

木田重雄， 柳瀬眞一郎 『乱流力学』

第Ⅰ編 流体の動力学 第Ⅲ編 渦構造の力学

本稿は乱流の教科書

木田重雄， 柳瀬眞一郎， 2018， 乱流力学， 株式会社朝倉書店， 東京の第Ⅰ編と第Ⅲ編について， 要約と補足を行ったノートである。

なお本稿の他にも，
理論物理の各種ノートを以下のページで公開している。

<http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/>

木田重雄, 柳瀬真一郎 『乱流力学』

まえがきより抜粋

「橋げたの渦もその[乱流の]ひとつで、その形や大きさ、変動の周期などの平均構造はいつも同じように見えるが、瞬間構造は時々刻々乱雑に変化し、決して再現することはない。」

「本書で取り上げる非圧縮粘性流体——」

「た、た2行で書き下される流体の運動方程式が生み出す、途方もなく複雑かつ多様な運動形態の本質は、まだまだ神秘のベールの向こうにある。」

「厳密な基礎研究としても、——近似的な実用研究の進展が強く望まれている。」

「流体力学(少なくとも、非圧縮粘性流体の運動)を一通り学んだ読者に、乱流理論の初歩から最前線の研究までを平易に無理なく理解してもらうことが、本書の目的である。乱流研究の2大目標、乱流の予測と制御、をいざと、乱流の統計法則と流場の瞬間場のダイナミクスを主たるテーマとして取り上げる。さらに、流体の運動方程式の力学特性、および乱流モデルなどの数値計算法の解説を加えた4編で全体を構成する。」

目次

第I編 流体の動力学

第1章 流場の基礎方程式

第2章 変動の方程式

第3章 乱流の発生

第II編 乱流の統計力学

第4章 一様乱流

第5章 乱流の統計的性質

第6章 乱流の統計理論

第7章 剪断乱流の平均特性

第8章 乱流輸送

第III編 渦構造の力学

第9章 渦構造とその表現

第10章 渦力学

第11章 一様乱流の渦構造

第12章 非一様乱流の渦構造

第IV編 乱流の計算法

第13章 乱流の計算と渦粘性

第14章 ラージエディシミュレーション

第15章 レイノルズ平均モデル

第16章 直接数値シミュレーション

おまけ

付録

表記法

ベクトル	U
テンソル	\underline{S}
単位ベクトル	\hat{x}
平均流	\overline{U}
攪乱成分	\check{U}
Fourier成分	$\sim U$
複素共役	ϕ^*
壁面教	U^+
アンサンブル平均	$\overline{(\dots)}$
平滑平均	$\langle \dots \rangle$

和の規約

$$a_{ii} = \sum_{i=1}^3 a_{ii}, \quad a_{i b_i} = \sum_{i=1}^3 a_{i b_i}, \quad \text{添字がギリシャ文字の場合は和をとらない.}$$

はじめに (pp.1-4)

身の周りの流れ { 層流 (≒安定)
乱流 (≒不安定)

乱流

{ 初期条件敏感性
強混合性
統計法則

「乱流力学の本質を、できるだけ、物理的直感的に理解するため、取り扱う流れは、一様乱流、平行平板間乱流、平板境界層乱流など、基本的に単純な流れに限る。」

★ 最終段落が教科書の概要

第 I 編

流体の動力学

流体運動を記述する方程式の各項のもつ物理的意味を把握することは、乱流力学を理解する鍵である。本編では、運動方程式の数学的性質、乱れを記述する方程式、乱れの発生、およびカオスについて考察する。

第1章 流れの基礎方程式

1.1 連続体近似

(渦の大きさ) \Rightarrow (分子間距離), (平均自由行程) } \rightarrow 連続体近似可能
(渦の時間スケール) \Rightarrow (平均衝突時間)

↑
 乱流の種類によって決まる下限がある (第5章)

(大気や海洋の乱流における最小渦の長さスケール) $\sim 0.1 \text{ cm}$ \leftarrow 1:1
 \Rightarrow (空気の分子間距離) $\sim 10^{-10} \text{ cm}$, (水の分子間距離) $\sim 10^{-21/2} \text{ cm} = 10^{-7} \text{ cm}$
 なので、実際に上の条件は満たされている。

1.1について

分子間距離について、水 1 mol は 18 cm^3 だから $r_{\text{水}} = \left(\frac{18 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{mol}}{6.0 \times 10^{23}/\text{mol}} \right)^{1/3} \sim 10^{-10} \text{ m}$
 標準状態で気体 1 mol は 22.4 L だから $r_{\text{空}} = \left(\frac{22 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{mol}}{6.0 \times 10^{23}/\text{mol}} \right)^{1/3} \sim 10^{-9} \text{ m}$

1.2 連続の式

非圧縮性として密度 ρ が一定不変であることまで要求せずとも、Lagrange 微分 $dp/dt = 0$ を要求すれば $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ が導かれることに注目する。

実際、連続の式を

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u}$$

と書けば、

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

1.3 速度勾配テンソル

表記の
確認 \rightarrow

速度勾配テンソル $\partial_i u_j = S_{ij} + \omega_{ij}$
 { 対称部分 $S_{ij} \equiv \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$: 変形速度テンソル
 (反対称部分 $\omega_{ij} \equiv \frac{1}{2}(\partial_i u_j - \partial_j u_i)$: 渦度テンソル \rightarrow 渦度 $\omega_k = \epsilon_{ijk} \omega_{ij}$
 ($\omega_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_k$)

変形速度テンソル $S_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ は空間の各点で、適当な座標系の選択により

$$(S_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & & 0 \\ & \lambda^{(2)} & \\ 0 & & \lambda^{(3)} \end{pmatrix} \text{ と対角化される。}$$

非圧縮流体では $\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \lambda^{(3)} = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ 。

復習: 渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は流体要素の自転角速度の2倍。

1.3 について

$\text{tr}(S_{ij}) = S_{ii}$ は以下に示すように不変量なので、非圧縮性流体では主軸に限らず任意の座標系で $\text{tr}(S_{ij}) = 0$ と考えられる。

実際、適当な直交行列 O を用いてテンソルを定義する変換則を $S'_{ij} = O_{ik} O_{jl} S_{kl}$ と書けば、
 $S'_{ii} = O_{ik} O_{il} S_{kl} = (O^T O)_{kl} S_{kl} = \delta_{kl} S_{kl} = S_{kk}$.

1.4 ビオ-サヴァールの関係式

任意のベクトル場 u は必ず無発散場 u_1 と渦無し場 u_2 に分解でき ($u = u_1 + u_2$, Helmholtz 定理),
 $u_1 = \nabla \times A$, $u_2 = \nabla \phi$ はそれぞれ渦度 $\omega = \nabla \times u$, わき出し $\Theta = \nabla \cdot u$ の分布から Poisson 方程式

$$\Delta A = -\omega, \quad \Delta \phi = \Theta \quad (\text{ただし } \nabla \cdot A = 0 \text{ も課す})$$

に従って、あるいは“Biot-Savartの法則”と“Coulombの法則”

$$u_1 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\omega \times R}{R^3} dV, \quad u_2 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\Theta R}{R^3} dV \quad \text{に従って決定される}$$

しかたがた今考えている非圧縮性流体では $\Theta = 0$ であり、

$$u = u_1 + u_2 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\omega \times R}{R^3} dV + \nabla \phi : (1.16)$$

自体は正しいけれど、第2項 $u_2 = \nabla \phi$ は「境界条件を満たすために修正される渦なし流の部分」と説明されていることに注目する。

1.5 運動方程式

非圧縮性 ($\nabla \cdot u = 0$), Newton 流体 (粘性応力 $T_{ij} = 2\mu S_{ij}$) に対する運動方程式は

Navier-Stokes 方程式
$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 u + f$$

1.5 について

Navier-Stokes 方程式 (1.23) の左辺 $\partial_t u_i + \partial_j (u_j u_i)$ は $\rho = \text{const.}$ の下で運動量に対する連続式の形であり、 $\partial_j u_j = 0$ のときは $\partial_t u_i + u_j \partial_j u_i$ と書き換えられる。(非圧縮性を仮定せずとも、一般に連続式の形で $\partial_t(\rho u_i) + \partial_j(\rho u_j u_i) = d(\rho u_i)/dt$.)

運動方程式 (1.24) の式 (1.26) への書き換えは、恒等式

$$[u \times \omega]_i = \epsilon_{ijk} u_j \epsilon_{kmn} \partial_l u_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) u_j \partial_l u_m = u_j \partial_l u_j - u_j \partial_j u_l$$

$$= \left[\nabla \frac{|u|^2}{2} - (u \cdot \nabla) u \right]_i, \quad \therefore (u \cdot \nabla) u = \nabla \frac{|u|^2}{2} - u \times \omega \quad \text{による}$$

1.6 圧力方程式

Navier-Stokes 方程式の両辺の発散をとると、
圧力方程式

$$\frac{1}{\rho} \nabla^2 p = - \frac{\partial^2 (u_i u_j)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (= \omega_{ij}^2 - s_{ij}^2) \quad (1.27)$$

が得られる。

$$\left[\begin{array}{l} \text{変形速度テンソル } s_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) : (1.7), \\ \text{渦度テンソル } \omega_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j - \partial_j u_i) : (1.8) \end{array} \right]$$

これは圧力に対する Poisson 方程式だから、

$$p(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial_i \partial_j (u_i(x') u_j(x'))}{|x-x'|} d^3x' + \phi(x) \quad (1.29)$$

と解ける [パラメータ的に含めた時間依存性を省略]。

ただし ϕ は Laplace 方程式 $\nabla^2 \phi = 0$ を満たし [それ故、任意に $x(x')$], 圧力に対する (Neumann) 境界条件を満たすように選ぶ。

Navier-Stokes 方程式で境界上の値 $u=0, \partial_n u=0$ ($\nabla^2 u \neq 0$, 一般に) を代入して

1.6.1 について

ここで圧力方程式 (1.27) は馬車染みのある完全流体に対する圧力方程式とは異なるけれど、運動方程式の積分形 (1.29) を与え、p.B. にあてはると、既知の流入が事後的に原因としての圧力を求める式であるという点が変わらない。

■ 圧力方程式 (1.27) の導出について

Navier-Stokes 方程式 (1.23):

$$\partial_t u_i + u_j \partial_j u_i = -\frac{1}{\rho} \partial_i p + \nu \partial_j \partial_j u_i + f_i$$

は、体積力 $f=0$ を仮定した上で両辺の発散 (∂_i)

をとると、 $\partial_i u_i = 0$ より式 (1.27):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \nabla^2 p &= -\partial_i (u_j \partial_j u_i) \\ &= \begin{cases} -\partial_i \partial_j (u_i u_j) \\ -(\partial_i u_j) (\partial_j u_i) = -(s_{ij} + \omega_{ij})(s_{ij} - \omega_{ij}) \\ = \omega_{ij}^2 - s_{ij}^2 \end{cases} \\ &\quad (\partial_i \partial_j \text{ について和をとる}) \end{aligned}$$

に於て ($\partial_i u_j = s_{ij} + \omega_{ij}$)。

■ 静止壁面上の式 (1.28) について

ここでは $f \neq 0$ が想定され、式 (1.27) の暗黙の仮定 $f=0$ と整合性がないように見える。

$$\begin{aligned} \text{壁面上で } u &= 0, \quad \partial u / \partial t = 0, \\ \partial u_i / \partial x_1 &= \partial u_i / \partial x_3 = 0, \\ \partial u_i / \partial x_2 &\neq 0 \quad (\text{一般には}) \end{aligned}$$

とすれば良い。

1.7 渦度方程式

Navier-Stokes 方程式の回転をとると、渦度の時間発展を支配する渦度方程式

$$\frac{d\omega}{dt} = \underbrace{(\omega \cdot \nabla) u}_{\text{流入の寄与}} + \underbrace{\nu \nabla^2 \omega}_{\text{粘性による拡散}} + \underbrace{\nabla \times f}_{\text{外力のトルク}} \quad \text{を得る。}$$

右辺の第1項 [は渦線方向への流速の微分 $(\omega \cdot \nabla) u = \omega \frac{\partial}{\partial s} u$ とある (s は渦線に沿った長)], その説明は p.14.

渦度方程式は

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega \cdot \underline{s} + \nu \nabla^2 \omega + \nabla \times f \quad (\text{書換えされる。})$$

右辺第1項について、変形速度テンソルが $s_{ij} = \lambda^{(ij)} \delta_{ij}$ と対角化される主軸方向 (固有ベクトル方向) の座標系で $[(\omega \cdot \underline{s})]_i = \omega_j s_{ji} = \lambda^{(ij)} \omega_i$ となる (1で和をとらない) 正の固有値を持つ固有ベクトル方向への ω_i の増加をもたらすが、与えられた瞬間にこの方向の渦度を強めてはならない。

渦度方程式から、インストロキ-密度 $\frac{1}{2} |\omega|^2$ に対する方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} |\omega|^2 = \underbrace{\omega \cdot \underline{s} \cdot \omega}_{s_{ij} \omega_i \omega_j} + \nu \nabla^2 \frac{1}{2} |\omega|^2 - \nu (\partial_i \omega_j)^2 + \omega \cdot (\nabla \times f)$$

を得る。

一様等方乱流で外力がない場合、上式の
アンサンブル平均(—)をとり、

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \overline{|\omega|^2} = \underbrace{\omega \cdot \nabla \cdot \omega}_{\substack{\text{渦線の伸張} \\ \text{による寄与}}} - \nu \underbrace{\left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \right)^2}_{\substack{\text{粘性による散逸} \\ \text{の寄与}}} \\ \text{エネルギー生成}$$

$$= \frac{35}{2} \overline{\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} \right)^3} \quad (\nu = 0, \text{実験的})$$

完全流体($\nu=0$)で外力がない場合、渦線は
流体要素とともに運動する(渦線の凍結運動).
[その説明の仕方(p.16最終段落)は目新しい.]

1.7 について

渦度方程式 (1.31), (1.35) について

Navier-Stokes 方程式 (1.26) の回転をとって

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \times (\omega \times u) = \nu \nabla^2 \omega + \nabla \times f \quad (1.35)$$

を得る。左辺第2項は

$$\begin{aligned} & [\nabla \times (\omega \times u)]_i \\ &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} \omega_l u_m) \\ &= (\delta_{ik} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jk}) \partial_j (\omega_l u_m) \\ &= \partial_j (\omega_i u_j) - \partial_j (\omega_j u_i) \\ &= u_j \partial_j \omega_i - \omega_j \partial_j u_i \\ & \quad (\because \partial_j u_j = 0, \partial_j \omega_j = \nabla \cdot (\nabla \times u) = 0) \\ &= [(u \cdot \nabla) \omega - (\omega \cdot \nabla) u]_i \end{aligned}$$

と書き換えられるので、式 (1.31):

$$\frac{d\omega}{dt} = (\omega \cdot \nabla) u + \nu \nabla^2 \omega + \nabla \times f \quad \text{を得る}$$

式 (1.33) について

$$(\omega \cdot \nabla) u = \omega \frac{\partial}{\partial s} (u_s \hat{s} + u_n \hat{n} + u_b \hat{b}) \quad \text{とて}$$

Frenet-Serret の公式 (A.21) を用いるは良い。

Frenet-Serret の公式について、簡単な説明を行う。
以下、単位ベクトルハットを省く。

まず曲線に沿う線要素 ds を曲率半径 ρ , 中心角 $d\theta$ の円弧の一部と見た。左下図の

$$ds = \rho d\theta, \quad ds = \rho d\theta$$

なので、2式を辺々割って第1の公式

$$\frac{ds}{ds} = k\rho, \quad k \equiv \frac{1}{\rho} : \text{曲率}$$

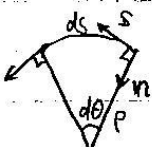
を得る。

次に振率 τ に関する公式に移る。振率とは曲線に沿って単位長を歩んだときの回転角

$$b = s \times m$$

の角度変化 $\tau = |db/ds|$ である。

db/ds の向きを調へよう。



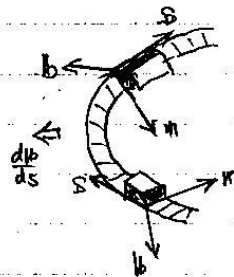
$$b^2 = 1 \rightarrow b \cdot \frac{db}{ds} = 0,$$

$$\frac{db}{ds} = \frac{d}{ds}(s \times m) = (k m) \times s + s \times \frac{dm}{ds}$$

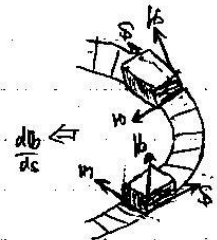
よ db/ds は b と s に垂直なので第2の公式

$$\frac{db}{ds} = -\tau m$$

を得る。負号は下図の理解から。



$\tau > 0$



$\tau < 0$

以上より第3の公式

$$\frac{dm}{ds} = \frac{d}{ds}(b \times s) = (-\tau m) \times s + b \times (k m)$$

$$= -k s + \tau b \quad \text{を得る}$$

式 (1.33) の下の議論について、

速度の渦度方向の成分が渦線に沿って増加

$$\left(\frac{\partial u_s}{\partial s} - k u_n > 0 \right)$$

← 非圧縮性、渦糸は常に同じ流体要素から成る (1.7節概観、非粘性の場合)

渦糸の断面積の減少

← 場所に依り渦糸の強さ $\omega_s = (\text{一定})$

ω 増大

式 (1.34) について

$$\begin{aligned} [(\omega \cdot \nabla) u]_i &= \omega_j \partial_j u_i = \omega_j (s_{ji} + \omega_{ji}) \quad \text{において} \\ \omega_j \omega_{ji} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{jik} \omega_j \omega_k = 0 \quad \text{ため} \end{aligned}$$

式 (1.36) について $\nabla^2 \frac{1}{2} (\omega^2 - (\omega_r \omega_j)^2)$

$$= \frac{1}{2} \partial_i \partial_i \omega_j \omega_j - (\partial_i \omega_j) (\partial_i \omega_j)$$

$$= \partial_i (\omega_j \partial_i \omega_j) - (\partial_i \omega_j) (\partial_i \omega_j)$$

$$= \omega_j \omega_i \partial_i \omega_j = \omega \cdot (\nabla^2 \omega) \quad \text{による}$$

式(1.38)について

第1の等号は

$$\omega \cdot \omega = \omega_a \delta_{ab} \omega_b = \omega_a (\partial_a u_b) \omega_b \dots \textcircled{*}$$

$$= \epsilon_{acd} \epsilon_{bef} (\partial_a u_b) (\partial_c u_d) (\partial_e u_f)$$

による。「インストロフィー密度で重みをつけた速度の渦度方向成分の渦度方向微分」(p.16, 2.1.2)につき、
 ④を見ても、これは速度の渦度方向微分

$$\frac{\omega_a}{|\omega|} (\partial_a u_b) \text{ へ } |\omega|^2 \frac{\omega_b}{|\omega|} \text{ の重みをつけた平均 } \langle \dots \rangle$$

