

## サイフォンの原理は 水の非圧縮性をもたらすメカニズムから説明される

本稿の他にも理論物理の各種ノートを以下のページで公開している.

<http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/>

## 概要

「サイフォンの原理」において、水が部分的に重力に逆らって上昇するのは一見すると直感に反するかもしれない。

非圧縮性流体を仮定すると、質量保存則により水は各位置に共通の速度  $u(t)$  で、足並みを揃えて一斉に流れなければならない。このとき運動方程式は圧力を決定するのに用いられ (運動→力), 〈力→運動〉という因果方程式の役割を果たさないから、「何故、水が流れるのか」という問いには答えられない。そこで「何故、水が流れるのか」という問いに答えるには、水の非圧縮性をもたらすメカニズムを説明しなければならない。

今、水が局所的に膨張し、密度が薄まったとすると、その部分では圧力が減少するから、周りから密度のゆらぎを打ち消すような復元力を受ける。密度は定常状態における値の周りに振動し、音波を成す。こうして非圧縮性流体の仮定は良い近似となる。

## 1 サイフォンの原理

図1のように水で満たした管を水槽から垂らし、管に沿って  $x$  軸をとる。もし管の先端が水槽の液面よりも低ければ水は  $x > 0$  の側へ流れ続ける。この現象はサイフォンの原理として知られる。

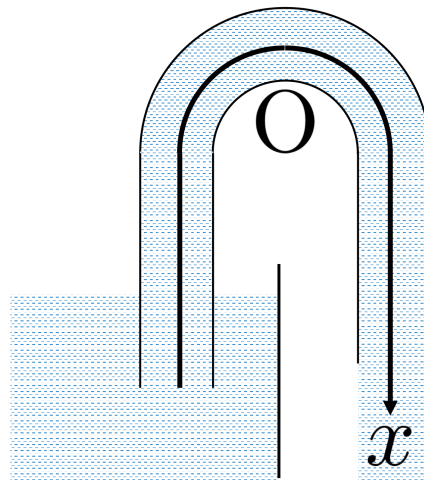


図1 サイフォンの原理の実験

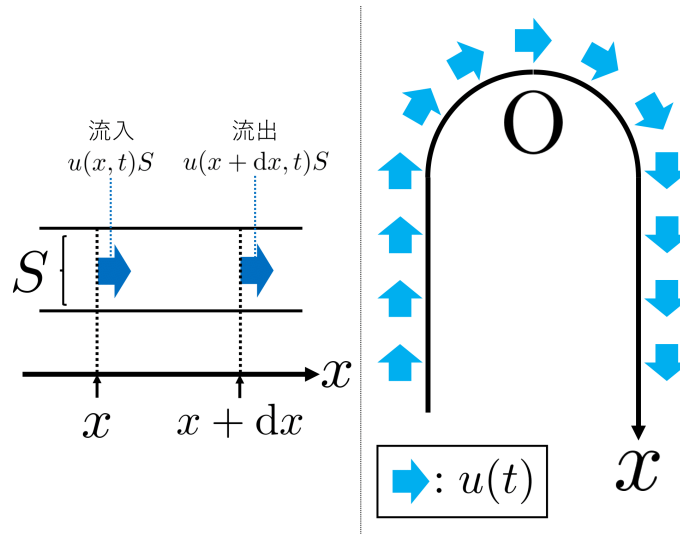


図2 非圧縮性流体はわき出さない

## 2 水の非圧縮性は被説明事項となる

### 2.1 非圧縮性流体はわき出さない

何故  $x < 0$  の部分において水は途切れることなく、重力に逆らって上り続けられるのだろうか。もし水を非圧縮性流体、すなわち密度  $\rho$  が位置と時間に依らず一定の流体と見なすならば、質量保存則（連続の式）は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

となる（第 5.1 節参照）。これは次のように背理的に解釈できる。すなわち空間に固定した単位体積の領域から、単位時間にある体積の流体が正味で流出したとすると、その体積に密度  $\rho$  をかけた分の質量を単位体積の領域は失うことになる。これは密度  $\rho$  が時間変化しないとしたことに矛盾するから、流体のわき出し  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  はゼロでなければならない。今考えている 1 次元流の場合、図 2 のように管の直断面を  $S$  とすると単位時間に領域  $x \sim x + dx$  に流入した流体と同じ体積の流体が領域の外に流出しなければならないから

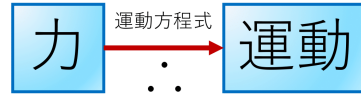
$$u(x,t)S = u(x+dx,t)S, \quad \therefore \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

である。このため図 2 のように管の各位置  $x$  にある水は共通の速度  $u(t)$  で一斉に流れることになる。よってサイフォンの原理を説明するには、水を非圧縮性流体と見なすことが正当化できれば良い。

### 2.2 運動方程式は因果方程式としての役割を果たさない

運動方程式は物体の運動が、物体に作用する力によって決まるという因果律を表している。原理的にはサイフォンの水の流れもまた、流体に作用する力によって決まっているはずである。ところが上で見たように、流体の非圧縮性を仮定すると運動方程式を用いることなく、水の各部分は共通の速度で一斉に流れるという結論が得られる。

## 因果律



## 流体力学の説明

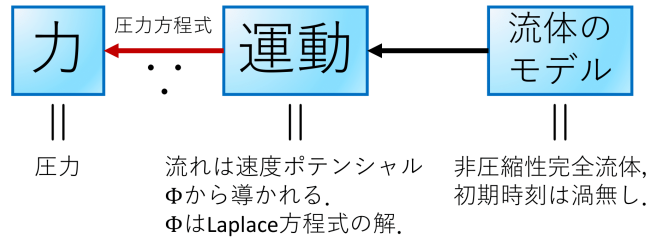


図3 流体力学の説明と因果律

これは次のような一般的な事情に依る．粘性応力（応力の流体要素の表面に接する成分）を無視した流体を考えよう．このような流体を完全流体と呼ぶ．トルクの働かない物体の角運動量が保存することに対応して， $\rho = f(p)$  の形の状態方程式に従い\*1，保存力の下で運動する完全流体に対して渦は不生不滅であることが示される．これは Lagrange の渦定理と呼ばれる [2, pp.41–44]．そこで初期時刻に渦のない流れを考えると，速度場は常に渦無しだから速度ポテンシャル  $\Phi$  から導かれる [2, pp.29–30]．さらに流体の非圧縮性  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  を仮定すると  $\Phi$  は Laplace 方程式  $\Delta\Phi = 0$  を満たす．こうして運動方程式を解かずとも，

