= \int\left(\prod_i \mathrm{d}p_{1i}\mathrm{d}p_{2i}\right)\langle \boldsymbol{q}-\boldsymbol{v}/2|\boldsymbol{p}_1\rangle\langle \boldsymbol{p}_1|H(\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}},t)|\boldsymbol{p}_2\rangle\langle \boldsymbol{p}_2|\boldsymbol{q}+\boldsymbol{v}/2\rangle \\
&= \int\left(\prod_i \mathrm{d}p_{1i}\mathrm{d}p_{2i}\right)\left\{\left(\prod_j \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)e^{i\boldsymbol{p}_1\cdot(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{v}/2)}\right\}\langle \boldsymbol{p}_1|H(\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}},t)|\boldsymbol{p}_2\rangle\left\{\left(\prod_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)e^{-i\boldsymbol{p}_2\cdot(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{v}/2)}\right\} \\
&\quad (\because \langle \boldsymbol{q}|\boldsymbol{p}\rangle \text{ は平面波 } [6, p.75, p.80]，j,k \text{ は } \boldsymbol{q} \text{ の全成分を動く}) \\
&= \int\left(\prod_i \mathrm{d}p_{1i}\mathrm{d}p_{2i}\right)\langle \boldsymbol{p}_1|H(\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}},t)|\boldsymbol{p}_2\rangle e^{i(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\cdot\boldsymbol{q}}\int\left(\prod_j \frac{\mathrm{d}v_j}{2\pi}\right)\exp\left\{i\left(\boldsymbol{p}-\frac{\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2}{2}\right)\cdot\boldsymbol{v}\right\} \\
&= \int\left(\prod_i \mathrm{d}p_{1i}\mathrm{d}p_{2i}\right)\langle \boldsymbol{p}_1|H(\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}},t)|\boldsymbol{p}_2\rangle e^{i(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\cdot\boldsymbol{q}}\delta\left(\boldsymbol{p}-\frac{\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2}{2}\right) \qquad (44)
\end{aligned}
$$

と変形できる (p_{1i},p_{2i} はそれぞれ $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ の第 i 成分を表す)．ここで

$$
\begin{cases}\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2\equiv\boldsymbol{p}' \\ \frac{\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2}{2}\equiv\boldsymbol{P}\end{cases} \qquad \therefore \begin{cases}\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{p}'/2 \\ \boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}'/2\end{cases}
$$

と変数変換する．$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}',\boldsymbol{P}$ の第 i 成分をそれぞれ p_1,p_2,p',P と書くと (添字 i を省いた)

$$
\frac{\partial(p_1,p_2)}{\partial(p',P)} = \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1
$$

である．これは図 1 より変数 p',P が $\mathrm{d}p',\mathrm{d}P$ 変化したときに点 (p_1,p_2) が (p_1,p_2) 平面を動いてできる領域の面積が $\mathrm{d}p'\mathrm{d}P$ であることから直接理解できる．さらに図 1 より変数 p',P がそれぞれ実数全体を動けば点 (p_1,p_2) は (p_1,p_2) 平面全体を動くから，Weyl 変換の式 (44) をさらに

$$
\begin{aligned}
H_{\mathrm{W}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) &= \int\left(\prod_i \mathrm{d}p'_i\mathrm{d}P_i\right)\langle \boldsymbol{P}+\boldsymbol{p}'/2|H(\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}},t)|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}'/2\rangle e^{i\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{q}}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{P}) \\
&= \int\left(\prod_i \mathrm{d}p'_i\right)\langle \boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}'/2|H(\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}},t)|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'/2\rangle e^{i\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{q}} : (43)
\end{aligned}
$$

と書き換えられる．

■Weyl 順序にある Hamiltonian は Weyl 変換に対して不変であることの証明　さて，1.1.2 節で述べたように，Weyl 順序にある Hamiltonian は Weyl 変換に対して不変であることを示そう [3, pp.26–28]．1.1.2 節で定義した Weyl 順序 $\{\hat{q}^k\hat{p}^l\}_{\mathrm{W}}$ に対して

$$
\begin{aligned}
\exp(\alpha\hat{q}+\beta\hat{p}) &= \sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}(\alpha\hat{q}+\beta\hat{p})^N = \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!(N-n)!}\alpha^n\beta^{N-n}\{\hat{q}^n,\hat{p}^{N-n}\}_{\mathrm{W}}, \\
\therefore \{\hat{q}^k,\hat{p}^l\}_{\mathrm{W}} &= \left(\frac{\partial^k}{\partial\alpha^k}\frac{\partial^l}{\partial\beta^l}\exp(\alpha\hat{q}+\beta\hat{p})\right)\Bigg|_{\alpha,\beta=0} \qquad (45)
\end{aligned}
$$

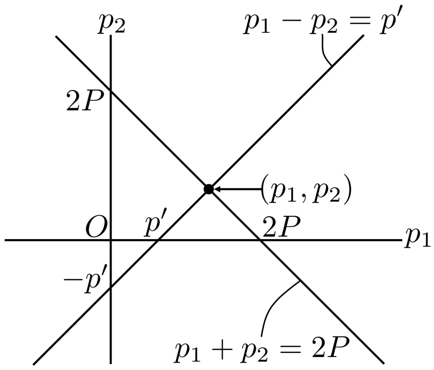

図 1　変数 $p' = p_1 - p_2, P = (p_1 + p_2)/2$ と p_1, p_2 の関係

である．ところで $\exp(\alpha\hat{q} + \beta\hat{p})$ の Weyl 変換は

$$
\begin{aligned}
W[\exp(\alpha\hat{q} + \beta\hat{p})] =& W[e^{-i\alpha\beta/2} e^{\alpha\hat{q}} e^{\beta\hat{p}}] \qquad (\because \text{式 } (42)) \\
=& e^{-i\alpha\beta/2} \int \mathrm{d}u e^{iuq} \langle p + u/2 | e^{\alpha\hat{q}} e^{\beta\hat{p}} | p - u/2 \rangle \qquad (\because \text{式 } (43)) \\
=& e^{-i\alpha\beta/2} \int \mathrm{d}u \mathrm{d}q' e^{iuq} \langle p + u/2 | e^{\alpha\hat{q}} | q' \rangle \langle q' | e^{\beta\hat{p}} | p - u/2 \rangle \\
=& e^{-i\alpha\beta/2} \int \mathrm{d}u \mathrm{d}q' e^{iuq} \frac{e^{-i(p+u/2)q'}}{\sqrt{2\pi}} e^{\alpha q'} \frac{e^{i(p-u/2)q'}}{\sqrt{2\pi}} e^{\beta(p-u/2)} \qquad (\because \langle \boldsymbol{q} | \boldsymbol{p} \rangle \text{ は平面波 } [6, p.75, p.80]) \\
=& e^{-i\alpha\beta/2} e^{\beta p} \int \mathrm{d}q' e^{\alpha q'} (e^{-ipq'} e^{ipq'}) \int \frac{\mathrm{d}u}{2\pi} e^{iu\left(q - 2\times\frac{q'}{2} + i\frac{\beta}{2}\right)} \\
=& e^{-i\alpha\beta/2} e^{\beta p} \int \mathrm{d}q' e^{\alpha q'} \delta\left(q' - \left(q + i\frac{\beta}{2}\right)\right) \\
=& e^{-i\alpha\beta/2} e^{\beta p} e^{\alpha(q + i\beta/2)} \\
=& \exp(\alpha q + \beta p)
\end{aligned}
$$

となって形を変えない．よって Weyl 順序単項式 $\{\hat{q}^k \hat{p}^l\}_{\mathrm{W}}$ を Weyl 変換すると

$$
\begin{aligned}
W[\{\hat{q}^k, \hat{p}^l\}_{\mathrm{W}}] =& \left(\frac{\partial^k}{\partial\alpha^k} \frac{\partial^l}{\partial\beta^l} W[\exp(\alpha\hat{q} + \beta\hat{p})] \right) \bigg|_{\alpha,\beta=0} \qquad (\because \text{式 } (45)) \\
=& \left(\frac{\partial^k}{\partial\alpha^k} \frac{\partial^l}{\partial\beta^l} \exp(\alpha q + \beta p) \right) \bigg|_{\alpha,\beta=0} = q^k p^l \\
=& \{q^k p^l\}_{\mathrm{W}} \qquad (\hat{q}, \hat{p} \text{と違い，} q, p \text{ は可換})
\end{aligned}
$$

となって形を変えない．従って Weyl 順序にある Hamiltonian

$$
H(\hat{\boldsymbol{q}}, \hat{\boldsymbol{p}}, t) = \sum_{\{n_i\},\{m_i\}} H(\{n_i\}, \{m_i\}) \{\hat{q}_1{}^{n_1} \hat{p}_1{}^{m_1}\}_{\mathrm{W}} \cdots \{\hat{q}_N{}^{n_N} \hat{p}_N{}^{m_N}\}
$$

も Weyl 変換すると

$$
\begin{aligned}
H_{\mathrm{W}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) \equiv& W[H(\hat{\boldsymbol{q}}, \hat{\boldsymbol{p}}, t)] \\
=& \sum_{\{n_i\},\{m_i\}} H(\{n_i\}, \{m_i\}) \{q_1{}^{n_1} p_1{}^{m_1}\}_{\mathrm{W}} \cdots \{q_N{}^{n_N} p_N{}^{m_N}\} = H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)
\end{aligned}
$$

となって形を変えない．

3.2 Dirac 場 (補足)

3.2.1 フェルミオンのコヒーレント状態 (補足)

■コヒーレント状態 $|\psi\rangle$ に対する固有方程式 (10)　1.2.5 節で述べたように，コヒーレント状態 (17):

$$|\psi\rangle \equiv \exp\left(-\sum_a \psi_a \hat{\psi}_a{}^\dagger\right)|0\rangle$$

が固有方程式 (10):

$$\hat{\psi}_a |\psi\rangle = \psi_a |\psi\rangle$$

を満たすことを示す．まず Grassmann 場の反交換関係 (11):

$$\{\psi_a, \psi_b\} = \{\psi_a, \hat{\psi}_b\} = \{\psi_a, \hat{\psi}_b{}^\dagger\} = 0$$

より $\psi_a \hat{\psi}_a{}^\dagger$ と $\psi_b \hat{\psi}_b{}^\dagger$(ただし $a \neq b$) は交換するから，

$$|\psi\rangle \equiv \exp\left(-\sum_a \psi_a \hat{\psi}_a{}^\dagger\right)|0\rangle = \left\{\prod_a \exp\left(-\psi_a \hat{\psi}_a{}^\dagger\right)\right\}|0\rangle$$

とできる (1.1.1 節参照)．さらに $\hat{\psi}_a$ と $\psi_b \hat{\psi}_b{}^\dagger$(ただし $a \neq b$) が交換することに注意すると

$$\hat{\psi}_a |\psi\rangle = \hat{\psi}_a \left\{\prod_b \exp\left(-\psi_b \hat{\psi}_b{}^\dagger\right)\right\}|0\rangle = \left\{\prod_{b(\neq a)} \exp\left(-\psi_b \hat{\psi}_b{}^\dagger\right)\right\}\hat{\psi}_a \exp\left(-\psi_a \hat{\psi}_a{}^\dagger\right)|0\rangle \tag{46}$$

となる．ここで真空 $|0\rangle$ は Grassmann 偶，すなわち偶数個の Grassmann 数の積の線形結合であり，それゆえ Grassmann 数と交換する量であると約束する．このとき $|a\rangle \equiv \hat{\psi}_a{}^\dagger |0\rangle$ は Grassmann 奇，すなわち奇数個の Grassmann 数の積の線形結合であり，それゆえ Grassmann 数と反交換する量となる [3, p.96] [5, p.108]．これに注意すると上式 (46) 最右辺において

$$\begin{aligned}
\exp(-\psi_a \hat{\psi}_a{}^\dagger)|0\rangle =& (1 - \psi_a \hat{\psi}_a{}^\dagger)|0\rangle = |0\rangle - \psi_a |a\rangle = |0\rangle + |a\rangle \psi_a, \\
\hat{\psi}_a \exp(-\psi_a \hat{\psi}_a{}^\dagger)|0\rangle =& \hat{\psi}_a(|0\rangle + |a\rangle \psi_a) = |0\rangle \psi_a = \psi_a |0\rangle = \psi_a(|0\rangle - \psi_a |a\rangle) = \psi_a \exp(-\psi_a \hat{\psi}_a{}^\dagger)|0\rangle
\end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned}
(\text{式 (46) 最右辺}) =& \left\{\prod_{b(\neq a)} \exp\left(-\psi_b \hat{\psi}_b{}^\dagger\right)\right\}\psi_a \exp\left(-\psi_a \hat{\psi}_a{}^\dagger\right)|0\rangle \\
=& \psi_a \left\{\prod_b \exp\left(-\psi_b \hat{\psi}_b{}^\dagger\right)\right\}|0\rangle = \psi_a |\psi\rangle : (10)
\end{aligned}$$

を得る．

■$\langle\psi|\psi'\rangle$ の式 (18)　1.2.5 節における $\langle\psi|\psi'\rangle$ の式 (18) を導く．

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle =& \left\{\prod_a \exp\left(-\psi_a \hat{\psi}_a{}^\dagger\right)\right\}|0\rangle, \\
\therefore \langle\psi| =& \langle 0|\left\{\prod_a \exp\left(-\hat{\psi}_a \psi_a{}^*\right)\right\} = \langle 0|\left\{\prod_a \exp\left(\psi_a{}^* \hat{\psi}_a\right)\right\} = \langle 0|\left\{\prod_a (1 + \psi_a{}^* \hat{\psi}_a)\right\}
\end{aligned}$$

なので

$$
\begin{aligned}
\langle\psi|\psi'\rangle &= \langle 0|\prod_a (1+{\psi_a}^*\hat{\psi}_a)\,|\psi'\rangle = \langle 0|\prod_a (1+{\psi_a}^*{\psi_a}')\,|\psi'\rangle \\
&= \langle 0|\exp\left(\sum_a {\psi_a}^*{\psi_a}'\right)|\psi'\rangle = \exp\left(\sum_a {\psi_a}^*{\psi_a}'\right)\langle 0|\psi'\rangle
\end{aligned}
$$

となる．ここで

$$
\langle 0|\,{\psi_a}^\dagger = 0, \qquad \therefore \langle 0|\psi'\rangle = \langle 0|0\rangle = 1
$$

だから式 (18):

$$
\langle\psi|\psi'\rangle = \exp\left(\sum_a {\psi_a}^*{\psi'}_a\right)
$$

を得る．

■コヒーレント状態 $|\psi\rangle$ で表した完全性条件 (19)　1.2.5 節における，コヒーレント状態 $|\psi\rangle$ で表した完全性条件の式 (19) を導く．

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \left\{\prod_a \exp\left(-\psi_a{\hat{\psi}_a}^\dagger\right)\right\}|0\rangle = \left\{\prod_a (1-\psi_a{\hat{\psi}_a}^\dagger)\right\}|0\rangle\,, \\
\langle\psi| &= \langle 0|\left\{\prod_a \exp\left(-\hat{\psi}_a{\psi_a}^*\right)\right\} = \langle 0|\left\{\prod_a (1-\hat{\psi}_a{\psi_a}^*)\right\}
\end{aligned}
$$

なので

$$
|\psi\rangle\exp\left(-\sum_a {\psi_a}^*\psi_a\right)\langle\psi| = \left\{\prod_b (1-\psi_b{\hat{\psi}_b}^\dagger)\right\}|0\rangle\left\{\prod_a (1-{\psi_a}^*\psi_a)\right\}\langle 0|\left\{\prod_c (1-\hat{\psi}_c{\psi_c}^*)\right\}
$$

となる．ここで ψ_a の添字 a は $\{a_1,\cdots,a_N\}$ の N 種類あるとし，$0\le n\le N$ を満たす整数 n を決めてここから n 個の要素 $a_{i_1},\cdots,a_{i_n}$ を選ぶ (select) 方法を s と呼ぶ．さらに選ばれた n 個の要素を a_s，残りの $N-n$ 個の要素を a_r，$|a_s\rangle\equiv\prod_{a_s}{\psi_{a_s}}^\dagger|0\rangle$ と書くことにする．このとき $\int \mathrm{d}\psi_a 1 = 0, \int \mathrm{d}{\psi_a}^* 1 = 0$ に注意すると，式 (19) 左辺の積分 $\int\left(\prod_{a'}\mathrm{d}{\psi_{a'}}^*\mathrm{d}\psi_{a'}\right)|\psi\rangle\exp\left(-\sum_a {\psi_a}^*\psi_a\right)\langle\psi|$ に寄与する項は

$$
\begin{aligned}
&\sum_s\left\{\prod_{a_s}(-\psi_{a_s}{\hat{\psi}_{a_s}}^\dagger)\right\}|0\rangle\left\{\prod_{a_r}(-{\psi_{a_r}}^*\psi_{a_r})\right\}\langle 0|\left\{\prod_{a_s}(-\hat{\psi}_{a_s}{\psi_{a_s}}^*)\right\} \\
=&\sum_s\left\{\prod_{a_r}(-{\psi_{a_r}}^*\psi_{a_r})\right\}\left\{\prod_{a_s}(-{\psi_{a_s}}^*\psi_{a_s})\right\}|a_s\rangle\langle a_s| = \left(\prod_a {\psi_a}^*\psi_a\right)\sum_s |a_s\rangle\langle a_s|
\end{aligned}
$$

であり，式 (19):

$$
\begin{aligned}
&\int\left(\prod_{a'}\mathrm{d}{\psi_{a'}}^*\mathrm{d}\psi_{a'}\right)|\psi\rangle\exp\left(-\sum_a {\psi_a}^*\psi_a\right)\langle\psi| \\
=&\left\{\left(\int \mathrm{d}{\psi_a}^*{\psi_a}^*\right)\left(\int \mathrm{d}\psi_a\psi_a\right)\right\}\sum_s |a_s\rangle\langle a_s| = \sum_s |a_s\rangle\langle a_s| = 1
\end{aligned}
$$

を得る．

3.3 量子電磁力学 (QED) の Lagrangian 密度 (補足)

ゲージ不変性 (補足)

1.3 節で述べた QED の Lagrangian 密度 (23) のゲージ不変性を確かめる．電磁テンソル $F_{\mu\nu}$ は，従って Lagrangian 密度 (23) における自由電磁場の項 $-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ はゲージ変換 $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu f$ に対して不変である：

$$F'_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu f) - \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu f) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}.$$

そこで自由 Dirac 場の項 $\mathcal{L}_0 \equiv \sum_l \bar{\psi}_l(i\partial\!\!\!/ - m_l)\psi_l$ と相互作用項 $\mathcal{L}_\mathrm{I} \equiv e\sum_l \bar{\psi}_l A\!\!\!/\psi_l$ に対して $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_\mathrm{I}$ の不変性を示せば十分である．ゲージ変換

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu f, \qquad \psi_l \to \psi_l e^{ief}, \qquad \bar{\psi}_l \to \bar{\psi}_l e^{-ief} \tag{47}$$

に対して

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 \quad &\to \quad \sum_l(\bar{\psi}_l e^{-ief})(i\partial\!\!\!/ - m_l)(\psi_l e^{ief}) = \mathcal{L}_0 + \sum_l \bar{\psi}_l i(ie\partial\!\!\!/ f)\psi_l = \mathcal{L}_0 - e\sum_l \bar{\psi}_l(\partial\!\!\!/ f)\psi_l,\\
\mathcal{L}_\mathrm{I} \quad &\to \quad e\sum_l(\bar{\psi}_l e^{-ief})(A\!\!\!/ + \partial\!\!\!/ f)(\psi_l e^{ief}) = \mathcal{L}_\mathrm{I} + e\sum_l \bar{\psi}_l(\partial\!\!\!/ f)\psi_l
\end{aligned}$$

だから $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_\mathrm{I}$ は不変である．

次に電荷保存則 (25) を導く．

一般に場 $\phi_r(x)$ の変化 $\phi_r(x) \to \phi_r(x) + \delta\phi_r(x)$ の下で Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ が不変であるとき，

$$f^\alpha \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)}\delta\phi_r \tag{48}$$

は連続の式 $\partial_\alpha f^\alpha = 0$ を満たし，保存する流れ (4 元流束密度) と呼ばれる:

$$\begin{aligned}
0 = \delta\mathcal{L} =& \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r}\delta\phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)}\delta(\partial_\alpha\phi_r)\\
=& \left(\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)}\right)\delta\phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)}\delta(\partial_\alpha\phi_r)\\
& \left(\because \text{Euler-Lagrange 方程式}\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} = 0\right)\\
=& \partial_\alpha f^\alpha.
\end{aligned}$$

以上，場の種類 r についても和をとる [2, pp.37–38].

