

ランダウ＝リフシッツ 『力学』

本稿は力学の教科書

エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, 2013, ランダウ=リフシッツ理論物理学教程  
力学 (増訂 第 3 版)(広重徹, 水戸巖訳), 東京図書株式会社, 東京

を, 要点と途中計算の分離した見通しの良い自己完結的テキストへと再構成し, さらに補足・考察を加えたノートである. ただし本稿は教科書の内容をほぼ網羅しているものの, 内容を多少, 取捨選択してある. さらに本稿には筆者の誤りや勘違いが潜んでいるかもしれないことをあらかじめ断っておく. 言うまでもなく, 原著を当てるに越したことはない.

なお本稿の他にも理論物理の各種ノートを以下のページで公開している.

<http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/>

## 目次

第 1 章 運動方程式	2
第 2 章 保存法則	17
第 3 章 運動方程式の積分	28
第 4 章 粒子の衝突	52
第 5 章 微小振動	71
第 6 章 剛体の運動	127
第 7 章 正準方程式	161
付録 A 直交変換	199
付録 B 正準変換	202
付録 C Frenet-Serret の公式	208
付録 D Liouville の定理	210

# 第 1 章 運動方程式

## § 1. 一般座標

- 質点 (粒子)..... 大きさを無視した物体.

$$\text{惑星} \begin{cases} \text{公転を考える} & \rightarrow \text{質点と考えて良い} \\ \text{自転を考える} & \rightarrow \text{質点と考えられない} \end{cases}$$

- 系の位置を決めるのに十分な, 一般 (化) 座標  $q_1, \dots, q_s$  を導入.
  - デカルト座標でなくとも良い.
  - $\dot{q}_i$ : 一般 (化) 速度.
  - $q \equiv \{q_i\}, \dot{q} \equiv \{\dot{q}_i\}$ .
- 経験事実として,  $q, \dot{q}$  の初期条件だけで  $q(t)$  は完全に決定される.
  - ↔ ある時刻の全ての座標  $q$  と速度  $\dot{q}$  を与えると, その時刻における加速度  $\ddot{q}$  が決まる.
  - ↔ 運動方程式は  $q(t)$  の 2 階微分方程式.

## § 1 について

■古典力学的因果律 「座標と速度のすべてを同時に与える」(p.2, 1.2) とは, 初期条件を与えることを述べている.

「ある時刻にすべての座標  $q$  と速度  $\dot{q}$  を与えると, その時刻における加速度  $\ddot{q}$  の値もまた一通りにきまる」(p.2, 1.4,5) について, このとき

- 運動方程式を用いて, ある時刻での  $q$  と  $\dot{q}$  から, その時刻における  $\ddot{q}$  を求める
- ある時刻での  $\ddot{q}$  と  $\dot{q}$  から, 微小時間後の  $q$  と  $\dot{q}$  を求める

という手順を繰り返すことにより, 図 1 のように  $q(t)$  を逐次求めて時間追跡することが可能である. このため「系のそれ以後の運動は原理的には予言できる」(p.2, 1.3).

■正則なラグランジアン 古典力学的因果律が満たされることは, ラグランジアンに対する制約を課す. というのも, Lagrange 方程式 (2.6):

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

を加速度  $\ddot{q}_j$  について解くことができるためには, ラグランジアンのヘス行列

$$A = (A_{ij}) = \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right)$$

に対して  $\det A \neq 0$  でなければならない. このときラグランジアンは正則であると言われ, 上式に逆行列の要素  $(A^{-1})_{ki}$  をかけて  $i$  について和をとることにより,

$$\ddot{q}_k = (A^{-1})_{ki} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} \right)$$

のように  $\ddot{q}_k$  について解くことができる [1, p.105].

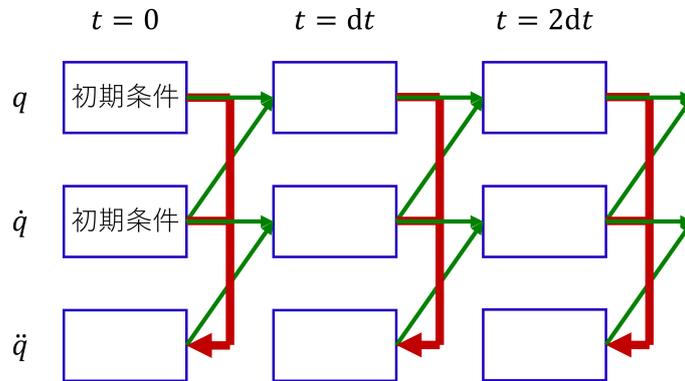


図1 運動方程式を数値的に解く手順

## § 2. 最小作用の原理

- Hamilton の原理 (最小作用原理) → Lagrange 方程式 (運動方程式).

系はラグランジアンと呼ばれる, 一般座標  $q \equiv \{q_1, q_2, \dots\}$ , 一般速度の組  $\dot{q} \equiv \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots\}$ , および時刻  $t$  の関数  $L(q, \dot{q}, t)$  で特徴付けられる (ドットは時刻  $t$  による微分). 古典力学における運動の法則は最小作用原理 (または Hamilton の原理) を用いて定式化できる. 最小作用原理によれば時刻  $t = t_1, t_2$  における系の位置  $q(t_1), q(t_2)$  が与えられたとき, その間の経路  $q(t)$  に沿う作用積分

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (1)$$

を極小にするような経路  $q(t)$  が時刻  $t_1$  から  $t_2$  までの系の実際の時間発展を与える. 作用  $S$  が極小になる条件は次の Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2)$$

で与えられる (導出は下記). これが一般座標  $q$  のとり方に依らず, 拘束力を含まない, 系の自由度と同じ個数の運動方程式を成す.

- ラグランジアンの加法性:

相互作用が無視できるほど遠く離れた部分 A, B (ラグランジアン  $L_A, L_B$  を持つ) から成る系全体のラグランジアンは

$$\lim L = L_A + L_B. \quad (2.7)$$

– ラグランジアンに任意の定数をかけても, 導かれる運動方程式は変わらない.

しかし加法性により, 個々のラグランジアンに同一の定数をかけることだけが許される.

↔ 単位の選択の任意性.

- ラグランジアンの変分性：

$$L \rightarrow L + \frac{df}{dt}, \quad f = f(q, t) \quad \Rightarrow \quad \text{作用が停留値をとる条件が不変}$$

$$\left( \text{作用の付加的な項 } [f(q, t)]_{t_1}^{t_2} \text{ は変分をとると落ちるから} \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{運動方程式が不変.}$$

## § 2, 式の導出など

■ 最小作用原理から Lagrange 方程式 (2) が導かれることの証明 軌道  $q_i(t)$  の変分に対して作用 (1):  $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$  が停留値をとる条件は

$$0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt$$

と書ける。ただし最後の等号では  $\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i$  に注意して被積分関数の第 2 項を部分積分し、境界条件  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$  を用いた。上式最右辺において変分  $\{\delta q_i\}$  を独立にとれることから Lagrange 方程式 (2):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

を得る。

## § 2 について

■ p.2 脚注 2 について 最小作用原理の選び出す軌道が作用を最小にしない例として、以下の問題を考える。図 2 のように半径  $a$  のリングに拘束された質量  $m$  の粒子を考える。粒子の位置を指定するのに図 2 の角度  $\phi$  を用いると、この系のラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2} m (a \dot{\phi})^2$$

で与えられる。粒子は時刻  $t = 0$  に  $\phi = 0$  の点 A を出発し、与えられた時刻  $t = T$  に  $\phi = \frac{7}{4}\pi$  の点 B に達するものとする。最小作用原理によって選び出される軌道は、A から反時計回りに B へと向かう等速円運動

$$\phi = \frac{7}{4}\pi \times \frac{t}{T}$$

である。このとき作用は、円周上を時計回りにたどって A から B へと至る等速円運動

$$\phi = -\frac{1}{4}\pi \times \frac{t}{T}$$

の場合よりも大きな値をとる。

■ 微分と変分の入れ替え  $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$  (p.3 下から 7 行目) について これは微分の線形性を用いているに過ぎない。すなわち変分後の軌道を  $Q(t) = q(t) + \delta q(t)$  と書くと、

$$\delta \dot{q} = \dot{Q} - \dot{q} = \frac{d}{dt} (Q - q) = \frac{d}{dt} \delta q.$$

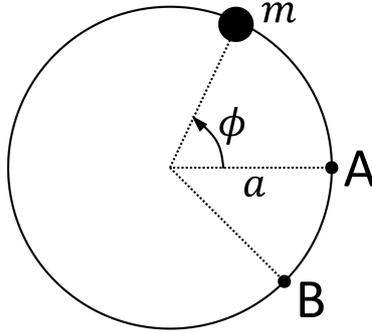


図2 半径  $a$  のリングに拘束された粒子

■ Lagrange 方程式 (2.6) の点変換に対する共変性 Lagrange 方程式 (2.6) は一般座標  $\{q_i\}$  の選択に依らずに成り立つものである。実際、一般座標  $q = \{q_i\}$  から、新しい一般座標  $Q = \{Q_i\}$  への点変換

$$q \rightarrow Q = Q(q, t)$$

に対して、Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

の左辺  $\mathcal{E}_i[L(q, \dot{q}, t)] \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$  は共変ベクトルの変換則

$$\mathcal{E}_i[L^*(Q, \dot{Q}, t)] = \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} \mathcal{E}_k[L(q, \dot{q}, t)], \quad L^*(Q, \dot{Q}, t) = L(q, \dot{q}, t)$$

に従うことが示される (確認は下記)。ところで一般にある座標系で全成分がゼロとなるテンソルは、その変換則により他の座標系でも全成分がゼロとなる。よって点変換に対して Lagrange 方程式は共変的である (形を変えない) [1, pp.106–107]. § 39, § 45 参照。

点変換 点変換の例として、図3のように (ある座標系に対して) 速度  $v$  で上昇するリフト上に拘束された質点を考える。質点のリフト上の位置はリフトに沿う距離  $x$  を用いて表される。時間  $t$  を指定すればリフトの高さが決まるため、質点の位置が  $\mathbf{r}(x(t), t)$  として完全に決定される。

次に定点から質点を見る角度  $\varphi$  を一般座標に用いることを考える。質点の位置  $\mathbf{r}(x(t), t)$  が決まると角度  $\varphi$  が定まるため、角度  $\varphi$  への変換は

$$\varphi = \varphi(x, t)$$

という形の点変換となる。

文献 [1, pp.106–107] の式 (2.1.28) の補足 ( $\mathcal{E}_i[L]$  が共変ベクトルとして変換することの確認)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^i} - \frac{\partial L}{\partial Q^i} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial \dot{Q}^i} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial Q^i} \right) \\ &= \frac{\partial q^k}{\partial Q^i} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial \dot{Q}^i} - \frac{\partial q^k}{\partial Q^i} \frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial Q^i} \\ &= J^k_i \mathcal{E}_k[L]. \quad \left( J^k_i \equiv \frac{\partial q^k}{\partial Q^i} \right) \end{aligned}$$

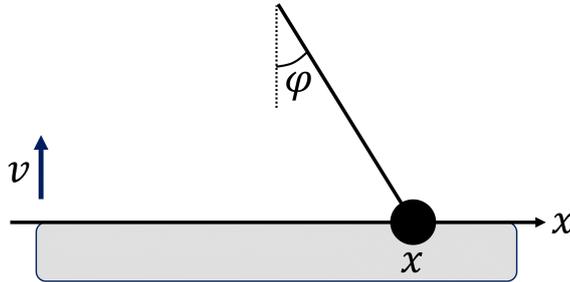


図3 速度  $v$  で上昇するリフト上の質点

■ラグランジアン<sup>3</sup>の加法性 「ラグランジアン<sup>3</sup>の加法性は、互いに相互作用していない各部分の運動方程式が相手の部分の量を含むことはないという事実を表現している」(式 (2.7) の下2行) について、

- $L_A$  は A を記述する座標  $q^{(A)} = \{q_i^{(A)}\}$ (とその微分, および時刻) だけの関数  $L_A = L_A(q^{(A)}, \dot{q}^{(A)}, t)$
- $L_B$  は B を記述する座標  $q^{(B)} = \{q_i^{(B)}\}$ (とその微分, および時刻) だけの関数  $L_B = L_B(q^{(B)}, \dot{q}^{(B)}, t)$

である. このときラグランジアン<sup>3</sup>の加法性 (2.7):  $\lim L = L_A + L_B$  によれば, 運動方程式

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i^{(A)}} - \frac{\partial}{\partial q_i^{(A)}} \right) (\lim L) = 0$$

は B を記述する座標  $q^{(B)}$  を含まない\*1.

なお A,B に相互作用があれば, 相互作用項  $L_{AB}$  が加わると考えられる:

$$L = L_A + L_B + L_{AB}.$$

■ラグランジアン<sup>3</sup>の不定性 「作用の変分の際には消えてしまう項」(p.5) について, 境界条件より

$$\delta(f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1)) = \left[ \frac{\partial f}{\partial q^i} \delta q^i \right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

となって消える.

逆にラグランジアン<sup>3</sup>の不定性は, 座標と時間の任意の関数  $f(q, t)$  の時間についての完全導関数  $df/dt$  に限られる (§ 4 でこのことを用いる). このことの証明を以下に紹介しよう [1, pp.111–112]. 2つのラグランジアン  $L, L' = L + \Omega$  を考える.  $L, L'$  と同様, その差も  $\Omega = \Omega(q, \dot{q}, t)$  であることに注意すると,  $L$  と  $L'$  が同一の Langrange 方程式を与える条件は

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \right) (L' - L) \\ &= \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_i} \ddot{q}_k + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial q_k \partial \dot{q}_i} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t \partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \Omega}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (3)$$

\*1 このことは加法性 (2.7) に反して  $\lim L = c_A L_A + c_B L_B$  としても成り立つ.

と表される。再び  $\Omega = \Omega(q, \dot{q}, t)$  を考えると、上式最右辺において  $\{\ddot{q}_k\}$  は第 1 項にのみ含まれるから、その係数  $\partial^2 \Omega / \partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_i$  はすべての  $i, k$  に対してゼロにならなければならない。ここから  $\Omega$  の形が

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_i} = \alpha_i(q, t), \quad \therefore \Omega(q, t) = \dot{q}_i \alpha_i(q, t) + \beta(q, t)$$

と定まる。このとき上式 (3) は

$$\left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k + \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} - \frac{\partial \beta}{\partial q_i} \right) = 0$$

と書き換えられる。ところが  $\{q_i\}$  の間には拘束条件はないから、

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i} \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial q_i} \quad (4)$$

でなければならない。これは可積分条件となっている、すなわち

$$\alpha_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad \beta = \frac{\partial f}{\partial t}$$

となる関数  $f(q, t)$  が存在する (すぐ下で補足)。したがって等価なラグランジアンは

$$\Omega = \dot{q}_i \alpha_i + \beta = \frac{df}{dt} \quad (f = f(q, t))$$

という形に限られる。

可積分条件 (4) について 簡単な場合として 1 階微分方程式

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (5)$$

を考えると、これは左辺  $Pdx + Qdy$  がある関数  $u(x, y)$  の全微分となっているとき完全微分方程式と呼ばれ、その一般解は

$$u(x, y) = \text{const}$$

で与えられる。そして式 (5) が完全微分方程式であるための条件は

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

である [2, p.17]。このことは次のように解釈できる。式 (5) が完全微分方程式であれば、ベクトル場  $(P, Q)$  の線積分 (終点を  $(x, y)$  とする) は経路によらず

$$\int^{(x, y)} (Pdx + Qdy) = u(x, y) + \text{const}$$

となるはずである。これはベクトル場  $(P, Q)$  に渦が無いこと

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

を意味する。

より一般に式 (4) が可積分条件であることについて、文献 [1, pp.111–112] では Poincaré の補題を根拠として提示している。この点を補足しよう (教科書に合わせ、 $q_i \rightarrow q^i, f \rightarrow \Lambda$  と表記を改める)。

$$\begin{aligned} d(\alpha_i dq^i) &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial \alpha_i}{\partial q^j} dq^j \wedge dq^i \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial q^j} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial q^i} \right) dq^j \wedge dq^i \quad (dq^j \wedge dq^i \text{の反対称性より}) \end{aligned}$$

なので、式 (4):

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial q^j} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial q^i} = 0$$

ならば  $d(\alpha_i dq^i) = 0$  であり、Poincaré の補題より

$$\alpha_i dq^i = d\Lambda = \frac{\partial \Lambda}{\partial q^i} dq^i$$

なる 0 形式  $\Lambda$  が存在する。ここから  $\alpha_i = \partial \Lambda / \partial q^i$  となり、これを式 (4):

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial q^i}$$

に代入して  $\beta = \partial \Lambda / \partial t$  を得る。

■最小作用原理と目的論的世界観 最小作用原理は粒子や場を擬人化し、作用を最小にするという目的を持って振る舞う存在として捉えているような印象を与え得る。しかし例えば粒子は、終点に辿り着くという最小作用原理で課される境界条件を実現するような初期条件を自分が満たしているかを“知らない”から、このような解釈は不適當である。このように意味レベルで考えても、粒子や場を擬人化しなければ変分原理は目的論に陥らない。数学的なレベルでも、最小作用原理から導かれる運動方程式は、粒子や場が目的因ではなく因果律に従って時間変化することを意味している。

### § 3. ガリレイの相対性原理

- 慣性系が存在する。
  - 慣性系：  
自由な物体に関しては\*2，空間が一様かつ等方的であり，  
時間も一様であるような基準系
  - ↪ 慣性系において自由な質点のラグランジアンは  $L = L(v^2)$
  - ↪  $\mathbf{v} = \text{const.}$  : 慣性の法則 (∴Lagrange 方程式). (以上，導出は下記)
- Galilei の相対性原理：  
互いに等速直線運動をする無数の慣性系が存在し，全ての慣性系で力学的法則は同一。  
↔ Galilei 変換に対して運動方程式は不変。
- Galilei 変換  
慣性系  $K$  と，これに対して一定速度  $\mathbf{V}$  を持つ慣性系  $K'$  を考える。  
 $K$  から見て時刻  $t$  に位置  $\mathbf{r}$  にいる粒子の， $K'$  から見た時刻と位置がそれぞれ  $t'$ ,  $\mathbf{r}'$  となるとき，

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t, \quad t = t'.$$

---

\*2 「自由な物体」といった表現は，外力の作用を受けていない物体という意味で用いている (以下同じ)。「自由」という言葉を額面通りに受け取ってはならない。と言うのも，厳密な意味で自由な存在，あるいは自由意志を行使し得るような行為の主体を考えるとできないからである。このことは形而上学に属しており，それ自体で明らかである。経験科学によって証明または否定されることではない。

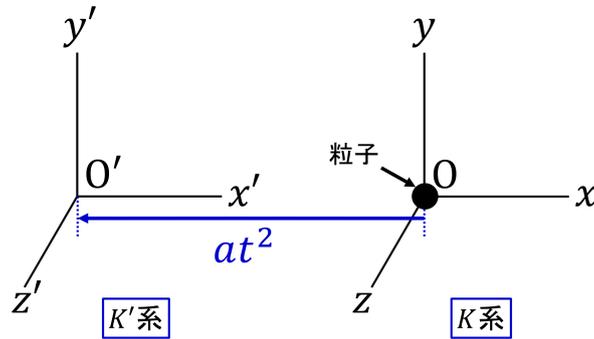


図4 空間の等方性がない系  $K'$

§ 3, 式の導出など

■慣性系の自由粒子に対する式  $L = L(v^2), v = \text{const.}$  の導出 1個の自由粒子の  $L$  に対して, 慣性系の

- 空間の一様性 →  $L$  は位置ベクトル  $\mathbf{r}$  に陽によらない,
- 時間の一様性 →  $L$  は時刻  $t$  に陽によらない,
- 空間の等方性 →  $L$  は速度  $\mathbf{v}$  の向きにはよらず, 大きさ  $v (\equiv \sqrt{v^2})$  だけの関数

なので,  $L = L(v^2)$  となる.

このとき Lagrange 方程式より

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad \therefore \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \text{const.}$$

となる. ところが,  $\partial L(v^2)/\partial \mathbf{v}$  は速度だけの関数だから, これは  $\mathbf{v} = \text{const.}$  を意味する\*3.

§ 3 について

■第2段落について: 空間の一様性・等方性, 時間の一様性のない基準系の例

空間の等方性がない系  $K'$  図4のように慣性系  $K(x, y, z$  軸) と基準系  $K'$  を考え,  $K'$  の原点  $O'$  は慣性系  $K(x, y, z$  軸) に対して  $x = -at^2$  に従って遠ざかるものとする. 慣性系  $K(x, y, z$  軸) の原点  $O$  に静止した自由粒子を  $K'$  から見ると,

初期時刻  $t' (= t) = 0$  に粒子は瞬間的に静止 → 以降  $t' > 0$  では粒子は  $x' > 0$  方向に加速

となる.

→  $x'$  軸方向は,  $y', z'$  軸方向と力学的に同等でない.

\*3 見やすく書けば,

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}) \equiv \frac{\partial L(v^2)}{\partial \mathbf{v}} = \text{const.} \rightarrow \mathbf{v} = \text{const.}$$

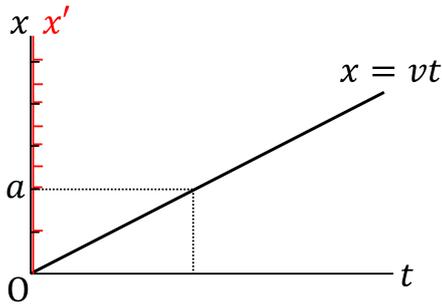


図5 空間の一様性がない系  $K'$

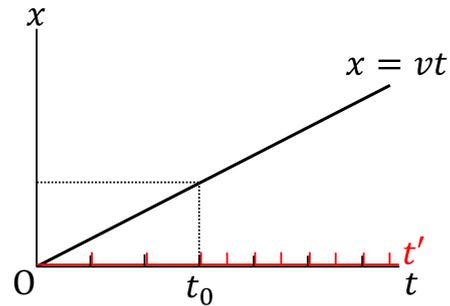


図6 時間の一様性がない系  $K'$

空間、時間の一様性がない系  $K'$  慣性系  $K$  から見た粒子の座標を  $x, t$  とし、 $K$  に対して  $x = vt$  の等速直線運動をする自由粒子を考える。

- 図5のように、 $x' = x \geq a$  において目盛りの間隔が狭まるような  $x'$  軸を持つ基準系  $K'$  をとる。  
このとき  $K'$  から見た自由粒子の速度  $dx'/dt$  は、粒子が  $x' \geq a$  に達すると加速する。  
→ 空間領域  $x' \geq a$  と空間領域  $x' \leq a$  は力学的に同等でない。
- 図6のように、 $t' = t \geq t_0$  において目盛りの間隔が狭まるような  $t'$  軸を持つ基準系  $K'$  をとる。  
このとき  $K'$  から見た自由粒子の速度  $dx/dt'$  は、時刻が  $t' \geq t_0$  に達すると減速する。  
→ 時間領域  $t' \geq t_0$  と時間領域  $t' \leq t_0$  は力学的に同等でない。

■「あらわには含まない」(p.6, 1.5) について 例えば§ 2のノートで取り上げた図3の変換  $\varphi = \varphi(x(t), t)$  は、時刻  $t$  にあらわに (陽に) 依存していると言われる。これに対しリフトが静止している場合には  $\varphi = \varphi(x(t))$  となり、 $\varphi$  はリフト上の位置  $x$  を通してのみ  $t$  に依存することになる。このとき  $\varphi$  は  $t$  をあらわに (陽に) 含まないという。

#### § 4. 自由な質点のラグランジアン

- 自由な質点のラグランジアン  $L(v^2)$

Galilei の相対性原理：あらゆる慣性系で運動方程式は同一

$$\Rightarrow \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{V} \text{ のとき } L(v^2) \rightarrow L(v^2) + \frac{df(\mathbf{r}, t)}{dt}. \quad (\text{\S 2 末尾を参照})$$

$$\Leftrightarrow L(v^2) = av^2.$$

(計算の詳細は下記。)

- $a = m/2$  (質点の質量  $m$  の定義)
  - 質量をはかる単位を変更 →  $L = \sum \frac{m}{2} v^2$  の各項が共通の定数倍  
← ラグランジアンの加法性 (2.7) により許容される。
  - 運動方程式の導出には作用の極値条件のみが用いられる。  
作用  $S = \int_1^2 \frac{m}{2} v^2 dt$  が単に極値 (停留値) をとるだけでなく、極小値をとることは、

質量  $m$  が正でなければならないことを結論するのに用いられる\*4.

- $v^2$  のデカルト座標, 円筒座標, 球座標を用いた表式 [本稿次節で補足].

#### § 4, 式の導出など

■自由粒子のラグランジアン決定 § 3 で見たように, 自由粒子のラグランジアンは慣性系  $K$  に対する速度  $\mathbf{v}$  の 2 乗だけの関数  $L(v^2)$  である.  $K$  系に対して無限小の速度  $-\boldsymbol{\varepsilon}$  で運動する慣性系  $K'$  では, 粒子は速度  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \boldsymbol{\varepsilon}$  を持つので,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  の 1 次までの近似でラグランジアンは

$$L' = L(v'^2) = L(v^2 + 2\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^2) \simeq L(v^2) + \frac{\partial L}{\partial v^2} 2\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

となる. ここで Galilei の相対性原理より, 2 つのラグランジアン  $L, L'$  の差が時間の完全導関数となることを要求すると

$$\frac{\partial L}{\partial v^2} = a : \text{速さに依らない定数}, \quad \therefore L = av^2 [\text{物理に影響しない付加定数は省略}]$$

となる.

逆にこのとき, 相対速度  $\boldsymbol{\varepsilon}$  が有限の値  $\mathbf{V}$  であっても,

$$L' = av'^2 = a(\mathbf{v} + \mathbf{V})^2 = av^2 + 2a\mathbf{v} \cdot \mathbf{V} + aV^2 = L + \frac{d}{dt}(2a\mathbf{r} \cdot \mathbf{V} + aV^2t)$$

となるので, Galilei の相対性原理が保証される.

#### § 4 について

■円筒座標, 球座標での運動エネルギーの表式 (4.5),(4.6) について 図 7 のように円筒座標  $\rho, \phi, z$  がそれぞれ  $d\rho, d\phi, dz$  変化して作られる領域を考える. 球座標の場合と同様, 円筒座標  $\rho, \phi, z$  が増大する 3 方向は互いに直交するから, これは 3 辺が  $d\rho, \rho d\phi, dz$  の直方体と見なせる. よって図 7 の線要素  $dl$ , 面積要素  $dS$ , 体積要素  $dV$  はそれぞれ

$$\begin{aligned} dl^2 &= d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2, \\ dS &= \rho d\rho d\phi, \\ dV &= \rho d\rho d\phi dz \end{aligned}$$

と表される. 特に  $d\rho, d\phi, dz$  を無限小時間  $dt$  における粒子の座標変化と見なせば, 粒子の質量を  $m$  として球座標で表した運動エネルギーの表式 (4.5):

$$T = \frac{1}{2}m\{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\phi})^2 + \dot{z}^2\}$$

を書き下せる.