第2の等号

$$\epsilon_{acd} \epsilon_{bef} (\partial_a u_b) (\partial_c u_d) (\partial_e u_f) = -\frac{35}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^3$$

では「(A.17)と(A.30)を用い(p.16, 2.1.3)。

この3の公式について、以下に補足しておく。

公式(A.17)について

$$\epsilon_{abc} \epsilon_{def} = \begin{vmatrix} \delta_{ad} & \delta_{ae} & \delta_{af} \\ \delta_{bd} & \delta_{be} & \delta_{bf} \\ \delta_{cd} & \delta_{ce} & \delta_{cf} \end{vmatrix} \text{ とおける。}$$

両辺は添字に関する共通の反称性を持つてか見てゆくと、(a,b,c) = (d,e,f) = (1,2,3)の場合に上式が成り立てば、これは常に成り立つ。これは

$$\text{(左辺)} = 1, \text{(右辺)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ となる。}$$

上式は常に正しい。

公式(A.36)について — 速度勾配テンソルの等式

(p.410~)

統計的に一様な速度場の速度勾配テンソル $\partial_i u_j$ のモーメントの等式を求め。

2次モーメントは、4階テンソルであり、その等式は一般に

$$(\partial_i u_j) (\partial_k u_l) = A \delta_{ij} \delta_{kl} + B \delta_{ik} \delta_{jl} + C \delta_{il} \delta_{jk} \text{ (A.25)}$$

という形を持つ。

定数係数A, B, Cを定めよう。上式(A.25)でi, jを縮約し、非圧縮性 $\partial_i u_i = 0$ を用いる

$$0 = (3A + B + C) \delta_{kk}, \therefore 3A + B + C = 0. \text{ (A.26)}$$

次に

$$|\omega|^2 = (\epsilon_{ijk} \partial_j u_k) (\epsilon_{ilm} \partial_l u_m)$$

$$= (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) (\partial_j u_k) (\partial_l u_m)$$

$$= (\partial_j u_k)^2 - (\partial_j u_k) (\partial_k u_j) \text{ (A.27)}$$

のアナログ平均をとり、上式(A.25)の帰結

$$(\partial_j u_k)^2 = A \delta_{jk} \delta_{kj} + B \delta_{jj} \delta_{kk} + C \delta_{jk} \delta_{kj}$$

$$= 3A + 9B + 3C,$$

$$(\partial_j u_k) (\partial_k u_j) = A \delta_{jk} \delta_{kj} + B \delta_{jk} \delta_{kj} + C \delta_{jj} \delta_{kk}$$

$$= 3A + 3B + 9C \text{ を代入して}$$

$$|\omega|^2 = 6(B - C) \text{ (A.28)}$$

を得る。

さらにこの等式(A.27):

$$\partial_i (u_i u_j) - \partial_j (u_i u_i) = \partial_i (u_i) (\partial_j u_j) - (\partial_j u_i) (\partial_i u_j)$$

のアナログ平均をとり、一様性より左辺の2つの微分と右辺の2つの平均は等しくなることに注意して

$$(\partial_i u_i) (\partial_j u_j) = (\partial_i u_j) (\partial_j u_i) \text{ (A.30)}$$

が課せらる。式(A.25)により両辺を評価して

$$(\partial_i u_i) (\partial_j u_j) = A, (\partial_i u_i) (\partial_i u_i) = C$$

なので、上式(A.30)は

$$A = C \text{ (A.31)}$$

を意味する。このとき式(A.30)で添字を(1,2) → (2,3), (3,1)と巡回置換して得られる関係も満たされる。

$$\begin{cases} 3A + B + C = 0 & \text{(A.26)} \\ B - C = |\omega|^2 / 6 & \text{(A.28)} \\ A = C & \text{(A.31)} \end{cases}$$

を連立して解くと、式(A.26)における係数は

$$A = C = -\frac{1}{36} |\omega|^2, B = \frac{2}{15} |\omega|^2$$

と定めて速度勾配の2次モーメントの等式

$$(\partial_i u_j) (\partial_k u_l) = \frac{1}{30} |\omega|^2 (-\delta_{ij} \delta_{kl} + 4\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \text{ (A.32)}$$

を得る(Kida & Orszag 1990).

特に速度の縦微分の2次モーメントは

$$(\partial_i u_i)^2 = (\partial_2 u_1)^2 = (\partial_3 u_2)^2 = \frac{1}{30} |\omega|^2 (-1 + 4 - 1)$$

$$= \frac{1}{15} |\omega|^2, \text{ (A.33)}$$

横微分の2次モーメントは

$$(\partial_i u_2)^2 = (\partial_2 u_1)^2 = (\partial_2 u_3)^2 = (\partial_3 u_2)^2 = (\partial_3 u_1)^2 = (\partial_1 u_2)^2$$

$$= \frac{1}{30} |\omega| (0+4+0) = \frac{2}{15} |\omega|^2 \quad (\text{A.34})$$

であり、両者の比

$$\frac{(\partial_i u_i)^2}{(\partial_i u_i)^2} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} = 2 \quad (\text{A.35})$$

は縦と横のテラー長(4.7節)の比の平方に相当する。

3次、4次モーメントの等方形も同様の手続まで、例えば

以下のように求まる (Kida 1993)。

$$\begin{aligned} \overline{(\partial_i u_b)(\partial_i u_d)(\partial_i u_f)} = & \left\{ \delta_{ab} \delta_{cd} \delta_{ef} + \delta_{ac} \delta_{be} \delta_{df} + \delta_{ac} \delta_{bf} \delta_{de} + \delta_{ad} \delta_{bf} \delta_{ce} \right. \\ & + \delta_{af} \delta_{bd} \delta_{ce} + \delta_{ae} \delta_{bc} \delta_{df} + \delta_{ac} \delta_{bd} \delta_{cf} \\ & - \frac{5}{3} (\delta_{ab} \delta_{ce} \delta_{df} + \delta_{ac} \delta_{be} \delta_{df} + \delta_{ae} \delta_{bf} \delta_{cd}) \\ & - \frac{1}{6} (\delta_{ab} \delta_{cf} \delta_{de} + \delta_{ad} \delta_{bc} \delta_{ef} + \delta_{af} \delta_{be} \delta_{cd}) \\ & \left. - \frac{3}{4} (\delta_{ad} \delta_{be} \delta_{cf} + \delta_{af} \delta_{bc} \delta_{de}) \right\} \overline{(\partial_i u_i)^3} \quad (\text{A.36}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{(\partial_a \partial_b u_c)(\partial_d \partial_e u_f)} = & \left\{ \delta_{ab} \delta_{cf} \delta_{de} + \delta_{ad} \delta_{be} \delta_{cf} + \delta_{ae} \delta_{bd} \delta_{cf} \right. \\ & - \frac{1}{6} (\delta_{ab} \delta_{cd} \delta_{ef} + \delta_{ab} \delta_{ce} \delta_{df} + \delta_{ac} \delta_{bf} \delta_{de} + \delta_{af} \delta_{bc} \delta_{de} \\ & + \delta_{ac} \delta_{bd} \delta_{ef} + \delta_{ac} \delta_{be} \delta_{df} + \delta_{ad} \delta_{bc} \delta_{ef} + \delta_{ae} \delta_{cd} \delta_{df} \\ & \left. + \delta_{ad} \delta_{bf} \delta_{ce} + \delta_{af} \delta_{bd} \delta_{ce} + \delta_{ae} \delta_{bf} \delta_{cd} + \delta_{af} \delta_{be} \delta_{cd}) \right\} \overline{(\partial_i \partial_i u_i)^2} \quad (\text{A.37}) \end{aligned}$$

1.8 変形速度テンソル方程式

Navier-Stokes 方程式から変形速度テンソル S_{ij} についての方程式

$$\frac{dS_{ij}}{dt} = -(\underline{S}^2)_{ij} - (\underline{\omega}^2)_{ij} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} + \nu \nabla^2 S_{ij} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.41)$$

が得られる。

さらに i と j を縮約して得られる関係

$$\frac{1}{\rho} \nabla^2 p = -\|\underline{S}^2\| + \frac{1}{2} \omega^2 - \nabla \cdot \mathbf{f} \quad (1.42) \quad (\text{ただし } \|\underline{S}^2\| = S_{ij} S_{ij} = S_{ij} S_{ji} = \text{Tr}(\underline{S}^2)) \text{ による})$$

$$\begin{cases} \text{圧力の極大点} \quad [\rightarrow \nabla^2 p < 0] & \rightarrow \|\underline{S}^2\| > \frac{1}{2} \omega^2 : \text{剪断運動優勢領域} \\ \text{圧力の極小点} \quad [\rightarrow \nabla^2 p > 0] & \rightarrow \|\underline{S}^2\| < \frac{1}{2} \omega^2 : \text{渦運動優勢領域} \end{cases}$$

である (この逆は必ずしも真ではない)。

1.81 について

変形速度テンソル方程式 (1.41) について

Navier-Stokes 方程式の左辺 $\partial_t u_i + u_k \partial_k u_i$ を ∂_j で微分すると

$\partial_t \partial_j u_i + u_k \partial_k \partial_j u_i + (\partial_j u_k)(\partial_k u_i)$ となる。 i, j を λ, μ 替えて $i \leftrightarrow j$ と足して 2 で割ると

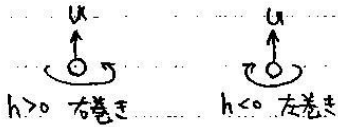
$$\begin{aligned} & \partial_t S_{ij} + u_k \partial_k S_{ij} + \frac{1}{2} \{ (\partial_j u_k)(\partial_k u_i) + (i \leftrightarrow j) \} \\ &= \frac{dS_{ij}}{dt} + \frac{1}{2} \{ (S_{jk} + \omega_{jk})(S_{ki} + \omega_{ki}) + (i \leftrightarrow j) \} \\ &= \frac{dS_{ij}}{dt} + \frac{1}{2} (S_{jk} S_{ki} + \omega_{jk} \omega_{ki} - \cancel{S_{ik} \omega_{ki}} + \cancel{S_{jk} \omega_{ki}} \\ & \quad + S_{ih} S_{kj} + \omega_{ih} \omega_{kj} - \cancel{S_{jk} \omega_{ki}} + \cancel{S_{ik} \omega_{kj}}) \quad i \leftrightarrow j \\ &= \frac{dS_{ij}}{dt} + S_{ik} S_{kj} + \omega_{ik} \omega_{kj} \\ &= \frac{dS_{ij}}{dt} + (\underline{S}^2)_{ij} + (\underline{\omega}^2)_{ij} \end{aligned}$$

式 (1.42) について

$$(\underline{\omega}^2)_{ii} = \omega_{ik} \omega_{ki} = \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} \omega_l \right) \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{kilm} \omega_m \right) = -\frac{1}{2} \omega^2 \quad (\because \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{kilm} = -2 \delta_{lm} \text{ (A.19)})$$

1.9 ヘルムホルツ方程式

ヘルムホルツ密度 $h \equiv u \cdot \omega$



- $\frac{1}{2}\omega$ は流体粒子の角速度 (1.3節)
- 素粒子に対してもヘルムホルツは同様に粒子の運動量方向のスピンとして定義される

Navier-Stokes 方程式が h に対するヘルムホルツ方程式

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (uh) = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\omega p) + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\omega u - u \omega) + \nu \left\{ \nabla^2 h - 2 \nabla \nabla : u \omega - 2 \omega \cdot (\nabla \times \omega) \right\} \quad (1.44)$$

$\frac{\partial}{\partial t} u_i \omega_j$ が導かれる。

ヘルムホルツ $H \equiv \int h d^3x$ (周期的な流体力学の基本領域, あるいは無限遠でゼロになる流体力学に対して空間全体で積分)

は, $\frac{dH}{dt} = -2\nu \int \omega \cdot (\nabla \times \omega) d^3x$ (1.45)

非粘性 $\nu=0$ に対して保存。

ヘルムホルツ \leftrightarrow 渦糸のトポロジー

1.9.1 ヘルムホルツ

ヘルムホルツ方程式 (1.44) に対して

Navier-Stokes 方程式と渦度方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |u|^2 \right) + \nu \nabla^2 u + f & (1.26) \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times (u \times \omega) + \nu \nabla^2 \omega + \nabla \times f & (1.35) \end{cases} \quad (1.46)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \omega + u \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t}$$

$$= -\frac{1}{\rho} \omega_i \partial_i p - \omega_i u_j \partial_i u_j + \nu \omega_i \partial_j \partial_j u_i + \omega_i f_i + u_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} u_l \omega_m + \nu u_i \partial_j \partial_j \omega_i + u_i \varepsilon_{ijk} \partial_j f_k \quad (1.47)$$

以降, $\partial_i u_i = 0, \partial_i u_i = \nabla \cdot (\nabla \times u) = 0$ (注意 9.3)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= u_i \partial_j (u_i \omega_j) + u_i \partial_j (u_j \omega_i) \\ &= u_i \omega_j \partial_j u_i + u_i u_j \partial_j \omega_i \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} = \varepsilon_{ijk} (f_i \partial_j u_k + u_i \partial_j f_k) = 0$$

ε_{ijk} 反対称 f_i, u_i 対称 たがって

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \partial_i (\omega_i p) + u_i u_j \partial_j \omega_i$$

$$+ \nu (\omega_i \partial_j \partial_j u_i + u_i \partial_j \partial_j \omega_i) \quad \text{これは (1.44) の}$$

$$\nabla \cdot (uh) = \partial_i (u_i u_j \omega_j) = u_i \partial_i (u_j \omega_j)$$

$$= u_i u_j \partial_i \omega_j + u_i \omega_j \partial_i u_j \quad \text{これは (1.47) の}$$

$$-\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (uh)$$

$$= -\frac{1}{\rho} \partial_i (\omega_i p) + u_i u_j \partial_i u_j + \nu (\omega_i \partial_j \partial_j u_i + u_i \partial_j \partial_j \omega_i)$$

を得る。式 (1.44) と右辺で ω を比較しよう。

$$\frac{1}{2} \nabla \cdot (\omega u - u \omega) = \frac{1}{2} \partial_i (\omega_i u_j - u_j \omega_i) = \omega_i u_j \partial_i u_j$$

$$\begin{cases} \nabla^2 h = \partial_j \partial_j u_i \omega_i = \partial_j (\omega_i \partial_j u_i + u_i \partial_j \omega_i) \\ = (\omega_i \partial_j \partial_j u_i + u_i \partial_j \partial_j \omega_i) + 2(\partial_j \omega_i)(\partial_j u_i), \\ 2 \nabla \nabla : u \omega = 2 \partial_i \partial_j u_i \omega_j = 2(\partial_i \omega_j)(\partial_j u_i), \\ 2 \omega \cdot (\nabla \times \omega) = 2 \omega \cdot (\nabla \times \nabla \times u) \\ = 2 \omega \cdot (\nabla \nabla \cdot u - \nabla^2 u) = -2 \omega \cdot (\nabla^2 u) \end{cases}$$

ヘルムホルツはガリレイ変換に対して不変であるが、ヘルムホルツ密度はそうではない (p. 18, l. 11, 12) にて、一様な速度 U に対して Galilei 変換

$$u \rightarrow u' = u + U, \quad \omega \rightarrow \omega' = \omega \quad \text{を考えれば}$$

これに伴う h, H の変化量は

$$\Delta h = U \cdot \omega,$$

$$\Delta H = \int U \cdot \omega d^3x = \int U \cdot (\nabla \times u) d^3x \stackrel{\text{発散定理}}{=} 0.$$

1.10 レイノルズ数

- Reynolds数 $Re = UL/\nu$
- Reynoldsの相次則
 - ▶ 乱流では統計的に見た構造が相似

1.11 運動方程式の不変性

連続方程式と Navier-Stokes 方程式の持つ不変性

- [1] 時間並進不変性 $t \leftarrow t + T$ (T は定数)
- [2] 空間並進 $\leftarrow x \leftarrow x + L$ (L は定ベクトル)
- [3] 空間反転 $\leftarrow x \leftarrow -x, u \leftarrow -u$
- [4] 空間回転 $\leftarrow x \leftarrow \Delta \cdot x, u \leftarrow \Delta \cdot u$
(Δ は回転行列)
- [5] スケール変換 $\leftarrow x \leftarrow \lambda x, t \leftarrow \lambda^2 t,$
 $u \leftarrow \lambda^{-1} u, p \leftarrow \lambda^{-2} p$
(λ は正定数)
- [6] Galilei変換 $\leftarrow x \leftarrow x + Ut, u \leftarrow u + U$
(U は定ベクトル)

対称性の高い流れ \rightarrow 計算コスト節約

1.11 について

■ スケール変換 [5] について

$x' = \lambda x, t' = \lambda^2 t, p' = \lambda^{-2} p$ は
 $u' = \lambda^{-1} u$ も含意しており、このとき Navier-Stokes 方程式 (1.23) の各項は

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t'} = \lambda^{-3} \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad \text{のよりに } \lambda^{-3} \text{ 倍される。}$$

ただし p は一定と考える。また外力 f_i も考慮する、 $f'_i = \lambda^{-3} f_i$ としなければならぬ。

■ 対称性の説明 (p.20) について

方程式の対称性は同じ対称性を持つ流れの存在も保証するが、一般には実現可能な流れ

すべてが方程式と同じ対称性を持つとは限らない。
例えば x 方向の一様流を z 軸周りに 90° 回転させると y 方向の一様流となる、この流れで一致しない。

1.12 非粘性保存量

外力の働かない完全流体の大域的保存量
(渦度が無限遠で(指数関数的に)ゼロになるとき)

- 運動エネルギー $K = \frac{1}{2} \int |u|^2 d^3x$
 - 仮想運動量 $P = \int u d^3x = \frac{1}{2} \int x \times \omega d^3x$
 - 仮想角運動量 $M = \int x \times u d^3x$
 $= \frac{1}{3} \int x \times (x \times \omega) d^3x$
 - Λ シリ (1.46): $H = \int u \cdot \omega d^3x$
- [K, P, M が]は一定値 P を省いている。次元は正しくない]

局所的保存量 流体に固定した閉曲線 C
に沿った循環 $\Gamma(C) = \oint_C u \cdot dx$

1.12 について

■ 全運動量の式 (1.50) について

$$\begin{aligned} & \int (x \times \omega)_i dV \\ &= \int (\epsilon_{ijk} x_j \epsilon_{kln} \partial_l u_n) dV \\ &= \int (x_j \partial_i u_j - x_j \partial_j u_i) dV \\ &= 2 \int u_i dV. \end{aligned}$$

(部分積分し、 $\partial_i x_j = \delta_{ij}$, $\partial_j x_j = 3$ を用いた)