ラプラスの方程式を適当な境界条件のもとに解いて速度ポテンシャル  $\Phi$  を定めると，(13.1) [ $\mathbf{u} = \nabla\Phi$ ] によって速度が定まり，さらに [圧力方程式と呼ばれる積分形の運動方程式] (13.2) から

$$p = \rho \left\{ F(t) - \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \Omega - \frac{1}{2}q^2 \right\} \quad (13.5)$$

によって圧力  $p$  を求めることができる．（中略）その際 (13.2) は微分方程式ではなくて，圧力  $p$  を求めるのに役立つだけである．(13.2) を圧力方程式と呼ぶのはこのためである [2, p.47]．（〔 〕 内引用者）

つまり図3にまとめたように，ここでは運動方程式（の積分形である圧力方程式）は与えられた力から物体の運動を予言する因果方程式の役割を果たさず，むしろ得られた流れを実現させる圧力場を求めるのに用いられている．

## 3 水の非圧縮性をもたらすメカニズム

水の非圧縮性，すなわち密度が一定に保たれる仕組みは次のように考えられる．もし水の微小要素が膨張したとすると，その部分では密度が減少する．そのため密度の増加関数である圧力もまた周囲に比べて減少し，膨張した部分は周囲の流体に押し戻されることになる：

膨張 → 密度減少 → (周囲より) 圧力低下 → 収縮

\*1 例えば流体粒子のエントロピー  $s$  が一定となる断熱変化  $\rho = f(p, s = \text{const})$  を考えれば良い．

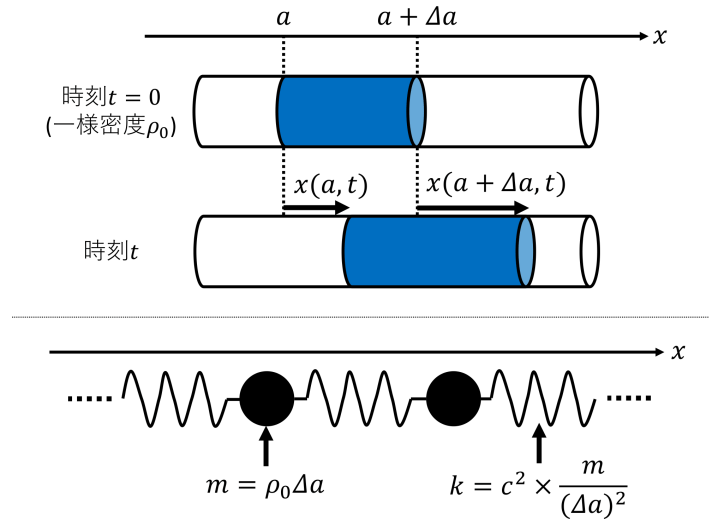


図4 1次元流における密度変化

実際、初期時刻の様な密度を  $\rho = \rho_0$  と書き、密度  $\rho$  が  $\rho_0$  からわずかに変化する場合の流体の時間変化を調べることで、密度が一定の状態  $\rho = \rho_0$  が安定であることを確かめられる。流体を構成する各粒子を初期時刻に粒子がいた位置の座標  $a$  でラベルし、図4のように粒子の時刻  $t$  における初期位置  $a$  からの変位を  $x(a, t)$  と書くと、 $\rho \simeq \rho_0$  であることは  $|\frac{\partial x}{\partial a}| \ll 1$  を意味する。 $\frac{\partial x}{\partial a}$  の1次まで考慮する近似で流体の運動方程式と質量保存則から波動方程式

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 x}{\partial a^2}, \quad c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} \quad (1)$$

が導かれる。ただし  $p$  は圧力であり、 $\frac{\partial p}{\partial \rho}$  は断熱変化における微分係数  $(\frac{\partial p}{\partial \rho})_s$  を、 $\rho = \rho_0$  で評価した値と考えれば良い ( $s$  は流体粒子のエントロピー、導出は第5.2節参照) [1]。これは図4のように波のない初期時刻に各幅  $\Delta a$  に含まれる流体を質量  $m = \rho_0 \Delta a$  の1つの質点に置き換えると、流体をバネ定数  $k = c^2 \frac{m}{(\Delta a)^2}$  のバネでつながれた質点系と見なせることを意味している。このとき流体の密度変化はバネの自然長からの伸び縮みに対応し、質点に働く復元力が密度変化を妨げることになる。水中の音速  $c \sim 10^3 \text{m/s}$  が、従ってバネ定数  $k = c^2 \frac{m}{(\Delta a)^2}$  が“大きな”値であるため、質点には強い復元力が働く。

## 4 玉突きの思考実験

最後に分子レベルの衝突を念頭に置いた思考実験を行う。 $x$  軸上の壁  $x = 0, L$  の間に並べられた質量  $m$  の同種粒子を考え、隣り合う粒子の初速度が逆符号となるように各粒子に初速度  $\pm v$  を与えたとする。粒子は壁や他の粒子と完全弾性衝突をし、接触時以外は壁や他の粒子と相互作用しないものとする。このとき粒子は左右の粒子との衝突の度に進行方向を変えられて初期位置の周りに往復運動をする。ここである時刻  $t = T$  以降に壁  $x = L$  に達した粒子を消滅させると、図5のように粒子は  $x > 0$  の側へ流れ出し、いずれ  $x = L$  に達する。