同様に図 8 のように, 球座標  $r, \theta, \phi$  がそれぞれ  $dr, d\theta, d\phi$  変化して作られる領域を考える. 球座標  $r, \theta, \phi$  が増大する 3 方向は互いに直交するから, これは 3 辺が  $dr, r d\theta, r \sin \theta d\phi$  の直方体と見なせる. よって図 8 の

\*4 質量  $m$  が負であれば, 作用  $S = \int_1^2 \frac{m}{2} v^2 dt$  は極大値を持つ.

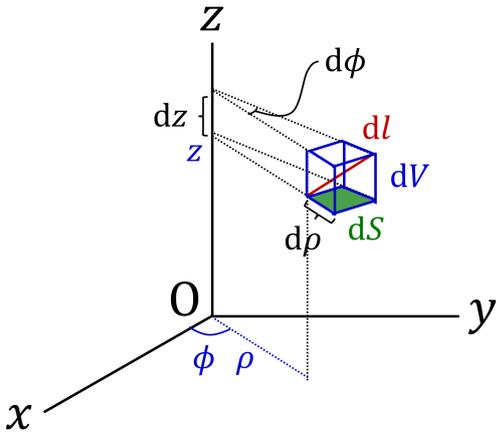


図7 円筒座標  $\rho, \phi, z$  がそれぞれ  $d\rho, d\phi, dz$  変化して作られる直方体

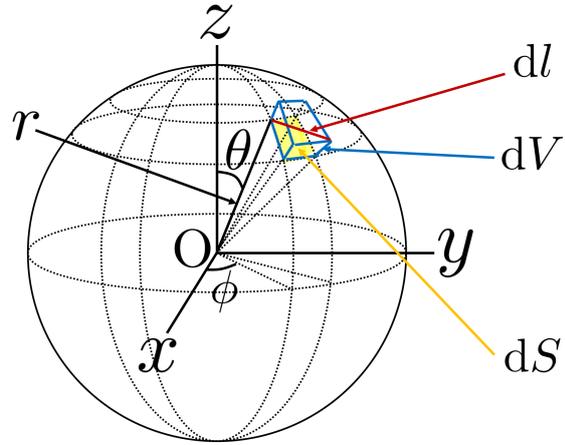


図8 球座標  $r, \theta, \phi$  がそれぞれ  $dr, d\theta, d\phi$  変化して作られる直方体

線要素  $dl$ , 面積要素  $dS$ , 体積要素  $dV$  はそれぞれ

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2,$$

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi,$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

と表され, 球座標で表した運動エネルギーの表式 (4.6):

$$T = \frac{1}{2} m \{ \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r \sin \theta \dot{\phi})^2 \}$$

を直ちに書き下せる.

以上の議論では, 例えば球座標について, 微小量  $dr, d\theta, d\phi$  は微小時間  $dt$  における粒子の座標変化であるということが重要であり, それらが具体的にどの程度の大きさかということは問題でない. このことは粒子の任意の運動に対して式 (4.6) を適用できるということに対応している.

## § 5. 質点系のラグランジアン

- 質点間に相互作用がある系のラグランジアン\*5

$$L = \sum \frac{mv^2}{2} - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots), \quad T = \sum \frac{mv^2}{2} : \text{運動エネルギー}, \quad U : \text{ポテンシャル・エネルギー}.$$

\*5 本稿では粒子番号の添字  $a$  を適宜省く. 和の記号の下に入る表式は粒子ごとに定義される量であり,  $\sum$  はその全ての粒子に対する和を表す:

$$\sum(\dots) \rightarrow \sum_{\text{粒子}}(\text{粒子ごとに異なる量}).$$

例えばラグランジアンを丁寧に書けば,  $L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - U(\{\mathbf{r}_a\})$  となる.

- $U = U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots)$  → 質点間の相互作用は一瞬で《伝わる》.

質点間の相互作用が有限の速度で伝わる

- 伝播速度が、したがって相互作用の法則が慣性系によって異なる
- Galilei の相対性原理に反する.

- 時間反転  $t \rightarrow -t$  に対してラグランジアン  $L = \sum \frac{mv^2}{2} - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots)$  は不変  $\leftrightarrow$  時間の等方性  
→  $q(t)$  が Lagrange 方程式を満たすならば,  $q(-t)$  も Lagrange 方程式を満たす (運動は可逆).
- Lagrange 方程式 → Newton の方程式  $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \equiv \mathbf{F}$ .
- 任意の一般座標  $q_i$  を用いた場合のラグランジアンの形

$$L = \frac{1}{2} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q). \quad [\text{本稿次節で補足}] \quad (5.5)$$

- 互いに相互作用する系 A, 系 B の全体のラグランジアン

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B).$$

- 与えられた運動  $q_B(t)$  をする系 B と相互作用する, 系 A のラグランジアン

$$L \rightarrow L_A = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B(t)) \quad (T_B(q_B, \dot{q}_B) \text{ は時間の完全導関数となって落とせる}).$$

- 拘束
  - 固定要素 (細い棒, 糸, ちょうつがいなど) の質量, 接触箇所の摩擦を無視.
  - 系の自由度を減らす → 系の自由度と同じ数の一般座標  $q_i$ .

## § 5 について

- 質点系のラグランジアン (5.1) について 孤立している質点系のラグランジアンが

$$L = \sum \frac{mv^2}{2} - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots) : (5.1)$$

と書けることは, p.9 注脚に「格言できる」とだけある. ここでは基本的な相互作用は保存力であると考えられていることになる.

なお Lorentz 力などの速度に依存する力を扱うには, 速度  $\dot{q}$  にも依存する一般化ポテンシャル  $U(q, \dot{q}, t)$  が用いられる [1, pp.109–111].

- 時間の絶対性と速度の合成則 「時間の絶対性は自動的に, あらゆる現象に速度の合成則が適用できることを意味している」 (p.10, 1.9,10) ことは次のように理解できる. 慣性系  $K$  から見て任意の対象が時間  $dt$  中に  $d\mathbf{r}$  だけ変位したとする. これを慣性系  $K'$  から見た時間と変位がそれぞれ  $dt', d\mathbf{r}'$  であるとき, 時間の絶対性 (3.4) より

$$dt' = dt$$

であり, Galilei 変換の式 (3.3) より

$$d\mathbf{r}' = d\mathbf{r} - \mathbf{V} dt$$

である. 以上の 2 式を辺々割ることにより, 速度の合成則  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$  を得る.

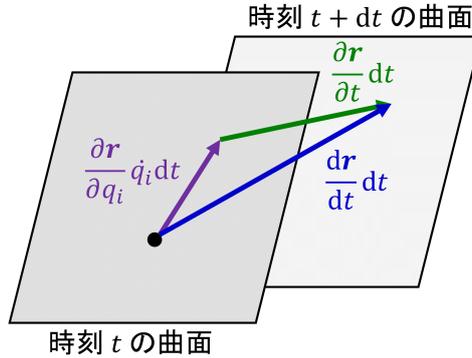


図9  $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}$  の解釈

■一般座標を用いたラグランジアン (5.5) について  $\partial_i = \partial/\partial q_i$  と略記すると運動エネルギーは

$$T = \sum \frac{1}{2} m \{(\partial_i \mathbf{r}) \dot{q}_i\} \cdot \{(\partial_j \mathbf{r}) \dot{q}_j\} = \frac{1}{2} \left\{ \sum m(\partial_i \mathbf{r}) \cdot (\partial_j \mathbf{r}) \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

となるため、式 (5.5) の  $a_{ik}(q)$  は  $a_{ik}(q) = \sum m(\partial_i \mathbf{r}) \cdot (\partial_j \mathbf{r})$  と同定される。ここで粒子に関する和  $\sum$  は  $m$  と  $\mathbf{r}$  にのみ作用するため、 $\dot{q}_i \dot{q}_j$  を粒子に関する和  $\sum$  の外に出せることに注意した。

ラグランジアン (5.5) は、例えば

- § 21 1次元の自由振動
- § 23 多くの自由度をもつ系の振動
- § 44 Maupertuis の原理

で用いられる。 $\mathbf{r}$  が時間に陽に依存する形  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q(t), t)$  にパラメトライズされる場合には、上式は

$$\begin{aligned} T &= \sum \frac{1}{2} m \{(\partial_i \mathbf{r}) \dot{q}_i + \partial_t \mathbf{r}\} \cdot \{(\partial_j \mathbf{r}) \dot{q}_j + \partial_t \mathbf{r}\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum m(\partial_i \mathbf{r}) \cdot (\partial_j \mathbf{r}) \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j + \left\{ \sum m(\partial_i \mathbf{r}) \cdot (\partial_t \mathbf{r}) \right\} \dot{q}_i + \frac{1}{2} \sum m(\partial_t \mathbf{r})^2 \end{aligned}$$

に置き換わる ( $\partial_t = \partial/\partial t$ )。ここで時間に依存する拘束条件  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q(t), t)$  として、粒子の運動が空間中を運動する曲面上に限定されている場合を考える ( $q$  は曲面上の粒子の位置を表す)。このとき

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}$$

は図9のように、無限小時間  $dt$  中の実際の変位  $d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$  が、座標  $q(t)$  の変化に伴う曲面上での変位  $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i dt$  と曲面そのものの変位  $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t} dt$  から合成されることを意味している。

■与えられた外場の中の系に対するラグランジアン 与えられた運動をする系 B によって作られた外部の場の中で運動する系 A に対するラグランジアン

$$L_A = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B(t))$$

(p.12, 1.4) が用いられる問題として、例えば § 22 の強制振動が挙げられる。

■一様な力の場のポテンシャル (5.8) について 式 (5.8):  $U = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$  が正しいポテンシャルであることは,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(F_j x_j) = F_j \delta_{ij} = F_i, \quad \therefore \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{F}$$

と確かめられる.

■拘束がある場合 (最終段落) について—— Lagrange 方程式は拘束力を含まない因果方程式であること Newton の運動方程式は拘束力を含んでおり,

- 与えられた力から運動を予測し決定する因果方程式 (力→運動)

であると同時に

- 観察された運動から力の関数形を決定する, いわば力の定義式 (運動→力)

としても用いられる. このような Newton の運動方程式の両義性は, その力学原理としての論理的地位を曖昧なものにしている. これは Newton の運動方程式が, 拘束により減少した系の自由度に比べ, 過剰な座標を含んでいることと関係している [1, pp.1-5].

これに対し Lagrange 方程式は拘束力を含まない, 系の自由度と同じ個数の運動方程式を成すため, その因果方程式としての論理的地位が明確である. ここに解析力学の 1 つの意義がある.

## § 5 問題 1 2重平面振子 (図 10)

本問で求めた 2重平面振子のラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \cos \phi_1 + m_2 gl_2 \cos \phi_2$$

に対する Lagrange 方程式を調べよう.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} &= (m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\phi}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} &= (m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\phi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_2 (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) \sin(\phi_1 - \phi_2), \\ \frac{\partial L}{\partial \phi_1} &= -m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) - (m_1 + m_2)gl_1 \sin \phi_1, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} &= m_2 l_2^2 \dot{\phi}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \cos(\phi_1 - \phi_2), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} &= m_2 l_2^2 \ddot{\phi}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\phi}_1 \cos(\phi_1 - \phi_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_1 (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) \sin(\phi_1 - \phi_2), \\ \frac{\partial L}{\partial \phi_2} &= m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) - m_2 gl_2 \sin \phi_2 \end{aligned}$$

なので, 求める Lagrange 方程式

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \phi_1} \\ &= (m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\phi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_2^2 \sin(\phi_1 - \phi_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \sin \phi_1, \\ 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \phi_2} \end{aligned}$$

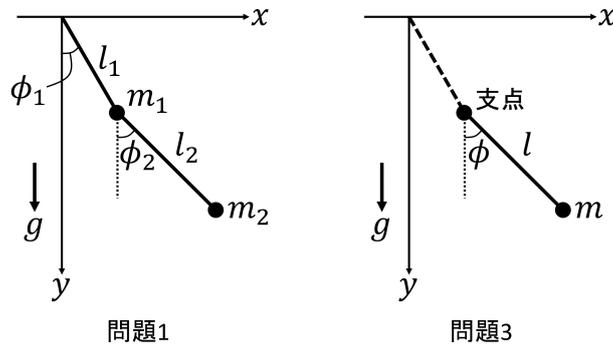


図 10 § 5 の問題

$$= m_2 l_2^2 \ddot{\phi}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\phi}_1 \cos(\phi_1 - \phi_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_1^2 \sin(\phi_1 - \phi_2) + m_2 g l_2 \sin \phi_2$$

を得る.

§ 5 問題 3 支点が与えられた運動を行う振り子 (図 10)

(a) 支点  $x = a \cos \gamma t, y = -a \sin \gamma t$  (等速円運動)

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\phi}^2 + mla\gamma^2 \sin(\phi - \gamma t) + mgl \cos \phi + \left( \frac{m}{2} (a\gamma)^2 - mga \sin(\gamma t) + \frac{d}{dt} mal\gamma \cos(\phi - \gamma t) \right).$$

時間の完全導関数 (青字部分) がある場合とない場合とで, Lagrange 方程式は同一の運動方程式

$$-mgl \sin \phi + mal\gamma^2 \cos(\phi - \gamma t) = 0$$

を与えることを直接確かめられる.

(b) 支点  $x = a \cos \gamma t, y = 0$  (水平方向に振動)

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\phi}^2 + mla\gamma^2 \cos(\gamma t) \sin \phi + mgl \cos \phi + \left( \frac{m}{2} (a\gamma)^2 \sin^2(\gamma t) - \frac{d}{dt} (mal\gamma \sin(\gamma t) \sin \phi) \right)$$

または

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\phi}^2 + mla\dot{\phi}^2 \cos(\gamma t) \sin \phi + mgl \cos \phi + \left( \frac{m}{2} (a\gamma)^2 \sin^2(\gamma t) + \frac{d}{dt} (mal\dot{\phi} \cos(\gamma t) \cos \phi) \right).$$

(c) 支点  $x = 0, y = a \cos \gamma t$  (鉛直方向に振動)

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\phi}^2 + mla\gamma^2 \cos(\gamma t) \cos \phi + mgl \cos \phi + \left( \frac{m}{2} a^2 \gamma^2 \sin^2(\gamma t) + mga \cos(\gamma t) - \frac{d}{dt} (mal\gamma \sin(\gamma t) \cos \phi) \right)$$

または

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\phi}^2 + mla\dot{\phi}^2 \cos(\gamma t) \cos \phi + mgl \cos \phi + \left( \frac{m}{2} a^2 \gamma^2 \sin^2(\gamma t) + mga \cos(\gamma t) - \frac{d}{dt} (mal\dot{\phi} \cos(\gamma t) \sin \phi) \right).$$

## 第 2 章 保存法則

### § 6. エネルギー

- 自由度  $s$  の孤立系は  $2s - 1$  個の独立な運動の積分を持つ  
( $2s$  個の積分定数のうち 1 個は時間の原点の選び方の任意性に対応)
- 空間と時間の一様性と等方性に関する保存量が重要であり、それらは加法性を持つ  
→ 相互作用後の 2 物体の保存量の和は、相互作用前の 2 物体の保存量の和に等しい
- 時間の一様性  $\partial L / \partial t = 0$

$$\rightarrow \text{エネルギー } E \equiv \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \text{ が保存} \quad (\text{導出は下記})$$

[エネルギー  $E$  はハミルトニアン (§ 40) を、  
運動量  $p$  ではなく速度  $\dot{q}$  の関数として表したものに他ならない.]

- ラグランジアン<sup>1)</sup>の加法性 → エネルギーの加法性
- 孤立系のみならず、一定の (すなわち時間によらない) 外場の中にある系のエネルギーも保存
- 保存系: エネルギーが保存される力学系
- 孤立系の (あるいは一定の外場の中にある) ラグランジアン  $L = T(q, \dot{q}) - U(q)$  (§ 5) に対して、

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q). \quad [\text{本稿次節で補足}] \quad (6.2)$$

#### § 6, 式の導出など

■ 時間並進対称性からエネルギー保存則の導出 ラグランジアンが時間に陽に依らないという仮定  $\partial L / \partial t = 0$  により、

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i.$$

Lagrange 方程式を用いて右辺の第 1 項を書き換えると

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right)$$

となるので、エネルギー保存則

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad E \equiv \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

を得る。

#### § 6 について

■ 「一般解の任意定数のうちの 1 つを時間の付加定数  $t_0$  にえら」(p.15, 1.8,9) ぶ例

$$\text{等速直線運動: } x = Vt + x_0 = V(t + t_0), \quad \text{等速円運動: } \phi = \omega t + \phi_0 = \omega(t + t_0).$$

■運動の積分の個数の上限  $(2s - 1)$  について  $n$  個の運動の積分は,  $2s$  次元の位相空間 (初出は § 46) における  $(2s - n)$  次元の超曲面を規定する. (配位空間ではこのような見方はできない.) よって  $n \leq 2s - 1$  であることは, 運動空間が最低でも 1 次元であることを意味する.

■「エネルギーの保存法則は……外部の場が一定の (すなわち時間によらない) 場合にも正しい」(p.16 下から 9.8 行目) 例  $x$  軸に沿う 1 次元の系を考える.

- 一様不変な重力場 ( $x$  成分  $-g$ ) の中の粒子 (質量  $m$ ) に対して, エネルギー  $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx$  が保存.
- 一様不変な電場 ( $x$  成分  $\mathcal{E}$ ) の中の粒子 (電荷  $e$ ) に対して, エネルギー  $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - e\mathcal{E}x$  が保存.

■同次関数についての Euler の定理を用いず式 (6.2):  $E = T + U$  を得る方法 p.27, 1.1 の式  $\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 2T$  は, 同次関数についての Euler の定理を用いずとも, 運動エネルギー  $T$  の具体的な形  $T = \sum_{i,j} a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j / 2$  を用いて直接

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \sum_{j,k} \frac{1}{2} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \right) = \frac{1}{2} \sum_i \dot{q}_i \left( \sum_k a_{ik} \dot{q}_k + \sum_j a_{ji} \dot{q}_j \right) = \sum_{i,j} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = 2T$$

と示すこともできる.

## § 7. 運動量

$$\begin{cases} \text{孤立系} \Rightarrow \text{空間の一様性} \\ z \text{ 方向の一様な場} \Rightarrow \text{系の } x, y \text{ 方向への並進対称性} \end{cases}$$

⇔ (⇒) 系の無限小ベクトル  $\boldsymbol{\varepsilon}$  方向への空間並進に対するラグランジアンの不変性

$$0 = \delta L = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = \frac{d}{dt} \left( \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right). \quad (a \text{ は粒子番号})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bullet \text{ 全運動量 } \mathbf{P} \equiv \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a \text{ (の } x, y \text{ 成分) の保存} \\ \bullet \text{ 粒子に作用する力の総和 } \sum_a \mathbf{F}_a = - \sum_a \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \text{ (の } x, y \text{ 成分) はゼロ} \\ \rightarrow \text{作用} \cdot \text{反作用の法則} \end{cases}$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}: \text{一般運動量}, \quad F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}: \text{一般力} \quad \Rightarrow \quad \text{Lagrange 方程式 } \dot{p}_i = F_i.$$

## § 7 について

■系の並進対称性とラグランジアンの不変性 自由な質点のラグランジアンを決める § 4 の議論では, 等速推進に対して運動方程式が不変であるための条件 (2.8):  $L \rightarrow L + df/dt$  を課した. これに対して § 7 では平行移動に対するラグランジアンの不変性をも要求している. これは系が並進対称性を持つための十分条件であって, 式 (2.8):  $L \rightarrow L + df/dt$  よりも強い条件である.

なお § 4 の等速推進と § 7 の平行移動は以下の点において異なっている.

- § 4 の等速推進
  - 粒子の系を空間に固定し，座標系を移動している (受動的変換).
  - 座標系間の位置関係は時間変化する.
- § 7 の平行移動
  - 座標系を空間に固定し，これに対し粒子の系を移動している (能動的変換).
  - 平行移動は粒子の座標系に対する位置の時間変化を意味しない.

■対称性と保存則 並進対称性から運動量保存則が導かれること (§ 7)，および回転対称性から角運動量保存則が導かれること (§ 9) は，系の対称性と保存則の関係を一般的に述べた Noether の定理に含まれている [1, pp.122–124].

Galilei の相対性原理を用い，対称性から運動量保存則を導く思考実験が『ファインマン物理学 I』10-3 に見られる [3, pp.141–144].

■ $z$  軸の方向にむいた一様な場 例えば  $z$  軸方向の一様な重力場中にある質点系は，一見すると  $z$  軸方向への並進対称性を持つように思えるかもしれない。しかし質点系を  $z$  軸方向へ  $\delta z$  並進させたとき，ラグランジアンは  $\delta L = -\sum mg\delta z (\neq 0)$  だけ変化する。これは系が  $z$  軸方向への並進対称性を持たないことを意味する。実際， $z$  軸に沿う一様な重力場の中では，粒子の運動量の  $z$  成分は保存しない。

## § 7, 問題

粒子が半空間の境界平面を通過する瞬間に，境界面の法線方向の空間の一様性が破れ，運動量の法線方向成分が変化する。

特に図 11 のように質点が  $xy$  平面上を運動していて， $y < 0$  でのポテンシャルが  $U_1$ ， $y > 0$  でのポテンシャルが  $U_2 (> U_1)$  である場合を考える。

- 質点はポテンシャルの境界である  $x$  軸を通過する無限小時間のうちに，無限大の力  $(-\infty, 0)$  を受けて有限の速度変化をする。
- 光線が屈折してこの質点の軌跡と同じ道筋をたどるのは， $y < 0$  が水で， $y > 0$  が空気で満たされているような場合である。光は速度が  $y > 0$  側で速いという点で質点と異なる (図 12 参照)。

## § 8. 慣性中心

複数の質点から成る孤立系を考える。

- 慣性系  $K$  に関する運動量  $\mathbf{P}$  が保存
- 慣性系  $K$  に対し任意の一定速度  $\mathbf{V}$  で運動する基準系  $K'$  に関する運動量は

$$\begin{aligned} \mathbf{P}' &= \sum_a m_a \mathbf{v}'_a = \sum_a m_a (\mathbf{v}_a - \mathbf{V}) \\ &= \mathbf{P} - \mu \mathbf{V}. \quad \left( \mu \equiv \sum_a m_a : \text{全質量} \right) \end{aligned}$$

- 慣性系  $K$  に対し一様な速度  $\mathbf{V} = \mathbf{P}/\mu$  で運動する基準系  $K'$  に関する運動量は  $\mathbf{P}' = 0$

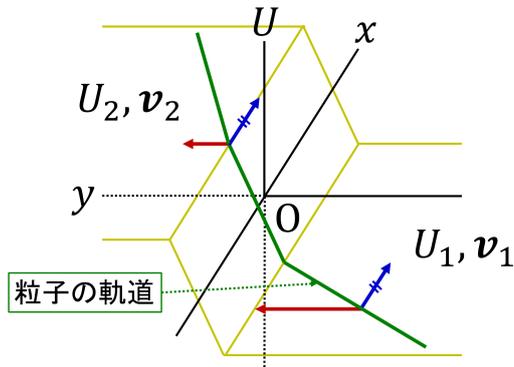


図 11 ポテンシャル・エネルギー  $U_1$  の半空間からポテンシャル・エネルギー  $U_2$  の半空間への粒子の移行．青い矢印は粒子の速度の  $x$  成分を，赤い矢印は粒子の速度の  $y$  成分を表す．

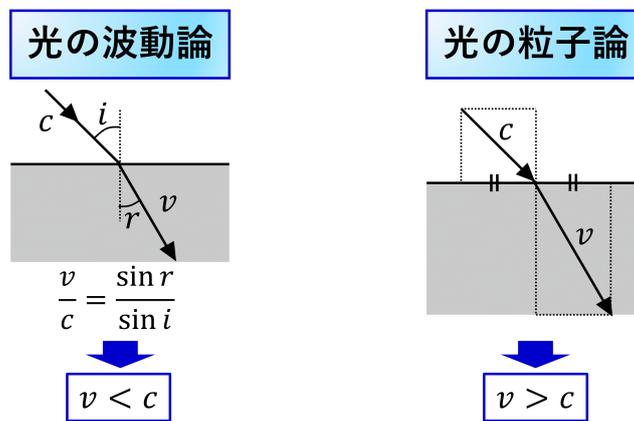


図 12 物質中の光速  $v < c$  は光の波動論の決定的な証拠となった

← 力学系全体としての静止

- $\mathbf{V}$  は慣性系  $K$  で見た，力学系全体としての速度
- 複数の質点から成る系に対しても，1 粒子系と同様の関係

$$\mathbf{P} = \mu \mathbf{V} \quad (\text{質量の加法性の定理})$$

- $\mathbf{V}$  は系の慣性中心

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_a m_a \mathbf{r}_a}{\sum_a m_a}$$

の速度

- 孤立系の慣性中心は一様な直線運動 (慣性法則の一般化)
- 基準系  $K'$  の採用 → 系全体としての一様な直線運動を取り除く
- 内部エネルギー  $E_{\text{内部}}$  : 基準系  $K'$  におけるエネルギー  
基準系  $K$  におけるエネルギー  $E$  との関係

$$E = \frac{1}{2} \mu V^2 + E_{\text{内部}}. \quad (\text{導出は下記，結果は理に適っている}) \quad (8.4)$$

## § 8, 式の導出など

■式 (8.4) の導出 慣性系  $K$  および,  $K$  に対して一定速度  $\mathbf{V}$  で運動する慣性系  $K'$  における力学系のエネルギー  $E, E'$  の間には,

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \sum_s m_a v_a^2 + U \\ &= \frac{1}{2} \sum_s m_a (\mathbf{v}'_a + \mathbf{V})^2 + U \\ &= \frac{1}{2} \mu V^2 + \mathbf{V} \cdot \sum_a m_a \mathbf{v}'_a + \frac{1}{2} \sum_s m_a v'^2_a + U \\ &= \frac{1}{2} \mu V^2 + \mathbf{V} \cdot \mathbf{P}' + E' \end{aligned}$$

の関係がある. これはエネルギーの変換則を与えている. 特に  $K'$  を慣性中心系に選べば,  $\mathbf{P}' = 0, E' = E_{\text{内部}}$  なので式 (8.4) が得られる.

## § 8 について

相互作用している 2 物体 (質量  $m_1, m_2$ , 位置  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ ) の系の内部エネルギーは

$$E_{\text{内部}} = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + U \quad \left( m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} : \text{換算質量}, \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 : \text{相対位置ベクトル} \right)$$

である (§ 13 参照).

## § 9. 角運動量

孤立系  $\Rightarrow$  空間の等方性

$\Leftarrow (\Rightarrow)$  系の無限小回転に対するラグランジアンの不変性

$\Rightarrow$  系の角運動量  $\mathbf{M} = \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a$  の保存 (導出は下記)

- 定ベクトル  $\mathbf{a}$  だけ隔たる 2 つの原点に関して定義された角運動量  $\mathbf{M}, \mathbf{M}'$  の関係

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a = \sum_a (\mathbf{r}'_a + \mathbf{a}) \times \mathbf{p}_a \\ &= \mathbf{M}' + \mathbf{a} \times \mathbf{P}. \end{aligned}$$

– 系全体が静止している (すなわち  $\mathbf{P} = 0$ ) ときだけ, 角運動量は原点の選び方に依らない.