■ 全角運動量の式 (1.51) について

$$\begin{aligned} & x \times (x \times \omega) = x(x \cdot \omega) - \omega x^2 \quad \text{よって} \\ & \int [x \times (x \times \omega)]_i dV \\ &= \int (x_i x_j \omega_j - \omega_i x_j x_j) dV \\ &= \int \{ x_i x_j \epsilon_{jke} \partial_k u_e - \epsilon_{ike} (\partial_k u_e) x_j x_j \} dV \\ &= \int (x_i \epsilon_{jke} - x_j \epsilon_{ike}) x_j \partial_k u_e dV \\ &= - \int \{ (\delta_{ik} \epsilon_{jke} - \delta_{jk} \epsilon_{ike}) x_j \\ & \quad + (x_i \epsilon_{jke} - x_j \epsilon_{ike}) \delta_{jk} \} u_e dV \end{aligned}$$

(部分積分した)

$$\begin{aligned}
 &= -\int \{ (\epsilon_{ijk} - \epsilon_{jik}) x_j - \epsilon_{ijk} x_j \} u_k dV \\
 &\quad (\because \epsilon_{jke} \delta_{jk} = 0) \\
 &= 3 \int \epsilon_{ijk} x_j u_k dV \\
 &= 3 \int (\mathbf{x} \times \mathbf{u})_i dV.
 \end{aligned}$$

1.13 2次元の渦運動

非圧縮性の2次元流の復習

- 流れ関数 Ψ の導入
- 渦なし \rightarrow 複素速度ポテンシャル $f = \Psi + i\psi$ の導入

2次元流 $\mathbf{u} = (u, v, 0)$, $\omega = (0, 0, \omega)$ では

• 渦度方程式 (1.31)

$$\rightarrow \frac{d\omega}{dt} \equiv \frac{\partial \omega}{\partial t} + \underbrace{\mathbf{J}(\omega, \Psi)}_{\text{Jacobian}} = \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \omega \quad (1.66)$$

• Biot-Savart の関係式 (1.16)

$$\rightarrow \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\omega(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dS' + \nabla \phi(\mathbf{x}) \quad (1.69)$$

または

$$\begin{aligned}
 \omega &= u - i v = 2i \lambda \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial z} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\omega(z', z'^*)}{z - z'} dS' + 2 \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1.70)
 \end{aligned}$$

1.13 について

■ 「流速は……流れ関数の値の大きい方を左手に見る方向に向いている」 (p. 23, 2.3, 4) について

$$\nabla \Psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$



反時計回りに
90°回転

■ 2次元流での渦度方程式 (1.66) について

渦度方程式 (1.31): $\frac{d\omega}{dt} = (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \omega + \nabla \times \mathbf{f}$
は $\mathbf{f} = 0$ において \mathbf{z} 成分をとり

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \partial_x + v \partial_y) \omega = 0 + \nu (\partial_{xx} + \partial_{yy}) \omega + 0$$

とある。こゝで

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}(\omega, \Psi) &= \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = u \partial_x \omega + v \partial_y \omega \\
 &\text{なので式 (1.66) も得る。}
 \end{aligned}$$

■ 2次元流での Biot-Savart の関係式 (1.69) について

Biot-Savart の関係式 (1.16) において、 xy 面上の点 \mathbf{x} の流速に対し、面の外 $z' \neq 0$ の点 \mathbf{x}' における $\omega(\mathbf{x}')$ の寄与も考え、脚注 16 (p. 25) により導出する。

よは言ひ、 z 方向への逆進対称性より $\omega(\mathbf{x}')$ の値自体は、したがって $\omega(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')$

$$= (-\omega(\mathbf{x}')(y-y'), \omega(\mathbf{x}')(x-x'), 0)$$

は z' に依存しないことに注意して、

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{\omega(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 \mathbf{x}'$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\omega(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2\}^{3/2}} dx' dy' dz'$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \frac{\omega(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{(x-x')^2 + (y-y')^2} dx' dy' \quad \text{「このため」}$$

(公式 $\int_0^\infty (a^2 + z'^2)^{-3/2} dz' = 2/a^2$ を用いた)、
 $(x-x')^2 + (y-y')^2 = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2$, $dx' dy' = dx$
と再定義すれば式 (1.69) も得る。

■ 複素速度に於て式 (1.70) について

また脚注 17 (p. 25) について、複素数 z による微分は $\Delta z \rightarrow 0$ の近づき方に依存しないから、 $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$ と置く

$$\partial_z = \frac{1}{2} (\partial_x - i \partial_y), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2} (\partial_x + i \partial_y).$$

すると式 (1.70) 第2の等号は

$$2i \lambda \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial z} = \lambda \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \bar{\Psi} = \lambda (-v - i u) = u - i v$$

と理解される。第3の等号について

$z - z' = (x-x') + i(y-y')$ に注意し、式 (1.69) を

$$u = \frac{1}{2\pi} \int \frac{-\omega(\mathbf{x}')(y-y')}{|z-z'|^2} dS' + \partial_x \phi$$

$$v = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\omega(\mathbf{x}')(x-x')}{|z-z'|^2} dS' + \partial_y \phi$$

と書く。さて

$$u - i v = \frac{-i}{2\pi} \int \frac{\omega(\mathbf{x}')(z-z')^*}{|z-z'|^2} dS' + (\partial_x - i \partial_y) \phi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\omega(\mathbf{x}')}{z-z'} dS' + 2 \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{「このことから右側の等号が得られる」}$$

第2章 変動の方程式

2.1 平均操作

乱流は本質的に不安定であるが、統計的平均量が安定に存在する。

- 統計的に定常な乱流 → 時間平均が意味を持つ
- 統計的に一様な乱流 → 空間平均が意味を持つ
- 同じ実験条件下で → アンサンブル平均(-) 程の返し観測を行う → を調べられる。

2.2 レイノルズ分解

速度場と圧力場をそれぞれアンサンブル平均 \bar{u}, \bar{p} とそこからの変動 u', p' に分解する:

$$u = \bar{u} + u', \quad p = \bar{p} + p'$$

直観的にも理解できるよに、上式は $\bar{u}' = 0, \bar{p}' = 0$ を含意する。

$$\begin{cases} \text{Navier-Stokes 方程式 (1.23):} \\ \partial_t u_i + \partial_k (u_k u_i) = -\rho \partial_i p + \nu \nabla^2 u_i + f_i, \\ \text{連続の式 (1.5): } \partial_k u_k = 0 \end{cases}$$

平均流に関して

$$\begin{cases} \partial_t \bar{u}_j + \partial_k (\bar{u}_k \bar{u}_j) = -\rho \partial_j \bar{p} - \partial_k \overline{u'_k u'_j} + \nu \nabla^2 \bar{u}_j + \bar{f}_j \\ \text{(Reynolds 方程式)} \end{cases} \quad (2.5)$$

Reynolds 応力 $(T)_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$ に対応する付加的な力と解釈できる

$$\partial_k \bar{u}_k = 0 \quad (2.6)$$

変動流に関して

$$\begin{cases} \partial_t u'_j + \partial_k (\bar{u}_k u'_j) + \partial_k (u'_k u'_j) \\ = -\rho \partial_j p' - \partial_k (\overline{u'_k u'_j} - \bar{u}'_k u'_j) + \nu \nabla^2 u'_j + f'_j \\ \partial_k u'_k = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Reynolds 応力は Navier-Stokes 方程式の非線形性に由来しており、これが乱流場の解析を困難にする。

圧力方程式 (1.29): $\frac{\rho(\mathbf{x})}{\rho} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial^2 \rho'(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' + f(\mathbf{x})$

よって圧力は Reynolds 応力の非閉鎖関数である。

上式から Reynolds 応力 (速度の2次モーメント) に対して、Reynolds 応力方程式

$$\begin{aligned} & \partial_t \overline{u'_k u'_j} + \bar{u}_k \partial_k \overline{u'_i u'_j} \\ &= -\frac{1}{\rho} \overline{u'_i \partial_j p'} - \frac{1}{\rho} \overline{u'_j \partial_i p'} \\ & \quad - \overline{u'_i u'_k \partial_k u'_j} - \overline{u'_j u'_k \partial_k u'_i} - \partial_k \overline{u'_k u'_i u'_j} \\ & \quad + \nu \{ \nabla^2 \overline{u'_i u'_j} - 2(\partial_k \bar{u}_i)(\partial_k \bar{u}_j) \} \\ & \quad + \overline{u'_i f'_j} + \overline{u'_j f'_i} \end{aligned} \quad (2.10)$$

を得る。

□ で囲った項は速度の3次モーメントを含むので、方程式は閉じない。

→ 方程式系の完結の問題 (第6章, 第IV編)

2.2 について

■ Reynolds 方程式 (2.5) について

$\bar{u}(\mathbf{x}, t), \bar{u}'(\mathbf{x}, t)$ は場であり、 $\partial_k \bar{u}_i = \partial_k u'_i$ とできる。

2.1節の事情を踏まえ、外力も $f_i = \bar{f}_i + f'_i$ と分解する。

さて、Navier-Stokes 方程式 (1.23) に $u_i = \bar{u}_i + u'_i, p = \bar{p} + p'$ を代入すると

$$\begin{aligned} & \partial_t \bar{u}_i + \partial_t u'_i \\ & + \partial_k \bar{u}_k \bar{u}_i + \partial_k \bar{u}_k u'_i + \partial_k u'_k \bar{u}_i + \partial_k u'_k u'_i \\ &= -\frac{1}{\rho} \partial_i \bar{p} - \frac{1}{\rho} \partial_i p' + \nu \nabla^2 \bar{u}_i + \nu \nabla^2 u'_i \\ & + \bar{f}_i + f'_i \end{aligned} \quad (1.23)'$$

となる。各項のアンサンブル平均をとり、 $\bar{u}_i = 0, \bar{p}' = 0$ を用いて (ただし2次モーメントの項の平均 $\partial_k \overline{u'_k u'_i}$ は生起る) 平均流に対する式 (2.5) を得る。

■ 変動流に関する式 (2.7) について

上式 (1.23)' と式 (2.5) を2つ引くと、残りの変動流に関する項が式 (2.7) を成す。

■ Reynolds 応力方程式 (2.10) について

式 (2.7) [生起る添字をj] に u'_i をかけると

$$\begin{aligned} & \overline{u'_i \partial_t u'_j} + \overline{u'_i \partial_k \bar{u}_k u'_j} + \overline{u'_i \partial_k u'_k \bar{u}_j} \\ &= \underbrace{-\frac{1}{\rho} \overline{u'_i \partial_j p'}}_{\textcircled{1}} - \overline{u'_i \partial_k (\overline{u'_k u'_j} - \bar{u}'_k u'_j)}_{\textcircled{2}} + \nu \overline{u'_i \nabla^2 u'_j} + \overline{u'_i f'_j} \end{aligned}$$

この「アサンブル平均を \bar{u} , \bar{v} を交換した式を加えて」
(p.28, 1.8, 9), Reynolds 応力方程式 (2.10) が導かれる。
確認して上式の①の項からは

$$\overline{u_i \partial_t \tilde{u}_j} + \overline{\tilde{u}_j \partial_t u_i} = \partial_t \overline{u_i \tilde{u}_j} \quad \text{が得られる。}$$

これは式 (2.10) 左辺第1項である。この際、

$$\overline{u_i \partial_t \tilde{u}_j} = \overline{\tilde{u}_j \partial_t u_i} = 0 \quad \text{としてはいつかここで}$$

注意お (相関を持つ量の積の平均 \overline{AB} は平均の積 $\overline{A} \cdot \overline{B}$ に分けられない)。

次に②, ③の項も考えるにあたり、平均の性質

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

に注目。これは N 個のアサンブルに関する平均の定義

$$\overline{A} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N A_k \quad \text{に基づき、}$$

$$\overline{A \cdot B} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N A_k \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N B_j \right)$$

$$= \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N A_k \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N B_j \right) = \overline{A} \cdot \overline{B} \quad \text{と示す。}$$

ここで $\partial_k \overline{u_k} = 0$: (2.6), $\partial_k \tilde{u}_k = 0$: (2.8) を用いる

②からは

$$\begin{aligned} & \overline{u_i \partial_k \tilde{u}_k \tilde{u}_j} + \overline{\tilde{u}_k \partial_k u_i \tilde{u}_j} + (i \leftrightarrow j) \\ = & \overline{\tilde{u}_k u_i \partial_k \tilde{u}_j} + \overline{\tilde{u}_k \tilde{u}_i \partial_k u_j} + (i \leftrightarrow j) \\ = & \overline{\tilde{u}_k \cdot \tilde{u}_i \partial_k \tilde{u}_j} + \overline{\tilde{u}_k \tilde{u}_i \partial_k u_j} + (i \leftrightarrow j) \\ = & \overline{\tilde{u}_k \partial_k \tilde{u}_i \tilde{u}_j} + \underbrace{\overline{\tilde{u}_k \tilde{u}_i \partial_k u_j} + (i \leftrightarrow j)}_{(2B)} \end{aligned}$$

(2A) (2B)

が得られる。(2A) は式 (2.10) 左辺第2項であり、(2B) は
移項すると式 (2.10) 右辺第3, 4項である。また③からは

$$\begin{aligned} & -\tilde{u}_i \partial_k (\tilde{u}_k \tilde{u}_j - \tilde{u}_k \tilde{u}_j) + (i \leftrightarrow j) \\ = & -\tilde{u}_i \partial_k \tilde{u}_k \tilde{u}_j + \underbrace{\tilde{u}_i \partial_k \tilde{u}_k \tilde{u}_j}_0 + (i \leftrightarrow j) \\ = & -\partial_k \tilde{u}_k \tilde{u}_i \tilde{u}_j \end{aligned}$$

が得られる。これは式 (2.10) 右辺第5項である。

最後に④からは

$$\begin{aligned} & \nu (\overline{u_i \partial_k \partial_k \tilde{u}_j} + \overline{u_j \partial_k \partial_k u_i}) \\ = & \nu \{ \overline{\partial_k (\tilde{u}_i \partial_k \tilde{u}_j + \tilde{u}_j \partial_k \tilde{u}_i)} - 2(\partial_k u_i)(\partial_k u_j) \} \\ = & \nu \{ \overline{\partial_k \partial_k \tilde{u}_i \tilde{u}_j} - 2(\partial_k u_i)(\partial_k u_j) \} \end{aligned}$$

が得られ、これは式 (2.10) 右辺第6項 (ν の項) に一致する。

その他の項の計算は自明である。

■ Reynolds 分解について

これはアサンブル平均 \bar{u} とそこからの変動 \tilde{u} への分解
として説明されているが、例えば 3.2 節のように安定性
解析の文脈で、 \bar{u} は層流、 \tilde{u} は擾乱とも見られる。

2.3 エネルギー方程式

Reynolds 方程式 (2.5)



平均流の単位質量当たりの運動エネルギー

$K^M = \frac{1}{2} \bar{u}_j^2$ に対する方程式

$$\partial_t K^M = \partial_j \left\{ \underbrace{-\bar{u}_j K^M}_{\text{乱流}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \bar{u}_j \bar{p}}_{\text{圧力仕事}} - \underbrace{\bar{u}_j \bar{u}_k \bar{u}_k}_{\text{乱流仕事}} + \nu (\partial_j K^M + \partial_k \bar{u}_j \bar{u}_k) \right\} + \underbrace{\bar{u}_j \bar{u}_k \partial_j \bar{u}_k}_{\text{乱流散逸}} - 2\nu \bar{S}_{jk}^2 + \underbrace{\bar{u}_j \bar{f}_j}_{\text{外力仕事}} \quad (2.12)$$

$$\bar{S}_{ij} \equiv \frac{1}{2} (\partial_i \bar{u}_j + \partial_j \bar{u}_i).$$

Reynolds 応力方程式 (2.10)



変動流の単位質量当たりの運動エネルギー

$K = \frac{1}{2} \bar{u}_j'^2$ に対する方程式

$$\partial_t K = \partial_j \left\{ \underbrace{-\bar{u}_j K}_{\text{平均乱流}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \bar{u}_j \bar{p}}_{\text{圧力仕事}} - \underbrace{\frac{1}{2} \bar{u}_j \bar{u}_k'^2}_{\text{変動乱流}} + \nu (\partial_j K + \partial_k \bar{u}_j \bar{u}_k) \right\} - \underbrace{\bar{u}_j \bar{u}_k \partial_j \bar{u}_k}_{\text{生成}} - 2\nu \bar{S}_{jk}^2 + \underbrace{\bar{u}_j \bar{f}_j}_{\text{外力仕事}} \quad (2.15)$$

$$\bar{S}_{ij} \equiv \frac{1}{2} (\partial_i \bar{u}_j + \partial_j \bar{u}_i).$$

2.3.1 について

■ 式 (2.12) について

Reynolds 方程式 (2.5) に \bar{u}_j をかけて和をとる

$$\bar{u}_j \partial_t \bar{u}_j + \bar{u}_j \partial_k \bar{u}_k \bar{u}_j$$

$$= -\frac{1}{\rho} \bar{u}_j \partial_j \bar{p} - \underbrace{\bar{u}_j \partial_k \bar{u}_k \bar{u}_j}_{\text{③}} + \nu \bar{u}_j \partial_k \partial_k \bar{u}_j + \bar{u}_j \bar{f}_j \quad \text{④}$$

他方、式 (2.12) 左辺第1項は

$$\partial_t K^M = \partial_t \left(\frac{1}{2} \bar{u}_j^2 \right) = \bar{u}_j \partial_t \bar{u}_j \quad \text{よ①に一致する。}$$

式 (2.12) 右辺第1項は左辺1: 初項から

$$\partial_j (\bar{u}_j K^M) = \bar{u}_j \partial_j K^M = \bar{u}_j \bar{u}_k \partial_j \bar{u}_k$$

となり、②に一致する。

また式 (2.12) 右辺第3項 (乱流仕事)、第5項 (乱流散逸) は

$$-\partial_j (\bar{u}_j \bar{u}_k \bar{u}_k) + \bar{u}_j \bar{u}_k \partial_j \bar{u}_k$$

$$= -\bar{u}_j \partial_j \bar{u}_k \bar{u}_k$$

$$= -\bar{u}_j \bar{u}_k \partial_k \bar{u}_j$$

$$= -\bar{u}_j \partial_k \bar{u}_k \bar{u}_j \quad \text{となり③に一致する。}$$

最後に式 (2.12) における ν の係数は

$$\partial_j (\partial_j K^M + \partial_k \bar{u}_j \bar{u}_k) - 2 \bar{S}_{jk}^2 = \partial_j (\bar{u}_k \partial_j \bar{u}_k + \partial_k \bar{u}_j \bar{u}_k) - 2 \cdot \left\{ \frac{1}{2} (\partial_j \bar{u}_k + \partial_k \bar{u}_j) \right\}^2$$

$$= (\partial_j \bar{u}_k)^2 + \bar{u}_k \partial_j \partial_j \bar{u}_k + (\partial_j \bar{u}_k) (\partial_k \bar{u}_j) - 2 \cdot \frac{1}{4} \{ 2(\partial_j \bar{u}_k)^2 + 2(\partial_j \bar{u}_k) (\partial_k \bar{u}_j) \}$$

$$= \bar{u}_k \partial_j \partial_j \bar{u}_k \quad \dots \text{④}$$

となり、④における ν の係数に一致する。

以上の式 (2.12) が得られている。

■ 式 (2.15) について

Reynolds 応力方程式 (2.10) において \bar{u}_j を縮約し、 $\frac{1}{2}$ 倍して得られる。右確認しては、式 (2.10) 右辺第3, 4項が

$$\frac{1}{2} (-\bar{u}_j \bar{u}_k \partial_k \bar{u}_j - \bar{u}_j \bar{u}_k \partial_k \bar{u}_j) = -\bar{u}_j \bar{u}_k \partial_k \bar{u}_j$$

