【高校数学】

知られざる
受験数学の奥義

なお理論物理の各種ノートを以下のページで公開している．
http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/

目次(1/3)

(主な内容のいくつか)

目次(2/3)
(主な内容のいくつか)

目次(3/3)

(主な内容のいくつか)

多項式

(+3次曲線の対称性)

組み立て除法など

$P(x)$を割った余りから3次式で割った余り

整式$P(x)$を$(x-1)^2$で割ったときの余りが$4x-5$で，
$x+2$で割ったときの余りが-4である.
$P(x)$を$(x-1)^2(x+2)$で割ったときの余りを求めよ.

解1　整式$P(x)$を$(x-1)^2$で割ったときの余りが$4x-5$であるから，
商を$Q_1(x)$とおくと　$P(x)=(x-1)^2Q_1(x)+4x-5.$
$Q_1(x)$を$x+2$で割り，商を$Q(x)$，余りをrとおくと，
$Q_1(x)=(x+2)Q(x)+r.$　これを上の式に代入すると
$P(x)=(x-1)^2(x+2)Q(x)+(x-1)^2r+4x-5.$
ここで，$P(-2)=r(-3)^2-8-5=-4$ より $r=1.$
よって余りは $1\cdot(x-1)^2+4x-5=x^2+2x-4.$

解2　$P(x)$を$(x-1)^2(x+2)$で割ったときの余りを$Q(x)$とする.
余りは2次以下の整式または0であるから，cx^2+dx+eとおける.
$P(x)=(x-1)^2(x+2)Q(x)+cx^2+dx+e.$
$P(x)$を$(x-1)^2$で割った余りが$4x-5$であるから，
$P(x)=(x-1)^2\{(x+2)Q(x)+c\}+4x-5$ と表される.
$P(-2)=(-2-1)^2c+4(-2)-5=-4$ から $9c-13=-4, \therefore c=1.$
余りは$(x-1)^2\cdot 1+4x-5=x^2+2x-4.$

★　PをABで割るとき，PをAで割り，その商をBで割ると良い.
$P=AQ_1+R_1$，　$Q_1=BQ_2+R_2$ とすると，
$P=A(BQ_2+R_2)+R_1=ABQ_1+AR_2+R_1.$

xの整式$f(x)$を$ax+b\ (a \neq 0)$でわったときの商を$q(x)$,
余りをRとするとき，次の各々について，商と余りを求めよ.

(1) $f(x)$を$x+\frac{b}{a}$で割ったとき

(2) $xf(x)$を$ax+b$で割ったとき

(3) $x^2f(x)$を$ax+b$で割ったとき

【着眼】「$A=BQ+R$」の式でRがBで割れれば,
$R=BQ_1+R_1$として，もとの式に代入して
$A=B(Q+Q_1)+R_1$ とする.

【解】

(1) $f(x)=(ax+b)q(x)+R$ より
$f(x)=\left(x+\frac{b}{a}\right)\cdot aq(x)+R$ なので，商$aq(x)$，余りR

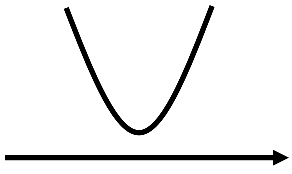
(2) $xf(x)=x(ax+b)q(x)+Rx$
$$=x(ax+b)q(x)+R\left(x+\frac{b}{a}\right)-\frac{b}{a}R$$
$$=(ax+b)\left(xq(x)+\frac{R}{a}\right)-\frac{b}{a}R$$
より商$xq(x)+\frac{R}{a}$，余り$-\frac{b}{a}R$

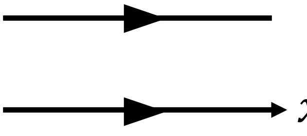
(3) $x^2f(x)=x^2(ax+b)q(x)+Rx^2$
そこでRx^2を$ax+b$で割ると
商$\frac{R}{a}x-\frac{b}{a^2}R$，余り$\frac{b^2}{a^2}R$であるから,
$$x^2f(x)=(ax+b)\left\{x^2q(x)+\frac{R}{a}x-\frac{b}{a^2}R\right\}+\frac{b^2}{a^2}R.$$
よって商$x^2q(x)+\frac{R}{a}x-\frac{b}{a^2}R$，余り$\frac{b^2}{a^2}R$

Pはa, bの多項式，常に$P \geq 0$となるaの範囲，bの範囲

a, bを実数とし，$P = a^4 - 4a^2b + b^2 + 3b$ とおく．
(1) すべての実数bに対して$P \geq 0$となるようなaの値の範囲
(2) すべての実数aに対して$P \geq 0$となるようなbの値の範囲
を求めよ．

(1) すべての実数xに対して$ax^2 + bx + c \geq 0$が成り立つ条件は
$(a > 0$かつ$D = b^2 - 4ac \leq 0)$ または $(a = 0$かつ$b = 0$かつ$c = 0)$





bの2次方程式 $P = b^2 - (4a^2 - 3)b + a^4 = 0$の判別式を$D$とすると，

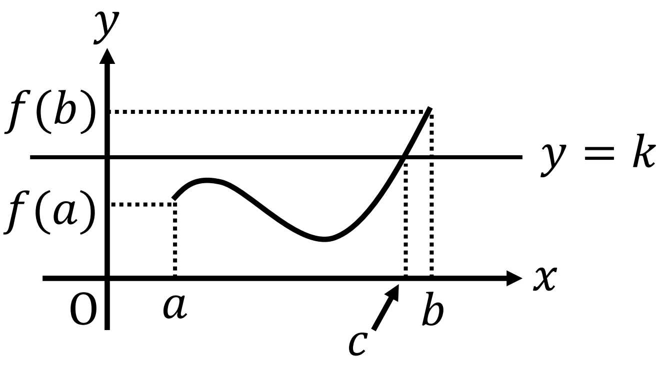
$$D = (4a^2 - 3)^2 - 4a^4 \leq 0$$
$$3(2a^2 - 1)(2a^2 - 3) \leq 0$$
$$\frac{1}{2} \leq a^2 \leq \frac{3}{2}$$
$$\therefore -\frac{\sqrt{6}}{2} \leq a \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(2) $a^2 = x(\geq 0)$とおくと
$P = x^2 - 4bx + b^2 + 3b$
$\quad = (x - 2b)^2 - 3b^2 + 3b \quad (x \geq 0)$
$x \geq 0$におけるPの最小値をmとすると，
求める条件は$m \geq 0$である．
$f(x) = (x - 2b)^2 - 3b^2 + 3b$とすると，
(i) $2b < 0$のとき $m = f(0) = b^2 + 3b \geq 0,\quad \therefore b \leq -3$
(ii) $2b \geq 0$のとき $m = f(2b) = -3b^2 + 3b \geq 0,\quad \therefore 0 \leq b \leq 1$
したがって，$b \leq -3, 0 \leq b \leq 1$

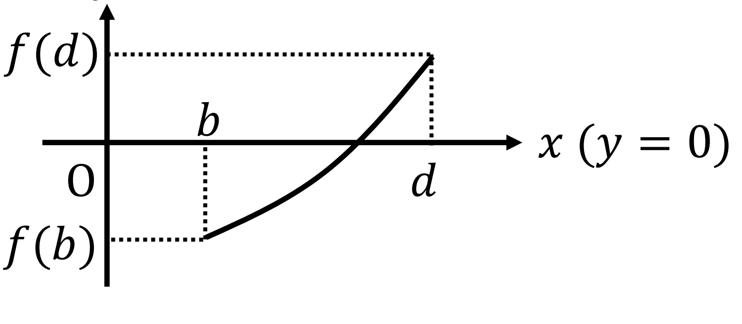
xに関する実係数2次方程式
$(x-a)(x-c)+k(x-b)(x-d)=0$は，$a<b<c<d$となるとき，必ず相異なる実数解をもつことを証明せよ．

中間値の定理

関数$f(x)$が区間$[a,b]$で連続で，$f(a) \neq f(b)$ならば，$f(a)$と$f(b)$の間にある任意の値kに対して
$$f(c)=k, \quad a<c<b$$
を満たすcが少なくとも1つ存在する．



$f(x)=(x-a)(x-c)+k(x-b)(x-d)$とおくと，$f(x)$は連続であり，
$$f(b)=(\underbrace{b-a}_{+})(\underbrace{b-c}_{-}), \quad f(d)=(\underbrace{d-a}_{+})(\underbrace{d-c}_{-}).$$
仮定$a<b<c<d$より$f(b)<0, f(d)>0$となるから，
$f(x)=0$はkの値の如何(いかん)に関わらず
$b<x<d$の間に1つの解を持ち，
また$y=f(x)$は実係数の2次式であるから，
この区間外にもう1つの解を持つことが分かる．



3次曲線の対称性

【要点】3次曲線の対称性は，3次関数を変曲点周りの**テイラー展開**の形に書けば明白である．

n 次の整式 $f(x)$ は

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

と表される。

【証明】$f(x)$ は n 次の整式より

$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n$ （a_i ($i=0, 1, \cdots, n$) は定数）

とおける。

$f'(x)=a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+\cdots+na_n(x-a)^{n-1}$

$f''(x)=2\cdot1a_2+3\cdot2a_3(x-a)+\cdots+n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}$

$f'''(x)=3\cdot2\cdot1a_3+4\cdot3\cdot2a_4(x-a)+\cdots+n(n-1)(n-2)a_n(x-a)^{n-3}$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$f^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1a_n$

これらの式に $x=a$ を代入すると

$f(a)=a_0$，$f'(a)=a_1$，$f''(a)=2!a_2$，$f'''(a)=3!a_3$，……，$f^{(n)}(a)=a_n n!$

が得られる。

これを用いて、n 次の整式 $f(x)$ は

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

と表される。

□

この式から次の３次関数のグラフの対称性が示される。

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ を $(x-p)$ で展開すると

$$f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{f''(p)}{2}(x-p)^2+\frac{f'''(p)}{6}(x-p)^3$$

の形に書き換えられる。

そこで、$f''(p)=0$ となる $p=-\dfrac{b}{3a}$ を選ぶと

$$f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{f'''(p)}{6}(x-p)^3$$ となる。

よって、$y=f(x)$ のグラフは $y=f'(p)x+\dfrac{f'''(p)}{6}x^3$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に $f(p)$ だけ平行移動したものである。

$y=f'(p)x+\dfrac{f'''(p)}{6}x^3$ は奇関数なので原点に関して対称であるから、$y=f(x)$ のグラフは点 $(p, f(p))$ に関して対称である。

4次方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0, p^2s=r^2$ が成り立つ

モニックな4次方程式 $f(x)=x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ において

$$p^2s=r^2$$

なる関係があるとき、$f(x)=0$ は、2次方程式を解くことに帰着することを示せ。

【解】$p^2s=r^2$ という関係を（i） $p=r=0$ （ii） $s=r=0$ （iii） $psr\neq 0$ の場合に分ける。

（i） $f(x)=x^4+qx^2+s=0$ であるから、$x^2=y$ とおくことによって、2次方程式を解くことに帰着する。

（ii） $f(x)=x^2(x^2+px+q)=0$ であるから、$x^2=0$，$x^2+px+q=0$ より、題意の通りである。

（iii） $f(x)=0 \iff p^2f(x)=0$

$p^2s=r^2$ より

$$p^2f(x)=p^2x^4+p^3x^3+p^2qx^2+p^2rx+r^2=0$$

$x\neq 0$ であるから、両辺を x^2 で割ると、次のように表される。

$$\left(px+\frac{r}{x}\right)^2+p^2\left(px+\frac{r}{x}\right)-2pr+p^2q=0$$

そこで、$px+\dfrac{r}{x}=y$ とおけば、この方程式は2次方程式を解くことに帰着する。

例 $x^4-x^3+2x^2-2x+4=0$ を解け。

【解】$x=0$ は方程式の解ではないから $x\neq 0$

与式の両辺を x^2 で割ると

$$x^2-x+2-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}=0 \qquad \text{よって} \qquad \left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-\left(x+\frac{2}{x}\right)+2=0$$

$$\therefore \quad \left(x+\frac{2}{x}\right)^2-\left(x+\frac{2}{x}\right)-2=0$$

$x+\dfrac{2}{x}=y$ とおくと $y^2-y-2=0$ $\therefore$ $y=-1,\ 2$

$x+\dfrac{2}{x}=-1$ より $x^2+x+2=0$ $\therefore$ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

$x+\dfrac{2}{x}=2$ より $x^2-2x+2=0$ $\therefore$ $x=1\pm i$

答 $1\pm i,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

組み立て除法

ax^3+bx^2+cx+d を $x-p$ で割るとき、商を lx^2+mx+n，余りを q とすると

$$ax^3+bx^2+cx+d=(x-p)(lx^2+mx+n)+q$$

右辺を展開すると

$$ax^3+bx^2+cx+d=lx^3+(m-pl)x^2+(n-pm)x+q-pn$$

恒等式より、各項を比べて

$$a=l,\quad b=m-pl,\quad c=n-pm,\quad d=q-pn$$

よって

$$l=a,\quad m=b+pl,\quad n=c+pm,\quad q=d+pn \qquad \cdots\cdots ☆$$

右表のような形式で、☆ の式の順序にしたがって、l，m，n，q の値を記述する。

このような表を作成して、商と余りを求める方法を組み立て除法という。

$$\begin{array}{cccc|l} a & b & c & d & p \\ & pl & pm & pn & \\ \hline l & m & n & q & \end{array}$$

例　$x^3=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ を満たす定数 a，b，c，d を求めよ。

解説

右辺$=((a(x-1)+b)(x-1)+c)(x-1)+d$

より、x^3 を $x-1$ で割った余りが　d

その商を $x-1$ で割った余りが　c

また、その商を $x-1$ で割った余りが　b

で、その商が　a

よって　　$a=1$，$b=3$，$c=3$，$d=1$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & 1 & 2 & & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & & \\ & 1 & & & 1 \\ \hline 1 & 3 & & & \end{array}$$

演習　$x^3=a(x-1)(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-2)+c(x-1)+d$

を満たす定数 a，b，c，d を求めよ。

$\boxed{答}$ $a=1$，$b=6$，$c=7$，$d=1$

n個の1次式を展開

$n\,(>2)$ を自然数とし、$(x+2)(x+2^2)(x+2^3)\cdots(x+2^n)$ を展開して、x の整式にする。

(1) 定数項を求めよ。

(2) x^{n-1} の係数と x^{n-2} の係数を求めよ。

【着眼】 (2) $(a+b+c+d+e)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$

$$+2(ab+ac+ad+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de)$$

から分かるように

(n 個の和の平方)=(n 個の平方の和)+2×(異なる2個を掛け合わせたものの総数の和)

【解】(1) 定数項は n 個の( )内の定数項をすべて掛け合わせたものだから

$$2\cdot2^2\cdot2^3\cdot\cdots\cdot2^n=2^{1+2+3+\cdots+n}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

(2) x^{n-1} の項は、n 個の $(x+2^k)\,(1\leqq k\leqq n)$ のうち、$(n-1)$ 個の x と残り1個の定数項を掛け合わせて得られるから、その係数は

$$2+2^2+2^3+\cdots+2^n=\frac{2(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-2$$

x^{n-2} の係数は $2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^n$ の中から異なる2個を掛け合わせたものの総和だから、その係数を S とすると

$$(2+2^2+2^3+\cdots+2^n)^2=2^2+2^4+2^6+\cdots+2S \quad \text{より}$$

$$2S=(2^{n+1}-2)^2-\frac{2^2(2^{2n}-1)}{2^2-1}$$

よって $\displaystyle S=\frac{2^{2n+2}-3\cdot2^{n+1}+8}{3}$

	2	2^2	2^3	2^4
2	2^{1+1}	2^{1+2}	2^{1+3}	2^{1+4}
2^2	2^{2+1}	2^{2+2}	2^{2+3}	2^{2+4}
2^3	2^{3+1}	2^{3+2}	2^{3+3}	2^{3+4}
4^4	2^{4+1}	2^{4+2}	2^{4+3}	2^{4+4}

不等式

- $A=\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)$のとき$a_1\cdots a_n \leqq A^n$の証明
- 一般の相加・相乗平均の不等式の証明
- シュワルツの不等式 (一般形，積分，ベクトル)

など

不等式が常に成り立つkの条件3

不等式$|\sin x-\sin y|\leq k|x-y|$がすべての$x,y$について成り立つような定数$k$の最小値を求めよ．

【解】

$$|\sin x-\sin y|\leq k|x-y| \qquad \cdots\cdots ①$$

$x=y$のとき①は成り立つから，
$x\neq y$を満たすすべての実数x,yに対して①が成り立つような定数kの最小値を求めればよい．以下$x\neq y$とする．

$$① \quad \Longleftrightarrow \quad \left|\frac{\sin x-\sin y}{x-y}\right|\leq k \qquad \cdots\cdots ②$$

ここで，$y=0$のとき$x\to 0$とすると

$$\left|\frac{\sin x-\sin y}{x-y}\right|=\left|\frac{\sin x}{x}\right|\to 1$$

であるから，②が成り立つためには$k\geq 1$であることが必要である．
逆に$k\geq 1$のとき，$(\sin x)'=\cos x$であるから，平均値の定理より
$\frac{\sin x-\sin y}{x-y}=\cos c$となる$c$が$x$と$y$との間にある．
このとき

$$\left|\frac{\sin x-\sin y}{x-y}\right|=|\cos c|\leq 1\leq k$$

となり，すべての実数x,yに対して②が成り立つ．
以上により，求める最小値は1

平均値の定理 絶対値つき不等式が成り立つkの最小値 (穴埋めなし)

任意の正の数 x, y に対して

$$|e^{-x}-e^{-y}| \leqq k|x-y| \qquad \cdots\cdots ☆$$

が成り立つような定数 k の最小値を求めよ。

【着眼】$k \geqq 1$ のときは ☆ が成り立ち、それ以外の $0<k<1$ の場合は ☆ が成り立たないことを、平均値の定理を用いて示せばよい。

【解】$x=y$ のとき　☆ は成り立つから $x \neq y$ のときを調べればよい。

平均値の定理から、$x \neq y$ のとき

$$|e^{-x}-e^{-y}| = e^{-c}|x-y| \ (x<c<y \text{ または } x>c>y) \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす c が存在する。

x, y が正ならば、$c>0$ となり、e^{-x} は減少関数より　$e^{-c}<e^0=1$

よって　　$e^{-c}<1$

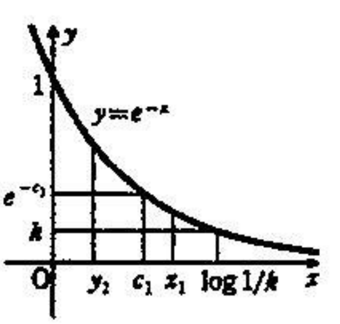
ゆえに、$k \geqq 1$ のときは、$|e^{-x}-e^{-y}|=e^{-c}|x-y|<1\cdot|x-y|$ より任意の x, y に対して ☆ が成り立つ。

次に、$0<k<1$ とすると　$k<e^{-x}<1 \iff \log\dfrac{1}{k}>x>0$

よって、$\log\dfrac{1}{k}>x_1>y_1>0$ を満たす x_1, y_1 をとれば、$x_1>c_1>y_1$ となる c_1 については　$e^{-c_1}>k$　　ゆえに　$|e^{-x_1}-e^{-y_1}|=e^{-c_1}|x_1-y_1|>k|x_1-y_1|$　となり、☆ が成り立たない。

以上により、求める k の最小値は　1

図　$0<k<1$ の場合は、右図を参考にするとよい。



A=1/n(a1+a2+⋯+an)のとき,a1a2⋯an≦A^nの証明

(1) すべての実数 x に対して、不等式 $x \leqq e^{x-1}$ が成り立つことを示せ。

(2) 正の数 x_1, x_2, ……, x_n が $x_1+x_2+ \cdots\cdots +x_n=n$ を満たすとき、

$$x_1x_2 \cdots\cdots x_n \leqq 1$$

が成り立つことを示せ。

(3) 正の数 a_1, a_2, ……, a_n に対して、$A=\dfrac{1}{n}(a_1+a_2+ \cdots\cdots +a_n)$ とするとき、

$$a_1a_2 \cdots\cdots a_n \leqq A^n$$

が成り立つことを示せ。

【証明】(1) $f(x)=e^{x-1}-x$ とおくと　$f'(x)=e^{x-1}-1$

$f'(x)=0$ とすると　$e^{x-1}=1$

よって　$x-1=0$　ゆえに　$x=1$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	…	1	…
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	極小	↗

よって　$f(x) \geqq f(1)=e^0-1=0$

したがって、$x \leqq e^{x-1}$ が成り立つ。

(2) (1)から　$x_1 \leqq e^{x_1-1}$, $x_2 \leqq e^{x_2-1}$, ……, $x_n \leqq e^{x_n-1}$

x_1, x_2, ……, x_n は正の数であるから

$$x_1x_2 \cdots\cdots x_n \leqq e^{x_1-1} \cdot e^{x_2-1} \cdot \cdots\cdots \cdot e^{x_n-1}$$

$$=e^{x_1+x_2+ \cdots\cdots +x_n-n}=e^{n-n}=1$$

したがって、$x_1x_2 \cdots\cdots x_n \leqq 1$ が成り立つ。

(3) $x_k=\dfrac{a_k}{A}$ $(1 \leqq k \leqq n)$ とすると、$x_k>0$ $(1 \leqq k \leqq n)$ で

$$x_1+x_2+ \cdots\cdots +x_n=\frac{1}{A}(a_1+a_2+ \cdots\cdots +a_n)=n$$

よって、(2) の結果から

$$\frac{a_1}{A} \cdot \frac{a_2}{A} \cdot \cdots\cdots \cdot \frac{a_n}{A} \leqq 1$$

したがって、$a_1a_2 \cdots\cdots a_n \leqq A^n$ が成り立つ。

相加・相乗平均の関係の証明 (微分と数学的帰納法2)

k を任意の自然数、b を任意の正の数とする。次の不等式を証明せよ。

(1)　$x>0$ のとき　$\left(\dfrac{b+x}{k+1}\right)^{k+1} \geqq \left(\dfrac{b}{k}\right)^{k} x$　……… ①

(2)　任意の $n(\geqq 2)$ 個の正の数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対して

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^{n} \geqq a_1a_2\cdots a_n \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

【解】(1)　$f(x)=\left(\dfrac{b+x}{k+1}\right)^{k+1}-\left(\dfrac{b}{k}\right)^{k}x$ とおくと、$f'(x)=\left(\dfrac{b+x}{k+1}\right)^{k}-\left(\dfrac{b}{k}\right)^{k}$

$f(x)$ の増減は次の表で与えられる。

x	0	…	$\frac{b}{k}$	…
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	0	↗

表より　$x>0$ のとき　$f(x)\geqq 0$

ゆえに　$\left(\dfrac{b+x}{k+1}\right)^{k+1} \geqq \left(\dfrac{b}{k}\right)^{k} x$

(2)　数学的帰納法で証明する。

［I］$n=2$ のとき、① で $k=1$，$b=a_1$，$x=a_2$ とすれば

$\left(\dfrac{a_1+a_2}{2}\right)^{2} \geqq a_1a_2$ となり ② は成り立つ。

［II］$a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}$ を $k+1$ 個の正の数とし、② で $n=k$ すなわち

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^{k} \geqq a_1a_2\cdots a_k \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

が成り立つと仮定する。

そのとき ① の b に $a_1+a_2+\cdots+a_k$ を、x に a_{k+1} を代入すると

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1} \geqq \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^{k} a_{k+1}$$

ここで、③ を用いると

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1} \geqq a_1a_2\cdots a_k a_{k+1}$$

よって、$n=k+1$ のときも ② が成り立つ。

以上より、n が 2 以上の自然数について、② は成り立つ。

分数不等式の解き方

◇ $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0 \iff f(x)g(x)>0$ 　($f(x)$と$g(x)$が同符号)

◇ $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqq 0 \iff f(x)g(x)\geqq 0,\ g(x)\neq 0$

無理不等式の解き方

無理不等式の代表的な形は、次の３つがあげられる。

◇ $\sqrt{f(x)}<\sqrt{g(x)}$ 　◇ $\sqrt{f(x)}<g(x)$ 　◇ $\sqrt{f(x)}>g(x)$

$\sqrt{f(x)}<\sqrt{g(x)}$ の場合 $\iff \begin{cases} f(x)\geqq 0,\ g(x)\geqq 0 & \text{(両辺の実数条件)} \\ f(x)<g(x) \end{cases}$

$\sqrt{f(x)}<g(x)$ の場合 $\iff \begin{cases} f(x)\geqq 0 & \text{(左辺の実数条件)} \\ g(x)>0 \\ f(x)<\{g(x)\}^2 \end{cases}$

$\sqrt{f(x)}>g(x)$ の場合 $\iff \begin{cases} f(x)\geqq 0 \\ g(x)<0 \end{cases}$ or $\begin{cases} f(x)\geqq 0 \\ g(x)\geqq 0 \\ f(x)>\{g(x)\}^2 \end{cases}$

シュワルツの不等式の証明

次の不等式を証明せよ。

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots\cdots+b_n^2)\geqq(a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots+a_nb_n)^2 \quad \cdots\cdots ☆$$

【証1】 $(a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots\cdots+b_n^2)=0$ のときは $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$

$b_1=b_2=\cdots=b_n=0$ より ☆ の等号成立。

証明すべき不等式を $(a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots\cdots+b_n^2)\ (\neq 0)$ で割ると

$$1\geqq\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}\cdot\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}}+\cdots+\frac{a_n}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}\cdot\frac{b_n}{\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}}\right)^2 \quad \cdots\cdots ①$$

これを証明すればよい。

ここで、$x_k=\dfrac{a_k}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}$, $y_k=\dfrac{b_k}{\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ とおくと

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1,\quad y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=1 \quad \cdots\cdots ②$$

相加・相乗平均の関係の証明でも使える方法(別頁)

また $(x_k\pm y_k)^2\geqq 0$ より $-\dfrac{x_k^2+y_k^2}{2}\leqq x_ky_k\leqq\dfrac{x_k^2+y_k^2}{2}$

$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ のときの和を辺々加えると、② より

$$-1\leqq x_1y_1+x_2y_2+\cdots\cdots+x_ny_n\leqq 1$$

$$\therefore \quad (x_1y_1+x_2y_2+\cdots\cdots+x_ny_n)^2\leqq 1$$

よって、① が示された。

【証2】 $A=\sum_{k=1}^{n}a_k^2$, $B=\sum_{k=1}^{n}b_k^2$, $C=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$ おき、$AB\geqq C^2$ $\cdots\cdots$ ★ を示せばよい。

$A=0$ のとき $a_k=0\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ より、★ で等号が成立。

$A>0$ のとき 任意の t の値に対して $\sum_{k=1}^{n}(a_kt-b_k)^2\geqq 0$ が成り立つ。

$$左辺=\sum_{k=1}^{n}(a_k^2t^2-2a_kb_kt+b_k^2)=At^2-2Ct+B=A\left(t-\frac{C}{A}\right)^2+\frac{AB-C^2}{A}\geqq 0$$

ここで、$t=\dfrac{C}{A}$ とすると $\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cdot\dfrac{C}{A}-b_k\right)^2=\dfrac{AB-C^2}{A}\geqq 0$

$$\therefore \quad AB\geqq C^2$$

特に、$AB=C^2$ のとき $\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cdot\dfrac{C}{A}-b_k\right)^2=0$ より $a_k\cdot\dfrac{C}{A}-b_k=0$ すなわち

$\dfrac{b_k}{a_k}=\dfrac{C}{A}$ が $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ で成り立つから $\dfrac{b_1}{a_1}=\dfrac{b_2}{a_2}=\cdots=\dfrac{b_n}{a_n}$

注 $A>0$ とき、任意の実数 t に対して、$At^2-2Ct+B\geqq 0$ が成り立つから

判別式 $\leqq 0$ より $AB\geqq C^2$ が得られる。

※1 (証1において)

$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\neq 0$のときの

等号成立条件は$x_k+y_k=0$または$x_k-y_k=0$，すなわち

$\frac{b_k}{a_k}=\frac{\sqrt{\sum b_k^2}}{\sqrt{\sum a_k^2}}$…③　または　$\frac{b_k}{a_k}=-\frac{\sqrt{\sum b_k^2}}{\sqrt{\sum a_k^2}}$…④　$(k=1,\cdots,n)$

よって$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\cdots=\frac{b_n}{a_n}$…⑤となる必要がある.

逆に⑤の比をrとおくと,

$r>0$のとき③が，$r<0$のとき④が成り立つので,

⑤が等号成立条件である.

※2

等号成立条件において,

あるkに対して$a_k=0$のとき$b_k=0$より,

$$a_1:b_1=a_2:b_2=\cdots=a_n:b_n$$

※3 (証2末尾「$\frac{b_k}{a_k}=\frac{C}{A}\Rightarrow\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\cdots=\frac{b_n}{a_n}$」について)

逆に$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\cdots=\frac{b_n}{a_n}(=r)$のとき$\frac{C}{A}=r$となり,

$$\frac{b_k}{a_k}=\frac{C}{A}\,(k=1,\cdots,n)$$

シュワルツの不等式

$a<b$ のとき

$$\int_a^b \{f(x)\}^2dx\int_a^b \{g(x)\}^2dx \geqq \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \quad \cdots\cdots ☆$$ が成り立つ。

【証1】任意の実数 t について、$\{tf(x)-g(x)\}^2 \geqq 0$ であるから

$a<b$ のとき、つねに $\int_a^b \{tf(x)-g(x)\}^2dx \geqq 0$ が成り立つ。

t について展開すると

$$t^2\int_a^b \{f(x)\}^2dx-2t\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b \{g(x)\}^2dx \geqq 0 \quad \cdots\cdots ①$$

$f(x)\equiv 0$ のときは明らかに ☆ は等号成立するから、$\int_a^b \{f(x)\}^2dx>0$ の場合を調べればよい。

① がつねに成り立つ条件は、左辺の判別式が 0 以下であるから

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2-\int_a^b \{f(x)\}^2dx\int_a^b \{g(x)\}^2dx \leqq 0$$

$$\therefore \quad \int_a^b \{f(x)\}^2dx\int_a^b \{g(x)\}^2dx \geqq \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2$$

なお、等号は $f(x)\equiv 0$ または $g(x)\equiv 0$ または $g(x)\equiv kf(x)$（k は定数）のとき成立。
(「≡」は「=」を強めた表記で，等号が恒等的に，すなわち任意のxに対して成り立つことを表す．)

【証2】区間 $[a,\ b]$ の任意の x，y に対して、

$$\{f(x)g(y)-g(x)f(y)\}^2 \geqq 0$$

が成り立つ。

x を固定し、$a \leqq y \leqq b$ なる任意の y に対し、

$$\int_a^b \{f(x)g(y)-g(x)f(y)\}^2dy \geqq 0$$

より
$$\int_a^b [\{f(x)\}^2\{g(y)\}^2-2f(x)f(y)g(x)g(y)+\{g(x)\}^2\{f(y)\}^2]dy$$
$$=\{f(x)\}^2\int_a^b \{g(y)\}^2dy-2f(x)g(x)\int_a^b f(y)g(y)dy+\{g(x)\}^2\int_a^b \{f(y)\}^2dy$$
$$=C\{f(x)\}^2-2Bf(x)g(x)+A\{g(x)\}^2 \geqq 0 \quad \cdots\cdots ☆$$

ここに、$A=\int_a^b \{f(x)\}^2dx$，$B=\int_a^b f(x)g(x)dx$，$C=\int_a^b \{g(x)\}^2dx$ とする。

☆ は $a \leqq x \leqq b$ なる任意の実数 x に対して成り立つから

$$\int_a^b [C\{f(x)\}^2-2Bf(x)g(x)+A\{g(x)\}^2]dx=CA-2B^2+AC \geqq 0$$

$$\therefore \quad B^2 \leqq AC$$

シュワルツの不等式

2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqq|\vec{a}||\vec{b}| \quad \cdots\cdots☆$$

が成り立つ。

【証1】[1] $\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のとき、$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $|\vec{a}||\vec{b}|=0$ より $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|=0$

[2] $\vec{a}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき

$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ とすると $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ より $|\cos\theta|\leqq1$ であるから $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqq|\vec{a}||\vec{b}|$

[1], [2] から $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqq|\vec{a}||\vec{b}|$

【証2】どんな実数 t の値に対しても、$|t\vec{a}+\vec{b}|^2\geqq0$ ……① が成り立つ。

$$① \iff |\vec{a}|^2t^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})t+|\vec{b}|^2\geqq0$$

$|\vec{a}|\neq0$ のとき、$|\vec{a}|>0$ より ① が常に成り立つには

$$\frac{D}{4}=(\vec{a}\cdot\vec{b})^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\leqq0$$

$$\iff (\vec{a}\cdot\vec{b})^2\leqq|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \qquad \therefore \quad |\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqq|\vec{a}||\vec{b}|$$

$|\vec{a}|=0$ のとき、$\vec{a}=\vec{0}$ より ☆ の等号が成り立つ。

以上より、$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqq|\vec{a}||\vec{b}|$ が成り立つ。

【証3】 $|h\vec{a}+k\vec{b}|^2\geqq0$

$$\iff h^2|\vec{a}|^2+2hk\vec{a}\cdot\vec{b}+k^2|\vec{b}|^2\geqq0$$

ここで上の式は任意の実数 h, k について成り立つから

$h=|\vec{b}|^2$, $k=-\vec{a}\cdot\vec{b}$ とおくと

$$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^4-2|\vec{b}|^2(\vec{a}\cdot\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2|\vec{b}|^2\geqq0$$

$$\iff |\vec{b}|^2(|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2)\geqq0$$

$|\vec{b}|\neq0$ のとき

$|\vec{b}|>0$ より $|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\geqq0$ $\quad\therefore\quad |\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqq|\vec{a}||\vec{b}|$

$|\vec{b}|=0$ のとき

$\vec{b}=\vec{0}$ より明らかに ☆ は等号が成り立つ。

以上より

$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqq|\vec{a}||\vec{b}|$ が成り立つ。

論理

アリバイの理論など

「pならばq」の否定 etc

背理法は $(p \Longrightarrow q) \equiv \overline{p \wedge \bar{q}}$ を出発点として、考えることができる。 つまり、仮定 p と結論の否定 $\bar{q}$ が同時に成り立つ（仮定の条件の下で結論を否定している）として、矛盾を導き出せば、p かつ$\bar{q}$が起こりえないことになるから、その否定の $\overline{p \wedge \bar{q}}$ が真となり $p \Longrightarrow q$ が真であることが云える訳である。

アリバイの理論

たとえば、「彼が犯人でない」ことを相手に説得するのに、犯行時間に彼が犯行現場にいなかった事実を挙げることがある。

これは以下のように、 背理法と考えることができる。

1. 仮に、彼が犯人であるとする。
2. 彼が犯行時間に犯行現場にいたと同時に犯行現場にいなかったという矛盾が生じる。
3. したがって、彼は犯人ではない。

［注］記号の説明

「$\bar{p}$」……pの否定　「$\Longrightarrow$」……ならば　「$\wedge$」……かつ

命題pは真か偽であるか、すなわちpか$\bar{p}$かである。

したがって、pならばqというときには、qか$\bar{p}$かのいずれかが成り立つことになる。

また、$\bar{p}$かqかのいずれかが成り立つなら、pのときは、$\bar{p}$でないからqが成り立つ。

つまり、pならばqということになる。

このように考えると、$p \Longrightarrow q$ は $\bar{p} \vee q$ と定められる。

真理表

p	q	$\bar{p}$	$\bar{p} \vee q$
○	○	×	○
○	×	×	×
×	○	○	○
×	×	○	○

記号の説明
否定　$\bar{p}$ (pでない)
または　$\vee$
真　○
偽　×

また、次のように考えてもよい。

「pならばq」ということは「pである限りq」ということ。

すなわち、「pでありながらqが成り立たない、ということはない」ということである。

つまり、$p \Longrightarrow q$ は $\overline{p \wedge \bar{q}}$ と同じものとみなすことができる。

これからp, qの真偽と $p \Longrightarrow q$ の真偽との間に次の関係があることが分かる。

真理表

p	q	$\bar{q}$	$p\land\bar{q}$	$\overline{p\land\bar{q}}$
○	○	×	×	○
○	×	○	○	×
×	○	×	×	○
×	×	○	×	○

記号の説明
否定　$\bar{p}$ (pでない)
かつ　$\land$
真　◯
偽　×

［注］
pが偽のときはqの真偽にかかわらず「$p \Longrightarrow q$」は真であることに注意する。
「$p \Longrightarrow q$」の否定は「pであって同時にqでないものが少なくとも1つある」

【解説】命題「三角形の2辺が等しいならば、その三角形は正三角形である」 は偽である、は明らかでしょう。 従って、その否定命は真である。
否定命題は「2辺の等しい三角形で、しかもその三角形は正三角形でないものが少なくとも1つはある」 であり、成り立つ例として、直角二等辺三角形があるから真となる訳である。
もし、これを「$p \Longrightarrow q$」の否定を「$p \Longrightarrow \bar{q}$」とすると、おかしなことが起こる。
今、「三角形の2辺が等しいならば、その三角形は正三角形でない」とすると、
正三角形は2辺が等しいはずだから、正三角形は正三角形ではないとなり、
矛盾を生じてしまう。
従って、「三角形の2辺が等しいならば、その三角形は正三角形である」ことが証明されて、おかしなこととなる。

問
全体集合をUとし、その要素xを含む命題関数$p(x), q(q), r(x)$がある。
いま、「すべてのxについて」を「$\forall x$」，「あるxについて」を「$\exists x$」，
「$p(x)$または$q(x)$」を「$p(x)\lor q(x)$」，「$p(x)$かつ$q(x)$」を「$p(x)\land q(x)$」，
「$p(x)$でない」を「$\overline{p(x)}$」，「ならば」を「$\longrightarrow$」
で表せば、「すべてのxについて、$p(x)$または$q(x)$ならば$r(x)$でない」は
$\forall x\,[p(x)\lor q(x) \longrightarrow \overline{r(x)}]$ となる。
このとき、この命題の否定を記号 $\forall$, $\exists$, $\lor$, $\land$, $\bar{\ }$ のいずれかを用いて表せば

(a)

となる。 また、Uを実数全体の集合とし、$p(x)$ を $x \leq 3$, $q(x)$ を $x > 2$ とするとき、命題(a)は

(b)　(この中には真か偽のいずれかを記入せよ)

である。

同値関係

集合Eの任意の要素 a, b に関係 R があることを $a\mathrm{R}b$ で表すとき、次の３つの法則を同値律という。

Ⅰ　$a\mathrm{R}a$　(反射律)

Ⅱ　$a\mathrm{R}b \Longrightarrow b\mathrm{R}a$　(対称律)

Ⅲ　$a\mathrm{R}b,\ b\mathrm{R}c \Longrightarrow a\mathrm{R}c$　(推移律)

この同値律を満たすような関係を同値関係という。

問題　集合 M の任意の要素 a, b の間に、次の関係があるとき、この関係は上のⅠ, Ⅱ, Ⅲ を満たすかどうか調べよ。

(1) M を自然数の集合として、a は b の約数である。

(2) M を空間の直線の集合として、直線 a は直線 b と共有点をもつ。

(3) M を整数の集合として、$0 \leqq b-a \leqq 1$ である。

(4) M を三角形の集合として、三角形 a は三角形 b と相似である。

【解】

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
1	○	×	○
2	○	○	×
3	○	×	×
4	○	○	○

場合の数

- 重複組合せ ${}_n\mathrm{H}_k$
- **カタラン数**

など

立方体の面の塗分け

立方体の各面に、隣り合った面の色は異なるように、色を塗りたい。ただし、立方体を回転させて一致する塗り方は同じとみなす。

(1) 異なる6色をすべて使って塗る方法は何通りあるか。

(2) 異なる5色をすべて使って塗る方法は何通りあるか。

(3) 異なる4色をすべて使って塗る方法は何通りあるか。

【着眼】(1) 上面の色を固定し、側面は円順列。 (2) 上面の色を固定すると、側面は数珠順列。 (3) 2組の向かい合う2面の色に塗る2色の選び方。

【解】(1) 上面の色を固定すると、底面の色の塗り方は5通り。

そのおのおのに対して、側面の色の塗り方は$(4-1)!$通り。

よって、求める塗り方の総数は　$5\times(4-1)!=30$(通り)

(2) 4つの側面の色は、上面および下面と異なる色でなければならないから、側面の色は4色必要である。よって、上面と下面は同じ色になる。

ゆえに、上面と下面の塗り方は　5通り

そのおのおのに対して、4つの側面の塗り方は、異なる4色のじゅず順列になるから

$\dfrac{(4-1)!}{2}$通り

よって、求める塗り方の総数は　$5\times\dfrac{(4-1)!}{2}=15$ (通り)

(3) 6つの面を4色で塗るには、1組の向かい合う2面を1色で塗り、もう1組の向かい合う2面を別の1色で塗り、最後の2面を残った2色で塗らなくてはならない。

2組の向かい合う面に塗る2色の選び方は　${}_4C_2=6$ (通り)

その2色の塗り方は、立方体を回転させるとどれも一致するから1通りしかない。

最後の2面に塗る2色の塗り方は、色を逆にしても回転すると同じであるから1通りしかない。

よって、求める塗り方の総数は　6通り

さいころ10個の目の積で，奇数であるものの個数

10個のさいころを同時に投げて、出た目すべての積をとる。このようにして得られる数のうち、奇数であるものの個数を求めよ。

【着眼】「$x+y+z=5$, x, y, z は非負な整数」を満たす (x, y, z) の組の個数は、

$${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5$$

解説 $(x, y, z)=(2, 2, 1)$ を ○○|○○|○ のようにしきりを2本入れて表すと、例えば、○||○○○○ は $(1, 0, 4)$ に対応する。しかるに $3+5-1=7$ 個に○を5個入れる組合せとなる。

【解】出た目すべての積が奇数になるためには、出た目は1か3か5でなければならない。

1が x 個、3が y 個、5が z 個出たとき、出た目の積は

$$1^x\cdot3^y\cdot5^z=3^y\cdot5^z$$

これは、y または z が異なると、異なる数になる。

ここで、$x+y+z=10$ であるから、x が異なると y または z が異なる。

よって、積 $1^x\cdot3^y\cdot5^z$ の個数は

$$x+y+z=10,\ 0\leqq x\leqq10,\ 0\leqq y\leqq10,\ 0\leqq z\leqq10$$

の整数解 (x, y, z) の個数に等しい。

その個数は、x, y, z から重複を許して10個取り出す組合せの総数に等しいから

$${}_3H_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$$

分配・組分けの有名問題

n を正の整数とし n 個のボールを3つの箱に分けて入れる問題を考える。ただし、1個のボールも入らない箱があってもよいものとする。次に述べる4つの場合について、それぞれ相異なる入れ方の総数を求めたい。

(1) 1から n まで異なる番号のついた n 個のボールを、A，B，Cと区別された3つの箱に入れる場合、その入れ方は全部で何通りあるか。

(2) 互いに区別のつかない n 個のボールを、A，B，Cと区別された3つの箱に入れる場合、その入れ方は全部で何通りあるか。

(3) 1から n まで異なる番号のついた n 個のボールを、区別のつかない3つの箱に入れる場合、その入れ方は全部で何通りあるか。

【着眼】(1) 重複順列。　(2) 重複組合せ。　(3) 空の箱がいくつあるかで場合に分ける。

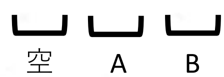
【解】(1) 各ボールをそれぞれ異なる3つの箱に入れる場合が考えられるから、3^n 通り。

(2) A，B，Cにそれぞれ x 個，y 個，z 個入れるとすると $x+y+z=n$

よって、場合の数は $_3H_n={}_{n+2}C_n=\frac{1}{2}(n+2)(n+1)$(通り)

Aが空
Bが空

AとBに入れる



(3) 2つの箱が空(カラ)のとき1通り　1つの箱が空のとき $\frac{2^n-2}{2}$ 通り

A,Bの区別をしない

空の箱がないとき $\frac{3^n-3(2^n-2)-3}{3!}$ 通り

よって　$1+2^{n-1}-1+\frac{1}{2}\times\{3^{n-1}-(2^n-2)-1\}=\frac{3^{n-1}+1}{2}$(通り)

別解(3)　n 個を1つの箱に集中して入れるかどうかで2タイプに分けて数える。
集中させるのが x 通り、そうでないのが y 通りあるとすると、x 通りのそれぞれに、(1)のうちの3通りが対応し、y 通りのそれぞれに、(1)のうちの3!通りが対応するので、(1)の場合の数について、$3x+6y=3^n$ また、明らかに $x=1$ である。

よって、求める場合の数 $x+y$ は　$1+\frac{3^n-3}{6}=\frac{3^{n-1}+1}{2}$ 通り

重複組合せ

${}_3\mathrm{H}_5 \cdots\cdots$ 異なる 3 つのものから重複を許して 5 つとる組合せの総数を表す．

3 種類の数字 1,2,3 から重複を許して 5 個取り出す組合せについて考えてみる．取り出した 5 個の数字を小さい順にならべると，

$$(1,1,1,1,1),\ (1,1,2,2,2),\ (1,2,2,3,3),\ (2,2,3,3,3) \qquad \text{(例 1)}$$

などがある．選んだ 5 つの数字を小さい順に a,b,c,d,e とすると，これは

$$1 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq d \leqq e \leqq 3 \qquad (☆)$$

を満たす．このままでは扱いにくいから，文字間の等号を無くしたい．それには次のことを用いるのが常套手段である．

$$x, y \in \mathbb{Z}\,(\text{整数})\ \text{のとき} \qquad x \leqq y \quad \Leftrightarrow \quad x < y+1$$

(☆) で a,b,c,d の順に逐次この関係を用いて書き換えると

$$1 \leqq a < b+1 < c+2 < d+3 < e+4 \leqq 7$$

「例 1」で述べると

$$\begin{array}{ccc}
(1,1,1,1,1) & \Leftrightarrow & (1,2,3,4,5) \\
(1,1,2,2,2) & \Leftrightarrow & (1,2,4,5,6) \\
(1,2,2,3,3) & \Leftrightarrow & (1,3,4,6,7) \\
(2,2,3,3,3) & \Leftrightarrow & (2,3,5,6,7)
\end{array}$$

結局，(a,b,c,d,e) と $(a, b+1, c+2, d+3, e+4)$ とは 1 対 1 に対応しているから，後の組の数を考えればよい．これは 1 から 7 までの $7(=3+5-1)$ 個の数字から 5 つとった組合せにほかならない．よって，その数は

$${}_3\mathrm{H}_5 = {}_{3+5-1}\mathrm{C}_5 = 21$$

この組合せの個数はまた，○ 5 個と | (棒) 2 本を 1 列に並べる順列の個数に等しいことが，次のようにして分かる．

左の棒より左にある○の個数だけ 1
2 本の棒の間にある○の個数だけ 2
右の棒より右にある○の個数だけ 3

を取り出すことにすれば，求める組合せと 1 対 1 に対応する．

「例 1」で言えば

$$
\begin{array}{lcl}
(1,1,1,1,1) & \Leftrightarrow & \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc \mid \mid \\
(1,1,2,2,2) & \Leftrightarrow & \bigcirc\bigcirc \mid \bigcirc\bigcirc\bigcirc \mid \\
(1,2,2,3,3) & \Leftrightarrow & \bigcirc \mid \bigcirc\bigcirc \mid \bigcirc\bigcirc \\
(2,2,3,3,3) & \Leftrightarrow & \mid \bigcirc\bigcirc \mid \bigcirc\bigcirc\bigcirc
\end{array}
$$

○ 5 個と | (棒) 2 本を 1 列に並べる順列の個数は，7 ヵ所の場所から○の入る 5 ヵ所を選ぶ場合の数　に等しいから，${}_7\mathrm{C}_5$ (| の入る 2 ヵ所ならば ${}_7\mathrm{C}_2$) 通りある．

これはまた，りんご 5 つを 3 人に分配する仕方の数になっていることを示す．「例 1」で，A 君は選んだ 1 の数字の個数だけ，B 君は 2 の数字の個数だけ，C 君は 3 の数字の個数だけりんごを分配すると考えれば良い．

		A 君 「1」の部屋	B 君 「2」の部屋	C 君 「3」の部屋
$(1,1,1,1,1)$	$\Leftrightarrow$	5 コ	0 コ	0 コ
$(1,1,2,2,2)$	$\Leftrightarrow$	2 コ	3 コ	0 コ
$(1,2,2,3,3)$	$\Leftrightarrow$	1 コ	2 コ	2 コ
$(2,2,3,3,3)$	$\Leftrightarrow$	0 コ	2 コ	3 コ

また，3 人に分配されたりんごの個数に着目すると，A,B,C それぞれの分配の個数を x, y, z とすると

$$
\begin{cases} x+y+z=5 \\ x, y, z \text{ は非負な整数} \end{cases} \tag{★}
$$

を満たす．したがって，(x, y, z) の組の数も ${}_3\mathrm{H}_5$ となっていることが分かる．

さらに，1,2,3 の数字をそれぞれ a, b, c と書き換え，選んだ 5 つをすべて掛け合わせると，また「例 1」で言えば，順に $a^5, a^2b^3, ab^2c^2, b^2c^3$ であり，一般的には $a^xb^yc^z$ で x, y, z は (★) を満たしている．結局，$(a+b+c)^5$ を展開して同類項をまとめると，${}_3\mathrm{H}_5$ 種類の項が現れることになる．

p^mで割り切れ,p^(m+1)で割り切れない個数

p を素数、n を0以上の整数とする。

(1) m は整数で $0 \leqq m \leqq n$ とする。1から p^{n+1} までの整数の中で、p^m で割り切れ p^{m+1} で割り切れないものの個数を求めよ。

(2) 1から p^{n+1} までの2つの整数 x, y に対し、その積 xy が p^{n+1} で割り切れるような組 (x, y) の個数を求めよ。

【着眼】(2)「xy が p^{n+1} で割り切れる」$x=p^{n+1}$ の場合と $x \neq p^{n+1}$ の場合で考えるが、後者は(1)の結果を利用する。

【解】(1) 1から p^{n+1} までの整数の中で p^m で割り切れるものは

$1 \cdot p^m, 2 \cdot p^m, \cdots\cdots, p^{n+1-m} \cdot p^m$ の　p^{n+1-m} 個

このうち、p^{m+1} で割り切れるものは　$\underline{p^{n+1-(m+1)}=p^{n-m}}$ (個) mを$m+1$で置き換えた

$1 \cdot p^{m+1}, 2 \cdot p^{m+1}, 3 \cdot p^{m+1}, \cdots, p^{n-m} \cdot p^{m+1}$

よって、求める整数の個数は

$p^{n+1-m}-p^{n-m}=(p-1)p^{n-m}$ (個)

(2) 1から p^{n+1} までの2つの整数 x, y に対して、その積 xy が p^{n+1} で割り切れるのは、次の[1], [2]の場合である。

[1] $x=p^{n+1}$ のとき

y は任意であるから　p^{n+1} 個

[2] $x \neq p^{n+1}$ のとき

$0 \leqq m \leqq n$ の整数 m に対して、x が p^m で割り切れ p^{m+1} で割り切れず、かつ y が p^{n+1-m} で割り切れる。

このような数は m を固定すると、(1)と同様に考えて

$(p-1)p^{n-m} \times p^{n+1-(n+1-m)}=(p-1)p^m$ (個)

ある。

次に、m を $0 \leqq m \leqq n$ で動かすと

$$\sum_{m=0}^{n}(p-1)p^m=(n+1)(p-1)p^n \text{ (個)}$$

[1], [2]は同時には起こらないから、求める組 (x, y) の個数は

$p^{n+1}+(n+1)(p-1)p^n=\{(n+2)p-(n+1)\}p^n$ (個)

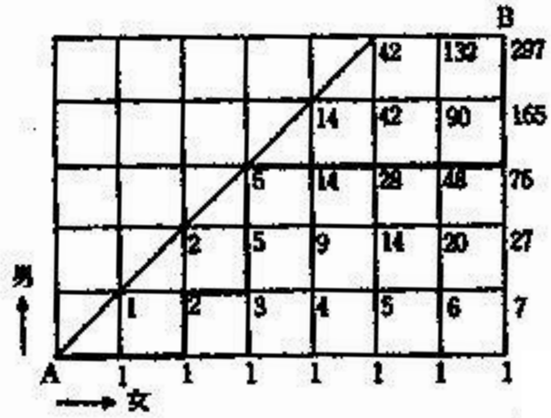
教室に入っても男の数は女の数より多くならない

男５人と女７人が，１人ずつ順に教室に入るのに，教室に入っても男の数が女の数より多くならないようにする。このような順序は幾通りあるか。

【解】右図でＡからＢへの最短路に，例えば太線の通路に

女－女－男－女－男－男－女－女－女－女－男－男

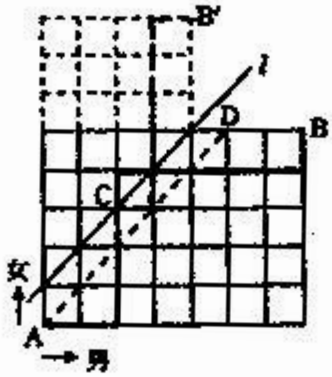
と教室に入る入り方を対応させると，求める方法の数は，ＡからＢへの最短路の本数を求めることある。そこで，Ａから各交差点までの最短経路の本数を書き込んでいくと，求める本数はＢまでの297通り。



これに，男どうしの順番5!と女どうしの順番7!がかかるから，

総計　$297\times5!\times7!=1795625600$ 通り

参考　右図で，ＡからＢへの最短経路の本数は $_{12}C_7$ であるが，このうちで，教室に入る男女の人数の条件に反するものを数える。



例えば，図の太線部分の経路は直線ADの上側を初めて通り過ぎる格子点をＣとして，経路のＣ以降の部分を直線 l に関して折り返して得られる経路は，ＡからB′への最短経路になっている。逆に，ＡからB′への最短経路は l と交わるから，初めて l と交わる所以降を l に関して折り返せば，ＡからＢへの最短経路になっている。

よって，条件に反する数はＡからB′への最短経路の本数 $_{12}C_4$ である。

以上より，条件をみたす経路の本数は

$$_{12}C_7-{}_{12}C_4={}_{12}C_5-{}_{12}C_4=297$$

参考　いま，男の順番で，１番目，２番目，… と入ったとき，すでにいる女の数を $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ とする。

a_i は０から７までの数で，$a_1\leqq a_2\leqq a_3\leqq a_4\leqq a_5$ であるが，問題のようにはいるためには，$a_1\geqq1,\ a_2\geqq2,\ a_3\geqq3,\ a_4\geqq4,\ a_5\geqq5$ でなければならない。

このような $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ の配列がいくつあるか，ということである。

まず，配列のすべての数は０～７の８個の数の中から５個をとる重複組合せの数で

$$_8H_5={}_{12}C_5=792$$

$a_1=0$ の場合　あとが何でも駄目だが，この場合の数は，８個から $a_2,\ \cdots,\ a_4$

の4個を重複してとることで, ${}_8\mathrm{H}_4 = 330$

$a_1=1$ の場合　$a_2=1$ だと駄目で、この場合の数は、7個から3個重複してとる数で、${}_7\mathrm{H}_3=84$

$a_2=2$, $a_3=2$ のとき　$a_1=1$, 2 の二つの場合があるから

$2\times{}_6\mathrm{H}_2=42$

$a_3=3$, $a_4=3$ のとき　a_1a_2 の取り合わせは、12, 13, 22, 23, 33 の5通り

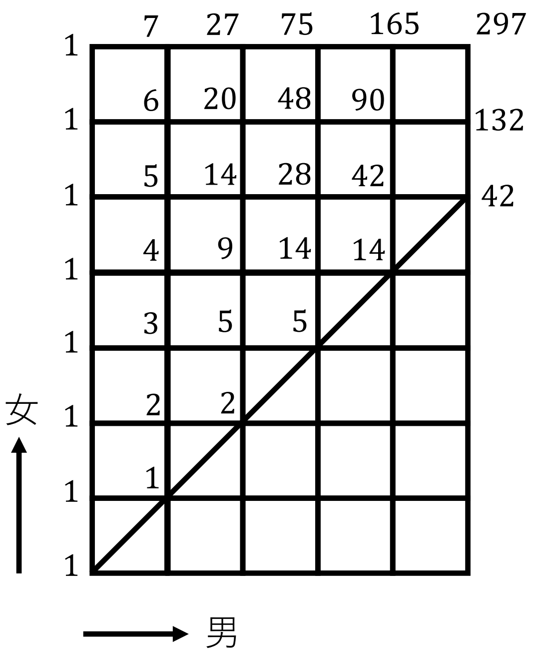
故に　$5\times{}_5\mathrm{H}_1=25$

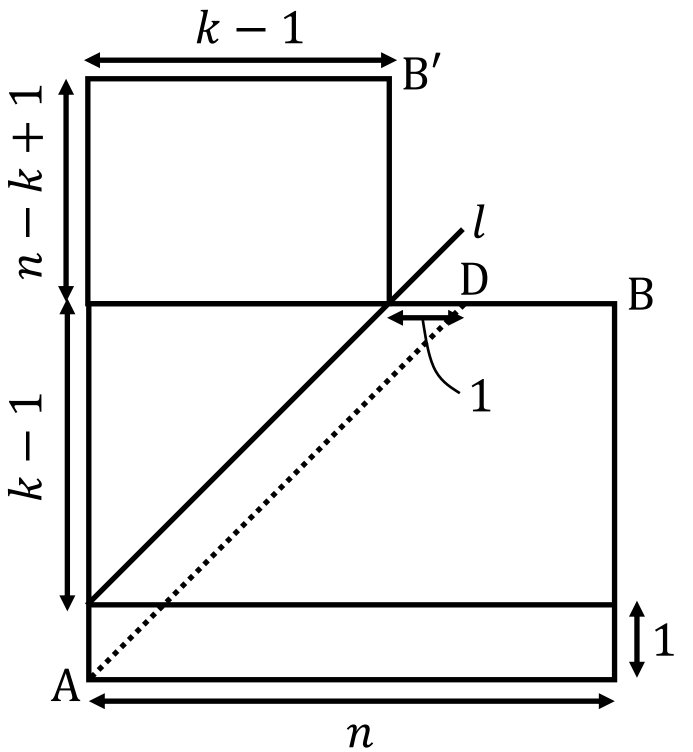
$a_4=4$, $a_5=4$ のとき　$a_1a_2a_3$ の取り合わせは、123, 124, 133, 134, 144, 223, 224, 233, 234, 244, 333, 334, 344, 444 の14通りで、14

故に

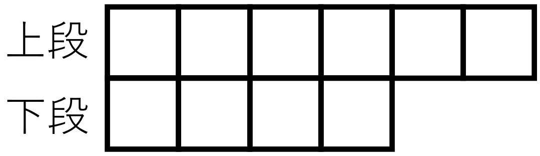
$$792-(330+84+42+25+14)=297$$

(考察) 男を横，女を縦にとると



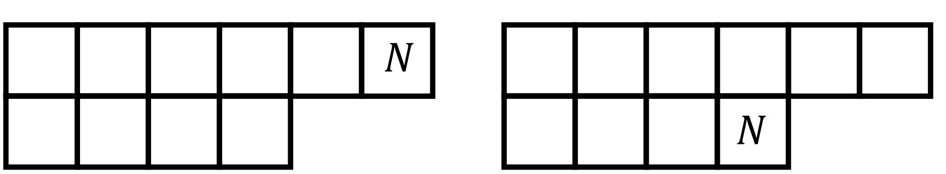


上段にはn個の枠，下段にはk個の枠に数字を並べる



n, kは正の整数$(n \geq k)$で，$N = n + k$とする．
図のように，N個の同じ大きさの空白の枠がある．
上段にはn個の枠があり，下段にはk個の枠がある．
上段と下段の左端はそろっており，格段の枠は隣との間に隙間はない．
図では，$n = 6, k = 4$である．
1からNまでのN個の自然数［の書かれたカード］を
各枠の中に1つずつ，次の2つの条件を満たすように並べる．
(i) 各段においては，枠の中の数は右に行くに従って大きくなる．
(ii) 左からk個の各列においては，下段の数は上段の数よりも大きい．
この2つの条件を満たすように1からNを並べる方法の数を$f(n, k)$とする．
このとき，次が成り立つことを示せ．
(1)　$n > k \geq 2$のとき，$f(n, k) = f(n-1, k) + f(n, k-1)$
(2) $n \geq 2$のとき，$f(n, n) = f(n, n-1)$
(3) $f(n, k) = {}_{n+k}\mathrm{C}_k \frac{n-k+1}{n+1} \cdots\cdots☆$

【証明】(1) 整数$N = n + k$は上段のn番目か下段のk番目の
いずれかにくる．したがって，$n > k \geq 2$のとき
前者の場合，そのカードを除いた$N - 1$枚を上段に$n - 1.$,
下段のkの枠におく置き方と同じだけある．
後者の場合，そのカードを除いた$n - 1$枚を上段にn,
下段に$k - 1$の枠におく置き方と同じだけある．
したがって，$f(n, k) = f(n-1, k) + f(n, k-1)$



(2) 上段，下段ともn枠ある場合，$N=2n$は下段の右端にあるしかない．
したがって$n \geq 2$のとき，それを取り除いて，
上段n枠，下段$n-1$枠にしても並べ方は
変らない． したがって，$f(n,n)=f(n,n-1)$

					N

(3) まず，$f(n,1)$について考える．
上段にn枠，下段に1枠ある場合で，下段に2から$n+1$のいずれかを並べ，
上段は小さい順に並べればよいので$f(n,1)=n$
$k=1$のとき ${}_{n+k}\mathrm{C}_k\frac{n-k+1}{n+1}={}_{n+1}\mathrm{C}_1\frac{n}{n+1}=n$なので，与式☆は成り立つ．
以下，☆が成り立つことを$N=n+k$に関する数学的帰納法で示す．
[Ⅰ] $N=2$すなわち$(n,k)=(1,1)$のときであるが，上で示されている．
[Ⅱ] 2以上の自然数Nに対して☆が成り立つとする．
$n+k=N+1, n>k\geq 2$なる(n,k)に対しては

$$f(n,k)=f(n-1,k)+f(n,k-1)$$
$$=\frac{(n-1+k)!}{k!\,(n-1)!}\cdot\frac{n-k}{n}+\frac{(n-1+k)!}{(k-1)!\,n!}\cdot\frac{n-k+2}{n+1}$$
$$={}_{n+k}\mathrm{C}_k\frac{n-k}{n+k}+{}_{n+k}\mathrm{C}_k\frac{k(n-k+2)}{(n+k)(n+1)}={}_{n+k}\mathrm{C}_k\frac{n-k+1}{n+1}$$

［第4の等号では${}_{n+k}\mathrm{C}_k$をくくり出した］となり， ☆は成り立つ．
$n+n=N+1$なる(n,n)に対しては，(2)より

$$f(n,n)=f(n,n-1)={}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}\frac{2}{n+1}$$
$$=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!\,n!}\cdot\frac{2}{n+1}=\frac{2n\cdot(2n-1)!}{n\cdot(n-1)!\,n!}\cdot\frac{1}{n+1}={}_{2n}\mathrm{C}_n\frac{1}{n+1}$$

となり，☆は成り立つ．
いずれも$N+1$のときも成り立つから，
☆は2以上の自然数Nに対して成り立つ．

(考察)
［Ⅱ］で$n+k=N+1, n>k=1$なる(n,k)を扱わなくて良いのは，
最初に$k=1$のとき☆が成り立つことを示しているからである．

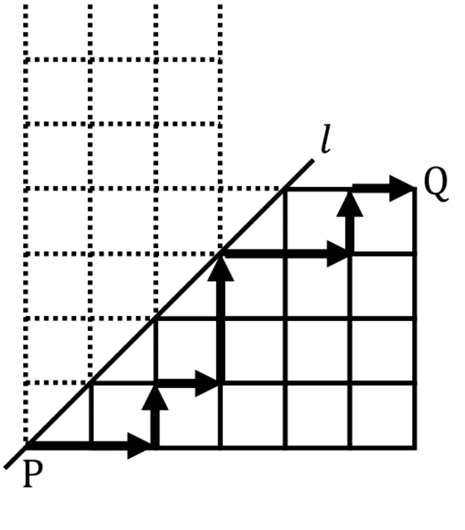
【注】 $f(n,k) = {}_{n+k}\mathrm{C}_k \dfrac{n-k+1}{n+1} = {}_{n+k}\mathrm{C}_k - {}_{n+k}\mathrm{C}_{k-1}$

【参考】$n=6, k=4$のとき
例えば，下図のように数字を配置した場合，1から10までの数字を順番に，
上段であればAを，下段であればBを対応させて，
順列を作るとAABABBAABAとなる.
これはAを6個，Bを4個並べて得られる順列のうち，どのk番目についても，
そこまでに現れるAの個数が常にBも個数より少なくないものである.

1	2	4	7	8	10
3	5	6	9		

逆に，最初のAは左上に1を，以下Aが出れば上段を，Bが出れば下段を
左詰めで書いていき，1から10までの数を入れていくと題意を満たす.
そこでこのような順列の数を求めるのに，下図のようなPからQまで行く
最短経路の道順を考える.
ここで1区画を横に行くことをA，上に行くことをBとすると，直線lより
下半分の経路となり，その方法は［【注】の式より］

$${}_{10}\mathrm{C}_6 - {}_{10}\mathrm{C}_3 = 90\ (\text{通り})$$



［参考］

$$f(n,k) = {}_{n+k}\mathrm{C}_k \frac{n-k+1}{n+1} \tag{★}$$

$N(=n+k)$ についての数学的帰納法にて証明する．

［I］ $N=2$ のとき，$n=k=1$ で，$f(1,1)=1$．

$n=k=1$ のとき，

$${}_{n+k}\mathrm{C}_k \frac{n-k+1}{n+1} = {}_2\mathrm{C}_1 \frac{1-1+1}{1+1} = 1$$

とで，(★) は成立する．

［II］ $N=m+l-1$ のとき (★) が成り立つとすると，(★) より

$$f(m-1,l) = {}_{m-1+l}\mathrm{C}_l \frac{m-l}{m}, \qquad f(m,l-1) = {}_{m+l-1}\mathrm{C}_l \frac{m-l+2}{m+1}.$$

よって，$N=m+l$ のとき

$m>l \geq 2$ の場合

(1) とから

$$\begin{aligned} f(m,l) =& f(m-1,l) + f(m,l-1) & (①) \\ =& {}_{m-1+l}\mathrm{C}_l \frac{m-l}{m} + {}_{m+l-1}\mathrm{C}_l \frac{m-l+2}{m+1} & (②) \\ =& \frac{(m-1+l)!}{l!(m-1)!} \cdot \frac{m-l}{m} + \frac{(m+l-1)!}{(l-1)!m!} \cdot \frac{m-l+2}{m+1} \\ =& {}_{m+l}\mathrm{C}_l \frac{m-l}{m} + {}_{m+l}\mathrm{C}_l \frac{l(m-l+2)}{(m+l)(l+1)} \\ =& {}_{m+l}\mathrm{C}_l \frac{m-l+1}{m+l} \end{aligned}$$

となり，(★) は成り立つ．

$m=l \geq 2$ の場合

(2) より (①) の第 1 項はないが，$m=l$ のとき (②) の第 1 項は 0 になるから，この場合にも成り立つ．また，$l=1$ のときの $f(N-1,1)$ は下段に 2 から N のどれが入るかで $f(N-1,1)=N-1$ であるが，これは (★) で $n=N-1, k=1$ としたものと一致する．

2行5列のます目に数を入れる

右の10個のます目に、1から10の数を、同一の行では右ほど数が大きく、同一の列では上が下よりも数が大きいように入れるとき、入れ方は何通りあるか。

ヒント

Aを5個、Bを5個を並べて得られる順列のうち、どのk($k=1, 2, \cdots, 10$)番目までについても、そこまでに現れるAの個数が常にBの個数より少なくないような順列を考える。最初のAは左下に1を、以下Aが出れば下段を、Bが出れば上段を左詰めで書いていくとよい。

着眼 カタラン数に関する問題。

【解】Aを5個、Bを5個を並べて得られる順列のうち、どのk($k=1, 2, \cdots, 10$)番目までについても、そこまでに現れるAの個数が常にBの個数より少なくないような順列　……☆　を考える。

例えば、AABABBAABBに対し、最初のAは左下に1を、以下Aが出れば下段を、Bが出れば上段を左詰めで書いていき、1から10までの数字を入れていくと、題意を満たす。

3	5	6	9	10
1	2	4	7	8

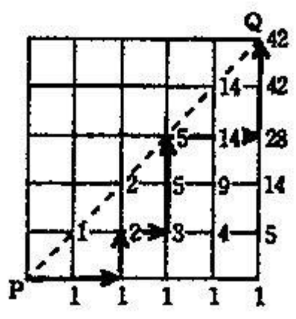
逆に、題意を満たすものに対して1から10までの数字を順番に下段にあればAを、上段にあればBを対応させて、順列を作ると☆を満たす。

よって、☆を満たす順列の数が求めるものである。

そこで、右図のようなPからQまで行く最短経路の道順を考える。ここで、1区間を横に行くことをA，上に行くことをBとする。

例えば、AABABBAABB(図の太い矢線)のように題意を満たす経路は、対角線PQより上半分にはでない経路となり、その方法は図より、42通りある。

よって、答えは42通り。



各点における数字はそこまでの経路の数を表す。

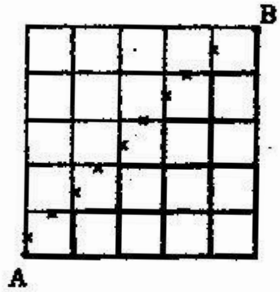
カタラン数1→参考：「2行5列のます目に数を入れる」

図のようにABが対角線である正方形の各辺がnに区切られ、小正方形n^2に分けられている。

AからBへの最短経路のうち対角線ABより上半分には出ない経路の総数をc_nとする。ただし、$c_0=1$とする。このとき、

$$c_n=\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$$

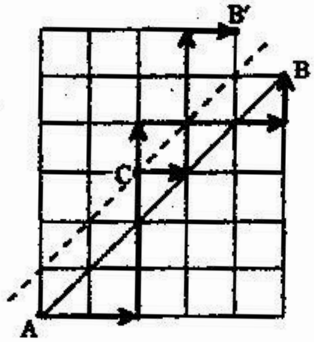
が成り立つことを示せ。



［解］AからBへの最短経路から対角線を越え出る場合を除けばよい。

不適な場合は必ず対角線を越え出るので、最初に対角線を越えて到達した点をCとする。CからABに平行な向きを対称軸として折り返すと、CからBに至る経路が図のCからB′に至る経路となる。

逆に、AからB′に至る経路を最初に上半分の領域に入った点で逆に折り戻すことにより、Bへ一度は対角線を越えてから至る経路となる。

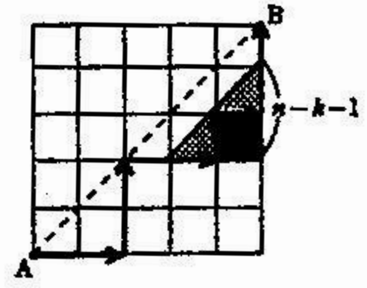


このように、AからBへ対角線を越えて至る経路とAからB′への経路が対応している。したがって、求める経路の数はAからBに至るすべての経路の数から上の経路の数を減ずればよい。すなわち

$$c_n={}_{2n}\mathrm{C}_n-{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}={}_{2n}\mathrm{C}_n-\frac{n}{n+1}{}_{2n}\mathrm{C}_n=\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$$

［参考］対角線AB上の格子点に順に番号を0からnまでつけておく。

すべての経路を、最後に対角線に乗った番号で分類する。対角線AB上第k番$(k=0,1,\cdots,n-1)$までの経路の総数はc_k通りあり、この後の経路は対角線には乗らないからc_{n-k-1}通りある。

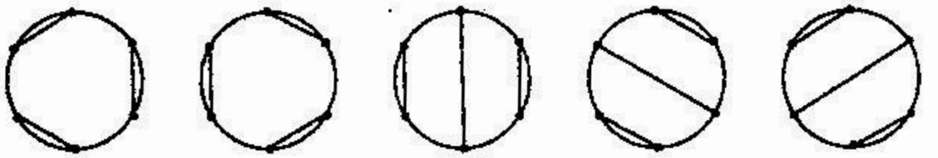


したがって、$k=0,1,\cdots,n-1$の各場合の数を加えることにより

$$c_n=c_0c_{n-1}+c_1c_{n-2}+\cdots+c_{n-1}c_0\quad(c_0=1\text{とする})$$

円周上でn個の弦が交わらない方法の数

円周上に$2n$個の点がある。これらの点を2点ずつ結んで内部で互いに交わらないn個の弦を引くとき、いく通りの違った方法があるか。下図は$n=3$の場合である。



【解】求める方法の数をa_nとする。そして、円周上の点を順にA_1, A_2, $\cdots$, A_{2n}とおく。このとき、2点を結ぶ弦を(A_i, A_j) $(i<j)$のように表すことにし、A_iを始点、A_jを終点とよぶことにする。

さて、題意のようなn本の弦が引けた状態のうちの一つを考える。この状態において、A_1, A_2, $\cdots$, A_{2n}を始点と終点に分け、

A_{i_1}, A_{i_2}, $\cdots$, A_{i_n}を始点、A_{j_1}, A_{j_2}, $\cdots$, A_{j_n}を終点

とする。このとき、この始点と終点の組が題意をみたす(どの弦も互いに交わらない)ための必要十分条件は

「すべてのk $(k=1, 2, \cdots, n)$に対し、A_1から終点A_{j_k}までの点のうちで始点となるものが半分以上である」 ………☆

☆をnについての数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$のとき, A_1が始点、A_2が終点となるので、明らかに成立する。

[2] $n=m$のとき☆が成り立つと仮定し、$n=m+1$のときを考える。

最初の設定より、A_1はつねに始点となる。そこで、A_1から順に見ていき、最初に現れた終点をA_{j_1}とおく。すると、この点を終点とする弦が他の弦と交わらないのであるから、A_{j_1}に対応する始点はA_{j_1}の直前の点、つまりA_{j_1-1}しかあり得ない。すると、弦(A_{j_1-1}, A_{j_1})とこの2点を結ぶ弧によってできる弓形(他の点を含まない方)の内部には他に弦がないから、$2(m+1)$個の点から2個の点A_{j_1-1}, A_{j_1}を除いた残りの点については、それらを結ぶ弦が互いに交わらない。よって、仮定よりこれら$2m$個の点については☆が成り立ち、これに(A_{j_1-1}, A_{j_1})を加えても、始点、終点がこの順に1個ずつ加えられるだけであるから、$n=m+1$のときも☆が成り立つ。

以上より、求める方法の数は点A_1, A_2, $\cdots$, A_{2n}から始点、終点を順に終点の前にある始点の個数が終点の個数よりも少なくないように選ぶ場合の数、すなわちc_n(カタラン数)に他ならないから、

$$c_n=\frac{{}_{2n}C_n}{n+1}$$

☆……「A_1からある終点A_jまで反時計回りにたどったときに現れる始点の数を，終点の数が超えないことが，すべての終点に対して成り立つ」ということ

幾何

- 方べきの定理の代数的表現
- **オイラー線** (変換)
- 七五三の三角形

など

方べきの定理

$f(x, y)=x^2+y^2+ax+by+c$ とし、$f(x, y)=0$ が円周を表すとき、定点 A (x_0, y_0) を通る任意の直線がこの円周と交わる点を P_1, P_2 とすると、有向長 AP_1, AP_2 の積は、直線の方向にかかわりなく一定で $f(x_0, y_0)$ に等しい。

すなわち　・　$AP_1 \cdot AP_2 = f(x_0, y_0)$

ただし、有向長 AP_1, AP_2 とはこの直線上で向きを考えた長さである。

この方べきの定理を証明せよ。

着眼 $A(x_0, y_0)$ を通る割線の方程式を、パラメータ t を用いて

$$x=x_0+lt,\ y=y_0+mt\ (l^2+m^2=1),$$

あるいは、x 軸と角 θ をなす直線上の点 P の座標 (x, y) は

$$x=x_0+t\cos\theta,\ y=y_0+t\sin\theta$$

として、扱うとよい。

単位ベクトル $\vec{n}=(l,m)$
を用い $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{n}$

【証明】$A(x_0, y_0)$ を通る割線の方程式は、

$$x=x_0+lt,\ y=y_0+mt\ \underline{(l^2+m^2=1)} \quad \cdots\cdots ①$$

で表される。ここで、t は有向線分 AP の長さである。

①を $f(x, y)=0$ に代入して、t で整理すると

$$t^2+\{(2x_0+a)l+(2y_0+b)m\}t+f(x_0, y_0)=0$$

この t についての2次方程式が2つの実数解をもつとき、AP_1, AP_2 の長さが解となる。

よって、解と係数の関係から

$$AP_1 \cdot AP_2 = f(x_0, y_0)$$

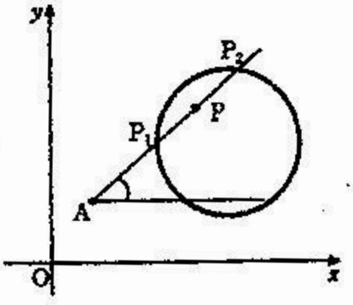
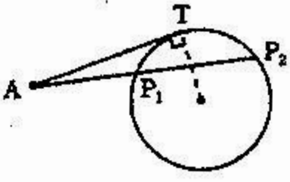


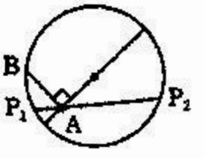
図　$f(x_0, y_0)$ は定数であり、l, m に無関係であるから $AP_1 \cdot AP_2$ は直線の傾きに関係しない。$f(x_0, y_0)$ を点 A のこの円における **方べき** といっている。この方べきの正、負、0 に応じて点 A は、それぞれ円の外部、内部、周上にある。

外部



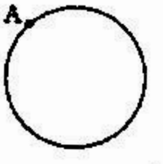
$f(x_0, y_0)=AT^2$

内部



$f(x_0, y_0)=-AB^2$

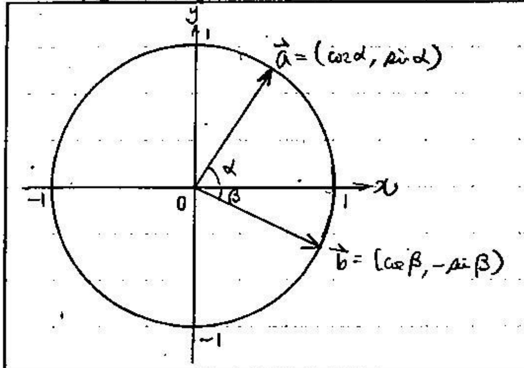
周上



$f(x_0, y_0)=0$

特に、円 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ の定数項 c は、$f(0, 0)=c$ より原点 $(0, 0)$ のこの円における方べきとなっている。

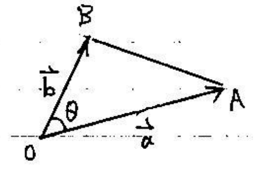
加法定理の簡単な覚え方



左図において

$$\cos(\alpha+\beta) = \vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

この証明は, 一般のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ (右図) に対する内積の幾何学的定義



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta \quad \cdots\cdots ①$$

から, 内積の成分計算の公式 (代数的定義)

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \quad \cdots ②$$

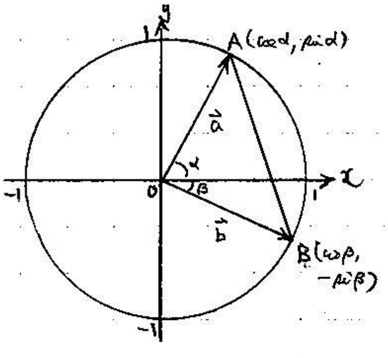
が導かれることに基づいている.

ところで ①⇔② の証明には余弦定理を用いる.

(実際, $\begin{cases} AB^2 = a^2+b^2-2ab\cos\theta & \text{(余弦定理)} \\ AB^2 = (\vec{a}-\vec{b})^2 = \sum_i (a_i-b_i)^2 = a^2+b^2-2\sum_i a_i b_i \end{cases}$

を等置すれば良い.)

このことから期待されるように, 加法定理はもともと余弦定理から証明されたことを思い出そう:



再び左図のように単位ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ をとると,

$$\begin{cases} AB^2 = 2-2\cos(\alpha+\beta) & \text{(余弦定理)} \\ AB^2 = (\vec{a}-\vec{b})^2 = (\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2 \\ \qquad = 2-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta) \end{cases}$$

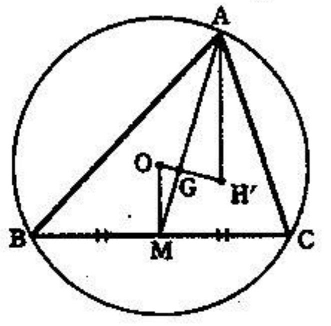
であり, これらを等置して加法定理の式

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

を得る.

オイラー線 (変換)

△ABCの外心O，重心G，垂心Hは、同一直線上にあって、点Gは線分OHを1：2に内分することを証明せよ。



【証明】重心Gを中心に180°回転し、2倍の相似変換を行う変換をfとする。

$\mathrm{O} \xrightarrow{f} \mathrm{H'}$ とすると、O，G，H′はこの順に一直線上にあり　OG：GH′=1：2

また、MG：GA=1：2だから　$\mathrm{M} \xrightarrow{f} \mathrm{A}$

よって　$\mathrm{OM} \xrightarrow{f} \mathrm{H'A}$

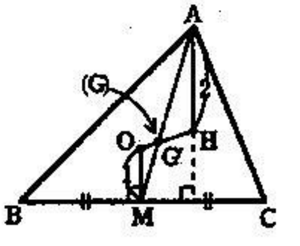
OM∥H′A，OM⊥BC より　H′A⊥BC

同様にして　BH′⊥CA，CH′⊥AB

ゆえに、H′は三角形の垂心である。

よって、HとH′は一致するから、題意の通りである。

参考　外心Oから辺BCに下ろした垂線をOMとするとき、AH=2OMであることを用いると



【証明】図において、直線OHと中線AMとの交点をG′とする。

AH∥OMであるから

AG′：G′M=AH：OM

=2OM：OM

=2：1

AMは中線であるから、G′は△ABCの重心Gと一致する。

よって、外心O，垂心H，重心Gは一直線上にあり

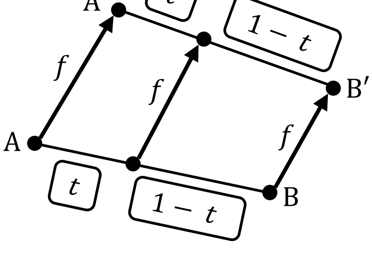
HG：OG=AG：GM=2：1

すなわち　OG：GH=1：2

注　直線OGHを、△ABCのオイラー線という。

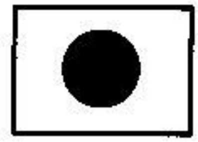
$\mathrm{A} \xrightarrow{f} \mathrm{A'}, \mathrm{B} \xrightarrow{f} \mathrm{B'}$，すなわち $f(\vec{a}) = \vec{a}, f\left(\vec{b}\right) = \vec{b}$ のとき，AB上の任意の点 $\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$ は，A′B′上の点 $f(\vec{p}) = (1-t)f(\vec{a}) + tf\left(\vec{b}\right)$ に移される (fの線形性).

よって $\mathrm{A} \xrightarrow{f} \mathrm{A'}, \mathrm{B} \xrightarrow{f} \mathrm{B'}$ ならば $\mathrm{AB} \xrightarrow{f} \mathrm{A'B'}$



七五三の三角形

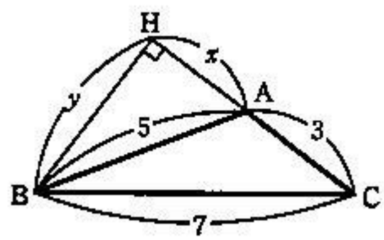
七五三という語呂合わせを用いて、いくつかの数列を覚えるのに使われている。
日本の国旗で慣例的に用いられる縦横比が 7：10，
日章の直径は縦の 5 分の 3 のため、主に戦前の世代
では国旗を自作するにあたってその比率を「七五三」
と覚えたという。



最大角度を 120° とする 5：3 の辺の長さをもつ三角形の残りの辺は 7 となる。
3：4：5 の直角三角形に対し、こちらは「**七五三の三角形**」と呼ばれる。
余弦定理の例題として用いられる。

日本における姓のひとつとして七五三と書いて「しめ」と読む姓がある。
七五三縄「しめなわ」と読むことがあり、実際に注連縄の藁を、七束、五束、三束と垂らす型がある。主に祭事の結界として利用する。

参考　△ABC で AB=5，BC=7，CA=3 のとき、
∠A=120° である。



(理由)　△ABH，△BCH に三平方の定理を適用すると

$$\begin{cases} x^2+y^2=5^2 \\ (x+3)^2+y^2=7^2 \end{cases}$$

解くと　　$x=\dfrac{5}{2}$，$y=\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$

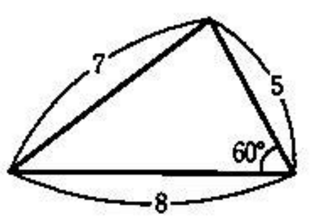
よって、△ABH は 3 辺の比が $2:1:\sqrt{3}$ の直角三角形である。
ゆえに、∠BAH=60° より　　∠BAC=120°

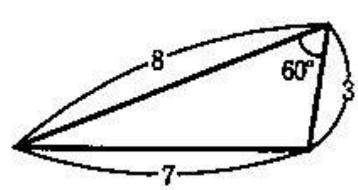
参考　三角形の三辺の長さが整数で、最大角が 120° である例

$$b=\frac{a^2-2a-3}{4},\quad c=\frac{a^2+3}{4}$$ 　ただし、a が 5 以上の奇数

$(a, b, c)=(5, 3, 7), (7, 8, 13), (9, 15, 21), (11, 24, 31), (13, 35, 43), \cdots$

参考　名古屋の三角形　　　　　　名みやの三角形



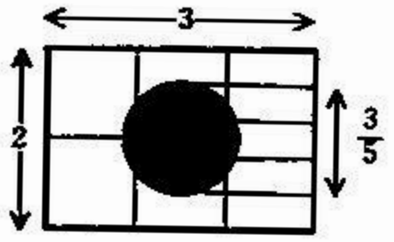


参考　三角形の三辺の長さが整数で、∠C が 60° である例

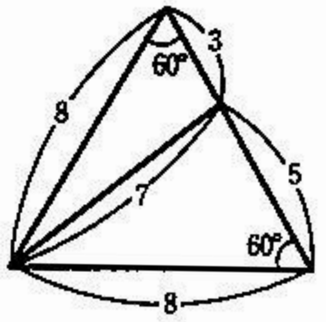
$$b=\frac{a^2+2a-3}{4},\quad c=\frac{a^2+3}{4}$$ 　ただし、a が 5 以上の奇数

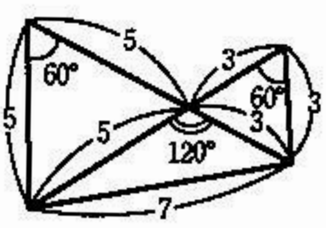
$(a, b, c)=(5, 8, 7), (7, 15, 13), (9, 24, 21), (11, 35, 31), (13, 48, 43), \cdots$

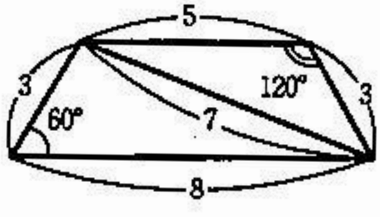
日章旗の制式

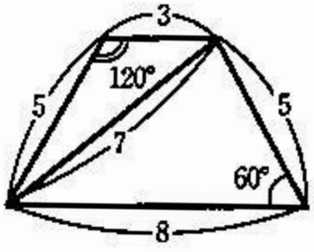


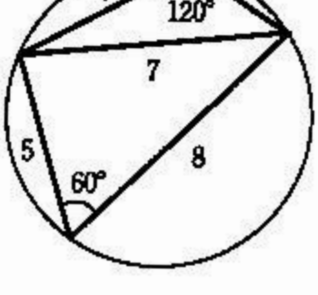
七五三、名古屋、名みゃの組合せ例

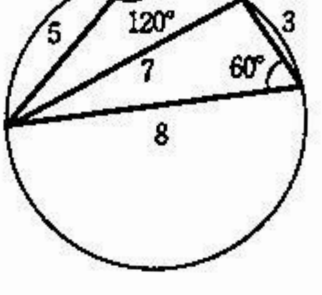












長方形の面積の公式

縦の長さ a，横の長さ b を持つ長方形の面積 S の公式

$$S = ab \tag{1}$$

は次のように説明できる．直観的に言って，長方形の面積が縦と横の辺の長さそれぞれに比例することは認めて良いだろう．すると k を適当な比例係数として

$$S = kab \tag{2}$$

とおける．ここで係数 k の不定性は面積を測る単位のとり方の任意性に対応している．慣例に従い，1 辺が 1 の正方形の面積を単位面積 1 に選べば，上式 (2) に $a = b = 1$ および $S = 1$ を代入することにより $k = 1$ と定まるので，公式 (1) が得られる．

相似比と面積比

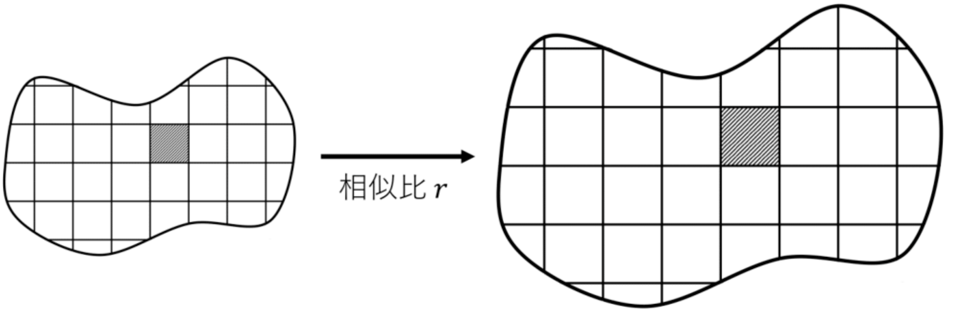
任意の平面図形を相似比 r で拡大すると，面積は r^2 倍になることを説明しよう．

まず，与えられた平面図形の各点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ を $\mathrm{P}'(r\vec{p})$ に移すことにより，この図形は相似比 r で拡大されることに注目する．このとき平面図形に固定された 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a}), \mathrm{B}(\vec{b})$ を結ぶ任意の線要素 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$ もまた

$$(r\vec{b}) - (r\vec{a}) = r\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

に移されるため，r 倍に拡大される．

すると，もとの図形を微小な矩形に分けておけば，その各々は辺が r 倍に拡大されるため，面積は r^2 倍になる．ところが矩形による分割を細かくすれば，図形の面積は矩形の面積の和によって望むだけ高い精度で近似できるから，図形全体の面積も r^2 倍になる (下図参照)．



円の面積の公式

半径 a の面積は

$$S = 2\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx = 2a^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\phi d\phi = \pi a^2 \qquad (x = a\cos\phi)$$

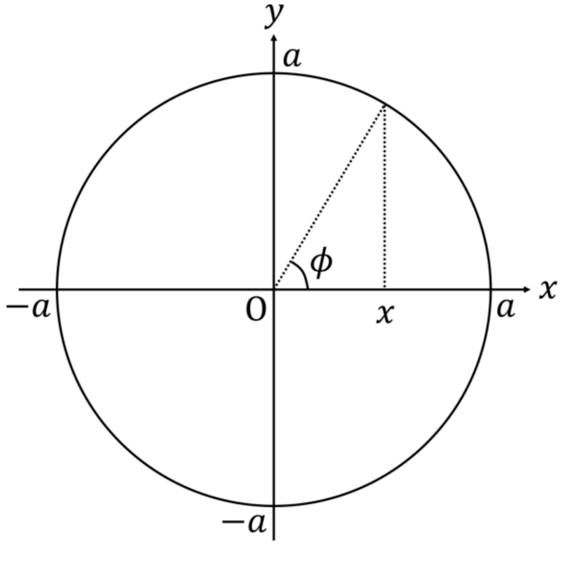
と求められる (左下図)．あるいは，半径 $r, r + dr$ の同心円に囲まれた円環の面積 $2\pi rdr$ を積分して (右下図)，

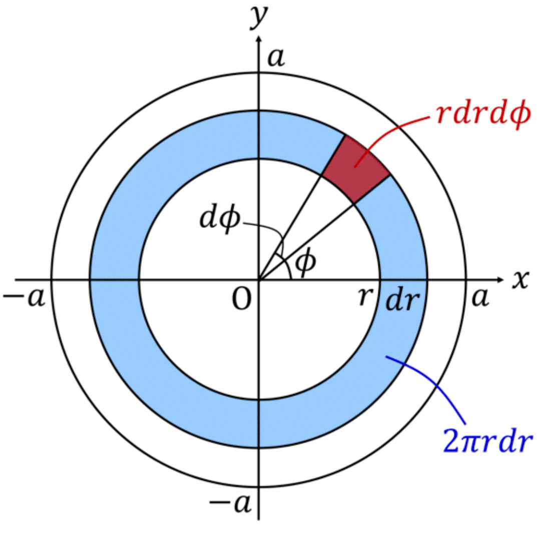
$$S = \int_0^a 2\pi rdr = \pi a^2 \tag{☆}$$

としても良い[*5]．円環上で方位角の幅 $d\phi$ に含まれる微小面積は $rdrd\phi$ なので (右下図)，平面極座標 r, ϕ に関する 2 重積分

$$S = \iint rdrd\phi = \int_0^a rdr\int_0^{2\pi} d\phi$$

から出発することもできる．上式 (☆) は ϕ に関する自明な積分 ($\sim$ 円周の長さ) をあらかじめ実行した結果にあたる．





[*5] すると逆に半径 $r, r + \Delta r$ の 2 円に挟まれた円環の面積は，Δr の 1 次までの近似で

$$\pi\{(r + \Delta r)^2 - r^2\} = 2\pi r\Delta r$$

となる．円環の半径を $2\pi r\mathrm{d}r$ とするのは，直観的には円周 $2\pi r$ を底辺とする高さ $\mathrm{d}r$ の“長方形”の面積の表式として理解できる．

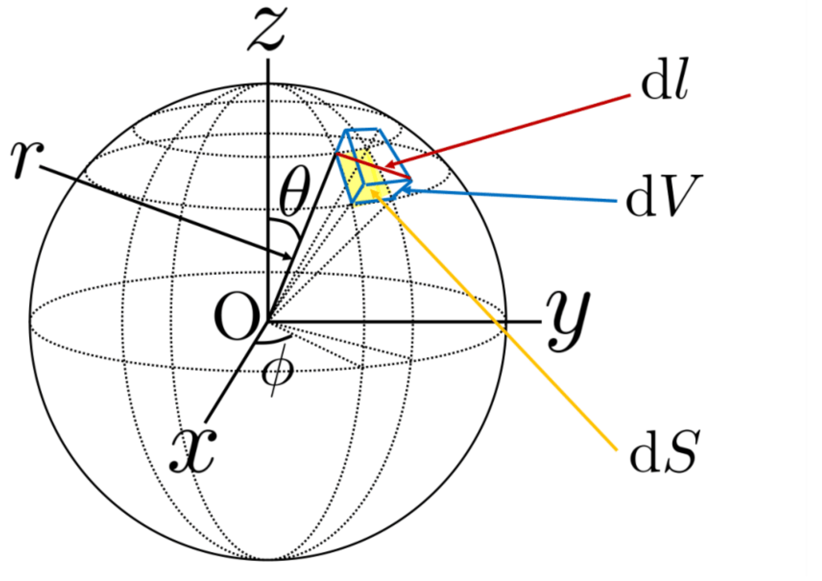
球の表面積と体積の公式

球座標

3 次元空間における位置を指定するのに，球座標 (r, θ, ϕ) を用いることができる (以降，下図を参照)．あらかじめ空間に原点と，基準となる方向として x, y, z 方向を定めておく．その上でまず原点からの距離 r を指定すると，考えている点は原点を中心とする半径 r の球面上にあることになる．地球上の位置を表すのに緯度と経度が用いられるのと同様に，球面上の位置を指定するのに残り 2 つの座標 θ, ϕ を用いる．ただし経度は赤道を 0 度とするのに対し，θ は北極 (z 方向) と位置ベクトルの成す角であり，天頂角と呼ばれる．ϕ は位置ベクトルの xy 平面への正射影が x 軸との成す角であり，方位角と呼ばれる．こちらは緯度に対応する．デカルト座標 (x, y, z) との関係は

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \qquad y = r\sin\theta\sin\phi, \qquad z = r\cos\theta$$

である．



線要素，面積要素，体積要素の表式

図のように，球座標 r, θ, ϕ がそれぞれ $\mathrm{d}r, \mathrm{d}\theta, \mathrm{d}\phi$ 変化して作られる領域を考える．球座標 r, θ, ϕ が増大する 3 方向は互いに直交するから，これは 3 辺が $\mathrm{d}r, r\mathrm{d}\theta, r\sin\theta\mathrm{d}\phi$ の直方体と見なせる．よって図の線要素 $\mathrm{d}l$，面積要素 $\mathrm{d}S$，体積要素 $\mathrm{d}V$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}l^2 &= \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2, \\
\mathrm{d}S &= r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi, \\
\mathrm{d}V &= r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi
\end{aligned}$$

と表される．

球の表面積と体積の公式

以上を利用して半径 r の球の表面積 $S(r)$ と体積 $V(r)$ を求めよう．表面積 $S(r)$ は球面を構成する全ての面積要素 $\mathrm{d}S$ を足し合わせて

$$S(r) = \int \mathrm{d}S = r^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \sin\theta = 4\pi r^2$$

と計算できる[*6]．次いで体積を計算する．半径 r' と $r' + \mathrm{d}r'$ の球面に挟まれた球殻の体積は $S(r')\mathrm{d}r'$ なので，半径 r の球を玉ネギのように多数の球殻に分割すると，球の体積は球を構成する全ての球殻の体積の和として

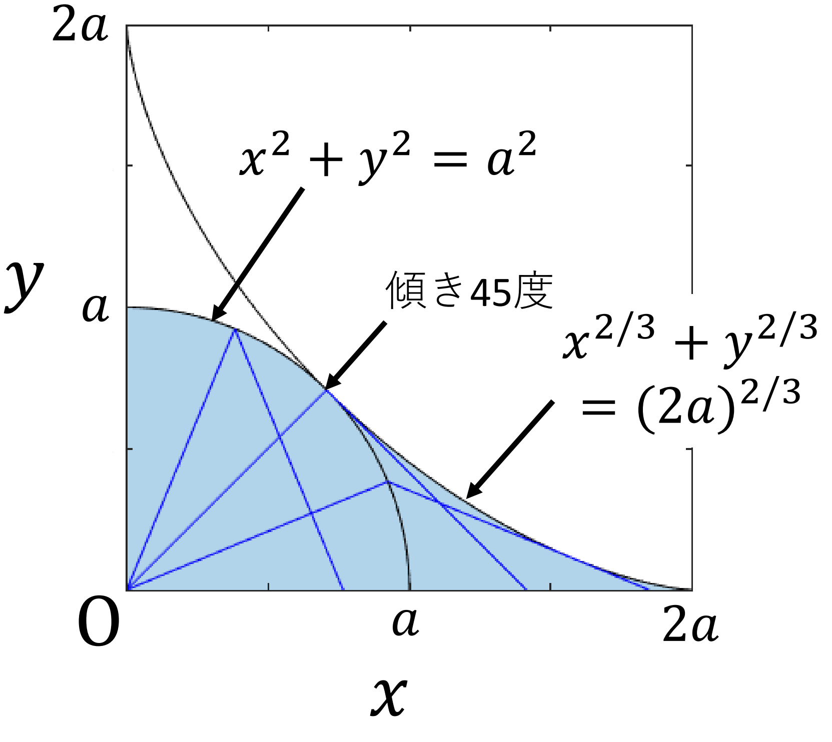
$$V(r) = \int_0^r 4\pi {r'}^2 \mathrm{d}r' = \frac{4}{3}\pi r^3$$

と求まる．

[*6] θ の積分範囲は $0 < \theta < 2\pi$ ではなく $0 < \theta < \pi$ であることに注意する．この範囲では常に $\sin\theta \geq 0$ となる．このことが球座標を $0 \leq \phi < 2\pi, 0 \leq \theta < \pi$ で定義する利点である．

軌跡と領域

ファクシミリ論法など



バスの折り畳みドアが開くときに掃く領域は円の1/8とアステロイドの一部である.

条件(2次対称式)つき2次対称式の値域

実数 x, y は $x^2+xy+y^2=3$ を満たしている。$u=x+y$, $v=xy$ とするとき

(1) v を u の式で表せ。

(2) u のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $x+xy+y$ のとりうる値の範囲を求めよ。

着眼 (1) 対称式は和と積で表される。

(2)「u, v ($=u$ の関数) を解とする2次方程式が実数解をもつ」から、判別式$\geqq 0$ である。

(3) $x+xy+y$ を u の式で表し、(2) を適用する。

【解】(1) 条件 $x^2+xy+y^2=3$ から $(x+y)^2-xy=3$

よって $u^2-v=3$ ゆえに $v=u^2-3$

(2) 条件 $u=x+y$, $v=xy=u^2-3$ から x, y は t の2次方程式 $t^2-ut+(u^2-3)=0$ の2つの解であり，実数でもあるから

判別式 $D=u^2-4(u^2-3)\geqq 0$

これを解いて $u^2-4\leqq 0$ から $-2\leqq u\leqq 2$

(3) $p=x+xy+y=v+u=u^2+u-3=\left(u+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{13}{4}$ $(-2\leqq u\leqq 2)$

p は $u=-\dfrac{1}{2}$ のとき 最小値 $-\dfrac{13}{4}$

$u=2$ のとき 最大値 3

をとる。

u	-2	$\cdots$	$-\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	2
p	-1	↘	$-\dfrac{13}{4}$	↗	3

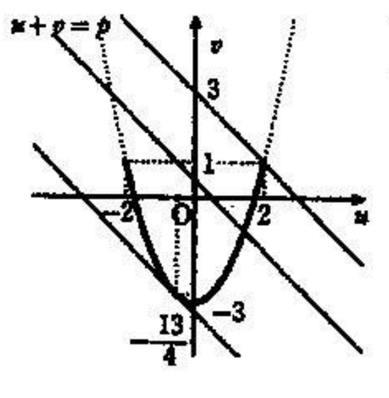
よって $-\dfrac{13}{4}\leqq x+xy+y\leqq 3$

図 uv 平面で、C: $v=u^2-3$ $(-2\leqq u\leqq 2)$ のとき、l_p: $u+v=p$ とおく。

l_p が点 $(2, 1)$ を通るとき $p=3$

l_p が C と接するとき $p=-\dfrac{14}{3}$

p の変域はグラフから $-\dfrac{13}{4}\leqq p\leqq 3$



2乗の和+差=一定のとき2乗の和の変域

x, yが $x^2+xy+y^2=9$ を満たす実数値をとりながら変るとき、x^2+y^2 の最大値と最小値を求めよ。

着眼 $x+y=u$, $xy=v$ とおくと、x, yが実数より $u^2-4v\geqq 0$ であるが、これは必要条件であり、十分ではない。u, vが実数であることに注意する。

あるいは $x+y=X$, $x-y=Y$ とおくと

$$x,\ y\in R \iff X,\ Y\in R \iff X\geqq 0,\ Y\geqq 0$$

【解1】 $x+y=u$, $xy=v$ とおくと、x, y の実数条件より

$(x+y)^2=u^2\geqq 0$, $(x-y)^2=u^2-4v\geqq 0$ ……①

与式 $x^2+xy+y^2=9$ は $u^2-v=9$ ……②

$x^2+y^2=k$ とおくと $u^2-2v=k$ ……③

②, ③ を u^2, v について解くと

$u^2=18-k$, $v=9-k$

①に代入して

$18-k\geqq 0$, $18-k-4(9-k)\geqq 0$

∴ $6\leqq k\leqq 18$

よって 最大値 18 , 最小値 6

【解2】 $x+y=X$, $x-y=Y$ とおくと、$x=\dfrac{X+Y}{2}$, $y=\dfrac{X-Y}{2}$ より

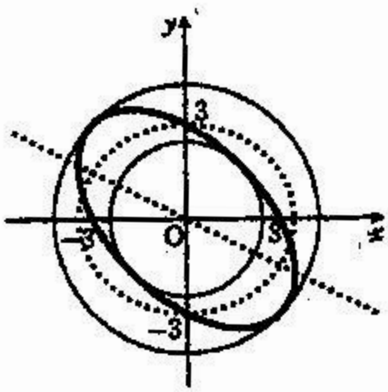
与式 $x^2+xy+y^2=9$ は $3X^2+Y^2=36$ ……①

また、$x^2+y^2=\dfrac{1}{2}(X^2+Y^2)=\dfrac{1}{2}(X^2+36-3X^2)=-X^2+18$ ……②

①から $Y^2=36-3X^2\geqq 0$ より $0\leqq X^2\leqq 12$ よって、②は

$X^2=0$ のとき 最大値 18, $X^2=12$ のとき 最小値 6

参考 $x^2+xy+y^2=9 \iff y=\dfrac{-x\pm\sqrt{3(12-x^2)}}{2}$



よって $y=-\dfrac{x}{2}$, $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{12-x^2}$ を重ね合わせて、曲線 $x^2+xy+y^2=9$ のグラフを得る。

なお、曲線上の点 (x, y) との距離の平方が x^2+y^2 であるから、最大値・最小値が求められる。

2次写像2

x, yが $0<x<1$, $0<y<2$ を満たして動くとき、Q$(x+y,\ xy)$ の動く範囲を図示せよ。

着眼 $X=x+y$, $Y=xy$ とおくと、x, y は方程式 $f(t)=t^2-Xt+Y=0$ の2実解で $0<x<1$, $0<y<2$ を満たす。

【解】求める範囲を W とし、$(X,\ Y)\in W$ とする。

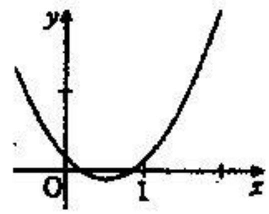
$X=x+y$, $Y=xy$ で $0<x<1$, $0<y<2$ を満たす x, y があることである。

よって、x, y は方程式 $f(t)=t^2-Xt+Y=0$ ………① の2実数解であるから② の解 x, y で $0<x<1$, $0<y<2$ なるものが存在する X, Y の条件を求めればよい。

(1) $0<x<1$, $0<y<1$ の場合

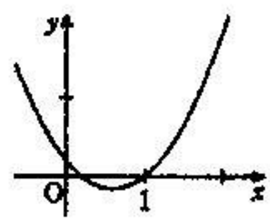
右のグラフから

$$\begin{cases} D=X^2-4Y\geqq 0 \\ 軸：0<\dfrac{X}{2}<1 \\ 境界値：f(0)=Y>0,\ f(1)=1-X+Y>0 \end{cases}$$



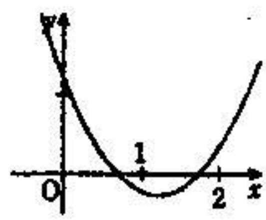
(2) $0<x<1$, $y=1$ の場合

$$\begin{cases} f(1)=1-X+Y=0 \\ 軸：0<\dfrac{X}{2}<1 \\ f(0)=Y>0 \end{cases}$$



(3) $0<x<1$, $1<y<2$ の場合

$$\begin{cases} f(0)=Y>0 \\ f(1)=1-X+Y<0 \\ f(2)=4-2X+Y>0 \end{cases}$$



よって

(1)より $X^2-4Y\geqq 0$, $0<X<2$, $Y>0$, $Y>X-1$

(2)より $Y=X-1$, $0<X<2$, $Y>0$

(3)より $Y>0$, $Y<X-1$, $Y>2X-4$

ファクシミリ論法 (演習)

t が $t\geqq 1$ なる範囲を動くとき、直線 $y=tx-\frac{1}{2}t^2$ の通過領域 D を求め、図示せよ。

着眼 直線 $x=x_0$ (一定) による領域 D の切り口を調べる。

【解】 $\begin{cases} t\geqq 1 & \cdots\cdots ① \\ y=tx-\frac{1}{2}t^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

パラメータ t が①の範囲を動くとき、直線②が通過する領域 D を求めたい。

そこですなわち $x=x_0$ (一定) による領域 D の切り口を調べる。

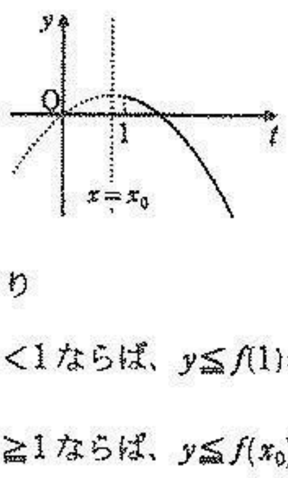
$x=x_0$ (一定) を②に代入して、$y=tx_0-\frac{1}{2}t^2$

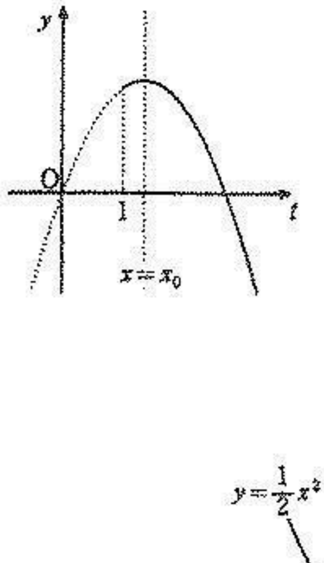
この式は t の2次関数なので、平方を完成して、

$$y=-\frac{1}{2}(t-x_0)^2+\frac{1}{2}{x_0}^2\ (=f(t)\text{ とおく}) \qquad \cdots\cdots ③$$

③を t の変域①に注意して、ty 平面に図示すると、放物線③の軸の x 座標 x_0 の値が変化①内に含まれるか否かによって、次の2つの場合が考えられる。

(i) $x_0<1$ のとき　　　(ii) $x_0\geqq 1$ のとき





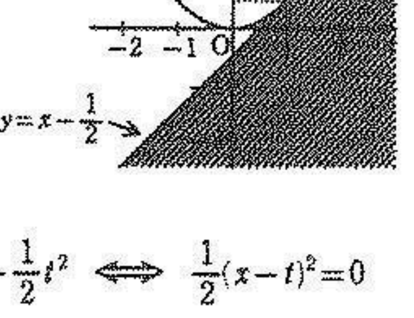
これより

$\begin{cases} x_0<1 \text{ ならば、} y\leqq f(1)=x_0-\frac{1}{2} \\ x_0\geqq 1 \text{ ならば、} y\leqq f(x_0)=\frac{1}{2}{x_0}^2 \end{cases}$

求める領域 D は、x_0 を x で書き換えて、

$x<1$ ならば　$y\leqq x-\frac{1}{2}$; $x\geqq 1$ ならば　$y\leqq \frac{1}{2}x^2$

より、右図の斜線部分で境界を含む。



注 放物線 C: $y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 l: $y=tx-\frac{1}{2}t^2$ は $\frac{1}{2}x^2=tx-\frac{1}{2}t^2 \iff \frac{1}{2}(x-t)^2=0$

より $x=t$ で接する。したがって、t が $t\geqq 1$ の範囲で変化するとき、l が C に $x=t$ で接しながら動くときの l の通過する範囲が求める領域である。

aが変化する放物線$y=ax^2+x+1$の頂点の軌跡など

放物線 $y=ax^2+x+1$ (ただし、$a\neq0$) がある。

(1) この放物線に、a の値とは無関係に常に接する直線の方程式を求めよ。

(2) a が正の値をとりながら動くとき、この放物線の頂点が描く曲線を図示せよ。

着眼 (1) 放物線 $y=ax^2+x+1$ と直線 $y=mx+n$ が接する条件は

方程式 $ax^2+x+1=mx+n$ が重解をもつ。

(2) 頂点の x, y 座標を a で表し、a を消去することにより、x, y の関係式が作られる。

【解】(1) $y=ax^2+x+1$ ……① とする。

放物線①の接線は y 軸に平行でないから、その方程式は

$y=mx+n$ ……②

と表すことができる。

①, ②から y を消去して整理すると $ax^2+(1-m)x+1-n=0$

この2次方程式は重解をもつから、判別式を D とすると

$$D=(1-m)^2-4a(1-n)=0$$

これは a の値とは無関係に常に成り立つから、a についての恒等式である。

よって $(1-m)^2=0$, $-4(1-n)=0$

ゆえに $m=1$, $n=1$

したがって、求める直線の方程式は $y=x+1$

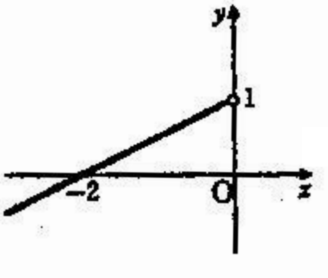
(2) ①から $y=a\left(x+\dfrac{1}{2a}\right)^2+1-\dfrac{1}{4a}$

頂点の座標を $(x,\ y)$ とすると $x=-\dfrac{1}{2a}$, $y=1-\dfrac{1}{4a}$

a を消去して $y=1+\dfrac{1}{2}x$

$a>0$ であるから $x=-\dfrac{1}{2a}<0$

よって、頂点が描く曲線は直線 $y=1+\dfrac{1}{2}x$ の $x<0$ の部分で、右の図のようになる。



2次方程式が0≦x≦1に少なくとも1つの解をもつ

実数 a, b に対し、x についての2次方程式 $x^2-2ax+b=0$ は、$0\leqq x\leqq 1$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつとする。このとき a, b が満たす条件を求め、点 (a, b) の存在範囲を図示せよ。

【解1】 $f(x)=x^2-2ax+b$ とおき、$f(x)=0$ の判別式を D とする。

$f(x)=0$ が $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつことは、次の[1]または[2]が成り立つことである。

[1] $y=f(x)$ のグラフが $0\leqq x\leqq 1$ の範囲で x 軸に接するか、または2点で交わる。

[2] $y=f(x)$ のグラフが $0\leqq x\leqq 1$ の範囲で x 軸に1点だけで交わるか、接するか、または2点 $(0, 0)$, $(1, 0)$ で交わる。

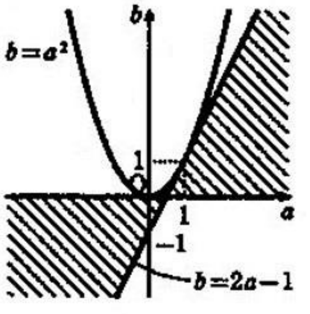
[1]のとき

$0\leqq a\leqq 1$, $\dfrac{D}{4}=a^2-b\geqq 0$, $f(0)=b\geqq 0$,

$f(1)=1-2a+b\geqq 0$

[2]のとき

$f(0)f(1)=b(1-2a+b)\leqq 0$



以上より

$(0\leqq a\leqq 1,\ a^2\geqq b\geqq 2a-1,\ b\geqq 0)$ または $b(1-2a+b)\leqq 0$

これを満たす (a, b) の存在範囲は図の斜線部分である。ただし、境界線を含む。

【解2】 $f(x)=x^2-2ax+b$ とおき、$f(x)=0$ の判別式を D とする。

題意を満たすには、放物線 $y=f(x)$ が x 軸の $0\leqq x\leqq 1$ の範囲と共有点をもてばよい。

軸 $x=a$ で場合分けをして調べる。

(i) $a<0$ のとき

$f(0)=b\leqq 0$ かつ $f(1)=1-2a+b\geqq 0$

(ii) $0\leqq a\leqq 1$ のとき

$D=4(a^2-b)\geqq 0$ かつ ($f(0)=b\geqq 0$ または $f(1)=1-2a+b\geqq 0$)

(iii) $a>1$ のとき

$f(0)=b\geqq 0$ かつ $f(1)=1-2a+b\leqq 0$

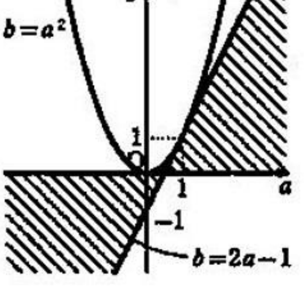
以上をまとめて

$(a<0,\ 2a-1\leqq b\leqq 0)$

または $(0\leqq a\leqq 1,\ 0\leqq b\leqq a^2)$

または $(0\leqq a\leqq 1,\ 2a-1\leqq b\leqq a^2)$

または $(a>1,\ 0\leqq b\leqq 2a-1)$



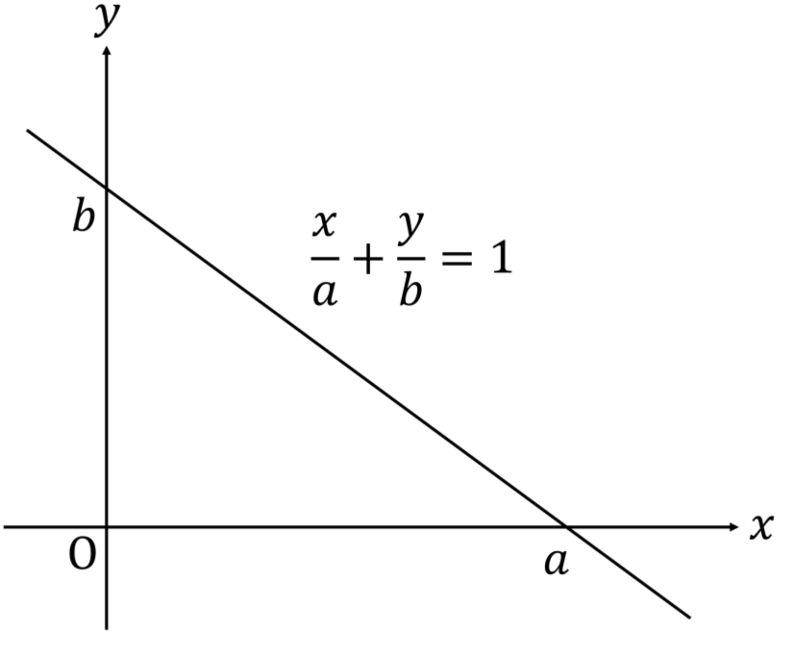
これを満たす (a, b) の存在範囲は図の斜線部分である。ただし、境界線を含む。

図形と方程式

直線の方程式を

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

の形に書けば，x切片とy切片はそれぞれa, bである．

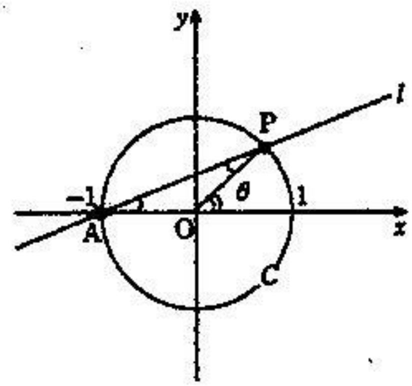


円のパラメータ表示

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ☆$$

解説　円 C: $x^2+y^2=1$ と直線 l: $y=t(x+1)$ との交点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標は、2 式を連立して解くと

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=\frac{2t}{1+t^2}$$



パラメータ表示 ☆ は単位円を表すが、

$x=-1+\dfrac{2}{1+t^2}$ より　$-1<x\leqq 1$

であるから、点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ を除く。

また、三角関数の定義から動径 OP と x 軸とのなす角を θ とすると

$\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標は　$x=\cos\theta,\ y=\sin\theta$

そして、直線 l の傾き t は、$\angle x\mathrm{AP}=\dfrac{\theta}{2}$ より $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ とも書けるから、

$\cos\theta,\ \sin\theta$ を $\tan\dfrac{\theta}{2}$ または t で表すと

$$\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin\theta=\frac{2\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

別　$\cos\theta,\ \sin\theta$ を半角の公式を用いて、上の式を導くと

$$\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\underbrace{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}_{1=}}=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\underbrace{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}_{1=}}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

参考　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{2(1+t^2)-2t\cdot 2t}{(1+t^2)^2}}{\frac{-2t(1+t^2)-(1-t^2)\cdot 2t}{(1+t^2)^2}}=-\dfrac{1-t^2}{2t}$ であるが、

$x^2+y^2=1$ より $2x+2y\dfrac{dy}{dx}=0$ であるから　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}=-\dfrac{1-t^2}{2t}$

反転　原点を通らない直線

$P(x, y)$ に対して、$O(0, 0)$ を端点とする半直線 OP 上に点 P' を

$$\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=1$$

となるようにとる。

直線 $x+y-3=0$ 上を P が動くとき、P' のえがく曲線の方程式を求めよ。

着眼　$P'(x', y')$ とおき、$x=kx'$, $y=ky'$ $(k>0)$ として $\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=1$ に代入し、k を x', y' で表す。

【解】$P'(x', y')$ とおくと、$x=kx'$, $y=ky'$ $(k>0)$ とおけ、$\overline{OP}^2\cdot\overline{OP'}^2=1$ により

$$(k^2x'^2+k^2y'^2)(x'^2+y'^2)=1 \qquad \therefore \quad k=\frac{1}{x'^2+y'^2}$$

したがって　$x=\dfrac{x'}{x'^2+y'^2}$,　$y=\dfrac{y'}{x'^2+y'^2}$

これを $x+y-3=0$ に代入して整理すると

$$x'+y'-3(x'^2+y'^2)=0$$

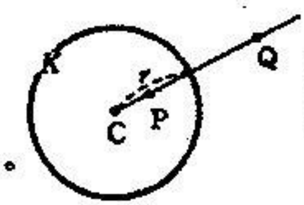
よって、P' のえがく曲線の方程式は　$x^2+y^2-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}y=0$

参考

中心 C で、半径 r の円を K とする。C を通る任意の動径の上に 2 点 P, Q をとって

$$CP\cdot CQ=r^2 \quad (r\text{は一定})$$

となるようにするとき、P に Q を対応させる変換を反転という。



注　点 P が円 $x^2+y^2-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}y=0$ 上を動くとき、点 P' の軌跡は直線 $x+y=1$ である。

反転によって

(i) 原点を通らない直線は　原点を通る円
(ii) 原点を通る円　は　原点を通らない直線
(iii) 原点を通らない円　は　原点を通らない円
(iv) 原点を通る直線　は　原点を通る直線

にそれぞれうつされる。

これらの性質をまとめて、広義の円が広義の円に移るので、円円対応と言われている。
[直線は半径が無限大の円と見なせる]

整数問題

- 合同式
- 剰余類
- ユークリッドの互除法
- $2,3,\cdots,11,13$の倍数の見つけ方
- 除法の原理
- 百五減算
- 差分と整式
- 3次方程式が少なくとも1つの整数解を持つ
- プラーマグプタの恒等式
- ベル方程式
- 階乗に素因数はいくつあるか
- フィボナッチ数列が10の倍数となるときのn
- イデアル
- 互いに素に関する有名定理
- フェルマーの小定理
- 部屋割り論法

など

【余談：鶴亀算】
いわゆる鶴亀算では答の候補が有限個に絞られるため，基本的な戦略としてしらみつぶしが有効である．鶴亀算の標準的な解法も詮ずる所，本質的には変数が整数値をとるという事情に基づいていることになる．もっとも鶴亀算の戦略を，未知数が連続変数である場合へと応用することは可能である．

合同とその性質

整数の合同とは，普通，次のように定義する．k を正の整数とするとき，2 つの整数 a, b の差が k で割り切れるとき, すなわち

$$a - b = mk \qquad (m \in \mathbb{Z} : \text{整数})$$

のとき，a, b は k を法として合同であるといい，

$$a \equiv b \pmod{k}$$

と表す．

たとえば，$11 - 5 = 6$ は 3 の倍数だから，$11 \equiv 5 \pmod{3}$．また，$(-14) - 1 = -15$ は 3 の倍数だから，$-14 \equiv 1 \pmod{3}$．

$a \equiv b \pmod{k}$ のとき，a, b を k で割ったときの余りをそれぞれ r_1, r_2 とすると

$$\begin{aligned} &a = kq_1 + r_1, \qquad b = kq_2 + r_2 \qquad (q_1, q_2 \in \mathbb{Z}), \\ &a - b = k(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2). \end{aligned} \tag{1}$$

$a - b = mk$ とで $r_1 - r_2 = k(m - q_1 + q_2)$．右辺は k の倍数で，左辺の絶対値は k より小さいから

$$r_1 - r_2 = 0, \qquad \therefore r_1 = r_2.$$

逆に $r_1 = r_2$ ならば，式 (1) から $a - b = k(q_1 - q_2)$ となるので，$a \equiv b \pmod{k}$．以上より a と b が k を法として合同であることは，a, b を k で割ったときの余りが等しいことと 同値であることが分かる．

合同は同値律を満たし，したがって同値関係であることはすぐに分かるであろう．

$$\begin{array}{lll} \text{I} & a \equiv a \pmod{k} & (\text{反射律}) \\ \text{II} & a \equiv b \pmod{k} \quad \Rightarrow \quad b \equiv a \pmod{k} & (\text{対称律}) \\ \text{III} & a \equiv b \pmod{k},\ b \equiv c \pmod{k} \quad \Rightarrow \quad a \equiv c \pmod{k} & (\text{推移律}) \end{array}$$

次に，合同と演算の関係について述べる．$c \in \mathbb{Z}$ のとき，

$$\begin{array}{llll} \text{加法} & a \equiv b \pmod{k} & \text{ならば} & a + c \equiv b + c \pmod{k} \\ \text{減法} & a \equiv b \pmod{k} & \text{ならば} & a - c \equiv b - c \pmod{k} \\ \text{乗法} & a \equiv b \pmod{k} & \text{ならば} & ac \equiv bc \pmod{k} \end{array}$$

この演算を用いて，次の演算が導かれる．$a_1 \equiv b_1 \pmod{k}$，$a_2 \equiv b_2 \pmod{k}$ ならば

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &\equiv b_1 + b_2 \pmod{k} \\ a_1 - a_2 &\equiv b_1 - b_2 \pmod{k} \\ a_1 a_2 &\equiv b_1 b_2 \pmod{k} \end{aligned} \tag{☆}$$

さらに，n が正の整数のとき，(☆) の合同式を反復利用すると

$$a \equiv b \pmod{k} \quad \text{ならば} \quad a^n \equiv b^n \pmod{k}$$

そして，このことから $f(x)$ を整数係数の任意の多項式とするとき，

$$a \equiv b \pmod{k} \quad \text{ならば} \quad f(a) \equiv f(b) \pmod{k}$$

(☆) の特別な場合として，次のことが成り立つ．

$$a \equiv 0 \pmod{k} \quad \text{または} \quad b \equiv 0 \pmod{k} \quad \text{ならば} \quad ab \equiv 0 \pmod{k}$$

しかし，この逆は成り立たない．たとえば，$k = 6$ とし，$a = 2, b = 3$ とすると，

$$ab = 2 \cdot 3 = 6 \equiv 0 \pmod{6}$$

であるが，2,3 はともに 6 を法として 0 に合同にはならない．この例に示すように，

$$a \not\equiv 0 \pmod{k}, \quad b \not\equiv 0 \pmod{k} \quad \text{であっても，} \quad ab \equiv 0 \pmod{k} \quad \text{になることがある．}$$

また，等式で扱った移項の原理が合同式でも成り立つ．

$$a + c \equiv b \pmod{k} \quad \text{ならば} \quad a \equiv b - c \pmod{k}$$
$$a - c \equiv b \pmod{k} \quad \text{ならば} \quad a \equiv b + c \pmod{k}$$

等式では両辺を 0 でない数で割ることができたが，合同の式の場合は一般にはできない．すなわち

$$ac \equiv bc \pmod{k} \quad \text{ならば} \quad a \equiv b \pmod{k}$$

は，［たとえ $c \neq 0$ であっても］一般には正しくない，たとえば，$25 \times 3 - 11 \times 3 = 7 \times 6$ であるから

$$25 \times 3 \equiv 11 \times 3 \qquad \pmod{6}$$

は正しいが，両辺を 3 で割った $25 \equiv 11 \pmod{6}$ は正しくない．ところが，mod 6 の 3 で割った mod 2 では，$25 \equiv 11 \pmod{2}$ は正しい．これは一般化できて

【定理 1】

$$a \equiv b \pmod{k} \quad \Leftrightarrow \quad ac \equiv bc \pmod{kc}.$$

証明)　$a \equiv b \pmod{k}$ ならば，

$$a - b = mk \ (m \in \mathbb{Z}) \qquad \therefore (a - b)c = m \cdot kc \ (m \in \mathbb{Z}), \qquad \therefore ac \equiv bc \pmod{kc}$$

以上の推論は逆も成り立つ．

さらに，一般化すると

【定理 2】　$ac \equiv bc \pmod{k}$ で，c と k は互いに素ならば $a \equiv b \pmod{k}$.