式 (47) で f を無限小の定数 ε としたゲージ変換

$$\begin{aligned}
A_\mu \quad &\to \quad A_\mu & \therefore \delta A_\mu = 0,\\
\psi_l \quad &\to \quad e^{i\varepsilon}\psi_l \simeq (1 + i\varepsilon)\psi_l & \therefore \delta\psi_l = i\varepsilon\psi_l,\\
\bar{\psi}_l \quad &\to \quad e^{-i\varepsilon}\bar{\psi}_l \simeq (1 - i\varepsilon)\bar{\psi}_l & \therefore \delta\bar{\psi}_l = -i\varepsilon\bar{\psi}_l
\end{aligned}$$

に対して Lagrangian 密度 (23) は不変である．

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \psi_l)} = i\bar{\psi}_l\gamma^\alpha, \qquad \delta A_\mu = 0$$

に注意すると保存する流れ (48) は

$$f^{\alpha} = \sum_l (i\bar{\psi}_l \gamma^{\alpha})(i\varepsilon \psi_l) = -\varepsilon \sum_l \bar{\psi}_l \gamma^{\alpha} \psi_l$$

となるので[*7],

$$s^{\alpha} \equiv -e \sum_l \bar{\psi}_l \gamma^{\alpha} \psi_l$$

は連続の式 $\partial_{\alpha} s^{\alpha} = 0$ を満たす.

QED の Hamiltonian 密度 (補足)

1.3 節における Dirac 場 ψ_l, 電磁場 A^{μ} に共役な場の式 (26) を確かめる．ψ_l に共役な場 π_{ψ_l} の定義式 (26) における Dirac スピノル場による微分は，スピノル添字を $\alpha, \beta, \cdots$ と明記すると $(\pi_{\psi_l})_{\alpha} \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi_l)_{\alpha}}$ を意味する．また Grassmann 場 $(\bar{\psi}_l)_{\beta}, (\psi_l)_{\gamma}$ が反交換することに注意すると，左微分の約束に従い

$$(\pi_{\psi_l})_{\alpha} = -\frac{\partial}{\partial(\partial_0 \psi_l)_{\alpha}} \{(\bar{\psi}_l)_{\beta} i(\gamma^0)_{\beta\gamma} \partial_0 (\psi_l)_{\gamma}\} = \frac{\partial(\partial_0 \psi_l)_{\gamma}}{\partial(\partial_0 \psi_l)_{\alpha}} (\bar{\psi}_l)_{\beta} i(\gamma^0)_{\beta\gamma} = i(\bar{\psi}_l)_{\beta} (\gamma^0)_{\beta\alpha} = i({\psi_l}^{\dagger})_{\alpha}$$

を得る．さらに

$$\pi^{\lambda} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_{\lambda})} = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_{\lambda})} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

において,

$$F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_{\lambda})} F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_{\lambda})} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}) = (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu}) \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_{\lambda})} F_{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_{\lambda})} F_{\alpha\beta}$$

に注意すると

$$\begin{aligned}
\pi^{\lambda} = -2 \times \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_{\lambda})} F_{\mu\nu} \right\} F^{\mu\nu} &= -2 \times \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_{\lambda})} (\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}) \right\} (\partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}) \\
&= -2 \times \frac{1}{4} ({\delta^0}_{\mu} {\delta^{\lambda}}_{\nu} - {\delta^0}_{\nu} {\delta^{\lambda}}_{\mu})(\partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}) \\
&= -(\partial^0 A^{\lambda} - \partial^{\lambda} A^0) = -F^{0\lambda}
\end{aligned}$$

となるので，電磁場 A^{μ} に共役な場の表式 (26):$\pi^{\mu} = -F^{0\mu}$ が導かれる．

電磁場 A_{μ} の場合と異なり，Grassmann 場 ψ_l に共役な場 π_{ψ_l} が式 (26):$\pi_{\psi_l} = -\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_l}$ のように負号の付く形で定義されているのは次の事情による [3, pp.94–95]．すなわち Hamiltonian 密度を

$$\mathcal{H}[\psi_l, \pi_{\psi_l}, A_{\mu}, \pi^{\mu}] = \sum_l \pi_{\psi_l} \dot{\psi}_l + \pi^{\mu} \dot{A}_{\mu} - \mathcal{L}[\psi_l, \dot{\psi}_l, A_{\mu}, \dot{A}_{\mu}]$$

のように π_{ψ_l} が $\dot{\psi}_l$ の左に置かれる形で定義したため，$\psi_l, \dot{\psi}_l$ の変化 $\psi_l \to \psi_l + \delta\psi_l, \dot{\psi}_l \to \dot{\psi}_l + \delta\dot{\psi}_l$ に伴う $\pi_{\psi_l}, \mathcal{H}$ の変化量 $\delta\pi_{\psi_l}, \delta\mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{H} &= \sum_l (\delta\pi_{\psi_l}) \dot{\psi}_l + \sum_l \pi_{\psi_l} \delta\dot{\psi}_l - \sum_l \left\{ (\delta\psi_l) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_l} + (\delta\dot{\psi}_l) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_l} \right\} \\
&= \sum_l (\delta\pi_{\psi_l}) \dot{\psi}_l - \sum_l (\delta\psi_l) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_l} - \sum_l (\delta\dot{\psi}_l) \left(\pi_{\psi_l} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_l} \right) \qquad (\because \pi_{\psi_l} \delta\dot{\psi}_l = -(\delta\dot{\psi}_l) \pi_{\psi_l})
\end{aligned}$$

*7 $\bar{\psi}_l$ は ψ_l に共役な場に当たるので $(\pi_{\psi_l} = i{\psi_l}^{\dagger})$，保存する流れの式 (48) においてこれを ψ_l とは別にもう 1 種類の場 ϕ_r として考慮する必要はないだろう．考慮した場合にも $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\alpha} \bar{\psi}_l)} = 0$ なのでこの結果に変わりはない.

となる．よって $\pi_{\psi_l} = -\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_l}$ とすれば $\mathcal{H}$ が ψ_l, π_{ψ_l}(および A_μ, π^μ) の関数であり，$\dot{\psi}_l$ の関数ではないことが保証される．一方，Hamiltonian 密度を

$$\mathcal{H}[\psi_l, \pi_{\psi_l}, A_\mu, \pi^\mu] = \sum_l \dot{\psi}_l \pi_{\psi_l} + \dot{A}_\mu \pi^\mu - \mathcal{L}[\psi_l, \dot{\psi}_l, A_\mu, \dot{A}_\mu]$$

のように π_{ψ_l} が $\dot{\psi}_l$ の右に置かれる形で定義した場合

$$\delta\mathcal{H} = \sum_l \dot{\psi}_l \delta\pi_{\psi_l} - \sum_l \delta\psi_l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_l} + \sum_l (\delta\dot{\psi}_l) \left(\pi_{\psi_l} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_l}\right)$$

となるので，$\mathcal{H}$ が $\dot{\psi}_l$ に依存しないためには $\pi_{\psi_l} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_l}$ と定義すれば良い [5, p.41].

1.3 節に記した QED の Hamiltonian 密度の式 (27) を導く．以下，ラテン文字 $k, l, \cdots$ は空間成分 1,2,3 を動くものとする．Lagrangian 密度の式 (23)，共役な場の式 (26) より Hamiltonian 密度は

$$\begin{aligned}\mathcal{H} =& \sum_l \pi_{\psi_l} \dot{\psi}_l + \pi^\mu A_\mu - \mathcal{L} \\ =& \sum_l (i{\psi_l}^\dagger)\dot{\psi}_l + \pi^k \dot{A}_k - \sum_l \bar{\psi}_l (i\partial\!\!\!/ - m_l)\psi_l - e\sum_l \bar{\psi}_l A\!\!\!/ \psi_l + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\end{aligned}$$

となる．最右辺に現れる $\dot{A}_\mu$ を π^μ で表すと

$$\begin{aligned}\pi^k \dot{A}_k =& \pi^k(-\pi_k + \partial_k A_0), \qquad (\because \text{式 } (26)) \\ \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} =& \frac{1}{2}F_{0k}F^{0k} + \frac{1}{4}F_{kl}F^{kl} \qquad (\because F_{k0}F^{k0} = F_{0k}F^{0k}) \\ =& \frac{1}{2}\pi_k\pi^k + \frac{1}{4}F_{kl}F^{kl} \qquad (\because \text{式 } (26))\end{aligned}$$

なので，Hamiltonian 密度の式 (27):

$$\mathcal{H} = \sum_l (i{\psi_l}^\dagger)\dot{\psi}_l - \sum_l \bar{\psi}_l (i\partial\!\!\!/ - m_l)\psi_l - e\sum_l \bar{\psi}_l A\!\!\!/ \psi_l - \frac{1}{2}\pi_k\pi^k + \pi^k\partial_k A_0 + \frac{1}{4}F_{kl}F^{kl}$$

を得る [3, p.225].

3.4 Green 関数 (確率振幅) の経路積分表式 (補足)

3.4.1 電磁場の拘束条件

QED の Lagrangian 密度 (23) から導かれる電磁場に共役な場 π^μ には拘束条件 (26):

$$\pi^0 = 0$$

が課せられる．よって式 (27) の Hamiltonian 密度には $\lambda(y)$ を未定乗数として $\lambda(y)\pi^0(y)$ を加えるだけの不定性がある:

$$\tilde{H} \equiv H + \int \mathrm{d}^3 y \lambda(y)\pi^0(y). \tag{49}$$

さらに拘束条件 (26):$\pi^0 = 0$ は各時刻で成り立つから $\dot{\pi}^0 = 0, \ddot{\pi}^0 = 0, \dddot{\pi}^0 = 0, \cdots$ でなければならず，正準方程式を用いて時間微分を計算するとさらなる拘束条件

$$\partial_k \pi^k = -e\sum_l {\psi_l}^\dagger \psi_l$$

が見出される (3.4.2 節参照). ただしラテン文字 $k, l, \cdots$ は空間成分 1,2,3 を動く (以下同じ). 以上の拘束条件を

$$\phi_1 \equiv \pi^0 = 0, \qquad \phi_2 \equiv \partial_k \pi^k + e\sum_l {\psi_l}^\dagger \psi_l = 0$$

と書くと, 式 (27) の Hamiltonian 密度には $\lambda^1(y), \lambda^2(y)$ を未定乗数として $\lambda^j(y)\phi_j(y)$ を加えるだけの不定性がある:

$$H_{\mathrm{tot}} \equiv H + \int \mathrm{d}^3 y \lambda^j(y)\phi_j(y). \tag{50}$$

電磁場の満たすケージ条件を決めると未定乗数 $\lambda^j(y)$ を, 従って Hamiltonian を定めることができる. これは電磁場の時間発展が, 考えている電磁場の満たすゲージ条件に応じて定まることを意味する. ここでは初めに, Coulomb 条件

$$\varphi_1 \equiv A_0 = 0, \qquad \varphi_2 \equiv \partial^k A_k = 0 \tag{51}$$

を満たす電磁場を考える (このとき実際に未定乗数 $\lambda^j(y)$ が定まることを 3.4.2 節で示す).

以上の拘束条件をまとめて書くと

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\varphi}(t) \equiv \left(\{A_0(\boldsymbol{x},t)\}, \{\partial^k A_k(\boldsymbol{x},t)\}\right),\\
&\boldsymbol{\phi}(t) \equiv \left(\{\pi^0(\boldsymbol{x},t)\Delta^3 x\}, \left\{\left(\partial_l \pi^l(\boldsymbol{x},t) + e\sum_l {\psi_l}^\dagger(\boldsymbol{x},t)\psi_l(\boldsymbol{x},t)\right)\Delta^3 x\right\}\right),\\
&\boldsymbol{\chi}(t) \equiv (\boldsymbol{\varphi}(t), \boldsymbol{\phi}(t)) = 0
\end{aligned} \tag{52}$$

となる. ただし $\{\cdot\}$ は空間を体積要素 $\Delta^3 x$ に分割したときの, 体積要素の中心を成す格子点 $\boldsymbol{x}$ についての集合を表す [3, pp.225–226,pp.231–232] [14, pp.134–138].

Dirac 場と Dirac 場に共役な場に加えて,

$$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \equiv (\{A_\mu(\boldsymbol{x},t)\}, \{\pi^\mu(\boldsymbol{x},t)\Delta^3 x\})$$

を正準変数にとる. ただし $\{\cdot\}$ は $\mu = 0,1,2,3$ および格子点 $\boldsymbol{x}$ についての集合を表す*8. そして拘束条件量 $\boldsymbol{\phi}(t)$ を座標変数 $\boldsymbol{q}'(t)$ にとり ($\boldsymbol{q}'(t) \equiv \boldsymbol{\phi}(t)$), これに共役な運動量を $\boldsymbol{p}'$ と書くと, 拘束条件の下で独立な変数を $(\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*)$ として点 $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ の運動は

$$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{q}' = 0, \boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p}'(\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*))$$

に制約されると見て良い [14, pp.139–141].

3.4.2 電磁場の拘束条件 (補足)

3.4.1 節で述べたように, $\dot{\pi}^0 = 0, \ddot{\pi}^0 = 0, \dddot{\pi}^0 = 0, \cdots$ から拘束条件 $\partial_k \pi^k = -e\sum_l {\psi_l}^\dagger \psi_l$ が導かれることを示す. 時間に陽に依らない量 f の時間微分は Poisson 括弧を用いて

$$\dot{f} = \{f, H\}_{\mathrm{P}}$$

*8 体積要素 $\Delta^3 x$ を付けて $\boldsymbol{p}$ の成分を定義するとこれは A_μ を力学変数と見たときの一般化運動量の次元

$$[\pi^\mu \Delta^3 x] = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu}\Delta^3 x\right] = \frac{[L]}{[\dot{A}_\mu]}$$

を持ち, さらに格子点についての和 $\boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{q}} = \sum_{\boldsymbol{x}} \Delta^3 x \pi^\mu \dot{A}_\mu$ を体積積分 $\int \mathrm{d}^3 x \pi^\mu \dot{A}_\mu$ に置き換えることができる.

と書ける [10, p.171]．ここで格子点 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots$ を中心とする各体積要素 $\varDelta^3 x$ が無限小であると想定すると $\dfrac{\delta_{ij}}{\varDelta^3 x} = \delta(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)$ なので [2, p.35]，正準変数間の Poisson 括弧 $\{q_i, p_j\}_{\mathrm{P}} = \delta_{ij}$, etc [10, p.172] は

$$\begin{aligned}\{A_\mu(\boldsymbol{x}_i, t), \pi^\nu(\boldsymbol{x}_j, t)\varDelta^3 x\}_{\mathrm{P}} =& \delta^\nu{}_\mu \delta_{ij} = \delta^\nu{}_\mu \delta(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)\varDelta^3 x \\ \{A_\mu(\boldsymbol{x}_i, t), A_\nu(\boldsymbol{x}_j, t)\}_{\mathrm{P}} =& \{\pi^\mu(\boldsymbol{x}_i, t)\varDelta^3 x, \pi^\nu(\boldsymbol{x}_j, t)\varDelta^3 x\}_{\mathrm{P}} = 0\end{aligned}$$

となる[*9][*10]．これと Poisson 括弧の性質 (53) を用いると[*11]，式 (49) の $\tilde{H}$ に対して

$$\begin{aligned}0 =& \dot{\pi}^0(x) = \{\pi^0(x), \tilde{H}(x^0)\}_{\mathrm{P}} \\ =& -\int \mathrm{d}^3 y \left\{\pi^0(x), e\sum_l \bar{\psi}_l(y)\gamma^0 A_0(y)\psi_l(y) + (\partial_k \pi^k(y))A_0(y)\right\}_{\mathrm{P}} \qquad (\text{ただし } y^0 = x^0 \text{とする}) \\ =& \int \mathrm{d}^3 y \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \left(e\sum_l {\psi_l}^\dagger(y)\psi_l(y) + \partial_k \pi^k(y)\right) \\ =& e\sum_l {\psi_l}^\dagger(x)\psi_l(x) + \partial_k \pi^k(x)\end{aligned}$$

となるから $\partial_k \pi^k = -e\sum_l {\psi_l}^\dagger \psi_l$ を得る．ただし Hamiltonian 密度 (27) における $\pi^k \partial_k A_0$ の項は部分積分して $-(\partial_k \pi^k)A_0$ とした．共役な場の式 (26):$\pi^k = -F^{0k}$ より左辺は $\partial_k \pi^k = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}$ なので，右辺を電荷密度 ρ と解釈すればこれは Gauss の法則 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \rho$ である [3, p.226] [14, pp.135–136]．

次に条件 $\ddot{\pi}^0 = 0$ を考える．

$$\begin{aligned}\ddot{\pi}^0(x) =& \partial_0 \left(e\sum_l {\psi_l}^\dagger(x)\psi_l(x) + \partial_k \pi^k(x)\right) \\ =& \partial_0 \left(e\sum_l \bar{\psi}_l(x)\gamma^0\psi_l(x)\right) + \{\partial_k \pi^k(x), \tilde{H}(x^0)\}_{\mathrm{P}} \\ =& \partial_0 \left(e\sum_l \bar{\psi}_l(x)\gamma^0\psi_l(x)\right) + \int \mathrm{d}^3 y \left\{\partial_k \pi^k(x), -e\sum_l \bar{\psi}_l(y)\gamma^m A_m(y)\psi_l(y) + \frac{1}{4}F_{mn}(y)F^{mn}(y)\right\}_{\mathrm{P}}\end{aligned}$$

---

*9 Dirac 場による微分の項は Poisson 括弧に寄与しない．以下，同様．

*10 文献 [3, p.183] では場の理論における Poisson 括弧を

$$\{F[\phi, \pi], G[\phi, \pi]\}_{\mathrm{P}} \equiv \int \mathrm{d}^3 x \left\{\frac{\delta F[\phi, \pi]}{\delta\phi(x)}\frac{\delta G[\phi, \pi]}{\delta\pi(x)} - \frac{\delta F[\phi, \pi]}{\delta\pi(x)}\frac{\delta G[\phi, \pi]}{\delta\phi(x)}\right\}$$