次に時刻  $t = T$  以降に、 $x < 0$  方向の様な重力場  $g$  がかった場合にも、全粒子が端  $x = L$  へ流れつきた

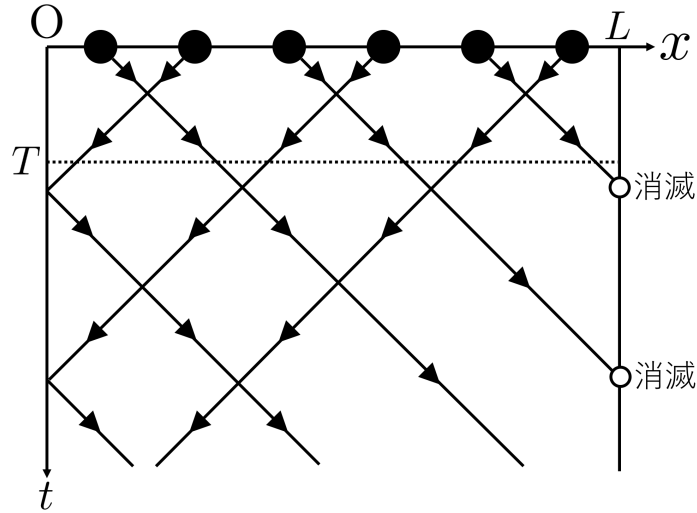


図5 玉突きモデルでの流れの生成機構

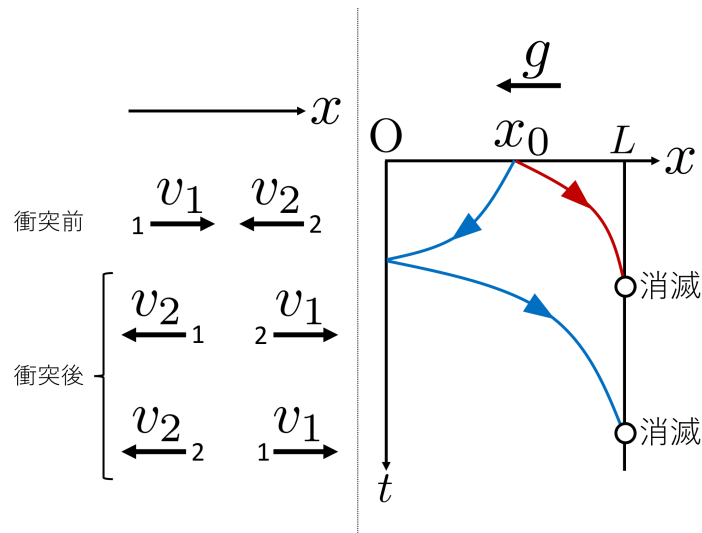


図6 同種粒子の完全弾性衝突は無視できること

めの条件を考える．同種粒子 1,2 の弾性衝突において 2 粒子は速度を交換するので，同時に粒子の番号も交換すると図 6 のように 2 粒子はお互いをすり抜けるように見える．ここで他の粒子をすり抜ける粒子は初速度の符号に応じて図 6 の赤と青のいずれかの放物線で表される運動をするので，全粒子が  $x = L$  に達する条件は

$$\forall x_0 \quad \frac{1}{2}mv^2 + mgx_0 \geq mgL \quad \Leftrightarrow \quad v \geq \sqrt{2gL}$$

となる．ここで重力に逆らってサイフォンを上る水を想定して， $L$  をサイフンの高さ  $L \lesssim 10\text{m}$  に設定すると  $\sqrt{2gL} \lesssim 10\text{m/s}$  なので，初速  $v$  を水分子の熱運動の代表的な速さ  $\sqrt{kT/m} \sim 10^2\text{m/s}$  にとればこの条件は満たされる（ここに  $k$  は Boltzmann 定数であり， $T = 300\text{K}$  とした）．

## 5 式の導出

### 5.1 質量保存則

質量保存則は次のように言い表される。すなわち空間に固定した領域内部の質量が増加したならばそれは領域内部で質量が無から生じたからではなく、領域の表面を通して質量が内部に流入したからである。特に空間の各位置の周りに無限小領域  $d^3x$  を考えれば、 $\rho$  を流体の質量密度として単位時間当たりの内部の質量  $\rho d^3x$  の増加量は  $\frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x$ 、質量の流入量は  $-\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) d^3x$  なので、これらを等置して連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) d^3x, \quad \therefore \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2)$$

を得る。逆に各体積要素  $d^3x$  でこれが成り立てば、任意の有限の領域  $V$  に対しても上記の主張が成り立つ。すなわち領域  $V$  内部の質量  $\int_V \rho d^3x$  (これは時間だけの関数である) は、単位時間に流入した分の質量だけ増加することになる：

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho d^3x = - \int_S (\rho \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (d\mathbf{S} \text{ は表面 } S \text{ の外向き法単位ベクトル}).$$

何故なら領域  $V$  を構成する全ての体積要素  $d^3x$  について質量の流入量  $-\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) d^3x$  を足し合わせると体積要素間の質量の出入りがキャンセルされ、表面  $S$  からの流入量  $-\int_S (\rho \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S}$  になるからである\*2。

特に非圧縮性流体を想定し、連続の式 (2) において密度  $\rho$  を位置と時間に依らず一定とおくと

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

を得る [2, pp.12–13]。この結果の解釈を第 2 節で述べた。

### 5.2 音波

第 3 節における波動方程式 (1) は次のように導ける [1]。初期時刻に  $a \leq x \leq a + da$  にあった流体要素の質量は時間が経っても変化しないから、管の直断面を  $S$  と書くと質量保存則は

$$\rho_0 S da = \rho S da \left( 1 + \frac{\partial x}{\partial a} \right), \quad \therefore \rho = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\partial x}{\partial a}} \simeq \rho_0 \left( 1 - \frac{\partial x}{\partial a} \right)$$

と表される (第 3 節の図 4 参照)。

これを用いると、ここで考えた流体要素に対する運動方程式は

$$\begin{aligned} (\rho_0 S da) \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \{p(\rho(a, t)) - p(\rho(a + da, t))\} S = - \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial a} S da \simeq (\rho_0 S da) \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} \\ \Leftrightarrow \text{式 (1)} : \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} \end{aligned}$$