証明)　仮定から

$$ac - bc = (a-b)c = mk \quad (m \in \mathbb{Z})$$

よって，mk は c で割り切れる．ところが c と k は互いに素だから，m は c で割り切れる．
そこで，$m = m'c$ とおくと

$$(a-b)c = m'ck, \qquad \therefore (a-b) = m'k\ (m' \in \mathbb{Z}), \qquad \therefore a \equiv b \pmod{k}$$

さらに c と k が互いに素でない場合は，

【定理 3】　$ac \equiv bc \pmod{k}$ で，c, k の最大公約数を g とすれば

$$a \equiv b \quad \left(\mathrm{mod}\, \frac{k}{g}\right)$$

証明)　c, k を g で割ったときの商を，それぞれ c', k' とすると，

$$c = c'g, \qquad k = k'g \qquad (c' \text{と } k' \text{は互いに素})$$

$ac \equiv bc \pmod{k}$ に代入すると

$$ac'g \equiv bc'g \qquad (\mathrm{mod}\ k'g)$$

定理 1 より

$$ac' \equiv bc' \qquad (\mathrm{mod}\, k')$$

ここで c', k' は互いに素だから，定理 2 によって

$$a \equiv b \quad \left(\mathrm{mod}\, \frac{k}{g}\right)$$

剰余類

整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ で表すことにする．$\mathbb{Z}$ の任意の要素 a は n で割って商を q とすると

$$a = nq + r, \qquad 0 \leq r \leq n-1$$

という形に表すことができる．ここで a を $\mathbb{Z}$ のすべての整数にわたって動かすと，それに応じて剰余 r の値もいろいろ変わるが，r のとりうる値は $0, 1, 2, \cdots, n-1$ という n 個の数のいずれかである．

そこで，$\mathbb{Z}$ を次のように分類してみる．いま，r を 0 から $n-1$ までの剰余のいずれかとして，$\mathbb{Z}$ の中で，n で割ったときに剰余 r をもつような数 a の全体を C_r で表すことにすると，$\mathbb{Z}$ は n 個の「類」(class)

$$C_0,\ C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_{n-1}$$

に「分類」されたことになる．

このことは，

$$r \neq s \quad \Rightarrow \quad C_r \cap C_s = \phi$$

であって，

$$\mathbb{Z} = C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_{n-1}$$

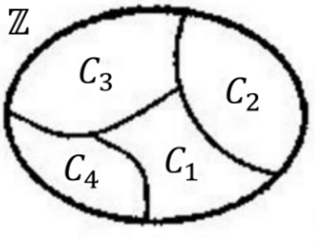
であることを意味する．

これを特に，「正の整数 n を法とする類別」といい，その場合の各類

$$C_0,\ C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_{n-1}$$

を「n を法とする剰余類」という．

たとえば，$n=4$ とすると，すべての整数 a は q を整数として，$a = 4q + r,\ r = 0, 1, 2, 3$ のように表されるから，4 を法とする剰余類は C_0, C_1, C_2, C_3 の 4 個からなる．



4 を法とする剰余類の全体 $R_4 = \{C_0, C_1, C_2, C_3\}$ を考える．

いま，この中から任意の 2 つの剰余類，例えば，C_1, C_3 をとり，さらに C_1 から任意の 2 要素 a_1, a_2，C_3 からも任意の 2 要素 b_1, b_2 をとってみる．

そのとき

$$a_1 \equiv a_2 \pmod 4, \qquad b_1 \equiv b_2 \pmod 4$$

が成り立つから

$$a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2 \pmod 4$$

が成り立つ．このことは，言い換えれば，C_1 から任意の整数 a をとり，C_3 からも任意の整数 b を選んで，和 $a+b$ を作ると，これはつねに一定の類 C_0 に属することを意味している．このようにして C_1, C_3 から一意的に決まる剰余類 C_0 を C_1, C_3 の「和」といい，$C_1 + C_3$ で表す．「積」についても $a_1a_2 \equiv b_1b_2 \pmod 4$ が成り立つから，C_1C_3 が決定される．そこで**演算表**を書いてみると

和	C_0	C_1	C_2	C_3
C_0	C_0	C_1	C_2	C_3
C_1	C_1	C_2	C_3	C_0
C_2	C_2	C_3	C_0	C_1
C_3	C_3	C_0	C_1	C_2

積	C_0	C_1	C_2	C_3
C_0	C_0	C_0	C_0	C_0
C_1	C_0	C_1	C_2	C_3
C_2	C_0	C_2	C_0	C_2
C_3	C_0	C_3	C_2	C_1

特に，R_4 の各剰余類をそれぞれ $0, 1, 2, 3$ で代表させて，その集合 $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ を「**4 を法とする剰余系**」という．

$\mathbb{Z}_4$ の中の演算は上の演算表で $C_k (k = 0, 1, 2, 3)$ から C を取り除いた添え数となる．

例 1

n を自然数とするとき，$n^7 - n$ は 7 で割り切れることを示せ．

(解)　法 7 の剰余系 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ で考える．$n^7 - n$ の演算表を書くと

n	0	1	2	3	4	5	6
n^7	0	1	$128 \equiv 2$	$2187 \equiv 3$	$16384 \equiv 4$	$78125 \equiv 5$	$279936 \equiv 6$
$n^7 - n$	0	0	0	0	0	0	0

よって，表から $n^7 - n$ は 7 で割り切れる．

［注］　実際には，$\bmod 7$ として $n \equiv 6$ のとき，$6 \equiv -1$ より $n \equiv -1$．よって

$$n^6 \equiv 1, \qquad \therefore n^7 \equiv n$$

などとするとよい．また，7 の剰余系を $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ として扱ってもよい．

例 2

5 で割った余りが r である整数の集合を C_r で表すとき，5 つの集合 C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 について，

(1)　$a \in C_2, b \in C_4$ ならば，$a + b, ab$ はそれぞれどの C_r に属するか．

(2)　$2c \in C_3$ ならば，$c, 3c, 4c$ はそれぞれどの C_r に属するか．

(解)

(1)　$a \in C_2, b \in C_4$ より $a \equiv 2 \pmod 5$, $b \equiv 4 \pmod 5$．よって

$$a + b \equiv 2 + 4 \equiv 6 \equiv 1 \pmod 5, \quad ab \equiv 2 \cdot 4 \equiv 8 \equiv 3 \pmod 5,$$
$$\therefore a + b \in C_1, \quad ab \in C_3.$$

(2)　$2c \in C_3$ より，$2c \equiv 3 \pmod 5$

$$2c \equiv 8 \pmod 5$$

2 と 5 は互いに素より両辺を 2 で割れて，

$$c \equiv 4 \pmod 5$$

よって　$3c \equiv 12 \equiv 2,\ 4c \equiv 16 \equiv 1 \pmod 5$，すなわち

$$c \in C_4, \quad 3c \in C_2, \quad 4c \in C_1.$$

［参考］　5 を法とする剰余系 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ において

n	0	1	2	3	4
$2n$	0	2	4	1	3

から，$2c \in C_3$ を満たす c は C_4 に属する．

「合同式とその性質」より

演習1
3^{100}を7で割ったときの余りを求めよ.

演習2
11の倍数である条件は,
「奇数番目の数字の和から，偶数番目の数字の和を引いたものが11の倍数である.」
このことを，6桁の整数について証明せよ.

演習3
nを4の倍数でない正整数とするとき，$N = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ は5の倍数であることを証明せよ

演習1　3^n のうち7で割ったときの余りが1になる場合を探す。

$3^2 \equiv 9 \equiv 2 \pmod 7$　,　$3^6 \equiv 2^3 \equiv 8 \equiv 1 \pmod 7$

$3^{100} \equiv 3^{6\times 16+4} \equiv (3^6)^{16}3^4$ であるから

$$3^{100} \equiv 1 \cdot 3^4 \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod 7$$

よって、3^{100} は7で割った余りは4である。

演習2　6桁の整数 N の各位の数字を上から順に a, b, c, d, e, f とすると

$N = 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f$

$10 \equiv -1 \pmod{11}$ より $10^5 \equiv 10^3 \equiv 10 \equiv -1 \pmod{11}$; $10^4 \equiv 10^2 \equiv 1 \pmod{11}$

よって、$N \equiv -1a + 1b - 1c + 1d - 1e + f \equiv (b+d+f) - (a+c+e) \equiv 0 \pmod{11}$

演習3　i）n が奇数のとき

$5 \equiv 0 \pmod 5$　以降、すべて合同式は5を法とする。

$\therefore$　$4+1 \equiv 0$　$\therefore$　$4 \equiv -1$

この両辺を n 乗して、$4^n \equiv (-1)^n \equiv -1$

同様にして、$5 \equiv 0$ より $3 \equiv -2$

$\therefore$　$3^n \equiv (-2)^n \equiv -2^n$

よって、$N \equiv 1 + 2^n - 2^n - 1 \equiv 0 \pmod 5$

すなわち、N は5の倍数である。

ii）n が4の倍数でない偶数のとき

$n = 2 + 4m$ $(m \in Z)$ とおける。

$2^2 \equiv 4$, $2^4 \equiv 1$ より　$2^n \equiv 2^{2+4m} \equiv 2^2(2^4)^m \equiv 4 \cdot 1^m \equiv 4$

$3^2 \equiv 4$, $3^4 \equiv 1$ より　上と同様に　$3^n \equiv 4$

また、$4^2 \equiv 1$ より　$4^n \equiv (4^2)^{1+2m} \equiv 1^{1+2m} \equiv 1$

よって、$N \equiv 1 + 4 + 4 + 1 \equiv 10 \equiv 0 \pmod 5$

ユークリッドの互除法

ユークリッドの互除法は、2つの自然数または整式の最大公約数を求める手法の一つである。

2つの自然数(または整式) a, b $(a \geqq b)$ について、a の b による剰余を r とすると、a と b との最大公約数は b と r との最大公約数に等しいという性質が成り立つ。

この性質を利用して、b を r で割った剰余、除数 r をその剰余で割った剰余、などと剰余を求める計算を逐次繰り返すと、剰余が0になったときの除数が a と b との最大公約数となる。

問　1071 と 1029 の最大公約数を求める。

1071 を 1029 で割った余りは 42，1029 を 42 で割った余りは 21，

42 を 21 で割った余りは 0

よって、最大公約数は 21 である。

拡張された互除法

整数 m, n の最大公約数 (Greatest Common Divisor) を $\gcd(m, n)$ と表すときに、(拡張された) ユークリッドの互除法を用いて、$am+bn=\gcd(m, n)$ の解となる整数 a, b の組を見つけることができる。上の場合、

$$1071 = 1 \times 1029 + 42,\ 1029 = 24 \times 42 + 21,\ 42 = 2 \times 21$$

であるから、

$$\begin{aligned} 21 &= 1029 - 24 \times 42 \\ &= 1029 - 24 \times (1071 - 1 \times 1029) \\ &= -24 \times 1071 + 25 \times 1029 \end{aligned}$$

となる。

特に、m, n が互いに素 (最大公約数が 1) である場合、$am+bn=c$ は任意の整数 c に対して整数解 (a, b) をもつことが分かる。

$177a+52b=c$ の場合

$177=52\cdot3+21$　　移行すると　$21=177-52\cdot3$　……①

$52=21\cdot2+10$　　移行すると　$10=52-21\cdot2$　……②

$21=10\cdot2+1$　　移行すると　$1=21-10\cdot2$　……③

$10=1\cdot10+0$

①, ②, ③ より

$$\begin{aligned} 1 &= 21-10\cdot2 = 21-(52-21\cdot2)\cdot2 = 21\cdot5+52\cdot(-2) \\ &= (177-52\cdot3)\cdot5+52\cdot(-2) \end{aligned}$$

よって　$1=177\cdot5+52\cdot(-7)$

ゆえに　$c=177\cdot5c+52\cdot(-7c)$

ユークリッドの互除法

ユークリッドの互除法は、2つの自然数または整式の最大公約数を求める手法の一つである。

2つの自然数（または整式）a, b $(a \geqq b)$ について、a の b による剰余を r とすると、a と b との最大公約数は b と r との最大公約数に等しいという性質が成り立つ。

この性質を利用して、b を r で割った剰余、除数 r をその剰余で割った剰余、などと剰余を求める計算を逐次繰り返すと、剰余が0になったときの除数が a と b との最大公約数となる。

問　1071 と 1029 の最大公約数を求める。

1071 を 1029 で割った余りは 42，1029 を 42 で割った余りは 21，

42 を 21 で割った余りは 0

よって、最大公約数は 21 である。

拡張された互除法

整数 m, n の最大公約数(Greatest Common Divisor)を $\gcd(m, n)$ と表すときに、(拡張された)ユークリッドの互除法を用いて、$am+bn=\gcd(m, n)$ の解となる整数 a, b の組を見つけることができる。上の場合、

$$1071 = 1 \times 1029 + 42, \quad 1029 = 24 \times 42 + 21, \quad 42 = 2 \times 21$$

であるから、

$$\begin{aligned} 21 &= 1029 - 24 \times 42 \\ &= 1029 - 24 \times (1071 - 1 \times 1029) \\ &= -24 \times 1071 + 25 \times 1029 \end{aligned}$$ となる。

特に、m, n が互いに素（最大公約数が1）である場合、$am+bn=c$ は任意の整数 c に対して整数解 (a, b) をもつことが分かる。

問　$7x+25y=1$ を満たす整数の組 x, y をユークリッドの互除法を用いて1組求めよ。

【解】　$25-7\times3=4$　……①

$7-4\times1=3$　……②

$4-3\times1=1$　……③

②と③から

$4-(7-4\times1)\times1=1$

$4\times2-7\times1=1$

①を用いて4を消去すると

$(25-7\times3)\times2-7\times1=1$

$\therefore$　$7(-7)+25\times2=1$　　したがって、$x=-7$, $y=2$

したがって、$x=-7$, $y=2$

```
     3
  7)25
    21   1
    ---
     4)7
       4   1
       ---
       3)4
         3
         ---
         1
```

倍数の見つけ方

【2の倍数】

1の位が2の倍数(偶数)であること。

$$100a+10b+c=2(50a+5b)+c$$

【3の倍数】

各位の数の和が3の倍数であること。

例；$x=1456863\ \rightarrow\ 1+4+5+6+8+6+3=33$ よりxは3の倍数。

$100a+10b+c=(99+1)a+(9+1)b+c=3(33a+3b)+(a+b+c)$

【4の倍数】

下2桁の数が4の倍数であること。

例；$x=1456883$ → 下2桁の数 $y=63$ は4の倍数でないから、

xも4の倍数でない。

$$100a+10b+c=4\times 25a+10b+c$$

【5の倍数】

1の位の数が0か5であること。

【6の倍数】

各位の数の和が3の倍数で、なおかつ1の位が偶数であること。

例；$x=1456863\ \rightarrow\ 1+4+5+6+8+6+3=33$ となり3の倍数であるが、

偶数ではないのでxは6の倍数ではない。

6の倍数は2の倍数かつ3の倍数であることから明らか。

【7の倍数】

末位から3桁ごとに区切り、左端の区画を最初の区画とするとき、

奇数の区画の総和−偶数の区画の総和が7の倍数であること。

例；$x=35123473\ \rightarrow\ 35\mid 123\mid 473$ と区切ると、

奇数の区画の総和$=35+473=508$, 偶数の区画の和$=123$,

$508-123=385$は7の倍数なのでxは7の倍数。

$$\begin{aligned}&100000a+10000b+1000c+100d+10e+f\\&=1000(100a+10b+c)+(100d+10e+f)\\&=\underbrace{143\times 7}_{1001}(100a+10b+c)-(100a+10b+c)+(100d+10e+f)\end{aligned}$$

【8の倍数】

下3桁が000か、8の倍数であること。

例；$x=1456863\ \rightarrow\ 863$は8の倍数ではないので、$x$も8の倍数ではない。

$10000a+1000b+100c+10d+e=1000(10a+b)+100c+10d+e$

【9の倍数】

各位の数の和が9の倍数であること。

例；$x=1456803\ \rightarrow\ 1+4+5+6+8+0+3=27$より$x$は9の倍数。

$100a+10b+c=(99+1)a+(9+1)b+c=9(11a+b)+a+b+c$

【10の倍数】

1の位の数が0であること。

【11の倍数】

末位から奇数番目の数の和と、偶数番目の数の和の差が11の倍数であること。

例：$x = 123456707 \ \rightarrow \ 123456707$の奇数番目の数の和$= 1 + 3 + 5 + 7 + 7 = 23$,

偶数番目の数の和$= 2 + 4 + 6 + 0 = 12, 23 - 12 = 11$なので$x$は11の倍数。

$$\begin{aligned} & 10000a + 1000b + 100c + 10d + e \\ &= (10000a + 100c + e) + (1000b + 10d) \\ &= 11(909a + 9c + e) + 11(91b + d) + (a + c + e) - (b + d) \end{aligned}$$

【13の倍数】

末位から3桁ごとに区切り、左の区画を最初の区画とするとき、

奇数の区の総和−偶数の区画の和が13の倍数であること。

例：$x = 35123473 \ \rightarrow \ 35 \mid 123 \mid 473$と区切ると、奇数の区画の総和$= 35 + 473 = 508$,

偶数の区画の総和$= 123, 508 - 123 = 386$は13の倍数ではないので

xは13の倍教ではない。

$$\begin{aligned} & 100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + f \\ &= 1000(100a + 10b + c) + (100d + 10e + f) \\ &= \underbrace{77 \times 13}_{1001}(100a + 10b + c) - (100a + 10b + c) + (100d + 10e + f) \end{aligned}$$

整数・約数・倍数

整除の一意性

a を整数、b を 0 でない整数とすれば

$$a=bq+r,\quad 0\leqq r<|b|$$

を満たす整数の組 (q, r) がただ 1 つ定まる。

例　62，−39，−56 を −7 で割ったときの商と余りを求めよ。

$62=(-7)\times(-8)+6,\quad 0\leqq 6<|-7|$ 　より　$(q, r)=(-8, 6)$

$-39=(-7)\times 6+3,\quad 0\leqq 3<|-7|$ 　より　$(q, r)=(6, 3)$

$-56=(-7)\times 8+0,\quad 0\leqq 0<|-7|$ 　より　$(q, r)=(8, 0)$

$a=bq+r,\ 0\leqq r<|b|$ 　で特に $r=0$ のときは、a, b の間に

$$a=bq,\quad b\neq 0$$

なる等式が成り立つ。

このとき、a は b で割り切れる、とか、a は b の倍数である、あるいは b は a の約数であるとかいう。そして、$b\mid a$ で表す。

たとえば　$3\mid 12,\ -5\mid 15,\ -4\mid -12,\ 7\mid 0,\ -3\mid 0$

整数 $a, b, \cdots$ に共通な約数をそれらの数の公約数という。

たとえば、12，18 では、1，2，3，6 のほかに、負の数 −1，−2，−3，−6 も公約数である。

整数 $a, b, \cdots$ の中に 0 でないものがあれば、これらの公約数は有限個だから、その中に最大なものがある。これを $a, b, \cdots$ の最大公約数といい、$(a, b, \cdots)$ で表す。

なお、最大公約数はつねに正の数であることに注意されたい。

例　$(-15, 6)=3,\ (-28, -35)=7$

特に、2 つの整数 a, b が 0 でなく、しかも $(a, b)=1$ のとき、a, b は互いに素であるという。

いくつかの整数 $a, b, \cdots$ の共通な倍数を、それらの数の公倍数という。

たとえば −6，4 の公倍数は 0，±12，±24，±36 である。いずれも0でなければ，それらの公倍数

$a, b, \cdots$ の~~中に 0 でないものがあれば、それらの公約数~~のうち、正のものについてみると、それらの集合は自然数の部分集合で、空ではないから、最小なものが存在する。それを $a, b, \cdots$ の最小公倍数といい、$\{a, b, \cdots\}$ で表す。最小公倍数も正の数である。

たとえば、$\{-4, 6\}=12,\ \{12, -18, -30\}=180$

除法の原理

整数 a，$b\ (\neq 0)$ に対して、 $a=bq+r$，$0\leqq r<|b|$ ………☆

を満たす整数 q，r がただ1組存在する。

【証明】☆を満たす整数 q，r が存在することを示す。

b の倍数を小さい順に並べると

$b>0$ のとき　…，$-2b$，$-b$，0，b，$2b$，…

$b<0$ のとき　…，$2b$，b，0，$-b$，$-2b$，…

となるから

$b>0$ のときは $qb\leqq a<(q+1)b$，$b<0$ のときは $qb\leqq a<(q-1)b$

となる整数 q が定まる。

このとき、$r=a-qb$ とおくと、$b>0$ ならば $0\leqq r<b$，$b<0$ ならば $0\leqq r<-b$

となるから、q，r は☆を満たす。

次に、☆を満たす整数 q，r はただ1組だけであることを示す。

そこで、$a=bq+r=bq'+r'$ $(0\leqq r<|b|,\ 0\leqq r' \boxed{\leqq |b|})$ $\to$ $<|b|$

とすると $b(q-q')=r'-r$ ………① より $r'-r$ は b の倍数で、$-|b|<r'-r<|b|$

だから $r'-r=0$ となる。

このとき、①より $q-q'=0$ であるから $q=q'$，$r=r'$

よって、☆を満たす q，r は1組ある。

百五減算

1から1000までの自然数のうち、3で割って余りが2，5で割って余りが3，7で割って余りが4である整数は、何個あるか。

【解1】7で割って余りが4である整数 $7n+4$ において、

$n=5m+r\ (r=0,1,2,3,4)$　とすると

$7n+4=7(5m+r)+4=35m+7r+4$

これを5で割ったとき、余りが3となるのは $r=2$ のときに限る。

このとき　$7n+4=35m+18$

次に、$m=3l+r'\ (r'=0,1,2)$ とすると

$7n+4=35(3l+r')+18=105l+35r'+18=3(35l+11r'+6)+2r'$

これが3で割ったとき余りが2となるためには $r'=1$ のときである。

よって、$7n+4=105l+53$ の形となる。

このうち、1から1000までのものは　$l=0,1,2,\cdots,9$

したがって、求める個数は10個である。

【解2】題意をみたす整数を N とする。

題意から　$N=3a+2=5b+3=7c+4$ (a, b, c は0か自然数)

$3a+2=5b+3$ より $a=\dfrac{5b+1}{3}=2b-\dfrac{b-1}{3}$ であるから、$b-1$ は3の倍数。

よって　$b-1=3d$ (d は整数)　　$\therefore$　$b=3d+1$

$\therefore$　$N=5b+3=5(3d+1)+3=15d+8$

$15d+8=7c+4$ より $c=\dfrac{15d+4}{7}=2d+\dfrac{d+4}{7}$ であるから、$d+4=7e$ (e は整数)

$\therefore$　$N=15(7e-4)+8=105e-52$

このうち1から1000までのものは　$e=1,2,\cdots,10$

したがって、求める個数は10個である。

【解3】7で割れば4余る整数は $7n+4\ (n=0,1,2,\cdots)$ で表される。

したがって、これを小さい方から順に並べると

4，11，18，25，32，39，46，53，60，……

である。これらのうちで、3で割れば2余り、5で割れば3余る数のうち、最小のものは53である。

すなわち、53は題意を満たす最小の数である。そこで、題意を満たす任意の数を N とすると、$N-53$ は、3でも、5でも割り切れる整数である。

3，5，7の最小公倍数は105であるから、m を任意の整数として

$N-53=105m$　　$\therefore$　$N=105m+53\ (m=0,1,2,\cdots)$

このうち1から1000までのものは　$m=0,1,2,\cdots,9$

したがって、求める個数は10個である。

差分と整式

x の多項式 $f(x)$ が

$f(x+2)-2f(x+1)+f(x)=2x$ ……① を満たし、さらに

$f(0)=1$ ……② $f(1)=0$ ……③ であるとき、$f(x)$ を求めよ。

【解】一般に n 次の整式 $f(x)$ に対して、$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$ と定めると、$\Delta f(x)$ は $(n-1)$ 次の整式である。

①は $\Delta[\Delta f(x)]=2x$ ……④

で、$2x$ は1次式であるから、$f(x)$ は3次の整式である。

そこで、$f(x)=ax(x-1)(x-2)+bx(x-1)+cx+d$ (a, b, c, d は定数) とおくと、

$$\Delta f(x)=3ax(x-1)+2bx+c$$

$$\Delta[\Delta f(x)]=6ax+2b$$

であるから、④と比較して

$$6a=2,\ 2b=0 \qquad \therefore \quad a=\frac{1}{3},\ b=0$$

よって $f(x)=\dfrac{1}{3}x(x-1)(x-2)+cx+d$

②, ③より $d=1$, $c=-1$

$$\therefore \quad f(x)=\frac{1}{3}x(x-1)(x-2)+1=\frac{1}{3}(x+1)(x-1)(x-3)$$

自然数の和を差分で

n が正の整数のとき、$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ が成り立つことを差分の考え方

すなわち

「任意の正の整数 n に対して、$f(n)=g(n)$ が成り立つ」

$\Longleftrightarrow$「$f(1)=g(1)$ かつ 任意の正の整数 に対して、$f(n+1)-f(n)=g(n+1)-g(n)$」

を用いて示せ。

【証明】左辺 $=f(n)$, 右辺 $=g(n)$ とおくと

$f(1)=1$, $g(1)=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1$ より $f(1)=g(1)$

$f(n+1)-f(n)=n+1$, $g(n+1)-g(n)=\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)-\dfrac{1}{2}n(n+1)=n+1$

したがって、つねに $f(n+1)-f(n)=g(n+1)-g(n)$ が成り立つ。

以上より、与式は成り立つ。

関連

差分 $\Delta f(x) \equiv f(x+1) - f(x)$ に対して

$$\underbrace{\Delta\Delta\cdots\Delta}_{n} f(x) = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k f(x+n-k)(-1)^k \tag{$*$}$$

を数学的帰納法にて証明する．

(i)　上式$(*)$は$n=1$で成り立つ．

(ii)　あるnで式$(*)$が成り立つと仮定すると，
　$n \to n+1$とした式も成り立つ：

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{\Delta\Delta\cdots\Delta}_{n+1} f(x) \\
=&f(x+n+1) - {}_n\mathrm{C}_1 f(x+n) + \cdots + (-1)^n {}_n\mathrm{C}_n f(x+1) \\
&\qquad\qquad - {}_n\mathrm{C}_0 f(x+n) + \cdots + (-1)^{n-1+1} {}_n\mathrm{C}_{n-1} f(x+1) - (-1)^n {}_n\mathrm{C}_n f(x) \\
=&f(x+n+1) - {}_{n+1}\mathrm{C}_1 f(x+n) + \cdots + (-1)^n {}_{n+1}\mathrm{C}_n f(x+1) + (-1)^{n+1} {}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1} f(x)
\end{aligned}
$$

2次式が整数値をとる条件

2次式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が，任意の整数 x に対して整数値をとる a, b, c の条件を求めよ．

【解 1】

$f(0) = c$ が整数であるために，

$$c \text{ が整数} \tag{1}$$

であることが必要である．

また，$f(1) = a + b + c, f(-1) = a - b + c$ が整数であるために，式 (1) とから

$$a + b, a - b \text{ が整数} \tag{2}$$

であることも必要である．

逆に式 (1),(2) が成り立つとき，l, m, n を整数として

$$a + b = l, \qquad a - b = m, \qquad c = n$$

とおけ，x が整数のとき，

$$f(x) = \frac{l+m}{2}x^2 + \frac{l-m}{2}x + n = \frac{1}{2}lx(x+1) + \frac{1}{2}mx(x-1) + n$$

は，$x(x+1), x(x-1)$ が偶数より整数値をとる．

よって，求める条件は $a + b, a - b, c$ がすべて整数となることである．

［解答の方針を標語的に言えば，**“必要から十分へ”** となる．］

［注］

求める条件は「$a + b, a - b, c$ が整数」と同値であれば良い．例えば，差分 $f(x) - f(x-1)$ から求めると，$2a, -a + b, c$ がすべて整数，が得られる．

$$\text{「} f(0) = c \text{ が整数で，すべての整数 } x \text{ について，} f(x) - f(x-1) = 2ax - a + b \text{ が整数」} \quad (☆)$$

が求める条件である．$g(x) = f(x) - f(x-1)$ とおくと，

$$(☆) \quad \Leftrightarrow \quad c \text{ が整数，かつ } \ g(0) = -a + b, \text{かつ } \ g(x) - g(x-1) = 2a \text{ が整数}$$

よって，求める a, b, c の条件は，$2a, a - b, c$ がすべて整数となることである．

【解 2】

$f(x)$ は $f(x) = ax(x-1) + (a+b)x + c$ と表すことができる．すると

$$f(0) = c, \qquad f(1) = a + b, \qquad f(2) = 4a + 2b + c$$

が整数ならば，$c, a+b, 2a$ は整数である．

逆に，$c, a+b, 2a$ が整数ならば，x が整数のとき，$x(x-1)$ は 2 の倍数であるから，$f(x)$ は整数である．

よって，求める条件は $2a, a+b, c$ がすべて整数となることである．

［参考］

n 次多項式 $f(x)$ が任意の整数に対して整数値をとるための必要十分条件は，$f(x)$ を

$$f(x) = a_0 + a_{1\,x}\mathrm{C}_1 + a_{2\,x}\mathrm{C}_2 + \cdots + a_{n\,x}\mathrm{C}_n$$

の形に書き表すときの係数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ がすべて整数となることである．

類題

2 次式 $f(x)=ax^2+bx+c$ が，任意の整数 x に対して 3 の倍数となる a,b,c の条件を求めよ．

【解 1】

$f(0)=c$ が 3 の倍数であるために，

$$c \text{ が } 3 \text{ の倍数} \tag{1}$$

であることが必要である．

また，$f(1)=a+b+c, f(-1)=a-b+c$ が 3 の倍数であるために，式 (1) とから

$$a+b, a-b \text{ が } 3 \text{ の倍数} \tag{2}$$

であることも必要である．

逆に式 (1),(2) が成り立つとき，l,m,n を整数として

$$a+b=3l, \qquad a-b=3m, \qquad c=3n$$

とおけ，x が整数のとき，

$$f(x)=\frac{3l+3m}{2}x^2+\frac{3l-3m}{2}x+3n=\frac{3}{2}lx(x+1)+\frac{3}{2}mx(x-1)+3n$$

は，$x(x+1), x(x-1)$ が偶数より整数値をとる．

よって，求める条件は $a+b, a-b, c$ がすべて 3 の倍数となることである．

【解 2】

$f(x)=ax^2+bx+c$ において

$$f(x)-f(x-1)=2a(x-1)+a+b \tag{1}$$

$$f(0)=c \tag{2}$$

$f(-1), f(0), f(1)$ が 3 の倍数のとき

$$f(1)-f(0)=a+b, \qquad f(0)-f(-1)=-a+b, \qquad f(0)=c$$

はすべて 3 の倍数より，$a+b, -a+b, c$ はすべて 3 の倍数．

逆に $a+b, -a+b, c$ がすべて 3 の倍数のとき，$(a+b)-(-a+b)=2a$ も 3 の倍数なので，式 (1) から

$$f(x)-f(x-1) \text{ は } 3 \text{ の倍数} \tag{3}$$

また，式 (2) より

$$f(0) \text{ も } 3 \text{ の倍数} \tag{4}$$

式 (3),(4) より帰納的に，すべての整数 x に対して $f(x)$ は 3 の倍数である．

よって，求める条件は $a+b, -a+b, c$ がすべて 3 の倍数となることである．

2 次方程式が有理数の解をもたない

p, q を整数とし，$f(x) = x^2 + px + q$ とおく．

(1)　有理数 a が方程式 $f(x) = 0$ の 1 つの解ならば，a は整数であることを示せ．

(2)　$f(1)$ も $f(2)$ も 2 で割り切れないとき，方程式 $f(x) = 0$ は整数の解をもたないことを示せ．

【解】

(1)　$a = \frac{k}{l}$ (k と l は互いに素な整数，$l > 0$) と表される．a が方程式 $f(x) = 0$ の解であるとすると，$\left(\frac{k}{l}\right)^2 + p\left(\frac{k}{l}\right) + q = 0$，すなわち

$$\frac{k^2}{l} = -pk - ql$$

が成り立つ．p, q, k, l は整数であるから，右辺は整数である．よって，左辺も整数であり，k と l は互いに素であるから，左辺が整数になるのは $l = 1$ のときである．したがって，有理数 a が方程式 $f(x) = 0$ の 1 つの解ならば，a は整数である．

(2)

$$f(1) = 1 + p + q \qquad (①)$$
$$f(2) = 4 + 2p + q \qquad (②)$$

p, q は整数であるから，式 (①),(②) により $f(1), f(2)$ はともに整数である．さらに，$f(1), f(2)$ は 2 で割り切れないから，ともに奇数である．よって，式 (②) から q は奇数であり，さらに，式 (①) から p も奇数である．ここで，$f(x) = 0$ の解を $x = b$ とする．

［1］　$b = 2k$ (k は整数) のとき

$$f(2k) = 4k^2 + 2kp + q$$

q が奇数であるから，$f(2k)$ は奇数である．よって，$f(2k) \neq 0$.

［2］　$b = 2k + 1$ (k は整数) のとき

$$f(2k+1) = (2k+1)^2 + (2k+1)p + q = 2(2k^2 + 2k + kp) + 1 + p + q$$

$1 + p + q$ が奇数であるから，$f(2k+1)$ は奇数である．よって，$f(2k+1) \neq 0$.

[1],[2] から，$f(x) = 0$ は整数の解をもたない．

［別解］　有理数解 α をもつとすると，(1) より α は整数である．α を 2 で割った余り r は，0 か 1 であり，$f(\alpha) \equiv f(r) \pmod 2$．［一般に多項式 $f(x)$ に対して $x \equiv a$ ならば $f(x) \equiv f(a)$ を思い出す $(\bmod\, k)$．］また，$f(\alpha) = 0$ より

$$f(r) \equiv 0 \pmod 2 \qquad (☆)$$

仮定より，$f(1) \equiv 1, f(2) \equiv 1 \pmod 2$.

$$\begin{aligned} r = 0 \text{ とすると} \quad & f(r) \equiv f(0) \equiv f(2) \equiv 1 \pmod 2 \\ r = 1 \text{ とすると} \quad & f(r) \equiv f(1) \equiv 1 \pmod 2 \end{aligned}$$

いずれも (☆) に矛盾する．よって，$f(x) = 0$ は有理数解をもたない．

［注］　(2) に合同式を用いる．

　2 を法として，どんな整数 x も $x \equiv 1$ か $x \equiv 2$ かのいずれかである．

$$\begin{aligned} x \equiv 1 \text{ のとき} \quad & f(x) \equiv f(1) \pmod 2 \\ x \equiv 2 \text{ のとき} \quad & f(x) \equiv f(2) \pmod 2 \end{aligned}$$

$f(1), f(2)$ がいずれも 2 の倍数でないから，$f(x) \equiv 0 \pmod 2$．これは，整数 x に対して，$f(x)$ は 2 の倍数とはならないことを示すから，$f(x) = 0$ になることはない．よって，$f(x) = 0$ は整数の解を持たない．

　なお，p, q が奇数のとき $p^2 - 4q = r^2$ を満たす整数 r が存在しないことを，$\bmod 8$ で証明できる．

［参考］

- 整数 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ を係数とする x の方程式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

  で，a_0, a_n および $a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ がすべて奇数のとき，この方程式は有理数の解をもたない．［$\bmod 2$ で考えよ．］

- 整数を係数とする n 次方程式

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

  が有理数を解にもてば，その解である有理数は整数である．
  - 関連：「1 と 2 の間に無理数である解がある」

1と2の間に無理数である解がある

方程式 $x^3+x-8=0$ は

(1) 唯一つの実数解を1と2の間にもつことを示せ.

(2) この解は無理数であることを証明せよ.

(1) $f(x)=x^3+x-8$ とおくと

$f'(x)=3x^2+1>0$ より $f(x)$ は単調増加する ①

$f(1)=-6<0$, $f(2)=2>0$ ②

$f(x)$ は連続なので ①,② より中間値の定理から

$f(x)=0$ は 1と2との間に唯一つの実数解をもつ。

(2) (1)より与方程式の解は正である。

与方程式が有理数解 $\frac{n}{m}$ (m,n は互いに素の正の整数) をもつとすると

$$\frac{n^3}{m^3}+\frac{n}{m}-8=0$$

$$\frac{n^3}{m}+mn-8m^2=0$$

左辺の第2,3項は整数だから、$\frac{n^3}{m}$ も整数。

m と n は互いに素だから、m と n^3 も互いに素。

よって $m=1$

よって解 $\frac{n^3}{m^3}$ は整数となる。

これは(1)に矛盾する。

よって与方程式の唯一つの解は有理数解ではないから、

無理数解である。

正の整数解を n とおくと、

$n^3+an^2+bn-1=0$

$n(n^2+an+b)=1$

n は1の約数となるから $n=1$

このとき $1+a+b=1$ $\therefore b=-a$

与方程式は

$x^3+ax^2-ax-1=0$

$(x-1)\{x^2+(a+1)x+1\}=0$

題意より $x^2+(a+1)x+1=0$ の異なる実数解は、

0と3の間にあり、1ではない。

その条件は $f(x)=x^2+(a+1)x+1$ とおくと $y=f(x)$ のグラフから

$$\begin{cases} \text{判別式}: (a+1)^2-4>0 \\ \text{軸}: 0<-\frac{a+1}{2}<3 \\ \text{境界値}: f(0)=1>0,\ f(3)=3a+13>0 \\ x\neq 1: f(1)=a+3\neq 0 \end{cases}$$

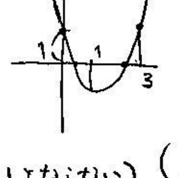
$\Leftrightarrow -\frac{13}{3}<a<-3$

a は整数より $a=-4$, よって $b=4$

注 $\beta=1$ で、

解と係数の関係から

$\alpha\gamma=1$



($\alpha=1$ だと $\beta,\gamma>1$ で $\beta\gamma=1$ とならない)

($\gamma=1$ だと $\beta,\gamma<1$ で $\beta\gamma=1$ とならない)

だから $0<\alpha<\beta=1<\gamma<3$

3次方程式の解のどれかは整数

a,bを整数とする．3次方程式 $x^3+ax^2+bx-1=0$ は3つの実数解α,β,γをもち，$0<\alpha<\beta<\gamma<3$でα,β,γのうちどれかは整数である． a,bの値を求めよ．

正の整数解をnとおくと.

$n^3+an^2+bn-1=0$

$n(n^2+an+b)=1$

nは1の約数となるから $n=1$

このとき $1+a+b=1$ ∴ $b=-a$

与方程式は

$x^3+ax^2-ax-1=0$

$(x-1)\{x^2+(a+1)x+1\}=0$

題意より $x^2+(a+1)x+1=0$ の異なる実数解は、

0と3の間にあり、1ではない。

その条件は $f(x)=x^2+(a+1)x+1$ とおくと $y=f(x)$ のグラフから

$$\begin{cases} \text{判別式}: (a+1)^2-4>0 \\ \text{軸}: 0<-\frac{a+1}{2}<3 \\ \text{境界値}: f(0)=1>0,\ f(3)=3a+13>0 \\ x\neq 1: f(1)=a+3\neq 0 \end{cases}$$

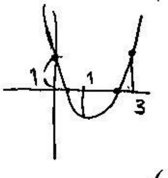
$\Leftrightarrow -\frac{13}{3}<a<-3$

aは整数より $a=-4$, よって $b=4$

注 $\beta=1$で、

解と係数の関係から

$\alpha\gamma=1$



($\alpha=1$だと$\beta,\gamma>1$で$\beta\gamma=1$とならない)

($\gamma=1$だと$\beta,\gamma<1$で$\beta\gamma=1$とならない)

だから $0<\alpha<\beta=1<\gamma<3$

3次方程式が少なくとも一つの整数解をもつ

m，n は整数とし、$f(x)=x^3+mx^2+nx+2$ とする。

(1) 方程式 $f(x)=0$ が三つの整数解(重解があってもよい)をもつような m，n の組をすべて求めよ。

(2) 方程式 $f(x)=0$ が少なくとも一つの整数解をもつために、m，n がみたすべき必要十分条件を求めよ。

【解】(1) 三つの整数解はそれらの積が -2 であるから

$$\{1,\ 1,\ -2\},\ \{1,\ -1,\ 2\},\ \{-1,\ -1,\ -2\}$$

の3通りの可能性しかない。

よって、解と係数の関係から

$$(m,\ n)=(0,\ -3),\ (-2,\ -1),\ (4,\ 5)$$

(2) 方程式 $f(x)=0$ は $x(x^2+mx+n)=-2$ と変形できるから、整数解 x は2の約数だから、±1，±2 の4通りの可能性しかない。したがって、求める条件は、これらのどれかの解にもつことより

$$m+n+3=0,\ m-n+1=0,\ 2m+n+5=0,\ 2m-n-3=0$$

のどれかが成り立つことである。

等式の証明，x,yの2次方程式の自然数解が無限組

(1) 等式$(x^2-ny^2)(z^2-nt^2)=(xz+nyt)^2-n(xt+yz)^2$を示せ。

(2) $x^2-2y^2=-1$の自然数解(x, y)が無限組であることを示し、$x>100$となる解を1組求めよ。

【解】(1) (左辺)−(右辺)

$$=(x^2z^2-ny^2z^2-nx^2t^2+n^2y^2t^2)$$
$$-\{x^2z^2+2nxyzt+n^2y^2t^2-n(x^2t^2+2xyzt+y^2z^2)\}$$
$$=x^2z^2-ny^2z^2-nx^2t^2+n^2y^2t^2-(x^2z^2+n^2y^2t^2-nx^2t^2-ny^2z^2)=0$$

(2) (1)の等式に$n=2$，$z=3$，$t=2$を代入すると

$$x^2-2y^2=(3x+4y)^2-2(2x+3y)^2$$

ゆえに　$x^2-2y^2=-1$のとき　$(3x+4y)^2-2(2x+3y)^2=-1$を満たす。

よって、自然数の組(x, y)が$x^2-2y^2=-1$を満たすならば、自然数の組$(3x+4y, 2x+3y)$も$x^2-2y^2=-1$を満たす。

$x=y=1$は解であるから

$$x_1=y_1=1,\ x_{n+1}=3x_n+4y_n,\ y_{n+1}=2x_n+3y_n \quad (n=1, 2, \cdots)$$

とおくと、上のことから自然数の組(x_n, y_n) $(n=1, 2, \cdots)$は解であるが、$x_{n+1}=3x_n+4y_n>x_n$より$x_n<x_{n+1}$であるから、$\{x_n\}$は単調に増加する。

よって、解が無限組あることがわかる。

そして、順に$(x_2, y_2)=(7, 5)$，$(x_3, y_3)=(41, 29)$，$(x_4, y_4)=(239, 169)$から

求める1組は　$(x, y)=(239, 169)$

参考　$\begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & t \\ nt & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xz+nyt & xt+yz \\ n(xt+yz) & xz+nyt \end{pmatrix}$の両辺に行列式をとると、(1)が得られる。

この等式をブラーマグプタの恒等式という。

ベル方程式（演習）

次の $\boxed{}$ の中に適当な数または式を入れよ．また，(イ)〜(ホ) の「　」で囲まれた文章の理由を述べよ．

方程式

$$x^2 - 3y^2 = 1 \tag{1}$$

を満たす整数の組 (x, y) を求めることを考える (以下この方程式の整数解を単に解と略称する)．準備のため次のことを確かめておく．

(イ)「a, b, c, d が整数であって，$a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$ ならば，$a = c, b = d$ である．」

次に (x, y) が解であれば，$(x, -y), (-x, y), (-x, -y)$ も解であることは，方程式 (1) より明らかであるから，(x, y) がともに負でない解を求めることが基本的である．そこで，そのような解を求める手段として

$$(2 + \sqrt{3})^n = x_n + y_n\sqrt{3} \tag{2}$$

(ただし x_n, y_n は負でない整数，$n = 0, 1, 2, \cdots$) とおく．そうすると (イ) によって

$$\begin{aligned} &x_0 = 1, \qquad y_0 = 0, \qquad x_1 = 2, \qquad y_1 = 1 \\ &x_2 = \boxed{}, \qquad y_2 = \boxed{}, \qquad x_3 = \boxed{}, \qquad y_3 = \boxed{} \end{aligned} \tag{3}$$

である．

一方，$(2 + \sqrt{3})^2$ と $(2 - \sqrt{3})^2$，$(2 + \sqrt{3})^3$ と $(2 - \sqrt{3})^3$ などを比較することによって，一般に

$$(2 - \sqrt{3})^n = x_n - y_n\sqrt{3}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{4}$$

であることが分かる．

式 (2),(4) と，$(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$ とを使って，

$$1 = (2 + \sqrt{3})^n(2 - \sqrt{3})^n = {x_n}^2 - 3{y_n}^2$$

となるから，式 (2) で定まる (x_n, y_n) は方程式 (1) の解であることが分かる．特に，x, y の一方が 0 となるような負でない解は，明らかに $x = 1, y = 0$ で，それは式 (3) の (x_0, y_0) に外ならない．

次に (x_{n-1}, y_{n-1}) と (x_n, y_n) との関係を求めてみる ($n \geq 1$)．

$$x_n + y_n\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^n = (x_{n-1} + y_{n-1}\sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = \boxed{}$$

ゆえに，$x_n = \boxed{}$，$y_n = \boxed{}$．したがって (x_0, y_0) から出発して，負でない解

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n), \cdots$$

を順次求めて行くことができる．しかも $y_1 < y_2 < y_3 < \cdots$ である．

以上のことで負でない解を多数みつけたのであるが，これらで負でない解が尽くされているかどうかを次に吟味する．いま任意の正の解 $(x,y), x>0, y>0$ をとると，

$$(x+\sqrt{3}y)(2-\sqrt{3})=(2x-3y)+(2y-x)\sqrt{3}.$$

(ロ)「$x'=2x-3y$，$y'=2y-x$ とおくとき，(x',y') も解である．」

(ハ)「そして，$x>x'>0$，$y>y'\geq 0$ である．」

(ニ)「それで，任意の正の解 (x,y) から出発して，(ロ) における (x',y') を求める操作を順次行うことによって，式 (3) に示す負でない解 (x_0,y_0) に達する．」

(ホ)「したがって，任意の負でない解 (x,y) は式 (2) によって定まる (x_n,y_n) $(n=0,1,2,\cdots)$ のどれか 1 つである．」

【解】

空白 $\boxed{}$ の中は，順次次の通り．

$$x_2=7, \qquad y_2=4, \qquad x_3=26, \qquad y_3=15.$$

(式 (2) において，$n=2, n=3$ とおいて両辺を比較して)

$$x_n+y_n\sqrt{3}=2x_{n-1}+3y_{n-1}+(x_{n-1}+2y_{n-1})\sqrt{3}$$

から，

$$x_n=2x_{n-1}+3y_{n-1}, \qquad y_n=x_{n-1}+2y_{n-1}.$$

(イ) の理由　$a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$ (a,b,c,d は整数) より

$$a-c=(d-b)\sqrt{3}.$$

左辺の $a-c$ は整数，右辺は $d-b\neq 0$ ならば無理数となり不合理であるから，$d-b=0$ でなければならない．したがって $a-c=0$,

$$\therefore \quad a=c, \quad b=d.$$

(ロ) の理由　x', y' を式 (1) の左辺の x,y に代入して

$$(2x-3y)^2-3(2y-x)^2=(4x^2-12xy+9y^2)-(12y^2-12xy+3x^2)=x^2-3y^2=1.$$

(ハ) の理由

$$\begin{aligned}
x' &= 2x-3y=\frac{4x^2-9y^2}{2x+3y}=\frac{x^2+3}{2x+3y}>0 \qquad (\because \text{式 } (1)) \\
y' &= 2y-x=\frac{4y^2-x^2}{2y+x}=\frac{y^2-1}{2y+x}\geq 0 \qquad (\because \text{式 } (1)) \\
&\therefore \quad x'>0, \quad y'\geq 0.
\end{aligned}$$

$x' = 2x - 3y$，$y' = 2y - x$ を x, y について解けば

$$
\begin{aligned}
&x = 2x' + 3y', \qquad y = x' + 2y', \\
&x = 2x' + 3y' > x' > 0 \qquad (\because x' > 0,\ y' \geqq 0) \\
&y = x' + 2y' > y' \geqq 0 \qquad (\because x' > 0,\ y' \geqq 0)
\end{aligned}
$$

(ニ) の理由　解 x, y から順にこの操作を行えば

$$
\begin{cases}
x > x' > x'' > \cdots > x^{(n)} = 1 \\
y > y' > y'' > \cdots > y^{(m)} = 0
\end{cases}
$$

また，$(x^{(i)}, y^{(i)})$ が式 (1) の解であることから $n = m$ であることが分かる．

(ホ) の理由　任意の負でない解 (x, y) から (ニ) の理由により，ある回数 $(= n)$(ロ) の操作を行えば (x_0, y_0) に到達する．

$$
\begin{aligned}
&\therefore\quad x + y\sqrt{3} = (x_0 + y_0\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^n, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 0 \\
&\therefore\quad x + y\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^n = x_n + y_n\sqrt{3} \\
&\therefore\quad x = x_n, \quad y = y_n.
\end{aligned}
$$

すなわち，任意の負でない解 (x, y) は上に求めた解 $(x_n, y_n)(n = 0, 1, 2, \cdots)$ のどれか 1 つである．

階乗に素因数はいくつあるか

(1) 20!には素因数2は何個含まれているか.
(2) 50!を計算すると，その末尾に何個の0が続くか.

(1)

2 ------ 2
4 ----- 2×2
6 ---- 2
8 --- 2×2×2
10 --- 2
12 ---- 2×2
14 --- 2
16 ----- 2×2×2×2
18 --- 2
20 ---- 2×2
① ② ③ ④

①の上に並んでいる2の個数は，20までの自然数の中の2の倍数の個数に等しいから $\left[\frac{20}{2}\right]$

②の上に並んでいる2の個数は，20までの自然数の中の $2^2=4$ の倍数の個数に等しいから $\left[\frac{20}{2^2}\right]$

同様にして ③，④上の2の個数は $\left[\frac{20}{2^3}\right]$，$\left[\frac{20}{2^4}\right]$

よって $\left[\frac{20}{2}\right]+\left[\frac{20}{2^2}\right]+\left[\frac{20}{2^3}\right]+\left[\frac{20}{2^4}\right]=10+5+2+1$
$=18$ (個)

〈公式として利用してよい〉

(2) 50!に含まれる素因数5の個数の方が，2の個数より明らかに少なく，その個数は

$$\left[\frac{50}{5}\right]+\left[\frac{50}{5^2}\right]+\left[\frac{50}{5^3}\right]+\left[\frac{50}{5^4}\right]+\cdots\cdots$$
$$=10+2+0+0+\cdots\cdots=12$$

よって 12個

整数a,bに対し$a^2+b^2=c^2$を満たす整数cが存在するとき，a,bのうち少なくとも1つは偶数であることを証明せよ.

a,b のどちらも奇数であるとすると

4を法として
(次数が2だから)
(mod2で考えても何も導けない)

$a\equiv1,\underset{(-1)}{3}$，$b\equiv1,\underset{(-1)}{3}$ なので

$a^2\equiv1$ かつ $b^2\equiv1$

このとき $c^2=a^2+b^2\equiv2$ である。

しかし，$c\equiv0,1,2,3$ なので $c^2\equiv0,1$ より

$c^2\not\equiv2$ となり矛盾する。

よって a,b のうち少なくとも1つは偶数である。

フィボナッチ数列が10の倍数となるときのn

$x_{n+2}=x_{n+1}+x_n, x_1=x_2=1$ で定まる数列 $\{x_n\}$ がある.
x_n が10の倍数となるのは，自然数nがどんなときか.

2を法として

$x_1\equiv 1,\ x_2\equiv 1,\ x_3\equiv 0$

$x_4\equiv x_1\equiv 1,\ x_5\equiv x_2\equiv 1,\ x_6\equiv x_3\equiv 0\ \cdots$

より $\{1,1,0\}$が繰り返される。

$2^2+1=5$以内の項数で繰り返す

よって $x_{n+3}\equiv x_n \pmod 2 \Leftrightarrow n\equiv 0 \pmod 3$ ---①

$$\left(\begin{aligned} x_n &\equiv x_{n+2}-x_{n+1}\\ &\equiv x_{n+2}-(x_{n+3}-x_{n+2})\\ &\equiv -x_{n+3}+2x_{n+2}\\ &\equiv -x_{n+3}\equiv x_{n+3} \pmod 2 \Leftrightarrow n\equiv 0 \pmod 3\end{aligned}\right)$$

5を法として

$x_1\equiv 1,\ x_2\equiv 1,\ x_3\equiv 2,\ x_4\equiv 3,\ x_5\equiv 0,$

$x_6\equiv 3,\ x_7\equiv 3,\ x_8\equiv 1,\ x_9\equiv 4,\ x_{10}\equiv 0,$

$x_{11}\equiv 4,\ x_{12}\equiv 4,\ x_{13}\equiv 3,\ x_{14}\equiv 2,\ x_{15}\equiv 0,$

$x_{16}\equiv 2,\ x_{17}\equiv 2,\ x_{18}\equiv 4,\ x_{19}\equiv 1,\ x_{20}\equiv 0,$

$x_{21}\equiv x_1\equiv 1,\ x_{22}\equiv x_2\equiv 1,\ \cdots\cdots$ より

5^2+1以内の項数で繰り返す

$\{1,1,2,3,0,3,3,1,4,0,4,4,3,2,0,2,2,4,1,0\}$

が繰り返される. よって $x_n\equiv 0 \pmod 5 \Leftrightarrow n\equiv 0 \pmod 5$ ---②

①，②より $x_n\equiv 0 \pmod{10} \Leftrightarrow n\equiv 0 \pmod{15}$

x_nが10の倍数となるのは，nが15の倍数のときである。

$a+2$はbで割り切れ，$b+1$はaで割り切れる

a,b は正の整数で，$a+2$はbで割り切れ，$b+1$はaで割り切れる.
このような a,b の組をすべて求めよ.

$a, b\in\mathbb{N}$

$a+2$がbで割り切れる ---① から

$a+2\geqq b$ ---①'

$b+1$がaで割り切れる ---② から

$b+1\geqq a$ ---②'

①'，②'より $a-1\leqq b\leqq a+2$

(i) $b=a-1$のとき

①より $\dfrac{a+2}{b}=\dfrac{b+3}{b}=1+\dfrac{3}{b}=$(正の整数)

より $b=1,3$ $(a,b)=(2,1),(4,3)$

2組とも②をみたす。

(ii) $b=a$のとき

①より $\dfrac{b+1}{a}=\dfrac{a+1}{a}=1+\dfrac{1}{a}=$(正の整数)

より $a=1$ $(a,b)=(1,1)$ これは②をみたす。

(iii) $b=a+1$のとき

①より $\dfrac{a+2}{b}=\dfrac{1}{b}+1=$(正の整数)

より $b=1$ このとき $a=0$ となるので不適

(iv) $b=a+2$のとき

②より $\dfrac{b+1}{a}=\dfrac{a+3}{a}=1+\dfrac{3}{a}=$(正の整数)

より $a=1,3$ $(a,b)=(1,3),(3,5)$ 2組とも①をみたす

以上より求める(a,b)の組は

$(1,1),(1,3),(2,1),(3,5),(4,3)$

イデアル

整数全体の部分集合Mが空集合でなく、「a, b がMの要素ならば、a − bもMの要素である」という性質をもっている。
このとき、次の各々を証明せよ。

(1) a, bがMの要素ならば、a + bもMの要素である。

(2) Mが0以外の要素を含むとする。このとき、cをMに含まれる最小の正の整数とすれば、
Mの任意の要素はcの倍数である。

[1] $\phi \neq M$
[2] $a, b \in M \Rightarrow a - b \in M$

(1) [1]より $a \in M$ となるaがある。
[2]から $a - a \in M$ ∴ $0 \in M$
$a, b \in M$ とすると $0 \in M$ だから
[2]より $0 - b \in M$ ∴ $-b \in M$
[2]から $a - (-b) \in M$ ∴ $a + b \in M$

(2) $k \in M$ とすると $-k \in M$ より
Mの要素に正の整数がある。
よって最小の正の整数cがある。
Mの任意の要素をaとすると、
aをcで割り、商をq、余りをrとすると

$$\begin{cases} \underline{a = cq + r} & \cdots ① \\ 0 \leqq r < c & \cdots ② \end{cases}$$

$a \geqq 0$ のとき $q \geqq 0$ で
①より $r = a - cq = a - (\overbrace{c + c + c + \cdots + c}^{q個})$
(1)を繰り返し用いると $c + c + c + \cdots + c \in M$
よって $r \in M$ (∵[2]より)

→ cが最小の正の整数より
②から $r = 0$ → ∴ $a = cq$
∴ $cq \in M$
$a < 0$ のとき $-a > 0$ より
同様に云える。※
以上よりaはcで割り切れるから
Mの任意の要素aはcの倍数である。

※ $a \in M$ $(a < 0)$ のとき、
$a' = -a$ とおくと、
$a' \in M$ で、$a' = cq$ が
示される。
よって $a = c(-q)$

<u>3次方程式が整数解を持たない</u>
a, b, c, d を整数とする．整式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ において $f(-1), f(0), f(1)$ がいずれも3で割り切れないならば，方程式 $f(x) = 0$ は整数の解をもたないことを証明せよ．

多項式 $f(x)$ について $x \equiv a \Rightarrow f(x) \equiv f(a) \pmod{k}$ である。

任意の整数 x は 3を法として
$x \equiv -1$, $x \equiv 0$, $x \equiv 1$ のいずれかに属する。

$x \equiv -1 \Rightarrow f(x) \equiv f(-1) \not\equiv 0$
$x \equiv 0 \Rightarrow f(x) \equiv f(0) \not\equiv 0$
$x \equiv 1 \Rightarrow f(x) \equiv f(1) \not\equiv 0$

よって、任意の整数 x に対して $f(x)$ は3の倍数ではない。
ここで、0は3の倍数だから
$f(x) = 0$ は整数解をもたない。

nを自然数とするとき，
$3^{n+1} + 4^{2n-1}$ は13で割り切れることを証明せよ．

$3^{n+1} + 4^{2n-1} = 9 \cdot 3^{n-1} + 4 \cdot 16^{n-1}$

$\equiv -4 \cdot 3^{n-1} + 4 \cdot 3^{n-1}$
$\equiv 0 \pmod{13}$

$\equiv 9 \cdot 3^{n-1} + 4 \cdot 3^{n-1}$
$\equiv 13 \cdot 3^{n-1}$
$\equiv 0 \pmod{13}$

Q.E.D.

思いつかなければ M.I. (数学的帰納法)

(i) $n = 1$ で $3^{n+1} + 4^{2n-1} = 13$ は13で割り切れる。
(ii) $n = k$ のとき、$3^{k+1} + 4^{2k-1}$ が13で割り切れると仮定すると、$3^{k+1} + 4^{2k-1} \equiv 0 \pmod{13}$ より。
$n = k+1$ のとき、$3^{k+2} + 4^{2k+1}$
$= 3 \times 3^{k+1} + 16 \times 4^{2k-1}$
$= 3(3^{k+1} + 4^{2k-1}) + 13 \cdot 4^{2k-1}$
$\equiv 13 \cdot 4^{2k-1}$ (仮定)
$\equiv 0$ より $n = k+1$ のときも $3^{n+1} + 4^{2n-1}$ は13で割り切れる。 (i), (ii) より 示された。

nを自然数とするとき，
$4^n + 15n - 1$ はいつも9で割り切れるか調べよ．

$f(n) = 4^n + 15n - 1$ とおくと、

$f(n+1) - f(n) = 3 \cdot 4^n + 15$

$g(n) = f(n+1) - f(n) \fallingdotseq 3 \cdot 4^n + 15$ とおくと

$g(n+1) - g(n) = 9 \cdot 4^n$

$g(1) = 3 \cdot 4^1 + 15 = 3 \times 9$

$g(1)$ が9の倍数で $g(n+1) - g(n)$ も9の倍数だから

$g(n)$ は9の倍数。

よって $f(n+1) - f(n)$ は9の倍数。

また、$f(1) = 4^1 + 15 \times 1 - 1 = 2 \times 9$ より

$f(1)$ も9の倍数だから

$f(n)$ は9の倍数。//

$$3 \cdot 4^n + 15 = 3(4^n - 1) + 18$$
$$= 9\{(4^{n-1} + 4^{n-2} + \cdots + 4 + 1) + 2\}$$

2次式が整数値をとる条件

2次式 $f(x)=ax^2+bx+c$ が、任意の整数 x に対して整数値をとる a, b, c の条件を求めよ。

【解1】 $f(0)=c$ が整数であるために、c が整数 ……①

であることが必要である。

また、$f(1)=a+b+c$, $f(-1)=a-b+c$ が整数であるために、① とから

$a+b$, $a-b$ が整数 ……②

であることも必要である。

逆に、①, ② が成り立つとき、l, m, n を整数として

$$a+b=l,\ a-b=m,\ c=n$$

とおけ、x が整数のとき、

$$f(x)=\frac{l+m}{2}x^2+\frac{l-m}{2}x+n=\frac{1}{2}lx(x+1)+\frac{1}{2}mx(x-1)+n$$

は、$x(x+1)$, $x(x-1)$ が偶数より整数値をとる。

よって、求める条件は $a+b$, $a-b$, c がすべて整数である。

注 求める条件は $a+b$, $a-b$, c が整数と同値であれば良い。

例えば、差分 $f(x)-f(x-1)$ から求めると、$2a$, $-a+b$, c がすべて整数、が得られる。

「$f(0)=c$ が整数で、すべての整数 x について、$f(x)-f(x-1)=2ax-a+b$ が整数」

……… ☆ が求める条件である。

$g(x)=f(x)-f(x-1)$ とおくと、

☆ $\iff$ c が整数、かつ $g(0)=-a+b$, かつ $g(x)-g(x-1)=2a$ が整数

よって、求める a, b, c の条件は、$2a$, $-a+b$, c がすべて整数である。

【解2】 $f(x)$ は $f(x)=ax(x-1)+(a+b)x+c$ と表すことができる。

すると $f(0)=c$, $f(1)=a+b$, $f(2)=4a+2b+c$ が整数ならば、

c, $a+b$, $2a$ は整数である。

逆に、c, $a+b$, $2a$ が整数ならば、x が整数のとき、$x(x-1)$ は 2 の倍数であるから、$f(x)$ は整数である。

よって、求める条件は $2a$, $a+b$, c がすべて整数である。

参考 n 次多項式 $f(x)$ が任意の整数に対して整数値を取るための必要十分条件は、

$f(x)$ を $f(x)=a_0+a_1\,{}_x\mathrm{C}_1+a_2\,{}_x\mathrm{C}_2+\cdots+a_n\,{}_x\mathrm{C}_n$ の形に書き表すときの係数

a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_n がすべて整数であることである。

整式の割り算と整数の割り算

整数を係数とする3次の多項式 $f(x)$ が次の条件(☆)を満たしている。

(☆) 任意の自然数 n に対して、整数 $f(n)$ は $n(n+1)(n+2)$ で割り切れる。

このとき、ある整数 a があって、$f(x)=ax(x+1)(x+2)$ となることを示せ。

【証明】$f(x)=ax^3+px^2+qx+r$ (a, p, q, r は整数) とおくと

$f(x)$ は $f(x)=ax(x+1)(x+2)+bx(x+1)+cx+d$ と表せ、係数を比べると、

$p=3a+b$, $q=2a+b+c$, $r=d$ より b, c, d は整数である。

任意の自然数 n に対して $f(n)$ が $n(n+1)(n+2)$ で割り切れるから

$bn(n+1)+cn+d$ は n で割り切れる。よって、$d=0$

また、$b(n+1)+c$ は $n+1$ で割り切れるから　$c=0$

そして、b が $(n+2)$ で割り切れるから　$b=0$

$\therefore$　$f(x)=ax(x+1)(x+2)$ (a は整数)

注 $f(x)$ が $x(x+1)(x+2)$ で割り切れる、としてはいけない。

$f(x)=x(x+1)(x+2)+12x$ のとき、$f(x)$ は $x(x+1)(x+2)$ で割り切れないが、$f(1)$ は $1\cdot2\cdot3$ で割り切れ、$f(2)$ も $2\cdot3\cdot4$ で割り切れる。

参考 $\dfrac{f(n)}{n(n+1)(n+2)}=a+\dfrac{bn(n+1)+cn+d}{n(n+1)(n+2)}$ はつねに整数だから右辺の第2項を $g(n)$ とおくと、b, c, d の中に0でないものがあれば、十分大きい n をとると $g(n)$ は0でなく、0に近い無数の値をとり、このとき、$a+g(n)$ が整数をとることができない。

よって、$b=c=d=0$ で、a は整数である。

「差分の考え方」を取り入れると、次のようになる。

$f(x)$ は整数係数の3次式より、a, b, c, d を定数として

$f(x)=ax(x+1)(x+2)+bx(x+1)+cx+d$　……①

と表すことができる。

(☆)のとき　$f(n+1)$ は $(n+1)(n+2)(n+3)$ の倍数であるから、

$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$ とおくと、$\Delta f(n)$ は $(n+1)(n+2)$ の倍数　……②

同様に、$\Delta\Delta f(n)$ は $(n+2)$ の倍数　……③

また、①より　$\Delta\Delta f(n)=6a(n+2)+2b$ であるから③より $b=0$ でなければならない。

このとき、$\Delta f(n)=3a(n+1)(n+2)+c$ となり②から $c=0$ でなければならない。

そして、$f(n)=an(n+1)(n+2)+d$ となり(☆)から $d=0$

すなわち、$f(n)=an(n+1)(n+2)$

<u>前頁「差分の考え方」の詳細</u>

整数 a, b, c, d $(a \neq 0)$ を用いて

$$f(x) = ax(x+1)(x+2) + bx(x+1) + cx + d$$

と表される．このとき条件より

$$\begin{aligned} f(n) &= an(n+1)(n+2) + bn(n+1) + cn + d \\ &= (\text{整数})n(n+1)(n+2) \cdots\cdots ① \\ f(n+1) &= a(n+1)(n+2)(n+3) + b(n+1)(n+2) + c(n+1) + d \\ &= (\text{整数})(n+1)(n+2)(n+3) \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

② − ①より $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ とすると，

$$\begin{aligned} \Delta f(n) &= 3a(n+1)(n+2) + 2b(n+1) + c \\ &= (\text{整数})(n+1)(n+2) \cdots\cdots ③ \\ \Delta f(n+1) &= 3a(n+2)(n+3) + 2b(n+2) + c \\ &= (\text{整数})(n+2)(n+3) \cdots\cdots ④ \end{aligned}$$

③ − ④より

$$\Delta\Delta f(n) = 6a(n+2) + 2b = (\text{整数})(n+2) \cdots\cdots ⑤$$

⑤より $b = 0$．よって③から $c = 0$．よって①から $d = 0$．したがって

$$f(x) = ax(x+1)(x+2).$$

【参考】

差分の計算③，⑤は微分とよく似ている．

3数が素数の条件から整数決定

n を自然数とする。n, $n+2$, $n+4$ がすべて素数ならば $n=3$ であることを示せ。

【解1】[1]　$n=1$ のとき $n=1$ は素数でないから、条件に適さない。

[2]　$n=2$ のとき $n+2=4$, $n+4=6$ となり、条件に適さない。

[3]　$n=3$ のとき $n+2=5$, $n+4=7$ で条件に適する。

[4]　$n=3m+1$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ のとき $n+2=3(m+1)$ で素数でないから、条件に適さない。

[5]　$n=3m+2$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ のとき $n+4=3(m+2)$ で素数でないから、条件に適さない。

[6]　$n=3m$ $(m=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$ のとき $n=3m$ は素数でないから、条件に適さない。

[1]~[6] から、$n=3$ のみが条件に適する。

【解2】まず、$n=1$ のとき $n=1$ は素数でないから、条件に適さないので $n\geqq 2$ として、3 を法とする合同式で考える。

すべての整数は $n\equiv 0$, $n\equiv 1$, $n\equiv 2$ のいずれかとして表される。

$n\equiv 0 \pmod 3$ のとき

n が素数であるのは、$n=3$ のときだけである。このとき

$n+2=5$, $n+4=7$ でともに素数だから、条件に適する。

$n\equiv 1 \pmod 3$ のとき

$n+2\equiv 0$ であるから、$n+2$ $(n\geqq 4)$ は 3 の倍数となり、条件に適さない。

$n\equiv 2 \pmod 3$ のとき

$n+4\equiv 0$ であるから、$n+4$ $(n\geqq 2)$ は 3 の倍数となり、条件に適さない。

以上により、$n=3$ だけが条件に適する。

$(a,b)=1$ ならば $(a,a+b)=1$

整数 m と n が互いに素ならば、$2m+3n$ と $m+2n$ も互いに素であることを示せ。

【証1】対偶を証明する。

$2m+3n$, $m+2n$ の公約数 $g\,(>1)$ をもつとする。また、a が g を約数にもつことを $g|a$ と表すことにする。

$g|2m+3n$, $g|m+2n$ より $g|(2m+3n)-(m+2n)=m+n$, $g|m+2n$

$\therefore$ $g|(m+2n)-(m+n)=n$, $g|m+n$

よって $g|(m+n)-n=m$, $g|n$

すなわち、g は m, n の公約数である。

【証2】対偶を証明する。

$2m+3n$ と $m+2n$ が2以上の公約数 k をもつとすると

$2m+3n=pk$, $m+2n=qk$ と表される。

これを m, n について解くと

$$m=\frac{2pk-3qk}{2\cdot2-1\cdot3},\quad n=\frac{2qk-pk}{2\cdot2-1\cdot3}$$

$\therefore$ $m=k(2p-3q)$, $n=k(2q-p)$

よって、m, n は k を公約数にもつ。

参考 a と b が互いに素であることを $(a,\ b)=1$ と表す。

$(a,\ b)=1 \implies (a,\ a+b)=1$ であるから

$(m,\ n)=1 \implies (n,\ m+n)=1 \implies (m+n,\ m+2n)=1$

$\implies (m+2n,\ 2m+3n)=1$

注 証1で $g\,|\,2(2m+3n)-3(m+2n)=m$, $g\,|\,-(2m+3n)+2(m+2n)=n$ としてもよい。

証2からすぐに、次のことが分かる。

a, b, c, d, m, n が整数とする。$ad-bc=1$ または $ad-bc=-1$ のとき

$(m,\ n)=1$ ならば $(am+bn,\ cm+dn)=1$

が成り立つ。

☆ $(a,\ b)=(a,\ a+b)$ の証明 （$(a,\ b)$ は a, b の最大公約数を表す）

c が a, b の公約数ならば、c は a, $a+b$ の公約数である。

逆に、c が a, $a+b$ の公約数ならば、c は a, $(a+b)-a$ の公約数である。

よって、a, b の公約数の集合と a, $a+b$ の公約数の集合とは一致するから

$(a,\ b)=(a,\ a+b)$

等式と整数，割った余りについての関係の証明

(1) $4m+6n=7$ を満たす整数 m，n は存在しないことを示せ。

(2) $3m+5n=2$ を満たすすべての整数の組 (m, n) を求めよ。

以下、a，b は互いに素な正の整数とする。

(3) k を整数とするとき、ak を b で割った余りを $r(k)$ で表す。k，l を $b-1$ 以下の正の整数とするとき、$k \neq l$ ならば $r(k) \neq r(l)$ であることを示せ。

(4) $am+bn=1$ を満たす整数 m，n が存在することを示せ。

【解】(1) $4m+6n=7$ を満たす整数 m，n が存在すると仮定すると、左辺は偶数で、右辺は奇数であるから矛盾する。

ゆえに、$4m+6n=7$ を満たす整数 m，n は存在しない。

$$\begin{array}{rr} & 3m+5n=1 \\ -) & 3(-1)+5\cdot 1=2 \\ \hline \end{array}$$

(2) $3m+5n=2$ を変形すると　$3(m+1)=-5(n-1)$

よって、$n-1$ は3の倍数である。

したがって、ある整数 t を用いて $n-1=3t$ と表される。

$3(m+1)=-15t$ から　　$m+1=-5t$

よって　　$m=-5t-1$，$n=3t+1$（t は任意の整数）

(3) 対偶「$r(k)=r(l)$ ならば $k=l$」が成り立つことを証明すればよい。

ak，al を b で割ったときの商をそれぞれ s，t とすると、次の2つの式

$ak=bs+r(k)$ ……①　　　$al=bt+r(l)$ ……②

が成り立つ。このとき、$r(k)=r(l)$ が成り立つとすると、①−②から

$$a(k-l)=b(s-t)$$

a と b は互いに素であるから、$k-l$ は b の倍数である。また、k と l はともに b より小さい正の整数であるから

$$-b<k-l<b$$

ゆえに　　$k-l=0$　　　すなわち　　$k=l$

(4) (3)より $r(1)$，$r(2)$，……，$r(b-1)$ はどの2つも等しくなく、かつどれも b より小さい正の整数であるから、これらの中には1に等しいものがある。

それを $r(m)$ とする。am を b で割った商を $-n$ で表すと

$$am=b(-n)+1$$

すなわち　　$am+bn=1$

ゆえに、$am+bn=1$ を満たす整数 m，n が存在する。

互いに素に関する有名定理

【定理1】

a, b が互いに素な自然数ならば、b 個の整数 a, $2a$, $3a$, $\cdots$, ba のそれぞれを b で割った余りは 0 から $b-1$ まですべて出そろう。

[証明] a, $2a$, $3a$, $\cdots$, ba の b 個の整数を b で割った余りがすべて相異なることを証明すればよい。

ka, la $(1 \leqq k < l \leqq b)$ を b で割った余りが等しいとすると

$$la - ka = (l-k)a$$

は b の倍数であるが、a と b とは互いに素であるから、$l-k$ が b の倍数となる。

これは $1 \leqq k < l \leqq b$ より $0 < l-k < b$ であるから矛盾する。よって、証明された。

□

【定理2】

a, b が互いに素な自然数ならば、$ax+by=1$ をみたす整数 x, y が存在する。

[証明] 定理1により a, $2a$, $3a$, $\cdots$, ba のうちで、b で割った余りが 1 となるものが存在するから、それを xa とし、商を $-y$ とすると

$$xa = b(-y)+1 \quad (y \text{は整数})$$

と表すことができる。

したがって、$ax+by=1$ をみたす整数 x, y がある。

□

【フェルマーの小定理】

p は素数で、n と p が互いに素ならば、$n^{p-1}-1$ は p で割り切れる。

[証明] 定理1により n, $2n$, $3n$, $\cdots$, $(p-1)n$ を p で割った余りの集合は

$$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-1\}$$

であるから

$$n \cdot 2n \cdot 3n \cdot \cdots \cdot (p-1)n - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (p-1) = (n^{p-1}-1) \cdot (p-1)!$$

は p で割り切れる。

p は素数より $(p-1)!$ は p で割り切れないから、$n^{p-1}-1$ が p で割り切れる。

□

フェルマーの小定理の証明2

選択肢から最も適切なものを選びその番号を解答欄に記入せよ。なお、ア，エ，オ，シ，セ は(1)〜(9)，それ以外は(10)〜(35)から選べ。

相異なる自然数 a と b が 1 以外に共通の約数をもたないとき，a と b は互いに素であるという。自然数 n を素数 p で割った余りを $M_p(n)$ で表すことにする。また $p-1$ 以下の自然数 x，y に対して、$x \otimes y = M_p(xy)$ と演算 $\otimes$ を定義する。ただし右辺の xy は通常の積である。たとえば、$M_{11}(6\times{}^{ア}\boxed{}) = 2$ である。この演算$\otimes$ は交換法則 ${}^{イ}\boxed{}$ や結合法則 ${}^{ウ}\boxed{}$ を満たす。ここで x，y，z は $p-1$ 以下の自然数である。

次の命題はフェルマーの小定理とよばれている。

命題　自然数 a と素数 p が互いに素ならば a^{p-1} を p で割った余りは 1 である。

この命題を証明しよう。上の記号を用いれば $M_p({}^{エ}\boxed{}) = {}^{オ}\boxed{}$ を示せばよい。

以下、M_p の添字 p は省略する。x，y を $p-1$ 以下の自然数とする。

$M(ax)=M(ay)$ ならば $a(x-y)$ は ${}^{カ}\boxed{}$ の ${}^{キ}\boxed{}$ となる。よって $x=y$ でなければならない。この ${}^{ク}\boxed{}$ を考えれば、${}^{ケ}\boxed{}$ ならば ${}^{コ}\boxed{}$ である。このことから

$$M(1a),\ M(2a),\ \cdots\cdots,\ M((p-1)a)$$

は異なった自然数である。よって

$$M(1a)\otimes M(2a)\otimes \cdots\cdots \otimes M((p-1)a) = 1\otimes 2\otimes \cdots\cdots \otimes {}^{サ}\boxed{}$$

となる。

一方、M の性質を使えば

$$M(1a)\otimes M(2a)\otimes \cdots\cdots \otimes M((p-1)a) = M({}^{シ}\boxed{})\otimes 1\otimes 2\otimes \cdots\cdots \otimes {}^{ス}\boxed{}$$

となる。$x\otimes y = y$ のとき、$x = {}^{セ}\boxed{}$ となることに注意すれば、

$M({}^{エ}\boxed{}) = {}^{オ}\boxed{}$ を得る。

［選択肢］

(1) 1	(2) 2	(3) 3	(4) 4	(5) 0
(6) a	(7) a^{p-1}	(8) a^p	(9) a^{p+1}	(10) $x-y$
(11) $x\otimes y$	(12) xy	(13) $x+y$	(14) $x \neq y$	(15) $M(ax)=M(ay)$
(16) $x=y$	(17) $p+1$	(18) p	(19) $p-1$	(20) $M(ax)\neq M(ay)$
(21) 逆	(22) 対偶	(23) 裏	(24) 否定	(25) 矛盾
(26) 倍数	(27) 約数	(28) 素数	(29) 互いに素	(30) $p-1$ 以下

(31) $x\otimes y=0$　(32) $x\otimes y = y\otimes x$　(33) $x\otimes y\otimes z = y\otimes z\otimes x = z\otimes x\otimes y$

(34) $x\otimes(y\otimes z) = (x\otimes y)\otimes z$　(35) $x\otimes(y+z) = x\otimes y + x\otimes z$

【解】(ア)　$6\times k$ ($k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$) を11で割った余りが2になるのは、$k=4$ のときである。

よって　$M_{11}(6\times 4)=2$

(イ)(ウ)　演算 $\otimes$ は交換法則 $x\otimes y=y\otimes x$ や結合法則 $x\otimes(y\otimes z)=(x\otimes y)\otimes z$ を満たす。

(エ)～(セ)　フェルマーの小定理を証明するには、$M_p(a^{p-1})=1$ を示せばよい。

以下、M_p の添字 p は省略する。

$M(ax)=M(ay)$ ならば ax, ay を p で割った余りは等しいから、$a(x-y)$ は p の倍数となる。

a と p は互いに素で，$-(p-2)\leqq x-y\leqq p-2$ であるから　$a(x-y)=0$

よって、$x=y$ でなければならない。

この対偶を考えれば、$x\neq y$ ならば $M(ax)\neq M(ay)$ である。このことから

$M(1a)$, $M(2a)$, ……, $M((p-1)a)$　……①

は異なった自然数である。

①は $1a$, $2a$, ……, $(p-1)a$ を p で割った余りであるから、1 , 2 , ……, $p-1$ のどれかが重複することなく1つずつあてはまる。

よって　$M(1a)\otimes M(2a)\otimes\cdots\cdots\otimes M((p-1)a)=1\otimes 2\otimes\cdots\cdots\otimes(p-1)$

一方、M の性質を使えば

$M(1a)\otimes M(2a)\otimes\cdots\cdots\otimes M((p-1)a)$

$=(1\otimes a)\otimes(2\otimes a)\otimes\cdots\cdots\otimes((p-1)\otimes a)$

$=(a\otimes a\otimes\cdots\cdots\otimes a)\otimes 1\otimes 2\cdots\cdots\otimes(p-1)$

$=M(a^{p-1})\otimes 1\otimes 2\cdots\cdots\otimes(p-1)$

したがって　$M(a^{p-1})\otimes 1\otimes 2\cdots\cdots\otimes(p-1)=1\otimes 2\otimes\cdots\cdots\otimes(p-1)$

$x\otimes y=y$ のとき $x=1$ となることに注意すれば、$M_p(a^{p-1})=1$ を得る。

解答　(ア)　(4)　(イ)　(32)　(ウ)　(34)　(エ)　(7)　(オ)　(1)　(カ)　(18)
(キ)　(26)　(ク)　(22)　(ケ)　(14)　(コ)　(20)　(サ)　(19)　(シ)　(7)
(セ)　(1)

2次形式＝0の整数解2

$x^2+2y^2-2xy-4x+6y+1=0$ を満たす整数の組 (x, y) を求めよ。

【解】与方程式より　$x^2-2(y+2)x+2y^2+6y+1=0$

x について解くと　$x=y+2\pm\sqrt{-y^2-2y+3}$　……①

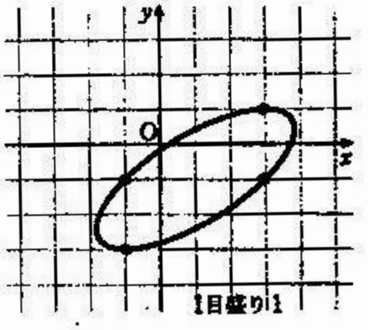
x は実数であるから　$-y^2-2y+3\geqq 0$

よって　$(y+3)(y-1)\leqq 0$　$\therefore$　$-3\leqq y\leqq 1$

y は整数であるから、$y=-3, -2, -1, 0, 1$ これらを①に代入して、条件を満たすのは

$(x, y)=(-1, -3), (3, -1), (-1, -1), (3, 1)$

参考　楕円 $C: x^2+2y^2-2xy-4x+6y+1=0$ のグラフは右図のようである。



$ax^2+2hxy+by^2+2fx+2gy+c=0$ で
$h^2-ab<0 \Rightarrow$ 楕円
$h^2-ab=0 \Rightarrow$ 放物線
$h^2-ab>0 \Rightarrow$ 双曲線

2次形式＝0の整数解は無数を示す

$x^2+2xy+y^2+4x+2y-1=0$ を満たす x, y の整数解は無数に存在することを示せ。

【解】$(x+y)^2+2(x+y)+1+2x-2=0$ から　$(x+y+1)^2=2(1-x)$ ……①

$(x+y+1)^2$ は2の倍数であるから、$x+y+1$ も2の倍数である。

よって　$x+y+1=2k$ (k は整数)　……② とおく。

①から　$4k^2=2(1-x)$　よって　$x=1-2k^2$

これを②に代入して　$1-2k^2+y+1=2k$

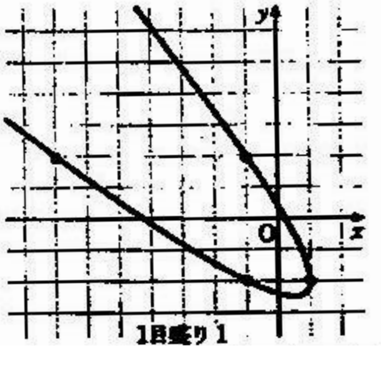
ゆえに　$y=2k^2+2k-2$

すなわち、①の整数解が $x=1-2k^2$, $y=2k^2+2k-2$

したがって、方程式を満たす x, y の整数解は無数に存在する。

注　$(x+y+2)^2=2y+5$ から、$x+y+2=2k+1$ (k は整数) とおいても、同じ結果を得る。

参考　放物線 $C: x^2+2xy+y^2+4x+2y-1=0$ のグラフは右図のようである。



$ax^2+2hxy+by^2+2fx+2gy+c=0$ で
$h^2-ab<0 \Rightarrow$ 楕円
$h^2-ab=0 \Rightarrow$ 放物線
$h^2-ab>0 \Rightarrow$ 双曲線

2 次曲線の $h^2 - ab$ に関する考察

平面極座標 (r, ϕ) を用い，離心率を e として 2 次曲線の式を

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\phi - \phi_0)}$$

の形に書くと，

$$r = p - ex\cos\phi_0 - ey\sin\phi_0$$

であり，両辺ゼロ以上の下で平方すると

$$\{1-(e\cos\phi_0)^2\}x^2+\{1-(e\sin\phi_0)^2\}y^2-2e^2\sin\phi_0\cos\phi_0 xy+2epx\cos\phi_0+2epy\sin\phi_0-p^2=0$$

となる．ここから 2 次曲線の式

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

における係数を同定すると

$$h^2 - ab = e^2 - 1$$

が見出される．よって $h^2 - ab$ の符号を調べることは，離心率 e の 1 との大小関係を，したがって 2 次曲線の種類を調べることになっている．

三角形でa^2=b^2+c^2-bcが成り立つ整数の組(a,bc)

$\angle A=60^\circ$ の三角形ABCで、三辺の長さ a, b, c がすべて整数であるものを求めよ。

【解】余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos 60^\circ$ より　　$a^2=b^2+c^2-bc$

$$4a^2=4b^2+4c^2-4bc$$

$$4a^2-(2b-c)^2=3c^2$$

因数分解して

$$(2a+2b-c)(2a-2b+c)=3c^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

a, b, c は三角形の辺より $a+b>c$ だから　$2a+2b-c>0$ で、①から $2a-2b+c>0$ である。

$2a+2b-c=r$, $2a-2b+c=s$ とおく。

$$a=\frac{1}{4}(r+s), \quad b=\frac{1}{4}(r-s+2c) \qquad \cdots\cdots ②$$

そこで、$3c^2$ を2つの因数 r, s に分けることを考える。

$$3c^2=rs$$

r の方へ2乗の形で入る素数の積を m

s の方へ2乗の形で入る素数の積を n

両方へ1つずつ入る素数の積を k

とおくと、次の2つの場合がある。

(i) $r=3km^2$, $s=kn^2$　　　(ii) $r=kn^2$, $s=3km^2$

(i)の場合

②から　$a=\frac{1}{4}k(3m^2+n^2)$, $b=\frac{1}{4}k(3m^2+2mn-n^2)$, $c=kmn$

k が4の倍数であれば、これらは整数

k が4の倍数でないとき、$3m^2+n^2$ が4の倍数となるのは、m, n がともに偶数かともに奇数の場合である。

(ii)の場合

②から　$a=\frac{1}{4}k(n^2+3m^2)$, $b=\frac{1}{4}k(-3m^2+2mn+n^2)$, $c=kmn$

となり、(i)と同じことが云える。

以上をまとめて

$$a:b:c=(3m^2+n^2):2m\pm(3m^2-n^2):4mn$$

であるような整数である。

参考　$m=n$ のとき　　$a=b=c$ の三角形

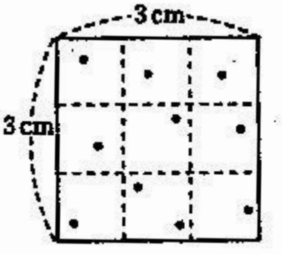
$2m=n$ のとき　　$a:b:c=7:3:8$, $7:5:8$

$m=2n$ のとき　　$a:b:c=13:15:8$

部屋割り論法 (演習)

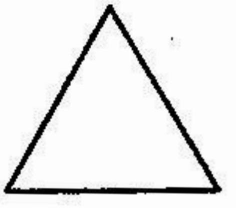
次の証明問題は「部屋割り論法」すなわち、n 個の部屋が有り、そこに $(n+1)$ 人を入れるとき、2人以上入る部屋がある、という論法を使っている。その証明を参考にして、次の (1), (2) を証明せよ。

問題 1辺が3 cm の正方形の中に10個の点を任意に打つとき、距離が $\sqrt{2}$ 以内である2点が少なくとも1組存在することを証明せよ。

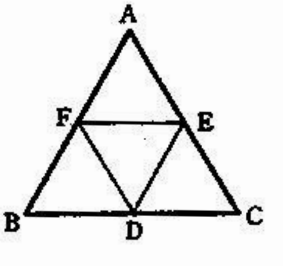


【証明】右の図のように、縦、横を3等分して9つの小さい正方形の部屋に分割する。10個の点を分割した小正方形部屋に割りふりすれば、少なくとも2個は同じ小正方形の部屋にある。ところが、小正方形にある2点の距離が最大となるのは2点が対角線の両端にある場合でその距離は $\sqrt{2}$ である。よって、題意は証明された。

(1) 1辺の長さが2の正三角形の内部に、任意に5点を配置したとき、そのうちの2点で距離が1より小さいものが少なくとも1組存在する。



(2) 10個の自然数がある。これらの中から2つの自然数を適当に選べば、その差が9で割り切れるような2数が必ずある。



【証明】(1) まず、1辺2の正三角形を図のように、4つの合同な正三角形に分割する。このとき中央のみ境界をすべて含む(ただし、頂点D，E，Fを除く) ものとする。

ここで、5点を4個の小さい正三角形にどのように配置しても、少なくとも1つの小三角形の中に2点以上が存在する。

小三角形は、1辺の長さが1だから、これらの2点の距離は1より小さい。(∵5点のいずれも、各小正三角形の頂点上にはない)

(2) どんな自然数も9で割ると、余りは0から8までのどれかである。

したがって、余りについて0から8までの九つの部屋を用意し、10個の自然数を9で割った余りに従って上の九つの部屋に入れると、部屋割り論法によりどれか2つの自然数は同じ部屋に入る。同じ部屋の2数の差は9で割り切れるから、差が9で割り切れるような2数があることが分かる。

2次式 $f(x)=ax^2+bx+c$ が、任意の整数 x に対して3の倍数となる a, b, c の条件を求めよ。

$a-b$, c, $a+b$ が3の倍数

【解1】 $f(0)=c$ が3の倍数であるために、c が3の倍数 ……①

であることが必要である。

また、$f(1)=a+b+c$, $f(-1)=a-b+c$ が3の倍数であるために、①とから

$a+b$, $a-b$ が3の倍数 ……②

であることも必要である。

逆に、①, ②が成り立つとき、l, m, n を整数として

$$a+b=3l,\ a-b=3m,\ c=3n$$

とおけ、x が整数のとき、

$$f(x)=\frac{3l+3m}{2}x^2+\frac{3l-3m}{2}x+3n=\frac{3}{2}lx(x+1)+\frac{3}{2}mx(x-1)+3n$$

は、$x(x+1)$, $x(x-1)$ が偶数より整数値をとる。

よって、求める条件は $a+b$, $a-b$, c がすべて3の倍数である。

【解2】 $f(x)=ax^2+bx+c$ において

$f(x)-f(x-1)=2a(x-1)+a+b$ ……①

$f(0)=c$ ……②

$f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ が3の倍数のとき

$f(1)-f(0)=a+b$, $f(0)-f(-1)=-a+b$, $f(0)=c$ はすべて3の倍数より

$a+b$, $-a+b$, c はすべて3の倍数。

逆に、$a+b$, $-a+b$, c がすべて3の倍数のとき

$(a+b)-(-a+b)=2a$ も3の倍数より①から

$f(x)-f(x-1)$ は3の倍数 ……③

また、②より

$f(0)$ も3の倍数 ……④

③, ④より帰納的に、すべての整数 x に対して $f(x)$ は3の倍数である。

よって、求める条件は $a+b$, $-a+b$, c がすべて3の倍数である。

1,5,10円硬貨で10n円にする仕方の数

1円、5円、10円の硬貨を取り混ぜて合計 $10n$ 円にする仕方は何通りあるか。ただし、n は正の整数とする。

着眼　1円, 5円, 10円の硬貨の個数をそれぞれ x, y, z とすると

$$x+5y+10z=10n$$

を満たす非負な整数 x, y, z の組の数を調べる。

【解1】1円, 5円, 10円の硬貨の個数をそれぞれ x, y, z とすると

$$x+5y+10z=10n$$

を満たす非負な整数 x, y, z の組の数が求めるものである。

$z=k\ (0\leqq k\leqq n)$ のとき、$x+5y=5\cdot 2(n-k)$ より y のとりうる値は $y=0$, 1, $\cdots$, $2(n-k)$ で $2(n-k)+1$ 通りある。

このとき、それぞれ x の値は一意に決まる。

よって、求める仕方の数は

$$\sum_{k=0}^{n}\{2(n-k)+1\}=\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2$$

【解2】1円と5円の硬貨を取り混ぜて $10k$ 円にする仕方をまず考える。

これは、5円の硬貨の数さえ決めれば、後は1円の硬貨で $10k$ 円にすることができる。

$10k=5\cdot 2k$ であるから、5円の硬貨の数は 0, 1, 2, $\cdots$, $2k$ の $2k+1$ 通りである。

3種類の硬貨で $10n$ 円にするには、10円硬貨の数は 0, 1, 2, $\cdots$, n の場合があって、1円と5円の硬貨でそれぞれ $10n$ 円, $10(n-1)$ 円, $10(n-2)$ 円, $\cdots$, $10\cdot 0$ 円にするから、仕方の総数は

$$2n+1,\ 2(n-1)+1,\ 2(n-2)+1,\ \cdots,\ 2\cdot 0+1 \text{ の和}$$

すなわち

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2$$

参考　1円, 5円, 10円の硬貨の3種類で $10n$ 円にする仕方の数を a_n, 1円, 5円の2種類で $10n$ 円にする仕方の数を b_n とすると

$a_n=b_0+b_1+b_2+\cdots+b_n$ ……①, ここに $b_0=1$ とする。

$b_k=2k+1$ （前述）

①から　$a_n=a_{n-1}+b_n$ が成り立つことが分かる。

これは、

「10円を混ぜない場合は b_n 通り。その他の場合、3種類を取り混ぜて $10(n-1)$ 円作ることになるから a_{n-1} 通りである。」

と解釈できる。

微分

- **テイラー展開**と近似式
- ロルの定理
- ニュートンの近似式
- $(f^{\alpha}g^{\beta}/h^{\gamma})'$の公式
- **ライプニッツの公式**
- eに関する別定義とその周辺
- 懸垂線

など

Taylor 展開

適当な定数 a に対して関数 $f(x)$ を $x-a$ の多項式として $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ と展開できると仮定すると，容易に確かめられるように展開係数は $a_n = f^{(n)}(a)/n!$ と定まり[*1]，

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

となる．これを $x=a$ の周りの $f(x)$ の **Taylor(テイラー) 展開**という[*2]．これは $x=a$ の近くで $f(x)$ を多項式によって近似するのに利用することができる．実際，$x=a$ の近くで $(x-a)^n$ は次数 n が増大するほど (絶対値が) 小さくなるので，展開を適当な次数 N で打ち切れば，$f(x)$ の N 次式による近似 (N 次近似)$f(x)\simeq\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ が得られる．なお 1 次近似

$$f(x)\simeq f(a)+f'(a)(x-a)$$

は，関数 $f(x)$ のグラフを $x=a$ における接線で近似することに他ならない．

特に $a=0$ の場合の展開を **Maclaurin(マクローリン) 展開**と呼ぶ．以下に有用な Maclaurin 展開の公式をいくつか挙げる．

$$\begin{aligned}
e^x =& 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots,\\
\sin x =& x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots,\\
\cos x =& 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots,\\
\sinh x \equiv& \frac{e^x-e^{-x}}{2}\\
=& x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots,\\
\cosh x \equiv& \frac{e^x+e^{-x}}{2}\\
=& 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots,\\
\frac{1}{1-x} =& 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots, \qquad (|x|<1\text{ のとき})\\
(1+x)^\alpha =& 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots, \qquad (|x|<1\text{ のとき}, \alpha:\text{実数})
\end{aligned}$$

(具体的な問題に応用するには，左辺のように 1 と無次元の微小量 x を比較する形を作らねばならない, $\alpha=-1, x\to -x$ とすると 1 つ上の式を再現)

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots. \qquad (|x|<1\text{ のとき})$$

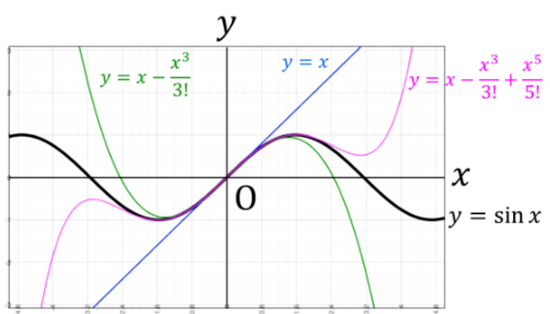
[*1] プリント「3 次関数の対称性」を参照.

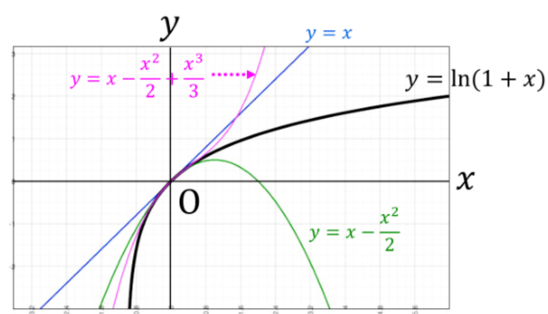
[*2] ただし与えられた関数が実際にこのように展開できるかを判断するには，数学的に込み入った議論を要する．プリント「Taylor の定理」(や「ロル (Rolle) の定理」) を参照.

数学公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

はここから示される[*3]．1 次近似 $\sin x \simeq x$ は，$\pi/6 \simeq 0.524, \sin(\pi/6)=0.5$ を考えると，ある程度大きい角度 x(1 に比べて) に対してまで正確であることが分かる．これは近似の誤差が x の 2 次ではなく 3 次程度であることによると考えられる．$1/(1-x)$ の展開は無限等比級数和の公式としてよく知られている．参考として $y=\sin x$ と $y=\ln(1+x)$ のグラフについて，Maclaurin 展開に基づいて得られる近似曲線を下図に示す．





関連して，物体の運動は経過時間 t の 2 次までの近似では等加速度運動と区別できない：

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(0)+\dot{\boldsymbol{r}}(0)t+\frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{r}}(0)t^2+\cdots.$$

$\sin x = f(x)$ とおくと

$f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ より

$f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1,\ f^{(4)}(0) = 0$ なので，

$$\sin x = f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots\cdots$$

$$= 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \cdots\cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots\cdots$$

$$\therefore \cos x = (\sin x)' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots\cdots$$

$e^x = g(x)$ とおくと

すべての自然数 n に対して $g^{(n)}(x) = g(x)$ $\therefore g^{(n)}(0) = 1$ となるので

$$g(x) = e^x = g(0) + \frac{g'(0)}{1!}x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3 + \frac{g^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots\cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots\cdots$$

$$\therefore g(1) = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots\cdots$$

[*3] 実は図形的に $\sin\theta \le \theta \le \tan\theta$ であることから示すのは循環論法になる．

近似式—— Taylor 展開の応用

ここで Taylor 展開の応用例として，いくつかの近似式を導こう．

■落雷地点までの距離を求める近似式　雷の光を見てから音を聞くまでの時間から，落雷地点までの距離を求めることを考えよう．時刻 $t=0$ に距離 L だけ離れた地点に雷が落ち，時刻 $t=t_1$ に光が，時刻 $t=t_2$ に音が届いたとする．光速を c，音速を V と書くと

$$L = ct_1 = Vt_2$$

なので，光を見てから音を聞くまでの時間は

$$\mathit{\Delta} t \equiv t_2 - t_1 = L\left(\frac{1}{V}-\frac{1}{c}\right)$$

と表される．よって時間差 $\mathit{\Delta} t$ から落雷地点までの距離が

$$L = \frac{\mathit{\Delta} t}{\frac{1}{V}-\frac{1}{c}} = V\mathit{\Delta} t\frac{1}{1-\frac{V}{c}} \tag{1}$$

と求まる．

今，音速 V が光速 c に比べて小さいこと

$$\frac{V}{c} \simeq \frac{3\times 10^2 \mathrm{m/s}}{3\times 10^8 \mathrm{m/s}} \sim 10^{-6}$$

に注目して距離 L を求める近似式を作ると

$$L = V\mathit{\Delta} t\left\{1+\frac{V}{c}+\left(\frac{V}{c}\right)^2+\cdots\right\} \simeq V\mathit{\Delta} t$$

を得る．これは光が一瞬で伝わると考え，$\mathit{\Delta} t$ を音の伝播時間 L/V と見なすことに他ならない．実際，式 (1) において $c\to\infty$ とすると $L\to V\mathit{\Delta} t$ となる．

■Feynman による 3 乗根の近似計算　Feynman はそろばんの使い手と計算の速さを競い合い，1729.03 の 3 乗根を求める問題で近似計算を用いて圧勝した．(R.P. ファインマン，2013，ご冗談でしょう，ファインマンさん (下)(大貫昌子訳)，株式会社朝倉書店，東京，10–15．) その計算方法を数式に起こしてみよう．

近似計算を行うには，答の大まかな値をあらかじめ知っている必要がある．(ここでの近似計算とは，それに対する補正を見出すための方法である．) 今，1 立方フィートは 1728 立方インチであることに注目しよう．これは $12^3 = 1728$ を意味する:

$$1\ \mathrm{ft}^3 = (12\ \mathrm{in})^3 = 1728\ \mathrm{in}^3, \qquad \therefore 12^3 = 1728.$$

1728 は 1729.03 に 1.03 だけ足りない．そこで $(1729.03)^{1/3} \simeq 12$ を第 0 近似として 1.03 について補正すると

$$
\begin{aligned}
(1729.03)^{1/3} =& (1728+1.03)^{1/3} = 12 \times \left(1+\frac{1.03}{1728}\right) \simeq 12 \times \left(1+\frac{1}{1728}\right) \\
\simeq & 12 \times \left(1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{1728}\right) = 12.002\cdots
\end{aligned}
$$

となる．

■近接した 2 点までの距離の差の近似式 ($\frac{\partial R}{\partial x} = \cos\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin\phi}{R}$ の図形的解釈)　xy 面内に平面極座標 (R,ϕ) を導入する．図 3 のように近接した 2 点 A,B をとり，原点からの距離 $\overline{\mathrm{OA}}, \overline{\mathrm{OB}}$ の差 $\Delta R = \overline{\mathrm{BC}}$ を考える．距離 $\overline{\mathrm{BC}}$ を近似的に距離 $\overline{\mathrm{BC'}}$ で置き換えたときの誤差は

$$
\overline{\mathrm{CC'}} = \overline{\mathrm{OC}} - \overline{\mathrm{OC'}} = R(1-\cos\Delta\phi) = O(\Delta\phi^2)
$$

なので，$\Delta\phi$ の 1 次までの近似で

$$
\Delta R \simeq \overline{\mathrm{BC'}} = \Delta x \cos\phi
$$

が成り立つ．またこれは

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial x} =& \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
=& \frac{x}{R} = \cos\phi
\end{aligned}
$$

の図形的解釈となっている．

　さらに図 4 において，$\Delta x, \Delta\phi$ の 1 次までの近似で赤い円弧の長さは

$$
R\Delta\phi = -\Delta x \sin\phi
$$

で与えられる．これは

$$
\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\arctan\frac{y}{x} = \frac{1}{1+(y/x)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{\sin\phi}{R}
$$

の図形的解釈となっている．

■トイレットペーパーの弧長の近似計算　『たけしのコマ大数学科』第 10 回 (2006 年 6 月 22 日放送) では次のような問題が扱われた．

> 芯の直径が $2a$ =4cm の，直径 $2b$ =11cm のトイレットペーパーの全長が $L = 6\times10^3$cm のとき，このトイレットペーパーの巻き数を見積もれ．

ここではトイレットペーパーのロールの断面が図 5 のような螺旋

$$
r = A\theta + \mathrm{const}, \qquad (0 \le \theta \le \theta_{\max}) \tag{2}
$$

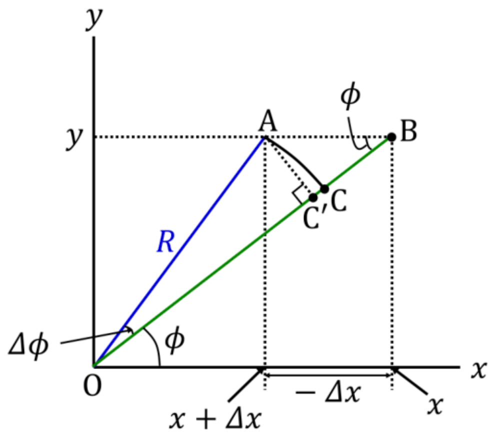


図 1　$\frac{\partial R}{\partial x}=\cos\phi$ の図形的解釈

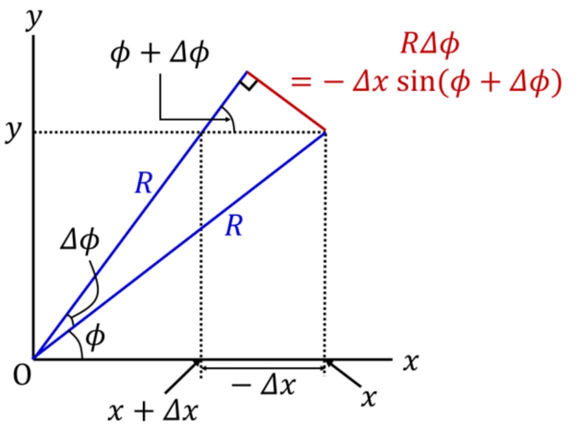


図 2　$\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\frac{\sin\phi}{R}$ の図形的解釈

を描くと仮定し，ロールの 1 周が円に近いことに着目した近似計算を行い，巻き数を求めよう．

螺旋 (2) は点 $(r,\theta)=(a,0),(b,\theta_{\max})$ を通るので $\mathrm{const}=a$ と定まり，

$$r=A\theta+a,\qquad b=A\theta_{\max}+a$$

を得る．全長 L に対する条件から未知数 A を定めれば，ここからトイレットペーパーの巻き数

$$N=\frac{\theta_{\max}}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\frac{b-a}{A} \tag{3}$$

が求まる．

螺旋上の線要素は

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}r^2+(r\mathrm{d}\theta)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{r}{A}\right)^2}\mathrm{d}r\qquad(\because\ \mathrm{d}r=A\mathrm{d}\theta)$$

なので全長は

$$L=\int_0^{\theta_{\max}}\sqrt{1+\left(\frac{r}{A}\right)^2}\mathrm{d}r$$

と表される．この積分は $r/A=\sinh\phi$ と変数変換すると実行できる．ここではトイレットペーパーにおいて螺旋の 1 周はほぼ円であること，すなわち

$$\frac{r}{A}\ll 1$$

と考えられることに注目して

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\left(\frac{r}{A}\right)^2}\mathrm{d}r=\frac{r}{A}\sqrt{1+\left(\frac{A}{r}\right)^2}\mathrm{d}r\simeq\frac{r}{A}\mathrm{d}r$$

と近似する．すると

$$L\simeq\frac{b^2-a^2}{2A}$$

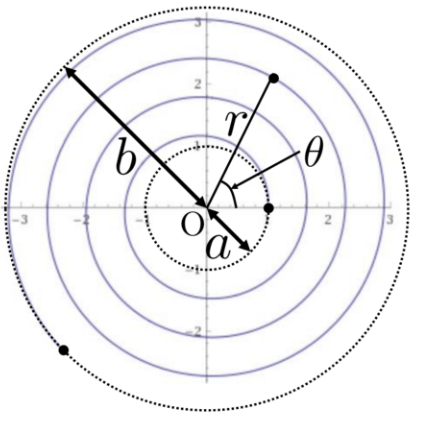


図 3　トイレットペーパーのロールが描く螺旋

となるので巻き数 (3) が

$$N \simeq \frac{L}{\pi(a+b)} = \frac{6 \times 10^3\ \mathrm{cm}}{\pi \times 7.5\ \mathrm{cm}} \simeq 255 \tag{4}$$

と求まる．

なお上式 (4) は，ロールの 1 周の平均的な長さ $2\pi \times \frac{a+b}{2} = \pi(a+b)$ で全長 L を割ると巻き数 N が得られることを意味している．

Taylor の定理

Taylor の定理

関数 f について，開区間 (a,b) で $f^{(n)}$ が存在し，閉区間 $[a,b]$ で $f^{(n-1)}$ が連続ならば，

$$\begin{aligned} f(b) =& f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} \\ &+ \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n, \qquad a < c < b \end{aligned}$$

なる c が少なくとも 1 つ存在する．

証明

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{k}{n!}(b-a)^n$$

すなわち

$$f(b) - \left\{ f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{k}{n!}(b-a)^n \right\} = 0 \tag{1}$$

となるように k を定め，式 (1) の左辺で a の代わりに x とおいて得られる関数

$$\psi(x) = f(b) - \left\{ f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(b-x) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + \frac{k}{n!}(b-x)^n \right\}$$

を考えると，式 (1) から $\psi(a) = 0$，また $\psi(b) = 0$．そして，ψ は f の第 $(n-1)$ 次導関数までと多項式 $(b-x)^l$ との積の和だから，ψ は $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能である．ゆえに，*Rolle* の定理より[*4]，

$$\psi'(c) = 0, \qquad a < c < b \text{ となる } c \text{ が存在する．} \tag{2}$$

実際に $\psi'(x)$ を計算すると

$$\begin{aligned} \psi'(x) =& -\left[f'(x) + \{f''(x)(b-x) - f'(x)\} + \left\{ \frac{f'''(x)}{2!}(b-x)^2 - \frac{f''(x)}{1!}(b-x) \right\} + \cdots \right] \\ & - \left[\left\{ \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-2)!}(b-x)^{n-2} \right\} - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}k \right] \\ =& -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}\{f^{(n)}(x) - k\}. \end{aligned}$$

[*4] プリント「ロル (Rolle) の定理」を参照．

式 (2) から

$$-\frac{(b-c)^{n-1}}{(n-1)!}\{f^{(n)}(c)-k\}=0.$$

$b\neq c$ より $f^{(n)}(c)=k, a<c<b$ が得られる．よって，

$$\begin{aligned} f(b)=&f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}\\ &+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n, \qquad a<c<b \end{aligned}$$

なる c が存在する．(証明終)

$f(x)$ が n 次の整式のとき，$f^{(n)}(x)$ は定数となるから

$$f^{(n)}(c)=f^{(n)}(a)$$

となる．したがって，*Taylor* の定理を適用して

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

と表すことができる．上の展開式で，k 次の項を塊にして

$$\begin{aligned} f(x)=&f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}\\ &+(x-a)^k\left\{\frac{f^{(k)}(a)}{k!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-k}\right\} \end{aligned}$$

と変形すれば，整式 $f(x)$ が $(x-a)^k$ で割り切れ，$(x-a)^{k+1}$ では割り切れない条件 (言い換えると整方程式 $f(x)=0$ が k 重解を持つ条件) は

$$f(a)=f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(k-1)}(a)=0, \qquad f^{(k)}(a)\neq 0$$

であることが分かる．

ところで関数の *Taylor* 展開は実数の小数展開と似ていること大である．たとえば $\frac{17}{8}=2.125$ であるが，これは

$$\frac{17}{8}=2+1\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^1+2\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2+5\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3$$

の意味である．割り算を実行する過程から考えて $\frac{17}{8}=2+\frac{1}{8}$ であって $\frac{17}{8}\fallingdotseq 2$ なのだが，余った $\frac{1}{8}$ を $\frac{1}{10}$ という単位で測ると

$$\frac{17}{8}=2+\frac{1}{10}+\frac{2}{80}.$$

今度は余った $\frac{2}{80}$ を $\frac{1}{100}$ の単位で測って，……ということを繰り返していることが分かる．

$$\begin{array}{r@{}l} & \;\;2 \\ 8\big) & \overline{17} \\ & \underline{16} \\ & \;\;1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r@{}l} & \;\;2.1 \\ 8\big) & \overline{17} \\ & \underline{16} \\ & \;\;1\,0 \\ & \underline{\;\;\;8} \\ & \;\;\;2 \end{array}$$

また，$\sqrt{2}$ を小数第 2 位まで求めると $\sqrt{2} = 1.41\cdots$ であることは，

$$\sqrt{2} = 1 + 4 \cdot \left(\frac{1}{10}\right) + 1 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \alpha \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3, \qquad 0 < \alpha < 1$$

という形に書けるということであり，ここで，α についての値は問題ではなく，ただ $\alpha\left(\frac{1}{10}\right)^3$ は「他の項に比べて桁違いに小さい」ということが大切なのである．

$(1+x)^5, \log(1+x), \sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$ の 1 次近似

$|x|$ が十分小さいとき，$f(x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)x$ が成り立つ．次の関数の近似式を作れ．

(1) $(1+x)^5$　(2) $\dfrac{1}{1-x}$　(3) $\log(1+x)$　(4) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)$　(5) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$

【解】

与えられた関数を $f(x)$ とおく．

(1)

$$f'(x)=5(1+x)^4, \qquad f(0)=1, \qquad f'(0)=5$$

であるから，

$$(1+x)^5 \fallingdotseq 1+5x.$$

(2)

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}, \qquad f(0)=1, \qquad f'(0)=1$$

であるから，

$$\frac{1}{1-x} \fallingdotseq 1+x.$$

(3)

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}, \qquad f(0)=0, \qquad f'(0)=1$$

であるから，

$$\log(1+x) \fallingdotseq x.$$

(4)

$$f'(x)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right), \qquad f(0)=\frac{1}{2}, \qquad f'(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

であるから，

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right) \fallingdotseq \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

(5)

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}, \qquad f(0)=1, \qquad f'(0)=2$$

であるから，

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right) \fallingdotseq 1+2x.$$

2 次近似

$f(x) \fallingdotseq f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$ における 2 次の補正項まで計算すると，例えば

(1) $f''(x) = 20(1+x)^3$，$f''(0) = 20$ より $(1+x)^5 \fallingdotseq 1 + 5x + 10x^2$.