となり、式 (2.15) の「生成」の項を与え、式 (2.10) 右辺第5項が

$$-\frac{1}{2} \partial_k \bar{u}_k \bar{u}_j \bar{u}_j = \partial_j (-\frac{1}{2} \bar{u}_j \bar{u}_k'^2)$$

となり、式 (2.15) の「変動乱流」の項を与えることに注意すれば良い。

式 (2.10) における ν の係数は、上式④との類似性より

$$\frac{1}{2} \{ \partial_k \partial_k \bar{u}_j \bar{u}_j - 2(\partial_k \bar{u}_j)^2 \}$$

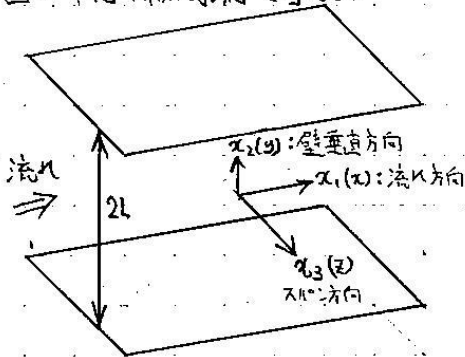
$$= \bar{u}_j \partial_k \partial_k \bar{u}_j$$

$$= \partial_j (\partial_j K + \partial_k \bar{u}_j \bar{u}_k) - 2 \bar{S}_{jk}^2$$

となり、式 (2.15) の ν の係数に一致する。

2.4 平行平板間流

下図の平行平板間流を考える。



教科書の図1.2 (p.13), 壁面上で流速ゼロ (粘着条件, p.12)

仮定

- x_1 方向の一様な外力 $f_j = F \delta_{j1}$
- 流れは統計的に定常で x_1, x_3 方向には一様
- さらに境界条件の幾何学的な対称性から
- 変動流の x_3 方向の反転対称性 $\overline{u_1 u_3} = 0, \overline{u_2 u_3} = 0$
- 平均流は x_1 方向に向いている: $\overline{u_2} = 0, \overline{u_3} = 0$

このとき平均流の式 [Reynolds 方程式] と Reynolds 応力方程式は以下のように比較的簡単になる。この結果は後の節でしばしば引用する。

平均流の運動方程式 (2.5)

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \partial_1 \bar{p} - \partial_2 \overline{u_1 u_2} + \nu \partial_2^2 \bar{u}_1 + F &= 0, & (2.19) \\ -\frac{1}{\rho} \partial_2 \bar{p} - \partial_2 \overline{u_2^2} &= 0 & (2.20) \end{aligned} \right.$$

$$\bar{p}/\rho = -\overline{u_2^2} - G x_1, \quad -G: \text{平均圧力勾配} \quad (2.21)$$

$$(F+G)x_2 - \overline{u_1 u_2} + \nu \partial_2 \bar{u}_1 = \nu (\partial_2 \bar{u}_1)_{x_2=0} \quad (2.22)$$

平板の位置

Reynolds 応力方程式 (2.10)

$$\begin{aligned} \overline{u_1^2} \text{ の式: } & \left[\underbrace{-\frac{1}{\rho} \overline{u_1 \partial_1 \bar{p}}}_{\text{再評価}} \right] + \left[\underbrace{-2\overline{u_1 u_2 \partial_2 u_1}}_{\text{生成}} \right] - \left[\underbrace{\partial_2 \overline{u_1^2 u_2}}_{\text{乱流拡散}} \right] + \left[\underbrace{\nu \partial_2^2 \overline{u_1^2}}_{\text{粘性拡散}} \right] - \left[\underbrace{2\nu (\partial_k \overline{u_1 u_2})^2}_{\text{粘性散逸}} \right] = 0, & (2.23) \\ \overline{u_2^2} \text{ の式: } & \left[\underbrace{-\frac{1}{\rho} \overline{u_2 \partial_2 \bar{p}}}_{\text{再評価}} \right] + \left[\underbrace{-\partial_2 \overline{u_1^2 u_2}}_{\text{生成}} \right] + \left[\underbrace{\nu \partial_2^2 \overline{u_2^2}}_{\text{粘性拡散}} \right] - \left[\underbrace{2\nu (\partial_k \overline{u_2 u_2})^2}_{\text{粘性散逸}} \right] = 0, & (2.24) \\ \overline{u_3^2} \text{ の式: } & \left[\underbrace{-\frac{1}{\rho} \overline{u_3 \partial_3 \bar{p}}}_{\text{再評価}} \right] + \left[\underbrace{-\partial_2 \overline{u_1 u_2 u_3}}_{\text{生成}} \right] + \left[\underbrace{\nu \partial_2^2 \overline{u_3^2}}_{\text{粘性拡散}} \right] - \left[\underbrace{2\nu (\partial_k \overline{u_3 u_3})^2}_{\text{粘性散逸}} \right] = 0, & (2.25) \end{aligned}$$

$$\overline{u_1 u_2} \text{ の式: } -\frac{1}{\rho} \overline{u_1 \partial_1 \bar{p}} - \frac{1}{\rho} \overline{u_2 \partial_2 \bar{p}} - \overline{u_1^2 \partial_2 u_1} - \partial_2 \overline{u_1 u_2^2} + \nu \partial_2^2 \overline{u_1 u_2} - 2\nu (\partial_k \overline{u_1 u_2})(\partial_k \overline{u_2}) = 0 \quad (2.26)$$

ただし外力には変動がないとしておき $[f_j = 0]$, 上記以外の式は恒等的にゼロ [自明な式 $0=0$] となる。

平均流のエネルギー方程式 (2.12) \Leftrightarrow (2.22),

変動流のエネルギー方程式 (2.15)

$$\Rightarrow \underbrace{-\overline{u_1 u_2 \partial_2 u_1}}_{\text{生成}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \partial_2 \overline{u_2 \bar{p}}}_{\text{圧力拡散}} - \underbrace{\frac{1}{2} \partial_2 \overline{u_2 u_2^2}}_{\text{乱流拡散}} + \underbrace{\nu \partial_2^2 K}_{\text{粘性拡散}} - \underbrace{2\nu (\partial_k \overline{u_2})^2}_{\text{粘性散逸}} = 0. \quad (2.27)$$

2.4.1 について

■ Reynolds 方程式 (2.19), (2.20) について

Reynolds 方程式 (2.5) の左辺について, 流れは統計的に定常と仮定しているので $\partial_t \overline{u_j} = 0$ であり, また

$$\partial_k \overline{u_k u_j} = \partial_1 \overline{u_1 u_j} \quad (\because \overline{u_2} = \overline{u_3} = 0)$$

$$= 0. \quad (x_1 \text{ 方向の一様性})$$

式 (2.5) の右辺第 2 項について, $\overline{u_1 u_3} = \overline{u_2 u_3} = 0$ を考慮して

$$\partial_k \overline{u_k u_1} = \partial_2 \overline{u_2 u_1}, \quad \partial_k \overline{u_k u_2} = \partial_1 \overline{u_1 u_2} + \partial_2 \overline{u_2^2}$$

であり, 変動流についても x_1 方向の一様性を仮定すれば

$$\partial_k \overline{u_k u_1} = \partial_2 \overline{u_2 u_1}, \quad \partial_k \overline{u_k u_2} = \partial_1 \overline{u_1^2} \quad \text{とできる。}$$

■ 式 (2.21) について

「式 (2.20) を x_2 について積分すると」 (p.30) $\bar{p}/\rho = -\overline{u_2^2} + C(x_1)$

⇨ 「式 (2.19) より $(\partial/\partial x_1) \bar{p}/\rho$ が x_1 によらないことを考慮」 (p.30)

すると, 「積分定数」 $C(x_1)$ は x_1 の一次式でなければならず,

式 (2.21) を得る。ただし $C(x_1)$ の定数項は, x_1 軸の原点の x_2 方向の任意性を利用してゼロにできる。

■ 式 (2.22) について

「式 (2.21) を (2.19) に代入」 (p.30) すると

$$G - \partial_2 \overline{u_1 u_2} + \nu \partial_2^2 \bar{u}_1 + F = 0 \quad \text{となる。これを } x_2 \text{ について}$$

積分すると (p.30), $(G+F)x_2 - \overline{u_1 u_2} + \nu \partial_2 \bar{u}_1 = \text{const.}$

となる。「平板の位置を $x_2 = 0$ 」 (p.30) とすると $x_2 = 0$ で

$$u = 0 \text{ かつ } \text{const.} = \nu (\partial_2 \bar{u}_1)_{x_2=0} \quad \text{と定まる。}$$

第3章 乱流の発生

本章ではやさすりに概略が述べられている

3.1 レイノルズの実験

円管内の水流を色素で着色。

Reynolds数 Re がある値を超えると層流から乱流に

臨界 Reynolds 数

$$Re_{cr} \approx 2,300 \text{ (Reynoldsによ)}$$

とよか

● 円管入り口の流れの中に含まれる攪乱を抑えた

後の過渡式では $Re_{cr} \approx 50,000$

● 理論的にも $Re_{cr} = \infty$ (次節)

3.2 流れの線形安定性

図1.2 [本ノト2.4節の図] のような x 方向に一定のカ下流の下で実現される、静止した平板間の平面 Poiseuille 流の線形安定性を議論する。

[線形安定性解析では、流れに加えた微小攪乱 \tilde{u} の時間発展 (発達 or 減衰) を、攪乱によって線形化した方程式に基づいて調べ、流れの安定性を判断する方法である。攪乱 \tilde{u} がこの近似の下で減衰おこす安定性の必要条件、増幅おこす不安定性の十分条件と考える。]

微小攪乱 \tilde{u}, \tilde{p} に対して線形化した、無次元化した方程式は

$$\begin{cases} \nabla \cdot \tilde{u} = 0, & (3.6) \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \tilde{u} + (\tilde{u} \cdot \nabla) \bar{u} = -\nabla \tilde{p} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \tilde{u}, & (3.7) \end{cases}$$

$$\text{境界条件 } \tilde{u}(x_2, t) = 0 \quad (x_2 = \pm 1) \quad (3.8)$$

であり、この解は Laplace 変換

$$\begin{cases} \mathcal{L} \tilde{u}(x, \sigma) = \int_0^\infty \tilde{u}(x, t) e^{-\sigma t} dt, & (3.9) \\ \mathcal{L} \tilde{p}(x, \sigma) = \int_0^\infty \tilde{p}(x, t) e^{-\sigma t} dt \end{cases}$$

に持たす式

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathcal{L} \tilde{u} = 0, & (3.11) \\ \sigma \mathcal{L} \tilde{u} + (\bar{u} \cdot \nabla) \mathcal{L} \tilde{u} + (\mathcal{L} \tilde{u} \cdot \nabla) \bar{u} + \nabla \mathcal{L} \tilde{p} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathcal{L} \tilde{u} \\ = \tilde{u} |_{t=0}, & (3.12) \end{cases}$$

$$\text{境界条件 } \mathcal{L} \tilde{u}(x, \sigma) = 0 \quad (x_2 = \pm 1) \quad (3.13)$$

を解き、それを逆変換おこす。

とよか式(3.12)の同次方程式 [右辺をゼロとした式] と式(3.11), (3.13)も満足する解が存在するおよびその値は固有値と呼ばれる、 σ の固有値に対しては式(3.11-13)の解は存在しない。

固有値 σ は一般に複素数個あるが、それらの中で実部が最大のものを σ_M が $\tilde{u}(x, \sigma)$, $\mathcal{L} \tilde{u}(x, \sigma)$ の1位の孤立点であり、 $t \rightarrow \infty$ で攪乱が一般に

$$\tilde{u}(x, t) \propto f_1(x) e^{\sigma_M t}, \quad (3.15)$$

$f_1(x)$: 式(3.12)の同次方程式の固有関数

のように振る舞うことが示される (栗・後藤 1976)。したがって

$$\sigma_{Mr} \equiv \text{Re}(\sigma_M) \begin{cases} < 0 & \tilde{u} \text{ は安定} \\ = 0 & \text{中立} \\ > 0 & \tilde{u} \text{ は不安定} \end{cases}$$

[「固有値は、関数 $\tilde{u}(x, \sigma)$ および $\mathcal{L} \tilde{u}(x, \sigma)$ の複素面上での特異点 (singular point) になっている」(p.35)

にすぎず、Laplace 逆変換 (3.10):

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{const} - i\infty}^{\text{const} + i\infty} \mathcal{L} \tilde{u}(x, \sigma) e^{\sigma t} d\sigma, \text{ etc.}$$

によって得られる式(3.6-8)の物理的な解は存在するが、その $t \rightarrow \infty$ での性質は特異点 σ に支配されていること。]

[そこで σ の固有値を議論するために、式(3.12)の同次方程式を考えると] 攪乱の Fourier 成分

$$\mathcal{L} \tilde{u}_2(x, \sigma) = e^{i(d_1 x_1 + d_3 x_3)} \phi(x_2 | d_1, d_3, \sigma) \quad (3.16)$$

に対する方程式は Orr-Sommerfeld 方程式

$$\begin{aligned} & \left(\bar{u}_1 - \frac{i\sigma}{\alpha_1} \right) \left(\frac{d^2}{dx_2^2} - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 \right) \phi - \frac{d\bar{u}_1}{dx_2} \\ & = \frac{1}{i\alpha_1 Re} \left(\frac{d^4}{dx_2^4} - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 \right)^2 \phi \end{aligned} \quad (3.17)$$

に於て $\alpha_3 = 0$ に固定し、これを基に σ_{Mr} の符号を調べると

図3.3 (p.37)の結果を得る。 (境界条件 (3.13): $\phi = \frac{d\phi}{dx_2} = 0 \quad (x_2 = \pm 1)$)



円管 Poiseuille 流は常に線形安定と考える。

断面が楕円管に於て線形不安定になる得る。

(長半径/短半径 $\rightarrow \infty$ で平行平板間流に)

3.2 について

■ 式(3.7) について

これはもちろん、変動流に対する式(2.7)で非線形項を捨てたものに一致している。
ここで2.4節と同様、外力の変動 f_j は考えない。

■ Orr-Sommerfeld 方程式 (3.17) について

これを後で具体的に用いるわけではないが、導出を考えた。平均流の式(3.5): $\bar{u} = (1-x_2^2)\alpha_1$ に注意する。
また $\nabla^2 \psi'$ も速度で表すために、式(3.14)の発散をとり、式(3.11)も用いると

$$\partial_k(\bar{u}_i \partial_i \psi'_k) + \partial_k \psi'_i \partial_i \bar{u}_k + \nabla^2 \psi' - \frac{1}{Re} \partial_k \nabla^2 \psi'_k = 0 \quad \text{を得る。左辺において}$$

(第1項) = $(\partial_k \bar{u}_i)(\partial_i \psi'_k) = (\partial_k \bar{u}_i)(\partial_i \psi'_i)$, (第2項) = $(\partial_i \psi'_i)(\partial_k \bar{u}_k)$, (第3項) = 0 なので、

$$\nabla^2 \psi' = -2(\partial_k \bar{u}_i)(\partial_i \psi'_k),$$

$$\therefore \partial_k \nabla^2 \psi' = -2 \{ (\partial_k \partial_i \bar{u}_i)(\partial_i \psi'_k) + (\partial_k \bar{u}_i)(\partial_i \partial_k \psi'_i) \} = 4\lambda_1 \alpha_1 e^{i(-)} \phi - 2(\partial_k \bar{u}_i) \lambda_1 \alpha_1 e^{i(-)} \frac{d\phi}{dx_2} \dots \textcircled{*}$$

となる。(Poisson 方程式(1.27)を無次元化、Reynolds 分解、線形化しても同じ結果が得られる。)

次に式(3.14)の x_2 成分に ∇^2 を作用させた

$$\sigma \nabla^2 \psi'_2 + \nabla^2(\bar{u}_i \partial_i \psi'_2) + \nabla^2 \partial_i \psi'_i - \frac{1}{Re} \nabla^2(\nabla^2 \psi'_2) = 0. \dots \textcircled{**}$$

ここで $\nabla^2 \psi'_2 = \left(\frac{d^2}{dx_2^2} - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 \right) e^{i(-)} \phi$ に注意すると、上式 $\textcircled{**}$ 左辺において

$$\text{(第1項)} = \sigma \left(\frac{d^2}{dx_2^2} - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 \right) e^{i(-)} \phi$$

$$\text{(第2項)} = (\nabla^2 \bar{u}_i)(\partial_i \psi'_2) + 2(\partial_k \bar{u}_i)(\partial_k \partial_i \psi'_2) + \bar{u}_i \nabla^2 \partial_i \psi'_i$$

$$= -2\lambda_1 \alpha_1 e^{i(-)} \phi + 2(\partial_k \bar{u}_i) \lambda_1 \alpha_1 e^{i(-)} \frac{d\phi}{dx_2} + \bar{u}_i \lambda_1 \left(\frac{d^2}{dx_2^2} - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 \right) e^{i(-)} \phi$$

である、第3項は $\textcircled{*}$ を用いて評価できる。

3.3 攪乱の非線形発展

省略する。

3.4 流れの複雑化とカオス

流れの変動の n 重周期運動 (QP_n) における n を変数の複雑さの定量的指標に用いることができ、

$n = \infty$ がカオス運動に対応する。

Reynolds 数を増加させて、流れの種類によつて、流れの複雑化は

$$\begin{cases} \text{Landau-Hopf シリョ} & S \rightarrow P \rightarrow QP_2 \rightarrow QP_3 \rightarrow \dots \rightarrow QP_n \rightarrow \dots \rightarrow C \quad (\text{各 } QP_n \text{ が安定に存在することを前提}) \\ \text{Ruelle-Takens シリョ} & S \rightarrow P \rightarrow QP_2 (\rightarrow QP_3) \rightarrow C \end{cases}$$

(S : 定常運動 ($n=0$), P : 周期運動 ($n=1$), C : カオス運動 ($n=\infty$)) のどしどしでも (それ以外のシリョでも) 生じることが実馬的、数値的に分かった (乱流への路の多様性)。

