

B. ツヴィーバッハ『初級講座 弦理論《発展編》』

本稿は弦理論の教科書

B. ツヴィーバッハ, 2018, 初級講座 弦理論《発展編》(樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京
を, 要点と途中計算の分離した見通しの良い自己完結的テキストへと再構成し, さらに補足・考察を加えた
ノートである. ただし本稿は教科書の内容をほぼ網羅しているものの, 章末問題をはじめとして内容を多少,
取捨選択してある. さらに本稿には筆者の誤りや勘違いが潜んでいるかもしれないことをあらかじめ断ってお
く. 言うまでもなく, 原著を当てるに越したことはない.

なお本稿の他にも理論物理の各種ノートを以下のページで公開している. (B. ツヴィーバッハ『初級講座 弦
理論《基礎編》』のノートを含む.)

<http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/>

目次

第 15 章 D-ブレーンとゲージ場	4
第 16 章 弦のチャージと電荷	19
第 17 章 閉弦の T 双対性	35
第 18 章 開弦および D-ブレーンの T 双対性	54
第 19 章 電磁場を持つ D-ブレーンと T 双対性	68
第 20 章 Born-Infeld 理論と D-ブレーンの電磁場	79
第 21 章 弦理論と素粒子物理	93
第 22 章 弦の熱力学とブラックホール	127
第 23 章 強い相互作用と AdS/CFT 対応	151
第 24 章 弦の共変な量子化	193
第 25 章 弦の基本的な相互作用と Riemann 面	214
第 26 章 弦のダイアグラムの構造とループ振幅	237
付録 A 教科書全体の要約	254

教科書全体の内容を大まかに把握するため、前書き(《基礎編》に収録)の一部を以下に抜粋する。また本稿には載せていないが、教科書の各章の冒頭には序文が添えられている。その内容を初見で理解することは困難であるが、1つの章を終えるごとに序文を読み返せば、序文もまた各章の簡潔な要約となっていることが分かる。筆者も本稿の付録Aにて、教科書全体のまとめを試みる。

第2版への前書き「本書について」(《基礎編》に収録)から抜粋

本書『初級講座 弦理論』は、特殊相対論、量子力学の基礎、電磁気学、統計物理の入門的な知識さえあれば、誰にでも読むことができる本である。ラグランジアン力学に慣れていればいくらか役に立つが、それは前提として不可欠の知識ではない。

(中略)

本書の多くの部分においては、天下りに受け入れなければならない部分がほとんどないように、題材を自己完結した形で展開してある。ただし第14章、第21章、第22章、第23章では、少数の節において、本書の水準で完全な説明を与えることのできない対象を扱っている。そのような部分では、読者は例外的に、いくらか理に適っていると見なされる事実を額面どおりに受け入れることを要求されるが、それ以外の部分は論理的に展開されており、“完全に”理解できるはずである。難しい題材を扱った少数の節は、上級者向けに書かれているのでは“ない”。

本書は2つの部分から成る。第I部は“基礎編”，第II部は“発展編”である。基礎編は第1章に始まり第14章で終わる。発展編は第15章から始まり第26章で終わる。

(中略)

本書の基礎編の部分は、頂上に弦の量子化を据えた登山道のように特徴づけられる。残りの発展編の部分では上り坂は無くなる。ペースは多少緩やかになり、ここで扱う様々な題材は、基礎編において既に導入してある諸概念を入念に見直す機会を与える。読者は発展編において、基礎編で費やした努力に対する報酬を収穫することになる。

発展編の最初の章である第15章では、D-ブレーンの様々な配置の下での開弦の重要な性質を扱う。オリエンティフォールドに関する考察は章末問題で取り上げることにする。第16章では弦のチャージの概念を導入し、開弦の端点がMaxwell電荷を持つことを示す。これに続く4つの章では、魅惑的なT双対性の概念に関係する話題によって構成してある。第17章と第18章では、それぞれ閉弦と開弦のT双対性の性質を説明する。第19章ではT双対性を主要な道具として利用しながら、電場や磁場を持つD-ブレーンについて調べる。第20章では非線形電磁力学の一般的な枠組みを導入する。弦理論における電磁場は、点電荷の自己エネルギーが有限値をとる非線形電磁気理論であるBorn-Infeld(ボルン-インフェルト)理論に支配されることを示す。

素粒子物理に対する弦理論モデルを第21章において考察する。この章では素粒子の標準模型に含まれる粒子について詳しく説明し、交差するD6-ブレーンに基礎を置いて現実的な弦モデルを構築するひとつのアプローチについて論じる。この章の末尾では、モデュライ安定化の問題と弦理論における真空モデルの景観(ランドスケープ)について言及する。

第22章は弦の熱力学から始まり、それを踏まえてブラックホールエントロピーの問題を扱う。弦理論からSchwarzschildブラックホールのエントロピーを導く試みを示し、さらに超対称性を備えたブラックホー

ルに関するエントロピー導出の成功について見る。弦理論の強い相互作用への応用を第 23 章で扱う。Regge (レッジ) 軌跡とクォーク-反クォークポテンシャルの考察の後で、話題を AdS/CFT 対応へと転じる。この対応関係については AdS 時空の幾何的な性質を強調しながら、いくらか詳しく論じてある。クォーク-グルーオンプラズマに関する節も加えた。

第 24 章では弦の Lorentz 共変な量子化に関する入門的な解説を与えてある。Polyakov (ポリヤコフ) 弦作用も導入した。本書の最後の 2 つの章となる第 25 章と第 26 章では、弦の相互作用を扱っている。我々は弦の相互作用過程を表すダイアグラムが Riemann 面であることを学ぶ。これらの章では、読者に複素変数に馴染んでもらうことを意図しており、数学の色合いが強い。ここでの重要な目的のひとつは、弦理論には赤外発散がないということへの洞察を与えることにある。この事実が、弦理論を量子重力理論の第一候補にしたのである。

本書において私は、学生たちが既に学んでいるであろう概念との関連を強調することを試みた。弦の量子化は、無数の振動子の量子化として記述される。弦のチャージは Maxwell 電流のように可視化される。円における Wilson 巡回指標 (ウィルソンライン) の影響は、Aharonov-Bohm (アハロノフ-ボーム) 効果と比せられる。円環面 (アニュラス) のモデュライは、筒形のキャパシターの静電容量と関係づけられる、等々である。各種の話題の取扱いは概して具体的に行い、形式的な議論は最小限に抑えた。

本書では弦の量子化のために、光錐ゲージを選択した。この量子化のアプローチは、事前にいくらか量子力学を学んでいる学生であれば、細部まで完全に理解できるはずのものである。Lorentz 共変な弦の量子化では、事情は同じでは“ない”。すなわち負のノルムを持つ状態を扱わねばならず、ハミルトニアンはゼロになり、量子力学で馴染みのあるような形の Schrödinger 方程式も存在しない。光錐ゲージによるアプローチは、大抵の物理的な問題を扱うために十分に有用であり、実際に、いくつかの問題については、光錐ゲージを採用することによって、特別に取扱いが簡単になるのである。

第 15 章 D-ブレーンとゲージ場

本章ではまず 15.1 節で Dp -ブレーンと境界条件について説明し、次いで

- 両端を Dp -ブレーン上に持つ開弦 (15.2 節, 図 1 参照)
- 平行な 2 つの Dp -ブレーンの間の開弦 (15.3 節, 図 2 参照)
- 平行な Dp -ブレーンと Dq -ブレーン ($q < p$) の間の開弦 (15.4 節, 図 3 参照)

を調べる ($1 \leq p < 25$).

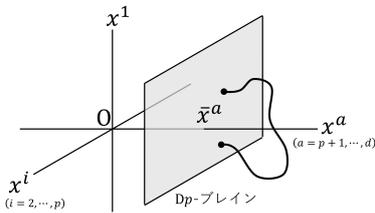


図 1 15.2 節

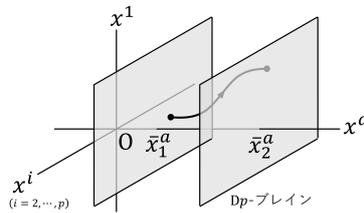


図 2 15.3 節

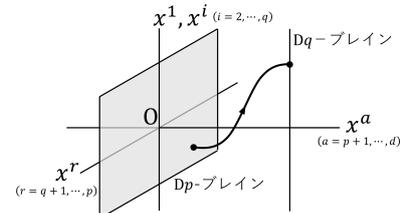


図 3 15.4 節

15.1 Dp -ブレーンと境界条件

- Dp -ブレーンは p 次元の“空間的な”拡がりを持つ物体. $p \leq d = 25$: 空間次元.
- p 次元空間に拡がる対象は p -ブレーンと呼ばれる.
これは Dp -ブレーンとは限らない (D は Dirichlet を意味する).

図 4 のように

$$x^a = \bar{x}^a (= \text{const}), \quad a = p+1, \dots, d$$

で与えられるような, $p < 25$ 次元の単純な“超平面”として拡がる Dp -ブレーンを考えよう. [開弦の両端の座標が全て自由端の境界条件を満たす $p = 25$ の場合は既に見ているので, 除外する.] このとき

- x^0, x^1, \dots, x^p は Dp -ブレーン内の座標
- x^{p+1}, \dots, x^d はそれに垂直な座標

となる. Dp -ブレーンに接続された開弦の端点 $\sigma = \sigma_* = 0, \pi$ は

$$\begin{aligned} \text{Dirichlet 境界条件} & \quad X^a(\tau, \sigma_*) = \bar{x}^a, & a = p+1, \dots, d, \\ \text{Neumann 境界条件} & \quad X'^m(\tau, \sigma_*) = 0, & m = 0, 1, \dots, p \end{aligned}$$

を満たす.

- 両端が Dirichlet 境界条件を満たす弦座標 X^a を DD 座標と呼ぶ.
- 両端が Neumann 境界条件を満たす弦座標 X^m を NN 座標と呼ぶ.

光錐ゲージを利用するには X^0 と組合せて X^\pm 座標を定義するために最低 1 つの NN 座標 X^1 が必要である. そこで以下では $1 \leq p (< 25)$ を仮定する. $D0$ -ブレーンを調べるには光錐ゲージに依拠しない Lorentz 共変な

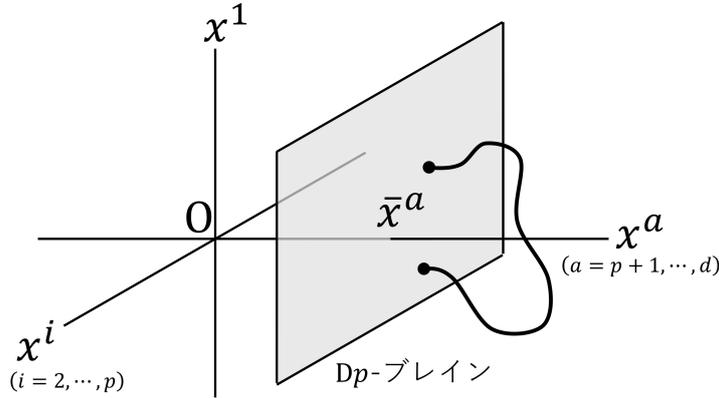


図4 両端を共通の Dp-ブレーン上を持つ開弦

量子化が必要となる。

15.1 について

■復習 σ のパラメーター付けの条件 (光錐ゲージ) の下で, 自由な端点の境界条件 $\mathcal{P}^{\sigma\mu} = 0$ は Neumann 境界条件 (9.41): $\partial X^\mu / \partial \sigma = 0$ になる (静的ゲージでは式 (7.35)).

15.2 Dp-ブレーンに接続している開弦の量子化

本節では Dp-ブレーンに接続している開弦の量子化を考える. このとき DD 座標 X^a について, 新たな考察が必要となる. X^a は波動方程式を満たし, Dirichlet 境界条件 $X^a(\tau, \sigma = 0, \pi) = \bar{x}^a$ の下での解は

$$X^a(\tau, \sigma) = \bar{x}^a + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^a e^{-in\tau} \sin n\sigma \quad (15.20)$$

という形をとる. [導出は下記, この式で振動子 α_n^a を定義する.]

- Neumann 境界条件の場合とは対照的に τ の 1 次の項が現れず, 弦は x^a 方向に正味の時間平均運動量を持たない.
これは端点 $\sigma = 0, \pi$ が $x^a = \bar{x}^a$ に止まり続けることと整合している.
– [Neumann 境界条件の下では τ の 1 次の項の係数が
ゼロモード (9.52): $\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu$ であった. これに対し] X^a 座標はゼロモード α_0^a を持たない.
- 量子化の際, \bar{x}^a は単なる定数であって演算子にはならないが, 振動子 α_n^a は演算子になる.
[これは Neumann 境界条件において
 x_0^- が力学変数に選ばれたことと対照的である (式 (12.4), (12.5) 参照).]
- 弦座標 X^a が Hermite となる条件 $(\alpha_n^a)^\dagger = \alpha_{-n}^a$.
[これは $\alpha_n^a, \alpha_{-n}^a$ の一方を生成演算子, 他方を消滅演算子と見なせるために必要なことである.]

弦の量子化に移ろう. 式 (12.10) と同様の正準交換関係

$$[X^a(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau b}(\tau, \sigma')] = i\delta^{ab}\delta(\sigma - \sigma')$$

を課し、12.2節と同様の解析をたどると、式(12.45)と同様の振動子に対する交換関係

$$[\alpha_m^a, \alpha_n^b] = m\delta^{ab}\delta_{m+n,0}, \quad m, n \neq 0$$

が導かれる。

次に質量の自乗の演算子を考えるにあたって次のことに注意する。すなわち上記の結果より、DD座標もNN座標に対する式

$$\dot{X}^i \pm X^{i'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^i e^{-in(\tau \pm \sigma)}$$

と類似の関係

$$X^{a'} \pm \dot{X}^a = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^a e^{-in(\tau \pm \sigma)}$$

を満たす(ただし \dot{X} と X' の順は逆になっており、ゼロモードの項は含まれない)。このためパラメーター付けの制約条件 $\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2$ の帰結である p^- の式(12.105), (12.106):

$$2p^+p^- = \frac{1}{\alpha'} \left(\alpha' p^I p^I + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^I \alpha_n^I - 1 \right)$$

において、 $I \rightarrow (i, a)$ と置いた式

$$2p^+p^- = \frac{1}{\alpha'} \left(\alpha' p^i p^i + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \alpha_{-n}^a \alpha_n^a] - 1 \right) \quad (\because p^a \sim \alpha_0^a = 0)$$

がそのまま成り立つ。[ここでも式(12.56): $\alpha_n^\mu = a_n^\mu \sqrt{n}$, $\alpha_{-n}^\mu = a_n^{\mu*} \sqrt{n}$ ($n \geq 1$)によって振動子 a を定義すると、上記の α の交換関係よりこれらは生成・消滅演算子となる。これを用いて質量の自乗を表すと]

$$\begin{aligned} M^2 = -p^2 &= 2p^+p^- - p^i p^i = \frac{1}{\alpha'} \left(\sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \alpha_{-n}^a \alpha_n^a] - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\alpha'} \left(-1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2}^p n a_n^{i\dagger} a_n^i + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=p+1}^d m a_m^{a\dagger} a_m^a \right) \end{aligned}$$

となる。[これはNeumann境界条件に対する式(12.164): $M^2 = \frac{1}{\alpha'} (-1 + N^\perp)$, $N^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I$ と同じ形をしている.]

横方向運動量 \vec{p}_T のうち p^a の演算子はなくなるので、基底状態は $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ の代わりに

$$|p^+, \vec{p}\rangle, \quad \vec{p} = (p^2, \dots, p^p)$$

となる。生成演算子 $a_n^{\mu\dagger}$ のNN座標成分 $\mu = i$ とDD座標成分 $\mu = a$ を区別して書くと、基本状態は

$$\left[\prod_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2}^p (a_n^{i\dagger})^{\lambda_{n,i}} \right] \left[\prod_{m=1}^{\infty} \sum_{a=p+1}^d (a_m^{a\dagger})^{\lambda_{m,a}} \right] |p^+, \vec{p}\rangle$$

という形をとる。

Schrödinger波動関数は $\psi_{i_1 \dots i_p a_1 \dots a_q}(\tau, p^+, \vec{p})$ という形を持つ。これは弦の状態を記述する場の理論において、場の空間座標に関するFourier変換に同定される。そのような場はD p -ブレーンの世界領域を張る($p+1$)個の座標 $x^+(\sim \tau)$, x^-, x^i ($i = 2, \dots, p$)を引数に持つことになるから、D p -ブレーン上に存在する場と考えるのが自然である。「しかしながら、開弦の場が何処に存在するかという声明は、曖昧なものになりがちであり、ゲージにさえ依存する。異なる解答が、完全に整合しているということも起こり得るのである」(p.332)。

- 基底状態 $|p^+, \vec{p}\rangle$
D25-ブレーンの場合と同じ質量 $M^2 = -1/\alpha'$ を持つタキオン状態.
タキオン場は Dp -ブレーン上のスカラー場.
- 無質量状態 ($M^2 = 0$)
 - $(p-1)$ 個の状態 $a_1^{i\dagger} |p^+, \vec{p}\rangle$, $i = 2, \dots, p$
独立な古典場 A^I に応じて $(d-1)$ 種類の 1 光子状態が得られたのと同様に (10.5 節, 12.6 節),
これは光子状態であり, Lorentz 添字 i を持つ Dp -ブレーン上の Lorentz ベクトル場である
Maxwell 場に関する.
 - $(d-p)$ 個の状態 $a_1^{a\dagger} |p^+, \vec{p}\rangle$, $a = p+1, \dots, d$
ブレーンに垂直な方向を示す添字 a はブレーンの Lorentz 添字ではなく,
単なる番号のラベルであり, Dp -ブレーン内のスカラー場が対応する.

ただしここでのスカラー場やベクトル場とは, $(p+1)$ 次元における Dp -ブレーン内の座標に関する Lorentz 変換に対する変換則に言及している. [上記以外の $N^\perp \geq 2$ の状態はすべて質量を持つ.]

15.2 節, 式の導出など

■弦座標のモード展開 (15.20) の導出 ブレーンに垂直な方向の弦座標成分 X^a も波動方程式を満たすので, 一般解は

$$X^a(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}(f^a(\tau + \sigma) + g^a(\tau - \sigma))$$

という形をとる. $\sigma = 0$ に対する境界条件

$$\bar{x}^a = X^a(\tau, 0) = \frac{1}{2}(f^a(\tau) + g^a(\tau)), \quad \therefore g^a(\tau) = -f^a(\tau) + 2\bar{x}^a$$

を考慮すると

$$X^a(\tau, \sigma) = \bar{x}^a + \frac{1}{2}(f^a(\tau + \sigma) - f^a(\tau - \sigma))$$

となる. すると $\sigma = \pi$ での境界条件 $X^a(\tau, \pi) = \bar{x}^a$ は

$$f^a(\tau + \pi) = f^a(\tau - \pi)$$

を与える. これは $f^a(u)$ が周期 2π の周期関数となることを意味しており, したがって

$$f^a(u) = \tilde{f}_0^a + \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{f}_n^a \cos nu + \tilde{g}_n^a \sin nu)$$

と展開できる. Dirichlet 境界条件に対して期待されるように, 弦座標のモード展開に τ の 1 次の項 (運動量 p^a の項) が現れないのは, この段階で u の 1 次の項が現れないことに起因している. これとは対照的に, Neumann 境界条件の場合には周期関数となるのが $f'(u)$ であったため, $f(u)$ には u の 1 次の項が現れた. さて, $X^a(\tau, \sigma)$ の式における $f^a(u)$ を上記のように展開すると

$$X^a(\tau, \sigma) = \bar{x}^a + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\tilde{f}_n^a \sin n\tau \sin n\sigma + \tilde{g}_n^a \cos n\tau \sin n\sigma \right) \quad (15.18)$$

となる [本稿次節で計算を補足]. 展開係数を再定義して, これを

$$X^a(\tau, \sigma) = \bar{x}^a + \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n^a \cos n\tau + \tilde{f}_n^a \sin n\tau \right) \sin n\sigma \quad (15.19)$$

$$= \bar{x}^a + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^a e^{-in\tau} \sin n\sigma \quad (15.20)$$

と書き直すことができる.

15.2 について

■ 「……式 (12.105) と式 (12.106) が導かれるが, ……」 (p.329, l.12,13) について 復習として 12.4 節の内容を要約したノートの冒頭を修正して以下に再掲する.

$X^-(\tau, \sigma)$ のモード展開における展開係数 α_n^- は, 横方向の Virasoro モード

$$L_n^\perp \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I$$

を用いて $\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp$ と与えられた (9.5 節). 量子論に移行すると L_n^\perp は Virasoro “演算子” となる. ここで $n=0$ に対しては α_{n-p}^I と α_p^I は非可換だから, その順序が問題となる.

Virasoro 演算子 L_0^\perp を正規順序, すなわち消滅演算子 α_p^I が生成演算子 α_{-p}^I の右側に配置されている順序で定義する. [本稿では正規順序化された演算子を $N[\dots]$ と表すことにすると] L_0^\perp は

$$N[L_0^\perp] = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I = \alpha' p^I p^I + \sum_{p=1}^{\infty} p \alpha_p^{I\dagger} \alpha_p^I$$

として再定義される. これは Hermite である. この措置は正規順序化定数

$$a = \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p$$

のシフト

$$\begin{aligned} L_0^\perp &= N[L_0^\perp] + a, & 2\alpha' p^- &= \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- : (9.52) \\ & & &= \frac{1}{p^+} L_0^\perp \\ & & &= \frac{1}{p^+} (N[L_0^\perp] + a) \end{aligned}$$

をもたらす.

■ 「もし式 (15.12) と類似の展開式が X^a にも成立するのであれば……」 (p.329 下から 9,8 行目) について 実際に式 (15.22) が成立する.

■ 式 (15.18) について

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (f^a(\tau + \sigma) - f^a(\tau - \sigma)) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\tilde{f}_n^a \{ \cos n(\tau + \sigma) - \cos n(\tau - \sigma) \} + \tilde{g}_n^a \{ \sin n(\tau + \sigma) - \sin n(\tau - \sigma) \} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\tilde{f}_n^a \sin n\tau \sin n\sigma + \tilde{g}_n^a \cos n\tau \sin n\sigma \right) \end{aligned}$$

による.

■「モード展開式 (15.22) は標準的な形をしているので」(p.331, 1.8) について 式 (12.33) と比較せよ。

■「関係する演算子」(p.331, 1.9) について 「式 (12.30) において (I, J) を (a, b) に置き換えたもの」(p.331, 1.7,8), すなわち

$$[(\dot{X}^a \pm X^{a'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^b \pm X^{b'}) (\tau, \sigma')] = \pm 4\pi \alpha' i \delta^{ab} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma')$$

のこと。

■「正規順序化定数は、……理に適っている」(p.331, 1.17-19) について 正規順序化定数 a と臨界次元 D の値がどのように導かれたのかの復習として、以下に 12.5 節の要約を再掲する。導出にはゼロモードの構造は無関係であり、これらの値 $a = -1, D = 26$ を変更する必要はないことが見て取れる。

弦の作用の Lorentz 不変性に伴うチャージ (8.65):

$$M_{\mu\nu} = \int_0^\pi (X_\mu \mathcal{P}^\tau_\nu - X_\nu \mathcal{P}^\tau_\mu) d\sigma$$

(ただし開弦を仮定し $0 \leq \sigma \leq \pi$ とした) は、光錐ゲージにおいて

$$M^{\mu\nu} = x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu)$$

とモード展開される。そこで量子 Lorentz チャージ M^{-I} を

$$\begin{aligned} M^{-I} &= x_0^- p^I - \frac{1}{2} (x_0^I p^- + p^- x_0^I) - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^- \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I \alpha_n^-) \\ &= x_0^- p^I - \frac{1}{4\alpha' p^+} \{ x_0^I (N[L_0^\perp] + a) + (N[L_0^\perp] + a) x_0^I \} - \frac{i}{\sqrt{2\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (L_{-n}^\perp \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I L_n^\perp) \\ &\quad \left(\because \sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp, \quad 2\alpha' p^- = \frac{1}{p^+} (N[L_0^\perp] + a) \right) \end{aligned}$$

と考えると*1, これは Hermite であり正規順序化されている。この M^{-I} に対して

$$[M^{-I}, M^{-J}] = -\frac{1}{\alpha' (p^+)^2} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{-m}^I \alpha_m^J - \alpha_{-m}^J \alpha_m^I) \left[m \left\{ 1 - \frac{1}{24} (D-2) \right\} + \frac{1}{m} \left\{ \frac{1}{24} (D-2) + a \right\} \right]$$

となる (導出は行わない)。Lorentz 不変性の条件 $[M^{-I}, M^{-J}] = 0$ (11.6 節) が成り立つことを要求すると、時空次元 D と粒子の質量の定数シフト a が

$$D = 26, \quad a = -\frac{1}{24} (D-2) = -1$$

に確定する。第 2 式は無限和の計算から得られた結果 $a = \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = -\frac{1}{24} (D-2)$ と同一である。

■Schrödinger 波動関数 (15.32) について 基本状態 (15.31) は $a_{n_1}^{i_1 \dagger} \cdots a_{n_p}^{i_p \dagger} a_{m_1}^{a_1 \dagger} \cdots a_{m_q}^{a_q \dagger} |p^+, \vec{p}\rangle$ という形をしている。12.7 節と同様にその重ね合せを

$$|\Psi, \tau\rangle = \int dp^+ d^p p \psi_{i_1 \dots i_p a_1 \dots a_q} (\tau, p^+, \vec{p}) a_{n_1}^{i_1 \dagger} \cdots a_{n_p}^{i_p \dagger} a_{m_1}^{a_1 \dagger} \cdots a_{m_q}^{a_q \dagger} |p^+, \vec{p}\rangle$$

*1 本稿では正規順序化を $N[\dots]$ によって表している。 $n \neq 0$ に対して $L_n^\perp = N[L_n^\perp]$ である。

と書くと (モード番号 n_1, \dots, m_q は固定),

$$\psi_{i_1 \dots i_p a_1 \dots a_q}(\tau, p^+, \vec{p}) = \langle p^+, \vec{p} | \Psi, \tau \rangle$$

よりこれは運動量空間の波動関数である.

■表記について 以下のように異なる量に同じ記号が用いられており不便であるが, 誤解の恐れはあるまい.

- NN 座標成分, 生成・消滅演算子 a
- D-ブレーンの次元, 運動量 p

■「Maxwell 場」という用語 (p.333) について これは今後, 教科書で繰り返し出てくる表現であり, 必ずしも電磁場に限らず, グルーオン場などを含め “Maxwell 型” の場の方程式に従うゲージ場一般を指すのにも用いられる (例えば 10.5 節 (初出) や 21.2 節を参照). ただし正確にはグルーオン場はゲージ変換が電磁場よりも複雑であることに起因して, そのゲージ不変なラグランジアン密度は自己相互作用を表すような付加的な項を含み [1, pp.276-279], W ボゾンや Z ボゾンのような質量を持つゲージ場の方程式は所謂 Proca 方程式である [1, p.440].

15.3 平行な Dp-ブレーンの間の開弦

2つの平行な Dp-ブレーン

$$x^a = \bar{x}_1^a, \quad x^a = \bar{x}_2^a$$

を考える. これらを順にブレーン 1, ブレーン 2 と呼ぼう. このとき前節までに解析した

- [11] セクター: ブレーン 1 に両方の端点を持つ弦
- [22] セクター: ブレーン 2 に両方の端点を持つ弦

の他に,

- [12] セクター: ブレーン 1 に始点 ($\sigma = 0$) を持ち, ブレーン 2 に終点 ($\sigma = \pi$) を持つ弦
- [21] セクター: ブレーン 2 に始点 ($\sigma = 0$) を持ち, ブレーン 1 に終点 ($\sigma = \pi$) を持つ弦

を合わせた合計 4 つの種類 (“セクター”) の開弦が考えられる. 弦の向き (σ の増加する方向) の異なるセクター [12], セクター [21] の弦は区別し得る. 実際, 第 16 章で示すように, 弦の向きを反転させると弦のチャージは符号を変える.

[12] セクターの弦を考えよう. [21] セクターの弦を記述するには, 以下の結果で \bar{x}_1^a と \bar{x}_2^a を入れ替えれば充分である. DD 座標 X^a は波動方程式を満たし, 境界条件

$$X^a(\tau, \sigma = 0) = \bar{x}_1^a, \quad X^a(\tau, \sigma = \pi) = \bar{x}_2^a, \quad a = p+1, \dots, d$$

の下での解は

$$X^a(\tau, \sigma) = \bar{x}_1^a + (\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a) \frac{\sigma}{\pi} + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^a e^{-in\tau} \sin n\sigma \quad (15.45)$$

という形を持つ [導出は下記].

- これは実際に上記の境界条件を満たしていることが明白である.

- 前節同様, 定数 \bar{x}_1^a, \bar{x}_2^a は量子力学的な演算子にはならない.
- 前節同様, τ の 1 次の項は現れず, 開弦は x^a 方向には (時間平均) 運動量を持たない.
- [上式で定義した] 振動子 α_n^a は, 同じ Dp-ブレインに両端を持つセクターの弦に対する振動子では異なる演算子となる (記号を区別していないけれど).

ここで

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^a = \frac{1}{\pi}(\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a)$$

を定義する. これは τ に関する 1 次の項の係数 (x^a 方向の運動量) とは何ら関係がない. すると弦座標の導関数をまとめて

$$\dot{X}^a = -i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^a e^{-in\tau} \sin n\sigma, \quad X^{a'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^a e^{-in\tau} \cos n\sigma$$

と書くことができる. これにより

$$X^{a'} \pm \dot{X}^a = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^a e^{-in(\tau \pm \sigma)}$$

が成り立つことから, この場合にも振動子が予想される交換関係を満たすことが保証される. [すなわち 12.2 節と同様に正準交換関係を課すと, 振動子は生成・消滅演算子になる (15.2 節の説明を参照).] 質量の自乗は

$$M^2 = \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} (N^\perp - 1), \quad N^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2}^p n a_n^{i\dagger} a_n^i + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=p+1}^d m a_m^{a\dagger} a_m^a$$

となる. M^2 の式の第 1 項は α_0^a がゼロでないことから生じる新たな寄与であり, 弦が張力 $T_0 = 1/2\pi\alpha'$ で D-ブレインの間隔 $|\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a|$ だけ引き伸ばされて得る静止エネルギーの自乗に一致している. この項はもちろん, $\bar{x}_1^a = \bar{x}_2^a$ のときには消える.

[ij] セクターの基本状態は前節の式 (15.31) と同じく

$$\left[\prod_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2}^p (a_n^{i\dagger})^{\lambda_{n,i}} \right] \left[\prod_{m=1}^{\infty} \sum_{a=p+1}^d (a_m^{a\dagger})^{\lambda_{m,a}} \right] |p^+, \vec{p}; [ij]\rangle$$

という形で与えられるが, 基底状態 $|p^+, \vec{p}; [ij]\rangle$ は考えているセクター [ij] に応じて定義される. また上で指摘したように, セクターの異なる振動子もまた本質的に異なる演算子である. そこで演算子にも [ij] というセクターラベルを付けても良いが, 基底状態のセクターラベルを見れば演算子の種類も識別できるため, 実際にはほとんどその必要はない.

[12] セクターにおける状態を以下に, 質量の小さいものから順にいくつかリストする.

- 基底状態 $|p^+, \vec{p}; [12]\rangle$
 $M^2 = -\frac{1}{\alpha'} + \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2$ はブレイン間の距離が充分大きく,
 $|\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a| \geq 2\pi\sqrt{\alpha'}$ となるとゼロ以上となる (タキオンでなくなる).
 いずれにせよ対応する場合は $(p+1)$ 次元の Lorentz スカラーである.
- 励起状態 $(N^\perp = 1, M^2 = \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2)$
 - $(d-p)$ 個の状態 $a_1^{a\dagger} |p^+, \vec{p}; [12]\rangle$, $a = p+1, \dots, d$
 - $(p-1)$ 個の状態 $a_1^{i\dagger} |p^+, \vec{p}; [12]\rangle$, $i = 2, \dots, p$

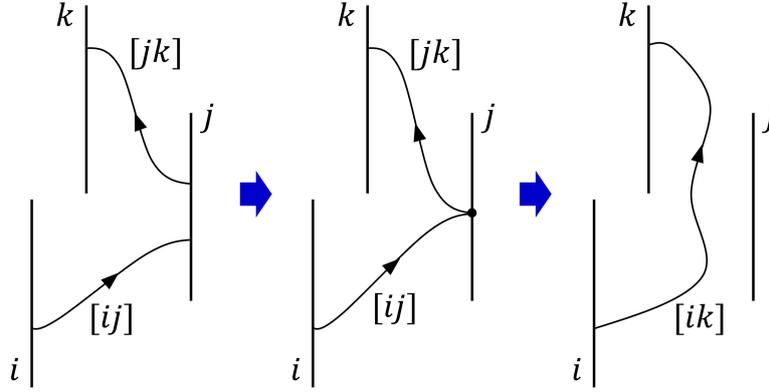


図5 ゲージ場の相互作用の起源となる、D p -ブレーン上での弦の端点の結合

ここで質量を持つ Maxwell ゲージ場は p 次元空間において、質量のない場合の状態数 $p - 1$ よりも 1 つ多い p 個の状態を持つ (問題 10.7). このため $(d - p)$ 個の励起状態のうち 1 つは $(p - 1)$ 個の状態と合わせて質量を持つベクトル場を形成し、残り $(d - p - 1)$ 個の状態がそれぞれスカラー場を持つ.

N 個の D p -ブレーンが互いに重なり合っているとき、各 $[ij]$ セクターは質量のない 1 つのゲージ場を持つことになる. ところで弦の始点と終点の属するブレーンの選び方はそれぞれ N 通りだから、全部で N^2 個のセクターが、したがって N^2 個の無質量ゲージ場が存在する. これらの場の相互作用は $U(N)$ Yang-Mills 理論によって記述される. 弦の描像では実は、このような場の相互作用は異なる弦の端点が同一の D-ブレーン上で結合する過程によって生じる. 図 5 のように $[ij]$ セクターの弦の終点と $[jk]$ セクターの弦の始点が j 番目のブレーン上で結合すると、この点はもはや端点ではないから、結果として形成される弦は j 番目の D-ブレーンには接続しておらず、 $[ik]$ セクターの弦となる.

$$[ij] * [jk] = [ik]. \quad (j \text{ について和をとらない})$$

15.3 節, 式の導出など

■弦座標のモード展開 (15.45) の導出 前節と同様, 波動方程式の一般解

$$X^a(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}(f^a(\tau + \sigma) + g^a(\tau - \sigma))$$

は $\sigma = 0$ に対する境界条件

$$\bar{x}_1^a = X^a(\tau, 0) = \frac{1}{2}(f^a(\tau) + g^a(\tau)), \quad \therefore g^a(\tau) = -f^a(\tau) + 2\bar{x}_1^a$$

を考慮すると

$$X^a(\tau, \sigma) = \bar{x}_1^a + \frac{1}{2}(f^a(\tau + \sigma) - f^a(\tau - \sigma))$$

となる. すると $\sigma = \pi$ での境界条件 $X^a(\tau, \pi) = \bar{x}_2^a$ は

$$f^a(\tau + \pi) - f^a(\tau - \pi) = 2(\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a), \quad \therefore f^a(u + 2\pi) - f^a(u) = 2(\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a) \quad (15.41)$$

を与える。これは導関数 $f^{a'}(u)$ が周期 2π の周期関数であることを意味しており、

$$f^{a'}(u) = \tilde{f}_0^a + \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{f}_n^a \cos nu + \tilde{g}_n^a \sin nu), \quad \therefore f^a(u) = f_0^a u + \sum_{n=1}^{\infty} (h_n^a \cos nu + g_n^a \sin nu)$$

と展開できる (積分定数は X^a の式には残らないので省いた)。再び上式 (15.41) を考慮すると、定係数 f_0^a が

$$f_0^a = \frac{1}{\pi}(\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a)$$

と定まる。以上より弦座標のモード展開は

$$X^a(\tau, \sigma) = \bar{x}_1^a + (\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a) \frac{\sigma}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n^a \cos n\tau + \tilde{f}_n^a \sin n\tau \right) \sin n\sigma$$

という形をとる (三角関数の部分の変形は前節の式 (15.19) の導出で行ったのと同様である)。前節にならない、これを式 (15.45):

$$X^a(\tau, \sigma) = \bar{x}_1^a + (\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a) \frac{\sigma}{\pi} + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^a e^{-in\tau} \sin n\sigma$$

のように書いて振動子 α_n^a を定義する。

15.3 について

■弦が引き伸ばされていること 「 α_0^a がゼロでないことは、弦が引き伸ばされていることを意味する」 (p.336, 1.10,11) について、このことは M^2 の式の説明 (p.336 下 4 行) にて明らかとなる。両端が同じ D-ブレーンに接続している弦も長さを持つけれど、間隔 $|\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a|$ がゼロになるとき弦は引き伸ばされていないと見なすのは、素朴に考えればやや不思議である。式の上ではこの場合、弦は自身の振動によってのみ引き伸ばされ、エネルギーを持つと考えれば良いのだろうか。もっともこのような見方はあくまで「単純な解釈」 (p.384, 1.11) のようである。

■p.340 の訳註の引用

開弦を利用して Yang-Mills 理論を構築するための手続きは、純粋に数学的な手続きと見ても比較的自然而容易であるが、それは開弦が両端を持つことと併せて、あらかじめ無質量ボゾン状態としてベクトル場状態、すなわちスピン 1 の状態を備えていることに因る。Yang-Mills ゲージボゾンは、ウィークボゾンもグルーオンも光子と同様にスピン 1 を持つ。これに対して、閉弦の無質量ボゾン状態として自然に現れる重力子のスピンは 2 である。

計算練習 15.1 (p.340)

$N \times N$ ユニタリー行列の積に対して

- 結合則 $(AB)C = A(BC)$ が成り立つこと
- 単位元 1 が存在すること
- 逆元が存在すること (ユニタリー行列は共役転置行列を逆行列に持つ)

はよく分かっている。また以下のように $N \times N$ ユニタリー行列 A, B の積もまた $N \times N$ ユニタリー行列となることが確かめられる:

$$(AB)^\dagger(AB) = B^\dagger A^\dagger AB = 1, \quad (AB)(AB)^\dagger = ABB^\dagger A^\dagger = 1.$$

以上より $U(N)$ は群である。特に $N = 1$ を考えると、 $U(1)$ の要素 a は $a^*a = aa^* = 1$ を満たす、絶対値が 1 の複素数 $a = e^{i\phi}$ であることが分かる。これに対して上で調べた群の性質が満たされていることを、改めて確かめられる。 $U(1)$ 群に関する教科書 pp.402-403 の説明を併せて参照せよ。

15.4 平行な Dp -ブレーンと Dq -ブレーンの間の弦

$1 \leq q < p \leq 25$ として、平行な Dp -ブレーンと Dq -ブレーンを考える。[平行の意味は、ここでは直観的に理解して良い.] 例えば図 6 のように平行な $D2$ -ブレーンと $D1$ -ブレーンを考えると、 y 方向には

- $D2$ -ブレーン上では Neumann 境界条件が課されるのに対し、
- $D1$ -ブレーン上では Dirichlet 境界条件が課される。

このように“混合した”方向が現れる。同じ D -ブレーンに両端を持つ弦については既に調べたので、ここでは始点を Dp -ブレーンに持ち、終点を Dq -ブレーンに持つ弦を考える。すると

- Dq -ブレーンの方向は Dp -ブレーンとも平行だから、
 Dq -ブレーンの世界領域座標と時間座標を合わせた弦座標

$$X^0, X^1, \dots, X^q \quad \text{または} \quad X^\pm, X^i \quad (i = 2, \dots, q)$$

は NN 座標

- Dp -ブレーンに垂直な方向は Dq -ブレーンとも垂直だから、その方向の弦座標

$$X^a \quad (a = p + 1, \dots, d)$$

は DD 座標

- 残りの $p - q$ 個の方向は“混合した”方向であり、対応する弦座標

$$X^r \quad (r = q + 1, \dots, p)$$

は ND 座標

となる*2。

ここで新たに現れた ND 座標 X^r を考察する。 X^r は波動方程式を満たし、境界条件

$$\frac{\partial X^r}{\partial \sigma}(\tau, \sigma = 0) = 0, \quad X^r(\tau, \sigma = \pi) = \bar{x}_2^r$$

の下での解は半整数モードによる展開

$$X^r(\tau, \sigma) = \bar{x}_2^r + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}} \frac{2}{n} \alpha_{\frac{n}{2}}^r e^{-i\frac{n}{2}\tau} \cos\left(\frac{n\sigma}{2}\right) \quad (15.72)$$

の形をとる (\mathbf{Z}_{odd} は正負の奇数全体) [導出は下記]。和の前の因子 i は X^r の Hermite 性の条件が、標準的な振動子の性質 $(\alpha_{\frac{n}{2}}^r)^\dagger = \alpha_{-\frac{n}{2}}^r$ となることを保証する。また弦座標の展開式にゼロモードは含まれないので、

*2 ここで ND 座標とは、始点が Neumann 境界条件を満たし、終点が Dirichlet 境界条件を満たす弦座標のことである。逆に始点が Dirichlet 境界条件を満たし、終点が Neumann 境界条件を満たす弦座標を DN 座標と呼ぶ。

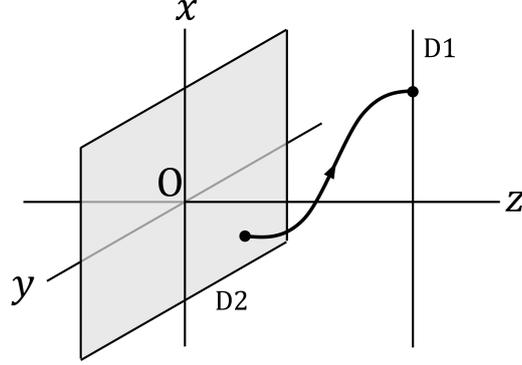


図6 平行な D2-ブレイン, D1-ブレインと ND 座標の出現

ND 座標の方向に正味の (時間平均) 運動量は生じない. さらに [上式のようにモード展開を書いて振動子を定義すれば,] オービフォルドにおけるツイストしたセクターの弦座標 (13.106) と類似の関係

$$\dot{X}^r \pm X^{r'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}} \alpha_{\frac{n}{2}}^r e^{-i\frac{n}{2}(\tau \pm \sigma)}$$

が成立する. ここから通常の正準交換関係を課すと, [式 (13.110) と同様の] 期待される交換関係

$$\left[\alpha_{\frac{m}{2}}^r, \alpha_{\frac{n}{2}}^s \right] = \frac{m}{2} \delta^{rs} \delta_{m+n,0}$$

が導かれることが保証される.

次に質量の自乗の演算子を考えよう. 式 (12.104): $2p^+ p^- = \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp = \frac{1}{2\alpha'} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I$ は次のように修正される.

$$\begin{aligned} 2p^+ p^- &= \frac{1}{\alpha'} \left[\frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \alpha_{-n}^a \alpha_n^a) + \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}} \alpha_{-\frac{m}{2}}^r \alpha_{\frac{m}{2}}^r \right] \\ &= \frac{1}{\alpha'} \left(\mathbf{N} \left[\frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \alpha_{-n}^a \alpha_n^a) + \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}} \alpha_{-\frac{m}{2}}^r \alpha_{\frac{m}{2}}^r \right] + a \right) \\ &= \frac{1}{\alpha'} \left(\alpha' p^i p^i + \frac{1}{2} \alpha_0^a \alpha_0^a + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \alpha_{-n}^a \alpha_n^a) + \sum_{m \in \mathbf{Z}_{\text{odd}^+}} \alpha_{-\frac{m}{2}}^r \alpha_{\frac{m}{2}}^r + a \right) : (15.79). \end{aligned}$$

ただし本稿では正規順序化を $\mathbf{N}[\dots]$ で表しており, ここに正規順序化定数は

$$\begin{aligned} a &= (q-1)a_{\text{NN}} + (25-p)a_{\text{DD}} + (p-q)a_{\text{ND}}, \\ a_{\text{NN}} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n^i, \alpha_{-n}^i] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{24}, \\ a_{\text{DD}} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n^a, \alpha_{-n}^a] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{24}, \\ a_{\text{ND}} &= \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbf{Z}_{\text{odd}^+}} [\alpha_{\frac{m}{2}}^r, \alpha_{-\frac{m}{2}}^r] = \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbf{Z}_{\text{odd}^+}} \frac{m}{2} = \frac{1}{48} \end{aligned}$$

で与えられる*3. このように半整数モードを持つ ND 座標の振動子からの寄与は異なっていることに注意する. この結果として

$$\begin{aligned} M^2 &= -p^2 = 2p^+p^- - p^I p^I \\ &= \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} \left(N^\perp - 1 + \frac{1}{16}(p-q) \right), \\ N^\perp &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2}^q n a_n^{i\dagger} a_n^i + \sum_{k \in \mathbf{Z}_{\text{odd}^+}} \sum_{r=q+1}^p a_{\frac{k}{2}}^{r\dagger} a_{\frac{k}{2}}^r + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=p+1}^d m a_m^{a\dagger} a_m^a \end{aligned}$$

を得る.

弦は NN 座標の方向だけに運動量を持つので, 基底状態は

$$|p^+, \vec{p}; [12]\rangle, \quad \vec{p} = (p^2, \dots, p^q)$$

である.

- 基底状態 ($N^\perp = 0$) $|p^+, \vec{p}; [12]\rangle$
単一のスカラー場に対応する.
- 次の質量レベルの状態 ($N^\perp = 1/2$) $a_{\frac{1}{2}}^{r\dagger} |p^+, \vec{p}; [12]\rangle$
指標 r に応じた $(p-q)$ 個のスカラー場に対応する.

これらの状態は $M^2 \geq 0$ のいずれにもなり得る. 他の状態 ($N^\perp \geq 1$) は質量を持つので, 質量のないゲージ場は見出されない.

15.4 節, 式の導出など

■弦座標のモード展開 (15.72) の導出 ND 座標 X^r は波動方程式を満たし, その一般解は

$$X^r(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}(f^r(\tau + \sigma) + g^r(\tau - \sigma))$$

と書ける. すると $\sigma = 0$ における Neumann 境界条件は

$$\left. \frac{\partial X^r}{\partial \sigma}(\tau, \sigma) \right|_{\sigma=0} = 0, \quad \therefore f^{r'}(u) = g^{r'}(u), \quad \therefore g^r(u) = f^r(u) + c_0^r$$

となる. 次に $\sigma = \pi$ における Dirichlet 境界条件 $X^r(\tau, \sigma)|_{\sigma=\pi} = \bar{x}_2^r$ を考慮すると,

$$\begin{aligned} c_0^r &= 2\bar{x}_2^r, \\ f^r(u + 2\pi) &= -f^r(u) \end{aligned} \tag{15.69}$$

を得る [本稿次節で導出]. 第2式 (15.69) を満たす $f^r(u)$ のモード展開は, 半整数モードを持つ三角関数による展開である:

$$f^r(u) = \sum_{n \in \mathbf{Z}_{\text{odd}^+}} \left[f_n^r \cos\left(\frac{nu}{2}\right) + h_n^r \sin\left(\frac{nu}{2}\right) \right]. \tag{15.70}$$

*3 ここで第1式の $q-1, 25-p, p-q$ はそれぞれ NN 座標 i , DD 座標 a , ND 座標 r の個数である. また級数和の公式 (12.110), (13.116) を用いている.

($\mathbf{Z}_{\text{odd}}^+$ は正の奇数全体. 既に $\mathbf{R}^1/\mathbf{Z}_2$ オービフォルドにおけるツイストしたセクター (13.6) や, Neveu-Schwarz フェルミオン (14.4 節) において, これと似たような状況に遭遇した.) $c_0^r = 2\bar{x}_2^r$ により弦座標は

$$X^r(\tau, \sigma) = \bar{x}_2^r + \frac{1}{2}(f^r(\tau + \sigma) + f^r(\tau - \sigma)) \quad (15.68)$$

であり, ここに $f^r(u)$ のモード展開を代入すると

$$X^r(\tau, \sigma) = \bar{x}_2^r + \sum_{n \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}^+} \left[A_n^r \cos\left(\frac{n\tau}{2}\right) + B_n^r \sin\left(\frac{n\tau}{2}\right) \right] \cos\left(\frac{n\sigma}{2}\right) \quad (15.71)$$

という形になる. これを式 (15.72):

$$X^r(\tau, \sigma) = \bar{x}_2^r + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}} \frac{2}{n} \alpha_{\frac{n}{2}}^r e^{-i\frac{n}{2}\tau} \cos\left(\frac{n\sigma}{2}\right)$$

と書いて振動子 $\alpha_{\frac{n}{2}}^r$ を定義する [上式 (15.70–72) の導出について本稿次節で補足する].

15.4 について

■ 「 $z = z_0$ と設定」 (p.342, 1.5) について 正しくは $z_0 = 0$ と考えられる.

■ 「……を念頭に置いて $c_0^r = 2\bar{x}_2^r$ とすると」 (p.343 下から 7,6 行目) について 式 (15.67) を式 (15.66) に代入すると

$$X^r(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}\{f^r(\tau + \sigma) + f^r(\tau - \sigma) + c_0^r\}$$

を得る. ここに $\sigma = \pi$ での境界条件を代入すると

$$\bar{x}_2^r = \frac{1}{2}\{f^r(\tau + \pi) + f^r(\tau - \pi) + c_0^r\}$$

となる. これが任意の τ で成立するためには

$$f^r(\tau + \pi) + f^r(\tau - \pi) = 0 : (15.69), \quad \text{かつ} \quad c_0^r = 2\bar{x}_2^r$$

であれば良い.

■ 式 (15.70–72) について 式 (15.70) の代わりに $f^r(u) = \sum_{n \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}^+} f_n^r e^{-inu/2}$ と書いておき, これを式 (15.68) に代入すると

$$X^r(\tau, \sigma) = \bar{x}_2^r + 2 \sum_{n \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}^+} f_n^r e^{-in\tau/2} \cos\left(\frac{n\sigma}{2}\right)$$

となる. この方が式 (15.71), 式 (15.72) との比較が容易である.

■ 「和の項の前の因子 i は, ……必要な因子である」 (p.344, 1.10,11) について 確かにこのとき弦座標 (15.72) における

$$i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}^+} \frac{2}{n} \left(\alpha_{\frac{n}{2}}^r e^{-i\frac{n}{2}\tau} - \alpha_{-\frac{n}{2}}^r e^{i\frac{n}{2}\tau} \right) \cos\left(\frac{n\sigma}{2}\right)$$

がその Hermite 共役

$$-i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}^+} \frac{2}{n} \left\{ \left(\alpha_{\frac{n}{2}}^r \right)^\dagger e^{i\frac{n}{2}\tau} - \left(\alpha_{-\frac{n}{2}}^r \right)^\dagger e^{-i\frac{n}{2}\tau} \cos\left(\frac{n\sigma}{2}\right) \right\}$$

と一致する条件は, 式 (15.73): $\left(\alpha_{\frac{n}{2}}^r\right)^\dagger = \alpha_{-\frac{n}{2}}^r$ となっている.

第 16 章 弦のチャージと電荷

16.1 基本的な弦のチャージ

粒子が Maxwell 場 A_μ と相互作用するのと同様に、弦と関係を持つような場を考えることができる。これを通して弦の [場と相互作用する能力としての] チャージが自然に導入される。

[まず弦と相互作用する場の種類を論じよう.] 作用における弦と場の相互作用項を、荷電粒子と電磁場の相互作用項 $q \int d\tau \frac{dx^\mu}{d\tau} A_\mu$ から類推して

$$- \int d\tau d\sigma \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} B_{\mu\nu}(X(\tau, \sigma)) \quad (1)$$

と書く。ここに $B_{\mu\nu}$ が弦と結合 (相互作用) する、Maxwell 場 A_μ に類似の無質量ゲージ場であり、その値は弦の位置 $X(\tau, \sigma)$ において評価されている。これは荷電粒子と Maxwell 場との結合の自然な一般化になっているので、“電気的な”結合と呼ばれる。ここで

- 作用が Lorentz スカラーとなるためには、 $B_{\mu\nu}$ は 2 階 [共変] テンソルでなければならない。
- 自然単位系において作用が無単位 [無次元] となるためには、場の単位 [次元] は $[B_{\mu\nu}] = M^2$ でなければならない。
- パラメーターの付け替えに対する作用の不変性を保証するには、 $B_{\mu\nu}$ の反対称性が要請される。
 - ただし本節の後の方で言及するように、 σ の増加する向きを入れ替えるようなパラメーターの付け替えに対してまでは作用の不変性を保証することはできない。

以上より $B_{\mu\nu}$ は質量を持たない反対称 2 階テンソル場である。そのような場は Kalb-Ramond (カルブ-ラモン) 場と呼ばれ、それ自身、閉弦理論から現れる状態であることから (13.3 節) その実在性が示唆されている。また閉弦は D-ブレーンによる拘束を受けないことから、全時空に存在する Kalb-Ramond 場を想定できる (p.414, 1.5-7)。

ここで反対称化の記法

$$a^{[\mu} b^{\nu]} \equiv a^\mu b^\nu - a^\nu b^\mu$$

を導入すると [これは言わば“添字に対する交換子”である]、 $B_{\mu\nu}$ が反対称なので相互作用項は

$$-\frac{1}{2} \int d\tau d\sigma B_{\mu\nu}(X(\tau, \sigma)) \frac{\partial X^{[\mu}}{\partial \tau} \frac{\partial X^{\nu]}{\partial \sigma}$$

と書き換えられる。さらに荷電粒子と電磁場の相互作用項が電流密度 j^μ を用いて $\int d^D x A_\mu j^\mu$ と表されたのと同様に、

$$j^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2} \int d\tau d\sigma \delta^D(x - X(\tau, \sigma)) \frac{\partial X^{[\mu}}{\partial \tau} \frac{\partial X^{\nu]}{\partial \sigma} (= -j^{\nu\mu}(x)) \quad (2)$$

を導入すると、相互作用項は全時空にわたる積分

$$- \int d^D x B_{\mu\nu} j^{\mu\nu}$$

に置き換えられる。

[次に $B_{\mu\nu}$ の場の方程式を調べ、これを通して $j^{\mu\nu}$ が保存するカレントであることを説明しよう。通常の電荷保存則 $\partial_\mu j^\mu = 0$ が Maxwell 方程式 $\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$ に含まれているのと同様に、場 $B_{\mu\nu}$ の方程式から保存則 $\partial_\mu j^{\mu\nu} = 0$ が得られることを以下で見ることになる。] 電磁場の強度 (電磁テンソル) $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ に類似の場の強度を完全反対称テンソル

$$H_{\mu\nu\rho} \equiv \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}$$

として定義し (問題 10.6), 弦と場に対する完全な作用を

$$S = S_{\text{str}} - \frac{1}{2} \int d\tau d\sigma B_{\mu\nu}(X(\tau, \sigma)) \frac{\partial X^{[\mu}}{\partial \tau} \frac{\partial X^{\nu]}}{\partial \sigma} - \frac{1}{6\kappa^2} \int d^D x H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho}$$

と書く (S_{str} は弦自体の作用). ただし κ^2 は自由場項を無単位 [無次元] にするために導入してある定数であり, $[H_{\mu\nu\rho}] = M^3$ だから $[\kappa^2] = M^{6-D}$ でなければならない. これは荷電粒子と Maxwell 場の相互作用系に対する完全な作用

$$S = -m \int ds + q \int A_\mu dx^\mu - \frac{1}{4\kappa_0^2} \int d^D x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

と比較される式である (ただし $[A_\mu] = M, [F_{\mu\nu}] = M^2$ を踏まえ, 同じ理由で $[\kappa_0^2] = M^{4-D}$ なる定数 κ_0 を導入してあり, $D = 4$ では $\kappa_0 = 1$ である). このとき最小作用原理から場の方程式

$$\frac{1}{\kappa^2} \partial_\rho H^{\mu\nu\rho} = j^{\mu\nu} \quad (16.14)$$

が導かれる [導出は下記]. これは Maxwell 方程式 $\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$ に類似しており, ここから通常の電荷保存則 $\partial_\mu j^\mu = 0$ が導かれるのと同様に, 保存則

$$\partial_\mu j^{\mu\nu} = \frac{1}{\kappa^2} \partial_\mu \partial_\rho H^{\mu\nu\rho} = 0$$

が得られる. [第 2 の等号は添字 μ, ρ に関して $\partial_\mu \partial_\rho$ が対称であり, $H^{\mu\nu\rho}$ は反対称であることから理解できる.] ここで添字 ν はチャージの種類を指定するラベルと見なされ, 上式はチャージ密度 $j^{0\nu}$ を持つ ν に応じた複数のチャージの保存を意味する. ただし $j^{\mu\nu}$ の反対称性より $j^{00} = 0$ なので, チャージ密度と弦のチャージはそれぞれ空間内のベクトル

$$\vec{j}^0 = (j^{01}, \dots, j^{0d}), \quad \vec{Q} = \int d^D x \vec{j}^0$$

を形成する.

[この弦のチャージの性質を調べよう.] まず保存則 $\partial_\mu j^{\mu\nu} = 0$ は, チャージ密度 \vec{j}^0 が空間において発散を持たないことを含意している:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}^0 = \partial_k j^{0k} = -\partial_\mu j^{\mu 0} = 0. \quad (k \text{ は空間成分})$$

次に静的ゲージ $X^0 = \tau$ を用いて j^{0k} の定義式 (2) を評価すると

$$\vec{j}^0(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \int d\sigma \delta(\vec{x} - \vec{X}(t, \sigma)) \vec{X}'(t, \sigma) \quad (16.23)$$

となる [導出は下記]. これは弦のチャージ密度ベクトル \vec{j}^0 が弦に正接し, σ の増加する方向を指すことを意味している. [このことは弦上に観測位置 \vec{x} を固定すると, σ に関する弦に沿う積分は $\vec{X}(t, \sigma)$ がこの点に一

致するときだけ寄与を持つことから理解できる.] σ の増加する向きを変えるとチャージ密度 \vec{j}^0 の符号は反転する. 弦と Kalb-Ramond 場との結合 (1) が実はこのようなパラメーターの付け替えに対しては不変ではないことを考えれば (問題 16.1), これは不思議ではない. なお弦がこのようなチャージを持つことは, 我々が “向きを持つ (有向の)” 弦を考えていることと関係している.

1 つの簡単な具体例として, x^1 方向に伸びた無限に長い静的な弦

$$X^1(t, \sigma) = f(\sigma), \quad X^2 = X^3 = \dots = X^d = 0$$

を考え, 引き続き静的ゲージを用いて弦のチャージ密度 \vec{j}^0 を評価しよう. [弦が無限に長くなければならない理由は次節参照.] すると \vec{j}^0 の成分は

$$\vec{j}^0(x^1, \vec{x}_\perp; t) = \frac{1}{2} \text{sgn}(f') \delta(\vec{x}_\perp), \quad \vec{x}_\perp \equiv (x^2, \dots, x^d) \quad (16.27)$$

と計算される (他の成分はゼロ) [導出は下記]. ただし $\text{sgn}(a)$ は a の符号である. この結果は弦のチャージが弦の上 ($\vec{x}_\perp = 0$) に局在しており, 向きが f' の符号に, したがって弦の上に与えられた向きによって決まっていることをあからさまに示している.

16.1 節, 式の導出など

■ Kalb-Ramond 場の運動方程式 (16.14) の導出 作用 (16.4):

$$S = S_{\text{str}} - \int d^D x B_{\mu\nu} j^{\mu\nu} - \frac{1}{6\kappa^2} \int d^D x H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho}$$

における自由場項の場 $B_{\mu\nu}$ に関する変分は, 問題 10.6 で既に計算したように

$$\delta \left[-\frac{1}{6\kappa^2} \int d^D x H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right] = \frac{1}{\kappa^2} \int d^D x (\delta B_{\mu\nu}) \partial_\rho H^{\mu\nu\rho}$$

で与えられる. よって作用 S 全体の変分は

$$\delta S = \int d^D x (\delta B_{\mu\nu}) \left(\frac{1}{\kappa^2} \partial_\rho H^{\mu\nu\rho} - j^{\mu\nu} \right)$$

となる. ここで最小作用原理 $\delta S = 0$ から運動方程式を導く際, Kalb-Ramond 場 $B_{\mu\nu}$ は添字に関して反対称であることに注意する. 一般に任意の反対称な変分 $\delta B_{\mu\nu}$ に対して $\delta B_{\mu\nu} G^{\mu\nu} = 0$ となるとき, 得られる条件は $G^{\mu\nu}$ の反対称部分

$$\frac{1}{2} (G^{\mu\nu} - G^{\nu\mu})$$

がゼロになることである (計算練習 16.1(p.356) または問題 16.2). 上式の括弧の中 $\frac{1}{\kappa^2} \partial_\rho H^{\mu\nu\rho} - j^{\mu\nu}$ は既に全体として添字 $\mu\nu$ に関して反対称なので, 場の方程式 (16.14):

$$\frac{1}{\kappa^2} \partial_\rho H^{\mu\nu\rho} = j^{\mu\nu}$$

を得る.

■静的ゲージでの \vec{j}^0 の式 (16.23) の導出 静的ゲージ $X^0 = \tau$ を採用すると, $j^{\mu\nu}$ の定義式 (2):

$$j^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2} \int d\tau d\sigma \delta^D(x - X(\tau, \sigma)) \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} - \frac{\partial X^\nu}{\partial \tau} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \right)$$

におけるデルタ関数は

$$\delta^D(x - X(\tau, \sigma)) = \delta(x^0 - X^0(\tau, \sigma)) \delta(\vec{x} - \vec{X}(\tau, \sigma)) = \delta(t - \tau) \delta(\vec{x} - \vec{X}(\tau, \sigma))$$

となる. よって τ についての積分を実行すると

$$j^{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \int d\sigma \delta(\vec{x} - \vec{X}(t, \sigma)) \left[\frac{\partial X^\mu}{\partial t} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} - \frac{\partial X^\nu}{\partial t} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \right] (t, \sigma) \quad (3)$$

を得る. \vec{j}^0 の成分 j^{0k} (すなわち $\mu = 0, \nu = k$) に関しては, $X^0 = t$ のために上式 [...] 内の第 2 項における $\partial X^0 / \partial \sigma$ がゼロになるから, \vec{j}^0 の式 (16.23):

$$\vec{j}^0(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \int d\sigma \delta(\vec{x} - \vec{X}(t, \sigma)) \vec{X}'(t, \sigma)$$

が導かれる.

■ x^1 方向に伸びた無限に長い静的な弦に対する \vec{j}^0 の式 (16.27) の導出 考えている弦の座標は

$$X^1(t, \sigma) = f(\sigma), \quad X^2 = X^3 = \dots = X^d = 0$$

という形をとる. ここに $f(\sigma)$ は σ の単調増加または単調減少関数で, $-\infty$ から ∞ までを動く. 静的ゲージでの \vec{j}^0 の式 (16.23) により j^{0k} の表式の被積分関数は $X'^k(t, \sigma)$ に比例する. ところが σ に依存する空間座標 X^k は X^1 のみであるので, ゼロでない成分 j^{0k} は j^{01} だけである. これを具体的に計算すると

$$\begin{aligned} j^{01}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{2} \int d\sigma \delta(x^1 - X^1(t, \sigma)) \delta(x^2) \delta(x^3) \dots \delta(x^d) f'(\sigma) \\ &= \frac{1}{2} \delta(x^2) \delta(x^3) \dots \delta(x^d) \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \delta(x^1 - f(\sigma)) f'(\sigma) \end{aligned}$$

となる. $x^1 - f(\sigma) = 0$ は一意的な解 $\sigma(x_1)$ を持ち, これに対してデルタ関数の性質

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \delta(x^1 - f(\sigma)) f'(\sigma) = \frac{f'(\sigma(x^1))}{|f'(\sigma(x^1))|} = \text{sgn}(f'(\sigma(x^1)))$$

が成り立つ. ただし $\text{sgn}(a)$ は a の符号 ± 1 であり, この符号 $\text{sgn}(f'(\sigma(x^1)))$ は f が σ の単調増加関数であるか単調減少関数であるかに応じて, すべての x^1 の値にわたって正 (+1) または負 (-1) である. 最後にこれを j^{01} の式に戻し, 式 (16.27):

$$\vec{j}^{01}(x^1, \vec{x}_\perp; t) = \frac{1}{2} \text{sgn}(f') \delta(\vec{x}_\perp), \quad \vec{x}_\perp \equiv (x^2, \dots, x^d)$$

を得る.

16.1 について

■場の方程式 (16.14) について 両辺がともに添字 μ, ν に関する反対称性を持っていることが見て取れる.

■弦のチャージ \vec{j}^0 のゲージ不変な幾何学的意味について 問題 16.1 を通して見るように、弦のカレント (16.11):

$$j^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2} \int d\tau d\sigma \delta^D(x - X(\tau, \sigma)) \frac{\partial(X^\mu, X^\nu)}{\partial(\tau, \sigma)}$$

は $\text{sgn}\left(\frac{\partial(\tau, \sigma)}{\partial(\tau', \sigma')}\right) = +1$ となるパラメーターの付け替え $\tau, \sigma \rightarrow \tau', \sigma'$ に対して不変なので、 \vec{j}^0 が弦に正接することは静的ゲージを用いて確認されているけれど (pp.356–357), 結果はゲージに依らない意味を持つと考えられる. x^1 方向に伸びた無限に長い静的な弦のチャージ (16.27) も同様である.

■「測度 $d\tau d\sigma$ は符号を変えないけれども」(p.357, l.15,16) について σ の積分範囲の反転も併せて考慮する:

$$\int_0^\pi d\sigma \rightarrow \int_\pi^0 (-d\sigma) = \int_0^\pi d\sigma. \quad (\text{積分範囲は開弦を想定した})$$

■式 (16.25) について $f^{01} \rightarrow j^{01}$ と訂正する.

計算練習 16.1 (p.356)

問題 16.2 の特別な場合. そちらを見よ.

16.2 弦のチャージの可視化

[前節で導入した \vec{j}^0 は保存するチャージの密度であるという意味で、電流密度ではなく電荷密度に対応するけれど、以下で見るようにその性質に関してはむしろ電流密度によく似ている.]

まず静磁気学において電荷密度 ρ は時間変化しないので、電荷保存則より電流密度は発散を持たない. このとき電流は滞ることなく流れ続けることになり、電流が導線の流れているならば導線は閉ループを形成するか、無限に長くなければならない. 一方、前節で学んだように弦のチャージ密度 \vec{j}^0 もまた発散を持たないから、 \vec{j}^0 も同様の条件を満たさなければならない. ところが \vec{j}^0 は弦の接ベクトルだから、これは孤立弦が閉弦または無限に伸びた開弦でなければならないことを意味している.

静磁気学とのアナロジーをさらに推し進めることができる. 簡単のために以下、本節では 4 次元時空を考えよう.

$$H^{0kl} = \varepsilon^{klm} B_{Hm}$$

(ただし ε^{ijk} は全反対称で $\varepsilon^{123} = 1$) のように、場の強度 H^{0kl} に対して双対な場の強度として“磁場” \vec{B}_H を定義すると、場の方程式 $\partial_l H^{0kl} = \kappa^2 j^{0k}$ は $\kappa^2 \vec{j}^0$ を電流密度とする Ampère の式

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_H = \kappa^2 \vec{j}^0 \quad (16.35)$$

になる (これは $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}^0 = 0$ と整合している) [詳しい仮定と導出は下記]. 1 次元閉曲線 Γ とこれを境界を持つ 2 次元世界領域 S に対して、これは積分形

$$\frac{1}{\kappa^2} \oint_\Gamma \vec{B}_H \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{j}^0 \cdot d\vec{a}$$

に書き換えられる. Γ を貫く弦が端点を持たない、あるいは \vec{j}^0 が途切れないことは、与えられた Γ を縁を持つあらゆる曲面 S に対して上式右辺の値が共通であることを保証している. (なお弦が曲線 Γ を貫通するとき、曲線 Γ はその弦にリンクしていると言われる.)

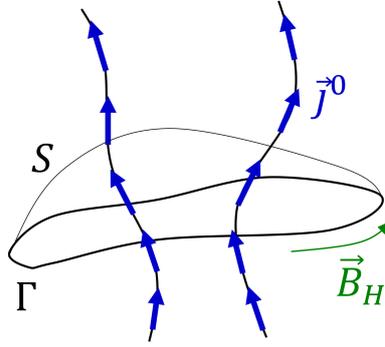


図7 弦のチャージ密度 \vec{j}^0 と “Kalb-Ramond 場” \vec{B}_H に対する “Ampère の法則”

[Ampère の式によれば、定常電流は周りに渦を巻くような静磁場を作る。そしてある曲面 S を貫く電流は、曲面の縁を成す閉曲線に沿う磁場の周回積分から求められる。ところで弦のチャージ密度 \vec{j}^0 は弦に沿っているから、これと同様の仕方でも曲面 S を貫くベクトル \vec{j}^0 の束 (S にわたる \vec{j}^0 の面積積分) を求めれば、曲面 S を貫く弦の数 \mathcal{N} を計算することに繋がると期待される (図7参照)。以下、この点を具体的に定式化しよう。]

$\mathcal{N} = 2 \int_S \vec{j}^0 \cdot d\vec{a}$ とすると、これは $x (= x^1)$ 方向に伸びた無限に長い静的な弦のチャージ密度 (16.27):

$$j^{01} = \frac{1}{2} \delta(y) \delta(z)$$

(ただし $f'(\sigma) > 0$ となる σ のパラメーター付けを仮定した) および弦にリンクする yz 面内の閉曲線 Γ に対して、 $\mathcal{N} = 1$ を与える。これは Γ を $x > 0$ 方向に貫く弦の正しい数になっている。そこで弦の数 \mathcal{N} を

$$\frac{1}{2} \mathcal{N} \equiv \frac{1}{\kappa^2} \oint_{\Gamma} \vec{B}_H \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{j}^0 \cdot d\vec{a}$$

で定義すると、これは一般に Γ を貫く実際の弦の数 N を与える ($\mathcal{N} = N$)。ただし弦の数は向きを考慮して勘定され、面を法線方向と逆向きに貫く弦は \mathcal{N} に対して負の寄与を持つ。

16.2 節、式の導出など

■ “Ampère の式” (16.35) の導出 場の方程式 (16.14):

$$\frac{1}{\kappa^2} \partial_\rho H^{\mu\nu\rho} = j^{\mu\nu}$$

の独立な式は両辺の自由な添字 μ, ν の反対称性により、

- 両方の添字が空間成分のもの $(\mu, \nu) = (i, k)$
- 一方が時間成分、もう一方が空間成分のもの $(\mu, \nu) = (0, k)$

で尽くされる。静的な弦 $\partial X^i / \partial t = 0$ では、(前節の式 (16.23) の導出過程で得られた) 式 (3):

$$j^{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \int d\sigma \delta(\vec{x} - \vec{X}(t, \sigma)) \left[\frac{\partial X^\mu}{\partial t} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} - \frac{\partial X^\nu}{\partial t} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \right] (t, \sigma)$$

により、場の方程式の右辺 j^{ik} がゼロになるので

$$0 = \partial_\rho H^{ik\rho} = \partial_0 H^{ik0} + \partial_l H^{ikl}$$

を得る。これは H の全成分が時間に依存せず ($\partial_0 H^{\mu\nu\rho} = 0$)、また $H^{ikl} = 0$ となる解を持つ。 [$H^{\mu\nu\rho}$ の反対称性により、このときゼロでない独立な成分は H^{0kl} に限られる。上記の要約には明記していないが、この条件の下で H^{0kl} に対する場の方程式を考える.]

$$H^{0kl} = \varepsilon^{klm} B_{Hm}$$

(ただし ε^{ijk} は全反対称で $\varepsilon^{123} = 1$) のように、場の強度 H^{0kl} に対して双対な場の強度として“磁場” \vec{B}_H を定義すると、 $(\mu, \nu) = (0, k)$ としたもう 1 組の場の方程式

$$\partial_l H^{0kl} = \kappa^2 j^{0k}$$

は、 $\kappa^2 \vec{j}^0$ を電流密度とする Ampère の式 (16.34):

$$\kappa^2 j^{0k} = \varepsilon^{klm} \partial_l B_{Hm} = (\vec{\nabla} \times \vec{B}_H)^k$$

になる。

16.2 について

■「ベクトル \vec{B}_H は、 H に対して双対 (dual) な場の強度と呼ばれる」(p.360, 1.1,2) について 添字に関して反対称なテンソルに対しては、双対 (対偶, dual) なテンソルが定義される。例えば 3 階の反対称テンソル $f_{\mu\nu\rho}$ の対偶テンソルは

$$f^{*\lambda} = \frac{1}{3!} \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} f_{\mu\nu\rho}$$

で定義される。反対称性より右辺の和の各項がゼロでない値をとり得るのは、ダミー添字 μ, ν, ρ が相異なる値をとる場合だけである。よって例として $\lambda = 0$ の場合を考えると、 $(1, 2, 3)$ を入れ替えて得られる 3! 個の添字の組 (μ, ν, ρ) を持つ項のみを考えれば良い。そのような組 (μ, ν, ρ) は $(1, 2, 3)$ の偶置換か奇置換のいずれかであり、 $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ と $f_{\mu\nu\rho}$ のそれぞれの添字に関する反対称性より

$$\begin{aligned} \text{偶置換のとき} & \quad \varepsilon^{0\mu\nu\rho} = +\varepsilon^{0123} = +1, & f_{\mu\nu\rho} & = +f_{123}, \\ \text{奇置換のとき} & \quad \varepsilon^{0\mu\nu\rho} = -\varepsilon^{0123} = -1, & f_{\mu\nu\rho} & = -f_{123} \end{aligned}$$

となるので、3! 個の項は全て f_{123} に等しいことが分かる。そこでそれらの和を $1/3!$ で割ったものを対偶テンソル f^{*0} と定義しており、具体的には上の関係は

$$f^{*0} = f_{123}, \quad f^{*1} = -f_{230}, \quad f^{*2} = f_{301}, \quad f^{*3} = -f_{012}$$

を与えることが分かる。3 階以外の反対称テンソルに対偶なテンソルも同様に定義される [2, pp.62–64].

今の場合、双対な場の強度 \vec{B}_H の定義式 (16.33) は具体的には

$$B_{H1} = H^{023}, \quad B_{H2} = H^{031}, \quad B_{H3} = H^{012}$$

を与える。双対テンソルはこのような関係をまとめて表現するのに有用である。

■ \mathcal{N} の式 (16.37) について これを弦の数 \mathcal{N} の定義と言っているのは、高次元において指定された空間にリンクされる弦の本数の意味があらかじめ明らかでないという事情によるものと想像される。

■式 (16.38) について $f^{01} \rightarrow j^{01}$ と訂正する。また j^{01} の式 (16.38) では、したがって x^1 方向に伸びた無限に長い静的な弦に対して $\mathcal{N} = 2 \int_S \vec{j}^0 \cdot d\vec{a}$ の値を具体的に評価する部分に関しては、静的ゲージにおける式 (16.23) に依拠していることになるけれど、結果として得られる弦の数はゲージに依らないと考えられる。

■最終段落について 弦の数と Kalb-Ramond 場の関係について、教科書では電荷と電場の関係との類似性を強調しているけれど、これは弦理論とは無関係に、電磁気学における Gauss の法則と Ampère の法則の類似性を述べているに過ぎないように見える。そこで本稿では単純に Ampère の法則の類似性を強調する形でまとめた。あるいはより高い空間次元を考えれば、Gauss の法則の方が弦理論の優れたアナロジーとなるのかもしれない。

計算練習 16.2 (p.361)

$(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x, y, z, w)$ と略記すると、

$$x = 0, \quad y^2 + z^2 + w^2 = a^2$$

で与えられると想像される。

16.3 D-ブレーンに接続する端点を持つ弦

- D-ブレーン内の Maxwell 場の源となる電荷は存在するか。
- D-ブレーンに接続した弦の端点でチャージ密度 \vec{j}^0 は止められ、チャージの保存はそこで破綻するのだろうか。

これらの問いは互いに関係している。以下で見るように、チャージを保存するゲージ不変な理論を得るには弦の端点に電荷を与えれば良く、これが D-ブレーン内に電場を作る。そしてチャージ密度 \vec{j}^0 は電場に担われ D-ブレーン内に流れ込み、実際にチャージが保存する。

場の古典論の復習 電磁気学におけるゲージ不変性と電荷保存則の関係から始めよう。まず理論がゲージ不変性を説明する。荷電粒子と電磁場の相互作用系について、粒子の作用 $-m \int ds$ は明らかにゲージ不変であり、また電磁場の強度 $F_{\mu\nu}$ そのものは、したがって作用の自由場項 $-\frac{1}{4\kappa_0} \int d^D x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ はゲージ不変である。さらに作用の相互作用項 (結合項) $S_{\text{coup}} = q \int A_\mu dx^\mu$ もゲージ変換 $\delta A_\mu = \partial_\mu \varepsilon$ に対して不変である：

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \delta A_\mu(x(\tau)) \frac{dx^\mu}{d\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\partial \varepsilon(x(\tau))}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{d\varepsilon(x(\tau))}{d\tau} = [\varepsilon(x(\tau))]_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} = 0.$$

ただし時刻 $t = \pm\infty$ において、したがって粒子の固有時間 $\tau = \pm\infty$ においてゲージパラメーター $\varepsilon(x)$ はゼロになると仮定した。[以上は一見すると電荷保存則とは無関係にゲージ不変性が成立することの証明のようであるが、実際には電荷 q が一定であることを既に用いている。この点については次節のノートを参照。]

次にゲージ不変性は電荷保存則と密接な関係にあることを説明する。そのためには結合項を $S_{\text{coup}} = \int d^D x A_\mu j^\mu$ と書くのが便利である。ここでもパラメーター ε が [時間と空間の] 無限遠でゼロになることを仮定して部分積分を行うと、ゲージ変換に伴う作用の変化は

$$\delta S = \delta S_{\text{coup}} = \int d^D x (\partial_\mu \varepsilon) j^\mu = - \int d^D x \varepsilon (\partial_\mu j^\mu)$$

と計算される。ここで電荷の保存 $\partial_\mu j^\mu = 0$ がそのままゲージ不変性 $\delta S = 0$ を意味することを見て取れる。

同様に作用においてゲージ不変性が非自明な結合項 $S_B = - \int d^D x B_{\mu\nu} j^{\mu\nu}$ を考えると、この項が $B_{\mu\nu}$ のゲージ変換

$$\delta B_{\mu\nu} = \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu$$

に対して不変であれば保存則 $\partial_\mu j^{\mu\nu} = 0$ が成立することが分かる (計算練習 16.3(p.362)). 次にこの項が実際にゲージ不変であるかを調べよう. そのために結合項の表式

$$S_B = -\frac{1}{2} \int d\tau d\sigma B_{\mu\nu}(X) \frac{\partial X^{[\mu}}{\partial \tau} \frac{\partial X^{\nu]}{\partial \sigma}$$

を採用して, そのゲージ変換に伴う変化量を計算すると

$$\delta S_B = \int d\tau d\sigma \partial_\sigma (\Lambda_\nu \partial_\tau X^\nu) = \begin{cases} 0 & \text{(閉弦)} \\ \int d\tau \Lambda_m \partial_\tau X^m \Big|_{\sigma=\pi} - \int d\tau \Lambda_m \partial_\tau X^m \Big|_{\sigma=0} & \text{(開弦)} \end{cases} \quad (16.53)$$

となる [導出は下記]. ただし $m = 0, 1, \dots, p$ は [時間成分を含めた] ブレインに沿う方向成分 [本節では図 16.2(p.364) のように開弦として, 15.2 節で見た両端を共通の Dp-ブレイン上に持つ弦を考えている]. こうして開弦では 2 つの境界項のために, ゲージ不変性は破綻する. [開弦の δS_B は変分をとると落ちるような, 運動方程式に影響を与えない項にもなっていない (NN 座標 X^m は端点で固定されていない).] これは [冒頭で問うたように,] 弦のチャージの保存が, 開弦の端点において破綻することを表している.

そこでゲージ不変性を回復するために, 弦の端点に電荷を与えるような Maxwell 場との結合項を付け加え,

$$S_{\text{coup}} = S_B + \int d\tau A_m(X) \partial_\tau X^m \Big|_{\sigma=\pi} - \int d\tau A_m(X) \partial_\tau X^m \Big|_{\sigma=0}$$

とする. ただし慣例に従い, 始点 $\sigma = 0$ の電荷を $q = -1$, 終点 $\sigma = \pi$ の電荷を $+1$ に選んだ [自然単位系で電荷は無次元]. その上で $B_{\mu\nu}$ のゲージ変換と同時に Maxwell 場を

$$\delta A_m = -\Lambda_m$$

と変換すれば S_{coup} の, したがって全作用の不変性が保証される. [これはゲージ変換 (16.41): $\delta A_\mu = \partial_\mu \varepsilon$ とは別の変換である.] このとき

$$\delta F_{mn} = -\delta B_{mn} \quad (16.57)$$

となるので [導出は下記], F_{mn} はゲージ不変ではなく, 代わりに

$$\mathcal{F}_{mn} \equiv F_{mn} + B_{mn}$$

が不変となる.

Maxwell 場のラグランジアン密度をゲージ不変に一般化した $-\frac{1}{4} \mathcal{F}^{mn} \mathcal{F}_{mn}$ からは $-\frac{1}{2} F^{0k} B_{0k}$ という項が現れる. 電場 $F^{0k} = E_k$ はチャージ密度 j^{0k} と同様に場 B_{0k} に結合しており, したがって j^{0k} と同じ資格でチャージを担うと考えられる. すると端点におけるチャージの保存則の破綻は次のように解決する. すなわち図 8 のように弦が D-ブレインに端点を持つとすると, 弦の端点は電荷を持ち, D-ブレインの内部 (だけ) に電場線を作る. チャージ密度 \vec{j}^0 は電場に担われて D-ブレインの “内部へ” 流れ込むため, 端点で止まらず保存則を破らない.

16.3 節, 式の導出など

■結合項 S_B のゲージ変換の式 (16.53) の導出 2 次元パラメータ空間の添字 $\alpha, \beta = 0, 1$ を導入し, $\varepsilon^{\alpha\beta}$ を $\varepsilon^{01} = 1$ となる反対称因子, $\partial_0 = \partial/\partial\tau, \partial_1 = \partial/\partial\sigma$ とすると, 結合項は

$$S_B = -\frac{1}{2} \int d\tau d\sigma \frac{\partial X^{[\mu}}{\partial \tau} \frac{\partial X^{\nu]}{\partial \sigma} B_{\mu\nu}(X(\tau, \sigma)) = -\frac{1}{2} \int d\tau d\sigma \varepsilon^{\alpha\beta} (\partial_\alpha X^\mu) (\partial_\beta X^\nu) B_{\mu\nu}(X(\tau, \sigma)) \quad (16.45)$$

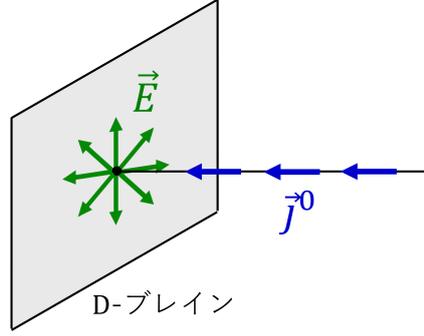


図8 チャージ密度 \vec{j}^0 は端点の持つ電荷の作る電場 \vec{E} に担われ、D-ブレイン内に流れ込む

と書ける [本稿次節で補足]. 場のゲージ変換

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B'_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + \delta B_{\mu\nu}, \quad \delta B_{\mu\nu} = \frac{\partial \Lambda_\nu}{\partial X^\mu} - \frac{\partial \Lambda_\mu}{\partial X^\nu}$$

に伴う S_B の変化量 δS_B を計算しよう. S_B の式 (16.45) において $B_{\mu\nu}$ に掛かっている項 (説明のために $A^{\mu\nu}$ と書こう) は μ と ν に関して反対称なので [本稿次節で補足], $\delta B_{\mu\nu}$ の2つの項は変化量 δS_B に同じ寄与を持つ:

$$-A^{\mu\nu} \frac{\partial \Lambda_\mu}{\partial X^\nu} = -A^{\nu\mu} \frac{\partial \Lambda_\nu}{\partial X^\mu} = A^{\mu\nu} \frac{\partial \Lambda_\nu}{\partial X^\mu}.$$

このため

$$\delta S_B = - \int d\tau d\sigma \varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial \Lambda_\nu}{\partial X^\mu} (\partial_\alpha X^\mu) (\partial_\beta X^\nu) = - \int d\tau d\sigma \varepsilon^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \Lambda_\nu) (\partial_\beta X^\nu)$$

とできる. 添字 $\alpha, \beta = 0, 1$ を用いた表現の恩恵にあずかるのは上式だけであり, τ, σ を用いた具体的な表現に直すと

$$\begin{aligned} \delta S_B &= - \int d\tau d\sigma \{ (\partial_\tau \Lambda_\nu) (\partial_\sigma X^\nu) - (\partial_\sigma \Lambda_\nu) (\partial_\tau X^\nu) \} \\ &= - \int d\tau d\sigma [\{ \partial_\tau (\Lambda_\nu \partial_\sigma X^\nu) - \Lambda_\nu \partial_\tau \partial_\sigma X^\nu \} - \{ \partial_\sigma (\Lambda_\nu \partial_\tau X^\nu) - \Lambda_\nu \partial_\sigma \partial_\tau X^\nu \}] \\ &= - \int d\tau d\sigma \{ \partial_\tau (\Lambda_\nu \partial_\sigma X^\nu) - \partial_\sigma (\Lambda_\nu \partial_\tau X^\nu) \} \end{aligned}$$

となる. Λ は時間の端点においてゼロになると仮定するので, 最右辺の $\partial_\tau(\dots)$ の項は寄与を持たない. また閉弦では σ には境界がないので (あるいは境界 $\sigma = 0, 2\pi$ が閉弦上の同じ位置を表すので), $\partial_\sigma(\dots)$ の項も寄与を持たない. よって

$$\delta S_B = 0 \quad (\text{閉弦に対して})$$

である.

これに対して開弦では $\partial_\sigma(\dots)$ の項が残り,

$$\delta S_B = \int d\tau d\sigma \partial_\sigma (\Lambda_\nu \partial_\tau X^\nu) = \int d\tau [\Lambda_\nu \partial_\tau X^\nu]_{\sigma=0}^{\sigma=\pi}$$

となる。ブレインに垂直な方向の弦座標 X^a は境界で Dirichlet 境界条件 $\partial_\tau X^a = 0$ を満たすので、 Dp -ブレインの世界領域に沿った方向 (時間方向を含む) を $X^m (m = 0, 1, \dots, p)$ で表すと、式 (16.53):

$$\delta S_B = \int d\tau \Lambda_m \partial_\tau X^m \Big|_{\sigma=\pi} - \int d\tau \Lambda_m \partial_\tau X^m \Big|_{\sigma=0}$$

が得られる。

■式 (16.57) の導出 ゲージ変換

$$\delta B_{\mu\nu} = \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu, \quad \delta A_m = -\Lambda_m$$

に対して

$$\delta F_{mn} = \partial_m \delta A_n - \partial_n \delta A_m = -\partial_m \Lambda_n + \partial_n \Lambda_m = -\delta B_{mn} : (16.57).$$

16.3 について

■「すべての D -ブレインの世界領域には Maxwell 場が存在する」(16.3 節, l.1) について ただし 15.4 節における平行な Dp -ブレインと Dq -ブレインの間の弦 ($p > q$) では、質量を持たないゲージ場は見出されなかった。要約にも書いたように、本節では図 16.2(p.364) のように開弦として、15.2 節で見た両端を共通の Dp -ブレイン上に持つ弦を考えて計算を行っている。

■結合項 S_B の式 (16.45) について

$$\varepsilon^{\alpha\beta} (\partial_\alpha X^\mu) (\partial_\beta X^\nu) = (\partial_\tau X^\mu) (\partial_\sigma X^\nu) - (\partial_\sigma X^\mu) (\partial_\tau X^\nu) = \frac{\partial X^{[\mu}}{\partial \tau} \frac{\partial X^{\nu]}}{\partial \sigma}$$

による。これは「式 (16.45) において $B_{\mu\nu}$ に掛けられている因子は、 μ と ν に関して反対称である (確認せよ!)」(p.363 下から 10,9 行目) ことの確認にもなっている。

■式 (16.47) におけるゲージ不変性の説明について これは一見すると電荷保存則とは無関係に理論のゲージ不変性が成立することを示しており、他方、式 (16.42) を見るとこれが電荷保存則 $\partial_\mu j^\mu = 0$ を帰結するかのような印象を与え得る。しかしながら厳密には式 (16.47) におけるゲージ不変性の説明もまた電荷の保存を暗に仮定しているのである。実際、結合項 S_{coup} における係数の電荷 q が定数でなく時間の関数 $q(t)$ であるならば、これを積分の外に出してゲージ変換に伴う S_{coup} の変化量を式 (16.47) のように計算することはできない。結局ここでは実際にはゲージ不変性と電荷保存則の関係を、 S_{coup} の 2 つの表式 $q \int A_\mu dx^\mu$, $\int j_\mu A^\mu d^D x$ に応じた 2 通りの仕方で見たとことになる [3, p.56, p.83].

もう 1 点付け加えると、ゲージ変換に伴う作用の変化 (16.42) は保存則 $\partial_\mu j^\mu = 0$ が成り立てば

$$\delta S_{\text{coup}} = \int d^D x \partial_\mu (\varepsilon j^\mu)$$

と書き換えられる。これは与えられた境界の値で決まるような、変分をとると落ちる項となっているため、運動方程式に影響を与えない。ゲージ変換に伴う作用の変化 (16.47) の最右辺も同様である。したがってゲージパラメーター ε が $\tau = \pm\infty$ や空間の無限遠で消えることを仮定して作用の不変性までも要求せずとも、理論はゲージ不変となっている [3, p.56, p.83].

まとめ 以上を踏まえると、ゲージ不変性と電荷保存則の関係は改めて次のようにまとめられる (以下では光速 c を明記). 作用のゲージ不変性が非自明な項は粒子と場の相互作用項であり, その 2通りの表現

$$S_{\text{mf}} = - \sum \frac{q}{c} \int A_\mu dx^\mu, \quad S_{\text{mf}} = - \frac{1}{c^2} \int A_\mu j^\mu d^4x$$

に応じてゲージ不変性と電荷保存則の関係を 2通りに見ることができる. 相互作用項 S_{mf} のゲージ変換 $\delta A_\mu = \partial_\mu \varepsilon$ に伴う変化

$$\delta S_{\text{mf}} = - \sum \frac{q}{c} \int d\varepsilon, \quad \delta S_{\text{mf}} = - \frac{1}{c^2} \int (\partial_\mu \varepsilon) j^\mu d^4x$$

は電荷保存則により q が時間に依らない定数であれば, あるいは連続の式 $\partial_\mu j^\mu = 0$ が成り立てば, それぞれ

$$\delta S_{\text{mf}} = - \sum \int d \left(\frac{q}{c} \varepsilon \right), \quad \delta S_{\text{mf}} = - \frac{1}{c^2} \int \partial_\mu (\varepsilon j^\mu) d^4x$$

となる. これらは与えられた境界の値で決まるような, 変分をとると落ちる量となっているから, 運動方程式は不変に保たれる. (ここでの δ はゲージ変換に伴う変化量を表し, 変分の意味ではないことに注意する.) こうしてゲージ不変性と電荷保存則は密接に関係している.

■弦の端点に電荷を与えるような式 (16.54) の結合項について 16.1 節では次のように予告されていた. 「開弦の端点が Maxwell 電荷を持つという仮定が有望に見える. 我々は後から, この仮定の正当性を示す予定である」 (p.354, 1.6,7). ここではこの予告に答える形で, ゲージ不変性の要請から開弦の端点に Maxwell 電荷が導入されたことになる.

■論理展開の整理 16.1 節でチャージの保存則が得られたにも関わらず理論のゲージ不変性が破れているというのは矛盾であり, 本節の議論は, 実際にはゲージ不変性は破れておらず, したがってチャージは保存するという方向での矛盾の解消と理解できる (付録 A 参照).

なお教科書 p.360 の訳註にあるように, 「開弦が Kalb-Ramond チャージの保存則を破らずに端点を持つためには, その接続先として, 前節や本節 [16.1 節, 16.2 節] では想定されていない D-ブレーンの存在が不可欠ということになる」. (16.2 節までの議論は D-ブレーンをあからさまには想定していないとは言え, D-ブレーンが存在していたとしても Kalb-Ramond 場の運動方程式に関する議論はそのまま成り立つと考えられる.)

計算練習 16.3 (p.362)

保存則 $\partial_\mu j^{\mu\nu} = 0$ は弦と Kalb-Ramond 場の結合項のゲージ不変性

$$\delta \left[- \int d^D x B_{\mu\nu} j^{\mu\nu} \right] = - \int d^D x (\partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu) j^{\mu\nu} = -2 \int d^D x (\partial_\mu \Lambda_\nu) j^{\mu\nu} = 2 \int d^D x \Lambda_\nu (\partial_\mu j^{\mu\nu}) = 0$$

を意味する. 保存則 $\partial_\mu j^{\mu\nu} = 0$ が成り立てば, 第 3 の等号で部分積分を行った際, たとえ境界項

$$\delta \left[- \int d^D x B_{\mu\nu} j^{\mu\nu} \right] = -2 \int d^D x \partial_\mu (\Lambda_\nu j^{\mu\nu})$$

が消えずに残ったとしても, これは変分を取ると落ちるから運動方程式をゲージ不変に保つ.

16.4 D-ブレインのチャージ

まずは第 16 章冒頭の序文における, 16.4 節の要約にあたる箇所を引用しよう.

超弦理論におけるある種の D-ブレインは, 閉じた超弦に起因する Ramond-Ramond 場に対するチャージを担う. チャージを持っていて, 空間次元がコンパクト化の方向に限定されているようなブレインは, 低次元の観測者にとって, R-R 場から次元低減によって生じている Maxwell 場に対して電荷を持つ点粒子のように見える.

さて, このことを具体的に見ていく. 弦が Kalb-Ramond 場に対する電気的なチャージを持つと同様に, Dp -ブレインが電気的なチャージを持つためには, その座標 X^μ は作用において $p+1$ 個の添字を持つ無質量の反対称テンソル場 $A_{\mu\mu_1\dots\mu_p}$ と次のように結合すれば良い.

$$S_p = - \int d\tau d\sigma^1 \dots d\sigma^p \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X^{\mu_1}}{\partial \sigma^1} \dots \frac{\partial X^{\mu_p}}{\partial \sigma^p} A_{\mu\mu_1\dots\mu_p}(X(\tau, \sigma^1, \dots, \sigma^p)).$$

ただし $(\tau, \sigma^1, \dots, \sigma^p)$ は Dp -ブレインが時空に描く $(p+1)$ 次元の世界領域をパラメトライズする座標の組である. 自然単位系において作用は無単位なので, 場は $[A_{\mu\mu_1\dots\mu_p}] = M^{p+1}$ という自然次元を持たなければならない.

ボゾンの閉弦の理論では Kalb-Ramond 場以外には無質量の反対称テンソル場がないので [13.3 節], Dp -ブレインはチャージを持つことができない. [弦はチャージを持つが, $p=1$ のブレインではない (15.1 節).] 他方 14.8 節で見たように, IIA 型と IIB 型の閉じた超弦の理論では, 以下の無質量の反対称テンソル場 A_{\dots} が付け加わる.

- IIA 型

$A_\mu \rightarrow$ D0-ブレインに結合

$A_{\mu\nu\rho} \rightarrow$ D2-ブレインに結合

- D0, D2, D4, ……は安定になることが知られている (IIB 型では不安定).
- 実は D4, D6, D8 の持つチャージは“磁氣的”と呼ばれるものになり, ここでの考察の対象 (電気的なチャージを担う物体) とならない.

- IIB 型

$A \rightarrow$ 通常のいかなる D-ブレインとも結合しない

(D-インスタントンと呼ばれるものに電気的に結合する)

$A_{\mu\nu} \rightarrow$ D1-ブレインに結合

$A_{\mu\nu\rho\sigma} \rightarrow$ D3-ブレインに結合

- D1, D3, D5, ……は安定になることが知られている (IIA 型では不安定).
- 実は D5, D7, D9 の持つチャージは“磁氣的”と呼ばれるものになり, ここでの考察の対象 (電気的なチャージを担う物体) とならない.

[以下の議論では無質量の反対称テンソル場 A_{\dots} として, 具体的にはこれらの場が想定されることになる.]

次にブレインの持つ Maxwell 電荷を見出すには, Dp -ブレインがコンパクト化した p 個の方向に巻き付いている場合を考えるのが容易である. 実際, 以下で見るように, このときにはコンパクト化していない低次元の空間においてブレインが点粒子に見えることに関して, 結合項 S_p を荷電粒子と電磁場の相互作用項

$-q \int A_\mu dx^\mu$ の形に帰着させることができる。

- コンパクト化方向の弦座標 $X^k (k = 1, \dots, p)$
コンパクト化した p 個の座標を x^1, \dots, x^p とし、
各方向 $k = 1, \dots, p$ が半径 R^k の円になっているものとしてパラメーター $\sigma^k \in [0, 2\pi]$ を導入すると、
弦座標 X^k は σ^k が 2π 変化する際に $2\pi R^k$ だけ変化するので

$$X^k(\tau, \sigma^1, \dots, \sigma^p) = R^k \sigma^k \quad (k \text{ で和をとらない})$$

と表される。(そのように σ^k を導入できる。)

- コンパクト化していない方向の弦座標 X^m
前述のように実効的な低次元時空においてブレインは点粒子に見える。
これはコンパクト化していない方向の弦座標が

$$X^m(\tau, \sigma^1, \dots, \sigma^p) = x^m(\tau)$$

と表されることを意味する。

このとき結合項は

$$S_p = - \int d\tau d\sigma^1 \dots d\sigma^p \frac{dX^m}{d\tau} R^1 \dots R^p A_{m1\dots p}(X(\tau, \sigma^1, \dots, \sigma^p)) \quad (16.68)$$

と書き換えられる [導出は下記]。このように場 A_{\dots} の 1 つを除くすべての添字がコンパクト化方向の指標 $1, \dots, p$ に充てられることになる。さらに低次元時空における記述として、場 A_{\dots} のコンパクト化した次元への依存性を省略して

$$A_{m1\dots p}(X(\tau, \sigma_1, \dots, \sigma_p)) = A_{m1\dots p}(X^m(\tau) X^k(\sigma^k)) \rightarrow A_{m1\dots p}(x^m(\tau))$$

と書くと σ^k に関する積分を実行でき、

$$S_p = -V_p \int dx^m A_{m1\dots p}(x^m(\tau)),$$

$V_p \equiv (2\pi R^1) \dots (2\pi R^p)$: コンパクト化した空間の体積

を得る。[ここまでで目標とする形 $-q \int A_\mu dx^\mu$ にたどり着いたが、最後に物理量の単位 (次元) を考える必要がある。] ゲージ場が [通常の Maxwell A_μ と同様に] 期待される質量の単位を持つためには、ゲージ場 \bar{A}_m を

$$\frac{1}{(\alpha')^{p/2}} \bar{A}_m(x^m(\tau)) \equiv A_{m1\dots p}(x^m(\tau))$$

で導入すれば良い。すると

$$S_p = -\frac{V_p}{(\alpha')^{p/2}} \int dx^m \bar{A}_m(x^m(\tau))$$

となり、ブレインの Maxwell 電荷は

$$Q = \frac{V_p}{(\alpha')^{p/2}} = \frac{V_p}{(l_s)^p}$$

と同定される。こうすれば電荷 Q は要請されるように無単位の量として得られ、これは弦の長さ l_s の p 乗を単位として測ったブレインの体積となっている。

16.4 節, 式の導出など

■結合項 S_p の式 (16.68) の導出

$$S_p = - \int d\tau d\sigma^1 \cdots d\sigma^p \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X^{\mu_1}}{\partial \sigma^1} \cdots \frac{\partial X^{\mu_p}}{\partial \sigma^p} A_{\mu\mu_1\cdots\mu_p}(X(\tau, \sigma^1, \cdots, \sigma^p))$$

において σ^k に依存するのは X^k だけなので, $\mu_k = k$ の項だけが寄与を持つから

$$S_p = - \int d\tau d\sigma^1 \cdots d\sigma^p \frac{dX^\mu}{d\tau} R^1 \cdots R^p A_{\mu 1 \cdots p}(X(\tau, \sigma^1, \cdots, \sigma^p))$$

となる. テンソル場 A_{\dots} は完全反対称なので, ゼロでない成分は最初の添字 μ が $1, \dots, p$ 以外の (すなわちコンパクト化していない方向の) 値 m をとらなければならないから, 式 (16.68):

$$S_p = - \int d\tau d\sigma^1 \cdots d\sigma^p \frac{dX^m}{d\tau} R^1 \cdots R^p A_{m 1 \cdots p}(X(\tau, \sigma^1, \cdots, \sigma^p))$$

を得る.

16.4 について

■D-ブレーンのチャージと弦の Kalb-Ramond チャージ 弦は D1-ブレーンではないから (15.1 節), ここで得たブレーンの電荷 Q と式 (16.20) における弦のチャージ \vec{Q} は別物である.

■p.369 訳註の引用

- 「テンソル場 A_{\dots} から次元低減によって生じた Maxwell 場」(p.369, 1.17) \bar{A}_m について
つまり, 本書におけるここまでの説明から, Maxwell 場として,
 - (1) 開弦の無質量状態そのものに対応し, D-ブレーン内に生じるタイプと,
 - (2) 閉弦の無質量テンソル状態に起因し,
余剰次元のコンパクト化の後に残った実効次元に現れるタイプ
の 2 種類を見たことになる.
- 「実効次元に拡がりを持たない Dp -ブレーンは, 電荷を持つ点粒子として振る舞う」(p.369, 1.23,24)
ことについて
このように実効空間において“点粒子”と見なされるような Dp -ブレーンは, たとえば, ある種のブラックホールの微視的モデルの構築に利用されることになる. 22.7 節参照.

問題 (第 16 章)

問題 16.1 弦 / Kalb-Ramond 場結合のパラメーター付け替え不変性

16.1 節の p.354, p.357 で言及されている問題 16.1 を解く.

$B_{\mu\nu}$ の反対称性を仮定すれば, 作用における弦と場の結合した項 (16.3) は

$$-\frac{1}{2} \int d\tau d\sigma \frac{\partial X^{[\mu}}{\partial \tau} \frac{\partial X^{\nu]}}{\partial \sigma} B_{\mu\nu}(X(\tau, \sigma))$$

と書き換えられる。ここに $\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma}$ は Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(X^\mu, X^\nu)}{\partial(\tau, \sigma)}$$

に他ならず、

$$\frac{\partial(X^\mu, X^\nu)}{\partial(\tau, \sigma)} d\tau d\sigma = \text{sgn}(\gamma) \frac{\partial(X^\mu, X^\nu)}{\partial(\tau, \sigma)} \frac{\partial(\tau, \sigma)}{\partial(\tau', \sigma')} d\tau' d\sigma' = \text{sgn}(\gamma) \frac{\partial(X^\mu, X^\nu)}{\partial(\tau', \sigma')} d\tau' d\sigma'$$

と変換される。ただし第 1 の等号において $d\tau d\sigma$ を変換する際、Jacobi 行列式 $\frac{\partial(\tau, \sigma)}{\partial(\tau', \sigma')}$ の絶対値をとる代わりに、等価的に因子

$$\text{sgn}(\gamma) \equiv \text{sgn} \left(\frac{\partial(\tau, \sigma)}{\partial(\tau', \sigma')} \right)$$

を導入した。以上より

$$-\frac{1}{2} \int d\tau d\sigma \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} B_{\mu\nu}(X) = -\text{sgn}(\gamma) \frac{1}{2} \int d\tau' d\sigma' \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau'} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma'} B_{\mu\nu}(X)$$

となるので、 $\text{sgn}(\gamma) = +1$ となるパラメーターの付け替えに対してこれは不変に保たれ、 $\text{sgn}(\gamma) = -1$ に対しては符号を変える。よく知られているように、 $\text{sgn}(\gamma) = -1$ となるのは変換 $(\tau, \sigma) \rightarrow (\tau', \sigma')$ が“空間反転”を伴う場合である。そのような 2 つの具体例として、

- σ の増大する向きの入れ替え $\tau' = \tau, \sigma' = \pi - \sigma$
- τ と σ の入れ替え $\tau' = \sigma, \sigma' = \tau$

が挙げられる。これらに対して実際に

$$\gamma \equiv \frac{\partial(\tau, \sigma)}{\partial(\tau', \sigma')} = \frac{\partial \tau}{\partial \tau'} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma'} - \frac{\partial \tau}{\partial \sigma'} \frac{\partial \sigma}{\partial \tau'} < 0$$

となることが直接確かめられる。

問題 16.2 反対称な変分と運動方程式

16.1 節 p.356, l.2 で言及されている問題 16.2 を解く。

場 $B_{\mu\nu}$ が反対称ならば、変分をとる際に反対称性 $\delta B_{\mu\nu} = -\delta B_{\nu\mu}$ を満たす変分を考えなければならない。よって $\delta B_{\mu\nu}$ と $\delta B_{\nu\mu}$ は独立には選べないから、任意の反対称な変分 $\delta B_{\mu\nu}$ に対して $(\delta B_{\mu\nu})G^{\mu\nu} = 0$ であっても、直ちに $G^{\mu\nu} = 0$ とは言えない。

$$\begin{aligned} (\delta B_{\mu\nu})G^{\mu\nu} &= \sum_{\mu > \nu} \{(\delta B_{\mu\nu})G^{\mu\nu} + (\delta B_{\nu\mu})G^{\nu\mu}\} \quad (\because \delta B_{\mu\mu} = 0, \mu \text{ で和をとらない}) \\ &= \sum_{\mu > \nu} (\delta B_{\mu\nu})(G^{\mu\nu} - G^{\nu\mu}) \end{aligned}$$

であり、 $\mu > \nu$ を満たす成分 $\delta B_{\mu\nu}$ に限ればこれらを独立に選ぶことができるから、正しくは $G^{\mu\nu} - G^{\nu\mu} = 0$ が導かれる。これは $G^{\mu\nu}$ が反対称部分を持たないことを意味している。

第 17 章 閉弦の T 双対性

17.1 双対対称性とハミルトニアン

一般に、物理学における“双対性” (duality) という言葉は、互いに異なる記述を持つけれども、同じ物理を含むような 2 つの系の間の関係を指す術語として用いられる。閉弦の理論ではひとつの次元が半径 R に巻き取られた世界と、ひとつの次元が半径 α'/R に巻き取られた世界 (α' は長さの自乗の次元を持つことを思い出そう) を互いに関係づける双対対称性が存在し、如何なる R の値の下でも両者の世界を区別できない。この対称性は T 双対性と呼ばれ、T はトロイダル (toroidal) を、トロイダル (輪環型) はコンパクト化した空間が輪環 (トーラス) 状であることを意味する。

本節では馴染みのある電磁気学と力学を題材にとり、これらに見出される双対対称性について論じる。

源のない Maxwell 方程式

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\end{aligned}$$

は“双対変換”

$$(\vec{E}, \vec{B}) \rightarrow (-\vec{B}, \vec{E})$$

に対して不変になっている。

- 電磁場のラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (E^2 - B^2)$$

は双対変換に対して符号を変えるけれど、導かれる場の方程式は変わらない。

- エネルギー (ハミルトニアン) は $(E^2 + B^2)$ の体積積分に比例し、これは双対変換に対して不変になる。

次に力学の例に移ろう。単純調和振動子の運動方程式

$$m\ddot{x} = -kx$$

は双対変換

$$(m, k) \rightarrow \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{m} \right)$$

の下で不変である。ハミルトニアン

$$H(m, k) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2$$

は双対変換と同時に正準変換 $(x, p) \rightarrow (p, -x)$ を行えば不変である。

17.1 について

■ハミルトニアンが $(E^2 + B^2)$ の体積積分に比例すること (p.374) について 自由な、すなわち物質と相互作用しない電磁場を考える。電磁場 A_μ に共役な場は $\pi_\mu = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{A}_\mu = F^{\mu 0}$ なので、ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \pi^\mu \dot{A}_\mu - L \\ &= \int d^3x \left(F^{\mu 0} \partial_0 A_\mu + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \\ &= \int d^3x \left(\frac{E^2 + B^2}{2} + \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \phi \right) \\ &\quad (\because F^{\mu 0} \partial_0 A_\mu = E_i (-\partial_0 A_i) = \vec{E} \cdot (\vec{E} + \vec{\nabla} \phi), \quad F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(B^2 - E^2)) \\ &= \int d^3x \frac{E^2 + B^2}{2} \quad (\because \text{部分積分により } \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \phi \rightarrow -(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\phi = 0) \end{aligned}$$

と計算される。実際 $(E^2 + B^2)/2$ は場のエネルギー密度と解釈される量である。

■式 (17.9): $(x, p) \rightarrow (p, -x)$ が正準変換であることの説明 (p.375) について 変換 $p_i, q_i \rightarrow P_i, Q_i$ が正準変換となる条件は Poisson 括弧 $\{\dots\}$ を用いて

$$\{Q_i, Q_j\}_{p,q} = 0, \quad \{P_i, P_j\}_{p,q} = 0, \quad \{P_i, Q_j\}_{p,q} = \delta_{ij}$$

と表される [4, p.184].

あるいは変換 $(x, p) \rightarrow (X, P) = (p, -x)$ が実際に正準変換であることは、この変換に母関数 $F(x, X) = xX$ が対応することからより直接的に理解される [4, p.183].

■「……元のハミルトニアンと正準的に等価であり、……」(17.2 節の最後の 2 行) について これはもとの変数が双対変換の後にも同じ運動方程式を満たすことの説明ではなく、新しい正順変数がもとの変数と同じ運動方程式を満たすことの説明であって、双対性はこの意味に理解しなければならない。

17.2 閉弦の巻き付き

空間次元が円へと巻き取られたとき、すべての閉弦を連続的に寸法ゼロまで縮めることはできなくなる。簡単のために 2 次元の空間領域が同一視

$$x \sim x + 2\pi R$$

によってコンパクト化している場合を考えると、そのような世界は無限に長い円筒の表面と見ることができ、 y 方向は円筒の長さ方向に沿って伸びている。このとき円筒上に存在し得る閉弦の種類には以下のようなものがある (図 9 参照)。ただし弦の x 座標を X と書き、また同一視によって円筒を形成する xy 面を円筒の被覆空間と呼ぶ。

(a) 巻き数 0 の弦

$$X(\tau, \sigma = 2\pi) - X(\tau, \sigma = 0) = 0.$$

- 通常の周期境界条件 $X(\tau, \sigma + 2\pi) = X(\tau, \sigma)$ を満たす。
- 弦は被覆空間で見ても閉弦となっている。

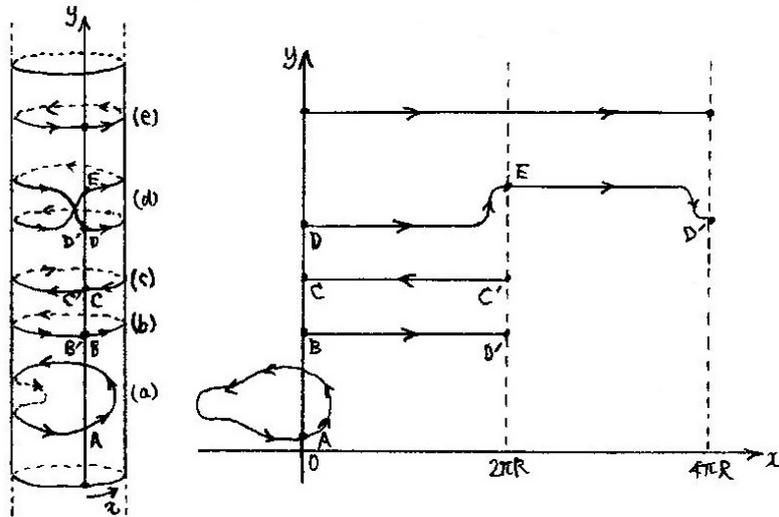


図9 様々な巻き数を持つ円筒上の閉弦

(b) 巻き数 1 の弦

端点 B を $\sigma = 0$ に, 端点 B' を $\sigma = 2\pi$ に対応させると,

$$X(\tau, \sigma = 2\pi) - X(\tau, \sigma = 0) = 2\pi R.$$

- 寸法ゼロへと連続的に縮小できない.
- 弦は被覆空間で見ると開弦である.

(c) 巻き数 -1 の弦

端点 C を $\sigma = 0$ に, 端点 C' を $\sigma = 2\pi$ に対応させると,

$$X(\tau, \sigma = 2\pi) - X(\tau, \sigma = 0) = -2\pi R.$$

- 負号は弦 (b) とは逆向きに円筒を 1 回周回していることによる.

(d),(e) 巻き数 2 の弦

$x = 0$ の端点を $\sigma = 0$ に, $x = 2(2\pi R)$ の端点を $\sigma = 2\pi$ に対応させると,

$$X(\tau, \sigma = 2\pi) - X(\tau, \sigma = 0) = 2(2\pi R).$$

- 弦 (e) について, $0 \leq x < 2\pi R$ と $2\pi R \leq x < 2(2\pi R)$ は同一視されるけれど, それぞれの範囲に位置する弦は同一視されず, 円筒を 2 周するものと見なす. これは弦 (b) とは区別される.

一般に弦が x の正の向きに円筒を m 回周回しているとき (m は整数), 弦の“巻き数”は m であると言われ, 巻き数が多くなっても σ の全範囲を常に 2π と設定すれば, これは被覆空間において

$$X(\tau, \sigma + 2\pi) = X(\tau, \sigma) + m(2\pi R)$$

を満たす. 巻き数が異なる弦同士は, 連続的な変形によって相互に移行させることが不可能であり, それゆえ閉弦の巻き数は, 個々の弦のトポロジ的な性質と見なされる.

最後に運動量の単位を持つ“巻き量” (winding)

$$w \equiv \frac{mR}{\alpha'}$$

を導入しておく．これを用いると上式は

$$X(\tau, \sigma + 2\pi) = X(\tau, \sigma) + 2\pi\alpha'w$$

と書き換えられる．

17.3 左進波と右進波

26次元時空において座標 x^{25} が半径 R の円に巻き取られている場合を考える．このとき弦座標 X^0, X^1 を用いて光錐座標 X^\pm を定義することができる． $X^{25} \equiv X$ と略記し，これを除く横方向座標を $X^i (i = 2, 3, \dots, 24)$ と書く．

弦座標 X は波動方程式を満たし， $u \equiv \tau + \sigma, v \equiv \tau - \sigma$ とおくと，周期性 (巻き量が w となる条件)

$$X(\tau, \sigma + 2\pi) = X(\tau, \sigma) + 2\pi\alpha'w$$

の下での解は

$$\begin{aligned} X(\tau, \sigma) &= X_L(u) + X_R(v), \\ X_L(u) &= \frac{1}{2}x_0^L + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\bar{\alpha}_0u + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n \neq 0} \frac{\bar{\alpha}_n}{n}e^{-inu}, \\ X_R(v) &= \frac{1}{2}x_0^R + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0v + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{n}e^{-inv} \end{aligned} \quad (17.25)$$

という形を持つ [導出は下記]．またコンパクト化から生じる新たな特徴として，巻き量が $w = 0$ でない限り $\bar{\alpha}_0$ は α_0 と等しくならないこと

$$w = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}(\bar{\alpha}_0 - \alpha_0) \quad (4)$$

が導かれる [導出は下記]．さらに今考えている x^{25} 方向の運動量は

$$p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} \dot{X} d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}(\alpha_0 + \bar{\alpha}_0) \quad (5)$$

と計算される [これは $\alpha_0 = \bar{\alpha}_0$ のとき式 (13.22): $p = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\alpha_0$ に帰す]．上式 (4) のように2種類のゼロモードが区別されることは2種類の運動量があることを意味しており，そこで巻き量 w を後で運動量 p と合わせて，運動量演算子と見なすことにする．なお式 (4)，式 (5) を $\alpha_0, \bar{\alpha}_0$ について逆に解くと

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(p - w), \quad \bar{\alpha}_0 = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(p + w)$$

となる．

以上より $\frac{1}{2}(x_0^L + x_0^R) \equiv x_0$ とおくと，弦座標のモード展開は

$$X(\tau, \sigma) = x_0 + \alpha'p\tau + \alpha'w\sigma + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n}(\bar{\alpha}_n e^{-in\sigma} + \alpha_n e^{in\sigma}) \quad (17.32)$$

とまとめられる．この展開式においてコンパクト化の唯一の証拠となるのは，巻き量の項 $\alpha'w\sigma$ の存在である．

17.3 節, 式の導出など

■左進波と右進波の式 (17.25) の導出 波動方程式の一般解

$$X(\tau, \sigma) = X_L(u) + X_R(v), \quad u \equiv \tau + \sigma, \quad v \equiv \tau - \sigma$$

に対して, 巻き量が w となる条件 (17.19):

$$X(\tau, \sigma + 2\pi) = X(\tau, \sigma) + 2\pi\alpha'w$$

を適用すると,

$$\begin{aligned} X_L(u + 2\pi) + X_R(v - 2\pi) &= X_L(u) + X_R(v) + 2\pi\alpha'w, \\ \therefore X_L(u + 2\pi) - X_L(u) &= X_R(v) - X_R(v - 2\pi) + 2\pi\alpha'w \end{aligned} \quad (17.24)$$

を得る. ここから先の解析は, コンパクト化のない場合 (13.1 節) と同様である. すなわち上式 (17.24) の左辺の u による微分は, 右辺の u による微分に等しい. ところが右辺は v だけの関数であって, u と v は独立なので, その u による微分はゼロになる. 同様に右辺の v による微分もゼロになるので, 導関数は周期性

$$X'_L(u + 2\pi) = X'_L(u), \quad X'_R(v - 2\pi) = X'_R(v)$$

を持ち,

$$X'_L(u) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_n e^{-inu}, \quad X'_R(v) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n e^{-inv}$$

と Fourier 展開される. これを積分して式 (17.25):

$$\begin{aligned} X_L(u) &= \frac{1}{2}x_0^L + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\bar{\alpha}_0u + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\bar{\alpha}_n}{n} e^{-inu}, \\ X_R(v) &= \frac{1}{2}x_0^R + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0v + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{n} e^{-inv} \end{aligned}$$

を得る.

■巻き量 w の式 (4) の導出 左進波と右進波の式 (17.25) を上式 (17.24) に代入すると,

$$2\pi\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\bar{\alpha}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0 + 2\pi\alpha'w, \quad \therefore w = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}(\bar{\alpha}_0 - \alpha_0) : (4)$$

を得る.

17.3 について

p.380 で導入される座標差の変数 q_0 は弦座標の式 (17.32) には現れないけれど, 17.8 節における T 双対性の説明にて役割を演じることになる.