(2) $f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$，$f''(0) = 2$ より $\frac{1}{1-x} \fallingdotseq 1 + x + x^2$.

(3) $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$，$f''(0) = -1$ より $\log(1+x) \fallingdotseq x - \frac{1}{2}x^2$.

［参考］

$|x|$ が十分小さいとき，

$$(1+x)^p \fallingdotseq 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2. \qquad (p \text{ は実数})$$

これを用いると，

$$(1)\ (1+x)^5 \fallingdotseq 1 + 5x + 10x^2, \qquad (2)\ \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \fallingdotseq 1 + x + x^2.$$

$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$に関する不等式

$x>0$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$1-\frac{1}{2}x<\frac{1}{\sqrt{1+x}}<1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2$$

【証明】$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\left(1-\frac{1}{2}x\right)$ とおくと

$$f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{(1+x)^3}}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}}\right\}$$

$x>0$ では $\sqrt{(1+x)^3}>1$ より $f'(x)>0$ である。$f(x)$ は $x\geqq 0$ で連続だから、$f(x)$ は $x\geqq 0$ の範囲で増加する。

よって　$x>0$ ならば　$f(x)>f(0)=0$

ゆえに　$1-\frac{1}{2}x<\frac{1}{\sqrt{1+x}}$　……①

$g(x)=\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2\right)-\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ とおくと

$$g'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x+\frac{1}{2\sqrt{(1+x)^3}}$$

$$g''(x)=\frac{3}{4}-\frac{3}{4\sqrt{(1+x)^5}}=\frac{3}{4}\left\{1-\frac{1}{\sqrt{(1+x)^5}}\right\}$$

$x>0$ のとき $\sqrt{(1+x)^5}>1$ より $g''(x)>0$ である。$g'(x)$ は $x\geqq 0$ で連続だから、$g'(x)$ $\cancel{g(x)}$ は $x\geqq 0$ の範囲で増加する。

ゆえに、$x>0$ のとき　$g'(x)>g'(0)=0$

よって、$g(x)$ は $x\geqq 0$ で単調に増加する。

したがって、$x>0$ のとき　$g(x)>g(0)=0$

ゆえに　$\frac{1}{\sqrt{1+x}}<1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2$　……②

①, ②から　$1-\frac{1}{2}x<\frac{1}{\sqrt{1+x}}<1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2$

注　連続関数では $x>a$ で $f'(x)>0$ ならば、$x\geqq a$ で(端を含めて) $f(x)$ が増加関数になる。

普通の関数は、定義域内で連続($f(a)$ が存在すれば $x=a$ で連続)だから、解答のようにいちいち連続性を断らなくてもよい。つまり、$x>a$ で $f'(x)>0$ から、すぐ $x\geqq a$ で増加といってよい。

テイラー展開

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots,$$

$$\therefore\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\cdots$$

平方根の2次近似式

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-(1+ax)}{x^2}=b$ が成り立つように、定数 a, b を定め、その結果から、$|x|$ が小さいときに使われる $\sqrt{1+x}$ の近似式 A を作れ。またこの近似式 A について、次の問に答えよ。

(1) $|x|$ が小さいとき、A, $1+ax$, $\sqrt{1+x}$ を大きさの順に並べよ。

(2) $|x|$ が小さいとき、A, $1+ax$ のどちらの方が、$\sqrt{1+x}$ のよい近似値を与えるか。

【解】 $\displaystyle\frac{\sqrt{1+x}-(1+ax)}{x^2}=\frac{(1+x)-(1+ax)^2}{x^2\{\sqrt{1+x}+(1+ax)\}}=\frac{1-2a-a^2x}{x(\sqrt{1+x}+1+ax)}$

$x\to 0$ のとき、分母 $\to 0$ だから、上式が有限の極限値 b をとれば、 分子 $\to 0$

すなわち $1-2a=0$ でなければならない。このとき

$$上式=\frac{-a^2}{\sqrt{1+x}+1+ax}\to -\frac{a^2}{2}=-\frac{1}{8} \qquad \therefore \quad a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{8}$$

さらに、極限の式の意味から

$x\fallingdotseq 0$ のとき $\displaystyle\frac{\sqrt{1+x}-(1+ax)}{x^2}\fallingdotseq b$ だから $\quad \sqrt{1+x}\fallingdotseq 1+ax+bx^2$

よって $\quad A=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2$

(1) $\displaystyle\delta=\sqrt{1+x}-(1+ax)=\frac{-a^2x^2}{\sqrt{1+x}+1+ax}$ $\left(a=\dfrac{1}{2}\text{ として}\right)$ ……①

また

$\displaystyle\sqrt{1+x}-A=\frac{1+x-A^2}{\sqrt{1+x}+A}$, $A^2=1+x-\dfrac{1}{8}x^3+\dfrac{1}{64}x^4$ から

$$\varepsilon=\sqrt{1+x}-A=\frac{x^3}{8(\sqrt{1+x}+A)}\left(1-\frac{1}{8}x\right) \qquad ……②$$

$x\fallingdotseq 0$ のとき、δ は $-x^2$ と、ε は x^3 と同符号。また、$A<1+ax$ は明らかだから

$x>0$ のとき $\quad A<\sqrt{1+x}<1+ax$

$x<0$ のとき $\quad \sqrt{1+x}<A<1+ax$

(2) $x\fallingdotseq 0$ のとき ①, ② から $\quad \delta\fallingdotseq -\dfrac{1}{8}x^2$, $\varepsilon\fallingdotseq\dfrac{1}{16}x^3$

$x\fallingdotseq 0$ では $|x^3|<|x^2|$ と考えられるから $\quad |\varepsilon|<|\delta|$

よって、A の方がよい近似である。

テイラー展開

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots,$$

$$\therefore \sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots$$

ロルの定理

(1) 実数係数の n 次方程式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$ の解がすべて相異なる実数解であるとき、$f'(x)=0$ の解もまたすべて相異なる実数解であることを証明せよ。

(2) $f(x)=(x-a)^2(x-b)^3$ $(0<a<b)$ とするとき、方程式 $f'(x)=0$ は相異なる3実数解 α_1, α_2, α_3 $(\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3)$ を有し、方程式 $f''(x)=0$ は相異なる3実数解 β_1, β_2, β_3 $(\beta_1<\beta_2<\beta_3)$ を有することを証明し、α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 を大きさの順に並べよ。

【Rolle の定理】

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で、開区間 (a, b) で微分可能であるとする。
もし、$f(a)=f(b)$ であれば

$$f'(c)=0,\ a<c<b$$

であるような c が少なくとも1つ存在する。

【証】

(1) $f(x)=0$ の解を $x=\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ とすると、$f(x)$ は微分可能よりロルの定理から

$$f(\alpha_i)=0,\ f(\alpha_{i+1})=0 \text{ より } f'(\beta_i)=0 \quad (\alpha_i<\beta_i<\alpha_{i+1})$$

なる β_i が存在する。ただし、$i=1, 2, \cdots, n-1$ とする。

すなわち、$f'(x)=0$ は異なる実数解 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-1}$ をもつ。$f'(x)=0$ は $n-1$ 次だから、それが全部の解である。

(2) $f'(x)=2(x-a)(x-b)^3+3(x-a)^2(x-b)^2=(x-a)(x-b)^2(5x-3a-2b)$

より $f'(x)=0$ は3つの解 a, b, $\dfrac{3a+2b}{5}$ をもち、$0<a<b$ であるから

$$\alpha_1=a,\ \alpha_2=\frac{3a+2b}{5},\ \alpha_3=b$$

したがって、ロルの定理から $f''(x)=0$ は α_1 と α_2 の間、α_2 と α_3 の間に解をもつ。

また、b は $f'(x)=0$ の2重解であるから b は $f''(x)=0$ の単解である。$f''(x)=0$ は3次方程式より解は、これらの3つの解に限る。

よって　$\alpha_1<\beta_1<\alpha_2<\beta_2<\alpha_3=b=\beta_3$

方程式の解の近似式

$(x-5)(x-3)=h$ において、h の絶対値が小さいとき、この方程式の2つの実数解を、h の1次式で近似せよ。

【解】$(x-5)(x-3)=h$ より　$x^2-8x+15-h=0$

x について解くと　$x=4\pm\sqrt{1+h}$

$h\fallingdotseq 0$ のとき　$\sqrt{1+h}\fallingdotseq 1+\frac{1}{2}h$　だから

$$x=4\pm\left(1+\frac{1}{2}h\right)=\begin{cases}5+\frac{1}{2}h\\[4pt]3-\frac{1}{2}h\end{cases}$$

参考　上の解法は2次方程式を解いて求めているから、3次方程式以上には通用しない。

そこで、別解を示す。

5に近い解を $5+\varepsilon$ とおき、これを方程式 $(x-5)(x-3)=h$ に代入すると

$$\varepsilon(\varepsilon+2)=h\quad\therefore\quad h=2\varepsilon+\varepsilon^2$$

ε は小さい量であるから、ε^2 の項は ε に比べてきわめて小さい。

したがって、その項を省略すると

$$h\fallingdotseq 2\varepsilon\quad\therefore\quad \varepsilon\fallingdotseq\frac{1}{2}h$$

よって、5に近い解の近似値として $5+\frac{1}{2}h$ を得る。

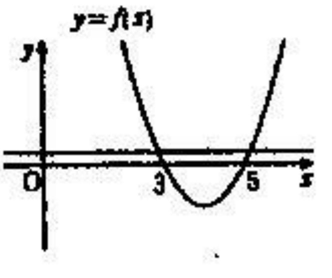
同様な考えで、3に近い解の近似値は $3-\frac{1}{2}h$ となる。

実はこの解法は $(x-5)(x-3)$ を $(x-5)$ で Taylor 展開した $h=2(x-5)+(x-5)^2$ において、$x\fallingdotseq 5$ であるとき、$(x-5)^2$ を無視したものにほかならない。

次に、$f(x)$ を $x=a$ の近くにおいて、x の1次式で近似することは

「$x=a$ の近くで、曲線 $y=f(x)$ が点 A$(a,\ f(a))$ における接線とほぼ一致すると考えられる。」

このことを用いて調べてみる。

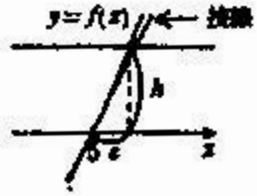


$y=f(x)=(x-5)(x-3)$ のグラフは右の図のようになるが、方程式 $f(x)=h$ の解は、このグラフと直線 $y=h$ のグラフの交点の x 座標である。

5に近い解の場合、$x=5$ の近くの $y=f(x)$ のグラフを点 $(5,\ 0)$ を通るこの曲線の接線で近似すると、

解を $5+\varepsilon$ とすれば

$f'(5) \fallingdotseq \dfrac{h}{\varepsilon}$　　∴ $5+\varepsilon \fallingdotseq 5+\dfrac{h}{f'(5)}$



ここで、$f'(x)=(x-3)+(x-5)$ だから

$f'(5)=2$

よって、5に近い解の近似値は　$5+\dfrac{h}{2}$

なお、3に近い解の近似値は　$3-\dfrac{h}{2}$　となる。

今度は方程式の解の近似値における「Newtonの方法」を用いてみる。

$f(x)=(x-5)(x-3)-h$ とおくと、

$f'(x)=(x-3)+(x-5)$

5，3に近い解はそれぞれNewtonの近似式より

$$5-\frac{f(5)}{f'(5)}=5-\frac{-h}{2}=5+\frac{h}{2},\quad 3-\frac{f(3)}{f'(3)}=3-\frac{h}{2}$$

となる。

参考　a が方程式 $f(x)=0$ の解 α に近いとき、$\alpha=a+h$ に対する $f(a+h)$ の1次の近似式 $f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h$ を考えると、$f(a+h)=0$ だから、$f(a)+f'(a)h\fallingdotseq 0$

$$\therefore\quad h\fallingdotseq -\frac{f(a)}{f'(a)}$$

$$\alpha\fallingdotseq a-\frac{f(a)}{f'(a)}$$　……… ニュートンの近似式

ただし、α，a を含む区間で $f''(x)$ が一定符号で、$f(a)\cdot f''(a)>0$ であるように a をとる。

問　x の3次方程式　$(x-1)(x-2)(x-5)=h$（h は絶対値の小さい実定数）はそれぞれ1，2，5に近い3つの実数解をもつ。このことを既知として、その3実解の近似式を h の1次式の形で求めよ。

（京都府医大）

答　$1+\dfrac{h}{4}$，$2-\dfrac{h}{3}$，$5+\dfrac{h}{12}$

ニュートンの近似法

> a を方程式 $f(x)=0$ の解 α の十分正確な近似値とするとき、
>
> $$a-\frac{f(a)}{f'(a)} \quad \text{(ニュートンの近似式)}$$
>
> は、一般に a よりもよい近似である。

証明 $\alpha=a+h$ とおくと、$|h|$ は十分小さいと考えてよいから、1次の近似式を考えて

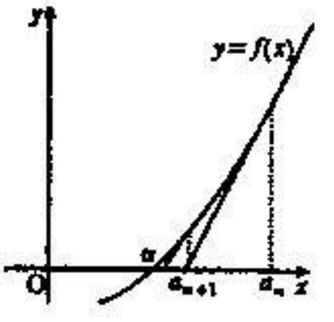
$$f(\alpha)=f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h \qquad \cdots\cdots☆$$

$\alpha=a+h$ は $f(x)=0$ の解だから　$f(a+h)=0$

よって　$f(a)+f'(a)h\fallingdotseq 0$　　$\therefore$　$h\fallingdotseq -\dfrac{f(a)}{f'(a)}$

したがって　$\alpha=a+h\fallingdotseq a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}$

参考 近似式は $x=a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}$ とおくと、$-f(a)=f'(a)(x-a)$ となるから、$x=a$ での接線 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ の x 軸との交点 a_1 を解の近似値にとったものである。



この公式を繰り返し使うと、すなわち、$a_1=a$ として

$a_{n+1}=a_n-\dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$ なる漸化式を用いると、上の定理から、より精度の高い近似値が求められる。

ただこの場合、厳密には、$f(\alpha)=0$，$f'(\alpha)\neq 0$ で $f''(\alpha)$ が連続であることが必要である。

このとき、α を含むある区間が存在し、a をこの区間内にとれば、ニュートン法において $n\to\infty$ のとき、数列 $\{a_n\}$ は α に収束する。

問題 (1) 正の数 a の平方根を求めるために $\sqrt{a}$ より大きい数を α_1 とする。

次に、$f(x)=x^2-a$，$h_1=\dfrac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}$ とおくとき、$\alpha_2=\alpha_1-h_1$ は α_1 より、よい近似を与える。その理由を $f(x)$ のグラフを書いて説明せよ。

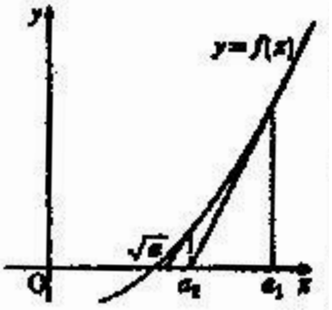
(2) $\alpha_2=\dfrac{1}{2}\left(\alpha_1+\dfrac{a}{\alpha_1}\right)$ となることを示せ。

また、$a=5$ のとき $\alpha_1=2.5$ として、この方法によって α_2 よりさらによい近似値を求めよ。

【解】(1)　$y=f(x)$ 上の $x=\alpha_1$ である点 A$(\alpha_1,\ f(\alpha_1))$ とする。点 A における接線の方程式は　$y-f(\alpha_1)=f'(\alpha_1)(x-\alpha_1)$

この接線が x 軸と交わる点の x 座標を β とすると

$0-f(\alpha)=f'(\alpha_1)(x-\alpha_1)$



$f'(\alpha_1)\neq 0$ より　$\beta=\alpha_1-\dfrac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}\ (=\alpha_1-h_1)$

ゆえに　$\beta=\alpha_2$

放物線 $y=f(x)$ は下に凸であり、グラフより x 軸上の 3 点 $(\alpha_1,\ 0)$, $(\alpha_2,\ 0)$, $(\sqrt{a},\ 0)$ の位置関係から

$$\sqrt{a}<\alpha_2<\alpha_1$$

よって、α_2 は α_1 より $\sqrt{a}$ のよりよい近似値を与える。

(2)　$f'(x)=2x$ より　$\alpha_2=\alpha_1-\dfrac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}=\alpha_1-\dfrac{\alpha_1{}^2-a}{2\alpha_1}=\dfrac{1}{2}\left(\alpha_1+\dfrac{a}{\alpha_1}\right)$

よって、$\alpha_1=2.5$ のとき　$\alpha_2=\dfrac{1}{2}\left(2.5+\dfrac{5}{2.5}\right)=2.25$

$\alpha_2>\sqrt{5}$ より α_1 から α_2 を得た方法と同様にして、α_2 からよりよい近似値 α_3 が得られる。

$\alpha_3=\dfrac{1}{2}\left(2.25+\dfrac{5}{2.25}\right)=2.2361\cdots$　　　　答　2.236

$$\left(\frac{f^\alpha g^\beta}{h^\gamma}\right)' = \frac{f^\alpha g^\beta}{h^\gamma}\left(\alpha\frac{f'}{f} + \beta\frac{g'}{g} - \gamma\frac{h'}{h}\right) \quad \text{(準公式)}$$

を示せ．ただし関数$f(x), g(x), h(x)$の引数xを省略しており，プライムはxによる微分を表す．

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f^\alpha g^\beta}{h^\gamma}\right)' =& (f^\alpha g^\beta h^{-\gamma})' \\
=& \alpha f^{\alpha-1} f' g^\beta h^{-\gamma} + f^\alpha \beta g^{\beta-1} g' h^{-\gamma} + f^\alpha g^\beta (-\gamma) h^{-\gamma-1} h' \\
=& \frac{f^\alpha g^\beta}{h^\gamma}\left(\alpha\frac{f'}{f} + \beta\frac{g'}{g} - \gamma\frac{h'}{h}\right) \\
=& \frac{f^{\alpha-1} g^{\beta-1}}{h^{\gamma+1}}(\alpha f' g h + \beta f g' h - \gamma f g h')
\end{aligned}$$

参考 (別証)

$$\begin{aligned}
y =& \frac{f^\alpha g^\beta}{h^\gamma}, \\
\log|y| =& \alpha\log|f| + \beta\log|g| - \gamma\log|h|, \\
\frac{y'}{y} =& \alpha\frac{f'}{f} + \beta\frac{g'}{g} - \gamma\frac{h'}{h}, \\
y' =& y\left(\alpha\frac{f'}{f} + \beta\frac{g'}{g} - \gamma\frac{h'}{h}\right) \\
=& \frac{f^\alpha g^\beta}{h^\gamma}\left(\alpha\frac{f'}{f} + \beta\frac{g'}{g} - \gamma\frac{h'}{h}\right)
\end{aligned}$$

一般化

$$\begin{aligned}
y =& {f_1}^{\alpha_1} {f_2}^{\alpha_2} \cdots {f_n}^{\alpha_n}, \\
\log|y| =& \alpha_1\log|f_1| + \alpha_2\log|f_2| + \cdots + \alpha_n\log|f_n|, \\
\frac{y'}{y} =& \alpha_1\frac{{f_1}'}{f_1} + \alpha_2\frac{{f_2}'}{f_2} + \cdots + \alpha_n\frac{{f_n}'}{f_n}, \\
y' =& y\left(\alpha_1\frac{{f_1}'}{f_1} + \alpha_2\frac{{f_2}'}{f_2} + \cdots + \alpha_n\frac{{f_n}'}{f_n}\right) \\
=& ({f_1}^{\alpha_1} {f_2}^{\alpha_2} \cdots {f_n}^{\alpha_n})\left(\alpha_1\frac{{f_1}'}{f_1} + \alpha_2\frac{{f_2}'}{f_2} + \cdots + \alpha_n\frac{{f_n}'}{f_n}\right)
\end{aligned}$$

ライプニッツの公式（利用）

u, v はともに x の関数とすると

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + {}_n\mathrm{C}_1 u^{(n-1)}v' + {}_n\mathrm{C}_2 u^{(n-2)}v'' + \cdots + uv^{(n)} \qquad \text{ライプニッツの公式}$$

が成り立つ．

説明

　導関数 $(uv)', (uv)'', (uv)'''$ を逐次的に計算すると，下図のように係数が Pascal の三角形を作ることが予想できる (Leibniz の公式)．その厳密な証明には数学的帰納法を用いれば良い．

$$(uv)' = 1u'v + 1uv'$$

$$(uv)'' = 1u''v + 2u'v' + 1uv''$$

$$(uv)''' = 1u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + 1uv'''$$

$$\vdots$$

【証明】

　n についての数学的帰納法による．

　$n = 1$ のとき $(uv)' = u'v + uv'$ で成立．

　$n = k$ のとき与式 $(uv)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i u^{(k-i)} v^{(i)}$ が成り立つとすると，

$$ {}_k\mathrm{C}_i + {}_k\mathrm{C}_{i-1} = {}_{k+1}\mathrm{C}_i \tag{☆}$$

を用いて，

$$\begin{aligned}
(uv)^{(k+1)} &= \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i (u^{(k-i)}v^{(i)})' \\
&= \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i u^{(k+1-i)}v^{(i)} + \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i u^{(k-i)}v^{(i+1)} \\
&= \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i u^{(k+1-i)}v^{(i)} + \sum_{i=1}^{k+1} {}_k\mathrm{C}_{i-1} u^{(k+1-i)}v^{(i)}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1} {}_{k+1}\mathrm{C}_i u^{(k+1-i)} v^{(i)} \qquad (\text{式}\ (☆))$$

とできるので，$n = k+1$ のときも命題は成り立つ．

公式 (☆) の復習　この関係は直接の計算によって確かめられるが，次のように意味付けして解釈することもできる．すなわち，$(k+1)$ 両編成の列車のうち i 両を選んで色を塗る方法の総数 ${}_{k+1}\mathrm{C}_i$ のうち，

- 先頭の 1 両を塗る方法は ${}_k\mathrm{C}_{i-1}$ 通り，
- 先頭の 1 両を塗らない方法は ${}_k\mathrm{C}_i$ 通り

である．この公式はまた，パスカルの三角形において k 段目の数から $(k+1)$ 段目の数を得る規則になっている (下図)．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
{}_k\mathrm{C}_{i-1} \arrow[dr] & & {}_k\mathrm{C}_i \arrow[dl] \\
& {}_{k+1}\mathrm{C}_i &
\end{tikzcd}$$

　なお類似の公式に

$${}_k\mathrm{C}_i \times {}_i\mathrm{C}_1 = {}_k\mathrm{C}_1 \times {}_{k-1}\mathrm{C}_{i-1}$$

がある．これは

- k 人の生徒から i 人の学級委員を選び，その中から 1 人のリーダーを選ぶ方法 (左辺)
- k 人の生徒から 1 人のリーダーを選び，
  残りの $(k-1)$ 人の中から (リーダーでない) 学級委員 $(i-1)$ 人を選ぶ方法 (右辺)

が等しいことを意味している．

和を具体的に書き出すと

$$(uv)^{(k)} = u^{(k)}v + {}_k\mathrm{C}_1 u^{(k-1)}v' + {}_k\mathrm{C}_2 u^{(k-2)}v'' + \cdots + uv^{(k)}$$

を微分すると

$$\begin{array}{rl|c|c|c|c|c|c}
(uv)^{(k+1)} = & & u^{(k+1)}v & +{}_k\mathrm{C}_1 u^{(k)}v' & +{}_k\mathrm{C}_2 u^{(k-1)}v'' & +\cdots & +u'v^{(k)} & \\
& & & +u^{(k)}v' & +{}_k\mathrm{C}_1 u^{(k-1)}v'' & +\cdots & +{}_k\mathrm{C}_{k-1}u'v^{(k)} & +uv^{(k+1)} \\
= & & u^{(k+1)}v & +{}_{k+1}\mathrm{C}_1 u^{(k)}v' & +{}_{k+1}\mathrm{C}_2 u^{(k-1)}v'' & +\cdots & +{}_{k+1}\mathrm{C}_k u'v^{(k)} & +uv^{(k+1)}
\end{array}$$

となる．

演習 1　$y = xe^{-x}$ の n 次導関数を求めよ．

演習 2　$y = x^3 e^x$ の n 次導関数を求めよ．

演習 3　$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ のとき，$(1-x^2)f'(x) = xf(x)$ が成り立つことを示し，この式を n 回微分して

$$(1-x^2)f^{(n+1)}(x) = (2n+1)xf^{(n)}(x) + n^2 f^{(n-1)}(x) \qquad (n \geq 1)$$

が成り立つことを示せ．

<u>参考</u>
指数関数を含む微分は

$$\left(f(x)e^{kx}\right)^{(n)} = \left\{f^{(n)} + {}_n\mathrm{C}_1 f^{(n-1)}k + +{}_n\mathrm{C}_2 f^{(n-1)}k^2 + \cdots + fk^n\right\}e^{kx}$$

のように，指数e^{kx}を共通因子として括れる．

Leibniz ルールの視覚化

下図のように縦の長さを f，横の長さを g とする長方形を考えると，その微小変化 $\Delta f, \Delta g$ に伴う長方形の面積 fg の変化量は

$$\Delta(fg) \simeq \Delta f \times g + f \times \Delta g \tag{1}$$

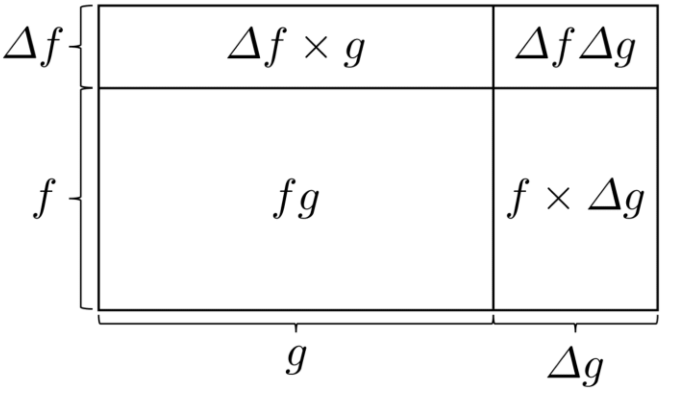
となっていることが図から読み取れる．特に辺の長さ f, g が時刻 t の関数である場合，長さの変化 $\Delta f, \Delta g$ を時間変化 Δt に伴うものと見なすと

$$\begin{aligned}\Delta f =& f'\Delta t + O(\Delta t^2),\\ \Delta g =& g'\Delta t + O(\Delta t^2)\end{aligned}$$

なので Leibniz ルールが

$$\Delta(fg) = (f'g + fg')\Delta t + O(\Delta t^2), \qquad \therefore (fg)' = f'g + fg' \tag{2}$$

と説明される．



さらに長方形が一辺 t の正方形である場合を考えれば，これは

$$\mathrm{d}(t^2) = 2t\mathrm{d}t, \qquad (t^2)' = 2t$$

の図形的解釈になっている．同様に一辺 t の立方体の体積変化を考えれば

$$\mathrm{d}(t^3) = 3t^2\mathrm{d}t, \qquad (t^3)' = 3t^2$$

を得る．

■一般的な注意　ここでは微小量 $\Delta f, \Delta g$ がどれだけ小さな量であるかを問題にしていない．実際，面積変化の式 (1) は $\Delta f, \Delta g$ が単に微小であれば成り立つものである．従って長さの変化 $\Delta f, \Delta g$ を特に微小時間 Δt の経過に伴う変化量と考えることが可能となり，Leibniz ルール (2) が導かれた．そしてここでは微小量 $\Delta f, \Delta g$ がどれだけ小さな量であるかということよりもむしろ，$\Delta f, \Delta g$ は微小時間 Δt の間の f, g の変化量であるという微小量の間の関係が重要であることが分かる．

高次導関数

→「ライプニッツの公式利用」参照

$(\sin x)^{(n)}$, $(xe^x)^{(n)}$, $(uv)^{(n)}$ を求めよ。

ただし u, v はともに x の関数とする。

① $(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$(\sin x)'' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$
$= \sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

$(\sin x)''' = \cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$
$= \sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

$\vdots$

$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$ （予想）

② $(xe^x)' = e^x + xe^x$

$(xe^x)'' = e^x + e^x + xe^x$
$= 2e^x + xe^x$

$$\boxed{\begin{aligned}&(fe^x)' \\ &= (f'+f)e^x\end{aligned}}$$

$(xe^x)^{(n)} = ne^x + xe^x$ ---(*) （予想）

(*)を数学的帰納法にて証明

(i) $n=1$ のとき

$(xe^x)^{(n)} = (xe^x)'$
$= (x+1)e^x = (x+n)e^x$ より (*) は成立

(ii) $n=k$ のとき (*) が成立すると仮定すると

$(xe^x)^{(k)} = (x+k)e^x$

$n=k+1$ のとき $(xe^x)^{(k+1)} = ((x+k)e^x)'$
$= 1\cdot e^x + (x+k)e^x$
$= \{x+(k+1)\}e^x$ なので云々.

③ $(uv)' = u'v + uv'$

$(uv)'' = u''v + u'v' + u'v' + uv''$
$= u''v + 2u'v' + uv''$

$\vdots$

$(uv)^{(n)} = {}_nC_0 u^{(n)}v + {}_nC_1 u^{(n-1)}v'$
$+ {}_nC_2 u^{(n-2)}v'' + \cdots + {}_nC_n uv^{(n)}$ （予想）

→証明別紙

〈参考〉

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1 ……

${}_{n+1}C_k = {}_nC_{k-1} + {}_nC_k$

${}_nC_0$ ${}_nC_1$ ${}_nC_2$ … ${}_nC_{k-1}$ ${}_nC_k$ … ${}_nC_n$

${}_{n+1}C_0$ ${}_{n+1}C_k$

〈参考〉

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots$

$\cos x$
$= (\sin x)' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\cdots$

〈参考〉

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots$

e に関する別定義とその周辺

数列 $\{a_n\}$ $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ において (n は自然数)

(i) 単調増加性 $a_n < a_{n+a}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

(ii) 上に有界 $a_n < 3$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

なる性質を導けば，数列 $\{a_n\}$ は収束する．そこで，この極限を e と定義する．

(i) の証明 二項定理より

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &=1 + {}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{n}\right) + {}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &=1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n!}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} \\ &=1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

n を $(n+1)$ で置き換えると

$$\begin{aligned} a_{n+1} =&1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \cdots \\ &+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

式 (1),(2) の (最) 右辺を比較すると，第 3 項以降は式 (2) の各項が対応する式 (1) の項より大きく，しかも式 (2) の方が項が 1 項だけ多い．従って，

$$a_n < a_{n+1}.$$

(ii) の証明 $n = 1, 2$ のときは明らかに成り立つ．$n \geq 3$ のとき $n! > 2^{n+1}$ であるから (下図参照)，式 (1) は

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &< 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{2^n-1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n-1}} \\ &< 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \end{aligned}$$

と変形でき，証明された．

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & \cdot & 2 & \cdot & 3 & \cdot & 4 & \cdot \cdots \cdot & n & = & n! \\ & & & & \wedge & & \wedge & & \wedge & & \\ & & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 2 & \cdot \cdots \cdot & 2 & = & 2^{n-2} \end{array}$$

n は自然数で $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ の極限値を e と定義したが，n を実数 x に変えても極限値は同じ，すなわち

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

であることが示される．実際，$[x]=n$ とすると $n \leq x < n+1$ より

$$1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \leq 1+\frac{1}{n}, \qquad \therefore \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

あるいは書き換えて

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

ここで $x\to\infty$ とすれば，$n\to\infty$ であるから両端の辺はともに e に収束する．よって，

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{3}$$

また，$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ も示される．何故ならば，$x=-y$ とおくと

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y = \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)$$

で，$x\to-\infty$ のとき $y\to\infty$ であるから，$\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)\to e$．故に，

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{4}$$

ここで式 (3),(4) から $x=\frac{1}{t}$ とおけば $\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$ が示され，自然対数をとれば

$$\lim_{t\to0}\frac{\log(1+t)}{t} = 1 \tag{5}$$

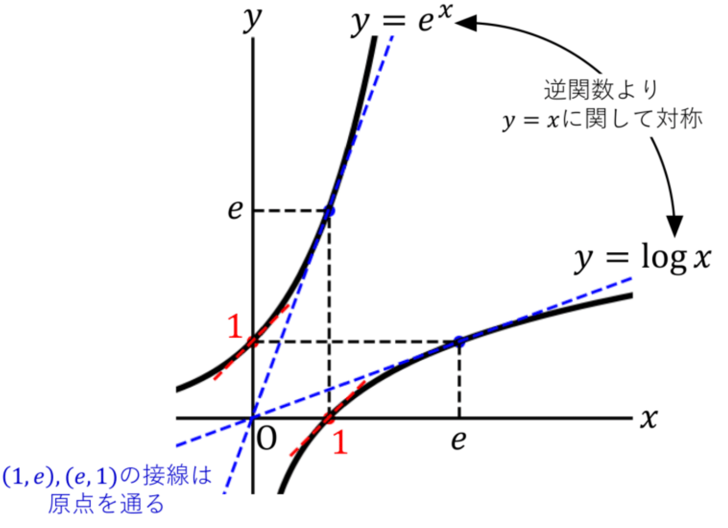
が導ける．また，$\log(1+t)=h$ とおくことにより $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h}{e^h-1}=1$ と書き換えられ，

$$\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h} = 1 \tag{6}$$

が得られる．

補足

上式 (5),(6) はそれぞれ $y=\log x, y=e^x$ のグラフの点 $(0,1),(1,0)$ における局所的な傾きである (下図参照).



関連 1

微分公式

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\log a}, \qquad (a^x) = a^x \log a$$

を忘れたら,

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\log x}{\log a}\right)' = \frac{1}{x\log a}, \qquad (a^x)' = (e^{x\log a})' = e^{x\log a}(\log a) = a^x \log a$$

とすれば良い. もともと, これらの式の最右辺における係数 $\log a$ が 1 となる a の値として, e を定義したのであった.

関連 2

$N\to\infty$ のとき

$$\left(1+\frac{x}{N}\right)^N = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}\frac{N!}{(N-n)!N^n} \to \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad \left(\because \frac{N!}{(N-n)!N^n} = \frac{N}{N}\cdot\frac{N-1}{N}\cdots\frac{N-n+1}{N}\to 1\right)$$

となる. 最右辺は指数関数の Taylor 展開だから,

$$\left(1+\frac{x}{N}\right)^N \to e^x$$

である[*2]．$x=1$ とすると，これは e の定義式になる．直観的には

$$e^x = \left(e^{\frac{x}{N}}\right)^N \simeq \left(1+\frac{x}{N}\right)^N \qquad (N \gg 1)$$

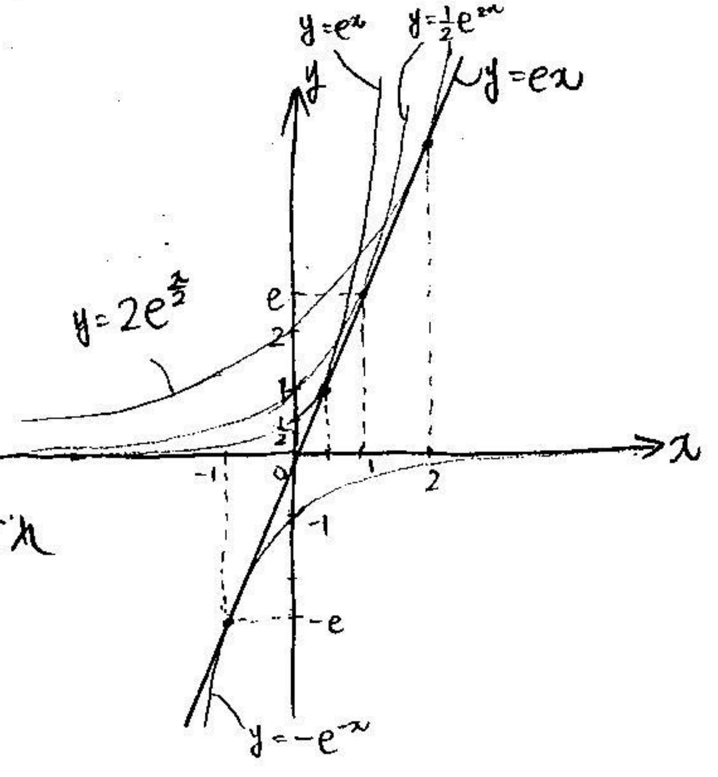
である．

[*2] 通常の数に限らず，演算子 x に対してもその指数関数を級数展開の形 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ で定義すれば，この結果は正しい．

曲線 $y=\frac{1}{k}e^{kx}$ と直線 $y=ex$ の接点を求めよ。
(kは0でない実数)

$y=\frac{1}{k}e^{kx}$ について、
$y'=e^{kx}$

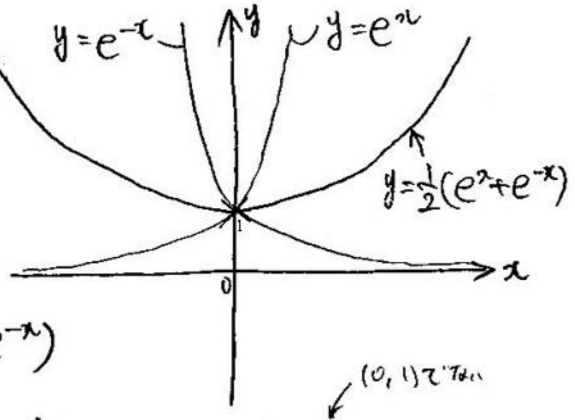
$y=ex$ について
$y'=e$
$e^{kx}=e$ となるとき、
$x=\frac{1}{k}$
$y=\frac{1}{k}e^{kx}$, $y=ex$ にそれぞれ
$x=\frac{1}{k}$ を代入して $y=\frac{e}{k}$
よって接点 $\left(\frac{1}{k}, \frac{e}{k}\right)$



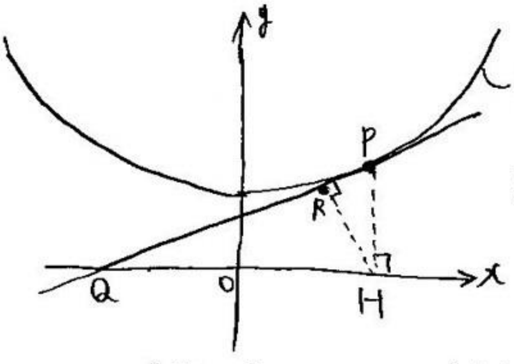
懸垂線（けんすい）

関数 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ に対して

$(\equiv \cosh x)$



(1) $1+y'^2=y^2$ を示せ。



HR = ?

(2) 曲線 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ 上の点 P における接線と x 軸との交点を Q とする。 (0, 1) でない

点 P から x 軸に下ろした垂線の足を H とし、

H から、直線 PQ に下ろした垂線の足を R とする。

線分 HR の長さを求めよ。

---

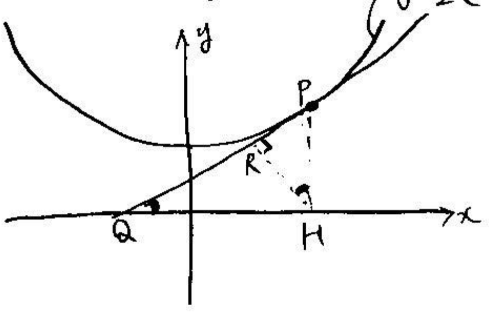
(1) $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$,

$y'=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ より

$y^2=\frac{1}{4}(e^{2x}+e^{-2x}+2)$,

$y'^2=\frac{1}{4}(e^{2x}+e^{-2x}-2)$ なので

$1+y'^2=y^2$



(2) △PHR について三平方の定理から

$HR^2+PR^2=PH^2$

点 P の y 座標を Y とすると

$PH=Y$,

△PHR ∽ △PQH より

$PR = HR\tan\angle PHR$

$= HR\tan\angle PQH$

$= HR\cdot Y'$ なので

$HR^2+(HR\cdot Y')^2=Y^2$.

(1) より

$1^2+(1\cdot Y')^2=Y^2$ なので

2式を比較して

$HR=1$

$\left[\begin{array}{l} P(t, f(t)) \text{ とおく。} \quad PH=f \\ Q\left(t-\frac{f}{f'}\right) \quad QH=\frac{f}{f'} \quad QP=f\sqrt{1+\frac{1}{f'^2}} \\ HR:PH=QH:QP \text{ に代入して } HR=1 \end{array}\right]$

$x=x(\theta), y=y(\theta)$のとき,
$\frac{d^2y}{dx^2}$を$x'(\theta), y'(\theta), x''(\theta), y''(\theta)$で表せ

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} \\
&= \left(\frac{d\theta}{dx}\frac{d}{d\theta}\right)\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \\
&= \frac{1}{x'}\left(\frac{y'}{x'}\right)' \\
&= \frac{1}{x'}\frac{x'y''-x''y'}{(x')^2} \\
&= \frac{x'y''-x''y'}{(x')^3}
\end{aligned}
$$

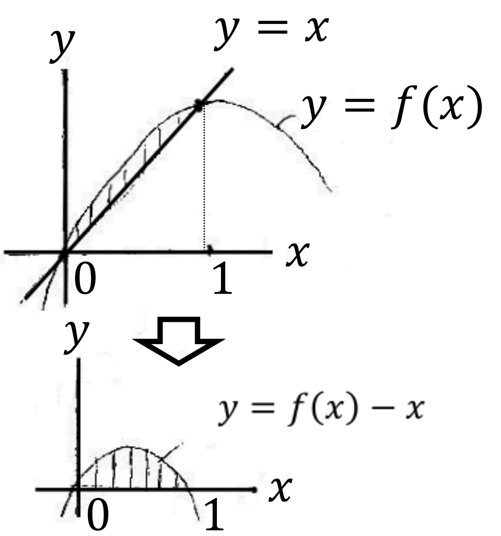
$f(0)=0, f(1)=1$を満たす2次関数$f(x)$のうちで,
$\int_0^1\{f(x)\}^2dx$を最小にするものを求めよ.

$f(0)=0, f(1)=1 \quad \Leftrightarrow f(0)-0=0, f(1)-1=0$
$f(x)-x=ax(x-1)$とおける(下図参照).

$$f(x)=ax^2-(a-1)x$$

$$\int_0^1\{f(x)\}^2dx=\int_0^1\{ax^2-(a-1)x\}^2dx$$
$$=\frac{a^2}{5}-\frac{a(a-1)}{2}+\frac{a-1}{3}$$
$$=\frac{1}{30}\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+(\text{定数})$$

これは$a=\frac{5}{2}$のとき最小で, $f(x)=\frac{5}{2}x^2-\frac{3}{2}$



$f(x)=x+a\sin x$ が最大値と最小値をもつ条件

> 関数 $f(x)=x+a\sin x$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$ が極大値と極小値をもつように a の値の範囲を求めよ。

【解】$f'(x)=1+a\cos x$ であり、$|a|\leqq 1$ のとき $f'(x)\geqq 1-|a||\cos x|\geqq 1-|a|\geqq 0$ より極値をもたない。よって、$|a|>1$ であることが必要である。

このとき、$f'(x)=0$ から $\cos x=-\dfrac{1}{a}$ を満たす x $(0\leqq x\leqq 2\pi)$ が2つ存在し、そのうちの1つを α $(0<\alpha<\pi)$ とおくと、$f(x)$ の増減は表のようになり、$0\leqq x\leqq 2\pi$ で極大値と極小値をとる。

よって、求める a の値の範囲は

$|a|>1$

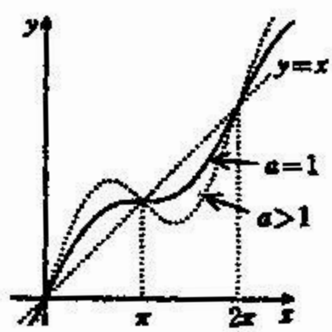
$a>1$ の場合

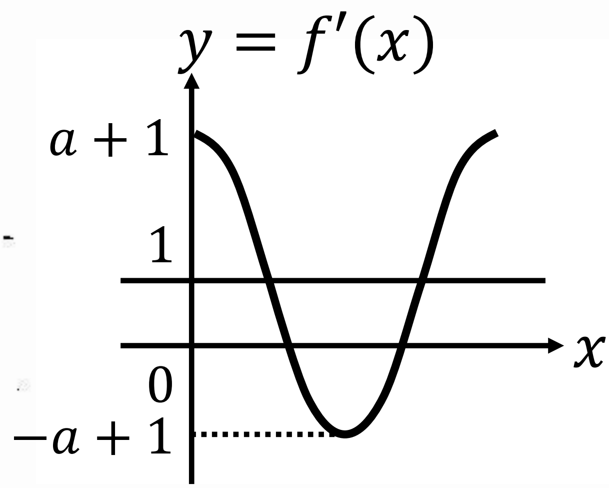
x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$2\pi-\alpha$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	極大	↘	極小	↗	

$a<-1$ の場合

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$2\pi-\alpha$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	極小	↗	極大	↘	

図 $f(x)=x+\sin x$ $(a=1)$ のグラフは右のようである。
a を1より大きくすれば、グラフの'波のうねり'が高くなる。





f(2x+1)の微分

2つの関数 $y=f(u)$，$u=2x+1$ に対し、合成関数 $y=f(2x+1)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ について

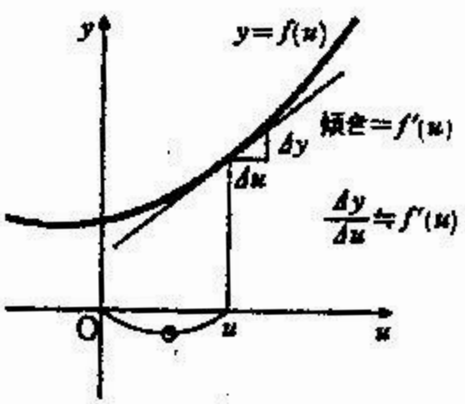
$$\frac{dy}{dx}=2f'(2x+1)$$

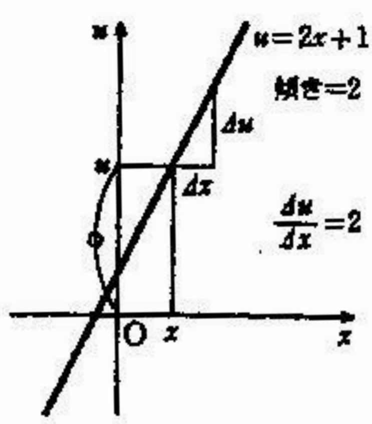
が成り立つ。

解説　$u=2x+1$ について、x の増分 Δx に対する u の増分を Δu，$y=f(u)$ について、u の増分を Δy とすると、$\Delta x\to 0$ のとき $\Delta u\to 0$ となる。

したがって

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\\&=\left(\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\\&=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\&=f'(u)\cdot 2=2f'(2x+1)\end{aligned}$$





$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\fallingdotseq f'(u)\cdot 2=2f'(2x+1)$$

グラフの概形

- 2次分数関数のグラフ
- 重ね合わせ
- $y^m = x^n$のグラフ
- テイラー展開
- 勾配関数
- デジタルにグラフを描く
- 凹凸の5つの定義と同値性
- $y = (x-\alpha)^p g(x)$の $x \fallingdotseq \alpha$ におけるグラフ
- $f(x)$の絶対値，平方，平方根，逆数のグラフ
- $x \sin\frac{1}{x}, \frac{\sin x}{x}, \sin\frac{1}{x}$のグラフ

など，**微分に頼らずグラフの概形を把握する**

2次分数関数のグラフ

2次分数関数は平行移動，拡大，縮小を施して

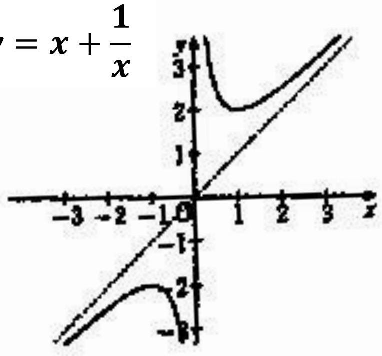
$$(1)\ y=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x} \quad (2)\ y=\frac{x^2-1}{x}=x-\frac{1}{x} \quad (3)\ y=\frac{1}{x^2}$$

$$(4)\ y=\frac{x-1}{x^2} \quad (5)\ y=\frac{1}{x^2+1} \quad (6)\ y=\frac{x-c}{x^2+1}\,(c\geq 0)$$

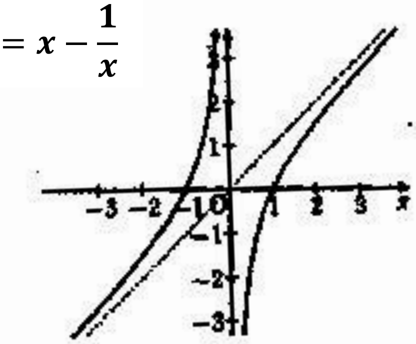
$$(7)\ y=\frac{1}{x^2-1} \quad (8)\ y=\frac{x-c}{x^2-1}\,(0\leq c<1) \quad (9)\ y=\frac{x-c}{x^2-1}\,(c>1)$$

のいずれかの形に表すことができる．

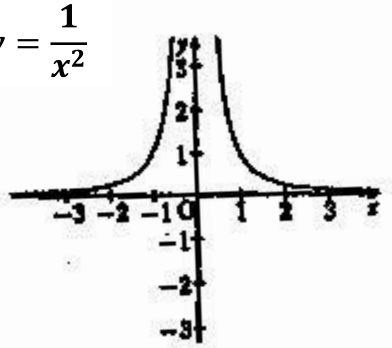
(1) $y=x+\dfrac{1}{x}$



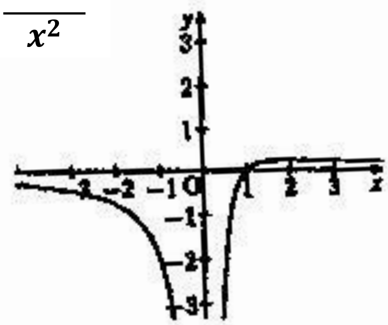
(2) $y=x-\dfrac{1}{x}$



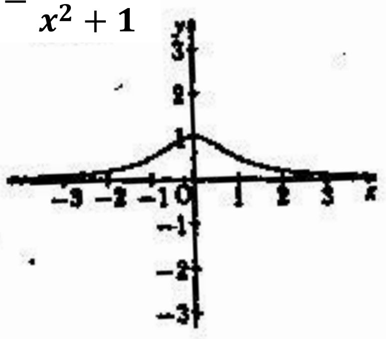
(3) $y=\dfrac{1}{x^2}$



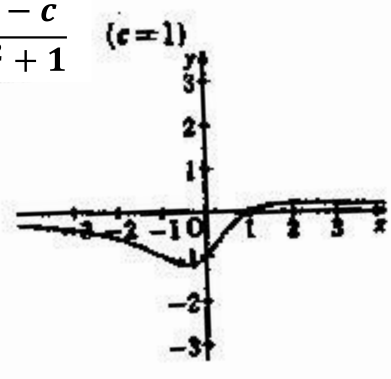
(4) $y=\dfrac{x-1}{x^2}$



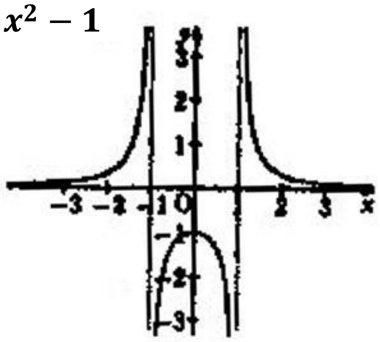
(5) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$



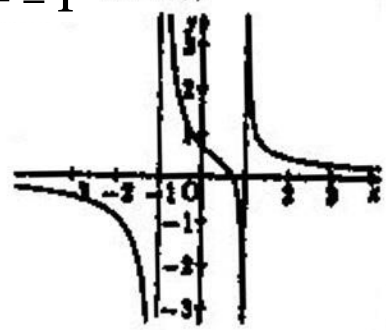
(8) $y=\dfrac{x-c}{x^2+1}$



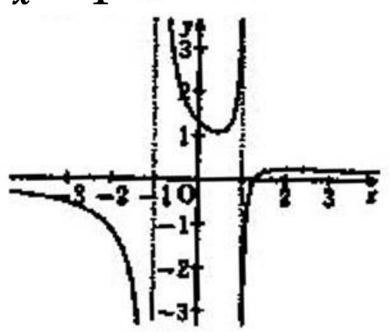
(7) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

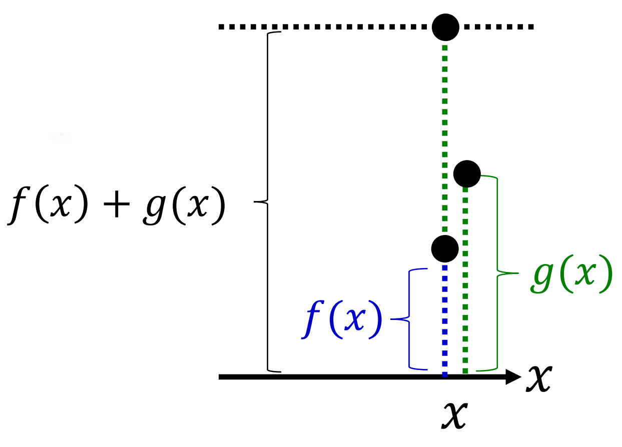


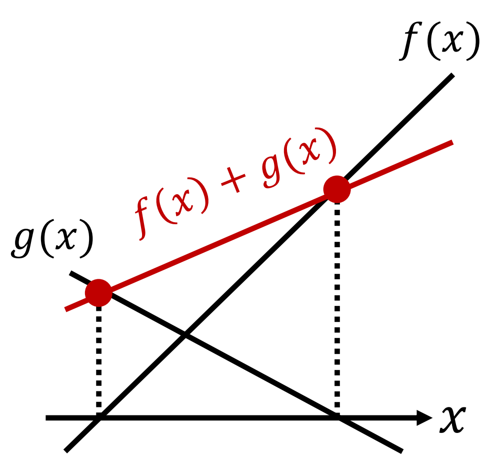
(8) $y = \dfrac{x - c}{x^2 - 1}$ $(c = 0.7)$



(9) $y = \dfrac{x - c}{x^2 - 1}$ $(c = 1.3)$







グラフが既知の関数$f(x), g(x)$に対して，
和$y = f(x) + g(x)$のグラフは両者のグラフを
重ね合せて得られる(左上図)

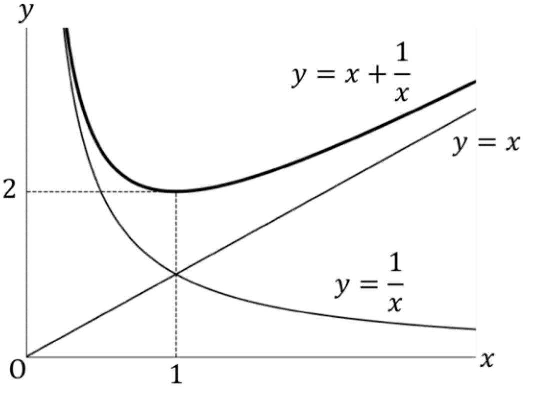
特に2つの1次関数の和は1次関数であり，
2直線$y = f(x), g(x)$を重ね合せたグラフは，
右上図の自明な2点(●)を結んだ直線である．

重ね合せの応用 1

$y = x + \frac{1}{x}$ (ただし $x > 0$) のグラフは下図のように，直線 $y = x$ と双曲線 $y = 1/x$ を重ね合せて得られる．極小値はこの場合，相加平均と相乗平均の関係

$$y = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$$

(等号成立は $x = 1$) から容易に求まる．

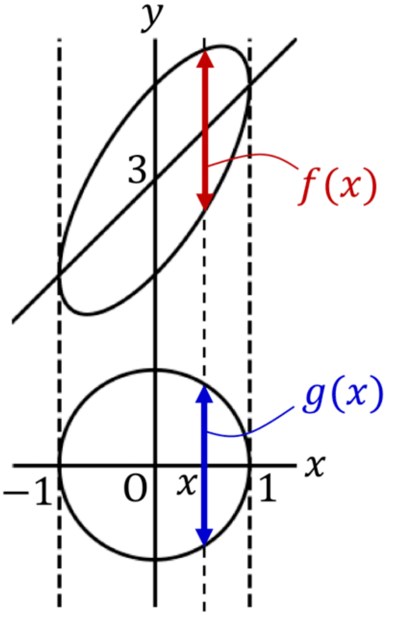


重ね合せの応用 2

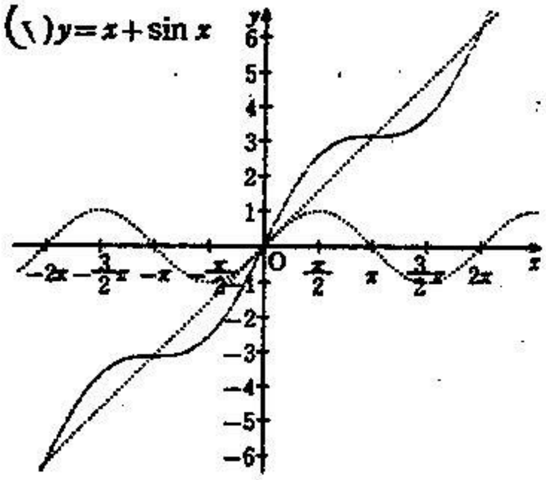
2 曲線 $y = x + 3 \pm \sqrt{1-x^2}$ に囲まれた領域の面積を求める問題を考える．2 曲線は単位円 $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ に直線 $y = x + 3$ を重ね合せて得られるため，その概形は下図のようである．このグラフの描き方から，下図の線分の長さ $f(x), g(x)$ は等しいため，求める面積は

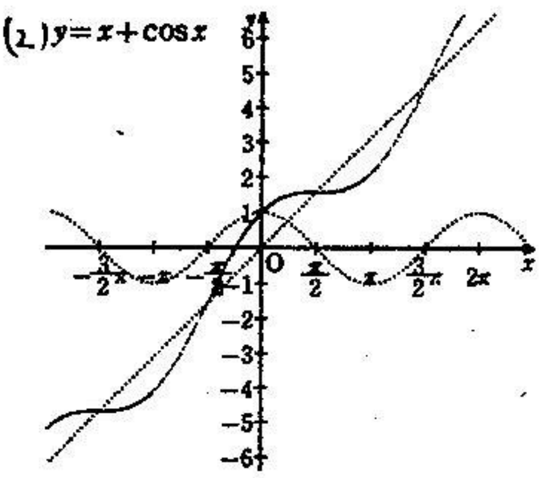
$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x = (\text{単位円の面積}) = \pi.$$

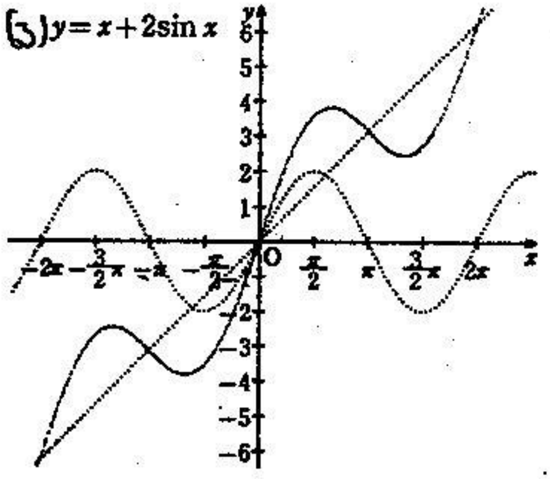
もし積分 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ を実行してこの結果を求めるならば，それは円の面積の公式の証明に当たる計算を行っていることになる．

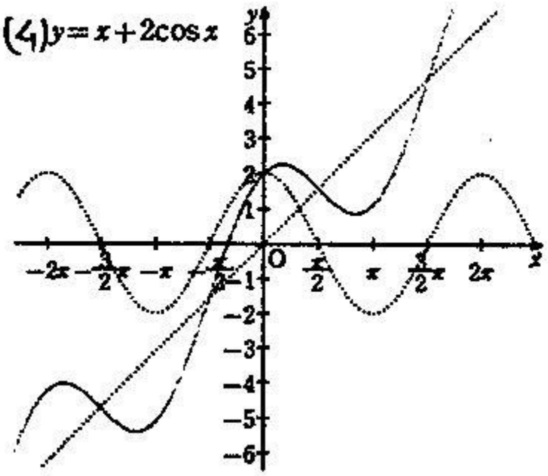


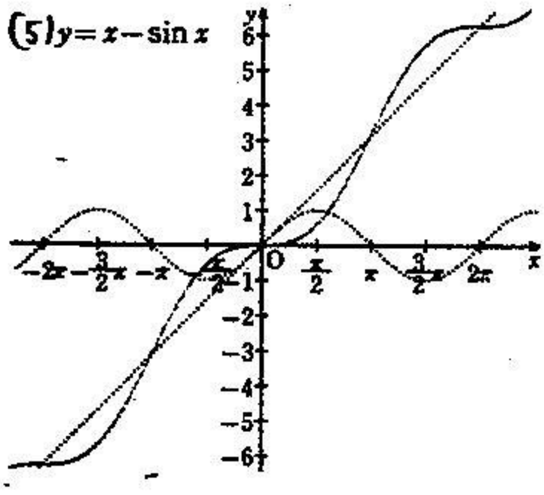
重ね合せ$y = x + a\sin x, y = x + a\cos x$

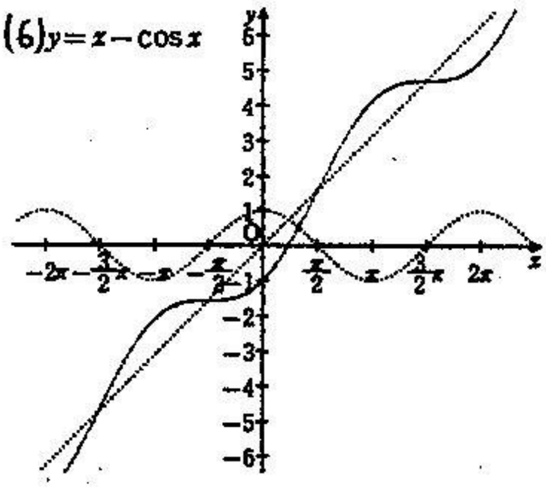










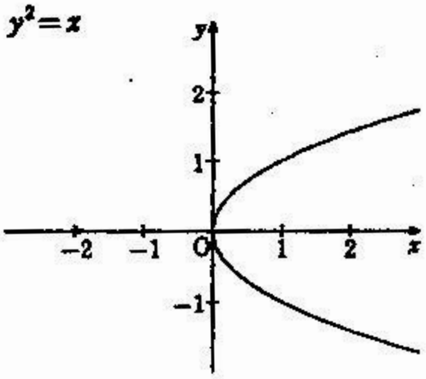


$f = g + h$に対して$f' = g' + h'$より傾きも和になる

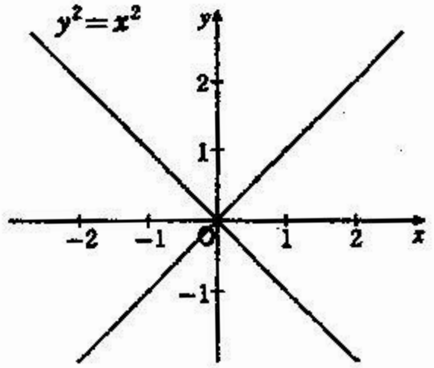
$y^m = x^n$のグラフの概形

放物曲線 $y^m = x^n$

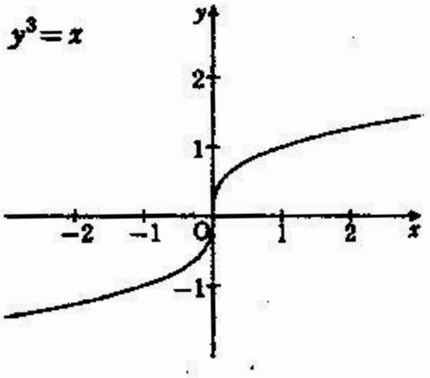
$y^2 = x$



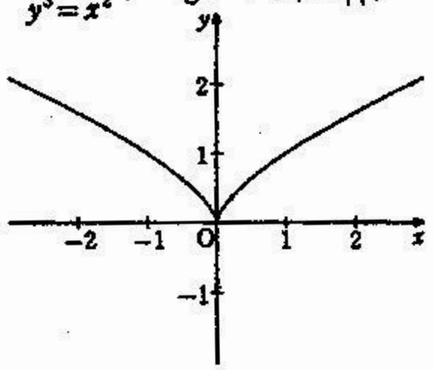
$y^2 = x^2$



$y^3 = x$



$y^3 = x^2$ → $y>0$, y軸対称



$$y = x^\alpha$$

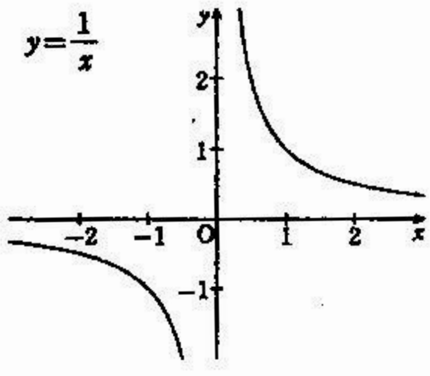
$$y'' = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$$

$y'' < 0$のとき

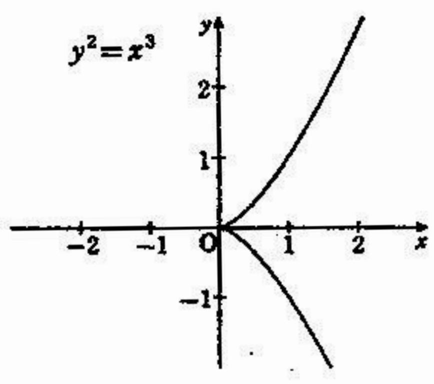
$$0 < \alpha < 1$$

(上に凸の条件)

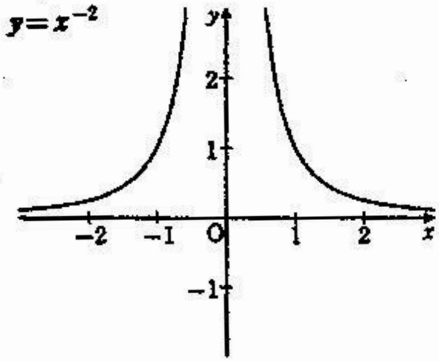
$y = \frac{1}{x}$



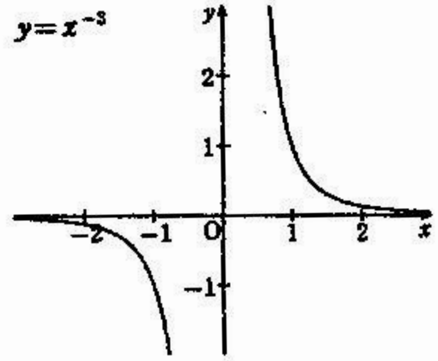
$y^2 = x^3$



$y = x^{-2}$



$y = x^{-3}$

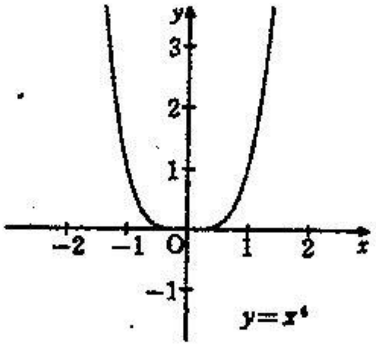


4次関数のグラフ

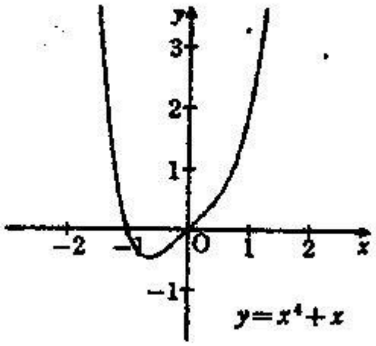
4次関数は平行移動、拡大、縮小を施して

$$y=x^4,\quad y=x^4+x,\quad y=x^4\pm x^2+dx\quad (d\geqq 0)$$

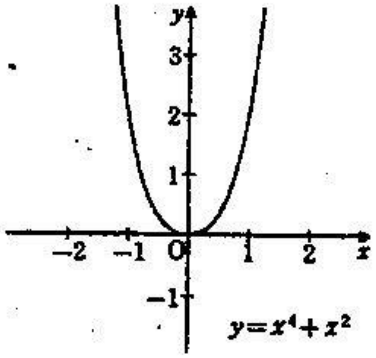
のいずれかの形に表すことができる。



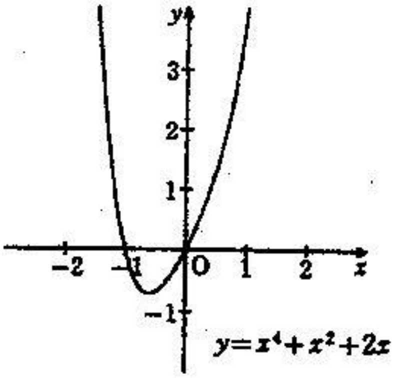
$y=x^4$



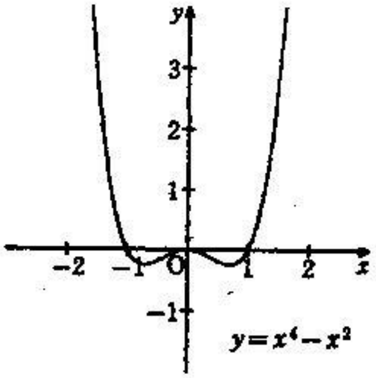
$y=x^4+x$



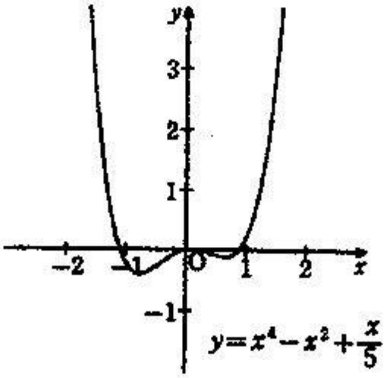
$y=x^4+x^2$



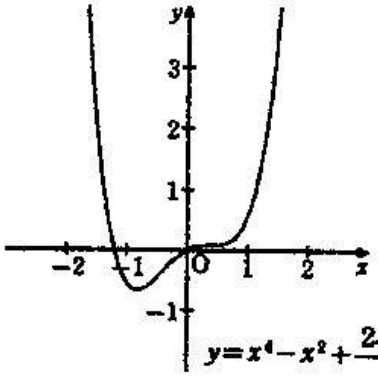
$y=x^4+x^2+2x$



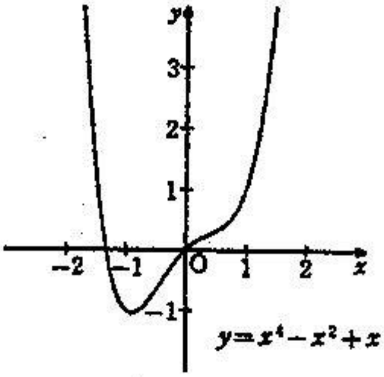
$y=x^4-x^2$



$y=x^4-x^2+\frac{x}{5}$



$y=x^4-x^2+\frac{2\sqrt{6}}{9}x$



$y=x^4-x^2+x$

曲線x=cosθ ,y=sin2θ (-π≦θ≦π)の概形

曲線 $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin 2\theta \end{cases}$ $(-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$ の概形をかけ(凹凸は調べなくてよい)。

【解】$\cos\theta$, $\sin 2\theta$ の周期はそれぞれ 2π , π である。

$x=f(\theta)$, $y=g(\theta)$ とすると、$f(-\theta)=f(\theta)$, $g(-\theta)=-g(\theta)$ であるから、曲線は x 軸に関して対称である。 ★ 最初に対称性を考慮する

したがって、$0 \leqq \theta \leqq \pi$ ……① の範囲で考える。

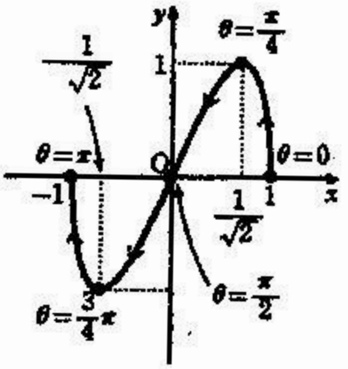
$$f'(\theta)=-\sin\theta,\quad g'(\theta)=2\cos 2\theta$$

① の範囲で $f'(\theta)=0$ を満たす θ の値は $\theta=0$, π

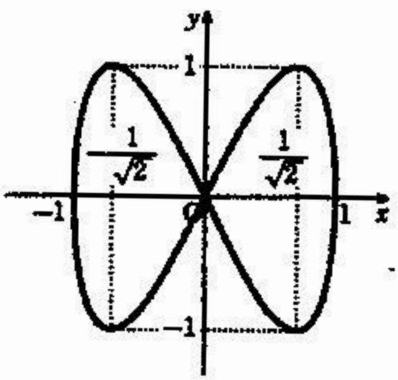
$g'(\theta)=0$ を満たす θ の値は $\theta=\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3}{4}\pi$

① の範囲における θ の値の変化に対応した x , y の値の変化は次の表のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(\theta)$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0
x	1	$\leftarrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\leftarrow$	0	$\leftarrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\leftarrow$	-1
$g'(\theta)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y	0	$\uparrow$	1	$\downarrow$	0	$\downarrow$	-1	$\uparrow$	0



よって、対称性を考えると、曲線の概形は、右図のようになる。



注意 1. 表の $\leftarrow$ は x の値が減少することを表す。また、$\uparrow$, $\downarrow$ はそれぞれ y の値が増加、減少することを表す。

注意 2. $f'(\theta)$, $g'(\theta)$ の符号に対応した曲線の形状は、

$(f'(\theta)$, $g'(\theta))=(-$, $+)$ のとき、曲線は左上がり

$(f'(\theta)$, $g'(\theta))=(-$, $-)$ のとき、曲線は左下がり

$(f'(\theta)$, $g'(\theta))=(+$, $+)$ のとき、曲線は右上がり

$(f'(\theta)$, $g'(\theta))=(+$, $-)$ のとき、曲線は右下がり

グラフをえがく (有名問題)

$f(x)=x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}$ とする。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ を満たす a, b の値を求めよ。

(2) $f(x)$ の増減、極値、凹凸を調べて、$y=f(x)$ のグラフをかけ。

【解】(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ から

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left\{\frac{f(x)}{x}-\left(a+\frac{b}{x}\right)\right\}=\lim_{x\to\pm\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(a+\frac{b}{x}\right)\right\}=1-a=0$$

よって　$a=1$

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-x\}=\lim_{x\to\pm\infty}x\left\{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right\}$　$\left(\frac{1}{x}=h\text{ とおく}\right)$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{(1-h)^{\frac{1}{3}}-1\right\}=\left[\frac{d}{dx}(1-x)^{\frac{1}{3}}\right]_{x=0}=-\frac{1}{3}$$

よって　$b=-\dfrac{1}{3}$

(2) $f'(x)=x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x-1}\right)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-1)^{-\frac{2}{3}}(3x-2)$

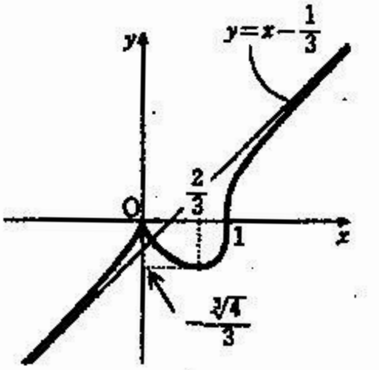
$f''(x)=\dfrac{1}{9}x^{-\frac{4}{3}}(x-1)^{-\frac{5}{3}}\{-(x-1)(3x-2)-2x(3x-2)+9x(x-1)\}=-\dfrac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}(x-1)^{-\frac{5}{3}}$

したがって、増減、凹凸表は次のようになる。

x	$\cdots$	0		$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1		$\cdots$
$f''(x)$	$+$			$+$	$+$	$+$			$-$
$f'(x)$	$+$	∞	$-\infty$	$-$	0	$+$	∞	∞	$+$
$f(x)$	↗	0 極大		↘	$-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ 極小	↗	0 変曲点		↗

(1) から、直線 $y=x-\dfrac{1}{3}$ が漸近線である。

以上により、$y=f(x)$ のグラフは右図に示される。



「グラフをえがく5」について

$f(x)=x^{2/3}(x-1)^{1/3}$ とする.

a, b は $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ を満たしている.

$y=f(x)$ のフラフの漸近線を求めよ.

$f(x)=x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}$

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$

1° $x\to\alpha$ のとき $|y|\to\infty$ となることはないから、x 軸に垂直な漸近線はない。

$y=ax+b$ とおく。

$ax+b=x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}$

$(ax+b)^3=x^2(x-1)$

$(a^3-1)x^3+(3a^2b+1)x^2+3ab^2x+b^3=0$

曲線 $y=x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}$ と直線 $y=ax+b$ は無限遠点で接するから（←と断れば、以下の考えは入試で使ってよい）

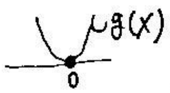
x は $+\infty$ か $-\infty$ を重解にもつ。

そこで $x=\frac{1}{X}$ とおくと、

$(a^3-1)+(3a^2b+1)X+3ab^2X^2+b^3X^3=0$ が

$X=0$ を重解にもつ。左辺を $g(X)$ とおくと、

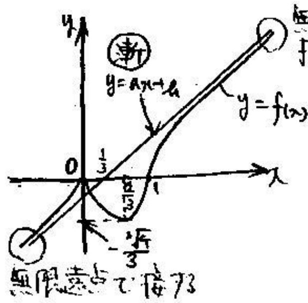
その条件は $\underline{g(0)=0,\ g'(0)=0}$



だから、$a^3-1=0$ かつ $3a^2b+1=0$

$\therefore a=1,\ b=-\frac{1}{3}$

漸近線は $y=x-\frac{1}{3}$



$\boxed{参考}$ $x^3+y^3=3xy$ の漸近線

x 軸に垂直な漸近線はない。

漸近線を $y=ax+b\ (a\neq 0)$ とすると

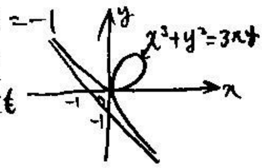
$x^3+(ax+b)^3=3x(ax+b)$ で

x は $+\infty$ か $-\infty$ を重解にもつから

（中略）$a^3+1=0,\ 3a^2b=3a$

$\therefore a=-1,\ b=-1$

※パラメータを用いて考えてもよい。



2° $y=x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}$

$=x\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

$|x|$ が十分大きいとき $y\fallingdotseq x\left(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}\right)=x-\frac{1}{3}$ （近似）

曲線の凹凸

関数 $f(x)$ が点 a で2回微分可能とするとき、曲線 $y=f(x)$ の点 a での凹凸を調べる。

関数 $f(x)$ の点 a でのテイラー展開を2次の項までとると

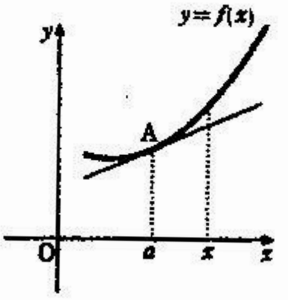
$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2 \quad \cdots\cdots ☆$$

$f''(x)$ の符号が点 a を含むある区間で $f''(x)>0$ であるとすると、$f''(c)>0$ となる。

したがって、点 a の近くで(点 a 以外の)は

$$f''(c)(x-a)^2>0$$

ゆえに、$f(x)>f(a)+f'(a)(x-a)$



これは、点 a の近くでは点Aでの接線が曲線の下側にあることを示している。すなわち、曲線 $y=f(x)$ の点Aで下に凸ということになる。

また、$f'(a)=0$ ならば、☆は

$$f(x)=f(a)+\frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2 \quad \text{となる。}$$

したがって、点 a の近くで $f''(x)>0$ ならば、

$f''(c)(x-a)^2 \geqq 0$ (等号は $x=a$ のときに限る)

ゆえに、$f(x)>f(a)$

すなわち、$f(a)$ は極小値である。

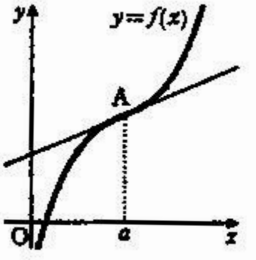
同様に、点 a の近くで $f''(x)<0$ ならば、$f(a)$ は極大値になることが分かる。

次に、テイラー展開を3次の項までとると

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3$$

いま、$f''(a)=0$ ならば、この式は

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3$$



なおかつ a の付近で $f'''(x)>0$ ならば、

$x<a$ のとき　$f(x)<f(a)+f'(a)(x-a)$

$x>a$ のとき　$f(x)>f(a)+f'(a)(x-a)$

ゆえに、曲線 $y=f(x)$ は点Aを境として接線の下から上へ出る。すなわち、曲線は接線を横切る。

この横切ることは $f'''(x)<0$ であっても同様である。

結局、点 a の付近で $f'''(x)\neq 0$ であれば、

$f''(a)=0$ のとき、点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ は曲線 $y=f(x)$ の変曲点になる。

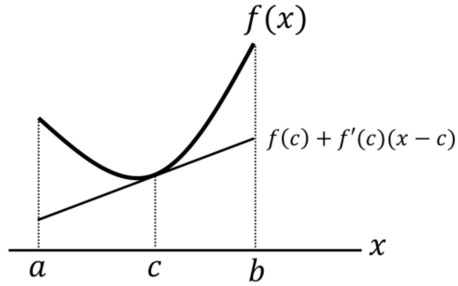
下に凸と分点の式

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は区間 $a \leqq x \leqq b$ で増加し、c は $a<c<b$ で、ある任意の値とする。

(1) $a \leqq x \leqq b$, $x \neq c$ のとき、$f(c)+f'(c)(x-c)<f(x)$ を証明せよ。

(2) 上の (1) の不等式から、次の不等式を証明せよ。

$m>0$, $n>0$ ならば $f\left(\dfrac{ma+nb}{m+n}\right)<\dfrac{mf(a)+nf(b)}{m+n}$



【証明】(1) $g(x)=f(x)-\{f(c)+f'(c)(x-c)\}$ とおくと

$g'(x)=f'(x)-f'(c)$

$f'(x)$ は区間 $[a, b]$ で増加するから、

$g(x)$ の増減表は右の通りである。

x	a	$\cdots$	c	$\cdots$	b
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	最小 0	↗	

表から　$g(x)>0$　$(x \neq c)$

よって、$f(c)+f'(c)(x-c)<f(x)$

(2) $m>0$, $n>0$ ならば、$a<\dfrac{ma+nb}{m+n}<b$ だから $c=\dfrac{ma+nb}{m+n}$ とおくと

(1) より　$f(c)+f'(c)(a-c)<f(a)$　……①

$f(c)+f'(c)(b-c)<f(b)$　……②　　が成り立つ。

①×m+②×n より

$$(m+n)f(c)+f'(c)\{ma+nb-(m+n)c\}<mf(a)+nf(b)$$

$ma+nb-(m+n)c=0$ だから

$$f\left(\frac{ma+nb}{m+n}\right)<\frac{mf(a)+nf(b)}{m+n}$$

演習　次の曲線の漸近線を求めよ。

(1) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x}$　　(2) $y=x+\sqrt{x^2-1}$

(3) $y=\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$　　(4) $x^2y^2=x^2-y^2$

【解】(1) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x}=1+\dfrac{2x+1}{x^2-x}$

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} y=1$ であるから、直線 $y=1$ が漸近線。

$\displaystyle\lim_{x\to-0} y=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to+0} y=-\infty$ であるから、直線 $x=0$

$\displaystyle\lim_{x\to1-0} y=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to1+0} y=\infty$ であるから、直線 $x=1$ が漸近線。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=2$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(y-2x)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$

よって、直線 $y=2x$ が漸近線。

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=0$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-1})=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}=0$

よって、直線 $y=0$ が漸近線。

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)^2}=1$

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}(y-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\{\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}-x\}$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x^2+4}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)^4}+x\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}+x^2}=-1$$

よって、直線 $y=x-1$ は漸近線となる。

(4) $x^2y^2=x^2-y^2$ から　$y^2=\dfrac{x^2}{x^2+1}$　　∴ $y=\pm\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$　……① のグラフについて考える。

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$，　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-1$

よって、漸近線は　2直線 $y=1$，$y=-1$

$y=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ のグラフは、x 軸に関して ① のグラフと対称である。

以上より、漸近線は　2直線 $y=1$，$y=-1$

漸近線

漸近線

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a\pm 0} f(x)=\pm\infty$ (複号任意) となる有限な値 a がある場合

直線 $x=a$ は曲線 $y=f(x)$ の漸近線である。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=b$ または $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$ となる有限な値 b がある場合

直線 $y=b$ は曲線 $y=f(x)$ の漸近線である。

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ または $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ が成り立つとき、

直線 $y=ax+b$ は曲線 $y=f(x)$ の漸近線である。

a, b は $\displaystyle a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$, $\displaystyle b=\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-ax\}$ (複号同順) から求められる。

《具体例》 次の曲線の漸近線を求めよ。

(1) $y=\dfrac{x^2+1}{x+1}$　　　　(2) 曲線 $y=\sqrt{x^2+1}$

【解】(1) $y=x-1+\dfrac{2}{x+1}$ より $\displaystyle\lim_{x\to-1-0}y=-\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-1+0}y=+\infty$,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\{y-(x-1)\}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x+1}=0$$

であるから、この曲線の漸近線は　2直線 $x=-1$, $y=x-1$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$,

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

同様に $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=-1$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(y+x)=0$

であるから、この曲線の漸近線は　2直線 $y=x$, $y=-x$

$y = x^n e^{-x}$

$y = x^n e^{-x}$のグラフ

$y = x^n e^{-x}$のとき

$$y' = (nx^{n-1} - x^n)e^{-x} = x^{n-1}(n-x)e^{-x}$$

$$y'' = \{n(n-1)x^{n-2} - nx^{n-1} - nx^{n-1} + x^n\}e^{-x}$$

$$= (n(n-1) - 2nx + x^2)x^{n-2}e^{-x}$$

(↑) 参考：「ライプニッツの公式 (利用)」

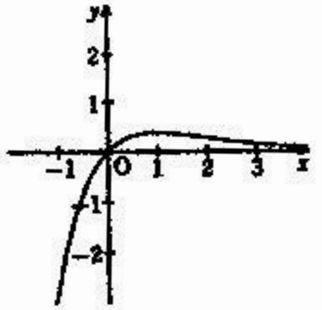
また、$\lim_{x \to \infty} x^n e^{-x} = 0$ より漸近線は $y=0$

1) n：奇数のとき ($n \neq 1$)

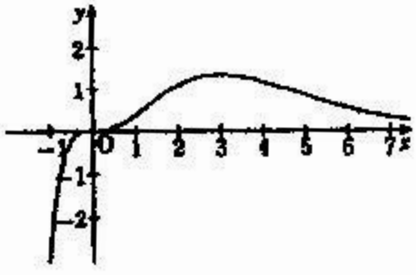
x	$\cdots$	0	$\cdots$	n	$\cdots$
y'	+	0	+	0	−
y	↗	0	↗	$\frac{n^n}{e^n}$	↘

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$n-\sqrt{n}$	$\cdots$	$n+\sqrt{n}$	$\cdots$
y''	−	0	+	0	+	0	+
y	∩	変曲点	∪	変曲点	∩	変曲点	∪

$n=1$ のとき



$n=3$ のとき

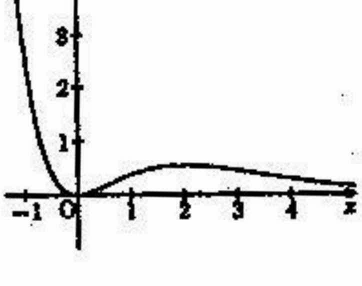


2) n：偶数のとき

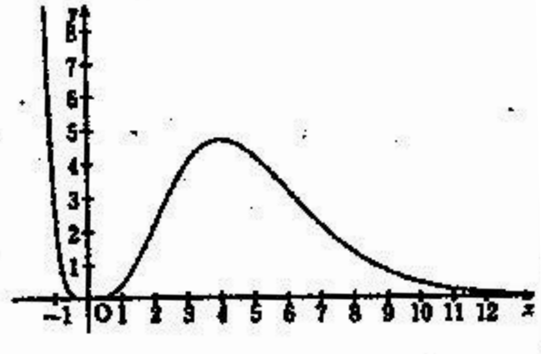
x	$\cdots$	0	$\cdots$	n	$\cdots$
y'	−	0	+	0	−
y	↘	0	↗	$\frac{n^n}{e^n}$	↘

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$n-\sqrt{n}$	$\cdots$	$n+\sqrt{n}$	$\cdots$
y''	+	0 $(n \geqq 2)$	+	0	−	0	+
y	∪		∪	変曲点	∩	変曲点	∪

$n=2$ のとき

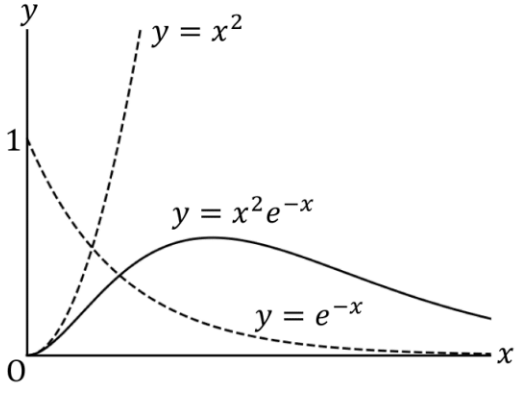


$n=4$ のとき



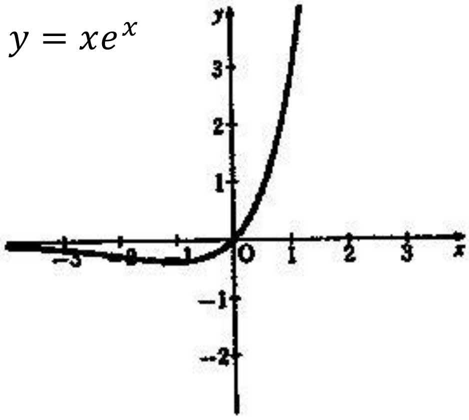
積のグラフ

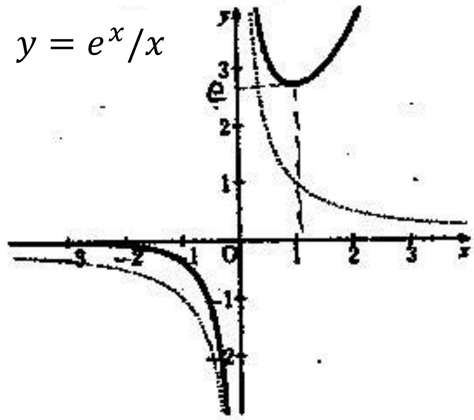
関数 $y=f(x), g(x)$ の積 $y=f(x)g(x)$ のグラフの概形も，しばしば $y=f(x), y=g(x)$ それぞれのグラフの様子からある程度予想することができる．例えば $y=x^2e^{-x}$ のグラフは下図のようであり，$y=x^2$ のグラフと $y=e^{-x}$ のグラフを“掛けて”得ることができる．$x=0$ の近くではグラフは x^2 のように振舞うのに対し，$x \gg 1$ では e^{-x} の因子が優勢となって，グラフは素早くゼロに漸近する．

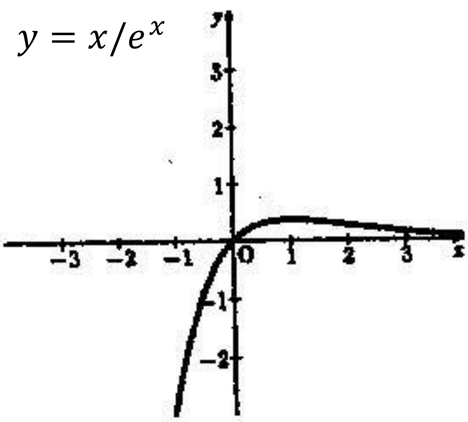


xとe^x 積と商のグラフ

↓勾配関数

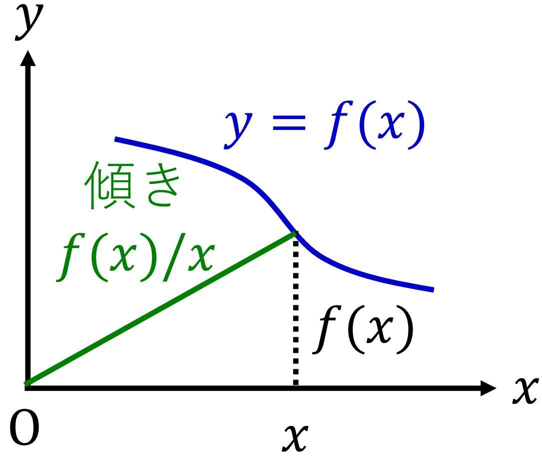






$e^x > 0$よりxとyは同符号 → 第1,第3象限

$y = f(x)$の勾配関数$y = f(x)/x$は
下図のように傾きを調べれば概形を予想できる.



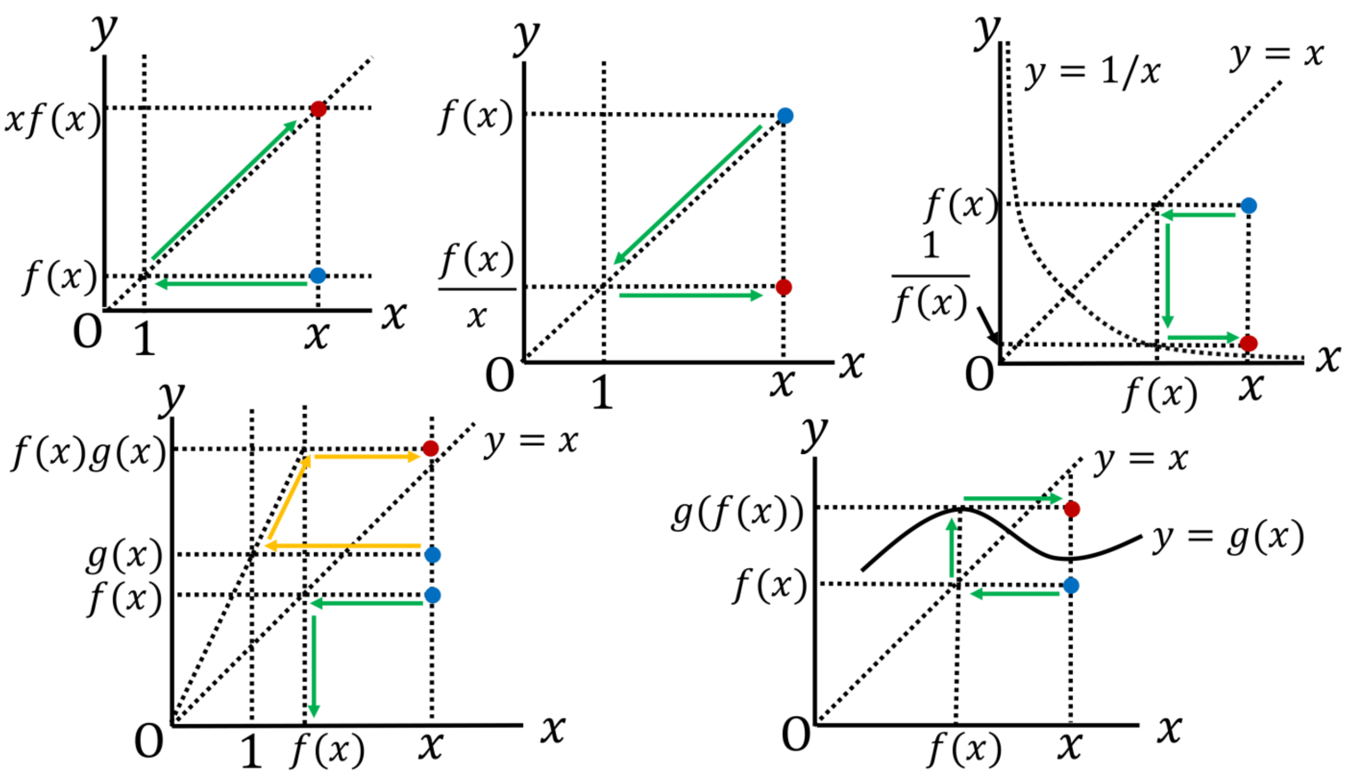
デジタルにグラフを描く

点 $(x, F(x))$ をプロットする

$y=f(x), y=g(x)$ のグラフが分かっているとき，

$$F(x)=xf(x), \quad \frac{f(x)}{x}, \quad \frac{1}{f(x)}, \quad f(x)g(x), \quad g(f(x))$$

のグラフを描くことを考える．下図 のように $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(x, f(x))$(および $y=g(x)$ のグラフ上の点 $(x, g(x))$) から出発して，$y=F(x)$ のグラフ上の点 $(x, F(x))$ をプロットすることができる．これを各 x に対して逐次繰り返せば，$y=F(x)$ のグラフ全体をイメージできる．



凹凸の定義

凹凸の定義は本によって異なる. 5つの定義を述べ, それらが同値であることを示す.