\* これは力学系の《固有角運動量》と呼べる.

- 慣性基準系  $K$  と, これに対して速度  $\mathbf{V}$  で運動している基準系  $K'$  に関する角運動量  $\mathbf{M}, \mathbf{M}'$  の関係

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + \mu \mathbf{R} \times \mathbf{V}, \quad \mathbf{R}: \text{慣性中心の位置} (K \text{ 系の原点を始点とする}). \quad [\text{本稿次節で補足}] \quad (9.5)$$

–  $K'$  を慣性中心系にとると

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + \mathbf{R} \times \mathbf{P}$$

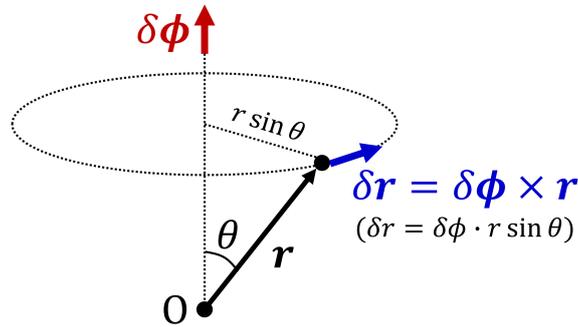


図 13 回転ベクトル  $\delta\phi$

となる。

これは角運動量  $M$  が、力学系の《固有角運動量》 $M'$  と

力学系全体としての運動に関する角運動量  $R \times P$  から成ることを意味する。

- 外場の中の系 [本稿次節で補足]

- 軸対称な場

- 角運動量のその軸への射影が保存される (角運動量を定義する原点は軸上にとる).

- 中心対称な場 → 場の中心に関して定義された角運動量が保存される。

- $z$  軸方向の一様な場 → 角運動量の  $z$  成分  $M_z$  が保存される (原点は任意).

- 任意の軸 ( $z$  軸と呼ぶ) に関する角運動量の成分

$$M_z = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_a}, \quad \phi_a: \text{粒子 } a \text{ の } z \text{ 軸周りの回転角 (方位角).}$$

## § 9, 式の導出など

### ■ 回転対称性から角運動量保存則の導出

回転ベクトル 物理的な系の無限小回転に対し、向きが回転軸方向に一致し大きさが回転角  $\delta\phi$  に一致するような回転ベクトル  $\delta\phi$  を導入する。ただし回転軸に沿う  $\delta\phi$  の向きは、右ネジを回転の向きに回したときに右ネジが進む向きを選ぶ。このとき回転軸上に原点を持つ位置ベクトル  $\mathbf{r}$  に対して、回転に伴う変位は

$$\delta\mathbf{r} = \delta\phi \times \mathbf{r}$$

と表される (図 13 参照).

回転ベクトル  $\delta\phi$  で特徴付けられる系の無限小回転に対する、ラグランジアンの不変性を要求すると、

$$\begin{aligned} 0 = \delta L &= \sum_a \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot \delta \mathbf{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \delta \mathbf{v}_a \right) \\ &= \sum_a (\dot{\mathbf{p}}_a \cdot (\delta\phi \times \mathbf{r}_a) + \mathbf{p}_a \cdot (\delta\phi \times \mathbf{v}_a)) \\ &= \delta\phi \cdot \sum_a (\mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{p}}_a + \mathbf{v}_a \times \mathbf{p}_a) \end{aligned}$$

$$= \delta\phi \cdot \frac{d}{dt} \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a \quad (6)$$

となる。ここで  $\delta\phi$  は任意に選べるので、角運動量

$$\mathbf{M} = \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a$$

が保存する。

## § 9 について

■角運動量の変換法則 (9.5) について 式 (9.5):  $\mathbf{M} = \mathbf{M}' + \mu\mathbf{R} \times \mathbf{V}$  における各項は保存されるから、これは  $K$  および  $K'$  の座標原点が一致している瞬間に限らずに成立する。実際、このことは直接確認できる。両者の原点が一致していない任意の瞬間を考え、 $K$  系の原点から  $K'$  系の原点に向かうベクトルを  $\boldsymbol{\rho}$  とし、力学系の慣性中心を  $K'$  から見た位置ベクトルを  $\mathbf{R}'$  と書く。このとき

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}'_a + \boldsymbol{\rho}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}' + \boldsymbol{\rho}$$

となることに注意すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_a m_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a \\ &= \sum_a m_a (\mathbf{r}'_a + \boldsymbol{\rho}) \times \mathbf{v}_a \\ &= \sum_a m_a \mathbf{r}'_a \times \mathbf{v}'_a + \sum_a m_a \mathbf{r}'_a \times \mathbf{V} + \sum_a m_a \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{v}_a \\ &= \mathbf{M}' + \mu\mathbf{R}' \times \mathbf{V} + \mu\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{V} \\ &= \mathbf{M}' + \mu\mathbf{R} \times \mathbf{V} : (9.5) \end{aligned}$$

を得る。

■軸対称な場の中で、系の角運動量のその軸への射影が保存されること (p.24)  $z$  軸対称な場の中の力学系を考える。系の  $z$  軸周りの無限小回転は、 $z$  軸上に原点を持つ位置ベクトル  $\mathbf{r}$  と  $z$  軸方向の回転ベクトル  $\delta\phi$  を用いて式 (9.1):  $\delta\mathbf{r} = \delta\phi \times \mathbf{r}$  で与えられる。これに対してラグランジアンが不変になる条件 (6):

$$\delta\phi \cdot \frac{d}{dt} \left( \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a \right) = 0$$

は  $\delta\phi \frac{dM_z}{dt} = 0$  を与えるため、 $M_z$  が保存される。

## § 9, 問題

1 円柱座標系における 3 方向の単位ベクトル  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$  はこの順に右手直交系を成すことに注意すると、粒子の角運動量は

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= m(r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z) \times (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\mathbf{e}_z) \\ &= mr^2\dot{\phi}\mathbf{e}_z + m(-r\dot{z} + z\dot{r})\mathbf{e}_\phi - mrz\dot{\phi}\mathbf{e}_r \\ &\equiv M_r\mathbf{e}_r + M_\phi\mathbf{e}_\phi + M_z\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} M_x &= M_r \cos \phi - M_\phi \sin \phi = m \sin \phi (r\dot{z} - z\dot{r}) - mrz\dot{\phi} \cos \phi, \\ M_y &= M_r \sin \phi + M_\phi \cos \phi = m \cos \phi (z\dot{r} - r\dot{z}) - mrz\dot{\phi} \sin \phi, \\ M_z &= mr^2\dot{\phi}, \\ M^2 &= M_r^2 + M_\phi^2 + M_z^2 = m^2 r^2 \dot{\phi}^2 (r^2 + z^2) + m^2 (r\dot{z} - z\dot{r})^2 \end{aligned}$$

を得る。

2 球座標系における 3 方向の単位ベクトル  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$  はこの順に右手直交系を成すことに注意すると、粒子の角運動量は

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= m(r\mathbf{e}_r) \times (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\phi}\mathbf{e}_\phi) \\ &= mr^2\dot{\theta}\mathbf{e}_\phi - mr^2 \sin \theta \dot{\phi}\mathbf{e}_\theta \\ &\equiv M_\theta \mathbf{e}_\theta + M_\phi \mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

となる。ここで

- $mr^2\dot{\theta}\mathbf{e}_\phi$  は粒子が  $\theta$  方向に回転するときの角運動量
- $-mr^2 \sin \theta \dot{\phi}\mathbf{e}_\theta$  の  $z$  成分  $m(r \sin \theta)^2 \dot{\phi}\mathbf{e}_z$  は、粒子が  $\phi$  方向に回転するときの角運動量

である。よって

$$\begin{aligned} M_x &= M_\theta \cos \theta \cos \phi - M_\phi \sin \phi = -mr^2(\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \theta \cos \phi), \\ M_y &= M_\theta \cos \theta \sin \phi + M_\phi \cos \phi = mr^2(\dot{\theta} \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \theta \sin \phi), \\ M_z &= -M_\theta \sin \theta = mr^2\dot{\phi} \sin^2 \theta, \\ M^2 &= M_\theta^2 + M_\phi^2 = m^2 r^4 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

を得る。

## § 10. 力学的相似

ある運動の軌跡を  $\alpha$  倍に拡大した軌跡を  $\beta$  倍の時間をかけて進む力学的相似な運動も実現される

$\Leftrightarrow \mathbf{r} \rightarrow \alpha\mathbf{r}, t \rightarrow \beta t$  で運動方程式が不変

$\Leftarrow \mathbf{r} \rightarrow \alpha\mathbf{r}, t \rightarrow \beta t$  でラグランジアンが定数倍

ポテンシャル・エネルギー  $U(\{\mathbf{r}_i\})$  が座標の  $k$  次の同次関数である、すなわち

$$U(\{\alpha\mathbf{r}_i\}) = \alpha^k U(\{\mathbf{r}_i\})$$

が満たされるとき、この条件は

$$\beta = \alpha^{1-k/2} \tag{7}$$

で与えられる (導出は下記)。

- 微小振動 ( $k = 2$ ) に対して  $\beta = 1 \rightarrow$  単振動の周期は振幅に依らない  
[振子では長さが  $\alpha$  倍されるから、これは等時性とは異なる概念]

- 一様な重力場 ( $k = 1$ ) に対して  $\beta = \alpha^{1/2} \rightarrow$  落下時間の 2 乗は, はじめの高さに比例
- Newton の万有引力 ( $k = -1$ ) に対して  $\beta = \alpha^{3/2} \rightarrow$  Kepler の第 3 法則

さらに

- ポテンシャル・エネルギー  $U$  がすべての位置ベクトル  $\mathbf{r}_a$  の  $k$  次の同次関数であり
- 系が空間の限られた領域のなかで, 有限の速さで運動する

場合, 運動エネルギー  $T$  とポテンシャル・エネルギー  $U$  それぞれの時間平均  $\bar{T}, \bar{U}$  のあいだに

$$2\bar{T} = k\bar{U} \quad (10.6)$$

の関係が成り立つ (ビリアル定理, 導出は下記).

- 微小振動 ( $k = 2$ ) に対して  $\bar{T} = \bar{U}$
- Newton の相互作用 ( $k = -1$ ) に対して

$$2\bar{T} = -\bar{U} \Rightarrow E = \bar{T} + \bar{U} = -\bar{T} < 0.$$

← Newton の相互作用の下で運動が有界となるのは  $E < 0$  のときだけである (§ 15)

## § 10, 式の導出など

■式 (7) の導出 スケール変換  $\mathbf{r} \rightarrow \alpha\mathbf{r}, t \rightarrow \beta t$  で運動エネルギーは  $\alpha^2/\beta^2$  倍に, ポテンシャル・エネルギーは  $\alpha^k$  倍になるので, 運動方程式が不変に留まるには, ラグランジアンが定数倍になる条件

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k, \quad \therefore \beta = \alpha^{1-k/2} : (7)$$

が満たされれば良い.

■ビリアル定理 (10.6) の導出 準備として, 次のことに注意する.

小定理 有界な (すなわち [絶対値が] 無限に大きな値をとることがない) 時間の関数  $F(t)$  に対して, その導関数  $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$  の時間平均  $\bar{f}$  はゼロである. 実際,

$$\bar{f} \equiv \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dF(t)}{dt} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0.$$

[最後の等号で  $F(t)$  が有界であることを用いた.]

次に

$$\begin{aligned} 2T &= \sum_a \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \mathbf{v}_a = \sum_a \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{v}_a = \frac{d}{dt} \left( \sum_a \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{r}_a \right) - \sum_a \mathbf{r}_a \cdot \dot{\mathbf{p}}_a = \frac{d}{dt} \left( \sum_a \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{r}_a \right) + \sum_a \mathbf{r}_a \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_a \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{r}_a \right) + kU \end{aligned}$$

が成り立つことに注目する [最初と最後の等号について, 本稿次節で補足]. 仮定より両辺の時間平均をとると, 最右辺の第 1 項は落ちるので, ビリアル定理 (10.6) が得られる.

## § 10 について

### ■任意の力学的量の比 (10.3) について

$$\begin{aligned}\frac{v'}{v} &= \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha^{1-k/2}} = \alpha^{k/2} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{k/2}, \\ \frac{U'}{U} &= \alpha^k, \quad \frac{T'}{T} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \alpha^k \Rightarrow \frac{E'}{E} = \alpha^k = \left(\frac{l'}{l}\right)^k, \\ \frac{M'}{M} &= \frac{\alpha^2}{\beta} = \frac{\alpha^2}{\alpha^{1-k/2}} = \alpha^{1+k/2} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1+k/2}\end{aligned}$$

による.

■同次関数についての Euler の定理  $k$  次の同次関数  $U(\mathbf{x})$  が満たす式  $\alpha^k U(\mathbf{x}) = U(\alpha \mathbf{x})$  の両辺を  $\alpha$  で微分して得られる

$$k\alpha^{k-1}U(\mathbf{x}) = \frac{\partial(\alpha \mathbf{x})}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial U(\alpha \mathbf{x})}{\partial(\alpha \mathbf{x})} = \mathbf{x} \cdot \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$$

において  $\alpha = 1$  とおくと

$$\mathbf{x} \cdot \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = kU(\mathbf{x})$$

となる (同次関数についての Euler の定理).

よってポテンシャル・エネルギー  $U$  を座標  $\mathbf{x} = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots\}$  の  $k$  次の同次関数とすると

$$\begin{aligned}\sum_a \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \mathbf{v}_a &= 2T \quad (\text{p.27 下から 2 行目}), \\ \sum_a \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot \mathbf{r}_a &= kU \quad (\text{式 (10.5)} \Rightarrow \text{式 (10.6)})\end{aligned}$$

である. なお § 6 で指摘したように, この第 1 式は同次関数についての Euler の定理を用いなくても導ける.

### ■時間平均の定義式 p.28, 1.4 における時間平均の定義式

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt$$

について, 例えば時間  $0 \leq t \leq \Delta t$  のうちに物体に及ぼされる力積  $\int_0^{\Delta t} f(t) dt$  が平均の力  $\bar{f}$  を用いて  $\bar{f} \Delta t$  であると言うとき, 平均の力を

$$\bar{f} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} f(t) dt$$

と定義したことになる. あるいは  $\bar{f}$  は  $f$ - $t$  グラフの面積を一定に保ちながら曲線を水平に均したときの, 水平線の高さと言える.

■ビリアル定理について 力と座標の積  $-\sum_a (\partial U / \partial \mathbf{r}_a) \cdot \mathbf{r}_a$  の時間平均をビリアルと呼ぶ.  $k$  次の同次関数  $U(\{\mathbf{r}_a\})$  に対してこれは  $-k\bar{U}$  であり, 同次関数  $U(\{\mathbf{r}_a\})$  を仮定しなければビリアル定理は

$$2\bar{T} = \sum_a \overline{\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot \mathbf{r}_a}.$$

§ 10, 問題

1  $m_a \rightarrow \alpha m_a$ ,  $t \rightarrow \beta t$  とすると運動エネルギーは  $T \rightarrow \frac{\alpha}{\beta^2} T$  と変化する. このときラグランジアンが全体として定数倍される条件は

$$\frac{\alpha}{\beta^2} = 1, \quad \therefore \frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{m'}{m}}$$

となる.

2  $U \rightarrow \alpha U$ ,  $t \rightarrow \beta t$  とすると運動エネルギーは  $T \rightarrow \frac{1}{\beta^2} T$  と変化する. このときラグランジアンが全体として定数倍される条件は

$$\frac{1}{\beta^2} = \alpha, \quad \therefore \frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{U}{U'}}$$

となる.

例 ばね定数  $k$  を持つばねに繋がれた, 質量  $m$  の物体の 1 次元的な振動における周期は

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

で与えられる. このことは以上の結果のいずれとも整合している.

### 第 3 章 運動方程式の積分

#### § 11. 1 次元運動

ラグランジアン

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x), \quad x : \text{デカルト座標}$$

で記述される 1 次元の系に対して，エネルギー保存則

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E$$

が成り立つ (これは運動方程式を 1 回，積分した関係にあたる)。これは変数分離形の微分方程式であり，

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + \text{const.} \quad (11.3)$$

と積分される。積分定数は  $E$  と  $\text{const}$  の 2 つである [本稿次節の，不定積分に関する注意も参照]。

- 運動エネルギーは非負なので，運動は  $U(x) \leq E$  を満たす領域内だけで行われる (図 14)。
- $U(x) = E$  を満たす位置  $x$  は速度がゼロになる停留点である。
- 運動が有限の領域  $x_1(E) \leq x \leq x_2(E)$  に限られる場合，粒子は  $x = x_1(E), x_2(E)$  の間で振動し，振動の周期は

$$T(E) = 2 \times \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \quad (11.5)$$

で与えられる (運動の可逆性を考慮した)。

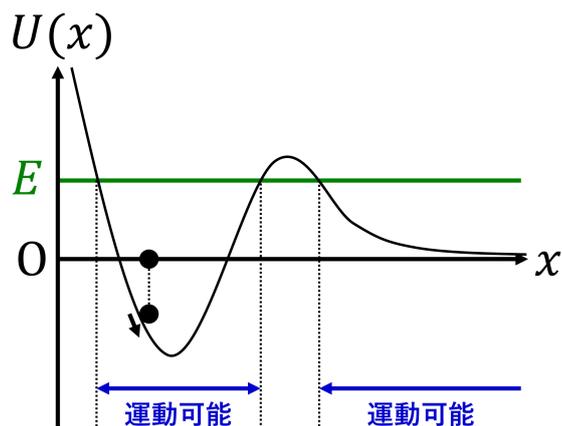


図 14 ポテンシャルと運動 (1 次元)

## § 11 について

■式 (11.3) の解釈 エネルギー  $E$  が保存するため、粒子が位置  $x$  を通過するときの運動エネルギーは  $E - U(x)$  となる。言い換えれば粒子が位置  $x$  を通過するときの速さが

$$v(x) = \sqrt{\frac{E - U(x)}{m/2}}$$

と決まるため、位置  $x$  の周りの幅  $dx$  を粒子が横切るのに要する時間  $dx/v(x)$  が得られる。これを積分すると粒子の有限の変位に要する時間が得られることを式 (11.3) は意味している。

■不定積分に関する一般的な注意 不定積分 (11.3):

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + \text{const.}$$

は、上限が  $x$  で下限が不定であるような積分  $\int^x$  に対応する。初期時刻  $t = t_0$  に粒子が位置  $x = x_0$  にあったとすると、これは

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{E - U(x')}} + t_0$$

を意味する。

■ポテンシャルの図 14 の見方 (1次元の場合) 力  $F = -dU/dx$  はポテンシャルの低くなる向きに働くので、ポテンシャルを表す曲線  $U = U(x)$  を坂道に例えたときに、物体は定性的には坂道を転がる球と同様の運動をすることになる。この球を  $x$  軸に投影した点が物体の実際の位置を与える。

## § 11, 問題 1 単振子の周期

長さ  $l$  の単振子に対して、エネルギー保存則は

$$\frac{1}{2}m(l\dot{\phi})^2 - mgl \cos \phi = -mgl \cos \phi_0$$

であり、 $\dot{\phi} > 0$  を仮定して  $\dot{\phi}$  について解くと

$$\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos \phi - \cos \phi_0)}$$

となる。これは  $\phi$  が増加する場合に適用できる。そこでこれを変数分離して、振れ角がゼロから最大値  $\phi_0$  まで増大するのに要する時間を与える形にし、その 4 倍として周期  $T$  を求める：

$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\phi}{2} - \sin^2 \frac{\phi_0}{2}}} \\ &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} K\left(\sin \frac{\phi_0}{2}\right), \\ K(k) &\equiv \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}} : \text{第 1 種完全楕円積分}, \quad \sin \xi \equiv \frac{\sin(\phi/2)}{\sin(\phi_0/2)}. \end{aligned}$$

微小振動  $\sin \frac{\phi_0}{2} \simeq \frac{\phi_0}{2} \ll 1$  に対して関数  $K(k)$  を展開すると

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{16}\phi_0^2 + \dots \right)$$

を得る。上式の右辺第1項は単振動の近似における結果であり、第2項以降がより高い近似に進んだときに現れる振れ幅  $\phi_0$  の2次以上の補正を与えている。

note § 21 では、微小振動の振動数が力学系自体の性質だけによって完全に決まること（等時性，式 (21.6):  $\omega = \sqrt{k/m}$ ）がより高い近似で成り立たなくなることが述べられている。本問はそのような例になっている。単振り子の周期  $T$  は最大の振れ幅  $\phi_0$  に依存する。

### § 11, 問題 2

与えられたポテンシャル・エネルギー  $U$  の場の中での、質点（質量  $m$ ）の振動の周期をエネルギー  $E$  の関数として表すこと。

(a)  $U = A|x|^n$ .

■変数変換について

$$T = 4\sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{(E/A)^{\frac{1}{n}}} \frac{dx}{\sqrt{E - Ax^n}} = 2\sqrt{2m}E^{-\frac{1}{2}} \int_0^{(E/A)^{\frac{1}{n}}} \frac{dx}{\sqrt{1 - (A/E)x^n}}$$

において  $u \equiv (A/E)x^n$  とおくと

$$du = n\frac{A}{E}x^{n-1}dx = n\frac{A}{E}\left(\frac{E}{A}u\right)^{1-\frac{1}{n}}dx$$

なので周期を

$$\frac{2\sqrt{2m}E^{-\frac{1}{2}}}{nA^{\frac{1}{n}}E^{-\frac{1}{n}}} \int_0^1 u^{\frac{1}{n}-1}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du = \frac{2\sqrt{2m}E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}}{nA^{\frac{1}{n}}} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right)$$

と求められる。教科書のようにはじめに  $y \equiv (A/E)^{1/n}x$  を導入するのには、変数を無次元化する意味がある。

■ $n = 2$  の場合  $T \sim E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}$  の  $E$  依存性は消え（等時性）， $A = k/2$  とおくと単振動の周期の公式  $T = 2\pi\sqrt{m/k}$  が確かに再現される。 $n \neq 2$  の場合は安定なつり合い点周りの微小振動を単振動に帰着（§ 21, § 23）できない，例外的なポテンシャルに対する結果としての重要性を持つ。

■ $n < 0$  の場合 以上の計算では  $E > 0$  を用いて  $E^{-\frac{1}{2}}$  をくくり出している。 $n < 0$  の場合には引力の場である条件  $A < 0$  と運動の範囲が有限になる条件  $E < 0$  のために異なる結論を得る。実際， $n > 0$  のときと同じ方針で計算すると

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{m}{2(-E)}} \left(\frac{E}{A}\right)^{1/n} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{-1+y^n}}, \quad y \equiv \left(\frac{E}{A}\right)^{1/n} x$$

なので同じ形にならない。  $n < 0$  に対しては

$$\begin{aligned} \frac{T}{4} &= \sqrt{\frac{m}{2(-E)}} \int_0^{(E/A)^{1/n}} \sqrt{\frac{\{(A/E)^{1/n}x\}^{-n}}{1 - \{(A/E)^{1/n}x\}^{-n}}} dx \\ &= \frac{1}{-n} \sqrt{\frac{m}{2(-E)}} \left(\frac{E}{A}\right)^{1/n} \int_0^1 \xi^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} (1-\xi)^{-\frac{1}{2}} d\xi \quad (\xi \equiv \{(A/E)^{1/n}x\}^{-n}) \\ &= \frac{1}{-n} \sqrt{\frac{m}{2}} (-E)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}} (-A)^{-\frac{1}{n}} B\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

となると考えられる。

■  $n = -1$  の場合 特に  $n = -1$  の結果から

- $m = 1\text{kg}$  の 2 物体を  $R = 1\text{m}$  隔てて静止させたとき，2 体に重力のみが働き衝突するまでの時間  $T_1$
- 電荷  $q = 1\text{C}$ ,  $-q = -1\text{C}$  を与えた 2 物体を  $R = 1\text{m}$  隔てて静止させたとき，2 体に Coulomb 力が働き衝突するまでの時間  $T_2$

が得られる。次元解析を行うだけでも，

$$T_i \sim m^{1/2} R^{3/2} \alpha_i^{-1/2}, \quad \alpha_1 = Gm^2, \quad \alpha_2 = kq^2$$

より  $T_1 \sim 10^5\text{s}$ (約 1 日),  $T_2 \sim 10^{-5}\text{s}$  が分かる。

(b)  $U = -U_0/\cosh^2 \alpha x$ ,  $-U_0 < E < 0$ .

$$\begin{aligned} T &= 2\sqrt{2m} \int_0^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{U_0}{\cosh^2 \alpha x} - |E|}} = \frac{2\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{|E|}} \int_0^{X_0} \frac{dX}{\sqrt{\frac{A^2}{\cosh^2 X} - 1}}, \\ X = \alpha x : \text{無次元化した長さ}, \quad A &= \sqrt{U_0/|E|}, \quad X_0 \geq 0, \quad \cosh X_0 = A. \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_0^{X_0} \frac{dX}{\sqrt{\frac{A^2}{\cosh^2 X} - 1}} &= \int_0^{\sqrt{A^2-1}} \frac{dY}{\sqrt{\frac{A^2}{\cosh^2 X} - 1} \cosh X} \quad (Y = \sinh X, \quad dY = \cosh X dX) \\ &= \int_0^{\sqrt{A^2-1}} \frac{dY}{\sqrt{A^2 - 1 - Y^2}} \\ &= \int_0^1 \frac{dY'}{\sqrt{1 - Y'^2}} \quad (Y' = Y/\sqrt{A^2 - 1}) \\ &= \int_0^{\pi/2} d\phi \quad (Y' = \cos \phi) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

なので  $T = \frac{\pi\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{|E|}}$  を得る。

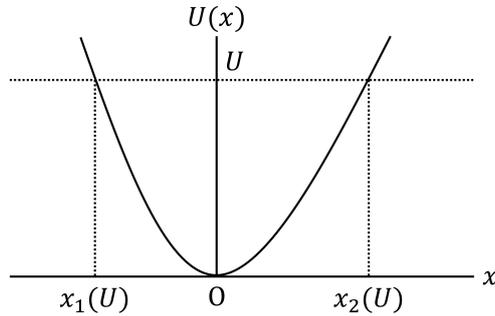


図 15 座標  $x_1(U), x_2(U)$  (教科書の図 7(p.33))

(c)  $U = U_0 \tan^2 \alpha x.$

$$\begin{aligned}
 T &= 2\sqrt{2m} \int_0^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{E - U_0 \tan^2 \alpha x}} \\
 &= \frac{2\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{E + U_0}} \int_0^{X_0} \frac{dX}{\sqrt{\frac{(E/U_0) - \tan^2 X}{1 + (E/U_0)}}} \quad (X = \alpha x : \text{無次元化した長さ}) \\
 &= \frac{2\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{E + U_0}} \int_0^{X_0} \frac{dX}{\sqrt{1 - \left(\frac{\cos X_0}{\cos X}\right)^2}} \quad (\tan^2 X_0 = E/U_0)
 \end{aligned}$$

において  $\cos X_0 = A$  とおくと,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{X_0} \frac{dX}{\sqrt{1 - \frac{A^2}{\cos^2 X}}} &= \int_0^{\sqrt{1-A^2}} \frac{dY}{\sqrt{1 - \frac{A^2}{\cos^2 X} \cos X}} \quad (Y = \sin X, \quad dY = \cos X dX) \\
 &= \int_0^{\sqrt{1-A^2}} \frac{dY}{\sqrt{1 - A^2 - Y^2}} \\
 &= \int_0^1 \frac{dY'}{\sqrt{1 - Y'^2}} \quad (Y' = Y/\sqrt{1 - A^2}) \\
 &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

なので  $T = \frac{\pi\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{E+U_0}}$  を得る.

