山本義隆『新・物理入門』

山本義隆『新・物理入門』は受験参考書であると同時に，優れた物理学の入門書でもある．本稿はそのノートである．(山本義隆，2014，新・物理入門 ＜増補改訂版＞，駿台文庫株式会社，東京．)

ただし本稿では教科書の内容をほぼ網羅しているものの，多少，内容を部分的に取捨選択してある．特に教科書の例題を全て扱うことはしない．さらに本稿には誤りや筆者の勘違いが潜んでいるかもしれないことをあらかじめ断っておく．言うまでもなく，原著を当たるに越したことはない．『新・物理入門』に沿った演習書として『新・物理入門問題演習』もある [1].

ノート各所の「注解」や［……］で挿入したコメント，およびノート末尾の付録は本稿の筆者による補足事項である．特に高校の範囲を超える物理数学 (物理のための数学) については付録 C にまとめてある．本稿には筆者自身の便宜のために，文字を青く表示している箇所がある．

なお本稿の他にも理論物理の各種ノートを以下のページで公開している．

http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/

序文 (iii–vi) からの抜粋

- 高校生とりわけ受験生用に書かれた物理の参考書の大多数が，(中略)
  天下りに書かれた「公式」なるもののバラバラな羅列と
  高々それらの当てはめのテクニックに終始している．
- 物理のおもしろさは，その厳密で一貫した論理性・体系性と，
  経験的自然に対する見事な説明能力の両立性を知ることにある．
  つまり，これまでやみくもに丸暗記させられてきた「公式」なるものが，
  実は原理から論理的・数学的に導き出されるものであり，
  同時にまた，物理的現実をよく表す法則の一表現形式であることを納得したとき，
  はじめてそのおもしろさがわかる．
- 内容は高校物理全般，つまり力学（波動を含む）・熱学・電磁気学（光学を含む）・
  現代物理学（前期量子論まで）の基礎的解説である．
- 物理で考えるということは，実際に手を動かして計算し，
  その結果をグラフや図に表して吟味し，想像力を働かせて具体的なイメージをかきたてることをいう．
  したがって，本書を読むときには，
  目で読むのではなく，紙と鉛筆を用意し，計算はすべて手を動かして実行しなければならないし，
  その上で，思いついたことも実際にやってみることが大切である．

表記 (notation) について

- 慣習に従い，本稿では不等号 $\geqq, \leqq$ におけるイコールを 1 本線で代用して，$\geq, \leq$ と略記する．
  - 大抵の場合，物理学では条件式が等号を含むか否かという議論は不毛である．例えば斜面の傾きを少しずつ増していったとこと，ある時点 $t = t_0$ で斜面上の物体が滑り出したとする．このとき「物体が動き出した瞬間」t_0 には，物体は動いているとも止まっているとも言えない．このため物体が止まっている時間の範囲 $t \leq t_0$ に等号を含めるかは，多分に思弁的な議論となる．
    関連して，物理量はあくまで連続的に変化するという立場では，2.4 節の図 17 のように関数が不連

続となる位置において，グラフを“傾き無限大の垂直線”で繋いで描く．

- 等式 $a = b$ が定義式であることを強調する場合には，$a \equiv b$ と書く．
  これで「a を b とおく (あるいは b を a とおく)」という意味になる．
  - 等式が恒等的に成り立つことを強調するためにも記号「$\equiv$」が用いられる．
    例えば $(x+1)^2 \equiv x^2 + 2x + 1$ は x に依らずに成り立つ恒等式である．
- 近似には記号 $\fallingdotseq$ の代わりに，$\simeq$ や $\approx$ を用いる．
  次元解析などによるオーダーの見積もりのような，より粗い評価には $\sim$ を用いる．例えば，

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + O(\theta^4) \simeq 1 - \frac{1}{2}\theta^2 \ \ (|\theta| \ll 1 \text{ のとき}), \qquad \cos\theta \sim 1.$$

  ここに $O(\theta^4)$ は θ の 4 次以上の微小量を表す．
  特定の変数 (例えば時刻 t) に対する依存性を $x \sim e^{i\omega t}$ などと書く場合には，
  両辺の次元が異なって良い．また「$\sim$」は比例「$\propto$」よりも大雑把な意味に用いて良い．
- ln は自然対数 (log) を表す．指数関数 e^x における指数 x が“頭でっかち”になる場合には，
  $\exp(x)$ という表記を用いるのが便利である ($e^x \equiv \exp(x)$)．
- ベクトルは $\vec{r}$ のような上付き矢印の代わりに，太字 $\boldsymbol{r}$ で表す．また $A \equiv |\boldsymbol{A}|$ のように，
  ベクトルの大きさを細字で表す．(必ずしもいちいち断らない．座標成分との区別に注意せよ．)
- 時間微分をドットで表すことがある．例えば，

$$\dot{x} \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \qquad \ddot{x} \equiv \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}, \qquad \text{etc.}$$

  左辺のような記法は Newton により導入されたのに対し，右辺の記法は Leibniz の流儀である．
- 「const.」「Const.」は constant の略であり，定数を表す．
- $(\cdots)|_{x=a}$ は $(\cdots)$ に $x = a$ を代入した量を表す．この縦棒による表記は，代入操作の前に
  $(\cdots)$ の部分で計算を実行できる点で便利である．また例えば微分係数を原点で評価した値 $f'(0)$ を

$$\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$$

  と書けば，微分を実行してから $x = 0$ を代入することが明確になる．
- 断りのない限り MKSA 単位系を用いる．

読者は本編において，以上のリストに網羅されていない，見慣れない表記に出会うかもしれない．ただし本稿ではなるべく慣習的な記法を採用し，適宜その場で，記号の定義を述べる予定である．多少の表記揺れは大目に見ていただきたい．

目次

第 1 章 物理学理論と物理的世界 4

第 2 章 力学 12

第 3 章 熱学 90

第 4 章 力学的な波動 110

第 5 章 電磁気学 137

第 6 章 光学 206

第 7 章 微視的世界の物理学 244

付録 A　Spinoza 描像 275

付録 B　物理の学習 285

付録 C　物理数学 293

付録 D　物理 (発展) 345

第 1 章 物理学理論と物理的世界

1-1 物理学理論の性格

古典物理学

物理学は

- 古典物理学 (〜19 世紀末)
- 現代物理学 (20 世紀〜)

より成る．

古典物理学は巨視的 (マクロ) な世界の物理現象についての理論であり，古典論において物理的世界は

- 物質的物体 (質量・電荷・幾何学的形状のみを有する)
- 場 (空間の性質)
  - 重力場・電磁場

より成る．物体は周囲の空間に場を作り，場から力を受ける．

古典物理学は以下の 3 部門で尽くされる．

- 力学
  - 与えられた力の下での物体の運動を研究 (力の起源は問わない)．
- 電磁気学
- 熱 (力) 学
  - 第 1，第 2 法則を基礎とし，個別物質の特殊性に依らない物質の変化一般の関係を研究．

注解

■古典物理学における物体 (粒子) と場の二元論　このように力学は与えられた力の下での物体の運動を論じるのに対し，物体に働く力は物体が場から受ける力として，場の理論によって説明されることになる．このような“役割分担”は古典的自然観における物体 (粒子) と場の二元論を反映している．ただし重力場に対する法則は，第 2 章における力学の中で導入される (→ 1-2 節「ただし重力場は物体間に働く重力としてのみ働く」(p.5))．

■古典物理学の原理　一般に物体と場は相互作用しながら時間発展する．この時間発展を記述できれば，原理的には古典的世界は「分かった」と言えるだろう．実は物体・電磁場・重力場の振舞いに対するそのような予言は，最小作用原理の下で以下の作用 S の式に完全に含まれており，この意味でこの式は古典物理学の究極の原理と見なせる [2, p.304,pp.306–308] [3, pp.115–116] [4, pp.261–262,pp.266–267]．

$$S = -\sum mc\int \mathrm{d}s - \sum \frac{e}{c}\int A_\mu \mathrm{d}x^\mu - \frac{1}{16\pi c}\int F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x - \frac{c^3}{16\pi k}\int G\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x.$$

ここでは式の説明は行わない．絵として眺めていただければ十分である．

最小作用原理と目的論的世界観　最小作用原理によれば系の始状態と終状態を与えたとき，現実の時間発展は作用と呼ばれる量が“極小”となるように行われる．このような定式化は粒子や場を擬人化し，作用を最小にするという目的を持って振る舞う存在として捉えているような印象を与え得る．しかし例えば粒子は，終点に辿り着くという最小

作用原理で課される境界条件を実現するような初期条件を自分が満たしているかを知らないから，このような解釈は不適当である．実際，最小作用原理から導かれる運動方程式は，粒子や場が目的因ではなく因果律に従って時間変化することを意味している．

現代物理学

量子力学 (微視的世界) と相対性理論 (高エネルギー物体) より成る．

注解

■理論の階層性　古典物理学と現代物理学は互いに排他的な理論ではない．すなわち現代物理学とは独立に，並列的に古典物理学があるのではなく，古典物理学は量子力学の中に「古典的極限」として，また相対性理論の中に「非相対論的極限」として含まれている近似理論である．

■相対性理論について　量子力学を含まない理論を古典論と称する立場からは，相対性理論を古典物理学に含めることも考えられる．なお古典的には物理的世界は物質的物体・電磁場・重力場から成るとしながら，古典物理学は力学・電磁気学・熱学で尽くされるとして重力場の理論を含めていないことは，重力場の理論である一般相対性理論を古典物理学に含めていないことと関係していると考えられる．

物理学理論のできかた

物理学の成り立ちは以下の図式にまとめられる．まず実験や観察を通して得られる経験的事実から自然法則が帰納される．そして諸法則は最も根本的な法則である原理へと統一される．逆に原理から出発して諸法則を導き，自然現象を矛盾なく説明することが物理学の目標とする理想的な形であると考えられる．

ここで原理に対してさらにその起源を問うことはできない．原理から導かれた法則が現象を矛盾なく説明できる限り，原理は正しいと見なされる．

> それでは原理の正しさは何によって保証されているのかといえば，それは，そこから導き出される諸法則が経験的・実験的事実をよく説明するということによってである．(p.21)

これは科学的な真理が絶対ではないことを意味する．このような理論の蓋然性は帰納的推論の産物としての宿命である．

$$\text{自然現象} \underset{\text{説明・予言}}{\overset{\text{帰納}}{\rightleftarrows}} \text{自然法則} \underset{\text{導出}}{\overset{\text{統一}}{\rightleftarrows}} \text{原理}$$

注解

■演繹と帰納　演繹と帰納について述べる [5, pp.21–23,p.44]．

演繹とは前提が真ならば結論も必ず真になるような推論のことである．演繹的推論を用いれば，数学に見られるような厳密な議論を組み立てることができる．ただし演繹的推論において， 前提が真であること自体は保証されない．数学は演繹的推論のみから構成された体系であり，議論の出発点となる前提が現実を反映している保証がないため，現実について語ることができない．

一方，帰納的推論とは，実験や観察を通してすでに調べ終わった対象に関しては真であると分かったことを前提として，一般的な結論を探り当てるものである．これを用いれば現実世界に関する何らかの結論が得られ

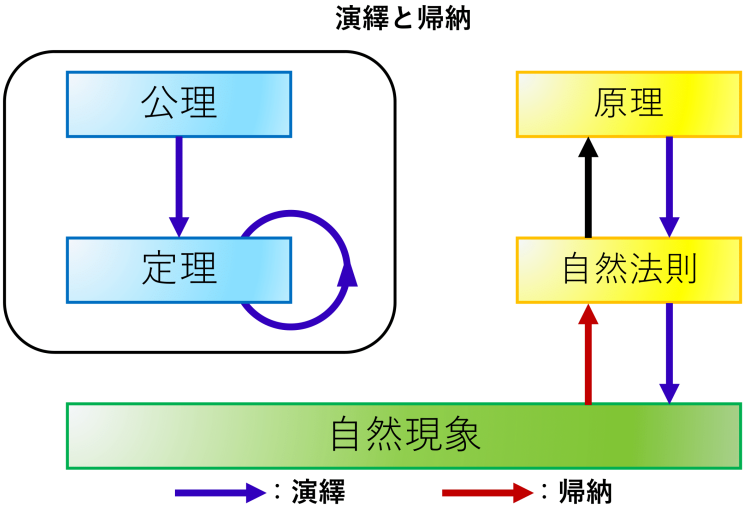


図 1　演繹と帰納，数学と科学

る可能性がある．科学の知識とはまさにそのようなものである．しかしこれはある種の飛躍であるため，誤った結論に行き着くこともあり得る．実際これまで太陽が毎日昇ってきたからと言って，絶対に明日も太陽が昇ってくるとは言い切れない．

以上をまとめると，数学は厳密であるが現実世界について語りえないのに対し，科学は現実世界について語りうる代わりに絶対確実な知識とはなりえないと言えるだろう (図 1 参照)．

なお，数列の一般項の推測などは帰納的推論であるけれど，この予想が正しいことの証明に用いられる数学的帰納法は，その名に反して演繹的な手法である．

■「原理」「定理」　Archimedes (アルキメデス) の「原理」などは今日では「法則」と言えるだろう．なお Bernoulli (ベルヌーイ) の「定理」のように，「法則」の代わりに「定理」という言葉が用いられることもあるけれど，これも実質的には「法則」である．

近代物理学の性格

物理学はありのままの現実を記述するというよりもむしろ，自然を単純化・理想化し，本質的でない現象を捨象することで成り立っている．例えば Galilei は Aristotelēs (アリストテレス) 自然学とは対照的に，

- 熱い，湿っているといった感覚的性質［色，匂い，味なども含む］を捨象し，
  物質を位置変化としての運動のみを行う幾何学的物体と捉えた［素朴機械論］．
- 空気抵抗を無視すれば，あらゆる物体は同じ加速度で落下することを見出した．

注解

一見すると自然を単純化・理想化することは，現実をありのまま理解することから遠ざかるように思われるかもしれない．しかしながら例えば上に挙げた落体の法則に関して言うと，空気抵抗を無視したときあらゆる物体は同じ加速度で落下することが分かっているからこそ，そこに空気抵抗の影響を加えたものとして現実の運動を理解することもまた可能となる．

数学の重要性

「『自然の言葉は数学で書かれている』と言ったのはガリレイであるが，近代になって人間は数学的に自然を捉える術を見出したというほうが真相に近い.」

注解

とは言え数学的に自然を捉えることが可能であるということ自体，実際に自然の言葉が数学で書かれていることを強く示唆している.

■物理にとっての数学　いずれにせよ物理学への応用のために数学が重要であることは論を俟たないが，だからと言って**不必要なまでに数学に足を取られることは賢明ではない**．例えば時間が実数で表されるからと言って，「実数とは何か」といったことを厳密に理解していなければ物理学を理解できないということにはならない．また物理で扱う関数に関しては基本的に十分滑らかであり，何度でも微分でき，微積分を始めとする極限操作は常に順序交換可能であると仮定して良い．さらに所謂，方程式の「解の一意性」は信じるものであり，正しい物理法則の解は一意的であると信じれば，解の一意性を証明するための数学的議論にこだわる必要はない．仮定は結果によって正当化されるという，物理学で常套的に用いられる“循環論法”が許容される背景にもおそらく，物理の答えは 1 つであり，それ故，上手くいけばそれで良いという信念がある．そして，それで良いのである．以上やや過激な書き方をしたが，これが物理屋のスタンスというものである.

物理学の哲学的意味——必然性

以下で述べることは，このノートの筆者の個人的見解である.

物理法則を認めることは，或いは森羅万象は例外なく何らかの物理法則に支配されていると信じることは，あらゆる事物を必然と見なすということを含んでいる．そして物理学理論の成功は，全てを必然とする世界観の傍証になっていると見ることができる．人によってはこのことは物理学の最大の魅力であり，物理を学ぶ 1 つの原動力となり得る．人は一方では普段「自分には**自由意志**がある」という信念を有しているものだとすれば，「全ては必然である」というのは決してトリビアルな主張とは言えない.

ここで自由意志は，過去からの影響，または物理法則の支配を断ち切り，自発的な行動を引き起こす精神の作用，あるいは行為の純粋かつ絶対的な始まりとして定義される．それはいかなる無気力の中でも自由に発動させることができ，言うことを聞かない身体を強制的に行動へと駆り立てられるものと想定されている．つまり自由意志とは言わば無からの創造であり，不可能を可能にするという自己矛盾であり，その定義により存在し得ないことが明らかである.

勿論「全ては必然である」というのは，あくまで「信じるか信じないか」というような形而上学的な主張であり，その正しさは経験科学によって証明できるものではない．前述のように科学的真理は帰納的推論の産物であるため，絶対確実な知識ではあり得ないからである．むしろ逆にそのような形而上学的な思想が，物理学を始めとする自然科学を支えている前提を成していると言った方が正確である．実際，自然科学は暗に

- 精神は物体に影響を与えないこと
- 人間を含む自然界は粒子や場から成ること (**要素還元論**)
- あらゆる現象は例外なく何らかの自然法則に従って生起していること

を作業仮説としていると考えられるけれど，このことは既に人間の自由意志を否定しているように見える．と言うのも，自由意志は一種の精神の身体への作用である．また一見すると能動的・主体的・自発的な人間の行為も，渾然一体としたミクロな粒子の運動や場の時間変化といった出来事に還元され，それら一切は自然法則に従って必然的に生起しているならば，そこに自由意志の入り込む余地はない.

以上のアイデアは哲学者 Spinoza の思想とも重なる．Spinoza によれば神はこの世界そのものであり，それ故，**神即自然**と呼ばれる．(したがって Spinoza の考える神は人格を持たない．) そしてあらゆる事物は神の必然性に従って生起しているとして，Spinoza は自由意志をはっきりと否定している．このような考え方は**汎神論**と呼ばれ，自然現象が物理法則に支配されていることを彷彿させるものである．Spinoza の汎神論は次の『エティカ』第 1 部定理 29 の言葉に端的に表

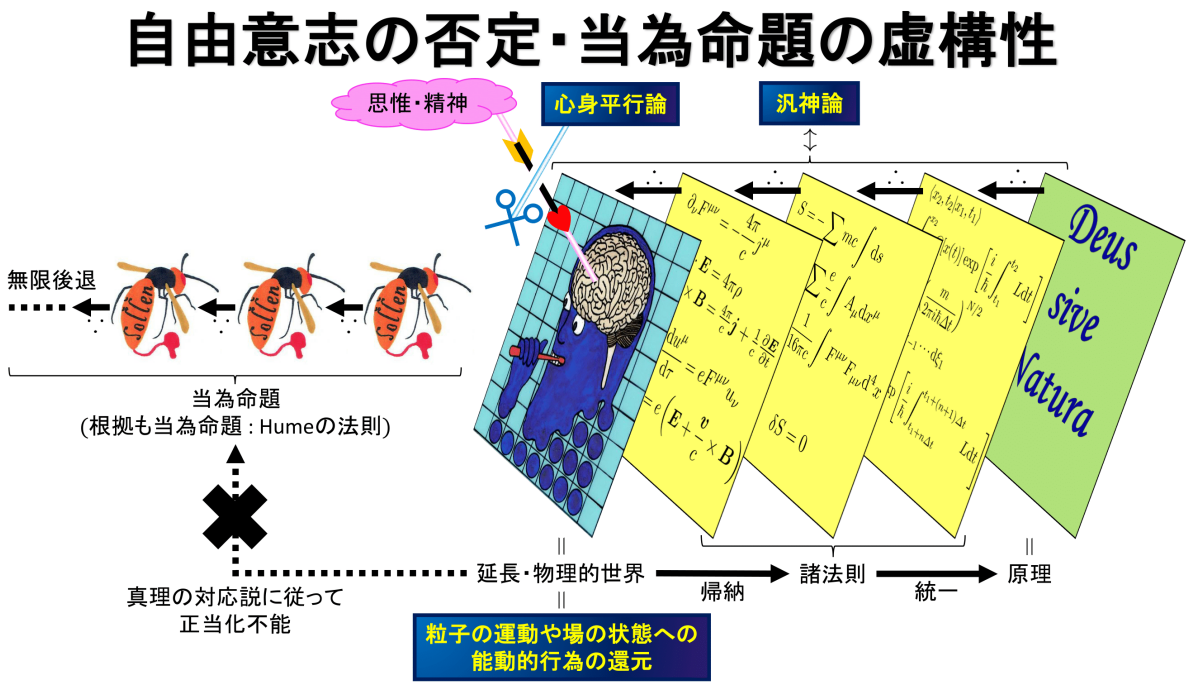


図 2　Spinoza 描像

されている．

> 自然の中には何一つ偶然的なものは存在しない，いっさいは神の本性の必然性から一定の仕方で存在や作用へと決定されている [6, p.54].

意志を抱くことや努力することは，それが可能な場合には神即自然の必然性に従って自動的に達成されるのに対し，それが神の時間発展に含まれていない場合には，空から自由意志でも降ってこない限り不可能である．ところが自由意志は存在しないため，それは絶対に不可能である．

Spinoza 哲学においても，精神と身体の相互作用は否定されている．それにも関わらず心と身体の状態に対応関係が見られるのは，これらが同一の神の異なる 2 つの側面を表しているからであると説明される．このように精神的状態と身体的状態は対応しているけれども，精神と身体は相互作用せず，物理的な出来事と精神的な出来事は独立に進行するという立場は**心身平行論**と呼ばれる．これは勿論，自由意志の否定と整合している．

なお Spinoza の自然観は決定論的であり，決定論が正しければ自由意志は存在しないと考えられる．しかし量子力学の描くような非決定論的な自然観を導入しても，自由意志を救うことにはならない．事物がランダムに確率的に生起するとしても，人は世界のなすがままに振り回されてしまうのであれば，そこにも自由意志は見出せない：

$$\begin{array}{lcll} \text{決定論} & \Rightarrow & \text{自由意志なし} & (p \Rightarrow q), \\ \text{非決定論} & \not\Rightarrow & \text{自由意志あり} & (\bar{p} \not\Rightarrow \bar{q}). \end{array}$$

以上で述べたことは図 2 の右半分のようにまとめられる．図 2 の世界観は Spinoza 哲学のアイデアに重なるものであるため，筆者はこれを **Spinoza 描像**と名付けている．詳しくは付録 A を参照されたい．

1-2 物理的世界の構成

巨視的世界の構成

巨視的物体に対しては，以下のような近似的な取り扱いが成される．

- 質点［しばしば単に「粒子」と呼ばれる］··· 大きさを無視する近似.

– 物体の変形や回転を無視できる場合には，
物体の中の代表点の運動を追跡すれば十分である［他の点も同様の運動を行うから］.
そこで物体をこの代表点に置き換え，質点として記述すれば良い［→ p.13］.

- 剛体 $\cdots$ 大きさを考慮するが，変形を無視する近似.
- 弾性体 $\cdots$ 大きさと変形を考慮するが，力を取り除くと変形が元に戻るとする近似.

エネルギー保存則について

エネルギーを供給せず仕事をし続け得る機関を作ることはできない (経験事実)
→ 指導原理としてのエネルギー保存則
→ エネルギー保存則の要請を満たすように各種エネルギーを定義.

注解

同様のことは運動量に対しても妥当する．粒子と場の相互作用する系に対して系全体のエネルギーと運動量が保存するように，場に対してもエネルギーと運動量が定義される [2, pp.85–91].

なお指導原理という言葉は「人間の都合」という印象を与え得るけれど，保存則が指導原理であることは，それを自然に本来的に備わった性質と見なせることと何ら矛盾しない.

物質の微視的構造——究極粒子

$$\text{物質的物体} \quad \to \quad \text{分子} \quad \to \quad \text{原子} \quad \to \quad \begin{cases} \text{原子核} & \to \quad \text{核子 (陽子と中性子)} \\ \text{電子} & \end{cases}$$

そこで物質の究極的な構成要素 (素粒子) として，陽子・中性子・電子を考える.

素粒子の質量と電荷

- 電子の電荷の絶対値 e を**素電荷**と呼ぶ.
  電荷は厳密な加算性を持ち，陽子数 Z (**原子番号**) の原子核の電荷は Ze である.
- 陽子，中性子，電子の質量をそれぞれ $m_{\mathrm{p}}, m_{\mathrm{n}}, m_{\mathrm{e}}$ と書くと，

$$m_{\mathrm{p}} \simeq m_{\mathrm{n}} \gg m_{\mathrm{e}}$$

  である．また質量に対しては近似的に加算性が成り立つ.
  以上より原子の質量は核子数 A (**質量数**) にほぼ比例する.

保存則

原子核以上の物体の任意の変化 (核反応，化学反応など) において，

- 質量数 (核子数) A の総和
- 電荷の総和

の各々は厳密に保存する．これに対して質量はエネルギーの一形態であって，厳密には保存しないけれど，化学や古典力学では質量は近似的に保存し，加算性が成り立つとして良い．

注解

質量の加算性と保存則が厳密には成り立たないことについては，9-7 節 (式 (7-21) の箇所) を参照．

質量と電荷の微視的単位

- 質量
  炭素原子は陽子 6 個，中性子 6 個，電子 6 個から成るので，
  $$1\mathrm{u} \equiv \frac{(\text{炭素原子の質量})}{12}$$
  は核子 1 個の質量の目安となる．
  u を原子質量単位として，原子質量は近似的に Au と表される (A は質量数，すなわち核子数)．
- 電荷
  素電荷 e を単位に用いれば良い．

質量と電荷の巨視的単位

- 質量の単位：キログラム (kg)
  国際キログラム原器の質量として定義．
- 電荷の単位：Coulomb (クーロン，C)
  あらかじめ電流の単位 ampere (アンペア，A) を定義し (5-6 節)，
  1A の電流が 1 秒間に運ぶ電気量を 1C と定める．

物質量の巨視的単位——モル

^{12}C 原子 (左肩の 12 は質量数) を N_A 個集めると 12g になるような個数 N_A［Avogadro 数］に対して 1mol (モル) を N_A 個と定義すると，核子 (質量 1u) は 1mol (N_A 個) で 1g となる：

$$1\mathrm{u} \times N_\mathrm{A} = 1\mathrm{g}.$$

注解

原子質量単位 u は質量の次元を持つ物理量というよりもむしろ，グラム (g) やキログラム (kg) のような単位として扱われているものと考えられる．例えば p.9，l.10 の式

$$M = m\,〔\mathrm{u}〕 \times N_\mathrm{A} = m\,〔\mathrm{g}〕$$

における m は数値であり，単位〔u〕,〔g〕と合わせて質量 (物理量) になると考えられる．

物質量の巨視的単位——モル

原子 1mol の質量を原子量，分子 1mol の質量を分子量と呼び，地表近くにおける同位体 (中性子の個数の異なる原子) の存在比を考慮して定義する．原子量と分子量は ^{12}C 原子 1/12mol の質量に対する比として慣

習的に単位を付けないけれど,「しかしそういうふうにいえば，たとえば 3m とは単位長さ 1m に対する比が 3 ということで，すべての量は単位を書かなくてすんでしまう.」そこで g/mol という単位を明記すると，例えば窒素 N に対しては

- ^{14}N　質量：14.00307u，存在比：99.635 %
- ^{15}N　質量：15.00011u，存在比：0.365 %

なので，その原子量は

$$M = (14.00307\mathrm{u} \times N_\mathrm{A}\mathrm{mol}^{-1}) \times \frac{99.635}{100} + (15.00011\mathrm{u} \times N_\mathrm{A}\mathrm{mol}^{-1}) \times \frac{0.365}{100} = 14.00671\mathrm{g/mol}$$

と計算される ($1\mathrm{u} \times N_\mathrm{A} = 1\mathrm{g}$).

ファラデー定数

電気分解において 1 価イオン 1mol を析出させるのに要する電気量

$$\mathcal{F} = eN_\mathrm{A} = 9.6484 \times 10^4\mathrm{C}$$

を **Faraday 定数**と呼ぶ.

ミクロとマクロをつなぐ数——アヴォガドロ数

Avogadro 数の値

$$N_\mathrm{A} = 6.0220 \times 10^{23}\mathrm{mol}^{-1}$$

はその測定方法と，［測定に用いる］原子の種類に依らない (原子論の証拠). Avogadro 数の値から，巨視的単位と微視的単位の間の関係

$$1\mathrm{u} = 1\mathrm{g}/N_\mathrm{A} = 1.6606 \times 10^{-27}\mathrm{kg}$$

が得られる.［よって有効数字 2 桁では $m_\mathrm{p} = m_\mathrm{n} = 1\mathrm{u} = 1.7 \times 10^{-27}\mathrm{kg}$ である.］

「定数をたくさん書いたし，また今後も出てくるが，覚える必要はない. 物理で覚えてほしい数値は $e = 1.6 \times 10^{-19}\mathrm{C}, N_\mathrm{A} = 6.0 \times 10^{23}\mathrm{mol}^{-1}$ の他には，せいぜい c (光速) $= 3.0 \times 10^8\mathrm{m/s}, g$ (重力加速度) $= 9.8\mathrm{m/s}^2$ ぐらいである」(p.10) と欄外にあるのに注目する.

注解

本稿では $\mathcal{F} = eN_\mathrm{A}$ を Faraday 定数の定義のように書いたけれど，正確には電気分解においてイオン 1mol を析出させるのに要する電気量がある値 $\mathcal{F} = 9.6484 \times 10^4\mathrm{C}$ の整数倍となることが知られており，その値が Faraday 定数である. Millikan (ミリカン) の実験などによって素電荷 e の値が分かれば，理論式 $N_\mathrm{A} = \mathcal{F}/e$ を用いて Avogadro 数を得ることができる (p.10).

第 2 章 力学

2-1 運動学——運動の記述のしかた

注解

タイトルにある通り 2-1 節は物体の運動を記述する数学的な道具立ての導入に充てられており，これは物理ではない．「たとえば (2-2,3) など［$v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t, \mathrm{etc.}$］は定義，つまり数学的な約束であり，また (2-4,5)［$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(0) + \int_0^t \boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t, \mathrm{etc.}$］はそれから導かれる公式である」(p.21)．実際，具体的な物理，すなわち今の場合，物体が現実にどのような運動をするかを決定する自然法則が論じられるのは次節以降であり，それはアプリオリに分かっていることではない．

力学的物体

- 力学の目的：力 ⇄ 運動［→ p.2，最終］
- 物体：質量，電荷，幾何学的形状，大きさ，位置変化としての運動能力のみを持つ［→ p.6，第 2 段落］
  - 慣性質量　→　運動状態を維持しようとする性質
    ［運動方程式 (2-2 節) に加速度との積として現れる質量であり，
    定性的には物体の“運動の変化のしにくさを表す量”(p.18) と解釈できる］
  - 重力質量　→　重力を受ける能力
    ［慣性質量と重力質量については 2-12 節参照］

注解

力 ⇄ 運動という力学の課題の 2 方向性 (あるいは運動方程式の両義性) は，その論理的な立場を曖昧なものにしている．これは巨視的物体が多数の分子から構成されており，面の抗力や糸の張力を分子間力の合力として求めることは事実上不可能なので，拘束条件を考えて (剛体近似を採用して構成粒子間の相対運動を凍結させることなどを含む) それらを拘束力として扱わざるを得ないということと関係している．例えば球面振り子を考えると，質点の運動は 3 次元空間の中の球面上に制限されている．このときデカルト座標 (x, y, z 座標) は 3 つあるのに対し，2 次元球面上の位置を指定するには 2 つの座標を用いれば十分である．また質点には運動を球面上に制限する拘束力が働いており，具体的には振り子の棒の張力 $\boldsymbol{S}$ がその役割を果たす．このような拘束力は重力 $m\boldsymbol{g}$ などのあらかじめ与えられている力とは対照的に，問題を解いた後で初めて分かる未知量として扱われる (運動 → 力)．質点の位置を $\boldsymbol{r}$，質量を m，重力加速度を $\boldsymbol{g}$ とすると，運動方程式は

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{S}$$

であり (2-2 節，ドットは時間微分を表す)，「このように地位の異なる 2 種類の力が混在していることのなかに，ニュートンの運動方程式の先述の両義性が見てとれる．要するに方程式 (1.1.5)［ニュートンの運動方程式］は，一方では未知関数としての拘束力をともない，他方では運動を決定するには過剰な座標を含んでいるのである．」この困難は解析力学の定式化によって解消される．解析力学では系の位置を指定するのに過不足のない，系の自由度と同じ個数の一般座標が導入され，それらに対する拘束力を含まない運動方程式が打ち立てられる [7, pp.1–5].

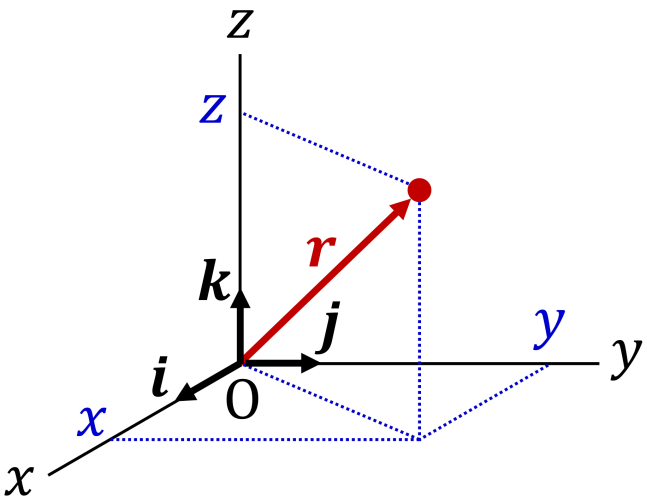


図 3　xyz 直交座標系と位置ベクトル

質点

質点の運動を記述することから始めよう．同一の対象も考えている問題に応じて，質点と見なせる場合と見なせない場合がある：

地球 $\begin{cases} \text{公転} & \to \quad \text{質点と見なせる} \\ \text{自転} & \to \quad \text{大きさのある球と見なす} \end{cases}$　　ヘリウム原子 $\begin{cases} \text{気体の圧力} & \to \quad \text{質点と見なせる} \\ \text{発光} & \to \quad \text{内部構造を考える} \end{cases}$

物体の大きさを無視できない場合にも，変形や回転を無視することができ，それ故，全ての点が同一の運動を行う場合には，物体の中のある代表点の運動を追跡すれば十分である．そこで物体をこの代表点に置き換え，質点として記述すれば良い［→ p.5］(2-14 節).

位置ベクトル

質点の位置は適当に設置した xyz 直交座標系に関する座標 (x, y, z) として表現できる．質点と座標原点との隔たりのベクトル

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = (x, y, z)$$

は位置ベクトルと呼ばれる[*1]．ここに $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルである (図 3 参照).

注解

質点の運動を決定するとはつまるところ，その位置を $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ のように時間の関数として与えることに他ならない．これを運動の時間追跡と言う．

[*1] ベクトルはしばしば慣習的に，$\vec{r}$ の代わりに $\boldsymbol{r}$ のようにボールド・タイプ (太字) で表される．例外としてゼロ・ベクトルは $\mathbf{0}$ と太字にせず，単に 0 と書いて良い．

速度と変位

ある時刻 t における質点の速度 $\boldsymbol{v}$ は，微小時間 Δt における変位 $\Delta\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$ と Δt の比 $\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$ (時間 Δt における平均の速さ) によって近似され，その $\Delta t \to 0$ の極限として定義される[*2]：

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}.$$

その絶対値 $|\boldsymbol{v}|$ を速さ，あるいは速度の大きさと呼ぶ．[実際には速さのこともしばしば速度と呼ぶ.]

これは無限小時間 $\mathrm{d}t$ における変位が $\boldsymbol{v}\mathrm{d}t$ によって与えられ，したがって時間 $0 \le t' \le t$ における変位が

$$\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(0) = \int_0^t \boldsymbol{v}(t')\mathrm{d}t'$$

と表されることを意味している．実際これは上記の速度の定義式を両辺，時間積分して得られる等価な関係であり，速度の定義式のもう 1 つの表現と見なすことができる．なおここで得られたのは変位であって，位置 $\boldsymbol{r}(t)$ を求めるには初期位置 $\boldsymbol{r}(0)$ を加えて

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(0) + \int_0^t \boldsymbol{v}(t')\mathrm{d}t'$$

としなければならないことに注意する．

注解

微小時間 Δt に対する近似式

$$\boldsymbol{v} \simeq \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}, \qquad \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(0) \simeq \sum_{t'} \boldsymbol{v}(t')\Delta t'$$

は $\Delta t, \Delta t' \to 0$ のとき $\simeq \to =$ と置き換わり，近似の誤差はこの極限で厳密に成り立つ関係

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}, \qquad \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(0) + \int_0^t \boldsymbol{v}(t')\mathrm{d}t'$$

に影響を与えないことを踏まえれば，あらかじめ $\mathrm{d}t$ などの無限小を有限の微小量のように考えて，直観的に次のように解釈して良い．

- $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ は微小時間 $\mathrm{d}t$ とその間の変位 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ の比である．
- $\int \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$ は微小時間 $\mathrm{d}t$ における変位 $\boldsymbol{v}\mathrm{d}t$ の各時間区間に関する和である．

その際，次のことに注意する．

- 微小時間 $\mathrm{d}t$ はどれだけ小さいのかということは問題ではない．
  むしろ微小時間 $\mathrm{d}t$ を任意にとると，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ はその間の動点の変位として定まるという，
  微小量の間の関係が重要である．
- 積分 $\int \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$ は「$\boldsymbol{v}\mathrm{d}t$ の和」であって，「$\boldsymbol{v}$ の和」ではない．

[*2] 定義式であることを明確にするために，等号「=」を「≡」に置き換えて $\boldsymbol{v} \equiv \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ と書くことがある．本稿でも今後このような記法を断りなく用いる．

加速度

質点の加速度 $\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ を定義する．

注解

「力学では，等速度運動と静止状態はともに運動の変化が見られず，本質的な差はない．裏返せば，状態の変化とは速度の変化があることを指す」(pp.15–16) とあるが，このことを理解するには以降の具体的な運動方程式 (2-9) を見る必要がある．これに関係して 2-13 節で学ぶように，運動方程式は互いに等速度運動する全ての慣性系において同一となる．このため仮に絶対空間なるものがあるとしても，我々はその絶対空間に対する一様な運動を検出することはできない．この意味で等速度運動と静止状態を力学的に区別することはできない．

とくに 1 次元の場合

1 次元的な運動に対して，運動方向を x 軸に選ぶと

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} =&(x,0,0), \qquad \boldsymbol{v} = (v,0,0), \qquad \boldsymbol{a} = (a,0,0),\\
v =&\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \qquad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\\
v(t) =&v(0) + \int_0^t a(t')\mathrm{d}t', \qquad x(t) = x(0) + \int_0^t v(t')\mathrm{d}t'
\end{aligned}$$

である．ここで v, a はベクトルの x 成分であり，正負の値をとる．ベクトルの大きさ (絶対値) と混同しないように注意する．

加速度から速度と位置を求める

既に調べた速度と変位の関係と同様に，速度と位置はそれぞれ

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(0) + \int_0^t \boldsymbol{a}(t')\mathrm{d}t', \qquad \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(0) + \int_0^t \boldsymbol{v}(t')\mathrm{d}t'$$

と表される．よって初期位置 $\boldsymbol{r}(0)$ と初速度 $\boldsymbol{v}(0)$ を定めれば，各時刻での加速度 $\boldsymbol{a}(t)$ が与えられている場合の速度と位置は上式によって求めることができる．初期位置と初速度を定める条件

$$\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}_0, \qquad \boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0$$

を**初期条件**と呼ぶ．

なおここまでは積分変数を積分の上限 t と区別して t' と書いてきたけれど，同じ文字 t を用いても誤解の恐れはないと考えられる．

注解

■積分について　一般に定積分の結果は積分変数に依らない．例えば上で見た量

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t')\mathrm{d}t'$$

は積分変数 t' に依存せず，事実，積分変数 t' を他の文字 (例えば τ) で置き換えても式の意味は変わらない．

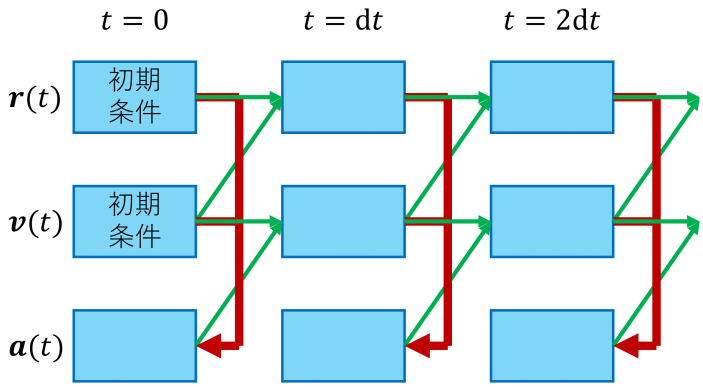


図 4　古典的因果律

- 左辺の時刻 t 依存性は右辺の積分の上限に由来している．
- これが不定積分 $x(t) = \int v(t)\mathrm{d}t$ の意味である．
  つまり不定積分は上限が t で下限が不定であるような積分 $\int^t$ に対応する．

なお，初期時刻としてゼロでない値 $t = t_0$ を想定する場合，式の中において初期時刻を表すゼロは全て t_0 で置き換えなければならない．もっとも t_0 がゼロとなるように時間の原点を適当に選び直すことは常に可能である．

■古典的因果律　実際には各時刻での加速度はあらかじめ分かっているわけではなく[*3]，運動方程式に基づいて逐次的に求めることになる．実際，式 (2-4):$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(0) + \int_0^t \boldsymbol{a}(t')\mathrm{d}t'$ の右辺における加速度もまた一般には位置と速度の関数

$$\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{v}(t), t)$$

である．運動方程式がこのような形をとるとき，初期位置 $\boldsymbol{r}_0$ と初速度 $\boldsymbol{v}_0$ が与えられれば，初期時刻における加速度 $\boldsymbol{a}_0$ が求まる．ここから速度と加速度の定義により，無限小時間後の速度と位置

$$\boldsymbol{v}(\mathrm{d}t) = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}_0\mathrm{d}t, \qquad \boldsymbol{r}(\mathrm{d}t) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0\mathrm{d}t$$

が求まる．これを繰り返せば，未来の質点の位置を逐次的に時間追跡できる (図 4 参照)．このような直観的な理解は運動方程式の数値的解法に通じるものである [8, pp.128–134]．またこのように物体の初期位置と初速度を与えたとき，それ以降の運動が完全に決定されるためには，運動方程式が位置と速度から加速度を定めるような，位置に関する時間の 2 階微分方程式となっていれば良く，これを古典的因果律という [7, p.105] [9, pp.1–2]．

[*3] この事情は p.27 において具体例を通して述べられている．

等加速度運動

特に加速度 $\boldsymbol{a}$ が時間変化しない定ベクトルの場合 (等加速度運動) に対しては,

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(0) + \boldsymbol{a}t \\ \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(0) + \boldsymbol{v}(0)t + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2 \end{cases} \qquad (\boldsymbol{a} = \text{const.のとき})$$

となる[*4].

注解

2 式から t を消去して得られる関係式

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) =& 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}_0 t + (\boldsymbol{a}t)^2 \\ =& 2\boldsymbol{v}_0\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0) + (\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0)^2 \\ =& v^2 - {v_0}^2 \end{aligned}$$

(ただし $\boldsymbol{r}_0 \equiv \boldsymbol{r}(0), \boldsymbol{v}_0 \equiv \boldsymbol{v}(0)$) は，質点 (質量 m) に働く一定の力 $\boldsymbol{F}$ に対して加速度を $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}/m$ と置き換えれば，これは仕事と運動エネルギーの関係

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = \boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$

あるいはエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2 - \boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \frac{1}{2}m{v_0}^2$$

に他ならない[*5]．したがってエネルギー保存則だけを覚えれば十分である．ここで物理法則として既に，一定の力の下での運動が等加速度運動となること ($\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}/m$) を考慮しているため，結果としてエネルギー保存則 (物理法則) が得られているのは不思議ではない．

2-2 力学の原理と力について

定義：運動量

物体の運動の変化のしにくさを表す量として (慣性) 質量 m を導入し，速度 $\boldsymbol{v}$ との積として運動量

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$

を定義する．

注解

定性的には運動量は「運動のいわば激しさ」(p.18) と解釈することができ,「同速度のピンポン球と硬球の運動の激しさの差は，この［運動量における］質量の差」(p.18) に反映されている．ただし言うまでもなく「運動の激しさ」というのは運動量を定義するには十分でない．実際，後に見る運動エネルギーも運動の激しさの指標と見なせる．角運動量を回転の激しさということ (2-12 節，p.84) についても同様のことを指摘できる．

[*4] const. は定数 (constant) を意味する．

[*5] エネルギー保存則については 2-10 節を参照する．一様な力の場 $\boldsymbol{F}$ のポテンシャル (位置エネルギー) が $U(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}$ であることについては付録 D.2 を参照する．

質量についてのコメント

質量の定義については 2-7 節で述べる．と言うのも，

- 質量を定義するにも前提として力学原理を必要とする．
  ［一般に**物理量の定義には物理法則を必要とする**．質量の定義について Feynman も述べているように，「単に定義であるとしかみえないものも，実は物理法則を含んでいるのである」 [8, p.140]．］
- 概念や法則にある程度なじんだ後に，あらためて定義の問題に立ち返る方が実践的である．

力学における単位と次元

- 基本単位 (MKS 単位)
  - 長さの単位 m (メートル)，時間の単位 s (秒)，質量の単位 kg (キログラム)．
- 独立次元
  - m,s,kg を単位として測定される量をそれぞれ，長さ，時間，質量の次元を持つ量と呼ぶ．

注解

単位を持つ量が次元を持つとは限らない．例えば個数は「個」，角度は「度」「radian (ラジアン)」という単位を持つけれど，いずれも無次元量である．(厳密には個数には単位「個」は含まれない．)

力学原理その 1：運動方程式

質量 m の物体 (以下，単に「物体 m」などと言う) に働く力を $\boldsymbol{f}_i (i = 1, 2, 3, \cdots)$ とすると，**運動方程式**は

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \boldsymbol{f}_i$$

と与えられる．これは Newton の 3 法則における運動の第 2 法則に当たるけれど，その重要性からこれを力学の第 1 の原理におくことができる．初等的には物体の質量が時間変化しない場合を考えれば十分であり，このとき質量を時間微分の外に出して，運動方程式を

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \boldsymbol{f}_i$$

として良い．

- 物体がつり合っている，すなわち加速度がゼロの場合［静止だけでなく，より一般には等速度運動］，運動方程式は**力のつり合いの式**
  $$0 = \sum_i \boldsymbol{f}_i$$
  に帰着する．
- しばしば運動方程式は，物体の加速度を $\boldsymbol{a} = \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$，物体に働く力の合力を $\boldsymbol{F} = \sum_i \boldsymbol{f}_i$ として
  $$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$$
  と書かれる．

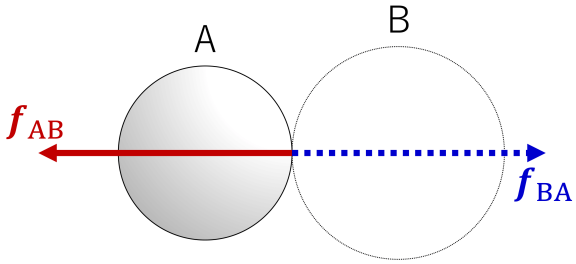


図 5　物体 B が物体 A に及ぼす力 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{AB}}$

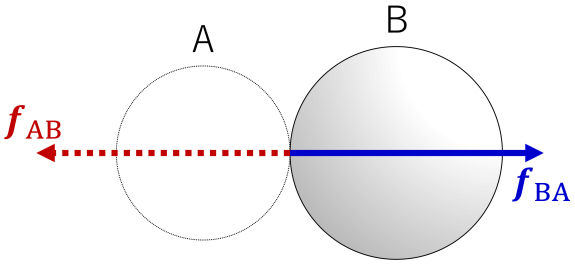


図 6　物体 A が物体 B に及ぼす力 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{BA}}$

注意　運動方程式における物体 m に働く力に，誤って物体 m が他の物体に及ぼす力を含めてはならない．［例えば図 5，図 6 において物体 A の運動方程式を書き下す際には，物体 B が物体 A に及ぼす力 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{AB}}$ のみを考慮し，その反作用 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{BA}}$ を含めてはならない．「物体毎に別々に力をかくと間違いが少ない」(p.33)．］

■力の次元と単位　長さ，時間，質量の次元をそれぞれ L, T, M と表すと，運動方程式より力の次元は MLT^{-2} である．MKS 単位での力の単位は $\mathrm{kg \cdot m/s^2} \equiv \mathrm{N}$ (Newton) であり，1N は 1kg の物体に $1\mathrm{m/s^2}$ の加速度をもたらすのに要する力である．

運動方程式の意味について

運動方程式 $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ は物体に力 $\boldsymbol{F}$ が働くと速度 (運動量) が変化するという**因果関係**を表しており，両辺の値は等しいけれどその物理的な意味は異なる：

$$\begin{array}{ccc} m\boldsymbol{a} & = & \boldsymbol{F} \\ \text{結果} & \leftarrow & \text{原因}. \end{array}$$

これを力の定義式のように見なしてはならない．

力学原理その 2：作用・反作用の法則

物体 i が物体 j から受ける力を $\boldsymbol{f}_{ij}$ と書くと［$\boldsymbol{f}_{\overleftarrow{ij}}$ と見る］，図 5，図 6 において

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{AB}} = -\boldsymbol{f}_{\mathrm{BA}}$$

である (力を及ぼし合う物体は直接接触していなくても良い)．これは運動の第 3 法則と呼ばれるけれど，力学の第 2 の原理に位置付けよう．

注解

既に述べたように力学では力の起源を問わないにも関わらず，作用・反作用の法則では力の性質を力学原理として仮定していることになる．作用・反作用の法則は必ずしも厳密には正確でない [8, p.137]．例えば電荷の対に対して一方の電荷に働く力を，相手の電荷が Coulomb の法則と Biot-Savart の法則 (第 5 章) に従って自分の位置に作る電場と磁場から受ける力と考えると，そのような力は作用・反作用の法則を満たさず，従っ

て 2 粒子の力学的運動量は保存しない．これは粒子が場と相互作用しており，保存するのは粒子だけでなく場の運動量も含めた全運動量であるということと関係している [10, pp.158–159].

原理であるということの意味

1-1 節参照.

自然界の力について

繰り返しになるが，自然界に存在する力あるいはその性質は力学の内部で論理的に導き出せるものではない．［これ以降はそれらの力の性質が，ひとまず経験事実として説明されることになる.］

素粒子間に働く力は

重力，　電磁気力，　核力 (強い相互作用，核子を結合させる)，　弱い相互作用 (β崩壊を引き起こす)

の 4 種類であり，「巨視的な物体間に働く力は，重力および電磁気力とその結果としての分子間力だけである」(p.21).

クーロン力と重力 (万有引力) について

- 距離 r だけ隔たる電荷 q, q' の間に働く力 (Coulomb 力)

$$|\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}| = k\frac{|qq'|}{r^2}, \qquad k = 8.99 \times 10^9 \mathrm{Nm}^2/\mathrm{C}^2 : \text{Coulomb の比例定数.}$$

  向きは同符号の電荷 ($qq' > 0$) に対して斥力，異符号の電荷 ($qq' < 0$) に対して引力.

- 距離 r だけ隔たる質量 m, m' の間に働く重力 (万有引力)

$$|\boldsymbol{F}_{\mathrm{G}}| = G\frac{mm'}{r^2}, \qquad G = 6.67 \times 10^{-11} \mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2 : \text{万有引力定数.}$$

［定性的には電荷 (の大きさ)・質量が大きいほど強い力が働く．また 2 体の距離 r が近づくと，物体間の力は $1/r^2$ に従って増大する.］

クーロン力と重力の比較

水素原子中の陽子 (質量 m_{p}，電荷 $+e$) と電子 (質量 m_{e}，電荷 $-e$) の間に働く重力と Coulomb 力の比は

$$\frac{|\boldsymbol{F}_{\mathrm{G}}|}{|\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}|} = \frac{Gm_{\mathrm{p}}m_{\mathrm{e}}/r^2}{ke^2/r^2} = 4.5 \times 10^{-40} \ll 1$$

であり，このように原子・分子のスケールでは重力を無視できる．一方，巨視的な物体は電気的に中性であり (さもなくば電荷は斥力により反発し，塊を維持できない)，これに対し重力は周囲の物体を引き寄せて質量を増し，重力をより一層強める傾向を持つので，天体間や地球と地上物体の間では重力が重要となる.

- 地上の重力
  地球の質量を M，半径を R とすると，地球表面の物体 m に働く重力は $\frac{GMm}{R^2} \equiv mg$ である.
  ［この式はいわゆる**重力加速度** $g = \frac{GM}{R^2} (= 9.8\mathrm{m/s}^2)$ **が重力場に他ならない**ことを
  あからさまに示している．ただし g は値としては落体の鉛直方向の加速度に一致するため，
  「その意味で g を重力加速度の大きさという」(p.25).］

- 重さ・重量
  質量 m の物体が地上で受ける重力 mg は物体の**重さ**，**重量**と呼ばれ，質量と区別される．
  $m = 1\mathrm{kg}$ の物体に働く重力 $mg = 9.8\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s^2}$ を 1kgW (キログラム重) と定義する．

分子間力について

分子間力は力のつり合いの位置を境に引力と斥力とが転じる［3-1 節］
→ 物体の弾性，ばねに対する Hooke (フック) の法則．

注解

分子間力に限らず，一般に力の安定なつり合いの位置 $x = x_0$ では力のポテンシャル (位置エネルギー) $V(x)$ が極小となる (2-10 節)[*6]．このとき純粋に数学的な理由により，つり合い点の近くでポテンシャルは位置 $x = x_0$ を軸とする放物線

$$U(x) \simeq U(x_0) + \frac{k}{2}(x - x_0)^2, \qquad k \equiv U''(x_0) \geq 0 \qquad (\because U'(x_0) = 0)$$

によって近似される (付録 C.5 参照)．これは力がばねと同様に Hooke の法則に従い，つり合い点周りの微小振動は常に単振動によって近似できることを意味している (2-6 節) [9, pp.81–86]．ただしポテンシャルの展開における 2 次の項の係数 k がゼロとなる場合は例外であり，以上の議論を適用できない．

束縛力 (拘束力) について

2-1 節「力学的物体」の注解，2-4 節参照．

慣性系について

運動方程式の成り立つ座標系を**慣性系**という．以降，断りのない限り座標系は慣性系とする．

2-3 運動方程式を解く——例：地上物体の運動

地上物体の運動方程式

地上の重力の下での物体 m の運動は初速度を含む鉛直面内で行われる．そこで面内に xy 直交座標系を y 軸の正の向きが鉛直上向きとなるようにとると，運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -mg$$

となる (ここでは空気抵抗を無視)．

注解

運動方程式 $m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g}$ における左辺の (慣性) 質量と右辺の (重力) 質量は相殺するため (2-12 節)，初期条件が共通であれば，重力場の下では物体は質量に依らず同一の運動をする (以下の具体的な結果も参照)．

[*6] ここで x はデカルト座標に限らず，角度のような任意の座標 (一般化座標) であって良い．

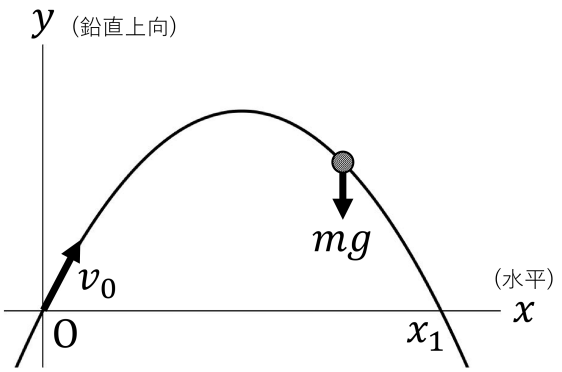


図 7　放物運動

放物運動

これを初期条件

$$x(0) = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad v_x(0) = v_0 \cos\theta, \qquad v_y(0) = v_0 \sin\theta$$

の下で解くと，

$$x = (v_0 \cos\theta)t, \qquad y = (v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

となる．ここから時刻 t を消去すると，物体が空間に描く軌道として放物線

$$y = (\tan\theta)x - \frac{g}{2{v_0}^2}(\cos^2\theta)x^2$$

を得る (図 7 参照)．物体が再び地上 $y = 0$ に着く位置は

$$x = x_1 \equiv \frac{{v_0}^2}{g}\sin 2\theta$$

であり，与えられた v_0 に対して水平到達距離 x_1 は $\theta = 45°$ で最大となる．［${v_0}^2/g$ は長さの次元を持つ．］

物体の自由落下

高度 h から初速ゼロで自由落下した物体が地面に到達するときの速さは $v = \sqrt{2gh}$ と計算される．［計算は後述のエネルギー保存則 $mv^2/2 = mgh$ によるのが容易である．］

空気抵抗のあるとき

これは雨雲の高度 $h \gtrsim 2\mathrm{km}$ に対して $v \gtrsim 200\mathrm{m/s}$ となり，雨粒の落下速度 ($\lesssim 1\mathrm{m/s}$) として非現実的である．そこで空気抵抗を考慮しよう．地表近くでの空気抵抗は良い近似で速度 v に比例することが知られており，このとき［鉛直下向きを正の向きとする座標軸に関して］運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv$$

と書ける．初期条件は $v(0) = 0$ とする．

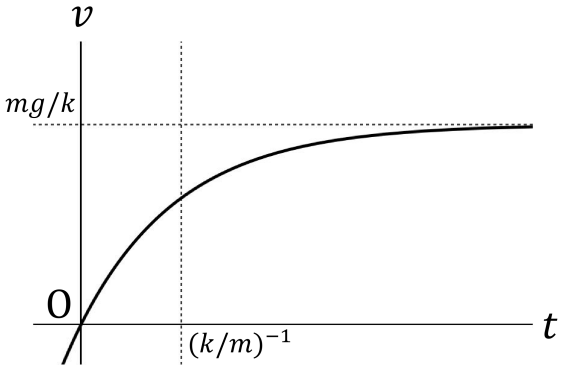


図 8　空気抵抗を受ける雨滴の速度変化

運動方程式に基づく定性的な考察から始めよう．時間が経つと速度 v は初速ゼロから増加し，これに伴って空気抵抗 kv も増加するため，加速度は次第に減少する．充分時間が経つと重力 mg と空気抵抗 kv がつり合い，最終的に一定速度 $v(\infty)$ での運動に達すると期待される．この $v(\infty)$ は**終端速度**と呼ばれ，

$$0 = mg - kv(\infty), \qquad \therefore v(\infty) = \frac{mg}{k}$$

と求まる[*7]．

運動方程式は変数分離形の微分方程式となっており (付録 C.6 参照)，解析的に解くことができる．その結果，速度の時間発展として

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left\{1 - \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)\right\} \tag{1}$$

が得られる (導出は下記)．ここから速度は終端速度 $v(\infty) = mg/k$ へと指数関数的に緩和することが読み取れる (図 8 参照)．

雨滴の速度の式 (1) の導出　運動方程式を変数分離して解くと

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{\frac{mg}{k} - v} = -\frac{k}{m}\int \mathrm{d}t, \qquad \therefore -\ln\left|\frac{mg}{k} - v\right| = -\frac{k}{m}t + \mathrm{const}, \qquad \therefore \frac{mg}{k} - v = \mathrm{const} \times \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)$$

となる．積分定数は初期条件 $v(0) = 0$ から $\mathrm{const} = mg/k$ と定まり，式 (1) を得る[*8]．

参考　雨粒の半径 r 依存性は，およそ $k \propto r$ である．

$m \propto r^3$ を考え合わせると $v(\infty) = mg/k \propto r^2$ となるので，

「大粒の雨はザーザー降り，霧雨はシトシトと降るというちがいが出る」(p.28)．

注解

■空気抵抗の表式について　媒質の種類 (空気) を固定すれば，抵抗力は速度だけの関数になると考え，十分小さい速度に対してその 1 次までの近似 (付録 C.5 参照) で $f(v) = -kv$ とする．定数項は $f(v = 0) = 0$ の

[*7] 「終端速度」という用語は，開き損ねたパラシュートに対する悪い冗談である．

[*8] 終端速度 $v_\infty \equiv mg/k$，緩和時間 $\tau \equiv m/k$ を用いて運動方程式を

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau}(v - v_\infty)$$

と書けば，解の形 $v(t) = v_\infty + (v(0) - v_\infty)e^{-t/\tau}$ は直ちに推察できる．

条件から消える [9, p.93]．Stokes は Navier-Stokes 方程式 (流体の運動方程式) におそい流れの近似 (Stokes 近似) を適用し，流体中を運動する球はその速度に比例する抵抗力を受けることを示した (Stokes の抵抗法則) [11, p.156,pp.194–197].

なお媒質中を速度 v で運動する物体について，物体への媒質分子 (質量 m) の衝突が重要となる場合，分子 1 個が物体に及ぼす力積は mv 程度であり，単位時間当たりに物体に衝突する分子数もまた v に比例するため，大雑把に言って v^2 に比例する力が期待される．(これは気体分子運動論から状態方程式を導くのと同じ論法である．3-2 節を参照．)

大まかには媒質中をゆっくり運動するときの抵抗は速度の 1 乗に比例し ($F = cv$)，ある程度運動が速くなると抵抗は速度の 2 乗に比例するようになる ($F = cv^2$) [8, p.166].

■log の真数の次元

対数関数の真数は本来，無次元量である． しかし真数 A が無次元量であっても，
次元を持つ量 B, C (ただし $A = BC$) を用いて

$$\log A = \log B + \log C$$

とできる．逆に言えば，真数を無次元化するのにこの関係を用いることができる．

- 式 (1) の導出では $\dfrac{\mathrm{d}v}{\frac{mg}{k} - v}$ は無次元量であるにも関わらず，
  これを積分した結果 $-\ln\left|\frac{mg}{k} - v\right|$ において真数は速度の次元を持っており，
  その意味は曖昧である．しかし積分定数から適当な因子をとり出して
  真数を無次元化することは常に可能だから，これは深刻な問題ではない．
- $\mathrm{pH} = -\log_{10}[\mathrm{H}^+]$ における真数は正確には，
  水素イオン濃度 $[\mathrm{H}^+]$ を 1mol/L で割った無次元量である．

指数関数や三角関数の中身は常に無次元量である． e^2 や $\sin 2$ は定義されているけれど，
$e^{(2\ \text{メートル})}$ や $\sin(2\ \text{秒})$ などは定義されない．
例えば速度の式 (1) における $e^{-(k/m)t}$ の指数 $-(k/m)t$ は無次元量である．

■時定数 数学的には速度 v は終端速度 $v(\infty)$ に漸近し，厳密には終端速度 $v(\infty)$ に完全に一致することはないけれど，速度が終端速度 $v(\infty) = mg/k$ へと指数関数的に緩和することは，物理的にはある程度の時間が経てば速度は事実上，終端速度に「なる」と解釈して良い．その「ある程度」の時間がどの程度かを示す目安として，指数関数因子 $e^{-(k/m)t}$ の値が初期値の $1/e$ 倍となるような時間 $\tau = (k/m)^{-1}$ を用いることができる．これは時定数 (または緩和時間) と呼ばれ，確かに時間の次元を持っている．$\frac{1}{e} \simeq 0.37, 1 - \frac{1}{e} = 0.63$ なので，緩和時間 τ では雨滴は終端速度の 6 割強に達している．

■位置の時間変化 上で導入した座標軸 x を用い，初期条件 $x(0) = 0$ を課すと，雨滴の位置の変化は

$$x(t) = \frac{mg}{k}\left\{t - \frac{1}{k/m}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)\right\}$$

と表される．これは $t \to \infty$ のとき，終端速度 $v(\infty) = mg/k$ での等速度運動

$$x(t) = v(\infty) \times (t - \tau), \qquad \tau \equiv \frac{1}{k/m}$$

に漸近する．

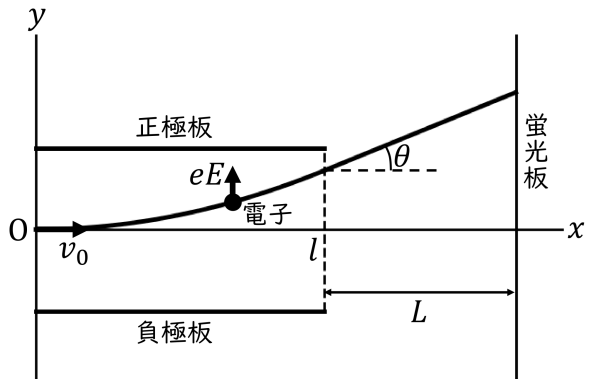


図 9　極板間の電場で加速した電子を蛍光板に導く

例——電場による電子の等加速度運動

図 9 のように xy 面内において，時刻 $t=0$ に初速度 $(v_0, 0)$ で原点を出発した電子 (電荷 $-e$，質量 m) が，$0 \le x \le l$ の極板間で $-y$ 向きの一様不変な電場 E から力 $(0, eE)$ を受けるとき，電子が $x = l + L$ の蛍光板とぶつかる位置 y を求める問題を考えよう．ただし電子は極板にはぶつからないものとする．

極板間 $0 \le x \le l$ では電子は一定の加速度 $(0, eE/m)$ を持つので，その速度と位置はそれぞれ

$$v_x(t) = v_0, \qquad v_y(t) = \frac{eE}{m}t, \qquad x(t) = v_0 t, \qquad y(t) = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2 \qquad (0 \le t \le t_1 \equiv l/v_0)$$

と表される．すると図 9 に示した，電子が極板間から出ていくときの角度 θ は

$$\tan\theta = \frac{v_y(t_1)}{v_x(t_1)} = \frac{eEl}{m{v_0}^2}$$

で与えられるので[*9]，求める位置は

$$y = y(t_1) + L\tan\theta = \frac{eEl}{m{v_0}^2}\left(\frac{l}{2} + L\right).$$

電子が極板の端 $x = l$ から蛍光板に達する時間は L/v_0 だから $y = y(t_1) + v_y(t_1) \times L/v_0$ と立式しても，同じ結果が得られる．

2-4 運動方程式と束縛条件

「先に述べたように，束縛力 (糸の張力や面の抗力) があるときには，運動方程式においてそれらの値は未知数であり，**束縛条件** (または**拘束条件**) を考慮してはじめて加速度とともに決定される．」

糸の張力

図 10 において糸の質量 m の部分に関する運動方程式は $ma = T_1 - T_2$ なので，$m \to 0$ のとき

$$T_1 = T_2$$

[*9] 最右辺において因子 $eEl, m{v_0}^2$ はいずれもエネルギーの次元を持つので，その比は無次元となることが見て取れる．

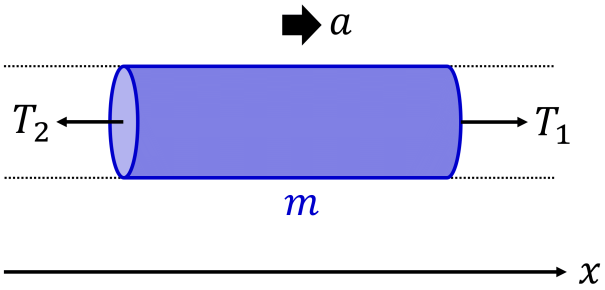


図 10　糸の張力

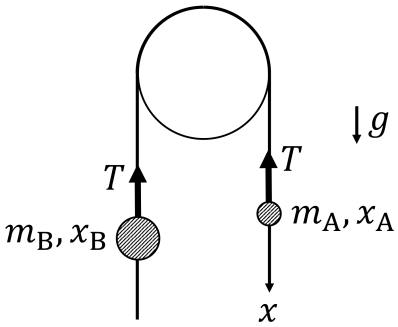


図 11　固定した滑車と重りの系

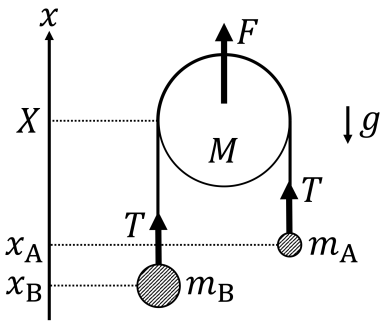


図 12　動く滑車と重りの系

となる．すなわち**質量の無視できる糸の張力はどこでも等しい．**［直観的には糸の質量がゼロのとき，糸に働く張力がつり合っていなければ糸は無限に大きな加速度で飛び出すことになる．］以降はこの近似を採用することにし，いちいち断らない．

■拘束条件のわかりきった例　図 11 のように物体 A (質量 m_A) と物体 B (質量 m_B) を糸でつなぎ，滑車にかけた形を考える．滑車は固定されていて回転せず，糸と滑車の間に摩擦はないものとすると，糸に沿った x 軸に関する物体 A,B の座標 $x_\mathrm{A}, x_\mathrm{B}$，張力 (糸の場所に依らない) T に対し

$$\text{運動方程式}\quad \begin{cases} \mathrm{A} : m_\mathrm{A}\ddot{x}_\mathrm{A} = m_\mathrm{A}g - T \\ \mathrm{B} : m_\mathrm{B}\ddot{x}_\mathrm{B} = T - m_\mathrm{B}g \end{cases}$$

$$\text{束縛条件}\quad x_\mathrm{A} - x_\mathrm{B} = \mathrm{const.} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_\mathrm{A} = \ddot{x}_\mathrm{B}.$$

［ただしドットは時間微分を表す (以下同じ)．このように束縛条件は第 1 義的には加速度に対する条件ではなく，長さ $x_\mathrm{A} - x_\mathrm{B}$ に対する条件と考えた方がその意味を明確に理解でき，またすぐ後で見るように応用が利く．］ただしここでは説明のために敢えて束縛条件 $\ddot{x}_\mathrm{A} = \ddot{x}_\mathrm{B}$ を個別的に明示したけれど，今の場合この条件は自明であり，最初からこれを考慮した運動方程式を書き下して良い．

■拘束条件を必要とする例　拘束条件の非自明な場合として，図 12 のように滑車 (質量 M) が一定の力 F で鉛直上向きに引き上げられている場合を考えよう．図 12 の記号を用いて

$$\text{運動方程式}\quad \begin{cases} \text{滑車}: M\ddot{X} = F - 2T - Mg \\ \mathrm{A}: m_{\mathrm{A}}\ddot{x}_{\mathrm{A}} = T - m_{\mathrm{A}}g \\ \mathrm{B}: m_{\mathrm{B}}\ddot{x}_{\mathrm{B}} = T - m_{\mathrm{B}}g \end{cases}$$

$$\text{束縛条件}\quad (X - x_{\mathrm{A}}) + (X - x_{\mathrm{B}}) = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad 2\ddot{X} = \ddot{x}_{\mathrm{A}} + \ddot{x}_{\mathrm{B}}.$$

加速度を求める　以上の運動方程式と束縛条件を解いて加速度を求めよう (例題 2-5，p.40)．滑車の運動方程式を物体 A，B の運動方程式に代入して張力 T を消去し，次いで束縛条件を代入して滑車の加速度 $\ddot{X}$ を消去すると，$\ddot{x}_{\mathrm{A}}, \ddot{x}_{\mathrm{B}}$ についての連立方程式

$$\begin{pmatrix} 2m_{\mathrm{A}} + \frac{1}{2}M & \frac{1}{2}M \\ \frac{1}{2}M & 2m_{\mathrm{B}} + \frac{1}{2}M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_{\mathrm{A}} \\ \ddot{x}_{\mathrm{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F - Mg - 2m_{\mathrm{A}}g \\ F - Mg - 2m_{\mathrm{B}}g \end{pmatrix}$$

を得る．左辺の行列の行列式を

$$D = M(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}) + 4m_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{B}}$$

とおいてこれを解くと

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_{\mathrm{A}} \\ \ddot{x}_{\mathrm{B}} \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} 2m_{\mathrm{B}} + \frac{1}{2}M & -\frac{1}{2}M \\ -\frac{1}{2}M & 2m_{\mathrm{A}} + \frac{1}{2}M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F - Mg - 2m_{\mathrm{A}}g \\ F - Mg - 2m_{\mathrm{B}}g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2m_{\mathrm{B}}}{D}F - g \\ \frac{2m_{\mathrm{A}}}{D}F - g \end{pmatrix}$$

となる．これは物体 A，B と滑車が等加速度運動を行うことを意味する．$F = 0$ とおくと自由落下の加速度

$$\ddot{x}_{\mathrm{A}} = \ddot{x}_{\mathrm{B}} = \ddot{X} = -g$$

が再現される．

ここで $m_{\mathrm{A}} > m_{\mathrm{B}}$ のとき，A，B がともに鉛直上向きに加速されるためには F はいくらより大きくなければならないかという問題を考えよう．当然期待されるように $\ddot{x}_{\mathrm{A}} > 0$ であれば $\ddot{x}_{\mathrm{B}} > 0$ となっており，求める条件は

$$F > \left\{ \frac{M}{2}\left(1 + \frac{m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{B}}}\right) + 2m_{\mathrm{A}} \right\} g$$

である．右辺の値は $m_{\mathrm{B}} \to m_{\mathrm{A}}$ のとき $(M + 2m_{\mathrm{A}})g$ に近づく．これはもっともな結果である．

注解

■加速度と張力を求めること　張力は拘束力として扱われ，拘束条件と運動方程式を連立して解いて初めて加速度とともに求まる．例えば第 1 の場合 (滑車が固定されている場合) では，物体 A,B の運動方程式から張力 T を消去すると

$$(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})\ddot{x} = (m_{\mathrm{A}} - m_{\mathrm{B}})g, \qquad \therefore \ddot{x} = \frac{m_{\mathrm{A}} - m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}g$$

となる ($\ddot{x}_{\mathrm{A}} = \ddot{x}_{\mathrm{B}} \equiv \ddot{x}$)．これは物体 A,B をまとめて 1 つの物体と見なしたときの運動方程式であり[*10]，加速度 $\ddot{x}$ は当然期待されるように，$m_{\mathrm{A}} \gg m_{\mathrm{B}}$ のとき $+g$，$m_{\mathrm{A}} \ll m_{\mathrm{B}}$ のとき $-g$ となる．これを運動方程式に戻すと，張力が $T = \frac{2m_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}g$ と求まる．

■滑車に働く力　図 12 において滑車に働く力が鉛直下向きに $2T$ であることは次のように考えれば良い．すなわち糸の滑車に接している半円上の部分に注目すると，この部分が滑車から受ける力の x 成分を F' として運動方程式は $0 = F' - 2T$ となる (図 13 参照)．滑車が糸から受ける反作用は $-F' = -2T$ である．

あるいは糸の半円状の部分と滑車を一体と見なした複合物体に働く力が鉛直下向きに $2T$ である．

[*10] このような複合物体に対しても同様の運動方程式が成り立つことについては，2-14 節の式 (2-83) の箇所で説明される．

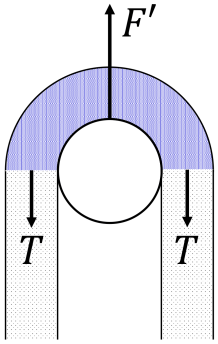


図 13　滑車に働く力 $2T$

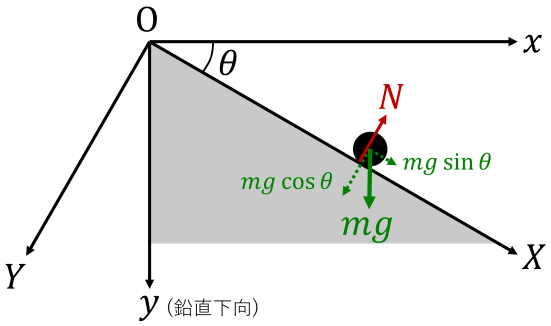


図 14　斜面上の落下

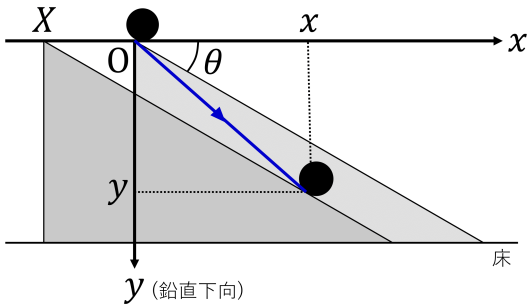


図 15　動く斜面上の降下

面の垂直抗力

面を介して働く力は**抗力**と呼ばれる．抗力は一般に面に垂直な成分と平行な成分を持ち，それらを順に**垂直抗力**，**摩擦力**と呼ぶ．まずは垂直抗力を考えよう．

■簡単な例　図 14 のように斜面を滑り落ちる物体について，拘束力は垂直抗力 N であり，束縛条件は図 14 の物体の 2 通りの座標 $(X, Y), (x, y)$ に対して

1. $Y = 0, \quad \therefore \ddot{Y} = 0.$
2. $y = x \tan\theta, \quad \therefore \ddot{y} = \ddot{x} \tan\theta.$

■束縛条件の必要な場合　拘束条件の非自明な場合として，図 15 のように斜面の三角台 (質量 M) が床を (摩擦なく) 滑る場合を考えよう．斜面上の物体の質量を m とし，鉛直面内に固定した xy 直交座標系を原点が物体の初期位置に一致するようにとると，運動方程式は

$$
\begin{aligned}
ma_x &= N \sin\theta, \\
ma_y &= mg - N \cos\theta, \\
MA &= -N \sin\theta
\end{aligned}
$$

である．また図 15 のように，初め物体の接していた斜面上の位置の x 座標を X とすると，束縛条件は

$$y = (x - X)\tan\theta \quad \Rightarrow \quad a_y = (a_x - A)\tan\theta$$

と表される．以上より

$$N = \frac{M\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}mg, \qquad a_x = \frac{M\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g, \qquad a_y = \frac{(M+m)\sin^2\theta}{M + m\sin^2\theta}g, \qquad A = -\frac{m\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g$$

を得る．［これは等加速度運動を意味する．物体の初速度をゼロとすると $x = \frac{1}{2}a_x t^2, y = \frac{1}{2}a_y t^2$ であり，$a_y = \frac{M+m}{M}(\tan\theta)a_x$ なので，物体は直線 $y = \frac{M+m}{M}(\tan\theta)x$ に沿って運動することを考慮して図 15 では物体の軌道を描いている．］

■結果の吟味のしかた　得られた結果が物理的に納得のいくものであるかを確認しよう．(これには計算ミスを発見する意味もある．)

- 次元のチェック
  上で得た垂直抗力 N は $[N] = [mg]$ より力の次元を持っており，
  各加速度は $[a_x] = [a_y] = [A] = [g]$ より確かに加速度の次元を持っている．
  - 和は同じ次元を持つ物理量の間にしか定義されない．
- パラメーターの変化に対する振舞い (behavior)
  - $M \gg m$ の極限

    $$N \to mg\cos\theta, \qquad a_x \to g\sin\theta\cos\theta, \qquad a_y \to g\sin^2\theta, \qquad A \to 0.$$

    斜面が固定されている場合の結果に一致 (図 14 参照)．
  - $\theta = 0$ のとき

    $$a_x = a_y = A = 0, \qquad N = mg.$$

    水平な板の上に物体 m が静止している場合に一致．
  - $\theta = \pi/2$ のとき

    $$a_x = A = 0, \qquad a_y = g, \qquad N = 0.$$

    鉛直な斜面に沿って自由落下する場合に一致．
    ［逆に鉛直な壁からの垂直抗力がゼロになることは，このように $N = mg\cos\theta \to 0$ と理解できる．］
  - ★ $(1\text{kg}) \times g$ のように式の途中で部分的に数値を代入して書くと，
    式のパラメーターに依存した振舞いが見えなくなるため，
    文字式のまま変形し，**数値の代入は最後にまとめて行うのが好ましい．**

注解

■運動方程式の共変性について　図 14 のような 2 通りの座標系のいずれに関しても，同じ形の運動方程式が成り立つ．ここではもう少し一般的に，ある慣性系と，それを並進・回転させて得られるもう 1 つの慣性系を考えよう．ただし慣性系の間の位置関係は固定されており，時間変化しないものとする．動く座標系については 2-13 節で議論する．さて，このとき 2 つの座標系から見た同一の点の第 i 座標 $(i = 1, 2, 3)$ をそれぞれ

x_i, x'_i とすると，適当な回転行列の成分 a_{ij} と定数ベクトル成分 b_i を用いて，それらの間の関係は

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j + b_i$$

と表される．このとき運動方程式における物体の加速度は**ベクトルの座標変換則**

$$\ddot{x}'_i = \sum_j a_{ij} \ddot{x}_j$$

に従う．(ベクトルとは厳密には，成分がこのような変換則に従う量として定義される．) 一方，物体の質量 m はどのような座標系から見ても同一の値を持つ．(これが**スカラー**の正確な定義である[*11]．) よって力もまたベクトル成分を定義する変換則 $F'_i = \sum_j a_{ij} F_j$ に従うと仮定すれば，運動方程式は座標変換に対して不変に保たれる (共変的である，と言う)：

$$m\ddot{x}_i = F_i \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x}'_i = \sum_j a_{ij}(m\ddot{x}_j) = \sum_j a_{ij} F_j = F'_i.$$

一般に物理法則を表す方程式が座標変換に対して共変的となるためには，両辺が同じ変換則に従う量 (同じ種類のテンソル成分) であれば良い (付録 C.12，C.13 参照) [8, pp.148–153] [12, pp.45–47].

■計算ミスについての私見 「結果の吟味」に関連して，計算ミスについての私見を述べる．思うに計算ミスというのは，見かけと違ってそれほど初歩的な問題ではない．確かに計算の正確さを鍛えることはできないとまでは言わないが，ひたすら量をこなせば「計算力」(速さや正確さ) が身に付くというのは，やや素朴な発想であるように思われる．そのような訓練から得られる効果は，控えめに言っても限られている．そこで計算ミスを不可避なものと受け入れた上で，計算を間違ったときにどのようにすれば自分の間違いに気付けるかと考える方がより建設的となる．ところが間違いに気付くというのは，考えている対象についての直観など学問に対する深い理解を必要とするような，高次の能力ではなかろうか．そうであるならば「計算力が身に付くまで先に進めない」と言うのは逆で，一生付きまとうであろうミスを補完するためにも速く先に進んだ方が良い．

摩擦力について

粗い面上の物体に外力 F_{ex} を加えると，ある閾値 F_0 に対して $F_{\mathrm{ex}} < F_0$ のときには物体は静止状態を維持し，$F_{\mathrm{ex}} > F_0$ となると物体は動き出す．

- 静止摩擦力　($F_{\mathrm{ex}} < F_0$ のときに働く摩擦力)
  - 大きさは外力 F_{ex} の大きさに応じて変化する．
  - 摩擦がなかったならば物体が行うであろう運動を妨げる向きに働く．
  - 実験によれば $F_{\mathrm{ex}} = F_0$ に達すると，静止摩擦力は最大値 (**最大摩擦力**)

$$R_{\max} = \mu N, \qquad \mu : \text{静止摩擦係数}, \qquad N : \text{垂直抗力}$$

をとる．

★ これは物体がすべり出す直前の値であり，
静止摩擦力は常にこの値をとるわけではないことに注意する．

[*11] 初等的にはスカラーはその名前が意味しているように，1 次元的な“目盛りで測れる”量である．スカラーは正負の値をとり得るため，「スカラーは大きさである」と言うのは正しくない．

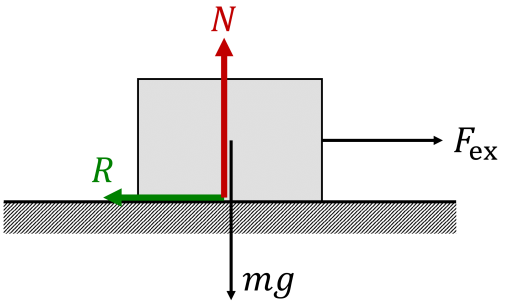


図 16　粗い水平面上に置かれた物体に対する摩擦力

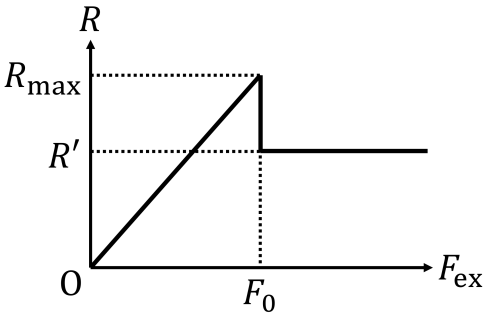


図 17　摩擦力の大きさ R

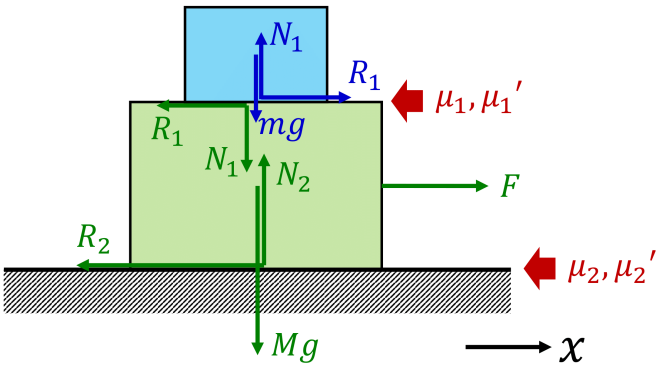


図 18　物体の乗った粗い水平面上の板を引っ張る

- 動摩擦力　($F_{\mathrm{ex}} > F_0$ のときに働く摩擦力)
  - 大きさは外力 F_{ex} の大きさによらず一定値 R' をとる．
  - 物体が現に行っている運動を妨げる向きに働く．
  - 実験によれば

$$R' = \mu' N, \qquad \mu'(< \mu) : \text{動摩擦係数}, \qquad N : \text{垂直抗力}$$

  である．

以上より外力 F_{ex} と摩擦力 R の関係は図 17 のようになる．

■摩擦力についてのトレーニング　図 18 のように粗い水平面上の板に外力 F を加えて引くと，上に乗った物体と板が一体となって動くという状況が考えられる．このとき物体には前方 $x > 0$ への加速度をもたらすような，$x > 0$ 方向の摩擦力 R_1 を板から受けていないければならない．実際，板を $x > 0$ 方向に引っ張ると，板は上に乗っている物体から運動を妨げる向き ($x < 0$) の向きに摩擦力 (大きさ R_1) を受けるから，その反作用として物体は $x > 0$ 方向の摩擦力 R_1 を板から受ける．

図 18 の記号を用いると，板が運動しているか否かに関わらず，垂直抗力は鉛直方向の運動方程式から

$$\begin{cases} 0 = N_1 - mg \\ 0 = N_2 - N_1 - Mg \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} N_1 = mg \\ N_2 = (m+M)g \end{cases}$$

と定まる．次に

- 板と物体の間の静止摩擦係数を μ_1，動摩擦係数を $\mu_1{}'$
- 板と床の間の静止摩擦係数を μ_2，動摩擦係数を $\mu_2{}'$

として，x 方向の運動を考えよう．

- 板が動く条件
  まず板が動かない条件を考えると
  $$F \leq \mu_2 N_2 = \mu_2(m+M)g$$
  であり，この条件が破られると板は動き出すと考えられる．
  ［ひとまず複合物体 $m+M$ が動かいない条件として書き下せる．］実際，板が動くには $F > \mu_2(m+M)g$ が必要であり，
  逆にこのとき板と物体が加速度 a で一体となって動いているとしたときの運動方程式は
  $$(m+M)a = F - R_2 = F - \mu_2{}'(m+M)g, \qquad \therefore a = \frac{F}{m+M} - \mu_2{}'g > \frac{F}{m+M} - \mu_2 g > 0$$
  を与えるので，確かに板は前方に加速される．
- 物体が板に対してすべらないための条件　$R_1 \leq \mu_1 N_1$
  物体の運動方程式
  $$R_1 = ma = m\left(\frac{F}{m+M} - \mu_2{}'g\right), \qquad N_1 = mg$$
  よりこれは
  $$F \leq (\mu_1 + \mu_2{}')(m+M)g$$
  を与える．

以上の 2 条件を合わせると
$$\mu_2(m+M)g < F \leq (\mu_1 + \mu_2{}')(m+M)g$$
となり，このためには $\mu_2 < \mu_1 + \mu_2{}'$ が必要であることが分かる．

注意　板の水平方向の運動方程式 $Ma = F - R_1 - R_2$ において，板の上に物体 m が乗っているという理由で左辺を $(m+M)a$ と書くのは誤りである．［同様に鉛直方向の運動方程式 $0 = N_2 - N_1 - Mg$ における重力を $(m+M)g$ と書くのも誤りである．］上に物体が乗っている効果は正しい運動方程式における摩擦力 $-R_1$ や垂直抗力 $-N_1$ として既に考慮している．［実際，物体が上から板を押す力 N_1 は，物体の鉛直方向の運動方程式 (力のつり合い) より $N_1 = mg$ であり，重力を $(m+M)g$ と書くことは，mg を重複して考慮していることになる．］

注解

■粗い水平面上に置かれた物体に対する摩擦力　図 16 では $N = mg$ なので外力の閾値は $F_0 = \mu mg$ であり，また物体が静止している場合には力のつり合い $R = F_{\text{ex}}$ が成り立つので，
$$R = \begin{cases} F_{\text{ex}} & (F_{\text{ex}} < \mu mg \text{ のとき}) \\ \mu' mg & (F_{\text{ex}} > \mu mg \text{ のとき}) \end{cases}$$
となる．

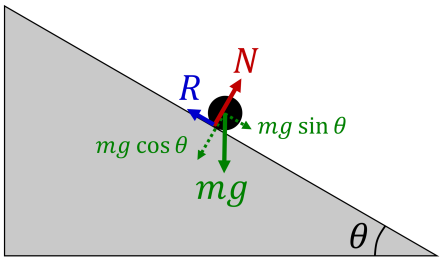


図 19　斜面に置かれた物体

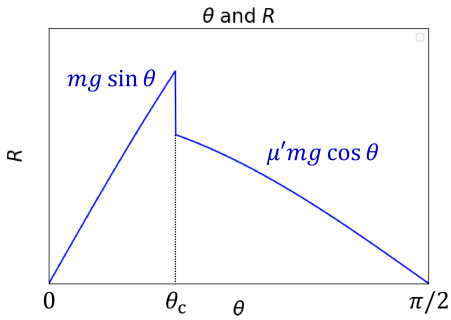


図 20　摩擦力 R の角度 θ 依存性

■等号について　上で見たような摩擦の問題に対して，不等式に等号を含めるか否かは実際問題，物理的に意味がないので，等号は含めても含めなくても良い．

例——斜面上の物体に働く摩擦力

図 19 のように水平面と角度 θ を成す物体 m に働く摩擦力 R の，角度 θ との関係を調べよう．物体が滑らない間は

$$\text{運動方程式}\begin{cases} 0 = mg\sin\theta - R \\ 0 = mg\cos\theta - N \end{cases} \qquad \therefore R = mg\sin\theta$$

に従って角度 θ とともに摩擦力 R は増大していく．物体が滑らない条件 $R \le \mu N$ は

$$\tan\theta \le \mu \equiv \tan\theta_{\mathrm{c}}$$

を与える．$\theta > \theta_{\mathrm{c}}$ では動摩擦力

$$R = \mu' N = \mu' mg\cos\theta$$

が働く．これは角度 θ の増大に伴う垂直抗力 N の減少とともに減少する (図 20 参照)．

注解　摩擦係数の大小関係 $\mu' < \mu$ によれば，$\theta = \theta_{\mathrm{c}}$ で最大静止摩擦力 μN から動摩擦力 $\mu' N$ に移行する際に摩擦力の値は減少する：

$$\mu' mg\cos\theta_{\mathrm{c}} < \mu mg\cos\theta_{\mathrm{c}} = mg\sin\theta_{\mathrm{c}}.$$

「静止摩擦力は運動を妨げる向き」とは言い難い例

問題　図 21 のように滑らかで水平な床に沿って x 軸をとり，原点に質量 M の台を置く．$x < 0$ の側において台の側面に定数 k のばねの一端をつなぎ，他端を台の側面からばねの自然長だけ離れた壁につなぐ．さらに台の上に質量 m の小物体を置く．台の上面は粗く，小物体との間には摩擦力が働くものとし，その静止摩擦係数を μ とする．この状態から台を $+x$ 向きに $a(>0)$ だけ引いて，時刻 $t = 0$ で静かに離したところ，台と小物体は一体となって運動した．このとき小物体に働く摩擦力の x 成分 $f(t)$ を時間 $t(\ge 0)$ の関数として求めよ．また距離 a が大きすぎると，小物体は台に対して滑る．小物体が常に台と一体になって運動できる a の範囲を求めよ．地上の重力場を g とする．

解　台と小物体の (代表点の) 位置を x として，運動方程式は

$$\text{台}：M\ddot{x} = -kx - f, \qquad \text{小物体}：m\ddot{x} = f, \qquad \text{複合物体}：(m+M)\ddot{x} = -kx$$

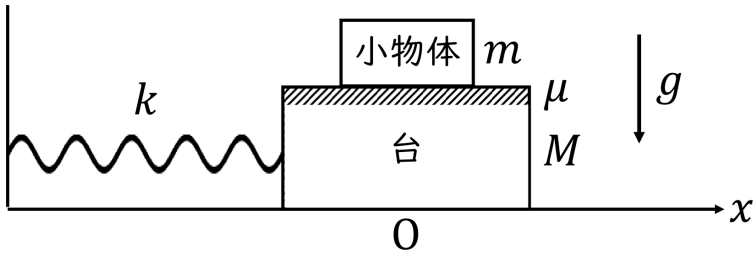


図 21　バネに引かれる，小物体を載せた台

なので，2 体は角振動数 $\omega = \sqrt{k/(m+M)}$ での単振動

$$x(t) = a\cos\omega t$$

を行う．これを小物体の運動方程式に代入すると，

$$f(t) = -ma\omega^2\cos\omega t\left(= -ka\frac{m}{m+M}\cos\sqrt{\frac{k}{m+M}}t\right)$$

を得る．摩擦力の最大値 $|f|_{\max} = ma\omega^2$ が最大静止摩擦力 μmg を超えないことを要求して，小物体が滑らない条件

$$a \leq \frac{\mu g(m+M)}{k}$$

を得る．

さて，教科書 p.37 には「静止摩擦力は (中略) 摩擦力がなかったならば物体が行うであろう運動を妨げる向きに働く」とある．なるほど，確かに本問の例では，小物体に関してはそのように言える．実際，摩擦力がなければ小物体は台の運動についていけず，摩擦力こそが小物体の単振動における復元力となっている．他方，台については摩擦力があろうとなかろうと単振動を行う．いずれにせよ，その単振動を妨げる向きというのは曖昧さがあり，必ずしも意味が明確でない．台に働く摩擦力 $(-f(t))$ は常に加速度 $\ddot{x}(t)$ と逆向き (逆符号) であって，速度 $\dot{x}(t)$ と逆向きとは限らない．すると「静止摩擦力は運動を妨げる向き」と標語的に覚えることは，(少なくとも動力学においては) ミスリーディングな場合があることになる．

2-5 運動方程式の積分について

問題の設定

本節では運動方程式を「積分して得られる一般的な関係として，力積と運動量変化，仕事と運動エネルギーの変化の関係，およびその一例として地上の重力場中でのエネルギー保存則を導く」(p.41)．

力積と運動量変化

運動方程式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}$ を $t_1 \leq t \leq t_2$ において時間積分すると，

$$m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$$

が得られる $(v_1 \equiv v(t_1), v_2 \equiv v(t_2))$．右辺の量は**力積**と呼ばれ，これは**力積と運動量の関係**と呼ばれる．もとの運動方程式が「力は物体の速度 (運動量) を変化させる」という因果律を表していたのと同様，これも力積

と運動量変化の間の**因果関係**を表している．なお時間 $\Delta t = t_2 - t_1$ における平均の力を

$$\langle \boldsymbol{F} \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} \mathrm{d}t$$

によって定義すると，これは

$$m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1 = \langle \boldsymbol{F} \rangle \Delta t$$

とも表現できる．

注解

■証明は忘れて良い　結果を納得するためには，その導出を行う必要があるけれど，物理学では基本的に諸法則の導出過程そのものを覚える必要はない．「証明をみたときに忘れてはならないことは，証明それ自身ではなく，これこれのことが正しいということを証明することができるということである [8, p.193].」

■力積と運動量の関係の解釈　とは言え，上で行った力積と運動量の関係の導出の中にも物理を見て取ることができる．「問題の設定」における「瞬間の変化を積み立てる」(p.41) という観点から次のように解釈できる．すなわち運動方程式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}$ は微小時間 $\mathrm{d}t$ における力積が運動量変化をもたらすこと

$$\mathrm{d}(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}\mathrm{d}t$$

を意味しているため ($\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})$ は時間 $\mathrm{d}t$ における運動量変化)，有限時間 $t_1 \leq t \leq t_2$ にわたる力積はその間の運動量変化をもたらす：

$$m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\mathrm{d}t.$$

■平均の力について　力の任意の成分 F に関する時間平均の定義式

$$\langle F \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} F \mathrm{d}t$$

は，t-F グラフの面積を一定に保ちながら平らにならしたときの“高さ”として平均値 $\langle F \rangle$ を定義していることになる (図 22 参照)．時間積分の次元は

$$\left[\int_{t_1}^{t_2} F\mathrm{d}t \right] = [F\mathrm{d}t] = [F]T$$

なので (T は時間の次元を表す)，これを Δt で割って初めて力の次元となる．

■力の作用する時間　物体に働く力，例えばバットでボールを打つときの力などを物体 (ボール) の運動量変化から推定する際の困難は専ら，力の作用する時間 (バットとボールの接触時間) の評価に由来する．これについては 2-8 節 (p.60) で再論する．

仕事と運動エネルギー変化 (1 次元の場合)

力積と運動量の関係は運動方程式を時間積分して得られた．次に運動方程式を**空間座標で積分する**ことを考える．ただしここでは簡単のために 1 次元の運動を考えることにし (2 次元，3 次元の場合は 2-9 節参照)，運動の方向に x 軸をとる．空間積分を行うことを考えて運動方程式 $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F$ の両辺に $\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t$ をかけ，$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v^2$ と書き換えると

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = F\mathrm{d}x$$

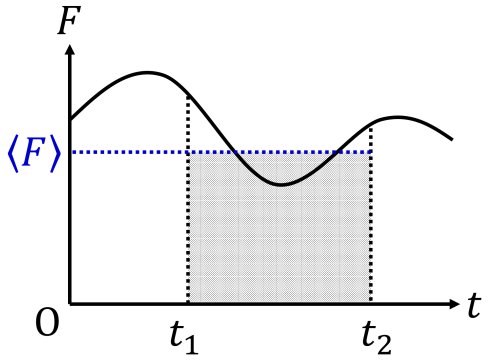


図 22　平均の力

となる．よってこれを $x_1 \leq x \leq x_2$ で積分すると，

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2 = \int_{x_1}^{x_2} F\mathrm{d}x$$

を得る ($x : x_1 \to x_2$ のとき $t : t_1 \to t_2$)．左辺の $mv^2/2$ という量は**運動エネルギー**と呼ばれる．また右辺の量は力 F のした仕事と呼ばれ，これは**仕事と運動エネルギーの関係**と呼ばれる．もとの運動方程式が「力は物体の速度 (運動量) を変化させる」という因果律を表していたのと同様，これも物体は仕事をされると運動エネルギーが変化するという**因果関係**を表している．

仕事と運動エネルギーの次元

$$[\text{仕事}] = M\frac{L}{T^2} \times L = M\frac{L^2}{T^2}, \qquad [(\text{運動})\ \text{エネルギー}] = M\left(\frac{L}{T}\right)^2$$

はともに次元が等しく，その MKS 単位は $\mathrm{kg \cdot m^2/s^2 = N \cdot m = J}$ (ジュール)．
［質量 m の物体に対する静止エネルギーの相対論的な表式 mc^2 もまた，
運動エネルギー $mv^2/2$ と同じ次元を持っていることが見て取れる．］

注解

■仕事と運動エネルギーの関係　導出時の $\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = F\mathrm{d}x$ は，物体が $\mathrm{d}x$ だけ変位する際に力のする仕事が，その間の運動エネルギー変化をもたらすことを意味している．

■力が一定の場合　力 ($\boldsymbol{F}$ または F) が一定の場合の力積と力のする仕事はそれぞれ $\boldsymbol{F}\Delta t, F\Delta x$ となる ($\Delta x \equiv x_2 - x_1$)．逆に力が一定でない場合にも，力を一定と見なせるような微小時間 Δt，微小区間 Δx において力積と仕事は $\boldsymbol{F}\Delta t, F\Delta x$ と近似されるため，有限の時間・距離に対する表式

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\mathrm{d}t, \qquad \int_{x_1}^{x_2} F\mathrm{d}x$$

へと自然に一般化される．

重力の位置エネルギー

仕事と運動エネルギーの関係を，地上の重力場中での鉛直方向の運動に適用しよう．鉛直上向きに y 軸をとり，物体の初期位置を y_0，初速度を v_0 とすると，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = -mg(y - y_0)$$

となる．

- 運動エネルギー　→　仕事
  鉛直投げ上げを考え，y を最高到達点 $(v = 0)$ とすると，
  運動エネルギー $m{v_0}^2/2$ は位置 y まで物体を持ち上げる仕事 $mg(y - y_0)$ に一致するため，
  それだけの仕事をする能力を有していると解釈できる．
- 位置エネルギー　→　運動エネルギー
  初速 $v_0 = 0$ での自由落下 $(y < y_0)$ を考えると，
  $mg(y_0 - y)$ は落下によって獲得される運動エネルギー $mv^2/2$ に一致するため，
  物体は位置 y よりも $h \equiv y_0 - 0$ だけ高い位置にあることによって，
  潜在的に運動エネルギー $mv^2/2$ を生み出す能力を持っていると解釈できる．
  この潜在的な能力と解釈される量 mgh は**ポテンシャル・エネルギー** (**位置エネルギー**) と呼ばれる．

そこで上記の仕事と運動エネルギーの関係を移項して

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + mgy_0$$

と書き換えると，これは位置エネルギーと運動エネルギーの和が一定であること (**エネルギー保存則**) を表している．

注解

■**「仕事と運動エネルギーの関係」と「エネルギー保存則」の関係**　より一般に基準点を $x = a$ とした力 F のポテンシャル・エネルギーは，物体に力 F とつり合う外力 $-F$ を加えて $x = a$ から x まで運ぶ仕事

$$U(x) = \int_a^x (-F)\mathrm{d}x$$

と定義される[*12]．このとき仕事と運動エネルギーの関係

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2 = \int_{x_1}^{x_2} F\mathrm{d}x$$

はエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}m{v_1}^2 + U(x_1) = \frac{1}{2}m{v_2}^2 + U(x_2)$$

に書き換えられる．

[*12] 完全につり合っていれば物体を運べないから，「本当は外力がわずかに大きいが」(p.47)，その差は十分に小さく，「したがって運動エネルギーが増えないように」(p.43) 物体を運ぶことを考える．これは熱力学の文脈において「ゆっくりとした変化 (準静的過程)」と呼ばれている (p.128).

なお積分を実行する前にこのような移項を行うと

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2+U\right)=0$$

となるので (d は物体が $\mathrm{d}x$ 変位する間の，あるいは対応する時間 $\mathrm{d}t$ が経つ間の変化量を表す)，再びエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2+U=E=\mathrm{const.}$$

を得る．ここで「『微分して 0 になる関数は定数だけ』という言葉使いは数学的な言い方であり」(p.48)，物理的な意味をとると $\mathrm{d}(\cdots)=0$ は $(\cdots)$ が変化しないことを意味するから，$(\cdots)$ は一定値をとる．

■重力場中の放物運動に対してエネルギー保存則が成り立つことの直接的な確認 (例題 2-8，p.45) について
同様の計算を 2-1 節の等加速度運動の注解で行った．

2-6 単振動

注解

2-2 節の注解において述べたように，数学的な理由により一般につり合い点周りでの微小振動は単振動によって近似できる．単振動の 1 つの重要性はこのような普遍性にある．また任意の周期的な運動は，あらゆる振動数 (基本振動数の整数倍) の単振動の重ね合わせとして表現できる．これは Fourier 展開と呼ばれる，純粋に数学的な事実である (付録 C.16 参照)．このような理由によっても，基本となる運動としての単振動に興味が持たれる．

単振動の方程式

一端を固定され，他端を重りと繋がれた水平なばねを考えよう．ばねの自然長における重りの位置を原点とし，ばねの伸びる向きを正の方向とする x 軸をとると，重りがばねから受ける力の成分は **Hooke** (フック) の法則

$$F=-kx$$

によって表される．比例定数 k はばね定数と呼ばれる．これは

- ばねが伸びているとき $(x>0)$，力 $(F<0)$ はばねを縮める向きに大きさ kx であること
- ばねが縮んでいるとき $(x<0)$，力 $(F>0)$ はばねを伸ばす向きに大きさ $k|x|$ であること

の両方を含んでいる (図 23 参照)．［したがってばねの伸び $x>0$ に対して正しい式を書けば，$x<0$ の場合も自動的に満たされる．］ばねの力に対して重りの運動方程式は

$$m\ddot{x}=-kx$$

であり，この形の方程式は**単振動の方程式**と呼ばれる．

エネルギー保存則

［2-5 節の注解において説明した一般論

$$\frac{1}{2}m{v_1}^2+U(x_1)=\frac{1}{2}m{v_2}^2+U(x_2):\text{エネルギー保存則},\qquad U(x)=\int_a^x(-F)\mathrm{d}x:\text{ポテンシャル (基準点 } x=a)$$

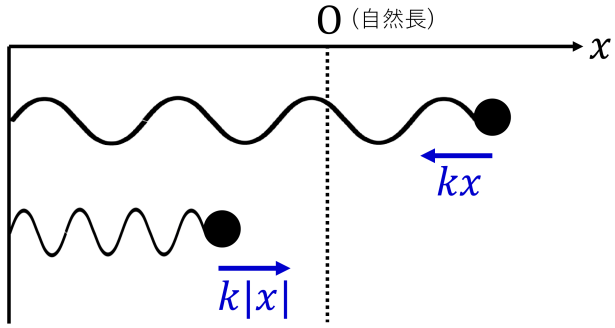


図 23　ばねの力

を $a=0$ として適用すると,］

$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}m{v_0}^2+\frac{1}{2}k{x_0}^2\equiv E$: 単振動のエネルギー保存則,　　$U(x)=\frac{1}{2}kx^2$: ばねの弾性エネルギー

となる．E は初期条件で決まる全エネルギーである．

■ばねの弾性エネルギーの意味　［2-5 節の注解で述べたように，ポテンシャル・エネルギーは物体に力 F とつり合う外力 $-F$ を加えて運ぶ仕事として定義され,］このときばねと重りの系に対して，重りの運動エネルギーは増えないから，仕事はばねにエネルギーとして蓄えられたと考えられる．ここから $U(x)=\frac{1}{2}kx^2$ をばねの弾性エネルギーと見る解釈が正当化される．

あるいはばねを x_0 だけ伸ばして静かに離しすと，ばねが自然長に戻ったとき重りは $k{x_0}^2/2$ に等しい運動エネルギーを持つ．ところがポテンシャル・エネルギーというのはそのような運動エネルギーを生み出し得る潜在的な能力に他ならない．

一般解を求める

重りの状態は位置 x と速度 v で指定される．そこで時間発展を xv 平面上の動点 (x,v) の運動として表すと，エネルギー保存則 $\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2=E$ は xv 平面上の軌道が楕円になることを意味しており，$A\equiv\sqrt{2E/k}$ を振幅として位置 x の運動範囲は $-A\le x\le A$ となることが読み取れる．

次に軌道が円

$$x^2+u^2=A^2$$

となるように，速度 v を $u=\sqrt{m/k}v$ と変数変換する (図 24 参照)．［このとき 2 変数 x,u はともに長さの次元を持つ ($[\sqrt{m/k}]=T$).］円周上の位置は

$$x=A\cos\phi,\qquad u=A\sin\phi$$

と表され，これを $u=\sqrt{m/k}\dot{x}$ に代入して ϕ の時間変化を定めると

$$\dot{\phi}=-\omega,\qquad \therefore\phi=-(\omega t+\delta),\qquad \omega\equiv\sqrt{\frac{k}{m}}$$

となる．これは xu 面上の時計回りの角速度 ω での等速円運動を表しており，位置座標 x は $u>0(v>0)$ のとき増大し，$u<0(v,0)$ のとき減少することから期待されるように，円周上の運動は図 24 の矢印の向き (時

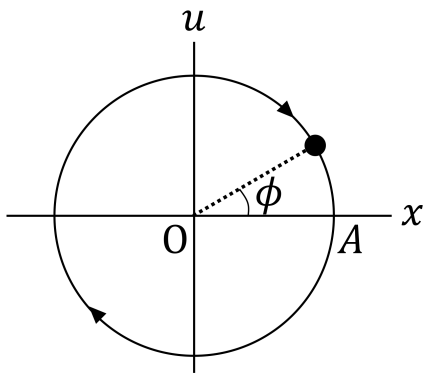


図 24　単振動を表す xu 平面上の円運動

計回り) でなければならないということと整合している．実際の物体の x 軸上の運動は円周上の動点を x 軸に投影した点の運動として与えられ，それは**角振動数** ω での**単振動**

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

となる．これが単振動の方程式の一般解である．

- 振動の周期
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$
- 一般解 (式 (2-27):$x = A\sin(\omega t + \delta)$ など) は確かに運動方程式 $\ddot{x} = -\omega^2 x$ を満たしている．
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\sin(\omega t + \delta) = -\omega^2\sin(\omega t + \delta), \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\cos(\omega t + \delta) = -\omega^2\cos(\omega t + \delta)$$
による．

注解

■単振動の一般解の導出について　ここでは単振動の方程式の一般解が式 (2-27):$x = A\sin(\omega t + \delta)$ のように与えられることの 1 つの数学的な証明が与えられた．それは物理的な観点からは，エネルギー保存則に基づき，時間発展を位相空間 (xu 平面) 上の運動として捉えるものと意味付けできる．

一般に運動方程式は 2 階の微分方程式なので，これを解くには積分を 2 回行わなければならず，それ故に得られる一般解は積分定数を 2 つ含むことになる．ところでエネルギー保存則は既に運動方程式を 1 回積分した関係に当たるため (エネルギー E が積分定数)，ここから出発すれば積分はあと 1 回行えば良い．上の例では 2 回目の積分は角度 ϕ の時間発展を決定する箇所で行われており，その初期値 δ が 2 つ目の積分定数となっている．

■状態空間，位相空間　位置と速度で張られる空間を状態空間，位置と運動量で張られる空間を位相空間と呼ぶ．単振動の問題に対してエネルギー保存則は位相空間上の楕円軌道の式としても解釈できる．そのためには運動エネルギーを速度 v の代わりに運動量 $p = mv$ で表すと

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

となることを用いれば良い．

■角振動数 ω について

- $[k] = M/T^2$ より角振動数 $\omega = \sqrt{k/m}$ は時間の逆数の次元を持つ．
- $\omega = \sqrt{k/m}$ は定性的には ω がばねの強さ k に対して増加し，
  重りの質量 m に対して減少することを意味しており，これは自然な結果と言える．

k と m のどちらが分母・分子に来るかは，以上のことから判断できる．

一般解であることの意味

一般解は 2 つの積分定数を含んでおり，それらは与えられた初期条件 (2 つの条件 $x(0) = x_0, v(0) = v_0$) から決定される．言い換えれば一般解は積分定数を 2 つ含むため，任意の初期条件に対する運動を表現できる．これが一般解と呼ばれる所以である．

注解

単振動の方程式の解として $x = \sin(\omega t + \delta)$ が挙げられているけれど (pp.50–51)，このような解は長さの次元を持たないため，既に物理的に不適合である．

一般解の別の表現，初期条件から積分定数をきめる

一般解 $x = A\cos(\omega t + \delta)$ は

$$\begin{aligned} x =& A\sin(\omega t + \delta'), \qquad (\delta' \equiv \delta + \pi/2) \\ x =& a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) \qquad (a \equiv A\cos\delta, b \equiv -A\sin\delta) \end{aligned}$$

とも表現できる．

一般解としてはおそらく，最後の表式が最も便利である．実際これを利用すれば，一般的な初期条件 $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$ に対する解が容易に

$$x = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

と定まる[*13]．特に

- $v_0 = 0$ のとき　(ばねを x_0 まで引き伸ばして重りを静かに離した場合)

$$x = x_0\cos(\omega t).$$

- $x_0 = 0$ のとき　(自然長の位置から重りを初速 v_0 で打ち出した場合)

$$x = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t).$$

[*13] ここから振幅 A と初期位相 δ を，初期値 x_0, v_0 で表すと

$$A = \sqrt{{x_0}^2 + \frac{{v_0}^2}{\omega^2}}, \qquad \delta = -\arctan\frac{v_0/\omega}{x_0}.$$

鉛直なばねの場合

上端を固定された鉛直なばね (ばね定数 k) の下端に取り付けられた重り (質量 m) の運動を考える．

- 自然長の位置を原点とし，鉛直下向きを正とする x 軸

$$m\ddot{x} = -kx + mg, \qquad \text{つり合いの位置} : x = \frac{mg}{k}.$$

- つり合いの位置を原点とし，鉛直下向きを正とする X 軸

$$X = x - \frac{mg}{k}, \qquad \therefore m\ddot{X} = -kX$$

$$\rightarrow \qquad \text{重りはつり合いの位置を中心として，角振動数}\sqrt{k/m}\text{の単振動．}$$

★ これは常に復元力のうちつり合いの位置 $x = mg/k$ における復元力が重力 mg を打ち消すため，この点を原点にとればあたかも重力がなくなったかのように見えることを示している．

■エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx = E, \quad \text{または} \quad \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \frac{1}{2}kX^2 = \frac{1}{2}kA^2.$$

ただし第 2 式における A は単振動の振幅であり，また第 2 式における X はばねの自然長からの伸び縮みではないので，$kX^2/2$ をばねの弾性エネルギーと解釈することはできない．なお $E \neq kA^2/2$ であることにも注意する．実際

$$\frac{1}{2}kX^2 = \left(\frac{1}{2}kx^2 - mgx\right) + \frac{(mg)^2}{2k}$$

なので $kA^2/2 = E + (mg)^2/k$.

注解

ポテンシャル・エネルギー $U = \frac{1}{2}kx^2 - mgx$ は，重力がなかった場合のポテンシャル $U = \frac{1}{2}kx^2$ を平行移動して得られる放物線を表している．よって鉛直なばねに対しても重りは角振動数 $\sqrt{k/m}$ の単振動を行うことが結論される．ところが振動の中心はポテンシャルの極小となる位置，すなわちつり合い点でなければならないから (2-10 節)，$x = mg/k$ である．

例——両側からひもで引っ張られた重りの微小振動

図 25 のように両端 AB を固定された，x 軸に沿う長さ l のひもの中心 $x = 0$ に質量 m の重りをつけ，重りを z 方向に距離 $a(\ll l)$ だけずらして静かに離した．ひもの張力を常に F とするとき，重りの微小振動を単振動に帰着させ，

1. 振動の角振動数
2. 重りの速さが最大となるときの位置と速さ

を求める問題を考える．位置 z で重りに働く合力は z 成分 F_z のみを持ち，$|z|(\leq a \ll l)$ の 1 次までの近似で

$$F_z = -2 \times F\frac{z}{\sqrt{(l/2)^2 + z^2}} \simeq -4\frac{F}{l}z$$

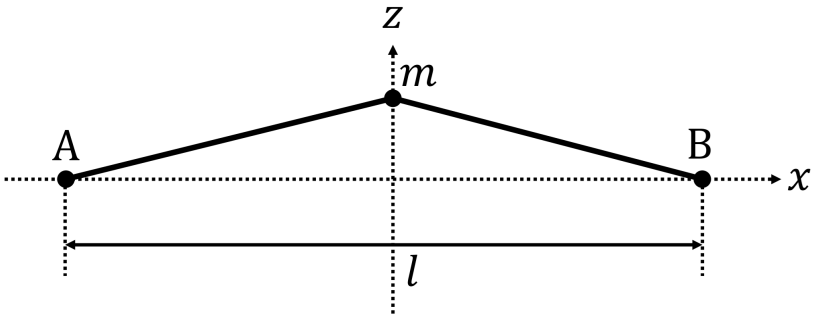


図 25　重力とひもの質量は無視できるとする

と表される．よって“ばね定数”は $k = 4\frac{F}{l}$ と同定され，角振動数は

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{\frac{F}{ml}}$$

と求まる．また単振動の振幅は a なので，時間の原点を適当に選べば重りの位置は $z = a\cos(\omega t)$ と表される．このとき速度

$$v = \dot{z} = a\omega\sin(\omega t)$$

の大きさは，位相 $\omega t = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ (n は整数) のとき最大値

$$v_{\max} \equiv a\omega = 2a\sqrt{\frac{F}{ml}}$$

をとり，このときの重りの位置は振動中心 $z = 0$ である．単振動のエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}ka^2, \qquad k \equiv 4\frac{F}{l}$$

からも同じ結論 ($z = 0$ で $|v| = v_{\max}$) が見て取れる．

2-7 2 物体の相互作用

運動量保存則

2 物体 m_1, m_2 (速度 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$) が相互作用しており，2 物体に対して外力は働かない場合を考える．このとき 2 物体間に働く内力 $\boldsymbol{f}_{12}, \boldsymbol{f}_{21}$ が作用・反作用の法則を満たすことを仮定すると［あるいは力学原理として要請すると］，全運動量 $\boldsymbol{P} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2$ は保存する：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{P} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{f}_{12} + \boldsymbol{f}_{21} = 0.$$

［なお物体が 3 つ以上あり，系に外力が作用する場合への一般化は 2-14 節参照.］

質量中心 (重心)

2 物体 m_1, m_2 (位置 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$) の**質量中心** (以下，簡単のために**重心**と呼ぶ) を

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{CM}} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}$$

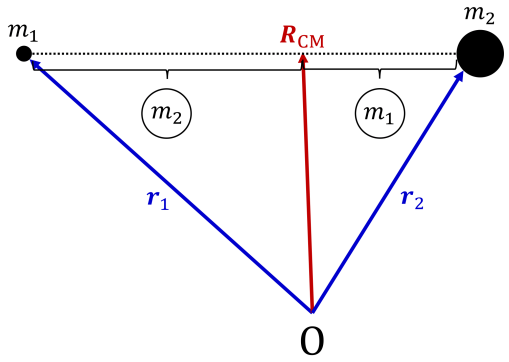


図 26　質量中心 (重心)

で定義する (添字 CM は center of mass の略)．これは 2 物体の位置 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ を質量の逆比に内分する点を表している (図 26 参照)．このとき全運動量 $\boldsymbol{P}$ の保存は，重心 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{CM}}$ が一定速度 $\boldsymbol{V}_{\mathrm{CM}} = \boldsymbol{P}/(m_1 + m_2)$ で等速度運動することを意味している．逆に全運動量は重心速度 $\boldsymbol{V}_{\mathrm{CM}}$ を用いて $\boldsymbol{P} = (m_1 + m_2)\boldsymbol{V}_{\mathrm{CM}}$ と表されるから，これは全質量が重心に集中したときの運動量に他ならない．

注解

質量中心は慣性中心とも呼ばれる [9, p.20]．「質量中心のことを重心ということもある．たいていの場合，重力は一様だと考えられているからである．(中略) 物体が非常に大きくて，重力が平行でないこと［あるいはより一般に，重力の非一様性］がきいてくるような場合には，どの点へ力を加えればつりあうかということは，簡単にはいえない．しかしその点は，質量の中心から少しはずれている．質量の中心と重心とを区別する必要があるのはこのためである」 [8, p.264]．

一様な重力場 $\boldsymbol{g}(= (0, 0, -g))$ の下では，質点系あるいは大きさを持つ物体全体に対する重力の位置エネルギーとモーメントはそれぞれ

$$
\begin{aligned}
U &= \sum mgz = MgZ, \\
\boldsymbol{N} &= \sum \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{g} = M\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{g}, \\
M &\equiv \sum m : \text{全質量}, \qquad \boldsymbol{R} = (X, Y, Z) \equiv \frac{\sum m\boldsymbol{r}}{M} : \text{重心の位置}
\end{aligned}
$$

と表される (2-14 節参照)．これらは「ともに全質点が質量中心に集中した場合の値に等しくなる．これが『質量中心』を『重心 (重力中心)』とよぶ理由である」(p.111)．

質量 (慣性質量) の定義について

我々は 2-2 節で後回しにした，質量の定義の問題に取り組める段階に達した．量の定義とは，単位量に対して何倍かが決められれば良い．そこで単位質量 m_0 の物体を用意し，原理的には未知の物体の質量 m と m_0 との比を実験的に決定できることを説明する．m_0 と m を同一直線上で衝突させると

$$
mv + m_0 v_0 = mv' + m_0 {v_0}', \qquad \therefore \frac{m}{m_0} = \frac{v_0 - {v_0}'}{v' - v}
$$

であり，右辺の量は衝突前後の速度を測定すれば求められる．

具体例

同一直線上 (x 軸にとる) を運動する物体 1 (質量 m_1，位置 x_1，速度 v_1)，物体 2 (質量 m_2，位置 x_2，速度 v_2) の相互作用を考える．ただし運動中に 2 物体の前後関係は変わらないと仮定する．このとき $x_1 < x_2$ としても一般性を失わない．

本稿では教科書の内容を多少アレンジした一般論から始めよう．2 物体が相互作用する場合のポテンシャル・エネルギーとエネルギー保存則は次のように考えれば良い．2 物体間に働く力は物体間の距離 $r = x_2 - x_1$ だけに依存するものと仮定し，その“動径方向成分”を $f(r)$ と書く．すなわち物体 1 に働く力の成分を $-f(r)$，物体 2 に働く力の成分を $+f(r)$ とする．このとき物体間の力に逆らって 2 物体をそれぞれ $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2$ だけ運ぶ仕事は

$$\mathrm{d}U = f(r)\mathrm{d}x_1 - f(r)\mathrm{d}x_2 = -f(r)\mathrm{d}r$$

なので，ポテンシャル・エネルギーは

$$U(r) = -\int^r f(r')\mathrm{d}r'$$

で与えられる (積分の下限は任意)[*14]．なお $x_1 > x_2$ の場合にも $r = x_1 - x_2$ と再定義すれば，全く同じ表式のポテンシャルが得られる．エネルギー保存則は運動方程式

$$m_1\dot{v}_1 = -f(r), \qquad m_2\dot{v}_2 = +f(r)$$

にそれぞれ $v_1\mathrm{d}t = \mathrm{d}x_1, v_2\mathrm{d}t = \mathrm{d}x_2$ をかけて辺々足すと，

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2\right) = -f(r)\mathrm{d}x_1 + f(r)\mathrm{d}x_2 = -\mathrm{d}U, \qquad \therefore \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2 + U = E = \mathrm{const.}$$

と導かれる．以上を踏まえて教科書の内容に即した議論に移ろう．

■例その 1 ——クーロン力による相互作用　物体 1 (電荷 q_1) と物体 2 (電荷 q_2) の間の Coulomb 相互作用を考えよう．［Coulomb 力は作用・反作用の法則を満たすので,］2 物体の全運動量は保存する．またエネルギー保存則におけるポテンシャル U は

$$f(r) = k\frac{q_1q_2}{r^2}, \qquad \therefore U(r) = -\int_\infty^r f(r')\mathrm{d}r' = k\frac{q_1q_2}{r}$$

と計算される．

■例その 2 ——ばねを介した相互作用　2 物体が自然長 l，ばね定数 k のばねでつながれている場合を考えよう．［ばねを介して物体 1,2 に働く力 $k\Delta l, -k\Delta l$ (ただし $\Delta l \equiv (x_2 - x_1) - l$) は“作用・反作用の法則”を満たすので,］2 物体の全運動量は保存する．またエネルギー保存則におけるポテンシャル U は

$$f(r) = -k\Delta l, \qquad \therefore U(r) = -\int_0^l f(r')\mathrm{d}r' = k\int_0^l \Delta l'\mathrm{d}(\Delta l') = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2$$

と計算される．

注解　相互作用エネルギー $U(r) = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2$ は，両端の物体の有無に関わらず，ばねの持つエネルギーと解釈できる．これを 2 物体に割り当てて，系のポテンシャル・エネルギーを $2 \times \frac{1}{2}k(\Delta l)^2$ と考えてはいけない．

[*14] 実際このとき物体 1,2 に働く力はそれぞれポテンシャルから $-\mathrm{d}U/\mathrm{d}x_1 = -f(r), -\mathrm{d}U/\mathrm{d}x_2 = f(r)$ と導かれる (2-10 節参照).

2-8 衝突の問題

衝突とは

「2 物体の相互作用において，相互作用時間がきわめて短いが，その間に大きな相互作用の働く場合を一般に『衝突』という」(p.60)．衝突の間の相互作用に比べて重力などの外力は無視できるから，**衝突の前後で運動量は保存するとして良い．**このことを，(一方の物体の) 運動量変化から相互作用の大きさを推定することにより確かめよう．例えば野球のボール (m =150g，v ∼100km/s) をバットで打ち返す場合，運動量変化は $\Delta p \sim 2mv \sim 10\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s}$ のオーダーなので，衝突時間を約 10 ミリ秒 (10^{-2}s) とすると［この衝突時間の評価が最も困難に見える］バットがボールをたたく平均の力は $\Delta p/\Delta t \sim 10^3$N の程度である．これに比べて重力 $mg \simeq 1.5$N は，確かに桁違いに小さい．

運動エネルギーの変化について

衝突では運動量が保存するのに対し，すぐ後に見るように全運動エネルギーは一般に減少する．そして「衝突にはビリヤード球のように［理想的には］目一杯はねかえるものから，粘土塊どうしの衝突のように固着・一体化するものまであ」(p.60) り，後者の一体化する場合は全運動エネルギーが最も減少する場合に当たる．なお失われた運動エネルギーは，［その行方を云々することは純粋な力学の範疇を逸脱するけれど，］例えば物体を変形する仕事や摩擦熱に費やされたと考えられる．

重心運動と相対運動

相互作用する 2 物体 m_1, m_2 (速度 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$) に対して

- 全質量：$M \equiv m_1 + m_2$，［換算質量］$\mu \equiv \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$
- 重心の速度：$\boldsymbol{V}_{\mathrm{CM}}$，相対速度：$\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$

とすると，2 物体の全運動エネルギーは常に

- 重心運動のエネルギー $\frac{1}{2}M\boldsymbol{V}_{\mathrm{CM}}{}^2$ と，
- 相対運動のエネルギー $\frac{1}{2}\mu\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}{}^2$

に分けられる：

$$\frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\boldsymbol{v}_2{}^2 = \frac{1}{2}M\boldsymbol{V}_{\mathrm{CM}}{}^2 + \frac{1}{2}\mu\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}{}^2. \tag{2}$$

2 物体の全運動エネルギーの表式 (2) の証明　重心系での速度

$$\boldsymbol{u}_1 \equiv \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{V}_{\mathrm{CM}}, \qquad \boldsymbol{u}_2 \equiv \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{V}_{\mathrm{CM}}$$

は $m_1\boldsymbol{u}_1 + m_2\boldsymbol{u}_2 = 0$ を満たすので (重心系で見た重心の速度はゼロ)，これらを用いて全運動エネルギーは

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\boldsymbol{v}_2{}^2 =& \frac{1}{2}m_1(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{V}_{\mathrm{CM}})^2 + \frac{1}{2}m_2(\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{V}_{\mathrm{CM}})^2 \\ =& \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\boldsymbol{V}_{\mathrm{CM}}{}^2 + \frac{1}{2}m_1\boldsymbol{u}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\boldsymbol{u}_2{}^2\end{aligned}$$

と書き換えられる．ここで重心系で見た運動エネルギー $\frac{1}{2}m_1\boldsymbol{u}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\boldsymbol{u}_2{}^2$ の部分を考えよう．上の重心系での速度 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ に $\boldsymbol{V}_{\mathrm{CM}} = \dfrac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2}$ を代入すると

$$\boldsymbol{u}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}$$

が得られる．(これは重心が 2 物体の位置を質量の逆比に内部すること

$$\boldsymbol{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}$$

から期待される結果である．またここから上記の $m_1\boldsymbol{u}_1 + m_2\boldsymbol{u}_2 = 0$ が直接的に確かめられる．) これを代入すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_1{\boldsymbol{u}_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{\boldsymbol{u}_2}^2 =& \frac{1}{2}m_1\left(-\frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}\right)^2 \\ =& \frac{1}{2}\mu{\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}}^2\end{aligned}$$

となるので，式 (2):

$$\frac{1}{2}m_1{\boldsymbol{v}_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{\boldsymbol{v}_2}^2 = \frac{1}{2}M{\boldsymbol{V}_{\mathrm{CM}}}^2 + \frac{1}{2}\mu{\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}}^2$$

を得る．

注解　換算質量の定義式は $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ とも書くことができる．
$m_1 \ll m_2$ のとき $\mu \simeq m_1$，$m_1 = m_2 \equiv m_*$ のとき $\mu = m_*/2$ である．

弾性衝突と非弾性衝突

衝突において全運動量，したがって重心速度 $\boldsymbol{V}_{\mathrm{CM}}$ は保存するため，全運動エネルギー (2) において「**重心運動のエネルギーは衝突前後で変化しない．それゆえ運動エネルギーの和が減少するとすればそれは相対運動のエネルギーだけである．**」(p.62).

- **(完全) 弾性衝突**
  運動エネルギーが，したがって相対運動のエネルギー $\mu{\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}}^2/2$ が保存される場合の衝突を言う．
- **非弾性衝突**
  運動エネルギーが減少する場合の衝突を言う．
  - **完全非弾性衝突**
    エネルギー損失が最大の場合，
    すなわち相対運動のエネルギー $\mu{\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}}^2/2$ がゼロになる場合の衝突を言う．
    このとき衝突後の相対速度はゼロだから，これは固着・一体化が起きる場合に相当する．

1 次元衝突のはねかえり係数 (反発係数)

そこで 1 次元的な，すなわち同一直線上で起こる衝突に対して衝突後の相対運動のエネルギー $\mu\boldsymbol{v}'_{\mathrm{rel}}/2$ が衝突前の値 $\mu{\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}}^2/2$ の e^2 倍になったとすると $(0 \le e \le 1)$,

$$e = \frac{|\boldsymbol{v}'_{\mathrm{rel}}|}{|\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}|}$$

となる．この e を**はねかえり係数 (反発係数)** と呼ぶ.

- $e = 1$ のとき運動エネルギーは保存し，弾性衝突となる．
- $0 \le e < 1$ のとき運動エネルギーは減少し，非弾性衝突に対応する．

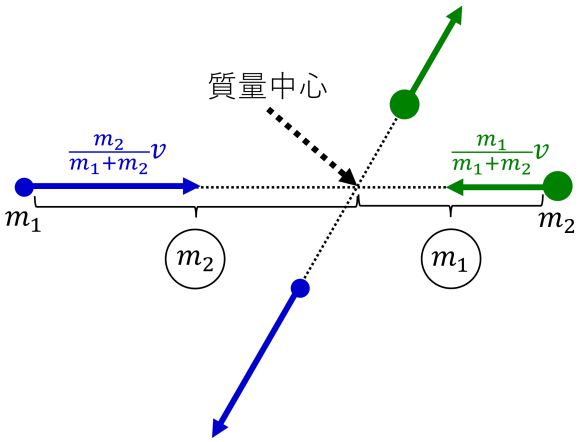


図 27　重心系で見た 2 体の弾性衝突

注解

ここで弾性衝突を詳しく考察しよう．エネルギー保存則と運動量保存則より，重心系では 2 体は衝突前後で速度の大きさを変えず，向きだけを変える (図 27 および 2-13 節を参照)[*15]．

以上の事実を用いると次のことが容易に確かめられる．すなわち 1 次元の弾性衝突に対して，

- 衝突する 2 物体の質量が等しいとき，衝突前後で 2 粒子の速度は交換される．
  したがって 2 物体を区別できなければ，それらはあたかも衝突せずにすり抜けたような運動をする．
- 静止する標的粒子 M に物体 m を速度 V で正面衝突させる．
  衝突後の m, M の速度はそれぞれ重心系で $-\frac{M}{m+M}V, \frac{m}{m+M}V$ なので，
  重心の速度 $\frac{m}{m+M}V$ を足すと実験室系での速度はそれぞれ

$$\frac{m-M}{m+M}V, \qquad \frac{2m}{m+M}V$$

  となる．よって衝突後に物体 m は $m < M$ のとき後退し，$m > M$ のとき前進する．

2 次元の衝突——散乱

2 次元の衝突を「散乱」と呼ぶ．

注解

■2 次元の衝突について　標的粒子の静止系 (実験室系という) を考える．衝突後の 2 物体の運動量を含む平面をとると，運動量保存則により衝突前の入射粒子の運動量は面に垂直な成分を持たないから，**実験室系においては**散乱は同一面内で起こる．教科書では実験室系での衝突の図 2-31(p.63) を指して「2 次元の衝突」と呼んでいる．

[*15] これは弾性衝突でありさえすれば，具体的な相互作用の形に依らずに保存則だけから言えることである．逆に巨視的な物体の衝突間の力は一般に不明であるため，弾性衝突を仮定しなければ衝突後の運動量についての情報は何ら引き出すことができず，この意味で衝突は一般に「解けない問題」だと言える．

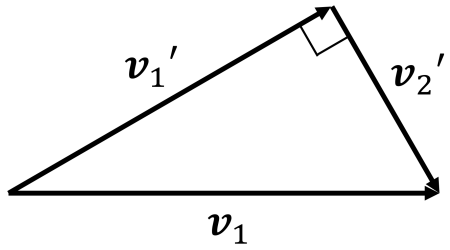


図 28　等しい質量を持つ 2 体の弾性衝突 (実験室系 $\boldsymbol{v}_2 = 0$)

■衝突と散乱について　衝突と呼ばれているものは必ずしも剛体球の衝突のように物体が接触した瞬間にのみ力が働くものではなく，一般には物体が有限の距離隔たる間のうちに常に互いに力を及ぼすような散乱である．(本稿では散乱の定義をこのように考える．) ところが物体間の目立った相互作用が行われるのは 2 体がある程度近づいたときに限られるような，短距離・短時間の相互作用に対しては，散乱を衝突のように見なし得る．

2 次元衝突の場合のはねかえり係数

物体の接触面の法線を $\boldsymbol{n}$ と書くと，衝突前後の相対速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}, \boldsymbol{v}'_{\mathrm{rel}}$ の接触面に垂直な成分はそれぞれ $\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} \cdot \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}'_{\mathrm{rel}} \cdot \boldsymbol{n}$ と書ける．これに対して 2 次元の散乱におけるはねかえり係数は

$$e = \frac{|\boldsymbol{v}'_{\mathrm{rel}} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} \cdot \boldsymbol{n}|}$$

と定義される (これは 1 次元衝突の場合の定義を含んでいる).

例——ビリヤード球の衝突

静止した小球 2 に小球 1 を速度 $\boldsymbol{v}_1$ でぶつける．弾性衝突を仮定すると，2 体が等しい質量 m を持つとき，散乱後の小球 1,2 の速度 $\boldsymbol{v}_1{}', \boldsymbol{v}_2{}'$ は 90° を成す．このことはエネルギー・運動量保存則の帰結であり，次のように説明するのが賢い．まず運動量保存則

$$m\boldsymbol{v}_1 = m\boldsymbol{v}_1{}' + m\boldsymbol{v}_2{}'$$

によれば，速度 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1{}', \boldsymbol{v}_2{}'$ は図 28 のように三角形を作る．このときエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}m{v_1}^2 = \frac{1}{2}m{v_1}'^{\,2} + \frac{1}{2}m{v_2}'^{\,2}$$

は三平方の定理より，これが $\boldsymbol{v}_1{}'$ と $\boldsymbol{v}_2{}'$ の成す角を 90° とする直角三角形になっていることを意味している．

2-9 3 次元での仕事と運動エネルギーの変化

力が一定の場合の仕事

2-5 節で述べたように x 方向の 1 次元運動に対しては，物体が微小な変位 Δx をする間に物体に働く力 F は近似的に一定と見なすことができ，このとき力のする仕事は $\Delta W = F\Delta x$ と定義された．これを拡張し，3 次元の場合には物体が微小距離 $\boldsymbol{\Delta r}$ だけ変位する間に力 $\boldsymbol{F}$(一定と見なす) のする仕事を

$$\Delta W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\Delta r}$$

と考える．これは力 $\boldsymbol{F}$ と変位 $\boldsymbol{\Delta r}$ の成す角を θ とすると，力の進行方向成分 $|\boldsymbol{F}|\cos\theta$ だけが仕事に寄与することを意味している ($\Delta W = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{\Delta r}|\cos\theta$)．この後すぐ見るように，ここで定義した仕事は 1 次元の場合 (2-5 節) と同様，物体の運動エネルギー変化をもたらすため，仕事と呼ぶにふさわしい量となっており，このことから仕事を $\Delta W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\Delta r}$ と定義したことが正当化される．

仕事率と運動エネルギーの変化

我々は力が単位時間にする仕事 (**仕事率**) を $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$ と定義したことになる．運動方程式 $\boldsymbol{F} = m\dot{\boldsymbol{v}}$ を考慮すると

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

となるので[*16]，単位時間に仕事はそれに等しいだけの運動エネルギー変化をもたらす．

2 次元・3 次元の場合の仕事の定義

無限小時間 $\mathrm{d}t$ のうちに力のする仕事は $(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v})\mathrm{d}t$ なので，時間 $t_1 \leq t \leq t_2$ において力のする仕事は

$$W = \int_{t_1}^{t_2} (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v})\mathrm{d}t = \int_{\mathrm{C(P\to Q)}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

と定義される．ただし最右辺の積分は時刻 t_1, t_2 における物体の位置 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ を結ぶ実際の運動の軌道 C に沿って行われ，力を一定と見なせる各区間 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ での仕事 $\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を，軌道上の各線要素 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ について足し合わせることを意味している (図 29 参照)．これは 1 次元の場合には 2-5 節における仕事の定義式 $W = \int_{x_1}^{x_2} F\mathrm{d}x$ に帰着し，逆に上式はその自然な一般化となっている．

注解

数学的には $W = \int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ という形の積分はベクトルの線積分と呼ばれ，概念的には上に述べたように，無限小の内積 $\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ のすべての線要素 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ に関する和を意味している．具体的な計算を行うには例えば時間を

[*16] 一般に数学公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A_i B_i) = \sum_i \left(\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}B_i + A_i\frac{\mathrm{d}B_i}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}$$

が成り立つ．これを $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{v}$ として用いると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}^2 = 2\boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}, \qquad \therefore m\boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

となる．

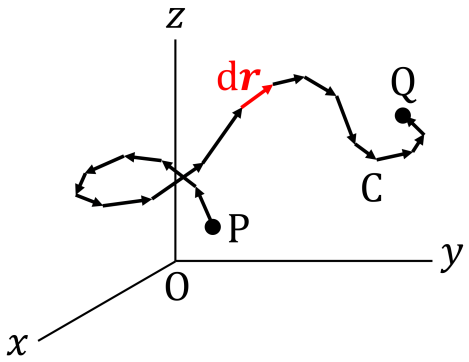


図 29　始点 P と終点 Q を結ぶ物体の軌道 C と線要素 d$\boldsymbol{r}$

積分変数にとって $W = \int_{t_1}^{t_2} (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}) \mathrm{d}t$ と書き換えれば良い．このとき被積分関数 $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$ は時間の何らかの関数 $P(t)$ だから，これは通常の積分の形 $\int_{t_1}^{t_2} P(t) \mathrm{d}t$ に帰着する．

仕事と運動エネルギーの関係 (3 次元の場合)

以上より単位時間当たりの仕事と運動エネルギーの関係

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$$

から，時間 $t_1 \leq t \leq t_2$ における仕事と運動エネルギーの関係

$$\frac{1}{2}m_2{v_2}^2 - \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 = \int_{\mathrm{C(P \to Q)}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

が導かれる．

2-10 力学的エネルギー保存則

重力の位置エネルギー再論

地上の一様な重力場 $\boldsymbol{g}$ の下で，なめらかで摩擦のない鉛直面内の曲線に沿って運動する物体 m を考える (図 30 参照)．曲線を含む鉛直面内に xy 平面を，y 軸が鉛直上向きとなるようにとる．この場合，垂直抗力 $\boldsymbol{N}$ は常に物体の変位 d$\boldsymbol{r}$ に直交するため，物体に対して仕事をせず，仕事と運動エネルギーの関係はこの場合にも「運動エネルギー $mv^2/2$」と「重力の位置エネルギー mgy」の和が一定というエネルギー保存則を与える：

$$\frac{1}{2}m_2{v_2}^2 - \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 = \int_{\mathrm{C}(\boldsymbol{r}_1 \to \boldsymbol{r}_2)} (m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -mg(y_2 - y_1), \qquad \therefore \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}m_2{v_2}^2 + mgy_2.$$

注解

垂直抗力が常に仕事をしないとは限らない．例えば 2-4 節の図 15 の系において三角台が動き出すのは，上に乗っている物体の垂直抗力が三角台に対して仕事をしているからである．

力学的エネルギーの保存しない例

他方，力学的エネルギーの保存しない例として，摩擦力の働く系を取り上げる．今，物体に初速 v_0 を与えて $x = 0$ から水平な x 軸に沿って運動させたところ，摩擦力により $x = l$ で止まったとしよう．なるほど，こ

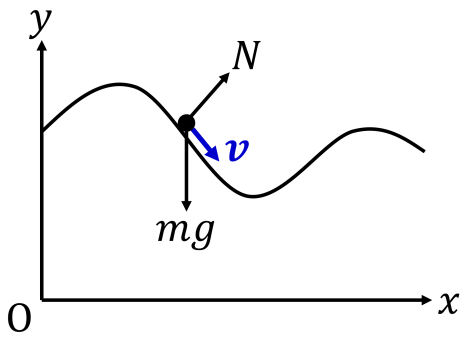


図 30　重力場中の束縛運動

のとき仕事と運動エネルギーの関係

$$0 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = -Rl \qquad \text{(動摩擦力の大きさ } R \text{ は一定)}$$

は一見すると，重力に対する同様の式 $m{v_0}^2/2 = mgh$ と似ている．しかし上式における Rl を位置エネルギーと解釈することはできない．実際，Rl は［——この項の解釈は力学の範疇を逸脱するけれど——］摩擦熱と解釈され，散逸して再び仕事に変わることはない．こうして位置 $x = l$ に達したことで運動エネルギーを生み出す能力を獲得したということにはならず，この意味で**摩擦力に対しては位置エネルギーを定義できず，また摩擦力があれば力学的エネルギーは保存しない．**［この後すぐ見るように数学的に言えば，力 $\boldsymbol{F}$ の位置エネルギーを $U(\boldsymbol{r}) = -\int^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ と定義できるためにはこの積分が径路に依らずに始点と終点の位置だけで決まる必要があるけれど，摩擦力に対してはこの条件が満たされない．］

重力と摩擦力のちがい——保存力と非保存力

重力に逆らって物体を運ぶ仕事は途中の径路に依らず始点と終点の位置だけで定まる値

$$-\int_{\mathrm{C}(\boldsymbol{r}_1 \to \boldsymbol{r}_2)} m\boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = mg(y_2 - y_1)$$

をとる．これに対して動摩擦力 $\boldsymbol{R}$ は大きさ R が一定で常に進行方向 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ と逆向きに働くから，摩擦力に逆らって物体を運ぶ仕事は

$$-\int_{\mathrm{C}(\boldsymbol{r}_1 \to \boldsymbol{r}_2)} \boldsymbol{R} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = R \int_{\mathrm{C}(\boldsymbol{r}_1 \to \boldsymbol{r}_2)} |\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = R \times (\text{径路長})$$

となり，径路に依存する．この結果は物体を引きずって運ぶとき，遠回りするほど多くの仕事をしなければならないことを意味しており，これは日常的な常識にも合致している．重力のように仕事が径路に依らない力を**保存力**，摩擦力のように仕事が径路に依る力を**非保存力**という．2 種類の力の違いはこの点に現れる．

注解

「摩擦のように，見かけ上たしかに非保存力とみえる力がある．［しかし］現在では，いちばんの基礎のところで粒子の間にはたらく本源的の力は，すべて保存力であるということが見出されている」 [8, p.201].

位置エネルギーの定義とエネルギー保存則

以上より保存力 $\boldsymbol{F}$ に対しては，始点 $\boldsymbol{r}_0$ を固定したとき積分径路に依らずに終点 $\boldsymbol{r}$ の 1 価関数として $\boldsymbol{r}_0$ を基準点とする位置エネルギー (ポテンシャル・エネルギー，ポテンシャル)

$$U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

を定義できる．このとき仕事と運動エネルギーの関係

$$\frac{1}{2}m_2{v_2}^2 - \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

は位置エネルギーと運動エネルギーの互換性

$$\frac{1}{2}m_2{v_2}^2 - \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 = U(\boldsymbol{r}_1) - U(\boldsymbol{r}_2)$$

を与えるため，上で定義した位置エネルギーは運動エネルギーを生み出す能力を持つことになり，これを位置エネルギーと定義したことが正当化される．また上式を

$$\frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + U(\boldsymbol{r}_1) = \frac{1}{2}m_2{v_2}^2 + U(\boldsymbol{r}_2)$$

と書き換えると，これはエネルギー保存則に他ならない．

注解

付録 D.7 では少し踏み込んで，保存力の場は渦無し場であることを説明する．

例—— Coulomb 力と万有引力 (重力) の位置エネルギー

原点に置かれた電荷 Q，質量 M から $\boldsymbol{r}$ だけ隔たる電荷 q，質量 m が受ける Coulomb 力と万有引力 (重力) は，力の動径方向 ($\boldsymbol{r}$ 方向) 成分

$$F_r = \frac{\alpha}{r^2}, \qquad \alpha = \begin{cases} kqQ & (\text{Coulomb 力に対して}) \\ -GmM & (\text{重力に対して}) \end{cases}$$

に $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトル $\boldsymbol{r}/r$ をかけて

$$\boldsymbol{F} = \frac{\alpha}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

と表現できる．証明抜きに言うと，これらの力は保存力であり位置エネルギーが定義できる．そこで位置エネルギー

$$U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \frac{\alpha}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

を計算しよう．$\boldsymbol{r}^2 = r^2$ を両辺微分して得られる関係 $\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = r\mathrm{d}r$ を用いると[*17]

$$U(\boldsymbol{r}) = -\int_{r_0}^{r} \frac{\alpha}{r^2}\mathrm{d}r \tag{3}$$

[*17] あるいは

$$2r\mathrm{d}r = \mathrm{d}(r^2) = \mathrm{d}\left(\sum_i {x_i}^2\right) = 2\sum_i x_i \mathrm{d}x_i = 2\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

としても良い．

となる．これは動径方向の変位しか積分に寄与しないことを意味している．このことは半径 r が一定の球面上での変位は力に直交しているため，球面上での変位には仕事を必要としないことから理解できる．あらかじめこのことを考慮して，最初から上式 (3) を書き下しても良い．積分を実行すると

$$U(\boldsymbol{r}) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha}{r_0}$$

となる．ところで物理的に意味のあるのは位置エネルギーそのものではなく位置エネルギーの差だから，位置エネルギーには定数を付け加えるだけの不定性がある[*18]．これは基準位置を任意に選ん良いことを意味している．そこで基準位置を無限遠 $r_0 = \infty$ に選んで右辺第 2 項を消すのが便利である．以上より本節の最終的な結果として，位置エネルギー

$$U(\boldsymbol{r}) = \frac{\alpha}{r}, \qquad \alpha = \begin{cases} kqQ & (\text{Coulomb 力に対して}) \\ -GmM & (\text{重力に対して}) \end{cases}$$

を得る．

注意　1 次元運動に関して 2-7 節で見たように $U = \alpha/r$ は本来 2 体の相互作用エネルギーであるけれど，今の場合は一方が原点に固定されているため，これをもう一方の物体の位置エネルギーと解釈できる．

注解

「証明ぬきに言うと，クーロン力や重力は保存力で位置エネルギーが定義できる」(p.73) ことについて，その証明と説明を付録 D.8 にて行う．

力とポテンシャル

ここでは簡単のために 1 次元の場合を考える．保存力 F のポテンシャルが $U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\mathrm{d}x'$ によって定義されることは，逆に力はポテンシャルから

$$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$$

と導かれることを意味している．これは定性的には力はポテンシャルの減る向きに働くこと［そして力はポテンシャルの勾配 $|\mathrm{d}U/\mathrm{d}x|$ が急になる場所ほど大きくなること］を表している．

■つり合いの安定と不安定　ポテンシャルが極値をとる位置 x は，力がゼロになるつり合いの位置である：

$$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = 0.$$

- ポテンシャルが極小となる点は**安定なつり合い**の位置である．
  - 実際，図 31 のようにポテンシャルが極小となる点 x_1 では，
    そこから左右に少し移動したときに物体を位置 x_1 に戻す向きに力が働く．
- ポテンシャルが極大となる点は**不安定なつり合い**の位置である．
  - 実際，図 31 のようにポテンシャルが極大となる点 x_2 では，
    そこから左右に少し移動したときに物体を位置 x_2 から遠ざける向きに力が働く．

[*18] 位置エネルギーに任意の定数を加えても，仕事とエネルギーの互換性，およびエネルギー保存則 (前節) は影響されない．あるいは物理的に意味のあるのは位置エネルギーそのものではなく力であり，次節で見るように位置エネルギーに定数を加えてもそこから導かれる力は変わらない．

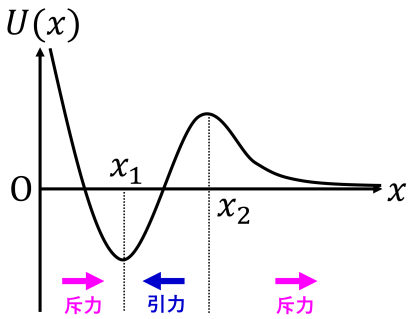


図 31　ポテンシャルと力 (1 次元)

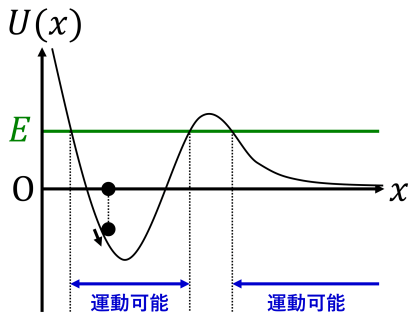


図 32　ポテンシャルと運動 (1 次元)

注解

■3 次元の場合　保存力 $\boldsymbol{F}$ のポテンシャル $U(\boldsymbol{r})$ を定義する式

$$\mathrm{d}U = -\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -F_x\mathrm{d}x - F_y\mathrm{d}y - F_z\mathrm{d}z$$

は，逆に力がポテンシャルの勾配

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}U$$

として与えられることを意味している．実際，例えば $\mathrm{d}y = \mathrm{d}z = 0$ のときこれは $\mathrm{d}U = -F_x\mathrm{d}x$ を与え，その $\mathrm{d}x$ との比は偏微分 $\partial U/\partial x$ に他ならないから，$F_x = -\partial U/\partial x, \mathrm{etc.}$ である．これは 1 次元の場合の関係 $F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$ の自然な一般化に当たり，やはり力はポテンシャルの低くなる向きに働き，ポテンシャルが急激に変化する場所ほど強い力が働くことを表している．(以上，付録 C.8 と付録 C.10.3 を参照．)

■ポテンシャルの図の見方 (1 次元の場合)　ポテンシャルを表す曲線 $U = U(x)$ を坂道に例えたときに，物体は定性的には坂道を転がる球と同様の運動をすることになる．この球を x 軸に投影した点が物体の実際の位置を与える．全エネルギー E が与えられたとき，物体の運動可能な範囲は $U(x) \leq E$ を満たす領域に限られる (図 32 参照).

例——いわゆる 2 次元等方性調和振動子

xy 面内の力 $\boldsymbol{F} = -k(x, y)$ はポテンシャル $\frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$ を持つので保存力である．

2-11 円運動

円運動の速度と加速度

本節は教科書の内容を多少アレンジしてまとめる．2 次元平面上の運動を考え，図 33 のように平面上に極座標 (r, ϕ) を導入し，各点において座標 r, ϕ の増大する方向の単位ベクトル

$$\boldsymbol{e}_r = (\cos\phi, \sin\phi), \qquad \boldsymbol{e}_\phi = (-\sin\phi, \cos\phi)$$

を基底ベクトルにとる．ここで基底 $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\phi$ に関する速度と加速度の成分を調べる．まず基底ベクトルの向きは場所ごとに異なっているため，質点の位置における基底は質点の移動に伴って変化することに注意しよう．その時間変化率は

$$\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi, \qquad \dot{\boldsymbol{e}}_\phi = -\dot{\phi}\boldsymbol{e}_r$$

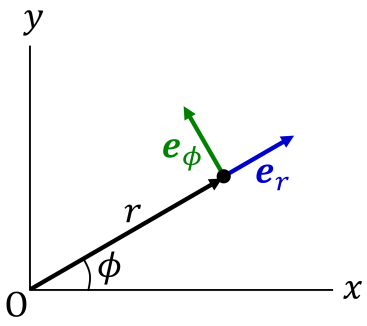


図 33　平面極座標

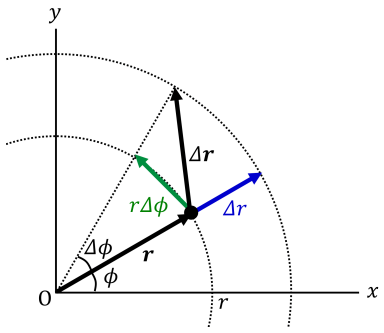


図 34　速度 (変位) の極座標成分

と計算される．

参考　これは図形的に期待される結果である．すなわち図 33 を見ると，r 方向の変位は基底の方向変化をもたらさないのに対し，ϕ の値のわずかに異なる点における基底ベクトルを比べると，$\boldsymbol{e}_r$ は $\boldsymbol{e}_\phi$ 方向に変化し，$\boldsymbol{e}_\phi$ は $-\boldsymbol{e}_r$ 方向に変化することが読み取れる．またこの結果は基底ベクトルを角度 ϕ で微分すると，$\boldsymbol{e}_r \to \boldsymbol{e}_\phi \to -\boldsymbol{e}_r \to -\boldsymbol{e}_\phi \to \cdots$ のように向きが 90 度ずつ回転してゆくことを意味している．

質点の位置ベクトルは $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ なので，ここから速度は

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi$$

と計算される．

図形的解釈　これは図 34 のように微小時間 Δt における座標 r, ϕ の変化をそれぞれ $\Delta r, \Delta\phi$ と書くと，変位の $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{\phi}$ 方向成分はそれぞれ $\Delta r, r\Delta\phi$ であり，その時間 Δt との比に他ならない速度成分は $\dot{r}, r\dot{\phi}$ となることから理解できる．

さらに加速度は

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\boldsymbol{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\boldsymbol{e}_\phi$$

と表される．

興味の持たれる 1 つの場合として，$r = \text{const.}$ の円運動を調べよう．ただし角速度 $\omega(t) \equiv \dot{\theta}(t)$ が一定であるという制約は設けない．例えばすぐ後で取り上げるような円周に沿う鉛直面内の運動は，円運動ではあるが等速円運動ではない．そこで我々は等速円運動に限らず，円運動一般を考察の対象とする．このとき速度は $\boldsymbol{v} = r\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi$ となるので，円の接線方向を向く．その速度成分を $v = r\omega$ と書く (v は正負の値をとり得る)．加速度は $\boldsymbol{a} = -r\dot{\phi}^2\boldsymbol{e}_r + r\ddot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi$ となる．よって $(-\boldsymbol{e}_r)$ は向心方向の単位ベクトルであることにも注意すると，等速円運動に限らず，円運動一般に対して加速度は次のように表される：

$$\boldsymbol{a} = a_{\text{向心}}(-\boldsymbol{e}_r) + a_{\text{接線}}\boldsymbol{e}_\phi, \qquad \begin{cases} a_{\text{向心}} = r\omega^2 = \dfrac{v^2}{r}(= v\omega) \\ a_{\text{接線}} = \dot{v}(= r\dot{\omega}) \end{cases}$$

なお言うまでもなく，ここまでの話は数学的事実であって物理法則ではない．

注解

■運動方程式の平面極座標成分　加速度の平面極座標成分を与える式

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\boldsymbol{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\boldsymbol{e}_\phi$$

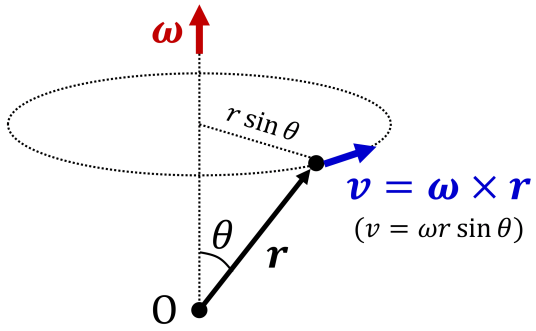


図 35　角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$

の各項に対する物理的な解釈を述べる．以下では角運動量の方程式 (2-12 節) と，非慣性形における慣性力 (2-13 節) の知識が必要となる．粒子の速度と加速度を動径方向 (方向単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$) と角度方向 (方向単位ベクトル $\boldsymbol{e}_\phi$) に分解すると

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi, \qquad \ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\boldsymbol{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\boldsymbol{e}_\phi$$

となるので，$\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\phi$ を基底とする座標系における運動方程式について

- $\boldsymbol{e}_r$ 方向

$$m\ddot{r} = F_r + mr\dot{\phi}^2, \qquad mr\dot{\phi}^2\text{: 遠心力.}$$

  - 中心力の場では角運動量 $mr^2\dot{\phi} = l$ (一定) なので，遠心力は $mr\dot{\phi}^2 = \frac{l^2}{mr^3}$ となる．これは遠心力ポテンシャル $\frac{l^2}{2mr^2}$ から導かれる．

- $\boldsymbol{e}_\phi$ 方向

$$mr\ddot{\phi} = F_\phi - 2m\dot{r}\dot{\phi}, \qquad -2m\dot{r}\dot{\phi}\text{: Coriolis 力.}$$

  - 一般に

$$\dot{l} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\phi}) = mr(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})$$

    なので，これは角運動量と力のモーメントの関係

$$\dot{l} = rF_\phi$$

    を与える．

    → 　中心力 ($F_\phi = 0$) に対して $\dot{l} = 0$ (角運動量の保存).