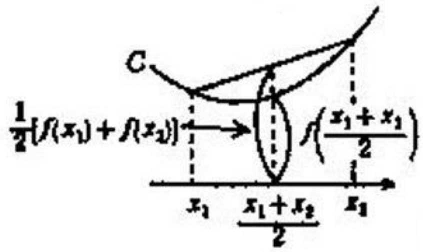
曲線 C があり、その方程式を $y=f(x)$, $a<x<b$ とする。

$y=-f(x)$ の表す曲線を C' とすれば、C が下に凸と C' が上に凸とは同じことであるから、以下、下に凸の性質に限定して話を進める。また、微分法の応用の建前から、$f(x)$ は微分可能なものにする。

(1) $a<x_1<x_2<b$ なる任意の x_1, x_2 に対し、

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{1}{2}\{f(x_1)+f(x_2)\}$$

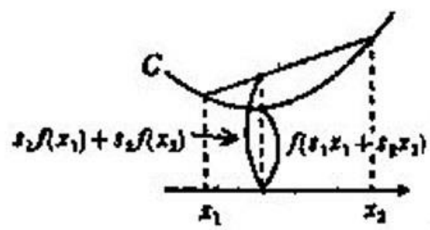
が成り立つ。



(2) $a<x_1<x_2<b$ なる任意の x_1, x_2 と $s_1+s_2=1$ なる任意の正数 s_1, s_2 に対し、

$$f(s_1x_1+s_2x_2)<s_1f(x_1)+s_2f(x_2)$$

が成り立つ。



(3) 曲線 C 上の点 (x, y) における接線の傾きが x の増加関数である。

(4) 曲線 C は、その上の各点における接線より、接点を除いて上にある。

(5) 曲線 C 上に任意の点 P をとって固定し、他に点 Q (x, y) をとるとき、弦 PQ の傾きが x の増加関数である。

(1) $\Longrightarrow$ (5) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (1) を証明すれば、

(1) $\Longleftrightarrow$ (2) $\Longleftrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) $\Longleftrightarrow$ (5) となる。

(2) $\Longrightarrow$ (1) の証明

(2)において$s_1=s_2=\frac{1}{2}$の場合が(1)

★(3) ➡ (2) の証明

(2)が成り立たないとすると、$a<x_1<x_0<x_2<b$ なる x_1, x_0, x_2 があって

$$f(x_0) \geqq \frac{(x_2-x_0)f(x_1)+(x_0-x_1)f(x_2)}{x_2-x_1}$$

となっている。したがって、$P_i(x_i,\ f(x_i))$ とすれば

P_0P_2 の傾き $\leqq$ P_1P_2 の傾き $\leqq$ P_1P_0 の傾き

平均値の定理によれば

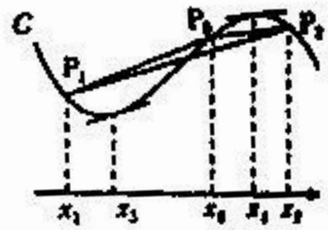
$f'(x_3)=P_1P_0$ の傾き　$(x_1<x_3<x_0)$

$f'(x_4)=P_0P_2$ の傾き　$(x_0<x_4<x_2)$

なる x_3, x_4 が存在する。

そうすると　$f'(x_4) \leqq f'(x_3)$, $x_1<x_3<x_4<x_2$

となり、(3)に反する。

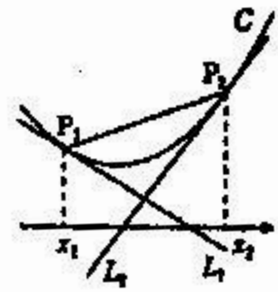


★(4) ⟹ (3) の証明

$a<x_1<x_2<b$ なる任意の x_1, x_2 をとれば、(4)より

点$P_1(x_1,\ f(x_1))$ は点 $P_2(x_2,\ f(x_2))$ における接線 L_2 より上にあり、点 P_2 は点 P_1 における接線 L_1 より上にある。

したがって、L_1 の傾き$<P_1P_2$ の傾き$<L_2$ の傾き



(5) ⟹ (4) の証明

C 上の点 P における接線 L より下に C 上の点 Q があったとすると、(5)より P, Q 間の C 上の点はすべて弦 PQ より下になくてはならない。

しかし、このことは L が P における接線ということに反する。

(1) ⟹ (5) の証明

C 上の点 $P(x_0,\ y_0)$, $R(\alpha,\ \beta)$, $Q(x_1,\ \cancel{y_0}\ y_1)$ をとり、$x_0<\alpha<x_1$ とする。

区間$[x_0,\ x_1]$の中点を x_2 とし、区間$[x_0,\ x_2]$, $[x_2,\ x_1]$のうち、α を含むものの中点を x_3, 以下同様にして次々と α を含む区間の中点をとっていったものを x_4, x_5, … とすれば、$x_n \to \alpha$ は明らかである。

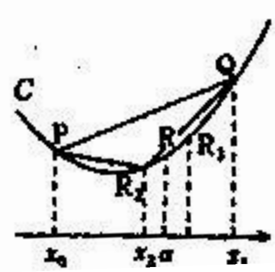
$R_n(x_n,\ f(x_n))$ とすると、(1)より R_2 は弦 PQ より下にあり、x_3 が$[x_2,\ x_1]$にあれば R_3, R_4, … はみな弦 R_2Q より下にある。

$f(x)$ の連続性から　$f(x_n) \to f(\alpha)$　∴　$R_n \to R$

ゆえに、R もまた弦 R_2Q より下にあることになり、

PR の傾き$<$PQ の傾き

となる。x_3 が$[x_0,\ x_2]$にあるときも同様である。



$y=(x-\alpha)^p g(x)$ の $x \fallingdotseq \alpha$ におけるグラフ

$y=(x-1)^3\dfrac{1}{x^4}$ の $x \fallingdotseq 1$ におけるグラフの形状はどのようになるか.

$$y=(x-1)^3\frac{1}{x^4}=(x-1)^3\left(1+\frac{1}{x^4}-1\right)$$

$$=(x-1)^3+(x-1)^3(x^{-4}-1)$$

$$y'=3(x-1)^2+\{3(x-1)^2(x^{-4}-1)-4(x-1)^3x^{-5}\}$$

$$y''=6(x-1)+\{6(x-1)(x^{-4}-1)-24(x-1)^2(-4x^{-5})-4(x-1)^3(-5)x^{-6}\}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^3(x^{-4}-1)}{(x-1)^3}=0$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)^2(x^{-4}-1)-4(x-1)^3x^{-5}}{3(x-1)^2}=0$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{6(x-1)(x^{-4}-1)-24(x-1)^2(-4x^{-5})-4(x-1)^3(-5)x^{-6}}{6(x-1)}=0$$

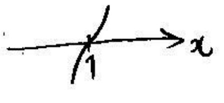
となるため 〰〰部は後位の無限小であるから、$x \fallingdotseq 1$ のとき、

高い

$y \fallingdotseq (x-1)^3$

$y' \fallingdotseq 3(x-1)^2$

$y'' \fallingdotseq 6(x-1)$



$\boxed{\begin{array}{l} y=(x-\alpha)^p g(x) \text{ は } x \fallingdotseq \alpha \text{ では} \\ y \fallingdotseq g(\alpha)(x-\alpha)^p \text{ としてグラフを描くとよい。} \end{array}}$

y=(x+1)√1-x^2のグラフ

$y=(x+1)\sqrt{1-x^2}$ のグラフについて

定義域は　$-1\leqq x\leqq 1$

局所的な場所を調べることにより、グラフの概形が予測可能である。

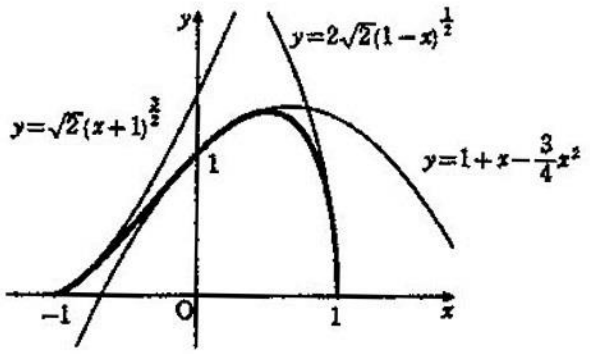
$y=(x+1)\sqrt{1-x^2}=(x+1)^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$ は $x=-1,\ 0,\ 1$ での近くでは、次のように振る舞う。

$x\fallingdotseq -1$ のとき　$y\fallingdotseq\sqrt{2}(x+1)^{\frac{3}{2}}$　←　$(1-x)^{\frac{1}{2}}$に$x=-1$を代入

$x\fallingdotseq 0$ のとき　$y\fallingdotseq\left(1+\frac{3}{2}x\right)\left(1-\frac{1}{2}x\right)=1+x-\frac{3}{4}x^2$　←　有名な近似式

$x\fallingdotseq 1$ のとき　$y\fallingdotseq 2\sqrt{2}(1-x)^{\frac{1}{2}}$　←　$(1+x)^{\frac{3}{2}}$に$x=1$を代入

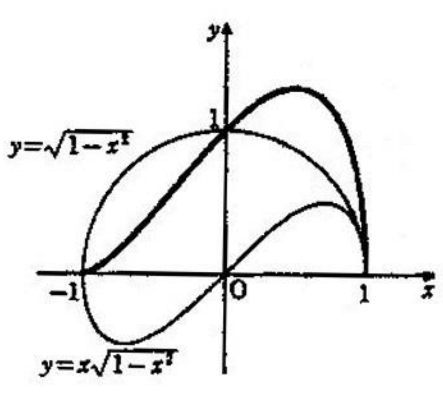
よって、$y=(x+1)\sqrt{1-x^2}$ の概形は太線のようである。



参考　$y_1=x\sqrt{1-x^2}$，$y_2=\sqrt{1-x^2}$

として

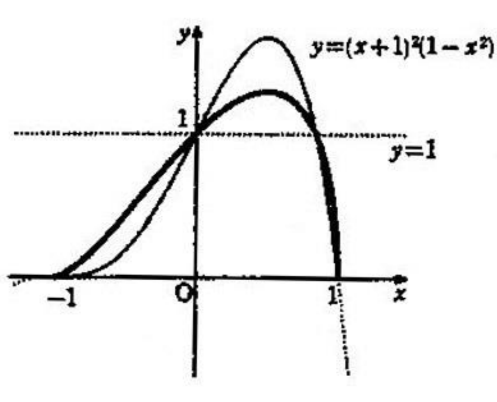
$y=y_1+y_2$



$y=(x+1)^2(1-x^2)=(1-x)(x+1)^3$

より

$y=\sqrt{(x+1)^2(1-x^2)}$



xを限りなく大きくするときの極限の見方

◇ xが十分大きいとき $\sqrt{x+a} \fallingdotseq \sqrt{x}$ と見なせる。これは

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=0$$

から正当化できる。

〈考察〉テイラー展開を用い

$$\sqrt{x+a}=\sqrt{x}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{1/2}=\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{2}\frac{x}{a}+\cdots\right)\fallingdotseq\sqrt{x}.$$

◇ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\alpha$

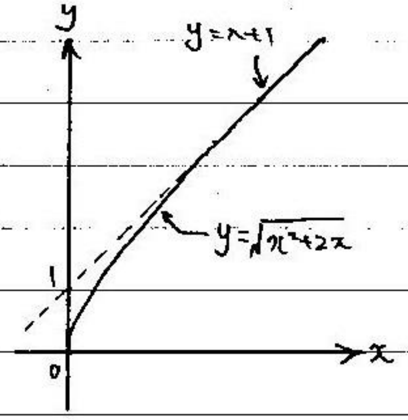
xが十分大きいとき $\sqrt{x^2+2x}=\sqrt{(x+1)^2-1}\fallingdotseq x+1$ より

$\alpha=1$ とみなせる。

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{x^2+2x}-(x+1)\right\}=0$ であり、これは双曲線

$y=\sqrt{x^2+2x}$ の一方の漸近線が直線 $y=x+1$ であることを

示している(下図)。



〈考察〉テイラー展開を用い

$$\sqrt{x^2+2x}=x\left(1+\frac{2}{x}\right)^{1/2}=x\left\{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(\frac{2}{x}\right)^2+\cdots\right\}$$

$$=x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\cdots\right)$$

$$\fallingdotseq x+1-\frac{1}{2x}.$$

◇ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\left\{\sqrt{x^2+2x}-(x+1)\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2+2x}+x+1}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x}}=-\frac{1}{2}$$

これはxが十分大きいとき $\sqrt{x^2+2x}-(x+1)\fallingdotseq-\frac{1}{2x}$ であり、

双曲線 $y=\sqrt{x^2+2x}$ と漸近線 $y=x+1$ の差が $x\to\infty$ において

ほぼ $-\frac{1}{2x}$ と同じように0に近づくことを示している。

〈考察〉上記のテイラー展開からも同じ結果が得られている。

極限から関数の係数の決定

次の等式が成り立つように、定数 a , b の値を定めよ。

$$\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=2$$

【解】$x\to 1$ のとき、分母の $x-1$ は0に収束する。したがって、題意の極限が有限確定であるためには、分子も0に収束しなければならないから

$$\lim_{x\to 1}(a\sqrt{x}+b)=a+b=0$$

よって　$b=-a$　………①

が必要である。

逆に、① が成り立つとき

$$\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{a(\sqrt{x}-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{a(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{a}{\sqrt{x}+1}=\frac{a}{2}$$

であるから、題意の極限値が2であるための必要十分条件は

$$b=-a,\ \frac{a}{2}=2 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

である。

よって、求める a , b の値は ② から　$a=4$, $b=-4$

注意　このように書けば、逆証は不要である。① は『極限が有限確定』であるための必要条件であるが、上の解では ① が成り立つとき、与式の左辺は確かに $\dfrac{a}{2}$ という有限確定値をとること（つまり ① の十分性）が確認されているからである。

「逆にこのとき、題意の等式は成り立つから　………」と形式的にかいてある書物をよく見かけるが、単に『あぶないから1行書いておこう』と言うのでは自分の論理に自信がもてないし、進歩もない。

2つの条件(極限値)が与えられたときの$f(x)$

次の2つの条件を満たす整関数 $f(x)$ を求めよ。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2,\qquad \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=-1$$

【解】極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$ が存在するから、$f(x)$ は2次以下の整関数である。

したがって　$f(x)=ax^2+bx+c$　とおける。

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)=a$

よって、条件から　$a=2$

ゆえに　$f(x)=2x^2+bx+c$

条件 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=-1$ で $\displaystyle\lim_{x\to 1}(x-1)=0$ だから　$\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)=0$

よって　$2+b+c=0$　したがって　$c=-b-2$　……①

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\{2(x+1)+b\}=4+b$

よって、条件から　$4+b=-1$　①とで　$b=-5,\ c=3$

以上により　$f(x)=2x^2-5x+3$

注　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$ が存在するから、$f(x)$ は2次以下の整関数であるが、極限値が0ではないから、$f(x)$ は2次の整関数となる。

また、$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=-1$ より　$f(1)=0$　「(分子) → 0」

よって、$f(x)$ は因数定理より $x-1$ を因数にもつ。

以上により　$f(x)=(ax+b)(x-1)$　と表される。

1次分数関数とその逆関数が一致

a, b, c を定数とする。関数 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ が逆関数をもつための条件を求めよ。また、そのときの逆関数がもとの関数と一致するための条件を求めよ。

【解1】 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ ……①とおく。

$$y=\frac{ax+b}{x+c}=a+\frac{b-ac}{x+c}$$

よって、与えられた関数が逆関数をもつ条件は

$b-ac\neq 0$

このとき、関数①の値域は　$y\neq a$

①の分母を払って、x について整理すると

$(y-a)x=-cy+b$　　　$y\neq a$ より　$x=\dfrac{-cy+b}{y-a}$

よって、①の逆関数は、x と y を入れ換えて　$y=\dfrac{-cx+b}{x-a}$　……②

①と②が一致するには、①の定義域 $x\neq -c$ と②の定義域 $x\neq a$ が一致することが必要である。　すなわち　$a=-c$

逆に、$a=-c$ のとき　①と②は一致する。

よって、①と②が一致する条件は　　$a=-c$

【解2】 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ ……①とおく。

①より　$(y-a)x=-cy+b$

ここで、$y-a=\dfrac{ax+b}{x+c}-a=\dfrac{b-ac}{x+c}$

y が定数関数 a ならば、逆関数は存在しないから、求める条件は

$b-ac\neq 0$

$y\neq a$ より　$x=\dfrac{-cy+b}{y-a}$

よって、①の逆関数は　$y=\dfrac{-cx+b}{x-a}$　……②

①と②が一致するための条件は　$\dfrac{ax+b}{x+c}=\dfrac{-cx+b}{x-a}$　……③

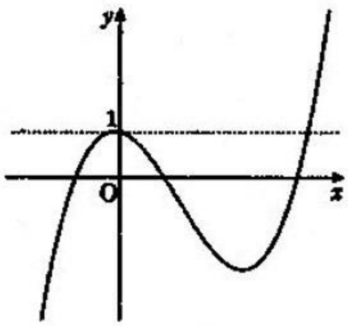
が定義域内のすべての x の値で成り立つことである。

③の分母を払って、整理すると　$(a+c)\{x^2-(a-c)x-b\}=0$

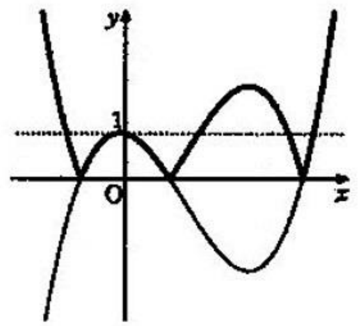
x についての恒等式より　$a+c=0$

このとき①と②の定義域はともに $x\neq -a$ となり一致するから、求める条件である。

絶対値，平方，平方根，逆数，ガウス記号のグラフ



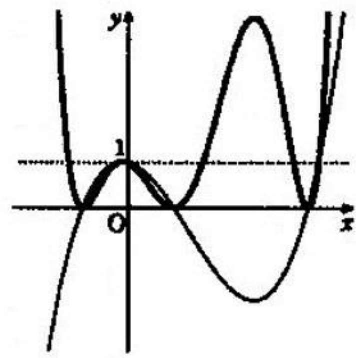
$y=f(x)$



$y=|f(x)|$

$f(x)\geqq 0$ の範囲では　$y=f(x)$

$f(x)<0$ の範囲では　$y=-f(x)$



$y=(f(x))^2$

$|f(x)|<1$ の範囲では

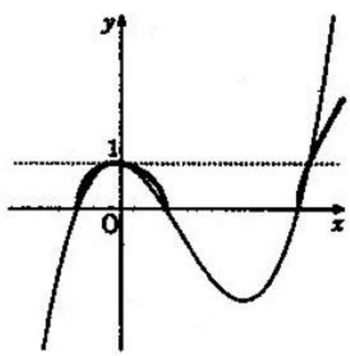
$(f(x))^2<|f(x)|<1$

$|f(x)|=1$ の範囲では

$(f(x))^2=|f(x)|=1$

$|f(x)|>1$ の範囲では

$(f(x))^2>|f(x)|>1$



$y=\sqrt{f(x)}$

$f(x)<0$ の範囲では

存在しない。

$f(x)<1$ の範囲では

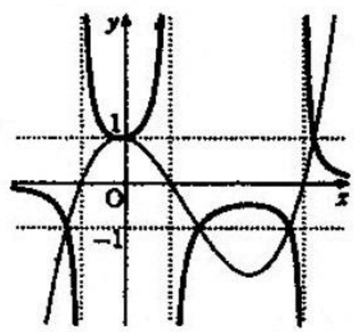
$f(x)<\sqrt{f(x)}<1$

$f(x)=1$ の範囲では

$f(x)=\sqrt{f(x)}=1$

$f(x)>1$ の範囲では

$f(x)>\sqrt{f(x)}>1$



$y=\dfrac{1}{f(x)}$

$f(x)>1$ の範囲では　$0<\dfrac{1}{f(x)}<1$

$f(x)=1$ の範囲では　$\dfrac{1}{f(x)}=1$

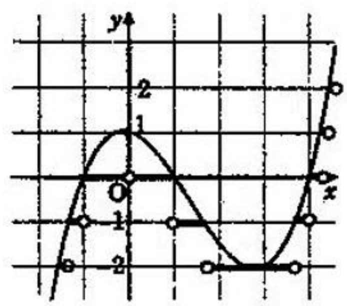
$0<f(x)<1$ の範囲では　$\dfrac{1}{f(x)}>1$

$f(x)=0$ の範囲では　存在しない。

$-1<f(x)<0$ の範囲では　$\dfrac{1}{f(x)}<-1$

$f(x)=-1$ の範囲では　$\dfrac{1}{f(x)}=-1$

$f(x)<-1$ の範囲では　$-1<\dfrac{1}{f(x)}<0$



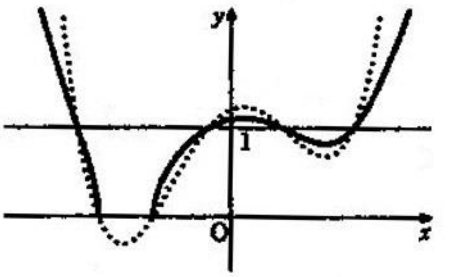
$y=[f(x)]$

$n\leqq f(x)<n+1$ の範囲では

$f(x)=n$　（n は整数）

$y=\sqrt{f(x)}$ のグラフ

$y=f(x)$ のグラフが分かっているとき、それをもとにして $y=\sqrt{f(x)}$ のグラフは右図の太線で与えれる。



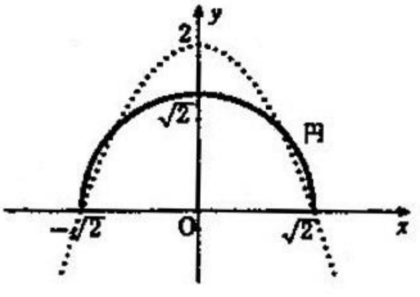
解説 (1) y が実数より $f(x)\geqq 0$ したがって、$y=f(x)$ のグラフの x 軸より下側の部分は、$y=\sqrt{f(x)}$ のグラフは存在しない。

(2) $f(x)=1$ のとき $\sqrt{f(x)}=1$ よって、$y=f(x)$ のグラフと $y=\sqrt{f(x)}$ のグラフは $y=1$ で共有点をもつ。

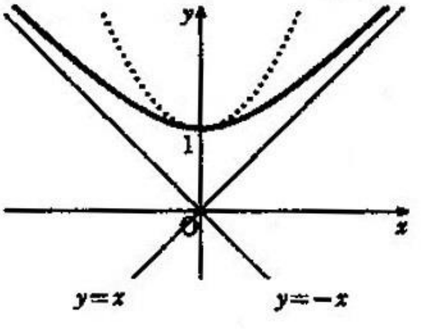
(3) $f(x)>1$ のとき $1<\sqrt{f(x)}<f(x)$，$0<f(x)<1$ のとき $f(x)<\sqrt{f(x)}<1$
よって、$y=\sqrt{f(x)}$ のグラフは $f(x)>1$ を満たす x の範囲では $y=f(x)$ のグラフの下側にあり、$0<f(x)<1$ では $y=f(x)$ の上側にある。

活用例

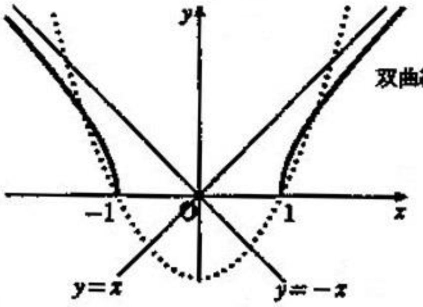
$y=\sqrt{2-x^2}$



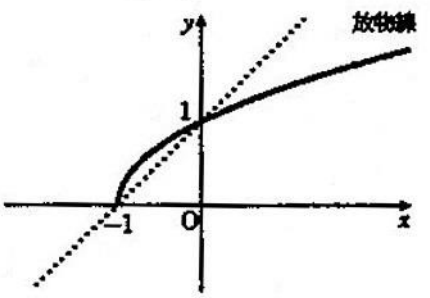
$y=\sqrt{1+x^2}$



$y=\sqrt{x^2-1}$



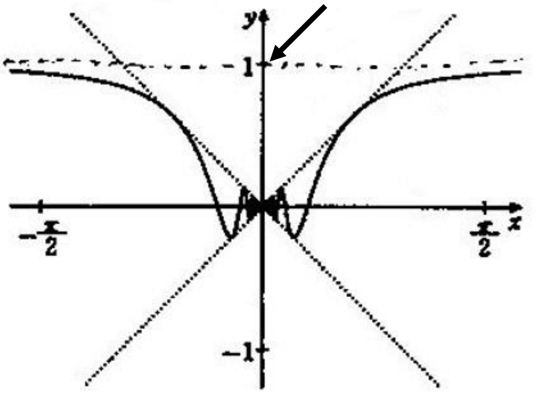
$y=\sqrt{1+x}$



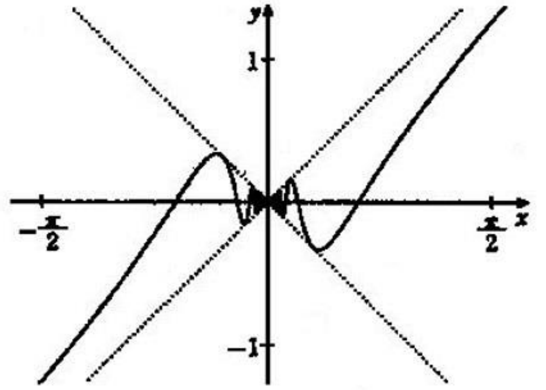
$\boldsymbol{y = x \sin f(x)\,,\, y = \sin f(x)}$**, etc.**

$y = x\sin\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{1/x\to 0}\frac{\sin(1/x)}{(1/x)} = 1$$

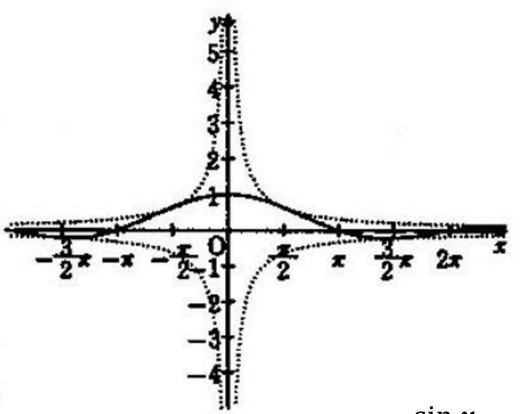


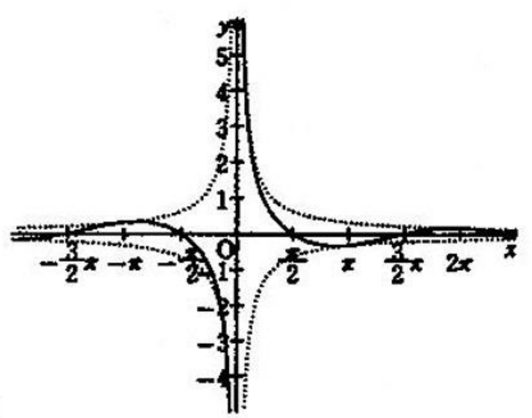
$y = x\cos\frac{1}{x}$



$y = \pm x$の間で振動

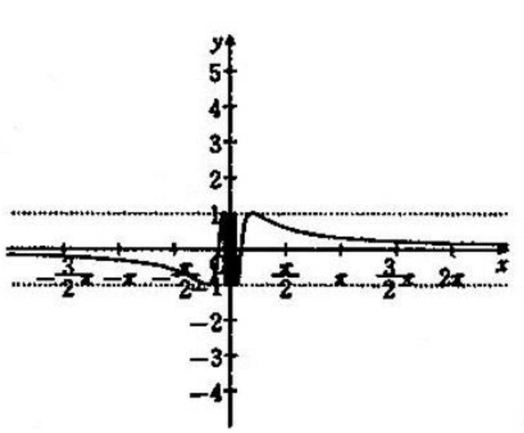
$y=\frac{\sin x}{x}$ ⟵ 勾配関数 ⟶ $y=\frac{\cos x}{x}$



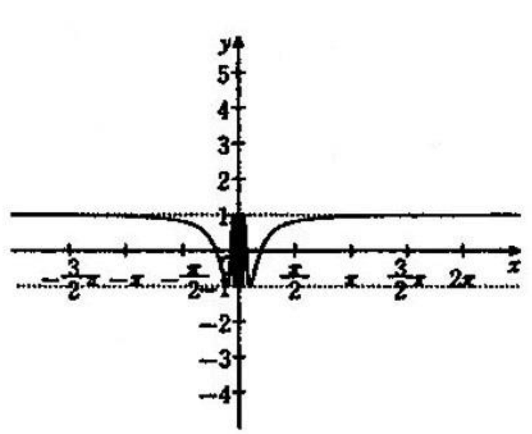


(↑) $y = \pm 1/x$の間で振動, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, (注意) 極値の場所は$x = \frac{n\pi}{2}$には一致しない

$y=\sin\frac{1}{x}$



$y=\cos\frac{1}{x}$



(↑) $x \to 0$で無限に振動

幅が1である区間の最大値

3 次関数 x^3-x が区間 $t-1\leqq x\leqq t$ でとる値の最大値は t の関数である。それを $f(t)$ としたとき、$y=f(t)$ のグラフをかけ。

【解1】$g(x)=x^3-x$ とおくと、$g'(x)=3x^2-1$

よって、増減表より $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で $g(x)$ が極大となるから、区間 $t-1\leqq x\leqq t$ における $g(x)$ の最大値は、

$$\max\left(g(t-1),\ g(t),\ g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

である。

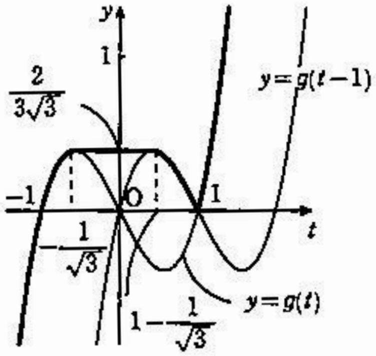
x		$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$	
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

ただし、$g\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ は $t-1\leqq-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq t$ のときのみ最大値の候補となる。

そこで、$y=g(t-1)$, $y=g(t)$,

$y=g\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq t\leqq 1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

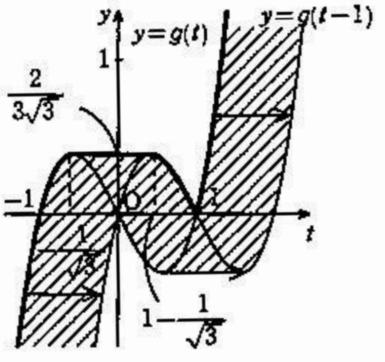
のグラフを書いて一番高いところをたどれば、それが求めるグラフ（右図の太線）である。



【解2】$[t-1,\ t]$ における $g(x)=x^3-x$ の最大値を求めることと、曲線 $y=g(t-\alpha)$ で α が 0 から 1 まで変化したときの最大値を求めることとは同じことである。

よって、「$y=g(t)$ ……① のグラフを描き、それを横軸方向に 1 まで平行移動したとき、直線 $t=t_0$ を曲線 ① が通過した部分の y の最大値 $f(t_0)$」として与えられる。

次に、t_0 が $f(x)$ の定義域内を動いて、$y=f(t)$ のグラフ (図の太線部分) が得られる。



言わば「主役と脇役の入れ替え」である

下図の破線は $y=\pm x(x-3)$ のグラフである。
下図を用いて、次の関数のグラフを書け

(1) $y=|x(x-3)|$

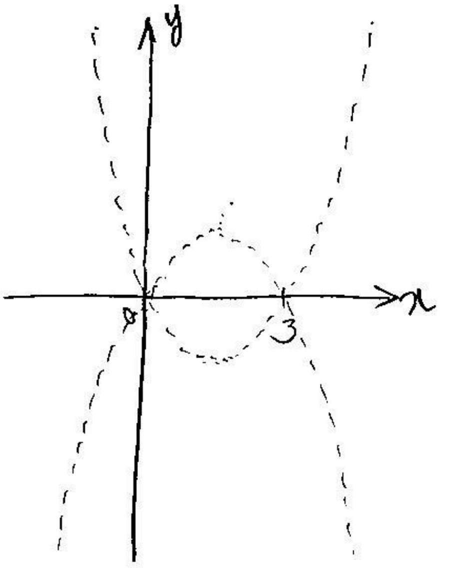
(2) $y=x|x-3|$

(3) $y=|x|(x-3)$

(4) $|y|=x(x-3)$

(5) $|y|=x|x-3|$

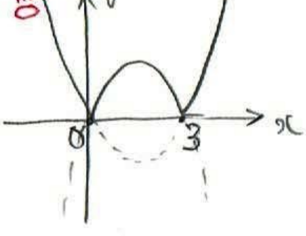
(6) $|y|=|x|(x-3)$



【答】

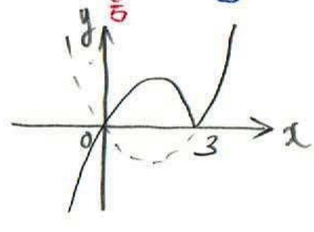
(1) $y=|x(x-3)|$

$y \geqq 0$



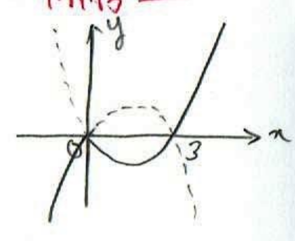
(2) $y=x|x-3|$

y と x は同符号, $|x-3| \geqq 0$



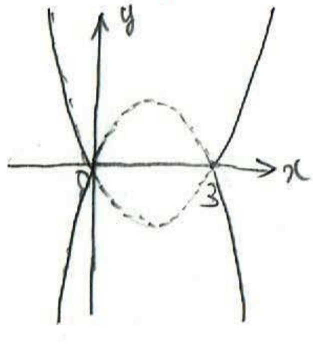
(3) $y=|x|(x-3)$

$|x| \geqq 0$, y と $x-3$ は同符号



(4) $|y|=x(x-3) \geqq 0$

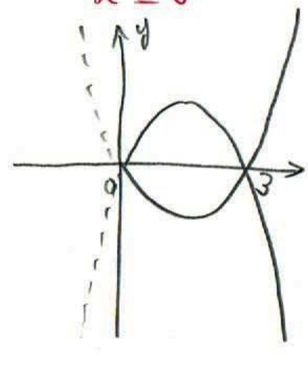
$x \leqq 0\ ,\ 3 \leqq x$



(5) $|y|=x|x-3| \geqq 0$

$|x-3| \geqq 0$ より

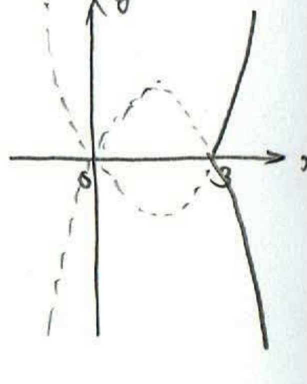
$x \geqq 0$



(6) $|y|=|x|(x-3) \geqq 0$

$|x| \geqq 0$ より $x-3 \geqq 0$

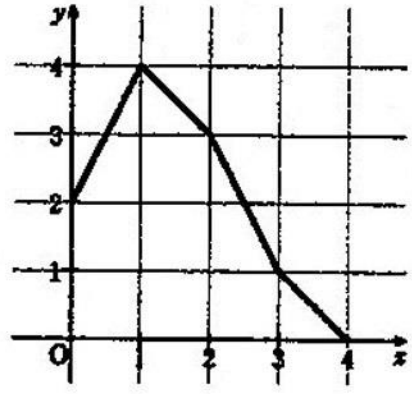
$\therefore x \geqq 3$



折れ線の合成関数のグラフ

右の図の折れ線で表される関数を $f(x)$ とする。

$y=f(f(x))$ のグラフを書け。



【解】 $y=f(f(x))$ のグラフは図の太線部分である。

$f(x)$ が1次関数のとき、$f(f(x))$ も1次関数だから、各区間の端点の値が分かれば、両端の値を結んでグラフが求まる。

区間 $[0, 0.5]$ のとき

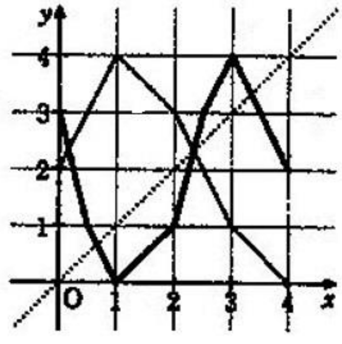
$f(f(0))=f(2)=3$, $f(f(0.5))=f(3)=1$

であるから、2点 $(0, 3)$, $(0.5, 1)$ を結ぶ線分である。

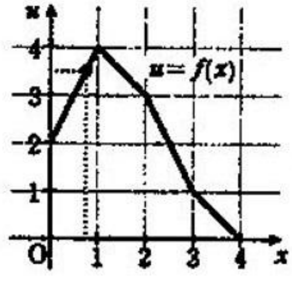
同様にして、各区間

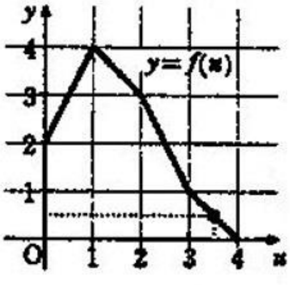
$[0.5, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 2.5]$, $[2.5, 3]$, $[3, 4]$

を調べて、$y=f(f(x))$ のグラフは右図の太線となる。



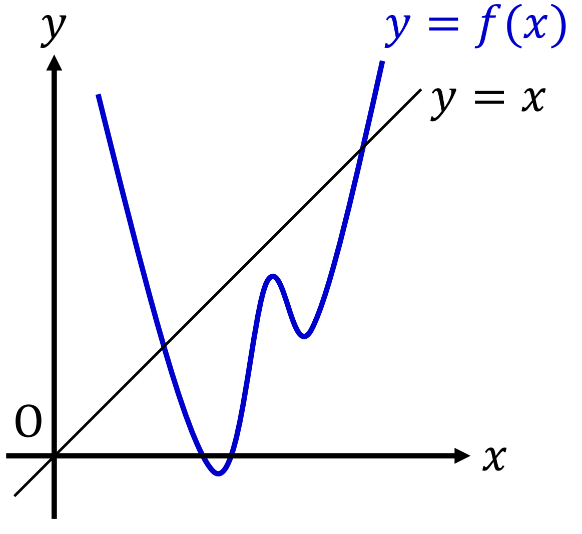
注意 $0 \leqq x \leqq 1$ のとき、$2 \leqq f(x) \leqq 4$ であるが、$f(x)=u$ とおくと $2 \leqq u \leqq 4$ のとき、$f(u)$ は $u=3$ で折れ線となっている。



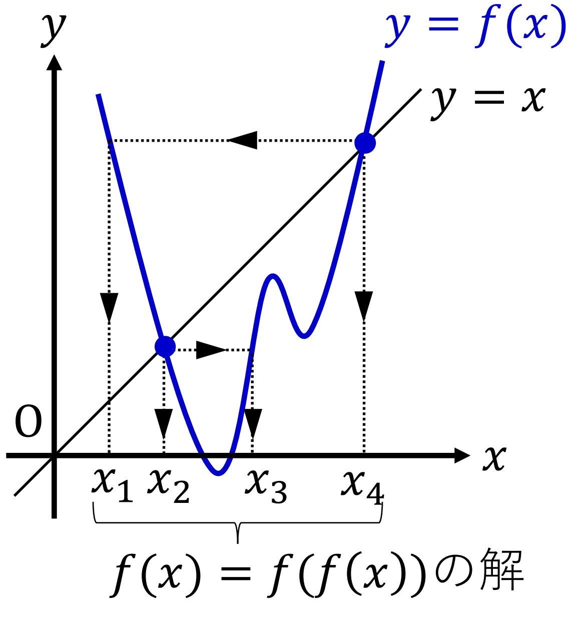


具体例 $f(0.75)=3.5$, $f(3.5)=0.5$ より　$f(f(0.75))=0.5$

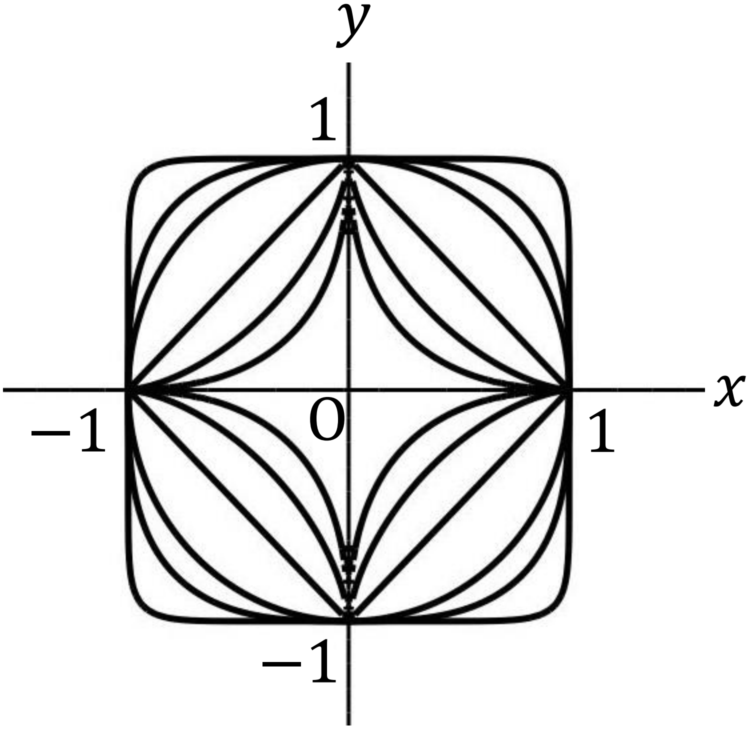
下図のように$y = x$と$y = f(x)$のグラフが与えられたとき，
$f(x) = f(f(x))$の解xをx軸上に見出せ．



【答】



$x^n + y^n = 1$ のグラフ



内側から順に $n = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, 2, 3, 10$ のグラフ.
$n = 2$ は単位円, $n = \frac{2}{3}$ はアステロイドである.
曲線は $n \to \infty$ で直線 $x, y = \pm 1$ に仕切られた正方形に近づき,
$n \to 0$ で"十字架"に近づく.
(描画ソフトの仕様により, $y = \pm 1$ 付近でグラフが荒れている.)

積分

- 分数関数の積分の仕方
- 置換積分
- 台形の面積から発想する
- 階段関数と不等式
- $\log 2$について (級数)
- スターリングの式
- **はみ出し削りと無限小**

など

定積分関数における最小問題

具体例

(1) 定積分 $\int_0^1 e^x|x-a|dx$ を最小にする a の値を求めよ。 (東工大)

(2) $S(a)=\int_1^2\left|\frac{1}{x}-ax\right|dx\ (-\infty<a<\infty)$ の最小値 (芝浦工大)

(3) 区間 $0\leqq t\leqq\pi$ で関数 $G(t)$ を $G(t)=\int_0^\pi|t-x|\sin^2 x\,dx$ で定義する。

(i) $G(t)$ を求めよ。 (ii) $G'(t)$, $G''(t)$ を求め、$G(t)$ の増減を調べよ。

(iii) $G(t)$ の最小値を求めよ。 (電気通信大)

(4) 区間 $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ において $f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t-\cos x|dt$ とおく。

$f(x)$ を最小にする x の値、および $f(x)$ の最小値を求めよ。 (東京女子大)

(5) θ は $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。このとき、定積分

$$S(\theta)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\tan\theta\cos x|dx \text{ とおく。}$$

を求めよ。また、$S(\theta)$ の最小値およびその時の θ の値を求めよ。 (関西学院大)

答 (1) $a=\log\frac{e+1}{2}$ (2) $\log\frac{5}{4}$ (3) 最小値 $G\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}$ (4) $x=\frac{\pi}{4}$, $\sqrt{2}-1$

(5) $\theta=\frac{\pi}{6}$ のとき $S(\theta)$ の最小値は $\sqrt{3}-1$

定積分関数における最小問題の具体例2

【定理】 $f(x)$, $g(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続な関数とし、$f(x)$ は開区間 (a, b) で単調で微分可能あり、$g(x)$ は開区間 (a, b) で $g(x)>0$ とする。

このとき

$$S(t)=\int_a^b|f(x)-f(t)|g(x)dx \quad (a\leqq t\leqq b)$$

を最小にする t の値は

$$\int_a^c g(x)dx=\int_c^b g(x)dx$$ をみたす c の値に等しい。

部分積分の公式

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

特に、$g(x)=x$ のとき

$$\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx$$

また

$$\int f(x)e^{x}dx = e^{x}(f(x) - f'(x) + f''(x) - f'''(x) + \cdots)$$

$$\int f(x)e^{-x}dx = -e^{-x}(f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots)$$

まとめて

$$\int f(x)e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(f(x) - \frac{1}{a}f'(x) + \frac{1}{a^2}f''(x) - \cdots\right)$$

例 $\displaystyle\int (\log x)^2 dx = \int u^2 e^u du \quad (\log x = u \Leftrightarrow e^u = x)$

$$= (u^2 - 2u + 2)e^u + C$$

$$= \{(\log x)^2 - 2\log x + 2\}x + C$$

参考　$f(x)$ が n 次の多項式であるとき

$$\int f(x)\cos x\,dx = (f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - \cdots)\sin x + (f'(x) - f'''(x) + f^{(5)}(x) - \cdots)\cos x$$

$$\int f(x)\sin x\,dx = -(f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - \cdots)\cos x + (f'(x) - f'''(x) + f^{(5)}(x) - \cdots)\sin x$$

または

積分する　微分する　微分する　微分する

$$\int f(x)\cos x\,dx = f(x)\sin x + f'(x)\cos x - f''(x)\sin x + \cdots\cdots$$

そのまま　微分する　微分する　微分する

積分する　微分する　微分する　微分する

$$\int f(x)\sin x\,dx = f(x)(-\cos x) + f'(x)\sin x + f''(x)\cos x + \cdots\cdots$$

そのまま　微分する　微分する　微分する

分数関数の積分の仕方

例えば、$\displaystyle\int\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$ を求めるとき、「部分分数に分解する」ことが常識であるが、この場合は分数式の分母が$(x-1)^2(x^2+1)$だから、分母が$x-1$, $(x-1)^2$, x^2+1である分数式の和に分ける。

その計算は

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+1}$$

として、数値代入法あるいは未定係数法により a, b, c, d を決める。

実際、$a=b=\dfrac{1}{2}$, $c=-\dfrac{1}{2}$, $d=0$ となり、積分して答え

$$-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{4}\log\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+C$$

を得る。

分数式は、分子の次数が分母の次数以上なら、分子を分母で割ったときの商と、分子の次数が分母の次数より低い分数式の和になる。

商は整式だから簡単に積分できる。それ故、分数関数の積分は、分子が分母より次数が低いものが問題になる。

次に、分母が$(x-1)^2$と(x^2+1)のように定数のほかに公約数のない整式は

$\dfrac{g_1(x)}{f_1(x)}+\dfrac{g_2(x)}{f_2(x)}+\cdots+\dfrac{g_n(x)}{f_n(x)}$ ただし、$g_i(x)$の次数<$f_i(x)$の次数 $(i=1, 2, \cdots, n)$

の形に分解できることが分かっている。

分母、分子の整式は実数係数だから、分母 $f(x)$ において、$f(x)=0$ の実数解 α に対して$(x-\alpha)$ が因数、虚数解βに対して2次式 $(x-\beta)(x-\overline{\beta})=x^2-(\beta+\overline{\beta})x+\beta\overline{\beta}$ が因数になる。そうすると、部分分数への分解は、分母が1次のべきか2次式のべきである分数式の和になる。

$\displaystyle\int\frac{c}{(ax+b)^n}dx$ の形はすぐ求まるし、$\displaystyle\int\frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}dx$ という形は適当な置換積分により、$\displaystyle\int\frac{1}{(t^2+a^2)^n}dt$, $\displaystyle\int\frac{t}{(t^2+a^2)^n}dt$ なる積分になる。

そこで、この積分を求める必要があるが、後者は $-\dfrac{1}{2(t^2+a^2)^{n-1}}+C$ であるから、前者を調べる。

いま、$I_n=\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ $(a\neq 0)$ とおくと、部分積分により

$$I_{n-1}=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}=\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}-\int x\cdot\frac{-(n-1)\cdot 2x}{(x^2+a^2)^n}dx$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+2(n-1)\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}dx$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+2(n-1)\int\frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^n}dx$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+2(n-1)(I_{n-1}-a^2I_n)$$

$$2(n-1)a^2I_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}$$

$$I_n=\frac{1}{a^2}\left\{\frac{x}{(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}\right\}$$

て、I_1を計算して、逐次I_2, I_3, $\cdots$ が求められる。

置換積分

□ $\int f(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$

$\sqrt[n]{ax+b}=t$ とおくと $ax+b=t^n$ $\quad\therefore\ x=\dfrac{t^n-b}{a},\ dx=\dfrac{nt^{n-1}}{a}dt$

$\int f(x, \sqrt[n]{ax+b})dx=\int f\left(\dfrac{t^n-b}{a}, t\right)\dfrac{nt^{n-1}}{a}dt$ となり有理関数の積分に帰着する。

例 $\int x\sqrt{x+1}\,dx$

$\sqrt{x+1}=t$ とおくと $x=t^2-1$であり $dx=2tdt$

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx=\int(t^2-1)t\cdot 2tdt=\int(2t^4-2t^2)dt=\frac{2}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+C$$

$$=\frac{2}{15}t^3(3t^2-5)+C=\frac{2}{15}(3x-2)(x+1)\sqrt{x+1}+C$$

□ $\sqrt{a^2-x^2}$ を含む積分

$x=a\sin\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos\theta,\ dx=a\cos\theta\,d\theta$

例 $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\int\cos^2\theta\,d\theta=\dfrac{a^2}{2}\int(1+\cos2\theta)d\theta$

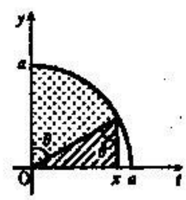
$$=\frac{a^2}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)+C=\frac{a^2}{2}(\theta+\sin\theta\cos\theta)+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right)+C$$

なお、この積分は図形的に、右図で

扇形の面積 $=\dfrac{1}{2}a^2\theta=\dfrac{1}{2}a^2\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ と直角三角形の面積

$=\dfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}$ との和になっている。



□ a^2+x^2 を含む積分

$x=a\tan\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと $a^2+x^2=\dfrac{a^2}{\cos^2\theta},\ dx=\dfrac{a}{\cos^2\theta}d\theta$

例 $\int\dfrac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int\dfrac{\cos^3\theta}{a^3}\cdot\dfrac{a}{\cos^2\theta}d\theta=\dfrac{1}{a^2}\int\cos\theta\,d\theta=\dfrac{1}{a^2}\sin\theta+C$

$$=\frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+C$$

$\int f(\sin x, \cos x)dx$

$\tan\dfrac{x}{2}=t\ (-\pi<x<\pi)$ とおく。

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-1=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx=dt$ より $dx=2\cos^2\dfrac{x}{2}dt=\dfrac{2}{1+t^2}dt$

$$\int f(\sin x, \cos x)dx=\int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$$

となり、tの有理関数と log( ), $\tan^{-1}$( ) で表される。

□ $\int f(\cos^2x, \sin^2x)dx,\ \int f(\tan x)\dfrac{1}{\cos^2x}dx$

$\tan x=t\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと $\dfrac{1}{\cos^2x}dx=dt$

$1+\tan^2x=\dfrac{1}{\cos^2x}$ より $\cos^2x=\dfrac{1}{1+t^2},\ \sin^2x=\dfrac{t^2}{1+t^2}$

$$\int f(\cos^2x, \sin^2x)dx=\int f\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$\int f(\tan x)\frac{1}{\cos^2x}dx=\int f(t)dt$$

★

□ $\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx\quad(a>0)$

$\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}\,x=t$ とおく。

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+\sqrt{a}\,c}{2\sqrt{a}\,t+b}$$

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b},\ dx=\frac{2(\sqrt{a}\,t^2+bt+\sqrt{a}\,c)}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}dt$$

特に $\int f(x, \sqrt{x^2+1})dx$ のとき $x+\sqrt{x^2+1}=t$ とおくと

$\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right),\ x=\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$ で $dx=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)dt$

★

$\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x=t\cdots\cdots$①とおくと，和と差の積

$$\left(\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{a}x\right)t=(ax^2+bx+c)-ax^2=bc+c$$

$$\therefore\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{a}x=\frac{bx+c}{t}\cdots\cdots②$$

①−②より

$$2\sqrt{a}x=t-\frac{bx+c}{t}\qquad\therefore x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}\cdots\cdots③$$

$$\therefore dx=\frac{2(\sqrt{a}t^2+bt+\sqrt{a}c)}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt$$

(①＋②)/2より

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{1}{2}\left(t+\frac{bx+c}{t}\right)=\frac{\sqrt{a}t^2+bt+\sqrt{a}c}{2\sqrt{a}t+b}\quad(\because③)$$

なお$x=2t/\sqrt{a}$とも表されるだろう.

置換積分　$a-x=t$

(1) $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$ であることを示し、定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$ を求めよ。

(2) $a>0$ とする。$f(x)$ を、閉区間 $[0,\ a]$ で連続な実数値関数で、$f(x)+f(a-x)\neq 0$ $(0\leqq x\leqq a)$ とする。

$\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx=b$ のとき、$\int_{\frac{a}{2}}^{a}\frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx$ の値を求めよ。

【解】(1)　$a-x=t$ とおくと　　$-dx=dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$0\to a$
t	$a\to 0$

$$\int_0^a f(a-x)dx=\int_a^0 f(t)(-1)dt=\int_0^a f(t)dt$$

$f(x)=\dfrac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}$ とおく。

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x,\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}+\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x\cos x)dx=\left[x-\frac{1}{2}\sin^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)dx$ であるから　　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\dfrac{\pi-1}{4}$

(2)　$I=\int_{\frac{a}{2}}^{a}\dfrac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx$ とおく。

$a-x=t$ とおくと　　$-dx=dt$

x と t の対応は右のようになる。

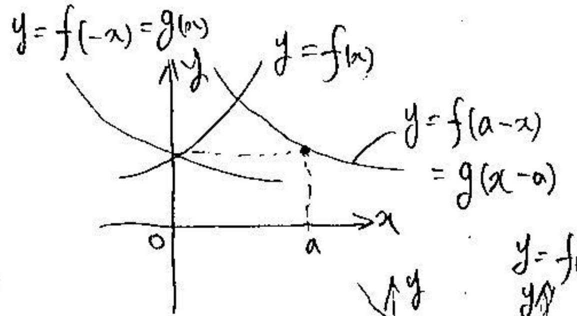
x	$\frac{a}{2}\to a$
t	$\frac{a}{2}\to 0$

よって　　$I=\int_{\frac{a}{2}}^{0}\dfrac{f(a-t)}{f(a-t)+f(t)}\cdot(-1)dt$

$$=\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{f(a-t)}{f(t)+f(a-t)}dt=\int_0^{\frac{a}{2}}\left\{1-\frac{f(t)}{f(t)+f(a-t)}\right\}dt$$

$$=\Big[t\Big]_0^{\frac{a}{2}}-\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{f(t)}{f(t)+f(a-t)}dt=\frac{a}{2}-b$$

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$ 等の証明



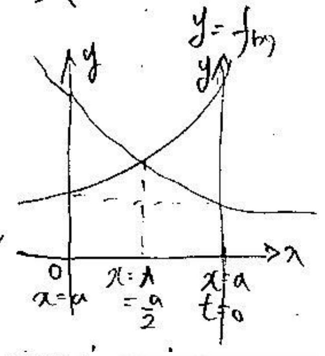
証明せよ。

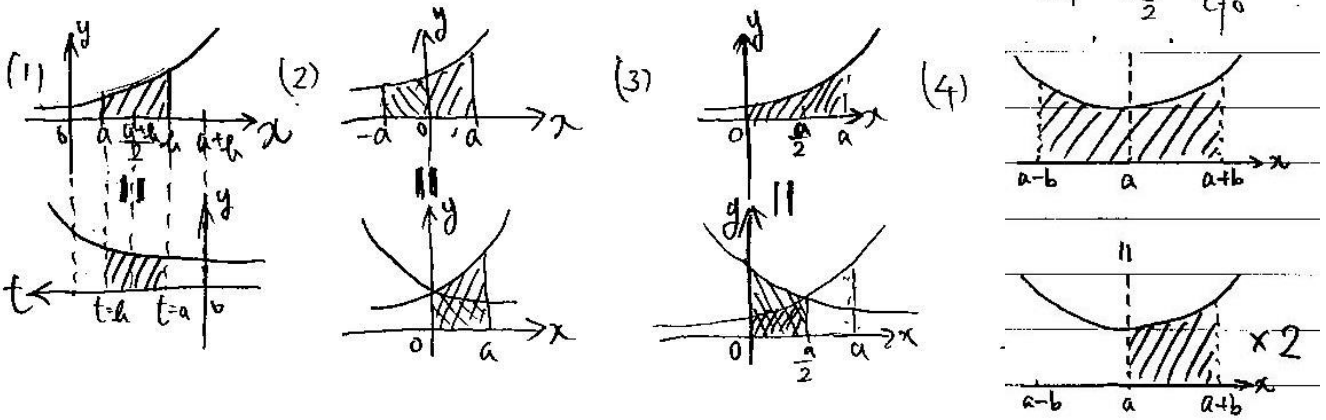
(1) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

(2) $\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a \{f(x)+f(-x)\}\,dx$

(3) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^{\frac{a}{2}} \{f(x)+f(a-x)\}\,dx$

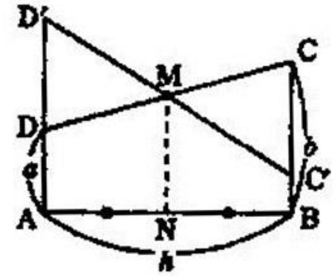
(4) $f(a+x)=f(a-x)$ のとき $\int_{a-b}^{a+b} f(x)\,dx = 2\int_a^{a+b} f(x)\,dx$





台形の面積から発想する

台形の面積の公式 $S=\dfrac{(a+b)h}{2}$ で $a+b$ が一定値ならば、



右図のように台形 ABCD で辺 CD の中点は M は定点となり、CD の傾きが変化しても台形の面積は常に AB・MN である。

すなわち

台形 ABCD＝台形 ABC'D'＝AB・MN

が成り立つ。

この事実を関数的に眺めて、より一般的に扱ってみると次のことが分かる。

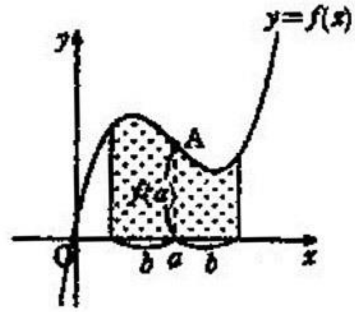
（i） 点 A$(a,\ f(a))$ に関して曲線 $y=f(x)$ が点対称

（すなわち $\underline{f(2a-x)=2f(a)-f(x)}$）

であれば

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)dx=2bf(a)$$

が成り立つ。



$x'=x-a$を導入すると

$f(a+x')-f(a)=-\left(f(a-x')-f(a)\right)$.この式は平均 $\frac{f(a-x')+f(a+x')}{2}=f(a)$ と見ても良い.

（ii） 直線 ℓ : $x=a$ に関して曲線 $y=f(x)$ が線対称

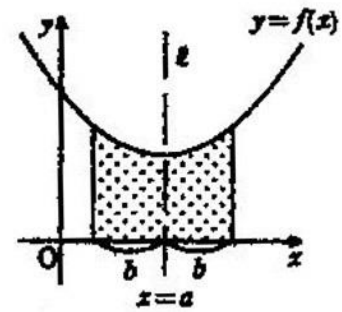
（すなわち $\underline{f(2a-x)=f(x)}$）

$x'=x-a$を導入すると $f(a+x')=f(a-x')$.

であれば

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)dx=2\int_{a}^{a+b} f(x)dx$$

が成り立つ。



参考 （i）で A が原点と一致するときは、$f(x)$ が奇関数（$f(-x)=-f(x)$）の場合で

$$\int_{-b}^{b} f(x)dx=2bf(0)=0$$

（ii）で $a=0$ のときは、$f(x)$ が偶関数（$f(-x)=f(x)$）の場合で

$$\int_{-b}^{b} f(x)dx=2\int_{0}^{b} f(x)dx$$

実際の計算にあたっては、$y=f(x)$ のグラフを左右に平行移動して、計算し易くすると良い。

問1　つぎの定積分を計算せよ。

(1) $27\displaystyle\int_1^3 (x-1)(x-3)(x-2)^5dx$　　(2) $105\displaystyle\int_1^3 (x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2dx$

(3) $\displaystyle\int_1^3 (x-1)^2(x-3)^2dx$

$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(a+b-x)\,dx$等の証明

次のことが成り立つことを証明せよ。

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$　　(2) $\int_{-a}^a f(x)dx=\int_0^a \{f(x)+f(-x)\}dx$

(3) $\int_0^a f(x)dx=\int_0^{\frac{a}{2}} \{f(x)+f(a-x)\}dx$

(4) $f(a+x)=f(a-x)$ のとき　$\int_{a-b}^{a+b} f(x)dx=2\int_a^{a+b} f(x)dx$

〔解〕(1) $a+b-x=t$ とおくと　$-dx=dt$

$\therefore$　(右辺)$=\int_b^a f(t)\cdot(-1)dt=-\int_b^a f(t)dt=\int_a^b f(t)dt=$(左辺)

x	a	$\cdots$	b
t	b	$\cdots$	a

(2) (右辺)$=\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(-x)dx$　$-x=t$ とおくと　$-dx=dt$

$\int_0^a f(-x)dx=\int_0^{-a} f(t)\cdot(-1)dt=\int_{-a}^0 f(t)dt=\int_{-a}^0 f(x)dx$

x	0	$\cdots$	a
t	0	$\cdots$	$-a$

$\therefore$　(右辺)$=\int_0^a f(x)dx+\int_{-a}^0 f(x)dx=\int_{-a}^a f(x)dx=$(左辺)

(3) (右辺)$=\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx+\int_0^{\frac{a}{2}} f(a-x)dx$　$a-x=t$ とおくと　$-dx=dt$

$\int_0^{\frac{a}{2}} f(a-x)dx=\int_a^{\frac{a}{2}} f(t)\cdot(-1)dt=\int_{\frac{a}{2}}^a f(t)dt=\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)dx$

x	0	$\cdots$	$a/2$
t	a	$\cdots$	$a/2$

$\therefore$　(右辺)$=\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx+\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)dx=\int_0^a f(x)dx=$(左辺)

(4) (左辺)$=\int_{a-b}^a f(x)dx+\int_a^{a+b} f(x)dx$

$x=a+t$ とおくと　$dx=dt$

x	$a-b$	$\cdots$	a
t	$-b$	$\cdots$	0

$\int_{a-b}^a f(x)dx=\int_{-b}^0 f(a+t)dt=\int_{-b}^0 f(a-t)dt$

$a-t=x$ とおくと　$-dt=dx$

t	$-b$	$\cdots$	0
x	$a+b$	$\cdots$	a

$\int_{-b}^0 f(a-t)dt=\int_{a+b}^a f(x)\cdot(-1)dx=\int_a^{a+b} f(x)dx$

$\therefore$　(左辺)$=2\int_a^{a+b} f(x)dx=$(右辺)

$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$

$I=\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$ $(a>0)$ を求めよ。

【解1】 $x=a\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$\sqrt{x^2+a^2}=a\sqrt{\tan^2\theta+1}=\frac{a}{\cos\theta},\quad dx=a\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

よって、$I=a^2\displaystyle\int\frac{d\theta}{\cos^3\theta}=a^2\int\frac{\cos\theta}{\cos^4\theta}d\theta$

$\sin\theta=t$ とおくと　$\cos\theta\,d\theta=dt$，$\cos^4\theta=(1-t^2)^2$ より

$$\frac{I}{a^2}=\int\frac{dt}{(1-t^2)^2}$$

そこで

$$\frac{1}{(1-t^2)^2}=\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)\right\}^2=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{2}{1-t^2}+\frac{1}{(1-t)^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{(1-t)^2}\right\}$$

より，t で積分すると

$$\frac{4I}{a^2}=-\frac{1}{1+t}-\log|1-t|+\log|1+t|+\frac{1}{1-t}+2C_1$$

$$=\frac{2t}{1-t^2}+\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+2C_1$$

$$=\frac{2\sin\theta}{1-\sin^2\theta}+\log\left|\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right|+2C_1$$

$$=2\tan\theta\cdot\frac{1}{\cos\theta}+2\log\left|\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta\right|+2C_1$$

$$\left(\because\ \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}=\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2=\left(\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta\right)^2\right)$$

そして，$\tan\theta=\dfrac{x}{a}$ より　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\dfrac{x^2}{a^2}$ から

$\cos^2\theta=\dfrac{a^2}{x^2+a^2}$，$\cos\theta>0$ より　$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$$\therefore\quad I=\frac{a^2}{2}\left\{\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\log\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+C_1\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right\}+C$$

【解2】 $x+\sqrt{x^2+a^2}=t$ とおくと　$x-\sqrt{x^2+a^2}=-\dfrac{a^2}{t}$

よって、$\sqrt{x^2+a^2}=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{a^2}{t}\right)$, $x=\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{a^2}{t}\right)$ で　$dx=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{a^2}{t^2}\right)dt$　(*)

$$\therefore\quad I=\int\frac{1}{2}\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right)dt$$

$$=\int\left(\frac{t}{4}+\frac{a^2}{2t}+\frac{a^4}{4t^3}\right)dt$$

$$=\frac{t^2}{8}+\frac{a^2}{2}\log|t|-\frac{a^4}{8t^2}+C$$

$$=\frac{1}{8}\left(t^2-\frac{a^4}{t^2}\right)+\frac{a^2}{2}\log|t|+C$$

$$=\frac{1}{2}\{x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\log(x+\sqrt{x^2+a^2})\}+C$$

$t^2-\dfrac{a^4}{t^2}=\left(t+\dfrac{a^2}{t}\right)\left(t-\dfrac{a^2}{t}\right)$
として上式(*)を代入

【解3】 $x=\dfrac{a}{2}(e^t-e^{-t})$ とおくと　$x^2+a^2=\dfrac{a^2}{4}(e^t+e^{-t})^2$ より

$\sqrt{x^2+a^2}=\dfrac{a}{2}(e^t+e^{-t})$, $dx=\dfrac{a}{2}(e^t+e^{-t})dt$

$$\therefore\quad I=\frac{a^2}{4}\int(e^t+e^{-t})^2dt=\frac{a^2}{4}\int(e^{2t}+2+e^{-2t})dt$$

$$=\frac{a^2}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2t}+2t-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)+C_1$$

$$=\frac{a^2}{8}(e^t+e^{-t})(e^t-e^{-t})+\frac{a^2}{2}t+C_1$$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}+C_1\quad(\because x+\sqrt{x^2+a^2}=ae^t)$$

$$=\frac{1}{2}\{x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\log(x+\sqrt{x^2+a^2})\}+C$$

【解4】

$$I=x\sqrt{x^2+a^2}-\int x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx+\int\frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-I+a^2\log(x+\sqrt{x^2+a^2})+2C$$

$$\therefore\quad I=\frac{1}{2}\{x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\log(x+\sqrt{x^2+a^2})\}+C$$

【解3】について：双曲線関数による置換

準備として双曲線関数

$$\cosh t \equiv \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t \equiv \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

について説明する．グラフは**下図**のようである．定義から直接確かめられるように

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

が成り立つため，双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ は $(x, y) = (\cosh t, \sinh t)$ とパラメトライズされる．(これが双曲線関数の名前の由来である．) 三角関数と類似の

- "倍角"公式　$\cosh 2t = 2\cosh^2 t - 1, \quad \sinh 2t = 2\sinh t \cosh t$
- 微分公式　$(\cosh t)' = \sinh t, \quad (\sinh t)' = \cosh t$
- 積分公式　$\int \cosh t\, \mathrm{d}t = \sinh t + C, \quad \int \sinh t\, \mathrm{d}t = \cosh t + C$
- Taylor展開　$\cosh t = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots, \quad \sinh t = t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots$

なども有用である．ところで任意の関数 $f(x)$ は必ず，偶関数 $e(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = e(-x)$ と奇関数 $o(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} = -o(-x)$ の和 $f(x) = e(x) + o(x)$ で書ける．特に指数関数は

$$e^t = \cosh t + \sinh t\,.$$

以上を踏まえると，【解3】は次のように表現できる．$x = a \sinh t$ とおくと

$$\sqrt{x^2 + a^2} = a \cosh t\,, \quad \mathrm{d}x = a \cosh t\, \mathrm{d}t$$

なので，

$$I = \int \sqrt{x^2 + a^2}\, \mathrm{d}x = a^2 \int \cosh^2 t\, \mathrm{d}t = \frac{a^2}{2} \int \frac{1 + \cosh 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sinh 2t}{2}\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}(t + \sinh t \cosh t) + C.$$

ここで

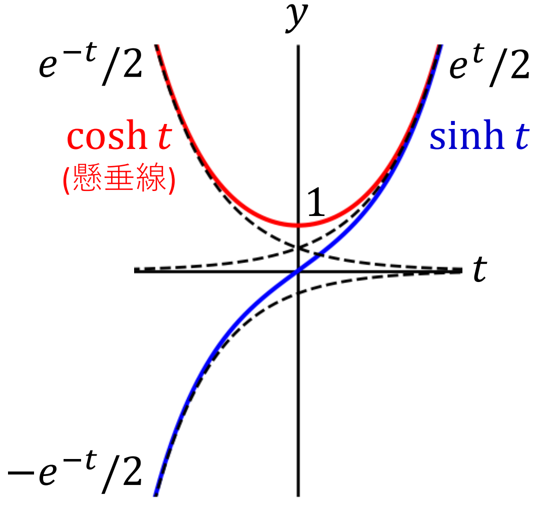
$$e^t = \cosh t + \sinh t = \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}, \quad \therefore t = \log \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}$$

なので，

$$I = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} + C.$$

<u>次元解析による検算</u>

数学では無次元量のみを扱うものの，仮に x, a に長さの次元を与えたとすると，積分 I は (長さ)^2 の次元を持たなければならないことを検算に用いることができる．上式では log の真数は無次元である．積分定数から適当な因子をくくり出して真数を無次元化することは常に可能である．



まとめ

$$\boxed{\begin{array}{l} \sqrt{a^2 - x^2} \ \rightarrow x = a \sin t \\ \sqrt{a^2 + x^2} \ \rightarrow x = a \sinh t \end{array}}$$

極限値 $S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$ を求めよ。

【解】 $S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\pi\cdot\frac{1}{n}+\sin\pi\cdot\frac{2}{n}+\cdots\cdots+\sin\pi\cdot\frac{n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\pi\cdot\frac{k}{n}$

$=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1=\frac{2}{\pi}$

別解 $S=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\sin\frac{k}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{1}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}$

次の不等式を証明せよ。ただし，n は2以上の自然数とする。

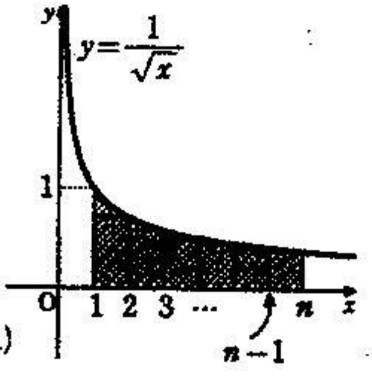
$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1$$

【解】 自然数 k に対して，$k<x<k+1$ のとき　$\sqrt{k}<\sqrt{x}<\sqrt{k+1}$

ゆえに　$\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\frac{1}{\sqrt{x}}$

よって　$\int_k^{k+1}\frac{dx}{\sqrt{k+1}}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{\sqrt{x}}$

すなわち　$\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{\sqrt{x}}$



$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n-1$ として，辺々を加えると

$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\int_1^n\frac{dx}{\sqrt{x}}$

ここで　$\int_1^n\frac{dx}{\sqrt{x}}=\left[2\sqrt{x}\right]_1^n=2(\sqrt{n}-1)$

したがって　$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-1)$

この不等式の両辺に1を加えて

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1$$

区分求積の応用

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right\}^{\frac{1}{n}}=?$$

$$\frac{(2n)!}{n!\,n^n}=\frac{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+n)}{n^n}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)$$

より

$$\lim_{n\to\infty}\log\left\{\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\int_0^1\log(1+x)\,dx$$

$$=\log\frac{4}{e}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right\}^{\frac{1}{n}}=\frac{4}{e}$$

階段関数と不等式 (基本)

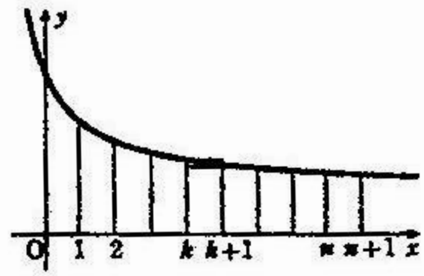
$x>0$ に対して $f(x)$ が x の減少関数であるとき、次の不等式を証明せよ。

$$f(2)+f(3)+\cdots\cdots+f(n+1)<\int_1^{n+1}f(x)dx<f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n)$$

【証明】 $f(x)$ は減少するから、$k<x<k+1$ において

$$f(k+1)<f(x)<f(k)$$

$$\therefore \quad \int_k^{k+1}f(k+1)dx<\int_k^{k+1}f(x)dx<\int_k^{k+1}f(k)dx$$



すなわち

$$f(k+1)<\int_k^{k+1}f(x)dx<f(k)$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n}f(k+1)<\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}f(x)dx<\sum_{k=1}^{n}f(k)$$

$$\therefore \quad f(2)+f(3)+\cdots\cdots+f(n+1)<\int_1^{n+1}f(x)dx<f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n)$$

注 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}$ とすると　$f(2)+f(3)+\cdots\cdots+f(n)<\int_1^{n}f(x)dx<f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n-1)$

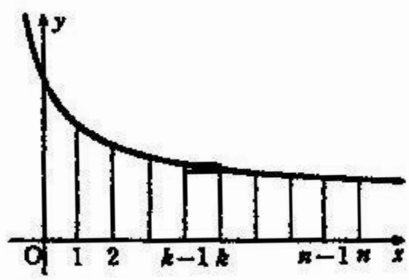
参考　$x>0$ に対して $f(x)$ が x の減少関数であるとき、次の不等式を証明せよ。

$$f(2)+f(3)+\cdots\cdots+f(n)<\int_1^{n}f(x)dx<f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n-1)$$

【証明】 $f(x)$ は減少するから、$k-1<x<k$ において

$$f(k)<f(x)<f(k-1)$$

$$\therefore \quad \int_{k-1}^{k}f(k)dx<\int_{k-1}^{k}f(x)dx<\int_{k-1}^{k}f(k-1)dx$$



すなわち

$$f(k)<\int_{k-1}^{k}f(x)dx<f(k-1)$$

$$\therefore \quad \sum_{k=2}^{n}f(k)<\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}f(x)dx<\sum_{k=2}^{n}f(k-1)$$

$$\therefore \quad f(2)+f(3)+\cdots\cdots+f(n)<\int_1^{n}f(x)dx<f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n-1)$$

注 $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}$ とすると　$f(2)+f(3)+\cdots\cdots+f(n+1)<\int_1^{n+1}f(x)dx<f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n)$

log2 について

$\log(1+x)$ を $|x|<1$ の範囲で、x のべき級数の極限として表してみる。

$\log(1+x)$ の導関数は $\dfrac{1}{1+x}$ で、自然数 n に対して

$$(1+x)(1-x+x^2-\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1})=1+(-1)^{n-1}x^n$$

であるから、この両辺を $1+x$ で割って書き直すと

$$\frac{1}{1+x}-(1-x+x^2-\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1})=(-1)^n\frac{x^n}{1+x}$$

この両辺の関数を0から x まで積分すると

$$\log(1+x)-\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n\right)=(-1)^n\int_0^x\frac{t^n}{1+t}dt$$

となるから

$0\leqq x\leqq 1$ となる x に対しては、右辺の絶対値は

$$\int_0^x t^n dt=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

以下であり、$-1<x<0$ に対しては、右辺の絶対値は

$$\int_0^{|x|}\frac{t^n}{1+x}dt=\frac{1}{n+1}\frac{|x|^{n+1}}{1+x}$$

を越えない。

したがって、$\log(1+x)$ は、$-1<x\leqq 1$ の範囲で、n 次の項が

$$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$$

であるようなべき級数の極限となっている。

ここで、$x=1$ とおくと

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots=\log 2$$

となる。

注　$0\leqq t\leqq x\leqq 1$ のとき、$\dfrac{t^n}{1+t}\leqq t^n$ より　$\left|\displaystyle\int_0^x\frac{t^n}{1+t}dt\right|\leqq\displaystyle\int_0^x t^n dt=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$

$-1<x\leqq t\leqq 0$ のとき、$0<1+x\leqq 1+t$ より　$\dfrac{1}{1+t}\leqq\dfrac{1}{1+x}$

$$\therefore\quad \left|\int_0^x\frac{t^n}{1+t}dt\right|\leqq\int_0^{|x|}\frac{t^n}{1+x}dt=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{n+1}|x|^{n+1}$$

マクローリン展開 $\log(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\cdots$ に
$x=1$を代入すると $\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$ を得る.

交代級数4

n は自然数とする。次の問に答えよ。

(1) $S_n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}$ とする。

このとき、S_{98}，S_{101}；S_{104} の大小を判定せよ。

(2) $Q_n(x)=1-x^2+x^4-\cdots\cdots+(-1)^n x^{2n}$，$R_n(x)=\frac{1}{1+x^2}-Q_n(x)$ とおく。

このとき $\left|\int_0^1 R_n(x)dx\right|$ と $\frac{1}{2n+3}$ との大小を判定せよ.

(3) 無限級数 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots\cdots$ の和、すなわち $\lim_{n\to\infty}S_n$ の値を求めよ。

【解】(1) $S_{104}-S_{98}=\left(\frac{1}{209}-\frac{1}{207}\right)+\left(\frac{1}{205}-\frac{1}{203}\right)+\left(\frac{1}{201}-\frac{1}{199}\right)<0$

ゆえに　$S_{104}<S_{98}$，$S_{104}-S_{101}=\frac{1}{209}-\left(\frac{1}{207}-\frac{1}{205}\right)>0$

ゆえに　$S_{101}<S_{104}$　　よって　$S_{101}<S_{104}<S_{98}$

(2) $-x^2\neq 1$ であるから

$$R_n(x)=\frac{1}{1+x^2}-Q_n(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}=\frac{(-1)^{n+1}}{\cancel{1+x^2}}\cdot\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

ゆえに　$\left|\int_0^1 R_n(x)dx\right|=\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx<\int_0^1 x^{2n+2}dx=\frac{1}{2n+3}$

ゆえに　$\left|\int_0^1 R_n(x)dx\right|<\frac{1}{2n+3}$

(3) $\int_0^1 Q_n(x)dx=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}=S_n$

(2)から　$\left|\int_0^1\left\{\frac{1}{1+x^2}-Q_n(x)\right\}dx\right|<\frac{1}{2n+3}$

よって　$\left|\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx-S_n\right|<\frac{1}{2n+3}$

ゆえに　$0\leq\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx-S_n\right|\leq\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2n+3}$

よって $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+3}=0$ だから

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x^2}\ \underset{微分}{\overset{積分}{\rightleftarrows}}\ \tan^{-1}x}$$

考察

πの近似値を求めるのに，ここで得た級数

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

を利用することが考えられるが，この級数の収束は遅い.
実際，πを小数第N位まで正確に求めるには,

$$\frac{1}{2n+1}\lesssim\frac{1}{10^N}$$

より級数を$n\gtrsim 10^N$項まで足し上げねばならない.

$\int_0^{\pi} e^x|\sin nx|\,dx = ?$ nは正の整数

$nx = t$ とおいて、$n\,dx = dt$

x	$0\to\pi$
t	$0\to n\pi$

$$(\text{与式}) = \frac{1}{n}\int_0^{n\pi} e^{\frac{t}{n}}|\sin t|\,dt$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{\frac{t}{n}}|\sin t|\,dt$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{\frac{t}{n}}\sin t\,dt \quad ※$$

$e^{\frac{t}{n}}$	$\sin t$
$-\frac{1}{n}e^{\frac{t}{n}}$	$-\cos t$
$\frac{1}{n^2}e^{\frac{t}{n}}$	$-\sin t$

不定積分 $I = \int e^{\frac{t}{n}}\sin t\,dt$
$$= e^{\frac{t}{n}}\left(-\cos t + \frac{1}{n}\sin t\right) - \frac{1}{n^2}I$$
$$\frac{1+n^2}{n^2}I = \frac{1}{n}e^{\frac{t}{n}}\left(\frac{1}{n}\sin t - \cos t\right)$$
$$\therefore I = \frac{n}{1+n^2}e^{\frac{t}{n}}(\sin t - n\cos t) + C$$

$$\therefore \int_0^{\pi} e^x|\sin nx|\,dx$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Big[I\Big]_{(k-1)\pi}^{k\pi}$$
$$= \frac{1}{1+n^2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Big[e^{\frac{t}{n}}(\sin t - n\cos t)\Big]_{(k-1)\pi}^{k\pi}$$
$$= \frac{n}{1+n^2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}e^{\frac{k-1}{n}\pi}\left(e^{\frac{\pi}{n}}\cos k\pi - \cos(k-1)\pi\right)$$

ここで
kが偶数のとき
$(-1)^k e^{\frac{k-1}{n}\pi}\left(e^{\frac{\pi}{n}}\cos k\pi - \cos(k-1)\pi\right) = e^{\frac{k-1}{n}\pi}\left(e^{\frac{\pi}{n}}\times 1 - (-1)\right)$
kが奇数のとき
$(-1)^k e^{\frac{k-1}{n}\pi}\left(e^{\frac{\pi}{n}}\cos k\pi - \cos(k-1)\pi\right) = -e^{\frac{k-1}{n}\pi}\left(e^{\frac{\pi}{n}}\times(-1) - 1\right)$

$$(\text{与式}) = \frac{n}{1+n^2}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k-1}{n}\pi}\left(e^{\frac{\pi}{n}}+1\right)$$
初項e^0, 公比$e^{\frac{\pi}{n}}$, 項数nの等比数列
$$= \frac{n}{1+n^2}\left(e^{\frac{\pi}{n}}+1\right)\frac{e^0(1-e^{\pi})}{1-e^{\frac{\pi}{n}}}$$
$$= \frac{n}{1+n^2}\cdot\frac{e^{\frac{\pi}{n}}+1}{e^{\frac{\pi}{n}}-1}(e^{\pi}-1)$$

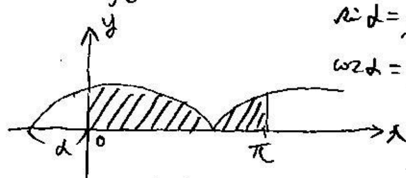
※ $\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin t|\,dt = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\sin t\,dt$ の確認

kが奇数のとき $(k-1)\pi \leqq x \leqq k\pi$ において $\sin t \geqq 0$ なので
$|\sin t| = \sin t = (-1)^{k-1}\sin t$
kが偶数のとき $(k-1)\pi \leqq x \leqq k\pi$ において $\sin t \leqq 0$ なので
$|\sin t| = -\sin t = (-1)^{k-1}\sin t$

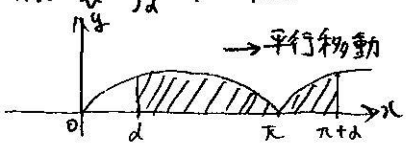
<u>周期関数と定積分</u>

次の定積分I, J (破線で定義) の値を求めよ．ただし$a^2+b^2\neq 0$とする．

(1)
$$I = \int_0^{\pi}|a\sin x + b\cos x|\,dx$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\pi}|\sin(x+\alpha)|\,dx \quad \left(\text{ただし } \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$



$$= \sqrt{a^2+b^2}\int_{\alpha}^{\pi+\alpha}|\sin x|\,dx$$



$$= \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\pi}|\sin x|\,dx \quad (\because |\sin x|\text{は周期}\pi\text{で区間の長さが}\pi\text{より})$$

周期性に着目

$$= \sqrt{a^2+b^2}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$
$$= 2\sqrt{a^2+b^2}$$

(2)
$$J = \int_0^{\pi}|a\sin nx + b\cos nx|\,dx$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\pi}\left(\sin nx \times \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \cos nx \times \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)dx$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\pi}|\sin(nx+\alpha)|\,dx$$

(平行移動を、置換積分で考える)

$nx + \alpha = t$ とおいて
$n\,dx = dt$

x	$0\to\pi$
t	$\alpha\to n\pi+\alpha$

$$\therefore J = \frac{1}{n}\sqrt{a^2+b^2}\int_{\alpha}^{n\pi+\alpha}|\sin t|\,dt$$
$$= \frac{1}{n}\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{n\pi}|\sin t|\,dt \quad (\because |\sin t|\text{は周期}\pi\text{で、区間の長さが}\pi\text{より})$$
$$= \frac{1}{n}\sqrt{a^2+b^2}\times n\int_0^{\pi}\sin t\,dt$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\Big[-\cos t\Big]_0^{\pi}$$
$$= 2\sqrt{a^2+b^2}$$

$\log(n!)$に関する不等式の証明2

(1) 次の不等式を証明せよ。nは2以上の自然数とする。

$$n\log n - n + 1 < \log(n!) < (n+1)\log n - n + 1 \quad (n \geqq 2)$$

(2) 次の極限の収束、発散を調べ、収束するときはその極限値を求めよ。

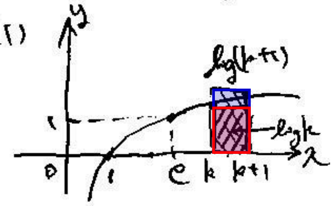
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n\log n - n}$$

※(2)の結果から、スターリングの式($n!$の近似式)が導かれる。

$n \geqq 2$ (1) $n\log n - n + 1 < \log(n!) < (n+1)\log n - n + 1$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n\log n - n}$

(1)



$y = \log x$は単調増加するから、

$k < x < k+1$のとき、

$\log k < \log x < \log(k+1)$

$\therefore \log k < \int_k^{k+1} \log x\,dx < \log(k+1)$ $n \geqq 2$のとき

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \log k < \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} \log x\,dx < \sum_{k=1}^{n-1} \log(k+1)$

▶ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \log k = \log 1 + \log 2 + \cdots + \log(n-1)$
$= \log(n-1)!$

▶ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \log k = \log(n)!$

▶ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \log x\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \Big[x\log x - x\Big]_k^{k+1}$

$\displaystyle = \sum_{k=1}^{n-1} \{\underbrace{(k+1)\log(k+1)}_{f(k+1)} - \underbrace{k\log k}_{f(k)} - 1\}$

$f(2) - f(1)$
$+f(3) - f(2)$
$\vdots$
$+f(n) - f(n-1)$

$= n\log n - n + 1$

$\therefore \log(n-1)! < n\log n - n + 1 < \log(n!)$ ---①

両辺$\log n$を加えて

$\log(n!) < (n+1)\log n - n + 1 < \log n + \log(n!)$ ---②

①, ②より

$n\log n - n + 1 < \log(n!) < (n+1)\log n - n + 1$
$(n \geqq 2)$

(2) (1)より

$$\frac{n\log n - n + 1}{n\log n - n} < \frac{\log(n!)}{n\log n - n} < \frac{(n+1)\log n - n + 1}{n\log n - n}$$

ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n\log n - n + 1}{n\log n - n} = \lim_{n\to\infty}\left\{1 + \frac{1}{n(\log n - 1)}\right\} = 1$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\log n - n + 1}{n\log n - n} = \lim_{n\to\infty}\left\{1 + \frac{\log n + 1}{n(\log n - 1)}\right\}$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\left\{1 + \frac{1 + \frac{1}{\log n}}{n\left(1 - \frac{1}{\log n}\right)}\right\} = 1$ なので、

はさみうちの原理から、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n!)}{n\log n - n} = 1$

nが十分大きいとき、(2)より $\displaystyle\frac{\log(n!)}{n\log n - n\log e} = \frac{\log(n!)}{\log n^n e^{-n}} \fallingdotseq 1$

$$\boxed{\therefore n! \fallingdotseq n^n e^{-n}}$$

(スターリングの式)

Stirling の公式の説明

簡単には，$n \gg 1$ のとき，$y = \ln x$ のグラフの下の面積

$$\int_1^n \ln x \mathrm{d}x = [x \ln x - x]_1^n = n \ln n - (n-1) \simeq n \ln n - n$$

は，区分求積により矩形の面積の和

$$\sum_{j=1}^{n} \ln j = \ln n!$$

で近似できる．逆に言えば，$\ln N!$ は Stirling の公式

$$\ln n! \approx n \ln n - n, \qquad \therefore n! \simeq n^n e^{-n}$$

で近似できる．

より正確な評価には，因子 $\sqrt{2\pi n}$ を含めた式

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \qquad (n \gg 1)$$

を用いる．この式は以下のようにガンマ関数の漸近展開から得られる[*3]．ガンマ関数 $\Gamma(x)$ は

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-f(t)} \mathrm{d}t, \qquad f(t) \equiv t - x \ln x$$

によって定義される．［$y = t$ と $y = -x \ln t$ のグラフの重ね合せをイメージすれば分かるように，］$f(t)$ は $t > 0$ の範囲に最小値を持つ下に凸の関数である．最小値を与える t は $t = x$ であり，それ故 $e^{-f(t)}$ は $t = x$ にピークを持つ．そこで積分にとって重要な $t = x$ の近くで $f(t)$ を Taylor 展開すると

$$f(t) = f(x) + \frac{1}{2x}(t-x)^2 - \frac{1}{3x^2}(t-x)^3 + \cdots$$

となる．ここで x が大きければ，展開の 3 次以降の項を無視できることを説明しよう．［2 次の項を見ると[*4],］被積分関数 $e^{-f(t)}$ は $t = x$ の周りの幅 $\sqrt{x}$ 程度の区間で大きな値を持つ．そこで $|t - x| \sim \sqrt{x}$ とおくと，2 次の項と 3 次の項の大きさはそれぞれ

$$\frac{1}{2x}(t-x)^2 \sim 1, \qquad \frac{1}{3x^2}|t-x|^3 \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \ll 1 \qquad (x \gg 1 \text{ のとき})$$

となるので，3 次以降の項を無視することが正当化される．するとガンマ関数は

$$\Gamma(x+1) \simeq e^{-f(x)} \int_{-\infty}^\infty e^{-(t-x)^2/2x} \mathrm{d}t$$

と近似される (積分の下限を 0 から $-\infty$ へと拡張した)．右辺の Gauss 積分を実行すると

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x}$$

を得る．これは Stirling の公式 (16.10):$n! \simeq \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ を意味する．

[*3] 小野寺嘉孝，2014，物理のための応用数学，株式会社裳華房，東京，pp.133–134.

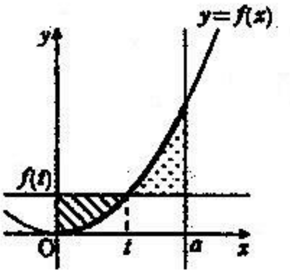
[*4] この時点で 3 次以降は小さいと暗に仮定しており，これは論点先取り・循環論法の感がある．しかし以下で見るのは $x \gg 1$ のときに，後ろの項が小さくなる傾向が強まるということである．

はみ出し削りと無限小

$f(x)$ は微分可能で、しかも $f(0)=0$，$f'(x)>0$ が成り立つ。

$0<t<a$ のとき、$I(a)=\int_0^a |f(x)-f(t)|dx$ が最小となる t は

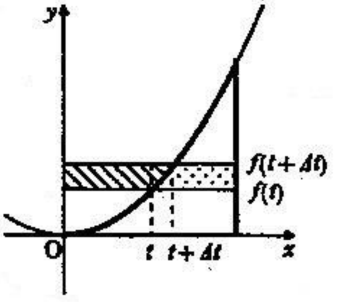
$t=\dfrac{a}{2}$ であることを示せ。



【解】t が $\Delta t\,(>0)$ 変化するとき、I の変化

$\Delta I=I(t+\Delta t)-I(t)$ は

$\Delta I=\underbrace{\qquad}_{t}-\underbrace{\qquad}_{a-t}\Delta u$



ただし、$\Delta u=f(t+\Delta t)-f(t)$

$=f'(t)\Delta t+o(\Delta t)$ ……①

ΔI を $\underbrace{\qquad}_{t}$ を $\underbrace{\qquad}_{t}$，$\underbrace{\qquad}_{a-t}\Delta u$ を $\underbrace{\qquad}_{a-t}$

で近似すると、誤差の部分はそれぞれ Δu Δt より

$o(\Delta t\times\Delta u)=o((\Delta t)^2)$ （∵ ① より）だから　$\Delta I=(2t-a)\Delta u+o(\Delta u)$

t が $\Delta t\,(<0)$ 変化するときも同様である。

つまり、$\Delta I=(2t-a)\Delta u+o(\Delta u)$ なので、$\dfrac{dI}{dt}$ の増減を調べて

t	0		$\frac{t}{2}$		a
$\frac{dI}{dt}$		$-$	0	$+$	
I		↘	極小	↗	

$t=\dfrac{a}{2}$ のとき最小となる。

注　$\Delta I=\underbrace{\qquad}_{2t-a}+2\times\Delta u\ \Delta t=(2t-a)\Delta u+2\int_t^{t+\Delta t}\{f(x)-f(t)\}dx$

ここに、$\Delta u=f'(t)\Delta t+o(\Delta t)$

$\lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\{f(x)-f(t)\}dx=f(t)-f(t)=0$ より　$\int_t^{t+\Delta t}\{f(x)-f(t)\}dx=o(\Delta t)$

よって　$\Delta I=(2t-a)f'(t)\Delta t+o(\Delta t)$

したがって　$dI=(2t-a)f'(t)dt$

としてよい。

「はみ出し削って無限小」の補足

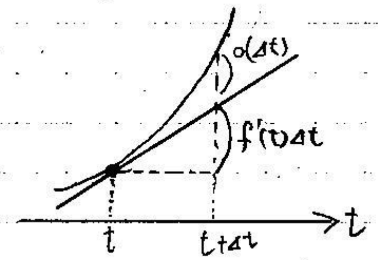
ランダウの記号

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ のとき，a において f は g より高位（高次）の無限小といい，

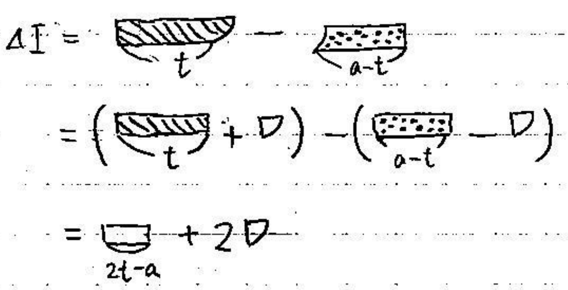
ランダウの記号 o（小文字のオミクロン）を用いて $f(x)=o(g(x))\ (x\to a)$ と書く．

式①：$\Delta u = f'(t)\Delta t + o(\Delta t)$ について

Taylor展開　$\Delta u \equiv f(t+\Delta t)-f(t) = f'(t)\Delta t + \underbrace{\frac{f''(t)}{2!}\Delta t^2 + \cdots}_{o(\Delta t)}$



誤差の部分 Δu  について



$\square = o(\Delta t^2) \Rightarrow \square = o(\Delta t)$，

また①より $o(\Delta t) = o(\Delta u)$

最後に　$\Delta I = (2t-a)\Delta u + o(\Delta u)$　より

$$\frac{dI}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta t} = (2t-a)f'(t)$$

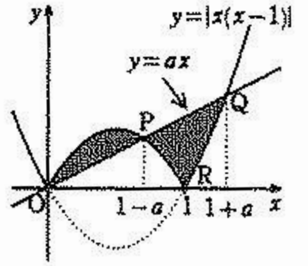
2つの図形の面積の和の最小

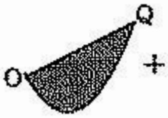
曲線 $y=|x(x-1)|$ と直線 $y=ax$ $(0<a<1)$ で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする。

(1) $S(a)$ を求めよ。

(2) $S(a)$ の最小値を求めよ。

【解】(1) $y=-x(x-1)$ の原点における接線の傾きは1であるから、$0<a<1$ のとき $y=|x(x-1)|$ と $y=ax$ とは右図のように3交点をもち、図のようにP～Rをとると



$S(a)=$  $+\ 2\times$  $-$ 

$$=\int_0^{1+a}\{ax-x(x-1)\}dx+2\int_0^{1-a}\{-x(x-1)-ax\}dx$$

$$+2\int_0^1\{-x(x-1)\}dx$$

$$=-\int_0^{1+a}x\{x-(1+a)\}dx-2\int_0^{1-a}x\{x-(1-a)\}dx-2\int_0^1 x(x-1)dx$$

$$=\frac{1}{6}(1+a)^3+2\times\frac{1}{6}(1-a)^3-2\times\frac{1}{6}\cdot 1^3=-\frac{1}{6}(a^3-9a^2+3a-1) \quad \cdots\cdots ①$$

(2) $S'(a)=-\dfrac{1}{2}(a^2-6a+1)$ より、$S'(a)=0\ (0<a<1)$

を解くと　$a=3-2\sqrt{2}$

右図の $S(a)$ の増減表より、$S(a)$ は $3-2\sqrt{2}$ のとき最小となる。

a	0	$\cdots$	$3-2\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	最小	↗	

① を a^2-6a+1 で割ることにより

$S(a)=-\dfrac{1}{6}(a-3)(a^2-6a+1)+\dfrac{1}{3}(8a-1)$ であるから

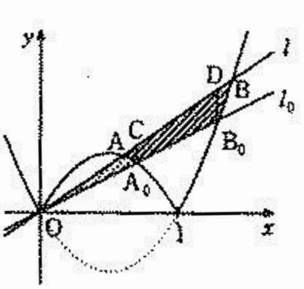
最小値 $S(3-2\sqrt{2})=\dfrac{1}{3}\{8(3-2\sqrt{2})-1\}=\dfrac{1}{3}(23-16\sqrt{2})$

図 $S(a)$ は右図で、$\triangle OA_0C=\square A_0B_0DC$

$\iff$ $2\triangle OA_0C=\triangle OB_0D$

$\iff$ $OA_0:OB_0=1:\sqrt{2}$ $(\because \triangle OA_0C \sim \triangle OB_0D)$

のとき最小となる。



理由) 直線を l_0 から l を上にずらすと

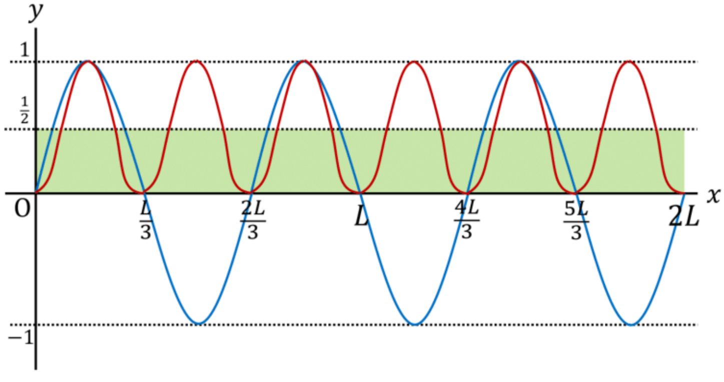
斜線部分 $>\square A_0B_0DC=\triangle OA_0C>$ 打点部分

により、$S(a)$ の増加量 = 斜線部分 − 打点部分 >0

となり、下にずらしたときも同様であるから。

$\int_0^{2L} \sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\mathrm{d}x = L$ に対する直観とその周辺

$y = \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)$ のグラフは下図の青い曲線のようである (ただし図は $n = 3$ として描いている)．$\sin^2 x \leq |\sin x|$ に注意して $y = \sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right)$ のグラフを描くと，下図の赤い曲線のようになる．



ここから以下のことが読み取れる．

- 半角公式
$$\sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right) = \frac{1-\cos\left(2n\pi\frac{x}{L}\right)}{2}. \tag{☆}$$
- $y = \sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right)$ の平均
$$\overline{\sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right)} \equiv \frac{1}{2L}\int_0^{2L}\sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$
または三角関数の直交性に関する式
$$\int_0^{2L}\sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\mathrm{d}x = L.$$
  - ここで左辺が図の緑の長方形の面積 $\frac{1}{2}\times 2L = L$ であることを考えた．
  - 実際この積分は半角公式 (☆) を用いて
$$\int_0^{2L}\sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{2L}\frac{1-\cos\left(2n\pi\frac{x}{L}\right)}{2}\mathrm{d}x = L$$
と計算できる．この計算の意味は，被積分関数 $\sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right)$ を平均の高さ $\frac{1}{2}$ とその周りの振動に分けたとき，振動を表す三角関数 $-\frac{1}{2}\cos\left(2n\pi\frac{x}{L}\right)$ の積分が消えて長方形の面積 $\frac{1}{2}\times 2L = L$ が得られるということに他ならない．
  - 他にも平均値が $\overline{\sin^2 kx} = 1/2$ となることを手早く理解するには
$$\overline{\sin^2 kx} + \overline{\cos^2 kx} = 1, \qquad \overline{\sin^2 kx} = \overline{\cos^2 kx}$$
に注目すれば良い．

– なお，積分範囲を半分に減らしても

$$\int_0^L \sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\mathrm{d}x = \frac{L}{2}$$

が成り立つ．

– この関係は関数の Fourier 展開の際に有用となる．

$1/\sin x$ の積分

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x}\right)\sin x dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{d(1-\cos x)}{1-\cos x} - \frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + C.$$

一般に奇数 $n = 2m+1$ に対して $\sin^n x$ の積分は

$$\int \sin^n x dx = -\int (1-\cos^2 x)^m d(\cos x)$$

のように，$\cos x$ による積分に書き換えることができ，$1/\sin x$ の積分もこの観点から統一的に理解できる．

似たような手法で

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{(1+\sin x)(1-\sin x)} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x}\right)\cos x dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{d(1+\sin x)}{1+\sin x} - \frac{d(1-\sin x)}{1-\sin x}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) + C,$$
$$\int \frac{dx}{\sinh x} = \int \frac{\sinh x dx}{(\cosh x-1)(\cosh x+1)} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\cosh x-1} - \frac{1}{\cosh x+1}\right)\sinh x dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{d(\cosh x-1)}{\cosh x-1} - \frac{d(\cosh x+1)}{\cosh x+1}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\cosh x-1}{\cosh x+1}\right) + C$$

が見出される．第 2 式は

$$\frac{\cosh x-1}{\cosh x+1} = \frac{(e^x+e^{-x}-2)/2}{(e^x+e^{-x}+2)/2} = \left(\frac{e^{x/2}-e^{-x/2}}{e^{x/2}+e^{-x/2}}\right)^2 = \left(\tanh\frac{x}{2}\right)^2$$

に気付けば，

$$\int \frac{dx}{\sinh x} = \log\left(\tanh\frac{x}{2}\right) + C$$

と書き換えられる．

ベクトル

- 正射影ベクトル
- **重心座標**
- 内積の展開式の図形的解釈
- 内積の有名問題
- アポロニウスの円

など

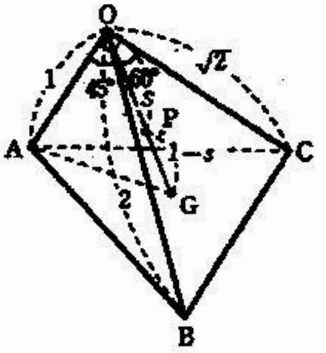
四面体OABC, PはOG上， OP⊥AP

四面体 OABC において、$\angle AOB=45^\circ$，$\angle AOC=90^\circ$，$\angle BOC=60^\circ$，OA$=1$，OB$=2$，OC$=\sqrt{2}$ とする。

$\triangle$ABC の重心を G とし、線分 OG を $s:(1-s)$ に内分する点を P とするとき、次の問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき、$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) OP⊥AP となるように、実数 s の値を定めよ。



【解】(1) 点 G は $\triangle$ABC の重心であるから　$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

OP : PG$=s:(1-s)$ であるから

$$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AG}+(1-s)\overrightarrow{AO}=s(\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA})-(1-s)\overrightarrow{OA}$$

$$=s\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}=\left(\frac{1}{3}s-1\right)\vec{a}+\frac{1}{3}s\vec{b}+\frac{1}{3}s\vec{c}$$

(2) OP⊥AP より　OG⊥AP　ゆえに　$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

(1) より　$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\cdot\left\{\left(\dfrac{1}{3}s-1\right)\vec{a}+\dfrac{1}{3}s\vec{b}+\dfrac{1}{3}s\vec{c}\right\}=0$

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\{s(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-3\vec{a}\}=0$$

$$s|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=3\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

ここに、$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{2}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\sqrt{2}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ であるから

$$(1+4+2+2\sqrt{2}+2\sqrt{2})s=3(1+\sqrt{2}+0)$$

$$\therefore\quad s=\frac{3(1+\sqrt{2})}{7+4\sqrt{2}}=\frac{3(3\sqrt{2}-1)}{17}$$

正射影ベクトル

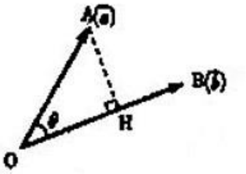
$\vec{a}$ の $\vec{b}$ の上への正射影ベクトル

$$\overrightarrow{OH}=OH\cdot\frac{\vec b}{|\vec b|}=\frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec b|}\cdot\frac{\vec b}{|\vec b|}=\boxed{\frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec b|^2}}\vec b$$

└スカラー

ただし、OHは有向長

（$\overrightarrow{OB}$ と同じ方向は＋，反対方向は－）



計算では $\overrightarrow{OH}=k\vec b$ とおけ、AH⊥OB

より $(k\vec b-\vec a)\cdot\vec b=0$ 　∴ $k=\dfrac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec b|^2}$

よって $\overrightarrow{OH}=\dfrac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec b|^2}\vec b$

または $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OB}$

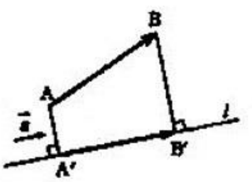
より $\vec a\cdot\vec b=k\vec b\cdot\vec b$ 　∴ $k=\dfrac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec b|^2}$

よって $\overrightarrow{OH}=\dfrac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec b|^2}\vec b$

$\vec a(\neq\vec 0)$ とし、直線 l は $\vec a$ に平行であるとする。$\vec x=\overrightarrow{AB}$ に対し、A，Bから l に下ろした垂線の足を A′，B′ とするとき、$\vec p=\overrightarrow{A'B'}$ を $\vec x$ の l に対する正射影ベクトルという。

$$\vec p=\frac{\vec a\cdot\vec x}{|\vec a|^2}\vec a \quad \text{---}(*)$$

となる。



直線 l 上の単位ベクトルを $\vec u$ とする。

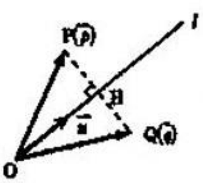
l に関して点 P($\vec p$) と対称な点を Q($\vec q$) とするとき、

$\vec q$ を $\vec p$，$\vec u$ を用いて表すと

$\overrightarrow{OH}=(\vec p\cdot\vec u)\vec u$ 　で　$\vec q=\vec p+2\overrightarrow{PH}$ より

$\vec q=\vec p+2\{(\vec p\cdot\vec u)\vec u-\vec p\}$

∴ 　$\vec q=-\vec p+2(\vec p\cdot\vec u)\vec u$



負の値もとり，
$\vec a$の**有向長**とも呼ぶ →

$\vec a$の$\vec b$上への正射影ベクトルは $\vec a$の$\vec b$方向成分$\vec a\cdot\frac{\vec b}{\lvert\vec b\rvert}$に 方向単位ベクトル$\frac{\vec b}{\lvert\vec b\rvert}$をかけたもの

(*)は $\vec x$ の向きに関わらず成り立つ。

$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき (*)は成立

$\frac{\pi}{2}<\theta\leq\pi$ のとき $|\overrightarrow{A'B'}|=|\vec x|\cos(\pi-\theta)$

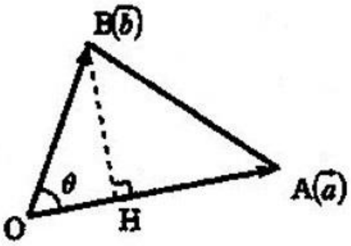
$$=-|\vec x|\cos\theta$$

$$=-\frac{|\vec a||\vec x|\cos\theta}{|\vec a|}$$

$\vec p=|\overrightarrow{A'B'}|\left(-\dfrac{\vec a}{|\vec a|}\right)=\dfrac{\vec a\cdot\vec x}{|\vec a|^2}\vec a$ より(*)は成立

三角形の面積 (内積)

$$S=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\sin\theta=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$



または、$\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ より三平方の定理を用いて

$$\overline{\mathrm{BH}}^2=\overline{\mathrm{OB}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2=|\vec{b}|^2-\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|^2}{|\vec{a}|^2}=\frac{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2}$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{BH}}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

有向長 $\mathrm{OH}=\left|\vec{b}\right|\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$

$$\overline{\mathrm{OH}}=\left|\vec{b}\right||\cos\theta|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

面積を成分表示する。

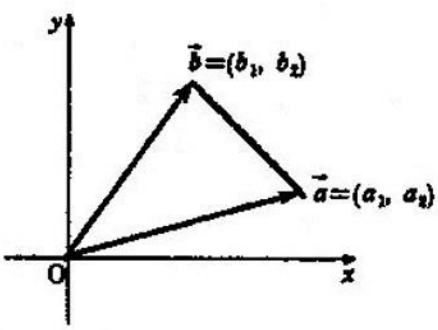
$\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$ とすると

公式の根号内は

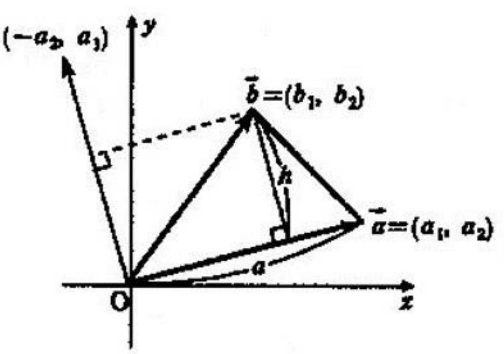
$$(a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2$$
$$=(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

であるから

$$S=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$$



また、結果から絶対値の中は、ベクトル $(-a_2, a_1)$ とベクトル (b_1, b_2) の内積となり、三角形の(底辺 a)×(高さ h)を表していることが分かる。



参考　$\triangle\mathrm{ABC}$ において、内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ をそれぞれ p, q, r で表すと、$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{pq+qr+rp}$$

［note］幾何学的に $S=\frac{1}{2}ab\sin\theta=\begin{cases}\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\\ \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\end{cases}$ であり，

最右辺の第2式は確かに第1式のベクトル積に関する代数計算となっている：

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2=\left(\varepsilon_{ijk}a_jb_k\right)(\varepsilon_{ilm}a_lb_m)=\left(\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl}\right)a_jb_ka_lb_m=a^2b^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2.$$

Heron (ヘロン) の公式

3辺の長さがa, b, cの三角形の面積は, “半周長”$s \equiv (a+b+c)/2$を用いて,
Heronの定理

$$\begin{aligned}(\text{Area}) =&\Delta(a,b,c) \equiv \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} && (1)\\ =&\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} && (2)\end{aligned}$$

で与えられる(導出は下記).

- Heronの公式は3辺a, b, cに関する対称性が明白である.
- $\Delta(a,b,c)$の表式(2)の根号内は,
  三角形の成立条件より正となっていることが見て取れる.

<u>導出</u>

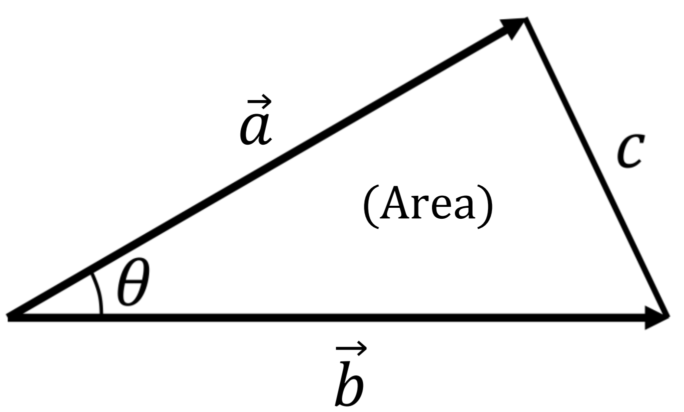
下図に示した一般の三角形の面積(Area)は, $a = |\vec{a}|, b = |\vec{b}|$として,

$$\begin{aligned}4(\text{Area})^2 =&a^2b^2\sin^2\theta = a^2b^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2\\ =&a^2b^2 - \left(\frac{(\vec{a}-\vec{b})^2 - a^2 - b^2}{2}\right)^2 = a^2b^2 - \frac{1}{4}(c^2-a^2-b^2)^2\\ =&-\frac{1}{4}(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^4)\end{aligned}$$

で与えられる. 他方$\Delta(a,b,c)$の表式(2)の根号内を展開すると, $4\big(\Delta(a,b,c)\big)^2$が上式に一致し, 式(1)が成立することを確かめられる. (常套的に1つの文字, 例えばaを選び, $\Delta(a,b,c)$の根号内における$a^4, a^3, \cdots$の係数を調べれば良い. 必要な多項式の展開の計算は退屈な作業となるものの, 直接的に行える.)

このsと3辺の長さで三角形の面積を表す式は, 電卓の出現以前の時代には, 高校で標準的に習う公式であった. しかし今日の学生は, この式にあまり馴染みがないようなので, 証明を与えた.

(M.ストーン, 2012, 量子場の物理〔新装版〕(樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京, pp.50—51.)