- カオスは ^{ストレンジ} 奇妙なアトラクターを終状態に持つ (ただし状態空間として、空間の各位置 x における各速度成分 $u_i(x)$ を座標に持つ無限次元空間を考へる)。
- 乱流のカオス的な挙動における初期条件感受性 (状態点間距離 $\sim e^{\lambda t}$, λ : Lyapunov 指数)
- Bénard 対流を記述する方程式を簡略化して得られた Lorenz 系 (注意: 実際の Bénard 対流を正確には表していない) の生じるカオスとアトラクターなど。
- カオス運動とアトラクターの次元の、 n 次元 Lyapunov 指数を用いた特徴付け。

「……乱流の厳密な定義は必ずしも重要ではないという開き直りである。……初期条件感受性 (予測不可能性) と強混合性が重要となる流れも (各自が) 乱流と思つて研究すればよい。それでも、あえてカオス系の言葉で乱流の特徴を標語的に表そうとすれば、『乱流とは、3次元、多自由度、強非線形、散逸力学系の非定常な不安定解である』といふよか。」 (p. 60)。

第Ⅲ編

渦構造の力学

乱流中に存在する管状や層状の形をした渦構造は、
乱れや音の生成、熱や浮遊物質の拡散・混合、
あるいは摩擦抵抗の増大など、
乱流力学において重要な役割を演じている。
本編では、このような渦構造の運動力学を議論する。

第9章 渦構造とその表現

9.1 乱流の渦構造

乱流運動の中の秩序構造・組織構造 (長時間安定した流れ構造)

- 壁近傍に安定して存在する主流方向に長く伸びた渦状の流れ構造 (12.4節)
- 混合層乱流における横渦列とそれを結ぶ糸状渦 (12.1節)

瞬間的な流れの秩序構造

- 統計平均によって見える構造とは異なっている。
- 実験には数値シミュレーションが適している。
→ さまざまな乱流中の秩序構造が見えるようになった。

これらの渦構造の形は不規則な乱流運動の中で急激に変化するが、管状や層状といった渦構造のトポロジーは乱流変動の時間スケールに比べてかなり長く保存される。
これらの渦構造のダイナミクスを考察する前に、まずその表現法について述べる。

9.2 渦構造の表現

時間的に変動する流れ場に対しては渦の明確な定義は存在しない。

ある慣性系において閉じた流線を持つ、渦があるように見える流れも、別の慣性系から見ると一樣流が加わり、その流線からは渦があるように見えなくなることが起こり得る(下図)。

→ 座標系に依らない渦構造の定義に、流線を用いることはできない。



渦度がありながら流線が平行である流れもあり、渦度を旋回運動の意味での渦の定義に用いることはできない。

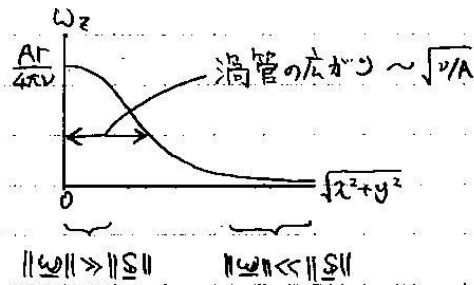
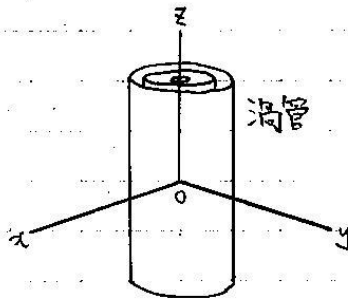


変形速度テンソル \mathbb{S} と渦度テンソル $\mathbb{\omega}$ のノルム $\|\mathbb{S}\| = \sqrt{S_{ij}^2}$, $\|\mathbb{\omega}\| = \sqrt{\omega_{ij}^2}$ (i, j で和をとる) の大小関係を用いる [次節も参照]。

9.3 渦管と渦層の可視化

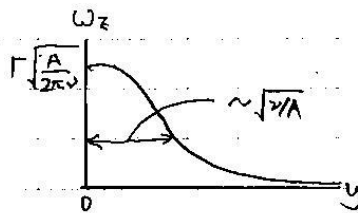
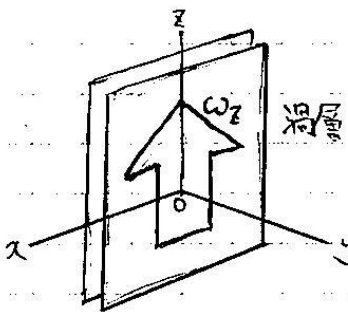
渦度分布 $\omega_z = \frac{A\Gamma}{4\pi\nu} \exp\left[-\frac{A(x^2+y^2)}{4\nu}\right]$ を持つ Burgers 渦管

(Navier-Stokes 方程式の厳密解の1つで、軸対称な流れ点流 $(-\frac{1}{2}Ax, \frac{1}{2}Ay, Az)$ の下で実現する定常状態)



渦度分布 $\omega_z(y) = \Gamma \sqrt{\frac{A}{2\pi\nu}} \exp\left[-\frac{Ay^2}{2\nu}\right]$ を持つ Burgers 渦層

(Navier-Stokes 方程式の厳密解の1つで、2次元流れ点流 $(0, -Ay, Az)$ の下で実現する定常状態)



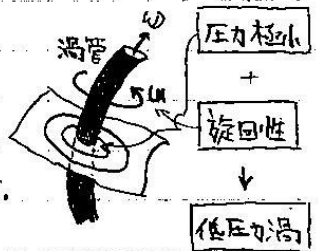
空間のいたる所で $\|\omega\| = \|S\|$

$\|\omega\| \gg \|S\|$ の領域における渦度の等値面 → 渦管を可視化できる
 $\|\omega\| \approx \|S\|$ の領域における渦度の等値面 → 渦層を可視化できる

圧力方程式 (1.27): $\frac{1}{\rho} \nabla^2 p = \|\omega\|^2 - \|S\|^2$ より $\|\omega\|^2$ と $\|S\|^2$ の大小関係は $\nabla^2 p$ の符号に対応。しかし実際には $\nabla^2 p$ ではなく圧力そのものが観測され、渦管は低圧領域として捉えられる。

9.4 低圧力渦の抽出

管状渦の中心には、周りの旋回流を維持する向心力を担う圧力勾配をもたらす低圧部があり、同時に実際に旋回流が伴えば、管状渦を捉えられたことになる。この条件を満たす渦と領域をそれぞれ低圧力渦、渦芯と呼ぶ。



9.3について

10.1節に着想を得て, Burgers渦管, Burgers渦層について考察する.

定常点流 $\bar{u} = \begin{cases} (-\frac{1}{2}A\alpha_1, -\frac{1}{2}A\alpha_2, A\alpha_3) & \textcircled{1} \\ (0, -A\alpha_2, A\alpha_3) & \textcircled{2} \end{cases}$ はともに原点が定常点 ($\bar{u}=0$) であり,

また非圧縮性 $\nabla \cdot \bar{u} = 0$ を満たしている. このときポテンシャル

$$\Phi = \begin{cases} -\frac{1}{4}A\alpha_1^2 - \frac{1}{4}A\alpha_2^2 + \frac{1}{2}A\alpha_3^2 & \textcircled{1} \text{に対して} \\ -\frac{1}{2}A\alpha_2^2 + \frac{1}{2}A\alpha_3^2 & \textcircled{2} \text{に対して} \end{cases}$$

から導かれ ($\bar{u} = \nabla \Phi$), それ故, それ自体は

渦度を生じない. この与えられた流れ \bar{u} の下での渦度の時間発展を考察するには, 渦度方程式 (1.31) を

$$\partial_t \omega + (\bar{u} \cdot \nabla) \omega = (\omega \cdot \nabla) \bar{u} + \nu \nabla^2 \omega \quad (\text{外力} f=0) \quad \textcircled{*}$$

として用いるは良い.

■ 定常点流 $\textcircled{1}$ の下での Burgers 渦管 (9.2): $\omega = (0, 0, \omega_3)$, $\omega_3 = k \exp\left[-\frac{A(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}{4\nu}\right]$, $k = \frac{\Gamma}{4\pi\nu}$ において
上式 $\textcircled{*}$ の非自明な第3成分に関して

$$(\bar{u} \cdot \nabla) \omega_3 = \left\{ \left(-\frac{1}{2}A\alpha_1\right) \left(-\frac{A\alpha_1}{2\nu}\right) + \left(-\frac{1}{2}A\alpha_2\right) \left(-\frac{A\alpha_2}{2\nu}\right) \right\} k e^{(\dots)} = \frac{A^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}{4\nu} k e^{(\dots)}$$

$$(\omega \cdot \nabla) \bar{u}_3 = \omega_3 \partial_3 (A\alpha_3) = k A e^{(\dots)}$$

$$\nu \nabla^2 \omega_3 = -k A e^{(\dots)} + \frac{A^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}{4\nu} k e^{(\dots)}$$

なので上式 $\textcircled{*}$ は満たされている.

また半径 $\rho = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ が無限大の円周に関する循環は, Stokesの定理より

$$\Gamma = \int_0^\infty \omega_3 2\pi\rho d\rho = k \int_0^\infty \exp\left(-\frac{A\rho^2}{4\nu}\right) 2\pi\rho d\rho = \pi k \int_0^\infty e^{-AR/4\nu} dR = \pi k \frac{4\nu}{A} \quad (R \equiv \rho^2)$$

と計算されるので, 係数 k は Γ を用いて $k = \frac{\Gamma}{4\pi\nu}$ と表される.

■ 定常点流 $\textcircled{2}$ の下での Burgers 渦層 (9.5): $\omega = (0, 0, \omega_3)$, $\omega_3 = k \exp\left[-\frac{A\alpha_2^2}{2\nu}\right]$, $k = \Gamma \sqrt{\frac{A}{2\nu}}$ において
上式 $\textcircled{*}$ の非自明な第3成分に関して

$$(\bar{u} \cdot \nabla) \omega_3 = (-A\alpha_2) \left(-\frac{A\alpha_2}{\nu}\right) k e^{(\dots)} = \frac{A^2\alpha_2^2}{\nu} k e^{(\dots)}$$

$$(\omega \cdot \nabla) \bar{u}_3 = \omega_3 \partial_3 (A\alpha_3) = k A e^{(\dots)}$$

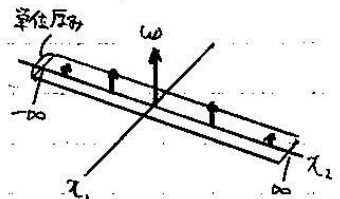
$$\nu \nabla^2 \omega_3 = -k A e^{(\dots)} + \frac{A^2\alpha_2^2}{\nu} k e^{(\dots)}$$

なので, 上式 $\textcircled{*}$ は満たされている.

α_1 方向に単位の厚みを持ち, α_2 方向に無限に伸びる矩形 (下図) に関する循環は, Stokesの定理より

$$\Gamma = \int_{-\infty}^\infty \omega_3 d\alpha_2 = k \sqrt{\frac{2\nu}{A}} \quad \text{と計算されるので (Gauss積分),}$$

係数 k は Γ を用いて $k = \Gamma \sqrt{\frac{A}{2\nu}}$ と表される.



10.3節では Burgers 渦層の時間発展を式(10.36)に基づいて議論している。これを補足してつぎの通り。
 上式(10.36)は流線点流 $(0, -A\lambda_2, A\lambda_2)$ の下で渦度 $\omega = (0, 0, \Omega(\lambda_2, t))$ に対して等価的に

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = A \frac{\partial}{\partial \lambda_2} (\lambda_2 \Omega) + \nu \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda_2^2} \quad (10.36)$$

となる。これは形が相似的に変化する解

$$\Omega(\lambda_2, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{U_0}{L(t)} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_2}{L(t)}\right)^2\right] \quad (10.37)$$

$$L^2(t) = \frac{\nu}{A} + \left(L(0)^2 - \frac{\nu}{A}\right) e^{-2At} \quad (10.38)$$

を持つことを確かめる。

$$\dot{L} = -A \left(L(0)^2 - \frac{\nu}{A}\right) e^{-2At} \quad (10.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(-\frac{1}{L^2} + \frac{\lambda_2^2}{L^3}\right) U_0 L \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_2}{L}\right)^2\right] = \left(-\frac{1}{L^2} + \frac{\lambda_2^2}{L^3}\right) \underbrace{\left(-A \left(L(0)^2 - \frac{\nu}{A}\right) e^{-2At}\right)}_{L^2 - \frac{\nu}{A}} \underbrace{\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{U_0}{L} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_2}{L}\right)^2\right]\right]}_{\Omega} \\ &= \left(1 - \frac{\lambda_2^2}{L^2}\right) \left(A - \frac{\nu}{L^2}\right) \Omega, \end{aligned}$$

$$\text{また } \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_2} = -\frac{\lambda_2}{L^2} \Omega \quad (10.37)$$

$$A \frac{\partial}{\partial \lambda_2} (\lambda_2 \Omega) = A \left(\Omega + \lambda_2 \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_2}\right) = A \left(1 - \frac{\lambda_2^2}{L^2}\right) \Omega,$$

$$\nu \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda_2^2} = -\nu \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \left(\frac{\lambda_2}{L^2} \Omega\right) = -\frac{\nu}{L^2} \left\{ \Omega + \lambda_2 \left(-\frac{\lambda_2}{L^2} \Omega\right) \right\} = -\frac{\nu}{L^2} \left(1 - \frac{\lambda_2^2}{L^2}\right) \Omega$$

なので式(10.36)は満たされている。

式(10.37)は Burgers 渦層と呼ばれる、 λ_2 方向の厚さ $L(t)$ の帯状の高渦度領域を持ち、厚さは指数関数的に定常厚さ

$$L(\infty) = \sqrt{\frac{\nu}{A}} \quad (10.41)$$

に漸近する。この渦層の誘導流速場は x_1 方向を向いており、

$$(0, 0, \Omega) = \nabla \times (U, 0, 0) = (0, 0, -\partial_2 U),$$

$$\therefore U(\lambda_2, t) = -\int_0^{\lambda_2} \Omega(\lambda_2', t) d\lambda_2' = -U_0 \operatorname{erf}\left(\frac{\lambda_2}{L(t)}\right) \quad (10.39)$$

$$\operatorname{erf}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\lambda} \exp\left[-\frac{1}{2} s^2\right] ds \quad \text{： 誤差関数} \quad (10.40)$$

となる。ここで $\operatorname{erf}(\pm\infty) = \pm 1$ となる。

$U_0 = \frac{1}{2} \{U(-\infty) - U(\infty)\}$ であり、他方、前頁の x_1 方向に単位長 L を持つ x_2 方向に無限に伸びる矩形に閉じた循環は $\Gamma = U(-\infty) - U(\infty) = 2U_0$ となる。よって、 U_0 は渦層の強さ (Γ) と言える。また定常厚さ(10.41)に対する渦度分布

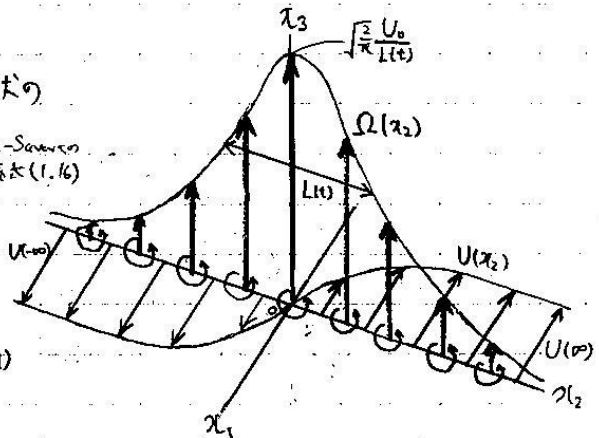
$$\Omega_b(\lambda_2) = U_0 \sqrt{\frac{2A}{\pi\nu}} \exp\left[-\frac{A\lambda_2^2}{2\nu}\right] \quad (10.42)$$

は $U_0 = \Gamma/2$ を代入して、定常分布(9.5)に一致する。よって $\Omega(\lambda_2, t \rightarrow \infty)$ であることが期待されるように

$$\Omega_b(\lambda_2) = \Gamma \sqrt{\frac{A}{2\nu}} \exp\left[-\frac{A\lambda_2^2}{2\nu}\right]$$

に一致する。よって $\Omega(\lambda_2, t \rightarrow \infty)$ であることが期待されるように

上式(10.37)の解であることは、既に確かめた通りである。



第10章 渦が学

10.1 渦構造の形成

トルクが働かなければ、渦度は流体内で生じない (Lagrangeの渦定理)。

● 境界面での摩擦カによるトルク → 渦度発生

→ { 粘性拡散
境界層剥離 } で後述へ

● 流速の異なる流線の合流 → 渦度

渦層や渦管の形成は、渦度強度が小さい間は、外部流線による輸送効果で定性的に説明できる。

例えば、定常なポテンシャル流 $\vec{u}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x})$

($\nabla \times \vec{u} = 0$) として、定め点流 [原点が定め点]

$$\vec{u} = (A_1 x_1, A_2 x_2, A_3 x_3),$$

$$[\nabla \cdot \vec{u}] = A_1 + A_2 + A_3 = 0$$

の中の弱い渦度場 $\omega(\mathbf{x}, t)$ の時間発展を考える。

[この \vec{u} は渦度場自体が誘導する速度も含まず、これを速度 \vec{u} に用いて] 完全流体の渦度方程式 (1.39):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \omega = (\omega \cdot \nabla) \vec{u} \quad \text{は近似的に}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \omega = (\omega \cdot \nabla) \vec{u} \quad (10.1)$$

となる。輸送 \vec{u} の空間変化の緩慢な寄与

解は

$$\omega_\alpha(x_1, x_2, x_3, t) = e^{A_1 t} \omega_{\alpha 1}(x_1 e^{-A_1 t}, x_2 e^{-A_2 t}, x_3 e^{-A_3 t}) \quad (10.2)$$

である ($\omega_{\alpha 1}$ は初期値 $\omega(\mathbf{x}, t=0)$ の第 α 成分)、これは

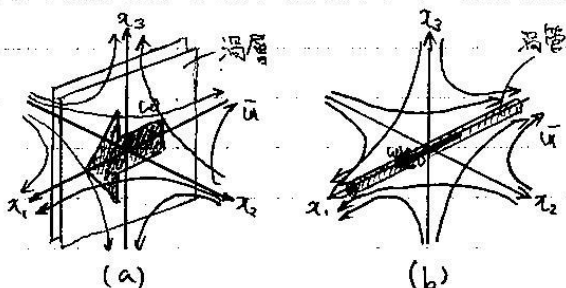
● 2伸張1収縮流 ($A_1 > A_2 > 0 > A_3$) の場合

$x_2 = 0$ 面に集中する渦面が形成される (F図(a))

● 1伸張2収縮流 ($A_1 > 0 > A_2 > A_3$) の場合

x_1 軸に集中する渦管が形成される (F図(b))

ことを意味する。



(教科書 p. 243 の図 (10.2))

10.1 について

■ 解 (10.2) について

これは初期条件 $\omega_\alpha(\mathbf{x}, t=0) = \omega_{\alpha 1}(\mathbf{x})$ を満たしている。