で定義しており，このとき

$$\{\phi(x), \pi(y)\}_{\mathrm{P}} = \int \mathrm{d}^3 z \left\{\frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(z)}\frac{\delta\pi(y)}{\delta\pi(z)} - \frac{\delta\phi(x)}{\delta\pi(z)}\frac{\delta\pi(y)}{\delta\phi(z)}\right\} = \int \mathrm{d}^3 z \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z})\delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

となって $(x^0 = y^0)$ [3, p.314]，正準交換関係が導かれることと整合している．

*11 q, p, t の任意の関数 f, g に対して Poisson 括弧を

$$\{f, g\}_{\mathrm{P}} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k}\right)$$

と定義する．ここから直ちに Poisson 括弧が次の性質を満たすことが分かる．

$$\begin{cases}\{f, g\}_{\mathrm{P}} = -\{g, f\}_{\mathrm{P}} \\ \{f, c\}_{\mathrm{P}} = 0 \\ \{f, ag_1 + bg_2\}_{\mathrm{P}} = a\{f, g_1\}_{\mathrm{P}} + b\{f, g_2\}_{\mathrm{P}} \\ \{f, g_1 g_2\}_{\mathrm{P}} = g_1\{f, g_2\}_{\mathrm{P}} + \{f, g_1\}_{\mathrm{P}} g_2\end{cases} \tag{53}$$

ただし a, b, c は定数，g_1, g_2 は q, p, t の任意の関数である [10, pp.171–172]．

(ただし $y^0 = x^0$とする)

$$=\partial_0 \left(e \sum_l \bar{\psi}_l(x)\gamma^0\psi_l(x) \right) + \partial_k \int \mathrm{d}^3y \left\{ \pi^k(x), -e\sum_l \bar{\psi}_l(y)\gamma^m A_m(y)\psi_l(y) + \frac{1}{4}F_{mn}(y)F^{mn}(y) \right\}_{\mathrm{P}}$$

である (∂_k が時空点 x の空間座標による微分であることに注意した)．最右辺において

$$\begin{aligned}\partial_k \int \mathrm{d}^3y \left\{ \pi^k(x), -e\sum_l \bar{\psi}_l(y)\gamma^m A_m(y)\psi_l(y) \right\}_{\mathrm{P}} =& \partial_k \int \mathrm{d}^3y \left(\delta^k{}_m \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) e \sum_l \bar{\psi}_l(y)\gamma^m\psi_l(y) \right) \\ =& \partial_k \left(e\sum_l \bar{\psi}_l(x)\gamma^k\psi_l(x) \right)\end{aligned}$$

であり電荷保存則 (25) より

$$\begin{aligned}&\partial_0 \left(e \sum_l \bar{\psi}_l(x)\gamma^0\psi_l(x) \right) + \partial_k \int \mathrm{d}^3y \left\{ \pi^k(x), -e\sum_l \bar{\psi}_l(y)\gamma^m A_m(y)\psi_l(y) \right\}_{\mathrm{P}} \\ =& \partial_0 \left(e \sum_l \bar{\psi}_l(x)\gamma^0\psi_l(x) \right) + \partial_k \left(e\sum_l \bar{\psi}_l(x)\gamma^k\psi_l(x) \right) = \partial_\mu \left(e\sum_l \bar{\psi}_l(x)\gamma^\mu\psi_l(x) \right) = 0\end{aligned}$$

となる．よって Poisson 括弧の性質 (53) を用いると

$$\begin{aligned}\ddot{\pi}^0(x) =& \frac{1}{4}\partial_k \int \mathrm{d}^3y \left\{ \pi^k(x), F_{mn}(y)F^{mn}(y) \right\}_{\mathrm{P}} \\ =& \frac{1}{4}\partial_k \int \mathrm{d}^3y \left(\left\{ \pi^k(x), F_{mn}(y) \right\}_{\mathrm{P}} F^{mn}(y) + F_{mn}(y) \left\{ \pi^k(x), F^{mn}(y) \right\}_{\mathrm{P}} \right) \\ =& \frac{1}{2}\partial_k \int \mathrm{d}^3y \left\{ \pi^k(x), F_{mn}(y) \right\}_{\mathrm{P}} F^{mn}(y) \\ =& \frac{1}{2}\partial_k \int \mathrm{d}^3y \left(\left\{ \pi^k(x), \partial_m A_n(y) \right\}_{\mathrm{P}} F^{mn}(y) - \left\{ \pi^k(x), \partial_n A_m(y) \right\}_{\mathrm{P}} F^{mn}(y) \right) \\ =& -\frac{1}{2}\partial_k \int \mathrm{d}^3y \left(\left\{ \pi^k(x), A_n(y) \right\}_{\mathrm{P}} \partial_m F^{mn}(y) - \left\{ \pi^k(x), A_m(y) \right\}_{\mathrm{P}} \partial_n F^{mn}(y) \right) \qquad \text{(部分積分した)} \\ =& \frac{1}{2}\partial_k \int \mathrm{d}^3y \left(\delta^k{}_n \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\partial_m F^{mn}(y) - \delta^k{}_m \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\partial_n F^{mn}(y) \right) \\ =& \frac{1}{2}\partial_k(\partial_m F^{mk}(x) - \partial_n F^{kn}(x)) = \partial_k\partial_m F^{mk}(x) = 0\end{aligned}$$

となるので，条件 $\ddot{\pi}^0 = 0, \dddot{\pi}^0 = 0, \cdots$ からは自明な関係式 $0 = 0$ が得られるだけで新たな拘束条件は現れない [3, p.323] [14, p.136]．なお最後の等号では添字 k, m について $\partial_k\partial_m$ は対称，F^{mk} は反対称なので，消えることを用いた*12．

さらに 3.4.1 節で述べたように，電磁場の満たすケージ条件を決めると全 Hamiltonian の式 (50) における未定乗数 $\lambda^j(y)$ が定まることを示す．ゲージ固定条件 (51):$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ は任意の時刻で成り立つので，式

*12 一般に添字 α, β について対称な量 $A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}$ と反対称な量 $B_{\alpha\beta} = -B_{\beta\alpha}$ に対して $A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}$ は

$$\begin{aligned}A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} =& \sum_{\alpha>\beta}(A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} + A^{\beta\alpha}B_{\beta\alpha}) \qquad (\because \alpha=\beta \quad \Rightarrow \quad B_{\alpha\beta}=0) \\ =& \sum_{\alpha>\beta} A^{\alpha\beta}(B_{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta}) = 0\end{aligned}$$

となって消える．

(50) の $H_{\rm tot}$ に対して

$$0=\dot{\varphi}_l(z)=\{\varphi_l(z),H_{\rm tot}\}_{\rm P}=\{\varphi_l(z),H\}_{\rm P}+\int {\rm d}^3y\{\varphi_l(z),\phi_j(y)\}_{\rm P}\lambda^j(y) \tag{54}$$

となる．ただし $y^0=z^0$ である．

ここで $C_{lj}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\equiv\{\varphi_l(z),\phi_j(y)\}_{\rm P}$ を成分に持つ行列 C は逆行列 C^{-1} を持つことを示そう．ただし逆行列とはその成分 $(C^{-1})^{il}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$ が

$$\int {\rm d}^3z(C^{-1})^{il}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})C_{lj}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})=\delta^i{}_j\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{55}$$

を満たすという意味である．拘束条件量 $\boldsymbol{\chi}=(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\phi})$ の定義式 (52) を思い出し，

$$\left\{A_0,e\sum_l {\psi_l}^\dagger\psi_l\right\}_{\rm P}=0,\qquad \left\{\partial^m A_m,e\sum_l {\psi_l}^\dagger\psi_l\right\}_{\rm P}=0$$

となることに注意すると

$$\begin{aligned}C\equiv&(\{\varphi_k(z),\phi_l(y)\}_{\rm P})=\begin{pmatrix}(\{A_0(i),\pi^0(j)v\}_{\rm P}) & (\{A_0(i),\partial_l\pi^l(j)v\}_{\rm P})\\ (\{\partial^m A_m(i),\pi^0(j)v\}_{\rm P}) & (\{\partial^m A_m(i),\partial_l\pi^l(j)v\}_{\rm P})\end{pmatrix},\\ i\equiv&(\boldsymbol{x}_i,t),j\equiv(\boldsymbol{x}_j,t),t\equiv y^0=z^0,v\equiv\mathit{\Delta}^3x\end{aligned}$$

である (ただし例えば $(\{A_0(i),\pi^0(j)v\}_{\rm P})$ は $\{A_0(i),\pi^0(j)v\}_{\rm P}$ を (i,j) 成分に持つ行列である)．格子点 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots$ を中心とする各体積要素 $\mathit{\Delta}^3x$ が無限小であると想定すると $\dfrac{\delta^i{}_j}{\mathit{\Delta}^3x}=\delta(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j)$ なので [2, p.35]，正準変数間の Poisson 括弧 $\{q_i,p_j\}_{\rm P}=\delta_{ij}$, etc [10, p.172] は

$$\begin{aligned}\{A_\mu(\boldsymbol{x}_i,t),\pi^\nu(\boldsymbol{x}_j,t)\mathit{\Delta}^3x\}_{\rm P}=&\delta^\nu{}_\mu\delta^i{}_j=\delta^\nu{}_\mu\delta(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j)\mathit{\Delta}^3x\\ \{A_\mu(\boldsymbol{x}_i,t),A_\nu(\boldsymbol{x}_j,t)\}_{\rm P}=&\{\pi^\mu(\boldsymbol{x}_i,t)\mathit{\Delta}^3x,\pi^\nu(\boldsymbol{x}_j,t)\mathit{\Delta}^3x\}_{\rm P}=0\end{aligned}$$

となる．これを用いると行列 $C=(\{\varphi_k,\phi_l\}_{\rm P})$ において

$$\begin{aligned}\{A_0(\boldsymbol{x}_i,t),\pi^0(\boldsymbol{x}_j,t)\mathit{\Delta}^3x\}_{\rm P}=&\delta^i{}_j=\delta(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j)\mathit{\Delta}^3x,\\ \{\partial^kA_k(\boldsymbol{x}_i,t),\partial_l\pi^l(\boldsymbol{x}_j,t)\mathit{\Delta}^3x\}_{\rm P}=&-\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}_i}\right)_k\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}_j}\right)_l\delta^l{}_k\delta(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j)\mathit{\Delta}^3x={\boldsymbol{\nabla}_i}^2\delta(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j)\mathit{\Delta}^3x\\ &\left(\because\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}_j}\right)_l\delta(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j)=-\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}_i}\right)_l\delta(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j),\boldsymbol{\nabla}_i\equiv\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}_i}\right)\end{aligned}$$

であり (ラテン文字 $k,l,\cdots$ は空間成分 1,2,3 を動くものとする)，これ以外の成分はゼロなので

$$C\equiv(\{\varphi_k,\phi_l\}_{\rm P})=\begin{pmatrix}(\delta^i{}_j) & 0\\ 0 & ({\boldsymbol{\nabla}_i}^2\delta(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j)\mathit{\Delta}^3x)\end{pmatrix} \tag{56}$$

を得る．これは $\det C\neq 0$ を満たすので

$$\sum_{\boldsymbol{z}}\tilde{C}^{il}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})C_{lj}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})=\delta^i{}_j\delta_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}=\delta^i{}_j\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathit{\Delta}^3x$$

なる $\tilde{C}^{il}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$ を成分に持つ逆行列 $\tilde{C}$ が存在する (最左辺では l についても和をとっている)．両辺を $\mathit{\Delta}^3x$ で割ると

$$\delta^i{}_j\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\sum_{\boldsymbol{z}}\mathit{\Delta}^3x\frac{\tilde{C}^{il}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})}{(\mathit{\Delta}^3x)^2}C_{lj}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})=\int{\rm d}^3z\frac{\tilde{C}^{il}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})}{(\mathit{\Delta}^3x)^2}C_{lj}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})$$

となるので $(C^{-1})^{il}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \equiv \dfrac{\tilde{C}^{il}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})}{(\Delta^3 x)^2}$ とすればこれは確かに式 (55) を満たす．

以上より未定乗数 $\lambda^i(x)$ が次のように定まる．

$$
\begin{aligned}
&-\int \mathrm{d}^3 z (C^{-1})^{il}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\{\varphi_l(z), H\}_{\mathrm{P}} \\
=&\int \mathrm{d}^3 z (C^{-1})^{il}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \int \mathrm{d}^3 y C_{lj}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\lambda^j(y) \qquad (\because \text{式 (54)}) \\
=&\int \mathrm{d}^3 y \delta^i{}_j \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\lambda^j(y) \qquad (\because \text{式 (55)}) \\
=&\lambda^j(x).
\end{aligned}
$$

ただし $x^0 = y^0 = z^0$ である [3, p.232]．

3.4.3 Green 関数の経路積分表式

1 種類の自由 Dirac 場，自由電磁場に対する Green 関数の経路成分表式の導出過程 [3, pp.211–213,pp.231–240] を拡張して，3 種類のレプトン $l = e, \mu, \tau$ を表す Dirac 場 $\psi \equiv \{\psi_e, \psi_\mu, \psi_\tau\}$ が電磁場と相互作用する場合の Green 関数

$$
G[\psi_{\mathrm{F}}, A_{\mathrm{F}}; \psi_{\mathrm{I}}, A_{\mathrm{I}}; t_{\mathrm{F}} - t_{\mathrm{I}}] = \langle A_{\mathrm{F}}, t_{\mathrm{F}}| \langle \psi_{\mathrm{F}}, t_{\mathrm{F}} | \psi_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{I}}\rangle |A_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{I}}\rangle
$$

が，1.4 節で述べたように経路積分表式

$$
\text{式 (28)}: G[\psi_{\mathrm{F}}, A_{\mathrm{F}}; \psi_{\mathrm{I}}, A_{\mathrm{I}}; t_{\mathrm{F}} - t_{\mathrm{I}}] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}A \left(\prod_x \delta(\partial^\mu A_\mu - f)\right) |\det(\Box_i \delta^4(x_i - x_j))| \exp\left(i \int \mathrm{d}^4 x \mathcal{L}\right),
$$

$$
\text{式 (31)}: G[\psi_{\mathrm{F}}, A_{\mathrm{F}}; \psi_{\mathrm{I}}, A_{\mathrm{I}}; t_{\mathrm{F}} - t_{\mathrm{I}}] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}A \exp\left[i \int \mathrm{d}^4 x \left\{\mathcal{L} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2\right\}\right]
$$

のように書けることを示す．

■Green 関数を微小時間の Green 関数で表す　格子点 $\boldsymbol{x}$ を中心とする体積要素 $\Delta^3 x$ に空間を分割し，時間を $\Delta t = \frac{t_{\mathrm{F}} - t_{\mathrm{I}}}{N}$ 刻みに $t = t_n \equiv t_{\mathrm{I}} + n\Delta t$ と離散化する (特に $t_0 = t_{\mathrm{I}}, t_N = t_{\mathrm{F}}$)．各時刻 $t = t_n$ での Heisenberg 描像の基底をコヒーレント状態 $\{|\psi(\boldsymbol{x}, t_n), t_n\rangle\}$ に選ぶと，その完全性条件は式 (21):

$$
\int \left\{\prod_{\boldsymbol{x},l} \mathrm{d}\psi_l{}^\dagger(\boldsymbol{x}, t_n)\mathrm{d}\psi_l(\boldsymbol{x}, t_n)\right\} |\psi(\boldsymbol{x}, t_n), t_n\rangle \exp\left\{-\int \mathrm{d}^3 x' \sum_{l'} \psi_{l'}{}^\dagger(\boldsymbol{x}', t_n)\psi_{l'}(\boldsymbol{x}', t_n)\right\} \langle \psi(\boldsymbol{x}, t_n), t_n| = 1
$$

である．また 3.4.1 節で定義した $(\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*)$ について $\boldsymbol{q}^*(t_n) \equiv \boldsymbol{q}^*{}_n, \boldsymbol{p}^*(t_n) \equiv \boldsymbol{p}^*{}_n$ と略記すると，Heisenberg 描像の基底 $\{|\boldsymbol{q}^*{}_n, t_n\rangle\}$ の完全性条件は

$$
\int \left(\prod_i \mathrm{d}q^*{}_{ni}\right) |\boldsymbol{q}^*{}_n, t_n\rangle \langle \boldsymbol{q}^*{}_n, t_n| = 1
$$

である ($q^*{}_{ni}$ は $\boldsymbol{q}^*{}_n$ の第 i 成分を表す) [6, p.55]．これらを合わせると

$$
\begin{aligned}
&\int \left(\prod_{\boldsymbol{x},l} \mathrm{d}\psi_l{}^\dagger(\boldsymbol{x}, t_n)\mathrm{d}\psi_l(\boldsymbol{x}, t_n)\right) \left(\prod_i \mathrm{d}q^*{}_{ni}\right) \\
&\times |\psi(\boldsymbol{x}, t_n), t_n\rangle |\boldsymbol{q}^*{}_n, t_n\rangle \exp\left(-\int \mathrm{d}^3 x' \sum_{l'} \psi_{l'}{}^\dagger(\boldsymbol{x}', t_n)\psi_{l'}(\boldsymbol{x}', t_n)\right) \langle \boldsymbol{q}^*{}_n, t_n| \langle \psi(\boldsymbol{x}, t_n), t_n| = 1
\end{aligned}
$$

だから

$$
\begin{aligned}
&G[\psi_{\mathrm{F}}, A_{\mathrm{F}}; \psi_{\mathrm{I}}, A_{\mathrm{I}}; t_{\mathrm{F}} - t_{\mathrm{I}}] \\
=& \int \left\{ \prod_{n=1}^{N-1} \left(\prod_{\boldsymbol{x},l} \mathrm{d}{\psi_l}^{\dagger}(\boldsymbol{x}, t_n) \mathrm{d}\psi_l(\boldsymbol{x}, t_n) \right) \left(\prod_i \mathrm{d}{q^*}_{ni} \right) \exp\left(-\int \mathrm{d}^3 x' \sum_{l'} {\psi_{l'}}^{\dagger}(\boldsymbol{x}', t_n) \psi_{l'}(\boldsymbol{x}', t_n) \right) \right\} \\
&\times \langle {\boldsymbol{q}^*}_{\mathrm{F}}, t_{\mathrm{F}} | \langle \psi_{\mathrm{F}}, t_{\mathrm{F}} | \psi(\boldsymbol{x}, t_{N-1}), t_{N-1} \rangle | {\boldsymbol{q}^*}_{N-1}, t_{N-1} \rangle \cdots \langle {\boldsymbol{q}^*}_1, t_1 | \langle \psi(\boldsymbol{x}, t_1), t_1 | \psi_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{I}} \rangle | {\boldsymbol{q}^*}_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{I}} \rangle
\end{aligned} \tag{57}
$$

と書ける．

■**微小時間の Green 関数を評価する**　次に [3, p.33,p.119] の計算を参考にし，微小時間の Green 関数

$$
\langle {\boldsymbol{q}^*}_{n+1}, t_{n+1} | \langle \psi(\boldsymbol{x}, t_{n+1}), t_{n+1} | \psi(\boldsymbol{x}, t_n), t_n \rangle | {\boldsymbol{q}^*}_n, t_n \rangle
$$