曲線上の点の表し方

例えば、直線 $y=2x+1$ 上にある任意の点Pを表すのに点Pの x 座標を t とすると y 座標は $2t+1$ となるから、$\mathrm{P}(t,\ 2t+1)$ と表すことができる。

また、これを時刻 t における点Pの座標と考えると、

$t=0$ のとき $(0,\ 1)$ で、1秒ごとに x，y 軸方向にそれぞれ1，2だけ進む動点の座標を表している。

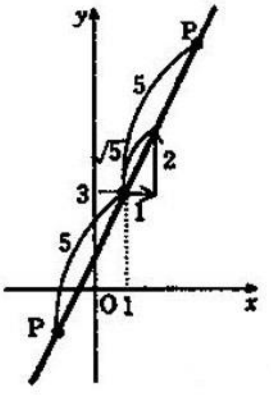
問1 動点Pがある。時刻 t が0のとき点 $(1,\ 3)$ にいて、1秒ごとに x，y 軸方向にそれぞれ1，2だけ進む。このとき、点Pの座標を t を用いて表せ。

問1から分かるように直線 $y=2x+1$ 上の点は種々な表し方があるので使い分けると便利である。

例えば、点 $(1,\ 3)$ から直線 $y=2x+1$ 上にある点Pまでの距離が5である点は $\mathrm{P}(1+t,\ 3+2t)$ で

$\sqrt{t^2+(2t)^2}=5$ より　$\sqrt{5}|t|=5$　　$\therefore$　$t=\pm\sqrt{5}$

よって、$\mathrm{P}(1\pm\sqrt{5},\ 3\pm2\sqrt{5})$（複号同順）



注 直線の方向ベクトルに単位ベクトルを採用すると、$\mathrm{P}\left(1\pm5\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ 1\pm5\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

問2 直線 l: $y=2x+1$ がある。

(1) 点 $(1,\ -1)$ を通り、l に平行な直線上の点Pを t（このような使い方をするとき、t をパラメータという）を用いて表せ。

(2) 点 $(1,\ -1)$ を通り、l に垂直な直線上の点Qを t を用いて表せ。

問3 点 $\mathrm{A}(1,\ -1)$ から直線 l: $x+2y-4=0$ に下ろした垂線の足Hの座標を求めよ。

AHの傾きは2なので$\mathrm{H}(1+t,-1+2t)$とおける．lの式に代入すると$5t-5=0, \therefore t=1, \therefore \mathrm{H}(2,1)$

問4 次の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ はどんな曲線（直線を含む）上にあるか。

(1) $\mathrm{P}(2t-1,\ t+1)$　　(2) $\mathrm{P}(t,\ t^2-1)$

(3) $\mathrm{P}(t+1,\ t^2-2t+3)$　　(4) $\mathrm{P}(2t-1,\ t^2-4t+2)$

問5 放物線 C: $y=x^2+ax+a$ について

(1) 放物線 C は a の値にかかわらずある定点を通ることを示せ。

(2) a がどんな値をとっても C の頂点はある定曲線上にあることを示せ。

問6 t が実数全体を動くとき、$x=t^2-1$，$y=-2t^2+3$ で与えられる点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ はどんな曲線上を動くか。

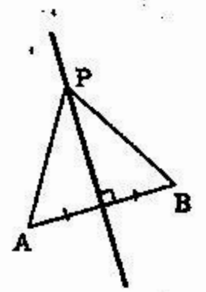
距離または内積を用いるベクトル方程式

(1)　線分ABの垂直二等分線

$$|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{p}-\vec{b}|$$

$$\iff (\vec{a}-\vec{b})\cdot\left(\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)=0$$

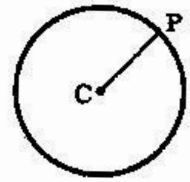
$$\iff (\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{p}=\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2)$$



(2)　中心が$\mathrm{C}(\vec{c})$の円

$$|\vec{p}-\vec{c}|=r$$

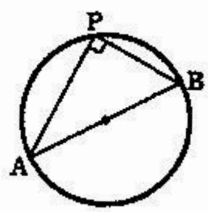
$$\iff (\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$$



(3)　線分ABを直径とする円

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$$

$$\iff \left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|=\frac{|\vec{a}-\vec{b}|}{2}$$



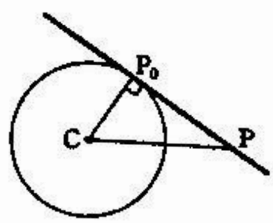
(4)　中心を$\mathrm{C}(\vec{c})$とし、半径rの円の接点$\mathrm{P}(\vec{p_0})$の接線

$$(\vec{p}-\vec{p_0})\cdot(\vec{p_0}-\vec{c})=0$$

$$\iff (\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p_0}-\vec{c})=r^2$$

$\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\vec{p_0}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-a\\y_1-b\end{pmatrix}=r^2 \quad \therefore (x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$

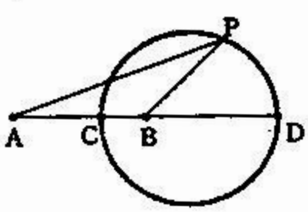


(5)　2定点A，Bからの距離の比が$m:n\ (m\neq n)$である点の軌跡

ABを$m:n$に内分・外分する点C，Dを直径とする円　(アポロニウスの円)

$$|\vec{p}-\vec{a}|:|\vec{p}-\vec{b}|=m:n$$

$$\iff n|\vec{p}-\vec{a}|=m|\vec{p}-\vec{b}|$$



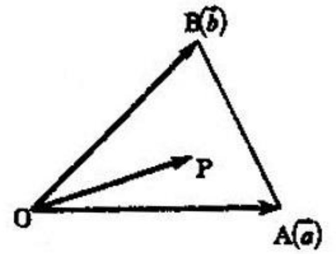
三角形の内部

$\triangle OAB$において、$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とし、

$$\overrightarrow{OP}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$$

を満たす点 P が $\triangle OAB$ の内部にある条件は

$$\alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha+\beta<1$$



(1) 内分点の公式利用

まず、$\angle AOB$ 内に点 P があることから

$$\alpha>0,\ \beta>0$$

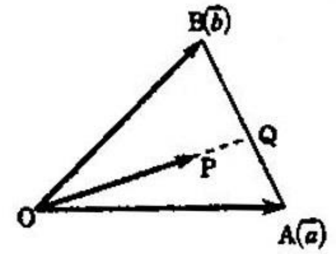
次に、OP の P への延長と AB との交点 Q が線分 AB 上(両端を含まず)にあればよいから

$$\overrightarrow{OP}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=(\alpha+\beta)\frac{\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}}{\alpha+\beta}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{OQ}$$

より　$0<\alpha+\beta<1$

以上より

$$\alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha+\beta<1$$



(2) 動点固定法

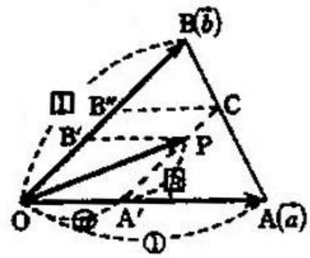
図のように▱OA′PB′, ▱OA′CB″ となるように点 A′, B′, B″, C を定め、$\overrightarrow{OA'}=\alpha\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'}=\beta\overrightarrow{OB}$ とする。

$\overrightarrow{OP}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ において、点 P が $\triangle OAB$ の内部にあるための条件は、P が線分 A′C (両端は含まず) 上にあればよいから、A′C : OB = AA′ : AO = $1-\alpha:1$ より

$$0<\alpha<1,\ 0<\beta<1-\alpha$$

$$\iff \alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha+\beta<1$$

$(0<)\mathrm{A'C}<\mathrm{OB}$かつ
$0<\mathrm{A'P}<\mathrm{OB}$
$\mathrm{OB}=1$とすると
$(0<)1-\alpha<1, 0<\beta<1-\alpha$



参考　$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OQ}$, $0<k<1$, $\overrightarrow{OQ}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$, $0<t<1$ と表せるから

$$\overrightarrow{OP}=k(1-t)\vec{a}+kt\vec{b},\ 0<k<1$$

ここで、$k(1-t)=\alpha$, $kt=\beta$ とおくと

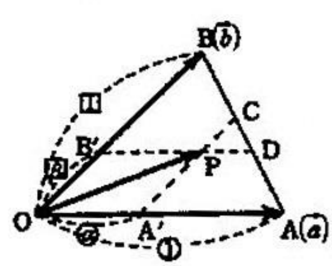
$0<\alpha<1$, $0<\beta<1$ で $\alpha+\beta=k$ より

$$\alpha>0,\ \beta>0,\ 0<\alpha+\beta<1$$

参考　図形的意味は右図で、$\overrightarrow{OP}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ において

$$\mathrm{OA'}<\mathrm{OA},\ \mathrm{OB'}<\mathrm{OB},\ \mathrm{AD}+\mathrm{BC}<\mathrm{AB}$$

$$\iff 0<\alpha<1,\ 0<\beta<1,\ \alpha+\beta<1$$



重心座標

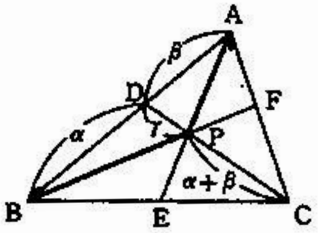
$\triangle$ABCと点Pがある。

$$\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}+\gamma\overrightarrow{PC}=\vec{0}\quad(\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0)\qquad\cdots\cdots①$$

を満たすとき、点Pは三角形のどんな位置にあるか調べる。

① を $\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}=-\gamma\overrightarrow{PC}$ として両辺を $\alpha+\beta$ で割った

$$\frac{\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}}{\alpha+\beta}=-\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\overrightarrow{PC}$$



を考えると、左辺はABを $\beta:\alpha$ に内分した点をDとすると $\overrightarrow{PD}$ を表す。

よって　$\overrightarrow{PD}=-\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}\overrightarrow{PC}$

これはC，P，Dがこの順に一直線上に並び、CP : PD $=\alpha+\beta:\gamma$ となる。

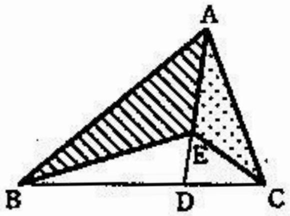
以上より、点Pは図のような位置にある。

または、位置ベクトルA$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$，P$(\vec{p})$ を用いて ① を書き換えて $\vec{p}$ について解くと、$\vec{p}=\dfrac{\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}}{\alpha+\beta+\gamma}$ を得る。

これを $\vec{p}=\dfrac{(\alpha+\beta)\cdot\dfrac{\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}}{\alpha+\beta}+\gamma\vec{c}}{(\alpha+\beta)+\gamma}$ と解釈すれば、辺ABを $\beta:\alpha$ に内分した点をDとすると、Pは線分CDを $\alpha+\beta:\gamma$ に内分した点となる。

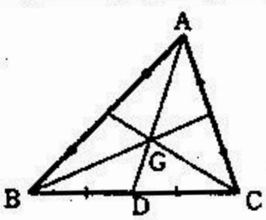
次に、面積に関する定理をあげると

定理１



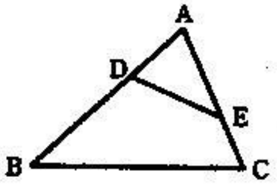
$$\frac{\triangle ABE}{\triangle AEC}=\frac{BD}{DC}$$

定理１の系



点Pが $\triangle$ABCの内部にあるとき、
点Pが $\triangle$ABCの重心Gと一致する。
$\Longleftrightarrow$ $\triangle ABG=\triangle BCG=\triangle CAG$

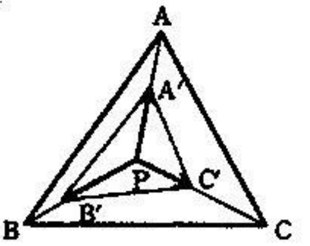
定理２



$$\frac{\triangle ADE}{\triangle ABC}=\frac{AD}{AB}\cdot\frac{AE}{AC}$$

次に、面積比を用いて点Ｐの位置を探してみる。

そこで、ある三角形の重心がＰの位置にくるようにしてから、一般の三角形に拡張してみる。



$$\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}+\gamma\overrightarrow{PC}=\vec{0} \quad \cdots\cdots ①$$

で　$\alpha\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PA'}$，$\beta\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB'}$，$\gamma\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC'}$

とおくと

$$\overrightarrow{PA'}+\overrightarrow{PB'}+\overrightarrow{PC'}=\vec{0}$$

となる。

いま、$\triangle A'B'C'$ を考えると、Ｐは $\triangle A'B'C'$ の重心と一致するから、定理１の系から、

$$\triangle PB'C'=\triangle PC'A'=\triangle PA'B' \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ。

また、定理２から　$\dfrac{\triangle PB'C'}{\triangle PBC}=\dfrac{PB'}{PB}\cdot\dfrac{PC'}{PC}=\beta\gamma$

したがって　$\triangle PB'C'=\beta\gamma\triangle PBC$

同様に　$\triangle PC'A'=\gamma\alpha\triangle PCA$

$\triangle PA'B'=\alpha\beta\triangle PAB$

から②は　$\beta\gamma\triangle PBC=\gamma\alpha\triangle PCA=\alpha\beta\triangle PAB$　となる。

各辺を $\alpha\beta\gamma$ で割ると

$$\frac{\triangle PBC}{\alpha}=\frac{\triangle PCA}{\beta}=\frac{\triangle PAB}{\gamma}$$

すなわち、　$\triangle PBC:\triangle PCA:\triangle PAB=\alpha:\beta:\gamma$　……③　が得られる。

点Ｐが $\triangle ABC$ の内部にあるとき、逆に③が成り立てば、容易に①が成り立つことが分かる。

定理３

点Ｐが $\triangle ABC$ の内部にあるとき

$$\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}+\gamma\overrightarrow{PC}=\vec{0} \iff \triangle PBC:\triangle PCA:\triangle PAB=\alpha:\beta:\gamma$$

ただし、α，β，γ は正の数とする。

垂直二等分線

線分 AB の垂直二等分線のベクトル方程式

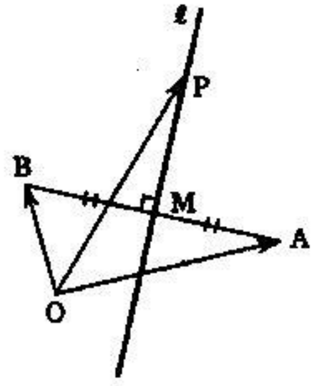
A$(\vec{a})$, B$(\vec{b})$ とし、直線 ℓ 上に任意の点を P$(\vec{p})$ とする。

また、線分 AB の中点を M とする。

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{MP}=0$$

より
$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\left(\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)=0$$

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{p}=\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2)$$



注 PA＝PB より $|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{p}-\vec{b}|$ この等式を平方して、展開してもよい。

この方程式は次のようにも変形される。

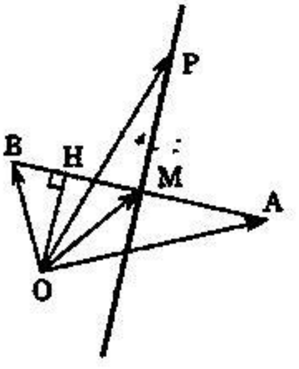
$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{BA}$$

点 O から直線 AB に垂線を引き、その足を H とする。

$\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{BA}$ の上に正射影すると

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{OP}=(\text{有向長 HM})\times \text{BA}$$

となる。 (B から A 方向が +)

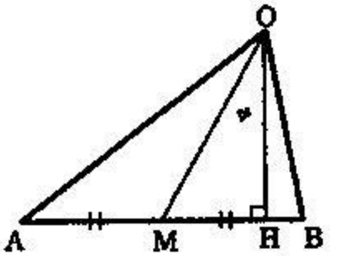


上のことから次のことが云える。

三角形 OAB において、AB の中点を M とし、O から AB へ下ろした垂線の足を H とすると

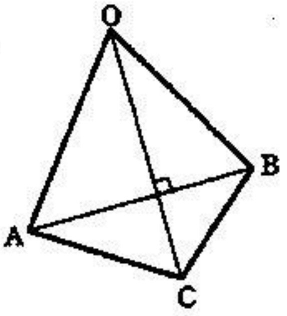
$$\text{OA}^2\sim\text{OB}^2=2\,\text{AB}\cdot\text{MH}$$

→ $|\text{OA}^2-\text{OB}^2|$ のこと。
大きい方から小さい方を引く



この結果から、AB⊥OC である条件は

$$\text{OA}^2-\text{OB}^2=\text{AC}^2-\text{BC}^2$$

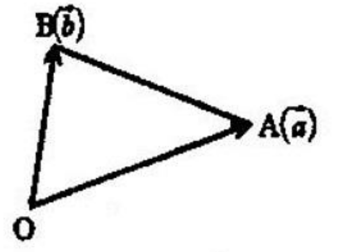


注 $|\overrightarrow{OA}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$
$=2\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{BA}=2\text{BA}\times(\text{有向長 HM})$

ただし、M は AB の中点で、H は O から AB への垂線の足とする。

内積の展開式の図形的解釈

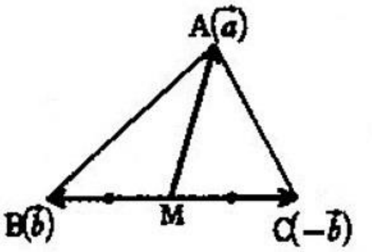
1） $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$



これは第２余弦定理のベクトル表現になっている。

$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\times OB\cos\angle AOB$

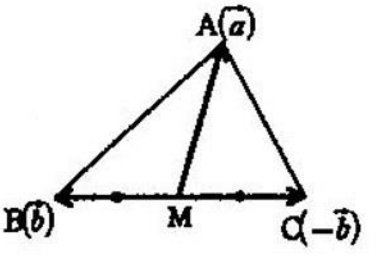
2） $|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$



これは中線定理を表す。

$AC^2+AB^2=2(AM^2+BM^2)$

3） $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$



$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA}(=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})=AM^2-BM^2$

を表す。

特に、$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0 \iff |\vec{a}|=|\vec{b}|$

より、M は直角三角形 ABC の外心となる。

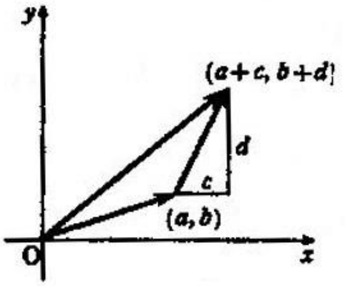
和についての解釈

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\vec{u}$ について

点Pは点Aを$\vec{u}$だけ平行移動させた点であると解釈する。

この場合$\vec{u}$を加えることは平行移動させるという「操作」を表す。

右図の$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$で説明すると
点(a,b)をx軸方向にc，y軸方向にdだけ平行移動をすると、点$(a+c,b+d)$に移る。



ベクトルで言い換えると、

《位置ベクトル(a,b)》＋《変位ベクトル(c,d)》
＝《位置ベクトル$(a+c,b+d)$》

ということである。

この解釈は、直線のベクトル方程式を理解する上で有効である。

具体例 $\vec{a}=(-1,2)$，$\vec{b}=(1,2)$がある。実数tの値を変化させるとき、$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$の大きさの最小値と、そのときのtの値を求めよ。

【解】点$A(\vec{a})$を通り、$\vec{b}$に平行な直線ℓ上に点$(\vec{c})$がある。

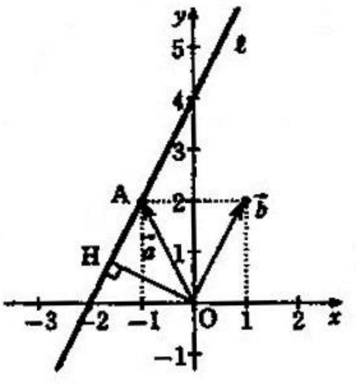
よって、$|\vec{c}|(=OC)$が最小となる点Cの場所はOからℓに垂線を下ろした足Hである。

$\overrightarrow{OH}=\vec{a}+t\vec{b}=(-1,2)+t(1,2)=(-1+t,2+2t)$

で$\vec{b}\perp\overrightarrow{OH}$より

$$1\cdot(-1+t)+2\cdot(2+2t)=0 \qquad \therefore \quad t=-\frac{3}{5}$$

$$|\overrightarrow{OH}|=\left|\left(-\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right)\right|=\frac{4}{5}\sqrt{(-2)^2+1^2}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$



答 最小値 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$，$t=-\frac{3}{5}$

参考 内積を使わなければ、$\vec{b}\perp\overrightarrow{OH}$より$\overrightarrow{OH}=k(-2,1)$とおき、

$(-1+t,2+2t)=k(-2,1)$

として、求めればよい。

別 $\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(-1,2)+t(1,2)=(-1+t,2+2t)$より

$$|\vec{c}|^2=(-1+t)^2+(2+2t)^2=5t^2+6t+5=5\left(t+\frac{3}{5}\right)^2+\frac{16}{5}\geqq\frac{16}{5}$$

よって、$|\vec{c}|^2$が最小のとき$|\vec{c}|$も最小となる。

点と直線との距離の公式

点 $A(x_0, y_0)$ から直線 $l: ax+by+c=0$ までの距離 d は次の式で与えられることを示せ。

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

【証1】 $\vec{n}=(a, b)$ とし、l 上の点を $P(\vec{p})$ とすると

$$l: \vec{n}\cdot\vec{p}=-c$$

d はこの直線と垂直なベクトル $\vec{n}$ への $\overrightarrow{AP}$ の正射影の有向長 s の長さにほかならない。

すなわち　$d=|s|$

そして

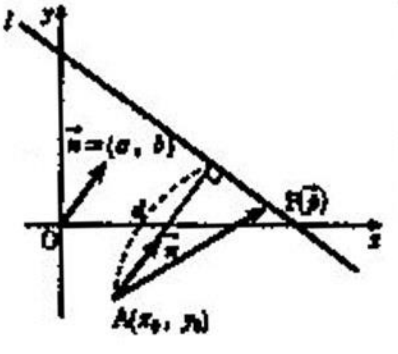
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=s|\vec{n}|$$

$$\begin{aligned} s|\vec{n}| &= \vec{n}\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}) \\ &= \vec{n}\cdot\vec{p}-\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA} \\ &= -c-(a, b)\cdot(x_0, y_0) \\ &= -(ax_0+by_0+c) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad s=-\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

したがって

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



【証2】 点 A から l に垂線を下ろした足 H とすると、直線 AH の方向ベクトルが (a, b) より、H の座標はパラメータ t を用いて $H(x_0+at, y_0+bt)$ と表される。

点 H は直線 l 上にあることから

$$a(x_0+at)+b(y_0+bt)+c=0 \qquad \therefore \quad t=-\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$$

このとき

$$d=\sqrt{(at)^2+(bt)^2}=|t|\sqrt{a^2+b^2}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}|ax_0+by_0+c|$$

注　H の座標は $H\left(x_0-\frac{a(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2},\ y_0-\frac{b(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}\right)$ となる。

【証1'】直線 l の式は $a(x-x_0)+b(y-y_0)=-(ax_0+by_0+c)$ ……①

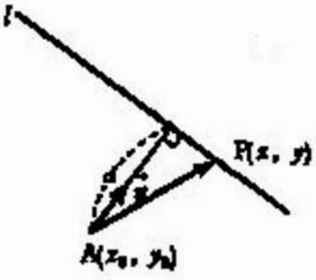
と変形できる。

$\vec{u}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a,\ b)$ とすると、$|\vec{u}|=1$ で $l\perp\vec{u}$

点 A $(x_0,\ y_0)$ と直線 l との距離 d は

$$d=|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{u}|$$

と表されるから



$$d=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}|(x-x_0,\ y-y_0)\cdot(a,\ b)|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}|a(x-x_0)+b(y-y_0)|$$

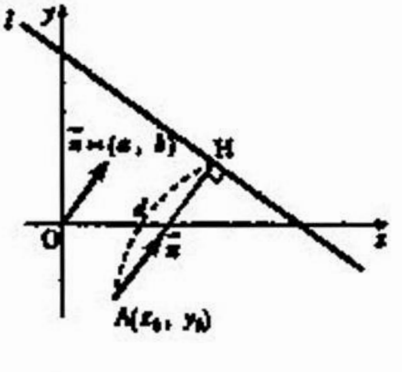
$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}|ax_0+by_0+c|\quad(\because ①より)$$

【証2'】$\vec{n}=(a,\ b)$ とし、点 A から l に垂線を下ろした足 H とすると、AH$/\!/\vec{n}$ より

$\overrightarrow{AH}=t\vec{n}$ を満たす実定数 t がある。

すなわち　$\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=t\vec{n}$

両辺に $\vec{n}$ を掛けると



$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{OH}-\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA}=t|\vec{n}|^2$$

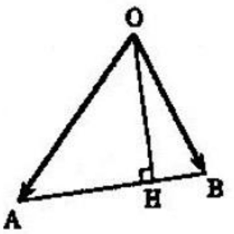
$$-c-ax_0-by_0=t(a^2+b^2)$$

$$\therefore\quad t=-\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$$

よって　$d=|t\vec{n}|=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

垂線の足

$\triangle$OAB において、O から AB への垂線の足を H とする。
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ として、$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。



【解】(直線の式利用)

点 H は直線 AB 上にあるから、$\overrightarrow{OH}=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})$ とおける。

OH$\perp$AB より

$$(\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a}))\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$$

$\vec{c} \equiv \vec{b}-\vec{a}$に対し
$\vec{c}^2 \equiv \vec{c}\cdot\vec{c}=|\vec{c}|^2$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})+t|\vec{b}-\vec{a}|^2=0 \qquad \therefore \qquad t=-\frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})}{|\vec{b}-\vec{a}|^2}$$

よって

$$\overrightarrow{OH}=\frac{|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}-\vec{a}|^2}\vec{a}+\frac{|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}-\vec{a}|^2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AH}=(有向長AH)\times\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$

$$=|\vec{a}|\cos(\angle OAB)\times\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$

$$=\cancel{|\vec{a}|}\frac{-\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})}{\cancel{|\vec{a}|}\,|\vec{b}-\vec{a}|}\times\frac{\vec{b}-\vec{a}}{|\vec{b}-\vec{a}|}$$

ベクトル

スカラー

(正射影利用)

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=$(有向長AH)$\times$AB より

$$\overrightarrow{AH}=\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\times\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{-\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})}{|\vec{b}-\vec{a}|^2}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}-\vec{a}|^2}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\vec{a}+\frac{|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}-\vec{a}|^2}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}-\vec{a}|^2}\vec{a}+\frac{|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}-\vec{a}|^2}\vec{b}$$

(分点利用) AH : HB $=$ AH$\times$AB : HB$\times$AB $=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}:\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}:|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}$ より

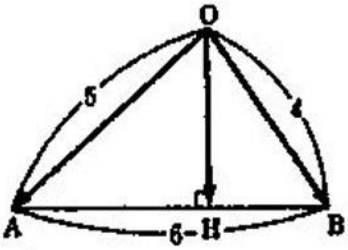
$$\overrightarrow{OH}=\frac{(|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}+(|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}}{|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}}$$

$$=\frac{|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}-\vec{b}|^2}\vec{a}+\frac{|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}-\vec{b}|^2}\vec{b}$$

参考 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OH}=\mathrm{OH}^2$ より $\quad \vec{a}\cdot\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}=\vec{b}\cdot\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}$

垂線の足1

OA＝5，OB＝4，AB＝6 なる△OABにおいて、OからABへの垂線の足をHとするとき、$\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ として $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。



【解1】$\overrightarrow{OH}=x\vec{a}+y\vec{b}$ とおくと、HはAB上にあるから

$$x+y=1 \quad \cdots\cdots ①$$

また、OH⊥ABより

$$(x\vec{a}+y\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$$

$$x|\vec{a}|^2+(-x+y)\vec{a}\cdot\vec{b}-y|\vec{b}|^2=0$$

ここに、$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{5^2+4^2-6^2}{2}=\dfrac{5}{2}$ より

$$25x+\frac{5}{2}(-x+y)-16y=0$$

$$\therefore \quad 5x-3y=0 \quad \cdots\cdots ②$$

①, ②より　$x=\dfrac{3}{8}$，$y=\dfrac{5}{8}$

よって　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{3}{8}\vec{a}+\dfrac{5}{8}\vec{b}$

【解2】AからBへの方向を＋として有向長AH，HBを考える。

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=$(有向長AH)×6，　$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB}=$(有向長HB)×6

$$\therefore \quad AH:HB=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}:\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB}$$

ここで、$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle AOB=\dfrac{5^2+4^2-6^2}{2}=\dfrac{5}{2}$ だから

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=-\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=-\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=-\frac{5}{2}+25=\frac{45}{2}$$

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{b}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=16-\frac{5}{2}=\frac{27}{2}$$

よって　$AH:HB=\dfrac{45}{2}:\dfrac{27}{2}=5:3$

$$\therefore \quad \overrightarrow{OH}=\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{5}{8}\vec{b}$$

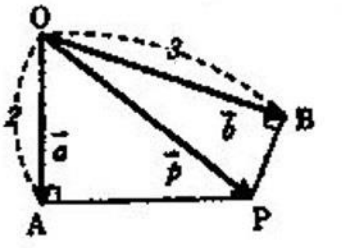
内積の有名問題1

四角形OAPBにおいて、$\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$, $OA = 2$, $OB = 3$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 2$ とする。

(1) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ を満たす s, t の値を求めよ。

【解】 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ などと小文字が対応するようにおく。



(1) $\vec{p}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4$ （$\because \angle OAP = 90^\circ$）

同様に $\vec{p}\cdot\vec{b} = 3^2 = 9$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2$ だから

$$\vec{p}\cdot\vec{a} = (s\vec{a} + t\vec{b})\cdot\vec{a} = s|\vec{a}|^2 + t\vec{a}\cdot\vec{b} = 4s + 2t$$

これと (1) とから

$$4s + 2t = 4 \quad \cdots\cdots ①$$

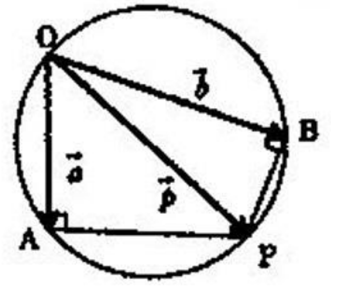
$$\vec{p}\cdot\vec{b} = (s\vec{a} + t\vec{b})\cdot\vec{b} = s\vec{a}\cdot\vec{b} + t|\vec{b}|^2 = 2s + 9t$$

これと (1) とから

$$2s + 9t = 9 \quad \cdots\cdots ②$$

①, ② より $s = \dfrac{9}{16}$, $t = \dfrac{7}{8}$

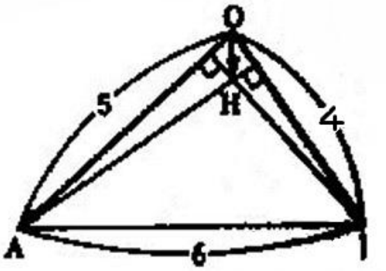
参考 右図で、$|\vec{a}|^2 = l$, $|\vec{b}|^2 = m$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = n$ とすると



$$\overrightarrow{OP} = \frac{m(l-n)}{lm-n^2}\vec{a} + \frac{l(m-n)}{lm-n^2}\vec{b}$$

右下図において

$\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ として $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。



【解】$\overrightarrow{OH}=x\vec{a}+y\vec{b}$ とおくと

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=(x-1)\vec{a}+y\vec{b}$

$AH\perp OB$ であるから　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$\therefore\quad \{(x-1)\vec{a}+y\vec{b}\}\cdot\vec{b}=(x-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+y|\vec{b}|^2=0$ ……①

同様に、$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ から

$x|\vec{a}|^2+(y-1)\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ……②

ここで、$|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=4$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{5^2+4^2-6^2}{2}=\dfrac{5}{2}$ を①, ②に代入して

$\dfrac{5}{2}(x-1)+16y=0$,　$25x+\dfrac{5}{2}(y-1)=0$

解いて　$x=\dfrac{3}{35}$, $y=\dfrac{1}{7}$

よって　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{3}{35}\vec{a}+\dfrac{1}{7}\vec{b}$

参考　外心 P は $\overrightarrow{OP}=\dfrac{16}{35}\vec{a}+\dfrac{3}{7}\vec{b}$, 内心 I は $\overrightarrow{OI}=\dfrac{4}{15}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$ と表される

Pが円上を動くとき内積PA·PBの最大値

平面上に2点A(2, 0), B(1, 1)がある。点P(x, y)が円 $x^2+y^2=1$ の周上を動くとき、内積 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ の最大値を求め、そのときの点Pの座標を求めよ。

【解1】 $\overrightarrow{PA}=(2-x,\ -y)$, $\overrightarrow{PB}=(1-x,\ 1-y)$ で、$x^2+y^2=1$ であるから

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(2-x)\cdot(1-x)+(-y)\cdot(1-y)=x^2+y^2-3x-y+2$$
$$=-3x-y+3$$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=k$ とおくと　$3x+y+k-3=0$　……①

①が表す直線が円 $x^2+y^2=1$ と共有点Pをもつから

$$\frac{|k-3|}{\sqrt{3^2+1^2}}\leqq 1 \quad すなわち \quad |k-3|\leqq\sqrt{10}$$

よって　$-\sqrt{10}\leqq k-3\leqq\sqrt{10}$

ゆえに　$3-\sqrt{10}\leqq k\leqq 3+\sqrt{10}$

したがって、$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ の最大値は　$3+\sqrt{10}$

$k=3+\sqrt{10}$ のとき、①は　$3x+y+\sqrt{10}=0$

すなわち　$y=-(3x+\sqrt{10})$

これを $x^2+y^2=1$ に代入すると　$10x^2+6\sqrt{10}x+9=0$

よって　$(\sqrt{10}x+3)^2=0$　ゆえに　$x=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

このとき　$y=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

したがって　$P\left(-\dfrac{3\sqrt{10}}{10},\ -\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)$

【解2】 点P(x, y)は円 $x^2+y^2=1$ の周上を動くから、

$x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$

と表される。このとき

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(2-\cos\theta,-\sin\theta),\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(1-\cos\theta,1-\sin\theta)$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(2-\cos\theta)\cdot(1-\cos\theta)+(-\sin\theta)\cdot(1-\sin\theta)$

$=2-3\cos\theta+\cos^2\theta-\sin\theta+\sin^2\theta$

$=3-\sin\theta-3\cos\theta$

$=3-\sqrt{10}\sin(\theta+\alpha)$　　……③

ただし、α は、$\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ かつ $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数である。

$0\leqq\theta+\alpha<\dfrac{5}{2}\pi$ であるから、③ が最大となるのは $\theta+\alpha=\dfrac{3}{2}\pi$ のときであり、

最大値は　$3+\sqrt{10}$

このとき　$x=\cos\theta=\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\sin\alpha=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$y=\sin\theta=-\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

したがって　$\mathrm{P}\left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$

四角形ABCDのACとBDが垂直となる必要十分条件

四角形 ABCD において $\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{BD}$ が垂直となる必要十分条件は

$$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$$

であることを示せ。

【解】

$$\begin{aligned} AD^2+BC^2-(AB^2+CD^2) &= (AD^2-AB^2)+(BC^2-CD^2) \\ &= (|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2)+(|\overrightarrow{BC}|^2-|\overrightarrow{CD}|^2) \\ &= (\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}) \\ &\quad +(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}) \\ &= (\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BD}\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}) \\ &= \{(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD})\}\cdot\overrightarrow{BD} \\ &= \{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})\}\cdot\overrightarrow{BD} \\ &= (\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{BD} \\ &= 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

四角形 ABCD において $\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{BD}\neq\vec{0}$ であるから、$\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{BD}$ が垂直であるため　の必要十分条件は、$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ である。

よって、① より、$\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{BD}$ が垂直となる必要十分条件は

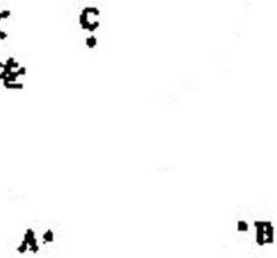
$$AD^2+BC^2-(AB^2+CD^2)=0$$

すなわち　$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$

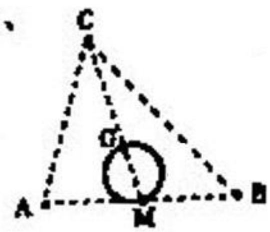
3つの定点と軌跡

右図のように平面上に定点A，B，Cが与えられている。このとき、次の式を満たすような点Pの軌跡を図示せよ。

$$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=0$$



【解】ABの中点をM，△ABCの重心をGとすると、



$$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}\cdot\frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{3}=0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PG}=0$$

$\overrightarrow{PM}$と$\overrightarrow{PG}$が直交（PがMまたはGと一致する場合を含む）するから、2定点M，Gを直径とする円を表す。

類題　$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|$ を満たすように動く点Pの軌跡を求めよ。

【解】与式 $\Longleftrightarrow$ $2|\overrightarrow{PM}|=|\overrightarrow{PC}|$ （MはABの中点）

線分MCを1：2に内分する点Gと1：2に外分する点Dを直径とする円　（アポロニウスの円）

△ABCの内積a,b,cで外接円の半径を表示

3点A，B，Cを頂点とする△ABCに対し、

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=a$，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=b$，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=c$，$\angle BAC=\theta$ とおく。

(1) $AB^2=-a-c$，$BC^2=-b-a$，$CA^2=-c-b$ を示せ。

(2) $\sin\theta$ を a，b，c で表せ。

(3) △ABCの外接円の半径 R を a，b，c で表せ。

【解】(1)

$$AB^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-c-a$$

$$BC^2=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=-a-b$$

$$CA^2=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=-b-c$$

(2) $$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{-c}{\sqrt{-a-c}\sqrt{-c-b}}=-\frac{c}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}$$

であるから

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{c^2}{(a+c)(b+c)}=\frac{ab+bc+ca}{(a+c)(b+c)}$$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ から　$\sin\theta>0$

よって　$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{(a+c)(b+c)}}$

(3) 正弦定理により

$$R=\frac{BC}{2\sin\theta}=\frac{1}{2}\sqrt{-a-b}\sqrt{\frac{(a+c)(b+c)}{ab+bc+ca}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{ab+bc+ca}}$$

三角形の角の二等分線　線分の長さ

$\triangle OAB$の頂角$\angle O$の2等分線と辺ABとの交点をP，点Pから直線OAへ下ろした垂線の足をQとする。以下では、$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$とする。

(1) Pは線分ABを$|\vec{a}|:|\vec{b}|$に内分する点であることを証明せよ。

(2) 線分の長さOQを$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。

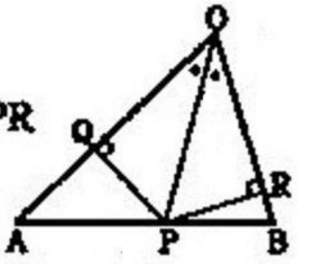
【解】(1) 点Pから辺OBへ下ろした垂線の足をRとする。

2つの直角三角形OPQとOPRにおいて

$\angle AOP=\angle BOP$，OPは共通

ゆえに　$\triangle OPQ\equiv\triangle OPR$　　よって　$PQ=PR$

ゆえに　$\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{\triangle OAP}{\triangle OBP}=\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$



よって、題意は成り立つ。

(2) $OQ=|\overrightarrow{OP}|\cos\angle AOP=|\overrightarrow{OP}|\cdot\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OP}|}$

$$=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{a}\cdot\dfrac{|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}}{|\vec{a}|}=\frac{|\vec{a}|^2|\vec{b}|+|\vec{a}|\vec{a}\cdot\vec{b}}{(|\vec{a}|+|\vec{b}|)|\vec{a}|}$$

$$=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|+\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$$

別解(1) Pは$\angle O$の2等分線上にあるから

$\overrightarrow{OP}=t\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ (tはパラメーター) と表される.

また、PはAB上にあるから　$t\left(\dfrac{1}{|\vec{a}|}+\dfrac{1}{|\vec{b}|}\right)=1$

よって　$t=\dfrac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$　　(↑)$\overrightarrow{OP}=u\vec{a}+v\vec{b}, u=\dfrac{t}{|\vec{a}|}, v=\dfrac{t}{|\vec{b}|}$
に対して$u+v=1$

ゆえに　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$

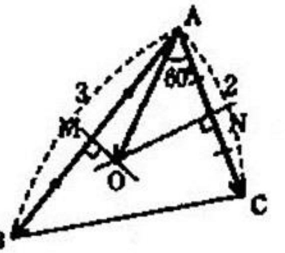
よって、点PはABを$|\vec{b}|:|\vec{a}|$に内分する。

三角形の外心1

$\triangle ABC$において、$AB=3$，$AC=2$，$\angle A=60°$，外心をOとし、$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$とすると、$\overrightarrow{AO}$を$\vec{b}$，$\vec{c}$で表せ。

【解】AB，ACの中点をそれぞれM，Nとし、

$\overrightarrow{AO}=k\vec{b}+l\vec{c}$とおく。



$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=(k\vec{b}+l\vec{c})\cdot\vec{b}=AM\times AB$ ……①

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=(k\vec{b}+l\vec{c})\cdot\vec{c}=AN\times AC$ ……②

そして、$\vec{b}\cdot\vec{c}=3\cdot 2\cos 60°=3$，$\vec{b}\cdot\vec{b}=9$，$\vec{c}\cdot\vec{c}=4$

より　①は　$k\vec{b}\cdot\vec{b}+l\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{3}{2}\cdot 3$　より　$9k+3l=\dfrac{9}{2}$

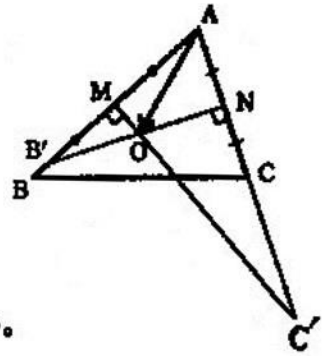
②は　$k\vec{b}\cdot\vec{c}+l\vec{c}\cdot\vec{c}=1\cdot 2$　より　$3k+4l=2$

解いて、$k=\dfrac{4}{9}$，$l=\dfrac{1}{6}$

$\therefore\quad \overrightarrow{AO}=\dfrac{4}{9}\vec{b}+\dfrac{1}{6}\vec{c}$

注　一般の三角形では、$\overrightarrow{AO}=\dfrac{b^2(c^2+a^2-b^2)\overrightarrow{AB}+c^2(a^2+b^2-c^2)\overrightarrow{AC}}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^4-b^4-c^4}$

となる。



なお、別解として内積を用いず、共線問題としてとらえると

$AB'=\dfrac{b}{2\cos A}$，$AC'=\dfrac{c}{2\cos A}$　で

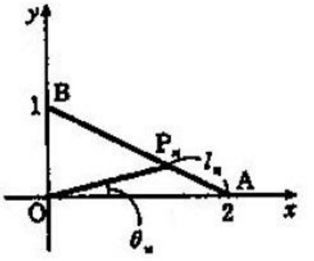
$\overrightarrow{AO}=t\cdot\dfrac{AB'}{c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}(1-t)\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}s\overrightarrow{AB}+(1-s)\cdot\dfrac{AC'}{b}\overrightarrow{AC}$

として、$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$の1次独立性からs，tが求められて得られる。

座標平面上の線分と内分点，線分の長さと角の比の極限

O を原点とする座標平面上に 2 点 A(2, 0), B(0, 1) がある。
自然数 n に対し、線分 AB を 1 : n に内分する点を P_n とし、$\angle AOP_n=\theta_n$ とする。
ただし、$0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}$ である。線分 AP_n の長さを l_n として、極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{\theta_n}$ を求めよ。

【解】 $\dfrac{l_n}{\theta_n}=\dfrac{\tan\theta_n}{\theta_n}\cdot\dfrac{l_n}{\tan\theta_n}$ ………①



P_n は線分 AB を 1 : n に内分する点より

$P_n\left(\dfrac{2n}{n+1},\ \dfrac{1}{n+1}\right)$

よって、$\tan\theta_n=\dfrac{1}{2n}$

また、$AB=\sqrt{5}$ より　$l_n=\dfrac{\sqrt{5}}{n+1}$

①で　$\dfrac{l_n}{\theta_n}=\dfrac{\tan\theta_n}{\theta_n}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{n+1}\cdot 2n=\dfrac{\tan\theta_n}{\theta_n}\cdot\dfrac{2\sqrt{5}}{1+\frac{1}{n}}$

ここで、$n\to\infty$ のとき $\theta_n\to 0$ であるから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{\theta_n}=1\cdot 2\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

(別) $\sin\theta_n<\theta_n<\tan\theta_n$ より

$$\frac{2\sqrt{5}n}{n+1}<\frac{l_n}{\theta_n}<\frac{\sqrt{5}\sqrt{4n^2+1}}{n+1}$$

参考　$\triangle OAP_n$ において、正弦定理により　$\dfrac{l_n}{\sin\theta_n}=\dfrac{2}{\sin\angle OP_nA}$

また、$\triangle OBP_n$ において　$BP_n=AB-AP_n=\sqrt{5}-l_n$

であるから、正弦定理により　$\dfrac{1}{\sin\angle OP_nB}=\dfrac{\sqrt{5}-l_n}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_n\right)}$

ここで　$\sin\angle OP_nA=\sin\angle OP_nB$,　$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta_n\right)=\cos\theta_n$

ゆえに　$\dfrac{l_n}{\sin\theta_n}=\dfrac{2(\sqrt{5}-l_n)}{\cos\theta_n}$ ………☆　よって　$l_n=\dfrac{2\sqrt{5}\sin\theta_n}{2\sin\theta_n+\cos\theta_n}$

ここで、$n\to\infty$ のとき $\theta_n\to 0$ であるから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{\theta_n}=\lim_{\theta_n\to 0}\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{2\sin\theta_n+\cos\theta_n}=2\sqrt{5}$

注　☆より $\dfrac{l_n}{\theta_n}=2(\sqrt{5}-l_n)\cdot\dfrac{\tan\theta_n}{\theta_n}$ とも表される。

$|2a+b|=2, |3a-5b|=1$のとき$|a+b|$の最大値，最小値

平面上のベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$が、$|2\vec{a}+\vec{b}|=2$, $|3\vec{a}-5\vec{b}|=1$を満たしている。

$\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=3\vec{a}-5\vec{b}$とおく。

(1) $\vec{a}$と$\vec{b}$をそれぞれ$\vec{p}$と$\vec{q}$を用いて表せ。

(2) 内積$\vec{p}\cdot\vec{q}$のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $|\vec{a}+\vec{b}|$の最大値と最小値を求めよ。

【解】(1) $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}$ ……① $\vec{q}=3\vec{a}-5\vec{b}$ ……② とする。

①×5+② から $\qquad \vec{a}=\dfrac{5}{13}\vec{p}+\dfrac{1}{13}\vec{q}$

①×3−②×2 から $\qquad \vec{b}=\dfrac{3}{13}\vec{p}-\dfrac{2}{13}\vec{q}$

(2) $\vec{p}$, $\vec{q}$のなす角をθ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$とすると $\qquad \vec{p}\cdot\vec{q}=2\cos\theta$

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから $\qquad -2\leqq\vec{p}\cdot\vec{q}\leqq2$

(3) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=\left|\dfrac{8}{13}\vec{p}-\dfrac{1}{13}\vec{q}\right|^2=\dfrac{1}{13^2}(64|\vec{p}|^2-16\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2)$

$$=\frac{1}{13^2}(257-16\vec{p}\cdot\vec{q})$$

$-2\leqq\vec{p}\cdot\vec{q}\leqq2$ であるから $\qquad \dfrac{225}{13^2}\leqq|\vec{a}+\vec{b}|^2\leqq\dfrac{289}{13^2}$

$|\vec{a}+\vec{b}|>0$ であるから $\qquad \dfrac{15}{13}\leqq|\vec{a}+\vec{b}|\leqq\dfrac{17}{13}$

よって、$|\vec{a}+\vec{b}|$の最大値は$\dfrac{17}{13}$，最小値は$\dfrac{15}{13}$である。

円Oに内接する△ ABC. OA + $\sqrt{3}$OB + 2OC = 0のとき内積，面積

点Oを中心とし、半径1の円に内接する△ABCが

$\overrightarrow{OA}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ を満たしている。

(1) 内積$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$を求めよ。

(2) $\angle AOB$，$\angle AOC$を　求めよ。

(3) △ABCの面積を求めよ。

(4) 辺BCの長さ、および頂点Aから対辺BCに引いた垂線の長さを求めよ。

【解】(1) $\overrightarrow{OA}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ から

$$\left|\overrightarrow{OA}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{OB}\right|=\left|-2\overrightarrow{OC}\right|,\quad \left|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OC}\right|=\left|-\sqrt{3}\,\overrightarrow{OB}\right|$$

それぞれ、両辺を2乗して

$$\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+2\sqrt{3}\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+3\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=4\left|\overrightarrow{OC}\right|^2$$

$$\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+4\left|\overrightarrow{OC}\right|^2=3\left|\overrightarrow{OB}\right|^2$$

$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=1$ であるから

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0,\quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{1}{2}$$

(2) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ から　$OA\perp OB$　すなわち　$\angle AOB=90^\circ$

また　$\cos\angle AOC=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OC}\right|}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{1\cdot1}=-\dfrac{1}{2}$

$0^\circ<\angle AOC\leqq180^\circ$ であるから　$\angle AOC=120^\circ$

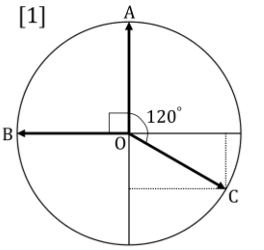
(3) 2点O, Aに対して、点Bの位置は、
右の図[1], [2]のように2つの場合がある。
ここで

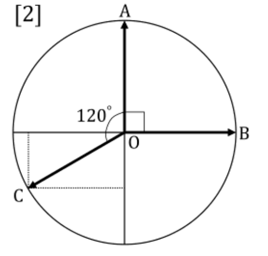
$$\overrightarrow{OA}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

から

$$\overrightarrow{OC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}-\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OB}$$

よって、[1], [2] の場合において、点Cの位置は右の図のようになる。





どちらの場合も　$\angle BOC=360^\circ-(90^\circ+120^\circ)=150^\circ$

よって　$\triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA$

$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin90^\circ+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin150^\circ+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin120^\circ$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}$$

(4)　$\triangle OBC$ において、余弦定理により

$$BC^2=OB^2+OC^2-2OB\cdot OC\cos150^\circ$$

$$=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2+\sqrt{3}$$

$BC>0$ であるから

$$BC=\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

頂点Aから対辺BCに引いた垂線の長さを h とおくと

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot h$$

よって　$\frac{3+\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\cdot h$

したがって

$$h=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

別解　円周角の定理により

$$\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}\times120^\circ=60^\circ,$$

$$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times90^\circ=45^\circ$$

また　$AB=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

正弦定理により

$$AC=2\cdot OA\sin60^\circ=2\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

よって

$$BC=AB\cos60^\circ+AC\cos45^\circ=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

頂点Aから対辺BCに引いた垂線の長さを h とすると

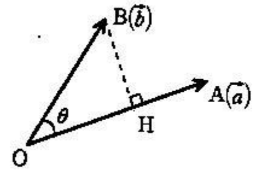
$$h=AB\sin60^\circ=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

内積の図形的解釈

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$=\mathrm{OA}\times\mathrm{OH}$

ただし、OHは有向長で$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$が$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と
同じ向きならば＋
反対向きならば－
の値をとる。



結局、$\vec{a}$と$\vec{b}$との内積は$|\vec{a}|$と「$\vec{b}$の$\vec{a}$上への正射影の有向長」との積として定められる。

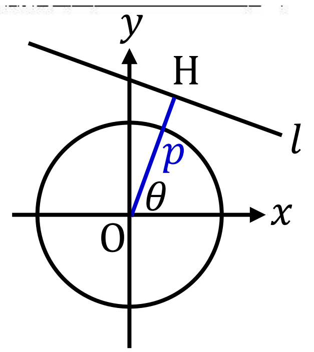
特に、$|\vec{a}|=1$のとき、「単位ベクトル$\vec{a}$上の正射影の有向長」と読むことができる。

(性質) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

理由) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{HB}})=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}$

または、BH⊥OAより　$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

$(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$　　　$\therefore$　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$



内積の成分表示利用

内積の成分表示について

$(a,\ b)$を方向ベクトルする直線

$$ax+by=c$$

ヘッセの標準形

$$x\cos\theta+y\sin\theta=p$$

ただし、原点Oから直線lにおろした垂線をOH$(=p)$とし、OHがx軸の正の方向となす角をθとする。

円$x^2+y^2=r^2$上の接点$(x_1,\ y_1)$における接線

$$x_1x+y_1y=r^2$$

円$x^2+y^2=r^2$と円外の点$(x_0,\ y_0)$における極線

$$x_0x+y_0y=r^2$$

△OABの面積

$$S=\frac{1}{2}|ad-bc|$$　ただし、$\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(c,\ d)$とする。

三角関数の合成

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)$$

ただし、ベクトル$(b,\ a)$とx軸とのなす角をαとする。

参考　xy平面において原点Oと異なる2点$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$について、Oを中心として直線OAを直線OBまで回転させたときの一般角をθとするとき、次の関係式が成り立つ。

$$\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\cos\theta=x_1x_2+y_1y_2$$

$$\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\sin\theta=x_1y_2-x_2y_1$$

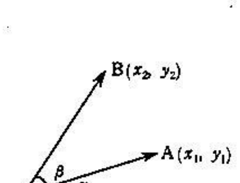
解説

$$\cos\theta=\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$$

$$=\frac{x_2}{\mathrm{OB}}\cdot\frac{x_1}{\mathrm{OA}}+\frac{y_2}{\mathrm{OB}}\cdot\frac{y_1}{\mathrm{OA}}$$

$$\sin\theta=\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$$

$$=\frac{y_2}{\mathrm{OB}}\cdot\frac{x_1}{\mathrm{OA}}-\frac{x_2}{\mathrm{OB}}\cdot\frac{y_1}{\mathrm{OA}}$$



内積の正射影利用

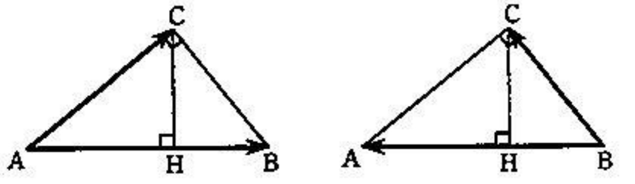
内積における正射影

三平方の定理

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AH=AC^2$

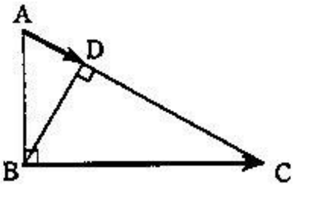
$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=BA\cdot BH=BC^2$

辺々加えて、得られる。



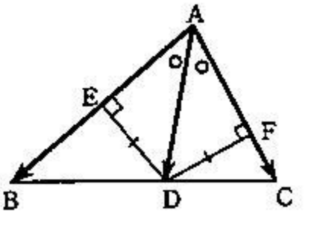
自己相似な三角形

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=BD^2$



角の２等分線

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}:\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=AB:AC$

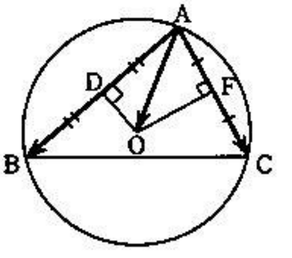


三角形の外心

$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ として

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=AB\times AD$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=AC\times AF$

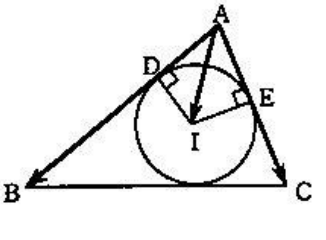


三角形の内心

$\overrightarrow{AI}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ として

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}=AB\times AD$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AI}=AC\times AE$

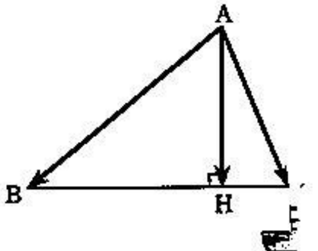


垂線の足

$\overrightarrow{AH}=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ として

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}\ (=AH^2)$

$\Longleftrightarrow\quad \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$



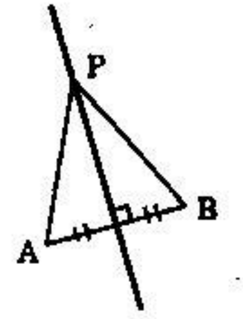
距離または内積を用いるベクトル方程式

(1)　線分 AB の垂直二等分線

$$|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{p}-\vec{b}|$$

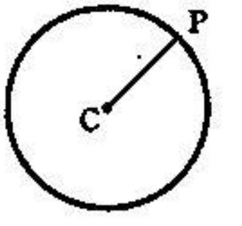
$$\iff \quad (\vec{a}-\vec{b})\cdot\left(\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)=0$$

$$\iff \quad (\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{p}=\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2)$$



(2)　中心が $\mathrm{C}(\vec{c})$ の円

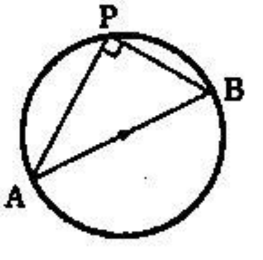
$$|\vec{p}-\vec{c}|=r$$



(3)　線分 AB を直径とする円

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$$

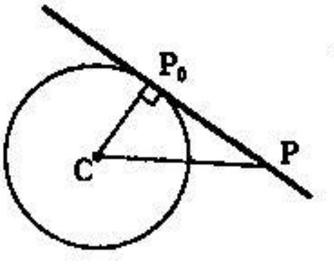
$$\iff \quad \left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|=\frac{|\vec{a}-\vec{b}|}{2}$$



(4)　中心を $\mathrm{C}(\vec{c})$ とし、半径 r の円の接点 $\mathrm{P}(\vec{p_0})$ の接線

$$(\vec{p}-\vec{p_0})\cdot(\vec{p_0}-\vec{c})=0$$

$$\iff \quad (\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p_0}-\vec{c})=r^2$$



円に内接する四角形1

円に内接する四角形 ABCD において，$\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$ とする。このとき、次の各問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{BE}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{BD}$ となる点 E は直線 AC 上にあることを証明せよ。

(2) $\triangle ABC$，$\triangle ACD$ の面積の比を求めよ。

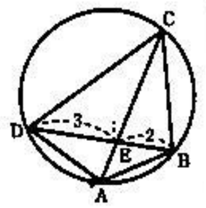
(3) $3\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}$ の値を求めよ。

【解】(1) $\overrightarrow{BE}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{BD}$ のとき，DE：EB=3：2 より

$$\overrightarrow{AE}=\frac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}}{5}$$

ここに $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$ より　$\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AE}$

よって、E は AC 上にある。



(2) $\triangle ABC$ と $\triangle ACD$ は底辺 AC が共通より面積比は高さの比であるから

$$\triangle ABC：\triangle ACD=BE：ED=2：3 \quad \cdots\cdots ①$$

(3) $\angle ABC=\theta$ とおくと　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{BA\times BC}$

$\angle ADC=\pi-\theta$ より　$\cos(\pi-\theta)=\dfrac{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}}{DA\times DC}$

$$\therefore\quad \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{BA\times BC}+\frac{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}}{DA\times DC}=\cos\theta+\cos(\pi-\theta)=0 \quad \cdots\cdots ②$$

①より　$$\frac{\triangle ABC}{\triangle ACD}=\frac{\frac{1}{2}BA\times BC\sin\theta}{\frac{1}{2}DA\times DC\sin(\pi-\theta)}=\frac{BA\times BC}{DA\times DC}=\frac{2}{3} \quad \cdots\cdots ③$$

②，③より

$$3\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=0$$

注　(1) で次のように点 E を捉えてもよい。

$$\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}+2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})=5\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BD}=5\left(\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BD}\right)=5\overrightarrow{AE}$$

(3) は $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=BA\cdot BC\cos B$，$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=DA\cdot DC\cos D=-DA\cdot DC\cos B$

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}BA\cdot BC\sin B$，$\triangle DAC=\dfrac{1}{2}DA\cdot DC\sin D=\dfrac{1}{2}DA\cdot DC\sin B$

により、解答を得る。

$2\triangle ABC=BA\times CH=BA\times BH\tan D$

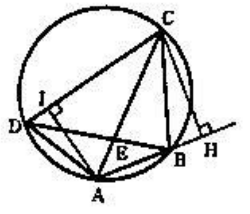
$\qquad=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\tan D$

$2\triangle ACD=DC\times AI=DC\times DI\tan D$

$\qquad=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}\tan D$

で、$\triangle ABC：\triangle ACD=2：3$ より

$3\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=0$



数列

- 等比数列の和 (**図解**)
- 2項間の漸化式の**図形的解釈**
- $\sum_k k^2 \cdot 2^k$
- 群数列
- 累積帰納法と平方の和の公式
- **完全順列の一般項**
- 分数の漸化式

など

【余談】
ものを数えるというのは単純なことでありながら難しい．そのような難しさは初等的にはいわゆる「植木算」や「暦算」として知られている．これらはそれ自体では単なる「ひっかけ問題」程度にしかならないが，ものを数えることの難しさは，数列の項数を数えたり，和の添字の動く範囲を改めたりする場面などに，姿形を変えて現れる．

等比数列の和（図解）

1 図1aで$\triangle AC_1A_1 \backsim \triangle AC_nA_n$より

$$\frac{AA_1}{A_1C_1}=\frac{AA_n}{A_nC_n},\quad \text{すなわち}\quad \frac{1}{1-r}=\frac{1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}}{1-r^n},$$

$$\therefore 1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}=\frac{1-r^n}{1-r}.$$

また$\triangle AC_1A_1 \backsim \triangle ACD$より

$$\frac{1}{1-r}=1+r+r^2+\cdots$$

が成り立つ。

なお，この公式で公比が負の場合は，$r'=-r>0$として図1bの図形を作ると，rが正の場合と同じ考えで上式が得られる。

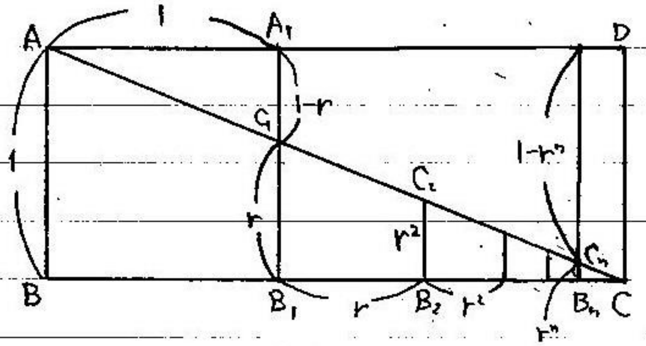


図1a

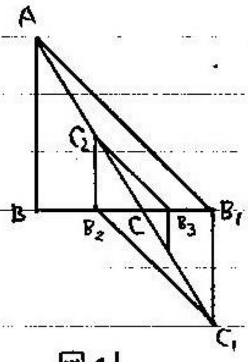


図1b

2 図2のグラフで$y=x$と$y=a+rx$の交点を求めることにより

$$x=y=\frac{a}{1-r},\quad \therefore a+ar+ar^2+\cdots=\frac{a}{1-r}.$$

また$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}$は$y=a+rx\cdots$①と$y=x$より$ar^{n-1}$だけ大きい$y=x+ar^{n-1}\cdots$②の交点の$y$座標に等しい。

よって①と②を連立して解くと

$$y=\frac{a(1-r^n)}{1-r},\quad \therefore a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

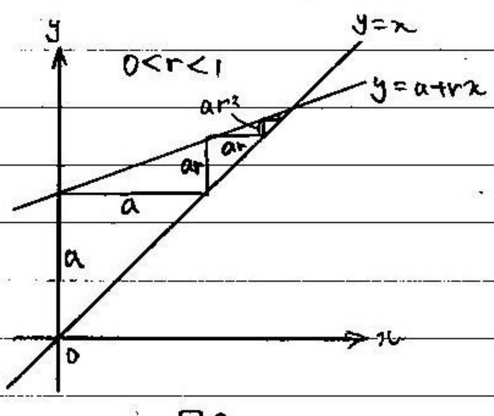


図2

2項間の漸化式の図形的解釈

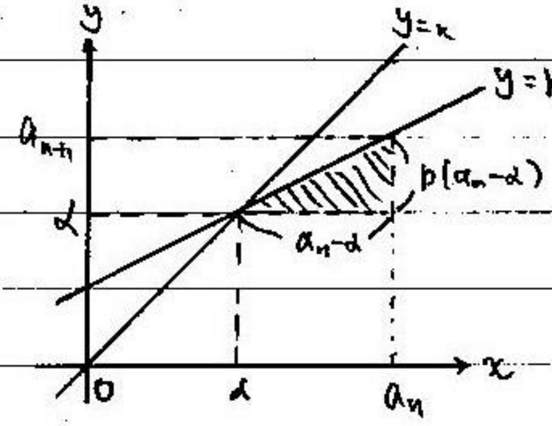
$a_{n+1} = pa_n + q$ ← 点(a_n, a_{n+1})は直線$y=px+q$上

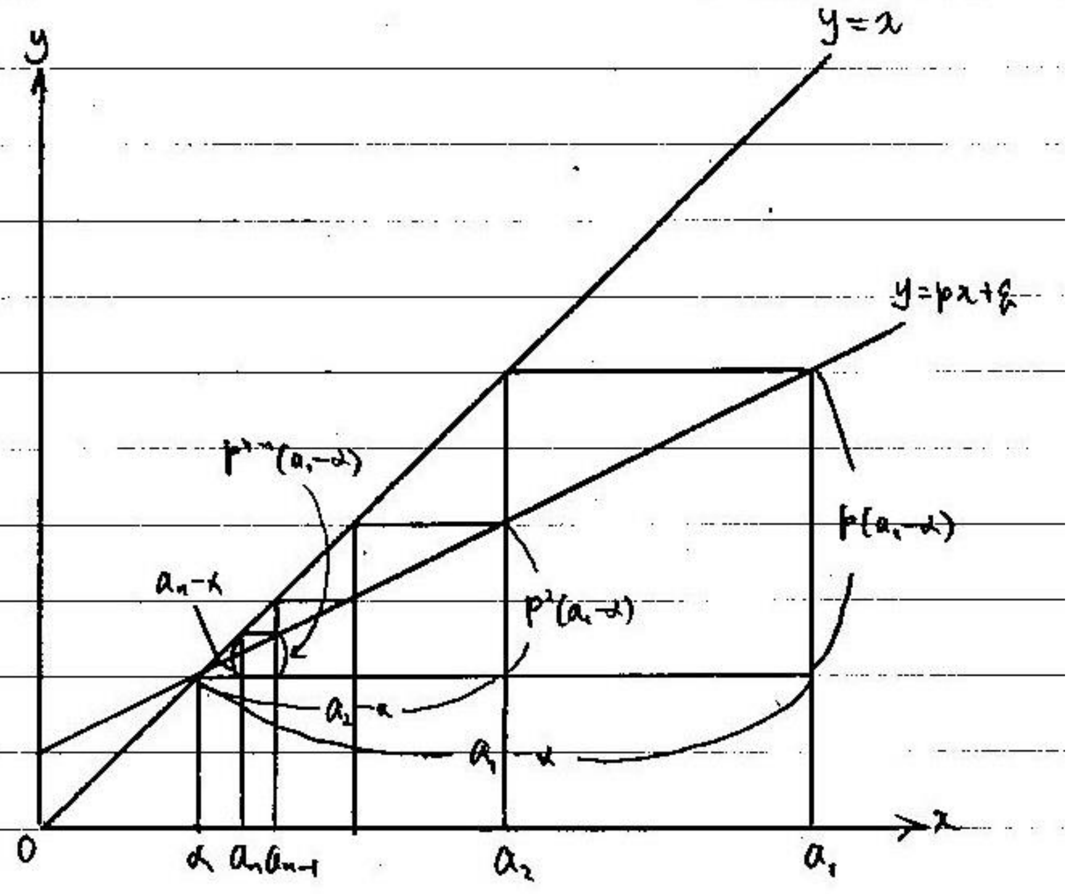
$-)\quad \alpha = p\alpha + q$ ← 点(α, α)は直線$y=px+q$と

$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$　　$y=x$との交点。

pは直線$y=px+q$の傾きである。

数列$\{a_n - \alpha\}$は公比pの等比数列となる。





$a_n - \alpha = p^{n-1}(a_1 - \alpha)$がグラフから読み取れる。

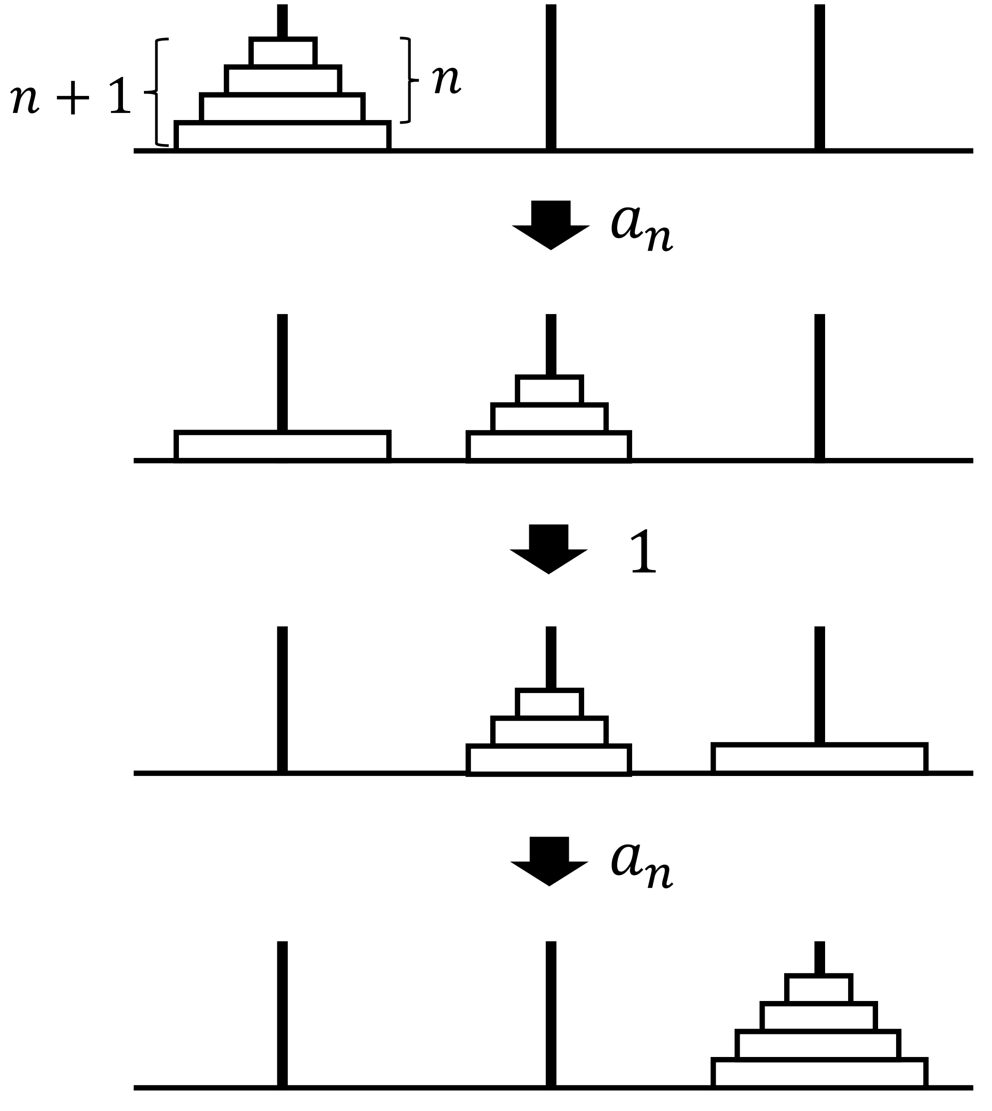
ハノイの塔

パズル「ハノイの塔」について, 円盤がn枚の場合, 全ての円盤を別の棒に移し終えるのに要するステップ数a_nを求めよう. 下図より漸化式

$$a_{n+1} = 2a_n + 1$$

が得られる. これを$a_1 = 1$の下で解くと, $a_n = 2^n - 1$と求まる.

これは段数nとともに指数関数的に増大する.



2階1次の漸化式を作る

2つの等比数列：

$$a_n = a\alpha^{n-1} \quad (\text{初項 } a, \text{公比 } \alpha)$$
$$b_n = b\beta^{n-1} \quad (\text{初項 } b, \text{公比 } \beta)$$

の1次結合を作ると

$$pa_n + qb_n = ap\alpha^{n-1} + bq\beta^{n-1}$$

となり，$\alpha \neq \beta$であれば等比数列とは異なる数列が現れる．

そこで，ap, bq を改めて p, q で表し，第n項が

$$a_n = p\alpha^{n-1} + q\beta^{n-1} \quad (\alpha \neq \beta) \quad \cdots ①$$

である数列を考え，この数列に対する漸化式を導いてみる．

nを1だけ増して

$$a_{n+1} = p\alpha^n + q\beta^n \quad \cdots ②$$

まず ② − ①×β から β^nを消去して

$$a_{n+1} - \beta a_n = p(\alpha - \beta)\alpha^{n-1} \quad \cdots ③$$

α^nを消去するために，さらにnを1だけ増せば

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = p(\alpha - \beta)\alpha^n \quad \cdots ④$$

④ − ③×α から

$$a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$$

ここで，$\alpha + \beta = -A$, $\alpha\beta = B$ とおくと

$$a_{n+2} + Aa_{n+1} + Ba_n = 0$$

となり，2階1次の漸化式が得られる．

注　漸化式を解くことは作ることの逆操作であるから，逆にたどることによって　$a_{n+2} + Aa_{n+1} + Ba_n = 0$　を解くことができる．

［よく知られているように2階1次の漸化式は，特性方程式を利用して等比級数に帰着させて解くことができる．ここでは我々はあらかじめ等比級数からはじめて漸化式を導き，漸化式の解法をその逆操作として説明したことになる．］

問1　空欄を埋めよ：一般項が $a_n = (-2)^n + 3^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ である数列は $a_1 = 1$, $a_2 = 13$, $a_{n+2} = \square a_{n+1} + \square a_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ のように帰納的定義によって与えられる．

この関係式により，数列 $a_{n+1} + \square a_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ は公比$\square$の等比数列であり，数列 $a_{n+1} + \square a_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ は公比$\square$の等比数列であることがわかる．

問2　一般項が $a_n = (pn + q)\alpha^{n-1}$ である数列における2階1次の漸化式を作れ．ただし $p\,(\neq 0)$, q, $\alpha\,(\neq 0)$ は定数とする．

第k項が分数式(部分分数に分ける)の和

数列 $\{a_k\}$ の一般項は $a_k=\dfrac{7k+4}{k(k+1)(k+2)}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で表されている。

[1] $\dfrac{7k+4}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k+1}+\dfrac{c}{k+2}$ を満たす a, b, c の値は

$a=$ ア$\boxed{}$, $b=$ イ$\boxed{}$, $c=$ ウ$\boxed{}$ である。

[2] この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると、

$S_n=\dfrac{\text{エ}\boxed{}}{2}-\dfrac{\text{オ}\boxed{}}{n+1}-\dfrac{\text{カ}\boxed{}}{n+2}$ である。

【解】[1] 等式の両辺に $k(k+1)(k+2)$ を掛けて得られる

$7k+4=a(k+1)(k+2)+bk(k+2)+ck(k+1)$ も、k についての恒等式である。

よって、$k=0$ とすると $4=2a$ から $a=$ア2

$k=-1$ とすると $-3=-b$ から $b=$イ3

$k=-2$ とすると $-10=2c$ から $c=$ウ-5

[2] [1] の結果から $a_k=\dfrac{2}{k}+\dfrac{3}{k+1}-\dfrac{5}{k+2}$

また $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}=T_n$ とする。

このとき $S_n=2T_n+3\left(T_n-1+\dfrac{1}{n+1}\right)-5\left(T_n-1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}\right)$

$=\dfrac{\text{エ}9}{2}-\dfrac{\text{オ}2}{n+1}-\dfrac{\text{カ}5}{n+2}$

答 (ア) 2　(イ) 3　(ウ) −5　(エ) 9　(オ) 2　(カ) 5

恒等式を定め，数列の和

x の関数 $f(x)=2^x(ax^2+bx+c)$ が常に $f(x+1)-f(x)=2^x x^2$ を満たすとき、定数 a, b, c の値の組は $(a, b, c)=$ ア$\boxed{}$ である。 したがって、$\sum_{k=1}^{n} 2^k k^2=$ イ$\boxed{}$ となる。

着眼 $\sum_{k=1}^{n} g(k)$ を求めたいとき、$f(n+1)-f(n)=g(n)$ を満たす $f(n)$ が見つかれば、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} g(k)&=\sum_{k=1}^{n}\{f(k+1)-f(k)\}\\&=\{f(2)-f(1)\}+\{f(3)-f(2)\}+\cdots\cdots+\{f(n+1)-f(n)\}\\&=f(n+1)-f(1)\end{aligned}$$

として、求まる。

【解】(ア) $f(x+1)-f(x)=2^{x+1}\{a(x+1)^2+b(x+1)+c\}-2^x(ax^2+bx+c)$
$=2^x\{2a(x^2+2x+1)+2b(x+1)+2c-(ax^2+bx+c)\}$
$=2^x\{ax^2+(4a+b)x+2a+2b+c\}$

$f(x+1)-f(x)=2^x x^2$ が恒等的に成り立つから

$a=1$，$4a+b=0$，$2a+2b+c=0$

これらを解いて　$a=1$，$b=-4$，$c=6$

(イ) このとき、$\sum_{k=1}^{n} 2^k k^2=\sum_{k=1}^{n}\{f(k+1)-f(k)\}=\sum_{k=1}^{n} f(k+1)-\sum_{k=1}^{n} f(k)$
$=f(n+1)-f(1)=2^{n+1}\{(n+1)^2-4(n+1)+6\}-2(1-4+6)$
$=2^{n+1}(n^2-2n+3)-6$

kの平方×2のk乗の総和

(1) $f(k)=\{ak(k-1)+bk+c\}\cdot 2^k$ とおくとき、$f(k+1)-f(k)=k^2\cdot 2^k$ が成り立つように 定数 a，b，c の値を定めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\cdot 2^k$ を求めよ。

【解】(1) $f(k+1)-f(k)=\{2a(k+1)k+2b(k+1)+c-ak(k-1)-bk-c\}\cdot 2^k$

$=\{ak^2+(3a+b)k+2b+c\}\cdot 2^k$

から、$a=1$，$3a+b=0$，$2b+c=0$

$\therefore\quad a=1$，$b=-3$，$c=6$

(2) (1)より $f(k)=\{k(k-1)-3k+6\}\cdot 2^k$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\cdot 2^k=\sum_{k=1}^{n}\{f(k+1)-f(k)\}=f(n+1)-f(1)$$

$$=\{(n+1)n-3(n+1)+6\}\cdot 2^{n+1}-3\cdot 2^1$$

$$=(n^2-2n+3)\cdot 2^{n+1}-6$$ （$n=1$ のときも一致）

群数列1

ある数列$\{a_n\}$の項を $a_1 \mid a_2,\ a_3 \mid a_4,\ a_5,\ a_6 \mid a_7,$ …… と第1の仕切りにはa_1が1個、第2の仕切りにはa_2, a_3の2個、……，第nの仕切りにはn個の項が入るように仕切る。このとき、各仕切りの初項を用いて、$b_1=a_1$, $b_2=a_2$, $b_3=a_4$, …… と新しい数列$\{b_n\}$を作る。

(1) b_kはもとの数列の第何項目か。

(2) $a_n=2n-1$ のとき数列$\{b_n\}$の初項から第n項までの和を求めよ。

(3) 数列$\{a_n\}$が公差0でない等差数列のとき、数列$\{b_n\}$は等比数列でないことを証明せよ。

着眼 (3) 数列$\{b_n\}$は等比数列 $b_1=a_1$, $b_2=a_2$, $b_3=a_4$, $b_4=a_7$ で $b_2{}^2=b_1b_3$ として、矛盾を導けばよい。

【解】(1) $k\geqq 2$ のとき、b_kまでには$\{a_n\}$の項が $1+2+\cdots+(k-1)$ 個あるから、b_kはもとの数列の $1+2+\cdots+(k-1)+1=\dfrac{k(k-1)}{2}+1=\dfrac{1}{2}(k^2-k+2)$ 項目。

これは$k=1$のときも満たす。

ゆえに $\dfrac{1}{2}(k^2-k+2)$ 項目

(2) $a_n=2n-1$ より、$b_k=a_{\frac{1}{2}(k^2-k+2)}=2\cdot\dfrac{1}{2}(k^2-k+2)-1=k^2-k+1$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n} b_k=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)+n$$
$$=\frac{1}{3}n(n^2+2)$$

(3) $a_1=a$ とし、$\{a_n\}$の公差を$d\ (\neq 0)$とおくと

$b_1=a_1=a$, $b_2=a_2=a+d$, $b_3=a_4=a+3d$, $b_4=a_7=a+6d$

となる。$\{b_n\}$が等比数列ならば $b_2{}^2=b_1b_3$

すなわち $(a+d)^2=a(a+3d)$

$d(d-a)=0$, $d\neq 0$ から $a=d\neq 0$

よって $b_1=a$, $b_2=2a$, $b_3=4a$, $b_4=8a$

これは $b_4=a+6d=7a$ に反する。ゆえに、数列$\{b_n\}$は等比数列ではない。

等差数列と等比数列の共通の数の数列の一般項

等差数列 2, 5, 8, …… を $\{a_n\}$，等比数列 2, −4, 8, …… を $\{b_n\}$ とする。数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ との両方に含まれる数を順に取り出してできる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{\text{着眼}}$ 数列 $\{a_n\}$ の第 n 項が $\{b_n\}$ の第 m 項であったとすると

$$a_n=b_m \iff 3n-1=-(-2)^m$$

より m がどんな整数値をとれるか調べる。

【解1】 $a_n=2+(n-1)\cdot 3=3n-1$，$b_n=2\cdot(-2)^{n-1}=-(-2)^n$ において

$$a_n=b_m \iff 3n-1=-(-2)^m \quad \cdots\cdots ①$$

①の左辺は正より右辺も正だから、m は奇数。

そこで、$m=2k-1$ (k は自然数) とおくと、①より

$$3n-1=-(-2)^{2k-1}$$

$$3n=1-(-2)^{2k-1} \quad \cdots\cdots ②$$

ここに、$1-(-2)^{2k-1}\equiv 1-1\equiv 0 \pmod 3$，$1-(-2)^{2k-1}=1+2^{2k-1}>0$ だから、

$m=2k-1$ のとき②を満たす n が存在する。 $(-2)^{2k-1}$

よって $c_n=b_{2n-1}=2(-2)^{2n-2}=2^{2n-1}$

$k=1$のとき$(-2)^{2k-1}=-2\equiv 1$
$k=k'$のとき$(-2)^{2k-1}\equiv 1$と仮定すると
$k=k'+1$のとき$(-2)^{2k-1}\equiv -2\equiv 1$

【解2】 数列 $\{a_n\}$ の第 n 項が $\{b_n\}$ の第 m 項であったとすると

$$a_n=b_m \iff 3n-1=-(-2)^m$$

両辺を2倍すると $6n-2=(-2)^{m+1}$

$(-2)^{m+1}$ は $6n-2=3(2n)-2$ より $\{a_n\}$ の項ではない。

さらに、両辺を2倍すると $12n-4=-(-2)^{m+2}$

$$\therefore \quad 3(4n-1)-1=-(-2)^{m+2}$$

したがって、$-(-2)^{m+2}$ は $\{a_n\}$ の項となるから $\{c_n\}$ の項でもある。

すなわち、数列 $\{b_n\}$ の項のうち、$-(-2)^m$ が $\{c_n\}$ の項ならば、次に $\{c_n\}$ の項となるのは $-(-2)^{m+2}$ である。

ゆえに、数列 $\{c_n\}$ は初項2，公比4の等比数列である。

その一般項は $c_n=2\cdot 4^{n-1}=2^{2n-1}$

2つの等差数列の決定，共通に現れる数の数列

2つの数 p，q がある。p を初項、q を公差とする等差数列を $\{a_n\}$，q を初項、p を公差とする等差数列を $\{b_n\}$ とする。$a_3=22$，$b_3=20$ であるとき、$p=$ ア $\boxed{}$，$q=$ イ $\boxed{}$ である。このとき、2つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に共通して現れる数を小さい順に並べて新しい数列 $\{c_n\}$ を作るとき、数列 $\{c_n\}$ が等差数列であることを示せ。

着眼 a，b が互いに素であれば、$ax+by=1$ ……① を満たす整数の組 (x, y) がある。
$ax_0+by_0=1$ ……② を満たす整数の組 (x_0, y_0) を見つけ、①−② より

$$a(x-x_0)=-b(y-y_0)$$

と変形して、a，b が互いに素であるから、$x-x_0$ が b の倍数であることに注意して、求める。

【解】$a_3=p+2q=22$，$b_3=q+2p=20$ から $p=6$，$q=8$

$$\begin{array}{rr} & 4m-3n=2 \\ -) & 4(-1)-3(-2)=2 \\ \hline & 4(m+1)-3(n+2)=0 \end{array}$$

また $a_n=6+(n-1)\cdot 8=8n-2$

$b_n=8+(n-1)\cdot 6=6n+2$

$a_m=b_n$ のとき $8m-2=6n+2$ すなわち $4m-3n=2$

ゆえに $4(m+1)=3(n+2)$

3と4は互いに素であるから $m+1=3k$，$n+2=4k$（k は自然数）とおける。

よって、$m=3k-1$ から、2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に共通して現れる数は

$$a_{3k-1}=8(3k-1)-2=24k-10=14+(k-1)\cdot 24$$

と表される。

したがって、$c_n=14+(n-1)\cdot 24$ となるから、数列 $\{c_n\}$ は、初項14，公差24の等差数列である。

aとbの間の，5を分母とする分数の和

a，b は正の整数で $a<b$ とする。a と b との間にあって、5 を分母とするすべての分数(整数を除く)の和を求めよ。

着眼 まず、$a=\dfrac{5a}{5}$ から $b=\dfrac{5b}{5}$ までの 5 を分母とする分数(整数を含めて)を書き出してみる。

【解】a から b までの 5 を分母とする分数(整数を含む)を書き出すと

$$\frac{5a}{5},\ \frac{5a+1}{5},\ \frac{5a+2}{5},\ \cdots\cdots,\ \frac{5b-1}{5},\ \frac{5b}{5}$$

これは、初項 a，末項 b，公差 $\dfrac{1}{5}$，項数 $5(b-a)+1$ の等差数列である。

したがって，その和を S とすると

$$\frac{5a}{5},\ \frac{5a+1}{5},\ \frac{5a+2}{5},\ \cdots\cdots,\ \frac{5b-1}{5},\ \frac{5b}{5}$$

また、a から b までの整数の和を S' とすると

$$S'=\frac{b-a+1}{2}(a+b)$$

求める和は $S-S'$ であるから

$$\frac{5(b-a)+1}{2}(a+b)-\frac{b-a+1}{2}(a+b)=2(b-a)(a+b)=2(b^2-a^2)$$

参考　下のように、題意を満たす分数を小さい順に書き並べたものと大きい順に書き並べたものとを、それぞれ上の項と下の項とで加えると、それぞれの和は常に $a+b$ でその個数は $4(b-a)$ であるから

求める和は　$\dfrac{1}{2}(a+b)\cdot 4(b-a)=2(b^2-a^2)$

$$\frac{5a+1}{5},\ \frac{5a+2}{5},\ \frac{5a+3}{5},\ \frac{5a+4}{5},\ \frac{5a+6}{5},\ \frac{5a+7}{5},\ \cdots\cdots,\ \frac{5b-2}{5},\ \frac{5b-1}{5}$$

$$\frac{5b-1}{5},\ \frac{5b-2}{5},\ \frac{5b-3}{5},\ \frac{5b-4}{5},\ \frac{5b-6}{5},\ \frac{5b-7}{5},\ \cdots\cdots,\ \frac{5a+2}{5},\ \frac{5a+1}{5}$$

一般に、a と b との間にあって、素数 p を分母とするすべての分数(整数を除く)の和は、$\dfrac{p-1}{2}(b^2-a^2)$ である。

累積帰納法と平方の和の公式

数列$\{a_n\}$は、$a_1=1$，任意の自然数nに対して

$$a_n>0 \text{ および } 6\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2=a_n a_{n+1}(2a_{n+1}-1)$$

を満たす。

(1) a_2，a_3の値を求めよ。

(2) 一般項a_nをnを用いて表せ。

【解】(1) $n=1$のとき　$6a_1{}^2=a_1a_2(2a_2-1)$，$a_1=1$だから　$6=a_2(2a_2-1)$

$(2a_2+3)(a_2-2)=0$，$a_2>0$だから　$a_2=2$

$n=2$のとき　$6(a_1{}^2+a_2{}^2)=a_2a_3(2a_3-1)$，$a_1=1$，$a_2=2$だから代入して整理すると$(2a_3+5)(a_3-3)=0$，$a_3>0$だから　$a_3=3$

(2) $a_n=n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ ……… ☆　であることを数学的帰納法を用いて証明する。

［Ⅰ］ $n=1$のときは明らかに☆は成立。

［Ⅱ］ $n=1,\ 2,\ \cdots,\ k$で☆が成り立つとすると

$$6\sum_{i=1}^{k} i^2=ka_{k+1}(2a_{k+1}-1)$$

$$6\cdot\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)=ka_{k+1}(2a_{k+1}-1)$$

$k\neq0$ より　$2a_{k+1}{}^2-a_{k+1}-(k+1)(2k+1)=0$

$\therefore\ (2a_{k+1}+2k+1)(a_{k+1}-(k+1))=0$

$a_{k+1}>0$より　$a_{k+1}=k+1$

以上により、☆はすべての自然数nで成り立つ。

答　$a_n=n$

(等差数列×等比数列)の和

$\sum_{k=1}^{n} a_k x^{k-1}$ $(x \neq 1)$ について、$\{a_n\}$ が等差数列であるとき、

$a_k + a_{k+2} = 2a_{k+1}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ が成り立つから

$$\left.\begin{aligned}&(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots\cdots + a_n x^{n-1})(1-x)^2\\ &= a_1 + (a_2 - 2a_1)x + (a_1 - 2a_2 + a_3)x^2 + \cdots\cdots + (a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2})x^{k+1} + \cdots\cdots\\ &\quad + (a_{n-2} - 2a_{n-1} + a_n)x^{n-1} + (a_{n-1} - 2a_n)x^n + a_n x^{n+1}\\ &= a_1 + (a_2 - 2a_1)x + (a_{n-1} - 2a_n)x^n + a_n x^{n+1}\end{aligned}\right\}※$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n} a_k x^{k-1} = \frac{a_1 + (a_2 - 2a_1)x + (a_{n-1} - 2a_n)x^n + a_n x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

特に、$a_n = n$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} \quad (x \neq 1)$$

またこれは、$kx^{k-1} = \{A(k+1)+B\}x^k - (Ak+B)x^{k-1}$ …… ☆ をみたす定数 A, B が見つかれば、

$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \{A(n+1)+B\}x^n - (A+B)$ より答えが得られる。

実際、☆ は k についての恒等式とみて、$A = -\dfrac{1}{1-x}$, $B = -\dfrac{x}{(1-x)^2}$ とすればよい。

ついでに、商の微分を用いると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} &= \left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right)' = \left(\frac{x - x^{n+1}}{1-x}\right)'\\ &= \frac{\{1-(n+1)x^n\}(1-x) - (x - x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2}\\ &= \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

注 この方法はあまり応用が利かない。

※:
$$\begin{array}{rl} & a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1}\\ \times) & 1 - 2x + x^2\\ \hline & a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1}\\ & \quad - 2a_1 x - 2a_2 x^2 - \cdots - 2a_{n-1} x^{n-1} - 2a_n x^n\\ & \qquad a_1 x^3 + \cdots + a_{n-2} x^{n-1} + a_{n-1} x^n + a_n x^{n+1} \end{array}$$

消える.

階差数列より和を求める

(1) $k=\dfrac{1}{2}k(k+1)-\dfrac{1}{2}(k-1)k$ を用いて $\sum_{k=1}^{n} k$ を求めよ。

(2) $k^2=\dfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)-\dfrac{1}{6}(k-1)k(2k-1)$ を用いて $\sum_{k=1}^{n} k^2$ を求めよ。

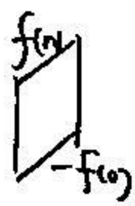
(3) $r^{k-1}=\dfrac{1}{r-1}(r^k-r^{k-1})$ $(r \neq 1)$ を用いて $\sum_{k=1}^{n} \overset{a}{\vee} r^{k-1}$ を求めよ。

(4) $kr^{k-1}=\{A(k+1)+B\}r^k-(Ak+B)r^{k-1}$ を満たす定数 A，B を r で表し、$\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1}$ を求めよ。ただし、$r \neq 1$ とする。

(5) $\dfrac{k}{(k+1)!}=\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}$ を用いて $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{(k+1)!}$ を求めよ。

【解】(1) $f(k)-f(k-1)=a_k$ とおくとき、

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$$
$$=(f(1)-f(0))+(f(2)-f(1))+\cdots\cdots+(f(n)-f(n-1))$$
$$=f(n)-f(0)$$



であるから

(1) $f(k)=\dfrac{1}{2}k(k+1)$ で、$f(0)=0$ より $\sum_{k=1}^{n} k=f(n)=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

(2) $f(k)=\dfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$ で、$f(0)=0$ より $\sum_{k=1}^{n} k^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(3) $f(k)=\dfrac{ar^k}{r-1}$ より $\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}=\dfrac{ar^n}{r-1}-\dfrac{a}{r-1}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

(4) 与式の両辺を r^{k-1} で割ると

$k=\{A(k+1)+B\}r-(Ak+B)$　　よって　$k=A(r-1)k+Ar+Br-B$

任意の k に対して成り立つから

$1=A(r-1)$，$Ar+Br-B=0$　　よって　$A=-\dfrac{1}{1-r}$，$B=-\dfrac{r}{(1-r)^2}$

したがって、$f(k)=\{A(k+1)+B\}r^k$ より

$$\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1}=\{A(n+1)+B\}r^n-(A+B)=\frac{1-(n+1)r^n+nr^{n+1}}{(1-r)^2}$$

(5) $f(k)=-\dfrac{1}{(k+1)!}$ で、$f(0)=-1$ より $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{(k+1)!}=1-\dfrac{1}{(n+1)!}$

和の公式

ここでは公式

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

から，

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

を導いてみよう．

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

において，$k = 1, \cdots, n$ について両辺の和をとると

$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3}{2}n(n+1) + n$$

となる．よって

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left\{(n+1)^3 - 1 - \frac{3}{2}n(n+1) - n\right\} = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

を得る．

★　この方法は，逐次的に $\sum k^3, \sum k^4, \cdots$ の公式を求めるのに応用が利く．

参考

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2.$$

完全順列$f(n)$の$f(5)$を$f(3)$と$f(4)$で表すなど

1からnまでの番号を1列に並べたとき、左からk番目の番号がkでないような並べ方の総数を$f(n)$で表すとき、次の問に答えよ。

(1) $f(3)$, $f(4)$を求めよ。

(2) $f(5)=4\{f(4)+f(3)\}$が成り立つことを示し、$f(5)$を求めよ。

着眼 (2) 1番目に、例えば、番号3がきたとき、3番目に番号1がきたときと1以外がきたときとで、分けて考える。

1	2	3	4	5(番目)
↓		↓		
3	□	1	□	□(番号)

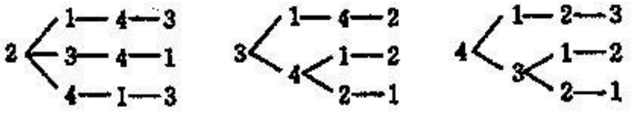
$f(3)$通り

1	2	3	4	5(番目)
↓		↓		
3	□	1以外	□	□(番号)

$f(4)$通り

【解】(1) $n=3$のとき　題意の順列は　231，312　　ゆえに　$f(3)=2$

$n=4$のとき　題意の順列を樹形図で書いて調べると　$f(4)=9$



(2) 1，2，…，nの順列で各数の順番がその数とすべて違っているものを完全順列と名付ける。完全順列を次の2つのタイプに分けて調べる。

(i) 1番目がkでk番目が1の場合

kと1とを入れ替えると1とkが順番と一致するから、この2数を除いて考えると3個の完全順列の総数$f(3)$に等しい。

(ii) 1番目がkで、k番目が1以外の場合

k番目の数と1番目の数を入れ替えると、kだけが順番と一致するから、これを除いて考えると4個の完全順列の総数$f(4)$に等しい。

そして、kは2から5までの4通りの場合があるから、総数は

$$f(5)=4\{f(4)+f(3)\}$$

したがって、(1)から　$f(5)=4(9+2)=44$

別解 (2) [1] $f(4)$の場合で、5を左から1～4番目のどれかの番号と入れ替えてもとの数を右端に入れると、左からの順番と番号は一致しないから、この場合の個数は

$4\times f(4)$ 個

[2] 4個の順列で1個だけ左からの順番と番号が一致しているものを考えると、4種類の数字ごとにその個数は$f(3)$個ある。

よって、この一致している数と5とを入れ替えて、もとの数を右端に入れると左からの順番と番号は一致しないから、この場合の個数は

$4\times f(3)$ 個

[1]+[2]から　$f(5)=4\{f(4)+f(3)\}$　　したがって、(1)から　$f(5)=4(9+2)=44$

完全順列の一般項

1〜nの数字を1列に並べた順列のうち、どのk番目もkでないものを完全順列といい、その個数を$W(n)$とすると、(k, nは自然数)

$$W(1)=0,\ W(2)=1,$$

$$W(n)=(n-1)\{W(n-1)+W(n-2)\}\ (n \geqq 3)$$

が成り立つ。(詳しくは別のカード)

$W(n)$の一般項を求めよ。

$W(1)=0,\ W(2)=1$

$W(n)=(n-1)\{W(n-1)+W(n-2)\}\ (n \geqq 3)$

$W(n)=?$

$n \geqq 3$のとき

$W(n)=(n-1)\{W(n-1)+W(n-2)\}$ ☆

$W(n)-nW(n-1)=-\{W(n-1)-(n-1)W(n-2)\}$ 定石

$=(-1)^{n-2}\{\underline{W(2)-2W(1)}\}$ $n=3$すなわち $n-1=2,\ n-2=1$となるまで降下

$=(-1)^{n-2}$

$=(-1)^{n}$

$\therefore W(n)=nW(n-1)+(-1)^{n}$

両辺$n!\,(>0)$で割ると、

$$\frac{W(n)}{n!}=\frac{W(n-1)}{(n-1)!}+\frac{(-1)^{n}}{n!}$$

$$=\frac{W(2)}{2!}+\sum_{k=3}^{n}\frac{(-1)^{k}}{k!}$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{(-1)^{k}}{k!}$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k}}{k!}$$

$$\therefore W(n)=n!\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k}}{k!}$$

階差数列

$a_n=a_{n-1}+f(n)\ (n \geqq 3)$

$\Downarrow$

$a_n=a_2+\sum_{k=3}^{n}f(k)\ (n \geqq 3)$

$a_2 \xrightarrow{+f(3)} a_3 \xrightarrow{+f(4)} a_4 \cdots a_{n-1} \xrightarrow{+f(n)} a_n$

これは$n=2$のときも成り立つ。

また、$n=1$のときは成り立たない。

よって

$$W(n)=\begin{cases}0 & (n=1\text{のとき})\\ n!\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k}}{k!} & (n \geqq 2\text{のとき})\end{cases}$$

☆ 方針 $(n-1)W(n-1)$を$\alpha W(n-1)$と$(n-1-\alpha)W(n-1)$に分割して両辺に振り分け、$f(n)=○f(n-1)$の形にする。

$$W(n)\underbrace{-\alpha}_{n\text{の式}} W(n-1)=(n-1-\alpha)\Big\{W(n-1)+\underbrace{\frac{n-1}{n-1-\alpha}}_{n\text{の式}}W(n-2)\Big\}$$

$-\alpha=g(n),\ \dfrac{n-1}{n-1-\alpha}=g(n-1)$の形になるように$\alpha$を定める。

$-(\alpha-1)=\dfrac{n-1}{n-1-\alpha}$　$\therefore \alpha=n$

(第n項)/(第$n-1$項)の漸化式．一般項から和

数列$\{a_n\}$が、$a_1=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}+\dfrac{2}{n+1}=1$ ($n=2, 3, 4, \cdots\cdots$) を満たすとき、

$S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ を求めよ。

着眼 $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}=f(k)$ で、$k=1, 2, 3, \cdots\cdots, n-1$ を代入したものを右下のように書き並べて、これらの両辺をそれぞれ掛け合わせると

$a_n=a_1f(1)f(2)f(3)\cdots f(n-1)$ ($n\geqq 2$)

特に、$f(n)=r$（一定）のとき、$a_{n+1}=ra_n$ より等比数列となり、一般項 $a_n=a_1r^{n-1}$ が得られる。を得る。

$$\frac{a_2}{a_1}=f(1)$$
$$\frac{a_3}{a_2}=f(2)$$
$$\frac{a_4}{a_3}=f(3)$$
$$\vdots$$
$$\times)\quad \frac{a_n}{a_{n-1}}=f(n-1)$$
$$\frac{a_n}{a_1}=f(1)f(2)f(3)\cdots f(n-1)$$

ところで、このタイプはよく次のような式に変形できる場合が多い。

$$a_{n+1}=\frac{g(n)}{g(n+1)}a_n$$

このとき、$g(n+1)a_{n+1}=g(n)a_n$ と変形すれば、$\{g(n)a_n\}$ は定数数列となり

$g(n)a_n=g(1)a_1$ より $a_n=\dfrac{g(1)}{g(n)}a_1$ と求められる。

【解】$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}+\dfrac{2}{n+1}=1$ から　$(n+1)a_n+2a_{n-1}=(n+1)a_{n-1}$

すなわち　$(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}$

両辺に n を掛けると　$(n+1)na_n=n(n-1)a_{n-1}$

したがって　$\{(n+1)na_n\}$ は定数数列より　$(n+1)na_n=2\cdot 1\cdot a_1$

すなわち　$(n+1)na_n=1$

ゆえに　$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$

よって

$$\begin{aligned}S_n&=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n\\&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

初項1，(第$n+1$項)$=1+k$(第k項)のn項和

$a_1=1$，$a_{n+1}=1+a_1+2a_2+3a_3+\cdots\cdots+na_n$ ($n=1$，2，$\cdots\cdots$) で定義される数列 $\{a_n\}$ について

(1) 一般項 a_n を n で表せ。

(2) $n\geqq 4$ のとき、$a_n>2^n$ であることを証明せよ。

着眼 a_{n+1} と a_n の関係式を作る。それには、与式の n に $n-1$ を代入した式と元の式とを比べる。

【解】(1) $n\geqq 2$ のとき

$$a_{n+1}=1+a_1+2a_2+\cdots\cdots+(n-1)a_{n-1}+na_n \quad \cdots\cdots ①$$

$$a_n=1+a_1+2a_2+\cdots\cdots+(n-1)a_{n-1} \quad \cdots\cdots ②$$

①－②から　$a_{n+1}-a_n=na_n$

よって　$a_{n+1}=(n+1)a_n$

両辺を $(n+1)!$ で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{a_n}{n!}$

よって　$\dfrac{a_n}{n!}=\dfrac{a_{n-1}}{(n-1)!}=\cdots\cdots=\dfrac{a_2}{2!}=\dfrac{1+a_1}{2}=1$

ゆえに　$a_n=n!$

これは、$n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=n!$

(2) $n\geqq 4$ のとき

$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}}-\dfrac{n!}{2^n}=\dfrac{(n-1)n!}{2^{n+1}}>0$ であるから

$$\frac{a_n}{2^n}>\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}>\cdots\cdots>\frac{a_4}{2^4}=\frac{4!}{2^4}=\frac{24}{16}>1$$

よって　$a_n>2^n$

2項間の漸化式2

数列$\{a_n\}$は、$a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n+2^{n-1}$で定義されている。一般項a_nを求めよ。

解説 $a_{n+1}=p(n)a_n+q(n)$の型

$p(1)p(2)\cdots p(n)=f(n)$となるような$f(n)$で上の漸化式の両辺を割ると

$$\frac{a_{n+1}}{f(n)}=\frac{a_n}{f(n-1)}+\frac{q(n)}{f(n)}$$

ここで、$\dfrac{a_n}{f(n-1)}=b_n$とおくと　$b_{n+1}=b_n+\dfrac{q(n)}{f(n)}$

$$\therefore\quad b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{q(k)}{f(k)}\quad(n\geqq 2\text{のとき})$$

そして、$a_n=b_nf(n-1)$によってa_nの一般項が求められる。

(別解)
漸化式の両辺を2^{n+1}で割り

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{4}$$

【解】与式の両辺を3^nで割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{3^n}=\dfrac{a_n}{3^{n-1}}+\dfrac{2^{n-1}}{3^n}$

そこで、$\dfrac{a_n}{3^{n-1}}=b_n$とおけば　$b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

$$\therefore\quad b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^k=2+\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{2}{3}}=3-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\quad(n\geqq 2)$$

よって　$a_n=3^{n-1}b_n=3^n-2^{n-1}$ (これは$n=1$のときも成り立つ)

答 $a_n=3^n-2^{n-1}$

注 実際には与式の両辺を3^{n+1}で割った方が、扱い易い。

【別解】　$a_{n+1}=3a_n+2^{n-1}$　……①

において　$f(n+1)=3f(n)+2^{n-1}$　……②

を満たす$f(n)$が1つ見つかれば、①−②より

$$a_{n+1}-f(n+1)=3(a_n-f(n))$$

そこで、②において$f(n)=p\cdot 2^n$ (pは定数) とおくと

$$p\cdot 2^{n+1}-3p\cdot 2^n=2^{n-1}$$

$4p-6p=1$より　$p=-\dfrac{1}{2}$　　$\therefore$　$f(n)=-2^{n-1}$

よって、数列$\{a_n+2^{n-1}\}$は公比3の等比数列で初項$a_1+1=3$より

$$a_n+2^{n-1}=3\cdot 3^{n-1}\qquad\therefore\quad a_n=3^n-2^{n-1}$$

注 $a_{n+1}=3a_n+2^{n-1}$の両辺を2^{n+1}で割り、$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{a_n}{2^n}+\dfrac{1}{2}\right)$から求められる。

$a(n)$と$S(n)$の関係の漸化式を解く問題の間違え探し

次の問題の解答の誤りを指摘し、訂正せよ。

数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和をS_nとおくとき、

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=S_n+n^2-n+3\ (n=1,2,3,\cdots)$$

なる関係がある。このとき、a_nを求めよ。

【解答】 $a_{n+1}=S_n+n^2-n+3$ ………①

$a_n=S_{n-1}+(n-1)^2-(n-1)+3$ ………②

①−②より　$a_{n+1}-a_n=a_n+2n-2$ $(\because S_n-S_{n-1}=a_n)$

よって　$a_{n+1}=2a_n+2n-2$　　$\therefore\ a_{n+1}+2(n+1)=2(a_n+2n)$

$\{a_n+2n\}$は初項$a_1+2\cdot1=4$，公比2の等比数列であるから

$a_n+2n=4\cdot2^{n-1}$　　$\therefore\ a_n=2^{n+1}-2n$

指針 $a_n=S_n-S_{n-1}$の使い方に注意する。

【解】 $a_{n+1}+2(n+1)=2(a_n+2n)$ ………③ とする。

③を導く際に用いられた$S_n-S_{n-1}=a_n$は$n\geqq2$のときに成立する式である。

したがって、$n=1$のときは別に扱わなければならない。

ゆえに、③を$n=1,2,3,\cdots$で成立するとしたことに誤りがある。

正解は　$a_{n+1}+2(n+1)=2(a_n+2n)$　$(n\geqq2)$

一方①より　$a_2=S_1+1^2-1+3=a_1+3=5$

よって、$\{a_n+2n\}$ $(n=2,3,\cdots)$は初項$a_2+2\cdot2=9$，公比2の等比数列より

$a_n+2n=9\cdot2^{n-2}$　　$\therefore\ a_n=9\cdot2^{n-2}-2n$

したがって、求めるa_nは　　$a_1=2,\ a_n=9\cdot2^{n-2}-2n\ (n\geqq2)$

参考 $S_n=pa_n+q(n)$の型

$p=1$のとき　$a_n=q(n+1)-q(n)$，　$p\neq1$のとき　$(p-1)a_{n+1}=pa_n-f(n+1)+f(n)$

例　$S_n=2a_n-1$　　ならば　　$a_{n+1}=2a_n$，$a_1=1$

$2S_n=3a_n-2^{n-1}$ ならば　　$a_{n+1}=3a_n+2^{n-1}$，$a_1=1$

$S_n=p(n)a_n+q$の型

$$a_{n+1}=\frac{p(n)}{p(n+1)-1}a_n$$

例　$S_n=1-na_n$　　ならば　　$a_{n+1}=\frac{n}{n+2}a_n$，$a_1=\frac{1}{2}$

$S_{n+1}=pa_n+q(n)$の型

$$a_{n+2}-pa_{n+1}+pa_n=q(n+1)-q(n)$$

例　$S_{n+1}=4a_n+2$，$a_1=1$　ならば　　$a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$，$a_1=1$，$a_2=5$

$S_{n+1}=p(n)a_n+q$の型

$$a_{n+2}-p(n+1)a_{n+1}+p(n)a_n=0$$

等差と等比を交互に作る数列

各項が正である数列$\{a_n\}$が、すべての自然数nについて

$$2a_{2n}=a_{2n-1}+a_{2n+1} \quad \cdots\cdots ①$$

$$(a_{2n+1})^2=a_{2n}a_{2n+2} \quad \cdots\cdots ②$$

を満たすものとする。

(1) $n\geqq 2$のとき、$\sqrt{a_{2n}}$ を $\sqrt{a_{2n-2}}$ と $\sqrt{a_{2n+2}}$ で表せ。

(2) $a_1=1$, $a_2=2$ のとき、$\sqrt{a_{2n}}$ を求めよ。

(3) (2)のとき、$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}$ を求めよ。

指針 ②でnの替わりに$n-1$を代入して、①と連立して、奇数項を消去する。

【解】(1) ②でnのかわりに$n-1$とおくと $(a_{2n-1})^2=a_{2n-2}a_{2n}$

これと②より

$$a_{2n-1}=\sqrt{a_{2n-2}a_{2n}}, \quad a_{2n+1}=\sqrt{a_{2n}a_{2n+2}}$$

これらを①に代入すると

$$2a_{2n}=\sqrt{a_{2n-2}a_{2n}}+\sqrt{a_{2n}a_{2n+2}}$$

両辺を$2\sqrt{a_{2n}}$ (>0)で割ると

$$\sqrt{a_{2n}}=\frac{\sqrt{a_{2n-2}}+\sqrt{a_{2n+2}}}{2} \quad \cdots\cdots ③$$

(2) ③より $\sqrt{a_{2n+2}}-\sqrt{a_{2n}}=\sqrt{a_{2n}}-\sqrt{a_{2n-2}}$ だから、数列$\{\sqrt{a_{2n}}\}$は初項$\sqrt{2}$,

公差$\sqrt{a_4}-\sqrt{a_2}$の等差数列である。

ところで、①より$2a_2=a_1+a_3$から$a_3=4-1=3$　②より$(a_3)^2=a_2\cdot a_4$から

$$9=2a_4 \quad \therefore \quad a_4=\frac{9}{2}$$

したがって、$\sqrt{a_4}-\sqrt{a_2}=\frac{3}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ だから

$$\sqrt{a_{2n}}=\sqrt{2}+(n-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{n+1}{\sqrt{2}} \quad \cdots\cdots ④$$

(3) ②より $a_{2n+1}=\sqrt{a_{2n}a_{2n+2}}$ これと④より

$$a_{2n+1}=\frac{n+1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{n+2}{\sqrt{2}}=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad (n=0\text{も成立})$$

$$\therefore \quad S_n=\sum_{k=0}^{n-1}a_{2k+1}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

分数の漸化式を解く

数列$\{a_n\}$が漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{3a_n+2}{a_n+2}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$, $a_1=0$ で与えられている。

(1) $x=\dfrac{3x+2}{x+2}$ の2つの解をα, β $(\alpha>\beta)$とする。いま、$b_n=\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ とするとき、

数列$\{b_n\}$は等比数列となることを示せ。

(2) a_nを求めて、$a_n<\alpha$であることを示せ。

解説 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ $(ps-qr\neq 0)$ ……① a_nはnの関数で、これが未知関数である。この方程式が定数の特殊解をもったとし、それをxとおくと $a_{n+1}=a_n=x$

これを①に代入して $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ $\therefore$ $rx^2-(p-s)x-q=0$ ……②

②の方程式が異なる2解α, βをもつとき

$\alpha=\dfrac{p\alpha+q}{r\alpha+s}$, $\beta=\dfrac{p\beta+q}{r\beta+s}$ を用いて

$(分子)=(pa_n+q)(r\alpha+s)-(ra_n+s)(p\alpha+q)$

$$a_{n+1}-\alpha=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}-\frac{p\alpha+q}{r\alpha+s}\quad\therefore\quad a_{n+1}-\alpha=\frac{(ps-qr)(a_n-\alpha)}{(r\alpha+s)(ra_n+s)}$$

同様にして $a_{n+1}-\beta=\dfrac{(ps-qr)(a_n-\beta)}{(r\beta+s)(ra_n+s)}$

以上の2式から $\dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=\dfrac{r\beta+s}{r\alpha+s}\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ より、$\left\{\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}\right\}$が等比数列である。

【解答】(1) $x=\dfrac{3x+2}{x+2}$ を解くと、$x=-1,\ 2$

$\alpha>\beta$より $\alpha=2$, $\beta=-1$ で、$b_n=\dfrac{a_n-2}{a_n+1}$ ……①

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}+1}=\frac{\frac{3a_n+2}{a_n+2}-2}{\frac{3a_n+2}{a_n+2}+1}=\frac{3a_n+2-2a_n-4}{3a_n+2+a_n+2}=\frac{a_n-2}{4(a_n+1)}=\frac{1}{4}b_n$$

すなわち、$\{b_n\}$は公比$\dfrac{1}{4}$の等比数列である。

(2) $b_1=\dfrac{a_1-2}{a_1+1}=-2$と(1)から $b_n=-2\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}=-\dfrac{2}{4^{n-1}}$

①から $a_n=\dfrac{2+b_n}{1-b_n}=\dfrac{2-\frac{2}{4^{n-1}}}{1+\frac{2}{4^{n-1}}}=2\cdot\dfrac{1-\frac{1}{4^{n-1}}}{1+\frac{2}{4^{n-1}}}<2$ よって $a_n<\alpha$

分数の漸化式

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ $(r\neq 0,\ ps-qr\neq 0)$ の漸化式を解く。

変換 $x'=\dfrac{px+q}{rx+s}$ において、$x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ を満たす不動点 x を考える。

$x=\dfrac{px+q}{rx+s} \iff rx^2-(p-s)x-q=0$ なる方程式が異なる2実解 α, β をもつ場合と、重解 α をもつ場合に分けて調べる。

与えられた漸化式の両辺から $\alpha=\dfrac{p\alpha+q}{r\alpha+s}$ を引けば、

$$a_{n+1}-\alpha=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}-\frac{p\alpha+q}{r\alpha+s}=\frac{ps-qr}{r\alpha+s}\cdot\frac{a_n-\alpha}{ra_n+s} \qquad \cdots\cdots ①$$

異なる2実解 α, β をもつときは、同様にして

$$a_{n+1}-\beta=\frac{ps-qr}{r\beta+s}\cdot\frac{a_n-\beta}{ra_n+s} \qquad \cdots\cdots ②$$

①÷②より

$$\frac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=\frac{r\beta+s}{r\alpha+s}\cdot\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$$

数列$\left\{\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}\right\}$は初項 $\dfrac{a_1-\alpha}{a_1-\beta}$，公比 $\dfrac{r\beta+s}{r\alpha+s}$ の等比数列となるから

$$\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=\left(\frac{r\beta+s}{r\alpha+s}\right)^{n-1}\cdot\frac{a_1-\alpha}{a_1-\beta}$$

この分数の分母を払って、a_n について解けば、a_n が n の式で表される。

重解 α をもつときは、① の両辺の逆数をとれば、

$$\frac{1}{a_{n+1}-\alpha}=\frac{r\alpha+s}{ps-qr}\cdot\frac{ra_n+s}{a_n-\alpha}$$

故に、$$\frac{1}{a_{n+1}-\alpha}=\frac{r\alpha+s}{ps-qr}\left(r+\frac{r\alpha+s}{a_n-\alpha}\right)$$

ここで、$\dfrac{1}{a_n-\alpha}=b_n$ とおけば、$b_{n+1}=\lambda+\mu b_n$（実は $\mu=1$）の形に帰着され、

$b_n=b_1+(n-1)\lambda$ より　$a_n=\dfrac{1}{b_1+(n-1)\lambda}+\alpha$ から、a_n が n の式で表せる。

注　$\mu=1$ となるのは $(p-s)^2+4qr=0$，$2\alpha r=p-s$ から
$4(r\alpha+s)^2=(p+s)^2=(p-s)^2+4ps=4(ps-qr)$ による。
$r=0$ ならば、与漸化式は隣接2項間の1次の漸化式となる。

$ps-qr=0$ ならば、$q=\dfrac{ps}{r}$ だから $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+\dfrac{ps}{r}}{ra_n+s}=\dfrac{p(ra_n+s)}{r(ra_n+s)}=\dfrac{p}{r}$ となり、

$\{a_n\}$ は定数数列になる。

例1　数列$\{a_n\}$は$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3-a_n}$で定義されるとする。この数列の一般項$a_n$を$n$で表せ。

【解】与漸化式において、$a_{n+1}=0$とおけば、$a_n=0$で$a_n=a_{n-1}=\cdots=a_1=0$となって、$a_1=1$に反する。

よって、$a_n\neq 0\,(n=1,\ 2,\ \cdots)$である。

そこで、与漸化式の両辺の逆数をとれば

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3-a_n}{a_n}=\frac{3}{a_n}-1$$

よって、$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{2}=3\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{2}\right)$とかける。$\left\{\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{2}\right\}$は公比3の等比数列より

$$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{2}=3^{n-1}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{2}\right)=\frac{3^{n-1}}{2}$$

a_nについて解くと

$$a_n=\frac{2}{3^{n-1}+1}$$

例2　数列$\{a_n\}$は$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n+5}{a_n-1}$で定義されるとする。この数列の一般項$a_n$を$n$で表せ。

【解】与漸化式から

$$a_{n+1}+1=\frac{3a_n+5}{a_n-1}+1=\frac{4(a_n+1)}{a_n-1}\quad\cdots\cdots①$$

また　$$a_{n+1}-5=\frac{3a_n+5}{a_n-1}-5=\frac{-2(a_n-5)}{a_n-1}\quad\cdots\cdots②$$

と表せるから①÷②より

$$\frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-5}=-2\cdot\frac{a_n+1}{a_n-5}$$

この関係を逐次利用して

$$\frac{a_n+1}{a_n-5}=(-2)^{n-1}\cdot\frac{a_1+1}{a_1-5}=(-2)^{n-1}\cdot\frac{3+1}{3-5}=(-2)^n$$

分母を払って

$$a_n+1=(-2)^n(a_n-5)$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{5(-2)^n+1}{(-2)^n-1}\quad\text{または}\quad 5+\frac{6}{(-2)^n-1}$$

分数の漸化式 1

$$a_{n+1}=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}\quad(ps-qr\neq 0)\cdots①$$ によって定義される

数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めたい。

a_n は n の関数で、これが未知関数である。この方程式が定数の特殊解を持ったとし、それを x とおくと $a_{n+1}=a_n=x$.

これを①に代入して

$$x=\frac{px+q}{rx+s},\quad \therefore rx^2-(p-s)x-q=0\cdots②$$

②の方程式が異なる2解を持つときと重解を持つときとで、分けて調べる。

(i) 異なる2解 α,β を持つとき。

$$\alpha=\frac{p\alpha+q}{r\alpha+s},\quad \beta=\frac{p\beta+q}{r\beta+s}$$ を用いて

$$a_{n+1}-\alpha=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}-\frac{p\alpha+q}{r\alpha+s},$$

$$\therefore a_{n+1}-\alpha=\frac{(ps-qr)(a_n-\alpha)}{(r\alpha+s)(ra_n+s)}.$$ 同様にして

$$a_{n+1}-\beta=\frac{(ps-qr)(a_n-\beta)}{(r\beta+s)(ra_n+s)}.$$

以上の2式から

$$\frac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=\frac{r\beta+s}{r\alpha+s}\cdot\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}.$$

$$\frac{r\beta+s}{r\alpha+s}=k,\quad \frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=b_n$$ とおくと $b_{n+1}=kb_n$.

よって数列 $\{b_n\}$ は公比 k の等比数列なので

$b_n=b_1k^{n-1}$.

この式から a_n が求められる。

(ii) 重解を持つとき　[ここは「分数の漸化式」のプリントの方が説明が丁寧である。]

重解を α とおくと $\alpha=\dfrac{p-s}{2r}$、しかも $(p-s)^2+4qr=0$.

$p+s=2rk$ とおくと $p=r(k+\alpha)$, $s=r(k-\alpha)$, また

$$q=-\frac{(p-s)^2}{4r}=-r\alpha^2.$$

これらの式を①に代入すると

$$a_{n+1}=\frac{(k+\alpha)a_n-\alpha^2}{a_n+(k-\alpha)}$$ となり $$a_{n+1}-\alpha=\frac{k(a_n-\alpha)}{k+(a_n-\alpha)}.$$

逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}-\alpha}=\frac{1}{a_n-\alpha}+\frac{1}{k}.\quad \frac{1}{a_n-\alpha}=b_n$$ とおけば

$$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{k}\left(=\frac{2r}{p+s}\right).$$

よって数列 $\{b_n\}$ は公差 $\frac{1}{k}$ の等差数列であるから

$b_n=b_1+(n-1)\frac{1}{k}$.　この式から a_n を求めればよい。

例1. 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3-a_n}$ で定義されるとき、一般項 a_n を n で表せ。

[解] 与漸化式において $a_{n+1}=0$ とおけば、$a_n=0$ で $a_n=a_{n-1}=\cdots=a_1=0$ となって $a_1=1$ に反する。よって $a_n\neq 0\ (n=1,2,\cdots)$ である。

そこで与漸化式の逆数をとれば

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3-a_n}{a_n}=\frac{3}{a_n}-1,\quad \therefore \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{2}=3\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{2}\right)$$

と書ける。$\left\{\frac{1}{a_n}-\frac{1}{2}\right\}$ は公比3の等比数列なので

$$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{2}=3^{n-1}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{2}\right)=\frac{3^{n-1}}{2}.$$

a_n について解くと $$a_n=\frac{2}{3^{n-1}+1}.$$

例2 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=3$, $a_{n+1}=\dfrac{3a_n+5}{a_n-1}$ で定義されるとき、一般項 a_n を n で表せ。

[解] 与漸化式から

$$a_{n+1}+1=\frac{3a_n+5}{a_n-1}+1=\frac{4(a_n+1)}{a_n-1}\cdots①$$

また $$a_{n+1}-5=\frac{3a_n+5}{a_n-1}-5=\frac{-2(a_n-5)}{a_n-1}\cdots②$$

と表せるから、①÷②より

$$\frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-5}=-2\,\frac{a_n+1}{a_n-5}.$$ この関係を逐次利用して

$$\frac{a_n+1}{a_n-5}=(-2)^{n-1}\frac{a_1+1}{a_1-5}=(-2)^{n-1}\frac{3+1}{3-5}=(-2)^n.$$

分母を払って $a_n+1=(-2)^n(a_n-5)$,

$$\therefore a_n=\frac{5(-2)^n+1}{(-2)^n-1}$$ または $$5+\frac{6}{(-2)^n-1}.$$

連立2項間の漸化式

(1) 漸化式 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ が $x_{n+1}+\lambda y_{n+1}=\mu(x_n+\lambda y_n)$ と変形できるとき、

μ は行列 $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ の固有方程式 $\mu^2-(a+d)\mu+(ad-bc)=0$ の解であることを示せ。

(2) $a_1=1$, $b_1=3$, $a_{n+1}=3a_n+b_n$, $b_{n+1}=2a_n+4b_n$ で定められている数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある。数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

【解】(1) $x_{n+1}=ax_n+by_n$, $y_{n+1}=cx_n+dy_n$ を $x_{n+1}+\lambda y_{n+1}=\mu(x_n+\lambda y_n)$ に代入して

$$ax_n+by_n+\lambda(cx_n+dy_n)=\mu(x_n+\lambda y_n)$$

$$\therefore\ (a+\lambda c)x_n+(b+\lambda d)y_n=\mu x_n+\mu\lambda y_n$$

ここで、$a+\lambda c=\mu$ ①, $b+\lambda d=\mu\lambda$ ② を満たす λ, μ があれば、μ は

$$bc+d(\mu-a)=\mu(\mu-a)$$

$$\Longleftrightarrow\ \mu^2-(a+d)\mu+ad-bc=0 \text{ を満たす。}$$

よって、μ は行列 $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ の固有方程式の解である。

$c\neq 0$ かつ $\mu\neq d$ のとき

$$\lambda=\frac{\mu-a}{c}=\frac{b}{\mu-d}$$

$\therefore\ bc=(\mu-a)(\mu-d)$ (λを消去)

$c=0$ または $\mu=d$ のとき

$\begin{cases} c=0 \Rightarrow \mu=a \ (\because ①) \\ \mu=d \Rightarrow bc=0 \ (\because ②) \end{cases}$ より

$\mu^2-(a+d)\mu+(ad-bc)=0$

(2) (1)から $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有方程式 $x^2-7x+10=0$ より $x=2$, 5

よって、$a_{n+1}+b_{n+1}=5(a_n+b_n)$, $a_1+b_1=4$

$a_{n+1}-\frac{1}{2}b_{n+1}=2\left(a_n-\frac{1}{2}b_n\right)$, $a_1-\frac{1}{2}b_1=-\frac{1}{2}$

λの値の出し方は下の囲を見よ。

と変形できる。

よって、$\{a_n+b_n\}$ は、初項 4, 公比 5 の等比数列、

$\left\{a_n-\frac{1}{2}b_n\right\}$ は、初項 $-\frac{1}{2}$, 公比 2 の等比数列である。

ゆえに $a_n+b_n=4\cdot 5^{n-1}$, $a_n-\frac{1}{2}b_n=-\frac{1}{2}\cdot 2^{n-1}$

よって、 $a_n=\frac{4}{3}\cdot 5^{n-1}-\frac{1}{3}\cdot 2^{n-1}$, $b_n=\frac{8}{3}\cdot 5^{n-1}+\frac{1}{3}\cdot 2^{n-1}$

囲 $a+\lambda c=\mu$, $b+\lambda d=\mu\lambda$ を行列で表現すると

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ となり、これは行列 $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ の固有値が μ でその μ に対する固有ベクトルが $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ であることを示す。 転置行列

行列で表す

(1) **複素数** $f(z)=\alpha z \quad f: \mathbf{C}\to\mathbf{C}$

$z'=\alpha z$ で $\alpha=a+bi$, $z=x+yi$, $z'=x'+y'i$ とおくと

$$x'+y'i=(a+bi)(x+yi)=(ax-by)+(bx+ay)i$$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax-by \\ bx+ay \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\frac{1}{c^2+d^2}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}=\frac{1}{c^2+d^2}\begin{pmatrix} ac+bd & ad-bc \\ bc-ad & ac+bd \end{pmatrix}$$

より $\quad \dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}-\dfrac{ad-bc}{c^2+d^2}i$

(2) **分数1次変換**

$x'=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ で $x=\dfrac{u}{v}$ とおくと $\quad \dfrac{u'}{v'}=\dfrac{\dfrac{au}{v}+b}{\dfrac{cu}{v}+d}=\dfrac{au+bv}{cu+dv}$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $g(x)=\dfrac{px+q}{rx+s}$ のとき $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$ より

$$f(g(x))=\frac{(ap+br)x+(aq+bs)}{(cp+dr)x+(cq+ds)}$$

2項・3項間の漸化式の行列表現

(i) $a_{n+1}=pa_n+q \quad (p\neq 1)$

これは $\begin{cases} a_{n+1}=pa_n+qb_n \\ b_{n+1}=b_n \end{cases}$ ただし、$b_1=1$

と表現できるから $\quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ と表される。

または、$b_1=q$ とするともっと簡単に

$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ と表される。

(ii) $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$

これは $\begin{cases} a_{n+1}=pa_n+qb_n \\ b_{n+1}=a_n \end{cases}$

と表現できるから

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

連立2項間の漸化式1

(1) 漸化式 $\begin{cases} x_{n+1}=ax_n+by_n \\ y_{n+1}=cx_n+dy_n \end{cases}$ が $x_{n+1}+\lambda y_{n+1}=\mu(x_n+\lambda y_n)$ と変形できるとき、

μ は方程式 $x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0$

の解であることを示せ。

(2) $a_1=1$, $b_1=3$, $a_{n+1}=3a_n+b_n$, $b_{n+1}=2a_n+4b_n$ で定められている数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある。数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

指針 (2) $\{x_n+\lambda_i y_n\}$ が公比 μ_i の等比数列より $x_n+\lambda_i y_n=\mu_i^{\,n-1}(x_1+\mu_i y_1)\ (i=1,\ 2)$

これを x_n, y_n の連立方程式とみて、解く。

【解】(1) $x_{n+1}=ax_n+by_n$, $y_{n+1}=cx_n+dy_n$ を $x_{n+1}+\lambda y_{n+1}=\mu(x_n+\lambda y_n)$ に代入して

$$ax_n+by_n+\lambda(cx_n+dy_n)=\mu(x_n+\lambda y_n)$$

$$\therefore\quad (a+\lambda c)x_n+(b+\lambda d)y_n=\mu x_n+\mu\lambda y_n$$

ここで、$a+\lambda c=\mu$, $b+\lambda d=\mu\lambda$ を満たす λ, μ があれば、μ は

$$bc+d(\mu-a)=\mu(\mu-a)$$

$$\Longleftrightarrow\quad \mu^2-(a+d)\mu+ad-bc=0 \text{ を満たす。}$$

よって、μ は方程式 $x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0$ の解である。

(2) (1)から $x^2-7x+10=0$ より $x=2,\ 5$

よって $a_{n+1}+b_{n+1}=5(a_n+b_n)$, $a_1+b_1=4$

$$a_{n+1}-\frac{1}{2}b_{n+1}=2\left(a_n-\frac{1}{2}b_n\right),\quad a_1-\frac{1}{2}b_1=-\frac{1}{2}$$

と変形できる。

よって、$\{a_n+b_n\}$ は、初項4，公比5の等比数列、

$\left\{a_n-\frac{1}{2}b_n\right\}$ は、初項 $-\frac{1}{2}$，公比2の等比数列である。

ゆえに $a_n+b_n=4\cdot5^{n-1}$, $a_n-\frac{1}{2}b_n=-\frac{1}{2}\cdot2^{n-1}$

よって $a_n=\frac{4}{3}\cdot5^{n-1}-\frac{1}{3}\cdot2^{n-1}$, $b_n=\frac{8}{3}\cdot5^{n-1}+\frac{1}{3}\cdot2^{n-1}$

参考 $a+\lambda c=\mu$, $b+\lambda d=\mu\lambda$ を満たす λ, μ は $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ と表現できる。

μ は行列 $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ の固有値で、それに対する固有ベクトルが $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ となっている。

$a_{n+1}=p(n)a_n+q(n)$ の型

$p(1)p(2)\cdots p(n)=f(n)$ となるような $f(n)$ で上の漸化式の両辺を割ると

$$\frac{a_{n+1}}{f(n)}=\frac{a_n}{f(n-1)}+\frac{q(n)}{f(n)}$$

ここで、$\dfrac{a_n}{f(n-1)}=b_n$ とおくと　　$b_{n+1}=b_n+\dfrac{q(n)}{f(n)}$

$\therefore$　　$b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{q(k)}{f(k)}$　($n\geqq 2$ のとき)

そして、$a_n=b_nf(n-1)$ によって a_n の一般項が求められる。

例1　数列 $\{a_n\}$ は、$a_1=2$, $a_{n+1}=3a_n+2^{n-1}$ で定義されている。一般項 a_n を求めよ。

解答　与式の両辺を 3^n で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{3^n}=\dfrac{a_n}{3^{n-1}}+\dfrac{2^{n-1}}{3^n}$

そこで、$\dfrac{a_n}{3^{n-1}}=b_n$ とおけば　$b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

$$\therefore\quad b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^k=2+\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{2}{3}}=3-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\quad (n\geqq 2)$$

よって　$a_n=3^{n-1}b_n=3^n-2^{n-1}$ (これは $n=1$ のときも成り立つ)

答　$a_n=3^n-2^{n-1}$

注　実際には与式の両辺を 3^{n+1} で割った方が、扱い易い。

例2　数列 $\{a_n\}$ を $a_1=2$, $na_{n+1}-(n+1)a_n=1$ で定義するとき、一般項 a_n を求めよ。

解答　与えられた漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると

$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{1}{n(n+1)}$　ここで　$\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$　に注意すれば

$\dfrac{a_{n+1}+1}{n+1}=\dfrac{a_n+1}{n}$　と変形できる。

数列 $\left\{\dfrac{a_n+1}{n}\right\}$ は定数数列となり　$\dfrac{a_n+1}{n}=\dfrac{a_1+1}{1}=3$

$\therefore$　$a_n=3n-1$

注　階差数列の公式を用いて　$\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{a_1}{1}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$　として求めてもよい。

2つの数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$の一般項をそれぞれ$a_n=2^n$, $b_n=3n+2$ $(n=1,2,3,\cdots\cdots)$とする。$\{a_n\}$の項のうち$\{b_n\}$の項でもあるものを小さいものから順に並べて得られる数列$\{c_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots\cdots)$とする。

(1) $\{c_n\}$の初項から第5項までを書け。

(2) $\{c_n\}$は等比数列であることを証明せよ。

着眼 $\{2^n\}$の数列のうちで、3で割って2余るものを調べる

(1) $a_n=b_m$とすると、$2^n=3m+2\cdots$①

ところで、$2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \cdots$を3で割った余りは$2,1,2,1,2,\cdots$

であるから、①であるためには、n $(n\ge1)$が奇数でなければならない。

よって、$n=2k+1$ $(k\ge1)$ → 逆に奇数のとき①をみたす

このとき$c_k=2^{2k+1}$ $(k\ge1)$

(1) $k=1,2,3,4,5$のときだから、8, 32, 128, 512, 2048

(2) $c_k=2^{2k+1}$ $(k\ge1)$より$c_{k+1}=4c_k$だから$\{c_n\}$は等比数列である。

合同式(mod 3)と数学的帰納法にて証明

別 $\{a_n\}$の第m項が$\{b_n\}$の第n項であったとすると、

$2^m=3n+2$

この式に両辺に2を掛けると

$2^{m+1}=6n+4=3(2n+1)+1$

したがって2^{m+1}は$\{b_n\}$の項ではないから、$\{c_n\}$の項でもない。

さらに、両辺に2を掛けると

$2^{m+2}=12n+8=3(4n+2)+2$

したがって、2^{m+2}は$\{b_n\}$の項となるから、$\{c_n\}$の項でもある。

すなわち、数列$\{a_n\}$の項のうち2^mが$\{c_n\}$の項ならば、次に$\{c_n\}$の項となるのは、2^{m+2}である。ゆえに、数列$\{c_n\}$は初項8, 公比4の等比数列である。

3項間の漸化式2

漸化式 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}=0\ (n\geqq 3)$ ……① が与えられている。

$x^2+px+q=0$ が異なる2つの解 $\alpha,\ \beta$ をもつとき、

(1) 数列 $\{\alpha^{n-1}\},\ \{\beta^{n-1}\}$ は漸化式①を満たすことを示せ。

(2) A,B を定数として、第 n 項が $A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}$ の数列は①を満たすことを示せ。

(3) $a_1=A+B,\ a_2=A\alpha+B\beta$ を満たすように $A,\ B$ を決定すると、2つの数列 $\{a_n\}$ と $\{A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}\}$ は一致することを述べよ。

【解】(1) $a_n=\alpha^{n-1}$ とおくと

$$a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}=\alpha^{n-1}+p\alpha^{n-2}+q\alpha^{n-3}=\alpha^{n-3}(\alpha^2+p\alpha+q)$$

α は $x^2+px+q=0$ の解より $\alpha^2+p\alpha+q=0$ だから

$$a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}=0$$

同様にして、$\{\beta^{n-1}\}$ も①を満たす。

(2) $a_n=A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}$ とおくと

$$a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}=A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}+p(A\alpha^{n-2}+B\beta^{-n-2})+q(A\alpha^{n-3}+B\beta^{n-3})$$
$$=A\alpha^{n-3}(\alpha^2+p\alpha+q)+B\beta^{n-3}(\beta^2+p\beta+q)=0$$

(3) 与式から $A=\dfrac{a_2-a_1\beta}{\alpha-\beta},\ B=\dfrac{a_1\alpha-a_2}{\alpha-\beta}$ となり

2つの数列 $\{a_n\},\ \{A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}\}$ ……②

はともに漸化式①を満たし、第1項と第2項は一致する。

そして、漸化式①で $a_n=-pa_{n-1}-qa_{n-2}$ より第1項と第2項によって第3項以下が次々と一通りに決定する。したがって、第1項と第2項の一致した2つの数列②は完全に一致する。

さいころをn回振り，目の和が7で割り切れる確率

さいころを n 回続けて投げるとき、k 回目に出る目の数を X_k とし、

$$Y_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$$

とする。Y_n が 7 で割り切れる確率を p_n とする。

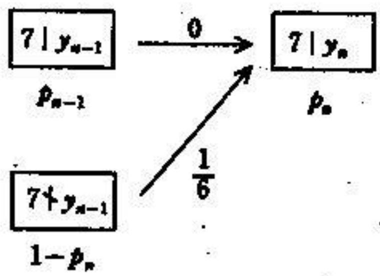
(1) p_n を p_{n-1} を用いて表せ。

(2) p_n を求めよ。

【解】(1) $Y_n=Y_{n-1}+X_n$，$X_n=1,\ 2,\ \cdots,\ 6$ だから、Y_{n-1} が 7 で割り切れるとき、X_n は何であっても Y_n は 7 で割り切れない。

Y_{n-1} が 7 で割り切れないとき、すなわち、Y_{n-1} が 7 で割って $r\,(r=1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$ 余るとき、Y_nが 7 で割り切れるような X_n は、さいころを振って、$7-r$ の目が出ればよい。

よって、Y_{n-1} を 7 で割った余りが 1 から 6 のどれであっても、確率 $\frac{1}{6}$ で Y_n は 7 で割り切れる。



$b\,|\,a$ … a が b で割り切れることを表す。

以上から　$p_n=p_{n-1}\cdot 0+(1-p_{n-1})\cdot\frac{1}{6}$

すなわち　$p_n=\frac{1}{6}(1-p_{n-1})$

(2) (1) より　$p_n-\frac{1}{7}=-\frac{1}{6}\left(p_{n-1}-\frac{1}{7}\right)$

数列 $\left\{p_n-\frac{1}{7}\right\}$ は初項 $p_1-\frac{1}{7}=-\frac{1}{7}$，公比 $-\frac{1}{6}$ の等比数列より

$p_n-\frac{1}{7}=-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$　　∴　$p_n=\frac{1}{7}\left\{1-\left(-\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right)\right\}$

注 $\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{7}$ これは、何回もさいころを振っていくと Y_n を 7 で割った余りが均等に 0 から 6 までのどれかになる~~の~~ことを意味している。これは自然な結果である。

格子点の数と漸化式

次の領域内にある格子点の個数 a_n $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を求めよ。

$x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ 3x+2y\leqq 6n$

(1) $a_{n+1}-a_n$ を n の式で表せ。

(2) a_n を求めよ。

指針 $x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ 6n<3x+2y\leqq 6(n+1)$ を満たす格子点の個数を調べる。

【解】(1) $x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ 6n<3x+2y\leqq 6(n+1)$

を満たす格子点の個数は、

$x=k$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n)$ のとき、

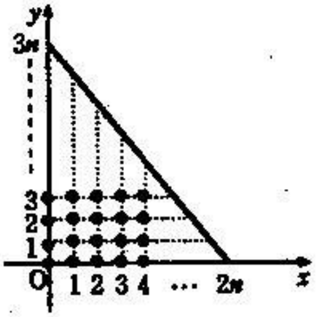
$3n-\dfrac{3}{2}k<y\leqq 3(n+1)-\dfrac{3}{2}k$ より y の幅は3で

あり、両端がともに格子点であることはないから

つねに3個ずつある。

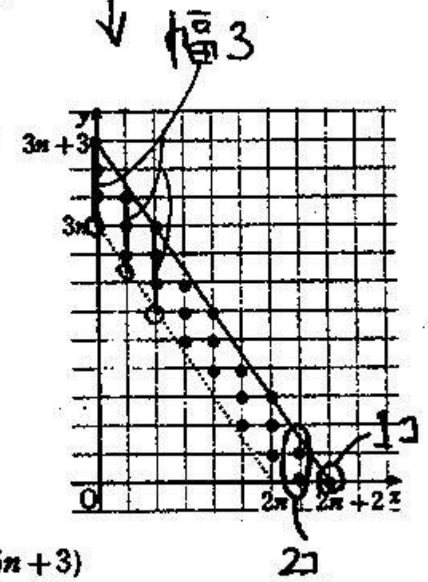
$x=2n+1$ のとき　2個；$x=2n+2$ のとき　1個

よって　　$a_{n+1}-a_n=3(2n+1)+3=6(n+1)$



(2) $a_0=1$ で、$a_{n+1}-a_n=6(n+1)$ より　$a_n=a_0+\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}6(k+1)=1+6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$

$=3n^2+3n+1$ ($n=0$ のときも成立)



参考 k を1以上の整数とし、直線 $x=k$ 上の格子点の個数を b_k とする。

$x=2k-1$ のとき

$y=0,\ 1,\ \cdots,\ 3n-3k+1$ で　$b_{2k-1}=3n-3k+2$

$x=2k$ のとき

$y=0,\ 1,\ \cdots,\ 3n-3k$ で　$b_{2k}=3n-3k+1$

直線 $x=0$ 上の格子点の個数は $3n+1$ であるから、

求める格子点の総数 a_n は

$$a_n=(3n+1)+\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=(3n+1)+\sum_{k=1}^{n}(-6k+6n+3)$$

$$=(3n+1)-6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+(6n+3)n=3n^2+3n+1$$

O$(0,\ 0)$, A$(2n,\ 0)$, B$(2n,\ 3n)$, C$(0,\ 3n)$ とすると、長方形OABCの周および内部にある格子点の数は $(2n+1)(3n+1)$ 個で、対角線AC上にある格子点の数は $n+1$ 個である。△OACと△BCAの周および内部にある格子点の個数は図形の対称性から等しい。よって、与不等式をみたす領域内にある格子点の個数 a_n は

$$a_n=\frac{1}{2}\{(2n+1)(3n+1)-(n+1)\}+(n+1)=3n^2+3n+1$$

東大

数列が10の倍数となるときのn

整数からなる数列$\{a_n\}$を漸化式 $\begin{cases} a_1=1,\ a_2=3 \\ a_{n+2}=3a_{n+1}-7a_n \end{cases}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$

によって定める。

(1) a_nが偶数となることと、nが3の倍数となることは同値であることを示せ。

(2) a_nが10の倍数となるための条件を(1)と同様な形式で求めよ。

【解】(1) 合同式はmod 2で考えると、$3\equiv1$，$-7\equiv1$より、

$a_1\equiv1$，$a_2\equiv1$で、漸化式は　$a_{n+2}\equiv a_{n+1}+a_n$

よって、逐次求めると、$a_3\equiv1+1\equiv0$，$a_4\equiv0+1\equiv1$，$a_5\equiv1+0\equiv1$，……

となり、2を法として$\{a_n\}$は1，1，0を繰り返す。

したがって、求めるnの条件は、nが3の倍数であることである。

(2) mod 5で考えると、$a_1\equiv1$，$a_2\equiv3$で、$-7\equiv3$より

$a_{n+2}\equiv3a_{n+1}-7a_n\equiv3(a_{n+1}+a_n)$ ……☆となる。よって 5を法として

$a_3\equiv3(3+1)\equiv12\equiv2$，$a_4\equiv3(2+3)\equiv15\equiv0$，$a_5\equiv3(0+2)\equiv1$，$a_6\equiv3(1+0)\equiv3$

より、$a_5\equiv a_1$，$a_6\equiv a_2$であるから☆より$\{a_n\}$は1，3，2，0の繰り返しとなる。

したがって、$a_n\equiv0$ (mod 5)となる条件は、nが4の倍数である。

一方、(1)より$a_n\equiv0$ (mod 2)となる条件は、nが3の倍数である。

ゆえに、a_nが10の倍数となる条件は、nが12の倍数であることである。

注 mod 2で　$a_{n+2}\equiv a_{n+1}+a_n$より

$$a_n\equiv a_{n+2}-a_{n+1}\equiv a_{n+2}-(a_{n+3}-a_{n+2})\equiv-a_{n+3}+2a_{n+2}\equiv a_{n+3}$$

$\therefore$　$a_n\equiv a_{n+3}$ (mod 2)　$\Longleftrightarrow$　$n\equiv0$ (mod 3)

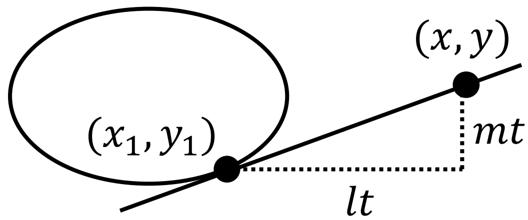
同様にして、mod 5で　$a_{n+2}\equiv3(a_{n+1}+a_n)$から

$a_{n+4}\equiv a_n$ (mod 5)　$\Longleftrightarrow$　$n\equiv4$ (mod 4)

2次曲線(の接線)

楕円の接線の方程式

楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上の点A(x_1,y_1)における接線の方程式は $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$ であることを証明せよ.