## § 12. 振動の周期によるポテンシャル・エネルギーの決定

考えている空間の領域でただ 1 つの極小をもつポテンシャル・エネルギー  $U(x)$  を考え、便宜のためその極小を座標原点にとる. そして図 15 のように、ポテンシャル・エネルギーの値  $U$  に対応する 2 つの  $x$  の値を  $x_1(U) (\leq 0), x_2(U) (\geq 0)$  と書く.

今、振動の周期  $T$  がエネルギー  $E$  の関数として分かっており、ポテンシャル・エネルギー  $U(x)$  が未知関

数であるとして、周期の式 (11.5):

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

から  $U(x)$  の様子を逆に知ることを考える。このとき各値  $U$  における座標の差が

$$x_2(U) - x_1(U) = \frac{1}{\pi\sqrt{2m}} \int_0^U \frac{T(E)dE}{\sqrt{U - E}} \quad (12.1)$$

と求まることが示される (導出は下記,  $x_1(U), x_2(U)$  自身までは決まらない).

## § 12, 式の導出

■式 (12.1) の導出 式 (11.5) より

$$\begin{aligned} T(E) &= \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \\ &= \sqrt{2m} \int_0^E \frac{dx_2(U)}{dU} \frac{dU}{\sqrt{E - U}} + \sqrt{2m} \int_E^0 \frac{dx_1(U)}{dU} \frac{dU}{\sqrt{E - U}} \\ &= \sqrt{2m} \int_0^E \left[ \frac{dx_2(U)}{dU} - \frac{dx_1(U)}{dU} \right] \frac{dU}{\sqrt{E - U}}. \end{aligned}$$

これを  $\sqrt{\alpha - E}$  で割り ( $\alpha$  はパラメーター),  $0 < E < \alpha$  で積分すると,

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha - E}} &= \sqrt{2m} \int_0^\alpha \int_0^E \left[ \frac{dx_2(U)}{dU} - \frac{dx_1(U)}{dU} \right] \frac{dUdE}{\sqrt{(\alpha - E)(E - U)}} \\ &= \sqrt{2m} \int_0^\alpha \left[ \frac{dx_2(U)}{dU} - \frac{dx_1(U)}{dU} \right] dU \int_U^\alpha \frac{dE}{\sqrt{(\alpha - E)(E - U)}} \\ &\quad (\text{積分の順序を交換した [本稿次節で補足]}) \\ &= \pi\sqrt{2m}[x_2(\alpha) - x_1(\alpha)] \\ &\quad (E \text{ に関する積分は } \pi \text{ [本稿次節で補足], } x_2(0) = x_1(0) = 0) \end{aligned}$$

となる。最後に  $\alpha = U$  とおくと, 式 (12.1) が得られる。

## § 12 について

■「積分の順序を交換して」(p.34, 1.4) について

$$U \text{ についての積分 } (0 \leq U \leq E) \rightarrow E \text{ についての積分 } (0 \leq E \leq \alpha)$$

の順序の積分において, 変数  $U, E$  についての 2 重積分は図 16 の影を付けた部分にわたって行われる。よって積分の順序を交換するならば

$$E \text{ についての積分 } (U \leq E \leq \alpha) \rightarrow U \text{ についての積分 } (0 \leq U \leq \alpha)$$

とすれば良い。

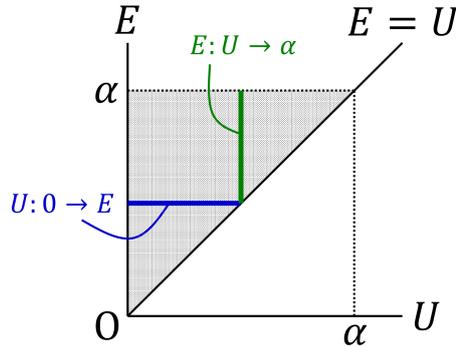


図 16 UE 平面上の積分領域

■「 $dE$  についての積分は初等的におこなわれ、 $\pi$  になる」(p.34, l.6) について 根号の中身を平方完成すると

$$(\alpha - E)(E - U) = \left(\frac{\alpha - U}{2}\right)^2 \left\{ 1 - \left(\frac{E - \frac{\alpha+U}{2}}{\frac{\alpha-U}{2}}\right)^2 \right\}$$

となるので、

$$\int_U^\alpha \frac{dE}{\sqrt{(\alpha - E)(E - U)}} = \int_{-1}^1 \frac{dX}{\sqrt{1 - X^2}} = \int_0^\pi d\theta = \pi \quad \left( \frac{E - \frac{\alpha+U}{2}}{\frac{\alpha-U}{2}} \equiv X, X \equiv \cos\theta \right)$$

と計算できる。

■公式 (12.1) の単振動による検証 曲線  $U = U(x)$  の縦軸に関する対称性  $x_2(U) = -x_1(U) \equiv x(U)$  を要求すると、公式 (12.1) は  $x(U)$  に対する一意的な表現 (12.2):

$$x(U) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}} \int_0^U \frac{T(E)dE}{\sqrt{U - E}}$$

を与える。ここによく知られた単振動の周期  $T(E) = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$  (一定) を代入すると

$$x(U) = \frac{1}{\sqrt{2k}} \int_0^U \frac{dE}{\sqrt{U - E}} = \sqrt{\frac{2U}{k}}, \quad \therefore U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

となり、確かにばねの弾性力によるポテンシャル・エネルギーが再現される。

### § 13. 換算質量

相互作用している 2 粒子のラグランジアン

$$L = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2}{2} - U(|\mathbf{r}|) \quad (\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

は、慣性中心系では

$$L = \frac{m \dot{\mathbf{r}}^2}{2} - U(r), \quad (13.3)$$

$$m \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} : \text{換算質量} \quad (13.4)$$

と書き換えられる (導出は下記). よって [座標変換  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rightarrow (\mathbf{R}, \mathbf{r})$  に対する Langrange 方程式の不変性とより] 2体問題は

相対位置ベクトル  $\mathbf{r}$  を位置ベクトルに持ち, 換算質量  $m$  を質量を持つ (仮想的な) 粒子の,  
ポテンシャル・エネルギー  $U(r)$  の下での 1体問題

→ 1体の運動  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$

→ 2体の運動  $\mathbf{r}_1(t) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}(t), \quad \mathbf{r}_2(t) = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}(t)$

と解ける.

### § 13, 式の導出など

■式 (13.3) の導出 ここでは簡単のために慣性中心を重心と呼ぶ\*6. 相互作用する 2物体  $m_1, m_2$  (速度  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ) に対して

- 全質量:  $\mu \equiv m_1 + m_2$ , 換算質量:  $m \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$
- 重心の速度:  $\mathbf{V}_{\text{CM}}$ , 相対速度:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$

とすると, 2物体の全運動エネルギーは常に

- 重心運動のエネルギー  $\frac{1}{2} \mu \mathbf{V}_{\text{CM}}^2$
- 相対運動のエネルギー  $\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$

の和

$$\frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^2 = \frac{1}{2} \mu \mathbf{V}_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2. \quad (8)$$

に分けられることを示せば良い.

2物体の全運動エネルギーの表式 (8) の証明 重心系での速度

$$\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{v}_1 - \mathbf{V}_{\text{CM}}, \quad \mathbf{u}_2 \equiv \mathbf{v}_2 - \mathbf{V}_{\text{CM}}$$

は  $m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2 = 0$  を満たすので (重心系で見た重心の速度はゼロ), これらを用いて全運動エネルギーは

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 (\mathbf{u}_1 + \mathbf{V}_{\text{CM}})^2 + \frac{1}{2} m_2 (\mathbf{u}_2 + \mathbf{V}_{\text{CM}})^2 \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \mathbf{V}_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} m_1 \mathbf{u}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{u}_2^2 \end{aligned}$$

と書き換えられる. ここで重心系で見た運動エネルギー  $\frac{1}{2} m_1 \mathbf{u}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{u}_2^2$  の部分を考えよう. 上の重心系での速度  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  に  $\mathbf{V}_{\text{CM}} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}$  を代入すると

$$\mathbf{u}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}, \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}$$

が得られる. (これは重心が 2物体の位置を質量の逆比に内部すること

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$$

\*6 一様な重力下では重心は慣性中心 (質量中心) に一致する.

から期待される結果である。またここから上記の  $m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2 = 0$  が直接的に確かめられる。) これを代入すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_1\mathbf{u}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{u}_2^2 &= \frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{v}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(-\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{v}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2\end{aligned}$$

となるので、式(8):

$$\frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2 = \frac{1}{2}\mu\mathbf{V}_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$$

を得る。

## § 13 について

■換算質量  $m$  について 換算質量の定義式(13.4)は  $\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$  とも書くことができる。 $m_1 \ll m_2$  のとき  $m \simeq m_1$ ,  $m_1 = m_2 \equiv m_*$  のとき  $m = m_*/2$  である。

■1体問題への帰着に関する初等的な議論 2体問題を1体問題に帰着できることを、Newton力学の水準でも見ておこう。2体が相対位置ベクトル  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  で決まる内力  $\pm\mathbf{F}(\mathbf{r})$  を介して相互作用している場合を考えると、運動方程式は

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = +\mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad (9)$$

$$m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad (10)$$

と書ける(ただし作用・反作用の法則を考慮した)。ここで  $\frac{m_2}{m_1+m_2}$ (式(9)) -  $\frac{m_1}{m_1+m_2}$ (式(10))を作ると、

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad m \equiv \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} : \text{換算質量}$$

となる。これはやはり、2体の相対位置ベクトル  $\mathbf{r}$  の時間発展が、 $\mathbf{r}$  を位置ベクトルに持ち、2体の換算質量  $m$  を質量に持つような仮想的な質点がかもとの力  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  の下で行う運動として与えられることを意味している。ここから2体の重心系での運動

$$\mathbf{r}_1(t) = \frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{r}(t), \quad \mathbf{r}_2(t) = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r}(t)$$

が見出される。なお任意の慣性基準系に対する運動は、重心系で見た2体の運動に、重心の様な並進運動を重ね合せて得られる。(式(9))+式(10)から分かるように、外力をゼロと仮定しているため、系の全運動量したがって重心速度は一定である。)

## § 13, 問題

■解答について 目標はラグランジアンを相対位置ベクトル  $\mathbf{r}_a$  だけで表すことである。そのために  $\mathbf{r}_a$  の定義式

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{R}_a - \mathbf{R} \quad (11)$$

と慣性中心系での慣性中心の表式

$$M\mathbf{R} + m \sum_a \mathbf{R}_a = \mathbf{0} \quad (12)$$

を連立して、 $\mathbf{R}_a$  と  $\mathbf{R}$  を  $\mathbf{r}_a$  で表す。式 (11), 式 (12) から  $\mathbf{R}_a$  を消去すると,

$$\left(m \sum_a \mathbf{R}_a =\right) - M\mathbf{R} = m \sum_a (\mathbf{R} + \mathbf{r}_a), \quad \therefore \mathbf{R} = -\frac{m \sum_a \mathbf{r}_a}{nm + M}.$$

これを先に式 (11) に代入するよりは, 式 (11) を用いて整理したラグランジアン

$$L = \frac{M + nm}{2} \sum_a \dot{\mathbf{R}}^2 + m \sum_a \dot{\mathbf{r}}_a \cdot \dot{\mathbf{R}} + \frac{m}{2} \sum_a \dot{\mathbf{r}}_a^2 - U$$

に代入する方が容易である。そうして得られたラグランジアンの式 (p.36) は,  $n = 1$  とすると式 (13.3):

$$L = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 - U$$

( $m$  は換算質量) を再現する。

■別解 必ずしも相対位置ベクトルの起点を  $M$  にしなければいけないわけではない。  $M$  の位置ベクトルを  $\mathbf{R}_b$ , 特定の質量  $m$  の位置ベクトルを  $\mathbf{R}$ , 残り  $n - 1$  個の  $m$  の位置ベクトルを  $\mathbf{R}_a$  として導入した  $n$  個の相対位置ベクトル  $\mathbf{r}_a = \mathbf{R}_a - \mathbf{R}$  ( $a = b$  を含む) でラグランジアンを表してみる。慣性中心系での慣性中心の表式

$$M\mathbf{R}_b + m \sum_{a(\neq b)} \mathbf{R}_a + m\mathbf{R} = \mathbf{0}$$

とより,

$$\left(m \sum_{a(\neq b)} \mathbf{R}_a =\right) m \sum_{a(\neq b)} (\mathbf{r}_a + \mathbf{R}) = -M\mathbf{R}_b - m\mathbf{R}, \quad \therefore \mathbf{R} = -\frac{m \sum_{a(\neq b)} \mathbf{r}_a + M\mathbf{r}_b}{nm + M}.$$

こちらも  $\mathbf{r}_a$  の定義を用いてラグランジアンを

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{M}{2} \dot{\mathbf{R}}_b^2 + \frac{m}{2} \sum_{a(\neq b)} \dot{\mathbf{R}}_a^2 - U = \frac{nm + M}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \left(\frac{m}{2} \sum_{a(\neq b)} \dot{\mathbf{r}}_a^2 + \frac{M}{2} \dot{\mathbf{r}}_b^2\right) + \left(m \sum_{a(\neq b)} \dot{\mathbf{r}}_a + M\dot{\mathbf{r}}_b\right) \cdot \dot{\mathbf{R}} - U$$

と整理しておいて  $\mathbf{R}$  の式を代入すると

$$L = \frac{1}{2} \sum_a m_a \dot{\mathbf{r}}_a^2 - \frac{1}{2(nm + M)} \left(\sum_a m_a \dot{\mathbf{r}}_a\right)^2 - U$$

のように教科書の答に対応する形が得られる。ここで  $m_a = m$  ( $a \neq b$ ),  $m_b = M$  とおいた。

## § 14. 中心力の場合における運動

2 体問題を 1 体問題に還元し [§ 13], 中心力の場合における 1 体の運動を考える。

$$U = U(r) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = -\frac{dU}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} : \text{中心力.}$$

中心力の場合において角運動量  $\mathbf{M}$  が保存

⇒ 運動は  $\mathbf{M}$  に垂直な一平面内, 平面内に極座標  $r, \phi$  を導入 (力の中心を原点とする).

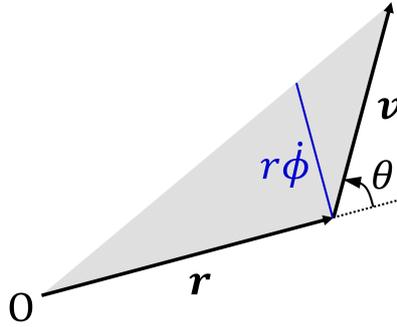


図 17 面積速度  $\dot{f} = \frac{1}{2}rv \sin \theta = \frac{M}{2m} = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi}$  は動径ベクトル  $\mathbf{r}$  が単位時間に掃く面積である ( $\theta$  は  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{v}$  の成す角)

$$\begin{cases} \text{エネルギー保存則} & E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + U(r) \\ \text{角運動量保存則} & M = mr^2\dot{\phi} \end{cases}$$

$\Rightarrow$  面積速度  $\dot{f} \equiv \frac{1}{2}r^2\dot{\phi} = \text{const.}$  (Kepler の第 2 法則), (図 17 参照)

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{\text{有効}}(r), \quad U_{\text{有効}}(r) \equiv U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}, \quad \frac{M^2}{2mr^2}: \text{遠心力ポテンシャル},$$

$$\begin{cases} t = \int \frac{dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} + \text{const} \rightarrow r \text{ と } t \text{ の関係} \\ \phi = \int \frac{(M/r^2)dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} \rightarrow r \text{ と } \phi \text{ の関係 (軌跡)} \end{cases}$$

- $U_{\text{有効}}(r) \leq E$  の領域が  $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$  に限られる場合, 粒子は環状領域  $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$  を運動
  - 軌道が閉じるのは  $U(r) \propto \frac{1}{r}, r^2$  のとき  
[Bertrand の定理 (証明は文献 [4, pp.152–154])]
  - 軌道は転回点 ( $\dot{r} = 0$ ) へひいた動径ベクトルの方向に関して対称
- 引力の場においても, ポテンシャル・エネルギーが  $r \rightarrow 0$  で十分に速く  $-\infty$  に近づかなければ, 遠心力ポテンシャルのため粒子は場の中心に到達できない. 粒子が場の中心に到達できる条件は

$$0 < \frac{m\dot{r}^2}{2} = E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}, \quad \therefore \lim_{r \rightarrow 0} r^2 U(r) < -\frac{M^2}{2m}$$

で与えられる.

## § 14 について

■エネルギーと角運動量の保存則から出発することについて 運動方程式は 2 階の微分方程式なので, これを解いて質点の運動を決定するには 2 回の積分操作を行う必要がある. 今の場合より正確には変数は  $r$  と  $\phi$  の 2 つがあるので, 運動方程式の積分は 4 回行わなければならない, 積分定数は 4 つ現れる (§ 6). ところでエネルギーと角運動量の保存則はそれぞれ運動方程式を 1 回積分した関係に当たるので (運動方程式の第 1 積分, 積分定数はエネルギー  $E$  と角運動量  $M$ ), 本節のようにここから出発すれば残る積分は後 2 つであり, 残る 2 つの積分定数を初期値  $r_0, \phi_0$  に選ぶことができる. 積分定数に採用したエネルギー  $E$  や角運動量  $M$  は, 量

子力学においても意味を持つ。

■遠心力ポテンシャル 有効ポテンシャル (14.8) における  $M^2/2mr^2$  が遠心力のポテンシャル・エネルギーと呼ばれるのは次の事情による。粒子の速度と加速度を動径方向 (方向単位ベクトル  $e_r$ ) と角度方向 (方向単位ベクトル  $e_\phi$ ) に分解すると

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}e_r + r\dot{\phi}e_\phi, \quad \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)e_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})e_\phi$$

となるので,  $e_r, e_\phi$  を基底とする座標系における運動方程式について

- $e_r$  方向

$$m\ddot{r} = F_r + mr\dot{\phi}^2, \quad mr\dot{\phi}^2: \text{遠心力.}$$

- 中心力の場合では角運動量  $mr^2\dot{\phi} = M$  (一定) なので, 遠心力は  $mr\dot{\phi}^2 = \frac{M^2}{mr^3}$  となる。  
これは遠心力ポテンシャル  $\frac{M^2}{2mr^2}$  から導かれる。

- $e_\phi$  方向

$$mr\ddot{\phi} = F_\phi - 2m\dot{r}\dot{\phi}, \quad -2m\dot{r}\dot{\phi}: \text{Coriolis 力.}$$

- 一般に

$$\dot{M} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = mr(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})$$

なので, これは角運動量と力のモーメントの関係

$$\dot{M} = rF_\phi$$

を与える。

→ 中心力 ( $F_\phi = 0$ ) に対して  $\dot{M} = 0$  (角運動量の保存)。

■「軌跡が, 転回点へひいた動径ベクトル方向に関して対称であること」(p.40, 1.8,9) について このことは次のような考察からも理解できる。すなわち質点が図 18 の①のように, ある軌跡に沿って転回点へ向かう運動を行うとすると, 時間を反転した同じ軌跡を逆向きにたどる②の運動も可能である。次に力の場の中心対称性から, 転回点へひいた動径ベクトル方向の半直線  $l$  に関して②の運動を対称に折り返した③の運動も実現できる。ここで転回点では質点の速度は動径方向成分を持たず,  $l$  に直交しているから, 2つの運動①, ③は転回点で共通の速度を持つ。言い換えれば①の運動の転回点における位置と速度は③の運動の初期条件となっているから, ③は①の続きの運動であることが結論できる。これは①と③から成る運動全体が  $l$  に関して対称な軌跡を持つことを意味する。

#### § 14, 問題 1 (球面振子)

■エネルギー保存則の式 (2) について 最右辺第 2 項において  $\sin \theta \rightarrow \sin^2 \theta$  と訂正する。

■ $\phi$  の式 (4) について

$$\text{角運動量保存則 (1): } \frac{d\phi}{dt} = \frac{M_z}{ml^2 \sin^2 \theta}, \quad \text{エネルギー保存則 (2): } \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2}{ml^2} [E - U_{\text{有効}}(\theta)]}$$

を辺々割って  $dt$  を消去すると

$$d\phi = \frac{M_z}{l\sqrt{2m} \sin^2 \theta \sqrt{E - U_{\text{有効}}(\theta)}} d\theta$$

を得る。

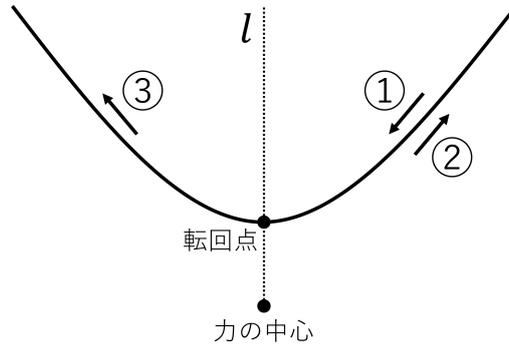


図 18 転回点へひいた動径ベクトル方向に関する軌跡の対称性

■運動の軌跡 有効ポテンシャル

$$U_{\text{有効}}(\theta) = \frac{M_z^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta$$

は  $0 \leq \theta \leq \pi$  の範囲に 1 つの極小値を持ち,  $U_{\text{有効}}(0) = \infty$ ,  $U_{\text{有効}}(\pi) = \infty$  を満たす. このため条件  $E \geq U_{\text{有効}}(\theta)$  により, 軌跡全体は  $\theta$  が一定の 2 つの緯線のあいだに含まれる.

次に数値シミュレーションにより運動の軌跡を調べることを考える. ここでは  $\theta$  を鉛直上向きから測ることにすると, ラグランジアンは  $L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - mgl \cos \theta$  で与えられ, 運動方程式

$$\ddot{\theta} = \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{g}{l} \sin \theta, \quad \ddot{\phi} = -2\dot{\theta} \dot{\phi} \cot \theta$$

が導かれる. ここで半径の長さを  $l = 10\text{cm}$ , 重力場を  $g = 10^3\text{cm/s}^2$  と設定し, 以下では cgs 単位系における数値として物理量を無次元化する. 時間ステップを  $\Delta t = 0.01$  として時間を離散化し, 上の運動方程式を Runge-Kutta 法にて数値的に解いて得られた  $xy$  面内 (水平面内) の軌跡の例を図 19, 図 20 に示す. Runge-Kutta 法において 1 ステップの誤差は  $O(\Delta t^5)$  となる.

§ 15. ケプラー問題

■引力の場  $U = -\alpha/r$ ,  $\alpha > 0$

- 有効ポテンシャル・エネルギー

$$U_{\text{有効}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}. \quad (\text{図 21 参照})$$

- $E \geq 0 \Rightarrow$  運動は有界でない
- $E < 0 \Rightarrow$  運動は有界である

- 軌跡の一般公式 (§ 14) は円錐曲線 [2 次曲線]

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \phi, \quad (15.5)$$

$$p \equiv \frac{M^2}{m\alpha} : \text{通径}, \quad e \equiv \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}} : \text{離心率} \quad (15.4)$$

を与える [本稿次節で導出].

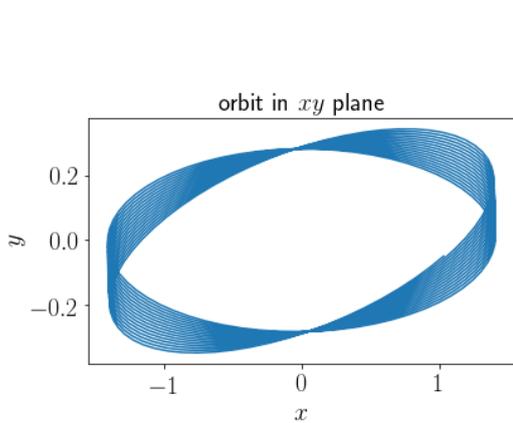


図19 初期値  $\theta = 3(\text{rad})$ ,  $\dot{\theta} = 0$ ,  $\phi = 0$ ,  $\dot{\phi} = 2$  に対する  $xy$  面内の軌跡 ( $10^3$  ステップ)

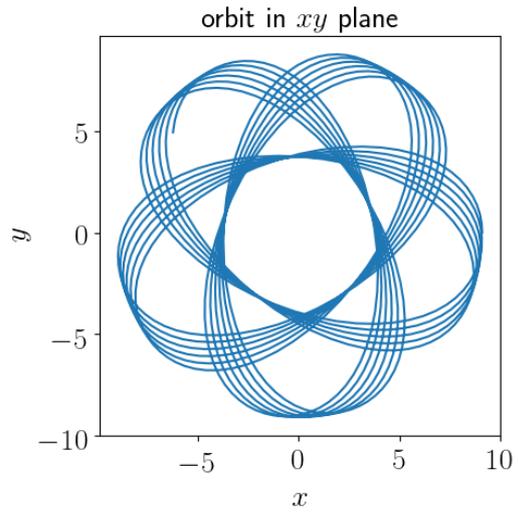


図20 初期値  $\theta = 2(\text{rad})$ ,  $\dot{\theta} = 0$ ,  $\phi = 0$ ,  $\dot{\phi} = 5$  に対する  $xy$  面内の軌跡 ( $10^3$  ステップ)

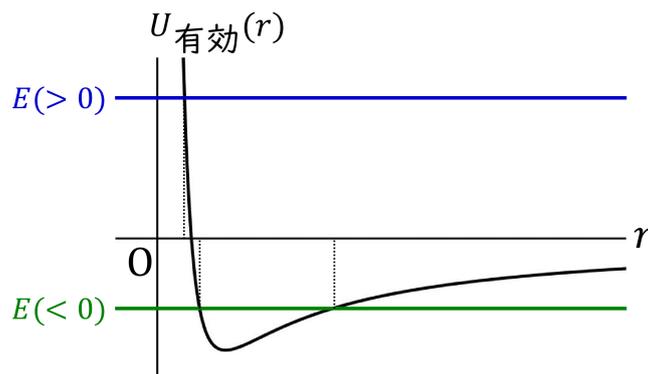


図21 Kepler 問題の有効ポテンシャル [ $r$  の大きい範囲で引力ポテンシャル  $-\alpha/r$  が支配的となり,  $r$  の小さい範囲で遠心力ポテンシャル  $M^2/2mr^2$  が支配的となる]

-  $0 \leq e < 1$  ( $\Leftrightarrow E < 0$ ): 楕円 (図 22),  $e = 0$ : 円

$$\begin{aligned}
 \text{周期 } T &= 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{\alpha}} \quad \Leftarrow \text{ Kepler の第 3 法則, § 10} \\
 &= \pi \alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} \quad \Leftarrow \text{ 周期はエネルギーだけに依る} \quad (15.8) \\
 &\quad \text{(導出は下記)}
 \end{aligned}$$

-  $e > 1$  ( $\Leftrightarrow E > 0$ ): 双曲線 (図 23)

-  $e = 1$  ( $\Leftrightarrow E = 0$ ): 放物線 (無限遠点で静止)

- 運動のパラメーター表示

– 楕円軌道

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi - e \sin \xi), \quad r = a(1 - e \cos \xi), \quad (15.10)$$

$$x = a(\cos \xi - e), \quad y = a\sqrt{1 - e^2} \sin \xi. \quad (15.11)$$

(導出は下記. 楕円を1周する間に,  $\xi$  は0から $2\pi$ まで変化する.)