を評価する．コヒーレント状態に対する式 (20):

$$
\begin{aligned}
\langle \psi(\boldsymbol{x}, t_{n+1}), t_n | \psi(\boldsymbol{x}, t_n), t_n \rangle =& \exp\left\{ \sum_l \int \mathrm{d}^3 x {\psi_l}^{\dagger}(\boldsymbol{x}, t_{n+1}) \psi_l(\boldsymbol{x}, t_n) \right\}, \\
\therefore \langle \psi(\boldsymbol{x}, t_{n+1}), t_n | \hat{H} | \psi(\boldsymbol{x}, t_n), t_n \rangle =& H[\psi^{\dagger}(\boldsymbol{x}, t_{n+1}), \psi(\boldsymbol{x}, t_n), \hat{A}] \exp\left\{ \sum_l \int \mathrm{d}^3 x {\psi_l}^{\dagger}(\boldsymbol{x}, t_{n+1}) \psi_l(\boldsymbol{x}, t_n) \right\} \\
&(\because \hat{\psi}_l(\boldsymbol{x}, t=0) | \psi(\boldsymbol{x}, t_n), t_n \rangle = \psi_l(\boldsymbol{x}, t_n) | \psi(\boldsymbol{x}, t_n), t_n \rangle, \\
&\langle \psi(\boldsymbol{x}, t_{n+1}), t_n |) {\hat{\psi}_l}^{\dagger}(\boldsymbol{x}, t=0) = \langle \psi(\boldsymbol{x}, t_{n+1}), t_n | {\psi_l}^{\dagger}(\boldsymbol{x}, t_{n+1})),
\end{aligned}
$$

規格直交性

$$
\langle {\boldsymbol{q}^*}_{n+1}, t_n | {\boldsymbol{q}^*}_n, t_n \rangle = \delta({\boldsymbol{q}^*}_{n+1} - {\boldsymbol{q}^*}_n) = \int \left(\prod_i \frac{\mathrm{d}{p^*}_{ni}}{2\pi} \right) e^{i{\boldsymbol{p}^*}_n \cdot ({\boldsymbol{q}^*}_{n+1} - {\boldsymbol{q}^*}_n)},
$$

および Weyl 順序にある Hamiltonian に対する式 (3):

$$
\langle {\boldsymbol{q}^*}_{n+1}, t_n | H[\psi^{\dagger}, \psi, {\hat{\boldsymbol{q}}^*}_n, {\hat{\boldsymbol{p}}^*}_n] | {\boldsymbol{q}^*}_n, t_n \rangle = \int \left(\prod_i \frac{\mathrm{d}{p^*}_{ni}}{2\pi} \right) e^{i{\boldsymbol{p}^*}_n \cdot ({\boldsymbol{q}^*}_{n+1} - {\boldsymbol{q}^*}_n)} H[\psi^{\dagger}(\boldsymbol{x}, t_{n+1}), \psi(\boldsymbol{x}, t_n), {\overline{\boldsymbol{q}}^*}_n, {\boldsymbol{p}^*}_n]
$$

を用い (${\overline{\boldsymbol{q}}^*}_n \equiv ({\boldsymbol{q}^*}_{n+1} + {\boldsymbol{q}^*}_n)/2$ であり，${p^*}_{ni}$ は ${\boldsymbol{p}^*}_n$ の第 i 成分を表す)，一般に Heisenberg 描像の基底ブラの時間発展が ${}_{\mathrm{H}}\langle a', t| = \langle a'| U(t)$(ただし $U(t)$ は時間的発展の演算子) [6, p.117] で与えられることに注意すると

$$
\begin{aligned}
&\langle {\boldsymbol{q}^*}_{n+1}, t_{n+1} | \langle \psi(\boldsymbol{x}, t_{n+1}), t_{n+1} | \psi(\boldsymbol{x}, t_n), t_n \rangle | {\boldsymbol{q}^*}_n, t_n \rangle \\
=& \langle {\boldsymbol{q}^*}_{n+1}, t_n | \langle \psi(\boldsymbol{x}, t_{n+1}), t_n | e^{-i\hat{H}\Delta t} | \psi(\boldsymbol{x}, t_n), t_n \rangle | {\boldsymbol{q}^*}_n, t_n \rangle \\
\simeq& \langle {\boldsymbol{q}^*}_{n+1}, t_n | \langle \psi(\boldsymbol{x}, t_{n+1}), t_n | 1 - i\hat{H}\Delta t | \psi(\boldsymbol{x}, t_n), t_n \rangle | {\boldsymbol{q}^*}_n, t_n \rangle \\
=& \langle {\boldsymbol{q}^*}_{n+1}, t_n | {\boldsymbol{q}^*}_n, t_n \rangle \exp\left\{ \sum_l \int \mathrm{d}^3 x {\psi_l}^{\dagger}(\boldsymbol{x}, t_{n+1}) \psi_l(\boldsymbol{x}, t_n) \right\} \\
&-i\Delta t \langle {\boldsymbol{q}^*}_{n+1}, t_n | H[\psi^{\dagger}(\boldsymbol{x}, t_{n+1}), \psi(\boldsymbol{x}, t_n), {\hat{\boldsymbol{q}}^*}_n, {\hat{\boldsymbol{p}}^*}_n] | {\boldsymbol{q}^*}_n, t_n \rangle \exp\left\{ \sum_l \int \mathrm{d}^3 x {\psi_l}^{\dagger}(\boldsymbol{x}, t_{n+1}) \psi_l(\boldsymbol{x}, t_n) \right\} \\
=& \int \left(\prod_i \frac{\mathrm{d}{p^*}_{ni}}{2\pi} \right) e^{i{\boldsymbol{p}^*}_n \cdot ({\boldsymbol{q}^*}_{n+1} - {\boldsymbol{q}^*}_n)} \left(1 - i\Delta t H[\psi^{\dagger}(\boldsymbol{x}, t_{n+1}), \psi(\boldsymbol{x}, t_n), {\overline{\boldsymbol{q}}^*}_n, {\boldsymbol{p}^*}_n] \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times \exp\left\{\sum_l \int \mathrm{d}^3x {\psi_l}^\dagger(\boldsymbol{x},t_{n+1})\psi_l(\boldsymbol{x},t_n)\right\}\\
&\simeq \int \left(\prod_i \frac{\mathrm{d}{p^*}_{ni}}{2\pi}\right) e^{i{\boldsymbol{p}^*}_n\cdot({\boldsymbol{q}^*}_{n+1}-{\boldsymbol{q}^*}_n)}\\
&\times \exp\left\{\int \mathrm{d}^3x \left(\sum_l {\psi_l}^\dagger(\boldsymbol{x},t_{n+1})\psi_l(\boldsymbol{x},t_n) - i\varDelta t\mathcal{H}[\psi^\dagger(\boldsymbol{x},t_{n+1}),\psi(\boldsymbol{x},t_n),{\overline{\boldsymbol{q}}^*}_n,{\boldsymbol{p}^*}_n]\right)\right\}
\end{aligned}
$$

となる．

■Green 関数における指数関数を整理する　これを Green 関数の式 (57) に代入すると

$$
\begin{aligned}
&G[\psi_\mathrm{F},A_\mathrm{F};\psi_\mathrm{I},A_\mathrm{I};t_\mathrm{F}-t_\mathrm{I}]\\
&\simeq \int \Bigg[\prod_{n=1}^{N-1}\left(\prod_{\boldsymbol{x},l}\mathrm{d}{\psi_l}^\dagger(\boldsymbol{x},t_n)\mathrm{d}\psi_l(\boldsymbol{x},t_n)\right)\left(\prod_i \frac{\mathrm{d}{q^*}_{ni}\mathrm{d}{p^*}_{ni}}{2\pi}\right) e^{i{\boldsymbol{p}^*}_n\cdot({\boldsymbol{q}^*}_{n+1}-{\boldsymbol{q}^*}_n)}\\
&\times\exp\Bigg\{\int \mathrm{d}^3x'\Bigg(\sum_{l'} {\psi_{l'}}^\dagger(\boldsymbol{x}',t_{n+1})\psi_{l'}(\boldsymbol{x}',t_n) - i\varDelta t\mathcal{H}[\psi^\dagger(\boldsymbol{x}',t_{n+1}),\psi(\boldsymbol{x}',t_n),{\overline{\boldsymbol{q}}^*}_n,{\boldsymbol{p}^*}_n]\\
&-\sum_{l'}{\psi_{l'}}^\dagger(\boldsymbol{x}',t_n)\psi_{l'}(\boldsymbol{x}',t_n)\Bigg)\Bigg\}\Bigg]\\
&\times \exp\left\{\int \mathrm{d}^3x'\left(\sum_{l'} {\psi_{l'}}^\dagger(\boldsymbol{x}',t_1)\psi_{l'}(\boldsymbol{x}',t_0) - i\varDelta t\mathcal{H}[\psi^\dagger(\boldsymbol{x}',t_1),\psi(\boldsymbol{x}',t_0),{\overline{\boldsymbol{q}}^*}_0,{\boldsymbol{p}^*}_0]\right)\right\}
\end{aligned}
$$

を得る．ここで指数関数内の各項は偶数個の Grassmann 場を含むので交換するから，指数法則を用いてこれを次のようにまとめることができる (1.1.1 節参照).

$$
\begin{aligned}
&G[\psi_\mathrm{F},A_\mathrm{F};\psi_\mathrm{I},A_\mathrm{I};t_\mathrm{F}-t_\mathrm{I}]\\
&\simeq \int \left\{\prod_{n=1}^{N-1}\left(\prod_{\boldsymbol{x},l}\mathrm{d}{\psi_l}^\dagger(\boldsymbol{x},t_n)\mathrm{d}\psi_l(\boldsymbol{x},t_n)\right)\left(\prod_i \frac{\mathrm{d}{q^*}_{ni}\mathrm{d}{p^*}_{ni}}{2\pi}\right)\right\}\\
&\times\exp\Bigg[\sum_{n=1}^{N-1}\Bigg\{i{\boldsymbol{p}^*}_n\cdot({\boldsymbol{q}^*}_{n+1}-{\boldsymbol{q}^*}_n) + \int \mathrm{d}^3x'\Bigg(\sum_{l'} {\psi_{l'}}^\dagger(\boldsymbol{x}',t_{n+1})\psi_{l'}(\boldsymbol{x}',t_n)\\
&-i\varDelta t\mathcal{H}[\psi^\dagger(\boldsymbol{x}',t_{n+1}),\psi(\boldsymbol{x}',t_n),{\overline{\boldsymbol{q}}^*}_n,{\boldsymbol{p}^*}_n] - \sum_{l'}{\psi_{l'}}^\dagger(\boldsymbol{x}',t_n)\psi_{l'}(\boldsymbol{x}',t_n)\Bigg)\Bigg\}\\
&+i{\boldsymbol{p}^*}_0\cdot({\boldsymbol{q}^*}_1-{\boldsymbol{q}^*}_0) + \int \mathrm{d}^3x'\left(\sum_{l'} {\psi_{l'}}^\dagger(\boldsymbol{x}',t_1)\psi_{l'}(\boldsymbol{x}',t_0) - i\varDelta t\mathcal{H}[\psi^\dagger(\boldsymbol{x}',t_1),\psi(\boldsymbol{x}',t_0),{\overline{\boldsymbol{q}}^*}_0,{\boldsymbol{p}^*}_0]\right)\Bigg]
\end{aligned}
\tag{58}
$$

さらに指数関数内でレプトンの種類 l' について和をとられている項は，引数 $\boldsymbol{x}', t_n$ を n と略記すると

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N-1}{\psi_{l'}}^\dagger(n+1)\psi_{l'}(n) - \sum_{n=1}^{N-1}{\psi_{l'}}^\dagger(n)\psi_{l'}(n) + {\psi_{l'}}^\dagger(1)\psi_{l'}(0)\\
&= -\sum_{n=1}^{N-1}{\psi_{l'}}^\dagger(n)\psi_{l'}(n) + \left(\sum_{n=1}^{N-1}{\psi_{l'}}^\dagger(n+1)\psi_{l'}(n) + {\psi_{l'}}^\dagger(1)\psi_{l'}(0)\right)\\
&= \left({\psi_{l'}}^\dagger(N)\psi_{l'}(N) - \sum_{n=0}^{N-1}{\psi_{l'}}^\dagger(n+1)\psi_{l'}(n+1)\right) + \sum_{n=0}^{N-1}{\psi_{l'}}^\dagger(n+1)\psi_{l'}(n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\psi_{l'}{}^{\dagger}(N)\psi_{l'}(N)-\sum_{n=0}^{N-1}\psi_{l'}{}^{\dagger}(n+1)\{\psi_{l'}(n+1)-\psi_{l'}(n)\}\\
&=\psi_{l'}{}^{\dagger}(N)\psi_{l'}(N)+i\sum_{n=0}^{N-1}\{i\psi_{l'}{}^{\dagger}(n+1)\}\{\psi_{l'}(n+1)-\psi_{l'}(n)\}
\end{aligned}
$$

となる．これを Green 関数の式 (58) に代入すると

$$
\begin{aligned}
&G[\psi_{\mathrm{F}},A_{\mathrm{F}};\psi_{\mathrm{I}},A_{\mathrm{I}};t_{\mathrm{F}}-t_{\mathrm{I}}]\\
&=\lim_{N\to\infty}\int\left\{\prod_{n=1}^{N-1}\left(\prod_{\boldsymbol{x},l}\mathrm{d}\psi_l{}^{\dagger}(\boldsymbol{x},t_n)\mathrm{d}\psi_l(\boldsymbol{x},t_n)\right)\left(\prod_i\frac{\mathrm{d}{q^*}_{ni}\mathrm{d}{p^*}_{ni}}{2\pi}\right)\right\}\exp\left\{\int\mathrm{d}^3x'\sum_{l'}\psi_{l'}{}^{\dagger}(\boldsymbol{x}',t_N)\psi_{l'}(\boldsymbol{x}',t_N)\right\}\\
&\times\exp\left[i\sum_{n=0}^{N-1}\left\{{\boldsymbol{p}^*}_n\cdot({\boldsymbol{q}^*}_{n+1}-{\boldsymbol{q}^*}_n)\right.\right.\\
&\left.\left.+\int\mathrm{d}^3x'\left(\sum_{l'}\{i\psi_{l'}{}^{\dagger}(\boldsymbol{x}',t_{n+1})\}\{\psi_{l'}(\boldsymbol{x}',t_{n+1})-\psi_{l'}(\boldsymbol{x}',t_n)\}-\Delta t\mathcal{H}[\psi^{\dagger}(\boldsymbol{x}',t_{n+1}),\psi(\boldsymbol{x}',t_n),{\overline{\boldsymbol{q}}^*}_n,{\boldsymbol{p}^*}_n]\right)\right\}\right]\\
&=\lim_{N\to\infty}\int\left\{\prod_{n=1}^{N-1}\left(\prod_{\boldsymbol{x},l}\mathrm{d}\psi_l{}^{\dagger}(\boldsymbol{x},t_n)\mathrm{d}\psi_l(\boldsymbol{x},t_n)\right)\left(\prod_i\frac{\mathrm{d}{q^*}_{ni}\mathrm{d}{p^*}_{ni}}{2\pi}\right)\right\}\exp\left\{\int\mathrm{d}^3x'\sum_{l'}\psi_{l'}{}^{\dagger}(\boldsymbol{x}',t_N)\psi_{l'}(\boldsymbol{x}',t_N)\right\}\\
&\times\exp\left[i\sum_{n=0}^{N-1}\Delta t\left\{{\boldsymbol{p}^*}_n\cdot\frac{{\boldsymbol{q}^*}_{n+1}-{\boldsymbol{q}^*}_n}{\Delta t}\right.\right.\\
&\left.\left.+\int\mathrm{d}^3x'\left(\sum_{l'}\{i\psi_{l'}{}^{\dagger}(\boldsymbol{x}',t_{n+1})\}\frac{\psi_{l'}(\boldsymbol{x}',t_{n+1})-\psi_{l'}(\boldsymbol{x}',t_n)}{\Delta t}-\mathcal{H}[\psi^{\dagger}(\boldsymbol{x}',t_{n+1}),\psi(\boldsymbol{x}',t_n),{\overline{\boldsymbol{q}}^*}_n,{\boldsymbol{p}^*}_n]\right)\right\}\right] \qquad (59)
\end{aligned}
$$

を得る．

■$\mathrm{d}\psi^{\dagger}=\mathrm{d}\bar{\psi}$ と書き換える　ここで $\mathrm{d}\psi_l{}^{\dagger}(\boldsymbol{x},t_n)$ に注目する．スピノル添字 $\alpha,\beta,\cdots$ を復活させると $\mathrm{d}\psi_l{}^{\dagger}(\boldsymbol{x},t_n)\equiv\prod_{\alpha=0}^{3}\mathrm{d}(\psi_l{}^{\dagger})_{\alpha}(\boldsymbol{x},t_n)$ である．以下，特定のレプトンの種類 l と引数 $(\boldsymbol{x},t_n)$ を考えてこれらを省き，

$$
\mathrm{d}\psi^{\dagger}\equiv\prod_{\alpha=0}^{3}\mathrm{d}{\psi^{\dagger}}_{\alpha}=\prod_{\alpha=0}^{3}\mathrm{d}\bar{\psi}_{\alpha}\equiv\mathrm{d}\bar{\psi} \qquad (60)
$$

を示す．まず $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ を $\varepsilon^{0123}=1$ である完全反対称テンソルとして和 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\mathrm{d}\bar{\psi}_{\alpha}\mathrm{d}\bar{\psi}_{\beta}\mathrm{d}\bar{\psi}_{\gamma}\mathrm{d}\bar{\psi}_{\delta}$ を考える．添字に関する反対称性により $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ の等しい添字を持つ成分は消えるから，これは添字の相異なる 4! 個の項の和となる．その各々は $\alpha\beta\gamma\delta$ が 0123 の偶置換または奇置換である．ところで相異なる $\mathrm{d}\bar{\psi}_{\alpha}$ どうしは反交換するから，添字の相異なる $\mathrm{d}\bar{\psi}_{\alpha}\mathrm{d}\bar{\psi}_{\beta}\mathrm{d}\bar{\psi}_{\gamma}\mathrm{d}\bar{\psi}_{\delta}$ は添字に関して反対称である．よって和をとられる 4! 個の項はいずれも $\varepsilon^{0123}\mathrm{d}\bar{\psi}_0\mathrm{d}\bar{\psi}_1\mathrm{d}\bar{\psi}_2\mathrm{d}\bar{\psi}_3=\mathrm{d}\bar{\psi}_0\mathrm{d}\bar{\psi}_1\mathrm{d}\bar{\psi}_2\mathrm{d}\bar{\psi}_3$ に等しいから

$$
\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\mathrm{d}\bar{\psi}_{\alpha}\mathrm{d}\bar{\psi}_{\beta}\mathrm{d}\bar{\psi}_{\gamma}\mathrm{d}\bar{\psi}_{\delta}=4!\times\mathrm{d}\bar{\psi}_0\mathrm{d}\bar{\psi}_1\mathrm{d}\bar{\psi}_2\mathrm{d}\bar{\psi}_3
$$