■角速度ベクトル　物体の回転運動に対し，向きが回転軸方向に一致し大きさが角速度に一致するような角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を導入する．ただし回転軸に沿う $\boldsymbol{\omega}$ の向きは，右ネジを回転の向きに回したときに右ネジが進む向きに選ぶ．このとき回転の速度成分の表式 $v = r\omega$ は，回転軸上に原点を持つ位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ に対して

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

と一般化される (図 35 参照，ベクトル積については付録 C.10.1 参照) [9, pp.21–22].

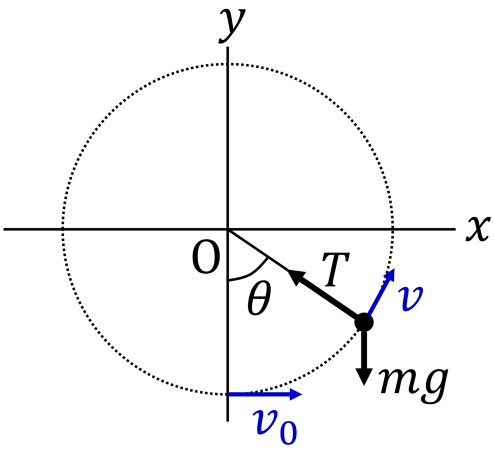


図 36　糸に取り付けられた重りの円運動

円運動の方程式

力の向心成分と接線成分をそれぞれ $F_{向心}, F_{接線}$ とすると，運動方程式は

$$m\frac{v^2}{r} = F_{向心}, \qquad m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_{接線}$$

となる．ところで力の向心成分は円運動に対して仕事をしないから $((-F_{向心}\boldsymbol{e}_r)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0)$，エネルギー保存則は運動方程式の接線成分だけから導かれる．よって実際に問題を解く際には，運動方程式の向心成分とエネルギー保存則を独立な式としていきなり書き下し，それらを連立すれば良い．

■ひとつの例　図 36 のように一端を原点 O に固定された長さ l の糸の他端に質量 m の重りを取り付けて，鉛直面内で円運動させる．重りが最下点にあるときに初速 v_0 を与えたとすると，糸の張力を T として

$$\text{運動方程式の向心成分}: m\frac{v^2}{l} = T - mg\cos\theta, \qquad \text{エネルギー保存則}: \frac{1}{2}mv^2 - mgl(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}m{v_0}^2$$

となる．2 式から v^2 を消去すると，糸の張力は

$$T = m\frac{{v_0}^2}{l} - mg(2 - 3\cos\theta)$$

と求まる．当然期待されるように，$0 \le \theta \le \pi$ の範囲では運動エネルギーと糸の張力は θ の減少関数となっており，糸がたるまずに重りが円運動を続ける条件は，最高点 $\theta = \pi$ において $mv^2/2 \ge 0$ かつ $T \ge 0$ となることである．これは具体的には

$$0 \le \frac{1}{2}mv^2\Big|_{\theta=\pi} = \frac{1}{2}m{v_0}^2 - 2mgl, \qquad \therefore v_0 \ge 2\sqrt{gl},$$
$$0 \le T|_{\theta=\pi} = m\frac{{v_0}^2}{l} - 5mg, \qquad \therefore v_0 \ge \sqrt{5gl}$$

なので，初速度に対する条件 $v_0 \ge \sqrt{5gl}$ を与える．［このように最高点に達するのに十分な運動エネルギーを与えただけでは，糸がたるまない条件は必ずしも満たされない．］

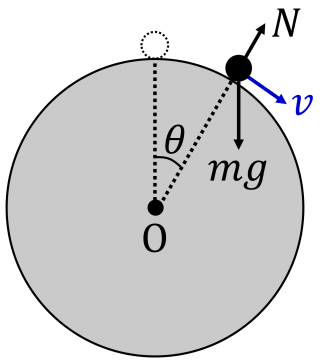


図 37　球面を滑り下りる質点

例——球面を滑り下りる質点

図 37 のように半径 r の滑らかな球面の天頂から質点が滑り始めたとき，質点はどこで球から離れるかを考えよう．ただし初速度はゼロとして良い．図 28 の角度 θ を導入すると

$$\text{運動方程式 (向心成分)}\quad m\frac{v^2}{r} = mg\cos\theta - N,$$
$$\text{エネルギー保存則}\quad \frac{1}{2}mv^2 = mgr(1-\cos\theta)$$

なので，2 式から v を消去して垂直抗力 N の角度 θ 依存性

$$N = mg(3\cos\theta - 2)$$

を得る．質点が接触している条件は $N \geq 0$ なので，$\cos\theta = 2/3$，すなわち天頂より $r/3$ だけ下の位置で質点は球面から離れる．

例——単振り子

図 36 において安定なつり合いの位置 $\theta = 0$ の周りの微小振動を考える (**単振り子**)．運動方程式において微小角 θ の 1 次まで考慮して単振り子の周期を求めよう．接線方向の運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg\sin\theta$$

である．［ここで速度 v は円周上の各点での接線方向の速度だから，これは水平方向の座標 x ではなく，$\theta = 0$ から測った円周に沿う距離 $x = l\theta$ の変化率と見なせる[*19]．そこで］左辺において $x = l\theta$，$v = l\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ とし，右辺において 1 次近似 $\sin\theta \simeq \theta$ (付録 C.5 の Taylor 展開を参照) を行うと，単振動の方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

を得る．単振り子の周期は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

となる．こうして単振動の近似では，振り子の周期は振幅に依らない (**振り子の等時性**)．

[*19] もっとも θ の 1 次までの近似では，これを水平方向の座標 $x = l\sin\theta$ と区別することに意味はないけれど．

注解

- これは 2-6 節の冒頭で述べた，つり合い点周りの微小振動は単振動で近似できることの 1 例である．
- 単振り子の周期 $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ は確かに時間の次元を持っており，
  定性的には周期は糸の長さ l が長いほど長く，
  また地表面の重力場 g の大きい星ほど短くなることを表している．
  l と g のどちらが分子・分母に来るかを忘れた場合，以上のことから正しい結果を復元できる．

なお振り子の等時性は単振動の近似に特有である．実際，厳密には周期 T は傾き θ の最大値 θ_0 に以下のように依存する．

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K\left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}{\theta_0}^2 + \cdots\right).$$

ここに

$$K(k) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\xi}}$$

は第 1 種の完全楕円積分と呼ばれる．周期の式の最右辺第 1 項は単振動の近似における結果であり，第 2 項以降がより高い近似に進んだときに現れる振れ幅 θ_0 の 2 次以上の補正を与えている (付録 D.9 参照) [9, pp.30–32].

2-12 重力の作用のもとでの運動

角運動量と力のモーメント，中心力と角運動量の保存

万有引力 (重力) の下での運動に先立ち，角運動量と力のモーメントに関する一般論を展開する．本節ではベクトル積の知識を利用し (付録 C.10.1 参照)，教科書の内容を多少アレンジしてまとめる．まず質点 m (位置 $\boldsymbol{r}$，速度 $\boldsymbol{v}$) とそれに作用する力 $\boldsymbol{F}$ に対して，

- 原点周りの**角運動量**　$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times (m\boldsymbol{v})$
- 原点周りの**力のモーメント**［トルク］　$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$

を定義する．すると運動方程式 $m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F}$ から**角運動量の方程式**

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{N}$$

が導かれる．

導出　$\dot{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{v} \times (m\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{r} \times (m\dot{\boldsymbol{v}}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{N}$.

ゼロでない力 $\boldsymbol{F}$ が働いている場合でも，万有引力のように力がその中心方向を向くような**中心力**であれば，力の中心を原点に選んだとき力 $\boldsymbol{F}$ と位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ が平行 (反平行を含む) となるので，力のモーメント $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ はゼロになる．よって**中心力では角運動量が保存する**：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{N} = 0, \qquad \therefore \boldsymbol{l} = \mathrm{const.}$$

ところで位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times (m\boldsymbol{v})$ と直交するので

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{l} = 0$$

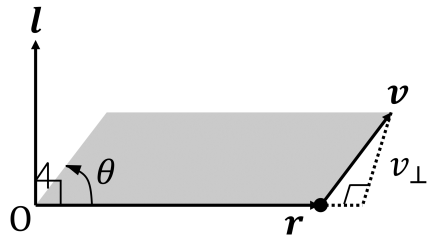


図 38　角運動量

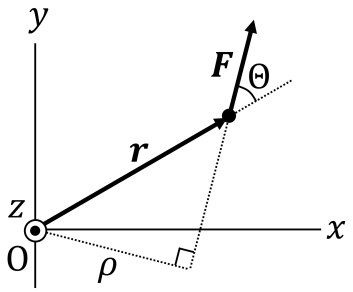


図 39　力のモーメント

となる．これは原点を含み $\boldsymbol{l}$ に垂直な平面の方程式となっており，今の場合 $\boldsymbol{l}$ は定ベクトルなので，時間変化しない一定の平面を表す．質点の位置 $\boldsymbol{r}$ は常にこの平面内に含まれている．

そこで力の中心を原点として質点が運動を行う平面を xy 平面に選ぶと，角運動量と力のモーメントは z 軸に平行となる．その z 成分

$$l = m(xv_y - yv_x), \qquad N = xF_y - yF_x$$

の意味は次のように図形的に解釈できる (図 38，図 39 参照).

- $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$ の成す角を θ，$\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{r}$ に垂直な成分を $v\sin\theta \equiv v_\perp$ とすると

$$l = mrv\sin\theta = mrv_\perp.$$

- $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{F}$ の成す角を Θ，原点から力 $\boldsymbol{F}$ の作用線に下ろした垂線の長さ
(力 $\boldsymbol{F}$ の**原点に対する腕の長さ**) を $r\sin\Theta \equiv \rho$ とすると

$$N = rF\sin\Theta = \rho F.$$

［あるいは $\boldsymbol{F}$ の $\boldsymbol{r}$ に垂直な成分を $F\sin\Theta \equiv F_\perp$ とすると $N = rF_\perp$ とも表される．］

★ 角度 θ, Θ は $\boldsymbol{r}$ を基準として反時計回りを正としており，時計回りのときには負と考える．
したがって

$$\theta < 0 \quad \Rightarrow \quad v_\perp < 0, \qquad\qquad \Theta < 0 \quad \Rightarrow \quad \rho < 0.$$

あるいは角度 θ, Θ を常に正と定義する場合には，角運動量と力のモーメントの成分 l, N は
それぞれ，$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{F}$ の張る平行四辺形の面積を絶対値として，
$\boldsymbol{v}$ または $\boldsymbol{F}$ が z 軸正の側から見て $\boldsymbol{r}$ を反時計回りに回す向きのときには符号を正，
時計回りに回す向きのときには符号を負としたものである．

注解

中心力の下で質点 m が力の中心を含む一定平面上で運動することは，教科書ではより直観的な理解を促す仕方で初めに説明されている (図 38 を併せて参照).

ある時刻の m の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$，速度を $\boldsymbol{v}$ とし，その 2 個のベクトル ($\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$) のはる平面を S とする．S は原点を含む．微小時間 Δt 後も m は平面 S 上にあり，その位置は $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}\Delta t$ で与えられるが，

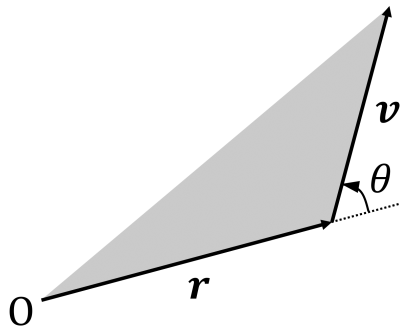


図 40　面積速度

この時刻の重力も m から原点方向を向き平面 S 上にあるので加速度も平面 S 上にあり，結局 m はいつまでたっても平面 S から離れることはない．(p.83)

そこであらかじめ質点が運動を行う平面を xy 平面に選び，角運動量と力のモーメントをその z 成分

$$l = m(xv_y - yv_x) = mrv\sin\theta = mrv_\perp, \qquad N = xF_y - yF_x = rF\sin\Theta = \rho F$$

で定義している．

面積速度とケプラーの第 2 法則

図 40 のように動径ベクトル $\boldsymbol{r}$ が単位時間に掃く面積

$$h = \frac{1}{2}rv\sin\theta = \frac{l}{2m}$$

を**面積速度**と呼ぶ．角運動量 l の保存は面積速度 h が一定であることを意味する．特に万有引力の下での運動に対して面積速度が一定となることは **Kepler の第 2 法則**と呼ばれる．

人工衛星の運動方程式

これ以降は地球の周りの人工衛星の運動や太陽の周りの地球の運動などを想定して，巨大質量 M による万有引力 (重力) の下での質点 m の運動を論じる．球対称な天体 M の中心を原点として質点 m の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ と書くと，質点 m に働く重力は，M の全質量が原点に集中していると見なした場合の力

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

に一致する (証明は 2-12 節の最後に与える)．

注解—— 2 体問題の 1 体問題への帰着

重力により相互作用する 2 体 m, M (位置 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$) はどちらも互いの重心の周りに運動するけれど，$M \gg m$ の場合には物体 M の位置は近似的に重心の位置に一致し，物体 M は静止していると見て良い．

このような近似的な取り扱いを行わない場合は次のように議論できる．すなわち 2 体が相対位置ベクトル

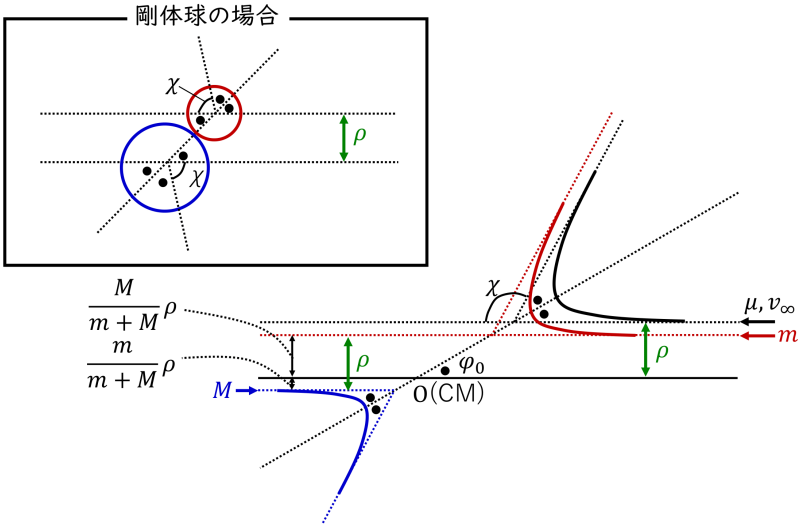


図 41　中心力 (力の中心 O) の下で換算質量 μ を持つ粒子が散乱されるとき，O の遠方では粒子は等速直線運動 (速度 v_∞) に漸近し，この漸近線と力の中心の距離 ρ を衝突パラメータと呼ぶ．また O 周りの角運動量が保存し，その値は無限遠において幾何学的に $m\rho v_\infty$ と評価できる．さて，粒子 μ が黒い実線のように入射し角度 χ の方向に散乱されるとき，重心系における 2 体問題に戻ると，O を重心 (CM) として 2 粒子の漸近線は距離 ρ だけ隔たっており，散乱により 2 粒子はともに角度 χ だけふれる．

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ で決まる内力 $\pm\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ を介して相互作用している場合を考えると，運動方程式は

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = +\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}), \tag{4}$$
$$M\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \tag{5}$$

と書ける (ただし作用・反作用の法則を考慮した)．ここで $\frac{M}{m+M}$(式 (4)) $-$ $\frac{m}{m+M}$(式 (5)) を作ると，

$$\mu\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}), \qquad \mu \equiv \frac{mM}{m+M} : \text{換算質量}$$

となる．これは 2 体の相対位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の時間発展が，$\boldsymbol{r}$ を位置ベクトルに持ち，2 体の換算質量 μ を質量に持つような仮想的な質点がもとの力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ の下で行う運動として与えられることを意味している．ここから 2 体の重心系での運動

$$\boldsymbol{r}_1(t) = \frac{M}{m+M}\boldsymbol{r}(t), \qquad \boldsymbol{r}_2(t) = -\frac{m}{m+M}\boldsymbol{r}(t)$$

が見出される (図 41 参照)．このように 2 体問題を 1 体問題に帰着させて解くことができる．なお任意の慣性基準系に対する運動は，重心系で見た 2 体の運動に，重心の一様な並進運動を重ね合せて得られる．((式 (4))+(式 (5)) から分かるように，外力をゼロと仮定しているため，系の全運動量したがって重心速度は一定である (2-7 節)．)

以上，2 体問題と等価な 1 体問題について，Newton 力学を用いて説明した．実はここで述べた事情の一端は，2-8 節で学んだように 2 体の全運動エネルギーを $\mu {v_{\rm rel}}^2/2 + \text{const.}$ と書き換えられることの中にも現れている [9, pp.34–35]．

エネルギー保存則

2-10 節において力学原理に基づいて証明したように，エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r^2} = E = \text{const.}$$

が成立する．

円軌道の場合

簡単のため，はじめに円軌道の場合を調べる．$r = a$ の円運動に対しては $l = mav = ma^2\omega$ だから，角運動量保存則は円運動が $v = a\omega = \text{const.}$ の等速円運動でなければならないことを意味する．これは円運動の接線方向の運動方程式 $m\dot{v} = 0$ からも理解できる．向心方向の運動方程式

$$m\frac{v^2}{a} = G\frac{Mm}{a^2}$$

より $v = \sqrt{GM/a}$ なので，円運動の周期 T は

$$T = \frac{2\pi a}{v} = 2\pi\frac{a^{3/2}}{\sqrt{GM}}, \qquad \therefore \frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

を満たす．このように比 a^3/T^2 が質点 m に依らない定数——太陽系の場合，惑星の種類に依らない定数——となっていることは **Kepler の第 3 法則**と呼ばれる．なお全エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{GM}{a}}\right)^2 - G\frac{Mm}{a} = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{a}$$

と計算される．

注解

円軌道は後で見る楕円軌道の中に，離心率 $e \to 0$ の極限として含まれている．ここで見たように円運動を仮定した場合の運動方程式を等速円運動が満たしていること自体，そのような運動が実際に可能であることを示している．

人工衛星の運動範囲

［本稿では 2-11 節の注解で既に示したように，中心力の場の下では保存する角運動量 l を用いて，遠心力ポテンシャルは r だけの関数として $l^2/2mr^2$ と表される．そして r 方向の運動は，もとの中心力のポテンシャル $U(r)$ に遠心力ポテンシャル $l^2/2mr^2$ を加えた有効ポテンシャル

$$U^*(r) = U(r) + \frac{l^2}{2mr^2}$$

を用いて記述できる (運動方程式が $m\ddot{r} = -\mathrm{d}U^*/\mathrm{d}r$ となるという意味で)．よって万有引力のポテンシャル $U(r) = -GMm/r$ に対しては,］r 方向の運動範囲はポテンシャル

$$U^*(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

に対して $E \geq U^*(r)$ となる r の範囲として以下のように調べることができる (図 42 参照)．

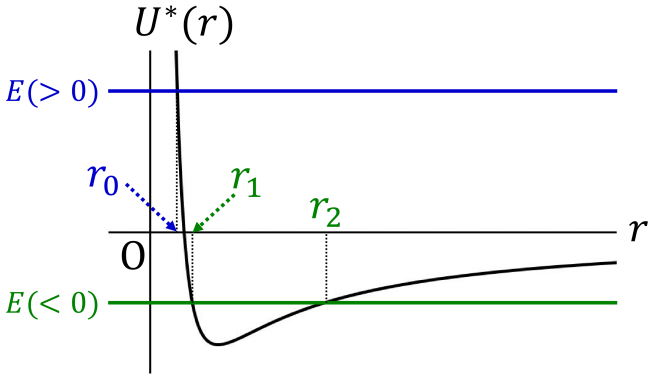


図 42　Kepler 問題の有効ポテンシャル

- $E<0$ のとき　運動範囲：$r_1 \le r \le r_2$ (有限).
  - 楕円軌道 (離心率 $e<1$) に対応 (後述).
- $E \ge 0$ のとき　運動範囲：$r_0 \le r$ (無限遠にまで行き得る).
  - $E=0$ は放物線軌道 (離心率 $e=1$) に，$E>0$ は双曲線軌道 (離心率 $e>1$) に対応 (後述).

■脱出速度　地上 $r=R$ で初速度 v_0 を与えた質量 m が重力を振り切って無限遠に逃げられる条件は，無限遠での運動エネルギー ${mv_\infty}^2/2$ を定義できること

$$0 \le \frac{1}{2}m{v_\infty}^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2 - G\frac{Mm}{R}, \qquad \therefore v_0 \ge \sqrt{2\frac{GM}{R}} = \sqrt{2gR}$$

である．右辺は重力による束縛からの脱出に必要な最小限の速度であり，**脱出速度**と呼ばれる．この結果は［その導き方により］初速度の向きに依らない．

$U^*(r)$ の概形から得た無限遠に到達できる条件 $E \ge 0$ は，再び同じ条件 $\frac{1}{2}m{v_0}^2 - G\frac{Mm}{R} \ge 0$ を与える．

注解

有効ポテンシャル

$$U^*(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

の概形 (図 42) は，r の大きい範囲で重力のポテンシャル $-GmM/r$ が支配的となって引力となり，r の小さい範囲で遠心力ポテンシャル $l^2/2mr^2$ が支配的となって斥力となることを示している．ただし遠心力は非慣性系 (r 軸) に現れる見かけの力である (2-13 節).

軌道形の決定

以上の問題設定の下で，重力場中の質点 m の軌道は一般に円すい曲線

$$r \pm ex = L, \qquad \therefore (1-e^2)x^2 \pm 2eLx + y^2 = L^2 \tag{6}$$

となることが示される．ただし近日点 (近地点) ［$U^*(r)$ の図 42) において動径 r が最小となる点，図 43 参照］が x 軸上に来るように座標軸の向きを選んでおり，また

$$\mu \equiv GMm, \qquad L \equiv l^2/m\mu, \qquad e: \text{離心率}, \quad 1-e^2 = -\frac{2}{m}\left(\frac{l}{\mu}\right)^2 E$$

である［l と E(または L と e) が積分定数］.

- $E<0$ のとき　$e<1$　→　楕円軌道.
- $E=0$ のとき　$e=1$　→　放物線軌道.
- $E>0$ のとき　$e>1$　→　双曲線軌道.

以上の導出方法はやや独特であり興味を惹く：
軌道の式 (6) の導出　$\mu\equiv GMm$ と略記すると，運動方程式より

$$\begin{aligned}
l\dot{v}_x =& -\frac{\mu x}{r^3}\cdot\frac{l}{m} = -\frac{\mu}{r^3}(x^2\dot{y}-xy\dot{x}) = -\frac{\mu}{r^3}\{(x^2+y^2)\dot{y}-y(x\dot{x}+y\dot{y})\}\\
=& -\frac{\mu}{r^3}(r^2\dot{y}-yr\dot{r}) = -\mu\frac{\dot{y}r-y\dot{r}}{r^2}\\
=& -\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y}{r}\right),\\
l\dot{v}_y =& -\frac{\mu y}{r^3}\cdot\frac{l}{m} = -\frac{\mu}{r^3}(xy\dot{y}-y^2\dot{x}) = \frac{\mu}{r^3}\{(x^2+y^2)\dot{x}-x(x\dot{x}+y\dot{y})\}\\
=& \frac{\mu}{r^3}(r^2\dot{x}-xr\dot{r}) = \mu\frac{\dot{x}r-x\dot{r}}{r^2}\\
=& \mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{r}\right)
\end{aligned}$$

を得る．ここから

$$\begin{aligned}
\dot{v}_x =& -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mu y}{lr}\right), \qquad \therefore v_x = -\frac{\mu y}{lr}+C_1,\\
\dot{v}_y =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mu x}{lr}\right), \qquad \therefore v_y = +\frac{\mu x}{lr}+C_2
\end{aligned}$$

のように速度 v_x, v_y を座標 x, y で表せる (C_1, C_2 は積分定数).
note　$\boldsymbol{l}=(0,0,l)$ を角運動量として，これはいわゆる Lenz ベクトルの保存

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{l}-\frac{\mu\boldsymbol{r}}{r} = \left(v_y l-\frac{\mu x}{r}, -v_x l-\frac{\mu y}{r}, 0\right) = l(C_2, -C_1, 0)$$

に他ならない [13, pp.153–154] [9, p.47]．そこでいきなり Lenz ベクトルの保存則を書き下せば充分である．またこの結果は Kepler 問題のホドグラフ (速度空間の軌道) が，円

$$(v_x-C_1)^2+(v_y-C_2)^2 = \left(\frac{\mu}{l}\right)^2$$

であることを意味している [13, pp.148–149].
近日点 (近地点) が x 軸上に来るように座標軸の向きを選ぶと $y=0$ のとき $v_x=0$ なので (図 43 参照)，$C_1=0$ と定まる．これを角運動量保存則に代入すると，軌道の方程式として

$$l = m(xv_y-yv_x) = m\frac{\mu(x^2+y^2)}{lr}+mC_2x = \frac{m\mu r}{l}+mC_2x, \qquad \therefore \frac{l^2}{m\mu} = r+\frac{lC_2}{\mu}x$$

を得る．$L\equiv l^2/m\mu, e\equiv l|C_2|/\mu(\geq 0)$ とおくと式 (6):

$$r\pm ex = L, \qquad \therefore (1-e^2)x^2\pm 2eLx+y^2 = L^2$$

へと書き換えられる．($r=L\mp ex$ と移項してから両辺を平方する．)
次にここで定義した積分定数 e (離心率に当たる) が，上式のように $1-e^2=-\frac{2}{m}\left(\frac{l}{\mu}\right)^2 E$ と表されることを示そう．

$$e^2 = \left(\frac{l}{\mu}\right)^2 {C_2}^2 = \left(\frac{l}{\mu}\right)^2\left(v_y-\frac{\mu x}{lr}\right)^2, \qquad \therefore 1-e^2 = 1-\left(\frac{x}{r}\right)^2-\left(\frac{l}{\mu}\right)^2\left({v_y}^2-2\frac{\mu x v_y}{lr}\right)$$

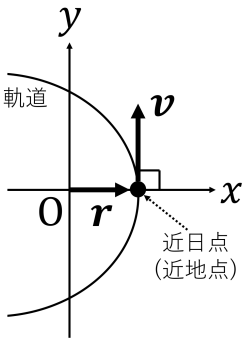


図 43　近日点 (近地点)

において左辺は定数なので，右辺もまた運動の間，一定値をとる．そこで右辺の値を近日点において評価することを考える．図 43 より近日点では

$$x = r, \qquad v_y = v, \qquad l = mrv$$

なので，

$$1 - e^2 = -\left(\frac{l}{\mu}\right)^2 \left(v^2 - 2\frac{\mu}{l} \cdot \frac{l}{mr}\right) = -\frac{2}{m}\left(\frac{l}{\mu}\right)^2 \left(\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mu}{r}\right) = -\frac{2}{m}E$$

を得る．

注解

2-6 節の注解において既に述べたように運動方程式は 2 階の微分方程式なので，これを解いて質点の運動を決定するには 2 回の積分操作を行う必要がある．今の場合より正確には変数は r と ϕ の 2 つがあるので，運動方程式の積分は 4 回行わなければならない．ところでエネルギーと角運動量の保存則はそれぞれ運動方程式を 1 回積分した関係に当たるので (運動方程式の第 1 積分，積分定数はエネルギー E と角運動量 l)，ここから出発すれば残る積分は後 2 つであり，残る 2 つの積分定数を初期値 r_0, ϕ_0 に選ぶことができる．そこで Kepler 問題のスタンダードな解法としては，以下のような手順がとられる．

- 角運動量保存則　$l = mr^2\dot{\phi}$ より
$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{mr^2}.$$
- エネルギー保存則　$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U^*(r) = E$ より
$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\{E - U^*(r)\}}.$$

2 式から $\mathrm{d}t$ を消去して

$$\phi = \pm\int^r \frac{l/mr^2}{\sqrt{\frac{2}{m}\{E - U^*(r)\}}}\mathrm{d}r$$

とすれば，ϕ と r の関係すなわち質点の軌道が求まる (付録 D.10 参照)．ただし空間的な軌道を得ただけでは，与えられた時刻に質点が軌道上のどこにいるのかという情報は欠けている．そこで運動を完全に決定するには，例えば $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ の式から r と時刻 t との関係を見出せば良い [9, pp.42–47]．

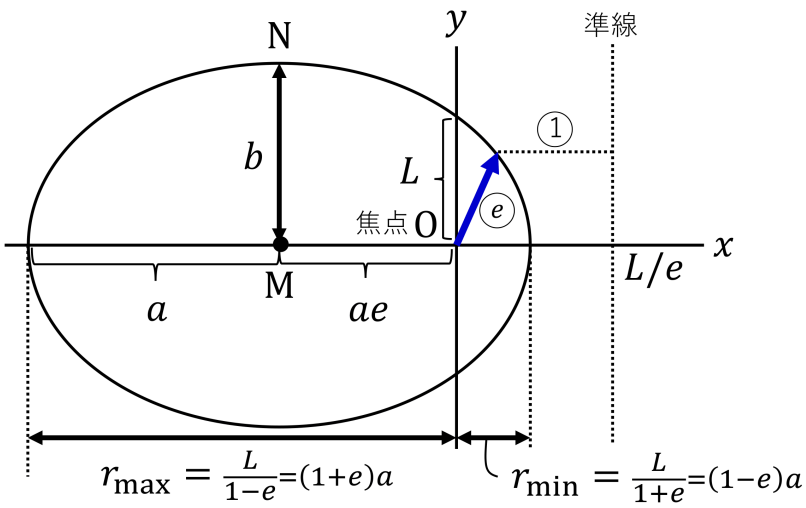


図 44　楕円軌道

楕円軌道

$E < 0$ のときの軌道 (楕円) の式を標準形に直すと

$$\frac{\left(x + \frac{eL}{1-e^2}\right)^2}{\left(\frac{L}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{L}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2} = 1$$

となるので，これは図 44 のように原点を焦点とする長半径 $a = L/(1-e^2)$，短半径 $b = L/\sqrt{1-e^2}$ の楕円を表すことが分かる．こうして**惑星 ($E < 0$) は太陽を一方の焦点とする楕円軌道を描く (Kepler の第 1 法則)**．

このとき

- 全エネルギーは $E = -GMm/a$ と表される．
- 運動の周期は $T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{3/2}$ となり，楕円軌道一般に対しても **Kepler の第 3 法則**が成り立つ．
  - いずれも $e \to 0$ のとき a は円軌道の半径となり，円軌道の場合の結果を再現する．

導出

- エネルギーの表式

$$a = \frac{L}{1-e^2} = -\frac{l^2}{m\mu} \times \frac{m}{2}\left(\frac{\mu}{l}\right)^2 \frac{1}{E} = -\frac{\mu}{2E}, \qquad \therefore E = -\frac{\mu}{2a} = -\frac{GMm}{a}.$$

- 周期の表式
  楕円の面積 $S = \pi ab = \pi \frac{L^2}{(1-e^2)^{3/2}}$ を面積速度 $h = \frac{l}{2m} = \frac{\sqrt{m\mu L}}{2m} = \frac{\sqrt{GML}}{2}$ で割ると，周期

$$T = \frac{S}{h} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}\left(\frac{L}{1-e^2}\right)^{3/2} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{3/2}$$

  を得る．

注解

Kepler の第 3 法則を**力学的相似**の観点から説明する．ある運動に対し α 倍に拡大した軌道を β 倍の時間かけて描く運動を力学的に相似な運動と呼ぼう．もとの運動 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ が運動方程式

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{GMm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

に従って実現されるとき，力学的相似な運動 $\boldsymbol{r} \to \alpha\boldsymbol{r}, t \to \beta t$ もまた運動方程式を満たす可能な運動となるための条件は，

$$\frac{\alpha}{\beta^2}m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{1}{\alpha^2}\frac{GMm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \qquad \therefore \alpha^3 = \beta^2$$

と書ける．これは Kepler の第 3 法則に他ならない．

慣性質量と重力質量

重力場 $\boldsymbol{g}$ の下での運動方程式 $m_{\mathrm{I}}\boldsymbol{a} = m_{\mathrm{G}}\boldsymbol{g}$ において，左辺の質量 m_{I} は物体の運動の変化のしにくさを表し慣性質量 (inertial mass) と呼ばれるのに対し，右辺の質量 m_{G} は物体の重力場との結合の強さを表し重力質量 (gravitational mass) と呼ばれる．これらは概念的には全く異なるものである．しかしながら経験事実として，重力場中の物体の加速度 $\boldsymbol{a} = (m_{\mathrm{G}}/m_{\mathrm{I}})\boldsymbol{g}$ における比 $m_{\mathrm{G}}/m_{\mathrm{I}}$ は物体の種類に依らずに一定となることが分かっているため，この比が 1 になるように単位をとれば ($m_{\mathrm{I}} = m_{\mathrm{G}}$)，慣性質量と重力質量を区別する必要はなくなる．

参考　$m_{\mathrm{I}} = m_{\mathrm{G}}$ という事実の含意は，
重力の理論である一般相対性理論の登場を俟ってはじめて明らかになった．

球対称な質量分布の及ぼす重力

2-12 節の冒頭 (本稿では中盤) で天下りに述べたように，球対称な天体 M の中心を原点として質点 m の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ と書くと，質点 m に働く重力は，M の全質量が原点に集中していると見なした場合の力

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

に一致する．より一般に球対称な，すなわち中心 (原点にとる) からの距離 r のみに依存する質量分布の中に，原点から距離 r の位置に質点 m を置くと，

- 距離 r の外側の質量からの重力の総和はゼロになり，
- 距離 r の内側の質量からの重力の総和は，
  内側の全質量 $M(r)$ が原点に集中していると見なした場合の力

  $$\boldsymbol{F} = -G\frac{mM(r)}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

  に一致する．

本節ではこのことを示す．ただし本ノートでは教科書の証明を部分的に補足・改変して載せる．

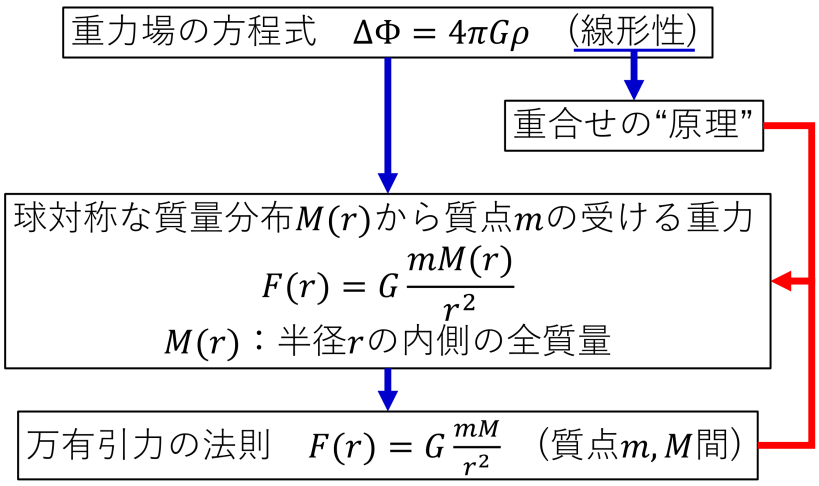


図 45　球対称な質量分布の及ぼす重力

注解　本来このことは重力場の方程式 $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$ から直接に導かれ (Φ：重力ポテンシャル，ρ：質量密度)，その後に質点間に働く万有引力の法則がそこから得られる．あるいは等価的に場の方程式 $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$ は，重力場 $\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$ のある閉曲面からのわき出しが内部の質量で決まること

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{g} = -4\pi G\rho$$

を表していると考えても良い．すると球対称な質量分布 $M(r)$ の作る球対称な重力場 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}) = g(r)(\boldsymbol{r}/r)$ は

$$4\pi r^2 g(r) = -4\pi G M(r), \qquad \therefore g(r) = -\frac{GM(r)}{r^2}$$

となるという結論を直ちに得ることができる (質量 m が重力場 $\boldsymbol{g}$ から受ける重力は $m\boldsymbol{g}$)．以上の議論は 5-0 節における Gauss の法則と数学的に類似しており，詳しくはそこで (電磁気学の文脈で) 改めて丁寧に説明する．

しかしながら高校物理の範囲 (あるいは力学の範囲) では経験事実としての万有引力の法則を基本法則にとらざるを得ないため，以下の導出では逆にここから出発し各質量要素からの重力を重ね合わせて，質点に働く力を求めることになる (図 45 参照，その際に用いる重ね合わせの原理が成り立つことも場の方程式から保証されている (付録 C.11))．重力場の方程式 $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$ に基づく導出は付録 D.12 で行う．

なお場の方程式 $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$ から直接に，その解が

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = -G\int\frac{\rho(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

と表されることが導かれる．これは各質量素片 $\rho(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x'$ が万有引力の法則に従って作るポテンシャル $-G\rho(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x'/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$ の重ね合わせとして位置 $\boldsymbol{x}$ における重力ポテンシャル $\Phi(\boldsymbol{x})$ が得られることを表している (付録 D.12 参照)．

導出　原点を中心とする球対称な質量分布を考え，原点からの距離 r における質量密度を $\rho(r)$ と書く．対称性より図 46 のように質点 m の位置を x 軸上にとっても一般性を失わない．

この質点に働く重力を，各質量要素からの重力の重ね合わせとして求めよう．そのために次のように空間を細分割して，各質量要素を定義する．まず図 46 のように“天頂角”が θ から $\theta+\mathrm{d}\theta$ の方向が半径 a から $a+\mathrm{d}a$ の球殻から切り取る帯状の領域を考える．さらに帯状領域のうち y 軸を始線とする方位角 φ (図 46 の角度 ϕ との混同に注意する) が φ から $\varphi+\mathrm{d}\varphi$ の範囲に含まれる微小部分を考えると，この部分の体積は $a^2\sin\theta\mathrm{d}a\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ なので (付録 C.3 参照)，ここに含まれる質量は

$$\mathrm{d}M=\rho(a)a^2\sin\theta\mathrm{d}a\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

と表される．質点がこの微小質量から受ける力は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(a,\theta,\varphi)=-\frac{Gm\mathrm{d}M}{R^2}(\cos\phi,\sin\phi\cos\varphi,\sin\phi\sin\varphi)$$

となる．ただし R は図 46 で定義した微小質量と質点間の距離である．
次に空間の全質量要素についてこの力を足し合わせる．
和の 1 段階目としてこれを $0<\varphi<2\pi$ で積分すると，帯状領域からの力

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(a,\theta)=\int_{0<\varphi<2\pi}\mathrm{d}\boldsymbol{f}(a,\theta,\varphi)=(\mathrm{d}f_x(a,\theta),0,0),\qquad \mathrm{d}f_x(a,\theta)=-\frac{Gm\rho(a)(2\pi a^2\sin\theta\mathrm{d}a\mathrm{d}\theta)}{R^2}\cos\phi$$

が得られる．このように x 軸周りの軸対称性を反映して φ に関する積分は自明であり，わざわざ実行するには及ばない．実際この結果は次のように考えれば直ちに得られる．すなわち図 46 のように帯状領域の体積は $2\pi a^2\sin\theta\mathrm{d}a\mathrm{d}\theta$ なので，ここに含まれる質量は

$$\mathrm{d}M_{帯}=\rho(a)\times 2\pi a^2\sin\theta\mathrm{d}a\mathrm{d}\theta$$

である．あらかじめ x 軸周りの軸対称性を考慮すると，帯からの重力は $-x$ 方向を向くことが分かり，その x 成分は

$$\mathrm{d}f_x(a,\theta)=-\frac{Gm\mathrm{d}M_{帯}}{R^2}\cos\phi$$

である．
和の第 2 段階として $0<\theta<\pi$ にわたる積分を行うと，球殻からの力

$$\mathrm{d}f_x(a)=\int_{0<\theta<\pi}\mathrm{d}f_x(a,\theta)=-Gm\rho(a)2\pi a^2\mathrm{d}a\int_0^\pi\frac{\sin\theta(r-a\cos\theta)}{(a^2+r^2-2ar\cos\theta)^{3/2}}\mathrm{d}\theta$$
$$\left(\because\cos\phi=\frac{r-a\cos\theta}{R},\quad R=\sqrt{(r-a)^2+(a\sin\theta)^2}=\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}\right)$$

を得る．ここに現れた積分は，積分変数 θ を図 46 の $x=a\cos\theta$ に変換して

$$\begin{aligned}
I\equiv&\int_0^\pi\frac{a\sin\theta(r-a\cos\theta)}{(a^2+r^2-2ar\cos\theta)^{3/2}}\mathrm{d}\theta=\int_{-a}^a\frac{r-x}{(a^2+r^2-2rx)^{3/2}}\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{2r}\int_{-a}^a\frac{(a^2+r^2-2rx)+(r^2-a^2)}{(a^2+r^2-2rx)^{3/2}}\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{2r}\left[-\frac{\sqrt{a^2+r^2-2rx}}{r}+\frac{r^2-a^2}{r\sqrt{a^2+r^2-2rx}}\right]_{x=-a}^{x=+a}\\
=&\frac{1}{2r^2}\left\{-|a-r|+(a+r)+\frac{r^2-a^2}{|a-r|}-\frac{r^2-a^2}{a+r}\right\}=\frac{a}{r^2}\left(1+\frac{r-a}{|r+a|}\right)\\
&(\because\sqrt{a^2+r^2-2ar}=|a-r|)\\
=&\begin{cases}0 & (a>r\text{ のとき})\\ 2a/r^2 & (a<r\text{ のとき})\end{cases}
\end{aligned}$$

と計算できるので，

$$\mathrm{d}f_x=-Gm\rho(a)2\pi a\mathrm{d}a\times I=\begin{cases}0 & (a>r\text{ のとき})\\ -\dfrac{Gm\{\rho(a)4\pi a^2\mathrm{d}a\}}{r^2} & (a<r\text{ のとき})\end{cases}$$

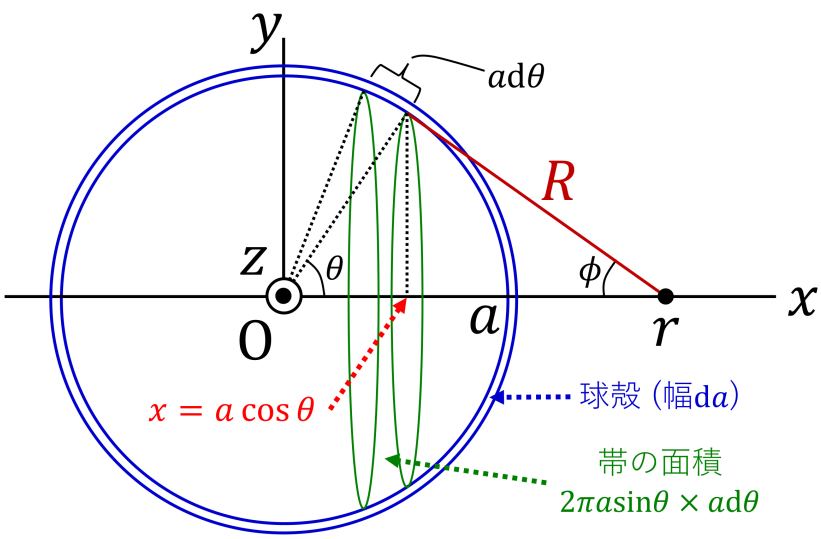


図 46　各質量要素からの重力 (ここでは $a < r$ の球殻を描いた)

こうして半径 r の外側の球殻からの重力はゼロとなり，内側の球殻からの重力は球殻質量 $\mathrm{d}M_{\text{球殻}} = \rho(a)4\pi a^2\mathrm{d}a$ が原点に集中した場合の力に一致する．

最後に和の第 3 段階として $a > 0$ に関する積分を施すと，球対称な質量分布が質点に及ぼす全重力

$$f_x = \int_{a>0} \mathrm{d}f_x(a) = -\frac{GmM(r)}{r^2}, \qquad M(r) = \int_0^r \rho(a)4\pi a^2\mathrm{d}a : \text{半径 } r \text{ の内側の全質量}$$

を得る．

注解　外側の質量からの力がゼロになることは，より簡単に次のように理解することができる．図 47 のように質点 P とそれを取り囲む球殻を考え，P から見た微小な立体角 (付録 C.3 参照) が球殻から切り取る質量要素を A (P からの距離 r_{A})，反対側の質量要素を B (P からの距離 r_{B}) とする．質点 P が

- A から受ける重力は $1/{r_{\mathrm{A}}}^2$ に比例し，
- B から受ける重力は $1/{r_{\mathrm{B}}}^2$ に比例する．

ところが

- 要素 A の質量は ${r_{\mathrm{A}}}^2$ に比例し，
- 要素 B の質量は ${r_{\mathrm{B}}}^2$ に比例する．

以上より A からの重力と B からの重力は正確に相殺し，質点 P が球殻全体から受ける重力はゼロになる．

注解：惑星トンネル　応用として，ここでいわゆる惑星トンネルの思考実験について簡単に言及しておく．惑星 (質量密度が一様な球) に通したまっすぐなトンネル (惑星の中心 O を通らなくても良い) を考えよう．トンネル内部における O からの距離 r の位置で質点が受ける力は，自身より内側の全質量 $M(r) \sim r^3$ による重力 $\sim M(r)/r^2 \sim r$ として扱うことができ，これは r に比例する．よって惑星トンネル内での質点の運動は単振動 (の一部) となる [1, pp.65–66].

例——楕円軌道を既知とした場合

あらかじめ軌道が図 44 のような楕円になることが分かっていれば，エネルギー E と面積速度 h が (したがって角運動量が) 保存することから近地点までの距離 $r_{\min}$(ここでは r_1 と表記) と遠地点までの距離 $r_{\max}$(ここでは r_2 と表記) を求めることができる．

$$r_1 + r_2 = \frac{GMm}{E}, \qquad r_1 r_2 = \frac{2mh^2}{-E}. \tag{7}$$

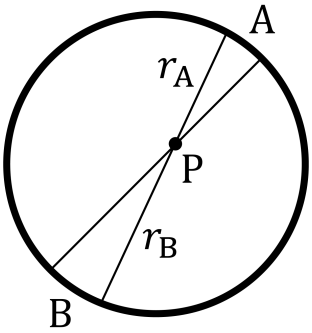


図 47　外側の球対称な質量分布からの力はゼロになる

次いで楕円の幾何学的関係から，長半径と短半径が

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{GMm}{-2E}, \qquad b = \sqrt{r_1 r_2} = \sqrt{\frac{2m}{-E}}h \tag{8}$$

と求まる．以上より

$$b = \frac{2h}{\sqrt{a/GM}}, \qquad \therefore T = \frac{\pi ab}{h} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}a^{3/2}$$

となり，再び Kepler の第 3 法則が導かれる．

式 (7) の導出　エネルギー E と面積速度 h の保存則

$$\frac{1}{2}m{v_i}^2 - G\frac{Mm}{r_i} = E, \qquad \frac{1}{2}r_i v_i = h \qquad (i = 1, 2)$$

から近地点と遠地点での速度 v_1, v_2 を消去すると

$$E{r_i}^2 + GMmr_i - 2mh^2 = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

となる．この 2 次方程式の解と係数の関係から式 (7) が得られる．

式 (8) の説明　図 44 の楕円に対する幾何学的関係

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}, \qquad \overline{\mathrm{OM}} = \begin{cases} a - r_1 \\ r_2 - a \end{cases} = \frac{r_2 - r_1}{2}, \qquad b = \sqrt{\overline{\mathrm{ON}}^2 - \overline{\mathrm{OM}}^2} = \sqrt{r_1 r_2} \qquad (\because \overline{\mathrm{ON}} = a)$$

による．

例——角運動量に対する直観

半径 r，角速度 ω の等速円運動を行っている質点 m を糸で中心方向に引き，回転半径を $r'(< r)$ にしたときの角速度 ω' は，角運動量保存則

$$mr^2\omega = m{r'}^2\omega', \qquad \therefore \frac{\omega'}{\omega} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2$$

に従って増大する (角運動量は中心力の下では保存するから)．よく言われるように，フィギュアスケートの選手が腕を縮めると回転速度が増すのはここから説明できる．

2-13 動く座標系

力学法則 3：慣性の法則，慣性の法則の意味

［通常の］運動方程式の成り立つ座標系を**慣性系**と呼ぶ．慣性系では物体に力が働かなければ，物体は等速度運動を続ける．このことは「**慣性の法則**」と呼ばれ，ふつう運動の第 1 法則に挙げられる．しかしそれならば慣性の法則は運動方程式に含まれていることになるから ($\boldsymbol{F} = 0 \Rightarrow \dot{\boldsymbol{v}} = 0$)，これを別個に力学原理とする必要はないのではないかという疑問が生じる．それはもっともな疑問である．実際には**慣性の法則は運動方程式の，したがって慣性の法則の成り立つ座標系が少なくとも 1 つ現実に存在することを，原理として要請している**ものと見なされる．

参考　Einstein はこの原理を放棄することで，一般相対性理論を構築した．
［ただしそれは時空の与えられた点の近くで計量テンソルが Minkowski 空間のそれに一致するような，狭義の慣性系の存在を認める理論である．］

慣性系の存在は証明できない (だからこそ，他の何からも導かれない原理として要請される)．とは言え銀河系宇宙の重心に固定した座標系は良い慣性系だと考えられる．そしてすぐ後で見るように，慣性系は 1 つあれば無限に多く存在するので，実際には慣性系の存在についてさほど頭を悩まずには及ばない．［地面に固定した座標系を慣性系と見なすなど，これまで通りの扱いを続ければ良い[*20]．］

注解

ここで**天動説と地動説**を取り上げよう．地球の周りを太陽が回っているのか，太陽の周りを地球が回っているのかという問を額面通りに受け取れば，それは絶対的な意味を持たない．地球から見れば太陽が周りを回っており，太陽から見れば地球が周りを回っていると言えるだけである．しかし太陽に固定した座標系と地球に固定した座標系のどちらが良い慣性系かと問うことには，物理的な意味がある．

慣性系と非慣性系

原理より慣性系は少なくとも 1 つ存在する．それを S と名付けよう．今，慣性系 S に対して原点が $\boldsymbol{R}$ だけ隔たり，速度 $\boldsymbol{V} = \dot{\boldsymbol{R}}$ で運動している S′ 系を考える．同一の質点 m を

- S 系で見た位置を $\boldsymbol{r}$，速度を $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$
- S′ 系で見た位置を $\boldsymbol{r}'$，速度を $\boldsymbol{v}' = \dot{\boldsymbol{r}}'$

と書く．このとき

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'$$

である (図 48 参照)．

- $\boldsymbol{V} = \text{const.}$ のとき

[*20] この後見るように，慣性系に対して回転運動を行う座標系は非慣性系である．「地球は自転と公転をしているから，地面に固定した座標系は厳密には非慣性系である．しかし，通常，重力 mg には遠心力の効果が含まれているし，回転の加速度は小さいので，それが無視できる範囲では，地面に固定した系を近似的に慣性系と扱ってよい」(p.102)．

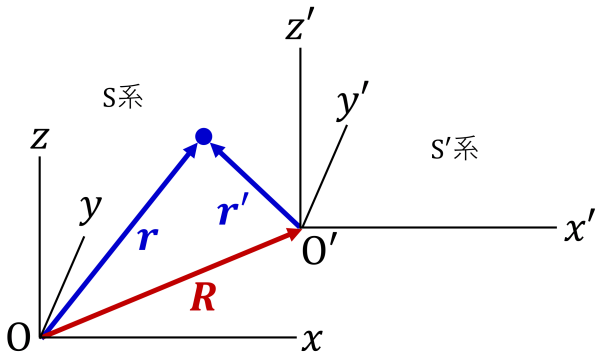


図 48　慣性系 S とそれに対して動く座標系 S′

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t}$$

である．

［これはベクトルの関係式である．

ここで図 48 のように S 系と S′ 系の座標軸が平行であるとすれば,］

S 系で見た加速度成分 $\mathrm{d}v_i/\mathrm{d}t$ と S′ 系で見た加速度成分 $\mathrm{d}v'_i/\mathrm{d}t$ の間の関係

$$\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v'_i}{\mathrm{d}t}$$

が成り立つため，S′ 系でも S 系の運動方程式 $m\mathrm{d}v_i/\mathrm{d}t = F_i$ と同じ形の方程式

$$m\frac{\mathrm{d}v'_i}{\mathrm{d}t} = F_i$$

が成り立つ．［ただし 2 つの座標系で力が同一のベクトルで与えられること $F_i = F'_i$ を仮定した．］

こうしてある慣性系に対して等速度運動をするあらゆる座標系は慣性系となる．

注解　座標軸の回転 (時間変化ではない) に対して運動方程式が共変的であること (2-4 節の注解参照) を考え合わせると，ある慣性系に対して等速度運動をする座標系が慣性系となることは，座標軸が平行な場合に限らずに正しい．

- $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{\alpha} \neq 0$ のとき

  $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{\alpha} + \mathrm{d}\boldsymbol{v}'/\mathrm{d}t$ より，［以上で補足した仮定の下で］S′ 系での運動方程式は

$$m\left(\alpha_i + \frac{\mathrm{d}v'_i}{\mathrm{d}t}\right) = F_i$$

  となる．

  こうしてある慣性系に対して加速度を持つあらゆる座標系は，

  通常の運動方程式が成り立たない非慣性系となる．

非慣性系と慣性力

非慣性系の運動方程式は，$m\boldsymbol{\alpha}$ の項を移項し，通常の運動方程式と同じ形

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{\alpha}$$

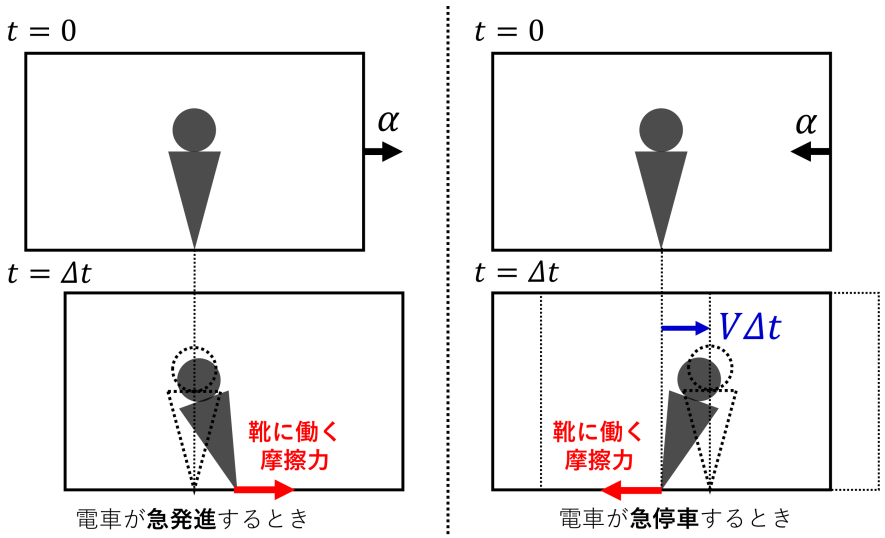


図 49　電車の加速時に体が持っていかれることの，慣性系での説明

に書き換えて解釈するのが好まれる．すなわち非慣性系では，あたかも右辺の $-m\boldsymbol{\alpha}$ という**見かけの力** (**慣性力**と呼ばれる) が働いているかのように見なせる．ここから分かるように慣性力は数学的に出てきた見かけ上の力であり，重力や Coulomb 力，ばねの弾性力や各種の拘束力と違って，現実的・実体的な起源を持たないことに注意する．[見かけの力は「○○が物体に及ぼす力」と言うときの，○○に当たる主語のない力と言える．]

■電車の加速時に起こることの，慣性力を用いない説明

- 電車が急発進するときに体が後ろに持っていかれること
- 電車が急停車するときに体が前に持っていかれること

は，見かけの力を持ち出すことなく以下のように説明することができる．すなわちいずれの場合も人は地面に対する等速度運動を維持し，電車の加速運動に取り残される (図 49 参照)．

注解

参考としてより一般に座標軸の回転を伴う場合，すなわち非慣性系が慣性系に対して角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ を持つときに現れる慣性力の表式を天下りに引用する (導出は付録 D.13 を参照)[*21] [9, pp.160–162]．遠心力と Coliolos の力の表式を，次節で見る 2 次元の回転座標系における表式と比較されたい．

一般的な非慣性基準系 K は次のように構成される．

- 慣性基準系 K_0 に対して速度 $\boldsymbol{V}(t)$，加速度 $\boldsymbol{W}(t) = \dot{\boldsymbol{V}}(t)$ で並進する基準系 K' を考える．
  - K' から見た粒子の位置を $\boldsymbol{r}'$ とする．
  - K_0 から見た粒子の速度を $\boldsymbol{v}_0$，K' から見た粒子の速度を $\boldsymbol{v}'$ とする．$\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V}$.
- K' と原点を共有し，K' に対して角速度 $\boldsymbol{\Omega}(t)$ で回転する系 K を考える．
  - K から見た粒子の位置を $\boldsymbol{r}$ とする．$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}$.
  - K から見た粒子の速度を $\boldsymbol{v}$ とする．$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$.

[*21] 角速度ベクトルについては 2-11 節の注解を，ベクトル積については付録 C.10.1 を参照．

このとき非慣性基準系 K における運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} - m\boldsymbol{W} + m\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{\Omega}} + 2m\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega} + m\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\Omega})$$

となる ($-\partial U/\partial \boldsymbol{r}$ は粒子に働く物理的な力)．右辺の各慣性力の説明は以下の通りである．

- $-m\boldsymbol{W}$：一様な力の場から受ける力に相当．
- $m\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{\Omega}}$：角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ が時間変化するとき現れる．
- $2m\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega}$：Coliolis の力 (粒子の速度に依存)．
- $m\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\Omega})$：遠心力．

非慣性系と慣性力の例

非慣性系を用いることによって運動が極めて簡単になる場合には非慣性系を用いれば良いが，そうでない場合はできるだけ間違いの少ない慣性系を用いた方が良い．

- 非慣性系が便利な例
  三角台を水平に加速させたときの，物体の斜面上の運動．
- 非慣性系を用いるメリットのほとんどない例
  地面に対して加速度を持つ物体 M 上の物体 m の運動について，
  物体 m と物体 M は同方向の加速度を持つ．このような場合，
  物体 m の運動を考える上で物体 M に固定した非慣性系を用いるメリットはほとんどない．

回転座標系に現れる慣性力

図 50 のように同一平面上に原点を共有する 2 つの座標系 (x, y 軸，X, Y 軸) を考える．xy 座標系を慣性系とし，XY 座標系をこれに対して角度 $\phi(t)$ を成す回転系とする．回転座標系 XY における運動方程式を調べよう．X, Y 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_X, \boldsymbol{e}_Y$ とし，2-11 節の注解で行ったのと同様に $\dot{\boldsymbol{e}}_X = \dot{\phi}\boldsymbol{e}_Y, \dot{\boldsymbol{e}}_Y = -\dot{\phi}\boldsymbol{e}_X$ を用いて正直に微分を行うと，質点の位置，速度，加速度はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} =& X\boldsymbol{e}_X + Y\boldsymbol{e}_Y,\\
\dot{\boldsymbol{r}} =& \dot{X}\boldsymbol{e}_X + X\dot{\phi}\boldsymbol{e}_Y + \dot{Y}\boldsymbol{e}_Y - Y\dot{\phi}\boldsymbol{e}_X,\\
\ddot{\boldsymbol{r}} =& \ddot{X}\boldsymbol{e}_X + 2\dot{X}\dot{\phi}\boldsymbol{e}_Y + X\ddot{\phi}\boldsymbol{e}_Y - X\dot{\phi}^2\boldsymbol{e}_X\\
&+ \ddot{Y}\boldsymbol{e}_Y - 2\dot{Y}\dot{\phi}\boldsymbol{e}_X - Y\ddot{\phi}\boldsymbol{e}_X - Y\dot{\phi}^2\boldsymbol{e}_Y\\
=& \begin{pmatrix}\ddot{X}\\ \ddot{Y}\end{pmatrix} - 2\dot{\phi}\begin{pmatrix}\dot{Y}\\ -\dot{X}\end{pmatrix} - \ddot{\phi}\begin{pmatrix}Y\\ -X\end{pmatrix} - \dot{\phi}^2\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

と表される (最右辺は回転座標系 XY に関する成分)．よって回転座標系 XY における運動方程式は

$$m\begin{pmatrix}\ddot{X}\\ \ddot{Y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_X\\ F_Y\end{pmatrix} + 2m\dot{\phi}\begin{pmatrix}\dot{Y}\\ -\dot{X}\end{pmatrix} + m\ddot{\phi}\begin{pmatrix}Y\\ -X\end{pmatrix} + m\dot{\phi}^2\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$$

となる ((F_X, F_Y) は物理的な力の回転座標系 XY に関する成分)．ここで

- 回転系で見た質点の位置　$\boldsymbol{r} = (X, Y, 0)$
- 回転系で見た質点の速度　$\boldsymbol{v} = (\dot{X}, \dot{Y}, 0)$

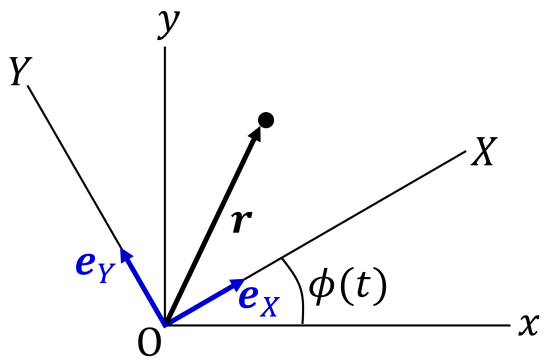


図 50　2 次元の慣性系 x, y と角度 $\phi(t)$ を成す回転系 XY

- 慣性系に対する回転系の角速度　$\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$

を導入すると，慣性力の各項は次のようになる．

- 慣性力の第 1 項　$2m\Omega(\dot{Y}, -\dot{X})$
  回転系が反時計回りのとき，質点の進行方向に対して右向きに働く見かけの力を表しており，
  Coliolis 力と呼ばれる．
  前述の一般式 $2m\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\Omega}$ に一致している．
- 慣性力の第 2 項　$m\ddot{\phi}(Y, -X)$
  回転系の角速度の変化に伴う見かけの力であり，
  “角加速度” $\ddot{\phi} > 0$ のとき質点を見る向きに対して右向きに働く．
  前述の一般式 $m\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}}$ に一致している．
- 慣性力の第 3 項　$m\dot{\phi}^2(X, Y) = m\dot{\phi}^2\boldsymbol{r}$
  原点から遠ざかる向きに働く見かけの力を表しており，**遠心力**と呼ばれる．
  前述の一般式 $m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\Omega})$ に一致している．

注意　教科書では簡単のために一様な回転 $\dot{\phi} = \omega = \text{const.}$ の場合を考え，y 軸上を等速度運動する自由粒子の回転系で見た加速度成分を計算し，遠心力 $m\omega^2(X, Y)$ と Coliolis 力 $2m\omega(\dot{Y}, -\dot{X})$ を導いている (pp.103–104).

■遠心力に関する注意と例　上記の導出から明らかなように，**遠心力や Coliolis 力は回転系で生じる見かけの力であり，物理的・現実的な起源を持たない．**今一度この点について以下に注意を促しておく．

- 遠心力は慣性系には現れない
  慣性系に対して物体が円運動しているとき，物体には遠心力は働いておらず，
  向心力 $F_{\text{向心}}$ が円運動における向心方向の加速度 $r\omega^2$ をもたらしている：$mr\omega^2 = F_{\text{向心}}$.
  一方，物体とともに円運動する座標系では
  向心力 $F_{\text{向心}}$ と遠心力 $mr\omega^2$ がつり合って物体は静止する：$0 = F_{\text{向心}} - mr\omega^2$.
- 物体が回転運動をしているか否かに関わらず，回転座標系では遠心力を考えなければならない．

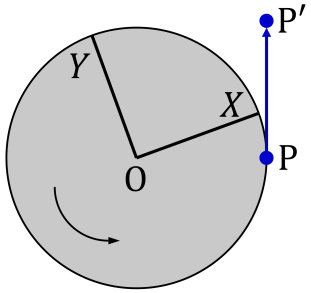


図 51　回転系に現れる遠心力に対する直観

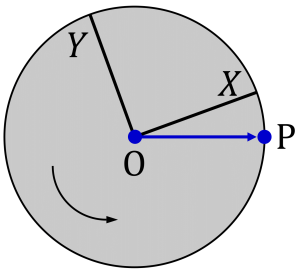


図 52　回転系に現れる Coliolis 力に対する直観

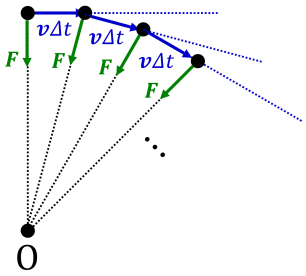


図 53　円運動は中心への“落下”運動

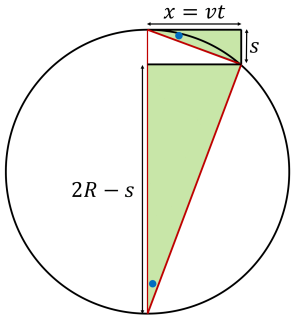


図 54　円運動と瞬間的放物運動

例えば図 51 のように慣性系に対して P → P′ 方向に等速度運動する自由粒子を
円盤に固定した座標系 XY から見ると，動径方向に加速されて見え，円盤から離れる．
これは円盤固定系において，粒子に遠心力が働くためであると説明される．

■Coliolis 力に対する直観　図 52 のように慣性系に対して O → P 方向に等速度運動する自由粒子を円盤に固定した座標系 XY から見ると，確かに粒子は進行方向右向きに加速されて見える．これは円盤固定系において，粒子に Coliolis 力が働くためであると説明される．

注解

■円運動は遠心力とのつり合いではない　円運動は向心方向への加速運動であり，向心方向の力がつり合っていては実現されない．実際，月は力が働かなかったらそれに沿って進むであろう直線から地球に向かって常に落ちており，その繰り返しで地球の周りを回っている (図 53 参照)．

実際このような直観に基づいて，図 54 のように軌道の接線方向に $x = vt$ だけ進む間に距離 $s = at^2/2$ だけ落ちる放物運動が瞬間的に円運動に一致することを要求すると，円運動に対する幾何学的な関係[*22]

$$\frac{x}{s} = \frac{2R - s}{x} \simeq \frac{2R}{x}, \qquad \therefore s = \frac{x^2}{2R}$$

は向心方向の加速度 a が円運動の加速度 v^2/R に一致しなければならないことを意味する [8, pp.94–95]．

[*22] 図 54 の相似な緑の三角形に注目して得られる．赤で示した三角形との相似比を考えることはここでの議論にとって有用でない．

■カーブを曲がるときに体が外側に押し出されることの，遠心力を用いない説明　車に乗ってカーブを曲がるときに体が外側に押し出されるのは，しばしば遠心力の効果として説明される．しかし電車の急発進・急停車における慣性力に対して述べられているように，「そういういいかたではあたかも慣性力が実体的な力として働いているかのような誤解を与えるので，感心しない」(p.98)．我々はここでも先の電車の急発進・急停車の場合と同様に，これを慣性系の立場から理解・説明することができる．すなわち図 51 を踏まえると，**車内の人はカーブの接線方向への等速度運動を維持し，車の方向転換に取り残される．**

実験室系と重心系

粒子の散乱について，標的粒子が静止している座標系を**実験室系**という．運動量保存則より 2 体の重心は実験室系に対して等速度運動をするので，実験室系を慣性系と重心系もまた慣性系である．そこで弾性衝突を重心系で見ると，本稿では 2-8 節の注解において既に述べたように，エネルギー保存則と運動量保存則より，重心系では 2 体は衝突前後で速度の大きさを変えず，向きだけを変える (図 27 参照)．

説明　実際，衝突する 2 体 1,2 の重心系に対する衝突前の速度を $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$，衝突後の速度を $\boldsymbol{u'}_1, \boldsymbol{u'}_2$ とすると，

$$\text{運動量保存則}\quad m_1\boldsymbol{u}_1 + m_2\boldsymbol{u}_2 = m_1\boldsymbol{u'}_1 + m_2\boldsymbol{u'}_2,$$

$$\text{エネルギー保存則}\quad \frac{1}{2}m_1{\boldsymbol{u}_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{\boldsymbol{u}_2}^2 = \frac{1}{2}m_1{\boldsymbol{u'}_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{\boldsymbol{u'}_2}^2$$

より $|\boldsymbol{u}_1| = |\boldsymbol{u'}_1|, |\boldsymbol{u}_2| = |\boldsymbol{u'}_2|$ を得る．

例——加速される箱に吊るした振り子

ここでは教科書の例題 2-22(pp.105–106) を簡略化して，図 55 のように水平方向に一様に加速される箱に吊るした振り子 (長さ l，重りの質量 m) を考えよう．重りに働く慣性力を ma と書くと，重りの運動は図 55 の角度 θ が $\tan\theta = a/g$ を満たす向き $\theta = \theta_0$ と大きさ $g' = \sqrt{g^2 + a^2}$ を持つ見かけの重力場 $\boldsymbol{g'}$ の下での運動と同じになる．よって安定なつり合いの位置は $\theta = \theta_0$ であり，その周りの微小振動の周期は (近似的に)$T = 2\pi\sqrt{l/g'}$ で与えられる．

実際，接線方向の運動方程式

$$ml\ddot{\theta} = ma\cos\theta - mg\sin\theta$$

における右辺の力を，円周に沿う長さ $x = l\theta$ による微分 $-\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{l}\frac{\partial U}{\partial \theta}$ で与えるようなポテンシャル

$$U(\theta) = -m(a\sin\theta + g\cos\theta)l = -mg'l\cos(\theta - \theta_0)$$

は見かけの重力場 $\boldsymbol{g'}$ の重力ポテンシャルに一致しており，$\theta = \theta_0$ で極小となる．こうして鉛直に吊り下げられた状態で静止した重り ($\theta = 0$) は，箱を加速度ゼロから a まで連続的に加速すると，角度 θ を増し安定位置 $\theta = \theta_0$ に達すると考えられる．あるいは実際には摩擦や抵抗により，安定位置 $\theta = \theta_0$ 周りの振動が減衰して $\theta = \theta_0$ に落ち着くと考えられる．

■参考

上述の例［我々が見た例と同様］のように，少なくとも局所的には重力による作用と，観測者［これは座標系を擬人化した言い方］が適当な加速度運動をするために引き起こされた見かけの力にもとづく効果とは区別ができない．したがって上述の箱の話にでてきた座標系を慣性系とみなすか，加速系とするかは判断しかねる．換言すれば重力をわれわれの議論の対象にとりあげる以上，慣性系と非慣性系との区別は (少なくとも力学現象に限るならば) 不可能となる．したがって特殊相対性理論［これは重力

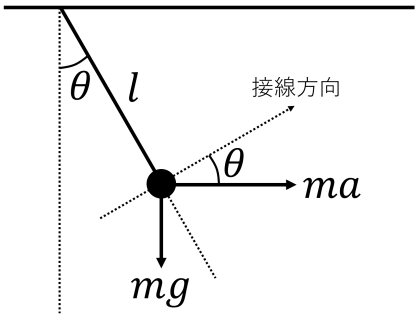


図 55　加速される箱に吊るした振り子

表 1　見かけの重力場と真の重力場の違い

見かけの重力場	真の重力場
無限遠でゼロにならない	無限遠でゼロになる
適当な基準系で消去できる	空間の微小領域で短い時間に限って
	適当な基準系で消去できる

を含まない理論］の枠の中にとじこもることは原理的に不可能で，すべての座標系が物理現象を記述するための基準として登場することになる．したがって Lorentz 変換のような慣性系同士のあいだの変換にとどまらず，きわめて一般的な座標変換を考慮しなければならない [12, pp.112–113].

重力場の理論は一般座標変換に対して共変的な一般相対性理論として Einstein により定式化された．

逆に言えば自由落下する小さな箱の中では (あるいは箱に固定した座標系では) 局所的に重力を消去することができる．(箱は十分小さく，その中では場を一様と見なせるものとする．実はこのようなことが可能な時間もまた一般には短い間に限られる．) とは言え加速系に現れる見かけの重力と真の重力は完全には同等でなく，表 1 のような違いがある [2, pp.251–252]．実は一般相対性理論では重力場は“時空の曲がり”に他ならず，見かけの重力と真の重力の決定的な違いは曲率テンソルと呼ばれる量に現れる．テンソルの全成分がゼロであるか否かは座標系に依らないから (付録 C.12)，時空が曲がっているという座標系に依らない幾何学的な性質を特徴付けるのに曲率テンソルは適している．真に重力場が存在すれば，どのような座標系を選んでも曲率をゼロにすることはできず，この意味で重力場は正しく「真の重力場」であると言える．

2-14 剛体のつり合い

多粒子系の重心

大きさのある物体は質点の集合と見なせる．そこで複数の質点から成る多粒子系を考え，

- i 番目の質点の質量を m_i，位置を $\boldsymbol{r}_i$，速度を $\boldsymbol{v}_i$ と書く．
- 全質量を $M \equiv \sum_i m_i$，全運動量を $\boldsymbol{P} \equiv \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i$ と表記する．

質点系の重心 (質量中心) を位置ベクトルの重みつき平均

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{M}$$

で定義すると，重心の速度は $\boldsymbol{V} = \dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{P}/M$ となるので，逆に全運動量は重心の速度を用いて

$$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{V}$$

と表される．これは全質量が重心に集中したときの運動量に他ならない．なお以上は 2 体の重心に関する議論 (2-7 節) の一般化となっている．

注解

式が煩雑になることを防ぐには，必要のない限り粒子 (質点) を指定する添字を省くと良い．例えば

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i {v_i}^2 \quad \to \quad \sum \frac{1}{2} m v^2$$

とすると式が大幅に簡略化される．このような略記において，和の記号の下に入る表式は粒子ごとに定義される量であり，$\sum$ はその全ての粒子に対する和を表す：

$$\sum(\cdots) \quad \to \quad \sum_{\text{粒子}} (\text{粒子ごとに異なる量}).$$

質点系の重心運動

i 番目の質点に働く力を外力 $\boldsymbol{F}_i$ と，j 番目の質点から受ける内力 $\boldsymbol{f}_{ij}$ に分けて書く．作用・反作用の法則の法則により，重心の速度変化

$$M\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = \sum_i m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i \left(\boldsymbol{F}_i + \sum_{j(\neq i)} \boldsymbol{f}_{ij} \right)$$

に対して内力は寄与しない：

$$\sum_{i,j(\neq i)} \boldsymbol{f}_{ij} = \sum_{j>i} (\boldsymbol{f}_{ij} + \boldsymbol{f}_{ji}) = 0.$$

よって重心の運動は全質量と全外力が重心に集中した場合の運動方程式 (**重心運動の方程式**)

$$M\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \boldsymbol{F}_i$$

に従い，外力のみによって決定される．

注解

■内力の和について　図 56 のように内力を $\boldsymbol{f}_{ij}$ が i 行 j 列目に来るように，行列の成分と同様に並べる．ただし $i = j$ の対角成分は定義されておらず，抜けている．このとき対角線に関して対称な位置にある 2 つの力 $\boldsymbol{f}_{ij}, \boldsymbol{f}_{ji}$ は作用・反作用の法則により相殺されるため，“上三角”部分の和 $\sum_{j>i} \boldsymbol{f}_{ij}$ は“下三角”部分の和 $\sum_{j>i} \boldsymbol{f}_{ji}$ を正確に打ち消す．上の計算はこのことを式で表現したものである．

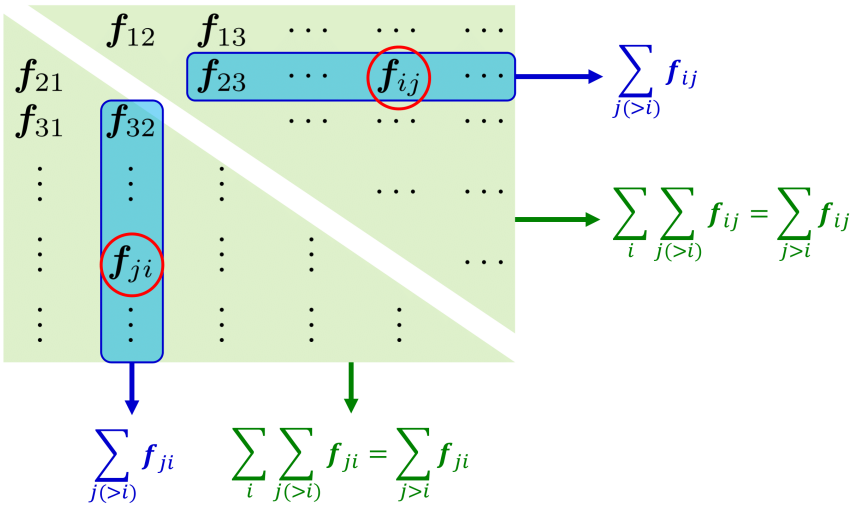


図 56　内力の総和

■運動方程式はより大きなスケールで成り立つこと　以上の結果は Newton の運動方程式が大きいスケールに対してもそのまま成立するということを意味している．人類がまず最初に Newton 力学の原理を発見したのは，このような事情による．そして Newton の法則は地球やそれ以上の大きさの対象についてもそのままの形で成立する．これに対し原子レベルの法則は量子力学と呼ばれ，Newton の法則と異なっている．量子力学の法則は大きいスケールで近似的に Newton の法則になる．言わば Newton の法則は，原子に対する法則を非常に大きいスケールにもっていった“しっぽの先”である [8, pp.262–263].

重心のつり合い

重心運動の方程式により，大きさを持つ物体の重心がつり合っている，すなわち重心が等速度運動 (静止を含む) を行うための (必要十分) 条件は，**力のつり合い** (外力のつり合い)

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = 0$$

によって与えられる．

剛体の回転の方程式

物体の重心がつり合っていたとしても，物体は (重心周りの) 回転運動を行い得るので，物体全体がつり合っているためには重心のつり合いを要求するだけでは不十分である．そこで本節では物体の回転を考えよう．ただし本節は教科書の内容を多少アレンジしてまとめる．ベクトル積については付録 C.10.1 を参照.

任意にとった原点 O に関する質点 i の角運動量を

$$\boldsymbol{l}_i = \boldsymbol{r}_i \times (m_i \boldsymbol{v}_i)$$

とし，また質点 i に働く外力 $\boldsymbol{F}_i$ と質点 j から受ける内力 $\boldsymbol{f}_{ij}$ のモーメントをそれぞれ

$$\boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i, \qquad \boldsymbol{n}_{ij} = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_{ij}$$

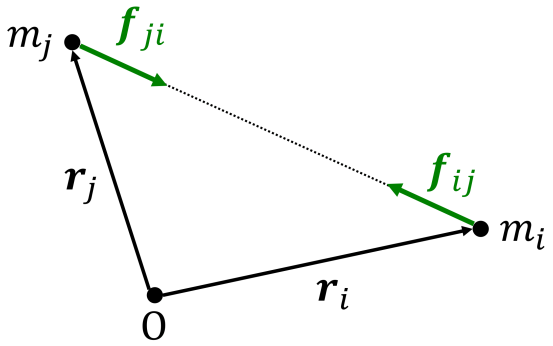


図 57　内力に対する作用・反作用の法則と中心力の仮定

と書くと，角運動量の方程式 (2-12 節) は

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{N}_i + \sum_{j(\neq i)} \boldsymbol{n}_{ij}$$

となる．全ての質点 i にわたってこの式の和をとり，全角運動量 $\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{l}_i$ に対する式を求めることを考える．その際，作用・反作用の法則 $\boldsymbol{f}_{ij} = -\boldsymbol{f}_{ji}$ に加えて，図 57 のようにこれらの力が質点 i, j を結ぶ直線上にあることを仮定する (中心力の仮定)．このときペアで現れる内力のモーメント $\boldsymbol{n}_{ij}, \boldsymbol{n}_{ji}$ は相殺する．実際，

- 幾何学的に言うと図 57 より，
  $\boldsymbol{r}_i$ と $\boldsymbol{f}_{ij}$ の張る平行四辺形と $\boldsymbol{r}_j$ と $\boldsymbol{f}_{ji}$ の張る平行四辺形の面積は等しい．
  従って $\boldsymbol{n}_{ij}$ と $\boldsymbol{n}_{ji}$ は絶対値が等しい逆ベクトルとなるから，互いに相殺する．
- 代数的にも

  $$\boldsymbol{n}_{ij} + \boldsymbol{n}_{ji} = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_{ij} + \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{f}_{ji} = (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{f}_{ij} = 0 \qquad (\because \boldsymbol{f}_{ij} \parallel (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j))$$

  を確かめられる．

よって重心運動の方程式を得たのと同様にして

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{N}_i$$

を得る．

ここまでは物体が剛体であることを用いなかったから，以上の結果は剛体に限らず任意の質点系，あるいは大きさを持つ物体に対して適用できる．ここからは剛体を考えることにする．剛体とは平たく言えば変形しない理想的な物体のことであり，正確には任意の 2 点間の距離が変わらない物体と定義できる．以下では剛体の各質点がある平面 (xy 平面に選ぶ) に平行な面内で運動する場合に話を限り，平面 $z = 0$ 上の質点のみを考え，その集合を改めて質点と呼ぶことにする．このとき剛体の各質点に働く力も xy 面内にある．ある点 O［教科書ではこれを剛体の重心に選んでいるけれど，その必要はない］を通る軸の周りの (xy 面内の) 剛体の回転を考えると，剛体の定義より各質点 i は原点 O からの距離 r_i が一定の円周上を，全ての質点に共通の角速度 ω で円運動する．今，質点 i の位置 $\boldsymbol{r}_i$，速度 $\boldsymbol{v}_i$ および外力 $\boldsymbol{F}_i$ は xy 面内のベクトルだから，角運動量

$\boldsymbol{l}_i$ と力のモーメント $\boldsymbol{N}_i$ はそれぞれ z 成分 $l_i = m_i {r_i}^2 \omega, N_i$ を持つ z 方向のベクトルとなる．よって全角運動量，あるいは軸 O の周りの角運動量 (の z 成分) は

$$L = I\omega, \qquad I \equiv \sum_i m_i {r_i}^2 : \text{軸 O の周りの慣性モーメント}$$

と表され，角運動量の方程式は

$$I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \sum_i N_i$$

となる (**剛体の回転の方程式**)．重心運動の方程式 $M\mathrm{d}\boldsymbol{V}/\mathrm{d}t = \sum_i \boldsymbol{F}_i$ との類似性に注目されたい．

注解

xy 面内の剛体の回転に限らず 3 次元空間内の回転一般を考えた場合，回転の角速度ベクトル (2-11 節の注解参照) を $\boldsymbol{\omega}$ として各質点の角運動量は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{l} =& m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = m\{\boldsymbol{\omega} r^2 - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\}, \\ \therefore l_i =& m(r^2\delta_{ij} - x_i x_j)\omega_j \end{aligned}$$

と表される (主に付録 C.2.1 のベクトル 3 重積の公式を参照)．ただしここでは質点の番号を指定する添字を省略する記法を採用しており，第 2 式の添字 i はデカルト座標の指標 (1,2,3) であることに注意する．従って剛体の角運動量 $\boldsymbol{L} = \sum \boldsymbol{l}$(和は全ての質点にわたってとる，以下同じ) は

$$L_i = I_{ij}\omega_j$$

と表される．ここに

$$I_{ij} \equiv \sum m(r^2\delta_{ij} - x_i x_j)$$

は慣性テンソルと呼ばれ，行列の形を借りてその全成分を表示すると

$$\hat{I} \equiv (I_{ij}) = \begin{pmatrix} \sum m(y^2+z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(z^2+x^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

となる=[9, p.124,pp.132–133]．また $L_i = I_{ij}\omega_j$ を行列の関係式に焼き直すと $\boldsymbol{L} = \hat{I}\boldsymbol{\omega}$ である．これは xy 面内の剛体の回転に対する結果 $L = I\omega$ の一般化となっており，逆に z 方向の厚みを持つ物体 $z \neq 0$ に対しても $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ とおけば，この関係は $\boldsymbol{L} = \hat{I}\boldsymbol{\omega}$ の z 成分として再現される．さらに全ての質点が xy 面内にあることまで要求すると ($z = 0$)，$\boldsymbol{L} = \hat{I}\boldsymbol{\omega}$ の x, y 成分はゼロになる．

剛体のつり合いの条件

［本稿では本節と次節は，xy 面内の剛体の回転に限定せずにまとめる．］

剛体の回転の方程式によれば，剛体が点 O［本稿では重心に限定しない］の周りに回転しない条件は，点 O の周りの**力のモーメントのつり合い**

$$\sum \boldsymbol{N} = 0$$

となる (以降，質点の番号 i を省く)．ところで原点 O と $\boldsymbol{r}_0 = \overrightarrow{\mathrm{OO'}}$ 隔たる点 O′ に関する力のモーメントは，O′ を原点とする位置ベクトルを $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ とすると

$$\sum \boldsymbol{N}' = \sum \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{F} = \sum (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \times \boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{N} - \boldsymbol{r}_0 \times \sum \boldsymbol{F}$$

と表されるので，力のつり合い $\sum \boldsymbol{F} = 0$ の満たされているときには

$$\sum \boldsymbol{N} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum \boldsymbol{N}' = 0$$

となる．以上より**剛体のつり合いの条件**は

$$\begin{aligned} \text{(外) 力のつり合い} \qquad & \sum \boldsymbol{F} = 0, \\ \text{外力のモーメントのつり合い} \qquad & \sum \boldsymbol{N} = 0 \quad \text{(任意の点の周り)} \end{aligned}$$

とまとめられる．

注解

同様の計算により 2 点 O, O′ 周りの角運動量 $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{L}'$ は

$$\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{L} - \boldsymbol{r}_0 \times \sum \boldsymbol{p}$$

によって関係付けられるので ($\boldsymbol{r}_0 = \overrightarrow{\mathrm{OO'}}$)，孤立系の全運動量 $\sum \boldsymbol{p}$ の保存を考えれば

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}'}{\mathrm{d}t} = 0$$

である [9, p.23]．(従って再び $\sum \boldsymbol{N} = 0$ ならば $\sum \boldsymbol{N}' = 0$ でなければならないことが結論される．) この結果は定性的には，剛体がある点 O の周りに回転を行っていなければ，他のいかなる点 O′ の周りにも回転を行ってはいないことを意味しており，これは直観的にも納得できる．

重力のモーメント

任意の点 O に関する重力 $m\boldsymbol{g}$ のモーメントの総和は

$$\boldsymbol{N} = \sum \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{g} = M\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{g}, \qquad M \equiv \sum m : \text{全質量}, \qquad \boldsymbol{R} \equiv \frac{\sum m\boldsymbol{r}}{M} : \text{重心の位置}$$

と表される．これは全質量が重心に集中したときの重心のモーメントに等しい．

注解

特に原点を重心に選べば $\boldsymbol{R} = 0$ となるから，重力は重心周りのモーメントには寄与しない．

力の合成——幾何学的考察

各質点に働く力のモーメント $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ はその幾何学的な意味により，力 $\boldsymbol{F}$ をその作用線に沿って平行移動しても不変である．そうであるならば図 58 のように，2 つの力 $\boldsymbol{F}_1 = \overrightarrow{\mathrm{AA'}}, \boldsymbol{F}_2 = \overrightarrow{\mathrm{BB'}}$ を始点がそれぞれの作用線の交点 P に一致するように作用線に沿って移した力 $\boldsymbol{F}_1{}' = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}, \boldsymbol{F}_2{}' = \overrightarrow{\mathrm{PR}}$ に置き換えても，力のモーメントの和は不変となるはずである．したがって $\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ を点 P において合成した力 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1{}' + \boldsymbol{F}_2{}'$ に置き換えても力のモーメントは，したがって剛体の運動は変わらない：

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \boldsymbol{F}_1 + \overrightarrow{\mathrm{OB}} \times \boldsymbol{F}_2 = \overrightarrow{\mathrm{OP}} \times \boldsymbol{F}_1{}' + \overrightarrow{\mathrm{OP}} \times \boldsymbol{F}_2{}' = \overrightarrow{\mathrm{OP}} \times \boldsymbol{F}.$$

幾何学的考察　このことは図 58 のように，図形的にも直接確かめられる．ただし図 58 では原点 O を通り PQ に (したがって RS に) 平行な補助線を引き，PB との交点を O′ としている．

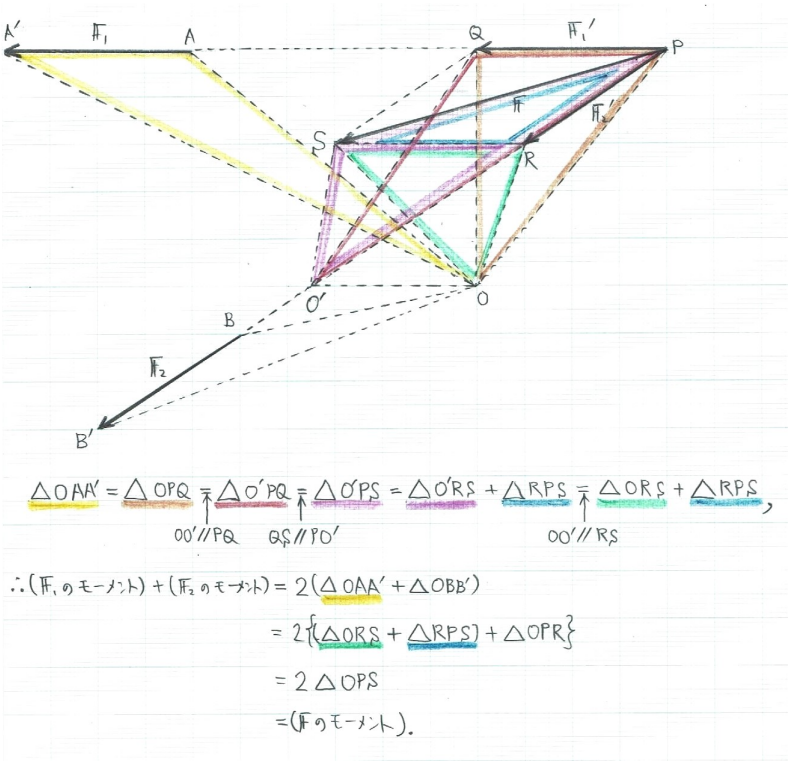


図 58　剛体の運動を変えない力の合成

注解

全外力と外力の全モーメントが同じならば，剛体の運動は変わらないことを説明する．まず，剛体の自由度を勘定することから始めよう．剛体の空間に占める配置は，剛体の中の代表点 (例えば重心) の位置と，剛体に固定した座標軸の空間固定系に対する方向を指定すれば完全に決定される．

- 代表点の位置は空間固定系で見た 3 つの座標で表される．
- 空間固定系に対する剛体に固定した座標軸の向きは
  - 3 つの Euler 角で表される．
  - あるいは空間固定系を回転させて剛体系の軸方向に一致させるような回転の
    - 回転ベクトルの 3 成分で表される．
    - 回転軸の向き (2 つのパラメーターで指定) と回転角 (1 つのパラメーター) で表される．

以上より剛体の自由度は $3+3=6$ である．そして剛体の運動は，

- 重心運動の方程式　$M\dot{\boldsymbol{V}} = \sum \boldsymbol{F}$　(3 成分)
- 剛体の回転の方程式　$\hat{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \sum \boldsymbol{N}$　(3 成分)

の合計 6 つの基礎方程式 (と初期条件) で決まる．これは剛体の運動が全外力 $\sum \boldsymbol{F}$ と外力の全モーメント $\sum \boldsymbol{N}$ だけで決まっていることを意味している．

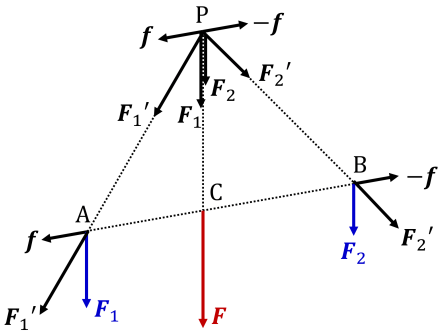


図 59　平行な 2 力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$ の合成

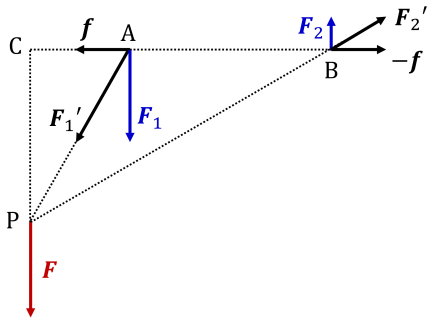


図 60　反平行な 2 力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$ の合成

平行な 2 力の合成

$\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ が平行なときには，これらの作用線は交わらない．このような場合の合力 (剛体の運動を変えない) は次のように考えれば良い．すなわちこれまでの議論より，$\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ の作用点 A,B を結ぶ線に沿った逆向きの力 $\boldsymbol{f}, -\boldsymbol{f}$ を加えても剛体の運動は変わらない．そこで図 59 のように $\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ の代わりに，合力 $\boldsymbol{F}_1{}' = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{f}$ と $\boldsymbol{F}_2{}' = \boldsymbol{F}_2 - \boldsymbol{f}$ を合成すれば，点 P における合力

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1{}' + \boldsymbol{F}_2{}' = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$$

が得られる．これが平行な力 $\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ の合成を与える．［合力 $\boldsymbol{F}$ にはその作用線に沿って平行移動する任意性がなお残されている．これは便宜的に導入した力 $\boldsymbol{f}$ の大きさの選択の任意性に応じた，点 P の位置の不定性に対応している．］そこで合力 $\boldsymbol{F}$ の作用線が AB を切る点 C の位置を調べると，点 C は AB を力の逆比 $F_2 : F_1$ に内分することが分かる．

証明　図 59 において

$$\overline{\mathrm{AC}} : \overline{\mathrm{CB}} = (\overline{\mathrm{AC}} \div \overline{\mathrm{CP}}) : (\overline{\mathrm{CB}} \div \overline{\mathrm{CP}}) = (f \div F_1) : (f \div F_2) = F_2 : F_1.$$

注解

「$\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ が逆向きで平行だが，和が 0 にならないときには，$\boldsymbol{F}$ の作用線は $\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ の始点を結ぶ線分を外分する点を通る」(p.113) について，図 60 のように定義した点 A,B,C,P に対して再び

$$\overline{\mathrm{AC}} : \overline{\mathrm{CB}} = (\overline{\mathrm{AC}} \div \overline{\mathrm{CP}}) : (\overline{\mathrm{CB}} \div \overline{\mathrm{CP}}) = (f \div F_1) : (f \div F_2) = F_2 : F_1$$

が成り立つ．(図 60 では $F_1 > F_2$ としている．)

偶力

2 つの力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$ の合力がゼロになる場合にも ($\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0$)，これらの作用線が異なっていれば力のモーメントはゼロにならず，物体の回転を引き起こす (図 61 参照)．このような力を偶力と呼ぶ[*23]．

［剛体がつり合っているならば合力を $\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ に分けたとき，力のつり合いより $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0$ となるからそれらは一般には偶力である．しかし］剛体がつり合っているならば力のモーメントもゼロにならなければならないから，偶力が存在してはならず，$\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ は共通の作用線を持つことになる．こうして「剛体がつり

[*23] 偶力は両手でハンドルを回すときの力である．

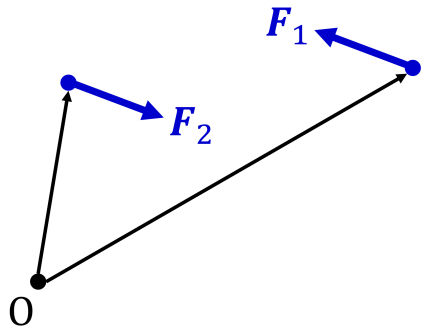


図 61　偶力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2(= -\boldsymbol{F}_1)$

あっていれば，すべての力の作用線は 1 点で交わり，かつ，すべての力のベクトル和はゼロ・ベクトルになる」(p.114).

第 3 章 熱学

3-1 理想気体と絶対温度

固体・気体・液体

固体・気体・液体の性質を表 2 にまとめる．気体は容器全体に拡散するため，気体の体積とは容器の体積のことである．なお「高校の熱学では……対象もほとんど気体に限られる」(p.2).

分子間距離と分子間力

分子間力は**ファン・デル・ワールス力**と呼ばれ，そのポテンシャルは図 62 のような概形の距離 r 依存性を持つ (r_0 はポテンシャルの極小値を与える距離，ポテンシャルと力の関係は 2-10 節参照).

- $r < r_0$ のとき
  分子間には斥力が働く．これは量子力学の効果である．
  - $r = r_0$ はそれ以上近づくと斥力を受ける距離であり，
    分子を剛体球のように見なしたときの直径に相当する．
- $r > r_0$ のとき
  分子間には分子内の電荷分布に起因する引力が働く．
  分子全体は電気的に中性だから，分子のサイズより大きい距離 ($r \to \infty$) では力はゼロになる．

表 2　固体・気体・液体の性質 (◯ は「有り」，× は「無し」または「ほぼ無し」)

	気体	液体	固体
圧縮性	◯	×	×
流動性	◯	◯	×
表面	×	◯	◯

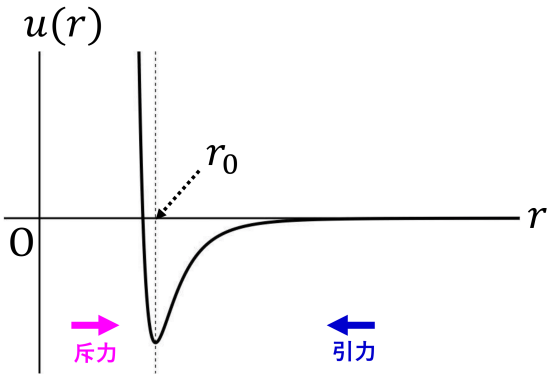


図 62　分子間力のポテンシャル

注解

希ガスの原子間力は Lennard-Jones (レナード-ジョーンズ) ポテンシャル

$$u(r) = U_0 \left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6} \right]$$

で良く近似できることが知られている [14, p.12].

分子間力と液体・気体のちがい

液体は表面を作る	$\Leftarrow$	分子が内向きに力を受け，表面の外に飛び出すことができない (大きな運動エネルギーを持った分子は表面から逃げる (蒸発))
	$\Leftarrow$	分子間に引力が働いている [$r = r_0$で安定しているのではない．それは固体である.]
	$\Leftarrow$	液体では $r > r_0$,
液体は圧縮性が小さい	$\Leftarrow$	液体では r は斥力の働く距離 r_0とそれほど離れていない， (実際，液体の密度は固体 (分子は $r = r_0$の周りに振動) の密度と ほとんど変わらない)
気体は表面を作らず， 圧縮性が大きい	$\Leftarrow$	液体では r が大きく，分子間力は事実上ゼロ.

実際に分子間距離を見積もってみよう．1mol の水 (18g) を考えると，体積は液体では $V_{液} = 18\mathrm{cm}^3$ (およそピンポン玉の体積)，気体では標準状態で $V_{気} = 22.4l = 22.4 \times 10^{-3}\mathrm{cm}^3$ (およそバスケットボールの体積) だから［バスケットボールの体積と同程度であるが，厳密にはそれよりも一回り大きい]，

$$\frac{r_{気}}{r_{液}} = \left(\frac{V_{気}}{V_{液}}\right)^{1/3} \simeq 10, \qquad r_{液} \sim \left(\frac{V_{液}}{N_{\mathrm{A}}}\right)^{1/3} \sim 10^{-10}\mathrm{m}.$$

[$r_{液}$ は分子のサイズと同程度となっている.]

気体の特殊性

厳密には分子間力は物質の種類によって異なるけれど，気体については十分希薄で分子間力の影響を無視できる限りで，物質の詳細に依らずに次の関係が成り立つ.

- **Boyle** (ボイル) **の法則**
  気体の圧力 P，体積 V に対して

$$PV = \mathrm{const.} \qquad (\text{温度一定のとき})$$

- **Gay-Lussac** (ゲイリュサック) **の法則**

$$\frac{V_{沸点} - V_{氷点}}{V_{氷点}} = 0.366 = \frac{100}{273}. \qquad (\text{圧力一定のとき})$$

  [圧力の一定値に依らない.]

- 氷点，1atm における 1mol の気体の体積

$$V_{\text{氷点}} = V_0 \equiv 22.4l.$$

［氷点は考えている気体の凝固点ではなく水の (1atm での) 凝固点であって，
すぐ後で定義される摂氏 0°C である．0°C，1atm は標準状態と呼ばれ，これは氷点に他ならない．］

■圧力について

- 大気圧　$1\text{atm} = 1.013 \times 10^5\text{Pa} = 76\text{cmHg}$.
- 圧力の単位 Pa(パスカル) $= \text{N/m}^2$，1hPa(ヘクトパスカル) $= 100\text{Pa}$.

摂氏温度と理想気体

分子間力を無視することができ，それ故に上の関係が厳密に成り立つ**理想気体**を考え，1atm でのその体積 V を用いて**摂氏温度** θ°C を

$$\theta = 100\frac{V - V_{\text{氷点}}}{V_{\text{沸点}} - V_{\text{氷点}}}$$

で定義する［θ は温度から単位を除いた数値である］．するとこれは **Charles** (シャルル) の法則

$$V(\theta) = V_0(1 + \alpha\theta), \qquad \alpha = \frac{1}{273} : \text{膨張係数} \qquad (1\text{atm のとき}) \tag{9}$$

となる．［言い換えればシャルルの法則は理想気体を用いた摂氏温度の定義式である．］

シャルルの法則 (9) の導出　摂氏温度の定義式を体積 V について解くと

$$V = V_{\text{氷点}} + \frac{1}{100}(V_{\text{沸点}} - V_{\text{氷点}})\theta = V_{\text{氷点}}\left(1 + \frac{1}{273}\theta\right)$$

となる．$V_{\text{氷点}} = V_0$ なのでこれはシャルルの法則 (9) に他ならない．

V_0 の定義に関する注意　ここでは氷点での体積 V_0 は 1mol の気体に対する値 $v_0 = 22.4l/\text{mol}$ でなくても良く，考えている気体の物質量が n ならば $V_0 = nv_0$ である．これを状態方程式の導出の際に用いる．

理想気体による絶対温度

よってボイルの法則 $PV = \text{const.}$ における一定値を，大気圧 $P_0 = 1\text{atm}$ での体積 $V(\theta) = V_0(1 + \alpha\theta)$ を用いて評価すると

$$PV = P_0V_0(1 + \alpha\theta) = \alpha P_0V_0(273 + \theta)$$

となる．そこで**理想気体を用いて定義した絶対温度**を

$$T = (273 + \theta)\text{K}$$

で導入すると (単位：K (ケルビン))，絶対零度 $T = 0$ (−273°C) で気体の体積は $V = 0$ となる．理想気体では理論的にこうならざるを得ない．

理想気体の状態方程式

以上より**理想気体の状態方程式**

$$PV = nRT, \qquad R = 8.31\text{J/mol}\cdot\text{K} : \text{気体定数} \tag{10}$$

を得る．これは現実の気体に対しても常温以上・常圧以下では良く成り立つ．

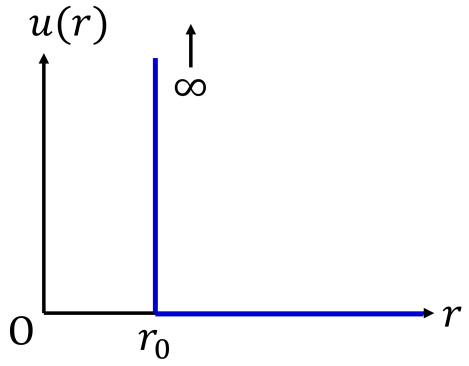


図 63　剛体球ポテンシャル

状態方程式 (10) の導出　ここではどうしても文字と数値の混在した式を書かざるを得ない．

$$
\begin{aligned}
PV =& \alpha P_0 V_0 \frac{T}{1\mathrm{K}} = nRT, \\
R \equiv& \frac{\alpha P_0 v_0}{1\mathrm{K}} = \frac{1}{273}(1.013\times 10^5 \mathrm{N/m^2})(22.4\times 10^{-3}\mathrm{m^3/mol})\mathrm{K}^{-1} \\
=& 8.31\mathrm{J/mol\cdot K}.
\end{aligned}
$$

注解　状態方程式において $T = \mathrm{const.}$ とおくとボイルの法則 $PV = \mathrm{const.}$ が，$P = \mathrm{const.}$ とおくとシャルルの法則 $V \propto T$ が再現される．

理想気体についての若干の補足

理想気体は分子間力を無視した気体と言ったが，直ぐ後で見るように熱平衡が達せられるためには分子間のエネルギーのやり取りを要するから，［$r = r_0$ における］衝突までも無視することはできない．ここで $r_0 = 0$［と考えれば，これ］は理想気体の分子の大きさを無視することを意味する．

注解

直径 r_0 の剛体球の間に働くポテンシャルは図 63 のようである．すなわち $r > r_0$ では力が働かないのに対し，$r = r_0$ のところではポテンシャルの勾配は無限大だから，無限に大きな力が働く．剛体球どうしの接触時間は一瞬なので，剛体球に働く力積は，したがって衝突前後の運動量変化は有限の値に留まる．

3-2 気体分子運動論

物の熱さと熱運動

「前節では，物質の特殊性に左右されない温度として分子間力の働かない理想気体を導入することによって『絶対温度』を定義した．」他方，分子運動論的立場では「**物が熱いとは物体を構成している分子の熱運動が激しいことを意味する．ここで熱運動とは**」流体の重心とともに動く座標系に対する「**分子の無秩序な運動をさす**」．「そして温度とは，熱運動の激しさを表す量である」(以上，p.122)．

- お風呂のお湯は全体としては静止しているけれど，個々の分子は激しく熱運動をしており，熱い．
- 川の水や風は全体としては勢い良く流れていても，
  その重心系で見た分子の熱運動が激しくなければ熱くはない．

熱運動と温度

熱運動が無秩序な運動であるならば，各座標軸 i 方向への運動に対応する運動エネルギー ${mv_i}^2/2$ は，全分子について平均をとると等しくなる．［ただし v_i は流体の重心系で見た速度であり，それ故に分子の熱運動の速度を表していると考えられる．］すなわち全分子についての相加平均を $\langle\cdots\rangle$ で表すと

$$\left\langle \frac{1}{2}m{v_x}^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}m{v_y}^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}m{v_z}^2 \right\rangle .$$

この量は熱運動の激しさの指標となっているから，その単調増加関数は何であれ温度に用いることができる．

温度と熱平衡

実際，例えば熱い鉄塊を冷水に入れた場合を考えると，平均的には水分子は熱運動の激しい鉄から運動エネルギーを受け取る．これは鉄から水への熱の流れがあることを意味している．最終的に鉄と水とで運動エネルギーの平均値が等しくなったとき (**熱平衡**)，［経験的に］両者の温度は等しくなっている．このことからも運動エネルギーの平均値 $\langle m{v_i}^2/2\rangle$ が温度の資格を持つことが裏付けられる．

気体分子運動論

気体分子運動論によれば，質量 m の気体分子の集団について気体の圧力 P は，分子数密度 ν，分子の平均の (並進) 運動エネルギー $\varepsilon = \langle mv^2/2\rangle$ を用いて

$$P = \frac{2}{3}\nu\varepsilon \tag{11}$$

と表される．これを状態方程式 $P = \nu kT$ (k は Boltzmann 定数) と組合せると

$$\varepsilon = \frac{3}{2}kT$$

となり，エネルギー等分配則

$$\left\langle \frac{1}{2}m{v_x}^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}m{v_y}^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}m{v_z}^2 \right\rangle = \frac{1}{2}kT$$

を得る．式 (11) の説明に先立って，いくつか注意を述べる．

注解　示強変数　本稿では諸関係式を，圧力や温度，分子数密度のように空間の各点ごとに局所的に定義された量 (示強変数) だけを用いて，各位置ごとに成り立つ関係として表現した．特に状態方程式

$$P = \nu kT$$

について，体積 V の気体に対する表現 $PV = nRT$ との等価性を見るには

$$\nu = \frac{nN_\mathrm{A}}{V}, \qquad k = \frac{R}{N_\mathrm{A}}, \qquad \therefore \nu k = \frac{nR}{V}$$

を用いれば良い．($k = R/N_\mathrm{A}$ について，粗く言うと k は“ミクロな”(それ故，基本的な) 定数であるのに対し，R は“マクロな”定数である．)

「気体分子運動論」「状態方程式」「熱運動のエネルギーと温度の関係」の関係　理想気体を用いて温度 T を定義する代わりに，熱運動の平均のエネルギー $\langle m{v_i}^2/2\rangle$ が温度の指標になるという前節までの議論に基づき，

$$\left\langle \frac{1}{2}m{v_x}^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}m{v_y}^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}m{v_z}^2 \right\rangle = \frac{1}{2}kT$$

によって温度 T を定義すれば，これを気体分子運動論の結果 (11):$P = \frac{2}{3}\nu\varepsilon = \nu\langle m{v_x}^2/2\rangle$ と組合せて逆に状態方程式 $P = \nu kT$ が導かれることになる (図 64 参照)．これは気体分子運動論から状態方程式が基礎づけられたことを意味しており，ここから逆にボイルの法則などの経験則が説明される．またこの温度 T は理想気体を用いて定義した絶対温度に一致する．

式 (11) の導出　そこで本稿では教科書のように，一辺 L の立方体の箱に封入した理想気体を考える代わりに，空間の各位置ごとに局所的に成り立つ関係として式 (11) を導く．今，図 65 のように微小面積 ΔS を持つ x 軸に垂直な壁面を考え，ここに衝突する分子 (質量 m) が壁に及ぼす圧力 P を調べよう．ただし弾性衝突を仮定する．これは分子のエネルギーが減らないような断熱壁を考えることに対応している．各時刻 t に分子の位置が $\boldsymbol{x}$ 周りの微小体積 d^3x に含まれ，速度が $\boldsymbol{v}$ 周りの微小な範囲 d^3v に含まれる分子数を $\nu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3v$ と書いて状態空間 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ の粒子数密度 $\nu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ を定義する．以下では位置 $\boldsymbol{x}$ と時刻 t 依存性を省略して，これを単に $\nu_{\boldsymbol{v}}$ と書く．微小時間 Δt のうちに面積 ΔS に衝突する，速度範囲 d^3v (ただし $v_x > 0$) に含まれる分子は図 65 の柱の体積 $v_x\Delta t\Delta S$ に含まれていなければならないから，その個数は

$$\nu_{\boldsymbol{v}}(v_x\Delta t\Delta S)\mathrm{d}^3v$$

である．1 個の分子は弾性衝突の際，壁に x 成分 $2mv_x$ の力積を及ぼすから，壁の受ける力積は

$$P\Delta S\Delta t = \int_{v_x>0} 2mv_x\nu_{\boldsymbol{v}}(v_x\Delta t\Delta S)\mathrm{d}^3v$$

と表される．よって圧力は

$$\begin{aligned} P =& 2m\int_{v_x>0} {v_x}^2\nu_{\boldsymbol{v}}\mathrm{d}^3v = m\int {v_x}^2\nu_{\boldsymbol{v}}\mathrm{d}^3v \qquad (\text{等方性 } \nu_{(-v_x,v_y,v_z)} = \nu_{(v_x,v_y,v_z)}) \\ =& \nu\langle m{v_x}^2\rangle : (11), \end{aligned}$$

$$\nu = \int \nu_{\boldsymbol{v}}\mathrm{d}^3v : \text{分子数密度}, \qquad \langle m{v_x}^2\rangle = \frac{\int {v_x}^2\nu_{\boldsymbol{v}}\mathrm{d}^3v}{\int \nu_{\boldsymbol{v}}\mathrm{d}^3v}$$

となる．これと同様の導出は，例えば文献 [15, pp.10–11] に見られる．

平均自由行程

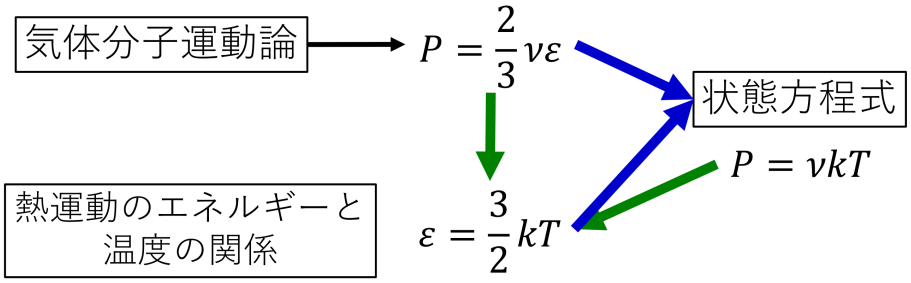
分子を直径 r_0［半径ではない］の剛体球と見なして，その**平均自由行程** l を考えよう．平均自由行程とは分子が他の分子に衝突せずに進むことのできる平均の距離のことである．図 66 のようにある分子の進行方向を軸に持つ底面の半径 r_0 の円筒を考えると，分子は中心が円筒に含まれる他の分子と衝突する．分子の数密度を ν とすると，円筒の長さ l ごとに 1 個の分子が含まれること

$$\pi{r_0}^2 l \times \nu = 1$$

から平均自由行程は

$$l = \frac{1}{\pi\nu{r_0}^2}$$

と表される．［これは分子のサイズ r_0 と数密度 ν の減少関数となっており，定性的にもっともな結果である．］



ν：分子数密度，ε： 1分子の平均エネルギー

図 64　「気体分子運動論」「状態方程式」「熱運動のエネルギーと温度の関係」の関係

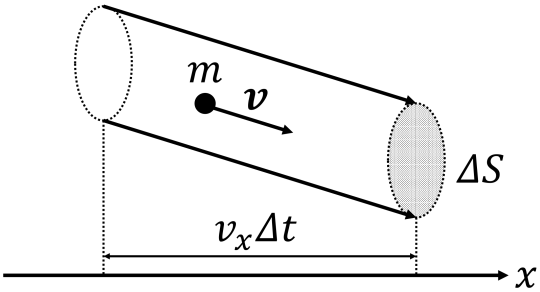


図 65　気体分子のもたらす圧力

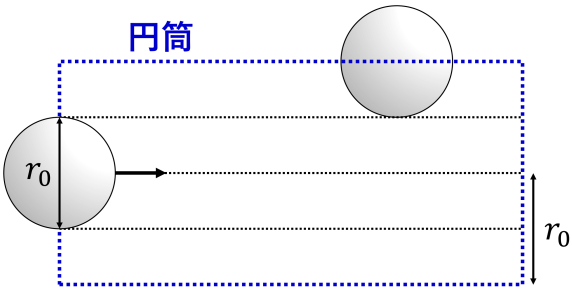


図 66　分子の進行方向を軸に持つ底面の半径 r_0 の円筒

例——気体の平均の速さと平均自由行程

気体分子の平均の速さとして

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

を用いることができる．空気の約 80 %を占める窒素 (分子量 28) の分子質量 m を用い，27°C ($T = 300\mathrm{K}$) でこれを評価すると

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} \simeq 5 \times 10^2 \mathrm{m/s}$$

となる．

一方，平均自由行程

$$l = \frac{1}{\pi \nu {r_0}^2}$$

は，この温度での分子の数密度

$$\nu = \frac{6.02 \times 10^{23}}{22.4 \times 10^{-3}\mathrm{m}^3 \times \frac{300\mathrm{K}}{273}\mathrm{K}} = 2.45 \times 1025/\mathrm{m}^3$$

を用い，r_0 を $r_{水} = 3 \times 10^{-10}\mathrm{m}$ (3-1 節) で代用すると

$$l \simeq 1.4 \times 10^{-7}\mathrm{m}$$

と見積もることができる．

以上より平均自由行程 l は分子直径 r_0 の約 500 倍［そして分子間距離 $r_{気} = 3 \times 10^{-9}\mathrm{m}$ の約 50 倍］であるにも関わらず，単位時間当たりの衝突回数は $\sqrt{\langle v^2 \rangle}/l \sim 10^9/\mathrm{s}$ に上る．このため気体分子は速度 $\sqrt{\langle v^2 \rangle} \simeq 5 \times 10^2\mathrm{m/s}$ で飛び交っていても，1 秒後に 500m 先まで到達することは期待できず，実際には 1 秒後にも比較的近くにいる．

注解

気体分子の速さの目安にはここで見た速度の 2 乗平均

$$v_\mathrm{s} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

の他にも，速さの分布関数

$$N(v) = 4\pi v^2 \times \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2/2}{kT}\right)$$

から求まる以下のものがある [16, pp.31–39].

速さの最確値　$v_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$,　　(速さの分布関数 $N(v)$ を最大にする v)

速さの平均値　$\langle v \rangle \equiv \int_0^\infty v \frac{N(v)}{N} \mathrm{d}v = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$.　　(速さの分布から求めた平均値)

ここで kT は (運動) エネルギーの次元を持つので kT/m は (速度)^2 の次元を持つ．よって共通の因子 $(kT/m)^{1/2}$ は速度の次元を持っている．いずれも $(kT/m)^{1/2}$ 程度であり，音速

$$c = \sqrt{\frac{\gamma kT}{m}} \qquad \text{(理想気体に対して，4-2 節参照)}$$

と同程度である (音速の典型的な値は約 300m/s).

3-3 熱力学第 1 法則

熱力学第 1 法則の一般的表現

考えている巨視的な物質 (の集合) を「系」，系の重心系で見た分子のエネルギーの総和を**系の内部エネルギー**と呼ぶ．内部エネルギーの変化 ΔU は系に加えられた熱 (熱運動のエネルギー) Q だけ増大し，系が外にした仕事 W の分だけ減少する：

$$\Delta U = Q - W.$$

これはエネルギー保存則を表しており，熱力学第 1 法則と呼ばれ，熱力学の第 1 の原理に当たる．

注解

■保存則の書き方　ここではエネルギー保存則 $\Delta U = Q - W$ を，

$$(\text{系内部の変化量}) = (\text{外部とのやりとり})$$

という形に書いた．これは連続の式をはじめとした保存則の定式化の際の基本方針となる (付録 D.17 参照)．しかしながら第 1 法則はしばしば，これを移項して $Q = \Delta U + W$ とも書かれる．

■仕事の符号

$$\begin{aligned}(\text{A が B にした仕事}) &= -\,(\text{A が B にされた仕事})\\ &= -\,(\text{B が A にした仕事})\\ &=(\text{B が A にされた仕事}).\end{aligned}$$

仕事について

図 67 のように一端を可動式のピストンとする，x 軸に沿った直断面 S のシリンダーに気体を封入する．シリンダー内の気体は膨張することで，外に仕事をする．外圧を $P_{外}$ とすると，外からの力 $P_{外}S$ に逆らって気体がピストンを位置 $x = x_{\mathrm{A}}$ から $x = x_{\mathrm{A}}$ まで動かす仕事は

$$W = \int_{x_{\mathrm{A}}}^{x_{\mathrm{B}}} P_{外} S \mathrm{d}x = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} P_{外} \mathrm{d}V$$

と表される ($\mathrm{d}V = S\mathrm{d}x$ は気体の体積変化)．

ここでシリンダー内部の気体の圧力 P ではなく，外圧 $P_{外}$ を用いなければならないことに注意する．これについて教科書の内容を少し先取りして述べると (「非可逆過程での仕事」(pp.128–129))，$P > P_{外}$ のとき「差 $\int (P - P_{外})\mathrm{d}V$ は，ピストン自体の質量を無視すれば，気体自身の流れの巨視的な運動エネルギーに変わる．その流れはやがて気体分子の器壁への衝突と内部摩擦により止められ，最終的にはそのエネルギーは気体分子の熱運動のエネルギー，つまり内部エネルギーに変わるので，その余分な仕事は外にした仕事に含まれない」．もっとも「このような場合，気体内部にムラができ，気体の圧力を一義的に定義できないことが多い」(教科書 p.136 欄外の註も参照)．［ただし各位置で圧力が定まっていれば，圧力分布を場として定義することはできると考えられる．］

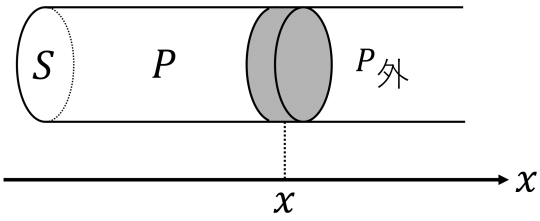


図 67　シリンダー内の気体

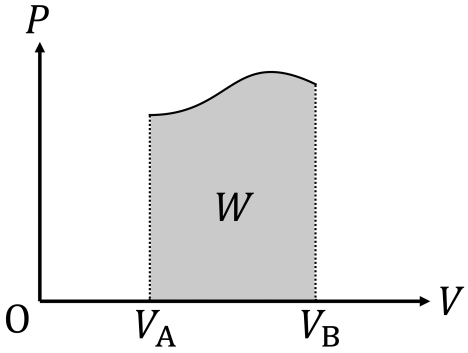


図 68　P-V 図上の状態変化と仕事

可逆変化での仕事

［気体の圧力 P と外圧 $P_{外}$ が完全につり合っていたらピストンを動かせないけれど,］P と $P_{外}$ の差が無限に小さく，事実上つり合い $P = P_{外}$ が成り立っている場合には

$$W = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} P\mathrm{d}V$$

となる．このような事実上のつり合いを通る変化を「**ゆっくりとした変化** (**準静的変化**)」という．［我々は力の位置エネルギーを定義する際に，このような概念を既に見ている (教科書 p.47，p.72).］

- $P = P_{外} + \varepsilon(\varepsilon \to 0)$ の準静的変化に対して $P = P_{外} - \varepsilon$ とすれば，
  同じ状態を通って変化を巻き戻せるから，準静的変化は**可逆変化**である．
- また準静的変化では各瞬間の P と V の値が定まっているから，
  変化の過程は P-V グラフの曲線で表され，仕事は曲線の下の面積で表される (図 68 参照).

注解

■区分求積　念のため確認しておくと，気体の圧力が P の状態から体積が ΔV だけ増大する間にも気体の圧力は変化するから，この間に圧力を一定と見なして気体のする仕事を $P\Delta V$ と考えるのは近似である．この近

似は区分求積の発想であり，誤差は $\Delta V \to 0$ のとき仕事の正確な値 $W = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} P\mathrm{d}V$ に影響しない．

■一般の形の容器　準静的過程における仕事の公式 $W = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} P\mathrm{d}V$ は，1 次元的なシリンダーに限らず一般の形の容器に対しても適用できる．実際，任意の形状の袋に気体を閉じ込めた場合を考え，袋の面要素を $\mathrm{d}f$，その外向き法単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると，気体が面要素を微小距離 $\boldsymbol{D}$ だけ変位させる仕事は $(P\boldsymbol{n}\mathrm{d}f)\cdot\boldsymbol{D}$ である．よって気体の圧力 P がいたるところで一様であれば，これを表面積分の外に出すことができ，気体のする仕事は

$$W = \int \boldsymbol{D}\cdot(P\boldsymbol{n}\mathrm{d}f) = P\Delta V, \qquad \Delta V = \int \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}f : \text{容積変化}$$

で与えられる．

非可逆変化での仕事

気体が真空中に非可逆的に拡散する場合 $P_{外} = 0$ だから，気体は体積を増しているにも関わらず気体のする仕事 $\int P_{外}\mathrm{d}V$ はゼロになる．［気体は外に仕事をせずとも真空中に拡散してゆくことができる．］

熱力学第 1 法則の歴史的意義

熱が分子の熱運動のエネルギーの流れであることを踏まえると，熱力学第 1 法則は単なるエネルギー保存則に過ぎず，当たり前のことに見える．しかし当初，熱は「熱素」と呼ばれる物質と捉えられ，「熱素」と「力学的エネルギー」(と「質量」) はそれぞれ独立に保存すると考えられていた．熱もエネルギーの一形態であるとし，これを熱も含めたエネルギーの保存則へとまとめ上げたことに第 1 法則の歴史的意義がある：

第 1 法則以前の保存量 $\cdots$「熱素」「力学的エネルギー」「質量」
$\to$　第 1 法則以降の保存量 $\cdots$「熱を含むエネルギー」「質量」.

■熱と力学的な仕事の互換性について　マイヤー (Mayer) とジュール (Joule) は熱 ΔQ と仕事 ΔW が交互に変換し得ること，しかも交換の仕方に依らず常に一定の割合

$$\Delta Q = J\Delta W, \qquad J = 4.2\mathrm{J/cal} : \text{熱の仕事当量}$$

で変換することを見出した (ただし $\Delta U = 0$，すなわち熱も仕事も内部エネルギーに蓄えられないとき)．これは「熱も仕事も本質的に同じもの，つまりエネルギーの異なる形態であることを示すものであり，たまたま歴史的に別のものと考えられていたために別の単位で測られていたにすぎない」(p.130)．そこで 1cal = 4.2J (正確には 4.18605J) と定めて，熱も cal (カロリー) ではなく J (ジュール) を単位として測ることにする．これは上式で $J = 1$ とおくことに対応する．

熱力学第 1 法則の本質的意義

本稿では教科書の説明の順序を少し改めてまとめる．仕事すなわち P-V グラフの面積 $\int \mathrm{d}W = \int P\mathrm{d}V$ は径路に依るため，始状態 S_0 と終状態 S を結ぶ 2 つの径路 $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ から作られる閉曲線 $\mathrm{C} = \mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_2$ を考えると

$$\int_{\mathrm{C}_1} \mathrm{d}W \neq \int_{\mathrm{C}_2} \mathrm{d}W, \qquad \therefore \oint_{\mathrm{C}} \mathrm{d}W \neq 0$$

である．一方 C に沿ってもとの状態 S に戻ると，内部エネルギーももとの値に戻っている．ここで考えられているのは内部エネルギーが各状態ごとに定まっているという主張に他ならず，第 1 法則を考慮すると，始状

態 S_0 を固定したとき内部エネルギー

$$U(\mathrm{S}) = \int_{\mathrm{S}_0}^{\mathrm{S}} (\mathrm{d}Q - \mathrm{d}W) = Q - W$$

を径路に依らずに状態 S の 1 価関数として定義できることを意味している．よって

$$0 = \oint_{\mathrm{C}} \mathrm{d}U = \oint_{\mathrm{C}} \mathrm{d}Q - \oint_{\mathrm{C}} \mathrm{d}W, \qquad \therefore \oint_{\mathrm{C}} \mathrm{d}Q = \oint_{\mathrm{C}} \mathrm{d}W \neq 0$$

となり，加熱量 $\int \mathrm{d}Q$ も仕事と同様に径路に依存する．

3-4 理想気体の内部エネルギーと比熱

内部エネルギーの分子論的考察

物質の内部エネルギーの内訳は以下のようにまとめられる．

- 分子の運動エネルギー
  - 並進運動エネルギー　$mv^2/2$ (分子 1 個あたり)
  - 内部運動のエネルギー　$\varepsilon_{内}$ (分子 1 個あたり)
    - 回転運動のエネルギー
    - 振動運動のエネルギー
- 分子間力の相互作用エネルギー［ポテンシャル］

注解

2 分子 i, j の間の相互作用のポテンシャル (2-7 節) を $U_{ij}(r_{ij})(= U_{ji}(r_{ji}))$ とすると ($r_{ij}(= r_{ji})$ は分子間距離)，分子間力の相互作用エネルギーは

$$\sum U_{ij}$$

と表される．ここで $\sum$ は全ての分子対にわたる和を表しており，次のような表記法がある．

$$\sum_{分子対}, \qquad \sum_{i>j}, \qquad \sum_{i<j}, \qquad \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}.$$

実際これが相互作用ポテンシャルになっていることは，

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_k}\frac{1}{2}\sum_{i\neq j} U_{ij} &= -\frac{1}{2}\left(\sum_{i(\neq k)} \frac{\partial U_{ik}}{\partial \boldsymbol{r}_k} + \sum_{j(\neq k)} \frac{\partial U_{kj}}{\partial \boldsymbol{r}_k}\right) \\
&= -\sum_{i(\neq k)} \frac{\partial U_{ki}}{\partial \boldsymbol{r}_k} \\
&= -\sum_{i(\neq k)} \frac{\partial U_{ki}}{\partial r_{ki}} \hat{\boldsymbol{r}}_{ki} \qquad \left(\frac{\partial r_{ki}}{\partial \boldsymbol{r}_k} = \frac{\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|} \equiv \hat{\boldsymbol{r}}_{ki} : 方向単位ベクトル\right) \\
&= \sum_{i(\neq k)} \boldsymbol{f}_{ki} \qquad \left(\boldsymbol{f}_{ki} = -\frac{\partial U_{ki}}{\partial r_{ki}} \hat{\boldsymbol{r}}_{ki} : 分子\ k\ が分子\ i(\neq k)\ から受ける中心力\right)
\end{aligned}$$

が分子 k に働く力を正しく与えていることから確かめられる (2-10 節の注解を参照)．

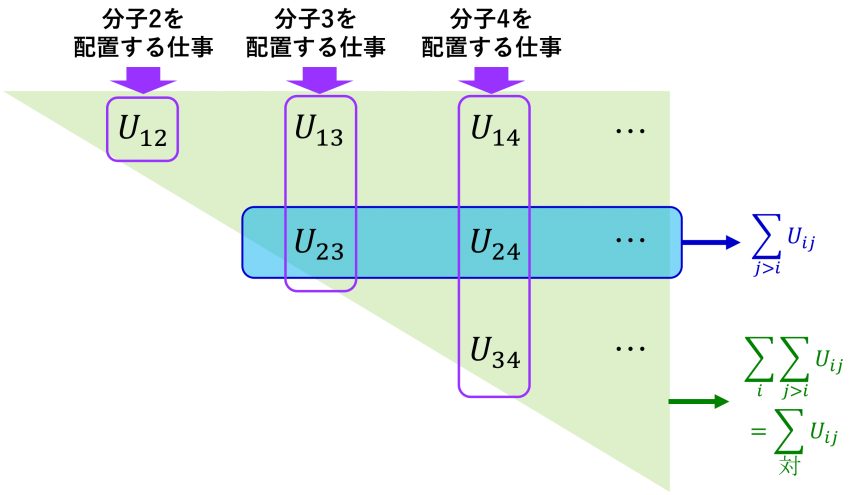


図 69　相互作用ポテンシャルの全分子対にわたる和

また全相互作用ポテンシャルが粒子対の和で与えられることは，次のように考えれば明瞭に理解できる [8, p.189]．求める対のエネルギーは，全分子が互いに無限に離れており力を及ぼしあっていない状態から，各分子間距離が $\{r_{ij}\}$ で与えられる配置まで全ての分子を運ぶ際にする仕事である．初めに分子 1 を無限遠から持ち運び，次に分子 2 を無限遠から持ち運び，……という具合に，この作業を段階的に行うことを考えると，

1. 分子 1 を運ぶときには他の分子は無限に離れていて力を及ぼさないから，仕事を必要としない．
2. 次に分子 2 を運ぶときには，
   すでに配置されている分子 1 との相互作用に逆らって U_{12} の仕事をしなければならない．
3. 続いて分子 3 を運ぶときには，同様に $U_{12} + U_{13}$ の仕事をしなければならない．

(ある分子を運んでいる間，他の分子を固定している力は仕事をしないことに注意する．) こうして全体の仕事は分子対にわたる和 $\sum_{j>i} U_{ij}$ となる (図 69 参照)．

理想気体の内部エネルギー

理想気体では分子間力の相互作用エネルギーを無視しており，また

- 並進運動のエネルギー　$\langle mv^2/2 \rangle$

$$\left\langle \frac{1}{2} m {v_i}^2 \right\rangle = \frac{1}{2} kT : \text{エネルギー等分配則}, \qquad \therefore \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{3}{2} kT.$$

- 内部運動のエネルギー　$\langle \varepsilon_{内} \rangle$
  並進運動と内部運動でのエネルギーのやりとりにより，
  熱平衡状態では $\langle mv^2/2 \rangle$ と温度で決まる一定の比を成すと考えられる．
  内部運動には見かけの自由度を f として，エネルギー

$$\langle \varepsilon_{内} \rangle = f \times \frac{1}{2} kT$$

  が割り当てられると考えられる．

– f は量子力学ではじめて理論的に導き出された．2 原子分子では $f = 2$.
［軽い 2 原子分子に対して振動のエネルギー順位の間隔 $\hbar\omega$ は
分子の熱エネルギー kT に比べて大きく，振動体は基底状態にあって比熱に寄与しない．
自由度 $f = 2$ は回転の自由度 (分子の軸に垂直な 2 つの軸の周り) に由来している [17, p.210].］

以上より内部エネルギーは

$$U = N\left(\left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle + \langle \varepsilon_{内} \rangle\right) = \frac{3+f}{2}NkT = \frac{3+f}{2}nRT \qquad (\because N = nN_{\mathrm{A}}, N_{\mathrm{A}}k = R)$$

と表される．このように**理想気体の内部エネルギーは温度だけの関数となる** (f も温度だけの関数)［この点については次節の断熱自由膨張の箇所で再論する］.

特に He，Ne，Ar などの**単原子分子では** $f = 0$ だから

$$U = \frac{3}{2}nRT$$

を得る．

注解

■状態方程式は内部エネルギーの表式　よって状態方程式 $PV = nRT$ の両辺は，つまらない数係数の違いを除けば理想気体の内部エネルギーの表式となっている．

■単原子分子の“回転の自由度”　単原子分子では $f = 0$ と考えることに関連して，Feynman は次のように述べている [17, p.207].

> なお［二原子分子において］原子はそれぞれ一つの点のように考え，それらを結ぶ線のまわりの回転はないものとする．これは一つ心に留めておくべきことである，もし観測したもの［比熱］と合わなければ，この辺りに禍根があるのかも知れないからである．

モル比熱の定義

物質量 n の物質を温度 ΔT 上昇させるのに必要な熱量 Q を

$$Q = nC\Delta T$$

と書いて，モル比熱 C を定義する．すなわちモル比熱は物質 1mol を 1 度温めるのに要する熱量である．

非圧縮の固体・液体と違って，気体では温度を 1 度温める間に何通りもの体積変化の仕方が (したがって温め方が) 可能であり，それに応じて何通りもの比熱が定義される．

気体の定積モル比熱と定圧モル比熱

図 70 の P-V グラフで見ると，系を温度 T_0 の状態 A から ΔT だけ温める方法は，点 A から温度 $T = T_0 + \Delta T$ の等温線上にゆく無数の径路に対応する．［理想気体に対して等温線は $PV = \mathrm{const.}$］特に

- 体積一定の変化 (A→B) に対する比熱 C_V　(定積モル比熱)
- 圧力一定の変化 (A→C) に対する比熱 C_P　(定圧モル比熱)

を定義する．

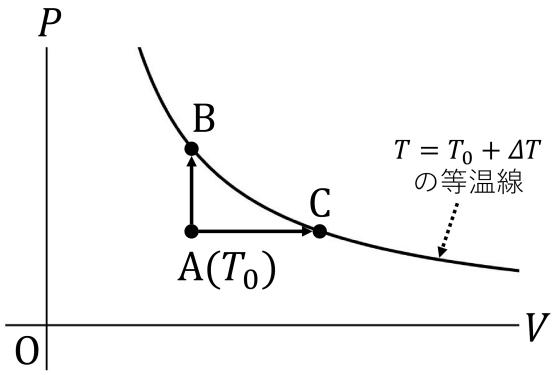


図 70　P-V グラフで見た定積変化 A→B と定圧変化 A→C

マイヤーの関係

以下では理想気体を考える．

- 体積一定の変化 (A→B)
  気体は仕事をしないから，加えられる熱は第 1 法則より

$$Q_{\mathrm{AB}} = \Delta U = nC_V \Delta T.$$

  – 理想気体の内部エネルギーの具体的な表式 $U = \frac{3+f}{2}nRT$ と比較すれば

$$C_V = \frac{3+f}{2}R.$$

ところで理想気体の内部エネルギーは温度だけの関数だから，温度 $T = T_0 + \Delta T$ の等温線上にゆく全ての変化に対して内部エネルギーの変化は $nC_V \Delta T$ である．

- 圧力一定の変化 (A→C)
  気体のする仕事は

$$W_{\mathrm{AC}} = P\Delta V = nR\Delta T$$

  なので，加えられる熱は第 1 法則より

$$Q_{\mathrm{AB}} = \Delta U + W_{\mathrm{AC}} = n(R + C_V)\Delta T.$$

これを $nC_P \Delta T$ と等置して理想気体に対するマイヤーの関係

$$C_P = C_V + R$$

を得る．

以上より

$$\text{単原子分子の理想気体 } (f = 0) \text{ に対して} \qquad C_V = \frac{3}{2}R, \quad C_P = \frac{5}{2}R,$$
$$\text{2 原子分子の理想気体 } (f = 2) \text{ に対して} \qquad C_V = \frac{5}{2}R, \quad C_P = \frac{7}{2}R.$$

注解

物理量 $(\cdots)$ の次元を $[\cdots]$ と書くと，Boltzmann 定数 k，気体定数 R，比熱 C_P, C_V (およびエントロピー S) に対して

$$[k] = [R] = [C_P] = [C_V] = [S] = \frac{(\text{エネルギー})}{(\text{温度})}.$$

3-5 気体の断熱変化

断熱仕事変化とポアソンの公式

ここでは理想気体を考え，以下の条件 (断熱仕事変化という) を仮定する．

- 断熱変化 ($\mathrm{d}Q = 0$)
- 「ゆっくりした」すなわち事実上，外力とのつり合いを保つ変化
  $\rightarrow$ 各瞬間に気体の圧力 P と温度 T が一様な値として定義され，状態方程式が成立．

このとき**比熱比**

$$\gamma \equiv \frac{C_P}{C_V}$$

を定義すると，**Poisson** (ポアソン) **の公式**

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad \text{または} \quad PV^{\gamma} = \text{const}. \tag{12}$$

が成り立つ．

注解　理想気体では単原子分子に対し $\gamma = 5/3$，2 原子分子に対し $\gamma = 7/5$.

Poisson の公式 (12) の導出

$$\begin{aligned} \text{断熱変化に対する第 1 法則} \qquad & \mathrm{d}U = -\mathrm{d}W, \quad \therefore nC_V\mathrm{d}T = P\mathrm{d}V, \\ \text{理想気体の状態方程式} \qquad & PV = nRT \end{aligned}$$

を辺々割ると

$$\frac{C_V}{R}\frac{\mathrm{d}T}{T} = -\frac{\mathrm{d}V}{V}$$

となる．これを変数分離して解くと (付録 C.6 参照)，

$$\ln T = -\frac{R}{C_V}\ln V + \text{const}, \qquad \therefore TV^{R/C_V} = \text{const}.$$

を得る．ここでマイヤーの関係 $C_P = C_V + R$ (3-4 節) を用いると

$$\gamma \equiv \frac{C_P}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V}$$

なので，第 1 式

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}.$$

を得る．次いで状態方程式 $T = PV/nR$ を代入すると，第 2 式

$$PV^{\gamma} = \text{const}.$$

が導かれる．

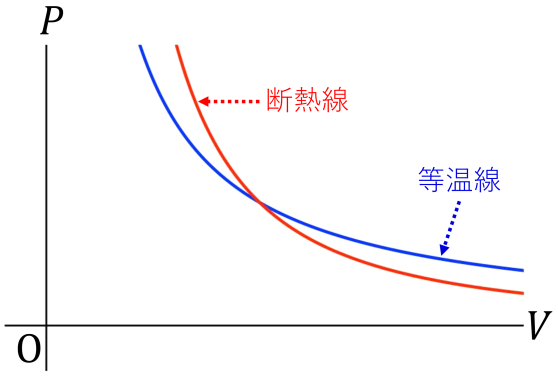


図 71　断熱線 $PV^{\gamma} = \mathrm{const.}$ と等温線 $PV = \mathrm{const.}$

断熱仕事変化と等温変化

断熱 (仕事) 膨張では気体が外部にした仕事の分だけ内部エネルギーが減少する．このことは上記の微分方程式 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}V = -RT/C_V V (< 0)$ にも見て取れる．よって P-V グラフにおいて断熱線は等温線と図 71 のように交わる．

ポアソンの公式に対する若干の注意

気体が断熱的に ($\mathrm{d}Q = 0$) 真空中に拡散していく場合には，

- 「ゆっくりした」，したがって可逆な変化ではないから，Poisson の公式を適用することはできない．
- 気体は外に仕事をしないから ($\mathrm{d}W = 0$) **断熱自由膨張**と呼ばれる．
  - これとの対比で冒頭のゆっくりした断熱変化を (既に言及したように) **断熱仕事膨張**と呼ぶ．
- このとき内部エネルギーは変化せず，したがって温度は変化しない．
  - 現実の気体では気体は拡散する際，分子間引力に逆らって仕事をするため，
    温度がわずかに下がる (**Joule-Thomson** (**ジュール・トムソン**) **効果** (= 冷蔵庫の作動原理))．

注解

まとめると理想気体では分子間引力が働かないため，仕事ゼロで断熱膨張することができ，内部エネルギーは変化しない．ところで一般に熱力学的に独立な変数は 2 つであり，今それを気体の体積 V と温度 T にとって気体の内部エネルギーを $U = U(T, V)$ と表す．すると断熱自由膨張の際に気体の温度は (ほとんど) 変わらないという実験事実は，実は理想気体の内部エネルギー $U = U(T, V)$ が体積には依らず ($U(T, V_1) = U(T, V_2)$)，温度だけの関数であることを意味する [16, pp.9–10]．

3-6 気体の断熱変化

熱サイクルと熱機関

「作業物質に一連の変化 (加熱・放熱・断熱変化など) を施して始めの状態に戻す変化を熱サイクルという」(p.138)．

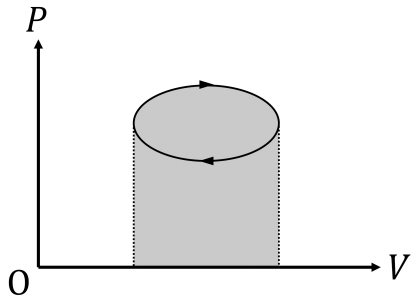


図 72　外にする仕事

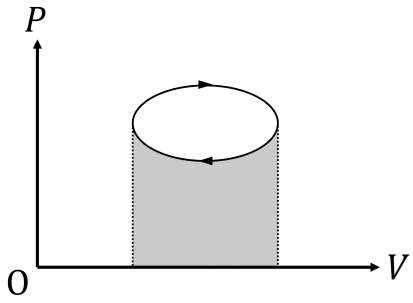


図 73　外からされる仕事

熱サイクルに対する熱力学第 1 法則

3-3 節で学んだように，作業物質がサイクル全体で外にする正味の仕事 W は一般にゼロにならない．それは

$$W = \oint \mathrm{d}W = \oint P\mathrm{d}V$$

と表され，P-V 図においてサイクルが囲う面積に対応する (図 72 および図 73 参照，作業物質は体積 V が増大するときに外に正の仕事をする)．

サイクルを終えると作業物質の内部エネルギーは元の値に戻るから，第 1 法則は

$$0 = \oint \mathrm{d}Q - W$$

を与える．正味の吸熱量 $\oint \mathrm{d}Q$ を実際の吸熱量 $Q_+(\geq 0)$ と放熱量 $Q_-(\geq 0)$ に分けて $\oint \mathrm{d}Q = Q_+ - Q_-$ と書くと，**サイクル全体の第 1 法則**は

$$Q_+ - Q_- = W, \quad \text{または} \quad Q_+ = W + Q_-$$

とまとめられる．これは系に加えた熱 Q_+ の一部が仕事 W になり，残りが Q_- として捨てられることを意味している．

熱サイクルの効率 (熱効率)

そこで熱サイクルの効率 (熱機関の効率，熱効率) を

$$e = \frac{W}{Q_+} = 1 - \frac{Q_-}{Q_+}$$

で定義する．**熱力学第 2 法則**によれば，$Q_- = 0$ すなわち $e = 1$ は実現されない．

> というのも，もしも $Q_- = 0$ が可能なら，そのときにさまざまの温度の熱源からの熱 Q_+ から得られた仕事 (力学的エネルギー) を最も高温の熱源に対する摩擦によってすべて熱に変えれば，ほかに何の変化もなく熱が低温から高温に流れたことになるが，これはわれわれの経験に反するからである．**他に変化がなければ熱は常に高温から低温にのみ流れ，その逆は決してない**というのが**熱力学第 2 法則**の主張である．このことは熱効率に $e < 1$ という制限を課すが，実は次に述べるように，e に対してはもっと厳しい制限がつく (p.140)．

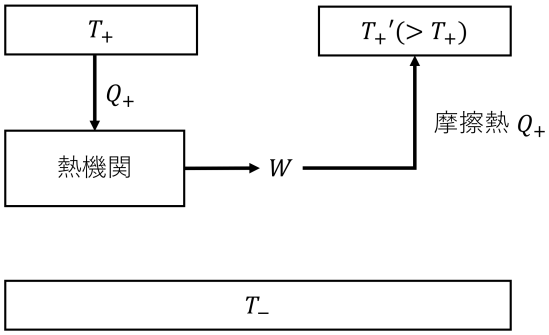


図 74　第 2 法則によれば熱効率は $e < 1$ (帰謬法)

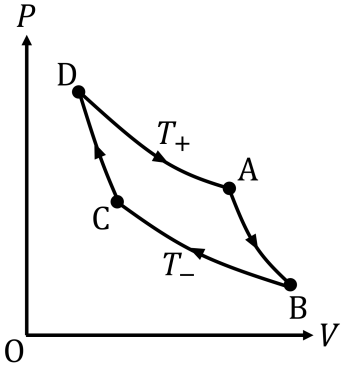


図 75　Carnot サイクル

［以上の論証について，図 74 を参照．$Q_- = 0$ だからこそ「ほかに何の変化もなく」熱が低温から高温に流れたことになる．］

カルノー・サイクル

ここで理想気体を作業物質とする次の **Carnot** (カルノー) サイクルを考える (図 75 参照).

- A→B　温度 T_+ から T_- への断熱膨張
- B→C　温度 T_- の等温圧縮 (恒温熱源 T_- へ放熱)
- C→D　温度 T_- から T_+ への断熱圧縮
- D→A　温度 T_+ の等温膨張 (恒温熱源 $T_+(> T_-)$ から吸熱)

このとき **Carnot サイクルの熱効率**は

$$e = 1 - \frac{Q_-}{Q_+} = 1 - \frac{T_-}{T_+} \tag{13}$$

となり，温度 $T_\pm$ だけで決まる (導出は下記)．実は熱機関の仕組みや作業物質を問わず，これが温度 T_+ と T_- の間で働く熱機関の最大効率となる．このことは **Carnot の定理**と呼ばれる (証明は付録 D.19 参照).

Carnot サイクルの熱効率 (13) の導出　過程 $i \to j$ で気体の吸収する熱量を Q_{ij}，する仕事を W_{ij}，内部エネルギー変化を ΔU_{ij} と書く．

- A→B　$Q_{\mathrm{AB}} = 0$ より
$$W_{\mathrm{AB}} = -\Delta U_{\mathrm{AB}} = nC_V(T_+ - T_-).$$
- B→C　$\Delta U_{\mathrm{BC}} = 0$ より
$$Q_- = -Q_{\mathrm{BC}} = -W_{\mathrm{BC}} = -\int_{V_{\mathrm{B}}}^{V_{\mathrm{C}}} P\mathrm{d}V = -nRT_- \int_{V_{\mathrm{B}}}^{V_{\mathrm{C}}} \frac{\mathrm{d}V}{V} = nRT_- \ln\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{C}}}.$$
- C→D　$Q_{\mathrm{CD}} = 0$ より
$$W_{\mathrm{CD}} = -\Delta U_{\mathrm{CD}} = -nC_V(T_+ - T_-).$$
- D→A　$\Delta U_{\mathrm{DA}} = 0$ より
$$Q_+ = Q_{\mathrm{DA}} = W_{\mathrm{DA}} = \int_{V_{\mathrm{D}}}^{V_{\mathrm{A}}} P\mathrm{d}V = nRT_+ \int_{V_{\mathrm{D}}}^{V_{\mathrm{A}}} \frac{\mathrm{d}V}{V} = nRT_+ \ln\frac{V_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{D}}}.$$

熱効率 $e = 1 - \frac{Q_-}{Q_+}$ を求めるには以上のうち，D→A における吸熱量 Q_+ と B→C における放熱量 Q_- を用いれば十分である．ここで断熱過程 A→B，C→D に対する Poisson の公式
$$T_+ {V_{\mathrm{A}}}^{\gamma-1} = T_- {V_{\mathrm{B}}}^{\gamma-1}, \qquad T_+ {V_{\mathrm{D}}}^{\gamma-1} = T_- {V_{\mathrm{C}}}^{\gamma-1}$$
を辺々割ると
$$\frac{V_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{D}}} = \frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{C}}}$$
が見出されるので，Carnot サイクルの熱効率 (13):
$$e = 1 - \frac{Q_-}{Q_+} = 1 - \frac{T_-}{T_+}$$
を得る．
なお上式よりサイクル全体の第 1 法則
$$W_{\mathrm{AB}} + W_{\mathrm{BC}} + W_{\mathrm{CD}} + W_{\mathrm{DA}} = Q_+ - Q_-$$
が成り立っていることが直接確かめられる．

参考　例えば $T_+ = 373\mathrm{K}$ (100°C) と $T_- = 273\mathrm{K}$ (0°C) に対して Carnot サイクルの熱効率は 26.8 %となる．
こうして現実的には，加えた熱の半分以上は無駄に捨てられる．

第 4 章 力学的な波動

注解

力学的な波動と光 (電磁波) を数学的な類似性に基づき「波動」と一括りにせず，物理的な観点からこれらを異なる現象として区別した結果,「力学的な波動」に 1 つの章が割り当てられているものと考えられる．そうであるならば僭越ながら，この点は大変好感が持てる．

4-1 進行波の数学的表現

波動現象を学ぶにあたって

$$\text{具体的な物理現象} \quad \leftrightarrow \quad \text{抽象的な数学的表現.}$$

その上で「物理では，数学はあくまで道具であり，中心はやはり物理現象だから，［物理現象のイメージに対する］直感的理解がより大切である．そして，現象が直感的に正しくつかめていれば，数学の理解もまた容易になる」(p.142).

注解

そこで教科書では次節「波動とは何か」において力学的な波動に対する物理的・直観的なイメージが導入され，次いでそれを数学的な表現と照らし合わせることになる．いずれにせよ 5-1 節では「媒質を波が伝播するとしたら，それは数学的にどのように表現できるか」が論じられており，実際に個々の系に対して波が伝播することを決める具体的な物理は 5-2 節で見ることになる．

波動とは何か

x 軸に沿ってピンと張った弦を伝わる波を例に力学的波動について説明する (以下，図 76 参照)．ここでは運動するもの (**媒質**) は弦を構成する各質点である．質点が y 方向に**変位**する場合を考えよう．弦の一端 O を上下に (y 方向に) 揺さぶると，となりの質点は張力に引かれて少し遅れて同じ y 方向の運動を行い，そのとなりの質点もさらに少し遅れて同様の運動を行う．このとき各質点は弦に垂直な方向に (y 方向に) 振動しているだけであり，力学的波動においてはこのように**有界な運動形態 (運動のスタイル) が時間遅れを伴って隣接する媒質に伝えられる．**こうして弦は波の形を作り，各質点はその場で (位置 x で) 振動しているだけであるにも関わらず，例えば波の山に注目すると，それは x 方向に進行する．［ここで山の位置にある質点は時刻によって異なるから，山に注目することは異なる質点に注目していることになる.］

横波　変位が波の進行方向に垂直な波.

縦波　変位が波の進行方向に平行な波.

縦波も変位を波の進行方向に垂直な方向に起こして，横波と同様に描くと見やすい (図 77 参照).

注解　慣習的に波の進行方向を縦 (longitudinal)，それに垂直な方向を横 (transverse) と呼ぶ.

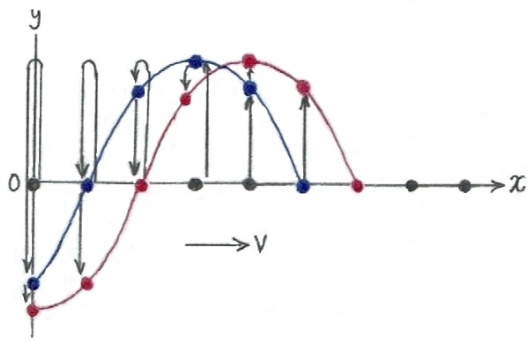


図 76　弦を伝わる波動

図 77　x 軸に沿う縦波の変位 (赤い矢印) を“横方向”に起こして描く (青い矢印)

波の数学的表現

位置 x にある質点の時刻 t における変位を $y(x,t)$ と書く．ここで座標 x は質点の名前の役割を果たしている．［流体力学の文脈では，このような座標は Lagrange 座標と呼ばれる．］x 軸正の向きに速度 V で伝播する波を考えると，

- 原点の質点の運動を $y(t,0)=f(t)$ とすると，
  位置 x の質点は時間 x/V だけ遅れて同様の運動を行うから $y(x,t)=y(0,t-V/x)$，すなわち
  $$y(x,t)=f\left(t-\frac{x}{V}\right). \qquad (x<0 \text{ や } V<0 \text{ に対しても正しい})$$
  – こちらの方が前節の物理的な直観に即している．
- 時刻 t における波形 $y=y(x,t)$ は
  初期時刻 $t=0$ における波形 $y(x,0)=F(x)$ を x 方向に Vt だけ平行移動して得られるから
  $$y(x,t)=F(x-Vt).$$

★ 関数 f,F の関係を $f(t-x/V)=F(-V(t-x/V))$ と考えれば，
2 つの表現は確かに等価であることが分かる．

正弦進行波

媒質の 1 回きりの運動　→　パルス波，

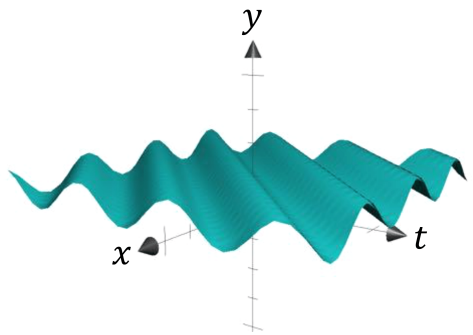


図 78　曲面 $y = a\sin(\omega t - kx + \delta)$($y$ 方向にずらして描画)

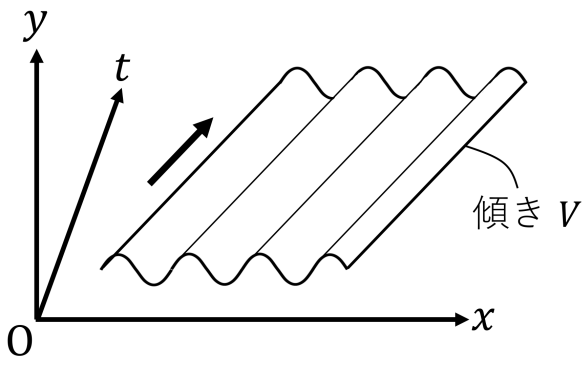


図 79　図 78 の描き方

媒質の周期運動　→　周期的な波.

本稿では既に 2-6 節の注解で指摘したように,「一般に周期的な運動は単振動の重ね合わせで表すことが可能である．それゆえ，媒質の変位が単振動をする**正弦波**が重要である」(p.145)．媒質の振幅 a，周期 T での単振動が作る**正弦 (進行) 波**は

$$y(x,t) = a\sin\left\{\omega\left(t - \frac{x}{V}\right) + \delta\right\}, \qquad \omega \equiv \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu, \qquad \nu \equiv \frac{1}{T} : \text{振動数}$$

と表される．[振動数の単位として Hz(ヘルツ) = 1/s が用いられる．]

注解　これは $t - x/V$ の関数となっており，

- x を任意に固定すると，
  与えられた位置 x における媒質が時間とともに単振動していることが見て取れる．
- t を任意に固定すると，
  与えられた時刻 t における媒質の空間分布が正弦波を成していることが見て取れる．

曲面 $y = y(x,t)$ のグラフは図 78 のようであり，$x = \text{const}$ と $t = \text{const}$ の断面形の各々が正弦曲線となっている．このグラフは図 79 のように初期時刻 $t = 0$ における波形を，xt 平面の傾き V の線に沿って $t \gtrless 0$ の側へスライドして得られる．

ここで三角関数の中身 $\{\cdots\}$ は与えられた位置 x と時刻 t での波の状態 (山や谷など) を決めており，**位相**と呼ばれる．与えられた時刻 t において決まった位相の状態にある，例えば山となる位置 x は，位相が

$$\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{V}\right) + \delta = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \cdots : \text{整数}$$

となる位置

$$x = x_n \equiv Vt + \left(\frac{\delta}{2\pi} - n - \frac{1}{4}\right)TV$$

なので，隣り合う山の間隔 $|x_{n+1} - x_n|$ は

$$\lambda = TV$$

となる．これは**波長**と呼ばれ，波が 1 周期 T のうちに進む距離となっていることが見て取れる．[このことから逆に上式 $\lambda = TV$ を説明できる．波長 λ を用いて逆に波の伝播速度 V を表せば $V = \nu\lambda$.]

正弦波の別の表現

$$
\begin{aligned}
y(x,t) =& a\cos\left\{\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)+\delta_1\right\}, \qquad (\delta_1=\delta-\pi/2)\\
y(x,t) =& a\sin\left\{\omega\left(\frac{x}{V}-t\right)+\delta_2\right\}. \qquad (\delta_2=\pi-\delta)
\end{aligned}
$$

やはり $\{\cdots\}$ が位相.

注解

■位相の別表現　時刻 t の係数について

$$\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu=\omega.$$

振動数 ν は単位時間当たりの振動回数であるのに対し，振動数 ω は単位時間当たりの位相の変化である．

また波数 $k\equiv\frac{2\pi}{\lambda}$ を導入すると

$$V=\nu\lambda=(2\pi\nu)\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)=\frac{\omega}{k}, \qquad \omega=Vk, \qquad k=\frac{\omega}{V}$$

なので，位置 x の係数は

$$\frac{\omega}{V}=k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

となる．この関係は

$$\frac{\omega}{V}=\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{1}{V}=\frac{2\pi}{\lambda}=k$$

としても得られる．本稿でも弦を伝わる波や音波，電磁波について学ぶように，しばしば波の伝播速度は物理的に定まっており，これは与えられた速度 V の下での ω と k の関係と見なされる．結局位相は，煩わしい付加定数 δ を省くと

$$\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{V}\right)=2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)=\omega t-kx$$

と書き換えられる．いずれも確かに無次元量になっていることが見て取れる (三角関数の中身は無次元でなければならない).