– 双曲線軌道 (導出は楕円軌道の場合と同様)

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(e \sinh \xi - \xi), \quad r = a(e \cosh \xi - 1), \quad x = a(e - \cosh \xi), \quad y = a\sqrt{e^2 - 1} \sinh \xi.$$

( $\xi$  は $-\infty$ から $+\infty$ まで変化する.)

■斥力の場合  $U = \alpha/r, \quad \alpha > 0$

- 有効ポテンシャル・エネルギー

$$U_{\text{有効}} = \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \rightarrow \text{運動は有界でない.}$$

- 軌跡の一般公式 (14.7) は双曲線

$$\frac{p}{r} = -1 + e \cos \phi, \quad p \equiv \frac{M^2}{m\alpha}, \quad e \equiv \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$$

を与える (図 23) [本稿次節で補足].

- 運動のパラメーター表示

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(e \sinh \xi + \xi), \quad r = a(e \cosh \xi + 1), \quad x = a(\cosh \xi + e), \quad y = a\sqrt{e^2 - 1} \sinh \xi.$$

■Lenz ベクトル  $U = \alpha/r$  ( $\alpha$  の符号は任意) の場の中の運動に対して, ベクトル

$$\mathbf{v} \times \mathbf{M} + \frac{\alpha \mathbf{r}}{r} \quad (15.17)$$

が保存する (確認は下記). これは焦点から近日点に向かう方向の, 大きさ  $\alpha e$  のベクトルである\*7.

## § 15, 式の導出など

■楕円運動の周期 (15.8) の導出 面積速度の式 (14.3):  $2mf\dot{\phi} = M$  (一定) を周期  $T$  にわたって時間積分すると,

$$2mf = TM, \quad f = \pi ab: \text{楕円の面積}$$

が得られる. ここで式 (15.5) で表される楕円の長半軸と短半軸は, それぞれ

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}} \quad (15.6)$$

と同定されるので (図 22 参照), 周期は式 (15.8) のように求まる.

\*7 一定のベクトル (15.17) を, 粒子が近日点に達した瞬間に評価すれば容易に確かめられる.

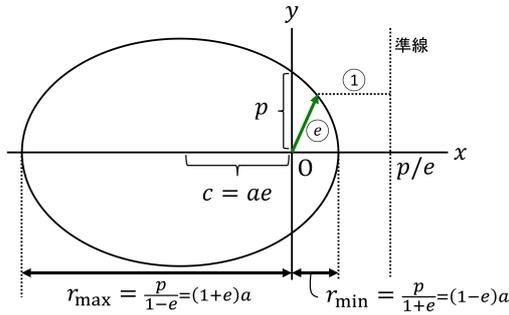


図 22 楕円軌道

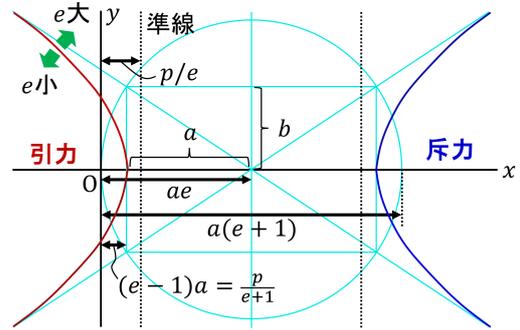


図 23 双曲線軌道

■楕円運動のパラメータ表示 (15.10),(15.11) の導出  $a, e$  を式 (15.4),(15.6) にしたがって導入すると,

$$\begin{aligned}
 t &= \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int^r \frac{r dr}{\sqrt{-r^2 + \frac{\alpha}{|E|}r - \frac{M^2}{2m|E|}}} \quad (r \text{ と } t \text{ の関係 (§ 14)}) \\
 &= \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \int^r \frac{r dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (r-a)^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} \int^\xi (1 - e \cos \xi) d\xi \quad (r - a = -ae \cos \xi) \\
 &= \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\xi - e \sin \xi) + \text{const.}
 \end{aligned}$$

であり,  $\text{const} = 0$  となるように時間の原点を選ぶと, 式 (15.10) が得られる ( $t = 0$  の瞬間に粒子は近日点にいる (図 24)).

次に  $x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$  のパラメータ表示 (15.11) を導こう. 式 (15.5),(15.10) より,

$$ex = p - r = a(1 - e^2) - a(1 - e \cos \xi) = ae(\cos \xi - e)$$

となるので, 式 (15.11) 第 1 式を得る. 第 2 式は  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  として得られる.

■Lenz ベクトル (15.17) ( $\mathbf{L}$  とおく) が運動の積分であることの確認 式 (15.17):  $\mathbf{L} = \mathbf{v} \times \mathbf{M} + \frac{\alpha \mathbf{r}}{r}$  の時間変化率は

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{M} + \frac{\alpha \mathbf{v}}{r} - \frac{\alpha \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{r^3} \\
 &= m\mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) - m\mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}}) + \alpha \frac{\mathbf{v}}{r} - \alpha \frac{\mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{r^3} \quad (\because \mathbf{M} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \\
 &= 0 \quad (\because \text{運動方程式 } m\dot{\mathbf{v}} = \alpha \mathbf{r}/r^3)
 \end{aligned} \tag{13}$$

となる. [第 1 の等号では  $\dot{r}$  が速度の動径方向の成分ゆえ,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}/r$  となることを用いる.]

## § 15 について

■軌跡の方程式 (15.5) の導出 軌跡の方程式 (14.7):

$$\phi = \pm \int^r \frac{M/r^2}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} dr$$

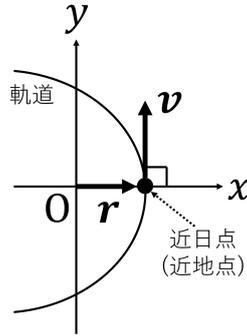


図 24 近日点 (近地点)

を引力の場  $U = -\alpha/r$  ( $\alpha > 0$ ) に適用し, 分母を  $\sqrt{1 - \text{〇}^2}$  の形に平方完成すると

$$\begin{aligned} \phi &= \pm \int^r \frac{(M/r^2)dr}{\sqrt{2mE + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{M^2}{r^2}}} \\ &= \pm \int^r \frac{(M/r^2)dr}{\sqrt{-\left(\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}\right)^2 + \left(\frac{m\alpha}{M}\right)^2 + 2mE}} \\ &= \pm \int^r \frac{(M/r^2)dr}{\sqrt{2mE + \left(\frac{m\alpha}{M}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \left(\frac{m\alpha}{M}\right)^2}}\right)^2}} \end{aligned}$$

となる. ここで

$$\frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \left(\frac{m\alpha}{M}\right)^2}} = \cos \theta \quad (14)$$

とおくと ( $\sin \theta$  でも良い)

$$-\frac{M}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2mE + \left(\frac{m\alpha}{M}\right)^2}} = -\sin \theta d\theta$$

となる. 式 (14) を満たす  $\theta$  には  $\sin \theta > 0$  となる  $\theta_1$  と  $\sin \theta < 0$  となる  $\theta_2$  があり, これらの間には  $\theta_2 = -\theta_1 + 2n\pi$  の関係があるから, p.43, 1.7 の軌跡の式

$$\phi = \theta_1 + \text{const} = -\theta_2 + \text{const} = \arccos \frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \left(\frac{m\alpha}{M}\right)^2}} + \text{const}$$

を得る. 座標軸の方向を適当にとれば  $\text{const} = 0$  とおくことができ (図 24 参照), また複号  $\pm$  は正号を選んで良く, 再び円錐曲線

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \phi, \quad p \equiv \frac{M^2}{m\alpha} : \text{ 通径}, \quad e \equiv \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}} : \text{ 離心率}$$

が得られる.

参考 円錐曲線の式

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\phi - \phi_0)}, \quad \therefore r = p - ex \cos \phi_0 - ey \sin \phi_0$$

を両辺平方して

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

という形に書き換えよう。上式左辺の各項には共通の定数  $k (\neq 0)$  を掛ける任意性があることに注意すると

$$\begin{aligned} a &= k(1 - e^2 \cos^2 \phi_0), & b &= k(1 - e^2 \sin^2 \phi_0), & c &= -kp^2, \\ f &= k \cdot ep \sin \phi_0, & g &= k \cdot ep \cos \phi_0, & h &= -k \cdot e^2 \sin \phi_0 \cos \phi_0 \end{aligned}$$

と同定されるため、

$$h^2 - ab = k^2(e^2 - 1)$$

を得る。よって円錐曲線の種類 (楕円, 放物線, 双曲線) は  $h^2 - ab$  の符号から判定できる:

- 楕円  $0 < e < 1 \Leftrightarrow h^2 - ab < 0$
- 放物線  $e = 1 \Leftrightarrow h^2 - ab = 0$
- 双曲線  $e > 1 \Leftrightarrow h^2 - ab > 0$

■斥力の場合での軌跡の方程式と、引力の場合との軌跡の範囲の相違 引力の場合  $U = -\alpha/r (\alpha > 0)$  での軌跡 (15.5) は

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \phi}, \quad \therefore r = p - ex \tag{15}$$

と書き換えられる。これを両辺平方して整理すると、 $0 < e < 1$  に対してこれは楕円の方程式

$$\frac{\left(x + \frac{ep}{1-e^2}\right)^2}{\left(\frac{p}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2} = 1 \tag{E}$$

になる。  $a \equiv p/(1 - e^2)$  とおく。

$e = 0$  に対しては、放物線の方程式

$$x = -\frac{1}{2p}y^2 + \frac{p}{2} \tag{P}$$

となる。

式 (15) を斥力の場合  $U = \alpha/r (\alpha > 0)$  での軌跡の方程式に書き換えることを考え、その手順を図 25 に示す。

図 25 の★2 の段階で  $\alpha$  を  $-\alpha$  に置き換えるのは、★1 の段階で  $\alpha$  を  $-\alpha$  に置き換えてから分母分子を  $\alpha$  で割ると操作の順が逆である。その結果得られる図 25 の式 (B) は式 (A) と異なっている。教科書と同じ式 (A) を、すなわち式 (15.4) とまったく同様に定めた  $e, p$  に対して

$$r = \frac{p}{-1 + e \cos \phi}, \quad \therefore r = ex - p \tag{16}$$

を考える。式 (15), 式 (16) を両辺平方して整理すると、同一の双曲線の方程式

$$\frac{\left(x - \frac{ep}{e^2-1}\right)^2}{\left(\frac{p}{e^2-1}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{p}{\sqrt{e^2-1}}\right)^2} = 1 \tag{H}$$

( $e > 1$ ) が得られる。  $a \equiv p/(e^2 - 1)$  とおく。

引力の場合  $U = -\alpha/r, \alpha > 0$  および斥力の場合  $U = \alpha/r, \alpha > 0$  の定義域は  $r > 0$  である。軌跡の式の両辺を平方した式 (15), 式 (16) を  $r > 0$  の条件と合わせれば、両辺を平方する際に同値性は崩れない。

$$r = \frac{\overbrace{M/m}^{\star 1}}{\frac{\alpha}{M} + \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{M^2}{\alpha^2}} \cos \phi} = \frac{\overbrace{M^2/m\alpha}^{\star 2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}} \cos \phi} \text{ : 引力中}$$

αを -αで置き換える      分母分子をαで割る      αを -αで置き換える

$$r = \frac{-M^2/m\alpha}{1 + \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}} \cos \phi} \text{ : 斥力中... (B)}$$

$$r = \frac{M/m}{-\frac{\alpha}{M} + \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{M^2}{\alpha^2}} \cos \phi} = \frac{M^2/m\alpha}{-1 + \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}} \cos \phi} \text{ : 斥力中... (A)}$$

分母分子をαで割る

図 25 引力の場における軌跡の方程式の、斥力の場に対する式への書き換え

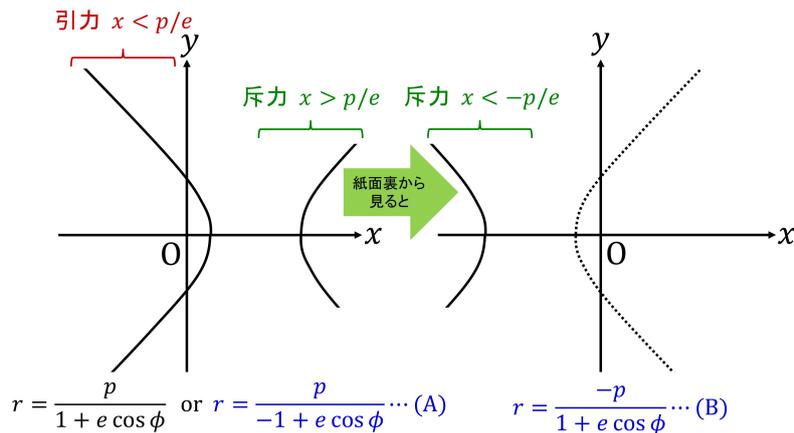


図 26 式 (A), 式 (B) の表す双曲線

- 式 (15) に対し  $r > 0$  の条件は  $x < p/e$  である。
  - 楕円に対しては  $x < (1 - e^2)a/e$  であり,  $0 < e < 1$  より  $(1 - e)a < (1 - e^2)a/e$  だから式 (E) の表す楕円全体が軌跡となる (図 22 参照).
  - 放物線に対しては  $x < p$  であり,  $p/2 < p$  だから式 (P) の表す放物線全体が軌跡となる.
  - 双曲線に対しては  $x < (e^2 - 1)a/e$  であり,  $e > 1$  より  $(e^2 - 1)a/e < a(e + 1)$  だから式 (H) の表す双曲線のうち  $x$  座標の小さい側の枝が軌跡となる (図 23 参照).
- 式 (16) に対し  $r > 0$  の条件は  $x > (e^2 - 1)a/e$  であり,  $e > 1$  より  $(e^2 - 1)a/e > a(e - 1)$  だから式 (H) の表す双曲線のうち  $x$  座標の大きい側の枝が軌跡となる (図 23 参照).

双曲線軌道について, 引力の場では力の中心に近い方の枝が選ばれ, 斥力の場では力の中心から遠い方の枝が選ばれることは自然である.

式 (B) が表す軌跡は図 26 のように式 (A) の軌跡を紙面裏から見たものである.

■円は離心率  $e = 0$  の楕円 「 $e = 0$ , すなわち楕円は円になる」(p.44, 1.12,13) について, 離心率  $e$  を持つ 2 次曲線は焦点からの距離と準線からの距離の比が  $e$  対 1 になるような点の集まりだから,  $e = 0$  のとき 2 次曲線は点になる. しかし楕円において, (短半軸)/(長半軸)  $= \sqrt{1 - e^2}$  なので楕円は  $e \rightarrow 0$  で円に近づく. そこで楕円は  $e \rightarrow 0$  の極限として円軌道を含んでいると見て良い. 事実, 円運動は運動方程式に従って実現可能である.

■元の 2 体問題での結論 § 15 の結論によれば, 2 体の相対位置ベクトル  $\mathbf{r}$  は始点を慣性中心系の原点に固定すると, 終点が原点を焦点とする 2 次曲線を描く. しかるに 2 体は慣性中心から  $\mathbf{r}$  を縮小したベクトル分だけ隔たった位置 (13.2):

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$$

にあるから, 2 天体の軌道は 2 体の慣性中心を焦点とする 2 次曲線になる.

なお 2 体のうち一方の質量が他方の質量より極端に大きい場合を考え, 質量の小さい方を地球, 質量の大きい方を太陽とすると, 地球はほぼ太陽を焦点とする 2 次曲線の軌道上を運動する.

■近日点移動を伴う天体の運動における Lenz ベクトルの時間発展 式 (15.17) の Lenz ベクトル  $\mathbf{L}$  が保存することの意味は, 次のように解釈される.

ニュートン・ポテンシャルのもとでの束縛運動では,  $r$  の振動周期と  $\varphi$  の回転周期が一致しているので近日点が動かない. そのことが, ここでは  $\mathbf{L}$  という近日点方向を向いた定ベクトルの存在で表されているのである [1, p.194].

しかし, そのように言えるためには, 近日点が移動する場合には Lenz ベクトルが一定に留まらないことを納得しなければならない. そこで例として, § 15 問題 3(a) のようにポテンシャル・エネルギーに摂動項  $\delta U = \beta/r^2$  が付加される場合を考える. このとき摂動  $\delta \mathbf{F} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \delta U$  は中心力なので, 角運動量  $\mathbf{M}$  は依然として保存する. そして 1 回転ごとに近日点の位置は, (摂動パラメータ  $\beta$  の 1 次までの近似で) 角度  $\delta\phi = -2\pi\beta/\alpha p$  だけ変化する. ここでも一定の角運動量に対して Lenz ベクトルを式 (15.17):

$$\mathbf{L} = \mathbf{v} \times \mathbf{M} + \alpha \frac{\mathbf{r}}{r}$$

で定義し, その時間発展を数値的に調べよう. すると以下のリンクの動画のように, Lenz ベクトルの向きは移動する近日点を追いかける様子が観察できる. このため, ひるがえって「Lenz ベクトルが一定となることは, 近日点が動かず, 軌道が閉じることを表す」と言える.

[https://www.youtube.com/watch?v=8Qe8Q\\_zho58](https://www.youtube.com/watch?v=8Qe8Q_zho58)

備考 1 もっとも摂動を受けた粒子の 1 回転は, 摂動を受けていない場合の楕円運動で近似される.

そしてもとの楕円運動では Lenz ベクトルは正確に近日点の方向を向くから,

Lenz ベクトルが近日点の方向を追いかけるという結果は自然である.

備考 2 摂動  $\delta \mathbf{F}$  の有無に依らず角運動量  $\mathbf{M}$  は保存し, 式 (13):

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = m\mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) - m\mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}}) + \alpha \frac{\mathbf{v}}{r} - \alpha \frac{\mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{r^3}$$

が成り立つ。ここで運動方程式  $m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \alpha\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \delta\mathbf{F}$  を用いると

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{F}) - \mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{F}) = \delta\mathbf{F} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \delta\mathbf{F} \times \frac{\mathbf{M}}{m}.$$

### § 15, 問題

1 場  $U = -\alpha/r$ ,  $E = 0$  での (放物線に沿う) 運動 式 (14.5):  $\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}$  に  $E = 0$ ,  $U(r) = -\alpha/r$  を代入すると

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2\alpha}{m}r - \frac{M^2}{m^2}}, \quad \therefore t = \int \frac{r dr}{\sqrt{\frac{2\alpha}{m}r - \frac{M^2}{m^2}}}$$

を得る。ここで

$$r = \frac{p}{2}(1 + \eta^2), \quad \therefore dr = p\eta d\eta, \quad \sqrt{\frac{2\alpha}{m}r - \frac{M^2}{m^2}} = \frac{M}{m}\eta$$

とすると

$$t = \frac{p^2/2}{M/m} \int (1 + \eta^2) d\eta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{mp^3}{\alpha}} \int (1 + \eta^2) d\eta$$

となる。近日点  $r = p/2$  は  $\eta = 0$  に対応する。  $\eta = 0$  のとき  $t = 0$  であるとすれば  $t = \sqrt{\frac{mp^3}{\alpha}} \frac{\eta}{2} \left(1 + \frac{\eta^2}{3}\right)$ .  
さらに軌跡の式 (15.5) で  $e = 1$  とおくと  $\frac{r}{r} = 1 + \cos\phi$  なので

$$p = r + x, \quad x = p - r = \frac{p}{2}(1 - \eta^2), \\ \therefore |y| = \sqrt{r^2 - x^2} = p|\eta|, \quad \therefore y = p\eta.$$

放物線に沿う運動はパラメータ  $\eta$  を用いて以下のようにパラメトライズされている。

$$\begin{array}{c|cccc} \eta & -\infty & \rightarrow & 0 & \rightarrow & +\infty \\ t & -\infty & \rightarrow & 0 & \rightarrow & +\infty \\ r & +\infty & \rightarrow & 0 & \rightarrow & +\infty \\ x & -\infty & \rightarrow & 0 & \rightarrow & -\infty \\ y & -\infty & \rightarrow & 0 & \rightarrow & +\infty \end{array}$$

2 場  $U = -\alpha/r^2$  ( $\alpha > 0$ ) 有効ポテンシャルは

$$U_{\text{有効}}(r) = -\frac{\alpha}{r^2} + \frac{M^2}{2mr^2} = \left(\frac{M^2}{2m} - \alpha\right) \frac{1}{r^2}$$

なので,

- $\frac{M^2}{2m} > \alpha$  のとき, これは実効的に斥力の場となり,  $E > 0$  の運動のみが許容される.
- $\frac{M^2}{2m} < \alpha$  のとき, これは実効的に引力の場となり, 粒子は場の中心に到達できる.

粒子の軌跡を求めよう.

1.  $E > 0$  のとき

軌跡の式 (14.7):

$$\phi = \int \frac{(M/r^2)dr}{\sqrt{2m[E - U_{\text{有効}}(r)]}} = \int \frac{(M/r^2)dr}{\sqrt{2m[E - (\frac{M^2}{2m} - \alpha)\frac{1}{r^2}]}}$$

は  $E > 0$  に対して

$$\phi = \frac{M}{\sqrt{2mE}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{1}{E} (\frac{M^2}{2m} - \alpha) \frac{1}{r^2}}} = -\frac{M}{\sqrt{2mE}} \int \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \frac{1}{E} (\frac{M^2}{2m} - \alpha) \xi^2}}, \quad \xi \equiv \frac{1}{r}$$

を与える.

(a)  $E > 0$ ,  $\frac{M^2}{2m} > \alpha$  のとき

$$\sqrt{\frac{1}{E} \left( \frac{M^2}{2m} - \alpha \right) \xi} = \cos \theta$$

とおくと

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{M}{\sqrt{2mE}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{E} \left( \frac{M^2}{2m} - \alpha \right)}} \int d\theta = \frac{M}{\sqrt{2m \left( \frac{M^2}{2m} - \alpha \right)}} \arccos \left( \sqrt{\frac{1}{E} \left( \frac{M^2}{2m} - \alpha \right) \xi} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m\alpha}{M^2}}} \arccos \left( \sqrt{\frac{M^2 - 2m\alpha}{2mE}} \frac{1}{r} \right), \\ \therefore \frac{1}{r} &= \sqrt{\frac{2mE}{M^2 - 2m\alpha}} \cos \left[ \phi \sqrt{1 - \frac{2m\alpha}{M^2}} \right]. \end{aligned}$$

(b)  $E > 0$ ,  $\frac{M^2}{2m} < \alpha$  のとき

$$\sqrt{\frac{1}{E} \left( \alpha - \frac{M^2}{2m} \right) \xi} = \sinh \theta$$

とおくと

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{M}{\sqrt{2mE}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{E} \left( \alpha - \frac{M^2}{2m} \right)}} \int d\theta = -\frac{M}{\sqrt{2m \left( \alpha - \frac{M^2}{2m} \right)}} \sinh^{-1} \left( \sqrt{\frac{1}{E} \left( \alpha - \frac{M^2}{2m} \right) \xi} \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2} - 1}} \sinh^{-1} \left( \sqrt{\frac{2m\alpha - M^2}{2mE}} \frac{1}{r} \right) \end{aligned}$$

となる. ここで前の負号は適当に座標系をとり直すことによって取り除けるので

$$\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2mE}{2m\alpha - M^2}} \sinh \left[ \phi \sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2} - 1} \right]$$

を得る.

2.  $E < 0$  のとき

軌跡の式は  $E < 0$  に対して

$$\phi = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{|E|} \left( \alpha - \frac{M^2}{2m} \right) \frac{1}{r^2} - 1}} = -\frac{M}{\sqrt{2m|E|}} \int \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{1}{|E|} \left( \alpha - \frac{M^2}{2m} \right) \xi^2 - 1}}, \quad \xi \equiv \frac{1}{r}$$

を与える。

(a)  $E < 0$ ,  $\frac{M^2}{2m} < \alpha$  のとき

$$\sqrt{\frac{1}{|E|} \left( \alpha - \frac{M^2}{2m} \right) \xi} = \cosh \theta$$

とおくと

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{M}{\sqrt{2m|E|}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{|E|} \left( \alpha - \frac{M^2}{2m} \right)}} \int d\theta = -\frac{M}{\sqrt{2m \left( \alpha - \frac{M^2}{2m} \right)}} \cosh^{-1} \left( \sqrt{\frac{1}{|E|} \left( \alpha - \frac{M^2}{2m} \right) \xi} \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2} - 1}} \cosh^{-1} \left( \sqrt{\frac{2m\alpha - M^2}{2m|E|}} \frac{1}{r} \right), \\ \therefore \frac{1}{r} &= \sqrt{\frac{2m|E|}{2m\alpha - M^2}} \cosh \left[ \phi \sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2} - 1} \right]. \end{aligned}$$

動径  $r$  と時間の関係 (14.6) は

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U_{\text{有効}}(r)]}} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{r dr}{\sqrt{Er^2 - \frac{M^2}{2m} + \alpha}} = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{m}{2}} \sqrt{Er^2 - \frac{M^2}{2m} + \alpha}$$

となる。これは時間とともに  $r$  が増大する場合の式である。「与えられた距離  $r$  からの衝突」(p.48, 1.19) にかかる時間は、運動の可逆性により  $r:0 \rightarrow r$  における時間に等しいから、この結果を  $r=0$  とした式との差をとって得られる (p.48, 1.20)。

3  $U = -\alpha/r$  に小さな項  $\delta U$  を追加

■  $\delta\phi$  の式 (1)  $\Delta\phi$  の式 (p.49, 1.1) の被積分関数は

$$\begin{aligned} \sqrt{2m \left( E - \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{M^2}{r^2} - 2m\delta U} &= \sqrt{2m \left( E - \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{M^2}{r^2}} \sqrt{1 - \frac{2m\delta U}{2m \left( E - \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{M^2}{r^2}}} \\ &\simeq \sqrt{2m \left( E - \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{M^2}{r^2}} \left\{ 1 - \frac{m\delta U}{2m \left( E - \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{M^2}{r^2}} \right\} \\ &= \sqrt{2m \left( E - \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{M^2}{r^2}} - \frac{m}{\sqrt{2m \left( E - \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{M^2}{r^2}}} \delta U \end{aligned}$$

と近似される。

$\delta\phi$  の式 (1) における第 2 の等号では、《摂動をうけていない》運動の軌跡に対する式 (14.7):

$$d\phi = \frac{(M/r^2)dr}{\sqrt{2m \left( E - \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{M^2}{r^2}}}$$

を用いて  $\frac{2m\delta U dr}{\sqrt{2m \left( E - \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{M^2}{r^2}}} = \frac{2m}{M} r^2 \delta U d\phi$  とする。積分範囲の  $r_{\min}, r_{\max}$  は最初から《摂動をうけていない》運動の軌跡に対する値で代用されているものと考えられる。

■(b)  $\delta U = \gamma/r^3$  に対する計算

$$\begin{aligned}\delta\phi &= \frac{\partial}{\partial M} \left( \frac{2m}{M} \int_0^\pi r^2 \delta U d\phi \right) = \frac{\partial}{\partial M} \left( \frac{2m}{M} \frac{\gamma}{p} \int_0^\pi (1 + e \cos \phi) d\phi \right) = 2\pi m \gamma \frac{\partial}{\partial M} \frac{1}{Mp} \\ &= 2\pi m^2 \alpha \gamma \frac{\partial}{\partial M} \frac{1}{M^3} \quad (p = M^2/m\alpha) \\ &= -\frac{6\pi\alpha\gamma m^2}{M^4}.\end{aligned}$$

## 第4章 粒子の衝突

### § 16. 粒子の崩壊

■2 粒子への崩壊,  $C$  系 粒子 (内部エネルギー  $E_{\text{内部}}$ ) が《自然に》(すなわち, 外場の介入なしに) 2 つの粒子 (質量  $m_1, m_2$ , 内部エネルギー  $E_{1 \text{ 内部}}, E_{2 \text{ 内部}}$ ) へと崩壊する過程を考える. 粒子間の相互作用の具体的な種類に依らずに, 運動量とエネルギーが保存する. 崩壊する粒子の静止系 (慣性中心系または  $C$  系) において

- 運動量保存則  
→ 2 粒子は共通の大きさ  $p_0$  の反対向きの運動量で離れてゆく
- エネルギー保存則

$$\begin{aligned} E_{\text{内部}} &= E_{1 \text{ 内部}} + \frac{p_0^2}{2m_1} + E_{2 \text{ 内部}} + \frac{p_0^2}{2m_2} \\ &= E_{1 \text{ 内部}} + E_{2 \text{ 内部}} + \frac{p_0^2}{2m}, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} : \text{換算質量} \\ \rightarrow \text{《崩壊エネルギー》 } \varepsilon &\equiv E_{\text{内部}} - E_{1 \text{ 内部}} - E_{2 \text{ 内部}} = \frac{p_0^2}{2m} \end{aligned}$$

から  $C$  系における各粒子  $i = 1, 2$  の速度  $v_{i0} = p_0/m_i$  が決定される.