となる．すると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\bar{\psi}\equiv&\mathrm{d}\bar{\psi}_0\mathrm{d}\bar{\psi}_1\mathrm{d}\bar{\psi}_2\mathrm{d}\bar{\psi}_3\\
=&\frac{1}{4!}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\mathrm{d}\bar{\psi}_{\alpha}\mathrm{d}\bar{\psi}_{\beta}\mathrm{d}\bar{\psi}_{\gamma}\mathrm{d}\bar{\psi}_{\delta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{1}{4!}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}(\gamma^0)_{\alpha'\alpha}(\gamma^0)_{\beta'\beta}(\gamma^0)_{\gamma'\gamma}(\gamma^0)_{\delta'\delta}\mathrm{d}{\psi^\dagger}_{\alpha'}\mathrm{d}{\psi^\dagger}_{\beta'}\mathrm{d}{\psi^\dagger}_{\gamma'}\mathrm{d}{\psi^\dagger}_{\delta'}\\
&(\because \bar{\psi}\equiv\psi^\dagger\gamma^0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\psi}_\alpha \equiv {\psi^\dagger}_{\alpha'}(\gamma^0)_{\alpha'\alpha})\\
=&\frac{1}{4!}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}(\gamma^0)_{\alpha'\alpha}(\gamma^0)_{\beta'\beta}(\gamma^0)_{\gamma'\gamma}(\gamma^0)_{\delta'\delta}\varepsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}\mathrm{d}{\psi^\dagger}_0\mathrm{d}{\psi^\dagger}_1\mathrm{d}{\psi^\dagger}_2\mathrm{d}{\psi^\dagger}_3
\end{aligned}
$$

となる．最右辺において

$$
(\gamma^0)_{\alpha'\alpha}(\gamma^0)_{\beta'\beta}(\gamma^0)_{\gamma'\gamma}(\gamma^0)_{\delta'\delta}\varepsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = \begin{vmatrix} (\gamma^0)_{\alpha 0} & \cdots & (\gamma^0)_{\alpha 3} \\ (\gamma^0)_{\beta 0} & \cdots & (\gamma^0)_{\beta 3} \\ (\gamma^0)_{\gamma 0} & \cdots & (\gamma^0)_{\gamma 3} \\ (\gamma^0)_{\delta 0} & \cdots & (\gamma^0)_{\delta 3} \end{vmatrix} \equiv \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}
$$

と行列式を略記すると，

$$
\frac{1}{4!}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}(\gamma^0)_{\alpha'\alpha}(\gamma^0)_{\beta'\beta}(\gamma^0)_{\gamma'\gamma}(\gamma^0)_{\delta'\delta}\varepsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = \frac{1}{4!}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta} = \Gamma_{0123} = \det\gamma^0
$$

である (第 2 の等号で完全反対称テンソル $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$, 行列式 $\Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}$ が添字について反対称であることに注意した)．よって γ 行列の具体的な表示として例えば $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる Dirac-Pauli 表示を採用すると (1 は 2×2 の単位行列を表す) [2, p.259]，$\det\gamma^0 = 1$ なので

$$
式\,(60) : \mathrm{d}\bar{\psi} = \mathrm{d}{\psi^\dagger}_0\mathrm{d}{\psi^\dagger}_1\mathrm{d}{\psi^\dagger}_2\mathrm{d}{\psi^\dagger}_3 \equiv \mathrm{d}\psi^\dagger
$$

が示される[*13]．

式 (60):$\mathrm{d}{\psi_l}^\dagger = \mathrm{d}\bar{\psi}_l$ を Green 関数の式 (59) に代入し，

$$
\exp\left\{\int \mathrm{d}^3x' \sum_{l'} {\psi_{l'}}^\dagger(\boldsymbol{x}', t_N)\psi_{l'}(\boldsymbol{x}', t_N)\right\}
$$

は指定された終状態の場の値で決まる定数であることに注意して

$$
式\,(29) : \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \equiv \lim_{N\to\infty}\int\left(\prod_{n=1}^{N-1}\prod_{\boldsymbol{x},l}\mathrm{d}{\psi_l}^\dagger(\boldsymbol{x}, t_n)\mathrm{d}\psi_l(\boldsymbol{x}, t_n)\right)\exp\left\{\int \mathrm{d}^3x' \sum_{l'} {\psi_{l'}}^\dagger(\boldsymbol{x}', t_N)\psi_{l'}(\boldsymbol{x}', t_N)\right\}
$$

とすると，

$$
G[\psi_{\mathrm{F}}, A_{\mathrm{F}}; \psi_{\mathrm{I}}, A_{\mathrm{I}}; t_{\mathrm{F}} - t_{\mathrm{I}}] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left\{i\int \mathrm{d}^4x \sum_l (i{\psi_l}^\dagger)\dot{\psi}_l\right\} \times \left(\lim_{N\to\infty} G_N\right) \tag{61}
$$

となる．ただし $\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*$ についての積分 G_N は

$$
\begin{aligned}
G_N \equiv& \int\left\{\prod_{n=1}^{N-1}\left(\prod_i \frac{\mathrm{d}{q^*}_{ni}\mathrm{d}{p^*}_{ni}}{2\pi}\right)\right\}\exp\left(i\sum_{n=0}^{N-1}\varDelta t{\tilde{L}^*}_n\right)\\
=&\int\left\{\prod_{n=1}^{N-1}\left(\prod_i \frac{\mathrm{d}{q^*}_{ni}\mathrm{d}{p^*}_{ni}}{2\pi}\right)\left(\prod_j \mathrm{d}{q'}_{nj}\mathrm{d}{p'}_{nj}\right)\delta({\boldsymbol{q}'}_n)\delta({\boldsymbol{p}'}_n - {\boldsymbol{p}'}_n(\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*))\right\}\exp\left(i\sum_{n=0}^{N-1}\varDelta t{\tilde{L}^*}_n\right)
\end{aligned} \tag{62}
$$

---

*13 Dirac 代数 (6) から

$$
(\gamma^0)^2 = 1, \qquad \therefore \det\gamma^0 = \pm 1
$$

が言える．

である [14, p.139]．ここに $\boldsymbol{q'}_n \equiv \boldsymbol{q}'(t_n), \boldsymbol{p'}_n \equiv \boldsymbol{p}'(t_n)$ であり，q'_{nj}, p'_{nj} はその第 j 成分を表す．また

$$\tilde{L}^*{}_n \equiv \boldsymbol{p}^*{}_n \cdot \frac{\boldsymbol{q}^*{}_{n+1} - \boldsymbol{q}^*{}_n}{\Delta t} - \int \mathrm{d}^3x' \mathcal{H}[\psi^\dagger(\boldsymbol{x}', t_{n+1}), \psi(\boldsymbol{x}', t_n), \overline{\boldsymbol{q}}^*{}_n, \boldsymbol{p}^*{}_n]$$

であり，Lagrangian が $\boldsymbol{q}^*, \dot{\boldsymbol{q}}^*$ の関数であるのに対して $\tilde{L}^*{}_n$ は $\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*$ の関数であることを強調するためにチルダを付けている．

■$\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*$ の積分を $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}$ についての Faddeev の経路積分に書き換える　$\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*$ についての積分 G_N の式 (62) を 3.4.1 節で定義した $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ についての積分に書き換えよう [3, pp.172–174]．G_N の式 (62) 最右辺には $\delta(\boldsymbol{q'}_n)\delta(\boldsymbol{p'}_n)$ があるため，$\tilde{L}^*{}_n$ を

$$\tilde{L}_n \equiv \boldsymbol{p}_n \cdot \frac{\boldsymbol{q}_{n+1} - \boldsymbol{q}_n}{\Delta t} - \int \mathrm{d}^3x' \mathcal{H}[\psi^\dagger(\boldsymbol{x}', t_{n+1}), \psi(\boldsymbol{x}', t_n), \overline{\boldsymbol{q}}_n, \boldsymbol{p}_n]$$

に置き換え，

$$G_N = \int \left\{ \prod_{n=1}^{N-1} \left(\prod_i \frac{\mathrm{d}q_{ni}\mathrm{d}p_{ni}}{2\pi} \right) \left(\prod_j (2\pi) \right) \delta(\boldsymbol{q'}_n)\delta(\boldsymbol{p'}_n - \boldsymbol{p'}_n(\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*)) \right\} \exp\left(i \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \tilde{L}_n \right) \tag{63}$$

を得る．ただし $\boldsymbol{q}_n \equiv \boldsymbol{q}(t_n), \overline{\boldsymbol{q}}_n \equiv \frac{\boldsymbol{q}_{n+1}+\boldsymbol{q}_n}{2}, \boldsymbol{p}_n \equiv \boldsymbol{p}(t_n)$ であり，j は $\boldsymbol{q'}_n$ の全成分を動く．

ここで

$$\mathcal{D}q\mathcal{D}p \equiv \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N-1} \left(\prod_i \frac{\mathrm{d}q_{ni}\mathrm{d}p_{ni}}{2\pi} \right) \left(\prod_j (2\pi) \right) \tag{64}$$

と定義すると，G_N の式 (63) は $N \to \infty$ の極限で

$$\lim_{N\to\infty} G_N = \int \mathcal{D}q\mathcal{D}p \left(\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N-1} \delta(\boldsymbol{q'}_n)\delta(\boldsymbol{p'}_n - \boldsymbol{p'}_n(\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*)) \right) \exp\left\{ i \int_{t_\mathrm{I}}^{t_\mathrm{F}} \mathrm{d}t(\boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{q}} - H[\psi^\dagger, \psi, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}]) \right\} \tag{65}$$

と書き換えられる．

さらに $\delta(\boldsymbol{q}')\delta(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}'(\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*))$ を式 (51) で定義した拘束条件量 $\boldsymbol{\chi} = (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\phi})$ で表すことを考える．$\delta(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}'(\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*))$ がゼロでない値を持つ $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p}'(\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*)$ の近くで

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{q}' = 0, \boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{p}') \simeq T(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}'(\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*))$$

と近似できる．ここに T は $\frac{\partial\varphi_i}{\partial p'_j}$ を (i,j) 成分に持つ Jacobi 行列 $\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial p'_j}\right)$ であり，その値は $\boldsymbol{q}' = 0, \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p}'(\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*)$ で評価される．$\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}'(\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*)$ による展開で定数項が現れないのはゲージ固定条件 (52):

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{q}' = 0, \boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p}'(\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*)) = 0$$

による．よって任意の関数 F に対して

$$\begin{aligned}\int \left(\prod_i \mathrm{d}\varphi_i \right) \delta(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}'(\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*))F(\boldsymbol{\varphi}) &= \int \left(\prod_i \mathrm{d}p'_i \right) \left| \det\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial p'_j} \right) \right| \delta(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}'(\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*))F(T(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}'(\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*))) \\ &= |\det T|F(0) = \int \left(\prod_i \mathrm{d}\varphi_i \right) |\det T|\delta(\boldsymbol{\varphi})F(\boldsymbol{\varphi})\end{aligned}$$

が成り立つ．最左辺と最右辺を比較すると

$$\delta(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}'(\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*)) = |\det T| \delta(\boldsymbol{\varphi}) \tag{66}$$

を得る [3, p.313]．ところで $T = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial {p'}_j}\right)$ を次のように拘束条件量 $\boldsymbol{\chi} = (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\phi}), \boldsymbol{\phi} \equiv \boldsymbol{q}'$ で表せる (3.4.1 節で拘束条件量 $\boldsymbol{\phi}(t)$ を座標変数 $\boldsymbol{q}'(t)$ にとったことを思い出そう) [14, p.140]．

$$\{\varphi_i, {q'}_j\}_{\mathrm{P}} = \sum_k \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} \frac{\partial {q'}_j}{\partial p_k} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k} \frac{\partial {q'}_j}{\partial q_k} \right) = -\sum_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial {p'}_k} \frac{\partial {q'}_j}{\partial {q'}_k} = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial {p'}_j}.$$

これを $\delta(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}'(\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*))$ の式 (66) に代入すると，

$$\delta(\boldsymbol{q}')\delta(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}'(\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*)) = \delta(\boldsymbol{\phi})\delta(\boldsymbol{\varphi})|\det(\{\varphi_i, \phi_j\}_{\mathrm{P}})| = \delta(\boldsymbol{\chi})|\det(\{\varphi_i, \phi_j\}_{\mathrm{P}})|$$

となる．

最後にこれを経路積分 (65) に代入し，

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N-1} |\det(\{\varphi_i(t_n), \phi_j(t_n)\}_{\mathrm{P}})| \delta(\boldsymbol{\chi}(t_n)) \equiv \prod_t |\det(\{\varphi_i, \phi_j\}_{\mathrm{P}})| \delta(\boldsymbol{\chi})$$

と表記すると

$$\lim_{N\to\infty} G_N = \int \mathcal{D}q\mathcal{D}p \left(\prod_t |\det(\{\varphi_i, \phi_j\}_{\mathrm{P}})| \delta(\boldsymbol{\chi}) \right) \exp\left\{ i \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}} \mathrm{d}t (\boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} - H[\psi^\dagger, \psi, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}]) \right\} \tag{67}$$

を得る．これは Faddeev の経路積分と呼ばれる．

■Faddeev の経路積分を電磁場で表す　Faddeev の経路積分 (67) を電磁場 (および共役な場) で表そう [3, pp.231–233]．まず Poisson 括弧 $\{\varphi_k, \phi_l\}_{\mathrm{P}}$ の項を考えると，これは式 (56):

$$(\{\varphi_k, \phi_l\}_{\mathrm{P}}) = \begin{pmatrix} (\delta^i{}_j) & 0 \\ 0 & (\boldsymbol{\nabla}_i{}^2 \delta(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j) \Delta^3 x) \end{pmatrix}$$

で与えられた．よって

$$|\det(\{\varphi_k, \phi_l\}_{\mathrm{P}})| = (\det(\delta^i{}_j)) \times (\det(\boldsymbol{\nabla}_i{}^2 \delta(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j) \Delta^3 x)) = \left(\prod_{\boldsymbol{x}} \Delta^3 x \right) |\det(\boldsymbol{\nabla}_i{}^2 \delta(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j))|,$$

$$\therefore \prod_t |\det(\{\varphi_k, \phi_l\}_{\mathrm{P}})| = \prod_t \left(\prod_{\boldsymbol{x}} \Delta^3 x \right) |\det(\boldsymbol{\nabla}_i{}^2 \delta(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j))| = \left(\prod_x \Delta^3 x \right) \prod_t |\det(\boldsymbol{\nabla}_i{}^2 \delta(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j))|$$

となる．また

$$\begin{aligned} \prod_t \delta(\boldsymbol{\chi}) &= \prod_t \left[\prod_{\boldsymbol{x}} \delta(A_0(\boldsymbol{x}, t)) \delta(\partial^k A_k(\boldsymbol{x}, t)) \delta(\pi^0(\boldsymbol{x}, t) \Delta^3 x) \delta \left(\left\{ \partial_l \pi^l(\boldsymbol{x}, t) + e \sum_l {\psi_l}^\dagger(\boldsymbol{x}, t) \psi_l(\boldsymbol{x}, t) \right\} \Delta^3 x \right) \right] \\ &= \left(\prod_x \Delta^3 x \right)^2 \left\{ \prod_x \delta(A_0(x)) \delta(\partial^k A_k(x)) \delta(\pi^0(x)) \delta \left(\partial_l \pi^l(x) + e \sum_l {\psi_l}^\dagger(x) \psi_l(x) \right) \right\} \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} &\prod_t |\det(\{\varphi_k, \phi_l\}_{\mathrm{P}})| \delta(\boldsymbol{\chi}) \\ =& \left(\prod_x \Delta^3 x \right)^3 \left\{ \prod_x \delta(A_0(x)) \delta(\partial^k A_k(x)) \delta(\pi^0(x)) \delta \left(\partial_l \pi^l(x) + e \sum_l {\psi_l}^\dagger(x) \psi_l(x) \right) \right\} \left(\prod_t |\det(\boldsymbol{\nabla}_i{}^2 \delta(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j))| \right) \end{aligned} \tag{68}$$

を得る．

次に Faddeev の経路積分 (67) における指数関数の中身を電磁場 (および共役な場) で表す．3.4.1 節で定義した正準変数 $\boldsymbol{q}(t) \equiv (\{A_\mu(\boldsymbol{x},t)\}), \boldsymbol{p}(t) \equiv (\{\pi^\mu(\boldsymbol{x},t)\varDelta^3 x\})$ が格子点 $\boldsymbol{x}$ と成分 $\mu = 0,1,2,3$ についての集合であることを思い起こすと

$$\boldsymbol{p}(t)\cdot\dot{\boldsymbol{q}}(t) = \sum_{\boldsymbol{x}} \varDelta^3 x \pi^\mu(\boldsymbol{x},t)\dot{A}_\mu(\boldsymbol{x},t) = \int \mathrm{d}^3 x \pi^\mu(\boldsymbol{x},t)\dot{A}_\mu(\boldsymbol{x},t)$$

であり，Hamiltonian 密度は式 (27) で与えられ，さらに共役な場の式 (26):$\pi^0 = 0$ より $\pi^\mu \dot{A}_\mu = \pi^k \dot{A}_k$ となるから

$$\begin{aligned}
&i\int_{t_\mathrm{I}}^{t_\mathrm{F}} \mathrm{d}t(\boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{q}} - H[\psi^\dagger,\psi,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}]) \\
=&i\int \mathrm{d}^4 x(\pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{H}[\psi^\dagger,\psi,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}]) \\
=&i\int \mathrm{d}^4 x\left\{-\sum_l (i{\psi_l}^\dagger)\dot{\psi}_l + \sum_l \bar{\psi}_l(i\partial\!\!\!/ - m_l)\psi_l + e\sum_l \bar{\psi}_l A\!\!\!/\psi_l + \pi^k\dot{A}_k + \frac{1}{2}\pi_k\pi^k - \frac{1}{4}F_{kl}F^{kl}\right\} \qquad (69)
\end{aligned}$$

を得る．

以上の式 (68),(69) を Faddeev の経路積分の式 (67) に代入し，

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\pi\mathcal{D}A &\equiv \left(\prod_x \varDelta^3 x\right)^3 \mathcal{D}q\mathcal{D}p \\
&= \left(\prod_x \varDelta^3 x\right)^3 \times \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N-1}\left(\prod_{\mu,\boldsymbol{x}}\frac{\mathrm{d}A_\mu(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}\pi^\mu(\boldsymbol{x},t)}{2\pi}\varDelta^3 x\right)\left(\prod_{\boldsymbol{x}}(2\pi)\right)^2 \qquad (\because \text{式 } (64)) \\
&= \lim_{\varDelta\Omega\to 0}\left(\prod_{\mu,x}\frac{\mathrm{d}A_\mu(x)\mathrm{d}\pi^\mu(x)}{2\pi}\right)\left(\prod_x (\varDelta^3 x)^7(2\pi)^2\right)
\end{aligned}$$

と定義すると ($\varDelta\Omega \equiv \varDelta t\varDelta^3 x$ は時空の体積要素である)，

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} G_N \\
&= \int \mathcal{D}\pi\mathcal{D}A\left\{\prod_x \delta(A_0(x))\delta(\partial^k A_k(x))\delta(\pi^0(x))\delta\left(\partial_l\pi^l(x) + e\sum_l {\psi_l}^\dagger(x)\psi_l(x)\right)\right\}\left(\prod_t |\det({\boldsymbol{\nabla}_i}^2\delta(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j))|\right) \\
&\times\exp\left[i\int \mathrm{d}^4 x\left\{-\sum_l (i{\psi_l}^\dagger)\dot{\psi}_l + \sum_l \bar{\psi}_l(i\partial\!\!\!/ - m_l)\psi_l + e\sum_l \bar{\psi}_l A\!\!\!/\psi_l + \pi^k\dot{A}_k + \frac{1}{2}\pi_k\pi^k - \frac{1}{4}F_{kl}F^{kl}\right\}\right] \\
&= \int \mathcal{D}\pi^k\mathcal{D}A_k\left\{\prod_x \delta(\partial^k A_k(x))\delta\left(\partial_l\pi^l(x) + e\sum_l {\psi_l}^\dagger(x)\psi_l(x)\right)\right\}\left(\prod_t |\det({\boldsymbol{\nabla}_i}^2\delta(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j))|\right) \\
&\times\exp\left[i\int \mathrm{d}^4 x\left\{-\sum_l (i{\psi_l}^\dagger)\dot{\psi}_l + \sum_l \bar{\psi}_l(i\partial\!\!\!/ - m_l)\psi_l + e\sum_l \bar{\psi}_l\gamma^k A_k\psi_l + \pi^k\dot{A}_k + \frac{1}{2}\pi_k\pi^k - \frac{1}{4}F_{kl}F^{kl}\right\}\right] \qquad (70)
\end{aligned}$$