ここではパラメーター表示を用いた証明を紹介する.

$x=x_1+lt$, $y=y_1+mt$ …① とおき、

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ に代入

$b^2(x_1+lt)^2+a^2(y_1+mt)^2=a^2b^2$

$(b^2l^2+a^2m^2)t^2+2(b^2x_1l+a^2y_1m)t+b^2x_1^2+a^2y_1^2-a^2b^2=0$

これが $t=0$ を重解にもつから 判別式 $D=0$ である。

(※)の分母をはらうと $b^2x_1^2+a^2y_1^2-a^2b^2=0$ …② なので

$D/4=(b^2x_1l+a^2y_1m)^2=0$ …③

※

①より $x-x_1=lt$, $y-y_1=mt$

それぞれに x_1 , y_1 を掛けて

$x_1x-x_1^2=\boxed{x_1lt}$; $y_1y-y_1^2=\boxed{y_1mt}$ …①′

また、③×t より $b^2\boxed{x_1lt}+a^2\boxed{y_1mt}=0$

これに①′を代入して

$b^2(x_1x-x_1^2)+a^2(y_1y-y_1^2)=0$

ここから②を辺々引いて

$b^2x_1x+a^2y_1y-a^2b^2=0$

$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$

※ l,mを消去する際, tを分母に持ってこない工夫

2次曲線の点(x_1,y_1)における接線を得るには,
次の規則に従って2次曲線の方程式を置き換えれば良い.

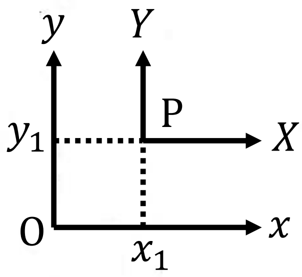
$$x^2\to x_1x,\quad y^2\to y_1y,\quad xy\to\frac{1}{2}(xy_1+x_1y),$$

$$x\to\frac{1}{2}(x+x_1),\quad y\to\frac{1}{2}(y+y_1),\quad c\to c.$$

参考「2次曲線の接線」

2次曲線の接線

二次曲線 $F(x,\ y)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ の上に1点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ がある。



(1) $ax_1+hy_1+g=hx_1+by_1+f=0$ ならば

$F(x,\ y)=0$ は、P を通る直線(2直線)を表すことを示せ。

(2) $F(x,\ y)=0$ が直線ではないとき、P におけるその接線は

$(ax_1+hy_1+g)x+(hx_1+by_1+f)y+gx_1+fy_1+c=0$

で与えられることを示せ。

> つまり2次曲線の接線を得るための，置き換えの規則は
> $x^2 \to x_1x,\quad y^2 \to y_1y,\quad xy \to \frac{1}{2}(xy_1+x_1y),\quad x \to \frac{1}{2}(x+x_1),\quad y \to \frac{1}{2}(y+y_1),\quad c \to c.$

【証明】(1) 座標軸の平行移動 $x=X+x_1,\ y=Y+y_1$ によって、$F(x,\ y)=0$ は

$F(X+x_1,\ Y+y_1)$

$=aX^2+2hXY+bY^2+2(ax_1+by_1+g)X+2(hx_1+by_1+f)Y+F(x_1,\ y_1)=0$ になる。

点 P は $F(x,\ y)=0$ 上にあるから $F(x_1,\ y_1)=0$ より

$ax_1+hy_1+g=hx_1+by_1+f=0$ ならば

$F(X+x_1,\ Y+y_1)=\underline{aX^2+2hXY+bY^2=0}$ となり、これは原点(P)を通る2直線を表す。

置き換え$X \to -X, Y \to -Y$に対して不変なので，グラフは原点対称．
$X, Y \geq 0$では$b \neq 0$のとき$Y=\frac{-h\pm\sqrt{h^2-a^2b^2}}{b^2}X$，$b=0$のとき$X=0, aX+2hY=0$

(2) $F(x,\ y)=0$ を x について微分すると

$2ax+2hy+2g+(2hx+2by+2f)y'=0$

より、点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$hx_1+by_1+f\neq 0$ のとき

$$y-y_1=-\frac{ax_1+hy_1+g}{hx_1+by_1+f}(x-x_1)$$

$(ax_1+hy_1+g)(x-x_1)+(hx_1+by_1+f)(y-y_1)=0$ ……①

$(ax_1+hy_1+g)x+(hx_1+by_1+f)y=ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+gx_1+fy_1$

$F(x_1,\ y_1)=0$ より右辺は $-gx_1-fy_1-c=0$ に等しい。

$\therefore\ (ax_1+hy_1+g)x+(hx_1+by_1+f)y+gx_1+fy_1+c=0$ ……②

$hx_1+by_1+f=0$ のとき

$\underbrace{F(x,\ y)=0\ \text{は直線とはならないから}}_{\text{仮定}}$ $\underbrace{ax_1+hy_1+\overset{g}{\cancel{f}}\neq 0}_{\text{(1)より}}$ で、接線は x 軸に垂直となり、

接線の方程式は $x=x_1$

$F(x,y)$をyで微分
$2(\underbrace{hx+by+f}_{=0})+2(\underbrace{ax+hy+g}_{\neq 0})x'=0$
$\therefore x'=0$

これは①において $hx_1+by_1+f=0$ とおいたものになっているから、結局、接線の方程式は②で表される。

注 接線の方程式②はまた、次のようにも表される。

$ax_1x+h(xy_1+x_1y)+by_1y+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$

$\mathrm{P}(x_1, y_1)$が原点に一致するように(x, y)を平行移動した像は
$(X, Y)=(x, y)-(x_1, y_1)$なので，$(x, y)=(X, Y)+(x_1, y_1)$

2次曲線の接線2

二次曲線 $F(x, y)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ の上に1点 $P(x_1, y_1)$ がある。

$F(x, y)=0$ が直線の方程式ではないとき、点Pにおけるその接線を求めてみる。

点Pの近くの $F(x, y)=0$ の点 $Q(x_2, y_2)$ とする。

$F(x_1, y_1)=0$, $F(x_2, y_2)=0$

差をとって変形すると

$$a(x_2+x_1)(x_2-x_1)+2h\{x_2(y_2-y_1)+y_1(x_2-x_1)\}+b(y_2+y_1)(y_2-y_1)$$
$$+2g(x_2-x_1)+2f(y_2-y_1)=0$$

ここで、x_2-x_1, y_2-y_1 の代わりに $x-x_1$, $y-y_1$ を代入すると

$$a(x_2+x_1)(x-x_1)+2h\{x_2(y-y_1)+y_1(x-x_1)\}+b(y_2+y_1)(y-y_1)$$
$$+2g(x-x_1)+2f(y-y_1)=0$$

これは2点P, Qを通る直線の方程式になっている。

接線は曲線上の近い2点を結ぶ直線の極限であるから、上の式で $x_1=x_2$ とおけばよい。その結果を2で割って

$$ax_1(x-x_1)+h(x_1y+y_1x-2x_1y_1)+by_1(y-y_1)+g(x-x_1)+f(y-y_1)=0$$

この式の両辺に

$$F(x_1, y_1)=ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$$

を加えて

$$ax_1x+h(x_1y+y_1x)+by_1y+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$$

これが求める接線の方程式である。

【別証】接線の方程式を t をパラメータとして　$x=x_1+lt$, $y=y_1+mt$　……①

で表すと、点 (x_1, y_1) には $t=0$ が対応するから、①が $F(x, y)=0$ に、点 (x_1, y_1) において接する条件は

$$a(x_1+lt)^2+2h(x_1+lt)(y_1+mt)+b(y_1+mt)^2+2g(x_1+lt)+2f(y_1+mt)+c=0$$

つまり

$$(al^2+2hlm+bm^2)t^2+2(ax_1l+hx_1m+hy_1l+by_1m+gl+fm)t+F(x_1, y_1)=0$$

が重解 $t=0$ をもつことである。よって

$$ax_1l+hx_1m+hy_1l+by_1m+gl+fm=0 \quad \cdots\cdots ② \qquad F(x_1, y_1)=0 \quad \cdots\cdots ③$$

①, ②, ③から l, m, t を消去すれば、求める接線の方程式となる。

①から　$lt=x-x_1$, $mt=y-y_1$　これを②× t に代入して

$$ax_1(x-x_1)+hx_1(y-y_1)+hy_1(x-x_1)+by_1(y-y_1)+g(x-x_1)+f(y-y_1)=0$$

③を用いて

$$ax_1x+h(x_1y+xy_1)+by_1y+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$$

接線上の点(x, y)はこの方程式を満たしている

→　これが接線の方程式である

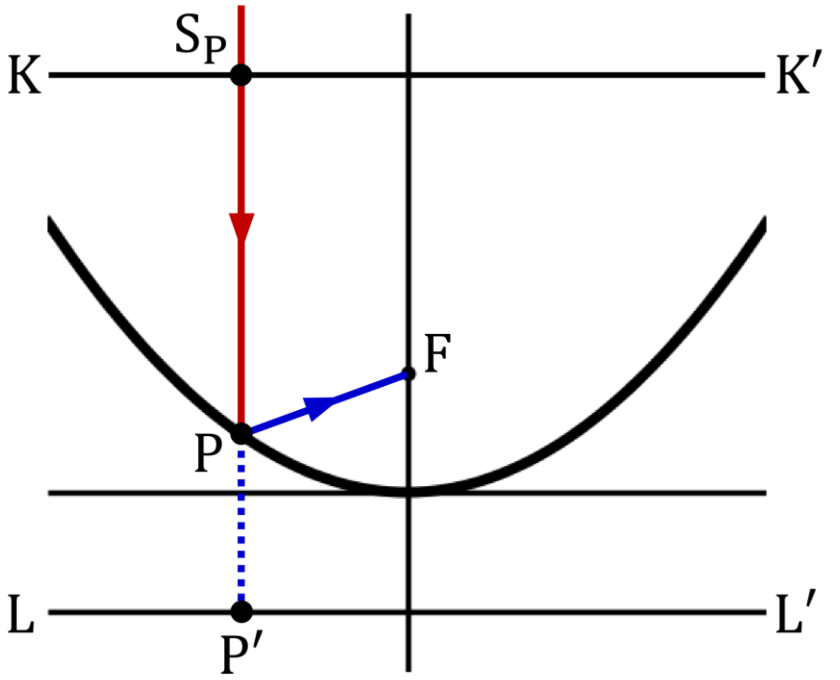
パラボラアンテナ

パラボラアンテナは回転放物面の形状を持つ反射盤で，静止衛星からの電波を焦点に集めて受信する．(パラボラは放物線を意味する．)

Fermatの原理によれば，空間の与えられた始点と終点を結ぶあらゆる経路のうち，光路長が最小となるものが実際の光線軌道を与える．このため衛星Sを発し，曲面上の点Pで反射して受信機Fに達する光線が，任意の点Pに対して可能であるためには，全ての光線に対して経路SPFの光路長が共通でなければならない．
ところで衛星は遠方にあるので，曲面に入射する光は平行光線と見なせる．そこで平行光線に垂直な平面KK′と光線の交点S_Pを，改めて光線の始点にとる．(SからKK′までの光路長は全ての平行光線に共通である．)またS_PPの延長線上に，$PF = P'F$を満たす点P′をとる．今，点Fを含み，入射光線と平行な平面内(下図)で考えると，

$S_P P + PF = S_P P'$がPによらない
→　Pに応じて定まる各点P′は，KK′に平行な線LL′を作る
→　光の反射点PはLL′を準線，Fを焦点とする放物線上にある．
よって平行光線を1点Fに集めるには，反射盤はFを焦点とする回転放物面でなければならない．(例えば『ファインマン物理学Ⅱ』1-4節を参照．)

なお，Fermatの原理から反射の法則を導くことができる．そこでパラボラアンテナの軸に平行に入射した光が全て焦点Fに集められることを，改めて反射の法則から証明するのは，高校数学の適度な演習問題となり得る．



極限

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \frac{5}{3}$ は直観的には，$x \to 0$ のとき $\sin 5x \fallingdotseq 5x$ であることから直ちに分かる

xと$\log x$の乗除の極限

x と $\log x$ とで組み合わされる次の極限を調べてみる。

$$\lim_{x\to+0} x\log x=\lim_{t\to\infty}\frac{-\log t}{t}=?,\quad \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x}=\lim_{t\to\infty}(-t\log t)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{x}{\log x}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{-t\log t}=0,\quad \lim_{x\to+0}\frac{1}{x\log x}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{-\log t}=?$$

ただし、すべて $t=\dfrac{1}{x}$ とおく。

以上から、$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\log t}$ かまたは $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}$ の極限が分かればよい。

ついでに $x\to\pm0$, $x\to+\infty$ のときの x と e^x の組み合わせの極限を調べてみる。

$$\lim_{x\to0} xe^x=0,\quad \lim_{x\to+0}\frac{e^x}{x}=\infty,\quad \lim_{x\to-0}\frac{e^x}{x}=-\infty,\quad \lim_{x\to0}\frac{x}{e^x}=0,\quad \lim_{x\to+0}\frac{1}{xe^x}=\infty$$

$$\lim_{x\to-0}\frac{1}{xe^x}=-\infty,\quad \lim_{x\to\infty} xe^x=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=?,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=?,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{xe^x}=0$$

したがって、$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}$ の極限を調べればよい。そこで、$e^x=t$ とおくと $\log t=x$ より

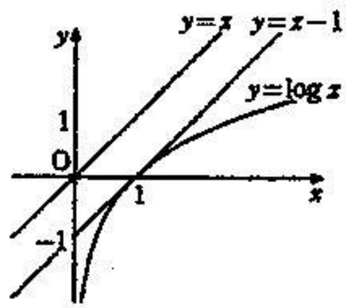
$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\log t}$ と置き換えられる。結局、$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\log t}$ が分かれば？は解決する。

$x>1$ のとき　$\log x<x-1$ が成り立つから　$\log x<x$

$x=\sqrt{t}$ とおくと　$\log\sqrt{t}<\sqrt{t}$　よって　$\dfrac{1}{2}\log t<\sqrt{t}$

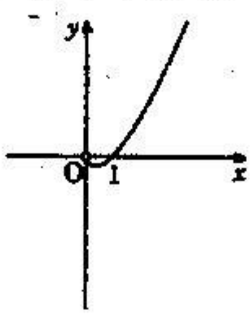
$$\therefore\quad \frac{t}{\log t}>\frac{\sqrt{t}}{2}$$

$t\to\infty$ のとき　$\dfrac{\sqrt{t}}{2}\to\infty$　より　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\log t}=\infty$

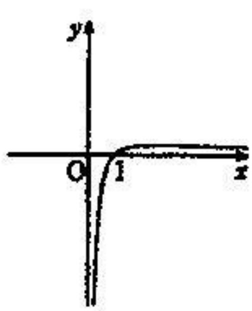


よって　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{x\log x}=-\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$

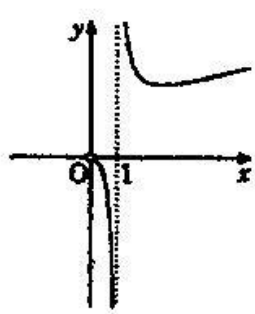
参考までにグラフを書くと



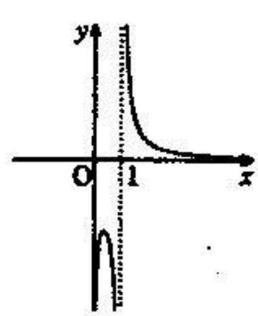
$y=x\log x$



$y=\dfrac{\log x}{x}$



$y=\dfrac{x}{\log x}$



$y=\dfrac{1}{x\log x}$

極限の種々の意味

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$

$g(a)\neq 0 \Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}$

(これが成り立つとき, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は $x=a$ で連続である.)

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \Rightarrow$ (与式) $=f'(a)$

(これが成り立つとき, $f(x)$ は $x=a$ で微分可能で, 微分係数, 接線の傾きを表す)

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x^2}=\alpha$

$f(x)\fallingdotseq g(x)+\alpha x^2$ で ($x\fallingdotseq 0$ のとき), $x=0$ の近傍における $f(x)$ の $g(x)$ による近似である.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} x\{f(x)-(ax+b)\}=c$

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ より $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} x\left\{\frac{f(x)}{x}-\left(a+\frac{b}{x}\right)\right\}=0$.

よって $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left\{\frac{f(x)}{x}-\left(a+\frac{b}{x}\right)\right\}=0$, $\therefore \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$,

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=b$.

直線 $y=ax+b$ は曲線 $y=f(x)$ の漸近線で, 近づき方がほぼ $\dfrac{c}{x}$ と同じであることを示す.

[註] 結論 $f(x)-(ax+b)\fallingdotseq\dfrac{c}{x}\to 0$ $(x\to\pm\infty)$ 自体は与式から直ちに読み取ることができ, 上記はそれを正当化する議論にあたる.

極限値を $f(a)$, $f'(a)$ で表せ

関数 $f(x)$ が $x=a$ において微分可能であるとき、
次の極限値を a, $f(a)$, $f'(a)$ を用いて表せ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(a)\}^2}{x-a}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\{af(x)\}^2-\{xf(a)\}^2}{x-a}$

(1) (与式)

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(f(x)+f(a))$$

$$=2f'(a)f(a)$$

(2) 1° 先ず因数分解

$$(与式)=\lim_{x\to a}(af(x)+xf(a))\frac{af(x)-xf(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}(af(x)+xf(a))\frac{a(f(x)-f(a))-(x-a)f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}(af(x)+xf(a))\left(a\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f(a)\right)$$

$$=2af(a)\{af'(a)-f(a)\}$$

2° 一気に!

$$(与式)=\lim_{x\to a}\frac{\{af(x)\}^2-\{af(a)\}^2-(x^2-a^2)\{f(a)\}^2}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\{af(x)\}^2-\{af(a)\}^2}{x-a}-(x+a)\{f(a)\}^2$$

$$=\underbrace{2a^2f(a)f'(a)}_{(\because (1))}-2a\{f(a)\}^2$$

$$=2af(a)\{af'(a)-f(a)\}$$

3° 分母を $F(x)$ とおく

$F(x)=\{af(x)\}^2-\{xf(a)\}^2$ とおくと

$$(与式)=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}\quad(\because F(a)=0)$$

$$=F'(a)$$

$$=a^2\,2f(a)f'(a)-2a\{f(a)\}^2$$

$$=2af(a)\{af'(a)-f(a)\}.$$

xtan2/x (x→0)

$\lim_{x \to 0} x\tan\frac{2}{x}$ を求めよ。

【解】 $x=\dfrac{2}{\dfrac{\pi}{4}+n\pi}$ $(n=1, 2, \cdots)$ のとき、$n \to \infty$ として x を 0 に近づけていくと

$\tan\frac{2}{x}=1$ より $x\tan\frac{2}{x}$ は 0 に収束する。

$\frac{2}{x}=n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}$ すなわち $x=\dfrac{2}{n\pi+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{n}}$ $(n=1, 2, \cdots)$ として

$x(n \to \infty)$ を 0 に近づけると

$$x\tan\frac{2}{x}=\frac{2}{n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{\tan\frac{1}{n}}=\frac{2n}{n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\tan\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{2}{\pi+\frac{\pi}{2n}-\frac{1}{n^2}}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\tan\frac{1}{n}}$$

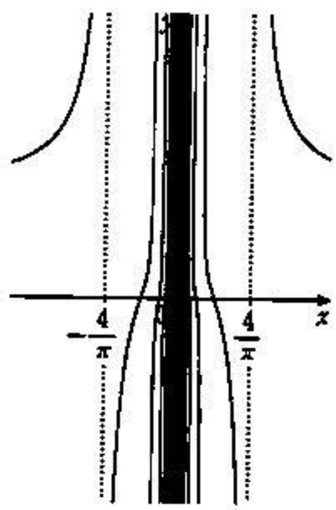
より $x\tan\frac{2}{x} \to \frac{2}{\pi}$ となる。

よって、$x\tan\frac{2}{x}$ は収束しない。

注 $\frac{2}{x}=n\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n^2}\right)$ $(n=1, 2, \cdots)$ とすると

$$x\tan\frac{2}{x} \to \infty$$

となる。



関数の連続性

関数の連続性に入る前に極限についての注意点を述べる。
$x \to a$ のときの極限を調べるとき，a は $f(x)$ の定義域 I に無くてもよいが，
a のいくらでも近くに I の点があるようでないと意味がない。
変数 x が限りなく a に近づくといっても，いろいろな近づき方がある。しかし，
どのような近づき方をしても限りなくある一定な値に近づくのが収束の場合である。

$x > a$ を保ちながら x が a に限りなく近づくことを $\lim_{x \to a+0} f(x) = \alpha$ （右側からの極限）

$x < a$ を保ちながら x が a に限りなく近づくことを $\lim_{x \to a-0} f(x) = \beta$ （左側からの極限）

と表す。
左右の極限値と単なる極限値の間には次の性質がある。

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \iff \lim_{x \to a+0} f(x) = \alpha = \lim_{x \to a-0} f(x)}$$

次に，$x \to a$ の近づき方で連続的にべったりと近づく場合と，a に収束する数列 $a_1, a_2, \cdots$
の上を伝わってぽんぽんと飛び飛びに近づく場合がある。
後者を数列の極限の言葉で言い表すと，

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \iff x_n \to a \ (\text{ただし，} x_n \neq a) \text{ なるどんな無限数列 } \{x_n\} \text{ に対しても } \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha}$$

なお，このことは α が $\pm\infty$ のときにも成り立つ。

では，関数の連続性の話に入る。
関数が連続である場合

1) 1点 $x = a$ での連続
2) ある区間 I での連続

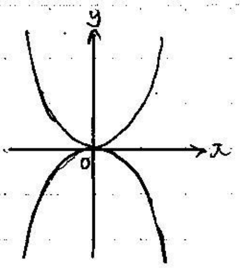
という2種類が考えられる。
1点での連続が分かれば，区間 I での連続の方は，この区間 I の各点で連続というふうに
考えればよい。ある区間で関数 $f(x)$ が連続であるということは，その区間で「グラフが1本のつながった
曲線になる」というふうに割に考えやすいけれども，1点で連続という方は難しい。

《定義》 関数 $f(x)$ が次の3条件を同時に満たすとき，関数 $f(x)$ は点 a で連続であるという。

1) 関数 $f(a)$ が存在する
2) 極限値 $\lim_{x \to a} f(x)$ が存在する。
3) この両者が一致する。$\left(\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\right)$

さらに，関数 $f(x)$ が区間 I の各点で連続であるとき，関数 $f(x)$ は区間 I で連続であるという。

1点で連続という感じをつかむために例をあげる。



$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x:\text{有理数}) \\ -x^2 & (x:\text{無理数}) \end{cases}$$ とする。

グラフを描こうと思っても描き得ないが、イメージとして大体右図のようなものが浮かんでこよう。

実は $f(x)$ は $x=0$ で連続で、それ以外では不連続である。

$x=0$ の所では $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ となり極限値が存在し、これが関数値 $f(0)=0$ と一致するから、上の定義より連続と言わざるを得ない。

これに対して、例えば $x=1$ では $f(1)=1^2=1$ であるが、

x が有理数で $x\to 1$ ならば $f(x)\to 1$

x が無理数で $x\to 1$ ならば $f(x)\to -1$

より、$\lim_{x\to 1} f(x)$ は存在しないことになり、不連続であることが分かる。

点0の近くでは関数値の変動が少ないのに対して、点1の近くでは関数値の変化が激しくなっているために、$x\to 1$ のときの $f(x)$ の近づく目標というものがなく $\lim_{x\to 1} f(x)$ が存在しない[と解釈できる]。

結局、関数が連続であるという概念は

「変数値の変化をごくわずかにすれば、関数値の変化もごくわずかにできる」

ということである。

問 $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{|x|}$ が存在しないことを示せ

[解] $x=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ $(n=1,2,\cdots)$ として0に近づけると

$\sin\frac{1}{|x|}=\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$ より1に収束する。

$x=\dfrac{1}{n\pi}$ $(n=1,2,\cdots)$ として0に近づけると、$\sin\frac{1}{|x|}=\sin n\pi=0$ より0に収束する。

したがって、$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{|x|}$ は存在しない。

微積分の応用

- 最小2乗法
- **シンプソンの公式**

など

最小2乗法

関数 $f(x)=x^2+x+\dfrac{2}{3}$ について、$\displaystyle\int_{-1}^{1}\{f(x)-(ax+b)\}^2dx$ が最小になるような定数 a，b の値を求めよ。またその最小値を求めよ。

【解】 $f(x)-(ax+b)=x^2+px+q$ ……①

とおかれ、このとき

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)-(ax+b)\}^2dx=\int_{-1}^{1}(x^2+px+q)^2dx$$

$$=2\int_{0}^{1}\{x^4+(p^2+2q)x^2+q^2\}dx=2\left[\frac{x^5}{5}+\frac{p^2+2q}{3}x^3+q^2x\right]_0^1$$

$$=2\left(\frac{1}{5}+\frac{p^2+2q}{3}+q^2\right)$$

$$=2\left\{\frac{1}{3}p^2+\left(q+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{45}\right\}$$

これは、$p=0$，$q=-\dfrac{1}{3}$ のとき　最小値 $\dfrac{8}{45}$

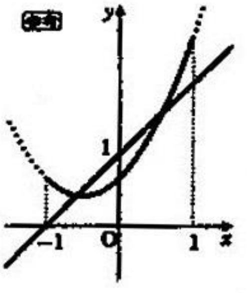
をとり、このとき ① より

$$ax+b=f(x)-(x^2+px+q)=\left(x^2+x+\frac{2}{3}\right)-\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$$

$$=x+1$$

だから　$a=1$，$b=1$

参考



注 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\{f(x)-(ax+b)\}^2dx=\cdots\cdots=\frac{2}{3}(a-1)^2+2(b-1)^2+\frac{8}{45}$

別解 $f(x)-(ax+b)=x^2+px+q$ ……① とおかれ、このとき

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)-(ax+b)\}^2dx=\int_{-1}^{1}(x^2+px+q)^2dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\{(x^2+q)^2+2px(x^2+q)+p^2x^2\}dx$$

$$=2\int_{0}^{1}\{(x^2+q)^2+p^2x^2\}dx\geqq 2\int_{0}^{1}(x^2+q)^2dx$$ （等号は $p=0$ のとき）

$$=2\int_{0}^{1}(x^4+2qx^2+q^2)dx=2\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}q+q^2\right)$$

$$=2\left(q+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{45}\geqq\frac{8}{45}$$ （等号は $q=-\dfrac{1}{3}$）

$p=0$，$q=-\dfrac{1}{3}$ のとき　最小値 $\dfrac{8}{45}$

をとり、このとき ① より

$$ax+b=f(x)-(x^2+px+q)=\left(x^2+x+\frac{2}{3}\right)-\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$$

$$=x+1$$

だから　$a=1$ ，$b=1$

$$\int_{-h}^{h}(n\text{次の整式})dx=2\int_{0}^{h}(\text{偶数次の整式})dx$$

任意のQ(x)に対し∫P(x)Q(x)dx=0を満たすP(x)

次の条件[1], [2]を同時に満たす x の3次の整式 $P(x)$ を求めよ。

[1]　任意の2次以下の整式 $Q(x)$ に対して　$\displaystyle\int_{-1}^{1}P(x)Q(x)dx=0$

[2]　$P(1)=1$

【解】$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$, $Q(x)=px^2+qx+r$ とおく。

$$\int_{-1}^{1}P(x)Q(x)dx=\int_{-1}^{1}P(x)(px^2+qx+r)dx$$
$$=p\int_{-1}^{1}x^2P(x)dx+q\int_{-1}^{1}xP(x)dx+r\int_{-1}^{1}P(x)dx$$
$$=2p\int_{0}^{1}(bx^4+dx^2)dx+2q\int_{0}^{1}(ax^4+cx^2)dx+2r\int_{0}^{1}(bx^2+d)dx$$
$$=2p\left[\frac{b}{5}x^5+\frac{d}{3}x^3\right]_0^1+2q\left[\frac{a}{5}x^5+\frac{c}{3}x^3\right]_0^1+2r\left[\frac{b}{3}x^3+dx\right]_0^1$$
$$=2\left\{p\left(\frac{b}{5}+\frac{d}{3}\right)+q\left(\frac{a}{5}+\frac{c}{3}\right)+r\left(\frac{b}{3}+d\right)\right\}$$

よって、[1]から

$$p\left(\frac{b}{5}+\frac{d}{3}\right)+q\left(\frac{a}{5}+\frac{c}{3}\right)+r\left(\frac{b}{3}+d\right)=0$$

が任意の p, q, r に対して成り立つ。

ゆえに　$\dfrac{b}{5}+\dfrac{d}{3}=0$, $\dfrac{a}{5}+\dfrac{c}{3}=0$, $\dfrac{b}{3}+d=0$

また、[2]から　$a+b+c+d=1$

これらを解いて　$a=\dfrac{5}{2}$, $b=0$, $c=-\dfrac{3}{2}$, $d=0$ (これは $a\neq 0$ を満たす)

よって　$P(x)=\dfrac{5}{2}x^3-\dfrac{3}{2}x$

a,b,cを実数とし，$a \neq 0$とする．
2次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ が次の条件(A),(B)を満たすものとする．

(A) $f(-1)=-1$，$f(1)=1$

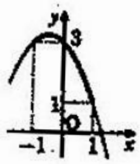
(B) $-1 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x に対し、$f(x) \leqq 3x^2-1$

このとき、積分 $I=\int_{-1}^{1}\{f'(x)\}^2dx$ のとりうる値の範囲を求めよ。

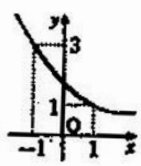
【解】(A)により $f(x)-x=0$ は ± 1 を解にもつから
$f(x)-x=a(x-1)(x+1)$
ゆえに　$f(x)=ax^2+x-a$
$g(x)=3x^2-1-f(x)$ とおくと　$g(x)=(3-a)x^2-x+a-1$　……①
$-1 \leqq x \leqq 1$ で常に $g(x) \geqq 0$ となる a の値の範囲を求める。

(i) $a=3$ のとき　$g(x)=-x+2$
これは、傾きが -1 の直線を表し、$g(1)=1>0$ であるから、適する。

(ii) $a>3$ のとき　①は上に凸の放物線を表し、
$g(-1)=3-a+1+a-1=3>0$
$g(1)=3-a-1+a-1=1>0$　であるから適する。

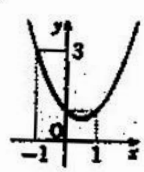


(iii) $a<3$ のとき　①は下に凸の放物線を表し、
$$g(x)=(3-a)\left\{x-\frac{1}{2(3-a)}\right\}^2-\frac{1}{4(3-a)}+a-1$$
$a<3$ であるから　軸：$x=\frac{1}{2(3-a)}>0$



(ア) $\frac{5}{2} \leqq a<3$ のとき　$\frac{1}{2(3-a)} \geqq 1$
このとき、$g(1)=1>0$ であるから適する。

(イ) $a<\frac{5}{2}$ のとき　$0<\frac{1}{2(3-a)}<1$　頂点の y 座標 $=-\frac{1}{4(3-a)}+a-1 \geqq 0$
から　$-1+4(3-a)(a-1) \geqq 0 \iff 4a^2-16a+13 \leqq 0$
∴　$\frac{4-\sqrt{3}}{2} \leqq a \leqq \frac{4+\sqrt{3}}{2}$
$a<\frac{5}{2}$ であるから　$\frac{4-\sqrt{3}}{2} \leqq a<\frac{5}{2}$

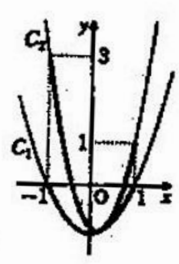


以上から、$-1 \leqq x \leqq 1$ で常に $g(x) \geqq 0$ となる a の値の範囲は　$a \geqq \frac{4-\sqrt{3}}{2}$

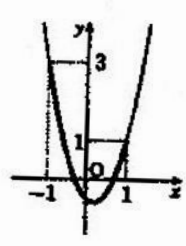
このとき　$I=\int_{-1}^{1}(2ax+1)^2dx=2\int_0^1(4a^2x^2+1)dx=2\left(\frac{4}{3}a^2+1\right)=\frac{8}{3}a^2+2$

よって　$I \geqq \frac{8}{3}\left(\frac{4-\sqrt{3}}{2}\right)^2+2=\frac{44-16\sqrt{3}}{3}$

注　(B)の条件を求める際、
$a(x^2-1) \leqq 3x^2-x-1\ (-1 \leqq x \leqq 1)$ で2つの放物線
$C_1: y=a(x^2-1)$，$C_2: y=3x^2-x-1$ の位置関係を考えると、
2曲線が接しているとき、接点の x 座標が $-1<x<1$ の範囲にある。このとき $a=\frac{4-\sqrt{3}}{2}$ で、a の値を変化させて、条件を求めればよい。

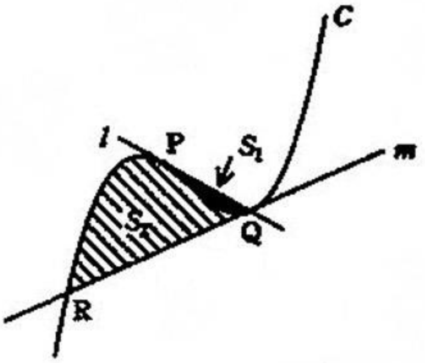


(B)の条件を否定すると、$-1 \leqq x \leqq 1$ を満たすある x に対して $g(x)<0$ である。
その条件は　$g(-1)=3>0$，$g(1)=1>0$　であるから
$$\begin{cases}\text{凹凸：}3-a>0\\ \text{判別式：}1-4(3-a)(a-1)>0\\ \text{軸：}-1<\frac{1}{2(3-a)}<1\end{cases} \iff a<\frac{4-\sqrt{3}}{2}$$
ゆえに　(B) $\iff$ $a \geqq \frac{4-\sqrt{3}}{2}$



3次曲線と面積

右図のような3次関数のグラフCとC上の点Pにおける接線lが点Qで再びCと交わり、さらに点Qにおける接線mが点Rで再びCと交わっている。このときCとlとで囲む面積をS_1，Cとmとで囲む面積をS_2とすると、比$S_1:S_2$は一定になることを示せ。



【証明】$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ のグラフ上の $x=\alpha$ で引いた接線が $x=\beta$ で再び交わるとき、$2\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ である。これは、数直線上で、α，β を $1:2$ に内分する点が変曲点の x 座標 $-\dfrac{b}{3a}$ であることを意味する。　……①

(理由)　接線を $y=mx+n$ として、$f(x)-(mx+n)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)$ と書けるから、

両辺の x^2 の係数を比べて　$b=-a(2\alpha+\beta)$　　$\therefore$　$2\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$

次に、3次曲線と接線とで囲まれた図形の面積Sは

$ax^3+bx^2+cx+d-(mx+n)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)$ より

$$S=\left|a\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(x-\beta)dx\right|=\left|a\int_0^\gamma x^2(x-\gamma)dx\right|=\left|a\left[\frac{x^3}{4}-\frac{x^3}{3}\right]_0^\gamma\right|$$

$$=\frac{|a|}{12}|\gamma|^4=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4\ (\gamma=\beta-\alpha\ とおく)\qquad ……②$$

変曲点のx座標 $-\frac{b}{3a}$,
$f(x)$のy切片 d だから

上の定理を使って、調べる。求める比の値は座標系の選び方に依存しないから、3次曲線 $y=f(x)$ の変曲点が原点にあるとき($b=0$，$d=0$)を調べれば十分である。

Pの x 座標を α とすると、①よりQの x 座標は -2α，Rについても同様に x 座標は 4α となる。したがって、②より

$$S_1=\frac{|a|}{12}(-2\alpha-\alpha)^4=\frac{27}{4}|a|\alpha^4,\quad S_2=\frac{|a|}{12}(-2\alpha-4\alpha)^4=108|a|\alpha^4$$

$\therefore$　$S_1:S_2=\dfrac{27}{4}|a|\alpha^4:108|a|\alpha^4=1:16$

したがって、$S_1:S_2$ の比は一定である。

注　3次関数は変曲点に関して対称だから、変曲点を原点にして $f(x)=ax^3+cx\ (a\neq 0)$ として上の2つの定理を証明してもよい。

関数の展開と極限1

$f(x)$ は0を含む区間で微分可能とする。

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-(ax+b)}{x}=0$　ならば　$a=f'(0)$, $b=f(0)$　であることを示せ。

【証明】　$x\to 0$ のとき　分母 $\to 0$, 分子 $\to f(0)-b$　だから、$f(0)-b=0$ でないとこの極限値は存在しない。

よって　$f(0)-b=0$　　∴　$b=f(0)$

このとき

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-(ax+b)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}-a\right)=f'(0)-a$$

題意より　$f'(0)-a=0$　　∴　$a=f'(0)$

まとめて　$a=f'(0)$, $b=f(0)$

参考　$f(x)$ が0を含む区間で2回微分可能とすると

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-(f'(0)x+f(0))}{x^2}=\frac{1}{2}f''(0)$　が成り立つ。

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=f''(x)$　が成り立つ。

特に、$x=0$ ならば

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+f(-h)-2f(0)}{h^2}=f''(0)$　になる。

［十分素直な関数は$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots$とMaclaurin展開される］

関数方程式についての等式の証明，微分係数

$f(x)$ を x の関数とし、すべての実数 x，y に対して等式 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ が成り立っているものとする。以下の問に答えよ。

(1) $f(0)=0$ であることを示せ。また、すべての実数 x に対して $f(-x)=-f(x)$ が成り立つことを示せ。

(2) すべての 0 でない整数 n に対して、$f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{f(1)}{n}$ であることを示せ。

(3) $f(x)$ の $x=0$ における微分係数 $f'(0)$ が定まるとき、$f'(0)=f(1)$ となることを示せ。

【解】(1) $f(x+y)=f(x)+f(y)$ ……①

①に $x=y=0$ を代入すると　$f(0)=f(0)+f(0)=2f(0)$

ゆえに　$f(0)=0$

①に $y=-x$ を代入すると　$f(0)=f(x)+f(-x)$

$f(0)=0$ であるから　$f(-x)=-f(x)$

(2) $n>0$ のとき

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\Bigl\{\underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots\cdots+f\left(\frac{1}{n}\right)}_{n\text{個}}\Bigr\}$$

$$=\frac{1}{n}f\Bigl(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}}_{n\text{個}}\Bigr)=\frac{f(1)}{n}$$

$n<0$ のとき

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{-n}\right)=-f\left(\frac{1}{-n}\right)=-\frac{f(1)}{-n}=\frac{f(1)}{n}$$

ゆえに　$f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{f(1)}{n}$

(3) $f'(0)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$

ここで、$h=\dfrac{1}{n}$ とおくと

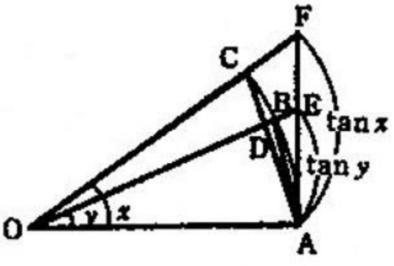
$$f'(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}f(1)=f(1)$$

ゆえに　$f'(0)=f(1)$

x-y,sinx-siny,tanx-tanyの大小

$0<y<x<\frac{\pi}{2}$ のとき、$x-y$，$\sin x-\sin y$，$\tan x-\tan y$ の大小を比べよ。

【解】半径1の円弧上に図のように点をとる。ただし、AEFはAにおける接線である。



$0<y<x<\frac{\pi}{2}$ のとき、与えられた3式を順に

$2u$，$2v$，$2w$ とおくと

$u=$扇形OAC－扇形OAB＝扇形OBC

$v=\triangle OAC-\triangle OAB<\triangle OAC-OAD=\triangle OCD$

$w=\triangle OAF-\triangle OAE=\triangle OEF$

図から明らかに　$\triangle OCD<$扇形OBC$<\triangle OEF$

ゆえに　$v<u<w$

すなわち　$\sin x-\sin y<x-y<\tan x-\tan y$

シンプソンの公式　プリント「シンプソンの公式利用」も参照

$f(x)$ を 2 次関数とする。次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{6}\left\{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right\}$$

【証1】 $f(x)=px^2+qx+r\ (p\neq 0)$ とする。

$$(\text{左辺})=\int_a^b (px^2+qx+r)dx=\left[\frac{p}{3}x^3+\frac{q}{2}x^2+rx\right]_a^b=\frac{p(b^3-a^3)}{3}+\frac{q(b^2-a^2)}{2}+r(b-a$$

$$(\text{右辺})=\frac{b-a}{6}\left\{pa^2+qa+r+4p\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+4q\left(\frac{a+b}{2}\right)+4r+pb^2+qb+r\right\}$$

$$=\frac{b-a}{6}\{2p(a^2+ab+b^2)+3q(a+b)+6r\}$$

$$=\frac{p(b^3-a^3)}{3}+\frac{q(b^2-a^2)}{2}+r(b-a)$$

よって、与えられた等式が成立する。

【証2】 $I=\int_a^b f(x)dx=\int_{-h}^{h} f\left(x+\frac{a+b}{2}\right)dx$　ただし、$b-a=2h$ とする。

$g(x)=f\left(x+\frac{a+b}{2}\right)=px^2+qx+r$ とおくと

$$I=2\int_0^h (px^2+r)dx=2\left[\frac{p}{3}x^3+rx\right]_0^h=\frac{2p}{3}h^3+2rh$$

$f(a)=g(-h)=ph^2-qh+r$，$f(b)=g(h)=ph^2+qh+r$ より

$f(a)+f(b)=2ph^2+2r$　また　$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=r$

よって

$$I=\frac{h}{3}(2ph^2+2r+4r)=\frac{b-a}{6}\left\{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right\}$$

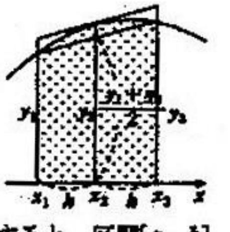
注　特に $\int_{-h}^{h} g(x)dx=\frac{h}{3}\{g(-h)+4g(0)+g(h)\}$ （$g(x)$ は 2 次関数）

証2は、$y=f(x)$ を x 軸方向に $-\frac{a+b}{2}$ だけ 平行移動し、積分区間 $a\leqq x\leqq b$ の幅 $b-a=2h$ とすると、上の公式の証明と同じとなる。

参考　打点部分の面積＝□＋　＝□＋$\frac{2}{3}$

$$=\frac{(y_1+y_3)\cdot 2h}{2}+\frac{2}{3}\left(y_2-\frac{y_1+y_3}{2}\right)\cdot 2h$$

$$=\frac{h}{3}(y_1+4y_2+y_3)$$



なお、この公式は $f(x)$ が 3 次関数まで成立する。これを一般化すると、区間$[a,b]$ を n 等分し、分割された区間では曲線 $y=f(x)$ を放物線とみなして上の公式を用い、近似的に $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$ の値を求め、それらの和を $\int_a^b f(x)dx$ の近似値とみなす、シンプソンの方法が見いだされる。

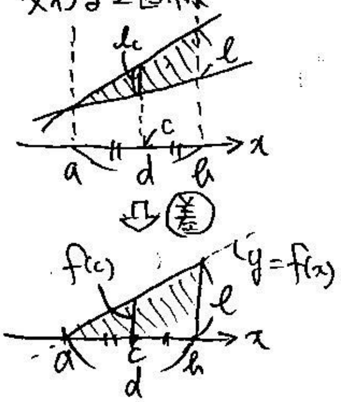
シンプソンの公式 利用

$f(x)$が3次以下の関数であれば、次の等式が成り立つ。

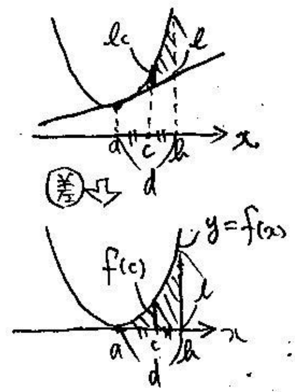
$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left\{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right\}$$

図のように 幅 $b-a=d$，$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(c)$，$f(b)=l$ とするとき、
図の斜線部分の面積 S を l と d を用いて表せ。

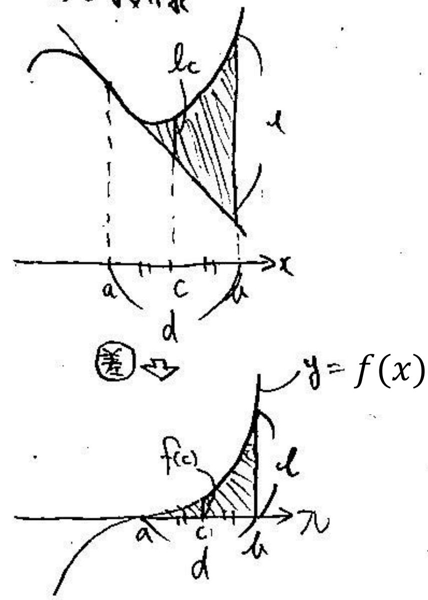
(1) 交わる2直線



(2) 放物線と接線



(3) 3次曲線とその変曲点における接線



シンプソンの公式から

$S=\frac{d}{6}\left(f(a)+4f(c)+f(b)\right)$ と表される。

(1) $f(c)=l_c=\frac{1}{2}l$ なので

$$S=\frac{d}{6}\left(0+4\times\frac{1}{2}l+l\right)=\frac{1}{2}ld$$

(2) $f(c)=l_c=\frac{1}{4}l$ なので

$$S=\frac{d}{6}\left(0+4\times\frac{1}{4}l+l\right)=\frac{1}{3}ld$$

(3) $f(c)=l_c=\frac{1}{8}l$ なので

$$S=\frac{d}{6}\left(0+4\times\frac{1}{8}l+l\right)=\frac{1}{4}ld$$

シンプソンの公式利用

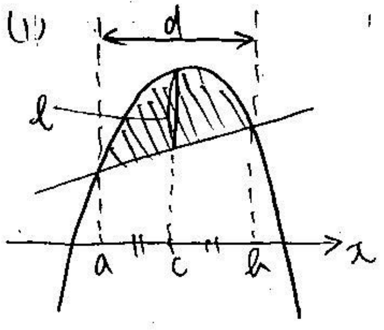
$f(x)$ が3次以下の関数であれば次の等式が成り立つ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left\{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right\}$$

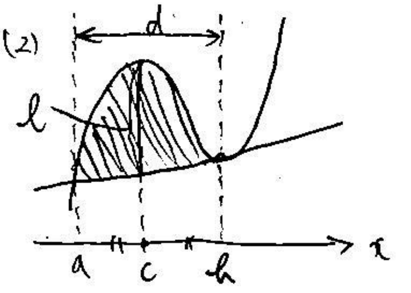
図のように幅 $b-a=d$，$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=l$ とするとき，

図の斜線部分の面積 S を l と d を用いて表せ。

(1)



(2)



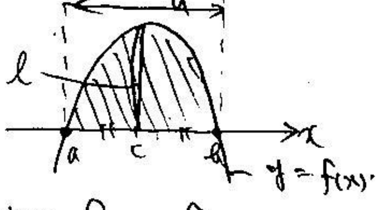
(1) 放物線のグラフを $y=g(x)$，

直線のグラフを $y=h(x)$ とし，

$f(x)=g(x)-h(x)$ とすると

$$S=\int_a^b \{g(x)-h(x)\}\,dx$$

$$=\int_a^b f(x)\,dx$$



さて，$f(a)=f(b)=0$ のときシンプソンの公式は

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$ と

かけるので，

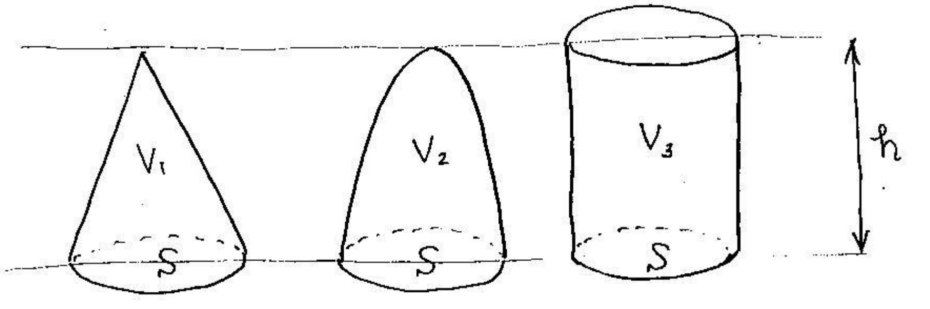
$$S=\frac{2}{3}ld$$

(2) (1)と同様に考えて

$$S=\frac{2}{3}ld$$

底面積がSで高さがhの円錐、回転放物面体、円柱の体積

V_1, V_2, V_3をそれぞれ求めよ。



それぞれの立体の、高さ$0, \frac{h}{2}, h$のところでの断面積をそれぞれ

$S(a), S(c), S(b)$とする。

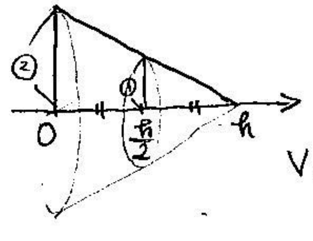
シンプソンの公式から3次以下の関数$f(x)$に対して

$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left\{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right\}$が成り立つので

一般に高さhのプリズム体の体積Vは

$$V=\frac{h}{6}\left(S(a)+4S(c)+S(b)\right)$$

(1)



$S(a)=S$

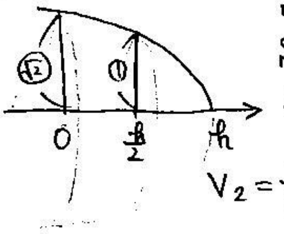
$S(b)=0$

$S(c)=\frac{1}{4}S$なので

$V_1=\frac{h}{6}\left(S+4\times\frac{1}{4}S+0\right)$

$=\frac{1}{3}Sh$

(2)



$S(a)=S$

$S(b)=0$

$S(c)=\frac{1}{2}S$なので

$V_2=\frac{h}{6}\left(S+4\times\frac{1}{2}S+0\right)$

$=\frac{1}{2}Sh$

(3) $S(a)=S(b)=S(c)=S$なので

$V_3=\frac{h}{6}\left(S+4\times S+S\right)$

$=Sh$

定積分を含む等式の証明2

関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=\alpha$ で極大、$x=\beta$ で極小となると仮定する。

(1) $f(\alpha)-f(\beta)=\dfrac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$ となることを示せ。

(2) $f(\alpha)+f(\beta)=\dfrac{2}{\beta-\alpha}\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ が成り立つことを示せ。

【解1】 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ から $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(x)$ は $x=\alpha$ で極大、$x=\beta$ で極小となるから、$f'(x)$ は $x=\alpha,\ \beta$ のそれぞれの前後で符号が変わり、$\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ は $f'(x)=0$ すなわち $3x^2+2ax+b=0$ の2つの解である。解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-\frac{2}{3}a,\quad \alpha\beta=\frac{b}{3}\qquad よって\qquad a=-\frac{3}{2}(\alpha+\beta),\quad b=3\alpha\beta$$

(1) $f(\alpha)-f(\beta)=(\alpha^3-\beta^3)+a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)$

$=(\alpha-\beta)\{(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+a(\alpha+\beta)+b\}=(\alpha-\beta)\left\{(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-\dfrac{3}{2}(\alpha+\beta)^2+3\alpha\beta\right\}$

$=(\alpha-\beta)\cdot\dfrac{1}{2}\{-(\alpha-\beta)^2\}=\dfrac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$

(2) $f(\alpha)+f(\beta)=(\alpha^3+\beta^3)+a(\alpha^2+\beta^2)+b(\alpha+\beta)+2c$

$=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+a\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+b(\alpha+\beta)+2c$

$=\left(-\dfrac{2}{3}a\right)^3-3\cdot\dfrac{b}{3}\left(-\dfrac{2}{3}a\right)+a\left\{\left(-\dfrac{2}{3}a\right)^2-2\cdot\dfrac{b}{3}\right\}+b\left(-\dfrac{2}{3}a\right)+2c$

$=\dfrac{4}{27}a^3-\dfrac{2}{3}ab+2c$

また $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta(x^3+ax^2+bx+c)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_\alpha^\beta$

$=\dfrac{\beta^4-\alpha^4}{4}+\dfrac{a}{3}(\beta^3-\alpha^3)+\dfrac{b}{2}(\beta^2-\alpha^2)+c(\beta-\alpha)$

$=\dfrac{\beta-\alpha}{12}\{3(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)+4a(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+6b(\alpha+\beta)+12c\}$

$\alpha^2+\beta^2=\dfrac{4}{9}a^2-\dfrac{2}{3}b$ であるから

$\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\frac{\beta-\alpha}{12}\left\{-2a\left(\frac{4}{9}a^2-\frac{2}{3}b\right)+4a\left(\frac{4}{9}a^2-\frac{2}{3}b+\frac{b}{3}\right)+6b\cdot\left(-\frac{2}{3}a\right)+12c\right\}$

$=\dfrac{\beta-\alpha}{12}\left(\dfrac{8}{9}a^3-4ab+12c\right)$

よって $\quad\dfrac{2}{\beta-\alpha}\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\frac{1}{6}\left(\frac{8}{9}a^3-4ab+12c\right)=\frac{4}{27}a^3-\frac{2}{3}ab+2c$

したがって $\quad f(\alpha)+f(\beta)=\dfrac{2}{\beta-\alpha}\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$

【解2】(1) α, β は $f'(x)=0$ の2つの解であるから

$$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$$

とおける。

$$f(\alpha)-f(\beta)=\int_\beta^\alpha f'(x)\,dx=3\int_\beta^\alpha (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\alpha-\beta)^3=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$$

(2) $f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)=3(x-\alpha)^2-3(\beta-\alpha)(x-\alpha)$ を積分して

$$f(x)=(x-\alpha)^3-\frac{3}{2}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2+C\ (C\text{は定数}) \quad \cdots\cdots ①$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\left[\frac{1}{4}(x-\alpha)^4-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^3+C(x-\alpha)\right]_\alpha^\beta$$

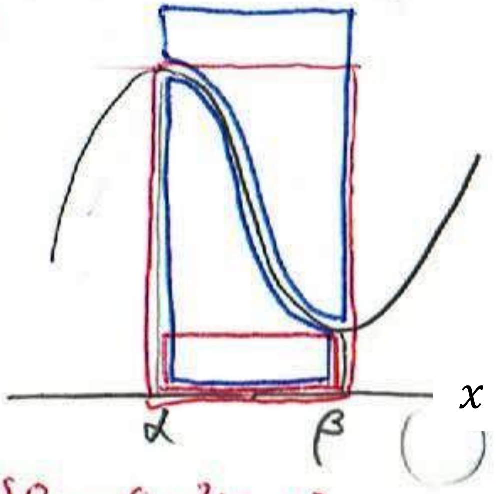
$$=-\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^4+C(\beta-\alpha)$$

$$\therefore\quad \frac{2}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3+2C \quad \cdots\cdots ②$$

①で $x=\alpha$, β を代入すると　$f(\alpha)=C$, $f(\beta)=-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3+C$

②とから　$f(\alpha)+f(\beta)=\dfrac{2}{\beta-\alpha}\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$

(2) 図形的な意味



$\{f(\alpha)+f(\beta)\}(\beta-\alpha)$

$=2\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$

$$\underbrace{\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{区間}(\alpha,\beta)\text{での平均}}=\underbrace{\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}}_{\text{両端の平均}}$$

注 $f(x)=\left(\frac{x}{3}+\frac{a}{9}\right)f'(x)+\left(\frac{2}{3}b-\frac{2}{9}a^2\right)x+c-\frac{ab}{9}$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ を利用して計算してもよい。

参考 $f(x)$ が3次式だから、シンプソンの公式が適用できて

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx=\frac{1}{6}(x_2-x_1)\left\{f(x_1)+4f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f(x_2)\right\}$$

が得られる。

また、3次関数 $y=f(x)$ は変曲点で対称であるから、$x_1=\alpha$ で極大、$x_2=\beta$ で極小を与える点の中点は変曲点より

$$\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

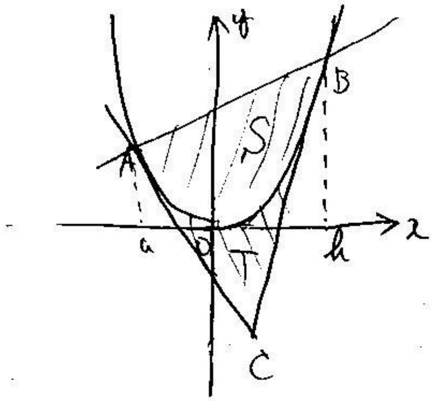
上の式に代入すると

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\{f(\alpha)+f(\beta)\}$$

となる。

放物線と直線、放物線と2接線で囲まれた面積比

放物線 $y=x^2$ 上の任意の2点A, Bにおける接線の交点をCとするとき、この放物線で分けられた△ABCの2つの部分の面積比は一定であることを示せ。



直線ABの方程式を $y=mx+n$ とすると、$y=x^2$ との交点A, Bの x 座標 $a, b\ (a<b)$ は $x^2=mx+n$ の2つの解であるから、

$x^2-(mx+n)=(x-a)(x-b)$　そこで、「放物線上方の部分の面積Sは」

$$\underline{S=\int_a^b (mx+n-x^2)\,dx=-\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx}=\frac{1}{6}(b-a)^3$$

次に、接線ACの方程式を $y=px+q$ とすると、$y=x^2$ と $x=a$ の点で接するから、$x^2=px+q$ は重解をもつ。よって

$x^2-(px+q)=(x-a)^2$

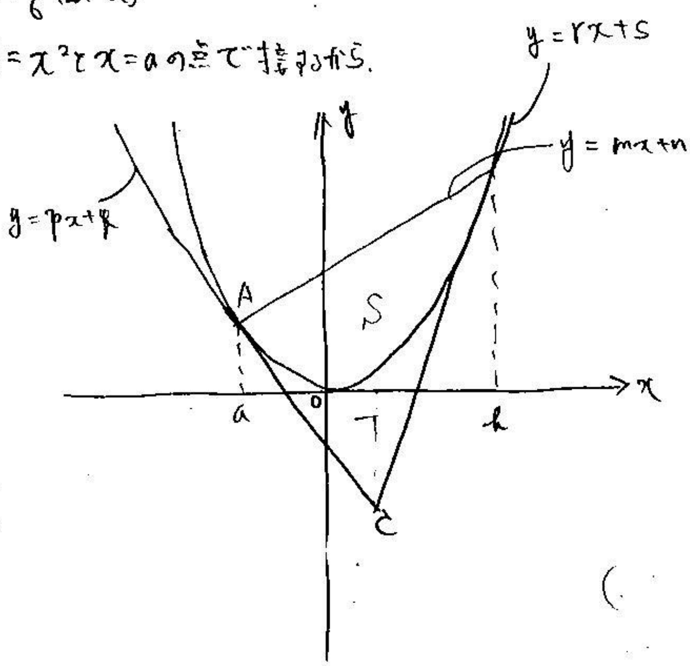
BCの方程式を $y=rx+s$ とすると同様に

$x^2-(rx+s)=(x-b)^2$

交点Cは $px+q=rx+s$ だから

$(x-a)^2=(x-b)^2$

$x=\dfrac{a+b}{2}$



よって $\underline{T=\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x^2-px-q)\,dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b (x^2-rx-s)\,dx}$

$\underline{=\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^2\,dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)^2\,dx}$

$=\left[\dfrac{(x-a)^3}{3}\right]_a^{\frac{a+b}{2}}+\left[\dfrac{(x-b)^3}{3}\right]_{\frac{a+b}{2}}^b$

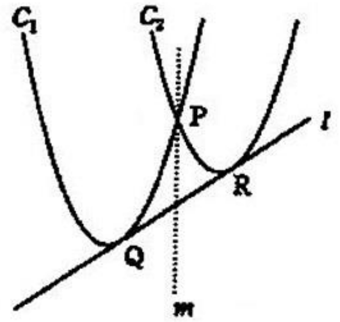
$=\dfrac{1}{24}(b-a)^3-\dfrac{1}{24}(a-b)^3=\dfrac{1}{12}(b-a)^3$

2放物線の共通接線，面積の2等分

2つの放物線 $C_1 : y=x^2+ax+b$ と $C_2 : y=x^2+cx+d$ がある。

C_1，C_2 の共通接線を l，C_1，C_2 の交点をPとする。

l と C_1，C_2 で囲まれた部分の面積は、点Pを通り y 軸に平行な直線 m によって2等分されることを証明せよ。



【証明】共通接線 l の方程式を $y=mx+n$ とする。

C_1 と l との接点の x 座標を $x=\alpha$ とすれば、

$(x^2+ax+b)-(mx+n)=0$ は $x=\alpha$ で重解をもつ。

∴ $\quad (x^2+ax+b)-(mx+n)=(x-\alpha)^2$

∴ $\quad x^2+ax+b=(x-\alpha)^2+(mx+n) \qquad \cdots\cdots ①$

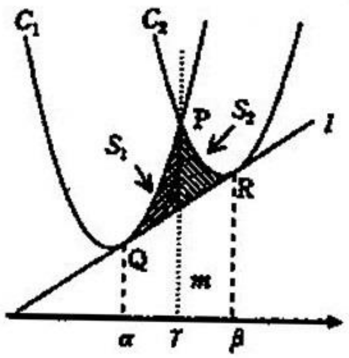
同様に、C_2 と l との接点の x 座標を $x=\beta$ とすれば

$x^2+cx+d=(x-\beta)^2+(mx+n) \qquad \cdots\cdots ②$

C_1 と C_2 の交点Pの x 座標を $x=\gamma$ とすると

①, ② を連立して

$$(x-\alpha)^2-(x-\beta)^2=0 \qquad \therefore \quad x=\frac{\alpha+\beta}{2}\ (=\gamma)$$



ゆえに、面積 S_1，S_2 は

$$S_1=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \{(x^2+ax+b)-(mx+n)\}dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (x-\alpha)^2dx=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{(\beta-\alpha)^3}{24}$$

$$S_2=\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \{(x^2+cx+d)-(mx+n)\}dx$$

$$=\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} (x-\beta)^2dx=\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}=\frac{(\beta-\alpha)^3}{24}$$

∴ $\quad S_1=S_2$

3次関数と2次関数が3点で交わり, 定積分の値が等しい。

$f(x)$ を3次の整式, $g(x)$ を2次の整式とする。曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ とが, x 座標がそれぞれ a, b, c である3つの点で交わり,

$\int_a^c f(x)dx=\int_a^c g(x)dx$ であるという。

a, b, c の間にどんな関係があるか。

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ は, $x=a, b, c$ で交わるから,

$f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$, $f(c)=g(c)$

a, b, c は異なるから, 3次方程式 $f(x)-g(x)=0$ の3つの解は a, b, c である。

よって $f(x)-g(x)=p(x-a)(x-b)(x-c)$ $(p\neq 0)$

$\int_a^c f(x)dx=\int_a^c g(x)dx \Longleftrightarrow \int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx=0$ に代入して

$I=\int_a^c (x-a)(x-b)(x-c)\,dx=0$ …①

$x-a$ でまとめれば, x に a を代入して消える。

$(x-a)\{(x-a)+(a-b)\}\{(x-a)+(a-c)\}$

$=(x-a)^3+(2a-b-c)(x-a)^2+(a-b)(a-c)(x-a)$

$\therefore I=\frac{1}{4}(c-a)^4+\frac{2a-b-c}{3}(c-a)^3+\frac{(a-b)(a-c)}{2}(c-a)^2$

$=\frac{1}{12}(c-a)^3(2b-a-c)$

$I=0$ で $c\neq a$ だから, $2b=a+c$

参考

$$\int_a^b (x-a)^m(x-b)^n\,dx=\frac{(-1)^n m!\,n!}{(m+m+1)!}(b-a)^{m+n+1}.$$

$a=0, b=1$ とおくと, ベータ積分 $B(m,n)\equiv\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$ とガンマ関数 $\Gamma(n)=(n-1)!$ の有名な関係

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

が得られる.

絶対値の定積分の最小 (基礎編)

$F(a)=\int_{-1}^{1}|x^2-a^2|dx$ を最小とする $a(\geqq 0)$ の値を求めよ。

【解】 $F(a)=\int_{-1}^{1}|x^2-a^2|dx=2\int_0^1|x^2-a^2|dx$

$a\geqq 1$ のとき

$$F(a)=2\int_0^1(a^2-x^2)dx=2\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=2\left(a^2-\frac{1}{3}\right)$$

$$F'(a)=4a$$

$0\leqq a\leqq 1$ のとき

$$F(a)=2\int_0^a(a^2-x^2)dx+2\int_a^1(x^2-a^2)dx$$

$$=2\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a+2\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_1^a=4\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)-2\left(a^2-\frac{1}{3}\right)$$

$$=2\left(\frac{4}{3}a^3-a^2+\frac{1}{3}\right)$$

$$F'(a)=4a(2a-1)$$

よって、$F(a)$ の増減は右の通り。

a	0		$\frac{1}{2}$		1	
$F'(a)$		$-$	0	$+$		$+$
$F(a)$		↘	極小	↗		↗

以上から、$F(a)$ を最小にする a の値は　$a=\frac{1}{2}$

参考　$-1\leqq x\leqq 1$ では $a\geqq 1$ の場合　$|x^2-a^2|\geqq|x^2-1|$ より

$\int_{-1}^{1}|x^2-a^2|dx\geqq\int_{-1}^{1}|x^2-1|dx$ であるから、$F(a)$ が最小となる a は $0\leqq a\leqq 1$ の範囲にある。

$$F(a)=2\int_0^a(a^2-x^2)dx+2\int_a^1(x^2-a^2)dx$$

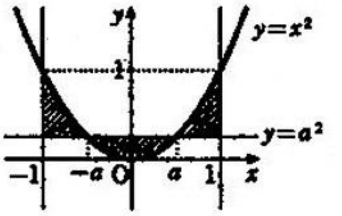
$$=2a^2\int_0^a dx-2\int_0^a x^2dx+2\int_a^1 x^2dx-2a^2\int_a^1 dx$$

を a で微分すると

$$F'(a)=4a\int_0^a dx+2a^2\cdot 1-2a^2-2a^2-4a\int_a^1 dx-2a^2\cdot(-1)$$

$$=4a\int_0^a dx-4a\int_a^1 dx=4a^2-4a(1-a)=8a^2-4a$$

注　$\int_0^a dx=\int_a^1 dx$ のとき、$F(a)$ は最小となる。

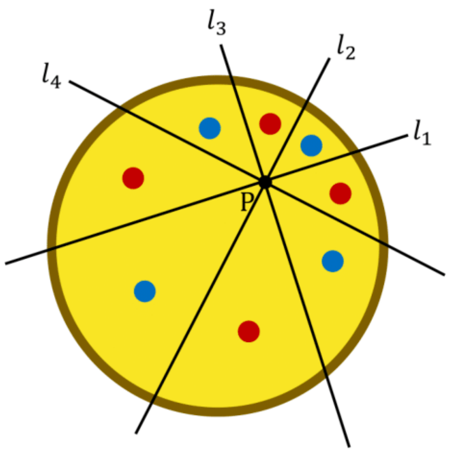


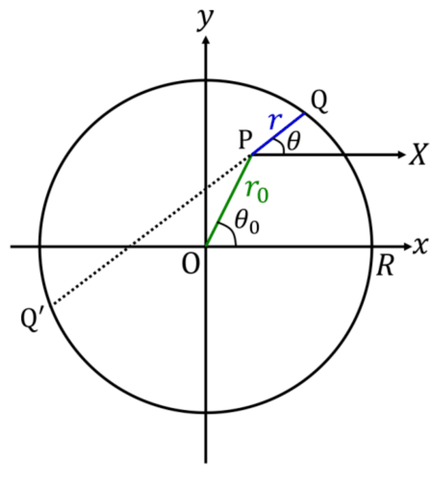
ピザの分割定理の直接的証明

必ずしも教育的ではないが，分割されたピザの面積の直接的な計算によるピザの分割定理の証明をノートとして残しておく．

ピザの分割定理とは

下図のように円形のピザの内部に任意の点 P をとり，点 P を通り互いに角度 $\pi/4$ をなす 4 直線 l_1, l_2, l_3, l_4 でピザを切り分ける．このときピザの隣り合う部分を 2 人で交互に選べば，2 人のピザの取り分は等しくなる．(つまり図で赤い印を付けた切れ端の面積の和と，青い印を付けた切れ端の面積の和は等しい．) 点 P が円の中心からずれていても良いというのが，この定理の面白みである．





証明

点 P が円の中心に一致するときは，点 P を通るある直線 l_i に関する図形の対称性から，定理は成り立つ．そこで，点 P が円の中心に一致しない場合を考える．

円の半径を $R(>0)$ とし，原点が円の中心に一致するように xy 直交座標系をとると，円の方程式は

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{1}$$

である．x 軸の向きはは 4 直線のうちの 1 つ l_i と平行になるように選ぼう．点 P は円 (1) の内部で，かつ $\mathrm{P} \neq \mathrm{O}$ だから，

$$0 < r_0 < R \tag{2}$$

を満たす実数 r_0 を用いて $\mathrm{P}(r_0\cos\theta_0, r_0\sin\theta_0)$ とおける．上図のように改めて点 P を極とし始線 PX が l_i と重なるような極座標 $\langle r, \theta \rangle$ を考え (ただし $\overrightarrow{\mathrm{PX}}$ は x 軸の正の向き)，円周上の点 Q に対

して

$$\mathrm{Q}(x, y) = \mathrm{Q}\langle r, \theta\rangle$$

とすると，

$$x = r_0 \cos\theta_0 + r\cos\theta,$$
$$y = r_0 \sin\theta_0 + r\sin\theta.$$

点 Q は円周上にあるので，これを式 (1) に代入して整理すると

$$r^2 + 2r_0 r\cos(\theta - \theta_0) + {r_0}^2 - R^2 = 0, \tag{3}$$
$$r = -r_0\cos(\theta - \theta_0) \pm \sqrt{R^2 - {r_0}^2 \sin^2(\theta - \theta_0)}.$$

2 解のうちの一方 $r < 0$ は，図に示すように点 P に関して Q と反対側の点 Q′ を表す*1．再び式 (3) より

$$\begin{aligned} r^2 &= -2r_0 r\cos(\theta - \theta_0) - ({r_0}^2 - R^2) \\ &= R^2 - {r_0}^2 + 2{r_0}^2\cos^2(\theta - \theta_0) - 2r_0\cos(\theta - \theta_0)\sqrt{R^2 - {r_0}^2\sin^2(\theta - \theta_0)}. \end{aligned} \tag{4}$$

この r^2 に対して各面積を

$$S_n = \frac{1}{2}\int_{\pi(n-1)/4}^{\pi n/4} r^2 \mathrm{d}\theta$$

とおき，(関連) 面積は面積速度 $h = \frac{1}{2}r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ の時間積分 $S = \int h\,\mathrm{d}t$

$$\sum_{k=1}^{4} S_{2k-1} = \sum_{k=1}^{4} S_{2k} \tag{5}$$

を示せばよい．上式 (4) の各項の積分は

$$\int_{\pi(n-1)/4}^{\pi n/4} (R^2 - {r_0}^2)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}(R^2 - {r_0}^2),$$
$$\int_{\pi(n-1)/4}^{\pi n/4} \cos^2(\theta - \theta_0)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{4}n - \theta_0\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}(n-1) - \theta_0\right)\right\},$$

および

$$\begin{aligned} &\int_{\pi(n-1)/4}^{\pi n/4} \cos(\theta - \theta_0)\sqrt{R^2 - {r_0}^2\sin^2(\theta - \theta_0)}\mathrm{d}\theta \\ =&\frac{R^2}{r_0}\int_{\arcsin\left\{\frac{r_0}{R}\sin\left(\frac{\pi}{4}(n-1) - \theta_0\right)\right\}}^{\arcsin\left\{\frac{r_0}{R}\sin\left(\frac{\pi}{4}n - \theta_0\right)\right\}} |\cos t|\cos t\mathrm{d}t, \qquad \sin t \equiv \frac{r_0}{R}\sin(\theta - \theta_0) \end{aligned} \tag{6}$$

---

*1 ここで $\cos(\theta - \theta_0) > 0$ となる θ に対しては $-r_0\cos(\theta - \theta_0) - \sqrt{R^2 - {r_0}^2\sin^2(\theta - \theta_0)} < 0$ となるから，これが 有向長 PQ′ であり，$r(> 0)$ はもう一方の解である．

である．ここで式 (2) より $-1<\sin t<1$ なので，$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ とすると $\frac{r_0}{R}\sin(\theta-\theta_0)$ に対しては t は一意的に定まり，かつ

$$\cos t>0 \tag{7}$$

であるから，

$$(\text{式 }(6))=\frac{R^2}{r_0}\left[\frac{t}{2}+\frac{2\sin t\cos t}{4}\right]_{\arcsin\left\{\frac{r_0}{R}\sin\left(\frac{\pi}{4}(n-1)-\theta_0\right)\right\}}^{\arcsin\left\{\frac{r_0}{R}\sin\left(\frac{\pi}{4}n-\theta_0\right)\right\}}$$

とできる．以上と式 (4) から

$$\begin{aligned}
S_n =&\frac{\pi}{4}R^2\\
&+\frac{{r_0}^2}{2}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{4}n-\theta_0\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}(n-1)-\theta_0\right)\right\}\\
&-R^2\left[\arcsin\left\{\frac{r_0}{R}\sin\left(\frac{\pi}{4}n-\theta_0\right)\right\}-\arcsin\left\{\frac{r_0}{R}\sin\left(\frac{\pi}{4}(n-1)-\theta_0\right)\right\}\right]\\
&-r_0R\left\{\sin\left(\frac{\pi}{4}n-\theta_0\right)\sqrt{1-\frac{{r_0}^2}{R^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}n-\theta_0\right)}\right.\\
&\quad\left.-\left(\frac{\pi}{4}(n-1)-\theta_0\right)\sqrt{1-\frac{{r_0}^2}{R^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}(n-1)-\theta_0\right)}\right\}
\end{aligned} \tag{8}$$

が得られる (式 (7) より $(\cos t)\big|_{t=\arcsin\left\{\frac{r_0}{R}\sin\left(\frac{\pi}{4}(n-1)-\theta_0\right)\right\},\arcsin\left\{\frac{r_0}{R}\sin\left(\frac{\pi}{4}n-\theta_0\right)\right\}}>0$ であることに注意した)．

$$\begin{aligned}
f_1(n)&=\frac{{r_0}^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}n-\theta_0\right),\\
f_2(n)&=-R^2\arcsin\left\{\frac{r_0}{R}\sin\left(\frac{\pi}{4}n-\theta_0\right)\right\},\\
f_3(n)&=-r_0R\sin\left(\frac{\pi}{4}n-\theta_0\right)\sqrt{1-\frac{{r_0}^2}{R^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}n-\theta_0\right)}
\end{aligned}$$

とおくと，$j=1,2,3$ に対して $f_j(1)=-f_j(5)$，$f_j(0)=-f_j(4)$，$f_j(3)=-f_j(7)$，$f_j(2)=-f_j(3)$ だから，式 (8) とより

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{4}S_{2k-1}&=\pi R^2\sum_{k=1}^{4}\sum_{j=1}^{3}\{f_j(2k-1)-f_j(2k-2)\}\\
&=\pi R^2\sum_{k=1}^{4}\sum_{j=1}^{3}\{f_j(2k)-f_j(2k-1)\}=\sum_{k=1}^{4}S_{2k}
\end{aligned}$$

となり，式 (5) が成り立つ．よって示された．

微積分・極限
発展編A

関数方程式と微分係数1

実数全体で定義された微分可能な関数 $f(x)$ が、次の2つの条件(A), (B)を満たしている。

(A) すべての x について、$f(x)>0$ である。

(B) すべての x, y について $f(x+y)=f(x)f(y)e^{-xy}$ が成り立つ。

(1) $f(0)=1$ を示せ。

(2) $g(x)=\log f(x)$ とする。このとき $g'(x)=f'(0)-x$ が成り立つことを示せ。

(3) $f'(0)=2$ となるような $f(x)$ を求めよ。

(A) $f(x)>0$ for $\forall x\in\mathbb{R}$

(B) $f(x+y)=f(x)f(y)e^{-xy}$

(1) (B)で $x=y=0$ を代入すると

$f(0)=f(0)f(0)e^0$

$f(0)=\{f(0)\}^2$

(A)より $f(0)>0$ だから、両辺 $f(0)$ で割って $f(0)=1$

(2) (A)より、(B)は両辺正だから、

$\log f(x+y)=\log f(x)+\log f(y)-xy$

$\log f(x)=g(x)$ とおくと、

$g(x+y)=g(x)+g(y)-xy$

x を任意に固定し、y で微分すると、

$g'(x+y)=g'(y)-y$

$y=0$ とすると、$g'(x)=g'(0)-x$

ここに、$g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ より $g'(0)=\dfrac{f'(0)}{f(0)}=f'(0)$

だから、$g'(x)=f'(0)-x$

(2)

別 $g(x+y)=g(x)+g(y)-xy$ ---①

$g(0)=\log 1=0$ ---②

①より $\dfrac{g(x+y)-g(x)}{y}=\dfrac{g(y)}{y}-x$

②とで $\dfrac{g(x+y)-g(x)}{y}=\dfrac{g(y)-g(0)}{y}-x$

$y\to 0$ とすると、$g'(x)=g'(0)-x$

(以下、同じ)

(3) $f'(0)=2$ より $g'(x)=2-x$

よって $g(x)=2x-\frac{1}{2}x^2+C$ (C は積分定数)

$g(0)=0$ より $C=0$ だから、$g(x)=2x-\frac{1}{2}x^2$

$f(x)=e^{2x-\frac{1}{2}x^2}$

参考 $f(x+y)=f(x)+f(y)$

$\Rightarrow f(x)=ax$

ただし $f(x)$ は微分可

$f(0+0)=f(0)+f(0)$ ∴ $f(0)=0$

$0=f(0)=f(x-x)=f(x)+f(-x)$

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}=f'(0)$

原点を通り、$f'(x)$ が一定

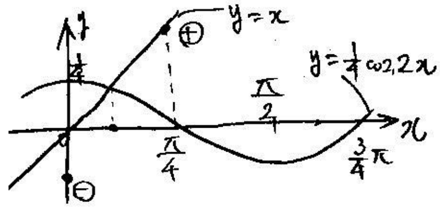
極限と平均値の定理（演習）

(1) xを実数とするとき、$x=\frac{1}{4}\cos 2x$はただ1つの解（これをαとする）をもつことを示せ。

(2) $x_0=0$, $x_n=\frac{1}{4}\cos 2x_{n-1}$ $(n=1,2,\cdots)$で表される数列$\{x_n\}$について、次のことを示せ。

(i) $|\alpha-x_n|\leqq\frac{1}{2}|\alpha-x_{n-1}|$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$



(1) $f(x)=x-\frac{1}{4}\cos 2x$とおくと、

$f'(x)=1+\frac{1}{2}\sin 2x\geqq 1-\frac{1}{2}>0$

よって$f(x)$は単調増加する。

$f(0)=-\frac{1}{4}<0$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}>0$だから、※

区間$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$にのみ、$f(x)=0$

すなわち　$\alpha=\frac{1}{4}\cos 2\alpha$となる$\alpha$がただ1つある。　※$x\to\infty$で$f(x)\to\infty$としてもよい。

(2) $\boxed{\begin{array}{l} x_0=0,\ x_n=\frac{1}{4}\cos 2x_{n-1}\ (n=1,2,\cdots) \\ \text{(i)}\ |\alpha-x_n|\leqq\frac{1}{2}|\alpha-x_{n-1}| \\ \text{(ii)}\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha\quad\text{を示せ。}\end{array}}$

(i) $\alpha=x_n$のときは明らかに成立。

$\alpha\neq x_n$のとき、平均値の定理を用いると、

▲$g(x)=\cos x$に対し、区間$(2\alpha, 2x_{n-1})$
または$(2x_{n-1}, 2\alpha)$で用いる.

$\cos 2\alpha-\cos 2x_{n-1}=(2\alpha-2x_{n-1})(\cos c)'$

すなわち

$\cos 2\alpha-\cos 2x_{n-1}=2(\alpha-x_{n-1})(-\sin c)$

なるcが2αと$2x_{n-1}$との間にある。

よって$|\alpha-x_n|=\left|\frac{1}{4}\cos 2\alpha-\frac{1}{4}\cos 2x_{n-1}\right|$（∵(1)より$\alpha=\frac{1}{4}\cos 2\alpha$, (2)の仮定の漸化式）

$=\frac{1}{2}|\alpha-x_{n-1}||\sin c|$

$|\sin c|\leqq 1$より　$|\alpha-x_n|\leqq\frac{1}{2}|\alpha-x_{n-1}|$

(ii) $|\alpha-x_n|\leqq\frac{1}{2}|\alpha-x_{n-1}|$を逐次用いて、

$|\alpha-x_n|\leqq\frac{1}{2}|\alpha-x_{n-1}|$

$\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^2|\alpha-x_{n-2}|$

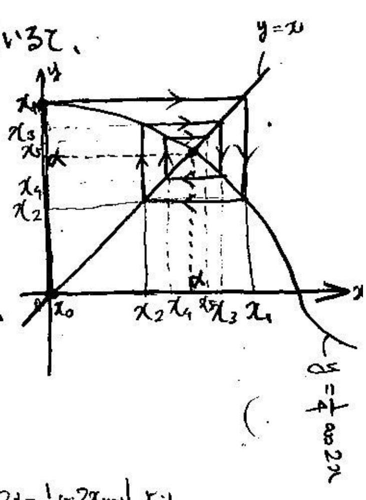
$\leqq\cdots\cdots$

$\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^n|\alpha-x_0|=\left(\frac{1}{2}\right)^n|\alpha|$

$n\to\infty$とすると、$\left(\frac{1}{2}\right)^n|\alpha|\to 0$だから、

$|\alpha-x_n|\to 0$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$



《方針を立てるまで》

(2) $|\alpha-x_n|=\left|\frac{1}{4}\cos 2\alpha-\frac{1}{4}\cos 2x_{n-1}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\cos 2x_{n-1}\right|$より

$\left|\frac{1}{2}\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\cos 2x_{n-1}\right|\leqq|\alpha-x_{n-1}|\iff\underline{|\cos 2\alpha-\cos 2x_{n-1}|\leqq|2\alpha-2x_{n-1}|}$を示せば良い.

平均値の定理の形

$f(x)=x\sin(\pi/x)$. x_nは$f'(x)=1$となるxの列．$f(x_n)$の極限

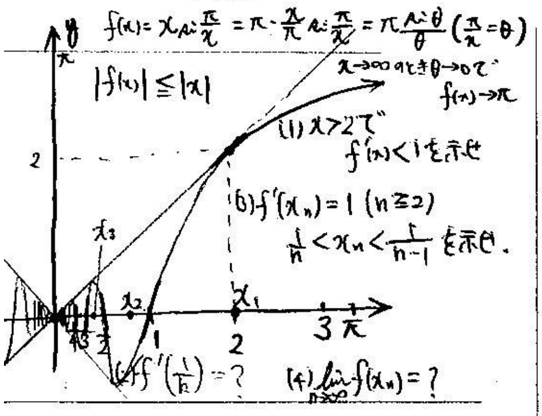
$x>0$において、関数$f(x)=x\sin\dfrac{\pi}{x}$を考える。

(1) $f'(2)$を求め、$x>2$のとき$f'(x)<1$であることを示せ。

(2) kが自然数のとき、$f'\left(\dfrac{1}{k}\right)$を求めよ。

(3) $f'(x)=1$となるxを値の大きいものから順に$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots$とおく。$n\geqq 2$である自然数に対して、$\dfrac{1}{n}<x_n<\dfrac{1}{n-1}$を示せ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(x_n)$を求めよ。



(1) $f(x)=x\sin\dfrac{\pi}{x}$より

$f'(x)=\sin\dfrac{\pi}{x}+x\cos\dfrac{\pi}{x}\left(-\dfrac{\pi}{x^2}\right)$

$=\sin\dfrac{\pi}{x}-\dfrac{\pi}{x}\cos\dfrac{\pi}{x}$

$\therefore f'(2)=\sin\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}=1$

$x>2$のとき $0<\dfrac{\pi}{x}<\dfrac{\pi}{2}$より

$\sin\dfrac{\pi}{x}<1$, $\dfrac{\pi}{x}\cos\dfrac{\pi}{x}>0$だから

$f'(x)<1$

(2) $f'\left(\dfrac{1}{k}\right)=\sin k\pi-k\pi\cos k\pi$

$=-k\pi(-1)^k$

$=(-1)^{k+1}k\pi$

※kが1だけ大きくなると、
$f'(1/k)$は符号が入れ換わり，絶対値が増す(上図の通り)

(3) $f''(x)=-\dfrac{\pi}{x^2}\cos\dfrac{\pi}{x}+\dfrac{\pi}{x^2}\cos\dfrac{\pi}{x}+\dfrac{\pi}{x}\sin\dfrac{\pi}{x}\left(-\dfrac{\pi}{x^2}\right)$

$=-\dfrac{\pi^2}{x^3}\sin\dfrac{\pi}{x}$ $x>1$のとき$\dfrac{\pi}{x}<\pi$より$f''(x)<0$

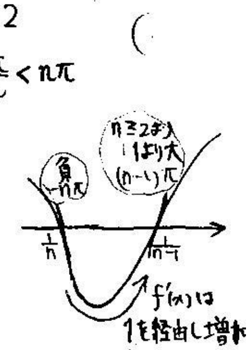
よって$x>1$で$f'(x)$は減少し、$f'(2)=1$より$x_1=2$

区間 $\dfrac{1}{n}<x<\dfrac{1}{n-1}$を考える。$(n-1)\pi<\dfrac{\pi}{x}<n\pi$

(i) nが偶数のとき、$f''(x)>0$より$f'(x)$は
この区間で単調に増加。

$f'\left(\dfrac{1}{n}\right)=-n\pi$, $f'\left(\dfrac{1}{n-1}\right)=(n-1)\pi$だから、

※$f'(\underset{c}{x_n})=1$となる$\underset{c}{x_n}$がただ1つ存在する。



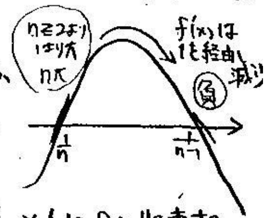
各区間(i),(ii)にはcは1個定まるから、$c=x_n$

(ii) nが奇数のとき、$f''(x)<0$より$f'(x)$は
この区間で単調に減少。

$f'\left(\dfrac{1}{n}\right)=n\pi$, $f'\left(\dfrac{1}{n-1}\right)=-(n-1)\pi$だから、

※$f(\underset{c}{x_n})=1$となる$\underset{c}{x_n}$がただ1つ存在する。

(i),(ii)より題意は示された。



(4) $\dfrac{1}{n}<x_n<\dfrac{1}{n-1}$より、$n\to\infty$のとき、$\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n-1}$ともに0に収束するから、$x_n\to0$

$|f(x_n)|=\left|x_n\sin\dfrac{\pi}{x_n}\right|\leqq|x_n|$

より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|f(x)|\leqq\lim_{n\to\infty}|x_n|=0$ $\therefore$(与式)$=0$

極小値をもつ条件（グラフが変化）

$x>0$で定義された関数 $f(x)=\frac{1}{x^2}+ax^n$（n：整数）が極小値をもつために、aとnが満たすべき条件を求めよ。

$f(x)=\frac{1}{x^2}+ax^n$（n整数, $x>0$）が極小値をもつには？

〈方針〉$f'(\alpha)=0$となり、$x=\alpha$の前後で$f(x)$が－から＋に変化するようなαが存在するための条件を考える。

〈解答〉

$f'(x)=-\frac{2}{x^3}+anx^{n-1}$

$=x^{-3}(anx^{n+2}-2)$

(i) $an\leqq 0$の場合

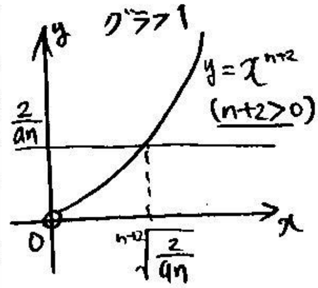
$f'(x)<0$より$f(x)$は単調減少するから不適

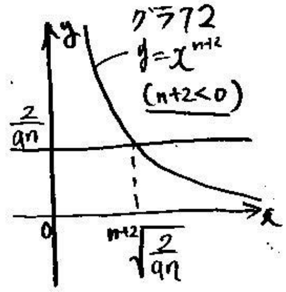
(ii) $an>0$の場合

$f'(x)=0$（$x>0$）を解くと、解をもつには、

$n+2\neq 0$で　$anx^{n+2}-2=0$より

$x^{n+2}=\frac{2}{an}$　　∴ $x=\sqrt[n+2]{\frac{2}{an}}$





$n+2>0$のとき グラフ1より $x=\alpha$の前後で$f'(x)$の符号が－から＋に変化するから極小値 $f\left(\sqrt[n+2]{\frac{2}{an}}\right)$をもつ。

$n+2<0$のとき グラフ2より $x=\alpha$の前後で$f(x)$の符号が＋から－に変化するから、極大値 $f\left(\sqrt[n+2]{\frac{2}{an}}\right)$をもつ。

以上より、題意をみたす条件は、

$an>0$ かつ $n+2>0$

注 $a<0$のとき $n=-1$,
$a>0$のとき $n=1, 2, 3, \cdots$ としても良い。

極小値の個数

aは実数とする。関数 $f(x)=2x^2\log x-x^2-ax(x-2)$ の $x>1$ における極小値の個数を求めよ。

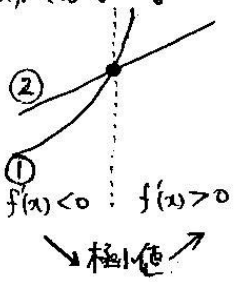
$f(x)=2x^2\log x-x^2-ax(x-2)\quad (x>1)$

$f'(x)=4x\log x+2x-2x-a(x-2)+ax$

$\quad =4x\log x-2a(x-1)$

$\quad =2\{\underbrace{2x\log x}_{①}-\underbrace{a(x-1)}_{②}\}$

xが増加するとき、①,②の共有点で、①が②の下にあり、①と②の上下が入れ替わる点の個数を求めればよい。



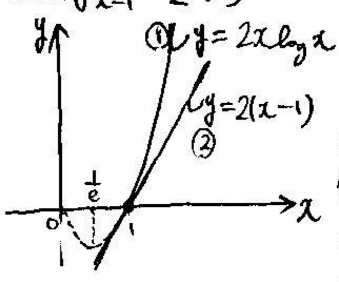
そこで $y=2x\log x$ のグラフを描くと、$x>1$ の範囲では

$y'=2(\log x+1)>0$, $y''=\frac{2}{x}>0$ より

下に凸で増加する。

$y=0$ を解いて $x=0, 1$

また、$y'_{x=1}=2$ より



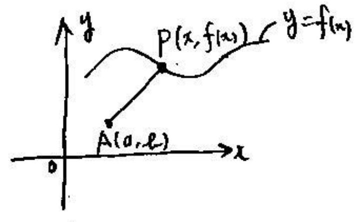
②は $a=2$ のとき点 $(1, 0)$ で①に接する。

①,②のグラフの位置関係から、

$a>2$ のとき 1個

$a\leqq 2$ のとき 0個

$\boxed{参考}$ 勾配関数



関数 $y=\frac{f(x)-b}{x-a}$ は左図の直線APの傾きを表している。

変曲点を持つ条件

関数 $y=\dfrac{3a}{4(x-1)}-\dfrac{1}{x^2}$ の表す曲線が $x>1$ の範囲に変曲点をもつという。定数 a の動きうる範囲を定めよ。

$y=\dfrac{3a}{4(x-1)}-\dfrac{1}{x^2}\ (x>1)$

$y'=-\dfrac{3a}{4}\cdot\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{x^3}$

$y''=\dfrac{3a}{2(x-1)^3}-\dfrac{6}{x^4}$

$=\underline{\dfrac{3}{2(x-1)^3}\left\{a-\dfrac{4(x-1)^3}{x^4}\right\}}$

変曲点となるのは $y''=0\ (x>1)$ の解の前後で y'' の符号が変化するものである。

そこで、$y=\dfrac{4(x-1)^3}{x^4}$ …① と

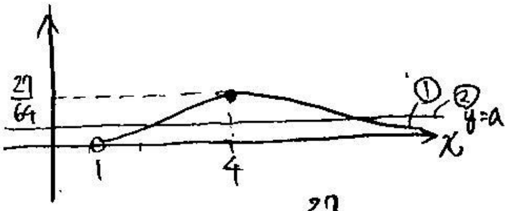
$y=a$ …② のグラフの位置関係を調べる。

①について、$y'=\dfrac{4(x-1)^3}{x^4}\left(\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{4}{x}\right)$

$=\dfrac{-4(x-1)^2(x-4)}{x^5}$

x	1	…	4	…	∞
y'	/	+	0	−	
y	/	↗	$\frac{27}{64}$	↘	0

よってグラフは下のようである。



グラフより $0<a<\dfrac{27}{64}$

分数式の極値問題（標準編+α）

関数 $y=\dfrac{bx+1}{x^2+ax}$ $(a>0,\ b>0)$ が２つの極値 $-1,-4$ をとるように、a, b を定め、この関数の増減を調べよ。

$y'=\dfrac{b(x^2+ax)-(bx+1)(2x+a)}{(x^2+ax)^2}=\dfrac{-(bx^2+2x+a)}{(x^2+ax)^2}$

y が $x=\alpha$ で極値 -1, $x=\beta$ で極値 -4 をもつとすると、α, β は $b(x^2+ax)-(bx+1)(2x+a)=0$ の2解。

ここで一般に、分数関数 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ について、

$y'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ であり、y が $x=\alpha$ で極値 $\dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$ をもつとき、$f'(\alpha)g(\alpha)-f(\alpha)g'(\alpha)=0$ より $\dfrac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}=\dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$ だから

$(極値)=\dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=\dfrac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$ が成り立つから、

$\dfrac{b\alpha+1}{\alpha^2+a\alpha}=\boxed{\dfrac{b}{2\alpha+a}}=-1$

分子分母 α 倍

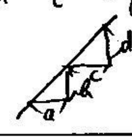
$\therefore \underbrace{\dfrac{b\alpha+1}{\alpha^2+a\alpha}=\boxed{\dfrac{b\alpha}{2\alpha^2+a\alpha}}=-1}_{}$

減比の理を用いて

$\dfrac{-1}{\alpha^2}=1$

加比の理・減比の理（かひのり・げんぴのり）

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}\Rightarrow\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}=\dfrac{b\pm d}{a\pm c}$



イメージは左図

$a>0, b>0$ で $\dfrac{b}{2\alpha+a}=-1<0$ より $\alpha<0$ なので $\alpha=-1$

同様に $\dfrac{b\beta+1}{\beta^2+a\beta}=\dfrac{b}{2\beta+a}=\dfrac{-1}{\beta^2}=-4$ $\therefore \beta=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore \dfrac{b}{-2+a}=-1, \dfrac{b}{-1+a}=-4, \therefore a=\dfrac{2}{3}, b=\dfrac{4}{3}$

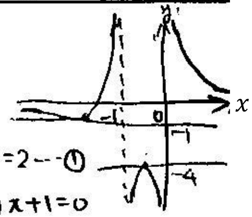
$y=\dfrac{4x+3}{3x^2+2x}$, $y'=-\dfrac{b(x+1)(2x+1)}{(3x^2+2x)^2}$ より

x		-1		$-\frac{2}{3}$		$-\frac{1}{2}$		0	
y'	$-$	0	$+$	／	$+$	0	$-$	／	$-$
y	↘	-1	↗	／	↗	-4	↘	／	↘

$x\leqq-1$, $-\frac{1}{2}\leqq x<0$, $x>0$ で減少，$-1\leqq x<-\frac{2}{3}$，$-\frac{2}{3}<x\leqq\frac{1}{2}$ で増加

別解

$y=\dfrac{bx+1}{x^2+ax}$ と $y=-1$ は接するから、



$x^2+(a+b)x+1=0$ が重解をもつ。

$D=(a+b)^2-4=0$ $a+b>0$ より $a+b=2$ ---①

同様に $\dfrac{bx+1}{x^2+ax}=-4 \Leftrightarrow 4x^2+(4a+b)x+1=0$

が重解をもつから $(4a+b)^2-4^2=0$ $4a+b=4$ ---②

参考 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ が $x=\alpha$ で極値 k をもつとき、

$\dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=\dfrac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}=k$ より $f(\alpha)-kg(\alpha)=0$, $f'(\alpha)-kg'(\alpha)=0$

これは $f(x)-kg(x)$ が重解をもつことを示している。

参考 $h(x)=bx^2+2x+a=0$ の2解が α,β

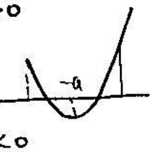
$\alpha+\beta=-\dfrac{2}{b}<0$, $\alpha\beta=\dfrac{a}{b}>0$

$\dfrac{D}{4}=1-ab>0$

$h(0)=a>0$

$h(-a)=a^2b-a=a(\underbrace{ab-1}_{負})<0$

$h(a)=a^2b+3a>0$



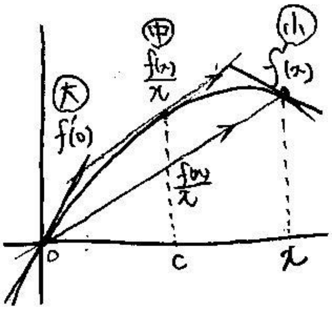
$f(x)+f(y)$は$f(x+y)$より大の証明

関数$f(x)$が条件：$f(0)=0$および$f''(x)<0$を満たしている。次のことを証明せよ。

(1) $x>0$のとき、$f'(0)>\dfrac{f(x)}{x}>f'(x)$が成立する。

(2) $x>0$のとき、$\dfrac{f(x)}{x}$は単調減少する。

(3) $x>0,\ y>0$のとき、$f(x)+f(y)>f(x+y)$である。



(1) $f(x)$において、区間$[0,x]$で平均値の定理を用いると、

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(c)$　すなわち$f(0)=0$より

$\dfrac{f(x)}{x}=f'(c)$，$0<c<x$

$f''(x)<0$より$f'(x)$は$x>0$で単調減少するから、$0<c<x$のとき

$f'(0)>f'(c)>f'(x)$

$\therefore\ f'(0)>\dfrac{f(x)}{x}>f'(x)$

(2) $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$

(1)より$x>0$のとき$\dfrac{f(x)}{x}>f'(x)$だから

$f'(x)x-f(x)<0$

よって$\dfrac{f(x)}{x}$は$x>0$で単調減少する。

(3) $x>0,\ y>0$のとき、(2)より

$0<x<x+y \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x}>\dfrac{f(x+y)}{x+y}$ …①

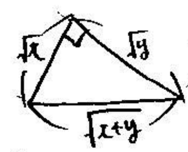
$0<y<x+y \Rightarrow \dfrac{f(y)}{y}>\dfrac{f(x+y)}{x+y}$ …②

①$\times x$＋②$\times y$より$f(x)+f(y)>f(x+y)$

$\boxed{参考}$ $f(x)=\sqrt{x}$はこの条件をみたし、

$\sqrt{x}+\sqrt{y}>\sqrt{x+y}$ $(x>0,\ y>0)$

これは左のような直角三角形の斜辺より残りの二辺の和が大となることを示している。



$f(x)=\sin(x)$について、

$\sin x+\sin y>\sin(x+y)$ $(0\leqq x\leqq\pi,\ 0\leqq y\leqq\pi)$

(

上に凸な性質から不等式を証明1

$0<x<1$ のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\log(1-x)}<1 \cdots ★$$

$0<x<1$ のとき $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\log(1+x)}<1$ ---★

1° $1-x=t$ とおく。$(0<t<1)$

★$\Leftrightarrow \dfrac{1}{1-t}+\dfrac{1}{\log t}<1$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\log t}<1-\dfrac{1}{1-t}=\dfrac{-t}{1-t}$

$(\because \log t<0)$

$\Leftrightarrow \log t>\dfrac{1-t}{-t}=1-\dfrac{1}{t}$

$\Leftrightarrow -\log u>1-u$ ($t=\dfrac{1}{u}$ とおく)

$\Leftrightarrow \log u<u-1$ $(1<u)$ ---✱

✱を示せばよい。

$f(u)=\log u-(u-1)$ $(1<u)$ とおくと、

$f'(u)=\dfrac{1}{u}-1<0$ ($\because 1<u$ より $\dfrac{1}{u}<1$)

よって $\log u<u-1$ となり✱は成り立つから

★も成り立つ。

2° ★$\Leftrightarrow x\log(1-x)-\log(1-x)-x<0$ $(0<x<1)$

(分母をはらった)

$f(x)=x\log(1-x)-\log(1-x)-x$ とおくと、

$f'(x)=\log(1-x)+x\dfrac{-1}{1-x}+\dfrac{1}{1-x}-1$

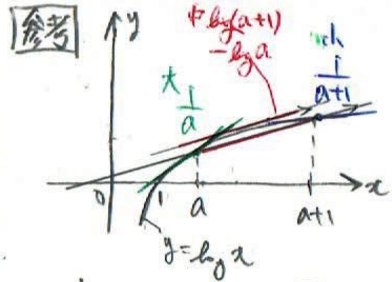
$=\log(1-x)<0$ ($\because 0<1-x<1$ より $\log(1-x)<0$)

$f(x)$ は $0<x<1$ で減少し、$f(0)=0$

とで、$f(x)<0$。

よって★は成立。

参考



左図からも分かるように、

$\dfrac{1}{a+1}<\log(a+1)-\log a<\dfrac{1}{a}$

$(a>0)$

$\dfrac{1}{a}=t$ とおくと、

$\dfrac{t}{t+1}<\log(1+t)<t$

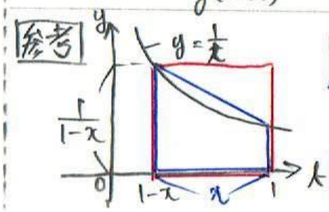
$\dfrac{t}{t+1}=x$ とおくと、

$x<\log\dfrac{1}{1-x}<\dfrac{x}{1-x}$

$-\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{\log(1-x)}<-\dfrac{1-x}{x}$

$0<\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\log(1+x)}<1$ となり、★が得られる

参考



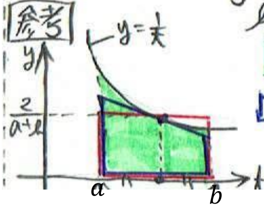
□ $=\displaystyle\int_{1-x}^{1}\frac{1}{t}dt=\Big[\log t\Big]_{1-x}^{1}$

$=\log 1-\log(1-x)=-\log(1-x)$

□ $=x\cdot\dfrac{1}{1-x}$

★$\Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x}>-\log(1-x)$ より★は □ < □ を示している。

参考



$\log b-\log a>\dfrac{2(b-a)}{b+a}$ (∗)が成り立つ。

□ $=\log b-\log a$

□ = □ $=\dfrac{1}{\frac{a+b}{2}}(b-a)=\dfrac{2(b-a)}{b+a}$ より

(∗)は □ > □ を示している。

$\cos x + \cos y + \cos z$ の最大値

$x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $x + y + z = \pi$ のとき

$\cos x + \cos y + \cos z$

の値が最大となるのはどんな場合か。

また、その最大値を求めよ。

$x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z = \pi$ より、

$z = \pi - (x+y)$, $x > 0, y > 0$, $0 < x + y < \pi$ で

$\cos x + \cos y + \cos z$

$= \cos x + \cos y + \cos(\pi - x - y)$

$= \cos x + \cos y - \cos(x+y)$

y を固定し、x を変数として

$f(x) = \cos x + \cos y - \cos(x+y)$ とおく。

$f'(x) = -\sin x + \sin(x+y)$

$\quad = 2\cos\left(x + \frac{y}{2}\right)\underbrace{\sin\frac{y}{2}}_{\text{正の定数}}$

$f'(x) = 0\ (0 < x < \pi - y)$ を解くて、

$\cos\left(x + \frac{y}{2}\right) = 0$ より

$x + \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore x = \frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}$

$f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}$	$\cdots$	$\pi - y$
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$	/
$f(x)$	/	↗	最大	↘	/

表より $f(x) \leqq f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right)$

$f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right) = \sin\frac{y}{2} + \cos y + \sin\frac{y}{2}$

$\quad = 2\sin\frac{y}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{y}{2}$

$\quad = -2\left(\sin\frac{y}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$

$y\ (0 < y < \pi)$ を変数として、

$f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right)$ が最大となるのは、

$\sin\frac{y}{2} = \frac{1}{2}$ すなわち $x = y = z = \frac{\pi}{3}$ のときで、

最大値は $\frac{3}{2}$ これが求めるものである。

参考

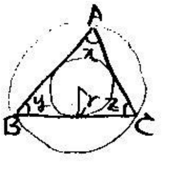
$1 < \cos x + \cos y + \cos z \leqq \frac{3}{2}$

$\cos x + \cos y + \cos z$

$= 1 + 4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}$

$= 1 + \frac{r}{R} \leqq \frac{3}{2}$

（r は内接円の半径、R は外接円の半径）



$\therefore \frac{r}{R} \leqq \frac{1}{2} \quad R \geqq 2r$

角α, β, γが $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, $\alpha \geqq 0^\circ$, $\beta \geqq 0^\circ$, $\gamma \geqq 0^\circ$
を満たすとき、

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \geqq 1$$

を示せ。

文字消去

$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1$

$= \cos\alpha + \cos\beta + \cos\{180^\circ - (\alpha+\beta)\} - 1$

$= \underline{\cos\alpha + \cos\beta} - \cos(\alpha+\beta) - 1$

↓和積

$= 2\cos\boxed{\dfrac{\alpha+\beta}{2}}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} - \left(2\cos^2\boxed{\dfrac{\alpha+\beta}{2}} - 1\right) - 1$

$= 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} - \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ ↓和積

$= 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \times (-2) \times \sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{-\beta}{2}$

$= 4\cos\left(90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}\right)\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}$

$= 4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$

ここで $0^\circ \leqq \dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\beta}{2}, \dfrac{\gamma}{2} \leqq 90^\circ$ より

$4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2} \geqq 0$

よって $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \geqq 1$ は成立

別 $\cos A + \cos B + \cos C$

$= \cos A + \cos B - \cos(A+B)$

これを$f(A,B)$とおく。$0<B<\pi-A$の範囲でBを任意に固定すると、

$\dfrac{\partial}{\partial A}f(A,B) = -\sin A + \sin(A+B)$

$= 2\sin\dfrac{B}{2}\cos\left(A+\dfrac{B}{2}\right)$

$\sin\dfrac{B}{2} > 0$ より、以下の増減表を得る。

A	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}(\pi-B)$	$\cdots$	$\pi-B$
$\frac{\partial}{\partial A}f(A,B)$		$+$	0	$-$	
$f(A,B)$	(1)	↗	$2\sin\frac{B}{2}+\cos B$	↘	(1)