17.4 量子化と交換関係

コンパクト化した方向の弦座標 X に対しても通常の正準交換関係

$$[X(\tau, \sigma), \mathcal{P}^\tau(\tau, \sigma')] = i\delta(\sigma - \sigma')$$

を課すと、以下の交換関係が導かれる。まず振動子について、閉弦に対して以前導いた式 (13.29), 式 (13.30) と同様の交換関係

$$[\bar{\alpha}_m, \bar{\alpha}_n] = [\alpha_m, \alpha_n] = m\delta_{m+n,0}, \quad [\alpha_m, \bar{\alpha}_n] = 0 \quad (17.35)$$

が得られる [導出は下記]。ただし今の場合 α_0 と $\bar{\alpha}_0$ は区別され、 $[\alpha_0, \bar{\alpha}_0] = 0$ は

$$[p, w] = 0$$

を意味する。 α_0 および $\bar{\alpha}_0$ と同様、その線形結合である p と w は振動子 $\alpha_n, \bar{\alpha}_n$ と可換になっている：

$$[p, \bar{\alpha}_n] = [p, \alpha_n] = [w, \bar{\alpha}_n] = [w, \alpha_n] = 0.$$

また x_0 を含む交換関係としては、

$$\begin{aligned} [x_0, \alpha_0] &= [x_0, \bar{\alpha}_0] = i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}, \\ \therefore [x_0, p] &= i, \quad [x_0, w] = 0 \end{aligned} \quad (17.40)$$

が導かれる [導出は下記]。

以上より巻き量 w は X に現れるすべての演算子と可換になっていることに注意しよう。この結果の最も保守的 [穏当] な解釈として、巻き量 w が単なる定数であるということが考えられる。しかしながらこのとき p と w は同列に扱われていない。実は w も p と同様に演算子であり、 w の固有値が様々な可能な巻き量に対応するという解釈の方が自然である (17.8 節)。

x_0 は同一視 $x_0 \sim x_0 + 2\pi R$ を導入された円周上の座標なので、交換関係 $[x_0, p] = i$ によりこれと共役な運動量となる p は

$$p = \frac{n}{R} \quad (n \text{ は整数}) \quad (17.42)$$

と量子化される [本稿次節で補足]。演算子 x_0 は同一視 $x_0 \sim x_0 + 2\pi R$ のために曖昧さを持ち、よく定義された演算子ではない。その結果、交換関係 $[x_0, p] = i$ は形式的な声明となる。実際これに関係する、運動量固有状態の位置は無限大になるという不確定性原理は、円周上の位置の不確かさが最大でも $2\pi R$ に過ぎないことを考えれば不条理である。しかしながら我々は x_0 を用いて、 x_0 を $2\pi R$ の整数倍ずらしても不変であるような、よく定義された演算子

$$e^{ilx_0/R} \quad (l \text{ は整数})$$

を構築できる。そして交換関係 $[x_0, p] = i$ から、 $e^{ilx_0/R}|p\rangle$ が運動量 $p + (l/R)$ の状態であるという、曖昧さのない結果を導くことができる (計算練習 17.1)。

もう 1 つの運動量 w の固有値も

$$w = \frac{mR}{\alpha'} \quad (m \text{ は整数}) \quad (17.46)$$

のように量子化されている [本稿次節で教科書の説明について考察]。

同一視 $x \sim x + 2\pi R$ によるコンパクト化を行うと、運動量の量子化条件を満たさない状態は失われ、弦が円を周回する状態 [$w \neq 0$ の状態] が新たに得られたことになる。これは $\mathbf{R}^1/\mathbf{Z}_2$ オービフォールド [半直線 $x \geq 0$] における閉弦の量子化の際、 $X \rightarrow -X$ の変換の下で不変でない状態が失われ、その代わりにツイストした状態のセクターが得られたことと似ている (13.5 節, 13.6 節)。

17.4 節, 式の導出など

■交換関係 (17.35) の導出 コンパクト化のない場合には、弦座標の導関数の線形結合が簡潔な形 (13.26):

$$\begin{aligned}\dot{X}^\mu + X^{\mu'} &= 2X_L^{\mu'}(\tau + \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau + \sigma)}, \\ \dot{X}^\mu - X^{\mu'} &= 2X_R^{\mu'}(\tau - \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau - \sigma)}\end{aligned}$$

をとった。このとき正準交換関係を書き換えた同時刻交換関係 (13.28):

$$[(\dot{X}^I \pm X^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J \pm X^{J'}) (\tau, \sigma')] = \pm 4\pi\alpha' i \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma')$$

から、調和振動子の交換関係 (13.29), (13.30):

$$[\bar{\alpha}_m^I, \bar{\alpha}_n^J] = m\delta_{m+n,0}\eta^{IJ}, \quad [\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\delta_{m+n,0}\eta^{IJ}, \quad [\alpha_m^I, \bar{\alpha}_n^J] = 0$$

が導かれた。今の場合にも弦座標 (17.32) の導関数の線形結合は同じ形

$$\begin{aligned}\dot{X} + X' &= 2X'_L(\tau + \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_n e^{-in(\tau + \sigma)}, \\ \dot{X} - X' &= 2X'_R(\tau - \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_n e^{-in(\tau - \sigma)}\end{aligned} \tag{17.33}$$

をとる。このため、 α_0 と $\bar{\alpha}_0$ はここでは同じではないという違いはあるものの、上付きの横方向添字を除いた同様の交換関係 (17.35):

$$[\bar{\alpha}_m, \bar{\alpha}_n] = m\delta_{m+n,0}, \quad [\alpha_m, \alpha_n] = m\delta_{m+n,0}, \quad [\alpha_m, \bar{\alpha}_n] = 0$$

が成り立つことに変わりはない。

■ x_0 の満たす交換関係 (17.40) の導出 正準交換関係

$$[X(\tau, \sigma), \dot{X}(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha' i \delta(\sigma - \sigma')$$

と、 $[X(\tau, \sigma), X(\tau, \sigma')] = 0$ の σ' -微分

$$[X(\tau, \sigma), X'(\tau, \sigma')] = 0$$

と組合せて得られる

$$[X(\tau, \sigma), (\dot{X} \pm X')(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha' i \delta(\sigma - \sigma')$$

を利用する。 $X(\tau, \sigma)$ のモード展開 (17.32) における p と w を含む項は、 α_n や $\bar{\alpha}_n$ と可換なので、交換関係に寄与を持たない。これを踏まえて、上式を $0 \leq \sigma \leq 2\pi$ にわたって積分すると

$$[x_0, (\dot{X} \pm X')(\tau, \sigma')] = \alpha' i$$

が得られる。ここに導関数の線形結合 (17.33) を代入すると

$$\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} [x_0, \bar{\alpha}_n] e^{-in(\tau+\sigma')} = \alpha' i, \quad \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} [x_0, \alpha_n] e^{-in(\tau-\sigma')} = \alpha' i$$

となる。右辺は τ, σ' に依らない定数であることに注意すると、 $n \neq 0$ に対しては

$$[x_0, \bar{\alpha}_n] = [x_0, \alpha_n] = 0$$

でなければならず、 $n = 0$ の振動子との交換関係は式 (17.40):

$$[x_0, \bar{\alpha}_0] = [x_0, \alpha_0] = i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}$$

で与えられる。

17.4 について

■ w を定数と見ることも演算子と見ることも可能であること (p.381) について 実際、量子化の際

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(p-w), \quad \bar{\alpha}_0 = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(p+w)$$

における w に対しては何の仮定も行っていない。

■ 運動量 p が式 (17.42) のように量子化されることについて 推進演算子 e^{-iap} が推進距離 $a = 2\pi R$ に対して単位演算子となるための条件として説明されているけれど、素朴に円周 $L = 2\pi R$ を周期に持つ波数 (したがって運動量) $p = \frac{2\pi}{L}n = \frac{n}{R}$ としても理解できる。

■ 式 (17.44) について ベーカー・ハウドルフの補助定理 [5, p.129]

$$e^{iG\lambda} A e^{-iG\lambda} = A + i\lambda[G, A] + \frac{(i\lambda)^2}{2!}[G, [G, A]] + \dots$$

を、 $G = x_0, \lambda = -l/R, A = p$ として適用すれば得られる。

なお、この公式は次のように証明できる。はじめに $e^{i\lambda G} = 1 + i\lambda G + \dots$ を $A e^{-i\lambda G} = A - i\lambda A G - \dots$ に左からかけたときに現れる項を以下に書き出す。

1	$i\lambda G$	\dots	$\frac{(i\lambda)^{N-k}}{(N-k)!} G^{N-k}$	\dots	\dots	$\frac{(i\lambda)^N}{N!} G^N$	\dots
A							
$-i\lambda A G$							
\vdots							
$\frac{(-i\lambda)^k}{k!} A G^k$							
\vdots							
\vdots							
$\frac{(-i\lambda)^N}{N!} A G^N$							
\vdots							

$\frac{(i\lambda)^{N-k} (-i\lambda)^k}{(N-k)! k!} G^{N-k} A G^k$

上の図式において青い項 $\frac{(i\lambda)^N}{N!} \sum_{k=0}^N {}_N C_k (-1)^k G^{N-k} A G^k$ が $\frac{(i\lambda)^N}{N!} \underbrace{[G, [G, \dots, [G, A] \dots]]}_{N \text{ 個の } G}$ に一致すれば良い*4. これを数学的帰納法にて示す. まずこれは $N=1$ に対して成り立つ. つぎにこれがある N に対して成り立つとすると

$$\begin{aligned} & [G, \underbrace{[G, [G, \dots, [G, A] \dots]]}_{N \text{ 個の } G}] \\ &= \left(G^{N+1} A + \sum_{k=1}^N {}_N C_k (-1)^k G^{N+1-k} A G^k \right) - \left(\sum_{k=0}^{N-1} {}_N C_k (-1)^k G^{N-k} A G^{k+1} + (-1)^N A G^{N+1} \right) \\ &= G^{N+1} A + \sum_{k=1}^N (\underbrace{{}_N C_k + {}_N C_{k-1}}_{{}_{N+1} C_k \text{ (Pascal の三角形)}}) (-1)^k G^{N+1-k} A G^k + (-1)^{N+1} G^{N+1} \end{aligned}$$

より $N \rightarrow N+1$ と置き換えても成り立つ. 以上よりベーカー・ハウドルフの補助定理が示された.

■巻き量 w の量子化条件 (17.46) について 巻き量 w の定義 (17.18): $w \equiv mR/\alpha'$ より演算子の固有値についても量子化条件 (17.46): $w = mR/\alpha'$ が成り立つと言えば十分である. 教科書のように, 周期性の条件 (17.17):

$$X(\tau, \sigma + 2\pi) = X(\tau, \sigma) + m(2\pi R)$$

を満たす弦座標のモード展開 (17.32):

$$X(\tau, \sigma) = x_0 + \alpha' p \tau + \alpha' w \sigma + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\bar{\alpha}_n e^{-in\sigma} + \alpha_n e^{in\sigma})$$

に再び周期条件 (17.17) を課して式 (17.46): $w = mR/\alpha'$ が得られるのは当然である.

計算練習 17.1 (p.382)

運動量の固有値を p' と書いて演算子 p と区別すると, 式 (17.44):

$$e^{-ilx_0/R} p e^{ilx_0/R} = p + \frac{l}{R}$$

(この式の導出は「17.4 について」で行った) より

$$p(e^{ilx_0/R} |p'\rangle) = e^{ilx_0/R} (e^{-ilx_0/R} p e^{ilx_0/R}) |p'\rangle = e^{ilx_0/R} \left(p + \frac{l}{R} \right) |p'\rangle = \left(p' + \frac{l}{R} \right) (e^{ilx_0/R} |p'\rangle)$$

となる. よって $e^{ilx_0/R} |p'\rangle$ は運動量 $p' + (l/R)$ の状態である.

17.5 状態の制約条件と質量公式

x^- 方向はコンパクト化していないから, 今の場合も $\alpha_0^- = \bar{\alpha}_0^-$ が, したがって $L_0^\perp = \bar{L}_0^\perp$ が成立する. [これがパラメーター σ の巡回的なずらし操作に対する閉弦の状態の不変性を意味するという解釈も, 依然として有効である.] しかしこれは [レベル整合条件] $N^\perp = \bar{N}^\perp$ を意味せず, 代わりに

$$N^\perp - \bar{N}^\perp = \alpha' p w$$

*4 $[G, [G, \dots, [G, A] \dots]]$ の右端の \dots は括弧の連なりを表し, A の右側に G は来ない.

を帰結する [違いは $\alpha_0 \neq \bar{\alpha}_0$ に由来]. このため運動量 p または巻き量 w がゼロでない限り, $N^\perp = \bar{N}^\perp$ とはならない. ここで N^\perp と \bar{N}^\perp は整数固有値をとるので, 右辺の固有値も整数でなければならない. ところが運動量は $p = n/R, w = mR/\alpha'$ と量子化されているので, 右辺は $\alpha'pw = nm$ となり, この条件は確かに満たされている.

$$N^\perp - \bar{N}^\perp = nm.$$

コンパクト次元を含まない 25 次元 Minkowski 空間における質量の自乗を考えよう. それはコンパクト化方向の運動量 p を含まない式

$$M^2 = 2p^+p^- - p^i p^i \quad (i = 2, 3, \dots, 24)$$

で定義される. これは

$$M^2 = p^2 + w^2 + \frac{2}{\alpha'}(N^\perp + \bar{N}^\perp - 2)$$

と計算される. これはコンパクト化のない場合の式 (13.46): $M^2 = \frac{2}{\alpha'}(N^\perp + \bar{N}^\perp - 2)$ にコンパクト化方向の運動量 p と巻き量 w の寄与が加わった形をしている. ただし $N^\perp \equiv \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I, \bar{N}^\perp \equiv \sum_{p=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{-p}^I \bar{\alpha}_p^I$ には相変わらずコンパクト化方向の弦座標における振動子からの寄与が含まれていることに注意する.

運動量 p の M^2 への寄与 $M = |p|$ は質量のない粒子に対するエネルギー E と運動量 \vec{p} の関係 $E = |\vec{p}|$ と比較される. 巻き量 w の M^2 への寄与 $M = |w|$ は, 単純には張力 $1/2\pi\alpha'$ に抗して弦を引き伸ばし, コンパクト化方向の長さ $2\pi R$ に $|m|$ 周巻き付かせたとき弦の得るエネルギー

$$\frac{1}{2\pi\alpha'} \times |m| \times 2\pi R = \frac{|m|R}{\alpha'} = |w|$$

として [粗く] 理解できる.

17.5 節, 式の導出など

以下, 正規順序化を $N[\dots]$ で表す.

■物理的な状態に対する制約条件 (17.49) の導出

$$\begin{aligned} L_0^\perp - \bar{L}_0^\perp &= \left(\frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + N^\perp \right) - \left(\frac{1}{2} \bar{\alpha}_0^I \bar{\alpha}_0^I + \bar{N}^\perp \right) \quad (\because N[L_0^\perp], N[\bar{L}_0^\perp] \text{ の式 (13.42)}) \\ &= \left(\frac{\alpha'}{4} p^i p^i + \frac{1}{2} \alpha_0 \alpha_0 + N^\perp \right) - \left(\frac{\alpha'}{4} p^i p^i + \frac{1}{2} \bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_0 + \bar{N}^\perp \right) \\ &= \frac{1}{2} (\alpha_0 \alpha_0 - \bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_0) + N^\perp - \bar{N}^\perp \\ &= -\alpha' p w + N^\perp - \bar{N}^\perp \\ &\quad \left(\because \text{式 (17.30)} : \alpha_0 = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(p-w), \bar{\alpha}_0 = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(p+w) \right) \end{aligned}$$

なので,

$$L_0^\perp - \bar{L}_0^\perp = 0 \quad \rightarrow \quad N^\perp - \bar{N}^\perp = \alpha' p w : (17.49)$$

を得る.

■実効空間における質量の自乗 (17.54) の導出 式 (13.46): $\alpha' p^- = \frac{1}{p^+} (N[L_0^\perp] + N[\bar{L}_0^\perp] - 2)$ より

$$M^2 = 2p^+ p^- - p^i p^i = \frac{2}{\alpha'} (N[L_0^\perp] + N[\bar{L}_0^\perp] - 2) - p^i p^i$$

となる。ここに式 (13.42):

$$\begin{aligned} N[L_0^\perp] &= \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + N^\perp = \frac{\alpha'}{4} p^i p^i + \frac{1}{2} \alpha_0 \alpha_0 + N^\perp, \\ N[\bar{L}_0^\perp] &= \frac{1}{2} \bar{\alpha}_0^I \bar{\alpha}_0^I + \bar{N}^\perp = \frac{\alpha'}{4} p^i p^i + \frac{1}{2} \bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_0 + \bar{N}^\perp \end{aligned}$$

を代入し、式 (17.30):

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} (p - w), \quad \bar{\alpha}_0 = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} (p + w)$$

を用いると、質量の自乗は

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{1}{\alpha'} (\alpha_0 \alpha_0 + \bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_0) + \frac{2}{\alpha'} (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2) \\ &= p^2 + w^2 + \frac{2}{\alpha'} (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2) : (17.54) \end{aligned}$$

と書き換えられる。

17.5 について

■式 (17.47) について

$$L_0^\perp = N[L_0^\perp] - 1 = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I - 1 = \frac{1}{4} p^I p^I + N^\perp - 1, \quad N^\perp \equiv \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I, \quad \text{etc.}$$

の I に関する和を、 i に関する和とコンパクト次元に対応するもう 1 つの項に分離した ($N[\dots]$ は正規順序化)。

■式 (17.52) について ここでの L_0^\perp と \bar{L}_0^\perp は正規順序にある演算子 $N[L_0^\perp], N[\bar{L}_0^\perp]$ として再定義されたもの。

■「……個別のエネルギーの和よりも小さくなっている、……」(最終文) について

$$M = \sqrt{p^2 + w^2 + \frac{2}{\alpha'} (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2)} \leq |p| + |w| + \sqrt{\frac{2}{\alpha'} (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2)}$$

による。

計算練習 17.2 (p.384)

ハミルトニアン (13.39): $H = N[L_0^\perp] + N[\bar{L}_0^\perp] - 2$ はそのまま成り立ち ($N[\dots]$ は正規順序化), 今の場合これは M^2 の式 (17.54) の導出と同じ要領で以下のように計算される。

$$\begin{aligned} H &= N[L_0^\perp] + N[\bar{L}_0^\perp] - 2 \\ &= \frac{\alpha'}{2} p^i p^i + \frac{1}{2} (\alpha_0 \alpha_0 + \bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_0) + N^\perp + \bar{N}^\perp - 2 \\ &= \frac{\alpha'}{2} (p^i p^i + p^2 + w^2) + N^\perp + \bar{N}^\perp - 2. \end{aligned}$$

コンパクト化のない通常の Minkowski 空間の閉弦に対するハミルトニアン (13.50): $H = \frac{\alpha'}{2} p^I p^I + N^\perp + \bar{N}^\perp - 2$ との違いは巻き量 w の項に現れている。

17.6 コンパクト化 (次元低減) と閉弦の状態空間

今、我々が扱っている x^{25} 方向がコンパクト化した時空における量子閉弦に対して基底状態は、 $p^+, \vec{p}_T = (p^2, \dots, p^{24})$ とコンパクト化方向の運動量 $p = n/R$, 巻き量 $w = mR/\alpha'$ によって指定され、

$$|p^+, \vec{p}_T; n, m\rangle \quad (n, m \text{ は整数})$$

と表される。ここでは任意の消滅演算子を作用させれば状態が消失するという意味で、このように表される一般的な状態を“基底状態”と呼んでいる。[基底状態が任意の消滅演算子を作用させると消失することは、調和振動子の演算子法にて物理的に意味のある結果を得るために要求される条件である [5, pp.120–124].] しかしながら実際には基底状態では $N^\perp = \bar{N}^\perp = 0$ なので、制約条件 (17.51): $N^\perp - \bar{N}^\perp = nm$ により厳密な意味での基底状態は $n = 0$ または $m = 0$ の状態に限られる。

理論の一般的な基本状態に移ろう。[各生成演算子は $i = 2, \dots, 24$ またはコンパクト化方向の弦座標成分に対応し、その各々について a^\dagger と \bar{a}^\dagger の 2 種類があるので、]

$$\left[\prod_{r=1}^{\infty} \prod_{i=2}^{24} (a_r^{i\dagger})^{\lambda_{i,r}} \right] \left[\prod_{s=1}^{\infty} \prod_{j=2}^{24} (\bar{a}_s^{j\dagger})^{\bar{\lambda}_{j,s}} \right] \left[\prod_{k=1}^{\infty} (a_k^\dagger)^{\lambda_k} \right] \left[\prod_{l=1}^{\infty} (\bar{a}_l^\dagger)^{\bar{\lambda}_l} \right] |p^+, \vec{p}_T; n, m\rangle$$

という形が一般的な基本状態の“候補”となる。このうち数演算子の固有値

$$N^\perp = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{i=2}^{24} r \lambda_{i,r} + \sum_{k=1}^{\infty} k \lambda_k, \quad \bar{N}^\perp = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=2}^{24} s \bar{\lambda}_{j,s} + \sum_{l=1}^{\infty} l \bar{\lambda}_l$$

が制約条件 (17.51): $N^\perp - \bar{N}^\perp = nm$ を満たす状態だけが実際に許容される物理的な状態となる。この状態における質量の自乗は式 (17.54) より

$$M^2 = \left(\frac{n}{R}\right)^2 + \left(\frac{mR}{\alpha'}\right)^2 + \frac{2}{\alpha'}(N^\perp + \bar{N}^\perp - 2) \quad (17.61)$$

で与えられる。

以下、これらの状態を具体的にいくつか調べる。

$m = n = 0$ の状態

巻き量 w がゼロの ($m = 0$) 弦がコンパクト化方向に運動量 p を持たない場合 ($n = 0$) を考えよう。このとき制約条件 $N^\perp - \bar{N}^\perp = nm$ はレベル整合条件 $N^\perp = \bar{N}^\perp$ になる。

- 基底状態 $N^\perp = \bar{N}^\perp = 0 \rightarrow M^2 = -4/\alpha'$: タキオン状態

$$|p^+, \vec{p}_T; 0, 0\rangle.$$

- 励起状態 $N^\perp = \bar{N}^\perp = 1 \rightarrow M^2 = 0$: 無質量状態

$$a_1^\dagger \bar{a}_1^\dagger |p^+, \vec{p}_T; 0, 0\rangle \rightarrow \text{スカラー場,}$$

$$a_1^\dagger \bar{a}_1^{i\dagger} |p^+, \vec{p}_T; 0, 0\rangle \rightarrow \text{Maxwell 場,}$$

$$a_1^{i\dagger} \bar{a}_1^\dagger |p^+, \vec{p}_T; 0, 0\rangle \rightarrow \text{Maxwell 場,}$$

$$a_1^{i\dagger} \bar{a}_1^{j\dagger} |p^+, \vec{p}_T; 0, 0\rangle \rightarrow \text{重力場, Kalb-Ramond 場, デイラトン.}$$

このようにコンパクト化に伴って 25 次元 Lorentz 変換に関わらない添字 $[I = 25]$ が 1 つ生じ、元々の 26 次元理論における色々な無質量状態 (重力場, Kalb-Ramond 場, デイラトン) が再構成される。歴史的には重力の 5 次元理論に対してコンパクト化を施すと、4 次元時空において同様の場の再構成が行われることが既に Kaluza と Klein によって示されていた：

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \begin{cases} g_{55}: \text{スカラー場} \\ g_{m5}(=g_{5m}): \text{Maxwell 場} \\ g_{mn}: \text{重力場} \end{cases} \quad [m = 1, 2, 3, 4]$$

これに対し弦理論では 2 種類の Maxwell 場が得られている。実はこれはコンパクト化により、Maxwell 場が重力場だけではなく Kalb-Ramond 場からも得られることによる：

$$\begin{cases} a_1^\dagger \bar{a}_1^{i\dagger} |p^+, \vec{p}_T; 0, 0\rangle \\ a_1^\dagger \bar{a}_1^\dagger |p^+, \vec{p}_T; 0, 0\rangle \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} (a_1^\dagger \bar{a}_1^{i\dagger} - a_1^{i\dagger} \bar{a}_1^\dagger) |p^+, \vec{p}_T; 0, 0\rangle: 26 \text{次元重力子状態から生じた光子状態} \\ (a_1^{i\dagger} \bar{a}_1^\dagger - a_1^\dagger \bar{a}_1^{i\dagger}) |p^+, \vec{p}_T; 0, 0\rangle: 26 \text{次元 Kalb-Ramond 場から生じた光子状態} \end{cases}$$

$n = 0$ または $m = 0$ の状態 [両方ゼロの場合は既に調べたので除く]

基底状態

$$\begin{aligned} |p^+, \vec{p}_T; n, 0\rangle, \quad M^2 &= \frac{n^2}{R^2} - \frac{4}{\alpha'} \\ |p^+, \vec{p}_T; 0, m\rangle, \quad M^2 &= \frac{m^2 R^2}{\alpha'^2} - \frac{4}{\alpha'} \end{aligned}$$

はスカラー場に対応し、いずれも $M^2 \geq 0$ となり得る。この場合も制約条件は $N^\perp = \bar{N}^\perp$ なので、これ以外の状態では

$$N^\perp + \bar{N}^\perp \geq 2, \quad \therefore M^2 = \left(\frac{n}{R}\right)^2 + \left(\frac{mR}{\alpha'}\right)^2 + \frac{2}{\alpha'}(N^\perp + \bar{N}^\perp - 2) > 0$$

となる。よってこのセクターでは無質量のベクトル場は得られない。

$n = m = \pm 1$ または $n = -m = \pm 1$ の状態

- $(n, m) = (\pm 1, \pm 1) \rightarrow N^\perp - \bar{N}^\perp = 1$ に対して、最低質量解は $N^\perp = 1, \bar{N}^\perp = 0$ の状態

$$a_1^\dagger |p^+, \vec{p}_T, \pm 1, \pm 1\rangle, \quad a_1^{i\dagger} |p^+, \vec{p}_T, \pm 1, \pm 1\rangle$$

で実現される。

- $(n, m) = (\pm 1, \mp 1) \rightarrow N^\perp - \bar{N}^\perp = -1$ に対して、最低質量解は $N^\perp = 0, \bar{N}^\perp = 1$ の状態

$$\bar{a}_1^\dagger |p^+, \vec{p}_T, \pm 1, \mp 1\rangle, \quad \bar{a}_1^{i\dagger} |p^+, \vec{p}_T, \pm 1, \mp 1\rangle$$

で実現される。

いずれも最低質量は

$$M^2 = \frac{1}{R^2} + \frac{R^2}{\alpha'^2} - \frac{2}{\alpha'} = \left(\frac{1}{R} - \frac{R}{\alpha'}\right)^2$$

であり、これは $\frac{1}{R} = \frac{R}{\alpha'}$ となる半径

$$R^* = \sqrt{\alpha'}$$

に対してゼロになる。この R^* は弦の長さに正確に一致しており、次節で説明する理由で自己双対半径と呼ばれる。

このようにゼロでない巻き量を持つ状態は、点粒子の理論からは生じることがないという意味で、真に“弦的”な状態と言える。ここで得た（自己双対半径において実現される無質量場のうち、添字 i を持つ）2 つのゲージ場の状態は、実は運動量と巻き量がともにゼロのセクターに現れた 2 つの Maxwell($U(1)$ 場) の状態と以下のように組み合わせさせて、Yang-Mills 場を成す。

$$\begin{aligned} a_1^\dagger \bar{a}_1^{i\dagger} |p^+, \vec{p}_T; 0, 0\rangle & \quad \text{with} \quad \bar{a}_1^{i\dagger} |p^+, \vec{p}_T; \pm 1, \mp 1\rangle, \\ a_1^{i\dagger} \bar{a}_1^\dagger |p^+, \vec{p}_T; 0, 0\rangle & \quad \text{with} \quad a_1^{i\dagger} |p^+, \vec{p}_T; \pm 1, \pm 1\rangle. \end{aligned}$$

よってこれまでに得た場は、(参照箇所を補足しつつ)p.388 の訳註を引用すると次のようにまとめられる。

(開弦 + 単独 D-ブレーン) [15.2 節] or (閉弦 + コンパクト化空間) [17.6 節] \Rightarrow Maxwell 場,
 (開弦 + 多重 D-ブレーン) [15.3 節] or (閉弦 + 自己双対コンパクト化空間) [17.6 節] \Rightarrow Yang-Mills 場.

17.6 について

■ $m = n = 0$ の無質量状態 (17.63) の解釈 (p.388) について 1 光子状態に同定される状態

$$a_1^\dagger \bar{a}_1^{i\dagger} |p^+, \vec{p}_T; 0, 0\rangle, \quad a_1^{i\dagger} \bar{a}_1^\dagger |p^+, \vec{p}_T; 0, 0\rangle$$

は通常の Minkowski 空間における開弦の 1 光子状態 (12.178): $\sum_{I=2}^{25} \xi_I a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$ と同じ構造を持つことに注意する。いずれも自由度は (空間次元) $- 1$ である。

式 (17.63) の 4 行目の状態

$$a_1^{i\dagger} \bar{a}_1^{j\dagger} |p^+, \vec{p}_T; 0, 0\rangle$$

は「Minkowski 時空における閉弦の無質量状態と、次元数が 25 に低減している点だけを除き、正確に同じ構造を持っている」(p.386, 1.6,7) について、通常の Minkowski 空間における閉弦の無質量状態 (13.64): $\sum_{I,J} R_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$ を参照する。

計算練習 17.3 (p.387)

$N^\perp - \bar{N}^\perp = nm \neq 0$ の場合を考えており、そこで N^\perp と \bar{N}^\perp のうち大きい方を N^+ 、小さい方を N^- と書くことにする。 $\Delta N \equiv N^+ - N^- = 1$ のとき

$$(N^-, N^+) = (0, 1), (1, 2), (2, 3), \dots$$

であり、 $(N^-, N^+) = (0, 1)$ に対して最低質量 (17.69): $M^2 = \left(\frac{1}{R} - \frac{R}{\alpha'}\right)^2 \geq 0$ が実現されることを見た。 N^\pm を 1 ずつ増やした状態 $(N^-, N^+) = (1, 2), (2, 3), \dots$ では質量の自乗 (17.61):

$$M^2 = \left(\frac{n}{R}\right)^2 + \left(\frac{mR}{\alpha'}\right)^2 + \frac{2}{\alpha'}(N^\perp + \bar{N}^\perp - 2)$$

は $4/\alpha'$ ずつ増えるので、 $M^2 = 0$ の状態は得られない。

残る $n \neq 0$ かつ $m \neq 0$ の状態では

$$nm = \pm 2, \pm 3, \dots, \quad \therefore \Delta N = 2, 3, \dots$$

である。質量の自乗 (17.61) を

$$M^2 = \left(\frac{n}{R}\right)^2 + \left(\frac{mR}{\alpha'}\right)^2 + \frac{2}{\alpha'}(2N^- + \Delta N - 2)$$

と書くと、このとき $N^- \geq 0, \Delta N - 2 \geq 0$ により右辺第 3 項はゼロ以上なので、 $n \neq 0, m \neq 0$ に対して $M^2 > 0$ となって無質量状態は得られない。

以上より $n \neq 0$ かつ $m \neq 0$ のセクターにおける無質量状態は、 $R^* = \sqrt{\alpha'}$ の場合の状態 (17.67),(17.68) に限られることが示された。

17.7 スペクトルの驚くべき一致

質量の自乗 (17.61):

$$M^2 = \left(\frac{n}{R}\right)^2 + \left(\frac{mR}{\alpha'}\right)^2 + \frac{2}{\alpha'}(N^\perp + \bar{N}^\perp - 2)$$

はコンパクト半径 R に対する依存性が、運動量を介した部分 $(n/R)^2$ と巻き量を介した部分 $(mR/\alpha')^2$ とで反対になっていることに注目しよう。これにより半径 R を $\tilde{R} \equiv \alpha'/R$ に置き換えても*5、 n と m がすべての可能な整数の値をとるときに得られる質量の“リスト”(質量スペクトル)は変わらない。半径の置き換えと同時に整数 n, m の入れ替えも行えば、(共通の N^\perp と \bar{N}^\perp に対して) 質量の自乗の表式そのもの変わらない。ここで n と m の入れ替えは制約条件 $N^\perp - \bar{N}^\perp = nm$ に影響しないことにも注意する。

半径 R と半径 α'/R は互いに双対な半径と呼ばれる。

$$R \leftrightarrow \frac{\alpha'}{R}.$$

前節の $\frac{1}{R} = \frac{R}{\alpha'}$ となる半径 $R^* = \sqrt{\alpha'}$ はそれ自身を双対な半径に持つため、自己双対半径と呼ばれる。 R^* より小さいコンパクト半径は R^* よりも大きい双対な半径と等価であると考えれば、半径 R^* は輪環型 (トロイダル) のコンパクト化において到達できる最小の半径と言える。

- 「コンパクト化半径 R は、弦理論自体のパラメーターでは“なく”，弦理論において許容される時空のパラメーターであって、調節可能である。」(p.389).
- 「このような (多様体の) パラメーターは“モデュライ” (moduli) と呼ばれることがある。そしてこのパラメーター値の集合のことを“モデュライ空間”と呼ぶ。」(p.389).

今の例では

- モデュライ …… R
- モデュライ空間 …… $R \geq R^*$

小さな半径が大きな半径に見えることは [2 種類の運動量 p, w があることに関係しており、] 次のように理解できる。すなわち巻き量 w は R/α' を単位として量子化されるため、半径 R が小さいとき連続スペクトルに移行する。これは $1/R$ を単位として量子化される運動量 p が、大きい半径 R に対して連続スペクトルに移行することと区別できない。

*5 ここで半径 $\tilde{R} \equiv \alpha'/R$ において、 α' は長さの自乗の単位を持つことを思い出す。

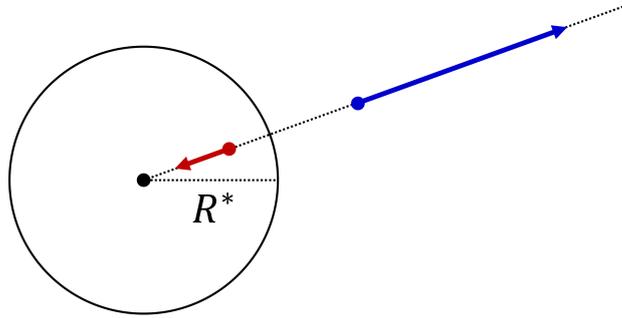


図 10 半径 R^* の円に関する反転によって関係付けられる, 互いに双対な半径

17.7 について

■双対な半径 (17.73) について 互いに双対な半径 $R, \tilde{R} \equiv \alpha'/R$ は

$$R\tilde{R} = \alpha' = R^{*2}$$

を満たす. すなわち, いわゆる半径 R^* の円に関する反転によって関係付けられるような半径となっている. このとき一方の半径は R^* 以上, もう一方の半径は R^* 以下となり, 一方の値が $R^* \rightarrow \infty$ の範囲を動くとき, もう一方は $R^* \rightarrow 0$ を動く (図 10 参照).

■p.389 訳註からの引用

ここではコンパクト化のモデュライが“調整可能” (adjustable) と表現してあるが, 究極的な理論の筋書きとしては恣意的に設定されるべきものではなく, 超弦理論の真の意味での基礎方程式から導かれる許容解に付随するパラメータ値ということになるはずである. しかし現状では超弦理論の基礎方程式 (あるいはラグランジアン) が分かっておらず, どのようなタイプのコンパクト化が解において実現されるかということも含めて確定的な答えが出せる状況ではなく, 試行的にいろいろな状態 (真空モデル) の候補が模索され考察が行われている. 21.6 節参照.

17.8 全量子対称性としての T 双対性

互いに双対な半径 $R, \alpha'/R$ によるコンパクト化では質量スペクトルが一致することを前節で見た. 本節ではそれだけでなく, 2 種類のコンパクト化は物理的に互いに区別できないことを証明する. ただし証明は弦の間の相互作用がない [したがって分裂しない単一の弦の] 場合に限る. このような対称性は T 双対性と呼ばれる.

証明の準備として「まず, コンパクト化した弦理論の中に追加的に存在し得る構造を指摘する」(17.8 節 1.6.7). 平均座標変数 x_0 と座標差の変数 q_0 を $x_0^L = x_0 + q_0, x_0^R = x_0 - q_0$ によって導入すると [この x_0 は本稿の 17.3 節における $x_0 \equiv (x_0^L + x_0^R)/2$ と同じものである], q_0 は式 (17.31):

$$X_L(\tau + \sigma) = \frac{1}{2}(x_0 + q_0) + \frac{\alpha'}{2}(p + w)(\tau + \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\bar{\alpha}_n}{n} e^{-in(\tau + \sigma)},$$

$$X_R(\tau - \sigma) = \frac{1}{2}(x_0 - q_0) + \frac{\alpha'}{2}(p - w)(\tau - \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{n} e^{-in(\tau - \sigma)}$$

の X_L, X_R の和である弦座標のモード展開 (17.32):

$$X(\tau, \sigma) = x_0 + \alpha' p \tau + \alpha' w \sigma + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\bar{\alpha}_n e^{-in\sigma} + \alpha_n e^{in\sigma})$$

には現れないけれど、差

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\tau, \sigma) &\equiv X_L(\tau + \sigma) - X_R(\tau - \sigma) \\ &= q_0 + \alpha' w \tau + \alpha' p \sigma + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\bar{\alpha}_n e^{-in\sigma} - \alpha_n e^{in\sigma}) \end{aligned}$$

には現れる。我々は \tilde{X} を双対な“座標”演算子と見なすことにし、共役な運動量 [密度]

$$\mathcal{P}^\tau \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_\tau \tilde{X} = \frac{1}{2\pi\alpha'} (\dot{X}_L - \dot{X}_R)$$

を定義する。

ここで元の演算子の組 (X, \mathcal{P}^τ) と双対な演算子 $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{P}}^\tau)$ の違いは次のようにまとめられる。すなわち置き換え $(X, \mathcal{P}^\tau) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{P}}^\tau)$ は X_R の符号の反転

$$(X_L, X_R) \rightarrow (X_L, -X_R) \quad (6)$$

と等価であり、 X と \tilde{X} のモード展開を比較すると、それは具体的には

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \rightarrow q_0 \\ q_0 \rightarrow x_0 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} p \rightarrow w \\ w \rightarrow p \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_n \rightarrow -\alpha_n \\ \bar{\alpha}_n \rightarrow \bar{\alpha}_n \end{array} \right\} \quad (7)$$

という置き換えによって実施されることが分かる。ここから座標 q_0 に関する運動量が w であり、 q_0 に関する巻き量が p となることが期待される。またこの置き換えは閉弦のハミルトニアン (17.56):

$$H = \frac{\alpha'}{2} (p^i p^i + p^2 + w^2) + N^\perp + \bar{N}^\perp - 2$$

を不変に保つ。

次に交換関係を調べよう。上記の対応関係を踏まえると、正準交換関係 (17.34): $[X(\tau, \sigma), \mathcal{P}(\tau, \sigma')] = i\delta(\sigma - \sigma')$ は双対な演算子に対する通常の正準交換関係

$$[\tilde{X}(\tau, \sigma), \tilde{\mathcal{P}}(\tau, \sigma')] = i\delta(\sigma - \sigma')$$

を意味する。再び上記の対応関係を考えると、ここから同様の交換関係が導かれることが分かる。すなわち式 (17.35):

$$[\bar{\alpha}_m, \bar{\alpha}_n] = [\alpha_m, \alpha_n] = m\delta_{m+n,0}, \quad [\alpha_m, \bar{\alpha}_n] = 0$$

は不変に留まり、また

$$\begin{aligned} [x_0, \alpha_n] = [x_0, \bar{\alpha}_n] = 0 &\rightarrow [q_0, \alpha_n] = [q_0, \bar{\alpha}_n] = 0, \quad (n \neq 0) \\ \text{式 (17.41): } [x_0, p] = i, \quad [x_0, w] = 0 &\rightarrow [q_0, w] = i, \quad [q_0, p] = 0. \end{aligned}$$

と置き換わる。 x_0 と q_0 の交換子は、 x_0 と q_0 がそれぞれ運動量 p のラベル n と巻き量 w のラベル m に対して互いに独立に作用するという単純な理解を反映して、

$$[x_0, q_0] = 0$$

と設定する*6. [両立可能な観測量 x_0, q_0 に対して $[x_0, q_0] = 0$ となることの根拠は $x_0 q_0 |\cdots; n, m\rangle = q_0 x_0 |\cdots; n, m\rangle$ であるということ.]

[上で得た交換関係 $[q_0, w] = i$ により, w を座標 q_0 に関係する運動量と見なしたことが正当化される. そこで] 巻き量 $w = mR/\alpha'$ を運動量の量子化 n/R と比較すると, 座標 q_0 が, したがって弦の座標 \tilde{X} が半径 α'/R にコンパクト化した円上の座標であることが結論される.

これで T 双対性の証明の準備が整った. 以下では「双対な理論の等価性を, 2通りの互いに関連する方法によって説明する」(17.8 節, 1.7,8).

第 1 の説明

以上で「我々は半径 R にコンパクト化された座標 X を用いて議論を始めた」(p.392, 1.6,7) ところ, 「異なる座標 \tilde{X} が見いだされ, それがコンパクト化半径 α'/R を持つという, 出発点の解釈とは競合する別の解釈が与えられた. 両方の解釈の下で, 同じハミルトニアンが得られる」(p.392, 1.8,9). このような見方では「T 双対性が“単一の”理論の解釈上の曖昧さとして生じ」(17.8 節, 1.8,9) ていることになる. 「すなわち弦座標のひとつの可能な選択の下では円の半径が R と主張されるが, 物理的には等価な別の座標の選択の下で, 円の半径が α'/R であることが主張される」(17.8 節, 1.9-11).

第 2 の説明

他方, 半径 R と半径 α'/R の理論を異なる 2 つの理論と考えて, T 双対性をそれらの間の等価性として説明することも可能である. そのためには「それらの理論の各演算子の間に, すべての交換関係を保存し, かつ一方のハミルトニアンをもう一方のそれに移行させるような 1 対 1 の対応を見いだ」(17.8 節, 1.12-14) せば良いが, 我々は既にそのような写像が上式 (6) ないし式 (7) によって与えられることを確認している.

17.8 について

■ $x_0 = (x_0^L + x_0^R)/2, q_0 = (x_0^L - x_0^R)/2$ についての p.391 訳註からの引用

素朴な言い方をすると, 円を形成したコンパクト空間内において, X_L と X_R の規準位置が同じ向きに動くと x_0 に共役な運動量 p が発生し, 反対向きに動くと ‘ q_0 に共役な運動量’ にあたる巻き量 w が発生する. ‘反対向き’ には X_L と X_R のどちらがコンパクト化した座標の正の方向を向くかによって 2 通りあり, その区別が w の符号の違いとして表される.

■ 直接言及されていない交換関係について 運動量の入替え $p \leftrightarrow w$ により, 交換関係 (17.36), (17.37) は保持される. また振動子の置き換え $\alpha_0 \rightarrow -\alpha_0$ により交換関係 (17.40) は

$$-[q_0, \alpha_0] = [q_0, \bar{\alpha}_0] = i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}$$

となる. これを式 (17.30) と組合せて得られる交換関係

$$[q_0, p] = i, \quad [q_0, w] = 0$$

*6 より正確には 17.4 節のようによく定義された演算子 $e^{-ilx_0/R}, e^{-imq_0/\tilde{R}}$ を用いて

$$[e^{-ilx_0/R}, e^{-imq_0/\tilde{R}}] = 0 \quad (l, m \text{ は整数})$$

とする. $[x_0, q_0] = 0$ はその十分条件である (ペーカー・ハウドルフの補助定理 (17.4 節の補足) を参照.)

はもちろん、元の式 (17.40) と等価な式 (17.41) に直接 $x_0 \rightarrow q_0, p \leftrightarrow w$ の置き換えを施した結果 (17.80), (17.81) に一致している.

■まとめ T 双対性の証明として,

- 半径 R の円の座標 x_0, X に関する運動量を p , 巻き量を w とする理論・解釈
- 半径 α'/R の円の座標 q_0, \tilde{X} に関する運動量を w , 巻き量を p とする理論・解釈

が区別できないことを見たことになる.

計算練習 17.4 (p.391)

計算練習 17.1 と同様, $e^{ilq_0/\tilde{R}}|w\rangle$ は巻き量 $w = mR/\alpha'$ の固有値 $w + (l/\tilde{R})$ の状態となるので, 巻き量 m の固有値は

$$m + \frac{\alpha'}{R} \cdot \frac{l}{\tilde{R}} = m + l$$

である. すなわち演算子 $e^{ilq_0/\tilde{R}}$ は巻き数 m を l だけ増加させる.

第 18 章 開弦および D-ブレインの T 双対性

18.1 開弦の T 双対性

前と同様に $x^{25} (\equiv x)$ 方向が同一視

$$x \sim x + 2\pi R$$

によってコンパクト化している時空において、開弦の伝播を考察しよう。(以下、これまで通りコンパクト化方向を表す添字 25 は省く。) ただし全空間を埋める D25-ブレインの存在を仮定して、開弦の両端は Neumann 境界条件を満たすものとする。閉弦の場合と異なり、開弦は次元のコンパクト化があっても常に連続的な変形によって点へと縮むことができ、また巻き量 $w^{25} (\equiv w)$ は現れない。

開弦のコンパクト化方向の運動量は $p = n/R$ と量子化されるのに対し、コンパクト化半径 $\tilde{R} = \alpha'/R$ を持つ時空では運動量は $p = n/\tilde{R} = nR/\alpha'$ と量子化されるので、質量の自乗 M^2 に対するこれらの寄与 p^2 は異なる。[ここまでは閉弦の場合と同じであるが、開弦では巻き量 w が存在しないので、] このとき開弦に対しては 2 つの半径 R, \tilde{R} によるコンパクト化を区別でき、T 双対性が成り立たないように見える。

しかしながら T 双対性がコンパクト化半径 R で D25-ブレインを持つ時空と、コンパクト化半径が $\tilde{R} = \alpha'/R$ で x 方向を Dirichlet 方向とするような D24-ブレインを持つ時空 (図 11 参照) を関係付けるものと考えれば、以下で説明するように開弦も T 双対性を持つ。

$$x^{25} \text{ に沿った T 双対性: } (D25; R) \rightarrow (D24; \tilde{R} = \alpha'/R).$$

[閉弦では境界条件がないから、このようなブレインに対する条件に言及する必要がなかった.] 慣例に従って双対世界の D24-ブレインの位置を $x = 0$ に選ぶ。双対世界では開弦の端点はこちらに接続していなければならないから、図 11 のようにコンパクト化した方向に 1 回巻き付いている開弦は連続的に変形させて点に縮めることはできなくなる。(なお閉弦の場合と異なり、開弦は D24-ブレイン $x = 0$ の上で両端が一致して閉じている必要はない。) こうして双対世界の開弦は巻き量 w を持つことになり、代わりに Dirichlet 境界条件により、運動量 p はゼロになる:

$$p = \frac{n}{R}, \quad w = 0 \quad \rightarrow \quad p = 0, \quad w = \frac{m\tilde{R}}{\alpha'} = \frac{m}{R}.$$

すると 2 つのコンパクト化において、運動量と巻き量からの M^2 への寄与が等しくなる。

以下では弦座標のモード展開の解析を通して、実際に双対世界が D24-ブレインを持つことを正当化する。さらに

- 交換関係の不変性
- ハミルトニアンの不変性

を確かめることで (p.400, 1.1-8), 弦のスペクトルに限らない双対世界の「完全な物理的等価性」(p.399, 1.2,3) を示す。

[もとの D25-ブレインを持つ時空を考えると、] x^{25} 方向の弦座標 X は NN 座標なので、そのモード展開は式 (12.32):

$$X(\tau, \sigma) = x_0 + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0\tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n \cos n\sigma e^{-in\tau}$$

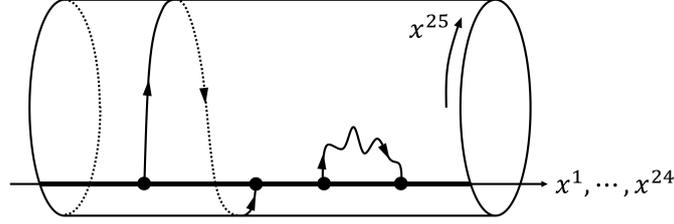


図 11 コンパクト化半径 \tilde{R} で D24-ブレーンを持つ双対世界

で与えられる．それを閉弦の場合と同様に左進成分と右進成分に分けて

$$\begin{aligned}
 X(\tau, \sigma) &= X_L(\tau + \sigma) + X_R(\tau - \sigma), \\
 X_L(\tau + \sigma) &= \frac{1}{2}(x_0 + q_0) + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0(\tau + \sigma) + \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n e^{-in(\tau + \sigma)}, \\
 X_R(\tau + \sigma) &= \frac{1}{2}(x_0 - q_0) + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0(\tau - \sigma) + \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n e^{-in(\tau - \sigma)}
 \end{aligned}$$

と書き (q_0 は任意定数)，双対な座標

$$\begin{aligned}
 \tilde{X}(\tau, \sigma) &\equiv X_L(\tau + \sigma) - X_R(\tau - \sigma) \\
 &= q_0 + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0\sigma + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n \sin n\sigma e^{-in\tau}
 \end{aligned}$$

を定義する．これは (等しい空間次元を持つ) 平行な D-ブレーンの間に伸びる弦の DD 座標のモード展開 (15.45):

$$X^a(\tau, \sigma) = \bar{x}_1^a + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^a\sigma + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^a \sin n\sigma e^{-in\tau}$$

と全く同じ形をしている．[ただしここでのゼロモード $\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^a \equiv \frac{1}{\pi}(\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a)$ は弦の DD 座標方向の運動量とは何ら関係がなかったのに対し，今考えているコンパクト化方向の弦座標のゼロモード $\alpha_0 = \sqrt{2\alpha'}p$ は運動量に比例している.]

以上より予告通り双対世界が D24-ブレーンを持つという解釈を引き出せる．実際もとの弦座標 X は NN 座標であったのに対し， \tilde{X} はそのモード展開を見ると端点 $\sigma = 0, \pi$ で $\partial_\tau \tilde{X} = 0$ を満たしており，DD 座標となっていることが分かる．このような境界条件の入れ替わりは，座標の微分に次の関係があることから理解できる．

$$\partial_\sigma X = X'_L(\tau + \sigma) - X'_R(\tau - \sigma) = \partial_\tau \tilde{X}, \quad \partial_\tau X = X'_L(\tau + \sigma) + X'_R(\tau - \sigma) = \partial_\sigma \tilde{X}.$$

また \tilde{X} のモード展開から直接

$$\tilde{X}(\tau, \pi) - \tilde{X}(\tau, 0) = \sqrt{2\alpha'}\alpha_0\pi = 2\pi\alpha'p = 2\pi\frac{\alpha'}{R}n = 2\pi\tilde{R}n$$

が得られる。これはコンパクト化方向に [弦が“巻き数” n で巻き付き, また] 一定の間隔 $2\pi\tilde{R}$ で D24-ブレインが無数に配置されているものと解釈できる。同じ結果はやはり座標の微分の間関係 $\partial_\sigma\tilde{X} = \partial_\tau X$ から

$$\tilde{X}(\tau, \pi) - \tilde{X}(\tau, 0) = \int_0^\pi d\sigma \partial_\sigma \tilde{X} = \int_0^\pi d\sigma \partial_\tau X = 2\pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma \mathcal{P}^\tau = 2\pi\alpha' p$$

と導くこともできる。

次に完全な双対性の確認に移ろう。 \tilde{X} は DD 座標 X^a と同じ形のモード展開を持つので, $\tilde{X}, \tilde{\mathcal{P}}^\tau$ の正準交換関係から導かれる交換関係は $X^a, \mathcal{P}^{a\tau}$ の正準交換関係から導かれる交換関係と, したがって X, \mathcal{P}^τ の正準交換関係から導かれる交換関係と同じである。また双対世界におけるハミルトニアンは, X^a を含むセクターに関する (すなわち平行な D p -ブレインの間の弦に対する) ハミルトニアン (15.49) と同じ形

$$H = \alpha' p^i p^i + \frac{1}{2} \alpha_0 \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \alpha_{-n} \alpha_n) - 1$$

であり, これはもとの世界におけるハミルトニアン (12.158), すなわち式 (18.5):

$$H = N[L_0^\perp] - 1 = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + N^\perp - 1 = \alpha' p^i p^i + \frac{1}{2} \alpha_0 \alpha_0 + N^\perp - 1$$

に一致している [正規順序化を記法 $N[\dots]$ で明示した, より詳しい説明は問題 18.3].

なお「一般に D p -ブレインがコンパクト化した方向に広がっているならば, その方向に沿った T 双対変換により, 双対半径を持つ円の上のある固定した位置に D($p-1$)-ブレインが存在する世界が得られる。これらの結果はすべて自明のことである。何故なら, ある指定された方向に沿った T 双対性は, 他の方向の開弦座標に影響を及ぼさないからである」(p.401, 1.2-6)。

D p -ブレインを D($p-1$)-ブレインへ移行させる T 双対性の証明は, 光錐ゲージを用いるのであれば, 少なくとも X^0 とともに光錐座標 X^\pm を形成する X^1 と, コンパクト化の方向にあたる X が Neumann 型である必要があるため, $p \geq 2$ の場合に限定される。T 双対性が $p=1$ でも成立することは, 開弦の共変な量子化を利用して証明することができる。

18.1 について

「弦のスペクトルは D-ブレインの存在によって影響を受けないので, 我々は完全な物理的等価性を得たことになる」(p.399, 1.2,3) について, これはハミルトニアンと交換関係の不変性の説明 (p.400, 1.3,4) も合わせて初めて分かることである。なお要約ではハミルトニアンと交換関係の不変性の説明 (p.400, 1.3,4) を多少補足・解釈しつつまとめた。

18.2 $U(1)$ ゲージ変換

ゲージ変換に関して我々は次の点を新たに考える必要がある。

- 第 1 に我々はコンパクト化した次元を扱わなければならない, そこでは位相的 (トポロジカル) な効果が重要になる。
- 第 2 に, 電荷の効果を含める必要がある。

[第 2 の点は本節で電荷の波動関数のゲージ変換として考察する。第 1 の点は次節でゲージパラメーター $U = e^{iqx}$ における χ の準周期的な条件 (18.38) に対応する.]

電磁場と相互作用する非相対論的な荷電粒子に対する Schrödinger 方程式

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi, \quad H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\Phi$$

は、電磁ポテンシャルと波動関数に同時にゲージ変換

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\chi, \quad \psi \rightarrow \psi' = e^{iq\chi}\psi$$

を施すと不変に保たれる (問題 18.1). ここで視点を変えて, $\chi(x)$ そのものではなく $U(x) = e^{iq\chi(x)}$ をゲージパラメーターと考えて, ゲージ変換を

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{i}{q}(\partial_\mu U)U^{-1}, \quad \psi' = U\psi$$

と書く. するとゲージパラメーター $U(x)$ は固定された各時空点 x において $U(1)$ 群の要素と見なすことができ, Maxwell 理論を $U(1)$ ゲージ理論として捉えることができる. 群の概念がゲージ理論と関係するのは以下の事情による. すなわちゲージパラメーター $U(x)$ が $U(1)$ 群の要素であることは, ゲージパラメーター $U_1(x), U_2(x)$ によるゲージ変換 1,2 を続けて ($2 \rightarrow 1$ の順に) 行ったときに, 積 U_1U_2 が総体としてのゲージ変換のパラメーターとなるために必要なことである. この下で十分性は次のように確かめられる.

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow U_1(U_2\psi) = (U_1U_2)\psi, \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu - \frac{i}{q}(\partial_\mu U_2)U_2^{-1} - \frac{i}{q}(\partial_\mu U_1)U_1^{-1} = A_\mu - \frac{i}{q}(\partial_\mu(U_1U_2))(U_1U_2)^{-1}. \end{aligned}$$

18.3 円における Wilson ライン

本節でも引き続き準備として, 電磁場と相互作用する荷電粒子の文脈においていくつかの概念を導入する. コンパクト化した円における電磁ポテンシャルの影響は Aharonov-Bohm 効果に類似している. Aharonov-Bohm 効果は標準的な設定では次のような現象として現れる. すなわち荷電粒子は磁場 (磁束密度) \vec{B} のないソレノイドの外部を運動しているにも関わらず, ソレノイドの外部においてゼロにはならないベクトルポテンシャル \vec{A} の影響を受けて, [粒子の束縛状態におけるエネルギースペクトルが磁場のない場合と比べて変化する. またソレノイドの両脇を通る粒子の物質波は磁場の強度に応じた] 干渉効果を示す [5, pp.183–188]. 本節で見るとコンパクト化した次元があると, 磁場 \vec{B} が“全ての場所で”ゼロであってもベクトルポテンシャル \vec{A} は粒子の物理に影響を及ぼす. [そのことは具体的には, 本節末尾における電荷のエネルギースペクトルの式 (18.49) が持つ θ 依存性に見られる.]

空間次元 x が円 [半径 R] へとコンパクト化しており, 円に沿ってベクトルポテンシャル \vec{A} が分布している状況を考えよう [スカラーポテンシャルは $\phi = 0$]. すなわち A_μ はゼロでない唯一の成分 A_x を持つ. このとき面 S を貫く磁束は一般に

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \oint_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

と表されるにも関わらず (Γ は面 S の境界 (縁) を成す閉曲線), 円の“内部”に空間はないので, 磁場は存在しない.

参考 同様に静電場は渦無しなので, 通常空間では $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$ となる電場分布は許容されないけれど, 空間次元 x が円へとコンパクト化していれば x 方向に沿って周回する電場が存在し得る. 円に電場の循環 (線積分の値) をもたらす円の“内部”の渦は空間に含まれないからである.

[このような電磁場 A_x と相互作用する 1 個の電荷 q を想定し,] 円に沿った線積分

$$w \equiv q \oint dx A_x$$

を定義すると [係数 q を除けば上記の磁束に一致], これは無単位であり [自然単位系で $[A_x] = M, [dx] = M^{-1}, [q] = 1$ だから], そこで“ホロノミー”と呼ばれる量

$$W \equiv e^{iw} = \exp\left(q \oint dx A_x\right)$$

を導入できる. この W は“Wilson ライン”とも呼ばれる. しかし W そのものは x 方向の閉じた線ではなく, あくまでその線において定義された位相因子であるという, 教科書 p.405 の説明および訳註を踏まえ, 本稿でも以降, 訳者にならって W を“Wilson 巡回指標”と呼ぶことにする.

さて, 前節のように $U(x) = e^{iq\chi(x)}$ をゲージパラメーターと見なすと [ただしここでは x は時空点ではなくコンパクト化方向の座標], これは周期的な条件

$$U(x + 2\pi R) = U(x)$$

を満たさなければならないが, そのためには $\chi(x)$ は

$$q\chi(x + 2\pi R) = q\chi(x) + 2\pi m \quad (m \text{ は整数})$$

のように準周期的であれば良く, 完全に周期的でなくても良い. するとゲージ変換 $A_x \rightarrow A_x + \partial\chi/\partial x$ に伴い $w \equiv q \oint dx A_x$ は

$$\begin{aligned} w &\rightarrow w + q \oint dx \frac{\partial\chi}{\partial x} = w + q(\chi(x_0 + 2\pi R) - \chi(x_0)) \\ &= w + 2\pi m \end{aligned}$$

と変化する (x_0 は円上に任意にとった周回積分の始点). ところがゲージ変換によって物理的な内容は変更されないから, $2\pi m$ だけ異なる w の値は等価であり, $0 \leq w < 2\pi$ の範囲の w のみが意味を持つと言える. そこでベクトルポテンシャルの線積分 w を抽象的な角度変数と見て

$$w = \theta$$

と書く. なお Wilson 巡回指標 $W = e^{i\theta}$ がゲージ変換 $\theta \rightarrow \theta + 2\pi m$ に対して不変となることにも注意しよう.

具体例として“一定の”すなわち x を含むすべての座標に依存しない A_x を考える. そのような場の分布はすべての $F^{\mu\nu}$ がゼロとなり, 源のない Maxwell 方程式 $\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$ を満たしているので実現可能である. このとき定義式 $\theta = w = q \oint dx A_x$ は

$$qA_x = \frac{\theta}{2\pi R}$$

を与える. この場合には場 A_x と相互作用する荷電粒子 (質量 m) のエネルギー固有値は

$$E_l = \frac{1}{2m} \left(\frac{l}{R} - \frac{\theta}{2\pi R} \right)^2 \quad (l \text{ は整数}) \quad (18.49)$$

となることを, Schrödinger 方程式に基づいて説明できる [下記]. ここからゲージ変換 $\theta \rightarrow \theta + 2\pi m$ に対してエネルギー準位の集合は変わらないことが見て取れる. ところでゲージ変換が $\theta \rightarrow \theta + 2\pi m$ という形

をとるのは $U(x)$ をゲージパラメーターと見なしたためであったから、その結果エネルギー準位の集合が不変になったことは、 $U(x)$ がゲージパラメーターであるという我々の主張に信用を与える。(もし $\chi(x)$ そのものがゲージパラメーターであるならば、冒頭の議論において $\chi(x)$ は厳密な周期条件を満たさなければならず ($m = 0$)、このときゲージ変換は $\theta \rightarrow \theta$ となる。)

18.3 節、式の導出など

■エネルギー準位 (18.49) の導出 エネルギー E の固有関数 $\psi(x)$ に対する、時間に依存しない Schrödinger 方程式は

$$E\psi = \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} - qA_x \right)^2 \psi = \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\theta}{2\pi R} \right)^2 \psi \quad (18.48)$$

となる。波動関数は $\psi(x+2\pi R) = \psi(x)$ を満たす周期関数でなければならないことを考えて $\psi(x) = \psi_l(x) \sim \exp(ilx/R)$ とすると (l は整数)、これはエネルギー固有値 (18.49):

$$E_l = \frac{1}{2m} \left(\frac{l}{R} - \frac{\theta}{2\pi R} \right)^2$$

に属する固有関数になっている [本稿次節で補足].

18.3 について

■「Aharonov-Bohm 効果」(p.403) について これについての丁寧な解説は例えば文献 [5, pp.183–188] に見られる。

■「このゲージ場は、関係する場の方程式をすべて満足する」(p.404 下から 3 行目) について 定数 E_x に対して A_μ のゼロでない唯一の成分が $A_x = -E_x t$ であるとき、

$$F_{01} = \partial_t A_x - \partial_x A_t = 0, \quad \text{etc.}$$

によりすべての $F_{\mu\nu}$ はゼロになるので、源のない Maxwell 方程式 $\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$ が満たされる。($\mu = 0, i(\geq 2)$ に対して $A_\mu = 0$ なので $F_{0i} = 0$, また A_μ の全成分は空間座標 (添字 i, j, \dots で指定) に依らないので $F_{ij} = 0$.)

■式 (18.43–45) について 準周期的な条件 (18.37) を満たす $\chi(x)$ の簡単な例として、コンパクト化座標 x について線形な式 (18.43):

$$q\chi = \frac{mx}{R}$$

を選ぶと、これに対してゲージ変換は式 (18.44):

$$qA_x(x) \rightarrow qA_x(x) + \frac{m}{R}$$

となる。

具体例として “一定の” A_x を考えると $w = \theta$ の定義 (18.42) は式 (18.46):

$$qA_x = \frac{\theta}{2\pi R}$$

を与えるので、同時に上のゲージ変換 $qA_x(x) \rightarrow qA_x(x) + \frac{m}{R}$ を考えると、既に一般論として示したようにこのときゲージ変換に対して $\theta \rightarrow \theta + 2\pi m$ と変化することが改めて読み取れる。

■エネルギー固有値 (18.49) について ベクトルポテンシャルの線積分 (18.42) として定義される θ は積分変数 x に依らないので, Schrödinger 方程式 (18.48) における微分 $\partial/\partial x$ は $\theta/2\pi R$ に作用しないことに注意する.

■要約における議論の順序の整理 付録 A 参照.

計算練習 18.1 (p.404)

Stokes の定理よりある面 S を貫く磁束 $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}$ は面 S の境界 (縁) を成す閉曲線 Γ に沿うベクトルポテンシャルの周回積分 $\Phi = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l}$ としても表現できる. ただし線積分は面要素ベクトル $d\vec{a}$ に対して右まわりを行う.

計算練習 18.2 (p.407)

準周期的な条件を満たす x について線形な χ として, 式 (18.43) において $m = 1$ とおいた

$$q\chi = \frac{x}{R}$$

を選ぶ. $m = 1$ のときゲージ変換は $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ である. またエネルギー E_l の固有関数 $\psi_l(x) \sim e^{ilx/R}$ はゲージ変換 $\psi_l \rightarrow e^{iq\chi}\psi_l$ により, 量子数 l が 1 だけ増加した状態の固有関数 $\psi'_l(x) \sim e^{i(l+1)x/R} \sim \psi_{l+1}(x)$ になる. するとエネルギー固有値 (18.49):

$$E_l = \frac{1}{2m} \left(\frac{l}{R} - \frac{\theta}{2\pi R} \right)^2$$

において「 $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ という変更は, $l \rightarrow l + 1$ という変更によって打ち消される」(p.407, 1.14,15) ので, 「エネルギー準位の“集合”は変わらない」(p.407, 1.13,14) だけでなく, エネルギー固有値 E_l そのものが不変に留まる.

18.4 D-ブレーンと開弦と Wilson ライン

コンパクト化方向 x への拡がりを持つ Dp -ブレーンがあるとき, ゲージ場は Dp -ブレーンの世界領域に存在するので, [これと結合する開弦の端点の電荷 q に関して] 前節の角度変数 $\theta = q \oint A_x dx$ を考えられる. これに対し双対世界では $D(p-1)$ -ブレーンが双対半径を持つ円のある位置を占める. [ゲージ場と電荷 q はこの上にだけ存在するので, 双対世界では θ を線積分 $q \oint A_x dx$ の値と考えるのは困難であり,] そこで θ は何に対応するのかに興味を持たれる. 実は θ は双対円における $D(p-1)$ -ブレーンの位置を表す角度変数となる (図 12 参照).

実際 2π の整数倍だけ異なる θ の値は物理的に等価であって, θ が角度変数の資格を持つことは前節で見た通りである. また $D(p-1)$ -ブレーンの円における位置は, そこに端点を持つ開弦のスペクトルに影響を与えないから, もし θ が $D(p-1)$ -ブレーンの位置を表すならば, 開弦のスペクトルは θ に, したがって元の世界の場 A_x に依存してはならない. このことが確かに満たされていることは次のように示される. 開弦状態の質量の自乗は

$$M^2 = p^2 + \frac{1}{\alpha'}(N^\perp - 1) \quad (18.50)$$

で与えられる [本稿次節を参照]. しかるに荷電粒子 q に対して Wilson 巡回指標を [つまり電磁場 $A_x (\equiv A)$ を] 加えると, 粒子のコンパクト化方向の [力学的] 運動量は $p \rightarrow p - qA$ に変更される [p は正準運動量].

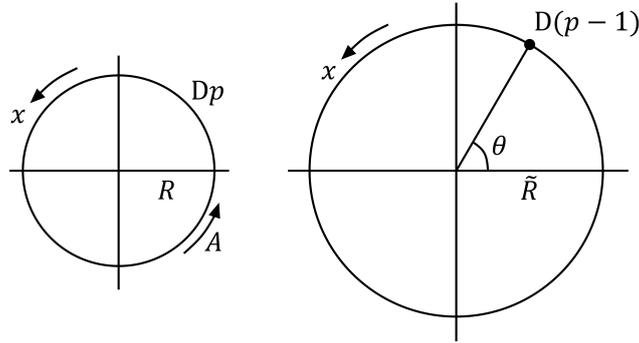


図 12 開弦の T 双対性と Wilson 巡回指標の角度変数

ところが弦の場合は両端が反対の電荷 $\pm q$ [16.3 節では ± 1 とした (自然単位系で電荷は無次元)] を持つので、運動量は $p \rightarrow p - qA + qA = p$ のように不変に保たれ、質量スペクトルも変わらない。[ここで質量を $M^2 = -p_\mu p^\mu$ で与える p^μ は力学的運動量であることに注意した [3, p.52].] 直観的には弦全体としては電気的に中性なので、[もとの世界における θ の意味に他ならない] Wilson 巡回指標 [の位相, したがって電磁場 A の存在] は影響を持たない。

θ が T 双対な円における D-ブレーンの角度位置であることをより印象的に示す強力な証拠を挙げることもできる。そのために、もとの円に 2 つの Dp -ブレーンが巻き付いており、弦がそれらの間に伸びている場合を考えよう (図 13 参照)。一般に 2 つの Dp -ブレーンは異なるゲージ場 A_1, A_2 を、したがって異なる Wilson 巡回指標の角度変数 θ_1, θ_2 を持つ。我々は一般性を失うことなく、電荷 $+q, -q$ を持つ端点の位置する Dp -ブレーンのパラメーターをそれぞれ順に θ_1, θ_2 と約束する。[ここで質量の自乗へのゲージ場の影響を具体的に評価するために、“一定の”ゲージ場 $A = A_1, A_2$ を考えよう.] このとき運動量は $p = n/R$ と量子化されていること [および“一定の” A_x に対する θ の定義式 (18.46): $qA_x = \theta/2\pi R$] を考えると、1 個の電荷 q について運動量の置き換え $p \rightarrow p - qA$ は

$$\frac{l}{R} \rightarrow \frac{l}{R} - \frac{\theta}{2\pi R}$$

を意味する。この置き換えは電荷のエネルギー固有値の式 (18.49): $E_l = \frac{1}{2m} \left(\frac{l}{R} - \frac{\theta}{2\pi R} \right)^2$ にも見て取れる。すると端点に電荷 $\pm q$ を持つ開弦の運動量 $p = l/R$ は

$$p \rightarrow p + qA_1 - qA_2, \quad \therefore \frac{l}{R} \rightarrow \frac{l}{R} - \frac{\theta_2}{2\pi R} + \frac{\theta_1}{2\pi R}$$

と置き換わるので、質量の自乗は

$$M^2 = \left(\frac{2\pi l - (\theta_2 - \theta_1)}{2\pi R} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} (N^\perp - 1) \quad (l \text{ は整数})$$

となる。特に $l = 0$ の状態では

$$M^2 = \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi R} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} (N^\perp - 1)$$

である。さて、パラメーター θ_1, θ_2 に対する我々の解釈では、双対世界の弦は異なる角度 θ_1, θ_2 に位置する 2 つの $D(p-1)$ -ブレーンの間で引き伸ばされていることになる (図 13 参照)。なるほど、[この場合も双対世界

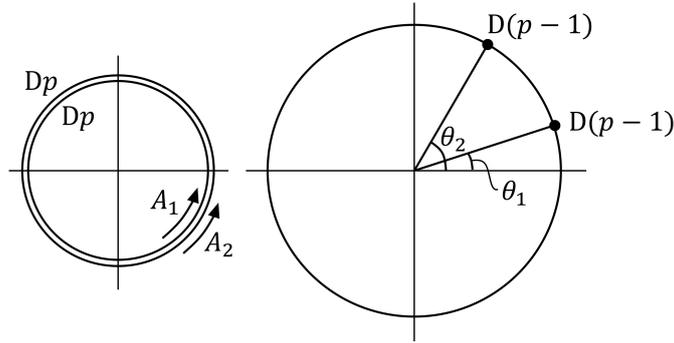


図 13 1つの円に巻き付く2つの Dp -ブレーンと、双対世界の $D(p-1)$ -ブレーン

における弦の質量の自乗は同じく上式で与えられると仮定すると、] 第1項は引き伸ばしによって弦が得るエネルギーに相当する質量の自乗に一致している：

$$\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi R}\right)^2 = \left((\theta_2 - \theta_1) \frac{\alpha'}{R} \frac{1}{2\pi\alpha'}\right)^2 = \left((\theta_2 - \theta_1) \tilde{R} T_0\right)^2.$$

ここから θ は双対世界において D -ブレーンの位置を表す角度になるという解釈が正当化される。

■弦の結合の双対変換 実効的な低次元世界における Newton 定数 \hat{G} は、高次元における Newton 定数と、余剰次元の体積に関する (3.9 節). 双対変換に伴う円の半径の、したがって余剰次元の体積の変更に伴って \hat{G} が変更されないためには、弦の結合 g (13.4 節) は双対変換によって

$$\tilde{g} = \frac{\sqrt{\alpha'}}{R} g$$

と変更されなければならない (問題 18.5).

■ D -ブレーンの張力 静的な Dp -ブレーンでは、その張力 T_p と体積 V_p の積がブレーンの質量を与える. コンパクト化した次元に巻き付いている D -ブレーンの質量が T 双対変換の下で不変でなければならないという事実から、次の関係が証明される (問題 18.6).

$$T_p(g) = \frac{T_p}{g}, \quad T_{p-1}(g) = T_p(g) \cdot 2\pi\sqrt{\alpha'}.$$

第1式はブレーンの張力の g 依存性を表している. τ_p は p に依存するが g に依存しない定数であり、適正な張力の単位を持つように α' を用いた適切な因子を含む [計算練習 18.3(p.410)]. $g \rightarrow 0$ とすると T_p は無限大になるので、弦の相互作用が弱ければブレーンは重くなる. これまで D -ブレーンを固定された超平面として扱ってきたことはここから正当化される. 第2式はすべての D -ブレーンの張力が互いに関係することを意味しており、 T_1 が与えられるとすべての T_p が決まる. 張力が $1/g$ に比例することを考慮し、慣例に従って

$$T_1(g) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{g}$$

となるように弦の結合 g を定義する. 係数は弦の張力 $1/2\pi\alpha'$ を想起させる.

18.4 について

■開弦状態の質量の自乗 (18.50) について 既に類似の計算を度々行っているが、これは次のように確かめられる。まず弦は DD 座標方向の運動量を持たないので、質量の自乗は式 (15.26):

$$M^2 = 2p^+p^- - p^i p^i$$

で与えられる。 α_0^- は、したがって p^- は式 (12.106):

$$2\alpha' p^- = \frac{1}{p^+} (N[L_0^\perp] - 1)$$

によって横方向の Virasoro 演算子と関係付けられており、ここで右辺はハミルトニアン (18.5):

$$H = N[L_0^\perp] - 1 = \alpha' p^i p^i + \frac{1}{2} \alpha_0 \alpha_0 + N^\perp - 1$$

として計算してある。以上を代入すると式 (18.50):

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{1}{\alpha'} (N[L_0^\perp] - 1) - p^i p^i \\ &= p^2 + \frac{1}{\alpha'} (N^\perp - 1) \quad (\because \alpha_0 = \sqrt{2\alpha'} p : (12.46)) \end{aligned}$$

を得る。

■Wilson 巡回指標を定義する弦の端点の電荷について 一見すると弦の両端は逆符号の電荷 $\pm q$ を持つから、仮にそれらが同じ場の分布する共通の Dp -ブレーンにあったとしても、異なる角度パラメーター

$$\theta = \pm q \oint A_x dx$$

を持つことになると思われるかもしれない。すると一般にこれを双対円において両端が属する共通の $D(p-1)$ -ブレーンの位置と見なすことはできなくなる。しかしながら実際には、式 (18.52) において

$$\begin{aligned} \text{負電荷 } -q \text{ に対して} & \quad qA_1 = \frac{\theta_1}{2\pi R}, \\ \text{正電荷 } +q \text{ に対して} & \quad qA_2 = \frac{\theta_2}{2\pi R} \end{aligned}$$

となっていることから分かるように、正しくは式 (18.42): $\theta \equiv w = q \oint A_x dx$ における q は $\pm q$ を代入し得るような一般の電荷ではなく、弦の両端の電荷を $\pm q$ と書いたときの q であり、それ故、(同じブレーンに接続されている) 弦の 2 つの端点は共通の θ の値を持つことになる。

■「静的な弦においては……ブレーンの質量を与える」(p.410, l.11-13) について なるほど、弦の質量すなわち静止エネルギーは張力 T_0 に逆らって弦を寸法ゼロから長さ a まで引き伸ばす仕事 $T_0 a$ であったのと同様に (6.8 節)、ブレーンの質量を張力 T_p に逆らって各方向 $x^i (i = 1, \dots, p)$ に引き伸ばす仕事

$$\int T_p dx^1 \dots dx^p$$

と考えれば、これはブレーンの張力と体積 $V_p = \int dx^1 \dots dx^p$ の積 $T_p V_p$ になる。

■D1-ブレーンの張力 (18.58): $T_1(g) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{g}$ に関する p.410 の訳註の引用

D-ブレーンの粗雑なイメージは“多数の弦が凝集して出来ている物体”であるが、弦自体の張力が強く、弦と弦の間の結合(相互作用)が弱いほど、D-ブレーンとして重く堅固な物体になるわけである。D-ブレーンの質量(α 張力)が、 $1/g$ という、小さな g の冪(べき)による展開ができない形の因子を持つことから、D-ブレーンが本質的に“非摂動的”な対象であることが見て取れる。また、逆に強結合になると D-ブレーンの質量が小さくなるので、D-ブレーン自体の運動の自由度を無視できなくなる。

■「この式から D0-ブレーンの張力も与えられるが、これは単にその質量を表す」(p.410 下から 4,3 行)について 式 (18.57) はその導き方(問題 18.6)より $p = 1$ でも適用可能であり、

$$T_0 = T_1 \cdot 2\pi\sqrt{\alpha'} = \frac{1}{g\sqrt{\alpha'}}$$

を得る。これは確かに質量の単位(次元)を持っている ($[g] = 1, [\alpha'] = L^2$)。

計算練習 18.3 (p.410)

式 (18.57) の第 2 式を繰り返し用いると

$$T_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha'}} T_{p-1} = \dots = \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha'}} \right)^{p-1} T_1, \quad T_1(g) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{g} : (18.58)$$

を得る。ここから

$$\tau_p = \frac{1}{(2\pi)^{p+1} \alpha'^{(p+1)/2}}$$

と同定される。これらは

$$[T_p] = [\tau_p] = \frac{1}{L^{p+1}}$$

という単位(次元)を持っており、「静的な D_p -ブレーンでは、そのブレーンの張力 T_p と体積 V_p の積が、ブレーンの質量を与える」(p.410, 1.11,12) という要請に合っている：

$$[T_p \cdot V_p] = \frac{1}{L^{p+1}} \cdot L^p = M.$$

問題 (第 18 章)

問題 18.1 Schrödinger 方程式のゲージ不変性

18.2 節で言及されている問題 18.1 を解く。本問では Schrödinger 方程式 (18.18):

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\vec{\nabla}}{i} - q\vec{A} \right)^2 \psi + q\Phi\psi$$

のゲージ不変性を確かめる。ゲージパラメーター $U = e^{iq\chi}$ と任意関数 M に対して

$$\frac{\vec{\nabla}}{i}(UM) = q(\vec{\nabla}\chi)UM + U \frac{\vec{\nabla}}{i}M$$

なので、有用な公式

$$\left(\frac{\vec{\nabla}}{i} - q\vec{A} - q\vec{\nabla}\chi \right) UM = U \left(\frac{\vec{\nabla}}{i} - q\vec{A} \right) M$$

が得られる。これを繰り返し用いると、式 (18.20) の右辺第 1 項について

$$\begin{aligned} \left(\frac{\vec{\nabla}}{i} - q\vec{A}'\right)^2 \psi' &= \left(\frac{\vec{\nabla}}{i} - q\vec{A} - q\vec{\nabla}\chi\right)^2 (U\psi) \\ &= \left(\frac{\vec{\nabla}}{i} - q\vec{A} - q\vec{\nabla}\chi\right) U \left(\frac{\vec{\nabla}}{i} - q\vec{A}\right) \psi \\ &= U \left(\frac{\vec{\nabla}}{i} - q\vec{A}\right)^2 \psi \end{aligned}$$

と計算できる。さらに式 (18.20) の左辺と、右辺第 2 項はそれぞれ

$$i\frac{\partial\psi'}{\partial t} = iU\frac{\partial\psi}{\partial t} - q\frac{\partial\chi}{\partial t}U\psi, \quad q\Phi'\psi' = q\left(\Phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}\right)U\psi$$

と書き換えられるので、ゲージ変換を施した後のポテンシャル Φ', \vec{A}' と波動関数 ψ' に対する Schrödinger 方程式 (18.20) は

$$iU\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}U\left(\frac{\vec{\nabla}}{i} - q\vec{A}\right)^2\psi + qU\Phi\psi$$

と等価である。これはもとのポテンシャル Φ, \vec{A} と波動関数 ψ に対する Schrödinger 方程式 (18.18) の両辺に、(左から) U を掛けた関係式となっているから成立する。

なお電磁場と相互作用する非相対論的な荷電粒子に対する Schrödinger 方程式のゲージ不変性に関しては、例えば文献 [5, pp.174–183] に周辺議論と併せた詳しい説明が見られる。ただし議論は、ゲージ関数を含むあらゆる場が時間に依らない場合に限定されている。

問題 18.3 ハミルトニアン の T 双対不変性

18.1 節におけるハミルトニアン の不変性に関する説明の補完として、問題 18.3 を解く。双対座標 \tilde{X} のモード展開は DD 座標 X^a のモード展開 (15.45), (15.47) と同じ形を持つので (18.1 節), $\dot{\tilde{X}} \pm \tilde{X}'$ は式 (15.48) のように表される。これは $\dot{X} \pm X'$ の式 (12.33) とも全く同じ形である。そうであるならば正準交換関係から導かれる振動子の交換関係は同じであり (15.2 節の説明を参照), ハミルトニアン (12.16):

$$H = L_0^\perp = N[L_0^\perp] + a$$

における正規順序化定数 $a = -1$ も変わらない。こうして弦のハミルトニアンは T 双対変換の下で不変となる。

問題 18.4 電場を持つ Dp -ブレーンの T 双対性

19.2 節で言及されている問題 18.4 を解く。

x 方向の一定の電場 E_x を与えるポテンシャルとして $A_x = -E_x t$ をとることができる (p.404)。弦の端点の電荷 $\pm q$ に対して

$$\theta \equiv q \oint A_x dx = -2\pi R E_x t$$

であり (19.2 節との比較のため, $q = 1$ とした), これは双対円に $D(p-1)$ -ブレーンの位置を表すので (18.4 節), ブレーンは円に沿って速度

$$v_\theta = \tilde{R} \frac{d\theta}{dt} = -2\pi\alpha' E_x$$

で動くことになる。これは 19.2 節の結論に整合する (式 (19.34) の速度 $v_x = 2\pi\alpha'E_x$ との符号の違いは、ブレインの角度位置 θ の定義に関する曖昧さに由来するものと想像される)。

ブレインが双対円を周回する時間は

$$T = \frac{2\pi\tilde{R}}{|v_\theta|} = \frac{1}{RE_x}$$

である。ところでもとの世界は場 $A_x = -E_x t$ のゲージ変換 (18.44): $qA_x \rightarrow qA_x + \frac{m}{R}$ に対して不変であり、したがって

$$t \rightarrow t - \frac{m}{RE_x} = t - mT$$

で関係付けられる時刻は物理的に等価である。これは各時刻と、ブレインが双対円を周回してもとの位置に戻ってきた時刻が等価であることを意味することになり、納得がいく結果と言える。

問題 18.5 T 双対性と弦の結合

18.4 節で言及されている問題 18.5 を解く。

$G^{(10)}$ の式 (13.80) の説明を基に、 $G^{(D)}$ に対する同様の式を求めよう。3.8 節で調べたように、自然単位系での単位 (次元) は $[G^{(D)}] = L^{D-2}$ である。他方 $[\alpha'] = L^2$ なので、 $G^{(D)}$ の g 依存性 g^2 を仮定すると

$$G^{(D)} \sim g^2 \alpha'^{\frac{D}{2}-1}$$

となる。これは $D = 10$ とおくと式 (13.80) を再現する。

次に式 (3.117) はその説明より、本問において

$$\frac{G^{(D)}}{\hat{G}} = 2\pi R \cdot V_{p-1}$$

と一般化されると考えられる。

以上の 2 式により

$$\hat{G} \sim \frac{g^2 \alpha'^{\frac{D}{2}-1}}{2\pi R \cdot V_{p-1}}$$

を得る。これは $D = 10, D - p = 4$ に対して式 (13.82) を再現する。以下のように結論にとって重要なのは \hat{G} の g と R に対する依存性であり、それは式 (13.82) の場合と変わらない。

\hat{G} が双対変換 $R \rightarrow \tilde{R}, g \rightarrow \tilde{g}$ に対して不変となるには、

$$\frac{g^2 \alpha'^{\frac{D}{2}-1}}{2\pi R \cdot V_{p-1}} = \frac{\tilde{g}^2 \alpha'^{\frac{D}{2}-1}}{2\pi \tilde{R} \cdot V_{p-1}}$$

より双対世界の弦の結合が

$$\tilde{g} = \sqrt{\frac{\tilde{R}}{R}} g = \frac{\sqrt{\alpha'}}{R} g : (18.56)$$

であれば良い。

問題 18.6 D-ブレインの張力と次元数の降下関係

18.4 節で言及されている問題 18.5 を解く。

「静的な D_p -ブレーンでは，そのブレーンの張力 T_p と体積 V_p の積が，ブレーンの質量を与える」(p.410, 1.11,12) ので，ブレーンの質量は

$$T_p \times 2\pi R V_{p-1} = \tau_p h(g) \times 2\pi R V_{p-1}$$

と計算される． $p-1$ 次元世界ではブレーンはコンパクト化方向の円周 $2\pi R$ の拡がりが見えず，体積 V_{p-1} の対象と捉えられるので，質量は $\tau_{p-1} h(g) \times V_{p-1}$ と表される．弦の結合 (18.56): $\tilde{g} = g\sqrt{\alpha'}/R$ を持つ双対世界での質量は $\tau_{p-1} h(\tilde{g}) \times V_{p-1}$ となる．これらが全て等しいことを要求すると

$$\tau_p h(g) \times 2\pi R V_{p-1} = \tau_{p-1} h(g\sqrt{\alpha'}/R) \times V_{p-1}, \quad \therefore \tau_p h(g) \times 2\pi R = \tau_{p-1} h(g\sqrt{\alpha'}/R) \quad (8)$$

を得る．これを満たす $h(g)$ の関数形を $h(g) = ag^b$ の形に求めよう．上式 (8) に代入すると

$$\tau_p 2\pi R = \tau_{p-1} \frac{\alpha'^{b/2}}{R^b} \quad (9)$$

となるので， R 依存性に注目すると $b = -1$ でなければならない．このとき

$$T_p = \frac{a\tau_p}{g}$$

であって，「 p に依存しない定数 [本稿の a] を τ_p の定義に吸収させる」(問題文) と，式 (18.57) の第 1 の関係 $T_p = \tau_p/g$ になる． $b = -1$ を上式 (9) に戻すと

$$\left(\frac{T_{p-1}}{T_p} = \right) \frac{\tau_{p-1}}{\tau_p} = 2\pi\sqrt{\alpha'}$$

となって，式 (18.57) の第 2 の関係が得られる．

第 19 章 電磁場を持つ D-ブレインと T 双対性

19.1 開弦に結合する Maxwell 場

我々は開弦の端点が接続する D-ブレインの世界領域において Maxwell 場が存在することを学んだ。そこで D-ブレインに背景電磁場，すなわち [ブレインに接続する弦の有無とは無関係に] あらかじめ D-ブレイン内全体に行き渡っているような電磁場の存在を想定し得る。背景場は，その背景場の下で弦の量子化をやり直すことができれば，実際に弦理論において存在が許容される場であると考えて良い。通常，そのような背景電磁場は，馴染み深い古典的な電磁気学の方程式の解になると考えられる。

本章では，D-ブレインにおける背景電磁場の，開弦に対する影響を学ぶ。我々は量子化の詳細な議論にまでは立ち入らない。その代わりに，量子化が適正に機能することを仮定しておく (我々が考察する背景場に関して，この仮定は実際に成立する)。本節では，背景電磁場が存在する場合の開弦の運動方程式を導く。次節以降では T 双対性を利用して，新たな物理的洞察を得る。D-ブレインにおける電磁場の議論は次の第 20 章まで続くが，次章ではその力学が，非線形電磁気学を扱った Born-Infeld (ボルン-インフェルト) 理論に支配されることを示す予定である。(p.414, 1.12-17)

以下では [これまでと同じく] 次の慣例に従って添字を用いる。

- 添字 μ, ν, \dots : 時空添字 $(0, \dots, d)$
- 添字 m, n, \dots : ブレインの世界領域の添字 $(0, \dots, p)$
- 添字 i, j, \dots : ブレインにおける空間方向の添字 $(1, \dots, p)$
- 添字 a, b, \dots : ブレインに垂直な方向の添字 $(p+1, \dots, d)$

さて，16.3 節で導入した弦の端点と Maxwell ポテンシャル A_m との結合項を含めた作用

$$S = \int d\tau d\sigma \mathcal{L}(\dot{X}, X') + \int d\tau A_m(X) \frac{dX^m}{d\tau} \Big|_{\sigma=\pi} - \int d\tau A_m(X) \frac{dX^m}{d\tau} \Big|_{\sigma=0}$$

を考える (\mathcal{L} は南部-後藤ラグランジアン密度)。簡単のために一定の強度 F_{mn} を持つ背景場だけを考察することにすれば，ポテンシャルを $A_m = \frac{1}{2} F_{mn} x^m$ と選ぶことができ (計算練習 19.1)，作用は

$$S = \int d\tau d\sigma \mathcal{L}(\dot{X}, X') + \frac{1}{2} \int d\tau F_{mn} (X^m \partial_\tau X^n |_{\sigma=\pi} - X^m \partial_\tau X^n |_{\sigma=0}) \quad (19.3)$$

となる。これに対し弦座標の変分を施し，適切な境界条件と運動方程式を見出そう。ここでも

$$\mathcal{P}^\tau_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}, \quad \mathcal{P}^\sigma_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu}$$

という記法を用いると (ただしここでは \mathcal{L} は全ラグランジアン密度ではないので，例えば \mathcal{P}^τ_μ は完全な共役運動量ではないことに注意する)，作用の変分は

$$\delta S = \int d\tau [\mathcal{P}^\sigma_\mu \delta X^\mu + F_{mn} (\partial_\tau X^n) \delta X^m]_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} - \int d\tau d\sigma (\partial_\tau \mathcal{P}^\tau_\mu + \partial_\sigma \mathcal{P}^\sigma_\mu) \delta X^\mu$$

と計算される [本稿次節で導出]。よって両端 $\sigma = 0, \pi$ においてブレインに沿った座標 X^m に対する自由端点の条件として

$$\mathcal{P}^\sigma_m + F_{mn} \partial_\tau X^n = 0$$

を, DD 座標 X^a に対して Dirichlet 境界条件 $\delta X^a = 0$ を課せば, 弦の運動方程式として再び

$$\partial_\tau \mathcal{P}^\tau_\mu + \partial_\sigma \mathcal{P}^\sigma_\mu = 0$$

が導かれる.

ここでもパラメーター付けの条件 $\dot{X} \cdot X' = 0, \dot{X}^2 + X'^2 = 0$ を課すと $\mathcal{P}^\sigma_\mu = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_\sigma X_\mu$ となるので, 自由な境界条件は

$$\partial_\sigma X^m - 2\pi\alpha' F_{mn} \partial_\tau X^n = 0, \quad \sigma = 0, \pi$$

となる. これは一般には言わば Neumann 型と Dirichlet 型の混合型の境界条件となる. 簡単な例として電場がなく ($F_{0i} = 0$), またゼロでない磁場成分が $F_{23} = -F_{32} \equiv B$ だけである場合を考えると, これは $m = 0, 1, i (i \geq 3)$ に対しては Neumann 境界条件 $\partial_\sigma X^m = 0$ になるが, X^2 と X^3 に対しては

$$\partial_\sigma X^2 - 2\pi\alpha' B \partial_\tau X^3 = 0, \quad \partial_\sigma X^3 + 2\pi\alpha' B \partial_\tau X^2 = 0$$

となる. よって B が大きい極限でこれは Dirichlet 境界条件

$$\partial_\tau X^2 = \partial_\tau X^3 = 0, \quad \sigma = 0, \pi$$

に移行し, あたかも弦は x^2, x^3 座標が一定の $D(p-2)$ -ブレーンに端を持つような状況となる. そのような $D(p-2)$ -ブレーンは Dp -ブレーン上の各位置 (x^2, x^3) に考えることができるから, Dp -ブレーンは無数の $D(p-2)$ -ブレーンに埋め尽くされていると想像される. この点についてはこの後 [19.3 節の末尾で] 再論する.

19.1 について

■作用の変分 (19.4-6) について 作用 (19.3) の変分をとるにあたって, 場の強度 F_{mn} は一定なので, その値を評価する弦の時空位置の変化に伴う変分はゼロになることに注意する. また南部-後藤作用の項は 6.5 節と同様に部分積分を行うと

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d\tau d\sigma (\mathcal{P}^\tau_\mu \partial_\tau \delta X^\mu + \mathcal{P}^\sigma_\mu \partial_\sigma \delta X^\mu) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d\tau F_{mn} \{ (\delta X^m) \partial_\tau X^n + X^m \partial_\tau \delta X^n \} |_{\sigma=0} \\ &\quad + (\sigma = 0 \text{ の項}) \\ &= \int d\sigma \left[\cancel{\mathcal{P}^\tau_\mu \delta X^\mu} \Big|_{\tau_i}^{\tau_f} + \int d\tau [\mathcal{P}^\sigma_\mu \delta X^\mu]_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} - \int d\tau d\sigma (\partial_\tau \mathcal{P}^\tau_\mu + \partial_\sigma \mathcal{P}^\sigma_\mu) \delta X^\mu \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cancel{[F_{mn} X^m \delta X^n]_{\tau_i}^{\tau_f}} + \frac{1}{2} \int d\tau F_{mn} \{ (\partial_\tau X^n) \delta X^m - (\partial_\tau X^m) \delta X^n \} |_{\sigma=0} \right. \\ &\quad \left. + (\sigma = 0 \text{ の項}) \right] \\ &= \int d\tau [\mathcal{P}^\sigma_\mu \delta X^\mu + F_{mn} (\partial_\tau X^n) \delta X^m]_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} - \int d\tau d\sigma (\partial_\tau \mathcal{P}^\tau_\mu + \partial_\sigma \mathcal{P}^\sigma_\mu) \delta X^\mu \end{aligned}$$

となる.

計算練習 19.1 (p.414)

$$\partial_m A_n - \partial_n A_m = \frac{1}{2} \{ \partial_m (F_{m'n} x^{m'}) - \partial_n (F_{m'm} x^{m'}) \} = \frac{1}{2} (F_{m'n} \delta^{m'}_m - F_{m'm} \delta^{m'}_n) = \frac{1}{2} (F_{mn} - F_{nm}) = F_{mn}.$$

計算練習 19.2 (p.415)

作用の変分 (19.4-6) の補足として本稿で示した計算から確認される。

19.2 電場を持つ D-ブレーン

本節では D p -ブレーンの世界領域において、半径 R にコンパクト化した方向 $x^{25} \equiv x$ を向く強さ $F_{25,0} \equiv E$ が一定の電場が存在する状況を考える。そして問題 18.4 で洞察を得たように、双対世界では電場を持たない D($p-1$)-ブレーンが円に沿って一定速度で移動していることを示す。戦略として、双対な 2 つの世界で境界条件が一致することを確かめて、その証明とする。[と言うのも、前節で見たように電場があるときの違いは境界条件に現れ、運動方程式は不変である (19.3 節の説明も参照).]

まずもとの世界において x 方向の電場の存在下で関心が持たれる境界条件は

$$\partial_\sigma X^0 - \mathcal{E} \partial_\tau X = 0, \quad \partial_\sigma X - \mathcal{E} \partial_\tau X^0 = 0 \quad (\sigma = 0, \pi)$$

である。ただし $\mathcal{E} \equiv 2\pi\alpha' E$ は無単位の電場である。これは新たな微分

$$\partial_\pm \equiv \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_\sigma)$$

を導入すると、“可逆な線形関係”

$$\partial_+ \begin{pmatrix} X^0 \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \mathcal{E}^2 & 2\mathcal{E} \\ \frac{1 - \mathcal{E}^2}{2\mathcal{E}} & \frac{1 - \mathcal{E}^2}{1 + \mathcal{E}^2} \end{pmatrix} \partial_- \begin{pmatrix} X^0 \\ X \end{pmatrix} \quad (\sigma = 0, \pi) \quad (10)$$

に書き換えられる [導出は下記]。[上式を $\partial_- X^0, \partial_- X$ について逆に解けることが“可逆”の意味であると想像される.]

他方、双対世界ではコンパクト化方向の座標 $X = X_L(\tau + \sigma) + X_R(\tau - \sigma)$ は双対な座標 $\tilde{X} = X_L(\tau + \sigma) - X_R(\tau - \sigma)$ に置き換わる。そこで D($p-1$)-ブレーンが円に沿って一定速度 v で運動しているような座標系 S における弦座標を (X^0, \tilde{X}) 、D($p-1$)-ブレーンの静止系 S' における弦座標を (X'^0, \tilde{X}') とすると (図 14 参照、ここでのプライムは σ -微分の意味ではないことに注意)、[双対世界に電場はなく] X'^0 は Neumann 型、 \tilde{X}' は Dirichlet 型の境界条件を満たす。

$$\partial_\sigma X'^0 = 0, \quad \partial_\tau \tilde{X}' = 0.$$

再び ∂_\pm を用いると、これは

$$\partial_+ \begin{pmatrix} X'^0 \\ \tilde{X}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_- \begin{pmatrix} X'^0 \\ \tilde{X}' \end{pmatrix} \quad (\sigma = 0, \pi) \quad (19.28)$$

に書き直される [導出は下記]。ここで S 系と S' 系の座標は Lorentz 変換

$$\begin{pmatrix} X'^0 \\ \tilde{X}' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X^0 \\ \tilde{X} \end{pmatrix}, \quad M \equiv \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta \equiv v/c, \quad \gamma \equiv \sqrt{1 - \beta^2}$$

[ただし一貫して $c = 1$ と置いて良い] で関係付けられていること、および直接確かめられるように、双対な座標 X, \tilde{X} の間には

$$\partial_\pm X = \pm \partial_\pm \tilde{X} \quad (19.27)$$

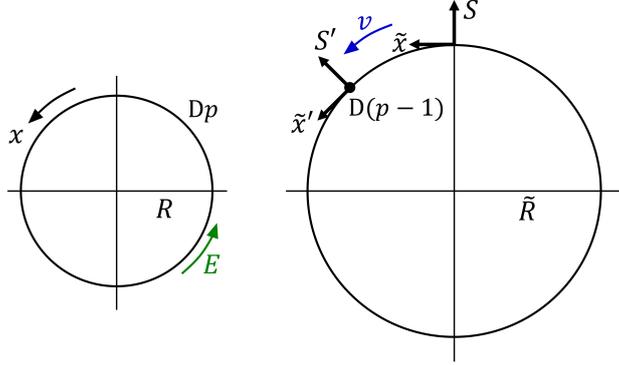


図 14 電場を持つ Dp -ブレーンと、双対円を運動する $D(p-1)$ -ブレーン

の関係があること [本稿次節で確認] を用いると、境界条件は X^0, X を用いて

$$\partial_+ \begin{pmatrix} X^0 \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} & \frac{2\beta}{1-\beta^2} \\ \frac{2\beta}{1-\beta^2} & \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \end{pmatrix} \partial_- \begin{pmatrix} X^0 \\ X \end{pmatrix} \quad (\sigma = 0, \pi) \quad (19.33)$$

と表される [導出は下記]。これをもとの世界の境界条件 (10) と比較すると、次のように結論できる。すなわち

円上を速度パラメーター β で動く $D(p-1)$ -ブレーンは、双対円に巻き付いていて、その円に沿って電場 $\mathcal{E} = \beta$ を持つ Dp -ブレーンと T 双対の関係にある。 (p.420)

[特に電場が $\mathcal{E} = 0$ のときは双対円上の $D(p-1)$ -ブレーンは静止し、18.4 節の結果に一致する。]

このとき速度パラメーターに対する条件 $\beta \leq 1$ は、ブレーン上の電場が最大値 $E_{\text{crit}} = 1/2\pi\alpha'$ を超えられないことを意味する。最大値 E_{crit} は臨界電場と呼ばれ、その値は弦の張力に一致している。このことは直観的には次のように解釈できる。すなわち弦の端点は質量ゼロだから、そこに働く力はつり合っていないが、電場が $E > T_0$ となると端点の電荷 ± 1 が電場から受ける強さ E の力と、弦の実効的な張力 (7.15): $T_0\sqrt{1-v_\perp^2}$ をつり合わせることはできなくなる。よって $E \leq T_0$ でなければならない。

19.2 節, 式の導出など

■D-ブレーンが電場を持つ世界における境界条件 (10) の導出 境界条件

$$\partial_\sigma X^0 - \mathcal{E} \partial_\tau X = 0, \quad \partial_\sigma X - \mathcal{E} \partial_\tau X^0 = 0 \quad (\sigma = 0, \pi)$$

は、 $\partial_\tau = \partial_+ + \partial_-$, $\partial_\sigma = \partial_+ - \partial_-$ を代入して書き直し、 ∂_+ の項を左辺へ、 ∂_- の項を右辺へ移項すると

$$\begin{aligned} \partial_+ X^0 - \mathcal{E} \partial_+ X &= \partial_- X + \mathcal{E} \partial_- X, \\ -\mathcal{E} \partial_+ X^0 + \partial_+ X &= \mathcal{E} \partial_- X^0 + \partial_- X \end{aligned} \quad (19.20)$$

となる。これを $\partial_+ X^0$ と $\partial_+ X$ について解くと、式 (10):

$$\partial_+ \begin{pmatrix} X^0 \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\mathcal{E}^2}{1-\mathcal{E}^2} & \frac{2\mathcal{E}}{1-\mathcal{E}^2} \\ \frac{2\mathcal{E}}{1-\mathcal{E}^2} & \frac{1+\mathcal{E}^2}{1-\mathcal{E}^2} \end{pmatrix} \partial_- \begin{pmatrix} X^0 \\ X \end{pmatrix} \quad (\sigma = 0, \pi)$$

を得る (計算練習 19.3).

■ S' 系での境界条件 (19.28) の導出 X'^0 は Neumann 型, \tilde{X}' は Dirichlet 型の境界条件

$$\partial_\sigma X'^0 = 0, \quad \partial_\tau \tilde{X}' = 0.$$

を満たす. $\partial_\tau = \partial_+ + \partial_-$, $\partial_\sigma = \partial_+ - \partial_-$ を代入して書き直すと,

$$\begin{cases} \partial_+ X'^0 = \partial_- X'^0 \\ \partial_+ \tilde{X}' = -\partial_- \tilde{X}' \end{cases} \quad \therefore \partial_+ \begin{pmatrix} X'^0 \\ \tilde{X}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_- \begin{pmatrix} X'^0 \\ \tilde{X}' \end{pmatrix} : (19.28)$$

となる.

■ S 系での境界条件 (19.33) の導出 上式 (19.28) に Lorentz 変換

$$\begin{pmatrix} X'^0 \\ \tilde{X}' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X^0 \\ \tilde{X} \end{pmatrix}$$

を代入し, M と偏微分が可換であることに注意し, 両辺に M^{-1} を左から掛けると,

$$\partial_+ \begin{pmatrix} X^0 \\ \tilde{X} \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M \partial_- \begin{pmatrix} X^0 \\ \tilde{X} \end{pmatrix} \quad (19.32)$$

を得る. ここで双対関係 (19.27): $\partial_\pm X = \pm \partial_\pm \tilde{X}$ を考慮すると,

$$\begin{aligned} \partial_+ \begin{pmatrix} X^0 \\ X \end{pmatrix} &= M^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_- \begin{pmatrix} X^0 \\ X \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} & \frac{2\beta}{1-\beta^2} \\ \frac{2\beta}{1-\beta^2} & \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \end{pmatrix} \partial_- \begin{pmatrix} X^0 \\ X \end{pmatrix} : (19.33) \end{aligned}$$

に到達する [本稿次節で補足].

19.2 について

■ Neumann 境界条件を表す式 (19.23) について X^0 と X に対する Neumann 境界条件は, 式 (19.16) において $\mathcal{E} = 0$ とした場合である. そこで式 (19.21) において $\mathcal{E} = 0$ とおくと, 確かに式 (19.23) が得られる.

■ 双対関係 (19.27) について

$$\begin{aligned} \partial_\pm X &= \frac{1}{2} (\partial_\tau \pm \partial_\sigma) \{X_L(\tau + \sigma) + X_R(\tau - \sigma)\} \\ &= \frac{1}{2} (X'_L + X'_R \pm X'_L \mp X'_R) \\ &= \begin{cases} X'_L & (\text{複号の上側に対して}) \\ X'_R & (\text{複号の下側に対して}) \end{cases}, \\ \therefore \partial_\pm \tilde{X} &= \begin{cases} X'_L & (\text{複号の上側に対して}) \\ -X'_R & (\text{複号の下側に対して}) \end{cases} \quad (X_R \rightarrow -X_R \text{とした}) \end{aligned}$$

なので (プライムは指数による微分), 式 (19.27):

$$\partial_{\pm} X = \pm \partial_{\pm} \tilde{X}$$

が成り立つ.

式 (19.27) の下 2 行について, もとの座標 X が Neumann 境界条件 (19.23) を満たすならば, 双対座標 \tilde{X} は Dirichlet 境界条件 (19.25) を満たさなければならないが, 式 (19.27) はそのことを保証している.

■式 (19.32) について 双対関係 (19.27) より

$$\partial_+ \begin{pmatrix} X^0 \\ \tilde{X} \end{pmatrix} = \partial_+ \begin{pmatrix} X^0 \\ X \end{pmatrix}, \quad \partial_- \begin{pmatrix} X^0 \\ \tilde{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_- \begin{pmatrix} X^0 \\ X \end{pmatrix}$$

であり, これらを式 (19.31) に代入して式 (19.32) を得る.

■式 (19.33) について

$$M = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$$

に対して

$$\begin{aligned} M^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= M^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ -\beta & -1 \end{pmatrix} = M^{-1} \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} = \gamma^2 \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}^2 \\ &= \frac{1}{1 - \beta^2} \begin{pmatrix} 1 + \beta^2 & 2\beta \\ 2\beta & 1 + \beta^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

計算練習 19.3 (p.417)

式 (19.20):

$$\begin{pmatrix} 1 & -\mathcal{E} \\ -\mathcal{E} & 1 \end{pmatrix} \partial_+ \begin{pmatrix} X^0 \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{E} \\ \mathcal{E} & 1 \end{pmatrix} \partial_- \begin{pmatrix} X^0 \\ X \end{pmatrix}$$

の両辺に逆行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -\mathcal{E} \\ -\mathcal{E} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 - \mathcal{E}^2} \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{E} \\ \mathcal{E} & 1 \end{pmatrix}$$

を左からかけると式 (19.21) を得る.

19.3 磁場を持つ D-ブレーン

D p -ブレーンの世界領域に含まれる 2 方向 (x^2, \tilde{x}^3) のうち \tilde{x}^3 方向が半径 \tilde{R}_3 にコンパクト化しているとす. その上で D p -ブレーン上にゼロでない一定の磁場 $F_{23} = B$ が存在する場合を考える. このとき双対世界では図 15 のように [磁場のない] D $(p-1)$ -ブレーンが半径 $R_3 = \alpha' / \tilde{R}_3$ の円筒上に斜めに周回することを示そう (もちろん $B = 0$ のとき傾斜角度は $\alpha = 0$ でなければならない). 証明には前節と同じ理由で, 境界条件にのみ注目すれば良い.

まず無単位の磁場 $\mathcal{B} = 2\pi\alpha' B$ を導入すると, 磁場を持つ D p -ブレーンに端点を接続している開弦の境界条件は

$$\partial_{\sigma} X^2 - \mathcal{B} \partial_{\tau} \tilde{X}^3 = 0, \quad \partial_{\sigma} \tilde{X}^3 + \mathcal{B} \partial_{\tau} X^2 = 0 \quad (19.37)$$

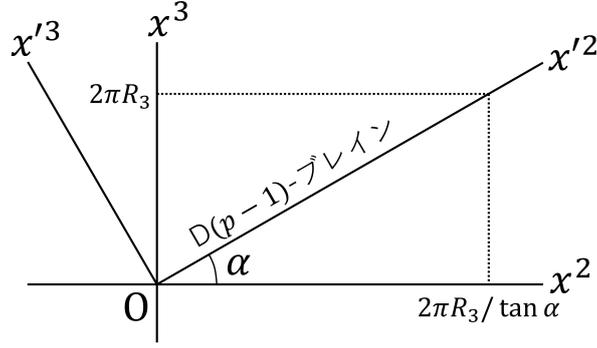


図 15 磁場は双対世界の D-ブレーンを回転させる (x^3 は双対世界のコンパクト化方向であり, D($p-1$)-ブレーンは x'^2 軸に沿っている)

である. 再び前節で導入した ∂_{\pm} を用いると, これは

$$\partial_+ \begin{pmatrix} X^2 \\ \tilde{X}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\mathcal{B}^2}{1+\mathcal{B}^2} & \frac{2\mathcal{B}}{1+\mathcal{B}^2} \\ -\frac{2\mathcal{B}}{1+\mathcal{B}^2} & \frac{1-\mathcal{B}^2}{1+\mathcal{B}^2} \end{pmatrix} \partial_- \begin{pmatrix} X^2 \\ \tilde{X}^3 \end{pmatrix} \quad (11)$$

と書き換えられる (計算練習 19.4).

次に双対世界では図 15 のように, D($p-1$)-ブレーンとともに角度 α だけ回転した x'^2, x'^3 軸を導入すると, 弦座標 X'^2 は Neumann 型, X'^3 は Dirichlet 型となるので, 前節の式 (19.28) と同様に境界条件は

$$\partial_+ \begin{pmatrix} X'^2 \\ X'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_- \begin{pmatrix} X'^2 \\ X'^3 \end{pmatrix} \quad (19.40)$$

と表される. ここで

$$\begin{pmatrix} X'^2 \\ X'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^2 \\ X^3 \end{pmatrix}, \quad \partial_{\pm} X^3 = \pm \partial_{\pm} \tilde{X}^3$$

を用いると, これは (X^2, \tilde{X}^3) に対する条件

$$\partial_+ \begin{pmatrix} X^2 \\ \tilde{X}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \partial_- \begin{pmatrix} X^2 \\ \tilde{X}^3 \end{pmatrix} \quad (19.44)$$

になる [導出は下記]. これは

$$\mathcal{B} = -\tan \alpha$$

とおけばもとの世界の境界条件 (11) に一致するので [本稿次節で改めて導出], 双対世界ではこの関係で定まる角度 α だけ D($p-1$)-ブレーンは傾くことが結論される. このとき確かに磁場がゼロならば回転角度もゼロである. また双対な D-ブレーンを 90° 回転させるためには, 無限大の強さの磁場が必要となることも分かる.

ここから引き出される結論の 1 つは, 系が x^2 方向に周期性を持つということである. 以下, この点を説明する. 今考えている D p -ブレーン上の磁場 $F_{23} = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2$ を与えるようなポテンシャルとして

$$A_2 = 0, \quad A_3 = Bx^2$$

を選ぶ。(これはよく定義されていないコンパクト化方向の座標 \tilde{x}^3 を用いたポテンシャル $A_2 = -B\tilde{x}^3, A_3 = 0$ よりも都合が良い。)すると x^2 方向に Δx^2 だけ進んだとき、ポテンシャルは

$$\Delta A_3 = B\Delta x^2$$

だけ変化する。ところで [コンパクト化方向の座標 \tilde{x}^3 に比例した、正しい準周期性を持つゲージ関数 (18.43): $q\chi = -n\tilde{x}^3/\tilde{R}_3$ に対する] ゲージ変換 (18.45) は、 $q = 1$ とおくと

$$A_3 \rightarrow A_3 - \frac{n}{\tilde{R}_3} \quad (n \text{ は整数})$$

となる。よって A_3 が $-n/\tilde{R}_3$ だけ変化するような変位

$$\Delta x^2 = \frac{-n/\tilde{R}_3}{B} = -\frac{R_3}{\alpha' B} n = -\frac{2\pi R_3}{\mathcal{B}} n = \frac{2\pi R_3}{\tan \alpha} n$$

だけ x^2 方向に進んでも、物理的状況は変わらない。[座標 x^2 は双対世界でも共通であり、] 上の変位 Δx^2 は

$$(\Delta x^2) \tan \alpha = n \times 2\pi R_3$$

より、双対世界において D-ブレーンが円筒を $|n|$ 回 x^3 方向に巻き付くときの x^2 方向の幅となっている。このように双対世界では $\Delta x^2 = 2\pi R_3/\tan \alpha$ ごとの周期性に対して納得のいく解釈が与えられる。

そこで双対な 2 つの世界でともに、 x^2 方向にもコンパクト化を施すことができる。コンパクト化半径 R_2 は

$$2\pi R_2 = \Delta x^2 = \frac{2\pi R_3}{\tan \alpha} n, \quad \therefore \tan \alpha = n \frac{R_3}{R_2}$$

を満たすように選べば良い。これにより D-ブレーンは、半径 R_2 と半径 R_3 を持つトーラスに巻き付くことになる。以下では $n > 1$ を考える。この整数 n は磁場を持つ双対世界において、基本領域の面積 $(2\pi\tilde{R}_3)(2\pi R_2)$ を貫く磁束

$$\Phi = B(2\pi\tilde{R}_3)(2\pi R_2) = -\frac{\tan \alpha}{2\pi\alpha'} \frac{2\pi\alpha'}{R_3} 2\pi R_2 = -2\pi \frac{R_2}{R_3} \tan \alpha = -2\pi n$$

の量子数となる [磁場 $B = F_{23}$ は (x^2, \tilde{x}^3) 面に“直交”すると考えられる]。

ここからは図 16 に沿って議論を進めていく。図 16 の左上には x^2 方向の 1 回の周回に伴って x^3 方向に n 回周回するような 1 つの $D(p-1)$ -ブレーンを示している (図 16 では $n = 3$)。 (このように部分的に傾いた、直線状でないブレーンと双対な磁場は実は一定でない。) $a \rightarrow a', b \rightarrow b', c \rightarrow c'$ という極限において、これは物理的に等価ではないが、図 16 の右上に示した

- 1 つの $D(p-1)$ -ブレーン (x^2 方向)
- n 個の $D(p-1)$ -ブレーン (x^3 方向)

に連続的に移行する。 x^3 方向の T 双対変換を考えると、図 16 の左上の $D(p-1)$ -ブレーンは磁場を持つ Dp -ブレーンと双対であるのに対し、図 16 の右上のブレーンに関する双対性は [実は]

- 1 つの $D(p-1)$ -ブレーン (x^2 方向) \leftrightarrow 1 つの磁場のない Dp -ブレーン
- n 個の $D(p-1)$ -ブレーン (x^3 方向) \leftrightarrow n 個の $D(p-2)$ -ブレーン

となる (図 16 参照)。 n 個の $D(p-2)$ -ブレーンが磁場を表しているものと解釈すれば、連続変形を行っても量子化された磁束が保持されることを保証できる。また 19.1 節の末尾で示唆したように、磁場が無限に強いときには Dp -ブレーンを無数の $D(p-2)$ -ブレーンが占めることが自然に理解される。なお、逆に n 個の $D(p-2)$ -ブレーンが磁場を持つ Dp -ブレーンへ移行することは、トーラスへ“溶解する”と言われる。

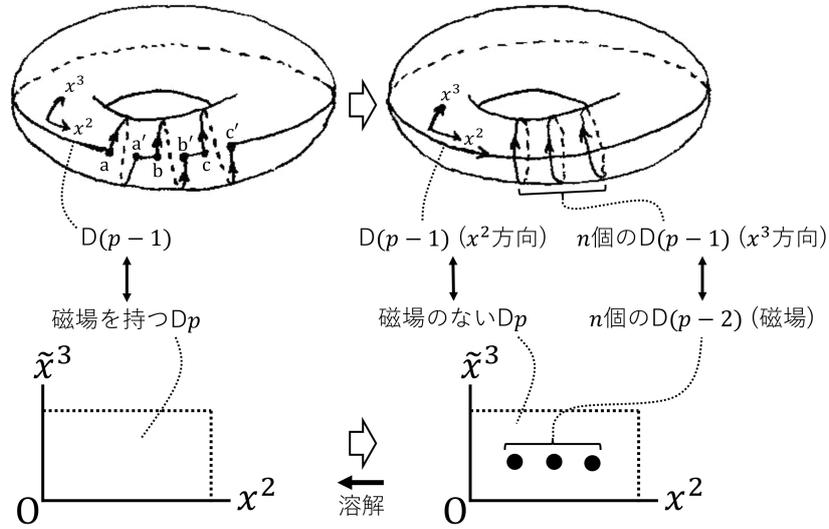


図 16 トーラスに巻き付くブレインの連続的変形と，双対世界の描像

19.3 節，式の導出など

■傾いた $D(p-1)$ -ブレインを持つ世界の境界条件 (19.44) の導出 前節で境界条件 (19.33) を導いたのと同様の計算を行えば良い。すなわち式 (19.40) に座標変換 (19.41):

$$\begin{pmatrix} X'^2 \\ X'^3 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X^2 \\ X^3 \end{pmatrix}$$

を代入し，両辺に左から R^{-1} を掛けると

$$\partial_+ \begin{pmatrix} X^2 \\ \tilde{X}^3 \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R \partial_- \begin{pmatrix} X^2 \\ \tilde{X}^3 \end{pmatrix} \quad (19.42)$$

を得る。ここで双対関係 (19.27): $\partial_{\pm} X^3 = \pm \partial_{\pm} \tilde{X}^3$ を考慮すると

$$\begin{aligned} \partial_+ \begin{pmatrix} X^2 \\ \tilde{X}^3 \end{pmatrix} &= R^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_- \begin{pmatrix} X^2 \\ \tilde{X}^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \partial_- \begin{pmatrix} X^2 \\ \tilde{X}^3 \end{pmatrix} : (19.44) \end{aligned} \quad (19.43)$$

が導かれる [本稿次節で補足].

19.3 について

■座標 x^3 の表記について 本節では Dp -ブレインの存在するもとの世界の座標に記号 \tilde{x}^3 を充て，双対座標を x^3 と書いている。これは座標 x^3 を持つ世界から始めて， Dp -ブレインの存在する世界を 2 次的な双対世界と捉える見方を反映しているものと推察される。もちろんこのような人為的な判断は物理的な意味の違いを生じない。

■双対世界の境界条件 (19.43), (19.44) について 双対関係 (19.27): $\partial_{\pm} X^3 = \pm \partial_{\pm} \tilde{X}^3$ より

$$\partial_+ \begin{pmatrix} X^2 \\ X^3 \end{pmatrix} = \partial_+ \begin{pmatrix} X^2 \\ \tilde{X}^3 \end{pmatrix}, \quad \partial_- \begin{pmatrix} X^2 \\ X^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_- \begin{pmatrix} X^2 \\ \tilde{X}^3 \end{pmatrix}$$

であり, これらを式 (19.42) に代入して式 (19.43) を得る.

式 (19.43) における行列の積を計算すると

$$\begin{aligned} R^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= R^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ -\sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = (R^{-1})^2 \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので式 (19.39) を得る.

■角度 α と磁場 B の関係 (19.47) について 境界条件 (19.44) の行列において

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}, \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \end{aligned}$$

であり, これを式 (11) の行列成分と比較すれば直ちに見出される.

■ゲージ変換と x^2 方向の変位 (式 (19.50–52)) について ゲージ変換 (19.50) は与えられた点における場の値の変化であるのに対し, $\Delta A_3 = B \Delta x^2$ は x^2 方向の変位 Δx^2 に伴う場の値の変化であり, 異なる点の場の値を比較しているという違いがある. しかし $\Delta A_3 = B \Delta x^2$ がゲージ変換と同じ変化となる式 (19.52) の変位 Δx^2 に対しては, 移動先の位置をもとの位置と区別できないというのがここでの主張である.

ここには一様不変な磁場 B の下で x^2 方向に特別な位置がないという事情も関係していると考えられるけれど, ポテンシャル $A_3 = Bx^2$ の非一様性まで考慮するならば, x^2 方向に完全な並進対称性があるとは言えない. これと似たような状況は一様な重力場である. 一見すると系は鉛直方向への並進対称性を持つように思われるけれど, 重力ポテンシャルは鉛直方向に沿って変化する. 対称性からは運動量保存則が期待されるが, 実際には重力場中で落体は加速し, 運動量が保存しないのはこのためである.

■「 Dp -ブレインの角度 α を変更する」(p.424 下から 10,9 行目), 「可能な傾斜角度」(p.425, l.3) について 教科書ではコンパクト化半径を

$$2\pi R_2 = \Delta x^2 = \frac{2\pi R_3}{\tan \alpha}, \quad \therefore \tan \alpha = \frac{R_3}{R_2}$$

なる長さ R_2 に固定し, 次いで

$$\tan \alpha = n \frac{R_3}{R_2}$$

となるように角度 α を変更することを想定している. しかし双対世界の磁場によって決まる角度 α は一定であり, そこで代わりに x^2 方向のコンパクト化半径の任意性を利用して,

$$2\pi R_2 = \Delta x^2 = \frac{2\pi R_3}{\tan \alpha} n, \quad \therefore \tan \alpha = n \frac{R_3}{R_2}$$

を満たすようにコンパクト化半径 R_2 を選ぶと考えれば良い. (この解釈を要約に反映させた.)

■「静的であっても一定でない磁場は、……T 双対な D-ブレインは、直線ではなく曲線として現れることが予想される」(p.425, 1.6-8) について あくまで予想であるが、磁場が非一様であれば T 双対な D-ブレインの各位置での局所的な傾き α も非一様になると期待できる。

■p.421 の訳註の引用 (19.3 節を最後まで読んでから確認すると良い)

磁場の成分は F_{23} のように、そもそも空間添字を“2つ”持つ量だということが、本節の理解のための鍵となる。次元をひとつ下げた $D(p-1)$ -ブレインを持ち出す場合に、それは x^2 と x^3 の中間的な方向を向く (傾く) ということになるし、次元を2つ下げた変形等価物を考える場合には、 x^2 方向と x^3 方向の拡がりを持たない $D(p-2)$ -ブレイン (の集合体) が現れる。

計算練習 19.4 (p.422)

式 (19.19): $\partial_\tau = \partial_+ + \partial_-$, $\partial_\sigma = \partial_+ - \partial_-$ より境界条件 (19.37) は

$$\begin{pmatrix} 1 & -\mathcal{B} \\ \mathcal{B} & 1 \end{pmatrix} \partial_+ \begin{pmatrix} X^2 \\ \tilde{X}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{B} \\ -\mathcal{B} & 1 \end{pmatrix} \partial_- \begin{pmatrix} X^2 \\ \tilde{X}^3 \end{pmatrix}$$

となる。両辺に逆行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -\mathcal{B} \\ \mathcal{B} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1+\mathcal{B}^2} \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{B} \\ -\mathcal{B} & 1 \end{pmatrix}$$

を左から掛けると式 (11) を得る。

第 20 章 Born-Infeld 理論と D-ブレーンの電磁場

20.1 非線形電磁力学の枠組み

物質 (媒質) が背景として存在する場合には, 媒質は電荷密度に対して分極電荷による寄与を持ち, 電流密度に対して磁性電流の寄与を持つ. 分極や磁化による寄与は

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{B}), \quad \vec{H} = \vec{H}(\vec{E}, \vec{B})$$

を導入し, 源を含む Maxwell 方程式を

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (12)$$

と修正することで表現できる [ここでは光速 c を明記した]. ここに ρ と \vec{j} は “自由な” すなわち媒質に起因する分極電荷や磁性電流を “含まない” 源である. 単純な媒質では \vec{D}, \vec{H} と \vec{E}, \vec{B} の間には現象論的に線形な関係 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \vec{H} = \mu \vec{B}$ が成り立つのに対し, 複雑な媒質はこれらの間の関係がもはや線形ではなく, 非線形な電磁力学理論によって記述される. しかしながら Born-Infeld 理論やそれに関連する非線形な電磁力学の理論は単なる媒質中の電磁気学ではなく, むしろ真空自体がある種の媒質のように振舞うことを想定して, 真空中の電磁気学を修正するものである.