を得る．ここで A_0, π^0 の積分を実行し

$$\mathcal{D}\pi^k\mathcal{D}A_k \equiv \lim_{\varDelta\Omega\to 0}\left(\prod_{k,x}\frac{\mathrm{d}A_k(x)\mathrm{d}\pi^k(x)}{2\pi}\right)\left(\prod_x (\varDelta^3 x)^7(2\pi)\right)$$

とした．

■Coulomb 条件での経路積分表式　ここで任意の場 $\varphi(x)$ を用い，

$$\prod_x \delta\left(\partial_l \pi^l(x) + e\sum_l {\psi_l}^\dagger(x)\psi_l(x)\right) = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{i\int \mathrm{d}^4x\varphi(x)\left(\partial_l \pi^l(x) + e\sum_l {\psi_l}^\dagger(x)\psi_l(x)\right)\right\} \tag{71}$$

と書けることに注意する．実際，この式は $p(x) \equiv \left(\partial_l \pi^l(x) + e\sum_l {\psi_l}^\dagger(x)\psi_l(x)\right)\mathit{\Delta}\Omega$ とおき，あらかじめ $\mathit{\Delta}\Omega$ を無限小と想定すると

$$\begin{aligned}
&\prod_x \delta\left(\partial_l \pi^l(x) + e\sum_l {\psi_l}^\dagger(x)\psi_l(x)\right)\\
=&\prod_x \mathit{\Delta}\Omega\delta(p(x))\\
=&\prod_x \mathit{\Delta}\Omega\int\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{2\pi}e^{i\varphi(x)p(x)}\\
=&\int\left(\prod_x\frac{\mathit{\Delta}\Omega\mathrm{d}\varphi(x)}{2\pi}\right)\exp\left(i\sum_x\varphi(x)p(x)\right)\\
=&\int\mathcal{D}\varphi\exp\left\{i\int\mathrm{d}^4x\varphi(x)\left(\partial_l \pi^l(x) + e\sum_l {\psi_l}^\dagger(x)\psi_l(x)\right)\right\}
\end{aligned}$$

と示される [3, pp.325–326]．これを用いると経路積分 (70) は

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} G_N\\
=&\int\mathcal{D}\pi^k\mathcal{D}A_k\mathcal{D}\varphi\left(\prod_x\delta(\partial^k A_k(x))\right)\left(\prod_t|\det({\boldsymbol{\nabla}_i}^2\delta(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j))|\right)\\
&\times\exp\Bigg[i\int\mathrm{d}^4x\Bigg\{-\sum_l(i{\psi_l}^\dagger)\dot{\psi}_l+\sum_l\bar{\psi}_l(i\partial\!\!\!/-m_l)\psi_l+e\sum_l\bar{\psi}_l\gamma^kA_k\psi_l\\
&+\pi^k\dot{A}_k+\frac{1}{2}\pi_k\pi^k-\frac{1}{4}F_{kl}F^{kl}+\varphi\left(\partial_l\pi^l+e\sum_l{\psi_l}^\dagger\psi_l\right)\Bigg\}\Bigg]
\end{aligned} \tag{72}$$

となる．

次に π^k の積分を実行する．まず，指数関数内の π^k の項 $\frac{1}{2}\pi_k\pi^k+\pi^k\dot{A}_k$ は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\pi_k\pi^k+\pi^k\dot{A}_k\\
=&\frac{1}{2}\pi_k\pi^k+2\times\frac{1}{2}\pi^k(\partial_0A_k-\partial_k\varphi)+\pi^k\partial_k\varphi\\
=&\frac{1}{2}(\pi_k+\partial_0A_k-\partial_k\varphi)(\pi^k+\partial^0A^k-\partial^k\varphi)-\frac{1}{2}(\partial_0A_k-\partial_k\varphi)(\partial^0A^k-\partial^k\varphi)+\pi^k\partial_k\varphi
\end{aligned}$$

と書き換えられるので，指数関数内において

$$\begin{aligned}
&i\int\mathrm{d}^4x\left(\pi^k\dot{A}_k+\frac{1}{2}\pi_k\pi^k-\frac{1}{4}F_{kl}F^{kl}+\varphi\partial_l\pi^l\right)\\
=&i\int\mathrm{d}^4x\left\{\frac{1}{2}(\pi_k+\partial_0A_k-\partial_k\varphi)(\pi^k+\partial^0A^k-\partial^k\varphi)-\frac{1}{2}(\partial_0A_k-\partial_k\varphi)(\partial^0A^k-\partial^k\varphi)-\frac{1}{4}F_{kl}F^{kl}+(\pi^k\partial_k\varphi+\varphi\partial_l\pi^l)\right\}
\end{aligned}$$

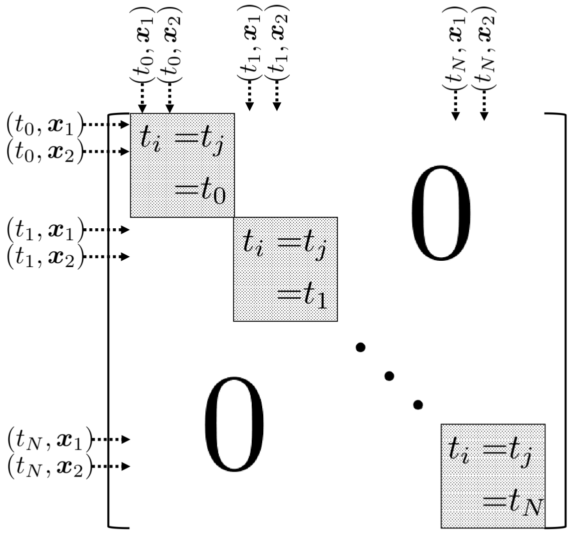

図 2　行列 $(\delta_{t_it_j}\boldsymbol{\nabla}_i{}^2\delta(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j))$ と行列 $(\boldsymbol{\nabla}_i{}^2\delta(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j))$ の関係

となる．ここで

$$\int \mathrm{d}^4x(\pi^k\partial_k\varphi+\varphi\partial_l\pi^l)=\int \mathrm{d}^4x\partial_k(\pi^k\varphi)=0$$

であり，また場 φ は任意だからこれを電磁場の時間成分 $A_0=A^0$ と見なすと，

$$-\frac{1}{2}(\partial_0A_k-\partial_k\varphi)(\partial^0A^k-\partial^k\varphi)-\frac{1}{4}F_{kl}F^{kl}=-\frac{1}{2}F_{0k}F^{0k}-\frac{1}{4}F_{kl}F^{kl}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

と書けるので，上式は ${\pi'}^k\equiv\pi^k+\partial^0A^k-\partial^kA^0$ を導入すると，

$$i\int \mathrm{d}^4x\left(\pi^k\dot{A}_k+\frac{1}{2}\pi_k\pi^k-\frac{1}{4}F_{kl}F^{kl}+\varphi\partial_l\pi^l\right)=-i\int \mathrm{d}^4x\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}'\cdot\boldsymbol{\pi}'+\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) \tag{73}$$

$$\left(\because {\pi'}_k{\pi'}^k=-\sum_{k=1}^{3}({\pi'}^k)^2=-\boldsymbol{\pi}'\cdot\boldsymbol{\pi}'\right)$$

となる．

さらに時空点 $x_i\equiv(t_i,\boldsymbol{x}_i),x_j\equiv(t_j,\boldsymbol{x}_j)$ に対して $\delta_{t_it_j}\boldsymbol{\nabla}_i{}^2\delta(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j)$ を (i,j) 成分に持つような行列 $(\delta_{t_it_j}\boldsymbol{\nabla}_i{}^2\delta(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j))$ を考えると，これは図 2 のように $t_i=t_j=t_0,t_1,\cdots,t_N$ となる成分の作る各ブロックが行列 $(\boldsymbol{\nabla}_i{}^2\delta(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j))$ を成すから，

$$\begin{aligned}&\prod_t\det(\boldsymbol{\nabla}_i{}^2\delta(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j))=\det(\delta_{t_it_j}\boldsymbol{\nabla}_i{}^2\delta(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j))\\&=\left(\prod_x\mathit{\Delta}t\right)\det(\delta(x_i{}^0-x_j{}^0)\boldsymbol{\nabla}_i{}^2\delta(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j))=\left(\prod_x\mathit{\Delta}t\right)\det(\boldsymbol{\nabla}_i{}^2\delta^4(x_i-x_j))\end{aligned} \tag{74}$$

と書き換えられる．

以上の式 (73),(74) を経路積分の式 (72) に代入し，π^μ と A_μ は独立なので $\mathcal{D}{\pi'}^k=\mathcal{D}\pi^k$ となることを用い

ると

$$\lim_{N\to\infty} G_N = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\pi'^k \left(\prod_x \delta(\partial^k A_k(x))\right) |\det(\boldsymbol{\nabla}_i{}^2 \delta^4(x_i - x_j))|$$

$$\times \exp\left[i\int \mathrm{d}^4x \left\{-\sum_l (i\psi_l{}^\dagger)\dot{\psi}_l + \sum_l \bar{\psi}_l(i\partial\!\!\!/ - m_l)\psi_l + e\sum_l \bar{\psi}_l A\!\!\!/\psi_l - \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}'\cdot\boldsymbol{\pi}' - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right\}\right],$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}A\mathcal{D}\pi'^k &\equiv \left(\prod_x \varDelta t\right)\mathcal{D}\pi'^k\mathcal{D}A_k\mathcal{D}\varphi \\ &= \left(\prod_x \varDelta t\right)\left(\prod_x \frac{\Delta\Omega \mathrm{d}\varphi(x)}{2\pi}\right)\left(\prod_{k,x}\frac{\mathrm{d}A_k(x)\mathrm{d}\pi'^k(x)}{2\pi}\right)\left(\prod_x (\varDelta^3 x)^7(2\pi)\right) \\ &= \left\{\prod_x\left(\prod_\mu \frac{\mathrm{d}A_\mu(x)}{2\pi}\right)\left(\prod_k \frac{\mathrm{d}\pi'^k(x)}{2\pi}\right)\right\}\left(\prod_x (\varDelta\Omega)^2(\varDelta^3x)^6(2\pi)\right)\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\int\left(\prod_{k,x}\mathrm{d}\pi'^k(x)\right)\exp\left[i\int \mathrm{d}^4x\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}'\cdot\boldsymbol{\pi}'\right\}\right] = \prod_{k,x}\int \mathrm{d}\pi'^k(x)\exp\left\{-\frac{i}{2}\Delta\Omega(\pi'^k(x))^2\right\} = \prod_{k,x}\sqrt{\frac{2\pi}{i\varDelta\Omega}}$$

なので

$$\lim_{N\to\infty} G_N = \int \mathcal{D}A \left(\prod_x \delta(\partial^k A_k(x))\right) |\det(\boldsymbol{\nabla}_i{}^2 \delta^4(x_i - x_j))|$$

$$\times \exp\left[i\int \mathrm{d}^4x \left\{-\sum_l (i\psi_l{}^\dagger)\dot{\psi}_l + \sum_l \bar{\psi}_l(i\partial\!\!\!/ - m_l)\psi_l + e\sum_l \bar{\psi}_l A\!\!\!/\psi_l - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right\}\right], \tag{75}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}A &\equiv \left(\prod_{\mu,x}\frac{\mathrm{d}A_\mu(x)}{2\pi}\right)\left(\prod_{k,x}\frac{1}{2\pi}\right)\left(\prod_{k,x}\sqrt{\frac{2\pi}{i\varDelta\Omega}}\right)\left(\prod_x(\varDelta\Omega)^2(\varDelta^3x)^6(2\pi)\right) \\ &= \left(\prod_{x,\mu}\mathrm{d}A_\mu(x)\right)\left(\prod_x \frac{(\varDelta\Omega)^{1/2}(\varDelta^3x)^6}{(2\pi)^7 i^{3/2}}\right) : (30)\end{aligned}$$

を得る [3, pp.233–235].

■Lorentz 共変なゲージ条件での経路積分　任意の関数 $f(x)$ に対して Lorentz 共変なゲージ条件

$$\partial^\mu A^\theta{}_\mu(x) - f(x) = 0 \tag{76}$$

を満たす電磁場 $A^\theta{}_\mu$ へのゲージ変換

$$A^\theta{}_\mu = A_\mu - \partial_\mu\theta$$

を考える．このとき，Coulomb 条件 $0 = \partial^k A_k = \partial^k A^\theta{}_k + \partial^k\partial_k\theta$ より

$$\partial^k A^\theta{}_k = -\partial^k\partial_k\theta = \boldsymbol{\nabla}^2\theta$$

が成立し，また場 A_μ,θ は独立なので $\mathcal{D}A=\mathcal{D}A^\theta$ となることから，経路積分表式 (75) において

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}\mu \equiv&\mathcal{D}A\left(\prod_x \delta(\partial^k A_k)\right)|\det(\boldsymbol{\nabla}_i{}^2\delta^4(x_i-x_j))| \\
=&\mathcal{D}A^\theta\left(\prod_x \delta(\partial^k A^\theta{}_k)\right)\left|\det\left(\boldsymbol{\nabla}_i{}^2\frac{\delta\theta(x_i)}{\delta\theta(x_j)}\right)\right| \qquad \left(\because \mathcal{D}A=\mathcal{D}A^\theta, \text{式 (5)}: \frac{\delta\theta(x_i)}{\delta\theta(x_j)}=\delta^4(x_i-x_j)\right) \\
=&\mathcal{D}A^\theta\left(\prod_x \delta(\partial^k A^\theta{}_k)\right)\left|\det\left(\frac{\delta\partial^k A^\theta{}_k(x_i)}{\delta\theta(x_j)}\right)\right| \qquad (\because \boldsymbol{\nabla}^2\theta=\partial^k A^\theta{}_k)
\end{aligned}
$$

となる．さらに $\mathcal{D}\mu$ を書き換えるため，これに $\mathcal{D}\theta$ をかけた $\mathcal{D}\mu\mathcal{D}\theta$ を計算し，最後に $\mathcal{D}\theta$ を取り除くことにする．$\mathcal{D}\mu\mathcal{D}\theta$ において

$$
\mathcal{D}\theta\left|\det\left(\frac{\delta\partial^k A^\theta{}_k(x_i)}{\delta\theta(x_j)}\right)\right|=\mathcal{D}(\partial^k A^\theta{}_k)
$$

と積分変数を変換できる．これは次のように確かめられる．$\{F(x)\}$ から $\{f(x)\}$ への変数変換は $\mathcal{D}F\equiv\prod_x \mathrm{d}F(x),\mathcal{D}f\equiv\prod_x \Delta\Omega\mathrm{d}f(x)$ に対して

$$
\prod_x \mathrm{d}F(x)=\left|\det\left(\frac{\partial F(x_i)}{\partial f(x_j)}\right)\right|\prod_x \mathrm{d}f(x)
$$

と成される．ここで汎関数微分の定義式 (4):

$$
\Delta F(x_i)=\int \mathrm{d}^4x\frac{\delta F(x_i)}{\delta f(x)}\Delta f(x)=\sum_x \Delta\Omega\frac{\delta F(x_i)}{\delta f(x)}\Delta f(x)
$$

より $\dfrac{\Delta F(x_i)}{\Delta f(x_j)}=\dfrac{\delta F(x_i)}{\delta f(x_j)}\Delta\Omega$ なので

$$
\mathcal{D}F=\left|\det\left(\frac{\delta F(x_i)}{\delta f(x_j)}\right)\right|\mathcal{D}f
$$

となることが分かる．こうして

$$
\mathcal{D}\mu\mathcal{D}\theta=\mathcal{D}A^\theta\mathcal{D}(\partial^k A^\theta{}_k)\prod_x \delta(\partial^k A^\theta{}_k)
$$

を得る．よって $g(x)\equiv\partial^k A^\theta{}_k(x)$ とおくと，これは経路積分 (75) の中で

$$
\int \mathcal{D}(\partial^k A^\theta{}_k)\prod_x \delta(\partial^k A^\theta{}_k)=\prod_x \int \mathrm{d}g(x)\delta(g(x))=1
$$

を作る．ここで第 2 の等号は任意の $g(x)$ に対して成り立つから，ゲージ条件 (76) に対応して $g(x)\equiv\partial^\mu A_\mu(x)-f(x)$ ととり直せば，経路積分 (75) の中で

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}\mu\mathcal{D}\theta =&\mathcal{D}A^\theta\mathcal{D}(\partial^\mu A^\theta{}_\mu-f)\prod_x \delta(\partial^\mu A^\theta{}_\mu-f) \\
=&\mathcal{D}A\mathcal{D}\theta\left|\det\left(\frac{\delta(\partial^\mu A_\mu-f)}{\delta\theta}\right)\right|\prod_x \delta(\partial^\mu A_\mu-f) \\
=&\mathcal{D}A\mathcal{D}\theta\left|\det\left(\Box_i\delta^4(x_i-x_j)\right)\right|\prod_x \delta(\partial^\mu A_\mu-f), \\
\therefore \mathcal{D}\mu =&\mathcal{D}A\left|\det\left(\Box_i\delta^4(x_i-x_j)\right)\right|\prod_x \delta(\partial^\mu A_\mu-f)
\end{aligned}
$$

とできる．ただし第 1 式の最後の等号ではゲージ条件 (76):

$$0 = \partial^\mu A^\theta{}_\mu - f = (\partial^\mu A_\mu - f) - \partial^\mu \partial_\mu \theta \quad \Leftrightarrow \quad \partial^\mu A_\mu - f = \partial^\mu \partial_\mu \theta \equiv \Box \theta$$

および式 (5):$\delta\theta(x_i)/\delta\theta(x_j) = \delta^4(x_i - x_j)$ を用いた．よって経路積分の式 (75) はその指数関数の中身を $i\Phi$ として

$$\lim_{N\to\infty} G_N = \int \mathcal{D}A \left(\prod_x \delta(\partial^\mu A_\mu - f) \right) \left| \det\left(\Box_i \delta^4(x_i - x_j) \right) \right| e^{i\Phi}$$

と書き換えられる．これを Green 関数の式 (61) に代入し再度，指数関数の中身 $i\Phi$ を明示すると，QED の Green 関数は

$$\text{式 (28)} : G[\psi_{\mathrm{F}}, A_{\mathrm{F}}; \psi_{\mathrm{I}}, A_{\mathrm{I}}; t_{\mathrm{F}} - t_{\mathrm{I}}] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}A \left(\prod_x \delta(\partial^\mu A_\mu - f) \right) |\det(\Box_i \delta^4(x_i - x_j))| \exp\left(i \int \mathrm{d}^4 x \mathcal{L} \right),$$

$$\mathcal{L} \equiv \sum_l \bar{\psi}_l (i\partial\!\!\!/ - m_l)\psi_l + e \sum_l \bar{\psi}_l A\!\!\!/ \psi_l - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

$$\text{式 (30)} : \mathcal{D}A \equiv \left(\prod_{x,\mu} \mathrm{d}A_\mu(x) \right) \left(\prod_x \frac{(\Delta\Omega)^{1/2} (\Delta^3 x)^6}{(2\pi)^7 i^{3/2}} \right)$$