■位相速度　正弦進行波に対して見たように，波の伝播速度は位相 $kx-\omega t$ を一定にする位置 $x=\frac{\omega}{k}t+\mathrm{const.}$ の時間変化率 $V=\frac{\omega}{k}$ として得られ，それ故に位相速度とも呼ばれる．同様の議論が円偏光の進行速度，または床屋の前にある赤と青の螺旋の置物 (サインポール) の縞模様の上昇速度にも当てはまる．

円偏光において電場 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は，座標系 (時間の原点を含めて) を適当に選ぶと

$$\boldsymbol{E}=a\begin{pmatrix}\cos(kz-\omega t)\\ \sin(kz-\omega t)\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}=a\begin{pmatrix}\cos\left(kz-\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(kz-\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\\ 0\end{pmatrix} \tag{14}$$

という形に表される [2, pp.130–131]．よって z 軸上の各点に分布する電磁場ベクトル $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$ の先端は図 80 のように常螺旋を描く．そしてベクトル $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$ は $z=\mathrm{const}$ の水平面内で回転する．この様子は床屋のサインポールに似ている．

床屋のサインポールでは赤と青の螺旋が中心軸の周りに高さ一定の面内で回転しており，その結果として赤と青の縞模様が上昇していくように見える．(これは弦の質点がその場で振動する結果，波動が弦の方向に

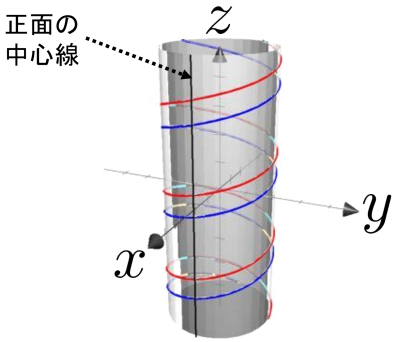


図 80　円偏光と床屋のサインポール

沿って伝播することと比較される．) x 軸正の方向をサインポールの正面とすると，より正確には図 80 に示した正面の中心線と，螺旋との交点が上昇する．すなわち正面方向の方位角は $\phi = 0$ であり，常螺旋の式 (14) においてベクトルの指す方向の方位角が

$$kz - \omega t = \mathrm{const}(= 0), \qquad kz - \omega t + \frac{\pi}{2} = \mathrm{const}(= 0)$$

を満たすような座標 (高さ)z が時間とともに増大する．ここで上昇速度は

$$\dot{z} = \frac{\omega}{k}$$

であり，これは式 (14) の位相が一定となる条件から得られたものだから，位相速度と呼ばれるのはもっともである．

特に円偏光に対してはその時間発展 (14) が Maxwell 方程式に従うことから，上昇速度は

$$\frac{\omega}{k} = c$$

でなければならない．すなわち電磁波の位相速度は光速 c である．

媒質の速度・加速度・エネルギー密度

正弦進行波に対して各質点 m は変位が $y = y(x = \mathrm{const}, t)$ で表される単振動を行うことから明らかなように，単振動の方程式

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -m\omega^2 y$$

を満たす ($K \equiv m\omega^2$ はばね定数に相当)．[$\partial^2/\partial t^2$ は位置 x を固定した時間微分 (付録 C.8 参照)．]

また各質点は振幅 a の 2 乗に比例する単振動のエネルギー

$$\varepsilon = \frac{1}{2}Ka^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2$$

を持つため (2-6 節)，波のエネルギー密度もまた振幅の 2 乗に比例する．実際，x 方向の単位長さ当たりの

- 粒子数を n　(粒子数線密度)
- 質量を $\rho = mn$　(質量線密度)
- エネルギーを $E = n\varepsilon$　(波のエネルギー密度)

とすると，

$$E = \frac{1}{2}\rho\omega^2 a^2$$

となる (a^2 に比例).

重ね合わせの原理

2 つの波 $y = y_1(x,t)$，$y = y_2(x,t)$ がぶつかったときに作られる**合成波**は，これらの変位の**重ね合わせ**

$$y = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

によって与えられる.

注解

次節で述べる予定であるが，波動現象は弦の変位などの物理量が波動方程式を満たすことから導かれる (付録 C.11 参照)．そして重ね合わせの原理は波動方程式

$$Ly = 0, \qquad L \equiv \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

が線形の方程式であることの帰結である．(したがってこれは原理というよりもむしろ法則と言える．) 実際，線形性は

$$L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$$

を意味する．よって 2 つの波 $y = y_1(x,t)$，$y = y_2(x,t)$ が波動方程式に従って実現されるとき，合成波 $y_1 + y_2$ も波動方程式を満たし実現可能となる：

$$Ly_1 = 0, \quad Ly_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad L(y_1 + y_2) = 0.$$

なお基礎方程式の線形性と重ね合わせの原理についてのより一般的な議論は付録 D.11 参照.

4-2 波の伝播のメカニズム

本節では

- 弦の振動が波として伝わること
- 空気の密度変化が音波として伝わること

を物理法則から説明する．それに伴って波の伝播速度が導出される.

弦を伝わる波

まずは前節で見た弦を伝わる波について，本稿オリジナルの議論を展開する．弦の微小振動を仮定し，弦を伝播する波動が運動方程式に従って実現されることを説明する．微小振動の仮定により弦の伸びは小さいため，弦の張力は弦に沿って一定の値 T を持つものと考える．図 81 のように弦の横幅 Δx の部分に注目すると，仮定により図 81 の角度 $\theta(x), \theta(x+\Delta x)$ は微小なので，ここに働く力の y 成分は

$$T\{\sin\theta(x+\Delta x) - \sin\theta(x)\} \simeq T\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_x^{x+\Delta x} \simeq T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x$$

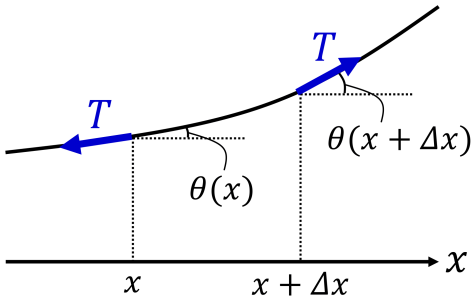


図 81　弦の微小振動

と書ける ($\partial/\partial x$ は時刻 t を固定した微分 (付録 C.8 参照)，$\partial y/\partial x = \tan\theta$)．よって運動方程式

$$(\rho\Delta x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x$$

は波動方程式

$$\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \qquad V \equiv \sqrt{\frac{T}{\rho}} : \text{波の伝播速度}$$

になる (付録 C.11 参照)．ここから弦を波が伝わることが説明される．

波の伝播速度 V の次元解析　伝播速度 $V = \sqrt{T/\rho}$ は確かに速度の次元を持っている．実際，物理量 $(\cdots)$ の次元を $[\cdots]$ で，質量，長さ，時間の次元をそれぞれ $\mathrm{M}, \mathrm{L}, \mathrm{T}$ で表すと，

$$[T] = \frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{T}^2}, \qquad [\rho] = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}}, \qquad \therefore [V] = \left(\frac{\mathrm{ML}/\mathrm{T}^2}{\mathrm{M}/\mathrm{L}}\right)^{1/2} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}.$$

逆に弦の張力 T と質量線密度 ρ から速度の次元を持つ組合せを作ると $\sqrt{T/\rho}$ となることから[*24]，伝播速度は無次元の数係数を除けば，$\sqrt{T/\rho}$ に比例することがあらかじめ期待できる．このように次元解析は数係数まで含めて物理量を正確に求めることはできないという意味で万能ではないものの，物理量の大まかなオーダーを見積もる上で強力な手段となる．

微小振動を仮定しない場合　微小振動の仮定を外しても，同時に弦の張力の非一様性を考慮すれば同じ波動方程式を得ることができる (教科書 p.147 欄外の註を参照)．実際，各位置 x で弦の伸びにより張力は $T(x)$ になっているとすると，x 方向の力のつり合い

$$0 = T(x+\Delta x)\cos\theta(x+\Delta x) - T(x)\cos\theta(x)$$

より $T(x)\cos\theta(x)$ は位置 x に依らずに一定となり，その値は波のないときの弦の張力 T_0 に一致する ($\theta(x) \to 0$ のとき $T(x)\cos\theta(x) \to T_0$)．よってこの場合にも幅 Δx の弦の微小部分に働く力の y 成

[*24] 伝播速度が $V = T^\alpha \rho^\beta$ と表されると仮定して，両辺の次元を比べると

$$\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}} = \left(\frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{T}^2}\right)^\alpha \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}}\right)^\beta = \mathrm{M}^{\alpha+\beta}\mathrm{L}^{\alpha-\beta}\mathrm{T}^{-2\alpha}, \qquad \therefore \alpha = \frac{1}{2},\ \beta = -\frac{1}{2}$$

と定まる．上式で代わりに $\mathrm{M} \to \mathrm{kg}, \mathrm{L} \to \mathrm{m}, \mathrm{T} \to \mathrm{s}$ のように，次元を単位に置き換えた関係を立式しても良い．

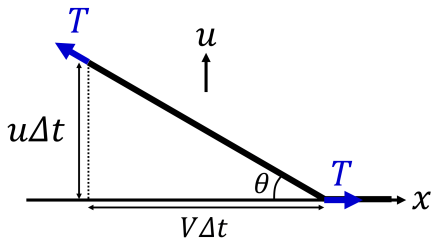


図 82　パルスの先端

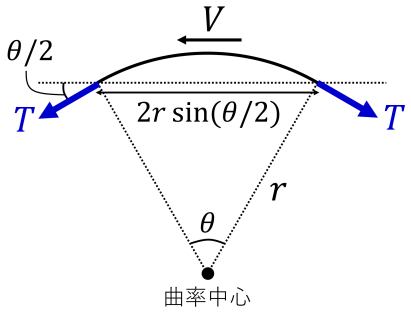


図 83　正弦波の山

分は

$$[T(x)\sin\theta(x)]_x^{x+\Delta x} = [T(x)\cos\theta(x)\tan\theta(x)]_x^{x+\Delta x} = T_0[\tan\theta(x)]_x^{x+\Delta x} \simeq T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x$$

となる．こうすれば角度 $\theta(x)$ が微小であることを仮定する必要はない (近似に用いたのは横幅 Δx が微小であることだけである)．

なお教科書ではパルスと正弦波の伝播速度を，パルスの先端と正弦波の山の各々が運動方程式に従うことから導いている．導出は以下のようなものであり，面白い．

パルス　図 82 のようにパルスの先端に注目すると，時間 Δt のうちに弦の幅 $V\Delta t$ の部分は何らかの速度の y 成分 u を得る．運動方程式 (運動量変化と力積の関係)

$$\rho(V\Delta t)\times u = (T\sin\theta)\Delta t \simeq T\frac{u}{V}\Delta t$$

より波の伝播速度

$$V = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

を得る．

正弦波　波の伝播速度 V で波と一緒に動く座標系から見ると，図 83 のように正弦波の山の位置を占める質点は時々刻々と入れ替わり，質点は弧に沿って速度 V で $x<0$ の方向に移動する．山の頂点での曲率半径を r とすると，曲率中心から見た中心角 θ の範囲に切り取られる弦の部分に関する運動方程式

$$\rho\left(2r\sin\frac{\theta}{2}\right)\times\frac{V^2}{r} = 2T\sin\frac{\theta}{2}$$

から再び波の伝播速度

$$V = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

を得る．

縦波——音波

縦波の例として音波を取り上げる．よく知られているように，音は空気の (一般には弾性体の) 密度変化が波 (**疎密波**) として伝播する現象である．これに対する直観的なイメージから初めて，物理法則に基づき音波の存在がどのように説明されるかを概観しよう．

■音波に対する直観　まず空気の塊に注目し，その体積が増大したとする．空気の塊の持つ質量は変化しないため，このとき空気の質量密度は薄まる．通常，質量密度の低下は圧力の低下を意味するので，空気の塊は周囲に比べて相対的に低い圧力を持つことになる．以上より空気は膨らむと，周りの空気からそれを押し戻すような“復元力”を受けることが分かる：

$$\text{膨張} \quad \to \quad \text{(質量) 密度減少} \quad \to \quad \text{(周囲より) 圧力低下} \quad \to \quad \text{収縮.}$$

同様に収縮した空気には元の大きさに戻ろうとする力が働くことが結論される．するとこのような復元力により，各位置にある空気の塊がその場で膨張と収縮を繰り返している状態が考えられる．ここである空気の塊が膨張して低密度の状態にあるときには，隣接する空気の塊は収縮して高密度の状態にあるだろう．次の瞬間には注目している空気の塊は収縮して高密度の状態になり，隣接する空気は膨張して低密度の状態となる．この結果，密度が一定の位置 (例えば空気が低密度状態にある位置) は空間を移動していく．これが音波を成す．

以上の議論で本質的なことは

- 空気の塊の持つ質量が変化しないこと
- (質量) 密度の増大に伴って圧力も増大すること
- 周りの空気からの“復元力”が空気の塊の運動 (膨張・収縮) をもたらすこと

の 3 点にまとめられる．実際，以上の直観的な議論を反映して，

- 質量保存則
- 圧力と (質量) 密度の熱力学的関係[*25]
- 流体の運動方程式

を用いると，空気の微小な密度変化 (または圧力変化，流体要素の変位) に対して，それが波動方程式を満たすことを以下で示す．ここから音波に対応する波動解が得られる．

■1 次元の場合　教科書ではあらかじめ x 方向の 1 次元の縦波を想定して音波の波動方程式を導いている (図 84 参照)．その際，波のない状態において位置 $x = a$ にいた流体要素の座標を $x = x(a, t)$ と書き，その時間変化を調べる方法をとる．

注解
- 波動方程式については付録 C.11 を参照.
  教科書では波動方程式という名前こそ明記していないものの，波動方程式を導出している.
  同様の議論は例えば文献 [17, pp.298–302] に見られる.
- 偏微分については付録 C.8 を参照.
- 流体要素の初期位置 a は流体要素の名前の役割を果たし，流体力学の文脈では Lagrange 座標と呼ばれる.
  またある流体要素 a の位置およびその位置における場の値を考えるのは
  流体力学において Lagrange の方法と呼ばれる.
  一方，空間に固定した観測位置での場の値を時間追跡するアプローチは Euler 的の方法と呼ばれる.
  以下で行う議論は Lagrange 的な見方に立脚しており，Euler 的な見方を採用した解析よりも
  本節冒頭の直観的な議論をより忠実に表現していると言える.
- 3 次元空間を伝わる音波の解析的表現については付録 D.20 にまとめる.
  これは Euler の方法に基づいている.

[*25] 考えている空気の素早い振動の間に行われる，周りの空気との熱のやりとりを無視し，断熱変化を仮定する．熱力学的に独立な 2 変数を (質量) 密度 ρ と流体の単位質量の持つエントロピー s にとって圧力を $p = p(\rho, s)$ と表すと，このとき圧力は密度だけの関数 $p = p(\rho, s = \text{const})$ になる.

今の場合，質量保存則は次のように表される．すなわち空気に固定した領域内の質量 Δm が不変であることから，気柱の質量密度の式

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{\partial x}{\partial a}\right) \tag{15}$$

が得られる (線密度ではない)．これをこの領域の空気の塊に対する運動方程式

$$\Delta m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}a}\Delta a S \tag{16}$$

と合わせると，波動方程式

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}$$

が導かれる．よって音速は

$$V = \sqrt{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\sigma}}$$

と表される．

質量密度の式 (15) の導出　図 84 において時刻 t における気柱の長さは

$$\Delta x = \Delta a + x(a + \Delta a, t) - x(a, t) \simeq \Delta a \left(1 + \frac{\partial x}{\partial a}\right)$$

なので，質量密度は

$$\sigma = \frac{\Delta m}{S\Delta x} \simeq \sigma_0 \left(1 - \frac{\partial x}{\partial a}\right) : (15), \qquad \sigma_0 \equiv \frac{\Delta m}{S\Delta a}$$

となる．

質量密度の式 (15) の直観的な解釈　図 77 のように縦波 $x = x(a, t)$ を横波と同様に描き，グラフが横軸を横切る点の近くに注目する．図 85 のようにグラフが正の傾きを持って横軸と交わる位置では媒質は疎に，グラフが負の傾きを持って横軸と交わる位置では媒質は密になっていなければならない．式 (15) の結果はこのことと整合している．

運動方程式 (16) の説明　図 84 において時刻 t における気柱に働く力の x 成分は

$$P(\sigma(a,t))S - P(\sigma(a + \Delta a, t))S \simeq -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}a}\Delta a S = -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}a}\Delta a S$$

である．

注解　なお一般には熱力学的に独立な変数は 2 つであるにも関わらず，圧力 P が質量線密度 σ だけの関数 $P(\sigma(x))$ となっているのは，断熱変化を考えているためであると考えられる．このとき常微分の記号を用いて $\mathrm{d}P/\mathrm{d}\sigma$ と書いて良く，これは単位質量当たりのエントロピー s を固定した微分 $(\partial P/\partial\sigma)_s$ の意味．

■実験との比較　理想気体の断熱変化に対して音速の式 $V = \sqrt{\mathrm{d}P/\mathrm{d}\sigma}$ は

$$V = \sqrt{\gamma\frac{RT}{M}}, \qquad \gamma : \text{比熱比}, \qquad M : \text{分子 1mol の質量} \tag{17}$$

と書き換えられる．温度 $0°\mathrm{C}(T_0 = 273\mathrm{K})$ の近くを考えると，そこからのズレ $\Delta T = T - T_0$ (これは摂氏温度に他ならない) に関する 1 次までの近似で

$$V = V_0 + \alpha\Delta T, \qquad V_0 \equiv \sqrt{\gamma\frac{RT_0}{M}} \simeq 331\mathrm{m/s}, \qquad \alpha = 0.6\frac{\mathrm{m/s}}{\mathrm{K}} \tag{18}$$

となる．

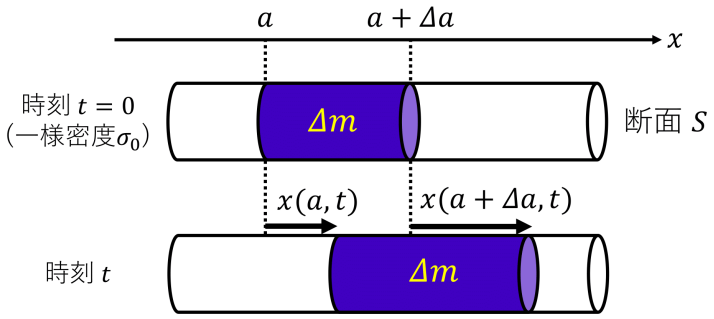


図 84　1 次元的な管の中の音波

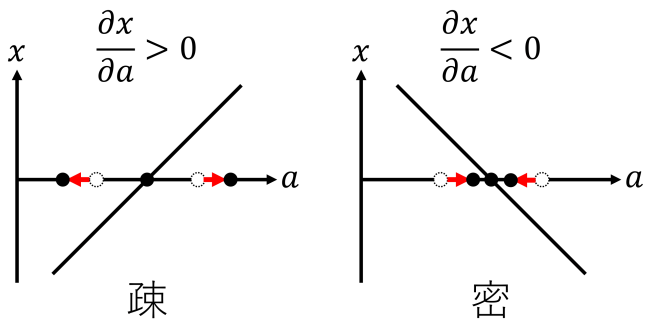


図 85　縦波の変位と疎密

音速の式 (17) の導出　理想気体を仮定すると状態方程式は

$$P=\nu kT=\frac{\sigma}{m}kT=\frac{\sigma}{M}RT \qquad (m:1\text{ 分子の質量},\ M=mN_{\mathrm{A}}:\text{分子 1mol の質量},\ N_{\mathrm{A}}k=R:\text{気体定数})$$

である．[ただし断熱変化における微分係数を $\mathrm{d}P/\mathrm{d}\sigma=RT/M$ としてはならない (断熱変化では密度変化に伴って温度 T も変化する)．正しくは] 断熱変化における Poisson の公式 $PV^{\gamma}=\mathrm{const.}$(3-5 節) あるいは $P=a\sigma^{\gamma}$(a：比例定数) を用いて

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\sigma}&=a\gamma\sigma^{\gamma-1}=\frac{\gamma}{\sigma}(a\sigma^{\gamma})=\gamma\frac{P}{\sigma}\\&=\gamma\frac{RT}{M}\end{aligned}$$

である．平方根をとって音速の式 (17) を得る．

式 (18) の導出

$$V=\sqrt{\gamma\frac{RT}{M}}\simeq\sqrt{\gamma\frac{RT_0}{M}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T_0}\right)\equiv V_0+\alpha\Delta T,\qquad V_0\equiv\sqrt{\gamma\frac{RT_0}{M}},\qquad \alpha\equiv\frac{1}{2T_0}\sqrt{\gamma\frac{RT_0}{M}}$$

(付録 C.5 参照) とし，空気の平均分子量 29，すなわち $M=29\times10^{-3}\mathrm{kg/mol}$ を用いて V_0 と α の値を評価すれば良い．比熱比については窒素や酸素を念頭に，2 原子分子に対する値 $\gamma=1.4$ を用いる．

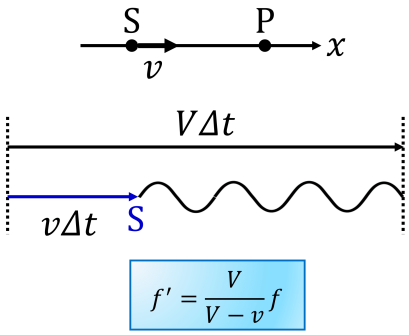


図 86　音源が近づく場合

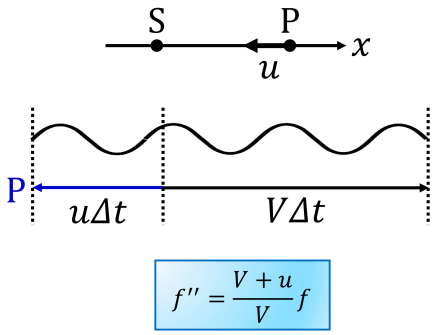


図 87　観測者が近づく場合

4-3 ドップラー効果

音速について

「音源から空気分子にいったん振動が与えられて後にその振動が空気中を伝わるのは，空気分子の相互作用によるゆえ，**音の伝わる速度** (V) ［4-2 **節で導いた値**］**は音源の速度に無関係である**」(p.153).

注解

ただし V は空気の静止系で見た音速であり，すぐ後で見るように風が吹いている場合の音速は風速 w を考慮して $V' = V + w$ としなければならないことと，この注意書きは何ら矛盾しない.

音源が近づく場合

図 86 のように x 軸上で振動数 f の音源 S が観測者 P に速度 v (x 成分) で近づく場合を考える．このとき音源が時間 Δt のうちに出す $f\Delta t$ 個の波 (山) は図 86 のように距離 $(V - v)\Delta t$ に含まれるから，波長は S が静止していた場合の値 $\lambda = V/f$ に比べて

$$\lambda' = \frac{(V - v)\Delta t}{f\Delta t} = \frac{V - v}{V}\lambda$$

に縮まっている．よって P が受け取る音の振動数は

$$f' = \frac{V}{\lambda'} = \frac{V}{V - v}f$$

に増大する (**Doppler** (**ドップラー**) **効果**，この結果は $v < 0$ に対しても正しい).

■別の考え方　波長を考える代わりに直接，観測者 P の受け取る音の周期を考えよう．音波のある山 (あるいはパルスでも良い) が出された時刻 t_1 における音源と観測者との距離を $\overline{\mathrm{SP}} = l$ とすると，次の山が出される 1 周期 $T = 1/f$ 後の時刻 $t_2 = t_1 + T$ には，音源 S と観測者 P の距離は $l - vT$ に縮まっている (図 88 参照). よって P が 2 つの山を受け取る時刻

$$t_1{}' = t_1 + \frac{l}{V}, \qquad t_2{}' = t_2 + \frac{l - vT}{V}$$

の間隔は周期 T に比べて

$$T' = t_2{}' - t_1{}' = \left(1 - \frac{v}{V}\right)T$$

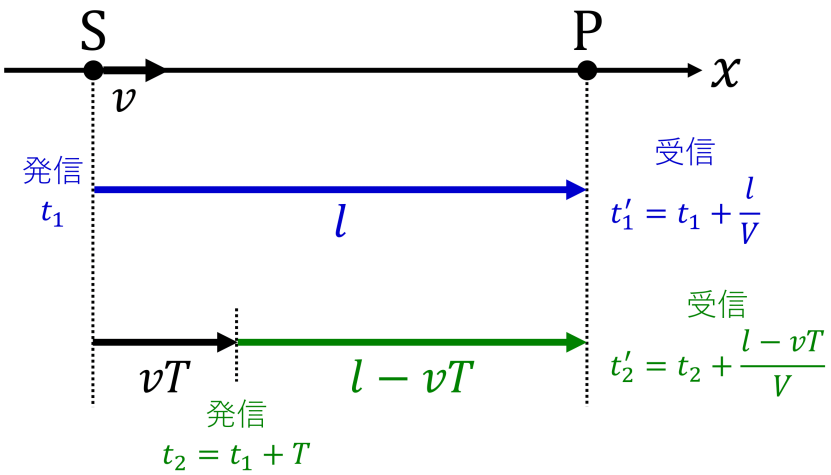


図 88　音源が近づく場合

に縮まっている．こうして再び Doppler 効果の式

$$f' = \frac{V}{V - v} f$$

を得る．

注解

■観測者と座標系　「観測者」というのは場の値 (空気の密度・圧力など) を評価する，ある座標系に固定した観測点の擬人的表現である．

■「別の考え方」について　同じことであるが，時間 Δt のうちに出される $f\Delta t$ 個の山 (パルス) を P が受け取る時間間隔は $\Delta t' = \left(1 - \frac{v}{V}\right)\Delta t$ に縮まる．ところで波の個数について $f\Delta t = f'\Delta t'$ だから

$$f' = \frac{V}{V - v} f$$

を得る．ここでは時間 Δt を微小と仮定する必要はなく，教科書の説明は単に Δt を周期 T に選んだ場合に相当する．

観測者が近づく場合

一方，図 87 のように観測者 P が速度 $-u$(x 成分) で波源 S に近づく場合，波長 λ は観測者の運動に無関係である．よって図 87 のように時間 Δt のうちに P が出会う波 (山) の数は，P が静止していた場合に比べて $(V + u)\Delta t/\lambda$ に増えるので，P の観測する振動数を f'' としてこれを $f''\Delta t$ と等置すると

$$f'' = \frac{V + u}{\lambda} = \frac{V + u}{V} f$$

を得る［この結果は $u < 0$ に対しても正しい］．同じことであるが，P から見た波の速度 (山の通過速度) は $V' = V + u$ に増えるので，

$$f'' = \frac{V'}{\lambda} = \frac{V + u}{V} f$$

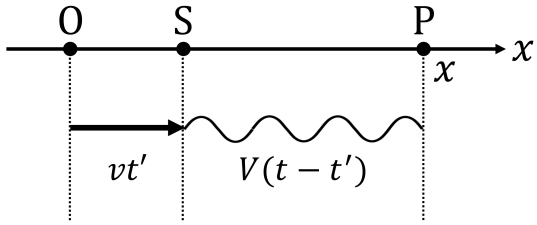


図 89　時刻 t' に S の発した音が時刻 t で P に届く

としても良い．

波の式を用いた議論

静止した音源 S の出す音波として正弦進行波

$$y(x,t) = a\sin\left\{2\pi f\left(t - \frac{x}{V}\right)\right\}$$

を考え，以上の結果を改めて導こう．［場 y としては空気の密度または圧力の平衡値からのズレを考えれば良い．］簡単のために S の位置を原点にとると，S の位置での音は

$$y_{\mathrm{S}}(t) = a\sin(2\pi f t)$$

である．

1. 音源 S が速度 v (x 成分) で P に近づく場合
   場 $y(x,t)$ そのものが変化する．しかし S の位置での場 $y_{\mathrm{S}}(t)$ は S が静止しているか否かに依らない．そこで観測者 P (位置 x) が時刻 t で観測する場 $y(x,t)$ を，前の時刻 t' に S の出した音 $y_{\mathrm{S}}(t')$ として求めることを考える．S の初期位置を原点にとると図 89 より

   $$vt' + V(t-t') = x, \qquad \therefore t' = \frac{V}{V-v}\left(t - \frac{x}{V}\right)$$

   の関係があるので，

   $$y(x,t) = y_{\mathrm{S}}(t') = a\sin\left\{2\pi f'\left(t - \frac{x}{V}\right)\right\}, \qquad f' = \frac{V}{V-v}f.$$

2. 観測者 P が速度 $-u$ (x 成分) で S に近づく場合
   場 $y(x,t)$ の分布は変化せず，観測点 P の位置として $x = x_0 - ut$ を代入すると，P の位置での場は

   $$y_{\mathrm{P}}(t') = a\sin\left\{2\pi f\left(t - \frac{x_0 - ut}{V}\right)\right\} = a\sin(2\pi f'' t + \mathrm{const}), \qquad f'' = \frac{V+u}{V}f.$$

1 つの注意，風の吹いている場合

$$\text{音源 S が観測点 P に近づく場合の振動数} \qquad f' = \frac{V}{V-v}f, \tag{19}$$

$$\text{観測点 P が音源 S に近づく場合の振動数} \qquad f'' = \frac{V+u}{V}f \tag{20}$$

は［いずれも定性的には $u, v > 0$ に対して振動数の増大を意味している．しかしこれらは定量的には］$v = u$ としても一致しない．このような**音源 S と観測者 P の非対称性は，Doppler 効果が S と P だけでなく，音の媒質としての空気も含めた 3 体問題であることと関係している．**そして以上の議論は風の吹いていない空気の静止系での話であり，S と P の速度 v, u は空気に対する速度である．

実際，空気に対して運動する対象 (S または P) に固定した座標系に現れる風を考慮すれば，以下のように 2 式は整合していることが分かる．

1. 音源 S が速度 v (x 成分) で P に近づく場合 (P は空気とともに静止)
   S 固定系では P が速度 $-v$ で S に近づき，風が速度 $-v$ で吹いているので，
   P の聞く音の振動数は式 (20) において $u = v$ とし，音速を $V - v$ に置き換えた
   $$\frac{V}{V-v}f$$
   となる．これは式 (19) に一致している．
2. 観測者 P が速度 $-v$ (x 成分) で S に近づく場合 (S は空気とともに静止)
   P 固定系では S が速度 v で P に近づき，風が速度 v で吹いているので，
   P の聞く音の振動数は式 (19) において音速を $V + v$ に置き換えた
   $$\frac{V+v}{V}f$$
   となる．これは式 (20) に一致している．

参考 「なお，光の場合には媒質の空気にあたるものがなく，光のドップラー効果は，厳密には［厳密に］，S が v で近づこうと，P が v で近づこうとまったく相対的で

$$f' = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}f$$

(c は光速) で与えられる」(p.156)．

最後に 1 次元の Doppler 効果の最も一般的な状況として

- 音源 S が速度 v (x 成分) で観測点 P に近づき
- 観測点 P が速度 $-u$ (x 成分) で音源 S に近づき
- 速度 w (x 成分) の風が吹く

場合を考え，P の効く音の振動数 f''' を求める．風が吹く座標系では音速を $V' = V + w$ に修正した上で式 (19)，式 (20) を組み合わせれば良く，

$$f''' = \frac{V'+u}{V'} \cdot \frac{V'}{V'-v}f = \frac{(V+w)+u}{(V+w)-v}f$$

表 3　音源の位置 x と観測点での振動数 f' の関係

x	$-\infty$	$\to$	0	$\to$	$+\infty$
θ	0	$\to$	$\pi/2$	$\to$	π
f'	$\frac{V}{V-v}f$	$\to$	f	$\to$	$\frac{V}{V+v}f$

を得る．この結果は空気の静止系で見た P，S の速度成分 $v-w \equiv v', -u-w \equiv -u'$ を用いて

$$f''' = \frac{V+u'}{V} \cdot \frac{V}{V-v'} f = \frac{V+u+w}{V-v+w} f$$

としても得られる．

注解——光の Doppler 効果

光には媒質 (エーテル) がないということは，どのような座標系 (慣性系) から見ても真空中の光の速度 c は同一でなければならないことを意味する．これは慣性系の間の座標変換則が Galilei 変換 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{V}t + \boldsymbol{r}', t = t'$(2-13 節) であるとした場合に，速度が単純なベクトル和として合成されることと矛盾する．実際，光速度不変の原理を満たす座標変換則は，相対性原理と併せると所謂 Lorentz 変換でなければならないことが見出される (以上，付録 D.23 参照)[*26]．今，与えられた時空点の座標が $x^\mu = (ct, \boldsymbol{x})$ であるような座標系で見た光の 4 元波数ベクトルを $k^\mu = (\omega/c, \boldsymbol{k})$ とする (波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ については 6-1 節を参照)．この点における波の位相 $k_\mu x^\mu = g_{\mu\nu} k^\mu x^\nu$ の値は座標系に依らない，すなわち Lorentz スカラーとなることを要求すると，k^μ は Lorentz 変換に対して反変ベクトルとして変換しなければならないことになる (付録 C.12，付録 D.23 参照)．これが上記の光の振動数変化 $\omega' = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\omega$ を与える (付録 D.24 参照)．光の場合も波源 S と観測点 P が近づくと振動数が増加することは音と変わらないから，これを光の Doppler 効果と呼ぶ．しかしここで述べたように，その起源は異なっている．

ななめ方向の Doppler 効果

図 90 のように x 軸上の位置 S_1 を (時刻 t_1 に) 速度 v で通過した音源 S が発する音 (振動数 f) を y 軸上の観測点 P で聞く場合を考える．この場合にも P が聞く音の振動数 f' は，S が動く場合に 1 次元の Doppler 効果の式 (19) を導いたのと同様の仕方で求められる．結果は

$$f' = \frac{V}{V - v\cos\theta} f \tag{21}$$

となる (導出は下記)．これは 1 次元 Doppler 効果の式 (19) における v を，S_1 から P を見る方向の速度成分 $v\cos\theta$ に置き換えたものであり，逆に $\theta = 0$ とおくと式 (19) が再現される．振動数 f と音源の位置 S_1 の座標 x との関係は表 3 のようになる．

ななめ方向の Doppler 効果に対する式 (21) の導出　時刻 t_1 から微小時間 Δt のうちに発せられた $f\Delta t$ 個の波 (山) を P が受け取る時間を $\Delta t'$ とすると，波の個数について

$$f\Delta t = f'\Delta t'$$

[*26] そして電磁場を支配する Maxwell 方程式が実際に Lorentz 変換に対して共変的であることから，逆に全ての慣性系において共通の光速度 c の値が導かれる (付録 D.26 参照)．

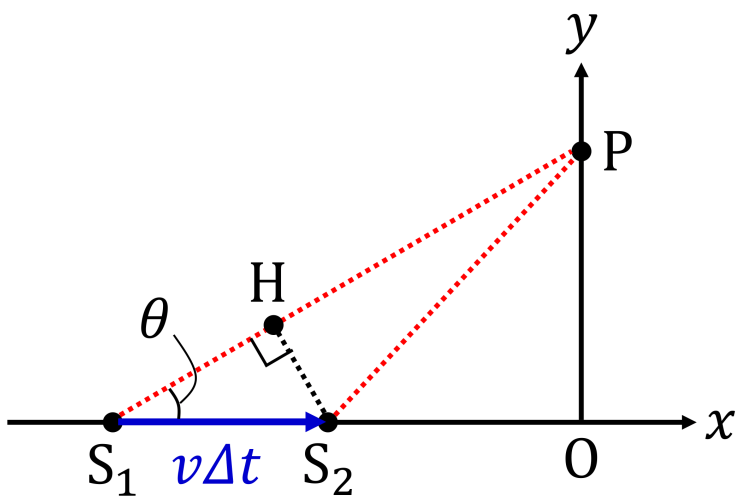


図 90　ななめ方向の Doppler 効果

が成り立つ．ところが図 90 のように S の Δt 後の位置 S_2 に対して径路差を

$$\overline{S_1P} - \overline{S_2P} \simeq \overline{S_1H} = v\Delta t \cos\theta$$

と近似すると［これは微小角 $\angle S_1PS_2$ の 1 次近似になっている，付録 C.5 参照］，時間 $\Delta t'$ は Δt に比べて

$$\Delta t' = \left(t_1 + \Delta t + \frac{\overline{S_2P}}{V}\right) - \left(t_1 + \frac{\overline{S_1P}}{V}\right) = \left(1 - \frac{v\cos\theta}{V}\right)\Delta t$$

に縮まっている．よって P の聞く音の振動数は式 (21):

$$f' = \frac{V}{V - v\cos\theta} f$$

となる．

注解

■教科書との相違　やや些末であるが，教科書では時間 Δt として周期 T をとっており，周期が長ければ距離 $\overline{S_1S_2} = vT$ を微小とする近似を適用できなくなる．代わりに本稿のようにこちらで時間 Δt を設定すれば，上の議論は常に正しい．

■横 Doppler 効果　音の Doppler 効果は音源の速度の SP 方向成分によってもたらされるから，$\theta = \pi/2$ のときには $f' = f$ となり Doppler 効果は起こらない (表 3)．これとは対照的に光では $\theta = \pi/2$ のとき

$$f' = f\sqrt{1 - (v/c)^2} < f$$

となり，赤方偏移が起きる (横 Doppler 効果) [12, pp.30–31]．

なお $\theta = \pi/2$ となるときに発せられた音が P に届くときには，音源 S は $x > 0$ に移動している．音源 S が原点 O を通過する瞬間に P が聞く音 (例題 4-1，p.157) と混同しないように注意する．

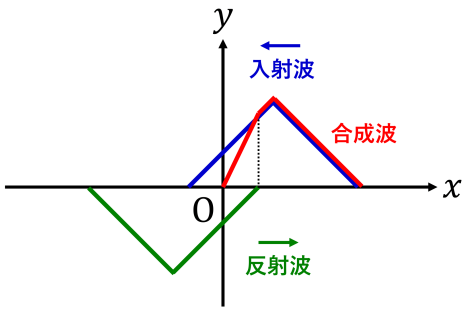


図 91　固定端での反射

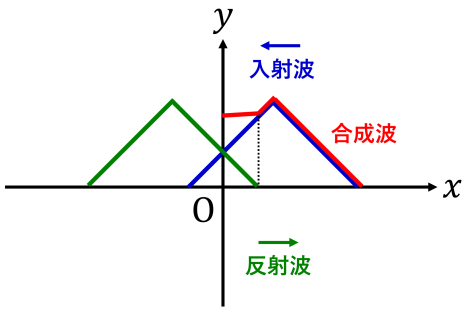


図 92　自由端での反射

4-4 波の反射・定常波・共鳴

固定端での反射

一端が固定されている弦や一端が閉じられている気柱を想定して，x 軸に沿って

- $x > 0$ の側から入射する波　$y_-(x,t) = F(x + Vt)$
- 境界 $x = 0$ で反射した波　$y_+(x,t) = G(x - Vt)$

を考える．このとき合成波 $y = y_- + y_+$ に対して固定端の条件

$$y(x = 0, t) = 0 \qquad (\leftrightarrow \quad x = 0 \text{ は節})$$

を課すと，反射波は図 91 のように入射波と原点対称なグラフとして与えられること

$$y_+(x,t) = -y_-(-x,t) \tag{22}$$

が導かれる (導出は下記)．ただし図 91 における $x < 0$ の波は補助線であり，実際にそこに波があることを意味しない．特に正弦波

$$y_-(x,t) = a \sin\left\{2\pi f\left(t + \frac{x}{V}\right) + \delta\right\}$$

が入射する場合，反射波は

$$y_+(x,t) = -a \sin\left\{2\pi f\left(t - \frac{x}{V}\right) + \delta\right\}$$

となるので，境界 $x = 0$ での値を考えると固定端の反射では位相が π ずれることが分かる．［反射波の位相が入射波に対して π 進むと考えても，π 遅れると考えても，得られる反射波は変わらない．］

固定端の反射に対する式 (22) の導出　固定端の条件

$$0 = y_-(0,t) + y_+(0,t) = F(Vt) + G(-Vt)$$

が任意の時刻 t に対して成り立つことは，関数の関係 $G(\xi) = -F(-\xi)$ を要求する．そこで引数を $\xi = x - Vt$ とおくと

$$G(x - Vt) = -F(-x + Vt), \qquad \therefore y_+(x,t) = -y_-(-x,t) : (22)$$

を得る．

注解

一端を閉じられた気柱の閉じた境界に対して**実際に**固定端の境界条件が課せられるのは次のように考えれば良い．すなわち普通，境界の固体表面に流体 (空気) が押し入ったり，境界と流体の間に真空部分ができたりすることはない．そのためには流体の固体表面との相対速度は境界面に垂直な法線方向成分を持ってはならない [11, pp.22–23].

自由端での反射

境界 $x=0$ における自由端の条件は媒質の変位 (合成波) $y=y_-+y_+$ に対して

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0}=0$$

である．これは自由端において合成波の変位 y が最大となる［一般には極値をとる］，すなわち合成波の腹となることを意味している．このとき反射波は図 92 のように入射波と y 軸対称なグラフとして与えられること

$$y_+(x,t)=y_-(-x,t) \tag{23}$$

が導かれる (導出は下記).［ただし図 91 においてもやはり $x<0$ の波は補助線であり，実際にそこに波があることを意味しない.］特に正弦波

$$y_-(x,t)=a\sin\left\{2\pi f\left(t+\frac{x}{V}\right)+\delta\right\}$$

が入射する場合，反射波は

$$y_+(x,t)=a\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{x}{V}\right)+\delta\right\}$$

となるので，境界 $x=0$ での値を考えると自由端の反射では位相はずれないことが分かる．

自由端の反射に対する式 (23) の導出　自由端の条件

$$0=\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0}=F'(Vt)+G'(-Vt)$$

が任意の時刻 t に対して成り立つことは，関数の関係

$$F'(-\xi)+G'(\xi)=0,\qquad \therefore -F(-\xi)+G(\xi)=\mathrm{const.}$$

を要求する[*27]．そこで引数を $\xi=x-Vt$ とおくと

$$G(x-Vt)=F(-x+Vt),\qquad \therefore y_+(x,t)=y_-(-x,t):(23)$$

を得る．

[*27] ただし

$$\left.\frac{\partial F(x+Vt)}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\mathrm{d}F(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=Vt}\equiv F'(Vt),\qquad \left.\frac{\partial G(x-Vt)}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\mathrm{d}G(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=-Vt}\equiv G'(-Vt),$$

すなわち $F'(Vt),G'(-Vt)$ は引数についての微分を行ってから引数に $\pm Vt$ を代入したものと約束する．

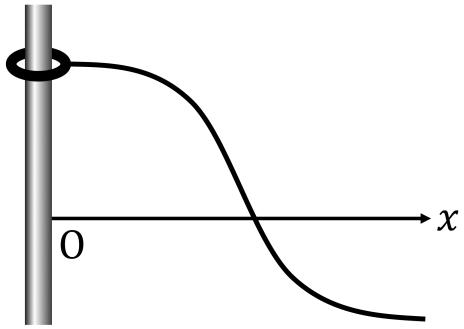


図 93　弦の自由端

■自由端の境界条件が適用される例 1 ——弦の自由端　人工的な例であるが，図 93 のように滑らかな棒に通した質量を無視できるリングと繋いだ弦は自由端の境界条件を満たす．［こう書くとトートロジーのようだが，このように自由端の境界条件はまさしく自由な端点の満たす境界条件であることがその名前の由来である．］実際，自由端の条件が満たされない，すなわち弦が端点において x 軸に平行でないとすると，リングに働く張力は棒に沿う成分を持つためリングは棒に沿って加速度無限大で動き，$\partial y/\partial x = 0$ となる位置へ瞬間的に移動する．［この議論は糸の質量を無視した場合，糸の張力は糸に沿って一様でなければならないこと (2-4 節) と似ている．］

■自由端の境界条件が適用される例 2 ——気柱の開口　気柱の開口は大気に接しているため，質量密度 (15):$\sigma = \sigma_0(1 - \partial x/\partial a)$ は波のないときの値 (したがって大気中での値) σ_0 に一致していなければならない．これは開口で自由端の境界条件 $\partial x/\partial a = 0$ が課せられることを意味している．［密度変化は媒質の変位 x そのものではなく変位の非一様性 $\partial x/\partial a$ によってもたらされるから，密度が σ_0 に一致しなければならないことは固定端ではなく自由端の条件になる．］

注意　実際に密度が σ_0 に一致するのは開口よりも少し外側である．
その位置の開口からのズレ Δl を**開口端補正**と呼ぶ．

定常波

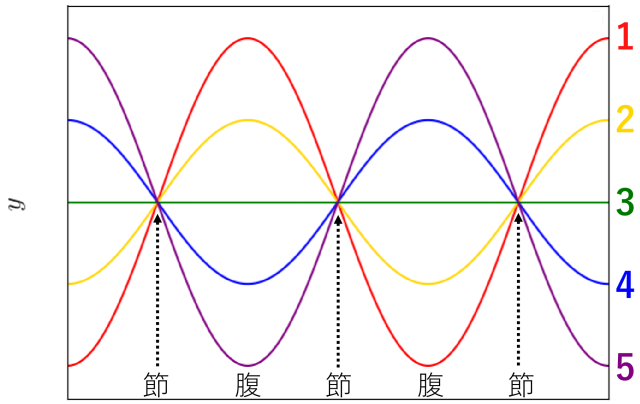
入射波と反射波の合成を念頭に，互いに反対方向に進む 2 つの正弦波の重ね合わせ

$$\begin{aligned} y(x,t) =& a\sin\left\{2\pi\left(ft+\frac{x}{\lambda}\right)+\delta_-\right\}+a\sin\left\{2\pi\left(ft-\frac{x}{\lambda}\right)+\delta_+\right\} \\ =& 2a\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}+\Delta_-\right)\sin(2\pi ft+\Delta_+), \qquad \text{(和積の公式)} \\ \Delta_\pm \equiv& \frac{1}{2}(\delta_- \pm \delta_+) \end{aligned} \tag{24}$$

を考える．これは時間を含まない因子

$$A(x) = 2a\left|\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}+\Delta_-\right)\right|$$

を振幅とし，$|y| \leq A$ の範囲で時間的に振動する図 94 のような合成波を表し，



1→2→3→4→5→4→3→2→1→……の順に変化

図 94　定常波

- 節の位置：$A(x) = 0$ となる位置 x
- 腹の位置：$A(x) = 2a$ となる位置 x

が一定であることから**定常波** (**定在波**) と呼ばれる．

共鳴と固有振動

ここでは両端 $x = 0, l$ を固定端として，$0 \leq x \leq l$ における波を考察する．固定端の条件 $y(x_*, t) = 0$ (ただし $x_* = 0, l$) は合成波に対して課せられるものであり，入射波や反射波の各々に対して課せられるものではない．しかしながら，もし図 95 の①のように $x = 0$ に入射する波自身が固定端の条件を満たさない場合，反射波は②のようであり，$x = l$ において反射して戻ってきた波③はもとの波①と位相がずれている．すると反射のたびに位相の異なる波が重ね合わせられることになり，様々な位相の波は打ち消しあう傾向を持つ．よって波が生き残るには (**共鳴**)，戻ってきた波③がもとの波①に一致しなければならず，そのためには入射波①自身が固定端の条件を満たしていれば良い．このとき図 96 のように決まった波長

$$\lambda = \frac{2}{n} l \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

での振動 (**固有振動**) だけが許容され，合成波は

$$y = Y_n(x, t) \equiv A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin(2\pi f t + \Delta_n) \tag{25}$$

という形の定常波となる．$n = 1$ の場合の振動を**基本振動**，$n = 2, 3, \cdots$ の振動を n 倍振動と呼ぶ．一般の波はこのような波の重ね合わせとして得られる．以上の結果は次のように厳密に導出・説明することができる．

共鳴条件と n 倍振動の式 (25) の導出　入射波①と反射波②を合成した定常波 (24) に固定端の条件

$$A(0) = 0 \qquad \therefore \Delta_- = \frac{\pi}{2},$$
$$A(l) = 0 \qquad \therefore 2\pi \frac{l}{\lambda} + \Delta_- = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

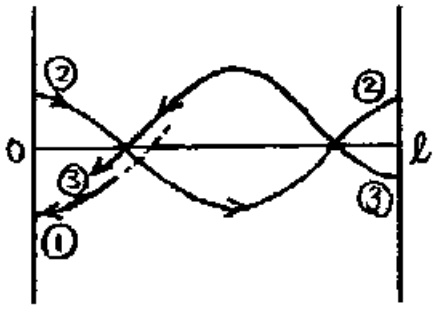


図 95　固定端で反射する波の打ち消し合い

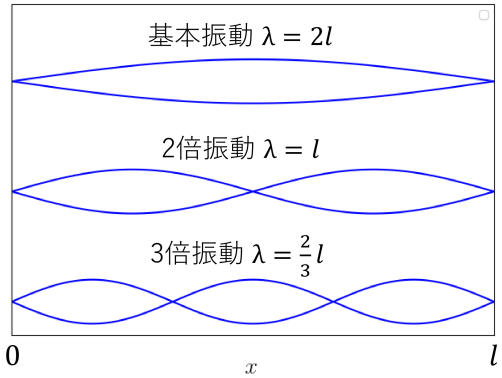


図 96　固有振動

を課すと[*28]

$$\lambda = \frac{2}{n}l \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

を得る．［このとき②の $x = l$ での反射波は①に一致するから，定常波 (24) が $0 \leq x \leq l$ における合成波となる．］以上を定常波の式 (24) に戻すと

$$\begin{aligned} y(x,t) =& 2a\cos\left(\frac{n\pi x}{l} + \frac{\pi}{2}\right)\sin(2\pi ft + \Delta_+) \\ =& A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin(2\pi ft + \Delta_n) : (24) \qquad (2a \to A_n, \Delta_+ - \pi \to \Delta_{n+}) \end{aligned}$$

となる．

■気柱の共鳴　開口を持つ気柱に対しては自由端の境界条件の下での共鳴を考えることができる．その場合の共鳴条件も同様に議論でき，

- 与えられた振動数 (波長) の音に対して共鳴の起きる気柱の長さ
- 与えられた長さの気柱に対して共鳴の起きる音の振動数 (波長)

などを調べることができるけれど，本稿では省略する．

注解

■位相の異なる多数の三角関数の和　「少しずつ位相の異なる三角関数の多数個の和」が「全体で事実上打ち消しあう」こと (p.161) について，p.161 欄外では正弦曲線を用いた図解が与えられている．同様に p.272 欄外にも，「$\sum_{i=1}^{n} \sin x_i$ または $\sum_{i=1}^{n} \cos x_i (n \gg 1)$ のような和は，x_i がデタラメなら，正のものと負のものが確率的に同数あり，足し合わさって消える」とある．この点をより明瞭に理解するには複素数を用いるのが良い．三角関数 $\sin\theta$ は指数関数 $e^{i\theta}$ の虚部として与えられ，$e^{i\theta}$ は複素平面上で実軸と偏角 θ を成す絶対値が 1 の単位ベクトルに対応する (付録 C.15 参照)．すると三角関数の和がゼロに近づくことは，様々な方向 θ を向く単位ベクトルの和がゼロベクトルに近づくことから理解できる (図 97 参照)．

[*28] $0 \leq \Delta_- < 2\pi$ としても一般性を失わない．もちろん

$$\Delta_- = \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad 2\pi\frac{l}{\lambda} + \Delta_- = \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\pi$$

としても良い．

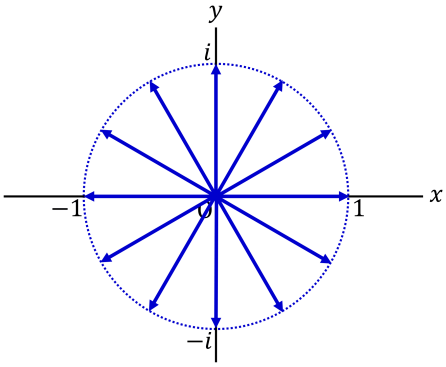


図 97　位相の異なる多数の三角関数の和はゼロ

■境界条件を直観的に処理する　両端 $x=0,l$ において固定端の境界条件を満たす正弦波の式を手早く書くには，次のようにすれば良い．まず $x=0$ において変位 $y=0$ となるためには，正弦波は $\sin(\cdots)$ で表されなければならない．位相 $(\cdots)$ は位置 x に依るけれど無次元量でなければならないため，x/l に比例すると考える．最後に $x=l$ での境界条件を考慮して，n 倍振動について

$$y=y_n(x,t)\equiv a_n(t)\sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right)$$

とすれば良い．

なお，これが波動方程式を満たすことから係数 $a_n(t)$ の時間依存性を定めると

$$\ddot{a}_n+\left(\frac{n\pi V}{l}\right)^2 a_n=0,\qquad \therefore a_n(t)=A_n\cos\left(\frac{n\pi V}{l}t\right)+B_n\sin\left(\frac{n\pi V}{l}t\right)$$

となり，再び定常波の式 (25) を得る．積和の公式によりこれを進行波と後退波の重ね合わせの形に戻して表現することも可能である：

$$y_n(x,t)={A_n}'\left\{\sin\left(n\pi\frac{x-Vt}{l}\right)+\sin\left(n\pi\frac{x+Vt}{l}\right)\right\}+{B_n}'\left\{\cos\left(n\pi\frac{x-Vt}{l}\right)-\cos\left(n\pi\frac{x+Vt}{l}\right)\right\}.$$

一般の波はこのような波の重ね合わせ $y=\sum_{n=1}^{\infty}y_n(x,t)$ で与えられる (Fourier 展開，付録 C.16)．

4-5 干渉とうなり

干渉

平面上 (例えば水面) において 2 つの波源 $\mathrm{S}_1,\mathrm{S}_2$ の作る波の合成を例に，波の干渉 (強め合い・打ち消し合い) を議論する．ここでは簡単のために振幅の減衰を無視する．［実際にはエネルギー保存則は球面波の振幅が減衰することを要請する (付録 C.11 参照)．2 次元の場合，波源からの距離 r に対して振幅は $1/\sqrt{r}$ に比例して減衰する．］2 つの波は共通の振幅 a と振動数 f を持つものとすると，波源 $\mathrm{S}_1,\mathrm{S}_2$ から距離 r_1,r_2 の位置 P における波はそれぞれ

$$y_1(\mathrm{P},t)=a\sin\left\{2\pi\left(ft-\frac{r_1}{\lambda}\right)\right\},\qquad y_2(\mathrm{P},t)=a\sin\left\{2\pi\left(ft-\frac{r_2}{\lambda}\right)\right\}$$

と表される．ただし波源の位置 $r_1=0,r_2=0$ において波が同位相である場合を考えている．このとき点 P において

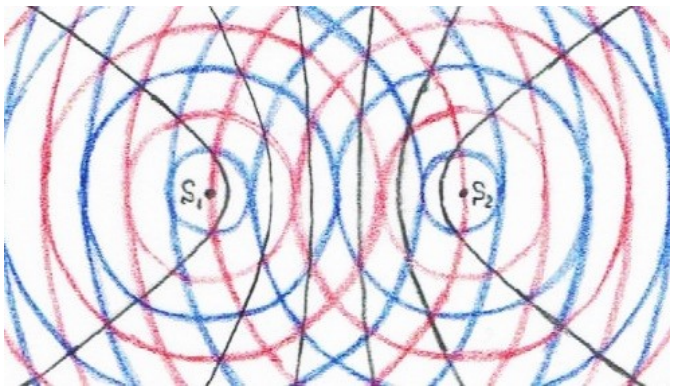


図 98　平面上の波の干渉 (山：赤，谷：青，合成波の節線：黒)

- 波が強め合う条件は，径路差 $r_1 - r_2$ が波長の整数倍となることである：$r_1 - r_2 = n\lambda$.
- 波が打ち消し合う条件は，距離 r_1, r_2 が半波長ずれる，
  すなわち径路差 $r_1 - r_2$ が波長の半整数倍となることである：$r_1 - r_2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$.

よって例えば図 98 のように打ち消しあう点をつないだ線 (節線) を描くと，これは波源 $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2$ からの距離の差が一定の線だから，節線は波源を焦点とする双曲線となっている［強め合いの位置も同様］.

なお以上の強め合い・打ち消し合いの条件は，合成波の式

$$y(\mathrm{P}, t) = y_1(\mathrm{P}, t) + y_2(\mathrm{P}, t) = A(\mathrm{P}) \sin\left\{2\pi\left(ft - \frac{\bar{r}}{\lambda}\right)\right\}, \qquad \bar{r} \equiv \frac{r_1 + r_2}{2}, \qquad A(\mathrm{P}) \equiv 2a\left|\cos\frac{\pi(r_1 - r_2)}{\lambda}\right|$$

(和積の公式による) において $A(\mathrm{P}) = 2a$ または $A(\mathrm{P}) = 0$ としても導ける.

注解

和積の公式

$$\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right), \qquad \text{etc.}$$

は三角関数の加法定理から直ちに導ける．右辺の係数が 2 か 1/2 かを忘れた場合，左辺の和 $\sin A + \sin B$ は絶対値が 1 を超え得るのに対し，右辺の積 $\sin(\cdots)\cos(\cdots)$ は絶対値が 1 を超え得ないことから係数は 2 でなければならないと判断できる.

うなり

前節では干渉した波の空間分布を議論した．本節では与えられた点において合成された音波の時間変化を考えよう．ここでは非常に近い振動数 f_1, f_2 を持つ波を合成したときに起きる，**うなり**と呼ばれる現象を取り上げる．我々は一般性を失うことなく $f_1 < f_2$ と仮定することができる．初め同位相で強め合っていた 2 つの波は，

1. しばらくすると f_1 の位相が半周期だけ遅れて逆位相になり打ち消し合い，
2. さらにしばらくすると f_1 の位相が 1 周期だけ遅れて同位相になり強め合う

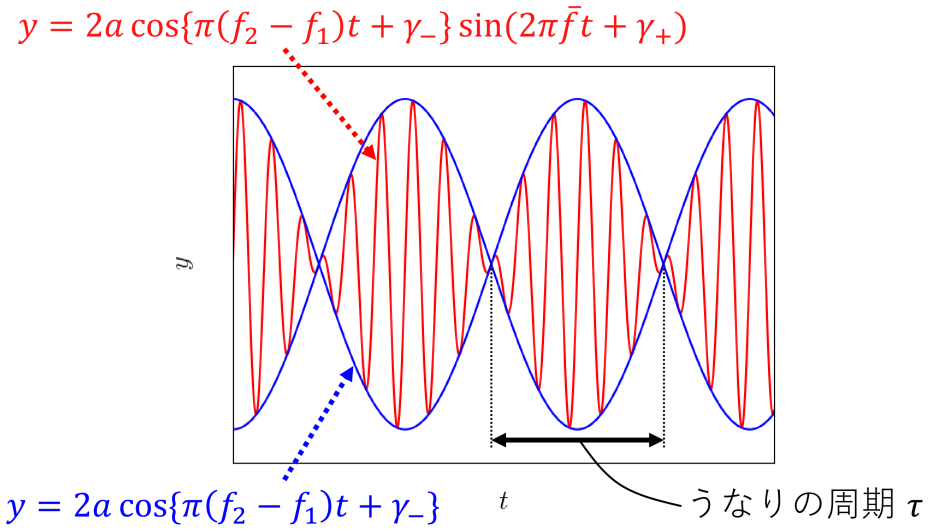


図 99　うなり

ということが繰り返される．これがうなりであり，その周期 τ は f_2 の振動が f_1 の振動よりも 1 回だけ多くなる時間として

$$f_2\tau - f_1\tau = 1, \qquad \therefore \tau = \frac{1}{f_2 - f_1}$$

と求められる．ここからうなりの振動数 $\nu = 1/\tau$ に対する公式

$$\nu = f_2 - f_1$$

が得られる．

うなりの数学的な扱い

2 つの波の振幅が等しい場合には，合成波を比較的容易に計算することができる．実際，2 つの音波を

$$y_1(x,t) = a\sin(2\pi f_1 t + \gamma_1), \qquad y_2(x,t) = a\sin(2\pi f_2 t + \gamma_2) \qquad (f_2 > f_1)$$

(観測位置 x は固定しているため，x の項は定数項 γ_1, γ_2 に含めた) と書くと，合成波は和積の公式により

$$y = y_1(x,t) + y_2(x,t) = 2a\cos\{\pi(f_2 - f_1)t + \gamma_-\}\sin(2\pi\bar{f}t + \gamma_+) \qquad \left(\bar{f} \equiv \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \gamma_\pm \equiv \frac{1}{2}(\gamma_2 \pm \gamma_1)\right)$$

と表される．これは振動数 $f_2 - f_1$ でゆっくりと振動する包絡線 (envelop) $y = \pm 2a\cos\{\pi(f_2 - f_1)t + \gamma_-\}$ の間で，平均振動数 $\bar{f}$ で素早く振動する波を表している (図 99 参照)．うなりの周期 τ は“振幅” $y = 2a|\cos\{\pi(f_2 - f_1)t + \gamma_-\}|$ の周期だから，再び

$$\tau = \frac{1}{f_2 - f_1}, \qquad \therefore \nu = \frac{1}{\tau} = f_2 - f_1$$

を得る．[$\cos\{\pi(f_2 - f_1)t + \gamma_-\}$ の周期 $2/(f_2 - f_1)$ ではないことに注意する．]

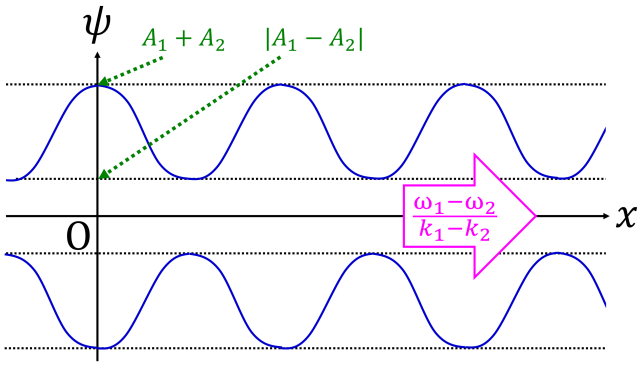


図 100　振幅の異なる 2 つの正弦波に対する合成波の包絡線

注解

振幅の異なる 2 つの波

$$\psi_1 = A_1 \sin(k_1 x - \omega_1 t + \delta_1),$$
$$\psi_2 = A_2 \sin(k_2 x - \omega_2 t + \delta_2)$$

を合成する場合，振幅を

$$A_1 = \frac{A_1 + A_2}{2} + \frac{A_1 - A_2}{2}, \qquad A_2 = \frac{A_1 + A_2}{2} - \frac{A_1 - A_2}{2}$$

と書き換えれば良い (同様の手法の応用例については付録 C.19 を参照)．こうすれば振幅が $(A_1 \pm A_2)/2$ の 2 種類に揃うので和積の公式を用いることができ，

$$\begin{aligned}\psi_1 + \psi_2 =&(A_1 + A_2) \sin\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right)\\ &+(A_1 - A_2) \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right)\end{aligned}$$

を得る．波数 $(k_1 - k_2)/2$ の項は空間的にゆっくりと振動する因子であり，与えられた時刻に図 100 のような包絡線を作る．包絡線は形を崩さずに時間とともに速度

$$v_{\mathrm{g}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$$

で並進する．x 軸上の定点で観測されるうなりの (角) 振動数はやはり $|\omega_1 - \omega_2|$ となることが見て取れる．

参考　一般に異なる波長の波を多数重ね合わせて作った**波束**の進行速度 v_{g} は**群速度**と呼ばれる．**分散関係** (ω と k の関係) が $\omega = \omega(k)$ で与えられる媒質における群速度は $v_{\mathrm{g}} = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$ となる (付録 D.25 参照)．通常の分散関係 $\omega = ck$ は非分散的であると言われる．この場合全ての波長の波が同一の位相速度 $c = \omega/k$ を持つため，異なる波長の波を多数重ね合わせた合成波は時間が経っても形が崩れないことが名前の由来である．このとき群速度は $v_{\mathrm{g}} = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k = c$ となり，位相速度に一致する．

この結果は物理量の複素表示を用いれば容易に得ることができる [9, p.77]．ただし以下では波の観測点を固定し，空間依存性を省略する．例えば a を複素振幅とすると，振動数 ω_1 の波は複素量 $ae^{i\omega_1 t}$ の実部として得

られる (付録 C.15 参照)．非常に近い振動数 ω_1, ω_2 と異なる振幅を持つ 2 つの波の合成

$$ae^{i\omega_1 t} + be^{i\omega_2 t} = ce^{i\bar{\omega} t}, \qquad \bar{\omega} \equiv \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

を考えると，平均振動数 $\bar{\omega}$ での振動の振幅

$$c = a \exp\left(i\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) + b \exp\left(i\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)$$

もまた振動数 $|\omega_2 - \omega_1|$ でゆっくりと振動する．さらに振幅 $|c|$ の振動範囲を調べると

$$|c|^2 = c^* c = |a|^2 + |b|^2 + 2\mathrm{Re}\left[a^* b \exp\left(i\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\right]$$

となるので，一般性を失うことなく $|a| > |b|$ とすれば

$$|a| - |b| \leq |c| \leq |a| + |b|$$

である．

第 5 章 電磁気学

電磁気学に関しては教科書は概ね，卑近な法則の説明から入り，後から原理として Maxwell (マクスウェル) 方程式を提示するというボトムアップ式の構成となっている．しかしながら本稿では 5-0 節として新たにオリジナルの節を設け，いきなり電磁気学の原理である Maxwell 方程式を書き下し，その説明も兼ねていくつかの諸法則を導く．次いで 5-1 節以降の教科書の記述に沿って電磁気学の基礎を概観する．なお 5-0 節では付録 C の数学的知識を必ずしも断りなく全面的に用いる．

蛇足　電磁気学は本来的には電磁場の理論であるけれど，
高校の電磁気学ではその応用にあたる電気回路の理論にかなりの比重が置かれている印象を受ける．

5-0 電磁気学の原理

電磁場の定義

速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する電荷 q が，電荷の位置での電場 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ から受ける力は

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

と表される．これは

$$\begin{aligned} q \text{ が静止しているときに受ける力 } \boldsymbol{F}_0 \quad &\to \quad \text{その点での電場 } \boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}_0/q, \\ q \text{ が速度 } \boldsymbol{v} \text{ を持つときに受ける力 } \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{\Delta F} \quad &\to \quad \text{その点での磁束密度 } \boldsymbol{B}\ (\boldsymbol{\Delta F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \end{aligned}$$

のように，試験電荷 q に働く力から電磁場 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ を求め，**定義する**式である．なお磁場 (磁束密度) から受ける力 $q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ を **Lorentz (ローレンツ) 力**と呼ぶ．(電場から受ける力も合わせた $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ を Lorentz 力と呼ぶ流儀もある．)

注解　確かに Lorentz 力の表式は電磁場の定義式であるけれど，これは「U 磁石の間を通過した電荷は軌道を曲げられる」というような，ある種の物理法則を含んでいると言えるだろう．質量の定義について 2-2 節で述べたように，一般に物理量の定義は物理法則の上に成り立っている．

ここで

$$\begin{aligned} \text{真空の誘電率} \quad &\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \mathrm{C}^2/\mathrm{Nm}^2, \\ \text{真空の透磁率} \quad &\mu_0 = 1.26 \times 10^{-6} \mathrm{N/A}^2 \end{aligned}$$

を導入する (その定義については 5-6 節参照)．磁場 $\boldsymbol{H}$ は物質中では磁束密度と概念的に異なるものだが，真空中での磁場 $\boldsymbol{H}$ は磁束密度と $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}/\mu_0$ で関係付けられている (以上 5-5 節，p.203)．

さらに電荷密度 ρ と電流密度 $\boldsymbol{j}$ を導入しておく．電流密度とは電荷の流れの方向を向き，大きさが自身に垂直な単位面積を単位時間に通過する電荷の総量に一致するようなベクトルである．ここから面積素ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ を持つ面積素を単位時間に通過する電気量は $\boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ で与えられることが分かる．実際，図 101 より電流密度 $\boldsymbol{j}$ と角度 θ を成す面要素を単位時間に通過する電荷の総量は

$$j \times (\mathrm{d}S \cos\theta) = \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

となっている．

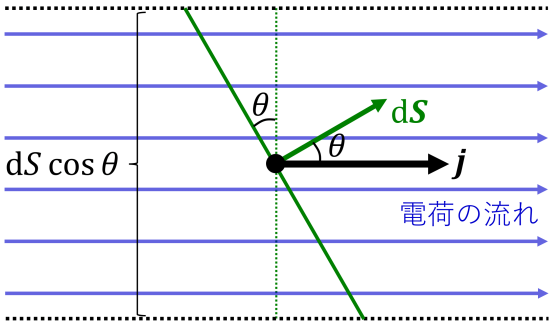


図 101　電流密度ベクトル (電荷の流れの密度・流束)$\boldsymbol{j}$

Maxwell 方程式

電磁気学の原理は Maxwell 方程式であり，それは初等的には以下の 4 つの式で表される．

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{26}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{27}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0, \tag{28}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{29}$$

以下，Maxwell 方程式 (26–29) について順番に説明する．

電場のわき出しの式 (26)

Maxwell 方程式 (26):$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$ は **Gauss** (**ガウス**) **の法則**と呼ばれ，定性的には電荷の周りに電場がわき出すように分布することを意味している．有限の体積 V にわたって両辺を体積積分し Gauss の発散定理 (付録 C.10 参照) を用いると，積分形の Gauss の法則

$$\int_{\mathrm{S}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathrm{V}}\rho\mathrm{d}V$$

に書き換えられる (S は V の表面，d$\boldsymbol{S}$ はその面積素ベクトル)．これは任意の閉曲面 S からの電場のわき出しが，S の外部の電荷分布とは無関係に S の内部の総電荷 $Q = \int_{\mathrm{V}}\rho\mathrm{d}V$ で決まることを意味している．

「電場のわき出し」という表現について　実際には電場に沿って物質が流れているわけではないので，「電場のわき出し」と言ってもそれが何を意味するのか本来は不明瞭である．しかしながら電場ベクトルを流体の速度ベクトルに読み替えれば，面積積分 $\int_{\mathrm{S}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ は表面 S を通過して単位時間に流出する流体の体積を表す．そこでこの量を「電場のわき出し」と呼ぶ (付録 C.10 も参照)．

外部の電荷の寄与について　曲面の外部の電荷が作る電気力線 (電場ベクトルをなめらかに繋いだ積分曲線) は，表面に入射した後，再び表面の外へ出るため，電場のわき出しに寄与しない．また表面が入り組んでいる場合，内部の電荷が作る電気力線は表面において出入りを繰り返し得る．しかし表面を複雑に変形しても，内部の電荷の総量が変わらない限り，電荷の正味のわき出しは不変である．

微分形の Maxwell 方程式と近接作用　上で見たように Maxwell 方程式の積分形の表現は微分形の表現と数学的には等価であるけれど，物理的には Maxwell 方程式を式 (26–29) のような微分形に書けることは，それが場 (物質場を含む) の近接作用であることを表している．

Gauss の法則に対する直観を得るために，興味ある 1 つの重要な場合として，原点に置かれた点電荷 Q が作る静的な (すなわち時間変化しない) 電場 (**静電場**) の分布を考えよう．系の球対称性より求める電場もまた球対称であり，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(r)\hat{\boldsymbol{r}}$ と表される ($\hat{\boldsymbol{r}} \equiv \boldsymbol{r}/r$ は動径方向の単位ベクトル)．実際このとき原点を中心として空間を回転しても電場分布は不変であり，球対称性が満たされている．ここで原点を中心とする半径 r の球面に対して Gauss の法則を適用すると $4\pi r^2 E(r) = Q/\varepsilon_0$ となるので，

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad \therefore \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

を得る．これは **Coulomb** (**クーロン**) **の法則**と呼ばれ，電場の強さは電荷 Q に比例し，電荷からの距離 r とともに $1/r^2$ に従って弱まることを意味している．

出発点を成す Maxwell 方程式は場の線形な方程式だから，重ね合わせの原理が成り立つ (付録 D.11 参照)．したがって静止電荷分布が作る静電場は，電荷の各微小要素が Coulomb の法則に従って作る電場の重ね合わせとして得られる．

注意　以上の議論は場の球対称性を仮定しているため，点電荷が運動する場合には適用できない．実際，運動する点電荷が作る電場は Coulomb の法則に従う静電場とは異なったものになる (付録 D.26.8 参照) [2, pp.103–105,pp.181–183]．実は荷電粒子間の相互作用を Coulomb 相互作用によって記述するのは (したがって磁場を無視し，相互作用を瞬時に伝わるものと仮定するのは)，粒子の速度が光速に比べて非常に小さい非相対論的な極限で成り立つ近似である [2, pp.186–189]．ここで相対性理論は相互作用が有限の速度で伝わるという前提 (光速度不変の原理) の上に成り立っていることを思い出されたい (付録 D.23 参照)．

電場の渦の式 (27)

Maxwell 方程式 (27):$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B}/\partial t$ は **Faraday** (**ファラデー**) **の電磁誘導の法則**と呼ばれ，定性的には磁場の時間変化が周りに渦を巻くような電場分布を作ることを意味している．有限の曲面 S (面積素ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$) にわたって両辺を面積積分し Stokes の定理 (付録 C.10 参照) を用いると，積分形

$$\int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

に書き換えられる (C は S の縁を成す閉曲線，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ はその線要素ベクトル)．ここで左辺の量 $\int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ は閉曲線 C に関する電場の循環または**起電力**と呼ばれ，右辺の量 $\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \equiv \Phi$ は曲面 S を貫く**磁束**と呼ばれる．上式は任意の閉曲線 C を貫く磁束の時間変化が閉曲線 C に起電力を生じることを意味している．仮に閉曲線 C に沿って導線が置かれているとすると，導体内部の電荷が電場から力を受けて電流が流れる．ただしここでの C はあくまで空間に固定した仮想的な閉曲線であって，そこに導線が置かれているか否かに関わらず電場の C に沿う周回積分はゼロでない値を持つ．

注意　Maxwell 方程式 (28):$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ によれば磁場はわき出さない．ここから磁束 $\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ の値は閉曲線 C を縁として共有する全ての曲面 S に共通であることが保証される．実際そのような 2 つの異なる曲

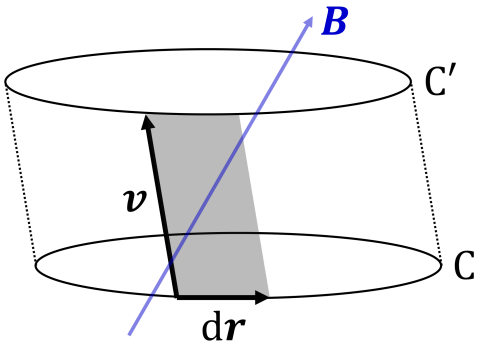


図 102　コイル C が単位時間に C′ まで移動して作られる側面の要素 $\boldsymbol{v}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}$

面 $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2$ をとると，S_1 と S_2 から作られる閉曲面 $\mathrm{S}=\mathrm{S}_2-\mathrm{S}_1$ からの磁場のわき出しはゼロになるため

$$0=\oint_{\mathrm{S}}=\int_{\mathrm{S}_2}-\int_{\mathrm{S}_1},\qquad \therefore \int_{\mathrm{S}_1}=\int_{\mathrm{S}_2}.$$

なお磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ は位置と時間の関数であるけれど，面積積分 $\int_{\mathrm{S}}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ は時間だけの関数となっているため，常微分の記号 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ を用いている．

■運動する導体内に発生する起電力　これに対して閉曲線 C が実際に導線 (コイル) であり，これが磁場の中を動く場合にも，導体内部の電荷が Lorentz 力を受けるため実効的に起電力 V_{emf} が生じる (emf は electromotive force の略，教科書 p.213)．しかしこれは上記の**電磁誘導とは異なる現象であり**，このときの起電力は磁場が時間変化しない場合にも生じ得る．ところが奇しくも，この場合の起電力も電磁誘導の場合と全く同じ形

$$V_{\mathrm{emf}}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{30}$$

に表される (導出は下記)．これは「現在のところ偶然のいたずらとしか考えようがない」 [10, pp.209–212]．

起電力の式 (30) の導出　一般にはコイル C を貫く磁束の変化への寄与は，コイルの運動だけでなく磁場自身の変化からも来る．しかし本稿では磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が時間変化しない場合に話を限定する．速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する導線の素片 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 内の電荷 q に働く Lorentz 力は，その位置での磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を用いて $q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ と表される．そこで実効的な電場を $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ と同定し，コイル C の起電力を

$$V_{\mathrm{emf}}=\int_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\int_{\mathrm{C}}\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{v}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r})$$

と考えると，最右辺の $\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{v}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r})$ は図 102 のように C が単位時間のうちに移動して作られる側面の要素 $\boldsymbol{v}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を貫く磁束になっている．ところで単位時間後のコイルの位置を C′ とすると，磁場はわき出さないから (Maxwell 方程式 (28)) C′ を貫く磁束を計算するのに C′ を縁とする任意の曲面を選んで良い．そこで

$$(\mathrm{C}'\text{を貫く磁束})=(\mathrm{C}\text{ を貫く磁束})+(\text{側面を貫く磁束})$$

とすると，$(\text{側面を貫く磁束})=\int_{\mathrm{C}}\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{v}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r})$ は単位時間当たりの磁束の変化 $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ に一致していることが分かる．以上より起電力の式 (30):$V_{\mathrm{emf}}=-\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ を得る．

磁場のわき出しの式 (28)

Maxwell 方程式 (28):$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0$ は空間の各点における単位体積からの磁束密度 $\boldsymbol{B}$ のわき出しがゼロになることを意味している．有限の体積 V にわたって両辺を体積積分し Gauss の発散定理 (付録 C.10 参照) を用

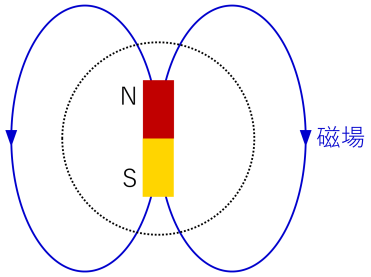


図 103　磁石全体を取り囲む閉曲面

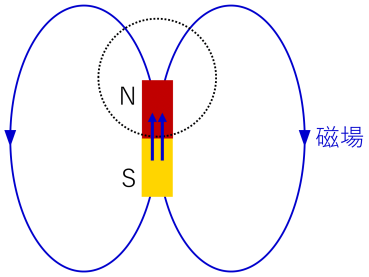


図 104　N 極だけを取り囲む閉曲面

いると，積分形

$$\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

に書き換えられる (S は V の表面，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ はその面積素ベクトル)．これは以上の数学的操作の意味レベルでの解釈からも理解されるように，任意の閉曲面 S からの磁場のわき出し (磁束) はゼロになることを意味している．

磁場がわき出さないことの意味は，それによって磁石の N 極または S 極が単独で存在すること (磁気モノポール) が禁止されるということの中に含まれている．実際，例えば磁石の N 極を単離できたとすると，それを取り囲む閉曲面からは磁場がわき出すことになり，Maxwell 方程式 (28):$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ に矛盾する．現実には図 103 のように磁石の N 極と S 極は必ずペアで現れ，磁石を囲う閉曲面からの N 極側での磁場の“流出”と S 極側での“流入”は相殺するため，わき出しはゼロになる．実は棒磁石内部には S 極から N 極に向かう磁場が分布しているため，図 104 のように N 極だけを囲う閉曲面をとってもやはり磁場のわき出しはゼロになる．

磁場の渦の式 (29)

Maxwell 方程式 (29):$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial \boldsymbol{E}/\partial t$ は **Ampère-Maxwell** (アンペール・マクスウェル) の**法則**と呼ばれ，定性的には「電流密度 $\boldsymbol{j}$」と「電場の時間変化 $\partial \boldsymbol{E}/\partial t$」が周りに渦を巻くような磁場分布を作ることを意味している．有限の曲面 S(面積素ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$) にわたって両辺を面積積分し Stokes の定理 (付録 C.10 参照) を用いると，積分形

$$\int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

に書き換えられる (C は S の縁を成す閉曲線，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ はその線要素ベクトル)．右辺の第 1 項における $\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \equiv I$ は曲面 S を貫く全電流であり，第 2 項の $\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ は曲面 S を貫く電場の束と呼ばれる．電場の束の時間変化 $\varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ は電流 I と同様に磁束密度の循環 (周回積分)$\int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ をもたらすので，これを 1 種の電流と見て**変位電流**と呼ぶ．

電場の時間変化 (変位電流) が周りに磁場の渦を作ることは，磁場の時間変化が周りに電場の渦を作るという電磁誘導の法則と対称的な関係にある．それだけでなく，変位電流の項は電荷保存則が成立するために是非とも必要とされる．実際，電荷保存則を表す連続の式 (付録 D.17 参照) は変位電流の項を考慮して初めて満た

表 4　Maxwell 方程式まとめ

	電場 $\boldsymbol{E}$	磁束密度 $\boldsymbol{B}$
わき出し	式 (26):$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	式 (28):$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0$
渦	式 (27):$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$	式 (29):$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$

される：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}=&\cancel{\varepsilon_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}}+\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}\cancel{-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}}\right)\qquad\text{(Maxwell 方程式 (26), (29))}\\=&0.\qquad\text{(恒等式 }\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})=0\text{，付録 }C.10\text{ 参照)}\end{aligned}$$

さらに言えば，変位電流の項を含む正しい Maxwell 方程式は Lorentz 変換に対して共変的である (付録 D.26).

注意　電荷保存則は変位電流も含めた電流の密度がわき出さないこと

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

を意味している．ここから積分形の Ampère-Maxwell の法則における面積積分

$$\mu_0\int_{\mathrm{S}}\left(\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

の値が閉曲線 C を縁として共有する全ての曲面 S に共通であることが保証される．

Maxwell 方程式まとめ

以上で Maxwell 方程式に対する説明を 1 通り行った．今一度 Maxwell 方程式とそのイメージを表 4 と図 105 にまとめておこう[*29].

参考　電束密度 $\boldsymbol{D}\equiv\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ を導入すると

$$\begin{aligned}\text{式 (26)}\quad&\to\quad\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D}=\rho,\\\text{式 (29)}\quad&\to\quad\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

と簡略化される．

電磁ポテンシャル

本節では要点・結論を 1 通り先に述べ，後からまとめて式の導出や補足説明を行う．

まず Maxwell 方程式 (27)，(28) によれば，スカラー・ポテンシャル ϕ とベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を導入して電磁場を

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\boldsymbol{\phi},\qquad\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\tag{31}$$

[*29] 図 105 における Biot-Savart の法則についてはこの後で説明する．そこで見るように Biot-Savart の法則の導出には，厳密には $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0$ も用いることになる．

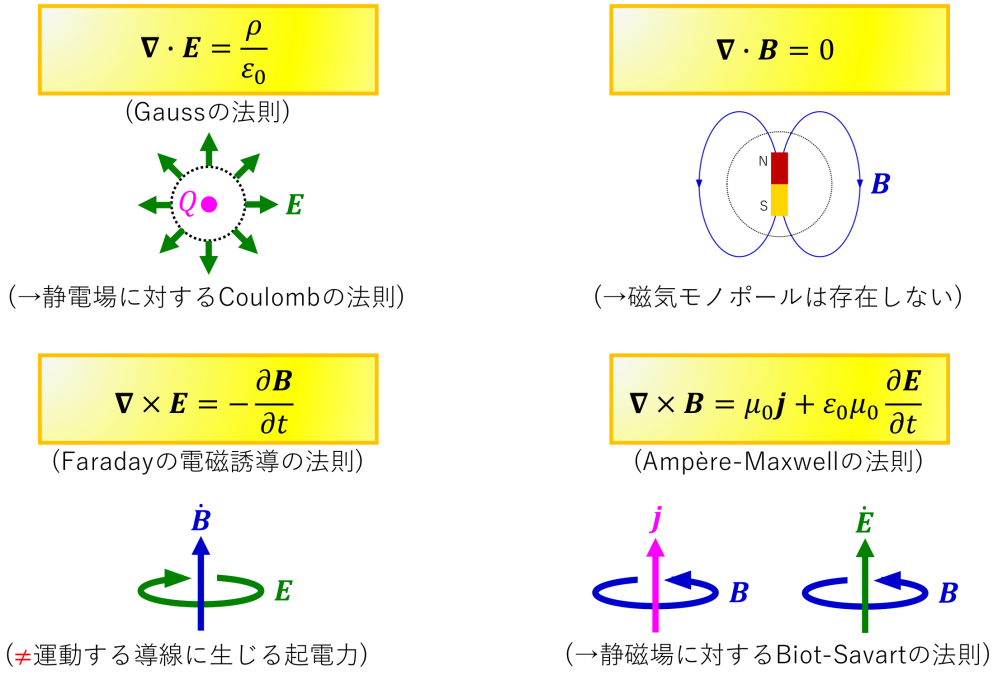


図 105　Maxwell 方程式まとめ

と表すことができる．ϕ と $\boldsymbol{A}$ をまとめて電磁ポテンシャルと呼ぶ．逆に電磁場はポテンシャルから上式 (31) に従って導かれると言えば，Maxwell 方程式 (27)，(28) は恒等式として自動的に満たされるため，電磁気学の原理としては残りの電荷を含む式 (26)，(29) だけで充分である．

ところで同一の電磁場 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ を与える電磁ポテンシャルは無数に存在する．実際，任意関数 $\chi(\boldsymbol{r}, t)$ に対してゲージ変換と呼ばれる置き換え

$$\phi \quad \to \quad \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{A} \quad \to \quad \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla \chi \tag{32}$$

を行っても，得られる電磁場は不変である．そこでこの自由度を利用して，Lorenz 条件

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{33}$$

を満たす電磁ポテンシャル $\phi, \boldsymbol{A}$ をとることができる．

この電磁ポテンシャル $\phi, \boldsymbol{A}$ に対して Maxwell 方程式 (26)，(29) は源付きの波動方程式

$$\left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{j} \tag{34}$$

になる (波動方程式については付録 C.11 参照)．

以上より電磁気学の原理を改めて次のように述べることができる．すなわち電磁場は場の方程式 (34) から決定される電磁ポテンシャルから式 (31) に従って導かれる．

■導出・説明

式 (31) の説明　Maxwell 方程式 (27):$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ より磁束密度を $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ で与えるようなベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が存在する (付録 C.10 参照)．これを Maxwell 方程式 (28) に代入すると

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = 0$$

となるので，渦無し場 $\boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ を $\boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}=-\boldsymbol{\phi}$ で与えるようなスカラー・ポテンシャル ϕ が存在する (付録 D.7 参照).

ゲージ変換 (32) の説明　ゲージ変換 (32) によって得られる新しい電磁ポテンシャル $\phi', \boldsymbol{A}'$ から導かれる電磁場はもとの電磁場 (31) と変わらない：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}' =& -\frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t}-\boldsymbol{\phi}'=-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}-\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{E},\\ \boldsymbol{B}' =& \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}. \qquad (\text{恒等式 } \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\chi=0(\text{付録 } C.10 \text{ 参照}))\end{aligned}$$

そこで新しい電磁ポテンシャル $\phi', \boldsymbol{A}'$ が Lorenz 条件 (33):

$$\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi'}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}'=0$$

を満たすには，源付きの波動方程式

$$\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\chi=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}$$

の解 χ を用いてゲージ変換 (32) を行えば良い.

場の方程式 (34) の導出　式 (31) を Maxwell 方程式 (26) に代入し Lorenz 条件 (33) を用いると，スカラー・ポテンシャル ϕ に対する方程式

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0}=-\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})-\Delta\phi=\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\phi$$

を得る．また式 (31) を Maxwell 方程式 (29) に代入し Lorenz 条件 (33) を用いると，ベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ に対する方程式

$$\mu_0\boldsymbol{j}=\{\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})-\Delta\boldsymbol{A}\}+\varepsilon_0\mu_0\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}+\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\boldsymbol{A}$$

を得る (ベクトル 3 重積の公式 (付録 C.10) 参照).

静的な場

ここでは静的な，すなわち時間的に一定の電磁場を決定する法則を導く．このとき電磁ポテンシャルもまた時間に依存しないとして良いから，電場の式 (31) における時間微分の項 $\partial\boldsymbol{A}/\partial t$ は落ちて，静電場は

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{\nabla}\phi$$

のようにスカラー・ポテンシャル ϕ だけから導かれることになる．あるいは同じことであるが，Maxwell 方程式 (27):$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ まで戻ると，磁場が時間変化しなければ電場は渦無しだからポテンシャル ϕ を持つと考えても良い (付録 D.7 参照)．この場合の ϕ を特に**電位**と呼ぶ．また場の方程式 (34) における時間微分の項も落とすことができ，基礎方程式は Poisson 方程式

$$\Delta\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \Delta\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{j}$$

になる．その解法は付録 D.12 において重力場の方程式を例に示してあり，結果を援用すると

$$\phi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}, \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

となる．式 (31) によりここから導かれる電磁場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_a\frac{e_a(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_a)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_a|^3}, \tag{35}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3} \tag{36}$$

となる (導出は下記)．このように場が時間変化しないときには，場の方程式は静電場を決定する式 (35) と静磁場を決定する式 (36) に分離される [2, pp.100–101,pp.116—117] [10, pp.220–223]．また静電場と静磁場に対する法則は極めて対称的な形をしている．

式 (35) は各電荷素片 $\rho(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x'$ または点電荷 e_a が Coulomb の法則に従って位置 $\boldsymbol{x}$ に作る電場

$$\frac{\rho(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x'}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3} \quad \text{または} \quad \frac{e_a(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_a)}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_a|^3}$$

の重ね合わせを表している．これは基となる Maxwell 方程式 (26):$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0$ が意味するように，電荷は周りにわき出すような電場を作ることに対応する．

式 (36) は **Biot-Savart** (ビオ・サヴァール) **の法則**と呼ばれ，仮に $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x'$ を電流素片と呼ぶことが許されるならばこれは電流素片 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x'$ が位置 $\boldsymbol{x}$ に磁束密度

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}$$

を作ることを表している．これは基となる Maxwell 方程式 (29):$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}$ が意味するように ($\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=0$)，電流は周りに渦を巻くような磁場を作ることに対応する．

ここまでの議論は次のフローチャートにまとめられる (ただし表記を簡略化している)．

$$\begin{aligned}
&\text{静電場} && \text{Maxwell 方程式} \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\\
&\to && \text{Poisson 方程式} \quad \Delta\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\\
&\to && \phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\mathrm{d}V}{R}\\
&\to && \boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}V : \text{Coulomb の法則,}\\
&\text{静磁場} && \text{Maxwell 方程式} \quad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j} \quad \left(\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=0\right)\\
&\to && \text{Poisson 方程式} \quad \Delta\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{j} \quad (\text{ただし } \boldsymbol{A} \text{ に条件 } \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=0 \text{ を課す})\\
&\to && \boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}\mathrm{d}V}{R} : (43.5)\\
&\to && \bar{\boldsymbol{H}}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}V : \text{Biot-Savart の法則.}
\end{aligned}$$

式 (36) の導出

$$\left[\boldsymbol{\nabla}\times\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right]_i=\varepsilon_{ijk}\partial_j\frac{j_k(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=-\varepsilon_{ijk}\frac{j_k(\boldsymbol{r}')(x_j-x'_j)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}=\left[\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\right]_i$$

による．

参考　国際 (MKSA) 単位系から Gauss 単位系に移ると係数は，Maxwell 方程式において

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}+\cdots \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}+\cdots$$

と変化する．これに対応して，Biot-Savart の法則において

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\mathrm{d}V(\cdots) \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{B}=\frac{1}{c}\int\mathrm{d}V(\cdots)$$

と置き換わる．すると直線電流 I が r 隔たった位置に作る磁場 (磁束密度) の強さ (5-6 節) は

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \leftrightarrow \quad B=\frac{2I}{cr}$$

と変化すると結論できる．

■電流が導線を流れる場合の Biot-Savart の法則　電流が導線を流れる場合，電流密度 $\boldsymbol{j}$ は導線の外ではゼロになるから，式 (36) における空間積分の範囲は導線の占める領域に限定できる．そこで導線上の任意の点 $\boldsymbol{x}'$ における直断面を σ とし導線に沿う長さ l を導入して体積要素を

$$\mathrm{d}^3x \quad \to \quad \sigma \mathrm{d}l$$

と置き換えると，導線方向の長さ $\mathrm{d}l$ に関する積分を行えば良い．よって

$$\boldsymbol{j}\mathrm{d}^3x' \quad \to \quad \boldsymbol{j}\sigma\mathrm{d}l = \boldsymbol{I}\mathrm{d}l, \qquad \boldsymbol{I} \equiv \boldsymbol{j}\sigma : \text{電流}$$

と置き換わるから，Biot-Savart の法則 (36) は導線に沿う積分

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}l \times (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}$$

に書き換えられる．

参考　なお導線方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ をとると，電流 $\boldsymbol{I}$ は導線と同じ方向を向くから，さらに

$$\boldsymbol{I}\mathrm{d}l = (I\boldsymbol{e})\mathrm{d}l = I\mathrm{d}\boldsymbol{l}, \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{l} \equiv \boldsymbol{e}\mathrm{d}l : \text{線要素ベクトル}$$

と書き換えることもできる．

電磁波

我々は本節冒頭で電磁場を試験電荷に働く力から定義した．しかしながら電磁場は電荷に働く力を記述する単なる数学的な道具ではなく，それ自身，物理的な実在である．この点を見るために，電荷が存在しないときの電磁場のダイナミクスを調べよう．場の方程式 (34) において電荷のない真空を想定して $\rho = 0, \boldsymbol{j} = 0$ とおくと，波動方程式

$$\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\phi = 0, \qquad \left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\boldsymbol{A} = 0$$

を得る．従ってポテンシャルから導かれる電磁場 (31) もまた波動方程式

$$\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\boldsymbol{E} = 0, \qquad \left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\boldsymbol{B} = 0$$

を満たす．波の伝播速度は

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

に同定される (以上，波動方程式についての付録 C.11 を参照)．

ここで電磁場に対する波動方程式を，電磁場で表した Maxwell 方程式 (26–29) から直接導けることを示しておくのが教育的だろう：

電磁場に対する波動方程式の導出

$$
\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{E} =& -\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) \qquad \text{(Maxwell 方程式 (26)，ベクトル 3 重積の公式 (付録 } C.10\text{))}\\
=&\boldsymbol{\nabla}\times\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \text{(Maxwell 方程式 (27))}\\
=&\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}, \qquad \text{(Maxwell 方程式 (29))}\\
\Delta \boldsymbol{B} =& -\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) \qquad \text{(Maxwell 方程式 (28)，ベクトル 3 重積の公式 (付録 } C.10\text{))}\\
=& -\varepsilon_0\mu_0\boldsymbol{\nabla}\times\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad \text{(Maxwell 方程式 (29))}\\
=&\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}. \qquad \text{(Maxwell 方程式 (27))}
\end{aligned}
$$

波動方程式は平面波解

$$
\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \qquad \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \boldsymbol{k}^2 = 0
$$

を持つ (付録 C.11 参照)．これは同位相面 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t = \mathrm{const}$ が波数ベクトル $\boldsymbol{k}$(6-1 節) の方向に位相速度 $\frac{\omega}{|\boldsymbol{k}|} = c$ で進行する平面波を表す．ただしこれ以降は物理量の複素表示を利用し，場の実部が実際の物理量を与えるものとする[*30]．定数ベクトル $\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{B}_0$ は複素振幅である．さらに

$$
\begin{aligned}
\text{式 (26)} : \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = 0 \quad &\to \quad i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0 = 0,\\
\text{式 (28)} : \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0 \quad &\to \quad i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0 = 0,\\
\text{式 (27)} : \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \quad &\to \quad i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0 = i\omega\boldsymbol{B}_0
\end{aligned}
$$

が満たされるので (導出は下記)，平面波は図 106 のように $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{B}_0$ がこの順に右手直交系を成す横波であり振幅には $E_0 = cB_0$ の関係がある [10, pp.283–284][*31]．

平面波の式の微分　平面波の式 $\boldsymbol{f} \equiv \boldsymbol{a}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$ を微分すると

$$
\begin{aligned}
\partial_i(a^i e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}) = ik^i a^i e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}), \qquad &\therefore \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{f} = i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{f},\\
\varepsilon^{ijk}\partial_j(a^k e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}) = \varepsilon^{ijk}(ik^j)(a^k e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}), \qquad &\therefore \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{f} = i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{f}
\end{aligned}
$$

となる．

注意——楕円偏光　ただし図 106 では場の振動方向が時間的・空間的に一定であるような直線偏光を描いている．しかしながら平面波の式

$$
\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}
$$

は一般には楕円偏光を表す (導出は下記) [2, pp.129–131]．楕円偏光とは波の伝播方向を z 軸にとったときに，電場ベクトルの先端が xy 面内で楕円

$$
E_x = b_1\cos(\omega t - kz + \alpha), \qquad E_y = \pm b_2\sin(\omega t - kz + \alpha)
$$

を描く場合を言う．

- 直線偏光は $b_1 = 0$ または $b_2 = 0$ の場合として含まれている．
- $b_1 = b_2$ の場合を円偏光という．円偏光については 4-1 節の注解において，床屋のサインポールとの類似性を指摘した際に言及した．

[*30] このような取り扱いは場の方程式の線形性から正当化される (付録 C.6 参照)．

[*31] 振幅の関係 $E_0 = cB_0$ について，Lorentz 力の表式において電場と磁場の次元には $[\boldsymbol{E}] = [\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}]$ の関係があることに注意する．

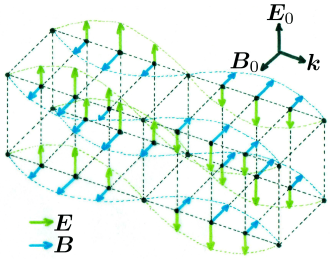


図 106　電磁場の平面波

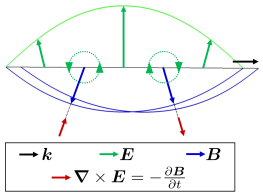


図 107　磁場の時間変化が作る電場の渦

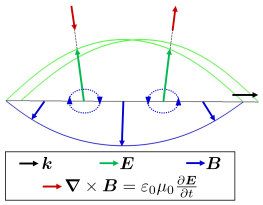


図 108　電場の時間変化が作る磁場の渦

もちろん $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{B}_0$ がこの順に右手直交系を成すことや振幅の関係 $E_0 = cB_0$ は，その導き方から分かるように楕円偏光に対しても正しく，このとき磁場ベクトルも電場ベクトルと同様に楕円を描く．

さて，予告通り単色平面波の表式 $\boldsymbol{E} = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\}$ が一般に楕円偏光を表すことを示そう [2, pp.129–131]．この証明は 2 種類の単振動が共通の振動数を持つような Lissajous 曲線が楕円となることのエレガントな証明にもなっている．初等的な証明は文献 [9, p.87] に見られる．複素振幅 $\boldsymbol{E}_0$ の 2 乗 ${\boldsymbol{E}_0}^2 = |{\boldsymbol{E}_0}^2|e^{-2i\alpha}$ によって定義される ${\boldsymbol{E}_0}^2$ の偏角 -2α に対して $\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{b}e^{-i\alpha}$ となる複素ベクトル

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1 + i\boldsymbol{b}_2 \qquad (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \text{は実数ベクトル})$$

を導入する[*32]．このとき

$$|{\boldsymbol{E}_0}^2| = \boldsymbol{b}^2 = |\boldsymbol{b}_1|^2 - |\boldsymbol{b}_2|^2 + 2i\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2$$

は実数でなければならないから，$\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 = 0$，すなわち $\boldsymbol{b}_1$ と $\boldsymbol{b}_2$ は互いに直交している．そこで波の伝播方向 $\boldsymbol{k}$ に沿って z 軸をとり，$\boldsymbol{b}_1$ の方向を x 軸にとり，$b_1 = |\boldsymbol{b}_1|, b_2 = |\boldsymbol{b}_2|$ と書くと，

$$\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{b}e^{-i\alpha}, \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1 + i\boldsymbol{b}_2 = (b_1, \pm ib_2, 0)$$

となるので，楕円偏光の式

$$E_x = b_1 \cos(\omega t - kz + \alpha), \qquad E_y = \pm b_2 \sin(\omega t - kz + \alpha)$$

を得る．

以上の結果は次のように解釈できる．すなわち各時刻に各位置で図 107 のように式 (27):$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ に従って磁場の時間変化から電場の渦が作られ，図 108 のように式 (29):$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ に従って電場の時間変化から磁場の渦が作られる [18]．これは静電場と静磁場がそれぞれ独立に電荷分布と電流分布から生み出されたのとは対照的に，物質が存在しない場合にも電場と磁場はお互いを生み出しながら波として空間を伝播することを意味する [10, pp.272–273]．このような波は電磁波と呼ばれる．しかも波の伝播速度

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3.0 \times 10^8 \mathrm{m/s}$$

は光の速度に一致し，**電磁波は光に他ならない．**

[*32] 複素ベクトルの 2 乗 ${\boldsymbol{E}_0}^2$ は内積であり，実数ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して

$$(\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2 + 2i\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

のように計算する (${\boldsymbol{E}_0}^* \cdot \boldsymbol{E}_0$ ではない)．

なお真空中の任意の電磁波はあらゆる波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ に対する平面波 $\boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\pm\omega_{\boldsymbol{k}}t)}, \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\pm\omega_{\boldsymbol{k}}t)}$ を重ね合せて得られ ($\omega_{\boldsymbol{k}} \equiv c|\boldsymbol{k}|$),

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}_+(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\omega_{\boldsymbol{k}}t)} + \boldsymbol{\mathcal{E}}_-(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_{\boldsymbol{k}}t)}\right),\\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\left(\boldsymbol{\mathcal{B}}_+(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\omega_{\boldsymbol{k}}t)} + \boldsymbol{\mathcal{B}}_-(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_{\boldsymbol{k}}t)}\right)\end{aligned} \tag{37}$$

と表される．

理由 電磁場の Fourier 展開 (37) を得るには任意の場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ を $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{k},t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ と Fourier 展開し，展開係数 $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{k},t)$ の時間依存性を波動方程式から

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = 0 \quad\to\quad \left\{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - (i\boldsymbol{k})^2\right\}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{k},t) = 0 \quad\to\quad \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{k},t) = \boldsymbol{\mathcal{E}}_+(\boldsymbol{k})e^{i\omega_{\boldsymbol{k}}t} + \boldsymbol{\mathcal{E}}_-(\boldsymbol{k})e^{-i\omega_{\boldsymbol{k}}t}$$

と定めれば良い．

注意 ただし振幅 $\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{B}_0$ と異なり，Fourier 成分 $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\pm(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{\mathcal{B}}_\pm(\boldsymbol{k})$ は (電磁場) × (長さ)^3 の次元を持つ．これは次の事情による．空間を 1 辺 L の立方体領域 V と見なすと周期境界条件の下で場は $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{L}\boldsymbol{n}$ と Fourier 展開される ($\boldsymbol{n}$ は整数を成分とするベクトル)．$L \to \infty$ の極限で展開係数 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},t)$ から波数空間の体積要素 d^3k がくくり出されて

$$\begin{array}{rcl|c|c} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = & \sum_{\boldsymbol{k}} & \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},t) & e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = & \int & \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{k},t) & e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \end{array}$$

と積分に移行する (付録 C.16 参照)．

電磁気学の相対論的な定式化

粒子間相互作用が伝わるのに有限の時間を要する事実は，相互作用を媒介する場の実在性を強く示唆するものであり，逆に場を考えることは必然的に，相互作用が伝わるのには遅延時間が伴うという結論へと導く．ところで相互作用の伝播速度が有限であることは，伝播速度の (座標系に依らない) 最大値が自然界にはあることを意味しており，実はその速度の最大値は光速度 c に他ならない．そしてこの光速度不変の原理——どのような座標系 (慣性系) から見ても真空中の光の速度 c は同一でなければならないこと——を前提として相対性理論は打ち立てられる (付録 D.23 参照)．そうであるならば電磁気学は相対性理論と密接な関係にあることが想像される．実際，**電磁気学は相対性理論の下で初めて矛盾なく完全に定式化できる．**この点を見るために，付録 D.26 では理論の Lorentz 不変性が明白な形に電磁気学を書き表す．

電磁気学と相対性理論の整合性の一端を，既に 4-3 節の注解で言及した事情の中に見ることができる．すなわち光速度不変の原理を満たす座標変換則は，相対性原理と併せると所謂 Lorentz 変換でなければならないことが見出される (付録 D.23 参照)．そして電磁場を支配する Maxwell 方程式が実際に Lorentz 変換に対して共変的であることから，逆に全ての慣性系において共通の光速度 c の値が導かれる．

5-1 静電場と Coulomb の法則

遠隔作用と近接作用

力学では与えられた力の下での物体の運動を議論したのに対し，力の起源は場の理論によって説明される．

- 遠隔作用
  Newton の万有引力の法則は物体間の重力を，
  何もない空間を隔てて瞬間的に働く**遠隔作用**とするものである．
  多くの人が遠隔作用という考え方に難色を示した．
- 近接作用
  一方，電荷分布を急激に変えたときの遠くの電荷への影響は，遅れて現れることが知られている．
  これは Coulomb 力が隣接する空間を次々に伝播して遠方の物体に届く
  近接作用であることを示唆している．
  - 重力も実際には近接作用であると考えられているけれど，
    重力に対しては天体を用いて質量分布の変化が遠方に影響する時間を調べるのは困難である．

注解

図 109 のように物体に手で力 F を加えて壁に押し付けると，壁が物体から受ける力も F となる．しかし「手が物体を押す力」と「物体が壁を押す力」は値が同じでも概念的には区別される．力 F を手から壁まで飛び越えて伝わる遠隔作用のように考えてはならない．実際，力は物体の中を近接作用として伝わる．この点を説明するために，図 109 のように物体を N 個の薄い層 $i = 1, 2, \cdots, N$ に分割し，i 番目の層が隣接する $j = i \pm 1$ 番目の層から受ける力の x 成分を F_{ij} と書く．特に手が物体を押す力を F_{10}，物体が壁を押す力を $F_{N+1,N}$ とする．このとき

$$\begin{cases} i \text{ 番目の層に対する力のつり合い} \quad 0 = F_{i,i-1} + F_{i,i+1} \\ \text{作用・反作用の法則} \quad F_{i+1,i} = -F_{i,i+1} \end{cases} \qquad \therefore F_{i,i-1} = F_{i+1,i}$$

より

$$F_{10} = F_{21} = F_{32} = \cdots = F_{N-1,N} = F_{N+1,N}$$

となる．これは力が物体の中を端から端まで順次，近接作用として伝わることをあからさまに示している．

実に相対性理論は力が近接作用として，物体の拡がり (あるいは空間) の中を有限の速さで伝播することを前提としている．ところで剛体は定義により変形しないので，静止した剛体の一点に外力を加えて運動を開始させたら，剛体の他の全ての点も同時に運動を始めなければならない．したがって相対性理論によれば，剛体はあくまで近似的な概念であって (力学の三角台のように)，現実には存在し得ないことになる [2, p.50]．このことは実際に巨視的な物体が原子から構成されており，それ故，変形する余地があるという，素朴な直観と整合している．

「場」とは何か

近接作用は場によって媒介される．場とは空間の状態・性質である．例えば電荷 (質量) は周りの空間を，それがなかったときとは異なった状態にする．これを「電荷 (質量) が周りに電場 (重力場) を作る」と言う．そして空間的に隔たる第 2 の電荷 (質量) は場から力を受ける．

参考　場は field の訳であり，高校物理や工学の分野ではしばしば「界」とも訳される．
しかし「場の理論」「(流体の) 速度場」という言い方はあっても，「界の理論」「速度界」という言い方は聞いたことがない．

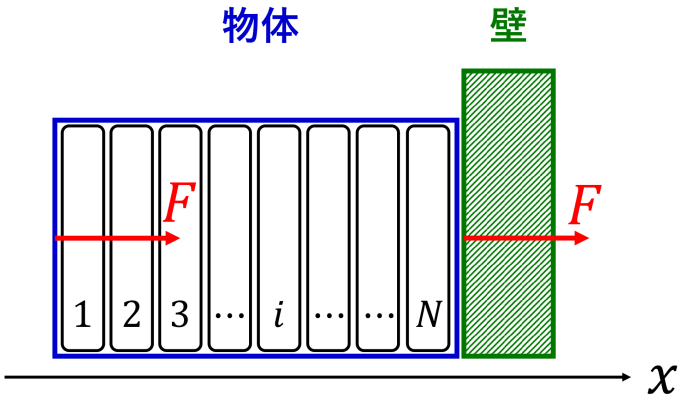


図 109　物体の中を力は近接作用として伝わる

電場の定義

5-0 節参照.

ベクトル場について,

> 空間の各点にベクトルが分布しているというといかにもむずかしそうだが，地図上の各点での風の向きと強さを表す矢印が描かれている天気図を想像すればよい (p.172).

注解　ベクトル場のベクトルは全ての点から生えているが，それを全て描くことはできない.
そこで普通，点を間引いて代表点におけるベクトルだけを描画する.

■1 つの注意——試験電荷について　各点における場を調べるための試験電荷 q (5-0 節) は十分小さい電荷であり，それ故もとの場を乱さないと想定されている．これに対して考えている電場を作る電荷を源泉電荷と呼ぶ．しかしながら「試験電荷」「源泉電荷」というのはあくまで人為的な役割の区別に過ぎない.

電磁気学の第 1 の原理——静電場についての Coulomb の法則

5-0 節参照.

Coulomb 力の比例定数

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99 \times 10^9 \mathrm{Nm}^2/\mathrm{C}^2$$

を導入すれば，Coulomb の法則は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = k\frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

と書ける．よって電荷 Q から $\boldsymbol{r}$ だけ隔たる電荷 q に働く Coulomb 力は

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}} = q\boldsymbol{E} = k\frac{qQ}{r^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

注解

教科書ではなるべく高校物理の範囲内で説明を行うという配慮から，静電場についての Coulomb の法則を電磁気学の第 1 の原理にとっている．しかし 5-0 節で指摘したように，Coulomb の法則は運動する電荷が作る電場には適用できない．

電気力線とガウスの法則

電気力線を

- 正電荷から負電荷へ向かう向きを持ち
- 各点でその点における電場ベクトルに接する

曲線として導入する．［平たく言えば電気力線は電場ベクトルを滑らかに繋いで得られる曲線である．一般にベクトル場を滑らかに繋いで得られる曲線をそのベクトル場の積分曲線と呼ぶ.］電場ベクトルは (電荷の外では) 各点で一義的に決まるため，電気力線が交差したり枝分かれしたりすることはない．さらに

- 電気力線は電場 $\boldsymbol{E}$ に垂直な単位面積を貫く本数が E 本となるように描画するものと約束する．

すると［任意の閉曲面 S からの電場のわき出し $\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ は閉曲面を貫く電気力線の本数に一致するので,］Gauss の法則 (5-0 節) は電気力線を用いて次のように表現することも可能である．

$$(\text{閉曲面を貫く電気力線の本数}) = \frac{(\text{内部の全電荷})}{\varepsilon_0}.$$

注解

しかしながら電気力線には場の重ね合わせを表現できないという難点がある．磁力線 (磁場の電気力線) も同様である．本稿ではこれ以上，電気力線を扱わない．

例——平面電荷分布の作る電場

ここで 5-3 節で扱う平行板コンデンサーを念頭に，無限に広い平面上に面密度 σ で一様に分布する電荷の作る静電場を考え，電荷の分布する平面を xy 面内にとる．［このとき xy 方向への並進対称性より電場は z 成分のみを持ち，その値は xy 座標には依らないと考えられる：

$$\boldsymbol{E} = \pm E(z)\hat{\boldsymbol{z}}, \qquad z \gtrless 0 \text{ に対して}, \qquad \hat{\boldsymbol{z}} : z \text{ 方向単位ベクトル}.$$

$E(z)$ は $z > 0$ に対して $+z$ 方向を正，$z < 0$ に対して $-z$ 方向を正とする電場成分であり，電場の大きさではない.］そこで平面を挟む図 110 のような円筒領域に注目して Gauss の法則 (5-0 節) を適用すると，電場は側面からは流出せず上面と底面 (それぞれ面積 S，z 座標 $\pm z$ とする) からのみ流出するので

$$2E(z)S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}, \qquad \therefore E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

を得る．

注解
- 結果的に電場 $E(z)$ は z 座標にも依らない一様分布となっている．このとき確かに直観的にも，電荷のない領域で電場のわき出しはゼロになっていることが理解できる．

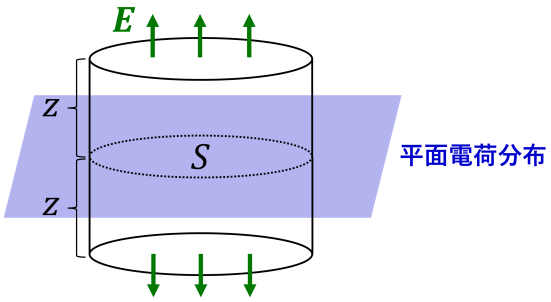


図 110　平面電荷分布と Gauss の法則

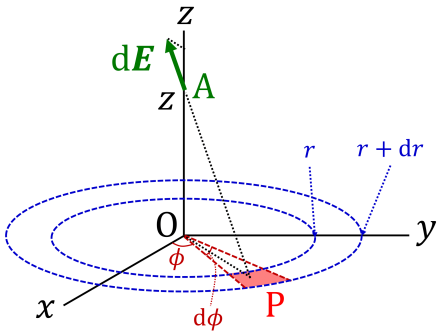


図 111　平面電荷分布と Coulomb の法則

- この導出のためには底面 S が円である必要はない．

この結果は等価的に，平面上の各電荷要素が Coulomb の法則に従って作る電場を重ね合わせて得ることもできる (下記)．

Coulomb の法則に基づく導出　xy 方向への並進対称性より，z 軸上の位置 A(座標 z) における電場を調べれば十分である．図 111 のように，面積 $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$ に含まれる電荷部分 P が Coulomb の法則に従って点 A に作る電場は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}_{\mathrm{P}} = \frac{k(\sigma r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi)}{(r^2+z^2)^{3/2}}\left(-r\cos\phi, -r\sin\phi, z\right)$$

である．これを $0<\phi<2\pi$ で積分すれば幅 $\mathrm{d}r$ の円環に含まれる全ての電荷からの寄与

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = (0,0,\mathrm{d}E), \qquad \mathrm{d}E = \frac{k(\sigma 2\pi r\mathrm{d}r)z}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

を得る．このように z 軸周りの軸対称性を反映して ϕ に関する積分はほぼ自明であり，わざわざ実行するには及ばない．実際，軸対称性より電場は z 方向を向くことはあらかじめ分かっているから，円環の質量が $\sigma\times 2\pi r\mathrm{d}r$ であることを考慮して最初から直ちに上式を書き下すことができる．次に平面を構成する全ての円環の作る電場を重ね合わせると，

$$\begin{aligned} E &= \int_{r=0}^{r=\infty}\mathrm{d}E = 2\pi k\sigma\int_0^\infty \frac{zr\mathrm{d}r}{(r^2+z^2)^{3/2}} = 2\pi k\sigma\int_0^{\pi/2}\sin\theta\mathrm{d}\theta \qquad (r=z\tan\theta) \\ &= 2\pi k\sigma = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \end{aligned}$$

を得る．

注意　実際には無限に広い平面電荷分布など存在しないが，電荷の面に近い位置 z での電場に興味があり，電荷の拡がり $r_{\max}$ に比べて $|z|\ll r_{\max}$ である場合には近似的に $r_{\max}\to\infty$ として良い．[$r\to\infty$ の電荷が作る電場 $\to 0$.]

注解 1　2-12 節において，球対称な質量分布が万有引力の法則に従って作る重力場を調べたときの手法との類似性に注目されたい．

注解 2　円環の半径を $2\pi r\mathrm{d}r$ とするのは，直観的には円周 $2\pi r$ を底辺とする高さ $\mathrm{d}r$ の“長方形”の面積の表式として理解できる．実際，半径 $r, r+\Delta r$ の 2 円に挟まれた円環の面積は Δr の 1 次までの近似で

$$\pi\{(r+\Delta r)^2 - r^2\} = 2\pi r\Delta r$$

となる．ここから逆に円の面積の公式

$$\int_0^r 2\pi r'\mathrm{d}r' = \pi r^2$$

が得られる．これは循環論法には陥らない．と言うのも円の面積の公式は，これとは別の手法で

$$2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\mathrm{d}x = 2r^2\int_0^\pi \sin^2\phi\mathrm{d}\phi = \pi r^2 \qquad (x=r\cos\phi)$$

と導くことができるからである．なお球の体積に関する類似の議論を付録 C.3 に載せてある．

5-2 電位の概念

静電場 $\boldsymbol{E}$ に対して電位 V を

$$V(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

で定義する (5-0 節).［一様な電場に対する高校物理の「公式」$V = Ed$ の一般化に当たる．電位 V は空間の各位置で値が定義された場であり，「公式」$V = Ed$ は局所的に成立する.］

第 1 式について，

重力場 $\boldsymbol{g}$ の下での質点 m の位置エネルギー　$U_{\mathrm{G}} = m\Phi,\qquad \Phi(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{g}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$: 重力ポテンシャル，

静電場 $\boldsymbol{E}$ の下での電荷 q の位置エネルギー　$U_{\mathrm{C}} = qV,\qquad V(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$: 電位

であり，質量 m，電荷 q の粒子の電場中でのエネルギー保存則は

$$\frac{1}{2}mv^2 + qV = \mathrm{const.}$$

と表される.

原点の点電荷 Q が作る静電場 $\boldsymbol{E} = \frac{kQ}{r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ は電位

$$V(\boldsymbol{r}) = k\frac{Q}{r}$$

を持つ (2-10 節参照).

第 2 式 $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$ は電場が等電位面に垂直で電位の低くなる方向を向き，電位が急激に変化する場所 (等電位面の密な場所) ほど電場は強くなることを意味している．教科書ではその説明は「等電位面 (線) と電気力線」(pp.181-182) で成されており，これは V を電位，$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$ を電場とする物理的な意味付けを取り払えば，付録 C.10 における勾配の数学的な性質の説明に他ならない.

- 5-0 節では電位を ϕ と書いたけれど，
  以降は教科書にならって回路では電位を φ，それ以外では電位と電位差をいずれも V と書く.
- $U_{\mathrm{C}} = qV$ より電位の単位は J/C ≡ V:ボルト.
- 1eV (エレクトロン・ボルトないし電子ボルト) は
  電子を 1V の電位差で加速して得られるエネルギーとして定義され，

  $$1\mathrm{eV} = (1.6\times 10^{-19}\mathrm{C})\times(1\mathrm{V}) = 1.6\times 10^{-19}\mathrm{J}.$$

  ［これは電位 1V の位置で電子が持つ位置エネルギー (の絶対値) と言うこともできる
  (ただし電位 0V の位置を位置エネルギーの基準とする).］
- $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ より電場の単位は N/C．分母・分子に m (メートル) を掛ければ N/C = V/m となる.
  これは $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$ からも理解できる.
- 電場と同様，電位に対しても重ね合わせの原理が成り立つ.
  ［これは電位に対する Poisson 方程式の線形性による (5-0 節，付録 D.11 参照).］

なお日常用語での「高さ」が地上の一様な重力場に対する重力ポテンシャル gz に対応することの説明が興味深く印象的である．その一部を以下に引用する (p.178).

> 「石はなぜ下に落ちるのか」と問うたならば，物理学的には，その問い自体が無意味で，石の落下する向きを下とよんでいるのだと答えるしかない．つまり「上下」の概念は重力場があってはじめて意味をもち，下とは重力場の向き，上とはその逆向きをいう．

例——球状の一様な電荷分布の作る電場と電位

原点を中心とする半径 R の球の内部に電荷 Q が一様に分布しているときの電場と電位を調べよう．球対称性により電場は動径方向を向き，動径方向成分は原点からの距離 r だけの関数 $E(r)$ である．球対称な質量分布 (一様でなくても良い) の作る重力場 (2-12 節) との類似性により，電場は半径 r 内の電荷

$$q(r) = \begin{cases} Q\left(\dfrac{r}{R}\right)^3 & (r \leq R) \\ Q & (r > R) \end{cases}$$

を用いて

$$E(r) = \frac{q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \begin{cases} \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & (r \leq R) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > R) \end{cases}$$

と表される (図 112 参照).［このように球の内部 $r \leq R$ では $q(r) \propto r^3$ なので $E(r) \propto q(r)/r^2 \propto r$ となる.］これに対して無限遠を基準とする電位は

$$\begin{aligned} V(r) &= -\int_\infty^r E(r')\mathrm{d}r' = \begin{cases} -\displaystyle\int_\infty^R E(r')\mathrm{d}r' - \int_R^r E(r')\mathrm{d}r' & (r \leq R) \\ -\displaystyle\int_\infty^r E(r')\mathrm{d}r' & (r > R) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{r^2}{2R^2}\right) & (r \leq R) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} & (r > R) \end{cases} \end{aligned}$$

と計算される (図 113 参照).［このように電位は $r = R$ で連続である．もし電位が不連続ならば，電位の勾配に他ならない電場の強さはその位置において無限大になる.］

5-3 コンデンサー

金属

- **導体** $\cdots$ 電場の下で電流の流れる物体
  - 食塩水 (イオンが流れる)，金属 (自由電子が流れる)
- **誘電体** (絶縁体)$\cdots$ 電場の下で電流の流れない物体
  - 「誘電体とは要するに絶縁体のことで，導体ではないすべての物質を指す」(p.189).

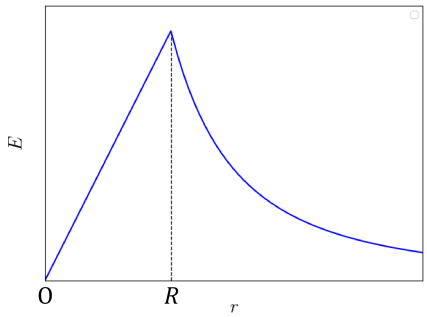


図 112　球状の一様な電荷分布の作る電場

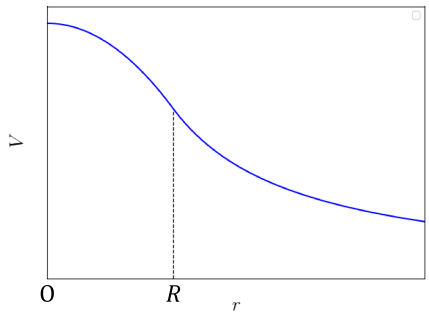


図 113　球状の一様な電荷分布の作る電位

静電誘導

すでに電場のある空間に金属が持ち込まれた結果として，あるいは金属に外から電荷が与えられたことの結果として，金属内に電場が生じた場合には，この金属内の電場を打ち消すまで自由電子が移動して新しい電荷分布が形成され，そこで電荷の流れは終わる (したがって，電荷移動終了後は金属内の電場は 0，つまり金属は等電位)．この現象を**静電誘導**という (p.184).

ここで「金属に電荷を与える (帯電させる) と，その電荷は必ず表面に分布する．というのも……」(p.185) について，以下に詳しくまとめる [10, pp.29–30].

帯電させた導体の静電場
→　導体内で電場はゼロ　　(背理法：導体内に電場があれば電荷が移動し，静電場の仮定に反する)
→　電荷は導体表面に分布　　(Gauss の法則による).

注解

ただし電荷は導体内の電場がゼロになる“ように”分布するという言い方は，自然が目的因に従って振舞っているかのような印象を与えるため，感心しない.

平行板コンデンサーとその電荷分布

面積 S の 2 枚の金属板 (極板)A,B を間隔 d で向かい合わせた平行板コンデンサーを用意し (ただし $d^2 \ll S$)，極板 A,B の電荷がゼロの状態でそれらを図 114 のように起電力 V の電池に繋ぐ.

- **コンデンサー**は**キャパシター**とも呼ばれる.
- 起電力 V とは電荷を電位差 V だけくみ上げる能力のことである (5-4 節，5-8 節).

電荷の移動が終わったとき表面に分布する電荷と，それが作る電場を調べよう．$d^2 \ll S$ の仮定により電場に対しては 5-1 節の式 (5-6):$E = \sigma/2\varepsilon_0$ を適用し，各電荷と電場を次のようにおく.

- A の上面の電荷 ${Q_\mathrm{A}}'$，これが作る電場成分 ${E_\mathrm{A}}' = {Q_\mathrm{A}}'/2\varepsilon_0 S$.
- A の下面の電荷 Q_A，これが作る電場成分 $E_\mathrm{A} = Q_\mathrm{A}/2\varepsilon_0 S$.
- B の上面の電荷 ${Q_\mathrm{B}}'$，これが作る電場成分 ${E_\mathrm{B}}' = {Q_\mathrm{B}}'/2\varepsilon_0 S$.

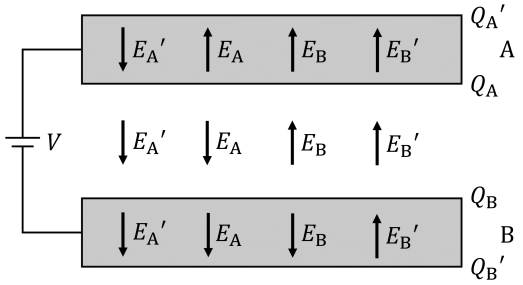


図 114　記号の定義

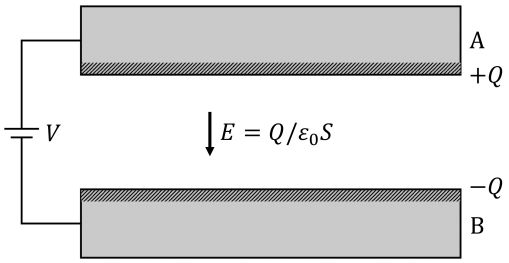


図 115　実際の電荷と電場

- B の下面の電荷 Q_B，これが作る電場成分 $E_\mathrm{B} = Q_\mathrm{B}/2\varepsilon_0 S$.

ただし電場成分は図 114 の矢印の向きを正として定義している．また極板は薄いと仮定しているので，側面の電荷分布は考えない．このとき

- 極板内部の電場はゼロであること
  - A 内：　$(Q_\mathrm{A}{}' - Q_\mathrm{A} - Q_\mathrm{B} - Q_\mathrm{B}{}')/2\varepsilon_0 S = 0$
  - B 内：　$(Q_\mathrm{A}{}' + Q_\mathrm{A} + Q_\mathrm{B} - Q_\mathrm{B}{}')/2\varepsilon_0 S = 0$
- 電荷保存則
  - 系全体は孤立しているので　$Q_\mathrm{A}{}' + Q_\mathrm{A} + Q_\mathrm{B} + Q_\mathrm{B}{}' = 0$

より電荷は

$$Q_\mathrm{A}{}' = 0, \qquad Q_\mathrm{B}{}' = 0, \qquad Q_\mathrm{A} = -Q_\mathrm{B} \equiv Q$$

を満たさなければならない (図 115 参照)．この結果は次のように解釈できる．すなわち極板 B から極板 A に電荷 Q がくみ上げられると，A は電荷 $+Q$ に，B は電荷 $-Q$ に帯電し，それぞれの電荷は Coulomb 力で引き合って内側の向かい合う面に分布する．

このとき極板間の電場 $E = E_\mathrm{A} - E_\mathrm{B}$ は

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

と表される．電場に対応する電位は Ed であり，これは電荷の移動後には電池の起電力 V に等しくなっているから，

$$V = Ed = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} d$$

の関係がある．

極板をアースした場合

極板をアース (接地) するとは，地球からの電気の流入・流出を可能にすると同時に，地球とその極板を電位の基準 (ゼロ) とすることをも意味する．［先の議論により地球と極板は等電位.］

例として極板 B をアースする場合を考える (図 116 参照)．このとき電荷が保存する理由はなくなるけれど，B の電位がゼロ，従って地面と B の間の電場がゼロになる条件

$$(Q_\mathrm{A}{}' + Q_\mathrm{A} + Q_\mathrm{B} + Q_\mathrm{B}{}')/2\varepsilon_0 S = 0$$

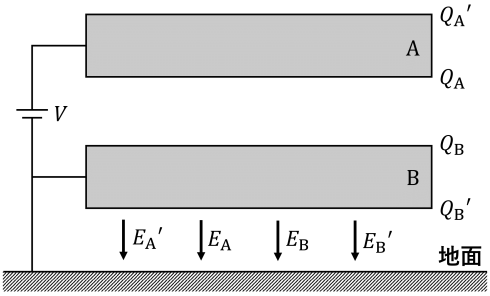


図 116　極板 B をアースした場合

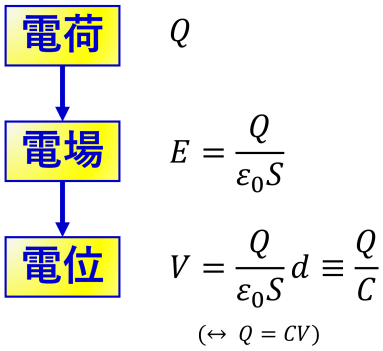


図 117　平行板コンデンサー

はもとの電荷保存則と同じだから，この場合にも得られる結果は変わらない．

コンデンサーの容量

コンデンサーに蓄えられる電気量 Q は電圧 V に比例している．そこでコンデンサーの電荷を蓄える能力を特徴付ける，電圧によらないコンデンサーに固有の量として，コンデンサーの**容量**を

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

で定義する．

単位　容量の単位は C/V = F (ファラッド) である．
これを用いて真空の誘電率 ε_0 (5-0 節) の単位は

$$\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2} = \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Jm}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vm}} = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$$

と書き換えられる［最右辺は上式 $C = \varepsilon_0 S/d$ から直ちに分かる］．

注解

ここまでの議論の流れは大まかには図 117 のようにまとめられる．

コンデンサーのエネルギー

コンデンサーに蓄えられたエネルギーは，電荷 Q をくみ上げる仕事として求められる．電荷を移動させる方法は何でも良く，とにかく何らかの方法で——例えば直接外力を加えて——電荷を極板 B から極板 A に少しずつ運ぶものとする．極板 A,B の電荷がそれぞれ $\pm q$ となったときの AB 間の電位差は q/C だから，この時点で極板間の電場から受ける力に逆らって電荷を $\mathrm{d}q$ だけ持ち上げる仕事は $(q/C)\mathrm{d}q$ である．故に電荷を Q だけ充電させる仕事は

$$\int_0^Q \frac{q}{C}\mathrm{d}q = \frac{Q^2}{2C}$$

と計算される．

解釈　電荷を 0 から Q まで変化させる間の平均の電位差 $Q/2C$ の下で
全電荷 Q を運ぶ仕事 $Q \times (Q/2C)$ に一致している．

よって**コンデンサーのエネルギー**は

$$U_\mathrm{C} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$$

と表される．［コンデンサーに蓄えられるエネルギーとは，極板間の電場が持つエネルギーである (5-11 節)．］

極板間引力

2 枚の極板は異符号に帯電しているため，その間には引力が働く．これについて教科書の内容を少しだけアレンジして説明する．コンデンサーを充電した後で電池を切り離すと，2 枚の電極の電荷は $\pm Q$ に維持される．極板 A,B の位置 (B から A を見る方向を正とする極板に垂直な x 軸に関する座標) をそれぞれ $x_\mathrm{A}, x_\mathrm{B}$ とすると，A,B に働く引力 (の x 成分) $F_\mathrm{A}, F_\mathrm{B}$ はコンデンサーに蓄えられたエネルギー

$$U_\mathrm{C} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2(x_\mathrm{A} - x_\mathrm{B})}{2\varepsilon_0 S}$$

をポテンシャルとする力

$$F_\mathrm{A} = -\frac{\partial U_\mathrm{C}}{\partial x_\mathrm{A}} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}, \qquad F_\mathrm{B} = -\frac{\partial U_\mathrm{C}}{\partial x_\mathrm{B}} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

として得られる[*33]．

これは極板 A の電荷 Q (または B の電荷 $-Q$) が，他方の極板によって作られる電場 E_B (または $-E_\mathrm{A}$) から受ける力

$$F_\mathrm{A} = QE_\mathrm{B} = -\frac{1}{2}QE, \qquad F_\mathrm{B} = (-Q)(-E_\mathrm{A}) = \frac{1}{2}QE$$

としても得られる．ここで極板 A,B の作る合計の電場 $E = E_\mathrm{A} - E_\mathrm{B}$ を用いて，力を $\pm QE$ と考えてはならないことに注意する．

[*33] 実際，極板間引力に逆らってゆっくり (事実上つり合いを保ちながら) 極板を変位させるとき，極板の運動エネルギーは増加しないから，仕事 $\mathrm{d}W = F_\mathrm{A}\mathrm{d}x_\mathrm{A} + F_\mathrm{B}\mathrm{d}x_\mathrm{B}$ はすべてコンデンサーに蓄えられる．

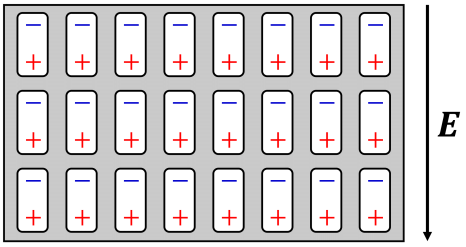


図 118　誘電分極

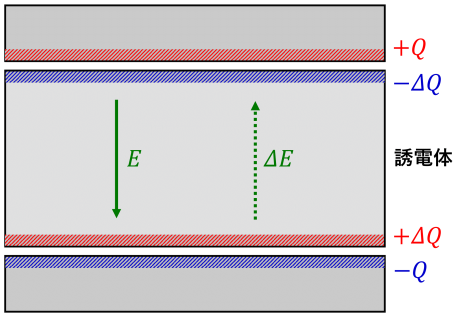


図 119　コンデンサーに挿入された誘電体

注解

- このようにポテンシャルが物体間の距離 $x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}}$ で決まるとき，作用・反作用の法則 $F_{\mathrm{A}} = -F_{\mathrm{B}}$ が満たされる (2-7 節も参照)．
- なるほど電荷が $\pm Q$ に維持されると電場の強さも不変だから，電場の持つエネルギーに他ならないコンデンサーのエネルギーは電場の分布する極板間の体積に，従って幅 $x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}}$ に比例する．

こうしてコンデンサーのエネルギー U_{C} は極板間の電場が持つエネルギーであると同時に，電荷の位置エネルギーとも見なされることになる．この点を一般化して述べれば以下．ここでは静電ポテンシャルを ϕ で表すことにすると，荷電粒子系が作る静電場のエネルギー (参考：5-11 節) は

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int \boldsymbol{E}^2 \mathrm{d}V =& \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int (-\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 \mathrm{d}V \\
=& -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int \phi \Delta\phi \mathrm{d}V \qquad (\text{部分積分，無限遠で}\phi \to 0) \\
=& \frac{1}{2} \int \rho\phi \mathrm{d}V \qquad (\phi\text{に対する Poisson 方程式 (5-0 節)}) \\
=& \frac{1}{2} \sum_a e_a \phi(\boldsymbol{r}_a) \qquad \left(\text{電荷密度の表式}\rho(\boldsymbol{r}) = \sum_a e_a \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a)(\text{付録 } D.26)\right)
\end{aligned}
$$

と書き換えられる[*34][*35]．最右辺は電荷の位置エネルギーを表している [2, pp.101–102]．すると場のエネルギーは空間全体に広がっていたと考えていたのが，実は粒子の位置に点在していると考えることも可能である．場のエネルギーと粒子の位置エネルギーは概念的に異なり，一見すると一方とは別に他方があるように考えられるけれど，実はこれらは同一のエネルギーを別の角度から見たときに現れる 2 つの異なる側面であることをこの計算は示している．

誘電体と分極

誘電体を電場の中に置くと分子内の電荷が電場から力を受けて，模式図的には図 118 のように分子が電場の方向にそろい，誘電体の表面に電荷が現れる (**誘電分極**)．誘電体の内部は電気的に中性である．分子の正負の電荷の中心が一致し，電荷の偏り (極性) がないような物質でも，外部電場に正負の電荷の中心が引き離されて誘電分極が起こり得る．

---

*34 第 2 の等号における部分積分では Gauss の発散定理 (付録 C.10) を利用している．

*35 この変形はまた，容器に閉じ込められた非圧縮性完全流体の渦なし場が容器を振っても静止流体であることを確かめる計算と (消える項が異なるのを除けば) 同じである [11, p.59]．

コンデンサーに誘電体を入れたとき

■電池を切り離してから誘電体を入れる場合　平行板コンデンサーを充電してから電池を切り離すと，極板の電荷は $\pm Q$ に保たれる．次いで図 119 のように極板間に誘電体を挿入すると，誘電分極により誘電体表面に電荷 $\mp \Delta Q$ が分布し，もとの電場と逆向きの電場 ΔE が作られる．極板間の全電場はそれらを重ね合わせた $E' = E - \Delta E$ になる．ここで表面電荷 $\mp \Delta Q$ は普通もとの電場 E 比例している．よって誘電体挿入後の電場 $E' = \frac{Q-\Delta Q}{\varepsilon_0 S}$ と電位 $V' = E'd$ もまた，それぞれもとの電場と電位に比例することになる．それらを

$$E' = \frac{Q}{\varepsilon S} = \frac{E}{\kappa}, \qquad V' = \frac{Qd}{\varepsilon S} = \frac{V}{\kappa}$$

と書いて**比誘電率** $\kappa(>1)$ と**誘電率** $\varepsilon \equiv \kappa\varepsilon_0$ を定義する．［教科書では $Q - \Delta Q = \frac{1}{\kappa}Q$ と書いて κ を導入している．］このとき誘電体挿入後に電場と電位は減少するのに対し，コンデンサーの容量は

$$C' = \frac{Q}{V'} = \kappa C$$

に増大することになる．

注解　この例では電気容量が増大するのは，一見すると直観に反するように思われるかもしれない．しかし今の場合は電位が $V \to V'$ と変化しているのに対し，電気容量は一定の電位に対して蓄えられる電気量に対応する．そしてすぐ後で見るように，電位 V を一定に保った場合には蓄えられる電気量は確かに増大する．

■電池を繋いだまま誘電体を入れる場合　［誘電体を素早く挿入した直後は極板間の電位が $V' < V$ となるはずである．］すると極板間の電位が電池の起電力 V に一致するまで追加で充電が行われるから，コンデンサーの電荷は

$$\frac{Q'd}{\varepsilon S} = V$$

を満たす値 $Q' = \kappa Q$ にまで増大する．［これは上で見た容量が $C' = \kappa C$ に増大するという事実と整合している．ここで容量はコンデンサー (誘電体を含む) に固有の量であったことを思い出そう．］

コンデンサー回路の問題を解くときの注意

コンデンサー回路において電荷の移動前後のみを扱う問題では，以下の 2 点に着眼する．

① 回路の孤立部分に含まれる電荷の保存．
② 電荷の移動後，導体でつながれた部分は等電位 (本節冒頭の背理法)．

例 1 ——コンデンサー回路の充電

図 120 のように

- 容量 $C_\mathrm{a}, C_\mathrm{b}, C_\mathrm{c}$ を持つ 3 つの平行板コンデンサー
- スイッチ K，S
- 起電力 V の電池

を含む回路に対して次の操作を行う．

1. はじめ極板に電荷がなく，スイッチ K，S がともに開いている状態で K だけを閉じる．
2. 十分時間が経ってから K を開き，S を閉じる．

ここでさらに十分な時間が経った後の極板 c, c′ 間の電位差を求める問題を考えよう．

- K を閉じた後
  - ①：電荷保存則
    a′-b (および a-b′) は孤立しているので，
    極板 a の電荷を Q とすると a′ の電荷は $-Q$，b の電荷は Q，b′ の電荷は $-Q$ となる．
  - ②：導体でつながれた部分は等電位
    b′a 間の電位差は起電力 V に等しいから

$$\frac{Q}{C_{\mathrm{a}}}+\frac{Q}{C_{\mathrm{b}}}=V.$$

よって bb′ 間の電位差は

$$V_{\mathrm{b}}\equiv\frac{Q}{C_{\mathrm{b}}}=\frac{1}{C_{\mathrm{b}}}\left(\frac{1}{C_{\mathrm{a}}}+\frac{1}{C_{\mathrm{b}}}\right)^{-1}V=\frac{C_{\mathrm{a}}}{C_{\mathrm{a}}+C_{\mathrm{b}}}V.$$

- S を閉じた後
  - ①：電荷保存則
    a は孤立しているので電荷 Q は不変．したがって a′ の電荷 $-Q$ も不変．［問題とは無関係］
    極板 b (b′) から極板 c (c′) に電荷が流れ b の電荷が Q_{b}，c の電荷が Q_{c} になったとすると，
    b-c は孤立しているから

$$Q_{\mathrm{b}}+Q_{\mathrm{c}}=Q(=C_{\mathrm{b}}V_{\mathrm{b}}).$$

  - ②：導体でつながれた部分は等電位
    b-c は等電位だから

$$V'=\frac{Q_{\mathrm{b}}}{C_{\mathrm{b}}}=\frac{Q_{\mathrm{c}}}{C_{\mathrm{c}}}.$$

以上より求める電位は

$$V'=\frac{C_{\mathrm{b}}}{C_{\mathrm{b}}+C_{\mathrm{c}}}V_{\mathrm{b}}=\frac{C_{\mathrm{a}}C_{\mathrm{b}}}{(C_{\mathrm{a}}+C_{\mathrm{b}})(C_{\mathrm{b}}+C_{\mathrm{c}})}V.$$

［こちらで定義した文字 Q は消去する．1 つの検算：$C_{\mathrm{c}}\to 0$ で $V'\to V_{\mathrm{b}}$.］

注解　このように基本事項①，②に立ち戻れば，いわゆる合成容量の知識は不要である．
(解法は合成容量の公式の導出に当たることを行っている．)
なおこの種の問題はパズル的な要素を多分に含んでいる印象を免れないように思われる．

例 2 ——誘電体の部分的挿入

図 121 のように一辺 a の正方形の極板を間隔 $d(\ll a)$ で向き合わせた平行板コンデンサーを，起電力 V の電池に繋いで充電する．次いで電池を切り離し，比誘電率 κ の誘電体を幅 $x(<a)$ だけ挿入する．まずこのとき何が起きるかを考えよう．誘電体挿入後も電荷分布が変わらないと仮定すると，誘電体の占める部分では残

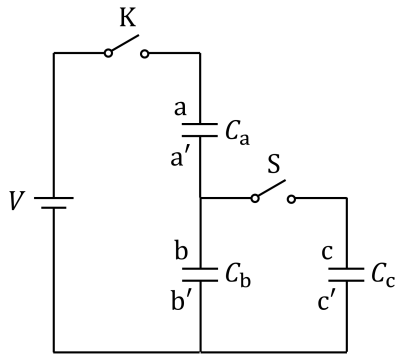


図 120　コンデンサー回路

りの部分に比べて電場が弱まるため，電位差が小さくなる．［素早く誘電体を挿入した直後は実際にこのようになっていると想像される．］すると金属極板内に電位差が生じ，誘電体に面した部分に電荷が流入する．

そこで誘電体に面した部分の電荷が q_1，残りの部分の電荷が q_2 になったとすると，

- ①：電荷保存則

$$q_1 + q_2 = \varepsilon_0 a^2 \frac{V}{d} (\equiv Q)$$

- ②：導体でつながれた部分は等電位

$$\frac{q_1 d}{\kappa \varepsilon_0 x a} = \frac{q_2 d}{\varepsilon_0 (a-x) a} (\equiv V')$$

より誘電体挿入後には

$$\begin{aligned} \text{電位差} \quad V' &= \frac{a}{\kappa x + (a-x)} V, \\ \text{容量} \quad C' &= \frac{Q}{V'} = \left\{ (\kappa - 1)\frac{x}{a} + 1 \right\} \frac{\varepsilon_0 a^2}{d}, \\ \text{静電エネルギー} \quad U_{\mathrm{C}}(x) &= \frac{Q^2}{2C'} = \frac{a}{\kappa x + (a-x)} \cdot \frac{Q^2}{2C} \end{aligned}$$

となる．

結果の吟味　上式で $x \to 0$，$x \to a$，$\kappa \to 1$ としてみよ．

静電エネルギー $U_{\mathrm{C}}(x)$ は x の減少関数なので，**誘電体は内側に引き込まれる向きに力を受ける．**

注解 1　誘電体を $x = a$ まで挿入すれば電場は弱まり静電エネルギーは減少することが分かっている．ここから誘電体を入れる幅 x を増すにつれて静電エネルギーが単調に減少し，それ故，誘電体が内向きに力を受けることはある程度予想できる．

なおこの結果は図 119 のように誘電体の表面電荷とこれに面した極板の電荷の間に働く引力として理解できるように思われるかもしれない．ただし誘電体の表面に電荷が現れることは，既に極板電荷が作る電場から誘電体内部の電荷が受ける力を考慮した結果である．

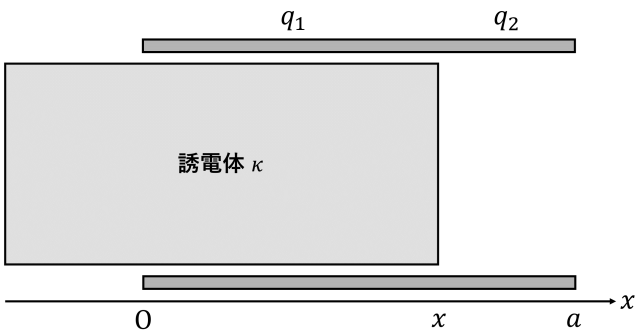


図 121　誘電体の部分的挿入

注解 2　電気容量 C' の表式は，誘電体のある部分とない部分の並列接続による合成容量の公式を与えている．これは誘電体を挿入してから時間が充分経ったときだけでなく，誘電体をゆっくり挿入した準静的な過程でも，2 つの部分の間で電荷の移動を無視できるため正しい．
また電池を繋いだまま誘電体を挿入した場合，電荷 $Q = q_1 + q_2$ が変化する代わりに，誘電体のある部分とない部分とで電圧が共通の値 V に保たれることになる．すると同様に上の結果で $V' \to V$ と置き換えた関係 $V = Q/C'$ が成り立つことになるので，電気容量 C' の表式は変わらない．

5-4 電流と過渡現象

金属内の自由電子の運動

金属に電場 $\boldsymbol{E}$ をかけると，自由電子 (質量 m，電荷 $-e$，e : 素電荷) が力を受けて電流が流れる．

- 電子は電場に比例した平均速度 $\bar{\boldsymbol{v}}$ を持つ．

  理由　電子は電場から力 $-e\boldsymbol{E}$ を受けて加速されるけれど，陽イオンや不純物，結晶の乱れとの衝突により速度の［時間］平均は一定値になると考えられる．実際，衝突頻度に，したがって速度 $\boldsymbol{v}$ に比例する抵抗力を考慮して電子の運動方程式を

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -e\boldsymbol{E} - k\boldsymbol{v}$$

  と書き，多数個の電子に関する［アンサンブル］平均をとると，電場に比例した平均速度

$$\bar{\boldsymbol{v}} = -\frac{e}{k}\boldsymbol{E}$$

  を得る．

  注解　これは結果的に電子の終端速度 (2-10 節) に一致している．なお時間平均はアンサンブル平均に一致すると期待されるので，ここではその区別はさほど重要でない．

- 電子の数密度 (単位体積当たりの個数) を n とすると，
  単位面積を単位時間に通過する電気量は $(-e)nv$ なので，電流密度ベクトルは

$$\boldsymbol{i} = (-e)n\boldsymbol{v}$$

  と表される．［5-0 節では電流密度を $\boldsymbol{j}$ で表したが，以降は教科書に合わせて $\boldsymbol{i}$ に統一する．］

以上より $\boldsymbol{i}$ と $\boldsymbol{E}$ の比例関係

$$\boldsymbol{E} = \rho \boldsymbol{i}$$

を得る (**Ohm (オーム) の法則**)．係数 ρ は**抵抗率 (比抵抗)** と呼ばれ，導体の形状に依らない金属に固有の量である．

参考　逆数 $\sigma = 1/\rho$ は**電気伝導度**と呼ばれる．［その名の通り抵抗率 ρ が大きいほど電流は流れにくく，電気伝導度 σ が大きいほど電流は流れやすくなっていることが読み取れる．］

注解

教科書では電子の平均速度が電場に比例することについて，次のようなもう 1 つの説明が与えられている．すなわち電子は電場から力を受けて加速度 $-e\boldsymbol{E}/m$ で速度を増し，また平均で時間 τ ごとに不純物などに衝突して運動エネルギーを完全に失うものとすると，速度変化は図 122 のようになるので，平均の速度は

$$\bar{\boldsymbol{v}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{e\boldsymbol{E}}{m}\tau$$

となる．なるほど，確かにこの議論にはかなりの説得力があり，また実際に電子の平均速度が電場に比例するという結果は正しいのだけれど，**実は右辺の係数 1/2 は余計である．**これはこの理論の相当にいやらしい部分である．この点についての詳しい解析は付録 D.27 で行うことにし，ここでは上の議論に不備があることの定性的な理由を引用するに留める [17, p.248]．

> 後の論法［上記の論法］が間違いであるという理由は，かなり微妙で，つぎのように考えればよい：さきの議論では，すべての衝突の間隔が平均時間 τ に等しくなっているかのように考えた．しかし事実は，あるものは平均より短かく，あるものは平均より長い．この平均より短いものは起こる回数は多いが，押し流される速度［今の場合，電子の平均速度］に対する寄与は少ない．実際に進む距離が短いからである．衝突の間の自由運動の時間の**分布**を適当に考慮すると，後の議論からえられる $\frac{1}{2}$ という係数はでてこなくなることがわかる．

オームの法則

Ohm の法則

$$\boldsymbol{E} = \rho \boldsymbol{i}$$

は，電圧 V をかけられた**電気抵抗** R の導体を流れる電流 I に対する巨視的な関係式

$$V = RI$$

に焼き直される (これも Ohm の法則と呼ばれる)．

導出　導体の (電流方向の) 長さを l，断面を S とし，長さ方向に電位差 V があるものとする．このとき電場は $E = V/l$，電流密度は $i = I/S$ なので，Ohm の法則 $\boldsymbol{E} = \rho \boldsymbol{i}$ に代入すると

$$\frac{V}{l} = \rho \frac{I}{S}, \qquad \therefore V = RI$$

が得られる．ここに電気抵抗は

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

で定義される．［抵抗が長さに比例し，断面積に反比例するのは自然な結果と言える．］

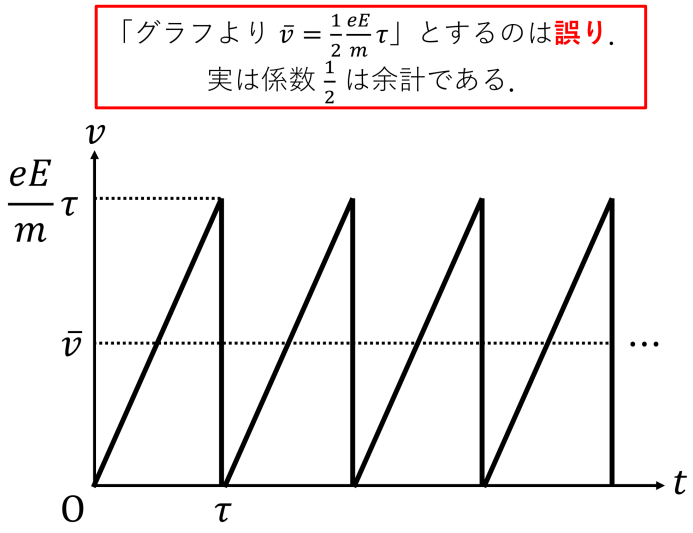


図 122　導体中の電子の速度変化

単位　以上より抵抗の単位は V/A = Ω (オーム)，抵抗率の単位は Ωm.

Ohm の法則は抵抗 R を電流 I が流れると，電流に沿って電位が $V = RI$ だけ下がることを意味している (**電圧降下**).［その起源についてはすぐ後の「ジュール熱と消費電力」を参照.］

オームの法則の成り立たない例

一般に電流が流れると抵抗は発熱により増大する (陽イオンの熱振動は自由電子の運動を妨げる)．オームの法則が成り立つのは，抵抗 R を一定と見なせるような温度変化の小さい範囲に限られる．

ジュール熱と消費電力

電子の運動エネルギーは衝突により陽イオンの熱振動のエネルギーになり，最終的にこのエネルギーは［気体分子に受け渡されて］空気中に逃げる (散逸する)．［電子が平均すると一定の速度で運動しているならば，電場が電子にする仕事と電子が衝突により失うエネルギー (したがって空気中に逃げる熱) はつり合っていなければならないから,］発熱量 (**Joule (ジュール) 熱**) は電場のする仕事として求められる．1 個の電子に対する電場の仕事率は $(-e)\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}$，着目している導体 (長さ l，断面 S) に含まれる電子数は nSl だから，**単位時間あたりの発熱量**は

$$P = \{(-e)\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}\} \times nSl = (envS) \times (El) = IV$$

と表される．これは電流を流すのに単位時間に費やされるエネルギー (**消費電力**) でもあり，Ohm の法則が成り立つ場合

$$P = \frac{V^2}{R} = RI^2$$

と書き換えられる．

単位　よって消費電力の単位は J/s = W (ワット).

注解 1　上の計算は局所的な単位体積における単位時間あたりの Joule 熱が，電流密度 $\boldsymbol{i} = -en\boldsymbol{v}$ を用いて

$$w = n(-e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{E}$$

と表されることを示している．

注解 2　Joule 熱が“発生する”という言い方は「無からの生成」のような印象を与えるため，感心しない．

注意　以上の導き方から分かるように，消費電力の式 $P = IV$ は常に正しいのに対し，
これを $P = \frac{V^2}{R} = RI^2$ と書き換えられるのは Ohm の法則が成り立つ場合に限られる．
［抵抗を $R = V/I$ で定義すれば書き換え自体は可能だが，その際の R は一定ではない．］

一般の回路素子の場合

回路素子の一端 A (電位 φ_{A}) から他端 B (電位 φ_{B}) に電流が流れる (流れ落ちる) には

$$\varphi_{\mathrm{A}} > \varphi_{\mathrm{B}}$$

でなければならず，電流に沿って電圧降下 $V = \varphi_{\mathrm{A}} - \varphi_{\mathrm{B}}$ が生じる．電子の運動エネルギーは変化しないから，単位時間当たりに回路素子を通過する全電子の位置エネルギーの減少量は回路素子において熱や力学的仕事に変えられており，その消費電力は

- 回路素子を通過した電子 1 個の位置エネルギーの減少量　eV
  - 電子は B から A に移動するので，位置エネルギーの変化量は $(-e)\varphi_{\mathrm{A}} - (-e)\varphi_{\mathrm{B}} = (-e)V$
- 単位時間に回路素子を通過する電子数　nSv

の積として

$$P = IV$$

と求められる．またそのような回路素子は**負荷**と呼ばれる．以上の結果は抵抗以外の任意の負荷に対しても正しい．

注解

こちらの導出は電場が電位 φ から導かれることを仮定しているため，静電場にしか適用できない．これに対し電場が単位体積の電荷にする仕事率の式 $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{E}$ は一般に成立する．もっとも電気回路では場は準静的なので (5-10 節)，静電場を考えれば十分である．

■コンデンサーにも適用できる　タイトルに「一般の回路素子の場合」とあるように，コンデンサーに対しても仮想的に極板間を電流が流れていると考えれば，以上の議論を適用できると考えられる．実際すぐ後で見るように

$$IV = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\frac{Q}{C} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{Q^2}{2C}\right)$$

であり，確かに最右辺はコンデンサーが単位時間に蓄えるエネルギー P である．

■電子が単位時間に回路素子を通過できない場合　やや些末な指摘となるが，「単位時間に回路素子を通過する電子数」を nSv と考えた際には暗に電子が十分な速度を持ち，単位時間に回路素子を通過できるものと仮定した．もちろんこれは図 123 のように電子が単位時間に回路素子を通過できない場合も含んでいるはずである．実際，図 123 に基づき改めて次のように考えることができる．回路素子を占めていた電子の集団が全体として単位時間に v だけ変位することの位置エネルギーへの正味の寄与は，回路の端 x_{A} からの幅 v に含まれる nSv 個の電子だけを他端 x_{B} からの幅 v に移すことである．こうしてやはり単位時間当たりの全電子の位

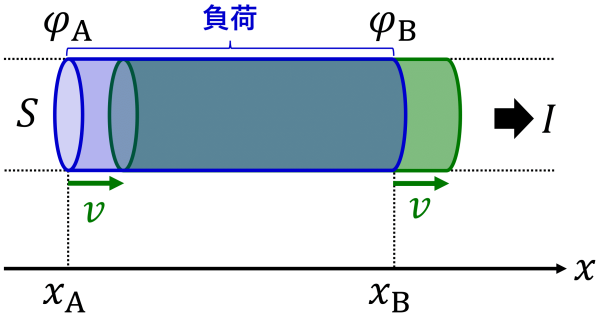


図 123　電子が単位時間に回路素子を通過できない場合

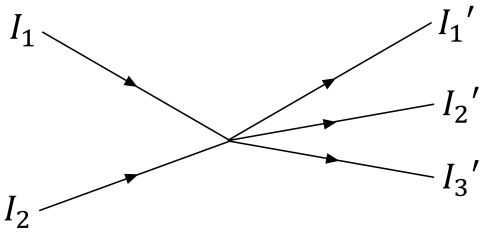


図 124　Kirchhoff の第 1 法則

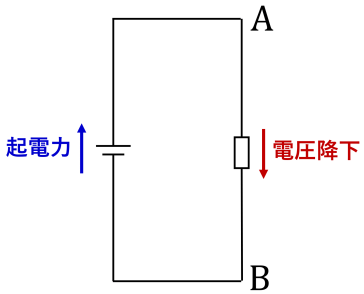


図 125　Kirchhoff の第 2 法則

置エネルギーの減少は

$$(nSv) \times e(\varphi_{\mathrm{A}} - \varphi_{\mathrm{B}}) = IV$$

と表される[*36].