$g(B) = 2\sin\dfrac{B}{2} + \cos B$ とおくと、

$g'(B) = \cos\dfrac{B}{2}\left(1 - 2\sin\dfrac{B}{2}\right)$

$\cos\dfrac{B}{2} > 0$ なので、$g'(B)=0$のとき、$B = \dfrac{\pi}{3}$

B	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$g'(B)$		$+$	0	$-$	
$g(B)$		↗	$\frac{3}{2}$	↘	

よって

正三角形のとき

$1 < f(A,B) \leqq f\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3}{2}$

参考 $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$= 2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} \leqq 2\sin\dfrac{C}{2}$

$\cos A + \cos B + \cos C \leqq 2\sin\dfrac{C}{2} + \cos C$

$= -2\left(\sin\dfrac{C}{2} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{2} \leqq \dfrac{3}{2}$

等号成立 $A=B=C=\pi/3$

つねに $f(x)$ が非負となる a の条件2

すべての正の数 x に対して

$$\frac{1}{x}+3 \geqq a\log\frac{3x+1}{2x} \quad \cdots☆$$

が成り立つような定数 a のうちで、最大のものを求めよ。

〈必要から十分へ〉

$\frac{1}{x}+3 \geqq a\log\frac{3x+1}{2x}$ for $\forall x>0$ ---☆

$\left(\frac{3x+1}{x} \geqq a\log\frac{3x+1}{2x}\right.$ とすると見やすい)

$t=\frac{3x+1}{2x}$ とおくと、$x>0$ より $t=\frac{3}{2}+\frac{1}{2x}>\frac{3}{2}$

より $t>\frac{3}{2}$ をみたすすべての t に対して

$2t \geqq a\log t$ ---✵ が成り立つような

定数 a の最大のものを求めればよい。

✵が $t>\frac{3}{2}$ で成り立つから $t=e$ のときも成り立つ

ので、$2e \geqq a\log e$

$a \leqq 2e$ となることが必要である。

逆に $a \leqq 2e$ のとき

$f(t)=2t-2e\log t$ とおくと、

$f'(t)=2\left(1-\frac{e}{t}\right)$

$=\frac{2(t-e)}{t}$

t	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(t)$	／	$-$	0	$+$
$f(t)$	／	↘	最小	↗

表より $f(t) \geqq f(e)=0$

となり、

$2t \geqq 2e\log t \geqq a\log t$ が

$t>\frac{3}{2}$ で常に成り立つ。

求める a の最大値は $2e$

(別) $f'(t)=2-\frac{a}{t}$ $f'(t)=0$ のとき $t=\frac{a}{2}$

(i) $3<a$ のとき

t	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\frac{a}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$	／	$-$	0	$+$
$f(t)$	／	↘	極小	↗

✵が成り立つ条件は $f\left(\frac{a}{2}\right)=a(1+\log 2-\log a) \geqq 0$

真数条件より $a>0$ なので、$1+\log 2-\log a \geqq 0$ $\therefore a \leqq 2e$

(ii) $a \leqq 3$ のとき $f(t)$ は単調増加する。

✵が成り立つ条件は $\lim_{t \to \frac{3}{2}+0} f(t)=3-a\log\frac{3}{2} \geqq 0$

$\therefore a \leqq \frac{3}{\log\frac{3}{2}}$

(i), (ii) より $a=2e$

負の実数に対して対数不等式が成り立つ範囲を図示

a, b は実数とする。すべての負の実数 x に対して

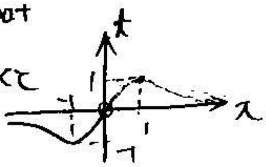
$$\log\frac{2ax}{1+x^2} \leqq \frac{2bx}{1+x^2}$$

が成り立つような範囲を ab 平面上に図示せよ。

$E(a,b) \mid \log\frac{2ax}{1+x^2} \leqq \frac{2bx}{1+x^2}$ for $\forall x<0$

such that

$\frac{2x}{1+x^2} = t$ とおくと



$\log(at) \leqq bt$

$at>0,\ -1 \leqq t<0$ より $a<0$

$-1 \leqq t < 0$ をみたす任意の t に対して

$\log(at) \leqq bt$ が成り立つような a, b の条件を求めればよい。

$f(t) = bt - \log(at)$ とおく。$f'(t) = b - \frac{1}{t}$

(i) $b \geqq -1$ のとき $f'(t) \geqq 0$

よって $f(t)$ は単調増加するから、

$f(t) \geqq f(-1)$

このとき条件は $f(-1) = -a - \log(-a) \geqq 0$

$\therefore b \leqq -\log(-a)$

(ii) $b < -1$ のとき

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{b}$	$\cdots$	0
$f'(t)$	/	$-$	0	$+$	/
$f(t)$	/	↘	最小	↗	/

表より、$f(t) \geqq f\left(\frac{1}{b}\right)$

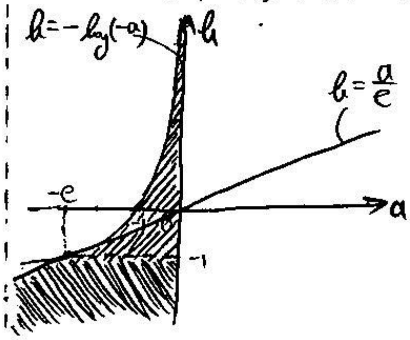
このとき条件は

$f\left(\frac{1}{b}\right) = 1 - \log\frac{a}{b} \geqq 0$

$\log\frac{a}{b} \leqq 1$

$\therefore \frac{a}{b} \leqq e \quad \therefore b \leqq \frac{a}{e}$ (ただし $a<0$)

以上より求める範囲は図の斜線部分で、境界は b 軸のみ含まない。



不等式の証明（数学的帰納法の最中に対数をとる）

(1) $x \geqq 1$ のとき、つぎの不等式が成り立つことを証明せよ。

$$x\log x \geqq (x-1)\log(x+1)$$

(2) 3以上の自然数 n に対して、不等式

$$(n!)^2 > n^n$$

が成り立つことを証明せよ。

(1) $x \geqq 1$ のとき $x\log x \geqq (x-1)\log(x+1)$ を証明

(2) 3以上の自然数 n に対して $(n!)^2 > n^n$ を証明

(1) 1° $x=1$ のとき与不等式は成立。

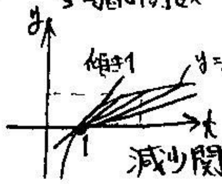
$x \neq 1$ のとき $\dfrac{\log x}{x-1} \geqq \dfrac{\log(x+1)}{x}$ を示せばよい。

関数 $y=\dfrac{\log t}{t-1}\ (t>1)$ が減少関数であることを示す。

$\underbrace{\qquad}_{\text{勾配関数}}$

$y'=\dfrac{\frac{t-1}{t}-\log t}{(t-1)^2}$

$=\dfrac{1}{(t-1)^2}\left(1-\dfrac{1}{t}-\log t\right)$



減少関数で予想できる

$\left(1-\dfrac{1}{t}-\log t\right)'$

$=\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{t}=\dfrac{1-t}{t^2}<0$ ($\because t>1$ より)

$1-\dfrac{1}{t}-\log t < 1-\dfrac{1}{1}-\log 1 = 0$ より $y'<0$ なので

$y=\dfrac{\log t}{t-1}$ ($t \geqq 1$) は減少関数であり、$x<x+1$ より $\dfrac{\log x}{x-1} \geqq \dfrac{\log(x+1)}{x}$

となり、与不等式は成立。　以上より $x \geqq 1$ のとき、与不等式は成立。

2° $f(x)=x\log x-(x-1)\log(x+1)$ ($x \geqq 1$) とおく。

$f'(x)=\log x+1-\log(x+1)-(x-1)\cdot\dfrac{1}{(x+1)}$

$=\log x-\log(x+1)+\dfrac{2}{x+1}$

$f''(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{(x+1)^2}=\dfrac{1-x}{x(x+1)^2}\leqq 0$ ($\because x \geqq 1$) より

$f'(x)$ は $x \geqq 1$ で減少する

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\log\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\log\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}+\frac{2}{x+1}\right)=0$

よって $f'(x) \geqq 0$ したがって $f(x)$ は $x \geqq 1$ で単調増加するから、

$f(x) \geqq f(1)=0$ $\therefore f(x) \geqq 0$ すなわち $x\log x \geqq (x-1)\log(x+1)$

(2) 1° (1)より $k\log k \geqq (k+1)\log(k+1)-2\log(k+1)$

$\Leftrightarrow (k+1)\log(k+1)-k\log k \leqq \log(k+1)^2$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\{\underbrace{(k+1)\log(k+1)}_{a_{k+1}}-\underbrace{k\log k}_{a_k}\} < \sum_{k=1}^{n-1}\log(k+1)^2$

$n\log n-1\cdot\log 1 < \log(2\cdot3\cdot\cdots\cdots\cdot n)^2$

$\log n^n < \log(n!)^2$　$e>1$ より $n^n<(n!)^2$

2° [I] $n=3$ のとき $(n!)^2>n^n$ は成立

[II] $n=k$ のとき $(n!)^2>n^n$ が成立すると

$(k!)^2>k^k$

$n=k+1$ のとき

$(n!)^2=\{(k+1)!\}^2$

$=(k+1)^2(k!)^2>(k+1)^2k^k$（仮定）

ここで (1)より $k^k \geqq (k+1)^{k-1}$ だから

$(k+1)^2k^k>(k+1)^{k+1}$ なので

$(n!)^2>n^n$ は成立。

[I], [II]より題意は示された。

一般の相加・相乗平均の不等式の証明2

(1) すべての実数 t に対して、不等式 $e^t \geqq 1+t$ が成り立つことを示せ。また、等号が成り立つのはどのような場合か。

(2) 実数 t_j $(j=1,2,\cdots\cdots,n)$ に対して、$x_j=e^{t_j}$ とおく。

$x_1x_2\cdots\cdots x_n=1$ のとき

不等式 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n \geqq n$ が成り立つことを示せ。

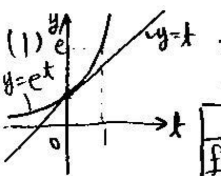
また、等号が成り立つ場合はどのようなときか。

(3) $x_1>0,\ x_2>0,\ \cdots\cdots,\ x_n>0$ のとき、不等式

$$\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots\cdots x_n}$$

が成り立つことを示せ。また、等号が成り立つ場合はどのようなときか。

(1)



$f(t)=e^t-(1+t)$ とおくと、

$f'(t)=e^t-1$

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	0	↗

表より $f(t)\geqq 0$

等号成立は $t=0$ のとき。

(2) $x_j=e^{t_j}$ $x_1x_2\cdots x_n=1 \Rightarrow x_1+x_2+\cdots+x_n \geqq n$ を示せ。

$\left(\prod_{j=1}^{n} e^{t_j}=\right) e^{t_1}\cdot e^{t_2}\cdot\cdots\cdots\cdot e^{t_n}=1$

$\therefore e^{t_1+t_2+\cdots+t_n}=e^0$

$\therefore t_1+t_2+\cdots\cdots+t_n=0$ …①

(1)より $e^{t_j}\geqq 1+t_j$ だから

$\sum_{j=1}^{n} x_j=\sum_{j=1}^{n} e^{t_j} \geqq \sum_{j=1}^{n}(1+t_j)$

$=n+(t_1+t_2+\cdots+t_n)$

$=n$ ($\because$ ①)

よって与不等式は成立。

等号成立条件は $t_1=t_2=\cdots=t_n=0$

$\Leftrightarrow x_1=x_2=\cdots=x_n=1$

(3) $x_1>0,\ x_2>0,\ \cdots,\ x_n>0$ で

$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots\cdots x_n}$ を示せ。

$\frac{x_j}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots\cdot x_n}}=y_j$ とおくて。

$y_j>0$ で $y_1\cdot y_2\cdot\cdots\cdot y_n=\frac{x_1x_2\cdots\cdots x_n}{x_1x_2\cdots\cdot x_n}=1$

だから(2)より

$y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n \geqq n$, 等号成立条件は $y_1=y_2=\cdots=y_n=1$

$\therefore \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots\cdots x_n}} \geqq n$

$\therefore \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots\cdots x_n}$

等号成立条件は $x_1=x_2=\cdots=x_n$

参考 $x_1+x_2-1-x_1x_2$

$=(x_1-1)(x_2-1)\geqq 0$

$\therefore x_1+x_2-1\geqq x_1x_2$

微積分・極限
発展編B

多変数関数の最大値 (偏微分) など

$\boxed{1}$ 関数方程式 $f(xy)=f(x)+f(y)$

$f(x)$ は $x>0$ で定義された微分可能な関数で、どのような $x>0$, $y>0$ に対しても、$f(xy)=f(x)+f(y)$ が成り立っている。

(1) $f(1)$ を求めよ。

(2) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$ が成り立つことを示せ。

(3) 導関数の定義に従って、$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。ただし、$f'(1)=C$ (Cは定数)とする。

(4) $f(x)$ を求めよ。

【解】(1) $f(xy)=f(x)+f(y)$ で $x=y=1$ とすると

$f(1)=2f(1)$ 　　よって　$f(1)=0$

(2) $f(xy)=f(x)+f(y)$ で $y=\dfrac{1}{x}>0$ とすると

$$f(1)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$$

(1)より $f(1)=0$ であるから　$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$

(3)
$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)+f\left(\frac{1}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(1)}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}\right\}$$
$$=\frac{1}{x}\lim_{\frac{h}{x}\to0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(1)}{\frac{h}{x}}=\frac{1}{x}f'(1)=\frac{C}{x}$$

(4) $f(x)=\displaystyle\int\frac{C}{x}dx=C\log|x|+D$ (D は積分定数)

また　$f(1)=D=0$, $x>0$ より　$f(x)=C\log x$

参考　$f(xy)=f(x)+f(y)$ で x を固定し y を変数とみて、y で微分すると

$xf'(xy)=f'(y)$

ここで、$y=1$ とすると、$xf'(x)=f'(1)$ が成り立つ。

2 平均値定理と方程式の解

x のすべての実数値に対して、関数 $f(x)$ の微分係数が存在して、つねに $|f'(x)|<\dfrac{1}{2}$ であるとする。

(1) 任意の実数 x_1, x_2 に対して $|f(x_1)-f(x_2)|\leqq\dfrac{1}{2}|x_1-x_2|$ が成り立つことを示せ。

(2) 方程式 $f(x)=x$ は相異なる2つの実数解をもたないことを示せ。

【証明】(1) $x_1\neq x_2$ のとき、平均値の定理を使うと

$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)f'(c)$ なる c が x_1 と x_2 との間にある。

よって、$|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1-x_2||f'(c)|$

$|f'(x)|<\dfrac{1}{2}$ より $|f'(c)|<\dfrac{1}{2}$ であるから上の式は

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{2}|x_1-x_2|$$

$x_1=x_2$ のとき、$|f(x_1)-f(x_2)|=0$

まとめると $|f(x_1)-f(x_2)|\leqq\dfrac{1}{2}|x_1-x_2|$

(2) $f(x_1)=x_1$, $f(x_2)=x_2$ とすると (1) から $|x_1-x_2|\leqq\dfrac{1}{2}|x_1-x_2|$

$\therefore$ $|x_1-x_2|=0$ $\therefore$ $x_1=x_2$

3 与えられた関数の最小値に関する証明と極限値

自然数 n に対して、$0<k_n<1$ として、$(2n-2)\pi<x<2n\pi$ の範囲で定義された関数 $f_n(x)=\sin x+k_nx$ を考える。

(1) $f_n(x)$ が極小となる x がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) $f_n(x)$ の極小値が 0 になるように k_n の値を定める。極小値をとる x の値を a_n とすると、$k_n\sqrt{1+a_n{}^2}$ は n によらない定数であることを示せ。

(3) (2) の k_n について、極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} nk_n$ を求めよ。

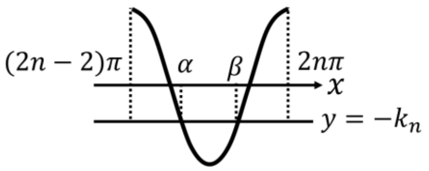
【解】(1) $f_n(x)=\sin x+k_nx$ から $f_n'(x)=\cos x+k_n$

$0<k_n<1$ であるから $(2n-2)\pi<x<2n\pi$ で $\cos x+k_n=0$ となる x が 2 つ存在する。

それらを α, β $(\alpha<\beta)$ とおく。

$(2n-2)\pi<x<2n\pi$ での $f_n(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$(2n-2)\pi$	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	$2n\pi$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$		↗	極大	↘	極小	↗	



ゆえに、$x=\beta$ でのみ極小となる。

(2) $f_n(x)$ の極小値が 0 であるとすると

$$f_n'(a_n)=\cos a_n+k_n=0,\ f_n(a_n)=\sin a_n+k_na_n=0$$

ゆえに $k_n\sqrt{1+a_n{}^2}=\sqrt{k_n{}^2+k_n{}^2a_n{}^2}=\sqrt{(-\cos a_n)^2+(-\sin a_n)^2}$

$$=\sqrt{\sin^2 a_n+\cos^2 a_n}=1$$

すなわち $k_n\sqrt{1+a_n{}^2}$ は n に関係なく一定である。

(3) (2) から $nk_n=\dfrac{n}{\sqrt{1+a_n{}^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{n^2}+\left(\dfrac{a_n}{n}\right)^2}}$

$2(n-1)\pi<a_n<2n\pi$ より $2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\pi<\dfrac{a_n}{n}<2\pi$ だから、$\lim\limits_{n\to\infty}2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\pi=2\pi$

よって、はさみうちの原理から $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=2\pi$

ゆえに $\lim\limits_{n\to\infty} nk_n=\dfrac{1}{2\pi}$

4 極値を持つnの条件

$y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^n}{n}$（$n$：自然数）について

(1) 導関数を求めよ。

(2) 極大値と極小値をもつのは n がいかなる場合か。

(3) 極小値があって極大値がないのは n がどんな場合か。

(4) 極小値は n が限りなく大きくなるとき、いかなる極限をもつか。

【解】(1) $y'=-\dfrac{1}{x^2}+x^{n-1}=\dfrac{x^{n+1}-1}{x^2}$

(2), (3) $y'=0$ すなわち $x^{n+1}=1$ を解くと

n が奇数のとき　$x=\pm 1$

n が偶数のとき　$x=1$

増減表は

n が奇数のとき

x		-1		0		1	
y'	$+$	0	$-$	/	$-$	0	$+$
y	↗	極大	↘	/	↘	極小	↗

n が偶数のとき

x		0		1	
y'	$-$	/	$-$	0	$+$
y	↘	/	↘	極小	↗

よって、n が奇数のときは極大値、極小値がある。

n が偶数のときは極小値だけがある。

(4) 極小値は n が偶数、奇数の値に関わらず $1+\dfrac{1}{n}$ より $n\to\infty$ のとき　1

6 関数と3点で交わるx軸に平行な直線の存在条件

a, b を正の実数とする。

(1) 区間 $a<x$ における関数 $f(x)=\dfrac{x^4}{(x-a)^3}$ の増減を調べよ。

(2) 区間 $a<x$ における関数 $g(x)=\dfrac{1}{(x-a)^2}-\dfrac{b}{x^3}$ のグラフと相異なる3点で交わる x 軸に平行な直線が存在するための必要十分条件を求めよ。

【解】(1) $f(x)=x^4(x-a)^{-3}$ $(a<x)$ から

$$f'(x)=4x^3(x-a)^{-3}-3x^4(x-a)^{-4}=\frac{x^3(x-4a)}{(x-a)^4}$$

$a>0$ であるから、$f(x)$の増減表は右のようになる。

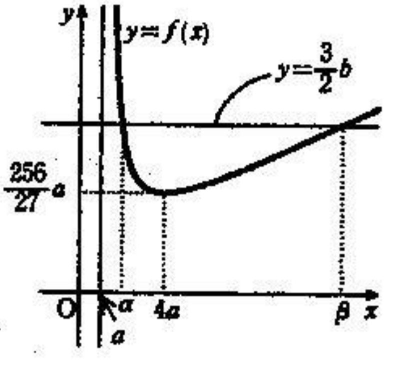
x	a	$\cdots$	$4a$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$\frac{256}{27}a$	↗

(2) $g(x)=(x-a)^{-2}-bx^{-3}$ から

$$g'(x)=-2(x-a)^{-3}+3bx^{-4}=-\frac{2}{(x-a)^3}+\frac{3b}{x^4}$$

$$=\frac{2}{x^4}\left\{\frac{3}{2}b-\frac{x^4}{(x-a)^3}\right\}=\frac{2}{x^4}\left\{\frac{3}{2}b-f(x)\right\}$$

(1)の増減表と $\displaystyle\lim_{x\to a+0}f(x)=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ であることから、$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



[1] $\dfrac{3}{2}b>\dfrac{256}{27}a$ すなわち $b>\dfrac{512}{81}a$ のとき

$f(x)=\dfrac{3}{2}b$ は区間 $a<x$ において、異なる2つの実数解 α, β $(\alpha<\beta)$ をもつ。

よって、$g(x)$ の増減表は右のようになる。

x	a	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$		↘	極小	↗	極大	↘

また $\displaystyle\lim_{x\to a+0}g(x)=\infty$

よって、このとき、$y=g(x)$ のグラフと相異なる3点で交わり、x 軸に平行な直線が存在する。

[2] $\dfrac{3}{2}b\leqq\dfrac{256}{27}a$ すなわち $b\leqq\dfrac{512}{81}a$ のとき

区間 $a<x$ において $g'(x)\leqq 0$ であるから、$g(x)$ は単調に減少する。

よって、条件を満たさない。

以上から、求める条件は $b>\dfrac{512}{81}a$

7 連続な分数関数の極値

すべての実数 x に対して定義された関数 $f(x)=\dfrac{4x-a}{x^2+1}$ (a は実定数) について、

(1) $f(x)$ は極大値が 1 となるように a の値を求めよ。

(2) a が (1) で定めた値をとるとき、$f(x)$ の値域を求めよ。

【解】(1) $f'(x)=\dfrac{4(x^2+1)-(4x-a)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{2(2x^2-ax-2)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$ のとき　$2x^2-ax-2=0$　………①

$D=a^2+16>0$ より ① は異なる 2 実数解 α, β ($\alpha<\beta$) をもつ。

$f(x)$ の増減は

x	…	α	…	β	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

表より $x=\beta$ で極大となるから $4(\beta^2+1)-(4\beta-a)\cdot 2\beta=0$ より

$$f(\beta)=\frac{4\beta-a}{\beta^2+1}=\frac{4}{2\beta}=1 \quad \therefore \quad \beta=2$$

このとき、$\dfrac{4\cdot 2-a}{2^2+1}=1$ より　$a=3$

$2x^2-3x-2=0$

解と係数の関係 $\alpha-2=\alpha\beta=\frac{-2}{2}$

(2) (1) から $f(x)=\dfrac{4x-3}{x^2+1}$ で、① より $\alpha\cdot 2=\dfrac{-2}{2}$　$\therefore$　$\alpha=-\dfrac{1}{2}$

よって、極大値 $f(2)=1$，極小値 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-4$

しかも $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4-\frac{3}{x}}{x+\frac{1}{x}}=0$ であるから、$f(x)$ の変域は　$-4\leqq f(x)\leqq 1$

注　$f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ が $x=\alpha$ で極値 k をもてば、$f'(\alpha)=\dfrac{g'(\alpha)h(\alpha)-g(\alpha)h'(\alpha)}{\{h(\alpha)\}^2}=0$

より、$f(\alpha)=\dfrac{g(\alpha)}{h(\alpha)}=\dfrac{g'(\alpha)}{h'(\alpha)}=k$ ……☆　が成り立つ。

よって、$g(\alpha)-kh(\alpha)=0$, $g'(\alpha)-kh'(\alpha)=0$ から

$g(x)-kh(x)=0$ が整方程式となる場合は $x=\alpha$ を重解にもつ。

このことは曲線 $y=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ と直線 $y=k$ とが接することからもわかる。

$f(x)=\dfrac{x}{x^2-x+1}$ とする。

(1) 関数 $f(x)$ の極大値と極小値を求めよ。

(2) $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ とおく。$0<x<1$ を満たすすべての x について $\dfrac{F(x)}{x}<F(1)$ が成り立つことを証明せよ。

【解】(1) $f'(x)=\dfrac{(x^2-x+1)-x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}=-\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x^2-x+1)^2}$

$f(x)$ の増減表は右図のようである。

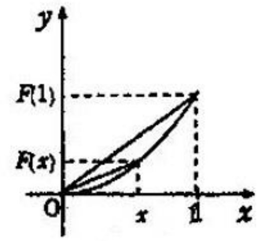
x		-1		1	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	↘	極小	↗	極大	↘

よって、極大値 $f(1)=1$，極小値 $f(-1)=-\dfrac{1}{3}$

(2) $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ より　$F'(x)=f(x)$，$F''(x)=f'(x)$

$0<x<1$ では　$f'(x)>0$　∴　$F''(x)>0$

すなわち、$F(x)$ は下に凸である。



よって、$F(0)=0$ とから、$\dfrac{F(x)}{x}$ は正の増加関数である。

∴　$\dfrac{F(x)}{x}<\dfrac{F(1)}{1}$　すなわち　$\dfrac{F(x)}{x}<F(1)$

【証明2】(2) $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ より　$F'(x)=f(x)$　となり、$G(x)=\dfrac{F(x)}{x}$ とおくと

$$G'(x)=\frac{f(x)x-F(x)}{x^2} \quad \cdots\cdots ①$$

ここで、分子を $h(x)=f(x)x-F(x)$ とおくと

$$h'(x)=f'(x)x+f(x)-f(x)=f'(x)x$$

(1) の増減表より $0<x<1$ で $f'(x)>0$ であるから　$h'(x)>0$

したがって、$h(x)$ はこの区間で増加し、$h(0)=-F(0)=0$ から　$h(x)>0$

①より $0<x<1$ で $G'(x)>0$ であるから　$G(x)$ は増加する。

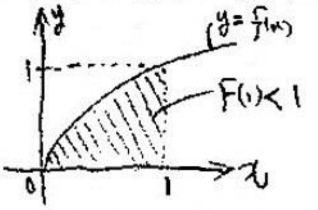
ゆえに、$0<x<1$ を満たすすべての x について　$G(x)<G(1)$

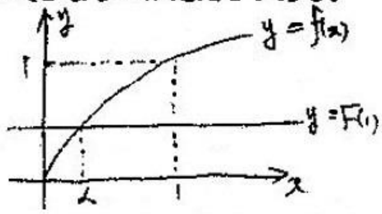
すなわち　$\dfrac{F(x)}{x}<F(1)$

【証明3】(2) $g(x)=F(x)-F(1)x$ とおくと、$g'(x)=F'(x)-F(1)=f(x)-F(1)$

$F(1)$ は曲線 $y=f(x)$ と x 軸および2直線 $x=0$，$x=1$ に挟まれた部分の面積を表わすから、(1) のグラフより　$0<F(1)<1$

そして、$0<x<1$ の範囲で　$g'(\alpha)=0$，$0<\alpha<1$ なる α がただ1つある。





$g(x)$ の増減表は右図のようである。

x	0		α		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	↘	極小	↗	0

表より　$0<x<1$ で　$g(x)<0$

よって　$F(x)<F(1)x$

$$\therefore \frac{F(x)}{x}<F(1)$$

9 不等式の証明 (同値な式に変形する)

$x>0$ のとき、$0<\dfrac{1}{x}\log\dfrac{e^x-1}{x}<1$ を証明せよ。

【証明】 $x>0,\ 0<\dfrac{1}{x}\log\dfrac{e^x-1}{x}<1 \iff 0<\log\dfrac{e^x-1}{x}<x$

$\iff x>0,\ 1<\dfrac{e^x-1}{x}<e^x \iff x>0,\ x<e^x-1<xe^x$ …… ☆

そこで ☆ を証明すればよい。

$e^x-1-x=f(x)$ とおくと $f'(x)=e^x-1>0$ ($\because x>0$)

また、$xe^x-(e^x-1)=g(x)$ とおくと $g'(x)=e^x+xe^x-e^x=xe^x>0$ ($\because x>0$)

したがって、$f(x)$, $g(x)$ は $x\geqq 0$ において増加関数で、かつ、$f(0)=0$, $g(0)=0$ であるから

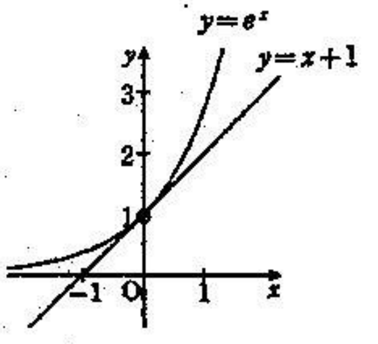
$x>0$ のとき $f(x)>0$, $g(x)>0$ が成り立つ。

参考 ☆ $\iff x>0,\ x+1<e^x,\ (-x+1)e^x<1$

$\iff x>0,\ x+1<e^x,\ -x+1<e^{-x}$

$\iff x\neq 0,\ x+1<e^x$

これは、右のグラフから明らかに成立。



また、$x>0,\ 1<\dfrac{e^x-1}{x}<e^x$ …… ★

は $h(x)=e^x$ とおくと、有限増分の定理より

$$h'(0)<\frac{h(x)-h(0)}{x-0}<h'(x)$$

が成り立つから ★ が示される。

有限増分の定理

関数 $f(x)$ がある区間全体で $\alpha\leqq f'(x)\leqq\beta$ ならば、その区間の任意の2点 $a,\ b\ (a\neq b)$ について

$$\alpha\leqq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqq\beta$$

注 この定理はポピュラーではないので、不等式等を視る目安として使うこと。答案に使うときは平均値の定理から導びけばよい。

10 $\sin x\sin y\sin z$の最大値

x, y, z は $x>0$, $y>0$, $z>0$, $x+y+z=\pi$ を満たすとする。このとき、

$\sin x\sin y\sin z$ の最大値を求めよ。

【解】 $\sin x\sin y\sin z=\sin x\sin y\sin(\pi-x-y)=\sin x\sin y\sin(x+y)$

そこで、yを固定し、xの関数とみて、$f(x)=\sin x\sin y\sin(x+y)$ とおく

【参考】yを任意に固定したxによる微分を偏微分と呼び，$\frac{\partial}{\partial x}$で表す.

$f'(x)=\cos x\sin y\sin(x+y)+\sin x\sin y\cos(x+y)$

$\quad=\sin y\underline{\sin(2x+y)}$

$\sin x\cos(x+y)+\cos x\sin(x+y)$

$f'(x)=0$ より $0<2x+y<2\pi$ では $2x+y=\pi$ $\therefore$ $x=\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}$

$f(x)$ の増減は　　$y\sim\pi$　　$\pi\sim2\pi$　……$2x+y$

x	0	…	$\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}$	…	π
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	最大	↘	

$\pi-y$がよい

このときの最大値は $f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)=\cos^2\frac{y}{2}\sin y=\frac{1}{2}(\cos y+1)\sin y$

次に、$g(y)=\frac{1}{2}(\cos y+1)\sin y$ $(0<y<\pi)$ とおき、最大値を求める。

$g'(y)=\frac{1}{2}\{-\sin^2y+(\cos y+1)\cos y\}=\frac{1}{2}(\cos y+1)(2\cos y-1)$

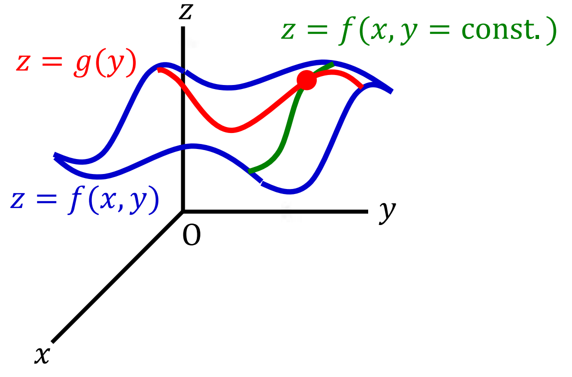
$0<y<\frac{\pi}{3}$ のとき $g'(y)>0$，$\frac{\pi}{3}<y<\pi$ のとき $g'(y)<0$ であるから、

$g(y)$ は $y=\frac{\pi}{3}$ のとき極大かつ最大となる。

よって、求める最大値は $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}$ このとき、$x=y=z=\frac{\pi}{3}$

【参考】

本問は曲面 $z=f(x,y)$ の最高点を見つけることに対応しており，
この解釈に基づくと以上の解法は次のように理解できる.
まず各yに対する線 $z=f(x,y=\mathrm{const.})$ 上の最高点 $g(y)$ を見つける.
次に異なるyに対する $g(y)$ を比べ，その中の最大値を見出せば良い(下図).



111 $\frac{\log x}{x} < a$がつねに成り立つ条件

すべての正の数xに対して、$\frac{\log x}{x} < a$が成り立つような定数aの値の範囲を求めよ。

【解1】$f(x)=\frac{\log x}{x}$ とおき、$f(x)$の最大値を求める。

$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$ より $f'(x)=0$ を解くと、$\log x=1$ より $x=e$

$x=e$の前後で$f'(x)$の符号が$+$から$-$に変化するから、$f(x)$は$x=e$で極大かつ最大である。よって、最大値は $\frac{1}{e}$

求めるaの値の範囲は　$a>\frac{1}{e}$

【解2】$x>0$ より　$\frac{\log x}{x}<a$ ………① $\Longleftrightarrow$ $\log x<ax$ ………②

$f(x)=ax-\log x$ とおくと、$f'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}$

①は題意より正の数$x=1$で成り立つから　$a>0$

そこで、$f'(x)=0$ を解くと　$x=\frac{1}{a}$

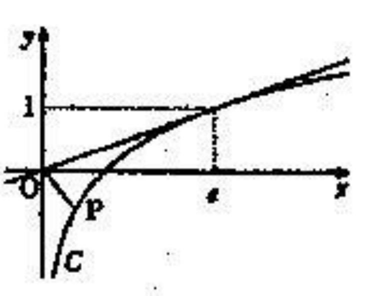
$f'(x)$の増減は

x	0	…	$\frac{1}{a}$	…
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	最小	↗

表より$f(x)$の最小値は $f\left(\frac{1}{a}\right)=1+\log a$

よって、②がつねに成り立つには $1+\log a>0$　∴　$a>\frac{1}{e}$

【解3】曲線C: $y=\log x$ は右図のように上に凸である。



点P$(x, \log x)$と原点Oを結ぶ線分の傾きは$\frac{\log x}{x}$より、グラフから直線OPがCと接するとき、その傾きが最大となる。

よって　$\frac{\log x}{x} \leqq \frac{1}{e}$

求めるaの値の範囲は　$a>\frac{1}{e}$

【解4】 $\dfrac{\log x}{x}<a$ がすべての正の数 x で成り立つから、$x=e$ でも成り立つ。

よって、$\dfrac{1}{e}<a$ であることが必要である。

逆に、$a>\dfrac{1}{e}$ が成り立つとき、$a-\dfrac{\log x}{x}>\dfrac{1}{e}-\dfrac{\log x}{x}$ であるが、ここで右辺を $f(x)$ とおき、$f(x)$ の最小値を調べる。

$f'(x)=\dfrac{\log x-1}{x^2}=0$ より　$x=e$

$x=e$ の前後で $f'(x)$ の符号が $-$ から $+$ に変化するから、$f(x)$ は $x=e$ で極小かつ最小である。よって、最小値は 0

ゆえに、$f(x)\geqq 0$ であるから、$a-\dfrac{\log x}{x}>0$ がつねに成り立つ。

以上により、求める a の値の範囲は　$a>\dfrac{1}{e}$

注　解2の②で、直線 $y=ax$ と曲線 $y=\log x$ との上下の位置関係から簡単に $a>\dfrac{1}{e}$ が求められる。

12 $\log x = ax + b$ が実数解を持つ条件

a, b を定数とするとき、x の方程式 $\log x = ax + b$ について、次の問に答えよ。

(1) $a \leqq 0$ のとき、この方程式はただ1つの実数解をもつことを示せ。

(2) $a > 0$ のとき、この方程式が実数解をもつための条件を a, b で表せ。

(3) (2)で得られた条件を満たす点 (a, b) の存在する範囲を図示せよ。

【解】(1) $f(x) = \log x - ax - b$ とおく。

$f'(x) = \dfrac{1}{x} - a$

$a \leqq 0$ のとき、$x > 0$ でつねに $f'(x) > 0$

またこのとき、$f(x)$ は $x > 0$ で連続で $\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x) = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ だから、

$f(x) = 0$ を満たす実数 x がただ1つ存在する。

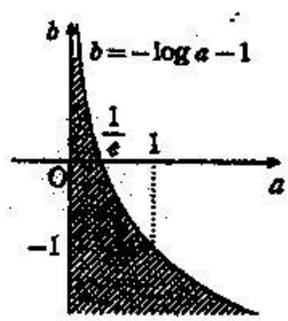
(2) $a > 0$ のとき $0 < x < \dfrac{1}{a}$ で $f'(x) > 0$, $x > \dfrac{1}{a}$ のとき $x > \dfrac{1}{a}$ で $f'(x) < 0$

だから、$f(x)$ の最大値は $f\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\log a - 1 - b$, またこのとき、$\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x) = -\infty$

したがって、$f(x) = 0$ を満たす実数 x が存在するための必要十分条件は

$$f\left(\frac{1}{a}\right) \geqq 0 \iff b \leqq -\log a - 1$$

(3) (2)を満たす点 (a, b) 存在するの範囲は右図の斜線部分で、直線 $a = 0$ は含まず、曲線 $b = -\log a - 1$ は含む。

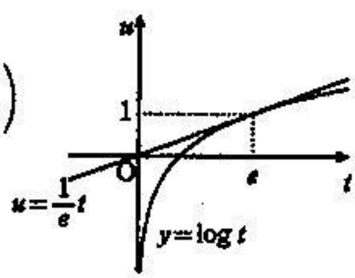


参考 (2) $\log x = ax + b \iff \log x = ax + \log e^b$

$\iff \log \dfrac{x}{e^b} = ax \iff \log t = ae^b t$ $\left(t = \dfrac{x}{e^b}\ とおく\right)$

右図のグラフより、$\log t \leqq \dfrac{1}{e} t$ のとき解をもつから

求める条件は $ae^b \leqq \dfrac{1}{e} \iff b \leqq -\log a - 1$



13 **不等式の証明・接線と上に凸なグラフとの関係**

(1) 曲線 $y=x\log\frac{1}{x}$ $(x>0)$ に直線 $y=ax+b$ が接するとき、

$x>0$ の範囲で　$x\log\frac{1}{x}\leqq ax+b$

を示せ。

(2) n 個の正の数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が $\sum_{i=1}^{n} x_i=1$ を満たすとき、

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\log\frac{1}{x_i}\leqq\log n$$

を示せ。また、等号の成り立つ条件を調べよ。

【解】(1) $y=x\log\frac{1}{x}=-x\log x\ (x>0)$ ……① のとき、$y'=-\log x-1$ ……②

$y''=-\frac{1}{x}<0\ (\because x>0)$ であるから、曲線①は上に凸。

よって、曲線①はその接線 $y=ax+b$ の下側にあるから、

$$x\log\frac{1}{x}\leqq ax+b \quad \cdots\cdots ③$$

(2) ③より　$x_i\log\frac{1}{x_i}\leqq ax_i+b$ ……④

$\therefore\ \sum_{i=1}^{n} x_i\log\frac{1}{x_i}=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)=a\sum_{i=1}^{n}x_i+bn$ ……⑤　$(=a+bn)$

一方、$y=ax+b$ が、$x=t$ において①と接するとき、②に注意して、

$at+b=-t\log t$, $a=-\log t-1$

$\therefore\ a=-(\log t+1)$, $b=t$

ここで $t=\frac{1}{n}$ とおくと、　←　任意のtに対して成り立つから$1/n$とおいて良い

$$a+bn=-\left(\log\frac{1}{n}+1\right)+\frac{1}{n}\cdot n=\log n$$

よって、⑤とから

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\log\frac{1}{x_i}\leqq\log n \quad \cdots\cdots ⑥$$

ここで等号が成り立つのは、④の等号がすべて成り立つときで、すなわち x_i が接点の x 座標に等しいとき、すなわち、$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{n}$ のとき成り立つ。

$\boxed{14}$ A=1/n(a1+a2+⋯+an)のとき,a1a2⋯an≦A^nの証明　「不等式」の章でも扱った

(1) すべての実数 x に対して、不等式 $x \leqq e^{x-1}$ が成り立つことを示せ。

(2) 正の数 x_1, x_2, ……, x_n が $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=n$ を満たすとき、$x_1x_2\cdots\cdots x_n \leqq 1$ が成り立つことを示せ。

(3) 正の数 a_1, a_2, ……, a_n に対して、$A=\dfrac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$ とするとき、

$a_1a_2\cdots\cdots a_n \leqq A^n$ が成り立つことを示せ。

【証明】(1) $f(x)=e^{x-1}-x$ とおくと　$f'(x)=e^{x-1}-1$

$f'(x)=0$ とすると　$e^{x-1}=1$

よって　$x-1=0$　ゆえに　$x=1$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗

よって　$f(x) \geqq f(1)=e^0-1=0$

したがって、$x \leqq e^{x-1}$ が成り立つ。

(2) (1)から　$x_1 \leqq e^{x_1-1}$, $x_2 \leqq e^{x_2-1}$, ……, $x_n \leqq e^{x_n-1}$

x_1, x_2, ……, x_n は正の数であるから

$$x_1x_2\cdots\cdots x_n \leqq e^{x_1-1}\cdot e^{x_2-1}\cdot\cdots\cdots\cdot e^{x_n-1}=e^{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n-n}=e^{n-n}=1$$

したがって、$x_1x_2\cdots\cdots x_n \leqq 1$ が成り立つ。

(3) $x_k=\dfrac{a_k}{A}$ $(1 \leqq k \leqq n)$ とすると、$x_k>0$ $(1 \leqq k \leqq n)$ で

$$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=\frac{1}{A}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)=n$$

よって、(2)の結果から　$\dfrac{a_1}{A}\cdot\dfrac{a_2}{A}\cdot\cdots\cdots\cdot\dfrac{a_n}{A} \leqq 1$

したがって、$a_1a_2\cdots\cdots a_n \leqq A^n$ が成り立つ。

対数関数(真数がnの分数式)の極限，等式の証明，無限級数の和

以下の問に答えよ。対数は，eを底とする自然対数である。

(1) 極限値 $\lim_{n\to\infty}(n+1)^2\log\left\{1+\frac{1}{n(n+2)}\right\}$ を求めよ。

(2) 自然数 n に対して，$\sum_{k=1}^{n}\log\left\{1+\frac{1}{k(k+2)}\right\}=\log\frac{2n+2}{n+2}$ を証明せよ。

(3) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left\{1+\frac{1}{n(n+2)}\right\}$ の和を求めよ。

【解】(1) $k=n^2+2n$ とおくと，$n\to\infty$ のとき $k\to\infty$ であるから

$$\text{与式}=\lim_{n\to\infty}(n^2+2n+1)\log\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)$$
$$=\lim_{k\to\infty}\left\{k\log\left(1+\frac{1}{k}\right)+\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right\}=\lim_{k\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{k}\right)^k+\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right\}$$
$$=\log e+\log 1=1$$

(2) (2) $\sum_{k=1}^{n}\log\left\{1+\frac{1}{k(k+2)}\right\}=\sum_{k=1}^{n}\log\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{\log(k+1)-\log k\}-\sum_{k=1}^{n}\{\log(k+2)-\log(k+1)\}$$

$\left(\sum_{k=1}^{n}\{f(k+1)-f(k)\}=\{f(2)-f(1)\}+\{f(3)-f(2)\}+\cdots\cdots+\{f(n+1)-f(n)\}\right.$

$=f(n+1)-f(1)$ を用いると$)$

$$=\{\log(n+1)-\log 1\}-\{\log(n+2)-\log 2\}$$
$$=\log\frac{2n+2}{n+2}$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left\{1+\frac{1}{n(n+2)}\right\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left\{1+\frac{1}{k(k+2)}\right\}=\lim_{n\to\infty}\log\frac{2n+2}{n+2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\log\frac{2+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n}}=\log 2$$

別解(2) 与等式を n に関する数学的帰納法によって証明する。

[1] $n=1$ のとき　両辺とも $\log\frac{4}{3}$ となって，与式は成り立つ。

[2] $n=m$ のとき成り立つと仮定すると

$$\sum_{k=1}^{m}\log\left\{1+\frac{1}{k(k+2)}\right\}=\log\frac{2m+2}{m+2}$$

このとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}\log\left\{1+\frac{1}{k(k+2)}\right\}$

$$=\sum_{k=1}^{m}\log\left\{1+\frac{1}{k(k+2)}\right\}+\log\left\{1+\frac{1}{(m+1)(m+3)}\right\}$$

$$=\log\frac{2m+2}{m+2}+\log\frac{m^2+4m+4}{(m+1)(m+3)}=\log\left\{\frac{2(m+1)}{m+2}\cdot\frac{(m+2)^2}{(m+1)(m+3)}\right\}$$

$$=\log\frac{2(m+1)+2}{(m+1)+2}$$

から，$n=m+1$ のときも成り立つ。

[1]，[2]から，すべての自然数 n について成り立つ。

$y = x + a/x$が極値をもつ条件

関数 $y=x+\dfrac{a}{x}$ ~~は~~が極値をもつ~~こと~~ための定数 a の条件を求めよ。

【解】 $y'=1-\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{x^2-a}{x^2}$ $(x \neq 0)$

$a \leqq 0$ のときは、常に $y'>0$ であるから、この関数は極値をもたない。

$a>0$ のとき　$y'=\dfrac{(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})}{x^2}$

$y'=0$ を解くと　$x=\pm\sqrt{a}$

よって、y の増減は下の表のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
y	↗	極大	↘	／	↘	極小	↗

表より、この関数は極値をもつ。

よって、求める条件は　$a>0$

絶対値付き関数の極値

関数 $f(x)=|x|\sqrt{3-x}$ の極値を求めよ。

【解】 定義域は $x \leqq 3$ であって、

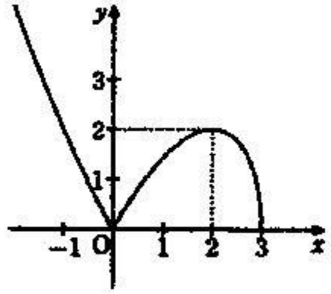
$0<x<3$ のとき $f(x)=x\sqrt{3-x}$, $f'(x)=\sqrt{3-x}-\dfrac{x}{2\sqrt{3-x}}=\dfrac{3(2-x)}{2\sqrt{3-x}}$

$x<0$ のとき $f(x)=-x\sqrt{3-x}$, $f'(x)=\dfrac{-3(2-x)}{2\sqrt{3-x}}$

$f'(x)=0$ を解くと $x=2$

したがって、$f(x)$ の増減は

x		0		2		3
$f'(x)$	$-$	／	$+$	0	$-$	／
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘	0



この表から $f(x)$ は

$x=2$ で極大となり、極大値は $f(2)=2$

$x=0$ で極小となり、極小値は $f(0)=0$

図 まず、$y=x\sqrt{3-x}$ のグラフを描く。

$0 \leqq x \leqq 3$ では $y=x\sqrt{3-x}$ のグラフを、

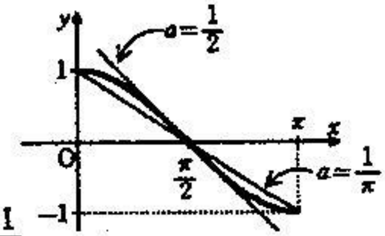
$x \leqq 0$ では $y=-x\sqrt{3-x}$ すなわち $y=x\sqrt{3-x}$ のグラフを x 軸に関して折り返したグラフを描けばよい。

極値の個数をグラフで

$y=\sin x-ax(\pi-x)$ の区間 $0\leqq x\leqq\pi$ における極値の個数を正の定数 a の値によって分類せよ。

引き算にするからこそ、上下関係を比べる方法を執れる、

【解】 $y'=\cos x-a(\pi-2x)$ $(0<x<\pi)$ の符号の変化の回数が求める極値の個数に等しい。そこで、曲線 C : $y=\cos x$ と直線 l : $y=a(\pi-2x)$ の上下の位置関係が変化する回数を調べればよい。



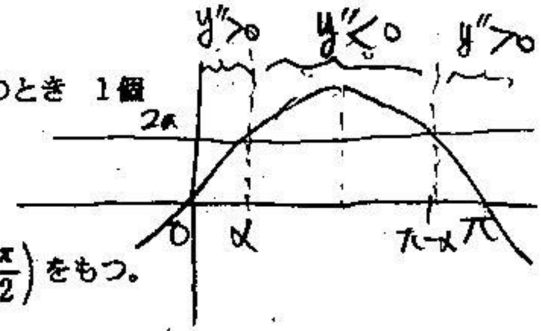
l が C と点 $\left(\frac{\pi}{2},\,0\right)$ で接するときは

$-2a=-1$ より　$a=\frac{1}{2}$

l が点 $(0,\,1)$ を通るときは　$-\frac{1}{\pi/2}=-2a$ より　$a=\frac{1}{\pi}$

よって、グラフから極値の個数は

$\frac{1}{\pi}<a<\frac{1}{2}$ のとき　3個，　$0<a\leqq\frac{1}{\pi}$，$\frac{1}{2}\leqq a$ のとき　1個



参考　$y''=-\sin x+2a$

$0<a<\frac{1}{2}$ の場合　$y''=0$ は2つの解 α，$\pi-\alpha$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ をもつ。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\pi-\alpha$	$\cdots$	π
y''		$+$	0	$-$	0	$+$	
y'		↗	極大	↘	極小	↗	

$y'(0)=1-\pi a$，$y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，$y'(\pi)=-1+\pi a$

$0<a\leqq\frac{1}{\pi}$ のとき　$y'(0)\geqq0$，$y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，$y'(\pi)\leqq0$ とで $y'=0$ $(0<x<\pi)$ の解は

$x=\frac{\pi}{2}$ だけで、その前後で y' の符号は変化する。

$\frac{1}{\pi}<a<\frac{1}{2}$ のとき　$y'(0)<0$，$y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，$y'(\pi)>0$ とで $y'=0$ $(0<x<\pi)$ の解は

その解の前後ですべて y' の符号は変化する。

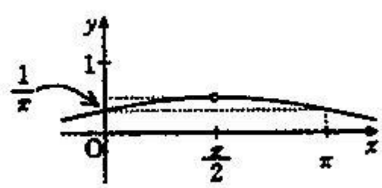
$a\geqq\frac{1}{2}$ の場合　$y''\geqq0$ より y' は単調増加で $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ とで $y'=0$ $(0<x<\pi)$ の解は

$x=\frac{\pi}{2}$ だけで、その前後で y' の符号は変化する。

以上より極値の個数が求められる。

□　$y'=0$ で $x\neq\frac{\pi}{2}$ のとき　$a=\frac{\cos x}{\pi-2x}$ として

$y=\frac{\cos x}{\pi-2x}$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数から、極値の個数が調べられる。



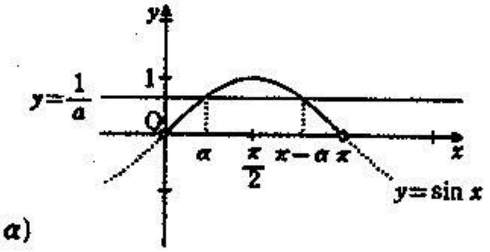
極値問題1

関数 $f(x)=x+a\cos x$ $(a>1)$ は $0<x<\pi$ において極小値0をとる。この範囲における $f(x)$ の極大値を求めよ。

【解】$f'(x)=1-a\sin x$ より $f'(x)=0$ を解くと、

$\sin x=\dfrac{1}{a}$ より $0<x<\pi$ ではグラフから $0<\dfrac{1}{a}<1$ より2つの解 α, $\pi-\alpha$

$\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ をもつ。



$f'(x)$ は $x=\alpha$ の前後で符号が+から−へ、

$x=\pi-\alpha$ の前後で符号が−から+へ

変化する。

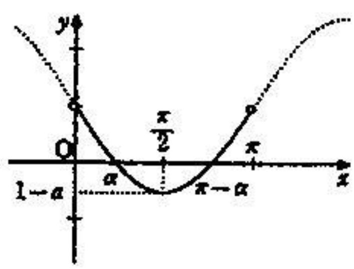
よって、極小値は $f(\pi-\alpha)=\pi-\alpha+a\cos(\pi-\alpha)$

$=\pi-\alpha-a\cos\alpha$

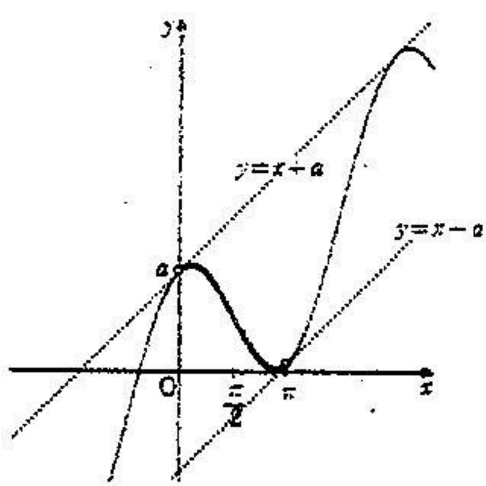
より $\pi-\alpha-a\cos\alpha=0$

ゆえに、極大値は $f(\alpha)=\alpha+a\cos\alpha=\pi$

注　$f'(x)=0$ を解くのに直接 $y=f'(x)$ のグラフから調べてもよい。



参考　$y=f(x)$ のグラフ



三角方程式の解をもつ条件1

方程式 $\sin x=ax$ が $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ なる実数解をもつための定数 a の範囲を求めよ。

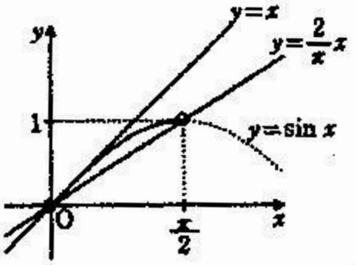
【解1】曲線 $y=\sin x$ と直線 $y=ax$ が $0<x<\pi/2$ で共有点をもてばよい。

直線 $y=ax$ が第1象限内で、図のように、

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ で上に凸な曲線 $y=\sin x$ の接線 $y=x$

(接点が原点) と直線 $y=\dfrac{2}{\pi}x$ (原点と $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$ を通る)

との間にあるときである。



よって、直線 $y=ax$ の傾き a の範囲から

$$\frac{2}{\pi}<a<1$$

【解2】$\sin x=ax$ より $\dfrac{\sin x}{x}=a\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ とおくと

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}<0\ (\because \tan x>x)$$

より $f(x)$ は減少し、かつ $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=1$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{\pi}$ から $\dfrac{2}{\pi}<f(x)<1$

よって、題意を満たす条件は $\dfrac{2}{\pi}<a<1$

参考 $f(x)=\sin x-ax$ とおくと、$f(x)=0\ (0<x<\pi/2)$ を満たす実数解をもつための a の条件を求めればよい。 $f'(x)=\cos x-a$

$a\leqq 0$ のとき、$f'(x)>0\ (0<x<\pi/2)$ より $f(x)$ は単調増加し、$f(0)=0$ より $f(x)>0$

よって、題意に適さない。

$a\geqq 1$ のとき、$f'(x)<0$ より $f(x)$ は減少し、$f(0)=0$ から $f(x)<0$ で適さず。

$0<a<1$ のとき、$f'(x)=0$ を満たす $x\ (0<x<\pi/2)$ を $x=\alpha$ とおくと、増減表は

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\pi/2$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	最大	↘	$1-\dfrac{\pi}{2}a$

表より、$f(x)=0$ なる解をもつ条件は $1-\dfrac{\pi}{2}a<0$ すなわち $\dfrac{2}{\pi}<a<1$

以上より、題意を満たす条件は $\dfrac{2}{\pi}<a<1$

$\sqrt{x} > a\log x\ (x > 0)$が常に成り立つ$a$の範囲

すべての正の数xに対して、不等式$\sqrt{x}>a\log x$が成り立つような定数aの値の範囲を求めよ。

【解2】$\sqrt{x}=t$とおくと、$\sqrt{x}>a\log x$は$t>2a\log t$より

すべての正の数tに対して、不等式$t>2a\log t$ ……① が成り立つような定数aの値の範囲を求めればよい。

$t=1$のとき、①は$1>0$となり成立するから、$t\neq 1$のときを調べる。

[1] $0<t<1$のとき

$$① \iff \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{\log t}<a \qquad ……②$$

$f(t)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{t}{\log t}$とおくと、$f'(t)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\log t-1}{(\log t)^2}<0$より減少し、$\displaystyle\lim_{t\to+0}f(t)=0$

だから　$f(t)<0$　　よって、②がつねに成り立つ条件は　$a\geqq 0$

[2] $t>1$のとき

$$① \iff \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{\log t}>a \qquad ……③$$

$f'(t)=0$より　$t=e$　で$f(t)$の増減表は右のようになる。よって、$f(t)$は$t=e$で最小値$\dfrac{e}{2}$をとる。

t	1	…	e	…
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	極小	↗

③がつねに成り立つ条件は　$a<\dfrac{e}{2}$

以上から、求めるaの値の範囲は　$0\leqq a<\dfrac{e}{2}$

【解3】[1] $a=0$のとき、与不等式は$\sqrt{x}>0\ (x>0)$であるから、成り立つ。

[2] $a<0$のとき、$\displaystyle\lim_{x\to+0}\sqrt{x}=0$で、$\displaystyle\lim_{x\to+0}a\log x=\infty$より条件に適さない。

[3] $a>0$のとき、与不等式は$x=e^2$とき成り立つから

$$e>a\log e^2 \qquad よって \qquad 0<a<\frac{e}{2}$$

逆に、$0<a<\dfrac{e}{2}$のとき、$f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{e}{2}\log x$とおくと

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{e}{2x}=\dfrac{\sqrt{x}-e}{2x}$　より増減表から

$f(x)\geqq 0$

x	0	…	e^2	…
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	最小 0	↗

よって　　$\sqrt{x}\geqq\dfrac{e}{2}\log x>a\log x$

以上から、求めるaの値の範囲は　$0\leqq a<\dfrac{e}{2}$

$f'(x)$が減少するとき，平均値の定理より

平均値の定理を利用して、次のことを証明せよ。

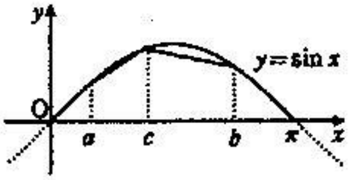
$0<a<c<b<\pi$ のとき $\dfrac{\sin c-\sin a}{c-a}>\dfrac{\sin b-\sin c}{b-c}$

【証明】$f(x)=\sin x$ とおくと　$f'(x)=\cos x$

$f(x)$ は全実数で微分可能であるから、区間 $[a,\ c]$, $[c,\ b]$ においてそれぞれ平均値の定理を用いると

$$\frac{\sin c-\sin a}{c-a}=\cos\alpha,\quad a<\alpha<c$$

$$\frac{\sin b-\sin c}{b-c}=\cos\beta,\quad c<\beta<b$$



となる実数 α, β が存在する。

$0<x<\pi$ において $\cos x$ は単調に減少するから

$$\cos\alpha>\cos\beta$$

よって　$\dfrac{\sin c-\sin a}{c-a}>\dfrac{\sin b-\sin c}{b-c}$

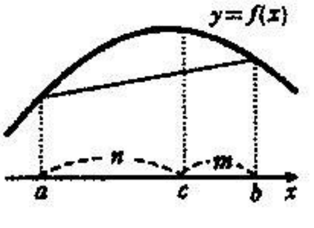
参考　一般に、ある区間において関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が減少するとき、その区間内で

$a<c<b$ のとき　$\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}>\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$

が成り立つ。

上の不等式を $f(c)$ について解くと

$$f(c)>\frac{(b-c)f(a)+(c-a)f(b)}{b-a}$$



$(b-c):(c-a)=m:n$ とおくと

$$f\left(\frac{ma+nb}{m+n}\right)>\frac{mf(a)+nf(b)}{m+n}$$

$(1+\cos\theta)\sin\theta$の最大値

$0<\theta<\pi$ のとき、$f(\theta)=(1+\cos\theta)\sin\theta$ の最大値を求めよ。

【解】 $f'(\theta)=-\sin\theta\cdot\sin\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta=2\cos^2\theta+\cos\theta-1$

$=(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$

$0<\theta<\pi$ で $f'(\theta)=0$ を解くと　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ より　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ の前後で $f'(\theta)$ の符号は + から − に変化するから、$f(\theta)$ は極大かつ最大である。よって、最大値は $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

注 $f(\theta)=\sin\theta+\sin\theta\cos\theta=\sin\theta+\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$

参考 $x=\cos\theta$ とおくと、$y=f(\theta)$ は $y=(x+1)\sqrt{1-x^2}$
これもよく見かける関数である。

例1　半径1の円Oに内接するAB=ACの二等辺三角形ABCのうち、その面積が最大のものはどのような三角形か。

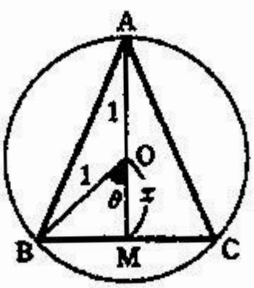
解答 Aから辺BCに垂線AMを下ろすと、AMは辺BCの垂直二等分線で円の中心Oを通る。

よって、BM=MC

OM=x とおき、三角形ABCの面積を S とすると

BM=$\sqrt{1-x^2}$，AM=$1+x$ より

$S=(1+x)\sqrt{1-x^2}$　$(0<x<1)$　後は省略。



$x=\cos\theta$

例2　半径1の円Oに内接する台形ABCDの辺ABが円の直径であるとき、台形ABCDの面積の最大値を求めよ。

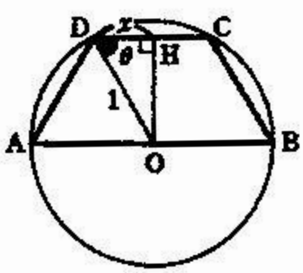
解答 台形ABCDは円Oに内接し、辺ABが円の直径であるから、AB//DCの台形である。

円の中心Oから辺CDに下ろした垂線をOHとすると、Hは辺CDの中点である。

DH=x とおくと　OH=$\sqrt{1-x^2}$

台形ABCDの面積を S とすると

$S=(1+x)\sqrt{1-x^2}$　$(0<x<1)$　後は省略。



$x=\cos\theta$

不等式の証明の仕方

不等式の証明

区間 (a, b) で $f(x)>g(x)$ を証明するのに、$F(x)=f(x)-g(x)$ の増減を調べ、$F(x)>0$ を示す場合には、次の方法がよく用いられる。

(1) $F(x)$ の最小値 >0 を示す。

(2) $F'(x)>0\ (x>a)$ ならば $F(a)\geqq 0$ を示す。

(3) $F'(x)<0\ (x<b)$ ならば $F(b)\geqq 0$ を示す。

《活用例》次の不等式を証明せよ。

(1) $x>0$ のとき $\log(1+x)<\dfrac{1+x}{2}$

(2) $x>0$ のとき $\log(1+x)<x$

【解】(1) $f(x)=\dfrac{1+x}{2}-\log(1+x)$ とおく。

$f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x-1}{2(1+x)}$, $f'(x)=0$ とすると $x=1$

$f(x)\ (x>0)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	$1-\log 2$	↗

$1-\log 2>0$ であるから

$x>0$ のとき $f(x)\geqq f(1)>0$

よって $\log(1+x)<\dfrac{1+x}{2}$

(2) $F(x)=x-\log(1+x)$ とおくと $F'(x)=1-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x}{1+x}>0$ ($x>0$ より)

よって、$F(x)$ は $x\geqq 0$ で単調増加で、$F(0)=0$ だから

$x>0$ ならば $F(x)>F(0)=0$

ゆえに $\log(1+x)<x$

極大値の数列と無限級数和

関数 $y=\frac{\cos x}{e^x}\ (x>0)$ の極小値を，大きい方から順に

$$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$$

とする.

(1)　数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ.

(2)　無限級数の和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ.

【解】

(1)　$f(x)=\frac{\cos x}{e^x}$ とおくと $f(x)=e^{-x}\cos x$

$$f'(x)=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x=-\sqrt{2}e^{-x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$f'(x)=0$のとき $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0, \therefore x+\frac{\pi}{4}=n\pi$ より $x=\frac{4n-1}{4}\pi$ (nは自然数)

増減表は

x	0		$\frac{3}{4}\pi$		$\frac{7}{4}\pi$		$\frac{11}{4}\pi$		$\frac{15}{4}\pi$	$\cdots\cdots$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi}}$	↗		↘	$-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{11}{4}\pi}}$	↗		↘
			極小		極大		極小		極大	

よって $a_n=f\left(\frac{8n-5}{4}\pi\right)=\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{8n-5}{4}\pi}}=\sqrt{2}e^{-\frac{8n-5}{4}\pi}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$は初項$-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3}{4}\pi}$，公比$e^{-2\pi}$ $(0<e^{-2\pi}<1)$ の

無限等比級数和なので，収束し

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3}{4}\pi}}{1-e^{-2\pi}}=-\frac{e^{\frac{5}{4}\pi}}{\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)}$$

4次関数と変曲点

関数$y=f(x)$はxの4次関数で，2点(2,16), (0,0)がそのグラフの変曲点であり，かつ，点(2,16)における接線がx軸に平行であるという．$f(x)$を求めよ．

【解1】$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\ (a\neq 0)$ とおく．

$$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$$

$$f''(x)=12ax^2+6bx+2c$$

2点$(2,16)$, $(0,0)$が変曲点であるから

$$f(2)=16,\ f(0)=0,\ f''(2)=0,\ f''(0)=0$$

$f(0)=0$から $e=0$ また、$f''(0)=0$から $c=0$

これを $f(2)=16$, $f''(2)=0$ に代入すると

$$16a+8b+2d=16$$

すなわち $8a+4b+d=8$ …… ①

$$48a+12b=0$$

すなわち $4a+b=0$ …… ②

また、点$(2,16)$における接線がx軸に平行であるから $f'(2)=0$

ゆえに $32a+12b+d=0$ …… ③

①, ②, ③から $a=1$, $b=-4$, $d=16$

よって $f(x)=x^4-4x^3+16x$

このとき、$f''(x)=12x(x-2)$となり、明らかに2点$(0,0)$, $(2,16)$は変曲点である。

【解2】$y=f(x)$のグラフの変曲点が$x=0$, $x=2$であるから

$f''(x)=12ax(x-2)$ とおける。

よって $f'(x)=\int f''(x)dx=4ax^3-12ax^2+C$ （Cは定数）

$f'(2)=0$ より $32a-48a+C=0$ ∴ $C=16a$

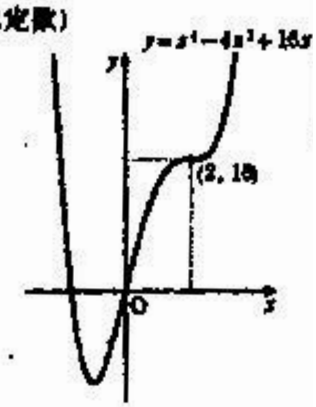
$f(x)=\int f'(x)dx=ax^4-4ax^3+16ax+D$ （Dは定数）

$f(0)=0$, $f(2)=16$ より

$D=0$, $16=16a-32a+32a+D$

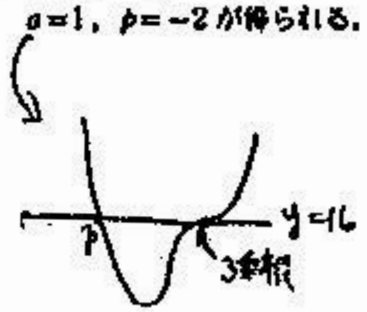
∴ $a=1$

したがって $f(x)=x^4-4x^3+16x$



別 $y=a(x-p)(x-2)^3+16$ とおけ，$y(0)=0$, $y''(0)=0$ より

$a=1$, $p=-2$ が得られる。



曲線$y = \log(x+a)/(b-x)$が変曲点に関して対称

$a>0$, $b>0$ とし、$f(x)=\log\dfrac{x+a}{b-x}$ とする。曲線 $y=f(x)$ はその変曲点に関して点対称であることを示せ。

【解】真数は正であるから $\dfrac{x+a}{b-x}>0$ これと $a>0$, $b>0$ から $-a<x<b$

このとき $y=\log(x+a)-\log(b-x)$

よって $y'=\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{1}{b-x}=\dfrac{a+b}{(x+a)(b-x)}>0$

また $y''=-\dfrac{1}{(x+a)^2}+\dfrac{1}{(b-x)^2}=\dfrac{(a+b)(2x+a-b)}{(x+a)^2(b-x)^2}$

$p=\dfrac{b-a}{2}$ とおく。$y''=0$ とすると $x=p$ であり

$-a<x<p$ で $y''<0$, $p<x<b$ で $y''>0$

$x=p$ のとき $y=0$ であり，点 $(p, 0)$ が変曲点である。

$p=\dfrac{b+(-a)}{2}$ であるから，$p-(-a)=b-p$ に着目して

曲線 $y=f(x)$ を x 軸方向に $-p$ だけ平行移動すると

$$y=\log(x+p+a)-\log(b-x-p)$$

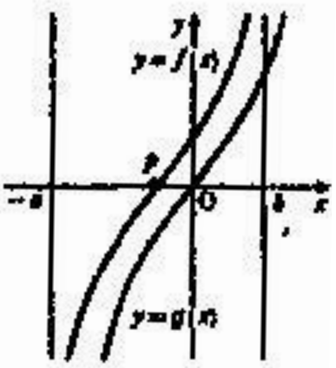
$$=\log\left(x+\frac{a+b}{2}\right)-\log\left(-x+\frac{a+b}{2}\right)$$

この曲線の方程式を $y=g(x)$ とする。

$g(-x)=-g(x)$ が成り立つから、曲線 $y=g(x)$ は原点に関して対称である。

したがって、曲線 $y=f(x)$ は変曲点 $(p, 0)$ に関して対称である。

$b<a$ のときの図



方程式の実数解の個数

方程式 $f(x)-ag(x)=0$ (aは定数) の実数解の個数を調べる方法

(1) $F(x)=f(x)-ag(x)$ とおき、曲線 $y=F(x)$ と x 軸との共有点の個数を調べる。

(2) $f(x)=ag(x)$ より、2曲線 $y=f(x)$ と $y=ag(x)$ との共有点の個数を調べる。

(3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}=a$ $(g(x)\neq 0)$ と変形し、曲線 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ と直線 $y=a$ との共有点の個数を調べる。

《活用例》方程式 $e^x-ax=0$ (aは定数) の実数解の個数を調べよ。

【解】(1) $F(x)=e^x-ax$ とおくと $F'(x)=e^x-a$, $F''(x)=e^x$

$a<0$ のとき、$F'(x)>0$ より $F(x)$は単調増加する。しかも $\lim_{x\to-\infty} F(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} F(x)=\infty$ より、中間値の定理からただ1つの解をもつ。

$a=0$ のとき、$F(x)=e^x>0$ より解なし。

$a>0$ のとき、$F'(x)=0$ より $x=\log a$ で極小かつ最小である。

最小値は $F(\log a)=a(1-\log a)$ で $\lim_{x\to\pm\infty} F(x)=\infty$ より

$a>e$ ならば $F(\log a)<0$ より 解は 2個

$a=e$ ならば $F(\log a)=0$ より 解は 1個

$a<e$ ならば $F(\log a)>0$ より 解は 0個

以上より、$a>e$ のとき 2個 ; $a=e$, $a<0$ のとき 1個 ;

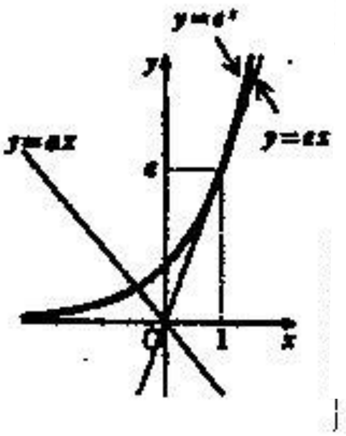
$0\leqq a<e$ のとき 0個

(2) $e^x-ax=0 \iff e^x=ax$

$y=e^x$ と $y=ax$ のグラフが $x=t$ で接するとき、

$\dfrac{e^t}{t}=(e^x)'_{x=t}$ より $t=1$ このとき $a=e$

曲線 $y=e^x$ と直線 $y=ax$ との共有点の個数はグラフから調べて、答えを得る。

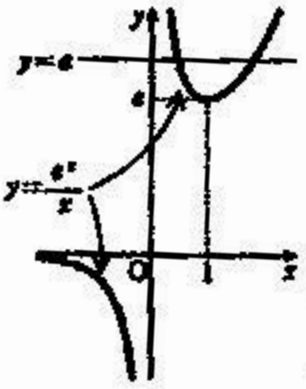


(3) $x \neq 0$ より $e^x = ax \iff \dfrac{e^x}{x} = a$

$y = \dfrac{e^x}{x}$ から $y' = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$		$-$	0	$+$
y	$0 \searrow -\infty$		$\infty \searrow$	e	$\nearrow \infty$



以上より、グラフから $y=e^x$ と $y=a$ の共有点の個数を調べて、答えを得る。

極小値の個数

a は実数とする。関数 $f(x)=2x^2\log x-x^2-ax(x-2)$ の $x>1$ における極小値の個数を求めよ。

【解2】　$f(x)=2x^2\log x-x^2-ax(x-2)$ $(x>1)$

より　$f'(x)=4x\log x+2x-2x-a(2x-2)=2\{2x\log x-a(x-1)\}$

$f(x)$ の極小値の個数は、$f'(x)$ の符号が負から正に変化する回数と同じである。

$$f''(x)=2\left(2\log x+2x\cdot\frac{1}{x}-a\right)=2\{2\log x-(a-2)\}$$

(i)　$a-2\leqq 0$ のとき

$x>1$ では $f''(x)>0$　よって、$f'(x)$ は増加し、$f'(1)=0$ とから　$f'(x)>0$

ゆえに、$f(x)$ は $x>1$ では増加し、極値をもたない。

(ii)　$a-2>0$ のとき

$f'(x)$ の増減は右の表のようであり、

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}2x\left\{2\log x-2a\left(1-\frac{1}{x}\right)\right\}=\infty$$

x	1	$\cdots$	$e^{\frac{a-2}{2}}$	$\cdots$
$f''(x)$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	0	↘	負	↗

よって、$x>1$ において $f'(x)$ の符号は負から正に1回だけ変化する。

以上により、求める個数は　　$a\leqq 2$ のとき 0個，$a>2$ のとき 1個

参考　$f'(x)=2(x-1)\left(\dfrac{2x\log x}{x-1}-a\right)$　……①　ここで、$g(x)=\dfrac{2x\log x}{x-1}$ $(x>1)$

とおくと　$g'(x)=\dfrac{2(x-1-\log x)}{(x-1)^2}$　　さらに、$h(x)=x-1-\log x$ とおくと

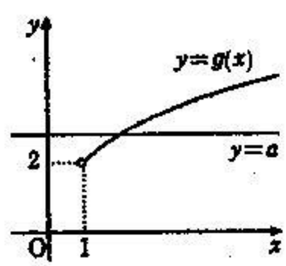
$h'(x)=\dfrac{x-1}{x}>0$ であるから、$h(1)=0$ とから

$x>1$ において　$h(x)>0$

∴　　$g'(x)>0$　よって、$x>1$ において $g(x)$ は増加する。

また、$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2\log x}{1-1/x}=\infty$，

$\displaystyle\lim_{x\to1+0}g(x)=\lim_{h\to+0}2(1+h)\frac{\log(1+h)}{h}=2$　($x=1+h$ とおく)



以上より、曲線 $y=g(x)$ の概形は右図のようになる。

①より、$g(x)<a$ のとき　$f'(x)<0$，$g(x)>a$ のとき　$f'(x)>0$

であるから、$f(x)$ の $x>1$ における極小値の個数は、曲線 $y=g(x)$ と直線 $y=a$ の共有点で、$y=g(x)$ が $y=a$ の左下から右上に向かうような点の個数に等しい。

したがって、求める個数は　　$a\leqq 2$ のとき 0個，$a>2$ のとき 1個

極大値，極小値を1個ずつもつ条件

a は定数とし、$0<x<2\pi$ を定義域とする関数 $f(x)=ax+e^{-x}\sin x$ について次の問に答えよ。

(1) $g(x)=f'(x)$ の極値およびそのときの x の値を求めよ。

(2) $f(x)$ が極大値、極小値をちょうど1個ずつもつとき、a のとり得る値の範囲を求めよ。

【解】(1) $f(x)=ax+e^{-x}\sin x$ のとき　$f'(x)=a-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$

$\therefore$　$g(x)=a+e^{-x}(\cos x-\sin x)$

$$g'(x)=-e^{-x}(\cos x-\sin x)+e^{-x}(-\sin x-\cos x)$$
$$=-2e^{-x}\cos x$$

$g(x)$ の増減は右のようになり、$g(x)$ の極値は

$x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき　極小値　$a-e^{-\frac{\pi}{2}}$

$x=\dfrac{3\pi}{2}$ のとき　極大値　$a+e^{-\frac{3\pi}{2}}$

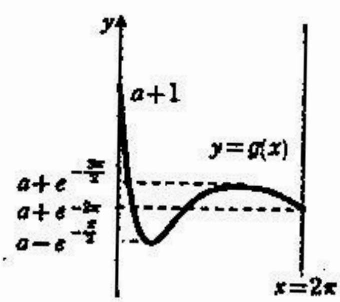
x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↘	極小	↗	極大	↘	

(2) $f(x)$ が極値を2つもつための条件は $g(x)$ の符号の変わり目が2つあることである。

$g(0)=a+1$，$g(2\pi)=a+e^{-2\pi}$ および $g(x)$ の2つの極値の大小関係は、右のグラフのように

極小値$<g(2\pi)<$極大値$<g(0)$　　……☆

となっている。



したがって、$g(x)$ が符号を2回変えるための条件は

極小値$<0\leqq g(2\pi)$

$\therefore$　$a-e^{-\frac{\pi}{2}}<0\leqq a+e^{-2\pi}$

$\therefore$　$-e^{-2\pi}\leqq a<e^{-\frac{\pi}{2}}$

注　(2)で☆を述べないで単純に条件を

$g(0)=a+1\geqq 0$，$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a-e^{-\frac{\pi}{2}}<0$，$g\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=a+e^{-\frac{3\pi}{2}}>0$，$g(2\pi)=a+e^{-2\pi}\geqq 0$

とは断定できない。

$g(0)=a+1\leqq 0$，$g\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=a+e^{-\frac{3\pi}{2}}>0$，$g(2\pi)=a+e^{-2\pi}<0$ の場合を調べる。

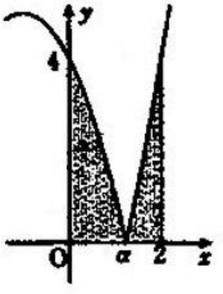
実際は同時に満たす a は存在しない。

絶対値を含む関数の定積分

定積分 $\int_0^2 |x^2+2x-4|\,dx$ を求めよ。

【解】 $x^2+2x-4=0$ とすると　$x=-1\pm\sqrt{5}$

$\alpha=-1+\sqrt{5}$ とおくと　$\alpha^2+2\alpha-4=0$，$0<\alpha<2$



$0\leqq x\leqq 2$ では　$|x^2+2x-4|=\begin{cases}-(x^2+2x-4) & (0\leqq x\leqq\alpha)\\ x^2+2x-4 & (\alpha\leqq x\leqq 2)\end{cases}$

したがって

$$\int_0^2 |x^2+2x-4|\,dx=-\int_0^\alpha (x^2+2x-4)\,dx+\int_\alpha^2 (x^2+2x-4)\,dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}+x^2-4x\right]_0^\alpha+\left[\frac{x^3}{3}+x^2-4x\right]_\alpha^2$$

$$=-2\left(\frac{\alpha^3}{3}+\alpha^2-4\alpha\right)+\left(\frac{8}{3}+4-8\right)$$

$$=-\frac{2}{3}(\alpha^3+3\alpha^2-12\alpha+2)$$

また　$x^3+3x^2-12x+2=(x^2+2x-4)(x+1)-10x+6$

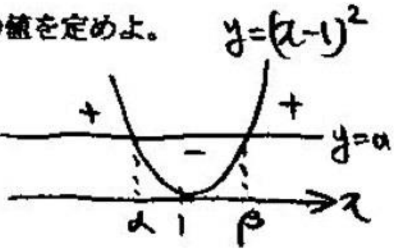
であるから　$\alpha^3+3\alpha^2-12\alpha+2=0-10(-1+\sqrt{5})+6$

$$=16-10\sqrt{5}$$

よって　$\int_0^2 |x^2+2x-4|\,dx=-\frac{2}{3}(16-10\sqrt{5})=\underline{\frac{-32+20\sqrt{5}}{3}}$

極値問題 (基礎)　(極大値＝0)

関数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x-1}$ の極大値が0になるように、a の値を定めよ。



【解】 $f'(x)=1-\dfrac{a}{(x-1)^2}=\dfrac{(x-1)^2-a}{(x-1)^2}$

$f(x)$ が極大値をもつから、$(x-1)^2-a=0$ は異なる2つの実数解 α, β $(\alpha<\beta)$ をもち、$f'(x)$ の符号は $x=\alpha$ の前後で $+$ から $-$ に変わる。このとき、$f(x)$ は極大となる。

よって　$f(\alpha)=\alpha+\dfrac{a}{\alpha-1}=0$　$(\alpha<1<\beta)$

また、$(\alpha-1)^2=a$ とから a を消去して

$\alpha+\alpha-1=0$　　∴　$\alpha=\dfrac{1}{2}$　(α は存在し、$\alpha<1$ を満たす)

このとき　$a=\dfrac{1}{4}$

【別解】 $f'(x)=1-\dfrac{a}{(x-1)^2}=\dfrac{(x-1)^2-a}{(x-1)^2}$ において

$a\leqq 0$ のとき　$f'(x)>0$ より $f(x)$ は極値をもたない。

$a>0$ のとき　$f'(x)=0$ を解くと　$x=1\pm\sqrt{a}$

$f(x)$ の増減は下の表のようになる。

x	$\cdots$	$1-\sqrt{a}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$1+\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	/	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	/	↘	極小	↗

増減表より、極大値 $f(1-\sqrt{a})=1-\sqrt{a}-\dfrac{a}{\sqrt{a}}=1-2\sqrt{a}$

これが0に等しいから

$1-2\sqrt{a}=0$　　∴　$a=\dfrac{1}{4}$

行列

- 繰り返し法
- ケーリー・ハミルトンの定理の誤用
- 固有ベクトルと1次独立
- Aの固有値と固有ベクトル，対角化
- 三角化定理
- 直和分解
- 行列が交換可能な条件
- $y = mx$に関する対称移動が1次変換の証明，その行列
- 2つの固有ベクトルが垂直ならば対称行列
- 転置行列の性質
- 冪零行列と1次変換
- 冪等写像
- 正射影
- **原点以外の不動点を持つ1次変換と不動直線**
- トレース・行列式の性質

など

Aのn乗$=O$が成り立つ条件

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$で、$n\geqq 2$なる整数$n$に対して

$$A^n=O \iff a+d=0,\ ad-bc=0$$

であることを証明せよ。

【証明】$A^n=O$ならば　行列式の性質より　$|A^n|=|A|^n=0$　　よって　$|A|=0$

$|O|=0$

すなわち　　$ad-bc=0$

このとき、ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2-(a+d)A=O$$

$$\therefore\quad A^2=(a+d)A$$

この式を繰り返し用いると

$$A^n=(a+d)A^{n-1}=(a+d)^2A^{n-2}=\cdots=(a+d)^{n-1}A=O$$

よって　　$A=O$ または $a+d=0$

いずれも　$a+d=0$

逆に、$a+d=0$, $ad-bc=0$ ならば、ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2=O$$

よって、$n\geqq 2$のとき $A^n=A^{n-2}A^2=O$　が成り立つ。

注　$A^n=O$ で $ad-bc\neq 0$ とすると A^{-1} が存在するから、左から $(A^{-1})^n$ を掛けると $E=O$ となるから、矛盾する。　よって、$ad-bc=0$

参考　$A^n=O$ $(n\geqq 2)$ に対角化、三角化を用いて解くと、それぞれ

$$A=k\begin{pmatrix} -pr & p^2 \\ -r^2 & pr \end{pmatrix},\ O$$

「$A^2=O \Leftrightarrow a+d=0$かつ$ad-bc=0$」の証明

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について、次のことを証明せよ。

$$A^2=O \iff a+d=0 \text{ かつ } ad-bc=0$$

【証1】行列 A について、ハミルトン・ケーリーの定理から

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ ……① が成り立つ。

$A^2=O$ ならば

①から $(a+d)A=(ad-bc)E$ ……②

$a+d \neq 0$ と仮定すると、②から $A=kE\left(k=\dfrac{ad-bc}{a+d} \text{ とする}\right)$

よって、$A^2=k^2E$ より $A^2=O$ とで $k^2E=O$

$E \neq O$ であるから $k=0$

ゆえに $A=O$ これは $a+d \neq 0$ に反する。

よって $a+d=0$ ゆえに、②から $(ad-bc)E=O$

$E \neq O$ であるから $ad-bc=0$

逆に、$a+d=0$ かつ $ad-bc=0$ ならば、①から $A^2=O$

【証2】$A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}=O$ より

$a^2+bc=0$ ……① $b(a+d)=0$ ……②

$c(a+d)=0$ ……③ $bc+d^2=0$ ……④

②, ③で $a+d \neq 0$ とすると $b=c=0$ よって ①, ④とから $a=0$, $d=0$

このとき、$A=O$ となり、$a+d=0$ これは $a+d \neq 0$ に反する。

よって $a+d=0$

したがって、①, ④はともに $ad-bc=0$ となる。

逆に、$a+d=0$, $ad-bc=0$ ならば①～④は成り立つから $A^2=O$

参考 行列式の性質 $|AB|=|A||B|$ を用いると

$A^2=O$ のとき、$|A^2|=|A|^2=0$ より $|A|=0$ よって $ad-bc=0$

$A^2=O$ のとき、両辺のトレースを考えると

$$(a^2+bc)+(bc+d^2)=a^2+2bc+d^2=0$$

ここで、$ad-bc=0$ より $\mathrm{tr}\,(A^2)=a^2+2ad+d^2=(a+d)^2=0$

$$\therefore \quad a+d=0$$

$E \pm kA$の少なくとも一方は逆行列をもつことの証明

kが実数、2次の正方行列Aが逆行列をもたないとき、$E+kA$，$E-kA$の少なくとも一方は逆行列をもつことを証明せよ。

【証1】$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$とし、$\Delta(A)=ad-bc$とする。

Aが逆行列をもたないから　$\Delta(A)=ad-bc=0$

また　$E+kA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+ka & kb \\ kc & 1+kd \end{pmatrix}$

よって　$\Delta(E+kA)=(1+ka)(1+kd)-kb\cdot kc=1+k(a+d)+k^2(ad-bc)$

$=1+k(a+d)$

同様にして　$\Delta(E-kA)=1-k(a+d)$

ゆえに、$\Delta(E+kA)+\Delta(E-kA)=2$であるから、$\Delta(E+kA)$，$\Delta(E-kA)$の少なくとも一方は0でない。

よって、$E+kA$，$E-kA$の少なくとも一方は逆行列をもつ。

【証2】「$\Delta(A)=0$かつ$\Delta(E+kA)=0$ならば　$\Delta(E-kA)\neq0$」を示せばよい。

$\Delta(A)=ad-bc=0$より

$\Delta(E+kA)=(1+ka)(1+kd)-kb\cdot kc=1+k(a+d)+k^2(ad-bc)$

$=1+k(a+d)=0$

$\therefore\quad k(a+d)=-1$

よって，$\Delta(E-kA)=1-k(a+d)=2\neq0$

【証3】命題の対偶を証明する。

$E+kA$，$E-kA$がともに逆行列をもたないとき

$\Delta(E+kA)=1+k(a+d)+k^2(ad-bc)=0$　……①

かつ　$\Delta(E-kA)=1-k(a+d)+k^2(ad-bc)=0$　……②

{①+②}÷2より

$1+k^2(ad-bc)=0$

よって　$k^2(ad-bc)=-1\ (\neq0)$

ゆえに　$\Delta(A)=ad-bc\neq0$

したがって、Aは逆行列をも~~たない~~つ。

2次の正方行列が満たす等式からn乗の決定

A を2次の正方行列とする。また、$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ は零でないベクトルとし、次の関係式を満足している。

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

次の問に答えよ。

(1) $ad \neq bc$ を示せ。

(2) n を正の整数とするとき、A^n を a, b, c, d, n を用いて表せ。

【解】(1) $ad-bc=0$ と仮定すると、$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $(k \neq 0)$ と表すことができる。

$kA\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=A\left(k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)=A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$,　一方　$kA\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=k\cdot 2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

ゆえに　$3\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから、これは矛盾である。

よって　$ad-bc\neq 0$

ad−bc=0 のとき
ad=bc より
a:b=c:d
(⇔ a:c=b:d) なので
$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
(aとd, bとcは同時に0とならない)

(2) (1)から、$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ は逆行列をもつ。

また、条件から　$A\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\therefore\quad A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1}$$

よって

$$A^n=\left\{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1}\right\}^n$$

$$=\left\{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1}\right\}\times\left\{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1}\right\}\times\cdots\cdots$$

$$\times\left\{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1}\right\}$$

$$=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} 2^n a & (-1)^n c \\ 2^n b & (-1)^n d \end{pmatrix}\times\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} 2^n ad-(-1)^n bc & \{(-1)^n-2^n\}ac \\ \{2^n-(-1)^n\}bd & (-1)^n ad-2^n bc \end{pmatrix}$$

繰り返し法

行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$ について

(1) $A\begin{pmatrix}2\\ x\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}2\\ x\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}1\\ y\end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix}1\\ y\end{pmatrix}$ を満たす α, β, x, y を求めよ。ただし、$\alpha<\beta$ とする。

(2) (1)で求めた x, y について $A^n\begin{pmatrix}2\\ x\end{pmatrix}$, $A^n\begin{pmatrix}1\\ y\end{pmatrix}$ を求めよ。ただし、n は自然数とする。

(3) A^n を求めよ。

【解】(1) $A\begin{pmatrix}2\\ x\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}2\\ x\end{pmatrix}$ より $\begin{cases}2+2x=2\alpha\\ -2+4x=\alpha x\end{cases}$ $\therefore$ $(\alpha,\ x)=(3,\ 2),\ (2,\ 1)$

$A\begin{pmatrix}1\\ y\end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix}1\\ y\end{pmatrix}$ より $\begin{cases}1+2y=\beta\\ -1+4y=\beta y\end{cases}$ $\therefore$ $(\beta,\ y)=(3,\ 1),\ \left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$

$\alpha<\beta$ より

$\alpha=2,\ \beta=3,\ x=1,\ y=1$

(2) $A\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ より、この関係をそれぞれ繰り返し用いて

$$A^n\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=2^n\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n+1}\\ 2^n\end{pmatrix},\quad A^n\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=3^n\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^n\\ 3^n\end{pmatrix}$$

(3) (2)より $A^n\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n+1} & 3^n\\ 2^n & 3^n\end{pmatrix}$

$$\therefore\quad A^n=\begin{pmatrix}2^{n+1} & 3^n\\ 2^n & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2^{n+1}-3^n & -2^{n+1}+2\cdot 3^n\\ 2^n-3^n & -2^n+2\cdot 3^n\end{pmatrix}.$$

行列Aについて$a+d=2k, ad-bc=k^2$のときのA^n

行列 A, E, O を $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。ここで、a, b, c, d は実数で、ある実数 k に対して、$a+d=2k$, $ad-bc=k^2$ を満たしている。

(1) $(A-kE)^2=O$ を示せ。

(2) $B=A-kE$ とおく。自然数 n に対して、$A^n=nk^{n-1}B+k^nE$ が成り立つことを示せ。

(3) $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき、A^n (n は自然数) を求めよ。

【解】(1) $a+d=2k$, $ad-bc=k^2$ から

$$(A-kE)^2=A^2-2kA+k^2E=A^2-(a+d)A+(ad-bc)E$$
$$=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-(a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+(ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$

(2) $B=A-kE$ から、(1) により　$B^2=(A-kE)^2=O$

ゆえに　　$B^n=O$ $(n=2, 3, 4, \cdots\cdots)$

よって、$A=kE+B$ から，$n\geqq 2$ のとき

$$A^n=(kE+B)^n=(kE)^n+{}_nC_1(kE)^{n-1}B=k^nE+nk^{n-1}B$$

これは、$n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$A^n=nk^{n-1}B+k^nE$

(3) $a=3$, $b=-1$, $c=1$, $d=1$ とすると　$a+d=4$, $ad-bc=4$

ここで、$k=2$ とすると、$a+d=2k$, $ad-bc=k^2$ を満たす。

よって、$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して、$B=A-2E$ とおくと、(2) から

$$A^n=n\cdot 2^{n-1}B+2^nE \text{ (n は自然数)}$$

が成り立つ。

$B=A-2E=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ であるから

$$A^n=n\cdot 2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}+2^n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n\cdot 2^{n-1}+2^n & -n\cdot 2^{n-1} \\ n\cdot 2^{n-1} & -n\cdot 2^{n-1}+2^n \end{pmatrix}$$

行列Aのn乗をAとEで表す問題1

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$において、$a+d=6$, $ad-bc=8$とする。

A^nをAとEで表したい。ただし、nは自然数、Eは単位行列とする。

$A(A-pE)=q(A-pE)$を満たすp, qに対して、

$A^n(A-pE)=$ ア $\boxed{}(A-pE)$

が成り立つ。また、このp, qの値の組(p, q)は イ $\boxed{}$ と ウ $\boxed{}$ の2組ある。

したがって、$A^n=2^{n-1}($エ $\boxed{})A+2^{n+1}($オ $\boxed{})E$である。

解答 (ア) q^n　(イ), (ウ) $(2, 4)$, $(4, 2)$　(エ) 2^n-1　(オ) $1-2^{n-1}$

【解】$A(A-pE)=q(A-pE)$ ……①　から

$$A^n(A-pE)=A^{n-1}A(A-pE)=qA^{n-1}(A-pE)$$
$$=\cdots\cdots=q^{n-1}A(A-pE)=q^n(A-pE)$$

よって、$A^n(A-pE)=q^n(A-pE)$　が成り立つ。

また、①から　$A^2-pA=qA-pqE$

ゆえに　$A^2=(p+q)A-pqE$ ……②

Oを2次の零行列とすると、Aについて、ハミルトン・ケーリーの定理から

$$A^2-6A+8E=O$$

よって　$A^2=6A-8E$ ……③

②, ③から　$(p+q)A-pqE=6A-8E$

ゆえに　$(p+q-6)A=(pq-8)E$ ……④

ここで、$A=kE$ (kは実数)とすると

$$b=c=0,\ a=d$$

$ad-bc=8$であるから　$a^2=8$　よって　$a=d=\pm2\sqrt{2}$

これは$a+d=6$と矛盾する。

したがって　$A\neq kE$ ……⑤

④, ⑤から　$p+q-6=0$, $pq-8=0$

ゆえに　$(p, q)=(2, 4)$, $(4, 2)$

よって　$A^n(A-pE)=q^n(A-pE)$から

$A^n(A-2E)=4^n(A-2E)$ ……⑥

$A^n(A-4E)=2^n(A-4E)$ ……⑦

⑥−⑦から

$$2A^n=(4^n-2^n)A+(4\cdot2^n-2\cdot4^n)E=2^n(2^n-1)A+2^{n+2}(1-2^{n-1})E$$

ゆえに　$A^n=2^{n-1}(2^n-1)A+2^{n+1}(1-2^{n-1})E$

ケーリー・ハミルトンの定理の誤用

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ が行列方程式 $A^2-A-2E=O$ ……① を満たしている。

このとき、$a+d$，$ad-bc$ の値をそれぞれ求めよ。

注意　解答するとき、ケーリー・ハミルトンの定理の等式

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O \qquad \cdots\cdots②$$

と与式①の係数を比較して　$a+d=1$，$ad-bc=-2$ とするのは、一般には「マチガイ」である。

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ に対して、$a+d=1$，$ad-bc=-2$ ならば　$A^2-A-2E=O$ であるが、その逆は成り立たないのである。

【解】 $A^2-A-2E=O$ ……①

ケーリー・ハミルトンの定理 $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ ……②

①－②より

$$\{(a+d)-1\}A-\{(ad-bc)+2\}E=O$$

$a+d=1$ のとき

$$\{(ad-bc)+2\}E=O$$

より、$(ad-bc)+2=0$ が必要である。

逆にこのとき、ケーリー・ハミルトンの定理より $A^2-A-2E=O$ となるから A は与えられた条件のもとで②を満たす。

$a+d\neq 1$ のとき　$A=\dfrac{(ad-bc)+2}{(a+d)-1}E$ より $A=kE$ と書けて、これを①に代入すると

$$② \iff (k^2-k-2)E=O$$
$$\iff k^2-k-2=0$$
$$\iff k=2,\ -1$$

よって、$A=2E$，$-E$ も①を満たしている。

以上より

$$(a+d,\ ad-bc)=(1,\ -2),\ (4,\ 4),\ (-2,\ 1)$$

次に,行列方程式を成分表示して,連立方程式の同値関係をくずさずに解答してみる.

【別解】$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2-A-2E=O$ をみたすから

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a^2+bc-a-2 & ab+bd-b \\ ac+cd-c & bc+d^2-d-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\iff$ $a^2+bc-a-2=0$ ……① $b(a+d-1)=0$ ……②

$c(a+d-1)=0$ ……③ $bc+d^2-d-2=0$ ……~~②~~④

のすべてが成り立つ。

②, ③に注意して $a+d-1=0$ と $a+d-1\neq 0$ の場合に分けて調べる。

(I) $a+d=1$ のとき ②, ③は成り立ち、

①は $a=1-d$ より $a(1-d)+bc-a-2=0$

$\therefore$ $ad-bc=-2$

④も $d=1-a$ より $bc+d(1-a)-d-2=0$

$\therefore$ $ad-bc=-2$

①, ④とも $ad-bc=-2$ と書き換えられる。

(II) $a+d\neq 1$ のとき

② $\iff$ $b=0$ ③ $\iff$ $c=0$

②, ③が成り立つとき

①は $a^2-a-2=0$ $\therefore$ $a=2,\ -1$

④は $d^2-d-2=0$ $\therefore$ $d=2,\ -1$

$a+d\neq 1$ であるから $(a,\ d)=(2,\ 2),\ (-1,\ -1)$ の2組しか成り立たない。

逆に、$a+d=1,\ ad-bc=-2$ のとき①~④は成り立ち、

$(a,\ b,\ c,\ d)=(2,\ 0,\ 0,\ 2),\ (-1,\ 0,\ 0,\ -1)$ のときも①~④は成り立つ。

以上より

$(a+d,\ ad-bc)=(1,\ -2),\ (4,\ 4),\ (-2,\ 1)$

参考 $(A+E)(A-2E)=O$

$\iff$ $A+E=O$ または $A-2E=O$ または $|A+E|=|A-2E|=0$

第3式について

もし、$A+E\neq O$ かつ $A-2E\neq O$ で $|A+E|\neq 0$ とすると $(A+E)(A-2E)=O$ の左から $(A+E)^{-1}$ を掛けると $A-2E=O$ となり仮定に反する。

よって、$|A+E|=0$ また、$|A-2E|=0$ も同様に示される。

固有ベクトルと1次独立

異なる固有値に対応する固有ベクトルは1次独立であることを証明せよ。

なお、2つのベクトル $\vec{u}(\neq\vec{0})$, $\vec{v}(\neq\vec{0})$ が1次独立であるとは

「$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{0} \implies \alpha=\beta=0$」

が成り立つことである。

【証1】行列 A の固有値 k, l $(k\neq l)$ に対応する固有ベクトルをそれぞれ $\vec{u}$, $\vec{v}$ とする。

いま　$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{0}$　……①　が成り立つとすると

①の両辺の左から A を掛けると

$$\alpha A\vec{u}+\beta A\vec{v}=A\vec{0}$$

$$\therefore\quad \alpha k\vec{u}+\beta l\vec{v}=\vec{0}\quad\cdots\cdots ②$$

①×k－②より

$$\beta(k-l)\vec{v}=\vec{0}$$

条件より $l-k\neq 0$, $\vec{v}\neq\vec{0}$ だから　$\beta=0$

①に代入して

$$\alpha=0$$

以上より、$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{0}$ ならば　$\alpha=\beta=0$ が成り立つから $\vec{u}$, $\vec{v}$ は1次独立である。

【証2】行列 A の固有値 k, l $(k\neq l)$ に対応する固有ベクトルをそれぞれ $\vec{u}$, $\vec{v}$ とする。

$\vec{u}/\!/\vec{v}$ であるとすると、$\vec{v}=t\vec{u}$ (t は実数) と表される。

よって、$A\vec{v}=A(t\vec{u})=tA\vec{u}=t\cdot k\vec{u}=k\cdot t\vec{u}=k\vec{v}$

これは、$\vec{v}$ が k に対する固有ベクトルとなることを示す。

よって、$k=l$ となり矛盾する。

したがって、$k\neq l$ ならば　$\vec{u}\not\parallel\vec{v}$

注　このことから、異なる実数の固有値に対応する固有ベクトルを列ベクトルとする行列 $P=(\vec{u}\ \ \vec{v})$ は逆行列をもつことがわかる。

Aの固有値と固有ベクトル，対角化

$A=\begin{pmatrix}10 & -18\\ 3 & -5\end{pmatrix}$とする。次の問に答えよ。

(1) $A\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}$を満たす$k$の2つの値$k_1$，$k_2$ ($k_1<k_2$) を求めよ。

(2) k_1，k_2に対して、$A\begin{pmatrix}x_1\\1\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}x_1\\1\end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix}x_2\\1\end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix}x_2\\1\end{pmatrix}$を満たす$x_1$，$x_2$を求めよ。

(3) $X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$とおき，$X^{-1}AX$を求めよ。

【解】(1) $\begin{pmatrix}10 & -18\\ 3 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}$ すなわち $\begin{pmatrix}k-10 & 18\\ -3 & k+5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$が成り立つ条件は，

$\begin{pmatrix}k-10 & 18\\ -3 & k+5\end{pmatrix}$が逆行列をもたないことである。

ゆえに　$(k-10)(k+5)-18(-3)=0$　　よって　$(k-1)(k-4)=0$から　$k=1, 4$

$k_1<k_2$から　$k_1=1$，$k_2=4$

(2) $\begin{pmatrix}k_1-10 & 18\\ -3 & k_1+5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$から　$\begin{pmatrix}-9 & 18\\ -3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$-x_1+2=0$　　ゆえに　$x_1=2$

同様に　$\begin{pmatrix}k_2-10 & 18\\ -3 & k_2+5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$から　$\begin{pmatrix}-6 & 18\\ -3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$-x_2+3=0$　　ゆえに　$x_2=3$

(3) $X=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$から　$X^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

$X^{-1}AX=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10 & -18\\ 3 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

参考　$(X^{-1}AX)^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}^n$であるから　$X^{-1}A^nX=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4^n\end{pmatrix}$

よって　$A^n=X\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4^n\end{pmatrix}X^{-1}$から　$A^n=\begin{pmatrix}3\cdot4^n-2 & -6\cdot4^n+6\\ 4^n-1 & -2\cdot4^n+3\end{pmatrix}$が導かれる。

※ $\vec{x}$が固有ベクトルならば$k\vec{x}$ $(k\neq0)$も固有ベクトルであり，
計算しやすいものを用いれば良い.