また、定め点流 $\vec{u}_\alpha = A_\alpha x_\alpha$ に対して式 (10.1) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial t} + A_\alpha x_\alpha \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_\alpha} &= \omega_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} A_\alpha x_\alpha \\ &= \omega_\alpha A_\alpha \quad (10.1)' \quad \text{となる。} \end{aligned}$$

ただし添字 α については和をとるのに対し、ギリシヤ文字 α については和をとらない。 $X_\alpha \equiv x_\alpha e^{-A_\alpha t}$ と書く

解 (10.2) に対して

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial t} &= A_\alpha e^{A_\alpha t} \omega_{\alpha 1} + e^{A_\alpha t} \omega_{\alpha 1} (-A_\alpha) X_\alpha \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \omega_{\alpha 1} \\ &= A_\alpha \omega_\alpha - A_\alpha x_\alpha \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_\alpha} \end{aligned}$$

$$(\because e^{A_\alpha t} \omega_{\alpha 1} = \omega_\alpha, X_\alpha \frac{\partial}{\partial X_\alpha} = x_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha})$$

なので、これは上式 (10.1)' を満たしている。

■ 図 10.2 の解釈について

渦度成分は大きさが $|\omega_\alpha| \sim e^{A_\alpha t}$ のように変化するので、

$A_1 > A_2 > 0 > A_3$, $A_1 > 0 > A_2 > A_3$ のいずれの場合も

$t \rightarrow \infty$ で渦度は x_α 方向を向く。

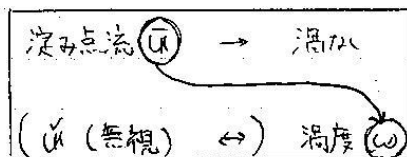
また初期に $|\omega_\alpha| \rightarrow \infty$ でゼロになる渦度分布を

考えれば、 $A_\beta < 0$ となる x_β 方向については、渦度 ω_α は

“大きな” 値 $x_\beta e^{-A_\beta t}$ で評価されるので、 ω_α の分布は

x_β 方向に素早く減衰する傾向を持つ、 $A_2 > 0$ となる

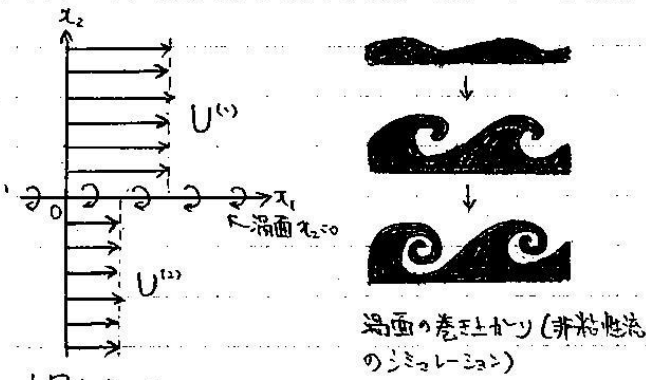
x_2 方向に拡がることを考えられる。



与えられた場 \vec{u} の下での ω の時間発展

10.2 ケルビン-ヘルムホルツ不安定性

速度の不連続面も考え、層状の渦が不安定性で巻き上がり、管状渦に変形するメカニズムを考察する。



上図において

領域 $x_2 \geq 0$ を添字 $i=1, 2$ で表し、

$$\begin{cases} \text{流速 } u_i^{(1)} = U^{(1)} + \tilde{u}_i^{(1)}, & u_i^{(2)} = \tilde{u}_i^{(2)} \\ \text{圧力 } p^{(1)} = p_0 + \tilde{p}^{(1)} & (p_0 \text{ は全領域で一様}) \\ \text{渦面の形 } x_2 = \eta(x_1, t) \end{cases}$$

の擾乱の Fourier 成分

$$\begin{cases} \tilde{u}_1^{(1)} = \text{Real} [\tilde{u}_1^{(1)} e^{i(\alpha x_1 - \omega t)}] \\ \tilde{u}_2^{(1)} = \text{Real} [\tilde{u}_2^{(1)} e^{i(\alpha x_1 - \omega t)}] \\ \tilde{p}^{(1)} = \text{Real} [\tilde{p}^{(1)} e^{i(\alpha x_1 - \omega t)}] \\ \eta = \text{Real} [\tilde{\eta} e^{i(\alpha x_1 - \omega t)}] \end{cases}$$

を (特に $\omega = \omega_r + i\omega_i$ と波数 α の分散関係も)、線形化した Euler 方程式・連続方程式 [2.2節]

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}_1^{(1)}}{\partial t} + U^{(1)} \frac{\partial \tilde{u}_1^{(1)}}{\partial x_1} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}^{(1)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \tilde{u}_2^{(1)}}{\partial t} + U^{(1)} \frac{\partial \tilde{u}_2^{(1)}}{\partial x_1} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}^{(1)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \tilde{u}_1^{(2)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{u}_2^{(2)}}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

と境界条件 (同じ近似の下で)

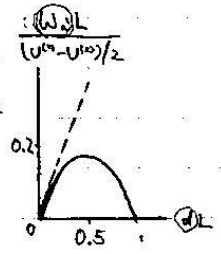
$$\begin{cases} \tilde{u}_1^{(1)}, \tilde{u}_2^{(1)}, \tilde{p}^{(1)} \rightarrow 0 \quad (|x_1| \rightarrow \infty \text{ に対し}) \\ \tilde{u}_2^{(1)} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + U^{(1)} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \quad (x_2 = 0^+) \\ \tilde{p}^{(1)} = \tilde{p}^{(2)} \quad (x_2 = 0^+) \end{cases}$$

から求まる。 $\omega_i > 0$ となる波数 α があれば、そのような α に対して擾乱は $[e^{i\omega_i t}]$ のように増幅されて不安定である。

結果として特に分散関係を記すと

$\omega = \frac{1}{2}\alpha \{U^{(1)} + U^{(2)} \pm i(U^{(1)} - U^{(2)})\}$ であり、常に $\omega_i = \frac{1}{2}\alpha |U^{(1)} - U^{(2)}| > 0$ の擾乱が存在することになる (Kelvin-Helmholtz 不安定性)。そのような擾乱は上下の流速の平均を位相速度 $\omega_r/\alpha = (U^{(1)} + U^{(2)})/2$ として伝播する。

(参考) ω_i が α に比例して増大するのは厚さ無限小の渦面 $x_2=0$ を考えているからであり、渦層に上程度の厚みを持たせて考えたときの ω_i と α の関係は右図 (実線) のようになる。



渦面の不安定性は次のように簡単な考察から理解できる。微小振幅 $a \ll 2\pi/\alpha$ の正弦波

$$x_2 = a \sin \alpha x_1$$

を考える

- x_2 軸に関する流れの対称性から、境界面は x_2 軸に沿って平均速度 $\frac{1}{2}(U^{(1)} + U^{(2)})$ で流れねばならず、これを境界から見た両側の流速は $\pm \frac{1}{2}(U^{(1)} - U^{(2)})$ であり、[で同大逆向きという対称性を持つ]
- 波面の山・谷での流速の曲率半径は $1/\alpha a$ となる [境界面上の流体粒子は境界面上に留まるから (それが境界条件 (10.8), (10.9) の意味である)、境界線は流線である]

境界上の流体粒子は向心方向の加速度

$$\frac{[(U^{(1)} - U^{(2)})/2]^2}{1/\alpha a^2} = \left\{ \frac{1}{2}(U^{(1)} - U^{(2)})\alpha \right\}^2 a$$

を持つ。ところが境界面の両側に圧力差はないから流体粒子の加速度はゼロでなければならず、そのためには振幅が逆向きの加速度 $\frac{d^2 a}{dt^2} = \left\{ \frac{1}{2}(U^{(1)} - U^{(2)})\alpha \right\}^2 a$

を持ち、 $a \propto \exp\left[\frac{1}{2}|U^{(1)} - U^{(2)}|\alpha t\right]$

に従って増幅すれば良い。これは上で得た結果と同じである。

10.21について

■ 速度の不連続面について

一様な圧力の下での不連続な速度分布

$$u = \begin{cases} U^{(1)} \hat{x}_1 & (x_2 > 0) \\ U^{(2)} \hat{x}_1 & (x_2 < 0) \end{cases} \quad \text{が、安定性はともかく}$$

実現可能な解であることは、それ自体で面白い。
合流した川の水は、連続体仮定の下では下流でも混ざらない(泥などの物質が拡散しない混合していくことは考えられるけれど)。

■ 境界条件 (10.8), (10.9) の復習

式(10.8): $x_2 = \eta(x_1, t)$ の左辺 x_2 は流体粒子の座標である、 η は境界面上の流体粒子が常に面上にある、境界面を構成し続けることを意味する。また

$x_2(t)$ の時間微分は Lagrange 微分の意味であり、流速 $U_2^{(1)}$ になることに注意して式(10.9):

$$U_2^{(1)} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + U_1^{(1)} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \quad \text{を得る。}$$

■ 攪拌の Fourier 成分 (10.12-15) について

2次元流を考えているので場は x_3 依存性を持たず、また x_1, t 依存性は因子 $e^{\lambda(x_1 - \omega t)}$ が担っている。このため、Fourier 係数 $\tilde{u}_1^{(\lambda)}, \tilde{u}_2^{(\lambda)}, \tilde{p}^{(\lambda)}, \tilde{\eta}$ は x_2 の関数となることに注意する。

■ Fourier 係数の解 (10.23-28) について

まず流速の式 (10.23), (10.24), (10.26), (10.27) はいずれも左辺を $1/\rho$ 倍に訂正しなければならぬ。(このときはじめて次元の正しい式になる。) さて、

$$\begin{cases} -\lambda(\omega - \alpha U^{(1)}) \tilde{u}_1^{(\lambda)} = -\frac{\lambda \alpha}{\rho} \tilde{p}^{(\lambda)} & (10.16) \\ -\lambda(\omega - \alpha U^{(1)}) \tilde{u}_2^{(\lambda)} = -\frac{\lambda}{\rho} \frac{d\tilde{p}^{(\lambda)}}{dx_2} & (10.17) \\ \lambda \alpha \tilde{u}_1^{(\lambda)} + \frac{d\tilde{u}_2^{(\lambda)}}{dx_2} = 0 & (10.18) \end{cases}$$

を境界条件

$$\begin{cases} \tilde{u}_1^{(\lambda)}, \tilde{u}_2^{(\lambda)}, \tilde{p}^{(\lambda)} \rightarrow 0 & (|x_1| \rightarrow \infty) & (10.19) \\ \tilde{p}^{(\lambda)} = \tilde{p}^{(\lambda)} & (x_2 = 0) & (10.22) \end{cases}$$

の下で解いてこれを導く。以下では $x_2 > 0$ ($\lambda = 1$)

1: 対応式 (10.23-25) を導く ($\lambda = 2$ に対応式 (10.26-28) も同様に導く)。

式(10.16)を式(10.17)に代入すると

$$\tilde{u}_2^{(\lambda)} = \frac{\omega - \alpha U^{(1)}}{\lambda \alpha} \frac{d\tilde{u}_1^{(\lambda)}}{dx_2} \quad \dots (*) \quad \text{となる。}$$

これを式(10.18)に代入すると

$$\frac{d^2 \tilde{u}_1^{(\lambda)}}{dx_2^2} = \alpha^2 \tilde{u}_1^{(\lambda)} \quad \text{であり、境界条件 (10.19) を考慮して解は } \tilde{u}_1^{(\lambda)} = C e^{-\alpha x_2} \quad \text{となる} (e^{\alpha x_2} \text{ の項を捨てる)。$$

定数 C は式(10.16)を $x_2 = 0$ において考え、式(10.22)の値も P とおいて

$$-\lambda(\omega - \alpha U^{(1)}) C = -\frac{\lambda \alpha}{\rho} P, \quad \therefore C = \frac{\alpha}{\omega - \alpha U^{(1)}} \frac{P}{\rho}$$

と定まる。以上の式(10.23):

$$\tilde{u}_1^{(\lambda)} = \frac{\alpha}{\omega - \alpha U^{(1)}} \frac{P}{\rho} e^{-\alpha x_2} \quad \text{を得る。次にこれを}$$

式(10.16), 上式(*) に代入して

$$\tilde{u}_2^{(\lambda)} = \frac{\lambda \alpha}{\omega - \alpha U^{(1)}} \frac{P}{\rho} e^{-\alpha x_2} \quad (10.24), \quad \tilde{p}^{(\lambda)} = P e^{-\alpha x_2} \quad (10.25)$$

を得る。

■ 「曲率半径は $1/\alpha^2$ 」 (p. 248, 2.10) について

p. 248, 脚注3の曲率半径の公式 $(1+f'^2)^{3/2}/f''$ を $f(x) = \alpha x^2$ に適用し、 $\alpha x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ で評価して

$$\frac{(1+(\alpha x)^2 \cos^2 \alpha x)^{3/2}}{-\alpha \alpha^2 \sin^2 \alpha x} \bigg|_{\alpha x = \frac{\pi}{2} + n\pi} = -\frac{1}{\alpha^2}$$

10.3 バーガス渦層の安定性

平均流として定常点流 $(0, -Ax_2, Ax_3)$ とこれによって実現される Burgers 渦層の誘導する速度場 $U(x_2, t) = -U_0 \operatorname{erf}(x_2/L(t))$ を考え [詳しくは 7-1 の 9.3 節の補足を参照], これら下での攪乱速度 $u_1(x_2, x_3, t), u_2(x_2, x_3, t)$ および圧力 $p(x_2, x_3, t)$ を調べる. 2次元の攪乱速度も仮定している (非圧縮性の下で) 攪乱速度を導く流関数を導入する. その1つのモード

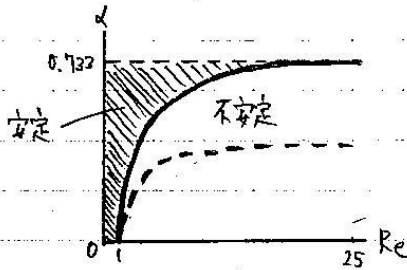
$$\Psi(x_2, x_3, t) = \bar{\Psi}(x_2) e^{i(x_3 - ct)}, \quad c = c_r + i\alpha \quad (\alpha: \text{複素固有相速度})$$

に着目する. このモードの増幅率は αc_i である [(絶対値) $\sim e^{\alpha c_i t}$]. 数値シミュレーションの結果, 各波数 k での Reynolds 数 Re に対する増幅率 αc_i は下図のようになる (斜線部分では増幅率は負, 破線は各 Re に対して最大増幅率を与える). ここでは Reynolds 数を

$$Re = \frac{U_0}{\sqrt{A\nu}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{Re_B(t)}{A} \approx 1.25 \frac{Re_B(t)}{A}$$

で定義しており, これは渦層と収縮流の強さ

の比 $Re_B(t)/A$ を表すので, 下図の結果は渦層が収縮流より強くなることと不安定になることを表している.



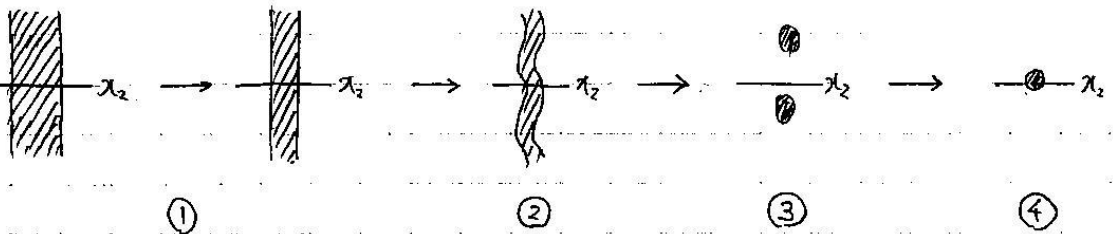
数値シミュレーションでは比較的大きな Reynolds 数に対し

① Burgers 渦層の定常渦層への移行 (Burgers 渦層も攪乱と同じように成長するが, 攪乱の成長はまた見えない)

→ ② 攪乱が成長し, 渦領域は波打つ → ③ 2つの孤立した高渦度領域に局在化

→ ④ 1つの高渦度領域に融合 (最終の定常状態)

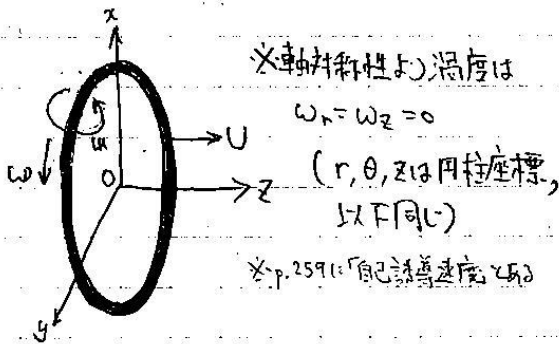
という層状渦から管状渦への遷移が観察される (下図, 斜線は高渦度領域).