キルヒホッフの第 1 法則

回路が枝分かれしている点における電荷保存則は，単位時間当たりの電荷の流入量と流出量が等しいこと

$$\sum_{\text{流入}} I_i = \sum_{\text{流出}} I_{i'}{}'$$

として表される (図 124 参照)．これは **Kirchhoff** (キルヒホッフ) の第 1 法則と呼ばれ，流出する電流を負とすれば

$$\sum_{\text{全電流}} I_i = 0$$

と書くこともできる．

注解

ここでは電流は滞ることなく流れ，注目している点を中心とする微小体積に含まれる電荷は一定に保たれると考えていることになる．これは非圧縮性流体に対する質量保存則に対応している (付録 D.17 参照)．

[*36] 一様な重力場の下で物体を持ち上げる仕事について，これと同様の議論が文献 [8, pp.52–53] に見られる．

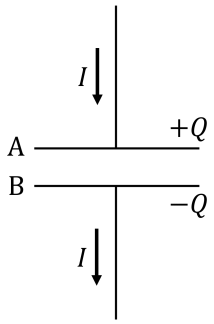


図 126　コンデンサーの電荷 Q と電流 I

キルヒホッフの第 2 法則

回路を電流が循環的に流れるためには，回路を 1 周する際に回路素子における電圧降下と同じだけ，電源において電流を高電位に汲み上げなければならない．よってその能力を**起電力**と呼び汲み上げる電位差で表すと，閉じた回路に対して

$$\sum_{\text{閉回路}} (\text{起電力}) = \sum_{\text{閉回路}} (\text{電圧降下})$$

が成り立つ．これは **Kirchhoff** (キルヒホッフ) の第 2 法則と呼ばれる．

注解　移項して $\sum_{\text{閉回路}}\{(\text{起電力}) - (\text{電圧降下})\} = 0$ と書くよりも，
上式の方が物理的な意味が分かりやすかろう．

このとき例えば図 125 の回路に対して，B から見た A の電位は右回りに測っても左回りに測っても等しくなる．こうして Kirchhoff の第 2 法則は次のように言い表すこともできる．すなわち

「回路の 2 点間の電位差は，回路のどの径路を通って測っても同じである．」

回路素子としてのコンデンサー

図 126 のようにコンデンサーへの電荷の移動を伴う充電ないし放電過程を考える．これを［完全な充電・放電までの過渡的な過程であることから］**過渡現象**と呼ぶ．図 126 では極板 A の電荷 Q の増大と同じだけ極板 B の電荷 $-Q$ が減少するため，A に流入する電流と B から流出する電流は等しいことを考慮している．

極板 A の電位を φ_{A}，極板 B の電位を φ_{B} とすると，電流 A → B に沿う電圧降下は

$$\varphi_{\mathrm{A}} - \varphi_{\mathrm{B}} = \frac{Q}{C}$$

である．

注解　ここでは電荷の移動がないときの極板間の静電場に対する結果を用いたことになる．
5-0 節で述べたように，これは非相対論的な近似として正当化される．
実はこの点については教科書 5-10 節でも説明されている．
なお実際には AB 間に電流が流れているわけではない．

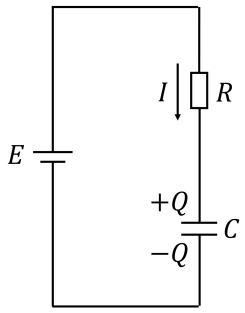


図 127　RC 直列回路

また電荷保存則によれば，単位時間における極板 A の電荷 Q の増大はその間に流入する電荷，すなわち電流 I に一致するから

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

が成り立つ．このように電荷保存則を表す式を一般に**連続方程式**［連続の式］と呼ぶ (付録 D.17 参照)．これは放電すなわち $I < 0$ のときに，電荷 Q が減少することを含んでいる．

コンデンサーを含む回路のキルヒホッフの法則

図 127 のような抵抗 R とコンデンサー (電気容量 C) を含む回路に対して Kirchhoff の第 2 法則を適用し，

- 起電力　E
- 電圧降下　$IR + \frac{Q}{C}$

を等置すると，**回路の方程式**

$$E = IR + \frac{Q}{C}$$

を得る．

コンデンサーの充電と放電

連続の式 $I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ を代入すると，Q に関する微分方程式

$$E = R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C}$$

になる．これは 2-3 節で見た雨滴の微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \lambda v \qquad (\lambda \equiv k/m)$$

と同じ形をしており，$\lambda \to 1/RC, g \to E/R$ の置き換えを施せば上の回路方程式が得られる．

- 充電　(初期条件 $Q(0) = 0$)
  初速ゼロでの雨滴の速度変化の式 $v(t) = \frac{g}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})$ に対して上記の置き換えを行うと

$$Q(t) = CE(1 - e^{-t/RC})$$

を得る．

これは充電時の電気量 $Q(\infty) = CE$ (5-3 節) への時定数 $\tau = RC$ (2-3 節の注解参照) での緩和を表す．

電流 $I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ は

$$I(t) = \frac{E}{R}e^{-t/RC}$$

に従って指数関数的に減衰し，時定数は同じく $\tau = RC$ である．

- 放電　($E = 0$，初期条件 $Q(0) = Q_0 \equiv CE$)

  回路の方程式は $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = -Q/RC$ となるので，

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}, \qquad \therefore I(t) = -\frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC}$$

  を得る．これは電荷と電流の時定数 $\tau = RC$ での指数関数的減衰を表す．

  放電を考えているから $I < 0$ となるのは自然である．

★ 時定数 $\tau = RC$ は確かに時間の次元を持っていることが分かる．

注解

放電の場合の回路の方程式 $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = -Q/\tau$ もまた変数分離して解くことができるけれど (付録 C.6 参照)，この形の微分方程式が $Q(t) = Q(0)e^{-t/\tau}$ を解に持つことは良く分かっている．実際これが微分方程式を満たしていることは，直接の代入により容易に確かめられる．

エネルギー保存則

回路の方程式

$$E = IR + \frac{Q}{C}$$

の両辺に $I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ を掛けると

$$EI = RI^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{Q^2}{2C}\right)$$

となる．既に見たように左辺 EI は単位時間に電池のする仕事であり，上式はその一部が抵抗でジュール熱 RI^2 として逃げ，残りがコンデンサーのエネルギー $Q^2/2C$ に蓄えられるというエネルギー保存則を表している．ここで時刻 $t = 0$ にスイッチを入れ，コンデンサーを $Q(0) = 0$ から $Q(\infty) = CE$ まで充電する場合を考える．このとき上式を $t > 0$ で時間積分すると

$$CE^2 = (\text{全ジュール熱}) + \frac{CE^2}{2}$$

となる．こうしてコンデンサーは電池のした仕事 CE^2 の半分のエネルギーしか蓄えることができず，必ず残り半分のエネルギーは抵抗で消費されていることになる．抵抗を小さくすると電流は大きくなるため，ジュール熱は抵抗 R に依らない一定値 $CE^2/2$ に保たれる．［なおこの結果は抵抗 R を省略すると理解できなくなることに注意する．実際には導線や電池自体が多かれ少なかれ抵抗を持つため，抵抗器を除いてもそれらが抵抗の役割を果たす．］

5-5 磁場とローレンツ力と荷電粒子の運動

数学的準備——ベクトル積 (外積)

付録 C.10 参照．

磁場とは何か

5-0 節参照.

Lorentz 力の表式 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ より磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の単位は

$$\mathrm{T}\,(\text{テスラ}) \equiv \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}\cdot\mathrm{m/s}} = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}} \\ \left(\dfrac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{C}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{s}} = \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{s}} = \dfrac{\mathrm{C}\cdot\mathrm{V}}{\mathrm{C}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{s}}\right) = \dfrac{\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{m}^2} \end{cases}$$

となる.

磁束密度が電流に及ぼす力

磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の中に置かれた長さ l の［直線状の］導線に電流 $\boldsymbol{I}$ を流すと，導線内部の各電子 (電荷 $-e$，e：素電荷) は速度 $\boldsymbol{v}$ を持つことになり Lorentz 力 $(-e)\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ を受けることになる．このとき導線全体が受ける力は

$$\boldsymbol{F}_l = l\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}$$

と表される.

導出　導線の断面を S，電子数密度を n と書くと，導線内の電子数は nlS だから

$$\boldsymbol{F}_l = nlS\{(-e)\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\} = l\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}. \qquad (\because \boldsymbol{I} = neS\boldsymbol{v})$$

磁場は仕事をしない

Lorentz 力 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ は速度 $\boldsymbol{v}$ に垂直だから，磁場は荷電粒子に対して仕事をしない (仕事率 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} = 0$). よって磁場中の荷電粒子の運動エネルギーは，従って速さ $v = |\boldsymbol{v}|$ は一定に保たれ，速度 $\boldsymbol{v}$ は向きだけを変える.

一様不変な磁場中の荷電粒子の運動

一様不変な磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を考え，磁場の方向を z 軸に選ぶ．その上で座標原点から初速度 $v_0(0, \sin\theta, \cos\theta)$ で打ち出された電荷 q，質量 m の荷電粒子の運動を調べよう (θ は初速度の磁場との成す［天頂］角［$0 \le \theta_0 < \pi$ を考えれば十分である］).

Lorentz 力 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ は磁束密度 $\boldsymbol{B}$ に垂直だから，**一様な磁場では荷電粒子は磁場方向には等速度運動をする：**

$$z = v_\parallel t, \qquad v_\parallel \equiv v_0 \cos\theta : \text{磁場方向の速度.}$$

よって磁場に垂直な速度成分 $v_\perp \equiv v_0 \sin\theta$ も一定となる.

次に磁場に垂直な xy 面内での運動を調べよう．運動方程式

$$m\ddot{x} = q\dot{y}B, \qquad \ddot{y} = -q\dot{x}B \tag{38}$$

を与えられた初期条件の下で解くと，

$$x = \frac{v_\perp}{\omega}(1 - \cos\omega t), \qquad y = \frac{v_\perp}{\omega}\sin\omega t, \qquad \omega \equiv \frac{qB}{m}$$

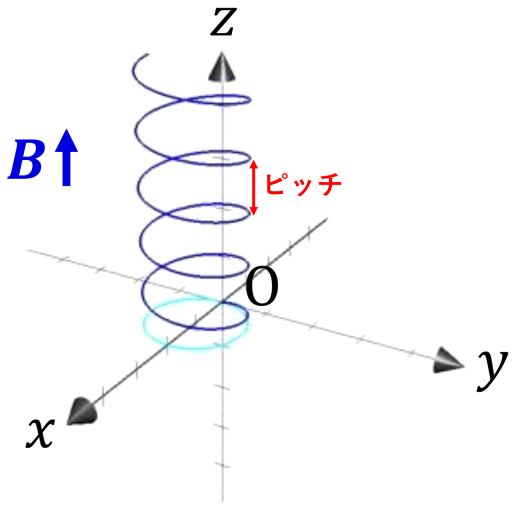


図 128　磁場方向への等速らせん運動．荷電粒子は磁場に巻き付くように運動する．

となる (導出は下記)．これは点 $(x, y) = (v_\perp/\omega, 0)$ を中心とする半径 $r = v_\perp/\omega$ の［速度 $v_\perp$ での］**等速円運動**を表す［初速が磁場と平行になる極限 $\theta \to 0$ で $r \propto \sin\theta \to 0$］．運動の周期は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\frac{m}{qB}$$

である［θ に依らない］．

以上より荷電粒子は図 128 のように磁場方向への**等速らせん運動**を行う．粒子が回転周期 T の間に磁場方向に進む距離は**ピッチ**と呼ばれ，

$$v_\parallel T = 2\pi\frac{mv_0}{qB}\cos\theta$$

で与えられる［$\theta \to \pi/2$ で (ピッチ) $\to 0$ (xy 面内の円運動に移行)］．

運動方程式 (38) の解法　運動方程式 (38) を 1 回積分すると

$$\dot{x} = \frac{qB}{m}y, \qquad \dot{y} = -\frac{qB}{m}x + v_\perp$$

となる (初期条件を考慮した)．ここから x または y を消去すると

$$\ddot{x} = -\omega^2\left(x - \frac{v_\perp}{\omega}\right), \qquad \ddot{y} = -\omega^2 y, \qquad \omega \equiv \frac{qB}{m}$$

となる．これは単振動の方程式 (2-6 節) だから解くことができる．

注解——別の解法　運動方程式 (38) は速度平面上の動点 $(\dot{x}, \dot{y})$ が一定の角速度 $\omega \equiv \frac{qB}{m}$ で時計回りに円運動していることを意味する．このことをあからさまに示すには，複素変数 $\xi \equiv \dot{x} + i\dot{y}$ を導入するのが便利である．すると運動方程式 (38) は ξ に対する式 $\dot{\xi} = -i\omega\xi$ に書き換えられる．これは速度平面 $(\dot{x}, \dot{y})$ に他ならない複素 ξ 平面上での等速円運動

$$\xi(t) = \xi(0)e^{-i\omega t}$$

(時計回りに角速度 ω) を解に持つ．よって

$$\dot{x} = v_\perp \sin\omega t, \qquad \dot{y} = v_\perp \cos\omega t,$$
$$\therefore x = \frac{v_\perp}{\omega}(1 - \cos\omega t), \qquad y = \frac{v_\perp}{\omega}\sin\omega t$$

を得る．

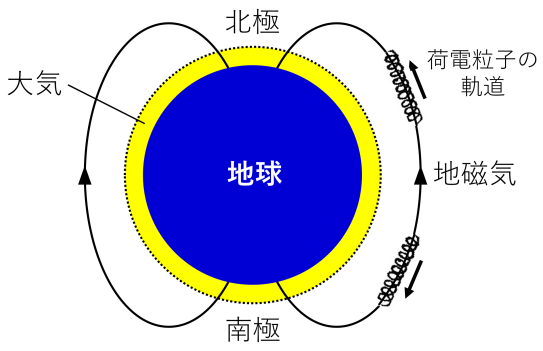


図 129　オーロラの説明

より簡単な説明　教科書では曲率半径 ρ での瞬間的な円運動の方程式

$$m\frac{{v_\perp}^2}{\rho} = qv_\perp B$$

から定めた曲率半径 $\rho = mv_\perp/qB$ が一定になることからも，軌道が実際に円になることを説明できることが紹介されている．

オーロラ　宇宙から飛来した荷電粒子は地磁気に捉えられると，上の結果から想像されるように磁力線に巻き付いて運動し，北極または南極側へと導かれ，高緯度地域で大気圏に突入する (図 129 参照)．その際に荷電粒子の衝突を受けた大気分子が発光する現象が**オーロラ**である．

注解——一様不変な電磁場中の荷電粒子の運動

空間的に一様で時間的に一定の電磁場中の粒子の運動を調べよう．ただし電荷は与えられた場をかき乱さないものとする．また電場は十分弱いため粒子の速度はしばらくの間，非相対論的な範囲 $v/c \ll 1$ に留まる場合を考え，非相対論的な運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

を用いることにする (付録 D.23 参照)．磁場方向を z 軸にとると Lorentz 力 $e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ は磁束密度 $\boldsymbol{B}$ に垂直なので，粒子は z 方向には一定の力 eE_z を受けて等加速度運動をする:

$$z = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}\frac{eE_z}{m}t^2. \tag{39}$$

そこで磁場に垂直な xy 平面に投影した粒子の運動に興味が持たれる．電場が yz 面内に含まれるように y 軸の方向を選び，さらに時間と空間座標の原点を適当に選ぶと，粒子の xy 面内の位置は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \omega t \\ 1 \end{pmatrix} - b\begin{pmatrix} \sin\omega t \\ \cos\omega t \end{pmatrix}, \qquad \omega \equiv \frac{eB}{m}, \qquad a \equiv \frac{eE_y}{m\omega^2} = \frac{E_y}{\omega B} \tag{40}$$

の形に書ける (b は積分定数，導出は下記)．これは図 130 のように x 軸上を半径 a の円盤が角速度 ω で転がるときの，円盤上の中心から距離 b の位置に固定された点の運動に他ならない．このような動点の描く軌跡はトロコイドと呼ばれる [2, pp.63–64].

この結果は定性的には次のように解釈できる．時刻 $t = 0$ を過ぎてからしばらくの間，粒子は電場の方向に加速する．すると粒子は磁場に進行方向を曲げられ，いずれ電場と逆向きに運動するようになるため電場に減速させられる．こうして図 131 のように 1 周期分のトロコイドが描かれる [10, pp.135–136].

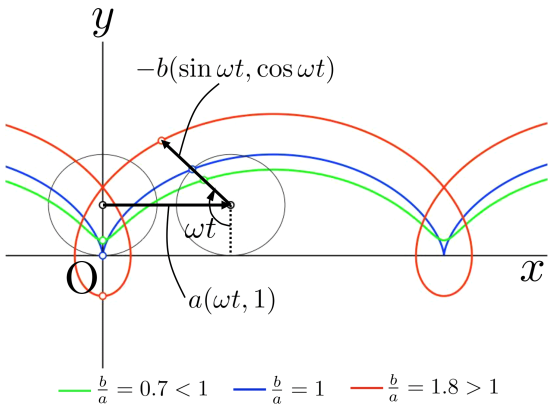


図 130　トロコイド

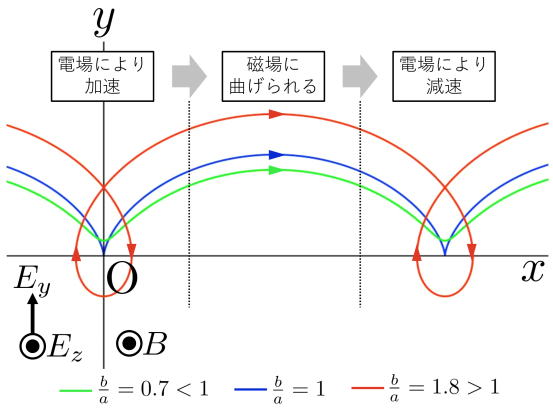


図 131　一様で不変な電磁場中の粒子の運動

特に $\boldsymbol{E} = 0$ のとき，粒子の位置の時間発展 (39),(40) は磁場方向への等速らせん運動

$$x = -b\sin\omega t, \qquad y = -b\cos\omega t, \qquad z = z_0 + v_{0z}t$$

に帰着する．

■トロコイド運動の式 (40) の導出　我々の設定した座標系では $\boldsymbol{E} = (0, E_y, E_z), \boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ となるから，運動方程式は

$$m\ddot{x} = \dot{y}B, \tag{41}$$
$$m\ddot{y} = eE_y - \dot{x}B \tag{42}$$

となる．$\{(41) + i(42)\}/m$ を作ると $V \equiv \dot{x} + i\dot{y}$ に対する式

$$\dot{V} + i\omega V = i\frac{eE_y}{m}, \qquad \omega \equiv \frac{eB}{m}$$

を得る (複素変数 V は先ほど ξ と書いたもの)．一般解は特殊解 $V = \frac{eE_y}{m\omega} = \frac{E_y}{B}$ と $\dot{V} + i\omega V = 0$ の解 $V = Ae^{-i\omega t}$ の和 $V = Ae^{-i\omega t} + \frac{E_y}{B}$ である (付録 C.6 参照)．

注意　一見するとこれを変数分離形の微分方程式と見て“解いても”，同じ結果が得られるように思われるかもしれない．ただし複素変数 V による不定積分は定義されていないことに注意する．その場合には $t = 0$ から時刻 t までの実際の径路 $V(t)$ に沿う定積分を考えれば良い．

実数 α, δ を用いて積分定数 A を $\alpha e^{i\delta}$ と書くと

$$\dot{x} + i\dot{y} \equiv V = \alpha e^{-i(\omega t - \delta)} + \frac{E_y}{B}$$

であり，$\delta = \pi$ となるように時間の原点を選ぶと

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha\cos\omega t + \frac{E_y}{B} \\ \dot{y} = \alpha\sin\omega t \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} x = -\frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t + \frac{E_y}{B}t + \mathrm{const} \\ y = -\frac{\alpha}{\omega}\cos\omega t + \mathrm{const} \end{cases}$$

となる．よって $\frac{\alpha}{\omega} \equiv b$ と改め，座標軸の原点を適当に選べばこれはトロコイド運動の式 (40) になる [2, pp.63–64]．

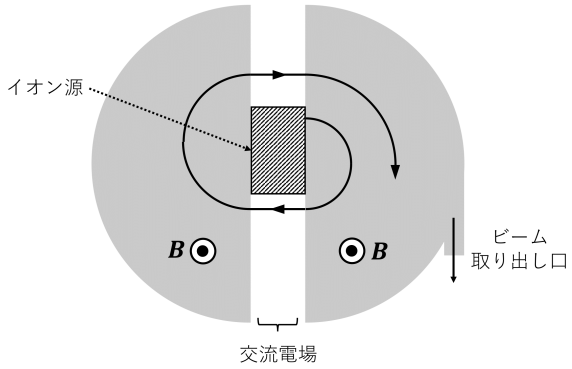


図 132　サイクロトロン

■与えられた場の下での運動について　本節では

- 与えられた場の下での荷電粒子の運動

を考察した．その際，粒子が場に及ぼす影響は無視した (それが場を「与えられた」ものと見なすことの意味である)．これに対し本稿では詳しく取り上げないけれど，加速運動する荷電粒子からの放射などを念頭に

- 与えられた運動を行う荷電粒子が作る場

を調べることにも興味が持たれる．しかしながらいずれの場合も，場や粒子の運動を与えられたものと見なすのは近似的な取り扱いであると考えられる (教科書 p.225 欄外の註も参照)．実際には場と粒子は相互作用しながら時間発展する．

サイクロトロン

サイクロトロンは荷電粒子の加速装置の 1 つであり，図 132 のように粒子は

- ディーと呼ばれる 2 つの半円内でディーに垂直な磁場に曲げられて半円を描き，
- 2 つのディーの間を通過するときに交流電場により加速される．

これにより粒子は次々と加速されて速度と回転半径を増し，最後に高エネルギーのビームとして取り出される．このようなことが可能であるためには，粒子が半周する時間 $T/2 = \pi m/qB$ が速度 v に依らないということが重要である[*37]．実際このとき粒子が半周する間に交流電場が逆転する，すなわち $\left(n + \frac{1}{2}\right)$ 回振動するように振動数を選んでおけば，粒子を毎回，進行方向に加速することができる $(n = 0, 1, 2, \cdots)$[*38]．

[*37] 前節の結果を解釈すると，半周する時間が速度に依らないのは，速度が大きくなると回転半径もそれに比例して増大するためであることが分かる．

[*38] そのような振動数 f は

$$f\frac{T}{2} = n + \frac{1}{2}, \qquad \therefore f = \frac{2n+1}{T} = \frac{2n+1}{2\pi}\frac{qB}{m}$$

と求めることができる

5-6 静磁場とビオ・サヴァールの法則

定常電流が作る磁束密度

5-0 節の Biot-Savart (ビオ・サヴァール) の法則を参照．教科書ではこれを電磁気学の第 2 の原理に置いている．

注意　Biot-Savart は Biot と Savart の 2 人である．

Biot-Savart の法則

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{I}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}l$$

を用いると，以下のように具体的な定常電流の作る静磁場を求めることができる．

- 無限に長い直線電流 I が，電流から垂直距離 r の位置に作る磁束密度は
  - 大きさ：　$B(r) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$
  - 向き：　電流の向きに右ねじが進むようにねじ回しを回す向き
    - ∗「電流に対して右回り」と言う

  である (図 133 参照)．
- 半径 a の円電流 I がその中心に作る磁束密度は
  - 大きさ：　$B = \dfrac{\mu_0 I}{2a}$
  - 向き：　電流の向きにねじ回しを回したとき右ねじの進む向き
    - ∗「電流に対して右ねじの向き」と言う

  である (図 134 参照)．
- 無限に長いソレノイド・コイル (単位長さあたりの巻き数 n) に電流 I を流したとき，内部に作られる磁束密度は
  - 大きさ：　$B = \mu_0 n I$
  - 向き：　ソレノイドの軸に平行で電流に対して右ねじの向き

  である (図 135 参照)．

導出

■無限に長い直線電流　図 133 のように直線電流を z 軸に選び，電流方向を正の向きとする．z 軸方向への並進対称性と z 軸周りの軸対称性より，位置 $\boldsymbol{r} = (r, 0, 0)$ における磁束密度を求めれば十分である．Biot-Savart の法則より，位置 $\boldsymbol{r}' = (0, 0, z)$ の電流素片 $\boldsymbol{I}\mathrm{d}z$ が場の観測点 $\boldsymbol{r}$ に作る磁束密度は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = (0, \mathrm{d}B, 0), \qquad \mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{r\mathrm{d}z}{(z^2+r^2)^{3/2}}$$

なので，求める磁束密度 $\boldsymbol{B} = (0, B, 0)$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} = (0, B, 0), \qquad B =& \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r\mathrm{d}z}{(z^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\phi\mathrm{d}\phi \qquad (z = r\tan\phi)\\ =& \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\end{aligned}$$

と計算される．

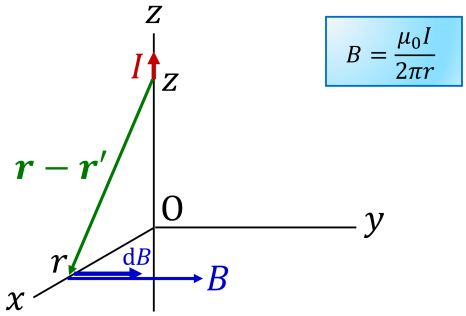


図 133　直線電流

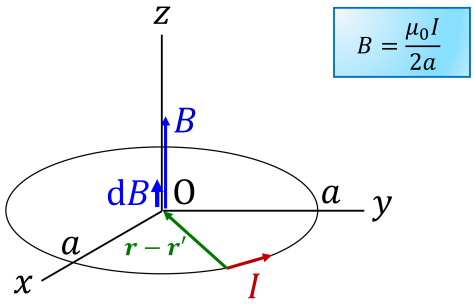


図 134　円形電流

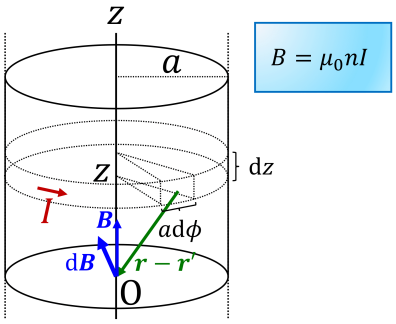


図 135　ソレノイド

注解　あらかじめ電流に対して右回りの軸対称な場 $B(r)$ を仮定すれば，この結果は Ampère-Maxwell の法則 (5-0 節)

$$B \times 2\pi r = \mu_0 I$$

に立ち返って直ちに導ける．

■円電流　図 134 のように円電流の中心を原点として，電流に対して右ねじの向きに z 軸をとる．すると Biot-Savart の法則より，円電流の長さ $\mathrm{d}l$ の素片が中心に作る磁場は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = (0, 0, \mathrm{d}B), \qquad \mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ia}{a^3}\mathrm{d}l$$

となるので，求める磁束密度は

$$\boldsymbol{B} = (0, 0, B), \qquad B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{a^2}\int \mathrm{d}l = \frac{\mu_0 I}{2a} \qquad \left(\because \int \mathrm{d}l = 2\pi a\right)$$

と計算される．

■ソレノイド　ここではソレノイドの中心軸上での磁束密度のみを調べる．中心軸から外れた点における磁束密度も中心軸上の値と同じであり，ソレノイド内の磁場は一様であることの証明は付録 D.28 で行う．

図 135 のようにソレノイドの半径を a とし，ソレノイドの中心軸を z 軸とした円筒座標 (ρ, ϕ, z) を導入する．ただし電流に対して右ねじの向きを z 軸の正の向きとする．z 方向の並進対称性より，場を求める位置を原点に選べば十分である ($\boldsymbol{r} = 0$)．ソレノイド上の位置 $\boldsymbol{r}' = (a\cos\phi, a\sin\phi, z)$ の周りの微小区間 $\mathrm{d}\phi, \mathrm{d}z$ に含まれる電流素片は

$$(Ia\mathrm{d}\phi)(n\mathrm{d}z)(-\sin\phi, \cos\phi, 0)$$

であり，代数的にも幾何学的にも確かめられるように，これが Biot-Savart の法則に従って原点に作る磁束密度は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}_{\text{素片}} = \frac{\mu_0}{4\pi} nIa \frac{(-z\cos\phi, -z\sin\phi, a)\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

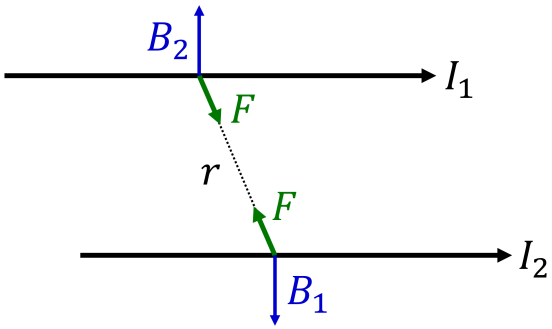


図 136　直線電流間に働く力

と表される．ここから位置 ϕ の電流と位置 $\phi+\pi$ における電流から磁束密度の x, y 成分への寄与は相殺することが見て取れる．実際 ϕ に関する積分を実行すると，幅 $\mathrm{d}z$ 内の全電流が作る磁束密度

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = (0, 0, \mathrm{d}B), \qquad \mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{2} nIa^2 \frac{\mathrm{d}z}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

を得る．(これは $z=0$ とおき幅 $\mathrm{d}z$ 内の全電流を $In\mathrm{d}z \to I$ と改めれば，円形電流が中心に作る磁束密度の式 $\mu_0 I/2a$ に帰着する．) よって中心軸上の磁束密度は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} = (0, 0, B), \qquad B =& \frac{\mu_0 nIa^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 nIa^2}{2} \frac{1}{a^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \mathrm{d}\theta \qquad (z = a\tan\theta) \\ =& \mu_0 nI\end{aligned}$$

と計算される．

直線電流間に働く力

距離 r 隔たる平行な 2 つの直線電流 I_1, I_2 の間には引力が働く (電流が反平行のときは斥力)．実際，電流 I_2 は I_1 の作る磁束密度 $B_1 = \mu_0 I_1/2\pi r$ から Lorentz 力を受け，その大きさは電流 I_2 の単位長さ当たり

$$F = I_2 B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}$$

である．向きは図 136 のようである．［力の式の最右辺は添字 1,2 について対称であり，］電流 I_1 に働く力は同大逆向きである．

アンペアの定義

- アンペアの定義
  $r = 1\mathrm{m}$ 隔てた直線電流間の力が 1m あたり $F = 2\times10^{-7}\mathrm{N/m}$ となる
  電流 $I_1 = I_2$ の値を 1A (アンペア) と定義する．
  $\to \quad \mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\mathrm{N/A^2}$　(定義からの帰結であり厳密に正しい)

$$\downarrow$$

- クーロンの定義　$\mathrm{C} = \mathrm{A}\cdot\mathrm{s}$
  Coulomb 力 $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$ の測定
  $\to \quad \varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\mathrm{C^2/Nm^2}$　(測定値であり有効数字を持つ)

★ μ_0 の単位が $\mathrm{N/A^2}$ と決まったことから，磁場の単位は

$$\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{N/A^2}} = \frac{\mathrm{N/Am}}{\mathrm{N/A^2}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

と定まる［最右辺は磁場 $H = I/2\pi r$ から直ちに分かる］.

5-7 ファラデーの電磁誘導の法則

磁束の定義

5-0 節参照.

$$\text{磁束の単位} \qquad \mathrm{T\cdot m^2 = V\cdot s = Wb}\,(\text{ウェーバー}).$$

［第 2 辺は下記の起電力の表式とも整合している.］

電磁誘導の法則

閉曲線 C を貫く磁束 Φ の変化は C に関する起電力をもたらし，起電力は

- 大きさ：　$|V_{\mathrm{emf}}| = |\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t|$
- 向き：　磁束の変化を妨げる向き (**Lenz レンツの法則**)

である (Faraday の電磁誘導の法則，5-0 節参照).

注解　教科書ではこれを電磁気学の第 3 の原理に置いている.
5-0 節で述べたように磁束の変化への寄与は磁場そのものの変化と閉回路 C の運動から来る．そして磁場の変化は周りに渦を巻くような電場を作ることで起電力を生じるのに対し，閉回路 C の磁場中の運動が作る起電力は導線内の電荷に作用する Lorentz 力による．このように 2 つの場合で起電力の起源は異なるけれど，いずれの場合も起電力は同じ式 $|V_{\mathrm{emf}}| = |\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t|$ で表されるため，教科書のようにそれらを区別することなく 1 つの式にまとめることができる．この点については教科書でも 5-8 節で再論される.

例えば図 137 のように，閉回路 C を縁とする曲面 S の法単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を磁束密度 $\boldsymbol{B}$ と同じ方向にとると，$\boldsymbol{B}$ を大きく (小さく) したとき磁束 $\Phi = \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ は増大 (減少) する．このとき Lenz の法則は磁束の増大 (減少) を妨げる，すなわちもとの $\boldsymbol{B}$ と逆向きの $\boldsymbol{B}'$ を作る電流を流す向きに起電力が生じることを意味する．したがって起電力の向きは $\boldsymbol{B}$ に対して左回り (右回り) である.

$\boldsymbol{n}$ に対して右回りを起電力の正の向きと約束すれば，電磁誘導の法則は

$$V_{\mathrm{emf}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

とまとめられる．［ところで法単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ は人為的にとったものであり，その向きは物理的な結果に無関係のはずである．実際 $\boldsymbol{n}$ を磁場と逆向きにとった場合にも，同様の議論を繰り返せば，Lenz の法則から導かれる起電力の向きは同じであることが確かめられる.］よって上式 $V_{\mathrm{emf}} = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ は回路が回転を続け［，それ故 $\boldsymbol{n}$ の磁場との向きが絶えず入れ替わる］場合にも適用できる［5-7 節末尾の例題も参照］．右辺の負号に「磁束の変化を妨げる向き」という Lenz の法則が込められている.

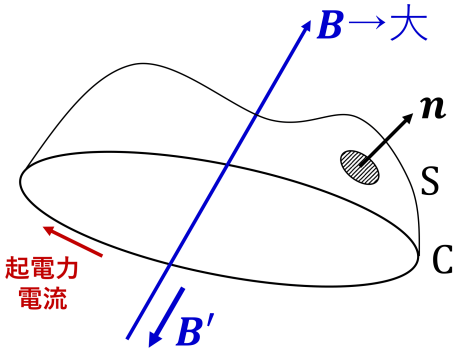


図 137　誘導起電力と Lenz の法則

注解——目的論的自然観について

「誘導起電力は，その Φ の『増加』を妨げるようにもとの $\boldsymbol{B}$ と逆向きの磁束密度 $\boldsymbol{B}'$ を作るような電流を流す向き」(p.231) などど言うとき，「〜ように」という表現はもしかすると，自然が目的を持って行動しているかのような擬人的な印象を与えるかもしれない．しかし物理学では目的因を認めず，機械論的因果律のみを想定していることは言うまでもない．

レンツの法則の物理的意味

Lenz の法則の物理的な意味を見るために，図 138 のように一様な磁束密度 $\boldsymbol{B}$ に垂直な面内に置かれた回路を考える．2 辺 ab,cd は距離 l だけ隔たる平行な金属レールであり，これに沿って x 軸をとる．また ac 間には抵抗 R が存在する．今レールに直角に置かれた導体棒 pq が，レールに沿って速度の x 成分 v で運動しているものとする．このとき磁束密度と同じ方向に方単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ をとり，$\boldsymbol{n}$ に対して右回りを起電力と電流の正の方向とすると，

$$
\begin{aligned}
& \text{回路を貫く磁束の変化} \quad \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = Bvl \\
\rightarrow \quad & \text{起電力} \quad V_{\mathrm{emf}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -Bvl \\
\rightarrow \quad & \text{電流} \quad I = \frac{V_{\mathrm{emf}}}{R} = -\frac{Bvl}{R} \\
\rightarrow \quad & \text{導体棒に働く力の } x \text{ 成分} \quad F = lIB = -\frac{(lB)^2}{R}v \quad (\text{速度と逆向き})
\end{aligned}
$$

となる．このように導体棒に働く力は磁束の変化を妨げる向きになっており，これは **Lenz の法則の力学的な現れ**である．［この例題の教訓である．］Lenz の法則は自然界の安定性を表している．

なおこの例では導体棒 pq のみが動き得るけれど，他の動かない辺に ac,ap,cq にも磁束の変化を妨げる向きの Lorentz 力が働いている．閉曲線が固定されており，そこを貫く磁束密度が増大 (減少) する場合にも，［閉曲線が実際に導体であれば］回路には磁束密度の変化を妨げる向きの，すなわち回路を縮める (押し広げる) 向きの Lorentz 力が働く．

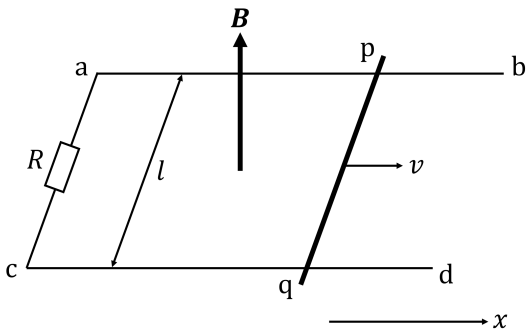


図 138　Lenz の法則の力学的な現れ

注解

5-0 節で述べたように，この場合の起電力は導体棒中の電荷に働く Lorentz 力に起因するから (5-8 節も参照)，起電力は p → q 成分 $E = vB$ の実効電場に対応する電位 $V_{\mathrm{emf}} = Bvl$ としても求められる．(その方が容易でもある．仮に全体としては回路を縮める向きの力が働くことが Lenz の法則から要請される場合にも，それだけでは回路の辺ごとに働く力の向きを正確に判定できない場合がある．)

するとこの例で起こっていることは次のようにまとめられる．

1. 導体棒中の電荷は速度 v で運動しているため，p → q 方向の Lorentz 力を受ける．
2. pq は導体棒だから，電荷が p → q 方向に流れる．
3. 電荷が導体棒に垂直な，もとの速度 v と逆向きの Lorentz 力を受ける．

これは導体棒がない場合に，粒子が磁場に進行方向を曲げられるのと類似の現象として理解できる (5-5 節)．

実際には導体棒中の電荷 q は導体棒と同じ速度成分 $\boldsymbol{v}_{\text{棒}}$ を持つと“同時に”，電流に寄与する，導体棒に沿った速度成分 $\boldsymbol{v}_{\text{電流}}$ を持つと考えられる．すると電荷の速度 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\text{棒}} + \boldsymbol{v}_{\text{電流}}$ に対して，電荷が受ける Lorentz 力は

$$q(\boldsymbol{v}_{\text{棒}} + \boldsymbol{v}_{\text{電流}}) \times \boldsymbol{B}$$

であり，この第 1 項が棒に沿った起電力に寄与し，第 2 項が棒に垂直な力に寄与すると理解できる．それぞれ順にいわゆる Fleming の右手および左手の法則に対応し，いずれも Lorentz 力の観点から統一的に理解できる．

レンツの法則とエネルギー保存則

［Lenz の法則により導体棒 pq が減速することは系の運動エネルギーが減少することを意味しており，それは抵抗で Joule 熱として失われたエネルギーに一致しなければならない．逆に言うと］電流が流れれば必ず抵抗で Joule 熱が発生するから，それと同じだけ導体棒の運動エネルギーは減少しなければならない．このように Lenz の法則から運動を妨げる力が導かれることは，エネルギー保存則から要請されることでもある．

実際，導体棒の質量を m とすると運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = lIB$$

であり，両辺に v をかけて $IR = -Bvl$ を用いると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -I^2R$$

を得る．ここから抵抗で逃げた Joule 熱の分だけ導体棒の運動エネルギーが減少することが定量的に裏付けられる．

注解——運動の時間追跡

p→q 向きを正とする電流は $I = Bvl/R$ なので，導体棒の運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -lIB = -\frac{(Bl)^2}{R}v$$

と表される．ここから導体棒の速度は

$$v(t) = v(0)e^{-t/\tau}, \qquad \tau \equiv \frac{mR}{(Bl)^2}$$

に従ってゼロに緩和することが分かる [1, p.167,p.169].

辺 ac と平行を保ちながら導体棒に $+x$ 向きの一定の力 f を加えた場合には，運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f - \frac{(Bl)^2}{R}v$$

に置き換わる．これは一定の重力と速度に比例する空気抵抗を受ける雨滴の運動方程式と同じ形であり，2-4 節で見たように解は

$$v(t) = v_\infty + (v(0) - v_\infty)e^{-t/\tau}$$

で与えられる．したがって導体棒は“終端速度” $v_\infty \equiv fR/(Bl)^2$ に達し，その際の緩和時間は再び $\tau \equiv mR/(Bl)^2$ である．電流も一定値 $I_\infty = Bv_\infty l/R$ に落ち着き，このとき単位時間に外力のする仕事 fv_∞ と同じだけの Joule 熱 ${I_\infty}^2R$ が抵抗から逃げ，導体棒の運動エネルギー $m{v_\infty}^2/2$ が一定に保たれる．

最後に辺 ac に a→c 向きの一定の起電力 V_0 を導入した場合を考える (外力は $f = 0$ に戻す)．回路の方程式と導体棒の運動方程式はそれぞれ

$$I = \frac{Bvl}{R} - \frac{V_0}{R}, \qquad m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -lIB = -\frac{(Bl)^2}{R}v + \frac{lBV_0}{R}$$

となるので，速度 $v(t)$ は外力 $f = lBV_0/R$ の下でのそれと同じであり，導体棒は終端速度 $v_\infty = V_0/Bl$ で射出される．また充分に時間がたったときの電流値は

$$I_\infty = \frac{Bv_\infty l}{R} - \frac{V_0}{R} = 0.$$

例題

図 139 のように起電力 E の電池と抵抗 R の電気抵抗を含む面積 S の閉回路 abcd が，辺 ab，cd の中点 p,q を結ぶ回転軸の周りに一定の角速度 ω で回転している．回路は一様不変な磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の磁場中にあり，回転軸 pq は $\boldsymbol{B}$ に垂直で $\boldsymbol{B}$ と同一面内にあるとする．このとき回路を流れる電流 $I(t)$ を調べよう (a → b → c → d の向きを正とする)．図 139 のように a → b → c → d に対して右ねじの向きにとった回路の法単位べ

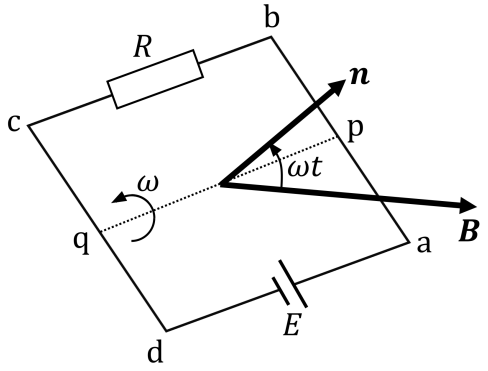


図 139　磁場中で一様な回転を行う閉回路

クトル $\boldsymbol{n}$ の $\boldsymbol{B}$ との成す角は，時間の原点を適当に選べば ωt と表せる．よって回路を $\boldsymbol{n}$ の向きに貫く磁束は $\Phi = (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n})S = BS\cos\omega t$ であり，Kirchhoff の第 2 法則より

$$IR = E - \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = E + \omega BS\sin\omega t, \qquad \therefore I = (E + \omega BS\sin\omega t)/R.$$

5-8 誘導起電力と誘導電場

電源とは何か

電源が起電力を持つとは，その中で電流が高電位に汲み上げられることである．そうであるならば電源では電荷に何らかの力が働いていなければならず，それが未知の力である場合，定義より電荷の位置には電場があるものと判断される．**この電場 $\boldsymbol{E}_\mathrm{I}$ は電位の低くなる方を向く静電場** (Coulomb **電場**) $\boldsymbol{E}_\mathrm{C}$ **とは逆向きであり，** Coulomb 電場とは区別されるから**非 Coulomb 電場**と呼ぶ．

起電力と電位差 (電流の流れていない場合)

図 140 のように電源を含む回路が開いている場合を考える．電源内部には N［負極］→ P［正極］の向きに非 Coulomb 電場 $\boldsymbol{E}_\mathrm{I}$ が存在するため，電荷が力を受けて移動し，P 極は正に，N 極は負に帯電する．すると逆に電荷は P → N 向きの静電場 $\boldsymbol{E}_\mathrm{C}$ を作る．電荷の移動は電源内の電場が

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{I} + \boldsymbol{E}_\mathrm{C} = 0$$

となるまで続く．これは起電力 $V_\mathrm{emf} = \int_\mathrm{N}^\mathrm{P} \boldsymbol{E}_\mathrm{I}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ に等しい電位差 $\varphi_\mathrm{P} - \varphi_\mathrm{N} = -\int_\mathrm{N}^\mathrm{P} \boldsymbol{E}_\mathrm{C}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を作るだけの電荷分布が $\boldsymbol{E}_\mathrm{I}$ により生じること

$$\varphi_\mathrm{P} - \varphi_\mathrm{N} = V_\mathrm{emf}$$

を意味している．

説明 1　起電力 $V_\mathrm{emf} = \int_\mathrm{N}^\mathrm{P} \boldsymbol{E}_\mathrm{I}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ は非 Coulomb 電場 $\boldsymbol{E}_\mathrm{I}$ によってもたらされるのに対し，
電位差 $\varphi_\mathrm{P} - \varphi_\mathrm{N} = -\int_\mathrm{N}^\mathrm{P} \boldsymbol{E}_\mathrm{C}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ は Coulomb 電場 $\boldsymbol{E}_\mathrm{C}$ に対して定義される．

説明 2　Coulomb 電場と非 Coulomb 電場の関係 $\boldsymbol{E}_\mathrm{I} + \boldsymbol{E}_\mathrm{C} = 0$ は，起電力と電位差の関係

$$0 = \int_\mathrm{N}^\mathrm{P} (\boldsymbol{E}_\mathrm{I} + \boldsymbol{E}_\mathrm{C})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = V_\mathrm{emf} - (\varphi_\mathrm{P} - \varphi_\mathrm{N}), \qquad \therefore \varphi_\mathrm{P} - \varphi_\mathrm{N} = V_\mathrm{emf}$$

になる．

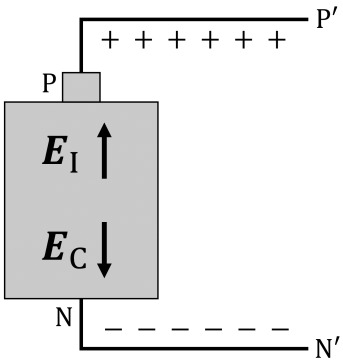


図 140　起電力と電位差 (電流の流れていない場合)

起電力と電位差 (電流の流れている場合)

次いで図 140 の P′N′ を抵抗で繋ぐと，正負の電荷が中和して静電場 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}}$ が消失し，電場のつり合い $\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}}=0$ が破れ，再び $\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}$ が電荷を汲み上げる．［やや乱暴に言うと,］この繰り返しで電流が流れ続ける．

電源の内部抵抗 $R_{\text{内}}$ (抵抗率 $\rho_{\text{内}}$) を導入すれば，次のように［初めから電流 I (電流密度 $\boldsymbol{i}$) が流れている場合の］起電力と電位差の関係を調べられる．すなわち電場のつり合い $\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}}=0$ の代わりに Ohm の法則

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}}=\rho_{\text{内}}\boldsymbol{i}$$

が成り立ち，これは

$$\varphi_{\mathrm{P}}-\varphi_{\mathrm{N}}=V_{\mathrm{emf}}-R_{\text{内}}I$$

と焼き直される．($I=0$ と置けば，上で得た電流が流れていない場合の関係 $\varphi_{\mathrm{P}}-\varphi_{\mathrm{N}}=V_{\mathrm{emf}}$ が再現される．)

導出　Ohm の法則 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}}=\rho_{\text{内}}\boldsymbol{i}$ の両辺を線積分すると，

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{N}}^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}&=V_{\mathrm{emf}}-(\varphi_{\mathrm{P}}-\varphi_{\mathrm{N}}),\\ \int_{\mathrm{N}}^{\mathrm{P}}\rho_{\text{内}}\boldsymbol{i}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}&=I\int_{\mathrm{N}}^{\mathrm{P}}\rho_{\text{内}}\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{S}=IR_{\text{内}}\end{aligned}$$

となるので，起電力と電位差の関係 $\varphi_{\mathrm{P}}-\varphi_{\mathrm{N}}=V_{\mathrm{emf}}-R_{\text{内}}I$ に書き換えられる．

注解

■電流 I を積分の外に出せる理由　ふつう電気回路では準定常的な変化を仮定することができる (5-10 節)．そこで変位電流を無視すると

$$0=\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)=\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

のように導体中の電荷密度 ρ は変化しないから，電流はわき出さないことになる (5-0 節も参照)．

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{i}=0.$$

よって電流 I は導線上のいたるところで同じである [10, pp.249–250,pp.252–253]．この結論はその導き方より，抵抗率 ρ (電荷密度との混同に注意) や導線の直断面 S が一般に導線に沿って変化することとは無関係に正しい．

■**回路全体で積分した場合**　同様に非 Coulomb 電場 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}$ と静電場 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$ に対して Ohm の法則

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{E}_{\mathrm{C}} = \rho\boldsymbol{i}$$

を閉回路 C 全体で線積分すると，

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{E}_{\mathrm{I}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= V_{\mathrm{emf}} : \text{起電力}, \\
\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{E}_{\mathrm{C}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= (\text{回路 C を 1 周したときの}\phi\text{の変化}) = 0, \\
\oint_{\mathrm{C}} \rho\boldsymbol{i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= IR, \qquad R = \oint_{\mathrm{C}} \rho\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{S} : \text{電源の内部抵抗を含む回路全体の抵抗}
\end{aligned}$$

より Ohm の法則の巨視的な表現

$$V_{\mathrm{emf}} = IR$$

を得る [10, pp.112–114]．なお 5-4 節で導いた Ohm の法則 $V = IR$ における V は抵抗間の電位差であり，ここでは回路を 1 周すると電位の値が元に戻ること (Kirchhofff の法則に他ならない) から V が起電力 V_{emf} に等しいという結果が得られたことになる．

電磁誘導の法則 (再論)

Faraday の電磁誘導の法則

$$\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

の左辺の起電力における $\boldsymbol{E}$ は非 Coulomb 電場 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}$ に同定される．

［本稿では既に繰り返し述べたように，この関係は閉曲線 C が空間に固定されている場合にも成り立つから，］**磁場の変化が電場 (誘導電場) を生み出す**ということを含んでおり，曲線 C の位置に「**たとえ導線がなくても，誘導電場それ自体は存在するはず**」(p.220) である．実際，次に見るベータ・トロンは誘導電場を用いて粒子を加速する装置である．

ベータ・トロン

ベータ・トロンは図 141 に示した円形の真空の管 (ドーナツ，半径 R) を運動する荷電粒子を，以下に述べる仕組みで加速する[*39]．電磁石を用いてドーナツを貫く軸対称な磁場 (磁束密度 $\boldsymbol{B}$) をかけることができる．磁場はドーナツを含む平面上では面に垂直であるが，その強さは非一様であり中心軸からの距離に依存する．

議論を確定させるために，荷電粒子として電子 (質量 m，電荷 $-e$，e : 素電荷) を考えよう．ドーナツを貫く磁束 Φ を変化させると，ドーナツに沿って誘導電場が生じる．図 141 の法単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ に対して右回りを正とする誘導電場の接線成分を E と書き，場の軸対称性を考慮すると，これは電磁誘導の法則から

$$E \times 2\pi R = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \qquad \therefore E = -\frac{1}{2\pi R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

と定まる．この誘導電場によって電子は加速される：

[*39] ベータ・トロンはもともと β 線 (電子) の加速器として作られたことが，その名前の由来である．

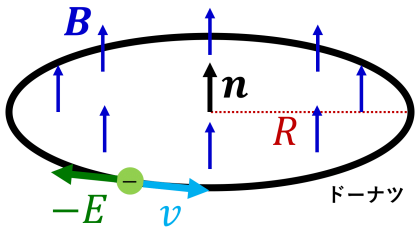


図 141　ベータ・トロン

- 電子の運動方程式の接線成分　(= **電子が加速される条件**)

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (-e)E = \frac{e}{2\pi R}\cdot\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \qquad \therefore mv = \frac{e\Phi}{2\pi R}. \tag{43}$$

  ただし初期条件を $t=0$ で $v=0, \Phi=0$ として積分した．
- 電子の運動方程式の向心成分　(= **円運動を保つ条件**)
  ドーナツ上の磁束密度を B_R とすると，
  Lorentz 力を向心力とした円運動が実現されている場合の運動方程式は

$$m\frac{v^2}{R} = evB_R, \qquad \therefore mv = eRB_R \tag{44}$$

  となる．

注解　誘導電場に加速された電子の各瞬間の速度 v は式 (43) に従って決まる．円運動を保つ条件 (44) はこの v に対して各瞬間に Lorentz 力を向心力とした円運動の方程式が成り立つために，ドーナツ上の磁束密度 B_R が満たさなければならない制約条件と見なせる．実際，以下のようにここから B_R に課せられる条件があからさまに得られる．

ここでドーナツを貫く磁束を $\Phi = \langle B\rangle \pi R^2$ と書いて平均磁束密度 $\langle B\rangle$ を定義する．

注解　すなわち定義式をあからさまに書けば $\langle B\rangle = \frac{1}{\pi R^2}\int \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ である．
これは 2-5 節において平均の力を $\langle \boldsymbol{F}\rangle = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$ と定義したのと同じ事情である．

その上で式 (43)，式 (44) が両立することを要求すると，

$$B_R = \frac{\Phi}{2\pi R^2} = \frac{1}{2}\langle B\rangle$$

を得る．これはベータ・トロンが作動するには，磁場は中心ほど強くなければならないことを意味する．

電磁誘導についての補足

他方，本稿では既に繰り返し述べたように，磁場そのものは変化せずその中を閉回路が運動するときの起電力は，導体棒中の電荷に働く Lorentz 力に起因する．実際 5-0 節では起電力を Lorentz 力 $q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ に対応する

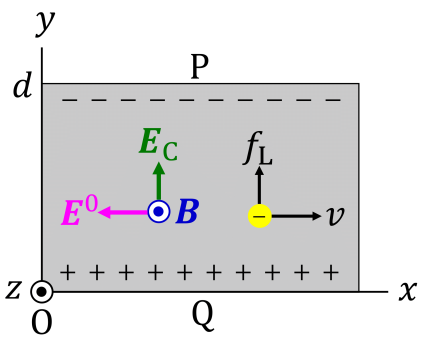


図 142　ホール効果

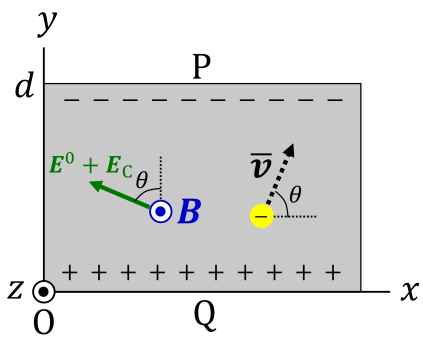


図 143　トロコイド運動の平均速度 $\bar{\boldsymbol{v}}$

実効電場 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ から説明したけれど，確かに電荷とともに動く座標系では電荷には Lorentz 力は働かないから，この力は定義により非 Coulomb 電場による力と判断される．

ホール効果

金属または半導体の試料を念頭に，まずは電荷の担い手 (キャリア) が電子 (電荷 $-e$，e：素電荷) の場合を考えて**ホール効果**について説明する．

1. 図 142 のように試料に x 軸負の方向の電場 $\boldsymbol{E}^0$ をかけると，
   電子が力を受けて x 方向に運動する (速さ v)．
2. 試料に $+z$ 方向の磁場 (磁束密度 $\boldsymbol{B}$) をかけておくと，電子は $+y$ 方向の
   Lorentz 力 $f_{\mathrm{L}} = evB$ を受けて面 P の側に移動し，反対側の面 Q には正電荷が余る．
3. この電荷分布は $+y$ 方向の静電場 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}}$ を作る．
4. 電子が静電場から受ける力 $-eE_{\mathrm{C}}$ と Lorentz 力 $f_{\mathrm{L}} = evB$ がつり合うまで電子は移動し，
   最終的に PQ 間に電位差
   $$V_{\mathrm{L}} \equiv V_{\mathrm{Q}} - V_{\mathrm{P}} = E_{\mathrm{C}} d = vBd > 0$$
   が生じる (ホール効果)．

注解　確かにこれは定常状態としては可能であるものの，実際に定常状態に至るまでの緩和過程で起きていることはもう少し複雑であると考えられる．例えば電子は常に x 方向の速度を持つわけではなく，運動方向は磁場に曲げられてゆく．とは言え一様不変な電磁場 $\boldsymbol{E}^0, \boldsymbol{B}$ の下では電子はトロコイド運動をし，平均的には Q → P 方向に移動することは正しい (5-0 節の注解参照)．しかし電荷分布は電場 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}}$ を作るから，合成電場 $\boldsymbol{E}^0 + \boldsymbol{E}_{\mathrm{C}}$ は時々刻々とその向きを変えてゆくはずである．そしてこのとき初めて図 143 のように，トロコイド運動の平均速度 $\bar{\boldsymbol{v}}$ は x 成分 $\bar{v}\cos\theta$ を持ち，x 方向に電流が流れると考えられる．平均速度 $\bar{\boldsymbol{v}}$ の電子に対して Lorentz 力の y 成分は $e\bar{v}B\cos\theta$，電場から受ける力の y 成分は $-eE_{\mathrm{C}}$ だから，速度を $v \equiv \bar{v}\cos\theta$ で再定義すれば，最終的な定常状態における y 方向の力のつり合いが $E_{\mathrm{C}} = vB$ で与えられるという結果に変わりはない．

- キャリアの電荷が正の場合には，同様に考えると P 側が高電位となるから ($V_{\mathrm{L}} < 0$)，
  電位差 V_{L} を測定すればキャリア電荷の正負を知ることができる．
- 与えられた電流 I と磁束密度 B に対して電位差 V_{L} を測定すれば，キャリア密度 n が分かる．

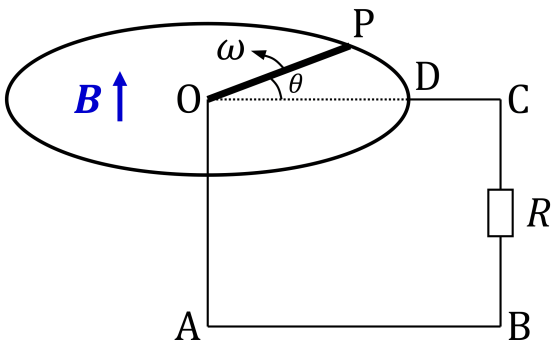


図 144　磁場中を回転する導体棒の起電力

実際，試料の z 方向の厚みを h とすると

$$I = envhd, \qquad \therefore n = \frac{I}{evhd} = \frac{IB}{ehV_{\mathrm{L}}}.$$

例——磁場中を回転する導体棒の起電力

図 144 のように，一様な磁束密度 $\boldsymbol{B}$ に垂直な面内に置かれた半径 a の金属円環内で，角速度 ω の与えられた回転運動を行う導体棒 OP を考える．(常に O は円環の中心に，P は円環上にある．)

O からの距離 x における導体棒中の電荷 q は速度 $x\omega$ を持つので，O → P 方向の Lorentz 力 $q(x\omega)B$ を受ける．これは O → P 方向の起電力

$$V = \int_0^a (x\omega)B\mathrm{d}x = \frac{1}{2}a^2\omega B$$

があることを意味する．従ってこれを図 144 のように抵抗 R を持つ導線 OABCD に繋いで回路を作れば，電流 $I = V/R$ が流れる．

5-0 節で示したように，Lorentz 力に起因する起電力は Faraday の電磁誘導の法則と同じ形 $V_{\mathrm{emf}} = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ に表される．そこで閉回路 OABCDPO を貫く磁束 $\Phi = \frac{1}{2}a^2\theta B$ に対してこれを適用すると再び

$$V_{\mathrm{emf}} = -\frac{1}{2}a^2\omega B \qquad (\text{正の向き P} \to \text{O})$$

を得る．

5-9 自己誘導起電力

電磁誘導と自己誘導

これまでは与えられた［外部］磁場の下で電磁誘導により回路に生じる起電力を考察し，その際，回路に流れる電流が作る磁場は無視してきた．これは電流が作る磁場が［外部磁場に比べて］小さいことから正当化される．［しかしながら実際には磁場の変化は電流を促し，電流の影響は磁場にフィードバックされる．このように一般には場と電荷は絶えず相互作用しながら時間発展する (5-5 節の注解も参照)．そして］「回路に流れる電流自身の作る磁束の変化による起電力をとくに**自己誘導起電力**という」(p.225)．

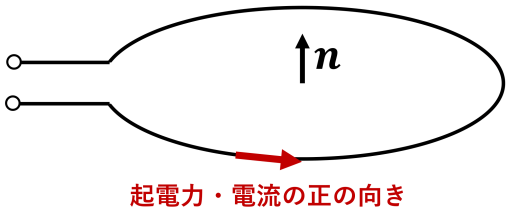


図 145　電流と起電力の正の向き

自己インダクタンス

図 145 のように回路を縁に持つ曲面を貫く磁束を定義する面の法単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ をとり，$\boldsymbol{n}$ に対して右回りを電流と起電力の正の向きに決める．すると回路に流れる電流 I と電流が作る磁束 Φ の間には，

$$\Phi = LI, \qquad L(>0) : \text{自己インダクタンス}$$

の関係があることが分かる．

注解　このことは静磁場に対する Biot-Savart の法則から理解される．この結果はすぐ後で，電流が時間変化し，そのため磁束が時間変化する場合に対しても用いられるけれど，変化が準定常的であれば各瞬間に Biot-Savart の法則に従う磁場が作られると考えて良い．5-4 節では同様にコンデンサーの過渡的な過程 (充電・放電) についても，静電場に対する結果を援用したことを思い出そう．実は教科書にもこの点に関する説明が 5-10 節にある．

単位まとめ

$$\begin{aligned}
\text{磁束密度 } \boldsymbol{B} \qquad & \mathrm{T}\,(\text{テスラ}) = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}\cdot\mathrm{m/s}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{m}^2}, \qquad (\text{5-5 節}) \\
\text{磁束}\Phi \qquad & \mathrm{Wb}\,(\text{ウェーバー}) = \mathrm{V}\cdot\mathrm{s} = \mathrm{T}\cdot\mathrm{m}^2, \qquad (\text{5-7 節}) \\
\text{(自己) インダクタンス } L \qquad & \mathrm{H}\,(\text{ヘンリー}) = \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{A}} = \Omega\cdot\mathrm{s}.
\end{aligned}$$

自己誘導起電力

$$\begin{aligned}
& \text{回路に流れる電流の変化} \quad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \\
\rightarrow \quad & \text{回路を貫く磁束の変化} \quad \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \qquad (\because \Phi = LI) \\
\rightarrow \quad & \text{自己誘導起電力} \quad V_{\mathrm{emf}} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \qquad \left(\because V_{\mathrm{emf}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right)
\end{aligned}$$

これは電流の正の向きに沿って起電力 $-L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ のあることを意味している．起電力と電位差の関係 (5-8 節) より，(内部抵抗を無視すれば) コイルでは電流の正の向きに沿って電位が $-L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ だけ上昇する．

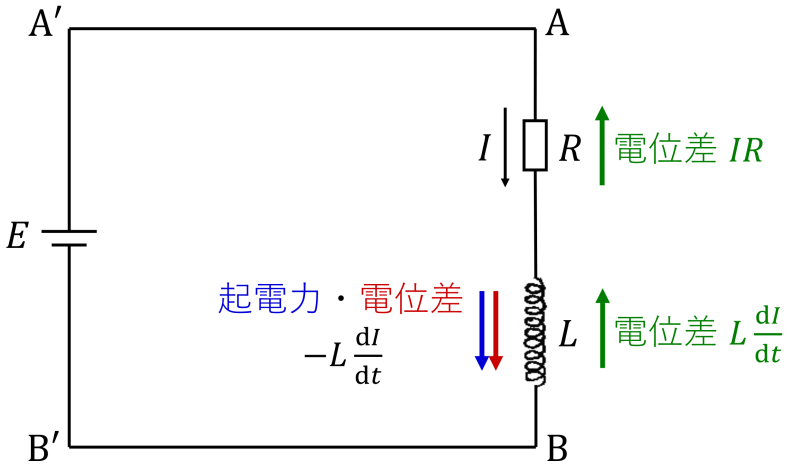


図 146　LR 回路

レンツの法則

自己誘導起電力の式 $V_{\mathrm{emf}} = -L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ における右辺の負号は Lenz の法則に由来しており (5-7 節の $V_{\mathrm{emf}} = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$)，その 1 つの表れとして自己誘導起電力は電流の増減を妨げる向きに生じることになる．

1 つの例—— LR 回路

ここからしばらく図 146 のような電気回路［LR 回路］を考える．時計回りを電流の正の向きとして Kirchhoff の第 2 法則を適用すると，

- 起電力　$E + (-L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t)$
- 電圧降下　IR

を等置して

$$E - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = IR$$

となる．あるいは［Kirchhoff の第 2 法則 (5-4 節) の箇所で指摘したように,］図 146 において B から A を見上げた電圧と B′ から A′ を見上げた電圧が等しいとしても同じ回路の方程式が得られる：

$$E = IR + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}.$$

自己インダクタンスの効果

これは 2-3 節で見た雨滴の微分方程式

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv$$

と同じ形をしており，$m \to L, v \to I, mg \to E, k \to R$ の置き換えを施せば上の回路方程式が得られる．

- スイッチを入れたとき　(初期条件 $I(0) = 0$)

初速ゼロでの雨滴の速度変化の式 $v(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{t}{m/k}})$ に対して上記の置き換えを行うと

$$I(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{L/R}}\right)$$

を得る．

これは自己インダクタンスがない場合の電流 $I(\infty) = E/R$ への時定数 $\tau = L/R$ での緩和を表す．

起電力 $V_{\mathrm{emf}} = -L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ は

$$V_{\mathrm{emf}} = -Ee^{-\frac{t}{L/R}}$$

に従って指数関数的に減衰し，時定数は同じく $\tau = L/R$ である．

［$t = 0$ では電流は流れておらず抵抗での電圧降下はゼロなので，自己誘導起電力は $-E$．

$t \to \infty$ の定常状態では電流は一定だから自己誘導起電力はゼロ．］

- スイッチを切ったとき[*40]　($E = 0$，初期条件 $I(0) = I_0 \equiv E/R$)

  回路の方程式は $-L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t = IR$ となるので，

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{L/R}}, \qquad \therefore V_{\mathrm{emf}} = Ee^{-\frac{t}{L/R}}$$

  を得る．これは電荷と電流の時定数 $\tau = L/R$ での指数関数的減衰を表す．

★ 時定数 $\tau = L/R$ は確かに時間の次元を持っていることが分かる．

自己インダクタンスがなければ電流はスイッチを切り替えた瞬間に不連続的に変化するけれど，このように**自己インダクタンスは電流の変化を妨げ，電流の変化を連続的にする．**

参考　家電用製品のスイッチを切らずにプラグを抜くと，電流の急激な減少を妨げる自己誘導起電力 (したがって誘導電場) が生じ，コンセントとの間で放電する．

注解　なるほど，例えば直線電流を途中で切断すると周りの磁場が急激に失われるから，磁束密度の変化 $\partial \boldsymbol{B}/\partial t$ は電流に対して左回りの場となると考えられる．すると電磁誘導の法則 $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B}/\partial t$ に従って周りに渦を巻くような誘導電場が作られ，これは確かに電流の減少を妨げる方向を向いている (図 147 参照)．そしてこのようにコイルがなくとも，導線をはじめとするあらゆる回路部分は多かれ少なかれ自己インダクタンスを持つものとすれば，実際の電流の変化は決して不連続にはなり得ない．

コイルのもつエネルギー

回路の方程式 $E = IR + L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ の両辺に I をかけると，

$$EI = I^2R + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}LI^2\right)$$

となる．これは単位時間に電池のした仕事 EI の一部が抵抗で Joule 熱 I^2R として逃げることを意味しており，我々はエネルギー保存則を指導原理として右辺第 2 項の

$$U_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}LI^2$$

を**コイルに蓄えられたエネルギー**と解釈する．

[*40] 電源を含まない線 (本稿の図 146 では省略) にスイッチを切り替える場合が考えられており，スイッチを切った後も回路は断線していないから電流が流れる．5-4 節におけるコンデンサーの放電も同様である．

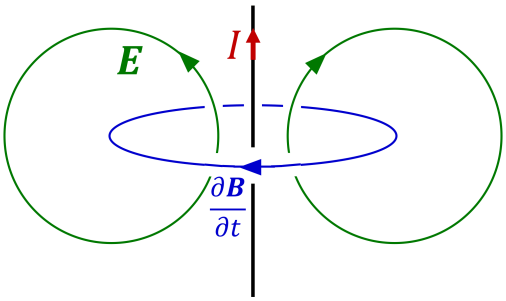


図 147　電気ケーブルをハサミで切ったときに火花が飛ぶ理由

注解

■力学との対応　上式は前述の置き換え $E \to mg, I \to v, R \to k, L \to m$ を施すと，2-3 節で考察した雨滴の落下に対する仕事と運動エネルギーの関係

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = (mg - kv)v$$

になる．

■コイルに蓄えられたエネルギー　コンデンサーの内部エネルギーと同様，「コイルに蓄えられたエネルギー」とは具体的にはコイル内部の磁場が持つエネルギーと考えられる (5-11 節)．

LC 振動回路

図 148 の LC 回路について，

- 回路の方程式

$$-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{Q}{C}.$$

  連続の式 $I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ を考慮すると，これは単振動の方程式

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{Q}{C}$$

  に書き換えられる．

  – 力学系との対応　$Q \leftrightarrow x$，$I \leftrightarrow v$，$L \leftrightarrow m$，$1/C \leftrightarrow k$．

- 初期条件 $Q = Q(0), I(0) = 0$ の下での解

$$Q(t) = Q_0\cos(\omega t), \qquad I(t) = -\omega Q_0 \sin(\omega t), \qquad \omega \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

  この結果は次のように解釈できる．

  1. まず電荷 Q_0 の放電が起こる．
     このとき自己インダクタンスがあるため，電流は $|I| = 0$ から連続的に増加する．
  2. 電荷がゼロになった瞬間 ($\omega t = \pi/2$) にも電流は流れ続ける．

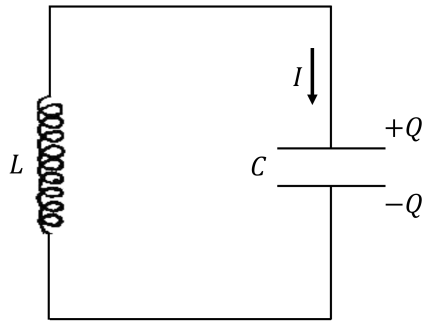


図 148　LC 振動回路

3. 電流がゼロに戻ったとき ($\omega t = \pi$) にはコンデンサーはもとと逆符号に帯電されている．(以下同様に続く．)

注解

- RC (直列) 回路　(5-4 節)
  - 回路の方程式：　Q に対する 1 階微分方程式　$E = R\dot{Q} + (Q/C)$.
  - 時定数　$\tau = RC$
- LR (直列) 回路
  - 回路の方程式：　I に対する 1 階微分方程式　$E = IR + L\dot{I}$.
  - 時定数　$\tau = L/R$
- LC (直列) 回路
  - 回路の方程式：　Q に対する 2 階微分方程式　$-L\ddot{Q} = (Q/C)$.
  - 振動周期　$\tau = 2\pi\sqrt{LC}$　(確かにこれも時間の次元を持つことを確かめられる．)

LC 回路のエネルギー保存則

コイルのエネルギー $U_{\mathrm{L}} = LI^2/2$ とコンデンサーのエネルギー $U_{\mathrm{C}} = Q^2/2C$ の和

$$\frac{1}{2}LI^2 + \frac{Q^2}{2C} = \text{const.}$$

導出　回路の方程式 $-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{Q}{C}$ と連続の式 $I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ を辺々掛けると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}LI^2 + \frac{Q^2}{2C}\right) = 0$$

となる．

力学系との対応　単振動のエネルギー保存則 $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{const.}$ に上記の置き換え

$$Q \leftrightarrow x, \qquad I \leftrightarrow v, \qquad L \leftrightarrow m, \qquad 1/C \leftrightarrow k$$

を施せば，LC 回路のエネルギー保存則 $\frac{1}{2}LI^2 + \frac{Q^2}{2C} = \text{const.}$ が得られる．

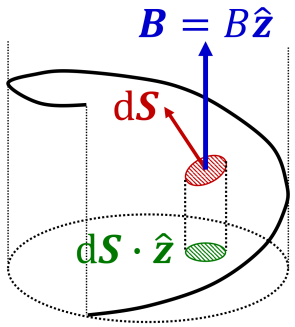


図 149　ソレノイド・コイルの 1 周を貫く磁束

例——ソレノイド・コイルの自己インダクタンス

長さ l，断面積 S，単位長さ当たりの巻数 n のソレノイド・コイルを貫く磁束は 1 巻当たり $\mu_0 nI \times S$ なので，コイル全体で

$$\Phi = (\mu_0 nIS) \times (nl) = \mu_0 n^2 SlI$$

となる．これを自己インダクタンス L の定義式 $\Phi = LI$ と比較すると，ソレノイド・コイルに対しては自己インダクタンスを具体的に

$$L = \mu_0 n^2 Sl$$

と求めることができる．あるいは全巻数 $N = nl$ を用いて表せば $L = \mu_0 N^2 S/l$ である．

参考　コイルの芯に透磁率 μ の鉄を入れたときには

$$B = \mu nI, \qquad L = \mu N^2 S/l$$

のように $\mu_0 \to \mu$ と置き換わる．

注解

ソレノイド・コイルを貫く磁束は 1 巻当たり $\mu_0 nI \times S$ であることについて，直観的にはコイルの 1 周はほぼ平面内にあるので，これを縁に持つ曲面を近似的に断面 S に置き換えることができる．些末な指摘となるが，この点を以下のように厳密に考えることもできる．ソレノイドの軸を z 軸にとると，z 方向の単位ベクトルを $\hat{\boldsymbol{z}}$ としてソレノイド内部の一様な磁束密度は $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$ と表される．そこでコイルの 1 周を縁に持つ適当な曲面をとると，面要素ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ の面要素を貫く磁束は

$$\boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = B(\mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{z}})$$

となり，面要素の断面 S への射影 $\mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{z}}$ を貫く磁束に一致することが見出される (図 149 参照)[*41]．こうしてソレノイド・コイル 1 巻を貫く磁束は断面を貫く磁束 $\mu_0 nI \times S$ に厳密に等しいことが分かる．

[*41] これは 2 つの面要素 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{z}}$ に挟まれた図 149 の筒状領域から磁場がわき出さないことから期待される結果である．

5-10 交流理論

回路素子について

本稿では既に指摘したように (5-4 節，5-9 節)，抵抗とコンデンサーでの電圧降下がそれぞれ $RI, Q/C$ となることや，ソレノイド・コイルのインダクタンス L の表式は静電場・静磁場を仮定して導かれているにも関わらず，これら結果を電荷分布・電流分布が時間変化する場合にも，変化を**準定常的**と見なせる限りで適用できる．実際に回路の電荷・電流分布の変化が準定常的と見なせることを教科書では次のように説明している．すなわち電荷・電流分布の変化の影響は光速で伝わる．そして

- 変化が回路 (典型的な長さ $a \sim 0.1\mathrm{m}$) を伝わる時間　$\tau \sim a/c \sim 10^{-9}\mathrm{s}$
- 交流 (代表的な周波数 $f \sim 10\mathrm{Hz}$) の周期　$T = 1/f \sim 0.1\mathrm{s}$

を比べると $\tau \ll T$ であり，この意味で回路の電荷・電流分布の変化はゆっくりした「準定常的」な変化と見なせる．

注解

このことは基礎方程式のレベルでも説明・裏付けできる．

定常的な電荷分布・電流分布が電磁ポテンシャル

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}, \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

を作ったのに対し，電荷分布・電流分布が時間変化するときの電磁ポテンシャルはある意味で波動的な性格を兼ね備えたものとなる．すなわち場の方程式 (34) は

$$\phi(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{x}',t-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|/c)\mathrm{d}^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}, \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}',t-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|/c)\mathrm{d}^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{45}$$

を特殊解に持つ．これは遅延ポテンシャルと呼ばれ，電荷分布・電流分布の時間変化に伴って時刻 $t' \equiv t - |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|/c$ に位置 $\boldsymbol{x}'$ の電荷素片 $\rho(\boldsymbol{x}',t')\mathrm{d}^3x'$，“電流素片” $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}',t')\mathrm{d}^3x'$ から発生した電磁波が光速 c で伝わり，時刻 t で位置 $\boldsymbol{x}$ に電磁ポテンシャル $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\boldsymbol{x}',t')\mathrm{d}^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}, \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}',t')\mathrm{d}^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$ を作ることを示唆している [2, pp.178–180] [10, pp.287–288].

さて，電気回路の近くの観測位置 $\boldsymbol{x}$ に興味がある場合，回路の位置 $\boldsymbol{x}'$ における電荷・電流の影響が位置 $\boldsymbol{x}$ に伝わるのに要する時間 (遅延時間)$\tau = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|/c$ は (電荷・電流分布の変化を特徴付ける時間スケール T に比べて) 小さいとして無視することができ，このとき遅延ポテンシャル (45) は静電場・静磁場のポテンシャルに帰す．

交流について

$$\text{交流電流：}\quad I(t) = I_0\sin(\omega t+\alpha), \qquad V(t) = V_0\sin(\omega t+\beta).$$

交流では $f = \omega/2\pi$ を「振動数」ではなく，慣習的に「**周波数**」と呼ぶ．

消費電力と実効値

「電気を使う」とは正確にはエネルギーを消費することであり，交流の周期に比べて長い時間にわたって消費電力を平均した**平均消費電力**

$$P = \overline{I^2 R} = {I_0}^2 R\overline{\sin^2(\omega t + \alpha)} = \frac{{I_0}^2 R}{2}, \qquad P = \frac{\overline{V^2}}{R} = \frac{{V_0}^2}{R}\overline{\sin^2(\omega t + \beta)} = \frac{{V_0}^2}{2R}$$

に興味が持たれる．

これと同じ電力を与える直流電流 I_{eff}，直流電圧 V_{eff} を**実効値**と呼ぶ．すなわち ${I_0}^2 R/2 = {I_{\mathrm{eff}}}^2 R$, ${V_0}^2/R = {V_{\mathrm{eff}}}^2/R$ より

$$I_{\mathrm{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \qquad V_{\mathrm{eff}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}.$$

注解

- 消費電力が $P = I^2 R$，$P = V^2/R$ と表されるのは Ohm の法則が成り立つ場合に限られる (5-4 節)．しかしこの点は以降の議論に影響しない．
- $\overline{\sin^2(\omega t + \alpha)} = 1/2$ とその周辺議論について付録 C.16 にまとめてある．

インピーダンス

直流抵抗の概念の拡張として，交流に対して**インピーダンス**

$$Z = \frac{V_{\mathrm{eff}}}{I_{\mathrm{eff}}} = \frac{V_0}{I_0}$$

を定義する．

注解

要するにインピーダンスは，交流の場合にも電流と電圧の (実効値の) 関係を Ohm の法則の形に書くために導入された概念に過ぎず，個人的には以降のインピーダンスの公式は覚えるほどのものではないと考える．むしろ基礎的には，各素子に流れる電流を求めるところまでの方が重要ではなかろうか．(本稿では詳しく取り上げないけれど，回路の共鳴にも興味が持たれる．) この点について Feynman も次のように述べている (ただし引用箇所の複素インピーダンスについては後述する) [8, p.317].

> また技術者は $\hat{V}$ と $\hat{q}$ との関係よりもむしろ $\hat{V}$ と $\hat{I}$ との関係を知りたがる．[ハットは物理量の複素表示であることを表す．] その理由はただ，そちらになれているからというだけのことにすぎない．(中略) $R + i\omega L + \dfrac{1}{i\omega C}$ という量は複素数であって，電気工学においては非常によく使われるので**複素インピーダンス** $\hat{Z}$ という名前がついている．したがって $\hat{V} = \hat{Z}\hat{I}$ と書くことができる．技術者がこのようにしたがるのは，彼らが若い頃に少しばかりものを習ったからである：彼らは，抵抗と直流のことしか知らないときに，抵抗に対して $V = RI$ が成り立つということを習った．今や彼らはもっと勉強して交流回路を取り扱うようになったのだが，前のことがあるので，方程式が同じような形をしていてもらいたいのである．そこで彼らは $\hat{V} = \hat{Z}\hat{I}$ と書くのだが，唯一の違いは，抵抗がもう少し複雑なもの，すなわちある複素量でおきかえられたということである．

以上の引用箇所は筆者の言いたいことを雄弁に語ってくれているけれど，やや技術者を小馬鹿にしたような言い方であることは否めない (それが小気味良くもあるのだが)．そのような記述はこれだけに留まらない．Feynman は技術者の用いる記号の書き方についても，次のように述べている [8, p.317].

> まず電気工学では，$\sqrt{-1}$ をあらわすのに i の代［わ］りに j が一般的に使われている．(ともかく i は電流でなければならない！) (中略) というわけで，彼らは，世界中の他の人たちがみな虚数に使っている符号 i は使えない，それには j を使うのだと強情を張る；Z という文字も R にするのだと強情を張らないのはまさに奇跡である！

RCL 並列回路

RCL 並列回路に対して図 150 のように各素子を流れる電流 $i_{\mathrm{R}}, i_{\mathrm{C}}, i_{\mathrm{L}}$ を定義すると，**回路の方程式**は

$$E = i_{\mathrm{R}} R = \frac{Q}{C} = L\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t}$$

となる．本稿では物理量の複素表示 (付録 C.6) を採用して，交流電源の起電力を $E = V_0 e^{i\omega t}$ と書く．ただし時間の原点を適当にとって，一般性を失うことなく実数の振幅 V_0 を考える．すると電流は以下のように求まる．［交流電圧と同じ周波数で振動するけれど，位相はずれ得る．］

- 抵抗
  - 電流　$i_{\mathrm{R}} = \dfrac{V_0}{R} e^{i\omega t}$.
  - インピーダンス　抵抗 R そのもの．
- コンデンサー
  - 電流　$i_{\mathrm{C}} = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = i\omega C V_0 e^{i\omega t}$.
    位相は交流電圧に対して $\pi/2$ だけ進んでいる．
  - インピーダンス (**リアクタンス**と呼ばれる)　$X_{\mathrm{C}} = \dfrac{1}{\omega C}$.
    コンデンサーでは電流の変化がゆるやかな (ω が小さい) ほど，電流は流れにくい．
- コイル
  - 電流　$i_{\mathrm{L}} = \displaystyle\int^t \frac{E}{L}\mathrm{d}t = -i\frac{V_0}{L\omega} e^{i\omega t} + \mathrm{const.}$
    位相は交流電圧に対して $\pi/2$ だけ遅れている．
  - “積分定数” const は「物理的には回路に電源の起電力 E と無関係な一定電流が流れていることを意味するが，実際にはそのような電流は，あったとしても導線にわずかにある抵抗でやがて減衰するから，交流理論では考えなくてよい」(p.234).
    ［これは力学系において系の固有振動は摩擦により減衰し，
    十分時間が経過すると外力による強制振動だけが生き残るのと同様である (付録 C.6 参照).］
  - インピーダンス (**リアクタンス**と呼ばれる)　$X_{\mathrm{L}} = L\omega$.
    コイルでは電流の変化が素早い (ω が大きい) ほど，電流は流れにくい．
    ［この結果は自己誘導起電力に関する 5-9 節の議論から理解できる．］

以上より全電流は

$$I = i_{\mathrm{R}} + i_{\mathrm{C}} + i_{\mathrm{L}} = \left(\frac{1}{R} + i\omega C - \frac{i}{L\omega}\right) E$$

と表される．

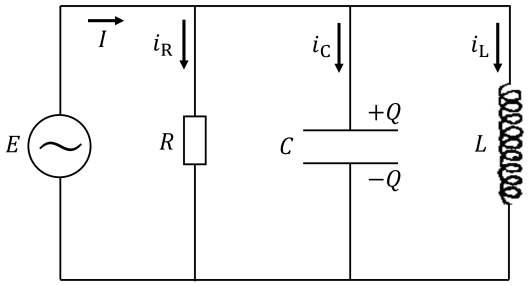


図 150　RCL 並列回路

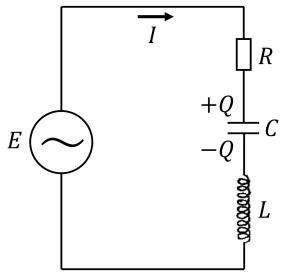


図 151　RCL 直列回路

- 両辺の絶対値をとると

$$V_0 = ZI_0, \qquad Z = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{L\omega}\right)^2}} : \textbf{RCL 並列回路のインピーダンス}$$

を得る．[LC 並列回路では $R \to \infty$ とする ($R \to 0$ ではない)．]

- 両辺の位相を比べると，電流 I の位相は交流電圧 E に対して

$$\arctan \frac{\omega C - \frac{1}{L\omega}}{1/R}$$

だけ進んでいることが分かる．

定電流電源 (I_0 したがって I_{eff} が一定) の場合，V_0 したがって V_{eff} は最大となるのは

$$\omega C - \frac{1}{L\omega} = 0, \qquad \therefore \omega = \omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

のときである．このときを**並列共振**といい，

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

を**共振周波数**という．このとき特に $i_{\mathrm{C}} + i_{\mathrm{L}} = 0$ となるので，LC 間の電流は LC 間だけで流れ，電源からの電流は R だけに流れることになる［また $Z = R$ である］．

RCL 並列回路のエネルギー保存則

$$EI = {i_{\mathrm{R}}}^2 R + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}L{i_{\mathrm{L}}}^2\right).$$

なお**電力は抵抗だけで消費される．**

エネルギー保存則の導出

$$EI = E(i_{\mathrm{R}} + i_{\mathrm{C}} + i_{\mathrm{L}})$$

における右辺の各項に回路の方程式を代入して E を書き換えると

$$\begin{aligned} EI =& {i_{\mathrm{R}}}^2 R + \frac{Q}{C}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + Li_{\mathrm{L}}\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} \\ =& {i_{\mathrm{R}}}^2 R + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}L{i_{\mathrm{L}}}^2\right) \end{aligned}$$

を得る．

RCL 直列回路

図 151 のような RCL 直列回路に対して**回路の方程式**は

$$\begin{aligned} E =& L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI + \frac{Q}{C} \\ =& L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} \end{aligned}$$

となる．本稿では物理量の複素表示 (付録 C.6) を採用して，再び交流電源の起電力を $E = V_0 e^{i\omega t}$ と書く (V_0 は実数)．これに対して解を $Q(t) = \tilde{Q}_0 e^{i\omega t}$ の形に仮定すると ($\tilde{Q}_0$ は複素振幅)，

$$V_0 = \left\{ L(i\omega)^2 + R(i\omega) + \frac{1}{C} \right\} \tilde{Q}_0$$

を得る．

$$I(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q(t) = \tilde{I}_0 e^{i\omega t}, \qquad \tilde{I}_0 = i\omega\tilde{Q}_0 : \text{複素振幅}$$

を用いて電流との関係に書き換えると

$$V_0 = \hat{Z}\tilde{I}_0, \qquad \hat{Z} = i\omega L + R + \frac{1}{i\omega C}$$

となる．この $\hat{Z}$ が本節の初めに引用した複素インピーダンスである [8, pp.316–317]．

- 両辺の絶対値をとると

$$V_0 = ZI_0, \qquad Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} : \textbf{RCL 直列回路のインピーダンス}$$

  を得る．
  - $\omega \to 0$ のとき　$I_{\mathrm{eff}} \sim C\omega V_{\mathrm{eff}} \to 0$ に従ってコンデンサーは電流を通しにくくなる．
  - $\omega \to \infty$ のとき　$I_{\mathrm{eff}} \sim V_{\mathrm{eff}}/L\omega \to 0$ に従ってコンデンサーは電流を通しにくくなる．
    ［並列の場合と同様の結果である．］
- 両辺の位相を比べると，電流 I の位相は交流電圧 E に対して

$$\arctan \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

  だけ遅れていることが分かる．

定電圧電源 (V_0 したがって V_{eff} が一定) の場合，

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0, \qquad \therefore \omega = \omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

で I_0 したがって I_{eff} は最大である (I_{eff} の最大値は V_{eff}/R)．［並列回路に対して I_{eff} が一定の下で V_{eff} の最大性を考えたのとは対照的である．］このときを**直列共振**といい，

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

を**共振周波数**という．

RCL 直列回路のエネルギー保存則

$$EI = I^2R + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2\right).$$

やはり電力は抵抗だけで消費される．

注解

前節でも部分的に見たように，回路の方程式と力学系の運動方程式との間には数学的な類似性がある．その対応関係を改めて以下にまとめておく：

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F \quad \leftrightarrow \quad L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = E.$$

相互誘導と相互インダクタンス

コイル C_1 に電流 I_1 を流したときに生じる磁束密度の一部は，近接する別のコイル C_2 も貫く．よってコイル C_1 を流れる電流 I_1 の変化 $\mathrm{d}I_1/\mathrm{d}t$ は，それに比例した大きさ

$$|V_1| = L_1\left|\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}\right|, \qquad |V_2| = M_{21}\left|\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}\right|$$

の起電力をそれぞれコイル $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ にもたらす．同様にコイル C_2 を流れる電流 I_2 の変化がコイル $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ にもたらす起電力の大きさは

$$|V_1{}'| = L_2\left|\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}\right|, \qquad |V_2{}'| = M_{12}\left|\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}\right|$$

と表される．実は係数には $M_{12} = M_{21}$ の関係がある (証明は付録 D.29)．そこで

$$M_{12} = M_{21} \equiv M$$

を相互インダクタンスと呼ぶ．

- 磁束密度が漏れず，2 つのコイル $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ (巻数 N_1, N_2) を同一の磁束密度が貫く場合

$$M^2 = L_1L_2 \tag{46}$$

  が成り立つ (導出は下記)．
- 一般には磁束の漏れがあり，

$$M^2 \leq L_1L_2$$

  となる．［コイルを無限に離せば $M = 0$.］

上式 (46) の導出　コイル $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ の起電力は巻数に比例し，1 巻あたりの磁束を ϕ と書くと，その比は

$$\left|\frac{\mathrm{d}(N_1\phi)}{\mathrm{d}t}\right| : \left|\frac{\mathrm{d}(N_2\phi)}{\mathrm{d}t}\right| = N_1 : N_2$$

となることが分かる (導き方より，これは両方を電流が流れている場合にも正しい)．よって

- コイル C_1 に電流 I_1 を流したとき

$$|V_1| = L_1 \left|\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}\right|, \qquad |V_2| = M \left|\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}\right|$$

より

$$L_1 : M = N_1 : N_2.$$

- コイル C_2 に電流 I_2 を流したとき

$$|V_1{}'| = M \left|\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}\right|, \qquad |V_2{}'| = L_2 \left|\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}\right|$$

より

$$M : L_2 = N_1 : N_2.$$

以上より式 (46):

$$M^2 = L_1 L_2$$

を得る．

5-11 マックスウェルによるまとめと電磁波

5-0 節では Ampère-Maxwell の法則における変位電流の項を考慮して初めて，Maxwell 方程式から電荷保存則が保証されることを示した．さらに変位電流の項を含む正しい Maxwell 方程式は Lorentz 変換に対して共変的となることにも言及した．これらの議論は変位電流の重要性を決定的にする．ここでは教科書に沿って，Ampère-Maxwell の法則における変位電流について別の角度から検討・再確認しよう．

- 静電場に対する Coulomb の法則と静磁場に対する Biot-Savart の法則の対称性［類似性］．
- 電場がゼロで磁場だけがある座標系で粒子には Lorentz 力 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ が働く．
  すると粒子の静止系では $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}/q = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ の電場があることになる．
  注解　ここでは 2 つの座標系で粒子に働く力 $\boldsymbol{F}$ の不変性を要求したことになる．力が不変であることは (一般には力がベクトル成分として変換することは)，粒子の運動の予言が座標系に依らないために必要とされることであり，逆に電磁場が電磁場テンソルの成分として変換し，それ故「$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ は座標変換で互いに移り変わる 1 個の場の別々の現れ」(p.240) となることから運動方程式の共変性が保証される (付録 D.26 参照)．

以上の 2 点より電場と磁場には密接な関係があると期待される．そうであるならば電磁誘導において磁場の変化が電場を生み出すのとは逆に，電場の変化は磁場を生み出し得るのではないかと想像される．

Maxwell は次のような考察から電場の変化が磁場を生み出すという結論に達した．図 152 に示すようなコンデンサーの充電過程を考えると，導線の長い直線状の部分 $\mathrm{AA}', \mathrm{BB}'$ には電流が流れているから，その周りには磁場が作られている．しかし AB 間では電流が流れていないから，一見するとその周りで磁場も途切れるという不自然な結論に達しかねない．

注解　しかしながら——この注解は却って混乱を招くかもしれないが——実際には (以下で説明される変位電流の作る磁場を度外視しても) $\mathrm{AA}', \mathrm{BB}'$ の直線電流が Biot-Savart の法則に従って作る磁場は空間的に連続的に変化し，AB の周りで磁場が不連続的に「途切れる」ことはないと考えられる．

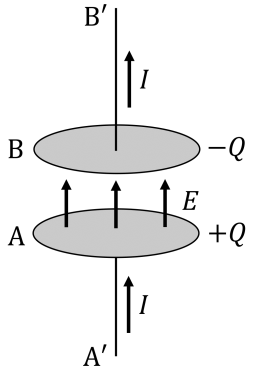


図 152　充電中のコンデンサーにおける極板間の変位電流

そこで Maxwell はコンデンサーの充電時における AB 間の電場の変化が，導線を流れる電流と同様に周りに磁場を作ると考え，これを「**変位電流**」と名付けた．実際，極板間の電場 $E = Q/\varepsilon_0 S$ の変化と導線を流れる電流 I の間には定量的な関係

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}(SE)}{\mathrm{d}t}$$

があり，これを電場が非一様な場合に一般化すると，正確には変位電流は

$$\varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathrm{S}} (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}S$$

で定義されることになる (5-0 節も参照).

注解　こうして教科書では Maxwell の変位電流の法則

$$\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathrm{S}} (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}S$$

(Ampère-Maxwell の法則から真の電流の項を除いたもの) に到達し，

1. 電場についての Coulomb の法則
2. 磁場についての Biot-Savart の法則
3. Faraday の電磁誘導の法則
4. Maxwell の変位電流の法則

の 4 つを電磁気学の原理としている．もちろん受験参考書という配慮・制約からこのような説明になっていることは十分理解できるし，またそれを成功させた著者の力量には敬意を表するものではあるものの，やはり 5-0 節に挙げた Maxwell 方程式の方がより多くのことを含んでおり，原理として完璧である．このことは端的には，Coulomb の法則と Biot-Savart の法則が静的な場にしか適用できないということから理解される．

電磁波

5-0 節参照.

注解　「(5-62)［Ampère の法則[*42]］から (5-64)［Maxwell の変位電流の法則］への議論は飛躍だから，原理

[*42] 本稿では Ampère の定理とは呼ばず，敢えて Ampère の法則と呼ぶ．1-1 節の注解参照.

IV(5-64) はこの限りでは**仮説**であり，それが正しいかどうかは，そこから導かれる結論が実験的に立証されるか否かによって判定される」(p.242) について，この機に改めて確認しておくと，未知の原理を探り当てるボトムアップ式の議論は必然的に飛躍——積極的な飛躍——を含むことになる．逆に原理から法則・現象を説明するのは演繹的な過程である．また経験科学は帰納的推論の産物であるため，絶対確実な真理ではあり得ない (1-1 節とその注解を参照).

電磁波の伝播速度についても 5-0 節で既に導出してある．以下では教科書の説明に沿って改めて電磁波の伝播速度を導く．この議論はプリミティブで難点もあり演繹的とは言い難いけれど，教育的である．

1. 図 153 のように x 軸に沿って運動する電荷 Q は原点を通過した瞬間,
   距離 r 隔たる y 軸上の点 P に $+y$ 方向の電場 $E = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$ を作っている．
   ［ただし運動中の電荷が作る電場は Coulomb 電場とは異なり，これは厳密には正しくない (5-0 節).］
   またこの瞬間の電荷の速度を v とすると,
   点 P には Biot-Savart の法則に従って $+z$ 方向の磁束密度 $B = \mu_0 Qv/4\pi r^2$ も作られる．
   ［こちらも 1 個の電荷の運動が作る磁場は非定常的と考えられるため,
   Biot-Savart の法則を適用することにも厳密には問題がある.］
   場が電荷によって作られたものであることを忘れてしまえば,
   速度 $\boldsymbol{v}$ で“動く”$\boldsymbol{E}$ は，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{E}$ に垂直な磁束密度
   $$B = \varepsilon_0 \mu_0 v E \tag{47}$$
   を作ると考えられる［仮説］.
2. 次に図 154 のように $\boldsymbol{B}$ が速度 $\boldsymbol{v}$ で“動いている”場合を考えよう．
   点 P の位置に［試験］電荷 q が［瞬間的に］静止しているとする．
   $\boldsymbol{B}$ とともに動く座標系では電荷 q は速度 $-\boldsymbol{v}$ を持つから,
   ［この座標系でも同一の $\boldsymbol{B}$ があると仮定すると］電荷は z 方向の Lorentz 力 $\boldsymbol{F} = q(-\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{B}$ を持つ．
   ［もとの座標系でも粒子には同じ力 $\boldsymbol{F}$ が働かなければならないけれど,］
   もとの座標系では粒子は静止しており Lorentz 力は働かないから,
   z 方向の電場 $E = vB$ があることになる．
   そこで速度 $\boldsymbol{v}$ で“動く”$\boldsymbol{B}$ は，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{B}$ に垂直な磁束密度
   $$E = vB \tag{48}$$
   を作ると考える．

［付録 D.26.7 における電磁場の変換則を併せて参照されたい.］これら 2 つのメカニズムの繰り返しで $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ が互いを生み出し速度 v の波として伝播するには，$\boldsymbol{B}$ の作る $\boldsymbol{E}$ が $\boldsymbol{B}$ を生むもとの $\boldsymbol{E}$ に一致する，すなわち式 (47)，式 (48) が両立すれば良いから，電磁波の伝播速度

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

を得る．

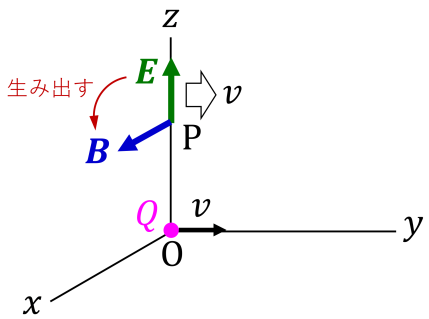


図 153　電場の“運動”が磁場を作る

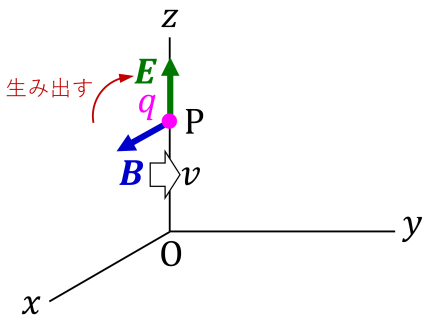


図 154　磁場の“運動”が電場を作る

電磁場のエネルギー密度

コンデンサーのエネルギー U_{C} を極板間の体積 Sd に存在する一様電場の持つエネルギーと解釈すると，電場のエネルギー密度は

$$u_{\mathrm{C}} = \frac{U_{\mathrm{C}}}{Sd} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

と表される．

同様にソレノイド・コイルのエネルギー U_{L} をコイル内部の体積 Sl に存在する一様な磁束密度の持つエネルギーと解釈すると，磁束密度のエネルギー密度は

$$u_{\mathrm{L}} = \frac{U_{\mathrm{L}}}{Sl} = \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

と表される．

［一般に空間の持つエネルギーの密度は $u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$ で与えられると考えると，］**電磁波では** $B = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}E$ の関係があるから，電磁波のエネルギー密度は

$$u = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

と表される．

導出　u_{C} の表式は $U_{\mathrm{C}} = CV^2/2$，$C = \varepsilon_0 S/d$，$V = Ed$ による．
u_{L} の表式は $U_{\mathrm{L}} = LI^2/2$，$L = \mu_0 N^2 S/l$ (5-9 節)，$B = \mu_0(N/l)I$ による．

注解　一般に電磁場のエネルギーの密度は $u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$ で与えられる (付録 D.30 参照)．
電束密度 $D = \varepsilon_0 E$，磁場 $H = B/\mu_0$ を用いると

$$u_{\mathrm{C}} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0}, \qquad u_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\mu_0 H^2$$

と表される．

第 6 章 光学

6-1 空間内を伝わる波の表現

はじめに

本章では光 (電磁波) について，

波動一般に共通した光の性質　→　電磁波としての特殊性 (偏光)

の順に説明する．

波数ベクトルと同位相線，平面波・球面波

単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ の方向に伝播する波長 λ の波に対して，**波数ベクトル**

$$\boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\boldsymbol{n}$$

を定義する．

平面波は波の進行方向に垂直な平面を**同位相面** (**波面**) に持ち，**波は波面に垂直に進む**．そのような波の変位は

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = a\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \delta)$$

と表される．実際，同位相面の式 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \delta = \mathrm{const.}$ は波の進行方向 $\boldsymbol{k}$ に垂直な平面の方程式になっており，進行方向に沿う座標 $x' = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}$ を導入すると，1 次元の正しい正弦進行波の式

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = a\sin(kx' - \omega t + \delta) = a\sin\left\{\frac{2\pi}{\lambda}(x' - ct)\right\}, \qquad c = \frac{\omega}{k}$$

が再現される［4-1 節参照］．

他方，点波源から出た波は，波源を中心とする球面を同位相面に持つ**球面波**として広がり，その変位は

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = a\sin(kr - \omega t + \delta)$$

と表される．［位相を一定と置くと，波面として球面 $r = ct + \mathrm{const}, c \equiv \omega/k$ を得る．球面波の振幅の減衰については付録 C.11 参照．］

注解

読者の便宜のために，4-1 節の関係を改めて書いておく：

$$c = \frac{\omega}{k}, \qquad k = \frac{\omega}{c}, \qquad \omega = ck.$$

波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ は (単色) 平面波の式

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = \mathrm{Re}\{ae^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}\} \qquad (a \text{ は複素振幅})$$

において，空間における変位 $\boldsymbol{r}$ を波の位相の変化 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ に対応付ける．波数 $k = 2\pi/\lambda$ は振動数 $\omega = 2\pi/T$ (T は周期) と並んで，理論物理学において重要な役割を演じる．

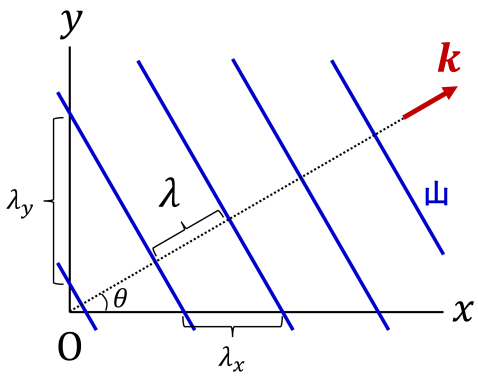


図 155　xy 面上を伝播する平面波

例―― x 軸，y 軸に沿う波長

図 155 のように xy 平面上を $\boldsymbol{n} = (\cos\theta, \sin\theta)$ の方向に伝わる波長 λ の平面波の x 軸，y 軸に沿う波長はそれぞれ

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{\cos\theta}, \qquad \lambda_y = \frac{\lambda}{\sin\theta}$$

である．

この結果についての教科書の説明は，考察を加えつつ次のようにまとめられる．波数ベクトル $\boldsymbol{k} = (2\pi/\lambda)(\cos\theta, \sin\theta)$ を用いて波の変位を

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = a\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \delta)$$

と表すと，例えば x 軸上の位置 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x$ (ただし $\boldsymbol{e}_x$ は x 方向単位ベクトル) での変位は

$$\psi(\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x, t) = a\sin(k_x x - \omega t + \delta), \qquad k_x = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{e}_x$$

と表されるから，波数ベクトルの x 成分 $k_x = k\cos\theta$ が x 軸に沿って見た波長

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x} = \frac{\lambda}{\cos\theta}$$

を与えることになる．［もっとも，波長は図 155 から幾何学的に求めるのが容易である．］

6-2 波の回折

ホイヘンスの原理

音波について我々は経験的に良く知っているように，一般に波は衝立のような障害物の裏側に回り込む．これを**回折**という．本節では **Huygens** (**ホイヘンス**) **の原理**に基づいて回折を調べる．Huygens の原理によれば波が伝播する際，［ある時刻の］波面の各点を点波源とする球面波の重ね合わせによって新しい波面が作られる (図 156 参照)．

注解

Huygens の原理は波動論から導くことができる (付録 D.31，付録 D.34) [20, pp.166–167].

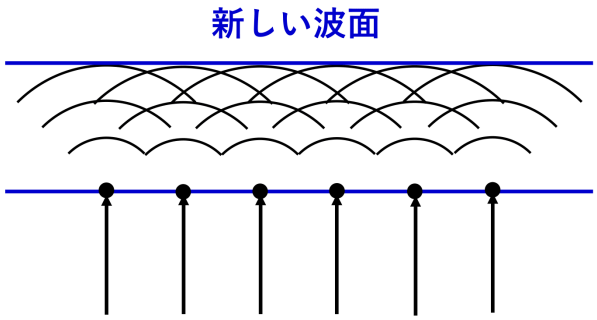


図 156　Huygens の原理 (平面波の場合)

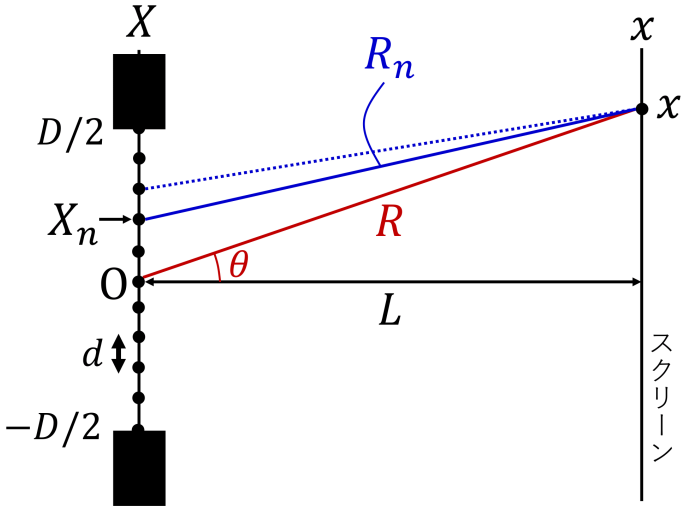


図 157　単スリットの回折

単スリットの回折：問題の設定

図 157 のように 1 本の幅 D の無限に長い単スリットに対して単色平面波 (角振動数 ω，波数 $k = \omega/c$) が垂直に入射したとき，スリットから垂直距離 L だけ隔たるスクリーン上に作られる光の強度分布を調べよう．以下，教科書の内容を多少アレンジしつつまとめる．

まず我々が求めたいのは電磁場のエネルギー密度であり，また電磁波に対してはエネルギー密度を $W = \varepsilon_0 E^2 = B^2/\mu_0$ として良いから (5-0 節)，$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ のいずれかのある成分を Ψ と書くと，エネルギー密度は Ψ^2 に比例すると考えられる．そこで以降では光の波として場 Ψ を考えれば十分である．

次に開口部分を N 個の点光源の集まりと見なし，Huygens の原理に従いスクリーン上の合成波を求める．(最後に $N \to \infty$ とする．) 図 157 のようにスリットの中心を原点とする X 軸を開口に沿って，スリットの正面を原点とする x 軸をスクリーンに沿って導入し，場の観測位置の座標を x とする．光源の間隔

$d = D/(N-1)$ を用いると n 番目の点光源の位置は

$$X = X_n \equiv -\frac{D}{2} + nd \qquad (n = 0, 1, \cdots, N-1)$$

と表される．また n 番目の点光源から観測点までの距離を R_n とすると，ここから発せられる球面波の観測位置における値は

$$\Psi_n = \frac{a}{R_n}\sin(kR_n - \omega t + \delta)$$

と表される．ただし本稿ではひとまず $1/R_n$ に従う振幅の減衰を考慮した (付録 C.11 参照)．また平面波の垂直な入射を考えているため，スリット上の各点で場が共通の値を持つことを考量した．あるいは物理量の複素表示 (付録 C.6 参照) を利用すれば，a を複素振幅として

$$\Psi_n = \frac{a}{R_n}e^{i(kR_n - \omega t)}$$

と表すこともできる．ここでスリットの中央 $X = 0$ から観測点までの距離を $R \equiv \sqrt{L^2 + x^2}$ と書き，$\sin\theta = x/R$ によってスリットの中央から観測位置を見る角度 θ を導入する．このとき $L \gg D \geq |X_n|$ の意味でスリットの幅が狭い場合を考えると，

$$R_n = \sqrt{L^2 + (x - X_n)^2} = R + \frac{1}{2}\frac{{X_n}^2 - 2xX_n}{R} + \cdots \simeq R - \frac{xX_n}{R}$$

と近似される．分母の R_n は R に置き換えて近似してしまうと，求める合成波は

$$\begin{aligned}
\Psi =& \frac{a}{R}\sum_{n=0}^{N-1}\sin\left\{k\left(R - \frac{xX_n}{R}\right) - \omega t + \delta\right\} \\
=& \frac{a}{R}\sum_{n=0}^{N-1}\sin(n\alpha + \phi) \qquad \left(\phi \equiv k\left(R - \frac{xD}{2R}\right) - \omega t + \delta, \quad \alpha \equiv -\frac{x}{R}d = -d\sin\theta\right) \\
\text{または}\quad \Psi =& \frac{a}{R}\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left\{ik\left(R - \frac{xX_n}{R}\right) - \omega t\right\} \\
=& \frac{a}{R}e^{i(kR - \omega t)}\exp\left(\frac{i}{2}kD\sin\theta\right)\sum_{n=0}^{N-1}e^{-inkd\sin\theta}
\end{aligned}$$

と表される．

- 分母では $R_n \simeq R$ と近似することについて．
  指数関数内の R_n の近似において捨てた項 ${X_n}^2/2R$ が $1/R$ に比例しているのに対し，
  分母の R_n の近似
  $$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{{X_n}^2 - 2xX_n}{R^2} + \cdots\right) \simeq \frac{1}{R}$$
  において捨てた項は $1/R^3$ に比例していると考えれば，R の冪が異なることに注意する．
- 位相差について．
  合成波 $\Psi = \sum_n \Psi_n$ の式における位相差 $d\sin\theta$ は，スクリーンが (幅 D に比べて) 遠方にあるため，
  各光源から観測点へ向かう直線 (波の伝播方向に一致) を
  近似的に θ 方向の平行線と見なしたときの径路差となっている (図 158 参照)．

★ いずれも Taylor 展開に関する付録 C.5 を参照．

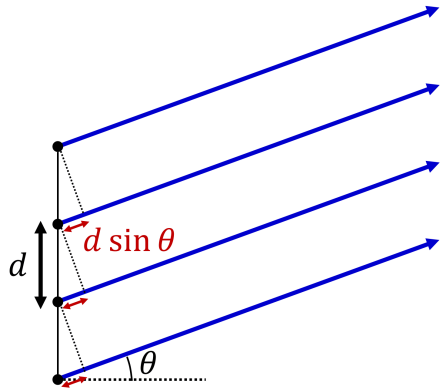


図 158　単スリットの回折

もっとも以降では $x \ll R$ の観測位置だけを考えることにすれば，分母の R を観測位置に依らない一定値 L で近似できるから，場 Ψ の $1/R$ 依存性を無視して良い[*43]．そこで $a/R \to a$ と改める (これに伴い a の次元は変わる)：

$$\Psi = a\sum_{n=0}^{N-1}\sin(n\alpha+\phi), \qquad \text{または} \qquad \Psi = ae^{i(kR-\omega t)}\exp\left(\frac{i}{2}kD\sin\theta\right)\sum_{n=0}^{N-1}e^{-inkd\sin\theta}. \tag{49}$$

合成振動の計算の仕方

前節の冒頭で述べたように，場のエネルギー密度は Ψ^2 に比例する (複素表示の場合 $|\Psi^2|$ に比例)．これは時間的に変動しているけれど，興味あるのは時間平均をとって得られるエネルギーの空間分布 (強度分布) である．そこで上の和を計算して具体的に合成波 Ψ を求めると，光の強度分布として

$$I(\theta) = I(0)\left|\frac{\sin\{N\pi d(\sin\theta)/\lambda\}}{N\sin\{\pi d(\sin\theta)/\lambda\}}\right|^2 \tag{50}$$

を得る ($\lambda \equiv 2\pi/k$．$N \to \infty$，したがって $d \to 0$ の極限をとると

$$I(\theta) = I(0)\left|\frac{\sin\{\pi D(\sin\theta)/\lambda\}}{\pi D(\sin\theta)/\lambda}\right|^2 \tag{51}$$

となる．［この近似では光の強度はスクリーンまでの距離 L に依らず，向き θ だけに依ることに注意する．］この結果の解釈は次節で行うことにし，以下ではこれらの結果を導こう．

[*43] 以下の結果から理解されるように $x = 0$ の近くの強度分布が重要であり，また振幅の減衰の因子 $1/R$ を考慮しても強度分布の定性的な特徴は変わらない．

■式 (50) の導出——三角関数の和として計算　まずは教科書にならって式 (49) の和を計算する．やや技巧的であるが，三角関数の和は $\sin(\alpha/2)$ を掛けると

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sum_{n=0}^{N-1}\sin(n\alpha+\phi) =& \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\left\{\cos\left(\frac{2n-1}{2}\alpha+\phi\right)-\cos\left(\frac{2n+1}{2}\alpha+\phi\right)\right\}\\ =&\frac{1}{2}\left\{\cos\left(-\frac{1}{2}\alpha+\phi\right)-\cos\left(\frac{2N-1}{2}\alpha+\phi\right)\right\}\\ =&\sin\left(\frac{N\alpha}{2}\right)\sin\left\{\frac{1}{2}(N-1)\alpha+\phi\right\}\end{aligned}$$

と計算できる．よって合成波は

$$\Psi = a\frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}\sin\left\{\frac{1}{2}(N-1)\alpha+\phi\right\}$$

となる．これを 2 乗し時間変動する項 $\sin\left\{\frac{1}{2}(N-1)\alpha+\phi\right\}$ の平均をとると，強度分布は

$$I(\theta) = \mathrm{const}\times\left|\frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}\right|^2$$

に比例することが分かる．$\theta\to 0$ とすると $I(0)=\mathrm{const}\times N^2$ となるので比例係数 const が定まり[*44]，強度分布の式 (50) を得る ($\alpha/2 = kd\sin\theta/2 = \pi d\sin\theta/\lambda$).

注解　$\sin(\alpha/2)$ の代わりに $\sin\alpha$ を掛けても良い．$\cos(\alpha/2)$ を掛けると

$$\Psi = \frac{\sin(N\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}\cos\left\{\frac{1}{2}(N-1)\alpha+\phi\right\}$$

となり，ここからも再び強度分布の式 (50) が得られる．

■式 (50) の導出——複素表示の利用　物理量の複素表示を利用すれば，式 (49) は無限等比級数和として計算できる：

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1}e^{-inkd\sin\theta} =& \frac{1-e^{-iNkd\sin\theta}}{1-e^{-ikd\sin\theta}}\\ =&\frac{e^{-iNkd\sin\theta/2}}{e^{-ikd\sin\theta/2}}\frac{\sin(Nkd\sin\theta/2)}{\sin(kd\sin\theta/2)}\\ =&\exp\left(-\frac{i}{2}kD\sin\theta\right)\frac{\sin(Nkd\sin\theta/2)}{\sin(kd\sin\theta/2)},\\ \therefore\Psi =& ae^{i(kR-\omega t)}\frac{\sin(Nkd\sin\theta/2)}{\sin(kd\sin\theta/2)}.\end{aligned}$$

強度分布は $|\psi|^2$ に比例し，絶対値の 2 乗をとると時間に依存する位相因子 $e^{i(kR-\omega t)}$ は自動的に取り除かれるので，強度分布の式 (50) を得る ($kd\sin\theta/2 = \pi d\sin\theta/\lambda$).

■式 (50) の導出——図形的解法　$\varphi\equiv -kd\sin\theta$ とおくと求める和は $\sum_{n=0}^{N-1}e^{in\varphi}$ である．$e^{in\varphi}$ は偏角 φ を持つ複素平面上の単位ベクトル $\boldsymbol{A}_n$ に対応することに注目し (付録 C.15)，Feynman は和 $\sum_{n=0}^{N-1}e^{in\varphi}$ の絶対値を合成ベクトルの長さとして次のように求めている [17, pp.43–44]．図 159 のように原点 O を始点としてベクトル $\boldsymbol{A}_0$ を描き，その先端 S を始点としてベクトル $\boldsymbol{A}_1$ を描き，……という作業を繰り返して N 個のベクトル $\boldsymbol{A}_n$ を合成すると，N 辺の多角形が作られる．各中心角はいずれも φ であり，また中心 Q から各頂点までの距離は等しい．それを r とおき三角形 QOT に注目すると，合成ベクトル $\sum_n\boldsymbol{A}_n$ の長さは

$$\overline{\mathrm{OT}} = 2r\sin\frac{N\phi}{2}$$

[*44] この種の極限計算は，直観的には $x\to 0$ のとき $\sin kx\simeq kx$ より

$$\frac{\sin Nx}{\sin x}\simeq\frac{Nx}{x}=N$$

となることから理解される．付録 C.5 を併せて参照．

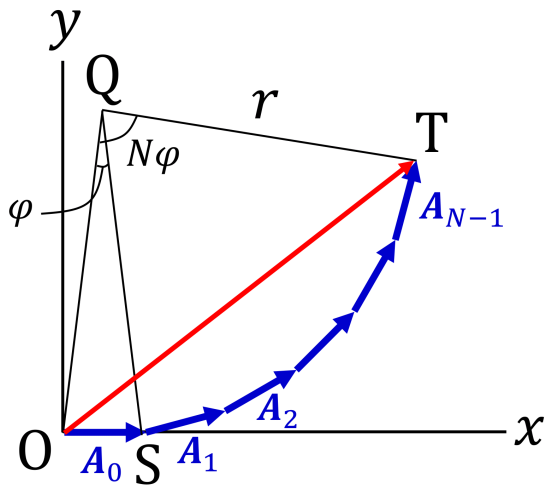


図 159　和 $\sum_{n=0}^{N-1} e^{in\varphi}$ の絶対値を図形的に求める

と表されるから，これは“半径”r を知れば求めることができる．そこで次に三角形 QOS に注目すると

$$\overline{\mathrm{OS}} = 1 = 2r\sin\frac{\phi}{2}$$

だから，

$$\left|\sum_{n=0}^{N-1} e^{in\varphi}\right| = \overline{\mathrm{OT}} = \frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)}$$

が見出される．ここから先の議論は上と同様であり，再び強度分布の式 (50) を得る．

■式 (50) が $N \to \infty$ の極限で式 (51) になることの説明　スリット幅を $D = (N-1)d$ に保って $N \to \infty, d \to 0$ とするとき，直観的には式 (50) の分母は

$$N\sin\{\pi d(\sin\theta)/\lambda\} \simeq N\pi d(\sin\theta)/\lambda = \pi D(\sin\theta)/\lambda$$

となる．これをもう少し厳密に説明するには

$$N\sin\{\pi d(\sin\theta)/\lambda\} = N\{\pi d(\sin\theta)/\lambda\} \times \frac{\sin\{\pi d(\sin\theta)/\lambda\}}{\pi d(\sin\theta)/\lambda} \to \pi D(\sin\theta)/\lambda$$

と書けば良い．

■式 (51) の導出—— Huygens の原理の積分による表現　スクリーンを N 個の点光源に分割せず，直接に強度分布の式 (51) を導出する．そのために積分を用いて Huygens の原理を表現することから始めよう [2, pp.164–166].

光が不透明なスクリーンにあけた孔を通り抜ける場合を考え，開口の周縁を端とする曲面で開口を覆い，曲面の切片 $\mathrm{d}f$ の各々を光源と見なす．そして観測点 P における場は，すべての切片 $\mathrm{d}f$ が作る場の重ね合せによって得られると考える (Huygens の原理)．切片 $\mathrm{d}f$ が点 P に生ずる場は，切片の位置における場 u と，切片の位置での光線方向 $\boldsymbol{n}$ に垂直な平面への切片の射影 $\mathrm{d}f_n$ に比例する．と言うのも，図 160 のように共通の射影 $\mathrm{d}f_n$ を持つ切片 $\mathrm{d}f$ は同じ光線によって貫かれるため，観測点 P における場への影響は同じだから．また切片から点 P までの距離を R とすると，場は e^{ikR}/R という距離 R 依存性を持つ (付録 C.11 参照)．以上より切片 $\mathrm{d}f$ の作る場は $u\frac{e^{ikR}}{R}\mathrm{d}f_n$ に比例し，点 P における場は

$$u_{\mathrm{P}} = a\int \frac{ue^{ikR}}{R}\mathrm{d}f_n$$

と書ける．

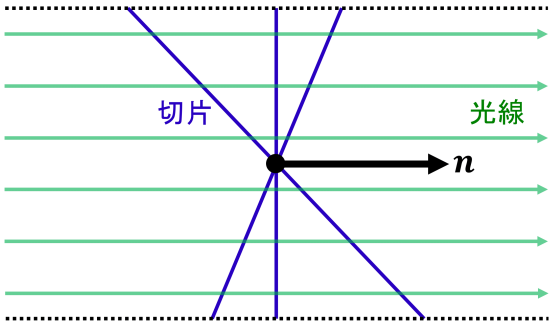


図 160　共通の射影 $\mathrm{d}f_n$ を持つ切片 $\mathrm{d}f$ は同じ光線に貫かれる．

そこで式 (49) の和

$$\Psi = ae^{i(kR-\omega t)} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-ikX_n \sin\theta}$$

を積分

$$\Psi = Ae^{i(kR-\omega t)} \int_{-D/2}^{D/2} e^{-ikX\sin\theta} \mathrm{d}X$$

に置き換えて計算すると

$$\int_{-D/2}^{D/2} e^{-ikX\sin\theta} \mathrm{d}X = \frac{e^{-ikD\sin\theta/2} - e^{ikD\sin\theta/2}}{-ik\sin\theta} = 2\frac{\sin(kD\sin\theta/2)}{k\sin\theta}$$

となる．ただし $a \to A\mathrm{d}X$ と置き換わっており，係数 A と振幅 a は次元が異なることに注意する．ここから先の議論は上と同様であり，強度分布の式 (51) を得る．

単スリット通過光の強度分布

光の強度分布 (51):

$$I(\theta) = I(0) \left| \frac{\sin\{\pi D(\sin\theta)/\lambda\}}{\pi D(\sin\theta)/\lambda} \right|^2$$

の概形は，［軸を無次元化し，θ の代わりに］$D\sin\theta/\lambda$ を横軸として描くと図 161 のようである．［$y = \sin x/x$ のグラフは $y = \pm 1/x$ のグラフの間で振動し，$x \to 0$ のとき $y \to 1$ となる．］分子の $\sin\{\cdots\}$ がゼロになる

$$D\sin\theta = n\lambda \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

の方向 θ では強度 I はゼロになる ($n = 0$ は除外される)．すなわち図 162 のようにスリットを偶数 ($2l$ とおく) に等分割したとき，隣り合う区間を通る光の束が打ち消しあう条件

$$\begin{aligned} \frac{D}{2l}\sin\theta &= \pm\frac{1}{2}\lambda(2m+1), \qquad (l = 1, 2, \cdots, m = 0, 1, 2, \cdots) \\ D\sin\theta &= n\lambda \qquad n \equiv \pm l(2m+1) \end{aligned}$$

を満たす方向 θ では光の強度はゼロになる．ここで $n \equiv \pm l(2m+1)$ は $m = 0$ の場合に限っても全ての整数 $n = \pm 1, \pm 2, \cdots$ をとり得る．

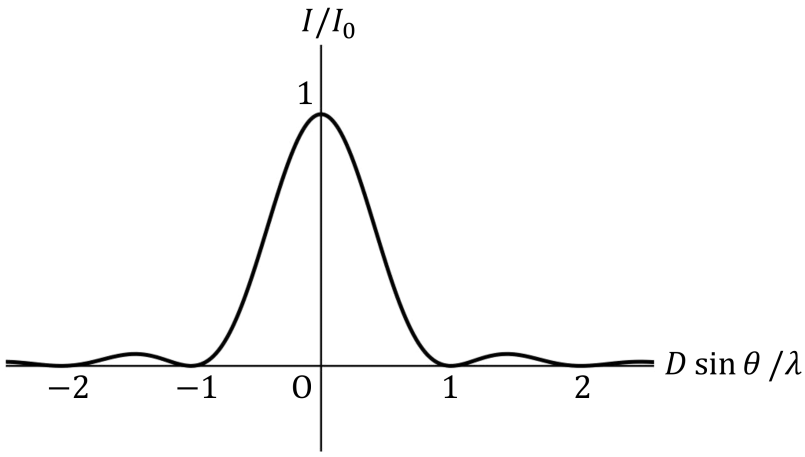


図 161　単スリット通過光の強度分布 ($I_0 \equiv I(0)$)

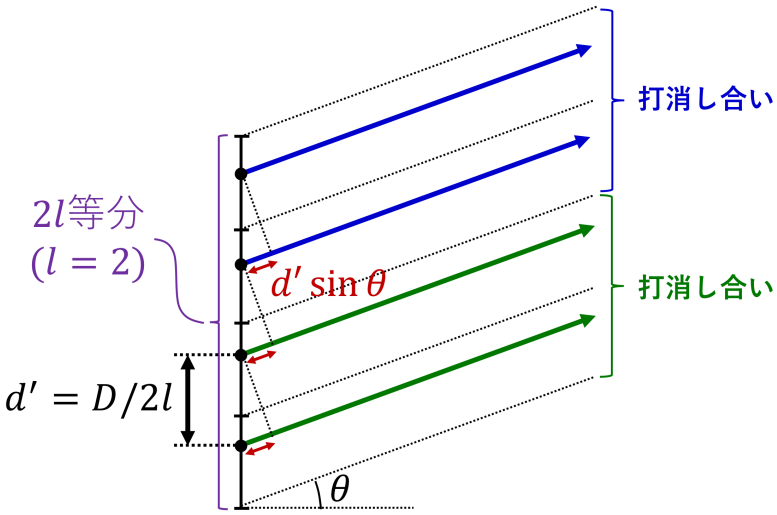


図 162　光の強度がゼロになる方向 θ

結果の解釈——回折

図 161 のように $I=0$ となる最小の方向 $\theta>0$ は $D\sin\theta=\lambda$ であり，光はほとんど

$$|\sin\theta| \le \lambda/D$$

の範囲にしか来ない．実際，$\theta=0$ の隣の極大 ($\lambda < D\sin\theta < 2\lambda$ の極大) の高さは $\theta=0$ のピークの約 1/22 に過ぎない．

注解　$f(x)=\sin x/x$ の極値を与える x は

$\sin x = \pm 1$ となる位置 $x = x_n \equiv \left(\frac{1}{2} + n\right)\pi$ と正確には一致しないことに注意を促しておく：

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}, \qquad \therefore \begin{cases} f'(x) \gtreqless 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \gtreqless \tan x \qquad (\cos x > 0) \\ f'(x) \lesseqgtr 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \lesseqgtr \tan x \qquad (\cos x < 0) \\ f'(x_n) = (-1)^{n+1}/{x_n}^2 \qquad (\cos x_n = 0) \end{cases}$$

よって

- スリットが波長に比べて広いとき ($D \gg \lambda$)
  光の広がる範囲は $|\theta| \ll 1$ となる．すなわち光はほとんど直進する．
  - 雨戸の隙間 ($D \gg \lambda$) から差し込む朝日は直進する．
- スリットが波長に比べて狭いとき ($D < \lambda$)
  光は $\theta = \pm\pi/2$ まで広がり得る (**回折**).
  - 狭いスリットは球面波を発する単一の点波源として振舞う．

注解

■音の回折　「音波は光に比べて桁違いに波長が長いので，……障害物の背後にもまわりこむ」(p.251) について，可聴音 (振動数 $f \lesssim 10^4$Hz) に対して波長 $\lambda = V/f \gtrsim$1cm であり，音波はよく回折する．

■光の回折　目を細めるとまぶたの奥で，それに垂直な方向に光の筋が伸びて見える．

■回折の一般論——波動に対する不確定関係　ここでの結果はより一般に次のように述べることができる．すなわち任意の波の振幅が与えられた時刻に，各軸の方向に目立って変化する距離の大きさを $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ とすると，波動ベクトルは

$$\Delta k_x \gtrsim \frac{1}{\Delta x}, \qquad \Delta k_y \gtrsim \frac{1}{\Delta y}, \qquad \Delta k_z \gtrsim \frac{1}{\Delta z}$$

程度の幅を持つ (付録 D.32 参照)．よって x 軸に沿って進む光のビーム (波長 λ，波数 $k = 2\pi/\lambda$) が Δy 程度の幅を持つとき，実際にはビームは角度

$$\theta_y \sim \frac{\Delta k_y}{k} \gtrsim \frac{1}{k\Delta y} \sim \frac{\lambda}{\Delta y}$$

だけ平均方向からそれる (図 163 参照)．幾何光学の極限 $\lambda \to 0$ では $\theta_y \to 0$ となって光は直進するのに対し，図 163 のスリットが波長程度に短くなると，光の回折が著しくなる．

これはあらゆる波動が数学的・必然的に持つ不確定関係であって，特に場を粒子の波動関数と解釈すると，量子力学によればその Fourier 成分は波数 $\boldsymbol{k}$ 空間 (運動量 $\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$ 空間) の波動関数となるから (h は Planck 定数，$\hbar \equiv h/2\pi$)，これは位置 x と運動量 p の不確定関係 $\Delta x \Delta p \gtrsim h$ に他ならない．

6-3 幾何光学

幾何光学の適用範囲

光の波長に比べて障害物の間隔が十分に大きく，それ故に**回折を無視できるとき**，光は (均質媒質中では) 直進するから**光線**として捉えることができる (**幾何光学**).

本節では波動論における Huygens の原理を用いて幾何光学の諸法則を導く．まず Huygens の原理と幾何光学の前提より次が成り立つ［図 156 を併せて参照］.

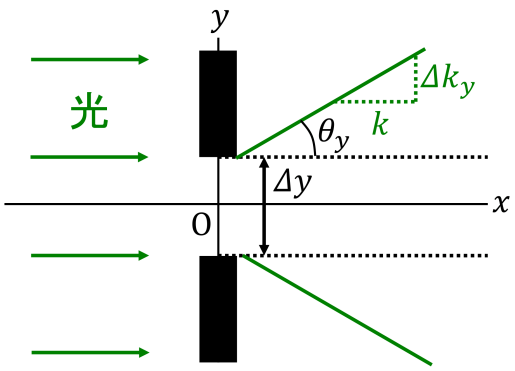


図 163　有限幅 Δy を持つ光のビームの回折

1. 光線の直進性　(均質媒質中を光線は直進する)
2. 光線の逆行性

屈折率

媒質中の光の速度は真空中と異なる．今 2 種類の媒質 I，II を考えて，その中での光速をそれぞれ v_1, v_2 とする．

$$\frac{v_1}{v_2} = n_{12}$$

と書いて媒質 II の媒質 I に対する屈折率 n_{12} を定義すると，これは**媒質と光の振動数のみで決まる定数となる**［注解参照］．さらに真空中の光速 c との比を

$$v_1 = \frac{c}{n_1}, \qquad v_2 = \frac{c}{n_2}$$

と書いて**絶対屈折率** n_1, n_2 を定義すると，

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}$$

となる[*45]．

［屈折率の定義は媒質 II での速度が媒質 I の $1/n_{12}$ 倍に減じることを意味している．このことを覚えておけば十分であり，屈折率の関係 $n_{12} = n_2/n_1$ などを公式として覚えるには及ばない．］

注解——屈折率の起源

ここではそもそも何故屈折率が生じるのかというより根本的な問題を取り上げ，その物理的な機構・メカニズムを説明する [17, pp.61–65]．

図 164 のように電場の x 成分

$$E_{\mathrm{S}} = E_0 e^{i\omega(t-z/c)}$$

を持つ振動数 ω の光が z 軸に沿って $z < 0$ の方から入射し，$z = 0$ に置かれた幅 Δz の薄い板状の媒質を通過したとき，板の後方 $z > 0$ における電場を考える (ただし以下では電場の x 成分を考える)．これは入射電場

[*45] 以下，絶対屈折率を単に屈折率と呼び，特に断りのない限り屈折率は絶対屈折率の意味とする．

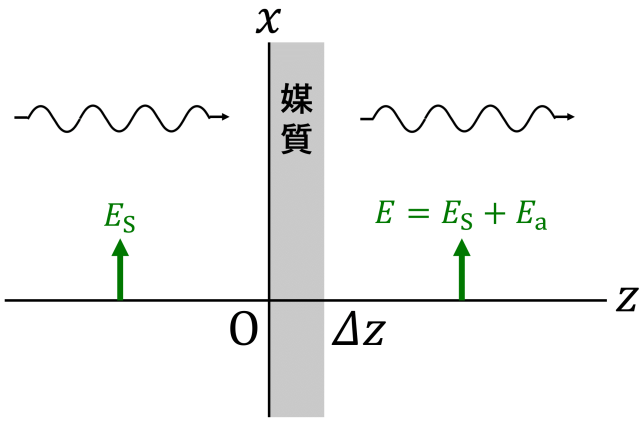


図 164　媒質の層を通過した光は媒質の作る輻射場が合成され，位相が遅れる．これが屈折率の起源である．

E_S と，E_S から力を受けて振動する媒質中の電子が放射 (輻射) する電場 E_a の合成電場 $E = E_S + E_a$ として求められる．そこで電子の質量を m，電荷を q_e と書くと，電子の原子への束縛力は固有振動数 ω_0 のバネの力と考えて良く，このとき入射電場 E_S により電子は x 方向の変位が

$$x = \frac{q_e E_0}{m({\omega_0}^2 - \omega^2)} e^{i\omega t}$$

で表されるような強制振動を行う[*46]．すると板の中の全電子の振動は電磁波を放射 (輻射) し，x 成分が

$$E_a = -\frac{(N\Delta z) q_e}{2\varepsilon_0 c} \left[i\omega \frac{q_e E_0}{m({\omega_0}^2 - \omega^2)} e^{i\omega(t - z/c)} \right] \tag{52}$$

で表されるような電場を板の後方に作る (付録 D.33 参照，N は媒質中の電子数密度)．以上より板の後方 $z > 0$ の合成電場は

$$E = E_S + E_a = E_S \left(1 - \frac{i\omega(n-1)\Delta z}{c} \right) \simeq E_S \exp\left(-\frac{i\omega(n-1)\Delta z}{c} \right), \tag{53}$$

$$n \equiv 1 + \frac{N {q_e}^2}{2\varepsilon_0 m({\omega_0}^2 - \omega^2)} \tag{54}$$

となる．これは入射電場 E_S に対して位相が $\omega(n-1)\Delta z/c$ だけ遅れている．このため媒質を通過する光は真空中よりもゆっくり進むように見える．実際，媒質中では伝播速度が c/n に減じるとしたときに，板を通過するのに余計にかかる時間は

$$\Delta t = \frac{\Delta z}{c/n} - \frac{\Delta z}{c} = \frac{(n-1)\Delta z}{c}$$

であり，合成電場 (53) は $E_S = E_0 e^{i\omega(t - z/c)}$ において $t \to t - \Delta t$ と置き換えて得られる，入射波よりも時間 Δt だけ遅れて到達する波の式になっている．よって式 (54) で定義した n は (絶対) 屈折率に同定され，以上は屈折率の起源の説明を与えている．また屈折率が媒質の種類だけでなく光の振動数に依ることも，ここから理解できる．

[*46] この結果は付録 C.6 の特殊解で $F = q_e E_0$ と置けば得られる．また振動数 ω_0 の固有振動は過渡的な過程であり，抵抗力により減衰するため，特殊解で表される強制振動だけを考えれば十分である．

■1 より小さい屈折率　なお屈折率の式 (54) は $\omega_0 < \omega$ に対して $n < 1$ となる．具体的には

- 物質に X 線 (振動数 $\omega \gg \omega_0$) を透過させた場合
- 成層圏内の自由電子 ($\omega_0 = 0$) にラジオ波をあてた場合

がこれに相当する．これは媒質中の光の位相速度が真空中の値 c を上回ることを意味しており，一見すると

「光の速さ c より速く信号を送ることはできない」

ということに反するように思われるかもしれない．しかしながら信号を送るには複数の振動数の波を重ね合わせて変調し，印 (波束) を作る必要がある．そしてその移動速度 (群速度) は真空中の光速 c を超えないから，信号とはなり得ない単調な波の位相速度が c を超えることは問題ない [17, pp.66–67].

実際，屈折率 (54) を $n = 1 - a/\omega^2$ (ただし $a = N{q_e}^2/2\varepsilon_0 m > 0$) と略記し，媒質中の分散関係

$$\frac{c}{n} = \frac{\omega}{k}, \qquad \therefore k = \frac{n\omega}{c} = \frac{\omega}{c} - \frac{a}{\omega c}$$

に対して 4-5 節の注解で導入しておいた群速度の公式 $v_{\mathrm{g}} = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$ を適用すると

$$v_{\mathrm{g}} = \left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{c} + \frac{a}{\omega^2 c}\right)^{-1} = \frac{c}{1 + a/\omega^2} \leq c$$

となる [8, pp.313–314].

Snell の法則 (反射の法則・屈折の法則)

媒質 I，II (屈折率 n_1, n_2) の境界は局所的には平面を見なすことができ，ここに入射する光は一部が屈折し，一部が反射する．Huygens の原理によれば，図 165，図 166 の入射角 i，反射角 i'，屈折角 r に対して

$$\text{反射の法則} \qquad i = i', \tag{55}$$

$$\text{屈折の法則} \qquad \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = n_{12} \tag{56}$$

が成り立つことを証明できる (導出は下記)．［これらは Snell(スネル) の法則とも呼ばれる．］なお図 167 のように繰り返し屈折が起こる場合には，i 番目の媒質の屈折率を n_i として屈折の法則 (166) を 1 種の保存則の形

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 = \cdots, \qquad \text{i.e.} \qquad n_i \sin\theta_i = \text{const.}$$

に書くのが便利である．

反射の法則 (166) の導出　図 165 のように境界に入射する 2 本の光線 $\mathrm{A_0A}$，$\mathrm{B_0B'}$ に注目すると，波面は光線に垂直だから，$\mathrm{B_0B'}$ 上で A と同位相の点は B であり，また

$$i = \angle\mathrm{BAB'}$$

である．媒質 I における光速を v_1，B から B′ に達するのにかかる時間を Δt とおくと $\overline{\mathrm{BB'}} = v_1\Delta t$ である．他方，Huygens の原理によればこの間に A で反射した光は半径 $v_1\Delta t$ の球面上に広がっている．よって B′ から球面に引いた接線 A′B′(ただし A′ が接点) が同位相面であり［注解参照］，反射波はこれに垂直に進むから

$$i' = \angle\mathrm{A'B'A}$$

である．ここで 2 つの直角三角形 BAB′，A′B′A が合同であることに注目すると

$$i = \angle\mathrm{BAB'} = \angle\mathrm{A'B'A} = i'$$

が見出される．これは反射の法則 (166) に他ならない．

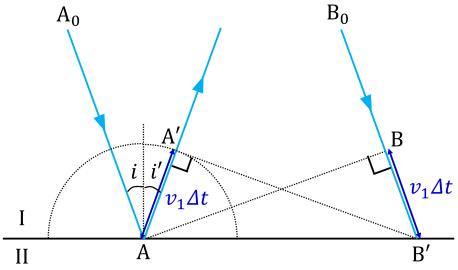


図 165　境界面での反射

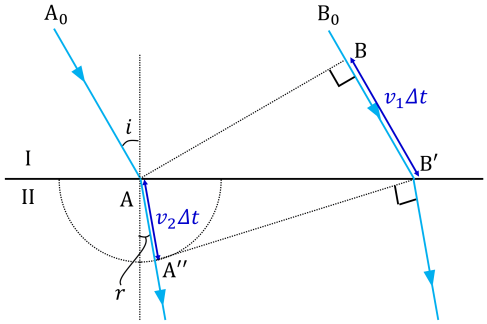


図 166　境界面での屈折

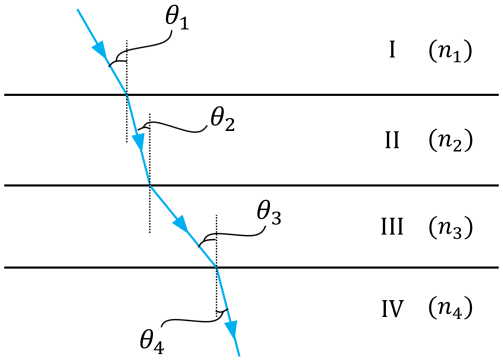


図 167　屈折が繰り返し起こる場合

屈折の法則 (167) の導出　媒質 II における光速を v_2 とする．再び図 166 において，A と同位相の点 B から B′ に達するのにかかる時間を Δt とおくと，Huygens の原理によればこの間に A を発した光は半径 $v_2\Delta t$ の球面上に広がっている．［反射の場合と同様に］B′ から球面に引いた接線 A″B′(ただし A″ が接点) が同位相面であり，反射波はこれに垂直に進むから

$$r = \angle \mathrm{AB'A''}$$

である．ここで辺 AB′ を共有する 2 つの直角三角形 BAB′，AB′A″ に注目すると

$$\frac{v_1\Delta t}{v_2\Delta t} = \frac{\overline{\mathrm{BB'}}}{\overline{\mathrm{AA''}}} = \frac{\overline{\mathrm{AB'}}\sin(\angle \mathrm{BAB'})}{\overline{\mathrm{AB'}}\sin(\angle \mathrm{AB'A''})} = \frac{\sin i}{\sin r}$$

が見出される．これは屈折の法則 (167) に他ならない．

注解

■球面に引いた接線が波面となることについて　図 165 において「$\mathrm{A_0B_0}$ の中間を通る光線の AB と同位相の点も，$\mathrm{B_0}$ が B から B′ に達する間に境界で反射して A′B′ に接する球面まで進んでいることは，自分で確かめておいてもらいたい」(p.252) について，図 168 のように $\mathrm{A_0B_0}$ を $\alpha : 1-\alpha$ に内分する点 $\mathrm{C_0}$ からの光線を考える．ここでは簡単のために媒質 I における光速 v_1 を単に v と書く．すると点 $\mathrm{C_0}$ を通る光線上で点 A と同位相の点から出た光は，距離 $\alpha v\Delta t$ だけ進んで境界上の点 C に達する．よって点 A を発した球面波が半径 $v\Delta t$ の球面に達したとき，点 C を発した球面波は半径 $(1-\alpha)v\Delta t$ の球面を成しており，これらは A′B′ に接している．これは (図 168 の紙面，すなわち光線 $\mathrm{A_0A}$ と境界の法線を含む面内において，したがって考えて

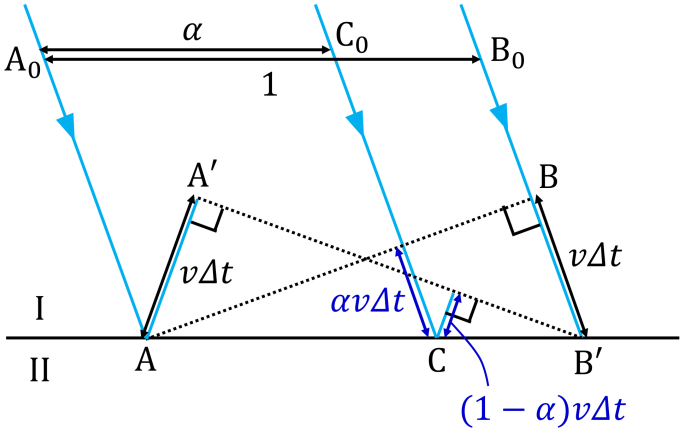


図 168　球面に引いた接線は A_0B_0 間のあらゆる球面波の包絡線 (波面)

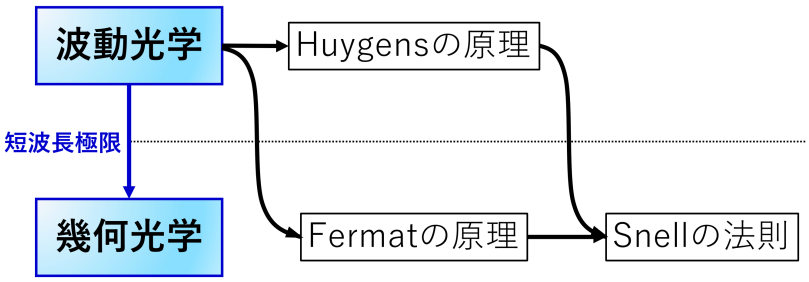


図 169　Huygens の原理，Fermat の原理，Snell の法則の関係

いる一連の光線と同一面内において) B′ から A を中心とする球面に接線 A′B′ (ただし A′ が接点) を引くと，A_0B_0 の間を通るあらゆる光線が境界で反射して作る球面波の包絡線となっており，それ故，接線 A′B′ が波面であることを意味している．さらに紙面の奥にある光線が境界面に作る一連の球面波を併せて考えると，それらの包絡面として得られる波面の法線方向に他ならない反射波の光線もまた，図 168 の紙面に含まれていることが分かる．

■Fermat の原理　幾何光学の近似では次の Fermat (フェルマー) の原理が成り立つ．すなわち 2 点間を通る光は所要時間が最小となる (厳密には極値をとる) 径路を通る．このことは波動光学から導くことができるけれど，その説明は付録 D.34 に回すことにし，ここでは Fermat の原理から改めて反射と屈折の法則を導こう．このように見かけ上複数の説明が可能であるのは，図 169 のような理論構造による．

光の直進性・逆行性　まず Fermat の原理により，均質媒質中では光線は直線となる．また光線を逆行しても所要時間は変わらないから，ある光線が可能であればそれに沿って逆行する光線も可能である．これは Huygens の原理から

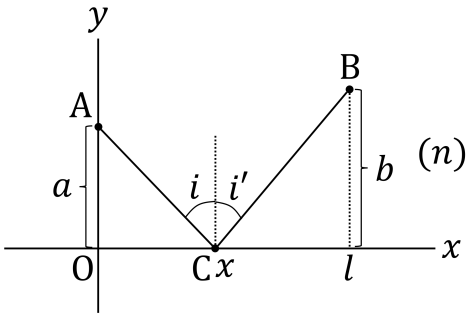


図 170　反射の法則

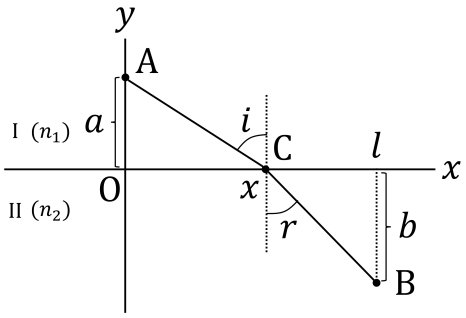


図 171　屈折の法則

得られる結論と同じである．

反射の法則 (166) の導出　与えられた点 A を出発し，媒質の境界で反射して与えられた点 B に到達する光線を考え，図 170 のように 2 点 A，B を含む媒質の境界に垂直な面を xy 平面に選ぶ．(A，B の座標はそれぞれ $(0, a)$，(l, b) であり，境界面を $y = 0$ とする．) 光線が境界上で反射する点を C とすると，径路 AC，CB は直線となる．このとき $\mathrm{C}(x, 0, z)$ の x 座標を固定すると，所要時間 (経路に比例) が最小 (極小) となるのは $z = 0$，すなわち点 C が xy 面内にあるときである．Fermat の原理によれば，さらにこの条件の下で時間を極小にするような点 C の位置 x が実際に光が反射する位置を与える．図 170 の入射角 i と反射角 i' に対して，所要時間

$$\tau = \frac{L}{c/n}, \qquad n : \text{屈折率}, \qquad L = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(l - x)^2 + b^2} : \text{径路長}$$

が極値をとる条件

$$0 = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{l - x}{\sqrt{(l - x)^2 + b^2}} = \sin i - \sin i'$$

は反射の法則 (166):$\sin i = \sin i'$ に他ならない．

屈折の法則 (167) の導出　図 171 のように媒質 I(屈折率 n_1) の中の与えられた点 A を出発し，媒質の境界で屈折して媒質 II(屈折率 n_2) の中の与えられた点 B に到達する光線に対して，所要時間

$$\tau = \frac{\tilde{L}}{c}, \qquad \tilde{L} = n_1\sqrt{x^2 + a^2} + n_2\sqrt{(l - x)^2 + b^2} : \text{光路長 (6-6 節)}$$

が極値をとる条件

$$0 = \frac{\mathrm{d}\tilde{L}}{\mathrm{d}x} = n_1\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - n_2\frac{l - x}{\sqrt{(l - x)^2 + b^2}} = n_1 \sin i - n_2 \sin r$$

は屈折の法則 (167):$n_1 \sin i = n_2 \sin r$ に他ならない．

光路長の最小性　以上のように Snell の法則は光路長が極小となることまで要求せずとも，光路長の極値条件だけから導かれている．例えば図 170 における光の反射について，経路の長さ L の極値が L の最小値となっていることは次のように確かめられる．位置 x が 0 から減少または l から増加するとき，L は単調増加することが図形的に読み取れる．そこで $0 \le x \le l$ の範囲で考えると，x の関数として $\sin i$ は単調増加し，$\sin i'$ は単調減少することが図形的に読み取れるので，導関数

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = \sin i - \sin i'$$

は全体として単調増加する．よって $\mathrm{d}L/\mathrm{d}x = 0$ となる位置 x は L の極小値かつ最小値を与える．

■変分原理と目的論的世界観　Fermat の原理や 1-1 節の冒頭で簡単に言及した最小作用原理は一般に変分原理と呼ばれる．ここで 1-1 節の注解との内容の重複を厭わず，改めて次のことを注意しておく．物理法則の変分原理による定式化は一見すると，粒子や場を擬人化し，通過時間や作用を最小にするという目的を持って振

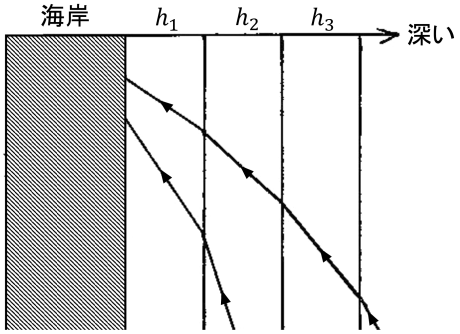


図 172　深さ h_i が段階的に変化する海岸に打ち寄せる波の屈折

る舞う存在として捉えているような印象を与え得る．しかし例えば粒子は，終点に辿り着くという最小作用原理で課される境界条件を実現するような初期条件を自分が満たしているかを“知らない”．このように意味レベルでの考察から，目的論的な解釈は不適当であることが理解される．実際このことは数学的なレベルでも確かめられる．すなわち最小作用原理から導かれる運動方程式は，粒子や場が目的因ではなく古典的・機械論的因果律に従って時間変化することを意味している．

■海岸付近での波の屈折　流体力学によれば，一様な深さの海における微小振幅波 (表面波) の伝播速度 $c = \sqrt{\frac{g}{k}\tanh kh}$ は，水深 h とともに増大する (k は波数) [11, p.131]．ここで海岸付近の波を念頭に浅い水 (長い波) の極限 $kh \ll 1$ を考えると，$c = \sqrt{gh}$ は (次元解析から期待される程度であって)，依然として深さ h が大きいほど速い．このため海岸に打ち寄せる波は，水深が浅くなるにつれて減速する．(ところで，この極限では速度の波長 (波数 k) 依存性は消えているため，振動数が一定の波の波長は，単純に速度に比例して減少する．) すると海岸に打ち寄せる波は図 172 のように屈折し，波面は海岸線に平行に近づいてゆくと考えられる．

臨界角と全反射

図 173 のように媒質 II の屈折率 n_2 の方が媒質 I の屈折率 n_1 よりも大きいとき，屈折の法則

$$n_1 \sin\beta = n_2 \sin\alpha$$

によれば $\sin\beta \geq \sin\alpha$ であり，これが意味を成すのは

$$1 \geq \sin\beta = \frac{n_2}{n_1}\sin\alpha (\geq \sin\alpha), \qquad \therefore \sin\alpha \leq \frac{n_1}{n_2} \equiv \sin\alpha_{\mathrm{C}}$$

のときであることが分かる．α_{C} は媒質 II から媒質 I に出る光の屈折角がちょうど $\beta = \pi/2$ となるような入射角 α であり，**臨界角**と呼ばれる．媒質 I が空気で媒質 II が水の場合はこれに該当し，水中から水面上を見上げると，図 173 のように水面上の全景がちょうど α_{C} を頂角とする円錐に収まる．

屈折の法則の適用例——温度勾配

Huygens の原理は，従って反射と屈折の法則は光に限らず任意の波動に対して正しい．そこで教科書では空気に鉛直方向の温度勾配がある場合に起こる音の屈折を論じているけれど，本稿では光に関する類似の現象と併せてまとめることにしよう．

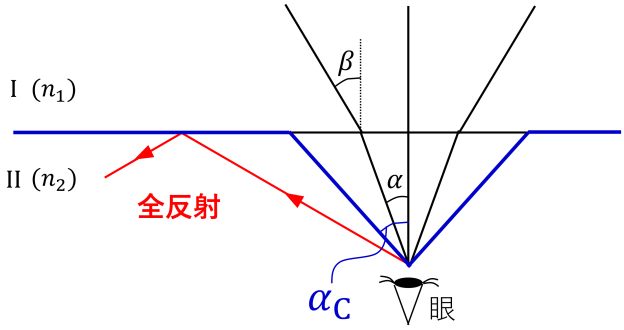


図 173　臨界角と全反射

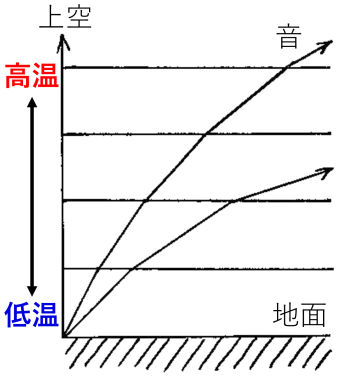


図 174　冬の夜は音が遠くまで伝わる

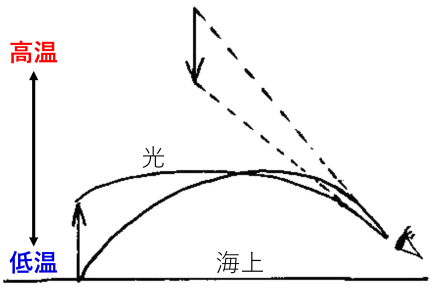


図 175　蜃気楼 (逆転した船が海から浮いて見える)

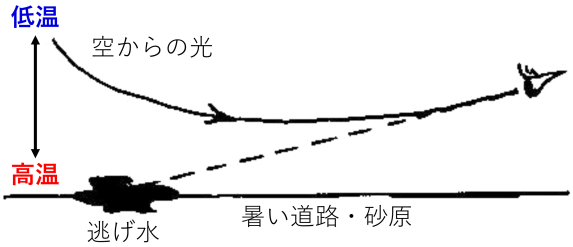


図 176　逃げ水 (地面に水たまりがあるように見える．実際には空の色を見ている)

まず空気中では高温ほど

音速は速い (4-2 節)　→　音の屈折率は低い，

光の屈折率は低い．　$\left(\text{屈折率の密度依存性 (54)} : n = 1 + \dfrac{N{q_e}^2}{2\varepsilon_0 m({\omega_0}^2 - \omega^2)}\right)$

このため空気に鉛直方向の温度勾配があるとき，図 174–176 のような現象が起こる．

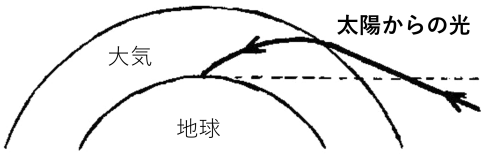


図 177　我々は既に地平線の下に沈んだ太陽を見ている

注解

地球の大気は上層ほど薄く屈折率は低くなるので，図 177 のように幾何学的には (すなわち屈折が起こらないとした場合には) 太陽が地平線の下に隠れた後でも，太陽からの光は屈折して届き，太陽を見ることができる (再び屈折率の密度依存性 (54) を参照)．言い換えれば太陽が地平線の下に沈むのを見届けているときには，既に太陽は地平線の下に沈んでいる [17, p.7].