以下では非線形電磁力学の枠組みを説明する. ここでも電磁場 \vec{E}, \vec{B} は場の強度 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ の成分

$$F_{i0} = E_i, \quad F_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k$$

として与えられる. [ただし電場に関する式は任意の時空次元で成り立つのに対し, 磁場の式は 4 次元時空を想定して書いている (以下同じ).] このように電磁場がポテンシャルから導かれることから, 源を含まない方程式

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

は恒等式としてそのまま成り立つ. 次に源を含む場の方程式を考える. 源と相互作用する電磁場の作用

$$S = \int d^D x \mathcal{L}(F_{\mu\nu}) + \frac{1}{c} \int d^D x A_\mu j^\mu$$

において, 非線形な電磁力学を定義づける電磁場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}(F_{\mu\nu})$ はもはや Maxwell のラグランジアン密度 $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ に一致しない. 簡単のために電磁場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}(F_{\mu\nu})$ は場の強度 $F_{\mu\nu}$ だけに依存し, その微分 (導関数) には依存しないものと仮定する. ラグランジアン密度の不変性は場の強度のゲージ不変性から保証される. ここでは反対称な場 $F_{\mu\nu}$ に関する微分 $\partial \mathcal{L} / \partial F_{\mu\nu}$ を, それ自身反対称であり

$$\delta \mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} \delta F_{\mu\nu}$$

を満たす量として定義すると, 場の変分 δA_μ に関して最小作用原理は

$$0 = \delta S = \int d^D x (\delta A_\mu) \left[\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{c} j^\mu \right] \quad (20.14)$$

となることが見出されるので [導出は下記],

$$G^{\mu\nu} \equiv -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}}$$

と定義すれば場の方程式は Maxwell 方程式 $\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c}j^\mu$ と同じ形

$$\partial_\nu G^{\mu\nu} = \frac{1}{c}j^\mu$$

をとる. これは $D_i \equiv G^{0i}, H_i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}G^{jk}$ と定義すれば, 上記の源を含む場の方程式 (12) になる. D_i と H_i は具体的には与えられたラグランジアン密度から

$$D_i \equiv G^{0i} = \dots = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial E_i}, \quad (20.17)$$

$$H_i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}G^{jk} = \dots = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial B_i} \quad (20.19)$$

と計算されることになる [導出は下記].

ハミルトニアン密度は

$$\mathcal{H} = \vec{D} \cdot \vec{E} - \mathcal{L}$$

で与えられる.

最後に 4 次元時空において, ラグランジアン密度の具体的な形に対する制約を述べる. ラグランジアン密度は Lorentz 不変量でなければならない. (4 次元時空では) 場の強度 $F_{\mu\nu}$ だけから作られる非自明な Lorentz 不変量は

$$s \equiv -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(E^2 - B^2), \quad (E^2 \equiv \vec{E} \cdot \vec{E}, \text{ etc.})$$

$$p \equiv -\frac{1}{4}\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \vec{E} \cdot \vec{B} \quad \left(\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \right)$$

の 2 つなので, ラグランジアン密度は s と p の任意関数でなければならない. (特に Maxwell 理論のラグランジアン密度は s そのものである.)

20.1 節, 式の導出など

■作用の変分 (20.14) の導出 ここでの偏微分 $\partial\mathcal{L}/\partial F_{\mu\nu}$ の定義式 (20.8):

$$\delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}}\delta F_{\mu\nu}$$

により, 作用 (20.7):

$$S = \int d^D x \mathcal{L}(F_{\mu\nu}) + \frac{1}{c} \int d^D x A_\mu j^\mu$$

の第 1 項の変分は

$$\delta \int d^D x \mathcal{L} = \int d^D x \frac{1}{2} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} \delta F_{\mu\nu} = \int d^D x \frac{1}{2} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) \quad (20.12)$$

と表される. ここで一般性を失うことなく微分 $\partial\mathcal{L}/\partial F_{\mu\nu}$ の反対称性を仮定できること [本稿次節で考察] に注意すると, これは

$$\delta \int d^D x \mathcal{L} = \int d^D x \delta A_\mu \partial_\nu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} \right) \quad (20.13)$$

と書き換えられる [本稿次節で補足]. よって作用の変分 (20.14):

$$\delta S = \int d^D x \delta A_\mu \left[\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{c} j^\mu \right]$$

を得る.

■ \vec{D} の式 (20.17) と \vec{H} の式 (20.19) の導出 本節で定義した $F_{\mu\nu}$ による微分について,

$$\delta M = \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial F_{\mu\nu}} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial U} \delta U \equiv \frac{\partial M}{\partial U} \delta U, \quad \therefore \frac{\partial M}{\partial U} = \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial F_{\mu\nu}} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial U}$$

という連鎖率が成立する. これを利用し, さらに $E_i = F_{i0} = -F_{0i}$ を思い出すと

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{0i}} \frac{\partial F_{0i}}{\partial E_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{i0}} \frac{\partial F_{i0}}{\partial E_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{0i}} = G^{0i} = D_i, \quad \therefore \vec{D} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{E}} : (20.17)$$

を得る.

また例えば $B_1 = F_{23} = -F_{32}$ なので, 同様に

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_i} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{32}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{23}} = -H_i$$

を得る. 添字を巡回置換して得られる関係も成り立ち, それらをまとめると

$$\vec{H} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{B}} : (20.19)$$

となる.

[以上の導出について, 本稿次節で補足・考察する.]

20.1 について

■源を含む場の方程式 (20.2) について Heaviside-Lorentz 単位系では真空中において, 単に Maxwell 方程式 (3.3), (3.4) における \vec{E}, \vec{B} がそれぞれ \vec{D}, \vec{H} に置き換わるだけのことであり, 係数の変更はない.

■「ラグランジアン密度 $\mathcal{L}(F_{\mu\nu})$ は場の強度だけに依存し, たとえばその微分 (導関数) への依存などは無いものと仮定する」(p.432 下 2 行) について このときラグランジアン密度は場 A_μ の 1 階微分までを含むことになるため, 場の方程式は 2 階の微分方程式となる. こうして場 A_μ と時間変化率 \dot{A}_μ の初期値を与えれば, その後の場の時間発展が決定されるという古典的因果律が満たされる.

■微分 $\partial M / \partial F_{\mu\nu}$ の反対称性 (20.9) について $\partial M / \partial F_{\mu\nu}$ の対称部分は式 (20.8) の δM に寄与を持たないから, 反対称部分だけを考慮して反対称性 (20.9) を課して良い.

計算練習 16.1(p.356) ないし問題 16.2 でも見たように, 通常表記では反対称な変分 $\delta F_{\mu\nu}$ に対して

$$M = \left(\frac{\partial M}{\partial F_{\mu\nu}} \right)_A \delta F_{\mu\nu}, \quad \left(\frac{\partial M}{\partial F_{\mu\nu}} \right)_A \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M}{\partial F_{\mu\nu}} - \frac{\partial M}{\partial F_{\nu\mu}} \right) : \text{反対称部分}$$

であるけれど, ここではこの反対称部分 $\left(\frac{\partial M}{\partial F_{\mu\nu}} \right)_A$ を $\frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial F_{\mu\nu}}$ と書いて改めて微分 $\frac{\partial M}{\partial F_{\mu\nu}}$ を定義したことになる.

■作用の変分 (20.13) について 式 (20.12) の最右辺は

$$\int d^D x \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) = - \int d^D x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} \partial_\nu \delta A_\mu = \int d^D x \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} \right) \delta A_\mu : (20.13)$$

と計算できる. 第 1 の等号では被積分関数の第 1 項に対してダミー添字の入れ替え $\mu \leftrightarrow \nu$ を施して, $\partial \mathcal{L} / \partial F_{\mu\nu}$ の反対称性 (20.9) を用い, 次いで第 2 の等号では部分積分を行った.

■連鎖律 (20.11) を利用した導関数の計算 (20.16), (20.18) について この計算は単純に $E_i = -F_{0i}, B_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk}$ を代入して

$$D_i \equiv G^{0i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{0i}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_i}, \quad H_i \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} G^{jk} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{jk}} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_i}$$

とできることを示している. 実際, 例えば微分 $-\partial \mathcal{L} / \partial F_{0i}$ は, F_{0i} とともに F_{i0} も変化することを考慮して式 (20.8) においてあらかじめ係数 1/2 を付けて定義してあるため, F_{0i} の代わりに $-E_i$ による通常の微分 $\partial \mathcal{L} / \partial E_i$ に置き換えられていることが見て取れる.

■ハミルトニアン密度 (20.21) の説明について $F_{\mu\nu}$ は, したがって $\mathcal{L}(F_{\mu\nu})$ は \dot{A}_0 には依らないので, ハミルトニアン密度の定義 $\mathcal{H} = \dot{A}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} - \mathcal{L}$ において

$$\dot{A}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = \dot{A}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i}$$

である. ここで「 \vec{E} は \vec{A} の時間に関する導関数に関係づけられているので」(p.434 下から 14 行目) とあるけれど, 一般には

$$E_i = -F_{0i} = -\partial_0 A_i + \partial_i A_0$$

のように付加的な項 $\partial_i A_0$ が現れる. しかし適当なゲージ (例えば $A_0 = -\phi = 0$ となるゲージ) を選び $E_i = -\dot{A}_i$ とすれば,

$$\dot{A}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = E_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_i} = E_i D_i$$

とできる.

なお

$$\delta \mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} \delta F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\nu\mu}} \right) \delta (\partial_\mu A_\nu) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} \delta (\partial_\mu A_\nu)$$

により常に

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_i}$$

は成立すると考えられる.

■場の不変量 (20.22) について これに関連する説明が文献 [3, pp.71-73] にある.

計算練習 20.1 (p.433)

$$\delta F_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial F_{12}}{\partial F_{\mu\nu}} \delta F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\mu < \nu} \left(\frac{\partial F_{12}}{\partial F_{\mu\nu}} \delta F_{\mu\nu} + \frac{\partial F_{12}}{\partial F_{\nu\mu}} \delta F_{\nu\mu} \right) = \sum_{\mu < \nu} \frac{\partial F_{12}}{\partial F_{\mu\nu}} \delta F_{\mu\nu}$$

なので,

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial F_{12}} = 1 \left(= -\frac{\partial F_{12}}{\partial F_{21}} \right), \quad \text{その他の } \frac{\partial F_{12}}{\partial F_{\mu\nu}} = 0.$$

計算練習 20.2 (p.435)

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{0i} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{0i\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \varepsilon^{0ijk} F_{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{jk} = B_i, \\ \tilde{F}^{ij} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ij\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \varepsilon^{ij0k} F_{0k} = -\varepsilon^{ijk} E_k \\ &\quad (\text{i.e. } \tilde{F}^{12} = -E_z, \tilde{F}^{23} = -E_x, \tilde{F}^{31} = -E_y, \text{ etc.}) \end{aligned}$$

より式 (20.25) の全成分が得られる. なるほど, 双対な場の強度では (符号の違いを除けば) 電場と磁場が入れ替わる.

計算練習 20.3 (p.435)

$$p \equiv -\frac{1}{4} \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \tilde{F}^{0i} F_{0i} - \frac{1}{4} \tilde{F}^{ij} F_{ij}$$

において $\tilde{F}^{0i} F_{0i} = B_i(-E_i) = -\vec{E} \cdot \vec{B}$ である. また右辺第 2 項について

$$\tilde{F}^{ij} F_{ij} = 2(\tilde{F}^{12} F_{12} + \tilde{F}^{23} F_{23} + \tilde{F}^{31} F_{31}) = 2\{(-E_z)B_z + (-E_x)B_x + (-E_y)B_y\} = -2\vec{E} \cdot \vec{B}$$

と計算できる. あるいは

$$\tilde{F}^{ij} F_{ij} = (-\varepsilon_{ijk} E_k)(\varepsilon_{ijl} B_l) = -2\delta_{kl} E_k B_l = -2\vec{E} \cdot \vec{B}$$

としても同じ結果を得る. 以上より式 (20.22): $p = \vec{E} \cdot \vec{B}$ が確かめられる.

20.2 Born-Infeld 理論

まず概要として第 1 段落を引用する (p.435).

本節では Born-Infeld ラグランジアンと呼ばれるラグランジアンを書き下す. このラグランジアンは, 後から D-ブレインの世界領域に存在する電磁場の記述に用いられることになる. これから見るように, Born-Infeld 理論において点粒子の静電的な自己エネルギーは有限になる. Maxwell 理論では, 点粒子の自己エネルギーが無限大になるという難点があり, この部分が Born-Infeld 理論において改善される. 開弦の端点は点電荷なので, 弦理論において弦の端点が無限大のエネルギーを持つわけではないことが分かれば安心できる. 後に続く節において, T 双対性から直接に, Born-Infeld ラグランジアンが D-ブレインにおける電磁場の力学を支配するという証拠について説明する予定である.

ここでは 4 次元時空を考える. 非線形電磁力学のラグランジアン密度に対してゲージ不変性と Lorentz 不変性に加えて, 次の 2 つの制約を課す.

- \vec{E} と \vec{B} が小さいときに, Maxwell ラグランジアン密度に帰着すること.
- $\vec{B} = 0$ のときに電場の最大値の制約 $E \leq b$ が存在すること.

– 弦理論では臨界電場 $E_{\text{crit}} = 1/2\pi\alpha'$ が存在する (19.2 節).

[具体的には D-ブレーンの電磁場に対して b をこの値に選べば良いことが次節で判明する.]

これらの条件を満たすラグランジアン密度として, Born-Infeld ラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = -b^2 \sqrt{1 - \frac{2s}{b^2} - \frac{p^2}{b^4}} + b^2 = -b^2 \sqrt{1 - \frac{E^2 - B^2}{b^2} + \frac{(\vec{E} \cdot \vec{B})^2}{b^4}} + b^2 \quad (20.28)$$

が考えられる. まずこれはゲージ不変な場の強度 $F_{\mu\nu}$ から作られる Lorentz 不変量 (20.22):

$$s \equiv -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (E^2 - B^2), \quad p \equiv -\frac{1}{4} \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \vec{E} \cdot \vec{B}$$

から構築されている. 次に平方根の中身が正でなければならないことから, $\vec{B} = 0$ のときに $E \leq b$ という条件が自然に付与されている. 最後に場の強度 \vec{E}, \vec{B} が弱い $s \sim p \ll b^2$ のとき

$$\mathcal{L} = -b^2 \left[1 - \frac{s}{b^2} + \mathcal{O}\left(\frac{s^2}{b^4}, \frac{p^2}{b^4}\right) \right] + b^2 = s + \mathcal{O}\left(\frac{s^2}{b^2}\right)$$

となって, 確かに Maxwell 理論のラグランジアン密度 s に移行する.

Born-Infeld ラグランジアン密度は, 任意の次元数への一般化の方法が明白である形

$$\mathcal{L} = -b^2 \sqrt{-\det\left(\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{b} F_{\mu\nu}\right)} + b^2 \quad (20.29)$$

に書き換えられるという点で優れている [本稿次節を参照]. Lorentz 不変性はこの表式に対しても確認できる [確認は下記]. なお $F_{\mu\nu}$ の添字に関する反対称性により上式において

$$\det\left(\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{b} F_{\mu\nu}\right) = \det\left(\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{b} F_{\mu\nu}\right)^T = \det\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{b} F_{\mu\nu}\right)$$

なので, Born-Infeld ラグランジアン密度は $F_{\mu\nu}$ の偶関数となることも注目に値する.

最後に Born-Infeld 理論における点電荷の自己エネルギーを計算しよう. 準備として $\vec{B} = 0$ のときの \vec{D} を調べると

$$\mathcal{L} = -b^2 \sqrt{1 - \frac{E^2}{b^2}} + b^2, \quad \therefore \vec{D} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{E}} = \frac{\vec{E}}{\sqrt{1 - E^2/b^2}}$$

となる. すると

$$E^2 = \frac{D^2}{1 + D^2/b^2} = \begin{cases} b^2 \left(\frac{D^2}{D^2 + b^2} \right) & (\rightarrow E \leq b) \\ D^2 \left(\frac{b^2}{b^2 + D^2} \right) & (\rightarrow E \leq D) \end{cases}$$

であり, ここから期待通り $E \leq b$ となることが読み取れる. さらに $E \leq D$ であって, $D \rightarrow \infty$ のとき $E \rightarrow b$ となることも見て取れる. 上式より \vec{E} と \vec{D} が同じ方向を向いていることにも注意して, 逆に \vec{E} を \vec{D} で表すと

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\sqrt{1 + D^2/b^2}}$$

となる. よってエネルギー密度 \mathcal{H} は \vec{D} を用いて

$$\mathcal{H} = \vec{E} \cdot \vec{D} - \mathcal{L} = b^2 \sqrt{1 + \frac{D^2}{b^2}} - b^2 \quad (20.49)$$

と表される [導出は下記].

さて, 点電荷 Q の自己エネルギーに関する議論に移ろう. 場の方程式 $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ より [静止した] 点電荷 Q は球対称な場 $\vec{D} = (Q/4\pi r^2)\vec{e}_r$ を作る (r は電荷からの距離, \vec{e}_r は電荷から見た動径方向の単位ベクトル). すると Maxwell 理論 ($\vec{D} = \vec{E}$) では

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}ED \sim E^2 \sim \frac{1}{r^4}, \quad \therefore \mathcal{H}dV \sim \mathcal{H}r^2dr \sim \frac{dr}{r^2}$$

となって, 原点 $r = 0$ 付近でエネルギー積分は発散する. これに対し Born-Infeld 理論では, 発散の懸念される $D \rightarrow \infty$ となる位置 $r \rightarrow 0$ で

$$\mathcal{H} \simeq bD = E_{\text{crit}}D \sim \frac{1}{r^2}, \quad \therefore \mathcal{H}dV \sim \mathcal{H}r^2dr \sim dr$$

となって, 自己エネルギーは有限になる. 実際このことは Born-Infeld 理論における点電荷のエネルギーの表式

$$U_Q = \int d^3x \mathcal{H} = b^2 \int_0^\infty 4\pi r^2 dr \left(\sqrt{1 + \left(\frac{Q}{4\pi b r^2} \right)^2} - 1 \right)$$

からあからさまに読み取れる. 詳しく調べるために変数変換 $r = x\sqrt{Q/4\pi b}$ を行うと

$$U_Q = \sqrt{\frac{b}{4\pi}} Q \sqrt{Q} \int_0^\infty dx (\sqrt{1+x^4} - x^2)$$

であり, 繰り返しになるが短距離 $x \rightarrow 0$ での発散は解消されている. また

$$\sqrt{1+x^4} - x^2 = \frac{1}{\sqrt{1+x^4+x^2}} < \frac{1}{2x^2}$$

なので, 遠方 $x \rightarrow \infty$ でも被積分関数は充分素早くゼロになり, 積分は有限値を与える*7. $b = 1/2\pi\alpha'$, $\sqrt{\alpha'} = l_s$ に注意すると, つまらない数係数を除けば

$$U_Q \sim \sqrt{b}Q^{3/2} \sim \frac{Q^2}{l_s\sqrt{Q}}$$

である. 他方 Maxwell 理論における半径 a の球内部の様な電荷に対する静電エネルギーは $U_Q \sim Q^2/a$ であり, これは $a \rightarrow 0$ とすると発散する. 逆に言えば a は自己エネルギーを有限にするために電荷に拡がりを持たせる不鮮明化のパラメーターである. これと比較すると Born-Infeld 理論における不鮮明化のパラメーターは $l_s\sqrt{Q}$ と見ることができ, これは電荷 Q とともに増加する.

20.2 節, 式の導出など

■Born-Infeld ラグランジアン密度 (20.29) の Lorentz 不変性の確認 簡単のために場の強度を $F_{\mu\nu}/b \rightarrow F_{\mu\nu}$ と無次元化し, 行列式 $\det(\eta_{\mu\nu} + F_{\mu\nu})$ の Lorentz 不変性を確かめれば充分である. $F_{\mu\nu}, \eta_{\mu\nu}$ および Lorentz 変換 $x'^{\mu} = L^{\mu}_{\nu}x^{\nu}$ の変換係数 L^{μ}_{ν} を (μ, ν) 成分に持つ行列をそれぞれ順に η, F, L と書こう. このとき教科

*7 実際, この積分は

$$\int_0^\infty dx (\sqrt{1+x^4} - x^2) = \frac{(\Gamma(1/4))^2}{6\sqrt{\pi}} \simeq \frac{(3.6256)^2}{6(1.7725)} \simeq 1.236$$

と実行・評価される.

書の説明は次のように簡略化できる．すなわち反変テンソル $\eta^{\mu\nu} + F^{\mu\nu}$ の変換則を用いずとも，直接，共変テンソルの変換則

$$(\eta' + F')_{\mu\nu} = L^\rho{}_\mu L^\sigma{}_\nu (\eta + F)_{\rho\sigma}, \quad \therefore \eta' + F' = L^T (\eta + F) L$$

を書き下せば良く，ここで $\det L = \det L^T$ と $(\det L)^2 = 1$ に注意すると，行列式の Lorentz 不変性

$$\det(\eta' + F') = \det(\eta + F)$$

に到達する．

■ハミルトニアン密度 (20.49) の導出 $\vec{D} = \vec{E}/\sqrt{1 - E^2/b^2}$ を代入して，ラグランジアン密度 $\mathcal{L} = -b^2 \sqrt{1 - \frac{E^2}{b^2}} + b^2$ を \vec{D} によって表すと，

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -b^2 \sqrt{1 - \frac{D^2}{b^2(1 + D^2/b^2)}} + b^2 = -b \sqrt{b^2 - \frac{D^2}{1 + D^2/b^2}} + b^2 = -b \sqrt{\frac{(b^2 + D^2) - D^2}{b^2(1 + D^2/b^2)}} + b^2 \\ &= -\frac{b^2}{\sqrt{1 + D^2/b^2}} + b^2 \end{aligned}$$

となる．よってハミルトニアン密度は

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \vec{E} \cdot \vec{D} - \mathcal{L} &= \frac{D^2}{\sqrt{1 + D^2/b^2}} - \left(-\frac{b^2}{\sqrt{1 + D^2/b^2}} + b^2 \right) = \frac{b^2(1 + D^2/b^2)}{\sqrt{1 + D^2/b^2}} - b^2 \\ &= b^2 \sqrt{1 + \frac{D^2}{b^2}} - b^2 : (20.49) \end{aligned}$$

と計算される．

20.2 について

■ $b = 1$ と置いたラグランジアン密度 (20.30) について b は場の強度 $F_{\mu\nu}$ (つまり \vec{E}, \vec{B} の成分) の次元 (単位) を持ち，ラグランジアン密度 \mathcal{L} はその自乗の次元を持つ．ここで $b = 1$ と置くことは， b を単位として $F_{\mu\nu}/b \rightarrow F_{\mu\nu}, \mathcal{L}/b^2 \rightarrow \mathcal{L}$ と無次元化することを意味している．

■行列 $1 + \eta F$ の全成分 (20.39) について 異なる種類のテンソルの間の，単なる成分の関係 $\eta_{\mu\alpha} = \eta^{\mu\alpha}$ を利用すると

$$(\eta F)_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} = \eta^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} = F^\mu{}_\nu$$

となる．ここから式 (20.39) を確かめられる．

■Born-Infeld ラグランジアン密度の表式 (20.28), (20.29) の等価性について ここまでの補足事項 ($b = 1$ の無次元化としての解釈，行列成分の計算 $(\eta F)_{\mu\nu} = F^\mu{}_\nu$) を踏まえて，4次元時空において式 (20.29) が式 (20.28) に一致することを確認しよう．式 (20.29) の根号内は式 (20.38): $\det(1 + \eta F)$ と書き換えられる (ただし $b = 1$ とおいた)．そこで p.436 の下 4 行にあるように，4行 4列の行列 (20.39) の行列式を直接計算しても良いが，ここでは行列式の定義式

$$\det(1 + \eta F) = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} (\delta^0{}_\alpha + F^0{}_\alpha) (\delta^1{}_\beta + F^1{}_\beta) (\delta^2{}_\gamma + F^2{}_\gamma) (\delta^3{}_\delta + F^3{}_\delta)$$

に立ち戻ってこれを計算する ($\varepsilon^{0123} = 1$). (もっともこのような工夫を行っても結局は泥臭い計算を避けられず, 計算量という観点からは以下に示す方法が必ずしも賢いとも言い切れない.)

上式から現れる場の 1 次の項と 3 次の項は, 例えば

$$\varepsilon^{\alpha 123} F_{\alpha}^0 = 0, \quad \varepsilon^{0\beta\gamma\delta} F_{\beta}^1 F_{\gamma}^2 F_{\delta}^3 = \varepsilon^{0231} F_2^1 F_3^2 F_1^3 + \varepsilon^{0312} F_3^1 F_1^2 F_2^3 = 0$$

となって消える. 場の 0 次の項は

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \delta_{\alpha}^0 \delta_{\beta}^1 \delta_{\gamma}^2 \delta_{\delta}^3 = 1$$

である. また場の 2 次の項は

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{01\gamma\delta} F_{\gamma}^2 F_{\delta}^3 + \varepsilon^{0\beta 2\delta} F_{\beta}^1 F_{\delta}^3 + \varepsilon^{0\beta\gamma 3} F_{\beta}^1 F_{\gamma}^2 \\ & + \varepsilon^{\alpha 12\delta} F_{\alpha}^0 F_{\delta}^3 + \varepsilon^{\alpha 1\gamma 3} F_{\alpha}^0 F_{\gamma}^2 + \varepsilon^{\alpha\beta 23} F_{\alpha}^0 F_{\beta}^1 \\ & = -F_3^2 F_2^3 - F_3^1 F_1^3 - F_2^1 F_1^2 \\ & \quad - F_3^0 F_0^3 - F_2^0 F_0^2 - F_1^0 F_0^1 \\ & = -(F_{01})^2 - (F_{02})^2 - (F_{03})^2 + (F_{12})^2 + (F_{23})^2 + (F_{31})^2 \\ & = B^2 - E^2 \end{aligned}$$

となる. さらに場の 4 次の項は

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha}^0 F_{\beta}^1 F_{\gamma}^2 F_{\delta}^3 \\ & = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{0\alpha} F_{1\beta} F_{2\gamma} F_{3\delta} \\ & = -\varepsilon^{1032} F_{01} F_{10} F_{23} F_{32} - \varepsilon^{1230} F_{01} F_{12} F_{23} F_{30} - \varepsilon^{1302} F_{01} F_{13} F_{20} F_{32} \\ & \quad - \varepsilon^{2031} F_{02} F_{10} F_{23} F_{31} - \varepsilon^{2301} F_{02} F_{13} F_{20} F_{31} - \varepsilon^{2310} F_{02} F_{13} F_{21} F_{30} \\ & \quad - \varepsilon^{3012} F_{03} F_{10} F_{21} F_{32} - \varepsilon^{3201} F_{03} F_{12} F_{20} F_{31} - \varepsilon^{3210} F_{03} F_{12} F_{21} F_{30} \\ & = -E_x^2 B_x^2 - E_z E_x B_z B_x - E_x E_y B_x B_y \\ & \quad - E_x E_y B_x B_y - E_y^2 B_y^2 - E_y E_z B_y B_z \\ & \quad - E_z E_x B_z B_x - E_y E_z B_y B_z - E_z^2 B_z^2 \\ & = -(\vec{E} \cdot \vec{B})^2 \end{aligned}$$

と計算されるので,

$$\det(1 + \eta F) = 1 - (E^2 - B^2) - (\vec{E} \cdot \vec{B})^2$$

を得る. 最後に $F \rightarrow F/b$ と改めて b を復元すると, これは式 (20.28) の根号内

$$1 - \frac{E^2 - B^2}{b^2} - \frac{(\vec{E} \cdot \vec{B})^2}{b^4}$$

に一致する. 以上で 4 次元時空において Born-Infeld ラグランジアン密度の表式 (20.28), (20.29) の等価性が確かめられた.

■不等式 (20.54) の説明について 場の遠方 $x \rightarrow \infty$ では場が弱く, エネルギー密度は Maxwell 理論から期待される x 依存性

$$\mathcal{H} \sim ED \sim \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2}, \quad \therefore \mathcal{H}dV \sim \mathcal{H}x^2 dx \sim \frac{dx}{x^2}$$

を持つ。実際、式 (20.53) の被積分関数は

$$\sqrt{1+x^4} - x^2 = x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} - 1 \right) \simeq \frac{1}{2x^2}$$

と近似される。不等式による評価 (20.54):

$$\sqrt{1+x^4} - x^2 = \frac{1}{\sqrt{1+x^4} + x^2} < \frac{1}{2x^2}$$

はこのことと関係付けられる。

■ Maxwell 理論における半径 a の電荷のエネルギー (20.58) について このように数係数まで含めた正確な表現を求めるには次のように計算すれば良い。すなわち半径 a の球内部に電荷 Q が一様に分布しているとき、電場は

$$E = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi a^3} & (r < a) \\ \frac{Q}{4\pi r^2} & (r > a) \end{cases}$$

となるので、静電エネルギーは

$$U_Q = \frac{1}{2} \left(\int_0^a + \int_a^\infty \right) E^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{4\pi} \frac{3Q^2}{5a} : (20.58)$$

で与えられる。

計算練習 20.4 (p.439)

球対称なベクトル場 $\vec{E} = f(r)\vec{r}$ が回転を持たないことは直観的にはほぼ明らかである。と言うのも、球座標 r, θ, ϕ の微小変化 $dr, d\theta, d\phi$ によって作られる“直方体”の各面の縁における場の周回積分は、したがって回転の各成分はゼロである。実際このような直観を反映して、球座標を用いた回転の一般公式より

$$\begin{aligned} (\text{rot}\vec{E})_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi} E_\theta \right\} = 0, \\ (\text{rot}\vec{E})_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\phi) = 0, \\ (\text{rot}\vec{E})_\phi &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right\} = 0 \end{aligned}$$

となる。

20.3 Born-Infeld 理論と T 双対性

弦理論によれば D-ブレーンにおける電場は最大値を持つ (19.2 節)。Born-Infeld 理論もまた電場の最大値の制約を組み込んでおり、このためブレーンの電磁場を記述するのに適しているように見える。本節では T 双対性を利用して、実際に D-ブレーンにおける電磁場が Born-Infeld 理論に支配されることの直接的な証拠を示す。

Born-Infeld ラグランジアン密度との比較のために、19.3 節で考えた一定の磁場を持つ Dp -ブレーンのラグランジアン (密度) を書き下そう。そのためには双対世界における磁場を持たない $D(p-1)$ -ブレーンのラグ

ランジアンから始めれば良い。D($p-1$)-ブレインの世界領域の1つが、半径 R_2 と R_3 にコンパクト化した x_2, x_3 方向の対角線

$$L_{\text{diag}} = \sqrt{(2\pi R_2)^2 + (2\pi R_3)^2}$$

に沿って伸びており (19.3 節), 他の ($p-2$) 方向は体積 V_{p-2} にコンパクト化した空間に巻き付いているものと仮定する。この世界における弦の結合を \tilde{g} と書く [コンパクト化方向を \tilde{x}^3 ではなく x^3 で表しているのに対し, 弦の結合を \tilde{g} と書くのは, 表記が統一されていないけれど]。この静的な D($p-1$)-ブレインのラグランジアンは, ブレインの静止エネルギー (に負号を付けたもの) である。静止エネルギーすなわち質量は [18.4 節 p.410 でも説明したように], 静的なブレインに関してブレインの張力 $T_{p-1}(\tilde{g})$ と体積 $V_{p-2}L_{\text{diag}}$ の積で与えられる。よってラグランジアンは

$$L = -V_{p-2}L_{\text{diag}}T_{p-1}(\tilde{g})$$

となる。次に x^3 方向に沿った T 双対性を考えると, 双対世界 (双対半径 \tilde{R}_3 , 弦の結合 g) では x^2, x^3 方向に広がった磁場を持つ D p -ブレインが得られる (19.3 節)。ところで [問題 18.6 でも見たように,] T 双対性により 2 つの双対な世界での [場を持たない静的な] ブレインの質量が一致しなければならないことから,

$$T_{p-1}(\tilde{g})V_{p-1} = 2\pi\tilde{R}_3T_p(g)V_{p-1}$$

を得る [この張力の関係は今考えている, 一方の世界で磁場を持つブレインに対しても正しい]。これと

$$L_{\text{diag}} = 2\pi R_2\sqrt{1 + (R_3/R_2)^2} = 2\pi R_2\sqrt{1 + \tan^2\alpha} = 2\pi R_2\sqrt{1 + (2\pi\alpha'B)^2}$$

の関係を用いると, ラグランジアンは

$$L = -V_pT_p(g)\sqrt{1 + (2\pi\alpha'B)^2}, \quad V_p \equiv V_{p-2}(2\pi R_2)(2\pi\tilde{R}_3)$$

と書き換えられる。これは双対世界における磁場を持つ D p -ブレインのラグランジアンと見なすことができ, $B=0$ の場合には静的な D p -ブレインのラグランジアン $L = -V_pT_p(g)$ に帰着する。体積 V_p の係数がラグランジアン密度にあたる:

$$\mathcal{L} = -T_p(g)\sqrt{1 + (2\pi\alpha'B)^2}. \quad (13)$$

他方 Born-Infeld ラグランジアン密度は, 同じく $\vec{E} = 0$ のとき

$$\mathcal{L} = -b^2\sqrt{1 + \frac{B^2}{b^2}} + b^2$$

となる。右辺第 2 項の付加的な b^2 の項は, 場が弱いときに \mathcal{L} が Maxwell 理論のラグランジアン密度 $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ に正確に移行するように導入してあるにすぎず, 省いても良い。ここではむしろ $B=0$ のときの \mathcal{L} をゼロでないブレインの静止エネルギー (に負号を付けたもの) に対応させるために, 積極的に付加的な第 2 項を省いて

$$\mathcal{L} = -b^2\sqrt{1 + \frac{B^2}{b^2}}$$

と書く。次いで平方根に掛かっている b^2 は単に作用全体の規格化に関係していることに注意すると, ブレインのラグランジアン密度 (13) と一致させるためにはこれを

$$\mathcal{L} = -T_p(g)\sqrt{1 + \frac{B^2}{b^2}}$$

に置き換え、さらに平方根の中を比較して $b = 1/2\pi\alpha'$ とすれば良い。このことから期待されるように、一般の (すなわち $\vec{E} = 0$ を仮定しない) Born-Infeld ラグランジアン密度 (20.29) に対して同じ措置を施したラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = -T_p(g)\sqrt{-\det(\eta_{mn} + 2\pi\alpha'F_{mn})} \quad (14)$$

は、磁場のみを持つブレインのラグランジアン密度 (13) を再現する。

同様の議論は一定の電場のみを持つブレインに対しても行うことができる。再び双対円上を速度 v で周回する $D(p-1)$ -ブレインのラグランジアン

$$L = -V_{p-1}T_{p-1}(\tilde{g})\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

から始めて、 T 双対性 $T_{p-1}(\tilde{g}) = 2\pi RT_p(g)$, $v/c = 2\pi\alpha'E$ を利用すると、これは電場の存在する Dp -ブレインのラグランジアン

$$L = V_p\mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = -T_p(g)\sqrt{1 - (2\pi\alpha'E)^2} : \text{ラグランジアン密度} \quad (15)$$

に書き換えられる ($V_p = 2\pi RV_{p-1}$)。そして Born-Infeld ラグランジアン密度 (14) は一定の電場だけが存在する場合に、上式 (15) に一致することを確かめられる。

■まとめ 本節ではあらかじめ分かっている双対世界のブレインのラグランジアンから始めて、 T 双対性を利用して一定の磁場または電場を持つブレインのラグランジアン密度 (13), (15) を見出した。次いで Born-Infeld ラグランジアン密度と等価なラグランジアン密度 (14) は、これらブレインのラグランジアン密度 (13), (15) を再現することを説明した。このことは D -ブレインにおける電磁場が Born-Infeld 理論によって記述されると考えられる証拠となる。

20.3 について

■張力の公式 (20.61) の導出では場を持たないブレインが想定されていること 張力の公式 (20.61) 自体は式 (20.62) のように磁場を持つブレインに対しても適用できるような一般的な関係である。しかしこの式を導出する際、2つの双対な世界での質量 (20.59), (20.60) を等置する議論は、場を持たないブレインに対してしか適用できないと考えられる。実際この節の主要な結論であるラグランジアン密度の式 (20.68) に見て取れるように、場はブレインの“静止エネルギー”に寄与するため^{*8}、ブレインの質量は単に張力と体積の積にはならないと結論し得る。あるいは式 (20.59), (20.60) で共通の値として考えられている V_{p-1} は、磁場を持つブレインとその双対世界のブレインに対して

$$\begin{aligned} V_{p-1} &\rightarrow (2\pi R_2)V_{p-2} && \text{(式 (20.59) にて)} \\ V_{p-1} &\rightarrow L_{\text{diag}}V_{p-2} = \sqrt{(2\pi R_2)^2 + (2\pi R_3)^2}V_{p-2} && \text{(式 (20.60) にて)} \end{aligned}$$

となって、もはや一致しないことも証拠に挙げられる。

■臨界電場 b の決定 Born-Infeld ラグランジアン密度が一定の磁場を持つブレインのラグランジアン密度に一致するためには、 $b = 1/2\pi\alpha'$ と選べば良いことが分かった (p.442)。これは Born-Infeld 理論における電場の最大値 b が期待通り、弦理論における臨界電場 (19.36): $E_{\text{crit}} = T_0$ に一致することを意味している。

^{*8} もっとも場を持つブレインは静的とは考えられていないようである。このことは例えば次のような記述からうかがえる。「静的な Dp -ブレインに関しては、その張力 $T_p(g)$ と体積の積によって、ブレインの質量が与えられる」(p.441, 1.5)。「この式は、 $B = 0$ の場合には、静的な Dp -ブレインのラグランジアンに帰着する」(式 (20.66) の1行下)。

■ラグランジアン密度 (20.68) が、一定の電場だけを持つブレインに対しても正しいこと (式 (20.72) の下3行) ゼロでない電磁場成分が $F_{01}(= -F_{10}) = -E_x$ だけであるとき、 $\varepsilon^{0\dots p} = 1$ を満たす完全反対称テンソル $\varepsilon^{m_0\dots m_p}$ を用いると

$$\begin{aligned} & \det(\eta_{mn} + 2\pi\alpha' F_{mn}) \\ &= \varepsilon^{m_0\dots m_p} (\eta_{0m_0} + 2\pi\alpha' F_{0m_0}) \cdots (\eta_{pm_p} + 2\pi\alpha' F_{pm_p}) \\ &= \varepsilon^{m_0\dots m_p} (\eta_{0m_0} + 2\pi\alpha' F_{0m_0}) (\eta_{1m_1} + 2\pi\alpha' F_{1m_1}) \eta_{2m_2} \cdots \eta_{pm_p} \\ &= 1 + 2\pi\alpha' \varepsilon^{102\dots p} (F_{01} + F_{10}) + (2\pi\alpha')^2 \varepsilon^{102\dots p} F_{01} F_{10} \\ &= 1 + (2\pi\alpha' E_x)^2 \end{aligned}$$

となるので、ラグランジアン密度 (20.68) は式 (20.67) で与えられる一定の電場だけを持つブレインのラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = -T_p(g) \sqrt{1 - (2\pi\alpha' E)^2}$$

を再現する。

■電磁場の規格化と開弦の端点における電荷 $\pm q$ の選択 16.3 節の p.365 で予告されていた電磁場の規格化の決定を再考しよう。Born-Infeld ラグランジアン密度 (20.68) はもとの式 (20.28), (20.29) における付加的な定数項 b^2 を落とし、根号全体の係数 b^2 を $T_p(g)$ に改め、根号の中の b を $1/2\pi\alpha'$ としたものだから、

$$\mathcal{L} = -T_p(g) \sqrt{1 - \frac{2s}{b^2} - \frac{p^2}{b^2}}, \quad b = \frac{1}{2\pi\alpha'}$$

と表される。これは場の弱い極限 $s \sim p \ll b^2$ で

$$\mathcal{L} = -T_p(g) \left(1 - \frac{s}{b^2}\right) = \frac{T_p(g)}{b^2} s + \text{const.} \quad s \equiv -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

に移行する。このことは作用 (16.2) の自由電磁場項

$$-\frac{1}{4\kappa_0^2} \int d^{p+1}x F_{mn} F^{mn}$$

(ただし添字 m, n は Dp -ブレインの世界領域に沿った $p+1$ 方向の値をとる) における規格化定数 κ_0 を

$$\frac{1}{\kappa_0^2} = \frac{T_p(g)}{b^2}$$

と選んだことに対応する*9。これにより電磁場の尺度が定まる。これに対して式 (16.54) のように、開弦の端点の結合項

$$q \int d\tau A_m(X) \frac{dX^m}{d\tau} \Big|_{\sigma=\pi} - q \int d\tau A_m(X) \frac{dX^m}{d\tau} \Big|_{\sigma=0}$$

における電荷 $\pm q$ を慣例に従って ± 1 と選ぶことにする (16.3 節, p.365)。 (弦の端点における電荷の選択は電磁場の規格化と独立には行えないけれど、そのように約束する自由度はある。あるいはこのときの電荷を ± 1 と約束することで、電荷 q と電磁場の規格化の間の縛りが定まる。) 逆に言えば電荷を ± 1 とした結合項

*9 両辺の次元 (単位) が等しいことは以下に注意すれば確かめられる。まず p.354, 1.2 で説明したように $[\kappa_0^2] = M^{4-(p+1)}$ 。また p.410 計算練習 18.3 の解答でも書いたように、静的な Dp -ブレインの質量は張力 T_p と体積 V_p の積で与えられることから $[T_p] = M^{p+1}$ である。最後に場の強度 b は $[b] = M^2$ の次元を持つ。

(16.54) を書いた時点でゲージ場の尺度を変更する余地はなくなるため、このときの自由電磁場項の規格化は Born-Infeld ラグランジアン密度 (20.68) で与えなければならない (20.3 節, p.442).

なお電荷を ± 1 と選ぶと同時に弦と Kalb-Ramond 場の結合項 (16.3) の係数も 1 に選んだと考えれば、そのために 16.3 節のようにゲージ不変性の証明が機能する.

計算練習 20.5 (p.442)

磁場成分 $F_{23} = B$ を定義するブレインに沿った方向 x^2, x^3 の他に、もう 1 つの方向 x^1 も光錐座標を定義する Neumann 座標とするためにブレイン内に含めなければならないので、 $p \geq 3$ が仮定される。ゼロでない電磁場成分が $F_{23}(= -F_{32}) = B$ だけであるとき、 $\varepsilon^{0\dots p} = 1$ を満たす完全反対称テンソル $\varepsilon^{m_0\dots m_p}$ を用いると

$$\begin{aligned}
 & \det(\eta_{mn} + 2\pi\alpha' F_{mn}) \\
 &= \varepsilon^{m_0\dots m_p} (\eta_{0m_0} + 2\pi\alpha' F_{0m_0}) \cdots (\eta_{pm_p} + 2\pi\alpha' F_{pm_p}) \\
 &= \varepsilon^{m_0\dots m_p} \eta_{0m_0} \eta_{1m_1} (\eta_{2m_2} + 2\pi\alpha' F_{2m_2}) (\eta_{3m_3} + 2\pi\alpha' F_{3m_3}) \eta_{4m_4} \cdots \eta_{pm_p} \\
 &= 1 + 2\pi\alpha' \varepsilon^{01324\dots p} (F_{23} + F_{32}) + (2\pi\alpha')^2 \varepsilon^{01324\dots p} F_{23} F_{32} \\
 &= 1 + (2\pi\alpha' B)^2
 \end{aligned}$$

となるので、ラグランジアン密度 (20.68) は式 (20.67) を再現する。これは式 (20.68) の説明からあらかじめ期待されることである。

第 21 章 弦理論と素粒子物理

21.1 交差する 2 つの D6-ブレーン

本節では、素粒子物理の弦モデルを構築するための出発点として好ましい特徴を備えた D-ブレーンの配置について考察する。フェルミオンも対象に含めるために、10 次元時空における超弦理論を利用する。

- 実効的な 4 次元時空 (座標 x^0, x^1, x^2, x^3)
- コンパクト空間 (座標 x^4, \dots, x^9)
 同一視 $x^i \sim x^i + 2\pi R$ ($i = 4, \dots, 9$, 簡単のため半径 R は各次元に共通とする)
 → 6 次元トーラス (6-トーラス) T^6

模型を構築するための多くの可能な選択のうちの 1 つとして、本章では IIA 型の超弦理論を想定し、D6-ブレーンに注目する。

- IIA 型の超弦理論では p が偶数の Dp -ブレーンは安定なので (16.4 節), D6-ブレーンは安定である。
- $p \geq 3$ の Dp -ブレーンは実効的な空間座標 x^1, x^2, x^3 の方向に拡がることことができる。
 そこで x^1, x^2, x^3 方向に拡がる D6-ブレーンを仮定する。
 → x^1, x^2, x^3 方向の境界条件は Neumann 型。
- 残りの 3 方向は T^6 に属する。
 → x^4, \dots, x^9 のうちブレーンの拡がる方向は Neumann 型,
 残りの 3 方向は Dirichlet 型の境界条件を満たす。

以上を踏まえ、D6-ブレーンの配置の例を図 17 に示す。

さらに D6-ブレーンを交差させることを考える。本節の主要な目的は、交差する D-ブレーンの幾何を理解することにある。D6-ブレーンの位置は 3 つの Dirichlet 方向の座標値によって特定できる。そこで例えば 2 つのブレーンとして

$$\begin{aligned} \#1: & x^5 = x^7 = x^9 = 0, \\ \#2: & x^4 = x^6 = x^8 = 0 \end{aligned}$$

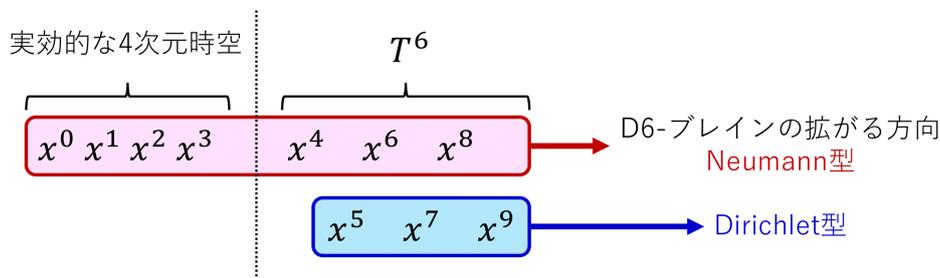


図 17 D6-ブレーンの配置の例

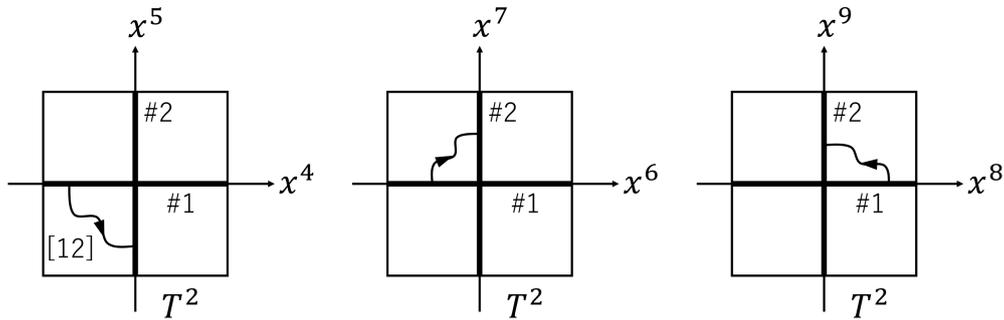


図 18 各 2-トーラスにおけるブレイン #1, #2 と [12] セクターの弦の射影

を考えると、両者の交差部分はこれら 2 式の条件を同時に満たす点から成るので、それはトーラス T^6 における 1 点

$$x^4 = x^5 = x^6 = x^7 = x^8 = x^9 = 0$$

となる。これは時空全体においては、点 $(x^0, x^1, x^2, x^3, 0, 0, 0, 0, 0)$ から成る実効的な 4 次元時空である。ここで 6-トーラスは

- x^4, x^5 方向の 2-トーラス
- x^6, x^7 方向の 2-トーラス
- x^8, x^9 方向の 2-トーラス

を併せたものと等価であり、これら 3 つの 2-トーラス T^2 に分けて考えられることに注意すると、D6-ブレインの交差部分は図 18 のように可視化することができる。なお例えば x^4 方向は #1 上の弦の端点に対しては Neumann 型、#2 上の弦の端点に対しては Dirichlet 型の境界条件が課せられる。このため [12] セクターの弦 (すなわち #1 から #2 に伸びる弦) と [21] セクターの弦を考えると、 x^4 方向の弦座標はそれぞれ ND 型、DN 型となることを指摘しておく。

一般にブレインには張力があるため、その 2-トーラス T^2 への射影は直線状になる [たるまない]。また仮にブレインが (T^2 において) 閉じていないならば、それは無限の長さを、したがって無限大の静止エネルギーを持つことになるため、ブレインは (T^2 において) 両端が同一視されるような線分となっていなければならない。これを踏まえて、 T^2 において D-ブレインを表す 2 つの線分が [図 18 のように垂直に交わる場合に限らず]、一般的な角度で交わる場合を考えよう。

考察を容易にするために、正方領域 $0 \leq x, y \leq 1$ の境界に同一視 $x \sim x+1, y \sim y+1$ を設定して得られるトーラスを考える。[これはもとの 2-トーラスにおける長さを適当に無次元化したことに当たり、このため以下では領域の面積は無次元量となる。] このとき互いに素な整数の組 (m, n) に対して、原点 $(0, 0)$ と点 (m, n) を結ぶ線分を描き、同一視条件を適用して線分全体を正方領域 $0 \leq x, y \leq 1$ の中に移行すると、トーラス上に閉じた線が得られる (図 19 参照)。

- 線がトーラス上で閉じるのことは同一視 $(0, 0) \sim (m, n)$ から保証される。
- m, n が互いに素であることは、線が原点から終点 (m, n) に達するまでに整数座標を持つ点を通して、線が閉じないための条件となっている。

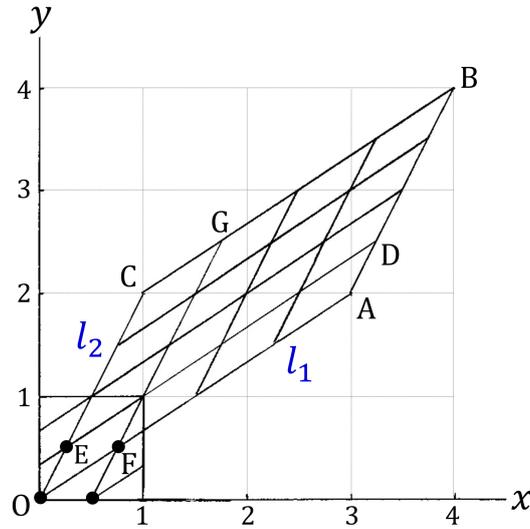


図 19 線 $l_1 = (3, 2), l_2 = (1, 2)$ の張る胞 (セル) と単位トーラス $0 \leq x, y < 1$ における l_1, l_2 の 4 回の交差

- トーラス上の閉じた線を得るには,
2つの整数 m, n のうち的一方がゼロであれば, もう一方は ± 1 と考えなければならない.

このとき 2つの線 $l_1 = (m_1, n_1), l_2 = (m_2, n_2)$ がトーラス上で交差する回数は

$$\#(l_1, l_2) = m_1 m_2 - m_2 m_1 = \det \begin{pmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix}$$

で与えられる (その理由は本稿次節「21.1 について」で教科書の説明を補足しつつまとめる).

- これはベクトル l_1, l_2 の張る平行四辺形の面積に適当な符号を付けたものとなっている.
- 各交点における直線の交差角度は等しく, 各交点で π 未満の角度だけ
 - l_1 を反時計回りに回転させて l_2 に一致させられるとき $\#(l_1, l_2) > 0$
 - l_1 を時計回りに回転させて l_2 に一致させられるとき $\#(l_1, l_2) < 0$
 と算出される.
- 互いに完全に一致する線 $l_1 = l_2$ に対して交差回数はゼロになる.
これは交差回数が,
線のわずかな変形によって変更されないような位相的な量であると考えれば解釈できる.
すなわち一方の線を少しだけずらすと平行な線 l_1, l_2 は交点を持たないから,
交差回数は $l_1 = l_2$ に対してゼロにならなければならない.
- 以上の交差回数の定義の下で,
上の公式がいくつかの具体例に対して正しい交差回数を与えることを確かめることができる.

さて 2つの D6-ブレイン a と b を考えると, それぞれの配置は各々の 2-トーラス ($i = 1, 2, 3$ で表す) 上での 3つの線

$$l_i^{(a)} = (m_i^a, n_i^a), \quad l_i^{(b)} = (m_i^b, n_i^b)$$

によって指定される。ブレイン a, b の T^6 における一般的な交点は、3つの2-トーラスそれぞれから1つずつ交点を選ぶことによって得られるから、 T^6 における交差回数は

$$I_{ab} = \prod_{i=1}^3 \#(l_i^{(a)}, l_i^{(b)}) = \prod_{i=1}^3 (m_i^a n_i^b - m_i^b n_i^a)$$

と表される。符号は3つの2-トーラスにおいて角度 π 未満の回転で a の線を b の向きに合わせるとき、3つの回転のうち時計まわりの回転が偶数回ならば正、奇数回ならば負となっている。ここでもある2-トーラス i の上で線が $l_i^{(a)} = \pm l_i^{(b)}$ となって重なるブレイン a, b は交差していないと見なさなければならない。

21.1 について

■考えている状況の一般性について 「ブレインの2-トーラスへの射影は“円”すなわち両端が同一視される線分となっている」(p.451 下から4,3行目) について、例えば

$$\#1: x^4 = x^5 = x^6 = 0,$$

$$\#2: x^4 = x^5 = x^7 = 0$$

とブレインを選んだ場合を考える。このとき x^4, x^5 方向はブレイン #1, #2 のいずれとも垂直な方向であって、 x^4, x^5 方向の2-トーラスへの #1, #2 の射影はそれぞれ1点 $x^4 = x^5 = 0$ となるはずである。また x^8, x^9 方向はブレイン #1, #2 のいずれにも沿う方向であって、 x^8, x^9 方向の2-トーラスへの #1, #2 の射影は $x^8 x^9$ 平面全体に拡がっているはずである。この場合には3つの2-トーラス T^2 の全てにおいて #1, #2 の各々が線分で表されるように T^2 を選び直すこともできない。

一方「原点 $(0, 0)$ と点 (m, n) を結ぶ線分」(p.452, 1.5) を考えることについては、原点のとり方の任意性により一般性を失わないと考えられる。

■「粗く言うと、これら2本の線の交差回数は、線のわずかな変形によって変更されない」(p.454, 1.11,12) について わずかな変形として線の傾きの変更を考えてはならない。互いに一致する2本の線のうち1つの線の角度をわずかに変えると、その途端に2本の線は明らかにゼロでない交差回数を持ってしまう。

なお日常用語として「交わる」とは2本の線の一方が他方を横切る場合を指し、2本の線全体が一致する場合には適用されないと考えれば、交差回数の公式(21.5)はそのような語感・言葉の綾を的確に反映していると理解することもできる。

■交差回数の公式(21.5)の起源について p.454, 1.16-31にあるのは、最低限、証明のアイデアを理解することを目的とした簡単な説明である。以下では図19を理解の手掛かりとし、解釈を補いつつこれをまとめよう。あらかじめ図19では $l_1 = (3, 2), l_2 = (1, 2)$ の場合を描いており、これらの張る胞(セル, 平行四辺形) C の面積は4であり、これは単位トーラス(基本領域) $0 \leq x, y < 1$ 上での正しい交差回数を与えていることに注意すると、以下の一般的な議論を確認するのに便利である。

さて、ベクトル $l_1 = \overrightarrow{OA}, l_2 = \overrightarrow{OC}$ を単位トーラスの中に移行させると、単位トーラス上の線 l_1, l_2 が過不足なく得られる。逆に言うと、胞 C の各辺 l_1, l_2 がちょうど単位トーラス上の線 $l_1 = \overrightarrow{OA}, l_2 = \overrightarrow{OC}$ の1つの複製にあたる。さらに言うと、図19のように定義される帯 $OADE, OFGC$ はそれぞれちょうど面積1の単位トーラスと同一視されることが見て取れる。それ故、1本の帯の面積は1である。これが一般に正しいと仮定すれば、胞 C に含まれる $l_1 = \overrightarrow{OA}$ とその複製の合計本数、すなわち帯 $OADE$ とその複製の合計本数は、胞 C の面積 I に一致することになる。同様に胞 C に含まれる $l_2 = \overrightarrow{OC}$ とその複製の合計本数も I である。(ただ

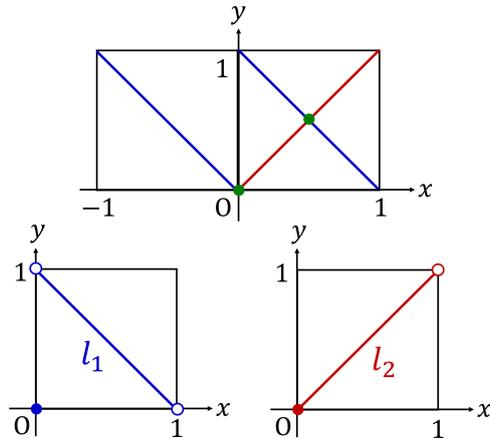


図 20 トーラス上で交差する線 $l_1 = (-1, 1), l_2 = (1, 1)$

し胞 C に含まれる点や線の個数は、 C の 2 辺 BC, CO をそれぞれ平行な 2 辺 OA, AB と同一視して重複なく数える*¹⁰.) C において l_1 とその複製のそれぞれが l_2 とその複製のそれぞれと 1 回ずつ交差するので、 $I \times I$ 個の別々の交点が存在する. したがって、単位トーラス上の交点の数は $I^2/I = I$ となる. これが我々の証明したかった結果である.

計算練習 21.1 (p.453)

正方領域として $x, y = 1$ を除いた範囲 $0 \leq x, y < 1$ を考える. すると図 20 のように l_1 の端点 $(0, 0) \sim (-1, 1) \sim (1, 0) \sim (0, 1)$, l_2 の端点 $(0, 0) \sim (1, 1)$ のように同一視される点は、正方領域には自動的に原点 $(0, 0)$ として重複なく含まれており、 l_1 と l_2 はこの正方領域に 2 個の交点を持つことが読み取れる. またいずれの点においても l_1 を時計回りに角度 $\pi/2 (< \pi)$ だけ回転させると l_2 に一致するので、交差回数は -2 と算出されることが期待される. 実際、

$$\#(l_1, l_2) = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2.$$

計算練習 21.2 (p.454)

線 $l = (1, 1)$ に小さな変位を施した第 2 の線 l' として

$$y = x + \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ は小さな正数})$$

を考える. 平行な 2 直線 $y = x, y = x + \varepsilon$ は xy 平面全体で、したがって正方領域 $0 \leq x, y \leq 1$ で交わらない. 実際 l' は正方領域において図 21 のようになり、 l と共有点を持たない.

計算練習 21.3, 21.4 (p.454)

本稿「21.1 について」における交差回数の公式 (21.5) の起源に対する考察で代用する.

*¹⁰ これは数学的には C をトーラス \hat{C} と見なすことを意味している.

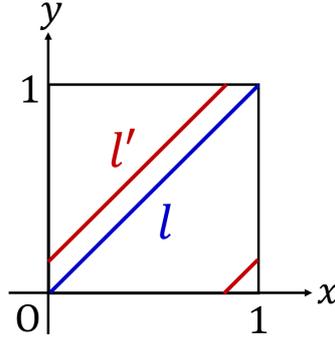


図 21 線 $l = (1, 1)$ と小さな変位を施した第 2 の線 l'

21.2 D-ブレーンと標準模型のゲージ群

まずは 4 次元 $SU(3)$ Yang-Mills 理論によって記述されるグルーオンを考えるために、これと関係する $U(3)$ Yang-Mills 理論に対応する描像として、位置が一致している 3 つの D3-ブレーン ($i = 1, 2, 3$ で指定) を利用する (15.3 節参照). $3^2 = 9$ 個の各セクター $[ij]$ の弦の各々が Maxwell 場に対応する状態を 1 つずつ持つ.

- 3 つのブレーンの各々が持つ Maxwell 場 $A_{(i)\mu}$ ($i = 1, 2, 3$) に関する基本状態 [式 (15.34)]

$$\alpha_{-1} |[ii]\rangle \rightarrow \mathbf{v} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_{-1} |[11]\rangle \\ \alpha_{-1} |[22]\rangle \\ \alpha_{-1} |[33]\rangle \end{pmatrix}. \quad (16)$$

– 状態の運動量ラベルと、振動子の時空添字を省略した (以下, 同じ).

- 一般的な状態

$$\sum_{i=1}^3 A_{(i)} \alpha_{-1} |[ii]\rangle = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{A} \equiv (A_{(1)} \quad A_{(2)} \quad A_{(3)}). \quad (17)$$

[線形結合を作るのに式 (10.88) では偏光ベクトルを用いたのに対し、ここではゲージ場 $A_{(i)}$ を利用した.]

– ゲージ場の時空添字を省略した (以下, 同じ).

- 弦と Maxwell 場の結合項 (弦が重なったブレーンの 1 点 x^μ で表される極限)

$$\sum_{i=1}^3 q_i \int A_{(i)} dx = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{q} dx, \quad \mathbf{q} \equiv \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

[時空添字 μ を復元すれば $\int \mathbf{A}_\mu \cdot \mathbf{q} dx^\mu$.]

– (q_1, q_2, q_3) は弦がブレーン 1, 2, 3 上に持つ電荷の組である.

* 例えば [12] セクターの弦に対して $(q_1, q_2, q_3) = (-1, 1, 0)$.

* 同じ D-ブレーンに始点 (電荷 -1) と終点 (電荷 $+1$) を持つ弦に対して $(q_1, q_2, q_3) = (0, 0, 0)$.

[弦を点粒子として記述しているため、端点の電荷 ± 1 はその 1 点で中和する.]

* このように全てのセクター $[ij]$ の弦に対して $q_1 + q_2 + q_3 = 0$.

さて、ここで基本状態 (16) を可逆な線形変換により

$$\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{s} \equiv \begin{pmatrix} |s_1\rangle \\ |s_2\rangle \\ |s_3\rangle \end{pmatrix} = M\mathbf{v}$$

と変更することを考えると、一般的な状態 (17): $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$ が不変に留まるには、ゲージ場を

$$\mathbf{A} \rightarrow \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}M^{-1}$$

と再定義しなければならない。このとき作用の結合項 (18) が、したがって $\mathbf{A} \cdot \mathbf{q}$ が不変に留まるには、同時に電荷を

$$\mathbf{q} \rightarrow \bar{\mathbf{q}} = M\mathbf{q}$$

と再定義する必要がある。すなわち上式 (17), (18) において \mathbf{v} と \mathbf{q} が \mathbf{A} と同じ方法で結合していることから期待されるように、 \mathbf{v} と \mathbf{q} は同様に変換されなければならない。なお場の再定義に伴って、作用の自由場項 ($F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ の項) の規格化が保持されるためには、 M は直交行列でなければならないことが確かめられる [本稿の次節「21.2 について」を参照]。

ここで新しい基本状態の 1 つが

$$|s_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_{-1} |[11]\rangle + \alpha_{-1} |[22]\rangle + \alpha_{-1} |[33]\rangle)$$

となるような変更を考える。この変換を実現するような直交行列 M は確かに存在し、それを具体的に書き下せる (計算練習 21.6(p.459))。このとき上の結果より $\bar{A}_{(3)}$ に結合する電荷は

$$\bar{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(q_1 + q_2 + q_3) = 0$$

となる。ところが Maxwell 場は電荷を通してのみ他のゲージ場と相互作用するので、これは $\bar{A}_{(3)}$ が他のゲージ場と相互作用を持たないように場と電荷を再定義できたことを意味する。

このように 3 つの重なり合った D-ブレインから得られる $U(3)$ Yang-Mills 理論の持つ 9 個のゲージ場からは、 $U(1)$ 理論によって記述される 1 つのゲージ場が分離される。残り 8 個のゲージ場が 8 個のグルーオンを記述する $SU(3)$ 理論 (量子色力学) を定義する：

$$U(3) = SU(3) \times U(1).$$

一般に N 個の重なり合った D-ブレインから得られる、 N^2 個のゲージ場を記述する $U(N)$ Yang-Mills 理論は、 $N^2 - 1$ 個のゲージ場を持つ $SU(N)$ 理論と

$$U(N) = SU(N) \times U(1)$$

の関係にある。

そこで素粒子の標準模型における完全なゲージ群

$$SU(3)_c \times SU(2)_w \times U(1)_Y, \quad c : \text{color}, \quad w : \text{weak}, \quad Y : \text{hypercharge} \quad (19)$$

における $SU(3)_c$ と $SU(2)_w$ を得るには、3つの重なったブレインと2つの重なったブレインを想定すれば良い。(ただしこれら2組のブレインを重ねてはならない。5つのブレインが重なると、得られるのは $U(5)$ Yang-Mills 理論となってしまう。)すると

$$U(3) \times U(2) = SU(3) \times SU(2) \times U(1) \times U(1)$$

となって、上式(19)と違い2つの $U(1)$ が得られることになる。ゲージボゾンだけに関心を置くならば、これら $U(1)$ の一方、もしくは2つの組合せを上式(19)の超電荷因子 $U(1)_Y$ に同定することができるが、フェルミオンにも適正な超電荷を与えるためには少なくともあと2つのD-ブレインを加える必要がある(次節参照)。

なお $SU(2)_w \times U(1)_Y$ は電弱 Yang-Mills 理論を定義し、これに含まれる4つのゲージ場 $[(2^2 - 1) + 1]$ のうち3つは対称性の破れを通じて質量を獲得し、 W^+, W^-, Z^0 となる。第4のゲージ場は光子であり、依然として質量ゼロである。対称性が破れた後に残るゲージ群は

$$SU(3)_c \times U(1)_{em}$$

となる。この過程でゲージ場だけでなくフェルミオンも質量を獲得する。

■まとめ 本節でははじめに例として、8つのグルーオンを記述する $SU(3)$ Yang-Mills 理論(量子色力学)の基になる $U(3)$ 理論を取り上げた。 $U(3)$ 理論は3つの重なり合ったD-ブレインから得られ、 $3^2 = 9$ 個のゲージ場を持つ。基本状態の変更に伴う場と電荷の再定義により、9個のゲージ場のうち1つを、他のゲージ場と相互作用を持たない $U(1)$ ゲージ場に分離できることを見た。残り8個のゲージ場が8個のグルーオンを記述する $SU(3)$ 理論(量子色力学)を定義する。一般に N 個の重なり合ったD-ブレインから得られる $U(N)$ Yang-Mills 理論の持つ N^2 個のゲージ場のうち1つを $U(1)$ ゲージ場に同定し、

$$U(N) = SU(N) \times U(1)$$

とできる。

21.2 について

■「低エネルギーにおける力学」(21.2節, l.1)について 15.3節に「より正確に言うと、 $U(2)$ Yang-Mills 理論に、低エネルギーでは無視できるような付加的な相互作用が加わった理論が得られる」(p.339, l.2,3)とある。

■「9個のゲージ場」(p.457, l.11)について $i = j$ の3つのセクター $[ij]$ に属する弦の各々が式(15.25)で表される1つのMaxwell場の状態を持ち、 $i \neq j$ の3つのセクター $[ij]$ に属する弦の各々が式(15.57)で表される1つのMaxwell場の状態を持つ。

■「両者の間の正味の力はやはりゼロになる」(p.458, l.9)について 計算練習 21.5((p.458)にあるように、2粒子 $(q_1, q_2), (q'_1, q'_2)$ 間に働く電磁力は $q_1 q'_1 + q_2 q'_2$ に比例する(電荷は共通のブレイン 1,2 上の電磁場を介してしか相互作用しないから)。今の場合 $(q_1, q_2) = (1, 0), (q'_1, q'_2) = (0, 1)$ および再定義された電荷 $[q_+, q_-] = [1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}], [q'_+, q'_-] = [1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$ を用いると、2粒子間の電磁力は

$$q_1 q'_1 + q_2 q'_2 = 0, \quad q_+ q'_+ + q_- q'_- = 0$$

に比例し、ゼロになる。

■「場の強度の行ベクトル」(p.459, l.15) $\mathbf{F}, \bar{\mathbf{F}}$ について 省略されている時空添字 μ, ν, \dots を復元して

$$\mathbf{A}_\mu = (A_{(1)\mu} \quad A_{(2)\mu} \quad A_{(3)\mu})$$

と書き, 任意に選んだ特定の場の成分 $F_{\mu\nu}$ に対して \mathbf{F} を

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\mu\nu} &= (F_{(1)\mu\nu} \quad F_{(2)\mu\nu} \quad F_{(3)\mu\nu}) \\ &= (\partial_\mu A_{(1)\nu} - \partial_\nu A_{(1)\mu} \quad \partial_\mu A_{(2)\nu} - \partial_\nu A_{(2)\mu} \quad \partial_\mu A_{(3)\nu} - \partial_\nu A_{(3)\mu}) \\ &= \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu \end{aligned}$$

で定義する. 弦と Maxwell 場の結合 (21.11): $\int \mathbf{A}_\mu \cdot \mathbf{q} dx^\mu$ が不変に留まるには, μ の値に依らず全ての \mathbf{A}_μ を式 (21.18): $\bar{\mathbf{A}}_\mu = \mathbf{A}_\mu M^{-1}$ のように再定義し, 同時に電荷を式 (21.19): $\bar{\mathbf{q}} = M \mathbf{q}$ によって再定義すれば良い. 以上を踏まえると

$$\mathbf{A}_\mu = \bar{\mathbf{A}}_\mu M, \quad \mathbf{A}^\mu = \bar{\mathbf{A}}^\mu M, \quad \mathbf{F}_{\mu\nu} = \bar{\mathbf{F}}_{\mu\nu} M, \quad \mathbf{F}^{\mu\nu} = \bar{\mathbf{F}}^{\mu\nu} M$$

となるので, F^2 項は

$$\sum_{i=1}^3 F_{(i)\mu\nu} F_{(i)}^{\mu\nu} = (\mathbf{F}_{\mu\nu})(\mathbf{F}^{\mu\nu})^T = (\bar{\mathbf{F}}_{\mu\nu} M)(\bar{\mathbf{F}}^{\mu\nu} M)^T = \bar{\mathbf{F}}_{\mu\nu} M M^T (\bar{\mathbf{F}}^{\mu\nu})^T$$

と表される (式 (21.20) に相当). よって F^2 の項と同じように \bar{F}^2 が規格化されているためには, M は $M M^T = 1$ を満たさなければならない, すなわち直交行列でなければならない.

■式 (21.24): $U(N) = SU(N) \times U(1)$ について ここではゲージ場を導入する前段階の $SU(N)$ Yang-Mills 理論の説明を通して, 式 (21.24): $U(N) = SU(N) \times U(1)$ の起源を簡単に見る [6, pp.137–138, p.145].

N 種類の Dirac 場

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = (\bar{\psi}_1 \quad \bar{\psi}_2 \quad \cdots \quad \bar{\psi}_N)$$

に対するラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = \sum_{\alpha=1}^N \bar{\psi}_\alpha(i\partial\!\!\!/ - m)\psi_\alpha$$

は, $N \times N$ のユニタリー行列 $U = e^{iH}$ (したがって H は Hermite 行列) による大域的位相変換 $\psi \rightarrow U\psi$ の下で不変に留まる. このような対称変換は 2 回繰り返して行っても, \mathcal{L} を不変に保つ $N \times N$ ユニタリー行列による変換となるから, $U(N)$ 群と呼ばれる群を成す. ところで一般に $N \times N$ の Hermite 行列 H は N^2 個の独立な実数によって特定できる [7, p.254].

証明 Hermite 性より H の N 個の対角成分は全て実数であり, また下三角成分は上三角成分を与えると完全に定まる. 上三角成分は全部で $(N^2 - N)/2$ 個あり, その各々が 2 つの実数で指定されるので, Hermite 行列 H は合計

$$N + 2 \times \frac{N^2 - N}{2} = N^2 \text{ 個}$$

の実数パラメーターを持つ.

そこで N^2 個の適当な Hermite 行列 T_i と実パラメーター α_i を用いて、一般に

$$H = \sum_i \alpha_i T_i, \quad U = \exp\left(i \sum_i \alpha_i T_i\right)$$

と書くことができる (このとき T_i を変換の生成子と呼ぶ).

例として QCD(量子色力学) を念頭に、 $N = 3$ の場合を考えよう. 我々の目的のためには、生成子 T_i の具体的な行列表現に頼って議論を進めれば充分である. このとき $N^2 = 9$ 個の T_i として、Gell-Mann 行列

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

の 1/2 倍

$$T_i = \frac{1}{2} \lambda_i (\equiv \hat{F}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, 8)$$

と、単位行列 $\mathbf{1}$ に比例した $T_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{1}$ を選ぶことができる. T_0 を生成子とするユニタリー行列

$$\begin{aligned} \exp(i\alpha_0 T_0) &= \exp\left(i \frac{\alpha_0}{\sqrt{6}} \mathbf{1}\right) = 1 + i \frac{\alpha_0}{\sqrt{6}} \mathbf{1} + \frac{1}{2!} \left(i \frac{\alpha_0}{\sqrt{6}}\right)^2 \mathbf{1}^2 + \dots = \left[1 + i \frac{\alpha_0}{\sqrt{6}} + \frac{1}{2!} \left(i \frac{\alpha_0}{\sqrt{6}}\right)^2 + \dots\right] \mathbf{1} \\ &= \exp\left(i \frac{\alpha_0}{\sqrt{6}}\right) \mathbf{1} \end{aligned}$$

による変換

$$\psi \rightarrow \exp(i\alpha_0 T_0) \psi, \quad \text{i.e.} \quad \psi_\alpha \rightarrow \exp\left(i \frac{\alpha_0}{\sqrt{6}}\right) \psi_\alpha$$

は $U(1)$ 部分群を成す. また残りの 8 個の生成子 \hat{F}_i はいずれもトレースがゼロになっていることに注目すると、 $\exp\left(i \sum_{i=1}^8 \alpha_i \hat{F}_i\right)$ は行列式が 1 となることが分かる.

証明 一般に α_i を無限小パラメーターとして、生成子 T_i によるユニタリー変換の演算子を

$$1 + i \sum_i \alpha_i T_i$$

と書くと、有限の α_i による変換の演算子は無限小変換を合成して

$$U = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + i \sum_i \frac{\alpha_i}{n} T_i\right)^n = \exp\left(i \sum_i \alpha_i T_i\right)$$

と求まる [5, p.64]. また行列式は

$$\begin{aligned} \det U &= \det \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + i \sum_i \frac{\alpha_i}{n} T_i\right)^n \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\det \left(1 + i \sum_i \frac{\alpha_i}{n} T_i\right) \right]^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + i \frac{\alpha_i}{n} \text{Tr}(T_i) + O\left(\left(\frac{\alpha_i}{n}\right)^2\right) \right]^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + i \alpha_i \text{Tr}(T_i) + O\left(\left(\frac{\alpha_i}{n}\right)^2\right) \right] \\ &= 1 + i \alpha_i \text{Tr}(T_i) \end{aligned}$$

と表される。ただし第3の等号では、 α_i/n 程度の $N \times N$ 行列 $A = i \sum_i \frac{\alpha_i}{n} T_i$ に対して

$$\begin{aligned}
& \det(\mathbf{1} + A) \\
&= \varepsilon^{i_1 \cdots i_N} (\mathbf{1} + A)_{1i_1} \cdots (\mathbf{1} + A)_{Ni_N} \\
&= \varepsilon^{i_1 \cdots i_N} \delta_{1i_1} \cdots \delta_{Ni_N} \\
&\quad + \varepsilon^{i_1 \cdots i_N} \{ (A_{1i_1} \delta_{2i_2} \cdots \delta_{Ni_N}) + (\delta_{1i_1} A_{2i_2} \delta_{3i_3} \cdots \delta_{Ni_N}) + \cdots + (\delta_{1i_1} \cdots \delta_{N-1, i_{N-1}} A_{Ni_N}) \} + O((\alpha_i/n)^2) \\
&= \varepsilon^{1 \cdots N} + (\varepsilon^{i_1 2 \cdots N} A_{1i_1} + \varepsilon^{1 i_2 3 \cdots N} A_{2i_2} + \cdots + \varepsilon^{1 \cdots (N-1) i_N} A_{Ni_N}) + O((\alpha_i/n)^2) \\
&= 1 + \varepsilon^{1 \cdots N} (A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{NN}) + O((\alpha_i/n)^2) \\
&= 1 + \text{Tr} A + O((\alpha_i/n)^2) \\
&= 1 + \sum_i \frac{\alpha_i}{n} \text{Tr}(T_i) + O((\alpha_i/n)^2)
\end{aligned}$$

となることを用いた ($\varepsilon^{i_1 \cdots i_N}$ は $\varepsilon^{1 \cdots N} = 1$ を満たす反対称テンソル) [8, pp.70–71]. 以上より

$$\text{Tr}(T_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det \left[\exp \left(i \sum_i \alpha_i T_i \right) \right] = 1.$$

なお正方行列 A に対する公式 $\det(\exp A) = \exp(\text{Tr} A)$ を利用すれば、近似に頼らずに

$$\det(\exp A) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Tr} A = 0$$

が言える [9, pp.88–90].

行列式が1のユニタリー行列 $\exp \left(i \sum_{i=1}^8 \alpha_i \hat{F}_i \right)$ による位相変換は特殊ユニタリー群 $\text{SU}(3)$ を成す。こうして半ば直観的に述べると、 $\text{U}(3)$ 群は $\text{U}(1)$ 群と $\text{SU}(3)$ 群に分解される^{*11} :

$$\text{U}(3) = \text{U}(1) \times \text{SU}(3).$$

QCD は $\text{SU}(3)$ 変換に関してゲージ不変な理論であり、いわゆる $\text{SU}(3)$ Yang-Mills 理論の実例にあたる。クォークの各香り $f = d, u, s, c, b, t$ について3種類の色状態 $a = r, g, b$ の Dirac 場 ψ_a^f が定義され、8種類の色演算子 $\hat{F}_i = \lambda_i/2$ が $\text{SU}(3)$ 変換の生成子となる。

一般論に戻ろう。一般に $\text{U}(N)$ 変換の N^2 個の生成子 T_i は、規格直交条件

$$\text{Tr}(T_i T_j) = \frac{1}{2} \delta_{ij}$$

を満たすようにとるのが慣例となっている^{*12}。単位行列に比例する T_0 を選ぶと、残りの $N^2 - 1$ 個の T_i は特に

$$\text{Tr}(T_i) = 0 \quad (i \neq 0)$$

^{*11} $T_0 \sim \mathbf{1}$ は明らかに他の T_i と交換するため、 $\{T_i\}$ を基底とする Lie 代数は T_0 を基底とする Lie 代数とその他の T_i を基底を持つ Lie 代数の直和に分解される。このとき対応する Lie 群は、各々の Lie 代数が生成する Lie 群の直積 $\text{U}(3) \simeq \text{U}(1) \times \text{SU}(3)$ になる (記号「 \simeq 」は同型を表す)。変換群の元が生成子の指数で表される場合は簡単である。実際 $[T_0, T_i] = 0$ のとき “指数法則”

$$\exp \left(i \sum_i \theta^i T_i \right) = \exp(i\theta^0 T_0) \exp \left(i \sum_{i(\neq 0)} \theta^i T_i \right)$$

が成り立つ。これは $\text{U}(1)$ 群と $\text{SU}(3)$ 群の元の積 (組、表現では文字通りの積) が $\text{U}(3)$ 群の元となることを、表現の水準で表している。以上、Lie 代数の直和や Lie 群の直積の定義を含め、文献 [10, p.11, p.23, p.80, p.86, p.240] を参照。なお文献 [10, p.88] では一般に任意のコンパクト Lie 群が、単純 Lie 群たちと1次元ユニタリー群 $\text{U}(1)$ たちの直積となることを証明した。

^{*12} 実は Killing 形式と呼ばれる “内積” $\text{Tr}(T_i T_j)$ が正定値であるのは、群がコンパクトな場合だけである [6, p.139]。文献 [10, p.55, pp.88–89] ではコンパクト群をパラメータの変域が有限の群 (例えば $\text{U}(n)$ や $\text{O}(n)$) として定義した上で、Lie 代数の基底 T_i に対する Killing 形式 $g_{ij} = (T_i, T_j)$ (対称行列より対角化できる) がコンパクト群に対して、(半) 正定値となることを示している。

を満たすことになり, $SU(N)$ 変換を生成する. また $N^2 - 1$ 個の T_i は交換関係

$$[T_i, T_j] = if_{ijk}T_k$$

を満たし, 上式で定義される構造定数 f_{ijk} は

$$if_{ijk} = 2\text{Tr}([T_i, T_j]T_k)$$

と書けることになるから, T_i の具体的な行列表現に依らずとも f_{ijk} は添字に関して完全反対称であることが結論される [6, pp.138–139].

大域的位相変換を局所的位相変換に一般化したとき, 理論のゲージ不変性を回復するには, 極小置換により物質場と相互作用する $N^2 - 1$ 種類のゲージ場を導入すれば良い.

計算練習 21.5 (p.458)

式 (21.12) と同様,

$$q_1q'_1 + q_2q'_2 = \frac{q_1 + q_2}{\sqrt{2}} \frac{q'_1 + q'_2}{\sqrt{2}} + \frac{q_1 - q_2}{\sqrt{2}} \frac{q'_1 - q'_2}{\sqrt{2}} = q_+q'_+ + q_-q'_-$$

となる. これはベクトルの回転

$$\begin{pmatrix} q_- \\ q_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} q'_- \\ q'_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q'_1 \\ q'_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A_- \\ A_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

に対して内積 $A_1q_1 + A_2q_2, q_1q'_1 + q_2q'_2$ の値が不変であることとして理解できる.

計算練習 21.6 (p.459)

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad M^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

に対して $MM^T = M^TM = \mathbf{1}$ を確かめられる. 例えば

$$M^TM = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} & \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} & -\frac{2}{6} + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} & \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} & -\frac{2}{6} + \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{6} + \frac{1}{3} & -\frac{2}{6} + \frac{1}{3} & \frac{4}{6} + \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \mathbf{1}.$$

21.3 開弦と標準模型のフェルミオン

弦理論を完全な素粒子の標準模型の記述に用いるには, 標準模型に含まれる物質粒子と, それらが持つ電荷についても学ぶ必要がある. これが本節における主要な題材である. またフェルミオンを, ゲージボソンを持つ D-ブレーンに端を接続している弦として捉える観点も, 予備的に調べることにする.

まず標準的なスピン $1/2$ のフェルミオンを考え, その質量がゼロである世界を仮想する. その場合, 粒子状態は “ヘリシティ”, すなわち粒子の運動方向に沿ったスピン角運動量によって特徴づけられる.

- ヘリシティ $+1/2$ → 右巻き,
- ヘリシティ $-1/2$ → 左巻き.

- 光子の円偏光状態もまたヘリシティの確定した状態.
- 質量を持つフェルミオンのヘリシティは Lorentz 不変ではない.
 - 実際, 質量を持ち x 方向に $0 < v_x < c$ の速度で運動しているフェルミオンを, 速度 $v > v_x$ で等速推進している座標系から見ると, 粒子の運動方向は反転するけれどスピン角運動量の向きの反転は起こらない. [これはスピンを自転と解釈すると分かりやすい.]

左巻き (L) と右巻き (R) の粒子 (f) と反粒子 (\bar{f}) を, それぞれの生成演算子

$$(f_L^\dagger, f_R^\dagger), \quad (\bar{f}_L^\dagger, \bar{f}_R^\dagger)$$

で表す. 場の量子論では 2 組の対

$$\begin{aligned} f_L^\dagger &\leftrightarrow \bar{f}_R^\dagger, \\ f_R^\dagger &\leftrightarrow \bar{f}_L^\dagger \end{aligned} \quad (20)$$

において, 矢印「 \leftrightarrow 」で繋いだ粒子と反粒子は互いに反対符号の電荷を持つ (大きさは同じ). ここで電荷は通常の電磁的な電荷に限らず, 色電荷や弱電荷を含めた電荷一般を想定している. このとき例えば f_L^\dagger と f_R^\dagger の電荷を指定すれば, それですべての電荷が決まることになる. もし左巻き粒子 f_L^\dagger と右巻き粒子 f_R^\dagger が同じ電荷を持たないならば, そのフェルミオンはカイラルであると称する. [すると左巻きの粒子 f_L^\dagger と反粒子 \bar{f}_L^\dagger の電荷がちょうど反対では “ない” ならば, フェルミオンはカイラルとなることにも注意する (計算練習 21.7(p.463)).]

カイラルフェルミオンの左巻き粒子と右巻き粒子はその定義により異なる電荷を持つので, 同じゲージボゾンの組に対して異なる応答をする. カイラルに働くゲージの対称性が破られると, フェルミオンは質量を獲得し, 対称性が破れた後は, 色の力も電磁力もカイラルな働き方をしない.

標準模型におけるフェルミオンはクォークとレプトンともに 3 つの “世代” から構成され, 世代間で対応する粒子の電荷は同じである. そこで 1 世代のクォークとレプトンの中で, 左巻き粒子と左巻き反粒子の電荷のリストを作ることにする.

クォークからはじめよう.

- クォークの左巻き状態 q_L
3 種類の色 (赤 (red : r), 青 (blue : b), 緑 (green : g)) の基本状態

$$q_{Lr}, \quad q_{Lb}, \quad q_{Lg} \quad \rightarrow \quad SU(3) \text{ 群の表現 } \mathbf{3} \quad (SU(3) \text{ 行列 } M \text{ が作用}).$$

- 反クォークの左巻き状態 \bar{q}_L
色に関してクォークはカイラルでないので, q_L とちょうど反対の色電荷 (反赤 (anti-red : a-r), 反青 (anti-blue : a-b), 反緑 (anti-green : a-g)) を持つ :

$$\bar{q}_{La-r}, \quad \bar{q}_{La-b}, \quad \bar{q}_{La-g} \quad \rightarrow \quad SU(3) \text{ 群の表現 } \bar{\mathbf{3}} \quad (\text{複素共役な行列 } M^* \text{ が作用}).$$

[$\bar{\mathbf{3}}$ は複素共役表現を表す [10, pp.125–126, pp.147–148].]

$SU(3)_c$ 理論を得るための 3 つの重なり合った D-ブレイン #1, #2, #3 それぞれに順に赤, 青, 緑というラベルを充て, “色ブレイン” と呼ぶ. 前節で見たようにグルーオンは ‘両方の’ 端点をこれらの D-ブレインに持

つ開弦に対応していた。これに対しクォークは以下のように“一方の”端点をこれらのブレインに持つ開弦に対応する^{*13}。

- 赤いブレインに終点を持つ開弦 → 左巻きの赤いクォーク
- 青いブレインに終点を持つ開弦 → 左巻きの青いクォーク
- 緑のブレインに終点を持つ開弦 → 左巻きの緑のクォーク
- 赤いブレインに始点を持つ開弦 → 左巻きの反赤の反クォーク
- 青いブレインに始点を持つ開弦 → 左巻きの反青の反クォーク
- 緑のブレインに始点を持つ開弦 → 左巻きの反緑の反クォーク

弦が3つの色ブレインに持つ $U(3)$ 電荷 (q_1, q_2, q_3) からは $(q_1 + q_2 + q_3)$ に比例する $U(1)$ 電荷が分離され(前節), 残りの $SU(3)$ 電荷は $(q_1 + q_2 + q_3)$ とは独立な電荷の“2種類”の線形結合

$$(a_1, a_2) \equiv (q_1 - q_2, q_2 - q_3)$$

を用いてラベルできる。対 (a_1, a_2) は加重 (weight) ベクトル, その成分 a_1, a_2 は Dynkin (ディンキン) ラベルと呼ばれる [群論の教科書 [10, § 4.4] を見よ]。

左巻きのクォークに関しては, クォークを表す開弦のうち色ブレインと接続していないもう一方の端点は, 弱い相互作用 $SU(2)_w$ のアイソスピンに関するブレインに接続されている。ここでアイソスピン $I = 1/2$ の表現 $\mathbf{2}$ は, アイソスピンの第3成分 I_3 が

- $I_3 = 1/2$ に対応する香り u の状態 u_L
- $I_3 = -1/2$ に対応する香り d の状態 d_L

から成る [前述のように1世代のクォークを考えているので, 香りは u と d の2種類となっている]。

p.465 訳註まとめ 弱い相互作用の電荷(‘弱電荷’もしくは‘アイソスピン電荷’)は

$$\begin{aligned} u_L \text{ “上電荷”} &\leftrightarrow \bar{u}_R \text{ “反上電荷”}, \\ d_L \text{ “下電荷”} &\leftrightarrow \bar{d}_R \text{ “反下電荷”} \end{aligned}$$

となっている。また u_R と d_R は弱電荷を持たず, こうして弱電荷に関してクォークはカイラルである。

$SU(2)_w$ を得るための2つのブレイン1,2 (“左ブレイン”と呼ぶ)に対して

- u_L -クォークを表す開弦は一方のブレイン1に始点を持ち,
- d_L -クォークを表す開弦は他方のブレイン2に始点を持つ。

(いずれも終点は3つの色ブレインのいずれかに位置する。)

弦が2つの左ブレインに持つ $U(2)$ 電荷の組 (\bar{q}_1, \bar{q}_2) からはやはり $(\bar{q}_1 + \bar{q}_2)$ に比例する $U(1)$ 電荷が分離され, 残りの $SU(2)$ 電荷は $(\bar{q}_1 + \bar{q}_2)$ と独立な電荷の線形結合として, Dynkin ラベル

$$a_1 \equiv \bar{q}_1 - \bar{q}_2$$

^{*13} このため色ブレインは, 3つのクォークから成る重粒子(バリオン)からの類推で“重粒子的(バリオンニック)ブレイン”とも呼ばれる。

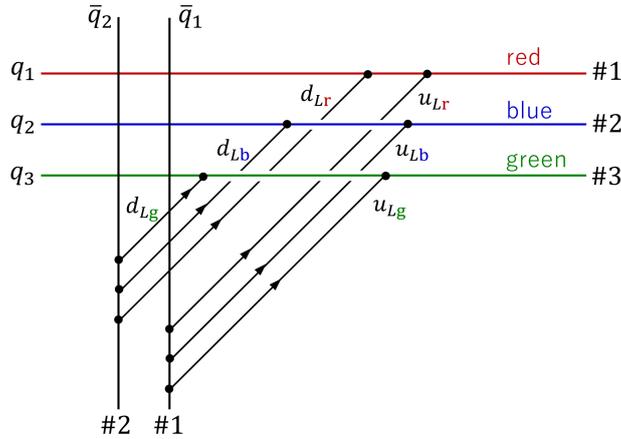


図 22 交差する D-ブレーンと u_L -クォーク, d_L -クォークを表す開弦

を用いて記述できる. ここでも左ブレーン上の電荷 \bar{q}_i は弦の始点に対して -1 , 終点に対して $+1$ と設定すれば, u_L, d_L -クォークを表す弦に対して

$$(\bar{q}_1, \bar{q}_2) = (\mp 1, 0), \quad \therefore a_1 = \mp 1$$

なので (複号の上側が u_L に, 下側が d_L に対応), 状態を表現する量子数 a_1 と正しいアイソスピン $I_3 = \pm 1/2$ との間に

$$I_3 = -a_1/2$$

という関係の成り立つことが見出される.

実は 3 重の色ブレーンと 2 重の左ブレーンを平行に配置すると, その間に伸びる開弦からは左巻きと右巻きのクォークが同じ電荷をもつ状態が得られ, 標準模型のカイラリティを実現できない. これは [2 組のブレーンを一致させると $U(5)$ Yang-Mills 理論が得られてしまうこと (p.460) を踏まえ,] D-ブレーンの組を分離して平行に配置することを考えると, その間で引き伸ばされた弦は質量を持つものに対し, [前述のように] カイラルフェルミオンが質量を持つことは許されないことと関係している. そこで 2 組のブレーンを交差させると, 適当な条件下では上式 (20) の “1 行だけ” が質量のない状態として得られる. 「そのような場合, 状態が電荷中性でなければ, フェルミオンは自動的にカイラルなものになる」 (p.463, 1.3,4).

以上を踏まえると, 交差する D-ブレーンと 3 種類の u_L -クォーク, d_L -クォークを表す開弦は図 22 のように描かれる. 2 組のブレーン間に伸びる弦 (によって表されるフェルミオン場) は, ブレーンの交差部分付近に局在する.

左巻きクォークの電荷は, さらに超電荷 Y を決めれば完全に決定される. 標準模型の第 1 世代に含まれる左巻きのクォークと反クォークの超電荷 Y は以下の値を持つ.

- u_L -クォーク, d_L -クォーク $\rightarrow Y = 1/6$
- \bar{u}_L -反クォーク $\rightarrow Y = -2/3$
- \bar{d}_L -反クォーク $\rightarrow Y = 1/3$

クォークと反クォークの超電荷はちょうど反対とはなっていないため, クォークは超電荷に関してカイラルとなっている. また反クォーク \bar{u}_L, \bar{d}_L はアイソスピンの $I_3(\bar{u}_L) = I_3(\bar{d}_L) = 0$ なので, $SU(2)$ -1 重項を形成する.

ここでフェルミオンの電荷表現の記法

$$(\text{色}, \text{アイソスピン})_Y$$

を導入しておく。「色」の欄と「アイソスピン」の欄にはそれぞれ $SU(3)$ と $SU(2)$ の表現を記し、 Y には単に超電荷の値を示す。すると

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{1/6}, \quad \bar{u}_L \sim (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-2/3}, \quad \bar{d}_L \sim (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{1/3}$$

と書ける。

色ブレーンと左ブレーンから分離した、規格化された $U(1)$ 電荷をそれぞれ

$$Q_1 \equiv q_1 + q_2 + q_3, \quad Q_2 \equiv \bar{q}_1 + \bar{q}_2$$

と定義すると、超電荷 Y はその両方からの寄与を受ける。両端を色ブレーンに持つ弦と両端を左ブレーンに持つ弦に対しては、 $Q_1 = Q_2 = 0$ である [前節参照]。他方、左巻きクォークを表す弦の電荷は $Q_1 = 1, Q_2 = -1$ なので、

$$Y = -\frac{1}{3}Q_1 - \frac{1}{2}Q_2 - \dots$$

とすれば、これは左巻きクォークの正しい超電荷 $Y = 1/6$ を与える。ただし「 \dots 」の部分は後で追加する D-ブレーンからの寄与を表し、そこに弦の端点を持たない左巻きクォークの超電荷には寄与しない。

これに対し反クォークを表す弦は、既に説明したように色ブレーンに始点を持つ。しかし左ブレーンに終点を持つことはできない。さもなくば反クォークはクォークと反対の Q_1, Q_2 電荷を持ち、また $SU(2)$ -2 重項を形成することになる。ところがこれらはそれぞれ超電荷に関するカイラリティと、 \bar{u}_L, \bar{d}_L が $SU(2)$ -1 重項であることに反する。そこで \bar{u}_L -反クォークを表す弦の終点を置く新たな D-ブレーンを用意する。終点にこのブレーンの Maxwell 場と結合する電荷 $Q_3 = 1$ を与えて

$$Y = -\frac{1}{3}Q_1 - \frac{1}{2}Q_2 - Q_3 - \dots$$

とすれば、 $Q_1 = -1, Q_2 = 0$ とよりこれは \bar{u}_L -反クォークの正しい超電荷 $Y = -2/3$ を与える。 \bar{d}_L -反クォークについては次節で論じる。

次にレプトンに移ろう。標準模型の第 1 世代に含まれる左巻きのレプトン (粒子と反粒子) は

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1/2}, \quad e_L^+ \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1})_1, \quad \bar{\nu}_{eL} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0$$

と表される。よって左巻きのニュートリノと左巻きの電子は、一方の端点を左ブレーンに持ち、もう一方をまた別のブレーンに持つような弦から生じる。左巻きの陽電子も左巻きの反ニュートリノも、端点を色ブレーンや左ブレーンに置くことができない。

21.3 について

■ $SU(3)$ 電荷のラベル (21.33) について 再定義した電荷 (21.19): $\bar{q} = Mq$ は式 (21.13), (21.21) で定まる直交行列 M に対して

$$\bar{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(q_1 + q_2 - 2q_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}(a_1 + 2a_2), \quad \bar{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-q_1 + q_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}a_1$$

となるので、これらを表すのに代わりに式 (21.32) の (a_1, a_2) を用いることができる。

■p.468 訳註の引用

超電荷とは、電磁的な $U(1)_{em}$ 電荷から弱電荷混合の影響を除いた、 $SU(2)$ 対称性が破られる前の‘正味の’ $U(1)$ 電荷と想定される電荷量である (式 (21.48) [$:Q_{em} = Y + I_3$] 参照). 各粒子の超電荷は直接的な観測量ではないが、実験事実から整合的に与えられているものと見なされ、それらを説明する理論モデルの構築が志向される. 本節の理論モデルでは、各 D-ブレインからの $U(1)$ 因子の寄与を集約した形で各粒子の超電荷が決まる (式 (21.26), 図 21.7, 式 (21.57) [$:Y = -\frac{1}{3}Q_1 - \frac{1}{2}Q_2 - Q_3 - Q_5$] などを参照). なお、ここでの‘アイソスピン’や‘超電荷’は、伝統的な中野-西島-Gell-Mann の式 ($Q_{em} = I_3 + Y/2$, $Y = B + S + \dots$, B は重粒子数, S はストレンジネス) で用いられる古い流儀のものとは定義が異なる. 歴史的経緯により、古い流儀ではアイソスピンが第 1 世代だけで、左巻き/右巻きの区別を明示しない形で定義されており、 Y の定義にも (単なる因子 $1/2$ の違いではなく) I_3 と相補的な形での違いがある (Q_{em} は実測に対応する量なので流儀には依らない).

超電荷には量的な‘大きさ’があるが (左巻きクォークなら $Y = 1/6$), 色電荷 (r,g,b の色) や弱電荷 (u, d の香り) に量的な大小はない. 異なる色同士や香り同士が混ざることあり得ても、相対的な‘濃さ’は変わらない. スピンとアイソスピンの形式的類似性から考えれば、電子のスピンが空間内でどちらを向いていても (u と d の香りがどのような混ざり方をしていても), スピンの大きさは $1/2$ に固定されている (香りは香りである) ということである. 前節で見たような $U(N) = SU(N) \times U(1)$ という措置に伴い、 N 重 D-ブレインを持つ総体的な電荷の量的な部分は、実質的には $SU(N)$ から除かれて $U(1)$ 超電荷の方に分離・集約されているものと捉える. 色電荷や弱電荷にも反対電荷や電荷ゼロの概念はあるけれども、これは u の反対が d ということではなく、そもそも対象とする粒子系が香りの代わりに‘反香り’ \bar{u}, \bar{d} の荷電自由度を持つとか、香りも‘反香り’も持たない、というような、1 段階上位の観点に基づく概念である.

■規格化された $U(1)$ 電荷 Q_1, Q_2 (式 (21.41)) について 左巻きのクォークを表す弦に対して $Q_1 = 1, Q_2 = -1$ となるのは、色ブレインの電荷 q_1, q_2, q_3 の 1 つが終点の電荷 $+1$ (残りはゼロ), 左ブレインの電荷 \bar{q}_1, \bar{q}_2 のうち 1 つが始点の電荷 -1 (残りはゼロ) だからである. 結果は分かりやすい. つまり機械的に、

- 色ブレインに始点 (または終点) があれば、それがどの色ブレインかに関わらず $Q_1 = -1$ (または $Q_1 = 1$)
- 左ブレインに始点 (または終点) があれば、それがどの左ブレインかに関わらず $Q_2 = -1$ (または $Q_2 = 1$)

として良い. なお式 (21.45) の Q_3 や次節の Q_5 はそもそも 1 つのブレイン上の電荷なので、単に通例に従って始点に -1 , 終点に $+1$ の電荷を付与すれば良い.

計算練習 21.7 (p.463)

左巻き粒子の電荷を $q(f_L^\dagger)$ などと書くと、

$$\begin{aligned} & \text{フェルミオンがカイラル} \\ \Leftrightarrow & q(f_L^\dagger) \neq q(f_R^\dagger) \\ \Leftrightarrow & q(f_L^\dagger) \neq -q(\bar{f}_L^\dagger). \quad (\because q(f_R^\dagger) = -q(\bar{f}_L^\dagger)) \end{aligned}$$

計算練習 21.8 (p.465)

両端が異なるブレインに属する開弦の電荷

$$(q_1, q_2, q_3) = (-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, -1, 0), (0, -1, 1), (1, 0, -1), (0, 1, -1)$$

に対して、加重ベクトルはそれぞれ順に

$$(a_1, a_2) = (-2, 1), (-1, -1), (2, -1), (1, -2), (1, 1), (-1, 2)$$

である。また両端が同じブレインに属する 3 つのセクターの開弦に対してはいずれも $(q_1, q_2, q_3) = (0, 0, 0)$ なので, $(a_1, a_2) = (0, 0)$ となる。これらの持つゲージ場状態の 1 つは $U(1)$ ゲージ場状態に分離され (前節), 残り 2 つの状態と上記 6 セクターの開弦のゲージ場状態を合わせて得られる 8 つの $SU(3)$ ゲージ場状態が表現 **8** を定義する。

計算練習 21.9 (p.470)

クォーク (21.44), レプトン (21.46) に電荷の関係 (21.29) を適用すると

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_R \\ \bar{d}_R \end{pmatrix} \sim (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2})_{-1/6}, \quad u_R \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1})_{2/3}, \quad d_R \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1})_{-1/3}, \\ \begin{pmatrix} \bar{\nu}_{eR} \\ e_R^- \end{pmatrix} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{1/2}, \quad e_R^- \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1})_{-1}, \quad \nu_{eR} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0.$$

ただし式 (21.47) の下 4 行の説明に注意した。これらを併せたりストは

$$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2})_{-1/6} + (\mathbf{3}, \mathbf{1})_{2/3} + (\mathbf{3}, \mathbf{1})_{-1/3} + (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{1/2} + (\mathbf{1}, \mathbf{1})_{-1} + (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0.$$

計算練習 21.10 (p.470)

式 (21.44), 式 (21.46) と計算練習 21.9 (p.470) のリストから, 反粒子を除く粒子だけを拾い集めれば良く,

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{1/6}, \quad u_R \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1})_{2/3}, \quad d_R \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1})_{-1/3}, \\ \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1/2}, \quad e_R^- \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1})_{-1}, \quad \nu_{eR} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0.$$

これらを併せたりストは

$$(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{1/6} + (\mathbf{3}, \mathbf{1})_{2/3} + (\mathbf{3}, \mathbf{1})_{-1/3} + (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1/2} + (\mathbf{1}, \mathbf{1})_{-1} + (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0.$$

計算練習 21.11 (p.471)

左巻きの反クォーク \bar{u}_L, \bar{d}_L の電荷状態 (21.44) および $[I_3(\bar{u}_L) = I_3(\bar{d}_L) = 0]$ (p.469, 1.12) に注意すると

$$Q_{\text{em}}(\bar{u}_L) = -\frac{2}{3} + 0 = -\frac{2}{3}, \quad Q_{\text{em}}(\bar{d}_L) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$$

であり, これをクォークの電荷 (21.49) と比較すると

$$Q_{\text{em}}(\bar{u}_L) = -Q_{\text{em}}(u_L), \quad Q_{\text{em}}(\bar{d}_L) = -Q_{\text{em}}(d_L)$$

となっている。

p.471 訳註 (+ 補足) 電荷の関係 (21.29) よりこれは左巻きクォークと右巻きクォークの電磁的な電荷が等しいこと

$$Q_{\text{em}}(u_L) = Q_{\text{em}}(u_R) = \frac{2}{3}, \quad Q_{\text{em}}(d_L) = Q_{\text{em}}(d_R) = -\frac{1}{3}$$

を意味する。実際, 計算練習 21.9 (p.470) の結果 $u_R \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1})_{2/3}, d_R \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1})_{-1/3}$ および $I_3(u_R) = I_3(d_R) = 0$ (p.469, 1.12 と電荷の関係 (21.29) による) から, 右巻きクォークの電磁的な電荷を改めて計算すると

$$Q_{\text{em}}(u_R) = \frac{2}{3}, \quad Q_{\text{em}}(d_R) = -\frac{1}{3}$$

となる．このように $Q_{\text{em}}(u)$ と $Q_{\text{em}}(d)$ の違いは右巻きでは超電荷の違いに由来するのに対し，左巻きでは式 (21.49) のように弱電荷 I_3 の違いによって生じている．

レプトンの電荷表現 (21.46) より

$$\begin{aligned} Q_{\text{em}}(\nu_{eL}) &= Y(\nu_{eL}) + I_3(\nu_{eL}) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0, \\ Q_{\text{em}}(\bar{\nu}_{eL}) &= Y(\bar{\nu}_{eL}) + I_3(\bar{\nu}_{eL}) = 0 + 0 = 0, \\ Q_{\text{em}}(e_L^-) &= Y(e_L^-) + I_3(e_L^-) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1, \\ Q_{\text{em}}(e_L^+) &= Y(e_L^+) + I_3(e_L^+) = 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

を持つ．

$$Q_{\text{em}}(\nu_{eL}) = -Q_{\text{em}}(\bar{\nu}_{eL}), \quad Q_{\text{em}}(e_L^-) = -Q_{\text{em}}(e_L^+)$$

となっており，このとき電荷の関係 (21.29) より

$$Q_{\text{em}}(\nu_{eL}) = Q_{\text{em}}(\nu_{eR}), \quad Q_{\text{em}}(e_L^-) = Q_{\text{em}}(e_R^-)$$

となるので，レプトンは電磁的な力に対してカイラルでない．

21.4 交差する D-ブレーンと標準模型

本節では標準模型と多くの特徴を共有する完全な弦モデルを構築する．このモデルは T^6 において交差する D6-ブレーンを含み，[それ故，暗に D6-ブレーンが安定となる (p.478, 1.2,3)] IIA 型の超弦理論を基調とする．このモデルは，対称性を破る前の標準模型に現れるすべての粒子を質量のない形で含むが，さらにいくつか余分な粒子も含んでいる．オリエンティフォールド O6-平面 (ブレーン) と D6-ブレーンを併用するならば，標準模型に含まれる粒子のスペクトルを“正確に”再現するモデルを構築することが可能である．[……] 我々は，この第 2 のモデルの特徴をいくつか紹介する [……] (p.471 一番下～p.472, 1.8).

T^6 において交差する D6-ブレーンを，以下のように天なりに配置する (以下，ブレーンの個数 N_i をブレーンの名前として用いる)^{*14}．

1. 色ブレーン

$$\text{個数 } N_1 = 3, \quad l_1^{(1)} = (1, 2), \quad l_2^{(1)} = (1, -1), \quad l_3^{(1)} = (1, -2).$$

[ブレーンの配置 $l_i^{(a)}$ は $i = 1, 2, 3$ が 3 つの T^2 を， a がブレーンの種類を表す (式 (21.7)). 以下同じ.]

2. 左ブレーン

$$\text{個数 } N_2 = 2, \quad l_1^{(2)} = (1, 1), \quad l_2^{(2)} = (1, -2), \quad l_3^{(2)} = (-1, 5).$$

3. \bar{u}_L -反クォークを表す弦の終点を置くブレーン (前節，右ブレーンと呼ぶ^{*15})

$$\text{個数 } N_3 = 1, \quad l_1^{(3)} = (1, 1), \quad l_2^{(3)} = (1, 0), \quad l_3^{(3)} = (-1, 5).$$

^{*14} 教科書では以下のレプトンを得るための 2 つのブレーン N_4, N_5 を“レプトニック (軽粒子的)・ブレーン”と呼んでおり，p.475, 1.11 には「この結果は，レプトニックという呼称を正当化している」とある．しかしながら p.474 訳註にて訳者はこれを「素粒子論の歴史的な誤謬を反映している呼称」として退け，代わりに“無色ブレーン”という呼び方を提案している．

^{*15} u_R -クォークを表す反対向きの弦が接続するから．

4. レプトンを得るためのブレイン [その必要性は前節]

$$\text{個数 } N_4 = 1, \quad l_1^{(4)} = (1, 2), \quad l_2^{(4)} = (-1, 1), \quad l_3^{(4)} = (1, 1).$$

5. レプトンを得るためのブレイン [その必要性は前節]

$$\text{個数 } N_5 = 1, \quad l_1^{(5)} = (1, 2), \quad l_2^{(5)} = (-1, 1), \quad l_3^{(5)} = (2, -7).$$

6. \bar{d}_L -反クォークを表す弦の終点を置く (右) ブレイン [前節 (p.469 下から 4,3 行目) で導入を予告].

$$\text{個数 } N_6 = 1, \quad l_1^{(6)} = (1, 1), \quad l_2^{(6)} = (3, -4), \quad l_3^{(6)} = (1, -5).$$

これらのブレインの交差回数は、21.1 節の公式 (21.9) から次のように計算される。

$$\begin{array}{lll} I_{12} = 3, & I_{13} = -3, & I_{23} = 0, \\ I_{14} = 0, & I_{15} = 0, & I_{16} = -3, \\ I_{24} = 6, & I_{25} = 3, & I_{26} = 0, \\ I_{34} = -6, & I_{35} = -3, & I_{36} = 0, \\ I_{45} = 0, & I_{46} = 6, & I_{56} = 3. \end{array}$$

ただし $I_{ab} = -I_{ba}$ の関係があるので (21.1 節), 交差回数 I_{ab} のうち $a < b$ のものだけを示した。

ここで前節で説明した超電荷の式 (21.53): $Y = -\frac{1}{3}Q_1 - \frac{1}{2}Q_2 - Q_3 - \dots$ に加えて N_4 ブレインと N_6 ブレインは超電荷に対する寄与を持たず, N_5 ブレインの電荷 Q_5 は

$$Y = -\frac{1}{3}Q_1 - \frac{1}{2}Q_2 - Q_3 - Q_5 \quad (21)$$

と寄与するものとする。

さらに各交差部分の弦から現れるフェルミオンは弦の向きに依存する。標準模型の左巻きのフェルミオンを正しく得るには、実は次の規則に従って、ブレイン a, b の交差回数 I_{ab} の符号から弦の向きを決めれば良い。

規則 ブレイン a とブレイン b の交差部分の組において, $|I_{ab}|$ 個の左巻きフェルミオンが存在する。

もし $I_{ab} > 0$ であれば, その左巻き状態はブレイン b からブレイン a へ伸びる弦である。

もし $I_{ab} < 0$ であれば, その左巻き状態はブレイン a からブレイン b へ伸びる弦である。

実際, 以上よりブレインの配置と各交差部分 $[ab]$ における左巻き状態のフェルミオンを表す弦は, 図 23 のように示される。ただし図 23 では交差部分に交差回数 I_{ab} (ただし $a < b$) を付記し, またブレインに Y の値として上式 (21) に基づき, そのブレイン上の終点電荷 $+1$ の超電荷に対する寄与を書き添えている。このとき各交差部分からは次の電荷表現が得られる。

$$\underbrace{3(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{1/6}}_{[12]} + \underbrace{3(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-2/3}}_{[13]} + \underbrace{3(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{1/3}}_{[16]}, \quad (22)$$

$$\underbrace{6(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1/2}}_{[24]} + \underbrace{6(\mathbf{1}, \mathbf{1})_1}_{[34]} + \underbrace{6(\mathbf{1}, \mathbf{1})_0}_{[46]}, \quad (23)$$

$$\underbrace{3(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{1/2}}_{[25]} + \underbrace{3(\mathbf{1}, \mathbf{1})_0}_{[35]} + \underbrace{3(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{-1}}_{[56]}.$$

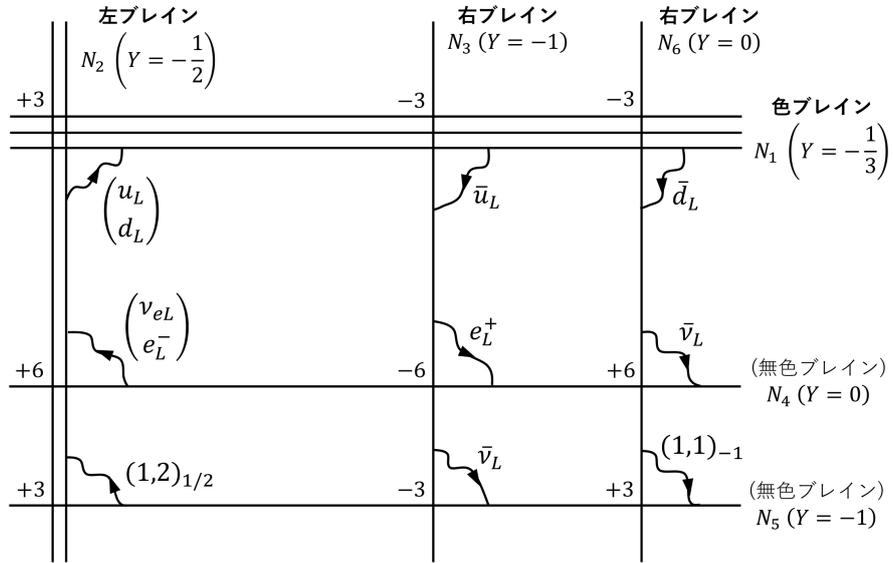


図 23 半現実的な交差ブレインモデル (p.474 の訳註に従い, N_4, N_5 を無色ブレインと記した)

上式 (22) は単一世代のクォーク (21.44):

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{1/6}, \quad \bar{u}_L \sim (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-2/3}, \quad \bar{d}_L \sim (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{1/3}$$

の 3 つの複製になっている。このようにフェルミオンが 3 世代にわたる複製を持つことは、色ブレインの組と左ブレインの組の交差回数が $I_{12} = 3$ であることから説明できる。例えば 1 つの色ブレインと 1 つの左ブレインの交差回数は $I_{12} = 3$ であり、[ところで色ブレインどうし、左ブレインどうしは重なっているから、] これは色ブレインの組と左ブレインの組の交差部分が $I_{12} = 3$ 箇所あることを意味している。このとき 1 つの交差部分からは u -クォークと d -クォークが得られ (前節)、残り 2 つの交差部分からはその複製として c -クォークと s -クォーク、 t -クォークと b -クォークが得られると考えることができる。(もちろん上記のブレインの配置は、 $I_{12} = 3$ となる多くの可能性のうちの 1 つにすぎない。)

また上式 (23) は単一世代のクォーク (21.46):

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1/2}, \quad e_L^+ \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1})_1, \quad \bar{\nu}_{eL} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0$$

の 6 つの複製になっている。これは標準模型で必要とされる 3 つの複製の他に、さらに余分の 3 つの複製を含んでいる。[さらに図 21.7(p.473) に描かれているように、上式 (23) における [46] フェルミオン $6(\mathbf{1}, \mathbf{1})_0$ だけでなく、[35] フェルミオン $3(\mathbf{1}, \mathbf{1})_0$ も $\bar{\nu}_L$ と見なされる。]

我々は望んだ種類よりも余分のレプトンを見出したが、これは次の規則により、D6-ブレインだけを含む矛盾のないモデルにおいて避けられないことである。

規則 如何なるブレインの集合体に端点を持つ左巻きの状態も、入射弦と出射弦を等しい数だけ含まねばならない。

実際、コンパクト化した (境界のない) 空間における総電荷はゼロでなければならず (計算練習 21.15(p.476)), ここから上の規則が得られる (問題 21.2).

最後に教科書では冒頭の予告通り, 標準模型に含まれる粒子のスペクトルを “正確に” 再現するモデルについて, 駆け足で説明されている. これについては本稿でも手短かにまとめるに留める.

標準模型にちょうど整合する粒子を含むような弦モデルを構築するために, オリエンティフォールド平面を導入し, D6-ブレーンの鏡像を利用することができる (具体的なブレーンの構成は教科書の図 21.8(p.477)).

1. ゲージ群が標準模型のゲージ群 (21.25):

$$SU(3)_c \times SU(2)_w \times U(1)_Y$$

になり, 付加的な $U(1)$ 因子が無くなる.

2. カイラルフェルミオンの構成が正確に標準模型の構成 (21.50):

$$3 \times [(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{1/6} + (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-2/3} + (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{1/3} + (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1/2} + (\mathbf{1}, \mathbf{1})_1 + (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0]$$

になる.

交差する D6-ブレーンを含むモデルは, このように標準模型の粒子構成を正確に再現できる最初の弦モデルとなった. しかしこの理論の閉弦セクターは, 観測されていない追加的な粒子や相互作用を含む可能性がある.

- 標準模型がそうであるように, D6-ブレーンとその交差はすべての超対称性を破る.
- 電弱対称性の破れを適正に起こすことを説明しなければならない.
- 標準模型のスペクトルを再現するという要請からは, ブレーンの配置・巻き付き方・位置, トーラスの寸法は一意的に決まらない.

次節では弦理論から素粒子の標準模型を再現するための他の方法について, 簡単に論じることにする.

21.4 について

■ 「……反対向きの弦は, ……右巻きの “反粒子” を表す」 (p.472 一番下~p.473, l.2) について 弱電荷を持たず $SU(2)$ -2 重項を形成する右巻きのクォークや左巻きの反クォークとの混同に注意する.

■ 式 (21.59) について 例えば中央の $(\mathbf{3}, \mathbf{1})_{-2/3}$ の係数 3 について, $I_{13} = -3$ の負号は p.472 にある左巻き状態の規則に従って N_1 から N_3 に向かう弦の向きを指定し, このため $(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-2/3}$ のフェルミオンが得られる. 言い換えれば $I_{13} = -3$ の負号は既に電荷表現 $(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-2/3}$ の中で考慮されており, 係数には複製が 3 つあるという意味で単に絶対値 $|I_{13}| = 3$ を書けば充分である.

■ 「(鏡像も含めて)3 組のクォーク 2 重項と 3 組のレプトン 2 重項が出射し, 6 組のクォーク 2 重項が入射している」 (p.477 一番下~p.478, l.1) について 図 21.8(p.477) において, 左ブレーンそのものは鏡像 (left*) を無視して図左端の左ブレーン (left) にだけ注目する. [12] 部分では u_L, d_L -クォークの 2 重項が出射しており, 2 重項が得られるのは $N_2 = 2$ であることに関係している. クォーク 2 重項は色の数 $N_1 = 3$ だけの組がある. [14] 部分からはレプトン 2 重項が世代数に対応する $|I_{14}| = 3$ 組だけ出射している. 最後に左ブレーンと交差するブレーンとしては鏡像 N_{1^*} も考慮すると, [1*2] 部分には 6 組のクォーク 2 重項 (2 世代 \times 3 色) が入射している.