となる。

\*2 このことは体積要素  $dV$  が直方体  $d^3x$  に限らず無限小の四面体の場合にも成り立ち、数学的には発散定理と呼ばれ、

$$\int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV = \int_S (\rho \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S}$$

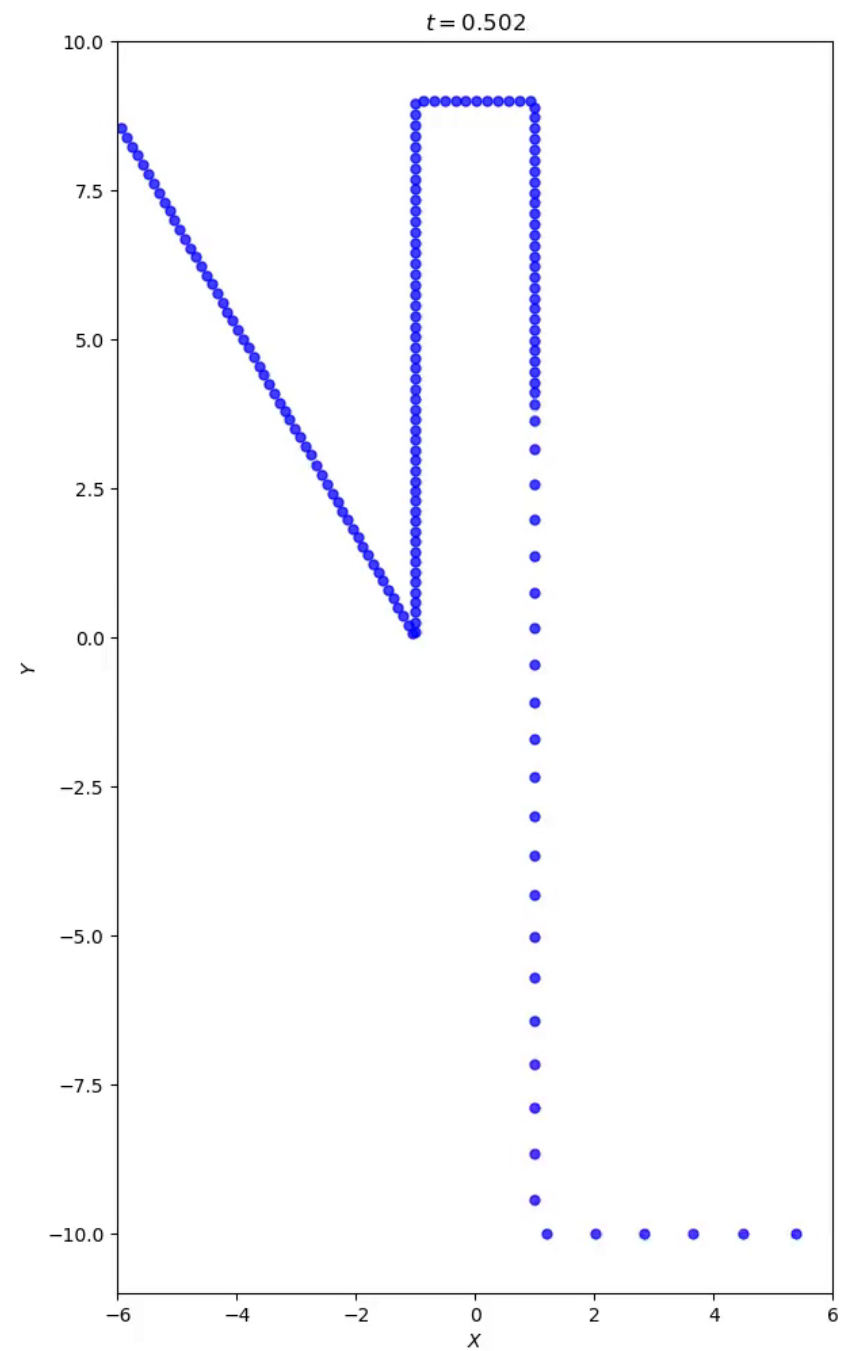
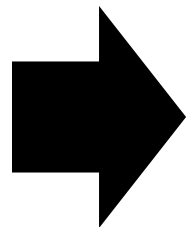
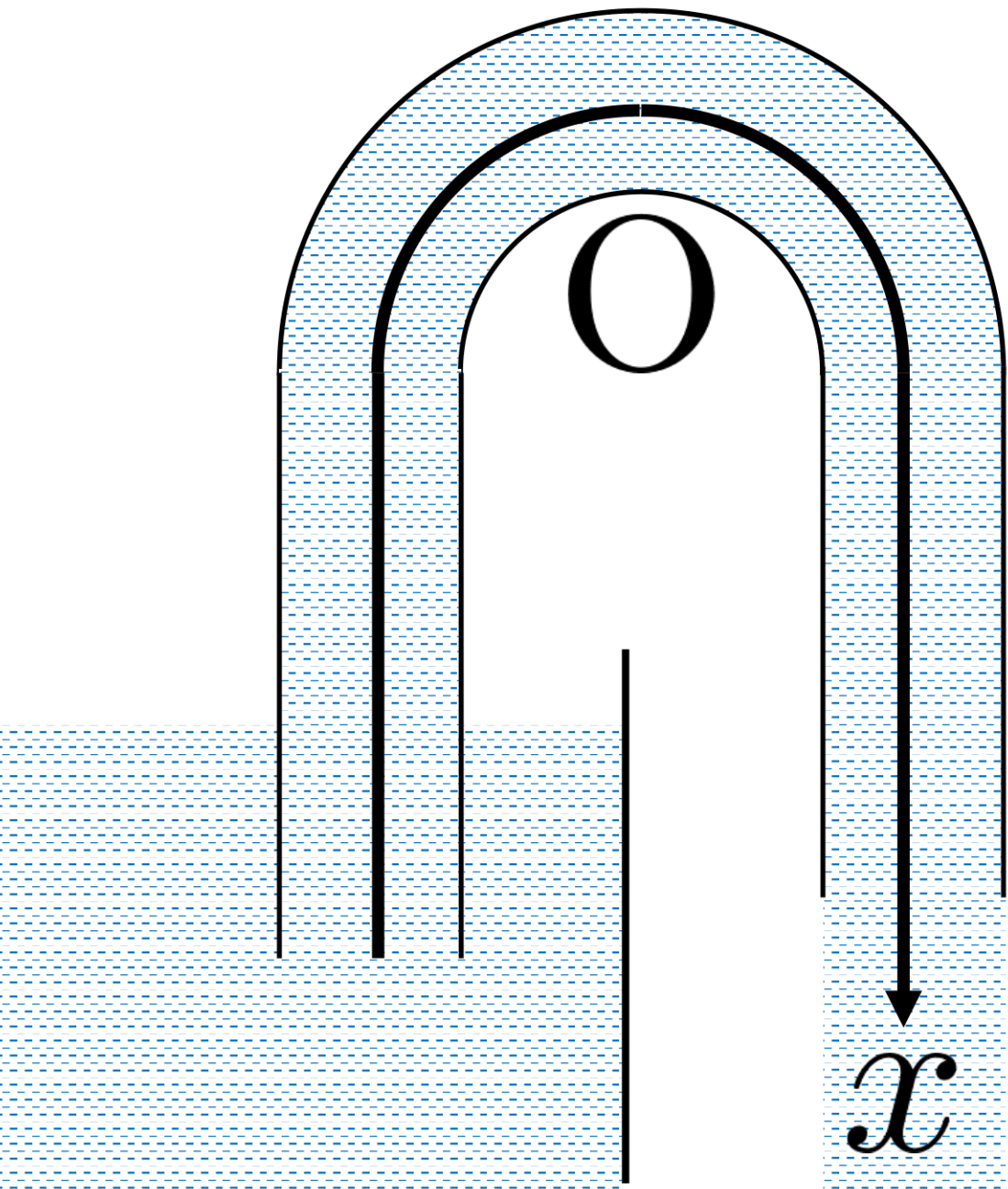
と書かれる。