屈折の法則の適用例——レンズの公式

曲率半径 R のレンズ表面での屈折を念頭に，図 178，図 179 のように点 C を中心とする半径 R，屈折率 n のガラス球に点 A から入射した光線の屈折を考える (図 178，図 179 を用いて各記号を定義する)．［ガラスの外は真空であると考えるか，空気を想定して屈折率を近似的に 1 とすれば良い．図 178，図 179 の場合分けについてはすぐ後で述べるけれど，ひとまず定性的に言って光源 A がガラス球からある程度離れているとき (a が大きいとき) には図 178 の状況が実現され，ガラス球からある程度近いとき (a が小さいとき) には図 179 の状況が実現されることが読み取れる．］2 点 AC を結ぶ直線は光軸と呼ばれる．ここで

- 屈折の法則 (レンズ表面での屈折に対して)
- 光軸の近くの光線を考える近似 (**近軸近似**)

を用いると，

$$\frac{1}{a}+\frac{n}{b}=(n-1)\frac{1}{R} \tag{57}$$

の関係が見出される (導出は下記)．ただし図 178，図 179 に示したように，OB 間の距離 b は点 B が O に対してガラス側にあるときには正，光源 A 側にあるときには負とする．［すなわち b は O を原点としガラス側の方向 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を正とする座標軸に関する点 B の座標である．］

上式 (57) の導出　近軸近似の下では θ, ϕ は微小角だから，屈折の法則 $\sin\theta = n\sin\phi$ は

$$\theta = n\phi$$

となる．ここに幾何学的関係

$$\theta=\alpha+\gamma, \qquad \phi=\gamma\mp\beta$$

を代入しよう．(ただし以下では複号は，図 178 に対しては上側を，図 179 に対しては下側をとるものと約束する．実際，こうすれば正しい幾何学的関係をまとめて表現できている．) すると

$$\alpha+\gamma=n(\gamma\mp\beta)$$

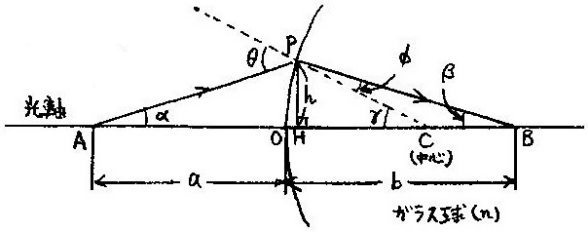


図 178　ガラス球表面の屈折 1

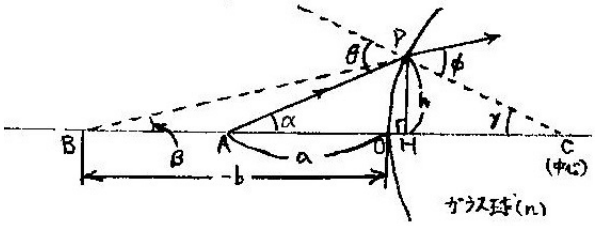


図 179　ガラス球表面の屈折 2

となる．一貫して同じ精度の近似を推し進めると

$$
\begin{aligned}
h =& \overline{\mathrm{AH}} \tan\alpha \simeq a\tan\alpha \simeq a\alpha, \\
h =& \overline{\mathrm{BH}} \tan\beta \simeq \pm b\tan\beta \simeq \pm b\beta, \\
h =& \overline{\mathrm{CP}} \sin\gamma \simeq R\sin\gamma \simeq R\gamma
\end{aligned}
$$

であり，これらを用いて角度 α, β, γ を消去すると，長さの間の関係式 (57) を得る．

上式 (57) は図 178，図 179 それぞれの状況が生じる a の範囲をも示している．すなわち図 178 のように点 B がガラス球側に現れるためには $b > 0$ でなければならないから，これは $a > \frac{R}{n-1}$ のときに実現され，特に $a \to \frac{R}{n-1}$ のとき $b \to \infty$ となる．［そして $(0 \leq) a < \frac{R}{n-1}$ となると図 179 のように点 B が光源 A に現れる．実際，そのためには $b < 0$ でなければならないから，これは $a < \frac{R}{n-1}$ のときに実現され，特に $a \to \frac{R}{n-1}$ のとき $b \to -\infty$ となる．$b \to \pm\infty$ はいずれもガラス球の奥に向かう光軸に平行な光線を表す．］

なお［近軸近似の下では］点 A から出た光線は全て点 B に集まる．

- 図 178 において B は A の**実像**と呼ばれる．
- 一方，図 179 において B は A の**虚像**と呼ばれる．ガラス球側から見れば，
  A からの光はあたかも B の方向から発せられたかのように見えるからである．

次に図 180 のように曲率半径 R_1, R_2 の 2 つの曲面を持つ (同じく屈折率 n の) 凸レンズによる光の屈折を考え，2 枚の面での屈折に上式 (57) を適用すると，**レンズの公式**

$$
\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \qquad f \equiv \left\{ (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \right\}^{-1} \text{：焦点距離} \tag{58}
$$

が導かれる (導出は下記)．$b = f$ の位置は無限遠 $a \to \infty$ からの平行光線が集まる点となっており，レンズの**焦点**と呼ばれる．なお B は A の**実像**である．

レンズの公式 (58) の導出　［光軸に十分近い光線を考えれば，すなわち図 180 において十分小さい角度 α を想定すれば，光源 A を発した光は再び光軸上 (点 B) に戻ってくることができる．以下ではこの場合を考える．レンズ内の光線 PP′ は A を発し P で屈折した光であると同時に，光の逆行性より B を発して P′ で屈折した光の軌道でもある．よって考えられる状況は以下の 2 通りに限られる．すなわち］PP′ の延長線と光軸の交点を B′ とし，ここでは $b'(\geq 0)$ を常にレンズと B′ の距離として定義すると，B′ がレンズに対して，

1. A の側にある場合　→　P での屈折では B′ の座標を $-b'$，P′ での屈折では B′ の座標を $+b'$ とする．
2. B の側にある場合　→　P での屈折では B′ の座標を $+b'$，P′ での屈折では B′ の座標を $-b'$ とする．

そこで第 1 の場合には複号を上側を，第 2 の場合には複号を下側を選ぶもとの約束して，2 点 P, P′ での屈折に公式 (57) を適用すると

$$
\frac{1}{a} \mp \frac{n}{b'} = (n-1)\frac{1}{R_1}, \qquad \frac{1}{b} \pm \frac{n}{b'} = (n-1)\frac{1}{R_2}
$$

となる．これらを辺々足してレンズの公式 (58) を得る．

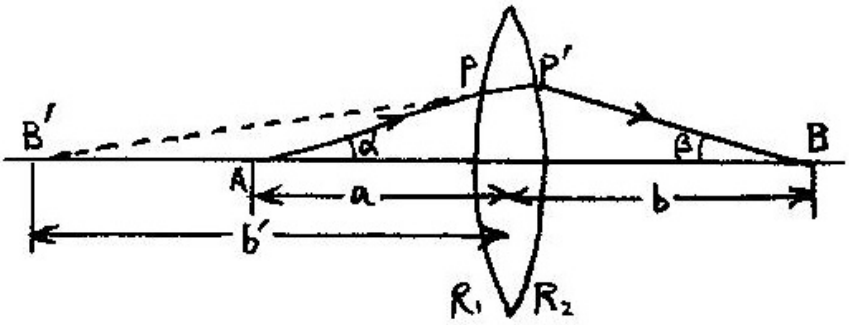


図 180　凸レンズによる光の屈折

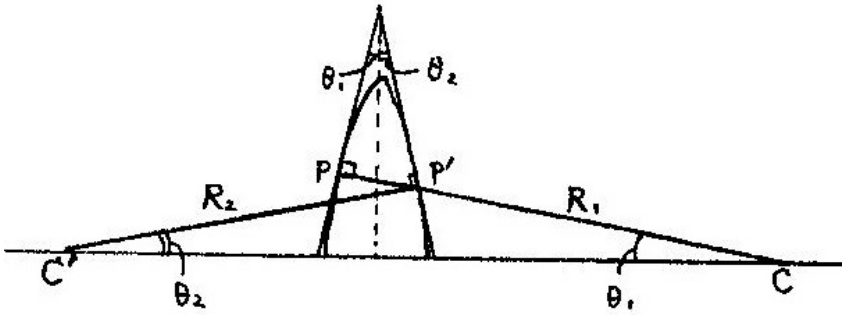


図 181　プリズムによる光の屈折 (CP, C′P′ は単なる補助線であって光線ではない)

参考　図 181 のようにレンズに光が出入りする点 P, P′ において，レンズ表面を接平面に置き換えて得られるプリズムによる屈折を考えてもレンズの公式 (58) を得ることができるけれど，本稿では詳しく述べない．

6-4 レンズと光学器機

凸レンズによる結像

図 182 のように凸レンズの焦点 F_2 の外側の位置 $a(> f)$ で光軸に対して直立した物体 AA′ の，凸レンズによる像 BB′ は次の手順で作図できる (証明は下記)．すなわち A′ を出て

(i) 光軸に平行に進んだ光はレンズで屈折した後，背後の焦点 F_1 を通る．
(ii) 手前の焦点 F_2 を通った光はレンズで屈折した後，光軸に平行に進む．
(iii) レンズの中心 O を通った光は，そのまま直進する．

そしてこれら 3 本の光線は 1 点 B′ で交わり，B′ から光軸に下ろした垂線 BB′ が物体 AA′ の像 (**実像**) を与える．よって 3 本の光線 (i–iii) のうちいずれか 2 本を描いて交点 B′ を求めれば，像 BB′ を作図することができる．なお像 BB′ の物体 AA′ との比

$$m \equiv \frac{\overline{\mathrm{BB'}}}{\overline{\mathrm{AA'}}} = \frac{b}{a}$$

は**倍率**と呼ばれる．

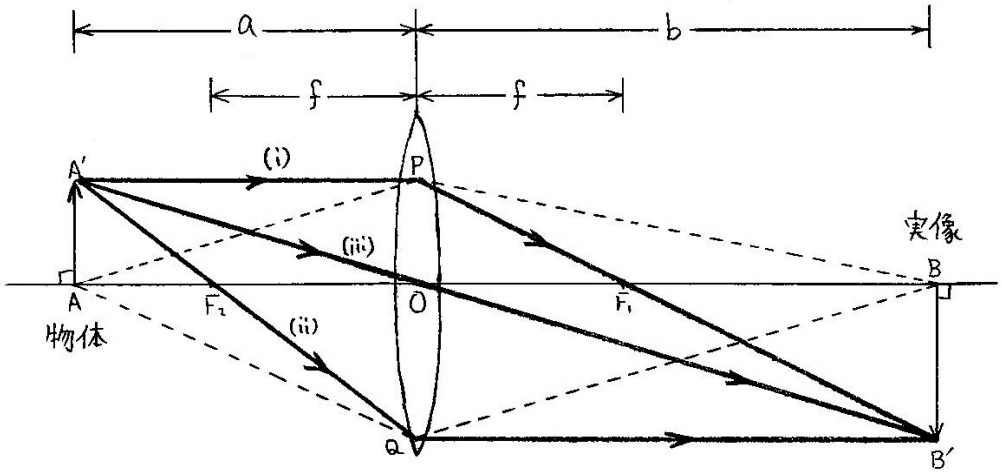


図 182　凸レンズによる像の作図

証明　与えられたレンズの焦点距離 f と物体までの距離 a に対して，レンズの公式 (58) から定まる長さ $\overline{\mathrm{OB}} = b$ の位置に光軸上の点 B をとる．このとき (近軸近似の下では，)A から出た全ての光線は B に集まる．またレンズの公式 (58) より

(i)　$a \to \infty$ のとき $b \to f$ なので，
　　A′ を出て光軸に平行に進んだ光はレンズで屈折した後，背後の焦点 F_1 を通る．

(ii)　$a \to f$ のとき $b \to \infty$ なので，
　　A′ を出て手前の焦点 F_2 を通った光はレンズで屈折した後，光軸に平行に進む．

これら 2 本の光線 (i)，(ii) の交点を B′ とする．［注意：この段階では BB′ が光軸に垂直であることは自明ではなく，それはこれから証明される．］

このとき線分 BB′ が物体 AA′ の像になっていることを次のように説明できる．まず A′ → P と A′ → Q の間にある光線は，全て点 B′ に集まると考えられる．と言うのも，前述のように A → P と A → Q の間にある光線は全て B に集まる．そして光源を A から A′ に連続的に動かして考えたとき，

- 光線 A → P → B は A′ → P → B に，
- 光線 A → Q → B は A′ → Q → B

に連続的に移ると考えられるから．［さらにこれは AA′ の中間の点から出た近軸光線が全て BB′ 間の対応する点に集まることを意味しているから，BB′ は AA′ の像である．］

次に BB′ が光軸に垂直であることを示す．そのためには $\triangle \mathrm{F_1BB'} \sim \triangle \mathrm{F_1OP}$ を証明できれば良いが (記号 ∼ は相似を表す)，

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{F_1B'}} : \overline{\mathrm{F_1P}} &= \overline{\mathrm{OQ}} : \overline{\mathrm{OP}} && (\because \triangle \mathrm{POF_1} \sim \triangle \mathrm{PQB'}) \\
&= \overline{\mathrm{OQ}} : \overline{\mathrm{AA'}} \\
&= \overline{\mathrm{F_2O}} : \overline{\mathrm{AF_2}} && (\because \triangle \mathrm{AA'F_2} \sim \triangle \mathrm{OQF_2}) \\
&= f : a - f \\
&= b - f : f && (\because \text{レンズの公式 (58)}) \\
&= \overline{\mathrm{F_1B}} : \overline{\mathrm{F_1O}}
\end{aligned}
$$

より確かにそうなっている．

さらに A′O と OB′ が同一直線上にあることを示す．そのためには $\angle \mathrm{A'OA} = \angle \mathrm{B'OB}$ を証明できれば良いが，

$$\overline{\mathrm{AA'}} : \overline{\mathrm{BB'}} = \overline{\mathrm{OP}} : \overline{\mathrm{BB'}} = \overline{\mathrm{F_1O}} : \overline{\mathrm{F_1B}} = f : b - f = a : b = \overline{\mathrm{OA}} : \overline{\mathrm{OB}}, \qquad \therefore \triangle \mathrm{AOA'} \sim \triangle \mathrm{BOB'}$$

より確かにそうなっている．ただし第 2 の等号ではたった今得られた関係 $\triangle \mathrm{F_1BB'} \sim \triangle \mathrm{F_1OP}$ を，第 4 の等号ではレンズの公式 (58) を用いた．よって

(iii) A′ を出てレンズの中心 O を通った光は，そのまま直進する．

以上より物体 AA′ の像は前述の手順で作図できる．

虚像

［前節では凸レンズによる実像の作図法について詳しく調べた．虚像については本節で手短に述べるに留めよう．］

■凸レンズによる虚像　図 183 のように焦点 $\mathrm{F_2}$ の内側の位置 $a(< f)$ に置かれた物体の点 A′ からの光はレンズを通ると発散して結像しないけれど，レンズ越しに物体を見るとき，これらの光は B′ から来たように見える．BB′ を AA′ の**虚像**という．

■凹レンズによる虚像　図 183 のように凹レンズを通して物体 AA′ を見るときには，レンズに対して焦点 $\mathrm{F_1}$ を左側 (物体側)，焦点 $\mathrm{F_2}$ を右側 (反対側) とすれば，同様に虚像 BB′ を作図できる．また $f < 0$ とすればレンズの公式 (58) はこの場合にも正しい．

注解　「これは前節でレンズの公式を導くさいに，$\mathrm{F_1}$，$\mathrm{F_2}$ が反対側にあるので，$R_1 < 0$，$R_2 < 0$ としたことに相当する」(p.260) について，この点をもう少し丁寧に考えよう．凸レンズ表面での屈折に対する関係 (57) は，1 とおいた空気の屈折率を n_1 と書き，ガラスの屈折率を n_2 と改めて導出をし直せば

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

に修正される．凹レンズ表面での屈折に対する関係を得るには $n_1 \leftrightarrow n_2$ と入れ替えると同時に，$a \leftrightarrow b$ と入れ替え，

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_1 - n_2}{R}$$

とすれば良い．これは R を $-R$ で置き換えた関係となっている．よって最終的なレンズの公式 (58) において $f \to -f$ と置き換わる．

光学器機

さらに教科書では

- 虫めがね
- 顕微鏡
- Kepler 望遠鏡 (屈折望遠鏡)
- 球面鏡

について丁寧に説明されているけれど，これらはやや細かい各論となるため，本稿では省略する．

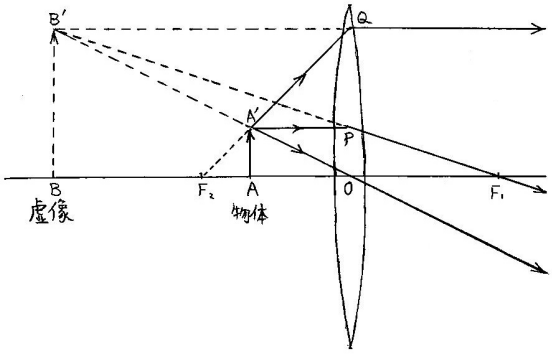


図 183　凸レンズによる虚像

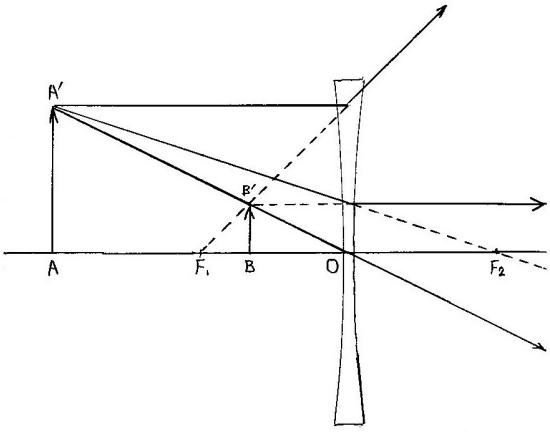


図 184　凹レンズによる虚像

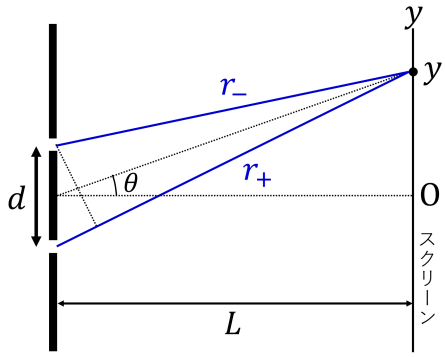


図 185　Young の実験

6-5 光の干渉——ヤングの実験と回折格子

ヤングの実験

Young (ヤング) は図 185 のような 2 つのスリットに光を通す実験を行ったところ，光は干渉を示した．このことから Young は光の波動論を唱えた．

図 185 において遠方のスクリーン $L \gg d$ を考えると，径路差は

$$r_+ - r_- \simeq d\sin\theta \simeq d\frac{y}{L}$$

なので，

$$d\sin\theta = \begin{cases} m\lambda & (\text{強め合い}) \\ \left(m+\dfrac{1}{2}\right)\lambda & (\text{打ち消し合い}) \end{cases} \qquad \text{または} \qquad y = \begin{cases} m\dfrac{L\lambda}{d} & (\text{強め合い}) \\ \left(m+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{L\lambda}{d} & (\text{打ち消し合い}) \end{cases}$$

となる (m は整数).

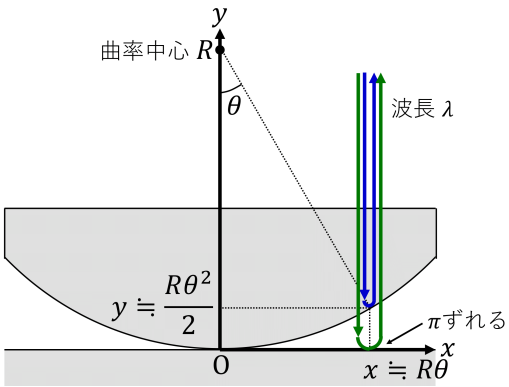


図 186　Newton リング．凸レンズ表面で真上に反射する光は反射の法則を満たさない．

参考　径路差の近似式

$$r_\pm = \sqrt{L^2 + \left(y \pm \frac{d}{2}\right)^2} \simeq L + \frac{y^2 \pm yd + d^2/4}{2L}, \qquad \therefore r_+ - r_- \simeq \frac{yd}{L}$$

は微小角 θ の 1 次近似となっている (付録 C.5 参照)．

注解

■径路と光線　図 185 の径路 $r_\pm$ はスリットを中心とする球面波に直交しているため，光線軌道となっている．途中の軌道を光線として扱えるほどには「幾何光学からのずれが小さい場合」 [2, p.164] が考えられている．

しかしながら干渉する光の径路として，常に正確に幾何光学に従う光線軌道を考えれば良いとも限らない．例えば Newton リングの明線位置 (の 2 乗)

$$x^2 = R\frac{\lambda}{2}(2m+1) \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

は，図 186 に示した 2 本の光が強め合う条件から求められる．ここで凸レンズ表面で真上に反射する光は反射の法則を満たさない[*47]．光の干渉・回折では一般には幾何光学を仮定することは許されず，あくまで波動光学の範囲で考えなければならない．

■強度分布　波源が N 個の場合の強度分布 (6-7): $\frac{I(\theta)}{I(0)} = \left|\frac{\sin\{N\pi d(\sin\theta)/\lambda\}}{N\sin\{\pi d(\sin\theta)/\lambda\}}\right|^2$ に $N = 2$ を代入すると，Young の実験における強度分布として

$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = \cos^2\{\pi d(\sin\theta)/\lambda\} = \frac{1 + \cos\{2\pi d(\sin\theta)/\lambda\}}{2}$$

となる．これは $d\sin\theta$ を横軸として描くと，

- 強め合いの条件 $d\sin\theta = m\lambda$ の位置で最大値 1 になり，
- 打ち消し合い条件 $d\sin\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$ の位置でゼロになる

ような正弦波である．

[*47] 明線位置は微小角 θ の 2 次までの近似で求められているので，光が真上に反射するのを $\theta \to 0$ の想定の結果と見ることはできない．

多重スリットの干渉

N 個のスリットが間隔 d で並んでいるとき，スクリーンまでの距離 $L \gg d$ の場合の強度分布は式 (6-7):

$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = \left| \frac{\sin\{N\pi d(\sin\theta)/\lambda\}}{N\sin\{\pi d(\sin\theta)/\lambda\}} \right|^2$$

で与えられる．よって m を整数，ν を N の倍数でない整数とすると，強度分布は次のように特徴付けられる (図 187 を併せて参照).

- $d\sin\theta = m\lambda$ で　$I(\theta) = I(0)$: 強め合い
  - これは径路差が波長の整数倍となる条件に他ならない.

  ［$d \to 0, N \to \infty$ の極限の強度分布 (図 161) と違って $I(\theta)$ は周期関数であり，
  このように正面 $\theta = 0$ の外側にも m 次の極大が現れる.
  これはスリットの幅を無視したためである (後述).］
- $d\sin\theta = \frac{\nu}{N}\lambda$ で　$I(\theta) = 0$: 打ち消し合い
- $d\sin\theta = \frac{\nu+1/2}{N}\lambda$
  - $\nu = 1$ で　$I(\theta) \simeq \left(\dfrac{2}{3\pi}\right)^2 I(0)$
  - $\nu \simeq N/2$ で　$I(\theta) \simeq \dfrac{I(0)}{N^2}$

  計算方法　$d\sin\theta = \frac{\nu+1/2}{N}\lambda$ のとき $\sin\{N\pi d(\sin\theta)/\lambda\} = 1$ なので

  $$I(\theta) = \frac{I(0)/N^2}{\left|\sin\left(\pi\frac{\nu+1/2}{N}\right)\right|^2}$$

  となる．$N \gg 1$ を想定すると，$\nu = 1$ に対しては

  $$\sin\left(\pi\frac{\nu+1/2}{N}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2N}\right) \simeq \frac{3\pi}{2N},$$

  $\nu \simeq N/2$ に対しては $\nu + 1/2 \simeq N/2$ より

  $$\sin\left(\pi\frac{\nu+1/2}{N}\right) \simeq 1$$

  と計算できる.

よって m 次の明線の範囲は $\left(m - \frac{1}{N}\right)\lambda < d\sin\theta < \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda$ であり，$N \to \infty$ のとき

$$(\text{明線の幅}) = \frac{2\lambda}{N} \to 0,$$
$$(\text{明線と明線の間の強度}) \sim \frac{I(0)}{N^2} \to 0$$

となってシャープな線状のスペクトルに移行する．［$\nu = 1$ の極大は高さ $I(\theta) \simeq \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 I(0)$ を変えないけれど，その位置は隣接する $\theta = 0$ の明線に近づく.］これは径路差が厳密に波長の整数倍でない限り，位相の異なる波は $N \to \infty$ で打ち消し合う傾向を強めるためであると解釈できる［4-4 節の図 97 に関する注解を参照］.

■回折格子　大きなスリット数 N を持つ N 重スリットとして回折格子がある．これは平行に切った多数の溝に不透明な物質を埋めたガラスで，図 188 のような構造を持つ.

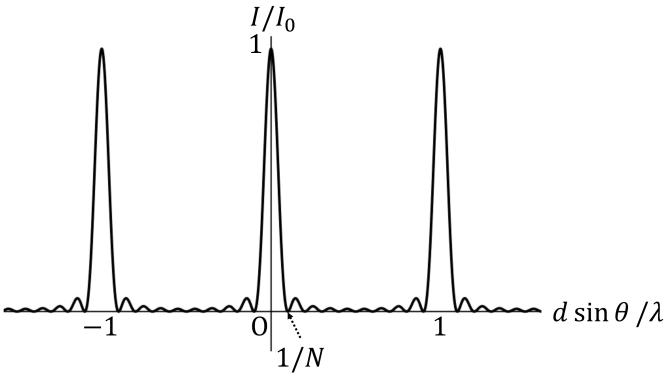


図 187　N スリットによる光の強度分布 ($N = 10$ とした)

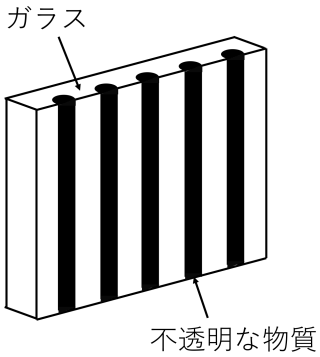


図 188　回折格子

■回折格子と分光器　入射光が単色でなく近い波長 λ_1, λ_2 を含んでいるとすると，それぞれの m 次の明線の位置 θ_1, θ_2 は

$$d\sin\theta_1 = m\lambda_1, \qquad d\sin\theta_2 = m\lambda_2$$

で与えられる．スリット数 N が大きく明線が十分シャープであれば 2 つの明線は重ならないから，回折格子は分光器に用いることができる．

■スリット幅の影響　実際には

各スリットはゼロでない幅 D を持つ

$\rightarrow$　各スリットからの光は $\sin\theta \gtrsim \dfrac{\lambda}{D}$ でほぼゼロ

$\rightarrow$　N 重スリットの作る強度分布は $\sin\theta \gtrsim \dfrac{\lambda}{D}$ でほぼゼロ

となる．［ここでは D は各スリットの幅であり，スリットの間隔 d とは無関係である．］

注解

■回折と干渉　6-2 節では Huygens の原理に基づき，多数の点波源からの球面波の重ね合わせとして回折を調べた．この結果は本節 (6-5 節) において，回折格子を通って干渉した光の強度分布を調べるのに援用された

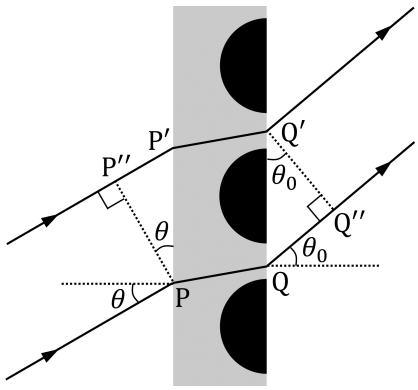


図 189　回折格子に対して光が斜めに入射する場合

ことになる．このような事情により，「回折」と「干渉」という用語を必ずしも明確に区別することは困難となる．実際 Feynman はこの点について次のように述べている [17, p.43].

> 誰 (れ) だって干渉と回折との区別を満足いくように定義したためしはない．これはいわば慣用の問題で，両者の間に特有の重要な物理的な差異は存在しないのである．強いていえば，大まかに，波源の数がごく僅かで，たとえば二つで，それらが互いに強め合ったり弱め合ったりしているとき，結果は干渉と呼ばれ，一方その数が多くなると，回折という言葉の使われることが多くなる，といった具合なのである．

■図形的解釈　6-2 節で紹介した N 個の波源に対する強度分布 (6-7) の図形的導出では，各方向 θ に対して図 159 の合成ベクトルは以下のようになっている [17, pp.44-45].

- $d\sin\theta = m\lambda$ で　$I(\theta) = I(0)$：極大 (かつ最大)
  このとき $\varphi = 2\pi m$ より N 個のベクトルは向きが揃い，合成ベクトルは x 方向を向いている．
- $d\sin\theta = \frac{\nu}{N}\lambda$ で　$I(\theta) = 0$：極小
  このとき $N\varphi = 2\pi\nu$ より合成ベクトルの先端は原点に戻っている．
- $d\sin\theta = \frac{\nu+1/2}{N}\lambda$：弱い極大
  このとき $N\varphi = 2\pi(\nu + 1/2)$ より合成ベクトルは円の直径を成している．

例——光が斜めに入射する場合

ここまでは平面波が垂直に入射するため，各スリットの波が同位相となる場合を考えていた．これに対し図 189 のように回折格子に対して光が入射角 θ_0 で斜めに入射する場合には，観測点の方向を θ とすると

$$(\text{径路差}) = \overline{\mathrm{QQ''}} - \overline{\mathrm{PP''}} = d(\sin\theta - \sin\theta_0)$$

なので，強め合いの条件は

$$d(\sin\theta - \sin\theta_0) = m\lambda$$

に置き換わる．[$\theta_0 = 0$ とおくと垂直入射の場合の干渉条件 $d\sin\theta = m\lambda$ を回復する．]

6-6 光の干渉

物質中を伝わる光

屈折率 n の媒質中では光速は $v = c/n$ になるから，振動数 f の光の真空中での波長を $\lambda_0 = c/f$ とすると，媒質中の波長 $\lambda = v/f$ は

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

になる．［物質中の荷電粒子は入射波と同じ振動数 f で強制振動し，同じ振動数 f の光を放射するから (6-3 節の注解参照)，物質中でも光の振動数 f は変わらない．］

次に媒質が非一様で屈折率 n が空間的に分布している場合を考える．［光の軌道を光線として考えることが許されるならば,］点光源 S と観測点 P を結ぶ径路を光が通る時間は

$$\Delta t = \int_{\mathrm{S}}^{\mathrm{P}} \frac{\mathrm{d}l}{c/n} = \frac{1}{c}\int_{\mathrm{S}}^{\mathrm{P}} n\mathrm{d}l$$

と表される ($\mathrm{d}l$ は径路に沿う長さ)．最右辺における $L \equiv \int_{\mathrm{S}}^{\mathrm{P}} n\mathrm{d}l$ は径路の長さを速度 c で進む真空中の光にとっての長さに換算した量にあたり，**光路長**と呼ばれる．光源の振動を $\psi(\mathrm{S}, t) = ae^{i\omega t}$ と表すと［以下，本稿では物理量の複素表示 (付録 C.6 参照) を利用する］，観測点 P での場の値は

$$\psi(\mathrm{P}, t) = \psi(\mathrm{S}, t - \Delta t) = a\exp\left\{i\omega\left(t - \frac{L}{c}\right)\right\}, \qquad L \equiv \int_{\mathrm{S}}^{\mathrm{P}} n\mathrm{d}l : \text{光路長}$$

で与えられる．

干渉の一般論

以上を踏まえて光源 S と観測点 P を繋ぐ 2 本の径路 $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2$ を通る光の干渉を考える．観測点 P に作られる 2 つの振動

$$\psi_k(\mathrm{P}, t) = ae^{i\phi_k}, \qquad \phi_k = \omega\left(t - \frac{L_k}{c}\right), \qquad L_k = \int_{\mathrm{R}_k} n\mathrm{d}l \qquad (k = 1, 2)$$

の合成振動は

$$\Psi(\mathrm{P}, t) = \psi_1(\mathrm{P}, t) + \psi_2(\mathrm{P}, t) = ae^{i\phi_1}(1 + e^{i(\phi_2 - \phi_1)})$$

となるので，図 190 より干渉の条件

$$(\text{位相差}) = \phi_2 - \phi_1 = \begin{cases} 2m\pi & (\text{強め合い}) \\ (2m+1)\pi & (\text{打ち消し合い}) \end{cases}$$

を得る (m は整数)．ここで $\phi_2 - \phi_1 = \frac{\omega}{c}(L_1 - L_2)$ において $\frac{\omega}{c} = k_0 \equiv \frac{2\pi}{\lambda_0}$ なので，これは**光路差** (光路長の差のこと) に対する条件

$$L_1 - L_2 = \begin{cases} m\lambda_0 & (\text{強め合い}) \\ \left(m + \dfrac{1}{2}\right)\lambda_0 & (\text{打ち消し合い}) \end{cases}$$

に書き換えられる．［光路長を考えているため，同時に波長も真空中の値 λ_0 を用いれば良い．以上の結果は直観的にも理解できる．］

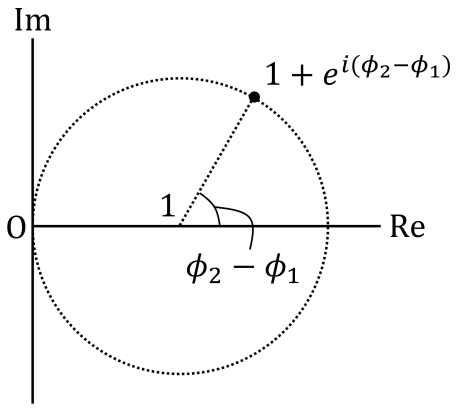


図 190　複素表示の合成振動

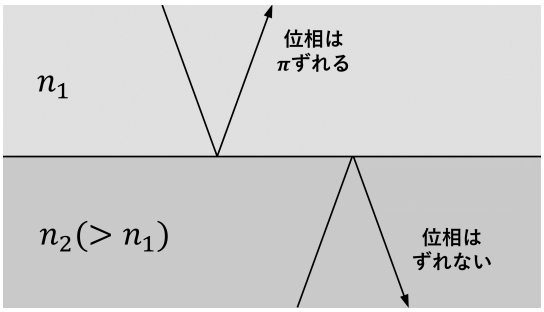


図 191　媒質の境界で反射する際の位相の変化

反射のあるときの補足

ただし以上の議論では径路の途中で光が反射しない場合を暗に仮定してきた．ところで実は屈折率の小さい媒質から大きい媒質に入射する光は，境界面で反射する際に位相が π ずれる (図 191 参照，証明は付録 D.36 で行う)．そこで 2 つの径路 $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2$ で反射による位相のずれが起こる回数 k_1, k_2 の差を $\Delta k = k_2 - k_1$ とすると，干渉の条件は

$$L_1 - L_2 = \begin{cases} \left(m + \dfrac{1}{2}\Delta k\right)\lambda_0 & \text{(強め合い)} \\ \left(m + \dfrac{1+\Delta k}{2}\right)\lambda_0 & \text{(打ち消し合い)} \end{cases}$$

に修正される．

光の干渉計の例

教科書では主な干渉計として

- Fresnel (フレネル) の複プリズム
- Lloyd (ロイド) の鏡
- Michelson (マイケルソン) の干渉計

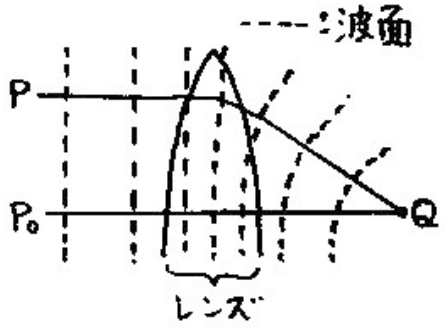


図 192　レンズは干渉条件を変えない

の説明を行っているけれど，本稿では省略する．

干渉する光と干渉しない光

光源からの発光は——量子力学によれば——原子内の励起された電子が低い準位に遷移する際に出す光であり，有限の長さしか続かず，数波長で途切れる．そのような波は**波連**と呼ばれる．

- 単一の点光源からの光

→　各波連は 2 つに分けられた後，再び自分の片割れと干渉する．各波連は同じだけ位相がずれる．

→　干渉する．

- 異なる光源からの光

→　2 つの光のあらゆる波連の組について，
位相は何ら関連性・規則性がなく，全体として打ち消しあって干渉性を示さない．
(強度分布はそれぞれ光源が単独で存在する場合の強度分布の和となる．)

なお教科書ではさらに踏み込んで以上の議論に数学的な表現が与えられているけれど，本稿では省略する．

レンズの影響

径路の途中にレンズがある場合にも，［実は］図 192 のように 2 つの径路 $\mathrm{P}_0 \to \mathrm{Q}$，$\mathrm{P} \to \mathrm{Q}$ の間の波の数は変わらないから，干渉条件はレンズのない場合と変わらない．あるいは 2 つの径路 $\mathrm{P}_0 \to \mathrm{Q}$，$\mathrm{P} \to \mathrm{Q}$ は光路長が等しいから，干渉条件は変わらないと言うこともできる［波の数 $\int \frac{\mathrm{d}l}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0} \int n\mathrm{d}l$ は光路長 $\int n\mathrm{d}l$ に比例している］．

注解

同様の議論は文献 [2, p.160] に見られる．すなわち点 O から発した光線がすべて光学系を通過した後に点 O′ で結ばれるとすると，波面は点 O, O′ の近くではこれらを中心とする球面であり，波面は位相が一定の面だから，図 193 のように位相の変化 (光学距離) ψ はすべての光線について等しくなる．

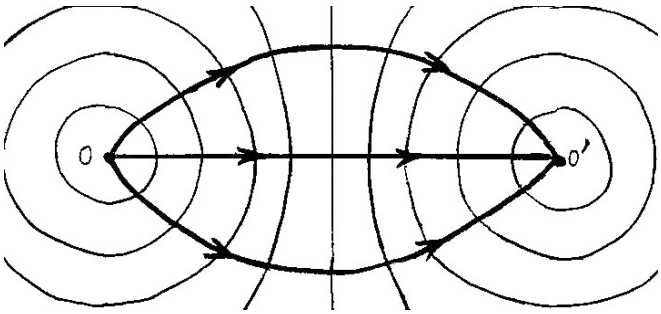


図 193　点 O から点 O′ に至る各光線と，その位相変化

例——薄膜の干渉

シャボン玉や水面上の薄い油膜を念頭に，空気中 (屈折率 1) に厚さ d，屈折率 n の薄膜を考える．図 194 のように薄膜上の位置 Q を視る場合，点 Q で反射して眼に飛び込む光線 II (入射角 i) と，裏側の点 R で反射してから眼に飛び込む光線 I が定まる．これらが干渉して強め合うための波長 λ に対する条件を求めよう．光線 I,II の光路差は

$$n(\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{RQ}})-\overline{\mathrm{HQ}}$$

である．ところが屈折の法則 $n\sin r=\sin i$ により

$$n\overline{\mathrm{PS}}=n\overline{\mathrm{PQ}}\sin r=\overline{\mathrm{PQ}}\sin i=\overline{\mathrm{HQ}}$$

なので，光路差は

$$n(\overline{\mathrm{SR}}+\overline{\mathrm{RQ}})=n\overline{\mathrm{SQ}'}=2nd\cos r$$

と書き換えられる．最終的な結果は屈折角 r よりもむしろ入射角 i を用いて表したい．そこで再び屈折の法則 $n\sin r=\sin i$ を用いて光路差を $2d\sqrt{n^2-\sin^2 i}$ と書こう．最後に光線 II は点 Q で反射する際に位相が π ずれることを考慮すると，強め合う条件として

$$2d\sqrt{n^2-\sin^2 i}=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda,\qquad m=0,1,2,\cdots$$

を得る．薄膜上の視る位置 Q が変わると視線方向が，したがって入射角 i が変わり，これに応じて強め合う波長 λ が，したがって見える色が変わる．

なお以上の結果は等価的に，光線 I,II の位相差

$$2\pi\frac{\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{RQ}}}{\lambda/n}-\left(2\pi\frac{\overline{\mathrm{HQ}}}{\lambda}+\pi\right)$$

を $2m\pi$ と等置しても得ることができる．

6-7 光速の測定

レーマーの計算

地球が太陽の周りを公転し，半年で図 195 の E,E' 間を移動する間に，木星の位置はほとんど変わらない．よって木星の衛星イオが地球から見て木星の背後に隠れる (蝕という) 時刻は，地球が E にいるときと E′ に

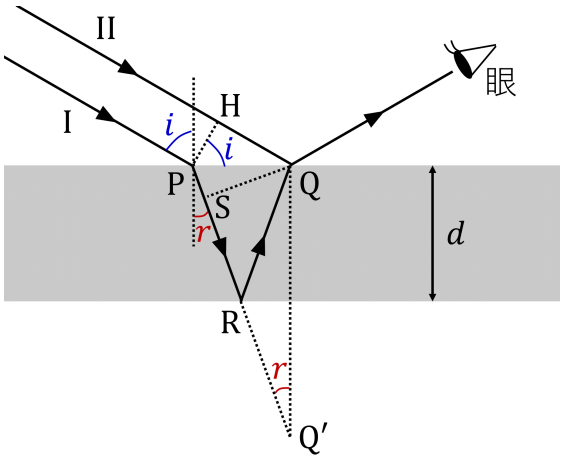


図 194　薄膜の干渉

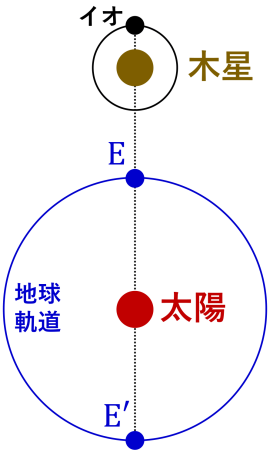


図 195　レーマーの天体観測に基づく光速の計算

いるときとで光が直径 $\overline{\mathrm{EE'}} = 298.6 \times 10^9\mathrm{m}$ を横切るのにかかる時間だけ異なると考えられる．実際に蝕の時刻は半年ごとに時間 $t = 996.4\mathrm{s}$ だけ遅れたり進んだりすることから，光速は

$$c = \frac{\overline{\mathrm{EE'}}}{t} = 2.997 \times 10^8\mathrm{m/2}$$

と求まる[*48]．

地上での測定 1 ——フィゾー

図 196 のように回転する歯車 (歯の個数 $N = 720$) の歯の間を通った光を距離 $L = 8633\mathrm{m}$ 離れた鏡で反射させて再び歯の間を通し観測する．回転数を徐々に上げていくと，回転数 $\nu = 12.6$ 回/s で初めて光が遮られた．これは歯の間を通り抜けた光が距離 L を往復する時間 $2L/c$ のうちに歯車が $1/2N$ 回転し，隣接する歯

[*48] レーマーはこのようにして初めて光速を求めた．ただしここでは時間差 t として後にデランブルが測定した値を用いており，それで光速の正確な値が得られている．

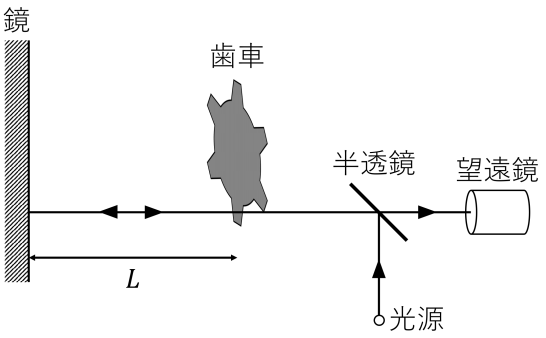


図 196　フィゾーの装置

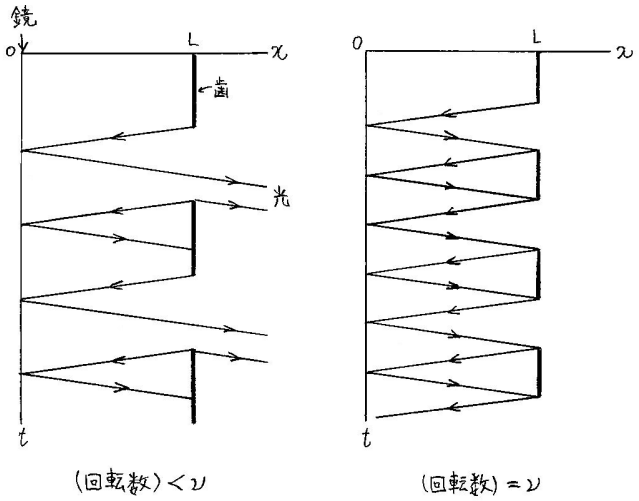


図 197　フィゾーの実験 (ダイヤグラム)

につき当たることを意味する．ここからフィゾーは光速を

$$\nu\frac{2L}{c} = \frac{1}{2N}, \qquad \therefore c = 2N \times 2L\nu = 3.13 \times 10^8\mathrm{m/s}$$

と求めた．

注解

図 197 のように歯車の回転速度が遅いうちは，歯の間を通った光の一部は再び同じ歯の間を通るのに間に合うけれど，回線数が ν に達すると歯の間を通った全ての光が反射後に歯に遮られ，望遠鏡には光が全く来なくなる．

地上での測定 2 ——フーコー

フーコーは図 198 のように回転鏡 M と，M の回転中心 P を中心とする半径 R の球面鏡 M′ を用い，光源からの光を P → M′ → P の順に反射させて観測した．まず M が静止しているときに光が到達する望遠鏡上

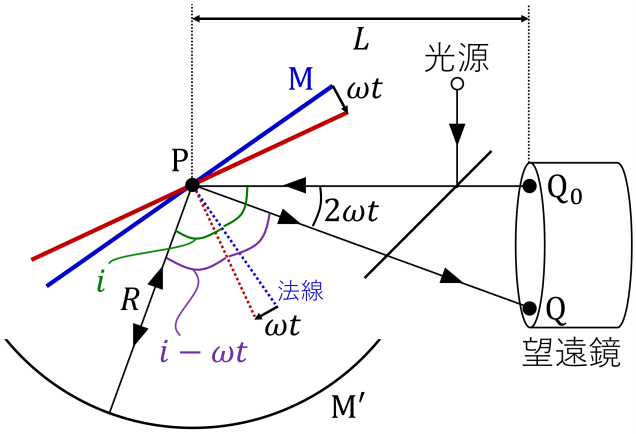


図 198　フーコーの装置

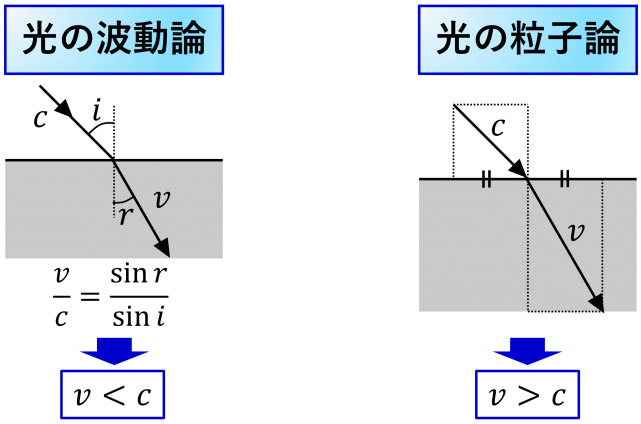


図 199　フーコーの測定結果 $v < c$ は光の波動論の決定的な証拠となった

の位置 Q_0 を調べる．次いで M が角速度 ω で回転しているときの光の到達位置 Q を調べると，［光が P に当たった瞬間の鏡 M の傾きが M の静止状態におけるそれと一致していれば,］光が PM′ 間を往復する時間を $t = 2R/c$ として反射光は鏡 M の静止時に比べて角度 $2\omega t(\ll 1)$ だけ向きがずれる (図 198 参照)．ここから望遠鏡と P の間の距離を L として，光速を

$$\overline{Q_0Q} \simeq L \times (2\omega t) = \frac{4\omega LR}{c}, \qquad \therefore c = \frac{4\omega LR}{\overline{Q_0Q}}$$

と求めることができる．フーコーの測定によれば $c = 3 \times 10^8 \mathrm{m/s}$.

物質中の光速と光の波動論

同様にフーコーは物質中の光速 v を測定し，実験的に $v < c$ を確かめた．これにより光の波動論と粒子論の対立は，ひとまず波動論に軍配が上がった (図 199 参照)．

現在の光速の取り扱い

現在では

$$\begin{cases} \text{光速を } c = 299792458\text{m/s と定義} \\ \text{1 秒を}^{133}\text{Cs 原子が放出する特定の光の 9192631770 周期と定義} \end{cases}$$

$\rightarrow$ 1m を光が 1/299792458 秒の間に進む距離と定義.

6-8 光の偏光

電磁波・横波としての光

最後に電磁波に特有の現象として偏光を取り上げる．5-0 節で学んだように電磁波は電場 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$，波の伝播方向 $\boldsymbol{k}$ がこの順に右手直交系を成すような**横波**であり，さらに電磁場の大きさには $E = cB$ の関係があるから，電場 $\boldsymbol{E}$ が分かれば磁束密度 $\boldsymbol{B}$ も定まる．そこで以下では電場 $\boldsymbol{E}$ のみを考察すれば十分である．電磁波の進行方向を z 軸にとると，電場は x 成分と y 成分のみを持つ．ここでは光源からの光が複数の波連から成ることを考慮して (6-6 節)，i 番目の波連の x 成分，y 成分の位相をそれぞれ

$$\phi_{xi} = kz - \omega t + \delta_{xi}, \qquad \phi_{yi} = kz - \omega t + \delta_{yi}$$

とおく．簡単のために各波連の振幅は等しいものとすると，x 方向と y 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$ として電場は

$$\boldsymbol{E} = \sum_i a_x \sin\phi_{xi}\boldsymbol{e}_x + \sum_i a_y \sin\phi_{yi}\boldsymbol{e}_y$$

と表される．

注解

場の観測位置を固定した場合，p.272 の欄外にあるように「波連は有限時間しか続かないから，その振幅 a_i は，有限時間だけ値をもち，その他では 0 となる.」しかしながら短い時間のうちに与えられた位置 z を通過する波連 i のみを考えれば，振幅 a_x, a_y をゼロでない一定値と考えることが許されよう．(実際，以下ではそのように考える．)

なお後で具体例を見るように，一般には $\phi_{xi} \neq \phi_{yi}$ である．波動方程式はそのような解を許容する．実際 5-0 節の平面波解 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$ における振幅 $\boldsymbol{E}_0$ は任意の複素定ベクトルである．

電磁波のエネルギーと強度

場の強度，あるいは電磁波のエネルギー密度 $u = \varepsilon_0 E^2$ は E^2 に比例している．ところで光の強度として，場の素早い振動に比べて長い時間にわたる平均値に興味が持たれる．そこで時間平均をバーで表すと，E^2 の平均は

$$\overline{E^2} = \frac{1}{2}\sum_i {a_x}^2 + \sum_{i,j(>i)} {a_x}^2 \cos(\delta_{xi} - \delta_{xj}) + (x \Leftrightarrow y) \tag{59}$$

と計算される．ここに $(x \Leftrightarrow y)$ は x を y に置き換えた項である．[この結果は各波連が独立に存在するときの“強度”の和 $\frac{1}{2}\sum_i({a_x}^2 + {a_y}^2)$ に対する付加的な項として，干渉項 $\sum_{i,j(>i)} {a_x}^2 \cos(\delta_{xi} - \delta_{xj}) + (x \Leftrightarrow y)$ が現れることを意味している.]

式 (59) の導出

$$\overline{E^2} = \overline{\left(\sum_i a_x \sin\phi_{xi}\right)^2} + \overline{\left(\sum_i a_y \sin\phi_{yi}\right)^2}$$

において

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\sum_i a_x \sin\phi_{xi}\right)^2} =& \sum_i {a_x}^2 \overline{\sin^2\phi_{xi}} + \sum_{i,j(>i)} 2{a_x}^2 \overline{\sin\phi_{xi}\sin\phi_{xj}}, \\
\overline{\sin^2\phi_{xi}} =& \frac{1}{2}, \\
2\overline{\sin\phi_{xi}\sin\phi_{xj}} =& \overline{\cos(\phi_{xi}-\phi_{xj})} - \overline{\cos(\phi_{xi}+\phi_{xj})} \\
=& \overline{\cos(\delta_{xi}-\delta_{xj})} - \overline{\cos\{2(kz-\omega t)+(\delta_{xi}+\delta_{xj})\}} \\
=& \cos(\delta_{xi}-\delta_{xj})
\end{aligned}$$

である．

注解

以上より $\overline{E^2}$ を展開したときに現れる項は下の図式のようにまとめられる．

	$a_x \sin\phi_{x1}\boldsymbol{e}_x$	$a_x \sin\phi_{x2}\boldsymbol{e}_x$	$\cdots$	$a_y \sin\phi_{y1}\boldsymbol{e}_y$	$a_y \sin\phi_{y2}\boldsymbol{e}_y$	$\cdots$
$a_x \sin\phi_{x1}\boldsymbol{e}_x$	${a_x}^2/2$	$({a_x}^2/2)\cos(\delta_{x1}-\delta_{x2})$		0	0	
$a_x \sin\phi_{x2}\boldsymbol{e}_x$	$({a_x}^2/2)\cos(\delta_{x1}-\delta_{x2})$	${a_x}^2/2$		0	0	
$\vdots$			$\ddots$			$\ddots$
$a_y \sin\phi_{y1}\boldsymbol{e}_y$	0	0		${a_y}^2/2$	$({a_y}^2/2)\cos(\delta_{y2}-\delta_{y1})$	
$a_y \sin\phi_{y2}\boldsymbol{e}_y$	0	0		$({a_y}^2/2)\cos(\delta_{y2}-\delta_{y1})$	${a_y}^2/2$	
$\vdots$			$\ddots$			$\ddots$

(i,j) の対に関する和 $\sum_{i,j(>i)}$ については 3-4 節の図 69 において同様の図式化を行って視覚的に捉え，また同じく図 69 の注解の箇所でいくつかの表記法をまとめておいた．

偏光

- 自然光

  x 方向と y 方向の振幅が等しい：$a_x = a_y \equiv a$.

  波連の位相に何ら関係がない　$\rightarrow$　$\displaystyle\sum_{i,j(>i)} \cos(\delta_{xi}-\delta_{xj}) = 0$.

  よって強度　$I \propto \overline{E^2} = \displaystyle\sum_i a^2$.

- 偏光

  1 方向の振動を含む，または x 方向と y 方向の振動の位相に相関がある．

  簡単のために 1 つの波連 i に着目し，添字 i を省く．

  - 振幅 $a_x = a, a_y = 0$ のとき

    $$\boldsymbol{E} = a\sin(kz-\omega t+\delta_x)\boldsymbol{e}_x : x \text{ 方向の直線偏光.}$$

  - 振幅 $a_x = a_y = a/\sqrt{2}$，位相 $\delta_x = \delta_y = \delta$ のとき

    $$\boldsymbol{E} = a\sin(kz-\omega t+\delta)\frac{\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y}{\sqrt{2}} : x \text{ 軸と } 45^\circ \text{を成す方向の直線偏光.}$$

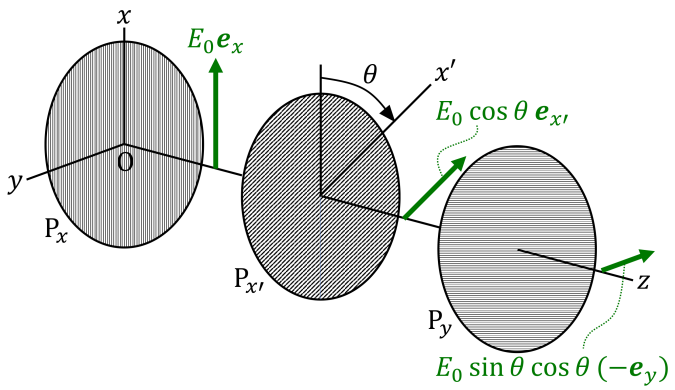


図 200　x 偏光は偏光板 $\mathrm{P}_{x'}$ を通すと y 成分を持つ

– 振幅 $a_x = a_y = a$，位相 $\delta_y = \delta_x \pm \pi/2$ のとき

$$\boldsymbol{E} = a\sin(kz - \omega t + \delta)\boldsymbol{e}_x \pm a\sin(kz - \omega t + \delta)\boldsymbol{e}_y : \text{円偏光}.$$

直線偏光と円偏光の様子については，本稿では既に 4-1 節の注解と 5-0 節で説明してある．

例——偏光板

偏光板は電場が特定の方向に振動する光のみを通す．この方向を偏光軸という．ここで教科書の例題 6-5(p.278) に関連して，次のような話題を取り上げよう．まず偏光軸が x 方向を向く偏光板 P_x に光を通すと x 方向の直線偏光 (x 偏光) が得られ，その電場の振幅は $E_0\boldsymbol{e}_x$ と書ける．このとき電場の y 成分は失われているから，さらに偏光軸が y 方向を向く 2 枚目の偏光板 P_y に光を通すと，光は全く出てこない．ところが図 200 のように 2 枚の偏光板の間に，偏光軸が x 軸と θ の傾きを成す x' 軸方向を向いた偏光板 $\mathrm{P}_{x'}$ を通すと事情は異なる．このとき $\mathrm{P}_{x'}$ の背後での電場の振幅は $E_0\cos\theta\boldsymbol{e}_{x'}$ であり，次いで P_y を通った光に関する電場の振幅は $E_0\sin\theta\cos\theta(-\boldsymbol{e}_y)$ となる．このように P_x を通った光は電場の y 成分を持たないにも関わらず，一般には最終的に P_y をゼロでない光が通る [21, pp.8–9].

第 7 章 微視的世界の物理学

7-1 光子仮説と光電効果

微視的世界と巨視的世界

20 世紀になって，微視的世界 (原子，分子，原子核，素粒子の世界) には巨視的概念や巨視的世界の物理学 (古典物理学) がそのままでは適用できないことが明らかになった．

プランクの量子仮説

19 世紀末までには光の波動論が確かなものとして受け入れられていた．新しい物理学は Planck の量子仮説に始まる (1900 年)．これによれば物質が振動数 ν の光を吸収・放出するときにやりとりされるエネルギーは，

$$h = 6.6 \times 10^{-34}\mathrm{J \cdot s}$$

を **Planck 定数**として $h\nu$ の整数倍でなければならない．

光電効果

この Planck の仮説をさらに発展させ，その正しさを立証したのが，1905 年の Einstein による光電効果の解明であった．光電効果とは金属に光 (可視光や紫外線) を射照したとき，金属内部から電子が叩き出される現象であり，出てきた電子は図 201 に示す装置によって電流 I として捉えられる．

光電子と熱電子

金属内の電子は自由電子であっても，表面で金属を構成している陽イオンから内向きの Coulomb 引力を受けているため，金属の外に取り出すためには仕事 (エネルギー) を加えなければならない．

- 光電子 $\cdots\cdots$ 光のエネルギーで取り出された電子．
- 熱電子 $\cdots\cdots$ 熱エネルギーで取り出された電子．

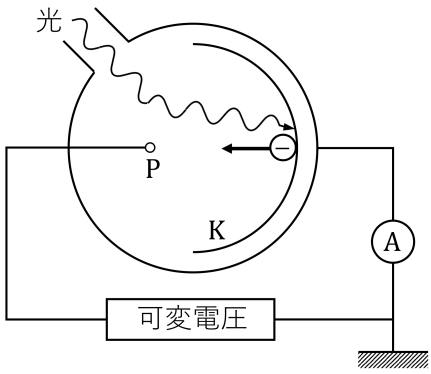


図 201　光電効果の実験装置

金属内電子のエネルギー準位

自由電子には速度の速いものもあれば遅いものもあり，取り得るエネルギーの値に幅がある．そこで電子が金属の外で静止している状態を基準として，自由電子のエネルギーを $-W(<0)$，その最大値を $-W_0(<0)$ とすると，自由電子を金属外に取り出すためには少なくとも W_0 のエネルギーを与えねばならない．この W_0 は金属に固有の量であり，**仕事関数**と呼ばれる (だいたい数 eV).

光電子の発生とエネルギー保存則

金属から電子を取り出すためには，射照する光から 1 個の電子に与えられるエネルギー ε は

$$\varepsilon > W_0$$

でなければならず，このとき出てくる電子の運動エネルギー $K = \varepsilon - W$ の最大値は

$$K_{\max} = \varepsilon - W_0.$$

アインシュタインの解釈——光量子論

Einstein は光量子論により光電効果の実験を説明した．本稿では実験の詳細に先立って，Einstein の理論を説明する．あらかじめ種明かしをしておけば，実験結果の解釈が容易となるだろう．

Einstein の光量子論によれば，振動数 ν の光はエネルギー

$$\varepsilon = h\nu$$

の光子の集まりである．ここで古典的な光の波動論では波の振幅の 2 乗は波のエネルギーを表すが，それは多数の光子全体のエネルギーに対応し，光子 1 個のエネルギーには対応しない：

$$\text{光の強さ (エネルギー)} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{光子数} \\ \text{波の振幅の 2 乗} \quad \not\leftrightarrow \quad \text{光子 1 個のエネルギー} \end{cases}$$

さて，光電効果の実験の主要な結果は次の点にある．

- 光の強さを増すと出てくる電子の数は増えるが，
- 電子の出てくる条件および電子 1 個の運動エネルギーが光の強さによらず，光の振動数で決まる．

このことは光量子論に基づき，次のように説明できる．すなわち金属中の電子は 1 個の光子を吸収して金属の外に飛び出す．このとき

- いくら光が強く (光子数が多く) とも，振動数 ν が小さく
  1 個の光子のエネルギーが $h\nu < W_0$ ならば，電子は金属の外に出ることができない．
- 振動数 ν が充分大きく $h\nu > W_0$ ならば電子は電子は金属の外に飛び出し，
  運動エネルギーは光の強さ (光子数) によらず，

  $$K = h\nu - W, \qquad K_{\max} = h\nu - W_0$$

  のように光の振動数で決まる．
- 光の強さを増すと光子数が増えるから，出てくる電子の数は増える．

注解　光子はまばらに降り注ぐため，1 個の電子に複数の光子が立て続けに衝突する状況は無視できる．

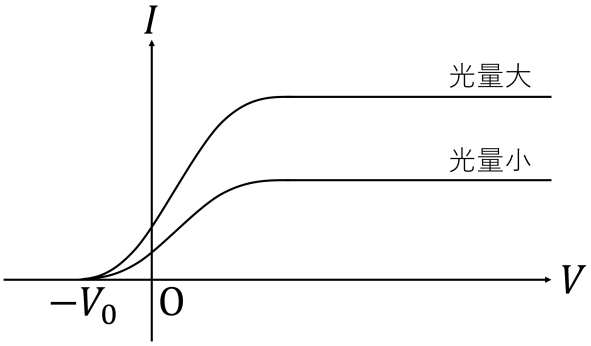


図 202　電子が出てくる場合 ($\nu > \nu_0$) の電圧 V と電流 (光電流) I の関係

実験結果 1 ——電子の出てくる条件

- 光の量 (強さ) がいくら強くとも $\nu < \nu_0$ ならば $I = 0$.
- 光の量 (強さ) がいくら弱くとも $\nu > \nu_0$ ならば $I > 0$.
  - このとき電子は光を当てると直ちに (3×10^{-9}s 以下で) 飛び出す.

ここに ν_0 は陰極金属の種類に応じたある振動数.

実験結果 2 ——出てくる電子数

電子が出てくる $\nu > \nu_0$ の場合に電圧 V と電流 (光電流) I の関係は図 202 のようになる.［十分な］電圧 $V > 0$ に対して光電子は全て陽極 (P) に集められる．このとき I が一定になるのは，出てくる電子数が一定なことを示す．また光の量を増せば電流は増すが，そのことは光の強さとともに出てくる電子数が増すことを示している.

実験結果 3 ——電子 1 個のエネルギー

陽極 P の電圧 V を負にすると電子は P から斥力を受け，V を減らしていくと $V = -V_0$ (臨界電圧) のときはじめて全ての電子が陰極に押し戻され，電流がゼロになる．よってこの臨界電圧を測定すれば，電子の最大運動エネルギーが

$$K_{\max} = eV_0$$

で求まることになる.

実験によれば ν を一定にすると，光の強さを変えても V_0 は，したがって個々の電子のエネルギー $K_{\max}$ は変わらない (図 202 参照)．次に光の振動数 ν を変化させて V_0 を測定すると，$K_{\max}$ は Planck 定数 h を比例係数として

$$K_{\max} = h(\nu - \nu_0)$$

を満たすことが実験的に示された.［理論式 $K_{\max} = h\nu - W_0$ に対応．仕事関数は $W_0 = h\nu_0$ の関係から実験的に求まることになる.］

以上は表 5 のようにまとめられる.

表 5　光電効果

	電子が出てくる条件	$K_{\max} = eV_0$ の値
理論	$\varepsilon > W_0$	$K_{\max} = \varepsilon - W_0$
実測	$\nu > \nu_0$	$K_{\max} = h(\nu - \nu_0)$

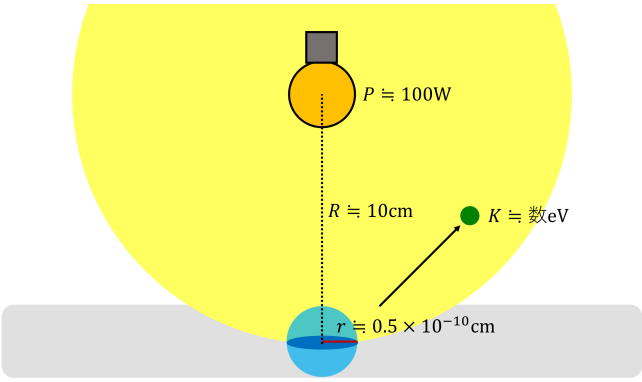


図 203　波動として伝播する光のエネルギーを原子が蓄える場合

光の波動論 (古典論) の破綻

以上の結果は古典論 (光の波動論) ではまったく説明がつかない．と言うのも，古典論 (光の波動論) では

- 光のエネルギーは光の強さ (明るさ) すなわち振幅の 2 乗に比例しているから，
  これが十分大きければ振動数とは無関係に電子が飛び出すはずである．
- 光のエネルギーは空間内で連続的に分布しているから，
  それが電子に集められ，電子が飛び出すまでに時間がかかるはずである．
  実際，図 203 のように $P \simeq 100$W の電球から $R = 10$cm 離れた場所にある原子
  (半径 $r \simeq 0.5 \times 10^{-10}$m) を考えると，これが $K \simeq$ 数 eV のエネルギーを得る時間 t は

$$P \times \frac{\pi r^2}{4\pi R^2} \times t = K, \qquad \therefore t = \frac{K}{P}\left(\frac{2R}{r}\right)^2 \simeq 0.1\text{s}$$

  と見積もられる．

注解　p.284，l.13 に「t 秒」とあるが，正確には単位「秒」は文字 t に含まれており，
t は時間の次元を持った物理量である．著者らしからぬ手抜かりである．

光の粒子性の効果——1 つの例

日焼けは皮膚の分子が光からエネルギーを得て化学反応を起こすことによる．高い振動数 ν を持ち，それ故に 1 個の光子のエネルギー $h\nu$ の大きい紫外線について，

- 海や山　→　紫外線が多い　→　陽射しが弱くても (光子数が少なくても) すぐに日焼けする．

- 都会　→　紫外線は空気中の塵に散乱されて少ない　→　なかなか日焼けしない．

また振動数の小さい赤外線ストーブにあたっても，日焼けしない．

7-2 光子の運動量

光子の運動量と光の圧力

光子はエネルギー ε を持つと同時に，運動量を持つ．その証拠に以下のような現象が観測されている．

- 光子から力を受けた軽い鏡は向きが揺れ動く．
- 空気のない月面の旗は太陽光ではためく．
- 大きくて軽い人工衛星 (風船衛星) の軌道は太陽光の圧力で少しずつ変化する．

注解　光がエネルギーと運動量を持つこと自体は波動論 (場の古典論) でも正しい．
物質と場を合わせた (孤立) 系全体でのエネルギーと運動量が保存する [2, pp.85–95].

前置き

ここで続く教科書の議論に入る前に，補足説明と併せてその内容をあらかじめ予告しておこう．
光子を含む粒子は一般に波としての性質も持ち (7-6 節も参照),

- 粒子 $\cdots\cdots$ エネルギー ε，運動量 p
- 波 $\cdots\cdots$ 振動数 ν，波長 λ

の間には

$$\varepsilon = h\nu, \qquad p = \frac{h}{\lambda}$$

の関係がある．

参考　Planck 定数 h を 2π で割った値 $\hbar \equiv h/2\pi$ を導入すると，
角振動数 $\omega = 2\pi\nu$，波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ (6-1 節) を用いてこの関係は

$$\varepsilon = \hbar\omega, \qquad \boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$$

と書き換えられる．

特に光では波が速度 c で伝播するから，光量子論で導入した第 1 式は $\varepsilon = h\nu = hc/\lambda$ となる．ところが光子には $\varepsilon = pc$ の関係があるため (付録 D.23，7-8 節参照)，第 2 式はここから $p = \varepsilon/c = h/\lambda$ と導かれることになる．以下では光子ガスに対する素朴な考察を通して $\varepsilon = pc$ の関係および光子の運動量 $p = h/\lambda$ を改めて“導く”．

光子ガスの圧力・内部エネルギー，光子の運動量

$0 \le x, y, z \le L$ を占める 1 辺 L，体積 $V = L^3$ の立方体領域に閉じ込められた光子ガスを考える．全光子数 N の 1/3 が x 軸に沿って運動しているかのように考えると，x 軸に垂直な $x = L$ の面が光子ガスから受ける圧力は光子の運動量 p を用いて

$$P = \frac{1}{3V}\sum pc \tag{60}$$

と表される (導出は下記，和は光子にわたってとる (以下同じ))．

次に光を波として考え，その全体の 1/3 を x 軸に平行な波と考えると，両端では反射の際に位相が π ずれ［6-6 節］，固定端となるから［4-4 節］，

$$\text{波長}\quad \lambda = \frac{2L}{n}, \qquad\qquad \text{振動数}\quad \nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{nc}{2L}$$

の定常波が存在できる ($n = 1, 2, \cdots$)．光量子論 $\varepsilon = h\nu$ に基づく光子ガスの内部エネルギー

$$U = \sum \varepsilon = \sum h\nu$$

はこの関係を通して立方体の x 方向の幅 L に依存することになる．このとき $x = L$ の面をゆっくり $\Delta L (\ll L)$ だけ移動させたときの全内部エネルギーの変化は

$$\Delta U = -\frac{1}{3V}\left(\sum \varepsilon\right)\Delta V \tag{61}$$

と計算される ($\Delta V = L^2 \Delta L$ は体積膨張，導出は下記)．

ここでは断熱変化を考えているので熱力学第 1 法則は $\Delta U = -P\Delta V$ である．ここに式 (60)，式 (61) を代入すると

$$\frac{1}{3V}\sum(\varepsilon - pc)\Delta V = 0$$

となる．これより光子に対する関係 $\varepsilon = pc$ が，したがって光子の運動量の表式 $p = hc/\lambda = h/\lambda$ が得られる．

なお，このとき式 (60) は光子ガスの状態方程式

$$PV = \frac{1}{3}U$$

を意味する［付録 D.37 も参照］．

上式 (60) の導出　x 方向に運動する光子は［断熱変化の仮定により壁と弾性衝突し］1 回の衝突で $x = L$ の壁に $2p$ の力積を及ぼす．微小時間 Δt のうちに 1 つの光子は壁と $c\Delta t/2L$ 回衝突するから，面が $N/3$ 個の光子から受ける力積は

$$\Delta I = \frac{1}{3}\sum 2p \times \frac{c\Delta t}{2L}$$

となり，圧力の式 (60):

$$P = \frac{\Delta I/\Delta t}{L^2} = \frac{1}{3V}\sum pc$$

を得る．

上式 (61) の導出　面の移動に伴う振動数の変化は

$$\Delta\nu = \Delta\left(\frac{nc}{2L}\right) \simeq -\frac{nc}{2L^2}\Delta L = -\nu\frac{\Delta V}{V}$$

となるので，波全体の 1/3 の振動数変化に伴う内部エネルギーの変化は式 (61):

$$\Delta U = \frac{1}{3}\sum h\Delta\nu = -\frac{1}{3}\sum h\nu\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{3V}\left(\sum \varepsilon\right)\Delta V$$

で与えられる．

7-3 コンプトン効果とドップラー効果

コンプトン効果

Compton 効果は電子に散乱された光 (X 線) の波長が少し長くなる現象である．古典論では電子による光の散乱は

光の入射 → 入射電場の振動による電子の振動 → 電子による光の放射

という過程から成り，このとき散乱光として電子の放射する光の振動数は入射光と変わらないから，Compton 効果を説明できない．他方，量子論では図 204 のような電子による光子の弾性散乱を考える．この際，X 線の光子のエネルギー (1 万 eV 程度) に比べて原子による外殻電子の束縛エネルギー (数 eV 以下) は無視できるから，電子は事実上自由と見なして良い．このとき図 204 の記号を用い，電子の質量を m とすると，電子の非相対論的な取り扱いの下で

$$\text{エネルギー保存則} \qquad \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + \frac{1}{2}mv^2, \tag{62}$$

$$\text{運動量保存則} \qquad \begin{cases} x\ \text{成分：} & \dfrac{h}{\lambda} = \dfrac{h}{\lambda'}\cos\theta + mv\cos\phi \\ y\ \text{成分：} & 0 = \dfrac{h}{\lambda'}\sin\theta - mv\sin\phi \end{cases} \tag{63}$$

となる．ここから波長の伸び (の散乱角 θ 依存性) が近似的に

$$\Delta\lambda \equiv \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta) \tag{64}$$

と導かれる (導出は下記)．この結果は電子のエネルギーと運動量の相対論的な表式を用いた厳密な保存則

$$\text{エネルギー保存則} \qquad \frac{hc}{\lambda} + mc^2 = \frac{hc}{\lambda'} + \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}, \tag{65}$$

$$\text{運動量保存則} \qquad \begin{cases} x\ \text{成分：} & \dfrac{h}{\lambda} = \dfrac{h}{\lambda'}\cos\theta + p\cos\phi \\ y\ \text{成分：} & 0 = \dfrac{h}{\lambda'}\sin\theta - p\sin\phi \end{cases} \tag{66}$$

からは近似なしに導かれる (導出は下記)．散乱された光の波長の伸び (64) は実験的に立証された．

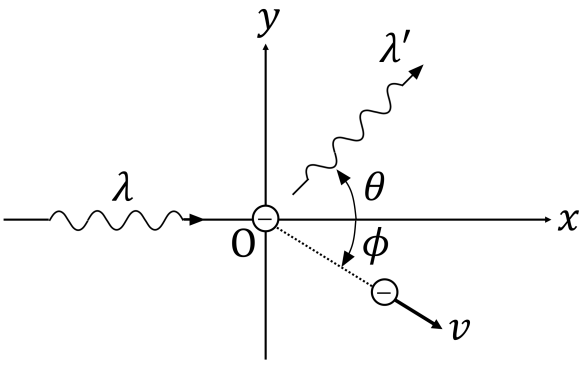


図 204　Compton 効果

電子の非相対論な取り扱いによる式 (64) の導出　運動量保存則 (63) から ϕ を消去すると

$$(mv)^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 - 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\cos\theta + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2$$

となる．一方，エネルギー保存則 (62) は

$$(mv)^2 = 2mch\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = 2mch\left(\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'}\right)$$

となるので，これらを等置して

$$\Delta\lambda \equiv \lambda' - \lambda = \frac{h}{2mc}\left(\frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda'} - 2\cos\theta\right)$$

を得る．ここで電子質量 $m = 9.1 \times 10^{-31}$kg に対して右辺の係数［Compton 波長］$h/mc = 0.024$Å は X 線の波長 (1Å 程度) に比べて小さいから，$\Delta\lambda$ も (同じ意味で) 小さくなると期待される (この仮定は——循環論法のようであるが——結果 (64) によって正当化される)．そこで右辺において $\lambda = \lambda'$ と近似すると式 (64):

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

が導かれる．丁寧に調べると，これは以下のように $\Delta\lambda$ の 2 次の微小量を無視する近似を行っていることになる．

$$\frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda'} \simeq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda'} - 2 = \frac{(\lambda - \lambda')^2}{\lambda\lambda'} \simeq 0.$$

電子の相対論な取り扱いによる式 (64) の厳密な導出　電子の非相対論な取り扱いの場合と同様に運動量保存則 (66) から ϕ を消去すると

$$p^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 - 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\cos\theta + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2$$

となる．一方，エネルギー保存則 (65) は

$$\begin{aligned} p^2 &= \left\{mc + h\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)\right\}^2 - (mc)^2 \\ &= \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 - 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'} + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 + 2mch\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) \end{aligned}$$

を与えるので，これらを等置して式 (64):

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

を得る．なお相対論的な表記を駆使した導出を付録 D.38 で紹介する．

注解

■Compton 効果の量子論による解釈　散乱された光の波長が伸びることは，光量子論では電子に散乱された光子のエネルギーが減少することを意味している．散乱過程において光子は静止していた電子に運動エネルギーを与えている．

■Compton 波長　式 (64) の係数 h/mc は Compton 波長と呼ばれ，長さの次元を持つ．ここで Planck 定数 h の次元が

$$[h] = (\text{エネルギー}) \times (\text{時間}) = (\text{運動量}) \times (\text{長さ}) = (\text{角運動量})(= (\text{作用積分}))$$

であることに注意する．

ドップラー効果

他方，量子論においても光の波動論と同じ結果が得られる例として，Doppler 効果を挙げることができる．原子が放出する光の振動数は原子が運動している場合には変化し (Doppler 効果)，その振動数は量子論に基づき，原子が放出する光を光子と捉えてエネルギー・運動量保存則から計算できる (導出は下記)．

注解 1　光の 1 次元的な Doppler 効果による振動数変化は，4-3 節で示した公式 (付録 D.24 における導出も参照) $\nu' = \sqrt{\frac{1+(v/c)}{1-(v/c)}}\nu$ で与えられる．これは非相対論的極限 $v \ll c$ で

$$\nu' = \left(1+\frac{v}{c}\right)^{1/2}\left(1-\frac{v}{c}\right)^{-1/2}\nu \simeq \left(1+\frac{v}{2c}\right)^{2}\nu \simeq \left(1+\frac{v}{c}\right)\nu$$

となる．以下ではこの式の導出を目指して，あらかじめ原子のエネルギー・運動量について非相対論的な近似を採用する．

導出　原子 (質量 M) におけるエネルギー準位の差 ΔE［これは原子の運動状態に依らない］を電子が遷移すると，原子は光を放出する．原子が静止している場合のこの光の振動数を ν とすると

$$\Delta E = h\nu. \tag{67}$$

次に速度 v_1 で運動する原子が放出する光の振動数 ν' を考えよう．原子は光を放出した後で内部の電子の結合状態のエネルギーが ΔE だけ減るので，速度は v_2 になったものとすると (図 205 参照)，エネルギー・運動量はそれぞれ

$$\frac{1}{2}M{v_1}^2 = \frac{1}{2}M{v_2}^2 - \Delta E + h\nu', \tag{68}$$

$$Mv_1 = Mv_2 + \frac{h\nu'}{c} \tag{69}$$

となる．3 式 (67)，(68)，(69) より

$$\begin{aligned} h\nu =& h\nu' - \frac{1}{2}M(v_1-v_2)(v_1+v_2) \\ =& h\nu' - h\nu'\frac{v_1+v_2}{2c} \end{aligned}$$

を得る．実際には発光による原子の速度変化は極めて小さく，そこで発光前後での平均速度 $v = (v_1+v_2)/2$ を原子の速度とすれば，引き続き非相対論的な近似 $v \ll c$ の下で Dopppler 効果の式

$$\nu' = \frac{1}{1-(v/c)}\nu \simeq \left(1+\frac{v}{c}\right)\nu$$

が導かれる．

注解 2　光子の運動量 4 元ベクトル $p^\mu = (\varepsilon/c, \boldsymbol{p})$ は光の波数 4 元ベクトル $k^\mu = (\omega/c, \boldsymbol{k})$ とともに Lorentz 変換に対して 4 元反変ベクトルとして変換する．これが Doppler 効果に他ならない (以上，付録 D.23，D.24，D.26 参照)．これは光子仮説 $p^\mu = \hbar k^\mu$ (7-2 節のノートを参照) と整合している．

7-4 原子の古典模型とその難点

今世紀はじめの状態

20 世紀初頭には原子が存在し，

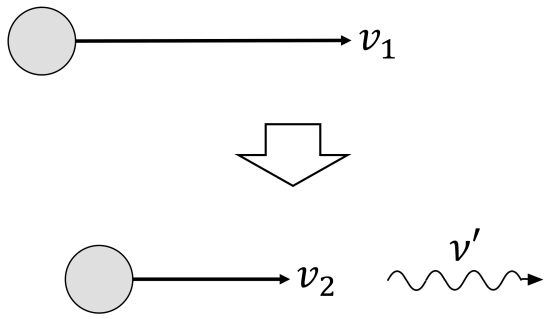


図 205　運動中の原子の発光による 1 次元的な Doppler 効果

- 原子は中性であり，負電荷の軽い電子を含むこと
- したがって電子を除いた部分が正電荷で大部分の質量を持っていること
- 原子の直径はおよそ 10^{-10}m であること

が知られていた．また原子のモデルとして

- **Thomson 模型**
  - 正電荷の一様な球対称分布の中に電子が「ぶどうパン」のように散らばっている (図 206 参照).
- 長岡の**太陽系模型** (土星模型)
  - 中心に大部分の質量を持つ正電荷の塊があり，
    その周りを負電荷の電子が Coulomb 引力で回っている (図 207 参照).

が提唱された．

ガイガーとマースデンの実験

Geiger と Marsden は高速の α 線を金箔にあてたところ，ほとんど真後ろにはね返る大角度散乱がまれに起こることを見出した．以下で見るように，正電荷が広く原子全体に分布している Thomson 模型では粒子を曲げることのできる強い電場が得られず，この現象を説明できない．

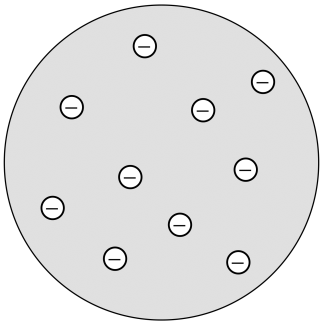


図 206　Thomson の原子模型

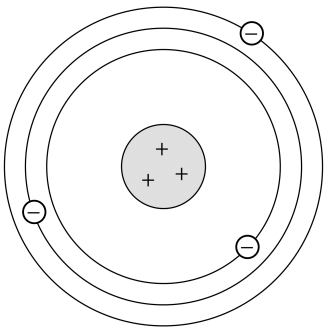


図 207　長岡の原子模型

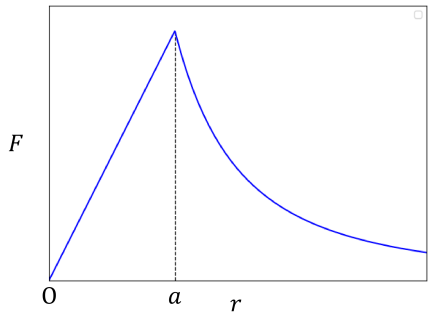


図 208　Thomson モデルの斥力 (5-2 節の電場の図 112 による)

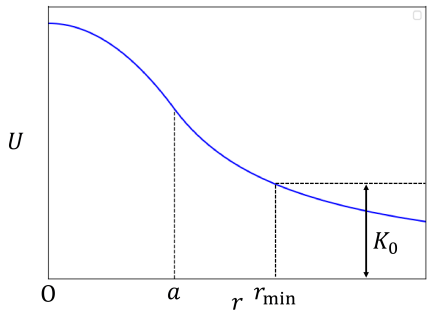


図 209　Thomson モデルのポテンシャル (5-2 節の電位の図 112 による)

トムソン模型の難点

Thomson 模型に基づいて α 粒子 (質量 M，電荷 q) の散乱角を評価しよう．正電荷 Q が半径 $a \simeq 0.5 \times 10^{-10}$m の原子内部に一様に分布しているとき，斥力は球面 $r = a$ で最大になる (図 208 参照)．そこで大きな散乱角の期待できる場合として，図 210 のように α 粒子が球面 $r = a$ をかすめるときの散乱角 $\theta_{\max}$ を見積もることにする．その際，次のように大雑把に考える．まず α 粒子は［運動量変化の小さい微小角散乱の仮定の下で］x 方向に一定の速度成分 v_0 を持つものとし，また $-a \leq x \leq a$ の範囲を横切る時間 $\Delta t = 2a/v_0$ の間のみ y 方向に力 $F_y \simeq kQq/a^2$ を受けるものとすると，y 方向の運動量変化は

$$(\Delta p_y)_{\max} = F_y \Delta t \simeq \frac{kQq}{a^2} \times \frac{2a}{v_0} \tag{70}$$

となり，散乱角の式

$$\tan\theta_{\max} \simeq \frac{(\Delta p_y)_{\max}}{Mv_0} \simeq \frac{2kQq}{aM{v_0}^2}$$

を得る．磁場と電場による屈折の実験から既に知られていた α 粒子の速度と比電荷の値

$$v_0 \simeq 1.9 \times 10^7 \mathrm{m/s}, \qquad \frac{q}{M} \simeq 4.8 \times 10^7 \mathrm{C/kg} \tag{71}$$

を用い，また原子の正電荷については $Q = Ze$ とおくとこれは $\tan\theta_{\max} \simeq 7Z \times 10^{-6}$ にしかならず，Geiger と Marsden の発見した大角度散乱を説明できない．

参考 1　粒子の x 方向の速度を v_0 (一定) とする近似は引き続き採用するものの，斥力を全範囲 $-\infty \leq x \leq \infty$ で正しい厳密な表式

$$F_y = k\frac{Qq}{a^2 + x^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

に置き換えて $(\Delta p_y)_{\max}$ を計算し直すと，

$$(\Delta p_y)_{\max} = \int_{-\infty}^{\infty} F_y \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} F_y \frac{\mathrm{d}x}{v_0} = \frac{kQqa}{v_0} I,$$

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^3\phi}{a^3} \cdot \frac{a\mathrm{d}\phi}{\cos^2\phi} = \frac{2}{a^2} \qquad (x \equiv a\tan\phi)$$

となって，やはり上式 (70) と同じ結果 $(\Delta p_y)_{\max} = \frac{kQq}{a^2} \times \frac{2a}{v_0}$ を得る．［このような微小な散乱角の評価方法は文献 [9, pp.68–70] に見出される．］

参考 2 「1 回の散乱では散乱角は小さいけれども，何回も散乱されることによって大きくまがるという可能性は，確率的に考えられない」(p.296 欄外の註).

ラザフォード理論と核の大きさ

Rutherford は大角度散乱を説明できる強い電場を得るには，正電荷の分布する核の半径 a が極めて小さくなければならないと考え，その値を次のように見積もった．核の中心線を通る［すなわち衝突パラメーターがゼロの］α 粒子を考えると，これが後方に散乱されるためには，核の中心からの距離 r が核の表面 $r = a$ に達する前に最小値 $r_{\min}$ をとらなければならない[*49]．ポテンシャル $U(r)$ は図 209 で与えられ，これは $r > a$ で $U(r) = kQq/r$ となって単調減少することを考えると，この条件は

$$r_{\min} > a, \qquad \therefore U(r_{\min}) < U(a)$$

となる．無限遠方での運動エネルギーを $K_0 = m{v_0}^2/2$ とすると $r_{\min}$ はエネルギー保存則 $K_0 = U(r_{\min})$ から定まるので，

$$K_0 < \frac{kQq}{a}, \qquad \therefore a < \frac{2kQ(q/M)}{{v_0}^2}$$

となる．再び $Q = Ze$ とおき，式 (71) の値を用いると

$$a < \text{約 } 3Z \times 10^{-16}\mathrm{m}$$

となる (金 ($Z = 79$) では $a <$ 約 10^{-14}m)．このような小さな核を持つ原子模型を **Rutherford 模型**という[*50]．

参考 1　小さな正電荷の核を持つ Rutherford 模型における α 粒子の散乱は図 211 のようである．［Rutherford 模型にせよ Thomson 模型にせよ，正電荷の拡がりの外側では Coulomb 斥力は距離とともに減少するので，力の中心の近くを通るほど (衝突パラメーターが小さいほど) 大きな斥力を受けて散乱角が大きくなる．］

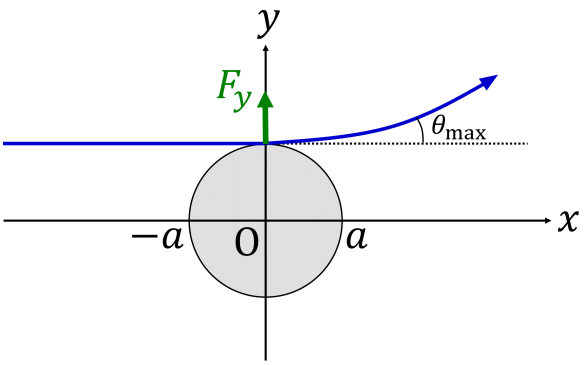


図 210　Thomson 模型に基づく散乱角の評価

[*49] Rutherford 自身が後に示したように，α 粒子は核の内部に入り込むと核反応を起こす．
[*50] これに対し長岡による土星模型ではその名の通り，かなり大きな核が考えられていたようである．

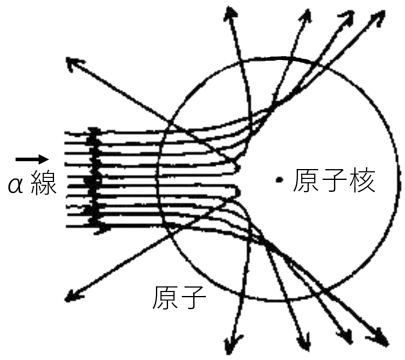


図 211　α 粒子の散乱の様子

参考 2　Thomson 模型に対しても同様の考察をできる (例題 7-4(p.296)).［この場合 a は原子半径であって，α 粒子が内部 $r < a$ に入ることを許容すると,］α 粒子が真後ろにはね返される条件は

$$K_0 < U(0) = \frac{3}{2}\frac{kQq}{a} \simeq 1.4Z \times 10^{-17}\mathrm{J} \simeq Z \times 10^2\mathrm{eV}$$

である (ポテンシャルの図 209 と 5-2 節におけるその表式を参照)．ところが実際には $K_0 \sim 1\mathrm{MeV} = 10^6\mathrm{eV}$ であって，この条件は満たされない．

水素原子の場合

Rutherford 模型では特に水素原子の場合，核 (陽子，電荷 $+e$) の周りを電子 (質量 m，電荷 $-e$) が回っていることになる (核は電子の約 1800 倍の質量を持つため，静止していると見て良い).

Bohr 理論 (7-5 節) の準備も兼ねて電子の運動方程式とエネルギーを調べておく：

$$\begin{aligned}
\text{運動方程式} \qquad & m\frac{v^2}{r} = k\frac{e^2}{r^2}, \\
\text{運動エネルギー} \qquad & K = \frac{1}{2}mv^2 = k\frac{e^2}{2r}, \\
\text{全力学的エネルギー} \qquad & E = \frac{1}{2}mv^2 - k\frac{e^2}{r} = -k\frac{e^2}{2r}.
\end{aligned}$$

［$E < 0$ となることについては 2-12 節参照.］

ラザフォード模型の難点

- 太陽系において太陽-地球間の距離が“偶然的な”初期条件から決まったのと同様に，
  Rutherford 模型では原子の半径が決まらず，半径は原子ごとに異なり得る．
  → 実際の原子半径の一定性を説明できない．
  – これは長岡・Rutherford 模型のパラメーター m, ke^2 だけからは
    長さの次元を持つ量を作れないことと関係している．
- Rutherford 模型では電子は円運動を (したがって加速度運動を) 行っているため，
  古典電磁気学によれば電子は光を放射してエネルギーを失い，原子核に落ち込んでしまう．
  しかもその時間は計算によると極めて短い (付録 D.39 で計算を示す).

→　実際の原子の安定性を説明できない．

- 運動方程式 $m\frac{v^2}{r} = k\frac{e^2}{r^2}$ より回転の振動数は

$$\nu = \frac{v}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{ke^2}{mr^3}}$$

となる．円運動の半径の減少に伴い回転の振動数は，
したがって電子の放射する光の振動数［波長］は連続的に変化するはずである．
←　しかし実際の水素原子からの光の波長 λ は経験法則

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right) \qquad (n = 1, 2, \cdots, n' = n+1, n+2, \cdots)$$

に従う決まった値をとる．

- $R = 1.09737 \times 10^7 \mathrm{m}^{-1}$: Rydberg 定数，
  $n = 1$: Balmer 系列 (λ : 紫外部)，
  $n = 2$: Lyman 系列 (λ : 可視光)，
  $n = 3$: Paschen 系列 (λ : 赤外部)．

これらの難点は Bohr 理論によって一応，解決された (7-5 節)．［その際，Rutherford 模型自体は保持される．］

7-5 ボーア理論と原子構造

ボーアの発想法

原子の問題は Bohr 理論に始まる**前期量子論**によって一応，解決された．Bohr 理論は古典論の結果に何らかの制約を［試験的に］仮説として課し，新しい原理を探ろうとする過渡期の理論であり，うまくいかない部分や内部矛盾もある．

注解

未知の原理を探り当てるボトムアップ式の歴史的な試行錯誤は必然的に飛躍——積極的な飛躍——を含み，非演繹的となる．

ボーアの量子条件とその帰結

中心力では角運動量が保存する．そこで Bohr は Rutherford 模型の原子半径 r を決める条件として，次の **Bohr の量子条件**を仮定した．

仮説 1　核のまわりを運動する電子の円運動に対する軌道角運動量 $l = mrv$ は

$$l = n\frac{h}{2\pi} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

という値しかとり得ない．［その物理的な解釈・意味付けは 7-6 節．］
言い換えれば，この条件を満たす運動状態 (**定常状態**という) だけが許される．

注解　記号 $\hbar \equiv h/2\pi$ を導入すると，この量子条件は $l = n\hbar$ と表される．

これと運動方程式 $m\frac{v^2}{r} = k\frac{e^2}{r^2}$ (7-4 節) から v を消去すると，半径は

$$r = r_n \equiv \frac{\hbar^2}{mke^2}n^2$$

と決まり，したがって全力学的エネルギー $E = -ke^2/2r$ (7-4 節) も

$$E = E_n \equiv -\frac{m(ke^2)^2}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

となる．このようにエネルギーのとり得る決まった値を**エネルギー準位**という．

注解

古典的には電荷は放射により角運動量を失う．放射を無視して電荷がほぼ定常的な運動を行うと見なせるためには，放射の波長が電荷 e の古典的半径 e^2/mc^2 (Gauss 単位系での表式) に比べて十分長く，また電荷に作用する外場そのものが十分に小さいことが必要である [2, pp.227–231]．このとき Coulomb 力の下での電荷のエネルギーと角運動量が保存するとして，その運動を議論できる [2, pp.106–108]．

光子仮説と発光のメカニズム

さらに Bohr は原子の発光について次の仮説を立てた．

仮説 2　電子は定常状態にあるときには光を放出・吸収せず，あるエネルギー準位 n' から別のエネルギー準位 $n(< n')$ に“飛び移る”ときにのみ，そのエネルギー差に対応するエネルギーの光を 1 個の光子として放出する．したがって光子の振動数 ν は

$$E_{n'} - E_n = h\nu.$$

から定まる．($n > n'$ では光を吸収．)

すると原子から放射される光の波長 (の逆数) は

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right), \qquad R \equiv \frac{2\pi^2 m(ke^2)^2}{ch^3} = 1.10 \times 10^7 \mathrm{m}^{-1}$$

と表されることになり，スペクトルに関する前節の経験法則が説明される．

エネルギー準位の実在性

次にエネルギー準位の存在の証拠となる事実・実験結果を見ていく．

まず $n = 1$ の状態はエネルギーが最も低くそれ故，安定な状態 (**基底状態**) であり，決まった半径

$$r_1 = \frac{\hbar^2}{mke^2} = 5.3 \times 10^{-11}\mathrm{m}$$

を持つ (r_1 は **Bohr 半径**と呼ばれる)．ここから現実の原子の安定性と一定性［全ての原子が共通の半径を持つこと (7-4 節)］を説明できる．

次に電子が原子核の束縛を逃れた**イオン**の状態は $r_n \to \infty$ となる $n \to \infty$ の状態に対応するから，水素の**イオン化エネルギー**は

$$E_\infty - E_1 = 13.6\mathrm{eV}$$

と計算される．これは確かに実測に合っている．

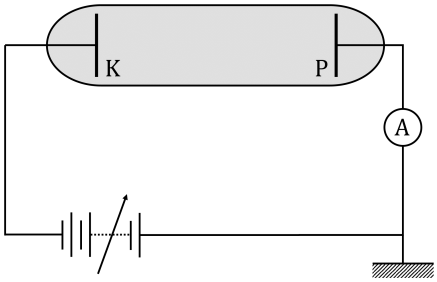


図 212　水素のイオン化エネルギーの測定

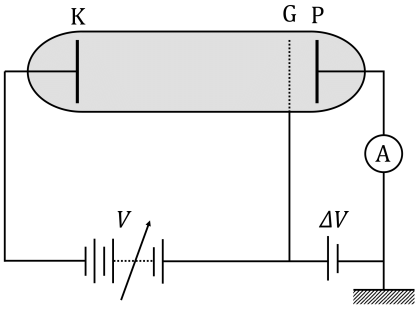


図 213　フランクとヘルツの実験

■水素のイオン化エネルギーの測定　図 212 のようにガラス管内に希薄な水素ガスを封入し，陰極 K を温める．その上で極板間に電圧をかけると，K から出た熱電子が陽極 P に達し，電流が流れる．実験結果の解釈を先回りして述べてしまうと，電圧を上げていったとき，ある時点で電子の得るエネルギーが水素をイオン化するのに十分なレベルに達し，水素のイオン化で作られた陽イオンと電子が電流に寄与するようになると考えられる．実際に電圧が 13.6V のときに電流の急激な増加が起きることから，水素のイオン化エネルギーは 13.6eV と分かる．

フランクとヘルツの実験

フランク (Franck) とヘルツ (Hertz) は次のように上の実験を精巧にして，水銀の原子にもエネルギー準位があることを直接に示した．図 213 のように，ガラス管内に今度は水素ガスの代わりに水銀蒸気を入れておき，電子の通過できる格子 G を挿入する．G は P よりも常にわずかであるが一定値 $\Delta V = 0.5$V だけ電圧が高い状態を保つ．このとき K を出た電子は K→G 間で加速され，次いで G→P 間で減速される．ここで G を陽極としてその K に対する電位 V を上げていくと，V が 4.9V の整数倍を超えるごとに電流が急激に下がった．これは水銀原子の基底状態と励起状態のエネルギー差が 4.9eV であり，電子はそれだけのエネルギーを持つとはじめて，水銀原子と衝突したとき，そのエネルギーを水銀に与えるからであると考えれば説明がつく．と言うのも，KG 間の電圧 V が 4.9V の n 倍のとき，電子は［平均的には］加速された後に水銀と衝突してエネルギーを失うことを n 回繰り返し，G の直前ではエネルギーを全て失っており，斥力に打ち勝って P に到達できなくなる．

原子の構造

Bohr の理論だけでは説明のつかない原子構造に関する事実として，原子内の電子配置について述べておく．エネルギー準位を整数 n で表すと，

- $n = 1$ の軌道 (K 殻)，入れる電子数 2
- $n = 2$ の軌道 (L 殻)，入れる電子数 8
- $n = 3$ の軌道 (M 殻)，入れる電子数 18

となる．

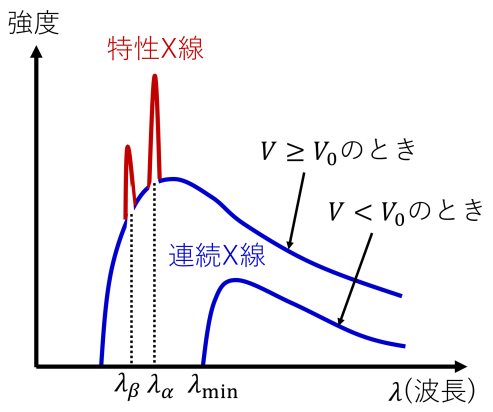


図 214　X 線のスペクトル分布

X 線の発生とそのスペクトル

原子の構造を見るには，波長の短い X 線が適している．高電圧 V で加速した電子線を陽極金属に当てたときに発生する X 線は図 214 のようなスペクトルを持ち，加速電圧がある値を超えたときには ($V \geq V_0$)，**連続 X 線**に加えて**特性 X 線** (**固有 X 線**) が現れる．

- 連続 X 線の下限 $\lambda_{\min}$ は V が大きくなるにつれて小さくなる．
- 特性 X 線の位置 (波長) は陽極金属の種類で決まっている．

連続 X 線の発生

電子は陽極金属によって急激に方向転換・減速・停止させられるため，電磁波を放射する．(一般に電荷は加速運動を行うとき，電磁波を放射する．) これは**制動放射**と呼ばれ (制動とはブレーキのこと)，連続 X 線はこのとき放射される電磁波である．X 線光子のエネルギーは電子のエネルギー eV 以下となるから，

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} \leq eV, \qquad \therefore \lambda \geq \lambda_{\min} = \frac{hc}{eV}.$$

こかから前述のように，連続 X 線の下限 $\lambda_{\min}$ は V が大きくなるにつれて小さくなることが説明できる．

特性 X 線の発生

特性 X 線は，高速の電子が陽極金属原子の内側にまで入りこんで，内側の殻の電子をはじきとばし (叩き出し) てそのエネルギー順位に属する軌道の 1 つを空席にし，そこに外側のよりエネルギーの高い殻の電子が落ち込み，そのさいに放射される波長のきまった電磁波のことである (図 215)．

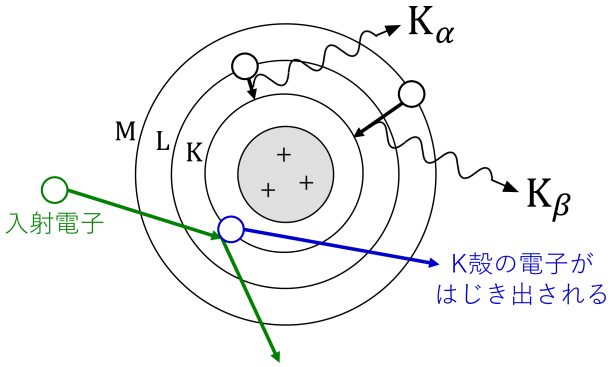


図 215　特性 X 線の発生

K-系列の X 線とモーズリーの法則

K 殻の電子が叩き出されたときに出る X 線の系列を K-系列という．その振動数を考えよう．原子番号 Z の金属原子のエネルギー準位は，水素原子の準位

$$E_n(\mathrm{H}) = \frac{m(ke^2)^2}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

において，原子核の電荷が Ze であることを考慮して $e^2 \to Ze^2$ と置き換えた $E_n = Z^2 E_n(\mathrm{H})$ で与えられると考えられる．実際には原子核からの Coulomb 力は他の電子に遮蔽されるので，比例定数は Z^2 より少し小さい $(Z-\delta)^2$ で与えられる (δ は 1 程度の値)．L 殻 ($n=2$)，M 殻 ($n=3$) からの遷移によって放出される X 線 $\mathrm{K}_\alpha, \mathrm{K}_\beta$ の振動数 ν_α, ν_β は

$$h\nu_\alpha = E_2 - E_1 = -\frac{3}{4}E_1 \propto (Z-\delta)^2, \qquad h\nu_\beta = E_3 - E_1 = -\frac{8}{9}E_1 \propto (Z-\delta)^2$$

で与えられ［$E_n = \frac{1}{n^2}E_1$ を用いた］，$\sqrt{\nu_\alpha}, \sqrt{\nu_\beta}$ は $Z-\delta$ に［したがって大まかには原子番号 Z に］比例することになる (**Moseley の法則**)[*51]．Moseley はこの法則を用いて周期表をほぼ完成させた．原子についての Bohr 理論の大きな成果である．

7-6 ド・ブロイの物質波理論と量子条件

電子波と量子条件

de Broglie は Bohr の量子条件 $l = n\hbar$ を思いがけないとことから基礎づけた．光が粒子としての性質を持つのと同様に，粒子と考えられていた電子も波 (**電子波**または **de Broglie 波**) として振舞い，その波長は

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

で与えられると de Broglie は考えた (運動量の非相対論的な表式 $p = mv$ に対して)．さて，古典物理学では物理量は連続であるが，定常波は例外で，離散的な波長しか許されない．そこで原子中の電子もまた半径 $2\pi r$

[*51] ν_α と ν_β の関係をまとめて書けば

$$\sqrt{\nu_\alpha} = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\sqrt{\nu_\beta} = 0.92\sqrt{\nu_\beta} \propto (Z-\delta).$$

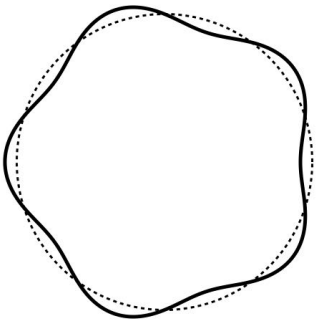


図 216　電子波の定常波

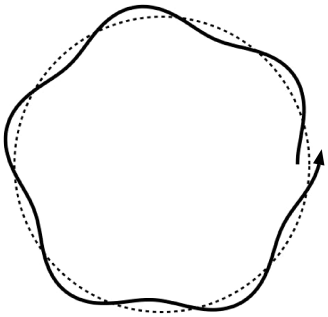


図 217　打ち消しあって消える波

の軌道上に電子波の定常波を作っていると仮定すると (図 216，図 217 参照)，定常波が存在するための条件は

$$2\pi r = n\lambda$$

である (波は軌道を 1 周して自分自身と干渉する)．これは Bohr の量子条件

$$mrv = n\frac{h}{2\pi}$$

に他ならない．

電子波の波長

de Broglie の仮説の正否を検証するには，電子線が干渉するかを調べれば良い．準備として電子波の波長 λ を調べておくと，電圧 V で加速したエネルギー $mv^2/2 = eV$ の電子に対しては

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2emV}}$$

となり，$V = 150\mathrm{V}$ では $\lambda = 10^{-10}\mathrm{m}$ と分かる．これは X 線の波長と同程度だから，X 線の干渉条件を先に調べておき，電子が同じ条件で干渉するかを実験によって確かめれば良い．

X 線の干渉——ブラッグの条件

理論的には光は光路差が波長の整数倍であれば強め合うが，実際問題としては光路差が波長と同程度でなければ干渉しない．そこで X 線に対しては，その波長と同程度の格子間隔を持つ結晶を回折格子に用いて干渉させる．

図 218 のように結晶の 1 つの面 A_1 に角度 φ を成して X 線が入射したとき，それぞれの原子に散乱され，球面波として広がる X 線は干渉し，ある特定の方向にだけ反射波が出てくる．反射波が強め合って出てくる角度 φ' は，径路差が

$$\overline{\mathrm{PQ'}} - \overline{\mathrm{P'Q}} = a(\cos\varphi' - \cos\varphi) = m\lambda \qquad (m \text{ は整数}) \tag{72}$$

を満たす方向である．以下では $m = 0$ の場合だけを考えることにすると[*52]，これは通常の反射の法則

$$\varphi = \varphi'$$

[*52] $a \sim 1\text{Å}$ であるのに対し可視光では $\lambda \sim 10^3\text{Å}$ なので，条件 (72) は $m = 0$ のときしか満たされない．しかし波長の短い X 線では $m \neq 0$ も可能である．

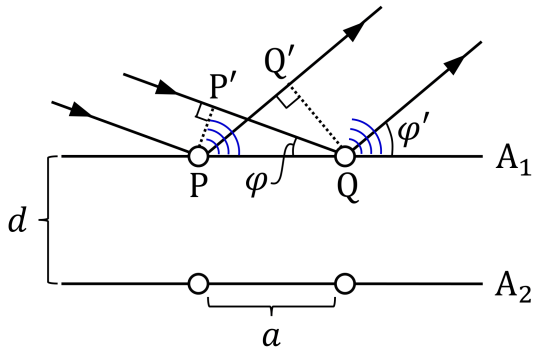


図 218　結晶面 A_1 からの散乱波に対する一般の強め合いの条件

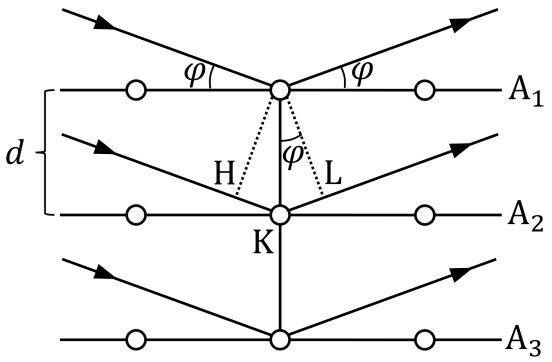


図 219　通常の反射 $\varphi = \varphi'$ の場合の各面 $A_1, A_2, \cdots$ からの散乱波に対する強め合いの条件 (Bragg の条件)

になる．［すなわち面 A_1 を鏡のように見なせる．これは反射の法則の微視的な説明になっていると考えられる．上記のように X 線は波長が短いため，反射の法則を満たす $m = 0$ の波以外の反射波も可能である．このことは，波長の短い X 線では鏡を連続的な物体と見なせなくなるため，反射の法則を適用できなくなることとして理解できる．］

このとき各面 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ での反射波が強め合う条件は，図 219 において隣り合う面での反射波の経路差が

$$\overline{\mathrm{HK}} + \overline{\mathrm{KL}} = 2d\sin\varphi = n\lambda \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

を満たすことである．これを **Bragg の条件**という．

電子について

電子波も同様の条件で結晶により干渉することが観測され，de Broglie の仮説が立証された．

ただし電子の場合，金属結晶から電子をとり出すのに仕事が必要なことから分かるように (7-1 節)，結晶表面 (の薄い層) では電子に内向きの力が働き，電子は図 220 のように屈折する[*53]．結晶内部に突入する際，電子は［運動量の増大に伴い］波長が短くなっており，波長が λ から λ' に変化したものとすると，屈折率を μ として

$$\mu = \frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \frac{\lambda}{\lambda'} \tag{73}$$

の関係がある．このとき強め合いの条件は

$$2d\cos\theta' = n\lambda', \qquad \text{または} \qquad 2d\sqrt{\mu^2 - \sin^2\theta} = n\lambda \tag{74}$$

に修正される (導出は下記)［6-6 節末尾の薄膜の干渉条件を流用できる (ここでは反射での位相のズレはない)］．

注解——屈折率の式 (73) について　粒子と波動の屈折の違いを我々は既に 6-7 節の図 199 の箇所で見ている．

これに関連して，通常の波動では (位相) 速度 $v = f\lambda$ の減少が波長 λ の減少を意味するのに対し，物

[*53] このことは結晶表面を境に結晶内部の方が電位がわずかな値 V' だけ高くなっていることを意味している．

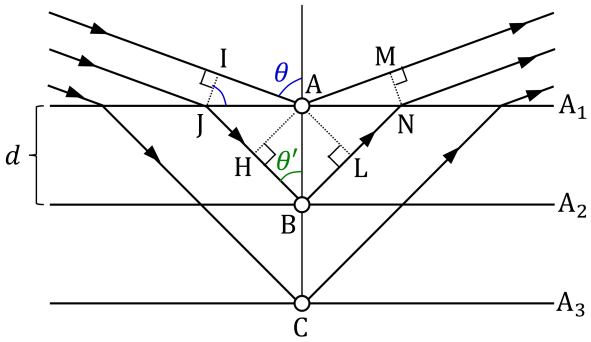


図 220　電子線の結晶表面での屈折を考慮した干渉条件

質波では運動量 $p = h/\lambda$ の増大が波長 λ の減少を意味する．粒子の運動量とともに増大する粒子の速度 $\boldsymbol{v} = c^2\boldsymbol{p}/E$ は波の位相速度

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} =& \frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}} = \frac{\partial E}{\partial\boldsymbol{p}} \qquad (E = \hbar\omega, \boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}) \\ =& \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{p}}\sqrt{m^2c^4 + \boldsymbol{p}^2c^2} = \frac{c^2\boldsymbol{p}}{E}\end{aligned}$$

に対応し，物質波の波長 λ と振動数 f を用いて表される位相速度

$$v(= f\lambda) = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p}$$

ではないことに注意する (以上，4-5 節の注解，7-2 節のノート，付録 D.23 を参照)．

式 (74) の導出　図 220 において隣り合う原子面 (例えば A_1 と A_2) で反射した電子波の位相差は

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{\overline{\mathrm{JB}} + \overline{\mathrm{BN}}}{\lambda'} - 2\pi\frac{\overline{\mathrm{IA}} + \overline{\mathrm{AM}}}{\lambda} = 2\pi\frac{\mu(\overline{\mathrm{JB}} + \overline{\mathrm{BN}}) - (\overline{\mathrm{IA}} + \overline{\mathrm{AM}})}{\lambda}$$

となる．ここで

$$\overline{\mathrm{IA}} = \overline{\mathrm{JA}}\sin\theta = \mu\overline{\mathrm{JA}}\sin\theta' = \mu\overline{\mathrm{JH}}, \qquad \overline{\mathrm{AM}} = \mu\overline{\mathrm{LN}}$$

より

$$\mu\overline{\mathrm{JB}} - \overline{\mathrm{IA}} = \mu(\overline{\mathrm{JB}} - \overline{\mathrm{JH}}) = \mu\overline{\mathrm{HB}}, \qquad \mu\overline{\mathrm{BN}} - \overline{\mathrm{AM}} = \mu\overline{\mathrm{BL}}$$

であり，これらを辺々足すと

$$\mu(\overline{\mathrm{JB}} + \overline{\mathrm{BN}}) - (\overline{\mathrm{IA}} + \overline{\mathrm{AM}}) = \mu(\overline{\mathrm{HB}} + \overline{\mathrm{BL}}) = 2\mu d\cos\theta'$$

を得る．最右辺はさらに

$$\mu\cos\theta' = \mu\sqrt{1 - \sin^2\theta'} = \sqrt{\mu^2 - \sin^2\theta}$$

を用いて書き換えられるので，位相差は

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{2\mu d\cos\theta'}{\lambda}, \qquad \text{または} \qquad \Delta\phi = 2\pi\frac{2d\sqrt{\mu^2 - \sin^2\theta}}{\lambda}$$

と表される．よって強め合いの条件 $\Delta\phi = 2n\pi$ は上式 (74) を与える．

注解 1　これは屈折の起きない場合，
すなわち $\theta' \to \theta, \lambda' \to \lambda$ または $\mu = 1$ のときに Bragg の条件 $2d\cos\theta = n\lambda$ を再現する．

注解 2　図 220 から他の 2 面 A_2, A_3 からの反射波が強め合う条件も
上式 (74) で与えられることが読み取れる．(どの隣り合う面の反射波も共通の位相差を持つ．)

電子とはなにか

現在では電子を含む全ての素粒子が波長 $\lambda = h/p$ を持つ波動の性質を持つことが知られている．「すべての素粒子は観測のしかたで粒子的にも振舞えば波動的にも振舞う「あるもの」としかいいようがないのである」(p.308).

注解　Feynman の言葉を借りれば，それは粒子と波の「どちらにも似ていない」 [17, p.150].
つまり素粒子は粒子と波の両方の性質を持つ何かであって，そのいずれでもない．

7-7 導体・絶縁体・半導体

導体と絶縁体

原子が整然と並んで結晶を作ると，個々の電子は原理的には［古典的描像では］そのすべての原子核の正電荷と他のすべての電子から力を受ける．すると各原子の n 番目の準位 E_n は少しずつずれ，準位が準連続的に密集した**帯** (**バンド**) に分かれる．

導体はいくつもある帯のうちで，準位が部分的に電子に占められていて，上の方が空になっている帯 (**伝導帯**) の存在するものである．電子はわずかなエネルギーでその帯の中の高いエネルギーの状態に移ることができ，これが原子の束縛を離れて自由電子となって電流が流れる (以上，図 221 参照).

真性半導体

14 族 (Si，Ge，Sn) の原子は 8 個で満杯になる最外殻に 4 つの電子を有し，これらはまわりにある 4 つの同種原子の最外殻の電子を 1 つずつ共有することで結晶を作っている (図 222 参照)．この場合は，もとの最外殻の準位が結晶では

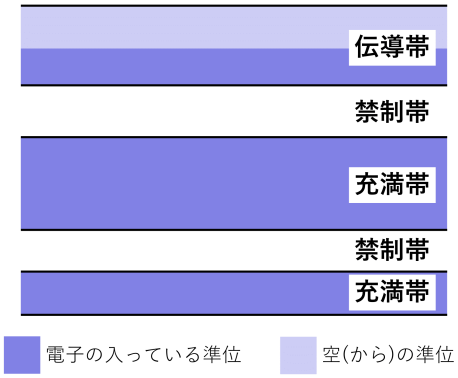


図 221　導体のバンド構造の概念図

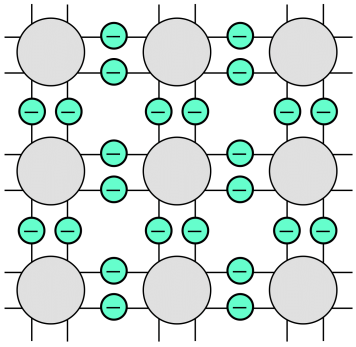


図 222　14 族原子の結晶における価電子の共有結合

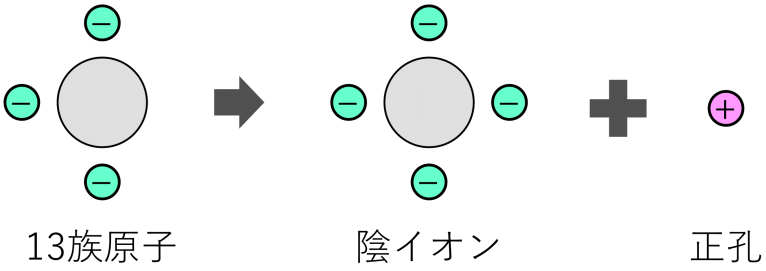


図 223　p 型半導体の正孔を供給する原子

- 共有結合にあずかる価電子の帯 (充満帯)
- 完全に空の帯

の 2 つの帯に分かれ，(低温では) 絶縁体となる．

しかし 2 つの帯のエネルギーキャップは比較的小さく，常温では電子が熱エネルギーを得て上の帯に移り，これが自由電子となって電気伝導に寄与する (**真性半導体**)．通常の金属と異なり，真性半導体は電気抵抗が温度とともに減少する．

n 型半導体・p 型半導体

最外殻に 5 個の電子を持つ 15 族の原子 (P，As，Sb) を不純物として，この 14 族原子の結晶にわずかに混ぜる．このとき

$$(15\text{ 族の原子}) \quad \rightarrow \quad (\text{陽イオン}) + (1\text{ 個の過剰電子})$$

となり，過剰電子は陽イオンにゆるやかに結合されているけれど，わずかな熱エネルギーや電場で“自由に”動いていく．こうして **n 型半導体**が得られる．

同様に最外殻に 3 個しか電子を持たない 13 族の原子 (Ga，In) を不純物として，14 族原子の結晶にわずかに混ぜると

$$(13\text{ 族の原子}) \quad \rightarrow \quad (\text{陰イオン}) + (1\text{ 個の正孔})$$

となり (図 223 参照)，正孔が電流を担う **p 型半導体**が得られる．

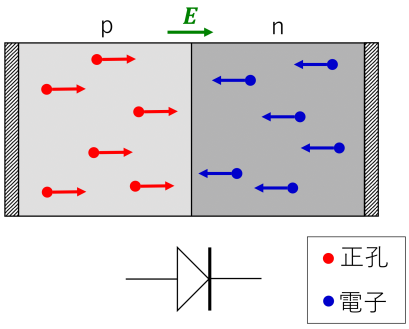


図 224　順方向

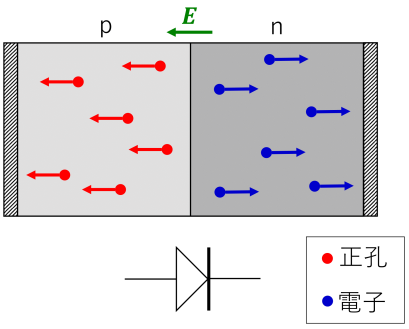


図 225　逆方向

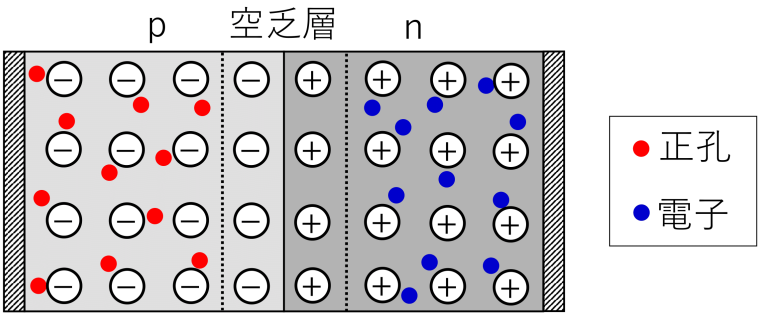


図 226　ダイオードの空乏層

半導体ダイオード

ダイオードは p 型半導体と n 型半導体を接触させて，両端を金属電極で挟んだものであり，

- 電場を p → n の向きにかけると電子と正孔はそれぞれ図 224 のように動き，
  電流が流れ続ける．[p と n の接触面で電子と正孔が出会って対消滅する．]
- 電場を n → p の向きにかけると電子と正孔はそれぞれ図 225 のように
  接触面から遠ざかる向きに動くので，電流は流れない．

このようにダイオードは**順方向**にのみ電流を通す**整流作用**を持つ．

■空乏層　なお電場がないときにも p と n の接触面の近くでは，n 側の自由電子と p 側の正孔が互いに相手側に入り込んで対消滅を起こしており，自由電子と正孔の存在しない**空乏層**を成している．ここでは取り残された n 側の陰イオンと p 側の陽イオンが n → p 向きの電場を作っているため，空乏層がある程度厚くなると自由電子と正孔は電場から力を受けて，空乏層にそれ以上入り込めなくなる (以上，図 226 参照)．

7-8 エネルギーの一形態としての質量

アインシュタインの関係，拡大されたエネルギー保存則

質量はエネルギーの一形態であり，質量 M はエネルギー Mc^2 に相当する．特に質量 Δm が失われたときに“発生する”エネルギーは

$$\Delta E = \Delta M c^2$$

であり (Einstein の関係)，逆にエネルギー ΔE が失われたときに“発生する”質量は $\Delta M = \Delta E/c^2$ で与えられる．

歴史的な意義

- 第 1 法則
  「熱素」「力学的エネルギー」「質量」の保存　→　「熱を含むエネルギー」「質量」の保存　(3-3 節)
- Einstein の関係
  「エネルギー」「質量」の保存　→　「質量を含むエネルギー」の保存

アインシュタインの関係の前提

本稿では付録 D.23 にまとめたように，Einstein の関係 $\Delta E = \Delta M c^2$ は特殊相対論から導かれ，特殊相対論は次の 2 つの前提から成る．

Ⅰ **相対性原理**：物理法則はどの慣性系で見ても同一である．
Ⅱ **光速不変の原理**：真空中の光速は光源の速度によらず，
したがって光速はどの慣性系で見ても同一 (c) である．

したがって Einstein の関係はこの 2 個の前提とエネルギー保存則から［改めて］導き出し得るはずである．教科書では実際そのような思考実験が 2 つ紹介されている．本稿ではそのうち，上記の前提 I，前提 II を用いていることが明白な 1 つ目の思考実験のみを取り上げる．

アインシュタインの関係の導き方

図 227 のように xy 座標系に対して静止している，光を吸収する物体 (質量 M) に左右 ($\pm x$ 方向) からエネルギー $\varepsilon(= h\nu)$ の光子を吸収させる．このとき物体は光子を吸収しても動かない．これを xy 座標系から見て $-y$ 方向に速度 v で運動している $x'y'$ 座標系から見ると，物体は光子を吸収する前後で y' 方向に速度 v の等速度運動を続けるはずである (前提 I による)．それにも関わらずこの座標系では図 228 のように光子は斜めに入射するから，物体は y' 方向の運動量 ΔP を得る．そこで運動量の増加は質量の増加 ΔM によるものと考えなければならない．

y 方向の運動量の増加 ΔP を求めよう．前提 II により $x'y'$ 系でも光子の速度は c であり，したがって運動量は $p = \varepsilon/c$ だから

$$\Delta P = 2p\cos\theta = 2p \times \frac{v}{c} = 2\frac{\varepsilon v}{c^2}.$$

これを質量の増加に伴う物体の運動量変化［の非相対論的表式］$\Delta P = (\Delta M)v$ を等置すると，Einstein の

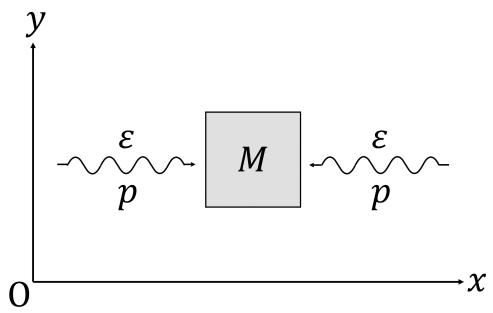


図 227　xy 座標系で見た光の吸収

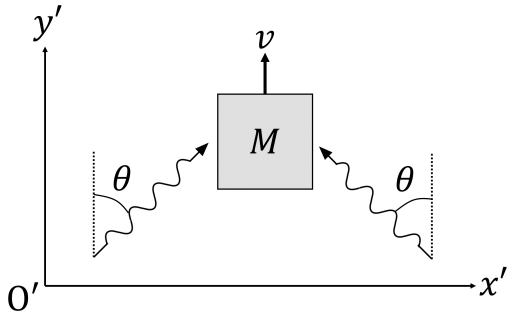


図 228　$x'y'$ 座標系で見た光の吸収

関係

$$\Delta M = \frac{\Delta E}{c^2}$$

を得る．

注解

正確には光子のエネルギー ε と運動量 $p_y(=0)$ の $x'y'$ 座標系での値は Lorentz 変換により

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad {p'}_y = \frac{v\varepsilon}{c^2\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

となる (付録 D.23 参照，Doppler 効果)．したがって $x'y'$ 座標系での光子の運動量を上記のように $p = \varepsilon/c$ とすることはできず，これを ε'/c に置き換えると，物体の運動量の増加は

$$\Delta P = \frac{\Delta E}{c^2\sqrt{1-(v/c)^2}}v$$

と修正される．ところが同時に運動量変化を相対論的な表式

$$\Delta P = \frac{(\Delta M)v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

に置き換えてこれらを等置すると，結局 Einstein の関係 $\Delta M = \Delta E/c^2$ が得られる．

なお，このとき $x'y'$ 系で光子はエネルギー $\varepsilon' = \varepsilon/\sqrt{1-(v/c)^2}$ を持ち，2 個の光子を吸収した物体のエネルギー変化は

$$\Delta E' = 2\varepsilon' = \frac{(\Delta M)c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

となる．これは速度 v で運動する物体のエネルギー $E' = Mc^2/\sqrt{1-(v/c)^2}$ の，質量の増加 ΔM に伴う正しい変化量の式となっている (付録 D.23 参照)．

静止エネルギーと運動エネルギー

物体の 1 次元的な運動を考える．エネルギー E，運動量 p を持つ物体と，これに働く力 F に対して，仕事とエネルギーの関係および運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = Fv, \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = F$$

が成り立つ［付録 D.23 参照，F は通常の力であって 4 元力の成分ではない］．教科書では物体が仕事をされてエネルギーを得ると，エネルギーと運動量の非相対論的な表式 $E = Mc^2, P = Mv$ における質量 M が (速度 v とともに) 変化すると考えて，ここから

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad E = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad p = \frac{M_0 v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{75}$$

を導いている (導出は下記，正確には $E = Mc^2$ ではなくエネルギー変化の関係 $\mathrm{d}E = \mathrm{d}(Mc^2)$ のみが仮定される)．ここに M_0 は物体が静止しているときの質量 (静止質量) である．非相対論的極限 $v \ll c$ では $\{1-(v/c)^2\}^{-1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2$ により

$$E \simeq Mc^2 + \frac{1}{2}Mv^2$$

であり，エネルギーは**静止エネルギー** Mc^2 と馴染みの運動エネルギー $Mv^2/2$ から成る．次節で見る核反応のように質量が変化する場合を除けば，静止エネルギーの項はこれまで通りエネルギー保存則において省いて良い．

式 (75) の導出　仕事をされてエネルギーを得た物体の質量 M は変化すると考えて，仕事とエネルギーの関係および運動方程式をそれぞれ

$$Fv = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(Mc^2)}{\mathrm{d}t}, \qquad \frac{\mathrm{d}(Mv)}{\mathrm{d}t} = F$$

と書く．2 式から F を消去し両辺に $2M$ をかけると，

$$2M\frac{\mathrm{d}(Mc^2)}{\mathrm{d}t} = 2Mv\frac{\mathrm{d}(Mv)}{\mathrm{d}t}, \qquad \therefore \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mc)^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mv)^2, \qquad \therefore (Mc)^2 = (Mv)^2 + a.$$

ここで $v = 0$ のときの質量を M_0 (静止質量) と書くと，積分定数は $a = (M_0 c)^2$ と定まるので，

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

を得る．また冒頭の

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(Mc^2)}{\mathrm{d}t}, \qquad \therefore E = Mc^2 + b$$

において，何もないとき ($M_0 = 0$) のエネルギーを $E = 0$ とすれば積分定数は $b = 0$ となる．このときエネルギー変化の関係 $\mathrm{d}E = \mathrm{d}(Mc^2)$ のみならず，エネルギーそのものに対する関係 $E = Mc^2$ が成り立つことになり，ここに $M = M_0/\sqrt{1-(v/c)^2}$ を代入すると

$$E = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

となる．最後に運動量は

$$p = Mv = \frac{M_0 v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

注解 1　付録 D.23 でも注意したように，相対論的力学を定式化するには質量を速度に依存した相対論的質量に置き換えるよりも，非相対論的な運動方程式を共変的な 4 元ベクトルの関係式へと修正する方が好まれる．この立場では質量は単に質量であって，M に添字の 0 を付ける必要はない．他方，エネルギー Mc^2 が静止エネルギーであることを強調するには，エネルギーに添字の 0 を付けて $E_0 = Mc^2$ と表記することが考えられる．

注解 2　Einstein の関係を得る思考実験には，7-2 節で発見的に導いた光子に対する関係 $\varepsilon = cp$ を用いた．逆に相対論の枠組みでは $E = \sqrt{M^2c^4 + p^2c^2}$ が演繹的に導かれ，ここから光子に対する関係 $\varepsilon = cp$ が得られることになる (付録 D.23 参照).

7-9 原子核について

原子核の構成

一般の原子核は ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$ と表記され［原子ではない］，その構成は以下［1-2 節］.

$$\text{核子 } (A \text{ 個}) \quad \begin{cases} \text{陽子 (質量 } m_{\mathrm{p}}\text{，電荷 } e) \cdots\cdots Z \text{ 個} \\ \text{中性子 (質量 } m_{\mathrm{n}}\text{，電荷 } 0) \cdots\cdots (A-Z) \text{ 個} \end{cases}$$

$\rightarrow$　原子核の全電荷 Ze，Z : **原子番号**.

- 核子数 A を**質量数**と呼ぶのは，原子核の質量がほぼ A に比例するからである (後述).
- **質量数 (質量ではない) と電荷は厳密に保存される.**

参考　原子番号が同じで質量数の異なる核を**同位核**,
これを持つ原子を**同位体** (アイソトープ) または**同位元素**と呼ぶ.

核力について

- 核子どうしを結びつける**核力**は到達距離が短く，また飽和性を持つ.
  $\rightarrow$　1 個の核子に働く核力，核子数密度は核の大きさによらずほぼ一定.
- 陽子数 $Z > 100$ では Coulom 斥力が核力の引力を上まわり，原子核は安定に存在できなくなる.

原子核の質量と結合エネルギー

原子核の結合エネルギー B とは，安定な原子核をバラバラの核子の集合に分解するために加えなければならない最小のエネルギーである. ここで核子を引きはがすエネルギーが最小となるのは，バラバラになった核子が運動エネルギーを持たず静止している場合だから，原子核の質量を M として

$$Mc^2 + B = \{Zm_{\mathrm{p}} + (A-Z)m_{\mathrm{n}}\}c^2, \qquad \therefore Mc^2 = Zm_{\mathrm{p}}c^2 + (A-Z)m_{\mathrm{n}}c^2 - B.$$

この式により $-B$ を結合状態において核子全体が持つ核力の，無限遠を基準点とした位置エネルギーの和と見ることもできる．またこれは原子核の質量 M が構成核子の質量の和よりも $\Delta m = B/c^2$ だけ小さいこと

$$M = Zm_{\mathrm{p}} + (A-Z)m_{\mathrm{n}} - \Delta m$$

を意味している．この Δm を**質量欠損**という．もっとも $\Delta m \ll m_{\mathrm{p}}, m_{\mathrm{n}}$ であり，また $m_{\mathrm{p}} \simeq m_{\mathrm{n}}$ だから，だいたい M は A に比例する.

原子との比較

原子でも原子核と電子の結合により質量欠損があるけれど,

- 水素原子のイオン化エネルギー　$B = 13.6\mathrm{eV}$
  $\rightarrow$　原子の質量欠損 $\Delta m = B/c^2 (\ll m_{\mathrm{e}} \ll m_{\mathrm{p}})$ は小さく無視できる.

- 核子 1 個あたりの結合エネルギー　$B/A \simeq 7\mathrm{MeV}$
  $\rightarrow$　原子核の質量欠損 $\Delta m = \frac{B/A}{c^2}(\lesssim$ (核子 1 個の質量 M/A)) は小さく無視できない．

不安定な原子核の崩壊の型

不安定な原子核は以下のように

- α 線 $\cdots\cdots$ He の原子核 ${}^4_2\mathrm{He}$
- β 線 $\cdots\cdots$ 電子 e^-
- γ 線 $\cdots\cdots$ 波長の短い光子 (電磁波) γ

を出して崩壊する．

$$
\begin{aligned}
\alpha\text{崩壊：}\quad & {}^A_Z\mathrm{X} \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{X}' + {}^4_2\mathrm{He}(\alpha) \\
\beta\text{崩壊：}\quad & {}^A_Z\mathrm{X} \longrightarrow {}^{A}_{Z+1}\mathrm{X}' + \mathrm{e}^-(\beta) + \bar{\nu} \\
\gamma\text{崩壊：}\quad & {}^A_Z\mathrm{X}\,(\text{励起状態}) \longrightarrow {}^A_Z\mathrm{X}\,(\text{基底状態}) + \gamma
\end{aligned}
$$

注解

「α 線の曲がりは小さいから重く，ベータ線の曲がりは大きいから軽い」(p.322，l.11,12) について，磁場中の軌道に対する局所的な曲率半径の式 $\rho = mv_\perp/qB$ (p.206) を参照する．

「α 崩壊の例」「ベータ崩壊についての補足」(pp.322–323)

本稿では省略する．

原子核の崩壊の法則性と半減期

原子核の崩壊は確率的な現象であり，［時刻 t にある原子が崩壊せずに残っている確率を，あるいは等価的に］時刻 t に崩壊せずに残っている原子数 $N(t)$ を用いて記述することができる．短い時間 Δt のうちに崩壊する原子数は，その時刻における原子数 $N(t)$ と Δt に比例し，

$$N(t) - N(t+\Delta t) \simeq \lambda N(t)\Delta t, \qquad \lambda : \text{崩壊定数}$$

と表されると期待される ($\Delta t \to 0$ で $\simeq \to =$)．よって原子数は

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N, \qquad N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$$

に従って減少する．原子核の崩壊では $N(t)$ が 1/2 倍になる時間 (**半減期**)

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \simeq \frac{0.693}{\lambda}$$

が用いられる．

注解

なるほど，$N(t)$ が $1/e$ 倍になる時間 $1/\lambda$ よりも，1/2 倍になる時間 T は $\ln 2 \simeq 0.693$ 倍短い．

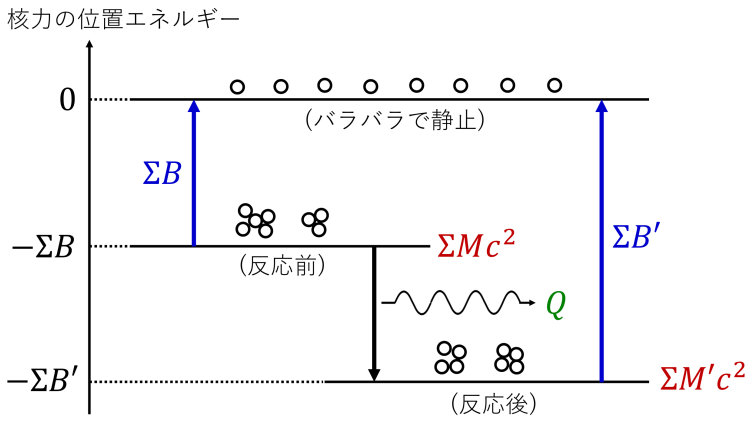


図 229　核反応のエネルギー保存則の図式化 (発熱反応の場合)

「自然界に存在する放射性元素」(pp.324–325)

本稿では省略する．

核反応とそのさいの保存則

核反応では質量の和が反応の前後で変化するので，エネルギー保存則は静止エネルギーを含めて考えねばならない．［そこでエネルギーの非相対論的な表式 $\mathscr{E} = mc^2 + mv^2/2$ を用いると (付録 D.23) 参照)］エネルギー保存則は

$$\sum_{\text{反応前}} \left(\frac{1}{2} MV^2 + Mc^2 \right) = \sum_{\text{反応後}} \left(\frac{1}{2} M'V'^2 + M'c^2 \right)$$

となる．このとき

$$Q \equiv \sum_{\text{反応前}} Mc^2 - \sum_{\text{反応後}} M'c^2 = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\text{反応後}} \frac{1}{2} M'V'^2 - \sum_{\text{反応前}} \frac{1}{2} MV^2 \\ \displaystyle\sum_{\text{反応後}} B' - \sum_{\text{反応前}} B \end{cases}$$

のように全質量の減少に相当するエネルギー，すなわち結合エネルギーの増大に等しいエネルギーだけ運動エネルギーが増加することになる (図 229 参照)．この Q を**反応熱**と呼び，化学反応にならって $Q > 0$ のときを**発熱反応**，$Q < 0$ のときを**吸熱反応**と呼ぶ．

注解

結合エネルギーが大きいほど核力の位置エネルギーの低い状態に落ち着くことに注意する．なお図 229 において核力の位置エネルギーと静止エネルギーを測る原点は異なることを断っておく．

核反応が生じる条件——クーロン障壁

投入した核が核反応を起こす第 1 の条件は，**Coulomb 障壁** (標的の原子核との間の Coulomb 斥力) に打ち勝って核力の到達距離約 10^{-15}m にまで接近しうるだけの運動エネルギーをもつことである．(Coulomb 力

の働かない中性子は除く．)

核反応が生じる条件——反応のしきい値

核反応が吸熱反応 $Q < 0$ の場合には，これだけでは十分でない．静止している標的核 M に速さ v_0 の核 m をぶつけるとすると，運動量保存則より重心運動のエネルギーは一定であり，相対運動のエネルギー $\frac{\mu}{2}{v_0}^2$ のみが核反応における質量増加 $|Q|$ に消費されうるから (2-8 節，$\mu \equiv mM/(m+M)$:換算質量)，反応の起こる条件は

$$\frac{mM}{2(m+M)}{v_0}^2 \geq |Q|.$$

核融合と核分裂

核融合と**核分裂**では結合エネルギーの増加に等しいエネルギーが放出される．

- 核融合の例 $\cdots\cdots$ **太陽熱の起源**となる太陽の内部における反応，**水素爆弾**
- 核分裂の例 $\cdots\cdots$ **原子炉**，**原子爆弾**

最後の 2 段落は価値判断と容易に切り離せない，メッセージ性の強い内容となっているけれど，著者の思いを尊重してそのまま引用する (p.330)．

> 水素爆弾や原子爆弾の非人間性はいうまでもないが，原子炉も，一度事故が起これば放射性物質を広範囲にまき散らし，その危険性は，その及ぶ規模と期間において他の事故とは比較にならないほど大きい．
>
> のみならず，原子炉は質量をエネルギーに変えていると通常いわれているが，正しくは，結合エネルギー (質量欠損) のわずかな差をエネルギーに変えているのである．つまり質量数 (核子数) 自体は保存するので，エネルギーを取り出しても核子の総数は変わらず，それらが放射性原子核として残される．つまり原子炉を運転すればするほど危険な放射性廃棄物が生み出され蓄積され，そのつけを子々孫々に残すことになる．

付録 A　Spinoza 描像

Spinoza 描像は「自由意志の否定」と「当為命題の虚構性」を二大柱として，図 2 のように要約される (図 2 を以下に図 230 として再掲する)．図 2 の右半分に描かれた「自由意志の否定」については，既に 1-1 節の注解において導入してある．ここでは図 2 の左半分に描かれた「当為命題の虚構性」についても併せて述べ[*54]，Spinoza 描像の最小限の議論を完成させる (付録 A.1)．さらに付録 A.2 では Spinoza 描像が，資本主義・新自由主義的なイデオロギーに対抗する理論体系としての意味を持つことを述べる．

なお，Spinoza 描像についての詳細は以下のページを参照されたい．

http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/preamble

A.1　Spinoza 描像

本節では自然科学 (とりわけ物理学) と相性が良い Spinoza の哲学について，科学との関係を整理しつつまとめる．また Spinoza 的な描像の主要な帰結についても簡潔に議論する．これを通じて我々は，科学が依拠する前提の哲学的な含意をいくらか自覚することができる．

Spinoza の思想はその代名詞と呼べる「神即自然」という標語に端的に表されている．ここで神とは世界の外部から世界に働きかける人格を持った存在ではなく，むしろこの世界そのものであり，それ故，神即自然と

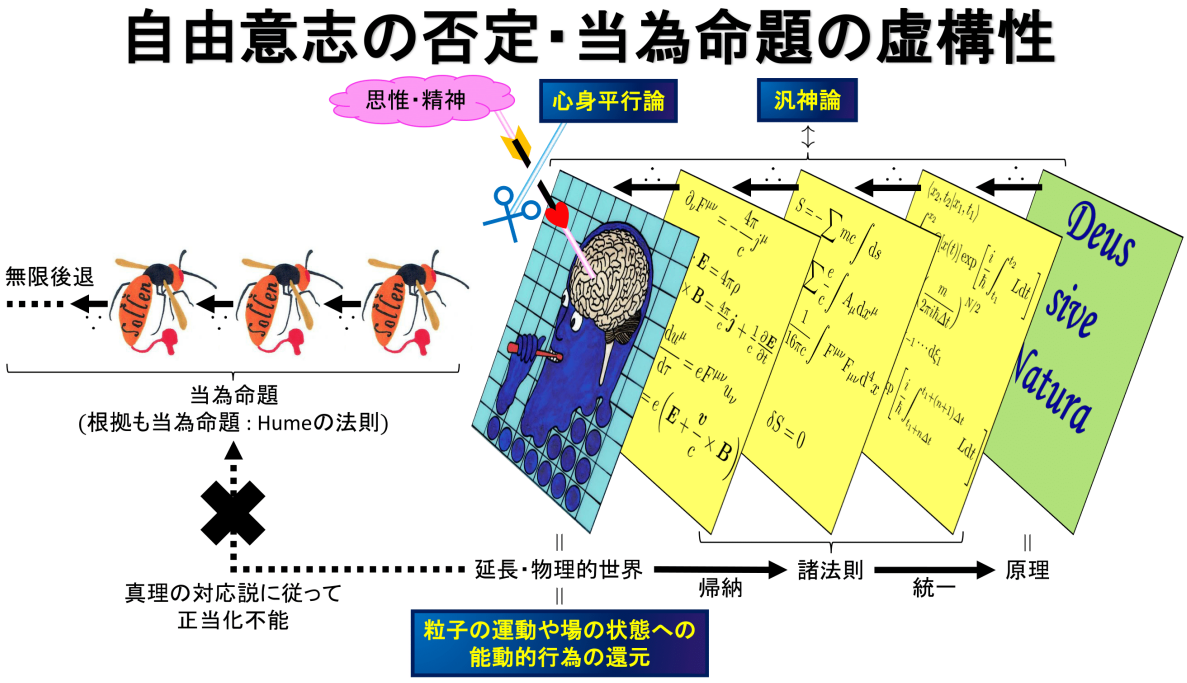


図 230　Spinoza 描像 (図 2 の再掲)

[*54] 図 230 の左半分には蜂が連なっており，蜂に書き込まれた“sollen”というのは当為命題を意味する．当為命題とは，「……べきだ」という形に帰着できる，規範を表す命題のことである．

呼ばれる．そして Spinoza によれば，あらゆる事物は神の「現れ」であって，神の内なる必然性に従って生起しているとされる．このような考え方は汎神論と呼ばれ，少なくとも自然科学が対象とする物理的世界に関して言えば，万物は自然法則に従って振舞うという自然観と重なる．この限りで神の必然性とは，自然法則ないしその原理としての物理そのものと同一視し得る．(そしてこのことは私を含め，Spinoza に共鳴する一部の者にとって，間違いなく物理学理論を学ぶ一つの大きな原動力となってきた．) また人間を含め自然物は与えられた目的のために存在・活動するという考えを，Spinoza は偏見として退けている．この点もやはり，目的因よりもむしろ機械論的因果律による現象の理解を試みる自然科学的な姿勢に通じる：鳥は空を飛ぶために羽があるのではなく，羽があるから空を飛べるのである．さらに精神と物体は異質な存在であるため，その相互作用を考えることはできない．しかし我々は心と身体の状態に関連性があることを経験的に知っている．これは Spinoza 哲学において，それらが同一の神の異なる二つの側面を表しているからであると説明される．このように精神的な出来事と身体的 (物理的) な出来事は互いに対応しているけれども，それらはあくまで独立に進行するという説は心身平行論と呼ばれる．これは物理現象がそれ自体で閉じており，そこに精神の作用が介入する余地はないとする自然科学の想定と整合する．(なお心身平行論を採用すれば，いかにして物質に過ぎない脳から意識が生まれるのかという，脳・神経科学に付きまとう形而上学的な難題も回避できる．)

以上のように，Spinoza 哲学と自然科学の世界観は整合的である．しかしながら Spinoza の思想は彼の主著『エチカ』において，定義や要請，公理から出発して定理を演繹する，いわゆる「幾何学的方法」で「論証」されており，それ故それは数学同様，頭の中で完結している．現に Spinoza の汎神論は，神の必然性に相当する物理の具体的な詳細——決定論的であれ非決定論的であれ——に依らずに理解できる (Spinoza のオリジナルの自然観は決定論的である)．これは Spinoza 哲学が実験や観察によって反証できず，形而上学の域を出ないことを意味する．他方で経験科学は現実世界について語り得るものの，帰納的推論の産物であるため絶対確実な知識ではあり得ず，やはり形而上学的な命題の正しさを証明することはできない．むしろ Spinoza が描くような形而上学的な直観が，物理学をはじめとする自然科学の前提を成していると言った方が正確である．

次に Spinoza のパラダイムは—— Spinoza 自身がはっきりと述べているように——人間の自由意志を否定することを説明する．ここで自由意志とは，因果律の連鎖または物理法則の支配を断ち切り，純粋に自発的な行動を引き起こす超自然的な精神の作用として定義できる．言い換えれば自由意志とは言わば無からの創造であり，不可能を可能にするという自己矛盾であり，その定義により虚構に他ならないことが明らかである．実際 Spinoza が主張するように，一切は神の必然性によって完全に決定されており，また精神は身体に影響を及ぼさないならば，自由意志は存在し得ない．また人間も自然の一部であって，神の現れであるならば，自由意志を行使し得る行為の主体ははじめから存在しないことになる．これは一見すると能動的・主体的な人間の行為も，渾然一体とした単なる物理的な出来事 (例えばミクロな粒子の運動や場の時間変化) から成るという，要素還元論的な見方に対応する．さらに量子力学の描くような非決定論的な自然観を導入しても，自由意志を救うことにはならないことに注意しよう．なるほど，「決定論が正しければ自由意志は存在しない」という伝統的な議論は分かりやすい．ただしこの命題の裏も成り立つとは限らない．実際，事物がランダムに確率的に生起するとしても，人は世界のなすがままに振り回されてしまうのであれば，我々はそこにも自由意志を見出せないだろう．

自由意志は存在しないと主張することは，露悪的だという印象を与えかねない．とは言え人は時として，このことを括弧に入れて考えることが許されないような，差し迫った苦境に陥ることも確かである．そのような人生の局面の象徴的な例として，受験勉強が挙げられる．勉強しなくてはいけないと思いつつもやる気が出ず，一向に行動を起こせないという金縛りのような無気力状態を，誰しも少なからず経験したことがあるだろう．このときもし意志の力で言うことを聞かない身体を強制的に行動へと駆り立てられるならば，それは無気

力の中でも自由に発動させることができる精神の能力，すなわち自由意志でなければならない．ところが自由意志は存在しない以上，意志を抱くことや努力することは，それが神即自然の必然性に従って自動的に達成されない場合には絶対に不可能である．このような認識は必ずしも状況の解決には役立たないものの，思うに真なる認識であって，それを安易に無視することはかえって「無責任」な言動や実践に繋がりかねない．現代社会を伏流している新自由主義的な自己責任論のイデオロギーもその例外ではなく，それは本来，哲学的に正当化し得ないということも，ここで強調しておきたい．

最後に事実と価値の対立について論じる．一般に「……べきだ」という形に帰着できる，規範を表す命題を当為命題という．受験勉強をすべきとされながらもそれができない先の受験生の例は，自由意志なき世界では，我々がしばしば相容れない事実と当為の間で否応なく引き裂かれる運命にあることを示している．またそれ以前に，当為命題はいかに論理で武装しようとも，恣意性・無根拠性を免れないということも言える．その理由は次のようにまとめられる．まず素朴に理解できるように，自然にはもともと絶対的な善悪の区別は存在しない．(これは Spinoza の採る立場であると同時に，科学が自明視する暗黙の了解でもある．) このため当為命題は事実命題だけからは導けない (このことは Hume の法則と呼ばれる)．しかるに，ある当為命題を導く論理が循環論法や無限後退に陥らないためには，何らかの前提条件を出発点として認めなければならない．よってこの前提条件にもまた，何らかの当為命題が含まれることになる．再び Hume の法則より，この当為命題は単に現実世界との一致・不一致に基づいて真偽を判断できるものではないため，無条件に認めることを強いられる．以上よりあらゆる当為命題は独断論であることを免れない．ただし——ここが重要だが——「こうあるべき」とは言えずとも，事実として「こうあってほしい (と思っている)」と述べる分には間違いにならない．このことを踏まえてはじめて，我々は普遍的な「正義」を求める答のない (擬似) 問題と，それをめぐって弁論術を競うだけの表面的な水掛け論を脱し，個々人の気持ちを「感情論」として排除しない，地に足のついた真に倫理的な対話を行うことができる．

A.2　資本主義・新自由主義のイデオロギー

我々の社会を取り巻く資本主義は図 231 のように特徴付けられる．詳しく順番に見ていこう [22] [23].

- 資本主義
  - かつては誰もがアクセス可能だった社会の富を商品化
  - 生産手段・共同体から切り離され，自給自足できない賃労働者
- 資本=(交換)価値の自己増殖運動
  - 人間・環境を酷使・破壊
  - 手段と目的の倒錯 (「遊びとしての勉強」は「役に立たない」)
- 新自由主義
  - 市場の競争原理に委ねて利潤獲得を追求する政策
  - 「競争が社会を発展させる」は事実認識からして誤り

図 231　資本主義とその周辺

■資本主義　近代に特有の資本主義社会においては，社会の「富」は悉く「商品」に姿を変え，我々はお金を稼いで商品を手に入れなければ，もはや生きていくことはできない．かつては誰もがアクセスできるコモン (共有財産) だった富は，資本家によって私的財産として囲い込まれ，独占された．そして囲い込みによって農

地などを締め出され，生産手段や共同体の相互扶助の関係から切り離された人々は，資本家に労働力を (商品として) 提供する「賃労働者」とならざるを得ず，さらに生産された商品の買い手となって資本家に市場をも提供した．こうして我々が生きていく上で必要な物質代謝が，商品を通じて行われるようになった社会の体制を資本主義という．なお労働者が資本の需要に対して過剰となれば，「代わりの人間はいくらでもいる」ため，低賃金で過酷な労働を強いることができる．

■資本の運動と弊害　資本の目的はあくまで価値——貨幣によって測られる「交換価値」——の自己増殖であって，人間を幸福にすることではない．実際，価値増殖あるいは市場の自由競争で勝つことのみを目的とした商品生産は，質 (使用価値) を蔑ろにし，本当に必要な物やサービスを劣化させたり削ったりして，社会の富を貧しくしさえする．また技術革新によって生産性は向上しているにも関わらず，いまだに人類は長時間労働から解放されていない．それどころか，情報関連部門に典型的な高給取りの仕事を中心に近年，いわゆる「ブルシット・ジョブ (クソどうでもいい仕事)」が急増し，労働者の精神を蝕んでいる．さらに格差は拡大する一方であり，環境破壊にも歯止めがかからない．

資本の価値増殖運動に組み込まれた人間は，本来手段であるはずのお金の増殖 (金儲け) それ自体を目的として行動するようになる．これは端的に言って倒錯であるが，お金の普遍性の下では，個々の具体的な事物そのものが持つ固有の価値は色褪せてしまい，「役に立たない」ものや必ずしもお金にならないものの価値を理解できなくなる．例えば「将来のために勉強しろ」という大人も，学問そのものに価値を認めているとは限らず，「それ自体が喜びをもたらす自己充足的な遊び」としての勉強のあり方にはかえって嫌悪感を示すことさえあり得る．その遊びこそはおそらく勉強の本質であり，資本主義の論理から自由であるための鍵なのだが．

■新自由主義　資本主義経済の停滞が顕著になった 20 世紀後半では，各国で「新自由主義 (ネオリベラリズム)」が台頭し，公共事業の民営化や規制緩和による市場の自由化が進められた．新自由主義は詮ずるところ，市場の競争原理に委ねて利潤獲得を追求する政策であり，「小さな政府」「福祉削減」「緊縮財政」「自己責任」「選択と集中」「アウトソーシング」などのスローガンによって特徴付けられる．

社会を発展させる合理的な原動力として競争を正当化できるという発想はあまりに単純であり，事実認識からして既に誤っている．アイデアには限りがある以上，絶えざる競争のペースに合わせた商品開発を強いられている限り，希少価値を生み出すには無理やり知恵を絞り出す他なくなる．このためスマホや冷蔵庫を見れば分かるように，新商品の開発は小手先の変化ばかりになってしまう．また画期的な新技術もすぐに模倣されるため，一時的な利潤しかもたらさず，イノベーション競争はイタチごっこの様相を呈する．

新自由主義はグローバル化を後押しした．その主要な目的は途上国の安価な労働力を使い倒すことにある．

■資本主義・新自由主義のイデオロギー　今や資本にとって役立つ能力 (あるいはその結果と見られるところの経済的成功・報酬) によって人の価値を定義する新自由主義的な発想は自明視され，「稼ぎが低いのはスキルがないからであり，それは人として価値がない証拠である」という通念が社会に浸透している．そして「スキルや能力がないのは，それを身につける努力を怠った“負け組”の自業自得だ」という論法は，現代社会を伏流し，幅を利かせている支配的なイデオロギーとなっている．しかしながら，このような**新自由主義的な自己責任論**は哲学的に容認できない．と言うのも，形而上学的なレベルに遡って考えれば，人間は決して行為の自由な主体ではあり得ないからである．それは動かし得ない根源的な真理であるが故に，「言い訳だ」などの一言で片付けたり，括弧に入れて考えたりすることが許されない．

職業選択の自由もまた形式的なものである．それにも関わらず労働者は「自分で選んで，自発的に働いている」と錯覚し，資本家にとって都合の良い労働者像を，あたかも自分が目指すべき姿，人間として優れた姿だ

と思い込むようになっていく (例えば現代では忙しさは美徳とされる)．これは労働者の責任感や向上心，主体性といった精神性までもが，資本の論理に「包摂」される過程と言える．

このように資本主義的な価値観を内面化させた人間は周りの人間にも，**理不尽な労働倫理を「あるべき姿」として強要**するだろう．そのような理念は当為命題の形をとる．当為命題とは「……べきだ」という形に帰着できる，規範を表す命題のことである．ところが一般的に言って，当為命題は事実だけからは導くことができず，恣意性を免れない．例えば仕事が充実しているに越したことはないが，「社会人は仕事こそが生き甲斐であるべきだ」「仕事は全力で取り組まなければならない」とまでは言えない．また会社の命令には素直に従うのが日本人の当たり前の働き方だったからと言って，それに従うべきだとは言えない．あるいは現代社会が市場の競争原理で動いているというだけの理由で，「競争するべきだ」「グローバルな世界で通用する人材になるべきだ」とは言えない．これらはいずれも本質的には「資本に奉仕する人材になるべきだ」と述べているのであり，与えられた資本制社会の論理を無批判に受容しているにすぎない．なるほど，もちろん同じ理由で資本主義を終わらせる「べきだ」とまでは言えない．しかし「資本主義が終わってほしい」と言えば，嘘にはならない．

追記　新自由主義的な競争原理と自己責任論は「貧乏人向け」のイデオロギーである：ブルジョワジーほど強力な相互扶助の連帯を形成しており，その狡猾な連係プレーのため，不正や失態を犯しても報道・処罰されない．彼らは新自由主義的なイデオロギーなど信じていない．(`http://blog.tatsuru.com/2024/07/21_0916.html`)

■Spinoza 描像　以上のように，新自由主義的な自己責任論と理不尽な労働倫理には，それぞれ「自由意志の否定」と「当為命題の虚構性」でもって対抗できる (図 232 参照)．

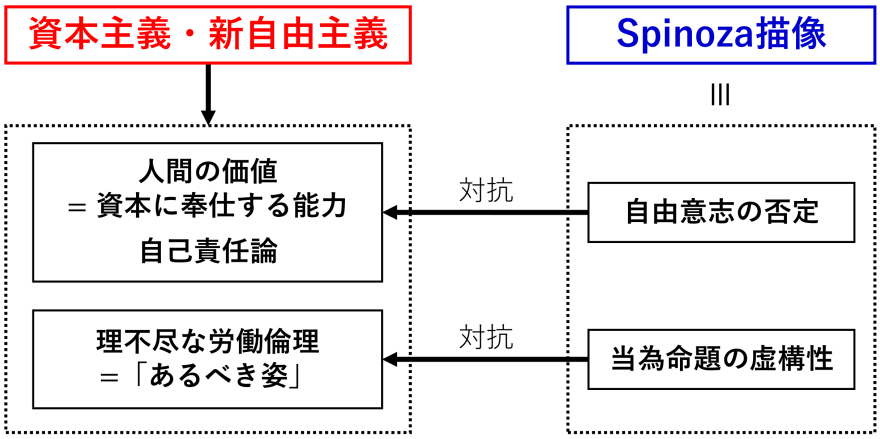


図 232　新自由主義的イデオロギーのアンチテーゼとしての Spinoza 描像

最後に文献 [22] の章ごとの要約を載せ，ポスト資本主義の構想を示す (図 233 参照)．

第 1 章　「商品」に振り回される私たち　かつては誰もがアクセスできるコモン (共有財産) だった社会の「富」を，資本主義は悉く「商品」に変え，今では私たちは必死にお金を手に入れないと生きていけない．また「使用価値」よりも「(交換) 価値」を優先する資本主義は，社会の「富」を劣化させ破壊して

いき，人間は「商品」に振り回されるようになる (物象化).