■実効的な3次元空間について 弦の局在するブレインの各交差部分は、実効的な3次元空間への拡がりを持っているものの、コンパクト化方向の異なる座標に位置している。それにも関わらず我々の3次元空間からは、異なる交差部分に現れる各種の素粒子を同時に観測できると考えられている。

計算練習 21.12 (p.474)

ブレインの交差回数について、

$$I_{13} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 1 \cdot 3 = -3,$$

$$I_{23} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = 0 \cdot 2 \cdot 0 = 0, \quad \text{etc.}$$

また指示通り、交差回数が「図中に適正に記されていること」「図中に示された弦が、左巻き状態の規則から要請される向きを持つこと」を確かめられた。

計算練習 21.13 (p.475)

超電荷の式 (21.57) について、 N_1, N_2, N_3 ブレインの電荷 Q_1, Q_2, Q_3 からの寄与は既に前節で説明されており、交差部分 [12],[13] から生じる左巻き (反) クォークの電荷が式 (21.59) のように、それぞれ $1/6, -2/3$ となることは分かっている。また式 (21.57) のように「 N_4 ブレインと N_6 ブレインは超電荷に対する寄与を持たないが、 N_5 ブレインは -1 の寄与を持つものと」(式 (21.57) の上2行) しておけば、図 21.7(p.473)(本稿の図 23) の残りの各交差部分 $[ab]$ における弦に対して式 (21.59-61) の超電荷

$$\begin{aligned} [16] \quad Y &= -\frac{1}{3}(-1) + 0 = \frac{1}{3}, & (Y(\bar{d}_L)) \\ [24] \quad Y &= 0 - \frac{1}{2}(+1) = -\frac{1}{2}, & (Y(\nu_{eL})) \\ [34] \quad Y &= (-1)(-1) + 0 = 1, & (Y(e_L^+)) \\ [46] \quad Y &= 0 + 0 = 0, & (Y(\bar{\nu}_L)) \\ [25] \quad Y &= (-1)(-1) - \frac{1}{2}(+1) = \frac{1}{2}, \\ [35] \quad Y &= (-1)(-1) + (-1)(+1) = 0, & (Y(\bar{\nu}_L)) \\ [56] \quad Y &= 0 + (-1)(+1) = -1 \end{aligned}$$

が得られる。これは式 (21.44) のクォーク、式 (21.46) のレプトンが持つ正しい超電荷の値に一致している。

計算練習 21.14 (p.475)

左ブレインに対する説明 (式 (21.62) の下5行) に従えば、左ブレインの個数 $N_2 = 2$ に由来する左巻き状態の2重項は1組の2重項と数えるのに対し、 $N_1 = 3$ 種類の色状態は区別して数える。またブレインの交差回数に由来する複製数 (世代数) は常に区別して数える。ここでも同じ数え方を適用すると、右ブレイン N_3, N_4 はともに

- 入射弦が N_1 からの9組の1重項 (3色 × 3世代)
- 出射弦が N_4 への6組の1重項 (複製数6) と N_5 への3組の1重項 (複製数3)

であり、左巻きの入射状態と出射状態の数は等しくなっている。

計算練習 21.15 (p.476)

同一視 $x_i \sim x_i + 2\pi R_i$ (ただし $i = 1, \dots, d$, d :任意) によって得られるトーラス T^d を念頭に解答する. 基本領域 $0 \leq x_i \leq 2\pi R_i$ にわたって Maxwell 方程式 $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$ を空間積分すると, ここに含まれる電荷 q は

$$\begin{aligned} q &= \sum_{i=1}^d \int dx_1 \cdots dx_d \frac{\partial E_i}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^d \int dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_d [E_i]_{x_i=0}^{x_i=2\pi R_i} \\ &= 0 \end{aligned}$$

よりゼロにならなければならない. ただし $\widehat{dx_i}$ は dx_i を除外することを意味する. これは (少なくとも見かけ上), 2次元球面における説明の仕方 (p.457 下から 2行目~p.458, 1.4) とは異なるように見える.

21.5 素粒子物理の弦理論モデルの概観

本節は天下りの概観的な要素が強いこともあり, 簡単なまとめに留める.

前節まで IIA 型の超弦理論を出発点とした交差ブレインモデルを詳しく見てきたのは, これが十分に単純で, 確実な理解が可能だからである. しかしこれは唯一の筋道ではなく, モデルの可能な出発点には 5つの超弦理論と M 理論がある (14.8 節参照, 5種類の超弦理論と M 理論は 1つの理論の異なる極限にあたる).

$E_8 \times E_8$ ヘテロ型の超弦理論に基礎を置くモデル ヘテロ弦の理論における Calabi-Yau (カラビ-ヤウ)

コンパクト化は, 半現実的な素粒子物理を再現する最初の弦モデルを与えた.

オービフォルドは Calabi-Yau 空間よりも解析がはるかに容易でありながら, 4次元時空において $N = 1$ 超対称性 (p.479 訳註参照) を持つ半現実的なモデルを得ることが可能である.

II 型と I 型の超弦理論に立脚した現象論モデル 例えば II 型の超弦理論において,

原点における特異点を除いて何処でも平坦な無限体積空間を形成している 6つの余剰次元として, ある種のオービフォルド ($\mathbf{C}^3/\mathbf{Z}_3$) を考える.

オービフォルド特異点にある D-ブレインは, ゲージ場とカイラルフェルミオンを生成し, 標準模型に近いスペクトルを持つモデルが得られる.

解析の次の部分は, コンパクト化していない 6次元空間の特異点から離れた部分を修正して, 有限体積のコンパクト空間へと転じる方法の研究となる.

M 理論に基礎を置くモデル M 理論を円にコンパクト化したものは,

有限の弦の結合を持つ IIA 型の超弦理論にあたる.

M 理論を線分へコンパクト化したものは, $E_8 \times E_8$ ヘテロ型の超弦を与える.

次節では以下の問題を取り上げる.

- モデュライの安定化
- 宇宙定数の問題
- 標準模型が無矛盾な宇宙論 (インフレーションを含む) の中で具体化されることを確認するという問題

21.5 について

■p.479 訳註の引用

N はスピノルの変換性を持つ超対称性生成子の数を表し、 2^N 種類の状態 (粒子) によって、ひとつの超対称性多重項が形成される。実効的な 4 次元時空において $N = 2$ 以上の超対称性を残すと、左右のカイラルフェルミオンが対称な形で生じてしまい、パリティを破っている現実の素粒子物理を再現できない。しかし超対称性には理論モデルの構築上、好ましい諸性質もあるので (発散の抑制やゲージ結合有効定数の外挿結合の問題)、余剰次元のコンパクト化の後に極小の $N = 1$ 超対称性が残り、それが別途、何らかの機構によって自発的に破れるというシナリオが望まれることになる。超弦理論の第 1 革命期以前に、数学の分野で E. Calabi が予想し、S.-T. Yau が証明したある種の微分幾何学的性質を持つ多様体が、ヘテロ型の超弦理論において超対称性 $N = 1$ を残すような余剰次元のコンパクト化空間の条件に整合していることが見いだされ、理論物理学においても Calabi-Yau 多様体 (空間) の呼称と概念が認知されるようになった。

21.6 モデュライの安定化と真空モデルのランドスケープ

コンパクト化半径 R のように、弦理論において許容される調節可能な時空のパラメーターは “モデュライ” (moduli) と呼ばれる (17.7 節, p.388)。 x を次元低減した後の時空座標とし、位置 x における半径を $R(x)$ とすると [コンパクト化半径は局所的に定義できる]

$$\begin{aligned} R \text{ が決まる} &\leftrightarrow R \text{ はポテンシャル } V(R) \text{ の極小値} \\ &\rightarrow R(x) \text{ は } V(R) \text{ が質量項 } \frac{1}{2}m^2R^2(x) \text{ を含むスカラー場,} \\ R \text{ がモデュライ} &\leftrightarrow V(R) \equiv 0 \rightarrow R(x) \text{ は無質量のスカラー場} \\ &\leftarrow \text{現実の観測とは整合しない.} \end{aligned}$$

モデュライに相当するようなパラメーターに対して、非自明なポテンシャルが生じるような物理的な設定を選ぶことによって、それに特別な値をとらせせることが可能になる。その値からの揺らぎにはエネルギーを要することになり、質量を持つスカラーが現れるが、これは許容され得る。典型的な設定において、モデュライの候補は、コンパクト空間のパラメーター、D-ブレーンの位置、閉弦ディラトンの値などである。モデュライの安定化の目標は、すべてのモデュライの値を固定するようなポテンシャルを用意して、許容される弦の背景を決めることである。このような背景は、弦の真空 (string vacuum) と呼ばれる。この問題は長い間、解決が困難であると思われてきたが、2002-2005 年の期間に起こった進展によって、すべてのモデュライを安定化させるような “磁束コンパクト化” (flux compactification) の構築が可能となった。以下に述べるように、磁束によってモデュライの安定化がもたらされるが、これは莫大な数の真空モデルを導く。このような多数の真空モデルの “景観 (ランドスケープ)” 全体はあまりに広大であり、その中のいくつかのものは、我々が観測している宇宙定数の値—— Planck 単位系において極端に小さい値である [式 (21.82)] —— を取るという可能性も尤もらしく見える。磁束コンパクト化は、宇宙論においてもいくつかの問題の説明を可能とするが、特にインフレーション過程を支配する機構にも関係する。(以上, p.481 下から 2 行目~p.482, l.112.)

モデュライ安定化の問題に対する洞察を得るために、Einstein による重力と電磁力の 6 次元統一理論を取り上げる。計量が

$$-ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu + R^2(x)\bar{g}_{ab}(y)dy^a dy^b$$

で与えられる場合を考える。ここに $x^\mu (\mu = 0, 1, 2, 3)$ は実効的な 4 次元時空の座標, $y^a (a = 1, 2)$ は 2 次元のコンパクト空間の座標である。このとき R に対するポテンシャルは

$$V(R) = -a_g \frac{\chi}{R^4}, \quad a_g (> 0) : \text{定数}, \quad \chi = 2 - 2g \quad (24)$$

となる。ただし g はコンパクト化した 2 次元面の示性数と呼ばれ, 大雑把に言って面が位相的に持つ穴の個数を表す。すると

$$\begin{aligned} 2 \text{次元球面 } g = 0 (\text{このとき正味曲率は正}) &\rightarrow V \sim -1/R^4 \rightarrow R = 0 \text{ へと縮小 (崩壊)}, \\ 2 \text{次元トーラス } g = 1 (\text{このとき正味曲率はゼロ}) &\rightarrow V \equiv 0 \rightarrow R \text{ はモデュライ}, \\ g > 1 \text{ のコンパクト化空間 (このとき正味曲率は負)} &\rightarrow V \sim 1/R^4 \rightarrow R = \infty \text{ へと膨張 (爆発)} \end{aligned}$$

となって, 半径 R を安定化させることができない。そこでトーラスにおける磁束 $\Phi = 2\pi n$ (19.3 節) を考慮する。

$$\Phi = 2\pi n \rightarrow \text{磁場 } B \sim \frac{n}{R^2} \rightarrow \text{全エネルギー } B^2 R^2 \sim \frac{n^2}{R^2}$$

であり, ここに上式 (24) と同様の因子 $1/R^4$ が掛かり, ポテンシャルは

$$V(R) = -a_g \frac{\chi}{R^4} + a_f \frac{n^2}{R^6}, \quad a_f (> 0) : \text{定数}$$

と修正される。 $g = 0$ すなわち $\chi = 2$ のとき, これは $R > 0$ に安定な極小点を持つ。もとのモデュライの場合 $\chi = 0$ には今の場合 $V(R) \sim 1/R^6$ となる [ため, このままでは R が定まらない] が, 弦理論ではさらにオリエンティフォールドからの寄与を考慮することで R を固定することができる。

より完全な超弦のコンパクト化の筋書きでは, 例えば 6 次元 Calabi-Yau 空間の持つ数百もの 3 次元部分多様体について, IIB 型の理論における NS-NS 場 $B_{\mu\nu}$ と R-R 場 $A_{\mu\nu}$ の強度に関する磁束が定義される。するとポテンシャルは磁束の寄与により, 数百個の整数に対する依存性を持つことになる。

多くの磁束から生じるポテンシャルに対しては統計力学的な考察が有用である。ここでは洞察を得るために, 簡単な場合として 2 つの整数 m, n によって特徴づけられる, 単一の変数 ϕ に対するポテンシャル

$$V_{m,n}(\phi) = n\phi + \frac{1}{2}m\phi^2$$

を考える。 m, n に応じたポテンシャルの集合を有限にするために, 大きな整数 L に対して $n^2 + m^2 \leq L$ の制約を設ける。またポテンシャルが安定な極小点を持つ, $m > 0$ の場合を仮定する。このときポテンシャルは $\phi_* = -n/m$ において, 極小値 (真空状態におけるエネルギー)

$$\Lambda_{m,n} = V_{m,n}(\phi_*) = -\frac{1}{2} \frac{n^2}{m} (\leq 0) \quad (25)$$

をとる。各整数の組 (m, n) ごとに 1 つの臨界値 $\phi_* = -n/m$ が定まる。ここで m, n の値に応じた複数の臨界値 ϕ_* を考え, その値が $d\phi_*$ に含まれる ϕ_* の個数を $\rho(\phi_*)d\phi_*$ と書いて分布関数 $\rho(\phi_*)$ を定義する。この分布関数を求めると

$$\rho(\phi_*) = \frac{L}{2} \frac{1}{1 + \phi_*^2} \quad (21.76)$$

となる [導出は下記]。他方, 真空エネルギー (25) の区間 $(\Lambda, \Lambda + d\Lambda)$ における真空の数 [つまり ϕ_* または $\Lambda_{m,n} = V_{m,n}(\phi_*)$ の数] を $\rho(\Lambda)|d\Lambda|$ と書いてエネルギー分布関数 $\rho(\Lambda)$ を定義すると, これは

$$\rho(\Lambda) = \frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{2|\Lambda|}} \left[\sqrt{\Lambda^2 + L} - |\Lambda| \right]^{3/2} \quad (\Lambda \leq 0)$$

と計算される (問題 21.5, $\Lambda > 0$ では $\rho(\Lambda) = 0$). [このモデルの話はここで終わりであり, 次の段落からは新しい話題に移る.]

弦理論におけるコンパクト化が, いわゆる暗黒エネルギーの観測値を如何にして再現し得るかという問題を論じる際には, 統計力学的な考察が関係してくる. 暗黒エネルギーとは現在の宇宙の真空エネルギーの値であり, 観測的な証拠によればその値は

$$\rho_{\text{vac}} = 0.771 \times 10^{-29} \text{ g/cm}^3$$

である. これは Planck 単位系における質量密度の自然な基本量

$$\rho_{\text{P}} = \frac{m_{\text{P}}}{l_{\text{P}}^3} = 5.2 \times 10^{93} \text{ g/cm}^3$$

に比べて極端に小さい値である. これを宇宙定数 $\Lambda_{\text{obs}} = \frac{8\pi G}{c^4} \rho_{\text{vac}}$, $\Lambda_{\text{P}} = \frac{8\pi G}{c^4} \rho_{\text{P}}$ に対する大小関係に読み替えると

$$\Lambda_{\text{obs}} \simeq 1.48 \times 10^{-123} \Lambda_{\text{P}}$$

となる. 通常, 弦理論における諸量の単位量は, Planck 単位系の基本量に対して数桁以内の違いしかないものと仮定されるので, このように極端に低い真空エネルギーが現れることは難問である. しかしながら, 多くの磁束を伴う磁束コンパクト化においては, 真空の数が莫大になるので, その中には実験的に許容されるような範囲内のエネルギー値を持つ真空も, かなりの数を見いだすことが可能となる. この点を見るために, モデュライの集合をベクトル $\vec{\phi}$ で表し, これに対するポテンシャル

$$V(\vec{\phi}) = V_0(\vec{\phi}) + \sum_{i=1}^J m_i(\vec{\phi}) n_i^2$$

を考える. 右辺第 2 項は一連の整数 n_1, n_2, \dots, n_J によって特徴づけられる J 種類の磁束からの寄与である. 我々は $V(\vec{\phi})$ の臨界点を計算することはせず, 最初からモデュライ $\vec{\phi}$ を典型値 $\vec{\phi}_0$ に凍結して, エネルギー密度を

$$\Lambda = \Lambda_0 + \sum_{i=1}^J q_i^2 n_i^2$$

($\Lambda = V(\vec{\phi}_0)$, $\Lambda_0 = V_0(\vec{\phi}_0)$) とする. [ここで考えているのは ρ_{vac} に対応するエネルギー密度である.] ただし磁束がエネルギー密度に対して正の寄与を持つことを明示するために $m_i(\vec{\phi}_0) = q_i^2$ と書いた. $\Lambda_0 \sim -\Lambda_{\text{P}}$ を想定し, 観測される真空エネルギーの目安

$$\Delta\Lambda \simeq \Lambda_{\text{obs}} \simeq 10^{-123} \Lambda_{\text{P}}$$

に対してこれが観測により許容される範囲

$$0 \leq \Lambda_0 + \sum_{i=1}^J q_i^2 n_i^2 \leq \Delta\Lambda \quad (21.87)$$

に含まれるような真空が存在する条件を調べたい. 1 つの真空は整数の組 (n_1, n_2, \dots, n_J) に対応するけれど, 整数 $(\pm n_1, \pm n_2, \dots, \pm n_J)$ (複号任意) を持つ $d(J) = 2^J$ 個の状態は同じエネルギーを持ち縮退しているので, 真空の数は上の条件を満たす整数の組 (n_1, n_2, \dots, n_J) の個数を $d(J)$ で割って得られる^{*16}. その個数

^{*16} 例えば $q_i = q_j$ であれば n_i と n_j を入れ替えた状態も縮退するため, 真空の縮退の度数 $d(J)$ はさらに増える. しかし大まかには $d(J) \simeq 2^J$ として良い.

が1以上となる条件として、最終的に

$$\frac{\Delta\Lambda}{2|\Lambda_0|} \geq \frac{d(J)}{\text{vol}(S^{J-1})} \prod_{i=1}^J \frac{q_i}{\sqrt{|\Lambda_0|}} \quad (21.95)$$

を得る ($\text{vol}(S^{J-1})$ は球面 S^{J-1} の体積) [導出は下記]. [ここで q_i が (その単位の役割を果たす $\sqrt{|\Lambda_0|}$ と比べて) 極端に小さいのは不自然である. そこで上の条件の下で q_i がどの程度まで大きくなり得るかを評価するために、不等式の両辺が同程度となる場合を考えよう.]

- 適正な程度に小さい q_i を得るためには $J \gg 1$ でなければならないことを踏まえ、大きな J に対する $\text{vol}(S^{J-1})$ の漸近展開を利用する.
- 左辺の程度は $\Delta\Lambda/2|\Lambda_0| \sim 10^{-124}$ である [上記に忠実に従えば 10^{-123}].
- $\prod_{i=1}^J q_i = q^J$ の関係によって実効的な q を導入する.

すると

$$\frac{2q}{\sqrt{|\Lambda_0|}} \simeq f(J) \equiv 10^{-\frac{124}{J}} \sqrt{\frac{2\pi e}{J}} \quad (21.98)$$

が得られ [導出は下記], $J = 124$ とすれば $f(J) = 0.037$ となるので, q は Planck 単位系の基本量 [$\sqrt{|\Lambda_0|}$] よりも少し小さくなる. [つまり q は不等式を破ることなく, その程度に大きい値をとり得る. これは観測から許容される範囲に真空を相当数含み, かつ q の値が現実的となり得るような磁束数 J を持つモデルが得られたことを意味する.]

「上述の議論は、我々の真空エネルギーが……可能性として非常に小さくなり得ることを示しているに過ぎ」(p.489) ず、「エネルギーが現実の観測値からは許容できないような高いエネルギーを持つ真空もたくさん存在することになる」(p.489). このことについて、インフレーションによって「生まれた多数の宇宙の中には、我々の宇宙のように真空エネルギーが極めて低いものも含まれる」(p.489) という説明が提案されている. そして「我々がこのような宇宙の中に我々自身を見いだした理由は、真空エネルギーの高い宇宙の中では銀河や星が形成されず、生命も発生し得ないからだという言われ方がなされることがある」(p.489).

関連して「弦理論においてインフレーションが起こり得るかと問うことにも意味がある」(p.490). とは言え「インフレーションの完全なモデルが導かれるかどうかを語るのは、まったく時期尚早である」(p.490).

[弦理論のモデルは] 我々が現実に観測する物理を再現するために組み上げるという形になっており、人為的な印象を与える. 素粒子物理の標準模型と標準宇宙模型は複雑な構成を持っており、それらを弦理論の範囲内で記述しようとする現在の試みは、単純化の方向には向かわない.

(中略)

広大な景観の概念が正しくて、我々の宇宙が莫大な数の可能性の中の、特に自然なものとは限らないひとつにすぎないという筋書きは、考え得ることである. しかしながら現段階では、今後我々の理解が進展するにつれて自然さが見えてくるであろうことを期待しながら、事実とモデルの研究を進めることのほうが建設的であろう. (p.490 より)

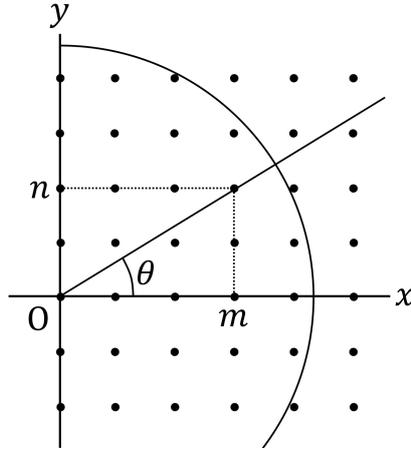


図 24 2つの整数 $m(>0)$ と n によって定義されるポテンシャル $V_{m,n}(\phi_*)$ の集合

21.6 節, 式の導出など

■分布関数 $\rho(\phi_*)$ の式 (21.76) の導出 (x, y) 平面上の各格子点 (m, n) ごとに $\phi_* = -n/m$ が定まる. 許容される格子点は条件 $m > 0$ より半平面 $x > 0$ に含まれ, さらに制約条件 $n^2 + m^2 \leq L$ より原点から半径 \sqrt{L} の範囲にある. (x, y) 平面における格子点の個数に関する面密度は 1 なので [本稿次節でも指摘], 図 24 に示す方位角 θ の小さな区分 $d\theta$ に含まれる格子点の数 (ϕ_* の数, したがって真空の数) $d\mathcal{N}$ は, 中心角 $d\theta$ の扇形の面積

$$d\mathcal{N} = \frac{L}{2} |d\theta|$$

で与えられる. ここで同じ動径線 $y = (\tan \theta)x$ 上の格子点 (m, n) は同じ $\phi_* = -n/m$ の値

$$\phi_* = -\tan \theta$$

を持つので, $d\mathcal{N}$ の式を, θ の範囲 $d\theta$ に対応する ϕ_* の範囲 $|d\phi_*|$ に含まれる真空の数 $\rho(\phi_*)|d\phi_*|$ へと読み替えることができる. 具体的には

$$\theta = -\arctan \phi_*, \quad \therefore d\theta = -\frac{1}{1+\phi_*^2} d\phi_* = \frac{1}{1+\phi_*^2} |d\phi_*|$$

を代入し [($\arctan x$)' = $1/(1+x^2)$ を用いた],

$$d\mathcal{N} = \frac{L}{2} \frac{1}{1+\phi_*^2} |d\phi_*|, \quad \therefore \rho(\phi_*) = \frac{L}{2} \frac{1}{1+\phi_*^2} : (21.76)$$

を得る.

■式 (21.87) を満たす真空が存在する条件 (21.95) の導出 条件式 (21.87):

$$0 \leq \Lambda_0 + \sum_{i=1}^J q_i^2 n_i^2 \leq \Delta\Lambda, \quad \therefore |\Lambda_0| \leq \sum_{i=1}^J q_i^2 n_i^2 \leq |\Lambda_0| + \Delta\Lambda$$

を満たす真空の数を調べよう．この不等式を満たす格子点 (n_1, n_2, \dots, n_J) を考える． $x_i = q_i n_i$ の関係によりデカルト座標 x_i を導入すると x 空間では

$$|\Lambda_0| \leq \sum_{i=1}^J x_i^2 \leq |\Lambda_0| + \Delta\Lambda$$

なので，考えている格子点は 2 つの $(J-1)$ 次元球面に挟まれた球殻に含まれている． x 空間では x_i 方向に隣接する格子点は距離 q_i だけ隔たっているので，1 つの格子点は体積

$$\text{vol}_{\text{cell}} = \prod_{i=1}^J q_i$$

の胞 (セル) を占める．よって球殻の体積 $\text{vol}_{\text{shell}}$ を胞 (セル) の体積 vol_{cell} で割れば， x 空間の格子点の数が求まる．球殻の厚み dR は

$$|\Lambda_0| = R_0^2, \quad |\Lambda_0| + \Delta\Lambda = (R_0 + dR)^2 \quad \rightarrow \quad dR = \frac{\Delta\Lambda}{2\sqrt{|\Lambda_0|}}$$

と見出されるので [本稿次節で補足]，球殻の体積は

$$\text{vol}_{\text{shell}} = \text{vol}(S^{J-1}(R_0))dR = \text{vol}(S^{J-1})\sqrt{|\Lambda_0|}^{J-1} \frac{\Delta\Lambda}{2\sqrt{|\Lambda_0|}}$$

と計算される．真空状態の数は格子点の数 $\text{vol}_{\text{shell}}/\text{vol}_{\text{cell}}$ を縮退度 $d(J)$ で割った値

$$\frac{1}{d(J)} \frac{\text{vol}_{\text{shell}}}{\text{vol}_{\text{cell}}} = \frac{\text{vol}(S^{J-1})}{2d(J)} \sqrt{|\Lambda_0|}^{J-1} \frac{\Delta\Lambda}{\sqrt{|\Lambda_0|}} \frac{1}{\prod_{i=1}^J q_i}$$

で与えられる．球殻内に真空状態が存在する条件として，これが 1 以上となることを要求すると，式 (21.95):

$$\frac{\Delta\Lambda}{2|\Lambda_0|} \geq \frac{d(J)}{\text{vol}(S^{J-1})} \prod_{i=1}^J \frac{q_i}{\sqrt{|\Lambda_0|}}$$

が得られる．

■式 (21.98) の導出 式 (21.95) において $J = 1$ とすると

$$q \lesssim 10^{-124} \sqrt{|\Lambda_0|}$$

となり，これは (要約で説明したように) 小さすぎて不自然である．そこで J が [1 に比べて] 大きい場合を想定して，漸近展開

$$\text{vol}(S^{J-1}) \simeq \left(\frac{2\pi e}{J}\right)^{J/2}, \quad J \rightarrow \infty$$

を利用する (計算練習 21.19)．式 (21.95) の左辺を 10^{-124} とおき， $d(J) \simeq 2^J, \prod_{i=1}^J q_i = q^J$ を代入すると

$$10^{-124} \geq \left(\frac{2\pi e}{J}\right)^{-J/2} \left(\frac{2q}{\sqrt{|\Lambda_0|}}\right)^J$$

となる．ここから式 (21.98):

$$\frac{2q}{\sqrt{|\Lambda_0|}} \lesssim f(J) \equiv 10^{-\frac{124}{J}} \sqrt{\frac{2\pi e}{J}}$$

を得る．

21.6 について

■「質量項 $\frac{1}{2}m^2 R^2(x)$ 」(21.6 節 1.9,10) について 位置 x ごとに異なる半径 $R(x)$ の“場”についてポテンシャル $V(R(x))$ を展開して, R の 2 次の項として Klein-Gordon 場型の質量項 $\frac{1}{2}m^2 R^2(x)$ を得ることを考えており, $V(R(x)) \equiv 0$ であれば, そのようなことはできなくなる. 例えば自発的対称性の破れに関する Goldstone モデルにおいて似たような概念に出会っている [1, pp.481–486].

■p.482 訳註の引用

‘真空’と解釈できるような, 素励起を含まないエネルギー的に安定・準安定な状態の数が 10^{500} 以上もの膨大な数になる(と予想し得る)ことを, 多様な地形を含んだ広大な景色に喩えて ‘landscape’ と称している. そして‘真空’の構造が異なれば, そこから導かれる低エネルギー有効理論(‘宇宙’の様相)もそれぞれ違ったものになる. 従来の基礎理論における‘真空’は, 自発的な対称性の破れなどに関する自由度はあるにしても, かなり単純なものと想定されてきたので(すなわち‘景色’が極めて限定的なものだったので)あまり過去に類例のない概念と言える. 余剰次元がいくつもあり, それらがコンパクト化しているという想定を背景として初めてこのような発想が出てくるわけである. ただし, これは現段階では‘ランドスケープ問題’として試論の段階にある. そもそも余剰次元の存在を仮定するにしても, そのコンパクト化の機構までを確実に確定できるほど, 弦理論の基礎的な定義の部分は明確化されていない.

■真空の個数(21.76), (21.77)について 「……真空の数 $d\mathcal{N}$ は, その領域の面積に比例する」(式(21.76)の上2行)とあるが, 整数の組 (m, n) によって特徴付けられる個々の真空状態は面積1を占めるから, (今考えている $L \gg 1$ に対する近似の下で)真空の数は式(21.76)のように面積そのもので与えられる. p.484 一番下 ~ p.485, 1.1 にあるように, ここから真空の総数は半円の面積(21.77): $\mathcal{N} \simeq \frac{1}{2}\pi L$ となることが期待される.

■宇宙の臨界エネルギー密度(21.80): $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ と宇宙定数 $\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}\rho$ (式(21.82)上2行)について 以下では $c=1, G=1$ とおく. Einstein 方程式

$$G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu}$$

における宇宙定数 Λ はある種の宇宙定数“流体”を起源に持ち, そのエネルギー・運動量テンソル $T_{\Lambda}^{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{8\pi}g^{\mu\nu}$ の寄与と表される. この観点では宇宙定数“流体”のエネルギー密度と圧力はそれぞれ

$$\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi}, \quad p_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda}$$

であり, ρ_{Λ} は暗黒エネルギーとも呼ばれる. このとき

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad k = 0, \pm 1$$

で与えられる Robertson-Walker 計量を持つ一様等方宇宙に対して, Einstein 方程式は

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 = -\frac{1}{2}k + \frac{4}{3}\pi R^2(\rho_m + \rho_{\Lambda})$$

を与える (ρ_m は通常物質のエネルギー密度) [11, pp.465–466]. あるいは Hubble パラメーター $H = \dot{R}/R$ を用いて

$$\frac{3H^2}{8\pi} = -\frac{3k}{8\pi R^2} + \rho_m + \rho_{\Lambda}.$$

これによると, “物理的な”エネルギー密度 $\rho_m + \rho_{\Lambda}$ と左辺 $3H^2/8\pi$ の大小関係で曲率パラメーター k の符号が決まることになる. この意味で左辺を

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi}H_0^2$$

と書いて、臨界エネルギー密度と呼ぶ (H_0 は Hubble パラメーターの現在の値) [11, p.470].

■球殻の厚さ (21.92) について 1 行上の式を $|\Lambda_0| + \Delta\Lambda = (R_0 + dR)^2$ に訂正し, $|\Lambda_0| = R_0^2$ との差が

$$\Delta\Lambda = 2R_0 dR$$

となることに注意する. 空間次元 J に関係なく半径は $R = \sqrt{\sum_{i=1}^J x_i^2}$ で定義される.

■球殻の体積 (21.93) について 最左辺 vol_{cell} を $\text{vol}_{\text{shell}}$ に訂正する.

■pp.489–490 の議論について 教科書が賢王 Alfonso (アルフォンソ)10 世や Maimonides (マイモニデス) の記述を引用するならば (p.490), こちらも Spinoza 哲学の立場からこれに応じよう. まず Alfonso10 世の想定する「天地創造」について, Spinoza の汎神論によれば, 神は世界を創り世界に外から働きかけるような人格を持った存在ではなく, むしろこの世界そのものであって, それ故, 神即自然と呼ばれる. そしてすべては神の必然性の表れであり, あらゆる事物は神の必然性に従って生起する. 次に「自然界において, 目的のないもの, 些末なもの, 不必要なものは存在しない」と述べる Maimonides について (「より良い秩序」と語る Alfonso10 世に対しても言えることであるが), 自然そのものには目的などなく, また善悪の価値を帰すこともできない. ありのままの神の必然性に完全も不完全もない.

引き続き Spinoza 哲学に立脚して, 弦理論の広大な景観をインフレーション理論から論じた部分について, 半ば思弁的な議論を続けよう. p.489 下から 13,12 行目には次のようにある.

無数の泡宇宙が生成を続け, 結局は景観 (ランドスケープ) に含まれるあらゆる真空が, 物理的な泡宇宙として, どこかで実現される可能性が高いものと考えられる.

これは「神の本性の必然性から, 無限に多くのものが……無限に多くの仕方では生じてこなければならない」という, Spinoza の主著『エティカ』の定理を彷彿させる [13, p.34]. このとき弦モデルの構築が「単純化の方向には向かわ」(p.490) ず, 「広大な景観の概念が正しくて, 我々の宇宙が莫大な数の可能性の中の, 特に自然なものとは限らないひとつにすぎない」(p.490) という結論になったとしても, 無数の宇宙を生じる背景に単一の神を見ることはできる. 再び Spinoza の言葉を引用すれば, 「存在するものはすべて神のうちにある. そしていかなるものも神なしには存在しえないし, また考えられることもできない」 [13, p.26]. このようにどちらに転んだとしても, 弦理論を神即自然の必然性と見ることは常に可能である. それは蓋然的な経験科学の知見に依らず, 経験科学の暗黙の前提を成す, 根源的な形而上学的思想である.

計算練習 21.16 (p.483)

$\chi = 2$ のときのポテンシャル (21.69):

$$V(R) = -a_g \frac{2}{R^4} + a_f \frac{n^2}{R^6}$$

の概形は図 25 のようである.

$$V'(R) = 4a_g \frac{2}{R^5} - 6a_f \frac{n^2}{R^7} = \frac{2(4a_g R^2 - 3a_f n^2)}{R^7}$$

より $V(R)$ は $R = R_* \equiv \sqrt{\frac{3a_f n^2}{4a_g}}$ で極小値

$$V(R) = \frac{1}{R_*^4} \left(-2a_g + a_f \frac{n^2}{R_*^2} \right) = -\frac{32a_g^3}{27a_f^2 n^4}$$

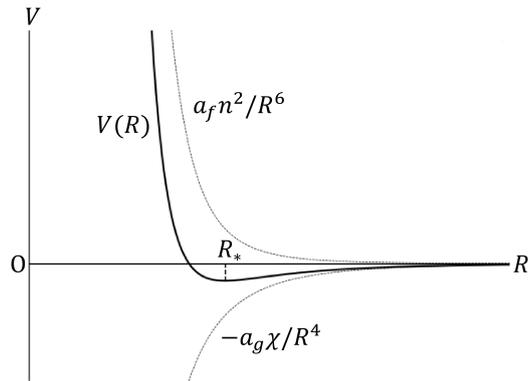


図 25 $\chi = 2$ のときのポテンシャル (21.69) の概形

をとる.

計算練習 21.17 (p.486)

$$\rho_P = \frac{m_P}{l_P^3} = \frac{2.176 \times 10^{-5} \text{g}}{(1.616 \times 10^{-33} \text{cm})^3} \simeq 5.16 \times 10^{93} \text{g/cm}^3$$

計算練習 21.18 (p.488)

ガンマ関数の公式 [12, p.124,p/126]

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}$$

を用いて球面の体積 (3.52):

$$\text{vol}(S^k) = \frac{2\pi^{(k+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}$$

を評価する. 以下, $m = 1, 2, \dots$ とする.

奇数 $k = 2m - 1$ に対して

$$\begin{aligned} \text{vol}(S^{2m-1}) &= \frac{2\pi^m}{\Gamma(m)} = \frac{2\pi^m}{(m-1)!}, \\ r_{2m-1, 2m+1} &\equiv \frac{\text{vol}(S^{2m+1})}{\text{vol}(S^{2m-1})} = \frac{\pi}{m} \end{aligned}$$

であり,

$$r_{1,3} > r_{3,5} > r_{5,7} = \frac{\pi}{3} > 1 > \frac{\pi}{4} = r_{7,9} > r_{9,11} > \dots$$

なので, $\{\text{vol}(S^{2m-1})\}$ の最大値は

$$\text{vol}(S^7) = \frac{2\pi^4}{3!} \simeq 32.5.$$

偶数 $k = 2m$ に対して

$$\begin{aligned} \text{vol}(S^{2m}) &= \frac{2\pi^{m+\frac{1}{2}}}{\Gamma(m+\frac{1}{2})} = \frac{2^{m+1}\pi^m}{(2m-1)!!}, \\ r_{2m,2m+2} &\equiv \frac{\text{vol}(S^{2m+2})}{\text{vol}(S^{2m})} = \frac{2\pi}{2m+1} \end{aligned}$$

であり,

$$r_{2,4} > r_{4,6} = \frac{2\pi}{5} > 1 > \frac{2\pi}{7} = r_{6,8} > r_{8,10} > \dots$$

なので, $\{\text{vol}(S^{2m})\}$ の最大値は

$$\text{vol}(S^6) = \frac{2^4\pi^3}{5!!} \simeq 33.1.$$

以上より $\text{vol}(S^k)$ は $k = 6$ において最大となる. それより大きな k に対して $\{\text{vol}(S^{2m-1})\}$ と $\{\text{vol}(S^{2m})\}$ はそれぞれが単調に減少する.

計算練習 21.19 (p.489)

与えられた近似式 (いわゆる Stirling の近似式である [12, p.134]) を用いると,

$$\begin{aligned} \text{vol}(S^{J-1}) &= \frac{2\pi^{J/2}}{\Gamma(J/2)} \sim \frac{2\pi^{J/2}}{(J/2)^{(J/2)-1} \sqrt{2\pi(J/2)} e^{-J/2}}, \\ \therefore \ln\{\text{vol}(S^{J-1})\} &\sim \ln 2 + \frac{J}{2} \ln \pi - \left(\frac{J}{2} - 1\right) \ln \frac{J}{2} - \frac{1}{2} \ln \left(2\pi \frac{J}{2}\right) + \frac{J}{2} \\ &= \ln 2 + \frac{J}{2} (\ln \pi + 1) - \frac{1}{2} (J+1) \ln \frac{J}{2} - \frac{1}{2} \ln(2\pi) \\ &\sim \frac{J}{2} (\ln \pi + 1) - \frac{1}{2} (J+1) \ln \frac{J}{2} \\ &\sim \frac{J}{2} \{\ln(2\pi) + 1\} - \frac{J}{2} \ln J, \quad \left(\because \frac{1}{2} (J+1) \ln \frac{J}{2} \sim \frac{J}{2} \ln J - \frac{J}{2} \ln 2 \quad (J \gg \ln J)\right) \\ \therefore \text{vol}(S^{J-1}) &\sim \left(\frac{2\pi e}{J}\right)^{J/2} : (21.96) \end{aligned}$$

を得る. (以上, 一貫して大雑把な近似に対する表記「 \sim 」を用いた.)

計算練習 21.20 (p.489)

WolframAlpha にて計算を行うと, 実数 x に対して

$$f(x) = 10^{-\frac{124}{x}} \sqrt{\frac{2\pi e}{x}}$$

は $x = 248 \ln 10 \simeq 571.04$ で最大値をとる. また

$$\begin{aligned} f(571) &= 0.104895353, \\ f(572) &= 0.104895279 \end{aligned}$$

なので, $J = 571$ で $f(J)$ は最大値 $f(571)$ をとる.

なお, 参考として導関数を手計算で調べておくと

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{2\pi e}} = \frac{124 \ln 10}{x^{5/2}} e^{-\frac{124}{x}} - \frac{1}{2x^{3/2}} 10^{-\frac{124}{x}}.$$

第 22 章 弦の熱力学とブラックホール

22.1 統計力学の復習

タイトルの通り、本節の大部分は統計力学の復習である。本稿ではその内容は省略し、第 22 章で調べる内容の予告として、最後の 3 段落を引用するに留める。

我々の目的は、上述の基礎的な熱力学的諸関係を利用して、弦の興味深い性質を計算することにある。ひとつの中心的な計算は、弦の分配関数の計算である。この問題は少々複雑なので、まずは簡単な問題を考察して、そこから計算に必要な技法を構築することにしよう。

我々が最初に必要とする結果は、大きな整数の分割方法の数である。我々は、この数学的な問題の答えを、物理的な手法によって得ることにする。すなわち“非相対論的”な量子弦の高温における解析を利用する。この弦を“量子バイオリン弦”と呼ぶことにしよう。その結果を用いて“理想的な”相対論的量子弦、すなわち運動量ラベルを無視した量子弦に関するエントロピー／エネルギーの関係を計算する。この文脈において Hagedorn (ハーゲドルン) 温度の概念が現れることになる。そして、相対論的な点粒子の分配関数を論じた後で、すべての結果を踏まえて相対論的な弦の分配関数を計算する。

本章の後の方では、弦理論によって達成された重要な成功例、すなわちブラックホールのエントロピーの統計力学的な導出について論じる。このエントロピーの概念は、最初は熱力学的な考察から得られたものであるが、弦の状態の縮退が、ブラックホールの巨視的な性質にも共通する性質を持つことを利用して到達することもできる。弦の計算と熱力学的な予想の一致は、Schwarzschild (シュワルツシルト) ブラックホールに関しては定性的なものにとどまるが、ある種の最大荷電ブラックホール (extremal black hole) に関して定量的なものになる。

22.1 について

系 A として「弦がたくさん入った箱」(p.497 下から 4 行目) を考えても良いけれど、本章では一貫して「弦が 1 本だけ入った箱」(p.497 下から 3 行目) を考えることになる。1 本だけの弦に対する統計力学と言うと奇妙に聞こえるけれど、古典的には粗い描像として、1 本の弦が長さ $l_s = \sqrt{\alpha'}$ の素片から成ると考えることができる (p.516)。

また

- 微視的正準 (マイクロカノニカル) 集団
 - 決まったエネルギー E において A が取り得る各々の状態の集合
- 正準 (カノニカル) 集団
 - 温度 T の熱浴に熱的に接している A が取り得る各々の状態の集合

が紹介されている (p.497)。例えば次節では量子バイオリン弦のカノニカル集団に対して分配関数 Z を計算し、ここから得られる自由エネルギー F を熱力学的関係式に代入してエネルギー E とエントロピー S を計算する。ここから得られる S と E (したがって数演算子の固有値 N) の関係を Boltzmann の関係式 (22.26): $S(E) = k \ln p(N)$ と比較する際には、マイクロカノニカル集団を考えていることになる。

22.2 分割の数と量子バイオリン弦

量子バイオリン弦は振動数 $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$ の調和振動子の集団に対するハミルトニアン

$$\hat{H} = \sum_{l=1}^{\infty} (l\hbar\omega_0) a_l^\dagger a_l = \hbar\omega_0 \hat{N}, \quad \hat{N} = \sum_{l=1}^{\infty} l a_l^\dagger a_l : \text{数演算子}$$

を持つと考えられる [その動機付けは本稿の次節で考察する]. 真空を $|\Omega\rangle$ とすると, 弦の基本状態

$$|\Psi\rangle = (a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2} \dots (a_l^\dagger)^{n_l} \dots |\Omega\rangle$$

における \hat{N} と \hat{H} の固有値はそれぞれ

$$N = \sum_{l=1}^{\infty} l n_l, \quad E = \hbar\omega_0 N : \text{エネルギー}$$

である.

ここで \hat{N} の固有値が N となる状態の数 $p(N)$ を考える. これを (近似的に) 求めることが本節の主要な目的である. 例えば $N = 4$ に対してこれを総和が 4 になる正の整数の集合へと分割することを考えると, そのような分割 (partitions) として

$$\{4\}, \quad \{3, 1\}, \quad \{2, 2\}, \quad \{2, 1, 1\}, \quad \{1, 1, 1, 1\}$$

が挙げられる. 分割の各要素を振動子 a^\dagger の添字に充てると, 分割の各々から

$$a_4^\dagger |\Omega\rangle, \quad a_3^\dagger a_1^\dagger |\Omega\rangle, \quad (a_2^\dagger)^2 |\Omega\rangle, \quad a_2^\dagger (a_1^\dagger)^2 |\Omega\rangle, \quad (a_1^\dagger)^4 |\Omega\rangle$$

のように $N = 4$ の状態が 1 つずつ得られ, $p(4) = 5$ となる. ([このとき集合 $\{\dots\}$ 内で要素を入れ替えても得られる状態は変わらず, 分割の定義として] 集合を構成する要素の順序を気にする必要はない.) よって求める状態数 $p(N)$ は, N の分割の数 [N を分割する方法の数] であることになる.

実は $p(N)$ を正確に与える式を求めることは叶わず, そこで代わりに我々は大きな N において適用できる $\ln p(N)$ の近似式を導く. それは純粋に数学的な作業であるけれど, 我々は物理的な意味付けを行いつつ, その問題に取り組むことにする. 具体的には $p(N)$ がエネルギー $E = \hbar\omega_0 N$ の状態数に, したがってエントロピー

$$S(E) = k \ln p(N)$$

に対応することに注目し (k は Boltzmann 定数), 大まかには量子バイオリン弦のエントロピーを

$$\text{分配関数 } Z \quad \rightarrow \quad \text{自由エネルギー } F = -kT \ln Z \quad \rightarrow \quad \text{エントロピー } S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V$$

の順に計算する. すると

$$Z = \sum_{\{n_l\}} \exp \left(- \frac{\hbar\omega_0}{kT} \sum_{l=1}^{\infty} l n_l \right) = \prod_{l=1}^{\infty} \left[1 - \exp \left(- \frac{\hbar\omega_0 l}{kT} \right) \right]^{-1}, \quad (22.30)$$

$$F = -kT \ln Z = kT \sum_{l=1}^{\infty} \ln \left[1 - \exp \left(- \frac{\hbar\omega_0 l}{kT} \right) \right]$$

であり，計算を進めるために温度が高い場合

$$\frac{\hbar\omega_0}{kT} \ll 1$$

を仮定すると，近似的に

$$\begin{aligned} F &\simeq -\frac{(kT)^2 \pi^2}{\hbar\omega_0 6}, \\ E &= -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z = \frac{\partial}{\partial\beta}(\beta F) \simeq \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{kT}{\hbar\omega_0}\right)^2 \hbar\omega_0, \\ S &= -\frac{\partial F}{\partial T} \simeq k \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{kT}{\hbar\omega_0}\right) \simeq k\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{E}{\hbar\omega_0}} = k2\pi \sqrt{\frac{N}{6}} \end{aligned} \quad (22.39)$$

を得る ($S = -(\frac{\partial F}{\partial T})_V$ は体積 V を固定した微分であり，上記の F は V に依らないことに注意した)．これを $S(E) = k \ln p(N)$ と比較すると

$$\ln p(N) \simeq 2\pi \sqrt{\frac{N}{6}}$$

と同定される．高温の仮定 $N = \frac{E}{\hbar\omega_0} \simeq \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{kT}{\hbar\omega_0}\right)^2 \gg 1$ により，これは N が大きい場合の近似式となる．天下りであるが，より洗練された計算結果として，Hardy (ハーディー) と Ramanujan (ラマヌジャン) による $p(N)$ の近似式

$$p(N) \simeq \frac{1}{4N\sqrt{3}} \exp\left(2\pi\sqrt{\frac{N}{6}}\right)$$

が有名である．

次に弦が b 個の横方向に振動できる場合への一般化を行う．このとき各振動数 $l\omega_0$ において， b 個の振動子 $a_l^{(q)\dagger}$ と対応する占有数 $n_l^{(q)}$ を考えることができる ($q = 1, 2, \dots, b$)．すると今度は

$$6 \rightarrow \{3_{q_1}, 2_{q_2}, 1_{q_1}\}$$

のように，1 から b までの任意の値をとる添字 q_1, q_2, \dots の付いた要素への分割を考え，異なる添字の付いた分割を区別して数えたときの分割の数 $p_b(N)$ が状態数を与えることになる．他方，分配関数，自由エネルギー，エントロピーおよびエネルギーは

$$Z_b = (Z)^b, \quad F_b = bF, \quad S_b = bS, \quad E_b = bE$$

に置き換わる [説明は下記]．今度は E ではなく E_b が $\hbar\omega_0 N$ になることに注意すると，

$$S_b = b(k2\pi) \sqrt{\frac{1}{6} \frac{E_b}{\hbar\omega_0}} = k2\pi \sqrt{\frac{b}{6} \frac{E_b}{\hbar\omega_0}} = k2\pi \sqrt{\frac{Nb}{6}}$$

であり，これを $S_b = k \ln p_b(N)$ と比較して

$$\ln p_b(N) \simeq 2\pi \sqrt{\frac{Nb}{6}}$$

を得る．再び天下りであるが， $p_b(N)$ のより正確な近似式は

$$p_b(N) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{b}{24}\right)^{(b+1)/4} N^{-(b+3)/4} \exp\left(2\pi\sqrt{\frac{Nb}{6}}\right)$$

となることが示される。これは $b = 1$ の場合に対する Hardy-Ramanujan の公式を再現し、またボゾンの弦理論を想定して $b = 24$ とおくと

$$p_{24}(N) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} N^{-27/4} \exp(4\pi\sqrt{N})$$

と簡略化される。

各振動数 n について 1 回までしか用いることができないフェルミオンの (生成) 演算子 c_n^\dagger を用いて作られる、数演算子の固有値 N の状態を考える。例えば $N = 6$ に対してそのような状態は、互いに異なる整数 (フェルミオンの数と呼ぶ) への分割

$$6 \rightarrow \{6\}, \{5, 1\}, \{4, 2\}, \{3, 2, 1\}$$

を考え、分割の各々をそれぞれ基本状態

$$c_6^\dagger |\Omega\rangle, \quad c_5^\dagger c_1^\dagger |\Omega\rangle, \quad c_4^\dagger c_2^\dagger |\Omega\rangle, \quad c_3^\dagger c_2^\dagger c_1^\dagger |\Omega\rangle$$

に対応させると過不足なく得られる。このような互いに異なる数への整数 N の分割の数 $q(N)$ は

$$\ln q(N) \simeq 2\pi\sqrt{\frac{N}{12}}$$

と評価される (問題 22.2)。

さらに超弦理論において起こりうる状況として、各振動数 n について

- b 個のボゾンの生成演算子 $a_n^{(q)\dagger}$ (ただし $q = 1, \dots, b$)
- f 個のフェルミオンの生成演算子 $c_n^{(r)\dagger}$ (ただし $r = 1, \dots, f$)

があるとき、これらを用いて作られる数演算子の固有値が N となる状態を考える。簡単のために $b = 1, f = 2$ とすれば、 $N = 2$ の状態は分割

$$2 \rightarrow \{2\}, \{2_1\}, \{2_2\}, \{1, 1\}, \{1_1, 1\}, \{1_2, 1\}, \{1_1, 1_2\}$$

を考え (ただしフェルミオンの数には、ラベルとして添字を付けた)、その各々に対してそれぞれ基本状態

$$a_2^\dagger |\Omega\rangle, \quad c_2^{(1)\dagger} |\Omega\rangle, \quad c_2^{(2)\dagger} |\Omega\rangle, \quad (a_1^\dagger)^2 |\Omega\rangle, \quad c_1^{(1)\dagger} a_1^\dagger |\Omega\rangle, \quad c_1^{(2)\dagger} a_1^\dagger |\Omega\rangle, \quad c_1^{(1)\dagger} c_1^{(2)\dagger} |\Omega\rangle$$

を充てれば過不足なく得られる。このように一般に整数 N を通常の数 (b 種類) とフェルミオンの数 (f 種類) に分割する方法 $P(N; b, f)$ は、

$$\ln P(N; b, f) \simeq 2\pi\sqrt{\frac{N}{6} \left(b + \frac{f}{2}\right)}$$

で与えられる (問題 22.4)。

22.2 節, 式の導出など

■分配関数 Z の式 (22.30) の導出

$$\begin{aligned}
 Z &= \sum_{\{n_l\}} \exp \left[-\frac{\hbar\omega_0}{kT} \sum_l l n_l \right] \\
 &= \sum_{n_1, n_2, n_3, \dots} \exp \left[-\frac{\hbar\omega_0}{kT} (n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots) \right] \\
 &= \left[\sum_{n_1} \exp \left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT} n_1 \right) \right] \cdot \left[\sum_{n_2} \exp \left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT} 2n_2 \right) \right] \cdot \left[\sum_{n_3} \exp \left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT} 3n_3 \right) \right] \cdots \\
 &= \prod_{l=1}^{\infty} \sum_{n_l=0}^{\infty} \exp \left(-\frac{\hbar\omega_0 l n_l}{kT} \right) \\
 &= \prod_{l=1}^{\infty} \left[1 - \exp \left(-\frac{\hbar\omega_0 l}{kT} \right) \right]^{-1} : (22.30). \quad (\text{無限等比級数和})
 \end{aligned}$$

■自由エネルギー F の式 (22.39) の導出 高温極限 $\hbar\omega_0/kT \ll 1$ では自由エネルギー (22.31):

$$F = kT \sum_{l=1}^{\infty} \ln \left[1 - \exp \left(-\frac{\hbar\omega_0 l}{kT} \right) \right]$$

における和を積分

$$F \simeq kT \int_1^{\infty} dl \ln \left[1 - \exp \left(-\frac{\hbar\omega_0 l}{kT} \right) \right] \simeq \frac{(kT)^2}{\hbar\omega_0} \int_0^{\infty} dx \ln(1 - e^{-x}), \quad x = \frac{\hbar\omega_0}{kT} l$$

で近似できる [本稿次節で補足・考察する]. ここで $0 \leq y < 1$ に対する展開式

$$\ln(1 - y) = - \left(y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 + \dots \right)$$

を $y = e^{-x}$ として適用すると

$$\begin{aligned}
 F &\simeq -\frac{(kT)^2}{\hbar\omega_0} \int_0^{\infty} dx \left(e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{1}{4}e^{-4x} + \dots \right) \\
 &\simeq -\frac{(kT)^2}{\hbar\omega_0} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

となる. 最右辺の括弧内は引数が 2 のゼータ関数

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

だから [本稿次節で補足], 自由エネルギーの式 (22.39):

$$F \simeq -\frac{(kT)^2}{\hbar\omega_0} \frac{\pi^2}{6}$$

を得る.

■ Z_b, F_b, S_b, E_b の式 (22.50–53) の説明

$$\begin{aligned}
 Z_b &= \sum_{\{n_k^{(r)}\}} \exp \left[-\frac{\hbar\omega_0}{kT} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^b \ln n_l^{(q)} \right] \\
 &= \sum_{\{n_k^{(1)}\}} \exp \left[-\frac{\hbar\omega_0}{kT} \sum_{l=1}^{\infty} \ln n_l^{(1)} \right] \cdots \sum_{\{n_k^{(b)}\}} \exp \left[-\frac{\hbar\omega_0}{kT} \sum_{l=1}^{\infty} \ln n_l^{(b)} \right] \\
 &= Z^b, \\
 \therefore F_b &= -kT \ln Z_b = -kTb \ln Z = bF, \\
 \therefore S_b &= -\frac{\partial F_b}{\partial T} = -b \frac{\partial F}{\partial T} = bS, \\
 \therefore E_b &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_b = -\frac{\partial}{\partial \beta} b \ln Z = bE.
 \end{aligned}$$

22.2 について

■ ハミルトニアン (22.18) について 12.3 節では弦の作用として式 (12.81):

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma (\dot{X}^I \dot{X}^I - X^{I'} X^{I'})$$

を採用し、弦座標の展開係数 $q_n^I(t)$ を力学変数にとると (式 (12.87)), ハミルトニアンが

$$H = \alpha' p^I p^I + \sum_{n=1}^{\infty} n \left(a_n^{I\dagger} a_n^I + \frac{1}{2} \right) \quad (26)$$

となることを見た (式 (12.75), 式 (12.91)). そこでゼロ点エネルギーを除けば、量子バイオリン弦のハミルトニアンは同じく振動子の集団に対するハミルトニアン (22.18):

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \sum_{l=1}^{\infty} l a_l^\dagger a_l$$

で与えられると考えられる。ただしここでは 1 つの振動方向のみを想定して、横方向添字 I を省いてある (振動方向が複数ある場合への一般化は p.504 以降で行われる)。また 12.3 節では無次元のパラメーター τ, σ を用いたため、上式 (26) として引用したハミルトニアンもまた無次元となっている。式 (22.18) のハミルトニアンとの係数の違いはこのような事情に由来する。

なお通常の調和振動子の量子論では $a_l^\dagger a_l$ が数演算子であるけれど、弦理論では l をエネルギー $l\hbar\omega_0$ に含めるのではなく、これまでと同様、数演算子 (22.19): $\hat{N} = \sum_{l=1}^{\infty} l a_l^\dagger a_l$ に含める。

■ 和の積分による近似 (22.33) について 離散的な和 (22.31) を区分求積と見れば良い。

あるいはあらかじめ式 (22.34): $x = \frac{\hbar\omega_0}{kT} l$ の変数変換を行い、直接、後の式 (22.35) を導くこともできる。高温 $\frac{\hbar\omega_0}{kT} \ll 1$ では微小区間 Δx に l で特徴づけられる x の値が $\frac{\Delta x}{\hbar\omega_0/kT}$ 個含まれ、それらは近似的に $\ln(1 - e^{-x})$ の共通の値を持つと見なせるので、

$$\begin{aligned}
 F &= kT \sum_{l=1}^{\infty} \ln \left[1 - \exp \left(-\frac{\hbar\omega_0 l}{kT} \right) \right] \simeq kT \sum_{\Delta x} \frac{\Delta x}{\hbar\omega_0/kT} \ln(1 - e^{-x}), \\
 \therefore F &\rightarrow kT \int_0^{\infty} \frac{dx}{\hbar\omega_0/kT} \ln(1 - e^{-x}) : (22.35).
 \end{aligned}$$

■ $\zeta(2)$ の式 (22.38) について Fourier 級数展開

$$\frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

に $x = \pi$ を代入し

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

を得る.

計算練習 22.1 (p.503)

式 (20.39) の F と式 (20.40) の S を用いると

$$E = F + TS = -\frac{\pi^2 (kT)^2}{6 \hbar \omega_0} + \frac{\pi^2 (kT)^2}{3 \hbar \omega_0} = \frac{\pi^2 (kT)^2}{6 \hbar \omega_0}$$

となり, これはもちろん E の式 (22.42) に一致する.

計算練習 22.2 (p.505)

$$\frac{\exp(4\pi\sqrt{N+1})}{\exp(4\pi\sqrt{N})} = \exp\{4\pi(\sqrt{N+1} - \sqrt{N})\} = \exp\left(\frac{4\pi}{\sqrt{N+1} + \sqrt{N}}\right) \simeq \exp\left(\frac{2\pi}{\sqrt{N}}\right)$$

による. 同じ近似で $\left(\frac{N+1}{N}\right)^{-27/4} \simeq 1$ として良いので, $p_{24}(N)$ の式 (22.58) における $N^{-27/4}$ からの寄与は重要でない.

計算練習 22.3 (p.506)

k 個の●を, 重複を許して b 個の部屋に分ける方法の総数を ${}_bH_k$ と書こう. これは k 個の●と $(b-1)$ 本の仕切りを横一列に並べる方法の総数

$${}_bH_k = \binom{b+k-1}{k} = \frac{(b+k-1)!}{k!(b-1)!}$$

として計算できる.

- 1 の分割 $\{1_q\}$ は 24 通りの q の値に応じて $p_{24}(1) = 24$ 個ある.
- 2 の分割

$$\begin{aligned} \{2_q\} &\rightarrow 24 \text{ 個,} \\ \{1_{q_1}, 1_{q_2}\} &\rightarrow {}_{24}H_2 = 300 \text{ 個.} \end{aligned}$$

合計 $p_{24}(2) = 324$ 個.

- 3 の分割

$$\begin{aligned} \{3_q\} &\rightarrow 24 \text{ 個,} \\ \{2_{q_1}, 1_{q_2}\} &\rightarrow 24 \times 24 \text{ 個,} \\ \{1_{q_1}, 1_{q_2}, 1_{q_3}\} &\rightarrow {}_{24}H_3 = 2600 \text{ 個.} \end{aligned}$$

合計 $p_{24}(3) = 3200$ 個.

● 4 の分割

$$\begin{aligned}
\{4_q\} &\rightarrow 24 \text{ 個}, \\
\{3_{q_1}, 1_{q_2}\} &\rightarrow 24 \times 24 \text{ 個}, \\
\{2_{q_1}, 2_{q_2}\} &\rightarrow {}_{24}H_2 = 300 \text{ 個}, \\
\{2_{q_1}, 1_{q_2}, 1_{q_3}\} &\rightarrow 24 \times {}_{24}H_2 = 24 \times 300 \text{ 個}, \\
\{1_{q_1}, 1_{q_2}, 1_{q_3}, 1_{q_4}\} &\rightarrow {}_{24}H_4 = 17550 \text{ 個}.
\end{aligned}$$

合計 $p_{24}(4) = 25650$ 個.

22.3 Hagedorn 温度

相対論的な弦に移ろう。まず開弦について、簡単のために弦が空間運動量を持たない場合を考えれば、弦のエネルギー E は単に質量 M なので、前節の非相対論的な量子バイオリン弦の式 $E = \hbar\omega_0 N$ は

$$E = M = \sqrt{\frac{1}{\alpha'}(N^\perp - 1)} \simeq \sqrt{\frac{N^\perp}{\alpha'}}$$

へと修正される。最後の等号は N^\perp が [1 と比べて] 大きい場合を想定した近似であり、高エネルギーの場合に適用できる。同じく高エネルギーで N^\perp が大きい場合には前節の近似式 (22.56): $\ln p_b(N^\perp) \simeq 2\pi\sqrt{\frac{N^\perp b}{6}}$ が成り立つので、エントロピー-エネルギーの関係

$$S = k \ln p_{24}(N^\perp) \simeq k4\pi\sqrt{N^\perp} \simeq k4\pi\sqrt{\alpha'}E$$

が得られる。このようにエネルギーとエントロピーが比例するのは普通に見られる状況ではなく、このとき

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = k4\pi\sqrt{\alpha'}$$

のように温度 T は一定となる。この一定の温度は Hagedorn 温度と呼ばれる。これを T_H と書き、対応する“逆温度” β_H を導入する。

$$\frac{1}{\beta_H} = kT_H = \frac{1}{4\pi\sqrt{\alpha'}}.$$

Hagedorn 温度に対応する熱エネルギー kT_H は、第 1 質量レベル [M^2 が最小の正の値をとる状態] ($N^\perp = 2$) における静止エネルギー $1/\sqrt{\alpha'}$ に比べて

$$\frac{kT_H}{1/\sqrt{\alpha'}} = \frac{1}{4\pi} \simeq \frac{1}{12.6}$$

のように小さい。よって Hagedorn 熱エネルギーはほとんどの弦の粒子状態のエネルギーに比べて小さいことになる。

空間運動量を持たない閉弦に対しては、レベル整合条件 (13.45): $N^\perp = \bar{N}^\perp$ を考慮すると

$$E = M = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}(N^\perp + \bar{N}^\perp - 2)} \simeq 2\sqrt{\frac{N^\perp}{\alpha'}}$$

となる (最右辺の近似は $N^\perp \gg 1$ のとき)。また数演算子の固有値が (エネルギー E を与えるような値) $N^\perp, \bar{N}^\perp (= N^\perp)$ となる状態数は

$$\Omega(E) = p_{24}(N^\perp)p_{24}(\bar{N}^\perp) = (p_{24}(N^\perp))^2$$

だから, [高エネルギーの近似の下で]

$$S(E) = k \ln \Omega(E) = 2 \times k 4\pi \sqrt{N^\perp} = k 4\pi \sqrt{\alpha' E}$$

となる. 結果的にエントロピー-エネルギーの関係式は, 開弦の場合と同じである.

22.3 について

■ Hagedorn 温度が低いこと (22.70) について 前節の量子バイオリン弦では $N \gg 1$ は高温極限を意味した. これに対し, 相対論的な弦に対して $N^\perp \gg 1$ は静止エネルギー

$$M = \sqrt{\frac{1}{\alpha'}(N^\perp - 1)} \quad (\text{開弦に対して})$$

の高い状態を意味するに過ぎず, 「我々が採用している高エネルギー近似では, 弦のエネルギーを任意に高くしていても, 温度は一定の Hagedorn 温度を保つことになる」(p.507, 1.9~7). このため Hagedorn 温度 T_H が (式 (22.70) の意味で) 低く, Hagedorn 温度を想定した次節以降の解析で低温極限を仮定していることは, 前節で量子バイオリン弦に対して高温極限を仮定して結果を導いたことと矛盾しない.

■ 「 T_H は, 高エネルギーにおける近似的な温度と見なされる」(22.3 節, 最終文) について 分配関数は任意の熱浴の温度 T に対して計算できるのに対し, そこから高エネルギーの弦の平衡状態を実現するには, 温度が (近似的に) Hagedorn 温度 T_H をとらなければならないことが結論される.

22.4 相対論的な粒子の分配関数

弦の分配関数の計算に取り掛かるためのウォーミングアップとして, 本節では粒子の分配関数を計算する. 質量 m の相対論的な粒子を, D 次元時空内において考える. すなわち空間次元を $d = D - 1$ 次元とする. この粒子が体積 V の箱の中に閉じ込められているものとする. (22.4 節, 1.1-3)

粒子の分配関数は (定義により)

$$\begin{aligned} Z(m^2) &= V \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \exp\left(-\beta \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\right) \quad (\hbar = 1) \\ &= V m^d \int \frac{d^d u}{(2\pi)^d} \exp\left(-\beta m \sqrt{1 + \vec{u}^2}\right) \quad (\vec{p} = m\vec{u}) \end{aligned}$$

と表される. (明記していないが, Z は温度と体積の関数である.) 前節で見たように弦理論において Hagedorn 熱エネルギーは, したがって Hagedorn 温度より低い温度での熱エネルギーは, ほとんどの弦の状態で粒子の静止エネルギーよりもはるかに低い. これを踏まえてここでは粒子の分配関数も, 低温条件 $\beta m \gg 1$ の下で近似的に評価することにしよう. $\beta m \gg 1$ では積分への主要な寄与が $\vec{u}^2 \ll 1$ から来ることを説明でき [下記], そこで被積分関数を \vec{u}^2 で展開すると, Z の式は Gauss 積分

$$Z(m^2) \simeq V m^d e^{-\beta m} \int \frac{d^d u}{(2\pi)^d} \exp\left(-\frac{1}{2} \beta m \vec{u}^2\right)$$

に帰着するので

$$Z(m^2) \simeq V e^{-\beta m} \left(\frac{m}{2\pi\beta}\right)^{d/2}$$

を得る.

付加的な因子 $e^{-\beta m}$ を除き, この分配関数は非相対論的な粒子に関する正確な分配関数 [$d = 3$ に対して $Z = V \left(\frac{2\pi m}{\beta \hbar^2} \right)^{3/2}$] と一致している. 指数因子は, 相対論的な粒子のエネルギーに対する静止エネルギーの寄与を与えている. (p.510, 1.6-8)

22.4 節, 式の導出など

■低温極限で分配関数 (22.83) への寄与が $\vec{u}^2 \ll 1$ から来ることの説明 $\vec{u}^2 = u^2$ によって定義される極座標の動径座標 u を導入し, $d^d \vec{u} \sim u^{d-1} du$ に注意すると, 分配関数 (22.83):

$$Z(m^2) = V m^d \int \frac{d^d \vec{u}}{(2\pi)^d} \exp\left(-\beta m \sqrt{1 + \vec{u}^2}\right)$$

を u に関する積分と見たときの被積分関数は

$$u^{d-1} e^{-\beta m \sqrt{1+u^2}}$$

という形をとる. これは $u = 0$ と $u = \infty$ においてゼロで, その間のどこかに 1 つのピークを持つ. ピークを与える u は, 上式の微分がゼロになる条件 (22.86):

$$\frac{d-1}{\beta m} = \frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}$$

から見出される [導関数の計算は本稿次節を参照]. 低温極限の仮定 $\beta m \gg 1$ により左辺は (1 に比べて) 小さい値なので, 右辺の u^2 も小さくなる必要がある [本稿次節で補足]. このため上式右辺は根号の中の u^2 を無視することができ, 被積分関数を最大にする (したがって分配関数に最大の寄与を持つ) u^2 は

$$u^2 \simeq \frac{d-1}{\beta m} \ll 1$$

となる.

22.4 について

■粒子の分配関数の計算について 本節における粒子の分配関数の計算は, 統計力学において馴染みある理想気体の分配関数の計算と類似しているけれど, 空間が高次元であり, そして何より粒子のエネルギー $\vec{p}^2/2m$ が相対論的な表式 $E(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ に置き換わっていることが真新しい. また 1 粒子系を考えていることに注意する.

■ n_i に関する積分による近似 (22.80), (22.81) について 22.2 節の式 (22.33) と同様, 離散的な和を区分求積と見れば良い.

ここでも直接, 運動量空間の積分 (22.81)(ないし式 (22.82)) を説明しよう. 周期境界条件を満たす運動量の離散化の条件 (22.79) より, 運動量空間の体積要素 $d^d p$ の中には $\{n_i\}$ で特徴付けられる状態が個数

$$\frac{d^d p}{\prod_{i=1}^d (2\pi \hbar / L_i)} = V \frac{d^d p}{(2\pi \hbar)^d}$$

だけ存在し, それらは共通の $\exp(-\beta E(\vec{p}))$ の値を持つから,

$$\sum_{\vec{p}} \exp(-\beta E(\vec{p})) = \int \frac{V d^d p}{(2\pi \hbar)^d} \exp(-\beta E(\vec{p})) : (22.82)$$

とできる。この結果はより一般に、位相体積 $d^d x d^d p$ の中に微視的状態が Ω 個数

$$\frac{d^d x d^d p}{h^d} = \frac{d^d x d^d p}{(2\pi\hbar)^d}$$

だけ含まれることを考えて [14, pp.137–139],

$$\sum_{\text{状態}} \exp(-\beta E(\vec{p})) \rightarrow \int \frac{d^d x d^d p}{(2\pi\hbar)^d} \exp(-\beta E(\vec{p}))$$

とし、空間積分を実行しても得られる。

■式 (22.86) について $f(u) = u^{d-1} e^{-\beta m \sqrt{1+u^2}}$ に対して

$$f'(u) = \left\{ (d-1) - \beta m \frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}} \right\} u^{d-2} e^{-\beta m \sqrt{1+u^2}}.$$

■「右辺の u^2 も小さくなる必要がある」(p.509 下から 3 行目) について 式 (22.86) の右辺 $g(u^2) = u^2/\sqrt{1+u^2}$ は u^2 の単調増加関数である。

$$g'(u^2) = \frac{u^2 + 2}{2(1+u^2)^{3/2}} > 0.$$

このことは $g(u^2)$ が $u \ll 1$ のとき $g(u^2) \simeq u^2$, $u \gg 1$ のとき $g(u^2) \simeq u$ に従って増大することから、ある程度は直観的に予想できる。

■「この分配関数の式が必然的に無単位であることも容易に証明される」(p.510, I.5.6) について 各因子の自然次元 (単位) は

$$[V] = M^{-d}, \quad [\beta] = M^{-1}, \quad \left[\left(\frac{m}{2\pi\beta} \right)^{d/2} \right] = \left[\frac{m}{\beta} \right]^{d/2} = (M^2)^{d/2} = M^d$$

である (M は質量の次元を表す)。

22.5 単一の弦の分配関数

前節の結果を利用して、体積 V の箱に入っている単一の開弦の分配関数を計算しよう。弦の一般的な基本状態 (12.162):

$$|\lambda, p\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (a_n^I)^{\lambda_{n,I}} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

は占有数 $\lambda_{n,I}$ と、光錐エネルギー p^- を除く運動量 (p^+, \vec{p}_T) で指定される。各弦状態での質量

$$M^2(\{\lambda_{n,I}\}) = \frac{1}{\alpha'} (N^\perp - 1), \quad N^\perp = \sum_{n,I} n \lambda_{n,I}$$

が与えられると、 (p^+, \vec{p}_T) から質量殻上 (オン・シェル) 条件 $p^2 = -M^2$ から光錐エネルギー p^- も決まるので、状態を指定するのに d 成分 (p^+, \vec{p}_T) の代わりに、運動量の d 個の空間成分 \vec{p} を用いることができる。そこで単一の弦の分配関数を

$$Z_{\text{str}} = \sum_{\{\lambda_{n,I}\}} \sum_{\vec{p}} \exp \left[-\beta \sqrt{M^2(\{\lambda_{n,I}\}) + \vec{p}^2} \right]$$

と書くと、 \bar{p} に関する和は前節で計算した、質量の自乗が $M^2(\{\lambda_{n,I}\})$ で与えられる相対論的な粒子の分配関数 $Z(M^2(\{\lambda_{n,I}\}))$ になっていることが見て取れる。

$$Z_{\text{str}} = \sum_{\{\lambda_{n,I}\}} Z(M^2(\{\lambda_{n,I}\})).$$

数演算子の固有値 $N^\perp = N$ を与える占有数の組 $\{\lambda_{n,I}\}$ は $p_{24}(N)$ 個あるから、

$$Z_{\text{str}} = \sum_{N=0}^{\infty} p_{24}(N) Z(M^2(N))$$

とできる。

ここで小さな N の Z_{str} への寄与は無視できることを仮定して、 $N \gg 1$ に対する $p_{24}(N)$ の近似式 (22.58):

$$p_{24}(N) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} N^{-27/4} \exp(4\pi\sqrt{N})$$

を用いてこれを評価することを考える。丁寧に述べれば、 $N \geq N_0$ のときに上記の $N \gg 1$ に対する近似が良好となるような整数 N_0 をとり、 $0 \leq N < N_0$ における和を Z_0 として

$$Z_{\text{str}} = Z_0 + \sum_{N=N_0}^{\infty} p_{24}(N) Z(M^2(N))$$

と書いたとき、 Z_0 が右辺第 2 項に比べて無視できる状況を仮定する。どのような状況においてこのような仮定が妥当となるかは、議論が進んでから明らかになる。そこで、ひとまずは $N \geq N_0$ の和を評価しよう。

- $N \gg 1$ に対する近似式 (22.58): $p_{24}(N) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} N^{-27/4} \exp(4\pi\sqrt{N})$
- 和の積分による近似
- $\alpha' M^2 = N - 1 \simeq N$
- Hagedorn 温度 T_H の式 (22.69): $\frac{1}{\beta_H} = kT_H = \frac{1}{4\pi\sqrt{\alpha'}}$
- 点粒子の分配関数 (22.89): $Z(M^2) \simeq V e^{-\beta M} \left(\frac{M}{2\pi\beta}\right)^{25/2}$

を利用して計算すると、 $T < T_H$ の場合だけ分配関数は収束し、

$$Z_{\text{str}} \simeq Z_0 + \frac{2^{11}}{\pi} V (kT kT_H)^{25/2} \left(\frac{T}{T_H - T}\right) \exp\left[-4\pi\sqrt{N_0} \left(\frac{T_H}{T} - 1\right)\right] \quad (22.110)$$

となることが示される [導出は下記]。温度を T_H の下側から $T \rightarrow T_H$ とすると右辺の第 2 項は際限なく増大し、 Z_0 よりもはるかに大きくなることが読み取れる。こうして $T \rightarrow T_H$ のときには Z_0 を無視できることになり、このとき分配関数は

$$Z_{\text{str}} \simeq \frac{2^{11}}{\pi} V (kT_H)^{25} \left(\frac{T_H}{T_H - T}\right), \quad T \rightarrow T_H$$

となる (すべての可能な箇所において T を T_H に置き換えた)。

ここから $T \simeq T_H$ での弦の平均エネルギーは

$$E_{\text{str}} = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z \simeq kT_H \left(\frac{T_H}{T_H - T}\right)$$

と計算される。 $T \rightarrow T_H$ のとき E_{str} は際限なく高くなる。

なお弦理論では正準 (カノニカル) 集団と微視的正準 (ミクロカノニカル) 集団とで計算される平均エネルギーが、同じ結果を与える保証がなくなることが説明される (22.6 節の最終段落、詳細は下記)。

22.5 節, 式の導出など

■弦の分配関数 (22.110) の導出 N を連続変数と見て, 弦の分配関数 (22.98):

$$Z_{\text{str}} = Z_0 + \sum_{N=N_0}^{\infty} p_{24}(N) Z(M^2(N))$$

を積分

$$Z_{\text{str}} = Z_0 + \int_{N_0}^{\infty} dN p_{24}(N) Z(M^2(N)) \quad (22.99)$$

で近似する [本稿の次節で補足]. ここで幅 dN (対応する質量の幅 dM) の中の状態数を

$$p_{24}(N)dN = \rho(M)dM \quad (22.100)$$

と書いて, 質量 M に関する状態数密度 $\rho(M)$ を定義する. $\rho(M)$ を具体的に求めるために, 左辺の dN を M, dM で, $p_{24}(N)$ を M で表そう. $\alpha' M^2 \simeq N$ の関係を利用すると

$$dN = 2\alpha' M dM = 2(\sqrt{\alpha'} M) d(\sqrt{\alpha'} M)$$

となる. また $N \gg 1$ に対する近似式 (22.58): $p_{24}(N) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} N^{-27/4} \exp(4\pi\sqrt{N})$ に Hagedorn 温度の式 (22.69): $\beta_H = 4\pi\sqrt{\alpha'}$ を代入し, さらに再び $\alpha' M^2 \simeq N$ を代入すると

$$p_{24}(N) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} N^{-27/4} \exp\left(4\pi\beta_H \sqrt{\frac{N}{\alpha'}}\right) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{\alpha'} M)^{-27/2} \exp(\beta_H M)$$

が見出される. 以上の2式を上式 (22.100) に代入すると

$$\rho(M)dM = \sqrt{2} (\sqrt{\alpha'} M)^{-25/2} \exp(\beta_H M) d(\sqrt{\alpha'} M)$$

が得られる. これは状態数密度 $\rho(M) \sim M^{-25/2} \exp(\beta_H M)$ の M に対する指数関数的な増加が, Hagedorn 温度によって制御されることを意味している.

これを冒頭の分配関数 (22.99) の $p_{24}(N)dN$ に代入すると,

$$Z_{\text{str}} \simeq Z_0 + \sqrt{2} \int_{M_0}^{\infty} (\sqrt{\alpha'} M)^{-25/2} \exp(\beta_H M) Z(M^2) d(\sqrt{\alpha'} M)$$

を得る. ここで積分の下限 M_0 は $\alpha' M_0^2 = N_0$ から定まる. さらに次の関係

$$\frac{M}{2\pi\beta} = 2(\sqrt{\alpha'} M) k T k T_H, \quad \beta M = 4\pi(\sqrt{\alpha'} M) \frac{T_H}{T} \quad (22.106)$$

を利用すると, 粒子の分配関数 (22.89) は M と $k T_H$ を用いて

$$Z(M^2) \simeq 2^{25/2} V (k T k T_H)^{25/2} (\sqrt{\alpha'} M)^{-25/2} \exp\left(-4\pi\sqrt{\alpha'} M \frac{T_H}{T}\right) \quad (22.107)$$

と書き直される [本稿次節で補足]. よって弦の分配関数は, 被積分関数において M の指数 $(\sqrt{\alpha'} M)^{\mp 25/2}$ が相殺されて

$$\begin{aligned} Z_{\text{str}} &\simeq Z_0 + 2^{13} V (k T k T_H)^{25/2} \int_{M_0}^{\infty} d(\sqrt{\alpha'} M) \exp\left[-4\pi\sqrt{\alpha'} M \left(\frac{T_H}{T} - 1\right)\right] \\ &= Z_0 + 2^{13} V (k T k T_H)^{25/2} \int_{\sqrt{N_0}}^{\infty} dx \exp\left[-4\pi x \left(\frac{T_H}{T} - 1\right)\right] \quad (x = \sqrt{\alpha'} M (\simeq N)) \end{aligned}$$

となる。最右辺の積分は $T < T_H$ のときだけ収束し、弦の分配関数として式 (22.110):

$$Z_{\text{str}} \simeq Z_0 + \frac{2^{11}}{\pi} V(kT kT_H)^{25/2} \left(\frac{T}{T_H - T} \right) \exp \left[-4\pi \sqrt{N_0} \left(\frac{T_H}{T} - 1 \right) \right]$$

を得る。

■カノニカル集団とマイクロカノニカル集団 (22.5 節, 最終段落) 一般にエネルギー区間 dE のマイクロカノニカル (微視的正準) 集団に対して状態数を $\Omega(E)dE$ とすると, [$S = k \ln \Omega$ より] 熱力学的関係式 (22.2): $\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}$ は

$$\beta = \frac{\partial}{\partial E} \ln \Omega$$

を意味する。これはマイクロカノニカル集団のエネルギーの温度依存性 $E(T)$ を決定する。他方, カノニカル (正準) 集団に対して分配関数は

$$Z(\beta) = \int_0^\infty dE e^{-\beta E} \Omega(E)$$

で定義される。我々の馴染みのある系では $\Omega(E) \sim E^\gamma$ なので被積分関数は最大値を持ち、積分はこの鞍点に支配される。そして鞍点の条件

$$0 = \frac{d}{dE} (e^{-\beta E} \Omega(E)) = \left(-\beta \Omega(E) + \frac{\partial \Omega}{\partial E} \right) e^{-\beta E}$$

は上式 $\beta = \frac{\partial}{\partial E} \ln \Omega$ を再現するので、カノニカル集団の平均エネルギー $\bar{E}(T)$ は近似的に $E(T)$ に等しくなる。ところが弦理論では $\Omega(E) \sim \exp(\beta_H E)$ であり [$M(=E)$ に関する状態数密度 $\rho(M)$ の式 (22.104) を参照, 考えている熱浴の温度 T に関わらずこの β_H が現れる], 積分は $\exp[(-\beta + \beta_H)E]$ に比例するので、エネルギーに関して臨界点を持たない関数になる。このため 2 種類の統計集団が同じ結果を与えるという保証がなくなる。(関連: 問題 22.7).

22.5 について

■分配関数の積分による近似 (22.99) について 離散的な和 (22.98) を区分求積と見れば良い (式 (22.33), 式 (22.80) と同様).

■式 (22.106), 式 (22.107) について 式 (22.106): $kT_H = 1/4\pi\sqrt{\alpha'}$ より式 (22.106):

$$2(\sqrt{\alpha'} M) kT kT_H = 2(\sqrt{\alpha'} M) \frac{1}{\beta} \frac{1}{4\pi\sqrt{\alpha'}} = \frac{M}{2\pi\beta}, \quad 4\pi(\sqrt{\alpha'} M) \frac{T_H}{T} = 4\pi(\sqrt{\alpha'} M) \frac{1/4\pi\sqrt{\alpha'}}{1/\beta} = \beta M$$

を得る。これを相対論的な粒子の分配関数 (22.89) (ただし $d = 25$) に代入して式 (22.107) を得る。

■「後ろの項は Z_0 よりもはるかに大きくなる」(p.512, 下から 3,2 行目) について

$$Z_0 = \sum_{N=0}^{N_0-1} p_{24}(N) Z(M^2(N)) = \sum_{N=0}^{N_0-1} p_{24}(N) V e^{-\beta M(N)} \left(\frac{M(N)}{2\pi\beta} \right)^{d/2}$$

は $T \rightarrow T_H$ のとき発散しないと考えられる。

■式 (22.112), 式 (22.113) について 式 (22.112) では

$$\frac{1}{T_H - T} = k \left[\frac{1}{\beta_H} - \frac{1}{\beta} \right]^{-1} = \frac{k\beta\beta_H}{\beta - \beta_H} \simeq \frac{k\beta_H^2}{\beta - \beta_H}$$

に注意する. これと同様の変形により, あるいはこれと等価な式として

$$\frac{1}{\beta - \beta_H} \simeq \frac{kT_H^2}{T_H - T}$$

が成り立つことから, 式 (22.113) が理解される.

22.6 ブラックホールとエントロピー

ブラックホールは量子力学的にエネルギーを輻射(放射)する. またブラックホールは熱力学的な温度とエントロピーを持つが, それらの性質は, 基礎的な統計力学, すなわち自由度の勘定によってそれらを導くような考え方から理解することが困難である. 弦理論はブラックホールのエントロピーの理解を促す印象的な成功をもたらした. 本節では, ブラックホールの基本的な特徴を復習し, 弦理論を用いて 4次元 Schwarzschild (シュワルツシルト) ブラックホールのエントロピーを論じる. 後に続く節では, 特別な 5次元ブラックホールを調べるが, これについては正確なエントロピーが, 弦理論によって計算される. (p.514, 1.9-15)

Schwarzschild ブラックホールを考えると, Schwarzschild 半径あるいはブラックホールの半径は

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

で与えられ, 半径 R の球面は事象の地平と呼ばれる.

さて, 高温の気体がブラックホールに引き込まれることを考えると, そのブラックホールの質量は少し増える. このとき気体とブラックホールから成る系の総エントロピーは減少できないので, ブラックホールは最低限, 気体が持っていたエントロピーを獲得しなければならない. 実際,

- ブラックホールは熱輻射を放っており,

$$k\bar{T}_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM}$$

で与えられる Hawking (ホーキング) 温度 T_H を持つこと

- 上式の $k\bar{T}_H$ は, Newton の重力法則で見積もった事象の地平における重力場

$$|\vec{g}| = \frac{GM}{R^2} = \frac{c^4}{4GM}$$

に比例している.

このことはブラックホールからの輻射が事象の地平付近から現れることを考えると,

[天降りではあるが] 理に適っている.

- \bar{T}_H と Hagedorn 温度 T_H の混同に注意する.

- 熱力学の第 1 法則

$$dE = \bar{T}_H dS, \quad \therefore c^2 dM = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM} \frac{1}{k} dS$$

によると、ブラックホールは [質量を持つことに伴って]

$$\frac{S_B}{k} = \frac{4\pi G}{\hbar c} M^2$$

で与えられる Bekenstein (ベッケンシュタイン) エントロピー S_B を持つことになる (ただし質量がゼロのブラックホールのエントロピーはゼロであると仮定した). ところがブラックホールが質量だけを持つ特異点であるとするならば, エントロピーを生じる微視的状态が何であるかを理解するのは困難である. そこで事象の地平の面積 $A = 4\pi R^2 = 16\pi \frac{(GM)^2}{c^4}$ を用いて*17 エントロピーを

$$\frac{S_B}{k} = \frac{1}{4} \frac{c^3}{\hbar G} A = \frac{A}{4l_P^2}$$

と書き換えると ($l_P = \sqrt{\hbar G/c^3}$: (3.90) は Planck 長さ), ブラックホールのおおよそのエントロピーは, 事象の地平における面積 l_P^2 の領域ごとに, 有限個の状態数を持つ自由度が 1 つあると想定・解釈することによって再現されることになる. 天体的な寸法を持つブラックホールの表面積 A は l_P^2 に比べて極めて大きいので, ブラックホールのエントロピーは著しく大きい. (弦理論はブラックホールの自由度の候補を提供するけれども, それは事象の地平の面積に直接関係するものではない [22.7 節参照].)

次に弦理論に移り, 定常的な Schwarzschild ブラックホールを, 高い励起を持ち, 運動量がゼロの弦に関係付けることを試みる. [言い換えれば「弦の非常に重い状態がブラックホールを形成する」(p.518, 1.19) と考える.] ブラックホールのエントロピー S_B は相互作用の必要な領域において計算されているのに対して, 弦のエントロピー S_{str} の方は自由な弦に関する計算になっている結果として, 両者は表面的には一致しない:

- 高い励起を持ち, 運動量がゼロの弦のエントロピー (22.67):

$$\frac{S_{str}}{k} = 4\pi\sqrt{\alpha'} M.$$

- 示量性 $S_{str} \sim M \sim L$ (弦の長さ) を持つ.
- 示量性は自由な弦の状態数の勘定から理解できる:
長さ L の弦が弦の長さ $l_s = \sqrt{\alpha'}$ の $L/\sqrt{\alpha'}$ 本の素片から成り,
その各々は n 通りの可能な方向を向くことができるものとする, 状態数は

$$\Omega \sim n^{L/\sqrt{\alpha'}}.$$

弦の質量は $M \sim T_0 L \sim L/\alpha'$ のように長さ L と関係していることに注意すると,

$$\Omega \sim n^{M\sqrt{\alpha'}} \sim e^{M\sqrt{\alpha'} \ln n}, \quad \therefore \frac{S_{str}}{k} = \ln \Omega \sim M\sqrt{\alpha'} \sim M l_s$$

となつて, エントロピーの示量性 $S_{str} \propto M$ を大雑把に説明できる.

(これは粗い議論なので n を特定する必要はなく, また上のように最後に $\ln n$ を省いて良い.)

- ブラックホールのエントロピー

$$\frac{S_B}{k} = 4\pi G M^2 \quad (c = 1, \hbar = 1)$$

- 示量性がない ($S_B \sim M^2$).

*17 note: ここで Schwarzschild 解において動径方向の座標長さ dr は対応する真の長さとは一致しないのに対し, $r d\theta$ と $r \sin \theta d\phi$ は球面上の真の距離を与えることを思い出そう [3, p.336]. 実際, 座標半径 r の球面における計量の行列式の平方根 $r^2 \sin \theta$ を用いて, 固有面積要素は $r^2 \sin \theta d\theta d\phi$.

– Newton 定数

$$G \sim g^2 \alpha' = g^2 l_s^2 : (13.83)$$

は弦の結合 g をゼロに設定するとゼロになるため、
 S_B は相互作用の必要な領域において計算されていることになる。

そこで弦の結合 g を有限の値から小さくしていく場合を考え、ブラックホールのエントロピー

$$\frac{S_B}{k} \sim GM^2 \sim g^2 l_s^2 M^2$$

が弦のエントロピー S_{str}/k に一致するか調べよう。 g を弱めることはディラトンの期待値の変更に対応し (13.4 節)、これを可逆過程と仮定するとエントロピー S_B/k は一定だから、 M は $1/g$ に従って増大しなければならない。このときブラックホールの半径

$$R \sim GM \sim g^2 l_s^2 M$$

は [$R \sim g$ のように] 減少する。ところがブラックホールの半径 R が弦の長さ l_s よりも小さくなると、これら一般相対性理論の結果

$$\frac{S_B}{k} \sim GM^2, \quad R \sim GM$$

は破綻する。そこで弦の結合を

$$l_s = R_*(\sim g_*^2 l_s^2 M_*)$$

となる値 g_* まで小さくすると、そのときのブラックホールの質量は $M_* \sim 1/g_*^2 l_s$ と表されるので、一定のエントロピーは

$$\frac{S_B}{k} \sim g_*^2 l_s^2 M_*^2 \sim \frac{1}{g_*^2}$$

となる。前述のようにブラックホールのエントロピー S_B は非常に大きいものと仮定されているので、考えている結合 g_* は極めて弱いことになる。そこで結合が g_* のときの弦のエントロピーを、上記の自由な弦のエントロピーで代用することが正当化される。ブラックホールとの比較のために、ブラックホールと同じ質量 $M_* \sim 1/g_*^2 l_s$ の弦のエントロピーを考えると

$$\frac{S_{\text{str}}}{k} \sim M_* l_s \sim \frac{1}{g_*^2}$$

であり、 $S_{\text{str}} \sim S_B$ となっている。この結果は結合が弱いときの自由な弦のエントロピーと、結合に依らないブラックホールの一定のエントロピーが一致することを示唆している。(あくまでエントロピーは定性的に一致することが示されたにすぎず、定量的に一致することが十全に示されたわけではない。)

22.6 について

■Schwarzschild 半径の意味付け (22.117) について 式 (22.117) の箇所で説明されているように、Schwarzschild 半径 (22.118): $R = 2GM/c^2$ は、Newton 理論の重力ポテンシャルエネルギーの表式 $\phi = -GMm/R$ を用いると、 $|\phi| \sim mc^2$ となる半径 R として理解できることが注意を惹く。

■Hawking 温度の式 (22.120) について 左辺 $k\bar{T}_H$ と同じく, 右辺がエネルギーの次元を持つように, 因子 \hbar, c, G を適切に復元できている. このことは例えば, 式 (22.117) より $[GM/c^2] = (\text{長さ})$ であることに注意すれば*18,

$$\left[\frac{\hbar c^3}{8\pi GM} \right] = [\hbar c] \times \left[\frac{c^2}{GM} \right] = \frac{[\hbar c]}{(\text{長さ})} = \begin{cases} (\text{運動量}) \times [c] \\ [\hbar] \\ (\text{時間}) \end{cases} \\ = (\text{エネルギー})$$

と確かめられる. 上式における $[\hbar c]/(\text{長さ})$ がエネルギーの次元を持つことは, 波長 λ の光子のエネルギーに対する見慣れた表式 hc/λ から理解できる.

■式 (21.122) について dM^2 は $d(M^2) = 2MdM$ の意味である.

■ブラックホールのエントロピー (22.124) について 事象の地平の面積は

$$A = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{2GM}{c^2} \right)^2 = 16\pi \frac{(GM)^2}{c^4}$$

なので, 式 (22.124) は

$$\frac{1}{4} \frac{c^3}{\hbar G} A = \frac{4\pi G}{\hbar c} M^2$$

となって, ブラックホールのエントロピーの式 (22.123) に戻る.

計算練習 22.4 (p.515)

Shwarzschild 半径 (22.118): $r_g = 2GM/c^2$ が大きくなるには物体の質量 M を大きくしなければならない. 質量密度 ρ が一様な球状の物体では, そのためには半径 R を増加する必要がある. こうしてブラックホールの条件 $r_g > R$ が満たされるには, R はむしろある程度大きくななければならないという状況が生じ得る. 実際,

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} = \frac{8\pi G\rho R^3}{3c^2} > R \Leftrightarrow R > \frac{c}{\sqrt{8\pi G\rho/3}}$$

計算練習 22.5 (p.516)

エネルギー $k\bar{T}_H$ を持つ光子の波長 λ は

$$\frac{hc}{\lambda} = k\bar{T}_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM}, \quad \therefore \lambda = 16\pi^2 \frac{GM}{c^2}$$

と求まる. ブラックホールの半径 $r_g = 2GM/c^2$ との比

$$\frac{\lambda}{r_g} = 8\pi^2 \simeq 79.0$$

は約 80 である.

*18 式 (22.117): $GM/R \sim c^2$ から読み取れるように, 重力ポテンシャルは速度の 2 乗の次元を持つ. このことは例えばポテンシャル ϕ を持つ弱い重力に対する計量テンソルの Newton 近似 $g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$ を理解するのに有用である.

22.7 ブラックホールの状態の勘定

本節では第 22 章の序文や 22.1 節, 22.6 節において予告されていたように, 最大荷電ブラックホールと呼ばれる 5 次元ブラックホールが考察される. そしてこのブラックホールに関しては, ブラックホールのエントロピーは弦モデルによる計算結果と正確に, 定量的に一致することが説明される. 内容は多分に天下りであるけれど, 以下, 教科書の議論に沿って要約する.

ブラックホールのエントロピーの正確な計算に弦理論を適用できるためには, 弦の結合が $g = 0$ のときの [弦理論を利用した (p.520, 1.7)] 状態の勘定が, [ブラックホールの存在する] $g \neq 0$ の場合にも妥当することの保証が必要である. 本節ではこの性質の満たされるブラックホールとして最も簡単な, ある種の 5 次元ブラックホールのモデルを考察する.

10 次元時空において閉じた超弦を想定する IIB 型の理論を採用し,

$$\underbrace{x^0, x^1, x^2, x^3, x^4}_{\text{実効的な時空 } M_5}, \underbrace{x^5, x^6, x^7, x^8, x^9}_{\text{円へとコンパクト化}}$$

とする. ここで考えるのは [最大荷電ブラックホールと呼ばれる], 5 次元時空 M_5 における球対称なブラックホールであり, これは以下の性質を持つことが知られている.

1. ブラックホールは (M_5 において存在する Maxwell 的な 3 つのゲージ場に対する) 3 つの整数 “電荷”

$$Q_1, Q_5, N$$

によって特徴付けられる.

2. ブラックホールは “最大電荷” (extremal) である, すなわち「質量に見合う最大限の電荷が詰め込まれている」(p.519 訳註). また, このブラックホールの温度はゼロである.
3. ブラックホールのエントロピー S_{bh} は

$$\frac{S_{\text{bh}}}{k} = 2\pi\sqrt{NQ_1Q_5} \quad (27)$$

で与えられる ($c = 1, \hbar = 1$). これはブラックホールが持つ電荷だけに依存しており, 弦の結合やコンパクト化の寸法といった他のパラメーターを含んでいない.

実はこのブラックホールが存在しても, 10 次元 Minkowski 時空における IIB 型理論に元々備わっていた超対称性の多くが残される. そしてこの事情により, 結合がゼロの下での状態の勘定が, そのまま結合がゼロでない場合の状態の勘定に対しても適用できることが保証される. 我々の目標は, 弦理論を利用した状態の勘定によって, ブラックホールのエントロピー (27) を再現することである.

結合がゼロの弦モデルでは,

- Q_1 は円 x^5 に巻き付いている D1-ブレーンの個数
- Q_5 は 5 つの円に巻き付いている D5-ブレーンの個数

である. これらのブレーンはすべて実効的な M_5 世界から見ると, 空間の同一の点に重なっており, この点が結合を有限 [つまりゼロでない値] にしたときに, ブラックホールの中心になる点である.

[x^5 方向にはすべてのブレインが拡がっており,] もうひとつの電荷 N は D-ブレインに接続している開弦が担う運動量

$$p^5 = \frac{N}{R}$$

の量子数である (R は円 x^5 の半径). Q_1 個の D1-ブレインと Q_5 個の D5-ブレインの間に伸びる様々な種類の弦を考えることができ, 実は超対称性から, すべての開弦は x^5 に沿って同じ方向に運動量を持つことになる. そして [総] 運動量 $p^5 = \frac{N}{R}$ は, ブレイン間にある各開弦に様々な仕方でも割り当てることができる. この考え得る状態数が, ブラックホールのエントロピーの起源となる.

そこで状態数を評価しよう. 例えば D1-ブレインから D5-ブレインに伸びる弦を (1, 5) 弦などと呼ぶことにすると, 実は

- (1, 1) 弦と (5, 5) 弦は我々の関心のある配置の下では励起されず, これらの弦は状態の勘定からは省かれる.
- 残る (1, 5) 弦と (5, 1) 弦は [合わせて] 8 つの基底状態を持ち, 4 つのボゾンの基底状態と 4 つのフェルミオンの基底状態がある.

弦の接続する D1-ブレインと D5-ブレインをひとつずつ選ぶ方法は $Q_1 Q_5$ 通りあるので, (1, 5) 弦と (5, 1) 弦を合わせて $b = 4Q_1 Q_5$ 種類のボゾンの弦と $f = 4Q_1 Q_5$ 種類のフェルミオンの弦がある. これらを用いて量子数が N の [総] 運動量を得る方法は, N の分割の数 $P(N; b, f) = P(N; 4Q_1 Q_5, 4Q_1 Q_5)$ だけあるから, 弦理論によるエントロピーは

$$\frac{S_{\text{str}}}{k} = \ln P(N; 4Q_1 Q_5, 4Q_1 Q_5) \simeq 2\pi \sqrt{N Q_1 Q_5}$$

と算出される. これはブラックホールのエントロピー (27) に完全に一致している. ただしここでは分割の数に対する近似式 (22.62) を用いており, これを適用できる条件として $N \gg b, f$ を, したがって $N \gg Q_1 Q_5$ を仮定していることになる [本稿次節で考察]. この条件が満たされないときには, $k \ln P(N; 4Q_1 Q_5, 4Q_1 Q_5)$ はブラックホールの正しいエントロピーを与えない.

そこで以下ではブラックホールのエントロピーの一般に成立する導出を行う [もっともブラックホールのエントロピー (27) が再現されることの確認は $N Q_1 Q_5 \gg 1$ の場合に限る]. それには次のことを利用する. すなわち

Q_1 個の D1-ブレインが一緒になって, その円を Q_1 回巻き付いている単一の D1-ブレインを形成してもよい. 同様に, Q_5 個の D5-ブレインが一緒になって, コンパクト空間全体に Q_5 回巻き付いている単一の D1-ブレインを形成してもよい. この変更を施しても, 電荷は変わらない.

D1-ブレインが Q_1 回, D5-ブレインが Q_5 回円に巻き付いているとし, 手始めに Q_1 と Q_5 は互いに素であると仮定する. すると弦がもとの位置に戻るには, 弦は x^5 円を $Q_1 Q_5$ 回だけ周回する必要がある. このため [並進演算子 $e^{-iP^5 x^5}$ は $Q_1 Q_5 \times 2\pi R$ を周期とする x^5 の周期関数でなければならないから], 弦の運動量は [$P^5 = n/Q_1 Q_5 R$ のように] $1/Q_1 Q_5 R$ を単位として量子化されなければならない. Q_1 と Q_5 が互いに素でなくとも一般に Q_1 と Q_2 が両方とも大きければ, Q_1, Q_5 に近い互いに素な整数 Q'_1, Q'_5 を見出すことができるから, 以上のことは近似的に正しい. 他方, ブレインを含めた系全体は円に沿った $2\pi R$ の並進操作の下で不変だから, 系の総運動量は依然として $p^5 = N/R$ である. これは弦の運動量の単位 $1/Q_1 Q_5 R$ を用いて

$$p^5 = \frac{N'}{Q_1 Q_5 R}, \quad N' \equiv N Q_1 Q_5$$

と表される。また D1-ブレーンと D5-ブレーンは 1 つずつしかなく、これらの間の弦は 4 つのボゾンの基底状態と 4 つのフェルミオンの基底状態を持っている。よって今度は $N' = NQ_1Q_5$ を $b = 4$ 通りのボゾンの弦と $f = 4$ 通りのフェルミオンの弦に分割する方法の数 $P(NQ_1Q_5; 4, 4)$ が状態数となり、エントロピーは

$$\frac{S_{\text{str}}}{k} = \ln P(NQ_1Q_5; 4, 4) \simeq 2\pi\sqrt{NQ_1Q_5}$$

と計算される [近似は $NQ_1Q_5 \gg 1$ に対して]。これはブラックホールのエントロピー (27) に完全に一致している。

22.7 について

■ p.519 の訳註からの引用

本節の内容は A.Strominger (ストロミンジャー) and C.Vafa (ヴァッファ) の 1996 年の研究に基づいている。特別なブラックホールを対象としている点では限定的な考察ではあるが、D-ブレーンと開弦を用いた計算からブラックホールエントロピーが正確に再現されるという実例が発見されたことは、超弦理論が既存の重力理論を包含し進展させ得る可能性が具体的に示されたという意味において重要である。閉弦が重力子状態を含んでいると言っても、超弦理論初期の摂動論的な考察の範疇では、超弦理論が重力理論を含む '現実的な' 理論として意味を持ち得るのかどうか明確ではなかった。J.Wheeler (ホイラー) の学生であった Bekenstein が熱力学的な考察からブラックホールエントロピーの概念を見いだしたのは 1970 年だが、それから四半世紀を経て、ようやくその微視的な含意に照明が当たり始めたことになる。更に、この仕事は、重力的 (閉弦的) な対象をゲージ場的 (開弦的) な形でも記述できるという観点を示唆し、より一般的な両者の対応関係の探求 (AdS/CFT. 23.4-11 節) を促したと見られることもできる。

■ 「 N は b と f の両方に比べて充分に大きくなければならない」 (p.521 下から 8 行目) について 問題 22.4 における公式 (22.62) の証明では高温極限 $\frac{kT}{\hbar\omega_0} \gg 1$ を仮定しており、証明の過程で得た関係

$$N = \frac{E_T}{\hbar\omega_0} = \left(b + \frac{f}{2}\right) \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{kT}{\hbar\omega_0}\right)^2$$

により、これは $N \gg b, f$ を意味する。

問題 (第 22 章)

問題 22.1 統計力学の復習

(a) 式 (22.7): $p = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial V} \ln Z$ の証明

$$p = -\frac{\partial E}{\partial V} = \sum_{\alpha} \frac{e^{-\beta E_{\alpha}}}{Z} \left(-\frac{\partial E_{\alpha}}{\partial V}\right) = \frac{1}{\beta Z} \frac{\partial}{\partial V} \sum_{\alpha} e^{-\beta E_{\alpha}} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial Z / \partial V}{Z} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial V} \ln Z : (22.7).$$

(b) 式 (22.15): $F = -kT \ln Z$ の証明 ここでは教科書のヒントに従った導出を示そう。分配関数 Z を T と V の関数と見て微分すると

$$\begin{aligned} d(\ln Z) &= \left(\frac{\partial}{\partial T} \ln Z\right) dT + \left(\frac{\partial}{\partial V} \ln Z\right) dV \\ &= \left(-k\beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z\right) dT + \beta + \left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial V} \ln Z\right) dV \\ &= k\beta^2 E dT + \beta p dV \end{aligned}$$

$$= \frac{E}{kT^2} dT + \frac{p}{kT} dV,$$

$$\therefore d(-kT \ln Z) = - \left(k \ln Z + \frac{E}{T} \right) dT - p dV$$

を得る。ここで (やや飛躍の感があるが) $F = -kT \ln Z$: (22.15) と同定すれば, $F = E - TS$ より右辺第 1 項において

$$k \ln Z + \frac{E}{T} = \frac{-F + E}{T} = S$$

となることに注意すると, 熱力学的関係式

$$dF = -SdT - pdV$$

が再現される。

問題 22.2 フェルミオンのなバイオリン弦と不等分割の勘定

振動数 $l\omega_0$ の占有数 n_l のとり得る値が 0 か 1 だけに限られるようなフェルミオンのなバイオリン弦に対して, 22.2 節, 22.3 節の統計力学的な議論をやり直そう。

(a) 分配関数は式 (22.29) において, 占有数のとり得る値を $n_l = 0, 1$ に限定した

$$Z = \prod_{l=1}^{\infty} \sum_{n_l=0}^1 \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0 l n_l}{kT}\right) = \prod_{l=1}^{\infty} \left[1 + \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0 l}{kT}\right)\right]$$

に修正される。これはボゾンのな弦の分配関数 (22.30) と比べて符号が 2 箇所異なっており, 両者は

$$Z = \prod_{l=1}^{\infty} \left[1 \mp \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0 l}{kT}\right)\right]^{\mp 1}$$

とまとめられる。複号はボゾンのな弦に対して上側を, フェルミオンのな弦に対して下側をとる。

ここからフェルミオンのなバイオリン弦に対して, 22.2 節の pp.502–503 と同じ手順で高エネルギー極限における自由エネルギー F を計算すると,

$$\begin{aligned} F &\simeq -\frac{(kT)^2}{\hbar\omega_0} \int_0^{\infty} dx \ln(1 + e^{-x}) \\ &= -\frac{(kT)^2}{\hbar\omega_0} \int_0^{\infty} dx \left(e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{3} - \frac{e^{-4x}}{4} + \dots \right) \\ &= -\frac{(kT)^2}{\hbar\omega_0} \left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

となる。ボゾンのな弦では級数 $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ が現れたのと対照的に (式 (22.37) 参照), ここではそれが交代級数に置き換わっている。 $\zeta(2)$ の式 (22.38) は Fourier 展開

$$\frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

に $x = \pi$ を代入して得られたのに対し, 上の交代級数を得るには $x = 0$ を代入して

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

とすれば良い。以上より

$$F \simeq -\frac{\pi^2 (kT)^2}{12 \hbar\omega_0}.$$

(b) 引き続き 22.2 節の p.503 と同じ手順でエントロピー S とエネルギー $E = N\hbar\omega_0$ の関係を調べよう。

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} \simeq \frac{\pi^2 k^2 T}{6 \hbar\omega_0}, \quad E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta F) \simeq \frac{\pi^2}{12} \frac{1}{\hbar\omega_0} \frac{1}{\beta^2}$$

(あるいは $E = F + TS \simeq \frac{\pi^2 k^2 T}{12 \hbar\omega_0}$) である。つまり F と同様、 S と E の値はボゾンの弦の場合の $1/2$ 倍となる。よって

$$S = k2\pi \sqrt{\frac{1}{12} \frac{E}{\hbar\omega_0}} = k2\pi \sqrt{\frac{N}{12}}.$$

最後にこれを $S = k \ln q(N)$ と比較すると、不等分割の数 $q(N)$ は式 (22.61):

$$\ln q(N) \simeq 2\pi \sqrt{\frac{N}{12}}$$

のように同定される。

(c) f 種類の振動子のラベルを考えると、p.506 で説明されているようにエントロピーは

$$S = k2\pi \sqrt{\frac{fN}{12}}$$

に修正される。相対論的な弦のエネルギーは $E = N\hbar\omega_0$ の代わりに式 (22.65): $\sqrt{N} = \sqrt{\alpha'} E$ で与えられるので、エネルギー-エントロピーの関係は

$$S = k2\pi \sqrt{\frac{f}{12}} \sqrt{\alpha'} E$$

となる。Hagedorn 温度 T_H は

$$\beta_H \equiv \frac{1}{kT_H} = \frac{1}{k} \frac{\partial S}{\partial E} = 2\pi \sqrt{\frac{f}{12}} \sqrt{\alpha'}$$

から定まる。これはボゾンの弦の式 (22.68): $\frac{1}{kT_H} = 4\pi \sqrt{\alpha'}$ と比較される。(なお、例えば仮に $f = 24$ 個の横方向座標を想定すれば $\frac{kT_H}{1/\sqrt{\alpha'}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \simeq \frac{1}{8.89}$ であり、この値はボゾンの弦の場合 (式 (22.70)) と同様に 1 より小さい。))

問題 22.4 一般化された分割の勘定

Z をボゾンの弦の分配関数 (22.30), Z' を問題 22.2 で調べたフェルミオンの弦の分配関数とすると、複合系の分配関数は $Z_T = (Z)^b (Z')^f$ である。このとき

$$F \equiv -kT \ln Z = -\frac{\pi^2 (kT)^2}{6 \hbar\omega_0} : (22.39), \quad F' \equiv -kT \ln Z' = -\frac{\pi^2 (kT)^2}{12 \hbar\omega_0} = \frac{1}{2} F \quad (\text{問題 22.2})$$

とすると、複合系の自由エネルギーは

$$F_T \equiv -kT \ln Z_T = b(-kT \ln Z) + f(-kT \ln Z') = bF + fF' = \left(b + \frac{f}{2}\right) F$$

となる。よってエントロピーとエネルギーの複合系に関する値を S_T, E_T とすると、そのボゾンの弦に対する値 S, E との関係はそれぞれ、式 (22.52), 式 (22.53) において $b \rightarrow b + \frac{f}{2}$ と置き換えた

$$S_T = \left(b + \frac{f}{2}\right) S, \quad E_T = \left(b + \frac{f}{2}\right) E$$

になり、エントロピー S_T とエネルギー $E_T = N\hbar\omega_0$ の関係は、式 (22.55) において同じく $b \rightarrow b + \frac{f}{2}$ と置き換えた

$$S_T = k2\pi\sqrt{\frac{N}{6}\left(b + \frac{f}{2}\right)}$$

になる。最後にこれを $S_T = k \ln P(N; b, f)$ と比較すると、分割の式 (22.62):

$$\ln P(N; b, f) \simeq 2\pi\sqrt{\frac{N}{6}\left(b + \frac{f}{2}\right)}$$

を得る。

第 23 章 強い相互作用と AdS/CFT 対応

23.1 序論

- 強粒子 (ハドロン) 励起の角運動量 J とエネルギー E の関係は、おおよそ Regge (レッジェ) 軌跡と呼ばれる直線 $J = \alpha' E^2$ に乗る。古典的な回転する開弦もこれと同じ関係を持つことから (8.6 節), 弦理論は強い相互作用の理論となり得る可能性が示唆される。
 - [弦の] 量子化によって角運動量の値は離散的になり, J と E^2 の線形な関係は付加定数の修正を受ける。これはデータとの一致のために必要なことであった。
- 中間子はグルーオンを介して [強い相互作用により] 束縛し合ったクォークと反クォークの対であり, 弦の描像では中間子は一端にクォーク, 他端に反クォークを持つ開弦として捉えられる。開弦本体は色の流束線が集まった細い管状構造を表している (図 26 参照)。
 - クォークが単独の孤立状態で観測されないことは, 弦の張力に逆らってクォークと反クォークを引き離すのに無限大のエネルギーが必要となることから理解される。
 - クォークと反クォークの間のポテンシャルエネルギーの鍵となる特徴は, 単純な弦のモデルからも現れる。
- このように [クォークと反クォークの複合体である] 中間子に 1 本の弦が対応する理論は, 個々のクォークに弦が対応する第 21 章の理論と並行し得る, QCD (量子色力学) を正確に記述する弦理論と信じられる。
- ある種のゲージ理論に対して, 物理的に等価な閉弦の理論が見出される。その閉弦は, ゲージ理論が存在する空間を境界として持つような, 次元がひとつ高い空間の中を伝播する。
 - 主要な例: AdS/CFT 対応
 - * AdS: 超弦理論における, コンパクト化のない 5 つの次元が形成する “反 de Sitter (アンチ-ド・ジッター)” 時空 (AdS_5 と表記)。その境界を成す 4 次元 Minkowski 時空にゲージ理論の場が存在する。
 - * CFT: ゲージ理論が共変場理論 (conformal field theory: CFT) であること。
 - この対応を利用し, クォーク-グルーオンプラズマの性質を, 反 de Sitter 時空におけるブラックホールの性質と関係づけて説明する。

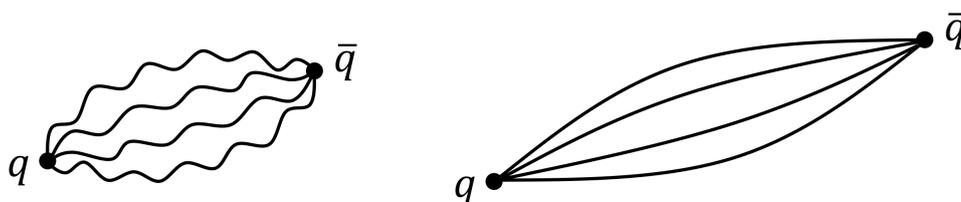


図 26 クォークと反クォークが色の場の流束線群によって結合し, 中間子を形成している様子

23.2 中間子と量子回転弦

中間子励起のデータはおおよそ Regge 軌跡と呼ばれる直線 $J = \alpha' E^2$ に乗り, より正確には付加定数 β' を含む式

$$J = \alpha' M^2 + \beta'$$

でフィッティングできる. 他方 (x^2, x^3) 平面内で回転する古典的な開弦に対する [8.6 節の] 関係 $J = \alpha' M^2$ は, 量子論に移ると

$$|\mathcal{J}| \leq 1 + \alpha' M^2 \quad (23.15)$$

となることが示される [導出は下記]. ただし [8.6 節の古典論と同様] 弦は (x^2, x^3) 平面内の運動量を持たないとしており, また \mathcal{J}, M^2 はそれぞれ J, M^2 の固有値である. その証明では振動子 $\alpha_n^{(2)}, \alpha_n^{(3)}$ に対して新たな振動子

$$\alpha_n \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_n^{(2)} + i\alpha_n^{(3)}), \quad \bar{\alpha}_n \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_n^{(2)} - i\alpha_n^{(3)})$$

を定義し,

$$|\lambda\rangle = \cdots \prod_{k=1}^{\infty} (\alpha_{-k})^{\lambda_k} (\bar{\alpha}_{-k})^{\bar{\lambda}_k} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

という形の弦の状態を考えている (「 \cdots 」は x^2, x^3 以外の方向の振動子の積). そして $|\psi_N\rangle \sim (\alpha_{-1})^N |p^+, \vec{p}_T\rangle$ という状態は, 得られた不等式による \mathcal{J} の上限の値

$$\mathcal{J} = 1 + \alpha' M^2$$

を実現することが確かめられる [導出は下記]. これは Regge 軌跡に関する式 $J = \alpha' M^2 + \beta'$ と同じ形を持つ (もっとも弦理論の予言値 $\beta' = 1$ は, 実際の中間子の軌跡とは合わない).

ところが状態 $|\Psi_N\rangle$ に関する弦座標の期待値は

$$\langle \psi_N | X^I(\tau, \sigma) | \psi_N \rangle = \langle x_0^I \rangle + 2\alpha' p^I \tau \quad (23.17)$$

となり (ただし以降は規格化条件 $\langle p^+, \vec{p}_T | p^+, \vec{p}_T \rangle = 1$ を採用) [本稿次節で補足しつつ導出], これは古典的な回転弦のように振舞うどころか, むしろ点粒子の運動を表しているようである. しかしながらコヒーレントな状態

$$|\Psi\rangle = e^{\mathcal{A}} |p^+, \vec{0}\rangle, \quad \mathcal{A} = v(\bar{\alpha}_1 - \alpha_{-1})$$

を定義すると, これは古典的な回転弦と同じ期待値の関係

$$\langle J \rangle = \langle \alpha' M^2 + 1 \rangle \quad (23.22)$$

を持ち [導出は下記], 回転弦の古典的運動と一致する弦座標の期待値

$$\begin{aligned} \langle X^2(\tau, \sigma) \rangle &= -2v\sqrt{\alpha'} \sin \tau \cos \sigma, \\ \langle X^3(\tau, \sigma) \rangle &= 2v\sqrt{\alpha'} \cos \tau \cos \sigma, \end{aligned} \quad (23.25)$$

を持つ状態であることが確かめられる [導出は下記]. パラメーター v の意味は, 上式より弦の長さが $l = 4v\sqrt{\alpha'}$ と表されることの中に含まれている.

23.2 節, 式の導出など

■固有値に対する不等式 (23.15) の導出 角運動量の一般式 (12.147):

$$M^{\mu\nu} = x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu)$$

より回転弦に対して注目される角運動量 $J = M^{23}$ は

$$J = M^{23} = -i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^{(2)} \alpha_n^{(3)} - \alpha_{-n}^{(3)} \alpha_n^{(2)})$$

で与えられる [本稿次節で補足するように, 弦の全運動量は $p^\mu = 0$]. ここで新たな振動子

$$\alpha_n \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_n^{(2)} + i\alpha_n^{(3)}), \quad \bar{\alpha}_n \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_n^{(2)} - i\alpha_n^{(3)}) \quad (23.4)$$

を定義すると, これは $(\alpha_n)^\dagger = \bar{\alpha}_n$ および交換関係

$$[\alpha_m, \bar{\alpha}_n] = m\delta_{m+n,0}, \quad [\alpha_m, \alpha_n] = [\bar{\alpha}_m, \bar{\alpha}_n] = 0 \quad (23.5)$$

を満たす [本稿次節を参照]. 新しい振動子を用いると, 角運動量演算子は

$$J = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n} \bar{\alpha}_n - \bar{\alpha}_{-n} \alpha_n) \quad (23.6)$$

と書き換えられる. 右辺の和の中の第 1 項は, 状態における α 振動子の数を数え, 第 2 項は符号を除き, 状態における $\bar{\alpha}$ 振動子の数を数えている (計算練習 23.1).

さて, 弦の状態を

$$|\lambda\rangle = \cdots \prod_{k=1}^{\infty} (\alpha_{-k})^{\lambda_k} (\bar{\alpha}_{-k})^{\bar{\lambda}_k} |p^+, \vec{p}_T\rangle \quad (23.7)$$

という形に書こう. ただし $\lambda_k \geq 0$ と $\bar{\lambda}_k \geq 0$ は整数であり, 「 \cdots 」は x^2 と x^3 以外の方向の振動子の積を表す. この状態 (23.7) における J の固有値は

$$\mathcal{J} = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \bar{\lambda}_k) \quad (23.8)$$

で与えられる [本稿次節および計算練習 23.1 を参照]. 他方, (角運動量が確定している状態における) 質量の自乗は式 (12.164):

$$\alpha' M^2 + 1 = N^\perp$$

から定まる. ここで N^\perp を x^2 と x^3 からの寄与

$$N_{23} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^{(2)} \alpha_n^{(2)} + \alpha_{-n}^{(3)} \alpha_n^{(3)}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n} \bar{\alpha}_n + \bar{\alpha}_{-n} \alpha_n) \quad (23.11)$$

[本稿次節を参照] と他の横方向からの寄与 N' に分ける.

$$N^\perp = N_{23} + N'.$$

すると状態 (23.7) における N_{23} の固有値は

$$\mathcal{N}_{23} = \sum_{k=1}^{\infty} k(\lambda_k + \bar{\lambda}_k) \quad (23.12)$$

で与えられる [本稿次節を参照]. 固有値 (23.8), (23.12) において $\lambda_k, \bar{\lambda}_k \geq 0$, $k \geq 1$ であり, また任意の $b_1, b_2 \geq 0$ に対して [三角不等式] $b_1 + b_2 \geq |b_1 - b_2|$ が成り立つことに注意すると,

$$\mathcal{N}_{23} = \sum_{k=1}^{\infty} k(\lambda_k + \bar{\lambda}_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} k\lambda_k + \sum_{k=1}^{\infty} k\bar{\lambda}_k \geq \left| \sum_{k=1}^{\infty} k\lambda_k - \sum_{k=1}^{\infty} k\bar{\lambda}_k \right| = |\mathcal{J}|$$

が得られる.

$$\alpha' M^2 + 1 = N^\perp = N_{23} + N'$$

において N' の固有値はゼロ以上なので, M^2 の固有値 \mathcal{M}^2 に対して

$$1 + \alpha' \mathcal{M}^2 \geq \mathcal{N}_{23}$$

が成り立つことと合わせると, 不等式 (23.15):

$$|\mathcal{J}| \leq 1 + \alpha' \mathcal{M}^2$$

に到達する.