10.4 細い渦管の運動

前節で見たように渦層は不安定で巻き上がり、渦管が形成される。そこで本節では細い渦管の運動を調べる。渦管の内形輪と考へ、流体は非粘性とし、渦管内の渦度分布は円形輪の中心軸(z軸)のまわりに対称であり、渦管外部は渦なしとする。


ここで教科書の読みの議論に移る前に、定性的な考察も行っておく。非粘性の仮定の下では渦輪は常に同じ流体要素から構成されることになるので、渦輪は自らの作る速度場によって流体要素とともにz方向の下流へ流れていく(下図)。この渦輪の移動速度Uを求めるのが本節の1つの目標である。

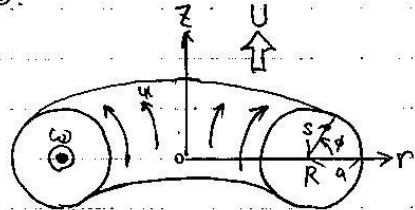


さらに考察を続けよう。渦輪が常に同じ流体要素から成るならば、渦輪の表面の流体粒子に於いて渦輪との相対速度は、表面に垂直な成分を持たない。言い換えると渦輪とともに動く座標系では流線は渦管の表面に沿っている。実際には教科書で渦輪の速度Uを求めるのに用いられている条件であり、その根拠はこのような事情に依ると考えられる。

さて、教科書の議論に戻す。渦度方程式によれば渦度は $\omega_\theta = cr$ のために円柱座標 r に比例する流線が可能なこの場合の[移動する渦輪の位置で]。そこでこの渦管に対して、円形輪の半径を R とし、断面を半径 a の円のまま形を変えないとして仮定して細い渦管の近似 $a \ll R$ の下で、軸対称流に対する Stokes の流線関数と Biot-Savart の関係式から求める

$$\Psi(s, \phi) \approx -\frac{\Gamma R}{2\pi} \left\{ \log \frac{8R}{a} - \frac{3}{2} - \frac{s^2}{2a^2} + \frac{s \cos \phi}{2R} \left(\log \frac{8R}{a} + 1 - \frac{5s^2}{4a^2} \right) \right\} \quad (10.67)$$

$\Gamma \equiv \pi a^2 cR$: 渦管の強さ  $\omega = cR$ となる。ここに s, ϕ は下図の渦管断面に導入した極座標である。



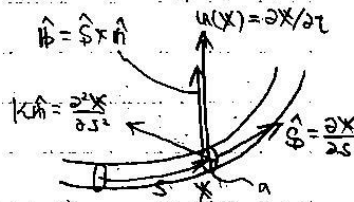
渦管とともに動く座標系で流線関数は $\Psi = \Psi + \frac{1}{2} \omega r^2$ であり、渦管の表面 $s=a$ が流線 ($\Psi = \text{const.}$) となることから

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left(\log \frac{8R}{a} - \frac{1}{4} \right) \quad (10.70) \quad \text{が見出される。}$$

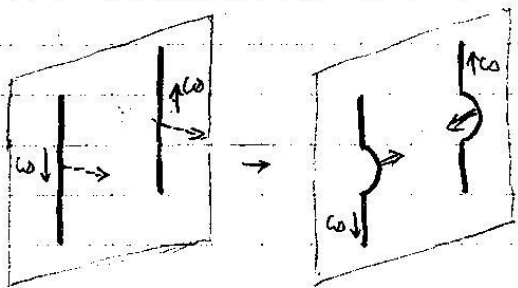
この結果は強さ Γ を持つ任意の形の細い渦管上の位置 X における渦管の移動速度の近似式

$$u(X) = \frac{\Gamma K}{4\pi} \log \frac{1}{ka} \hat{b} \quad (10.74)$$

へ一般化した。 K, a はそれぞれ位置 X における渦管の曲率と断面の半径であり、 \hat{b} は渦管の接線方向の単位ベクトルである(下図)。



2つの渦管の反平行近接(下図)。



反平行な渦管は互いに相対的位置に誘導する速度(→)により曲げられ、曲率を持つことにより自己誘導速度(⇒)で互いに近づく。

10.4について

「渦管の円形輪」(p.255)について

渦管の強さは渦管のどの断面についても等しいから、渦管は途切れたことがせず、流れの境界から境界まで伸びているが、自分自身で閉じて渦輪を作る。

「流れの軸対称性より $u_\theta = \omega_r = \omega_z = 0$ 」(p.255)について

円柱座標系における渦度の表式(A.8-10):

$$\omega_r = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \quad \omega_\theta = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r},$$

$$\omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \quad \text{において } u_\theta = 0, \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 0$$

とすることから理解される。なお筆者としては u_θ と ω_r, ω_z がともにゼロになる場合であっても、このように次元の異なる量を等号で結ぶことは避けて $u_\theta = 0, \omega_r = \omega_z = 0$ と書きた。

渦度方程式(10.56)について

また軸対称流に対する Stokes の流関数 Ψ を定義する式(10.54)は一般とは符号が違っており、

$$u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad u_z = +\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad \text{--- ②}$$

と符号を改めると、式(10.56)は

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \omega_\theta}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\omega_\theta}{r} \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\omega_\theta}{r} \right) \\ &= \frac{\partial \omega_\theta}{\partial t} - \left(u_z \frac{\partial}{\partial z} + u_r \frac{\partial}{\partial r} \right) \omega_\theta + \frac{u_r \omega_\theta}{r} \quad \text{--- ①} \end{aligned}$$

を意味することに。このように修正してはじめて、これは非粘性流体 ($\nu=0$) に対する渦度方程式(1.31):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad \text{--- ③} \quad (\text{ただし } \mathbf{f} = 0)$$

に一致することを次のように示す。

円柱座標系 (r, θ, z) では

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \text{--- ④}$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = u_r \frac{\partial}{\partial r} + u_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad \omega \cdot \nabla = \frac{\omega_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \text{--- ⑤}$$

ここで $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega$ や $(\omega \cdot \nabla) \mathbf{u}$ の θ 成分を計算すると、後者は ω, \mathbf{u} の基底ベクトルにも作用するので、単系に θ 成分を $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega_\theta, (\omega \cdot \nabla) u_\theta$ と (一般には) できないことに注意。今の場合

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = \left(u_r \frac{\partial}{\partial r} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (\omega_\theta \hat{\theta})$$

$$= \left\{ \left(u_r \frac{\partial}{\partial r} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \omega_\theta \right\} \hat{\theta}$$

$$(\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} = \left(\frac{\omega_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (u_r \hat{r} + u_z \hat{z})$$

$$= \frac{\omega_\theta}{r} u_r \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \frac{\omega_\theta}{r} u_r \hat{\theta} \quad \text{--- ⑥}$$

渦度方程式②の θ 成分は上式⑥を与える。

なお、円柱座標を用いた渦度方程式(A.6)も参照のこと。

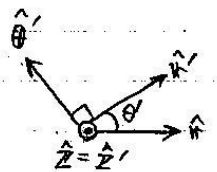
流れ関数(10.58)について

流れの軸対称性より $\theta=0$ の面内の観測点

$$\mathbf{r} = r \hat{r} + z \hat{z}, \quad \hat{r} = (1, 0, 0) \quad \text{(2D座標)}$$

を考えれば十分である。

単位ベクトルの関係は右図のよう



であり、

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= (c r' \hat{\theta}') \times \{ r \hat{r} - r' \hat{r}' + (z - z') \hat{z} \} \\ &= c r' \{ (r' - r \cos \theta') \hat{z} + (z - z') \hat{r}' \} \quad \text{--- ⑦} \end{aligned}$$

Biot-Savart の関係式(1.16)は

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, z) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{c r' \{ (r' - r \cos \theta') \hat{z} + (z - z') \hat{r}' \}}{\{ r'^2 + r^2 - 2 r r' \cos \theta' + (z - z')^2 \}^{3/2}} r' dr' d\theta' dz'$$

を与える。上式⑦の修正の下で流れ関数はこれから

$$\Psi(r, z) = \Psi(r_0, z_0) - \int_{z_0}^z r' u_r(r_0, z') dz' + \int_{r_0}^r r' u_z(r', z) dr'$$

と求まる。逆に流れ関数式(10.58)から符号を除いて

$$\Psi(r, z) = \frac{c r}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' \int_0^{z_0} dz' \int_{r_0}^r \frac{r' \cos \theta'}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2 r r' \cos \theta' + (z - z')^2}} r' dr'$$

上式⑧から正しい速度場 \mathbf{u} が得られる。

■ θ' についての積分を実行し、式(10.59)について

θ' に関する積分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta' + (z-z')^2}} d\theta'$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta'}{\sqrt{(r+r')^2 + (z-z')^2 - 2rr'(1+\cos \theta')}} d\theta'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(r+r')^2 + (z-z')^2}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta'}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \frac{\theta'}{2}}} d\theta'$$

$$k^2 \equiv \frac{4rr'}{(r+r')^2 + (z-z')^2} \quad \text{--- (10.60)} \quad \text{を取出して考える。}$$

$$\frac{\theta'}{2} = \frac{\pi}{2} - \Theta, \quad \therefore \Theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta'}{2}, \quad d\theta' = -2d\Theta$$

と変数変換し、また上式最右の係数を

$$\frac{1}{\sqrt{(r+r')^2 + (z-z')^2}} = \frac{k}{2\sqrt{rr'}} \quad \text{と書き換えて}$$

$$I = -\frac{k}{\sqrt{rr'}} \int_{\pi/2}^{\pi/2} \frac{-\cos 2\Theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \Theta}} d\Theta$$

$$= \frac{2k}{\sqrt{rr'}} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\Theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \Theta}} d\Theta \quad \text{となる。}$$

$$\therefore \cos 2\Theta = 1 - 2\sin^2 \Theta$$

$$= \frac{2}{k^2} (1 - k^2 \sin^2 \Theta) - \left(\frac{2}{k^2} - 1\right)$$

を用いて

$$I = \frac{2k}{\sqrt{rr'}} \left\{ \left(\frac{2}{k^2} - 1\right) \int_0^{\pi/2} \frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \Theta}} - \frac{2}{k^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \Theta}}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \Theta}} d\Theta \right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{rr'}} \left(\frac{2-k^2}{k} K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right) \quad \text{を得る。}$$

また $0 \leq k < 1$ に注意して

第1種完全楕円積分 $K(k) = \int_0^{\pi/2} (1-k^2 \sin^2 \Theta)^{-1/2} d\Theta$,

第2種完全楕円積分 $E(k) = \int_0^{\pi/2} (1-k^2 \sin^2 \Theta)^{1/2} d\Theta$

を導入し、

最後に式(10.58)の分子を代入し、(9)

$$\Psi(r, z) = \frac{c}{4\pi} \int_0^a dr' dz' r'^2 I \quad \text{に代入し、式(10.59)}$$

(分子を代入した(9))

$$\Psi(r, z) = \frac{c}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \sqrt{rr'} \left(\frac{2-k^2}{k} K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right) r' dr' dz'$$

を得る。

■ 「母数 k は 1 に近く」 (p. 257) について

ここでは仮定により渦度の位置が渦管内 $s' \leq a$ にあつたのでなく、速度場を考慮する点も $s \leq a$ にとっていることなる。表面 $s=a$ での流速に興味があるので、 $s \leq a$ を考えれば十分である。実際、このとき $k'^2 \equiv 1 - k^2 = \frac{(r-r')^2 + (z-z')^2}{(r+r')^2 + (z-z')^2}$ (式(10.60)) は $O(a^2/R^2)$ 程度に小さく、具体的に

$$k'^2 = \frac{(s \cos \phi - s' \cos \phi')^2 + (s \sin \phi - s' \sin \phi')^2}{(2R + s \cos \phi + s' \cos \phi')^2 + (s \sin \phi - s' \sin \phi')^2}$$

$$= \frac{s^2 + s'^2 - 2ss' \cos(\phi - \phi')}{4R^2 + 4R(s \cos \phi + s' \cos \phi') + O(a^2)} \quad \text{--- (式(10.63))}$$

■ 式(10.66)について

対数関数(10.58), (10.59)と同じ符号の修正の後、
 $dr' dz' = s' ds' d\phi'$, $2-k^2 = 1+k'^2$, $\frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} k'^2$
 $\sqrt{rr'} \approx \sqrt{R^2 + R(s \cos \phi + s' \cos \phi')} \approx R \left(1 + \frac{1}{2} \frac{s \cos \phi + s' \cos \phi'}{R} \right)$
 $\sqrt{rr'} r' = \sqrt{rr'} (R + s' \cos \phi') \approx R^2 \left(1 + \frac{s \cos \phi + 3s' \cos \phi'}{2R} \right)$
 $\frac{2-k^2}{k} \approx 1 + \frac{3}{2} k'^2$, $\frac{2}{k} \approx 2 + k'^2$
 $\log \frac{4}{k'} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{4}{k'^2} \right) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{4^3 R^2}{s^2 + s'^2 - 2ss' \cos(\phi - \phi')} \right)$
 $\approx \log \left(\frac{8R}{s^2 + s'^2 - 2ss' \cos(\phi - \phi')} \right)$ となる。

■ 対数関数(10.68)の付加的な項 $\frac{1}{2} U r^2$ について

上式(9)のように符号を改めると同時に、 $-\frac{1}{2} U r^2$ となる。

∴ 付加的な速度 $\delta U_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{2} U r^2 \right) = 0$,

$\delta U_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{2} U r^2 \right) = -U$.

■ 渦管の移動速度(10.70)について

表面 $s=0$ での対数関数 $\Psi(a, \phi) = \frac{rR}{2\pi} \log \frac{8R}{a} - 2 + \frac{a \cos \phi}{2R} \left(\log \frac{8R}{a} - \frac{1}{2} \right) \pm \frac{1}{2} U r^2 \left(1 - \frac{3a}{2R} \cos \phi \right)$ の位置 ϕ は、位置に定数となる条件として、 $\cos \phi$ の係数がゼロになることを要求する。

10.5 2次元直線渦列

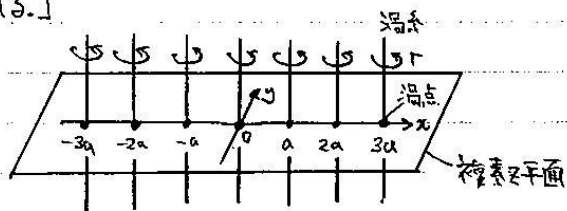
柱状物体の背後の流みや2次元自由剪断流にはしばしば現れる直線状の渦管の列を念頭に、互いに平行な多数の直線渦系の作る2次元流を考察する。

循環 Γ を持つ1つの渦系の複素速度とポテンシャルは、渦系の位置を z_0 として、それぞれ

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i(z-z_0)}, \quad \phi = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z-z_0)$$

で与えられる。

下図のように同一の循環 Γ をもつ渦点が等間隔 a で1列に並んでいる場合、配位の対称性から各渦点に他の渦点が誘起する速度は互いに相殺してゼロになることが期待される。[このことは直接の計算によっても確かめられる。]



そこで $(x, y) = (na, 0)$ に位置する n 番目の渦点に微小変位 $a(x_n, y_n)$ を与えて線形安定性解析を行う。[x_n, y_n は無次元化した変位であることに注意する。変位を与えなければ渦点は静止していること、および各渦点には他のすべての渦点の誘起する速度によって流されること]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x_n - iy_n) &= \frac{\Gamma}{2\pi i a^2} \sum_{n \neq m} \frac{1}{n(m+n)} \frac{1}{(m+n)^2} \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi i a^2} \sum_{n \neq m} \frac{x_m - x_n + i(y_m - y_n)}{(m-n)^2}, \end{aligned}$$

(x_n, y_n の1次近似)

$$\begin{cases} \frac{dx_n}{dt} = -\frac{\Gamma}{2\pi a^2} \sum_{n \neq m} \frac{y_m - y_n}{(m-n)^2}, \\ \frac{dy_n}{dt} = -\frac{\Gamma}{2\pi a^2} \sum_{n \neq m} \frac{x_m - x_n}{(m-n)^2} \end{cases} \text{を得る。} \alpha \text{も[無次元]}$$

波数 α で攪乱モト

$$x_n = \text{Real}(\tilde{x} e^{i\alpha n + i\omega t}), \quad y_n = \text{Real}(\tilde{y} e^{i\alpha n + i\omega t})$$

を考えると、これは複素振幅 \tilde{x}, \tilde{y} に対する式

$$\begin{pmatrix} \sigma & \frac{\Gamma a(2\pi - \alpha)}{4\pi a^2} \\ \frac{\Gamma a(2\pi - \alpha)}{4\pi a^2} & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = 0 \quad (10.75)$$

非自明解 $(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq (0, 0)$ が存在する場合、係数行列の行列式はゼロでなければならず

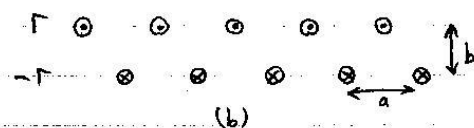
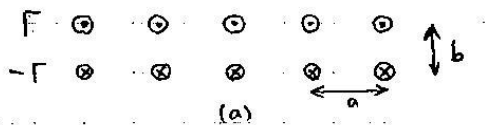
$$\sigma = \pm \frac{\Gamma a(2\pi - \alpha)}{4\pi a^2} \text{ である。このため必ず } \sigma > 0 \text{ の不安定モードが存在することに注意。}$$

反対符号の渦点が2列に並んだ渦列の安定性も同様に解析できる。結果だけ記すと、

- 下図(c)の横隊配位に対して常に不安定
- 下図(b)のジグザグ配位に対して

$$\cosh^2\left(\frac{\pi b}{a}\right) = 2 \quad \left(\frac{b}{a} \approx 0.281\right)$$

のときは(+)安定(Kármán渦列、観測によく合致)、それ以外は不安定である。



10.5 について

■ 渦系の渦度場(10.75): $\omega(x) = \Gamma \delta(x - x_n)$ について、その面積分 $\int \omega ds$ が循環 Γ を考慮することによる。これを Biot-Savart の関係式(1.70)に代入して渦系の複素速度(10.76)を導く説明が目新しい。

■ 流関数(10.81)について

はいくつか無次元化した数学公式を考えよう。

$$\mu z = \mu x \cosh y + i \mu a \alpha \sinh y + i$$

$$|\mu z|^2 = (\mu x \cosh y)^2 + (\mu a \alpha \sinh y)^2$$

$$= \cosh^2 y (1 - \cosh^2 y) + \cosh^2 y (\sinh^2 y - 1)$$

$$= \cosh^2 y - \cos^2 x = \frac{1 + \cosh 2y}{2} - \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (\cosh 2y - \cos 2x) \quad \dots (*) \quad \text{よ}$$

$$\operatorname{Re} [\log(z)] = \log \left\{ \frac{1}{2} (\cosh 2y - \cos 2x) \right\}^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} \log (\cosh 2y - \cos 2x) + \text{const.} \quad \text{なので,}$$

$\Psi = \operatorname{Im} \left[\frac{\Gamma}{2\pi i} \log \left(A i \frac{\pi z}{a} \right) \right]$ は式(10.81)のように計算
 する。

■ 渦列の作る速度 (10.82), (10.83) について
 } または Ψ を微分して代わりの、ここでは造指、複素
 速度 (10.79) を変形して求めてみる。 z には複素数式

$$\cot z = \frac{\cos 2x - i \sinh 2y}{\cosh 2y - \cos 2x} \quad \dots (**)$$

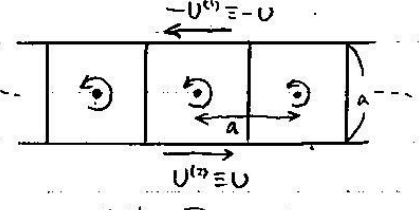
を正確めれば、
 十分である。

$$\cot z = \frac{\cos 2x \cosh y - i \sin 2x \sinh y}{\sinh x \cosh y + i \cosh x \sinh y}$$

$$= \frac{(\cos 2x \cosh y - i \sin 2x \sinh y)(\cosh x \cosh y - i \sinh x \sinh y)}{(\cosh x \cosh y)^2 + (\sinh x \sinh y)^2}$$

における最右辺分母は上式(*)にて計算済みであ
 り、分子について
 実部: $\cos 2x \cosh x (\cosh^2 y - \sinh^2 y) = \frac{1}{2} \cos 2x$
 虚部: $-(\cos^2 x + \sin^2 x) \sinh y \cosh y = -\frac{1}{2} \sinh 2y$
 なので上式(**)は成立している。

なお速度(10.82), (10.83) は配列の対称性が期待される
 ように (p.261), 確かに渦点の位置 $x = na, y = 0$ でゼロになる。
 $y \rightarrow i\infty$ での速度公式(10.84): $u = \mp \frac{\Gamma}{2a}, v = 0$ の様な
 速度になるのは、より直観的には下図の矩形に閉じた循環が
 $\Gamma = -U^{(1)} a + U^{(2)} a = 2U a$ と計算されることから理解
 される*。そしてこの際、渦点の間隔 $a \rightarrow 0$ で密に詰まった
 極限 (ただし Γ/a を有限に保つよう、 $\Gamma \rightarrow 0$) では「速度の不
 連続線 (3次元空間では渦面) となる」(p.262)。