第 2 章　なぜ過労死はなくならないのか　資本家は単に労働時間を延ばすことで絶対的剰余価値を手にできるため，長時間労働が蔓延することになる．そして生産手段や共同体の相互扶助から「自由」になり (切り離され)，また自分は「自由」で自発的に働いていると思い込んでいる労働者は，過酷な長時間労働から逃げ出せない．資本主義を弱めるには，賃上げよりも労働時間の短縮が重要であり，世界では資本主義に挑む大胆な労働時間短縮の動きも出てきている．

第 3 章　イノベーションが「クソどうでもいい仕事」を生む　単に生産力の観点からは私たちはとっくに長時間労働から解放されていても良いはずだが，資本主義の下では技術革新 (イノベーション) による生産力の向上は，「仕事を奪われる」というディストピアとして現れてしまう[*55]．また技術革新により労働者は単純作業だけを「実行」するようになり，自ら「構想」する機会を奪われ，資本家の労働者に対する「支配」が強化されてしまう．さらにエッセンシャル・ワーカーが低賃金に苦しめられている一方で，際限なく価値増殖を求める資本主義は，高給取りの仕事を中心に「ブルシット・ジョブ (クソどうでもいい仕事)」を大量に生み出し，私たちを長時間労働から解放しない．

第 4 章　緑の資本主義というおとぎ話　資本は人間だけでなく自然からも掠奪し，その代償を将来世代や途上国へと「外部化」し，見せかけの環境対策をしながら自然の商品化をさらに進めている．資本主義に代わる新たな社会において大切なのは，「アソシエート」した労働者が，人間と自然との物質代謝を合理的に，持続可能な形で制御することだ，とマルクスは述べている．

第 5 章　グッバイ・レーニン！　社会主義を標榜するソ連や中国の実態は，生産手段を国有化し，官僚が労働者を搾取する独裁的な「国家資本主義」であり，社会主義の理想からかけ離れている．またベーシックインカム (BI) や現代貨幣理論 (MMT) のような，国家の力を介したトップダウン型の資本主義改革は，資本の側の抵抗や物象化を解決できないだろう．私たちの目指す未来社会は，民主的なボトムアップ型の自発的連帯 (アソシエーション) を通じて「脱商品化」を推し進め，貨幣なしで暮らせる社会の領域を広げることであり，これこそがマルクスの構想する「社会主義」ないし「コミュニズム」である．

第 6 章　コミュニズムが不可能だなんて誰が言った？　エコロジー研究と原古的な共同体研究を行っていた晩年のマルクスは，やがて自然の「持続可能性」と人間社会における「平等」の連関に気付いていく．彼が構想していた将来社会は，社会の「富」が「商品」として現れないように，みんなでシェアして，自治管理していく，平等で持続可能な定常型経済社会 (したがって「脱成長」型経済) であり，コモンに基づいた社会であるため，コミュニズムと呼べる．

■追記：教育の脱商品化　本稿の 1 つの結果的・客観的な意義は，本来〈コモン〉であるはずの知識を囲い込んで独占し，人工的希少性を生み出す資本主義に抗して，万人が教育に無償でアクセスできるようにすることにある．そう，これは資本主義への挑戦でもあるのだ．それはまた「構想」が資本の側に握られ，単純作業の「実行」だけを担わされる労働の抑圧的なあり方を脱し，資本に搾取されている能力を自律的に用いる実践，ないし「ケア階級の叛逆」でもある．とりわけ大学入試の水準の物理学は——専門的で「高尚な」素粒子論などと比べれば——世間一般の人々にとっての重要度が高く，脱商品化の意義は大きいと言えるだろう．しかしながら多かれ少なかれ内容の偏りは免かれず，読者はなお，本稿が断片的な題材の寄せ集めの域を出ていない

[*55] A. ベナナフによれば技術革新は衰退しており，実際に雇用を破壊しているのはテクノロジーの進歩ではなく経済の長期低迷である．とは言え，オートメーション化がなくとも社会運動を通じて民主的に必要労働を再配分し，ポスト希少性と自由な余暇社会を実現することは既に可能であるとするベナナフの見解は，斎藤幸平がポスト資本主義として構想する民主的な脱商品コミュニズムと軌を一にする [24].

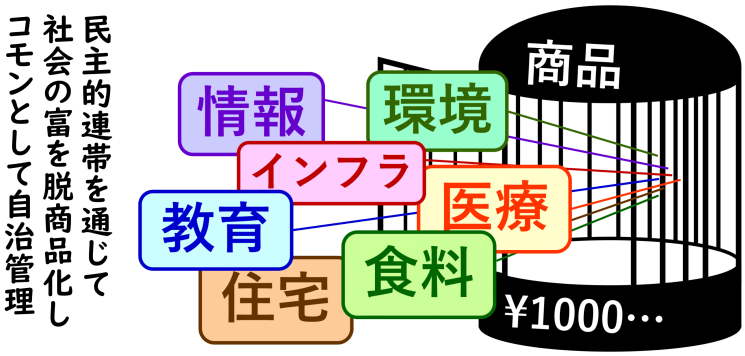


図 233　ポスト資本主義 = 脱商品コミュニズム

という印象を持たれるかもしれない．いずれにせよ，本稿が教育の脱商品化，ひいては〈コモン〉の再生に多少なりとも寄与できれば，筆者としては幸いである．

もはや情報化社会という言葉さえ死語になりつつある時代にあって，あらゆる知識を無償化しようという精神には大いに共感できる．少なくとも理論分野に関しては，既存のメディアを利用して教育を脱商品化することは，技術的には比較的容易と考えられる．例えば図書館にある書籍の 1 %，いや 0.1 %だけでも (重要なものから優先的に pdf 化して[*56]) ネット上でアクセス可能にできれば，その影響力は測り知れない．歴史的にも，近代的な自然科学・物理学の誕生の下地を準備したのは，自らの経験的・実践的な知を重んじ，それを俗語で積極的に公開した，一般大衆 (アマチュア) による言わば「16 世紀文化革命」であった [25].

- ただし一部の YouTuber のように人気を得ることを優先し，学問を生煮えのエンターテインメントとして面白おかしく流布している事態にはあまり感心しない．これには YouTuber を人気者に押し上げるている有象無象にも非がある．ボードリヤールにならって言えば，おそらく問題の根本は専ら，YouTuber の取り巻き連中が情報に付与された観念やイメージを延々と「消費」するばかりで，情報そのものを知識として受け取り「浪費」することができず，したがって一向に満足が得られないことにあると想像される．
- また Wikipedia 等のネット上の情報は必ずしも信憑性がないという批判もよく聞く．(現況では ChatGPT も理論物理のやや高度な問題にはほとんど歯が立たない．) とは言え，完全に間違いを犯さない人間はいない以上，ネット上であれ出版物であれ，情報の正確性は程度の差の問題ということになる．(ChatGPT の回答の性能もまた近い将来に改善されたとしても，信憑性の問題は原理的には残る．) そうであるならば，個人的に教科書のまとめノートを公開することは，独りよがりな“トンデモ理論”を唱えることや，エンターテインメントへと堕した品のない動画コンテンツと 50 歩 100 歩であるとしても，その 50 歩の差に実効的にものを言わせることができるはずである．
- 最後に教育の無償化によって，仮にいわゆる「機会の平等」延いては「公正な競争」が完全に実現したとしても，競争原理の下での弱肉強食や「負け組は努力を怠った自業自得」といった自己責任論は，もとより哲学的に正当化し得ないことを強調しておきたい．人間には自由意志がない以上，意志を抱くことや努力することは，それが神即自然の必然性として実現しない限り絶対に不可能だからである．確か

[*56] ただし重要な本を人気の本と解釈すると，「図書館にはベストセラーだけ置き，閲覧数の少ない本は処分しろ」といった類の，市場原理の適用に横滑りしかねないことに注意を要する．

に学才に恵まれなかった者を馬鹿にしたくなる気持ちや，実際に弱い者虐めをすることが抗い難い誘惑的な快感をもたらすことも正直よく分かる．しかし Spinoza 描像はそれを矯正し上書きできるほど強力で健全な愉悦を与えてくれるに違いない．

(なお他方で，理論物理の一連のノートを執筆した筆者の個人的な動機としては，勉強の成果を書き残さないと，それらは全てなかったことにされかねないという思いが大きい．そのような自身の世俗的な悩みに向き合う方が，「ポスト資本主義」という大きな課題を構想することよりも容易であり，また現実的である．)

内田樹の言葉を借りつつ，以上の論点をさらに敷衍する．

- http://blog.tatsuru.com/2023/01/03_0945.html
- http://blog.tatsuru.com/2023/08/29_1214.html
- http://blog.tatsuru.com/2024/05/01_0912.html
- http://blog.tatsuru.com/2024/07/21_0916.html
- http://blog.tatsuru.com/2025/01/20_1117.html

今日の日本の権力者は金と権力には執着するものの，知識や技能 (文化資本) には関心を示さない．他方で文化資本は金や権力と違い，他人に贈与しても目減りしない．すると文化資本をコモン (共有財産) として開放することを通じて公共を再生し (図書館の開設・維持など)，市民の知的成熟，ひいては現実変成力を養うというコミュニズムの戦略には勝算がある．それは既に日本の水面下で広がっている動きであり，集団のための犠牲を強要するソ連・中国型の共産主義とは対照的に，個人の自発的な貢献に委ねられている．希望的観測としては，私が公開している物理のノート (PDF) もその一環に位置付け得る．確かに最初はそれは，自分の行ってきた独学が周囲から評価されないことに対する欲求不満から始めたことである．しかし当然ながら，自分の賢さを誇示し他人を出し抜くだけの不毛な競争に労力を費やす中で，集団的な知性は衰えてゆく．そもそも学問は知識の量や学習の速さを競うものではない．(それが分からない人はおそらく，学問に向いていない．) 知的な営みの本質は「競争」よりも，むしろ「協働」であり，知識はコモンの代表例である．

本稿の読者の大半は大学受験生と想像されることを踏まえ，ここでこの点を詳しく論じておこう．学びや知的活動は本来，競争や査定とは無縁である．

> 生まれてからずっと子どもたちは相対的な優劣を競い，査定されることに慣らされている．学校では成績をつけられ，部活では勝敗を競わされ，会社では勤務考課される．ずっとそうやって育ってきた．**だから，問題に答えて，採点されて，その点数に基づいて資源の傾斜配分に与るという生き方以外の生き方がこの世にあることを知らない［強調ママ］**．ほとんどの人は「査定に基づく配分」を地球誕生以来の自然界のルールであるかのように信じ込んでいる．

［なるほど，このような状況ではなかなか，純粋に自分の興味に基づいて何かを勝手に独学しようという発想も生まれてこない．］しかし世の中には競争以外の生き方がある．その一例として武道が挙げられる．武道は本来スポーツのように勝敗強弱巧拙を競うものではなく，むしろ修行的な性格を持つ．そして武道修業の目標は「場を主宰する」ことである．この観点からすると，「査定」を求める限り我々は「後手に回る」ことになり，永遠に「場を主宰する」ことができない．

> 受験勉強も同じです．「みんながしていること」を「他の人よりうまくやる」競争ですから，特定分野での知識や技能は向上するでしょう．でも，**集団全体の知的水準は下がります［強調ママ］**．だって，

「他の人がしないこと」に興味を持つことに対して強い規制がかかるからです．「そんなことをしても受験の役にまったく立たないぞ」という言葉で，子どもたちのさまざまな知的関心が抑制されてしまう．

でも，人類の歴史が教えているのは，「さしあたりは受験の役に立たない」ような知的活動がしばしば集団的な規模での知的ブレークスルーをもたらしてきたということです．受験勉強をさせることには社会的な意味があることは僕も認めます．でも，その代償として，場合によっては致命的な知的リスクを集団的な規模で引き受けているということについてはもっと警戒心を抱くべきだと思います．

知識の脱商品化に話を戻す．「紙の本にまさる媒体を人類はまだ発明していない」とする一方で [26, p.122]，電子書籍について内田樹は次のように論じている [26, pp.168–171]．すなわち書籍の電子データ化により「アクセシビリティは飛躍的に向上」し，それは「私たちの知的アクティヴィティをおおきく活性化してくれるはずである」．もちろん「本が売れなくなる」という負の側面はあるものの，「テクノロジーの進歩はその代償として必ず『それまで存在した仕事』を奪う」ものであり，「それは圧倒的な利便性を提供するテクノロジーを導入することの代償として受け入れざるを得ないのではないか」．［コモンが脱商品化されて困るのは我々が資本主義の中にいるからであり，生活に必要なあらゆるものが脱商品化されれば，収入がなくなることは問題にならない．］さらに言えば「紙の本の印税だけによって生計を立てる」という生き方は既に難しく，著作権者の相当数は「それで食っている」著作権者ではなく，著作権の継承者である．

著作権からの収益が確保されないなら，一切テクストの公開を許さないという人はそうされればよいと思う．

それによってその人のテクストへのアクセスが相対的に困難になり，その人の才能や知見が私たちの共有財産となる可能性も損なわれても，そんなことは著作権保護に比べて副次的なことにすぎないというなら，仕方がない [26, p.173]．

［私たちは全員が「無償のテクストを読む」というところから長い読書人生をスタートする以上，］無償で読めるテクストが量的に増大することは，リテラシーの高い読者を生み出すことに資することはあっても，それを妨げることになるはずはない．

「テクストがリーダブルであるか否かを判定できる目の肥えた読者」が増えることにどうして著作権者たちは反対するのか？

それを説明できる合理的な理由を私は一つしか思いつかないが，それを言うと角が立つので言わない [26, p.173]．

さらに書物全般については，次のように論じられている [26, pp.194–195]．

書物は本質的に公共財です．書物が商品として流通しているのは，そうすることで良質の書物が書かれ，スムーズに流通し，多くの人に読まれるチャンスが増えるからです．僕はそう思っています．

もし書物が商品であるせいで，くだらない本が書かれ，流通過程で「中抜き」され，著作権がうるさく言われ，読みたいという人の手になかなか届かないということなら，商品的性格は書物の価値を損じていることになります．(中略) 僕の本の商品的性格が強まるせいで，本を読む人が減るというのなら，書物の商品的性格は抑制してほしいと思う．

■共同体のディストピア性　今日「流行」している，資本主義の外部として共同体内の贈与のネットワークをロマンチックに提示する意識の高い言説について，宇野常寛は次のように辛辣だが冷静な批判を投げかけ

る [27, ♯8§ 3].

> 「贈与」とか「共同体」をその表面的なハートフルなイメージに依存して主張する人は，「醤油が切れたら近所の人に貸してもらえる社会がいい」というが，それは共同体のなかで相対的によい位置にいられる人のことしか考えていない発想で，弱者のことをまるで考えていない．共同体の周辺に配置され，ときに迫害され，人間関係が構築しづらい人のことをまるで考えていない．
>
> (中略)
>
> 答えはすでに明らかだ．たとえその人がどこの誰で，過去に何があろうと［国家等による適切な再配分が成され］百円を商店にもっていけば百円の醤油が買える社会こそが正義なのだ．

私は斎藤幸平に代表されるコミュニズム論に希望を見出しながらも，同時にもともと人間が嫌いであるという矛盾した感情を抱えていた．コミュニズム論に思いを馳せるとき，我々は共同体を美化してイメージしがちである．しかし冷静に考えれば，世の中の誰もが心優しい人間であるわけではない．こちらがいくら好意的に接しても友好関係を築きようのない，話の通じない頑迷な相手や，不当な要求を押し付けてくる者，傍若無人な連中もいる．また一般に共同体は絶えず外部——端的には「敵」——との境界線を (再) 設定することで維持され，したがって集団には自ずといじめも発生する (勿論それを正当化するつもりは毛頭ない)．こうして自分の周りに連帯できる人々を得られるかは，運に大きく左右される[*57]．

さらに共同体は社会的弱者を救わないどころか，場合によっては不利な状況に追い込む．私に言わせれば「コミュニケーション能力」という言葉は，交友関係を築けないマイノリティにその責任を押し付ける方便に過ぎない．それは人間関係を築くことに成功したマジョリティが用いる，自分たちにとって都合の良い審判の言葉の言葉に他ならない．さらにそれ以前に，私にはミソフォニアという難病があるため，極力他人との接触を避けなければ，まともに生活を送ること自体が困難である．このため共同体からの援助を求めることは，少なくとも私にとって現実的ではない．これを踏まえると，共同体に属していなくとも生きていける社会こそが弱者に優しい社会であるという，宇野の主張の説得力には抗い難い．

ところで宇野は『庭の話』 [27] において，大多数の人間が今日中毒になっているプラットフォーム上の承認交換というゲームを相対化して内破する必要条件として，サイバースペースと実空間の双方において，人が孤独に人間外の事物と向き合える「場所」をゲリラ的に構築することを考えており，そのような場が「庭」の比喩で構想されている[*58]．また「庭」には人々が承認を得ずとも「何者でもないまま」尊重される (少なくとも互いを排除しない) 空間であることが求められる．(ただし 1 つの空間が全ての「庭」の条件を同時に満たしている必要はない．)

思うに結論としては，コモン型の社会と庭的な構想のどちらか一方だけを選ぶ必要はない[*59]．ポスト資本主義を実現する上で，いずれの回路も並行して確保・実装できるのが好ましいのは言うまでもない．

[*57] 自由意志は存在しない以上，あらゆることは運次第であるということを，ここではわきに置くとしても．

[*58] なお私が余技として行っている理論物理のノートの制作も，はじめは満たされない承認欲求にドライブされて始めたことではあるものの，ひとまずは物理学そのものに対峙する営みであるという意味で，承認交換ゲームからは一線を画するものだと信じたい．もっとも物理のノートはその難解さゆえに容易には近づき難いものになっているとすれば，それはネット空間上の庭というよりもむしろ，城や要塞に近いかもしれない．あるいはそれは物理的直観と数式の海の中を泳げる人々に開かれた水中庭園なのだ．

[*59] 同様に衣食住などの脱商品化と資産の再配分は同時に進めることができる．物理学において，例外のある原理というのは形容矛盾である．他方で社会問題の文脈では，必ずしも 1 つの原理 (規範的原則) にこだわる必要はない．

付録 B　物理の学習

ここでは本編との内容の重複を厭わずに，物理を学ぶ際の心構えについて改めて簡単にまとめる．直ちに断っておくと，ここで提示するのは「物理の勉強はこうするべきだ」といった，絶対に守らなければならない「勉強の仕方」ではない．実際，私はそのようなことを言いたくなければ，人から言われたくもない．また私はそのようなことを人に言えるほど学力があるわけでもない．

そもそも物理の勉強に限らず，一般に「……べき」という主張 (当為命題) は独断論であることを免れない (付録 A 参照)．したがってもっと言えば，例えば「勉強するべきだ」とすら言うことはできない．またそう言われたところで，やる気が起きないのは仕方がない．勉強する意志を抱くことや努力することは，それが可能な場合には神 (即自然) の必然性に従って自動的に達成されるのに対し，それが神の時間発展に含まれていない場合には，空から自由意志でも降って来ない限り不可能である．そして自由意志は存在しないため，それは絶対に不可能である (1-1 節の注解，付録 A を参照)[*60]．したがって新自由主義的な自己責任論は，誤った事実認識に基づくイデオロギーであることになり，哲学的に容認し得ない．このことは動かし難い真理であり，それ故，括弧に入れて考えたり，「言い訳だ」などの一言で片付けるたりすることが許されない．

逆に何らかの学問に興味があれば，周囲の無理解や誤解，敵意 (ルサンチマン) や同調圧力などに構わず，遠慮なく勉強すれば良い．人が何をどれだけ勉強しようと勝手であり，勉強は言わば「やった者勝ち」である[*61]．当然のことであるが，ここで勉強とは必ずしも高校や大学の授業を意味しない．ここでは授業と独学のどちらが効果的な学習方法かを論じるつもりはない．それ以前に，単純に独学で勉強したければ，それで構わないということである．少なくとも理論物理は独学できる学問であることを強調しておこう．

要するに，物理の学習は個々人の興味の赴くまま，好きなように (そして可能ならば，伸び伸びと) やれば良い．とは言え，物理を学ぶ上でのコツがないわけではない．おそらく私が改めて述べるまでもないような，物理屋にとっては周知のこともあろうが，あらずもがな，それを以下に少しだけ書いておく．

B.1　学習面の注意

B.1.1　証明を覚えなくて良いこと

物理学では結論を納得するためには，その導出を追いかけ理解する必要があるけれど，一度，納得ができたら導出過程は忘れて良い．「証明をみたときに忘れてはならないことは，証明それ自身ではなく，これこれのことが正しいということを証明することができるということである [8, p.193]．」

B.1.2　物理にとっての数学

物理学への応用のために数学が重要であることは論を俟たないが，だからと言って**不必要なまでに数学に足を取られることは賢明ではない**．例えば時間が実数で表されるからと言って，「実数とは何か」といったことを厳密に理解していなければ物理学を理解できないということにはならない．また物理で扱う関数に関しては基本的に十分滑らかであり，何度でも微分でき，微積分を始めとする極限操作は常に順序交換可能であると仮

[*60] 付言すれば，このようなのような形而上学的な思想は物理的世界観とも整合しており，物理学を始めとする自然科学のの前提を成している．他方で帰納的推論の産物である蓋然的な経験科学の知見によって，形而上学的命題の正しさを証明することはできない．

[*61] しばしば教科書の冒頭では，「本書は学部 (の教養課程) 程度の知識を仮定としている」といった文言を見かける．私はこの種の表現が好きになれない．確かにそれは想定読者や必要な予備知識の水準を表すのに便利な表現であり，他に言い表しようがないのかもしれない．しかしそれは学生が大学のカリキュラムに従順に従っていることを前提とした表現である．

定して良い．さらに所謂，方程式の「解の一意性」は信じるものであり，正しい物理法則の解は一意的であると信じれば，解の一意性を証明するための数学的議論にこだわる必要はない．仮定は結果によって正当化されるという，物理学で常套的に用いられる“循環論法”が許容される背景にもおそらく，物理の答えは 1 つであり，それ故，上手くいけばそれで良いという信念がある．そして，それで良いのである．以上やや過激な書き方をしたが，これが物理屋のスタンスというものである．

B.1.3　計算ミスについての私見

思うに計算ミスというのは，見かけと違ってそれほど初歩的な問題ではない．確かに計算の正確さを鍛えることはできないとまでは言わないが，ひたすら量をこなせば「計算力」(速さや正確さ) が身に付くというのは，やや素朴な発想であるように思われる．そのような訓練から得られる効果は，控えめに言っても限られている．そこで計算ミスを不可避なものと受け入れた上で，計算を間違ったときにどのようにすれば自分の間違いに気付けるかと考える方がより建設的となる．自分の得た結果を理解・納得する意味でも，答を吟味することは重要である (特に物理では次元のチェックが有用である)．ところが結果の吟味というのは，ときに考えている対象についての直観など学問に対する深い理解を必要とするような，高次の能力ではなかろうか．そうであるならば「計算力が身に付くまで先に進めない」と言うのは逆で，一生付きまとうであろうミスを補完するためにも速く先に進んだ方が良い．

さらに，入試では限られた時間内でスピーディーに計算をこなすことが要求される．もちろん素早く計算ができることを否定するつもりは毛頭ない．しかし物理の学習ではむしろ，泥臭い計算に気長に付き合うことの方が重要であり，それはもとよりスピードを求める態度とは馴染まないようにさえ思える．やや精神論的になるが，個人的な経験則を述べれば，長い計算を行う際には「理に適った結果にたどり着くまで何度でも間違えて良い」ぐらいの感覚で，ゆったりと構えている方が上手くいく．そうすると“悠久の時が味方してくれる”のである．これは時間に限りのある受験生にとってもヒントになるかもしれない．焦らず，あたかも「時間はいくらでもある」かのように泰然自若と構えることは，パフォーマンスにも好影響を与え得る．もう少し具体的・実践的なことを述べれば，自分が問題を解く際，方針を思い付くまでに時間がかかっているのか，それとも立式した後の計算の実行に時間がかかっているのかを大まかに把握することは，学習の次の一手を考える上で有用である．

B.1.4　計算は目で追わずに手で追うこと

漠然と眺めているだけでは頭に入ってこない計算も，実際に手を動かして自ら実行すると，断然，理解しやすくなる．そもそも物理の教科書は計算の行間が空いており，必ずしも暗算では式変形を追えないことの方が普通である．とは言え正直に白状すれば，筆者も可能な場合には，計算を目で追って済ませることが全くないわけではない．泥臭い手計算を力尽くでやり切るのが俗に言う「腕力」だとすれば，“目で計算する”ことは「目力」とでも呼べるだろう．いずれにせよ暗算に頼ることも役に立つ．また教科書のセクション全体を見渡して，話の流れや計算の方針を大まかに掴んでから，それをモチベーションとして具体的な計算に取り掛かることもある．ただしその場合にも，最終的には計算を“手で”追うことになる．

B.1.5　解いた問題から教訓を得ること

自戒を込めて，江沢洋ほか『演習詳解 力学 [第 2 版]』の「はじめに」の一節を引用する [28, pp.5–6].

> つねづね学生たちに言うのだが，演習というものは，あたえられた問題が解けたところから始まるの

である．これが言い過ぎなら，問題が解けたところで道は半分，残りの半分こそ重要，と言い直してもよい．残りの半分とは，手に入れた解を吟味すること，問題を変形してみること，そうして問題を広い展望のなかにおいて眺めること，他の問題との関連を見たり拡張の可能性を調べたりすること．こうした自発的な活動を誘うためにも問題は刺激的でなければならない．

思えば，受験生の頃の私には，こうした問題に批判的に取り組み検討を加える，研究的な姿勢が欠けていたのかもしれない．机に向かって機械的に手を動かし，勉強しているポーズをとることは簡単である．他方，せっかく解いた問題から何かを掴み取り，収穫を得るには，一度立ち止まって，じっくり考えることも必要である．時間に限りがある受験生にとって，それには勇気が必要である．しかしながら，その一見「非生産的」で「非効率的」な過程こそが，おそらくは勉強なのである．

研究的・批判的態度は，問題を取捨選択するのにも役立つ．「自分には休んだり，問題を選り好みしたりしている余裕はない」と決めつけて (あるいはそう思い込まされて)，与えられた課題を全て無批判にこなそうとすると，かえって余裕がなくなるという逆説がある．もっとも問題の良し悪しを見分けるには，その題材に関する背景や予備知識を前もって，ある程度知っていることが必要な場合もある (ここでは教育者の手引きが重要となる)．と言うのも実際，例えばあらかじめ一般論としてよく分かっている事柄を，具体的な系で確認させたり，誘導を付けて証明させたり，あるいは回りくどい方法で計算させたりすることは，入試出題者がやりがちなことである．

公平性を期すために付け加えると，毎年ほとんど変わらない高校のカリキュラムから，手を替え品を替え新規性のある入試問題を作らねばならない教員側も，苦労を強いられている．状況設定の些末な変更や安直な複雑化を施せば，問題を無尽蔵に作り出すことはできるとしても，「良問」を作ることは難しい．このような拘束条件の下では，問題がモンスター化するのは必至である．一流難関大学の入試問題ですら，世間で信じられているほどの「良問」と言えるのか，私には判断しかねる．

B.2　物理的な注意事項

本編との重複を厭わず，改めて以下にまとめる．

B.2.1　物理量の次元

基本的に文字は数値と単位から成る，次元を持った物理量を表す (例えば $m = 2\,\mathrm{kg}$)．例外として角度 $\theta = \pi/3$ や個数 $N \sim 10^{23}$ などの無次元量が挙げられる．よって数値計算は単位を付けて行い，単位の計算も行う必要がある．実際，単位を省いて「$m = 2$」などと書けば，両辺の次元が合わないことになる．また文字には既に単位が含まれているため，「$m\,\mathrm{kg}$」のように改めて単位を付ける必要はない．なお設問によっては，単位を除いた数値として文字が定義される場合もある．

単位換算は「1 を掛ける」ことによって行える．例えば $1\,\mathrm{kg}/10^3\,\mathrm{g} = 1$ なので，

$$3\,\mathrm{g} = 3\,\mathrm{g} \times \frac{1\,\mathrm{kg}}{10^3\,\mathrm{g}} = 3 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg}.$$

また次のように分母分子の「ミリ」は「約分」できる：

$$\frac{0.10\,\mathrm{mV}}{1.5\,\mathrm{mm}} = \frac{0.10 \times 10^{-3}\,\mathrm{V}}{1.5 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}} = \frac{0.10\,\mathrm{V}}{1.5\,\mathrm{m}}.$$

- 和は同じ次元を持つ物理量の間にしか定義されない．

- 式の両辺は同じ次元を持たねばならない．
- $(1\mathrm{kg}) \times g$ のように式の途中で部分的に数値を代入して書くと，
  式のパラメーターに依存した振舞いが見えなくなるため，
  文字式のまま変形し，数値の代入は最後にまとめて行うのが好ましい．
- 計算結果は次元を担う因子と無次元の因子に分けて書くと見通しが良い．

対数関数の真数は本来，無次元量である． しかし真数 A が無次元量であっても，
次元を持つ量 B, C (ただし $A = BC$) を用いて

$$\log A = \log B + \log C$$

とできる．逆に言えば真数を無次元化するのに，この関係を用いることができる．

- しばしば起こり得る状況として，
  積分定数から適当な因子を括り出して，真数を無次元化することができる．
- $\mathrm{pH} = -\log_{10}[\mathrm{H}^+]$ における真数は正確には，
  水素イオン濃度 $[\mathrm{H}^+]$ を 1mol/L で割った無次元量である．

指数関数や三角関数の中身は常に無次元量である． e^2 や $\sin 2$ は定義されているけれど，
$e^{(2\ \text{メートル})}$ や $\sin(2\ \text{秒})$ などは定義されない．

B.2.2 結果の吟味

得られた結果が物理的に納得のいくものであるかを確認しよう．(これには計算ミスを発見する意味もある．)

- 次元のチェック
- パラメーターの変化に対する振舞い (behavior) のチェック
  - 式の中のパラメーターに特別な値を代入して (あるいは適当な極限値をとって)，
    理に適った結果が再現されることを確認する．

B.2.3 符号について

まず言葉の定義として，

$$(\text{変化量}) \equiv (\text{変化後の量}) - (\text{変化前の量})$$

であり (標語的には“(後) − (前)”)，これは考えている量が減少する場合には負の値をとる．また

$$(\text{減少量}) \equiv (\text{変化前の量}) - (\text{変化後の量}) = -(\text{変化量})$$

は，実際に物理量が減少しているとき正の値をとる．同じく言葉の定義により，

$$\begin{aligned}(\text{A が B にした仕事}) &= -\,(\text{A が B にされた仕事})\\ &= -\,(\text{B が A にした仕事})\\ &=(\text{B が A にされた仕事}).\end{aligned}$$

の関係がある．

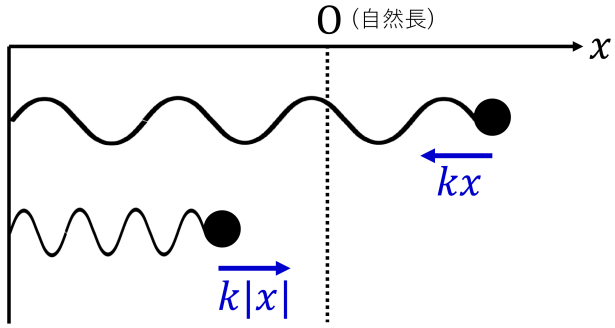


図 234　一端を固定され，他端を重りと繋がれた水平なばね (図 23 の再掲)．ばねの自然長における重りの位置を原点とし，ばねの伸びる向きを正の方向とする x 軸をとると，重りがばねから受ける力の成分は Hooke (フック) の法則 $F = -kx$ で表される．

次にベクトル量の成分について述べる．物理法則は (基本的には) 何らかの座標系に関する量を用いて表される以上，自ら適当な座標系を設定し，その座標軸に関する成分を用いて立式を行う必要がある (設問で座標系が定義されていなくとも)[*62]．この措置は符号ミスを防ぐ上でも役に立つ．他方で図では常にベクトル量を表す矢印に，成分ではなく大きさを書き添えるというように，自分なりのルールを決めておくことが有用である．ここで大きさと成分の区別にも注意されたい．スカラーは初等的には「1 成分の量」として理解でき，「大きさ」とは対照的に負の値もとり得る[*63]．

実践的には例えば，与えられた変数が正である場合を想定して立式を行い，それが (変数) < 0 の場合も含んでいると仮定すると，自動的に正しい関係式が得られる．(もちろん，その正当性を納得しておくことが好ましい．) 例えば図 234 において，ばねの伸びが $x > 0$ のときの弾性力 (の x 成分) は $F = -kx$ と表される (k はばね定数)．この表式は $x < 0$ の場合にも正しい．

B.2.4　定積分と不定積分

一般に定積分の結果は積分変数に依らない．例えば速度 v の定義式

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t')\mathrm{d}t'$$

は積分変数 t' に依存せず，事実，積分変数 t' を他の文字 (例えば τ) で置き換えても式の意味は変わらない．

- 左辺の時刻 t 依存性は右辺の積分の上限に由来している．
- これが不定積分 $x(t) = \int v(t)\mathrm{d}t$ の意味である．
  つまり不定積分は上限が t で下限が不定であるような積分 $\int^t$ に対応する．

[*62] このとき物理法則は座標系の選択に依らずに同じ形をとること，言い換えれば座標変換によって形を変えないことが必要である．これは指導原理としては「相対性原理」と言われる．この共変性の要請が実際に満たされていることを確認することは，物理学における 1 つの重要な観点となる．なお特定の座標系をあからさまに指定しない形に物理法則を書くことも可能である．

[*63] 正確にはスカラーとベクトルは単に成分の数で区別されるのではなく，それぞれ座標変換に際した成分の変換則で定義される．例えばベクトルは矢印で表される幾何学的対象であり，このことはベクトル成分を定義する変換則と等価である．この観点からは，複数の成分を持つ量が真のベクトルであるとは限らない．方程式の両辺が同じ変換則に従うならば，新しい座標系でも同じ形の方程式が成り立つため，物理法則の共変性が満たされる．

B.2.5　Taylor 展開を利用する際の注意

C.5 節で紹介する便利な Maclaurin 展開の公式

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad (|x|<1 \text{ のとき}, \alpha : \text{実数})$$

を例に説明する．これは $\alpha = -1, x \to -x$ とすると，無限等比級数の公式

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots \qquad (|x|<1 \text{ のとき})$$

を再現する．いずれにせよ数学公式が対象とするのは無次元量であり，実際これらの式は無次元の変数 x (の絶対値) が 1 に比べて小さい場合に有用となる．(このとき展開の後ろの項ほど寄与が桁違いに小さくなり，展開の最初の数項だけを考慮すれば良い近似が得られると期待できる．) 他方，物理学で扱われる変数 x は一般に次元を持つ量，例えば長さであり，これが与えられた長さの尺度 a に比べて短い場合に，関数 $\sqrt{a^2+x^2}$ などの近似式を作ることに関心が持たれる．この場合に Taylor 展開の公式を適用するには，無次元化した変数 x/a を導入し，これを 1 と比較する形を作らねばならないことに注意する．すなわち $|x| \ll a$ のとき $|x/a| \ll 1$ であり，

$$\sqrt{a^2+x^2} = a\left\{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right\}^{1/2} \simeq a\left(1+\frac{x^2}{2a^2}\right) = a + \frac{x^2}{2a}.$$

B.3　答案の記述

B.3.1　文字定義

問題文で与えられていない文字は原則として，答案中で定義する必要がある．ただし例えば「外力 F_{ex} のした仕事は $W = \cdots$」と書けば，外力を F_{ex}，外力のした仕事を W と定義したことになる．このように通常の説明文の中で文字を効率的に定義することができる．「外力を F_{ex}，外力のした仕事を W とすると，$W = \cdots$」と繰り返すには及ばない．また記号 $\equiv$ を用いて単に「$a \equiv b$」と書けば，「a を b とおく (あるいは b を a とおく)」という意味になる．これは市民権を得ている標準的な書き方なので，安心して利用して良い．さらに図を用いて文字を定義するのも有効である．答案中に図を描いておくことは，状況を視覚的に整理すると同時に，文字定義を簡単に済ませるのにも役立つ．具体的には図の中に文字を書き込み，一言「図のように文字 (記号) を定義する」などと断れば充分である．実際，例えばピストンの絵の中に P_1, V_1, T_1 と書いておき，「図の状態において状態方程式は……」と書けば，気体の圧力，体積，温度を順に P_1, V_1, T_1 と定義していることはほぼ確実に読み手に伝わるはずである．もっと言えば状態方程式を書き並べるだけでも，各状態での文字定義と状況整理を同時に済ませられると考えられる[*64]．いずれにせよ物理量に充てられる記号はある程度，慣習的に決まっているため，どの文字が何を表しているかは採点者にも伝わると期待できる．この点は採点者を信用して良いと考える．(裏を返せば，文字の選択は任意であるとは言え，現実的にはなるべく慣習に逆らわない方が賢明であると言える．) なお Feynman も述べているように，気体分子運動論では厄介なことに，「p は圧力であり，一方 p は運動量である．v は体積であり，また速度でもある．T は温度であるが，一方では運動エネルギーだったり，時間だったり，トルク［力のモーメント］だったりする」[17, p.187]．大文字と小文字を使い分け，必要に応じて添字やアクセント，ラテン文字に対応するギリシャ文字を駆使すると良い．

[*64] スタンダードな形の状態方程式 $pV = nRT$ はまた，つまらない数計数 3/2 の違いを除き，気体の内部エネルギーの表式でもある．

根拠となる一般公式を提示する際に，文字を設問とは異なる意味で用いざるを得ない場合，あるいは公式中の文字の意味を全て説明するのが煩わしい場合，応急処置としては公式をカギ括弧でくくり，「公式『$C = \varepsilon_0 S/d$』より……」などと書くことが考えられる (見栄えの善し悪しは別として)．また必要に応じて文字を，これまでとは異なる意味で「再定義」しても良い．状況設定が変わるたびに，その都度新たな文字を導入することは，懇切丁寧ではあるものの，それが必ずしも賢いとは限らない．同じ文字を臨機応変に再解釈すれば，記号のインフレーションを抑えることができる．

ここで引数と関数形について注意を促しておく．例えば質量 m，速度 v を持つ粒子の運動エネルギーは，運動量 $p = mv$ を用いて

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

と表される．そこで T を速度 v の関数と見て，$T(v) = \frac{1}{2}mv^2$ と書こう．このとき同時に運動エネルギーを p の関数と見て $T(p)$ と書くと，少々厄介な問題が生じる．と言うのも $T(v) = \frac{1}{2}mv^2$ と書くとき，我々は T を関数の名前として定義していると見なし得る．すると $T(p)$ は $\frac{1}{2}mp^2$ を意味することになり，もはや正しい運動エネルギー $\frac{p^2}{2m}$ を表さない．そこで正確を期すならば，新しい文字を用意して関数 $K(p) = \frac{p^2}{2m}$ を定義する必要がある．もちろん ($p = mv$ の下で) 運動エネルギー $T(v), K(p)$ は値としては等しい：

$$T(v) = K(p).$$

このように同じ量を異なる変数の関数と見なす場合，一般に関数の形は変化する．よって引数の変更に伴って，関数の名前も表記の上で変更するのが正確である．しかしながら実際的には，誤解の恐れのない限り，引数が変わっても一貫して関数名を同じ記号で表すことがしばしば行われる．ひとまず読者はこのような微妙な問題があることを，理解してさえいれば充分である．

B.3.2　どこまで記述を丁寧に書くか

言うまでもなく記述は丁寧であるに越したことはない．しかし現実問題として，試験の解答時間には限りがある．そこで「記述は丁寧だが答にたどり着けていない答案」と，「答にはたどり着けているが記述は雑な答案」とでは，どちらの方が印象が良いかが問題となる．一概には言えないが，やはり多少，記述が粗くとも，答にたどり着けている答案の方が好印象だろう．(特に物理は論理と同じかそれ以上に直観を重んじる学問であるとすれば，極端な話，ほとんど答だけの答案であっても正解でありさえすれば，少なくとも私は減点する気にはならない．) これを踏まえると，正解を出すことを優先しつつ，時間の許す限りで記述を丁寧に仕上げるというのが基本方針となる．文章を書くと時間がかかるので，最低限，必要な情報として，根拠となる「法則名」と「立式」を箇条書きのような形式で提示するスタイルを取り入れることも考えられる．

他方で途中計算に関しては，単純な式変形を長々と書くことはかえって好まれない．(書いてはいけないわけではないが，実際問題，余白が足りなくなりかねない．) 実に試験の答案に限らず，一般に式変形を詳しく書いた方が親切ではあるものの，計算過程が長くなると議論全体の見通しが悪くなるというジレンマがある．このため途中計算をどの程度，丁寧に示すのが適切かという問題には，おそらく多かれ少なかれ，物理の教科書の著者も頭を悩ますことになる．その匙加減は想定される読者の学力にも依存し，究極的には主観的な判断を経て決定される．読者としても物理の教科書を読んでいると，

- 結論が計算に埋もれていて要点を掴みにくい
- しかしながら内容を丁寧に追いかけるには，途中計算や説明が省かれすぎている

と感じることは少なからずあるはずである．「帯に短し襷に長し」である．このジレンマを解消する 1 つの方法は，「要点と途中計算を分離する」ことだろう．すなわち，最初に冗長な計算を意図的に省いて，議論の概要だけを提示すれば，話の見通しの良さは確保される．他方で式の導出過程は，要約とは別の箇所で行うことにすれば，要約の簡潔さを損うことなく，心置きなく長々と計算過程を示すことができる．こうして話の明快さと式変形の詳しさを両立させ得る．もちろん，このような書き方にも一長一短はあるだろう．とは言え「要点と途中計算の分離」というアイデア自体は，物理の一般的な学習方法に通じるものであり，さほど突拍子のないものではないはずである．

いずれにせよ試験では冗長な式変形は計算用紙に行い，答案用紙には出発点となる式や最終的な結果を中心に，重要な箇所だけを清書するよう，心掛けること．特に典型的には大問の冒頭に配置されている，基本事項を問うだけの小問では，いきなり答だけを書けば充分な場合もある (出題者も“パッと”答を書いてもらうことを意図している)．他方でしばしば大問の中盤から後半に位置するメインの問いでは，考え方も示すのが好ましい．何より答に至る過程を書かないと，部分点が入らない．

分数の約分や両辺の共通因子を落とす操作などを斜線で示すことは，害がないと考えられる．しかしながら，移項を伴う式変形を斜線で説明することは，式の解釈が定まらなくなるため，誤解の恐れがある．例えば右辺全体に掛かっている係数 1/2 を斜線で消して，左辺に 2 を書き加えると，左辺の 2 はもとからあったのか否かを判別できなくなり，危険である．このこともまた細かい計算は計算用紙で行った方が良い理由の 1 つである．

最後に，個人的なメモや普段の学習の際はともかく，試験などのフォーマルな場では「エネルギー保存則」を「E 保」と略したり，「距離 $\to$ キョリ」のように画数の多い漢字を略記したりすることは原則，控えること (減点対象にまではならなくとも)．運動方程式を「EoM」，質量中心を「CM」，体積を「Vol」，起電力を「emf」と表記するなど，ある程度，市民権を得ている速記術は例外的に認められる可能性がある．略称などを用いる場合には，最初に「Biot-Savart の法則 (以下，B-S 則) より，……」「$c \equiv \cos\theta, s \equiv \sin\theta$ と略記すると……」などと断るのが好ましい．なお答案は「清書するような気持ちで」作成し，間違いは消しゴムで訂正すること (言わずもがな)．

B.3.3　その他の些末な注意

■ギリシャ文字　たまに「ω (オメガ)」と「w (ダブリュー)」，「α (アルファ)」と「a (エー)」の見分けがつかない答案を見かける．文字の形の違いに注意されたい．ϕ と φ，ε と ϵ のように，書き方が複数あるギリシャ文字もある (書き方は任意である)．複数の書き方を意図的に使い分けている教科書も見受けられる．

■「向き」と「方向」　厳密には「x 方向」という術語は「$+x$ 向き」と「$-x$ 向き」の両方を含むため，単に「x 方向」と言うだけでは向きが完全には定まらない (可能性が 2 通り考えられる)．しかし本稿でも今後「$+x$ 向き」の意味で，「x 方向」という表現を用いるかもしれない (「x 方向の単位ベクトル」のように)．また日常的にはしばしば物理学者も「速度」を「速さ」と同義で用いており，両者を厳密には区別していない．言葉の意味はある程度，文脈から理解できるため，(その限りで) あまり神経質になる必要はない．

付録 C　物理数学

主に文献 [19] を参考にした．

C.1　和の計算について

C.1.1　Einstein の規約

式に 2 度以上現れる空間座標の添字については 1 から 3 までの和をとる．例えば

$$A_{ij}B_j \equiv \sum_{j=1}^{3} A_{ij}B_j = \sum_{k=1}^{3} A_{ik}B_k \equiv \sum_{k=1}^{3} A_{ik}B_k$$

である．添字 i と違って和をとられる添字 j は式変形の途中で (i 以外の) 別の文字 k に置き換えても式の意味が変わらない．このような添字をダミー添字と呼ぶ．

■和の順序交換　例えば 3 つの添字 i, j, k を持つ量 A_{ijk}, B_{ijk} に対し

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} A_{ijk}B_{ijk}$$

を考えると，これはまず k について和をとり，次いで j について和をとり，最後に i について和をとることを意味する．ところが 2 度以上現れる添字については和をとるという Einstein の規約を適用してこれを単に

$$A_{ijk}B_{ijk}$$

と書くと，どの添字から順に和をとるかという情報が失われる．よってこのような表現が意味を持つためには，どの添字から和をとるかによって計算結果が変わらないことが必要である．

実際に和をとる順序によって計算結果は変わらないためには，2 重和の順序交換

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} A_{ij}$$

が可能であれば十分である．これが正しいことは，A_{ij} を行列のように

$$\begin{matrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{matrix}$$

と並べると理解できる．すなわち

- 最初に j 列目の成分の和 $\sum_{i=1}^{m} A_{ij}$ を計算し，次いでこれを各列 j について足し合わせても，
- 最初に i 行目の成分の和 $\sum_{j=1}^{n} A_{ij}$ を計算し，次いでこれを各行 i について足し合わせても，

上に書き出した全成分 A_{ij} の合計値が得られる．

成分 A_{ij} を絵柄が i，数字が j のトランプのカードと考えると，図 235 のようにこのことは，

- 最初に各数字 j ごとにカードの束を作ってから，それらの束を集めても，
- 最初に各絵柄 i ごとにカードの束を作ってから，それらの束を集めても，

全てのカードを回収できることとしてイメージできる:

$$\sum_{i=\spadesuit}^{\diamondsuit}\sum_{j=1}^{13} A_{ij} = \sum_{j=1}^{13}\sum_{i=\spadesuit}^{\diamondsuit} A_{ij}.$$

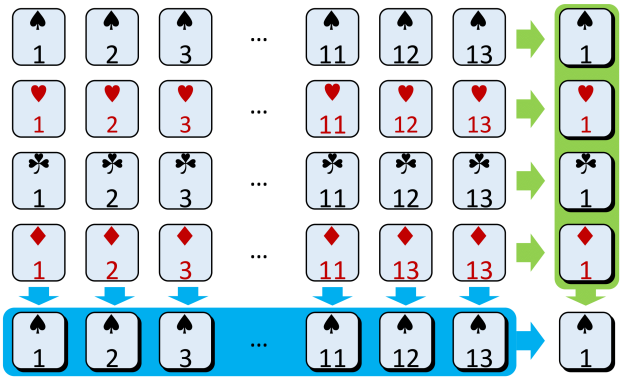


図 235　トランプを回収する 2 通りの方法

C.1.2　添字に関して対称な量と反対称な量の「縮約」

添字 i, j に関して対称な量 A_{ij} と反対称な量 B_{ij} を考える．ここで添字に関する対称性・反対称性とはそれぞれ

$$A_{ij} = A_{ji}, \qquad B_{ij} = -B_{ji}$$

を意味する．このとき和 $A_{ij}B_{ij}$ はゼロになる[*65]：

$$A_{ij}B_{ij} = \sum_{i>j}(A_{ij}B_{ij} + A_{ji}B_{ji}) = \sum_{i>j}(A_{ij}B_{ij} - A_{ij}B_{ij}) = 0.$$

ただし第 1 の等号では B_{ij} の反対称性より，$i = j$ の項はゼロになることを考慮した．

上の計算は直観的には以下のように理解できる．すなわち $C_{ij} \equiv A_{ij}B_{ij}$(添字に関して和をとらない) を行列のように

$$\begin{matrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & \dots & C_{mn} \end{matrix}$$

と並べ，これら全ての和を計算することを考えると，B_{ij} の反対称性より対角成分はゼロになる．また上で見た関係 $C_{ji} = -C_{ij}$ により対角線に関して対称な位置にある 2 成分 C_{ij}, C_{ji} は相殺するため，“上三角”の各部分は“下三角”の各部分と正確に相殺し，考えている和はゼロとなる．

C.2　Kronecker のデルタ，Levi-Civita 記号

ベクトルの成分計算などを行う際に有用となる，Kronecker のデルタと Levi-Civita 記号を導入する．

Kronecker のデルタは

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義される．

[*65] A_{ij}, B_{ij} がテンソルと呼ばれる量である場合には，$A_{ij}B_{ij}$ のように添字をそろえて和をとる操作はタイトルに書いたように「縮約」と呼ばれるけれど (付録 C.12)，今はそのことは重要でない．

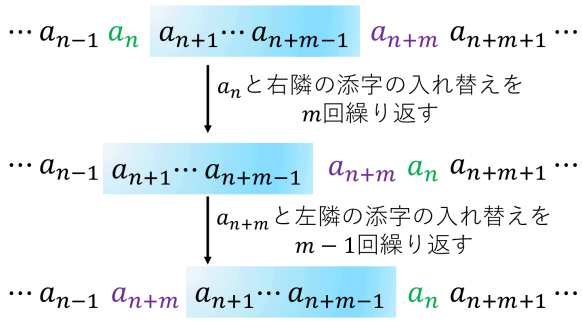


図 236　任意の 2 つの添字の入れ替えを実現するには，必ず隣接する添字を奇数回入れ替える必要がある

Levi-Civita 記号 ε_{ijk} は添字に関して完全反対称，すなわち任意の隣り合う 2 つの添字を入れ替えると符号が入れ替わる量として定義される ($\varepsilon_{123} = -\varepsilon_{213}$, etc.)．このとき

$$\varepsilon_{112} = -\varepsilon_{112}\text{：反対称性，}\qquad \therefore \varepsilon_{112} = 0$$

のように添字に同じ値が 2 つ以上含まれる成分はゼロになるので，Levi-Civita 記号を定義するには相異なる添字を持つ 3! 個の成分を与えれば十分である．しかも反対称性によりそれら 3! 個の成分は独立ではなく，そのうちの 1 つの値を決めれば残りの全成分の値も定まる．実際，添字 123 を並べ替えて ijk とするのに隣り合う添字を入れ替える操作 (互換) の回数はその方法に依るけれど，回数が偶数回となるか奇数回となるかは入れ替えの手順に依らずに定まっていることが数学的に分かっている．添字 ijk は入れ替えの回数が偶数の場合 123 の偶置換，奇数の場合 123 の奇置換という．

$$\varepsilon_{123} = 1$$

と約束すると，添字 ijk が 123 の偶置換の場合には $\varepsilon_{ijk} = 1$ であり，奇置換の場合には $\varepsilon_{ijk} = -1$ となる：

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \qquad \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1.$$

以上をまとめると Levi-Civita 記号 ε_{ijk} は添字に関して完全反対称であり，$\varepsilon_{123} = 1$ を満たす量と定義される．

参考　任意に選んだ 2 つの添字の入れ替えは奇置換である．実際，図 236 のように
添字 a_n と a_{n+m} を入れ替えると，隣接する添字を $2m-1$ 回入れ替えることになる．

C.2.1　Levi-Civita 記号の縮約公式

以下の Levi-Civita 記号の縮約公式がしばしば有用となる．

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \tag{76}$$

これは Kronecker のデルタと Levi-Civita 記号に対する公式

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{prs} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{ir} & \delta_{is} \\ \delta_{kp} & \delta_{kr} & \delta_{ks} \\ \delta_{lp} & \delta_{lr} & \delta_{ls} \end{vmatrix} \tag{77}$$

から得られる．

この式 (77) を確かめるには，次のことに気付けば良い．まず式 (77) 左辺は添字 i,k,l および p,r,s について反対称である．一方，行列の行の入れ替えと列の入れ替えに対して行列式は符号を変えるから，式 (77) 右辺もまた添字 i,k,l および p,r,s について反対称である．よって相異なる添字のある組 i,k,l および p,r,s に対して式 (77) が成り立っていることを確かめれば，任意の添字の組 i,k,l および p,r,s に対して式 (77) が成り立つことになる．そこで例えば $(i,k,l)=(p,r,s)=(1,2,3)$ とすると

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{prs}=1\times 1=1,\qquad \begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{ir} & \delta_{is}\\ \delta_{kp} & \delta_{kr} & \delta_{ks}\\ \delta_{lp} & \delta_{lr} & \delta_{ls}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

だから成り立っている．

あるいは等価的に次のように説明することもできる．式 (77) の右辺は 3 次の単位行列 I の行や列を入れ替えて得られる行列の行列式である．ところが行列式は行や列を入れ替えるたびに符号が入れ替わるから，

$$\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{ir} & \delta_{is}\\ \delta_{kp} & \delta_{kr} & \delta_{ks}\\ \delta_{lp} & \delta_{lr} & \delta_{ls}\end{vmatrix}=\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{prs}|I|=\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{prs}.$$

■ベクトル 3 重積　1 つの応用として，式 (C.2) からベクトル 3 重積の公式

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

が導かれる (ベクトル積については付録 C.10.1 参照)：

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]_i =&\varepsilon_{ijk}A_j(\varepsilon_{klm}B_lC_m)\\ =&(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})A_jB_lC_m\\ =&B_i(A_jC_j)-C_i(A_jB_j)\\ =&[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})]_i.\end{aligned}$$

C.3　球座標

3 次元空間における位置を指定するのに，球座標 (r,θ,ϕ) を用いることができる (以下，図 237 を参照)．あらかじめ空間に原点と，基準となる方向として x,y,z 方向を定めておく．その上でまず原点からの距離 r を指定すると，考えている点は原点を中心とする半径 r の球面上にあることになる．地球上の位置を表すのに緯度と経度が用いられるのと同様に，球面上の位置を指定するのに残り 2 つの座標 θ,ϕ を用いる．ただし経度は赤道を 0 度とするのに対し，θ は北極 (z 方向) と位置ベクトルの成す角であり，天頂角と呼ばれる．ϕ は位置ベクトルの xy 平面への正射影が x 軸との成す角であり，方位角と呼ばれる．こちらは緯度に対応する．デカルト座標 (x,y,z) との関係は

$$x=r\sin\theta\cos\phi,\qquad y=r\sin\theta\sin\phi,\qquad z=r\cos\theta$$

である．

■線要素，面積要素，体積要素の表式　図 237 のように，球座標 r,θ,ϕ がそれぞれ $\mathrm{d}r,\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}\phi$ 変化して作られる領域を考える．球座標 r,θ,ϕ が増大する 3 方向は互いに直交するから，これは 3 辺が $\mathrm{d}r,r\mathrm{d}\theta,r\sin\theta\mathrm{d}\phi$ の

直方体と見なせる．よって図 237 の線要素 $\mathrm{d}l$，面積要素 $\mathrm{d}S$，体積要素 $\mathrm{d}V$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}\mathrm{d}l^2 =& \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2,\\ \mathrm{d}S =& r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi,\\ \mathrm{d}V =& r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\end{aligned}$$

と表される．

■応用例 1 ——球の表面積と体積の公式　以上を利用して半径 r の球の表面積 $S(r)$ と体積 $V(r)$ を求めよう．表面積 $S(r)$ は球面を構成する全ての面積要素 $\mathrm{d}S$ を足し合わせて

$$S(r) = \int \mathrm{d}S = r^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\sin\theta = 4\pi r^2$$

と計算できる[*66]．次いで体積を計算する．半径 r' と $r'+\mathrm{d}r'$ の球面に挟まれた球殻の体積は $S(r')\mathrm{d}r'$ なので，半径 r の球を玉ネギのように多数の球殻に分割すると，球の体積は球を構成する全ての球殻の体積の和として

$$V(r) = \int_0^r 4\pi r'^2\mathrm{d}r' = \frac{4}{3}\pi r^3$$

と求まる．なお円の面積に関して同様の考察を 5-1 節の注解で行った．

■応用例 2 ——極座標を用いた運動エネルギーの表式　特に $\mathrm{d}r, \mathrm{d}\theta, \mathrm{d}\phi$ を無限小時間 $\mathrm{d}t$ における粒子の座標変化と見なせば，粒子の質量を m として球座標で表した運動エネルギーの表式

$$T = \frac{1}{2}m\{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\sin\theta\dot{\phi})^2\}$$

を書き下せる．

■立体角　3 次元空間においてある定点から見た方向の範囲を表す方法を考える．2 次元の平面上では定点から見た方向の範囲を表すのに角度 (平面角) を用いることができる．ところで角度というのは，考えている方向範囲が定点を中心とする単位円から切り取る弧の長さである．そこで平面角の自然な一般化として，3 次元空間において考えている方向範囲が定点を中心とする単位球から切り取る球面上の面積として立体角を定義する．球座標 θ, ϕ が $\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}\phi$ の範囲の方向に対応する立体角は

$$\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

と表される．なお単位球面上の“面積”$\mathrm{d}\Omega$ は無次元量であり，半径 r の球面上の面積 $r^2\mathrm{d}\Omega$ との面積比 r^2 が面積の次元を持っていることに注意する (付録 D.1 参照)．

C.4　円筒座標

円筒座標は xy 面内の平面極座標 ρ, ϕ と z 座標で空間の位置を表現するものであり (図 238 参照)，円筒座標 (ρ, ϕ, z) は同一の点のデカルト座標 (x, y, z) と

$$x = \rho\cos\phi, \qquad y = \rho\sin\phi$$

[*66] θ の積分範囲は $0 < \theta < 2\pi$ ではなく $0 < \theta < \pi$ であることに注意する．この範囲では常に $\sin\theta \geq 0$ となる．このことが球座標を $0 \leq \phi < 2\pi, 0 \leq \theta < \pi$ で定義する利点である．

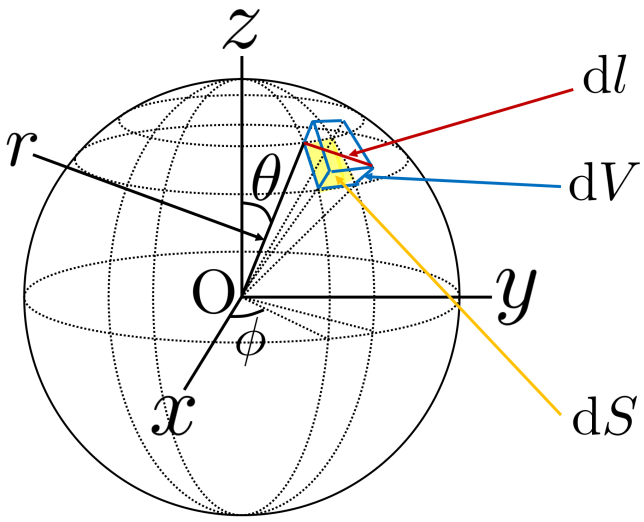


図 237　球座標 r, θ, ϕ がそれぞれ $\mathrm{d}r, \mathrm{d}\theta, \mathrm{d}\phi$ 変化して作られる直方体

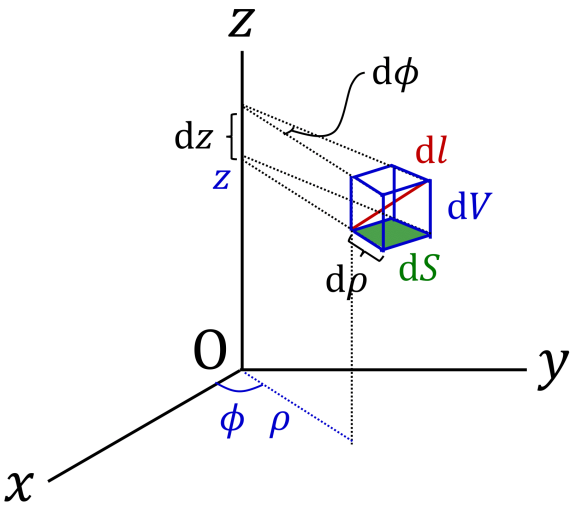


図 238　円筒座標 ρ, ϕ, z がそれぞれ $\mathrm{d}\rho, \mathrm{d}\phi, \mathrm{d}z$ 変化して作られる直方体

の関係にある (z 座標は共通)．ここで図 238 のように円筒座標 ρ, ϕ, z がそれぞれ $\mathrm{d}\rho, \mathrm{d}\phi, \mathrm{d}z$ 変化して作られる領域を考える．球座標の場合と同様，円筒座標 ρ, ϕ, z が増大する 3 方向は互いに直交するから，これは 3 辺が $\mathrm{d}\rho, \rho\mathrm{d}\phi, \mathrm{d}z$ の直方体と見なせる．よって図 238 の線要素 $\mathrm{d}l$，面積要素 $\mathrm{d}S$，体積要素 $\mathrm{d}V$ はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}l^2 &= \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}z^2, \\
\mathrm{d}S &= \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi, \\
\mathrm{d}V &= \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

と表される．

C.5 Taylor 展開

適当な定数 a に対して関数 $f(x)$ を $x-a$ の多項式として $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ と展開できると仮定すると，容易に確かめられるように展開係数は $a_n=f^{(n)}(a)/n!$ と定まり

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

となる．これを $x=a$ の周りの $f(x)$ の **Taylor(テイラー) 展開**という[*67]．これは $x=a$ の近くで $f(x)$ を多項式によって近似するのに利用することができる．実際，$x=a$ の近くで $(x-a)^n$ は n が増大するほど (絶対値が) 小さくなるので，展開は後ろの項ほど小さくなると期待できる．そこで展開を適当な次数 N で打ち切れば，$f(x)$ の N 次式による近似 (N 次近似)$f(x)\simeq\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ が得られる．なお 1 次近似

$$f(x)\simeq f(a)+f'(a)(x-a)$$

は，関数 $f(x)$ のグラフを $x=a$ における接線で近似することに他ならない．

特に $a=0$ の場合の展開を **Maclaurin(マクローリン) 展開**と呼ぶ．以下に有用な Maclaurin 展開の公式をいくつか挙げる．

$$\begin{aligned}
e^x =&1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots,\\
\sin x =&x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots,\\
\cos x =&1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots,\\
\sinh x \equiv&\frac{e^x-e^{-x}}{2}\\
=&x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots,\\
\cosh x \equiv&\frac{e^x+e^{-x}}{2}\\
=&1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots,\\
\frac{1}{1-x} =&1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots, \qquad (|x|<1\text{ のとき})\\
(1+x)^\alpha =&1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots, \qquad (|x|<1\text{ のとき},\alpha:\text{実数})\\
&(\text{具体的な問題に応用するには，左辺のように 1 と無次元の微小量 } x \text{ を比較する形を作らねばならない．}\\
&\alpha=-1, x\to -x \text{ とすると 1 つ上の式を再現．整数}\alpha\text{に対して 2 項定理に帰着．})\\
\ln(1+x) =&x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots. \qquad (|x|<1\text{ のとき})
\end{aligned}$$

数学公式 $\lim_{x\to 0}\sin x/x=1$ はここから示される．1 次近似 $\sin x\simeq x$ は，$\pi/6\simeq 0.524, \sin(\pi/6)=0.5$ を考えると，ある程度大きい角度 x (1 に比べて) に対してまで正確であることが分かる．これは近似の誤差が x の 2 次ではなく 3 次程度であることによると考えられる．$1/(1-x)$ の展開は無限等比級数和の公式としてよく

[*67] ただし与えられた関数が実際にこのように展開できるかを判断するには，数学的に込み入った議論を要する．

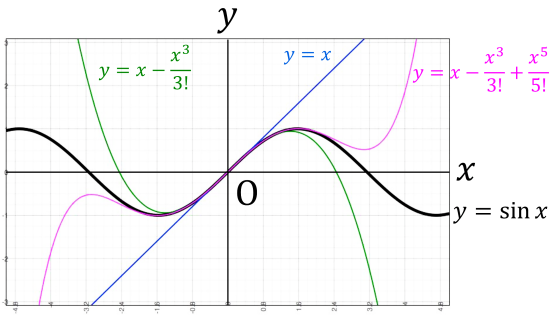


図 239　$y = \sin x$ のグラフとその近似曲線

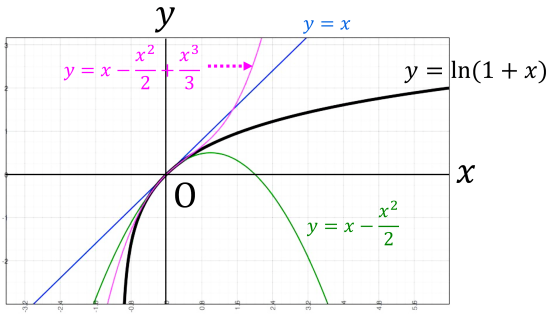


図 240　$y = \ln(1 + x)$ のグラフとその近似曲線

知られている．参考として $y = \sin x$ と $y = \ln(1 + x)$ のグラフについて，Maclaurin 展開に基づいて得られる近似曲線を図 239，図 240 に示す．

関連して，物体の運動は経過時間 t の 2 次までの近似では等加速度運動と区別できない：

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(0) + \dot{\boldsymbol{r}}(0)t + \frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{r}}(0)t^2 + \cdots .$$

C.5.1　多変数関数の Taylor 展開

なお多変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_N)$ の関数 $f(\boldsymbol{x})$ の $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ 周りの Taylor 展開は

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\{(\Delta x_i)\partial_i\}^n f(\boldsymbol{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_N} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_N} f(\boldsymbol{a}), \\ &\equiv e^{\Delta \boldsymbol{x} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}} f(\boldsymbol{a}), \qquad \Delta x_i \equiv x_i - a_i, \qquad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned}$$

となる (証明は下記，偏微分については付録 C.8 参照)．ただし繰り返された添字について和をとり (付録 C.1.1 参照)，また右辺の $f(\boldsymbol{a})$ は関数 $f(\boldsymbol{x})$ を微分した後に $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \equiv (a_1, \cdots, a_N)$ を代入するものと見なす．これは 1 変数の場合の結果を含んでおり，逆にその自然な一般化となっている．ここから Δx_i の 1 次近似では

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = [\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{a})] \cdot \Delta \boldsymbol{x}$$

となる ($\Delta \boldsymbol{x} \equiv (\Delta x_1, \cdots, \Delta x_n)$，付録 C.10.3 参照)．これは 2 変数の場合，$\Delta x, \Delta y$ だけ隔たる位置における標高 $z = f(x, y)$ の差を図 241 のように近似していることになる．また 2 次の項は

$$\frac{1}{2}\Delta x_i \Delta x_j \partial_i \partial_j f(\boldsymbol{a})$$

である．このような形の式を Δx_i の 2 **次形式**という．

証明　N 変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_N)$ の $\boldsymbol{a}$ からのズレを $\Delta \boldsymbol{x} = \varepsilon \boldsymbol{n}$ とおき (ε は無限小パラメーター，$\boldsymbol{n}$ は方向単位ベクトル)，$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a} + \Delta \boldsymbol{x})$ の展開を ε の 1 変数関数 $F(\varepsilon)$ の展開に帰着させると

$$f(\boldsymbol{a} + \Delta \boldsymbol{x}) = F(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)^n F(0)\varepsilon^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(n_i \partial_i\right)^n f(\boldsymbol{a})\varepsilon^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\Delta x_i \partial_i\right)^n f(\boldsymbol{a})$$

を得る ($\mathrm{d}/\mathrm{d}\varepsilon = n_i \partial_i$ については付録 C.10.3 の方向微分を参照)．

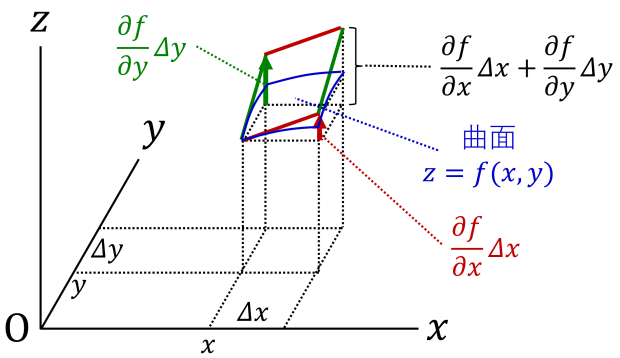


図 241　2 変数関数 $z = f(x, y)$ の $\Delta x, \Delta y$ に関する 1 次近似の図形的解釈

C.5.2　近似式—— Taylor 展開の応用

ここで Taylor 展開の応用例として，いくつかの近似式を導こう．

■落雷地点までの距離を求める近似式　雷の光を見てから音を聞くまでの時間から，落雷地点までの距離を求めることを考えよう．時刻 $t = 0$ に距離 L だけ離れた地点に雷が落ち，時刻 $t = t_1$ に光が，時刻 $t = t_2$ に音が届いたとする．光速を c，音速を V と書くと

$$L = ct_1 = Vt_2$$

なので，光を見てから音を聞くまでの時間は

$$\Delta t \equiv t_2 - t_1 = L\left(\frac{1}{V} - \frac{1}{c}\right)$$

と表される．よって時間差 Δt から落雷地点までの距離が

$$L = \frac{\Delta t}{\frac{1}{V} - \frac{1}{c}} = V\Delta t \frac{1}{1 - \frac{V}{c}} \tag{78}$$

と求まる．

今，音速 V が光速 c に比べて小さいこと

$$\frac{V}{c} \simeq \frac{3 \times 10^2 \mathrm{m/s}}{3 \times 10^8 \mathrm{m/s}} \sim 10^{-6}$$

に注目して距離 L を求める近似式を作ると

$$L = V\Delta t \left\{1 + \frac{V}{c} + \left(\frac{V}{c}\right)^2 + \cdots\right\} \simeq V\Delta t$$

を得る．これは光が一瞬で伝わると考え，Δt を音の伝播時間 L/V と見なすことに他ならない．実際，式 (78) において $c \to \infty$ とすると $L \to V\Delta t$ となる．

■**Feynman による 3 乗根の近似計算**　Feynman はそろばんの使い手と計算の速さを競い合い，1729.03 の 3 乗根を求める問題で近似計算を用いて圧勝した [29, pp.10–15]．その計算方法を数式に起こしてみよう．

近似計算を行うには，答の大まかな値をあらかじめ知っている必要がある．(ここでの近似計算とは，それに対する補正を見出すための方法である．) 今，1 立方フィートは 1728 立方インチであることに注目しよう．これは $12^3 = 1728$ を意味する:

$$1\ \mathrm{ft}^3 = (12\ \mathrm{in})^3 = 1728\ \mathrm{in}^3, \qquad \therefore 12^3 = 1728.$$

1728 は 1729.03 に 1.03 だけ足りない．そこで $(1729.03)^{1/3} \simeq 12$ を第 0 近似として 1.03 について補正すると

$$\begin{aligned}(1729.03)^{1/3} =&(1728+1.03)^{1/3} = 12\times\left(1+\frac{1.03}{1728}\right) \simeq 12\times\left(1+\frac{1}{1728}\right)\\ \simeq&12\times\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{1728}\right) = 12.002\cdots\end{aligned}$$

となる．

■**近接した 2 点までの距離の差の近似式 ($\frac{\partial R}{\partial x} = \cos\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin\phi}{R}$ の図形的解釈)**　xy 面内に平面極座標 (R,ϕ) を導入する．図 242 のように近接した 2 点 A,B をとり，原点からの距離 $\overline{\mathrm{OA}}, \overline{\mathrm{OB}}$ の差 $\Delta R = \overline{\mathrm{BC}}$ を考える．距離 $\overline{\mathrm{BC}}$ を近似的に距離 $\overline{\mathrm{BC'}}$ で置き換えたときの誤差は

$$\overline{\mathrm{CC'}} = \overline{\mathrm{OC}} - \overline{\mathrm{OC'}} = R(1-\cos\Delta\phi) = O(\Delta\phi^2)$$

なので，$\Delta\phi$ の 1 次までの近似で

$$\Delta R \simeq \overline{\mathrm{BC'}} = \Delta x\cos\phi$$

が成り立つ．またこれは

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial x} =&\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ =&\frac{x}{R} = \cos\phi\end{aligned}$$

の図形的解釈となっている．

さらに図 243 において，$\Delta x, \Delta\phi$ の 1 次までの近似で赤い円弧の長さは

$$R\Delta\phi = -\Delta x\sin\phi$$

で与えられる．これは

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\arctan\frac{y}{x} = \frac{1}{1+(y/x)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{\sin\phi}{R}$$

の図形的解釈となっている．

C.6　変数分離形の微分方程式

$$f(x)\mathrm{d}x = g(y)\mathrm{d}y$$

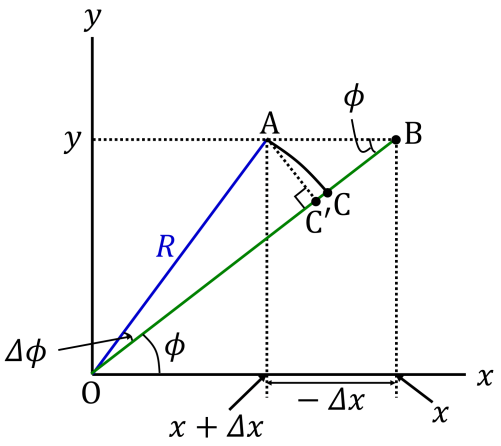


図 242　$\frac{\partial R}{\partial x} = \cos\phi$ の図形的解釈

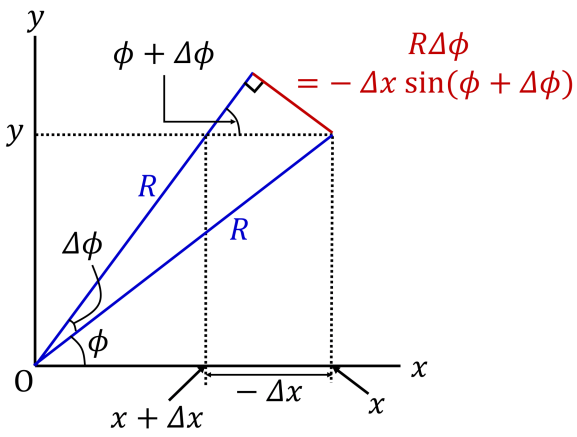


図 243　$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin\phi}{R}$ の図形的解釈

という形に帰着できる微分方程式を，変数分離形の微分方程式と呼ぶ．(左辺が変数 x のみを含み，右辺が変数 y だけを含むように変数 x, y を分離できることが名前の由来である．) この微分方程式を解く，すなわち y と x の関係を求めるには

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int g(y)\mathrm{d}y$$

とすれば良い．

C.7　定数係数線形微分方程式

解ける微分方程式は限られており，その形は先人の知恵として覚えてしまう，あるいは適宜，数学公式集などで確認するのが賢明である．

C.7.1　同次微分方程式

ここで定数係数を持つ n 階の線形微分演算子

$$f(D) = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k \qquad \left(\text{ただし } D \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$$

に対して，同次 (斉次) の，すなわち右辺に源の項を持たない $x(t)$ についての微分方程式

$$f(D)x(t) = 0$$

を考える．特に物理的に興味が持たれるのは 2 階の微分方程式の場合

$$f(D) = aD^2 + bD + c$$

である．補助方程式 $f(r) = 0$ の 2 解を $r = \alpha, \beta$ とすると，一般解は

$$\begin{aligned} x =& c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{\beta t} && (\alpha \neq \beta \text{のとき}) \\ x =& (c_1 + c_2 t)e^{\alpha t} && (\text{重解} \alpha = \beta \text{のとき}) \end{aligned}$$

で与えられる (c_1, c_2 は積分定数)．

■例——減衰振動　以上の物理的な解釈を与えるために，1 つの応用例として質点 (質量 m，位置 x) がばねの力 $-kx$ と媒質からの抵抗力 $-\alpha\dot{x}$ の下で行う 1 次元の運動を考える [9, pp.93–94]．運動方程式は 2 階定数係数線形同次微分方程式

$$
\begin{aligned}
& m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}, \\
\therefore\quad & \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0 \qquad ({\omega_0}^2 \equiv k/m, 2\lambda \equiv \alpha/m)
\end{aligned}
$$

になる．上記の一般解の公式を適用すると，ばねの強さ ω_0 と摩擦力の強さ λ の大小に応じて以下のような運動が得られる．

- $\lambda < \omega_0 \cdots$ 減衰振動　$x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \delta)$　(振動の振幅が指数関数的に減衰)
  ここに $\omega \equiv \sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}$　$\leftrightarrow$　「摩擦は運動を遅らせる」
- $\lambda \geq \omega_0 \cdots$ 振動しない
  - $\lambda > \omega_0$　非周期的減衰　$x = c_1 e^{-(\lambda - \sqrt{\lambda - {\omega_0}^2})t} + c_2 e^{-(\lambda + \sqrt{\lambda - {\omega_0}^2})t}$
  - $\lambda = \omega_0$ のときの運動
  $$x = (c_1 + c_2 t)e^{-\lambda t}$$
  は $\lambda > \omega_0$ の非周期的減衰の特別な場合

  ★ こうして抵抗が十分大きければ物体の位置は $x \sim e^{-\alpha t}$ のように安定位置 $x = 0$ に戻る．
  ドアクローザーを用いればドアは自動的にゆっくりと閉まり，「バン」という音を立てない．

C.7.2　非同次微分方程式

次に定数係数線形非同次微分方程式

$$f(D)x(t) = ae^{\omega t}$$

を考える．これは

$$x = \begin{cases} Ae^{\omega t} & (f(\omega) \neq 0 \text{ のとき}) \\ Ate^{\omega t} & (f(\omega) = 0 \text{ が 1 重解}\omega\text{を持つとき}) \end{cases}$$

という特殊解を持つ．これは a, A を複素振幅とし，ω を純虚数 $i\omega$ に置き換えた場合にも正しい [19, pp.55–56]．

一般解と特殊解　n 階の微分方程式に対して n 個の任意定数 (積分定数) を含む解を一般解と呼ぶ．積分定数を適当に選ぶことにより，一般解は与えられた初期条件を満たすことができる．これに対して任意定数を含まない解を特殊解と呼ぶ．n 階定数係数線形非同次微分方程式に対して

- 右辺をゼロと置いて得られる同次微分方程式の一般解 (n 個の任意定数を含む)
- もとの非同次微分方程式の特殊解

の和はもとの非同時微分方程式を満たし，n 個の任意定数を含むため，その一般解になっている．

■例——強制振動　以上の物理的な解釈を与えるために，1 つの応用例として質点が周期的な外力 $F\cos(\omega t + \delta)$ を受ける場合を考える [9, pp.75–77]．外力の下での運動は一般に強制振動と呼ばれる．先ほど調べたように抵抗力が働く場合，同時微分方程式の一般解で表される系の固有振動は減衰するため，これは過渡的な過程と

見なされ，十分な時間が経過した後には非同時微分方程式の特殊解で表される強制振動のみが観察されることになる．ただしここでは簡単のために抵抗がゼロの場合を考え ($\alpha = 0, \lambda = 0$)，運動方程式を

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = \frac{F}{m}\cos(\omega t + \delta)$$

と書く．外力の項 $\frac{F}{m}\cos(\omega t + \delta)$ は代わりに，これを実部に持つ複素数 $\frac{\tilde{F}}{m}e^{i\omega t}$(ただし $\tilde{F} \equiv Fe^{i\delta}$) に置き換えた方が便利である．以下，この点について補足する．

物理量の複素表示　さて，しばしば物理量 x(例えば $x = a\cos(\omega t + \delta)$) に対して x そのものよりも，これを実部に持つ複素数の量 X(例：$X = Ae^{i\omega t}$，$A = ae^{i\delta}$：複素振幅) を用いる方が便利となる (Euler の公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$(付録 C.15) 参照)．このような措置が許されるのは線形の演算を行う場合に限られる：このときには複素数の量に対して演算を行い最後に実部をとれば，実部の物理量に対して演算を行ったのと同じ結果が得られることが保証されている．ただし線形の演算を L によって表すと，線形性の一般的な定義は，定数 c_1, c_2 に対して

$$L(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1L(x_1) + c_2L(x_2)$$

である．実際この定義によれば

$$L(X) = L(\mathrm{Re}[X]) + iL(\mathrm{Im}[X])$$

なので，実部 $x = \mathrm{Re}[X]$ は複素表示の量 X が満たす式 $L(X) = 0$ と同じ関係式 $L(x) = 0$ を満たす．平たく言えば線形の演算では実部と虚部が混ざらない．

さて，上記の特殊解に関する定理によれば，

- $\omega \neq \omega_0$ の場合の特殊解は

$$x = Ae^{i\omega t}, \qquad A = \frac{\tilde{F}/m}{{\omega_0}^2 - \omega^2}.$$

これは強制力の振動数 ω での振動を表す．
一般解は

$$x = ae^{i\omega t} + \frac{\tilde{F}/m}{{\omega_0}^2 - \omega^2}e^{i\omega t}.$$

これは系の固有振動数 ω_0 での振動と強制力の振動数 ω での振動から成る．

- $\omega \to \omega_0$ の場合の特殊解は

$$x = Bte^{i\omega_0 t}, \qquad B = -\frac{i\tilde{F}}{2m\omega_0}.$$

一般解は

$$x = be^{i\omega_0 t} - \frac{i\tilde{F}}{2m\omega_0}te^{i\omega_0 t}.$$

こうして強制力の振動数 ω が系の固有振動数 ω_0 に一致するとき，
振幅は時間とともに線形に増大する (共鳴)．

★ この結論を適用できるのは，運動方程式が妥当となる微小振動の範囲に限られる．
抵抗力 $-\alpha\dot{x}$ を考慮すれば，振幅が無限大に発散することはない．

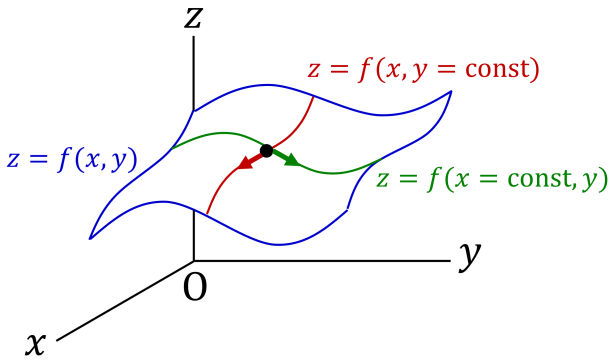


図 244　2 変数関数 $z = f(x, y)$ の曲面と偏微分

$\omega = \omega_0$ の場合の解が $\omega \neq \omega_0$ の場合の解と $\omega \to \omega_0$ の極限でつながっていることを以下のようにして確かめられる．$\omega \neq \omega_0$ の場合の解を

$$x = ae^{i\omega t} + \frac{\tilde{F}/m}{{\omega_0}^2 - \omega^2} e^{i\omega t} = be^{i\omega_0 t} + \frac{\tilde{F}/m}{{\omega_0}^2 - \omega^2}(e^{i\omega t} - e^{i\omega_0 t})$$

と書き直し，$\omega \to \omega_0$ の極限で不定形 0/0 を与える最右辺第 2 項にロピタルの定理を適用すると (分母・分子を ω で微分し $\omega \to \omega_0$ とする)，$\omega \neq \omega_0$ の場合の解

$$x = be^{i\omega_0 t} - \frac{i\tilde{F}}{2m\omega_0} te^{i\omega_0 t}$$

が再び得られる．

参考　強制振動の方程式は，変数とパラメーターを適当に読み替えることにより回路方程式に対応付けられる (5-10 節)：

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F \quad \leftrightarrow \quad L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = E.$$

C.8　偏微分

多変数関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ について，ある変数 x_i 以外の全ての変数を固定して x_i に関する微分を行うことを x_i についての偏微分と呼び，$\partial f/\partial x_i$ と書く．

例えば 2 変数関数 $f(x, y)$ を考えると，$z = f(x, y)$ は 2 次元の曲面を与える．このとき任意の点 $(x, y, f(x, y))$ から

- 曲面に沿って x 方向に進むときの“高さ” $z = f(x, y)$ の変化率が $\partial f/\partial x$
- 曲面に沿って y 方向に進むときの“高さ” $z = f(x, y)$ の変化率が $\partial f/\partial y$

である (図 244 参照)．

物理的な例を挙げると，温度 θ は一般に位置 (x, y, z) と時間 t の関数 $\theta = f(x, y, z, t)$ となると考えられる．このとき

- $\partial f/\partial t$ は，任意に固定した観測点 (x, y, z) での温度の時間変化率を意味する．

- また $\partial f/\partial x$ は，与えられた時刻 t において任意の点 (x, y, z) から x 方向に進んだときの温度の空間的な変化率と解釈できる．

■**全微分**　しばしば場 $f(\boldsymbol{r}, t)$ の値を運動する粒子の位置 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ で評価することに興味が持たれる．粒子の位置での場の値 $f(\boldsymbol{r}(t), t)$ の時間変化率は

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{79}$$

と表される．これは

- 各位置での場の時間変化 $\partial f/\partial t$ (すなわち粒子が運動しなかった場合の変化率) と，
- 粒子の運動に伴う場の値の変化 $\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}$ (ただし場そのものは時間変化しないとした場合)

から成っている．数学的にはこのような微分を，全ての変数の変化を考慮した微分という意味で**全微分**と呼ぶ．流体力学の文脈では，粒子の位置での場の値の時間変化率は Lagrange 微分，あるいは物質微分と呼ばれる．

全微分の式 (79) の証明　例えば 3 変数の関数 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ の関数 $f(\boldsymbol{x}, t)$ に対して t の変化 Δt に伴う $f(\boldsymbol{x}(t), t)$ の変化量は

$$\begin{aligned}
\Delta f =& f(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}, t + \Delta t) - f(\boldsymbol{x}, t) \qquad (\boldsymbol{x}(t + \Delta t) \equiv \boldsymbol{x}(t) + \Delta\boldsymbol{x}) \\
=& \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t) - f(x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t)}{\Delta x}\Delta x \\
&+ \frac{f(x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t) - f(x, y, z + \Delta z, t + \Delta t)}{\Delta y}\Delta y \\
&+ \frac{f(x, y, z + \Delta z, t + \Delta t) - f(x, y, z, t + \Delta t)}{\Delta z}\Delta z \\
&+ f(x, y, z, t + \Delta t) - f(x, y, z, t)
\end{aligned}$$

と表される．これを Δt で割って $\Delta t \to 0$ の極限をとれば，全微分の式 (79) を得る (変数 x_i が 3 つでない場合の証明も全く同様)．
ここから座標変換において，座標 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ の関数 $f(\boldsymbol{x})$ の新しい座標 x'_i による微分は

$$\frac{\partial f}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x'_i}$$

と表される．($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}')$ と見て，全微分の式 (79) を $t \to x'_i$ として適用すれば良い．) この結果は**連鎖公式**と呼ばれる．
以上 2 つの結果

$$\mathrm{d}x'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j, \qquad \partial'_i = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}\partial_j$$

は，座標の全微分 $\mathrm{d}x_i$ と変微分演算子 $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$ がそれぞれ反変ベクトルと共変ベクトルの変換則に従うことが，数学的に定まっていることを意味している (付録 C.12 参照)．

C.9　多重積分

複数の積分変数に関する積分は多重積分と呼ばれる．例えば質量の密度分布 $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ が与えられているとき，空間に含まれている全質量を求めることを考えよう．x, y, z 軸に平行な長さ $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ の辺を持つ微小な直方

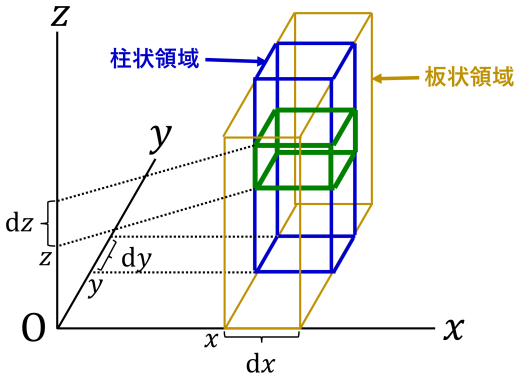


図 245　デカルト座標 x, y, z を積分変数にとったときの体積積分

体の体積は $\mathrm{d}^3x = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ であり，ここに含まれる質量は $\rho(\boldsymbol{x}, t)\mathrm{d}^3x$ だから，全質量は次の 3 変数 x, y, z に関する多重積分によって表される．

$$M(t) = \int \mathrm{d}^3x\rho(\boldsymbol{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\rho(x, y, z, t).$$

今の場合これは空間の各体積要素 d^3x に関する和を表しており，このような積分は特に体積積分と呼ばれる．

注意　積分変数に xyz 座標を選んだ場合の体積要素には，以下のような書き方がある．

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \qquad \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}, \qquad \mathrm{d}^3r, \qquad \mathrm{d}^3x.$$

どれを用いるかは好みの問題であるが，
$\boldsymbol{r}$ を用いた表記には考えている要素が位置 $\boldsymbol{r}$ の周りにあることを表現できるという利点がある．
$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ と書くと線要素ベクトルのように見えてしまうという難点がある．

ここでは各体積要素に含まれる質量の和を，具体的に次の 3 段階に分けて計算していることになる (図 245 参照)．

1. 微小な直方体を z 方向に積み重ねてできる
   無限に長い柱状の領域 (底面積 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$) に含まれる質量を求める．
   z 方向の積分に対応する．
2. 柱状領域を y 方向に並べてできる無限に広い板 (幅 $\mathrm{d}x$) に含まれる質量を求める．
   y 方向の積分に対応する．
3. 板を x 方向に並べて得られる空間全体に含まれる質量を求める．
   x 方向の積分に対応する．

なお質量密度 $\rho(\boldsymbol{x}, t)\mathrm{d}^3x$ は位置と時間によるけれど，これを体積積分して得られる全質量は時間だけの関数 $M(t)$ となる．このことは $M(t)$ が各時刻で定義された空間全体に含まれる質量であるという意味からも理解できる．ここまでは数学的な事実である．そして実は質量保存則によれば，全質量 $M(t)$ は時間にも依らない．ここに物理がある．

■変数変換　計算に用いる体積要素 $\mathrm{d}V$ は微小でありさえすれば，直方体 d^3x に限らずどのようなものであっても良い．例えば図 237 のような球座標が微小変化して作られる体積要素 $\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$ の質量 $\rho\mathrm{d}V$

の，全体積要素にわたる和

$$\int \rho r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

としても，再び同じ全質量 $M(t)$ が得られるはずである．このことは数学的には，空間積分の変数をデカルト座標 x, y, z から球座標 r, θ, ϕ に変換すると，

$$\int \rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int \rho r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

と書き換えられることを意味している．実際，積分の変数変換の公式は，図 237 の微小な“直方体”の体積が $r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$ であるというような直観を押し進めることで見出される．

以下この点をもう少し一般化して述べよう．xyz 直交座標系の基底を $\{\boldsymbol{e}_i\}$，座標を $\{x_i\}$ と書き，新しい座標の基底を $\{\boldsymbol{e}'_i\}$，座標を $\{x'_i\}$ と書く．このとき求める体積要素は，各座標が $\{\mathrm{d}x'_i\}$ だけ変化して作られる平行 6 面体の体積である．言い換えればそれは座標の変化 $\{\mathrm{d}x'_i\}$ に対応する 3 つの基底方向の変位 $\{\mathrm{d}x'_i\boldsymbol{e}'_i\}$ の張る平行 6 面体の体積であり，基底 $\{\boldsymbol{e}'_i\}$ 張る平行 6 面体の“体積”((長さ)^3 の次元を持つとは限らない) を v として

$$\mathrm{d}V = v\mathrm{d}^3x'_i$$

と表される．次に“体積”v を計算するにあたり，以下のことに注意する．

- 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の張る平行 6 面体の体積は

  $$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

  で与えられる (図 246 参照).
  - 上式は**スカラー 3 重積の公式**と呼ばれ，代数的には

    $$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k$$

    においてダミー添字 i, j, k を巡回置換できることから理解される．
- 基底ベクトルに各座標の増大する方向のベクトル $\boldsymbol{e}_i = \partial_i\boldsymbol{r}$ を用いると，
  位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は座標系に依らない幾何学的対象であるため (原点の位置には依るが)，
  これは微分演算子 ∂_i と同様に共変ベクトルの変換則

  $$\boldsymbol{e}'_k = \frac{\partial x_i}{\partial x'_k}\boldsymbol{e}_i$$

  に従う (付録 C.12，C.13 参照).
  ここから基底 $\boldsymbol{e}'_k$ の，もとの座標系に関する第 i 成分は

  $$[\boldsymbol{e}'_k]_i = \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}'_k = \frac{\partial x_i}{\partial x'_k}$$

  と表される．
  - 球座標 $\{x_i\} = \{r, \theta, \phi\}$ に対して位置ベクトルは $\boldsymbol{r} = x'_i\boldsymbol{e}'_i$ とは表されないため，
    この場合には上式 $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}'_k = \frac{\partial x_i}{\partial x'_k}$ を付録 C.13 の方法で導出することはできない．
  - 基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i = \partial_i\boldsymbol{r}$ は単位ベクトルになるとは限らない．しかし以下の議論を基にして，
    単位ベクトルの基底に対しても最終的に得られる体積要素の表式を適用できることを示し得る．

$$(\text{体積}) = c_\perp |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

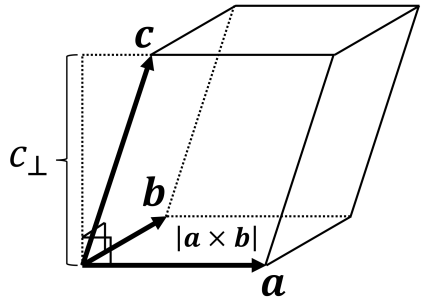


図 246　ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の作る平行 6 面体の体積

- $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ の行列式 $\det A$ の定義

$$\det A = \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n}.$$

  ただし $\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ は $\varepsilon_{12\cdots n} = 1$ を満たす完全反対称テンソルであり，
  また繰り返された添字 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ について和をとる．

すると

$$v = |\boldsymbol{e}'_1 \cdot (\boldsymbol{e}'_2 \times \boldsymbol{e}'_3)| = |[\boldsymbol{e}'_1]_i (\varepsilon_{ijk} [\boldsymbol{e}'_2]_j [\boldsymbol{e}'_3]_k)| = \left| \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial x'_1} \frac{\partial x_j}{\partial x'_2} \frac{\partial x_k}{\partial x'_3} \right| = \left| \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \right|$$

となる．ただし最右辺の $\partial(x)/\partial(x')$ は $\partial x_i / \partial x'_j$ を (i, j) 成分に持つ行列の行列式であり，これは Jacobian と呼ばれる．$|\cdots|$ は絶対値をとることを意味している (行列式との混同に注意)．最終的な結果として，積分変数の変換公式

$$\mathrm{d}^3 x \quad \to \quad \left| \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \right| \mathrm{d}^3 x'$$

を得る．球座標への変換 $(x, y, z) \to (r, \theta, \phi)$ に対してこの結果を適用すれば $\partial(x, y, z)/\partial(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta$ となり，再び体積要素の表式 $\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$ が得られる．

なお座標 $\{x'_i\}$ が球座標の角度のように必ずしも長さの次元を持たないことを考えれば，体積要素を構成するのに $\mathrm{d}^3 x'$ の前に何らかの係数を要することがあらかじめ分かる．ここではその係数 $|\partial(x)/\partial(x')|$ が自然に導かれたことになる．

C.10　ベクトル解析

C.10.1　ベクトル積

まずは**ベクトル積 (外積)** の幾何学的定義について述べる (山本義隆『新・物理入門』5-5 節)．ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のベクトル積

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

は，幾何学的には次のような大きさと向きを持つベクトルとして定義される．すなわち $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の成す角を $\theta (\leq \pi)$ としたとき，

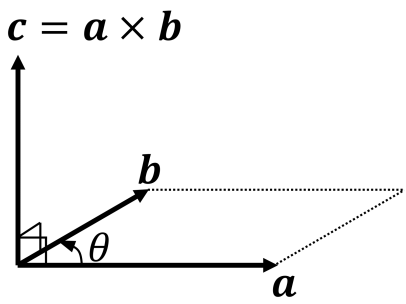


図 247　ベクトル積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の幾何学的定義

- $\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形と同じ大きさ

$$c \equiv |\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta$$

  を持つ．
- $\boldsymbol{c}$ の向きは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の張る平面に垂直で，$\boldsymbol{a}$ を θ だけ回して $\boldsymbol{b}$ に一致させる向きに右ねじを回したときに，右ねじの進む向きに一致する (図 247 参照)．

特に $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行 (反平行を含む) な場合には $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$ と約束する．ここから k をスカラー量として，次の性質が従う．

$$\begin{aligned}(k\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} =& \boldsymbol{a} \times (k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}),\\ (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{d} =& \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{d} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d},\\ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} =& -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

以上のベクトル積の幾何学的定義は，次の代数的な定義と等価である．

$$\boldsymbol{c} \equiv \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}. \tag{80}$$

これは成分を座標 x, y, z の代わりにそれぞれ番号 $1, 2, 3$ で指定すれば，Einstein の規約 (付録 C.1.1) および Levi-Civita 記号 (付録 C.2) を用いて

$$c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

とまとめられる．

ベクトル積の式 (80) の説明　x, y, z 軸の方向単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ と書くと，ベクトル積の幾何学的定義により

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \qquad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$$

である．これを上記のベクトル積の性質を考え合わせると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} =& (a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}) \times (b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k})\\ =& (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k} : (80)\end{aligned}$$

を得る．

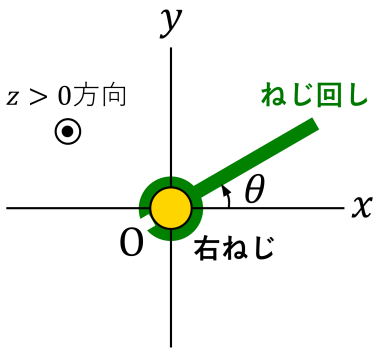


図 248　ねじ回しを方向角 $\theta \gtrless 0$ の方向に回すと，右ねじは $z \gtrless 0$ の方向に進む

右ねじについて　右ねじに馴染みがなければ，この場で逆に数学的知識と合わせて右ねじの進む向きを覚えれば良い．図 248 のようにねじ回しを方向角 $\theta \gtrless 0$ の方向に回すと，右ねじは $z \gtrless 0$ の方向に進む．なお微小回転は，大きさが回転角に一致し向きが回転軸に一致する回転ベクトルによって表される．回転ベクトルもまた回転軸に沿って，その回転で右ねじが進む方向を向く．そして角速度ベクトルと同様に，回転ベクトルは微小な回転角の 1 次までの近似で，回転に伴う変位を与える．

回転ベクトルについて　物体に 2 つの回転操作を立て続けに行うと，回転後の物体の配置は一般に 2 つの回転操作の順序によって異なる．よって一連の回転操作を，2 つの回転操作に対応する回転ベクトル $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2$ の和として表すことはできない．(もしそれが可能なら，

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{\theta}_1\text{の回転} \to \boldsymbol{\theta}_2\text{の回転})\ \text{の順の一連の回転のベクトル} \qquad \boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2, \\
&(\boldsymbol{\theta}_2\text{の回転} \to \boldsymbol{\theta}_1\text{の回転})\ \text{の順の一連の回転のベクトル} \qquad \boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_1
\end{aligned}
$$

は一致し，同じ回転を表すことになる．) ところが回転角 θ_1, θ_2 が微小ならば，その 1 次までの近似で一連の回転操作の回転ベクトルを，回転の順序に依らずに和 $\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2$ で表すことができる．したがって角速度ベクトル (2-11 節注解) に対してはベクトルの合成則を適用できる．

明らかに微分の Leibniz 則は，内積とベクトル積にもそのまま引き継がれる：

$$
(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}', \qquad (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}'.
$$

物理で重要な特例として，運動エネルギーと角運動量の時間微分 (ドットで表す) はそれぞれ，

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2\right) = \boldsymbol{v} \cdot (m\dot{\boldsymbol{v}}), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \times (m\boldsymbol{v})) = \cancel{\boldsymbol{v} \times (m\boldsymbol{v})} + \boldsymbol{r} \times (m\dot{\boldsymbol{v}})
$$

となる．

C.10.2　ナブラ

第 i 座標 x_i による微分演算子 $\partial/\partial x_i$ を第 i 成分に持つベクトル微分演算子

$$
\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)
$$

を**ナブラ** (nabla) という[*68]．次節以降ではこれを用いて，ベクトル解析において重要となる 3 つの概念として

勾配，　　発散，　　回転

を定義する．

[*68] 以下では $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ として座標の 2 通りの表記を適宜使い分ける．

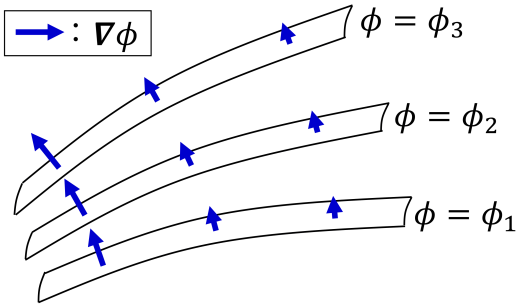


図 249　スカラー場 ϕ の勾配 $\boldsymbol{\nabla}\phi$

C.10.3　勾配

スカラー場 ϕ の**勾配** (gradient) は

$$\mathrm{grad}\phi = \boldsymbol{\nabla}\phi$$

と定義される．その意味を解釈するために，場の観測位置 $\boldsymbol{r}$ の変化 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ に伴う場 ϕ の値の変化が

$$\mathrm{d}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathrm{d}z = (\boldsymbol{\nabla}\phi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

と表されることに注目しよう (付録 C.8 の全微分の説明を参照)．まず $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を $\phi = \mathrm{const.}$ となる面内にとると

$$0 = \mathrm{d}\phi = (\boldsymbol{\nabla}\phi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

となるので，勾配 $\boldsymbol{\nabla}\phi$ は $\phi = \mathrm{const.}$ の面に直交することが分かる．そこで次に $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{\nabla}\phi$ と平行にとると

$$\mathrm{d}\phi = |\boldsymbol{\nabla}\phi||\mathrm{d}\boldsymbol{r}| \geq 0$$

となるので，勾配 $\boldsymbol{\nabla}\phi$ は ϕ の増大する方向を向くことが分かる．さらにこのとき

$$|\boldsymbol{\nabla}\phi| = \frac{|\mathrm{d}\phi|}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}$$

なので，勾配 $\boldsymbol{\nabla}\phi$ の大きさは場 ϕ が空間的に急激に変化する位置ほど大きくなることが分かる．あるいは今の場合 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ は $\phi = \mathrm{const.}$ の一定値が $\mathrm{d}\phi$ だけ異なる 2 つの面の間の距離を意味するため，これは一定間隔 $\mathrm{d}\phi$ おきに $\phi = \mathrm{const.}$ の面を描画したとき，面が密集している場所ほど勾配 $\boldsymbol{\nabla}\phi$ は大きくなるとも言える．

以上をまとめると勾配 $\boldsymbol{\nabla}\phi$ は $\phi = \mathrm{const.}$ の面に垂直で場 ϕ の増大する方向を向き，ϕ が空間的に急激に変化する位置ほど絶対値が大きくなるベクトルである (図 249 参照)．

■方向微分　与えられた点 $\boldsymbol{r}$ から単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ の方向に進んだときの場 ϕ の空間的変化率を，ϕ の $\boldsymbol{n}$ 方向への方向微分 (係数) と呼び，$\partial\phi/\partial n$ と書く．点 $\boldsymbol{r}$ を通り $\boldsymbol{n}$ 方向を正の向きとする t 軸をとると，$\boldsymbol{n}$ 方向に t だけ進んだときの場 ϕ の変化は

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}(tn_x) + \frac{\partial\phi}{\partial y}(tn_y) + \frac{\partial\phi}{\partial z}(tn_z) = t(\boldsymbol{\nabla}\phi)\cdot\boldsymbol{n}$$

で与えられるから，変化率 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta\phi)$ に他ならない方向微分は

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = (\boldsymbol{\nabla}\phi)\cdot\boldsymbol{n}$$

と表される．

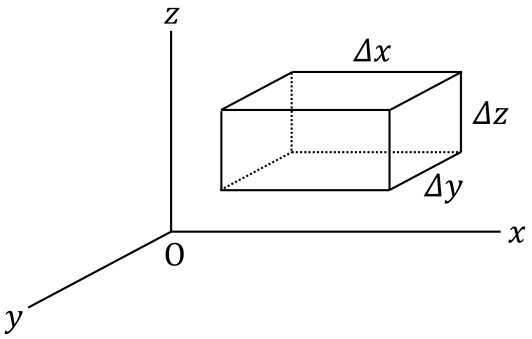


図 250　各辺が座標軸に平行な直方体

C.10.4　発散

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の**発散** (divargencs) は

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}$$

と定義される．その意味はベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を流体の速度ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に読み替えると明瞭になる．今，図 250 のように流体の中に座標軸と平行な辺を持つ微小な直方体の箱を仮想的に考え，各辺の長さを $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ とする．このとき x 軸に垂直な 2 面を通って単位時間に箱から流出する流体の体積は

$$v_x(x + \Delta x)\Delta y \Delta z - v_x(x)\Delta y \Delta z \simeq \frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z$$

と表される (ただし $v_x(x + \Delta x) \equiv v_x(x = x + \Delta x, y, z)$, etc.)．残りの面からの流出量も同様に考えると，単位時間に箱から流出する流体の体積は正味で

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v})\Delta V, \qquad (\Delta V \equiv \Delta x \Delta y \Delta z)$$

となる．すなわち辺の長さ $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$ の極限では流出量は箱の体積 ΔV に比例し，その係数が速度場の発散となっている．よって発散 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}$ は単位時間に，考えている点の周りの単位体積から流出する (わき出す) 流体の体積を表し，わき出しの密度と呼ぶことができる．

C.10.5　回転

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の**回転** (rotation) は

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$$

と定義される (curl$\boldsymbol{A}$ とも表記される)．その意味を解釈するために，微小な矩形領域の面要素ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ との内積を考えよう．ここで面要素ベクトルとは面要素に垂直で，大きさが面要素の面積に一致するようなベクトルのことである．内積 $(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ はその値が座標系のとり方に依らないようなスカラーである (付録 C.12，C.13 参照)．そこで矩形の面要素が xy 面と平行になるように $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 方向を z 軸にとり，矩形の辺に沿って x 軸と y 軸をとって，この内積の値を評価する．矩形の x 軸，y 軸に平行な辺の長さをそれぞれ $\Delta x, \Delta y$ と

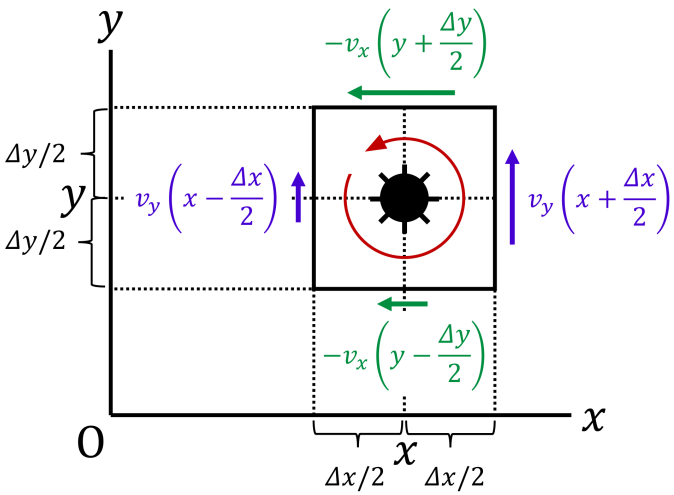


図 251　ベクトル場の回転の直観的解釈

書くと，

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} =&(\partial_x A_y-\partial_y A_x)\Delta x\Delta y \qquad (\text{ただし}\partial_x\equiv\partial/\partial x,\text{etc.})\\
\simeq&\{A_y(x+\Delta x/2)-A_y(x-\Delta x/2)\}\Delta y-\{A_x(y+\Delta y/2)-A_x(y-\Delta y/2)\}\Delta x\\
&(\text{ただし } A_y(x+\Delta x/2)\equiv A_y(x=x+\Delta x/2,y,z),\text{etc.})\\
=&A_x(y-\Delta y/2)\Delta x+A_y(x+\Delta x/2)\Delta y-A_x(y+\Delta y/2)\Delta x-A_y(x-\Delta x/2)\Delta y
\end{aligned}
$$

なので，$(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ は面積要素の縁に沿うベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の周回積分となっている．このことは矩形に限らず，面積要素の形に依らずに成り立つ．平たく言えば回転 $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ は各点において，ベクトル $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ の向きに右ねじを進めるときにねじを回すのと同じ方向のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の渦があることを表し，ベクトル $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ の大きさは渦の強さを表している．$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}=0$ を満たすベクトル場 $\boldsymbol{A}$ は渦無しであると言われる．

■直観的な解釈　なお再びベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を流体の速度ベクトル場に見立てると，図 251 の長方形に沿う速度場 $\boldsymbol{v}$ の周回積分は，したがって回転

$$
(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v})_z\simeq\frac{v_y(x+\Delta x/2)-v_y(x-\Delta x/2)}{\Delta x}-\frac{v_x(y+\Delta y/2)-v_x(y-\Delta y/2)}{\Delta y}
$$

は位置 $x\pm\Delta x/2$(または $y\pm\Delta y/2$) における速度成分 v_y(または v_x) の差を捉えた量であり，このような速度差は図 251 のように中心 (x,y) にプロペラを置いたとき，プロペラの回転をもたらす．ベクトル場の回転は直観的にはこのように理解できる [18, pp.68–73].

C.10.6　Gauss の発散定理

付録 C.10.4 で述べたように，流体の速度ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に対して単位時間に直方体の無限小体積 $\mathrm{d}^3x\equiv\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ から流出する流体の体積は $(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})\mathrm{d}^3x$ と表される．ここで空間に有限の体積を占める領域 V を考え，領域 V を構成する全ての体積要素 d^3x について流出量 $(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})\mathrm{d}^3x$ を足し合わせると体積要素間の流体の出入りが相殺され，V の表面 S からの流出量になる：

$$
\int_{\mathrm{V}}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})\mathrm{d}^3x=\int_{\mathrm{S}}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.
$$

ここに $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ は表面 S の面要素ベクトルである．このことは体積要素 $\mathrm{d}V$ が直方体 d^3x の場合に限らずに成り立ち，またベクトル場 $\boldsymbol{v}$ を速度場とする解釈・意味付けに依らずに成り立つような数学的事実であり，Gauss の発散定理と呼ばれる．

■円筒座標，球座標での発散の表式　任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対して発散 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$ の円筒座標，球座標における表式を求めるには，デカルト座標系における表式から変数変換を行うには及ばない．例えば円筒座標系での表現を得るには，図 238 の微小体積に Gauss の発散定理を適用すれば十分である．実際，任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ の円筒座標 ρ, ϕ, z 方向成分をそれぞれ A_ρ, A_ϕ, A_z と書くと，Gauss の発散定理によれば図 238 の微小体積からのベクトル場 $\boldsymbol{A}$ のわき出しは

$$\begin{aligned}(\mathrm{div}\boldsymbol{A})\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z &= [A_\rho\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z]_\rho^{\rho+\mathrm{d}\rho} + [A_\phi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z]_\phi^{\phi+\mathrm{d}\phi} + [A_z\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi]_z^{z+\mathrm{d}z} \\ &= \left\{\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \rho\frac{\partial A_z}{\partial z}\right\}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z\end{aligned}$$

と表されるので，円筒座標系での発散を与える公式

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \rho\frac{\partial A_z}{\partial z}\right\}$$

が見出される．

同様に図 237 の微小体積に Gauss の発散定理を適用すれば，球座標での発散を与える公式

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}A_\phi$$

が導かれる．

C.10.7　Stokes の定理

付録 C.10.5 で述べたように，面要素ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ を持つ面要素の縁に沿うベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の周回積分は $(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ と表される．ここで閉曲線 C を縁に持つ曲面 S に対して，曲面 S を構成する全ての面要素 (面要素ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$) について $(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ の値を足し合わせることを考える．すると 2 つの面要素の共有される線要素に沿っては同一のベクトル場を順方向と逆方向に 2 度積分することになるため，線積分の値は相殺され，曲面の縁 C に沿う周回積分が生き残る (図 252 参照)：

$$\int_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\mathrm{C}}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

ここに $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ は閉曲線 C の線要素ベクトルである．このことは Stokes の定理と呼ばれる．

■円筒座標，球座標での回転の表式　任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対して回転 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ の円筒座標，球座標における表式を求めるには，デカルト座標系における表式から変数変換を行うには及ばない．例えば円筒座標系での表現を得るには，図 238 の微小な“直方体”の各面に Stokes の定理を適用すれば十分である．任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ の円筒座標 ρ, ϕ, z 方向成分をそれぞれ A_ρ, A_ϕ, A_z と書き，例えば図 238 の“直方体”のうち z 方向に垂直な面に対して Stokes の定理を書き下すと

$$\begin{aligned}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_z\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi =& \{A_\phi(\rho+\mathrm{d}\rho)(\rho+\mathrm{d}\rho) - A_\phi\rho\}\mathrm{d}\phi - \{A_\rho(\phi+\mathrm{d}\phi) - A_\rho(\phi)\}\mathrm{d}\rho \\ =& \left\{\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi) - \frac{\partial}{\partial\phi}A_\rho\right\}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi, \\ \therefore (\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_z =& \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}A_\rho\end{aligned}$$

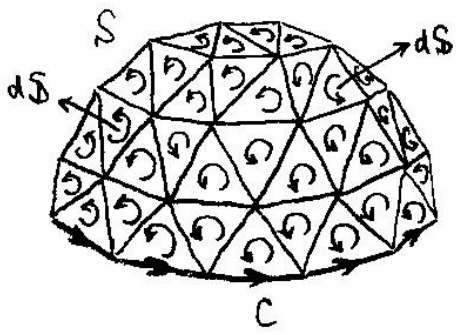


図 252　Stokes の定理

が見出される (ただし $A_\phi(\rho+\mathrm{d}\rho)$ などと書くとき，他の引数依存性を省略している)．同様に ρ,ϕ 方向に垂直な面に対して Stokes の定理を適用すると

$$(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}, \qquad (\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_\phi = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}$$

を得る [10, pp.144-146].

図 237 の“直方体”の各面に Stokes の定理を適用すれば，球座標での回転を与える公式

$$\begin{aligned}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_r =& \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi) - \frac{\partial}{\partial\phi}A_\theta\right\},\\ (\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_\theta =& \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi),\\ (\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_\phi =& \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right\}\end{aligned}$$

が導かれる．

C.10.8　ラプラシアン

$$\Delta \equiv \boldsymbol{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

をラプラシアン (Laplacian) と呼ぶ．

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\phi) = \partial_i(\partial_i\phi) = (\partial_i\partial_i)\phi = \Delta\phi$$

である．

ラプラシアンの球座標での表式を調べよう．そのためには円筒座標を経由して

デカルト座標での表式　→　円筒座標での表式　→　球座標での表式

と順次書き換えると，多少計算量が軽減される．任意の点のデカルト座標 (x,y,z)，円筒座標 (R,ϕ,z)，球座標 (r,θ,ϕ) の関係は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\phi \\ R\sin\phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

である．

そこでまずデカルト座標 x, y による微分を円筒座標 R, ϕ による微分で表すと

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\phi \frac{\partial}{\partial R} - \frac{\sin\phi}{R}\frac{\partial}{\partial \phi}, \tag{81}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\phi \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\cos\phi}{R}\frac{\partial}{\partial \phi} \tag{82}$$

となる (付録 C.8 の連鎖公式を参照)．つまり式 (81)，式 (82) における各微分係数は

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \cos\phi, \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = \sin\phi, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin\phi}{R}, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\cos\phi}{R}$$

である．これらはいずれも直接確かめられる．前半の 2 式は $\boldsymbol{R} = (x, y), \boldsymbol{\nabla} = (\partial_x, \partial_y)$ とすると

$$\boldsymbol{\nabla} R = \frac{\boldsymbol{R}}{R} : \text{動径方向単位ベクトル}$$

とまとめられる (この結果の図形的な解釈は付録 C.5.2)．第 3 式については

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\arctan\frac{y}{x} = \frac{1}{1+(y/x)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{\sin\phi}{R}$$

と確かめられる (第 4 式も同様，この結果の図形的な解釈は付録 C.5.2)．

注意　意味を考えると $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} \neq \left(\dfrac{\partial x}{\partial \phi}\right)^{-1} = \dfrac{1}{R\cos\phi}$.

式 (81)，式 (82) から円筒座標系でのラプラシアンの表式

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{83}$$

を得る．

球座標系での表式に移るには，$R = r\sin\theta, z = r\cos\theta$ から上と同様に

$$\frac{\partial}{\partial R} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \tag{84}$$

を確かめ，これを円筒座標系での表式 (83) に代入すれば良い．最終的に球座標系でのラプラシアンの表式として

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

を得る．

注意　場が (原点の周りに) 球対称であるとは，原点を中心として空間を回転させても場が不変である場合を言う．このとき (スカラー) 場の値は原点からの距離 r だけの関数になり，r が一定の球面上での場の値は原点から見た向き θ, ϕ に依らずに一定となる．さて，ラプラシアンが球対称な場 $\Phi(r)$ に作用する場合 $\partial_\theta\Phi(r) = 0, \partial_\phi\Phi(r) = 0$ なので，ラプラシアンからあらかじめ θ と ϕ の微分に関する項を取り除くことができる．ただし例えば $\partial^2/\partial z^2$ を計算するとき，誤って先に式 (84) の $\partial_\theta, \partial_\phi$ を落としてから 2 乗すると $(\partial_\theta\cos\theta)\partial_r$ が出てこなくなる．$\partial/\partial z$ を 2 乗してから $\partial_\theta, \partial_\phi$ を捨てなければならない．

- ラプラシアンの動径部分
  球対称な解 $\Phi(r)$ に対しては

$$\Delta\Phi = \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)\Phi = \begin{cases} \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right) \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(r\Phi) \end{cases}$$

  となる．

  ★ 例えば最右辺の第 1 式は，ひとまず 2 階微分 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}$ を作り，
  次元を崩さないように r^{-2}, r^2 の組を隙間に挿入すれば得られる．

  – 円筒座標系を用いると，軸対称な場 $\phi(R)$ に対して

$$\Delta\phi = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(R\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}R}\right)$$

  である．

- θ 微分の項は

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi(\boldsymbol{r})}{\partial\theta}\right)$$

  とまとめられる．

C.10.9 ナブラの公式

ここで $\boldsymbol{\nabla}$ に関する有用な公式をいくつか挙げておく．容易に確かめられるように，任意のスカラー場 ϕ, ψ，ベクトル場 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}(\phi\psi) &= \psi\boldsymbol{\nabla}\phi + \phi\boldsymbol{\nabla}\psi \\
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\phi\boldsymbol{a}) &= (\boldsymbol{\nabla}\phi)\cdot\boldsymbol{a} + \phi\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a} \\
\boldsymbol{\nabla}\times(\phi\boldsymbol{a}) &= (\boldsymbol{\nabla}\phi)\times\boldsymbol{a} + \phi\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a} \\
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b}) && (85) \\
\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) &= (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} && (86) \\
\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) &= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}) && (87)
\end{aligned}$$

特に式 (85)，式 (86)，式 (87) は次のように確認できる．式 (86)，式 (87) を証明するのに公式 (76) が有用である：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) =& \partial_i\varepsilon_{i\alpha\beta}a_\alpha b_\beta \\
=& \varepsilon_{i\alpha\beta}b_\beta\partial_i a_\alpha + a_\alpha\varepsilon_{i\alpha\beta}\partial_i b_\beta \\
=& \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b}) : (85), \qquad (\because \varepsilon_{i\alpha\beta} = -\varepsilon_{\alpha i\beta}) \\
(\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))_i =& \varepsilon_{irs}\partial_r\varepsilon_{s\alpha\beta}a_\alpha b_\beta \\
=& (\delta_{i\alpha}\delta_{r\beta} - \delta_{i\beta}\delta_{r\alpha})\partial_r a_\alpha b_\beta \\
=& b_\beta\partial_\beta a_i + a_i\partial_\beta b_\beta - a_\alpha\partial_\alpha b_i - b_i\partial_\alpha a_\alpha \\
=& ((\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b})_i : (86), \\
& [(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b})]_i \\
=& a_j\partial_j b_i + b_j\partial_j a_i + \varepsilon_{i\alpha\beta}b_\alpha\varepsilon_{\beta rs}\partial_r a_s + \varepsilon_{i\alpha\beta}a_\alpha\varepsilon_{\beta rs}\partial_r b_s
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=a_j\partial_j b_i + b_j\partial_j a_i + (\delta_{ir}\delta_{\alpha s} - \delta_{is}\delta_{\alpha r})b_\alpha\partial_r a_s + (\delta_{ir}\delta_{\alpha s} - \delta_{is}\delta_{\alpha r})a_\alpha\partial_r b_s \\
&=b_\alpha\partial_i a_\alpha + a_\alpha\partial_i b_\alpha + (a_j\partial_j b_i - a_\alpha\partial_\alpha b_i) + (b_j\partial_j a_i - b_\alpha\partial_\alpha a_i) \\
&=\partial_i a_\alpha b_\alpha = [\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})]_i : (87).
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{\nabla}$ を 2 つ含む関係としては以下のものが物理では重要となる．

- ポテンシャル ψ の勾配として得られるベクトル場 $\boldsymbol{\nabla}\psi$ は渦なし．

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\psi) = 0.$$

- “ベクトルポテンシャル” $\boldsymbol{a}$ から導かれる場 $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}$ はわき出さない．

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}) = 0.$$

- 電磁波の波動方程式の導出などで用いる関係．

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a}) - \Delta\boldsymbol{a}.$$

  証明はベクトル 3 重積の公式の導出 (付録 C.2.1) と同様にできる．

C.11 波動方程式

d'Alembert 演算子

$$\Box \equiv \frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

に対して

$$\Box\psi = 0$$

は場 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ についての**波動方程式**と呼ばれる．以下で見るようにこれは位相速度 c で伝播する波動を解に持つことが，その名前の由来である．なお d'Alembert 演算子において係数 $1/c^2$ が時間微分に掛かるか空間微分に掛かるは，次元を考えれば判断できる．

C.11.1 1 次元波動方程式

1 次元波動方程式

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi = 0$$

は，f_1, f_2 を任意関数として

$$\psi(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$$

という一般解を持つ．

- 右辺第 1 項は初期時刻 $t=0$ で $\psi = f_1(x)$ という波形を持ち，
  位相速度 c で x 軸正の向きに進行する波動を表す．
- 右辺第 2 項は初期時刻 $t=0$ で $\psi = f_2(x)$ という波形を持ち，
  位相速度 c で x 軸負の向きに後退する波動を表す．

証明　変数

$$X_\pm = t \pm \frac{x}{c}, \qquad \partial_\pm = \frac{\partial}{\partial X_\pm}$$

を導入すると

$$\frac{1}{c}\partial_t = \frac{1}{c}(\partial_+ + \partial_-), \qquad \partial_x = \frac{1}{c}(\partial_+ - \partial_-)$$

なので，

$$0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi = \frac{1}{c^2}\{(\partial_+ - \partial_-)^2 - (\partial_+ + \partial_-)^2\}\psi = -\frac{4}{c^2}\partial_+\partial_-\psi$$

と書き換えられる．これを積分して

$$\partial_+\psi = f_0(X_+), \qquad \therefore \psi = \int f_0(X_+)\mathrm{d}X_+ + f_1(X_-) \equiv f_1(X_-) + f_2(X_+)$$

を得る ($f_0(X_+)$ は X_- に依らない X_+ の任意関数)．
逆に $f(x \mp ct)$ という形の関数が波動方程式を満たすことを，波動方程式への代入により直接確かめることは容易である．実際，$\xi \equiv x \mp ct$ とおくと

$$\frac{\partial}{\partial x}f(\xi) = f'(\xi), \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(\xi) = f''(\xi), \qquad \frac{\partial}{\partial t}f(\xi) = \mp c f'(\xi), \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}f(\xi) = (\mp c)^2 f''(\xi)$$

なので，

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)f(\xi) = 0.$$

なお与えられた初期条件

$$\psi(x, t=0) = f_1(x) + f_2(x) = u(x), \qquad \left.\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = c(-{f_1}'(x) + {f_2}'(x)) = v(x)$$

から f_1, f_2 の関数形を定めることも容易である．結果は

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2}u(x-ct) + \frac{1}{2}u(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v(x')\mathrm{d}x'$$

となる (d'Alembert の式)．従って場 $\psi(x,t)$ として例えば x 軸に沿った弦の y 方向への変位を考え，初期分布 $\psi(x, t=0) = u(x)$ を与えて弦を静かに離したとすると ($v(x) = 0$)，$u(x)$ は 1/2 ずつに分かれて一方は $+x$ 方向に速度 c で進行し，他方は $-x$ 方向に速度 c で後退する．

C.11.2　3 次元の場合

3 次元空間を波数ベクトル (6-1 節)$\boldsymbol{k}$ の方向に位相速度 $c = \omega/k$ で伝播する平面波

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = F(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} \mp \omega t + \delta)$$

は波動方程式 $\Box\psi = 0$ を満たす．実際このことは $\xi = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \delta$ とおくと

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\psi = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \boldsymbol{k}^2\right)\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}\xi^2} = 0$$

となることから確かめられる．この結果は平面波 $F(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} \mp \omega t + \delta)$ が波動方程式を満たすためには**分散関係** (ω と $\boldsymbol{k}$ の関係のこと) $c = \omega/k$ が満たされなければならないことを意味している．

C.11.3　球面波

球座標 (r, θ, ϕ) を導入し球対称 (原点対称) な場 $\psi = \psi(r)$ を考えよう．球座標でのラプラシアンの表式 (付録 C.10.8 参照) より球対称な場 $\psi = \psi(r)$ に対して波動方程式は

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^2\psi) = 0$$

となる．$\psi(r,t) = \phi(r,t)/r$ という置き換えをすると ϕ に対する式

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\phi = 0$$

が得られる．これは 1 次元波動方程式だから $\phi = f_1(r-ct) + f_2(r+ct)$ という解を持つ．よってもとの場は

$$\psi(r,t) = \frac{f_1(r-ct) + f_2(r+ct)}{r}$$

と表される [2, p.179].

右辺第 1 項 (f_1 の項) は $r > 0$ の向きに伝播する球面波を表しており，波面 $r - ct = \mathrm{const.}$ 上での場の振幅は距離 r の増大に伴い $1/r$ に従って減衰することを意味している．以下ではこれが物理的にはエネルギー保存則に対応していることを説明する．波はいたるところで位相速度 c で伝播しているため，波のエネルギーは一か所に滞ることはない．よって今 2 つの球面 $r = r_1, r_2 (r_2 > r_1)$ に囲まれた球殻を考えると，この内部で場のエネルギーの生成・消滅が起きなければ，球殻内のエネルギーは一定に保たれなければならない．そのためには単位時間に内殻 $r = r_1$ から流入するのと同じだけの波のエネルギーが外殻 $r = r_2$ から流出しなければならない．ところが球面は半径 r の 2 乗にしたがって拡がるため，球面上の単位面積を通過するエネルギーは $1/r^2$ に従って薄まらなければならない．しかるに一般に波のエネルギーはその振幅の 2 乗に比例するから，振幅は $1/r$ に比例していれば良い．こうして球面波解はエネルギー保存則の要請を満たしていることが分かる．以上はあくまで数学的な事実に物理的な意味付けを行った解釈であり，逆に言えば場の振舞いがエネルギー保存則を満たすことは数学ではなく——当然ながら——個々の具体的な場の方程式が波動方程式になるという物理の中に含まれている．

C.12　テンソル解析

物理学の指導原理として，どのような座標系を用いても物理法則は同じ形の方程式で記述されることが要請される (共変性の要請)．そこで物理量が座標変換に対してどのように変化するかを調べることが有用となる．この点についてまずは一般相対性理論の文脈において説明を行う．次いで付録 C.13 で初等的な理論において重要となる，3 次元の直交座標系の間の変換に対する議論に移る．

■テンソルの定義　座標変換に伴い時空に固定した点の座標が

$$x \equiv (x^0, \cdots, x^3) \quad \to \quad x' \equiv (x'^0, \cdots, x'^3)$$

と変わるとき，値が

$$T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} \quad \to \quad T'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}}\frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}}T^{\rho_1\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q} \tag{88}$$

と変化する量 $T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ を p 階反変 q 階共変テンソルまたは (p,q) テンソル (の成分) と呼ぶ．

Einstein の規約　テンソルを定義する変換則 (88) 右辺の $\rho_1, \cdots, \sigma_1, \cdots$ ように 2 度以上現れる添字については 0 から 3 までの和をとる．例えば

$$A^\mu{}_\nu B^\nu \equiv \sum_{\nu=0}^{3} A^\mu{}_\nu B^\nu = \sum_{\rho=0}^{3} A^\mu{}_\rho B^\rho \equiv A^\mu{}_\rho B^\rho$$

である．添字 μ と違って和をとられる添字 ν は式変形の途中で (μ 以外の) 別の文字 ρ に置き換えても式の意味が変わらない．このような添字をダミー添字と呼ぶ.

特に

$$\begin{aligned}(0,0)\ \text{テンソル} &= \text{スカラー}\\ (1,0)\ \text{テンソル} &= \text{反変ベクトル}\\ (0,1)\ \text{テンソル} &= \text{共変ベクトル}\end{aligned}$$

である [2, pp.256–257] [12, pp.126–127]．以下の量は数学的に変換則が定まっている [7, pp.26–27].

$$\text{座標の微分 } \mathrm{d}x^\mu \text{は反変ベクトル：} \qquad \mathrm{d}x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\mathrm{d}x^\nu \quad \Leftarrow \quad \text{全微分}$$

$$\text{微分演算子} \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \text{は共変ベクトル：} \qquad \partial_\mu{}' = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\partial_\nu \quad \Leftarrow \quad \text{合成関数の微分}$$

Kronecker の記号 $\delta^\mu{}_\nu$ を混合テンソル ((1,1) テンソル) とすれば，その成分が任意の座標系で同じ値を持つことが保証される [12, p.51]：

$$\delta^\mu{}_\nu{}' = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\delta^\rho{}_\sigma = \delta^\mu{}_\nu.$$

座標の微分が反変ベクトルとなることは，座標 x_i がベクトル成分の変換則に従わないような一般座標である場合にも正しい．また線形変換 $x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu$ は，係数 $a^\mu{}_\nu$ が座標に依らなければ反変ベクトルの変換則 $x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}x^\nu$ に他ならない (実際 $x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu$ を両辺 x^λ で微分すると $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} = a^\mu{}_\nu \delta^\nu{}_\lambda = a^\mu{}_\lambda$ となる).

ここで (反変) ベクトル $\vec{V}$ の成分は座標系に依るけれども $\vec{V}$ 自体は座標系に依らない幾何学的な対象である．$\vec{V}$ の成分 V^α に対する上記の変換則 $V'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}V^\beta$ はこのことと整合している．これは次のように理解できる．各位置での座標系の基底 $\vec{e}_\alpha$ は，座標 x^α が増大する方向のベクトルである．特に (時空の内部に横たわる) 位置ベクトル $\vec{x}$ に対して $\partial_\alpha \vec{x}$ を基底 $\vec{e}_\alpha$ に用いると，これは共変ベクトルの変換則

$$\vec{e'}_\alpha = \partial_\alpha{}'\vec{x} = \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\partial_\beta\right)\vec{x} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\vec{e}_\beta$$

に従う．よって V^α が反変ベクトル成分として変換されれば

$$V'^\alpha \vec{e'}_\alpha = \left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}V^\beta\right)\left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha}\vec{e}_\gamma\right) = \delta^\gamma{}_\beta V^\beta \vec{e}_\gamma = V^\alpha \vec{e}_\alpha = \vec{V}$$

となり，どのような座標系を用いても $V^\alpha \vec{e}_\alpha$ は同一のベクトル $\vec{V}$ を与える [7, pp.25–26].

■物理法則の共変性　両辺が同じ種類のテンソルで書かれた方程式 $T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} = U^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ の形に物理法則を表せば，テンソルの定義によりこれは両辺が同じように変換されるので，座標変換に対して形を変えず共変性の要請を満たす [12, pp.53–54]:

$$\begin{aligned}T'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}}\frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}}T^{\rho_1\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q}\\ &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}}\frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}}U^{\rho_1\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q} = U'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}.\end{aligned}$$

■テンソルの和，積，縮約から新たなテンソルが作られること　テンソルを定義する変換則 (88) から，以下が容易に示される (付録 C.12.1 参照).

- 同じ種類のテンソルに対しては和が定義される.
  (p,q) テンソル $T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}, U^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ の和
  $$A^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} \equiv T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} + U^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} \tag{89}$$
  は (p,q) テンソルである.
- (p,q) テンソル $T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ と (r,s) テンソル $U^{\rho_1\cdots\rho_r}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_s}$ の積
  $$B^{\mu_1\cdots\mu_p\rho_1\cdots\rho_r}{}_{\nu_1\cdots\nu_q\sigma_1\cdots\sigma_s} \equiv T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} U^{\rho_1\cdots\rho_r}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_s} \tag{90}$$
  は $(p+r,q+s)$ テンソルである.
- (p,q) テンソル $T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ の添字 μ_i,ν_j をダミー添字 λ にして和をとる操作を縮約という.
  これにより $(p-1,q-1)$ テンソル
  $$C^{\mu_1\cdots\mu_{i-1}\mu_{i+1}\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_{j-1}\nu_{j+1}\cdots\nu_q} \equiv T^{\mu_1\cdots\mu_{i-1}\lambda\mu_{i+1}\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_{j-1}\lambda\nu_{j+1}\cdots\nu_q} \tag{91}$$
  が得られる.

このため以上の方法で新たに作られたテンソルの種類は上下の添字の個数から期待される通りのものとなる．しかし逆に，複数の添字を持つ量がテンソルであるとは限らない．なお $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$ が座標 x に依る場合，反変ベクトル V^α に対して $\partial_\beta V^\alpha$ を単に共変ベクトル ∂_β との積と見てこれを $(1,1)$ テンソルであると結論することができなくなる．実際，$\partial_\beta V^\alpha$ は

$$\partial_\beta{}' V'^\alpha = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta}\partial_\mu\right)\left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu}V^\nu\right) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu}\partial_\mu V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta}\left(\partial_\mu\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu}\right)V^\nu \tag{92}$$

と変換する [2, pp.264–265].

C.12.1　テンソル (補足)

テンソルの和 $A^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$(式 (89)), 積 $B^{\mu_1\cdots\mu_p\rho_1\cdots\rho_r}{}_{\nu_1\cdots\nu_q\sigma_1\cdots\sigma_s}$(式 (90)), 縮約 $C^{\mu_1\cdots\mu_{i-1}\mu_{i+1}\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_{j-1}\nu_{j+1}\cdots\nu_q}$(式 (91)) がそれぞれ (p,q) テンソル，$(p+r,q+s)$ テンソル，$(p-1,q-1)$ テンソルであることが，テンソルを定義する変換則 (88) から示される．実際これらの新しい座標系での成分をそれぞれ $A'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}, B'^{\mu_1\cdots\mu_p\rho_1\cdots\rho_r}{}_{\nu_1\cdots\nu_q\sigma_1\cdots\sigma_s}, C'^{\mu_1\cdots\mu_{i-1}\mu_{i+1}\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_{j-1}\nu_{j+1}\cdots\nu_q}$ と書くと，

$$\begin{aligned}
&A'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}\\
=&\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}}\frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}}T^{\rho_1\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q} + \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}}\frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}}U^{\rho_1\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q}\\
=&\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}}\frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}}A^{\rho_1\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q},\\
&B'^{\mu_1\cdots\mu_p\rho_1\cdots\rho_r}{}_{\nu_1\cdots\nu_q\sigma_1\cdots\sigma_s}\\
=&\left(\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\alpha_p}}\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\beta_q}}{\partial x'^{\nu_q}}T^{\alpha_1\cdots\alpha_p}{}_{\beta_1\cdots\beta_q}\right)\left(\frac{\partial x'^{\rho_1}}{\partial x^{\gamma_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\rho_r}}{\partial x^{\gamma_r}}\frac{\partial x^{\delta_1}}{\partial x'^{\sigma_1}}\cdots\frac{\partial x^{\delta_s}}{\partial x'^{\sigma_s}}U^{\gamma_1\cdots\gamma_r}{}_{\delta_1\cdots\delta_s}\right)\\
=&\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\alpha_p}}\frac{\partial x'^{\rho_1}}{\partial x^{\gamma_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\rho_r}}{\partial x^{\gamma_r}}\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\beta_q}}{\partial x'^{\nu_q}}\frac{\partial x^{\delta_1}}{\partial x'^{\sigma_1}}\cdots\frac{\partial x^{\delta_s}}{\partial x'^{\sigma_s}}B^{\alpha_1\cdots\alpha_p\gamma_1\cdots\gamma_r}{}_{\beta_1\cdots\beta_q\delta_1\cdots\delta_s},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&C'^{\mu_1\cdots\mu_{i-1}\mu_{i+1}\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_{j-1}\nu_{j+1}\cdots\nu_q}\\
=&\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_{i-1}}}{\partial x^{\rho_{i-1}}}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\mu_{i+1}}}{\partial x^{\rho_{i+1}}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}}\\
\times&\frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\sigma_{j-1}}}{\partial x'^{\nu_{j-1}}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial x^{\sigma_{j+1}}}{\partial x'^{\nu_{j+1}}}\cdots\frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}}T^{\rho_1\cdots\rho_{i-1}\alpha\rho_{i+1}\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_{j-1}\beta\sigma_{j+1}\cdots\sigma_q}\\
=&\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_{i-1}}}{\partial x^{\rho_{i-1}}}\frac{\partial x'^{\mu_{i+1}}}{\partial x^{\rho_{i+1}}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}}\frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\sigma_{j-1}}}{\partial x'^{\nu_{j-1}}}\frac{\partial x^{\sigma_{j+1}}}{\partial x'^{\nu_{j+1}}}\cdots\frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}}C^{\rho_1\cdots\rho_{i-1}\rho_{i+1}\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_{j-1}\sigma_{j+1}\cdots\sigma_q}\\
&\left(\because\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}}=\delta^{\beta}{}_{\alpha},\quad \delta^{\beta}{}_{\alpha}T^{\rho_1\cdots\rho_{i-1}\alpha\rho_{i+1}\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_{j-1}\beta\sigma_{j+1}\cdots\sigma_q}=C^{\rho_1\cdots\rho_{i-1}\rho_{i+1}\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_{j-1}\sigma_{j+1}\cdots\sigma_q}\right)
\end{aligned}
$$

となる．これらはそれぞれ (p,q) テンソル，$(p+r,q+s)$ テンソル，$(p-1,q-1)$ テンソルの変換則である．

C.13 直交変換

C.13.1 直交変換と反変ベクトル成分の変換則

原点を共有する 2 つの直交座標系を考え，それぞれの基底を $\{\boldsymbol{e}_i\},\{\boldsymbol{e}_i{}'\}$ と書く．また，共通の位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ で表される，空間に与えられた同一点をそれぞれの座標系で見たときの座標を x_i, x'_i と書く．このとき $a_{ij}\equiv\boldsymbol{e}_i{}'\cdot\boldsymbol{e}_j$ として座標 x_i と基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ は共通の変換則

$$
x'_i=\sum_j a_{ij}x_j,\qquad \boldsymbol{e}_i{}'=\sum_j a_{ij}\boldsymbol{e}_j \tag{93}
$$

に従う (付録 C.13.4 参照).

第 1 式を x_k で微分すると

$$
\frac{\partial x'_i}{\partial x_k}=\sum_j a_{ij}\delta_{jk}=a_{ik}\equiv\boldsymbol{e}_i{}'\cdot\boldsymbol{e}_k \tag{94}
$$

となる．これは次のことを意味する．

- 線形変換 $x'_i=\sum_j a_{ij}x_j$ の変換係数 a_{ij} が作る行列

  $$
  O\equiv(a_{ij})=\left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\right)
  $$

  は Jacobi 行列に他ならない．
- 変換則 (93) は反変ベクトル成分の変換則に他ならない [2, pp.256–257] [12, pp.126–127].
  - 微分演算子 $\partial_i\equiv\frac{\partial}{\partial x_i}$ は共変ベクトルだから (付録 C.13.4 参照),
    基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i=\partial_i\boldsymbol{x}$ もまた共変ベクトルとなるはずである [7, pp.26–27].
    しかし第 C.13.2 節で見るように，直交座標系を用いる限り反変ベクトル成分の変換則は，
    共変ベクトル成分の変換則に一致してしまう．
  - このことは次の能動変換と受動変換の関係 (付録 C.14.1 参照) と何ら矛盾しない．
    すなわち基底にある変換をすると，
    座標系に固定した視点からは空間に固定したベクトルがその逆変換で移されて見える．
    - (例 1) 駅に向かう者にとっては，逆に駅が自分の方に近づいて来るように見える．
    - (例 2) 回転する椅子に座ると，周りの風景が逆回転して見える．

なお，上式 (94) で 2 つの座標系の役割を入れ替えた式

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j{}' = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \tag{95}$$

が成り立つ．

C.13.2　直交変換に対する Newton の運動方程式の共変性

物理法則を両辺が同じ種類のテンソルで書かれた方程式で表せば，これは座標変換に対して形を変えず共変性の要請を満たす [12, pp.53–54]．ここで Newton の運動方程式の共変性を取り上げよう．ポテンシャル V を持つ保存力場の下で運動する質量 m の粒子に対し，Newton の運動方程式は

$$m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \tag{96}$$

である．この式の左辺は反変ベクトル成分であるのに対し，右辺は共変ベクトル成分である (付録 C.13.4 参照)．従ってこれが一般の座標変換に対して共変的であることは保証されない．しかし用いる座標系を直交座標系に限れば，運動方程式 (96) は形を変えないと考えられる．実際このとき，式 (94)，式 (95) より

$$\frac{\partial x'_j}{\partial x_i} = \boldsymbol{e}_j{}' \cdot \boldsymbol{e}_i = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \tag{97}$$

なので，反変ベクトル成分の変換則は，共変ベクトル成分の変換則に一致してしまう:

$$x'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} x_j = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} x_j.$$

このため運動方程式 (96) の両辺は同じ変換則に従い，新しい座標系でも式 (96) の形の運動方程式

$$m\ddot{x}'_i = -\frac{\partial V}{\partial x'_i}$$

が成り立つことになる．なお，上式 (97) は行列 O が直交行列であること

$$(O^T)_{ij} = (O^{-1})_{ij}$$

を意味している．

C.13.3　主軸変換とテンソルの変換則

慣性テンソル I_{ij} を (i,j) 成分に持つ行列 $I = (I_{ij})$ を考えるとこれは対称行列なので，適当な直交行列 O を用いて

$$I' = OIO^{-1}$$

と対角化できる．これは適当な座標系において $I = (I_{ij})$ が対角行列となることを意味する．実際，座標変換 $x'_i = \sum_j a_{ij} x_j$ における変換係数の成す行列

$$O \equiv (a_{ij}) = \left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\right)$$

を用い，2 階テンソルの変換則は

$$I' = OIO^{-1}$$

と書ける．ここで式 (97) により，$(2,0), (1,1), (0,2)$ テンソルの変換則が一致することを思い出そう．

C.13.4　直交変換 (補足)

座標 x_i と基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ の変換則 (93) は次のように確かめられる．

$$\boldsymbol{e}_i{}' = \sum_j (\boldsymbol{e}_i{}' \cdot \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_j = \sum_j a_{ij}\boldsymbol{e}_j,$$
$$\boldsymbol{x} = \sum_j x_j \boldsymbol{e}_j = \sum_{i,j} x_j (\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_i{}')\boldsymbol{e}_i{}', \qquad \therefore x'_i = \sum_j (\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_i{}')x_j = \sum_j a_{ij}x_j$$

運動方程式 (96) の両辺の変換則について，以下の量は数学的に変換則が定まっている [7, pp,26–27].

$$\text{座標の微分 } \mathrm{d}x_i \text{は反変ベクトル：} \qquad \mathrm{d}x'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} x_j \quad \Leftarrow \quad \text{全微分}$$
$$\text{微分演算子} \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \text{は共変ベクトル：} \qquad \partial_i{}' = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}\partial_j \quad \Leftarrow \quad \text{合成関数の微分}$$

C.14　擬テンソル

C.14.1　能動的変換と受動的変換

物体の空間座標が変化する状況としては以下の 2 通りが考えられる．

能動的変換　空間に固定した座標系に対して物体 (より一般には物理的な系) を移動させる．

★　物理的な系として場を考えている場合には，
それが分布する空間ごと (座標系に対して) 移動させる．

受動的変換　物理的な系を空間に固定して，座標系を移動させる．

付録 C.13 において既に述べたように，能動的変換と受動的変換の間には次のような関係がある．すなわち基底にある変換をすると，座標系に固定した視点からは空間に固定したベクトルがその逆変換で移されて見える．

- 例 1：駅に向かう者にとっては，逆に駅が自分の方に近づいて来るように見える．
- 例 2：回転する椅子に座ると，周りの風景が逆回転して見える．

本節ではこれ以降，受動的な変換を考える．

受動的な変換の例として，図 253 のように xy 座標系の座標軸を反時計回りに角度 θ だけ回転した，新しい x', y' 軸を持つ座標系に移ることを考える．このとき座標系に固定した視点からは，空間に固定されたベクトル $\boldsymbol{A}$ が“時計回りに”角度 θ だけ回転して見える．このことに注意すると，ベクトル $\boldsymbol{A}$ の成分は座標変換に伴い

$$\begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \end{pmatrix} = R(-\theta)\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}, \qquad R(-\theta) \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : \text{角度 } (-\theta) \text{ の回転行列}$$

と変化することが分かる．

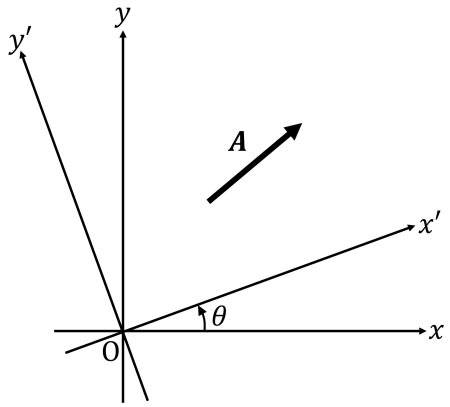


図 253　ベクトル $\boldsymbol{A}$ の xy 座標系に関する成分を (A_x, A_y)，$x'y'$ 座標系に関する成分を $(A_{x'}, A_{y'})$ とする．

C.14.2　擬ベクトル

座標系の x, y, z 軸の向きを逆転させる操作を空間反転と呼ぼう．これにより右手系の座標系は左手系の座標系に置き換えられる[*69]．これに対して通常のベクトル $\boldsymbol{a}$ (**極性ベクトル**と呼ぶ) の座標軸に関する各成分は符号を変える：

$$a_i \quad \to \quad a'_i = -a_i. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ここで考えているのはベクトル $\boldsymbol{a}$ 自身は変化しないような受動的変換であることに注意しよう．上の変換則はベクトル成分の変換則

$$a'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} a_j$$

に整合している ($x'_i = -x_i, \partial x'_i / \partial x_j = -\delta_{ij}$)．実際ベクトルを定義する成分の変換則は，ベクトル自身が矢印で表されるような座標系に依らない幾何学的対象であるための条件となっていたことを思い出そう (付録 C.12 参照)．

これに対して極性ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のベクトル積 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の成分

$$c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

を考えると，これは空間反転に対して符号を変えない：

$$c_i \quad \to \quad c'_i = \varepsilon_{ijk}(-a_j)(-b_k) = c_i.$$

ただし Levi-Civita 記号 ε_{ijk} はその定義により，各成分が全ての座標系で同じ値を持つものと考えた．この点についてはすぐ後で再論する．空間反転の際に成分 c_i が不変であることは，ベクトル $\boldsymbol{c}$ そのものは座標軸の反転に伴って向きを変えること

$$\boldsymbol{c} \quad \to \quad \boldsymbol{c}' = -\boldsymbol{c}$$

を意味している[*70]．このようなベクトルを極性ベクトルと区別して**擬ベクトル**または**軸性ベクトル**と呼ぶ．

[*69] 右手系の座標系を左手系の座標系に変えるには，座標軸を 1 本だけ選んで向きを入れ替える鏡映操作を行っても良い．

[*70] したがってベクトル積の代数的な定義と整合するには，ベクトル積の幾何学的な意味は座標系に依存するものと考えなければならない．ベクトル積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{b}$ に一致させるようにネジを回すときに右ネジの進む向きと定義されるのは，正確には右手系の座標系を用いている場合に限られ，左手系の座標系を用いる際は左ネジの進む向きと定義されることになる．

擬ベクトルの変換則は

$$c'_i = \frac{\partial(x)}{\partial(x')}\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}c_j$$

と表すことができる．ここに $\partial(x)/\partial(x')$ は Jacobian である (付録 C.9 参照)．実際，(直交座標系の間の) 任意の変換は

- 原点の並進
- 座標軸の回転
- 座標軸の反転 (または鏡映)

の組合せによって表現でき，原点の並進は微分 $\partial x'_i/\partial x_j$ に寄与しないから，R を適当な回転行列，n を反転の回数，

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

として

$$\left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\right) = RP^n$$

と表される．よって

$$\frac{\partial(x)}{\partial(x')} = \left|\left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\right)^{-1}\right| = \left|\left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\right)\right| = |R||P|^n = (-1)^n \qquad (\because |R| = 1, |P| = -1)$$

となるので，Jacobian は座標変換が反転を含まないとき $+1$，含むとき -1 となる[*71]．

C.14.3 擬テンソル

擬ベクトルの変換則を一般化して，p 階反変 q 階共変の**擬テンソル**を成分の変換則

$$T'^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q} = \frac{\partial(x)}{\partial(x')}\frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{k_1}}\cdots\frac{\partial x'^{i_p}}{\partial x^{k_p}}\frac{\partial x^{l_1}}{\partial x'^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{l_q}}{\partial x'^{j_q}}T^{k_1\cdots k_p}{}_{l_1\cdots l_q}$$

によって定義する．(ただし 3 次元の直交変換に対しては共変成分と反変成分を区別する意味がなくなる，付録 C.9 参照．) よって空間反転を含まない座標変換に対しては，擬テンソルは通常のテンソルと同様に変換する．

Levi-Civita 記号が全ての座標系で同じ成分の値を持つためには，これは擬テンソルの変換則

$$\varepsilon'_{ijk} = \frac{\partial(x)}{\partial(x')}a_{ip}a_{jq}a_{kr}\varepsilon_{pqr} \qquad \left(\text{ただし } a_{ij} \equiv \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \text{と略記}\right)$$

に従えば良い．実際，右辺における

$$a_{ip}a_{jq}a_{kr}\varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix}$$

[*71] 直交座標系の間の変換に対して $O = (\partial x'_i/\partial x_j)$ は直交行列なので，

$$O^{-1}O = OO^{-1} = 1, \qquad \therefore |O|^2 = 1, \qquad \therefore |O| = \pm 1.$$

は行列式 $|a_{ij}| = \partial(x')/\partial(x)$ の行を入れ替えたものであり，行列式は行を入れ替えると符号が変わるから，これは $\partial(x')/\partial(x)\varepsilon_{ijk}$ と書ける．よって

$$\varepsilon'_{ijk} = \frac{\partial(x)}{\partial(x')}\left(\frac{\partial(x')}{\partial(x)}\varepsilon_{ijk}\right) = \varepsilon_{ijk}$$

となって成分は変わらない．

なお Levi-Civita 記号が擬ベクトルの変換則に従うのであれば，極性ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のベクトル積の成分

$$c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

が擬ベクトルの変換則に従うのは明白である (テンソルの変換則に関する付録 C.12，付録 C.9 の議論を参照)．

C.14.4　擬ベクトルの例

粒子の位置 $\boldsymbol{r}$，速度 $\boldsymbol{v}$ を極性ベクトル，電荷 e をスカラーとして，

$$\text{角速度}\boldsymbol{\omega}\text{での回転速度} \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r},$$
$$\text{磁場 (磁束密度)}\boldsymbol{B}\text{ から受ける力} \quad \boldsymbol{F} = e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

がともに極性ベクトルとなるためには，角速度 $\boldsymbol{\omega}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は擬ベクトルでなければならない．このことはテンソルの変換則に関する付録 C.12，付録 C.9 の議論から明白である．なお角速度 $\boldsymbol{\omega}$ が回転軸を与えることが，「軸性ベクトル」という名前の由来と考えられる．

C.15　複素関数

複素変数 $z = x + iy$ (x：実部，y：虚部) の関数 $f(z)$ は複素関数と呼ばれる．

複素関数 $f(z)$ に対して

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

が複素平面上の変位 $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ の方向に依らない値をとるとき，複素関数 $f(z)$ は正則であると言われる．このとき上の極限値を複素関数 $f(z)$ の微分と定義し，$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$ と書く．よって複素関数 $f(z)$ を実部 $u(x, y)$ と虚部 $v(x, y)$ に分けて $f = u + vi$ と書くと，その微分を計算するには $\Delta z = \Delta x$ または $\Delta z = i\Delta y$ ととって

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

とすれば良い (以下の Cauchy-Riemann の関係式 (98) の下で 2 式は等しいことが見て取れる[*72])．

複素平面上の径路 C (何らかの始点 $z = z_1$ と終点 $z = z_2$ を持つ) に沿う複素関数 $f = u + vi$ の複素積分は次の線積分によって定義される．

$$\int_{\mathrm{C}} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\mathrm{C}} (u + vi)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) = \int_{\mathrm{C}} (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + i\int_{\mathrm{C}} (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y).$$

以下に有用な定理をいくつか挙げる．

[*72] ここで $\frac{1}{i} = -i$ に注意する．この関係はしばしば有用であり，
- 両辺に i をかける，または
- $\frac{1}{i} = \frac{1}{e^{i\pi/2}} = e^{-i\pi/2} = -i$ とする

ここで確かめられる (本節末尾の Euler の公式より $e^{i\theta}$ は偏角 θ の単位ベクトルに対応する)．

C.15.1　Cauchy-Riemann の関係式 [19, p.136]

(複素) 関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ について，$u(x,y)$ と $v(x,y)$ が連続な偏導関数を持つとする．このとき関数 $f(z)$ が正則であるための必要十分条件は，Cauchy-Riemann の関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{98}$$

によって与えられる．

■導出　複素関数 $f = u + vi$ の微分

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

が $\Delta z = \Delta x + i\Delta y \to 0$ の近づけ方に，したがって比 $m = \Delta y/\Delta x$ に依らずに定義できる条件を調べよう．

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} =& \frac{(u_x \mathrm{d}x + u_y \mathrm{d}y) + i(v_x \mathrm{d}x + v_y \mathrm{d}y)}{\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y} \qquad (u_x = \partial_x u, \text{etc.})\\ =& \frac{(u_x + iv_x) + (u_y + iv_y)m}{1 + im} \qquad (m = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x)\\ \equiv& \varphi(m)\end{aligned}$$

なので，これが m に依らない条件

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(m)}{\mathrm{d}m} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (u_y + v_y i) - (u_x + v_x i)i = 0$$

は Cauchy-Riemann の関係式

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x$$

に他ならない [19, pp.136–137]．

C.15.2　Cauchy の積分定理 [19, p.160]

単一閉曲線 C と C の内部を含む領域で正則な関数 $f(z)$ に対して

$$\oint_{\mathrm{C}} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

となる．このことは複素線積分とベクトル場の線積分の類似性に注目して，次のように直観的に説明できる (着想は文献 [18] による)．複素積分

$$\oint_{\mathrm{C}} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{\mathrm{C}} (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + i \oint_{C} (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y)$$

は 2 種類のベクトル場 $\boldsymbol{A} = (u, -v), \boldsymbol{B} = (v, u)$ の線積分から成る．ここで Cauchy-Riemann の関係式 (98) はベクトル場 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ が渦無し場であることを意味し，従ってこの周回積分はゼロになる (付録 D.7 参照) [18]．

■**完全微分方程式**　以上に関連して，完全微分方程式の解法について述べる．

1 階微分方程式

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0 \tag{99}$$

は，左辺 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ がある関数 $u(x,y)$ の全微分となっているとき完全微分方程式と呼ばれ，その一般解は

$$u(x,y) = \mathrm{const}$$

で与えられる．そして式 (99) が完全微分方程式であるための条件は

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

である [19, p.17].