■状態 $(\alpha_{-1})^N |p^+, \vec{p}_T\rangle$ が \mathcal{J} の不等式 (23.15) の上限を与えることの確認 状態 $(\alpha_{-1})^N |p^+, \vec{p}_T\rangle$ に対して $\lambda_1 = N$, 他の $\lambda_s, \bar{\lambda}_s = 0$, $N' = 0$ なので,

$$1 + \alpha' \mathcal{M}^2 = \mathcal{N}_{23} = 1 \cdot \lambda_1 = N = \mathcal{J}.$$

■コヒーレント状態における期待値の関係 (23.22) の導出 コヒーレント状態

$$|\Psi\rangle = e^{\mathcal{A}} |p^+, \vec{0}\rangle$$

(ただし $\mathcal{A} = v(\bar{\alpha}_1 - \alpha_{-1})$, v : 実数定数) における J の期待値は

$$\langle J \rangle = \langle \Psi | J | \Psi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \langle \Psi | (\alpha_{-n} \bar{\alpha}_n - \bar{\alpha}_{-n} \alpha_n) | \Psi \rangle$$

である. 最右辺の $n = 1$ 以外の項はすべて $e^{\mathcal{A}}$ と可換で, 右側の真空状態 $|p^+, \vec{0}\rangle$ を消すので,

$$\langle J \rangle = \langle \Psi | (\alpha_{-1} \bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_{-1} \alpha_1) | \Psi \rangle$$

と簡略化される. 実際には α_1 も \mathcal{A} と可換であり, 上式右辺の第 2 項も寄与を持たない. よって

$$\begin{aligned} \langle J \rangle &= \langle \Psi | \alpha_{-1} \bar{\alpha}_1 e^{\mathcal{A}} | p^+, \vec{0} \rangle = \langle \Psi | \alpha_{-1} [\bar{\alpha}_1, e^{\mathcal{A}}] | p^+, \vec{0} \rangle \\ &= \langle \Psi | \alpha_{-1} [\bar{\alpha}_1, \mathcal{A}] e^{\mathcal{A}} | p^+, \vec{0} \rangle = -v \langle \Psi | \alpha_{-1} e^{\mathcal{A}} | p^+, \vec{0} \rangle \end{aligned} \quad (23.20)$$

となり, さらに $\langle \Psi | e^{\mathcal{A}} \alpha_{-1} | p^+, \vec{0} \rangle = \langle p^+, \vec{0} | \alpha_{-1} | p^+, \vec{0} \rangle$ なので

$$\langle J \rangle = -v \langle \Psi | [\alpha_{-1}, e^{\mathcal{A}}] | p^+, \vec{0} \rangle = -v \langle \Psi | [\alpha_{-1}, \mathcal{A}] e^{\mathcal{A}} | p^+, \vec{0} \rangle = v^2 \quad (23.21)$$

を得る [本稿次節で補足]. N_{23} の計算にも, $\langle J \rangle$ の計算に用いた $\alpha_{-1} \bar{\alpha}_1$ の項がそのまま含まれるので,

$$\langle J \rangle = \langle N_{23} \rangle = v^2, \quad \langle \alpha' M^2 \rangle = v^2 - 1 \quad \rightarrow \quad \langle J \rangle = \langle (\alpha' M^2 + 1) \rangle \quad (23.22)$$

が得られる [本稿次節で補足].

■弦座標の期待値 (23.25) の導出 振動子展開 (12.66):

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + 2\alpha' p^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^I e^{-in\tau} - \alpha_{-n}^I e^{in\tau}) \frac{\cos n\sigma}{n}$$

を利用した簡単な計算から

$$\langle (X^2 + iX^3)(\tau, \sigma) \rangle = \langle x_0^2 + ix_0^3 \rangle + 2i\sqrt{\alpha'} \langle (\alpha_1 e^{-i\tau} - \alpha_{-1} e^{i\tau}) \rangle \cos \sigma \quad (23.23)$$

が得られる [本稿次節で補足]. ここで $\langle \alpha_1 \rangle = 0$ と $\langle \alpha_{-1} \rangle = -v$ に注意し [本稿次節で補足], $\langle x_0^2 \rangle = \langle x_0^3 \rangle = 0$ を仮定すると

$$\langle (X^2 + iX^3)(\tau, \sigma) \rangle = 2iv\sqrt{\alpha'} e^{i\tau} \cos \sigma$$

を得る. 実部と虚部を分けて書くと, これは回転弦の古典極限の運動 (23.25):

$$\begin{aligned} \langle X^2(\tau, \sigma) \rangle &= -2v\sqrt{\alpha'} \sin \tau \cos \sigma, \\ \langle X^3(\tau, \sigma) \rangle &= +2v\sqrt{\alpha'} \cos \tau \cos \sigma \end{aligned}$$

になっている.

23.2 について

■「 $J = \alpha' M^2$ 」(23.2 節 1 行目) について 原点のまわりに回転する弦は直観的に理解できるように, 全体として運動量 \vec{p} を持たない. このとき弦のエネルギー E は質量 M に一致するため, 角運動量とエネルギーの自乗の線形関係 (8.69): $J = \alpha' E^2$ は $J = \alpha' M^2$ を意味する. $\vec{p} = 0$ はもちろん, 直接の計算によっても確かめられる:

$$\begin{aligned} \vec{X}(t, \sigma) &= \frac{\sigma_1}{\pi} \cos \frac{\pi\sigma}{\sigma_1} \left(\cos \frac{\pi ct}{\sigma_1}, \sin \frac{\pi ct}{\sigma_1} \right) : (7.63) \\ \therefore \vec{P}^\tau &= \frac{T_0}{c^2} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \frac{T_0}{c} \cos \frac{\pi\sigma}{\sigma_1} \left(-\sin \frac{\pi ct}{\sigma_1}, \cos \frac{\pi ct}{\sigma_1} \right), \quad (\because \text{静的ゲージの式 (7.32)}) \\ \therefore \vec{p} &= \int_0^{\sigma_1} \vec{P}^\tau(t, \sigma) d\sigma = 0. \quad (\text{第 8 章参照}) \end{aligned}$$

運動量密度 \vec{P}^τ は当然期待されるように, 原点 (回転中心) $\sigma = \sigma_1/2$ に関して対称になっている. (また \vec{P}^τ は弦の線要素に直交し, 弦の端点 $\sigma = 0, \sigma_1$ で最大となっていることも見て取れる.) 弦の全運動量がゼロになるのは, このためである.

■「 $(\alpha_n)^\dagger = \bar{\alpha}_{-n}$ という関係に注意してもらいたい」(p.530, l.17) について

$$\alpha_n^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_n^{(2)\dagger} - i\alpha_n^{(3)\dagger}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_{-n}^{(2)} - i\alpha_{-n}^{(3)}) = \bar{\alpha}_{-n}.$$

■新たな振動子の交換関係 (23.5) について 交換関係 (12.45): $[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0}$ より式 (23.5):

$$[\alpha_m, \bar{\alpha}_n] = \frac{1}{2} ([\alpha_m^{(2)}, \alpha_n^{(2)}] + [\alpha_m^{(3)}, \alpha_n^{(3)}]) = m\delta_{m+n,0}, \quad [\alpha_m, \alpha_n] = [\bar{\alpha}_m, \bar{\alpha}_n] = \frac{1}{2} ([\alpha_m^{(2)}, \alpha_n^{(2)}] - [\alpha_m^{(3)}, \alpha_n^{(3)}]) = 0$$

が成り立つ.

■ J の固有値 (23.8) について 計算練習 23.1(p.530) の解答を参照.

■ N_{23} の式 (23.11) と固有値 (23.12) について

$$\begin{aligned}\alpha_{-n}\bar{\alpha}_n &= \frac{1}{2}\{\alpha_{-n}^{(2)}\alpha_n^{(2)} - i\alpha_{-n}^{(2)}\alpha_n^{(3)} + i\alpha_{-n}^{(3)}\alpha_n^{(2)} + \alpha_{-n}^{(3)}\alpha_n^{(3)}\}, \\ \bar{\alpha}_{-n}\alpha_n &= \frac{1}{2}\{\alpha_{-n}^{(2)}\alpha_n^{(2)} + i\alpha_{-n}^{(2)}\alpha_n^{(3)} - i\alpha_{-n}^{(3)}\alpha_n^{(2)} + \alpha_{-n}^{(3)}\alpha_n^{(3)}\}\end{aligned}$$

より

$$\alpha_{-n}\bar{\alpha}_n + \bar{\alpha}_{-n}\alpha_n = \alpha_{-n}^{(2)}\alpha_n^{(2)} + \alpha_{-n}^{(3)}\alpha_n^{(3)}$$

なので, 式 (23.10) の N_{23} は式 (23.12) のように書き換えられる.

N_{23} の固有値が式 (23.12) で与えられることは, 計算練習 23.1(p.530) の解答を参照.

■ 弦座標の期待値 (23.17) について 式 (23.17) の 1 行下で説明されているように, 「 $X^I(\tau, \sigma)$ のモード展開において, 振動子はここでは寄与を持たない」ことを確認しよう. 弦座標のモード展開 (12.32):

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + 2\alpha' p^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^I \cos n\sigma e^{-in\tau}$$

における振動子 α_n^I の, 期待値への寄与

$$\langle |(\alpha_{-1}^\dagger)^N \alpha_n^I (\alpha_{-1})^N | \rangle \quad (28)$$

を評価する. ただし以下では基底状態を $| \rangle \equiv |p^+, \vec{p}_T \rangle$ と略記する. $I \neq 2, 3$ であれば α_n^I は $\alpha_{-1}, \alpha_{-1}^\dagger$ のいずれとも交換するので, 上式 (28) は

$$\begin{aligned}\alpha_n^I | \rangle &= 0, & (n > 0) \\ \langle | \alpha_n^I &= 0 & (n < 0)\end{aligned}$$

によりゼロになる. また $I = 2, 3$ に対しては

$$\begin{aligned}[\alpha_n^I, \alpha_{-1}] &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha_n^I, \alpha_{-1}^{(2)} + i\alpha_{-1}^{(3)}] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{n1} & (I = 2) \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\delta_{n1} & (I = 3) \end{cases} \\ [\alpha_{-1}^\dagger, \alpha_n^I] &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha_{-1}^{(2)} - i\alpha_{-1}^{(3)}, \alpha_n^I] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{n,-1} & (I = 2) \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}\delta_{n,-1} & (I = 3) \end{cases}\end{aligned}$$

なので, 例えば $I = 2$ に対して上式 (28) は次のように計算できる.

$$\begin{aligned}n > 0 \text{ に対して} \quad & \langle |(\alpha_{-1}^\dagger)^N \alpha_n^I (\alpha_{-1})^N | \rangle \\ &= \langle |(\alpha_{-1}^\dagger)^N (\alpha_{-1})^N \alpha_n^I | \rangle + \frac{N}{\sqrt{2}}\delta_{n1} \langle |(\alpha_{-1}^\dagger)^N (\alpha_{-1})^{N-1} | \rangle \\ &= 0, \\ n < 0 \text{ に対して} \quad & \langle |(\alpha_{-1}^\dagger)^N \alpha_n^I (\alpha_{-1})^N | \rangle \\ &= \langle | \alpha_n^I (\alpha_{-1}^\dagger)^N (\alpha_{-1})^N | \rangle + \frac{N}{\sqrt{2}}\delta_{n,-1} \langle |(\alpha_{-1}^\dagger)^{N-1} (\alpha_{-1})^N | \rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

$I = 3$ に対しても同様であり, 結局すべての横方向座標 I に対して上式 (28) の期待値はゼロになる.

■角運動量の期待値の計算 (23.20) について ここでは途中計算にあたる第 3 の等号の説明は行わないけれど、確かに式 (23.20) の結論

$$\langle \Psi | \alpha_{-1} [\bar{\alpha}_1, e^A] | p^+, \vec{0} \rangle = -v \langle \Psi | \alpha_{-1} e^A | p^+, \vec{0} \rangle$$

が成り立つことを確かめる。それには交換関係

$$[\bar{\alpha}_1, e^A] = -ve^A$$

を示せば十分である。演算子の指数関数 e^A はベキ展開 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ によって定義されている。そこで交換関係 $[\bar{\alpha}_1, A^n]$ を $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して調べると、一般に

$$[\bar{\alpha}_1, A^n] = -nvA^{n-1} \quad (29)$$

となることが予想される。実際、

$$[\bar{\alpha}_1, 1] = 0, \quad [\bar{\alpha}_1, A] = -v[\bar{\alpha}_1, \alpha_{-1}] = -v$$

より上式 (29) は $n = 0, 1$ に対して成り立っている (式 (23.20) の第 4 の等号は $n = 1$ の関係式から理解できる)。またある n に対して上式 (29) が成り立つと仮定すると、

$$[\bar{\alpha}_1, A^{n+1}] = A[\bar{\alpha}_1, A^n] + [\bar{\alpha}_1, A]A^n = -nvA^n - vA^n = -(n+1)vA^n$$

となって n を $n+1$ に置き換えた式が成り立つ。以上より上式 (29) は任意の $n (\geq 0)$ に対して成立する (数学的帰納法)。そこで公式 (29) を用いると、示したかった交換関係が

$$[\bar{\alpha}_1, e^A] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\bar{\alpha}_1, A^n] = -v \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} A^{n-1} = -ve^A$$

と確かめられる。

なおこれは式 (23.21) の第 2 の等号で用いられる関係

$$[\alpha_{-1}, e^A] = -ve^A$$

に他ならない。

■式 (23.22) について $\alpha' M^2$ と N_{23} の関係 (23.9) における N' について、 $\langle \Psi | N' | \Psi \rangle = 0$ であることによる。

■弦座標の期待値の計算 (23.23) について 式 (23.18) の状態 $|\Psi\rangle$ は横方向運動量 \vec{p}_T がゼロなので、振動子のモード展開 (12.66) において p^I を係数とする τ の 1 次の項は、状態 $|\Psi\rangle$ に関する期待値に寄与しない。また 1 次結合 $X^2 + iX^3$ のモード展開における $n \neq 0$ のモードに関する部分は

$$\begin{aligned} & i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (\alpha_n^{(2)} + i\alpha_n^{(3)}) e^{-in\tau} - (\alpha_{-n}^{(2)} - i\alpha_{-n}^{(3)}) e^{in\tau} \right\} \frac{\cos n\sigma}{n} \\ & = 2i\sqrt{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n e^{-in\tau} - \bar{\alpha}_{-n} e^{in\tau}) \frac{\cos n\sigma}{n} \end{aligned}$$

であり、その期待値をとる際、 $n > 1$ に対して

$$\langle \Psi | \alpha_n | \Psi \rangle = \langle \Psi | \bar{\alpha}_{-n} | \Psi \rangle = 0$$

であることに注意する。

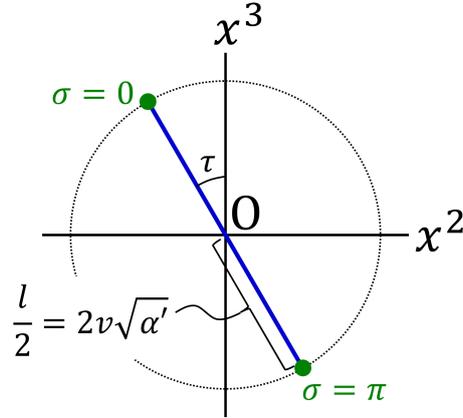


図 27 回転弦の古典極限の運動

■ 「ここで $\langle \alpha_1 \rangle = 0$ と $\langle \alpha_{-1} \rangle = -v$ に注意し」 (p.533, l.1) について 再び基底状態を $|\rangle \equiv |p^+, \vec{0}\rangle$ と略記する。まず「 α_1 も \mathcal{A} と可換」 (p.532 下から 11 行目) なので,

$$\langle \alpha_1 \rangle = \langle |e^{-\mathcal{A}} \alpha_1 e^{\mathcal{A}}| \rangle = \langle |\alpha_1| \rangle = 0.$$

また

$$\langle \alpha_{-1} \rangle = \langle |e^{-\mathcal{A}} \alpha_{-1} e^{\mathcal{A}}| \rangle = \langle |(\alpha_{-1} e^{-\mathcal{A}} + [e^{-\mathcal{A}}, \alpha_{-1}]) e^{\mathcal{A}}| \rangle$$

であり, 最右辺において

$$[\mathcal{A}, \alpha_{-1}] = v[\bar{\alpha}_1, \alpha_{-1}] = v, \quad \therefore [e^{-\mathcal{A}}, \alpha_{-1}] = -v$$

および $\langle |\alpha_{-1}| \rangle = 0$ なので,

$$\langle \alpha_{-1} \rangle = -v \langle |e^{\mathcal{A}}| \rangle.$$

さらに $\langle |\bar{\alpha}_1| \rangle = 0, \langle |\alpha_{-1}| \rangle = 0$ より $n \geq 1$ に対して $\langle |\mathcal{A}^n| \rangle = 0$ であることに注意すると,

$$\langle \alpha_{-1} \rangle = -v \langle |\rangle \rangle = -v$$

となる。

■ 「上述の弦の長さ l は $l = 4v\sqrt{\alpha'}$ である」 (p.533, l.6,7) について 弦座標の期待値 (23.25) は図 27 のような弦の回転運動に対応している。(静的ゲージでの式 (8.72) とは係数などが異なる。) ここから弦の長さが $l = 4v\sqrt{\alpha'}$ となることが読み取れる。ここで $\sqrt{\alpha'}$ が長さの次元を持ち (これも弦の長さと呼ばれるけれど, 文字通りの弦の長さ l と混同してはならない), また v はコヒーレント状態の定義式 (23.18) より無次元でなければならないことに注意する。

■ 「 $M^2 = 2p^+p^- = 2(p^+)^2$ である (式 (9.81),(2.84) 参照)」 (p.533, l.7) について 式 (2.84): $p^\pm = -p_\mp$ を用いても $p^+p^- = (p^+)^2$ とはできないと考えられる。ただしコヒーレント状態 (23.18) が横方向運動量 \vec{p}_T を持たないことに加えて, $p^1 = 0$ であって「空間運動量はゼロ」 (p.533, l.7) であることまで仮定すると,

$$p^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 \pm p^1) = \frac{1}{\sqrt{2}}p^0, \quad (\text{これは式 (23.28) 第 1 の等号 } p^+ = E/\sqrt{2})$$

$$\therefore M^2 = (p^0)^2 = 2(p^+)^2$$

となる。もっともこの場合には p^\pm を導入せずとも、結論として

$$E = \sqrt{\langle M^2 \rangle} = \sqrt{\frac{v^2 - 1}{\alpha'}} \simeq \frac{v}{\sqrt{\alpha'}} = \frac{l}{4\alpha'} = \frac{\pi}{2} T_0 l$$

が古典的な回転弦のエネルギー (7.60): $E = \frac{\pi}{2} T_0 l$ に一致していることを言える。

計算練習 23.1 (p.530)

$$\begin{aligned}\alpha_{-n}\bar{\alpha}_n &= \frac{1}{2}\{\alpha_{-n}^{(2)}\alpha_n^{(2)} - i\alpha_{-n}^{(2)}\alpha_n^{(3)} + i\alpha_{-n}^{(3)}\alpha_n^{(2)} + \alpha_{-n}^{(3)}\alpha_n^{(3)}\}, \\ \bar{\alpha}_{-n}\alpha_n &= \frac{1}{2}\{\alpha_{-n}^{(2)}\alpha_n^{(2)} + i\alpha_{-n}^{(2)}\alpha_n^{(3)} - i\alpha_{-n}^{(3)}\alpha_n^{(2)} + \alpha_{-n}^{(3)}\alpha_n^{(3)}\}\end{aligned}$$

より

$$\alpha_{-n}\bar{\alpha}_n - \bar{\alpha}_{-n}\alpha_n = -i(\alpha_{-n}^{(2)}\alpha_n^{(3)} - \alpha_{-n}^{(3)}\alpha_n^{(2)})$$

なので、角運動量 (23.3) は式 (23.6) のように書き換えられる。

ここで $(\alpha_n)^\dagger = \bar{\alpha}_{-n}$ という関係に注意して (p.530, 1.17), $n \geq 1$ に対して

$$\alpha_{-n} \equiv \bar{a}_n^\dagger \sqrt{n}, \quad \bar{\alpha}_n \equiv \bar{a}_n \sqrt{n}, \quad \bar{\alpha}_{-n} \equiv a_n^\dagger \sqrt{n}, \quad \alpha_n \equiv a_n \sqrt{n}$$

と書くと、演算子 a, \bar{a} は通常の調和振動子の交換関係

$$[\bar{a}_m, \bar{a}_n^\dagger] = \frac{1}{\sqrt{mn}}[\bar{\alpha}_m, \alpha_{-n}] = \frac{m}{\sqrt{mn}}\delta_{mn} = \delta_{mn}, \quad [a_m, a_n^\dagger] = \frac{1}{\sqrt{mn}}[\alpha_m, \bar{\alpha}_{-n}] = \frac{m}{\sqrt{mn}}\delta_{mn} = \delta_{mn}$$

を満たすので、

$$\begin{cases} \alpha_{-n} \equiv \bar{a}_n^\dagger \sqrt{n} : \text{生成演算子} \\ \bar{\alpha}_n \equiv \bar{a}_n \sqrt{n} : \text{(対応する) 消滅演算子} \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{\alpha}_{-n} \equiv a_n^\dagger \sqrt{n} : \text{生成演算子} \\ \alpha_n \equiv a_n \sqrt{n} : \text{(対応する) 消滅演算子} \end{cases}$$

と見なせる。(確かに続く式 (23.7) では $k \geq 1$ に対して $\alpha_{-k}, \bar{\alpha}_{-k}$ を生成演算子としていることが見て取れる。) このとき

$$J = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\bar{a}_n^\dagger \bar{\alpha}_n - \alpha_n^\dagger \alpha_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{a}_n^\dagger \bar{a}_n - a_n^\dagger a_n)$$

であり、最右辺の和の 2 項 $\bar{a}_n^\dagger \bar{a}_n, a_n^\dagger a_n$ はそれぞれ通常の数演算子になっている。

J の固有値が式 (23.8) で与えられることは、ここから直ちに理解される。また N_{23} の固有値が式 (23.12) で与えられることも、振動子 $\alpha, \bar{\alpha}$ または a, \bar{a} を上記のように生成・消滅演算子に同定したことから明確に理解できる。

23.3 伸びた有効弦のエネルギー

弦の両端にクォークと反クォークが固定されていると仮定すると、伸ばされている静的な弦のエネルギー (したがって質量 M) はクォーク-反クォークポテンシャル $V(r)$ を表すと考えられる。そこで量子弦に関して、距離 r 隔たる D-ブレーン間で伸ばされた励起を持たない ($N^\perp = 0$) 弦の質量 (15.51):

$$M = \sqrt{(T_0 r)^2 - \frac{1}{\alpha'} \frac{D-2}{24}}$$

が、ポテンシャル $V(r)$ に一致すると考える。上式は $D = 26$ 次元の時空を想定する理論の結果であったけれど、実は任意の時空次元 D の下でこれと大まかに一致する $V(r)$ を与える、変形版の弦理論が存在する。このことから上式において $D = 4$ とおけば、4次元時空のクォーク-反クォークポテンシャルが得られると見て良い。 r の大きい古典的極限では

$$V(r) = T_0 r + \gamma_D \cdot \frac{1}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad \gamma_D \equiv -\frac{\pi}{24}(D-2) : \text{Luscher 係数}$$

となる。右辺第1項 $T_0 r$ は [r を弦の長さを読み替えれば、もととなる M^2 の式 (15.51) と同様]、張力 T_0 に逆らって弦を寸法 r に引き伸ばす仕事と解釈できる (弦の古典的ポテンシャル)。実際 [弦理論以前に]、クォーク-反クォークポテンシャルは r の大きいところで $V(r) \sim T_0 r$ となることが知られている。第2項は最初の量子補正項を与えており、 $D = 4, 3$ に対して係数の具体的な値は

$$\gamma_4 = -\frac{\pi}{12} = -0.262, \quad \gamma_3 = -\frac{\pi}{24} = -0.1309$$

である。この値は $SU(3)$ ゲージ理論において同じ形のポテンシャルを仮定したとき、数値計算によって得られる係数の値に近い。

23.3 について

■式 (23.29) について 質量の自乗 (15.51) における -1 はもともと、正規順序化定数 (12.111):

$$a = -\frac{1}{24}(D-2)$$

であったことを思い出す。

23.4 ゲージ理論の N が大きい極限

ここから我々は AdS/CFT 対応に関連する概念を学び始める。この重力理論とゲージ理論の対応は、ゲージ理論が多数の自由度を持つ場合に最も明確になる。そこで我々は N が大きい場合の $SU(N)$ 理論について調べる。この理論は無単位の結合定数 g_{YM} を持ち、この定数はゲージボゾン間の相互作用の強さを制御する役割を担う。(中略) 我々がこれから示す結果の鍵となる部分は、次のようなことである。すなわち制御可能な $N \rightarrow \infty$ の極限が存在し、その極限状況に物理的に関わる結合は g_{YM} ではなく、't Hooft (ト・フーフト) 結合 $\lambda = g_{\text{YM}}^2 N$ であって、後者は有限値を保つことになる。(23.4 節, 第1段落)

説明には弦の描像を利用する。低エネルギー極限が $SU(N)$ ゲージ理論に対応する弦の描像として、 N 個の重なり合ったブレインに端点を持つ開弦を考える [15.3 節]。このとき開弦の結合定数がゲージ理論の結合定数 g_{YM} となる。

$SU(N)$ ゲージ理論におけるゲージボゾンの伝播振幅の g_{YM} と N への依存性を決めるために、 $[ij]$ セクター ($i \neq j$) の開弦の伝播を表すダイヤグラムを考える。中間状態として「ひとつのゲージボゾンが2つのゲージボゾンに変わる」「あるいは2つのゲージボゾンがひとつのゲージボゾンに変わる」(p.535, 1.4-5) 過程に対応する、弦の相互作用 (分裂と融合) を含めることは、図 28 のようにダイヤグラムに '布' を加えることに対応する。図 28 では1枚の布を追加するごとに

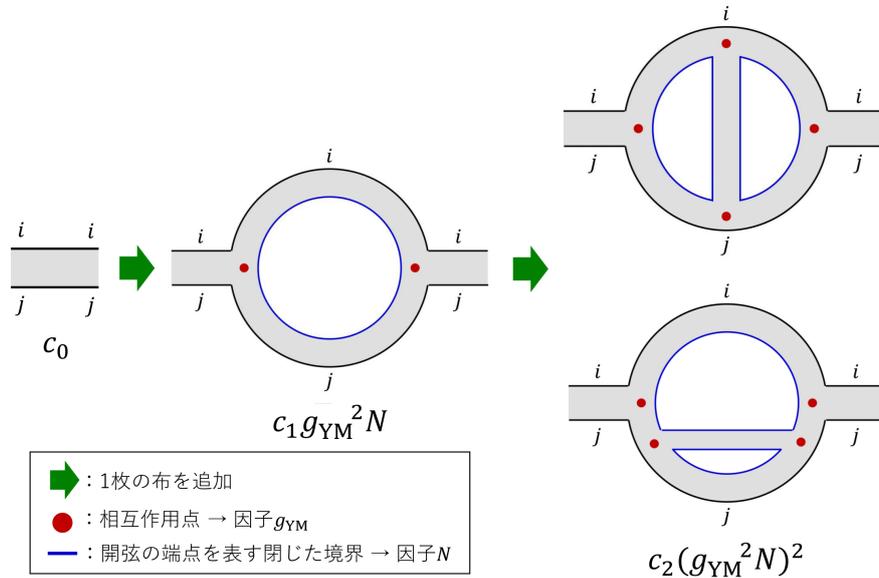


図 28 [ij] 弦のダイアグラムの例 [各ダイアグラムは左側が始状態, 右側が終状態]

- 2つの相互作用点 (それぞれに因子 g_{YM} が付随)
- 開弦の端点を表す閉じた境界 (可能な接続先のブレイン数 N が付随)

が加わるから, これらの中間状態からの寄与の総和として得られる振幅は

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (g_{YM}^2 N)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n \equiv f(\lambda), \quad \lambda \equiv g_{YM}^2 N : \text{'t Hooft 結合}$$

という形の g_{YM}, N 依存性を持つ.

ところが布を1枚加える際に, 閉じた境界が1つ増えるのではなく, 1つ減ることもある. 例えば図28の2つの閉じた境界を持つダイアグラムに1枚の布を加えて, 図29のように境界が1つに減った非平面的な[立体交差を持つ]ダイアグラムが得られる. 境界が1つ減るときには因子 $g_{YM}^2 N = \lambda$ の代わりに因子 $g_{YM}^2/N = \lambda/N^2$ が加わるから, 境界を減るような布も任意の数だけ含むような, すべての可能なダイアグラムからの寄与を考慮した完全な振幅は

$$\mathcal{A} = f_0(\lambda) + f_2(\lambda) \cdot \frac{1}{N^2} + f_4(\lambda) \cdot \frac{1}{N^4} + \dots$$

という形をとる [本稿次節で考察]. $\lambda = g_{YM}^2 N$ を固定しておいて $N \rightarrow \infty$ とすると (このとき $g_{YM} \rightarrow 0$), 振幅に寄与を持つのは最初の項 $f_0(\lambda)$ だけなので, 't Hooft 結合 λ が理論を完全に制御するパラメーターになる.

23.4 について

■ 「ダイアグラムの内側の境界には……弦が k 番目のブレインにおいて分裂したことを表す」(p.535 下2行) について 2つの弦の端点在同一のブレイン上で結合する, p.339の模式図15.2(本稿の15.3節の図5, 逆にたどれば弦が分裂する様子を表す)を参照.

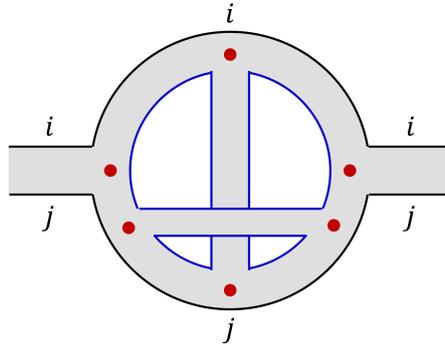


図 29 青い線で示した境界は 1 筆書きできる, 単一の境界である

■式 (23.44) について あるダイアグラムに対して l 枚の布を加えて, 閉じた境界を l' 個減らしたグラフは, もとのダイアグラムの

$$\frac{g_{\text{YM}}^{2l}}{N^{l'}} = \frac{\lambda^l}{N^{l+l'}}$$

倍の寄与を持つ. ここで「布を 1 枚加えることにより, 境界の数はひとつ増えるか, もしくはひとつ減る」(p.537, 1.12,13) ことに注意すると,

$$l' = l, l-2, l-4, \dots, \quad \therefore l+l' = 2l, 2(l-1), 2(l-2), \dots$$

となることが分かる. そこで以下では $l+l' = 2k$ を満たす組 (l, l') を考える. 閉じた境界を l' 個減らすことができるためには, もとのダイアグラムは少なくとも l' 個以上の閉じた境界を持たなければならないことから分かるように, l 枚の布を加える前のもとのダイアグラムとして考え得るグラフは限定されるため, その集合の寄与を $f_{l,l'}(\lambda)$ と書くと, これは $f_0(\lambda)$ と異なっても良い. そこで $l+l' = 2k$ を満たすあらゆる l, l' の組について, l 枚の布を加えて境界を l' 個減らされたあらゆるダイアグラムからの寄与の総和は

$$\sum_{l,l'} f_{l,l'}(\lambda) \cdot \frac{\lambda^l}{N^{2k}} \equiv f_k(\lambda) \cdot \frac{1}{N^{2k}}$$

という形になり, これが式 (23.44) の第 2 項以降の各項を成すものと想像される.

23.5 質量を持つ源の重力効果

D-ブレーンはエネルギーを持っているので, 時空を屈曲させるはずである. その重力の効果がどのような距離尺度において重要となるかを考える.

一般に質量 M を持つ物体が作る重力場に対して,

$$R^{D-3} \equiv G^{(D)} M$$

によって特徴的な距離尺度 R を導入する (これは 1 程度の因子の違いを除き, 任意次元数 D における Schwarzschild 半径に等しい). すると重力ポテンシャルは

$$V \sim -\frac{G^{(D)} M}{r^{D-3}} = -\left(\frac{R}{r}\right)^{D-3}$$

となるので、この R が確かに重力の重要となる距離尺度 [重力の影響が著しく及ぶ距離の目安] となり、 $r \gg R$ において重力の効果を無視できることが分かる。

前節のように Dp -ブレーンが N 個ある場合を考え、これらが体積 V_p の p 次元コンパクト空間に巻き付いているとする。このとき N 個のブレーンによる重力に対して上記の距離尺度 R を評価しよう。

- Dp -ブレーンの張力 T_p (式 (18.57)) \rightarrow N 個のブレーンの総質量 $M = N \times T_p V_p$
- 13.4 節で説明した関係 $G^{(D)} \sim g^2(\sqrt{\alpha'})^{D-2}$

により、

$$\left(\frac{R}{\sqrt{\alpha'}}\right)^{D-p-3} \sim gN \quad (23.52)$$

を得る [導出は下記]。これによれば $g \rightarrow 0$ または $gN \rightarrow 0$ とすると $R \rightarrow 0$ となり、重力効果はゼロになる*19。この結果はコンパクト空間の体積 V_p に依存しない。

23.5 節、式の導出など

■ D -ブレーンの重力効果が及ぶ距離尺度 (23.52) の導出 Dp -ブレーンの張力 T_p は、式 (18.57) によって

$$T_p \simeq \frac{1}{g} \frac{1}{(\sqrt{\alpha'})^{p+1}} \quad (23.48)$$

と与えられる [本稿次節で補足]。よって N 個のブレーンの総質量は

$$M = N \times (T_p V_p) \simeq N \cdot \frac{V_p}{g(\sqrt{\alpha'})^{p+1}} \quad (23.49)$$

と表される [本稿次節で補足]。実効的な $(D-p)$ 次元時空からはブレーン系は質量 M の質点に見え、その特徴的な距離尺度 R は定義式 (23.46): $R^{D-3} \equiv G^{(D)} M$ に基づき

$$R^{D-p-3} = G^{(D-p)} M = \frac{G^{(D)}}{V_p} M \simeq G^{(D)} N \cdot \frac{1}{g(\sqrt{\alpha'})^{p+1}} \quad (23.50)$$

と計算される [本稿次節で補足]。ここで体積因子 V_p は相殺されたため、結果に残らないことに注意されたい。最後に $G^{(D)} \sim g^2(\sqrt{\alpha'})^{D-2}$ を用いると (13.4 節)、これは式 (23.52):

$$R^{D-p-3} \simeq gN(\sqrt{\alpha'})^{D-p-3}, \quad \therefore \left(\frac{R}{\sqrt{\alpha'}}\right)^{D-p-3} \simeq gN$$

へと書き換えられる。

23.5 について

■重力ポテンシャルの式 (23.45) について 重力場の方程式 (3.102)、すなわち

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G^{(D)} \rho_m$$

に基づけば、3.5 節における高次元の球対称な静電場の解析と同様に、質量 M の作る球対称で静的な重力場 $g(r)$ は

$$g(r) \text{vol}(S^{d-1}(r)) = -4\pi G^{(D)} M, \quad \therefore g(r) \sim -\frac{G^{(D)} M}{r^{d-1}}$$

*19 R が弦の長さ $\sqrt{\alpha'}$ よりも短くなると、重力効果が関与するような尺度が、実際には存在しなくなる。

と定まる．ここから重力ポテンシャルは式 (23.45):

$$V \sim -\frac{G^{(D)}M}{r^{d-2}} = -\frac{G^{(D)}M}{r^{D-3}}$$

と評価されることが分かる．ただし 1 程度の数係数を無視しているため，本稿では教科書の \simeq ではなく，大雑把な見積もりに対する記号 \sim を用いた．

■ Dp -ブレーンの張力 (23.48) について 確かに出発点は式 (18.57) ではあるが，より直接的には式 (18.57): $T_p(g) = \tau_p/g$ よりむしろ，これに計算練習 18.3(p.410) の結果

$$\tau_p = \frac{1}{(2\pi)^{p+1}\sqrt{\alpha'}^{p+1}}$$

を代入した表式である．

■ ブレーンの総質量 (23.49) について 「静的な Dp -ブレーンでは，そのブレーンの張力 T_p と体積 V_p の積が，ブレーンの質量を与える」 (p.410, 1.12,13) ことを思い出す．

■ 式 (23.50) について 第 2 の等号 $G^{(D-p)} = G^{(D)}/V_p$ は式 (3.117): $G^{(D)}/G = V_C$ と同様の関係である．

23.6 AdS/CFT 対応への動機付け

本節では AdS/CFT 対応への動機付けを考える．AdS/CFT 対応とは

- ゲージ理論：
 - N 個の重なり合った D3-ブレーン系において
 - 低エネルギーで生じる超対称 $SU(N)$ ゲージ理論 (すなわち CFT)
 - 超対称性を持たないゲージ理論である QCD の物理とは異なっている
- 閉弦理論：
 - その D3-ブレーン系によって形成される
 - 重力的な背景に密接に関係する時空 (AdS₅ を含む) の中の IIB 型超弦理論

の等価性のことであり，双対性とも呼ばれる．ゲージ理論が存在する Minkowski 時空は，ある意味において，閉弦が存在している空間の境界である．

AdS/CFT 対応はまだ証明されておらず，最初，以下に示す 2 種類の発見的な議論によって動機付けがなされ，そこから拡張的に調べられてきた．

- 対称性の概念に基礎を置く議論
 - 場の理論が持つ，15 個の演算子によって生成される共形対称性
 - ↔ 弦理論における，15 個の演算子によって生成される
 - AdS₅ × S⁵ 時空の等長変換 (アイソメトリー) [S⁵ は 5 次元球面 (後述)]
- 低エネルギー極限の描像を基調とする議論 (下記)

低エネルギー極限は，エネルギー E が弦のエネルギー尺度 $1/l_s$ に比べて著しく低い状況

$$E \ll \frac{1}{\sqrt{\alpha'}}$$

である [例えば弦の基本状態における質量の自乗 (12.163),(13.48): $M^2 \sim 1/\alpha'$ を思い出す]. 等価的にすべてのエネルギーをある値以下 $E \leq E_0$ に固定して $\alpha' \rightarrow 0$ とすれば, 低エネルギーの条件 $E \ll \frac{1}{\sqrt{\alpha'}}$ が成立する. ここで D3-ブレーンの数 N を固定して弦の結合定数 g を変化させることで, 2つの極限 $gN \ll 1, gN \gg 1$ を調べる.

まず $gN \ll 1$ の場合を考えると, 次の2つの系が得られる.

1. 10次元 Minkowski 時空における閉弦の系

- 23.5節で見たように, $gN \ll 1$ では重力効果を見捨てる → 平坦な10次元 Minkowski 時空
- 低エネルギー極限 $\alpha' \rightarrow 0$ では $G^{(10)} \sim g^2(\alpha')^4$ はゼロになり, 閉弦の場合は自由場になる.

2. 超対称4次元 $U(N)$ Yang-Mills 理論

- D3-ブレーンに接続している開弦は低エネルギー極限 $E \ll \frac{1}{\sqrt{\alpha'}}$ では質量を持つ状態になれないので, 無質量の $U(N)$ Yang-Mills 理論によって記述される. [場は D3-ブレーン上に, したがって4次元時空に存在すると見なされる.]
- 21.2節で学んだように, 実際にはひとつのゲージ場が分離し, 相互作用を持つ理論として残るのは $SU(N)$ Yang-Mills 理論である.

これら2つの系も結合 $G^{(10)} \rightarrow 0$ により相互作用を持たずに共存することになる.

次に $gN \gg 1$ の場合を考える. すると [23.5節で見たように] 重力効果が重要になる. このとき D3-ブレーンの広がる方向を x^1, x^2, x^3 とすると, それに直交する横方向 x^4, \dots, x^9 に関する6次元空間の幾何学 [重力を表す] は図30のように狭路 (throat) 状となり, 図30の円で表されている5次元球面 S^5 は狭路内を進むにしたがって, 一定の体積 (関係する半径 R) に近づく. 狭路の無限の先の“終端”は地平 (ホライズン) と呼ばれ, R は地平の半径と呼べる. 地平付近の幾何は $AdS_5 \times S^5$ となることが判明する. 6次元空間に横方向座標 x^4, \dots, x^9 の代わりに, 動径座標 r と S^5 を形成する座標 y^1, \dots, y^5 を導入すると, r が x^0, \dots, x^3 とともに AdS_5 の座標となる:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \overbrace{x^0 \ x^1 \ x^2 \ x^3 \ r}^{AdS_5} & \overbrace{y^1 \ y^2 \ y^3 \ y^4 \ y^5}^{S^5} \\
 \underbrace{x^0 \ x^1 \ x^2 \ x^3}_{D3\text{-ブレーンの世界座標}} & \underbrace{x^4 \ x^5 \ x^6 \ x^7 \ x^8 \ x^9}_{\text{横方向座標}}
 \end{array}$$

この6次元空間ではブレーンは点として現れ, それは S^5 に囲まれている. [したがってブレーンは狭路の無限の先へと追い出されるので,] この幾何においてもはや D3-ブレーンは現れず, これは単に $AdS_5 \times S^5$ における IIB 型超弦理論の系となる.

地平付近における有限エネルギーの励起から発せられた輻射は赤方偏移するため, 地平から無限遠にいる観測者からは低エネルギー励起と認識される. しかしながらこれはブレーンから遠い位置における低エネルギー励起の輻射と区別することができる. このような構成は

1. 遠方の領域を表す平坦な空間における低エネルギー閉弦の系
2. 地平付近の $AdS_5 \times S^5$ の幾何を背景とする IIB 型超弦の系

という2つの分離した系によって良好に近似できる.

以上で見たように低エネルギー極限では, $gN \ll 1$ と $gN \gg 1$ の2つの領域において2つの分離した系が生じる. 実際には低エネルギー極限において“すべての” gN の値の下で2つの系への分離が起こる. その

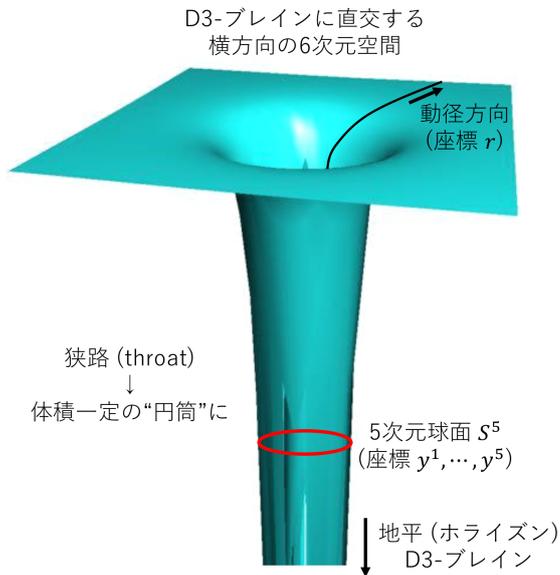


図 30 狭路 (throat) の幾何

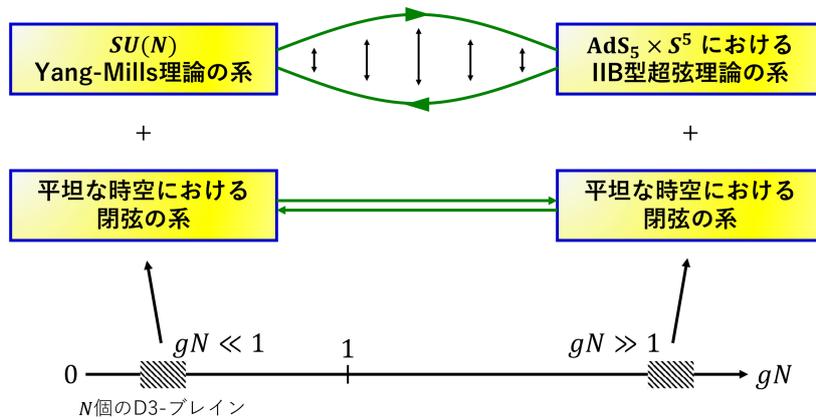


図 31 AdS/CFT 対応 (低エネルギー極限の描像)

一方は平坦な時空における自由な閉弦の系である。もう一方の系は $gN \ll 1$ では $SU(N)$ Yang-Mills 理論, $gN \gg 1$ では $AdS_5 \times S^5$ における IIB 型の超弦理論となっている。これらは実際には同じものであり, gN の中間的な値においても両者は等価になっているというシナリオが AdS/CFT 対応である (図 31 参照)。

23.6 について

■p.540 の訳註の引用

22.7 節の 5 次元荷電ブラックホールに対するモデルでは, 最初から 5 次元のコンパクト空間があって, コンパクト空間内だけに広がった D-ブレーンが想定された。したがって, 実効空間は D-ブレーンと直交する方向だけを含

んでいた (実効空間において D-ブレーンは ‘点’ であった). それに対して, ここではモデルの出発点において, 広がった空間内で全方向を満たさない D3-ブレーンを設定してあり, 最終的に残る実効空間は, 元々設定された D-ブレーンに沿った方向と直交方向を両方とも含む形になる. このような事情が, ブラックホールの時空とは全く性質の異なる負の曲率を持つ時空 (23.8-9 節) が形成される背景となっている.

■ $gN \gg 1$ で重力が重要となることについて 「 $gN \gg 1$ になると重力効果が重要になる」 (p.541, 1.11) のは 23.5 節で見たように, ブレーン系の作る重力が遠方へ届くからである. 続いて「ブレーン系は, エネルギーと Ramond-Ramond チャージを持つようになる. その結果, N 個の D3-ブレーンは, IIB 型の閉弦の無質量場に関する場の方程式の非自明な解によって記述されるが, ……」 (p.541, 1.11–13) とある. これはブレーンがエネルギーとチャージを持つことで, 10 次元時空における閉弦の場と相互作用するようになるためであると考えられる. 重力子が閉弦から現れることを思い出せば, このことも重力が重要になることに整合していると考えられる. しかしながら「低エネルギー励起だけを考慮する限り, このブレーン系における励起と, 時空における励起は結合をもたないままであ」 (p.541, 1.9–10) り, 低エネルギー極限では, これらはやはり「2 つの分離した系」 (p.542 下 2 行) である.

■ 狭路の図 23.6 (教科書 p.541, 本稿の図 30) について 曲面上の長さ ds が真の長さを, その水平面へ射影した線要素が対応する座標距離を表すように空間の歪みを可視化していると想像される.

23.7 AdS/CFT 対応におけるパラメーターの関係

理論の含む無単位のパラメーター

$$\begin{aligned} \text{Yang-Mills : } & g_{\text{YM}}, N, \\ \text{IIB 型超弦 : } & g, R/\sqrt{\alpha'}. \end{aligned}$$

よく定義された D3-ブレーンの個数 N と弦の結合 g を, 残りの g_{YM} と R に関係付ける式

$$\begin{aligned} g_{\text{YM}}^2 = 4\pi g, & \leftarrow \text{式 (13.84) : } g \sim g_o^2, g_o(\sim g_{\text{YM}}) \text{ は開弦の結合 } (gN \ll 1) \\ \frac{R^4}{\alpha'^2} = 4\pi gN. & \leftarrow \text{重力の尺度 } R \text{ の式 (23.52) : } \frac{R^4}{\alpha'^2} \sim gN \quad (gN \gg 1) \end{aligned}$$

あるいは 't Hooft 結合 $\lambda = g_{\text{YM}}^2 N$ を用いて書き換えれば

$$g = \frac{\lambda}{4\pi N}, \quad \frac{R}{\sqrt{\alpha'}} = \lambda^{1/4}.$$

理論の取扱いが簡単になる, 弱い結合を考える際に陥るジレンマ

- 簡単なゲージ理論の計算を利用するには 't Hooft 結合 λ が小さくなければならないが, λ がゲージ結合となるのは N が大きい場合 [(23.4 節), したがって $\lambda = g_{\text{YM}}^2 N$ が大きい場合] である.
- 弦理論を容易に扱うには結合 [$g = \lambda/4\pi N$ が, したがって λ が] 小さくなければならないが, 同時に球面 S^5 の曲率が小さいための条件として半径 $R/\sqrt{\alpha'} = \lambda^{1/4}$ は大きくななければならない.

p.545 下から 11 行目以降を引用する.

その困難さにも関わらず, AdS/CFT 対応に関して多くの非自明な部分の検証が行われてきた. たとえば重力側において存在する場の組が, Yang-Mills 理論において存在する場の演算子の組と整合する

ことが示された。超対称性は、保護される観測量 (protected observable) と呼ばれる λ に依存しない諸量を導くことにより有用となる。それらをゲージ理論側において結合ゼロで計算して、重力的な予測と比較することができる。そのような量の比較がいくつか成功裡に行われ、更に新たな保護される観測量も発見された。もし我々が AdS/CFT 対応の正しさへの確信を宣言するならば、それを調べることの困難は、むしろ美点へと転化する。大きな λ の効果をゲージ理論で計算することは著しく困難であるが、それを代わりに 10 次元超重力理論によって計算できることになる。

AdS/CFT 対応に関する最近の多くの研究では、Yang-Mills 理論が備えている超対称性が少ないか、もしくは超対称性がないような状況が扱われている。そのような拡張は、QCD へ適用できるような対応関係を得るために必要とされる。その他に、弱い結合において対応関係を直接に調べることができるような、別の種類の N の大きな極限についても多くの研究がなされている。

23.7 について

■式 (23.58) について 地平の半径 R が、式 (23.52) で与えられる D-ブレーンによる重力の特徴的な尺度 R に読み替えられている。

計算練習 23.2 (p.545)

式 (23.60): $R/\sqrt{\alpha'} = \lambda^{1/4}$ より

$$\lambda' \equiv \frac{\alpha'^2}{R^4} = \frac{1}{\lambda}.$$

よって λ' を弦の展開パラメーターとするならば、これが小さいことは Yang-Mills 側の展開パラメーター λ が小さいことと両立しない。これは式 (23.60): $R/\sqrt{\alpha'} = \lambda^{1/4}$ において、「IIB 型の理論を容易に扱うには、左辺が大きくなければならないが、ゲージ理論を容易に扱うには、右辺が小さくなければならない」(p.545, 1.9,10) という直前のジレンマと同じである。

計算練習 23.3 (p.545)

式 (23.60), 式 (23.61) より

$$G^{(10)} = \frac{(2\pi)^7}{16\pi} \left(\frac{\lambda}{4\pi N} \right)^2 \left(\frac{R}{\lambda^{1/4}} \right)^8 = \frac{\pi^4 R^8}{2N^2} : (23.62)$$

を得る。10次元 Planck 長さ $l_p^{(10)}$ を l_p と略記すると式 (3.108): $l_p^8 = G^{(10)}$ なので、上の結果は $R/l_p \sim N^{1/4}$ を意味する。すなわち Planck 単位系では、球面 S^5 の半径は't Hooft パラメーターに依存しない。

23.8 双曲型空間と共形世界

本節では、反 de Sitter 時空の幾何を学ぶための準備を始める。

de Sitter 時空 $dS_{n+1} \cdots \cdots 1$ つの時間次元と n 個の空間次元から成る、正の曲率を持つ時空。

反 de Sitter 時空 $AdS_{n+1} \cdots \cdots 1$ つの時間次元と n 個の空間次元から成る、負の曲率を持つ時空。

曲率について説明しよう。まずは時間次元を持たない曲がった空間として 2 次元面を、それが埋め込まれた \mathbf{R}^3 の立場から考える。曲面上の点 p に法線ベクトル \vec{n}_p を立て、 \vec{n}_p を含む平面を適当にとると、曲面と平面

の交線として点 p を通る曲線が得られる。平面を \vec{n}_p の周りに回転させて得られる曲線群について、曲面の p での接平面を境として

- すべての曲線が同じ側に湾曲しているならば、曲面は点 p において正の曲率を持つ。
 - 例：球面 S^2 (曲率は一定)
- 互いに反対側に湾曲する 2 本の曲線が見出されるならば、曲面は点 p において負の曲率を持つ。
 - 例：双曲型空間 \mathbf{H}_2 (曲率は一定)

★ 高次元空間に依らずに 2 次元面の中で曲率を考えると、
「ある点を中心とする小さい円の円周が、平坦な 2 次元世界の場合の $2\pi r$ よりも縮んでいけば、その点における曲率は正、 $2\pi r$ よりも伸びていけば曲率は負である」(p.546 訳註より)。

以下では [AdS $_{n+1}$ と同様、負の曲率を持つ] 双曲型空間を重点的に取り上げる [その結果は次節で AdS 時空を記述するのに援用できる]。

双曲型空間 \mathbf{H}_2 :

$$-z^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 = -R^2$$

(ただし $z \geq R$ の葉 (リーフ) を選ぶ) を、

$$ds^2 = -dz^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2$$

で与えられる計量を持つ “3 次元 Minkowski 空間” M_3 の中の曲面として考える。ここでは z を時間座標と見なしており、例えば $v^\mu v_\mu < 0$ となる v^μ を時間的ベクトルなどと呼ぶことにすると、

- \mathbf{H}_2 上の点の位置ベクトル v^μ は時間的である ($v^\mu v_\mu = -R^2$)。
- 位置ベクトル v^μ は \mathbf{H}_2 に対する正接 [接ベクトル] δv^μ と、スカラー積 $v^\mu \delta v_\mu = 0$ の意味で直交する。
- 正接 δv^μ は必ず空間的である (計算練習 23.5, 23.6)。

次に

$$ds^2 = -dz^2 + dx^i dx^i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

で与えられる計量を持つ Minkowski 空間 M_{n+1} において、双曲型空間 \mathbf{H}_n :

$$-z^2 + x^i x^i = -R^2$$

に誘導される計量を決定する問題に移る。まず曲面 \mathbf{H}_n に新たな座標 $\xi^i (i = 1, \dots, n)$ を導入する [\mathbf{H}_n は n 次元の拡がりを持つので、 n 個の座標でパラメライズされる]。具体的には双曲面上の点 $P(z, \vec{x})$ (ただし $\vec{x} = (x^1, \dots, x^n)$) に対して、 P と点 $Q(-R, \vec{0})$ を直線で結び、超平面 $z = 0$ (スクリーン) との交点 P' の x^i 座標を点 P の座標 ξ^i として用いる (図 32 参照)。またスクリーン上の半径を

$$r = \overline{OP'} = \sqrt{(\xi^1)^2 + \dots + (\xi^n)^2}$$

と表記する。このとき点 $P(z, \vec{x})$ の座標 x^i と新しい座標 ξ^i の関係

$$x^i = \frac{2R^2}{R^2 - r^2} \xi^i \quad (23.71)$$

が見出される [導出は下記、図形的に $0 \leq r < R$ である]。これを \mathbf{H}_n の方程式 $z^2 = R^2 + \vec{x}^2$ に代入すれば、 z 座標と ξ^i の関係

$$z = R \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2} \quad (23.72)$$

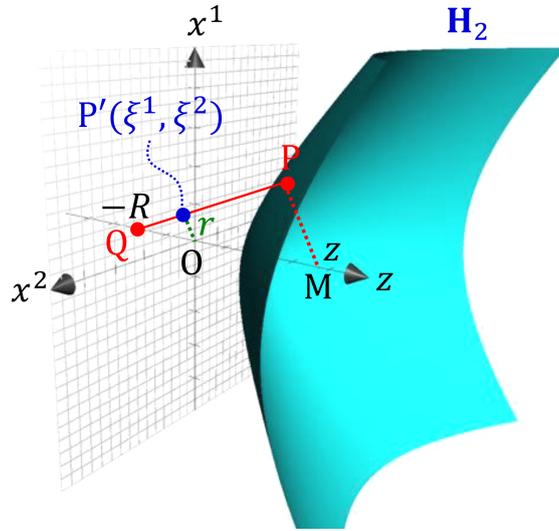


図 32 M_3 における双曲面 H_2 への座標 ξ^i の導入

が求まる [本稿次節で補足しつつ導出]. そこで計量の式 $ds^2 = -dz^2 + dx^i dx^i$ における座標の微分 dz, dx^i を, 特に ξ^i 座標の変化 $d\xi^i$ に伴う曲面上の点の変位と見れば, 曲面上の座標の変化 $d\xi^i$ に対応する線要素の距離の式

$$ds^2 = \frac{4d\xi^i d\xi^i}{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2} \quad (23.76)$$

が得られる [本稿次節で補足しつつ導出]. これが曲面上に誘導された計量を定義する. 最後に $\xi^i/R \rightarrow \xi^i$ (したがって $r/R \rightarrow r$) と座標を無次元化して再定義すると,

$$ds^2 = \frac{4R^2 d\xi^i d\xi^i}{(1 - r^2)^2}, \quad r = \sqrt{\xi^i \xi^i} < 1.$$

$r \rightarrow 1$ は H_n の任意の点から無限に離れた境界に対応する. ここで一般に空間に対して, 余分の因子 $\Omega^2 > 0$ を導入して, $ds'^2 = \Omega^2 ds^2$ で定義される新しい計量において, 境界をその上の全ての点が任意の点から有限の距離にあるような“共形境界” (conformal boundary) とすることができる. ここから興味深い情報がもたらされる. 例えば時空の共形境界に対する正接ベクトルの性質 (空間的, 時間的, 零) である. ベクトルのノルムの符号は, [ベクトル v^μ のノルム $g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu$ を計算する際の計量 $g_{\mu\nu}$ に] $\Omega^2 > 0$ を乗じることによって変更されないため, これは不変な情報である. 双曲型空間 H_n の場合, 共形因子を $\Omega^2 = (1 - r^2)^2 / 4R^2$ と選ぶと

$$ds'^2 = d\xi^i d\xi^i$$

と簡略化される. 共形な空間は平坦な一定の計量における単位球の内部 $\xi^i \xi^i < 1$ であり, 共形境界は単位球面 $S^{n-1} : \xi^i \xi^i = 1$ となっている.

23.8 節, 式の導出など

■ x^i と ξ^i の関係 (23.71) の導出 図 32) において $\vec{\xi} = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ は \vec{x} と平行であり, これらの長さの比は半径 $|\vec{\xi}| = r$ の円上の全ての点に対して共通である. そこで

$$x^i = \rho(r) \xi^i, \quad \therefore |\vec{x}| = \rho r$$

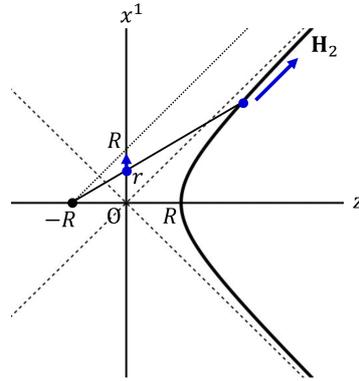


図 33 zx^1 面内で見た双曲面 \mathbf{H}_2

と書き, 比 $\rho(r)$ を見出すために相似な三角形 QOP' と QMP に注目する. すると

$$\frac{OP'}{OQ} = \frac{MP}{MQ}, \quad \therefore \frac{r}{R} = \frac{\rho r}{R+z}$$

であり, ここに

$$z^2 = R^2 + \vec{x} \cdot \vec{x} = R^2 + \rho^2 r^2, \quad \therefore z = \sqrt{R^2 + \rho^2 r^2}$$

を代入すると

$$\frac{1}{R} = \frac{\rho}{R + \sqrt{R^2 + \rho^2 r^2}}$$

を得る. ρ について解くと

$$\rho = \frac{2R^2}{R^2 - r^2} \tag{23.70}$$

となるので [本稿次節で補足], 式 (23.71):

$$x^i = \rho(r)\xi^i = \frac{2R^2}{R^2 - r^2}\xi^i$$

が得られる.

23.8 について

■「 v^2 がゼロでない限り」(p.548, 1.3) について この例外は曲面が“光円錐” $z^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$ になる場合である.

■式 (23.70) について 式 (23.68) を $\sqrt{R^2 + \rho^2 r^2} = (\rho - 1)R$ と書き換えて両辺を平方する.

■「条件 $r^2 < R^2$ により, ……保証される」(p.549, 1.4,5) について 曲面上の点が $(z, \vec{x}) = (R, \vec{0})$ から曲面に沿って無限に遠ざかる際, 距離 r はゼロから増大し限りなく R に近づく. このことは \mathbf{H}_2 に対して図 33 のように zx^1 面内で考えると, 容易に分かる. このため式 (23.70) において, $0 \leq r < R$ の範囲の可能な r に対して $\rho > 0$ が対応する.

■式 (23.72), (23.73), (23.75), (23.76) について

$$\begin{aligned}
 z^2 &= R^2 + x^i x^i = R^2 + \frac{4R^4}{(R^2 - r^2)^2} r^2 = R^2 \frac{(R^2 + r^2)^2}{(R^2 - r^2)^2}, & \therefore z &= R \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2} : (23.72), \\
 dz &= R \frac{\{d(r^2)\}(R^2 - r^2) - (R^2 + r^2)\{-d(r^2)\}}{(R^2 - r^2)^2} \\
 &= \frac{4R^3}{(R^2 - r^2)} \xi^i d\xi^i : (23.73), & (\because d(r^2) &= d(\xi^i \xi^i) = 2\xi^i d\xi^i) \\
 dx^i dx^i &= \frac{4R^4}{(R^2 - r^2)} d\xi^i d\xi^i + \frac{16R^4}{(R^2 - r^2)^3} (\xi^i d\xi^i)^2 + \frac{16R^4}{(R^2 - r^2)^4} r^2 (\xi^j d\xi^j)^2 & (\xi^i \xi^i = r^2) \\
 &= \frac{4R^4}{(R^2 - r^2)} d\xi^i d\xi^i + \frac{16R^6}{(R^2 - r^2)^4} (\xi^i d\xi^i)^2 : (23.75), \\
 ds^2 &= - \left(\frac{4R^3}{(R^2 - r^2)} \xi^i d\xi^i \right)^2 + \left(\frac{4R^4}{(R^2 - r^2)} d\xi^i d\xi^i + \frac{16R^6}{(R^2 - r^2)^4} (\xi^i d\xi^i)^2 \right) \\
 &= \frac{4d\xi^i d\xi^i}{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)} : (23.76).
 \end{aligned}$$

■双曲面 H_2 の曲率と, R の意味について 図 23.8(p.547) 右側のような一葉の双曲型空間 $-z^2 + \bar{x}^2 = R^2$ に対しては, p.546 の説明 (或いは同頁の訳註) に基づき曲率が負であることが視覚的に容易に見て取れる. しかしながら図 23.9(p.549) のような二葉の双曲型空間 $-z^2 + \bar{x}^2 = -R^2$ に対しては, 曲率が負であることを視覚的に納得するのは必ずしも容易ではない. そこで簡単のために 2次元の双曲面 (23.64): $-z^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 = -R^2$ を考え, その曲率を代数的に計算しよう. これを通して, 双曲面の式 (23.64) における R が「 R すなわち空間の曲率半径」(p.550, 1.5) であることを納得する.

まず議論の概要を述べる. 与えられた点の近くで曲面の方程式を

$$z = \frac{x^2}{2\rho_1} + \frac{y^2}{2\rho_2} \quad (30)$$

という形に書いて主曲率半径 ρ_1, ρ_2 を定義する. この点における曲面の Gauss の曲率は

$$K = \frac{1}{\rho_1 \rho_2}$$

で定義される. ただし ρ_1 および ρ_2 は, 対応する曲率中心が曲面の同じ側にあるとき同一符号, 異なる側にあるとき逆符号をもつものとする. したがって前の場合 $K > 0$, 後の場合 $K < 0$ である. これは p.546 における曲率の定性的な説明と整合している.

他方, 23.8 節では曲面に導入した ξ^i 座標に関して, 計量テンソル g_{ij} が式 (23.77) より

$$g_{ij} = \frac{4}{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2} \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2) \quad (31)$$

と定まることを学んだ. ここから

$$\begin{aligned}
 \text{曲率テンソル } P_{ijkl} &\equiv \frac{1}{2}(g_{il,jk} + g_{jk,il} - g_{ik,jl} - g_{jl,ik}) + g_{mn}(\Gamma_{jk}^m \Gamma_{il}^n - \Gamma_{jl}^m \Gamma_{ik}^n), & (32) \\
 \text{スカラー曲率 } P &\equiv g^{ik} g^{jl} P_{ijkl}
 \end{aligned}$$

を計算することができる. ただし $g_{il,jk} \equiv \partial_j \partial_k g_{il}$ などと表記しており, また

$$\Gamma_{jk}^i = g^{il} \Gamma_{l,jk}, \quad \Gamma_{i,jk} = \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{jk})$$

は Christoffel 記号である。曲率テンソル P_{ijkl} の添字 i, j および k, l に関する反対称性により、一般に 2 次元の曲面ではゼロでない唯一の独立な成分として P_{1212} を選ぶことができ、このときスカラー曲率が

$$P = \frac{2P_{1212}}{g}, \quad g \equiv |g_{ij}| = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} \quad (33)$$

で求まることはたやすく示される (導出は下記)。そしてこのスカラー曲率 P は先ほどの Gauss の曲率 K と

$$\frac{P}{2} = K \quad (34)$$

のように関係する (導出は下記) [3, pp.291–293].

以上を踏まえ、 ξ^i 座標に関する計量テンソル g_{ij} から P_{1212} を求め、双曲面のスカラー曲率 P を、したがって Gauss の曲率

$$K = \frac{P}{2} = \frac{P_{1212}}{g}$$

を計算する。(ここでスカラー曲率 P はその名の通りスカラーであり、得られる値はそれを計算する座標系に依らないことに注意する。) すると

$$K = -\frac{1}{R^2} (< 0) \quad (35)$$

という結果を得る (導出は下記)。このため確かに二葉双曲面 \mathbf{H}_2 の曲率は、p.546 で説明されている意味で負であることになる。また上の結果は

$$\rho_1\rho_2 = -R^2$$

を意味するので、双曲面の式 (23.64) における R は各点において主曲率 ρ_1, ρ_2 の相乗平均になっていることが分かる。

以下に補足説明と計算の詳細を記す。

曲面の式 (30) について 与えられた点を原点にとり、この点における曲面の接平面を xy 平面に選べば、2 次元の面 $z = f(x, y)$ は原点付近で 2 次形式 $z = a_{ij}x_ix_j$ によって近似される。 x 軸、 y 軸を a_{ij} の主軸方向に向ければ、これを式 (30):

$$z = \frac{x^2}{2\rho_1} + \frac{y^2}{2\rho_2}$$

の形にすることができる。曲率半径 ρ の円運動の軌道を局所的に放物線で近似すると

$$\begin{cases} x = vt \\ y = \frac{1}{2} \frac{v^2}{\rho} t^2 \end{cases} \rightarrow y = \frac{x^2}{2\rho}$$

となることから、 ρ_1, ρ_2 を主曲率と呼ぶのは理に適っている。

スカラー曲率 P と曲率テンソル P_{1212} の関係 (33) の導出 曲率テンソル P_{ijkl} の ij と kl の入れ替えに関する対称性にも注意すると、 P_{ijkl} のゼロでない成分は

$$P_{1212} = -P_{1221} = -P_{2112} = P_{2121}$$

となる。よってスカラー曲率は

$$\begin{aligned} P &\equiv g^{ik}g^{jl}P_{ijkl} \\ &= g^{11}g^{22}P_{2121} + g^{12}g^{21}P_{2112} + g^{21}g^{12}P_{1221} + g^{22}g^{11}P_{1212} \\ &= (g^{11}g^{22} - g^{12}g^{21})P_{1212} \\ &= \frac{P_{1212}}{g} : (33) \end{aligned}$$

と計算される。ここに

$$g \equiv |g_{ij}| = \frac{1}{|(g_{ij})^{-1}|} = \frac{1}{|g^{ij}|} = \frac{1}{g^{11}g^{22} - g^{12}g^{21}}$$

である。

スカラー曲率 P と Gauss の曲率 $K = 1/\rho_1\rho_2$ の関係 (34) の導出 この公式は曲面の式 (30):

$$z = \frac{x^2}{2\rho_1} + \frac{y^2}{2\rho_2}$$

を利用して以下のように導ける [3, p.293]. x, y 方向への変位に伴う曲面上の“高さ” z の変化は

$$dz = \frac{x dx}{\rho_1} + \frac{y dy}{\rho_2}$$

と表されるので、面上の線要素の 2 乗は

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(1 + \frac{x^2}{\rho_1^2}\right) dx^2 + \left(1 + \frac{y^2}{\rho_2^2}\right) dy^2 + 2\frac{xy}{\rho_1\rho_2} dx dy$$

となる。ここから計量テンソルの成分を

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{x^2}{\rho_1^2} & \frac{xy}{\rho_1\rho_2} \\ \frac{xy}{\rho_1\rho_2} & 1 + \frac{y^2}{\rho_2^2} \end{pmatrix}$$

と読み取ることができる。ここから考えている原点 $x = y = 0$ におけるスカラー曲率 (33): $P = 2P_{1212}/g$ を計算しよう。計量テンソルの微分 $\partial_k g_{ij}$ は原点においてゼロになるので、曲率テンソルの定義式 (32) において Christoffel 記号の項は落ちる。よって曲率テンソルは

$$P_{1212} = \frac{1}{2}(\partial_2\partial_1g_{12} + \partial_1\partial_2g_{21} - \partial_2\partial_2g_{11} - \partial_1\partial_1g_{22})_0 = \frac{1}{\rho_1\rho_2}$$

と評価される (添字のゼロは $x = y = 0$ を代入することを意味する)。また原点において計量テンソルと行列式 $g \equiv |g_{ij}|$ の値は

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = 1$$

となるので、スカラー曲率 (33): $P = 2P_{1212}/g$ は

$$\frac{P}{2} = \frac{1}{\rho_1\rho_2} (= K) : (34)$$

と求まる。

双曲面の曲率 (35) の導出 双曲面 \mathbf{H}_2 の計量テンソル (31) に対して曲率テンソル (32) は

$$\begin{aligned} P_{1212} &= \frac{1}{2}(\partial_2\partial_1g_{12} + \partial_1\partial_2g_{21} - \partial_2\partial_2g_{11} - \partial_1\partial_1g_{22}) + g_{ij}(\Gamma^i_{21}\Gamma^j_{12} - \Gamma^i_{22}\Gamma^j_{11}) \\ &= -\frac{1}{2}(\partial_1\partial_1 + \partial_2\partial_2)\frac{4}{(1 - \frac{r^2}{R^2})^2} + \frac{4}{(1 - \frac{r^2}{R^2})^2}\{(\Gamma^1_{21}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{21}\Gamma^2_{12}) - (\Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{11})\} \end{aligned}$$

となる。最右辺の第 1 項は

$$\begin{aligned}\partial_i \partial_i \frac{1}{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2} &= \frac{4}{R^2} \partial_i \frac{\xi^i}{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^3} \quad (\because \partial_i(r^2) = \partial_i(\xi^j \xi^j) = 2\xi^j \partial_i \xi^j = 2\xi^i) \\ &= \frac{4}{R^2} \left\{ \frac{2}{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^3} + \frac{r^2}{R^2} \frac{6}{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^4} \right\}\end{aligned}$$

と計算される。また

$$\partial_k g_{ij} = \frac{16\xi^k}{R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^3} \delta_{ij}$$

を用いて Christoffel 記号を計算すると

$$\begin{aligned}\Gamma_{1,11} &= \frac{1}{2} \partial_1 g_{11} = \frac{8\xi^1}{R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^3}, & \Gamma_{1,12} &= \frac{1}{2} \partial_2 g_{11} = \frac{8\xi^2}{R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^3}, \\ \Gamma_{1,22} &= -\frac{1}{2} \partial_1 g_{22} = -\frac{8\xi^1}{R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^3}, & \Gamma_{2,11} &= -\frac{1}{2} \partial_2 g_{11} = -\frac{8\xi^2}{R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^3}, \\ \Gamma_{2,12} &= \frac{1}{2} \partial_1 g_{22} = \frac{8\xi^1}{R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^3}, & \Gamma_{2,22} &= \frac{1}{2} \partial_2 g_{22} = \frac{8\xi^2}{R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^3}\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{11} &= g^{11} \Gamma_{1,11} = \frac{2\xi^1}{R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}, & \Gamma^1_{12} &= g^{11} \Gamma_{1,12} = \frac{2\xi^2}{R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}, \\ \Gamma^1_{22} &= g^{11} \Gamma_{1,22} = -\frac{2\xi^1}{R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}, & \Gamma^2_{11} &= g^{22} \Gamma_{2,11} = -\frac{2\xi^2}{R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}, \\ \Gamma^2_{12} &= g^{22} \Gamma_{2,12} = \frac{2\xi^1}{R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}, & \Gamma^2_{22} &= g^{22} \Gamma_{2,22} = \frac{2\xi^2}{R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}\end{aligned}$$

を得る。以上を上式に代入すると

$$\begin{aligned}P_{1212} &= -\frac{16}{R^2} \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^3} + 3 \frac{r^2}{R^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^4} \right\} + \frac{16}{R^4 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^4} \{(\xi^2)^2 + (\xi^1)^2 - (-\xi^1)\xi^1 - \xi^2(-\xi^2)\} \\ &= -\frac{16}{R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^4} \quad (\because (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 = r^2)\end{aligned}$$

となる。さらに計量テンソル (31) に対して

$$g \equiv |g_{ij}| = \frac{16}{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^4}$$

なので、スカラー曲率 (33): $P = 2P_{1212}/g$, Gauss の曲率 (34): $K = P/2$ は

$$K = \frac{P}{2} = \frac{P_{1212}}{g} = -\frac{1}{R^2} (< 0) : (35)$$

と求まる。

■曲線の長さ (23.78) について

$$l(\bar{r}) = 2R \int_0^{\bar{r}} \frac{d\xi}{1-\xi^2} = R \int_0^{\bar{r}} \left(\frac{1}{1-\xi} + \frac{1}{1+\xi} \right) d\xi = R \left[\ln \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \right) \right]_0^{\bar{r}} = R \ln \left(\frac{1+\bar{r}}{1-\bar{r}} \right).$$

$\bar{r} \rightarrow 1$ のとき $l(\bar{r}) \rightarrow \infty$ となることは、定性的には本稿の図 33 とその説明から図形的に理解できる。

■共形境界 (pp.550–551) について 共形因子 Ω^2 の導入 $ds'^2 = \Omega^2 ds^2$ は空間に入れた座標系をそのままにして計量を、したがって空間の幾何学そのものを変更している。

計算練習 23.5 (p.547)

2つの時間的なベクトル u^μ, v^μ を考えると、“Lorentz 変換” (等長変換) により u^μ が時間軸 (z 軸) に沿い、成分

$$u^\mu = (u, 0, 0) \quad (u \neq 0)$$

を持つ座標系がとれる。ここでベクトルの時間的・空間的の区別は座標系に依らない幾何学的な意味を持つことを思い出すと、この座標系においても v^μ は依然として“光円錐”の内部 (始点を原点としたとき、 $z^2 > (x^1)^2 + (x^2)^2$) にあるから、その z 成分 v^z はゼロにはなり得ない。よって我々の座標系で2つのベクトルのスカラー積を評価すると

$$u^\mu v_\mu = -uv^z \neq 0$$

となる。スカラー積の値はそれを計算する座標系の選択に依らないから、2つの時間的なベクトル同士のスカラー積は、必ずゼロ以外の値を持つ。

ところで \mathbf{H}_2 上の点の位置ベクトル v^μ は時間的であり、正接ベクトル δv^μ と直交する ($v^\mu \delta v_\mu = 0$)。よって正接ベクトルは空間的でなければならない。

計算練習 23.6 (p.547)

ここでは式 (23.64) の双曲面 \mathbf{H}_2 の正接ベクトルがすべて空間的であることを、より直接的に確かめる。双曲面の z 軸周りの回転対称性により、双曲面上の点 $(z, x^1, 0)$ における正接ベクトルだけを調べれば充分である。双曲面上の点の位置ベクトルは

$$v^\mu = \left(\sqrt{R^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2}, x^1, x^2 \right)$$

であり、ここから考えている点における2つの接ベクトル

$$a^\mu = \frac{\partial v^\mu}{\partial x^1} \Big|_{x^2=0} = \left(\frac{x^1}{\sqrt{R^2 + (x^1)^2}}, 1, 0 \right), \quad b^\mu = \frac{\partial v^\mu}{\partial x^2} \Big|_{x^2=0} = (0, 0, 1)$$

が得られる (図 34 参照)。

$$a^\mu a_\mu = -\frac{(x^1)^2}{R^2 + (x^1)^2} + 1 = \frac{R^2}{R^2 + (x^1)^2} > 0, \quad b^\mu b_\mu = 1 > 0$$

よりこれらはいずれも空間的ベクトルであり、 $a^\mu b_\mu = 0$ より互いに直交している。この点における任意の正接ベクトルもまた1次結合 $c_a a^\mu + c_b b^\mu$ の形に表されるので、空間的である。

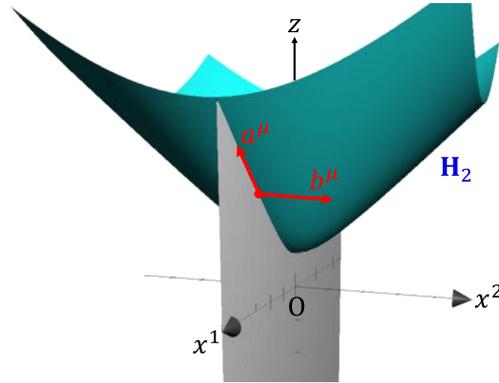


図 34 互いに直交する双曲面 H_2 の空間的な正接ベクトル a^μ, b^μ

23.9 AdS の幾何とホログラフィー

重力の物理において、空間の巨視的な領域に拡がった系の物理が、その境界における理論によって表現できるならば、その系はホログラフィックであると称する。これは光学におけるホログラムが、3次元の物体の情報を欠落のない形で含み、3次元像を再生できる2次元のパターンであることに由来する。AdS/CFT 対応において、4次元時空の $SU(N)$ Yang-Mills 理論は、10次元時空の内部の物理のすべてを捉え、重力世界のホログラフィックな記述を提供する。

AdS 時空の説明から始めよう。通常 AdS_{n+1} 時空は、2つの時間座標 u, v と n 個の空間座標 x^i に対して、

$$ds^2 = -du^2 - dv^2 + dx^i dx^i \quad (i = 1, \dots, n)$$

で与えられる計量を持つ平坦な空間 $\mathbf{R}^{2,n}$ に埋め込まれた曲面

$$-u^2 - v^2 + x^i x^i = -R^2$$

として定義される。 $\vec{x} = (x^1, \dots, x^n)$ という表記法を導入しておく。

- 空間 $\mathbf{R}^{2,n}$ において、一般化された Lorentz 変換、すなわち計量を保存する線形変換が存在する。
- 曲面上の点の位置ベクトル V は時間的である。
(周囲の空間 $\mathbf{R}^{2,n}$ の計量を用いたスカラー積が $V \cdot V < 0$.)
- 曲面は時間的な方向を1つ含む。
 - 曲面の式 $u^2 + v^2 = R^2 + \vec{x} \cdot \vec{x}$ を満たす (u, v) によって定義される、曲面上にある u, v 面内の円に対する正接ベクトルは u, v に沿った成分しか持たないため、何処でも時間的になる。
 - * この (u, v) 円は時間的な閉曲線だから、それに沿って出発前の時間への旅行が可能になってしまう。
 - 我々が欲する“完全な” AdS 時空は、この閉じた線と同じ円において無限に周回する開いた線に置き換えた時空として想像される。
 - この曲面は互いに独立な2つの時間的な方向を含まない (計算練習 23.7).

ここで $\rho = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$ を座標軸に用いて、AdS 時空を2次元面として可視化する。その際、次のことに注意する。例えば図 36 のように半直線 $r \geq 0$ における葉巻の形を考えると、各 r における断面の円は $r = 0$ にお

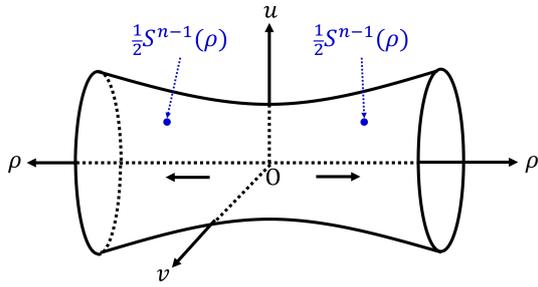


図 35 AdS 時空の 2 次元面としての可視化

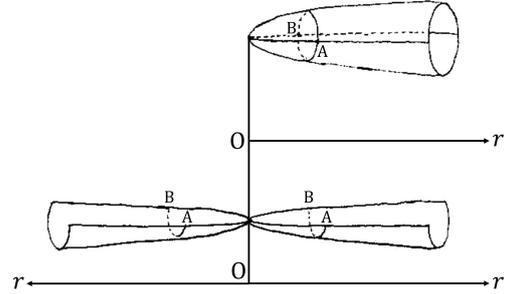


図 36 半直線 $r \geq 0$ における葉巻の形

いて半径がゼロになる。また $r = 0$ の点は葉巻の面の境界ではない。AdS 時空でもこれと同じく、各 (u, v) において曲面の式 $\rho^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} = u^2 + v^2 - R^2$ を満たす x^i によって定義される S^{n-1} 球面の半径 ρ は、座標 $\rho = 0$ においてゼロになることから示唆されるように、 $\rho = 0$ は時空の境界ではない。ところが $\rho \geq 0$ の半直線を座標軸に用いてしまうと、見かけ上 $\rho = 0$ が曲面の境界となって誤解を生じる。これを防ぐには、例えば葉巻に対して図 36 のように、左右両側に増加する r 軸を用い、各々に葉巻を半分ずつ割り当てれば良い。同様に AdS 時空も左右両側に増加する ρ 軸を用いて描画すると図 35 のようになる。 u, v を指定すると ρ 座標 $\rho = \sqrt{u^2 + v^2 - R^2}$ を持つ曲面上の 2 点が定まる。その各々が上述の S^{n-1} 球面を半分ずつ担い、それらを合体させて完全な球面が得られるものと解釈する。

AdS $_{n+1}$ の計量を求めよう。

$$u = z \cos t, \quad v = z \sin t$$

によって、 u, v の代わりに [無次元の] 時間 t と付加的な座標 z を導入すると、

$$\begin{aligned} \text{周囲の計量の式: } ds^2 &= -z^2 dt^2 - dz^2 + dx^i dx^i, \\ \text{曲面の式: } -z^2 + x^i x^i &= -R^2 \end{aligned}$$

となる。 $dt = 0$ で与えられる AdS 時空の “空間” は \mathbf{H}_n の幾何となっており、前節と同様に双曲面 \mathbf{H}_n に ξ^i 座標を導入すると、座標 t, ξ^i に関して AdS $_{n+1}$ に誘導された計量は

$$ds^2 = R^2 \left[- \left(\frac{1+r^2}{1-r^2} \right)^2 dt^2 + \frac{4d\xi^i \xi^i}{(1-r^2)^2} \right] \quad (r = \sqrt{\xi^i \xi^i})$$

から読み取られる。

前節と同じ共形因子 $(1-r^2)^2/4R^2$ を乗じると、共形境界を持つ時空の世界距離は

$$ds'^2 = \frac{(1-r^2)^2}{4R^2} ds^2 = - \left(\frac{1+r^2}{2} \right)^2 dt^2 + d\xi^i d\xi^i$$

で与えられる。これは空間的な n 次元球体 $\xi^i \xi^i < 1$ と 1 つの時間軸を持つ時空を表す。共形境界 $r = 1$ の近くでは

$$ds'^2 \simeq -dt^2 + d\xi^i d\xi^i$$

となり、共形境界は球面 $S^{n-1} : \xi^i \xi^i = 1$ と時間軸から形成されるため $\mathbf{R} \times S^{n-1}$ と表される。

AdS₅ 時空に関しては、共形境界が $\mathbf{R} \times S^3$ となる。AdS を背景とする IIB 型超弦理論に対して双対なゲージ理論は、このような境界に存在する。共形境界の尺度の曖昧さは、場の理論の尺度不変性と整合する。ゲージ理論の物理は 3 次元球面の半径に依らない。もし、この半径を無限大とするならば、境界は平坦な 4 次元 Minkowski 時空となる。(p.556, 1.4-7)

AdS₅ 時空における空間 \mathbf{H}_4 の部分空間 $r \leq \bar{r}$ が持つ、真の体積と境界面積はそれぞれ

$$V_4(\bar{r}) = 2\pi^2 (2R)^4 \frac{\bar{r}^4(3 - \bar{r}^2)}{12(1 - \bar{r}^2)^3}, \quad (23.98)$$

$$A_3(\bar{r}) = \left(\frac{2\bar{r}R}{1 - \bar{r}^2} \right)^3 2\pi^2 \quad (23.96)$$

と計算される [本稿次節で補足しつつ導出]。予想される通りに、これらはいずれも $\bar{r} \rightarrow 1$ において発散するけれど、比は

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow 1} \frac{A_3(\bar{r})}{V_4(\bar{r})} = \frac{3}{R}$$

のように有限となる。AdS 時空においてホログラフィーが実現できるのはこのような事情による。と言うのも、特徴的な寸法 L を持つ平坦な空間では対照的に、領域の体積 $V_4 \sim L^4$ に対する境界の面積 $A_3 \sim L^3$ の比は、 $A_3/V_4 \sim 1/L$ に従って小さくなる。これは領域の境界が比率として領域の中の物理を捉えられないくらい小さくなることを意味している。ホログラフィーの実現が難しい理由である。

さらにホログラフィーの観点から自由度の数について考察できる。まず境界 $\bar{r} = 1$ は“座標に関して”1 のオーダーの体積を持つので、 $\delta \ll 1$ を導入して座標体積 δ^3 あたりに1つの自由度があると考えると、自由度の数は $N_{\text{dof}} \sim 1/\delta^3$ と評価される。正確には境界の理論は $SU(N)$ の場によって形成されるので、自由度の数は N^2 倍した $N_{\text{dof}} \sim N^2/\delta^3$ に修正される。ところが境界面積 $A_3(\bar{r})$ の $\bar{r} = 1$ における発散を防ぐための切断因子にも先ほどの δ を用い、境界 $\bar{r} = 1 - \delta$ の体積を考えると $A_3^\delta \simeq 2\pi^2 R^3/\delta^3$ となり、これと式 (23.63): $R^3 \sim G^{(5)}N^2$ を用いると、自由度の数は

$$N_{\text{dof}} \sim \frac{A_3^\delta}{G^{(5)}}$$

と書き換えられる。これは [式 (3.108): $G^{(5)} = (l_{\text{P}}^{(5)})^3$ を思い出すと] 境界の Planck 面積要素あたりに1つの自由度があるという、ホログラフ的な予想が正しいことを表している。

次にこの自由度を、II 型理論における境界内部で考える。境界内部の空間の体積 V を、 $V_4^\delta \equiv V_4(\bar{r} = 1 - \delta)$ と S^5 の体積 $V_5 \sim R^5$ の積として考えると [式 (23.55) の箇所を参照]、単位体積当たりの自由度の数は

$$\frac{N_{\text{dof}}}{V} \sim \frac{A_3^\delta}{V_3^\delta} \frac{1}{R^5 G^{(5)}} \sim \frac{1}{R} \frac{1}{G^{(10)}}$$

となる。式 (23.59): $R^4/\alpha'^2 = g_{\text{YM}}^2 N$ により、弦の長さ $\sqrt{\alpha'}$ を固定してブレインの数 N を増やすと R が大きくなるので、上式の自由度の密度 N_{dof}/V を任意に小さくすることができる。

23.9 について

■p.552 の訳註の引用

5 次元時空 AdS₅ の境界にあたる 4 次元時空において記述される、重力を含まないゲージ理論が、ひとつ次元の高い 5 次元時空 AdS₅ 内 (および、それに S^5 が付随する) へと「立体的に投影されて」重力を含む理論が映

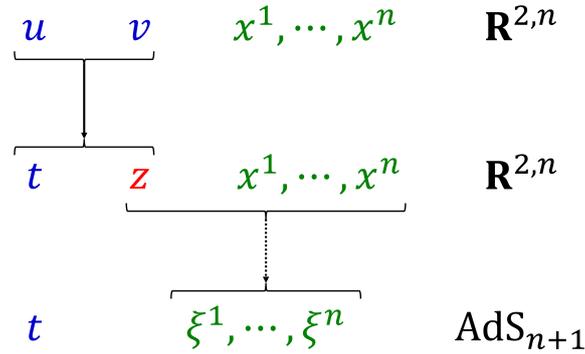


図 37 式 (23.88) における座標変換 $u, v \rightarrow t, z$

し出されていると捉えて‘ホログラフィー’という術語を充てているわけである。あるいは、4次元時空における Yang-Mills 理論とは、10次元時空が、5次元重力時空を含んだある種の特別な構造を持っている場合の超弦理論の特例を、情報の欠落がない形で4次元時空上に写し取ったプログラムデータだとも言える。従来の典型的な問題設定の仕方は、たとえば「Yang-Mills 流の場の量子論をどのように大幅に修正・拡張して重力を包括する理論を構築するか？」といったものであったが、AdS/CFT 対応が正しいならば、実は「Yang-Mills 流のゲージ理論が(超対称性などの但書きは付くにせよ)ほぼそのままの形で既に、ある種の重力理論を内在させていた」ということになり、まことに驚くべきことである。

また、このようなホログラフィーの概念は、重力が存在する物理的世界の‘实在性’に対して哲学的な疑問を投げかける。ブラックホールエントロピーの問題もそうであるが、この観点に立つと、重力理論を含む時空は、平坦な時空において想定されるような‘体積相応の自由度’を持たない(式 (23.103) 参照)。つまり我々が日常感覚において‘空間’だと思っているものは、本当の意味で‘立体的’な実体が、その場で物理を演じている舞台ではなく、何処か(境界がない空間モデルでは議論が難しくなるが)にある‘薄っぺらい’(次元がひとつ低い)実体を、見かけ上‘立体的’に映し出している虚空に過ぎないのかもしれない。‘ホログラフィー原理’(重力を含む $(n+1)$ 次元理論には、重力を含まない n 次元理論の等価表現が存在する)は G. 't Hooft と L. Susskind によって 1990 年代初頭に唱えられた仮説であるが、AdS/CFT 対応は、その数学モデルの実例を初めて具体的に与えたものと言える。

■式 (23.88) における座標変換 $u, v \rightarrow t, z$ について ここで AdS_{n+1} 時空を内に含む $n+2$ 次元時空の持つ2つの時間座標 u, v が、1つの時間座標 t と“空間座標” z に置き換わっている(図 37 参照)。これは AdS 時空が互いに独立な2つの時間的な方向を含まないことを踏まえていると考えられる。実際、 t のみが時間座標であるという解釈を反映して、「任意に指定された時刻において ($dt = 0$)、AdS 時空の“空間的”な幾何は \mathbf{H}_n の幾何になっているのである」(p.554 下から 4,3 行目)とある。

■光線が境界に到達するのに要する時間 $t = \pi/2$ (p.555, l.10) について 境界 $r \rightarrow 1$ までの真の距離が無限大であっても、境界にたどり着くまでの座標時間は有限であって良い。なお時間座標 t はその定義式 (23.88) から分かるように無次元である。

■「 $r \leq \bar{r}$ を満たすようなすべての点を含む“球状の”部分空間 $S(\bar{r})$ 」(p.556, l.9,10) について 計量の式 (23.92) は球対称性を持ち、 r はある種の(すなわち、目盛りの任意性を除いて)動径座標と見なせると考えられる。

■境界面積の式 (23.96) について 座標で測った“面積”は

$$\text{vol}(S^3(\bar{r})) = \bar{r}^3 \text{vol}(S^3) = 2\pi^2 \bar{r}^3$$

である。最後の等号では公式 (3.52): $\text{vol}(S^3) = 2\pi^2$ を用いた。これは \bar{r} と同様、無次元である。座標距離と物理的な距離の比が $2R/(1-r^2)$ であることを考慮すると (この R が長さの次元を担っている), 真の“面積”は

$$A_3(\bar{r}) = \left(\frac{2R}{1-r^2} \right)^3 \text{vol}(S^3) = \left(\frac{2\bar{r}R}{1-\bar{r}^2} \right)^3 2\pi^2 : (23.96)$$

となる。

■領域の体積の式 (23.97), (23.98) について 式 (23.97) は座標の変化 dr に対応する球殻の真の厚み $dl = \frac{2R}{1-r^2} dr$ を用いた球殻積分

$$V_4(\bar{r}) = \int_0^{\bar{r}} A_3(r) dl$$

である。また式 (23.97) の積分を実行すると

$$\begin{aligned} \int_0^{\bar{r}} \frac{r^3 dr}{(1-r^2)^4} &= \frac{1}{2} \int_{1-\bar{r}^2}^1 \left(\frac{1}{R^4} - \frac{1}{R^3} \right) dR \quad (R \equiv 1-r^2) \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3} \left\{ 1 - \frac{1}{(1-\bar{r}^2)^3} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{(1-\bar{r}^2)^2} \right\} \right] \\ &= \frac{(1-\bar{r}^2)^3 + 2 - 3(1-\bar{r}^2)}{2 \cdot 6(1-\bar{r}^2)^3} \\ &= \frac{\bar{r}^4(3-\bar{r}^2)}{12(1-\bar{r}^2)^3} \end{aligned}$$

となるので, 式 (23.98) を得る。

■境界 $r = \bar{r} = 1 - \delta$ の式 (23.100) について 境界面積 $A_3(\bar{r})$ の式 (23.96) 最右辺において, 分子の \bar{r} を 1 と置き, 分母では

$$1 - \bar{r}^2 = (1 - \bar{r})(1 + \bar{r}) \simeq \delta \times (1 + 1) = 2\delta$$

と近似すれば良い。なお $A_3(1-\delta)$ における $1-\delta$ は A_3 の引数 \bar{r} の値である。p.557, 1.11 の $V_4^\delta = V_4(1-\delta)$ についても同様である。

■「自由度の数 N_{dof} 」(p.557, 1.1) について 添字 dof は degree of freedom(自由度) を表していると想像される。

■「この境界は 1 のオーダーの座標体積を持つ」(p.557, 1.3) について 境界の面積(体積) $A_3(\bar{r})$ の式 (23.96) について補足したように, 座標体積は

$$\text{vol}(S^3(\bar{r})) = \bar{r}^3 \text{vol}(S^3) = 2\pi^2 \bar{r}^3 (\sim 1)$$

である。真の体積 (23.96) との混同に注意する。

■「この推定には因子 N^2 の修正が施され」(p.557, 1.4-5) について 21.2 節で説明されているように, 「 $SU(N)$ は $N^2 - 1$ 個のゲージ場を持つ理論である」(p.460, 1.19-20). また AdS/CFT 対応が明確になる $N \gg 1$ の場合を考えれば (23.4 節, 1.1-3), $N^2 - 1 \simeq N^2$ として良い。

■「式 (23.63) により, $R^3 \sim G^{(5)} N^2$ である」(p.557, l.9) について 正確な数係数を考慮したもとの式 (23.63):

$$G^{(5)} = \frac{\pi R^3}{2N^2}$$

は, 計算練習 23.4(p.545) で導出が要求されている関係式である. 数係数を無視すれば, R をコンパクト化半径と見て余剰体積を $V_C \sim R^5$ とし式 (3.117): $G^{(10)}/G^{(5)} = V_C$ に代入すると

$$G^{(5)} \sim \frac{G^{(10)}}{R^5}$$

となる. 実際これは式 (23.103) 第 2 の等号「 \sim 」で用いられている. さらに式 (23.62): $G^{(10)} \sim R^8/N^2$ を考慮すると $G^{(5)} \sim R^3/N^2$ を得る.

■式 (23.102) が「ホログラフ的な予想である」(p.557, l.11) ことについて 式 (3.108): $G^{(5)} = (l_P^{(5)})^3$ より, これは 5 次元時空中における Planck 長さ $l_P^{(5)}$ から作られる 3 次元領域の“面積”である. よって式 (23.102): $N_{\text{dof}} \sim A_3^{\delta}/G^{(5)}$ は 3 次元の「境界の Planck 面積要素あたりにひとつの自由度」(p.557, l.6) があるという, ホログラフ的な予想が正しいことを表している.

計算練習 23.7 (p.553)

曲面の uv 面内の回転対称性より $v = 0$ の点を考えても一般性を失わないけれど, 具体的な点 $(R, 0, \vec{0})$ における結論は曲面上の他の任意の点には適用できないと考えられる. また曲面上のある点において独立な 2 つの時間的な正接ベクトルがある場合には, それらを直交するように選べるものと考えれば, (対偶として) 互いに直交する時間的な方向がなければ独立な 2 つの時間的な方向がないと言えると思われ.

教科書の図 23.10(p.553, 本稿の図 36) を基に半ば直観的に考えると, 曲面は点 $(R, 0, \vec{0})$ において $a^\mu = (0, 1, \vec{0})$ を 1 つの正接ベクトルに持つと考えられる. もう 1 つの正接ベクトル b^μ を考えると, その u 成分は図形的にゼロでなければならないため, $b^\mu = (0, b^v, \vec{b})$ とおける. これが \vec{a} と直交するためには, $0 = a^\mu b_\mu = -b^v$ より $b^\mu = (0, 0, \vec{b})$ という形でなければならない. これは空間的ベクトルなので, この曲面は点 $(R, 0, \vec{0})$ において互いに直交する時間的な方向を含まない.

なお時間座標を 1 つだけ持つ通常の Minkowski 空間に対しては, 計算練習 23.5(23.8 節) で示したように「2 つの時間的なベクトル同士のスカラー積が, 必ずゼロ以外の値を持つ」. このことが空間 $\mathbf{R}^{2,n}$ においても妥当するならば, 結論は一般論として背理的に示せることになる.

23.10 有限温度における AdS/CFT 対応

AdS₅ 時空中に Schwarzschild ブラックホールがあるときの時空の幾何学は,

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{r_0^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_3^2$$

で決まる.

- r_0 はパラメーターであり, ブラックホールの質量を M とし $r_0^2 \sim G^{(5)} M$ である.
- 上式は $r \gg r_0$ では“漸近的に”

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{R^2}} + r^2 d\Omega_3^2$$

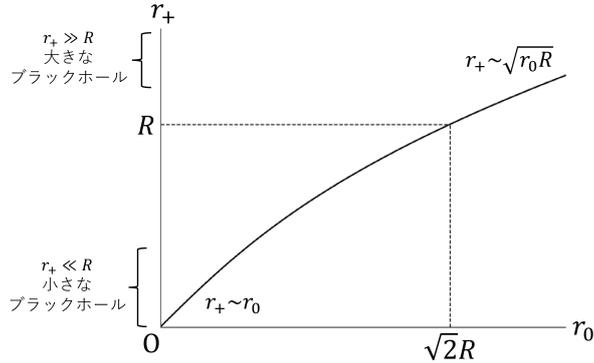


図 38 AdS ブラックホールの Schwarzschild 半径 r_+ の r_0 (したがって質量 M) に対する依存性

に移行する。これは AdS_5 時空の幾何学を、

前節と異なる座標で表した式である ($d\Omega_3^2$ の意味と併せて、問題 23.5 参照)。

- 曲率半径 $R \rightarrow \infty$ のとき、上式は

5次元 Minkowski 時空の中にある Schwarzschild 半径 r_0 のブラックホールを表す式

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_3^2$$

になる。

- AdS 時空のブラックホールの Schwarzschild 半径 r_+ は

$$r_+^2 = \frac{R^2}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4r_0^2}{R^2}} - 1 \right)$$

で定まる (図 38, r_+ は g_{tt} をゼロにする r の値として得られる)。

- このブラックホールは Hawking 温度

$$\bar{T}_H = \frac{R^2 + 2r_+^2}{2\pi r_+ R^2}$$

を持つ (図 39, この表式の起源に対する簡単な説明は計算練習 23.8 (p.558))。

- 小さいブラックホール $r_+ \ll R$ では AdS 時空の曲率の効果を無視できるので、

Minkowski 時空のブラックホールと同様、

r_+ が小さいほど熱くなる (式 (22.120) 参照) : $\bar{T}_H \simeq 1/2\pi r_+$ 。

- 大きいブラックホール $r_+ \gg R$ では、 r_+ とともに温度が高くなる : $\bar{T}_H \simeq r_+/\pi R^2$ 。

AdS 時空の中にブラックホールがある (したがって漸近的 AdS 時空の) 場合にも、AdS/CFT 対応を拡張できると考えられる。このときの双対なゲージ理論の候補は、ブラックホールと同じ有限温度 \bar{T}_H における $SU(N)$ Yang-Mills 理論である。[有限温度とは、ゼロでない温度という意味であると考えられる。]

対応関係の検証のために、有限温度の場の理論においてエントロピーを計算し、それを (大きい) ブラックホールのエントロピーと比較して、等しくなるかどうかを調べる。まず有限温度 $T = \bar{T}_H$ における $SU(N)$ Yang-Mills 理論におけるエントロピーは、

- 光子気体のエントロピー密度 $s_\gamma = \frac{2}{45} \pi^2 T^3 \cdot 2$ (因子 2 は光子の自由度)

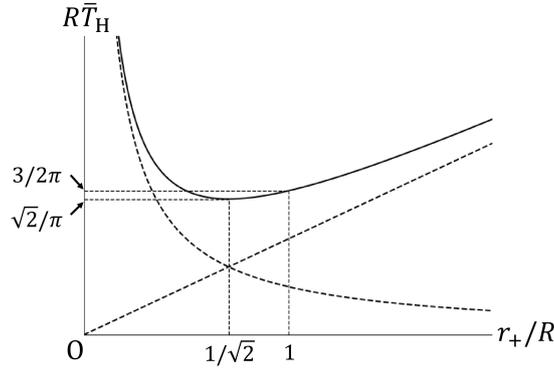


図 39 AdS ブラックホールの Hawking 温度 \bar{T}_H と Schwarzschild 半径 r_+ の関係

- 理論の存在する 3 次元球面の体積 $2\pi^2 R^3$
- $SU(N)$ 理論の場の個数 $N^2 - 1 \simeq N^2$
- ボゾンの自由度 8, フェルミオンの自由度 8 (エントロピーへの寄与はその 7/8 倍)

より

$$S_{\text{YM}} = \frac{2}{45} \pi^2 T_H^3 \cdot \left(8 + 8 \cdot \frac{7}{8}\right) N^2 \cdot (2\pi^2 R^3) = \frac{2}{3} \pi^2 N^2 T_H^3 \cdot (2\pi^2 R^3)$$

と計算される。ただし全エントロピーが個別の寄与の総和となる根拠として, $SU(N)$ 理論における無質量の粒子の相互作用を無視できる, 't Hooft 結合が弱い極限 $\lambda \ll 1$ を仮定している。他方ブラックホールのエントロピーは, 地平 $r = r_+$ の面積 $A_{\text{hor}} = 2\pi^2 r_+^3$ を 5 次元 Newton 定数 $G^{(5)} = \pi R^3 / 2N^2$: (23.63) で割った値

$$S_{\text{BH}} = \frac{A_{\text{hor}}}{4G^{(5)}} = \pi N^2 \frac{r_+^3}{R^3} = \pi^4 N^2 T_H^3 R^3$$

で与えられる。ただし最後の等号では大きいブラックホール $r_+ \gg R$ を仮定して式 (23.111): $T_H \simeq r_+ / \pi R^2$ を用いた。またブラックホールの描像には, $\lambda \gg 1$ という仮定が暗に含意されている。 S_{BH} と S_{YM} の両者は

$$S_{\text{BH}} = \frac{3}{4} S_{\text{YM}}$$

のように定性的に一致する。定量的に正確に一致しないのは λ の異なる領域で計算を行ったからであり, むしろこれで良い。

ブラックホールの Hawking 温度 \bar{T}_H は最小値 $T_0 = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{R}$ を持つので (計算練習 23.9), T_0 よりも低い温度では, 場の理論は双対なブラックホールを持つことができない。この場合の双対な系は, 単に熱的な AdS, すなわち特定された温度を持つ粒子気体で満たされた AdS 時空である。実は温度が T_0 よりも少し高い温度 $T_1 = \frac{3}{2\pi R}$ に達して初めて, ブラックホールが双対な系となる (Hawking-Page 転移)。 $T > T_1$ ではブラックホールの半径 r_+ として 2 つの値が可能であるけれど, 転移後の安定な状態として $[r_+ > R]$ 大きいブラックホールが選ばれる (図 39 参照)。

23.10 について

■ 「 $r_0^2 \sim G^{(5)} M$ 」 (p.557, 1 番下の行) について 重力の距離尺度 (23.46): $R^{D-3} \equiv G^{(D)} M$ が参考になる (今の場合, $D = 5$)。これは式 (23.46) の箇所でも説明されているように, 数係数の違いを除けば Schwarzschild

半径の評価に一致しているけれど、Schwarzschild 半径は r_0 ではなく式 (23.107) で定まる r_+ であることに注意する。

■AdS 時空のブラックホールの Schwarzschild 半径 r_+ について 「 r_+ は常に r_0 よりも小さい」 (p.558, 1.10) ことは、式 (23.106) を

$$\left(1 + \frac{r_+^2}{R^2}\right) r_+^2 = r_0^2$$

と書き換えると見やすい。また式 (23.108):

$$\frac{r_+^2}{r_0^2} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{4r_0^2}{R^2}}}$$

は r_+^2 の表式 (23.107) を有理化して得られる。ここから確かに $R \rightarrow \infty$ のとき $r_+ \rightarrow r_0$ となることが容易に見て取れる。

■光子気体のエントロピー密度の式 (23.114) について この式の導出は、例えば文献 [15, pp.324-326] を参照。この式を含め本節では、Boltzmann 定数を $k = 1$ とおいているようである。このとき温度 T は kT と同じくエネルギーの次元を持ち、したがって自然単位系で長さの逆数の次元を持つ。これは Hawking 温度の式 (23.109) と整合している。

■ブラックホールのエントロピー (23.117) について 式 (23.102) について補足したように、式 (3.108): $G^{(5)} = (l_p^{(5)})^3$ より、これは 5 次元時空における Planck 長さ $l_p^{(5)}$ から作られる 3 次元領域の“面積”である。よってエントロピーの式 (23.117) は、4 次元時空における Schwarzschild ブラックホールのエントロピーに対する式 (22.124) の自然な一般化として理解できる。

■「(大きい) ブラックホール」 (p.560, 1.9,10), 「式 (23.111) の r_+ と T_H の関係」 (p.560 下から 2 行目) について p.558 で定義したように、大きなブラックホールとは $r_+ \gg R$ を意味する。いずれも大きいブラックホール $r_+ \gg R$ を仮定するのは、「非閉じ込め相のゲージ理論に対して双対関係となるのは、(大きな)AdS ブラックホールである」 (p.561, 下から 5,4 行目) からであると考えられる。

■p.562 の訳註の引用

S. Hawking は 1974 年にブラックホールの蒸発現象 (Hawking 輻射) を理論的に見出し、それを踏まえてブラックホールに落ち込んだ物体の情報は失われ、そこでは通常の量子力学的因果律 (S 行列のユニタリー性) が破綻するという推測を表明した。以来、ブラックホールの情報問題として、その当否について広範な議論が行われてきたが、前章の弦理論によるブラックホールの微視的モデルの構築や、本章の AdS/CFT 対応の概念が現れたことを踏まえて、Hawking は 2004 年に自説を撤回することになった。一般的な AdS/CFT 対応が成立するならば、AdS 側のブラックホールに関わる如何なる過程も原理的に、因果性が自明な Yang-Mills ゲージ理論へ焼き直して等価な記述を得ることが可能なはずである。

計算練習 23.8 (p.558)

一般論

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + \dots \quad \rightarrow \quad f(r_+) = 0, \quad \bar{T}_H = \frac{f'(r_+)}{4\pi}$$

において

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{r_0^2}{r^2}$$

と同定されるので,

$$\frac{f'(r_+)}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2r_+}{R^2} + 2\frac{r_0^2}{r_+^3} \right) = \frac{1}{2\pi r_+ R^2} \left(r_+^2 + R^2 \frac{r_0^2}{r_+^2} \right)$$

となる. 最右辺に式 (23.106): $\frac{r_0^2}{r_+^2} = 1 + \frac{r_+^2}{R^2}$ を代入すると, これは Hawking 温度 (23.109):

$$\bar{T}_H = \frac{R^2 + 2r_+^2}{2\pi r_+ R^2}$$

に一致する.

計算練習 23.9 (p.559)

いわゆる相加平均と相乗平均の関係を用いれば充分である. すると

$$\bar{T}_H = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \left(\frac{R}{r_+} + \frac{2r_+}{R} \right) \geq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \cdot 2\sqrt{\frac{R}{r_+} \cdot \frac{2r_+}{R}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{R}$$

となる. 等号成立は

$$\frac{R}{r_+} = \frac{2r_+}{R}, \quad \therefore r_+ = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

のときである.

計算練習 23.10 (p.561)

$$\frac{3}{2\pi R} = \frac{R^2 + 2r_+^2}{2\pi r_+ R^2}$$

を解くと,

$$2r_+^2 - 3Rr_+ + R^2 = 0, \quad \therefore r_+ = \frac{R}{2}, R$$

を得る. よって $T > T_0$ で得られる 2 つのブラックホールの一方は $r_+ > R$ となる (図 39 参照).

23.11 クォーク-グルーオンプラズマ

2005 年に相対論的重イオン衝突型加速器 (RHIC) により金の原子核を衝突させる実験が行われた. この実験では短い時間, クォーク-グルーオンプラズマ (QGP), すなわち, 閉じ込めから解放されたクォークとグルーオンが強い相互作用をしている系が作り出されたように見える結果が得られた.

QGP を, AdS/CFT 対応の有限温度版によって調べることができないかと思うのは自然なことである. 一見すると, QCD は超対称性を持たない $SU(3)$ ゲージ理論であり, 超対称 $SU(N)$ ゲージ理論とはかなり違うので, 望みは薄いようにも思われる. しかしながら, この提案がさほど不当なものではないと思わせる事実もいくつかある. 第 1 に, QGP は強く結合しているので, $N = 3$ であっても 't Hooft 結合 $[\lambda = g_{YM}^2 N]$ は $\lambda \sim 20$ と大きくなり, 重力側の計算も許容されると考えられる. さらに有限温度において, 超対称性は破れた対称性となっており, その効果は幾分隠されることになる. 有限温度の QCD と, 有限温度の超対称なゲージ理論が, 全く異なるものではないと期待することも尤もらしい. (p.563, 1.19-26)

QGP の粘性の小ささ RHIC のデータ解析結果によると,

QGP の粘性率 η とエントロピー密度 s の比 η/s は通常の液体や気体に比べてはるかに小さい.

他方, AdS/CFT 対応を仮定して重力双対系の側で計算される比の値は

$$\frac{\eta}{s} = \frac{\hbar}{4\pi k} \quad (23.123)$$

となり [下記の説明を参照], この結果を説明し得る.

ジェット-クエンチ係数 \hat{q} 高エネルギーにおいて QGP を通るクォーク (ジェットを形成) が,

数フェムトメートル進んだところまでで急停止 (クエンチ) されるときの

ジェットのエネルギー損失 ΔE は, プラズマ中の飛行距離を L として

$$\Delta E \sim \hat{q}L^2, \quad \hat{q}: \text{ジェット-クエンチ係数}$$

と表される.

\hat{q} の実験値と双対なブラックホールの背景を用いて計算した値は,

実験の不確かさを踏まえれば一致している可能性を排除しない.

■式 (23.123) の説明 式 (23.123):

$$\frac{\eta}{s} = \frac{\hbar}{4\pi k}$$

の簡単な説明として, 両辺の次元が等しいことを確認する. 左辺について, 速度勾配 $\vec{\nabla}v$ の下で面積 A の流体層を介して伝達される力 F を与える (応力の) 式

$$\frac{F}{A} = \eta|\vec{\nabla}v|$$

に, 比例係数として流体の粘性率 η が現れる. ここから粘性率の次元が

$$[\eta] = \frac{M}{LT}$$

となることが読み取れる (M : 質量, L : 長さ, T : 時間). またエントロピー密度 s の次元は $[s] = [k]/L^3$ なので (k は Boltzmann 定数), 式 (23.123) 左辺の次元は

$$\left[\frac{\eta}{s}\right] = \frac{ML^2/T}{[k]}$$

となり, 右辺 $\hbar/4\pi k$ の次元に一致する [\hbar は角運動量の次元 ML^2/T を持つ].

23.11 について

■「2つの“円盤”の重なる楕円状の領域」(p.563, 1.12) について 2つの金原子核が Lorentz 収縮した円盤を正面から見た様子を図 40 に模式的に示す. 円盤の重なった影の濃い領域を「楕円状」と表現しているものと考えられる. 図 40 に赤い矢印で示した楕円の短軸方向は, 確かに「衝突係数 (impact parameter) の向き」(p.563, 1.12–13) に一致している. この楕円領域を占める QGP を「粘性の極めて弱い流体」(p.563, 1.15–16) と見ると, その「中央に最大圧力がかかり, 端では圧力がゼロである」(p.563, 1.16–17) ため, 「圧力の勾配は楕円の短軸に沿う向きの方が大きくなっており, この方向に放出される粒子数が多くなる」(p.563, 1.17–18).

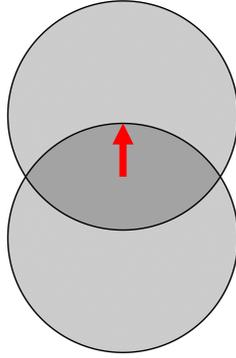


図 40 2つの“円盤”の重なる楕円状の領域

計算練習 23.11 (p.562)

核子の静止エネルギー $mc^2 = 9.4 \times 10^2 \text{MeV}$ を用いて, 原子核内のエネルギー密度は

$$\frac{A \times mc^2}{\frac{4}{3}\pi(A^{1/3}r_0)^3} = \frac{mc^2}{\frac{4}{3}\pi r_0^3}$$

と表される. このように核の体積は核子数 A に比例して増大するため, エネルギー密度は A に依らない. 数値を代入すると, これは

$$\frac{9.4 \times 10^2 \text{MeV}}{\frac{4}{3} \times (1.2 \text{fm})^3} \simeq 0.13 \text{GeV}/\text{fm}^3$$

と計算される. また金の原子核の半径は

$$r \simeq A^{1/3}r_0 = 197^{1/3} \times 1.2 \text{fm} \simeq 7 \text{fm}.$$

計算練習 23.12 (p.563)

p.562 一番下の行~p.563, 1.3 の説明より, QGP のエネルギーは

$$E_{\text{QGP}} = (5 \text{GeV}/\text{fm}^3) \times \pi(7 \text{fm})^2 \times 2 \text{fm} \simeq 1.5 \text{TeV}$$

となる (有効数字 2 桁は主張できないけれど, 続く計算のまるめ誤差を抑えるためにこのまま残しておく). 23.11 節の第 1 段落で説明されているように, 重心系で見た金原子 1 個のエネルギーは $E = 197 \times 100 \text{GeV} (\simeq 20 \text{TeV})$ であり, 衝突において利用できるエネルギーは重心系の全エネルギー $2E$ である. E_{QGP} との比は百分率で

$$\frac{E_{\text{QGP}}}{2E} \times 100 = \frac{1.5 \times 10^3 \text{GeV}}{2 \times 197 \times 100 \text{GeV}} \times 100 \simeq 4 \%$$

問題 (第 23 章)

問題 23.2 量子振動子のコヒーレント状態 [5, p.199]

23.2 節の最終文で言及されている問題 23.2 を解く. 式 (23.18): $|\Psi\rangle = e^{\mathcal{A}} |p^+, \vec{0}\rangle$, $\mathcal{A} = v(\bar{a}_1 - \alpha_{-1})$ に類似の, 単純調和振動子に対するコヒーレント状態

$$|z\rangle = e^{za^\dagger - z^*a} |0\rangle$$

を考える。ただし \hbar を明示し、教科書の簡単なハミルトニアン $H = a^\dagger a$ の代わりに

$$H = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right), \quad N \equiv a^\dagger a$$

とする。

(a) $[A, B] = c$ (定数) の場合には、公式

$$e^A e^B = \exp \left(A + B + \frac{1}{2}c \right)$$

が成り立つ (量子力学のノートを参照)。これを適用すると

$$e^{za^\dagger} e^{-z^*a} = e^{za^\dagger - z^*a} e^{|z|^2/2}$$

となるので、

$$|z\rangle = e^{za^\dagger - z^*a} |0\rangle = e^{-|z|^2/2} e^{za^\dagger} e^{-z^*a} |0\rangle = e^{-|z|^2/2} e^{za^\dagger} |0\rangle$$

の関係が見出される (最後の等号は $e^{-z^*a} |0\rangle = (1 - z^*a + \dots) |0\rangle = |0\rangle$ による)。

さらに $(a^\dagger)^n |0\rangle = \sqrt{n!} |n\rangle$ より、コヒーレント状態は

$$|z\rangle = e^{-|z|^2/2} e^{za^\dagger} |0\rangle = e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(za^\dagger)^n}{n!} |0\rangle = e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} |n\rangle$$

と書き直せる [16, p.26]。そこで最右辺の表式を用いると、

$$\langle z|z\rangle = e^{-|z|^2} \sum_{m,n} \frac{(z^*)^m z^n}{\sqrt{m!n!}} \langle m|n\rangle = e^{-|z|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|z|^{2m}}{m!} = 1$$

より $|z\rangle$ は規格化条件を満たしていることが分かる。

参考 $a|n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$ より、 $|z\rangle$ は消滅演算子 a の固有値 z に属する固有状態であること

$$\begin{aligned} a|z\rangle &= e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (a|n\rangle) \\ &= ze^{-|z|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} |n-1\rangle \\ &= z|z\rangle \end{aligned}$$

が見出される。 $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{ip}{m\omega} \right)$ は非 Hermitian なので、固有値 z は一般に複素数である。

(b-d) 本稿では Heisenberg 描像を採用する。Heisenberg 演算子

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (ae^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t}), \\ p(t) &= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (-ae^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t}) \end{aligned}$$

($a = a(t=0)$, $a^\dagger = a^\dagger(t=0)$) の期待値を、時間変化しない Heisenberg 描像の状態ケット $|z\rangle$ に関してとう。小問 (a) より

$$\langle z|a|z\rangle = z \langle z|z\rangle = z, \quad \langle z|a^\dagger|z\rangle = z^* \langle z|z\rangle = z^*$$

なので,

$$\begin{aligned}\langle x(t) \rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (ze^{-i\omega t} + z^* e^{i\omega t}) \left(= \sqrt{2}x_0|z| \cos\{\omega t - \arg(z)\} \right), \\ \langle p(t) \rangle &= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (-ze^{-i\omega t} + z^* e^{i\omega t}) \left(= -2\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}|z| \sin\{\omega t - \arg(z)\} \right)\end{aligned}$$

となる ($x_0 \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$). これらはともに実数となっており, 古典的な運動方程式に従う角振動数 ω での振動を表している.

Schrödinger 描像 2 式より

$$z = 2 \left(\frac{\langle x(t) \rangle}{\sqrt{\hbar/2m\omega}} + i \frac{\langle p(t) \rangle}{\sqrt{m\hbar\omega/2}} \right) e^{i\omega t}$$

であり, Schrödinger 描像の演算子を $x = x(0), p = p(0)$ と書くと

$$z_0 = 2 \left(\frac{\langle x \rangle}{\sqrt{\hbar/2m\omega}} + i \frac{\langle p \rangle}{\sqrt{m\hbar\omega/2}} \right)$$

である.

状態 $|z_0\rangle = e^{-|z_0|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_0^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$ に時間発展演算子 $e^{-iHt/\hbar} = e^{-i\omega t(N+\frac{1}{2})}$ を作用させると, 時間に依存する物理的状态

$$e^{-|z_0|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\omega t(n+\frac{1}{2})} \frac{z_0^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

が得られる.

問題 23.5 AdS_{n+1} 時空のもうひとつの描像

AdS_{n+1} 時空の計量テンソルを表す式 (23.105) に関して, 23.10 節 (p.557 下から 3 行目) で言及されている問題 23.5 を解く.

(a) 式 (23.90) の第 2 式 $-z^2 + x^i x^i = -R^2$ (ただし $z \geq R$) で表される双曲面は,

$$z = R \cosh \rho, \quad x^i = R \Omega^i \sinh \rho$$

のように新しい座標 $\rho (\geq 0), \Omega^i$ (ただし $\Omega^i \Omega^i = 1$) によってパラメトライズされる. (ρ, Ω^i はいずれも無次元であることが見て取れる.) このとき計量を表す式 (23.90) の第 1 式は

$$\begin{aligned}ds^2 &= -z^2(dt)^2 - (dz)^2 + dx^i dx^i \\ &= -(R \cosh \rho)^2(dt)^2 - (R \sinh \rho d\rho)^2 + R^2(\Omega^i \cosh \rho d\rho + \sinh \rho d\Omega^i)^2 \\ &= R^2[-(\cosh \rho)^2(dt)^2 + (d\rho)^2 + (\sinh \rho)^2 d\Omega_{n-1}^2] \\ &\quad (\because \Omega^i \Omega^i = 1, \Omega^i d\Omega^i = 0, d\Omega^i d\Omega^i \equiv d\Omega_{n-1}^2)\end{aligned} \tag{36}$$

と書き換えられる. なお上式 $d\Omega_{n-1}^2 = d\Omega^i d\Omega^i$ は $\Omega^i \Omega^i = 1$ を満たす単位球面 S^{n-1} 上の座標 Ω^i を用いたときの, S^{n-1} の計量テンソルを表す式となっている.