■2 粒子への崩壊,  $L$  系 崩壊する前の粒子が速度  $\mathbf{V}$  を持つ基準系 (実験室系または  $L$  系) に移る. 崩壊によってできた 2 粒子の 1 つに注目し, その

- $C$  系に対する速度を  $\mathbf{v}_0$  ( $\mathbf{V}$  とのなす角を  $\theta_0$ )  
– 既に得られている
- $L$  系に対する速度を  $\mathbf{v}$  ( $\mathbf{V}$  とのなす角を  $\theta$ )

と書く.  $\mathbf{v} - \mathbf{V} = \mathbf{v}_0$  により, 次が見いだされる.

- $L$  系における飛行方向  $\theta$  と速さ  $v$  の関係  $v^2 + V^2 - 2vV \cos \theta = v_0^2$   
–  $V < v_0$  の場合, 粒子は任意の角度  $\theta$  の方向へ飛ぶことができる  
–  $V > v_0$  の場合, 粒子は前方  $\theta \leq \theta_{\text{max}}$  へだけ飛ぶことができる ( $\sin \theta_{\text{max}} = v_0/V$ )  
(以上, 図 27, 図 28 を参照)
- $L$  系と  $C$  系における飛行方向  $\theta$  と  $\theta_0$  の関係

$$\cos \theta_0 = -\frac{V}{v_0} \sin^2 \theta \pm \cos \theta \sqrt{1 - \frac{V^2}{v_0^2} \sin^2 \theta}. \quad (16.6)$$

(図 27, 図 28 から読み取れる関係  $\tan \theta = \frac{v_0 \sin \theta_0}{v_0 \cos \theta_0 + V}$  を

$\cos \theta_0$  について解くと得られる [本稿次節で確認]. )

- $V < v_0$  の場合, 複号は + をとる
- $V > v_0$  の場合, 2 つの符号に対応した 2 つの  $\theta_0$  の値がある

■2 粒子への崩壊, 崩壊粒子の方向分布 次に多くの同種粒子の崩壊を考える (各粒子はいずれも決まった種類の粒子 1, 2 へと崩壊する). 同一の崩壊過程が考えられているため,  $C$  系において同種の崩壊粒子 (例えば粒

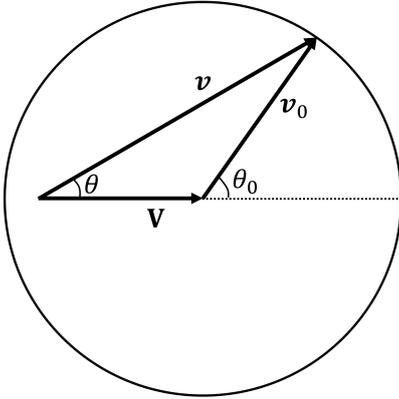


図 27  $V < v_0$  のとき

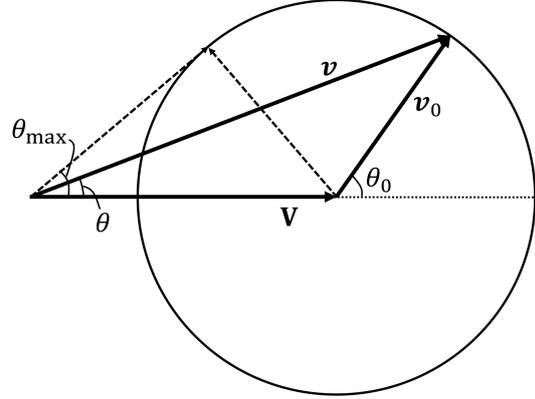


図 28  $V > v_0$  のとき ( $\tan \theta_{\max} = v_0/V$ )

子 1) はすべて同じエネルギーを持つ。またはじめの粒子の系が等方的であれば、 $C$  系において飛行方向の範囲  $d\theta_0$  へ飛んでゆく崩壊粒子の数の割合は、立体角  $do_0 = 2\pi \sin \theta_0 d\theta_0$  に比例し、

$$\frac{do_0}{4\pi} = \frac{1}{2} \sin \theta_0 d\theta_0 \quad (16.7)$$

となる ( $4\pi$  は全立体角)。飛行方向の変化  $d\theta_0$  に伴う崩壊粒子 (質量  $m = m_1, m_2$ ) の運動エネルギーの変化  $dT$  を用いて、これは

$$\frac{1}{2} \sin \theta_0 d\theta_0 = \frac{dT}{2mv_0V} \quad (16.8)$$

と書ける ( $\frac{m}{2}(v_0 - V)^2 \leq T \leq \frac{m}{2}(v_0 + V)^2$ ) [本稿次節で確認]。

■2 粒子以上の粒子への崩壊 教科書の内容を補足しつつまとめよう。質量  $M$ 、内部エネルギー  $E_{\text{内部}}$  を持つ [静止した] 粒子が多数の粒子  $1, 2, 3, \dots$  へと崩壊する過程を考える。粒子  $2, 3, \dots$  を 1 つの複合粒子と見なして、この過程を 2 つの部分

- 粒子 1 (質量  $m_1$ , 内部エネルギー  $E_{1 \text{ 内部}}$ )
- 複合粒子 (質量  $M - m_1$ , 内部エネルギー  $E'_{\text{内部}}$ )

への崩壊と捉えると、これらの運動量は共通の大きさ  $p_0$  を持ち、エネルギー保存則は

$$E_{\text{内部}} - E_{1 \text{ 内部}} - E'_{\text{内部}} = \frac{p_0^2}{2m_1(M - m_1)/M}, \quad m_1(M - m_1)/M : \text{換算質量}$$

$$\therefore \frac{p_0^2}{2m_1} = \left(1 - \frac{m_1}{M}\right) (E_{\text{内部}} - E_{1 \text{ 内部}} - E'_{\text{内部}})$$

となる。このうち  $E_{\text{内部}}$  および各崩壊粒子  $1, 2, 3, \dots$  の内部エネルギー  $E_{1 \text{ 内部}}, E_{2 \text{ 内部}}, E_{3 \text{ 内部}}, \dots$  の値は決まっているものと考え、変化し得るのは  $E'_{\text{内部}}$  のみである。これは複合粒子の静止系でのエネルギー

$$E'_{\text{内部}} = \sum_{a \geq 2} \left( \frac{1}{2} m_a v_a^2 + E_{a \text{ 内部}} \right)$$

として定義されており，ここで再び  $E_{a \text{ 内部}}$  の値は定まっていることに注意すると

$E'_{\text{内部}}$  が最小

$$\Leftrightarrow v_a = 0 \quad (a = 2, 3, \dots)$$

「質点  $m_1$  をのぞくすべての崩壊粒子が」もとの系に対し「同一の速さで運動する」(p.53, 1.15, 16)

$$\Leftrightarrow E'_{\text{内部}} = \sum_{a \geq 2} E_{a \text{ 内部}}$$

「 $E'_{\text{内部}}$  は単にそれらの内部エネルギーの和に帰す」(p.53, 1.16, 17).

## § 16 について

■解放される崩壊エネルギー  $\varepsilon = p_0^2/2m$  について これは崩壊後の 2 粒子の相対運動のエネルギーになっている。なるほど， $C$  系では 2 粒子の速度は  $v_1 = p_0/m_1, v_2 = p_0/m_2$  と表されるため， $m$  を換算質量として相対速度  $v$  は，通常 velocity と運動量の関係

$$v = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p_0 = \frac{p_0}{m}$$

を満たすことになる。よって相対運動のエネルギーは  $mv^2/2 = p_0^2/2m$  と書き換えられる。

■ $C$  系における飛行の角度  $\theta_0$  図 14(p.51) [本稿の図 27, 図 28] のダイアグラムにおいて， $C$  系における崩壊粒子の速度  $v_0$  と  $L$  系における崩壊前の粒子の速度  $V$  のなす角として  $\theta_0$  が定義される。このとき  $C$  系における飛行の角度  $\theta_0$  は，それを測る基準となる方向が  $V$  であるため， $C$  系だけでなく， $C$  系に対する  $L$  系の速度  $-V$  にも関係することになる。

■ $\theta_0$  と  $\theta$  の関係 (16.6) の導出 式 (16.5):

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0 + V/v_0}, \quad \therefore \left( \cos \theta_0 + \frac{V}{v_0} \right) \tan \theta = \sin \theta_0$$

を両辺平方して整理すると， $\cos \theta_0$  についての 2 次方程式

$$\cos^2 \theta_0 + 2 \frac{V}{v_0} \sin^2 \theta \cos \theta_0 + \left( \frac{V}{v_0} \right)^2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = 0$$

になる。よって

$$\begin{aligned} \cos \theta_0 &= -\frac{V}{v_0} \sin^2 \theta \pm \sqrt{\left( \frac{V}{v_0} \right)^2 \sin^4 \theta - \left( \frac{V}{v_0} \right)^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta} \\ &= -\frac{V}{v_0} \sin^2 \theta \pm \cos \theta \sqrt{1 - \left( \frac{V}{v_0} \right)^2 \sin^2 \theta} : (16.6) \end{aligned}$$

を得る。

■立体角  $d\Omega = 2\pi \sin \theta_0 d\theta_0$  (p.52, 1.18, 19) について 図 29 参照。

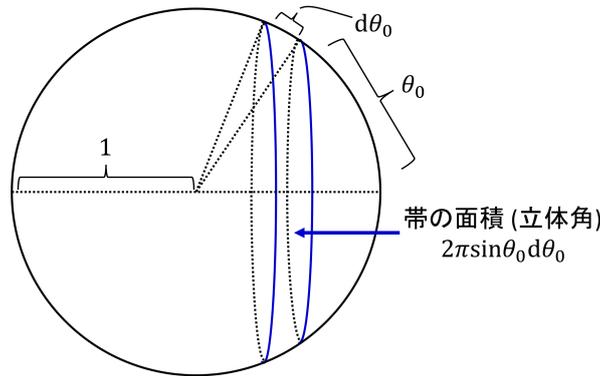


図 29 飛行方向  $\theta_0$  の範囲  $d\theta_0$  の方向の立体角

■分布 (16.8) について 崩壊粒子の  $C$  系での速さ  $v_0$  を固定して飛行方向を  $\theta_0 \rightarrow \theta_0 + d\theta_0$  と変化させたとき、これに伴い  $L$  系での速さ、運動エネルギーがそれぞれ  $v \rightarrow v + dv, T \rightarrow T + dT$  と変化したとする。このとき飛行方向の範囲  $d\theta_0$  に飛んでゆく粒子の割合 (16.7) は

$$\frac{1}{2} \sin \theta_0 d\theta_0 = \frac{1}{2} |d(\cos \theta_0)| = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{2v_0 V} = \frac{1}{2} \frac{dT}{(m/2)2v_0 V} = \frac{dT}{2mv_0 V} : (16.8)$$

と書き換えられる。ただし第 2 の等号では

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{V}, \quad \therefore v^2 = v_0^2 + V^2 + 2v_0 V \cos \theta_0, \quad \therefore |d(\cos \theta_0)| = \frac{d(v^2)}{2v_0 V}$$

を用いた。

## § 16, 問題 2 崩壊粒子の $L$ 系における飛行方向の分布

式 (16.6), 式 (16.7) より

$$\frac{1}{2} \sin \theta_0 d\theta_0 = -\frac{1}{2} d(\cos \theta_0) = \frac{\sin \theta d\theta}{2} \left\{ 2 \frac{V}{v_0} \cos \theta \pm \frac{1 + \left(\frac{V}{v_0}\right)^2 \cos 2\theta}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{v_0}\right)^2 \sin^2 \theta}} \right\} \quad (17)$$

を得る。これは  $L$  系での飛行方向の範囲  $d\theta$  と、対応する  $C$  系での飛行方向の範囲の関係を与える。  $v_0 < V$  のとき  $\theta_0$  の増大  $d\theta_0$  に伴う  $\cos \theta_0$  の変化  $d(\cos \theta_0)$  は図 30 のように、式 (16.6) の正号 + に対応する  $\theta_0$  に対して負に、負号 - に対応する  $\theta_0$  に対して正になる。よって式 (17) 最右辺は複号で + をとったものが正に、- をとったものが負になることに注意して各々の絶対値  $\frac{1}{2} |d(\cos \theta_0)|$  を足すと答を得る。

## § 17. 粒子の弾性衝突

2 粒子 (質量  $m_1, m_2$ ) の弾性衝突を考える。弾性衝突において粒子の内部エネルギーは変化しないため、エネルギー保存則において考慮しなくて良い (このことは弾性衝突の定義に含まれている)。

$C$  系において

- 運動量保存則 … 衝突前後で全運動量がゼロ

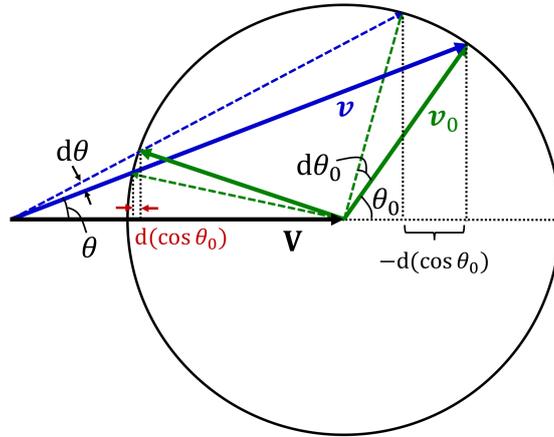


図 30  $\theta_0$  の増大  $d\theta_0$  に伴う  $\cos\theta_0$  の変化  $d(\cos\theta_0)$

- エネルギー保存則 … 衝突前後で全運動エネルギーが不変

であることから、衝突後に 2 粒子の速度の方向は変化するが、それらの大きさは変わらず、また互いに逆向きであることも衝突前と変わらないことが結論される (図 31 参照, 衝突後の方向  $\mathbf{n}_0$  は粒子の相互作用の法則, および衝突時における粒子の相互位置に依存する).

ここから  $L$  系における衝突前の 2 粒子の運動量  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  と, 衝突後の 2 粒子の運動量  $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$  の関係

$$\begin{aligned}\mathbf{p}'_1 &= m\mathbf{v}\mathbf{n}_0 + \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2), \\ \mathbf{p}'_2 &= -m\mathbf{v}\mathbf{n}_0 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)\end{aligned}\quad (17.3)$$

が得られる (導出は下記,  $m \equiv m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ : 換算質量,  $v \equiv |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ : 相対速度).  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  および  $\mathbf{n}_0$  が与えられたとき,  $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$  は以下の手順で作図することができる (図 32 参照).

1. ベクトル  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$  を描き, これを  $\overrightarrow{AB}$  とする.
2.  $\overrightarrow{AB}$  を質量比  $m_1$  対  $m_2$  に内分する点  $O$  をとる.
3.  $\overrightarrow{OC} = m\mathbf{v}\mathbf{n}_0$  により定まる点  $C$  をとる ( $m$ : 換算質量).
4. このとき衝突後の運動量  $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$  は,  $\mathbf{p}'_1 = \overrightarrow{AC}, \mathbf{p}'_2 = \overrightarrow{CB}$  によって与えられる.

特に  $L$  系に対して粒子 2 が静止しており, ここに粒子 1 が相対速度  $v$  で入射する場合のダイアグラムは図 33 のようになる\*8. 衝突後の 2 粒子の運動量  $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$  のなす角は  $\theta_1 + \theta_2$  で与えられる (図 34 参照). ここから次のことが分かる.

- $C$  系での粒子 1 の方向転換の角度  $\chi$  を用いて  $\theta_1, \theta_2, v'_1, v'_2$  を表せる. 具体的には

$$\tan\theta_1 = \frac{m_2 \sin\chi}{m_1 + m_2 \cos\chi}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}, \quad (17.4)$$

$$v'_1 = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos\chi}}{m_1 + m_2} v, \quad v'_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \sin\frac{\chi}{2} \quad (17.5)$$

\*8 この場合  $\overrightarrow{OB} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{p}_1 = m\mathbf{v}$  は半径に一致する.

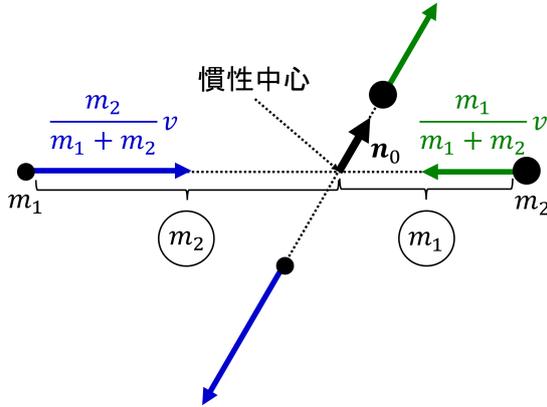


図 31 C 系から見た 2 粒子の弾性衝突

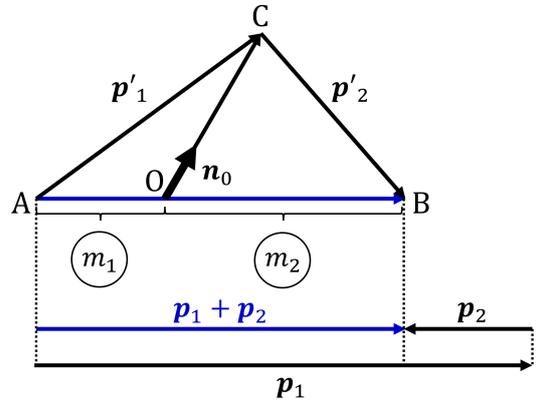


図 32 L 系における衝突後の運動量の作図

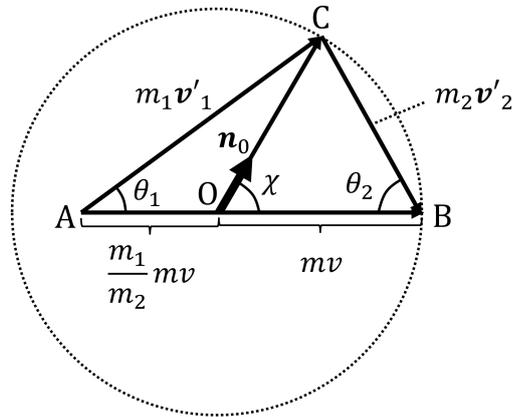


図 33 衝突前に粒子 2 が静止している場合のダイアグラム

となる [本稿次節で補足].

- $m_1 < m_2$  ならば  $\theta_1 + \theta_2 > \pi/2$ ,  $m_1 > m_2$  ならば  $\theta_1 + \theta_2 < \pi/2$  となる [本稿次節で補足].
- 正面衝突 ( $\chi = \pi$ ) のとき,  $v'_2 \propto \sin(\chi/2)$ : (17.5) が, したがって粒子 2 の受け取るエネルギー  $E'_2$  が最大となる.

$$E'_{2\max} = \frac{m_2 v'_2 \max^2}{2} = \frac{m_2}{2} \left( \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_1, \quad E_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} : \text{入射粒子のエネルギー.} \quad (17.7)$$

- $m_1 = m_2$  のとき  $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$  となる.

## § 17, 式の導出など

■式 (17.3) の導出 C 系における衝突後の速度は, 図 31 より

$$\mathbf{v}'_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v \mathbf{n}_0, \quad \mathbf{v}'_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v \mathbf{n}_0$$

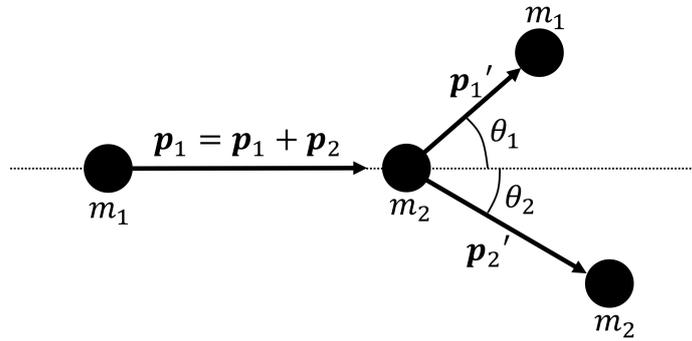


図 34 衝突後の 2 粒子の運動量  $p_1', p_2'$  のなす角は  $\theta_1 + \theta_2$  で与えられる

と表される。慣性中心の速度  $V$  を加えると、 $L$  系での衝突後の速度

$$v'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v n_0 + \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad v'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v n_0 + \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

が得られる。2 式にそれぞれ  $m_1, m_2$  をかけて、運動量の式 (17.3) を得る。

## § 17 について

■  $L$  系における同質量粒子の正面衝突 共通の質量  $m_1 = m_2$  を持つ 2 粒子が正面衝突する場合を考えると ( $n_0$  は  $p_1$  と反平行),  $L$  系における衝突後の運動量の式 (17.3) は

$$v'_1 = v_2, \quad v'_2 = v_1$$

を与える。これは衝突により 2 粒子の速度が交換されることを意味する。よって 2 粒子を区別しなければ、粒子は互いをすり抜けるように運動する。

■  $\theta_1$  の式 (17.4) について 図 35 より

$$\tan \theta_1 = \frac{mv \sin \chi}{\left(\frac{m_1}{m_2} + \cos \chi\right) mv} = \frac{m_2 \sin \chi}{m_1 + m_2 \cos \chi}.$$

■  $v'_1, v'_2$  の式 (17.5) について 図 35 における三角形 AOC に余弦定理を用いると

$$(m_1 v'_1)^2 = (mv)^2 \left\{ 1 + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 + 2 \frac{m_1}{m_2} \cos \chi \right\},$$

$$\therefore v'_1 = v \frac{m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{1 + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 + 2 \frac{m_1}{m_2} \cos \chi} = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \chi}}{m_1 + m_2} v$$

を得る。 $v'_2$  の表式は図 36 における二等辺三角形 BOC に注目すると得られる。

■ 「 $m_1 < m_2$  ならば  $\theta_1 + \theta_2 > \pi/2$ ,  $m_1 > m_2$  ならば  $\theta_1 + \theta_2 < \pi/2$  となる」 (p.57, 1.2.3) について このことは教科書の図 16(a)(p.56) において角  $ACB > \pi/2$ , 教科書の図 16(b)(p.56) において角  $ACB < \pi/2$  であることから分かる (本稿では図 33 を参照)。

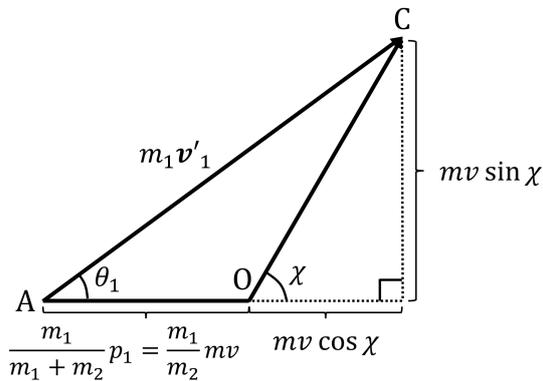


図 35 三角形 AOC (教科書の図 16 (p.56))

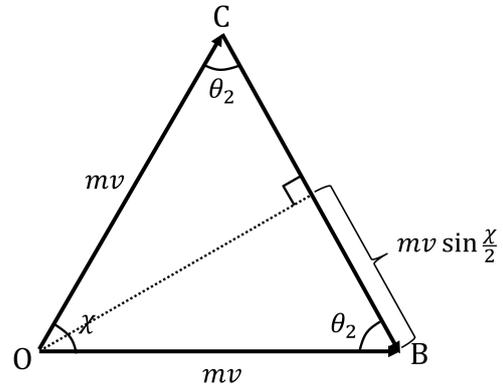


図 36 二等辺三角形 BOC (教科書の図 16 (p.56))

■正面衝突後の速度 (17.6) について 静止している粒子 2 に粒子 1 が正面衝突する場合 ( $\chi = \pi$ ) を考える.  
 図 16(p.56)(本稿の図 33) のダイアグラムから

$$\begin{aligned} m_1 < m_2 &\Rightarrow \text{衝突後, 粒子 1 は後退する} \\ m_1 > m_2 &\Rightarrow \text{衝突後, 粒子 1 は前進する} \end{aligned}$$

ことが読み取れる. さらに衝突後の速度の大きさ  $v'_1$  の式 (17.5) において  $\chi = \pi$  とすると

$$v'_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v \quad (m_1 < m_2), \quad v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v \quad (m_1 > m_2)$$

となることと考え合わせると, 衝突後の速度の式 (17.6):

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v$$

を得る.

## § 18. 粒子の散乱

2 粒子の衝突について, それと等価な換算質量  $m$  を持つ粒子の, 中心力場  $U(r)$  による散乱を考える.