このことは次のように解釈できる．式 (99) が完全微分方程式であれば，ベクトル場 (P,Q) の線積分 (終点を (x,y) とする) は経路によらず

$$\int^{(x,y)} (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = u(x,y) + \mathrm{const}$$

となるはずである．これはベクトル場 (P,Q) に渦が無いこと

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

を意味する．

C.15.3　留数定理

我々は複素積分とベクトル場の線積分の類似性から Cauchy の定理を証明した．すなわち複素積分をベクトル場の線積分と見なしたとき，与えられた領域で被積分関数が正則であることはベクトル場が渦無しであることに対応し，それ故に周回積分はゼロになる．ここではこのようなアナロジーをさらに推し進めよう．今，平面上の無限に小さい 1 点でベクトル場が渦を持つとする．無限に細い断面を持つ渦領域は流体力学の文脈では**渦糸**と呼ばれ，ここで考えている点は渦糸の断面に相当する．Stokes の定理によれば“渦糸”はその周りの閉曲線にベクトル場の周回積分のゼロでない値をもたらす．実はこれから説明するように，複素関数論において渦糸 (の断面) に対応するのは関数の特異点であり，**Stokes の定理にある意味で対応するのが留数定理と言える．**

関数 $f(z)$ が 1 点 $z=a$ を除外した円盤内 $|z-a| \le R$ で正則であるとき，$z=a$ は関数 $f(z)$ の**特異点**と呼ばれ，このとき円盤内の $z(\neq a)$ に対して関数 $f(z)$ は

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

と **Laurent 展開**できる．このとき特異点として $z=a$ のみを囲う閉曲線 C に沿う周回積分 (Cauchy の定理により，その値はそのような C の選び方には依らない) は展開係数 b_{-1} だけで決まる：

$$\oint_{\mathrm{C}} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i b_{-1}.$$

そこで b_{-1} を**留数**と呼び，

$$b_{-1} = \mathrm{Res}[a]$$

と書く．

証明　積分路 C を円 $z = a + r_0 e^{i\theta}$ に選ぶと

$$\oint_{\mathrm{C}} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} b_n ({r_0}^n e^{in\theta})(r_0 e^{i\theta} i\mathrm{d}\theta) = 2\pi b_{-1}. \qquad \left(\because \int_0^{2\pi} e^{im\theta}\mathrm{d}\theta = 2\pi\delta_{m0}\right)$$

以上より周回積分を求めるには留数を計算すれば良いことになる．もし Laurent 展開の最低次の項が $(z-a)^{-k}(k>0)$ である，すなわち展開が

$$f(z) = \frac{b_{-k}}{(z-a)^k} + \cdots + \frac{b_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n, \qquad b_{-k} \neq 0$$

という形をとるとき，特異点 a は関数 $f(z)$ の k 位の**極**と呼ばれる．点 a が k 位の極であれば，留数は

$$\mathrm{Res}[a] = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to a} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \{(z-a)^k f(z)\}$$

と求めることができる．

証明

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to a} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \{(z-a)^k f(z)\} \\
=&\frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to a} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \left\{ b_{-k} + \cdots + b_{-1}(z-a)^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^{n+k} \right\} \\
=&\frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to a} \left\{ (k-1)! b_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1)\cdots(n+2) b_n (z-a)^{n+1} \right\} \\
=&b_{-1}.
\end{aligned}$$

閉曲線 C が複数の特異点 $a_1, a_2, \cdots$ を内に含む場合への一般化は容易である．すなわち図 254 において

$$0 = \oint_{\mathrm{C}'} = \oint_{\mathrm{C}} - \sum_i \oint_{\Gamma_i}, \qquad \therefore \oint_{\mathrm{C}} = \sum_i \oint_{\Gamma_i} = 2\pi i \sum_i \mathrm{Res}[a_i].$$

C.15.4　指数関数

複素変数 z の指数関数 e^z や三角関数 $\sin z, \cos z$ は，その Maclaurin 展開の形によって定義される (付録 C.5 参照)．従って z が特に実数 x のときには，これらはそれぞれ通常の指数関数 e^x，三角関数 $\sin x, \cos x$ に一致する．

1 つの興味ある応用例として，指数関数 e^z の微分を考えよう．複素関数の微分の定義に従えば，自然数 n に対して z^n の微分は実変数の場合と同様に

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^n = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = n z^{n-1}$$

と実行できる．よって

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} e^z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots\right) = e^z$$

を得る．

もう 1 つの興味ある応用例として，e^z の定義式 (Maclaurin 展開) に $z = i\theta(\theta$ は実数) を代入すると

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \cdots = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) = \cos\theta + i\sin\theta$$

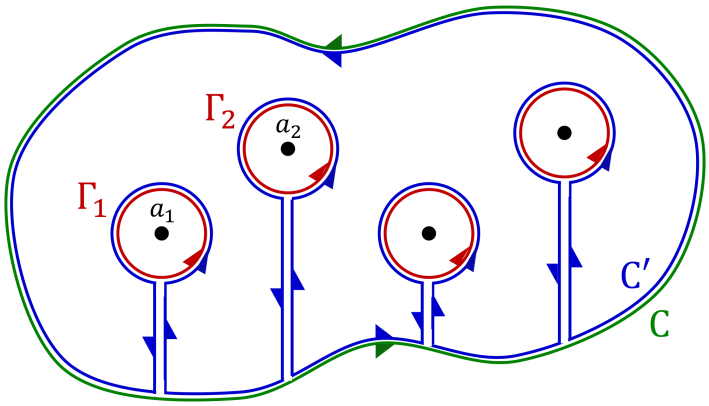


図 254　複数の特異点 $a_1, a_2, \cdots$ を内に含む閉曲線 C

を得る．これは **Euler の公式**と呼ばれ，指数関数を三角関数に関係付ける．ここから任意の複素数はその絶対値を $r = |z|$，偏角を $\theta = \arg z$ として

$$z = re^{i\theta}$$

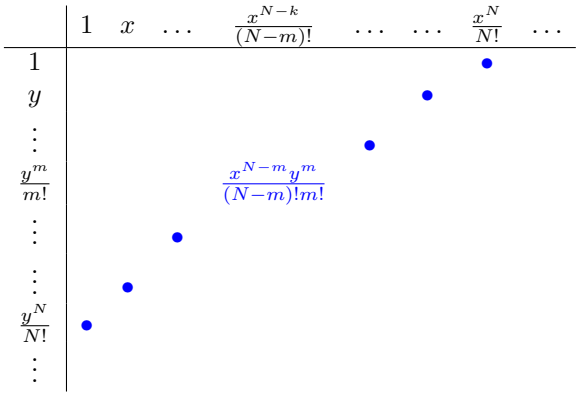
と表されることになる．

なお複素変数 x のみならず，演算子 X の指数関数 e^x もまた Maclaurin 展開の形によって定義される．**Maclaurin 展開の形で定義された指数関数が指数法則 $e^x e^y = e^{x+y}$ を満たすのは，x と y が交換するとき $(xy = yx)$ である．**実際

$$\begin{aligned} e^x e^y &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!}\right) = \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{N} \frac{x^{N-m}y^m}{(N-m)!m!} \qquad (N \equiv n+m) \\ &= \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{N} \frac{1}{N!}\binom{N}{m} x^{N-m}y^m = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!}(x+y)^N = e^{x+y} \end{aligned} \tag{100}$$

とできるのは，第 4 の等号で x と y を並び替えることができるときである．

上式 (100) の説明　左辺 $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!}\right)$ を展開したときに現れる項を以下に書き出す．



上の図式において青い項が

$$\sum_{m=0}^{N} \frac{x^{N-m}y^m}{(N-m)!m!} = \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{N!}\binom{N}{m} x^{N-m}y^m = \frac{1}{N!}(x+y)^N$$

である (第 2 の等号は x と y が交換するとき).

複素変数 $z = x + iy$ に対して実部 x と虚部 (の i 倍)iy は交換するから指数法則を適用することができる. すると指数関数は

$$e^z = e^x e^y = e^x(\cos y + i \sin y)$$

と表現することもできる.

C.16 Fourier 展開

C.16.1 $\int_0^{2L} \sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right) \mathrm{d}x = L$ に対する直観とその周辺

$y = \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)$ のグラフは図 255 の青い曲線のようである (ただし図は $n = 3$ として描いている). $\sin^2 x \leq |\sin x|$ に注意して $y = \sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right)$ のグラフを描くと, 図 255 の赤い曲線のようになる. ここから以下のことが読み取れる.

- 半角公式

$$\sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right) = \frac{1-\cos\left(2n\pi\frac{x}{L}\right)}{2}. \tag{101}$$

- $y = \sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right)$ の平均

$$\overline{\sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right)} \equiv \frac{1}{2L}\int_0^{2L} \sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

  または三角関数の直交性に関する式

$$\int_0^{2L} \sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right) \mathrm{d}x = L.$$

  - ここで左辺が図 255 の緑の長方形の面積 $\frac{1}{2} \times 2L = L$ であることを考えた.
  - 実際この積分は半角公式 (101) を用いて

$$\int_0^{2L} \sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right) \mathrm{d}x = \int_0^{2L} \frac{1-\cos\left(2n\pi\frac{x}{L}\right)}{2} \mathrm{d}x = L$$

    と計算できる. この計算の意味は, 被積分関数 $\sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right)$ を平均の高さ $\frac{1}{2}$ とその周りの振動に分けたとき, 振動を表す三角関数 $-\frac{1}{2}\cos\left(2n\pi\frac{x}{L}\right)$ の積分が消えて長方形の面積 $\frac{1}{2} \times 2L = L$ が得られるということに他ならない.
  - 他にも平均値が $\overline{\sin^2 kx} = 1/2$ となることを手早く理解するには

$$\overline{\sin^2 kx} + \overline{\cos^2 kx} = 1, \qquad \overline{\sin^2 kx} = \overline{\cos^2 kx}$$

    に注目すれば良い.
  - なお, 積分範囲を半分に減らしても

$$\int_0^{L} \sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right) \mathrm{d}x = \frac{L}{2}$$

    が成り立つ.

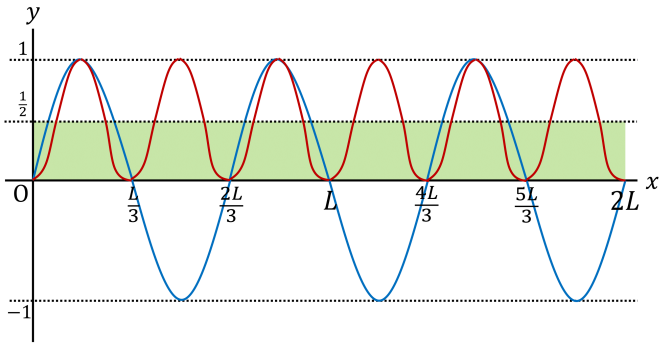


図 255　$y = \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right), y = \sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right)$ のグラフ．ただし $n = 3$ として描いている．

– この関係は関数の Fourier 展開の際に有用となる (次節以降を参照)．

C.16.2　Fourier 級数

周期関数をあらゆる振動数の三角関数の重ね合わせとして表現することを考える．すなわち $f(x)$ を周期 L の周期関数とし，同じく L を周期 (の整数倍) に持つ三角関数を用いてこれを

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{L}x\right)\right\} \tag{102}$$

と展開できると仮定する．このとき三角関数の直交性

$$\int_0^L \cos\left(n\frac{2\pi}{L}x\right)\cos\left(m\frac{2\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = \frac{L}{2}\delta_{mn}, \qquad \int_0^L \sin\left(n\frac{2\pi}{L}x\right)\sin\left(m\frac{2\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = \frac{L}{2}\delta_{mn},$$
$$\int_0^L \sin\left(n\frac{2\pi}{L}x\right)\cos\left(m\frac{2\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = 0$$

より展開係数は

$$a_n = \frac{1}{L/2}\int_0^L f(x)\cos\left(n\frac{2\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$
$$b_n = \frac{1}{L/2}\int_0^L f(x)\sin\left(n\frac{2\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

と定まる．展開 (102) を **Fourier 級数**，展開係数 a_n, b_n を **Fourier 係数**という．与えられた (周期) 関数が実際にこのように展開できるかを判定するには数学的にやや込み入った議論が必要になるけれど，物理で扱う (周期) 関数は常に Fourier 展開できると仮定して良い．物理ではこれが普通である．

C.16.3　複素形 Fourier 級数

Fourier 級数 (102) を，複素数を用いた表現に書き換えよう．そのためには Euler の公式を用いて三角関数を指数関数で表せば十分だが，改めて次のように考えても良い．すなわちあらかじめ関数 $f(x)$(周期 L) の展開を

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(in\frac{2\pi}{L}x\right)$$

と書いておき，指数関数の直交性

$$\int_0^L \exp\left(in\frac{2\pi}{L}x\right)\exp\left(-im\frac{2\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = L\delta_{mn}$$

を用いると，展開係数は

$$c_n = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\exp\left(-in\frac{2\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

と定まる．

多変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_N)$ の周期関数 $f(\boldsymbol{x})$(変数 x_i の周期 L_i) に対する Fourier 展開への一般化は直接的である．実際まずは x_1 以外の変数を任意の値に固定し，$f(\boldsymbol{x})$ を x_1 の 1 変数関数と見て Fourier 展開すると，展開係数には残りの変数 $x_2, \cdots, x_N$ がパラメーター的に含まれる．次いで展開係数を x_2 の 1 変数関数と見て Fourier 展開し，さらにその展開係数を x_3 の 1 変数関数と見て Fourier 展開し，……という操作を繰り返せば良い．結果は

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}} c_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}, \qquad c_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{V}\int f(\boldsymbol{x})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}^N x$$

となる．ただし $\boldsymbol{k} = \left(\frac{2\pi}{L_1}n_1, \cdots, \frac{2\pi}{L_N}n_N\right)$ は整数の組 $(n_1, \cdots, n_N)$ に応じて定まる“波数”ベクトル (6-1 節) である．また展開係数の式における積分は各変数 x_i の 1 周期 $-L_i/2 \le x_i \le L_i/2$ にわたって行い，その積分領域の“体積”を $V = L_1 \cdots L_N$ と書いている．

C.16.4 Fourier 積分

周期関数の Fourier 級数展開を，$-\infty < x_i < \infty$ で定義された周期を持たない関数 $f(\boldsymbol{x})$ へ拡張すると，**Fourier 積分**の公式へと導かれる．この目的のためには，簡単のために周期 $L_1 = \cdots = L_1 \equiv L$ を持つ周期関数 $f(\boldsymbol{x})$ を $-L/2 \le x_i \le L/2$ において考えて，その Fourier 級数展開に対して $L \to \infty$ の極限をとれば十分である．このとき離散的な“波数”$\boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{L}\boldsymbol{n}$(ただし $\boldsymbol{n} = (n_1, \cdots, n_N)$ は整数を成分に持つベクトル) は連続的なスペクトルに移行し，1 つの状態 $\boldsymbol{k}$ が“波数空間”に占める“体積”$\Delta^N k = (2\pi/L)^N$ はゼロに近づく．すると展開係数

$$c_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{L^N}\int f(\boldsymbol{x})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}^N x \to \frac{\mathrm{d}^N k}{(2\pi)^N}f(\boldsymbol{k}), \qquad f(\boldsymbol{k}) \equiv \int f(\boldsymbol{x})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}^N x$$

から波数空間の体積要素 $\mathrm{d}^N k$ がくくり出されて

$$\begin{array}{rcl|c|c}
f(\boldsymbol{x}) = & \sum_{\boldsymbol{k}} & c_{\boldsymbol{k}} & e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
f(\boldsymbol{x}) = & \int & \dfrac{\mathrm{d}^N k}{(2\pi)^N}f(\boldsymbol{k}) & e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}
\end{array}$$

と Fourier 積分に移行する．なお $f(\boldsymbol{k})$ の積分範囲 $-L/2 \le x_i \le L/2$ はこの極限 $L \to \infty$ で $\boldsymbol{x}$ 空間全体となっている．

以上の説明から明らかなように，

- 一般に Fourier 成分 $f(\boldsymbol{k})$ は Fourier 係数 $c_{\boldsymbol{k}}$ と次元が異なる：

$$[c_{\boldsymbol{k}}] = [f(\boldsymbol{x})], \qquad [f(\boldsymbol{k})] = \frac{[c_{\boldsymbol{k}}]}{[\mathrm{d}^N k]} = [f(\boldsymbol{x})][L]^N.$$

- Fourier 積分を

$$f(\boldsymbol{x}) \simeq \sum_{\Delta^N k} \frac{\Delta^N k}{(2\pi/L)^N} c_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$$

と書けば，これはもとの Fourier 級数展開における因子 $c_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$ に波数空間の体積要素 $\Delta^N k$ 内の離散的な状態 $\boldsymbol{k}$ の数 $\frac{\Delta^N k}{(2\pi/L)^N}$ をかけ，全ての要素 $\Delta^N k$ について和をとったものになっており，平面波の重ね合わせと見ることができる．

最終的な結果をまとめると

$$f(\boldsymbol{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^N k}{(2\pi)^N} f(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} : \text{Fourier 積分 (Fourier 逆変換)},$$
$$f(\boldsymbol{k}) = \int \mathrm{d}^N x f(\boldsymbol{x}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} : \text{Fourier 成分 (Fourier 変換)}$$

となる (第 1 式が Fourier 展開に相当)．実際にこのような展開が可能であるためには，関数 $f(\boldsymbol{x})$ は一定の条件を満たさなければならない：ふつう $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ でゼロになるような関数が取り扱われる．なお同じことであるが，Fourier(逆) 変換を

$$f(\boldsymbol{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^N k}{(2\pi)^{N/2}} f(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}, \qquad f(\boldsymbol{k}) = \int \frac{\mathrm{d}^N k}{(2\pi)^{N/2}} f(\boldsymbol{x}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$$

と定義する流儀もある．また変数が時間 t である場合には，しばしば

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} f(\omega) e^{-i\omega t}, \qquad f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t f(t) e^{i\omega t}$$

と指数の符号を逆にして Fourier(逆) 変換を定義する．

C.17 デルタ関数

デルタ関数を導入する動機として，点状の荷電粒子系の電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ を定義することを考えよう．以下では a 番目の粒子の位置を $\boldsymbol{r}_a(t)$，電荷を e_a と書く．まず電荷の位置 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_a$ での電荷密度の値を考えると，それは直観的には (ゼロでない) 有限の電荷 e_a と無限小体積の比で与えられるため発散する．また電荷のない位置 $\boldsymbol{r}$ では電荷密度はゼロにならなければならない．さらに電荷が連続的に分布している場合の電荷密度 ρ は，与えられた空間領域 V にわたる体積積分

$$\int_{\mathrm{V}} \rho \mathrm{d}V$$

が V 内部の電荷の総和を与えるように定義された．そこで荷電粒子系に対しても体積積分 $\int_{\mathrm{V}} \rho \mathrm{d}V$ が V 内部の電荷の総和に一致することを要求する．

このような量を表現するのに，以下の性質によって定義されるデルタ関数 $\delta(x)$ を用いることができる．

$$x \neq x_0 \text{のとき} \quad \delta(x - x_0) = 0,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)\mathrm{d}x = f(x_0). \qquad (\text{任意の連続関数 } f(x) \text{ に対して})$$

第 2 式は $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1$ という関係を含意しており，2 つの性質を組み合わせると $\delta(x - x_0)$ は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1$$

を満たす具合に $x = x_0$ において無限大に発散することになる[*73]．さらに 3 次元空間におけるデルタ関数 $\delta(\boldsymbol{r})$ を

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

によって定義し[*74]，荷電粒子系の電荷密度を

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) = \sum_a e_a \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a(t))$$

と定義すれば，これは確かに上で要求した性質

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) = \begin{cases} \pm\infty & (\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_a(t)) \\ 0 & (\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}_a(t)) \end{cases}$$

$$\text{および} \quad \int_{\mathrm{V}} \rho \mathrm{d}V = \sum_a e_a \qquad (\text{和は V の中に含まれる全ての粒子 } a \text{ についてとる})$$

を満たしている．電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ の時間 t 依存性は電荷の位置 $\boldsymbol{r}_a(t)$ に含まれている．言い換えれば電荷の密度分布が時間変化するのは，荷電粒子が運動するためである．同様に

$$\mu(\boldsymbol{r}, t) = \sum_a m_a(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a(t)) : \text{質量密度}, \qquad n(\boldsymbol{r}, t) = \sum_a (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a(t)) : \text{数密度}$$

を定義できる (m_a は a 番目の粒子の質量)．

なお以上から理解されるように，デルタ関数 $\delta(x)$ は引数 x の逆数の次元を持つ：

$$[\delta(x)] = \frac{1}{[x]}.$$

(ただし上の議論からすれば $\delta(\boldsymbol{r})$ は見かけ上，1/(長さ) の次元を持つようにも思われるかもしれないが，$\delta(\boldsymbol{r})$ の次元は正しくは $1/(\text{長さ})^3$ である．)

■デルタ関数の表現　デルタ関数のイメージを作るために，デルタ関数を具体的に構成することを考えよう．簡単な方法としては図 256 のような矩形のパルスを用意し，グラフの下の面積を 1 に保ちながら横幅 ε をゼロに近づけ，高さ $1/\varepsilon$ を無限大に引き伸ばした極限として得られる鋭い“トゲ”をデルタ関数 $\delta(x)$ とすれば良い．

他にも以下のような関数を用いてデルタ関数を作ることができる [30, pp.50–51]．

- “共鳴曲線”(図 257 参照) [9, p.98]

$$f(x; a) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2}. \qquad (\text{半値幅 } 2a\text{，極大値 } f(x = 0; a) = 1/\pi a)$$

  グラフの下の面積は 1 であり，$a \to 0$ の極限でデルタ関数 $\delta(x)$ になる．

- Gauss 分布 (正規分布，図 258 参照)

$$g(x; \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right). \qquad (\text{標準偏差}\sigma\text{，極大値 } g(x = 0; \sigma) = 1/\sigma\sqrt{2\pi})$$

[*73] このようにデルタ関数 $\delta(x)$ は普通の意味での関数ではないけれど，物理では通常の関数のように扱えるものと仮定しておけば良い．

[*74] 他にも $\delta^3(\boldsymbol{r}), \delta^{(3)}(\boldsymbol{r})$ といった書き方があるが，今の場合は引数 $\boldsymbol{r}$ がベクトルであることが明白だから，単に $\delta(\boldsymbol{r})$ と書いてもそれが 3 次元のデルタ関数であることは分かる．

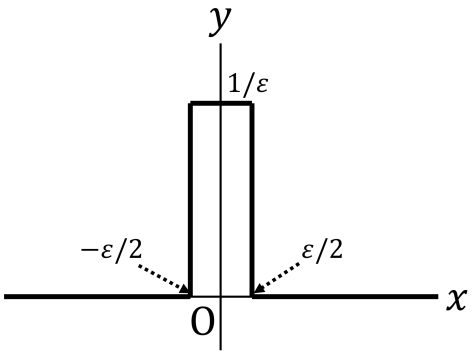


図 256　矩形パルスとデルタ関数

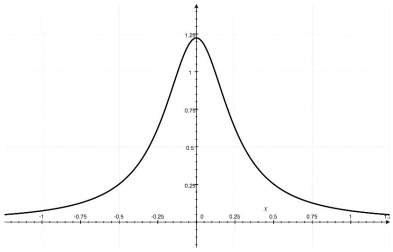


図 257　“共鳴曲線”$f(x;a=1/4)$ のグラフ

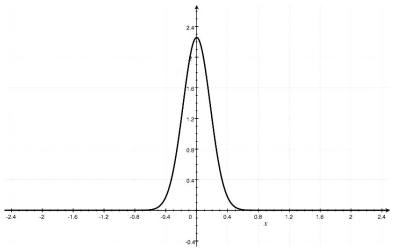


図 258　Gauss 分布 $g(x;\sigma = 1/4\sqrt{2})$ のグラフ

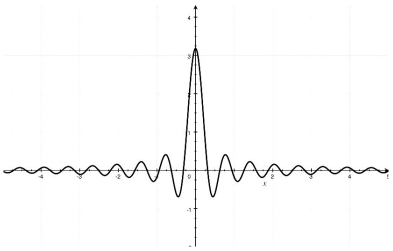


図 259　$h(x;K) = \sin(Kx)/\pi x$ のグラフ ($K=10$)

$\sigma \to 0$ の極限でデルタ関数 $\delta(x)$ になる．

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x;\sigma)\mathrm{d}x = 1 : \text{Gauss 積分}, \qquad \text{標準偏差} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x;\sigma)\mathrm{d}x = \sigma$$

の計算については付録 C.18 参照.

- $\sin x/x$ 型のグラフ (図 259，6-2 節参照，$y=\sin x/x$ のグラフは $y=\pm 1/x$ の間で振動する)

$$h(x,K) = \frac{\sin Kx}{\pi x} \qquad (h(x,K)=0 \text{ となる最小の } x(>0) \text{ 座標 } K/\pi\text{，極大値 } h(x\to 0,K) = K/\pi)$$

$K\to\infty$ の極限でデルタ関数 $\delta(x)$ になる．実際，すぐ後の Fourier 展開の公式より

$$\delta(x) = \lim_{K\to\infty}\int_{-K/2}^{K/2}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}e^{ikx} = \lim_{K\to\infty}\frac{e^{iKx/2}-e^{-iKx/2}}{2\pi i x} = \lim_{K\to\infty}\frac{\sin Kx}{\pi x}.$$

■デルタ関数の性質　デルタ関数の重要な性質をいくつか列挙する [30, p.47,p.49,p.52].

- デルタ関数は偶関数である[*75]：$\delta(-x)=\delta(x)$.
- a を正の定数，また与えられた関数 $f(x)$ をゼロにする実数 x を $a_i (i=1,2,\cdots)$ とすると

$$\delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x), \qquad \delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x-a_i)|}\delta(x-a_i).$$

[*75] デルタ関数を偶関数 $\delta_{\mathrm{e}}(x) = \frac{\delta(x)+\delta(-x)}{2}$ と奇関数 $\delta_{\mathrm{o}}(x) = \frac{\delta(x)-\delta(-x)}{2}$ に分けると ($\delta(x) = \delta_{\mathrm{e}}(x)+\delta_{\mathrm{o}}(x)$)，奇関数の部分は積分 $\int\delta(x)\mathrm{d}x = 1$ に寄与しないから，はじめから偶関数を仮定すれば十分である．実際，我々は具体的な偶関数からデルタ関数を作った.

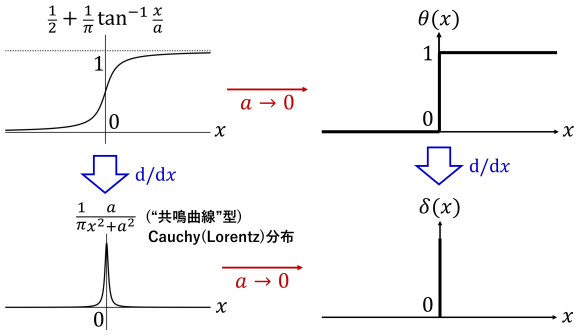


図 260　$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\theta(x)=\delta(x)$ の説明 (その 1)

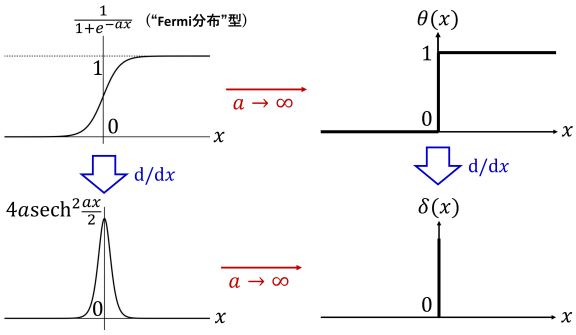


図 261　$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\theta(x)=\delta(x)$ の説明 (その 2)

第 1 式は $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(ax)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x')\mathrm{d}x'=\frac{1}{a}$ による．
第 2 式はデルタ関数にとって重要となる $x=a_i$ の近くで $f(x)\simeq f'(a_i)(x-a_i)$ とすれば，
第 1 式から説明できる．

- 階段関数

$$\theta(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ 1 & (x\geq 0)\end{cases}$$

の微分はデルタ関数になる：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\theta(x)=\delta(x)$．
その直観的な説明は図 260，図 261[*76]．

- デルタ関数の Fourier 展開 (付録 C.16 参照)

$$\delta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}e^{ikx}.$$

C.18　Gauss 積分とその周辺

Gauss 分布 (図 258 参照) の積分

$$I\equiv\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\qquad(\alpha>0)\tag{103}$$

を Gauss 積分と呼ぶ．

Gauss 積分の公式 (103) の証明　I を直接計算するよりも，まず I^2 の値を求めることを考えるのが有益である．すると平面極座標 (r,ϕ) への変数変換 (付録 C.9 参照) により

$$I^2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}e^{-\alpha r^2}2\pi r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{\alpha},\qquad\therefore I=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}:(103)$$

を得る．

[*76] 図 260，図 261 における曲線の下の面積は

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{a}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{a}\right]_{-\infty}^{\infty}=1-0=1,\qquad\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ae^{-ax}}{(1+e^{-ax})^2}\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{1+e^{-ax}}\right]_{-\infty}^{\infty}=1-0=1.$$

C.18.1 Gauss 積分に類似の積分

次に Gauss 積分に類似の積分をいくつか挙げる．

1. $\alpha > 0$ に対して
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x.$$
n が奇数のときには $x^2 = X$ と変数変換すれば計算を進めることができる．一方，n が偶数のときには
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha^{-3/2}$$
のように Gauss 積分の公式を利用して，逐次的に $n = 2, 4, 6, \cdots$ に対する結果を得ることができる．
2. $\alpha > 0, \beta$: 実数 に対して
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x+i\beta)^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$
この公式は図 262 の閉曲線に沿う $e^{-i\alpha z^2}$ の周回積分を考えて，これを Gauss 積分に関係付けることにより証明される (Cauchy の積分定理 (付録 C.15) 参照) [30, p.75]：
$$0 = \oint e^{-i\alpha z^2} \mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x-i\beta)^2} \mathrm{d}x.$$
やや細かいが，
「右端と左端の経路［$z = \pm R + iy$］に沿う積分が 0 になる」ことは次のように確かめられる．
$$\left| \int_0^{\beta} e^{-\alpha(\pm R+iy)^2} (i\mathrm{d}y) \right| \leq \int_0^{\beta} \left| e^{-\alpha(\pm R+iy)^2} \right| \mathrm{d}y = \int_0^{\beta} e^{\alpha(y^2-R^2)} \mathrm{d}y \leq \beta e^{\alpha(\beta^2-R^2)} \to 0 \quad (R \to \infty).$$
3. $\alpha > 0$ に対して
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\alpha x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\mp i\alpha}}$$
は Fresnel 積分と呼ばれる．
この公式は複号 $\pm$ に応じた図 263 の経路 $C_{\pm}$ に沿う $e^{\pm i\alpha z^2}$ の周回積分を考えて，
これを Gauss 積分に関係付けることにより証明される (Cauchy の積分定理 (付録 C.15) 参照)．
$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{C_{\pm}} e^{\pm i\alpha z^2} \mathrm{d}z = \int_0^{\infty} e^{\pm i\alpha x^2} \mathrm{d}x - e^{\pm i\pi/4} \int_0^{\infty} e^{-\alpha r^2} \mathrm{d}r, \\ \therefore \int_0^{\infty} e^{\pm i\alpha x^2} \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\sqrt{\pm i}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\mp i\alpha}}, \\ \therefore \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\alpha x^2} \mathrm{d}x &= \sqrt{\frac{\pi}{\mp i\alpha}}. \end{aligned}$$

■Fresnel 積分の図形的解釈　Fresnel 積分
$$f(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{it^2} \mathrm{d}t$$
に対する定性的な考察から，その概形をある程度把握することができる．以下に述べる方法の着想は Feynman による [17, pp.53–55]．

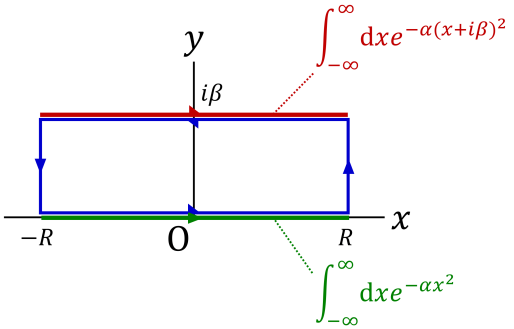


図 262　実軸と β 隔たる平行線を通る閉じた積分路

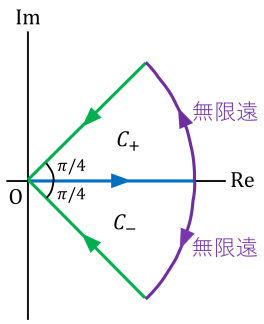


図 263　Fresnel 積分の公式を証明するための積分路 $C_\pm$

Fresnel 積分 $f(x)$ は積分の上限 x の関数であり，x の各値に対して $f(x)$ の値を複素平面上にプロットすると，1 つの曲線が描かれる．この曲線の形を調べることから始めよう．$f(0) = 0$ なので $f(x)$ の定義式は，点 $f(x)$ の原点からの変位が複素数 $e^{it^2}\mathrm{d}t$(の $\sqrt{2/\pi}$ 倍) に対応する無限小ベクトルの和として与えられることを意味している．無限小ベクトルは長さが $\mathrm{d}t$ で実軸との成す角が η^2 であることに注意すると (付録 C.15 参照)，大まかには図 264 のような曲線が描かれると想像される ($f(-x) = -f(x)$ より曲線は原点対称となることにも注意する)．これは Cornu のらせんと呼ばれるものである．渦巻の中心に対応する点の座標は

$$f(\pm\infty) = \pm\frac{1}{2}(1+i)$$

によって与えられる．以上より Fresnel 積分

$$C(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x \cos(t^2)\mathrm{d}t, \qquad S(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x \sin(t^2)\mathrm{d}t$$

の値は w が $-\infty$ から 0 まで増大する間に単調に増大していく．そして x が 0 から ∞ まで増大する間に振動し，その振幅は減少していくことが図 264 から読み取れる．

C.18.2　Gauss 積分等の次元解析

以上で見た Gauss 積分とそれに類似の積分

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \qquad J \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\alpha^{-3/2}$$

に対する“次元解析”を行おう．例えば x に長さの次元を与えると，指数関数 $e^{-\alpha x^2}$ の引数が無次元量でなければならないことから

$$[\alpha] = [x]^{-2}$$

が結論され，

$$[I] = [x] = [\alpha]^{-1/2}, \qquad [J] = [x]^3 = [\alpha]^{-3/2}$$

を得る．よって

$$I \propto \alpha^{-1/2}, \qquad J \propto \alpha^{-3/2}$$

であることが期待される (比例係数は無次元)．

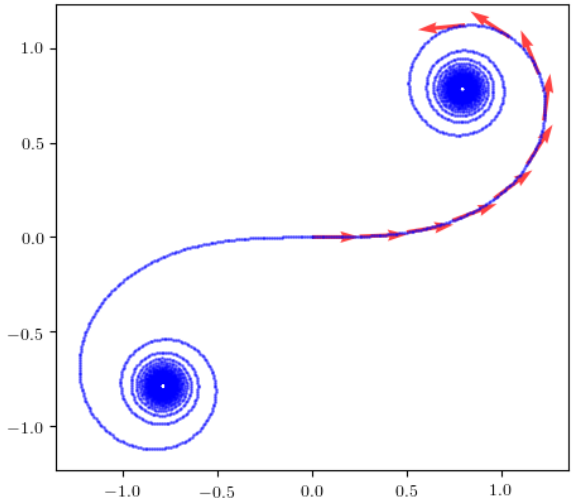


図 264　Cornu のらせん

C.19　$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ 型の式変形

4-5 節の注解では異なる振幅 A_1, A_2 を持つ 2 つの正弦波に対して，和積の公式を適用して合成波の表式を調べるために

$$A_1 = \frac{A_1 + A_2}{2} + \frac{A_1 - A_2}{2}, \qquad A_2 = \frac{A_1 + A_2}{2} - \frac{A_1 - A_2}{2}$$

という変形を利用した．この書き換えは以下のように応用が利く．

■2 階テンソルを対称テンソルと反対称テンソルに分ける　2 階テンソル T_{ij} は対称テンソル $T_{ij}^{(\mathrm{S})}$ と反対称テンソル $T_{ij}^{(\mathrm{A})}$ の和で書ける:

$$T_{ij} = T_{ij}^{(\mathrm{S})} + T_{ij}^{(\mathrm{A})}, \qquad T_{ij}^{(\mathrm{S})} \equiv \frac{T_{ij} + T_{ji}}{2} = T_{ji}^{(\mathrm{S})}, \qquad T_{ij}^{(\mathrm{A})} \equiv \frac{T_{ij} - T_{ji}}{2} = -T_{ji}^{(\mathrm{A})}.$$

例えば距離 $\delta\boldsymbol{r}$ 隔たる流体の 2 点における速度の差 $\delta\boldsymbol{v}$ を

$$\delta v_i = \partial_j v_i \delta x_j = \frac{1}{2}(e_{ij} + \omega_{ij})\delta x_j, \qquad e_{ij} \equiv \partial_i v_j + \partial_j v_i, \qquad \omega_{ij} \equiv \partial_i v_j - \partial_j v_i$$

と書くと，対称テンソル e_{ij} の寄与は流体の変形を，反対称テンソル ω_{ij} の寄与は流体の剛体的回転を表す．なお，e_{ij} は変形速度と呼ばれる [11, pp.30–34,pp.182–183].

■関数を偶関数と奇関数に分ける　(実数全体で定義された) 関数 $u(x)$ は偶関数 $u_{\mathrm{e}}(x)$ と奇関数 $u_{\mathrm{o}}(x)$ の和で書ける:

$$u(x) = u_{\mathrm{e}}(x), \qquad u_{\mathrm{e}}(x) \equiv \frac{u(x) + u(-x)}{2}, \qquad u_{\mathrm{o}}(x) \equiv \frac{u(x) - u(-x)}{2}.$$

特に $u(x) = e^x$ を考えると，これは

$$e^x = \cosh x + \sinh x$$

を与える．

付録 D　物理 (発展)

ここでは主に物理のやや発展的な事項 (あるいは若干の演習問題) を扱う．内容は教科書の理解に役立ち，かつ教科書のレベルを大幅に逸脱しない範囲に留める．以降は付録 C の数学的知識を前提とする．特に Einstein の既約 (付録 C.1.1) を全面的に用い，いちいち断らない．

D.1　「単位〇〇」という表現について

「単位長さ」「単位時間」等というとき，普通，十分小さい量が想定されている．

例えば棒の単位長さ当たりの質量が ρ であるとは微小な長さ Δl に含まれる質量が $\rho\Delta l$ であることを意味しており，逆に長さ Δl を 1 とおけば単位長さ当たりの質量 ρ が得られる．しかしながら単位長さを 1 とするとこれはもはや長さの次元を持たず，長さ Δl との比 Δl が長さの次元を持つことになることに注意する．ただし例えば教科書 p.193 には「単位時間 (1 秒)」とある．

D.2　一様な力の場のポテンシャル

2-1 節の注解で言及したように，一様な力の場 $\boldsymbol{F}$ のポテンシャル (位置エネルギー) は $U(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}$ である [9, p.12]．このことは

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i}(F_j x_j) = F_j\delta_{ij} = F_i, \quad \therefore -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F}.$$

と確かめられる[*77]．この結果は $\boldsymbol{r}$ の“約分”のように見える．

D.3　等加速度運動 (2-3 節) に関するいくつかの演習

D.3.1　与えられた力 $F(t) \sim t$ に対して運動方程式を解くこと

問題　x 軸上における質量 m の粒子の 1 次元的運動を考える．時間 $0 \le t \le \tau$ における力の x 成分が

$$F(t) = F_0\left(1 - 2\frac{t}{\tau}\right)$$

で与えられるとき (図 265 参照)，初期条件 $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$ の下で，この時間区間における粒子の位置 $x(t)$ を求めよ．

解　運動方程式より粒子の加速度が $a(t) = \frac{F(t)}{m}$ で与えられることを除けば，後は純粋に数学 (運動学) の問題である．速度 $v(t)$，加速度 $a(t)$ の定義より

$$\begin{aligned} v(t) =& v_0 + \int_0^t \mathrm{d}t' a(t') = v_0 + \frac{F_0}{m}\left(t - \frac{t^2}{\tau}\right), \\ x(t) =& x_0 + \int_0^t \mathrm{d}t' v(t') = x_0 + v_0 t + \frac{F_0}{m}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3\tau}\right) \end{aligned}$$

を得る[*78]．

[*77] ただし $\partial/\partial\boldsymbol{a}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ の第 i 成分による微分演算子 $\partial/\partial a_i$ を第 i 成分に持つベクトル微分演算子 $(\partial/\partial a_1, \partial/\partial a_2, \partial/\partial a_3)$ であり，特に $\partial/\partial\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\nabla}$ である．

[*78] $a(t)$ が 1 次関数なので，$v(t)$ を求める積分に関しては，a-t グラフにおける“符号付き面積”として幾何学的に評価することも可能である．積分はあくまで変化量を表しており，初期値 v_0, x_0 の足し忘れに注意せよ．

得られた $v(t), x(t)$ の式は，$\tau \to \infty$ とするとよく知られた等加速度運動の公式に移行し，$F_0 = 0$ とおくと等速直線運動の公式を再現する．Taylor 展開 (C.5 節) から期待されるように，$t \ll \tau$ では時間発展 $x(t)$ は近似的に等加速度運動のように見えるものの，$t \gtrsim \tau/2$ では t の 3 次の項が効いてくる．F-t グラフから加速度の符号を読み取ると，x-t グラフは $t = \tau/2$ の変曲点を境として下に凸から上に凸の曲線に移行する，3 次関数のグラフとなることが分かる[*79]．

ところで我々は既に一般論において，運動方程式から仕事と運動エネルギー変化の関係

$$\frac{1}{2}mv^2(t) - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = \int_0^t F(t')v(t')\mathrm{d}t'$$

が導かれることを知っている．もちろん本問の場合に両辺を t の関数として具体的に計算することで，上式が成り立っていることを直接，確かめることもできる．

問題　このことを確かめよ．

これは等加速度運動の公式「$v^2 - {v_0}^2 = 2ax$」の確認作業に対応する．裏を返せばこの公式を忘れても，$F = ma = \mathrm{const.}$ を念頭に置き，仕事と運動エネルギー変化の関係 $\frac{1}{2}mv^2(t) - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = Fx$ として等価な関係を書き下せる．

他方，得られた $v(t)$ の式が運動量変化と力積の関係

$$mv(t) - mv_0 = \int_0^t F(t')\mathrm{d}t'$$

を満たすことは，その導き方から明らかである．

D.3.2　斜面との繰り返し衝突

問題　図 266 のように鉛直面内で水平方向と角度 θ を成す (滑らかな) 斜面上の原点 O から，時刻 $t = 0$ に水平方向に初速度 $\boldsymbol{v}_0$ で質量 m の粒子が飛び出した．その後 $n(= 1, 2, \cdots)$ 回目に粒子が斜面と衝突する位置を求めよ．ただし「1 回目」の衝突を図 266 のように数えるものと約束し，斜面との衝突は弾性衝突とする．また地上の重力場を $\boldsymbol{g}$ とする (値は重力加速度に一致)．

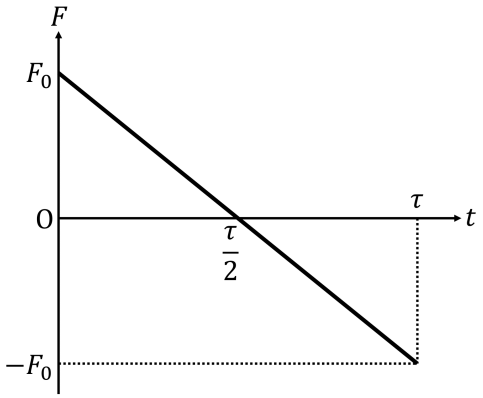


図 265　与えられた力 $F(t) = F_0\left(1 - 2\frac{t}{\tau}\right)$ のグラフ

[*79] 参考：x 軸上の主要値は $x\left(\frac{\tau}{2}\right) = x_0 + \frac{1}{2}v_0\tau + \frac{F_0\tau^2}{12m}$，$x(\tau) = x_0 + v_0\tau + \frac{F_0\tau^2}{6m}$．

解　図 266 のように x 軸が斜面に一致する xy 直交座標系をとると，初速度と重力場の成分はそれぞれ

$$\boldsymbol{v}_0 = v_0(\cos\theta, \sin\theta), \qquad \boldsymbol{g} = g(\sin\theta, -\cos\theta).$$

斜面との弾性衝突の際，粒子の速度の x 成分は不変であり，y 成分は符号が反転する．よって粒子は x 方向に等加速度運動

$$x(t) = (v_0\cos\theta)t + \frac{1}{2}(g\sin\theta)t^2$$

を行う．また n 回目の衝突の時刻を t_n として，y 方向には等加速度運動

$$y(t) = (v_0\sin\theta)(t - t_n) - \frac{1}{2}(g\cos\theta)(t - t_n)^2 \qquad (t_n \le t \le t_{n+1})$$

を繰り返す (ただし $t_0 \equiv 0$ と定める)．上式において $y(t_{n+1}) = 0$ を要求すると，衝突は時間間隔

$$\Delta t \equiv t_{n+1} - t_n = \frac{2v_0}{g}\tan\theta \qquad (n \text{ に依らない})$$

おきに行われることが分かる．よって n 回目の衝突の斜面に沿う位置は

$$x(t_n) = x(n\Delta t) = \frac{2{v_0}^2}{g}n(1 + n\tan^2\theta)\sin\theta$$

と求まる．これは等加速度運動 $x(t) \sim t^2$ を反映して，一定の時間 Δt おきに n^2 のように増加していく．

- 斜面が水平となる極限 $\theta \to 0$ で

$$\Delta t \to 0, \qquad x(t) \to v_0 t. \qquad (\text{等速直線運動})$$

- 斜面が鉛直となる極限 $\theta \to \pi/2$ で

$$\Delta t \to \infty, \qquad x(t) \to \frac{1}{2}gt^2, \qquad y(t) \to v_0 t. \qquad (\text{自由落下})$$

参考　図 266 のように水平に X 軸を，鉛直上向きに Y 軸をとり，衝突直前の粒子の速度の，XY 座標系で見た成分を (v_X, v_Y) とすると，その xy 座標系に関する成分は

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \end{pmatrix}$$

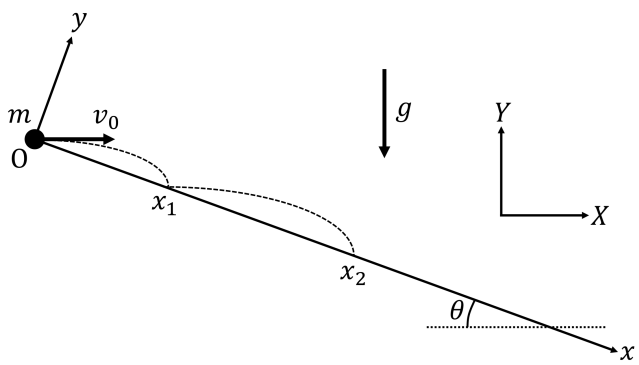


図 266　斜面との粒子の繰り返し衝突 (概念図)．x_n は n 回目の衝突位置．

となる．ここで回転の向きに注意せよ (C.14.1 節)．衝突後の速度は xy 座標系で見て $(v_x, -v_y)$ なので，もとの XY 座標系では

$$\begin{pmatrix} v'_X \\ v'_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ -v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos 2\theta)v_X - (\sin 2\theta)v_Y \\ -(\sin 2\theta)v_X - (\cos 2\theta)v_Y \end{pmatrix}.$$

特に $\theta = \pi/4$ とおくと $(v'_X, v'_Y) = -(v_Y, v_X)$，すなわち衝突前後で速度の X, Y 成分は大きさが入れ替わることになる．

D.3.3　速度の 2 乗に比例する抵抗力

2-3 節では，速度に比例する空気抵抗を受ける雨滴の運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv$$

を初期条件 $v(0) = 0$ の下で解き，雨滴の速度が

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left\{1 - \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)\right\}$$

に従って終端速度 $v(\infty) = mg/k$ に緩和するという結果を得た．

他方，流体中を運動する物体 (質量 m) に働く抵抗力は，物体の速度 $\boldsymbol{v}$ が大きいときには v^2 に比例することが知られている．物体の鉛直方向の 1 次元的な運動を考えると，鉛直下向きを正とする速度を v，$\gamma > 0$ を適当な定数として，運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \gamma v^2\frac{v}{|v|}, \qquad \frac{v}{|v|} = \begin{cases} +1 & (v > 0 \text{ のとき}) \\ -1 & (v < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と書ける．時刻 $t = 0$ における初速度を $v(0) = 0$ とすると，以降は常に $v(t) > 0$ と考えられるので，

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \gamma v^2$$

と簡略化される．

問題　この微分方程式を解いて，速度の時間変化 $v(t)$ を解析的に求めよ．

解　加速度 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 0$ となるときの速度は $v = \sqrt{mg/\gamma} \equiv v_\infty$ で与えられる．また $\gamma/m \equiv c$ と略記すると，与えられた微分方程式は

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = c({v_\infty}^2 - v^2)$$

と書き直せる．これは変数分離して解くことができ，

$$\int \mathrm{d}t = \frac{1}{c}\int \frac{\mathrm{d}v}{{v_\infty}^2 - v^2}, \qquad \therefore \frac{1 + (v/v_\infty)}{1 - (v/v_\infty)} = \mathrm{const} \times e^{2cv_\infty t}$$

となる[*80]．初期条件から const $= 1$ と定まる．これを v について解くと，物体の落下速度は

$$v(t) = v_\infty \frac{e^{cv_\infty t} - e^{-cv_\infty t}}{e^{cv_\infty t} + e^{-cv_\infty t}} \equiv v_\infty \tanh(cv_\infty t)$$

[*80] v に関する積分は常套的に $v = v_\infty \sin\theta$ と変数変換し (我々は $0 \le v \le v_\infty$ を想定していることに注意)，良く知られた数学公式

$$\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2}\int\left\{\frac{\mathrm{d}(1+\sin\theta)}{1+\sin\theta} - \frac{\mathrm{d}(1-\sin\theta)}{1-\sin\theta}\right\} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right) + \mathrm{const.}$$

を利用すれば良い．

にしたがって終端速度 v_∞ になることが分かる [31, pp.32–33].

D.4 単振動 (2-6 節) に関するいくつかの演習

安定なつり合い点周りの微小振動

物体の任意の周期的な運動は，純粋に数学的な事実として，あらゆる振動数 (基本振動数の整数倍) の単振動の重ね合わせとして表現できる (Fourier 展開)．このため基本となる運動としての単振動に興味が持たれる．

単振動が重要となる今 1 つの理由として，やはり数学的な理由により，一般につり合い点周りでの微小振動は単振動によって近似できることが挙げられる．以下ではこの点について詳しく説明する．まず簡単のために位置がデカルト座標 x で記述される，質量 m の単一粒子の 1 次元的な運動を考える．このとき $x = x_0$ が粒子の安定なつり合いの位置であるとは，位置エネルギー (ポテンシャル・エネルギー) $U(x)$ が $x = x_0$ で極小となることを意味する (図 267,268 参照)．そこで $U(x)$ を極小の位置 $x = x_0$ の周りに Taylor 展開すると，

$$U(x) = U(x_0) + \frac{k}{2}(x - x_0)^2 + \cdots, \qquad k \equiv U''(x_0) \geq 0 \qquad (\because U'(x_0) = 0)$$

となる．これは 2 次までの近似では，安定なつり合い点の近くでポテンシャル $U(x)$ が，位置 $x = x_0$ を軸とする下に凸の放物線で近似されることを意味する[*81]．これはばね定数 k を持つばねの弾性エネルギーと同じ形なので (x_0 が振動中心)，つり合い点周りの微小振動は単振動によって近似できる．と言うのも，同じ近似でポテンシャルから導かれる力

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x} = -k(x - x_0)$$

は復元力となる．実際ポテンシャルに対する 2 次近似と等価的に，はじめから力 $F(x)$ を変位 $(x - x_0)$ の 1 次までの近似で，ばねの弾性力の形に帰着させても良い．これは $x \gtrless x_0$ に応じて力の符号が $F(x) \lessgtr 0$ (複号同順) と入れ替わる安定なつり合い点 x_0 の周りで，$F(x)$ のグラフを接線で近似することに対応している (図 269 参照)．

以上の議論は x がデカルト座標に限らず，角度のような任意の座標 (一般化座標) である場合や，多自由度の系に対しても一般化できる [9, pp.81–86].

ここまでの一般論を，結論が分かりきった簡単な具体例で見ておこう．図 270 のように鉛直面内で半径 l の円形の滑らかな壁面に沿って運動する質量 m の粒子 (転がらず，質点として扱える) が，最下点 O の周りに行う微小振動を考える．これは長さ l の単振り子と同じ状況設定であり (拘束力が張力か垂直抗力かの違いを除けば)，良く知られているように地上の重力場を g として，単振動の角振動数は $\omega = \sqrt{g/l}$ と表される (l が長いほど ω が遅くなるのは理に適っている)．ここでは図 270 のように定義したつり合い点 O からの変位 x (ないし対応する中心角 θ) に関して，ポテンシャル $U(x)$ を 2 次近似して，微小振動が単振動に帰着することを確認しよう．ここで $x = l\sin\theta = l\theta + O(\theta^3)$ は θ に関して 1 次程度なので[*82]，x に関する 2 次近似は θ に関する 2 次近似と等価である．(なお，この近似では x 座標と円弧に沿う変位 $s = l\theta$ は区別できない．) すると

$$U(x) = mgl(1 - \cos\theta) \simeq \frac{1}{2}mgl\theta^2 \simeq \frac{1}{2}\frac{mg}{l}x^2$$

はばねの弾性エネルギーと同じ形になり，“ばね定数” は $k = mg/l$ と同定される．よって微小振動は $x = 0$ を中心とする単振動で近似され，改めて角振動数 $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{g/l}$ が得られる．

[*81] ただし微分係数が $U''(x_0) = 0$ となる場合は例外である．そのような人工的な例として，関数形 $U(x) = a|x|^3$ が挙げられる (ただし $a > 0$ であり，このとき振動中心は $x = 0$).

[*82] これを逆に解けば，$\theta = (x/l) + O(\theta^3) = (x/l) + O(x^3)$ は x の 1 次程度とも言える．

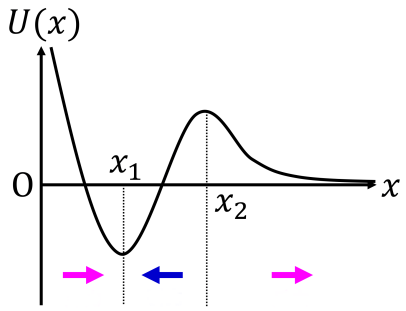


図 267　安定なつり合いの位置 x_1 と不安定なつり合いの位置 x_2．ポテンシャルを定義する式 $F(x) = -\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}$ より，各位置で働く力 $F(x)$ の向きは矢印のようになる．

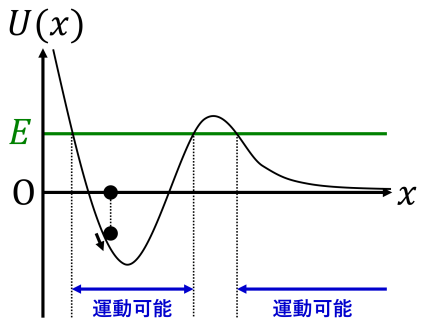


図 268　物体は定性的には $U(x)$ のグラフで表される“坂道”を転がる球と同様の運動をする (実際の物体の位置は球を x 軸に投影した点)．物体の運動可能な範囲は $U(x) \leq E$ (全エネルギー) を満たす領域に限られる．(図 32 の再掲．)

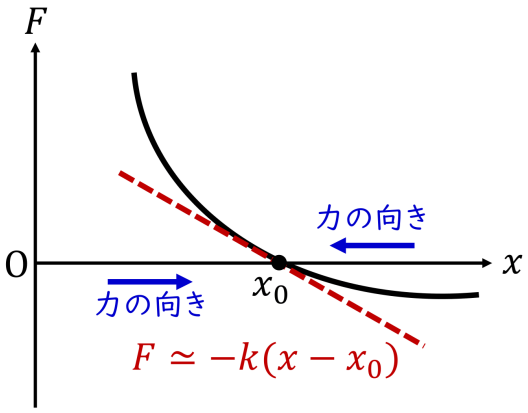


図 269　安定なつり合い点 x_0 付近での力の線形近似

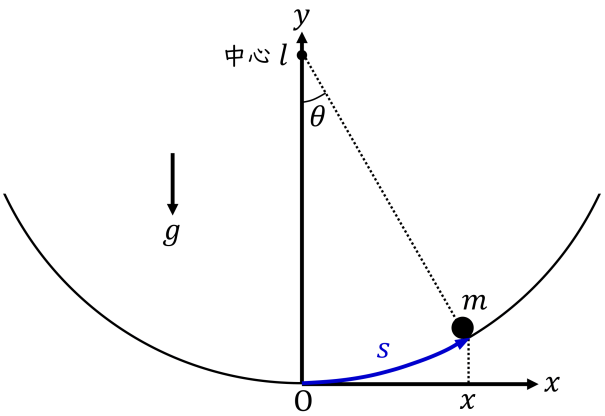


図 270　円の底での微小振動

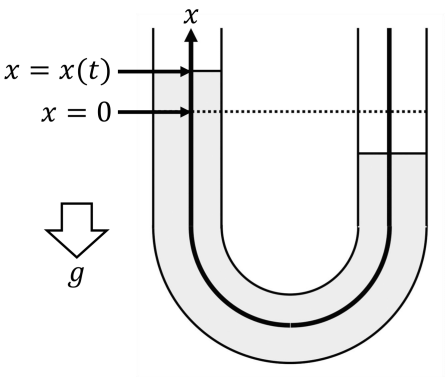


図 271　U 字管に入った液体

■一般 (化) 座標　先に天下りに言及したように，ポテンシャルをつり合い点からの一般座標のズレについて 2 次近似しても，微小振動を単振動に帰着できる．この点について図 270 の例を用いて，簡単に補足する．デカルト座標 x の代わりに中心角 θ を用いても，ポテンシャル $U \simeq \frac{1}{2}mgl\theta^2$ は θ^2 に比例する．また運動エネルギー $T = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2$ も依然として，(一般化) 速度 $\dot{\theta}^2$ に比例する．よって x または θ を用いて表したエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{mg}{l}x^2 = E, \qquad \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 = E$$

(E は全エネルギー) は互いに係数が異なるだけで，同じ形を持つ．ところが 1 次元の運動では左右の向きの任意性を除き，エネルギー保存則は各位置 x (または θ) での速度 $\dot{x}$ (または $\dot{\theta}$) を定め，粒子は x 軸 (ないし θ 軸) 上の与えられた速度場に従って運動する．このとき原理的には各時刻での粒子の位置が逐次的に求まる．しかるにエネルギー保存則より速度場 $\dot{x}, \dot{\theta}$ は定数 l 倍の違いしかないため，座標 x で記述される運動が単振動ならば，θ の値もまた単振動すると結論できる．もちろん今の例では単純な比例関係 $x = l\theta$ から，このことは前もって自明である．とは言え，この議論は例えば力学系と電気回路の時間発展の対応を，エネルギー保存則の類似性から理解するのにも役立つ．

参考　ここでは高校物理の水準を念頭に，エネルギー保存則を基調とした説明を採用した．他方で直接 θ に関する運動方程式を書き下すには，「一般 (化) 運動量」$p_\theta =\equiv \partial T/\partial\dot{\theta} = ml^2\dot{\theta}$ (角運動量) と「一般 (化) 力」$F_\theta \equiv -\partial U/\partial\theta \simeq -mgl\theta$ (トルク) を用いて (これらは通常の運動量と力の次元を持たないことに注意)，

$$\dot{p}_\theta = F_\theta, \qquad \therefore ml^2\ddot{\theta} = -mgl\theta$$

とすれば良い [9, p.19]．ここで重要なことは，$T \sim \dot{\theta}^2$ および $U \sim \theta^2$ なので，θ も単振動の式を満たすということである．もとろんこの結果は，Newton の運動方程式 $m\ddot{x} = -mg\sin\theta \simeq -mg\theta$ から初等的に得られる

$$m\ddot{x} = -\frac{mg}{l}x \qquad \text{or} \qquad ml\ddot{\theta} = -mg\theta$$

に一致している．

D.4.1　U 字管に入った液体の単振動

問題　図 271 のように鉛直面内の U 字管に沿って 1 次元的な運動を行う縮まない液体を考え，その全質量を M，質量線密度を μ とする．また地上の重力場を g とする．液体はどのような運動を行うか．ただし 2 つの液体は常に U 字管の鉛直な部分にあるとする．

解　図 271 のように U 字管に沿って x 軸をとって，一方の液面の位置を座標 $x(t)$ で表し，そのつり合いの位置を原点 $x=0$ に選ぼう．縮まない液体 (非圧縮性流体) を仮定しているため，液体の各部分は液面と共通の速度 $\dot{x}(t)$ で運動する．

理由　実際，非圧縮性流体とは質量密度が位置と時間によらず一定である流体のことである．もし任意の瞬間に 2 つの位置 $x=x_1, x_2(>x_1)$ での流体の速度 v_1, v_2 が異なっていたとすると，管の直断面を S として，単位時間に区間 $x_1 \le x \le x_2$ から体積 $(v_2-v_1)S$，質量 $\mu(v_2-v_1)S$ の流体が流出することになる．これは仮定より区間 $x_1 \le x \le x_2$ に含まれる流体の質量 $\mu(x_2-x_1)$ が不変であることに反する．よって $v_1=v_2$ である[*83]．

よって液体の全運動量は $M\dot{x}(t)$ と表される．他方，液体全体に働く正味の力の x 成分は，対称性より，2 つの液面の高低差 $2|x(t)|$ の部分に働く重力 $-2\mu g x(t)$ となる．したがって Newton の運動方程式は単振動の方程式

$$M\ddot{x}(t) = -2\mu g x(t)$$

を与えるから，液面は平衡位置の周りに角振動数 $\omega=\sqrt{2\mu g/M}$ で単振動する (振幅は初期条件で決まる) [31, pp.183–184].

D.4.2　2 次元等方 (性) 調和振動子

問題　xy 平面上において，位置 $\boldsymbol{r}=(x,y)$ で動径方向の力

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -kr\hat{\boldsymbol{r}} \qquad (k>0,\ \hat{\boldsymbol{r}} \equiv \boldsymbol{r}/r : \text{方向単位ベクトル})$$

を受ける質量 m の質点の運動 $\boldsymbol{r}(t)$ を，初期条件

$$\boldsymbol{r}(0)=(a,0), \qquad \boldsymbol{v}(0)=(0,v_0)$$

の下で定めよ ($\boldsymbol{v} \equiv \dot{\boldsymbol{r}}$ は速度)．質点はどのような軌跡を描くか．また質点が y 軸を横切る瞬間の速さを求めよ．

解　$\hat{\boldsymbol{r}}=(x,y)/r$ に注意して運動方程式を成分ごとに書き下すと

$$m\ddot{x} = -kx, \qquad m\ddot{y} = -ky$$

なので，与えられた初期条件の下での解は

$$x(t) = a\cos\omega t, \qquad y(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t, \qquad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{104}$$

となる．2 式から t を消去すると，

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(v_0/\omega)^2}\left(=\cos^2\omega t + \sin^2\omega t\right) = 1 \tag{105}$$

[*83] 一般に流体の質量密度を ρ，速度を $\boldsymbol{v}$ とすると，質量保存則は連続の式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0$$

で表される．ここで非圧縮性流体を想定して ρ を時間的にも空間的にも一定とすると，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=0$ が得られる．すなわち非圧縮性流体の速度場はわき出さない．特に 1 次元的な運動を念頭に $\boldsymbol{v}=(v(x,t),0,0)$ とおくと，$\frac{\partial v}{\partial x}=0$．D.17 節を参照．

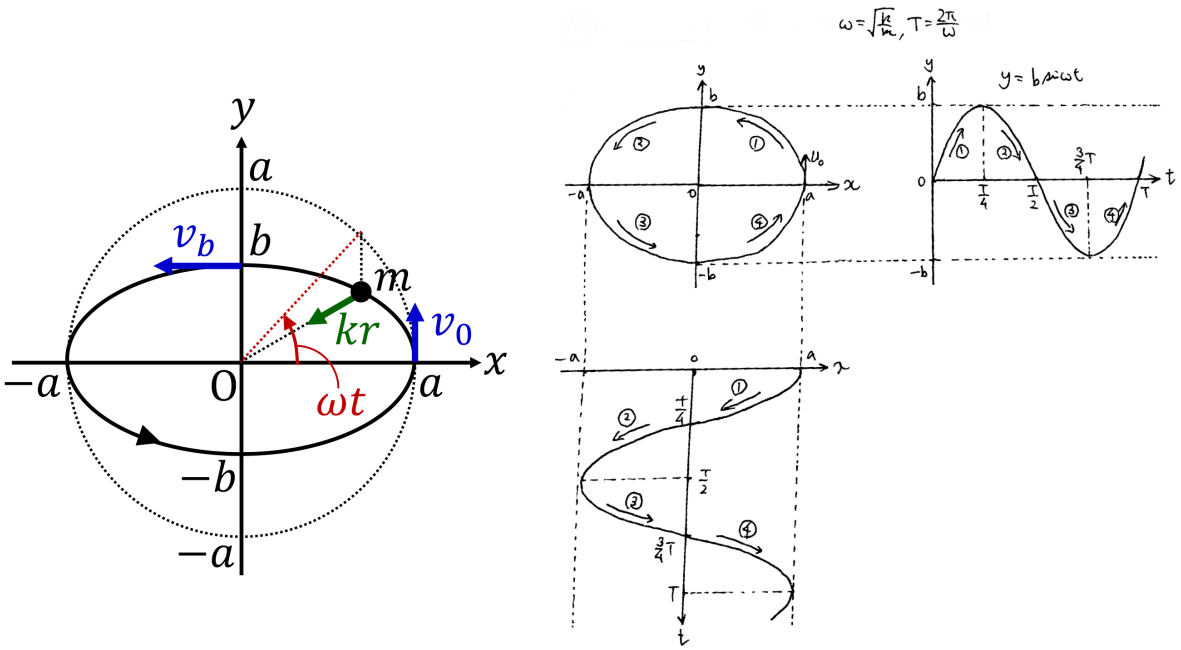


図 272　(2 次元) 等方 (性) 調和振動子の楕円運動 (104),(105)．ここでは $b \equiv v_0/\omega < a$ を仮定して軌道を描いた．

が得られるので，質点は半軸が $a, b \equiv v_0/\omega$ の楕円を描く．実際，式 (104) は楕円軌道 (105) を時刻 t でパラメトライズしており，質点の楕円運動を x 軸と y 軸に投影した運動は，単振動 (104) で与えられる (図 272 参照)．質点が y 軸上を通過する時刻 t_0 (位相 $\omega t_0 = \pi/2, \mathrm{etc.}$) の速さは

$$v_b \equiv |\dot{x}(t_0)| = a\omega$$

と求まる．

等方 (性) 調和振動子の有名な例は，振幅の小さい球面振子である [32, p.110]．ところで我々は万有引力に限らず，一般に中心力の場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = F(r)\hat{\boldsymbol{r}}$ の下で，(力の中心の周りに定義された) 角運動量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times (m\boldsymbol{v})$ (または面積速度 $h = L/2m$) が保存することを既に知っている[*84]．実際，

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \cancel{\boldsymbol{v} \times (m\boldsymbol{v})} + \boldsymbol{r} \times (m\dot{\boldsymbol{v}}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = 0$$

である[*85]．今の場合，解 (104) を代入すれば，角運動量

$$\begin{aligned} L_z =& m(xv_y - yv_x) \\ =& m\left\{(a\cos\omega t)(v_0\cos\omega t) - \left(\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t\right)(-a\omega\sin\omega t)\right\} \\ =& mav_0 \end{aligned}$$

[*84] したがって 3 次元空間における等方性調和振動子 (空間振動子) を考えたとしても，その運動は力の中心を通り $\boldsymbol{L}$ に垂直な一定の平面 $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{r} = 0$ 内に限定され，結局，2 次元の等方性調和振動子に帰着する．

[*85] 角運動量は系の回転対称性に付随する保存量である．しかしながら，この Newton 力学に基づく証明で仮定しているのは $\boldsymbol{F}$ が動径方向であることだけであり，動径成分 $F(r)$ が原点からの距離 r だけの関数であることはあからさまには用いていない．

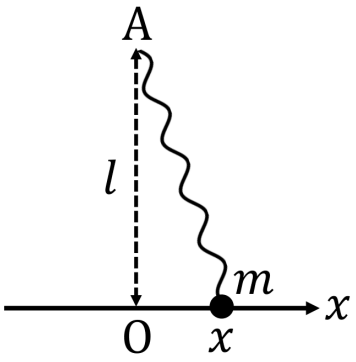


図 273　質点は x 軸上を摩擦なく運動でき，またばねは自然長 l_0 より縮んでも曲がらないとする

は初期値のまま変化しないことが直接確かめられる．そこで時刻 $t = 0, t_0$ 間における力学的エネルギーと面積速度の保存

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 + \frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}m{v_b}^2 + \frac{1}{2}kb^2, \qquad \frac{1}{2}av_0 = \frac{1}{2}bv_b$$

の各々から，改めて $v_b = a\omega$ が得られる (位置エネルギーは $\int^{\boldsymbol{r}}(-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}' = \frac{1}{2}kr^2 + \mathrm{const.}$)．また面積速度 $h = av_0/2$ と周期 $T = 2\pi/\omega$ の積は，確かに楕円の面積 πab になる．

参考　任意の初期条件に対する解

$$x = a\cos(\omega t + \alpha), \qquad y = b\sin(\omega t + \beta),$$

すなわち共通の角振動数 ω を持つ座標で記述される Lissajous (リサージュ) 曲線は楕円である (特別な場合として，質点が線分に沿って単振動を行う場合を含む) [9, pp.87–88]．そのエレガントな証明は，楕円偏光の説明において文献 [2, pp.129–131] に与えられている．

なお有界な軌道がすべて閉じるような中心力の場は，逆 2 乗則または Hooke の法則に従う力 (万有引力または等方調和振動子のように)，言い換えればポテンシャルが $1/r$ または r^2 に比例する場合の 2 通りに限られることが知られている (Bertrand の定理) [9, p.40] [32, p.122]．

D.4.3　直線に拘束された質点の微小振動

問題　図 273 のように x 軸上に運動が拘束された質量 m の質点に，自然長 l_0，ばね定数 k のばねの一端がつながれている．ばねの他端は x 軸から距離 l 隔たる定点 A に固定されている．点 A から x 軸に下ろした垂線の足を座標原点 O に選ぶとき，質点のつり合いの位置を全て求め，その安定性を判定せよ．また安定なつり合い点に関しては，その周りの微小振動を単振動で近似できるか検討し，それが可能な場合には，単振動の角振動数 ω を求めよ [1, pp.41–42]．

解　位置 x でのばねの伸びは

$$\Delta l = \sqrt{x^2 + l^2} - l_0$$

なので，質点に働く力の x 成分とポテンシャル・エネルギーはそれぞれ，

$$F(x) = -k(\sqrt{x^2 + l^2} - l_0)\frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}}, \qquad U(x) = \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2 + l^2} - l_0)^2$$

と表される．まず $F(0)=0$ なので $x=0$ は常につり合いの位置であり，x の 2 次までの近似でポテンシャルは

$$U(x)=\frac{1}{2}k(x^2-2l_0\sqrt{x^2+l^2})+\mathrm{const}\simeq\frac{1}{2}k\left(1-\frac{l_0}{l}\right)x^2+\mathrm{const.}\qquad\left(\because\sqrt{x^2+l^2}\simeq l+\frac{x^2}{2l}\right)$$

となる (同じ近似で $F(x)\simeq -kx\left(1-\frac{l_0}{l}\right)$)．もちろん

$$U''(x)(=-F'(x))=k\frac{x^2\sqrt{l^2+x^2}-l^2(\sqrt{l^2+x^2}-l_0)}{(l^2+x^2)^{3/2}},\qquad\therefore U''(0)=k\left(1-\frac{l_0}{l}\right)$$

としても同じ結果が得られる．

参考　ここから $x=0$ の近くでポテンシャルは，ばねの長さ l からの伸び

$$\delta l=\sqrt{l^2+x^2}-l\simeq\frac{x^2}{2l}\qquad\text{(自然長から伸び}\Delta l\text{ との混同に注意)}$$

と[*86]，原点での力 $F_0\equiv k(l-l_0)$ ($F(0)$ との混同に注意) の積 $F_0\delta l$ で近似できることになる (この結果を直観で見抜けたら見事である) [9, p.74].

よってつり合い点 $x=0$ は $l>l_0$ では安定であり，微小振動の角振動数は

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_0}{l}\right)}\left(=\sqrt{\frac{F_0}{ml}}\right).$$

他方 $l<l_0$ では，$x=0$ は不安定なつり合い点となる．これは質点が $x=0$ を通過するとき，ばねは $l>l_0$ ならば伸びており，$l<l_0$ ならば縮んでいることを考えれば，もっともな結果である．

次に $F=0$ となるつり合いの位置をすべて求めよう．すると l が自然長 l_0 よりも短い場合には，直観的にも納得がいくように，ばねが自然長となる位置

$$x=\pm x_0,\qquad x_0\equiv\sqrt{{l_0}^2-l^2}$$

が安定なつり合い点となることが分かる (以上でつり合いの位置は尽くされる)．実際，

$$U''(x_0)=k\left(1-\frac{l^2}{{l_0}^2}\right)>0$$

であり，微小振動の角振動数は

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}\left(1-\frac{l^2}{{l_0}^2}\right)}.$$

もちろんポテンシャルを x_0 からの変位 $\xi\equiv x-x_0$ で展開しても同じ結果が得られる：

$$\sqrt{x^2+l^2}=\sqrt{(x_0+\xi)^2+l^2}\simeq\sqrt{{l_0}^2+2x_0\xi}\simeq l_0+\frac{x_0}{l_0}\xi,\qquad\therefore U(x)\simeq\frac{1}{2}k\frac{{x_0}^2}{{l_0}^2}\xi^2.$$

ばねの伸び $\sqrt{(x_0+\xi)^2+l^2}-l_0\simeq\frac{x_0}{l_0}\xi$ が既に ξ の 1 次の微小量であることに注意すると，同じ近似で力は

$$F(x)\simeq -k\frac{x_0}{l_0}\xi\cdot\frac{x_0}{\sqrt{{x_0}^2+l^2}}=-k\frac{{x_0}^2}{{l_0}^2}\xi.$$

参考　なおポテンシャルの概形は図 274 のようである．

[*86] ここでは $\theta\equiv\angle\mathrm{A}$ を用いて $\delta l\simeq x\sin\theta\simeq\frac{x^2}{l}$ としてはいけない．最初の近似に伴う誤差 $l(1-\cos\theta)\simeq\frac{l\theta^2}{2}\left(\simeq\frac{x^2}{2l}\right)$ が θ の 2 次程度だからである．

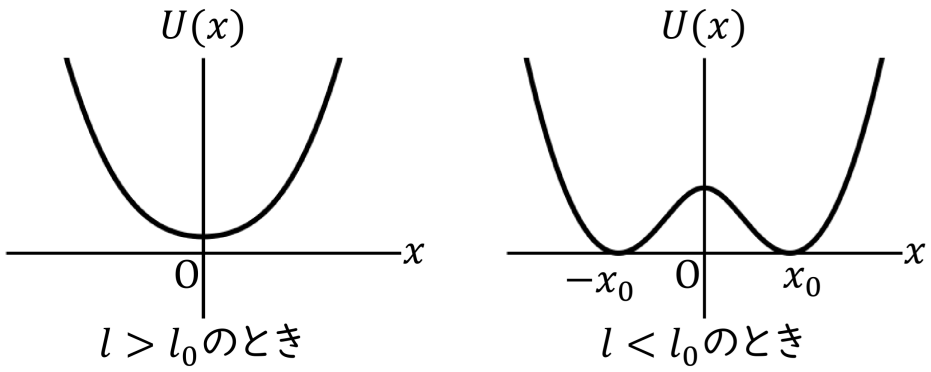


図 274　ポテンシャル $U(x) = \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2+l^2} - l_0)^2$ の概形

D.4.4　弾性力 $\sim x$ と磁場 $\sim 1/x$ による Lorentz 力の下での微小振動

問題　質量 m の物体の x 軸に沿う 1 次元的な運動を考える．$k > 0, a > 0$ に対して，位置 $x(< 0)$ で物体に働く力の x 積分が

$$F(x) = -k\left(x + \frac{1}{2}a\right) + \frac{ka^2}{2(x+a)} \tag{106}$$

で与えられるとき，$x < a$ の範囲でつり合いの位置を全て求め，その安定性を判定せよ．また安定なつり合い点に関しては，その周りの微小振動を単振動で近似できるか検討し，それが可能な場合には，単振動の角振動数 ω を求めよ．

解　$F(x) = 0$ を解くと $x = 0, a/2$．$F'(0) = -k/2 < 0$ より $x = 0$ は安定なつり合いの位置であり，その周りの単振動の角振動数は $\omega = \sqrt{k/2m}$．また $F'(a/2) = k > 0$ より，$x = a/2$ は不安定なつり合いの位置である．

具体的に上式 (106) の力を実現するには，次のような系を考えれば良い．まず図 275 のように x 軸と垂直を保って運動する質量 m の導体棒 (長さ l) を考え，ばね定数 k，自然長の位置 x_0 のばねを $x < 0$ の側から繋ぐ．次に $x = a$ に導体棒と平行な (無限に長い) 導線を固定して，一定の電流 I を流すと，導体棒の位置 x には，磁束密度 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(a-x)}$ の磁場が作られる．よって電源を用いて，導体棒にも常に一定の電流 I を流しておけば，導体棒は磁場から Lorentz 力 lIB を受ける (電流や Lorentz 力の向きは図 275 を参照)．したがって $x < a$ において導体棒に働く合力は

$$F(x) = -k(x - x_0) + \frac{b}{a-x}, \qquad b \equiv \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi} \geq 0$$

と表される．(電流 $I = 0$ のとき $b = 0$ となって，ばねの復元力のみによる単振動に帰着する．)

ここで問題設定の“舞台裏”を明かす．つり合いの位置 x は

$$0 = F(x) = -\frac{1}{a-x}[kx\{x - (a + x_0)\} + (kax_0 + b)]$$

を満たす．簡単のために，2 次方程式 $[\cdots] = 0$ の一方の解を原点 $x = 0$ に一致させたい．そのためには電流 I を調節して $b = -kax_0$ とすれば良く，このとき $x_0 \leq 0$ が必要である．するともう一方の解は $x = x_0 + a$ となる．本問では $x_0 = -a/2$ と選んである．

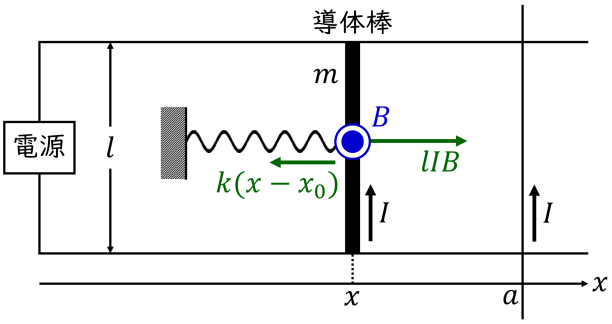


図 275　力 (106) の具体的な系による実装

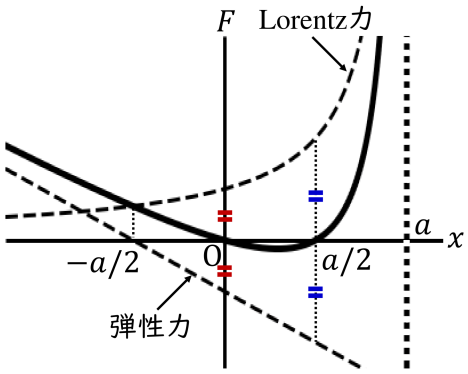


図 276　弾性力と Lorentz 力の合力 (106) のグラフ (実線)

式 (106) の合力は，第 1 項の弾性力と第 2 項の Lorentz 力のグラフを重ね合せた，図 276 のような F-x グラフで表される[*87]．ここから $x=0$ が安定な，$x=a/2$ が不安定なつり合いの位置であることが読み取れる．

D.5　2 体の相互作用・衝突 (2-7 節，2-8 節) に関するいくつかの演習

2 体の運動を重心運動と相対運動に分けることについては 2-8 節で，2 体問題を等価な 1 体問題へ帰着させることについては 2-12 節の注解で説明した．

■反発係数 e について　図 277 のような 1 次元 (1 直線上) の衝突では，A が B に追いつくためには速度成分 $v_1 > V_1$ が必要である．また反発係数を定義する際には，A が B を突き抜けて追い越さないことが仮定されているので[*88]，衝突後の速度成分について $v_2 < V_2$ が成り立つ．これを踏まえると，1 次元の衝突に関して反発係数の定義は

$$e = \frac{|\text{衝突後の相対速度}|}{|\text{衝突前の相対速度}|} = \frac{V_2 - v_2}{v_1 - V_1}$$

と書ける．

D.5.1　非弾性衝突に関する“間違い探し”

質量 m の物体 A が速度 v で，同じく質量 m を持つ静止した物体 B に衝突した．衝突後に A,B が 1 体となって運動する場合の，その速度 V を求める問題を考える．このとき次の答案の誤りを訂正せよ．

エネルギー保存則 $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(m+m)V^2$ より $V = v/\sqrt{2}$.　　(誤り！)

解　A,B が 1 体となるということは (完全) 非弾性衝突を意味しており，その定義により力学的エネルギーは失われる．よってエネルギー保存則を適用している点に誤りがある．正しくは運動量保存則 $mv = (m+m)V$ より $V = v/2$.

---

*87 重ね合せのグラフの概形を把握するには，特に一方の力がゼロになる位置 x で容易にグラフ上の点をプロットできること，合力が $x \to a$ で Lorentz 力に，$x \to -\infty$ で弾性力に漸近することに注意すると良い．(もっともばねは有限の長さしか縮まないため，実際には $x < 0$ の定義域も限られる．)

*88 しかし容易に分かるように，物体が同質量の静止した物体を一定速度ですり抜けることは，保存則には違反しない．また我々は弾丸が物体 (木片など) を突き抜ける問題も扱う (D.5.3 節)．

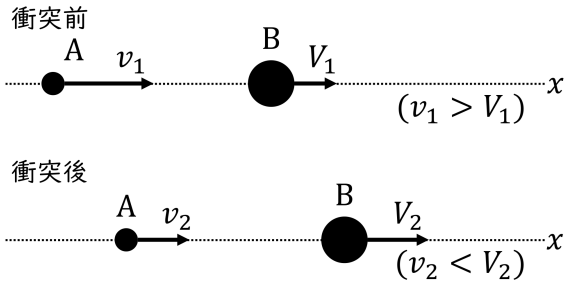


図 277　1 次元の衝突の状況設定．ここでは矢印に速度の大きさではなく，x 成分を添えた [1, p.22].

D.5.2　箱との繰り返し衝突

問題　図 278 のように 1 辺が x 軸に沿って静止した質量 M の升状 (あるいは蓋のついた直方体) の箱の中で，質量 m の球に x 成分 $v_0(>0)$ の初速度を与えたところ，球は箱の両側の内壁との衝突を繰り返した．球と壁の反発係数を e とするとき，n 回目の衝突後の球と箱の速度 v_n, V_n をそれぞれ求めよ．また長時間が経った後の 2 体の運動を議論せよ [1, pp.23–24].

解

運動量保存則　$mv_0 = mv_1 + MV_1 = \cdots = mv_n + MV_n,$

反発係数の式　$-e = \dfrac{v_1 - V_1}{v_0} = \dfrac{v_2 - V_2}{v_1 - V_1} = \cdots = \dfrac{v_n - V_n}{v_{n-1} - V_{n-1}}, \qquad \therefore v_n - V_n = (-e)^n v_0.$

2 式を連立して解くと

$$v_n = \frac{m + (-e)^n M}{m + M} v_0, \qquad V_n = \frac{\{1 - (-e)^n\} m}{m + M} v_0$$

を得る[*89]．$n \to \infty$ で 2 体の速度 v_n, V_n は共通の値 $\frac{m}{m+M} v_0 \equiv V_{\mathrm{CM}}$ (一定の重心速度) に近づく．このとき系が失うエネルギー

$$\frac{1}{2} m {v_0}^2 - \frac{1}{2}(m + M) {V_{\mathrm{CM}}}^2 = \frac{1}{2} \frac{mM}{m + M} {v_0}^2$$

は初めの相対運動のエネルギーに一致している．

弾性衝突の場合 ($e = 1$)，2 体の速度 (v_n, V_n) は 2 つの値

$$(v_0, 0), \qquad \left(\frac{m - M}{m + M} v_0, \frac{2m}{m + M} v_0 \right)$$

を繰り返す．つまり最初の衝突で箱は動き出し，次に球が反対側の壁に衝突すると箱は止まる．この繰り返しによって箱は $+x$ 向きに進んで行く．これは重心の速度が一定であることを踏まえれば納得がいく．

相対運動と重心運動に関する一般論に基づき，問題を再考しよう．繰り返しになるが，運動量保存則より，重心の速度 $V_{\mathrm{CM}} = \frac{m}{m+M} v_0$ は一定である．他方，相対速度 $u_n \equiv v_n - V_n$ は衝突のたび大きさが e 倍になり，また直線上の跳ね返りでは符号が入れ替わるから，

$$u_1 = -ev_0, \qquad u_2 = (-e)^2 v_0, \qquad \cdots, \qquad u_n = (-e)^n v_0$$

[*89] よって $v_1 = \frac{m - eM}{m + M} v_0 < 0$ となるには，$Me > m$ が必要である．他方，箱の測度は常に $V_n \geq 0$ となっている．

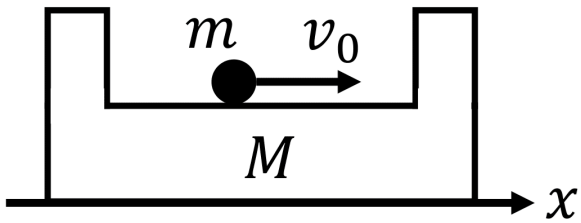


図 278　小球は右側の壁と 1 回目の衝突を，左側の壁と 2 回目の衝突を行い，箱の中で往復を繰り返す．球と箱，箱と床 (x 軸) の間に摩擦はないとする．

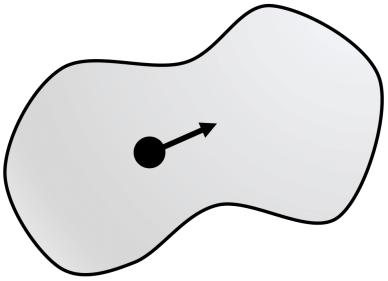


図 279　3 次元空間での容器との繰り返し衝突

となる (これは既に得た結果に一致している)．2 体の重心系で見た速度に重心系の並進速度 V_{CM} を加えると，再び

$$v_n = V_{\mathrm{CM}} + \frac{M}{m+M}u_n = \frac{m+(-e)^n M}{m+M}v_0, \qquad V_n = V_{\mathrm{CM}} - \frac{m}{m+M}u_n = \frac{\{1-(-e)^n\}m}{m+M}v_0$$

が求まる．

エネルギー的な考察に移ろう．重心運動のエネルギー $\frac{1}{2}(m+M){V_{\mathrm{CM}}}^2$ は一定であり，換算質量を $\mu = \frac{mM}{m+M}$ として，相対運動のエネルギー $E_n \equiv \frac{1}{2}\mu {u_n}^2$ だけが衝突のたびに e^2 倍に減少していく．最終的には初めの相対運動のエネルギー $E_0 = \frac{1}{2}\mu {v_0}^2$ が，$n \to \infty$ のとき全て失われ，

$$E_n = e^{2n}E_0 \to 0$$

となる (n 回目の衝突で失われるエネルギーも $E_{n-1} - E_n = e^{2n-2}(1-e^2)E_0 \to 0$)．これは十分時間が経つと，2 体が共通の速度 V_{CM} に近づき，1 体となって運動することと整合している．

1 次元の衝突の問題に限らず，図 279 のヒョウタンのような任意の形状の容器内で球が衝突を繰り返す場合にも，運動量保存則より系は全体として一定の重心速度で並進し，また非弾性衝突のたびに相対運動のエネルギーが失われていくことには変わりない．

D.5.3　弾丸との“非弾性衝突”

図 280 のように時刻 $t=0$ において，静止した質量 M の「物体」の表面に質量 m の弾丸が初速 v_0 で入射したとする．その後，弾丸は「物体」の内部を突き進み，時刻 $t=T$ で弾丸は「物体」の内部で「物体」に対して静止したとする．時刻 $t=T$ における「物体」と弾丸の共通の速度を V_0 とおく．図 280 のように途中の一般の時刻 t における弾丸と「物体」の位置をそれぞれ座標 x, X で表す．また各々の速度を順に v, V とし，弾丸が「物体」に及ぼす力を $f(t)$ とすると (いずれも x 成分)，運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -f(t), \qquad M\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = +f(t) \tag{107}$$

と書ける．ここで弾丸と「物体」の及ぼし合う力 $\pm f(t)$ は非自明であるため，2 体の時間追跡は困難である．しかしながら，一般論としていくらかの結論を引き出せる．まず式 (107) の 2 式を辺々足すと，運動量保存則

$$mv + MV = mv_0 = (m+M)V_0$$

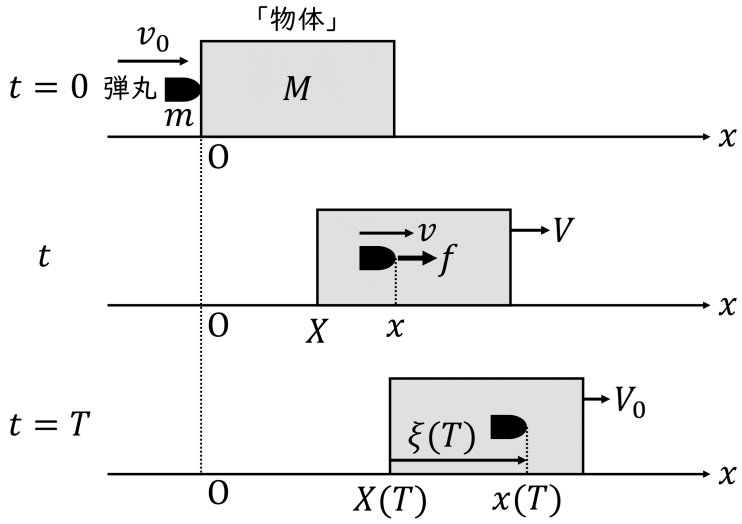


図 280　弾丸と「物体」(例えば木片) は x 軸 (床) に沿って 1 次元的に運動し，「物体」と床の間に摩擦はないとする．

が成り立つことが分かる (作用・反作用の法則を仮定したことが本質的である)．また時刻 T までの過程全体は**非弾性衝突**と見なせるので，$\mu \equiv \frac{mM}{m+M}$ を換算質量として，系は相対運動のエネルギー $\frac{1}{2}\mu {v_0}^2$ を失うはずである．

問題　系の失うエネルギーを直接計算し，このことを確かめよ．

解　運動量保存則を用いて V_0 を消去すると，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2-\frac{1}{2}(m+M){V_0}^2=\frac{1}{2}m{v_0}^2-\frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{m}{m+M}v_0\right)^2=\frac{1}{2}m{v_0}^2\left(1-\frac{m}{m+M}\right)=\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}{v_0}^2.$$

他方で系の失ったエネルギーを仕事に関係付けることも可能である．運動方程式 (107) は仕事と運動エネルギー変化の関係

$$\frac{1}{2}mv^2(t)-\frac{1}{2}m{v_0}^2=-\int_0^t f(t')v(t')\mathrm{d}t',\qquad \frac{1}{2}MV^2(t)=+\int_0^t f(t')V(t')\mathrm{d}t'$$

を含意する．2 式を辺々足して $t=T$ とおき，無限小時間 $\mathrm{d}t'$ のうちに弾丸が「物体」に対して進んだ変位 $\mathrm{d}\xi(t')\equiv(v(t')-V(t'))\mathrm{d}t'$ を導入すると，時間 T における系全体のエネルギー変化は

$$\frac{1}{2}(m+M){V_0}^2-\frac{1}{2}m{v_0}^2=-\int_0^T f(t')\mathrm{d}\xi(t')$$

と表される．右辺において弾丸と「物体」が正味でされた仕事はゼロでなく，弾丸の「物体」に対する相対的な変位で表されており，系全体はエネルギーを失うことが見て取れる[*90]．

次に 2 体問題を等価な 1 体問題に帰着させることを考える．2 体の相対座標 $\xi\equiv x-X$ は，ξ を位置ベクトルとし，μ を質量に持つ仮想的な物体の，弾丸が受ける力と同じ $-f(t)$ の下での運動方程式

$$\mu\frac{\mathrm{d}^2\xi(t)}{\mathrm{d}t^2}=-f(t) \tag{108}$$

[*90] 同様に弾丸が「物体」を貫通する場合も非弾性衝突となる．

に従う．

問題　我々は既にこのことを一般論として示している．上式 (108) を運動方程式 (107) から改めて直接導け．

解　第 1 式の $1/m$ 倍と第 2 式の $1/M$ 倍を辺々引くと，

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) f(t) = -\frac{1}{\mu} f(t)$$

が得られる．最後の等号で換算質量の定義式を $\frac{1}{m} + \frac{1}{M} = \frac{1}{\mu}$ と書けることに注意した．

上式 (108) を初期条件 $\dot{\xi}(0) = v_0$ (相対速度の初期値) の下で積分すると，

$$\frac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t} = v_0 - \frac{1}{\mu} I(t), \qquad I(t) \equiv \int_0^t f(t')\mathrm{d}t' : \text{弾丸が「物体」に与えた力積}$$

となる．これをさらに初期条件 $\xi(0) = 0$ の下で積分すると，

$$\xi(t) = v_0 t - \frac{1}{\mu} \int_0^t I(t')\mathrm{d}t'$$

を得る．$\xi(t)$ は時刻 t までに弾丸が「物体」の中を進んだ距離に他ならず，右辺の第 1 項 $v_0 t$ は運動が「物体」に遮られなかった場合の弾丸の位置を表している．

一般論として言えるのはこの辺りまでだろう．話を進めるために，例えば一定の力 $f(t) = F$ を仮定すれば，等加速度運動の問題に帰着する．

D.5.4　2 原子分子モデルの並進と振動

問題　ばね定数 k のばねで繋がれた質点 A (質量 m) と質点 B (質量 M) がそれぞれ，x 軸に沿ってばねの自然長 l だけ隔たる位置 $x = 0, l$ に置かれている．時刻 $t = 0$ で質点 A に初速度 v_0 を与えたとき，後の時刻 $t(\geq 0)$ における質点 A,B の位置 $x(t), X(t)$ を求めよ．

解　2 体の運動を重心運動とその周りの相対運動に分けて考える．まず運動量保存則より，重心は一定の速度 $V_{\mathrm{CM}} \equiv \frac{m}{m+M} v_0$ で等速直線運動を行い，その位置は

$$X_{\mathrm{CM}}(t) = \frac{M}{m+M} l + V_{\mathrm{CM}} t$$

と表される．次に重心周りの 2 体の相対運動を，等価な 1 体問題に帰着させて考えよう．換算質量 $\mu \equiv \frac{mM}{m+M}$ を用いて，相対位置ベクトル $\xi(t) = X(t) - x(t)$ は運動方程式

$$\mu \ddot{\xi} = -k(\xi - l)$$

に従う[*91]．これを与えられた初期条件 $\xi(0) = l, \dot{\xi}(0) = -v_0$ の下で解くと

$$\xi(t) = l - a \sin \omega t, \qquad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}}, \qquad a \equiv \frac{v_0}{\omega}$$

[*91] 右辺には相対位置ベクトルの先端の質点 (我々の選択では B) に働く力を書く．

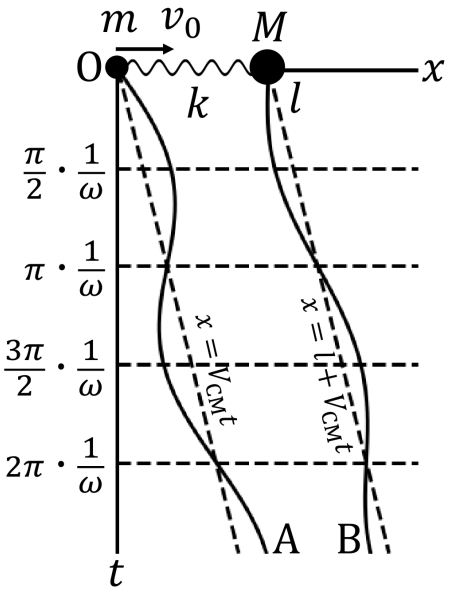


図 281　重心速度 V_{CM} での並進 (破線) と相対運動 (単振動) の重ね合せ (実線)．参考：無次元化した時間軸 ωt を用いれば，その主要値 $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi, \cdots$ は単に位相そのものとなる．

となるので，2 体の位置は

$$
\begin{aligned}
x(t) =& X_{\mathrm{CM}}(t) - \frac{M}{m+M}\xi(t) = V_{\mathrm{CM}}t + \frac{M}{m+M}a\sin\omega t, \\
X(t) =& X_{\mathrm{CM}}(t) + \frac{m}{m+M}\xi(t) = l + V_{\mathrm{CM}}t - \frac{m}{m+M}a\sin\omega t
\end{aligned}
$$

と求まる[*92]．これは一定の重心速度 V_{CM} での並進運動と，角振動数 $\omega = \sqrt{k/\mu}$ での振動の重ね合せを表している (図 281 参照)．

参考　原子間の中心力[*93]による相互作用は，原子の安定な平衡位置の近くではばねの弾性力で近似できるので (D.4 節)，質点をばねで繋いだ系は 2 原子分子の簡単な古典的モデルとなる．その空間における位置は重心の位置ベクトル $\boldsymbol{R}$ と相対位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ で指定できる．$\boldsymbol{r}$ を球座標 (r, θ, ϕ) で表すと，$\boldsymbol{R}$ の変化は分子の全体としての並進に，r の変化は分子の振動に，向き (θ, ϕ) の変化は分子の回転に対応する．よって 2 原子分子の任意の運動は，並進，振動，回転に分解できることになる．

D.5.5　連星

距離 r だけ隔たる位置で互いに大きさ α/r^2 $(\alpha > 0)$ の引力を及ぼし合う，質点 A,B (それぞれ質量 m, M，位置 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}, \boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}$) の運動を考える．伝統的な Kepler 問題の設定では，G を万有引力定数として $\alpha = GMm$ である．換算質量を $\mu \equiv \frac{mM}{m+M}$ と書くと，相対位置ベクトル $\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{r}_{\mathrm{A}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}$ は運動方程式

$$
\mu\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\alpha}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}
$$

[*92] 見やすさを優先して記号 $V_{\mathrm{CM}}, a, \omega$ を導入したが，必要に応じて代入により，これらを与えられた文字 k, m, M, v_0 だけで表せる．

[*93] 相対位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の方向に沿い，その成分が $r = |\boldsymbol{r}|$ だけの関数である力 $\boldsymbol{F}$ のこと．r だけの関数 $U(r)$ をポテンシャルに持つ力と言うこともできる (実際 $\boldsymbol{\nabla}$ を球座標で表せば $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}U = -\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$)．

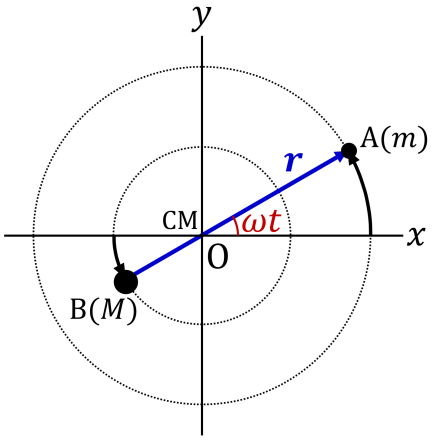


図 282　連星の円運動

に従う．これは静止した太陽の周りの惑星の運動方程式と同じ形なので，適当な初期条件を選べば，与えられた平面 (xy 平面に選ぼう) 内で一定の半径 r と角速度 ω での $\boldsymbol{r}$ の等速円運動

$$\boldsymbol{r}(t) = r(\cos\omega t, \sin\omega t)$$

を実現できる．このとき運動方程式は円運動の方程式 $\mu r\omega^2 = \alpha/r^2$ を与えるので，

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{\mu r^3}}$$

と定まる．

重心系で見ると質点 A,B は，位置がそれぞれ

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}(t) = \frac{M}{m+M}\boldsymbol{r}(t), \qquad \boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}(t) = -\frac{m}{m+M}\boldsymbol{r}(t)$$

と表されるので，2 体は図 282 のように互いの重心 (CM) の周りを回る．天体に関して言えば，これは連星のモデルである．$m \ll M$ の極限では

$$\mu \to m, \qquad \boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}(t) \to \boldsymbol{r}(t), \qquad \boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}(t) \to 0$$

となるので，重い物体 B (例えば太陽) は原点に静止しており，その周りを惑星 A が回ると見なせる．この極限で質点 A の運動は，2 体問題に等価な 1 体問題そのもので記述されることになる．

重心系で見た系の全エネルギーは，

$$\text{相対運動のエネルギー}\ \frac{1}{2}\mu(r\omega)^2 = \frac{\alpha}{r}, \qquad \text{相互作用のポテンシャル}\ -\frac{\alpha}{r}$$

の和 $E = -\alpha/2r$ で与えられる[*94]．2 体の全角運動量

$$L = m\left(\frac{M}{m+M}r\right)^2\omega + M\left(\frac{m}{m+M}r\right)^2\omega = \mu r^2\omega\,(=\sqrt{\mu\alpha r}) \tag{109}$$

[*94] 読者は Bohr の水素原子モデルにおいて，この結果を導いたことがあるだろう．ただし，ここまでは古典論だけに基づく結果である．

もまた，等価な 1 体問題での値と一致している．

ところで一般に中心力の下での運動 (質量 μ の 1 体問題を考える) では，角運動量保存則より回転座標系に現れる遠心力は r だけの関数となり，ポテンシャル $L^2/2\mu r^2$ を持つ．そして動径 r 方向の 1 次元的な運動は，有効ポテンシャル

$$U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

で記述される ($U(r)$ はもとの中心力のポテンシャル，2-12 節)．我々の考えている円運動では

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \qquad \frac{L^2}{2\mu r^2} = \frac{\alpha}{2r}\ (\because \text{式 (109)}), \qquad \therefore U_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{2r}$$

であり，$\dot{r} = 0$ に注意すると，質量 μ の 1 体のエネルギーは

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{2r}$$

と求まる．これは 2 体の全エネルギーに一致している．実際このことは，重心系で見た 2 体の全エネルギー $\frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2 + U(r)$ が，等価な 1 体問題のそれと同じ表式であることから，あらかじめ期待される結果である．

さて，Bohr の水素原子モデルでは式 (109) の角運動量に量子条件 (7-5 節)

$$L = n\hbar \qquad (\hbar \equiv h/2\pi,\ h : \text{Planck 定数},\ n = 1, 2, \cdots)$$

を課すのが正確であると考えられる．(ただし Coulomb の比例定数 k と素電荷 e を用いて $\alpha = ke^2$ と設定する．) このとき許容される動径とエネルギーは

$$r = r_n \equiv \frac{(n\hbar)^2}{\mu\alpha}, \qquad E = E_n \equiv -\frac{\alpha}{2r_n} = -\frac{\mu\alpha^2}{2(n\hbar)^2} \tag{110}$$

と離散化される[*95]．もっとも水素原子では，電子の質量 $m = m_e$ が陽子の質量 $M \fallingdotseq 1.84 \times 10^3 m_e$ に比べて極めて軽いため，$\mu \simeq m_e$ である．したがって上式 (110) は静止した陽子の周りを電子が回る，初等的な Bohr の原子モデルによる結果とほとんど変わらない．しかし電子の代わりに，電子よりも重い質量 $m \fallingdotseq 207 m_e$ を持つミューオン μ^- が陽子からの Coulomb 力に束縛されている系——**ミューオン原子**——では，陽子が重心の位置に静止しているという描像はもはや良い近似にならない．μ^- も電子と同じ電荷を持つので，パラメータの値 $\alpha = ke^2$ は変更されないものの，式 (110) のように換算質量 μ を用いる必要がある．

D.6 粒子の衝突の一般論

演習書 [1, pp.31–35] における衝突の問題の背景を見ておく．

D.6.1 粒子の崩壊 [9, pp.50–52]

■2 粒子への崩壊，C 系 粒子 (内部エネルギー $E_{\text{内部}}$) が《自然に》(すなわち，外場の介入なしに) 2 つの粒子 (質量 m_1, m_2，内部エネルギー $E_{1\ \text{内部}}, E_{2\ \text{内部}}$) へと崩壊する過程を考える．粒子間の相互作用の具体的な種類に依らずに，運動量とエネルギーが保存する．崩壊する粒子の静止系 (慣性中心系または C 系) において

- 運動量保存則

  → 2 粒子は共通の大きさ p_0 の反対向きの運動量で離れてゆく

[*95] ここに $\alpha = ke^2$ と $\hbar = h/2\pi$ を代入すると，係数が煩雑になる．

- エネルギー保存則

$$
\begin{aligned}
E_{\text{内部}} &= E_{1\ \text{内部}} + \frac{{p_0}^2}{2m_1} + E_{2\ \text{内部}} + \frac{{p_0}^2}{2m_2} \\
&= E_{1\ \text{内部}} + E_{2\ \text{内部}} + \frac{{p_0}^2}{2m}, \qquad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\text{: 換算質量} \\
\rightarrow \qquad &\text{《崩壊エネルギー》}\ \ \varepsilon \equiv E_{\text{内部}} - E_{1\ \text{内部}} - E_{2\ \text{内部}} = \frac{{p_0}^2}{2m}
\end{aligned}
$$

から C 系における各粒子 $i = 1, 2$ の速度 $v_{i0} = p_0/m_i$ が決定される．

■2 粒子への崩壊，L 系　崩壊する前の粒子が速度 $\boldsymbol{V}$ を持つ基準系 (実験室系または L 系) に移る．崩壊によってできた 2 粒子の 1 つに注目し，その

- C 系に対する速度を $\boldsymbol{v}_0$　($\boldsymbol{V}$ とのなす角を θ_0)
  - 既に得られている
- L 系に対する速度を $\boldsymbol{v}$　($\boldsymbol{V}$ とのなす角を θ)

と書く．$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{V} = \boldsymbol{v}_0$ により，次が見いだされる．

- L 系における飛行方向 θ と速さ v の関係　$v^2 + V^2 - 2vV\cos\theta = {v_0}^2$
  - $V < v_0$ の場合，粒子は任意の角度 θ の方向へ飛ぶことができる
  - $V > v_0$ の場合，粒子は前方 $\theta \leq \theta_{\max}$ へだけ飛ぶことができる ($\sin\theta_{\max} = v_0/V$)

  (以上，図 283, 図 284 を参照)
- L 系と C 系における飛行方向 θ と θ_0 の関係

$$
\cos\theta_0 = -\frac{V}{v_0}\sin^2\theta \pm \cos\theta\sqrt{1 - \frac{V^2}{{v_0}^2}\sin^2\theta}. \tag{111}
$$

  (図 283, 図 284 から読み取れる関係 $\tan\theta = \frac{v_0 \sin\theta_0}{v_0\cos\theta_0 + V}$ を
  $\cos\theta_0$ について解くと得られる［D.6.2 節で確認］．)
  - $V < v_0$ の場合，複号は $+$ をとる
  - $V > v_0$ の場合，2 つの符号に対応した 2 つの θ_0 の値がある

D.6.2　前節について

■解放される崩壊エネルギー $\varepsilon = {p_0}^2/2m$ について　これは崩壊後の 2 粒子の相対運動のエネルギーになっている．なるほど，C 系では 2 粒子の速度は $v_1 = p_0/m_1, v_2 = p_0/m_2$ と表されるため，m を換算質量として相対速度 v は，通常の速度と運動量の関係

$$
v = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)p_0 = \frac{p_0}{m}
$$

を満たすことになる．よって相対運動のエネルギーは $mv^2/2 = {p_0}^2/2m$ と書き換えられる．

■C 系における飛行の角度 θ_0　図 283, 図 284 のダイアグラムにおいて，C 系における崩壊粒子の速度 $\boldsymbol{v}_0$ と L 系における崩壊前の粒子の速度 $\boldsymbol{V}$ のなす角として θ_0 が定義される．このとき C 系における飛行の角度 θ_0 は，それを測る基準となる方向が $\boldsymbol{V}$ であるため，C 系だけでなく，C 系に対する L 系の速度 $-\boldsymbol{V}$ にも関係することになる．

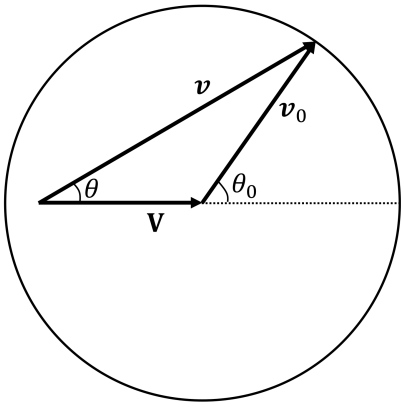


図 283　$V < v_0$ のとき

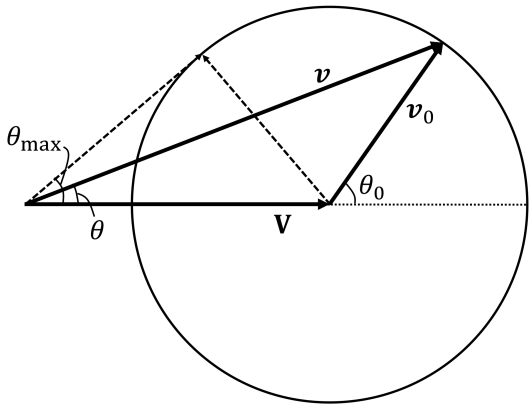


図 284　$V > v_0$ のとき ($\tan\theta_{\mathrm{max}} = v_0/V$)

■θ_0 と θ の関係 (111) の導出　図 283, 図 284 から読み取れる関係

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0 + V/v_0}, \qquad \therefore \left(\cos\theta_0 + \frac{V}{v_0}\right)\tan\theta = \sin\theta_0$$

を両辺平方して整理すると，$\cos\theta_0$ についての 2 次方程式

$$\cos^2\theta_0 + 2\frac{V}{v_0}\sin^2\theta\cos\theta_0 + \left(\frac{V}{v_0}\right)^2\sin^2\theta - \cos^2\theta = 0$$

になる．よって

$$\begin{aligned}\cos\theta_0 &= -\frac{V}{v_0}\sin^2\theta \pm \sqrt{\left(\frac{V}{v_0}\right)^2\sin^4\theta - \left(\frac{V}{v_0}\right)^2\sin^2\theta + \cos^2\theta} \\ &= -\frac{V}{v_0}\sin^2\theta \pm \cos\theta\sqrt{1 - \left(\frac{V}{v_0}\right)^2\sin^2\theta} : (111)\end{aligned}$$

を得る．

D.6.3　粒子の弾性衝突 [9, pp.54–58]

2 粒子 (質量 m_1, m_2) の弾性衝突を考える．弾性衝突において粒子の内部エネルギーは変化しないため，エネルギー保存則において考慮しなくて良い (このことは弾性衝突の定義に含まれている).

C 系において

- 運動量保存則 $\cdots$ 衝突前後で全運動量がゼロ
- エネルギー保存則 $\cdots$ 衝突前後で全運動エネルギーが不変

であることから，衝突後に 2 粒子の速度の方向は変化するが，それらの大きさは変わらず，また互いに逆向きであることも衝突前と変わらないことが結論される (図 285 参照，衝突後の方向 $\boldsymbol{n}_0$ は粒子の相互作用の法則，および衝突時における粒子の相互位置に依存する).

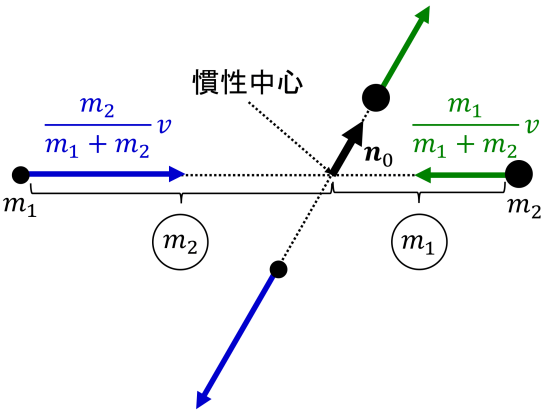


図 285　C 系から見た 2 粒子の弾性衝突

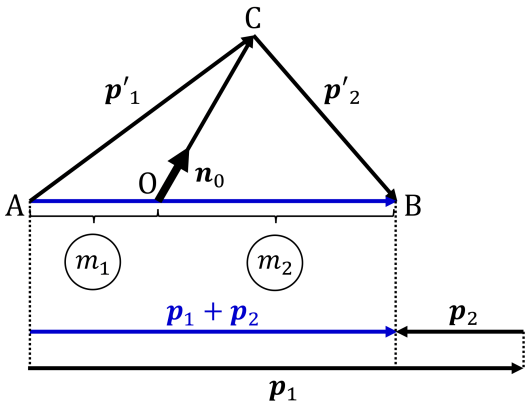


図 286　L 系における衝突後の運動量の作図

ここから L 系における衝突前の 2 粒子の運動量 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ と，衝突後の 2 粒子の運動量 $\boldsymbol{p}'_1, \boldsymbol{p}'_2$ の関係

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}'_1 &= mv\boldsymbol{n}_0 + \frac{m_1}{m_1+m_2}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2),\\ \boldsymbol{p}'_2 &= -mv\boldsymbol{n}_0 + \frac{m_2}{m_1+m_2}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)\end{aligned} \tag{112}$$

が得られる (導出は D.6.4 節，$m \equiv m_1m_2/(m_1+m_2)$：換算質量，$v \equiv |\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|$：相対速度)．$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ および $\boldsymbol{n}_0$ が与えられたとき，$\boldsymbol{p}'_1, \boldsymbol{p}'_2$ は以下の手順で作図することができる (図 286 参照)．

1. ベクトル $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$ を描き，これを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とする．
2. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を質量比 m_1 対 m_2 に内分する点 O をとる．
3. $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = mv\boldsymbol{n}_0$ により定まる点 C をとる (m：換算質量)．
4. このとき衝突後の運動量 $\boldsymbol{p}'_1, \boldsymbol{p}'_2$ は，$\boldsymbol{p}'_1 = \overrightarrow{\mathrm{AC}}, \boldsymbol{p}'_2 = \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ によって与えられる．

特に L 系に対して粒子 2 が静止しており，ここに粒子 1 が相対速度 v で入射する場合のダイアグラムは図 287 のようになる[*96]．衝突後の 2 粒子の運動量 $\boldsymbol{p}'_1, \boldsymbol{p}'_2$ のなす角は $\theta_1 + \theta_2$ で与えられる (図 288 参照)．ここから次のことが分かる．

- C 系での粒子 1 の方向転換の角度 χ を用いて $\theta_1, \theta_2, v'_1, v'_2$ を表せる．具体的には

$$\tan\theta_1 = \frac{m_2\sin\chi}{m_1+m_2\cos\chi}, \qquad \theta_2 = \frac{\pi-\chi}{2}, \tag{113}$$

$$v'_1 = \frac{\sqrt{{m_1}^2+{m_2}^2+2m_1m_2\cos\chi}}{m_1+m_2}v, \qquad v'_2 = \frac{2m_1v}{m_1+m_2}\sin\frac{\chi}{2} \tag{114}$$

  となる［D.6.4 節で補足］．
- $m_1 < m_2$ ならば $\theta_1 + \theta_2 > \pi/2$，$m_1 > m_2$ ならば $\theta_1 + \theta_2 < \pi/2$ となる［D.6.4 節で補足］．
- 正面衝突 ($\chi = \pi$) のとき，$v'_2 \propto \sin(\chi/2)$:(114) が，

[*96] この場合 $\overline{\mathrm{OB}} = \frac{m_2}{m_1+m_2}p_1 = mv$ は半径に一致する．

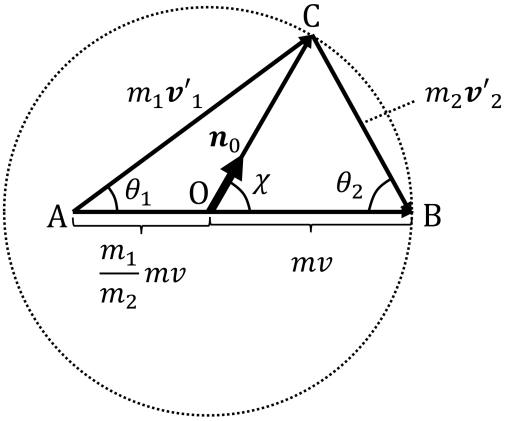


図 287　衝突前に粒子 2 が静止している場合のダイアグラム

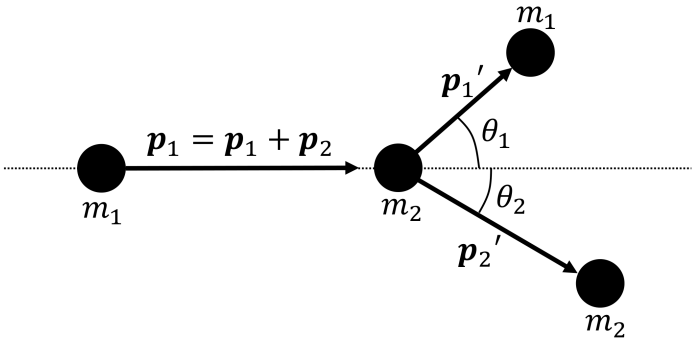


図 288　衝突後の 2 粒子の運動量 $\boldsymbol{p}'_1, \boldsymbol{p}'_2$ のなす角は $\theta_1 + \theta_2$ で与えられる

したがって粒子 2 の受け取るエネルギー E'_2 が最大となる．

$$E'_{2\max} = \frac{m_2 {v'_2}^2_{\max}}{2} = \frac{m_2}{2}\left(\frac{2m_1 v}{m_1+m_2}\right)^2 = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}E_1, \qquad E_1 = \frac{m_1 {v_1}^2}{2} : \text{入射粒子のエネルギー}. \tag{115}$$

- $m_1 = m_2$ のとき $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ となる．

D.6.4　前節について

■式 (112) の導出 [9, pp.54–56]　C 系における衝突後の速度は，図 285 より

$$\boldsymbol{v}'_{10} = \frac{m_2}{m_1+m_2}v\boldsymbol{n}_0, \qquad \boldsymbol{v}'_{20} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}v\boldsymbol{n}_0$$

と表される．慣性中心の速度 $\boldsymbol{V}$ を加えると，L 系での衝突後の速度

$$\boldsymbol{v}'_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}v\boldsymbol{n}_0 + \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1+m_2}, \qquad \boldsymbol{v}'_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}v\boldsymbol{n}_0 + \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1+m_2}$$

が得られる．2 式にそれぞれ m_1, m_2 をかけて，運動量の式 (112) を得る．

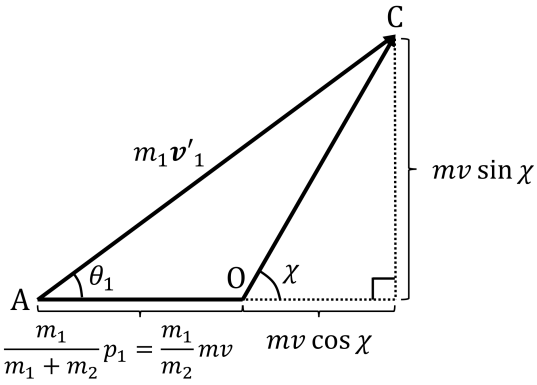


図 289　三角形 AOC

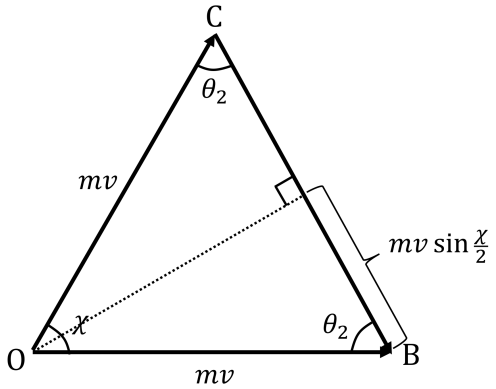


図 290　二等辺三角形 BOC

■L 系における同質量粒子の正面衝突　共通の質量 $m_1=m_2$ を持つ 2 粒子が正面衝突する場合を考えると ($\boldsymbol{n}_0$ は $\boldsymbol{p}_1$ と反平行)，L 系における衝突後の運動量の式 (112) は

$$\boldsymbol{v}'_1=\boldsymbol{v}_2,\qquad \boldsymbol{v}'_2=\boldsymbol{v}_1$$

を与える．これは衝突により 2 粒子の速度が交換されることを意味する．よって 2 粒子を区別しなければ，粒子は互いをすり抜けるように運動する．

■θ_1 の式 (113) について　図 289 より

$$\tan\theta_1=\frac{mv\sin\chi}{\left(\frac{m_1}{m_2}+\cos\chi\right)mv}=\frac{m_2\sin\chi}{m_1+m_2\cos\chi}.$$

■v'_1, v'_2 の式 (114) について　図 289 における三角形 AOC に余弦定理を用いると

$$(m_1v'_1)^2=(mv)^2\left\{1+\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2+2\frac{m_1}{m_2}\cos\chi\right\},$$

$$\therefore v'_1=v\frac{m_2}{m_1+m_2}\sqrt{1+\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2+2\frac{m_1}{m_2}\cos\chi}=\frac{\sqrt{{m_1}^2+{m_2}^2+2m_1m_2\cos\chi}}{m_1+m_2}v$$

を得る．v'_2 の表式は図 290 における二等辺三角形 BOC に注目すると得られる．

■「$m_1<m_2$ ならば $\theta_1+\theta_2>\pi/2$，$m_1>m_2$ ならば $\theta_1+\theta_2<\pi/2$ となる」こと [9, p.57] について　このことは図 287 において角 ACB$>\pi/2$，あるいは角 ACB$<\pi/2$ であることから分かる．

■正面衝突後の速度について　静止している粒子 2 に粒子 1 が正面衝突する場合 ($\chi=\pi$) を考える．図 287 のダイアグラムから

$$m_1<m_2 \quad\Rightarrow\quad \text{衝突後，粒子 1 は後退する}$$
$$m_1>m_2 \quad\Rightarrow\quad \text{衝突後，粒子 1 は前進する}$$

ことが読み取れる．さらに衝突後の速度の大きさ v'_1 の式 (114) において $\chi=\pi$ とすると

$$v'_1=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v\qquad(m_1<m_2),\qquad\qquad v'_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v\qquad(m_1>m_2)$$

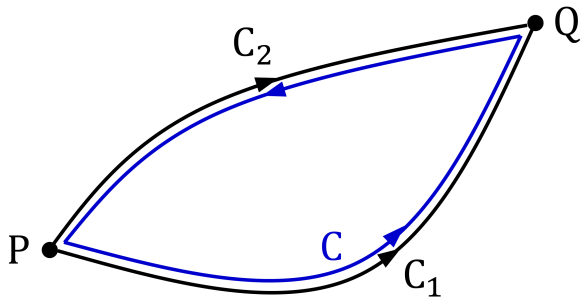


図 291　2 つの径路 $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ と閉曲線 $\mathrm{C} = \mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_2$

となることと考え合わせると，衝突後の速度の式

$$\boldsymbol{v}'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}$$

を得る．

D.7　保存力の場が渦無し場であること

2-10 節の注解において予告したように，保存力の場は渦無し場であることを説明する．

力の線積分の値が始点と終点を結ぶ径路に依らないことは，力の閉曲線に沿う周回積分がゼロになることと等価である．物理的に言えば，保存力に対してはそれに逆らって物体を閉曲線に沿って 1 周させたときの正味の仕事はゼロになる．(逆に摩擦力のような非保存力に対しては，それに逆らって物体を引きずり閉曲線に沿って 1 周すると正味で仕事をすることになる．) 実際，始点 P と終点 Q を結ぶ 2 つの径路 $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ に沿う線積分の値が等しいとき，閉曲線 $\mathrm{C} = \mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_2$ に沿う周回積分はゼロになる (図 291 参照)[*97]：

$$\int_{\mathrm{C}_1} = \int_{\mathrm{C}_2} \quad \Rightarrow \quad \oint_{\mathrm{C}} = \int_{\mathrm{C}_1} - \int_{\mathrm{C}_2} = 0.$$

逆に任意の閉曲線 C に沿う周回積分がゼロであれば，始点と終点を結ぶもとの径路 C_1 と，これに閉曲線 C を付け加えて得られる別の径路 C_2 とで，線積分の値は変わらない (再び図 291 参照)：

$$\int_{\mathrm{C}_1} = \int_{\mathrm{C}_1} - \oint_{\mathrm{C}} = \int_{\mathrm{C}_2}.$$

次に力の任意の閉曲線に沿う周回積分がゼロとなるには，勝手にとった微小な面積 (面積要素ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$) の縁に沿う力の周回積分もゼロにならなければならない．ところで面積要素の縁に沿う周回積分は，力の回転 $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}$ を用いて $(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ で与えられるから (これが回転 $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}$ の意味を与える)，$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0$ でなければならない．このように回転がゼロになる場を渦無しという．逆に力の場が渦無しであれば，Stokes の回転定理 (付録 C.10.7) により任意の閉曲線に沿う力の周回積分はゼロとなる．

[*97] ただし以下では力の線積分 $\int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を $\int_{\mathrm{C}}$ と略記している．また各径路 C は向きも含めて定義されており，$-\mathrm{C}$ は径路 C の向きを逆回りにした径路を表す．なお，記号 $\oint$ は考えている積分が閉曲線に沿う周回積分であることを強調するのに用いられる．

D.8　Coulomb 力と万有引力 (重力) の場が渦無し場であること

2-10 節の注解において予告したように，Coulomb 力や重力の場は保存力場であることを確かめよう．そのためにはこれらの力の場が渦無し場であることを示せば良い (付録 D.7 参照)．Coulomb 力と重力の場をまとめて

$$\boldsymbol{F} = \frac{\alpha}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \qquad \alpha = \begin{cases} kqQ & (\text{Coulomb 力に対して}) \\ -GmM & (\text{重力に対して}) \end{cases}$$

と書こう．すると

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F})_i = \left[\boldsymbol{\nabla} \times \frac{\alpha}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right]_i = \alpha\varepsilon_{ijk}\partial_j\frac{x_k}{r^3}$$

(ただし $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$) において ε_{ijk} は添字 j, k について反対称であるのに対し，

$$\partial_j\frac{x_k}{r^3} = \frac{\delta_{jk}}{r^3} - 3\frac{x_j x_k}{r^5}$$

は添字 j, k について対称なので[*98]，$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0$ となる (付録 C.1.2 参照)．すなわち力の場は渦無しである．

Coulomb 力や重力の場が渦無しであることは，それが電荷・質量の周りに放射状に分布する球対称な場であることから直観的に期待されることである．このような直観に即して説明すれば，対称性により図 237 に示した直方体の各面の縁に沿う力の周回積分はゼロとなるため，場は渦無しである (特に付録 C.10.5 を参照)．

D.9　単振り子の周期

2-11 節の注解で天下りに引用した単振り子の周期の公式を導出しよう [9, pp.31–32]．運動方程式は 2 階の微分方程式だから，これを解くには 2 回の積分操作を必要とする．ところで単振り子に対するエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 - mgl\cos\theta = -mgl\cos\theta$$

は運動方程式の第 1 積分だから，これをさらに 1 回積分すれば良い．$\dot{\theta} > 0$ を仮定して $\dot{\theta}$ について解くと

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

となる．これは θ が増加する場合に適用できる．そこでこれを変数分離して (付録 C.6)，振れ角がゼロから最大値 θ_0 まで増大するのに要する時間を与える形にし，その 4 倍として周期 T を求める：

$$\begin{aligned} T =& 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta_0}{2}}} \\ =& 4\sqrt{\frac{l}{g}}K\left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right), \end{aligned}$$

$$K(k) \equiv \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\xi}} : \text{第 1 種完全楕円積分}, \qquad \sin\xi \equiv \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)}.$$

[*98] この種の計算では

$$\partial_i x_j = \delta_{ij}, \qquad \partial_i r = \frac{x_i}{r} : \text{単位ベクトル成分}$$

が有用となる．

微小振動 $\sin\frac{\theta_0}{2} \simeq \frac{\theta_0}{2} \ll 1$ に対して関数 $K(k)$ を展開すると

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}{\theta_0}^2 + \cdots\right)$$

を得る．この結果の解釈は 2-11 節の注解で述べてある．

D.10 Kepler 問題の軌道の決定

2-12 節の注解で説明した軌道の一般公式

$$\phi = \pm\int^r \frac{l/mr^2}{\sqrt{\frac{2}{m}\{E - U^*(r)\}}}\mathrm{d}r$$

を Kepler 問題の場 $U = -\mu/r(\mu > 0)$ に適用し，具体的に軌道を求めよう [9, pp.42–43]．以下では計算を少し詳しく書く．分母を $\sqrt{1-\bigcirc^2}$ の形に平方完成すると

$$\begin{aligned}
\phi &= \pm\int^r \frac{(l/r^2)\mathrm{d}r}{\sqrt{2mE + \frac{2m\mu}{r} - \frac{l^2}{r^2}}} \\
&= \pm\int^r \frac{(l/r^2)\mathrm{d}r}{\sqrt{-\left(\frac{l}{r} - \frac{m\mu}{l}\right)^2 + \left(\frac{m\mu}{l}\right)^2 + 2mE}} \\
&= \pm\int^r \frac{(l/r^2)}{\sqrt{2mE + \left(\frac{m\mu}{l}\right)^2}} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - \left(\frac{\frac{l}{r} - \frac{m\mu}{l}}{\sqrt{2mE + \left(\frac{m\mu}{l}\right)^2}}\right)^2}}
\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\frac{\frac{l}{r} - \frac{m\mu}{l}}{\sqrt{2mE + \left(\frac{m\mu}{l}\right)^2}} = \cos\theta \tag{116}$$

とおくと ($\sin\theta$ でも良い)

$$-\frac{l}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2mE + \left(\frac{m\mu}{l}\right)^2}} = -\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

となる．式 (116) を満たす θ には $\sin\theta > 0$ となる θ_1 と $\sin\theta < 0$ となる θ_2 があり，これらの間には $\theta_2 = -\theta_1 + 2n\pi$ の関係があるから，軌道の式

$$\phi = \theta_1 + \mathrm{const} = -\theta_2 + \mathrm{const} = \arccos\frac{\frac{l}{r} - \frac{m\mu}{l}}{\sqrt{2mE + \left(\frac{m\mu}{l}\right)^2}} + \mathrm{const}$$

を得る．座標軸の方向を適当にとれば $\mathrm{const} = 0$ とおくことができ，また複号 $\pm$ は正号を選んで良く，再び円錐曲線

$$\frac{L}{r} = 1 + e\cos\phi, \qquad L \equiv \frac{l^2}{m\mu}\text{: 通径}, \qquad e \equiv \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\mu^2}}\text{: 離心率}$$

が得られる．

参考　円錐曲線の式

$$r = \frac{L}{1 + e\cos(\phi - \phi_0)}, \qquad \therefore r = L - ex\cos\phi_0 - ey\sin\phi_0$$

を両辺平方して

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

という形に書き換えよう．上式左辺の各項には共通の定数 $k(\neq 0)$ を掛ける任意性があることに注意すると

$$\begin{aligned} a =& k(1 - e^2\cos^2\phi_0), \qquad b = k(1 - e^2\sin^2\phi_0), \qquad c = -kL^2, \\ f =& k \cdot eL\sin\phi_0, \qquad g = k \cdot eL\cos\phi_0, \qquad h = -k \cdot e^2\sin\phi_0\cos\phi_0 \end{aligned}$$

と同定されるため，

$$h^2 - ab = k^2(e^2 - 1)$$

を得る．よって円錐曲線の種類 (楕円，放物線，双曲線) は $h^2 - ab$ の符号から判定できる：

- 楕円　$0 < e < 1 \quad \Leftrightarrow \quad h^2 - ab < 0$
- 放物線　$e = 1 \quad \Leftrightarrow \quad h^2 - ab = 0$
- 双曲線　$e > 1 \quad \Leftrightarrow \quad h^2 - ab > 0$

D.11　重ね合わせの原理

基礎方程式の線形性と重ね合わせの原理の関係について説明する [8, pp.333–334]．L を線形の演算子として，物理量 x に対する源の項 σ を持つ基礎方程式

$$L(x) = \sigma$$

を考える．線形性は

$$L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2)$$

を意味する．ここで 2 種類の源 σ_1, σ_2 に対する解 x_1, x_2 をとれば

$$L(x_1) = \sigma_1, \qquad L(x_2) = \sigma_2$$

なので，

$$L(x_1 + x_2) = \sigma_1 + \sigma_2$$

となる．例えば源 σ を質量密度 ρ，物理量 x を重力ポテンシャル Φ に対応させると，この結果は次のように解釈できる．すなわちある質量分布 ρ_1 が作る重力ポテンシャルを Φ_1，別の質量分布 ρ_2 が作る重力ポテンシャルを Φ_2 としたとき，質量分布が $\rho_1 + \rho_2$ で与えられる場合の (つまり 2 つの質量分布が同時に存在する場合の) 重力場は $\Phi_1 + \Phi_2$ で与えられる．これは重ね合わせの原理に他ならない．このように重ね合わせの原理が成り立つのは基礎方程式が線形であることの帰結である．(したがってこれは原理というよりもむしろ法則と言える．) なお重力場の方程式 $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$ は実際に線形性を持っている．

D.12　球対称な質量分布の作る重力場

2-12 節の注解で予告したように，ここでは重力場の方程式に基づいて球対称な質量分布が質量に及ぼす重力を求めよう．重力の代わりに重力場を計算しても良い．

重力場 $\boldsymbol{g}$ は重力ポテンシャル Φ から $\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$ と導かれる．また質量密度を ρ とすると重力場 $\boldsymbol{g}$ は $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{g} = -4\pi G\rho$ を満たす．これは定性的には質量の周りの重力場が，質量に向かって吸い込まれるように分布することを意味している．以上よ 2 式を組み合わせると，重力場の方程式

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho$$

を得る．この形の方程式を Poisson 方程式という．

次に球対称な質量分布 $\rho(r)$ の作る球対称な重力場 $\Phi(r)$ を決定する問題に移ろう．Laplacian の球座標を用いた表現

$$\Delta\Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\Phi + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$

を利用しよう．球対称な解 $\Phi(r)$ に対しては

$$\Delta\Phi = \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)\Phi = \begin{cases} \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right) \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(r\Phi) \end{cases}$$

となる (付録 C.10.8 参照)．今の場合，最右辺における第 1 の表式を利用するのが賢明である．すると場の方程式は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right) = 4\pi G\rho, \\ &\therefore r^2\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} = \left[r^2\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right]_{r=0} + G\int_0^r \rho 4\pi r'^2\mathrm{d}r' = GM(r), \qquad M(r) \equiv \int_0^r \rho 4\pi r'^2\mathrm{d}r' \end{aligned}$$

を与える．これは半径 r の位置における重力場 (の動径成分)$g(r) = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}r$ が，r の外側の質量分布には依らず，r の内側の全質量 $M(r)$ が原点に集中した場合に万有引力の法則に従って作られる重力場

$$g(r) = -G\frac{M(r)}{r^2}$$

に一致することを意味している．質点間に働く万有引力の法則はここから説明される．

なお場の方程式 $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$ から直接に，その (特殊) 解が

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = -G\int\frac{\rho(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

と表されることが導かれる (証明は下記)．これは各質量素片 $\rho(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x'$ が万有引力の法則に従って作るポテンシャル $-G\rho(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x'/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$ の重ね合わせとして位置 $\boldsymbol{x}$ における重力ポテンシャル $\Phi(\boldsymbol{x})$ が得られることを表している．

■文献 [10, pp.57–60] における証明　位置 $\boldsymbol{x}$ を中心とする半径 ε の球状の無限小領域を V_ε，V_ε の表面を S，V_ε の外部領域を $V - V_\varepsilon$ と書くと，重力ポテンシャル $\Phi(\boldsymbol{x}) = -G\int\frac{\rho(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$ に対し

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{x}) = -G\left(\int_{V-V_\varepsilon} + \int_{V_\varepsilon}\right)\rho(\boldsymbol{x}')\Delta\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\mathrm{d}^3x'.$$

ここで領域 $V - V_\varepsilon$ では $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| \neq 0$ であり，距離 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$ の ($\boldsymbol{x}$ による) 微分は $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$ 方向の単位ベクトルになること

$$\partial_i|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| = \partial_i\sqrt{(x^1-x'^1)^2+\cdots} = \frac{x^i-x'^i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}, \qquad \therefore \partial_i\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = -\frac{x^i-x'^i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3} \tag{117}$$

に注意すると

$$\begin{aligned}\Delta\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = \partial_i\left(-\frac{x^i-x'^i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\right) &= -\frac{\partial_i(x^i-x'^i)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3} - (x^i-x'^i)\left(-\frac{3|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^6}\right)\partial_i|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| \\ &= -\frac{3}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3} + \frac{3}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3} = 0\end{aligned}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}\Delta\Phi(\boldsymbol{x}) =& -G\int_{V_\varepsilon}\rho(\boldsymbol{x}')\Delta\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\mathrm{d}^3x' \simeq -G\rho(\boldsymbol{x})\int_{V_\varepsilon}\Delta\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\mathrm{d}^3x' \\ =& -G\rho(\boldsymbol{x})\int_{V_\varepsilon}\boldsymbol{\nabla}'\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)\mathrm{d}^3x' = -G\rho(\boldsymbol{x})\int_S\left(\boldsymbol{\nabla}'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \\ &(\boldsymbol{n}, \mathrm{d}S \text{ はそれぞれ表面 } S \text{ 上の外向き単位法線ベクトルと面積要素，} \boldsymbol{\nabla}' \text{は } \boldsymbol{x}' \text{による微分}) \\ =& -G\rho(\boldsymbol{x})\left(-\frac{\boldsymbol{n}}{\varepsilon^2}\right)\cdot\boldsymbol{n}\times 4\pi\varepsilon^2 \qquad (\because \text{式 (117)}) \\ =& 4\pi G\rho(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

となり，重力ポテンシャル

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = -G\int\frac{\rho(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

は Poisson 方程式 $\Delta\phi = -4\pi\rho$ を満たす．

以上の証明では ϕ, ρ の物理的な意味を用いなかったから，例えば Φ を電位 ϕ に，ρ を電荷密度に読み替えれば，これはそのまま静電場に対する Coulomb の法則の証明

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

になる．

■Green 関数法による証明　ここでは特に複素積分 (付録 C.15)，Fourier 展開 (付録 C.16)，デルタ関数 (付録 C.17) の知識を用いる．

Poisson 方程式 $\Delta\psi(\boldsymbol{x}) = \sigma(\boldsymbol{x})$ の Green 関数 $G(\boldsymbol{x})$ を $\Delta G(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x})$ によって定義する．物理的には右辺の $\delta(\boldsymbol{x})$ は単位質量を持つ質点の質量密度であり，$4\pi G$ の因子を除けば左辺の $G(\boldsymbol{x})$ はこの 1 個の質点が作る重力ポテンシャルである．解は Green 関数 $G(\boldsymbol{x})$ を用いて $\psi(\boldsymbol{x}) = \int\mathrm{d}^3x'\sigma(\boldsymbol{x}')G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$ と書ける．実際，このとき

$$\Delta\psi(\boldsymbol{x}) = \int\mathrm{d}^3x'\sigma(\boldsymbol{x}')\Delta G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \int\mathrm{d}^3x'\sigma(\boldsymbol{x}')\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \sigma(\boldsymbol{x})$$

となる．そこで $G(\boldsymbol{x}) = -\dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}|}$ であることを示せば良い．

$$G(\boldsymbol{x}) = \int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}G(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$$

と Fourier 展開すると

$$\Delta G(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x}) \quad \Rightarrow \quad -k^2 G(\boldsymbol{k}) = 1 \quad \Rightarrow \quad G(\boldsymbol{k}) = -\frac{1}{k^2}$$

なので

$$G(\boldsymbol{x}) = -\int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}}{k^2}$$

となる．ここで $\boldsymbol{x}$ を極軸とする $\boldsymbol{k}$ の極座標 (k, θ, ϕ) を積分変数に選ぶと $\boldsymbol{k}$ 空間の体積要素は $k^2 \sin\theta \mathrm{d}k\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$ であり，この積分を実行する上で被積分関数が $k \to 0$ のとき発散することは次のように問題にならない:

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{x}) &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \mathrm{d}k \int_{-1}^1 \mathrm{d}(\cos\theta) k^2 \frac{e^{ikx\cos\theta}}{k^2} \qquad (x \equiv |\boldsymbol{x}|) \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \mathrm{d}k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{ikx} \\ &= -\frac{2}{(2\pi)^2 x} \int_0^\infty \mathrm{d}\xi \frac{\sin\xi}{\xi}. \qquad (\xi \equiv kx) \end{aligned}$$

最右辺の積分を評価しよう．図 292 に示した複素 z 平面上の半径 r の半円 C_1，半径 R の半円 C_2，閉曲線 C に対して

$$0 = \oint_C \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{i\xi}}{\xi} \mathrm{d}\xi + \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z + \int_r^R \frac{e^{i\xi}}{\xi} \mathrm{d}\xi + \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z$$

であり，この式の最右辺において

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{-r} \frac{e^{i\xi}}{\xi} \mathrm{d}\xi &= -\int_r^R \frac{e^{-i\xi'}}{\xi'} \mathrm{d}\xi', \qquad (\xi' \equiv -\xi) \\ \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z &= i \int_\pi^0 \exp(re^{i\theta}) \mathrm{d}\theta \qquad (z \equiv re^{i\theta}) \\ &\to -i\pi, \qquad (r \to 0) \\ \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z &\to 0 \qquad (R \to \infty, \text{Jordan の補助定理}) \end{aligned}$$

なので

$$0 = 2i \int_0^\infty \frac{\sin\xi}{\xi} \mathrm{d}\xi - i\pi, \qquad \therefore \int_0^\infty \frac{\sin\xi}{\xi} \mathrm{d}\xi = \frac{\pi}{2}$$

を得る．よって Green 関数が

$$G(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi x} \qquad (x \equiv |\boldsymbol{x}|)$$

と求まる．

検算　Green 関数の球対称性 $G(\boldsymbol{r}) = G(r)$ を仮定し，$r > 0$ で

$$0 = \Delta G(\boldsymbol{r}) = \frac{(r^2 G')'}{r^2} \qquad (\text{プライムは } r \text{ による微分})$$

を解くと，A を積分定数として $G(r) = \frac{A}{r} + G(\infty)$ となる (逆に $\Delta \frac{1}{r} = 0$)．また半径 a の球における体積積分は

$$\int \Delta \left(\frac{1}{r}\right) \mathrm{d}V = \int \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \frac{1}{r}\right) \mathrm{d}V = -\int \frac{\boldsymbol{n}}{r^2} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = -\frac{1}{a^2} \cdot 4\pi a^2 = -4\pi \qquad \left(\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

となるので，$G(r) = -\frac{1}{4\pi r}$ は Green 関数に対する式 $\Delta G(r) = \delta(\boldsymbol{r})$ から要求される性質を満たしている．

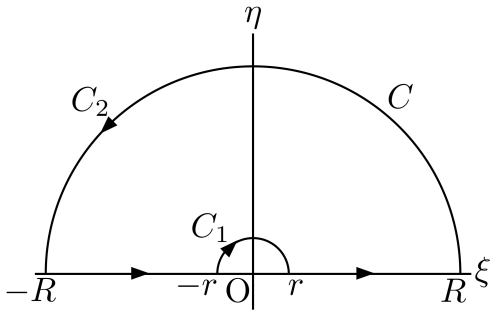


図 292　複素 z 平面上の積分路 C_1, C_2, C

D.12.1　力学的相似

2-12 節の注解では Kepler の第 3 法則に関連して，Newton 力学の水準で「力学的相似」の概念を説明した．ここではさらに例を挙げる [9, pp.26–27]．位置 $\boldsymbol{r}$ で力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ を受ける物体 (質量 m) のある運動が，運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$$

に従って実現可能なとき，その運動の位置を $\boldsymbol{r} \to \alpha\boldsymbol{r}$，時間を $t \to \beta t$ と拡大した「力学的相似」な運動も，運動方程式を満たす条件を調べよう．このスケール変換で運動方程式の左辺は α/β^2 倍される．

- すると例えば，地上の一様な重力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = m\boldsymbol{g}$ は位置 $\boldsymbol{r}$ に依らないため，条件は

  $$\alpha/\beta^2 = 1$$

  となる．これは落体の特撮では，実物が模型の大きさの α 倍であるとき，
  時間を $\beta = \sqrt{\alpha}$ 倍に引き伸ばして映像を再生する必要があることを意味する．
- また原点周りの単振動では $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \propto |\boldsymbol{r}|$ なので，条件は

  $$\alpha/\beta^2 = \alpha, \qquad \therefore \beta = 1$$

  となる．これは単振動の周期が振幅に依らないことと整合している．
- さらに惑星が太陽から受ける万有引力は $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \propto 1/|\boldsymbol{r}|^2$ と表されるので，条件は

  $$\alpha/\beta^2 = 1/\alpha^2, \qquad \therefore \alpha^3 = \beta^2$$

  となる．これは Kepler の第 3 法則と整合している (2-12 節)．

参考　同様に運動方程式の不変性を要求すると，

1. 同一の力の場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ の下で異なる質量 m, m' を持つ粒子が，
   同一の軌跡を描くのに要する時間 t, t' の関係

   $$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{m'}{m}}$$

2. 力の場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ と定数倍の場 $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{r})$ の下で (プライムは微分とは無関係),
粒子が同一の軌跡を描く時間 t, t' の関係

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{|\boldsymbol{F}|}{|\boldsymbol{F}'|}} \qquad \text{(右辺の力は同一点で評価)}$$

が見出される [9, p.29]．これらの結果はいずれも，ばね定数 k を持つばねに繋がれた，質量 m の物体の 1 次元的な振動における周期が

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

で与えられることと整合している．

問題　落体に対する力学的相似の条件 $\alpha/\beta^2 = 1$ を，落体の位置と時間の関係

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2$$

から改めて説明せよ．

解　上式において位置と時間をそれぞれ $\boldsymbol{r} \to \alpha\boldsymbol{r}$，$t \to \beta t$ と置き換えると (このとき初速度は $\boldsymbol{v}_0 \to \frac{\alpha}{\beta}\boldsymbol{v}_0$),

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\frac{\beta^2}{\alpha}\boldsymbol{g}t^2$$

となる．これがもとの式と変わらないことを要求すると，再び $\beta^2/\alpha = 1$ が得られる．

問題　特撮映画において，実物の 25 分の 1 模型を用いて落体の撮影を行うことを考える．落体の法則に従う自然な映像を得るには，時間を何倍に引き伸ばして再生すればよいか．また撮影の際に模型における物体の初速度を，実物のそれの何倍にしておく必要があるか．

解　ここでは $\alpha = 25$ より時間は $\beta = 5$ 倍．このとき速度は $\alpha/\beta = 5$ 倍となるので，模型の初速度はあらかじめ実物の 1/5 倍にしておく必要がある．

D.13　非慣性系に現れる見かけの力

2-13 節で引用した非慣性系に現れる見かけの力の一般公式を導こう [32, pp.225–231]．まず状況設定を再度確認する：

- 慣性基準系 K_0 に対して速度 $\boldsymbol{V}(t)$，加速度 $\boldsymbol{W}(t) = \dot{\boldsymbol{V}}(t)$ で並進する基準系 K' を考える．
  - K' から見た粒子の位置を $\boldsymbol{r}'$ とする．
  - K_0 から見た粒子の速度を $\boldsymbol{v}_0$，K' から見た粒子の速度を $\boldsymbol{v}'$ とする．$\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V}$.
- K' と原点を共有し，K' に対して角速度 $\boldsymbol{\Omega}(t)$ で回転する系 K を考える．
  - K から見た粒子の位置を $\boldsymbol{r}$ とする．$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}$.
  - K から見た粒子の速度を $\boldsymbol{v}$ とする．

こうして一般的な非慣性基準系 K が構成される．

さて，K 系の基底ベクトルを $\{\boldsymbol{e}_i\}$ と書くと $\dot{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{e}_i$ である．よって任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ の K 系で見た成分を A_i として $\boldsymbol{A} = A_i\boldsymbol{e}_i$ と書き，K 系で見た $\boldsymbol{A}$ の時間変化率を $\dot{\boldsymbol{A}} = \dot{A}_i\boldsymbol{e}_i$ で定義すると，これは $\boldsymbol{A}$ の時間変化率 $\dot{\boldsymbol{A}}'$ と

$$\dot{\boldsymbol{A}}' = \dot{A}_i\boldsymbol{e}_i + A_i\dot{\boldsymbol{e}}_i = \dot{A}_i\boldsymbol{e}_i + A_i(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{e}_i) = \dot{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{A}$$

の関係にある．よって

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}, \qquad \therefore \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{V}$$

である．(記号の見かけに流され，「$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}$ より $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}$」と誤らないように注意する必要がある．) また表記を統一して右辺第 1 項 $\boldsymbol{v}$ の時間変化率を $\dot{\boldsymbol{v}}'$ で表すと，K における運動方程式を得るにはこれを K で見た $\boldsymbol{v}$ の時間変化率 $\dot{\boldsymbol{v}}$ で表す必要がある：

$$\dot{\boldsymbol{v}}' = \dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}.$$

これに注意して加速度を求めると

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{v}}_0 =& \dot{\boldsymbol{v}}' + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{W} \\ =& (\dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{W} \\ =& \dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{W} - \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}} - 2\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\Omega})\end{aligned}$$

となる．これを K 系の運動方程式 $m\dot{\boldsymbol{v}}_0 = -\partial U/\partial \boldsymbol{r}$ に代入すると ($-\partial U/\partial \boldsymbol{r}$ は粒子に働く物理的な力)，非慣性基準系 K における運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} - m\boldsymbol{W} + m\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}} + 2m\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\Omega} + m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\Omega})$$

を得る ($\dot{\boldsymbol{v}} \to \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ と改めた)．右辺の各項の解釈は 2-13 節で述べた通りである．

D.14　剛体振り子と単振り子

図 293 のように質量線密度 ρ の一様な棒を用いて剛体振り子を作る．棒を長さ $l_1, l_2 (> l_1)$ に内分する位置を支点とする．全質量と支点周りの慣性モーメントはそれぞれ

$$M = \rho(l_2 + l_1), \qquad I = \int_{-l_1}^{l_2} \rho x^2 \mathrm{d}x = \frac{\rho}{3}({l_2}^3 + {l_1}^3)$$

であり，支点から重心までの距離は

$$l = \frac{l_1 + l_2}{2} - l_1 = \frac{l_2 - l_1}{2}$$

である．よって回転の方程式は

$$I\ddot{\theta} = -Mgl\sin\theta, \qquad \therefore \ddot{\theta} = -\frac{3}{2}\frac{{l_2}^2 - {l_1}^2}{{l_2}^3 + {l_1}^3} g\theta. \tag{118}$$

ここから微小振動 (近似的な単振動) の周期を $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ と書いて相当単振り子の長さ L を定義すると，

$$L = \frac{2}{3}\frac{{l_2}^3 + {l_1}^3}{{l_2}^2 - {l_1}^2} \left(= \frac{2}{3}\frac{{l_2}^2 - l_2 l_1 + {l_1}^2}{l_2 - l_1} \right) \tag{119}$$

となる [28, p.365,p.400]．

他方，一見すると剛体振り子は重心に全質量が集中した単振り子と等価であり，その運動方程式

$$Ml\ddot{\theta} = -Mg\sin\theta \qquad (\text{誤り！}) \tag{120}$$

より微小振動の周期は $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ と考えられそうである．しかし，これは正しい時間発展方程式 (118) に矛盾する．このような剛体振り子と (ここで考えている) 単振り子の違いは次の点に起因している．すなわち，

いずれもふれ角 θ での位置エネルギー $U(\theta) = Mgl(1-\cos\theta)$ は共通だが，剛体振り子では最初に持っていた位置エネルギーの一部が重心周りの回転運動のエネルギーに配分されるので，重心の並進運動のエネルギーは，したがって重心の運動は，対応する単振り子のそれとは異なる．

そこでそのような剛体振り子の運動を実現する拘束力として，支点から受ける力 (の θ 方向成分) F_θ を運動方程式 (120) の右辺に付け加え，左辺に式 (118) を代入すると，この力は

$$F_\theta = Mg\frac{(l_2-l_1)^2}{4({l_2}^2 - l_2 l_1 + {l_1}^2)}\sin\theta$$

と表される (直立の瞬間 $\theta = 0$ では $F_\theta = 0$)．

■**参考** [28, p.365,pp.400–401]　実際的には周期が正確な振り子を製作することに関心が持たれる．上の結果 (119) によると，

- 棒が一様に微小な伸縮をしても，長さの変化の 1 次までの近似で周期が変わらないように支点の位置を決めることはできない．
- 支点の位置のずれに関して 1 次までの近似で，周期が変わらないようにするには，

  $$l_2 = (2+\sqrt{3})l_1$$

  を満たす位置に支点をとれば良い．

D.15　浮力

本編では浮力について言及されていない．そこで Archimedes (アルキメデス) の「原理」について簡単に触れておく．これによれば流体 (以下，水と呼ぶ) に物体を浸して静止させると，物体は鉛直上向きに浮力を受け，その大きさは物体が押しのけた体積の水に働く重力に等しい[*99]．これは次のように説明できる．水の中の任意の形状を持つ塊 (体積 V) に注目すると，水の密度を ρ としてこの部分には鉛直下向きに重力 $\rho V g$ が働く．また水の塊には表面に圧力が働いている．よって鉛直方向のつり合いは

$$0 = (\text{全圧力}) - \rho V g$$

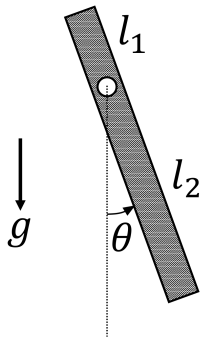


図 293　剛体振り子

[*99] 物体・流体がともに静止している場合を前提としていることに注意．

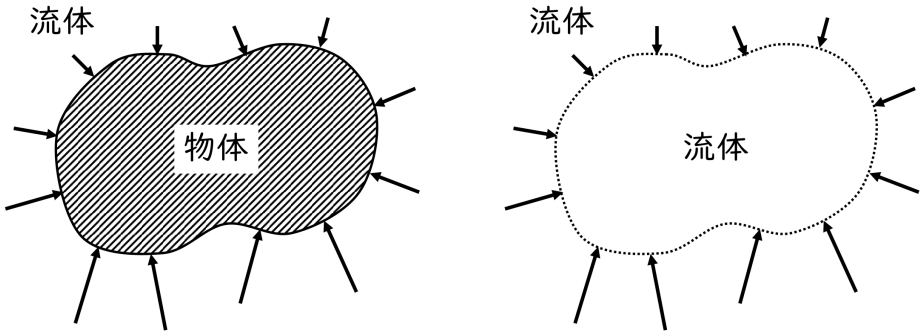


図 294　浮力の起源

となる．これは全圧力が自重 $\rho V g$ を支えていることを意味している．水の塊を物体に置き換えても，水が物体に及ぼす圧力は変わらず鉛直上向きに $\rho V g$ である (図 294 参照) [1, p.100]．これが Archimedes の「原理」に他ならず，もはやこれは原理ではなく法則となる．

容器が地面 (慣性系) に対して加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ で運動している場合に，Archimedes の原理を適用するには，流体の静止した容器固定系に移らねばならない．このとき容器固定系では質量 m に見かけの力 (慣性力) $-m\boldsymbol{\alpha}$ が働くことに注意すると，もとの地上の重力場を $\boldsymbol{g}$ として見かけの重力場は $\boldsymbol{g}' = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{\alpha}$ であり，浮力はこの $\boldsymbol{g}'$ の方向に沿って働くことに注意する (2-13 節末尾の「参考」も見よ)．

D.16　自動車運転免許の学科教本・学科試験の批判的検討

ここで力学で学んだことを踏まえて，自動車運転免許の学科教本・学科試験の内容について主に物理学の観点から少し批判的に検討してみよう．

■空走距離　運転者が危険を感じてからブレーキをかけ，実際にブレーキがきき始めるまでの間に車が走る距離は空走距離と呼ばれる．例えば車が時速 30〜70km で走っているときの空走距離の目安は，時速の値を 0.3 倍して 1 を引いた値 (m) として得られる．

- しかしこれは**次元の異なる量の和** (速度と長さ) を考えていることになる．
  敢えて書けば，車の速度 v (時速 30〜70km) に対する空走距離は

$$L \simeq \alpha v - L_0, \qquad \alpha = 0.3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{km/h}}, \qquad L_0 = 1\mathrm{m}$$

  によって見積もられる．
- 細かい値にそれほど意味はない．
  むしろ空走距離は数 10m 程度であるという**オーダー**が重要である．

■等号を含むか否か　道路の左側部分の幅が 6m 未満の見通しの良い道路では (かつ 6m 未満の場合に限って)，道路の中央から右側にはみ出して，停車中の車を追い越すことが認められている．これを額面通りに受け取れば，横幅が 6m ちょうどの道路では右側にはみ出してはいけないことになる．しかし実際の道路が 6m ちょうどであるか 6m 未満であるかを言うことに現実的な意味はない (2-4 節注解も参照)．それにも関わらず筆記試験ではこうした「以下」と「未満」を区別するような問題が出題される．

■慣性の法則　学科教本では慣性の法則について次のように説明されている．「運動している物体は，外から力を加えないかぎり，そのまま運動を続けようとします．これを慣性の法則といいます.」これは間違いではないが，力の働かない物体が等速度運動を維持することは運動方程式に含まれており，**慣性の法則は運動方程式の成り立つ座標系 (慣性系) の存在を原理として要請している** (2-13 節).

■急ブレーキをかけたときの慣性力の値　車が急ブレーキをかけて瞬間的に停止したときに運転手が受ける慣性力は g の (地上の重力の) 何倍か，という問題を取り上げよう．「瞬間的に」というのを文字通りに「無限小時間のうちに」という意味に解すれば，その間に有限の速度変化を行うには無限に大きな加速度を要し，それ故，慣性力もまた無限大となる．実際には慣性力は有限の値 (例えば重力加速度の 30 倍の加速度に相当) であり，そこから逆に減速に要した時間を見積もることができる．

■遠心力

遠心力は見かけの力　「走行中の車には，……遠心力……などの自然の力が働きます」という記述が学科教本には見受けられるけれど，このような説明は遠心力が実体的な力であるかのような印象を与えかねない．しかし**遠心力はあくまで車に固定した座標系に現れる見かけの力**である (2-13 節).