となる [3, pp.235–237]．

■Green 関数の式 (31) への書き換え　ここで中西-Lautrap 場と呼ばれる補助場 $B(x)$ を導入して，式 (71) と同様に

$$\prod_x \delta(\partial^\mu A_\mu - f) = \int \mathcal{D}B \exp\left\{ i \int \mathrm{d}^4 x B(\partial^\mu A_\mu - f) \right\}, \qquad \mathcal{D}B \equiv \prod_x \Delta\Omega \mathrm{d}B(x)$$

とすると

$$\lim_{N\to\infty} G_N = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}B |\det(\Box_i \delta^4(x_i - x_j))| e^{i\Phi} \exp\left\{ i \int \mathrm{d}^4 x B(\partial^\mu A_\mu - f) \right\}$$

を得る．次に関数 f を消去するために定数

$$\int \mathcal{D}f \exp\left[i \int \mathrm{d}^4 x \left\{ -\frac{1}{2\xi} f^2(x) \right\} \right] \equiv a$$

に対して

$$1 = \frac{1}{a} \int \mathcal{D}f \exp\left[i \int \mathrm{d}^4 x \left\{ -\frac{1}{2\xi} f^2(x) \right\} \right]$$

を挿入する．ξ は Feynman のゲージパラメータと呼ばれる定数である．すると

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} G_N \\
=&\frac{1}{a} \int \mathcal{D}A\mathcal{D}B\mathcal{D}f |\det(\Box_i \delta^4(x_i - x_j))| e^{i\Phi} \exp\left[i \int \mathrm{d}^4 x \left\{ B(\partial^\mu A_\mu - f) - \frac{1}{2\xi} f^2 \right\} \right] \\
=&\frac{1}{a} \int \mathcal{D}A\mathcal{D}B\mathcal{D}f |\det(\Box_i \delta^4(x_i - x_j))| e^{i\Phi} \exp\left\{ i \int \mathrm{d}^4 x \left(B\partial^\mu A_\mu + \frac{\xi}{2} B^2 \right) \right\} \exp\left[i \int \mathrm{d}^4 \left\{ -\frac{1}{2\xi} (f + \xi B)^2 \right\} \right] \\
=& \int \mathcal{D}A\mathcal{D}B |\det(\Box_i \delta^4(x_i - x_j))| e^{i\Phi} \exp\left\{ i \int \mathrm{d}^4 x \left(B\partial^\mu A_\mu + \frac{\xi}{2} B^2 \right) \right\} \times \frac{1}{a} \int \mathcal{D}f' \exp\left\{ i \int \mathrm{d}^4 x \left(-\frac{1}{2\xi} f'^2 \right) \right\} \\
=& \int \mathcal{D}A\mathcal{D}B |\det(\Box_i \delta^4(x_i - x_j))| e^{i\Phi} \exp\left\{ i \int \mathrm{d}^4 x \left(B\partial^\mu A_\mu + \frac{\xi}{2} B^2 \right) \right\}
\end{aligned}$$

となる $(f' \equiv f + \xi B)$．さらに B についての積分を実行しよう．$\mathcal{D}A|\det(\Box_i \delta^4(x_i - x_j))|$ を改めて $\mathcal{D}A$ とすると

$$
\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} G_N \\
&= \int \mathcal{D}A\mathcal{D}B e^{i\Phi} \exp\left\{-i\int \mathrm{d}^4x \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2\right\} \exp\left\{i\int \mathrm{d}^4x \frac{\xi}{2}\left(B + \frac{1}{\xi}\partial^\mu A_\mu\right)^2\right\} \\
&= b\int \mathcal{D}A e^{i\Phi} \exp\left\{-i\int \mathrm{d}^4x \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2\right\}
\end{aligned}
$$

が得られる．ここに

$$
b \equiv \int \mathcal{D}B' \exp\left(i\int \mathrm{d}^4x \frac{\xi}{2} B'^2\right), \qquad B' \equiv B + \frac{1}{\xi}\partial^\mu A_\mu \qquad (\because \mathcal{D}B' = \mathcal{D}B)
$$

は定数である．最後に $b\mathcal{D}A \to \mathcal{D}A$ と改めてこれを Green 関数の式 (61) に代入し，経路積分の式 (75) の指数関数の中身 $i\Phi$ を明示すると，QED の Green 関数は

$$
\begin{aligned}
\text{式 (31)}: &G[\psi_\mathrm{F}, A_\mathrm{F}; \psi_\mathrm{I}, A_\mathrm{I}; t_\mathrm{F} - t_\mathrm{I}] \\
&= \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}A \exp\left[i\int \mathrm{d}^4x \left\{\mathcal{L} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2\right\}\right], \\
&\mathcal{L} = \sum_l \bar{\psi}_l (i\partial\!\!\!/ - m_l)\psi_l + e\sum_l \bar{\psi}_l A\!\!\!/ \psi_l - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \\
\text{式 (32)}: \mathcal{D}A \equiv &\left(\prod_{x,\mu} \mathrm{d}A_\mu(x)\right)\left(\prod_x \frac{(\Delta\Omega)^{3/2}(\Delta^3 x)^6}{(2\pi)^7 i^{3/2}}\right)|\det(\Box_i \delta^4(x_i - x_j))| \int \left(\prod_x \mathrm{d}B(x)\right) \exp\left(i\int \mathrm{d}^4x \frac{\xi}{2} B^2(x)\right)
\end{aligned}
$$

となる [3, pp.237–240].

4 場の量子論から古典物理学への移行 (補足)

4.1 準備

4.1.1 完全反対称テンソル $E^{\lambda\mu\nu\rho}$，完全反対称テンソル密度 $\boldsymbol{E}^{\lambda\mu\nu\rho}$

$\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ を (局所) 慣性系 $\{X^\mu\}$ で $\varepsilon^{0123}=1$ となる添字に関して完全反対称な量とする．

このときこれを 4 階反変テンソルの変換則

$$E^{\lambda\mu\nu\rho}=\frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\alpha}\frac{\partial x^\mu}{\partial X^\beta}\frac{\partial x^\nu}{\partial X^\gamma}\frac{\partial x^\rho}{\partial X^\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

に従って任意の座標系 $\{x^\mu\}$ に変換した量は $E^{\lambda\mu\nu\rho}=\frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}}{\sqrt{-g}}$ である [1, pp.258–259].

一方，これを次式で定義される 4 階反変テンソル密度の変換則

$$\boldsymbol{E}^{\lambda\mu\nu\rho}=\frac{\partial(X)}{\partial(x)}\frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\alpha}\frac{\partial x^\mu}{\partial X^\beta}\frac{\partial x^\nu}{\partial X^\gamma}\frac{\partial x^\rho}{\partial X^\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

に従って任意の座標系 $\{x^\mu\}$ に変換した量は $\boldsymbol{E}^{\lambda\mu\nu\rho}=\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ となり，座標系に依らず $\boldsymbol{E}^{0123}=1$ となる [8, pp.62–63]．以上の証明は 4.1.2 節で行う．

4.1.2 完全反対称テンソル $E^{\lambda\mu\nu\rho}$，完全反対称テンソル密度 $\boldsymbol{E}^{\lambda\mu\nu\rho}$(補足)

4.1.1 節の $E^{\lambda\mu\nu\rho},\boldsymbol{E}^{\lambda\mu\nu\rho}$ の表式を確認する．$\dfrac{\partial x^\mu}{\partial X^\nu}\equiv\Lambda^\mu{}_\nu$ と略記すると 4 階反変テンソルの変換則は

$$E^{\lambda\mu\nu\rho}=\Lambda^\lambda{}_\alpha\Lambda^\mu{}_\beta\Lambda^\nu{}_\gamma\Lambda^\rho{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}=\begin{vmatrix}\Lambda^\lambda{}_0 & \cdots & \Lambda^\lambda{}_3\\ \Lambda^\mu{}_0 & \cdots & \Lambda^\mu{}_3\\ \Lambda^\nu{}_0 & \cdots & \Lambda^\nu{}_3\\ \Lambda^\rho{}_0 & \cdots & \Lambda^\rho{}_3\end{vmatrix}$$

と書ける．最右辺は行列式 $|\Lambda^\mu{}_\nu|=\dfrac{\partial(x)}{\partial(X)}$ の行を入れ換えたものである．行列式は行を入れ換えると符号が変わるから

$$E^{\lambda\mu\nu\rho}=\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\frac{\partial(x)}{\partial(X)}=\frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}}{\sqrt{-g}},\qquad \therefore \boldsymbol{E}^{\lambda\mu\nu\rho}=\frac{\partial(X)}{\partial(x)}E^{\lambda\mu\nu\rho}=\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$$

を得る ($\dfrac{\partial(X)}{\partial(x)}=\sqrt{-g}$ を用いた*14.

---

*14 共変ベクトル $g_{\mu\nu}$ の変換則は慣性系 (X^μ) での値を $g^{(0)}_{\alpha\beta}$ とおくと，行列の形を借りて

$$(g_{\mu\nu}(x))=\left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}\right)^T(g^{(0)}_{\alpha\beta})\left(\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu}\right)$$

と書ける (例えば $\left(\dfrac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}\right)$ は $\dfrac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}$ を (α,μ) 成分に持つ行列であり，その転置行列 $\left(\dfrac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}\right)^T$ は $\dfrac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}$ を (μ,α) 成分に持つ)．両辺の行列式をとり $|g^{(0)}_{\alpha\beta}|=1\times(-1)^3=-1$ を用いると

$$g=-J^2,\qquad J=\sqrt{-g}$$

を得る [1, p.259] [11, pp.188–189].

4.2　対称性と保存則

一般座標変換に対する物質場の作用 S_{M} の不変性から保存則 (38) が導かれることを示す．

4.2.1　物質場に対する作用 S_{M} の変化量の表式

まず物質場 ψ_l，計量テンソル $g_{\mu\nu}$，電磁場 A_μ をまとめて φ_A と書き，時空の与えられた点における座標と場の値が

$$\begin{aligned} x^\mu &\quad\to\quad x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \\ \varphi_A(x) &\quad\to\quad \varphi'_A(x) = \varphi_A(x) + \delta\varphi_A(x) \end{aligned}$$

と変化する無限小の受動的な変換に対して物質場の作用 S_{M} がどのように変化するかを調べよう．

■計算の準備　準備として次のことに注意する．今，時空の与えられた点において任意の場 $F(x)$ の値が座標変換に伴い $F(x) \to F'(x')$ と変化したとする．元の座標系で座標が x となる点と新しい座標系で座標が x となる点で場の値を比較した差を

$$\bar{\delta}F(x) = F'(x) - F(x)$$

と書くと，これは時空の与えられた点での場の値の変化量

$$\delta F(x) = F'(x') - F(x)$$

と

$$\delta F(x) = \{F'(x') - F(x')\} + \{F(x') - F(x)\} = \bar{\delta}F(x') + \delta x^\mu \partial_\mu F(x)$$

の関係にある．最右辺第 1 項 $\bar{\delta}F(x')$ の引数を x に置き換えたときの誤差は 2 次の微小量なので無視すると，これは

$$\delta F = \bar{\delta}F + \delta x^\mu \partial_\mu F \tag{77}$$

となる [2, p42]．

さらに

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\nu(x^\mu + \delta x^\mu) = \delta^\mu{}_\nu + \partial_\nu(\delta x^\mu) \tag{78}$$

なので δx^μ の 1 次までの近似で

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta^\nu{}_\mu - \partial_\mu(\delta x^\nu) \tag{79}$$

となる．実際，このとき

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\rho} = \{\delta^\mu{}_\nu + \partial_\nu(\delta x^\mu)\}\{\delta^\nu{}_\rho - \partial_\rho(\delta x^\nu)\} \simeq \delta^\mu{}_\nu\delta^\nu{}_\rho - \partial_\rho(\delta x^\mu) + \partial_\rho(\delta x^\mu) = \delta^\mu{}_\rho$$

が満たされる．よって

$$\partial_\mu{}' = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\partial_\nu \simeq \{\delta^\nu{}_\mu - \partial_\mu(\delta x^\nu)\}\partial_\nu = \partial_\mu - \{\partial_\mu(\delta x^\nu)\}\partial_\nu$$

である．従って

$$\begin{aligned} \delta(\partial_\mu F(x)) =& \partial_\mu{}' F'(x') - \partial_\mu F(x) \\ =& \partial_\mu{}'\{F'(x') - F(x)\} + (\partial_\mu{}' - \partial_\mu)F(x) \\ =& \partial_\mu{}'\delta F(x) - \{\partial_\mu(\delta x^\nu)\}\partial_\nu F(x) \end{aligned}$$

となり，最右辺第 1 項 $\partial_\mu{}'\delta F(x)$ を $\partial_\mu\delta F(x)$ に置き換えたときの誤差は 2 次の微小量なので無視すると，これは

$$\delta(\partial_\mu F) = \partial_\mu(\delta F) - (\partial_\nu F)\partial_\mu(\delta x^\nu) \tag{80}$$

となる．ここから

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}(\partial_\mu F) =&\delta(\partial_\mu F) - \{\partial_\nu(\partial_\mu F)\}\delta x^\nu \qquad (\because \text{式 } (77)) \\
=&\partial_\mu(\delta F) - (\partial_\nu F)\partial_\mu(\delta x^\nu) - \{\partial_\nu(\partial_\mu F)\}\delta x^\nu \qquad (\because \text{式 } (80)) \\
=&\partial_\mu(\bar{\delta}F) + \partial_\mu\{(\partial_\nu F)\delta x^\nu\} - (\partial_\nu F)\partial_\mu(\delta x^\nu) - \{\partial_\nu(\partial_\mu F)\}\delta x^\nu \qquad (\because \text{式 } (77)) \\
=&\partial_\mu(\bar{\delta}F)
\end{aligned} \tag{81}$$

を得る．

次に Jacobian $\frac{\partial(x')}{\partial(x)}$ を δx^μ の 1 次の近似で求めておく．$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$ の式 (78) および 4.1.1 節の $\boldsymbol{E}^{\lambda\mu\nu\rho}$ を用いると

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(x')}{\partial(x)} = \det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right) \equiv \boldsymbol{E}^{\lambda\mu\nu\rho}\frac{\partial x'^0}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x'^1}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^2}{\partial x^\nu}\frac{\partial x'^3}{\partial x^\rho} \\
=&\boldsymbol{E}^{\lambda\mu\nu\rho}(\delta^0{}_\lambda + \partial_\lambda(\delta x^0))(\delta^1{}_\mu + \partial_\mu(\delta x^1))(\delta^2{}_\nu + \partial_\nu(\delta x^2))(\delta^3{}_\rho + \partial_\rho(\delta x^3)) \\
\simeq&\boldsymbol{E}^{\lambda\mu\nu\rho}\delta^0{}_\lambda\delta^1{}_\mu\delta^2{}_\nu\delta^3{}_\rho \qquad \Leftarrow \quad \boldsymbol{E}^{0123} = 1 \\
+&\boldsymbol{E}^{\lambda\mu\nu\rho} \\
\times&[\{\partial_\lambda(\delta x^0)\}\delta^1{}_\mu\delta^2{}_\nu\delta^3{}_\rho \qquad \Leftarrow \quad \boldsymbol{E}^{\lambda 123}\partial_\lambda(\delta x^0) = \partial_0(\delta x^0) \\
+&\{\partial_\mu(\delta x^1)\}\delta^0{}_\lambda\delta^2{}_\nu\delta^3{}_\rho \qquad \Leftarrow \quad \boldsymbol{E}^{0\mu 23}\partial_\mu(\delta x^1) = \partial_1(\delta x^1) \\
+&\{\partial_\nu(\delta x^2)\}\delta^0{}_\lambda\delta^1{}_\mu\delta^3{}_\rho \qquad \Leftarrow \quad \boldsymbol{E}^{01\nu 3}\partial_\nu(\delta x^2) = \partial_2(\delta x^2) \\
+&\{\partial_\rho(\delta x^3)\}\delta^0{}_\lambda\delta^1{}_\mu\delta^2{}_\nu] \qquad \Leftarrow \quad \boldsymbol{E}^{012\rho}\partial_\rho(\delta x^3) = \partial_3(\delta x^3) \\
=&1 + \partial_\nu(\delta x^\nu)
\end{aligned} \tag{82}$$

となる．

■物質場に対する作用 S_{M} の変化量の計算　以上を用いて，新しい座標系での作用 $S_{\mathrm{M}}{}'$ および作用の変化量 $\delta S_{\mathrm{M}} \equiv S_{\mathrm{M}}{}' - S_{\mathrm{M}}$ を計算する．以下，繰り返された場の種類を表す添字 A についても和をとるものとする．

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{M}}{}' =& \int \mathcal{L}_{\mathrm{M}}[\varphi'{}_A(x'), \partial_\mu{}'\varphi'{}_A(x')]\mathrm{d}^4x \\
=& \int \mathcal{L}_{\mathrm{M}}[\varphi_A + \delta\varphi_A, \partial_\nu\varphi_A + \delta(\partial_\nu\varphi_A)]\frac{\partial(x')}{\partial(x)}\mathrm{d}^4x \\
=& \int \left\{\mathcal{L}_{\mathrm{M}} + \frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial\varphi_A}\delta\varphi_A + \frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial(\partial_\nu\varphi_A)}\delta(\partial_\nu\varphi_A)\right\}\{1 + \partial_\lambda(\delta x^\lambda)\}\mathrm{d}^4x \qquad (\because \text{式 } (82)) \\
=&S_{\mathrm{M}} + \int \left\{\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial\varphi_A}\delta\varphi_A + \frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial(\partial_\nu\varphi_A)}\delta(\partial_\nu\varphi_A) + \mathcal{L}_{\mathrm{M}}\partial_\nu(\delta x^\nu)\right\}\mathrm{d}^4x, \\
\therefore \delta S_{\mathrm{M}} =& \int \left[\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial\varphi_A}\{\bar{\delta}\varphi_A + (\partial_\nu\varphi_A)\delta x^\nu\} + \frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial(\partial_\nu\varphi_A)}\{\bar{\delta}(\partial_\nu\varphi_A) + (\partial_\mu\partial_\nu\varphi_A)\delta x^\mu\} + \mathcal{L}_{\mathrm{M}}\partial_\nu(\delta x^\nu)\right]\mathrm{d}^4x. \qquad (\because \text{式 } (77))
\end{aligned}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial(\partial_\nu \varphi_A)}\bar{\delta}(\partial_\nu \varphi_A) =& \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial(\partial_\nu \varphi_A)}\partial_\nu(\bar{\delta}\varphi_A) \qquad (\because \text{式 (81)}) \\
=& \partial_\nu\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial(\partial_\nu \varphi_A)}\bar{\delta}\varphi_A\right) - \left(\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial(\partial_\nu \varphi_A)}\right)\bar{\delta}\varphi_A, \\
\mathcal{L}_{\mathrm{M}}\partial_\nu(\delta x^\nu) =& \partial_\nu(\mathcal{L}_{\mathrm{M}}\delta x^\nu) - (\partial_\nu \mathcal{L}_{\mathrm{M}})\delta x^\nu
\end{aligned}
$$