無限遠での粒子の速度  $v_\infty$ , 衝突パラメータ  $\rho$  (図 37 で定義)

→ エネルギー  $E = \frac{mv_\infty^2}{2}$ , 角運動量  $M = m\rho v_\infty$

→ 散乱による粒子の方位角の変化  $2\phi_0$ ,

$$\phi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{mv_\infty^2}}}$$

(§ 14 の公式より. 図 37 参照.)

→ 軌道のふれの角度  $\chi = |\pi - 2\phi_0|$  の決定.

散乱中心に向かう同一粒子の (一様な) ビームを考える. 単位時間のうちに角度  $\chi$  の区間  $d\chi$  の方向に散乱される粒子数  $dN$  は, 入射粒子数の流れの密度  $n$  に依存する. そこで比  $d\sigma = dN/n$  を導入すると散乱過程

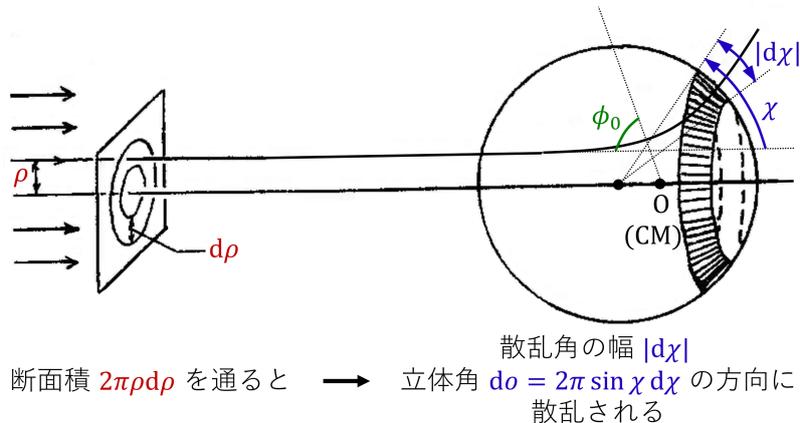


図 37 有効散乱断面積  $d\sigma = 2\pi\rho d\rho$  (慣性中心系, 2 体問題)

そのものを特徴づけることができる。角度  $\chi$  の区間  $d\chi$  の方向に散乱される粒子数  $dN$  は、対応する衝突パラメーターの幅  $d\rho$  がビームの断面の中に形成する円環を通過する粒子数に等しいから、これを  $n$  で割った量  $d\sigma$  は円環の面積  $2\pi\rho d\rho$  に他ならない (図 37 参照)。このため  $d\sigma$  は有効散乱断面積と呼ばれる。このことから、上で得られた衝突パラメーター  $\rho$  とふれの角度  $\chi$  の関係  $\rho = \rho(\chi)$  を用いて有効散乱断面積は

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi = \frac{\rho(\chi)}{\sin \chi} \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| do \quad (18)$$

と計算されることになる ( $do$  は角度の幅  $d\chi$  の方向の立体角  $do = 2\pi \sin \chi d\chi$ )。

## § 18 について

■軌道の漸近線は場の中心を通らない 粒子が角度  $\chi$  の方向に散乱されると言うとき、それは場の中心  $O$  から見た角度ではない。粒子の軌道は場の中心  $O$  から見て角度  $\chi$  の方向の直線と平行になるけれど、軌道の漸近線は場の中心  $O$  を通らない (図 18 (p.58) 参照)。とは言え実際問題、実験室系において、検出器までの距離が多数の標的を含む試料のサイズに比べて充分大きければ、この差は問題にならないと考えられる。

■ $C$  系で見た 2 体の衝突 図 18 (p.58) のように換算質量  $m$  を持つ粒子が衝突パラメーター  $\rho$  で入射し角度  $\chi$  の方向に散乱されるとき、式 (13.2) より元の 2 体問題における散乱過程は図 38 のようである。すなわち

- 散乱が起きる前の 2 粒子の漸近線は距離  $\rho$  だけ隔たっており、
- 散乱により 2 粒子はともに角度  $\chi$  だけふれる。

■ $\phi_0$  の式 (18.2) について 積分範囲は式 (14.5) で  $r \geq 0$  としたことに対応している。

■実験室系の断面積 (最終段落) について 相対論の場合と同様 [5, pp.38–40], 断面積は座標系によらない不変量として定義されている。

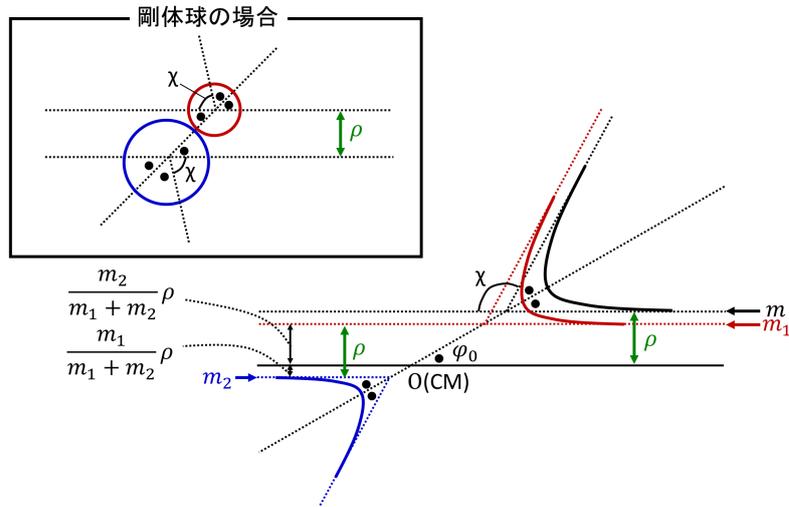


図 38 C系で見た2体の衝突

§ 18, 問題

1 図 19(p.61) は  $L$  系において静止した剛体球に粒子が衝突する様子を示したのではなく、 $C$  系における剛体球ポテンシャルの下での換算質量を持つ仮想的な粒子の散乱を描いたものである。

2 式 (17.7) を用いる際、 $E_1 = \frac{1}{2}m_1v_\infty^2$  とする。

3 断面積の式 (18.8):  $d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin \chi} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\phi$  に  $\rho = v_\infty^{-2/n}$  を代入すると

$$d\sigma = v_\infty^{-4/n} \frac{f(\chi)|f'(\chi)|}{\sin \chi} d\phi \propto v_\infty^{-4/n} d\phi$$

となる。これは  $n = 1$  に対する Rutherford の公式 (19.3):

$$d\sigma = \left( \frac{\alpha}{2mv_\infty^2} \right)^2 \frac{d\phi}{\sin^4 \frac{\chi}{2}}$$

と整合している。

4 場の中心に《到達》する条件 (14.11):  $r^2U(r)|_{r \rightarrow 0} < -\frac{M^2}{2m}$  すなわち  $2\alpha > m\rho^2v_\infty^2$  は、 $E = \frac{1}{2}mv_\infty^2 > 0$  の下で《衝突》が起きるのが

$$\frac{M^2}{2m} < \alpha$$

のときであること (§ 15, 問題 2) と整合している。

$v_\infty \rightarrow \infty$  のとき  $\sigma \rightarrow \infty$  となる、すなわち粒子は場の中心に落ちない。

5 有効ポテンシャルの極大を与える  $r$  は

$$0 = \frac{dU_{\text{有効}}}{dr} = -\frac{m\rho^2v_\infty^2}{r^3} + \frac{\alpha n}{r^{n+1}}, \quad \therefore r = \left( \frac{\alpha n}{m\rho^2v_\infty^2} \right)^{\frac{1}{n-2}} \equiv r_0$$

であり、極大値は

$$U_0 = \frac{1}{r_0^n} \left( \frac{m\rho^2v_\infty^2}{2} r_0^{n-2} - \alpha \right) = \left( \frac{m\rho^2v_\infty^2}{\alpha n} \right)^{\frac{n}{n-2}} \alpha \left( \frac{n}{2} - 1 \right)$$

となる。条件  $U_0 < E = \frac{1}{2}mv_\infty^2$  を満たす  $\rho$  の範囲は

$$\rho < \sqrt{\frac{\alpha n}{m\rho^2 v_\infty^2} \left( \frac{mv_\infty^2}{(n-2)\alpha} \right)^{1-\frac{2}{n}}} = \sqrt{n(n-2)^{\frac{2}{n}-1} \alpha^{\frac{2}{n}} (mv_\infty^2)^{-\frac{2}{n}}} \equiv \rho_{\max}$$

で与えられる。

$v_\infty \rightarrow \infty$  のとき  $\sigma \rightarrow \infty$  となる，すなわち粒子は場の中心に落ちない。

## 6 有効ポテンシャル

$$U_{\text{有効}}(r) = \frac{m\rho^2 v_\infty^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

の概形は図 10(p.43) のようだから， $r_{\min}$  は  $U_{\text{有効}}(r_{\min}) = E = \frac{mv_\infty^2}{2}$  から決まる．ところで  $E = \frac{mv_\infty^2}{2} > 0$  の範囲では  $U_{\text{有効}}(r)$  は単調減少するので，衝突の条件  $r_{\min} < R$  は  $U_{\text{有効}}(R) < U_{\text{有効}}(r_{\min})$  すなわち

$$\frac{m\rho^2 v_\infty^2}{2R^2} - \frac{\alpha}{R} < \frac{mv_\infty^2}{2}$$

と書き換えられる．これを満たす  $\rho$  の範囲は

$$\rho^2 \leq R^2 \left( 1 + \frac{2\alpha}{Rmv_\infty^2} \right) \equiv \rho_{\max}^2$$

で与えられる．ここで  $m_2 \gg m_1$  を仮定して  $m \simeq m_1$  とし，さらに  $\alpha = \gamma m_1 m_2$  とおくと断面積の表式

$$\sigma = \pi \rho_{\max}^2 \simeq \pi R^2 \left( 1 + \frac{2\gamma m_2}{Rv_\infty^2} \right)$$

を得る．

## § 19. ラザフォードの公式

断面積  $d\sigma = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi$  は， $\chi$  と  $\rho$  の関係

$$\chi = \pi - 2\phi_0, \quad \phi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{mv_\infty^2}}} \quad (19)$$

から求まる (§ 18)．そこで Coulomb 場  $U = \alpha/r$  ( $\alpha$  の符号は任意) による荷電粒子の散乱を考えると，断面積は Rutherford の公式

$$d\sigma = \pi \left( \frac{\alpha}{mv_\infty^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\sin^3 \frac{\chi}{2}} d\chi = \left( \frac{\alpha}{2mv_\infty^2} \right)^2 \frac{d\sigma}{\sin^4 \frac{\chi}{2}}, \quad d\sigma = 2\pi \sin \chi d\chi \quad (20)$$

で与えられる (導出は下記)．

はじめ粒子 2 が静止している実験室系を考える．

- 粒子 2 が角度の区間  $d\theta_2$  に散乱されるとき，粒子  $m$  (または粒子 1) が通過しなければならない断面積

$$d\sigma_2 = 2\pi \left( \frac{\alpha}{mv_\infty^2} \right)^2 \frac{\cos \theta_2}{\sin^3 \theta_2} d\theta_2 = \left( \frac{\alpha}{mv_\infty^2} \right)^2 \frac{d\sigma_2}{\cos^3 \theta_2}, \quad d\sigma_2 = 2\pi \sin \theta_2 d\theta_2. \quad (19.4)$$

(式 (17.4):  $\chi = \pi - 2\theta_2$  を式 (20) に代入すれば良い [符号について本稿次節で補足]. )

- 粒子 1 が角度の区間  $d\theta_1$  に散乱される時、  
粒子  $m$  (または粒子 1) が通過しなければならない断面積  $d\sigma_1$   
–  $m_2 \gg m_1$  (したがって  $\chi \simeq \theta_1$ ,  $m \simeq m_1$ ) のとき

$$d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{4E_1}\right)^2 \frac{do_1}{\sin^4 \frac{\theta_1}{2}}, \quad do_1 = 2\pi \sin \theta_1 d\theta_1, \quad E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_\infty^2.$$

- $m_1 = m_2$  (したがって  $m = m_1/2$ ) のとき

$$d\sigma_1 = 2\pi \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos \theta_1}{\sin^3 \theta_1} d\theta_1 = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos \theta_1}{\sin^4 \theta_1} do_1, \quad do_1 = 2\pi \sin \theta_1 d\theta_1.$$

(§ 17 の図 33 より  $m_1 = m_2$  の場合  $\chi = 2\theta_1$  であり, これを式 (20) に代入すれば良い.)

- 粒子 1,2 が同種粒子であり, そのいずれかが角度の区間  $d\theta$  に散乱される時,  
粒子 1(=2) が通過しなければならない断面積

$$d\sigma = [d\sigma_1 + d\sigma_2]_{m_1=m_2, \theta_1=\theta_2=\theta} = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{1}{\cos^4 \theta}\right) \cos \theta do, \quad do = 2\pi \sin \theta d\theta.$$

- 散乱により粒子 2 が得るエネルギー (したがって粒子 1 の失うエネルギー)  $\varepsilon$  が区間  $d\varepsilon$  に含まれるとき, 粒子  $m$  (または粒子 1) が通過しなければならない断面積

$$d\sigma = 2\pi \frac{\alpha^2}{m_2 v_\infty^2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}. \quad (\text{導出は下記}) \quad (19.8)$$

## § 19, 式の導出など

■Rutherford の公式 (20) の導出 一般公式 (19) 第 2 式に  $U = \alpha/r$  を代入すると, 積分は初等的に実行でき,

$$\phi_0 = \arccos \frac{\frac{\alpha}{mv_\infty^2 \rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2 \rho}\right)^2}} \quad (21)$$

が得られる [本稿次節を参照]. 式 (19) の第 2 式  $\phi_0 = (\pi - \chi)/2$  も考慮して書き換えると,

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} \tan^2 \phi_0 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} \cot^2 \frac{\chi}{2}$$

となる. これを  $\chi$  について微分し, § 18 の断面積の公式 (18) に代入すると, Rutherford の公式 (20) が導かれる.

■式 (19.8) の導出 式 (17.5):  $v'_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2} v_\infty \sin \frac{\chi}{2}$  を用いると, 散乱により粒子 2 が得るエネルギー (したがって粒子 1 の失うエネルギー) は

$$\varepsilon = \frac{m_2}{2} v'_2{}^2 = \frac{2m^2}{m_2} v_\infty^2 \sin^2 \frac{\chi}{2}$$

と表される (したがって  $\varepsilon_{\max} = 2m^2 v_\infty^2 / m_2$ ). ここから  $\sin \frac{\chi}{2}$  を  $\varepsilon$  で表し, 式 (20) に代入すれば, 式 (19.8) が得られる [本稿次節で補足].

## § 19 について

■「初等的な積分」(p.64 の 1 番下の行) について 式 (18.4)(本稿の式 (19)) に  $U = \alpha/r$  を代入すると

$$\phi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(\rho/r^2)dr}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\rho v_{\infty}^2}\right)^2 - \left(\frac{\rho}{r} + \frac{\alpha}{\rho v_{\infty}^2}\right)^2}} \quad (22)$$

となる。ここで

$$\frac{\rho}{r} + \frac{\alpha}{\rho v_{\infty}^2} \equiv \sqrt{1 + \frac{\alpha}{\rho v_{\infty}^2}} \cos \theta$$

とおくと\*9, 式 (22) は  $[\theta]_{r=r_{\min}}^{r=\infty}$  となる。式 (22) において被積分関数の分母の根号内が

$$\frac{(E - U_{\text{有効}}(r))}{mv_{\infty}^2/2} = \sqrt{1 + \frac{\alpha}{\rho v_{\infty}^2}} \sin \theta$$

となっていることと  $r = r_{\min}$  が  $U_{\text{有効}}(r) = E$  の解であることに注意すると,  $r = r_{\min}$  で  $\theta = n\pi$  なので, p.65, 1.1 の式 (21):

$$\phi_0 = \arccos \frac{\frac{\alpha}{mv_{\infty}^2 \rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{mv_{\infty}^2 \rho}\right)^2}}$$

を得る。なお,  $U_{\text{有効}}(r) = E$  は  $U_{\text{有効}}(r)$  の概形と  $E = mv_{\infty}^2/2 > 0$  より  $r > 0$  にただ一つの解をもち, それは

$$r_{\min} = \frac{\alpha}{mv_{\infty}^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{mv_{\infty}^2}{\alpha/\rho}\right)^2} \right)$$

である。

■Rutherford の公式の解釈 微分断面積 (20):  $d\sigma/d\omega \sim 1/\sin^4(\chi/2)$  は,  $\chi$  が 0 (前方) から  $\pi$  (後方) へ変化するとき, 単調に減少する。これは大きな角度での散乱が, 散乱中心の近くを通る (衝突パラメーターの小さい) 場合に限られることを考えれば, 理に合っている (図 39 参照)。

全断面積

$$\sigma \sim \int_0^{\pi} \frac{\cos(\chi/2)}{\sin^3(\chi/2)} d\chi = 2 \int_0^1 \frac{d(\sin(\chi/2))}{\sin^3(\chi/2)} = - \left[ \frac{1}{\sin^2(\chi/2)} \right]_{\sin(\chi/2)=0}^{\sin(\chi/2)=1} = \infty$$

は無限大になる。これは Coulomb 力の到達距離が長いため, 場の中心の無限遠方を通る粒子も力を感じて, 散乱されることを表していると解釈できる [6, p.145]。実際, Coulomb 相互作用 ( $\sim 1/r$ ) は, 例えば Lennard-Jones ポテンシャル ( $r \rightarrow \infty$  で  $1/r^6$ ) や指数型  $e^{-r/r_0}$  の力に比べてゆっくりと減少する。なるほど, 上記の全断面積の計算過程に見て取れるように, 確かに発散は微小な散乱角  $\chi \rightarrow 0$  での微分断面積の発散に起因しており, したがって大きな衝突パラメーター  $\rho \rightarrow \infty$  での散乱に関係していることになる。

■ $d\sigma_2$  の式 (19.4) について 式 (19.4) においても式 (16.8), 式 (18.7) と同様に変化量を正の値として定義しており,  $\chi = \pi - 2\theta_2$  であっても  $d\chi = 2d\theta_2$  としなければならない。

\*9 置き換え (14) のときと同じようにこれを満たす  $\theta$  は 2 通りあって, どちらを用いても良い。ここでは  $\sin \theta > 0$  となる  $\theta$  をとることにする。

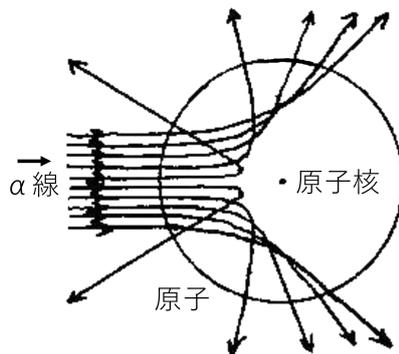


図 39 Coulomb 斥力による散乱では、力の中心の近くを通る入射粒子ほど (衝突パラメーターが小さいほど) 大きな斥力を受けて散乱角が大きくなる

■有効断面積をエネルギー損失の関数として表した式 (19.8) について

$$d\varepsilon = \frac{2m^2}{m_2} v_\infty^2 \sin \frac{\chi}{2} \cos \frac{\chi}{2} d\chi, \quad \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\frac{2m^2}{m_2} v_\infty^2} \frac{\cos \frac{\chi}{2} d\chi}{\sin^3 \frac{\chi}{2}}$$

による.

### § 19, 問題

1 場  $U = \alpha/r^2$  ( $\alpha > 0$ ) による散乱断面積  $\phi_0$  の式 (18.4) に  $U = \alpha/r^2$  を代入すると

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \left(\rho^2 + \frac{2\alpha}{mv_\infty^2}\right) \frac{1}{r^2}}} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \frac{2\alpha}{mv_\infty^2}}} \int_0^1 \frac{dX}{\sqrt{1 - X^2}} \quad \left( \sqrt{\rho^2 + \frac{2\alpha}{mv_\infty^2}} \frac{1}{r} \equiv X \right) \\ &= \frac{\pi\rho}{2\sqrt{\rho^2 + \frac{2\alpha}{mv_\infty^2}}} \end{aligned}$$

となる. これを式 (18.1):  $\chi = \pi - 2\phi_0$  に代入し

$$\chi = \pi \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\alpha}{m\rho^2 v_\infty^2}}} \right)$$

を得る. よって

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{d\rho} &= -\frac{2\pi\alpha}{mv_\infty^2} \frac{1}{\rho^3} \frac{1}{\left(1 + \frac{2\alpha}{m\rho^2 v_\infty^2}\right)^{3/2}}, \quad d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin \chi} \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\omega : (18.8) \\ &= \frac{mv_\infty^2}{2\pi\alpha} \rho^4 \left(1 + \frac{2\alpha}{m\rho^2 v_\infty^2}\right)^{3/2} \frac{d\omega}{\sin \chi} \end{aligned}$$

であり,

$$1 + \frac{2\alpha}{m\rho^2 v_\infty^2} = \left( \frac{\pi}{\pi - \chi} \right)^2, \quad \frac{2\alpha}{mv_\infty^2} \frac{1}{\rho^2} = \frac{\chi(2\pi - \chi)}{(\pi - \chi)^2}$$

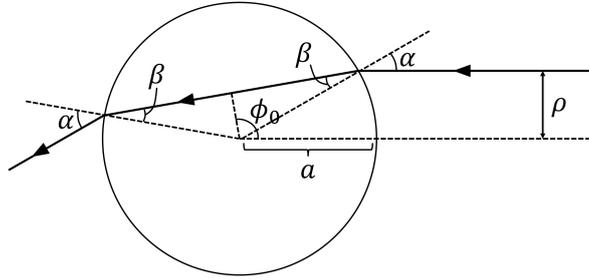


図 40  $r > a$  で  $U = 0$ ,  $r < a$  で  $U = -U_0$  のポテンシャル井戸による散乱 (§ 7 の問題より屈折率  $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \sqrt{1 + \frac{2U_0}{mv_\infty^2}}$ )

を用いて  $\rho$  を消去すると

$$d\sigma = \frac{2\pi^2 \alpha}{mv_\infty^2} \frac{\pi - \chi}{\chi^2 (2\pi - \chi)^2} \frac{d\alpha}{\sin \chi}$$

となる.

2 球内部  $r < a$  で深さ  $U_0$  を持つポテンシャル井戸による散乱 (図 40) の断面積  $\sin \alpha = \rho/a$  のとき  $\cot \alpha = \frac{\sqrt{1 - (\rho/a)^2}}{\rho/a}$  であり, これを  $\cos \frac{\chi}{2} - \cot \alpha \sin \frac{\chi}{2} = \frac{1}{n}$  に代入して

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1 - (\rho/a)^2}}{\rho/a} \sin \frac{\chi}{2} &= \cos \frac{\chi}{2} - \frac{1}{n}, \\ \therefore \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 &= \left[ \frac{(\cos \frac{\chi}{2} - \frac{1}{n})^2 + \sin^2 \frac{\chi}{2}}{\sin^2 \frac{\chi}{2}} \right]^{-1} = \frac{n^2 \sin^2 \frac{\chi}{2}}{n^2 + 1 - 2n \cos \frac{\chi}{2}} \end{aligned}$$

を得る. これを両辺微分すると

$$2\rho d\rho = a^2 n^2 \frac{\sin \frac{\chi}{2} \left\{ \cos \frac{\chi}{2} (1 + n^2 - 2n \cos \frac{\chi}{2}) - n \sin^2 \frac{\chi}{2} \right\}}{(1 + n^2 - 2n \cos \frac{\chi}{2})^2} d\chi$$

であり, 右辺において

$$\cos \frac{\chi}{2} (1 + n^2 - 2n \cos \frac{\chi}{2}) - n \sin^2 \frac{\chi}{2} = (n \cos \frac{\chi}{2} - 1) (n - \cos \frac{\chi}{2})$$

と書き換えられることに注意すると, 断面積

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\rho(\chi)}{\sin \chi} \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\alpha : (18.8) \\ &= \frac{a^2 n^2}{4 \cos \frac{\chi}{2}} \frac{(n \cos \frac{\chi}{2} - 1) (n - \cos \frac{\chi}{2})}{(1 + n^2 - 2n \cos \frac{\chi}{2})^2} d\alpha \end{aligned}$$

を得る.

上式  $\left(\frac{\rho}{a}\right)^2 = \frac{n^2 \sin^2 \frac{\chi}{2}}{n^2 + 1 - 2n \cos \frac{\chi}{2}}$  の右辺は  $0 \leq \chi \leq \pi/2$  において単調増加するから,  $\rho$  が最大値  $a$  をとるとき  $\chi = \chi_{\max}$  となる.  $\sin \alpha = \rho/a$  によればこのとき  $\alpha = \pi/2$  だから,  $\cos \frac{\chi}{2} - \cot \alpha \sin \frac{\chi}{2} = \frac{1}{n}$  から

$$\cos \frac{\chi_{\max}}{2} = \frac{1}{n}$$

が得られる。[ $n \rightarrow 1$  とすると  $\chi_{\max} \rightarrow 0$  (屈折しない).]