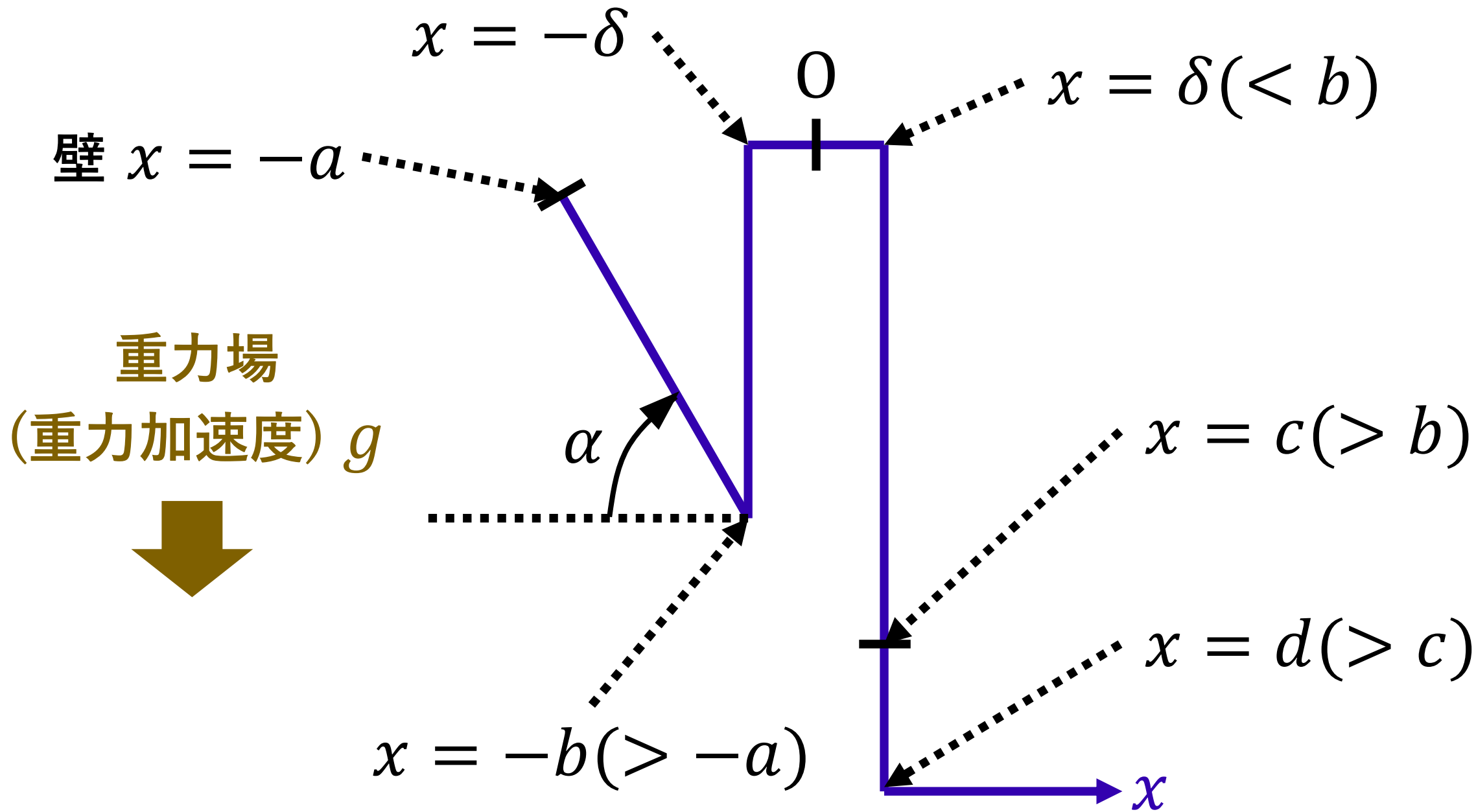
## 参考文献

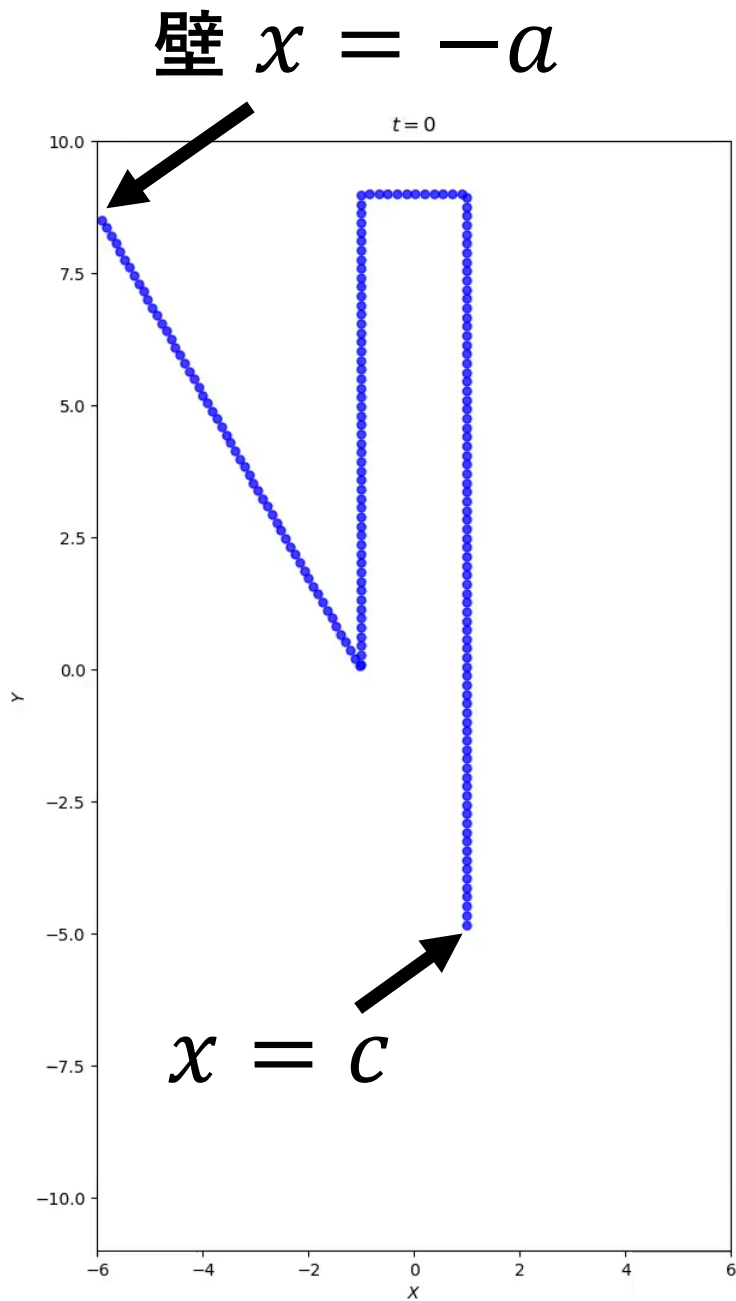
- [1] ファインマンほか, 2012, ファインマン物理学 II(富山小太郎訳), 株式会社岩波書店, 東京, 300–304.
- [2] 今井功, 2003, 流体力学 物理テキストシリーズ 9, 株式会社岩波書店, 東京.