と書き換えると

$$
\begin{aligned}
\delta S_{\mathrm{M}} = \int \Bigg[& \left\{\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial \varphi_A} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial(\partial_\nu \varphi_A)}\right\}\bar{\delta}\varphi_A + \partial_\nu\left\{\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial(\partial_\nu \varphi_A)}\bar{\delta}\varphi_A + \mathcal{L}_{\mathrm{M}}\delta x^\nu\right\} \\
& + \left\{\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial \varphi_A}(\partial_\nu \varphi_A) + \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial(\partial_\mu \varphi_A)}\partial_\nu(\partial_\mu \varphi_A) - \partial_\nu \mathcal{L}_{\mathrm{M}}\right\}\delta x^\nu\Bigg]\mathrm{d}^4 x
\end{aligned}
$$

となる．さらに

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\delta \varphi_A} \equiv& \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial \varphi_A} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial(\partial_\nu \varphi_A)}, \\
\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial(\partial_\nu \varphi_A)}\bar{\delta}\varphi_A + \mathcal{L}_{\mathrm{M}}\delta x^\nu =& \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial(\partial_\nu \varphi_A)}\{\delta\varphi_A - (\partial_\mu \varphi_A)\delta x^\mu\} + \mathcal{L}_{\mathrm{M}}\delta x^\nu \qquad (\because \text{式 (77)}) \\
=& \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial(\partial_\nu \varphi_A)}\delta\varphi_A - E^\nu{}_\mu \delta x^\mu, \\
E^\nu{}_\mu \equiv& \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial(\partial_\nu \varphi_A)}(\partial_\mu \varphi_A) - \mathcal{L}_{\mathrm{M}}\delta^\nu{}_\mu
\end{aligned}
$$

と書き換え，

$$
\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial \varphi_A}(\partial_\nu \varphi_A) + \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial(\partial_\mu \varphi_A)}\partial_\nu(\partial_\mu \varphi_A) - \partial_\nu \mathcal{L}_{\mathrm{M}} = 0
$$

および式 (77) に注意すると，

$$
\delta S_{\mathrm{M}} = \int \left[\frac{\delta \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\delta \varphi_A}\{\delta\varphi_A - (\partial_\mu \varphi_A)\delta x^\mu\} + \partial_\nu\left\{\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial(\partial_\nu \varphi_A)}\delta\varphi_A - E^\nu{}_\mu \delta x^\mu\right\}\right]\mathrm{d}^4 x \tag{83}
$$

を得る [7, pp.66–71]．

4.2.2 場の無限小の受動的な変換

ここで $\delta x^\mu = \xi^\mu(x)$ と改めると，$g_{\mu\nu}, A_\mu$ はそれぞれ 2 階共変テンソル，共変ベクトルの変換則に従い，$\xi^\mu(x)$ の 1 次までの近似で

$$
g_{\mu\nu} \quad \to \quad g_{\mu\nu} - (\partial_\beta \xi^\alpha)(\delta^\beta{}_\mu g_{\alpha\nu} + \delta^\beta{}_\nu g_{\mu\alpha}) \tag{84}
$$

$$
A_\mu \quad \to \quad A_\mu - (\partial_\beta \xi^\alpha)\delta^\beta{}_\mu A_\alpha \tag{85}
$$

と変化する [7, p.93]．実際，

$$
\text{式 (78)} : \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu{}_\nu + \partial_\nu \xi^\mu, \qquad \text{式 (79)} : \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta^\nu{}_\mu - \partial_\mu \xi^\nu
$$

により 2 階共変テンソル $g_{\mu\nu}$，共変ベクトル A_μ の変換則を書き下すと*15，$\xi^\mu(x)$ の 1 次までの近似で

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu} \quad &\to \quad \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}g_{\alpha\beta} = (\delta^\alpha{}_\mu - \partial_\mu\xi^\alpha)(\delta^\beta{}_\nu - \partial_\nu\xi^\beta)g_{\alpha\beta} \simeq g_{\mu\nu} - \{\delta^\beta{}_\nu(\partial_\mu\xi^\alpha) + \delta^\alpha{}_\mu(\partial_\nu\xi^\beta)\}g_{\alpha\beta} \\
&= g_{\mu\nu} - \{(\partial_\mu\xi^\alpha)g_{\alpha\nu} + (\partial_\nu\xi^\beta)g_{\mu\beta}\} = g_{\mu\nu} - \{(\partial_\beta\xi^\alpha)\delta^\beta{}_\mu g_{\alpha\nu} + (\partial_\alpha\xi^\beta)\delta^\alpha{}_\nu g_{\mu\beta}\} \\
&= g_{\mu\nu} - (\partial_\beta\xi^\alpha)(\delta^\beta{}_\mu g_{\alpha\nu} + \delta^\beta{}_\mu g_{\mu\alpha}) : (84), \\
A_\mu \quad &\to \quad \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}A_\nu = (\delta^\nu{}_\mu - \partial_\mu\xi^\nu)A_\nu = A_\mu - (\partial_\mu\xi^\nu)A_\nu = A_\mu - (\partial_\mu\xi^\alpha)A_\alpha \\
&= A_\mu - (\partial_\beta\xi^\alpha)\delta^\beta{}_\mu A_\alpha : (85)
\end{aligned}
$$

となる．そこで計量テンソル $g_{\mu\nu}$ と電磁場 A_μ をまとめて Φ_A と書くと，変換則 (84)，(85) は

$$
\Phi_A \quad \to \quad \Phi_A + \delta\Phi_A, \qquad \delta\Phi_A = (\partial_\nu\xi^\mu)\Phi_\mu{}^\nu{}_{,A} \tag{86}
$$

とまとめられる．

また Dirac 場の変換則は Φ_A の変換則と合わせて物質場の作用 S_M が不変となるように定義されているものとし，$\xi^\mu(x)$ の 1 次までの近似で

$$
\psi_l \quad \to \quad \psi_l + \delta\psi_l, \qquad \delta\psi_l = \xi^\mu\Psi_{\mu,l} + (\partial_\nu\xi^\mu)\Psi_\mu{}^\nu{}_{,l} \tag{87}
$$

の形に書けるものと仮定する．

4.2.3 保存則の導出

場の変換 (86)，(87) に対して物質場の作用 S_M が不変であるとしたことから，δS_M の式 (83) は

$$
\begin{aligned}
0 = \delta S_\mathrm{M} = \int\Bigg[&\frac{\delta\mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta\Phi_A}\{(\partial_\nu\xi^\mu)\Phi_\mu{}^\nu{}_{,A} - (\partial_\mu\Phi_A)\xi^\mu\} + \frac{\delta\mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta\psi_l}\{\xi^\mu\Psi_{\mu,l} + (\partial_\nu\xi^\mu)\Psi_\mu{}^\nu{}_{,l} - (\partial_\mu\Psi_l)\xi^\mu\} \\
&+\partial_\nu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}_\mathrm{M}}{\partial(\partial_\nu\Phi_A)}(\partial_\beta\xi^\alpha)\Phi_\alpha{}^\beta{}_{,A} + \frac{\partial\mathcal{L}_\mathrm{M}}{\partial(\partial_\nu\psi_l)}(\xi^\mu\Psi_{\mu,l} + (\partial_\beta\xi^\alpha)\Psi_\alpha{}^\beta{}_{,l}) - E^\nu{}_\mu\xi^\mu\right\}\Bigg]\mathrm{d}^4x
\end{aligned}
$$

となる．ここで

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta\Phi_A}(\partial_\nu\xi^\mu)\Phi_\mu{}^\nu{}_{,A} &= \partial_\nu\left(\frac{\delta\mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta\Phi_A}\xi^\mu\Phi_\mu{}^\nu{}_{,A}\right) - \xi^\mu\partial_\nu\left(\frac{\delta\mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta\Phi_A}\Phi_\mu{}^\nu{}_{,A}\right), \\
\frac{\delta\mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta\psi_l}(\partial_\nu\xi^\mu)\Psi_\mu{}^\nu{}_{,l} &= \partial_\nu\left(\frac{\delta\mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta\psi_l}\xi^\mu\Psi_\mu{}^\nu{}_{,l}\right) - \xi^\mu\partial_\nu\left(\frac{\delta\mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta\psi_l}\Psi_\mu{}^\nu{}_{,l}\right)
\end{aligned}
$$

---

*15 座標変換に伴い時空に固定した点の座標が

$$
x \equiv (x^0, \cdots, x^3) \quad \to \quad x' \equiv (x'^0, \cdots, x'^3)
$$

と変わるとき，値が

$$
T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} \quad \to \quad T'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}}\frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}}T^{\rho_1\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q}
$$

と変化する量 $T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ として，p 階反変 q 階共変テンソルまたは (p,q) テンソル (の成分) が定義される．

と書き換えると，

$$
\begin{aligned}
\int \Bigg[& -\xi^\mu \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta \Phi_A} \partial_\mu \Phi_A + \frac{\delta \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta \psi_l} \partial_\mu \psi_l + \frac{\delta \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta \psi_l} \Psi_{\mu,l} + \partial_\nu \left(\frac{\delta \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta \Phi_A} \Phi_\mu{}^\nu{}_{,A} + \frac{\delta \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta \psi_l} \Psi_\mu{}^\nu{}_{,l} \right) \right\} \\
& + \partial_\nu \left\{ \left(-E^\nu{}_\mu + \frac{\delta \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta \Phi_A} \Phi_\mu{}^\nu{}_{,A} + \frac{\delta \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta \psi_l} \Psi_\mu{}^\nu{}_{,l} + \frac{\partial \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\partial \psi_l} \Psi_{\mu,l} \right) \xi^\mu \right. \\
& \qquad \left. + \left(\frac{\partial \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\partial \Phi_A} \Phi_\alpha{}^\beta{}_{,A} + \frac{\partial \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\partial \psi_l} \Psi_\alpha{}^\beta{}_{,l} \right) (\partial_\beta \xi^\alpha) \right\} \Bigg] \mathrm{d}^4 x = 0
\end{aligned}
$$

とまとめられる．これは任意の無限小変換に対して，従って任意の $\xi^\mu(x)$ に対して成り立つ．そこで特に作用の積分領域の表面で $\xi^\mu, \partial_\beta \xi^\alpha$ の全成分がゼロになるような $\xi^\mu(x)$ を考えると，上式は $\partial_\nu\{\cdots\}$ の積分が表面積分に変換されて消え，

$$
\int \xi^\mu \{\cdots\} \mathrm{d}^4 x = 0
$$

となる．これが上記の条件を満たす任意の $\xi^\mu(x)$ に対して成り立つことから

$$
\frac{\delta \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta \Phi_A} \partial_\mu \Phi_A + \frac{\delta \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta \psi_l} \partial_\mu \psi_l + \frac{\delta \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta \psi_l} \Psi_{\mu,l} + \partial_\nu \left(\frac{\delta \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta \Phi_A} \Phi_\mu{}^\nu{}_{,A} + \frac{\delta \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta \psi_l} \Psi_\mu{}^\nu{}_{,l} \right) = 0 \tag{88}
$$

を得る [7, pp.83–84]．

ここで

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta g_{\alpha\beta}} \equiv & \frac{1}{2} T_\mathrm{M}{}^{\alpha\beta} : (37), \\
\frac{\delta \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta A_\mu} = & s^\mu \qquad (\because \text{式 } (36)), \\
\frac{\delta \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta \psi_l} = & 0 : \text{Euler-Lagrange 方程式 } (34)
\end{aligned}
$$

および元の座標系は慣性系なので $\partial_\mu g_{\alpha\beta} = 0$ となることに注意すると

$$
\frac{\delta \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta \Phi_A} \partial_\mu \Phi_A + \frac{\delta \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta \psi_l} \partial_\mu \psi_l + \frac{\delta \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta \psi_l} \Psi_{\mu,l} = s^\nu \partial_\mu A_\nu
$$

である．また $\Phi_\mu{}^\nu{}_{,A}$ の具体的な式 (84)，(85) を用いると

$$
\begin{aligned}
\partial_\nu \left(\frac{\delta \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta \Phi_A} \Phi_\mu{}^\nu{}_{,A} \right) = & \partial_\nu \left[\frac{\delta \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta g_{\alpha\beta}} \{ -(\delta^\nu{}_\alpha g_{\mu\rho} + \delta^\nu{}_\rho g_{\mu\alpha}) \} \right] + \partial_\nu \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta A_\lambda} (-\delta^\nu{}_\lambda A_\nu) \right\} \\
= & -2 \partial_\nu \left(\frac{\delta \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta g_{\alpha\nu}} g_{\alpha\mu} \right) - \partial_\nu \left(\frac{\delta \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta A_\nu} A_\mu \right) = -\partial_\nu (T_\mathrm{M}{}^{\alpha\nu} g_{\alpha\mu} + s^\nu A_\mu)
\end{aligned}
$$

となるので，$T_\mathrm{M}{}^{\alpha\nu} g_{\alpha\mu} = T_\mathrm{M}{}^{\nu\alpha} g_{\alpha\mu} = T_\mathrm{M}{}^\nu{}_\mu$ に注意すると式 (88) は

$$
\begin{aligned}
s^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu (T_\mathrm{M}{}^\nu{}_\mu + s^\nu A_\mu) = 0, \qquad \therefore \partial_\nu T_\mathrm{M}{}^\nu{}_\mu = & s^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu (s^\nu A_\mu) \\
= & s^\nu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \qquad (\text{連続の式 } (25) : \partial_\nu s^\nu = 0) \\
= & F_{\mu\nu} s^\nu : (38)
\end{aligned}
$$

を与える [7, pp.93–94]．

4.3　場のエネルギー・運動量保存則から粒子の運動方程式への読み替え

場のエネルギー・運動量保存則 (38) が粒子の運動方程式 (41) に読み替えられることを確かめる．物質場が粒子の集団を成す場合を考え，電流密度を式 (39):

$$
\begin{aligned}
s^\mu(x) &= \sum_i e_i \int \mathrm{d}\tau_i \dot{z}^\mu(i) \delta^4(x - z(i)) \\
&= \sum_i e_i \int \mathrm{d}z^0(i) \frac{\dot{z}^\mu(i)}{\dot{z}^0(i)} \delta^4(x - z(i)) \\
&= \sum_i e_i \frac{\mathrm{d}z^\mu(i)}{\mathrm{d}t} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}(i)) \qquad \left(\because \frac{\dot{z}^\mu(i)}{\dot{z}^0(i)} = \frac{\mathrm{d}z^\mu(i)/\mathrm{d}\tau_i}{\mathrm{d}z^0(i)/\mathrm{d}\tau_i} = \frac{\mathrm{d}z^\mu(i)}{\mathrm{d}t} \right)
\end{aligned}
$$

と書く．ただしあからさまには示していないけれど，最右辺において $z^\mu(i) = z^\mu(\tau_i)$ の引数 τ_i は $x^0 = z^0(\tau_i)$ を満たす値をとるものとする．すなわち $z^\mu(i)$ は座標時間 x^0 での i 番目の粒子の座標となる．最右辺の表式は確かに荷電粒子系の電流密度と見なせる [1, pp.79–82] [12, p.195]．また，粒子の系のエネルギー・運動量テンソルは式 (40):

$$
{T_\mathrm{M}}^\mu{}_\nu(x) = \sum_i m_i \int \dot{z}^\mu(i) \dot{z}_\nu(i) \delta^4(x - z(i)) \mathrm{d}\tau_i
$$

で与えられる．これはエネルギー・運動量テンソルの，粒子に対する項に他ならない [8, pp.107–108]．

このとき場のエネルギー・運動量保存則 (38):

$$
\partial_\nu {T_\mathrm{M}}^\nu{}_\mu = F_{\mu\nu} s^\nu
$$

において

$$
\begin{aligned}
\partial_\nu {T_\mathrm{M}}^\nu{}_\mu =& \partial_\nu \left\{ \sum_i m_i \int \dot{z}^\nu(i) \dot{z}_\mu(i) \delta^4(x - z(i)) \mathrm{d}\tau_i \right\} \\
=& \sum_i m_i \int \dot{z}^\nu(i) \dot{z}_\mu(i) \{\partial_\nu \delta^4(x - z(i))\} \mathrm{d}\tau_i \\
=& -\sum_i m_i \int \dot{z}^\nu(i) \dot{z}_\mu(i) \frac{\partial}{\partial z^\nu(i)} \delta^4(x - z(i)) \mathrm{d}\tau_i \\
=& -\sum_i m_i \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_i} \dot{z}_\mu(i) \delta^4(x - z(i)) \mathrm{d}\tau_i \\
=& \sum_i m_i \int \ddot{z}_\mu(i) \delta^4(x - z(i)) \mathrm{d}\tau_i, \\
F_{\mu\nu} s^\nu =& \sum_i e_i \int F_{\mu\nu}(z(i)) \dot{z}^\nu(i) \delta^4(x - z(i)) \mathrm{d}\tau_i
\end{aligned}
$$

なので，これらを等置して粒子の運動方程式 (41):

$$
m_i \ddot{z}_\mu(i) = e_i F_{\mu\nu}(z(i)) \dot{z}^\nu(i), \qquad \therefore m\ddot{z}^\mu = eF^{\mu\nu} \dot{z}_\nu
$$

を得る．

参考文献

[1] エリ・デ・ランダウ，イェ・エム・リフシッツ，2015，ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 場の古典論 (原書第 6 版)(恒藤敏彦，広重徹訳)，東京図書株式会社，東京.

[2] F. マンドル，G. ショー，2011，場の量子論 第 1 巻 量子電磁力学 (樺沢宇紀訳)，丸善プラネット株式会社，東京.

[3] 杉田勝実ほか，2005，経路積分と量子電磁力学 [POD 版]，森北出版株式会社，東京.

[4] F. マンドル，G. ショー，2013，場の量子論 第 2 巻 素粒子の相互作用 (樺沢宇紀訳)，丸善プラネット株式会社，東京.

[5] 九後汰一郎，2018，新物理学シリーズ 23 ゲージ場の量子論，株式会社培風館.

[6] J.J.Sakurai，2017，現代の量子力学 (上)(桜井明夫訳)，株式会社吉岡書店，京都.

[7] 内山龍雄，1997，一般ゲージ場論序説，株式会社岩波書店，東京.

[8] 内山龍雄，2014，相対性理論 物理テキストシリーズ 8，株式会社岩波書店，東京.

[9] P.A.M. ディラック，2012，一般相対性理論 (江沢洋訳)，株式会社筑摩書房，東京.

[10] エリ・デ・ランダウ，イェ・エム・リフシッツ，2013，ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 力学 (増訂第 3 版)(広重徹，水戸巌訳)，東京図書株式会社，東京.

[11] シュッツ，2010，第 2 版シュッツ 相対論入門 (江里口良治，二間瀬敏史訳)，丸善株式会社，東京.

[12] 砂川重信，2014，電磁気学 物理テキストシリーズ 4，株式会社岩波書店，東京.

[13] パウリ，1980，相対性理論 (内山龍雄訳)，株式会社講談社，東京.

[14] 坂井典佑，2002，裳華房フィジックスライブラリー 場の量子論，裳華房，東京.