(b) 小問 (a) の結果 (36) において $dt = 0$ とおいて得られる“空間的な”幾何を考えると、空間は球対称であり、 ρ をある種の動径座標と見なせることが分かる。 n 次元領域 $\rho \leq \bar{\rho}$ の境界の (真の) 面積は、上式 (36) から読み取れる相似比 $R \sinh \bar{\rho}$ (これが長さの次元を持つ) を考慮すると

$$A(\bar{\rho}) = \text{vol}(S^{n-1})(R \sinh \bar{\rho})^{n-1}$$

である*20。一方、領域の体積は、再び上式 (36) より動径方向の座標の差 $d\rho$ に対応する真の長さが $Rd\rho$ であることに注意すると、次の球殻積分で与えられる。

$$V(\bar{\rho}) = \int_0^{\bar{\rho}} A(\rho) R d\rho = R^n \text{vol}(S^{n-1}) \int_0^{\bar{\rho}} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho.$$

$A(\bar{\rho}), V(\bar{\rho})$ はいずれも期待されるように、 $\bar{\rho} \rightarrow \infty$ とすると発散する。しかしながら $\bar{\rho} \rightarrow \infty$ のとき、領域 $\rho \leq \bar{\rho}$ は空間全体となる。その真の体積と境界面積は座標系に依らない量であるから、比 $\lim_{\bar{\rho} \rightarrow \infty} A(\bar{\rho})/V(\bar{\rho})$ は ξ^i 座標を用いた計算結果 (23.99) と整合する有限値とならなければならない。そこで実際に、比 $\lim_{\bar{\rho} \rightarrow \infty} A(\bar{\rho})/V(\bar{\rho})$ を計算しよう。それには体積 $V(\bar{\rho})$ の式に現れる積分

$$I_n \equiv \int_0^{\bar{\rho}} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho$$

を評価する必要がある。部分積分

$$\begin{aligned} I_n &= [\cosh \rho (\sinh \rho)^{n-2}]_0^{\bar{\rho}} - (n-2) \int_0^{\bar{\rho}} \cosh^2 \rho (\sinh \rho)^{n-3} d\rho \\ &= \cosh \bar{\rho} (\sinh \bar{\rho})^{n-2} - (n-2)(I_{n-2} + I_n) \quad (\because \cosh^2 \rho = 1 + \sinh^2 \rho) \end{aligned}$$

により、 I_n に対する漸化式

$$I_n = -\frac{n-2}{n-1} I_{n-2} + \frac{1}{n-1} \cosh \bar{\rho} (\sinh \bar{\rho})^{n-2}$$

を得る。これを逐次用いると

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n-1} \cosh \bar{\rho} (\sinh \bar{\rho})^{n-2} \\ &\quad - \frac{n-2}{n-1} \frac{1}{n-3} \cosh \bar{\rho} (\sinh \bar{\rho})^{n-4} \\ &\quad + \frac{n-2}{n-1} \frac{n-4}{n-3} \frac{1}{n-5} \cosh \bar{\rho} (\sinh \bar{\rho})^{n-6} - \dots, \\ \therefore \lim_{\bar{\rho} \rightarrow \infty} \frac{V(\bar{\rho})}{A(\bar{\rho})} &= \lim_{\bar{\rho} \rightarrow \infty} R \frac{I_n}{(\sinh \bar{\rho})^{n-1}} \\ &= \lim_{\bar{\rho} \rightarrow \infty} R \left[\frac{1}{n-1} \tanh \bar{\rho} - \frac{n-2}{n-1} \frac{1}{n-3} \frac{\tanh \bar{\rho}}{(\sinh \bar{\rho})^2} + \frac{n-2}{n-1} \frac{n-4}{n-3} \frac{1}{n-5} \frac{\tanh \bar{\rho}}{(\sinh \bar{\rho})^4} - \dots \right] \\ &= \frac{1}{n-1} R \end{aligned}$$

となるので、

$$\lim_{\bar{\rho} \rightarrow \infty} \frac{A(\bar{\rho})}{V(\bar{\rho})} = \frac{n-1}{R}$$

が導かれる。AdS₅ 時空を念頭に $n = 4$ とおくと、確かにこれは式 (23.99) の極限值 $3/R$ に一致する。

*20 この立式の正当性は、「計量 (23.104) の最後の項は、地平が半径 r_+ の 3 次元球面であることを示しており、 $A_{\text{hor}} = 2\pi^2 r_+^3$ である」(p.560, 下から 4,3 行目) とあることから裏付けられる。

(c) ρ の代わりに座標 $r = R \sinh \rho (\geq 0)$ (これは長さの次元を持つ) を導入すると,

$$\cosh^2 \rho = 1 + \sinh^2 \rho = 1 + (r/R)^2,$$
$$dr = R \cosh \rho d\rho \quad \rightarrow \quad d\rho = \frac{dr}{R\sqrt{1 + (r/R)^2}}$$

より,

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right) (Rdt)^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{R^2}} + r^2 d\Omega_{n-1}^2$$

となる. 最後に $Rt \rightarrow t$ と改めると, 式 (23.105):

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{R^2}} + r^2 d\Omega_{n-1}^2$$

を得る.

第 24 章 弦の共変な量子化

24.1 序論

Lorentz 不変性が明白な弦の量子化

- 利点
 - D0-ブレインにも適用できる。
(光錐量子化では光錐座標を定義する Neumann 型の弦の空間座標 X^1 が 1 つ必要.)
 - 弦理論において現れる場の方程式が理解しやすい表現になる。
 - タキオンポテンシャルの計算 (12.8 節) が可能となる。
- 困難
 - 弦の時間座標 X^0 も演算子になる。
 - 弦のハミルトニアンは、理論の物理的な状態を消滅させてしまう。
 - ノルムが正にならないような状態も論じる必要がある。

第 9 章で見たように、ベクトル n^μ によって特徴付けられるパラメーター付けの条件の下では制約条件

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0 \quad (37)$$

が導かれ、ここから運動方程式は波動方程式

$$\ddot{X}^\mu - X^{\mu''} = 0 \quad (38)$$

に、運動量密度 [および流束] は弦座標の導関数に比例する形

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X^{\mu'}, \quad \mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu \quad (39)$$

になることが示される。本章の共変な量子化では n^μ を具体的に選んでパラメーター付けを完全に固定することはせず、単に上式 (37) を“部分的な”ゲージ固定条件として課す。

光錐量子化では南部-後藤作用の代わりに、より単純な作用として式 (12.81): $S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma (\dot{X}^I \dot{X}^I - X^{I'} X^{I'})$ を採用することができた。共変な形式では、これと類似の作用

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma (\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu - \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X_\mu)$$

を利用することができる。[ここではすべての弦座標 X^μ が同等に扱われている。] 実際このとき運動量密度 [および流束] $\mathcal{P}^{\tau\mu} \equiv \partial\mathcal{L}/\partial\dot{X}_\mu, \mathcal{P}^{\sigma\mu} \equiv \partial\mathcal{L}/\partial X_\mu'$ は上式 (39) に一致し、[Dirichlet 境界条件または自由端点の条件 (したがって Neumann 境界条件) の下で] 運動方程式として波動方程式 (38) が導かれる [添字 $I \rightarrow \mu$ の違いを除けば、これは 12.3 節で作用 (12.81) から弦座標に対する波動方程式を導いたのと同様の計算で確かめられる]。ハミルトニアンは

$$H \equiv \int d\sigma (\mathcal{P}^{\tau\mu} \dot{X}^\mu - \mathcal{L}) = \pi\alpha' \int d\sigma \left(\mathcal{P}^\tau \cdot \mathcal{P}^\tau + \frac{X' \cdot X'}{(2\pi\alpha')^2} \right)$$

と計算される。これは光錐ハミルトニアン (12.15): $H = \pi\alpha' \int d\sigma \left(\mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I} + \frac{X^{I'} X^{I'}}{(2\pi\alpha')^2} \right)$ と似ているが、内積ではすべての時空成分について和がとられている。共変な理論では弦の時間座標 X^0 も含めて $X^\mu(\tau, \sigma)$ と

$\mathcal{P}_\mu(\tau, \sigma)$ を Heisenberg 演算子とし, 正準な交換関係

$$[X^\mu(\tau, \sigma), \mathcal{P}^\nu(\tau, \sigma')] = i\eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma')$$

を課す. [横方向成分と x_0^-, p^+ を独立な力学変数とする光錐量子化の場合と違い, 交換関係 (12.18): $[x_0^-, p^+] = -i$ を課す必要はない.] このとき演算子に対する量子力学的な運動方程式もまた波動方程式 (38) の形になることが示される (導出は光錐の場合と同様の計算 [式 (12.22) の導出 (問題 12.1)] で行える). これは H が適正なハミルトニアンであることの強力な証拠となる.

24.1 について

■正準交換関係 (24.8) について 光錐量子化と違い, 共変な量子化では右辺の計量 $\eta^{\mu\nu}$ は時間成分も取り得るため, 正準交換関係がこのように一般化されることは非自明である. しかしながら右辺を計量テンソル $\eta^{\mu\nu}$ としておけば, 交換関係は座標変換に対して共变的となることが保証されるため, この措置は納得のいくものである. 例えば電磁場 A^μ の共変な量子化の際にも, 同様の交換関係

$$[A^\mu(\mathbf{x}, t), \dot{A}^\nu(\mathbf{x}', t)] = -ig^{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

が用いられる (計量の定義の違い $g^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu}$ に注意) [16, p.92].

24.2 開弦の Virasoro 演算子

光錐量子化において, 弦座標に対する制約条件は, これを X^- について解いて, 横方向座標 X^I によって表すために用いられた. そして X^- 座標のモードは, 横方向の Virasoro モードと同定された. しかし共変なアプローチでは, 量子的な制約条件を弦座標の演算子について解くことを行わない. むしろ制約条件は, 理論が許容すべき状態に対して課される. ここでは開弦に関する量子力学的な制約を調べる. (24.2 節, 第 1 段落)

- 正準交換関係

→ 弦座標のモード展開 (9.56):

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma$$

における展開係数などに対する交換関係

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0}, \quad [a_m^\mu, a_n^{\nu\dagger}] = \delta_{m,n} \eta^{\mu\nu}, \quad [x_0^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu}. \quad (\alpha_0^\mu \equiv \sqrt{2\alpha'} p^\mu)$$

– 光錐量子化では

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0}: (12.45), \quad [a_m^I, a_n^{J\dagger}] = \delta_{m,n} \eta^{IJ}: (12.64),$$

$$[x_0^I, p^J] = i\eta^{IJ}: (12.54).$$

- Virasoro モード*21 $L_n \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_{n-p}^\mu \alpha_{p,\mu}$

$$\text{制約条件} \quad 0 = (\dot{X} \pm X')^2 = 4\alpha' \sum_{n \in \mathbf{Z}} L_n e^{-in(\tau \pm \sigma)}, \quad [\text{本稿次節で導出}] \quad (24.13)$$

→ $L_n = 0 \quad (n \in \mathbf{Z}, \text{古典論}).$

*21 横方向 Virasoro モードと同様, 本稿では古典的な量としての L_n を Virasoro “モード” と呼んでおく.

– 横方向 Virasoro モードは $L_n^\perp \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I$: (9.77).

• Virasoro 演算子

- [弦座標 X^μ の Hermite 性 \rightarrow] $L_n^\dagger = L_{-n}$.
- 交換関係

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{D}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}. \quad (\text{正規順序化した } L_n \text{ に対して})$$

* 横方向 Virasoro 演算子の交換関係 (12.133):

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] = (m - n)L_{m+n}^\perp + \frac{D-2}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}$$

第 2 項 (中心拡大項) の横方向成分の数 $D - 2$ が全時空の次元数 D に置き換わっている。

- 共変な量子化でも $D = 26$ が導かれる (p.575 訳註に詳しい).
- Virasoro 演算子は横方向 Virasoro 演算子と同じパラメーターの付け替え (12/138):

$$\tau \rightarrow \tau + \varepsilon \xi_m^\tau(\tau, \sigma), \quad \sigma \rightarrow \sigma + \varepsilon \xi_m^\sigma(\tau, \sigma)$$

を生成する. このパラメーターの付け替えは制約条件 $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ を保持する (問題 12.10).

24.2 について

■ Virasoro 演算子の式 (24.13) について $\dot{X}^\mu \pm X^{\mu'}$ の式 (24.10) より

$$\begin{aligned} (\dot{X} \pm X')^2 &= 2\alpha' \sum_{m \in \mathbf{Z}} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_m^\mu \alpha_{p,\mu} e^{-i(m+p)(\tau \pm \sigma)} \\ &= 4\alpha' \sum_{n \in \mathbf{Z}} L_n e^{-in(\tau \pm \sigma)}, \quad (n = m + p) \\ L_n &\equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_{n-p}^\mu \alpha_{p,\mu} : \quad (24.13) \end{aligned}$$

を得る. なお式 (24.13) の 1 行下で L_n を「共変な Virasoro 演算子」と呼んでいる. これは弦座標 (24.9) が Lorentz ベクトルとして変換しなければならないため, 振動子 α_n^μ の μ もベクトル添字となることを踏まえると, Virasoro 演算子 (24.13) は Lorentz スカラーとして変換することになるためであると推察される. 例えば次節で見る式 (24.18) の数演算子 N について, 1 行下で「共変な演算子 N 」と言及していることについても同様の指摘ができる. あるいは単に共変な形式における演算子, ぐらゐの意味かも知れない.

関連して, p.574 の訳註を引用する.

光錐ゲージでは $(\dot{X}^I \pm X^{I'})^2 = 4\alpha' \sum_n L_n^\perp e^{-in(\tau \pm \sigma)}$ であり (式 (9.79)), これは一般にゼロではないので, L_n^\perp に関して古典論的に (24.14) のような命題は成立しない. 制約条件は $(\dot{X} \pm X')^2 = -2(\dot{X}^+ \pm X^{+'})(\dot{X}^- \pm X^{-'}) + (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2 = 0$ であって (式 (9.64)), $(\dot{X}^I \pm X^{I'})^2 = 0$ ではない. 光錐形式でも共変な形式でも, Virasoro 演算子の性質が共通の制約条件 $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ に密接に関係しているという事情に変わりはないが, その条件を量子化を通じて時空次元へ反映させる割り当て方が違っているために, L_n^\perp と L_n の性質に差異が生じるわけである.

古典論の範囲で述べると, 制約条件 $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ は光錐形式では X^- 座標の振動子を横方向の Virasoro モード L_n^\perp に関係付けるのに用い, 共変な形式では条件 $L_n = 0$ として考慮する.

■Virasoro 演算子の交換関係 (24.15) について 横方向 Virasoro 演算子の交換関係 (12.133) について考察したのと同様に、正規順序化を $N(\dots)$ で表すと、左辺は $N([N(L_m), N(L_n)])$ の意味と想像される。

■ $D = 26$ についての p.575 訳註の引用

共変な量子化を採用すると、光錐量子化の場合とは違って Lorentz 不変性は自明であり、臨界次元は次節で言及されるような補助条件による負ノルム状態 (ゴースト) の排除が成立するための制約として見いだされる。大局的に言えば、弦の量子論に対して Lorentz 不変性とゴーストの抑制を両方とも要請すると、その順序には依らず結果的に臨界次元が現れるということであって、光錐量子化とは最初からゴーストを抑制してしまう手続きと捉えることができる。

また、本書では言及されないが、弦理論の臨界次元は、パラメーター付け替え不変性に関する量子以上 (アノマリ) の解消という観点からも要請されるものである。共変な Virasoro 代数の中心拡大項からの量子以上への寄与が、ゴースト起因の量子異常をちょうど相殺する条件として、やはり $D = 26$ が得られる。

計算練習 24.1 (p.574)

弦座標 (24.9) の実数性より $(\alpha_n^\mu)^* = \alpha_{-n}^\mu$ が成り立つことを用いると、

$$L_n^* = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} (\alpha_{n-p}^\mu)^* \alpha_{p,\mu}^* = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_{-n+p}^\mu \alpha_{-p,\mu} = \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathbf{Z}} \alpha_{-n-r}^\mu \alpha_{r,\mu} = L_{-n}$$

となる (第 3 の等号では $r = -p$ とおいた)。

24.3 量子力学的な状態への制約 (補助条件)

共変な量子化では、古典論の水準で制約条件 $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ から帰結する式 (24.14): $L_n = 0$ を何らかの形で考慮しなければならない。そこで物理的な状態 $|\Phi\rangle$ は、少なくとも L_0 によって消失しなければならないと考える。 $L_0 = N[L_0] - 1$ のように、ここでも正規順序化定数は -1 になると仮定すると (このことを第 1 原理から導くことはしない) [本稿では正規順序化を $N[\dots]$ で表す]、この条件は

$$(N[L_0] - 1) |\Phi\rangle = 0$$

と書ける。ここから質量の自乗 $M^2 = -p^2$ は

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} (-1 + N), \quad N \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n^{\mu\dagger} \alpha_{n,\mu} \quad (24.18)$$

と表されることになる [導出は下記]。数演算子 N は光錐ゲージでの数演算子 N^\perp と違い、時間成分 $\mu = 0$ の振動子からの寄与を含むけれど、[固有値] N は非負となることが確かめられる。よって $M^2 \geq -1/\alpha'$ であり、特に基底状態 $N = 0$ で $M^2 = -1/\alpha'$ となる。このように光錐量子化と同じ結論が得られることから、正規順序化定数を -1 と選んだことが正当化される。

制約条件はこれだけでは不十分である。実際、正のノルムを持たないような状態が存在しており、そのような状態を除くためにさらなる補助条件が必要である。

負のノルムを持つ状態の構成 $|\Phi\rangle$: 数演算子の固有値 N_0 , $n > N_0$, $|\chi\rangle = a_{n,0}^\dagger |\Phi\rangle$

→ $\langle \chi | \chi \rangle < 0$ となることを説明できる [詳細は下記]。

しかし全ての Virasoro 演算子 L_n が物理的な状態を消滅させることはできない。

背理法 $(N[L_0] - 1)|\Phi\rangle = 0, L_{\pm 2}|\Phi\rangle = 0$ を全て満たす状態 $|\Phi\rangle$ があるとすると,

$$0 = [L_2, L_{-2}]|\Phi\rangle = \left(4N[L_0] + \frac{D}{2}\right)|\Phi\rangle = \left(4 + \frac{D}{2}\right)|\Phi\rangle, \quad \therefore |\Phi\rangle = 0.$$

そこで適正な質量スペクトルを導く上記の制約条件 $(N[L_0] - 1)|\Phi\rangle = 0$ はそのまま採用することにして, さらに $n > 0$ として

$$L_n|\Phi\rangle = 0, \quad L_{-n}|\Phi\rangle = 0$$

のいずれか“一方”を補助条件として追加することを考える. これは $n \neq 0$ の Virasoro 演算子 L_n が物理的な状態を消失させるという条件の半分ではあるけれど, このとき全ての $n \neq 0$ に対して L_n の“期待値”がゼロになると言うことができる.

$$\langle\Phi|L_n|\Phi\rangle = 0, \quad n \neq 0.$$

実はこの半分だけの制約が, 負のノルムを持つ状態を除くために十分なものであることが証明されている.

補助条件として上記のうち $L_n|\Phi\rangle = 0, n > 0$ の方を課すことにする. と言うのも, 正のモード番号を持つ振動子が消滅演算子であるのと同様, 物理的な状態を消滅させるのは正のモード番号を持つ Virasoro 演算子であるとするのが自然な措置である.

★ 関連して, 数演算子の固有値 $N_0 \geq 0$ の状態 $|\Phi_0\rangle$ に対して

$$L_n|\Phi_0\rangle = 0 \quad (\text{ただし } n > N_0) \quad (24.34)$$

となることを証明できる [導出は下記, $a_{n,0}|\Phi\rangle = 0$ (p.577, 1.2) との混同に注意する].

そこで

$$\begin{aligned} L_n|\Phi\rangle = 0 \quad (n > 0) &\Leftrightarrow |\Phi\rangle \text{ は Virasoro “主要状態”,} \\ \begin{cases} L_n|\Phi\rangle = 0 \quad (n > 0) \\ (N[L_0] - 1)|\Phi\rangle = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow (N[L_n] - \delta_{n,0})|\Phi\rangle = 0 \quad (n \geq 0) \\ &\Leftrightarrow |\Phi\rangle \text{ は “許容状態” (慣用的には「物理的状态」)} \end{aligned}$$

と呼ぶことにする. 許容状態のうちさらに「主要状態であって, 他の主要状態の従属状態ではない」という追加の条件を満たすものが“物理的”な状態(慣用的には「真の”物理的状态」)である^{*22}.

この (Virasoro) 従属状態について説明する. 与えられた主要状態の Virasoro 従属状態とは, 負のモード番号を持つ有限個の Virasoro 演算子の線形結合を, 主要状態に作用させた形で書くことのできる状態である. ある主要状態 $|p\rangle$ の数演算子固有値を N_p とすると, 固有値 $N_p + n$ を持つ $|p\rangle$ の従属状態は, 基本状態

$$L_{-n_1}L_{-n_2}\cdots L_{-n_k}|p\rangle$$

の線形結合で表せる. ただし基本状態を定義する整数 n_1, n_2, \dots, n_k は和が $\sum_{i=1}^k n_i = n$ となる整数 n_1, n_2, \dots, n_k であり, $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k (> 0)$ を満たすものに限る (計算練習 24.2).

以下に改めて物理的な状態を定義する条件をまとめておく.

^{*22} 主要状態: primary, 許容状態: admissible state, 物理的: physical, 真の: real, 従属状態: descendent. ‘descendent’(直訳的には‘下降’の意)の代わりに‘descendant’(‘子孫’)を用いている文献もある (p.579 訳註).

ゼロでない状態が、次の要件を満たすならば、それは物理的な状態と呼ばれる。その状態は許容状態であり、従属状態ではない。すなわちそれは主要状態で、 $L_0 - 1$ によって消滅しなければならない [ただしこの L_0 は正規順序化された演算子 $N[L_0]$ の意味]、他の主要状態に従属してはならない。同じ物理的な状態の 2 通りの表現 (representative) は、零 (ヌル) 状態の違いだけを持ち得る。(p.580 下 5 行)

最後の零 (ヌル) 状態について補足する。零状態とは主要状態でもあり、同時に他の主要状態の従属状態でもある状態である。零状態はその定義により、次のような性質を満たすことが確かめられる [本稿次節を参照]。

- 主要状態に零状態を加えても、他の主要状態との内積の値が変わらない。
- 主要状態に零状態を加えても、その状態における物理量の期待値は変わらない。
(零状態に作用して零状態を作るような物理量に対しては。)

ここから物理的な状態を、零状態の違いを除いて [上記のように従属状態ではない主要状態として] 定義することが動機付けられる。逆に言えば 1 つの物理的な状態は、零状態の違いを持つ複数の状態ベクトルによって表現され得ることに注意する。

24.3 節, 式の導出など

■質量の自乗の演算子 (24.18) の導出 数演算子 $N = \sum_{n=1}^{\infty} na_n^{\dagger}a_{n,\mu}$ を定義すると

$$0 = N[L_0] - 1 = \frac{1}{2}\alpha_0^{\mu}\alpha_{0,\mu} + \sum_{p=1}^{\infty}\alpha_{-p}^{\mu}\alpha_{p,\mu} - 1 = \alpha'p^2 - 1 + \sum_{n=1}^{\infty}na_n^{\dagger}a_{n,\mu} = \alpha'p^2 - 1 + N, \quad (24.17)$$

$$\therefore M^2 = -p^2 = \frac{1}{\alpha'}(-1 + N) : (24.18).$$

[上式 (24.17) について本稿次節で補足する.]

■ $\langle\chi|\chi\rangle < 0$ の説明 状態 $|\Phi\rangle$ は正のノルム $\langle\Phi|\Phi\rangle > 0$ を持つものと仮定する。 $n > N_0$ に関して $a_{n,0}|\Phi\rangle = 0$ となることを用いると [本稿次節で補足]、

$$\langle\chi|\chi\rangle = \langle\Phi|a_{n,0}a_{n,0}^{\dagger}|\Phi\rangle = \langle\Phi|[a_{n,0}, a_{n,0}^{\dagger}]|\Phi\rangle = -\langle\Phi|\Phi\rangle \quad (24.21)$$

が結論される [本稿次節で補足]。

■式 (24.34) の導出について 式 (24.17): $N[L_0] = \alpha'p^2 + N$ により

$$[N, L_n] = [N[L_0] - \alpha'p^2, L_n] = [N[L_0], L_n] = -nL_n$$

となる。よって状態 $L_n|\Phi_0\rangle$ の数演算子 N に関する固有方程式が、

$$NL_n|\Phi_0\rangle = [N, L_n]|\Phi_0\rangle + L_nN|\Phi_0\rangle = (N_0 - n)L_n|\Phi_0\rangle$$

のように得られる。このためもし $n > N_0$ となる状態 $L_n|\Phi_0\rangle$ があるとすると、そのような状態での数演算子 N の固有値は負となる。ところが N は非負の固有値だけを持ち得るので、状態 $L_n|\Phi_0\rangle$ はゼロでなければならない。

24.3 について

■式 (24.17) について 最左辺の L_0 は正規順序化された Virasoro 演算子 $N[L_0]$ であり, 第 1 の等号は

$$L_0 = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_{-p}^\mu \alpha_{p,\mu}, \quad N[L_0] = \frac{1}{2} \alpha_0^\mu \alpha_{0,\mu} + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^\mu \alpha_{p,\mu}$$

による。(横方向の Virasoro 演算子に対して, 既に同様の計算を行っている。) 最後の等号で制約条件 (24.16) を用いている。

■式 (24.20) について 1 行上の式 $[a_{n,0}^\dagger, a_{n,0}] = -1$ を $[a_{n,0}, a_{n,0}^\dagger] = -1$ に訂正する。実際 $a_{n,0} = -a_n^0, a_{n,0}^\dagger = -a_n^{0\dagger}$ に注意し, 交換関係 (24.11) を用いると

$$[a_{n,0}, a_{n,0}^\dagger] = [a_n^0, a_n^{0\dagger}] = \eta^{00} = -1.$$

これを用いると式 (24.20):

$$[-na_{n,0}^\dagger a_{n,0}, a_{n,0}^\dagger] = -na_{n,0}^\dagger [a_{n,0}, a_{n,0}^\dagger] = na_{n,0}^\dagger$$

を得る。その 1 行下で「したがって, 時間的な振動子も N に対して正の寄与を持つ」とあることについて, 真空状態に $|\Omega\rangle$ 時間的な振動子を作用した状態 $a_{n,0}^\dagger |\Omega\rangle$ に関する N の固有値を調べよう。交換関係 (24.20) を用いると,

$$Na_{n,0}^\dagger |\Omega\rangle = (-na_{n,0}^\dagger a_{n,0}) a_{n,0}^\dagger |\Omega\rangle = \{[-na_{n,0}^\dagger a_{n,0}, a_{n,0}^\dagger] + a_{n,0}^\dagger (-na_{n,0}^\dagger a_{n,0})\} |\Omega\rangle = na_{n,0}^\dagger |\Omega\rangle$$

となるので, 確かに固有値は $n(> 0)$ である。

■「 $n > N_0$ に関して $a_{n,0} |\Phi\rangle = 0$ となる」(p.577, 1.2) について $|\Omega\rangle$ を基底状態として

$$|\Phi\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{\mu=0}^{25} (a_n^{\mu\dagger})^{\lambda_{n,\mu}} |\Omega\rangle$$

という形の基本状態を考えると (式 (24.42) 参照), これが数演算子の固有値 N_0 を持つとき, 作用している生成演算子のモード番号は N_0 以下でなければならない。よって $n > N_0$ として左から $a_{n,0}$ をかけると, $a_{n,0}$ をすべての生成演算子と交換させて $|\Omega\rangle$ の左隣に移動することができるので, $a_{n,0} |\Phi\rangle = 0$ となる。

■式 (24.21) について 第 3 の等号では再び, 式 (24.20) の 1 行上の式を訂正した $[a_{n,0}^\dagger, a_{n,0}] = -1$ を用いる。

■式 (24.22–24) について $L_{\pm 2}$ の代わりに $L_{\pm 1}$ を用いても同様の論証ができると考えられる。実際, $(N[L_0] - 1) |\Phi\rangle = 0, L_{\pm 1} |\Phi\rangle = 0$ を全て満たす状態 $|\Phi\rangle$ があるとすると,

$$0 = [L_1, L_{-1}] |\Phi\rangle = 2N[L_0] |\Phi\rangle = 2 |\Phi\rangle, \quad \therefore |\Phi\rangle = 0.$$

■「電磁気学では, たとえば, ……必要とされた」(p.577, 1.26–29) について Gupta と Bleuler は Lorenz 条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ を, 状態ベクトル $|\Psi\rangle$ に対する条件

$$\partial_\mu A^{\mu+} |\Psi\rangle = 0$$

へと緩めた [16, pp.94–95]. ここに $A^{\mu+}$ は A^μ をモード展開した際の正振動数部分であり, この条件は確かに言わば「ゲージ条件の“半分”」(p.577, 1.28–29) である。

■Virasoro 演算子の集合 (24.25) について 横方向 Virasoro 演算子について 12.4 節で説明されているのと同じ理由で, $n \neq 0$ の Virasoro 演算子 L_n では振動子が交換するため, 正規順序化の問題が生じないことを思い出そう. (式 (24.22-24) の箇所でもこのことを考慮する.)

■式 (24.35) 第 2 の等号について 一見すると $\alpha' p^2$ と L_n が交換するのは, 自由な開弦の運動量 p が運動の定数になることによると考えられそうである. しかしここでは $\alpha' p^2 = \frac{1}{2} \alpha_0^\mu \alpha_{0,\mu}$ は演算子である. そこで Virasoro 演算子 $L_n = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_{n-p}^\nu \alpha_{p,\nu}$ との交換子を評価しよう. 交換関係 (24.11) によれば, ゼロモードの振動子 α_0^μ は他の任意の振動子と交換するので, 確かに

$$\begin{aligned} [\alpha' p^2, L_n] &= \frac{1}{4} \sum_{p \in \mathbf{Z}} [\alpha_0^\mu \alpha_{0,\mu}, \alpha_{n-p}^\nu \alpha_{p,\nu}] \\ &= \frac{1}{4} \sum_{p \in \mathbf{Z}} (\alpha_{n-p}^\nu \alpha_0^\mu [\alpha_{0,\mu}, \alpha_{p,\nu}] + \alpha_{n-p}^\nu [\alpha_0^\mu, \alpha_{p,\nu}] \alpha_{0,\mu} + \alpha_0^\mu [\alpha_{0,\mu}, \alpha_{n-p}^\nu] \alpha_{p,\nu} + [\alpha_0^\mu, \alpha_{n-p}^\nu] \alpha_{0,\mu} \alpha_{p,\nu}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる.

■「式 (24.39) により, 零状態においては, ……ゼロになる」(p.580, 1.23-24) について 零状態 $|\text{null}\rangle$ は主要状態 $|p\rangle$ でもあり, 同時に他の主要状態 $|p'\rangle$ の従属状態 $|d\rangle$ でもある.

$$|\text{null}\rangle = |p\rangle = |d\rangle.$$

すると式 (24.39) の意味より, 自分自身との内積は

$$\langle \text{null} | \text{null} \rangle = \langle d | p \rangle = 0,$$

任意の主要状態 $|p''\rangle$ や従属状態 $|d'\rangle$ との内積は

$$\langle \text{null} | p'' \rangle = \langle d | p'' \rangle = 0, \quad \langle d' | \text{null} \rangle = \langle d' | p \rangle = 0$$

となる.

■「主要状態に対して, ……変わらない」(p.580, 1.24-25) について 任意の主要状態 $|p\rangle, |p'\rangle$ と零状態 $|\text{null}\rangle$ に対して, たった今見たように $\langle p' | \text{null} \rangle = 0$ なので

$$\langle p' | \cdot (|p\rangle + |\text{null}\rangle) \rangle = \langle p' | p \rangle.$$

■「この場合, ……期待値に影響を及ぼすことはない」(p.580, 1.25-27) について 零状態 $|\text{null}\rangle$ に作用して零状態

$$|\text{null}'\rangle = A |\text{null}\rangle$$

を作るような物理量 $A (= A^\dagger)$ を考えると, 任意の主要状態 $|p\rangle$ に対して

$$\begin{aligned} & \langle (|p\rangle + |\text{null}\rangle) A (|p\rangle + |\text{null}\rangle) \rangle \\ &= \langle p | A | p \rangle + \langle \text{null}' | p \rangle + \langle p | \text{null}' \rangle + \langle \text{null} | \text{null}' \rangle \\ &= \langle p | A | p \rangle. \end{aligned}$$

ただし 2 行目の第 4 項が消えるのは, 零状態 $|\text{null}\rangle, |\text{null}'\rangle$ がその定義によりいずれも主要状態かつ従属状態であることによる.

計算練習 24.2 (p.580)

式 (24.38) へと至る教科書の議論を補足・する形で解答する.

式 (24.36) より数演算子固有値 N_p の状態 $|p\rangle$ に対して, $L_{-n_1}|p\rangle$ の固有値は $N_p + n_1$ となる. この状態 $L_{-n_1}|p\rangle$ を改めて $|p'\rangle$ と見て同様の議論を繰り返せば, $L_{-n_2}L_{-n_1}|p\rangle (= L_{-n_2}|p'\rangle)$ の固有値は $(N_p + n_1) + n_2$ となることが結論される. よって和が $\sum_{i=1}^k n_i = n$ となる整数 n_1, n_2, \dots, n_k に対して, 状態

$$L_{-n_1}L_{-n_2}\cdots L_{-n_k}|p\rangle$$

は固有値 $N_p + n$ を持つ. $|p\rangle$ を主要状態とすれば, 固有値 $N_p + n$ の従属状態は $n_i > 0$ としてこのような形をとらなければならない.

次に添字を $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$ に制限した状態 (24.38) のみを考えれば, その線形結合によって固有値 $N_p + n$ の任意の従属状態を表現できることを説明する. そうすれば $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$ の状態 (24.38) だけを, 固有値 $N_p + n$ に属する従属状態の基本状態とすれば良いことになる. 式 (24.38) の形の基本状態の数は, n の分割の数に等しいことに注意すると, 式 (24.38) 以外の従属状態は状態 (24.38) における Virasoro 演算子の順序を入れ替えたものしかあり得ない. そこで隣り合う Virasoro 演算子を入れ替えることで, 式 (24.38) の形へと Virasoro 演算子を並び替えることを考えよう. 並び替えは $i < j$ を満たす積 $L_{-i}L_{-j}$ を $L_{-j}L_{-i}$ に交換する操作だけを用いて実行することができる. Virasoro 演算子の交換関係 (24.15) によれば,

$$\begin{aligned} (\cdots L_{-i}L_{-j}\cdots)|p\rangle &= (\cdots [L_{-i}, L_{-j}]\cdots)|p\rangle + (\cdots L_{-j}L_{-i}\cdots)|p\rangle \\ &= -(i-j)(\cdots L_{-(i+j)}\cdots)|p\rangle + (\cdots L_{-j}L_{-i}\cdots)|p\rangle \end{aligned}$$

なので ($i, j > 0$ より中心拡大項 $(\sim \delta_{-(i+j), 0})$ は寄与を持たない), このときに現れる付加的な項は定数係数を除けば $(\cdots L_{-(i+j)}\cdots)|p\rangle$ である. しかも仮定により上式最左辺の「 \cdots 」部分における Virasoro 演算子は添字の和が $-n - (i+j)$ なので, この付加的な項も添字の和が $-n$ であるような従属状態である. よって積 $L_{-i}L_{-j}$ を入れ替えた状態 $(\cdots L_{-j}L_{-i}\cdots)|p\rangle$ と付加的な項 $(\cdots L_{-(i+j)}\cdots)|p\rangle$ の各々に対してさらに同様の演算子の入れ替えを行う, という操作を繰り返せば, 最終的には考えている従属状態は, $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$ を満たす式 (24.38) の形で表される従属状態の線形結合になる.

24.4 Lorentz 共変な状態空間

- 基底状態 $|p\rangle = |p^0, p^1, \dots, p^{25}\rangle$ (運動量の全成分で指定)
 - 光錐量子化では $|p^+, \vec{p}_T\rangle$.
- 位置状態 $|x\rangle = |x^0, x^1, \dots, x^{25}\rangle$
 - 時刻のラベルも付いている. ある状態 $|\psi\rangle$ の波動関数 $\langle x|\psi\rangle$ は, Schrödinger 方程式を用いる前に, 既に時間依存性を備えている.

ハミルトニアン (24.6): $H = \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma \left(\mathcal{P}^\tau \cdot \mathcal{P}^\tau + \frac{X' \cdot X'}{(2\pi\alpha')^2} \right)$ は (弦座標を, したがって \mathcal{P}^τ をモード展開すると),

$$H = L_0 = N[L_0] - 1 = \alpha' p^2 + N - 1 \quad (24.41)$$

と書き換えられる [導出は下記]. したがって [前節とより] ハミルトニアンはすべての物理的な状態を消滅させる. このように共変な状態が既に時刻のラベルを備えていることに関して, Schrödinger 方程式は状態の時間発展方程式ではなく, 状態 $|\Phi\rangle$ に対する制約の式 $H|\Phi\rangle = 0$ へと転化する. この制約は——粗く言う

ならば——状態の時刻ラベルと位置ラベルの間の関係を固定する．運動量空間ではエネルギー p^0 と運動量 \vec{p} の間の制約となり，[例えばすぐ後の式 (24.43) で見るように] 具体的には質量殻条件にあたる．

共変な量子化では基本状態は

$$|r\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{\mu=0}^{25} (a_n^{\mu\dagger})^{\lambda_{n,\mu}} |p\rangle \quad (\lambda_{n,\mu} : \text{非負の整数})$$

という形をとる．このうち物理的状態は許容状態であって従属状態ではないものに限られる．

タキオン状態

基底状態 $|p\rangle$ は $N = 0, M^2 = -1/\alpha'$ の物理的状態であり，したがって光錐量子化で得たのと同じタキオン状態であることを説明できる．ここで質量 $M^2 = -1/\alpha'$ は共変な量子化では，物理的状態の (必要) 条件 $(N[L_0] - 1)|p\rangle = 0$ から導かれている [詳細は下記]．さらに一般のタキオン状態を重ね合わせ

$$|T\rangle \equiv \int d^D p \phi(p) |p\rangle$$

に対して再び条件 $(N[L_0] - 1)|T\rangle = 0$ を適用すると， $[p^0$ を含む運動量空間の波動関数 $\langle p|T\rangle = \phi(p)$ は古典場の方程式

$$(\alpha' p^2 - 1)\phi(p) = 0 \quad (24.46)$$

に従うタキオン場であることが見出される [導出は下記，本稿次節でこの結果を解釈する.]．

光子状態

適当なベクトル ξ_μ に対して状態

$$\xi_\mu \alpha_{-1}^\mu |p\rangle$$

を考えると，これは $N = 1$ 状態であり，

$$\begin{aligned} (N[L_0] - 1)\xi_\mu \alpha_{-1}^\mu |p\rangle = 0 &\rightarrow M^2 = -p^2 = 0, \\ L_1 \xi_\mu \alpha_{-1}^\mu |p\rangle = 0 &\rightarrow p \cdot \xi = 0 \end{aligned} \quad (24.49)$$

となる [本稿次節で第 2 式 (24.49) を補足しつつ導出する]．よってこの状態が従属状態でなく，また $D - 2$ 個の自由度を持つことが示されれば，これは偏極を ξ_μ とする 1 光子状態に同定できる [このとき上式 $p \cdot \xi = 0$ は Lorenz ゲージ条件を表している]．ところで上記の 2 つの条件の下で，

$$\xi^0 + \xi^1 = 0 \quad (40)$$

を満たす座標系を選べることが説明される [説明は下記]．また $p^2 = 0$ の下では偏極を $\xi_\mu = ip_\mu \varepsilon$ と選んだ状態が零 (ヌル) 状態であり，それ故，偏極を $\xi_\mu \rightarrow \xi_\mu + ip_\mu \varepsilon$ と置き換えた状態ももと同じ状態を表すことを説明できる [説明は下記]．この自由度を利用して

$$\xi^0 - \xi^1 = 0 \quad (41)$$

を満たす偏極の表示を選べることが説明される [説明は下記]．すると状態の自由度は，条件 (40)，(41) の下で独立に選べる ξ_μ の成分数 $D - 2$ だけの自由度を持つことが分かる．以上より共変な量子化でも $N = 1$ の物理的な状態として，光錐量子化と同じく 1 光子状態が得られたことになる．議論は計算練習 24.4(p.584)，問題 24.3 へと続く．

24.4 節, 式の導出など

■ハミルトニアン (24.41) の導出 ハミルトニアン (24.6):

$$H = \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma \left(\mathcal{P}^\tau \cdot \mathcal{P}^\tau + \frac{X' \cdot X'}{(2\pi\alpha')^2} \right)$$

は \mathcal{P}^τ の関数と見なされるが, これを \dot{X} で表し, モード展開 (24.13): $(\dot{X} \pm X')^2 = 4\alpha' \sum_{n \in \mathbf{Z}} L_n e^{-in(\tau \pm \sigma)}$ を代入すると

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma (\dot{X}^2 + X'^2) \\ &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma \frac{1}{2} \{ (\dot{X} + X')^2 + (\dot{X} - X')^2 \} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_0^\pi d\sigma L_n (e^{-in\sigma} + e^{in\sigma}) e^{-in\tau} \\ &= L_0 \\ &= N[L_0] - 1 : (24.41) \end{aligned}$$

を得る.

■タキオンの質量の自乗 $M^2 = -1/\alpha'$ の導出 制約条件

$$0 = (N[L_0] - 1) |p\rangle = (\alpha' p^2 - 1) |p\rangle$$

より

$$M^2 = -p^2 = -\frac{1}{\alpha'}.$$

■タキオンに関する場の方程式 (24.46) の導出

$$\begin{aligned} 0 &= (N[L_0] - 1) |T\rangle = \int d^D p \phi(p) (N[L_0] - 1) |p\rangle = \int d^D p \phi(p) (\alpha' p^2 - 1) |p\rangle, \\ \therefore (\alpha' p^2 - 1) \phi(p) &= 0 : (24.46). \end{aligned}$$

■適当な座標系で制約条件が式 (40) の形をとることの証明 物理的な状態は $p^2 = 0$ の場合にだけ存在し, $p \cdot \xi = 0$ を満たさなければならない. $p^2 = 0$ を見出すような任意の p^μ に対して, 成分が $p_\mu = (p_0, p_0, 0, \dots, 0)$ となるような Lorentz 座標系を選ぶことが可能であり, その場合に制約条件 $p \cdot \xi = 0$ は式 (40):

$$\xi^0 + \xi^1 = 0$$

になる.

■物理的な状態の表現が偏極の置き換え $\xi_\mu \rightarrow \xi_\mu + ip_\mu \varepsilon$ の任意性を持つことの証明 偏極を $\xi_\mu = ip_\mu \varepsilon$ と選んだ状態

$$|d\rangle = (ip_\mu \varepsilon) \alpha_{-1}^\mu |p\rangle = L_{-1} \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} i\varepsilon |p\rangle \quad (24.51)$$

[式変形を本稿次節で補足] は, 最右辺の表式より従属状態 (descendent) となっている. $p^2 = 0$ の下では, 式 (24.49) と同様の計算により

$$L_1 |d\rangle = (\alpha_0 \cdot \alpha_1) (ip_\mu \varepsilon) |p\rangle = \sqrt{2\alpha'} p^\mu (ip_\mu \varepsilon) |p\rangle = 0$$

となるので、 $|d\rangle$ は主要状態 (primary) でもある。したがって $|d\rangle$ は零 (ヌル) なので、 $|d\rangle$ だけ異なる 2 つの状態

$$\xi_\mu \alpha_{-1}^\mu |p\rangle, \quad (\xi_\mu + ip_\mu \varepsilon) \alpha_{-1}^\mu |p\rangle$$

は同じ物理的状態を表現している。これは偏極の等価性

$$\xi^\mu \sim \xi^\mu + ip^\mu \varepsilon \quad \text{for} \quad p^2 = 0$$

に対応する。

■式 (41) を満たす偏極を選ぶことの証明 $p^2 = 0$ を満たす p^μ の成分が $p_\mu = (p_0, p_0, 0, \dots, 0)$ となるような Lorentz 座標系を選ぶことができ、このとき偏極の等価性 $\xi^\mu \sim \xi^\mu + ip^\mu \varepsilon$ は

$$\xi^0 \sim \xi^0 - ip_0 \varepsilon, \quad \xi^1 \sim \xi^1 + ip_0 \varepsilon$$

を意味する。すると $\xi^0 - \xi^1 \sim \xi^0 - \xi^1 - 2ip_0 \varepsilon$ なので、 ε を適当に調整すれば式 (41):

$$\xi^0 - \xi^1 = 0$$

を満たす偏極を選ぶことができる。

24.4 について

■位置状態が時刻のラベルを持つことについて 既に言及されていたように、共変な量子化では弦の時間座標も演算子となる。物体の運動を論じる際には、物体の位置が観測量であるのに対して時刻はパラメーターであるという非対称性があったのに対し、場の理論では場を評価する位置と時刻の両方がパラメーターとして扱われた。弦の共変な量子化では、言わば弦の位置と時刻の両方が観測量であるという全く新しい状況に遭遇したことになる。

■「もし従属状態ならば、それは負の励起の数を固有値に持つような状態に従属することになる」(p.582, l.22-23) について 主要状態 $|p\rangle$ の従属状態は式 (24.38) の形の基本状態の線形結合で表され、その数演算子固有値は $N_p + n$ (ただし $n > 0$) で与えられるので、これがゼロになることを要求すると、主要状態 $|p\rangle$ の固有値は

$$N_p = -n < 0$$

でなければならない。

■場方程式 (24.46) について $M^2 = -1/\alpha'$ に注意すると、これは運動量空間の Klein-Gordon 場に対する方程式 (10.24):

$$(p^2 + M^2)\phi(p) = 0$$

に一致していることが分かる。

■p.583, l.12 の L_1 の式について

$$L_1 = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_{1-p}^\mu \alpha_{p,\mu} = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_{1-p} \cdot \alpha_p = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{1-p} \cdot \alpha_p + \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^0 \alpha_{1-p} \cdot \alpha_p \quad (42)$$

の最右辺における 2 項を具体的に書き出すと,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{1-p} \cdot \alpha_p &= \frac{1}{2} (\alpha_0 \cdot \alpha_1 + \alpha_{-1} \cdot \alpha_2 + \alpha_{-2} \cdot \alpha_3 + \cdots), \\ \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^0 \alpha_{1-p} \cdot \alpha_p &= \frac{1}{2} (\cdots + \alpha_3 \cdot \alpha_{-2} + \alpha_2 \cdot \alpha_{-1} + \alpha_1 \cdot \alpha_0)\end{aligned}$$

となる。これらは互いに一致しているので, p.583, 1.12 の式

$$L_1 = \alpha_0 \cdot \alpha_1 + \alpha_{-1} \cdot \alpha_2 + \alpha_{-2} \cdot \alpha_3 + \cdots$$

を得る。なお, これを厳密に説明するには, 冒頭の式 (42) の最右辺第 2 項を

$$\frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^0 \alpha_{1-p} \cdot \alpha_p = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^0 \alpha_p \cdot \alpha_{1-p} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{-p} \cdot \alpha_{1+p} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{1-p} \cdot \alpha_p$$

と書き換えれば良い。

■式 (24.49) について

$$\alpha_1^\nu \alpha_{-1}^\mu = [\alpha_1^\nu, \alpha_{-1}^\mu] + \alpha_{-1}^\mu \alpha_1^\nu = \eta^{\mu\nu} + \alpha_{-1}^\mu \alpha_1^\nu$$

を用いて $L_1 = \alpha_0 \cdot \alpha_1 + \alpha_{-1} \cdot \alpha_2 + \alpha_{-2} \cdot \alpha_3 + \cdots$ の第 1 項 $\alpha_0 \cdot \alpha_1$ の寄与を調べると

$$\alpha_0 \cdot \alpha_1 \xi_\mu \alpha_{-1}^\nu |p\rangle = \xi_\mu \alpha_{0,\nu} \alpha_1^\mu \alpha_{-1}^\nu |p\rangle = \xi_\mu \alpha_{0,\nu} (\eta^{\mu\nu} + \alpha_{-1}^\mu \alpha_1^\nu) |p\rangle = \xi_\mu \alpha_0^\mu |p\rangle = \sqrt{2\alpha'} p^\mu \xi_\mu |p\rangle$$

となる。 L_1 の残りの項 $\sum_{p=2}^{\infty} \alpha_{1-p} \cdot \alpha_p$ は $L_1 \xi_\mu \alpha_{-1}^\mu |p\rangle$ に寄与しない。と言うのも, $p \geq 2$ に対しては α_p^ν を α_{-1}^μ と交換して $|p\rangle$ の左隣に移動し, 状態を消失させることができるからである。

■式 (24.51) 第 2 の等号について

$$\begin{aligned}L_{-1} &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_{-1-n} \cdot \alpha_n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha_{-1-n} \cdot \alpha_n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{-1-n} \cdot \alpha_n \\ &= \frac{1}{2} (\cdots + \alpha_2 \cdot \alpha_{-3} + \alpha_1 \cdot \alpha_{-2} + \alpha_0 \cdot \alpha_{-1}) + \frac{1}{2} (\alpha_{-1} \cdot \alpha_0 + \alpha_{-2} \cdot \alpha_1 + \alpha_{-3} \cdot \alpha_2 + \cdots) \\ &= \alpha_{-1} \cdot \alpha_0 + \alpha_{-2} \cdot \alpha_1 + \alpha_{-3} \cdot \alpha_2 + \cdots\end{aligned}$$

における最右辺の第 2 項以降は消滅演算子 $\alpha_{p \geq 1}$ を持ち, 基底状態 $|p\rangle$ に作用すると状態が消失する。このため

$$L_{-1} |p\rangle = \alpha_{-1} \cdot \alpha_0 |p\rangle = \alpha_{0,\mu} \alpha_{-1}^\mu |p\rangle = \sqrt{2\alpha'} p_\mu \alpha_{-1}^\mu |p\rangle$$

となることによる。

■零 (ヌル) 状態の曖昧さを省く条件 (24.55) について この条件を満たせば, 考えている状態 (24.47) が他の状態に従属していない物理的な状態の表現となることは説明されていない。とは言え, 式 (24.50): $\xi^1 + \xi^2 = 0$ は光錐ゲージ条件 $A^+ = 0$ と等価であり, また式 (24.55): $\xi^1 - \xi^2 = 0$ は零でない質量を持つ Maxwell 場に対して成り立つ $A^- = 0$ と等価になっていることを指摘できる (10.5 節)。

計算練習 24.3 (p.582)

振動子の交換関係 (24.11) よりモード $n = 0$ 以外の Virasoro 演算子では振動子が交換するため、その順序が問題にならないことを思い出すと、

$$\begin{aligned} L_1 |p\rangle &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_{1-n}^\mu \alpha_{n,\mu} |p\rangle \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{1-n}^\mu \alpha_{n,\mu} + \sum_{n=-\infty}^0 \alpha_{n,\mu} \alpha_{1-n}^\mu \right) |p\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

式 (24.34): $L_n |\Phi_0\rangle = 0$ (ただし $n > N_0$) の一般論は数演算子の固有値が非負であることからの要請であるのに対し、ここでは実際に $N_0 = 0, n = 1$ の具体的な場合にこれが成り立つことを、直接的に確かめたことになる。

計算練習 24.4 (p.584)

$N[L_0] - 1 = 0$ の条件は

$$\begin{aligned} 0 &= (N[L_0] - 1) |A\rangle = (\alpha' p^2 + N - 1) |A\rangle = \int d^D p A_\mu(p) (\alpha' p^2) \alpha_{-1}^\mu |p\rangle, \\ \therefore p^2 A_\mu(p) &= 0 : \text{Lorentz 条件の下での場の方程式} \end{aligned}$$

を与える。計算は式 (24.48) と類似であり、違いは偏極ベクトルが $\xi_\mu \sim A_\mu(p) d^D p$ と置き換わり、運動量に関する積分が施されていることだけである。 $L_1 = 0$ の条件も同様に式 (24.49) との類似性の助けを借りれば、容易に

$$0 = L_1 |A\rangle = \int d^D p L_1 A_\mu(p) \alpha_{-1}^\mu |p\rangle = \int d^D p \sqrt{2\alpha'} p^\mu A_\mu(p) |p\rangle, \quad \therefore p \cdot A = 0 : \text{Lorentz 条件}$$

を結論できる。

24.5 閉弦の Virasoro 演算子

コンパクト化のない時空内の閉弦の共変な量子化について説明する。

- 閉弦座標のモード展開 (13.24):

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\alpha_n^\mu e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma}).$$

- Virasoro 演算子

$$\bar{L}_n \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_p^\mu \bar{\alpha}_{n-p,\mu}, \quad L_n \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_p^\mu \alpha_{n-p,\mu}.$$

[横方向 Virasoro 演算子 (13.37) において $I \rightarrow \mu$.]

- 物理的な状態

許容状態の条件

$$(N[L_n] - \delta_{n,0})|\Psi\rangle = 0, \quad (N[\bar{L}_n] - \delta_{n,0})|\Psi\rangle = 0, \quad n \geq 0$$

を満たす、従属状態でないベクトル $|\Psi\rangle$ は物理的な閉弦の状態の表現である。

[ただし N, \bar{N} の定義については本稿次節で補足する.]

– 従属状態を定義する Virasoro 演算子には L_{-n} と \bar{L}_{-n} の両方を用いることができる。

- モード $n = 0$ の Virasoro 演算子による条件

$$0 = (N[L_0] - 1)|\Psi\rangle = \left(\frac{\alpha'}{4}p^2 + N - 1\right)|\Psi\rangle, \quad 0 = (N[\bar{L}_0] - 1)|\Psi\rangle = \left(\frac{\alpha'}{4}p^2 + \bar{N} - 1\right)|\Psi\rangle$$

から以下が帰結する [式 (24.63), 式 (24.64) の導出は下記].

$$P \equiv L_0 - \bar{L}_0 = 0 \quad (\Leftrightarrow \text{始線 } \sigma = 0 \text{ のずらしに対する状態の不変性 (13.2 節)},$$

$$M^2 = -p^2 = \frac{2}{\alpha'}(N + \bar{N} - 2), \tag{24.64}$$

$$N = \bar{N}. \tag{24.63}$$

- 共変な量子化でも、光錐量子化の場合と同じく
 - 基底状態 ($N = \bar{N} = 0$) \rightarrow タキオン状態
 - 無質量状態 ($N = \bar{N} = 1$) \rightarrow Kalb-Ramond 場, 重力, ディラトンが得られる。

24.5 節, 式の導出など

■制約 (24.63) と M^2 の式 (24.64) の導出 条件

$$0 = N[L_0] - 1 = \frac{\alpha'}{4}p^2 + N - 1, \quad 0 = N[\bar{L}_0] - 1 = \frac{\alpha'}{4}p^2 + \bar{N} - 1$$

により, 質量の自乗は

$$M^2 = -p^2 = \begin{cases} \frac{4}{\alpha'}(N - 1) \\ \frac{4}{\alpha'}(\bar{N} - 1) \end{cases}$$

と表されるので, これら 2 通りの表現が一致する条件として式 (24.63):

$$N = \bar{N}$$

が導かれる. また 2 通りの表現を足して 2 で割り, 式 (24.64):

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'}(N + \bar{N} - 2)$$

を得る.

24.5 について

■式 (24.61) における数演算子 N, \bar{N} について ここでは正規順序化した Virasoro 演算子を

$$N[L_0] = \frac{\alpha'}{4}p^2 + N, \quad N[\bar{L}_0] = \frac{\alpha'}{4}p^2 + \bar{N}$$

と書いていることから,

$$N = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^{\mu} \alpha_{p,\mu} = \sum_{p=1}^{\infty} p a_p^{\mu\dagger} a_{p,\mu}, \quad \bar{N} = \sum_{p=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{-p}^{\mu} \bar{\alpha}_{p,\mu} = \sum_{p=1}^{\infty} p \bar{a}_p^{\mu\dagger} \bar{a}_{p,\mu}$$

と定義したことになる。これは閉弦の光錐量子化における数演算子の式 (13.43), あるいは開弦の共変な量子化における数演算子の式 (24.18) から自然に類推される表式となっている。

24.6 Polyakov 弦作用

弦の 2 次元の世界面に関して

$$\xi^{\alpha} = (\xi^1, \xi^2) = (\tau, \sigma), \quad \partial_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial \xi^{\alpha}}$$

という表記と “2 次元の” Minkowski 計量 $\eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を導入すると,

$$\text{南部-後藤作用 (6.44): } S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \sqrt{-\gamma},$$

$$\text{共変な量子化に用いた弦作用 (24.4): } S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \eta^{\alpha\beta} (\partial_{\alpha} X^{\mu}) (\partial_{\beta} X^{\nu}) \eta_{\mu\nu}.$$

ただし以降では $\alpha, \beta, \dots = 1, 2$ は世界面座標の添字, $\mu, \nu, \dots = 0, 1, \dots, 25$ は時空添字と約束する。また $\gamma_{\alpha\beta} = (\partial_{\alpha} X) \cdot (\partial_{\beta} X)$ はパラメーター (τ, σ) の導入によって弦の世界面に誘導された計量であり, $\gamma = \det(\gamma_{\alpha\beta})$ と表記している。

上記の作用 (24.4) を用いる場合, 制約条件 (24.1): $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ を別に課す必要があった。これに対して本節では, 制約条件も導くことができる作用として Polyakov 作用を考察する。Polyakov 作用は新たに導入された世界面の計量 $h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$ を力学変数として, 作用 (24.4) と類似の式

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \sqrt{-hh^{\alpha\beta}} (\partial_{\alpha} X^{\mu}) (\partial_{\beta} X^{\nu}) \eta_{\mu\nu}$$

(ただし $h^{\alpha\beta} h_{\beta\gamma} = \delta_{\gamma}^{\alpha}$, $h = \det(h_{\alpha\beta})$) で与えられる。

ここで $h_{\alpha\beta}$ は 2 行 2 列の対称行列なので, 3 つの独立な成分を持つ。ところが $h_{\alpha\beta}$ は Polyakov 作用に $\sqrt{-hh^{\alpha\beta}}$ という形でのみ含まれ, $h_{\alpha\beta}$ が 2 次元の計量であるという特殊な事情により, その行列式は定数になることを証明できる [証明は下記]。

$$\det(\sqrt{-hh^{\alpha\beta}}) = -1. \quad (24.74)$$

したがって $\sqrt{-hh^{\alpha\beta}}$ の独立な成分は 2 つだけである。この後で見ると, このような事情を反映して, $h_{\alpha\beta}$ の変分に関する最小作用原理からは 2 つの制約条件 $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ [本節では Virasoro の制約条件と呼ぶ] が得られる。

弦座標 X^{μ} の変分を考えると, (開弦では常套的な境界条件の下で) 最小作用原理から運動方程式

$$\partial_{\alpha} \left(\sqrt{-hh^{\alpha\beta}} \partial_{\beta} X^{\mu} \right) = 0 \quad (24.76)$$

が導かれる [導出は下記]。一方 $h_{\alpha\beta}$ の変分を考えると, 最小作用原理から運動方程式

$$\gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} (h^{\gamma\delta} \gamma_{\gamma\delta}) = 0 \quad (24.84)$$

が導かれる [導出は下記]. これを見ると, 新たな計量 $h_{\alpha\beta}$ は誘導された計量 $\gamma_{\alpha\beta}$ に比例しており, 比例係数は世界面の位置 ξ に依存した未定関数であることが分かる. $h_{\alpha\beta}$ と $\gamma_{\alpha\beta}$ のそれぞれによって定義されるベクトルの時間的・空間的の概念が一致する条件として, 比例係数が正であることを要求すると, 場の方程式の解は

$$h_{\alpha\beta} = f^2(\xi)\gamma_{\alpha\beta} \quad (f(\xi) \neq 0)$$

という形に書ける. このように $\gamma_{\alpha\beta}$ と (正の) 比例係数で関係付けられた計量 $h_{\alpha\beta}$ は, $\gamma_{\alpha\beta}$ に対して共形 (的) と言われる.

Polyakov 作用は上式 $h_{\alpha\beta} = f^2(\xi)\gamma_{\alpha\beta}$ を代入すると, $f(\xi)$ が作用における $\sqrt{-\hbar}h^{\alpha\beta}$ の中で相殺して, 南部-後藤作用

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \sqrt{-\gamma} \quad (24.90)$$

になる [導出は下記]. これは古典論の水準で Polyakov 作用が南部-後藤作用と等価であることを意味しており, また $h_{\alpha\beta} = f^2(\xi)\gamma_{\alpha\beta}$ における比例係数を正としたことは, ここから正当化される (計算練習 24.6(p.589)).

注意 このように Polyakov 作用が $f^2(\xi)$ に依らないことは, Polyakov 作用が Weyl 変換

$$h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) \rightarrow \Omega^2(\tau, \sigma)h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$$

に対して不変であることを意味している.

計量 $h_{\alpha\beta}$ は適当な座標パラメーターの付け替えにより, 必ず共形平坦な計量と呼ばれる形

$$h_{\alpha\beta} = \rho^2(\xi)\eta_{\alpha\beta}$$

にできることが知られている. このとき弦座標に対する運動方程式は波動方程式

$$\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta X^\mu = 0 \quad (24.93)$$

になる [導出は下記]. また場の方程式は

$$(\partial_\alpha X) \cdot (\partial_\beta X) - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}(\eta^{\gamma\delta}(\partial_\gamma X) \cdot (\partial_\delta X)) = 0$$

を与える. 予告通り, これは

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) = (1, 1), (2, 2) &\rightarrow \dot{X}^2 + X'^2 = 0, \\ (\alpha, \beta) = (1, 2), (2, 1) &\rightarrow \dot{X} \cdot X' = 0 \end{aligned}$$

のように Virasoro 制約条件に帰す.

24.6 節, 式の導出など

■行列式 (24.74) の導出 $M^{\alpha\beta} = \sqrt{-\hbar}h^{\alpha\beta}$ の行列式が式 (24.74): $\det(M^{\alpha\beta}) = -1$ で与えられることを示す. このように行列式が定数となることが 2 次元に特有の性質であることを理解するために, $h^{\alpha\beta}$ を n 次元行列 (n 行 n 列) として $(M^{\alpha\beta})$ の行列式を計算しよう. すると

$$\det(M^{\alpha\beta}) = (\sqrt{-\hbar})^n \det(h^{\alpha\beta}) = \frac{(-\hbar)^{\frac{n}{2}}}{\det(h_{\alpha\beta})} = \frac{(-\hbar)^{\frac{n}{2}}}{\hbar} = -(-\hbar)^{\frac{n}{2}-1} \quad (24.73)$$

となる [本稿次節で補足]. これは $n = 2$ の場合だけ特別に, 定数 (24.74):

$$\det(M^{\alpha\beta}) = -1$$

になる.

■弦の運動方程式 (24.76) の導出 弦座標 X^μ の変化に伴う Polyakov 作用 (24.70):

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} (\partial_\alpha X^\mu) (\partial_\beta X^\nu) \eta_{\mu\nu}$$

の変分は

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \delta X^\mu) (\partial_\beta X^\nu) \eta_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma (\delta X^\mu) \partial_\alpha \left(\sqrt{-h} h^{\alpha\beta} (\partial_\beta X^\nu) \eta_{\mu\nu} \right) \end{aligned} \quad (24.75)$$

と計算される。ただし開弦の場合に常套的な境界条件を与える全微分の項を省略した [本稿次節で補足・考察]。ここから運動方程式 (24.76):

$$\partial_\alpha \left(\sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\nu \right) = 0$$

を得る。

■場の方程式 (24.84) の導出 Polyakov 作用における $\sqrt{-h}$ の変分を計算する必要がある。一般に行列式 $h = (h_{\alpha\beta})$ の変分は

$$\delta h = h(h^{\alpha\beta} \delta h_{\beta\alpha})$$

と表される [計算練習 24.5 の解答を参照]。ところで $h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = 2$ の変分をとると

$$h_{\alpha\beta} \delta h^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta} \delta h_{\alpha\beta} = 0, \quad \therefore h^{\alpha\beta} \delta h_{\alpha\beta} = -h_{\alpha\beta} \delta h^{\alpha\beta}$$

が見出されるので、これを用いて $\delta h_{\alpha\beta}$ を $\delta h^{\alpha\beta}$ によって書くと

$$\delta h = -h h_{\alpha\beta} \delta h^{\alpha\beta}$$

となる。すると $\sqrt{-h}$ の変分は

$$\delta \sqrt{-h} = -\frac{1}{2} \frac{\delta h}{\sqrt{-h}} = -\frac{1}{2} \frac{(-h) h_{\alpha\beta} \delta h^{\alpha\beta}}{\sqrt{-h}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-h} h_{\alpha\beta} \delta h^{\alpha\beta}$$

と実行できる。以上より計量 $h^{\alpha\beta}$ の変化に伴う Polyakov 作用の変分は

$$\delta S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} \left(-\frac{1}{2} (\delta h^{\alpha\beta}) h_{\alpha\beta} (h^{\gamma\delta} \partial_\gamma X \cdot \partial_\delta X) + (\delta h^{\alpha\beta}) \partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X \right)$$

と書ける。ここから得られる運動方程式は、計量 $\gamma_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X$ を用いて表すと式 (24.85):

$$\gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} (h^{\gamma\delta} \gamma_{\gamma\delta}) = 0$$

になる。

■南部-後藤作用 (24.90) の導出 $\gamma_{\alpha\beta}$ に共形な計量 (24.86): $h_{\alpha\beta} = f^2(\xi) \gamma_{\alpha\beta}$ に対して

$$h = f^4 \gamma, \quad h^{\alpha\beta} = \frac{1}{f^2} \gamma^{\alpha\beta} \quad (24.87)$$

であり ($\gamma^{\alpha\beta}$ は $\gamma_{\alpha\beta}$ の逆行列), ここから

$$\sqrt{-h} h^{\alpha\beta} = f^2 \sqrt{-\gamma} \frac{1}{f^2} \gamma^{\alpha\beta} = \sqrt{-\gamma} \gamma^{\alpha\beta} \quad (24.88)$$

が得られる．よって $M^{\alpha\beta} = \sqrt{-h}h^{\alpha\beta}$ は f に依らない．これは $M^{\alpha\beta}$ の行列式が $h^{\alpha\beta}$ に依らずに $\det(M^{\alpha\beta}) = -1$ となることから期待される結果でもある．すると Polyakov 作用は

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h}h^{\alpha\beta} (\partial_\alpha X^\mu)(\partial_\beta X^\nu)\eta_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma} : \text{南部-後藤作用 (24.90)} \end{aligned} \quad (24.89)$$

と書き換えられる．

■波動方程式 (24.93) の導出 2次元 Minkowski 計量 $\eta_{\alpha\beta}$ に共形な計量 (24.92): $h_{\alpha\beta} = \rho^2(\xi)\eta_{\alpha\beta}$ に対して, 上式 (24.88) は

$$\sqrt{-h}h^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$$

となる．これを弦の運動方程式 (24.76) に代入すると, 波動方程式 (24.93):

$$0 = \partial_\alpha(\eta^{\alpha\beta}\partial_\beta X^\mu) = \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta X^\mu = (-\partial_\tau\partial_\tau + \partial_\sigma\partial_\sigma)X^\mu$$

を得る．

24.6 について

■式 (24.73) 最後の等号について

$$\frac{(-h)^{n/2}}{h} = -\frac{(-h)^{n/2}}{(-h)} = -(-h)^{\frac{n}{2}-1}.$$

■「常套的な境界条件」(p.587, l.23) について $A_\mu^\alpha = \sqrt{-h}h^{\alpha\beta}(\partial_\beta X^\nu)\eta_{\mu\nu}$ と略記し, 開弦を想定して積分範囲を $0 \leq \sigma \leq \pi$ とする．部分積分 (24.75) は, 省略されている境界項を明示すると

$$\begin{aligned} \int d\sigma d\tau A_\mu^\alpha \partial_\alpha \delta X^\mu &= \int d\sigma d\tau \{ \partial_\alpha (A_\mu^\alpha \delta X^\mu) - (\partial_\alpha A_\mu^\alpha) \delta X^\mu \} \\ &= \int d\sigma [A_\mu^\tau \delta X^\mu]_{\tau_i}^{\tau_f} + \int d\tau [A_\mu^\sigma \delta X^\mu]_0^\pi - \int d\sigma d\tau (\partial_\alpha A_\mu^\alpha) \delta X^\mu \end{aligned}$$

となる． $\tau = \tau_i, \tau_f$ の境界項は, “時間” τ の境界で変分 δX^μ をゼロとする約束から落ちる．次に場の方程式の解が式 (24.86): $h_{\alpha\beta} = f^2(\xi)\eta_{\alpha\beta}$ の形になるため,

$$A_\mu^\sigma \propto \gamma^{\alpha\beta} \partial_\beta X_\mu = \partial_\sigma X_\mu$$

となることを考慮すると*23, $\sigma = \sigma_* \equiv 0, \pi$ の境界項は

$$\text{Dirichlet 境界条件 } \delta X^\mu(\tau, \sigma_*) = 0, \quad \text{Neumann 境界条件 } \partial_\sigma X_\mu(\tau, \sigma_*) = 0$$

のいずれかを課せば消えることが分かる．

*23 念のため書くと, 弦座標 X^μ の満たす運動方程式と場 $h_{\alpha\beta}$ に対する運動方程式の導出に論理的な前後関係はないから, これは循環論法に陥らない．

ここでもこの Neumann 境界条件は自由端点の条件になっていることを確かめよう．再び計量 (24.86): $h_{\alpha\beta} = f^2(\xi)\gamma_{\alpha\beta}$ が対角的であることを考慮すると, Polyakov 作用 (24.70) に対応するラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\sqrt{-h}h^{\alpha\beta}(\partial_\alpha X^\mu)(\partial_\beta X^\nu)\eta_{\mu\nu}$$

に対して,

$$\begin{aligned} p^{\sigma\lambda} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma X^\lambda)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma X^\lambda)} \left[-\frac{1}{4\pi\alpha'}\sqrt{-h}h^{\sigma\sigma}(\partial_\sigma X^\mu)(\partial_\sigma X^\nu)\eta_{\mu\nu} \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi\alpha'}\sqrt{-h}h^{\sigma\sigma}(\delta^\mu_\lambda\partial_\sigma X^\nu + \delta^\nu_\lambda\partial_\sigma X^\mu)\eta_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2\pi\alpha'}\sqrt{-h}h^{\sigma\sigma}\partial_\sigma X^\lambda \end{aligned}$$

と計算される．よって $p^{\sigma\lambda}$ は弦座標の導関数 $\partial_\sigma X^\lambda$ に比例しており, Neumann 境界条件は自由端点の条件と解釈できる．

■ 「式 (24.17) の第 2 式の変分を取って」 (p.588, 1.6-7) について 式 (24.17) → 式 (24.71) と訂正する．

■ 「 $h_{\alpha\beta}$ と $\gamma_{\alpha\beta}$ のそれぞれによって定義される時間的なベクトルと空間的なベクトルの概念が一致する」 (p.589, 1.1-2) について 弦の世界面内のベクトル $v^\alpha (\alpha = 1, 2)$ に対して 2 種類の内積 $h_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta, \gamma_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta$ を定義すると, これらが同符号となることを意味していると考えられる．

■ 計量 $h_{\alpha\beta}$ を用いて測った世界面内の距離が, 物理的な重要性を持たない」 (p.589 下 2 行) について 一方で, 時空に定まる距離 ds^2 は意味を持つから, $h_{\alpha\beta}$ を用いて測った世界面内の距離 $dl^2 = h_{\alpha\beta}d\xi^\alpha d\xi^\beta$ は世界面内の線要素に対応する真の距離 ds^2 とは一致しないと考えられる．Weyl 変換 $h_{\alpha\beta} \rightarrow \Omega^2 h_{\alpha\beta}$ では座標 τ, σ は変更せず, それ故これは距離尺度の変更 $dl^2 \rightarrow \Omega^2 dl^2$ を意味すると考えられる．ただし 25.4 節では「世界面の計量は 2 次元 Minkowski 計量 $\eta_{\alpha\beta}$ に比例するように設定することができ, このとき [世界面内の] 距離は $-ds^2 = -d\tau^2 + d\sigma^2$ と定義される」 (p.604, 1.18-20) とあり, 計量 $h_{\alpha\beta}$ を用いて測った世界面内の距離にも ds という表記を充てている．

■ 式 (24.94) について 共形平坦な計量 (24.92): $h_{\alpha\beta} = \rho^2(\xi)\eta_{\alpha\beta}$ に対して

$$h^{\alpha\beta} = \frac{1}{\rho^2(\xi)}\eta^{\alpha\beta}$$

であることを用いる．

計算練習 24.5 (p.588)

$$\begin{aligned} \delta \det A &= \delta(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= a_{22}\delta a_{11} + a_{11}\delta a_{22} - a_{21}\delta a_{12} - a_{12}\delta a_{21}, \\ A^{-1}\delta A &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta a_{11} & \delta a_{12} \\ \delta a_{21} & \delta a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22}\delta a_{11} - a_{12}\delta a_{21} & \cdots \\ \cdots & -a_{21}\delta a_{12} + a_{11}\delta a_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

なので ($A^{-1}\delta A$ の非対角成分の計算は不要である),

$$\text{Tr}(A^{-1}\delta A) = \frac{1}{\det A} \delta \det A$$

が成り立っている.

任意の次元数 $N(=n+1)$ の行列 A に対しては次のように証明すれば良い [3, p.270]. 任意の座標系で $\mathbf{E}^{012\dots n} = 1$ となる完全反対称テンソル密度 $\mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\dots\rho}$ を用いて行列 $A = (a_{\mu\nu})$ の行列式 $a = \det A$ と余因子 $\Delta^{\mu\nu}$ の定義は

$$\begin{aligned} a &\equiv \mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\dots\rho} a_{0\mu} a_{1\nu} a_{2\lambda} \cdots a_{n\rho}, & \Delta^{0\lambda} &= \mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\dots\rho} a_{1\mu} a_{2\nu} \cdots a_{n\rho}, & \Delta^{1\mu} &= \mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\dots\rho} a_{0\lambda} a_{2\nu} \cdots a_{n\rho}, \\ & & \Delta^{2\nu} &= \mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\dots\rho} a_{0\lambda} a_{1\mu} \cdots g_{n\rho}, & \cdots & \\ & & \Delta^{n\rho} &= \mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\dots\rho} a_{0\lambda} a_{1\mu} a_{2\nu} \cdots \end{aligned}$$

と書き表されるから,

$$da = \Delta^{0\lambda} da_{0\lambda} + \Delta^{1\mu} da_{1\mu} + \Delta^{2\nu} da_{2\nu} + \cdots + \Delta^{n\rho} dg_{n\rho} = \Delta^{\mu\nu} da_{\mu\nu}$$

と書ける. ここで $(a_{\mu\nu})$ の逆行列は $(A^{-1})^{\mu\nu} = \frac{(\Delta^{\mu\nu})^T}{a}$ なので $\Delta^{\mu\nu} = a(A^{-1})^{\nu\mu}$ となる. これを上式に代入して $da = a(A^{-1})^{\nu\mu} da_{\mu\nu}$ を得る. これは式 (24.78):

$$d(\det A) = (\det A) \text{Tr}(A^{-1}dA)$$

に他ならない.

計算練習 24.6 (p.589)

負の比例係数を持つ関係 $h_{\alpha\beta} = -f^2(\xi)\gamma_{\alpha\beta}$ を仮定すると, 式 (24.87) は第 2 式のみ, $h^{\alpha\beta} = -\frac{1}{f^2}\gamma^{\alpha\beta}$ のように符号が入れ替わる. これに伴い, 式 (24.88-90) の右辺の符号が入れ替わる (式 (24.88) は中央の表式も符号が入れ替わる).

第 25 章 弦の基本的な相互作用と Riemann 面

25.1 序論

- 相互作用の強さを表す弦理論のパラメーター…… 弦の結合 g

$$\text{ディラトン場の期待値} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{弦の結合 } g \text{ (13.4 節)} \\ \text{勾配パラメーター } \alpha' \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Newton 定数} \\ \text{D-ブレーンの張力} \end{array} \right.$$

- 基本的な相互作用 ← 弦の結合・分裂
- Riemann 面
 - 粗く言うと、「2 つの座標がひとつの複素変数を構成している面」.
 - 「Riemann 面は、共形写像の下で保存され、したがって「先験的 (アプリアリ) な距離の概念を備えていない」.
 - 「等価ではない異なる Riemann 面同士は、モデュライ (moduli) と呼ばれるパラメーターによって区別される。」
「相互作用する弦の世界面は」「すべての Riemann 面を、それに関係するモデュライによって構築する」「方法を正確に与える」.
- 弦理論における Riemann 面の解析
 - 4 個のタキオンの散乱振幅 (Veneziano (ヴェネツィアーノ) 振幅) (歴史的順序と逆)
- 本章では世界面という術語を、弦が時空に描く領域 $x = X^\mu(\tau, \sigma)$ ではなく、パラメーター空間 (τ, σ) の意味で用いる.

25.2 相互作用と観測量

相互作用をする弦の描像を、具体的な現象が起こる確率を与える数値へと結びつける作業は、以下の 3 段階から成る.

- (1) 弦のダイアグラムを描いて、ダイアグラムの正準表現を与えるような共形写像を計算する.
 - 最も非自明な内容を含んでおり、我々はこの部分を詳しく学ぶ.
 - 場の理論では、Feynman ダイアグラムを描く作業にあたる (共形写像は不要).
- (2) 共形場理論を利用して、その正準形式から散乱振幅を計算する.
 - 教科書よりも上級の弦理論の題材に属する.
 - 場の理論では Feynman 規則に基づき、ダイアグラムに対応する散乱振幅を書き下す作業にあたる.
- (3) 公式を用いて、その散乱振幅から断面積を求める. 断面積は観測量 (observable) である.

25.2 について

■特筆 「ある過程に対するひとつの Feynman ダイアグラムは、[経路積分において] 許容されるすべての径路の中の、ひとつの組 (クラス) を代表する表現にあたる」 (p.598, 1.1-3).

■「この中間状態の ϕ は物理的な粒子状態ではあり得ない……(何故か?)」(p.598, l.17-19)について これも p.596 と同様、次のような簡単な考察から理解できる。すなわち始状態の χ 粒子はその静止系でエネルギー m を持つ。これが崩壊により物理的な粒子 χ, ϕ を生じるには、少なくとも $m + M$ のエネルギーが必要なので、 $m > m + M$ でなければならない。ところがこれは成立しない。

25.3 弦の相互作用と大域的な世界面

開弦だけが関わる基本的な相互作用は

- 1本の開弦が2本の開弦に分裂する過程
- 2本の開弦がつながって1本の開弦を形成する過程

の2通りしかない。

静的ゲージでは弦のエネルギー E 、張力 T_0 に対して、パラメーター σ の範囲が $\sigma \in [0, E/T_0]$ となるように σ のパラメーター付けを行った [式 (7.21)]。このため例えば

- エネルギー E_1, E_2 の2本の開弦がつながって1本の開弦を形成し、
- その直後にエネルギー E_3, E_4 の2本の開弦に分裂する

過程を表す世界面のダイアグラムは図 41 のようになる (ただし $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$)。始・終状態における2本の弦はどのような粒子 (タキオン, 光子, ……) を表していても良く、特定の粒子に関する情報は [前節の] 振幅を計算する (2) の作業に移ってから考慮される。

他方、光錐ゲージでは、相互作用過程を含むダイアグラムを扱うにあたりパラメーター付けの方法を見直す必要に迫られる。実際、光錐ゲージの条件 (9.62):

$$X^+ = \beta\alpha' p^+ \tau, \quad p^+ = \frac{2\pi}{\beta} \mathcal{P}^{\tau+}$$

において、開弦の量子化の際にはパラメーターの範囲を $\sigma \in [0, \pi]$ として式を簡潔にするために、 $\beta = 2$ と選んだ。ところが開弦 1 (弦座標 X_1^μ , 運動量 p_1) が分裂して2本の開弦 2,3 (弦座標 X_2^μ, X_3^μ , 運動量 p_2, p_3) になる過程を考えると、

1. 分裂前の弦を表す布 (きれ, strip) の範囲が $0 \leq \sigma \leq \pi$ であると同時に、それに切り込みを入れて得られる弦 2,3 を表す布もそれぞれ範囲 $0 \leq \sigma \leq \pi$ を持つという矛盾が生じる。
2. 相互作用の起こる時空の1点において弦 1,2,3 の座標 X_1^+, X_2^+, X_3^+ と世界面パラメーター τ_1, τ_2, τ_3 はそれぞれ一致しなければならない。ところが $\beta = 2$ に対する光錐ゲージ条件の第1式

$$X_1^+ = 2\alpha' p_1^+ \tau_1, \quad X_2^+ = 2\alpha' p_2^+ \tau_2, \quad X_3^+ = 2\alpha' p_3^+ \tau_3$$

の下では、この条件 $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$ と $X_1^+ = X_2^+ = X_3^+$ は一般には両立しない。

そこで $\beta = 1/\alpha' p^+$ と選ぶと、光錐ゲージの条件は

$$X^+ = \tau, \quad p^+ = (2\pi\alpha' p^+) \mathcal{P}^{\tau+}$$

となる。第1式からは p^+ が消去されているので、上記の問題点 2 は解消される。また第2式は運動量の光錐成分 p^+ を持つ弦に対してパラメーターの範囲を $\sigma \in [0, 2\pi\alpha' p^+]$ と設定することを意味しており、このとき

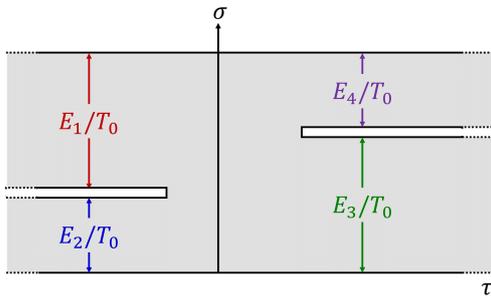


図 41 静的ゲージでの弦の世界面ダイアグラム

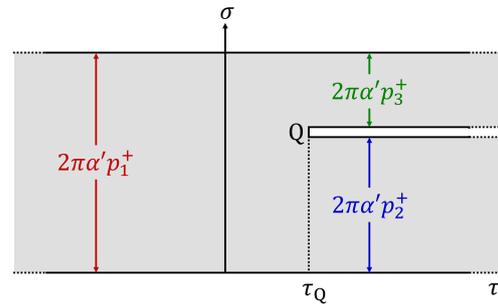


図 42 光錐ゲージでの弦の世界面ダイアグラム

[エネルギー・運動量保存則の下で] 今考えている過程を表す世界面のダイアグラムに関して σ の範囲は図 42 のようになり、矛盾を生じない (上記の問題点 1 の解消).

25.3 について

■ **光錐運動量 $p^+ > 0$** これ以降、本章を読み進めるにあたって、弦の光錐運動量 $p^+ \geq 0$ は光錐ゲージでは $p^+ \neq 0$ を仮定して、 $p^+ > 0$ と考えていることを思い出しておく (9.5 節).

■ 「2 本の開弦 (弦 1 と弦 2) が相互作用によって、1 本の開弦 (弦 3) を形成する過程」 (p.601, 1.3-4) について p.602 (および同頁の図 25.5) では「今、論じている 3 本の弦の例」 (p.602, 1.2) とあるにも関わらず、開弦 1 が分裂して 2 本の開弦 2,3 になる過程へと状況設定が変わっている.

■ **光錐ゲージの条件 (25.14) について** $\beta = 1/\alpha'p^+$ と選ぶと第 2 式は

$$p^+ = (2\pi\alpha'p^+)\mathcal{P}^{\tau+}$$

となる. このように書くと両辺に共通して p^+ が現れるのが一見すると奇妙であるが、これは要約にも書いたように、左辺の運動量の光錐成分 p^+ を持つ弦に対して、パラメーターの範囲を $\sigma \in [0, 2\pi\alpha'p^+]$ と設定することを意味している.

■ **式 (25.25): $\beta = 1/\alpha'p^+$ について** この β は長さの逆数の次元を持つため、光錐ゲージの条件 (25.14) の第 1 式は式 (25.26): $X^+ = \tau$ のように、パラメーター τ が長さの次元を持つことを意味する. また $\sigma \in [0, 2\pi/\beta]$ もまた長さの次元を持つ.

25.4 Riemann 面としての世界面

本節では、弦の世界面を Riemann 面として見る観点³が、理に適っていることを示す.

「以下に記述する Riemann 面の定義は、完全を期するために与えるものであるが、必ずしも後から扱う題材に関して完全に厳密な形で必要となるわけではない」 (p.603, 1.11-13) とあることを踏まえ、本稿では Riemann 面について断片的にまとめるに留める.

Riemann 面 複素数の座標 (チャート) を設定された 2 次元の実多様体.

例 複素平面 \mathbf{C} (座標 $z = x + iy$), \mathbf{C} の上側の半平面 $\mathbf{H} (y > 0)$,

境界を含んだ上側の半平面 ($y \geq 0$) と “無限遠の点” (25.6 節) を含んだ領域 $\bar{\mathbf{H}}$,
 複素平面における円環 (annulus) の領域, Riemann 球面 (スフェア) $\hat{\mathbf{C}}$,
 Riemann 輪環面 (トーラス), …….

等価な Riemann 面と共形写像 2つの Riemann 面の中の写像を座標の関係 $w = f(z)$ として表したとき,
 $f(z)$ が解析関数であるならば, 2つの Riemann 面は等価であると見なされる.
 解析的な写像は局所的に角度を保つため (ただし $f'(z) = 0$ となる点 z は例外である),
 共形写像と呼ばれる.

Riemann 面内における距離 2点 z_1, z_2 の間の自然な距離として $|z_1 - z_2|$ を考えると,
 共形写像は一般に局所的な尺度変更 $|dw| = |f'(z)||dz|$ を伴うため,
 Riemann 面内における距離の概念を, 内在的な形で一意的に規定することはできない.

他方, Weyl 変換 $h_{\alpha\beta} \rightarrow \Omega^2 h_{\alpha\beta}$ の下で Polyakov 作用は不変であり (24.6 節), [このとき座標 τ, σ は変更しないので,] これは計量 $h_{\alpha\beta}$ を用いて測った世界面内の距離もまた物理的な重要性を持たないことを意味している. 弦の世界面上の距離 $-ds^2 \sim -d\tau^2 + d\sigma^2 (h_{\alpha\beta} \sim \eta_{\alpha\beta}$ と選んだとき) と複素平面上の距離 $|dz|^2 = dx^2 + dy^2$ の定義の違いはあるものの, このことは世界面を Riemann 面として捉えることが自然な措置であることを示唆している.

そこで自由に伝播する開弦 (光錐運動量 p^+) の世界面を, 複素座標

$$w = \tau + i\sigma$$

を持つ Riemann 面と捉え (図 43 上段), これと共形写像によって対応付けられる等価な Riemann 面を調べておく. まず弦の世界面は指数関数の写像

$$z = \exp\left(\frac{w}{2\alpha'p^+}\right) = \exp\left(\frac{\tau}{2\alpha'p^+}\right) \left\{ \cos\left(\frac{\sigma}{2\alpha'p^+}\right) + i \sin\left(\frac{\sigma}{2\alpha'p^+}\right) \right\}, \quad 0 \leq \frac{\sigma}{2\alpha'p^+} \leq \pi$$

によって図 43 左下の $\bar{\mathbf{H}}$ に移される. 次いで線形分数変換

$$\eta = \frac{1 + iz}{1 - iz} \tag{25.23}$$

を施すと, $\bar{\mathbf{H}}$ は図 43 右下に示すような η 平面における単位円領域に写像される. ただし

- $\bar{\mathbf{H}}$ における $z = 0$ と “無限遠の点” $z = \infty$ [$|z| = \infty$ のこと]
- η 平面における 2点 $\eta = \pm 1$

は無限の過去 ($\tau = -\infty$) および無限の未来 ($\tau = \infty$) における弦に対応し, これらは如何なる有限時刻の弦も到達できない “針孔 (puncture)” であって, 世界面からは除かれる.

自由な閉弦の世界面については計算練習 25.1 (p.606) 参照.

25.4 節, 式の導出など

■線形分数写像 (25.23) が z 平面の実軸を η 平面における単位円の円周に移すことの確認 実軸上の点 $z = x \in \mathbf{R}$ が線形分数写像 (25.23):

$$\eta = \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

によって移る点 η は,

$$|\eta|^2 = \eta\eta^* = \frac{1 + ix}{1 - ix} \cdot \frac{1 - ix}{1 + ix} = 1$$

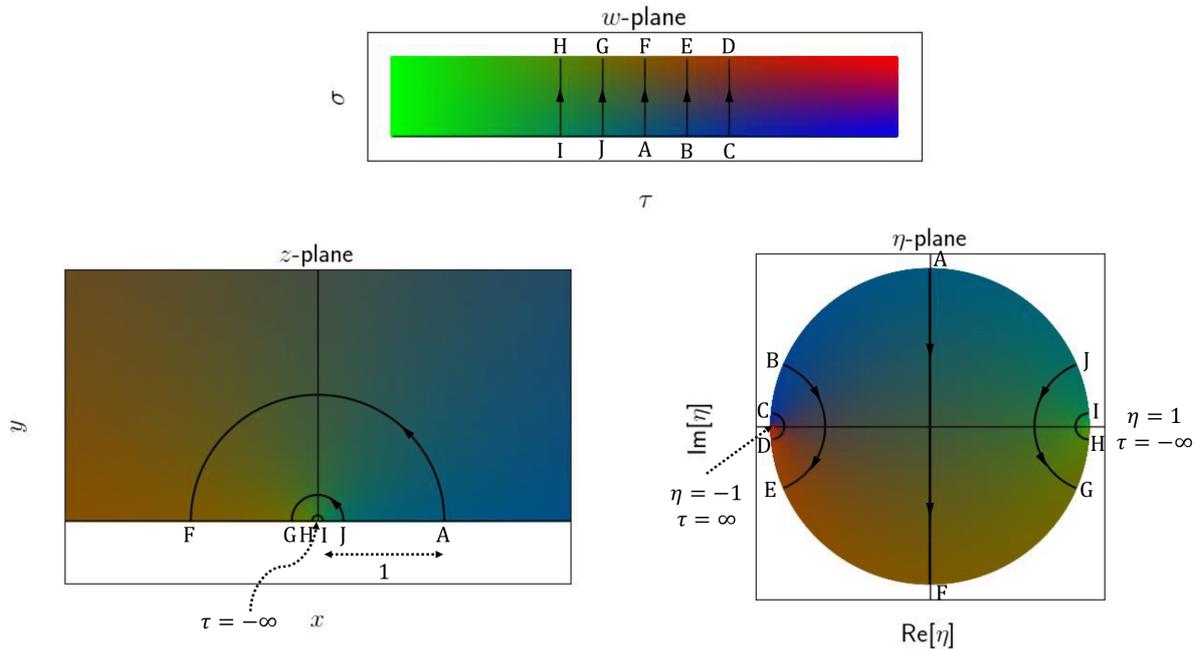


図 43 弦の世界面 (w 平面) と等価な Riemann 面 (z 平面, η 平面) と, 弦を表す $\tau = (\text{一定})$ の線の写像

を満たす.

25.4 について

■ 「1 点で交わる 2 つの弧の間の角度は, 写像の前後で保存される」 (p.603, 1.27–28) について その説明は例えば文献 [17, pp.185–186] に見られる. この性質のために正則関数による解析的な写像は等角写像とも呼ばれる (同著).

■ 共形写像 (25.21), (25.23) について (図 43 の描画に関する備忘録) 前節のノートで指摘したようにここではパラメーター τ, σ は長さの次元を持っており, そこで無次元化したパラメーター

$$t = \frac{\tau}{2\alpha'p^+}, \quad s = \frac{\sigma}{2\alpha'p^+}$$

を定義すると, 指数関数による写像 (25.21) は

$$x = e^t \cos s, \quad y = e^t \sin s$$

と書ける ($z = x + iy$). 図 43 ではこの点 (x, y) に写像前の点 (s, t) と同じ色を充てている. また線形分数写像 (25.23) は

$$\eta = \frac{1 + iz}{1 - iz} = \frac{(1 + iz)(1 + iz^*)}{(1 - iz)(1 + iz^*)} = \frac{1 - |z|^2 + i(z + z^*)}{1 + |z|^2 - i(z - z^*)} = \frac{1 - (x^2 + y^2) + 2ix}{1 + (x^2 + y^2) + 2iy} = \frac{1 - e^{2t} + 2ie^t \cos s}{1 + e^{2t} + 2e^t \sin s}$$

と表される. 図 43 ではこの点 η に写像前の点 (x, y) と (したがって点 (s, t) と) 同じ色を充てている.

なお閉弦について各点 $z = \exp\left(\frac{w}{\alpha'p^+}\right)$: (25.25) に線形分数写像 (25.23) を施した場合,

$$t = \frac{\tau}{\alpha'p^+}, \quad s = \frac{\sigma}{\alpha'p^+}$$

と再定義した無次元のパラメーター t, s に対して再び

$$\eta = \frac{1 - e^{2t} + 2ie^t \cos s}{1 + e^{2t} + 2e^t \sin s}$$

であるけれど、今度は s は開弦の 2 倍の範囲 $0 \leq s \leq 2\pi$ を動くので、世界面は η 平面上の単位円領域に 2 重に写像されると考えられる。 η 平面上に写像された点は s が $0 \rightarrow \pi$ を動くときに描く軌跡を、 s が $\pi \rightarrow 2\pi$ を動くときに折り返して逆向きにたどる。

計算練習 25.1 (p.606)

閉弦に対しても $\beta = 1/\alpha'p^+, \sigma \in [0, 2\pi\alpha'p^+]$ と設定する代わりに、指数関数による写像 (25.21): $z = \exp\left(\frac{w}{2\alpha'p^+}\right)$ を式 (25.25):

$$z = \exp\left(\frac{w}{\alpha'p^+}\right) = \exp\left(\frac{\tau}{\alpha'p^+}\right) \left\{ \cos\left(\frac{\sigma}{\alpha'p^+}\right) + i \sin\left(\frac{\sigma}{\alpha'p^+}\right) \right\}, \quad 0 \leq \frac{\sigma}{\alpha'p^+} \leq 2\pi$$

に改めると、 w 平面において閉弦を表す τ が一定の線 (ただし両端を同一視する) は z 平面上の閉じた円に移される。 (τ を固定して σ をゼロから $2\pi\alpha'p^+$ まで動かすと、複素 z 平面上の点は半径が $\exp\left(\frac{\tau}{\alpha'p^+}\right)$ で一定の円周上で、その偏角 $\frac{\sigma}{\alpha'p^+}$ が 0 から 2π までを動く。) $\bar{\mathbf{H}}$ への写像 (25.21) を閉弦に対しても用いることは可能であるが、 σ の両端が見た目の上でも繋がって閉じた線を形成するような写像の方が、閉弦に対して便利であることは容易に想像できる。

25.5 Schwarz-Christoffel 写像と 3 本の弦の相互作用

本節では相互作用をする開弦の世界面の共形写像を調べる。最も単純な相互作用として、図 42(25.3 節) に示したような 1 本の開弦が 2 本の開弦へと分裂する過程を考えると、その世界面は共形写像で $\bar{\mathbf{H}}$ へ移せることを説明する。

何故、我々は世界面を $\bar{\mathbf{H}}$ へ写像することを欲するのか? $\bar{\mathbf{H}}$ は異なる Riemann 面を比較できる正準表現 (canonical representation) を与えてくれるからである。この比較は、3 本以上の弦を含む相互作用の過程を学ぶ際に、主要な役割を演じることになる。弦のダイアグラムを $\bar{\mathbf{H}}$ へ写像することにより、25.2 節の冒頭で述べた 3 段階の作業における (1) の作業が完了する。(25.5 節, 第 2 段落)

図 42(25.3 節) の弦の世界面は図 44 の多角形において、頂点 P_1 を無限の過去 $\tau = -\infty$ へ、頂点 P_2, P_3 を無限の未来 $\tau = \infty$ へ移行した極限にあたる。そこで一般に図 45 のように n 角形を $\bar{\mathbf{H}}$ に関係付ける、Schwarz-Christoffel 写像を説明することから始めよう。図 45 において

- 多角形の辺に示した向きは、 z 平面における実軸に正方向の向きを与える。
- $\alpha_i \in [-\pi, \pi]$ は多角形の頂点 P_i での転向角であり、図の向きを正と定める。
- 多角形の頂点 P_i は z 平面の実軸上の点 x_i に写像される ($x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$)。
 - ただし頂点 P_n は $z = \infty$ に写像される。

一般に共形写像の式そのものを具体的に書くことはできないことが多いが、写像関数が満たすべき微分方程式を書くことは常に可能である。Schwarz-Christoffel 写像の満たすべき微分方程式は

$$\frac{dw}{dz} = A(z - x_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}} (z - x_2)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}} \cdots (z - x_{n-1})^{-\frac{\alpha_{n-1}}{\pi}} \quad (25.27)$$

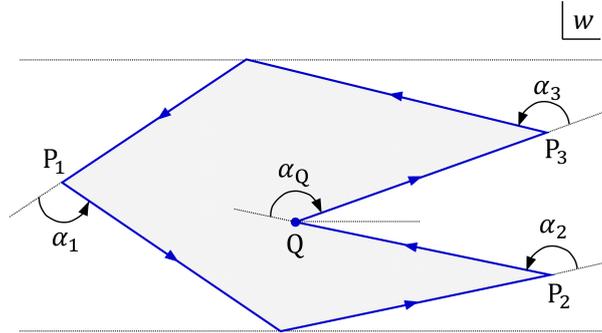


図 44 ある種の極限において弦の世界面を与える多角形 (Q は相互作用点に対応)

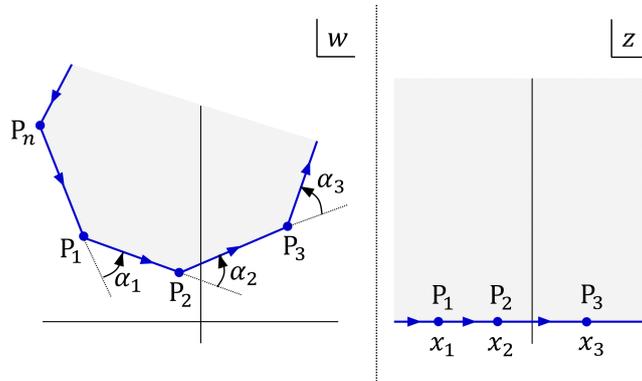


図 45 Schwarz-Christoffel 写像

で与えられる^{*24}. このことを納得するために, z 平面の実軸上の点 x における線要素 $dx (> 0)$ と, 対応する w 平面の線要素 dw を考えると, 偏角について

$$\arg(dw) = \text{Arg} A - \frac{\alpha_1}{\pi} \text{Arg}(x - x_1) - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\pi} \text{Arg}(x - x_{n-1}) \quad (25.36)$$

が成り立つ (偏角 Arg は $(-\pi, \pi]$ の範囲の主値) [導出は下記]. 転向点 x_i を通過しない範囲で x を変化させても上式右辺の値は変わらないので, w 平面において偏角が一定の真っ直ぐな線が生成される. そして x が転向点 x_i を左側から右側へ通過すると, $\text{Arg}(x - x_i)$ は π から 0 になるので, dw は偏角が α_i だけ増加する. こうして図 45 のように, [少なくとも] z 平面の実軸は w 平面の n 角形の辺に移されることが分かる.

これを踏まえて弦の世界面の \bar{H} への写像を考える. 弦の世界面は図 44 の多角形の,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \pi, \quad \alpha_Q = -\pi$$

となる極限にあたる. また次節で根拠を説明するように, 我々は頂点 P_2 が $z = -1$ へ, P_3 が $z = +1$ へ, P_1 が $z = \infty$ へ移るように写像を構築することができる. このとき頂点 Q の写像される点 x^* は -1 と 1 の間に

^{*24} α_n は他の転向角が与えられると, 多角形が閉じるための条件 $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 2\pi$ から決まること, および実は頂点 P_n が $z = \infty$ に写像されることに関して, この式には α_n が現れない (その詳しい事情は問題 25.6).

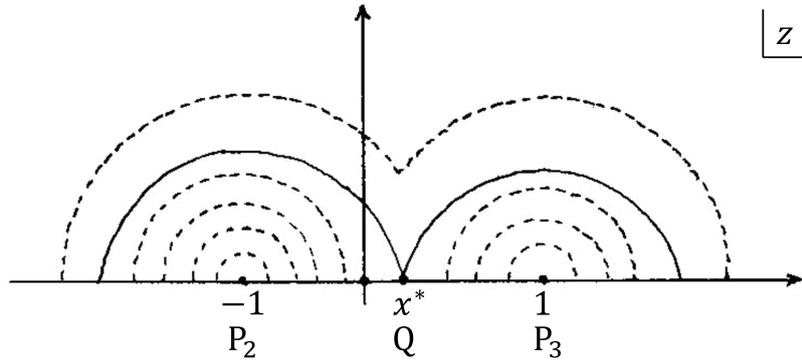


図 46 \bar{H} において、弦の相互作用を示した図

なければならない。このことから写像の式は

$$\frac{dw}{dz} = A \frac{z - x^*}{(z + 1)(z - 1)},$$

$$w = \frac{A}{2}(1 + x^*) \ln(z + 1) + \frac{A}{2}(1 - x^*) \ln(z - 1), \quad A (< 0) : \text{実数} \quad (25.41)$$

となる [式 (25.41) と $A < 0$ の証明は下記]。さらに

- z が P_2 の像 $z = -1$ を左側から右側に通過するとき、 $\sigma = \Im(w)$ が $2\pi\alpha'p_2^+$ だけ増加すること
- z が P_3 の像 $z = 1$ を左側から右側に通過するとき、 $\sigma = \Im(w)$ が $2\pi\alpha'p_3^+$ だけ増加すること

を要求すると [\Im は虚部を表す]、写像の式と x^* はそれぞれ

$$w = -2\alpha'p_2^+ \ln(z + 1) - 2\alpha'p_3^+ \ln(z - 1), \quad (25.46)$$

$$x^* = \frac{p_2^+ - p_3^+}{p_2^+ + p_3^+} \quad (25.47)$$

と定まる [導出は下記]。

慣れてくれば、読者は式 (25.46) のような式を直接的に書き下せるようになるであろう。その規則は明確である。それぞれの弦 [今の場合、 w 面上の点 P_1, P_2, P_3 に対応する、無限の過去と未来の弦] に関する対数関数が必要となるが、弦のダイアグラムを \bar{H} へ移すときに、実軸上の無限遠の点に移る弦だけは、対数が不要である。それぞれの対数の前に付く因子は、対応する弦の幅に関係する——弦を表す転向点を通過するとき σ が増加するのであれば、因子は $(-2\alpha'p^+)$ である。このような理解の下で、我々は 25.7 節において、4 本の弦の相互作用を表す写像を書く予定である。(p.611, 1.8-13)

また x^* の式によれば、点 Q の両側の弦の幅について $p_2^+ = p_3^+$ であれば、 z 面においても点 Q の像は $x = \pm 1$ の中央 $x^* = 0$ にあり、 $p_2^+ \gg p_3^+$ (または $p_2^+ \ll p_3^+$) であれば z 面においても点 Q の像は点 $P_3(x = 1)$ (または点 $P_2(x = -1)$) に近づくことになる。

なお弦の相互作用を z 面上で見ると、図 46 のように $\tau = -\infty$ の弦 $z = \infty$ は相互作用を起こす時刻において点 x^* で実軸に接し(実線)、その後 2 本の線に分かれて $\tau = \infty$ の弦 $z = \pm 1$ に収束する。

25.5 節, 式の導出など

■式 (25.36) の導出 複素変数の極座標表示 $z = re^{i\theta}$ を利用すると容易に確かめられるように, \arg 関数は

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2), \quad \arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

という関係式を満たす. Schwarz-Christoffel 写像を表す微分方程式 (25.27) の両辺の複素偏角をとり, これらの性質を利用すると

$$\arg(dw) - \arg(dz) = \arg A + \arg(z - x_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}} + \cdots + \arg(z - x_{n-1})^{-\frac{\alpha_{n-1}}{\pi}}$$

が見出される. ここで右辺の \arg 関数を, $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$ の範囲の主値 Arg に置き換える. z^β を, その主枝 $z^\beta \equiv \exp[\beta(\ln|z| + i\text{Arg}(z))]$ と定義するならば [本稿次節で補足],

$$\text{Arg}(z^\beta) = \beta \text{Arg}(z) \quad \text{for } |\beta| \leq 1$$

となる. 条件 $|\beta| \leq 1$ によって, 右辺が Arg の範囲の制約と矛盾しないことが保証される. $|\alpha_i/\pi| \leq 1$ に注意してこれを適用すると

$$\arg(dw) - \arg(dz) = \text{Arg} A - \frac{\alpha_1}{\pi} \text{Arg}(z - x_1) - \cdots - \frac{\alpha_{n-1}}{\pi} \text{Arg}(z - x_{n-1})$$

と書き換えられる. 特に実軸上の点 $z = x$ の変位 $dz = dx > 0$ に対して, 対応する線要素 dw の偏角は式 (25.36):

$$\arg(dw) = \text{Arg} A - \frac{\alpha_1}{\pi} \text{Arg}(x - x_1) - \cdots - \frac{\alpha_{n-1}}{\pi} \text{Arg}(x - x_{n-1})$$

で与えられる.

■Schwarz-Christoffel 写像 (25.41) と $A < 0$ の導出 今考えている 3 本の弦の相互作用を表すダイヤグラムについては

$$\frac{dw}{dz} = A \frac{z - x^*}{(z + 1)(z - 1)}$$

である. ここで z が 1 より大きい実数であるとき, $z > 1$ の像は P_3 から P_1 へ伸びる水平線だから dw/dz は負の実数でなければならない. よって A は負の実数であると結論される. 上式を部分分数分解して積分すると

$$\frac{dw}{dz} = \frac{A}{2} \left(\frac{1 + x^*}{z + 1} + \frac{1 - x^*}{z - 1} \right), \quad \therefore w = \frac{A}{2} (1 + x^*) \ln(z + 1) + \frac{A}{2} (1 - x^*) \ln(z - 1) : (25.41)$$

を得る.

■定数 A, x^* を定めた写像の式 (25.46) と, x^* の式 (25.47) の導出 対数関数を $\ln(z) = \ln|z| + i\text{Arg}(z)$ と定義すると [本稿次節で補足], $\Im(\ln z) = \text{Arg}(z)$ となる. よって式 (25.41) の $w(z)$ に対して, 虚部は

$$\sigma = \Im(w) = \frac{A}{2} (1 + x^*) \text{Arg}(z + 1) + \frac{A}{2} (1 - x^*) \text{Arg}(z - 1)$$

と表される. z が -1 を左側から右側へ通過するとき, $\text{Arg}(z + 1)$ は π から 0 に変わるので, σ は

$$\Delta\sigma = \frac{A}{2} (1 + x^*) (-\pi)$$

だけ変化する。これが $z = -1$ の像 P_2 を通過するときの σ の変化 $2\pi\alpha'p_2^+$ に一致することを要求すると

$$\frac{A}{2}(1+x^*) = -2\alpha'p_2^+ \quad (25.44)$$

を得る。同様に $z = 1$ 付近の挙動から

$$\frac{A}{2}(1-x^*) = -2\alpha'p_3^+ \quad (25.45)$$

が見出される。 $w(z)$ の式 (25.41) における A, x^* はこれら 2 式から定まる。上式 (25.44), (25.45) を $w(z)$ の式 (25.41) に代入すると、式 (25.46):

$$w = -2\alpha'p_2^+ \ln(z+1) - 2\alpha'p_3^+ \ln(z-1)$$

が得られる。最後に 2 式 (25.44), (25.45) の比をとって x^* をあからさまに求めておくと

$$\frac{1+x^*}{1-x^*} = \frac{p_2^+}{p_3^+}, \quad \therefore x^* = \frac{p_2^+ - p_3^+}{p_2^+ + p_3^+}$$

となる。

25.5 について

■ 「 $z^\beta \equiv \exp[\beta(\ln|z| + i\text{Arg}(z))]$ と定義するならば」 (p.680, l.20) について $|z| = r$ と書くと、これは

$$z^\beta \equiv r^\beta e^{i\beta\text{Arg}(z)}$$

を意味する。 $z = re^{i\theta}$ に対する通常の式 $z^\beta = r^\beta e^{i\beta\theta}$ と比べると分かるように、ここでは z^β を考える際に z の偏角 θ として主値 $\text{Arg}(z)$ を用いるものと約束していることになる。

■ 「ここでは対数関数を $\ln(z) = \ln|z| + i\text{Arg}(z)$ と定義して、実数の対数が実数となるようにしてある」 (p.610, l.25-26) 正の実数に対しては $\text{Arg}(z) = 0$ なので、 $\ln(z)$ は実数になる。なるほど、対数関数 $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$ の主値 $\text{Log}(z) = \ln|z| + i\text{Arg}(z)$ を採ることはこのような意味がある。ただし負の実数に対しては $\text{Arg}(z) = \pi$ なので、 $\ln(z)$ は実数にならないと考えられる。

計算練習 25.2 (p.611)

z 平面の実軸上の点 x に対応する w 平面上の点を調べよう。 $\ln(z \pm 1) = \ln|z \pm 1| + i\text{Arg}(z \pm 1)$ に注意すると、 w の式 (25.46) より

$$w(x) = \begin{cases} -2\alpha'p_2^+ \ln(x+1) - 2\alpha'p_3^+ \ln(x-1) \in \mathbf{R} & (x > 1) \\ -2\alpha'p_2^+ \ln(x+1) - 2\alpha'p_3^+ \ln|x-1| - i2\pi\alpha'p_3^+ & (-1 < x < 1) \\ -2\alpha'p_2^+ \ln|x+1| - 2\alpha'p_3^+ \ln|x-1| - i2\pi\alpha'(p_2^+ + p_3^+) & (x < -1) \end{cases}$$

となる。これらはいずれも w 平面において実軸に平行な線を表し、線の間隔は教科書の図 25.5(p.602)(本稿の図 42) と整合する適正な幅を持っていることが見て取れる。特にダイアグラムの上側の縁 ($x > 1$ に対応) は実軸に一致している。なお式 (25.41) における積分定数を調整すれば、ダイアグラム全体を平行移動して、図 25.5 のように下側の縁を実軸に一致させることも可能であると考えられる。

計算練習 25.3 (p.612)

$p_2^+ = p_3^+ \equiv p^+$ とおく. 計算練習 25.2(以下, 前問と呼ぶ) で調べたように, z 平面の実軸上の点 x は w 平面のダイアグラムにおいて 3 本の横線上に写像され, 特に $-1 < x < 1$ の点は中央の線 $\sigma = \text{Im}[w] = -i2\pi\alpha'p^+$ に移る. 点 $x = x^* = 0$ が線 $\sigma = -i2\pi\alpha'p^+$ の左端にある相互作用点 Q に移ることは, 教科書の議論から既に分かっており, 前問の $w(x)$ の式に $x = 0$ を代入すると, Q の座標は

$$w(x=0) = -i2\pi\alpha'p^+$$

と求まる. これは相互作用点 Q が w 平面の虚軸上に来るように写像が選ばれていることを意味する ($\tau_Q = \text{Re}[w(x=0)] = 0$). よってこの時刻 $\tau = \tau_Q$ の弦に着目すると, ダイアグラムの上下の線 $\sigma = 0, -i4\pi\alpha'p^+$ に位置する端点の座標は

$$w = 0, \quad w = -i4\pi\alpha'p^+$$

であることになる. 前問の $w(x)$ の式を用いると, z 平面の点 $x = \pm\sqrt{2}$ はこれらの点

$$w(x = \sqrt{2}) = 0, \quad w(x = -\sqrt{2}) = -i4\pi\alpha'p^+$$

に移ることが分かるので, 時刻 $\tau = \tau_Q$ の弦の端点は z 平面の点 $x = \pm\sqrt{2}$ に対応する.

25.6 Riemann 面のモデュライ空間

- 「2つの [Riemann] 面を写像によって互いに移すことができるのはどのような場合か」(25.6 節, 1.2) を考える.
- モデュライ: Riemann 面の持つパラメーター
p.612 訳註より コンパクト化空間のモデュライ (第 17 章, 第 21 章) とは意味合いがかなり異なる.
- Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$
 - 無限遠の点 $z = \infty$ を含めた複素平面は, 北極点 N を含めた Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ と 1 対 1 に対応する (図 47 参照).
 - 共形写像 (25.25): $z = \exp\left(\frac{w}{\alpha'p^+}\right)$ による閉弦のダイアグラムは z 平面全体であり, 無限の過去と未来の弦 $z = 0, \infty$ は $\hat{\mathbb{C}}$ では対称的な位置 S(南極点), N(北極点) に対応する.
- $\hat{\mathbb{C}}$ から $\hat{\mathbb{C}}$ への最も一般的な 1 対 1 の解析的写像

$$\text{線形分数変換 } w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (a, b, c, d \text{ は複素数}) \quad (25.50)$$

$$\text{1 対 1 対応の条件 } ad - bc \neq 0, \quad (25.51)$$

$$\text{一般性を失うことなく } ad - bc = 1 \rightarrow \text{調整可能な複素パラメーターは 3 個.} \quad (25.56)$$

[式 (25.51) の理由は下記, 式 (25.56) は本稿次節で補足しつつ説明.]

- 別の表現 (変換と逆変換の対称性が明白な形)

$$Awz + Bw + Cz + D = 0, \quad AD - BC \neq 0 \quad (\text{計算練習 25.4(p.614)})$$

- 3 個の針孔 z_1, z_2, z_3 を持つ z -球面と, 3 個の針孔 w_1, w_2, w_3 を持つ w -球面の間の写像 $\hat{\mathbb{C}}$ の自己写像が 3 個の複素パラメーターを持つことから期待されるように,

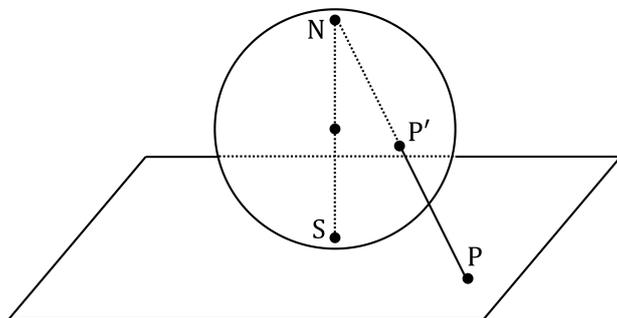


図 47 Riemann 球面 \hat{C} は南極点 S において複素平面の原点に接しており，複素平面上の点 P は，P と北極点 N を結ぶ線分の球面との交点 P' に写像される

針孔 z_1, z_2, z_3 をそれぞれ順に w_1, w_2, w_3 に移す線形分数変換

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_2} \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}. \quad (25.59)$$

が存在する [導出は下記].

- 4 個の針孔を z_1, z_2, z_3, z_4 に持つ \hat{C} と，4 個の針孔を w_1, w_2, w_3, w_4 に持つ \hat{C} の間の写像
 - 上記の線形分数写像によって z_4 をも w_4 に移すことは，一般には不可能である.
 - 3 つの針孔を $0, 1, \infty$ に移す共形変換によって最後の針孔が移る位置 $\lambda (\neq 0, 1, \infty)$ [一意的に定まる] を，4 個の針孔を持つ球面におけるモデュライとすることができる. 等価でない \hat{C} は複素モデュライ λ で区別される.
 - モデュライ空間それ自体も 3 つの針孔 $\lambda = 0, 1, \infty$ を持つ λ -球面 (Riemann 球面) となっている. このモデュライ空間は $\mathcal{M}_{0,4}$ と書かれる (0 は Riemann 球面の示性数 (トポロジカルな穴の数), 4 は針孔の数).

モデュライ空間 $\mathcal{M}_{0,4}$ は，次の第 26 章において閉弦の振幅を論じる際に重要となる. ここでは開弦の散乱を理解するために，実軸上に針孔を持つ \bar{H} と，そのような Riemann 面のモデュライ空間を考察する. (p.617, 1.12–14)

- \bar{H} の自己写像 (\bar{H} から \bar{H} への写像)
再び

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

という形の変換を考えると，

$$z \text{ 平面の実軸が } w \text{ 平面の実軸に移される条件 } a, b, c, d \in \mathbf{R}, \quad (\text{問題 25.3})$$

$$1 \text{ 対 } 1 \text{ 対応の条件 } ad - bc \neq 0,$$

$$\text{上半面 } \bar{H} \text{ を保存する条件 } (\Im(z) \geq 0 \Rightarrow \Im(w) \geq 0) \quad ad - bc > 0, \quad [\text{導出は下記}]$$

$$\text{一般性を失うことなく } ad - bc = 1 \quad \rightarrow \quad \text{調整可能な実数パラメーターは 3 個.}$$

- 簡単な例 $w = -1/z$ (図 48 参照)

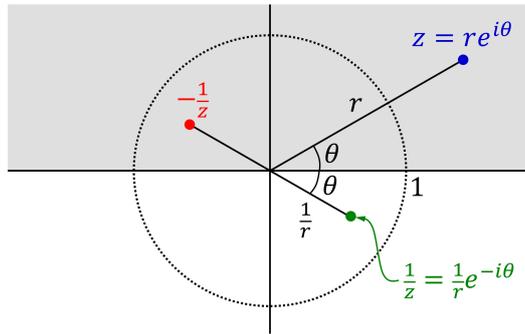


図 48 写像 $w = -1/z$ が $\bar{\mathbf{H}}$ の自己写像となっていることの、図解による直接的確認

- 実軸上に 3 個の針孔を持つ $\bar{\mathbf{H}}$ から、実軸上の任意の 3 箇所に針孔を持つ $\bar{\mathbf{H}}$ への写像 $\bar{\mathbf{H}}$ の自己写像に対して

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

は実軸上で正なので、実軸を左から右にたどるとき、
 実軸を無限遠の点も含む円と見なした場合の 3 個の針孔の巡回的な順序は保存される。
 このため z 平面と w 平面とで、
 対応する実軸上の針孔 P_1, P_2, P_3 が等価な巡回的順序で現れる場合に限って、
 ($\bar{\mathbf{H}}$ の自己写像が 3 個の実数パラメーターを持つことから期待されるように、)
 一方の $\bar{\mathbf{H}}$ を他方の $\bar{\mathbf{H}}$ に移すことが可能である。

- 境界に 3 個の針孔を持つ等価でない $\bar{\mathbf{H}}$ は、針孔の巡回的順序が

$$P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow P_1, \quad P_1 \leftarrow P_2 \leftarrow P_3 \leftarrow P_1$$

の 2 通りのものしかない。

→ 境界に 3 個の針孔を持つ $\bar{\mathbf{H}}$ のモデュライ空間 \mathcal{N}_3 は 2 つの点。

- 4 個の針孔 P_1, P_2, P_3, P_4 を実軸上に持つ $\bar{\mathbf{H}}$ を、
 針孔が巡回的順序を保持したまま実軸上の任意の位置に移動した $\bar{\mathbf{H}}$ へ移す写像
 - 上記の線形分数写像によって 4 個目の針孔も指定された w 座標に移すことは、
 一般には不可能である。
 - 3 つの針孔 P_1, P_3, P_4 をそれぞれ $0, 1, \infty$ に移したとき針孔 P_2 が移る位置 $\lambda \in (0, 1)$ が、
 “巡回的な順序を指定された 4 個の針孔を境界面に持つ上半面” のモデュライとなる。
 - モデュライ空間 \mathcal{N}_4 は开区間 $0 < \lambda < 1$ である。

境界に 4 個の針孔を持つ半平面 $\bar{\mathbf{H}}$ は重要なものであるが、それは 4 本の開弦を含む相互作用に深く関係するからである。以下に見るように、そのような過程を表す世界面は、境界に 4 個の針孔を持つ $\bar{\mathbf{H}}$ と共形等価である。また、そのような弦のダイアグラムがパラメーターをひとつ、すなわち相互作用点のあいだの時間差 T を持つことも見る。我々は、次の注目すべき結果を証明する予定である。 T をその自然な範囲で変化させるときに、弦のダイアグラムは境界に 4 個の針孔を持つすべての $\bar{\mathbf{H}}$ を生成するのである！ つまりモデュライ空間 \mathcal{N}_4 全体が生成されることになる。このことを証明するため

には、モデュライを T の関数として与える $\lambda(T)$ について調べなければならない。これにはもちろん、弦のダイアグラムから $\bar{\mathbf{H}}$ への共形写像が必要である。我々は T がその自然な範囲で変わることに伴って、 $\lambda(T)$ がゼロから 1 の範囲で変化することを示さねばならない。次節では、この解析に取り掛かる。(p.621, 1.7-16)

25.6 節, 式の導出など

■写像が 1 対 1 になるための条件 (25.51) の導出 線形分数写像 (25.50) が 1 対 1 対応であることを保証するには、 $w(z_1) = w(z_2)$ が $z_1 = z_2$ を意味することを示さなければならない。 $w(z_1) = w(z_2)$ を具体的に書くと

$$\frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d}$$

である。まず $cz_1 + d$ の場合を考えると、左辺は [絶対値が] 無限大になるので [複素数が無限大とはこのような意味である]、右辺も無限大でなければならない。このためには $cz_2 + d = 0$ でなければならない、したがって $z_1 = z_2$ である。次に分母がゼロでない場合を考え、分母を払うと

$$(ad - bc)z_1 = (ad - bc)z_2$$

となる。これは式 (25.51): $ad - bc \neq 0$ の条件下では $z_1 = z_2$ を意味する。

■針孔 z_1, z_2, z_3 をそれぞれ順に w_1, w_2, w_3 に移す線形分数変換 (25.59) の導出 どのようにすれば式 (25.59) の変換を思い付くかを解き明かしつつ導出する。まず

$$(z - z_1)(\dots) = (w - w_1)(\dots)$$

と書くと、まだ決めていない因子「 \dots 」が何であれ、 $z = z_1$ のときに $w = w_1$ となることが保証される。次に

$$\frac{z - z_1}{z - z_2}(\dots) = \frac{w - w_1}{w - w_2}(\dots)$$

と分母を書き加えると (最初の式の「 \dots 」から分母をくくり出した)、 $z = z_2$ のときに $w = w_2$ となることが要請される。最後に $z = z_3$ のときに $w = w_3$ とするために、これが起きるときに両辺がともに 1 となるような因子を両辺にかけて式 (25.59):

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{w - w_1}{w - w_2} \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}$$

とする。

■ $\bar{\mathbf{H}}$ の自己写像に対する条件 $ad - bc > 0$ の導出 線形分数写像

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

の虚部をとると

$$\Im(w) = \Im\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{az + b}{cz + d} - \frac{az^* + b}{cz^* + d}\right) = \frac{1}{2i} \frac{(ad - bc)(z - z^*)}{|cz + d|^2} = \frac{ad - bc}{|cz + d|^2} \Im(z)$$

となるので、上半面 $\bar{\mathbf{H}}$ を保存する条件

$$\Im(z) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Im(w) \geq 0$$

が満たされるには $ad - bc > 0$ でなければならない。

25.6 について

■式 (25.56) について

$$a' \equiv \frac{a}{\sqrt{ad-bc}}, \text{etc.} \rightarrow a'd' - b'c' = 1$$

ということ.