# 1次元粒子系による サイフォンの原理の再現







## 初期条件

- 質量 $m$ , 直径 $D$ の $N$ 粒子を  $-a \leq x \leq c$  の範囲に等間隔に並べる.  $i$ 番目の粒子の座標

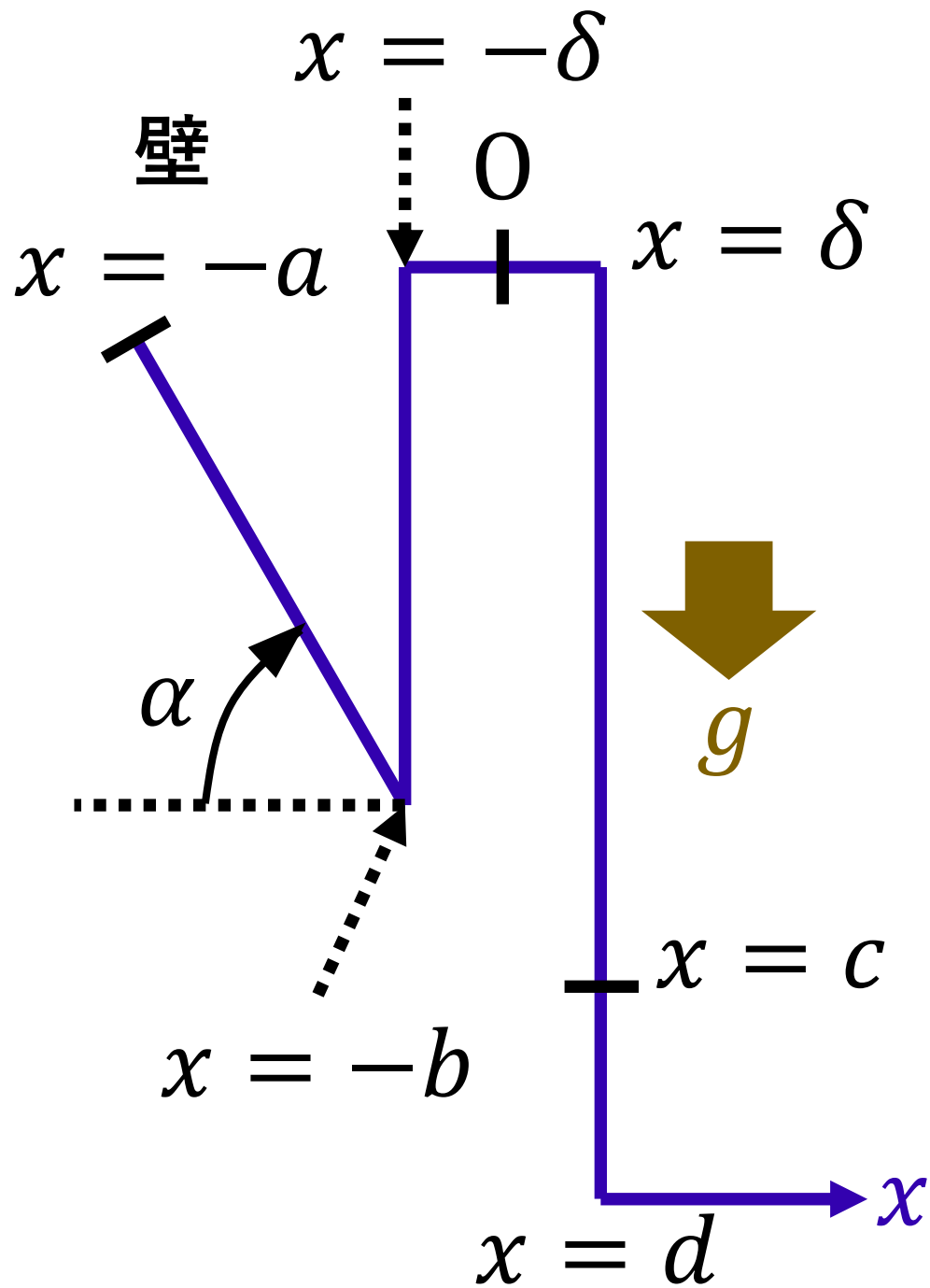
$$x_i = -a + \frac{a+c}{N+1}i \quad (i = 1, \dots, N).$$