次の行列の固有値と固有ベクトルを求めた後、適当な行列を用いて与えられた行列を対角化または三角化せよ。

(1) $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}$　　　(2) $B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 5\end{pmatrix}$

【解】(1) $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ ……① において

固有方程式 $k^2-9k+14=0$ より固有値は $k=2,\ 7$

$k=2$ のとき ①から $3x+2y=2x$ $\therefore$ $x+2y=0$

よって、固有ベクトルは $s\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}(s\neq 0)$

$k=7$ のとき 同様に $-2x+y=0$ から固有ベクトルは $t\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}(s\neq 0)$

そこで、$s=t=1$ として $P=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ を考えると

$$P^{-1}AP=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 7\\ 2 & 14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ ……① において

固有方程式 $k^2-6k+9=0$ より固有値は $k=3$

このとき①より $-x+2y=0$ よって、固有ベクトルは $t\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}(t\neq 0)$

そこで、$P=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ として $P^{-1}BP$ を計算すると

$$P^{-1}BP=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

注　また、$P=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ とすると $P^{-1}BP=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

あるいは $\left\{\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 5\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}\vec{q}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ を満たす $\vec{q}$ の1つを $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ とし、$P=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

とすれば $P^{-1}BP=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

$$B^n=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-6 & 4n\\ -n & 2n+3\end{pmatrix}$$

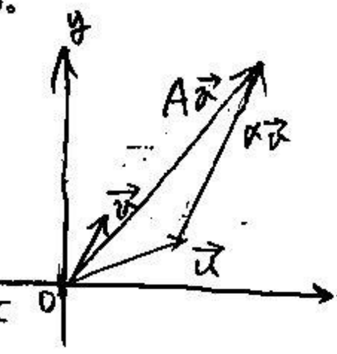
三角化定理

A が対角行列でないとし、固有値 α をただ1つだけもち、α に対する固有ベクトルの1つを $\vec{u}\ (\neq\vec{0})$ とする。このとき、次のことが成り立つ。

(1) $A\vec{u}=\alpha\vec{u}$, $A\vec{v}=\alpha\vec{v}+\vec{u}$ を満たすベクトル $\vec{v}$ が存在し、$\vec{u}$, $\vec{v}$ は1次独立である。

(2) 行列 P を $P=\begin{pmatrix}\vec{u} & \vec{v}\end{pmatrix}$ とおくと、A を P で三角化する。すなわち

$$A=P\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}P^{-1}$$ と表される。



【証明】(1) $A\vec{u}=\alpha\vec{u}$ ……①

$\vec{u}$ と1次独立なベクトル $\vec{w}$ を考えると、ベクトル $(A-\alpha E)\vec{w}$ は $\vec{u}$, $\vec{w}$ を用いて

$$(A-\alpha E)\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{w} \quad \cdots\cdots ②$$

と表せる。

② の両辺に $(A-\alpha E)$ を掛けると

$$(A-\alpha E)^2\vec{w}=(A-\alpha E)(x\vec{u}+y\vec{w}) \quad \cdots\cdots ③$$

ここに、α は A の固有方程式 $x^2-2\alpha x+\alpha^2=0$ の重解より

$$A^2-2\alpha A+\alpha^2E=O$$

よって、③ は $(A-\alpha E)(x\vec{u}+y\vec{w})=\vec{0}$ となり、展開して、①, ② を用いると

$$xy\vec{u}+y^2\vec{w}=\vec{0}$$

$$\vec{0}=x\underbrace{(A-\alpha E)\vec{u}}_{\substack{=\vec{0}\\(\because ①)}}+y\underbrace{(A-\alpha E)\vec{w}}_{\substack{=x\vec{u}+y\vec{w}\\(\because ②)}}$$

ここに、$\vec{u}$, $\vec{w}$ は1次独立より $xy=0$, $y^2=0$ $\therefore\ y=0$

よって、② から

$$(A-\alpha E)\vec{w}=x\vec{u} \quad \cdots\cdots ④$$

ここで、もし $x=0$ とすると、$A\vec{w}=\alpha\vec{w}$ となるが、$\vec{u}$ と $\vec{w}$ は1次独立より、

これと ① から $A=\alpha E$ となり仮定に適さない。よって $x\neq0$

したがって、④ から

$$A\vec{w}=\alpha\vec{w}+x\vec{u} \qquad \therefore A\frac{1}{x}\vec{w}=\alpha\frac{1}{x}\vec{w}+\vec{u}$$

ここで、$\frac{1}{x}\vec{w}=\vec{v}$ とおくと、$\vec{u}$ と $\vec{v}$ は1次独立であり、$A\vec{v}=\alpha\vec{v}+\vec{u}$ と表される。

(2) $A\vec{u}=\alpha\vec{u}$, $A\vec{v}=\alpha\vec{v}+\vec{u}$ より

$$A\begin{pmatrix}\vec{u} & \vec{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\vec{u} & A\vec{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\vec{u} & \alpha\vec{v}+\vec{u}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{u} & \vec{v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ⑤$$

(1) より $\vec{u}$ と $\vec{v}$ は1次独立だから、行列 $P=\begin{pmatrix}\vec{u} & \vec{v}\end{pmatrix}$ は逆行列をもつ。

1次独立
$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$
$\Leftrightarrow a:b\neq c:d$
$\Leftrightarrow \Delta=ad-bc\neq0$
$\Leftrightarrow$ 逆行列をもつ

そこで、⑤ の両辺に右から P^{-1} を掛けると

$$A=P\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}P^{-1}$$

三角化可能

行列 A が $A \neq \lambda E$ であって、ただ1つの固有値 k をもつとき、対角化できないので、適当な正則行列 P を用いて特殊な三角行列 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ となるように、P を決めることができる。

定理2

行列 A が $A \neq \lambda E$ であって、ただ1つの固有値 k をもつとき、その固有ベクトルの1つを $\overrightarrow{x_1}$ とし、$\overrightarrow{x_1}$ と1次独立なベクトル $\overrightarrow{x_2}$ が $A\overrightarrow{x_2}=\overrightarrow{x_1}+k\overrightarrow{x_2}$ を満たすとする。

$\overrightarrow{x_1}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{x_2}=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ とおくと

P は逆行列をもち、$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ となる。（行列 A を三角化するという）

【証明】 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると固有値の定義から

$$AP=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax_1+by_1 & ax_2+by_2 \\ cx_1+dy_1 & cx_2+dy_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} kx_1 & ax_2+by_2 \\ ky_1 & cx_2+dy_2 \end{pmatrix}$$

$A\overrightarrow{x_2}=\overrightarrow{x_1}+k\overrightarrow{x_2}$ を使うと

$$AP=\begin{pmatrix} kx_1 & x_1+kx_2 \\ ky_1 & y_1+ky_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{x_1} \not\parallel \overrightarrow{x_2}$ より、P^{-1} が存在して $AP=P\begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ の両辺の左から P^{-1} を掛けると

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

（証終）

注 行列 A が $A \neq \lambda E$ であって、ただ1つの固有値 k をもつとき、対角化できない。

【証】もし、対角可能であれば、$A=P\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}P^{-1}$ と変形でき、$A=P \cdot kE \cdot P^{-1}=kE$ となる。これは $A \neq kE$ に反する。

参考 $A\overrightarrow{x_2}=\overrightarrow{x_1}+k\overrightarrow{x_2}$ なるベクトルを $\overrightarrow{x_2}$ を考えるわけは、$A^2-2kA+k^2E=O$ より

$$A(A-kE)=k(A-kE) \qquad \therefore \qquad A(A-kE)\overrightarrow{x_2}=k(A-kE)\overrightarrow{x_2}$$

そして、$\overrightarrow{x_2}$ は A の固有ベクトルでないから　$(A-kE)\overrightarrow{x_2} \neq \vec{0}$

$(A-kE)\overrightarrow{x_2}$ は k の固有ベクトルの1つだから、$(A-kE)\overrightarrow{x_2}=\overrightarrow{x_1}$ とおいてもよい。

すなわち　$A\overrightarrow{x_2}=\overrightarrow{x_1}+k\overrightarrow{x_2}$

この定理２で $\begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}=B$ とおくと、$B^n=\begin{pmatrix} k^n & nk^{n-1} \\ 0 & k^n \end{pmatrix}$ より $A^n=PB^nP^{-1}$ から

A^n が計算できる。

なお、行列 A を三角化するとき、三角行列の $(1,2)$ 成分を１としたが、k に対する固有ベクトルの１つ $\overrightarrow{x_1}$ と１次独立な任意のベクトルを $\overrightarrow{x_2}$ として $P=\begin{pmatrix} \overrightarrow{x_1} & \overrightarrow{x_2} \end{pmatrix}$ とすれば、

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} k & l \\ 0 & k \end{pmatrix}$ なる形に表される。

実際には計算を簡単にするため $\overrightarrow{x_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ などととる場合が多い。

確かに $x_1 \neq 0$ のとき、$\overrightarrow{x_2}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると、$A\overrightarrow{x_2}=\overrightarrow{x_1}+k\overrightarrow{x_2}$ より

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ よって、$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$ $\quad\therefore\quad \begin{pmatrix} b \\ d-k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

$ax_1+by_1=kx_1$ で $(a-k)x_1+by_1=0$ ところが $2k=a+d$ より $a-k=k-d$

だから $(k-d)x_1+by_1=0$ 確かに $x_1=b$, $y_1=d-k$ を満たしている。

問５ 行列 $A=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と、それに対する固有ベクトルを求めよ。

次に、逆行列をもつ行列 P を適当に選んで、$P^{-1}AP$ を三角行列に換え、A^n を求めよ。

問 5 の解答

固有値を k，固有ベクトルを $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ とすると，

$$A\vec{x}_1 = k\vec{x}_1, \qquad \therefore (A - kE)\vec{x}_1 = O.$$

$\vec{x}_1 \neq \vec{0}$ より

$$\text{行列式 } |A - kE| = k^2 + 2k + 1 = 0, \qquad \therefore k = -1.$$

$A\vec{x}_1 = -\vec{x}_1$ より

$$\begin{pmatrix} -4x_1 + 3y_1 \\ -3x_1 + 2y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = y_1.$$

よって $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有ベクトルである．次に $A\vec{x}_2 = \vec{x}_1 + k\vec{x}_2$ を満たす $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $(\nparallel \vec{x}_1)$ を考える．

$k = -1, \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき，

$$\begin{pmatrix} -4x_2 + 3y_2 \\ -3x_2 + 2y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_2 \\ -y_2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = y_2 - \frac{1}{3}.$$

$y_2 = \frac{1}{3}$ のとき $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \nparallel \vec{x}_1$ であり，

$$P = (\vec{x}_1 \ \vec{x}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

とするとき，P は正則行列で $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$．よって

$$\begin{aligned} B \equiv& P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}A^nP = B^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & n(-1)^{n-1} \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}, \\ A^n =& PB^nP^{-1} = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 + 3n & -3n \\ 3n & 1 - 3n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

直和分解1

予備定理

$X+Y=E$, $XY=O$ ならば、$X^2=X$, $Y^2=Y$, $YX=O$ が成り立つ。

【証】$X+Y=E$ より $X(X+Y)=X$, $(X+Y)Y=Y$ であるから、$XY=O$ とで

$$X^2=X,\quad Y^2=Y$$

また　$YX=Y(E-Y)=Y-Y^2=O$ （証終）

もし行列 A が $A=pX+qY$ に分解して、しかも $X+Y=E$ かつ $XY=O$ を満たしていれば、予備定理より二項定理から $A^n=(pX+qY)^n=p^nX+q^nY$ が得られる。

このような2つの行列の和の形に表すことを A を直和分解するという。

$X+Y=E$, $XY=O$ を満たす X, Y を用いて行列 A が $A=\alpha X+\beta Y$ と分解されるには、α, β, X, Y は何であるか、調べてみる。

$$\begin{cases} X+Y=E \\ \alpha X+\beta Y=A \end{cases}$$ から X, Y について解くと

$\alpha \fallingdotseq \beta$ ならば　$X=\dfrac{1}{\alpha-\beta}(A-\beta E)$, $Y=\dfrac{1}{\beta-\alpha}(A-\alpha E)$

次に、$XY=O$ となるような α, β を見いだせばよい。

$$XY=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{1}{\beta-\alpha}(A-\beta E)(A-\alpha E)$$

そこで、α, β を A の固有値とすれば、ケーリー・ハミルトンの定理から

$$XY=O$$

となる。

以上から、あらためて、A の異なる2つの固有値を α, β とし

$$X=\frac{1}{\alpha-\beta}(A-\beta E),\quad Y=\frac{1}{\beta-\alpha}(A-\alpha E)$$

とすると

$$A=\alpha X+\beta Y \text{ で }\quad X+Y=E,\ XY=O$$

が成り立つことがわかる。

直和分解

予備定理

$X+Y=E$, $XY=O$ ならば、$X^2=X$, $Y^2=Y$, $YX=O$ が成り立つ。

【証】 $X+Y=E$ より $X(X+Y)=X$, $(X+Y)Y=Y$ であるから、$XY=O$ とで

$$X^2=X,\quad Y^2=Y$$

また　$YX=Y(E-Y)=Y-Y^2=O$　(証終)

もし行列 A が $A=pX+qY$ に分解して、しかも $X+Y=E$ かつ $XY=O$ を満たしていれば、予備定理より二項定理から $A^n=(pX+qY)^n=p^nX+q^nY$ となる。

このような2つの行列の和の形に表すことを A を直和分解するという。

$A=\lambda E$ ならば直和分解する必要はないから、$A\neq\lambda E$ の場合を考えるが、実はこのとき p, q は A の固有値となっている。

$A=pX+qY$ より　$AX=pX^2+qYX=pX$, $AY=pXY+qY^2=qY$

$\therefore$　$(A-pE)X=O$, $(A-qE)Y=O$

もし $A-pE$ の逆行列が存在すれば、$X=O$ となるから、$X+Y=E$ より $Y=E$ となり $A=qE$ これは仮定に反する。よって、$A-pE$ の逆行列は存在しない。

すなわち　$|A-pE|=0$　……①　← $|A-pE|$ は $(A-pE)$ の行列式 $\Delta(A-pE)$ のこと。

同様に　$|A-qE|=0$　……②

そして $p=q$ とすると $A=p(X+Y)=pE$ となり仮定に反する。

$\therefore$　$p\neq q$

それ故①, ②から p, q は A の固有方程式の2つの異なる解となる。

では $A=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}$ を直和分解し、A^n を求めてみる。

固有値は $x^2-(3+4)x+3\cdot4-2\cdot1=0$ の解より　$x^2-7x+10=0$

$\therefore$　$x=2,\ 5$

$A=2X+5Y$, $X+Y=E$ より X, Y ついて解くと

$$X=-\frac{1}{3}(A-5E)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-2\\-1&1\end{pmatrix},\quad Y=\frac{1}{3}(A-2E)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$$

このとき　$XY=O$

したがって　$A^n=\dfrac{2^n}{3}\begin{pmatrix}2&-2\\-1&1\end{pmatrix}+\dfrac{5^n}{3}\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2^{n+1}+5^n & -2^{n+1}+2\cdot5^n\\ -2^n+5^n & 2^n+2\cdot5^n\end{pmatrix}$$

【別】 $A^2-7A+10E=O$ より　$A(A-5E)=2(A-5E)$　繰り返し用いて

$$A^n(A-5E)=2^n(A-5E)$$

$\therefore$　$A^{n+1}-5A^n=2^n(A-5E)$　……①

同様にして

$$A^{n+1}-2A^n=5^n(A-2E)\quad\cdots\cdots②$$

(①−②)÷(−3) を作ると

$$A^n=2^n\cdot\frac{1}{-3}(A-5E)+5^n\cdot\frac{1}{3}(A-2E)$$

$X=\dfrac{1}{-3}(A-5E)$, $Y=\dfrac{1}{3}(A-2E)$ とおくと、A は直和分解されていて、

A^n は、$A^n=2^nX+5^nY$

$AX = XA \Rightarrow X = pA + qE$をみたす$p, q$

行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x & y\\z & w\end{pmatrix}$ について、等式 $AX=XA$ が成り立つとする。

(1) y と z をそれぞれ x, w で表せ。

(2) $X=pA+qE$ となるような実数 p と q のそれぞれを x と w で表せ。ただし、E は2次の単位行列とする。

【解】(1) $AX=XA$ となるとき、$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\z & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\z & w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$

ゆえに $\begin{pmatrix}x+2z & y+2w\\3x+4z & 3y+4w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3y & 2x+4y\\z+3w & 2z+4w\end{pmatrix}$

よって $x+2z=x+3y$ ……① $y+2w=2x+4y$ ……②

$3x+4z=z+3w$ ……③ $3y+4w=2z+4w$ ……④

②から $y=\frac{2}{3}(-x+w)$ ③から $z=-x+w$

これらを①, ④に代入すると成り立つ。

(2) (1)から、$AX=XA$ となるとき、$y=\frac{2}{3}(-x+w)$, $z=-x+w$ であるから

$$X=\begin{pmatrix}x & \frac{2}{3}(-x+w)\\-x+w & w\end{pmatrix}$$

また $pA+qE=p\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p+q & 2p\\3p & 4p+q\end{pmatrix}$

$X=pA+qE$ が成り立つための条件は

$x=p+q$ ……⑤ $\frac{2}{3}(-x+w)=2p$ ……⑥

$-x+w=3p$ ……⑦ $w=4p+q$ ……⑧

⑦から $p=\frac{1}{3}(-x+w)$ よって、⑤から $q=x-p=\frac{1}{3}(4x-w)$

このとき、⑥, ⑧は成り立つ。

$A=2P+Q$と分解してn乗を計算

2次の正方行列 $A=\begin{pmatrix}4&-2\\3&-1\end{pmatrix}$ に対し、$P=A-E$, $Q=2E-A$ とおく。

(1) $P^2=P$, $Q^2=Q$, $PQ=QP=O$, $A=2P+Q$ となることを示せ。

(2) 実数 α, β に対し、$(\alpha P+\beta Q)^n=\alpha^n P+\beta^n Q$ ($n=1, 2, 3, \cdots\cdots$) を示せ。

(3) A^n ($n=1, 2, 3, \cdots\cdots$) を求めよ。

【解】(1) $P=A-E=\begin{pmatrix}3&-2\\3&-2\end{pmatrix}$, $Q=2E-A=\begin{pmatrix}-2&2\\-3&3\end{pmatrix}$

したがって　$P^2=\begin{pmatrix}3&-2\\3&-2\end{pmatrix}$, $Q^2=\begin{pmatrix}-2&2\\-3&3\end{pmatrix}$　　$\therefore$ $P^2=P$, $Q^2=Q$

$PQ=\begin{pmatrix}3&-2\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2\\-3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $QP=\begin{pmatrix}-2&2\\-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$2P+Q=2(A-E)+2E-A=A$

よって成立する。

(2) $(\alpha P+\beta Q)^n=\alpha^n P+\beta^n Q$　　……①　とおく。

①を数学的帰納法を用いて証明する。

[1] $n=1$ のとき、明らかに成立する。

[2] $n=k$ で①が成り立つと仮定すると

$$(\alpha P+\beta Q)^{k+1}=(\alpha P+\beta Q)^k(\alpha P+\beta Q)=(\alpha^k P+\beta^k Q)(\alpha P+\beta Q)$$
$$=\alpha^{k+1}P^2+\alpha^k\beta PQ+\alpha\beta^k QP+\beta^{k+1}Q^2$$

$P^2=P$, $Q^2=Q$, $PQ=QP=O$ から　$(\alpha P+\beta Q)^{k+1}=\alpha^{k+1}P+\beta^{k+1}Q$

よって、①は $n=k+1$ でも成り立つ。

以上より、すべての自然数 n で①は成立する。

(3) (1), (2)から

$$A^n=(2P+Q)^n=2^nP+Q=\begin{pmatrix}3\cdot 2^n-2&2-2^{n+1}\\3\cdot 2^n-3&3-2^{n+1}\end{pmatrix}$$

別 (1) A の固有値が2, 1より　$P+Q=E$, $2P+Q=A$　おき方については「固有分解1」参照

よって　$P=A-E$, $Q=2E-A$

また、$A^2-3A+2E=O$ に $A=E+P$, $A=2E-Q$ をそれぞれ代入すると

$$P^2=P,\ Q^2=Q$$

また　$PQ=(A-E)(2E-A)=O$, $QP=(2E-A)(A-E)=O$

(2) 二項定理と(1)より　$(\alpha P+\beta Q)^n=\alpha^nP^n+\beta^nQ^n$　($\because PQ=QP=O$)

$$=\alpha^nP+\beta^nQ\quad(\because P^2=P,\ Q^2=Q)$$

直和分解の補足

$X+Y=E$, $XY=O$ を満たす X, Y を用いて行列 A が $A=\alpha X+\beta Y$ と分解されるには、α, β, X, Y は何であるか、調べてみる。

$$\begin{cases} X+Y=E \\ \alpha X+\beta Y=A \end{cases}$$ から X, Y について解くと

$\alpha \neq \beta$ ならば　$X=\dfrac{1}{\alpha-\beta}(A-\beta E)$, $Y=\dfrac{1}{\beta-\alpha}(A-\alpha E)$

次に、$XY=O$ となるような α, β を見いだせばよい。

$$XY=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{1}{\beta-\alpha}(A-\beta E)(A-\alpha E)$$

そこで、α, β を A の固有値とすれば、ケーリー・ハミルトンの定理から

$$XY=O$$

となる。

以上から、あらためて、A が異なる2つの固有値 α, β をもつとき

$$X=\frac{1}{\alpha-\beta}(A-\beta E),\ Y=\frac{1}{\beta-\alpha}(A-\alpha E)$$

とすると

$$A=\alpha X+\beta Y \text{ で }\quad X+Y=E,\ XY=O$$

が成り立つことがわかる。

また、次の A^n の求め方とも関連している。

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ において、$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ ……① において、

$x^2-(a+d)x+ad-bc=0$ が2つの異なる解 α, β をもつとき、①は

$$A^2-(\alpha+\beta)A+\alpha\beta E=O \quad \text{となり、}$$
$$A(A-\beta E)=\alpha(A-\beta E)$$

と変形できる。この関係を繰り返し用いて

$$A^n(A-\beta E)=\alpha A^{n-1}(A-\beta E)=\cdots=\alpha^n(A-\beta E) \quad \cdots\cdots ②$$

同様に　$A^n(A-\alpha E)=\beta^n(A-\alpha E)$　……③

(②−③)÷$(-\alpha+\beta)$ より

$$A^n=\alpha^n\cdot\frac{1}{\alpha-\beta}(A-\beta E)+\beta^n\cdot\frac{1}{\beta-\alpha}(A-\alpha E)$$

ここで、$X=\dfrac{1}{\alpha-\beta}(A-\beta E)$, $Y=\dfrac{1}{\beta-\alpha}(A-\alpha E)$ とおくと

$$A^n=\alpha^n X+\beta^n Y$$

となっている。

なお、α, β に対する固有ベクトルをそれぞれ $\vec{u}$, $\vec{v}$ とすると

$$X\vec{u}=\frac{1}{\alpha-\beta}(A-\beta E)\vec{u}=\frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha\vec{u}-\beta\vec{u})=\vec{u} \quad \leftarrow \quad A\vec{u}=\alpha\vec{u}$$

$$X\vec{v}=\frac{1}{\alpha-\beta}(A-\beta E)\vec{v}=\frac{1}{\alpha-\beta}(\beta\vec{v}-\beta\vec{v})=\vec{0} \quad \leftarrow \quad A\vec{v}=\beta\vec{v}$$

ゆえに

$$X\vec{u}=\vec{u},\ \vec{u}\neq\vec{0} \ ; \quad X\vec{v}=\vec{0},\ \vec{v}\neq\vec{0}$$

同様に

$$Y\vec{v}=\vec{v},\ \vec{v}\neq\vec{0} \ ; \quad Y\vec{u}=\vec{0},\ \vec{u}\neq\vec{0}$$

が成り立つ。

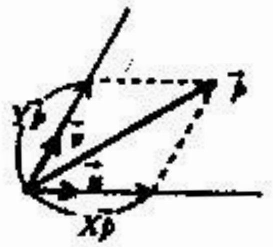
したがって、X は「原点を通り $\vec{u}$ を方向ベクトルとする直線への $\vec{v}$ 方向に沿った射影」を表す行列である。

Y は「原点を通り $\vec{v}$ を方向ベクトルとする直線への $\vec{u}$ 方向に沿った射影」を表す行列である。

$X+Y=E$ は任意のベクトル $\vec{p}$ に対して

$$\vec{p}=E\vec{p}=(X+Y)\vec{p}=X\vec{p}+Y\vec{p}$$

が成り立つ。



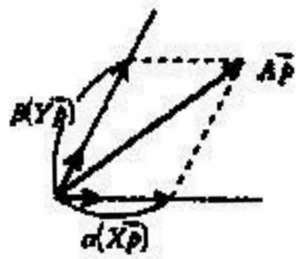
$A=\alpha X+\beta Y$ については任意の $\vec{p}$ に対して

$$A\vec{p}=A(X\vec{p}+Y\vec{p})=A(X\vec{p})+A(Y\vec{p})$$

ここで、$X\vec{p}$ は α に対応する固有ベクトルか $\vec{0}$,

$Y\vec{p}$ は β に対応する固有ベクトルか $\vec{0}$

だから



$$A\vec{p}=\alpha(X\vec{p})+\beta(Y\vec{p})=(\alpha X)\vec{p}+(\beta Y)\vec{p}=(\alpha X+\beta Y)\vec{p}$$

となり．$A=\alpha X+\beta Y$ が成り立つ。

また、$X^2=X$, $Y^2=Y$ は「同じ射影を2回続けて行っても、結果は1回と同じである」ことから明らかである。

そして、$XY=YX=O$ は「射影としての X と Y における $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の役割が入れ替わっている」ことから明らかである。

以上の説明から任意の点 $(\vec{p})$ の像を作図する方法が導かれる。

次の①,②,③の順序で作図すれば $A\vec{p}$ が得られる。

① $\vec{p}$ を $\vec{u}$, $\vec{v}$ 2方向に分解する。

② $\vec{u}$, $\vec{v}$ 2方向の成分をそれぞれ α, β 倍する。

③ 合成する。

当然のことながら①～③を繰り返し行えば、$A^n=\alpha^n X+\beta^n Y$ となる。

交換可能な行列

$AB=BA$ が成り立つ場合

1) $A=aE$
2) $A=\alpha B+\beta E$
3) $AB=aE\ (a\neq 0)$

$A=C_1E+C_2B+C_3\tilde{B}$

4) A, B が三角行列でしかも $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ か $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$ のともに同じ形

5) A, B が対角行列 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ の形

【解説】1)は B が何であってもよい。

2)は $AB=\alpha B^2+\beta B$, $BA=\alpha B^2+\beta B$ より $AB=BA$

3) A^{-1} は $A'A=AA'=E$ をみたす A' を A^{-1} として定義されているが、$A'A=E$, $AA'=E$ の一方が成り立てば、簡単な計算で $A'A=AA'=E$ が成り立つので A' を A の逆行列としてよい。これは定理として扱われる。

4) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa' & ab'+a'b \\ 0 & aa' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ より成立する。

5) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa' & 0 \\ 0 & bb' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ より成立する。

問1 行列 $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\ (a\neq b)$ と交換可能な行列は $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ の形となることを示せ。

問2 $A+B=AB$ のとき、$AB=BA$ が成り立つことを証明せよ。

一般に、$B\neq kE$ のとき $AB=BA \iff A=\alpha B+\beta E$

証明 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とする。

$A-dE=A'$, $B-wE=B'$ とおくと

$AB=BA \iff (A'+dE)(B'+wE)=(B'+wE)(A'+dE)$

$\iff A'B'=B'A'$

$\iff \begin{pmatrix} a' & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' & y \\ z & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' & y \\ z & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ ただし、$a-d=a'$, $x-w=x'$ とする。

成分比較して

$\iff \quad cy=bz,\ a'y=bx',\ cx'=a'z$ $b:c=y:z,\ a':b=x':y,$

連比にして $c:a'=x':z$

$\iff \quad a':b:c=x':y:z$

$B \neq kE$ より $B' \neq O$ だから適当な実数 α を用いて

$\iff \quad A'=\alpha B'$ と表せる。

元に戻して

$\iff \quad A-dE=\alpha(B-wE)$

$d-\alpha w=\beta$ とおくと

$\iff \quad A=\alpha B+\beta E$

問3 行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}$ について、等式 $AX=XA$ が成り立つとする。

(1) y と z をそれぞれ x, w で表せ。

(2) $X=pA+qE$ となるような実数 p と q のそれぞれを x と w で表せ。

問1 A と交換可能な行列を $X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}$ とおくと $AX=XA$ より

$$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}ax & ay\\ bz & bw\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax & by\\ az & bw\end{pmatrix}$$

$$\iff \quad ax=ax,\ ay=by,\ bz=az,\ bw=bw$$

$a \neq b$ より $\iff$ x, w は任意の実数, $y=0$, $z=0$

よって $X=\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & w\end{pmatrix}$

問2 $A+B=AB$ のとき、$(A-E)(B-E)=E$ と変形できるから、

$(B-E)(A-E)=E$ が成り立つ。

よって $B+A=BA$ $\quad \therefore \quad AB=BA$

問3 (1) $AX=XA$ となるとき, $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

ゆえに $\begin{pmatrix}x+2z & y+2w\\ 3x+4z & 3y+4w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3y & 2x+4y\\ z+3w & 2z+4w\end{pmatrix}$

よって $x+2z=x+3y$ ……① $\quad y+2w=2x+4y$ ……②

$3x+4z=z+3w$ ……③ $\quad 3y+4w=2z+4w$ ……④

②から $y=\dfrac{2}{3}(-x+w)$ $\quad$ ③から $z=-x+w$

これらを①, ④に代入すると成り立つ。

交換可能な条件　演習2

(1) 行列 $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}$ と $B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ が $AB=BA$ を満たすとき、B は $\alpha A+\beta E$ の形で表されることを示せ。

(2) 2次の正方行列 $P=\begin{pmatrix} u & 1 \\ v & w \end{pmatrix}$, Q に対して、$PX=XP$, $QX=XQ$ を満たす E のスカラー倍でない2次の正方行列 X が存在するとき、$PQ=QP$ であることを示せ。

【証明】(1) $c'=c-a$, $s'=s-p$ とおくと、$A=aE+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & c' \end{pmatrix}$, $B=pE+\begin{pmatrix} 0 & q \\ r & s' \end{pmatrix}$ より

$$AB=BA \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & c' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & q \\ r & s' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & q \\ r & s' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & c' \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} r & s' \\ c'r & bq+c's' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} bq & c'q \\ bs' & r+c's' \end{pmatrix}$$

$$\iff r=bq,\ s'=c'q,\ c'r=bs'$$

$$\iff r=bq,\ s'=c'q$$

このとき　$B=\begin{pmatrix} p & q \\ bq & p+c'q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & q \\ bq & p+(c-a)q \end{pmatrix}=q\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}+(p-aq)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=qA+(p-aq)E$

(2) (1)および $PX=XP$ より $X=\alpha P+\beta E$ とおくことができる。

X は E のスカラー倍ではないから、$\alpha \neq 0$

このとき　$QX=XQ$　とから

$Q(\alpha P+\beta E)=(\alpha P+\beta E)Q$

$\therefore$ $\alpha QP=\alpha PQ$

$\alpha \neq 0$ より　$PQ=QP$

注 $B=qA+(s-cq)E$ とも表される。

$a'=a-c$, $p'=p-s$ とし、

$A=\begin{pmatrix} a' & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}+cE$,

$B=\begin{pmatrix} p' & q \\ r & 0 \end{pmatrix}+sE$ から

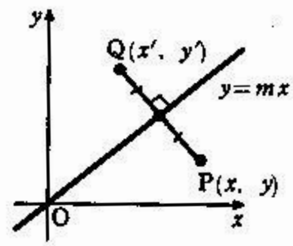
同様に計算すると得られる。

直線 $y=mx$ に関する対称移動は、行列 $\dfrac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\ 2m & m^2-1\end{pmatrix}$ で表される1次変換であることを示せ。

【証1】直線 $y=mx$ に関して、点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ と対称な点を $\mathrm{Q}(x',\ y')$ とする。

$m\neq 0$ のとき、線分 PQ と直線 $y=mx$ は垂直であるから

$$\frac{y'-y}{x'-x}\cdot m=-1$$



よって　$x'+my'=x+my$　……①

線分 PQ の中点が直線 $y=mx$ 上にあるから

$$\frac{y+y'}{2}=m\cdot\frac{x+x'}{2}$$

よって　$mx'-y'=-mx+y$　……②

①, ②から　$\begin{pmatrix}1 & m\\ m & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & m\\ -m & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & m\\ m & -1\end{pmatrix}$ において、$\varDelta=1\cdot(-1)-m^2=-(1+m^2)\neq 0$ から

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & m\\ m & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & m\\ -m & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1 & m\\ m & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & m\\ -m & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\ 2m & m^2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\qquad\cdots\cdots ③$$

よって、直線 $y=mx\ (m\neq 0)$ に関する対称移動は1次変換である。

$m=0$ のとき、直線 $y=mx$ は x 軸に一致するが、x 軸に関する対称移動は

$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ で表される1次変換である。

ここで、A は③において $m=0$ とおいたものである。

したがって、直線 $y=mx$ に関する対称移動は行列 $\dfrac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\ 2m & m^2-1\end{pmatrix}$ で表される1次変換である。

【証2】P から直線 $y=mx$ に下ろした垂線の足を H とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ で $\overrightarrow{\mathrm{PH}}\parallel\begin{pmatrix}-m\\ 1\end{pmatrix}$ より、パラメータ t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-m\\ 1\end{pmatrix}$$

点 H は直線 $y=mx$ 上にあるから　　$y+t=m(x-tm)$

$$\therefore\quad t=\frac{mx-y}{1+m^2}$$

よって、$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ より

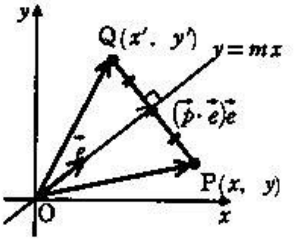
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+2\cdot\frac{mx-y}{1+m^2}\begin{pmatrix}-m\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}(1-m^2)x+2my\\2mx+(m^2-1)y\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\2m & m^2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

【証3】直線 $y=mx$ に関して、点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ と対称な点を $\mathrm{Q}(\vec{q})$ とし、

直線 $y=mx$ に平行な単位ベクトルを $\vec{e}=\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$

とする。



$$\vec{q}=2(\vec{p}\cdot\vec{e})\vec{e}-\vec{p}$$

により

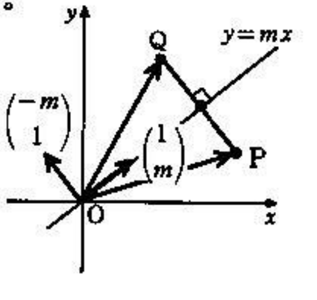
$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=2\left\{\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}\right\}\times\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$=\frac{2(x+my)}{1+m^2}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}(1-m^2)x+2my\\2mx+(m^2-1)y\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\2m & m^2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

【証4】直線 $y=mx$ に関して、点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ と対称な点を $\mathrm{Q}(\vec{q})$ とする。



1次独立なベクトル $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-m\\1\end{pmatrix}$ $\left(\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}-m\\1\end{pmatrix}\right)$ を用いて

$\vec{p}=s\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-m\\1\end{pmatrix}$ と表すと $\vec{q}=s\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}-t\begin{pmatrix}-m\\1\end{pmatrix}$

よって、A が直線 $y=mx$ に関する対称移動を表す行列とすると

$$A\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots①\qquad A\begin{pmatrix}-m\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-m\\1\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots②$$

$\{①-②\times m\}\div(1+m^2)$, $\{①\times m+②\}\div(1+m^2)$ より

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2\\2m\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}2m\\m^2-1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad A=\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\2m & m^2-1\end{pmatrix}$$

参考 線分 PQ の垂直２等分線　……①　が直線 $y=mx$　……②と一致することから、流通座標を用いて直線の方程式を表すと

①は　$Y-\dfrac{y+y'}{2}=-\dfrac{x-x'}{y-y'}\left(X-\dfrac{x+x'}{2}\right)$，②は　$Y=mX$

この２直線の傾きと Y 切片を比べて

$$-\frac{x-x'}{y-y'}=m\,,\ \ \frac{y+y'}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x-x'}{y-y'}\cdot(x+x')=0$$

$$\Longleftrightarrow\quad -\frac{x-x'}{y-y'}=m\,,\ \ \frac{y+y'}{2}-\frac{1}{2}m(x+x')=0$$

$$\Longleftrightarrow\quad x'+my'=x+my,\ \ mx'-y'=-mx+y$$

後は【証1】に準ずる。

【証5】$m=\tan\theta$ とし、P の座標を $x=r\cos\alpha$，$y=r\sin\alpha$ とおくと、Q の座標は

$$x'=r\cos(2\theta-\alpha),\ \ y=r\sin(2\theta-\alpha)$$

となる。

$$x'=r\cos2\theta\cos\alpha+r\sin2\theta\sin\alpha=x\cos2\theta+y\sin2\theta$$

$$y'=r\sin2\theta\cos\alpha-r\cos2\theta\sin\alpha=x\sin2\theta-y\cos2\theta$$

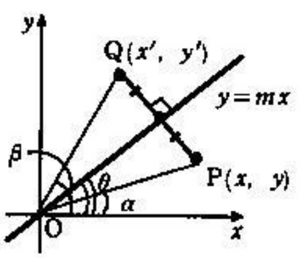
求める表現行列は

$$\begin{pmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{pmatrix}$$

であるが、$\cos2\theta=\dfrac{1-m^2}{1+m^2}$，$\sin2\theta=\dfrac{2m}{1+m^2}$ より

$$\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\ 2m & m^2-1\end{pmatrix}$$

【証6】x 軸の正の部分と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，直線 $y=mx$ とのなす角をそれぞれ α，β，θ とする。



$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\theta\ \text{より}\quad \beta=-\alpha+2\theta$$

これと OP=OQ より点 P を x 軸に関して対称移動し、次に原点の回りに 2θ 回転すると、点 Q と一致する。

$$\begin{pmatrix}\cos2\theta & -\sin2\theta\\ \sin2\theta & \cos2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{pmatrix}$$

【証7】 $m=\tan\theta$ とする。

最初に点 P を原点を中心に $-\theta$ 回転し、次に x 軸に関して対称移動し、最後に原点を中心に θ 回転すると点 Q と一致する。

よって $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

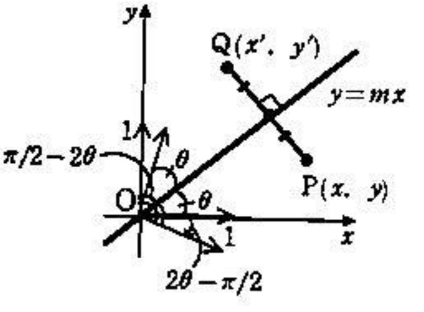
$$=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos^2\theta-\sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta-\cos^2\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}$$

□ 1次変換であることが分かっていれば、基本ベクトルの像は次のようになる。

$$\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\cos 2\theta \\ \sin 2\theta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin 2\theta \\ -\cos 2\theta\end{pmatrix}$$



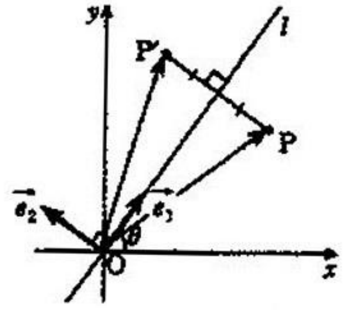
$$\therefore \quad \begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}$$

固有値1, −1をもつ対称行列

直線 l : $y=(\tan\theta)x$ における対称移動を表す行列 A について

l に関して点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ に対称な点を $\mathrm{P}'(\vec{p'})$ とすると、

1次独立なベクトル $\vec{e_1}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$, $\vec{e_2}=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$ を用いて、



点Pの位置ベクトル $\vec{p}$ は

$\vec{p}=s\vec{e_1}+t\vec{e_2}$ と表される。

よって $\vec{p'}=A\vec{p}=sA\vec{e_1}+tA\vec{e_2}=s\vec{e_1}-t\vec{e_2}$

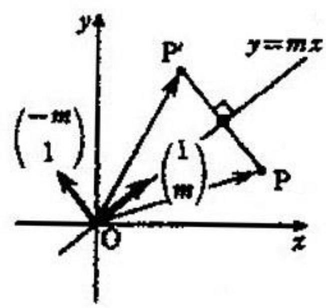
ここに $A\vec{e_1}=\vec{e_1}$, $A\vec{e_2}=-\vec{e_2}$ より

$A(\vec{e_1}\ \ \vec{e_2})=(\vec{e_1}\ \ -\vec{e_2})$

$\Delta=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1\neq 0$ より $(\vec{e_1}\ \ \vec{e_2})=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ の逆行列は存在するから

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos^2\theta-\sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta\\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta-\cos^2\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{pmatrix}$$

□ 直線 l : $y=mx$ として、1次独立なベクトル $\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-m\\ 1\end{pmatrix}$



$\left(\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}-m\\ 1\end{pmatrix}\right)$ を用いると

$\vec{p}=s\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-m\\ 1\end{pmatrix}$ と表せば $\vec{p'}=s\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}-t\begin{pmatrix}-m\\ 1\end{pmatrix}$

よって、A が直線 $y=mx$ に関する対称移動を表す行列とすると

$A\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}$ ……①, $A\begin{pmatrix}-m\\ 1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-m\\ 1\end{pmatrix}$ ……②

{①−②×m}÷$(1+m^2)$, {①×m+②}÷$(1+m^2)$ より

$A\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2\\ 2m\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}2m\\ m^2-1\end{pmatrix}$

$$\therefore\quad A=\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\ 2m & m^2-1\end{pmatrix}$$

2つの固有ベクトルが垂直ならば対称行列

行列 A の固有値が異なる2つの実数解 α, β をもち、α, β に対する固有ベクトルが垂直であれば、行列 A は対称行列である。

$\to {}^tA=A$

【証明】行列 A の固有値 α, β に対する固有ベクトルを $\vec{x_\alpha}$, $\vec{x_\beta}$ とする。

$$\alpha\vec{x_\alpha}\cdot\vec{x_\beta}=A\vec{x_\alpha}\cdot\vec{x_\beta}={}^t(A\vec{x_\alpha})\vec{x_\beta}={}^t\vec{x_\alpha}{}^tA\vec{x_\beta} \quad \cdots\cdots ①$$

$$\vec{x_\alpha}\cdot\beta\vec{x_\beta}=\vec{x_\alpha}\cdot A\vec{x_\beta}={}^t\vec{x_\alpha}A\vec{x_\beta} \quad \cdots\cdots ②$$

①−②より

$$(\alpha-\beta)\vec{x_\alpha}\cdot\vec{x_\beta}={}^t\vec{x_\alpha}({}^tA-A)\vec{x_\beta} \quad \cdots\cdots ③$$

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると ${}^tA-A=(b-c)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ より

$(b-c){}^t\vec{x_\alpha}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\vec{x_\beta}=-(b-c)\begin{vmatrix}\vec{x_\alpha} & \vec{x_\beta}\end{vmatrix}$ だから③は

$$(\alpha-\beta)\vec{x_\alpha}\cdot\vec{x_\beta}=-(b-c)\begin{vmatrix}\vec{x_\alpha} & \vec{x_\beta}\end{vmatrix} \quad \cdots\cdots ☆$$

となる。

ここで $\vec{x_\alpha}\perp\vec{x_\beta}$ より $\begin{vmatrix}\vec{x_\alpha} & \vec{x_\beta}\end{vmatrix}\neq 0$ だから $b=c$

よって、A は対称行列である。

注 ☆で、$b=c$ のとき $\alpha\neq\beta$ より $\vec{x_\alpha}\cdot\vec{x_\beta}=0$ $\quad\therefore\quad \vec{x_\alpha}\perp\vec{x_\beta}$

より、逆も成り立つ。すなわち

> 行列 A の固有値が2つの実数解 α, β $(\alpha\neq\beta)$ をもつとき、
> α, β に対する固有ベクトルが垂直 $\Longleftrightarrow$ 行列 A は対称行列

転置行列の性質1

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、行と列を入れ換えた行列 $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ を A の転置行列とい~~う~~。
い、これを ${}^tA$ などと表す。

任意の行列 A, B, 任意のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して、次のことが成り立つ。

$${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA, \quad {}^t({}^tA)=A, \quad ({}^tA)^{-1}={}^t(A^{-1})$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}={}^t\vec{a}\,\vec{b}, \quad (A\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot({}^tA\vec{b})$$

定義 A：対称行列 $\iff$ ${}^tA=A$

A：直交行列 $\iff$ ${}^tAA=E$

参考 一般に、${}^tX=-X$ の性質をもつ行列 X，すなわち $X=\begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}$ に対して

$A=(E+X)(E-X)^{-1}$ ならば ${}^tAA=E$

が成り立つ。

$k=\tan\theta$ とすると、A は原点を中心とする回転角が 2θ の回転移動を表す。

巾零(べきれい)行列と1次変換

巾零行列

f の表現行列を A とする。

A が固有値0(重解)をもつ。

$\Longleftrightarrow \quad A^2=O$

$\Longleftrightarrow \quad A=O$ または $A\neq O$ の場合 $\begin{cases} f(\vec{a})=\vec{0} \\ f(\vec{b})=\vec{a} \\ \vec{a}\perp\vec{b} \end{cases}$ を満たす $\vec{a}$, $\vec{b}$ が存在する。

解説 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\neq O$ とすると $\quad a+d=0$, $ad-bc=0 \quad$ ……①

(i) $c\neq 0$ の場合

$b\neq c$ である。理由:$b=c$ とすると $ad=bc=c^2>0$ より a, d は同符号となり、$a+d=0$ に反するから。

固有値0に対する固有ベクトルとして、$\vec{a}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ をとることができる。

$\vec{a}$ を90°回転したベクトル $\begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}$ を考え、$b\neq c$ だから $\vec{b}=\dfrac{1}{b-c}\begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}$ をとることができる。

$$A\vec{b}=\frac{1}{b-c}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}=\frac{1}{b-c}\begin{pmatrix} -ac+ba \\ -c^2+da \end{pmatrix}=\frac{1}{b-c}\begin{pmatrix} (b-c)a \\ -c^2+bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}=\vec{a}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ のとり方から $A\vec{a}=\vec{0}$ であり、$\vec{a}\perp\vec{b}$ は明らかである。

(ii) $b=c$ の場合

①より $ad=0$, $a+d=0$ となり $A=O$ が成立するから前提に反する。

よって、この場合はあり得ない。

($\Longleftarrow$) $\vec{a}\perp\vec{b}$ より、任意のベクトル $\vec{p}$ は $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ と表されるから

$$f(f(\vec{p}))=f(sf(\vec{a})+tf(\vec{b}))=f(t\vec{a})=tf(\vec{a})=\vec{0}$$

ゆえに $\quad A^2=O$

場合分けを整理

$b=c$ とすると
$ad-bc=0$ から
$ad=c^2$
$c(=b)=0$
とすると $a=0$ または $d=0$ で
$a+d=0$ とより
$a=d=0$
$\therefore A=O$
$c\neq 0$ とすると
$ad=c^2$ より
a と d は同符号で $a+d=0$ をみたさない。
よって $A\neq O$ ならば
$b\neq c$

参考 A:固有値が0のみかつ $A\neq O$ における点の移動について

① $f(\vec{a})=\vec{0}$, $f(\vec{b})=\vec{a}$, $\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ とする。

点 $s\vec{a}+t\vec{b}$ (s, t:実数)は $t\vec{b}$ にうつる。 $t\vec{a}$ であろう。

② 原点にうつされるのは、原点を通り $\vec{a}$ を方向ベクトルとする直線 l_a である。

③ k を定数とするとき、点 $k\vec{b}$ を通り $\vec{a}$ を方向ベクトルとする直線は l_a 上の点 $k\vec{a}$ にうつされる。

④ 全平面の像は、直線 l_a である。

巾等写像

写像 $f(\vec{x})=A\vec{x}$, $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ において、次のことを調べよ。

(1) 平面全体はどんな図形に移るか。

(2) この写像を2回行うと、どんな図形に移るか。

【解】(1) $\begin{cases}x'=2x+y\\ y'=-2x-y\end{cases}$ より $y'=-x'$

よって、平面全体は1つの直線 $y=-x$ に移る。

(2) 2回目に点 $(\vec{x'})$ が点 $(\vec{x''})$ に移ったとすると

$\begin{cases}x''=2x'+y'=x'\\ y''=-2x'-y'=-x'\end{cases}$ より $y''=-x''$

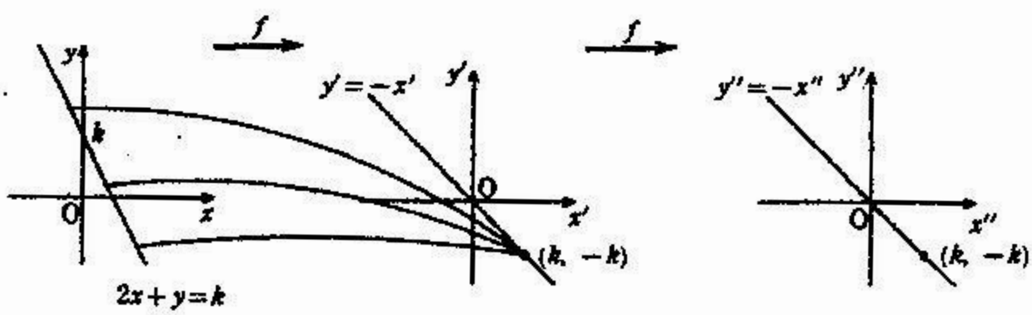
2回行っても1つの直線 $y=-x$ 上に移る。

参考 $A^2=A\ (A\neq O,\ A\neq E)$ が成り立つから、A は巾等行列である。

したがって、$f^2(\vec{x})=A^2\vec{x}=A\vec{x}=f(\vec{x})$

$\therefore\quad f^2=f$

一般に、この等式を満たす写像 f を巾等写像という。



$A^2=A$

Cayley-Hamilton

$(a+d-1)A=(ad-bc)E$

$a+d\neq 1$ のとき $A=kE$　$A^2=A$ から $k=0,1$　$A=O,E$

$a+d=1$ のとき

$ad-bc=0$　　$\lambda^2-\lambda=0$

より $\lambda=0,1$

固有値1, −1をもつ1次変換

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表される平面上の1次変換 f に対し、下記の2つの条件[1], [2] を満たすような直線 l が存在するための必要十分条件は、$a+d=0$ かつ $ad-bc=-1$ であることを示せ。

[1] l は原点を通らない直線である。

[2] f によって l 上の任意の点は、l 上のある定点Pに関して対称な l 上の点に写される。

【解】点Pの位置ベクトルを $\vec{p}$ とおき、l の方向ベクトルを $\vec{u}$ とすると、条件[1]から $\vec{p}$ と $\vec{u}$ は一次独立で、l の方程式は $\vec{x}=\vec{p}+t\vec{u}$ とおける。(lが原点を通るときは、$\vec{p}\,/\!/\,\vec{u}$)

l 上の任意の点を $X(\vec{x})$ とすると、Pに関する対称点 $X'(\vec{x'})$ は、

$$\vec{x'}=\vec{p}-t\vec{u} \quad \cdots\cdots ①$$

と表される。また、条件[2]から

$$\vec{x'}=f(\vec{x})=f(\vec{p})+tf(\vec{u}) \quad \cdots\cdots ②$$

①, ②から　$f(\vec{p})+tf(\vec{u})=\vec{p}-t\vec{u}$

t は任意だから　$f(\vec{p})=\vec{p}$ ……③　かつ　$f(\vec{u})=-\vec{u}$ ……④

③ $\iff (A-E)\vec{p}=\vec{0}$ ……③′,　④ $\iff (A+E)\vec{u}=\vec{0}$ ……④′

$\vec{p}\neq\vec{0}$, $\vec{u}\neq\vec{0}$ だから、③′, ④′ が成り立つ条件は $A-E$, $A+E$ の逆行列が存在しないこと、すなわち

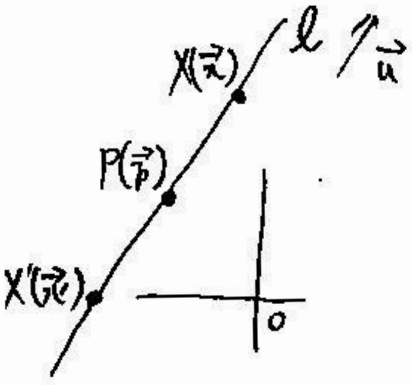
$$(a-1)(d-1)-bc=0 \quad \cdots\cdots ③'' \quad かつ \quad (a+1)(d+1)-bc=0 \quad \cdots\cdots ④''$$

が成り立つことである。

③″, ④″より　$a+d=0$, $ad-bc=-1$ ……⑤

逆に、⑤のとき③, ④を満たす一次独立な $\vec{p}$ と $\vec{u}$ が存在するから、条件[1], [2] を満たす直線 l が存在する。

※ $a+d=0$, $ad-bc=-1$ のとき
固有方程式は $k^2-1=0$ となるので、
固有値 $k=\pm1$
逆も成り立つ。



正射影3

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ $(b \neq 0)$ が $A^2=A$ を満たすとき

(1) A の表す1次変換 f が座標平面上のすべての点を直線 $y=2x$ 上に移すとき、A を求めよ。

(2) (1)の場合に、f によって直線 $x+2y=k$ (k は定数) 上のすべての点が同じ点に移されることを示せ。

【解】(1) ケーリー・ハミルトンの定理より $A^2-(a+c)A+(ac-b^2)E=O$

$A^2=A$ より上式は $(a+c-1)A=(ac-b^2)E$

$b \neq 0$ より $A \neq kE$ だから $\underbrace{a+c-1=0}_{①}$ かつ $\underbrace{ac-b^2=0}_{②}$

$a+c-1 \neq 0$ とすると

$A=-\dfrac{ac-b^2}{a+c-1}E$

これは $A \neq kE$ に反する

よって $a+c-1=0$

$f:(x,\ y) \to (x',\ y')$ とすると

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ から $\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=bx+cy \end{cases}$

$(x',\ y')$ が $y=2x$ 上にあるから $y'=2x'$

よって $bx+cy=2(ax+by)$ $\quad \therefore\ (b-2a)x=(2b-c)y$

これが、平面上のすべての点 $(x,\ y)$ について成り立つから

$b-2a=0,\ 2b-c=0$

①とで $a=\dfrac{1}{5},\ b=\dfrac{2}{5},\ c=\dfrac{4}{5}$ これらは②を満たす。

よって $A=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(2) 直線 $x+2y=k$ 上の点 $(k-2t,\ t)$ (t はパラメータ) が $(x',\ y')$ に移るとすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k-2t \\ t \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix}$$

より、直線 $x+2y=k$ 上の点は、すべて点 $\left(\dfrac{k}{5},\ \dfrac{2k}{5}\right)$ に移る。

(1) 座標平面上の任意の点 $P(x,y)$ が f によって $Q(x',y')$ に移されるとすると、$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ bx+cy \end{pmatrix}$

$y'=2x'$ より $b=2a,\ c=2b$ $\quad \therefore A=\begin{pmatrix} a & 2a \\ 2a & 4a \end{pmatrix}$ $\quad b \neq 0$ より $a \neq 0$

$A^2=\begin{pmatrix} 5a^2 & 10a^2 \\ 10a^2 & 20a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 2a \\ 2a & 4a \end{pmatrix}$ $\quad \therefore a=5a^2$ $\quad a(5a-1)=0$

$a \neq 0$ より $a=\dfrac{1}{5}$ $\quad \therefore A=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

固有値1を含む2，数列の極限値

座標平面上で、点 $P(x,\ y)$ を点 $P'(x',\ y')$ へ移す1次変換 f が

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で与えられている。点 $P_1(x_1,\ y_1)$ が $x_1 \neq y_1$ を満たすとし、$P_{n+1}=f(P_n)$ $n=1,\ 2,\ \cdots$ によって P_2, P_3, …… を定め、P_n の座標を $(x_n,\ y_n)$ とする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{P_1P_2}$ は、点 P_1 の位置に無関係な、原点を通る定直線に平行であることを示せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{P_1P_n}$ を $\overrightarrow{P_1P_2}$ によって表せ。

(3) どの y_n も0とならないとき、数列 $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ は収束することを示し、その極限値を求めよ。

【解】(1) $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = (x_1-y_1)\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $x_1 \neq y_1$ より $\overrightarrow{P_1P_2} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

よって、原点を通る直線 $y=-\dfrac{3}{2}x$ に平行である。

(2) (1)と同様に $\overrightarrow{P_kP_{k+1}} = (x_k-y_k)\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ……①

また、条件より $\begin{cases} x_{n+1}=3x_n-2y_n \\ y_{n+1}=-3x_n+4y_n \end{cases}$

$\therefore$ $x_{n+1}-y_{n+1}=6(x_n-y_n)$

数列 $\{x_n-y_n\}$ は公比6の等比数列で、$x_n-y_n=6^{n-1}(x_1-y_1)$

①より $\overrightarrow{P_kP_{k+1}} = 6^{k-1}(x_1-y_1)\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 6^{k-1}\overrightarrow{P_1P_2}$

$\therefore$ $\overrightarrow{P_1P_n} = \sum_{k=1}^{n-1}\overrightarrow{P_kP_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n-1}6^{k-1}\overrightarrow{P_1P_2} = \dfrac{6^{n-1}-1}{5}\overrightarrow{P_1P_2}$

(3) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP_n} = \overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \dfrac{6^{n-1}-1}{5}(x_1-y_1)\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ より

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{x_1+\frac{2}{5}(6^{n-1}-1)(x_1-y_1)}{y_1-\frac{3}{5}(6^{n-1}-1)(x_1-y_1)} = \frac{\frac{x_1}{6^{n-1}}+\frac{2}{5}(x_1-y_1)-\frac{2}{5}(x_1-y_1)\cdot\frac{1}{6^{n-1}}}{\frac{y_1}{6^{n-1}}-\frac{3}{5}(x_1-y_1)+\frac{3}{5}(x_1-y_1)\cdot\frac{1}{6^{n-1}}}$$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{6^{n-1}}=0$ かつ $x_1 \neq y_1$ だから $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=-\dfrac{2}{3}$

$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値は 1, 6

参考　1次変換 f を表す行列 A が固有値 1, $\lambda(\neq 1)$ をもつとき、ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2-(1+\lambda)A+\lambda E=O \qquad \cdots\cdots ①$$

点 P_k の位置ベクトルを $\overrightarrow{p_k}=\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$ $(k=1, 2, \cdots)$ とおくと、$f(P_n)=P_{n+1}$ より

$$A\overrightarrow{p_n}=\overrightarrow{p_{n+1}}$$

これを繰り返し用いて

$$\overrightarrow{p_n}=A^{n-1}\overrightarrow{p_1} \qquad \cdots\cdots ②$$

①より

$$A^{n+1}-(1+\lambda)A^n+\lambda A^{n-1}=O \ (n\geqq 1 \text{ ただし、} A^0=E \text{ とする})$$

$$\therefore \quad A^{n+1}\overrightarrow{p_1}-(1+\lambda)A^n\overrightarrow{p_1}+\lambda A^{n-1}\overrightarrow{p_1}=\vec{0}$$

②より

$$\overrightarrow{p_{n+2}}-(1+\lambda)\overrightarrow{p_{n+1}}+\lambda\overrightarrow{p_n}=\vec{0}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{p_{n+2}}-\overrightarrow{p_{n+1}}=\lambda(\overrightarrow{p_{n+1}}-\overrightarrow{p_n})$$

$\overrightarrow{p_k}=\overrightarrow{OP_k}$ であるから

$$\overrightarrow{P_{n+1}P_{n+2}}=\lambda\overrightarrow{P_nP_{n+1}}$$

これを繰り返し用いて

$$\overrightarrow{P_nP_{n+1}}=\lambda^{n-1}\overrightarrow{P_1P_2}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{P_1P_n}=\sum_{k=1}^{n-1}\overrightarrow{P_kP_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n-1}\lambda^{k-1}\overrightarrow{P_1P_2}=\frac{\lambda^{n-1}-1}{\lambda-1}\overrightarrow{P_1P_2}$$

固有値1を重解にもつ1次変換　(東工大)

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表される平面上の1次変換を f，直線 $y=mx\ (m\neq 0)$ を l とし、f は次の2条件を満たすとする。

(ア) f は l の各点を動かさない。

(イ) f は点 $\mathrm{P}(1,0)$ を、この点 P を通り l に平行な直線上に移す。

このとき、

(1) $ad-bc$ を求めよ。

(2) f により平面上の任意の点 Q は、Q を通り l に平行な直線上の点に移ることを示せ。

【解】(1) 条件(ア)から $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$

$$\therefore\quad \begin{cases} a+bm=1 \\ c+dm=m \end{cases} \quad\cdots\cdots ①$$

また、条件(イ)により $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$

$\therefore\quad a=1+t,\ c=tm$ ---★

を満たす実数 t が存在する。よって、①とから

$$a=1+\frac{c}{m},\quad b=-\frac{c}{m^2},\quad d=1-\frac{c}{m} \quad\cdots\cdots ②$$

★から t 消去　①より $b=\frac{1-a}{m}$　①より $d=1-\frac{c}{m}$

したがって　(∵)

$$ad-bc=\left(1+\frac{c}{m}\right)\left(1-\frac{c}{m}\right)+\frac{c}{m^2}\cdot c=1$$

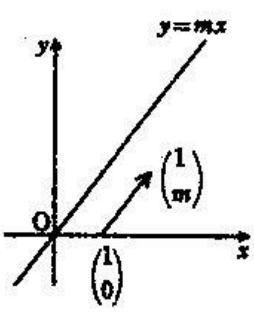
備考
条件(ア)より
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix}$
$(A-E)\begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix}=0$
$\begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix}\neq 0$ のときもこれは成り立つから
$|A-E|=ad-(a+d)+1-bc=0$
$\therefore\ a+d=(ad-bc)+1$
$=1+1$ (∵(1))
$=2$
よって $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は固有方程式が
$k^2-2k+1=0$ となり、
固有値 $k=1$ を重解にもつ

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\not\parallel\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ であるから、$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ とおけて、

$$f(\overrightarrow{\mathrm{OQ}})=xf\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+yf\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}=x\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}\right\}+y\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

$$=x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}+xt\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+xt\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

よって、Q は、Q を通り l に平行な直線上の点に移る。



参考 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ m & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1+t \\ m & mt \end{pmatrix}$

両辺に行列式をとると

$$(ad-bc)(-m)=-m$$

$m\neq 0$ より　$ad-bc=1$

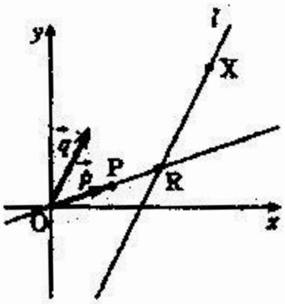
原点以外の不動点をもつ１次変換と不動直線

> A が固有値 1, $\lambda\,(\neq 0,\ 1)$ をもつとき、それぞれの固有ベクトル $\vec{p}$, $\vec{q}$ とすると、$\vec{q}$ に平行な直線はすべて f の不動直線である。

証明 条件から $A\vec{p}=\vec{p}$, $A\vec{q}=\lambda\vec{q}$ すなわち

$$f(\vec{p})=\vec{p},\quad f(\vec{q})=\lambda\vec{q}$$

$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおき、直線 OP と $\vec{q}$ に平行な直線 l との交点を R とすると R は不動点である。



l の方程式は $\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}+t\vec{q}$ (t はパラメータ) であり、

$$f(\overrightarrow{\mathrm{OX}})=f(\overrightarrow{\mathrm{OR}}+t\vec{q})=f(\overrightarrow{\mathrm{OR}})+tf(\vec{q})=\overrightarrow{\mathrm{OR}}+t\lambda\vec{q}$$

となるから、f による l の像は l 自身である。

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=u\vec{p}$ とおける。

$f(\overrightarrow{\mathrm{OR}})=uf(\vec{p})$

$=u\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ による。

$\vec{p}\,/\!/\,\vec{q}$ とすると、$\vec{p}\neq\vec{0}$ より

$\vec{p}=k\vec{q}$, $k\neq 0$ とおける。

$f(\vec{p})=f(k\vec{q})=k\vec{q}$

$f(\vec{p})=kf(\vec{q})=k\lambda\vec{q}$ より。

$k\vec{q}=k\lambda\vec{q}$　$k(1-\lambda)\vec{q}=0$

$k\neq 0$, $\vec{q}\neq 0$ より $\lambda=1$

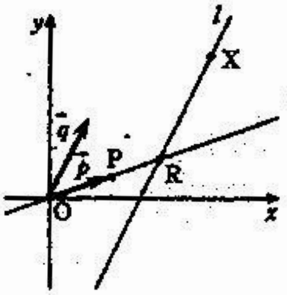
これは $\lambda\neq 1$ に矛盾するから.

$\vec{p}\not\parallel\vec{q}$

Aが固有値1，0をもつとき、それぞれの固有ベクトルを $\vec{p}$, $\vec{q}$ とすると、$\vec{q}$ に平行な直線 l 上の点はすべて l 上のある定点に移される。

証明 条件から　$f(\vec{p})=\vec{p}$, $f(\vec{q})=\vec{0}$

$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおき、直線OPと $\vec{q}$ に平行な直線 l との交点をRとするとRは不動点である。



l の方程式は $\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}+t\vec{q}$ であり、

$f(\overrightarrow{\mathrm{OX}})=f(\overrightarrow{\mathrm{OR}}+t\vec{q})=f(\overrightarrow{\mathrm{OR}})+tf(\vec{q})=\overrightarrow{\mathrm{OR}}$

となる。

すなわち、f による l 上の点はすべて定点Rに移される。

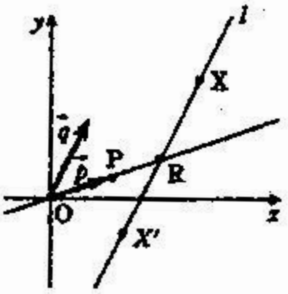
特に、$\vec{p}\perp\vec{q}$ のとき、f は正射影といい、f の表現行列は対称行列となる。

注　$A^2=A\,(A\neq E,\ A\neq O)$ を満たす行列 A の固有値は1，0である。

A が固有値 1, -1 をもつとき、それぞれの固有ベクトル $\vec{p}$, $\vec{q}$ とすると、$\vec{q}$ に平行な直線 l 上の点はすべて l 上のある定点に関して対称移動される。

証明 条件から　$f(\vec{p})=\vec{p}$,　$f(\vec{q})=-\vec{q}$

$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおき、直線 OP と $\vec{q}$ に平行な直線 l との交点を R とすると R は不動点である。



l の方程式は $\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}+t\vec{q}$ (t はパラメータ) であり、

$\overrightarrow{\mathrm{OX'}}=f(\overrightarrow{\mathrm{OX}})=f(\overrightarrow{\mathrm{OR}}+t\vec{q})=f(\overrightarrow{\mathrm{OR}})+tf(\vec{q})=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-t\vec{q}$

となるから、X' は l 上にあり、R に関して X と対称である。

特に、$\vec{p}\perp\vec{q}$ のとき、f は直線 OR に関する対称移動となる。

Aが固有値1を重解にもつとき、その固有ベクトル$\vec{p}$とすると、$\vec{p}$に平行な直線はすべて不動直線である。

証明 原点を通る直線については明らかだから、原点を通らない直線の場合について証明する。 (※)

$A^2-2A+E=O$ より　$A(A-E)=A-E$

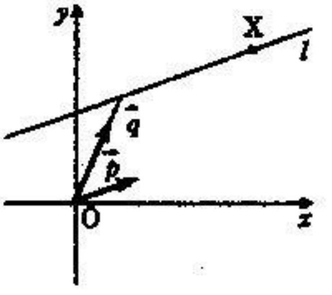
いま、$\vec{p}\not\parallel\vec{q}$, $(A-E)\vec{q}\neq\vec{0}$ を満たすベクトル$\vec{q}$をとると

$$A(A-E)\vec{q}=(A-E)\vec{q}$$

なので、$(A-E)\vec{q}$はAの固有ベクトルである。

すなわち、$(A-E)\vec{q}=k\vec{p}$ だから

$$A\vec{q}=\vec{q}+k\vec{p} \quad \cdots\cdots ①$$



$\vec{p}$に平行で原点を通らない直線の方程式は

$$\vec{x}=s\vec{q}+t\vec{p} \ (t \text{はパラメータ}, s\neq 0) \quad \cdots\cdots ②$$

とおけて、①を用いることにより

$$\vec{x'}=A\vec{x}=sA\vec{q}+tA\vec{p}=s(\vec{q}+k\vec{p})+t\vec{p}=s\vec{q}+(ks+t)\vec{p} \ (k, s \text{は定数})$$

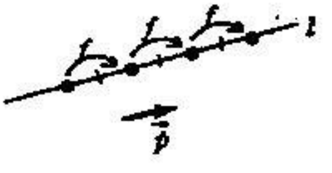
となるから、②はAの不動直線である。

参考 $\vec{x''}=A\vec{x'}$ とすると $\vec{x'}-\vec{x}=ks\vec{p}$ より

$\vec{x''}-\vec{x'}=A(\vec{x'}-\vec{x})=ksA\vec{p}=ks\vec{p}$

$\therefore \quad \vec{x''}-\vec{x'}=\vec{x'}-\vec{x}$

よって、不動直線l上では、fによる各点の移動量は一定である。



(※) 原点を通る$\vec{p}$に平行な任意の点Qに対して

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\vec{p}$ と表される(tはパラメータ). このとき

$$f(\overrightarrow{\mathrm{OQ}})=tf(\vec{p})=t\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}.$$

原点以外の不動点をもつ1次変換の条件

1次変換 f の行列を $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。

A が固有値1をもつ（すなわち　$1-(a+d)+ad-bc=0$）。

$\iff$　f は原点以外の不動点をもつ。

【証明】A が固有値1をもつ。$\iff$　$A\vec{p}=\vec{p}$，$\vec{p}\neq\vec{0}$ が存在する。

$\iff$　f は原点以外の不動点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ をもつ。

設問　変換 f によって、点Pが P 自身に移るとき、点Pを f の 不動点 という。

(1)　行列 $\begin{pmatrix} a & -2 \\ -1 & b \end{pmatrix}$ で表される1次変換 f で、点 $(2,\ 1)$ が f の不動点であるとき、a，b の値を求めよ。

(2)　行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表される1次変換 f について、原点O以外の不動点が存在するとき、$(a-1)(d-1)-bc$ の値を求めよ。

【解】(1)　$\begin{pmatrix} a & -2 \\ -1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ から　$\begin{pmatrix} 2a-2 \\ -2+b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

よって、$2a-2=2$，$-2+b=1$ から　$a=2$，$b=3$

(2)　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，原点O以外の不動点を $(x,\ y)$ とすると

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ から　$(A-E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

すなわち　$\begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ここに $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから、$\begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix}$ の逆行列は存在しない。

よって　$(a-1)(d-1)-bc=0$

行列の成分,点の軌跡

$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ とする。

2次の正方行列 A がある実数 t に対して $A(E-tJ)=E+tJ$ を満たすとする。

(1) A の成分を t を用いて表せ。

(2) t が正の数全体を動くとき $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}$ で定まる点 $(x,\ y)$ の描く図形を求め、図示せよ。

【解】(1) $E-tJ=\begin{pmatrix}1 & t\\ -t & 1\end{pmatrix}$, $E+tJ=\begin{pmatrix}1 & -t\\ t & 1\end{pmatrix}$ であり、$|E-tJ|=1+t^2\neq 0$ であるから $\quad (E-tJ)^{-1}=\dfrac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix}1 & -t\\ t & 1\end{pmatrix}$

そこで、$A(E-tJ)=E+tJ$ の右から $(E-tJ)^{-1}$ を掛けて

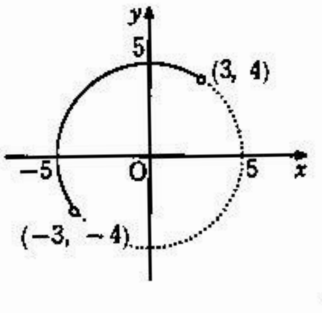
$$A=(E+tJ)(E-tJ)^{-1}=\frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix}1 & -t\\ t & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -t\\ t & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{-2t}{1+t^2}\\ \dfrac{2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{pmatrix}$$

(2) $\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ とおくと $\quad A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ となる。

よって、A は原点Oのまわりの角 θ の回転を表す行列であるから、$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}$ より点 $(3,\ 4)$ をOのまわりの角 θ の回転した点が $(x,\ y)$ である。

そして、t が正の数全体を動けば、$0<\theta<\pi$ の範囲を θ が動く。

以上より、点 $(x,\ y)$ はOを中心として点 $(3,\ 4)$ を通る円 $x^2+y^2=5^2$ の上を、点 $(3,\ 4)$ から点 $(-3,\ -4)$ まで、反時計まわりに動き、半円(両端を除く)を描く。



参考 $E\to 1$, $J\to i$, $A\to z$ を対応させると、複素平面上では

$z(1-ti)=1+ti$

よって、$z=\dfrac{1+ti}{1-ti}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+\dfrac{2t}{1+t^2}i \qquad$ 戻すと $\quad A=\begin{pmatrix}\dfrac{1-t^2}{1+t^2} & -\dfrac{2t}{1+t^2}\\ \dfrac{2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{pmatrix}$

不動直線　$(1, k)$

1次変換 f を表す行列 $A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ とする。f によって直線 l が l 自身に移されるとき、この直線 l の方程式を求めよ。

【捉え方】求める不動直線 l のベクトル表示を l: $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u}$ とし、f による l の像を l' とすると l': $A\vec{p}=A\vec{a}+tA\vec{u}$ になる。

l と l' が一致するということは、$l /\!/ l'$ であり、l と l' が1点で共有することである。

まず、$l /\!/ l'$ とは l, l' の方向ベクトルが平行であるということだから、

$$A\vec{u} \neq \vec{0} \text{ であって、} A\vec{u} /\!/ \vec{u}$$

すなわち、「$A\vec{u}=k\vec{u}\ (\vec{u}\neq\vec{0})$ を満たす実数 $k\,(\neq 0)$ がある。」　　……☆
ということである。

次に、l と l' が1点を共有するとは $A\vec{a}$ が直線 l: $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u}$ 上の点である。

言い換えると、$\vec{a}$ は $(A\vec{a}-\vec{a}) /\!/ \vec{u}$ を満たすということである。

この問題は、A の固有方程式 $k^2-3k+2=0$ から固有値が1，2となる。

1，2に対する固有ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ で表すと

$$A\overrightarrow{u_1}=\overrightarrow{u_1},\quad A\overrightarrow{u_2}=2\overrightarrow{u_2}$$

であり、$\overrightarrow{u_1} \not\!/\!/ \overrightarrow{u_2}$ より $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ は1次独立だから $\vec{a}=\alpha\overrightarrow{u_1}+\beta\overrightarrow{u_2}$ と表せる。

そこで $\vec{a}$ が不動直線上の点を表すための α, β の条件を見いだしてみる。

$$A\vec{a}=\alpha A\overrightarrow{u_1}+\beta A\overrightarrow{u_2}=\alpha\overrightarrow{u_1}+2\beta\overrightarrow{u_2} \text{ より}$$

$$A\vec{a}-\vec{a}=\alpha\overrightarrow{u_1}+2\beta\overrightarrow{u_2}-\alpha\overrightarrow{u_1}-\beta\overrightarrow{u_2}=\beta\overrightarrow{u_2}$$

よって、$A\vec{a}-\vec{a} /\!/ \overrightarrow{u_2}$ はつねに成り立つことが分かる。

このことは、固有ベクトル $\overrightarrow{u_2}$ を方向ベクトルとする任意の直線が不動直線になることを示している。

次に、$A\vec{a}-\vec{a} /\!/ \overrightarrow{u_1}$ であるためには　$\beta=0$

このとき、$\vec{a}=\alpha\overrightarrow{u_1}$ で l: $\vec{p}=(\alpha+t)\overrightarrow{u_1}$ となり原点を通り、方向ベクトルが $\overrightarrow{u_1}$ である直線となる。

以上により、不動直線は、原点を通り、$\overrightarrow{u_1}$ を方向ベクトルとする直線と、$\overrightarrow{u_2}$ を方向ベクトルとする任意の直線である。

注　不動直線が存在すれば、その直線の方向ベクトルは☆により、A の固有ベクトルに限ることが分かる。

この事実を、2つの固有ベクトル $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ で張る平面で考察してみる。

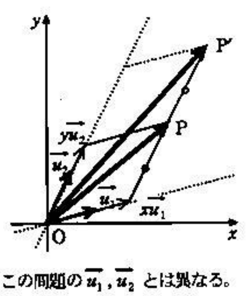
任意の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ を $\vec{p}=x\overrightarrow{u_1}+y\overrightarrow{u_2}$　　……①

と表すと　$A\vec{p}=xA\overrightarrow{u_1}+yA\overrightarrow{u_2}$

$=x\overrightarrow{u_1}+2y\overrightarrow{u_2}$

よって、図のように P は P′ に移される。

特に、①で $y=0$ のときは P と P′ は一致し、このとき、$\mathrm{P}=\mathrm{P_0}$ とすると、$\mathrm{P_0}$ は不動点であり、直線 $\mathrm{OP_0}$ は不動直線である。



図この問題の $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ とは異なる。

2次の正方行列が満たす等式の証明．連立方程式

2次の正方行列 A について、$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}$，$A^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}$ が成り立っている。このとき、次の問に答えよ。

(1) $A\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}$ を示せ。

(2) $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ となる $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ を1つ求めよ。

(3) $A^2=A$ を示せ。

【解】(1) $A\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}=A\left\{A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}=A^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}$

(2) $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}$ ……①　　(1)から $A\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}$ ……②

②−①から　$A\begin{pmatrix}a-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a-1\\1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ であるから　$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-1\\1\end{pmatrix}$

(3) ①, ②から　$A\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&a\\1&1\end{pmatrix}$ ……③

また、②から

$A^2\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}=A\left\{A\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}\right\}=A\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}$，　$A^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}$，$A^2\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}$ から

$A^2\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&a\\1&1\end{pmatrix}$ ……④

③, ④から　$A^2\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}$ ……⑤

行列 $\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}$ について、$1\cdot1-a\cdot0=1\neq0$ より、逆行列 $\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}^{-1}$ が存在するから

⑤の両辺に右から $\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}^{-1}$ を掛けて　$A^2=A$

注 $A\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&1\\1&1\end{pmatrix}$ より　$A=\begin{pmatrix}a&a\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}a&a\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-a\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&-a^2+a\\1&-a+1\end{pmatrix}$

よって、ケーリー・ハミルトンの定理より　$A^2=A$

pならば，qまたはr

『p ならば　q または r』が成り立つ。　　　　……①

このことを証明するには、もし q が成り立っていれば、明らかに①は成り立つから、q が成り立たなければ r が成り立つことを示せばよい。

すなわち『p かつ $\overline{q}$ ならば　r』を証明すればよいことになる。

このことは記号論理の立場から、次の真理表からも判断できる。

p	q	r	$p \Rightarrow q \vee r$	$p \wedge \overline{q}$	$\Rightarrow$	r
○	○	○	○	×	○	○
○	○	×	○	×	○	×
○	×	○	○	○	○	○
×	○	○	○	×	○	○
○	×	×	×	○	×	×
×	○	×	○	×	○	×
×	×	○	○	×	○	○
×	×	×	○	×	○	×

【例】「$AB=O$ ならば、A が逆行列をもたないか $B=O$ である」ことを証明せよ。

【証1】「$AB=O$ で A が逆行列をもつならば、$B=O$ である」ことを証明すればよい。

$AB=O$ の両辺に左から A^{-1} を掛けると

$$A^{-1}AB=A^{-1}O$$

$$EB=O$$

$$\therefore \quad B=O$$

【証2】「$AB=O$ で $B \neq O$ ならば、A は逆行列をもたない」ことを証明すればよい。

A が逆行列をもつとすると、$AB=O$ の両辺に、左から A^{-1} を掛けると

$$A^{-1}AB=A^{-1}O \qquad \therefore \quad EB=O$$

よって、$B=O$ となり、これは $B \neq O$ に矛盾する。

したがって、A は逆行列をもたない。

関係式から$ad - b \neq 0$の証明．逆行列をもつ証明

2次の正方行列 A と、$a^2+b^2 \neq 0$ を満たす実数 a，b に対して、$A^2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ が成り立つとする。$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ とおくとき

(1) $ad-bc \neq 0$ を示せ。

(2) A は逆行列 A^{-1} をもつことを示せ。また、A^{-1} を a，b，c，d で表せ。

aとbが同時に0にならないから、
$a:b=c:d$
$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

【解】(1) $ad-bc=0$ とすると $ad=bc$

よって、$c=ka$，$d=kb$（k は実数）と表される。

ゆえに $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

よって $A^2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A\left\{A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right\} = A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = kA\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = k^2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

また、$A^2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ であるから $k^2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ゆえに $(k^2+1)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ここで、$k^2+1>0$，$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから、$(k^2+1)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となり、矛盾する。

したがって $ad-bc \neq 0$

(2) $ad-bc \neq 0$ より
$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1}$ 存在。
①に両辺右からかけて
$A = \begin{pmatrix} c & -a \\ d & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1}$
$ad-bc \neq 0$ より右辺は
$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -a \\ d & -b \end{pmatrix}^{-1}$
逆行列をもつ。

(2) $A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = A\left\{A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right\} = A^2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$ から $A\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -a \\ d & -b \end{pmatrix}$ ……①

(1)より $ad-bc \neq 0$ であるから、逆行列 $\begin{pmatrix} c & -a \\ d & -b \end{pmatrix}^{-1}$ は存在する。

あるいは

ゆえに、①の両辺に右から $\begin{pmatrix} c & -a \\ d & -b \end{pmatrix}^{-1}$ を掛けて

$$A\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -a \\ d & -b \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ←「$AA'=E \Leftrightarrow A'A=E$」
（交換可能な行列参照）

したがって、A は逆行列 A^{-1} をもち

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -a \\ d & -b \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} -ab-cd & a^2+c^2 \\ -b^2-d^2 & ab+cd \end{pmatrix}$$

トレース，行列式の性質

$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$とする。

正方行列 A の対角成分の和 a_1+d_1 を A のトレースといい、$\mathrm{tr}A$ と書く。

トレースの性質

定義：正方行列 A の対角成分の和 a_1+d_1 を A のトレースといい、$\mathrm{tr}A$ と書く。

任意の2次の正方行列 A，B と定数 l，m に対して、

$\mathrm{tr}(lA+mB)=l\mathrm{tr}(A)+m\mathrm{tr}(B)$

$\mathrm{tr}\,{}^tA=\mathrm{tr}A$　（${}^tA$ は A の転置行列）

${}^tA=\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}$ 行と列を入れかえる

$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$

$\mathrm{tr}(B^{-1}AB)=\mathrm{tr}A$　（ただし B は正則行列）

逆行列をもつ行列

が成り立つ。

解説

$\mathrm{tr}(lA+mB)=l(a_1+d_1)+m(a_2+d_2)=l\mathrm{tr}(A)+m\mathrm{tr}(B)$

$\mathrm{tr}\,{}^tA=\mathrm{tr}A$ は明らか。

$AB=\begin{pmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ a_2c_1+c_2d_1 & b_2c_1+d_1d_2 \end{pmatrix}$，$BA=\begin{pmatrix} a_2a_1+b_2c_1 & a_2b_1+b_2d_1 \\ a_1c_2+c_1d_2 & b_1c_2+d_1d_2 \end{pmatrix}$

より　$\mathrm{tr}(AB)=a_1a_2+b_1c_2+b_2c_1+d_1d_2=\mathrm{tr}(BA)$

$\mathrm{tr}(B^{-1}AB)=\mathrm{tr}\{B^{-1}(AB)\}=\mathrm{tr}\{(AB)B^{-1}\}=\mathrm{tr}\{A(BB^{-1})\}=\mathrm{tr}A$

行列式の性質　$a_1d_1-b_1c_1$　⊿A, det A など

定義：行列 A の $\cancel{a_1d_1-a_2d_2}$ を A の行列式といい、$|A|$ と書く。

$|AB|=|A||B|$，$|A^n|=|A|^n$

解説

$$\begin{aligned}|AB|&=(a_1a_2+b_1c_2)(b_2c_1+d_1d_2)-(a_1b_2+b_1d_2)(a_2c_1+c_2d_1)\\&=a_1a_2d_1d_2+b_1b_2c_1c_2-a_1b_2c_2d_1-a_2b_1c_1d_2\\&=(a_1d_1-b_1c_1)(a_2d_2-b_2c_2)\\&=|A||B|\end{aligned}$$

$|A^n|=|AA\cdots A|=|A||A|\cdots|A|=|A|^n$

その他

- **オイラーの公式の証明**
- 速算 (基本形)
- 直角双曲線$xy = a$の性質
- 累積帰納法

など

オイラーの公式の証明

平面上にある有理個の点とそれを結ぶ互いに交わらない平面上の曲線からなる図形を平面グラフという。点を頂点、点を結ぶ曲線を辺と呼び、いくつかの辺によって囲まれた平面の有限領域であって、他の辺によって区切られていないものを面と呼ぶ。また、平面上の任意の２点に対して、それらをそのグラフのいくつかの辺を用いて結ぶことができるとき、そのグラフは連結であるといい、そうでないとき非連結と呼ぶ。

平面グラフ G に対して、その頂点の個数を V_G，辺の個数を E_G，面の個数を F_G とする。このとき連結な平面グラフ G に対して、

オイラーの公式　　$V_G - E_G + F_G = 1$

が成り立つ。

この公式を $E_G(=0, 1, 2, \cdots\cdots)$ に関する数学的帰納法を用いて証明せよ。

【証明】(Ⅰ) $E_G=0$，すなわち、G が１点からなるとき、$V_G=1$，$E_G=0$，$F_G=0$ により公式は成り立つ。

(Ⅱ) $E_G \leqq k$ のとき公式が成り立つとすると、$E_G=k+1$ のときも成り立つことを示す。

$E_G=k+1$ のとき、G から任意の１辺を消去したグラフ G' を考える。

このとき G' が連結となる場合と、２つの連結な部分 G_1' と G_2' に分かれる場合が考えられる。

前者の場合：このとき、$V_{G'}=V_G$，$E_{G'}=E_G-1$，$F_{G'}=F_G-1$ であるから、G' の辺の数が k 以下であるから　$V_{G'}-E_{G'}+F_{G'}=1$

$$\therefore \quad V_G - E_G + F_G = 1$$

後者の場合：このとき、$V_{G_1'}+V_{G_2'}=V_G$，$E_{G_1'}+E_{G_2'}=E_G-1$，$F_{G_1'}+F_{G_2'}=F_G$

G_1'，G_2' の辺の数が k 以下であるから

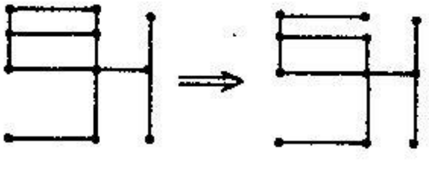
$$V_{G_1'}-E_{G_1'}+F_{G_1'}=1, \quad V_{G_2'}-E_{G_2'}+F_{G_2'}=1$$

よって　$(V_{G_1'}+V_{G_2'})-(E_{G_1'}+E_{G_2'})+(F_{G_1'}+F_{G_2'})=2$

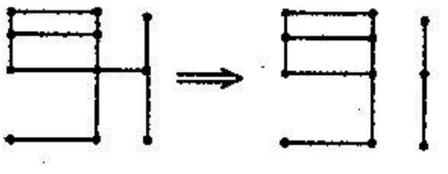
$$\therefore \quad V_G - E_G + F_G = 1$$

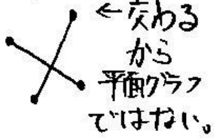
以上により、帰納的にすべての非負な整数 k に対してオイラーの公式は成り立つ。

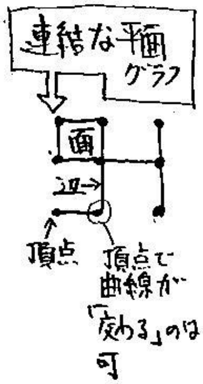
参考　前者

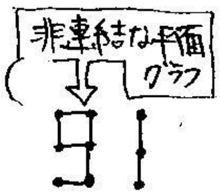


後者









オイラーの公式

平面上にある有理個の点とそれを結ぶ互いに交わらない平面上の曲線からなる図形を平面グラフという。
点を頂点、点を結ぶ曲線を辺と呼び、いくつかの辺によって囲まれた平面の有限領域であって、他の辺によって区切られていないものを面と呼ぶ。また平面上の任意の2点に対して、それらをそのグラフのいくつかの辺を用いて結ぶことができるとき、そのグラフは連結であるといい、そうでないとき非連結と呼ぶ。
平面グラフGに対して、その頂点の個数をV_G,辺の個数をE_G,面の個数をF_Gとする。このとき連結な平面グラフGに対してオイラーの公式
$V_G-E_G+F_G=1$ が成り立つ。
この公式をE_G $(=0,1,2,\cdots\cdots)$に関するM.I.を用いて証明せよ。

オイラーの公式の証明　別解を発見した

$V_G-E_G+F_G=1$ ……(*)

[I] $E_G=0$ のとき、平面グラフGは唯一つの頂点より、$V_G=1$, $F_G=0$ なので、(*)が成り立つ。

[II] $E_G=k$ のときの平面グラフG_kに対して(*)が成り立つと仮定すると、
$V_{G_k}-E_{G_k}+F_{G_k}=1$ ……(*)′　G_kに辺を1本加え、$E_G=k+1$となる平面グラフG_{k+1}をつくるとき、G_kは連結より頂点の数を増やさないならば、既存の2つの頂点を結ぶときに面が1つ増え、また、頂点の数が増えるならば、面は新たにできない。すなわち

(i) $V_{G_{k+1}}=V_{G_k}$ かつ $F_{G_{k+1}}=F_{G_k}+1$ または
(ii) $V_{G_{k+1}}=V_{G_k}+1$ かつ $F_{G_{k+1}}=F_{G_k}$ である。

いずれの場合も
$$\begin{aligned}&V_{G_{k+1}}-E_{G_{k+1}}+F_{G_{k+1}}\\&=V_{G_k}+F_{G_k}+1-(E_{G_k}+1)\\&=V_{G_k}-E_{G_k}+F_{G_k}=1\ (\because (*)')\end{aligned}$$
となり、(*)は $E_G=k+1$ のときも成り立つ。

[I],[II]より、すべての自然数E_Gに対して(*)が成り立つ。

速算 (基本形)

(ア) 縦の2数か横の2数が同じ かつ (イ) 残りの2数の和が10 の2桁どうしの積

(例) ① $\begin{array}{r} 47 \\ \times\ 43 \\ \hline 2021 \end{array}$ ② $\begin{array}{r} 74 \\ \times\ 34 \\ \hline 2516 \end{array}$ ③ $\begin{array}{r} 44 \\ \times\ 37 \\ \hline 1628 \end{array}$ ④ $\begin{array}{r} 73 \\ \times\ 44 \\ \hline 3212 \end{array}$

【方法】

(i) 10の位の2数の積に、(ア)の同じ数を加える

(ii) 上のようにして得られた数の後ろに1の位の2数の積をつける
(ただし、1の位の2数の積が1桁の数 a のときは $0a$ とする)

【解説】

$A=(10a+b)(10c+d)=100ac+10(ad+bc)+bd$ において

① $a=c$, $b+d=10$ より
$ad+bc=ad+ba=a(b+d)=10a$
$\therefore\ A=100(ac+a)+bd$
$=100a(a+1)+bd$

② $a+c=10$, $b=d$ より
$ad+bc=ab+bc=(a+c)b=10b$
$\therefore\ A=100(ac+b)+bd$

③ $a=b$, $c+d=10$ より
$ad+bc=ad+ac=a(d+c)=10a$
$\therefore\ A=100(ac+a)+bd$
$=100a(c+1)+bd$

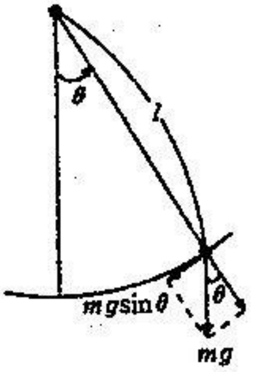
④ $c=d$, $a+b=10$
③と同様に
$A=100(ac+c)+bd$
$=100c(a+1)+bd$

単振り子の周期

長さ l の糸の先に質量 m のおもりを付けて振らせた場合の運動を考える。

このとき、おもりに作用する力は右図のようである。

おもりの描く円の接線方向には $mg\sin\theta$ なる大きさの重力が作用しているから



$$m\frac{dv}{dt}=-mg\sin\theta$$

また、角速度 ω について $\omega=\frac{d\theta}{dt}$, $v=l\omega$ であるから

$$l\frac{d\omega}{dt}=-g\sin\theta$$

ここで、θ が小さいとき $\sin\theta\fallingdotseq\theta$ であるから

$$\frac{d\omega}{dt}=-\frac{g}{l}\theta$$

$$\therefore\quad \frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\theta \qquad \cdots\cdots①$$

この運動は単振動である。

単振動 $m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$ において周期は $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

よって、①の周期 T は $\frac{k}{m}$ が $\frac{g}{l}$ に相当するから

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

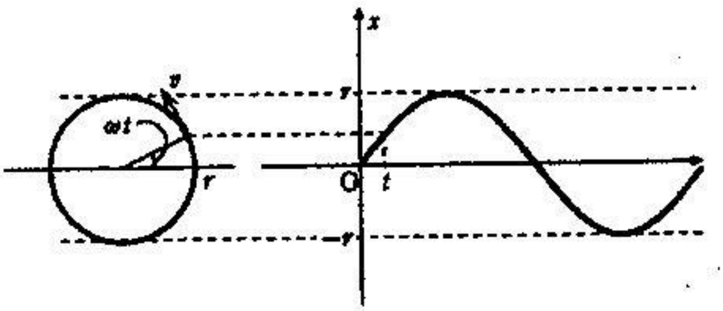
注 等速円運動の周期

$$T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi}{\omega}$$

単振動の周期

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

回転数 f は $\frac{1}{T}$



注 単振動という運動は等速円運動する物体を真横から光を当てて鉛直の壁に射影したような往復運動です。

あるいは、円の中心を通る鉛直線に射影したような往復運動です。

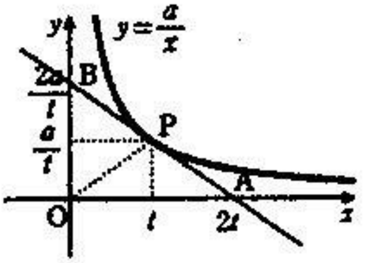
	等速円運動	単振動
r [m]	半径	振幅
T [s]	周期	周期
ω [rad/s]	角速度	角振動数
f [Hz]	回転数	振動数

1秒当たりの回転角(単振動では角振動数) も ω [rad/s]

1秒当たりの往復数(単振動では振動数) も f [Hz]

直角双曲線$xy=a$の性質

□ $x=t$ における接線は $\quad y=-\dfrac{a}{t^2}x+\dfrac{2a}{t}$ …… ☆



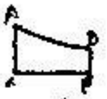
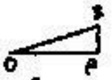
両軸との交点は $\quad A(2t,\ 0),\ B\left(0,\ \dfrac{2a}{t}\right)$

OPの傾きは $\quad \dfrac{a}{t^2}$

Pは線分ABの中点である。

△OABの面積は一定である。

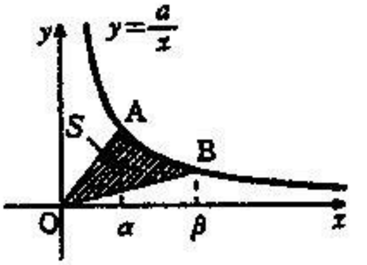
△POAは二等辺三角形である。

□ $S=$  $+$  $-$ 

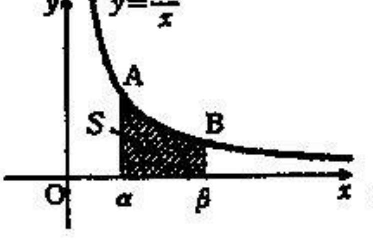
$=\dfrac{1}{2}\alpha\cdot\dfrac{a}{\alpha}+\displaystyle\int_\alpha^\beta\dfrac{a}{x}dx-\dfrac{1}{2}\beta\cdot\dfrac{a}{\beta}$

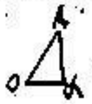
$=\dfrac{1}{2}a+\displaystyle\int_\alpha^\beta\dfrac{a}{x}dx-\dfrac{1}{2}a$

$=\displaystyle\int_\alpha^\beta\dfrac{a}{x}dx$

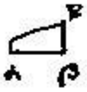


これは右図の面積に等しい。



確かに  $=\dfrac{1}{2}\times\alpha\times\dfrac{a}{\alpha}=\dfrac{a}{2}$

 $=\dfrac{1}{2}\times\beta\times\dfrac{a}{\beta}=\dfrac{a}{2}$

より  $=$ 

【補足】☆ について

直線 $y=m(x-t)+\dfrac{a}{t}$ (m は接線の傾き) と双曲線 $y=\dfrac{a}{x}$ が接するとき、

$$m(x-t)+\frac{a}{t}=\frac{a}{x}$$

すなわち $\quad mtx^2-(mt^2-a)x-at=0 \quad$ が重解をもつから

$$D=(mt^2-a)^2+4mt^2a=(mt^2+a)^2=0$$

よって $\quad mt^2+a=0 \qquad \therefore \quad m=-\dfrac{a}{t^2}$

累積帰納法 (導入)

$f(0)=1$，$f(n)=f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)$ ($n=1, 2, 3, \cdots$) が成り立つとき，次の問に答えよ。

(1) $f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$ の値を求めよ。

(2) (1)より，$f(n)$ ($n \geqq 1$) を推測し，その推測が正しいことを，数学的帰納法で証明せよ。

(1) $f(1) = f(0) = 1$

$f(2) = f(0) + f(1) = 2$

$f(3) = f(0) + f(1) + f(2) = 4$

$f(4) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 8$

(2) (1)より $f(n) = 2^{n-1}$ ($n \geqq 1$) $\cdots$(※) と推測される。

(i) $n=1$ のとき $f(n) = f(1) = 1$ (∵(1))

$= 2^{1-1} = 2^{1-1}$ より (※)式は成立。

(ii) $n = k$ ($\geqq 1$) のとき (※)式が成り立つと仮定すると

$f(k) = 2^{k-1}$ なので $f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(k-1) = 2^{k-1}$ だから

$f(k+1) = f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(k-1)+f(k)$

$= 2^{k-1} + 2^{k-1}$

$= 2^{(k+1)-1}$

より $n = k+1$ のときも (※)式は成立する。

(i), (ii) より $n \geqq 1$ をみたすすべての自然数 n に対して

$f(n) = 2^{n-1}$

0, 1 Kでした！

「+2α」

別解

$f(n+1) = f(n) + f(n)$

$= 2f(n)$: $f(n)$ は G.P.
($n \geqq 1$)

$f(1) = 1$ より

$f(n) = 1 \cdot 2^{n-1}$ (n≧1で成立)

(↑) このように通常の
数学的帰納法でも証明できる

端的には

等差数列 (arithmetic progression) AP
等比数列 (geometric progression) GP

累積帰納法 (導入)

$f(0)=1$, $f(n)=f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ が成り立つとき、次の問に答えよ。

(1) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ の値を求めよ。

(2) (1) より、$f(n)$ $(n\geqq 1)$ を推測し、その推測が正しいことを、数学的帰納法で証明せよ。

解説 自然数 n に関する命題 $P(n)$ の数学的帰納法の証明

[1] $P(1)$ が成り立つことを示す。 **注** $P(2)$ を示さなければならない場合もある。

[2] $P(1)$, $P(2)$, $\cdots$, $P(k-1)$ が成り立つと仮定して、$P(k)$ が成り立つことを示す。

【解】(1) $f(1)=f(0)=1$, $f(2)=f(0)+f(1)=2$, $f(3)=f(0)+f(1)+f(2)=4$

$f(4)=1+1+2+4=8$

(2) $f(n)=2^{n-1}$ ……… ☆ と推測される。

[1] $n=1$ のとき $f(1)=f(0)=1=2^{1-1}$ より ☆ は成り立つ。

[2] $n=1, 2, \cdots, k-1$ のとき ☆ が成り立つとすると

$f(n)=2^{n-1}$ $(n=1, 2, \cdots, k-1)$

このとき、$f(k)=f(0)+f(1)+\cdots+f(k-1)=1+1+2+2^2+\cdots+2^{k-2}$

$$=1+\frac{2^{k-1}-1}{2-1}=2^{k-1}$$

よって、☆ は $n=k$ のときも成り立つ。

[1], [2] より、☆ はすべての自然数で成り立つ。

別 $n\geqq 2$ のとき $f(n)=f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(n-2)+f(n-1)$

$$=f(n-1)+f(n-1)=2f(n-1)$$

より $f(n)=2f(n-1)=2^2f(n-2)=\cdots=2^{n-1}f(1)=2^{n-1}$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

よって $f(n)=2^{n-1}$

(↑) 累積帰納法にて

整数の個数1

自然数 n に対して $3^n-\dfrac{1}{3^n}$ と $3^{n+1}-\dfrac{1}{3^{n+1}}$ の間にある整数の個数を a_n とするとき

(1) a_n を n の式で表せ。

(2) $S_n=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{2}{a_2}+\dfrac{3}{a_3}+\cdots+\dfrac{n}{a_n}$ を求めよ。

指針 (1)、自然数 k に対して　$3^k-\dfrac{1}{3^k}<3^k<3^k+\dfrac{1}{3^k}$ が成り立つ。

(2) $S=$(等差数列)×(等比数列)の和 は　$S-$(公比)×S を求める。

【解】(1)　$0<\dfrac{1}{3^n}<1$ であるから a_n は 3^n から $3^{n+1}-1$ までの整数の個数である。

よって　$a_n=3^{n+1}-1-3^n+1=2\cdot3^n$

$$3^n-1<3^n-\frac{1}{3^n}<3^n<3^n+1$$
$$<3^{n+1}-1<3^{n+1}-\frac{1}{3^{n+1}}<3^{n+1}$$

(2)　$S_n=\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{2}{2\cdot3^2}+\dfrac{3}{2\cdot3^3}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{2\cdot3^n}$　より

$$\frac{1}{3}S_n=\qquad\frac{1}{2\cdot3^2}+\frac{2}{2\cdot3^3}+\cdots\cdots+\frac{n-1}{2\cdot3^n}+\frac{n}{2\cdot3^{n+1}}$$

辺々をそれぞれ引くと

$$\frac{2}{3}S_n=\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2\cdot3^n}-\frac{n}{2\cdot3^{n+1}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2\cdot3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{2\cdot3^{n+1}}$$

よって　$S_n=\dfrac{3}{8}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)-\dfrac{n}{4\cdot3^n}=\dfrac{3^{n+1}-2n-3}{8\cdot3^n}$

対称性

ある対象に何らかの操作を施してもその対象が不変に留まる場合，対象はその操作に関して対称性を持つと言われる．例えば図形が左右対称であるとは，左右の反転に対して図形が不変であるという意味である．

例えば円 $x^2 + y^2 = a^2$ は y 軸に関して対称である．これは円の方程式が置き換え

$$x \to -x \tag{1}$$

に対して不変であることに対応する．また円は中心周りの回転に対して不変である．このため円は回転対称性を持つ．これは円の方程式が置き換え

$$x \to x\cos\theta - y\sin\theta, \qquad y \to x\sin\theta + y\cos\theta \tag{2}$$

に対して不変であることに対応する．

ここで上式 (1),(2) は円周上の点 (x, y) の鏡映ないし反時計回りの角度 θ 回転と見なせる．等価的にこれを，x 軸の反転ないし座標軸の時計回りの角度 θ 回転に伴う，円周上に固定した点の座標の変更と見ても良い．前者は能動的変換，後者は受動的変換と呼ばれる．

能動的変換と受動的変換

物体の空間座標が変化する状況としては以下の 2 通りが考えられる．

能動的変換　空間に固定した座標系に対して物体 (より一般には物理的な系) を移動させる．

★　物理的な系として場を考えている場合には，
それが分布する空間ごと (座標系に対して) 移動させる．

受動的変換　物理的な系を空間に固定して，座標系を移動させる．

能動的変換と受動的変換の間には次のような関係がある．すなわち基底にある変換をすると，座標系に固定した視点からは空間に固定したベクトルがその逆変換で移されて見える．

- 例 1 : 駅に向かう者にとっては，逆に駅が自分の方に近づいて来るように見える．
- 例 2 : 回転する椅子に座ると，周りの風景が逆回転して見える．

偶関数と奇関数に関する注意

奇関数 $f(x), g(x)$ の積 $F(x) = f(x)g(x)$ は偶関数である．

$$F(-x) = f(-x)g(-x) = \{-f(x)\}\{-g(x)\} = f(x)g(x) = F(x).$$

これは奇数同士の積が奇数であるのとは事情が異なり，言葉の表面的な印象に騙されないよう注意が必要である．

No.

Date

たけしのコマネチ大学数学科 第2回 確率密度

10分間のモデルショーに,カメラマンは1分間だけ撮影の機会が与えられた.
しかしお目当てのモデルも1分しか登場しない.
カメラマンがお目当てのモデルを撮影できる確率を求めよ.
一瞬でもシャッターチャンスがあれば撮影できるものとする.
[モデルの登場時刻も確率的であるとする.またモデルもカメラマンも,1分間,目一杯ショーに参加する,従ってモデルショーの開始から9分までには登場すると仮定する.]

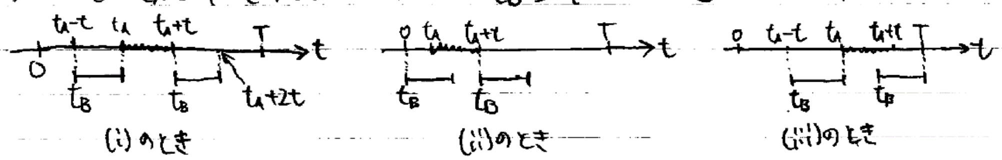
文字の定義 $T \equiv 10$分 $t \equiv 1$分 $t_A \equiv$ モデルの登場時刻
$t_B \equiv$ カメラ小僧の登場時刻

★定義域は $0 \leq t_A, t_B \leq T-t$

★ t_A, t_B が $0 \sim T-t$ の間の
- ちょうど t_A, t_B である確率 → 定義できない
- $t_A \sim t_A + dt_A,\ t_B \sim t_B + dt_B$ である確率 → $\underbrace{\frac{1}{T-t}}_{\text{確率密度}} dt_A,\ \underbrace{\frac{1}{T-t}}_{\text{確率密度}} dt_B$

解答

(i) $t \leq t_A \leq T-2t$ のとき $t_A - t \leq t_B \leq t_A + t$ …① であれば撮影できる。
(ii) $0 \leq t_A \leq t$ のとき $0 \leq t_B \leq t_A + t$ …② 〃
(iii) $T-2t \leq t_A \leq T-t$ のとき $t_A - t \leq t_B \leq T-t$ …③ 〃



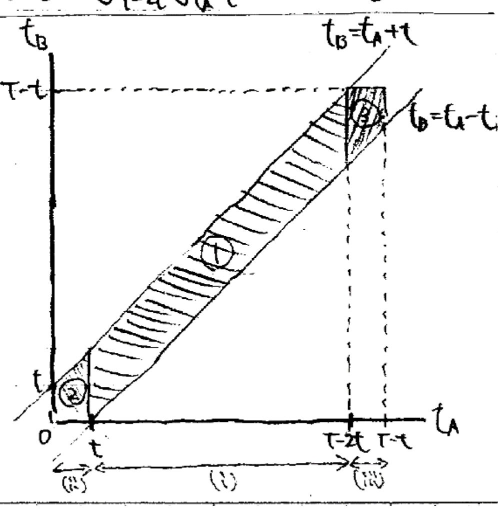
よって求める確率は

$$\int_t^{T-2t}\int_{t_A-t}^{t_A+t}\frac{dt_A}{T-t}\cdot\frac{dt_B}{T-t} + \int_0^t\int_0^{t_A+t}\frac{dt_A}{T-t}\cdot\frac{dt_B}{T-t} + \int_{T-2t}^{T-t}\int_{t_A-t}^{T-t}\frac{dt_A}{T-t}\cdot\frac{dt_B}{T-t}$$

$$= \frac{1}{(T-t)^2}\left\{2t(T-3t) + \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t^2\right\}$$

$$= \frac{17}{81}$$

→図形的解釈



※上式は領域①,②,③の面積の和と正方形の面積$(T-t)^2$との比になっている(右図)。

例えば第1項は $\frac{1}{(T-t)^2}\int_t^{T-2t}\left(\int_{t_A-t}^{t_A+t} dt_B\right)dt_A$ の意味

求まった確率は,モデルが決まった時刻,例えば$t_A = 5$分に登場するときの成功確率(4分 $\leq t_B \leq 6$分となる確率)$2/9$よりわずかに低い.

付録：Spinoza 描像——受験の正義をめぐって

いわゆる「受験戦争」の激化の背後には，資本主義の下での競争原理があると考えられる．しかるに試験の難度に関わらず，「敗者が落ちぶれるのは努力を怠った本人の自己責任であり，それは人間としての価値が低い証拠である」という資本主義的 (とりわけ新自由主義的) イデオロギーはそれ自体で，事実認識として容認できない．そこには哲学のかけらもないことを，本付録で手短に説明する．また資本主義に代わる社会像として，コミュニズム論を展開する．それは社会の富が脱商品化され，コモン (共有財産) として民主的に自治・管理される社会であり，そこでは「各人は能力に応じて貢献し，各人は必要に応じて取る」ことが許される．(実際，本稿の裏のテーマは「教育の脱商品化」である．もっとも本稿を公開したところで「焼け石に水」であることは承知している．ただし表紙にリンクを載せたページで公開している理論物理のノート群を合わせれば，多少，事情は変わってくると期待したい．) いずれにせよ，資本の増殖を目的とした強制的な勉強や労働が将来，各人の自由な発展に置き換えられ，それが他人からの怨嗟を招く現在の能力主義・格差社会と違い，万人の自由な発展ともなるような社会が訪れることを強く願っている．

■Spinoza 描像　「**Spinoza 描像**」は資本主義・新自由主義のイデオロギーに対抗する哲学的な理論体系であり，「自由意志の否定」と「当為命題の虚構性」を 2 大柱として図 1 のように要約される．ここでは受験戦争の周辺について Spinoza 描像の観点から批判的に検討し，ポスト資本主義を構想する．

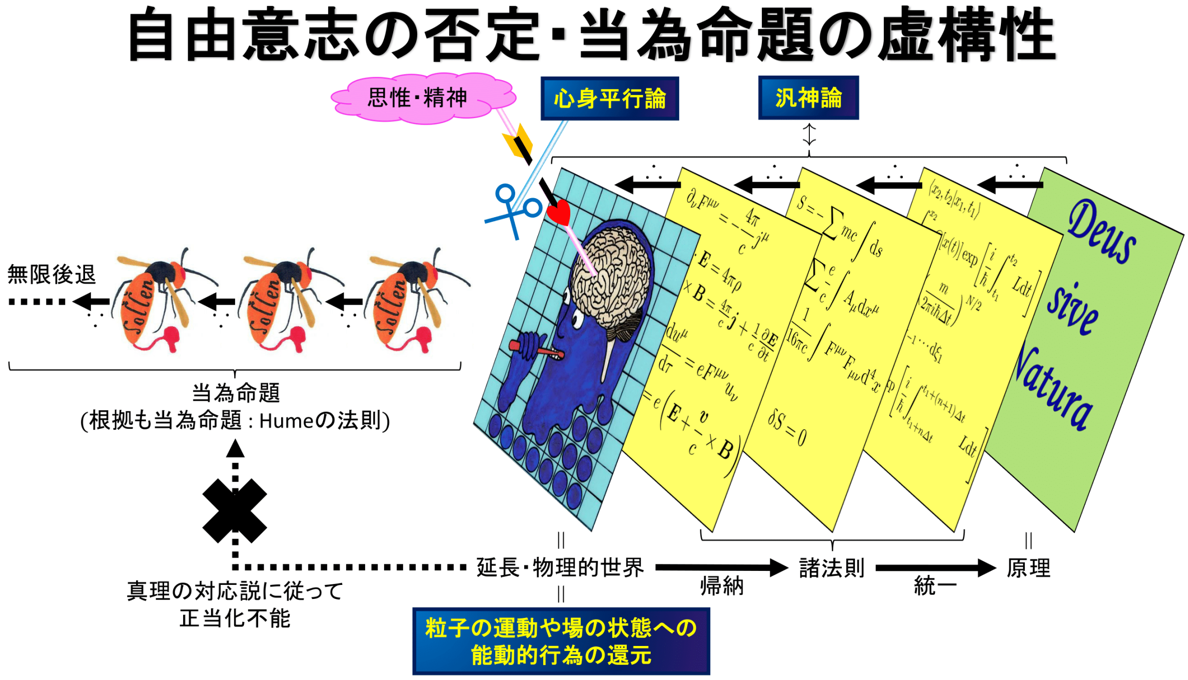


図 1

Spinoza 描像についての詳細：

http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/preamble

ポスト資本主義についての詳細：

http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/post-capitalism

資本主義・新自由主義のイデオロギー

背景として，我々の社会を取り巻く資本主義は図 2 のように特徴付けられる．詳しく順番に見ていこう [1] [2].

- 資本主義
  - かつては誰もがアクセス可能だった社会の富を商品化
  - 生産手段・共同体から切り離され，自給自足できない賃労働者
- 資本=(交換)価値の自己増殖運動
  - 人間・環境を酷使・破壊
  - 手段と目的の倒錯（「遊びとしての勉強」は「役に立たない」）
- 新自由主義
  - 市場の競争原理に委ねて利潤獲得を追求する政策
  - 「競争が社会を発展させる」は事実認識からして誤り

図 2　資本主義とその周辺

■資本主義　近代に特有の資本主義社会においては，社会の「富」は悉く「商品」に姿を変え，我々はお金を稼いで商品を手に入れなければ，もはや生きていくことはできない．かつては誰もがアクセスできるコモン (共有財産) だった富は，資本家によって私的財産として囲い込まれ，独占された．そして囲い込みによって農地などを締め出され，生産手段や共同体の相互扶助の関係から切り離された人々は，資本家に労働力を (商品として) 提供する「賃労働者」とならざるを得ず，さらに生産された商品の買い手となって資本家に市場をも提供した．こうして我々が生きていく上で必要な物質代謝が，商品を通じて行われるようになった社会の体制を資本主義という．なお労働者が資本の需要に対して過剰となれば，「代わりの人間はいくらでもいる」ため，低賃金で過酷な労働を強いることができる．

■資本の運動と弊害　資本の目的はあくまで価値——貨幣によって測られる「交換価値」——の自己増殖であって，人間を幸福にすることではない．実際，価値増殖あるいは市場の自由競争で勝つことのみを目的とした商品生産は，質 (使用価値) を蔑ろにし，本当に必要な物やサービスを劣化させたり削ったりして，社会の富を貧しくしさえする．また技術革新によって生産性は向上しているにも関わらず，いまだに人類は長時間労働から解放されていない．それどころか，高給取りの仕事を中心に近年，いわゆる「ブルシット・ジョブ (クソどうでもいい仕事)」が急増し，労働者の精神を蝕んでいる．さらに格差は拡大する一方であり，環境破壊にも歯止めがかからない．

資本の価値増殖運動に組み込まれた人間は，本来手段であるはずのお金の増殖 (金儲け) それ自体を目的として行動するようになる．これは端的に言って倒錯であるが，お金の普遍性の下では，個々の具体的な事物そのものが持つ固有の価値は色褪せてしまい，「役に立たない」ものや必ずしもお金にならないものの価値を理解できなくなる．例えば「将来のために勉強しろ」という大人も，学問そのものに価値を認めているとは限らず，「それ自体が喜びをもたらす自己充足的な遊び」としての勉強のあり方にはかえって嫌悪感を示すことさえあり得る．その遊びこそはおそらく勉強の本質であり，資本主義の論理から自由であるための鍵なのだが．

■新自由主義　資本主義経済の停滞が顕著になった 20 世紀後半では，各国で「新自由主義 (ネオリベラリズム)」が台頭し，公共事業の民営化や規制緩和による市場の自由化が進められた．新自由主義は詮ずるところ，市場の競争原理に委ねて利潤獲得を追求する政策であり，「小さな政府」「福祉削減」「緊縮財政」「自己責任」「選択と集中」「アウトソーシング」などのスローガンによって特徴付けられる．

社会を発展させる合理的な原動力として競争を正当化できるという発想はあまりに単純であり，事実認識からして既に誤っている．アイデアには限りがある以上，絶えざる競争のペースに合わせた商品開発を強いられている限り，希少価値を生み出すには無理やり知恵を絞り出す他なくなる．このためスマホや冷蔵庫を見れば分かるように，新商品の開発は小手先の変化ばかりになってしまう．また画期的な新技術もすぐに模倣されるため，一時的な利潤しかもたらさず，イノベーション競争はイタチごっこの様相を呈する．

新自由主義はグローバル化を後押しした．その主要な目的は途上国の安価な労働力を使い倒すことにある．

■資本主義・新自由主義のイデオロギー　今や資本にとって役立つ能力 (あるいはその結果と見られるところの経済的成功・報酬) によって人の価値を定義する新自由主義的な発想は自明視され，「稼ぎが低いのはスキルがないからであり，それは人として価値がない証拠である」という通念が社会に浸透している．そして「スキルや能力がないのは，それを身につける努力を怠った“負け組”の自業自得だ」という論法は，現代社会を伏流し，幅を利かせている支配的なイデオロギーとなっている．しかしながら，このような**新自由主義的な自己責任論**は哲学的に容認できない．と言うのも，形而上学的なレベルに遡って考えれば，人間は決して行為の自由な主体ではあり得ないからである．それは動かし得ない根源的な真理であるが故に，「言い訳だ」などの一言で片付けたり，括弧に入れて考えたりすることが許されない．

職業選択の自由もまた形式的なものである．それにも関わらず労働者は「自分で選んで，自発的に働いている」と錯覚し，資本家にとって都合の良い労働者像を，あたかも自分が目指すべき姿，人間として優れた姿だと思い込むようになっていく (例えば現代では忙しさは美徳とされる)．これは労働者の責任感や向上心，主体性といった精神性までもが，資本の論理に「包摂」される過程と言える．

このように資本主義的な価値観を内面化させた人間は周りの人間にも，**理不尽な労働倫理を「あるべき姿」として強要**するだろう．そのような理念は当為命題の形をとる．当為命題とは「……べきだ」という形に帰着できる，規範を表す命題のことである．ところが一般的に言って，当為命題は事実だけからは導くことができず，恣意性を免れない．例えば仕事が充実しているに越したことはないが，「社会人は仕事こそが生き甲斐であるべきだ」「仕事は全力で取り組まなければならない」とまでは言えない．また会社の命令には素直に従うのが日本人の当たり前の働き方だったからと言って，それに従うべきだとは言えない．あるいは現代社会が市場の競争原理で動いているというだけの理由で，「競争するべきだ」「グローバルな世界で通用する人材になるべきだ」とは言えない．これらはいずれも本質的には「資本に奉仕する人材になるべきだ」と述べているのであり，与えられた資本制社会の論理を無批判に受容しているにすぎない．なるほど，もちろん同じ理由で資本主義を終わらせる「べきだ」とまでは言えない．しかし「資本主義が終わってほしい」と言えば，嘘にはならない．

■Spinoza 描像　以上のように，新自由主義的な自己責任論と理不尽な労働倫理には，それぞれ「自由意志の否定」と「当為命題の虚構性」でもって対抗できる (図 3 参照)．私はこれらをまとめて Spinoza 描像と呼んでいる．以下では Spinoza 描像をより詳細に導入するための最小限の議論を行う．

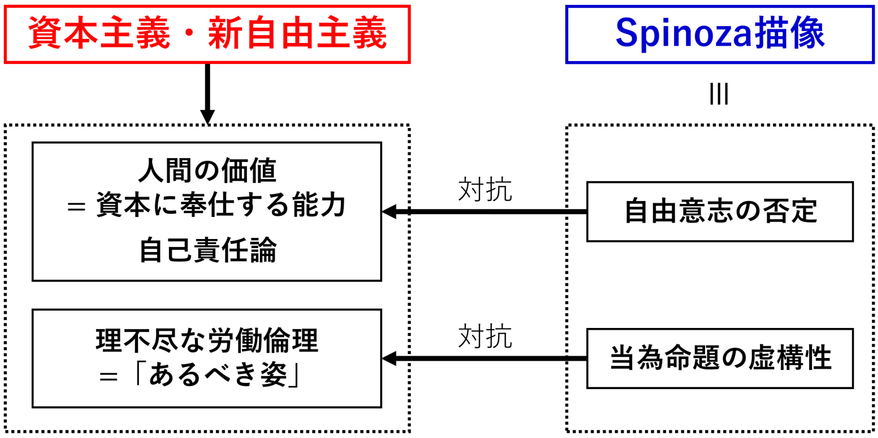


図 3　新自由主義的イデオロギーのアンチテーゼとしての Spinoza 描像

自由意志の否定

自由意志の否定から始めよう．自由意志を行使することが重要とされる人生の局面の最も象徴的な例は，おそらく受験勉強という形をとる．ところが実際には勉強しなくてはいけないと思いつつもやる気が出ず，一向に行動を起こせないという金縛りのような無気力状態を，誰しも少なからず経験したことがあるだろう．ここで注目されることは，そのような場合，常識に反して主観的には他の選択をすることが全く不可能に思われるということである．このような直観の正しさは，哲学的考察によって裏付けられる．もし意志の力で言うことを聞かない身体を強制的に行動へと駆り立てられるならば，それは無気力の中でも自由に発動させることができる精神の作用，すなわち自由意志でなければならない．言い換えれば自由意志は，過去からの影響，または物理法則の支配を断ち切り，自発的な行動を引き起こす超自然的な能力，あるいは行為の純粋かつ絶対的な始まりとして定義される．つまり自由意志とは言わば無からの創造であり，不可能を可能にするという自己矛盾であり，その定義により存在し得ないことが明らかである．

自由意志が存在しないことは，科学的・物理学的世界観からも導き出される．

- 実際，自由意志は精神が身体に影響を及ぼし得ることを前提としている．
  しかし精神と身体は異質な存在であるため，その相互作用を考えることはできない．
- また一見すると能動的・主体的・自発的な人間の行為も
  渾然一体としたミクロな粒子の運動や場の時間変化に還元されるため，
  自由意志を行使し得るような行為の主体は見出せない (**要素還元論**).
- さらにあらゆる出来事は自然法則に従って必然的に生起していると考えられ，
  そこに自由意志の入り込む余地はない．

もちろん以上の議論は形而上学に属しており，信じるか信じないかという問題だとも言える．形而上学的命題の正しさは，帰納的推論の産物である蓋然的な経験科学の知見によって証明できるものではない．むしろその

ような形而上学的な思想が，物理学を始めとする自然科学の前提を成していると言った方が正確である．とは言え，これらは説得力があり，充分もっともらしく思われる．(付け加えると，物理学が自由意志の否定と整合していることは，理論物理学を学ぶ 1 つの原動力にもなり得る．)

以上のアイデアは哲学者 Spinoza の思想とも重なる．Spinoza によれば神はこの世界そのものであり，それ故，**神即自然**と呼ばれる．(したがって Spinoza の考える神は人格を持たない．) そしてあらゆる事物は神の必然性に従って生起している．このような考え方は**汎神論**と呼ばれ，自由意志や目的論の否定へと導く．Spinoza の汎神論は次の『エティカ』第 1 部定理 29 の言葉に端的に表されている．

> 自然の中には何一つ偶然的なものは存在しない，いっさいは神の本性の必然性から一定の仕方で存在や作用へと決定されている [3, p.54].

意志を抱くことや努力することは，それが可能な場合には神即自然の必然性に従って自動的に達成されるのに対し，それが神の時間発展に含まれていない場合には，空から自由意志でも降ってこない限り不可能である．ところが自由意志は存在しないため，それは絶対に不可能である．

Spinoza 哲学においても，精神と身体の相互作用は否定されている．それにも関わらず心と身体の状態に対応関係が見られるのは，これらが同一の神の異なる 2 つの側面を表しているからであると説明される．このように精神的状態と身体的状態は対応しているけれども，精神と身体は相互作用せず，物理的な出来事と精神的な出来事は独立に進行するという立場は**心身平行論**と呼ばれる．これは勿論，自由意志の否定と整合している．

なお Spinoza の自然観は決定論的であり，決定論が正しければ自由意志は存在しないと考えられる．しかし量子力学の描くような非決定論的な自然観を導入しても，自由意志を救うことにはならない．事物がランダムに確率的に生起するとしても，人は世界のなすがままに振り回されてしまうのであれば，そこにも自由意志は見出せない：

$$\begin{aligned} \text{決定論} \quad &\Rightarrow \quad \text{自由意志なし} \quad (p \Rightarrow q), \\ \text{非決定論} \quad &\not\Rightarrow \quad \text{自由意志あり} \quad (\bar{p} \not\Rightarrow \bar{q}). \end{aligned}$$

当為命題の虚構性

次に当為命題の虚構性に移ろう．当為命題はいかに論理で武装しようとも，独断論であることを免れないと考えられる．このことはほとんど自明だと思われるが，あえてその理由を述べれば次のようになるだろう．まず，ある当為命題を導く論理が循環論法や無限後退に陥らないためには，何らかの前提条件を出発点として認めなければならない．ところで当為命題は事実命題だけからは，導けないと考えられる．(端的に言えば，「である」から「すべき」は導けない．このことは **Hume の“法則”**と呼ばれる．) よって出発点を成す前提条件にもまた何らかの当為命題が含まれることになる．もし前提条件が当為命題を含まず，単に事実命題だけから構成されるのであれば，その主張は現実世界と一致するかを確かめて真偽を判断できる可能性がある．しかし当為命題は事実命題と違って，そのような方法で真偽を判断できるものではないため，前提条件に含まれる当為命題は無条件に認めることになる．これはあらゆる当為命題が独断論であることを免れないことを意味している．

Spinoza 哲学は絶対的な善悪を認めない．これは当為命題の虚構性に対応するものと見ることができる．

ポスト資本主義

最後に文献 [1] の章ごとの要約を載せ，ポスト資本主義の構想を示す (図 4 参照).

第 1 章　「商品」に振り回される私たち　かつては誰もがアクセスできるコモン (共有財産) だった社会の「富」を，資本主義は悉く「商品」に変え，今では私たちは必死にお金を手に入れないと生きていけない．また「使用価値」よりも「(交換) 価値」を優先する資本主義は，社会の「富」を劣化させ破壊していき，人間は「商品」に振り回されるようになる (物象化).

第 2 章　なぜ過労死はなくならないのか　資本家は単に労働時間を延ばすことで絶対的剰余価値を手にできるため，長時間労働が蔓延することになる．そして生産手段や共同体の相互扶助から「自由」になり (切り離され)，また自分は「自由」で自発的に働いていると思い込んでいる労働者は，過酷な長時間労働から逃げ出せない．資本主義を弱めるには，賃上げよりも労働時間の短縮が重要であり，世界では資本主義に挑む大胆な労働時間短縮の動きも出てきている.

第 3 章　イノベーションが「クソどうでもいい仕事」を生む　単に生産力の観点からは私たちはとっくに長時間労働から解放されていても良いはずだが，資本主義の下では技術革新 (イノベーション) による生産力の向上は，「仕事を奪われる」というディストピアとして現れてしまう[*1]．また技術革新により労働者は単純作業だけを「実行」するようになり，自ら「構想」する機会を奪われ，資本家の労働者に対する「支配」が強化されてしまう．さらにエッセンシャル・ワーカーが低賃金に苦しめられている一方で，際限なく価値増殖を求める資本主義は，高給取りの仕事を中心に「ブルシット・ジョブ (クソどうでもいい仕事)」を大量に生み出し，私たちを長時間労働から解放しない.

第 4 章　緑の資本主義というおとぎ話　資本は人間だけでなく自然からも掠奪し，その代償を将来世代や途上国へと「外部化」し，見せかけの環境対策をしながら自然の商品化をさらに進めている．資本主義に代わる新たな社会において大切なのは，「アソシエート」した労働者が，人間と自然との物質代謝を合理的に，持続可能な形で制御することだ，とマルクスは述べている.

第 5 章　グッバイ・レーニン！　社会主義を標榜するソ連や中国の実態は，生産手段を国有化し，官僚が労働者を搾取する独裁的な「国家資本主義」であり，社会主義の理想からかけ離れている．またベーシックインカム (BI) や現代貨幣理論 (MMT) のような，国家の力を介したトップダウン型の資本主義改革は，資本の側の抵抗や物象化を解決できないだろう．私たちの目指す未来社会は，民主的なボトムアップ型の自発的連帯 (アソシエーション) を通じて「脱商品化」を推し進め，貨幣なしで暮らせる社会の領域を広げることであり，これこそがマルクスの構想する「社会主義」ないし「コミュニズム」である.

第 6 章　コミュニズムが不可能だなんて誰が言った？　エコロジー研究と原古的な共同体研究を行っていた晩年のマルクスは，やがて自然の「持続可能性」と人間社会における「平等」の連関に気付いていく．彼が構想していた将来社会は，社会の「富」が「商品」として現れないように，みんなでシェアして，自治管理していく，平等で持続可能な定常型経済社会 (したがって「脱成長」型経済) であり，コモンに基づいた社会であるため，コミュニズムと呼べる.

---

*1 A. ベナナフによれば技術革新は衰退しており，実際に雇用を破壊しているのはテクノロジーの進歩ではなく経済の長期低迷である．とは言え，オートメーション化がなくとも社会運動を通じて民主的に必要労働を再配分し，ポスト希少性と自由な余暇社会を実現することは既に可能であるとするベナナフの見解は，斎藤幸平がポスト資本主義として構想する民主的な脱商品コミュニズムと軌を一にする [2].

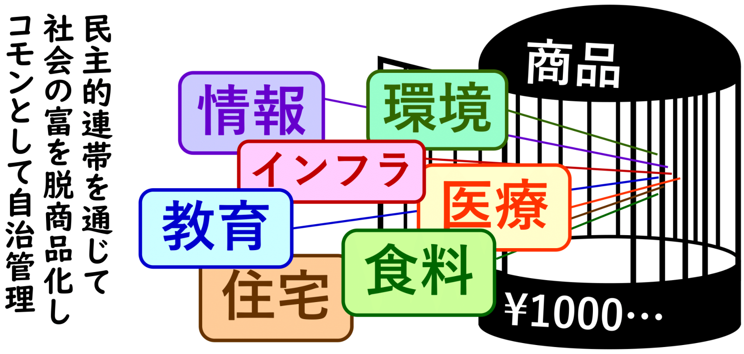


図 4　ポスト資本主義 = 脱商品コミュニズム

参考文献

[1] 斎藤幸平，2021，NHK 100 分 de 名著 カール・マルクス 資本論 蘇る，実践の書，NHK 出版，東京.

[2] 白井聡，2020，武器としての「資本論」，東洋経済新報社，東京.

[3] スピノザ，2011，エティカ (工藤喜作，斎藤博訳)，中央公論新社，東京.

[4] A. ベナナフ，2022，オートメーションと労働の未来 (佐々木隆治監訳)，堀之内出版，東京.