■「モデュライ空間 $\mathcal{M}_{0,3}$ は、実体としてはひとつの点に過ぎない」(p.615, 1.20) について 「モデュライ空間 \mathcal{N}_3 は 2 つの点である」(p.620, 1.9) ことの説明との対比で理解する.

■式 (25.73) について 式 (25.59) に $z_1 = 1, z_2 = -1, z_3 = 0$ および $w_1 = -1, w_2 = 1, w_3 = 0$ を代入して得られる.

計算練習 25.4 (p.614)

式 (25.55) のように素直に係数を前から順に A, B, C, D と定義すると, これらは線形分数写像 (25.50) のパラメーターを用いて

$$A = c, \quad B = d, \quad C = -a, \quad D = -b$$

と同定され, $AD - BC = ad - bc$ となる. すると条件 (25.51): $ad - bc \neq 0$ は同様の式

$$AD - BC \neq 0$$

になる. (条件 (25.56): $ad - bc = 1$ まで要求すれば $AD - BC = 1$.)

計算練習 25.5 (p.621)

ラベルの付いた 4 個の針孔 P_1, P_2, P_3, P_4 の円順列として, 等価でない $(4-1)! = 6$ 通りの順序が得られる. その各々が开区間 $0 < \lambda < 1$ をモデュライに持つ. よって境界に「4 つの針孔を持つ $\bar{\mathbf{H}}$ になると, ひとつの連続なモデュライと, ひとつの離散的なモデュライを持つようになる」(p.613, 1.1-2). 離散的なモデュライは境界における針孔の巡回的な順序を記述し, モデュライ空間は 6 個の点となると考えられる. 連続的なモデュライは λ である.

25.7 4 本の弦の相互作用

図 49 のように 2 本の弦 3,4 が結合して 1 本の間状態の弦を形成し, その後 2 本の弦 1,2 に分裂する過程を考える (記号を図 49 のように定義する). 相互作用点の間の時間 $T = T_1 - T_2$ は $-\infty < T < \infty$ の範囲をとり得る. (ただし $T < 0$ において 2 つの切れ目が重なる $p_2^+ = p_3^+$ の場合には, 実際には T は負になることはできない.) 図 49 の世界面を, 3 点 P_1, P_2, P_3 が $0, 1, \infty$ に来るように Schwarz-Christoffel 写像を用いて $\bar{\mathbf{H}}$ に移すと, 世界面上の点の巡回的順序 ($P_1Q_1P_2P_3Q_2P_4$) は図 50 のように保持され, P_2 の移る点 $\lambda \in (0, 1)$ がモデュライとなる.

実は (p_i^+ を固定すると), モデュライは T と 1 対 1 の関数 $\lambda(T)$ になる. よってもし $T \rightarrow \infty$ のときに λ が 0 に近づき, $T \rightarrow -\infty$ のときに λ が 1 に近づくなれば, λ は $0 < \lambda < 1$ の範囲内のすべての値を 1 回ずつとることになる. この仮定は次の直観的な議論から, 実際に正しいと予想される. まず図 49 のダイアグラムで $T \rightarrow \infty$ とすると, 点 P_1, P_2 は P_3, P_4 と長い布によって隔てられる. このとき図 50 の $\bar{\mathbf{H}}$ においても共

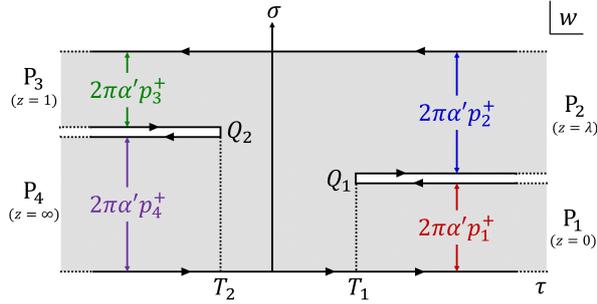


図 49 4本の弦の相互作用を表す世界面ダイアグラム

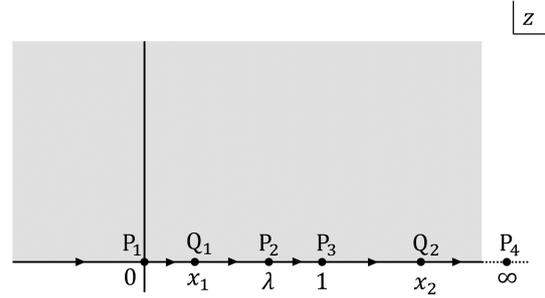


図 50 $\bar{\mathbf{H}}$ で見た 4本の弦の相互作用

形的に、 P_1 と P_2 は互いに近づかなければならないから [あるいは P_2 と P_3 が離れなければならないから]、 $\lambda \rightarrow 0$ と考えることはもっともらしい。次に図 49 のダイアグラムで $T \rightarrow -\infty$ とすると、今度は点 P_2, P_3 が P_1, P_4 と長い布によって隔てられることになる。このとき図 50 の $\bar{\mathbf{H}}$ においても共形的に、 P_2 と P_2 は互いに近づかなければならないから、 $\lambda \rightarrow 1$ となると考えることはもっともらしい。このことは具体的な計算で厳密に証明することができる。

本稿では証明の詳細は後で改めてまとめることにし、ひとまず解析の基となる連立方程式だけを以下に示しておこう。Schwarz-Christoffel 写像の微分方程式とあからさまな式は

$$\frac{dw}{dz} = A \frac{1}{z} (z - x_1) \frac{1}{z - \lambda} \frac{1}{z - 1} (z - x_2), \quad w(z) = -2\alpha' p_1^+ \ln z - 2\alpha' p_2^+ + 2\alpha' p_3^+ \ln(z - 1)$$

であり (25.5 節)、これらを比較すると

$$-2\alpha' p_1^+ = A \frac{x_1 x_2}{\lambda}, \quad -2\alpha' p_2^+ = A \frac{(\lambda - x_1)(x_2 - \lambda)}{\lambda(1 - \lambda)}, \quad -2\alpha' p_3^+ = A \frac{(1 - x_1)(x_2 - 1)}{1 - \lambda} \quad (43)$$

が見出される [導出は下記]。また写像 $w(z)$ の式を用いて $T = T_1 - T_2 = \text{Re}[w(x_1)] - \text{Re}[w(x_2)]$ であることを具体的に書くと

$$\frac{1}{2\alpha'} T = p_1^+ \ln \frac{x_2}{x_1} + p_2^+ \ln \left(\frac{x_2 - \lambda}{\lambda - x_1} \right) + p_3^+ \ln \left(\frac{1 - x_1}{x_2 - 1} \right) \quad (44)$$

となる [導出は下記]。上式 (43), (44) が原理的に未知の 4 個のパラメーター (A, λ_1, x_1, x_2) を決める連立方程式を成す。これらを用いて、 $T \rightarrow \infty$ のとき $\lambda \rightarrow 0$ 、 $T \rightarrow -\infty$ のとき $\lambda \rightarrow 1$ となることを証明できる [証明は下記]。

こうして T が $-\infty$ から ∞ まで変化するとき、弦のダイアグラムは境界に 4 個の針孔 [無限の過去と未来の弦 P_1, P_2, P_3, P_4 に対応] を持つすべての $\bar{\mathbf{H}}$ をちょうど生成する。

上述のことは、弦理論の重要で一般的な結果の、ひとつの例における素描である。任意の弦の相互作用に関して、類似の結果が成立する。弦のダイアグラムの位相的な型を固定しておいて、ダイアグラムのパラメーターを自然な範囲全体にわたって変化させると、位相的に与えられた型を持つ互いに非等価な Riemann 面の完全な集合が形成される。弦の相互作用は、Riemann 面のモデュライ空間を生成するのである。(25.7 節, 最終段落)

25.7 節, 式の導出など

■式 (43) の導出 Schwarz-Christoffel 写像のあからさまな式

$$w(z) = -2\alpha' p_1^+ \ln z - 2\alpha' p_2^+ + 2\alpha' p_3^+ \ln(z-1)$$

を微分すると

$$\frac{dw}{dz} = -2\alpha' p_1^+ \frac{1}{z} - 2\alpha' p_2^+ \frac{1}{z-\lambda} + 2\alpha' p_3^+ \frac{1}{z-1}$$

となる. この式との比較を容易にするために, Schwarz-Christoffel 写像の微分方程式

$$\frac{dw}{dz} = A \frac{1}{z} (z-x_1) \frac{1}{z-\lambda} \frac{1}{z-1} (z-x_2)$$

の右辺を部分分数展開しよう. 右辺の分母における因子はすべて異なっているため, 次の技法を適用できる. すなわち, 例えば

- $1/z$ の係数は, 因子 $1/z$ を消して, 右辺の残りの部分を $z=0$ とおいて評価すれば得られる.
- $1/(z-\lambda)$ の係数は, 因子 $1/(z-\lambda)$ を消して, 右辺の残りの部分を $z=\lambda$ とおいて評価すれば得られる.

[これについて本稿次節で補足説明を行う.] すると

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= A \left[\frac{1}{z} \frac{(-x_1)(-x_2)}{(-\lambda)(-1)} + \frac{1}{z-\lambda} \frac{(\lambda-x_1)(\lambda-x_2)}{\lambda(\lambda-1)} + \frac{1}{z-1} \frac{(1-x_1)(1-x_2)}{1-\lambda} \right] \\ &= A \left[\frac{1}{z} \frac{x_1 x_2}{\lambda} + \frac{1}{z-\lambda} \frac{(\lambda-x_1)(x_2-\lambda)}{\lambda(1-\lambda)} - \frac{1}{z-1} \frac{(1-x_1)(x_2-1)}{1-\lambda} \right] \end{aligned}$$

と書ける. よって係数を比較すると, 式 (43):

$$-2\alpha' p_1^+ = A \frac{x_1 x_2}{\lambda}, \quad -2\alpha' p_2^+ = A \frac{(\lambda-x_1)(x_2-\lambda)}{\lambda(1-\lambda)}, \quad -2\alpha' p_3^+ = A \frac{(1-x_1)(x_2-1)}{1-\lambda}$$

を得る.

後の議論の準備として, これらの比をとって A を消去した式

$$\frac{p_2^+}{p_1^+} = \frac{(\lambda-x_1)(x_2-\lambda)}{(1-\lambda)x_1 x_2}, \quad \frac{p_2^+}{p_3^+} = \frac{(\lambda-x_1)(x_2-\lambda)}{(1-x_1)(x_2-1)\lambda} \quad (25.87)$$

を書いておくと便利である.

■式 (44) の導出 T_1 は $z=x_1$ のときの w の実部, T_2 は $z=x_2$ のときの w の実部である.

$$T_1 = \Re(w(x_1)), \quad T_2 = \Re(w(x_2)).$$

次に Schwarz-Christoffel 写像の式

$$w(z) = -2\alpha' p_1^+ \ln z - 2\alpha' p_2^+ + 2\alpha' p_3^+ \ln(z-1)$$

を用いてこのことを具体的に書く. $\Re(\ln z) = \ln|z|$ および $0 < x_1 < \lambda < 1 < x_2$ に注意すると

$$\begin{aligned} T_1 &= -2\alpha' p_1^+ \ln x_1 - 2\alpha' p_2^+ \ln(\lambda-x_1) + 2\alpha' p_3^+ \ln(1-x_1), \\ T_2 &= -2\alpha' p_1^+ \ln x_2 - 2\alpha' p_2^+ \ln(x_2-\lambda) + 2\alpha' p_3^+ \ln(x_2-1). \end{aligned}$$

これらを $T = T_1 - T_2$ に代入して、式 (44):

$$\frac{1}{2\alpha'} T = p_1^+ \ln \frac{x_2}{x_1} + p_2^+ \ln \left(\frac{x_2 - \lambda}{\lambda - x_1} \right) + p_3^+ \ln \left(\frac{1 - x_1}{x_2 - 1} \right)$$

を得る.

■ $T \rightarrow \infty$ のとき $\lambda \rightarrow 0$ となることの証明 $0 < x_1 < \lambda$ なので, $\lambda \rightarrow 0$ とすると $x_1 \rightarrow 0$ となる. このとき T の式 (44) は

$$\frac{1}{2\alpha'} T \simeq p_1^+ \ln \frac{x_2}{x_1} + p_2^+ \ln \frac{x_2}{\lambda - x_1} + p_3^+ \ln \frac{1}{x_2 - 1}$$

となる. また上式 (25.78) は

$$\frac{p_2^+}{p_1^+} \simeq \frac{\lambda - x_1}{x_1} = \frac{\lambda}{x_1} - 1, \quad \frac{p_2^+}{p_3^+} \simeq \frac{(\lambda - x_1)x_2}{(x_2 - 1)\lambda} = \frac{1 - \frac{x_1}{\lambda}}{1 - \frac{1}{x_2}}$$

になる. 左辺の光錐運動量は正なので [9.5 節], 第 1 式からは λ/x_1 が有限で 1 より大きいことが分かる. すると第 2 式により, x_2 は有限で 1 より大きいことになる. x_2 が有限であることを利用すると, T の式はさらに

$$\frac{1}{2\alpha'} T \simeq -p_1^+ \ln x_1 - p_2^+ \ln(\lambda - x_1) + \text{finite}$$

と書き換えられる. これを見ると, ($0 < x_1 < \lambda$ を保って) $\lambda \rightarrow 0$ としたとき $T \rightarrow \infty$ となることが分かる. $\lambda(T)$ はよく定義された T の関数なので, このことは $T \rightarrow \infty$ のとき $\lambda \rightarrow 0$ となることを意味している.

■ $T \rightarrow -\infty$ のとき $\lambda \rightarrow 1$ となることの証明 上式 (25.87) の第 2 式は $\lambda \rightarrow 1$ とすると

$$\frac{p_2^+}{p_3^+} = \frac{(\lambda - x_1)(x_2 - \lambda)}{(1 - x_1)(x_2 - 1)}$$

となる. 上式において単純に $\lambda \rightarrow 1$ と置くと $p_2^+/p_3^+ \rightarrow 1$ となるが, これは正しくない. $\lambda \rightarrow 1$ とするときには x_2 を有限値として $x_1 \rightarrow 1$ とするか, もしくは x_1 を有限値として $x_2 \rightarrow 1$ としなければならない. まず $x_1 \rightarrow 1$ の場合を考えると

$$x_1 \rightarrow 1: \quad \frac{p_2^+}{p_3^+} \simeq \frac{\lambda - x_1}{1 - x_1} < 1 \quad (\because x_1 < \lambda)$$

である. ところが慣行として $p_2^+ > p_3^+$ を仮定すると [本稿次節で補足, この措置は一般性を失わない], 上の状況は実現されない. そこで次に $x_2 \rightarrow 1$ とすると

$$x_2 \rightarrow 1: \quad \frac{p_2^+}{p_3^+} = \frac{x_2 - \lambda}{x_2 - 1} > 1 \quad (25.93)$$

となる. これは適正な関係を与えている. 改めてまとめると

$$p_2^+ > p_3^+, \quad \lambda \rightarrow 1, \quad x_2 \rightarrow 1, \quad x_1 : \text{finite}$$

であり, この状況において式 (44) の T の挙動を調べると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\alpha'} T &\rightarrow p_1^+ \ln \frac{1}{x_1} + p_2^+ \ln \left(\frac{x_2 - \lambda}{1 - x_1} \right) + p_3^+ \ln \left(\frac{1 - x_1}{x_2 - 1} \right) \\ &= p_2^+ \ln(x_2 - \lambda) - p_3^+ \ln(x_2 - 1) + \text{finite} \\ &= (p_2^+ - p_3^+) \ln(x_2 - \lambda) + p_3^+ \ln \left(\frac{x_2 - \lambda}{x_2 - 1} \right) + \text{finite} \\ &= (p_2^+ - p_3^+) \ln(x_2 - \lambda) + \text{finite}. \quad (\text{上式 (25.93) の比は有限だから}) \end{aligned}$$

ここで $p_2^+ - p_3^+ > 0$ なので, $x_2 - \lambda \rightarrow 0$ とすると $T \rightarrow -\infty$ となることが見て取れる. これは $T \rightarrow -\infty$ のとき $\lambda \rightarrow 1$ となることを意味している.

25.7 について

■ 「このような場合に適用できる技法」 (p.623, 1.1,2) について 式 (25.79) 右辺から係数 A を除いた部分

$$f(z) = \frac{1}{z}(z-x_1) \frac{1}{z-\lambda} \frac{1}{z-1}(z-x_2)$$

について,

$$g(z) = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-\lambda} + \frac{c}{z-1}$$

を考える. このとき

$$[zg(z)]_{z=0} = \left[a + z \left(\frac{b}{z-\lambda} + \frac{c}{z-1} \right) \right]_{z=0} = a, \quad [(z-\lambda)g(z)]_{z=\lambda} = b, \quad [(z-1)g(z)]_{z=1} = c$$

となるので, $f(z) = g(z)$ と部分分数分解するには, 係数を

$$a = [zf(z)]_{z=0}, \quad b = [(z-\lambda)f(z)]_{z=\lambda}, \quad c = [(z-1)f(z)]_{z=1}$$

と定めれば良いということ.

■ 「我々は慣行として $p_2^+ > p_3^+$ という関係を選んであるので」 (p.625, 1.9) について $p_2^+ < p_3^+$: (25.92) となる

$$\lambda \rightarrow 1, \quad x_1 \rightarrow 1, \quad x_2 : \text{finite}$$

の場合を想定しても, 式 (25.95-98) と同様の計算により

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\alpha'} T &= p_1^+ \ln x_2 + p_2^+ \ln \left(\frac{x_2-1}{\lambda-x_1} \right) + p_3^+ \ln \left(\frac{1-x_1}{x_2-1} \right) \\ &= -p_2^+ \ln(\lambda-x_1) + p_3^+ \ln(1-x_1) + \text{finite} \\ &= \begin{cases} (p_3^+ - p_2^+) \ln(\lambda-x_1) + p_3^+ \ln \left(\frac{1-x_1}{\lambda-x_1} \right) + \text{finite} \\ (p_3^+ - p_2^+) \ln(1-x_1) + p_2^+ \ln \left(\frac{1-x_1}{\lambda-x_1} \right) + \text{finite} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (p_3^+ - p_2^+) \ln(\lambda-x_1) + \text{finite} \\ (p_3^+ - p_2^+) \ln(1-x_1) + \text{finite} \end{cases} \\ &\rightarrow -\infty \end{aligned}$$

となると考えられる.

25.8 Veneziano 振幅

本節では 4 個の開弦タキオン (入射 2 個, 出射 2 個) による散乱振幅 (Veneziano 振幅) を構築する. Veneziano 振幅の導出は行わないが, 前節で得たモデュライ空間 \mathcal{N}_4 に対する理解を基に洞察を与えることはできる. 光錐ダイアグラムでは, 無限の過去と未来に開弦タキオンを表す点 P_1, P_2, P_3, P_4 (時空運動量 p_1, p_2, p_3, p_4) がある. この過程は 2 本の弦と 1 本の弦の基本的な相互作用を 2 回含んでおり, それぞれが振

幅に対して開弦の結合 g_o の 1 乗の寄与を持つ [通常の Feynman ダイアグラムでは 3 本の線の接続する結節点に対応]. そこで散乱振幅を

$$A(p_1, p_2, p_3, p_4) = g_o^2 \int d\mu$$

と書くことにする. 次に積分 $\int d\mu$ について説明する. 点 P_1, P_2, P_3, P_4 をそれぞれ, 巡回的順序を保って $\bar{\mathbf{H}}$ の境界 x_1, x_2, x_3, x_4 に移す ($x_1 < x_2 < x_3 < x_4$). ここで x_1, x_3, x_4 は指定された位置であり, $x = x_2$ をモデュライと見なす (モデュライ空間は $x_1 < x < x_3$). すると散乱振幅にはすべての可能な光錐ダイアグラムが寄与し, そのことは面のモデュライ空間にわたる積分として表現されるので, 上式において測度 $d\mu$ は dx を含まねばならない. 実は開弦タキオンの散乱に関しては, 正しい測度は

$$d\mu = dx |x_3 - x_1| |x_4 - x_1| |x_4 - x_3| \\ \times |x - x_1|^{2\alpha' p_2 \cdot p_1} |x_3 - x_1|^{2\alpha' p_3 \cdot p_1} |x_3 - x|^{2\alpha' p_3 \cdot p_2} |x_4 - x_1|^{2\alpha' p_4 \cdot p_1} |x_4 - x|^{2\alpha' p_4 \cdot p_2} |x_4 - x_3|^{2\alpha' p_4 \cdot p_3} \quad (25.101)$$

となることが知られている. 少なくとも [エネルギー・] 運動量保存則とタキオンの質量殻条件

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0, \quad p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = p_4^2 = \frac{1}{\alpha'} \quad (25.100)$$

の下で, この $d\mu$ の表式は等価な $\bar{\mathbf{H}}$ への実線形分数変換 [25.6 節]

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbf{R} \quad (25.102)$$

に対して不変になっていることが分かる [確認は下記]. 最後にこの $d\mu$ の共形不変性を利用して $x_1 = 0, x_3 = 1, x_4 = \infty$ と選び, モデュライを $x = \lambda$ と書くと ($0 < \lambda < 1$), 散乱振幅の式は

$$A(p_1, p_2, p_3, p_4) = g_o^2 \int_0^1 d\lambda \lambda^{2\alpha'(p_1 \cdot p_2)} (1 - \lambda)^{2\alpha'(p_2 \cdot p_3)} \quad (25.109)$$

と簡略化される [導出は下記]. これが Veneziano 振幅である.

弦理論は, Veneziano が 1960 年代の後半に, この公式を書いたことが端緒となって始まった. この式は, まず, 強粒子散乱の性質を説明するための単なる数学的仮説として提出され, それから物理学者たちは, 如何なる具体的な理論から, このような振幅が導かれるのかを考えた. 弦の理論によって, この振幅が与えられることが示されたのは数年後のことであった. (p.628 下から 6~3 行目)

Veneziano 振幅から出発して, その振幅を導くような粒子の種類を推察する問題を考えよう. 散乱振幅の極を見れば, 粒子の質量を調べることができる. まず Veneziano 振幅を Lorentz 不変量

$$s = -(p_1 + p_2)^2, \quad t = -(p_2 + p_3)^2$$

で表すと, [ベータ積分]

$$A(p_1, p_2, p_3, p_4) = g_o^2 \int_0^1 d\lambda \lambda^{-\alpha(s)-1} (1 - \lambda)^{-\alpha(t)-1} = g_o^2 \frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s) - \alpha(t))}, \quad (25.115) \\ \alpha(s) \equiv \alpha' s + 1, \quad \alpha(t) \equiv \alpha' t + 1$$

になる [導出は下記]. ガンマ関数の性質により, 最右辺の極は

$$\alpha(s) = n, \quad \alpha(t) = m$$

から現れる $(n, m = 0, 1, 2, 3, \dots)$. $s = M^2$ における極は, 質量の自乗が M^2 の粒子の存在を含意するので, 各々の極から得られる質量の自乗は

$$(s =)M_n^2 = \frac{1}{\alpha'}(-1 + n), \quad (t =)M_m^2 = \frac{1}{\alpha'}(-1 + m)$$

である. これは相対論的な弦の準位になっている.

Veneziano によって発明された数式モデルが, 何らかの形で相対論的な弦に関係するという可能性は, 物理学者たちによって早くから推測されていた. この直観は 1970 年代の初めに, 光錐ゲージを用いて弦が量子化され, そのスペクトルが見いだされたことによって裏付けられた. (25.8 節, 最後の 4 行)

25.8 節, 式の導出など

■測度 (25.101) の共形不変性の証明 線形分数変換 (25.102) によって dx, x_1, x_2, x_3 は

$$x \rightarrow \frac{ax + b}{cx + d}, \quad dx \rightarrow \frac{dx}{(cx + d)^2}, \quad x_i - x_j \rightarrow \frac{x_i - x_j}{(cx_i + d)(cx_j - d)}$$

のように変換する. すると $d\mu$ の式 (25.101) の 1 行目は

$$dx|x_3 - x_1||x_4 - x_1||x_4 - x_3| \rightarrow dx|x_3 - x_1||x_4 - x_1||x_4 - x_3| \prod_{i=1}^4 (cx_i + d)^{-2}$$

と変換する. 他方, 2 行目の 6 つの因子のうち針孔 x_i を含む項 $|x_i - x_j|$ からは, x_i に関係する因子として $1/(cx_i + d)$ が生じる. このため例えば $d\mu$ の式全体から乗法的に現れる $(cx_1 + d)$ の冪 (ベキ) の因子は,

$$(cx_1 + d)^{-(2+2\alpha'p_2 \cdot p_1 + 2\alpha'p_3 \cdot p_1 + 2\alpha'p_4 \cdot p_1)}$$

となる. 運動量の保存と質量殻上の条件 (25.100) を考慮すると, 指数部分は

$$2 + 2\alpha'p_1 \cdot (p_2 + p_3 + p_4) = 2 - 2\alpha'p_1^2 = 2 - 2\alpha' \frac{1}{\alpha'} = 0 \quad (25.106)$$

と計算される. このようにして測度 $d\mu$ は共形変換 (25.102) に対して不変に留まる.

■Veneziano 振幅 (25.109) の導出 $x_1 = 0, x = \lambda, x_3 = 1, x_4 = \infty$ とおくと $x_4 \gg x_1, x, x_3$ なので, 式 (25.101) の測度 $d\mu$ は

$$d\mu = d\lambda|x_4|^2|\lambda|^{2\alpha'p_2 \cdot p_1}|1 - \lambda|^{2\alpha'p_3 \cdot p_2}|x_4|^{2\alpha'p_4 \cdot (p_1 + p_2 + p_3)}$$

となる. さらに上式 (25.106) で計算したように, $|x_4|$ の指数全体の和はゼロになるので,

$$d\mu = d\lambda|\lambda|^{2\alpha'p_2 \cdot p_1}|1 - \lambda|^{2\alpha'p_3 \cdot p_2}$$

と簡単になる. これを式 (25.99): $A(p_1, p_2, p_3, p_4) = g_o^2 \int d\mu$ に代入し, 積分範囲をモデュライ空間 $0 < \lambda < 1$ 全体に設定すると, Veneziano 振幅 (25.109):

$$A(p_1, p_2, p_3, p_4) = g_o^2 \int d\lambda \lambda^{2\alpha'(p_2 \cdot p_1)}(1 - \lambda)^{2\alpha'(p_3 \cdot p_2)}$$

を得る.

■ Veneziano 振幅を書き換えた式 (25.115) の導出 質量殻上の条件 (25.100) より,

$$s \equiv -(p_1 + p_2)^2 = -p_1^2 - p_2^2 - 2p_1 \cdot p_2 = -\frac{2}{\alpha'} - 2p_1 \cdot p_2,$$

$$t \equiv -(p_2 + p_3)^2 = -p_2^2 - p_3^2 - 2p_2 \cdot p_3 = -\frac{2}{\alpha'} - 2p_2 \cdot p_3$$

となる。そこで Veneziano 振幅 (25.109) に

$$2\alpha' p_1 \cdot p_2 = -\alpha' s - 2 \equiv -\alpha(s) - 1,$$

$$2\alpha' p_2 \cdot p_3 = -\alpha' t - 2 \equiv -\alpha(t) - 1$$

を代入すると式 (25.115) が得られる。

25.8 について

■ 「すべての運動量を入射方向に定義して」 (p.627, 1.6) について 場の理論で Green 関数に関して内向きの運動量が定義されるのと同じである。

■ 「針孔は巡回的に順序付けられているので、他の可能性はない」 (p.629, 1.4.5) について 教科書の図 25.9(p.626) に示された針孔の順序の下で弦 3 と弦 4, あるいは弦 4 と弦 1 を入射する弦と見なすことも可能であるが, エネルギー・運動量保存則 (25.100): $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$ よりそれぞれの場合に関係する不変量は結局, 式 (25.110):

$$(p_3 + p_4)^2 = (p_1 + p_2)^2 = -s, \quad (p_4 + p_1)^2 = (p_2 + p_3)^2 = -t$$

である。

■ ガンマ関数が負の整数において極を持つことについて これに関しては問題 3.6 で詳しく解析を行ったが, p.629 下 6 行~p.630, 1.7 にある簡単な説明も注目される。

■ p.630 の訳註の引用

1960 年代には, 当時実験的に強粒子が続々と発見された状況を背景として, 具体的な物理モデル (ラグランジアン) を出発点にするのではなく, S 行列が備えるべき数学的性質を第一義的に考える “S 行列理論” の立場が強粒子の理論におけるひとつの大きな潮流となっており, この流れの中では, 素粒子に内部自由度を持たせるような物理モデルを恣意的なものとして退ける風潮が強かった。各種の強粒子実験の結果から, 1967 年頃に S 行列が備えるべき性質として s チャネル過程と t チャネル過程の双対性の概念が認識されるようになり, Veneziano モデル (双対共鳴モデル) はそのような線上において, 期待される双対性を備えたひとつの “数式モデル” として登場した (1968 年)。そして双対共鳴モデルを扱う形式として演算子表示が有用であることが見いだされ, そのような抽象的な数学的手続きの中から Virasoro 代数が現れた (1970 年)。これとほぼ同時期に, 当時としてはいささか特異な双対共鳴モデルへのアプローチの方法として強粒子に対する弦模型の概念が提出され (南部, 1969 年, Susskind, 1970 年, 後藤, 1971 年), そこからも Virasoro 代数と同等のものが具体的な形で現れることが見いだされた。しかしこれらのアプローチはその後, 強粒子の実験結果の詳細には適合しないことが明らかにされ, 単なる (正確ではない) ひとつの類推モデルと見なされるようになって, 1970 年代中葉には, 別筋から台頭した QCD の成功におされる形でほとんど取り上げられなくなる。

問題 (第 25 章)

問題 25.3 \tilde{H} の自己写像

25.6 節 p.617 で式 (25.62) に関して言及されている問題 25.3 を解く。

\bar{H} の自己写像として線形分数変換 $w = (az + b)/(cz + d)$ を考えると, z 平面の実軸上の点 x は

$$w(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

に移される. 特に原点 $x = 0$ は $w(0) = b/d$ に移る. $w = (az + b)/(cz + d)$ の値は係数 a, b, c, d に共通の位相因子 $e^{i\phi}$ を掛けても変わらず, この任意性を利用して d を実数に選ぶと, $w(0) = b/d$ が実数であるためには b もまた実数でなければならない. そこで残りの係数を $a = a_1 + ia_2, c = c_1 + ic_2$ のように実部と虚部分けて書くと,

$$w(x) = \frac{(a_1x + b) + ia_2x}{(c_1x + d) + ic_2x} = \frac{\{(a_1x + b) + ia_2x\}\{(c_1x + d) - ic_2x\}}{(c_1x + d)^2 + (c_2x)^2},$$

$$\operatorname{Im}[w(x)] = \frac{x\{a_2(c_1x + d) - c_2(a_1x + b)\}}{(c_1x + d)^2 + (c_2x)^2}$$

となる. よって任意の x に対して $w(x)$ が実数となること ($\operatorname{Im}[w(x)] = 0$) を要求すると, $a_2 = 0, c_2 = 0$ でなければならないので, a, c もまた実数である. 以上より z 平面の実軸が w 平面の実軸に移るには, 係数 a, b, c, d は共通の位相因子 $e^{i\phi}$ の不定性を除けばすべて実数でなければならない.

第 26 章 弦のダイアグラムの構造とループ振幅

26.1 ループダイアグラムと紫外発散

素粒子物理学の摂動論による定式化において、最低次の近似に対する補正としてループを含むダイアグラムが現れる (図 51 参照). ループダイアグラムの表す仮想過程が非常に高いエネルギーや運動量を持つときに現れる発散は、紫外発散と呼ばれる. このときダイアグラムは等価的に短い時間や距離を含むので、小さいループを持つグラフと言われる. Einstein の重力理論を含むいくつかの理論では、正則化と繰り込みの手続きによって赤外発散に対処することができない. これに対し弦理論には紫外発散が存在しない. 弦理論が量子重力理論の最重要候補となった理由である. 我々は共形写像を利用して、潜在的に危険な短距離物理を表すように見える弦のダイアグラムが、実は、明らかに紫外発散の問題を含まないダイアグラムと等価であることを示す予定である. 我々が調べるのは 1 ループの弦のダイアグラムだけであるが、この Riemann 面とそのモデュライ空間の驚くべき性質は、任意の数のループを持つ弦のダイアグラムにおいても成立する. 弦のループダイアグラムに關係する最も単純な Riemann 面は、(仮想開弦の過程に關係する) 円環面 (アニュラス) と、(仮想閉弦の過程に關係する) 輪環面 (トーラス) である.

26.2 円環面 (アニュラス) と 1 ループ開弦

本節では図 51 の Feynman グラフに対応する、図 52 左上に示すような 1 ループの開弦ダイアグラムを考える. 始状態の弦の光錐運動量 p^+ を固定すると、このダイアグラムは弦が 2 本に分かれている時間 $\Delta T \in (0, \infty)$ と、分かれた一方の弦の光錐運動量 p_1^+ (したがって切れ目の垂直方向の位置 $\sigma = 2\pi\alpha'p_1^+$) の 2 つのパラメーターを持つ.

紫外発散の問題を調べるにあたって、このダイアグラムを共形写像によって正準表現へ移行させることを考える. まず弦の世界面は指数関数写像 (25.21): $z = \exp(w/2\alpha'p^+)$ によって図 52 右上の $\bar{\mathbf{H}}$ に移り、次いで線形分数写像 (25.23): $\eta = \frac{1+i\bar{z}}{1-iz}$ を施すと図 52 右下の単位円領域に移る [25.4 節]. η 面においては切れ目は単位円の内部にあり、世界面は 1 種の円環面となっている. 円環面とは平面上で 2 つの閉曲線に挟まれた領域である. ここでは証明抜きに述べると、複素平面において位相的 (トポロジカル) に見て円環面となっている領域は、必ず共形写像によって図 52 左下のような複素平面 (ξ 平面と呼ぼう) 上の外径 1 の正準円環面に移す

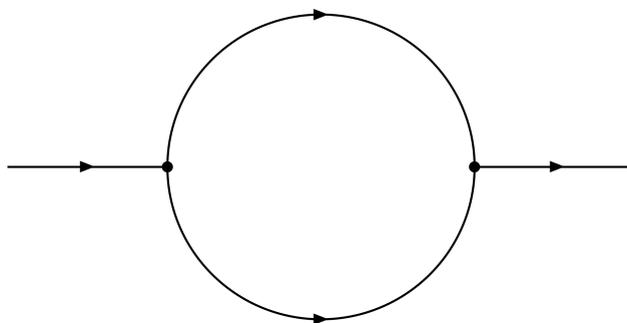


図 51 ひとつの仮想的な過程を表す 1 ループ Feynman グラフ

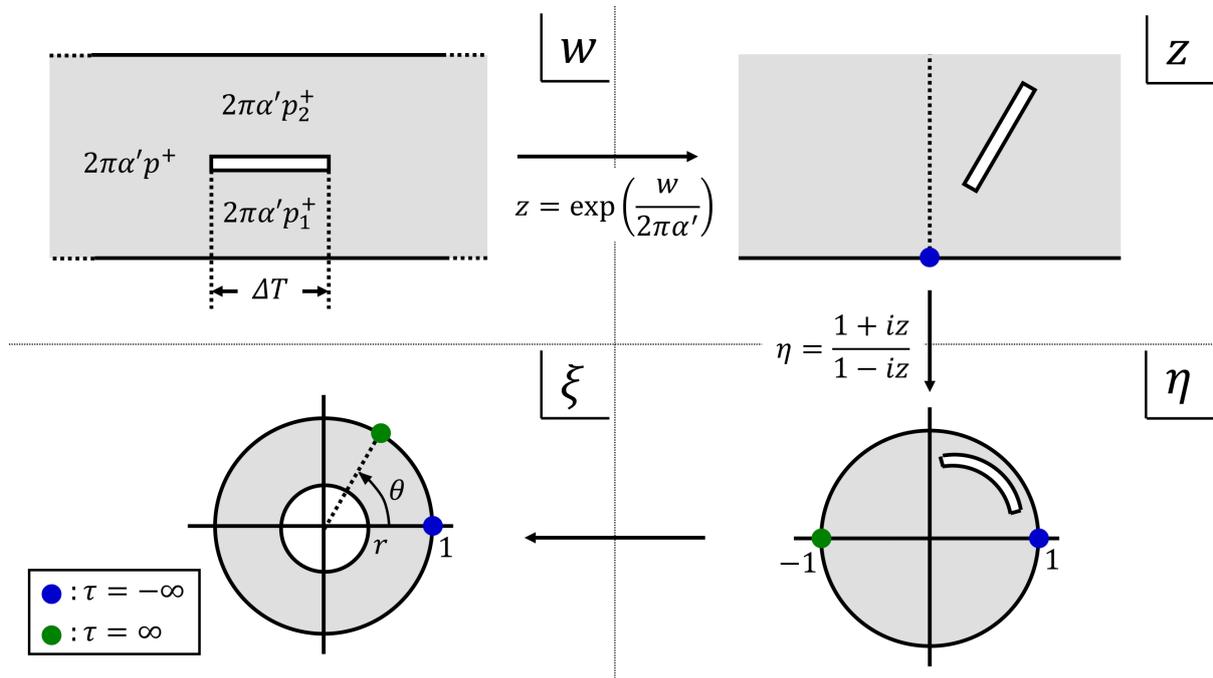


図 52 開弦の 1 ループ過程を表すダイアグラムの共形写像

ことができる。そして正準円環面の内径 r (ただし $0 < r < 1$) は非等価な円環面を区別するモデュライとなる (次節参照)。 $\tau = -\infty$ の入射弦を表す針孔を $\xi = 1$ に配置することができ、このとき $\tau = \infty$ の出射弦を表す針孔は外側の円周上 ($\xi = 1$) の点 (偏角を θ とする) に移る。この Riemann 面もやはり 2 つのパラメーター r, θ を持つことになる。実際これらは境界に 2 つの針孔を持つ円環面のモデュライにあたる。

さらに「可能な弦」の概念を導入する (p.639)。

- 可能な開弦

「両方の端点が境界上にあって、端点が針孔 (外部状態) を通過することを許さない限り、端点を境界上で動かしても収縮消滅することができないような曲線」。

- [w 平面の] 「ダイアグラムの上側の縁 $[\sigma = 2\pi\alpha'p^+]$ の左の部分に始点を持ち、そこから切れ目の下側を通過して上側の縁の右側の部分に終点を持つ曲線」など、元々存在が想定されていなかった非自明な弦も含まれる。
- 「その名が意味する通り、可能な開弦とは、世界面に対するパラメーター付けを適切にやり直すことによって、開弦と見なせるようになる曲線である。」

- 可能な閉弦

同様に「縮小消失させることのできない閉曲線によって表される閉弦」。

紫外発散の恐れのある短距離物理の兆候としては、ダイアグラムにおいて短い可能な開弦や、短い可能な閉弦が現れるという状況が考えられる。ところがダイアグラムにおいて短い可能な開弦が現れるときには、常にそのダイアグラムを有限の長さの開弦が長時間伝播するという表現に直すことができる。またダイアグラムに小さい可能な閉弦が現れるときには、常にそのダイアグラムを有限の大きさの閉弦が長時間伝播するという表現に直すことができる。このことを我々の考えている円環面の例で見よう (以下、円環面を z 平面に

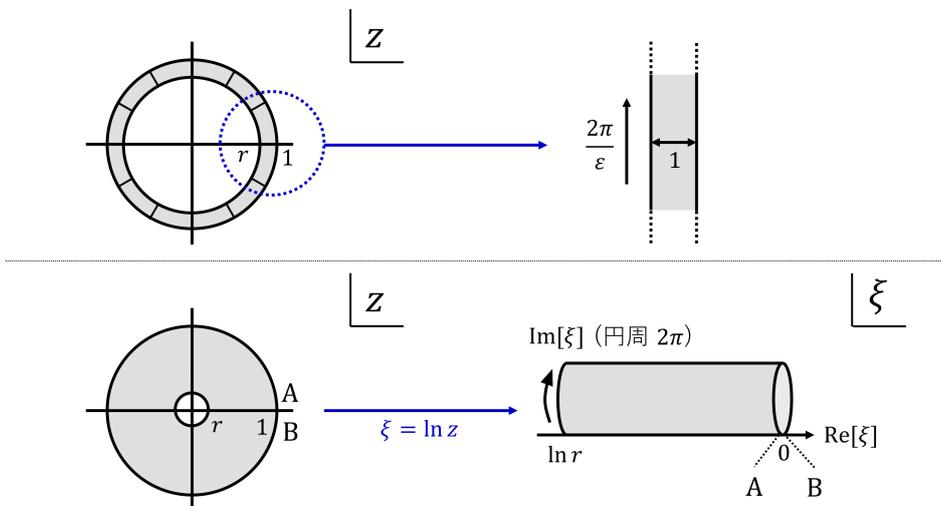


図 53 円環面に現れる可能な短い弦

選ぶ).

- 内径 $r \rightarrow 1$ の円環面 (図 53 上側)
 動径方向の長さ $\varepsilon = 1 - r \rightarrow 0$ の短線は可能な開弦であり、
 ダイアグラムは極めて短い開弦が円環面を周回する過程と見なせる。
 因子 $1/\varepsilon$ の尺度変更の共形変換 $[z \rightarrow z' = z/\varepsilon]$ を行うと、
 弦は単位の長さ (有限) を持ち、非常に“長い”距離 $2\pi/\varepsilon$ を伝播する状況が得られる。
- 内径 $r \rightarrow 0$ の円環面 (図 53 下側)
 半径 r の穴を囲む極めて小さい閉弦を考えることができる。
 共形変換 $\xi = \ln z$ を施すと、周が 2π (有限) の閉弦が長い距離 $|\ln r|$ を伝播する状況が得られる。
 $[z = \rho e^{i\phi} \rightarrow \ln z = \ln r + i\phi, -\pi < \phi \leq \pi]$

このような解釈が可能であるのは、複素平面の長さ $|dz|$ が共形不変量ではなく、絶対的な意味を持たないことによっている。なおモデュライの変化に伴って連続的に変化するようなダイアグラムの表現が可能であり、そのような表現では

1. 長距離を伝播する開弦と閉弦は、それぞれ一定幅の布、および一定の周を持つ円筒によって表され、
2. 短い可能な弦は出現しない。

26.3 円環面 (アニュラス) と静電容量

複素平面 $z = x + iy$ において、円環面は、2つの閉曲線の間の領域として定義される。それらの閉曲線は、相互にも、それ自身とも交差しておらず、一方が他方によって囲まれる領域の内部にある。我々は静電気学の概念を利用して、円環面を必ず共形写像によって正準円環面に移せること、正準円環面の内径 r が共形的に非等価な円環面を区別するモデュライであることを示したい。[本節では数学的な証明を、物理的に意味付けして解釈しつつ行うことになる。]

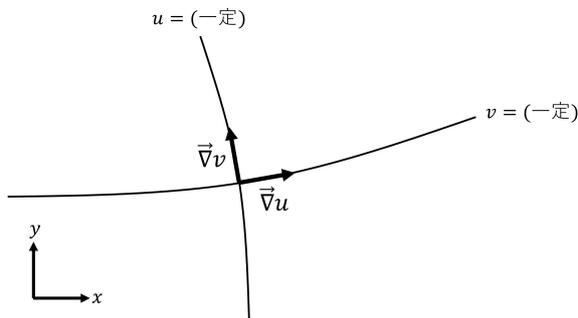


図 54 解析関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ の性質

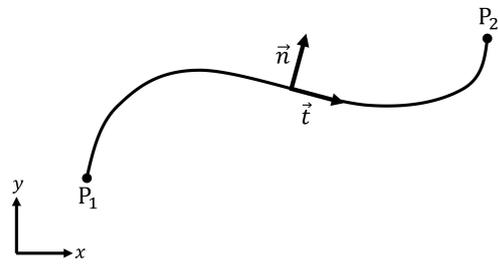


図 55 2 点 P_1, P_2 を結ぶ任意の曲線の接単位ベクトル \vec{t} と法単位ベクトル \vec{n}

まず解析関数の性質を復習する．解析関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ の実部と虚部は Cauchy-Riemann 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

を満足する．これは次のことを含意する (ただし $\vec{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, 図 54 参照)．

- Laplace 方程式

$$\vec{\nabla}^2 u = \vec{\nabla}^2 v = 0.$$

- $\vec{\nabla}v$ は $\vec{\nabla}u$ を反時計回りに 90 度回転させることによって得られる ($|\vec{\nabla}u| = |\vec{\nabla}v|$)．
 - 勾配 $\vec{\nabla}u, \vec{\nabla}v$ は, したがって u が一定の線と v が一定の線は直交する．
 - 2 点 P_1, P_2 における u の差は, 2 点を結ぶ任意の曲線を過ぎる $\vec{\nabla}v$ の流束で与えられる :

$$u(P_2) - u(P_1) = \int_{P_1}^{P_2} (\vec{\nabla}u) \cdot \vec{t} dl = \int_{P_1}^{P_2} (\vec{\nabla}v) \cdot \vec{n} dl.$$

(ただし曲線の接単位ベクトル \vec{t} と法単位ベクトル \vec{n} を図 55 のように定義してある.)

ここから任意の形状の円環面を 2 つの導電体に挟まれた筒形キャパシターの断面と見て, 静電気学による類推を利用する. [ただし物理量の次元にはこだわらない.] $v(x, y)$ が Laplace 方程式を満たすことを踏まえてこれを導電体の間の領域における電位と見なし, Dirichlet 境界条件

$$v = \begin{cases} 1 & \text{(内側の境界 (導電体) 上)} \\ 0 & \text{(外側の境界 (導電体) 上)} \end{cases}$$

を課す. このとき直観的に期待されるように,

1. 電位分布 $v(x, y)$ の解が存在し,
2. 電場線 (電気力線) は内側の導電体に始点を持ち, 外側の導電体に終点を持つ.

v を虚部に持つ解析関数の実部 u を構築するには, 上式に基づき

$$u(P) = \int_{P_0}^P (\vec{\nabla}v) \cdot \vec{n} dl \quad (26.8)$$

とすれば良い (P_0 は内側の導電体に設定した固定点)^{*25}.

キャパシターの静電容量 C を考える. $u(P)$ の値は 1 価ではなく, 円環面において内側の境界を囲む閉曲線に沿う周回積分の値

$$u_f = \oint (\nabla v) \cdot \vec{n} dl = \oint \vec{E} \cdot (-\vec{n}) dl \quad (\vec{E} = -\nabla v : \text{電場})$$

を加えるだけの不定性がある. 最右辺は $(-\vec{n})$ が閉曲線の外向きの法単位ベクトルなので電場のわき出しを表し, 筒形キャパシターの軸に平行な [複素 z 平面に垂直] 単位長さ当たりの内部導電体の電荷を Q とすると, Gauss の法則より $u_f = Q$ である [Heaviside 単位系を用いている]. 外部導電体の電荷は (単位長さ当たり) $-Q$ でなければならず, また導電体間の電位差 Q/C を 1 としているので, $C = Q$ である. よって

$$u_f = C.$$

以上を踏まえ, 円環面を正準表現に移す共形写像の議論に移ろう. 電場 $\vec{E} = -\nabla v$ は u が一定の線に沿っているので, u が一定の線は電場線を表す. 特に点 P_0 から発する電場線は $u = 0, u_f$ の線である. 電場線 ($u = \text{const}$) と等電位線 ($v = \text{const}$) は図 56 のように網目状になり, (u, v) を円環面の座標に用いることができる. そこで共形写像

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

を考えれば, 円環面は図 57 の左側のような w 平面上の平行板キャパシターの構造へと移ることが分かる. 次いで共形写像

$$\xi = \exp\left(2\pi i \frac{w}{u_f}\right) = \exp\left(-2\pi \frac{v}{u_f}\right) \exp\left(2\pi i \frac{u}{u_f}\right) \quad (0 \leq u \leq u_f, 0 \leq v \leq 1)$$

を施すと, もとの円環面は図 57 の右側のような ξ 平面上の正準円環面へと移ることが分かる. その内径は [$|\xi| = \exp\left(-2\pi \frac{v}{u_f}\right)$ に $v = 1$ を代入して]

$$r = \exp\left(-\frac{2\pi}{u_f}\right) = \exp\left(-\frac{2\pi}{C}\right)$$

と定まる.

最後に r がモデュライであることを説明する. そのためには「静電容量が共形不変であること」を示せば十分である. と言うのも, 異なる内径 $r = \exp\left(-\frac{2\pi}{C}\right)$ を持つ正準円環面は異なる静電容量 C を持つので, C が共形不変であれば, 内径 r の異なる 2 つの正準円環面を共形写像によって互いに移すことはできない. これは内径 r がモデュライであることを意味している. 「静電容量が共形不変であること」は次のような戦略で示される. まず $z = x + iy$ 平面上のキャパシターに対する, 境界条件を満たす静電場を表す解析関数を $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とする. また $\eta = \psi + i\phi$ 平面上の別のキャパシターを考え, これが共形写像 $z = h(\eta)$ によって z 平面上のキャパシターに移るものとする,

$$f(h(\eta)) = u(x(\psi, \phi), y(\psi, \phi)) + iv(x(\psi, \phi), y(\psi, \phi)) = \tilde{u}(\psi, \phi) + i\tilde{v}(\psi, \phi)$$

が η 面上で境界条件を満たす静電場を表す解析関数となっていることを説明できる [説明は下記]. そして η 平面の内部導電体を周回したときの \tilde{u} の変化は明らかに z 平面の内部導電体を周回したときの u の変化に一致するので [本稿次節で補足], z キャパシターと η キャパシターの静電容量は同じである.

^{*25} この積分は円環面の穴を横切らないように径路を変化しても値が変わらないこと, またこの u に対して実際に Cauchy-Riemann の関係式が満たされることを証明できる [証明は下記].

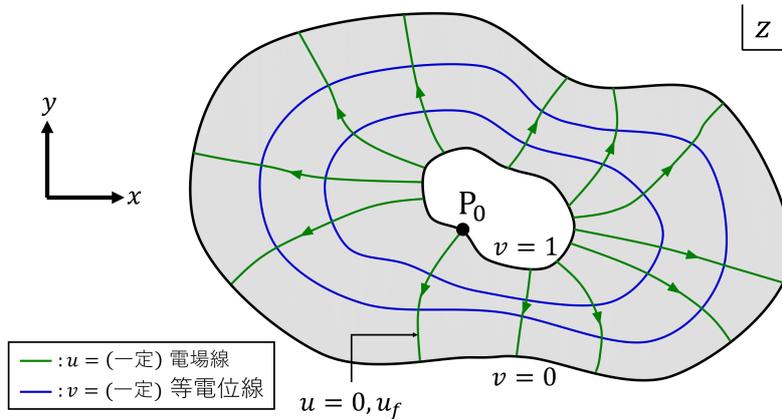


図 56 キャパシタの電場線と等電位線の張る網は、円環面の座標を定義する

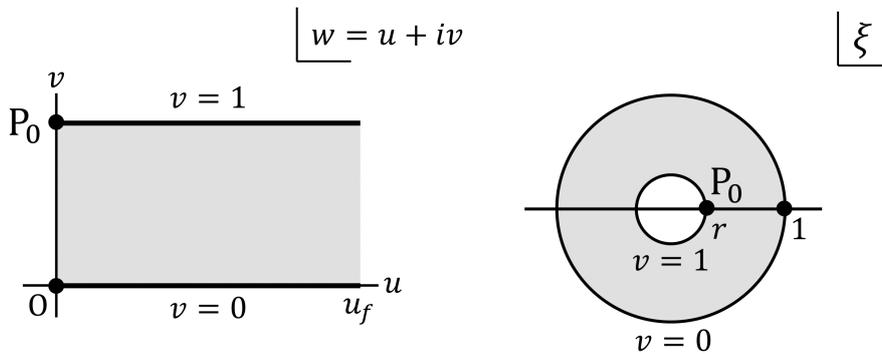


図 57 w 平面上の平行板キャパシタの構造 (左) と ξ 平面上の正準円環面 (右)

26.3 節, 式の導出など

■式 (26.8) の $u(P)$ が積分路に依らないことの確認 始点 P_0 と終点 P を結ぶ 2 つの径路 γ_1, γ_2 が円環領域内での連続的な変形によって互いに移行できる関係にある場合を考えよう. 言い換えれば閉曲線 $\Gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ は内側の導電体を囲まないものとする. このとき線積分 (26.8): $u(P) = \int_{P_0}^P (\vec{\nabla}v) \cdot \vec{n}dl$ の 2 つの径路に関する値の差は, 発散定理を用いて評価すると

$$\int_{\gamma_1} (\vec{\nabla}v) \cdot \vec{n}dl - \int_{\gamma_2} (\vec{\nabla}v) \cdot \vec{n}dl = \oint_{\Gamma} (\vec{\nabla}v) \cdot \vec{n}dl = \int_R da \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}v) = \int_R da \vec{\nabla}^2 v = 0 \quad (26.9)$$

と評価される (R は Γ の内部領域, da はその面積要素). これは (上記の過程の下で) 2 つの径路が同じ $u(P)$ の値を与えることを意味している. [本稿次節ではこの結果も静電気学による意味付けを行って解釈する.]

■式 (26.8) の $u(P)$ が Cauchy-Riemann の関係式を満たすことの証明 複素 z 平面に垂直な単位ベクトル $\vec{k} = \vec{t} \times \vec{n}$ を導入すると

$$\vec{n} = \vec{k} \times \vec{t}$$

なので, $u(P)$ の式 (26.8) は

$$u(P) = \int_{P_0}^P (\vec{\nabla}v) \cdot (\vec{k} \times \vec{t}) dl = \int_{P_0}^P (\vec{\nabla}v) \cdot (\vec{k} \times d\vec{l}) = \int_{P_0}^P d\vec{l} \cdot (\vec{\nabla}v \times \vec{k})$$

となる ($d\vec{l} = \vec{t}dl$ は線要素ベクトル). これは

$$\vec{\nabla}u = \vec{\nabla}v \times \vec{k}$$

を意味する. この式をベクトル成分について書くと Cauchy-Riemann の関係式が得られる [本稿次節で補足].

■ $f(h(\eta))$ が η 面上で境界条件を満たすディラック電場を表す解析関数となっている説明 $f(h(\eta))$ は $[\eta]$ 解析関数なので, その実部と虚部は Cauchy-Riemann 方程式を満たし, それぞれが Laplace 方程式を満たす. 関数 $\tilde{v}(\psi, \phi)$ は η キャパシターにおいて, 内部の導電体に単位電位を, 外部の導電体にゼロ電位を付与する一意的なポテンシャル解である. そして, 付加定数の違いを除き, $\tilde{u}(\psi, \phi)$ は \tilde{v} と組み合わせて解析関数を構築できる一意的な関数である. しかしながら静電容量は内部導電体を周回したときの \tilde{u} の変化量だけに依存する関数なので, 付加定数の曖昧さは問題にはならない.

26.3 について

■ 式 (26.9) について この式も静電気学による意味付けを行って解釈できる. すなわち $\oint_{\Gamma} (\vec{\nabla}v) \cdot \vec{n} dl$ は閉曲線 Γ からの電場のわき出し (に負号を付けたもの) を表しており, 静電気学に対応する仮定 $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla}^2 v = 0$ により電場のわき出しはゼロになる.

■ 「この式をベクトル成分について書くと……」 (式 (26.11) の 1 行下) について 式 (26.11): $\vec{\nabla}u = \vec{\nabla}v \times \vec{k}$ を成分表示すると, 確かに Cauchy-Riemann の関係式

$$\begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y v \\ -\partial_x v \\ 0 \end{pmatrix}$$

が得られる.

■ 「この変化量が, ……ことは明白である」 (p.647, l.5,6) について u は z 面上の位置 (x, y) の関数であるのに対して \tilde{u} は η 面上の位置 (ψ, ϕ) の関数と見ているため, 関数の名前 u, \tilde{u} を区別して表記しているけれど, これらは値としては同じである ($u = \tilde{u}$). また η 面のキャパシターは共形写像によって z 面のキャパシターに移るので, 点 η が η キャパシターの内部導電体を周回するとき, 対応する点 z も z キャパシターの内部導電体を周回する. こうして η 平面の内部導電体を周回したときの \tilde{u} の変化は, z 平面の内部導電体を周回したときの u の変化に一致することが理解できる.

26.4 非平面の開弦ダイアグラム

26.1 節の 1 ループ Fynman ダイアグラム (図 51) に対応する弦のダイアグラムは, ここまで考察してきた 26.2 節の図 52 の他に, 図 58 のようなダイアグラムがある. このダイアグラムも確かに 1 つの入射弦 (①) が 2 本の開弦 (a,b) へ分裂し, 再び結合して 1 本の開弦 (②) として出射する過程を表している. そしてやはり中間状態の開弦の一方が持つ光錐運動量と, 中間状態の持続する時間 ΔT の 2 つのパラメーターで特徴付けら

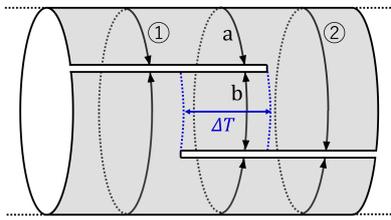


図 58 非平面ダイアグラム ($\Delta T \geq 0$)

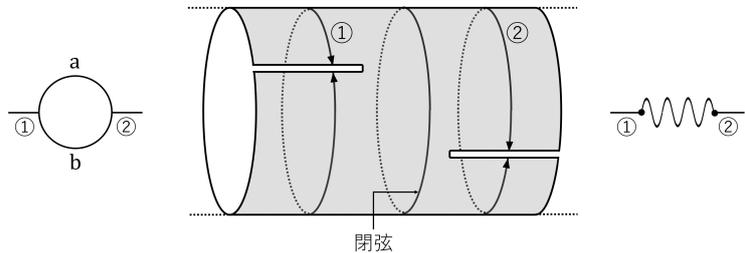


図 59 非平面ダイアグラム ($\Delta T < 0$)

れる．ところがこれは図 52 のダイアグラムとは異なり，“非平面” (non-planer) のダイアグラムとなっている．非平面ダイアグラムとは，面の一部を切り裂いて広げるか，もしくは面の一部と別の部分を重ねるようにしなければ，平坦に描くことができないダイアグラムである．またダイアグラムの切れ目は入射側または出射側の外部開弦を表す境界と繋がっており，図 52 のダイアグラムとは位相的 (トポジカル) に異なっている．さらに $\Delta T < 0$ とすると，図 59 のように中間状態に閉弦が現れる．これは開弦が自分自身で閉じて閉弦となり，再び切れて開弦にもどる過程を表しており，対応する Feynman グラフはもはやループを持たない．なるほど 2 本の開弦が端点において結合することを認めるならば，1 本の弦の両端が結合して閉弦となる過程も自ずと起こり得る．ここから相互作用をする量子開弦の無矛盾な理論を作ろうとするとときに，そこには閉弦も含まれることが一般的な形で要請されることが理解できる．

26.5 4 個の閉弦の相互作用

4 本の閉弦 (入射弦 2 本，出射弦 2 本) の相互作用を表すダイアグラムは，4 個の針孔を持つ Riemann 球面 \hat{C} である．

- このことは
 - 自由に伝播する閉弦のダイアグラムが，2 つの針孔を持つ Riemann 球面 \hat{C} によって表されること (25.6 節)
 - 4 本の開弦の相互作用を表すダイアグラムは，4 個の針孔を持つ \hat{H} によって表されること (25.7 節) から予想される．
- モデュライ空間は $\mathcal{M}_{0,4}$ [0, 1, ∞ を除いた λ -球面] である [25.6 節]．

本節では 4 個の閉弦の相互作用を表すダイアグラムが，実際にいかにしてモデュライ空間 $\mathcal{M}_{0,4}$ を生成するのかを定性的に説明する．

4 個の閉弦の相互作用を表す光錐ダイアグラムは図 60 の 3 種類に大別される． P_1, P_3, P_4 をそれぞれ \hat{C} の 0, 1, ∞ に移したときの，残りの針孔 P_2 の移る位置 λ がモデュライとなる．

- 図 60 上段のダイアグラム
 - パラメーター $\Delta T \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$
 - * $\Delta T (\geq 0)$ は 2 つの相互作用点のあいだの時間
 - * 図 60 上段の 2 重線を切り口として右側の部分を角度 θ 回転させると，

- 非等価なダイヤグラムが得られる。よって $0 \leq \theta < 2\pi$ が第 2 のパラメーターとなる。
- パラメーター範囲 $0 \leq \Delta T < \infty, 0 \leq \theta < 2\pi$ においてモデュライ λ は、
図 61 に示す $\Delta T = 0$ の閉曲線を境界とする、 $\lambda = 0$ の周りの円盤領域を生成する。
光錐ダイヤグラムから期待されるように
 - * ΔT を任意に固定して θ を変化させると、 λ は P_1 を周回する閉曲線を描く。
 - * $\Delta T \rightarrow \infty$ とすると P_2 は共形的に P_1 に近づくため、 λ は原点に近づく。

● 図 60 中段のダイヤグラム

- 図 60 上段のダイヤグラムで $\Delta T < 0$ としたダイヤグラムの 1 つ
- パラメーター範囲 $0 \leq \Delta \hat{T} < \infty, 0 \leq \theta < 2\pi$ においてモデュライ λ は、
図 61 に示す $\Delta \hat{T} = 0$ の閉曲線を境界とする、 $\lambda = 1$ の周りの円盤領域を生成する。

● 図 60 下段のダイヤグラム

- 図 60 上段のダイヤグラムで $\Delta T < 0$ としたダイヤグラムの 1 つ
- パラメーター範囲 $0 \leq \Delta \hat{T} < \infty, 0 \leq \theta < 2\pi$ においてモデュライ λ は、
図 61 に示す $\Delta \hat{T} = 0$ の閉曲線を境界とする、 $\lambda = \infty$ の周りの円盤領域を生成する。

以上よりモデュライ空間として、 $M_{0,4}$ [$0, 1, \infty$ を除いた λ -球面 $M_{0,4}$ が余すことなく生成される。

26.5 について

■光錐ダイヤグラムの解釈 例え教科書の図 26.11(p.650, 本稿の図 60 中段) のダイヤグラムは、2 本の入射閉弦 1,2 のうち弦 1 が 2 つの閉弦 1', 4 に分裂し、次いで閉弦 1' が閉弦 2 と結合して閉弦 3 となり、終状態に置いて閉弦 3,4 が射出する過程に対応する。

26.6 輪環面 (トーラス) のモデュライ空間

閉弦の 1 ループ過程を表す光錐ダイヤグラムの 1 つを図 62 に示す。このダイヤグラムは 2 つの針孔を持つ輪環面 (トーラス) と共形等価である。実際そのような輪環面は、自由な閉弦の伝播を表す 2 つの針孔を持つ Riemann 球面に、図 62 の光錐ダイヤグラムの隙間に対応する穴を設けた構造と見なせる。

以下では針孔のない輪環面について詳しく調べることを通して、紫外発散に対する洞察を得る。

矩形トーラス 複素 z 平面に同一視 $z \sim z + L_1, z \sim z + iL_2$ を導入して得られる。

矩形の基本領域 $0 \leq \Re(z) < L_1, 0 \leq \Im(z) < L_2$ (ただし \Re, \Im は実部と虚部を表す) の上下、左右の辺が繋がれ、輪環面 [ドーナツ状] になる (図 63)。

- 矩形トーラスは Riemann 面である (z 平面が Riemann 面であり、同一視が解析的だから*26)。
- パラメーター T
共形写像 $z' = z/L_1$ によって矩形の横の長さを 1 にしたときの縦の長さ、すなわち比 $T \equiv L_2/L_1$ のみがパラメーターとなる。
- モデュライ空間 $1 \leq T < \infty$
パラメーターが T の矩形トーラスと $1/T$ の矩形トーラスは共形等価なので (図 64),

*26 解析関数 f を用いた $z \sim f(z)$ という形の同一視を、解析的な同一視という。

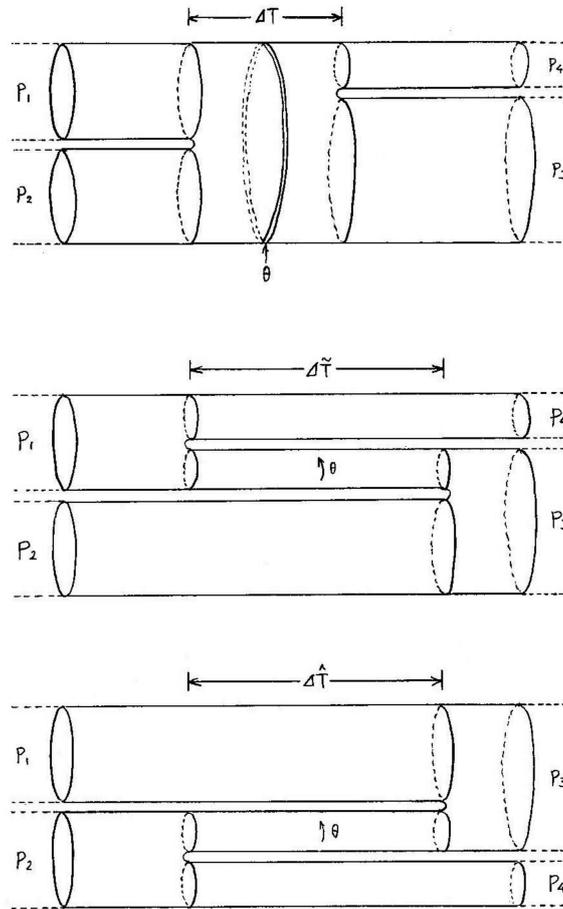


図 60 4 個の閉弦の相互作用を表す光錐ダイヤグラム

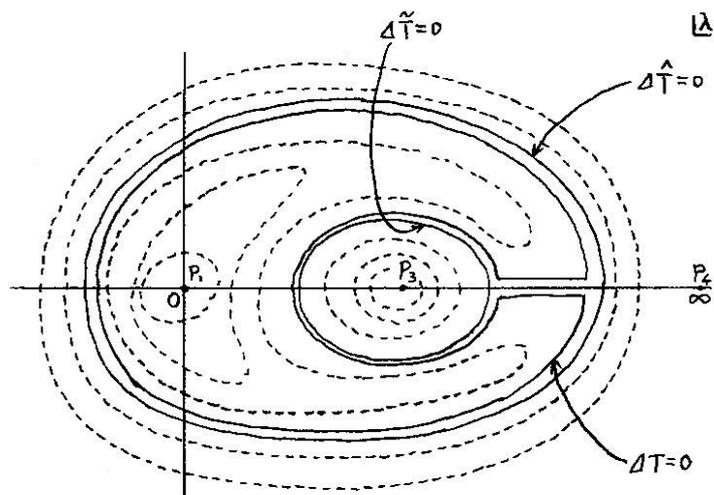


図 61 4 個の閉弦の相互作用を表す光錐ダイヤグラムのモデュライ空間 $\mathcal{M}_{0,4}$

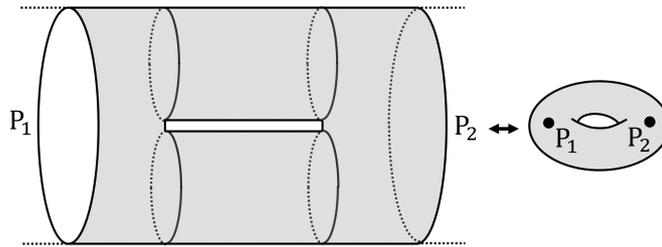


図 62 閉弦の 1 ループ過程を表す 1 つのダイアグラム

モデュライ空間として $0 < T \leq 1$ または $1 \leq T < \infty$ のいずれかを考えれば良い*27.

↓

$1 \leq T < \infty$ の矩形トーラスを考慮すれば,

紫外発散の恐れのある小さい閉弦ループが $T \rightarrow 0$ の矩形トーラスから生じることはない.

あるいは小さい閉弦ループを生じる $T \rightarrow 0$ の矩形トーラスは

$T \rightarrow \infty$ の大きな矩形トーラスと共形等価なので, 数学的にそこから紫外発散は生じ得ない.

振ったトーラス 複素 z 平面に同一視 $z \sim z + \omega_1, z \sim z + \omega_2$ を導入して得られる.

基本領域は複素数 $\omega_1, \omega_2 (\neq 0)$ を表す 2 つのベクトルの張る平行四辺形であり,

その向かい合う辺が繋がれ一般的な輪環面が形成される.

ただしベクトル ω_1, ω_2 が平行でない条件として $\Im(\omega_2/\omega_1) > 0$ を仮定する.

- パラメーター τ

再び共形写像 $z' = z/\omega_1$ によってベクトル ω_1 を 1 にしたときの,

もう一方のベクトル $\tau \equiv \omega_2/\omega_1$ のみがパラメーターとなる.

– 仮定より $\Im(\tau) > 0$ (すなわち $\tau \in \mathbf{H}$) であり, 同一視は $z \sim z + 1, z \sim z + \tau$ になる.

– $\Re(\tau) = 0$ のとき矩形トーラスに帰着する.

- 振れ角 θ

同一視 $z \sim z + 1$ により図 65 の灰色の三角形を移動すると, 基本領域を矩形領域にできる.

再び同一視 $z \sim z + \tau$ を考えると, 矩形の左右の辺を繋げて円筒を形成することができる.

矩形トーラス ($\Re(\tau) = 0$) との違いは, 下側の辺の各点が上側の辺に沿って真上から $\Re(\tau)$ だけ

ずれた点と同一視されるということであり, このズレに対応する図 65 の中心角として

振れ角 $\theta = 2\pi\Re(\tau)$ を導入する.

- 等価性 $\tau \sim \tau + 1$

同一視 $z \sim z + 1$ により図 66 のように灰色の三角形を移動すると, $\tau \rightarrow \tau + 1$ とした

トーラスの基本領域が得られるので, パラメーター τ と $\tau + 1$ を持つトーラスは同じである.

(基本領域の選び方が異なるだけで, トーラスを定義する同一視は同じものである.)

– $\tau \rightarrow \tau + 1$ により振れ角は $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ と変更されるので, $\theta \sim \theta + 2\pi$.

*27 矩形トーラスをさらに同一視させる共形写像は存在しないことが分かっている.

- 注意：振りの操作を，
円筒の両側の境界をつなぎ合わせる前に施す物理的な円筒の変形と考えてはならない。
Riemann 面としてのトーラスに関しては，
角度 θ で振ることと，角度 $\theta + 2\pi$ で振ることは等価である。
- 非等価なトーラスはすべて横幅 1 の領域

$$\mathcal{S}_0 \equiv \left\{ -\frac{1}{2} < \Re(\tau) \leq \frac{1}{2}, \Im(\tau) > 0 \right\}$$

に含まれる。

- 等価性 $\tau \sim -1/\tau$
パラメーター τ と $(-1/\tau)$ を持つトーラスは共形等価である (図 67).
- 矩形トーラス ($\tau = iT$) に対しては，これは前述の $T \sim 1/T$ という主張になる。
- モデュライ空間
2つの等価性 $\tau \sim \tau + 1, \tau \sim -1/\tau$ の下で*28，基本領域は図 68 左側に示す領域

$$\mathcal{F}_0 \equiv \left\{ -\frac{1}{2} < \Re(\tau) \leq \frac{1}{2}, \Im(\tau) > 0, |\tau| \geq 1, \right. \\ \left. \text{ただし } |\tau| = 1 \text{ では } \Re(\tau) \geq 0 \text{ のみを含める} \right\}$$

になる。トーラスのモデュライ空間 $\mathcal{M}_{0,1}$ は， \mathcal{F}_0 の境界を含めた閉包 $\bar{\mathcal{F}}_0$ を考え，その境界に同一視 $\tau \sim \tau + 1, \tau \sim -1/\tau$ を施して得られ，
図 68 右側のように可視化される (計算練習 26.1 参照)。

- ここでも小さいトーラス [$\tau \rightarrow 0$] は大きいトーラスと等価なので，
紫外発散の問題は生じない。
- 領域 $\mathcal{S}_0 - \mathcal{F}_0$ はあらゆるトーラスの複製を無数に含んでおり [“例証” は下記]，
このことが 1 ループ振幅を無限大にする危険を有していたが，
この領域は基本領域 \mathcal{F}_0 からは除かれている。
- \mathcal{F}_0 が正しい基本領域である，すなわち互いに等価でないトーラスを
すべて正確に 1 回ずつ含んでいることを示すには，次の 2 点を確認すれば良い。
* 同一視される点への変換 $T\tau = \tau + 1, S\tau = -1/\tau$ を任意の回数だけ用いて，
任意の $\tau \in \mathbf{H}$ を \mathcal{F}_0 の中へ移せること [証明は下記]。
これは \mathcal{F}_0 が任意のトーラスの複製を必ず含むことを意味する。
* 変換 S, T を任意の回数だけ用いて，
 \mathcal{F}_0 の中の任意の 2 点に関係付けることはできないこと (問題 26.6)。

26.6 節，式の導出など

■ 領域 $\mathcal{S}_0 - \mathcal{F}_0$ があらゆるトーラスの複製を無数に含んでいることの実例 例として $\tau = i$ のトーラスの無数の複製が $\mathcal{S}_0 - \mathcal{F}_0$ に含まれることを示そう。同一視 $\tau \sim \tau + 1$ により $\tau = i$ の複製を表す点の集合

$$\tau_n = i + n, \quad n \geq 1$$

*28 これ以外に独立な同一視は存在しない。

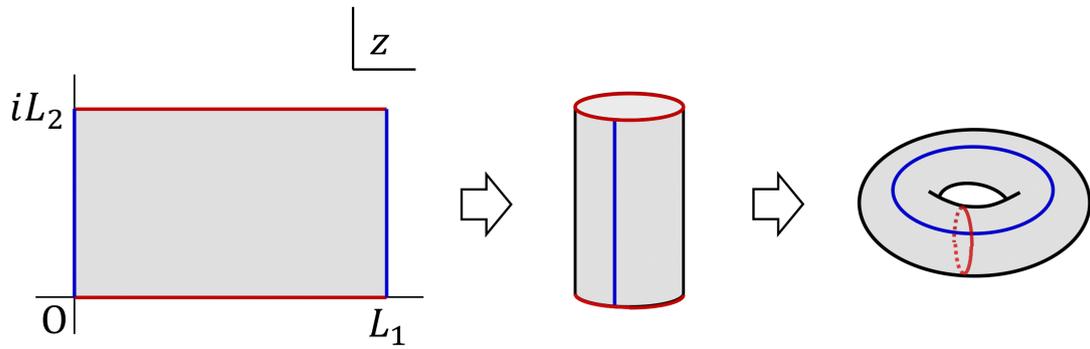


図 63 矩形トーラス

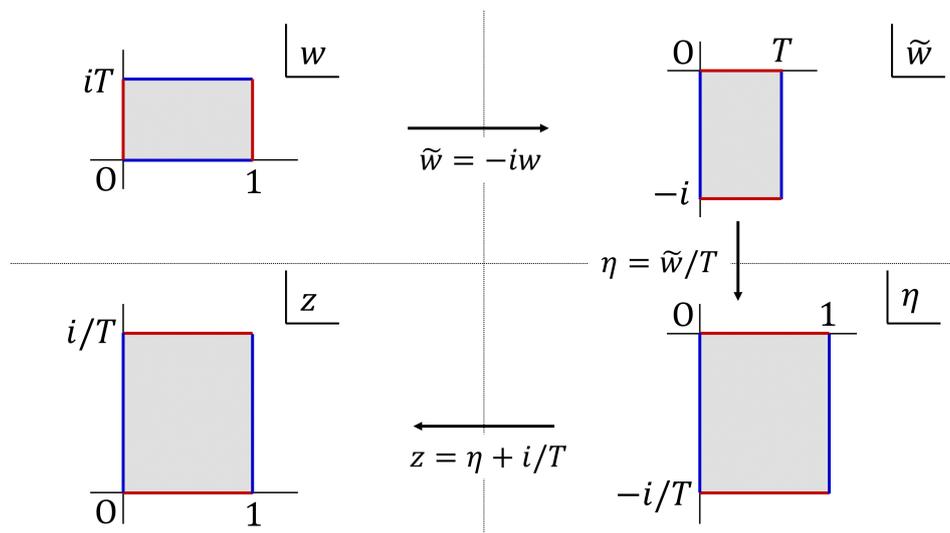


図 64 パラメーターが T の矩形トーラスと $1/T$ の矩形トーラスは共形等価である

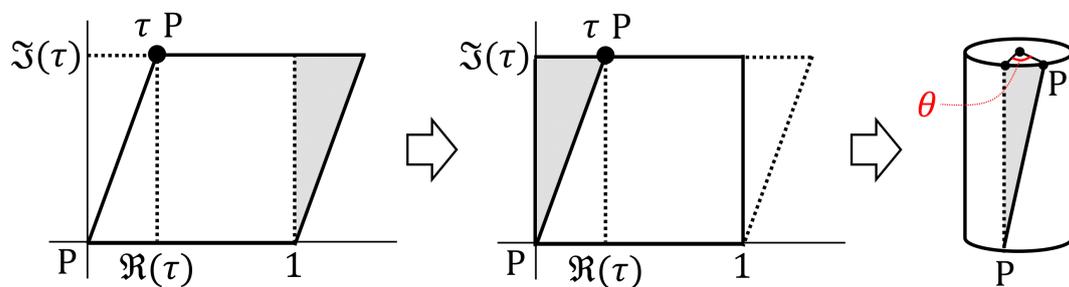


図 65 一般的な輪環面 (トーラス) の捩れ角 θ

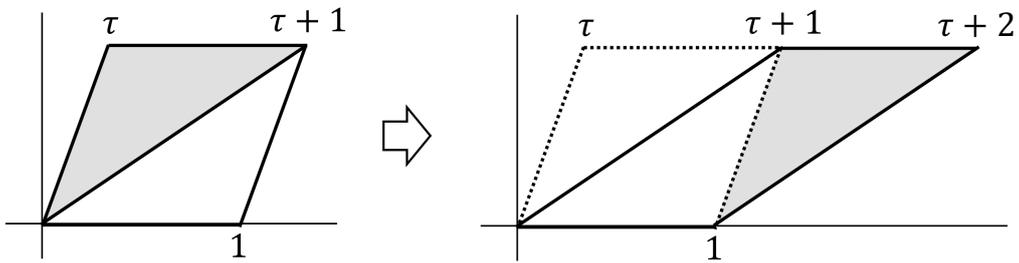


図 66 輪環面 (トーラス) に対する等価性 $\tau \sim \tau + 1$

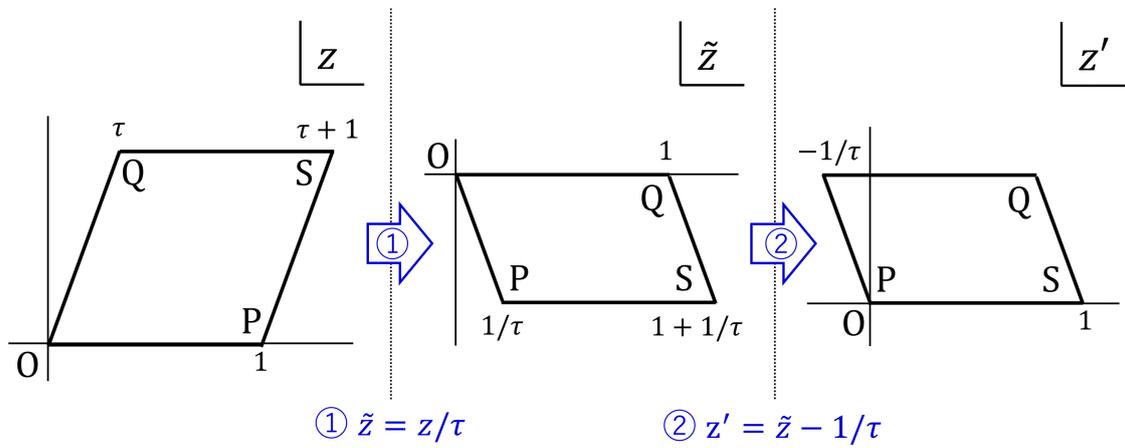


図 67 パラメーターが τ のトーラスと $-1/\tau$ のトーラスは共形等価である

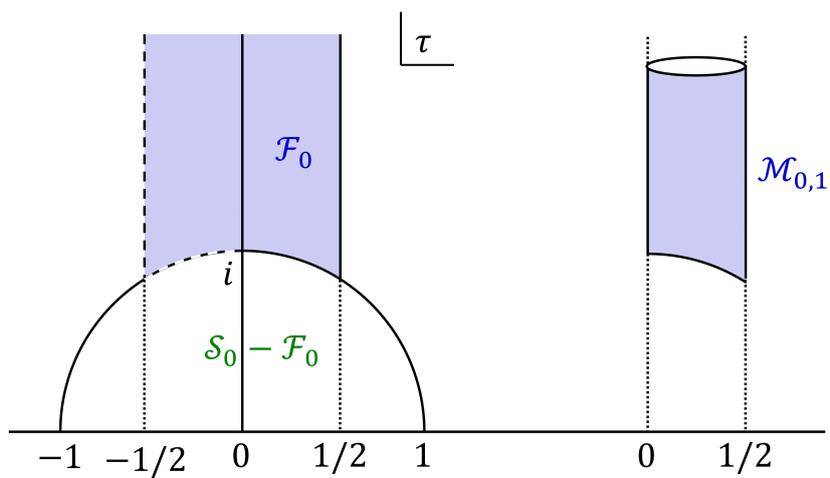


図 68 $\tau \in \mathbf{H}$ によって記述されるトーラスの基本領域 \mathcal{F}_0 と, トーラスのモジュライ空間 $\mathcal{M}_{1,0}$

が得られる。同一視 $\tau \sim -1/\tau$ により, これらは

$$-\frac{1}{\tau_n} = -\frac{n}{n^2+1} + \frac{i}{n^2+1}$$

に移る。 $n \geq 1$ に対して $|1/\tau_n| = 1/\sqrt{n^2+1} < 1$ であり, また容易に確かめられるように実部 $-n/(n^2+1)$ は区間 $[-1/2, 0]$ の範囲内にあるので, これら一連の点 $-1/\tau_n$ は $S_0 - F_0$ に含まれる。[しかも $n(\geq 1)$ の値に応じて, 相異なる無数の点が得られる.]

■変換 T, S により任意の $\tau \in \mathbf{H}$ を F_0 の中へ移せることの証明 同一視される点への変換

$$T\tau = \tau + 1, \quad S\tau = -\frac{1}{\tau}$$

は, 線形分数変換

$$g\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{Z}, \quad ad - bc = 1 \quad (26.37)$$

の特別な場合と見なせる。実際, 変換 g に関連する行列

$$[g] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det[g] = 1$$

を定義すると, 変換 T, S を表す行列にそれぞれ

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [S] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を選ぶことができる。

そこで上式 (26.37) の形の一般の変換 g について議論しておく。2つの変換 g_1, g_2 が与えられると, その合成変換 $g_1 g_2$ もまた同じ形を持つ変換となり, 行列表記において

$$[g_1 g_2] = [g_1][g_2]$$

が成立する。よって線形分数変換 (26.37) の集合は群 G を成す。行列積の演算を積演算として行列の作る群は“モデューラ群” $PSL(2, \mathbf{Z})$ であり, 記号の意味は以下の通りである。

L : 線形変換・行列変換, 2 : 行列が2行2列, S : 特殊 (行列式が1), \mathbf{Z} : 行列要素が整数。

また行列成分すべての符号を反転させても変換自体は変わらないため, 符号を反転させた行列はもとの行列と同じ群の要素と見なされる。先頭の P (射影的)はこのことを表している。

S, T およびそれらの逆行列 [逆変換] を, それぞれ任意の数だけ自由に利用して構築される射影的変換の集合を G' と記すことにする。このとき G' は G の部分群となる。さて, F_0 が任意のトーラスの複製を必ず含むことの証明に移ろう。言い換えれば証明したいことは, 任意の $\tau \in \mathbf{H}$ に対して, $g\tau \in F_0$ となるような $g \in G'$ が存在するということである。大まかな戦略として, 任意の点 τ を十分に大きな虚部を持つ点 $g\tau$ に移し, そこから何回かの変換 T [実軸方向への変位] によって F_0 の中に持ち込む。

まず各々の τ に対して, $\Im(g\tau)$ を最大にするような $g \in G'$ が存在することを示す。式 (25.66) と同様の計算により

$$\Im(g\tau) = \frac{\Im(\tau)}{|c\tau + d|^2} \quad (26.40)$$

となるので、 $|c\tau + d|$ を最小にする c, d を持つ g があることを言えば良い。ところが $(c\tau + d)$ は複素平面内において、基本ベクトル $\tau, 1$ によって生成される格子点の座標に当たるから、その中で $|c\tau + d|$ が最小となる点 (したがって整数の組 (c, d)) が (一意的とは限らないが) 確かに存在することが理解できる。[以下の議論を見ると分かるように、この $g\tau$ が前述の「十分に大きな虚部を持つ点」である.]

次に $T^n (n \in \mathbf{Z})$ を $g\tau$ に作用させて、

$$\tau' \equiv T^n(g\tau) \in \mathcal{S}_0$$

とする。[T により実軸方向には距離 1 ずつ進むから \mathcal{S}_0 を点が飛び越えることは起こり得ず、必ず $\tau' \in \mathcal{S}_0$ とできる.] τ' の虚部は $g\tau$ の虚部に等しい。また上述の証明により、 $g'\tau'$ の虚部が τ' の虚部より大きくなるような $g' \in G'$ を見出すことは不可能である。[と言うのも、もしそのような g' があれば、 $g\tau$ よりも大きな虚部 $\Im(g''\tau)$ を与える変換 $g'' \equiv g'T^n g \in G'$ が存在することになり、 $g \in G'$ が最大の虚部 $\Im(g\tau)$ を与えることに矛盾する.] もし τ' が $\bar{\mathcal{F}}_0$ の中になければ [それは半径 1 の半円内部 $\mathcal{S}_0 - \bar{\mathcal{F}}_0$ にあるから] $|\tau'| < 1$ である。ところがこのとき、再び上式 (26.40) にも注意すると

$$\Im(S\tau') = \frac{\Im(\tau')}{|\tau'|^2} > \Im(\tau')$$

となる。これは G' に属する変換が τ' の虚部を増加させることはできないという事実と反している。したがって任意の $\tau \in \mathbf{H}$ をこのように $\tau' \in \mathcal{S}_0$ に移したとき、特に $\tau' \in \bar{\mathcal{F}}_0$ に移っていることになる。

最後にこの τ' が \mathfrak{F}_0 の中に入っておらず、境界 $[\bar{\mathcal{F}}_0 - \mathfrak{F}_0]$ に位置している場合にも、さらに S, T のいずれかを 1 回施せば \mathfrak{F}_0 の中に入る。[境界 $\bar{\mathcal{F}}_0 - \mathfrak{F}_0$ は図 68 に破線で示されており、このうち縦線 $\Re(\tau) = -1/2$ の部分は T により、円周 $|\tau| = 1$ の部分は S により、それぞれ虚軸に関して対称な実線上の点に移る (計算練習 26.1 を参照).] 以上より任意の点 $\tau \in \mathbf{H}$ を、変換 T, S から生成される変換により \mathcal{F}_0 の中へ移せることが示された。

26.6 について

■条件 (26.23): $\Im(\omega_2/\omega_1) > 0$ について $\text{Arg}(\omega_i) = \phi_i$ (従って $-\pi < \phi_i \leq \pi$: (25.33)) と書くと、式 (26.23):

$$0 < \Im\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = \frac{|\omega_2|}{|\omega_1|} \sin(\phi_2 - \phi_1)$$

は $-2\pi < \phi_2 - \phi_1 < -\pi$ または $0 < \phi_2 - \phi_1 < \pi$ を意味する。よって「2つの複素数を表すベクトルが平行でないということ」(p.655, 1.10–11) に加えて、「 ω_2 の向きが ω_1 の向きに対して反時計まわりに 180° 未満の回転を施して得られる」(p.655, 1.11–12) ことが含意されている。

■振れ角 (26.27) について 「境界全体は単位長さを持つ」(p.656 下から 6,5 行目) ち、円周が 1 の円の半径は $r = 1/2\pi$ なので、長さ $\Re(\tau)$ の弧に対応する中心角は式 (26.27):

$$\theta = \Re(\tau)/r = 2\pi\Re(\tau)$$

で与えられる。

計算練習 26.1 (p.659)

$\tau = i$ の右側の点

$$\tau = ie^{-i\phi} \quad (0 \leq \phi \leq \pi/6)$$

は虚軸に関して対称な点

$$\tau' = -\frac{1}{\tau} = ie^{i\phi}$$

と同一視される。この結果は既に見た 25.6 節における写像 $z \rightarrow -1/z$ の図解 (教科書の図 25.15(p.619), 本稿の図 48) から理解できる。

計算練習 26.2 (p.660)

$$[g_1 g_2] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad [g_1] = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \quad [g_2] = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

と書くと

$$g_1 g_2 \tau = \frac{a_1(g_2 \tau) + b_1}{c_1(g_2 \tau) + d_1} = \frac{a_1 \frac{a_2 \tau + b_2}{c_2 \tau + d_2} + b_1}{c_1 \frac{a_2 \tau + b_2}{c_2 \tau + d_2} + d_1} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2) \tau + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + c_2 d_1) \tau + (c_1 b_2 + d_1 d_2)}$$

なので, すべての行列の成分が整数でなければならないことにも注意すると,

$$a = a_1 a_2 + b_1 c_2, \quad b = a_1 b_2 + b_1 d_2, \quad c = c_1 a_2 + c_2 d_1, \quad d = c_1 b_2 + d_1 d_2$$

と同定して良い。これは式 (26.38):

$$[g_1][g_2] = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + c_2 d_1 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = [g_1][g_2]$$

を意味する。なおこのとき $\det[g_1] = \det[g_2] = 1$ ならば $\det[g_1 g_2] = 1$ となることが保証される。

付録 A 教科書全体の要約

ノート本編との内容の重複を厭わずに、教科書で学んだことの大筋をまとめてみよう。

第 15 章 D-ブレーンとゲージ場

25 次元の全空間を埋める D25-ブレーンが存在する場合には、開弦の両端の座標が全て自由端の境界条件 (適当なゲージの下で Neumann 境界条件に帰す) を満たす。これに対し空間に $p (< 25)$ 次元の単純な“超平面”

$$x^a = \bar{x}^a (= \text{const}), \quad a = p+1, \dots, d$$

として広がる Dp -ブレーンを仮定すると、ここに接続された開弦の端点 ($\sigma = \sigma_* = 0, \pi$) は、弦座標の x^a 方向成分が Dirichlet 境界条件 $X^a(\tau, \sigma_*) = \bar{x}^a$ を満たす。ただし時間座標 X^0 と組合せて光錐座標 X^\pm を定義するために、Neumann 境界条件を満たす空間座標 X^1 が最低 1 つは必要なので、 $1 \leq p (< 25)$ を仮定しよう。ここでは次の 2 つの場合のみを具体的に調べる。

- 両端を共通の Dp -ブレーン上に持つ開弦 (図 69 参照)
- 平行な 2 つの Dp -ブレーンの間の開弦 (図 70 参照)

まず両端を同じ Dp -ブレーンに接続している開弦について、Dirichlet 境界条件 $X^a(\tau, \sigma_*) = \bar{x}^a$ の下での弦座標のモード展開

$$X^a(\tau, \sigma) = \bar{x}^a + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^a e^{-in\tau} \sin n\sigma$$

には新たな特徴が現れる。

- 端点が $x^a = \bar{x}^a$ に止まり続けることから期待されるように、 x^a 方向の (正味の時間平均) 運動量 p^a での並進を表す τ の 1 次の項が現れない。
- \bar{x}^a は単なる定数であって、演算子にはならない。

量子化を行うと D25-ブレーンの場合と同様、基底状態としてタキオンが得られ、また D25-ブレーンにおいて $(d-1)$ 個あった光子状態は、 Dp -ブレーンでは $(p-1)$ 個の光子状態と $(d-p)$ 個のスカラー状態になる。

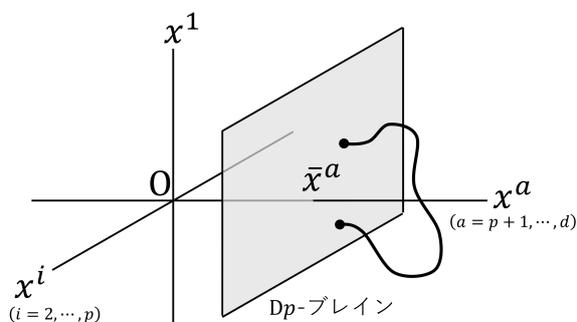


図 69 両端を共通の Dp -ブレーン上に持つ開弦

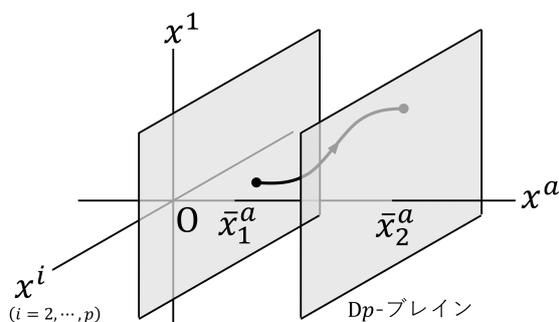


図 70 平行な 2 つの Dp -ブレーンの間の開弦

- 基底状態 $|p^+, \vec{p}\rangle$
D25-ブレーンの場合と同じ質量 $M^2 = -1/\alpha'$ を持つタキオン状態。
タキオン場は D p -ブレーン上のスカラー場。
- 無質量状態 ($M^2 = 0$)
 - ($p-1$) 個の状態 $a_1^{i\dagger} |p^+, \vec{p}\rangle$, $i = 2, \dots, p$
独立な古典場 A^I に応じて ($d-1$) 種類の 1 光子状態が得られたのと同様に,
これは光子状態であり, Lorentz 添字 i を持つ D p -ブレーン上の Lorentz ベクトル場である
Maxwell 場に関する。
 - ($d-p$) 個の状態 $a_1^{a\dagger} |p^+, \vec{p}\rangle$, $a = p+1, \dots, d$
ブレーンに垂直な方向を示す添字 a はブレーンの Lorentz 添字ではなく,
単なる番号のラベルであり, D p -ブレーン内のスカラー場が対応する。

ただし $\vec{p} \equiv (p^2, \dots, p^p)$ はブレーンに沿う横方向運動量である。これらの場がどこに存在するのかを明確に結論付けるのには成功していない。しかしながら弦の状態 $|\Psi, \tau\rangle$ を表す運動量空間の波動関数は

$$\langle p^+, \vec{p} | \Psi, \tau \rangle = \psi \dots (\tau, p^+, \vec{p})$$

という形をとるので (「 \dots 」は状態 $|\Psi, \tau\rangle$ を構築する生成演算子のラベル), 弦の状態を表す場に同定される座標空間の波動関数は, D p -ブレーンの世界領域を張る ($p+1$) 個の座標 x^+ ($\sim \tau$), x^-, x^i ($i = 2, \dots, p$) を引数に持つことになる。このため素朴には, 場は D p -ブレーン上に存在すると考えるのが自然である。

次に 2 つの平行な D p -ブレーン

$$x^a = \bar{x}_1^a, \quad x^a = \bar{x}_2^a$$

のそれぞれに端点を持つ開弦を考えると, 質量の自乗 $\left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2$ という寄与が加わる:

$$M^2 = \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \frac{1}{\alpha'}(N^\perp - 1), \quad N^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2}^p na_n^{i\dagger} a_n^i + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=p+1}^d ma_m^{a\dagger} a_m^a.$$

これは粗く単純に解釈すれば, 弦が張力 $T_0 = 1/2\pi\alpha'$ で D-ブレーンの間隔 $|\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a|$ だけ引き伸ばされて得る静止エネルギーの自乗となっている。このため基底状態 ($N^\perp = 0$) における質量の自乗は, 間隔 $|\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a|$ に応じて $M^2 \geq 0$ のいずれにもなり得る。また質量を持つ Maxwell ゲージ場は p 次元空間において, 質量のない場合の自由度 ($p-1$) よりも 1 つ多い p 個の状態を持つ。このため上で見た $N^\perp = 1$ の状態は, ここでは ($d-p$) 個の状態 $a_1^{a\dagger} |p^+, \vec{p}\rangle$ のうち 1 つが ($p-1$) 個の状態 $a_1^{i\dagger} |p^+, \vec{p}\rangle$ と合わせて質量 (の自乗) $M^2 = \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2$ を持つ Maxwell ゲージ場を形成し, 残り ($d-p-1$) 個の状態がそれぞれスカラー場を持つ^{*29}。以上の場はある意味で“両方の” D-ブレーンに存在しており, 2 つの D-ブレーンが離れているという事実を反映して, 場は非局所的な相互作用を持つことになる。

ブレーン i に始点 ($\sigma = 0$) を持ち, ブレーン j に終点 ($\sigma = \pi$) を持つ弦を $[ij]$ セクターと呼ぶ (後述のように弦には始点から終点に向かう向きがある)^{*30}。 N 個の D p -ブレーンが互いに重なり合っているとき ($|\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a| = 0$), 各 $[ij]$ セクターは質量のない 1 つのゲージ場を持つことになる。ところで弦の始点と終点の属するブレーンの選び方はそれぞれ N 通りだから, 全部で N^2 個のセクターが, したがって N^2 個の無質量

^{*29} このように Maxwell 場という用語は質量を持つ場を含め, “Maxwell 型” の場の方程式に従うゲージ場一般を指すのにも用いられる。

^{*30} これまで演算子や基底状態のセクターラベル $[ij]$ を省略してきた。

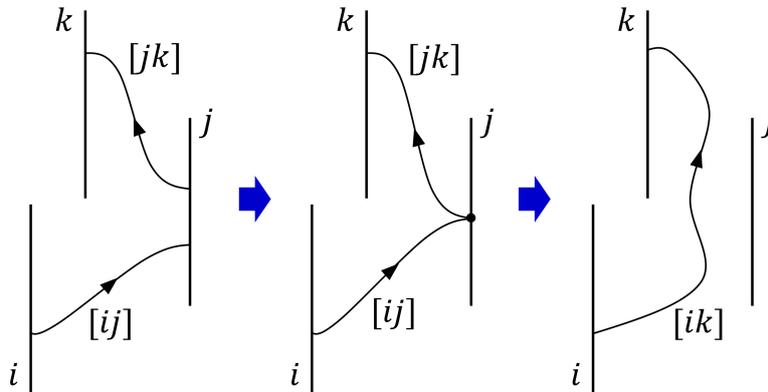


図 71 ゲージ場の相互作用の起源となる，Dp-ブレイン上での弦の端点の結合

ゲージ場が存在する．これらの場の相互作用は $U(N)$ Yang-Mills 理論によって記述される．弦の描像では実は，このような場の相互作用は異なる弦の端点が同一の D-ブレイン上で結合する過程によって生じる．図 71 のように $[ij]$ セクターの弦の終点と $[jk]$ セクターの弦の始点が j 番目のブレイン上で結合すると，この点はや端点ではないから，結果として形成される弦は j 番目の D-ブレインには接続しておらず， $[ik]$ セクターの弦となる．このことを

$$[ij] * [jk] = [ik]. \quad (j \text{ について和をとらない})$$

と表記する．

第 16 章 弦のチャージと電荷

場の古典論において粒子が Maxwell 場 A_μ と相互作用するのと同様に，弦と結合する場を考えると，(場と相互作用する能力としての) 弦のチャージが自然に導入されることを論じよう．

適正な作用の結合項を得るには，弦と相互作用する無質量のゲージ場は，添字に関して反対称な 2 階テンソル場 $B_{\mu\nu}$ でなければならないことが結論される．そのような場は Kalb-Ramond 場と呼ばれ，それ自身，閉弦理論から現れる状態であることからその実在性が示唆されている．また閉弦は D-ブレインによる拘束を受けないことから，全時空に存在する Kalb-Ramond 場を想定できる．

最小作用原理から Kalb-Ramond 場 $B_{\mu\nu}$ の運動方程式を導こう．場の強度は電磁場の強度 (電磁テンソル) $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ に類似の完全反対称テンソル

$$H_{\mu\nu\rho} \equiv \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}$$

として定義される．弦と場に対する完全な作用は

$$S = S_{\text{str}} - \int d^D x B_{\mu\nu} j^{\mu\nu} - \frac{1}{6\kappa^2} \int d^D x H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho}$$

で与えられる (S_{str} は弦自体の作用)．ただし

$$j^{\mu\nu}(x) \equiv \frac{1}{2} \int d\tau d\sigma \delta^D(x - X(\tau, \sigma)) \frac{\partial X^{[\mu}}{\partial \tau} \frac{\partial X^{\nu]}{\partial \sigma}$$

であり、ここで反対称化の記法 $a^{[\mu}b^{\nu]} \equiv a^\mu b^\nu - a^\nu b^\mu$ (言わば“添字に対する交換子”) を用いている。これは荷電粒子と Maxwell 場の相互作用系に対する完全な作用

$$S = -m \int ds + \int d^D x j^\mu A_\mu - \frac{1}{4\kappa_0^2} \int d^D x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

と比較される式である。このとき最小作用原理から場の方程式

$$\frac{1}{\kappa^2} \partial_\rho H^{\mu\nu\rho} = j^{\mu\nu}$$

が導かれる。これは Maxwell 方程式 $\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$ に類似しており、通常の電荷保存則 $\partial_\mu j^\mu = 0$ が Maxwell 方程式 $\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$ に含まれているのと同様に、ここから保存則

$$\partial_\mu j^{\mu\nu} = 0, \quad \vec{j}^0 = (j^{01}, \dots, j^{0d}) : \text{チャージ密度}$$

が得られる。こうして予告通り、弦の保存するチャージ $\vec{Q} = \int d^D x \vec{j}^0$ が見出される。

チャージの密度 \vec{j}^0 の性質を調べよう。静的ゲージ $X^0 = \tau$ を用いて \vec{j}^0 の定義式を評価すると

$$\vec{j}^0(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \int d\sigma \delta(\vec{x} - \vec{X}(t, \sigma)) \vec{X}'(t, \sigma)$$

となる。これは弦のチャージ密度ベクトル \vec{j}^0 が弦の上のみ存在し、弦に正接し、 σ の増加する方向を指すことを意味している。我々が“向きを持つ(有向の)”弦を考えていることを反映して、 σ の増加する向きを変えるとチャージ密度 \vec{j}^0 の符号は反転する。 \vec{j}^0 の定義式は $\text{sgn}\left(\frac{\partial(\tau, \sigma)}{\partial(\tau', \sigma')}\right) = +1$ となる(つまりパラメータ空間 (τ, σ) を反転しない)パラメータの付け替え $\tau, \sigma \rightarrow \tau', \sigma'$ に対して不変なので、 \vec{j}^0 が弦に沿って始点から終点に向かうことはゲージに依らない意味を持つと考えられる。

\vec{j}^0 は保存するチャージの密度であるという意味で、電流密度ではなく電荷密度に対応するけれど、その性質に関してはむしろ電流密度によく似ている。まず保存則 $\partial_\mu j^{\mu\nu} = 0$ は、チャージ密度 \vec{j}^0 が空間において発散を持たないこと $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}^0 = 0$ を含意している。これは電荷密度 ρ の時間変化しない静磁気学において、電荷保存則により電流密度はわき出しがゼロになり、電流は滞ることなく流れ続けることに類似している。静磁気学とのアナロジーをさらに推し進めることができる。簡単のために通常の 4 次元時空を考えよう。場の強度 H^{0kl} に双対な“磁場”

$$B_{Hk} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{klm} H^{0lm}$$

(ただし ε^{ijk} は $\varepsilon^{123} = 1$ を満たす完全反対称テンソル) を定義すると、場の方程式は電流密度とする Ampère の法則の形

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_H = \kappa^2 \vec{j}^0$$

になる。このためある閉曲線に沿う“磁場” \vec{B}_H の周回積分を求めると、閉曲線を貫く \vec{j}^0 の束を、したがって弦の本数を計算したことになる(定数係数の違いを除いて、図 72 参照)。

弦のチャージの保存によればチャージ密度 \vec{j}^0 はわき出さないから、静磁気学の電流と同様、孤立弦はループして閉弦を形成するか、または無限に伸びた開弦でなければならない。ところが D-ブレーンに接続した弦の端点でチャージ密度 \vec{j}^0 は止められるから、一見するとチャージの保存はそこで破綻する。この点を理論的に詳しく述べると次のようである。すなわち古典電磁気学において理論のゲージ不変性と電荷保存則には密接な関係があったように、弦理論においても保存則 $\partial_\mu j^{\mu\nu} = 0$ が成立するならば、場 $B_{\mu\nu}$ の運動方程式は場のゲージ変換

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B'_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + \delta B_{\mu\nu}, \quad \delta B_{\mu\nu} = \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu$$

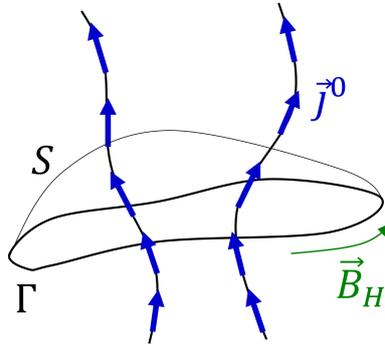


図 72 曲面 S を貫く弦のチャージ密度 j^0 と面の縁 Γ に沿う “Kalb-Ramond 場” \vec{B}_H の周回積分

に対して不変となることが保証される．ところが (両端を共通の Dp -ブレーン上に持つ開弦に対して), 実際に作用 (特にゲージ不変性が非自明な, 弦と Kalb-Ramond 場の結合項 S_B) のゲージ変換に伴う変化量を計算すると,

$$\delta S_B = \int d\tau \Lambda_m \partial_\tau X^m \Big|_{\sigma=\pi} - \int d\tau \Lambda_m \partial_\tau X^m \Big|_{\sigma=0}$$

となり (ただし $m = 0, 1, \dots, p$ は (時間成分を含めた) ブレーンに沿う方向成分), このブレーン上の境界項は運動方程式を不変には留めない. したがって保存則 $\partial_\mu j^{\mu\nu} = 0$ は成り立たないことになる. これは既に得られたチャージの保存則と矛盾しており, 我々の議論に見落としがあったと言わねばならない. ここで D -ブレーン内には Maxwell 場 A_m が存在できることを思い出そう. その源として弦の端点が (Maxwell 場と関係する) 電荷 $\pm q$ を持つと仮定し, 作用に Maxwell 場と弦の端点の適正な結合項

$$\int d\tau A_m(X) \frac{dX^m}{d\tau} \Big|_{\sigma=\pi} - \int d\tau A_m(X) \frac{dX^m}{d\tau} \Big|_{\sigma=0}$$

を加え, $B_{\mu\nu}$ のゲージ変換と同時に Maxwell 場を

$$A_m \rightarrow A'_m = A_m + \delta A_m, \quad \delta A_m = -\Lambda_m$$

と変換すれば^{*31}, 作用のゲージ不変性は (したがってチャージの保存は) 回復する. この結果は次のように解釈される. すなわち図 73 のように弦の端点は電荷を持ち, D -ブレーンの内部 (だけ) に電場線を作る. チャージ密度 j^0 は電場に担われて D -ブレーンの “内部へ” 流れ込むため, 端点で止まらず保存則を破らない.

第 17 章 閉弦の T 双対性

閉弦の理論ではひとつの次元が半径 R に巻き取られた世界と, ひとつの次元が半径 α'/R に巻き取られた世界 (α' は長さの自乗の次元を持つことを思い出そう) は区別できない. この対称性は T 双対性と呼ばれ, T はトロイダル (toroidal) を, トロイダル (輪環型) はコンパクト化した空間が輪環 (トーラス) 状であることを意味する. 以下, 閉弦の T 双対性について説明する.

26 次元時空において座標 $x^{25} (\equiv x)$ が同一視 $x \sim x + 2\pi R$ によって, 半径 R の円に巻き取られている場合を考える. このとき弦座標 X^0, X^1 を用いて光錐座標 X^\pm を定義することができる. 弦座標を $X^{25} \equiv X$ と略

^{*31} これは通常のゲージ変換 $\delta A_\mu = \partial_\mu \varepsilon$ とは別に定義される.

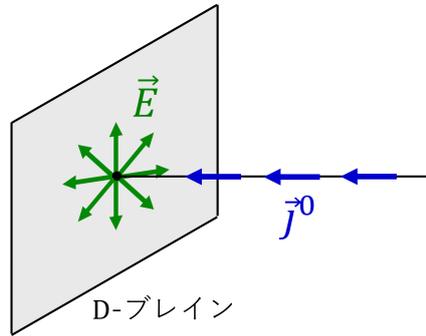


図 73 チャージ密度 \vec{j}^0 は端点の持つ電荷の作る電場 \vec{E} に担われ、D-ブレイン内に流れ込む

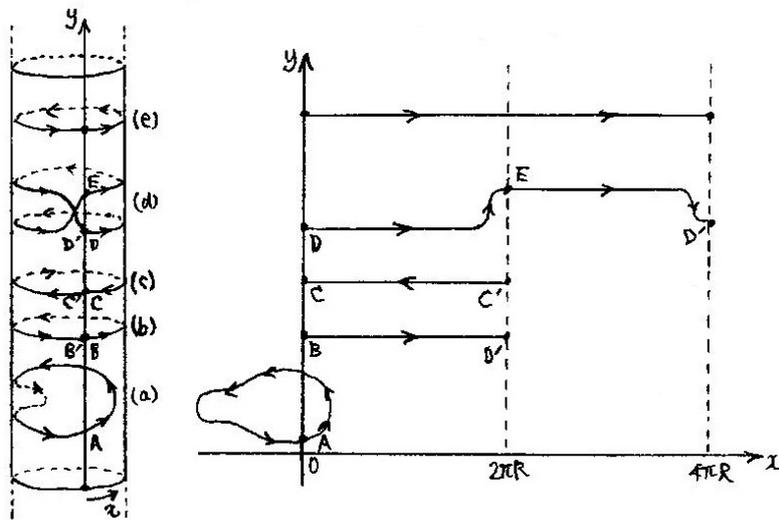


図 74 様々な巻き数 m を持つ円筒上の閉弦. y は横方向座標の 1 つ. (a) $m = 0$, (b) $m = 1$, (c) $m = -1$, (d), (e) $m = 2$.

記し、これを除く横方向座標を $X^i (i = 2, 3, \dots, 24)$ と書く. 一般に弦が x の正の向きに円筒を m 回周回しているとき (m は整数), 弦の“巻き数”は m であると言われ, 巻き数が多くなっても σ の全範囲を常に 2π と設定すれば, 弦座標は

$$X(\tau, \sigma + 2\pi) = X(\tau, \sigma) + m(2\pi R)$$

を満たす (図 74 参照). 巻き数が異なる弦同士は, 連続的な変形によって相互に移行させることが不可能であり, それゆえ閉弦の巻き数は, 個々の弦のトポロジ的な性質と見なされる.

運動量の単位を持つ“巻き量” (winding)

$$w \equiv \frac{mR}{\alpha'}$$

を導入すると, 上記の巻き数が m となる条件は

$$X(\tau, \sigma + 2\pi) = X(\tau, \sigma) + 2\pi\alpha'w$$

と書き換えられる。この下で弦座標は

$$\begin{aligned} X(\tau, \sigma) &= X_L(u) + X_R(v), \\ X_L(u) &= \frac{1}{2}x_0^L + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\bar{\alpha}_0 u + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\bar{\alpha}_n}{n} e^{-inu}, \\ X_R(v) &= \frac{1}{2}x_0^R + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0 v + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{n} e^{-inv} \end{aligned}$$

という形を持ち、またコンパクト化から生じる新たな特徴として、巻き量が $w = 0$ でない限り $\bar{\alpha}_0$ は α_0 と等しくならないこと

$$w = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}(\bar{\alpha}_0 - \alpha_0)$$

が導かれる。さらに $\frac{1}{2}(x_0^L + x_0^R) \equiv x_0$ とおき、 x^{25} 方向の運動量 $p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} \dot{X} d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}(\alpha_0 + \bar{\alpha}_0)$ を用いると、弦座標のモード展開は

$$X(\tau, \sigma) = x_0 + \alpha' p \tau + \alpha' w \sigma + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\bar{\alpha}_n e^{-in\sigma} + \alpha_n e^{in\sigma})$$

とまとめられる。(この展開式においてコンパクト化の影響は、巻き量の項 $\alpha' w \sigma$ に現れている。)

コンパクト化した方向の弦座標 X に対しても通常の正準交換関係

$$[X(\tau, \sigma), \mathcal{P}^\tau(\tau, \sigma')] = i\delta(\sigma - \sigma')$$

を課すと、コンパクト化のない場合と同じ振動子の交換関係

$$[\bar{\alpha}_m, \bar{\alpha}_n] = [\alpha_m, \alpha_n] = m\delta_{m+n,0}, \quad [\alpha_m, \bar{\alpha}_n] = 0$$

が得られる。また x_0 を含む非自明な交換関係としては、

$$[x_0, \alpha_0] = [x_0, \bar{\alpha}_0] = i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}, \quad \therefore [x_0, p] = i, \quad [x_0, w] = 0$$

が導かれる。このとき巻き量 w は X に現れるすべての演算子と可換になっていることに注意しよう。この結果の最も保守的な解釈として、巻き量 w が単なる定数であるということが考えられる。しかしながら (2種類のゼロモード $\alpha_0, \bar{\alpha}_0$ が区別されることは2種類の運動量があることを示唆しており、そこで) 巻き量 w を運動量 p と同列の運動量演算子と見なし、 w の固有値が様々な可能な巻き量に対応するという解釈することしよう。 x_0 は同一視 $x_0 \sim x_0 + 2\pi R$ を導入された円周上の座標なので、交換関係 $[x_0, p] = i$ によりこれと共役な運動量となる p は

$$p = \frac{n}{R} \quad (n \text{ は整数})$$

と量子化される。もう1つの運動量 w の固有値は

$$w = \frac{mR}{\alpha'} \quad (m \text{ は整数})$$

のように量子化されている。

今、我々が扱っている x^{25} 方向がコンパクト化した時空における量子閉弦に対して、任意の消滅演算子を作らせると消失するような基底状態は、 $p^+, \vec{p}_T = (p^2, \dots, p^{24})$ とコンパクト化方向の運動量 $p = n/R$ 、巻き量 $w = mR/\alpha'$ によって指定され、

$$|p^+, \vec{p}_T; n, m\rangle$$

と表される (ここに $\vec{p}_T = (p^2, \dots, p^{24})$ であり, n, m はコンパクト化方向の運動量 $p = n/R$ と巻き量 $w = mR/\alpha'$ に関する整数). しかしこれが物理的な状態となるとは限らない. 実際ここでも $\alpha_0^- = \bar{\alpha}_0^-$ が, したがって $L_0^\perp = \bar{L}_0^\perp$ が成立する. そして今の場合 $\alpha_0 \neq \bar{\alpha}_0$ であることに関係して, これは $N^\perp = \bar{N}^\perp$ (レベル整合条件) を意味せず, 代わりに

$$N^\perp - \bar{N}^\perp = \alpha' p w = nm$$

を帰結する. この制約条件により, 厳密な意味での基底状態は $n = 0$ または $m = 0$ の状態に限られる. 理論の一般的な基本状態の候補は

$$\left[\prod_{r=1}^{\infty} \prod_{i=2}^{24} (a_r^{i\dagger})^{\lambda_{i,r}} \right] \left[\prod_{s=1}^{\infty} \prod_{j=2}^{24} (\bar{a}_s^{j\dagger})^{\bar{\lambda}_{j,s}} \right] \left[\prod_{k=1}^{\infty} (a_k^\dagger)^{\lambda_k} \right] \left[\prod_{l=1}^{\infty} (\bar{a}_l^\dagger)^{\bar{\lambda}_l} \right] |p^+, \vec{p}_T; n, m\rangle$$

という形をとり, このうち数演算子の固有値

$$N^\perp = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{i=2}^{24} r \lambda_{i,r} + \sum_{k=1}^{\infty} k \lambda_k, \quad \bar{N}^\perp = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=2}^{24} s \bar{\lambda}_{j,s} + \sum_{l=1}^{\infty} l \bar{\lambda}_l$$

が制約条件 $N^\perp - \bar{N}^\perp = nm$ を満たす状態だけが実際に許容される物理的な状態となる.

ここではコンパクト化によって得られる物理的な状態を具体的に調べることは省略し, 各状態における質量の自乗に注意を向けよう. コンパクト化方向の運動量 p を含まない式

$$M^2 = 2p^+ p^- - p^i p^i \quad (i = 2, 3, \dots, 24)$$

によって, コンパクト次元を含まない 25 次元 Minkowski 空間における質量の自乗を定義すると, これは (演算子として)

$$M^2 = p^2 + w^2 + \frac{2}{\alpha'} (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2)$$

と計算される. ただし $N^\perp \equiv \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I, \bar{N}^\perp \equiv \sum_{p=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{-p}^I \bar{\alpha}_p^I$ には相変わらずコンパクト化方向の弦座標における振動子からの寄与が含まれていることに注意する. 巻き量 w の M^2 への寄与 $M = |w|$ は, 単純には張力 $1/2\pi\alpha'$ に抗して弦を引き伸ばし, コンパクト化方向の長さ $2\pi R$ に $|m|$ 周巻き付かせたとき弦の得るエネルギー

$$\frac{1}{2\pi\alpha'} \times |m| \times 2\pi R = \frac{|m|R}{\alpha'} = |w|$$

として (粗く) 理解できる. 物理的な基本状態での固有値は

$$M^2 = \left(\frac{n}{R}\right)^2 + \left(\frac{mR}{\alpha'}\right)^2 + \frac{2}{\alpha'} (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2)$$

となる. コンパクト半径 R に対する依存性が, 運動量を介した部分 $(n/R)^2$ と巻き量を介した部分 $(mR/\alpha')^2$ とで反対になっていることに注目しよう. これにより半径 R を $\tilde{R} \equiv \alpha'/R$ に置き換えても, n と m がすべての可能な整数の値をとるときに得られる質量の“リスト” (質量スペクトル) は変わらない. このため半径 R と半径 $\tilde{R} = \alpha'/R$ は互いに双対な半径と呼ぶことができる. 双対な半径 R, \tilde{R} は自己双対半径 $R^* = \sqrt{\alpha'}$ (弦の長さに一致) の円に関する反転 $R\tilde{R} = \alpha' = R^{*2}$ によって関係付けられており, 半径 R の実質的な範囲 (モデュライ空間) は $R \geq R^*$ に限定されることになる (図 75 参照).

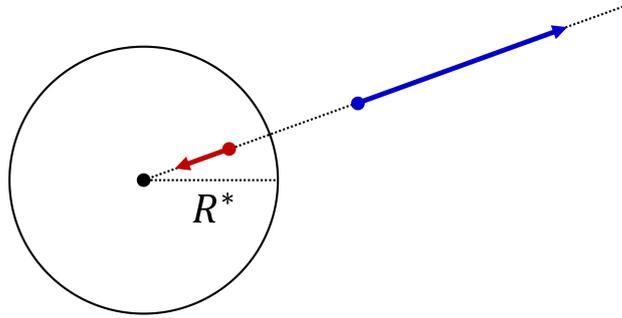


図 75 半径 R^* の円に関する反転によって関係付けられる, 互いに双対な半径

互いに双対な半径 $R, \alpha'/R$ によるコンパクト化は, 質量スペクトルが一致するだけでなく, 物理的に互いに区別できない (T 双対性). この等価性は, すべての交換関係を考慮した 2 つの理論の間の演算子写像を示すことによって証明される. $q_0 = (x_0^L - x_0^R)/2$ を用いて双対な “座標” 演算子

$$\tilde{X}(\tau, \sigma)X_L(\tau + \sigma) - X_R(\tau - \sigma)$$

を定義すると, T 双対性の証明を通して,

- 半径 R の円の座標 x_0, X に関する運動量を p , 巻き量を w とする理論・解釈
- 半径 α'/R の円の座標 q_0, \tilde{X} に関する運動量を w , 巻き量を p とする理論・解釈

が区別できないことが見出される.