- 各粒子の初速度はゼロとする.

## パラメーター

各量を適当に無次元化し,

- 座標など  $a = 20, b = 10, c = 15, d = 20,$   
 $\delta = 1, \alpha = \pi/3$
- 粒子に関する量  $m = 1, D = 0.1 (D < 2\delta),$   
 $N = 200 (ND < a + c)$
- 重力場(重力加速度)  $g = 1$   
と数値を設定する.



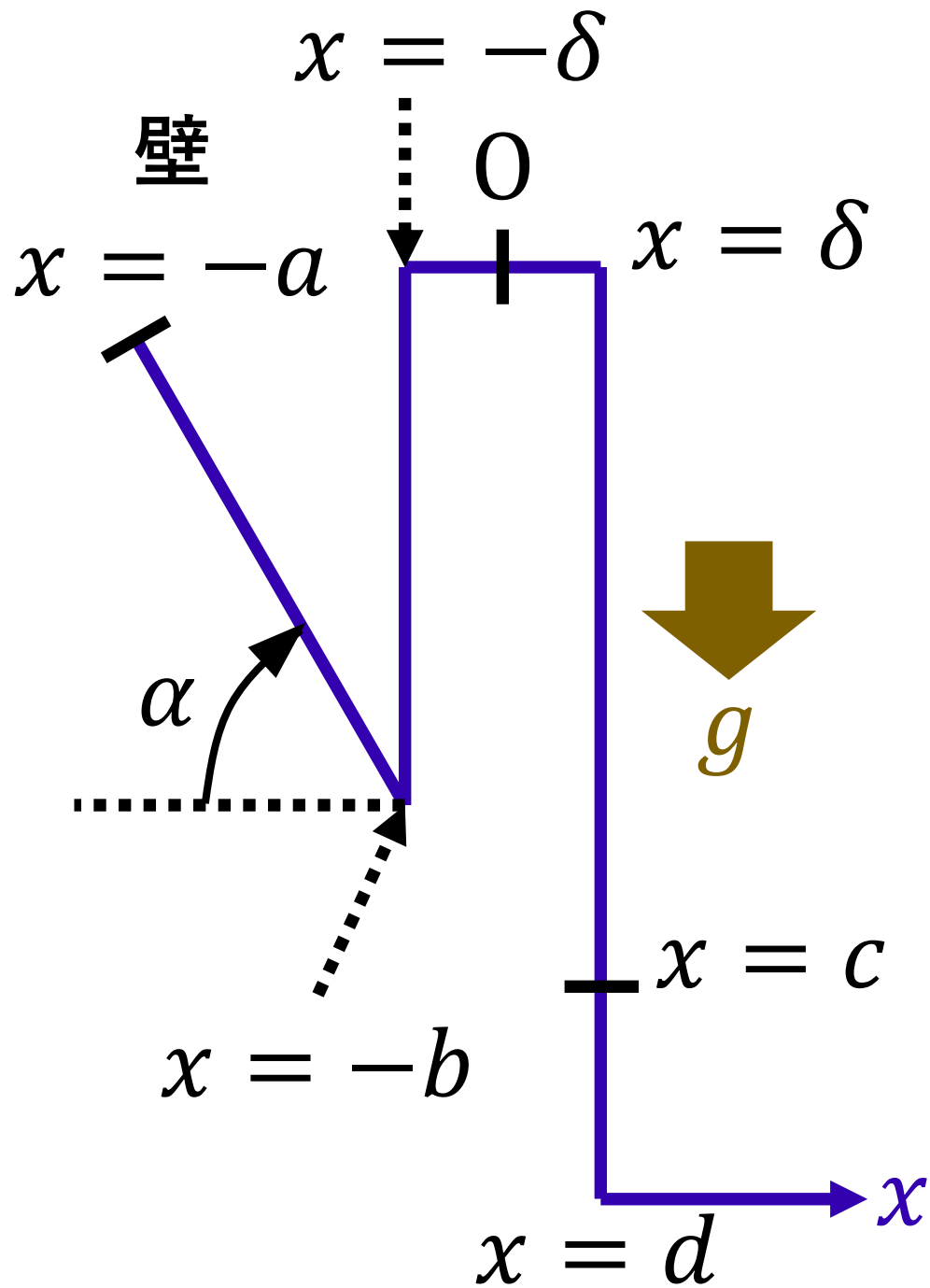
## 初期条件

- 質量 $m$ , 直径 $D$ の $N$ 粒子を  $-a \leq x \leq c$  の範囲に等間隔に並べる.  $i$ 番目の粒子の座標
 
$$x_i = -a + \frac{a+c}{N+1}i \quad (i = 1, \dots, N).$$
- 各粒子の初速度はゼロとする.