遠心力の回転半径依存性　学科教本では「遠心力は速度の 2 乗に比例 (……) して大きくなり，また，カーブの半径が小さいほど遠心力は大きくなります」と説明されている．(車固定系に現れる) 遠心力 $F = mv^2/r$ がカーブの半径 r に反比例するのは車の速度 v を固定したときであり，カーブを同じ角速度 ω で曲がる場合には半径に比例して速度 $v = r\omega$ を増大させる必要があるため，遠心力は半径に比例して増大する：$F = mr\omega^2$．このように**遠心力の半径 r 依存性は条件に依る**ため，学科試験の問題では本来条件を明記しておく必要がある．

■論理　これは物理ではなく論理の問題となるが，最後に運転免許の学科試験について 1 点だけ指摘して本節を締めくくろう．一般に $p \Rightarrow q$ であるとき，「p である」という主張が正しければ「q である」という文章も正しい．しかしながら学科試験ではしばしばこのような場合に，「q である」という文章を誤りと判断させる問題が出題される．「q である」のが誤りである理由は，「正しくは p だから」と解説される．

例えば車が徐行するためには，おそらく減速する必要がある．このためある状況で車が徐行しなければならないならば，減速しなければならないというのも正しい (十分でないとしても，必要である)．しかしながら減速するだけでは不十分であるとして，「減速する」という選択肢は誤答とされる．

D.17　連続の式

本節では質量保存則が**連続の式**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0 \tag{121}$$

によって表されることを説明する (ρ は流体の質量密度，$\boldsymbol{u}$ は流体の速度)．ここではベクトル解析の知識 (付録 C.10) を全面的に用いる．

まず質量保存則は次のように言い表せる：

空間に固定した領域内部の質量が増加したならば，それは領域内部で質量が無から生じたからではなく，領域の表面を通って質量が内部に流入したからである．　(122)

特に空間の各位置の周りに無限小領域 d^3x を考えれば，ρ を流体の質量密度として単位時間当たりの内部の質量 $\rho\mathrm{d}^3x$ の増加量は $\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}^3x$ である．一方，質量の流れの密度[*100]は流体の速度 $\boldsymbol{u}$ を用いて $\rho\boldsymbol{u}$ と表されるので，質量の流入量は $-\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{u})\mathrm{d}^3x$ である．これらを等置すると連続の式 (121) を得る．

逆に各体積要素 d^3x で

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}^3x = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{u})\mathrm{d}^3x$$

が成り立てば，任意の有限の領域 V に対しても保存則の主張 (122) が成り立つ．実際，領域 V を構成する全ての体積要素 d^3x について質量の流入量 $-\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{u})\mathrm{d}^3x$ を足し合わせると体積要素間の質量の出入りが相殺され，表面 S からの流入量 $-\int_S(\rho\boldsymbol{u})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ になる[*101]．こうして領域 V 内部の質量 $\int_V\rho\mathrm{d}^3x$ は，単位時間に流入した分の質量だけ増加することになる：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\rho\mathrm{d}^3x = -\int_S(\rho\boldsymbol{u})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

ここで全質量 $\int_V\rho\mathrm{d}^3x$ は時間 t だけの関数であることに注意して，常微分の記号 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ を用いた．$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ は表面 S の外向き法単位ベクトルである．

特に非圧縮性流体を想定し，連続の式 (121) において密度 ρ を位置と時間に依らず一定とおくと

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 0$$

を得る [11, pp.12–13]．これは次のように背理的に解釈できる．すなわち空間に固定した単位体積の領域から，単位時間にある体積の流体が正味で流出したとすると，その体積に密度 ρ をかけた分の質量を単位体積の領域は失うことになる．これは密度 ρ が時間変化しないとしたことに矛盾するから，流体のわき出し $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}$ はゼロでなければならない．

なお ρ を電荷密度，$\rho\boldsymbol{u}$ を電流密度 $\boldsymbol{j}$ に置き換えれば，連続の式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = 0$$

はそのまま電荷保存則を表すことになる [2, pp.80–83]．

D.18 完全流体の運動方程式—— Euler 方程式

ここでは完全流体の運動方程式について説明する．完全流体とは粘性を無視した流体のことである．ところで流体の内部で面を介して働く力は応力と呼ばれ，その面に接する成分が粘性をもたらす．そこで完全流体に働く応力としては，面に垂直な力——圧力——のみを考慮すれば良い (張力も面に垂直であるが，考えない)．微小な直方体領域 d^3x に含まれる流体に働く圧力の x 成分は

$$\{p(x) - p(x+\Delta x)\}\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}^3x$$

[*100] 質量の流れと同じ方向を向き，大きさが自身に垂直な単位面積を単位時間に通過する質量に一致するようなベクトル $\boldsymbol{j}$ のこと．面積要素ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ を持つ面要素を単位時間に通過する質量は $\boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ で与えられる．

[*101] このことは体積要素 $\mathrm{d}V$ が直方体 d^3x に限らず無限小の四面体の場合にも成り立ち，数学的には発散定理と呼ばれ，

$$\int_V\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{u})\mathrm{d}V = \int_S(\rho\boldsymbol{u})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

と書かれる (付録 C.10.6 参照)．

と表されるので[*102][*103]，流体の単位体積に働く圧力は $-\boldsymbol{\nabla}p$ と表される．これは圧力 p の高い方から低い方を向く力を表している．一方，流体粒子 (流体の微小部分) の加速度は

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}$$

と表される (付録 C.8 の Lagrange 微分を参照)．以上より完全流体に対する Newton の運動方程式は，単位体積を持つ流体粒子を考え，流体の密度を ρ，流体の単位体積に働く外力を $\rho\boldsymbol{K}$ とすると

$$\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t} = -\boldsymbol{\nabla}p + \rho\boldsymbol{K}$$

となる．これは Euler 方程式と呼ばれる．外力 $\boldsymbol{K}$ は単位質量当たりの力であり，例として重力を考えると $\boldsymbol{K}$ は重力場 (重力加速度) に他ならない [11, p.14].

D.19 Carnot の定理

Carnot によれば，ただ 1 つの温度の熱源から他に何らの変化を残すことなしに有効な仕事を得ることは不可能である．このことから，いかなる仕組み・作業物質を持つ熱機関の効率も (同じ温度 T_+ と T_- の間で働く限り)Carnot サイクルの熱効率を超えることはできないこと (Carnot の定理) が論証される．証明は以下のような帰謬法 (背理法) による [17, pp.262–263]．高温の熱源 T_+ から Q_+ の熱を得て W の仕事をし，$Q_+ - W$ の熱を低温の熱源 T_- に捨てる Carnot サイクル A を考える．ここで同じく高温の熱源 T_+ から Q_+ の熱を得て，Carnot サイクルよりも大きな仕事 $W'(> W)$ を引き出せるサイクル B があったと仮定しよう (図 295 参照，サイクル B は $Q_+ - W'$ の熱を T_- に捨てる)．Carnot サイクルは理想気体の準静的過程を利用しており，それ故，可逆機関であることに注意すると，サイクル B を回して得た仕事 W' のうち W を用いて Carnot サイクル A を逆向きに作動させることができる．このときサイクル A は低温の熱源 T_- から $Q_+ - W$ の熱をくみ上げて，Q_+ の熱を高温の熱源 T_+ に戻す．正味では低温の熱源 T_- から $W' - W$ の熱をくみ上げて有効な仕事 $W' - W$ を得たことになり，高温の熱源 T_+ に変化はない．これは冒頭の Carnot の要請に反するため，Carnot サイクルよりも高い熱効率を持ついかなる熱機関もあり得ず，Carnot サイクルの熱効率が (与えられた温度 T_+ と T_- の間で働く) 熱機関の効率の最大値となる．

D.20 音波の解析的な表現

Euler 的な見方 (4-2 節注解) を採用し，3 次元空間を伝わる音波を想定して空気の密度変化に対する波動方程式を，従って音速を導く (波動方程式については付録 C.11 を参照).

流体の (質量) 密度 ρ，速度 $\boldsymbol{u}$，圧力 p の，静止流体における値 $\rho_0, 0, p_0$ からのズレ

$$\Delta\rho \equiv \rho - \rho_0, \qquad \Delta\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{u}, \qquad \Delta p \equiv p - p_0$$

の 1 次までとると，質量保存則 (連続の式) は

$$\begin{aligned} 0 =& \frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = \frac{\partial}{\partial t}(\Delta\rho) + \boldsymbol{\nabla}\cdot[(\rho_0 + \Delta\rho)\Delta\boldsymbol{u}] \\ \simeq& \frac{\partial}{\partial t}(\Delta\rho) + \rho_0\boldsymbol{\nabla}\cdot(\Delta\boldsymbol{u}) \end{aligned} \tag{123}$$

[*102] 圧力は本来，単位面積に働く力 p のことであるが，ここでは圧力によりある面積にかかる力も単に圧力と呼ぶ.

[*103] 圧力 p の y, z, t 依存性を省略した.

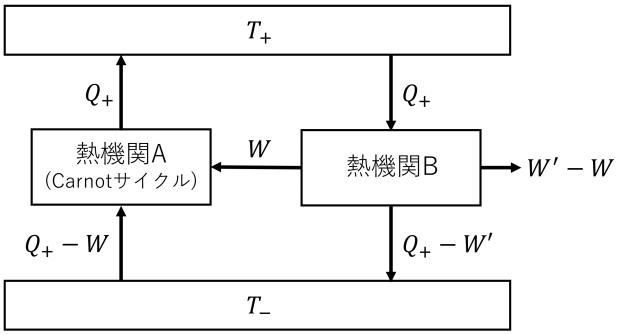


図 295　Carnot の定理の証明 (帰謬法)

となる．次に運動方程式 (Euler 方程式，付録 D.18 参照) について，単位質量を持つ流体粒子の加速度

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} \simeq \frac{\partial}{\partial t}\Delta\boldsymbol{u}$$

を，粒子に働く圧力

$$-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p = -\frac{1}{\rho_0+\Delta\rho}\boldsymbol{\nabla}(\Delta p) \simeq -\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla}(\Delta p) = -\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla}p = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0\boldsymbol{\nabla}(\Delta\rho)$$

と等置して

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0\boldsymbol{\nabla}(\Delta\rho) \tag{124}$$

を得る．ただし $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0$ は断熱変化に対する変化率 $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$ (単位質量当たりのエントロピー s を一定に保つ微分) の静止流体における値だから定数であることに注意し，質量保存則 (123) と運動方程式 (124) を合わせると，密度変化 $\Delta\rho$ に対する波動方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta\rho) &= \frac{\partial}{\partial t}\{-\rho_0\boldsymbol{\nabla}\cdot(\Delta\boldsymbol{u})\} \qquad (\because \text{式 (123)})\\ &= -\rho_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\Delta\boldsymbol{u}\right)\\ &= \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0\boldsymbol{\nabla}^2(\Delta\rho) \qquad (\because \text{式 (124)})\end{aligned}$$

が導かれる．よって音速は

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0}$$

で与えられる．そこで

$$\Delta\boldsymbol{u}, \Delta p \sim e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)}, \qquad \omega_k = ck$$

を式 (124):$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\boldsymbol{u}) \propto \boldsymbol{\nabla}(\Delta p)$ に代入すると $\Delta\boldsymbol{u} \propto \boldsymbol{k}$ となるから，これは縦波である．

D.21 Newton による音速の導出

我々は 4-2 節で既に，弦の微小振動に運動方程式を適用して弦の変位に対する波動方程式を導き，弦を伝わる波の速度 $v = \sqrt{T/\rho}$ を得た (T は弦の張力，ρ は弦の質量線密度)．特に伝播するパルスの先端や山に着目しても速度の公式 $v = \sqrt{T/\rho}$ が得られることを示し，この結果が次元解析から期待されるものであることを説明した．

流体中を伝わる音波に対しても，

質量保存則，　運動方程式，　圧力 P と質量密度ρの熱力学的関係

を用いると，流体要素の微小変位 (または圧力・密度の微小変化) に対する波動方程式が導かれることを示した (D.20 節も参照)．また一連の議論を音波に対する直観的な描像と関係付けて解釈した．さらに波動方程式と同時に得られる音速の表式 $v = \sqrt{\mathrm{d}P/\mathrm{d}\rho}$ を断熱変化に対して評価し，$v \sim \sqrt{k_\mathrm{B}T/m}$ を得た．この右辺は質量 m の気体分子が温度 T で持つ典型的な速度の目安でもある．

ここでは余興として，Newton による空気中の音速の力学的導出について，現代的にアレンジした説明をまとめておく [33, pp.158–163]．Newton は圧力を気体分子の器壁への衝突からではなく，静止した気体分子間に働く斥力から説明している．

要点　空気を等間隔 (r) に静止して並んだ粒子 (質量 m) の集合として扱う．粒子間には斥力 $f(r)$ が働いており[*104]，1 つの粒子に振動を与えると，振動が各粒子に伝えられていく．これが音波に他ならない．以下で見るように，音波が Newton の第 2 法則 $\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}\mathrm{d}t$ を満たすことを要求すると，音速の正しい表式

$$v = \sqrt{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}} \qquad (P：圧力，\rho\text{: 質量密度})$$

が得られる[*105]．

Newton は各粒子の振動を単振動として扱っている．しかし，有界な運動なら何でも良い．そこで空気粒子の，音の伝播方向への一列の並びに着目し，単純なパルスが図 296 のように伝わってゆくものとする．すなわち 1 つの粒子は微小時間 $2\Delta t$ をかけて，平衡位置から最大変位 $2\Delta l (\ll r)$ の位置まで変位し，再び時間 $2\Delta t$ をかけてもとの位置に戻る．すると隣の粒子は，時間 Δt だけ遅れたタイミングで同様の運動を行う．この繰り返しにより，図 296 に示したパルスの伝播の様子が得られる．

図 296 のように時間 Δt の 1 次までの近似で，各粒子の一定速度 $\pm\Delta l/\Delta t$ での運動をあらかじめ仮定しても，運動方程式に抵触しない．実際すぐ後の式 (125) で見るように，運動方程式は粒子の運動の時間スケール Δt を規定するだけである．

さて，図 296 に示した ν 番目の粒子に，時間 $\Delta t \leq t \leq 3\Delta t$ のうちに加えられる力積 I を求めよう．両隣の粒子からの斥力だけを考慮すれば充分である．すると時刻

$$t = \Delta t + \tau \qquad (0 \leq \tau \leq 2\Delta t)$$

において粒子 ν に働く合力 $F(\tau)$ は，図 296 より $\Delta t (\sim \tau, \Delta l)$ の 1 次までの近似で，

[*104] Newton は $f(r) \propto 1/r$ の力を仮定していた [33, pp.110–111,pp.157–158]．しかし以下の導出では，$f(r)$ が減少関数であり，各粒子は最近接の粒子だけから斥力を受けるという近似を行っているものの，$f(r)$ の具体的な関数形はあからさまに用いない．

[*105] しかし Newton は断熱変化ではなく等温変化に対する微分係数 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}\rho$ の値を用いたため，得られた音速の値は実測より小さくなった．

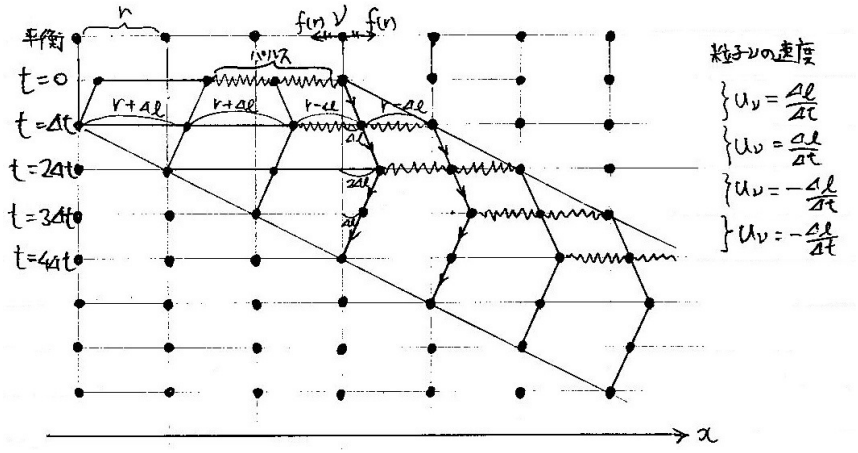


図 296　斥力相互作用を持つ空気粒子の列を伝播するパルス

- $0 \leq \tau \leq \Delta t$ のとき

$$F(\tau) = f\left(r - \Delta l + 2\frac{\Delta l}{\Delta t}\tau\right) - f(r - \Delta l) \simeq 2f'(r)\frac{\Delta l}{\Delta t}\tau$$

- $\Delta t \leq \tau \leq 2\Delta t$ のとき

$$F(\tau) = f(r + \Delta l) - f\left(r - \Delta l + 2\frac{\Delta l}{\Delta t}(\tau - \Delta t)\right) \simeq 4f'(r)\Delta l - 2f'(r)\frac{\Delta l}{\Delta t}\tau$$

となる．よって F-τ グラフは図 297 のようになるから ($f'(r) < 0$ に注意)，力積は

$$I = \int_0^{2\Delta t} F(\tau)\mathrm{d}\tau = 2f'(r)\Delta l \times 2\Delta t \times \frac{1}{2} = 2f'(r)\Delta l \Delta t$$

と計算される．他方，図 296 に書き添えた粒子 ν の速度 u_ν の値より，同じ時間 $\Delta t \leq t \leq 3\Delta t$ における粒子 ν の運動量変化は

$$\Delta p = m\left(-\frac{\Delta l}{\Delta t}\right) - m\frac{\Delta l}{\Delta t} = -2m\frac{\Delta l}{\Delta t}$$

である．Newton の第 2 法則に基づき，これを力積 I と等置すると

$$\Delta t = \sqrt{-\frac{m}{f'(r)}} \tag{125}$$

を得る．ところが図 296 よりパルスは振動周期 $4\Delta t$ のうちに $4r$ だけ進むから，音速は

$$v = \frac{4r}{4\Delta t} = \sqrt{-\frac{f'(r)r^2}{m}}$$

と表される．

ここで図 296 のような粒子の列が単位断面積あたり N 本あるとすると，

$$\text{空気密度}：\rho = \frac{Nm}{r}, \qquad \text{大気圧}：P = Nf(r) \tag{126}$$

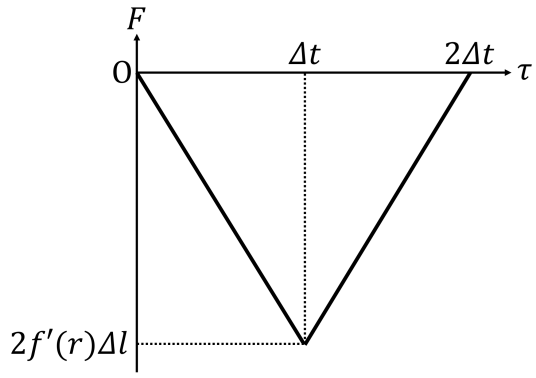


図 297　空気粒子が両隣の粒子から受ける斥力の合力の時間変化

なので[*106]，

$$v = \sqrt{\frac{Nf'(r)}{-Nm/r^2}} = \sqrt{\frac{\mathrm{d}P/\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}r}} = \sqrt{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}}$$

を得る．

備考　このモデルでは粒子は決まった質量 m を持ち，生成・消滅しない以上，質量保存則は自動的に満たされている．また式 (126) は力学的モデルに基づき，P と ρ の関係 (状態方程式)

$$P = Nf\left(\frac{Nm}{\rho}\right)$$

を理論的に定めている．Newton にしたがって $f(r) \propto 1/r$ を仮定すれば，これは等温変化における関係 $P \propto \rho$ を再現する．

D.22　Mach 円錐

Huygens の原理 (6-2 節) の応用として，Mach 円錐について触れておく [11, pp.164–165]．
音源の速度 U (または音源に対する流体の速度) と音速 c の比 $M = U/c$: Mach 数

- $M < 1$: 音よりおそい (亜音速) 流れ
  音波は全空間に広がる．
- $M < 1$: 音よりはやい (超音速) 流れ
  音源の影響は音源を頂点とする，
  半頂角 $\beta = \sin^{-1}(1/M)$ (Mach 角) の円錐 (Mach 円錐) の内部に限られる (図 298 参照)．

[*106] この ρ は質量の線密度ではなく，通常の質量密度になっていることに注意する．

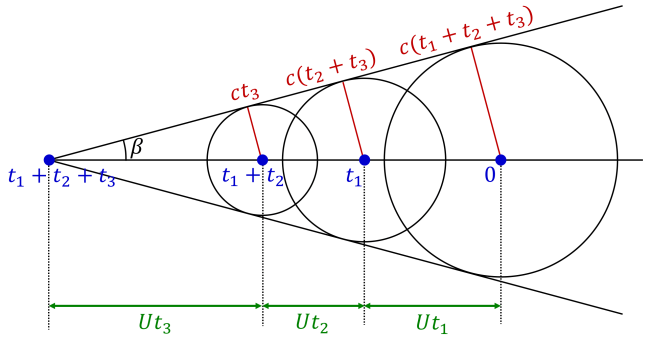


図 298　時刻 $t=0, t_1, t_1+t_2, t_1+t_2+t_3$ での音源 (青丸) を発した球面波の，時刻 $t=t_1+t_2+t_3$ における様子を示している．球面波の包絡面として Mach 円錐が得られる．

D.23　特殊相対性理論 (導入)

D.23.1　非相対論における時間の絶対性と速度の合成則

非相対論においては同一の 2 事件を 2 つの座標系 K, K' で見た時間差 $\Delta t, \Delta t'$ は等しい．このような絶対時間の概念は速度が単純なベクトル和として合成されることと関係している．実際 K' 系が K 系から見て速度 $\boldsymbol{V}$ で運動しているとすると，K 系，K' 系から見た同一の粒子の座標 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'$ は Galilei 変換 $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{V}t$ によって関係付けられる．よって K 系で見て粒子が無限小時間 $\mathrm{d}t$ のうちに $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 変位するのを K' 系から見ると，無限小時間 $\mathrm{d}t'$ のうちに $\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$ 変位するとき，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}' = \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{V}\mathrm{d}t$ となる．ここで時間の絶対性

$$\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t$$

を仮定して両辺を $\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t$ で割ると，速度の合成則として

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}$$

を得る．

D.23.2　光速度不変の原理と相対性原理

一方，特殊相対性理論は以下の光速度不変の原理と相対性原理の上に成り立っている [2, pp.1–4].

- 光速度不変の原理
  - 古典力学 (非相対論的力学) においてポテンシャル・エネルギーは
    粒子の座標 $\boldsymbol{r} \equiv \{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots\}$ の関数 $U(\boldsymbol{r})$　$\rightarrow$　粒子間相互作用は瞬時に伝播する．
    実際には相互作用の伝播速度は有限であり，
    座標系に依らない最大の伝播速度 c (実はこれは光速度) を持つ．
- 相対性原理
  - 相対性原理によれば，すべての自然法則はあらゆる慣性基準系において同一である．
    これは原理として物理法則の共変性を要請したものと見ることができる．
    相対性原理自体は非相対論でも成り立つが (Galilei の相対性原理)，
    慣性系の間の座標変換則が相対論とは異なっている．

光速度一定 ↔ 世界間隔の不変性　ある慣性基準系で見た 2 事象の座標をそれぞれ $(ct_1, \boldsymbol{r}_1), (ct_2, \boldsymbol{r}_2)$ とし，これらの間の世界間隔を

$$s_{12} = [c^2(t_2 - t_1)^2 - (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)^2]^{1/2}$$

によって定義する．ここで 2 事象をぞれぞれ信号の送信と受信にとると，光速度が一定であることは

$$\mathrm{d}s = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}s' = 0$$

を意味する．これは $\mathrm{d}s^2 = a\mathrm{d}s'^2$ のとき満たされる．時間と空間の一様性および空間の等方性より，係数 a は慣性系の相対速度の絶対値のみに依存し，$a = 1$ が見出される．こうして光速度が一定であることは，世界間隔の不変性

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}s', \qquad s = s'$$

として表される [2, pp.4–6].

D.23.3　Lorentz 変換

K 系から見て x 軸方向に速度 V で推進する K' 系を考える (はじめ 2 つの座標系の空間軸は一致しており，この瞬間をそれぞれの座標系の時間 t, t' の原点にとる)．このとき

- 光速度不変の原理
- 相対性原理

を満たす座標変換則，すなわち同一の事象を K 系，K' 系で見た座標 $(ct, x, y, z), (ct', x', y', z')$ の関係は Lorentz 変換の式

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad y' = y, \qquad z' - z, \qquad ct' = \frac{ct - \frac{V}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{127}$$

で与えられることが見出される [2, pp.10–14].

Lorentz 変換 (127) の導出　求める座標変換が世界間隔 $(ct)^2 - x^2$ を不変に保つ tx 平面内の“回転”として

$$x' = x\cosh\psi + ct\sinh\psi, \qquad ct' = x\sinh\psi + ct\cosh\psi$$

と表されると考えると，

- これは線形変換であるため，逆変換も同じ形となり，相対性原理を満たす．
- この変換は確かに世界間隔 $c^2t^2 - x^2$ を不変とするため，光速度一定の条件を満たす．

ここで K 系の原点 $x' = 0$ に注目すると，これを K' 系で見た座標は

$$x' = ct\sinh\psi, \qquad ct' = ct\cosh\psi$$

となる．$x'/ct' = \tanh\psi$ が K 系の座標で測った K' 系の速度 (を c で割った値) だから，$\tanh\psi = -V/c$ を満たす“回転角” ψ をとれば良いことが分かる[*107]．$1 - \tanh^2\psi = 1/\cosh^2\psi$ および定義域 $\cosh\psi \geq 1$ より

$$\tanh\psi = -\beta \quad \Rightarrow \quad \cosh\psi = \gamma \quad \Rightarrow \quad \sinh\psi = -\beta\gamma$$

(ただし $\beta \equiv V/c, \gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$) となるので，Lorentz 変換の式 (127) を得る．

[*107] tx 面内の“回転”

$$x' = x\cosh\psi - ct\sinh\psi, \qquad ct' = -x\sinh\psi + ct\cosh\psi, \qquad \tanh\psi = \frac{V}{c}$$

(ψ を再定義した) は，虚時間 $x^4 = ict$ を導入し，$\psi \equiv i\psi'$ を代入すると，虚数角 ψ' の回転の形

$$x'^1 = x^1\cos\psi' - x^4\sin\psi', \qquad x'^4 = x^1\sin\psi' + x^4\cos\psi'$$

に書ける [12, pp.44–45]．いずれにせよ回転というのは解釈に過ぎず，それ以上のものではない．

■Lorentz 収縮　ここでは Lorentz 変換から帰結するいくつかの興味深い事実のうち，Lorentz 収縮を取り上げる．Lorentz 変換の式 (127) の第 1 式によれば，K' 系の ${x'}_1 \leq x' \leq {x'}_2$ に固定された x' 軸に沿う棒の両端が，K 系で見て同時刻 t に位置 $x = x_1, x_2 (> x_1)$ を占めるものとすると，

$$ {x'}_2 - {x'}_1 = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad \therefore x_2 - x_1 = ({x'}_2 - {x'}_1)\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} (< {x'}_2 - {x'}_1) $$

となる．このように K 系で測った運動する棒の長さ $x_2 - x_1$ は，棒の固定系 (K' 系) で測った棒の長さ ${x'}_2 - {x'}_1$ に比べて縮む (Lorentz 収縮)．ただし Lorentz 変換の式 (127) の第 4 式より，K 系で見て同時刻 t に，Lorentz 収縮を起こした棒の両端が位置 $x = x_1, x_2$ を占めるという 2 事象は，K' 系では同時には起こらないことに注意する．

D.23.4　世界間隔と計量テンソル

時空には無限に近い 2 点の世界間隔 $\mathrm{d}s$ が定義される．$\mathrm{d}s$ は値が用いている座標系に依らずに時空の幾何学だけで決まる量，従ってスカラーである．これは座標系 $\{x^\mu\}$ で測った 2 点の座標の差 $\mathrm{d}x^\mu$ の 2 次形式

$$ \mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu $$

で表される ($\mathrm{d}s = \sqrt{g_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu}$)．座標の微分 $\mathrm{d}x^\mu$ は反変ベクトルだから $\mathrm{d}s$ がスカラーとなるためには $g_{\mu\nu}$ は 2 階共変テンソルでなければならない (付録 C.12 参照)．$g_{\mu\nu}$ を計量テンソルと呼ぶ．

反変計量テンソル $g^{\mu\nu}$ を計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の逆テンソルとして定義する (以下，$g^{\mu\nu}$ も単に計量テンソルと呼ぶ):

$$ g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu{}_\nu. \tag{128} $$

テンソルの添字を上げ下げした量は $A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu, A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$ のように計量テンソルとの縮約で定義する．このとき計量テンソルとの縮約の結果得られた量も添字の位置から期待される種類のテンソルとなる (付録 C.12 参照)．

世界間隔の定義式より，特殊相対性理論では計量テンソルの全成分が行列の形を借りて

$$ (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} $$

で与えられるような慣性系のみを考えることになる．上記の計量テンソルを持つ空間 (時空) を Minkowski 空間と呼ぶ．よって計量テンソルとの縮約は具体的には添字の上げ下げの規則

$$ A_0{}^1 = A^{01} = -A^0{}_1 = -A_{01}, \qquad \text{etc.} $$

に帰す．

4 元反変ベクトル $A^\mu = (A^0, \boldsymbol{A}), B^\mu = (B^0, \boldsymbol{B})$ の 4 元内積を

$$ A \cdot B \equiv g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^\mu B_\mu = A_\nu B^\nu = A^0 B^0 - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} $$

で定義する．以上の議論から理解されるように，これは Lorentz スカラーである，すなわちどのような座標系の成分を用いて計算しても値は変わらない．

■添字の表記について　本節ではこれ以降，

- 時空の 4 成分 $0, 1, 2, 3$ をとる添字にギリシア文字 $\alpha, \beta, \cdots, \lambda, \mu, \nu, \cdots$ を用い，
- 空間成分 $1, 2, 3$ のみをとる添字にラテン文字 $i, j, k, \cdots$ を用いることにする．

D.23.5　相対論的な運動学と力学

粒子の運動方程式が相対論的に不変，すなわち Lorentz 変換に対して共変的となるためには，両辺がともに反変ベクトル成分であれば良い (付録 C.12 参照)．また運動方程式は粒子の速度 v が光速に比べて小さい極限 (非相対論的な極限 $v \ll c$) で Newton の運動方程式を再現しなければならない．そこで非相対論的な極限で粒子の速度や運動量，加速度に一致するような反変ベクトル成分を導入することから初めて，相対論的な運動方程式を説明する．

■固有時間 [2, pp.8–9]　運動する物体に固定された時計の示す時間 τ を，その物体の固有時間という．固有時間はその定義により Lorentz スカラーである．実際，固有時間は瞬間的に粒子とともに動く慣性系で見た時間であり，この座標系では粒子の空間座標の変化は $\mathrm{d}x^i = 0$ なので，固有時間の経過 $\mathrm{d}\tau$ は粒子の対応する時空における変位の世界間隔 $\mathrm{d}s$ と

$$\mathrm{d}s = c\mathrm{d}\tau$$

の関係にある．既に見たように世界間隔 $\mathrm{d}s$ は Lorentz 不変量だから，確かに固有時間の変化 $\mathrm{d}\tau$ もまた Lorentz 不変量となっている．なお固有時間は物体の運動を観察する基準系の時間 t と

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tau =& \mathrm{d}t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},\\ \varDelta\tau =& \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \leq \varDelta t \qquad (v:\text{座標で測った物体の速度})\end{aligned}$$

によって関係付けられる (動いている時計の遅れ)．

■4 元速度，4 元加速度 [2, p.25]　これを用いて粒子の 4 元速度と 4 元加速度をそれぞれ

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \left(\frac{c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right), \qquad a^\mu = \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}$$

を定義する．座標の微分 $\mathrm{d}x^\mu$ は反変ベクトル成分であり固有時間 $\mathrm{d}\tau$ は Lorentz スカラーだから，4 元速度 u^μ は反変ベクトル成分であり，それ故 4 元加速度 a^μ も反変ベクトル成分となる．またこれらは非相対論的極限 $v \ll c$ で $\mathrm{d}\tau \to \mathrm{d}t$ よりそれぞれ座標時間 t で測った速度 $\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}t$ と加速度 $\mathrm{d}^2x^i/\mathrm{d}t^2$ に移行する．これに対して座標時間 t で測った速度 $\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}t$ や加速度 $\mathrm{d}^2x^i/\mathrm{d}t^2$ は一般にベクトル成分ではない．

$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x_\mu$ より 4 元速度は

$$u^\mu u_\mu = c^2$$

と規格化されていることが分かる．さらに両辺を固有時間で微分すると，4 元速度と 4 元加速度の“直交性”

$$u^\mu a_\mu = 0$$

が見出される．

■**エネルギーと運動量** [2, pp.28–32]　質量 m の粒子の 4 元運動量を

$$p^\mu = mu^\mu = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right)$$

で定義すると，これは反変ベクトルとなる．

- 空間成分を粒子の運動量 $\boldsymbol{p}$ と定義する．

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

  – 非相対論的極限 ($v \ll c$)　$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$.
- 時間成分 (の c 倍) を粒子のエネルギー $\mathscr{E}$ と定義する．

$$\mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

  – 静止エネルギー　$\mathscr{E}_0 = mc^2$,　　非相対論的極限 ($v \ll c$)　$\mathscr{E} = mc^2 + \frac{mv^2}{2}$.
  – 相対論的力学では自由な物体のエネルギーには付加定数の任意性がない ($\mathscr{E}_0 = mc^2$).
- 以上より運動量 4 元ベクトルの成分は

$$p^\mu = \left(\frac{\mathscr{E}}{c}, \boldsymbol{p} \right)$$

  となる．

  ★ 時間成分と空間成分の次元は等しい：$[\mathscr{E}/c] = [p^i]$.
  これにより座標変換則におけるこれらの線形結合が意味を成す．
- これらの表式はたくさんの粒子からできている複合的な物体にも適用できる．
  ただし静止している物体 m のエネルギーには
  それを構成している粒子 (質量 m_a) の運動エネルギーと粒子間の相互作用のエネルギーも含まれ，
  質量保存の法則は成立しない：$mc^2 \neq \sum_a m_a c^2$.
- ハミルトニアン
  運動量 $\boldsymbol{p}$ とエネルギー $\mathscr{E}$ の 2 式から $\boldsymbol{v}$ を消去し，エネルギーを運動量で表すと

$$\mathscr{H} = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$$

  を得る．これは粒子のハミルトニアンと呼ばれる．
  – 非相対論的極限 ($p \ll mc$)　$\mathscr{H} = mc^2 + \frac{p^2}{2m}$.
- 運動量とエネルギーの関係

$$\boldsymbol{p} = \mathscr{E}\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}.$$

  – 光速度で運動する質量ゼロの粒子に対して　$p = \mathscr{E}/c$.
  – $\mathscr{E} \gg mc^2 \neq 0$ の超相対論的粒子に対しても近似的に $p = \mathscr{E}/c$ が成り立つ．
- 運動量とエネルギーの関係 $\mathscr{E}^2/c^2 = p^2 + m^2c^2$ は

$$p^\mu p_\mu = m^2c^2 \qquad (\because u^\mu u_\mu = c^2)$$

  に他ならない．

★ この結果は次のように理解される．
すなわち縮約 $p^\mu p_\mu$ は Lorentz スカラーであり，その値は座標系に依らない (付録 C.12 参照)．
そこで $p^\mu = (mc, \mathbf{0})$ となる座標系でこれを評価すると $p^\mu p_\mu = m^2c^2$ を得る．

■相対論的力学 [2, p.32]　よって $\mathrm{d}p^\mu/\mathrm{d}\tau = m\mathrm{d}u^\mu/\mathrm{d}\tau$ は 4 元反変ベクトルであり，空間成分は非相対論的な極限で $m\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ に移行するので，同じく反変ベクトル成分として変換する 4 元力 g^μ を用いて相対論的な方程式を

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = g^\mu, \qquad \text{または} \qquad m\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = g^\mu$$

とすれば，これは目論見通り Lorentz 変換に対して共変的となる (付録 C.12 参照)．

4 元力 $g^\mu = (g^0, \boldsymbol{g})$ と $\boldsymbol{f} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$ を満たす 3 次元的な力 $\boldsymbol{f}$ との関係は次のように見出される．まず空間成分について

$$\boldsymbol{g} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{\boldsymbol{f}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

である．次に直交性

$$0 = mu_\mu w^\mu = u_\mu g^\mu = u^0 g^0 - u^i g^i, \qquad \therefore u^0 g^0 = u^i g^i$$

(空間成分 $i = 1, 2, 3$ について和をとる) において

$$u^0 g^0 = \frac{c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} g^0, \qquad u^\alpha g^\alpha = \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \cdot \frac{\boldsymbol{f}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

なので，g^0 の表式

$$g^0 = \frac{\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}}{c\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

を得る．以上より 4 元力の成分は

$$g^\mu = \left(\frac{\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}}{c\sqrt{1-(v/c)^2}}, \frac{\boldsymbol{f}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right)$$

とまとめられる．

$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1-(v/c)^2}$ に注意すると，運動方程式 $\mathrm{d}p^\mu/\mathrm{d}\tau = g^\mu$ の空間成分と時間成分はそれぞれ

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{\boldsymbol{f}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ \dfrac{\mathrm{d}p^0}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}}{c\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f} \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} \end{cases} \tag{129}$$

となる．ただし運動方程式の空間成分において $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}/\sqrt{1-(v/c)^2}$ は 4 元運動量成分であり，非相対論的な極限 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ でこれはよく知られた Newton の運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}$$

に移行する．また運動方程式の時間成分は仕事と運動エネルギーの関係を表していると解釈できる．

注意　非相対論の場合と同様，運動方程式 $g^\mu = \mathrm{d}p^\mu/\mathrm{d}\tau$，$\boldsymbol{f} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$ を力の定義式と見なしてはならない．原因としての力と結果としての運動量変化は物理的に異なる概念である (本編の 2-2 節を参照)．

参考—— 3 次元的な量との関係

$$u^i = \frac{v^i}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad g^i = \frac{f^i}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \beta \equiv v/c.$$

4 元速度 u^i はいくらでも大きな値をとり得るのに対し[*108]，$\beta \to 1$ とすると $\sqrt{1-\beta^2}$ はゼロになるため，3 次元的な速度 $v^i = u^i\sqrt{1-\beta^2}$ は有限にとどまる．v が $-c \to c$ を動くとき $u = \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}$ は $-\infty \to \infty$ を動く．一方，力の 4 元ベクトル成分 g^i と 3 次元的な力 f^i の範囲には数学的にはともに制限がない．

「相対論的質量」について　相対論的な運動方程式の 1 つの説明に，非相対論的な運動方程式における質量を「相対論的質量」

$$m(\boldsymbol{v}) = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

に置き換えるというものがある (教科書の 7-8 節も参照) [8, pp.218–220]．ここに m_0 は $\boldsymbol{v} = 0$ のときの質量 $m(0)$ だから静止質量と呼べる．

一方で質量の概念を変更する代わりに我々が行ったように，加速度における座標時間 $\mathrm{d}t$ を固有時間に置き換えても相対論的な運動方程式が得られる．これは加速度の 4 元加速度成分への置き換え

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2} \quad \to \quad \frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}\tau^2}$$

を意味している (加速度 $\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2}$ は Lorentz 変換に対してベクトル成分として変換しない)．そこで力を 4 元力と呼ばれる反変ベクトル g^μ の成分と見なして相対論的な力学の基礎方程式を

$$m\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = g^\mu$$

と書けば，これは両辺がベクトル成分だから座標変換に対する共変性が明白である (一般に両辺が同じ種類のテンソルから成る方程式は，テンソルを定義する成分の変換則により座標変換に対して共変的である (付録 C.12))．運動方程式の 4 元ベクトルの関係式への修正はこの点において「相対論的質量」を導入する方法よりも優れており，好ましい．このような見方を採れば質量は単に質量であって，「相対論的質量」「静止質量」の区別は必要ない．

■具体例——電磁場中の荷電粒子の運動方程式　質量 m，電荷 e の荷電粒子の電磁場 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ の下での運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}\right)$$

と表される．ただし電磁気の単位系として Gauss 単位系を採用している (付録 D.26 参照)．相対論的な運動方程式において $\boldsymbol{p}$ は 4 元運動量の空間成分 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}/\sqrt{1-(v/c)^2}$ であるけれど，左辺 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$ は固有時間ではなく座標時間 t による微分であることに注意する．$\boldsymbol{p} = m\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}\tau$ における固有時間 $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1-(v/c)^2}$ を座標時間 $\mathrm{d}t$ に置き換えて $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ とすると，非相対論的な運動方程式になる．この場合の運動方程式の時間成分，あるいはそれと等価な仕事と運動エネルギーの関係については付録 D.30 で言及する．

[*108] 「$v = c$ に対しては，運動量 $\boldsymbol{p}$ は無限大になる」 [2, p.29].

D.24　光の Doppler 効果

4-3 節の注解で示した考えに従って光の Doppler 効果の式を導こう (1 次元の場合)．波源に固定した座標系 K の x 方向に伝播する光 (振動数 ω，波数 k) を考え，これを K から見て x 成分 $-V$ を持つもう 1 つの座標系 K' から見た振動数を ω' とする．ただし K と K' の座標軸は平行であり，K での時刻 $t=0$ に K' の時刻もまた $t'=0$ となり，両者の原点は一致していたものとする．このような Lorentz 変換に対して波数 $k^\mu=(\omega/c,\boldsymbol{k})$，$\boldsymbol{k}=(k,0,0)$($K$ 系で見た成分) に対する 4 元反変ベクトルの変換則は，Doppler 効果の式

$$\omega'=\frac{\omega+Vk/c^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}}=\sqrt{\frac{c+V}{c-V}}\omega,\quad \text{etc.}\qquad (\because \omega=k/c)$$

を与える．実際 k^μ が Lorentz 変換に対して座標 x^μ と同様の変換則 (127)(付録 D.23，ただし $V\to -V$ と置き換える) に従うことを要求すると，上式を得る [12, pp.29–30].

D.25　群速度

4-5 節では 2 つの単色平面波を重ね合せた波の群速度が

$$v_{\mathrm{g}}=\frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2}$$

で与えられることを示した．しばしばここからひとっ飛びに，分散関係が $\omega=\omega(k)$ で与えられる媒質における群速度は，公式

$$v_{\mathrm{g}}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$$

で与えられると説明される．(ただし波に含まれる波数はある値 k の近くに分布しており，微分 $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$ はその値 k において評価されるものと考えられる．) しかしながら，これはやや飛躍の感がある．そこで次のように考察してみよう．

分散関係 $\omega=\omega(\boldsymbol{k})$ を持つ場 $f(\boldsymbol{x},t)$ の Fourier 展開は

$$f(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}f(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega(\boldsymbol{k})t)}$$

と書ける．Fourier 成分 $f(\boldsymbol{k})$ は波数のある値 $\boldsymbol{k}_0$ の周りでのみゼロと著しく異なる値を持つものとし，被積分関数において $\boldsymbol{k}'\equiv\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0$ の 1 次までとると，

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x},t)=&\int\frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3}f(\boldsymbol{k}_0+\boldsymbol{k}')\exp\left[i\left\{(\boldsymbol{k}_0+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}-\left(\omega(\boldsymbol{k}_0)+\left(\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}}\right)_0\cdot\boldsymbol{k}'+O(\boldsymbol{k}'^2)\right)t\right\}\right]\\
=&e^{i(\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{x}-\omega(\boldsymbol{k}_0)t)}\int\frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3}f(\boldsymbol{k}_0+\boldsymbol{k}')\exp\left[i\boldsymbol{k}'\cdot\left\{\boldsymbol{x}-\left(\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}}\right)_0t\right\}+O(\boldsymbol{k}'^2)\right]\\
=&e^{i(\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{x}-\omega(\boldsymbol{k}_0)t)}\int\frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3}\left\{f(\boldsymbol{k}_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{k}}\right)_0\cdot\boldsymbol{k}'+O(\boldsymbol{k}'^2)\right\}\left[1+i\boldsymbol{k}'\cdot\left\{\boldsymbol{x}-\left(\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}}\right)_0t\right\}+O(\boldsymbol{k}'^2)\right]\\
\simeq&A(\boldsymbol{x},t)e^{i(\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{x}-\omega(\boldsymbol{k}_0)t)}
\end{aligned}$$

$$A(\boldsymbol{x},t)\equiv\int\frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3}\left[f(\boldsymbol{k}_0)+\left\{if(\boldsymbol{k}_0)\left(\boldsymbol{x}-\left(\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}}\right)_0t\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{k}}\right)_0\right\}\cdot\boldsymbol{k}'\right]$$

となる．(ただし $\left(\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}}\right)_0, \left(\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{k}}\right)_0$ において $\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial k_x}, \frac{\partial}{\partial k_y}, \frac{\partial}{\partial k_z}\right)$ であり，添字のゼロは $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_0$ において値を評価することを表す．) 最右辺は位相速度 $\frac{\omega(\boldsymbol{k}_0)}{|\boldsymbol{k}_0|} \cdot \frac{\boldsymbol{k}_0}{|\boldsymbol{k}_0|}$ で進行する単色平面波が，“振幅”(包絡線)$A(\boldsymbol{x}, t)$ によって変調された波を表している．$\boldsymbol{k}'$ の 1 次近似の結果として，“振幅”A の引数 $(\boldsymbol{x}, t)$ 依存性は

$$\boldsymbol{x} - \left(\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}}\right)_0 t$$

という形でのみ現れ，ここから群速度は $\left(\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}}\right)_0$ で与えられることが読み取れる．

D.26　電磁気学の相対論的な定式化

ここでは 5-0 節で予告したように，電磁気学を理論の Lorentz 不変性が明白な形に定式化する．特殊相対性理論については必要最小限の知識を付録 D.23 において導入してある．また本節でも付録 D.23 と同様に，符号系 $(+, -, -, -)$ を持つ Minkowski 空間の計量テンソルを採用する．以下ではギリシャ文字 $\mu, \nu \cdots$ は 0,1,2,3 を動くのに対し，ラテン文字 $i, j, \cdots$ は空間成分 1,2,3 を動くものとする．

D.26.1　Gauss 単位系

この付録のもう 1 つの目標は，異なる単位系での電磁気学の記述を紹介することにある．本編では国際単位系 (MKSA 単位系) を用いてきたのに対し，以下では Gauss 単位系を採用する．このとき電磁気学の記述は極めて簡明になる．例えば以下で見るように，Coulomb の法則は Gauss 単位系に移行すると

$$E = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \to \quad E = \frac{e}{r^2}$$

と簡略化される．このように単位系によって係数の値が異なるのは，物理量の定義が異なるからである．上の例に関して言うと，Gauss 単位系の電場 E_{G} と電荷 e_{G} は国際単位系の電場 E_{SI} および電荷 e_{SI} と

$$E_{\mathrm{SI}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} E_{\mathrm{G}}, \qquad e_{\mathrm{SI}} = \sqrt{4\pi\varepsilon_0} e_{\mathrm{G}}$$

の関係にある．

Gauss 単位系の簡明さは次の点にも現れる．すなわち Gauss 単位系でのスカラー・ポテンシャル ϕ とベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は同じ次元を持ち，電場 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ もまた等しい次元を持つ：

$$[\phi] = [\boldsymbol{A}], \qquad [\boldsymbol{E}] = [\boldsymbol{B}].$$

このことを読者は以降の数々の方程式の中に見て取ることができるだろう．また Gauss 単位系では真空中の磁場 $\boldsymbol{H}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の区別はなくなる：

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}.$$

実際，国際単位系における磁場と磁束密度をそれぞれ $\boldsymbol{H}_{\mathrm{SI}}, \boldsymbol{B}_{\mathrm{SI}}$ とすると，Gauss 単位系における磁場 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{G}}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{G}}$ は

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{G}} = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} \boldsymbol{B}_{\mathrm{SI}} = \sqrt{4\pi\mu_0} \boldsymbol{H}_{\mathrm{SI}} = \boldsymbol{H}_{\mathrm{G}}$$

によって関係付けられる．

なお電磁気学の主な単位系として他にも Heaviside 単位系が挙げられる．Gauss 単位系とは対照的に Heaviside 単位系では Coulomb の法則 (や Biot-Savart の法則，遅延ポテンシャルの式) に 4π が現れる．し

かし基になる場の方程式には，Heaviside 単位系では 4π が現れず，他方 Gauss 単位系では 4π が現れる．よって基礎方程式として Coulomb の法則などよりも場の方程式を多く扱う場面では Heaviside 単位系が適していると言えるだろう．

D.26.2 電磁場

Gauss 単位系では Lorentz 力の下での荷電粒子 (質量 m，電荷 e) の運動方程式は

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B}\right) \tag{130}$$

と書かれる [2, p.54].

電磁ポテンシャル $A^\mu = (\phi, \boldsymbol{A})$ を反変 4 元ベクトルとして導入する．時間成分 ϕ をスカラー・ポテンシャル，空間成分の作る 3 次元的なベクトル $\boldsymbol{A}$ をベクトル・ポテンシャルと呼ぶ．ここから電磁場テンソル

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu (= -F_{\nu\mu})$$

が作られる．ところで電磁場は電磁ポテンシャルから

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\phi, \tag{131}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \tag{132}$$

と導かれる [2, p.54]．これは電磁場テンソルの成分が，以下のように電磁場の成分を与えることを意味している (導出は下記)*109 [2, p.68].

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \qquad (F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{133}$$

電磁場テンソルの成分 (133) の確認

$$\begin{aligned} E^i =& \left[-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\phi\right]^i = -\partial^0 A^i - \partial^i A^0 = -F^{0i}, \\ B^i =& [\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}]^i = -\varepsilon^{ijk}\partial_j A_k = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}(\partial_j A_k - \partial_k A_j) = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F_{jk} \\ & (\Leftrightarrow \quad B^1 = -F^{23} = F^{32}, B^2 = -F^{31} = F^{13}, B^3 = -F^{12} = F^{21}). \end{aligned}$$

電磁場 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ は物理的実体であり，その成分は時空の各点で決まった値を持つのに対し，同一の電磁場の成分，従って電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ を導く電磁ポテンシャル A^μ は無数に存在する．実際，任意関数 $\chi(\boldsymbol{r}, t)$ に対してゲージ変換

$$A_\mu \quad \to \quad A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi$$

(5-0 節の式 (32) に対応) を行っても電磁場テンソル $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ は不変に留まる．この自由度を利用して我々は Lorenz 条件

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{134}$$

を満たす電磁ポテンシャルをとることができる．

*109 Gauss 単位系で電場 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の次元は等しい ($[\boldsymbol{E}] = [\boldsymbol{B}]$)．このことは例えば以降の非相対論的な粒子の運動方程式 (130) や，電磁波の振幅の関係 $E_0 = B_0$(付録 D.26.5) に見て取れる．

理由　新しい電磁ポテンシャル A'^{μ} が Lorenz 条件 (134) を満たすには，

$$0 = \partial_\mu A'^{\mu} = \partial_\mu A^\mu - \partial_\mu \partial^\mu \chi$$

より源付きの波動方程式

$$\partial_\mu \partial^\mu \chi = \partial_\mu A^\mu$$

の解 χ を用いてゲージ変換を行えば良い．こうして 5-0 節の結果がより簡単に得られた．

Lorenz 条件 (134) は 5-0 節の式 (33) に対応しており，このように書けば Lorenz 条件は Lorentz 変換に対して共変的な条件となっていることが明白である (付録 C.12 参照)．

D.26.3　Maxwell 方程式，場の方程式

Maxwell 方程式は Lorentz 不変性が明白な形

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu \tag{135}$$

にまとめられる (付録 C.12 参照)．実際，上式 (135) は $\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$ は

$$\mu = 0 \quad \to \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho, \tag{136}$$

$$\mu = 1, 2, 3 \quad \to \quad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{137}$$

を与える [2, p.84]．

確認　電磁場を用いて Maxwell 方程式 (135):$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$ を具体的に書き下すと

$$-4\pi\rho = -\frac{4\pi}{c} j^0 = \partial_\mu F^{0\mu} = \partial_i F^{0i} = -\partial_i E^i \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho : (136),$$

$$-\frac{4\pi}{c} j^i = \partial_\mu F^{i\mu} = \partial_0 F^{i0} + \partial_j F^{ij} = \partial_0 E^i - \varepsilon^{ijk}\partial_j B^k \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} : (137)$$

となる．

また電磁場がポテンシャルから式 (131)，式 (132) に従って導かれるとき，電磁場で表した Maxwell 方程式

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{138}$$

は恒等式として自動的に満たされる (5-0 節参照) [2, p.74]．これは電磁場テンソルに対する恒等式

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \tag{139}$$

にまとめられる (説明は下記)．また電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ は添字に関して反対称なので，完全反対称テンソル $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$(ただし $\varepsilon^{0123} = 1$) を用いて，対偶 (デュアル) なテンソル

$$F^{*\mu\nu} \equiv \frac{1}{2!}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$$

を導入することができる (すぐ後の補足説明を参照)．すると式 (139) は

$$F^{*\mu\nu} = 0 \tag{140}$$

と書き換えられる (導出は下記)．式 (139)，式 (140) のように書けば Lorentz 変換に対する共変性は明白である (付録 C.12 参照)．

式 (139) の説明

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = \partial_\lambda(\cancel{\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}) + \partial_\mu(\cancel{\partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda A_\nu}) + \partial_\nu(\cancel{\partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda}) = 0.$$

式 (139) の左辺は 3 つの添字に関して完全反対称なので，ゼロでない独立な成分は

$$(\lambda, \mu, \nu) = (0,1,2), (0,1,3), (0,2,3), (1,2,3)$$

の 4 通りに限られる．電磁場テンソルの成分を代入すれば，上の 4 成分に対して式 (139) が Maxwell 方程式 (138) を再現することを確かめられる．

対偶テンソル　添字に関して反対称なテンソルに対しては，対偶 (デュアル) なテンソルが定義される．例えば 3 階の反対称テンソル $f_{\mu\nu\rho}$ の対偶テンソルは

$$f^{*\lambda} = \frac{1}{3!}\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} f_{\mu\nu\rho}$$

で定義される．反対称性より右辺の和の各項がゼロでない値をとり得るのは，ダミー添字 μ, ν, ρ が相異なる値をとる場合だけである．よって例として $\lambda = 0$ の場合を考えると，$(1,2,3)$ を入れ替えて得られる 3! 個の添字の組 (μ, ν, ρ) を持つ項のみを考えれば良い．そのような組 (μ, ν, ρ) は $(1,2,3)$ の偶置換か奇置換のいずれかであり，$\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ と $f_{\mu\nu\rho}$ のそれぞれの添字に関する反対称性より

$$\begin{aligned} &\text{偶置換のとき} \qquad \varepsilon^{0\mu\nu\rho} = +\varepsilon^{0123} = +1, \quad f_{\mu\nu\rho} = +f_{123}, \\ &\text{奇置換のとき} \qquad \varepsilon^{0\mu\nu\rho} = -\varepsilon^{0123} = -1, \quad f_{\mu\nu\rho} = -f_{123} \end{aligned}$$

となるので，3! 個の項は全て f_{123} に等しいことが分かる．そこでそれらの和を 1/3! で割ったものを対偶テンソル f^{*0} と定義しており，具体的には上の関係は

$$f^{*0} = f_{123}, \qquad f^{*1} = -f_{230}, \qquad f^{*2} = f_{301}, \qquad f^{*3} = -f_{012}$$

を与えることが分かる．

3 階以外の反対称テンソルに対偶なテンソルも同様に定義される [12, pp.62–64]．我々は 2 階反対称テンソルの対偶テンソルの例を，電磁場テンソルについて既に見ている：

$$B^i = -\frac{1}{2!}\varepsilon^{ijk} F_{jk}, \qquad \therefore F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B^k.$$

(2 式は Levi-Civita 記号の縮約公式 (77) で関係付けられている．) このように電磁場テンソルの対偶テンソル B^i を磁場成分とすれば，ベクトル・ポテンシャルの回転 $F_{jk} = \partial_j A_k - \partial_k A_j$ が磁場成分を与えること

$$B^1 = -F_{23}, \qquad B^2 = -F_{31}, \qquad B^3 = -F_{12}$$

(ただし $A^i = -A_i$ に注意) をまとめて表現できる．

式 (140) の確認

$$\begin{aligned} 0 =& \frac{1}{3!}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\nu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\nu} + \partial_\sigma F_{\nu\rho}) \\ =& \frac{1}{3!}(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} + \varepsilon^{\mu\sigma\nu\rho} + \varepsilon^{\mu\rho\sigma\nu})\partial_\nu F_{\rho\sigma} \\ =& \frac{1}{2!}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} \\ =& \partial_\nu F^{*\mu\nu}. \end{aligned}$$

Lorenz 条件 (134):$\partial_\mu A^\mu = 0$ の下で，Maxwell 方程式 (135) は場の方程式

$$-\frac{4\pi}{c} j^\mu = \partial_\nu F^{\mu\nu} = \partial_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -\partial_\nu \partial^\nu A^\mu, \qquad \therefore \partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \tag{141}$$

になる．左辺の

$$\partial_\nu \partial^\nu = g^{\mu\nu}\partial_\mu \partial_\nu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

は d'Alembert 演算子だから，これは 5-0 節で見た源付きの波動方程式である．

■**電流密度 j^μ と電荷保存則**　荷電粒子系の電流密度 $j^\mu = (c\rho, \boldsymbol{j})$ を

$$j^\mu = \sum_a e_a \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a) \frac{\mathrm{d}{x_a}^\mu}{\mathrm{d}t} \tag{142}$$

で定義する (デルタ関数については付録 C.17 を参照)[*110]．その時間成分

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) = \sum_a e_a \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a(t)) \qquad (\because j^\mu \text{の式 (142)}) \tag{143}$$

は積分 $\int_{\mathrm{V}} \rho \mathrm{d}^3 x$ が領域 V 内部の電荷の総和を与えるから，電荷の密度を表す [2, pp.78–79]．また ρ の式 (143) と

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_a e_a \boldsymbol{v}_a(t) \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a(t)), \quad \boldsymbol{v}_a \equiv \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_a}{\mathrm{d}t} \qquad (\because j^\mu \text{の式 (142)}) \tag{144}$$

は連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{145}$$

を自動的に満たす (導出は下記，連続の式については付録 D.17 を参照) [2, pp.81–82] [10, p.195]．これは電流密度 $\boldsymbol{j}$ をその名の通り電荷の流れの密度と見なすことを正当化する．ここで電荷の流れの密度とは，面積素ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ を持つ面要素を単位時間に通過する電荷を $\boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ で与えるベクトル $\boldsymbol{j}$ のことである (5-0 節)．言い換えれば系が生成消滅しない点電荷で構成されていることを電荷密度・電流密度の式 (143),(144) は適切に表現しているため，電荷保存則すなわち連続の式が満たされるものと解釈できる．

電荷密度・電流密度の式 (143),(144) が連続の式 (145) を自動的に満たすことの確認

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{r}, t) &= \sum_a e_a \frac{\partial}{\partial t}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a(t)) = \sum_a e_a \boldsymbol{v}_a(t) \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_a(t)}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a(t)) \\
&= -\sum_a e_a \boldsymbol{v}_a(t) \cdot \boldsymbol{\nabla}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a(t)), \\
\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) &= \partial_i {j^i}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_a e_a {v_a}^i(t) \partial_i \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a(t)) \\
&= \sum_a e_a \boldsymbol{v}_a(t) \cdot \boldsymbol{\nabla}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a(t))
\end{aligned}$$

を辺々足して確かめられる [2, pp.81–82] [10, p.195].

一方 5-0 節で学んだように，連続の式は電荷密度・電流密度の具体的な表式とは無関係に，Maxwell 方程式の中に含まれている．これは 4 次元的な表式を用いて改めて次のように確かめられる [2, p.85]．まず連続の式 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0$ は Lorentz 不変性の明白な形

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

に書き換えられる (付録 C.12 参照)．すると Maxwell 方程式 (135):$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$ より

$$\partial_\mu j^\mu = -\frac{1}{4\pi/c} \partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$$

[*110] 電流密度の時間成分と空間成分の次元について，$[c\rho] = [\boldsymbol{j}]$ である．

となる．最後の等号では添字 μ, ν について $\partial_\mu \partial_\nu$ は対称，$F^{\mu\nu}$ は反対称なので $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$ となることを用いた[*111]．

D.26.4　静電場・静磁場

電荷分布･電流分布が定常的であり，従って場 A^μ が時間変化しないとき，場の方程式 (141):$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$ は d'Alembert 演算子 $\partial_\nu \partial^\nu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ における時間微分の項が落ちて Poisson 方程式

$$\Delta A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Delta\phi = -4\pi\rho \\ \Delta \boldsymbol{A} = -\dfrac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \end{cases}$$

になる．よってここから導かれるポテンシャルと電磁場は，Gauss 単位系では

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{x}) &= \int \frac{\rho(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}, \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}, \\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) &= -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}) = \int \frac{\rho(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3} = \sum_a \frac{e_a(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_a)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_a|^3}, \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3} \end{aligned}$$

に置き換わる．Coulomb の法則と Biot-Savart の法則である．5-0 節の国際単位系における表式と比較されたい．

D.26.5　電磁波

電荷が存在しないときの電磁場の時間変化を調べよう．電荷が存在しなければ $j^\mu = 0$ なので場の方程式 (141):$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$ は波動方程式

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = 0$$

になる [2, pp.123–124]．これは平面波解

$$A^\mu = a^\mu e^{-ik_\nu x^\nu}, \qquad k_\mu k^\mu = 0$$

を持つ (付録 C.11 参照)．

理由　相対論的な表記では位相は波数 4 元ベクトル k^μ との 4 元内積 $k_\mu x^\mu$ で表され (付録 D.24)，平面波 $f \equiv a e^{-ik_\mu x^\mu}$ の微分は

$$\partial_\mu(-ik_\nu x^\nu) = -ik_\nu \delta^\nu{}_\mu = -k_\mu, \qquad \therefore \partial_\mu f = -ik_\mu f, \qquad \therefore \partial^\mu f = -ik^\mu f$$

となる．

---

*111　一般に添字 α, β について対称な量 $A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}$ と反対称な量 $B_{\alpha\beta} = -B_{\beta\alpha}$ に対して $A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}$ は

$$\begin{aligned} A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} &= \sum_{\alpha>\beta}(A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} + A^{\beta\alpha}B_{\beta\alpha}) \qquad (\because \alpha = \beta \quad \Rightarrow \quad B_{\alpha\beta} = 0) \\ &= \sum_{\alpha>\beta} A^{\alpha\beta}(B_{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta}) = 0 \end{aligned} \tag{146}$$

となって消える (付録 C.1.2 参照)．

ここで複素定数 a^μ は振幅である．これ以降 A^μ に限らず場の実部が実際の物理量を与えるものとする[*112]．$x^\mu = (ct, \boldsymbol{r}), k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \boldsymbol{k}\right)$ と書くと

$$A^\mu = a^\mu e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \qquad \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \boldsymbol{k}^2 = 0$$

である．このポテンシャルに対する電磁場は

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

の形になる．これは同位相面 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t = \mathrm{const}$ が波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の方向に位相速度 $\frac{\omega}{|\boldsymbol{k}|} = c$ で進行する平面波を表す．ここまでの議論は 5-0 節の議論を Lorentz 共変な形式 (および Gauss 単位系) に焼き直したものである．またこれ以降の議論も 5-0 節と同様であるけれど，国際単位系の場合と係数が異なる．すなわち

$$\begin{aligned}
\text{式 (136)} : \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = 0 \quad &\to \quad i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0 = 0, \\
\text{式 (138)} : \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0 \quad &\to \quad i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0 = 0, \\
\text{式 (138)} : \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \quad &\to \quad i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0 = i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{B}_0
\end{aligned}$$

が満たされるので，平面波は $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{B}_0$ がこの順に右手直交系を成す横波であり，振幅には $E_0 = B_0$ の関係がある [10, pp.283–284]．この結果の解釈は 5-0 節で行った．

D.26.6 任意に運動する電荷の作る電磁場

最後に任意に運動する電荷の作る時間変化する場 A^μ について簡単に触れておく．定常的な電荷分布・電流分布が電磁ポテンシャル

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \int \frac{\rho(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}, \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

を作ったのに対し，電荷分布・電流分布が時間変化するときの電磁ポテンシャル A^μ はある意味で付録 D.26.5 の波動的な性格を兼ね備えたものとなる．すなわち場の方程式 (141):$\partial_\nu\partial^\nu A^\mu = \frac{4\pi}{c}j^\mu$ は式 (45):

$$\phi(\boldsymbol{x}, t) = \int \frac{\rho(\boldsymbol{x}', t - |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|/c)\mathrm{d}^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}, \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{c}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}', t - |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|/c)\mathrm{d}^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

を特殊解に持つ．これは遅延ポテンシャルと呼ばれ，電荷分布・電流分布の時間変化に伴って時刻 $t' \equiv t - |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|/c$ に位置 $\boldsymbol{x}'$ の電荷素片 $\rho(\boldsymbol{x}', t')\mathrm{d}^3x'$，“電流素片” $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}', t')\mathrm{d}^3x'$ から発生した電磁波が光速 c で伝わり，時刻 t で位置 $\boldsymbol{x}$ に電磁ポテンシャル $\frac{\rho(\boldsymbol{x}',t')\mathrm{d}^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}, \frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}',t')\mathrm{d}^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$ を作ることを示唆している [2, pp.178–180] [10, pp.287–288]．

D.26.7 電磁場の Lorentz 変換

繰り返しになるが，電場と磁場は電磁場テンソルの成分として変換する．このとき初めて粒子と場の運動方程式は Lorentz 変換に対して共変的となる．

[*112] このような扱いは波動方程式の線形性

$$0 = \partial_\nu\partial^\nu A^\mu = \partial_\nu\partial^\nu \mathrm{Re}(A^\mu) + i\partial_\nu\partial^\nu \mathrm{Im}(A^\mu)$$

により A^μ が波動方程式を満たせばその実部 $\mathrm{Re}(A^\mu)$ も波動方程式を満たすことから正当化される (付録 C.6 参照)．

付録 D.23 で取り上げたように K 系から見て x 軸方向に K' 系が一定速度 $\boldsymbol{V}$ で運動しているとき[*113]，同一の点の K 系で見た電磁場 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ と K' 系で見た電磁場 $\boldsymbol{E}', \boldsymbol{H}'$ の間の関係 (変換則) を調べよう [2, pp.69–70]．座標の Lorentz 変換 (127):

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad y' = y, \qquad z' - z, \qquad ct' = \frac{ct - \frac{V}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

に対して電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ の 2 階共変テンソル成分としての変換則

$$E_y = F_{02} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^0}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^2} F'_{\mu\nu} = a^0{}_0 a^2{}_2 F'_{02} + a^1{}_0 a^2{}_2 F'_{12} = \gamma\{E'_y - \beta(-H'_z)\}, \quad \text{etc.}$$

$$(a^{\mu}{}_{\nu}) \equiv \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ただし $\beta \equiv V/c, \gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$，付録 C.12 参照) を具体的に書き下すと[*114]，電磁場の変換則

$$\boldsymbol{E}_{\parallel} = \boldsymbol{E}'_{\parallel}, \qquad \boldsymbol{H}_{\parallel} = \boldsymbol{H}'_{\parallel}, \qquad \boldsymbol{E}_{\perp} = \frac{\boldsymbol{E}'_{\perp} + \boldsymbol{H}'_{\perp} \times (\boldsymbol{V}/c)}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \qquad \boldsymbol{H}_{\perp} = \frac{\boldsymbol{H}'_{\perp} - \boldsymbol{E}'_{\perp} \times (\boldsymbol{V}/c)}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

を得る．ただしそれぞれの座標系で場を x 方向とそれに垂直な方向に分解し，例えば K 系の電場の x 成分を $\boldsymbol{E}_{\parallel}$，それに垂直な成分を $\boldsymbol{E}_{\perp}$ などと書いている．特に

- $O((V/c)^2)$ を落とす近似で変換則は　$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}' + \boldsymbol{H}' \times \dfrac{\boldsymbol{V}}{c}, \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}' - \boldsymbol{E}' \times \dfrac{\boldsymbol{V}}{c}$　となる．
- K 系で $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{V}$ が直交　$\Leftrightarrow$　K'系で $\boldsymbol{E}' = 0$　または　$\boldsymbol{H}' = 0$.

D.26.8　一様な運動をしている電荷の作る電磁場

実験室系 K に対し電荷 e とともに K' 系が一様な速度 $\boldsymbol{V}$ で運動するとき[*115]，K 系において電荷の作る場を考える (図 299 のように $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}'$ を定義する)．座標の Lorentz 変換により

$$R'^2 \equiv x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{R^{*2}}{1-(V/c)^2}, \qquad R^{*2} \equiv (x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)$$

となる (図 299，付録 D.23 参照)．また K' 系における電磁場

$$\boldsymbol{E}' = \frac{e\boldsymbol{R}'}{R'^3}, \qquad \boldsymbol{H} = 0$$

を変換すると (付録 D.26.7 参照)，θ を K 系における電荷から観測点への動径ベクトル $\boldsymbol{R}$ と運動方向の成す角として，K 系の電磁場

$$\boldsymbol{E} = \underbrace{\frac{e\boldsymbol{R}}{R^3}}_{\text{くくりだす}} \frac{1-(V/c)^2}{\{1-(V/c)^2\sin^2\theta\}^{3/2}}, \qquad \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{E}$$

を得る．

[*113] はじめ 2 つの座標系の空間軸は一致しており，この瞬間をそれぞれの座標系の時間 t, t' の原点にとる

[*114] もちろん電磁場テンソル $F^{\mu\nu}$ の 2 階反変テンソル成分としての変換則を書き下しても同じ結論を得る．

[*115] はじめ 2 つの座標系の原点と空間軸は一致しており，この瞬間をそれぞれの座標系の時間 t, t' の原点にとる．

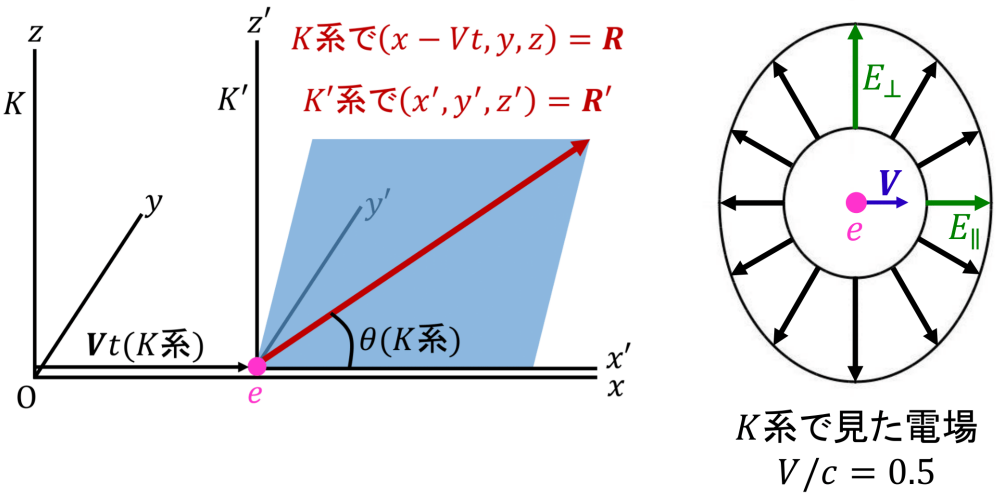


図 299　一様な運動をする電荷の作る電場は運動方向に“収縮する”．$E_\parallel = \dfrac{e}{R^2}\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)$，$E_\perp = \dfrac{e}{R^2}\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$．

導出　電場の変換則を書き下すと

$$E_x = E'_x = \frac{ex'}{R'^3}, \qquad E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1-(V/c)^2}} = \frac{ey'}{R'^3\sqrt{1-(V/c)^2}}, \qquad E_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1-(V/c)^2}} = \frac{ez'}{R'^3\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

であり，R', x', y', z' を x, y, z で表すと

$$\boldsymbol{E} = \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\frac{e\boldsymbol{R}}{R^{*3}}, \qquad \boldsymbol{R} \equiv (x-Vt, y, z)$$

とまとめられる．ここで関係式

$$R^{*2} \equiv (x-Vt)^2 + \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)(y^2+z^2) = R^2\cos^2\theta + \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)R^2\sin^2\theta = R^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right)$$

を利用すると，

$$\boldsymbol{E} = \frac{e\boldsymbol{R}}{R^3}\frac{1-\frac{V^2}{c^2}}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}$$

と書き換えられる．また $\boldsymbol{H}' = 0$ のとき K 系の電場と磁場の間には

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{E} \tag{38.9}$$

の関係がある (付録 D.26.7 参照)．

よって K 系において電荷から等距離の球面上に分布する電場は，運動方向 $\theta = 0, \pi$ よりも運動に垂直な方向 $\theta = \pi/2$ の方が大きい (図 299 参照)．この意味で電場は電荷の運動方向に“収縮する”——もっともこのような粗い表現に乱暴にまとめると，それが意味するところが正確には伝わらなくなるので注意が必要である．これは定性的には Lorentz 収縮 (付録 D.23) に類似しているけれど，定量的には収縮の因子は異なっている．この結果については付録 D.33.1 で再度言及する．なお電場は $\boldsymbol{E} = (e\boldsymbol{R}/R^3)(1+O((V/c)^2))$ となっており，$V = 0$ のときには Coulomb の法則に従う静電場が再現されることが見て取れる．

D.27　電子の平均速度の係数 1/2 について

5-4 節の注解で予告したように，ここでは導体中の電子の平均速度 $\bar{\boldsymbol{v}}$ と電場 $\boldsymbol{E}$ の間の正しい比例係数を導く [34, 1.1 節].

1 個の電子が無限小時間 $\mathrm{d}t$ のうちに衝突にあう確率を $\mathrm{d}t/\tau$ と書く．また与えられた瞬間から

- 時間 t 先までに衝突しない確率を $P_+(t)$
- 時間 t 前までに衝突しなかった確率を $P_-(t)$

とすると，

$$P_\pm(t+\mathrm{d}t) = P(t)\left(1-\frac{\mathrm{d}t}{\tau}\right), \qquad \therefore \frac{\mathrm{d}P_\pm}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau}, \qquad \therefore P_\pm(t) = P_\pm(0)e^{-t/\tau} = e^{-t/\tau}$$

となる．ここから上で定義した τ が，連続した衝突の時間間隔の (時間) 平均であること

$$\int_0^\infty te^{-t/\tau}\frac{\mathrm{d}t}{\tau} = \tau \tag{147}$$

が見出される．よって

$$\begin{aligned}&(\text{任意にとった時刻の直前と直後の衝突間隔の平均}) = 2\tau,\\ &(\text{衝突が起きた瞬間から次の衝突までの時間の平均}) = \tau\end{aligned} \tag{148}$$

となる．この結果は定性的には次のように解釈できる．すなわち任意に時刻を挿入するとき，「間隔の大きい衝突ほど観測時刻がその間に挿入されやすくなるから，衝突間隔が長い電子ほど取り上げられる確率が高くなり，衝突時間の平均を求める際にそのような重みがかかってしまう」.

ところで電子の運動方程式は任意の時刻でその加速度を与えるものだから，衝突間隔 τ は 2τ に修正しなければならない．こうして教科書 4-5 節における電子の平均速度は，係数 1/2 が取り除かれて

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{e\boldsymbol{E}}{m}\tau$$

となる．

以下，細かい補足を述べる．

■式 (147) の確認

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-t/\tau}\mathrm{d}t &= \frac{[e^{-t/\tau}]_0^\infty}{-1/\tau} = \tau,\\ \therefore \int_0^\infty te^{-t/\tau}\mathrm{d}t &= \left[t\frac{e^{-t/\tau}}{-1/\tau}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-t/\tau}}{-1/\tau}\mathrm{d}t = \tau^2\end{aligned}$$

による．

文献 [17, pp.242–245] でも同様に

$$(\text{任意の瞬間から次の，または直前の衝突までの時間の平均}) = \tau$$

を得ている．

■式 (147) について　式 (147) の結果は次のように再確認できる．

- 時刻 $t=0$ での N 個の電子のうち
  $\Delta N_1 = e^{-|t_1|/\tau}\frac{\Delta t_1}{\tau}N$ 個が $t_1 < t < t_1 + \Delta t_1$(ただし $t_1 < 0$) に直前の衝突をし，
- このうち $\Delta N_2 = e^{-t_2/\tau}\frac{\Delta t_2}{\tau}N_1$ 個が $t_2 < t < t_2 + \Delta t_2$(ただし $t_2 > 0$) に最初の衝突をする．

よって N 個の電子に関する衝突間隔 $t_2 - t_1(\geq 0)$ のアンサンブル平均はやはり

$$\begin{aligned}\int_{t_1<0,t_2>0}\frac{\mathrm{d}N_2}{N}(t_2-t_1) &= \int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}t_1}{\tau}e^{t_1/\tau}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t_2}{\tau}e^{-t_2/\tau}(t_2-t_1)\\ &= \int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}t_1}{\tau}e^{t_1/\tau}(\tau-t_1) \qquad (\because \text{式 (147) の導出過程})\\ &= \int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}{t_1}'}{\tau}(\tau+{t_1}')e^{-{t_1}'/\tau}\\ &= 2\tau \qquad (\because \text{式 (147) の導出過程})\end{aligned}$$

となる．これに対し $t_1 < t < t_1 + \Delta t_1$ に衝突を受けた ΔN_1 個の電子について，次の衝突までの時間 $t_2 - t_1$(ただし $t_2 > t_1$) のアンサンブル平均は，再び式 (147) の導出と同様の計算により

$$\int_{t_1}^{\infty}(t_2-t_1)\frac{\Delta N_1 e^{-(t_2-t_1)/\tau}\frac{\mathrm{d}t_2}{\tau}}{\Delta N_1} = \int_0^{\infty} te^{-t/\tau}\frac{\mathrm{d}t}{\tau} = \tau$$

となる．

D.28　ソレノイド内の任意の位置における磁束密度

「ソレノイド内の磁束密度が一様になること，つまり中心軸以外の点でも B の値が同じだということの証明は少々むずかしいのでやらない」と教科書 p.212 欄外の註にある．問題の難しさは，Biot-Savart の法則に従って磁場またはベクトル・ポテンシャル

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{I}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}l}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

を求める計算がこの場合，楕円積分に帰着するという点にある [10, pp.146–148]．

しかしそれにも関わらず，Ampère の法則を上手に用いればソレノイド内の任意の位置における磁束密度を調べることができる[*116]．ソレノイドの半径を a とし，ソレノイドの中心軸を z 軸とした円筒座標 (ρ, ϕ, z) を導入する．ただし電流に対して右ねじの向きを z 軸の正の向きとする．系の z 方向への並進対称性と z 軸周りの回転対称性により，磁束密度は ρ だけの関数となり，また ϕ 方向成分を持たないと考えられる．対称性の議論だけからは，磁束密度が ρ 方向成分を持つことは許容されると考えられるけれど，Biot-Savart の法則を用いれば実際には磁束密度は z 成分のみを持つことを確かめられる．まとめると，z 方向単位ベクトルを $\hat{\boldsymbol{z}}$ として磁束密度は

$$\boldsymbol{B}(\rho) = B(\rho)\hat{\boldsymbol{z}}$$

と表される．

これを踏まえて，図 300 のように電流に垂直な矩形 ABCD に対して Ampère の法則を適用する．辺 AB, CD は z 軸と平行で長さは Δz であり，辺 AB はソレノイドの内部 $\rho(< a)$ にある．まず辺 CD が無限遠にあ

[*116] 静磁場を考えているので，Ampère-Maxwell の法則において変位電流をゼロとした Ampère の法則が成り立つ．本稿では Ampère の定理とは呼ばず，敢えて Ampère の法則と呼ぶ (1-1 節の注解参照)．

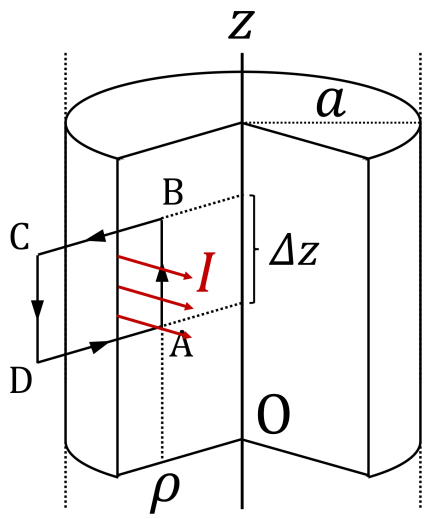


図 300　ソレノイドと Ampère の法則

る場合を考えると，Biot-Savart の法則からも理解されるように CD での磁場はゼロになる．よって Ampère の法則は

$$B(\rho)\Delta z = \mu_0 nI\Delta z, \qquad \therefore B(\rho) = \mu_0 nI$$

を与える．次いで辺 CD がソレノイドの外部 $\rho'(> a)$ の有限の距離にある場合を考えると，再び Ampère の法則より

$$\{B(\rho) - B(\rho')\}\Delta z = \mu_0 nI\Delta z, \qquad \therefore B(\rho') = 0$$

を得る．

以上よりソレノイドの内部には一様な磁束密度 $\boldsymbol{B} = \mu_0 nI\hat{\boldsymbol{z}}$ が実現されており，ソレノイドの外部では磁束密度はゼロである．

D.29　相互インダクタンスについての Neumann の公式

ここでは 5-10 節で予告したように，相互インダクタンスの関係 $M_{12} = M_{21}$ を証明する．そのために相互インダクタンスに関する Neumann の公式を導く [10, pp.253–254].

まず Stokes の定理 (付録 C.10) により，一般に閉曲線 C を貫く磁束 Φ はベクトル・ポテンシャルの C に沿う線積分として表されることに注目する．

$$\Phi = \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

ただし S は C を縁とする曲面である．

ここで近接する回路 $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ を電流 I_1, I_2 が流れる場合を考える．準定常的な変化を仮定し Biot-Savart の法則

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\text{導線}} \frac{I(t)\mathrm{d}\boldsymbol{s}'}{|\boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}'|}$$

を適用すると (以下，単にパラメーターとしてのみ含まれる引数 t を省略)，例えば回路 C_1 を貫く磁束は

$$\Phi_1 = \int_{\mathrm{C}_1} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{s}_1)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}_1 = \int_{\mathrm{C}_1} \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\int_{\mathrm{C}_1} \mathrm{d}\boldsymbol{s}_1{}' \frac{I_1}{|\boldsymbol{s}_1-\boldsymbol{s}_1{}'|} + \int_{\mathrm{C}_2} \mathrm{d}\boldsymbol{s}_2{}' \frac{I_2}{|\boldsymbol{s}_1-\boldsymbol{s}_2{}'|}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}_1 = L_1 I_1 + M_{12} I_2$$

と計算される．ここに

$$\text{自己インダクタンス}\quad L_1 \equiv \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathrm{C}_1}\int_{\mathrm{C}_1} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}_1{}'}{|\boldsymbol{s}_1-\boldsymbol{s}_1{}'|}$$

$$\text{相互インダクタンス}\quad M_{12} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathrm{C}_1}\int_{\mathrm{C}_2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}_2{}'}{|\boldsymbol{s}_1-\boldsymbol{s}_2{}'|} : \text{Neumann の公式}$$

である．相互インダクタンスは回路 $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ に関して対称であることから期待されるように，回路 C_2 を貫く磁束を計算すると

$$\Phi_2 = L_2 I_2 + M_{21} I_1, \qquad M_{21} = M_{12}$$

となる．

D.30　電磁場のエネルギーの密度と流れ

ここでは特殊相対性理論の枠組みの中で，電磁場と粒子の系に対するエネルギー保存則について説明する [2, pp.85–87]．ただし付録 D.26 で導入した Gauss 単位系を用いる．Maxwell 方程式から

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{H}^2}{8\pi}\right) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{S} + \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{S} \equiv \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} : \text{Poyntingベクトル} \tag{149}$$

が導かれる (導出は下記)．

一方，粒子の運動方程式より，静止エネルギーを含めた運動エネルギー $\mathscr{E}_{\mathrm{kin}} = \sum \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$(付録 D.23 参照，$\sum$ は粒子ごとに定義された量の全粒子にわたる和) に対して電場のする仕事と粒子系の運動エネルギーの関係

$$\int \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V = \sum e\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{E}_{\mathrm{kin}} \tag{150}$$

が成り立つ (導出は下記，$\sum$ は積分範囲内の全粒子にわたる和)．よって式 (149) の両辺を空間全体にわたって体積積分すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int \frac{\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{H}^2}{8\pi}\mathrm{d}V + \sum \mathscr{E}_{\mathrm{kin}}\right) = 0$$

となる (無限遠で場はゼロになるから，$\boldsymbol{S}$ の表面積分は落ちる)．空間全体の電磁場と粒子から成る閉じた系に対して全エネルギーは保存することを要求すると，

$$W \equiv \frac{\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{H}^2}{8\pi}$$

は電磁場のエネルギー密度と解釈できる．

次に空間の有限領域にわたる体積積分を考えると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int \frac{\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{H}^2}{8\pi}\mathrm{d}V + \sum \mathscr{E}_{\mathrm{kin}}\right) = -\oint \boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{f} \tag{151}$$

となるので ($\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ は表面の面要素ベクトル)，$\boldsymbol{S}$ は場のエネルギーの流れの密度と解釈できる．実際このとき上式 (151) は単位時間に流出する場のエネルギーだけ内部の場と粒子のエネルギーが減少することを表すことに

なる．［ここでは粒子が注目している空間領域から逃げる場合は考えていない．］なお非相対論的極限でも式 (151) は成り立ち，単に $\mathscr{E}_{\mathrm{kin}}$ の中で運動エネルギーが非相対論的な表式 $\sum \frac{1}{2}mv^2$ に置き換わる (一定の静止エネルギー mc^2 を除けば，付録 D.23 参照)．

なるほど，例えば単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ 方向に伝播する平面電磁波を考えると，各点で $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{n}$ はこの順に右手直交系を成し振幅は $E = H$ の関係を満たすから，Poynting ベクトルは $\boldsymbol{S} = Wc\boldsymbol{n}$ となる．この量をエネルギーの流れの密度と見なすのはもっともなことである．

以上を踏まえて最初の式 (149) を振り返ると，これは単位時間において単位体積の場のエネルギーの減少量 $-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{H}^2}{8\pi}\right)$ が，場のエネルギーの流出 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{S}$ と電場の粒子に対する仕事 $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}$ によってもたらされることを意味している．

式 (149) の導出　Maxwell 方程式

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}$$

(付録 D.26) とナブラの公式 (85)(付録 C.10) を用いると

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2+H^2}{8\pi}\right) &= \frac{1}{4\pi}\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right)\\ &= -\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} - \frac{c}{4\pi}\{\boldsymbol{H}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H})\}\\ &= -\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{S}, \qquad \boldsymbol{S} \equiv \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} : (149)\end{aligned}$$

を得る．

式 (150) の導出

- 第 1 の等号について
  荷電粒子系の電流密度の表式
  $$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = \sum_a e_a \boldsymbol{v}_a(t)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a(t))$$
  による (付録 D.23 参照)．
- 第 2 の等号について，簡単のために 1 粒子系を考えて $\mathscr{E}_{\mathrm{kin}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ とする．
  - 運動学的関係
    $$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_{\mathrm{kin}}}{\mathrm{d}t} = \frac{m\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}}{(1-(v/c)^2)^{3/2}}, \qquad \boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}\cdot\left(\frac{m\dot{\boldsymbol{v}}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + \frac{m(\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}})\boldsymbol{v}/c^2}{(1-(v/c)^2)^{3/2}}\right) = \frac{m\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}}{(1-(v/c)^2)^{3/2}}$$
    よりこれらは一致する：
    $$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_{\mathrm{kin}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}.$$
    非相対論的極限 $\mathscr{E}_{\mathrm{kin}} \to mc^2 + \frac{1}{2}mv^2, \boldsymbol{p} \to m\boldsymbol{v}$(付録 D.23) ではこの関係はほぼ自明である．
  - 粒子の運動方程式
    $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}\right).$$
    左辺 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$ は固有時間ではなく座標時間 t による微分であることに注意する．$\boldsymbol{p} = m\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}\tau$ における固有時間 $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1-(v/c)^2}$ を座標時間 $\mathrm{d}t$ に置き換えて $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ とすると，非相対論的な運動方程式になる (付録 D.23)．

  以上より
  $$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_{\mathrm{kin}}}{\mathrm{d}t} = e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}$$
  を得る．これは磁場が電荷の速度に垂直な力を及ぼすため，電場のみが仕事をし，粒子の運動エネルギー変化に寄与することを意味している．もっとも一般式 (129):$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_{\mathrm{kin}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}$ に Lorentz 力 $\boldsymbol{f} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B}\right)$ を代入すれば最後のは直ちに得られ，改めて導くには及ばない．粒子が多数ある場合への一般化は直接的である．

■国際 (MKSA) 単位系との対応　コンデンサーやソレノイドコイルに蓄えられるエネルギーの計算から，静電場または静磁場の一方のみが存在する場合のエネルギー密度がそれぞれ，国際 (MKSA) 単位系において $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2, \frac{1}{2}\mu_0 H^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}$ となることを本編の 5-11 節で学んだ．国際単位系から Gauss 単位系に移るには

$$\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}, \qquad \sqrt{4\pi\mu_0}\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H} \quad (\sqrt{4\pi/\mu_0}\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B})$$

とすれば良い．よって Gauss 単位系における表式はそれぞれ $E^2/8\pi, H^2/8\pi$ となる．エネルギー密度の表式 $W = \frac{\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{H}^2}{8\pi}$ はその自然な一般化となっている．

なお Poynting ベクトルの国際単位系における表式は $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ であり，同様にこれを Gauss 単位系に移すと

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \quad \to \quad \boldsymbol{S} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$$

となる．

D.31　Huygens の原理の導出

ここでは 6-2 節の注解で予告したように，波動方程式から Huygens の原理を導出・説明する．付録 D.34 における導出も併せて参照されたい．

光の回折パターンの問題では，空間的な強度分布に興味が持たれる．そこで振動数 ω の単色平面波が入射する場合に対して，6-2 節で導入した電場ないし磁場の 1 成分

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = u(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$$

のみを扱う光のスカラー理論を考え，場の空間依存性 $u(\boldsymbol{r})$ を調べよう．もとの場 ψ が真空中で波動方程式に従うこと (5-0 節) は，$u(\boldsymbol{r})$ が Helmholtz 方程式

$$(\Delta + k^2)u(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{152}$$

を満たすことを意味する：

$$0 = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)(u(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}) = -(\Delta + k^2)(u(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}), \qquad k \equiv \frac{\omega}{c}.$$

ここで

$$(\Delta + k^2)G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{153}$$

で定義される Helmholtz 方程式の Green 関数 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$(単位の源 $-\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$ に対する応答) は球面波の形

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{e^{\pm ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

(付録 C.11 参照) となることを証明し得る [30, pp.186–190]．式 (152) に左から $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ をかけ，式 (153) に

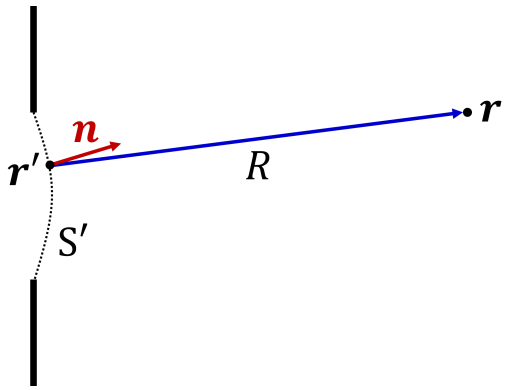


図 301　開口を通る光の回折

左から $u(\boldsymbol{r})$ をかけて辺各引き，両辺を位置 $\boldsymbol{r}$ について空間積分すると

$$
\begin{aligned}
u(\boldsymbol{r}') &= \int [G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\Delta u(\boldsymbol{r}) - u(\boldsymbol{r})\Delta G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}^3x \\
&= \int \boldsymbol{\nabla}\cdot[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\nabla}u(\boldsymbol{r}) - u(\boldsymbol{r})\boldsymbol{\nabla}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}^3x \\
&= \int [G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\nabla}u(\boldsymbol{r}) - u(\boldsymbol{r})\boldsymbol{\nabla}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S, \qquad (\because \text{Gauss の発散定理 (付録 } C.10)) \\
\therefore u(\boldsymbol{r}) &= \int [G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\nabla}'u(\boldsymbol{r}') - u(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\nabla}'G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S' \qquad (\because \text{対称性 } G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})) \\
&= \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{e^{ikR}}{R}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{ikR}}{R}\right)\mathrm{d}S' \qquad \left(R \equiv |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|,\ \frac{\partial}{\partial n}\text{は方向微分}\right)
\end{aligned}
$$

を得る [30, p.192]．これは Helmholtz-Kirhhoff の積分と呼ばれ，Huygens の原理の数学的な表現と見なされる．こうして Huygens の原理は「原理」の地位を剥奪される．

スクリーンの開口を通る光の回折などを念頭に置くと，有益な結果を得るには場の観測点 $\boldsymbol{r}$ を含み，スクリーンを 1 つの側面に持つ無限に広い領域にわたって空間積分を行えば良い．このとき球面波は減衰して場は無限遠ではゼロになり，またスクリーン上 (またはスクリーンのすぐ背後の点) でも場はゼロとおいて良いから，表面積分は開口を覆い，ちょうど開口の周縁によって限られるような面 S′ にわたって行えば良い (図 301 参照)．

そこで境界条件として面 S′ 上での場の値 $u(\boldsymbol{r}')$ が与えられている場合を考える (Dirichlet 境界条件)．このとき境界上での場の勾配 $\boldsymbol{\nabla}'u(\boldsymbol{r}')$ は知られていないから，上式を用いて観測点の場の値 $u(\boldsymbol{r})$ を求めるには，境界上でゼロになる Green 関数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ をとって

$$
u(\boldsymbol{r}) = -\int_{\mathrm{S}'} u(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\nabla}'G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S'
$$

とすれば良い [30, p.192]．

D.32　波動の不確定関係

ここでは 6-2 節で言及した波動の不確定関係の説明を行う [2, pp.162–163]．以降の導出は電磁波の文脈で行うけれど，場が電磁波であることをあからさまには用いないから，結果は波動一般に当てはまる数学的な関係である．

平均振動数 ω_0 を持つ，厳密には単色でない波を考え，与えられた点での場 (例えば電場) を $\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{E}_0(t)e^{-i\omega_0 t}$ という形に書こう．すると場の振動数 ω の Fourier 成分

$$\boldsymbol{E}_\omega = \int \boldsymbol{E}(t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t = \int \boldsymbol{E}_0(t)e^{i(\omega-\omega_0)t}\mathrm{d}t$$

は，$1/|\omega-\omega_0|$ 程度の時間のうちに $\boldsymbol{E}_0(t)$ がほとんど変化しなければ，打ち消しあってゼロに近づく．よって $\boldsymbol{E}_\omega$ がゼロとかなり異なる値をとるためには，$1/|\omega-\omega_0|$ の時間範囲の間に振幅 $\boldsymbol{E}_0(t)$ が際立って変化しなければならない．すなわち $\boldsymbol{E}_0(t)$ が際立って変化する時間の長さを Δt，また $|\omega-\omega_0| \equiv \Delta\omega$ と書いたとき，

$$\frac{1}{\Delta\omega} \gtrsim \Delta t, \qquad \therefore \Delta\omega\Delta t \lesssim 1$$

であれば良い．［これは十分条件であって，この範囲 $\Delta\omega \lesssim 1/\Delta t$ の外の ω に対しても $\boldsymbol{E}_\omega$ がゼロと大きく異なる値を持つことはあり得る．すなわちそのような ω の範囲を改めて $\Delta\omega$ と書くと］「波の“非単色度”$\Delta\omega$ は，いずれにせよ $1/\Delta t$ より小さくはありえない (それより大きいことは，もちろんありうる)」 [2, p.163]：

$$\Delta\omega \gtrsim \frac{1}{\Delta t}.$$

数学的な類似性により，$\Delta t \to \Delta x, \Delta\omega \to \Delta k_x$ と置き換えて得られる 6-2 節の不確定関係

$$\Delta x \Delta k_x \gtrsim 1$$

が成り立つ．

■補足——部分偏光　実際の波は完全には単色でなく，平均の振動数 ω の周りの小さな区間 $\Delta\omega$ 内の，いろいろな振動数を含んでいる．そのような波に対して空間の定まった点における場を

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}$$

という形に書くと，以上の議論により偏光を決定する複素振幅 $\boldsymbol{E}_0$ は時間のゆるやかに変化する関数 $\boldsymbol{E}_0(t)$ となる．このように各点での偏りが時間とともに変化する波を部分偏光しているという [2, p.135].

この点を理解するために，いくつかの例を挙げる．

まず一定の偏光状態を持つ単色波に対して，$\boldsymbol{E}_0$ は定数である．

次に良く知られている簡単な例は，互いに近い振動数 $\omega_1, \omega_2 (\omega_1 > \omega_2)$ を持つ単色平面波を重ね合せて得られるうなりである．これは平均の振動数 $\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ での振動に関する振幅が，振動数 $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$ でゆっくりと時間変化するような波である (4-5 節).

さらに平均 ω_0 の周りの σ 程度の区間で値を持つような Fourier 係数

$$f_\omega = Ae^{-(\omega-\omega_0)^2/\sigma^2}$$

に対して，x 方向に伝播する単色平面波の重ね合せ

$$f(x,t) = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} f_\omega e^{-i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}$$

を考える．すると

$$\begin{aligned} f(x,t) =& Ae^{-i\omega_0 t}\int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\exp\left[-\left\{\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\sigma^2} + i(\omega-\omega_0)\left(t-\frac{x}{c}\right)\right\}\right] \\ =& \frac{A\sigma}{2\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\frac{\sigma^2}{4}\left(t-\frac{x}{c}\right)^2\right\} e^{-i\omega_0\left(t-\frac{x}{c}\right)} \end{aligned}$$

となる．これは x 方向に光速度 c で運動する Gauss 型の波束を表している．空間の定まった点 $x=0$ での場は

$$f(x=0,t)=f_0(t)e^{-i\omega_0 t}, \qquad f_0(t)=\frac{A\sigma}{2\sqrt{\pi}}e^{-\sigma^2 t^2/4}$$

という形をとる．

D.33　平面上に分布する振動電荷による電場

ここでは 6-3 節の注解で引用した電場の式 (52) の導出を行う．

D.33.1　任意の運動を行う 1 個の荷電粒子が作る電磁場 [2, pp.181–183]

まず任意の運動を行う 1 個の荷電粒子 (位置 $\boldsymbol{r}_0(t)$，電荷 q) が時刻 t に位置 $\boldsymbol{r}$ に作る電磁場を与える一般公式

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[q\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(R-\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}}{c}\right)^3}\left(\boldsymbol{R}-\frac{\boldsymbol{v}}{c}R\right)+\frac{q}{c^2\left(R-\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}}{c}\right)^3}\boldsymbol{R}\times\left\{\left(\boldsymbol{R}-\frac{\boldsymbol{v}}{c}R\right)\times\dot{\boldsymbol{v}}\right\}\right], \qquad \boldsymbol{H}=\frac{1}{cR}\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{E}$$

を出発点にとる．ただし $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ は隔たりのベクトルであり，また右辺の全ての量は

$$t'+\frac{R(t')}{c}=t$$

から決まる時刻 t'，すなわち t' に電荷の位置を発した光が $R(t')$ 隔たる位置 $\boldsymbol{r}$ にちょうど時刻 t で到達するような時刻 t' において評価するものとする．これは 1 個の荷電粒子に対する遅延ポテンシャル[*117]から導かれる電磁場であるけれど，本稿ではこの式自体の導出は行わず，各項に対する解釈を述べるに留める．

- 電荷の加速度は電場の第 2 項にのみ含まれる．
  この項は球面波と同様に電荷の遠方で $1/R$ のように振舞い，粒子の放射 (輻射) する電磁波に対応する．
  逆に言えば放射が起きるのは電荷が加速度を持つときだけである．
- 一方，電場の第 1 項は Coulomb 電場と同様，遠方で $1/R^2$ のように振舞うため，
  遠方では第 2 項の輻射場が支配的となる (放射は遠方まで届く)．
  電荷が等速度運動を行っているときの電場は第 1 項だけで表され，
  これは付録 D.26.8 で説明した“電荷の運動方向に潰れる電場”に一致する．
- 電場と磁場の関係は，$\boldsymbol{n}\equiv\boldsymbol{R}/R$ 方向 (電荷から観測位置を見る方向) に伝播する
  平面波に対する関係と同じである (5-0 節参照)

D.33.2　式 (52) の導出

ここでは電場の式における第 2 項の輻射場に興味がある．これは非相対論的な極限 $v\ll c$ で

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{v}})$$

となる．

[*117] Liénard-Wiechert のポテンシャルと呼ばれる．遅延ポテンシャルについては 5-10 節の注解を参照．

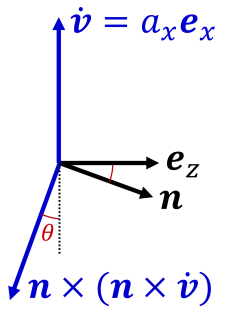


図 302　3 重積 $\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \dot{\boldsymbol{v}})$

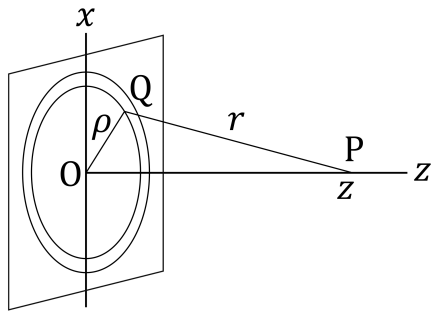


図 303　平面 $z = 0$ 上で x 方向に振動する電荷と電場の観測位置 P

これだけの準備をして，平面上に分布する振動電荷による電場の式 (52) の導出に移ろう [17, pp.55–58]．無限に広い平面 $z = 0$ に個数の面密度 η で一様に分布する荷電粒子 q が，x 方向に変位が $x = x_0 e^{i\omega t}$ で表される共通の振動を行っているとき，遠方の z 軸上の点 P(座標 z) に作られる電場を調べる．このとき上の一般公式における $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{n}$ は電荷の振動中心に関して評価した定ベクトルに置き換えて良い．また加速度は $\dot{v} = a_x \boldsymbol{e}_x$ と書くことができ (ただし $\boldsymbol{e}_x$ は x 方向単位ベクトル)，3 重積 $\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \dot{\boldsymbol{v}})$ は幾何学的に $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{e}_x$ の張る面内で $\boldsymbol{n}$ に垂直なベクトルとなる．そこで z 方向単位ベクトル $\boldsymbol{e}_z$ と $\boldsymbol{n}$ の成す角を θ と書くと，3 重積 $\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \dot{\boldsymbol{v}})$ の x 成分は $-a_x \cos\theta$ となるけれど，遠方の点 P に対しては θ は微小角となるから，$\cos\theta$ は 1 とおいて構わない (図 302 参照)．以上より図 303 のように点 P から距離 r 隔たる位置 Q における電荷の作る場は，$R \to r$ と置き換え，加速度 $a_x\left(t - \frac{r}{c}\right) = -\omega^2 x_0 e^{i\omega(t-r/c)}$ を代入すると，

$$E_x^{(\mathrm{Q})}(r,t) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} a_x\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\omega^2 x_0 e^{i\omega(t-r/c)}}{r}$$

となる ($t - \frac{r}{c}$ は a_x の引数)．よって P から共通の距離 r にある，したがって電荷の面内で原点から距離 ρ，幅 $\mathrm{d}\rho$ の円環内 (面積は $2\pi\rho\mathrm{d}\rho$，5-1 節参照) の電荷からの寄与は等しく $E_x^{(\mathrm{Q})}$ だから，P における全電場は

$$\begin{aligned}
E_x(\mathrm{P},t) &= \int_0^\infty E_x^{(\mathrm{Q})}(r,t) \times \eta 2\pi\rho\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{q}{2\varepsilon_0 c^2}\omega^2 x_0 \eta e^{i\omega t}\int_0^\infty \frac{e^{-i\omega r/c}}{r}\rho\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{q}{2\varepsilon_0 c^2}\omega^2 x_0 \eta e^{i\omega t}\int_z^\infty e^{-i\omega r/c}\mathrm{d}r \qquad (\because r^2 = \rho^2 + z^2, r\mathrm{d}r = \rho\mathrm{d}\rho)
\end{aligned}$$

と計算される．

最右辺の積分は

$$-\frac{c}{i\omega}[e^{-i\infty} - e^{-i\omega z/c}]$$

という不定形を与える．実際，絶対値 $\mathrm{d}r$，偏角 $-i\omega r/c$ の複素数 $e^{-i\omega r/c}\mathrm{d}r$ に対応する無限小ベクトルを足し合わせると，合成ベクトルの先端は図 304 のようにある円周を回り続け，値が定まらない．これは動かしがたい数学的な事実であって，意味のある結論を得るためには物理的な考察に基づき問題を修正する必要がある．実際，不合理な結果へと導く要因は，専ら我々の考えている系が「無限に広い電荷分布」という物理的に非現実的な仮定を含んでいるということにある．

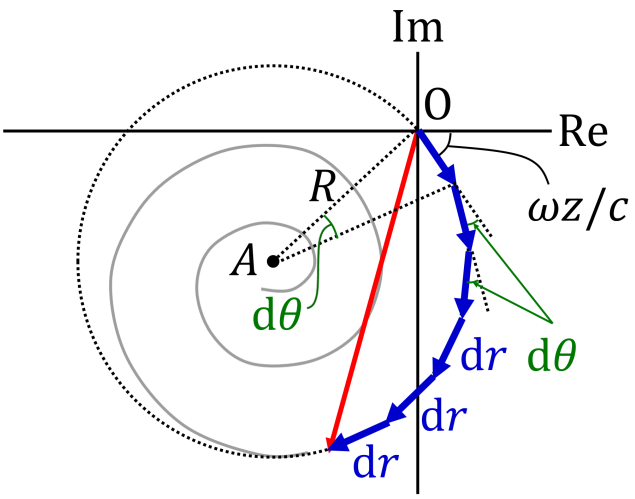


図 304　不定を与える積分 $\int_z^\infty e^{-i\omega r/c}\mathrm{d}r$ の図形的解釈

- 実際には電荷が無限に広がっていることはあり得ず，電荷の広がりの中心に原点をとれば $\rho \to \infty$ となるにつれ面密度は $\eta \to 0$ となると考えられる．
- また $\rho \to \infty$ のとき，1 と置いた $\cos\theta$ がゼロに近づく．

以上の 2 点は積分の収束因子として働き，図 304 において加えるベクトルの長さは減少して，合成ベクトルの先端は円の中心に向かうと考えられる．円の中心に対応する複素数 A は次のように求まる．まず中心角 $\mathrm{d}\theta = \omega\mathrm{d}r/c$ に対応する円弧が $\mathrm{d}r$ となっているから，円の半径は $R = c/\omega$ である．これに原点から中心を見る向きの単位ベクトル (に対応する複素数)$-ie^{-i\omega z/c}$ を掛けて

$$A = -i\frac{c}{\omega}e^{-i\omega z/c}$$

を得る．最終的な結果として，点 P における電場の公式 (52):

$$E_x(\mathrm{P},t) = \frac{q}{2\varepsilon_0 c^2}\omega^2 x_0 \eta e^{i\omega t} A = -\frac{\eta q}{2\varepsilon_0 c} i\omega x_0 e^{-i\omega(t-z/c)}$$

を得る (電荷の面が幅 Δz の厚みを持てば，電荷の数密度を N として $\eta = N\Delta z$ である)．なお以上の導出では遠方の観測点を仮定したが，実はこの結果は面の近く $z \to 0$ でも正しい．

D.34　Fermat の原理の導出

ここでは 6-3 節の注解で予告したように，波動光学から Fermat の原理を導く [35, pp.370–373].

D.34.1　アイコナール方程式

角振動数 ω を持つ単色の電磁波に対して，6-2 節で行ったように電場または磁場の 1 成分のみに注目すると，場は

$$\Psi(\boldsymbol{r},t) = \psi(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$$

という時間依存性を持つ．ここで各位置での媒質の屈折率を $n(\boldsymbol{r})$ とすると，光の位相速度は $u(\boldsymbol{r}) = c/n(\boldsymbol{r})$ であり，場 Ψ に対する波動方程式

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi = 0$$

は ψ に対する Helmholtz 方程式

$$\boldsymbol{\nabla}^2\psi + \left(\frac{\omega}{u}\right)^2\psi = 0$$

を意味する (付録 D.31 参照)．ところで一般に任意の複素数 $\psi(\boldsymbol{r})$ は，絶対値 $a(\boldsymbol{r})$ と位相 $\phi(\boldsymbol{r})$ を用いて

$$\psi(\boldsymbol{r}) = a(\boldsymbol{r})e^{i\phi(\boldsymbol{r})}$$

と表され，このとき上の Helmholtz 方程式から

$$\boldsymbol{\nabla}^2 a - a\{(\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 - (\omega/c)^2\} + ia\boldsymbol{\nabla}^2\phi + 2i(\boldsymbol{\nabla}a)\cdot(\boldsymbol{\nabla}\phi) = 0 \tag{154}$$

が得られる．ここまでは波動光学において常に成り立つ関係である．

上式 (154) の確認

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}^2\psi =& \partial_k\partial_k(ae^{i\phi}) = \partial_k\{(\partial_k a + ia\partial_k\phi)e^{i\phi}\}\\ =&\{\partial_k\partial_k a + i(\partial_k a)(\partial_k\phi) + ia\partial_k\partial_k\phi + (\partial_k a + ia\partial_k\phi)i\partial_k\phi\}e^{i\phi}\\ =&\{\boldsymbol{\nabla}^2 a + 2i(\boldsymbol{\nabla}a)\cdot(\boldsymbol{\nabla}\phi) + ia\boldsymbol{\nabla}^2 - a(\boldsymbol{\nabla}\phi)^2\}e^{i\phi}\end{aligned}$$

による．

ここからは幾何光学の極限を考える．もし空間の小さい領域では電磁波を平面波と見なすことができれば，波面に垂直な波の伝播方向を考えることができ，光線を導入することができる．そのためには波の振幅と伝播方向とが，波長程度の距離にわたっては実際上一定であることが必要である．逆に言えば，この意味で幾何光学は波長の短い極限 $\lambda \to 0$ における近似的な取り扱いであることになる (6-3 節の冒頭も参照) [2, p.146]．実際，小さい空間領域では

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \phi(\boldsymbol{r}_0) + \boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0), \qquad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{\nabla}\phi$$

と近似できる．そこでこの式によって $\phi = \text{const.}$ の同位相面 (波面) に垂直な波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ を導入し，またここから波長 $\lambda = 2\pi/|\boldsymbol{k}|$ を定義すると，この λ が考えている空間スケール——スリットの幅や屈折率 $n(\boldsymbol{r})$ が大きく変化する距離——に比べて十分小さければ良い．さらに波長程度の距離にわたって振幅が大きく変化しないという仮定 $\lambda^2|\boldsymbol{\nabla}^2 a| \ll |a|$ により，上式 (154) の実部をとると近似的に

$$(\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 = \left(\frac{\omega}{u}\right)^2 \tag{155}$$

が得られる．これは**アイコナール方程式**と呼ばれる．

D.34.2 Fermat の原理

以上を踏まえて Fermat の原理の導出に移ろう．

アイコナール方程式 (155) は空間変数を

$$(\mathrm{d}\xi, \mathrm{d}\eta, \mathrm{d}\zeta) = \frac{\omega}{u(\boldsymbol{r})}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$$

とリスケールすると，

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\right)^2 = 1$$

となる[*118]．この方程式は

$$\phi = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta \qquad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1)$$

という形の解を持ち，これは ϕ を一定とおくと，(ξ, η, ζ) 空間において一定値 ϕ に応じて得られる互いに平行な一連の平面群を表す．しかるに ϕ が一定の面は波面を表し，それに垂直な方向が波の伝播方向を与えるから，(ξ, η, ζ) 空間における光線は直線となる．

直線は 2 点 P, Q を結ぶ径路の長さ

$$\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} \mathrm{d}\sigma \qquad (\mathrm{d}\sigma = \sqrt{\mathrm{d}\xi^2 + \mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\zeta^2})$$

が極値 (停留値) をとる曲線として与えられる．(ξ, η, ζ) 空間の長さは対応する実空間の長さ

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}$$

と $\mathrm{d}\sigma = \frac{\omega}{u(\boldsymbol{r})}\mathrm{d}l$ で関係付けられているので，長さ $\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} \mathrm{d}\sigma$ は定数係数 ω の違いを除けば，光が実空間において軌道をたどるのに要する時間

$$\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} \frac{\mathrm{d}l}{u(\boldsymbol{r})}$$

になっている．よって光は与えられた 2 点を結ぶ径路のうち，所要時間が最小となる径路を通る．これは Fermat の原理に他ならない．こうして Fermat の原理は「原理」の地位を剥奪される．

D.34.3 Huygens の原理

さらに文献 [35, pp.373–374] では Fermat の原理から波面の空間移動を規定する Huygens の原理を導いている．この導出は Fermat の原理を前提に用いる以上，幾何光学の近似が成り立つ場合に限定され，一見すると一般的でない印象を受ける．しかし幾何光学は我々が注目している空間スケールに比べて波長が短い場合の近似であって，その近似が妥当か否かはスリット幅や開口の代表的な長さに関する我々の人為的な選択に左右されているに過ぎない．言い換えれば，スリットのような障害物とは無関係に十分小さい空間領域に注目すれば，その中で光が平面波として振舞い，それ故，波を Fermat の原理に従う光線として記述できるような空間サイズは必ず存在する．このため Huygens の原理の導出に Fermat の原理を用いることは，実際には何ら波動光学に対して制約を設け，一般性を損なうものではないと考えられる．さらにその導き方により，Huygens の原理は光に限らず任意の波に対して成立することが分かる．そこで以下では文献 [35, pp.373–374] における証明をほぼそのまま載せる．

Huygens の原理は次のように言い表される：

> 波源 P から出た波の時間 t 後の波面を $\Phi_{\mathrm{P}}(t)$，またこの波面上の任意の点 Q から出た波の時刻 s 後の波面を $\Phi_{\mathrm{Q}}(s)$ とすると，波源 P からの波の時間 $t+s$ 後の波面 $\Phi_{\mathrm{P}}(t+s)$ は，すべての $\{\Phi_{\mathrm{Q}}(s) | \mathrm{Q} \in \Phi_{\mathrm{P}}(t)\}$ の包絡面である (図 305).

図 305 で波面 $\Phi_{\mathrm{P}}(t+s)$ 上の 1 点 R を考える．仮定より P から出て R に達する光線は PR 間を所要時間 $t+s$ で伝わる．そして Fermat の原理によれば，PR の近くには PR を通りそれより短い時間で伝わる経路はない．今，この光線と $\Phi_{\mathrm{P}}(t)$ の交点を Q とすると，この光線は PQ 間を時間 t で，QR 間を時間 s で伝わる

[*118] 変数 (ξ, η, ζ) は無次元である．

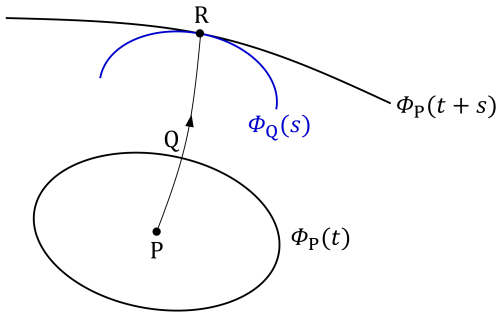


図 305　Huygens の原理の表現

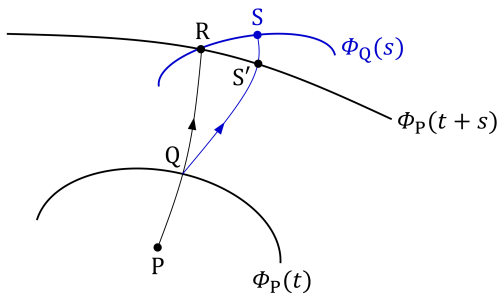


図 306　Huygens の原理と背理法

から，$\Phi_{\mathrm{P}}(t+s)$ 上の点 R は必ず $\Phi_{\mathrm{Q}}(s)$ 上にある．そこで 2 つの波面 $\Phi_{\mathrm{Q}}(s)$ と $\Phi_{\mathrm{P}}(t+s)$ が R で接していることを言えば良い．今，仮にこの 2 つの波面が R で接することなく図 306 のように交わっているとすれば，波面 $\Phi_{\mathrm{Q}}(s)$ 上には P から見て $\Phi_{\mathrm{P}}(t+s)$ より外側にある点 S が必ず存在する．そこで，点 Q から出てこの点 S に達する光線の経路 QS を考えると，その経路と $\Phi_{\mathrm{P}}(t+s)$ の交点 S′ は QS 間にあり，しかも光は QS 間を伝わるのに時間 s かかるから，S′ にはそれより短い時間で到達する．とすると P から出た光線が経路 PQS′ を通って行けば，$t+s$ 以下の時間で $\Phi_{\mathrm{P}}(t+s)$ 上の点 S′ に着くことになり，これは仮定に反する．［この P から S′ に向かう光線は所要時間 $t+s$ で伝わるという仮定には，上記のようにそれより短い時間で PS′ 間をつなぐ経路が (近くに) 存在しないという Fermat の原理が含まれており，ここで Fermat の原理が用いられている．］したがって波面 $\Phi_{\mathrm{Q}}(s)$ と $\Phi_{\mathrm{P}}(t+s)$ は点 R で接していなければならない．

D.35　パラボラアンテナ

パラボラアンテナは回転放物面の形状を持つ反射盤で，静止衛星からの電波を焦点に集めて受信する．(パラボラは放物線を意味する．)

Fermat の原理によれば，空間の与えられた始点と終点を結ぶあらゆる経路のうち，光路長が最小となるものが実際の光線軌道を与える．このため衛星 S を発し，曲面上の点 P で反射して受信機 F に達する光線が，任意の点 P に対して可能であるためには，全ての光線に対して経路 SPF の光路長が共通でなければならない．ところで衛星は遠方にあるので，曲面に入射する光は平行光線と見なせる．そこで平行光線に垂直な平面 KK′ と光線の交点 $\mathrm{S_P}$ を，改めて光線の始点にとる．(S から KK′ までの光路長は全ての平行光線に共通である．) また $\mathrm{S_P P}$ の延長線上に，$\mathrm{PF} = \mathrm{P'F}$ を満たす点 P′ をとる．今，点 F を含み，入射光線と平行な平面内 (図 307) で考えると，

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{S_P P} + \mathrm{PF} = \mathrm{S_P P'} \text{が P によらない} \\
\rightarrow\ & \text{P に応じて定まる各点 P}'\text{は，KK}'\text{に平行な線 LL}'\text{を作る} \\
\rightarrow\ & \text{光の反射点 P は LL}'\text{を準線，F を焦点とする放物線上にある．}
\end{aligned}
$$

よって平行光線を 1 点 F に集めるには，反射盤は F を焦点とする回転放物面でなければならない [17, 1-4 節]．

なお，Fermat の原理から反射の法則を導くことができる (6-3 節)．そこでパラボラアンテナの軸に平行に入射した光が全て焦点 F に集められることを，改めて反射の法則から証明するのは，高校数学の適度な演習問題となり得る．

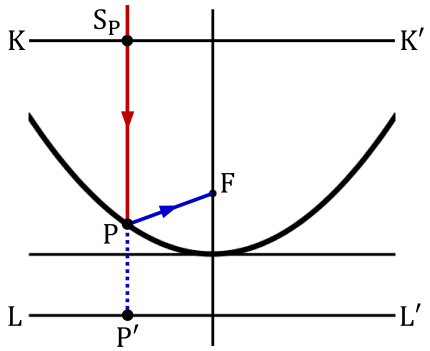


図 307　パラボラアンテナと光線

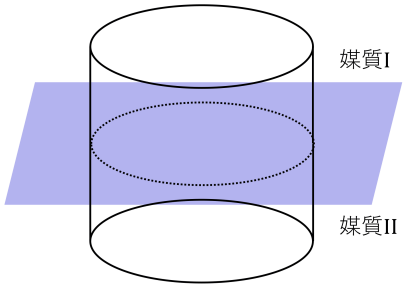


図 308　媒質の境界を挟む薄い矩形

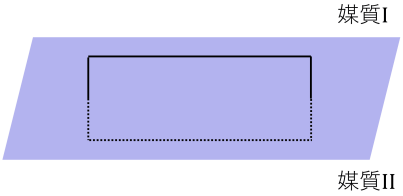


図 309　媒質の境界を挟む薄い円筒

D.36　電磁波の反射における位相の変化

ここでは 6-6 節で予告したように，屈折率の小さい媒質から大きい媒質に入射する光は，境界面で反射する際に位相が π ずれることを示す．そのためには電磁波に対して適切な境界条件を課して，入射波と反射波，透過波の関係を見出せば良い．ところで境界条件は物理——今の場合 Maxwell 方程式——に支配されており，人為的に設定される単なる数学的な仮定ではない．そこで Maxwell 方程式に基づき，媒質の表面における境界条件を調べるところから始めよう．

D.36.1　境界条件

- 媒質が帯電していなければ，
  境界面を挟む図 308 の薄い円筒領域から電場と磁場はわき出さないから ($\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=0, \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{H}=0$)，
  電磁場の法線成分は境界面で連続である．
- 媒質が電流を通さなければ場は渦無しなので ($\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=0, \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}=0$)，
  境界面を挟む図 309 の薄い矩形に沿う電磁場の周回積分はゼロになるから，
  電磁場の接線成分は境界面で連続である．

D.36.2　反射と屈折

次に電磁波 (単色平面波) の反射と屈折の問題に移る．媒質の境界を xy 平面に選び，$z>0$ を媒質 I，$z<0$ を媒質 II とする．媒質 I の側から入射する光を考え，その波数ベクトル $\boldsymbol{k}_i$ が zx 面内に含まれるように x 軸方向を選ぶ．以下では直線偏光を考察する．これを基に 2 種類の直線偏光の重ね合わせによって得られる，任意の単色平面波に対する結論を引き出せると期待できる．

$\boldsymbol{E}_i$ および反射波の電場 $\boldsymbol{E}_r$，透過波の電場 $\boldsymbol{E}_t$ の y 成分はそれぞれ

$$\begin{aligned}
E_{iy} =& \mathcal{E}_{iy}\exp\{i(k_{ix}x+k_{iz}z-\omega_i t)\},\\
E_{ry} =& \mathcal{E}_{ry}\exp\{i(k_{rx}x+k_{ry}y+k_{rz}z-\omega_r t)\},\\
E_{ty} =& \mathcal{E}_{ty}\exp\{i(k_{tx}x+k_{ty}y+k_{tz}z-\omega_t t)\}
\end{aligned}$$

という形を持つ．ここで表面 $z=0$ での境界条件として電場の y 成分の連続性

$$\mathcal{E}_{iy}\exp\{i(k_{ix}x-\omega_i t)\}+\mathcal{E}_{ry}\exp\{i(k_{rx}x+k_{ry}y-\omega_r t)\}=\mathcal{E}_{ty}\exp\{i(k_{tx}x+k_{ty}y-\omega_t t)\}$$

を要求すると，これが任意の時刻 t に表面上の全ての位置 x,y で成り立つためには，3 つの位相が常に等しく，したがって変数 t,x,y の係数がそれぞれ等しいことが必要である：

- t の係数について　$\omega_i=\omega_r=\omega_t$
  $\rightarrow$　反射波と透過波の振動数は変わらない．
- y の係数について　$0=k_{ry}=k_{ty}$
  $\rightarrow$　反射波と透過波の波数ベクトル $\boldsymbol{k}_r,\boldsymbol{k}_t$ もまた zx 面内にある．
- x の係数について　$k_{ix}=k_{rx}=k_{tx}$.
  $\boldsymbol{k}_i,\boldsymbol{k}_r,\boldsymbol{k}_t$ の法線方向 z との成す角として入射角 θ_i，反射角 θ_r，屈折角 θ_t を導入すると

  $$k_i\sin\theta_i=k_r\sin\theta_r=k_t\sin\theta_t.$$

  媒質 I，II での光速をそれぞれ v_1,v_2 とすると $k_i=k_r=\omega/v_1, k_t=\omega/v_2$ なので，これは Snell の法則

  $$\theta_i=\theta_r,\qquad \left(\frac{k_t}{k_i}=\right)\frac{v_i}{v_2}=\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t}$$

  を意味する．

以上より 3 つの波数ベクトル $\boldsymbol{k}_i,\boldsymbol{k}_r,\boldsymbol{k}_t$ はいずれも zx 面内にあることを踏まえて，図 310 のように各電磁波の電場を zx 面内に平行な成分 ($\parallel$ で表す) と垂直な成分 ($\perp$ で表す) に分ける．各電場成分と対応する磁場成分を，正の向きとともに図 310 のように定義する．また媒質 I，II の誘電率を $\varepsilon_1,\varepsilon_2$，透磁率を μ_1,μ_2 とする．

その上で改めて境界における電場の y 成分と磁場の x 成分の連続性

$$\mathcal{E}_i^{\perp}+\mathcal{E}_r^{\perp}=\mathcal{E}_t^{\perp}, \tag{156}$$

$$-\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\mathcal{E}_i^{\perp}\cos\theta_i+\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\mathcal{E}_r^{\perp}\cos\theta_r=-\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\mathcal{E}_t^{\perp}\cos\theta_t \tag{157}$$

を要求しよう．ただし誘電率 ε，透磁率 μ の媒質中の電磁波に対する電場の振幅 $\mathcal{E}$ と磁場の振幅 $\mathcal{H}$ の関係

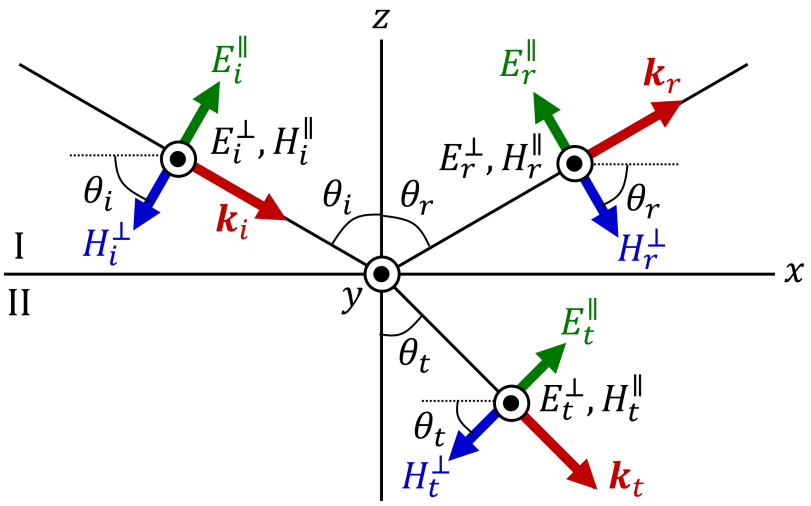


図 310　入射波，反射波および透過波

$\mathcal{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathcal{E}$ を考慮した．式 (156)，式 (157) から $\mathcal{E}_t^{\perp}$ または $\mathcal{E}_r^{\perp}$ を消去して $\theta_i = \theta_t$ を用いると

$$\frac{\mathcal{E}_r^{\perp}}{\mathcal{E}_i^{\perp}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\theta_i - \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}\cos\theta_t}{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\theta_i + \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}\cos\theta_t}, \tag{158}$$

$$\frac{\mathcal{E}_t^{\perp}}{\mathcal{E}_i^{\perp}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\theta_i}{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\theta_i + \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}\cos\theta_t} \tag{159}$$

を得る．

次に境界における電場の x 成分と磁場の y 成分の連続性

$$\mathcal{E}_i^{\parallel}\cos\theta_i - \mathcal{E}_r^{\parallel}\cos\theta_r = \mathcal{E}_t^{\parallel}\cos\theta_t, \tag{160}$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\mathcal{E}_i^{\parallel} + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\mathcal{E}_r^{\parallel} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\mathcal{E}_t^{\parallel} \tag{161}$$

を要求する．式 (160)，式 (161) から $\mathcal{E}_t^{\parallel}$ または $\mathcal{E}_r^{\parallel}$ を消去して $\theta_i = \theta_t$ を用いると

$$\frac{\mathcal{E}_r^{\parallel}}{\mathcal{E}_i^{\parallel}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}\cos\theta_i - \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\theta_t}{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}\cos\theta_i + \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\theta_t}, \tag{162}$$

$$\frac{\mathcal{E}_t^{\parallel}}{\mathcal{E}_i^{\parallel}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\theta_i}{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}\cos\theta_i + \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\theta_t} \tag{163}$$

が得られる．

磁性体を扱うのでない限り，媒質の透磁率に対して $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ を仮定して良い．このとき媒質 II の媒質 I に対する屈折率は

$$n_{12} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

なので，上で導かれた Snell の法則と合わせると

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

となる．このとき式 (158)，式 (162) はそれぞれ

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{E}_r^\perp}{\mathcal{E}_i^\perp} =& \frac{\cos\theta_i - \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\cos\theta_t}{\cos\theta_i + \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\cos\theta_t} = \frac{\sin\theta_t\cos\theta_i - \sin\theta_i\cos\theta_t}{\sin\theta_t\cos\theta_i + \sin\theta_i\cos\theta_t} = -\frac{\sin(\theta_i-\theta_t)}{\sin(\theta_i+\theta_t)},\\ \frac{\mathcal{E}_r^\parallel}{\mathcal{E}_i^\parallel} =& \frac{\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\cos\theta_i - \cos\theta_t}{\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\cos\theta_i + \cos\theta_t} = \frac{\sin\theta_i\cos\theta_i - \sin\theta_t\cos\theta_t}{\sin\theta_i\cos\theta_i + \sin\theta_t\cos\theta_t} = \frac{\tan(\theta_i-\theta_t)}{\tan(\theta_i+\theta_t)},\end{aligned}$$

と書き換えられる (Fresnel の公式)．これによれば

- $\theta_i > \theta_t$ のとき反射波の電磁場の y 成分 $\mathcal{E}_r^\perp, \mathcal{H}_r^\parallel$ は入射波のそれと逆符号となる．
  すなわち $n_{12} > 1$ のとき光は反射の際に位相が π ずれる．
- $\theta_i < \theta_t$ のとき反射波の電磁場の y 成分 $\mathcal{E}_r^\perp, \mathcal{H}_r^\parallel$ は入射波のそれと同符号になる．
  すなわち $n_{12} < 1$ のとき光は反射の際に位相を変えない．

以上が示したいことであった．なおこのとき場の法線成分の連続性に関する境界条件も自動的に満たされている．また式 (159)，式 (163) により透過波の位相は入射波と変わらないことも分かる．

D.37　光子ガスの状態方程式

7-2 節で半ば直観的に導いた光子ガスの状態方程式 $PV = U/3$ について補足する (以下では $P \to p, U \to E$ と改める)．ただし入門レベルの物理を大幅に超えるため，ここでは概要だけを示し，詳しい説明や結果の証明は行わない．

■電磁相互作用を行う相対論的粒子のエネルギー・運動量テンソル　特殊相対性理論の下で，連続的と見なされる巨視的物体のエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ を考える．物体の要素が静止している基準系では

- 応力は等方的な圧力 $\sigma_{ij} = p\delta_{ij}$ となる．
- T^{00} は物体のエネルギー密度 ε であり，ε/c^2 は物体の質量密度を与える．
  - ここで密度とは，要素の静止系における体積 (固有体積) に関する単位体積あたりの量である．

よってこの系での要素のエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ は

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix}\varepsilon & 0 & 0 & 0\\ 0 & p & 0 & 0\\ 0 & 0 & p & 0\\ 0 & 0 & 0 & p\end{pmatrix}$$

という形をとる．

$$T^{\mu\nu} = (p+\varepsilon)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}$$

とするとこれは $u^\mu = (1,0)$ となる静止系において正しいエネルギー・運動量テンソルの成分を与え，両辺が同じ種類のテンソルから成るから任意の基準系で成立する．

さて，粒子と電磁場の系に対してエネルギー・運動量テンソルの対角和は

$$T^\mu{}_\mu = \sum_a m_a c^2\sqrt{1-(v_a/c)^2}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a) \geq 0 \tag{164}$$

となる (電磁場のエネルギー・運動量テンソルは $T^{(\mathrm{f})\mu}{}_{\mu}=0$ を満たすので寄与しない)．式 (164) の単位体積にわたる平均を巨視的物体に対する表式 $T^{\mu}{}_{\mu}=\varepsilon-3p$(任意の座標系で成立) と等置すると

$$\varepsilon-3p=\sum_a m_a c^2\sqrt{1-(v_a/c)^2}$$

が得られるから (右辺の和は単位体積中の粒子についてとる)，微視的粒子の速度が $v_a\to c$ となる超相対論的極限で

$$p=\frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ (この証明では粒子間の電磁相互作用を仮定していることに注意する) [2, pp.96–98].

■あたかも全光子の 1/3 が x 軸に沿って運動　$0\le x,y,z\le L$ を占める 1 辺 L，体積 $V=L^3$ の立方体領域に閉じ込められた光子ガスを考える．ここで得られた超相対論的な粒子系の状態方程式 $pV=E/3$ は，素朴には 7-2 節で見たように，全光子数 N の 1/3 が x 軸に沿って運動していると解釈できることを意味している (因子 3 は空間が 3 次元であることに由来している)．実際，7-2 節の議論を繰り返すと，このとき光子の運動量を $p_\gamma=\varepsilon_\gamma/c$ と書けば (ε_γ は光子のエネルギー)，x 方向に運動する光子は (断熱変化の仮定により壁と弾性衝突し)1 回の衝突で $x=L$ の壁に $2p_\gamma$ の力積を及ぼす．微小時間 $\varDelta t$ のうちに 1 つの光子は壁と $c\varDelta t/2L$ 回衝突するから，面が $N/3$ 個の光子から受ける力積は

$$\varDelta I=\frac{1}{3}\sum 2p_\gamma\times\frac{c\varDelta t}{2L}$$

となる (和は全光子にわたってとる)．よって面 $x=L$ が光子ガスから受ける圧力は

$$p=\frac{\varDelta I/\varDelta t}{L^2}=\frac{1}{3V}\sum p_\gamma c=\frac{1}{3V}\sum\varepsilon_\gamma=\frac{1}{3V}E$$

と表される．これは光子ガスの状態方程式 $pV=E/3$ である．

■Bose-Einstein 分布に基づく光子ガスの状態方程式の統計力学的な導出 [16, pp.152–157]　温度 T で平衡状態にある，金属壁で囲われた体積 V の空洞中の光子気体を考える．Bose-Einstein 分布に基づき，振動数が ν から $\nu+\mathrm{d}\nu$ の範囲に含まれる光子の全エネルギーは

$$\begin{aligned}E_\nu\mathrm{d}\nu=&h\nu\times\underbrace{\frac{8\pi V}{c^3}\nu^2\mathrm{d}\nu}_{\mathrm{d}\nu\text{内の状態数}}\times\underbrace{\frac{1}{e^{\beta h\nu}-1}}_{\text{各状態の平均光子数}}\\=&\frac{8\pi V}{c^3}\frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1}\mathrm{d}\nu:\textbf{Planck の輻射公式}\end{aligned}$$

と計算される[*119]．

- 光の全エネルギー

$$\begin{aligned}E=&\int_0^\infty E_\nu\mathrm{d}\nu=8\pi V\frac{(kT)^4}{(hc)^3}\int_0^\infty\frac{x^3\mathrm{d}x}{e^x-1}\\=&\frac{8\pi^5}{15}\frac{(kT)^4}{(hc)^3}V.\end{aligned}$$

[*119] 光子に対しては化学ポテンシャル $\mu=0$ の B-E 分布が適用される．と言うのも直観的には，光子は静止エネルギーがゼロなので，$\varepsilon=0$ の光子を生成するのにエネルギーを要さない．これは (粒子の生成エネルギーを $\mu\mathrm{d}N$ と書いて化学エネルギー μ を定義したことを思い出すと)，光子では $\mu=0$ であることを意味する [15, p.325]．あるいは与えられた (T,V) に対して平衡条件 (自由エネルギーが最小となる条件) は $\partial F/\partial N=\mu=0$．また光子は 2 つの偏りの自由度を持つことに注意する．

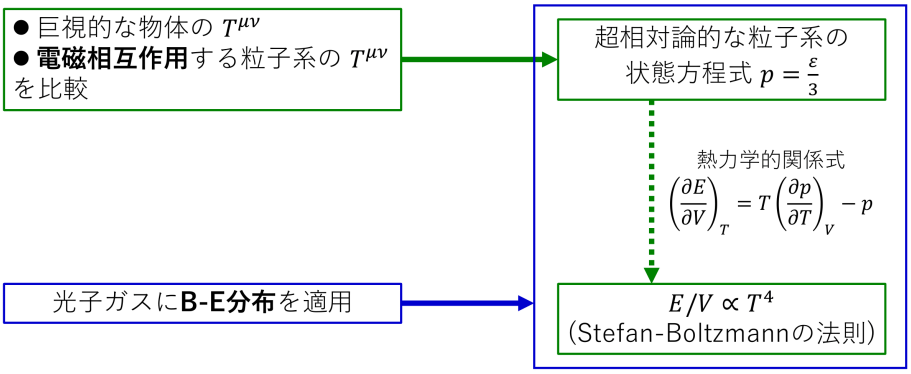


図 311　光子ガスの状態方程式と Stefan-Boltzmann の法則をめぐって

– エネルギー密度 E/V は T^4 に比例する (**Stefan-Boltzmann の法則**).

- 比熱

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = 4\frac{E}{T}.$$

- エントロピー

$$S = \int_0^T \frac{C_V}{T}\mathrm{d}T = \frac{4}{3}\frac{E}{T}.$$

- (Helmholtz の) 自由エネルギー

$$F = E - TS = -\frac{1}{3}E.$$

- 圧力 (光子ガスの状態方程式)

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{3}\frac{E}{V}.$$

- Gibbs の自由エネルギー

$$G = F + pV = 0. \qquad (\mu = 0 \text{ と整合})$$

あらかじめ E が V に比例すること，および状態方程式 $p = E/3V$ が分かっている場合，Stefan-Boltzmann の法則 $E/V \propto T^4$ は次のように導ける．すなわち熱力学的関係式

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

は $p = E/3V$ のとき，

$$T\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = 4p$$

を与える．これを (変数分離して) 積分すると $p = \mathrm{const}\cdot T^4$ となるので，$E/V = 3p \propto T^4$ が見出される．

■議論のまとめ　図 311 参照.

D.38　相対論的表記を用いた Compton 効果の式 (64) の導出

ここでは相対論的な表記を全面的に用いて，Compton 散乱における X 線の波長変化の式 (64):$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$ を導出する [36, pp.164–165,p.165]．その内容はエネルギー・運動量保存則に基づくものであり，本質的に 7-3 節における導出と同等である．

準備　簡単のために自然単位系を導入する．これは Planck 定数 h を 2π で割った値 $\hbar$，および真空中の光速 c を

$$\hbar = 1, \qquad c = 1$$

とおく単位系である．このとき全ての物理量の次元は質量のベキとして表され，例えば

$$(\text{運動量}) = (\text{エネルギー}) = (\text{質量}), \qquad (\text{長さ}) = (\text{時間}) = (\text{質量})^{-1}$$

である．また光の波数 4 元ベクトル $k = (\omega/c, \boldsymbol{k}) \to (\omega, \boldsymbol{k})$ は自然単位系では，光子の運動量 4 元ベクトル $\hbar k$ と見なせることに注意する．さらに光の波数 4 元ベクトル $k = (\omega, \boldsymbol{k})$ と物質粒子の運動量 4 元ベクトル $p = (E/c, \boldsymbol{p}) \to (E, \boldsymbol{p})$ はそれぞれ

$$k^2 = 0, \qquad p^2 = m^2$$

を満たすことを思い出しておこう (2 乗は 4 元内積の意味，付録 D.23 および付録 D.26 参照)．

さて，Compton 散乱を念頭に電子と光子の散乱前の 4 元運動量をそれぞれ

$$p = (m, \mathbf{0}), \qquad k = (\omega, \boldsymbol{k})$$

とし，散乱後の 4 元運動量をそれぞれ

$$p' = (E', \boldsymbol{p}'), \qquad k' = (\omega', \boldsymbol{k}')$$

と書くと，エネルギー・運動量保存則はまとめて

$$p + k = p' + k' \tag{165}$$

と表される．

$$\begin{aligned} k \cdot (\text{式 (165)}) \quad &\to \quad p \cdot k = k \cdot (p' + k'), \\ k' \cdot (\text{式 (165)}) \quad &\to \quad p' \cdot k' = k' \cdot (p + k), \\ (\text{式 (165)})^2 \quad &\to \quad p \cdot k = p' \cdot k' \end{aligned}$$

なので

$$p \cdot k = k' \cdot (p + k)$$

が見出される．両辺をそれぞれ成分計算すると

$$m\omega = \omega'(m + \omega) - \omega\omega' \cos\theta$$

であり (θ は $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{k}'$ の成す角，すなわち光子の散乱角)，さらに両辺を $m\omega\omega'$ で割ると

$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{m}(1 - \cos\theta)$$

を得る．これが散乱光子のエネルギー変化 $\omega \to \omega'$ を定める．

これを $c = 1, \hbar = 1$ と置く前の式に直すには，もとの単位系で次元の正しい式となるように上式に c と $\hbar$ を補えば良い．そのような (等価な) 方法は 1 通りに定まり，大抵は容易に推測できる．今の場合，各項がエネルギーの逆数の次元を持つように

$$\frac{1}{\hbar\omega'} - \frac{1}{\hbar\omega} = \frac{1}{mc^2}(1 - \cos\theta)$$

とすれば良い．あるいは角振動数 ω, ω' の代わりに振動数 ν, ν' を用いれば

$$\frac{1}{h\nu'} - \frac{1}{h\nu} = \frac{1}{mc^2}(1 - \cos\theta)$$

であり，両辺を hc 倍すると波長のずれを与える式 (64):

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

が得られる．

D.39 Rutherford 模型の原子の寿命

7-4 節では計算によると，Rutherford 模型の原子の寿命は極めて短いことに言及した．ここではその計算を示す．

D.39.1 双極放射

準備として加速運動する電荷が電磁波を放射して単位時間に失うエネルギーの公式を説明する [2, pp.191–197]．以下では全体的に Gauss 単位系を採用する．

運動している電荷の系が遠方に作る場を考察する．すなわち図 312 のように記号を定義すると $R_0 \gg r$ であり，このとき

$$R = |\boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{r}| \simeq R_0 - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}$$

と近似される．

注解 $R \simeq R_0 + \boldsymbol{r} \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{r}}\right)_{\boldsymbol{r}=0}$ において

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{r}}\right)_{\boldsymbol{r}=0} = \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}|\boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{r}|\right)_{\boldsymbol{r}=0} = -\left(\frac{\boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{r}|}\right)_{\boldsymbol{r}=0} = \frac{\boldsymbol{R}_0}{R_0} = \boldsymbol{n}$$

である．

遅延ポテンシャル (5-10 節の注解を参照) は

$$\phi = \int \frac{\rho_{t-R/c}}{R}\mathrm{d}V \simeq \frac{1}{R_0}\int \rho_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{c}}\mathrm{d}V, \qquad \boldsymbol{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\boldsymbol{j}_{t-R/c}}{R}\mathrm{d}V \simeq \frac{1}{cR_0}\int \boldsymbol{j}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{c}}\mathrm{d}V$$

となる．ここで被積分関数分母の R における $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}$ を無視したのに対し，電荷密度 ρ と電流密度 $\boldsymbol{j}$ の引数における $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}$ を無視することは一般には許されない．この項を無視できるかどうかは，ρ と $\boldsymbol{j}$ が時間 $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}/c$ の間にどれだけ変化するかによって決まる．

注解

$$\rho_{t-R/c} = \rho_{t-(R_0-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})/c} = \rho_{t-R_0/c} + \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{c}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{t-R_0/c}$$

における微分係数 $(\partial\rho/\partial t)$ が大きな値をとる場合，$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}/c$ の項を無視できない．したがってすぐ後で見る Fourier 成分 $\boldsymbol{A}_\omega$ の式においても，分母では $R = R_0$ と置けるのに対し，分子では $\boldsymbol{r}$ の項を無視できない．

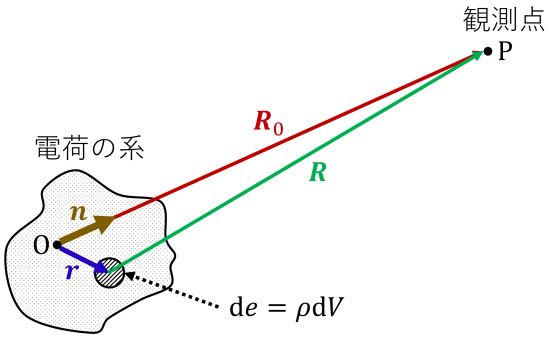


図 312　位置 $\boldsymbol{r}$ の電荷要素と遠方 $\boldsymbol{R}_0$ の隔たりのベクトル $\boldsymbol{R}$

この点についてはすぐ後で議論する．

電荷の系から十分離れたところでは，空間の狭い領域で場を平面波と見なすことができる．そのためには電荷の系からの距離が系の大きさに比べて大きいだけでなく，電磁波の波長に比べても大きいことが必要である．このような領域は波動帯と呼ばれる．平面波に対して電磁場は

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{E} = \frac{1}{c}(\dot{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{n}) \times \boldsymbol{n}$$

のように，ベクトル・ポテンシャルから求められる (ドットは時間微分)．時刻 t は常に $t - R_0/c$ という組合せで場の中に現れる．

注解

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{cR_0}\int \boldsymbol{j}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{c}}\mathrm{d}V, \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = -\frac{1}{c{R_0}^2}\boldsymbol{n}\times\int \boldsymbol{j}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{c}}\mathrm{d}V + \frac{1}{cR_0}\int \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{j}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{c}}\mathrm{d}V$$

(ただし $\boldsymbol{\nabla} = \partial/\partial\boldsymbol{R}$) において

$$\begin{aligned}\left[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{j}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{c}}\right]_i &= \varepsilon_{ijk}\partial_j\left[\boldsymbol{j}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{c}}\right]_k = \varepsilon_{ijk}\left\{\partial_j\left(t - \frac{R_0}{c} + \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{c}\right)\right\}\left[\dot{\boldsymbol{j}}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{c}}\right]_k \\ &= -\frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}n_j\left[\dot{\boldsymbol{j}}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{c}}\right]_k\end{aligned}$$

なので，$1/{R_0}^2$ の項を $1/R_0$ の項に比べて無視すると

$$\boldsymbol{H} = -\frac{1}{c}\boldsymbol{n}\times\frac{1}{cR_0}\int \dot{\boldsymbol{j}}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{c}}\mathrm{d}V = \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}}\times\boldsymbol{n}$$

を得る．

ここで予告通り，時間 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}/c$ における電荷分布の変化が小さく，遅延ポテンシャルの中の電荷密度・電流密度の引数における $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}/c$ を無視できる条件を考える．

T :電荷分布が著しく変化するのに要する時間,
a :電荷の系の大きさの程度

とすると，T は放射される波の周期の目安となるので，対応する波長を $\lambda = cT$ と書くと求める条件は

$$\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{c} \sim \frac{a}{c} \ll T, \qquad \therefore a \ll \lambda$$

と表される．すなわち電荷の系の大きさは放射される波の波長に比べて小さくなければならない．これは場の Fourier 成分

$$\boldsymbol{A}_\omega = \int \boldsymbol{j}_\omega \frac{e^{ikR}}{cR}\mathrm{d}V \simeq \frac{e^{ikR_0}}{cR_0}\int \boldsymbol{j}_\omega e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}V \qquad (\because \boldsymbol{k} = k\boldsymbol{n})$$

において，電荷の位置 $\boldsymbol{r}$ を無視できる条件 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} \sim ka \ll 1$ としても得られる．これは電荷の速度の代表的な速度 v に対する条件

$$v \ll c$$

に書き換えられる ($T \sim a/v$ による)．すなわち電荷の運動は非相対論的な速度で行われなければならない．

この条件の下で，波動帯 $R_0 \gg \lambda(\gg a)$ における場を考察しよう．このとき場は近似的に平面波と見なすことができ，ベクトル・ポテンシャルのみから決定される (上述)．この近似では遅延ポテンシャルの被積分関数における電流密度の引数の時刻 $t' = t - R_0/c$ はもはや電荷の位置 $\boldsymbol{r}$ に依存しておらず，場は双極子モーメント

$$\boldsymbol{d} = \sum e\boldsymbol{r}$$

を用いて

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} =& \frac{1}{cR_0}\int \boldsymbol{j}_{t'}\mathrm{d}V = \frac{1}{cR_0}\sum e\boldsymbol{v}(t') = \frac{1}{cR_0}\dot{\boldsymbol{d}}(t'),\\
\boldsymbol{H} =& \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}}\times\boldsymbol{n} = \frac{1}{c^2R_0}\ddot{\boldsymbol{d}}\times\boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{E} = \frac{1}{c}(\dot{\boldsymbol{A}}\times\boldsymbol{n})\times\boldsymbol{n} = \frac{1}{c^2R_0}(\ddot{\boldsymbol{d}}\times\boldsymbol{n})\times\boldsymbol{n}
\end{aligned}$$

と表される (電磁場の表式では引数 t' を省略した)．このような放射を双極放射と呼ぶ．

立体角要素 $\mathrm{d}o$ に入る放射の強度 $\mathrm{d}I$ を，この方向にある半径 R_0 の球面上の要素 ${R_0}^2\mathrm{d}o$ を単位時間に通過するエネルギー

$$\mathrm{d}I = c\frac{H^2}{4\pi}{R_0}^2\mathrm{d}o$$

として定義する．ただし Poynting ベクトル $\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$(付録 D.30 参照) は平面波 (5-0 節，付録 D.26 参照) に対して $\boldsymbol{S} = c\frac{H^2}{4\pi}\boldsymbol{n}$ となることに注意した．場は $1/R_0$ に比例するため，面要素を貫くエネルギー $\mathrm{d}I$ は各瞬間において，面要素の原点からの距離 R_0 に依らない．これはエネルギーが (電荷の系の外側で) 生成・消滅することなく，速度 c で広がっていくため，どこにも溜まらないという事実を表している (付録 C.11 参照)．

放射の強度は双極放射に対して

$$\mathrm{d}I = \frac{1}{4\pi c^3}(\ddot{\boldsymbol{d}}\times\boldsymbol{n})\mathrm{d}o = \frac{\ddot{\boldsymbol{d}}^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta\mathrm{d}o$$

となる．ここに θ は $\boldsymbol{d}$ と $\boldsymbol{n}$ の成す角である．これを全立体角で積分すると，単位時間に放射される全エネルギー

$$I = \frac{2}{3c^3}\ddot{\boldsymbol{d}}^2$$

を得る．

注解　$\mathrm{d}o = 2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta$ と書き，θ に関する積分を実行する．

$$\int_0^\pi \sin^3\theta\mathrm{d}\theta = \int_{-1}^1(1-\cos^2\theta)\mathrm{d}(\cos\theta) = \left[\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}.$$

なおこれは電荷が放射の際に場から減衰力 (放射減衰または Lorentz 摩擦力)$\boldsymbol{f}$ を受けると見たときの，減衰力にされる仕事 $-\sum\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}$ に一致しており [2, pp.227–229]，このことから電荷は放射した電磁波のエネルギーと等しいエネルギーを失うことが裏付けられる．

D.39.2　原子の寿命の計算

1 個の電荷 $-e$(加速度 $\boldsymbol{a}$) に対して双極子モーメントは $\boldsymbol{d} = (-e)\boldsymbol{a}$ なので，前節で説明した双極放射の公式は

$$I = \frac{2e^2}{3c^3}\boldsymbol{a}^2$$

となる．これを用いて Rutherford 模型の原子の寿命を計算しよう [10, pp.310–311]．原子中の電子はゆっくりとエネルギーを失い，したがって軌道の 1 周はほぼ円と見なせると仮定する．言い換えれば電子は各瞬間に 7-4 節で得た円運動のエネルギー $E = -e^2/2r$(ただし $ke^2 \to e^2$ として Gauss 単位系の表式に置き換えた) を持ち，これが半径 r とともに減少してゆくと考える．このときエネルギーの時間変化率は

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{e^2}{2r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

と表される．加速度は円運動の方程式 $m|\boldsymbol{a}| = e^2/r^2$ で与えられることに注意すると (仮定により接線方向の加速度を無視した)，放射により電子がエネルギーを失うことは

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -I, \qquad \therefore \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{4e^4}{3m^2c^3r^2}$$

と表される．よって原子半径が r_0 からゼロになるまでの時間は

$$\tau = -\frac{3c^3m^2}{4e^4}\int_{r_0}^{0} r^2\mathrm{d}r = \frac{m^2c^3{r_0}^2}{4e^4}$$

で与えられる．これが古典電磁気学から導かれる，Rutherford 模型の原子の寿命である．Gauss 単位系から国際単位系に移るには $e^2 \to e^2/4\pi\varepsilon_0$ と置き換えれば良く，その上で素電荷 $e = 1.60 \times 10^{-19}\mathrm{C}$，電子質量 $m = 9.11 \times 10^{-31}\mathrm{kg}$，原子半径 $r_0 = 5.29 \times 10^{-11}\mathrm{m}$ (Bohr 半径) の値を代入すると，原子の寿命は

$$\tau \sim 10^{-11}\mathrm{s}$$

と見積もられる．これは最初の仮定に反して極めて短い時間であり，実際には原子はすぐに壊れてしまうことを意味している．

参考文献

[1] 山本義隆，2023，新・物理入門問題演習 ＜改訂版＞，駿台文庫株式会社，東京.

[2] エリ・デ・ランダウ，イェ・エム・リフシッツ，2015，ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 場の古典論 (原書第 6 版)(恒藤敏彦，広重徹訳)，東京図書株式会社，東京.

[3] P.A.M. ディラック，2012，一般相対性理論 (江沢洋訳)，株式会社筑摩書房，東京.

[4] パウリ，1980，相対性理論 (内山龍雄訳)，株式会社講談社，東京.

[5] S.Okasha，2011，1 冊でわかる　科学哲学 (廣瀬覚訳)，株式会社岩波書店，東京.

[6] スピノザ，2011，エティカ (工藤喜作，斎藤博訳)，中央公論新社，東京.

[7] 山本義隆，中村孔一，2013，朝倉物理学大系 1 解析力学 I，株式会社朝倉書店，東京.

[8] ファインマンほか，2014，ファインマン物理学 I (坪井忠二訳)，株式会社岩波書店，東京.

[9] エリ・デ・ランダウ，イェ・エム・リフシッツ，2013，ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 力学 (増訂第 3 版)(広重徹，水戸巌訳)，東京図書株式会社，東京.

[10] 砂川重信，2014，電磁気学 物理テキストシリーズ 4，株式会社岩波書店，東京.

[11] 今井功，2003，流体力学 物理テキストシリーズ 9，株式会社岩波書店，東京.

[12] 内山龍雄，2014，相対性理論 物理テキストシリーズ 8，株式会社岩波書店，東京.

[13] 山本義隆，2025，物理学の発展——山本義隆自選論集 II，株式会社筑摩書房，東京.

[14] 香取眞理，2016，裳華房テキストシリーズ-物理学 非平衡統計力学，株式会社裳華房，東京.

[15] W. グライナー他，2002，熱力学・統計力学 (伊藤伸泰，青木圭子訳)，シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社，東京.

[16] 中村伝，1997，統計力学 物理テキストシリーズ 10，株式会社岩波書店，東京.

[17] ファインマンほか，2012，ファインマン物理学 II (富山小太郎訳)，株式会社岩波書店，東京.

[18] 長沼伸一郎，2013，物理数学の直観的方法〈普及版〉理工系で学ぶ数学「難所突破」の特効薬，株式会社講談社，東京，75–76.

[19] 矢野健太郎，石原繁，2013，基礎解析学 (改訂版)，株式会社裳華房，東京.

[20] 寺沢徳雄，2013，振動と波動 物理テキストシリーズ 7，株式会社岩波書店，東京.

[21] J.J.Sakurai，2017，現代の量子力学 (上)(桜井明夫訳)，株式会社吉岡書店，京都.

[22] 斎藤幸平，2023，ゼロからの『資本論』，NHK 出版，東京.

[23] 白井聡，2020，武器としての「資本論」，東洋経済新報社，東京.

[24] A. ベナナフ，2022，オートメーションと労働の未来 (佐々木隆治監訳)，堀之内出版，東京.

[25] 山本義隆，2024，物理学の誕生——山本義隆自選論集 I，株式会社筑摩書房，東京.

[26] 内田樹，2004，図書館には人がいないほうがいい (朴東燮編訳)，株式会社アルテスパブリッシング，東京.

[27] 宇野常寛，2025，庭の話，講談社，東京.

[28] 江沢洋，中村孔一，山本義隆，2022，演習詳解 力学 [第 2 版]，株式会社 筑摩書房，東京.

[29] R.P. ファインマン，2013，ご冗談でしょう，ファインマンさん (下)(大貫昌子訳)，株式会社朝倉書店，東京.

[30] 小野寺嘉孝，2014，物理のための応用数学，株式会社裳華房，東京.

[31] 小出昭一郎，2014，力学 物理テキストシリーズ 1，株式会社岩波書店，東京.

[32] ゴールドスタインほか，2008，古典力学 (上) 原著第 3 版 (矢野忠ほか訳)，株式会社吉岡書店，京都.

[33] 山本義隆，2008，熱学思想の史的展開 1 熱とエントロピー，株式会社 筑摩書房，東京.
[34] 前田京剛，加藤雄介，2007，物性物理学演習——アシュクロフト・マーミンの問題解説，株式会社吉岡書店，京都.
[35] 山本義隆，中村孔一，2012，朝倉物理学大系 2 解析力学 II，株式会社朝倉書店，東京.
[36] F. マンドル，G. ショー，2011，場の量子論 第 1 巻 量子電磁力学 (樺沢宇紀訳)，丸善プラネット株式会社，東京.