第 18 章 開弦および D-ブレーンの T 双対性

再び $x^{25} (\equiv x)$ 方向が同一視

$$x \sim x + 2\pi R$$

によってコンパクト化している時空において, 開弦の伝播を考察しよう^{*32}. ただし全空間を埋める D25-ブレーンの存在を仮定して, 開弦の両端は Neumann 境界条件を満たすものとする. 開弦のコンパクト化方向の運動量は $p = n/R$ と量子化されるのに対し, コンパクト化半径 $\tilde{R} = \alpha'/R$ を持つ時空では運動量は $p = n/\tilde{R} = nR/\alpha'$ と量子化されるので, 質量の自乗 M^2 に対するこれらの寄与 p^2 は異なる. (ここまでは閉弦の場合と同じであるが,) 閉弦の場合と異なり, 開弦は次元のコンパクト化があっても常に連続的な変形によって点へと縮むことができる. このため開弦は巻き量 $w^{25} (\equiv w)$ を持たず, T 双対性が成り立たないように見える. しかしながらコンパクト化半径 \tilde{R} の双対世界は, x 方向を Dirichlet 方向とするような D24-ブレーンを持つ時空 (図 76 参照) になると考えれば, 開弦も T 双対性を持つ^{*33}. 実際, 図 76 のように双対世界では開弦の端点はここに接続していなければならないから^{*34}, 双対世界の開弦は巻き量 w を持つことになり, 代

^{*32} 以下, これまで通りコンパクト化方向を表す添字 25 は省く.

^{*33} 閉弦では境界条件がないから, このようなブレーンの有無に言及する必要がなかった.

^{*34} ただし閉弦の場合と異なり, 開弦は D24-ブレーンの上で両端が一致して閉じている必要はない.

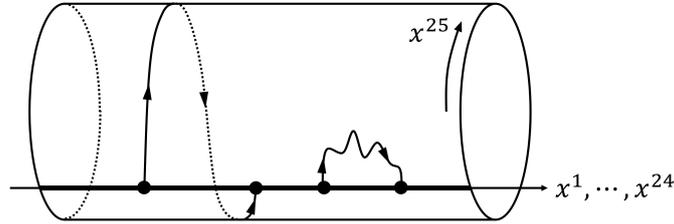


図 76 コンパクト化半径 \tilde{R} で D24-ブレーンを持つ双対世界

わりに Dirichlet 境界条件により運動量 p はゼロになる：

$$p = \frac{n}{R}, \quad w = 0 \quad \rightarrow \quad p = 0, \quad w = \frac{m\tilde{R}}{\alpha'} = \frac{m}{R}.$$

すると 2 つのコンパクト化において、運動量と巻き量からの M^2 への寄与が等しくなる。閉弦の場合と同様に定義される双対な弦座標 \tilde{X} は、実際に D24-ブレーンに端点を持つ境界条件を満たすことから、双対世界は D24-ブレーンを持つことが正当化される。さらに

- 交換関係の不変性
- ハミルトニアンの不変性

を確かめることで、弦の質量スペクトルに限らない双対世界の完全な物理的等価性が示される。

ここで空間のコンパクト化に伴い、電磁場のゲージ変換を再考する。電磁場と相互作用する荷電粒子 (電荷 q) に対して、電磁ポテンシャル A_μ と粒子の波動関数 ψ のゲージ変換は

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi, \quad \psi \rightarrow \psi' = e^{iq\chi} \psi$$

である。視点を変えて、 $\chi(x)$ そのものではなく $U(x) = e^{iq\chi(x)}$ をゲージパラメーターと考えて、ゲージ変換を

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{i}{q} (\partial_\mu U) U^{-1}, \quad \psi' = U\psi$$

と書く。するとゲージパラメーター $U(x)$ は固定された各時空点 x において $U(1)$ 群の要素と見なすことができ、Maxwell 理論を $U(1)$ ゲージ理論として捉えることができる。実際、ゲージパラメーター $U_1(x), U_2(x)$ によるゲージ変換 1,2 を続けて (2 \rightarrow 1 の順に) 行ったときに、積 $U_1 U_2$ が総体としてのゲージ変換のパラメーターとなることは、ゲージパラメーター $U(x)$ が $U(1)$ 群の要素であるという事実によって表される。

次にコンパクト化した次元の位相的 (トポロジカル) な効果を考察する。 x を時空点ではなくコンパクト化方向の座標とする 1 次元の理論では、このように $U(x) = e^{iq\chi(x)}$ をゲージパラメーターと見なすと、これは周期的な条件

$$U(x + 2\pi R) = U(x)$$

を満たさなければならない。そのためには $\chi(x)$ は

$$q\chi(x + 2\pi R) = q\chi(x) + 2\pi m \quad (m \text{ は整数})$$

のように準周期的であれば良く、完全に周期的でなくても良い。これを踏まえて、コンパクト化半径 R の円に沿ってベクトルポテンシャル \vec{A} が分布している状況を考えてよう (すなわちスカラーポテンシャル ϕ を含め、コンパクト化方向成分 A_x 以外の A_μ の成分はゼロである)。このような電磁場 A_x と相互作用する 1 個の電荷 q を想定し、円に沿った無単位の線積分

$$w \equiv q \oint dx A_x$$

を定義すると、ゲージ変換 $A_x \rightarrow A_x + \partial\chi/\partial x$ に伴い、これは

$$\begin{aligned} w &\rightarrow w + q \oint dx \frac{\partial\chi}{\partial x} = w + q(\chi(x_0 + 2\pi R) - \chi(x_0)) \\ &= w + 2\pi m \end{aligned}$$

と変化する (x_0 は円上に任意にとった周回積分の始点)。ところがゲージ変換によって物理的な内容は変更されないから、 $2\pi m$ だけ異なる w の値は等価であることになる。そこで w を抽象的な角度変数と見て

$$w = \theta$$

と書き、“Wilson 巡回指標”

$$W \equiv e^{iw} = \exp\left(q \oint dx A_x\right) (= e^{i\theta})$$

を導入する^{*35}。 W はゲージ変換 $\theta \rightarrow \theta + 2\pi m$ に対して不変となっている^{*36}。

なお $(\theta =) w = q \oint dx A_x$ は物理的には、係数 q の違いを除けば円を貫く磁束と解釈できる。実際 x 方向の円に沿うポテンシャル A_x の存在は、円を貫く磁束 $\Phi = \oint A_x dx$ を意味する。ところが今の場合、円の“内部”に空間はないので、磁場は存在しない。そしてそれにも関わらず、場 A_x (ただし x を含むすべての座標に依存しない“一定の”場とする) と相互作用する荷電粒子 (質量 m) のエネルギー固有値

$$E_l = \frac{1}{2m} \left(\frac{l}{R} - \frac{\theta}{2\pi R} \right)^2 \quad (l \text{ は整数})$$

は θ の、したがって A_x の影響を受ける。このような事情は Aharonov-Bohm 効果を想起させる [5, pp.183–188]

さて、D-ブレーンと接続する開弦の端点は電荷 $\pm q$ を持つことを思い出そう。コンパクト化方向 x への拡がりを持つ D p -ブレーンがあるとき、ゲージ場は D p -ブレーンの世界領域に存在するので、これと結合する開弦の端点の電荷 $\pm q$ に関して角度変数 $\theta = q \oint A_x dx$ を定義できる。

注意 $\theta \equiv w = q \oint A_x dx$ における q は $\pm q$ を代入し得るような一般の電荷ではなく、弦の両端の電荷を $\pm q$ と書いたときの q であり、それ故、(同じブレーンに接続されている) 弦の 2 つの端点は共通の θ の値を持つことになる。

これに対し双対世界では、実は θ は双対円における D($p-1$)-ブレーンの位置を表す角度変数となる (図 77 参照)。

^{*35} “Wilson 巡回指標” という呼び方は一般的ではなく、通常 W は “Wilson ライン” と呼ばれる。しかし W そのものは x 方向の閉じた線ではなく、あくまでその線において定義された位相因子である。

^{*36} ゲージ変換が $\theta \rightarrow \theta + 2\pi m$ という形をとるのは $U(x)$ をゲージパラメーターと見なしたためである。もし $\chi(x)$ そのものがゲージパラメーターであるならば、 $\chi(x)$ は厳密な周期条件を満たさなければならず ($m=0$)、このときゲージ変換は $\theta \rightarrow \theta$ となる。

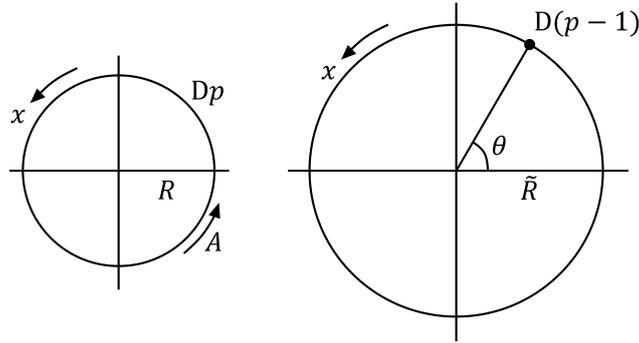


図 77 開弦の T 双対性と Wilson 巡回指標の角度変数 θ

この主張が理に適っていると考えられる理由をいくつか挙げる事ができる。まず 2π の整数倍だけ異なる θ の値は物理的に等価であって、 θ が角度変数の資格を持つことは既に見た通りである。また直観的に言って、弦は全体として電氣的に中性なので、電磁場 $A_x (\equiv A)$ の影響を受けない。実際、弦は両端が反対の電荷 $\pm q$ を持つので、(力学的) 運動量は $p \rightarrow p - qA + qA = p$ のように不変に保たれ、(力学的運動量 p^μ から $M^2 = -p_\mu p^\mu$ と計算される) 質量の自乗のスペクトルも変わらない。これは双対世界では、 $D(p-1)$ -ブレーンの円における位置 θ が、そこに端点を持つ開弦のスペクトルに影響を与えないという、当然期待される事実に対応する。さらにもとの円に 2 つの Dp -ブレーンが巻き付いており、弦がそれらの間に伸びている場合を考えよう (図 78 参照)。電荷 $+q, -q$ を持つ端点の位置する Dp -ブレーンに加える (“一定の”) ゲージ場をそれぞれ A_1, A_2 , 対応する Wilson 巡回指標の角度変数をそれぞれ θ_1, θ_2 と書く。すると電磁場を加える前の運動量 $p = l/R$ が $l = 0$ となる固有状態は、電磁場の存在下で質量の自乗

$$M^2 = \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi R} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} (N^\perp - 1)$$

を持つ。右辺第 1 項が電磁場の寄与であり、これは双対世界では我々の解釈に整合して、異なる角度 θ_1, θ_2 に位置する 2 つの $D(p-1)$ -ブレーンの間で弦が引き伸ばされることで得るエネルギー (質量) の自乗に一致している (図 78 参照) :

$$\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi R} \right)^2 = \left((\theta_2 - \theta_1) \frac{\alpha'}{R} \frac{1}{2\pi\alpha'} \right)^2 = \left((\theta_2 - \theta_1) \tilde{R} T_0 \right)^2.$$

第 19 章 電磁場を持つ D-ブレーンと T 双対性

あらかじめ D-ブレーン内全体に行き渡っているような背景電磁場の、開弦に対する影響を調べよう。背景場は、その背景場の下で弦の量子化をやり直すことができれば、弦理論において存在が許容される場であると考えるが良い。そして実際に量子化は適正に機能する (証明はしない)。簡単のために一定の強度 F_{mn} を持つ背景場だけを考え、背景電磁場が存在する場合の開弦の運動方程式を導こう。既に Kalb-Ramond チャージを保存するゲージ対称性を回復するために導入した、弦の端点と Maxwell ポテンシャル A_m との結合項を含めた作用

$$S = \int d\tau d\sigma \mathcal{L}(\dot{X}, X') + \int d\tau A_m(X) \frac{dX^m}{d\tau} \Big|_{\sigma=\pi} - \int d\tau A_m(X) \frac{dX^m}{d\tau} \Big|_{\sigma=0}$$

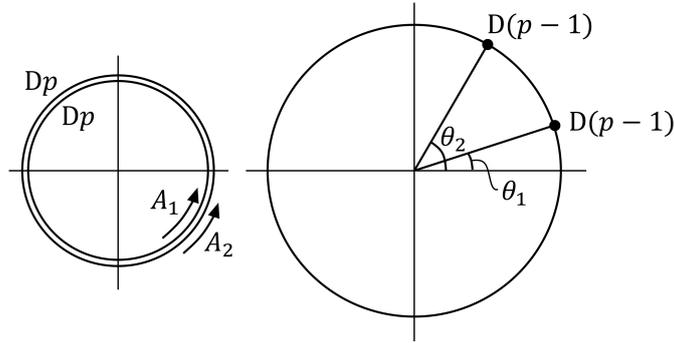


図 78 1つの円に巻き付く2つの Dp -ブレーンと、双対世界の $D(p-1)$ -ブレーン

を出発点とすることができる (\mathcal{L} は南部-後藤ラグランジアン密度). ただし (これまでと同じく) 次の慣例に従って添字を用いる.

- 添字 μ, ν, \dots : 時空添字 ($0, \dots, d$)
- 添字 m, n, \dots : ブレーンの世界領域の添字 ($0, \dots, p$)
- 添字 a, b, \dots : ブレーンに垂直な方向の添字 ($p+1, \dots, d$)

このときブレーンに沿った座標 X^m に対する適正な自由端点の条件は, 結局のところ言わば Neumann 型と Dirichlet 型の混合型の境界条件

$$\partial_\sigma X^m - 2\pi\alpha' F_{mn} \partial_\tau X^n = 0, \quad \sigma = 0, \pi$$

に置き換わる (DD 座標 X^a には依然として Dirichlet 境界条件 $\delta X^a = 0$ が課せられる). そしてここでも

$$\mathcal{P}^\tau_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}, \quad \mathcal{P}^\sigma_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}}$$

という記法を用いると (ただしここでは \mathcal{L} は全ラグランジアン密度ではないので, 例えば \mathcal{P}^τ_μ は完全な共役運動量ではないことに注意する), 境界条件の下で導かれる弦の運動方程式は相変わらず

$$\partial_\tau \mathcal{P}^\tau_\mu + \partial_\sigma \mathcal{P}^\sigma_\mu = 0$$

である.

これから電磁場を持つ D-ブレーンに双対な描像を紹介する. 電磁場が存在するときの違いは境界条件に現れ, 運動方程式は不変だから, 結論の証明には戦略として, 双対な2つの世界で境界条件が一致することを確認できれば十分である. ただし以下では具体的な証明は省略し, 結果だけを述べよう.

まず Dp -ブレーンの世界領域において, 半径 R にコンパクト化した方向 $x^{25} \equiv x$ を向く強さ $F_{25,0} \equiv E$ が一定の電場が存在する状況を考える (その他の電磁場成分はゼロ). このとき双対世界では, 電場を持たない $D(p-1)$ -ブレーンが円に沿って一定速度 $v = 2\pi\alpha' E$ で移動している (図 79 参照). (特に電場が $E = 0$ のときは双対円上の $D(p-1)$ -ブレーンは静止しており, 既に説明した通常の T 双対性に帰着する.) このとき速度が光速を超えられない条件 $v \leq 1$ は, ブレーン上の電場が最大値 $E_{\text{crit}} = 1/2\pi\alpha'$ を超えられないことを意味する. 最大値 E_{crit} は臨界電場と呼ばれ, その値は弦の張力に一致している.

次に Dp -ブレーン上にゼロでない一定の磁場 $F_{23} = B$ が存在する場合を考える. ただし Dp -ブレーンの世界領域に含まれる2方向 (x^2, \tilde{x}^3) のうち \tilde{x}^3 方向が半径 \tilde{R}_3 にコンパクト化しているとする. このとき双対世

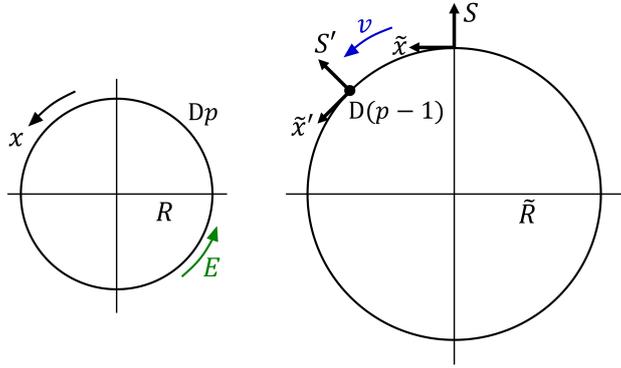


図 79 電場を持つ Dp -ブレーンと，双対円を運動する $D(p-1)$ -ブレーン

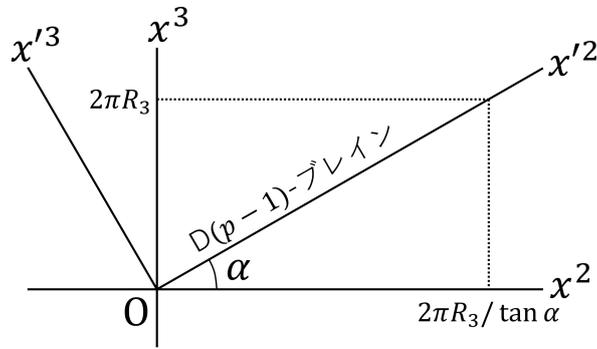


図 80 磁場は双対世界の D -ブレーンを回転させる (x^3 は双対世界のコンパクト化方向であり， $D(p-1)$ -ブレーンは x'^2 軸に沿っている)

界は共通の座標 x^2 と半径 $R_3 = \alpha' / \tilde{R}_3$ にコンパクト化した方向 x^3 を持つ．そして (磁場のない) $D(p-1)$ -ブレーンが図 80 のように，

$$2\pi\alpha' B = -\tan \alpha$$

で定まる角度 α だけ x^2 軸に対して傾いている．(磁場 B がゼロならば回転角度 α もゼロとなって，通常の双対関係が再現される．また磁場を強くすると回転角度 α は 90° に近づく．)

このとき双対世界では x^2 方向へ

$$\Delta x^2 = \frac{2\pi R_3}{\tan \alpha} n \quad (n \text{ は整数})$$

だけ変位しても物理的状況が変わらないという周期性を持つ．これは Dp -ブレーン上が磁場を持つ元の世界では，コンパクト化方向 \tilde{x}^3 の正しい準周期性を持つゲージ関数 $q\chi = -n\tilde{x}^3 / \tilde{R}_3$ (ただし弦の端点の電荷 q は 1) による電磁ポテンシャル

$$A_2 = 0, \quad A_3 = Bx^2$$

のゲージ変換

$$A_3 \rightarrow A_3 - \frac{n}{\tilde{R}_3}$$

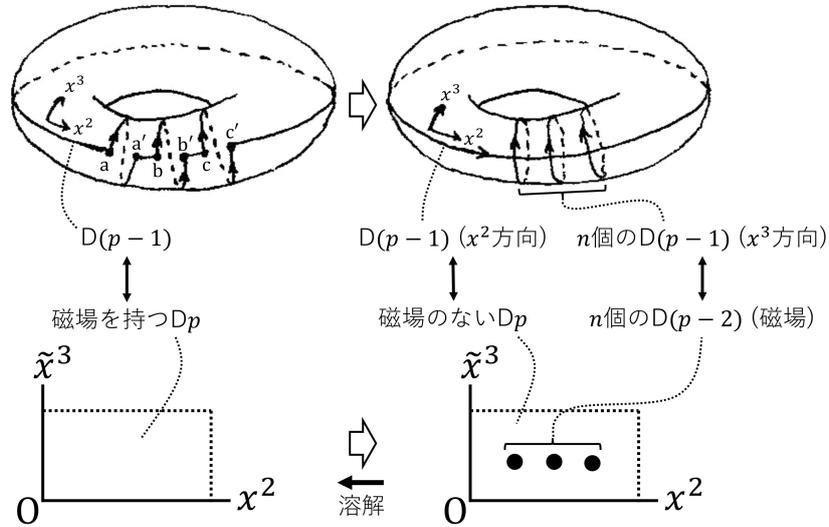


図 81 トーラスに巻き付くブレインの連続的変形と，双対世界の描像

として理解できる．そこで D-ブレインが円筒を $|n|$ 回 x^3 方向に巻き付くときの x^2 方向の幅を

$$2\pi R_2 = \frac{2\pi R_3}{\tan \alpha} n$$

と書いて x^2 方向にも R_2 を半径とするコンパクト化を施すと，双対な 2 つの世界はともにトーラスとなる (ただしここでは $n > 1$ とする)．“巻き数” n はもとの世界で基本領域の面積 $(2\pi \tilde{R}_3)(2\pi R_2)$ を貫く磁束

$$\Phi = B(2\pi \tilde{R}_3)(2\pi R_2)$$

の量子数となることが見出される．そして図 81 のような磁束を保つ連続的変形を考えたとき， Dp -ブレインの磁場は (磁場を表す) n 個の $D(p-2)$ -ブレインがブレイン全体に“溶解” (dissolve) したものと捉えることができる．

第 20 章 Born-Infeld 理論と D-ブレインの電磁場

D-ブレインの世界領域における電磁場は，非線形電磁気力学の理論の 1 つである Born-Infeld 理論に支配される．既に述べたように，弦理論によれば D-ブレインにおける電場は最大値 $E_{\text{crit}} = 1/2\pi\alpha'$ を持つ．他方これから見ると，Born-Infeld 理論もまた電場の最大値の制約を組み込んでおり，そのためブレインの電磁場を記述するのに適しているように見える．また Maxwell 理論では点粒子の静電的な自己エネルギーは無限大になるのに対し，Born-Infeld 理論では電場が最大値を持つことに関して，点粒子の自己エネルギーは有限になる．開弦の端点は点電荷なので，弦理論において弦の端点が無限大のエネルギーを持つわけではないことが分かれば安心できる．最後に T 双対性から直接に，Born-Infeld 理論が D-ブレインにおける電磁場の力学を支配するという証拠について説明する予定である．

まずは非線形電磁気力学の一般的な枠組みから始めよう．しばらくは 4 次元時空を想定し，また光速 c を明記する．電磁場 \vec{E}, \vec{B} は場の強度 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ の成分

$$F_{i0} = E_i, \quad F_{ij} = \varepsilon_{ijk} B_k$$

としてポテンシャルから導かれることから、源を含まない Maxwell 方程式

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

は恒等式としてそのまま成り立つ。次に源と相互作用する電磁場の作用

$$S = \int d^D x \mathcal{L}(F_{\mu\nu}) + \frac{1}{c} \int d^D x A_\mu j^\mu$$

において、電磁場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}(F_{\mu\nu})$ は場の強度 $F_{\mu\nu}$ だけに依存し、その微分 (導関数) には依存しないものと仮定する。このとき最小作用原理から、Maxwell 方程式 $\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\mu$ と同じ形の運動方程式

$$\partial_\nu G^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\mu, \quad G^{\mu\nu} \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}}$$

が導かれるので (ただしここでは反対称な場の強度 $F_{\mu\nu}$ による微分を $\delta M = \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial F_{\mu\nu}} \delta F_{\mu\nu}$ によって定義している), $D_i \equiv G^{0i}, H_i \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} G^{jk}$ と定義すれば、これは源を含む場の方程式

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

を与える。媒質中の電磁気学の文脈では、 ρ と \vec{j} は“自由な”すなわち媒質に起因する分極電荷や磁性電流を“含まない”源であり、代わりに Maxwell 方程式における \vec{E}, \vec{B} がこのように、一般に非線形な関係

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{B}), \quad \vec{H} = \vec{H}(\vec{E}, \vec{B})$$

によって導入される \vec{D}, \vec{H} へと修正される。しかしながら Born-Infeld 理論やそれに関連する非線形な電磁力学の理論は単なる媒質中の電磁気学ではなく、むしろ真空自体がある種の媒質のように振舞うことを想定して、真空中の電磁気学を修正するものである。なお $D_i \equiv G^{0i}, H_i \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} G^{jk}$ はラグランジアン密度の微分

$$D_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_i}, \quad H_i = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_i}$$

として計算できることが分かる。またハミルトニアン密度は

$$\mathcal{H} = \vec{D} \cdot \vec{E} - \mathcal{L}$$

で定義される。

ここで特に重要となる Born-Infeld 理論へと話を進めよう。Born-Infeld 理論におけるラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = -b^2 \sqrt{1 - \frac{2s}{b^2} - \frac{p^2}{b^4}} + b^2 = -b^2 \sqrt{1 - \frac{E^2 - B^2}{b^2} + \frac{(\vec{E} \cdot \vec{B})^2}{b^4}} + b^2$$

で与えられる。これは場の不変量

$$s \equiv -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (E^2 - B^2), \quad p \equiv -\frac{1}{4} \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \vec{E} \cdot \vec{B}$$

から構築されており、また場の強度 $F_{\mu\nu}$ はゲージ不変だから、ゲージ不変性と Lorentz 不変性を持つ。さらにパラメーター b は場の強度の次元を持ち、Born-Infeld 理論ラグランジアン密度は

- \vec{E} と \vec{B} が小さいときに ($s \sim p \ll b^2$), Maxwell ラグランジアン密度 s に帰着する。

- $\vec{B} = 0$ のときに電場の最大値の制約 $E \leq b$ が存在する.

任意の次元数では

$$\mathcal{L} = -b^2 \sqrt{-\det \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{b} F_{\mu\nu} \right)} + b^2$$

である (これは 4 次元時空において上式の \mathcal{L} を再現する).

Born-Infeld 理論では点電荷の自己エネルギーが有限となることを説明する. 場の方程式 $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ より (静止した) 点電荷 Q は球対称な場 $\vec{D} = (Q/4\pi r^2)\vec{e}_r$ を作る (r は電荷からの距離, \vec{e}_r は電荷から見た動径方向の単位ベクトル). すると位置 $r \rightarrow 0$ では $D \rightarrow \infty$ となる. ところが最大値の制約 $E \leq b$ から期待されるように, 電場 \vec{E} は発散しない. 実際, $\vec{B} = 0$ のとき

$$\mathcal{L} = -b^2 \sqrt{1 - \frac{E^2}{b^2}} + b^2, \quad \therefore \vec{D} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{E}} = \frac{\vec{E}}{\sqrt{1 - E^2/b^2}}, \quad \therefore \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\sqrt{1 + D^2/b^2}}$$

なので, $D \rightarrow \infty$ では $E \rightarrow b$ となる. このとき体積要素 $dV \sim r^2 dr$ に含まれるエネルギー

$$\mathcal{H} dV \sim \mathcal{H} r^2 dr \sim dr$$

は特異性を持たず, 自己エネルギーは有限に留まる. このような事情を反映して, 自己エネルギー U_Q を丁寧に計算すると

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \vec{E} \cdot \vec{D} - \mathcal{L} = b^2 \sqrt{1 + \frac{D^2}{b^2}} - b^2, \\ U_Q &= \int d^3x \mathcal{H} = b^2 \int_0^\infty 4\pi r^2 dr \left(\sqrt{1 + \left(\frac{Q}{4\pi b r^2} \right)^2} - 1 \right) \sim \sqrt{b} Q^{3/2} \end{aligned}$$

となる.

さて, 最後に T 双対性を利用して, 実際に D-ブレーンにおける電磁場が Born-Infeld 理論に支配されることの直接的な証拠を示そう. まずは一定の磁場または電場を持つブレーンのラグランジアン密度を見出すために, あらかじめ分かっている双対世界のブレーンのラグランジアンから出発する. 例えば以前考えた, 一定の磁場 B を持つ D_p -ブレーンに双対な $D(p-1)$ -ブレーンのラグランジアンは

$$L = -V_{p-2} L_{\text{diag}} T_{p-1}(\tilde{g})$$

と表される. ここにブレーンの張力 $T_{p-1}(\tilde{g})$ と体積 $V_{p-2} L_{\text{diag}}$ の積は, 静的なブレーンの質量 (静止エネルギー) を与えている^{*37}. T 双対性を利用すると

$$L = -V_p T_p(g) \sqrt{1 + (2\pi\alpha' B)^2}, \quad V_p \equiv V_{p-2} (2\pi R_2) (2\pi \tilde{R}_3)$$

と書き換えられる. これは双対世界における磁場を持つ D_p -ブレーン (張力 $T_p(g)$) のラグランジアンと見なすことができ, $B = 0$ の場合には静的な D_p -ブレーンのラグランジアン $L = -V_p T_p(g)$ に帰着する. 体積 V_p の係数

$$\mathcal{L} = -T_p(g) \sqrt{1 + (2\pi\alpha' B)^2}$$

^{*37} $D(p-1)$ -ブレーンの世界領域の 1 つが, 半径 R_2 と R_3 にコンパクト化した x_2, x_3 方向の対角線

$$L_{\text{diag}} = \sqrt{(2\pi R_2)^2 + (2\pi R_3)^2}$$

に沿って伸びており, 他の $(p-2)$ 方向は体積 V_{p-2} にコンパクト化した空間に巻き付いているものと仮定している. また指数 \tilde{g} はこの世界の弦の結合であり, 磁場を持つブレーンの存在する双対世界での弦の結合は g と書く.

がラグランジアン密度にあたる．同様に T 双対性を利用すると，一定の電場 E のみを持つ Dp -ブレインのラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = -T_p(g)\sqrt{1 - (2\pi\alpha'E)^2}$$

が見出される．これらは (4 次元時空の)Born-Infeld ラグランジアン密度とよく似た形をしていることが分かる．実際，電場の最大値を $b = E_{\text{crit}} = 1/2\pi\alpha'$ と同定した，(任意次元での)Born-Infeld ラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = -T_p(g)\sqrt{-\det(\eta_{mn} + 2\pi\alpha'F_{mn})}$$

(ただし付加的な定数を省き，全体の規格化定数を改めた)は，これらの電磁場を持つブレインのラグランジアン密度を再現するため，D-ブレインにおける電磁場は確かに Born-Infeld 理論によって記述されると考えられる．

第 21 章 弦理論と素粒子物理

ここでは素粒子標準模型と多くの特徴を共有する完全な弦モデルの 1 つを紹介する．このモデルは暗に D6-ブレインが安定となる IIA 型の超弦理論を想定しており，6-トーラス T^6 において交差する D6-ブレインを含む．ここで IIA 型の超弦理論を出発点とした交差ブレインモデルを詳しく取り上げるのは，これが十分に単純で，確実な理解が可能だからである．しかしこれは唯一の筋道ではなく，モデルの可能な出発点には 5 つの超弦理論と M 理論がある．

素粒子物理の弦モデルへと話を進めるに先立って，標準模型に含まれる粒子について学んでおく．左巻き (L) と右巻き (R) の粒子 (f) と反粒子 (\bar{f}) を，それぞれの生成演算子

$$(f_L^\dagger, f_R^\dagger), \quad (\bar{f}_L^\dagger, \bar{f}_R^\dagger)$$

で表す．場の量子論では 2 組の対

$$\begin{aligned} f_L^\dagger &\leftrightarrow \bar{f}_R^\dagger, \\ f_R^\dagger &\leftrightarrow \bar{f}_L^\dagger \end{aligned}$$

において，矢印「 \leftrightarrow 」で繋いだ粒子と反粒子は互いに反対符号の電荷を持つ (大きさは同じ)．ここで電荷は通常の電磁的な電荷に限らず，色電荷や弱電荷を含めた電荷一般を想定している．このとき例えば f_L^\dagger と f_R^\dagger の電荷を指定すれば，それですべての電荷が決まることになる．もし左巻き粒子 f_L^\dagger と右巻き粒子 f_R^\dagger が同じ電荷を持たないならば，そのフェルミオンはカイラルであると称する．カイラルフェルミオンの左巻き粒子と右巻き粒子はその定義により異なる電荷を持つので，同じゲージボソンの組に対して異なる応答をする．カイラルに働くゲージの対称性が破られると，フェルミオンは質量を獲得し，対称性が破れた後は，色の力も電磁力もカイラルな働き方をしない．

標準模型におけるフェルミオンはクォークとレプトンともに 3 つの“世代”から構成され，世代間で対応する粒子の電荷は同じである．そこで 1 世代のクォークとレプトンの中で，左巻き粒子と左巻き反粒子の電荷のリストを作ることにする．まずクォークは，以下の $SU(3)_c$ 理論の色電荷を持つ．

- クォークの左巻き状態 q_L
3 種類の色 (赤 (red : r), 青 (blue : b), 緑 (green : g)) の基本状態

$$q_{Lr}, \quad q_{Lb}, \quad q_{Lg} \quad \rightarrow \quad SU(3) \text{ 群の表現 } \mathbf{3} \quad (SU(3) \text{ 行列 } M \text{ が作用}).$$

- 反クォークの左巻き状態 \bar{q}_L
色に関してクォークはカイラルでないので, q_L とちょうど反対の色電荷
(反赤 (anti-red : a-r), 反青 (anti-blue : a-b), 反緑 (anti-green : a-g)) を持つ :

$$\bar{q}_{La-r}, \bar{q}_{La-b}, \bar{q}_{La-g} \rightarrow SU(3) \text{ 群の表現 } \bar{\mathbf{3}} \text{ (複素共役な行列 } M^* \text{ が作用).}$$

また弱い相互作用 $SU(2)_w$ のアイソスピン $I = 1/2$ の表現 $\mathbf{2}$ は, アイソスピンの第3成分 I_3 が

- $I_3 = 1/2$ に対応する香り u の状態 u_L
- $I_3 = -1/2$ に対応する香り d の状態 d_L

から成る (前述のように1世代のクォークを考えているので, 香りは u と d の2種類となっている). ここでフェルミオンの電荷表現の記法

$$(\text{色}, \text{アイソスピン})_Y$$

を導入しておく. 「色」の欄と「アイソスピン」の欄にはそれぞれ $SU(3)$ と $SU(2)$ の表現を記し, Y には単に超電荷の値を示す. すると

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{1/6}, \quad \bar{u}_L \sim (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-2/3}, \quad \bar{d}_L \sim (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{1/3}$$

と書ける. (反クォーク \bar{u}_L, \bar{d}_L はアイソスピンの第3成分が $I_3(\bar{u}_L) = I_3(\bar{d}_L) = 0$ なので, $SU(2)$ -1 重項を形成している.) 標準模型の第1世代に含まれる左巻きのレプトン (粒子と反粒子) は

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1/2}, \quad e_L^+ \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1})_1, \quad \bar{\nu}_{eL} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0$$

と表される. (なお標準理論において, 電磁気的な電荷 Q_{em} は, 超電荷 Y とアイソスピンの第3成分 I_3 の線形結合 $Q_{em} = Y + I_3$ によって与えられる.)

次に弦モデルの説明の準備として, D-ブレーンの配置を表現する一般的な方法について述べる. 超弦理論では10次元の時空を想定する. これを次のように簡単にコンパクト化する.

- 実効的な4次元時空 (座標 x^0, x^1, x^2, x^3)
- コンパクト空間 (座標 x^4, \dots, x^9)
同一視 $x^i \sim x^i + 2\pi R$ ($i = 4, \dots, 9$, 簡単のため半径 R は各次元に共通とする)
→ 6次元トーラス (6-トーラス) T^6

ここで6-トーラスは

$$x^4, x^5 \text{ 方向の 2-トーラス, } x^6, x^7 \text{ 方向の 2-トーラス, } x^8, x^9 \text{ 方向の 2-トーラス}$$

を併せたものと等価であり, これら3つの2-トーラス T^2 に分けて考えられる. D6-ブレーンが実効的な空間座標 x^1, x^2, x^3 の方向に広がっており, また各 T^2 の中では線分として表される場合を考えよう. 例えば2つのブレーン

$$\begin{aligned} \#1: & x^5 = x^7 = x^9 = 0, \\ \#2: & x^4 = x^6 = x^8 = 0 \end{aligned}$$

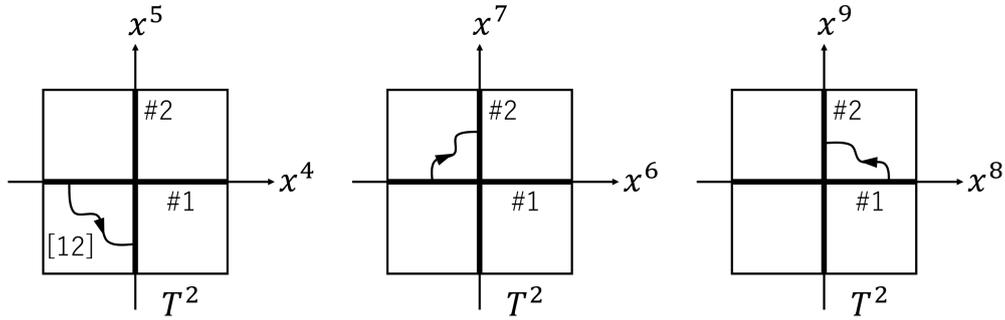


図 82 各 2-トーラスにおけるブレイン #1, #2 と [12] セクターの弦の射影

はそれぞれ各 T^2 において図 82 のような線分で表される。ブレインの 2-トーラス T^2 への射影が(線状となる場合には、それが)直線状になることは、ブレインに張力があることから理解される。またブレインは (T^2 において)両端が同一視されるような線分となって、閉じていなければならない(さもなくばブレインは無限の長さを、したがって無限大の静止エネルギーを持つことになる)。簡単のために長さを適当に無次元化して 2-トーラスの基本領域を正方領域 $0 \leq x, y \leq 1$ にとると、互いに素な整数の組 (m, n) に対して原点 $(0, 0)$ と点 (m, n) を結ぶ線分を描き、同一視条件 $x \sim x+1, y \sim y+1$ を適用して線分全体を正方領域 $0 \leq x, y \leq 1$ の中に移行すれば、トーラス上に閉じた線が得られる。よってブレインの射影を表す閉じた線分 l は、整数の組 (m, n) で指定できる。このとき一般に 2 つの線 $l_1 = (m_1, n_1), l_2 = (m_2, n_2)$ がトーラス上で交差する回数は

$$\#(l_1, l_2) = m_1 m_2 - m_2 m_1 = \det \begin{pmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix}$$

で与えられる(図 83 参照, 交差回数の定義の詳細は省略)。2 つの D6-ブレイン a と b を考えると、それぞれの配置は各々の 2-トーラス ($i = 1, 2, 3$ で表す) 上での 3 つの線

$$l_i^{(a)} = (m_i^a, n_i^a), \quad l_i^{(b)} = (m_i^b, n_i^b)$$

によって指定される。ブレイン a, b の T^6 における交差回数は、各 T^2 上での交差回数の積

$$I_{ab} = \prod_{i=1}^3 \#(l_i^{(a)}, l_i^{(b)}) = \prod_{i=1}^3 (m_i^a n_i^b - m_i^b n_i^a)$$

で与えられる。

さらに D-ブレインと標準模型のゲージ群について説明する。例えば 8 つのグルーオンを記述する $SU(3)$ Yang-Mills 理論(量子色力学)は、その基になる $U(3)$ 理論から得られる。既に説明したように $U(3)$ 理論は 3 つの重なり合った D-ブレインから得られ、 $3^2 = 9$ 個のゲージ場を持つ。基本状態の変更に伴う場と電荷の再定義により、9 個のゲージ場のうち 1 つを、他のゲージ場と相互作用を持たない $U(1)$ ゲージ場に分離できることが示される。具体的には一般的な状態(基本状態の線形結合)と作用を不変に留めるという制約の下で、弦が 3 つのブレインに持つ $U(3)$ 電荷の組 (q_1, q_2, q_3) の 1 つを $Q_1 \sim (q_1 + q_2 + q_3)$ となるように再定義できる。ところがこれらのブレインに始点(電荷 -1)と終点(電荷 $+1$)を両方持つ開弦に対しては

$$Q_1 \sim q_1 + q_2 + q_3 = (-1) + (+1) = 0$$

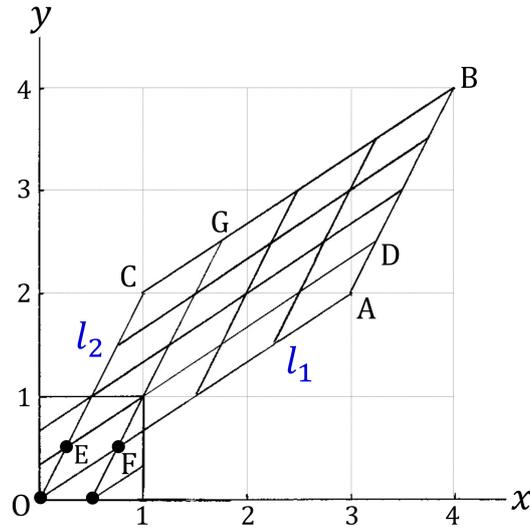


図 83 線 $l_1 = (3, 2), l_2 = (1, 2)$ と単位トーラス $0 \leq x, y < 1$ における l_1, l_2 の 4 回の交差

となるので、 Q_1 に関する 1 つの Maxwell 場は電荷 Q_1 を介して他のゲージ場と相互作用できず、 $U(1)$ ゲージ場として分離される。残り 8 個のゲージ場が 8 個のグルーオンを記述する $SU(3)$ 理論 (量子色力学) を定義する。一般に N 個の重なり合った D-ブレーンから得られる $U(N)$ Yang-Mills 理論の持つ N^2 個のゲージ場のうち 1 つを $U(1)$ ゲージ場に同定し、

$$U(N) = SU(N) \times U(1)$$

とできる。そこで素粒子の標準模型における完全なゲージ群

$$SU(3)_c \times SU(2)_w \times U(1)_Y, \quad c : \text{color}, \quad w : \text{weak}, \quad Y : \text{hypercharge}$$

における $SU(3)_c$ と $SU(2)_w$ を得るには、3 つの重なったブレーンと 2 つの重なったブレーンを想定すれば良い。(ただしこれら 2 組のブレーンを重ねてはならない。5 つのブレーンが重なると、得られるのは $U(5)$ Yang-Mills 理論になってしまう。)

さて、以上を踏まえて素粒子の標準模型に対する弦モデルの説明に移ろう。 T^6 において交差する D6-ブレーンを、以下のように配置する (以下、ブレーンの個数 N_i をブレーンの名前として用いる)。

1. 色ブレーン

$$\text{個数 } N_1 = 3, \quad l_1^{(1)} = (1, 2), \quad l_2^{(1)} = (1, -1), \quad l_3^{(1)} = (1, -2).$$

2. 左ブレーン

$$\text{個数 } N_2 = 2, \quad l_1^{(2)} = (1, 1), \quad l_2^{(2)} = (1, -2), \quad l_3^{(2)} = (-1, 5).$$

3. \bar{u}_L -反クォークを表す弦の終点を置くブレーン (右ブレーンと呼ぶ^{*38})

$$\text{個数 } N_3 = 1, \quad l_1^{(3)} = (1, 1), \quad l_2^{(3)} = (1, 0), \quad l_3^{(3)} = (-1, 5).$$

^{*38} u_R -クォークを表す反対向きの弦が接続するから。

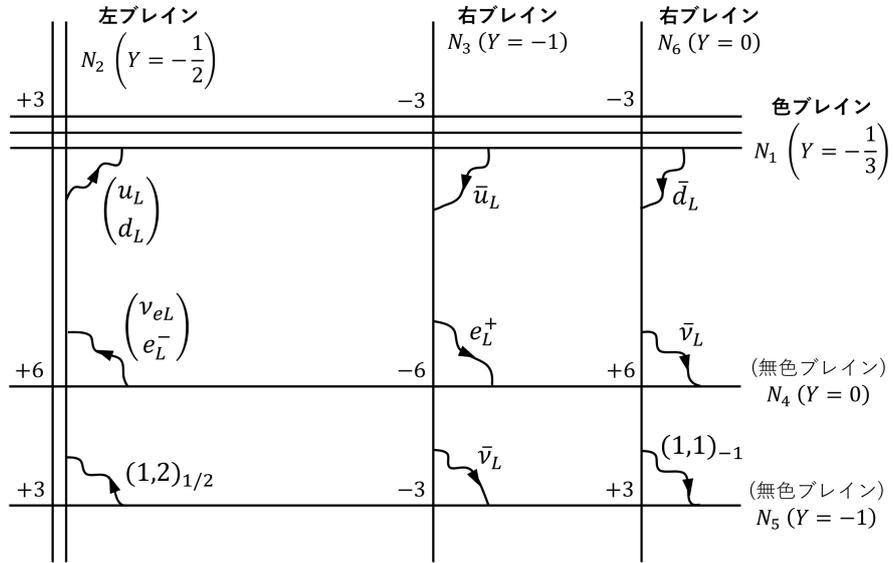


図 84 半現実的な交差ブレインモデル (無色ブレイン N_4, N_5 は慣習的には“レプトニック (軽粒子的)・ブレイン”と呼ぶのが一般的である)

4. レプトンを得るためのブレイン

$$\text{個数 } N_4 = 1, \quad l_1^{(4)} = (1, 2), \quad l_2^{(4)} = (-1, 1), \quad l_3^{(4)} = (1, 1).$$

5. レプトンを得るためのブレイン

$$\text{個数 } N_5 = 1, \quad l_1^{(5)} = (1, 2), \quad l_2^{(5)} = (-1, 1), \quad l_3^{(5)} = (2, -7).$$

6. \bar{d}_L -反クォークを表す弦の終点を置く (右) ブレイン

$$\text{個数 } N_6 = 1, \quad l_1^{(6)} = (1, 1), \quad l_2^{(6)} = (3, -4), \quad l_3^{(6)} = (1, -5).$$

ブレインの各交差部分は実効的な 3 次元空間への拡がりを持っている。弦はそのようなブレインの交差部分に局在している。

さらに各交差部分の弦から現れるフェルミオンは弦の向きに依存する。標準模型の左巻きのフェルミオンを正しく得るには、実は次の規則に従って、ブレイン a, b の交差回数 I_{ab} の符号から弦の向きを決めれば良い。

規則 ブレイン a とブレイン b の交差部分の組において、 $|I_{ab}|$ 個の左巻きフェルミオンが存在する。

もし $I_{ab} > 0$ であれば、その左巻き状態はブレイン b からブレイン a へ伸びる弦である。

もし $I_{ab} < 0$ であれば、その左巻き状態はブレイン a からブレイン b へ伸びる弦である。

実際、以上よりブレインの配置と各交差部分 $[ab]$ における左巻き状態のフェルミオンを表す弦は、図 84 のように示される。ただし図 84 では交差部分に、上記の公式から計算される交差回数 $I_{ab}(= -I_{ba})$ (ただし $a < b$) を付記している。

色ブレイン N_1 の組と左ブレイン N_2 の組の交差部分 $[12]$ は $I_{12} = 3$ 箇所ある。ここで特にそのうち 1 つの交差部分に注目してみよう。色ブレイン N_1 は $SU(3)_c$ を得るための 3 つの重なったブレイン (前述) であり、

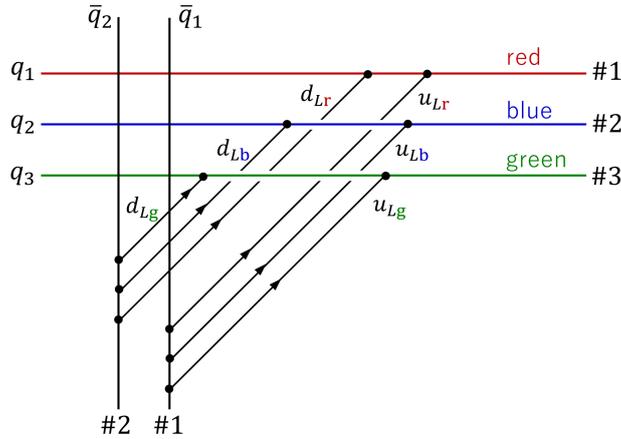


図 85 交差する D-ブレーンと u_L -クォーク, d_L -クォークを表す開弦

赤, 青, 緑のラベルで識別される. 赤, 青, 緑の色電荷を持つ左巻きクォーク q_L を表す開弦はここに終点を持つ. また左ブレーン N_2 は $SU(2)_w$ を得るための 2 つの重なったブレーン (前述) であり, u_L -クォークを表す開弦はその一方に, d_L -クォークを表す開弦はもう一方に終点を持つ (図 85 参照). なお, 残り 2 つの交差部分からはその複製として c -クォークと s -クォーク, t -クォークと b -クォークが得られると考えることができる.

ブレーンを交差させる必要があるのは次の事情による. すなわち D-ブレーンの組を平行に配置することを考えると, 前述のように 2 組のブレーンを一致させると $U(5)$ Yang-Mills 理論が得られてしまうため, ブレーンの組は離して配置しなければならない. そこで D-ブレーンの組を分離して平行に配置すると, その間で引き伸ばされた弦は質量を持つ. ところが現実のカイラルフェルミオンが質量を持つことは許されないため, これでは標準模型のカイラリティを実現できない.

弦が 3 つの色ブレーンに持つ $U(3)$ 電荷の組 (q_1, q_2, q_3) , および弦が 2 つの左ブレーンに持つ $U(2)$ 電荷の組 (\bar{q}_1, \bar{q}_2) から分離される $U(1)$ 電荷をそれぞれ,

$$Q_1 \equiv q_1 + q_2 + q_3, \quad Q_2 \equiv \bar{q}_1 + \bar{q}_2$$

と規格化して定義する (Q_1 については前述). すると単純に例えば N_2 に始点を持ち (\bar{q}_1, \bar{q}_2) のいずれかが -1 , N_1 に終点を持つ (q_1, q_2, q_3) のいずれかが $+1$ 弦に対しては $Q_1 = 1, Q_2 = -1$ となることが保証される. 他の個数 $N_i = 1$ のブレーン N_3, N_4, N_5, N_6 に対しても, 弦の端点がブレーンに持つ $U(1)$ 電荷 Q_i を定義する. これは弦の表す粒子の超電荷 Y に対して

$$Y = -\frac{1}{3}Q_1 - \frac{1}{2}Q_2 - Q_3 - Q_5$$

と寄与するものとする. すると各ブレーン上の終点電荷 $+1$ の超電荷に対する寄与は図 84 に Y の値として書き添えたようになる.

以上より図 84 の各交差部分からは次の電荷表現が得られることが見て取れる.

$$\underbrace{3(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{1/6}}_{[12]} + \underbrace{3(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-2/3}}_{[13]} + \underbrace{3(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{1/3}}_{[16]},$$

$$\underbrace{6(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1/2}}_{[24]} + \underbrace{6(\mathbf{1}, \mathbf{1})_1}_{[34]} + \underbrace{6(\mathbf{1}, \mathbf{1})_0}_{[46]},$$

$$\underbrace{3(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{1/2}}_{[25]} + \underbrace{3(\mathbf{1}, \mathbf{1})_0}_{[35]} + \underbrace{3(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{-1}}_{[56]}.$$

上式の 1 行目は単一世代のクォーク

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{1/6}, \quad \bar{u}_L \sim (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-2/3}, \quad \bar{d}_L \sim (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{1/3}$$

の 3 つの複製になっている。また上式の 2 行目は単一世代のクォーク

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1/2}, \quad e_L^+ \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1})_1, \quad \bar{\nu}_{eL} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0$$

の 6 つの複製になっている。これは標準模型で必要とされる 3 つの複製の他に、さらに余分の 3 つの複製を含んでいる。我々は望んだ種類よりも余分のレプトンを見出したが、これは D6-ブレーンだけを含む矛盾のないモデルにおいて避けられないことである。オリエンティフォールド O6-平面 (ブレーン) と D6-ブレーンを併用するならば、標準模型に含まれる粒子のスペクトルを“正確に”再現するモデルを構築することが可能である。交差する D6-ブレーンを含むモデルは、標準模型の粒子構成を正確に再現できる最初の弦モデルとなった。

第 22 章 弦の熱力学とブラックホール

1 本の弦に対して統計力学を適用しよう*³⁹。

“非相対論的”な量子弦を“量子バイオリン弦”と呼ぶことにしよう。これは振動数 $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$ の単純調和振動子の集団と等価であり、そのエネルギー $E = \hbar\omega_0 N$ のミクロカノニカル集団の状態数は、数演算子の固有値 N を和が N となる正の整数へと分割する方法の総数 $p(N)$ で与えられる。 $N \gg 1$ に対して分割 (partitions) の数 $p(N)$ の近似式を導くことは数学的な問題であるけれど、これを物理的に意味付けしつづ行うことができる。すなわち高温の極限 $\hbar\omega_0/kT \ll 1$ において、カノニカル集団に対して分配関数 Z を計算し、自由エネルギー $F = -kT \ln Z$ (ただし k は Boltzmann 定数) を熱力学的関係式に代入すると、エントロピー S とエネルギー E (したがって N) の関係

$$S(E) \simeq k2\pi\sqrt{\frac{N}{6}}$$

が導かれる。これをミクロカノニカル集団に対する Boltzmann の関係式 $S(E) = k \ln p(N)$ と比較すると、

$$\ln p(N) \simeq 2\pi\sqrt{\frac{N}{6}}$$

を得る。高温の極限は $N \gg 1$ に対応することが分かるので、これは大きな N に対する分割の数 $p(N)$ の近似式である。より正確には、Hardy-Ramanujan の近似式 $p(N) \simeq \frac{1}{4N\sqrt{3}} \exp\left(2\pi\sqrt{\frac{N}{6}}\right)$ が成立する。

相対論的な弦に対しても (横方向の振動子から構築される) 数演算子の固有値 N^\perp に対して、エントロピーは $S = k \ln p_{24}(N^\perp)$ で与えられる (ただし振動方向として $b = 24$ 個の横方向があることに対応して、整数 N

*³⁹ 1 本だけの弦に対する統計力学と言うと奇妙に聞こえるけれど、古典的には粗い描像として、1 本の弦が長さ $l_s = \sqrt{\alpha'}$ の素片から成ると考えることができる。

を b 種類のラベルの付いた整数へと分割する方法の数 $p_b(N)$ を考えている). しかしながら非相対論的な量子バイオリン弦の式 $E = \hbar\omega_0 N$ は, 例えば開弦に対して

$$E = M = \sqrt{\frac{1}{\alpha'}(N^\perp - 1)} \simeq \sqrt{\frac{N^\perp}{\alpha'}}$$

へと修正される. 最後の等号は N^\perp が (1 と比べて) 大きい場合を想定した近似であり, 高エネルギーの場合に適用できる. 上記の応用として N^\perp が大きい場合の近似式 $\ln p_b(N^\perp) \simeq 2\pi\sqrt{\frac{N^\perp b}{6}}$ が見出されるので, ミクロカノニカル集団に対するエントロピー-エネルギーの関係

$$S = k \ln p_{24}(N^\perp) \simeq k4\pi\sqrt{N^\perp} \simeq k4\pi\sqrt{\alpha'}E$$

が得られる. このようにエネルギーとエントロピーが比例するのは普通に見られる状況ではなく, このとき

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = k4\pi\sqrt{\alpha'}$$

のように温度 T は一定となる. この一定の温度 $T_H = 1/k4\pi\sqrt{\alpha'}$ は Hagedorn 温度と呼ばれる*40. Hagedorn 温度に対応する熱エネルギー kT_H は, 第 1 質量レベル (M^2 が最小の正の値をとる状態 $N^\perp = 2$) における静止エネルギー $1/\sqrt{\alpha'}$ に比べて

$$\frac{kT_H}{1/\sqrt{\alpha'}} = \frac{1}{4\pi} \simeq \frac{1}{12.6}$$

のように小さい. よって Hagedorn 熱エネルギーはほとんどの弦の粒子状態のエネルギーに比べて小さいことになる*41. (閉弦に対しても高エネルギーでは, 結果的に開弦と同じエントロピー-エネルギーの関係式が得られる.)

ここで再びカノニカル集団を考えよう. 次の目標は体積 V の箱に入っている単一の (相対論的な) 開弦の分配関数を計算することである. 弦の一般的な基本状態

$$|\lambda, p\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (a_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

は占有数 $\lambda_{n,I}$ と, 光錐エネルギー p^- を除く弦の運動量 (p^+, \vec{p}_T) (質量殻条件の下で, 代わりに運動量の d 個の空間成分 \vec{p}) で指定される. よって単一の弦の分配関数は

$$\begin{aligned} Z_{\text{str}} &= \sum_{\{\lambda_{n,I}\}} \sum_{\vec{p}} \exp \left[-\beta \sqrt{M^2(\{\lambda_{n,I}\}) + \vec{p}^2} \right] \\ &= \sum_{\{\lambda_{n,I}\}} Z(M^2(\{\lambda_{n,I}\})) \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} p_{24}(N) Z(M^2(N)) \quad \left(M^2(\{\lambda_{n,I}\}) = \frac{1}{\alpha'}(N-1), N \equiv N^\perp = \sum_{n,I} n\lambda_{n,I} \right) \end{aligned}$$

と書ける. ここに $Z(m^2) = \sum_{\vec{p}} e^{-\beta\sqrt{m^2+\vec{p}^2}}$ は質量 m の相対論的な粒子の分配関数であり, 統計力学において馴染みある, 非相対論的な自由粒子に対する分配関数の導出と似た手法で計算できる (ただしここでは空間

*40 分配関数は任意の熱浴の温度 T に対して計算できるのに対し, そこから高エネルギーの弦の平衡状態を実現するには, 温度が (近似的に) Hagedorn 温度 T_H をとらなければならないことが結論されたことになる.

*41 相対論的な弦に対しては $N^\perp \gg 1$ は高温を意味しないので, これは矛盾ではない.

次元は d である). これを踏まえてさらに計算を進めると, $T < T_H$ の場合だけ分配関数は収束し, T_H の下側から $T \rightarrow T_H$ とすると $N \gg 1$ からの寄与が重要となって, 分配関数は

$$Z_{\text{str}} \simeq \frac{2^{11}}{\pi} V(kT_H)^{25} \left(\frac{T_H}{T_H - T} \right), \quad T \rightarrow T_H$$

と求まる.

最後にブラックホールのエントロピーについて議論する. 高温の気体がブラックホールに引き込まれるとき, 気体とブラックホールから成る系の総エントロピーは減少できないので, ブラックホールは最低限, 気体が持っていたエントロピーを獲得しなければならない. このような素朴な議論からも期待されるように, 通常の 4 次元時空における定常的な Schwarzschild ブラックホール (質量 M , ブラックホールの半径 (Schwarzschild 半径) $R = 2GM$, G :Newton 定数) は, (質量を持つことに伴って) Bekenstein エントロピー

$$\frac{S_B}{k} = 4\pi GM^2$$

を持つことが知られている (Boltzmann 定数 k で割って無次元化してある)^{*42}. しかしブラックホールが質量だけを持つ特異点であるとするならば, エントロピーを生じる微視的状态が何であるかを理解するのは困難である. そこで運動量がゼロの弦の非常に重い (高い励起を持つ) 状態がブラックホールを形成すると考え, 弦理論を用いて Schwarzschild ブラックホールのエントロピーを説明することを試みる. 静止エネルギー M の弦のエントロピーは, 上記のマイクロカノニカル集団に対する式

$$S \simeq k4\pi\sqrt{\alpha'}M$$

で与えられる. このエントロピーは自由な弦 (したがって弦の結合 $g = 0$) に関する計算結果であり, 示量性 $S_{\text{str}} \sim M \sim L$ (弦の長さ) を持っている. 他方, ブラックホールのエントロピー S_B は示量性がなく ($S_B \sim M^2$), また Newton 定数

$$G \sim g^2\alpha' = g^2l_s^2$$

は弦の結合 g をゼロに設定するとゼロになるため, S_B は相互作用の必要な領域において計算されていることになる. このように両者は表面的には一致しない. ところがディラトンの期待値を変更して (可逆過程), 弦の結合 g を有限の値から小さくしていく場合を考えると, エントロピー S_B/k は一定であり, ブラックホールの質量 $M \sim 1/g$ は増大し, ブラックホールの半径 R は減少することになる. Bekenstein エントロピーの前提とする一般相対性理論の有効となる最小値 $R_* = l_s$ に R が達したときの, 弦の結合を g_* とする. 現実的に結合 g_* は極めて小さくなければならないことを踏まえ, 結合 g_* での弦のエントロピーを自由な弦のエントロピー S_{str} で代用すると, g_* に対するブラックホールの質量 M_* と同じ質量を持つ弦のエントロピーは, 結合に依らないブラックホールの一定のエントロピーと

$$\frac{S_B}{k} \sim \frac{1}{g_*^2}, \quad \frac{S_{\text{str}}}{k} \sim \frac{1}{g_*^2}$$

のように, 少なくとも定性的に一致する. なお最大荷電ブラックホールと呼ばれるある種の 5 次元ブラックホールに関しては, ブラックホールのエントロピーは弦モデルによる計算結果と正確に, 定量的に一致する.

^{*42} 右辺は Schwarzschild 半径 R での表面積 $A = 4\pi R^2$ に比例している. ここで Schwarzschild 解において動径方向の座標長さ dr は対応する真の長さとは一致しないのに対し, $r d\theta$ と $r \sin \theta d\phi$ は球面上の真の距離を与えることを思い出そう [3, p.336]. 実際, 座標半径 r の球面における計量の行列式の平方根 $r^2 \sin \theta$ を用いて, 固面積要素は $r^2 \sin \theta d\theta d\phi$.

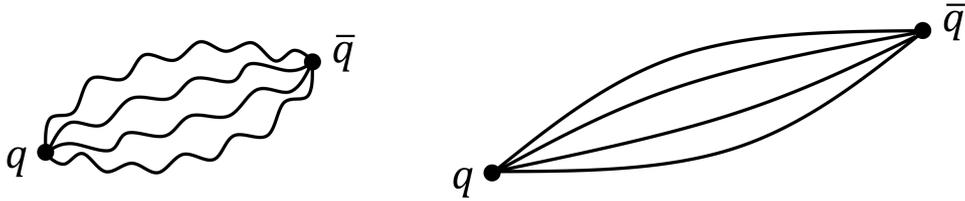


図 86 クォークと反クォークが色の場の流束線群によって結合し、中間子を形成している様子

第 23 章 強い相互作用と AdS/CFT 対応

- 強粒子 (ハドロン) 励起の角運動量 J とエネルギー E の関係は、おおよそ Regge (レッジ) 軌跡と呼ばれる直線 $J = \alpha' E^2$ に乗る。古典的な回転する開弦もこれと同じ関係を持つことから、弦理論は強い相互作用の理論となり得る可能性が示唆される。
 - (弦の) 量子化によって角運動量の値は離散的になり、 J と E^2 の線形な関係は付加定数の修正を受ける ($J = \alpha' E^2 + \beta'$)。これはデータとの一致のために必要なことであった。
- 中間子はグルーオンを介して (強い相互作用により) 束縛し合ったクォークと反クォークの対であり、弦の描像では中間子は一端にクォーク、他端に反クォークを持つ開弦として捉えられる。開弦本体は色の流束線が集まった細い管状構造を表している (図 86 参照)。
 - クォークが単独の孤立状態で観測されないことは、弦の張力に逆らってクォークと反クォークを引き離すのに無限大のエネルギーが必要となることから理解される。
 - クォークと反クォークの間のポテンシャルエネルギーの鍵となる特徴は、単純な弦のモデルからも現れる。
- このように (クォークと反クォークの複合体である) 中間子に 1 本の弦が対応する理論は、個々のクォークに弦が対応する前述の理論と並行し得る、QCD (量子色力学) を正確に記述する弦理論と信じられる。

ここでゲージ理論を弦理論によって記述することに関連して、AdS/CFT 対応に話題を転じる。これは下記のゲージ理論と閉弦の理論の物理的な等価性のことである。

- ゲージ理論：
 - N 個の重なり合った D3-ブレイン系において
 - 低エネルギーで生じる超対称 $SU(N)$ ゲージ理論 (すなわち CFT)
- 閉弦理論：
 - その D3-ブレイン系によって形成される
 - 重力的な背景に密接に関係する時空 (AdS₅ を含む) の中の IIB 型超弦理論

ここに

- AdS：超弦理論における、コンパクト化のない 5 つの次元が形成する

“反 de Sitter (アンチ-ド・ジッター)” 時空 (AdS_5 と表記).

その境界を成す 4 次元 Minkowski 時空にゲージ理論の場が存在する.

- CFT : ゲージ理論が共変場理論 (conformal field theory : CFT) であること.

であり, ゲージ理論の場は AdS_5 の境界を成す 4 次元 Minkowski 時空に存在する (言い換えれば, 閉弦はゲージ理論が存在する空間を境界として持つような, 次元がひとつ高い空間の中を伝播する). AdS/CFT 対応は Yang-Mills 流のゲージ理論が既に, ある種の重力理論を内在していることを示唆している. また AdS/CFT 対応は重力が存在する物理的世界が, 言わば境界の場の理論をホログラムデータとして再生された立体像に過ぎないことを意味し得るため, その ‘実在性’ に対して哲学的な疑問を投げかける. AdS/CFT 対応で考えられているのは超対称性を持つ $SU(N)$ ゲージ理論であるのに対し, QCD は超対称性を持たないゲージ理論であり, 弦理論によって QCD を記述する方法はまだ見出されていない. しかし AdS/CFT 対応は, そのような記述が存在し得ることの強力な論拠を与えている.

AdS/CFT 対応の詳しい説明の準備として, D-ブレーンの重力効果が及ぶ距離尺度について述べておく. 一般に質量 M を持つ物体が作る重力場に対して, $R^{D-3} \equiv G^{(D)} M$ によって特徴的な距離尺度 R を導入すると, これは重力の及ぶ距離の目安となる. D p -ブレーンに対してこの距離は

$$\left(\frac{R}{\sqrt{\alpha'}} \right)^{D-p-3} \sim gN$$

となることを証明でき, これによれば弦の結合 $g \rightarrow 0$ または $gN \rightarrow 0$ とすると $R \rightarrow 0$ となり, 重力効果はゼロになる.

AdS/CFT 対応はまだ証明されていない. 以下では最初に AdS/CFT 対応を動機付けた議論の 1 つとして, 低エネルギー極限の描像を基調とする議論を紹介する. D3-ブレーンの数 N を固定して弦の結合定数 g を変化させることで, 2 つの極限 $gN \ll 1, gN \gg 1$ を調べる.

まず $gN \ll 1$ の場合を考えると, 次の 2 つの系が得られる.

1. 10 次元 Minkowski 時空における閉弦の系

- 前述のように, $gN \ll 1$ では重力効果を見捨てる → 平坦な 10 次元 Minkowski 時空
- 低エネルギー極限 $\alpha' \rightarrow 0$ *43 では $G^{(10)} \sim g^2(\alpha')^4$ はゼロになり, 閉弦の場は自由場になる.

2. 超対称 4 次元 $U(N)$ Yang-Mills 理論

- D3-ブレーンに接続している開弦は低エネルギー極限 $E \ll \frac{1}{\sqrt{\alpha'}}$ では質量を持つ状態になれないので, 無質量の $U(N)$ Yang-Mills 理論によって記述される. (場は D3-ブレーン上に, したがって 4 次元時空に存在すると見なされる.)
- 前述のように, 実際にはひとつのゲージ場が分離し, 相互作用を持つ理論として残るのは $SU(N)$ Yang-Mills 理論である.

これら 2 つの系も結合 $G^{(10)} \rightarrow 0$ により相互作用を持たずに共存することになる.

次に $gN \gg 1$ の場合を考える. すると前述のように重力効果が重要になる. このとき D3-ブレーンの広がる方向に直交する 6 次元空間の幾何学 (重力を表す) は図 87 のように狭路 (throat) 状となり, 図 87 の円で表されている 5 次元球面 S^5 は狭路内を進むにしたがって, 一定の体積に近づく. 狭路の無限の先の “終端” は

*43 弦のエネルギー尺度は $\frac{1}{\sqrt{\alpha'}}$ であり, すべてのエネルギー E をある値以下 $E \leq E_0$ に固定して $\alpha' \rightarrow 0$ とすれば, 低エネルギーの条件 $E \ll \frac{1}{\sqrt{\alpha'}}$ が成立する.

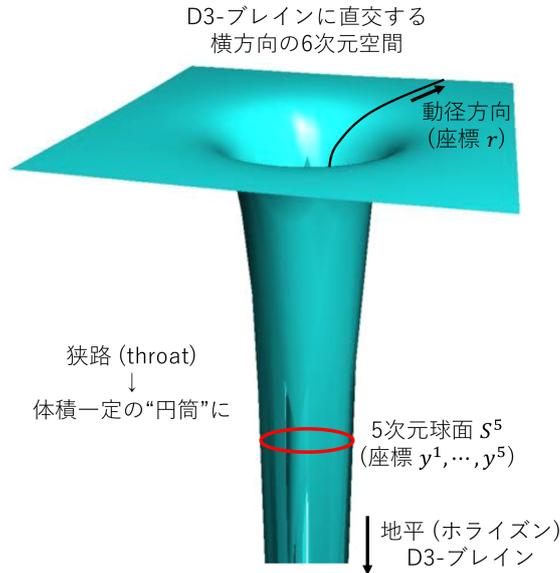


図 87 狭路 (throat) の幾何

地平 (ホライズン) と呼ばれる。地平付近の幾何は $\text{AdS}_5 \times S^5$ となることが判明する。6次元空間ではブレインは点として現れ、(それは狭路の無限の先へと追い出されるので、) この幾何においてもはや D3-ブレインは現れない。こうして

1. 遠方の領域を表す平坦な空間における低エネルギー閉弦の系
2. 地平付近の $\text{AdS}_5 \times S^5$ の幾何を背景とする IIB 型超弦の系

という 2 つの分離した系が得られる。

以上で見たように低エネルギー極限では、 $gN \ll 1$ と $gN \gg 1$ の 2 つの領域において 2 つの分離した系が生じる。実際には低エネルギー極限において “すべての” gN の値の下で 2 つの系への分離が起こる。その一方は平坦な時空における自由な閉弦の系である。もう一方の系は $gN \ll 1$ では $SU(N)$ Yang-Mills 理論、 $gN \gg 1$ では $\text{AdS}_5 \times S^5$ における IIB 型の超弦理論となっている。これらは実際には同じものであり、 gN の中間的な値においても両者は等価になっているというシナリオが AdS/CFT 対応である (図 88 参照)。

最後に AdS 時空の幾何について説明する。通常 AdS_{n+1} 時空は、2 つの時間座標 u, v と n 個の空間座標 x^i に対して、

$$ds^2 = -du^2 - dv^2 + dx^i dx^i \quad (i = 1, \dots, n)$$

で与えられる計量を持つ平坦な空間 $\mathbf{R}^{2,n}$ に埋め込まれた曲面

$$-u^2 - v^2 + x^i x^i = -R^2$$

として定義される。これは独立な時間的方向を 1 つだけ含むことを踏まえて、

$$u = z \cos t, \quad v = z \sin t$$

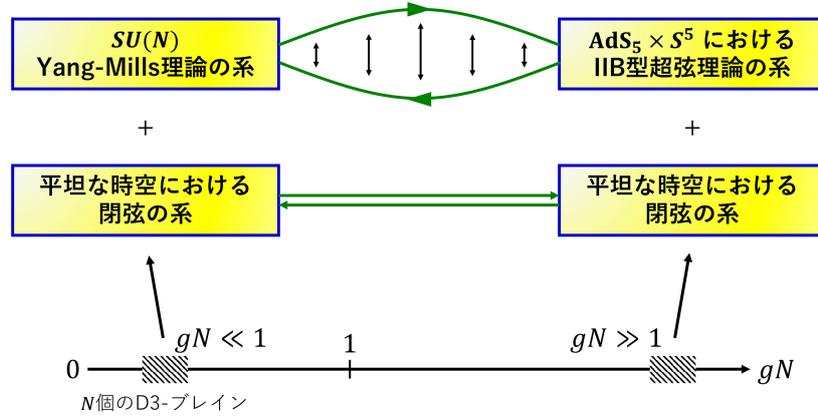


図 88 AdS/CFT 対応 (低エネルギー極限の描像)

によって, u, v の代わりに (無次元の) 時間 t と付加的な座標 z を導入すると,

$$\text{周囲の計量の式: } ds^2 = -z^2 dt^2 - dz^2 + dx^i dx^i,$$

$$\text{曲面の式: } -z^2 + x^i x^i = -R^2$$

となる. $dt = 0$ で与えられる AdS 時空の“空間”は双曲型空間 \mathbf{H}_n の幾何となっており, 次のように双曲面 \mathbf{H}_n をパラメトライズする $\xi^i (i = 1, \dots, n)$ 座標を導入できる. すなわち双曲面上の点 $P(z, \vec{x})$ (ただし $\vec{x} = (x^1, \dots, x^n)$) に対して, P と点 $Q(-R, \vec{0})$ を直線で結び, 超平面 $z = 0$ (スクリーン) との交点 P' の x^i 座標を点 P の座標 ξ^i として用いる (図 89 参照). また $r = \sqrt{(\xi^1)^2 + \dots + (\xi^n)^2}$ と表記する. 最後に $\xi^i/R \rightarrow \xi^i$ (したがって $r/R \rightarrow r$) と座標を無次元化して再定義すると, 座標 t, ξ^i に関して AdS_{n+1} に誘導された計量は

$$ds^2 = R^2 \left[-\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2 dt^2 + \frac{4d\xi^i \xi^i}{(1-r^2)^2} \right] \quad (r = \sqrt{\xi^i \xi^i})$$

となる. (計量が定まれば AdS 時空を内に含む高次元の空間を想定することなく, AdS 時空を理解できる.)

$r \rightarrow 1$ は \mathbf{H}_n の任意の点から無限に離れた境界に対応する. 共形因子 $(1-r^2)^2/4R^2$ を乗じると, 共形境界を持つ時空の世界距離は

$$ds'^2 = \frac{(1-r^2)^2}{4R^2} ds^2 = -\left(\frac{1+r^2}{2}\right)^2 dt^2 + d\xi^i d\xi^i$$

で与えられる^{*44}. 共形境界 $r = 1$ の近くでは

$$ds'^2 \simeq -dt^2 + d\xi^i d\xi^i$$

となり, 共形境界は球面 $S^{n-1} : \xi^i \xi^i = 1$ と時間軸から形成される. AdS_5 時空に関しては, 共形境界が $\mathbf{R} \times S^3$ となる. AdS を背景とする IIB 型超弦理論に対して双対なゲージ理論は, このような境界に存在する.

^{*44} 共形因子 Ω^2 の導入 $ds'^2 = \Omega^2 ds^2$ は空間に入れた座標系をそのままにして計量を, したがって空間の幾何学そのものを変更している. しかしながら時空の共形境界に対する正接ベクトルの性質 (空間的, 時間的, 零) など, 興味ある情報は不変に保たれる.

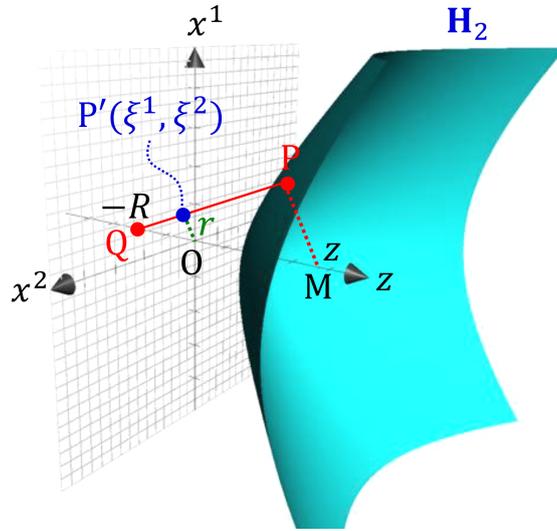


図 89 M_3 における双曲面 H_2 への座標 ξ^i の導入

第 24 章 弦の共変な量子化

Lorentz 不変性が明白な弦の量子化

- 利点
 - D0-ブレインにも適用できる。
(光錐量子化では光錐座標を定義する Neumann 型の弦の空間座標 X^1 が 1 つ必要.)
 - 弦理論において現れる場の方程式が理解しやすい表現になる^{*45}.
 - タキオンポテンシャルの計算が可能となる.
- 困難 (以下で説明)
 - 弦の時間座標 X^0 も演算子になる.
 - 弦のハミルトニアンは, 理論の物理的な状態を消滅させてしまう.
 - ノルムが正にならないような状態も論じる必要がある.

光錐量子化では南部-後藤作用の代わりに, (すべての弦座標 X^μ を同等に扱った) より単純な作用

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma (\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu - \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X_\mu)$$

を利用することができる. と言うのも, このとき運動量密度 (\mathcal{P}^τ および流束 \mathcal{P}^σ) は

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^{\mu'}, \quad \mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu$$

となり, (Dirichlet 境界条件または自由端点の条件 (したがって Neumann 境界条件) の下で) 運動方程式として波動方程式

$$\ddot{X}^\mu - X^{\mu''} = 0$$

^{*45} 例えば質量のタキオン状態に関する運動量空間の波動関数 $\phi(p)$ の満たす古典場の方程式は $(\alpha' p^2 - 1)\phi(p) = 0$ となる. これは自乗 $M^2 = -1/\alpha'$ を持つ Klein-Gordon 方程式に一致していることが明白である.

が導かれる。共変な理論では弦の時間座標 X^0 も含めて $X^\mu(\tau, \sigma)$ と $\mathcal{P}_\mu(\tau, \sigma)$ を Heisenberg 演算子とし、標準な交換関係

$$[X^\mu(\tau, \sigma), \mathcal{P}^\nu(\tau, \sigma')] = i\eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma')$$

を課す*46。すると開弦に対して、弦座標のモード展開

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma$$

における展開係数などに対する交換関係

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0}, \quad [a_m^\mu, a_n^{\nu\dagger}] = \delta_{m,n} \eta^{\mu\nu}, \quad [x_0^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu} \quad (\alpha_0^\mu \equiv \sqrt{2\alpha'} p^\mu)$$

が導かれる。

さて、我々が学んだベクトル n^μ によって特徴付けられるパラメーター付けの条件の下では、制約条件

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0$$

が導かれた。光錐ゲージでは n^μ を具体的に選んでパラメーター付けを完全に固定するのに対し、共変な量子化では n^μ を決めずに、単に上式 $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ を“部分的な”ゲージ固定条件として課す。制約条件 $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ は光錐形式では X^- 座標の振動子を横方向の Virasoro モード L_n^\perp に関係付けるのに用いられた。しかし共変なアプローチでは、むしろ制約条件は理論が許容すべき状態に対して課される。まず Virasoro 演算子

$$L_n \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_{n-p}^\mu \alpha_{p,\mu}$$

を定義すると、古典論の水準で

$$\text{制約条件 } 0 = (\dot{X} \pm X')^2 = 4\alpha' \sum_{n \in \mathbf{Z}} L_n e^{-in(\tau \pm \sigma)} \quad \rightarrow \quad L_n = 0 \quad (n \in \mathbf{Z}, \text{ 古典論})$$

であり、量子論でも制約条件を表す式として、 $L_n = 0$ を何らかの形で考慮しなければならない。そこで物理的な状態 $|\Phi\rangle$ は、少なくとも $L_0 = N[L_0] - 1$ によって消失しなければならないと考える。

$$(N[L_0] - 1)|\Phi\rangle = 0.$$

ここから質量の自乗 $M^2 = -p^2$ は

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}(-1 + N), \quad N \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{\mu\dagger} a_{n,\mu} : \text{数演算子}$$

と表されることになる。実は負のノルムを持つ状態が存在することを証明でき、そのような状態を除くためにさらなる補助条件が必要である。しかし全ての Virasoro 演算子 L_n によって消滅するような状態は存在し得ないこともまた証明される。これを踏まえ、補助条件として正のモード番号を持つ Virasoro 演算子が物理的な状態を消滅させると考える。

$$L_n |\Phi\rangle = 0. \quad (n > 0)$$

*46 横方向成分と x_0^-, p^+ を独立な力学変数とする光錐量子化の場合と違い、交換関係 $[x_0^-, p^+] = -i$ を課す必要はない。

このとき全ての $n \neq 0$ に対して L_n の“期待値”がゼロになることができる。

$$\langle \Phi | L_n | \Phi \rangle = 0. \quad (n \neq 0)$$

ここで

$$\begin{aligned} L_n | \Phi \rangle = 0 \quad (n > 0) &\Leftrightarrow | \Phi \rangle \text{ は Virasoro “主要状態”,} \\ \begin{cases} L_n | \Phi \rangle = 0 \quad (n > 0) \\ (N[L_0] - 1) | \Phi \rangle = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow (N[L_n] - \delta_{n,0}) | \Phi \rangle = 0 \quad (n \geq 0) \\ &\Leftrightarrow | \Phi \rangle \text{ は “許容状態” (慣用的には「物理的状态」)} \end{aligned}$$

と呼ぶことにする。さらに負のモード番号を持つ有限個の Virasoro 演算子の線形結合を、与えられた主要状態に作用させた形で書くことのできる状態として、その主要状態の Virasoro 従属状態を定義する。“物理的”な状態は許容状態のうち、主要状態であって、他の主要状態の従属状態ではない状態である。

開弦の量子化に移ろう。

- 基底状態 $|p\rangle = |p^0, p^1, \dots, p^{25}\rangle$ (運動量の全成分で指定)
- 位置状態 $|x\rangle = |x^0, x^1, \dots, x^{25}\rangle$
 - 時刻のラベルも付いている。ある状態 $|\psi\rangle$ の波動関数 $\langle x | \psi \rangle$ は、Schrödinger 方程式を用いる前に、既に時間依存性を備えている。

ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &\equiv \int d\sigma (\mathcal{P}^\tau_\mu \dot{X}^\mu - \mathcal{L}) = \pi\alpha' \int d\sigma \left(\mathcal{P}^\tau \cdot \mathcal{P}^\tau + \frac{X' \cdot X'}{(2\pi\alpha')^2} \right) \\ &= L_0 = N[L_0] - 1 = \alpha' p^2 + N - 1 \end{aligned}$$

と計算され、 $H = N[L_0] - 1$ はすべての物理的な状態を消滅させる。このように共変な状態が既に時刻のラベルを備えていることに関係して、Schrödinger 方程式は状態の時間発展方程式ではなく、状態 $|\Phi\rangle$ に対する制約の式 $H|\Phi\rangle = 0$ へと転化する。共変な量子化では (振動子 $\alpha \sim a$ の満たす上記の交換関係により) 基本状態は

$$|r\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{\mu=0}^{25} (a_n^{\mu\dagger})^{\lambda_{n,\mu}} |p\rangle \quad (\lambda_{n,\mu} : \text{非負の整数})$$

という形をとる。このうち物理的状态は許容状態であって従属状態ではないものに限られる。光錐量子化の場合と同様に、共変な量子化においても開弦の物理的な状態として、

- $N = 0$ の基底状態 $|p\rangle$
 - タキオン状態 ($M^2 = -1/\alpha'$)
- $N = 1$ の励起状態 $\xi_\mu \alpha_{-1}^\mu |p\rangle$
 - 1光子状態 (ξ_μ は偏極, $M^2 = 0$, $p \cdot \xi = 0$, 自由度 $D - 2$)

が得られる。

閉弦では $\alpha, \bar{\alpha}$ の2種類の振動子があることに応じて、2種類の Virasoro 演算子 L_n, \bar{L}_n を定義できるという点で開弦よりも複雑であるけれど、開弦の場合と同様に議論を進めることができる。そして閉弦の共変な量子化でも、光錐量子化の場合と同じく

- 基底状態 ($N = \bar{N} = 0$) → タキオン状態
- 無質量状態 ($N = \bar{N} = 1$) → Kalb-Ramond 場, 重力, デイラトン

が得られる.

ここまでは制約条件 $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ を運動方程式とは別に課してきた. 最後に制約条件も導くことができる Polyakov 作用の説明をする. 新たに導入された世界面の計量 $h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$ を力学変数として, Polyakov 作用は

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} (\partial_\alpha X^\mu) (\partial_\beta X^\nu) \eta_{\mu\nu}$$

で与えられる. ただし $\alpha, \beta, \dots = 1, 2$ は世界面座標 $(\xi^1, \xi^2) = (\tau, \sigma)$ の添字, $\mu, \nu, \dots = 0, 1, \dots, 25$ は時空添字であり, $h^{\alpha\beta} h_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha$, $h = \det(h_{\alpha\beta})$ とする. ここから導かれる計量 $h^{\alpha\beta}$ の運動方程式によれば, $h_{\alpha\beta}$ を (τ, σ) の導入によって弦の世界面に誘導された計量 $\gamma_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X$ に比例する形

$$h_{\alpha\beta} = f^2(\xi) \gamma_{\alpha\beta}$$

に比例する形に書ける. このとき Polyakov 作用は南部-後藤作用

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \sqrt{-\gamma} \quad (\gamma = \det(\gamma_{\alpha\beta}))$$

に一致する^{*47}. このように古典論の水準では, Polyakov 作用は南部-後藤作用と等価である. さらにパラメータの付け替えの自由度を利用して, 計量 $h_{\alpha\beta}$ を “2次元の” Minkowski 計量 $\eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に比例する形

$$h_{\alpha\beta} = \rho^2(\xi) \eta_{\alpha\beta}$$

に選ぶと, 弦座標に対する運動方程式は波動方程式

$$\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta X^\mu = 0$$

になる. また場の方程式は

$$(\partial_\alpha X) \cdot (\partial_\beta X) - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} (\eta^{\gamma\delta} (\partial_\gamma X) \cdot (\partial_\delta X)) = 0$$

を与える. 予告通り, これは

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) = (1, 1), (2, 2) &\rightarrow \dot{X}^2 + X'^2 = 0, \\ (\alpha, \beta) = (1, 2), (2, 1) &\rightarrow \dot{X} \cdot X' = 0 \end{aligned}$$

のように Virasoro 制約条件に帰す.

^{*47} このように Polyakov 作用が $f^2(\xi)$ に依らないことは, Polyakov 作用が Weyl 変換

$$h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) \rightarrow \Omega^2(\tau, \sigma) h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$$

に対して不変であることを意味している.

第 25 章 弦の基本的な相互作用と Riemann 面

弦が相互作用 (分裂・結合) する場合へと議論を進める.

相互作用をする弦の描像を, 具体的な現象が起こる確率を与える数値へと結びつける作業は, 以下の 3 段階から成る.

- (1) 弦のダイアグラムを描いて, ダイアグラムの正準表現を与えるような共形写像を計算する.
 - 最も非自明な内容を含んでおり, 以下ではこの部分を詳しく説明する.
 - 場の理論では, Feynman ダイアグラムを描く作業にあたる (共形写像は不要).
- (2) 共形場理論を利用して, その正準形式から散乱振幅を計算する.
 - 場の理論では Feynman 規則に基づき, ダイアグラムに対応する散乱振幅を書き下す作業にあたる.
- (3) 公式を用いて, その散乱振幅から断面積を求める. 断面積は観測量 (observable) である.

弦の世界面を Riemann 面として見ることは理に合っていることを説明する. Riemann 面とは粗く言って複素数の座標 (チャート) を設定された 2 次元の実多様体である.

Riemann 面の例 複素平面 \mathbf{C} (座標 $z = x + iy$), \mathbf{C} の上側の半平面 $\mathbf{H}(y > 0)$,

境界を含んだ上側の半平面 ($y \geq 0$) と “無限遠の点” (25.6 節) を含んだ領域 $\bar{\mathbf{H}}$,

複素平面における円環 (annulus) の領域, Riemann 球面 (スフェア) $\hat{\mathbf{C}}$,

Riemann 輪環面 (トーラス), …….

等価な Riemann 面と共形写像 2 つの Riemann 面の間写像を座標の関係 $w = f(z)$ として表したとき,

$f(z)$ が解析関数であるならば, 2 つの Riemann 面は等価であると見なされる.

解析的な写像は局所的に角度を保つため (ただし $f'(z) = 0$ となる点 z は例外である),

共形写像 (等角写像) と呼ばれる.

Riemann 面内における距離 2 点 z_1, z_2 の間の自然な距離として $|z_1 - z_2|$ を考えると,

共形写像は一般に局所的な尺度変更 $|dw| = |f'(z)||dz|$ を伴うため,

Riemann 面内における距離の概念を, 内面的な形で一意的に規定することはできない.

他方, Weyl 変換 $h_{\alpha\beta} \rightarrow \Omega^2 h_{\alpha\beta}$ の下で Polyakov 作用は不変であり (前述), (このとき座標 τ, σ は変更しないので,) これは計量 $h_{\alpha\beta}$ を用いて測った世界面内の距離もまた物理的な重要性を持たないことを意味している.

弦の世界面上の距離 $-ds^2 \sim -d\tau^2 + d\sigma^2 (h_{\alpha\beta} \sim \eta_{\alpha\beta} \text{ と選んだとき) と複素平面上の距離 } |dz|^2 = dx^2 + dy^2$ の定義の違いはあるものの, このことは世界面を Riemann 面として捉えることが自然な措置であることを示唆している.

そこで自由に伝播する開弦 (光錐運動量 p^+) の世界面を, 複素座標

$$w = \tau + i\sigma$$

を持つ Riemann 面と捉える (図 90 上段). これは指数関数の写像と線形分数変換

$$z = \exp\left(\frac{w}{2\alpha'p^+}\right), \quad \eta = \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

によって, 図 90 の左下と右下に示す等価な Riemann 面 (z 平面上の $\bar{\mathbf{H}}$ と, η 平面上の単位円領域) に対応付けられる. ただし

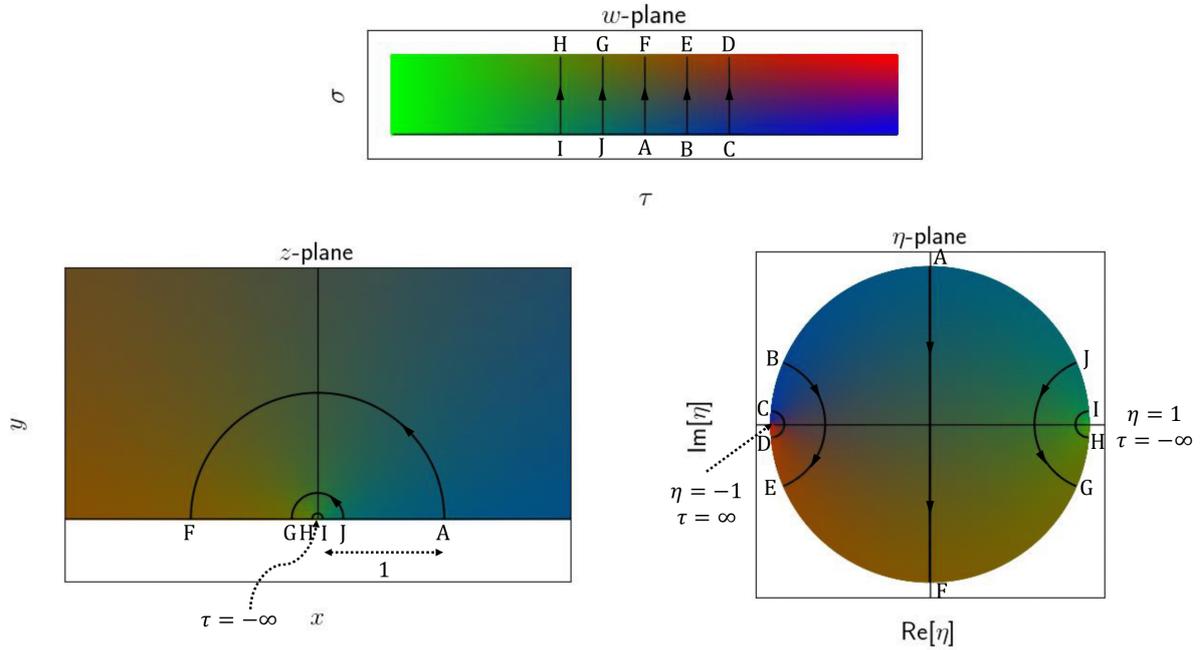


図 90 弦の世界面 (w 平面) と等価な Riemann 面 (z 平面, η 平面) と, 弦を表す $\tau = (\text{一定})$ の線の写像

- $\bar{\mathbf{H}}$ における $z = 0$ と “無限遠の点” $z = \infty (|z| = \infty \text{ のこと})$
- η 平面における 2 点 $\eta = \pm 1$

は無限の過去 ($\tau = -\infty$) および無限の未来 ($\tau = \infty$) における弦に対応し, これらは如何なる有限時刻の弦も到達できない “針孔 (puncture)” であって, 世界面からは除かれる.

相互作用をする開弦の世界面もまた, Riemann 面を比較できる正準表現として $\bar{\mathbf{H}}$ に写像できる. 例えば図 91 の弦の世界面は図 92 の多角形において, 頂点 P_1 を無限の過去 $\tau = -\infty$ へ, 頂点 P_2, P_3 を無限の未来 $\tau = \infty$ へ移行した,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \pi, \quad \alpha_Q = -\pi$$

となる極限にあたる^{*48}. ところで一般に図 93 のような w 平面上の n 角形は, Schwarz-Christoffel 写像によって z 平面の $\bar{\mathbf{H}}$ に関係付けることができる. 図 93 のように記号を定義すると, Schwarz-Christoffel 写像を表す微分方程式は

$$\frac{dw}{dz} = A(z - x_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}} (z - x_2)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}} \cdots (z - x_{n-1})^{-\frac{\alpha_{n-1}}{\pi}}$$

^{*48} 図 91 のように相互作用する弦の世界面に対しては, 運動量の光錐成分 p^+ を持つ弦に対してパラメーターの範囲が $\sigma \in [0, 2\pi\alpha'p^+]$ となるように, 光錐ゲージの条件を定義する数係数を

$$X^+ = \tau, \quad p^+ = (2\pi\alpha'p^+)P^+$$

と設定する. こうすると弦の結合・分裂に伴って σ の範囲に矛盾が生じることはなく, また全ての弦の座標が共通の相互作用点 Q の時刻 X^+ を与えることが保証される.

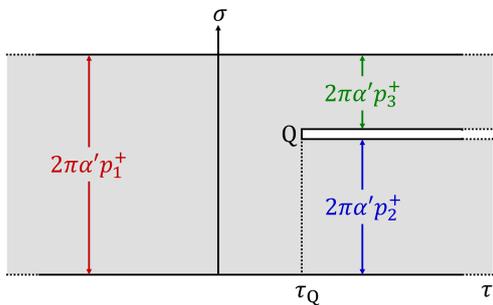


図 91 光錐ゲージにおいて弦の分裂を表す世界面ダイアグラム

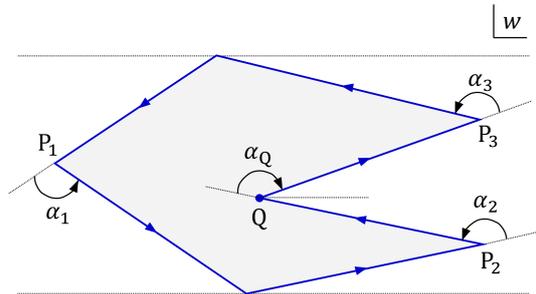


図 92 ある種の極限において弦の世界面を与える多角形 (Q は相互作用点に対応)

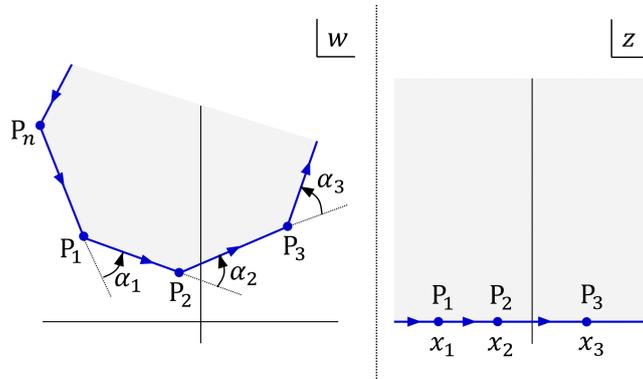


図 93 Schwarz-Christoffel 写像

で与えられる。ここから図 91 の弦の相互作用ダイアグラムに対して写像の式を具体的に書くと

$$w = -2\alpha' p_2^+ \ln(z+1) - 2\alpha' p_3^+ \ln(z-1),$$

$$x^* = \frac{p_2^+ - p_3^+}{p_2^+ + p_3^+}$$

となる。ただしここでは頂点 P_2 が $z = -1$ へ、 P_3 が $z = +1$ へ、 P_1 が $z = \infty$ へ移るように写像を構築しており、このため頂点 Q の写像される点 x^* は -1 と 1 の間にある。

ここで z 平面において頂点の写像される実軸上の位置を選べたのは次の事情による。すなわち $\bar{\mathbf{H}}$ から $\bar{\mathbf{H}}$ への自己写像を与える線形分数変換 $w(z)$ が存在し、これは実軸を左から右にたどるとき、実軸を無限遠の点も含む円と見なした場合の 3 個の針孔の巡回的な順序を保存する。このため z 平面と w 平面とで、対応する実軸上の針孔 P_1, P_2, P_3 が等価な巡回的順序で現れる場合に限って、一方の $\bar{\mathbf{H}}$ を他方の $\bar{\mathbf{H}}$ に移すことが可能である。この自由度を利用して 3 個の針孔を指定した位置に移した。

次に 4 本の弦の相互作用を例にとり、相互作用する弦の世界面はすべての Riemann 面を、それに関係するモデュライによって構築する方法を正確に与えることを説明する。ここでモデュライとは、非等価な Riemann 面を区別するパラメーターである。図 94 のように 2 本の弦 3,4 が結合して 1 本の間状態の弦を形成し、その後 2 本の弦 1,2 に分裂する過程を考える (記号を図 94 のように定義する)。相互作用点の間の時間 $T = T_1 - T_2$ は $-\infty < T < \infty$ の範囲をとり得る。(ただし $T < 0$ において 2 つの切れ目が重なる $p_2^+ = p_3^+$ の場合には、実際には T は負になることはできない。) 図 94 の世界面を、3 点 P_1, P_2, P_3 が $0, 1, \infty$ に来るよ

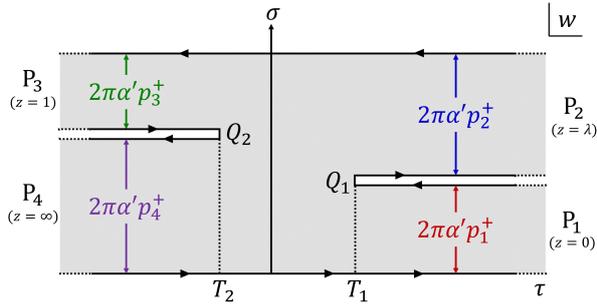


図94 4本の弦の相互作用を表す世界面ダイアグラム

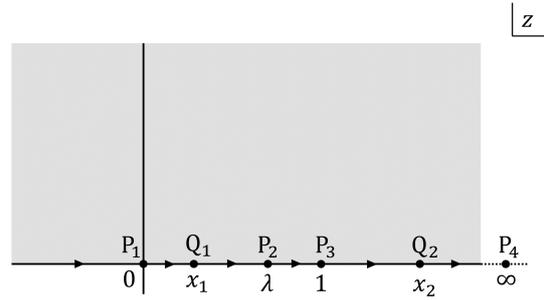


図95 $\bar{\mathbf{H}}$ で見た4本の弦の相互作用

うに Schwarz-Christoffel 写像を用いて $\bar{\mathbf{H}}$ に移すと、世界面上の点の巡回的順序 ($P_1 Q_1 P_2 P_3 Q_2 P_4$) は図95のように保持され、 P_2 の移る点 $\lambda \in (0, 1)$ がモデュライとなる。(4個目の針孔 P_2 も指定された位置に移すことは、一般には不可能である。)

実は (p_i^+ を固定すると)、モデュライは T と1対1の関数 $\lambda(T)$ になる。よってもし $T \rightarrow \infty$ のときに λ が0に近づき、 $T \rightarrow -\infty$ のときに λ が1に近づけば、 λ は $0 < \lambda < 1$ の範囲内のすべての値を1回ずつとることになる。この仮定は次の直観的な議論から、実際に正しいと予想される。まず図94のダイアグラムで $T \rightarrow \infty$ とすると、点 P_1, P_2 は P_3, P_4 と長い布によって隔てられる。このとき図95の $\bar{\mathbf{H}}$ においても共形的に、 P_1 と P_2 は互いに近づかなければならないから(あるいは P_2 と P_3 が離れなければならないから)、 $\lambda \rightarrow 0$ と考えることはもっともらしい。次に図94のダイアグラムで $T \rightarrow -\infty$ とすると、今度は点 P_2, P_3 が P_1, P_4 と長い布によって隔てられることになる。このとき図95の $\bar{\mathbf{H}}$ においても共形的に、 P_2 と P_3 は互いに近づかなければならないから、 $\lambda \rightarrow 1$ となると考えることはもっともらしい。このことは具体的な計算で厳密に証明することができる。こうして T が $-\infty$ から ∞ まで変化するとき、弦のダイアグラムは境界に4個の針孔(無限の過去と未来の弦 P_1, P_2, P_3, P_4 に対応)を持つすべての $\bar{\mathbf{H}}$ をちょうど生成する。一般に任意の弦の相互作用に関して、弦のダイアグラムの位相的な型を固定しておいて、ダイアグラムのパラメーターを自然な範囲全体にわたって変化させると、位相的に与えられた型を持つ互いに非等価な Riemann 面の完全な集合(したがってモデュライ空間)が形成される。

最後に関連して、4個の開弦タキオン(入射2個, 出射2個)による散乱振幅(Veneziano 振幅)について触れておく。無限の過去と未来に開弦タキオンを表す点 P_1, P_2, P_3, P_4 (時空運動量 p_1, p_2, p_3, p_4)を、巡回的順序を保って $\bar{\mathbf{H}}$ の境界 $x_1 = 0, x_2, x_3 = 1, x_4 = \infty$ に移すと、 $x_2 = \lambda$ がモデュライとなる(モデュライ空間は $0 < \lambda < 1$)。散乱振幅にはすべての可能な光錐ダイアグラムが寄与し、散乱振幅は面のモデュライ空間にわたる積分

$$A(p_1, p_2, p_3, p_4) = g_o^2 \int_0^1 d\lambda \lambda^{2\alpha'(p_1 \cdot p_2)} (1 - \lambda)^{2\alpha'(p_2 \cdot p_3)}$$

として表現される。これが Veneziano 振幅である。係数 g_o^2 は、この過程が2本の弦と1本の弦の基本的な相互作用を2回含んでおり、それぞれが振幅に対して開弦の結合 g_o の1乗の寄与を持つことによる。歴史的には弦理論は、Veneziano が1960年代の後半に、この公式を書いたことが端緒となって始まった。

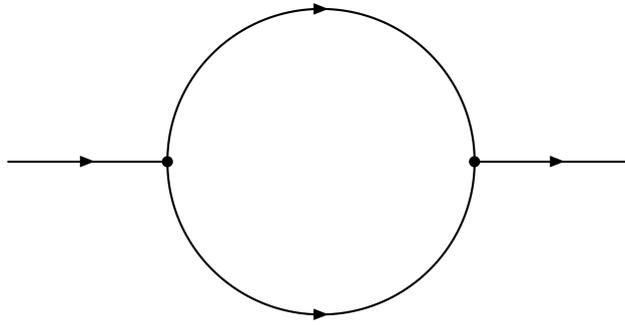


図 96 ひとつの仮想的な過程を表す 1 ループ Feynman グラフ

第 26 章 弦のダイアグラムの構造とループ振幅

素粒子物理学の摂動論による定式化において、最低次の近似に対する補正としてループを含むダイアグラムが現れる (図 96 参照). ループダイアグラムの表す仮想過程が非常に高いエネルギーや運動量を持つときに現れる発散は、紫外発散と呼ばれる. このときダイアグラムは等価的に短い時間や距離を含むので、小さいループを持つグラフと言われる. Einstein の重力理論を含むいくつかの理論では、正則化と繰り込みの手続きによって赤外発散に対処することができない. これに対し弦理論によれば、紫外発散は最初から存在しない. 潜在的に危険な短距離物理を表すように見える弦のダイアグラムは、実は、明らかに紫外発散の問題を含まないダイアグラムと等価であるからである. 弦理論が量子重力理論の最重要候補となった理由である. 我々は 1 ループの弦のダイアグラムに関してのみ、この Riemann 面の驚くべき性質を説明する.

まずは図 96 の Feynman グラフに対応する開弦の 1 ループ過程として、図 97 左上 (w 平面) に示すようなダイアグラムを考える. この世界面は図 97 右下 (η 平面) のような 1 種の円環面 (アニュラス) と共形等価であり^{*49}, 必ず図 97 左下 (ξ 平面) のように同心円に挟まれた外径 1 の正準円環面に移すことができる.

この最後の写像は物理的に意味付けして理解できるという意味で興味深いものなので、ここで特筆しておこう. すなわち任意の形状を持つ円環面は、2 つの導電体に挟まれた筒形キャパシターの断面と見なせる. このとき充電されたキャパシターの電場線と等電位線は図 98 のように網目状になり、実はこれが正準円環面の極座標 (u, v) を定義することになる.

さて、本題に戻ろう. ここで「可能な弦」の概念を導入する.

- 可能な開弦

両方の端点が境界上にあって、端点が針孔 (外部状態) を通過することを許さない限り、端点を境界上で動かしても収縮消滅することができないような曲線.

- (w 平面の光錐) ダイアグラムの上側の縁の左の部分に始点を持ち、そこから切れ目の下側を通過して上側の縁の右側の部分に終点を持つ曲線など、元々存在が想定されていなかった非自明な弦も含まれる.
- その名が意味する通り、可能な開弦とは、世界面に対するパラメーター付けを

^{*49} 複素平面において円環面は、2 つの閉曲線の間の領域として定義される. それらの閉曲線は、相互にも、それ自身とも交差しておらず、一方が他方によって囲まれる領域の内部にある.

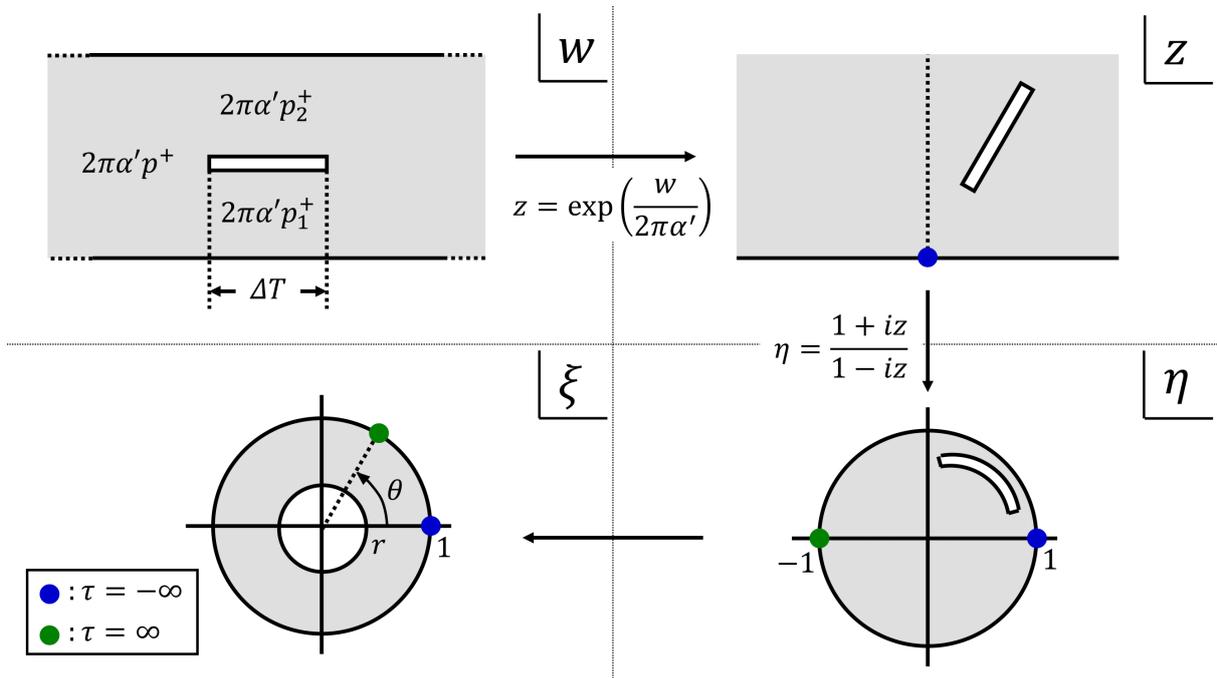


図 97 開弦の 1 ループ過程を表すダイアグラムの共形写像

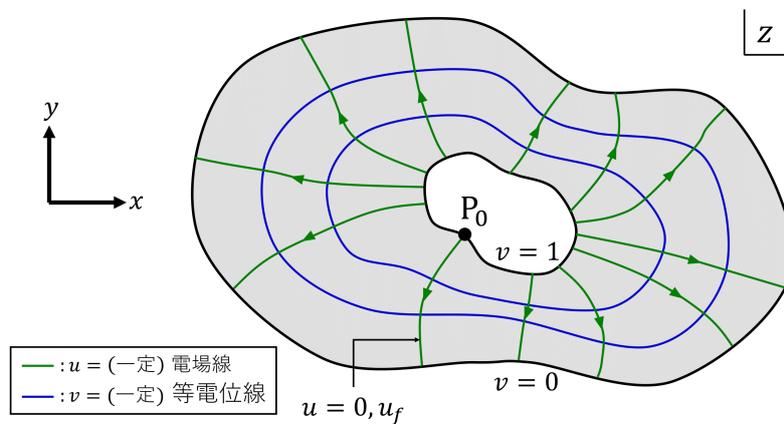


図 98 キャパシタの電場線と等電位線の張る網は、円環面の座標を定義する

適切にやり直すことによって、開弦と見なせるようになる曲線である。

- 可能な閉弦

同様に縮小消失させることのできない閉曲線によって表される閉弦。

紫外発散の恐れのある短距離物理の兆候としては、ダイアグラムにおいて短い可能な開弦や、短い可能な閉弦が現れるという状況が考えられる。ところがダイアグラムにおいて短い可能な開弦が現れるときには、常にそのダイアグラムを有限の長さの開弦が長時間伝播するという表現に直すことができる。またダイアグラムに小さい可能な閉弦が現れるときには、常にそのダイアグラムを有限の大きさの閉弦が長時間伝播するとい

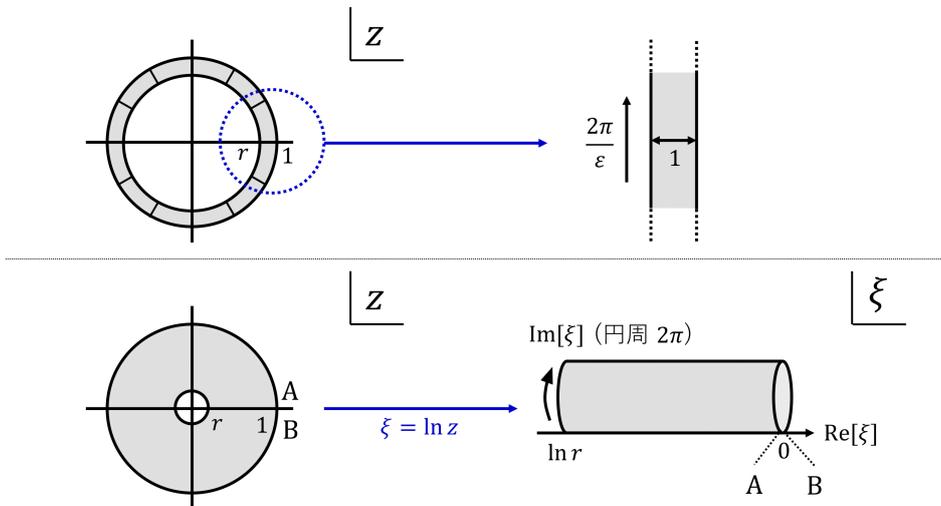


図 99 円環面に現れる可能な短い弦

う表現に直すことができる。このことを我々の考えている円環面の例で見よう (以下、円環面を z 平面に選ぶ)。

- 内径 $r \rightarrow 1$ の円環面 (図 99 上側)
 動径方向の長さ $\varepsilon = 1 - r \rightarrow 0$ の短線は可能な開弦であり、
 ダイアグラムは極めて短い開弦が円環面を周回する過程と見なせる。
 因子 $1/\varepsilon$ の尺度変更の共形変換 ($z \rightarrow z' = z/\varepsilon$) を行うと、
 弦は単位長さ (有限) を持ち、非常に“長い”距離 $2\pi/\varepsilon$ を伝播する状況が得られる。
- 内径 $r \rightarrow 0$ の円環面 (図 99 下側)
 半径 r の穴を囲む極めて小さい閉弦を考えることができる。
 共形変換 $\xi = \ln z$ を施すと、周が 2π (有限) の閉弦が長い距離 $|\ln r|$ を伝播する状況が得られる。

このような解釈が可能であるのは、複素平面上の長さ $|dz|$ が共形不変量ではなく、絶対的な意味を持たないことによる。

なお 1 ループ Feynman ダイアグラム (図 96) に対応する弦のダイアグラムは、ここまで考察してきた 26.2 節の図 97 の他に、図 100 のような非平面ダイアグラムがある。非平面ダイアグラムとは、面の一部を切り裂いて広げるか、もしくは面の一部と別の部分を重ねるようにしなければ、平坦に描くことができないダイアグラムである。

閉弦の 1 ループ過程に移ろう。1 例として図 101 に示す光錐ダイアグラムが考えられる。このダイアグラムは 2 つの針孔を持つ輪環面 (トーラス) と共形等価である。と言うのも、自由な閉弦の伝播を表す $w = \tau + i\sigma$ 平面上の光錐ダイアグラムは、指数関数の写像 $z = \exp\left(\frac{w}{\alpha' p^+}\right)$ によって z 平面全体に移される。ただし無限の過去と未来の弦に対応する 2 点 $z = 0, \infty$ は針孔である。ところで複素 z 平面は (図 102 のように Riemann 球面 \hat{C} に対応し、 $z = 0, \infty$ は \hat{C} では対称的な位置 S (南極点)、N (北極点) に対応する。そして自由な閉弦の伝播を表す 2 つの針孔を持つ Riemann 球面に、図 101 の光錐ダイアグラムの隙間に対応する穴を設けた構造として輪環面が得られる。

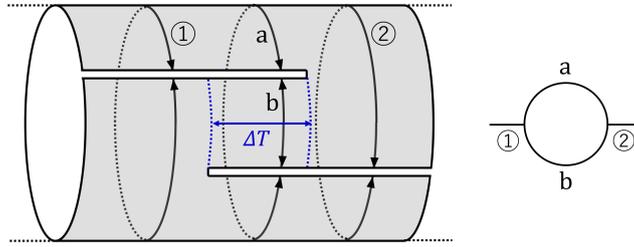


図 100 非平面ダイアグラム ($\Delta T \geq 0$)

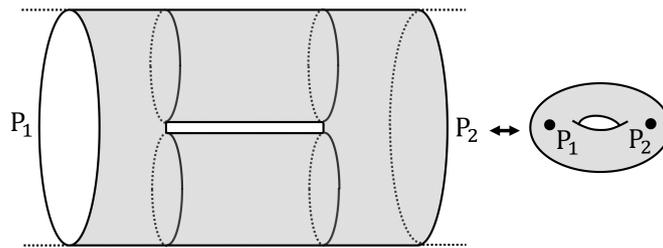


図 101 閉弦の 1 ループ過程を表す 1 つのダイアグラム

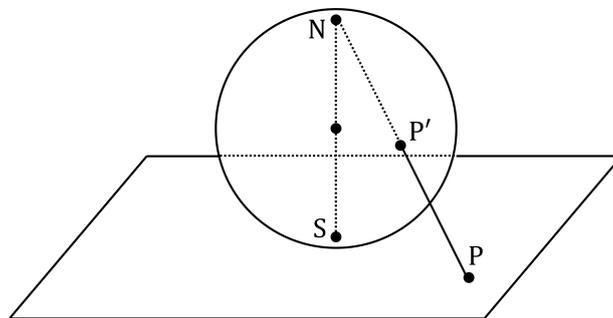


図 102 Riemann 球面 \hat{C} は南極点 S において複素平面の原点に接しており、複素平面上の点 P は、 P と北極点 N を結ぶ線分の球面との交点 P' に写像される

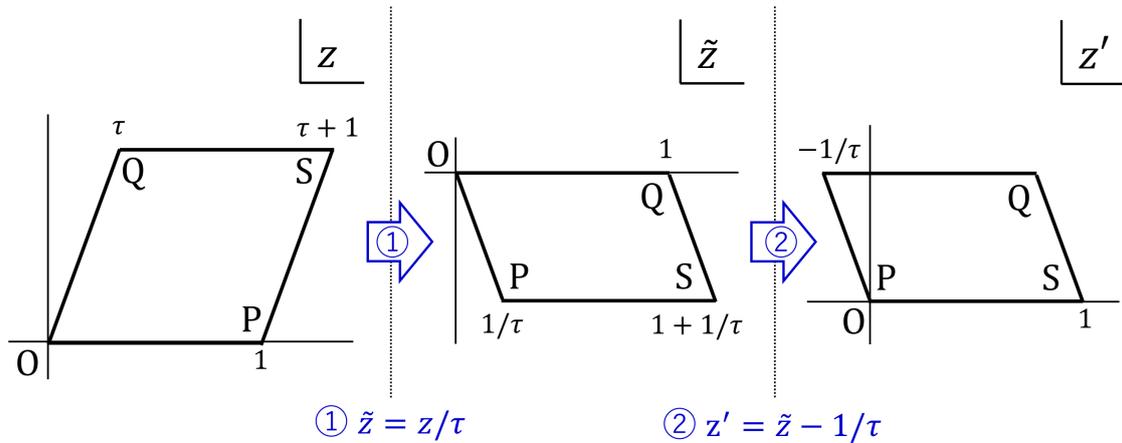


図 103 パラメーターが τ のトーラスと $-1/\tau$ のトーラスは共形等価である

以下では針孔のない輪環面について詳しく調べることを通して、紫外発散に対する洞察を得る。一般的な輪環面は、複素 z 平面に同一視 $z \sim z + \omega_1, z \sim z + \omega_2$ を導入して得られる。基本領域は複素数 $\omega_1, \omega_2 (\neq 0)$ を表す 2 つのベクトルの張る平行四辺形であり、その向かい合う辺が繋がれ一般的な輪環面が形成される。このとき共形写像 $z' = z/\omega_1$ によってベクトル ω_1 を 1 にしたときの、もう一方のベクトル $\tau \equiv \omega_2/\omega_1$ のみがパラメーターとなる。そして ω_1, ω_2 が平行でない条件 $\Im(\omega_2/\omega_1) > 0$ (ただし \Im は虚部を表す) の下では、 $\Im(\tau) > 0$ である。紫外発散の問題が生じないことを説明するだけならば、パラメーター τ と $(-1/\tau)$ を持つトーラスが共形等価であることだけを指摘すれば充分である (この等価性は図 103 から理解される)。実際そうすると、小さいトーラス ($\tau \rightarrow 0$) は大きいトーラスと等価となるので、紫外発散は生じ得ない。

参考文献

- [1] F. マンドル, G. ショー, 2013, 場の量子論 第2巻 素粒子の相互作用 (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [2] 内山龍雄, 2014, 相対性理論 物理テキストシリーズ 8, 株式会社岩波書店, 東京.
- [3] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, 2015, ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 場の古典論 (原書第6版)(恒藤敏彦, 広重徹訳), 東京図書株式会社, 東京.
- [4] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, 2013, ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 力学 (増訂第3版)(広重徹, 水戸巖訳), 東京図書株式会社, 東京.
- [5] J.J.Sakurai, 2017, 現代の量子力学 (上)(桜井明夫訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [6] 九後汰一郎, 2018, 新物理学シリーズ 23 ゲージ場の量子論 I, 株式会社培風館.
- [7] W.N. コッティンガム, D.A. グリーンウッド, 2013, 素粒子標準模型入門 (樺沢宇紀訳), 丸善出版株式会社, 東京.
- [8] 香取眞理, 2016, 裳華房テキストシリーズ-物理学, 非平衡統計力学, 株式会社裳華房, 東京.
- [9] 佐武一郎, 2017, 数学選書 1 線型代数学 (新装版), 株式会社裳華房, 東京.
- [10] 佐藤光, 2019, 群と物理, 丸善出版株式会社, 東京.
- [11] シュッツ, 2010, 第2版シュッツ 相対論入門 (江里口良治, 二間瀬敏史訳), 丸善株式会社, 東京.
- [12] 小野寺嘉孝, 2014, 物理のための応用数学, 株式会社裳華房, 東京.
- [13] スピノザ, 2011, エティカ (工藤喜作, 斎藤博訳), 中央公論新社, 東京.
- [14] L.D. ランダウ, E.M. リフシッツ, 2019, 量子力学 ランダウ=リフシッツ物理学小教程 (好村滋洋, 井上健男訳), 株式会社筑摩書房, 東京.
- [15] W. グライナー他, 2002, 熱力学・統計力学 (伊藤伸泰, 青木圭子訳), シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社, 東京.
- [16] F. マンドル, G. ショー, 2011, 場の量子論 第1巻 量子電磁力学 (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [17] 矢野健太郎, 石原繁, 2013, 基礎解析学 (改訂版), 株式会社裳華房, 東京.