* p.264 脚注 99 置換 $U^{(1)} = -U^{(2)} \rightarrow \Gamma/2a$ (同様である)。

【注意】 2列の渦列に対する結果 (p.264~) が天竺に
 与えられている上、式(10.79-85)は実質的に用いない。
 式(10.94), 式(10.95)もあがきまじりに用いない。

■ 式(10.86) について
 第2の等号は $\varepsilon = (x_m - x_n) + i(y_m - y_n)$ に対する近似
 $\frac{1}{m-n+\varepsilon} \approx \frac{1}{m-n} \left(1 - \frac{\varepsilon}{m-n} \right)$ による。第3の等号
 は和 $\sum_{n \neq m} \frac{1}{m-n}$ が打ち消し合、ゼロになることによる。

■ 無次元の波数 α について
 無次元化した渦列間隔 1 の短い波長
 $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha} < 1$ には意味がなから、 $\alpha = \infty$ 場合も
 [したがって $\alpha = 2\pi$ を] 除外。これは「 α の変域は一般性
 を失う代わりに、 $0 < \alpha < 2\pi$ に限定されてくる」(p.263)。
 $\alpha = \pi$ は「1つおきの渦点から同じよう: 変動がゼロ」
 (p.263) であるため、 α を単位化した波長が $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha} = 2$
 であることから分かる。

■ x, y に対する線形代数方程式 (10.91) について
 例えは $\sum_{n \neq m} \frac{y_m - y_n}{(m-n)^2} = \tilde{y} e^{i\alpha(m+y)} \sum_{n \neq m} \frac{1 - e^{-\alpha(n-m)}}{(m-n)^2}$
 $\sum_{n \neq m} \frac{1 - e^{-\alpha(n-m)}}{(m-n)^2} = \sum_{l \neq 0} \frac{1 - e^{-\alpha l}}{l^2}$
 $= \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1 - e^{-\alpha l}}{l^2} + \frac{1 - e^{-\alpha(-l)}}{(-l)^2} \right)$
 $= 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \alpha l}{l^2} = \frac{1}{2} \alpha (2\pi - \alpha)$ とする。
 p.263 脚注 8 の公式

■ 式(10.94), 式(10.95) について
 $\cosh 2x \mp 1 = (2 \cosh^2 x - 1) \mp 1$
 $= \begin{cases} 2 \sinh^2 x & (-1: \text{対して}) \\ 2 \cosh^2 x & (+1: \text{対して}) \end{cases}$ となる
 $\frac{\sinh 2x}{\cosh 2x \mp 1} = \begin{cases} \coth x & (-1: \text{対して}) \\ \tanh x & (+1: \text{対して}) \end{cases}$ となることに留意。

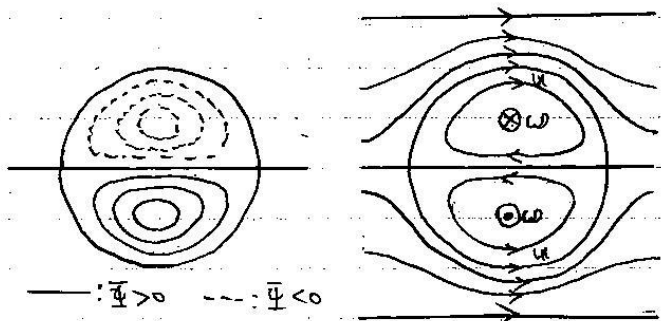
10.6 2次元定常渦分布

2次元の非粘性流 ($\nu=0$) に対する渦度方程式 (1.66):
 $\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\omega, \Psi) = 0$ より定常流 ($\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$) では Jacobian が
 $J(\omega, \Psi) = 0$ となる。渦度 ω と流関数 Ψ は関数関係
 を持つことを思い出そう (1.13節)。

■ $\omega = k^2 \Psi \rightarrow$ Batchelor 渦対

比例関係 $\omega = k^2 \Psi$ を設定すると、式 (1.55): $\Delta \Psi = -\omega$
 は (r, θ) を円柱座標、 J_0 を第1種 Bessel 関数、 C を定数
 として興味ある特解

$\Psi = C J_0(kr) e^{-\theta}$ を持つ。これは J_0 の最初の
 のゼロ点を $r=a$ とおくと ($J_0(ka)=0$)、円 $r=a$ を $\Psi=0$ の流線
 に持ち、円周上の流速は円柱を過ぎる一様流の場合と
 同じく $u_r=0, u_\theta = -2U \sin \theta$ である ($U = \frac{1}{2} C k J_0'(ka)$)。
 円内部の Ψ の等高線は下図のようである。これは流線と
 ありて同時に $\omega = k^2 \Psi$ の渦度の等高線でもあり、解は
 一様流中の渦対分布を表すことになる (Batchelor 渦対)。
 [他方、円柱を過ぎる一様流の複素速度 (1.65): $w = U(1 - \frac{a^2}{z^2})$
 は円内部 $r < a$ にも渦対である。]



■ $\omega = A e^{\beta \Psi} \rightarrow$ Stuart の渦列

指数関数の関係 $\omega = A e^{\beta \Psi}$ を設定すると、式 (1.55):
 $\Delta \Psi = -\omega$ は Stuart によって求められた解

$$\Psi = \frac{a}{2\pi} U \log \left(\cosh \frac{2\pi y}{a} - \beta \cos \frac{2\pi x}{a} \right), \quad 0 \leq \beta < 1$$

を持つ。このとき

$$A = -\frac{2\pi}{a} U (1 - \beta^2), \quad B = -\frac{2\pi}{a} U$$

であり、対応する流速と渦度は

$$u = U \frac{\sinh(2\pi y/a)}{\cosh(2\pi y/a) - \beta \cos(2\pi x/a)},$$

$$v = -U \frac{-\beta \sin(2\pi x/a)}{\cosh(2\pi y/a) - \beta \cos(2\pi x/a)},$$

$$\omega = -\frac{(2\pi/a) U (1 - \beta^2)}{\{\cosh(2\pi y/a) - \beta \cos(2\pi x/a)\}^2} \quad \text{となる。}$$

これは x 方向の周期 a を持ち $y \rightarrow \pm\infty$ で流速が
 $(\pm U, 0)$ となる流れており、

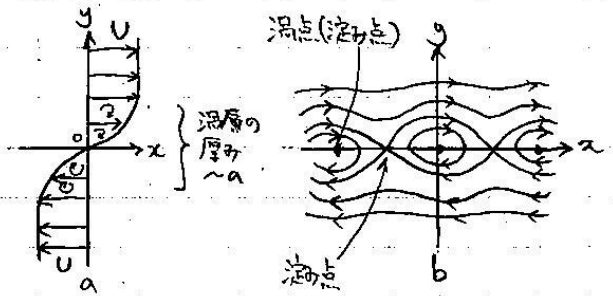
$\beta = 0$ のとき有限厚さの一方向剪断流 (下図 a)

$$u = U \tanh \frac{2\pi y}{a}, \quad v = 0,$$

$\beta \rightarrow 1$ のとき直線渦点列 (下図 b, 流関数 (10.8))

$$\Psi = -\frac{U}{4\pi} \log \left(\cosh \frac{2\pi y}{a} - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) + \text{const.}$$

になる。



[bは単振り子の相図に似ている。]

10.7 スチアート渦列の安定性

攪乱しについて線形化した渦度方程式 (と境界条件)

は、定常解 $\bar{u}, \bar{\omega}$ を前節の Stuart の渦列にてたとき、

そのパラメータ β と攪乱場のもと

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \text{Real} \left[\tilde{u}(x_1, x_2) e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3) + \sigma t} \right] \\ \tilde{\omega} &= \text{Real} \left[\tilde{\omega}(x_1, x_2) e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3) + \sigma t} \right] \end{aligned}$$

[α_3 依存性も考えている] のフロク指数 α_1, α_3 ($t, \tau \in [0, \infty)$)

$< 1, \alpha_3 \geq 0$ ($\alpha = 2\pi, U = 1$ と無次元化している)) を与えて、時間

増幅率 σ の固有値として求める固有値問題となる。なお、

これは非粘性問題なので安定な場合でもせいぜい中立

定であることに注意する。

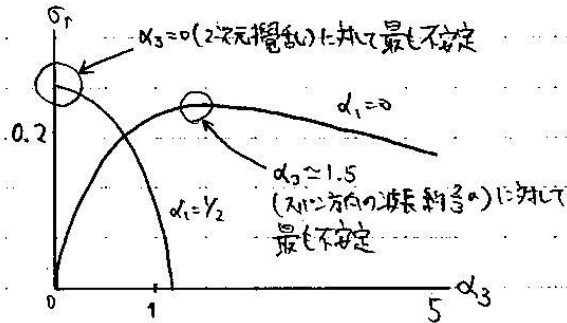
β を実在の混合層の渦度分布に比較的近い値 $\beta = 1/4$

に固定し、

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1/2 & (\text{定常解の2倍の波長の攪乱}) \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

の2軸に対して増幅率 $\sigma_r \equiv \text{Re}(\sigma)$ を α_3 の関数と

して数値的に求めると下図のようになる。



第11章 一様乱流の渦構造

渦層や渦管は乱流運動の中で長時間その個性を保つ。本章では一様乱流における渦構造の実際の姿を紹介おとし、管状渦の背景渦度場との相互作用について述べる。

11.1 一様等方乱流

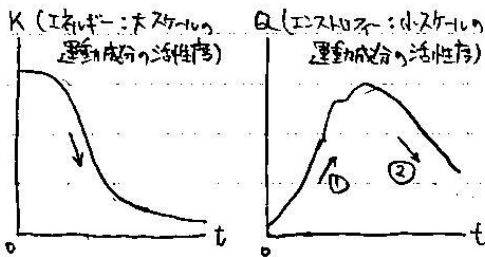
一様等方乱流

- 平均流がなく変動速度の統計的性質が空間の位置にも方向にも依存しない。
- 乱流の基本的なメカニズム(エネルギーの伝達と散逸)を内包し、乱流の基礎的性質の理解と乱流理論の検証に有用な最も単純な流れ。
- 研究の主流は格子背後の流れの測定から数値シミュレーションへ。

数値シミュレーション

- エネルギー入力機構なし
→ 乱流エネルギーの伝達と減衰過程を調べる。
- 外からの人工的なエネルギーの注入
→ 定常乱流、時間平均が意味を持つ。

高村純流の数値シミュレーション結果のひび



- ① 初期の大スケールの運動成分が非線形相互作用によって、より小さなスケールの運動成分へとスケルト的に次々に伝達。
- ② 小スケールの運動が励起されて粘性が効き出し、インストローは減少に転じる。
この時間帯で1次元線エネルギースペクトルはコロモエロフのべき乗則 $E_{11}(k, t) \sim k^{-5/3}$ (5.2節) を示す。

①の時間帯では渦層が、②の時間帯では渦管が卓越している(渦層渦管遷移, 第10章)。

11.1について

本ノートではひびまず、「第II編 乱流の統計力学」の予備知識を必要とする。

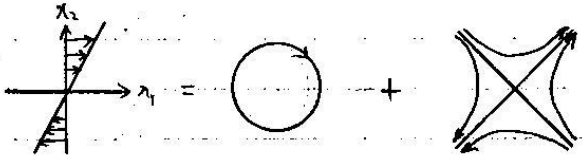
- テイラー-長レイルス数 Re_λ の言及箇所 (p.273, 2.2, p.274下から4行目)
- 式(11.1)の段落
- p.276, 2.11以降も省略した。

11.2 単純剪断乱流

平均流と乱れの相互作用を調べるため、平均流がゼロでなくしれど乱れが一様となり得る場合として、単純剪断流(7.1): $\bar{u} = (\delta x_2, 0, 0)$ を主流とする乱流場を考察する。

主流は一樣回転と伸張収縮流に分解でき:

$$\bar{u} = \left(\frac{1}{2}\delta x_2, -\frac{1}{2}\delta x_2, 0\right) + \left(\frac{1}{2}\delta x_2, \frac{1}{2}\delta x_2, 0\right).$$



主流の渦度 $\bar{\omega} = \nabla \times \bar{u} = (0, 0, -\delta)$ は一樣であり、変動流 u, ω を与えて高渦度領域 [ω の成分で $\omega = \bar{\omega} + \omega'$ の大領域] の時間発展も数値的に調べると、領域が主流によって [伸張方向に] 引き伸ばされ、さらに主流 [の一樣回転成分] によって時計回りに傾く様子が見られた (下図, 影は高渦度領域)。



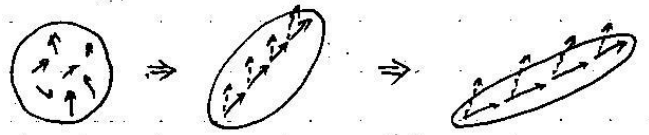
高渦度領域の伸びている方向と渦線の方向は一般には異なっている。これを説明するために、変動流についての2次の項と非線形項を省略した渦度方程式

$$\frac{d\omega}{dt} = (\omega \cdot \nabla) \bar{u} + (\bar{\omega} \cdot \nabla) u'$$

を考察。右辺第2項を除けばこれは式(1.40)で説明した流体の線素ベクトル δl に対する式

$$\frac{d}{dt} \delta l = (\delta l \cdot \nabla) \bar{u}$$

に完全に一致するため、渦度領域 [も流体要素] が引き伸ばされ [δl が引き伸ばす方向も向き], 共に伴って ω も伸び方向を向くはずである。ところが上式の右辺第2項 $(\bar{\omega} \cdot \nabla) u'$ の寄与により, ω は実際には下図の石皮線方向にずれる。

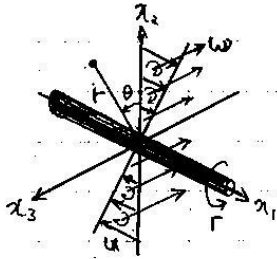


高渦度領域内の渦度ベクトル ω (\rightarrow, \rightarrow).

なお高渦度領域は連続的な渦度の強度分布を有する等値面で切ったものだから、これも渦度ベクトル [ω に関する渦線] が横切ることには何ら問題ない。

11.3 渦線の巻き込み

単糸剪断流 $u = (Sx_2, 0, 0)$ は渦度 $\omega = (0, 0, -S)$ を持つ。 x_1 軸に循環 Γ の直線渦糸 $u_\theta = \Gamma/2\pi r$ ((r, θ) は円柱座標, $x_2 = r \cos \theta$, $x_3 = r \sin \theta$) [これは渦糸の外部 $r > 0$ に渦度を持たない] を置き、これによる渦線がどのように変形されるかを考える。



それには渦糸がない場合の流速 $u_i = Sr \cos \theta$ を初期値として、運動方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2} \frac{\partial u_i}{\partial \theta} \quad \text{を考えれば良い。}$$

ただし [圧力は一様としており、また] 本節では非粘性 ($\nu = 0$) の場合を仮定する。これは

$$u_i(r, \theta, t) = Sr \cos \left(\theta - \frac{\Gamma t}{2\pi r^2} \right) \quad (11.18)$$

という解を持つ。渦度は

$$\omega_r = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \quad \omega_\theta = -\frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (11.15)$$

から計算せよ、

$$\omega_r = -S \sin \left(\theta - \frac{\Gamma t}{2\pi r^2} \right), \quad (11.19)$$

$$\omega_\theta = -S \left\{ \cos \left(\theta - \frac{\Gamma t}{2\pi r^2} \right) - \frac{\Gamma t}{\pi r^2} \sin \left(\theta - \frac{\Gamma t}{2\pi r^2} \right) \right\} \quad (11.20)$$

となる [これは正しい初期値 $\omega_r = -S \sin \theta$, $\omega_\theta = S \cos \theta$ を再現する]。

結果を解釈するために、次のことに注意する。すなわち

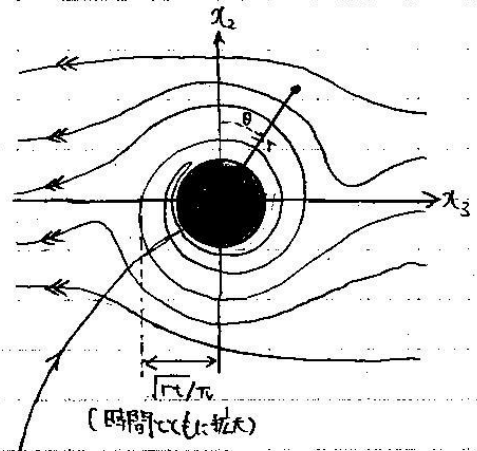
式 (11.15) により $u_i = \text{const.}$ の曲線は渦線となる。

これは次のように理解される。渦線はその上の線要素 $(dr, r d\theta)$ が渦度と平行となる曲線だから、

$$\frac{dr}{\omega_r} = \frac{r d\theta}{\omega_\theta}, \quad \therefore \omega_r r d\theta - \omega_\theta dr = 0. \quad \text{で与えられる。}$$

式 (11.18) のこれは全微分 $du_i = 0$ を意味する (与えられた各時刻 t において)。

$u_i = \text{const.}$ で表される渦線を描画すると下図のようになる。初期に x_3 軸と平行であった渦線は $t > 0$ で $r = 0$ の渦糸のまわりにらせ線に巻き付く。[ここで非粘性流体では渦線は常に同一の流体粒子から構成されることを思い出すと、このような渦線の巻き込みは流体が渦糸に巻き取られることとして理解できる。]



初期に渦糸と交っていた (x_3 軸に一致していた) 渦糸は無限回旋回。

11.4 節 垂直渦度の消滅と渦線の取り込み 省略する

「第12章 非一様乱流の渦構造」を省略する。悪しからず。

内容は以下。

- 12.1 混合層乱流の渦構造
- 12.2 縦渦構造の形成機構
- 12.3 2次元後流の渦構造
- 12.4 壁乱流の渦構造
- 12.5 壁乱流の渦力学

第12章の序文を引用しておく：

乱流中ではさまざまな渦運動が消えたり現れたり、その存在が時間的に間欠的であるばかりでなく、形態も千変万化し多様な振る舞いを示す。しかし、剪断乱流中には、流れの幾何学的拘束に由来する特徴的な構造をもち比較的長時間持続する渦運動が見られることが多い。そして、これらの渦運動は浮遊物質の拡散や混合を盛んにするなど、乱流力学において重要な役割を果たしている。剪断乱流中の代表的な渦構造として、ここでは2次元乱流混合層においてケルビン-ヘルムホルツ不安定性により巻き上がって生成する横渦と、その3次元不安定性から発生する縦渦、2次元後流のカルマン渦列、および壁乱流中の渦構造を取り上げる。