## パラメーター

各量を適当に無次元化し,

- 座標など  $a = 20, b = 10, c = 15, d = 20, \delta = 1, \alpha = \pi/3$
- 粒子に関する量  $m = 1, D = 0.1 (D < 2\delta), N = 200 (ND < a + c)$
- 重力場(重力加速度)  $g = 1$  と数値を設定する.



### $x$ 軸上の重力場

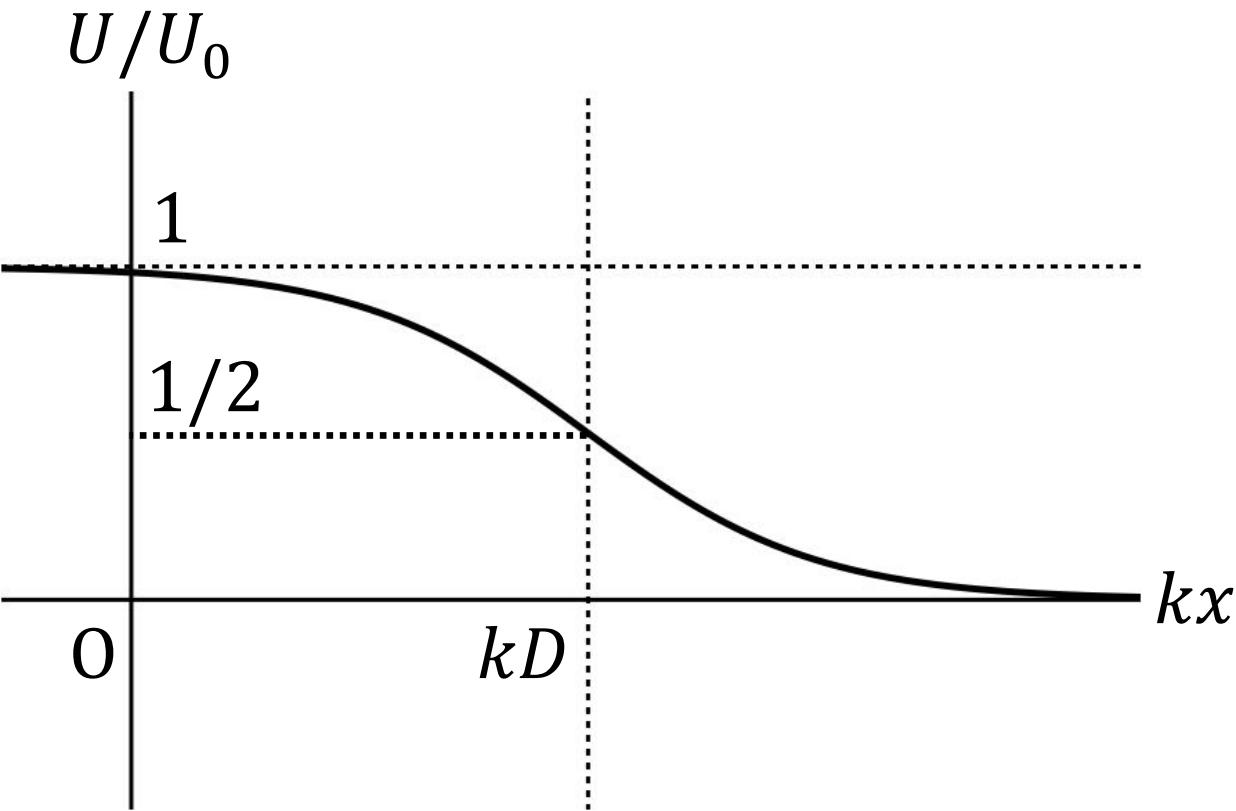
$$g(x) = \begin{cases} g \sin \alpha & (-a \leq x < -b) \\ -g & (-b \leq x < -\delta) \\ 0 & (-\delta \leq x < \delta) \\ g & (\delta \leq x < d) \\ 0 & (d \leq x) \end{cases}$$

# 粒子間斥力

粒子の中心からの距離  $x > 0$  に対して

ポテンシャル・エネルギー  $U(x) = U_0 \frac{1}{1+e^{k(x-D)}}$ ,

粒子間力  $F(x) = kU_0 \frac{e^{k(x-D)}}{(1+e^{k(x-D)})^2}$ .



- $k \rightarrow 0, U_0 \rightarrow \infty$  で  $U(x)$  は直径  $D$  の剛体球ポテンシャルとなる  
(粒子の中心間距離が  $D$  のとき衝突)
- パラメーターを適当に無次元化し,  
 $k = 5, U_0 = 5000$  と数値を設定する

# 運動方程式

$$m\ddot{x}_i = \underbrace{F(x_i - x_{i-1}) - F(x_{i+1} - x_i)}_{\text{隣接する粒子からの斥力}} + mg(x_i) \quad (i = 2, \dots, N - 1)$$

$$m\ddot{x}_1 = -F(x_2 - x_1) + mg(x_1) + \underbrace{F(x_1 + a)}_{\text{壁 } x = -a \text{ からの斥力}} \Big|_{D \rightarrow D/2}$$

$$m\ddot{x}_N = F(x_N - x_{N-1}) + mg(x_N)$$

## 数値シミュレーション

- 微小時間  $\Delta t$  に対して、  
運動方程式をEuler法にて離散化し、数値的に解く。
- 時間を適当に無次元化して  $\Delta t = 0.001$  とし、  
 $t = 12$  まで数値シミュレーションする。



# 結果 最終的に全ての粒子が $x > 0$ に移動