最後に全断面積を計算しよう。

$$d\sigma = 2\pi \sin \chi d\chi = 4\pi \sin \frac{\chi}{2} \cos \frac{\chi}{2} d\chi = -8\pi \cos \frac{\chi}{2} d\left(\cos \frac{\chi}{2}\right)$$

に注意すると

$$\sigma = 2\pi a^2 n^2 \int_{1/n}^1 \frac{(nc-1)(n-c)}{(1+n^2-2nc)^2} dc, \quad c \equiv \cos \frac{\chi}{2}$$

となる。ここで被積分関数を

$$\frac{(nc-1)(n-c)}{(1+n^2-2nc)^2} = -\frac{1}{4n} + \frac{(n^2-1)^2}{4n} \frac{1}{(1+n^2-2nc)^2}$$

と書き換えると、積分は

$$-\frac{1}{4n} \int_{1/n}^1 dc = -\frac{n-1}{4n^2},$$

$$\frac{(n^2-1)^2}{4n} \int_{1/n}^1 \frac{dc}{(1+n^2-2nc)^2} = -\frac{1}{2n} \frac{(n^2-1)^2}{4n} \int_{n^2-1}^{(n-1)^2} \frac{dX}{X^2} = \frac{(n^2-1)^2}{8n^2} \left\{ \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2-1} \right\}$$

と実行される。これらを足すと  $-\frac{n-1}{4n^2} + \frac{(n^2-1)^2}{8n^2} \left\{ \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2-1} \right\} = \frac{1}{2n^2}$  となるので、全断面積

$$\sigma = 2\pi a^2 n^2 \times \frac{1}{2n^2} = \pi a^2$$

を得る。

虹 § 7 の問題の箇所而言及したように、同じ屈折率の界面における粒子と光線の屈折で、軌跡は変わらない。これを踏まえ、ここで半径  $a$ 、屈折率  $n \equiv 1.33 \equiv 4/3$  の球状の水滴による光の散乱を考えよう。主虹は図 41 のような光線の屈折・反射から現れる。幾何学的に光線のそれる角度は

$$\theta = 4\alpha - 2\beta$$

であり、入射角  $\alpha$  と反射角  $\beta$  は Snell の法則  $\sin \alpha = n \sin \beta$  で関係付けられる。角度  $\theta$  は

$$\rho = a \sin \alpha = a(n \sin \beta)$$

の関係を通じて、“衝突パラメーター (径数)”  $\rho$  の関数となっている。無次元化した衝突パラメーター  $\tilde{\rho} \equiv \rho/a$  を導入してあからさまに書けば

$$\theta = 4 \arcsin \frac{\tilde{\rho}}{n} - 2 \arcsin \tilde{\rho} \quad (23)$$

であり、 $\theta$  と  $\tilde{\rho}$  の関係は図 42 のようになる。ここから  $\theta$  軸を等間隔に区切ると、極大  $\theta_{\max} (\equiv 42^\circ)$  付近では対応する  $\rho$  の幅が広がるので、光は  $\theta_{\max}$  方向に強く散乱されることが期待される。また  $\theta > \theta_{\max}$  の方向には全く光が来ない。

したがって空気中の個々の水滴は、 $\rho = 0$  の太陽光の入射軸と成す角  $42^\circ$  の方向に、軸対称に光を強く反射する。このとき太陽を背にして立つ人の目に飛び込む光は、図 43 のように目を頂点とし、自身の影の先端に向かう視線と頂角  $42^\circ$  を成す円錐上の水滴に由来する (これらの水滴だけが輝いて見える)。これは視界において  $42^\circ$  の向きにある円弧上の領域が明るく見えることを意味する。ただし媒質中の電磁気学によれば、赤い光よりも紫の光の方が屈折率が大きいので、強く反射される角度が小さくなる。よって円弧の内側から外側に

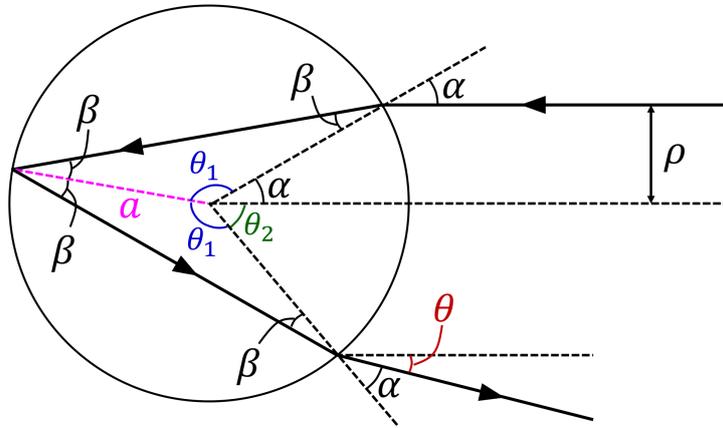


図 41  $\theta_1 = \pi - 2\alpha$ ,  $\theta_2 = 2\pi - 2\theta_1 - \beta = 4\alpha - \beta$ ,  $\theta = \theta_2 - \beta = 4\alpha - 2\beta$

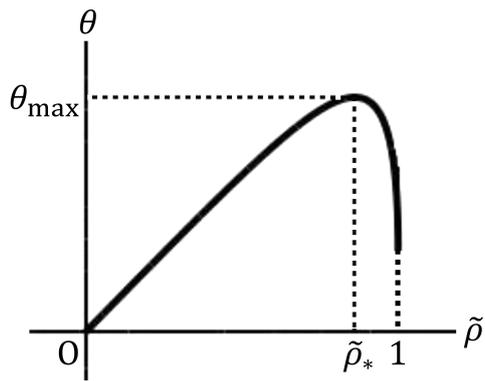


図 42 屈折率  $n = 4/3$  に対する関数 (23) のグラフ

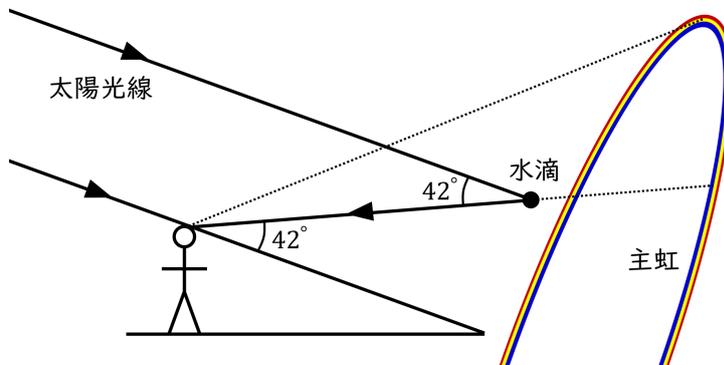


図 43 主虹が見える機構

向かって紫から赤に変化するグラデーションが付き、虹が見える。その外側  $\theta > \theta_{\max}$  は暗く見える。(実際には「Alexander の暗帯」を経て、理想的にはすぐ外側に「副虹」が見える。)

さて、 $\theta$  は通常の散乱角とは定義が異なるものの、 $\theta$  の範囲に対応する微分断面積を考えることはできる。実際、水滴への入射光線が  $\rho = 0$  の軸周りに角度  $\phi$  だけ回転すると、射出する光線も  $\phi$  回転するから、光が水滴から見て立体角  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$  の方向に散乱されるには、入射光線の断面積  $d\sigma = \rho d\rho d\phi$  に入らねばならない。すると結局、断面積は式 (18) と同じ形の表式

$$\sigma(\theta) \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\sin\theta} \rho(\theta) \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right|$$

で与えられることになる。図 42 のグラフより  $\tilde{\rho}_*$  において微分係数  $d\rho/d\theta$  が発散するので、 $\sigma(\theta_{\max}) = \infty$ 。また  $\theta > \theta_{\max}$  で  $\sigma(\theta) = 0$  となる。この機構を虹散乱という [6, p.147]。他方、もとの問題 2 の  $\rho(\chi)$  は  $\rho(0) = 0$  から  $\rho(\chi_{\max}) = a$  まで有限の傾きで単調増加し、傾きは連続的にゼロになるので、虹散乱は現れない。

最後に微分係数の前の因子  $\rho(\theta)/\sin\theta$  が、 $\theta = 0$  となる  $\rho = 0$  で発散しないことを確かめておこう。 $\tilde{\rho} \approx 0$  のとき

$$\frac{1}{\sin\theta} \tilde{\rho}(\theta) = \frac{\tilde{\rho}}{\sin\left(4 \arcsin \frac{\tilde{\rho}}{n} - 2 \arcsin \tilde{\rho}\right)} \simeq \frac{\tilde{\rho}}{\sin\left(\left(\frac{4}{n} - 2\right) \tilde{\rho}\right)} \simeq \frac{1}{\frac{4}{n} - 2} \quad (\text{有限})$$

であり、 $n = 4/3$  に対して最右辺は 1 である。

## § 20. 微小角度での散乱

衝突パラメーターが大きい場合、ふれの角度が小さくなる場合を考える。実験室系においてふれの角度  $\theta_1$  は

$$\begin{aligned} \theta_1 \simeq \sin\theta_1 &= \frac{p'_{1y}}{p'_1} \quad (xy \text{ 平面における散乱, 粒子 1 が } x \text{ 軸に沿って入射}) \\ &\simeq \frac{p'_{1y}}{m_1 v_\infty} = \frac{1}{m_1 v_\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_y dt = -\frac{1}{m_1 v_\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dU}{dr} \frac{y}{r} dt \simeq -\frac{1}{m_1 v_\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dU}{dr} \frac{\rho}{r} \frac{dx}{v_\infty} \\ &\quad (\text{積分はすでに小さな量 } U \text{ を含んでいるため,}) \\ &\quad \text{粒子は直線 } y = \rho \text{ に沿って一定速度 } v_\infty \text{ で運動すると考えたときの誤差は高次の微小量}) \\ &= -\frac{2\rho}{m_1 v_\infty^2} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dU}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \quad (r^2 = x^2 + \rho^2) \end{aligned}$$

と計算される。

ここで得られた  $\rho$  に対する  $\theta_1$  の関係を用いて有効断面積は

$$d\sigma = \frac{\rho(\theta_1)}{\sin\theta_1} \left| \frac{d\rho}{d\theta_1} \right| d\theta_1 \simeq \left| \frac{d\rho}{d\theta_1} \right| \frac{\rho(\theta_1)}{\theta_1} d\theta_1$$

と計算される。

§ 20, 問題

1 慣性中心系を利用した  $\theta_1$  の公式の再導出

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{mv_\infty^2}} &= \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}} \sqrt{1 - \frac{2U/mv_\infty^2}{1 - \rho^2/r^2}} \simeq \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}} \left(1 - \frac{U/mv_\infty^2}{1 - \rho^2/r^2}\right), \\ \therefore -\frac{\partial}{\partial \rho} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{mv_\infty^2}} &\simeq \frac{\rho}{r^2 \sqrt{1 - \rho^2/r^2}} + \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{U}{mv_\infty^2 \sqrt{1 - \rho^2/r^2}}, \\ \therefore \phi_0 &\simeq \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{1 - \rho^2/r^2}} + \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{U(r) dr}{mv_\infty^2 \sqrt{1 - \rho^2/r^2}}. \end{aligned}$$

第1の積分は  $r_{\min}$  を  $\rho$  で近似すると

$$\int_{\rho}^{\infty} \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{1 - \rho^2/r^2}} = \int_0^{\pi/2} d\phi = \frac{\pi}{2} \quad (\rho/r = \cos \phi)$$

となるので,

$$\begin{aligned} \chi &= \pi - 2\phi_0 \\ &\simeq -2 \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{rU(r) dr}{mv_\infty^2 \sqrt{r^2 - \rho^2}} \\ &= -\frac{2}{mv_\infty^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{r_{\min}}^{\infty} \left( \frac{d}{dr} \sqrt{r^2 - \rho^2} \right) U(r) dr \\ &= \frac{2}{mv_\infty^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{r_{\min}}^{\infty} \sqrt{r^2 - \rho^2} \frac{dU}{dr} dr \\ &= -\frac{2\rho}{mv_\infty^2} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dU}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \end{aligned}$$

を得る. 最後に  $r_{\min}$  を  $\rho$  で近似したものは, p.69 脚注の式  $\theta_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2} \chi$  により式 (20.3):

$$\theta_1 = -\frac{2\rho}{m_1 v_\infty^2} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dU}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}$$

に書き換えられる.

2  $U = \alpha/r^n$  ( $n > 0$ ) による微小角の散乱  $\rho^2/r^2 = u$  とおくと  $\theta_1$  の式に現れる積分は

$$\begin{aligned} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dr}{r^{n+2} \sqrt{1 - (\rho/r)^2}} &= \frac{1}{2\rho^{n+1}} \int_0^1 du u^{\frac{n-1}{2}} (1-u)^{-\frac{1}{2}}, \\ \frac{1}{2\rho^{n+1}} \int_0^1 du u^{\frac{n-1}{2}} (1-u)^{-\frac{1}{2}} &= B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \sqrt{\pi}}{\frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \end{aligned}$$

となる.

特に Coulomb ポテンシャルを考えて  $n = 1$  とおくと,  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \Gamma(1) = 1$  より微小なふれ角は

$$\theta_1 = \frac{2\alpha}{m_1 v_\infty^2 \rho}$$

で与えられる. 例えば  $\rho$  に原子半径  $a$  を代入すると, 原子内部に正電荷が一様に分布しているモデルでの荷電粒子の散乱角度を評価できる. (実際には正電荷は小さな原子核に集中しているため, 大角度での散乱が起こり得る.)

## 第5章 微小振動

### § 21. 1次元の自由振動

1つの自由度を持つ系について、ポテンシャル・エネルギー  $U(q)$  が極小となる安定なつり合いの位置  $q = q_0$  の近くでの微小振動を考える。  $q = q_0$  の近くでポテンシャル・エネルギーは

$$U(x) \simeq \frac{k}{2}x^2, \quad x \equiv q - q_0, \quad k > 0$$

と近似される ( $U(q = q_0) = 0$  とした)<sup>\*10</sup>。一方、運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}a(q)\dot{x}^2 \simeq \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad m \equiv a(q_0)$$

と近似される ( $x$  が粒子のデカルト座標であれば、  $m$  は質量である) [左辺の表式は§ 5]。このときラグランジアンは

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$$

となるので、運動方程式は

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

となり、系は調和振動

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) = \operatorname{Re}\{Ae^{i\omega t}\}$$

をおこなう。ここに

$$a: \text{振幅}, \quad \omega t + \alpha: \text{位相}, \quad \omega: (\text{円} [\text{角}]) \text{ 振動数}, \quad A = ae^{i\alpha}: \text{複素振幅}.$$

### § 21 について

■「いまの近似では……十分である」(p.71 下から 3,2 行目) について  $O(x) = O(\dot{x})$  と見て

$$\frac{1}{2}a(q)\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\{a(q_0) + a'(q_0)x + \dots\}\dot{x}^2 = \frac{1}{2}a(q_0)\dot{x}^2 + O(x^3)$$

と考えるからである。

■**単振動の重要性** 本節で見たように、数学的な理由により一般につり合い点周りの微小振動は単振動によって近似できる(多自由度の場合は§ 23)。ただし  $k = U''(q_0) = 0$  となる場合は例外である。§ 11 の問題 2 で扱った、ポテンシャル  $U = A|x|^n$  ( $n \neq 2$ ) の下での振動は、そのような例外的なケースにあたる。単振動に興味を持たれる他の理由として、任意の周期的な運動は、あらゆる振動数(基本振動数の整数倍)の単振動の重ね合わせとして表現できることが挙げられる(Fourier 展開)。

<sup>\*10</sup>  $U(q)$  を  $x \equiv q - q_0$  の関数と見た場合、 $U(q) = f(x)$  のように関数形が変化するけれど、ここでは  $f(x)$  を改めて  $U(x)$  と書く。

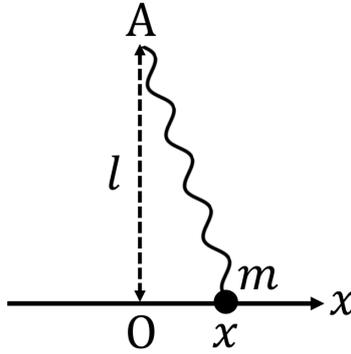


図 44 § 21 問題 3 の図 (教科書の図 22)

■ 「線形の演算……実部をとることにすればよい」 (p.73, 1.17-1.19) について 運動方程式が線形の方程式  $L(x) = 0$  であり, 複素表示の  $x$  がこれを満たすとき, 線形性

$$0 = L(x) = L(\operatorname{Re}[x]) + iL(\operatorname{Im}[x])$$

により実部  $\operatorname{Re}[x]$  も運動方程式を満たすことが保証される.

### § 21, 問題

問題 3 図 44 の系の微小振動 ばね定数  $k$  とばねの自然長  $l_0$  を導入して, 丁寧に考えよう. 位置  $x$  でのばねの伸びは

$$\Delta l = \sqrt{x^2 + l^2} - l_0$$

なので, 質点に働く力の  $x$  成分とポテンシャル・エネルギーはそれぞれ,

$$F(x) = -k(\sqrt{x^2 + l^2} - l_0) \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}}, \quad U(x) = \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2 + l^2} - l_0)^2$$

と表される. まず  $F(0) = 0$  なので  $x = 0$  は常につり合いの位置であり,  $x$  の 2 次までの近似でポテンシャルは

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x^2 - 2l_0\sqrt{x^2 + l^2}) + \text{const} \simeq \frac{1}{2}k\left(1 - \frac{l_0}{l}\right)x^2 + \text{const}. \quad \left(\because \sqrt{x^2 + l^2} \simeq l + \frac{x^2}{2l}\right)$$

となる (同じ近似で  $F(x) \simeq -kx\left(1 - \frac{l_0}{l}\right)$ ). もちろん

$$U''(x)(= -F'(x)) = k \frac{x^2\sqrt{l^2 + x^2} - l^2(\sqrt{l^2 + x^2} - l_0)}{(l^2 + x^2)^{3/2}}, \quad \therefore U''(0) = k\left(1 - \frac{l_0}{l}\right)$$

としても同じ結果が得られる. いずれにせよ, ここから「解」にあるように,  $x = 0$  の近くでポテンシャルは, ばねの長さ  $l$  からの伸び

$$\delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l \simeq \frac{x^2}{2l} \quad (\text{自然長から伸び } \Delta l \text{ との混同に注意})$$

と\*11, 原点での力  $F_0 \equiv k(l - l_0)$  ( $F(0)$  との混同に注意) の積  $F_0 \delta l$  で近似できることになる (この結果を直観で見抜けたら見事である). よってつり合い点  $x = 0$  は  $l > l_0$  では安定であり, 微小振動の角振動数は

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{l_0}{l}\right)} \left(= \sqrt{\frac{F_0}{ml}}\right).$$

他方  $l < l_0$  では,  $x = 0$  は不安定なつり合い点となる. これは質点が  $x = 0$  を通過するとき, ばねは  $l > l_0$  ならば伸びており,  $l < l_0$  ならば縮んでいることを考えれば, もっともな結果である.

次に  $F = 0$  となるつり合いの位置をすべて求めよう. すると  $l$  が自然長  $l_0$  よりも短い場合には, 直観的にも納得がいくように, ばねが自然長となる位置

$$x = \pm x_0, \quad x_0 \equiv \sqrt{l_0^2 - l^2}$$

が安定なつり合い点となることが分かる (以上でつり合いの位置は尽くされる). 実際,

$$U''(x_0) = k \left(1 - \frac{l^2}{l_0^2}\right) > 0$$

であり, 微小振動の角振動数は

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{l^2}{l_0^2}\right)}.$$

もちろんポテンシャルを  $x_0$  からの変位  $\xi \equiv x - x_0$  で展開しても同じ結果が得られる:

$$\sqrt{x^2 + l^2} = \sqrt{(x_0 + \xi)^2 + l^2} \simeq \sqrt{l_0^2 + 2x_0\xi} \simeq l_0 + \frac{x_0}{l_0}\xi, \quad \therefore U(x) \simeq \frac{1}{2}k\frac{x_0^2}{l_0^2}\xi^2.$$

ばねの伸び  $\sqrt{(x_0 + \xi)^2 + l^2} - l_0 \simeq \frac{x_0}{l_0}\xi$  が既に  $\xi$  の 1 次の微小量であることに注意すると, 同じ近似で力は

$$F(x) \simeq -k\frac{x_0}{l_0}\xi \cdot \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + l^2}} = -k\frac{x_0^2}{l_0^2}\xi.$$

なおポテンシャルの概形は図 45 のようである.

**問題 4** 図 46(a) の系の微小振動  $\varphi$  は図 46(a) のように, 円の中心から質点を見た向きとして定義されており, 質点が  $|\varphi| > 0$  に変位するとばねが伸びることが, 幾何学的に見てとれる. よって問題 3 と同様,  $l$  が自然長よりも長ければ,  $\varphi = 0$  は安定なつり合いの位置となることが期待される.  $\varphi$  の 2 次までの近似で, 位置  $\varphi$  でのばねの長さは

$$l' = \sqrt{\{l + r(1 - \cos \varphi)\}^2 + (r \sin \varphi)^2} \simeq \sqrt{l^2 + r(l+r)\varphi^2} \simeq l + \frac{r(l+r)}{2l}\varphi^2$$

と表される. よって問題 3 と同様, ポテンシャルは  $U = F(l' - l) = F\frac{r(l+r)}{2l}\varphi^2$  (ただし表記を  $F_0 \rightarrow F$  と教科書に合わせた). 他方, 運動エネルギーは  $T = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2$  だから, 微小振動の角振動数

$$\omega = \sqrt{\frac{F(r+l)}{rml}}$$

を得る. これはあらかじめ期待されるように,  $r \rightarrow \infty$  の極限で問題 3 の振動数  $\omega = \sqrt{\frac{F}{ml}}$  に一致する.

\*11 ここでは  $\theta \equiv \angle A$  を用いて  $\delta l \simeq x \sin \theta \simeq \frac{x^2}{l}$  としてはいけない. 最初の近似に伴う誤差  $l(1 - \cos \theta) \simeq \frac{l\theta^2}{2}$  ( $\simeq \frac{x^2}{2l}$ ) が  $\theta$  の 2 次程度だからである.

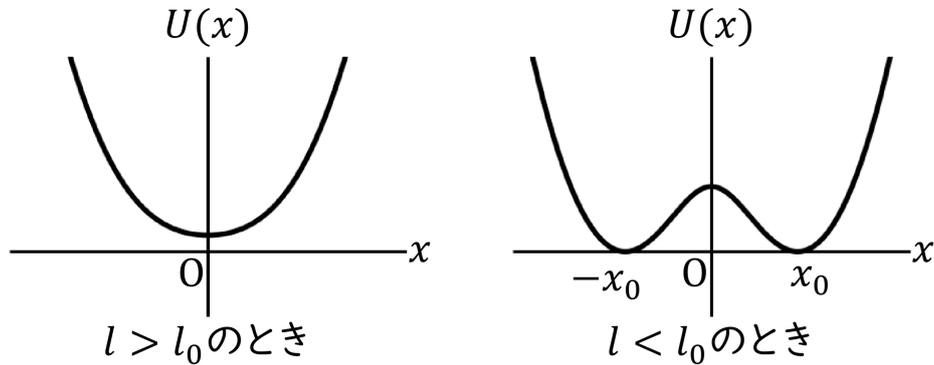


図 45 ポテンシャル  $U(x) = \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2 + l^2} - l_0)^2$  の概形

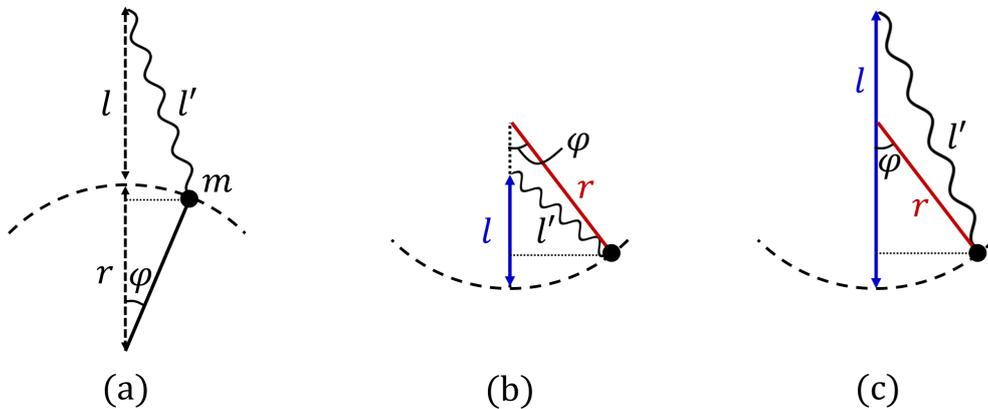


図 46 § 21 問題 4 の図 (a) (教科書の図 23) と, 円が逆向きの場合 (b) :  $l < r$ , (c) :  $l > r$

関連して, 図 46(b,c) のように円が下に凸ならば,  $l \leq r$  のいずれの場合にもばねの長さは

$$l' = \sqrt{\{l - r(1 - \cos \varphi)\}^2 + (r \sin \varphi)^2} \simeq l + \frac{r(l-r)}{2l} \varphi^2$$

となる. よって質点が  $|\varphi| > 0$  に変位するとき, ばねは  $l < r$  であれば伸び,  $l > r$  であれば縮む (少なくとも局所的には). このことは図 46(b,c) から幾何学的に見て取れる.

**問題 5** 答の振動数  $\omega = \sqrt{\frac{g(m_1+m_2)}{m_1 l}}$  は  $m_1 \gg m_2$  の極限で, 質点  $m_1$  が固定されている場合の単振子の振動数  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$  に一致する.

**問題 6** サイクロイド振子は周期が厳密に振幅に依らないこと 曲線に沿って往復運動する粒子 (質量  $m$ ) の振動数が振幅によらないような曲線の形を求めよう. 曲線に沿ってつり合いの位置から測った弧長  $s$  を用いて, 曲線上の粒子のポテンシャル・エネルギーが  $U = ks^2/2$  と表されるとき, 運動エネルギーは  $T = ms^2/2$  であることとより, 振動数は振幅によらず  $\omega = \sqrt{k/m}$  となる. 重力による位置エネルギー  $mgy$  が  $U = ks^2/2$  と一致することを要求すると,

$$y = \frac{\omega^2}{2g} s^2$$

を得る。他方、 $ds^2 = dx^2 + dy^2$  より

$$\begin{aligned} x &= \int^y \sqrt{\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 - 1} dy = \int^y \sqrt{\frac{g}{2\omega^2 y} - 1} dy \\ &= \frac{g}{4\omega^2} (\xi + \sin \xi) \quad \left(y = \frac{g}{4\omega^2} (1 - \cos \xi)\right) \end{aligned} \quad (24)$$

となる。上式  $x = x(\xi), y = y(\xi)$  はサイクロイドのパラメータ表示となっている。

上式 (24) 最後の等号の確認

$$\begin{aligned} dy &= \frac{g}{4\omega^2} \sin \xi d\xi, \quad \sqrt{\frac{g}{2\omega^2 y} - 1} = \sqrt{\frac{1 + \cos \xi}{1 - \cos \xi}} \\ \therefore x &= \int^y \sqrt{\frac{g}{2\omega^2 y} - 1} dy \\ &= \frac{g}{4\omega^2} \int^\xi \sqrt{\frac{1 + \cos \xi}{1 - \cos \xi}} \sin \xi d\xi \\ &= \frac{g}{4\omega^2} \int^\xi (1 + \cos \xi) d\xi \\ &= \frac{g}{4\omega^2} (\xi + \sin \xi) + \text{const.} \end{aligned}$$

## § 22. 強制振動

強制振動… 外場の下での系の振動 (微小振動を考え、外場は十分弱いものとする)

- 運動方程式

外場のポテンシャル・エネルギー

$$U_e(x, t) \simeq U_e(0, t) + xF(t), \quad F(t) \equiv -\frac{\partial}{\partial x} U_e(0, t)$$

をラグランジアンに加え ( $U_e(0, t)$  は時間の完全導関数として落とせる),

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 + xF(t), \quad \therefore \ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F(t), \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

- 周期的な外場  $F(t) = f \cos(\gamma t + \beta)$

— 一般解

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \cos(\gamma t + \beta). \quad (22.4)$$

系の固有振動数  $\omega$  での振動と強制力の振動数  $\gamma$  での振動から成る。

—  $\gamma \rightarrow \omega$  のとき振幅は時間とともに線形に増大 (共鳴):

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m\omega} t \sin(\omega t + \beta). \quad (22.5)$$

いずれ微小振動の仮定そのものが無効になり、この結果を適用できなくなる。

- 共鳴の近く  $\gamma = \omega + \varepsilon$  ( $\varepsilon$  は微小量) を考えると

$$x = Ae^{i\omega t} + Be^{i\gamma t} = \tilde{C}e^{i\omega t}, \quad \tilde{C} = A + Be^{i\varepsilon t}.$$

角速度  $\omega$  での振動の振幅  $|\tilde{C}| \equiv C$  は

$$|a - b| \leq C \leq a + b, \quad a \equiv |A|, \quad b \equiv |B|$$

のあいだを振動数  $\varepsilon$  で振動する (うなり).

- 任意の強制力  $F(t)$  に対する一般解

$$\xi \equiv \dot{x} + i\omega x, \quad \xi(t) = e^{i\omega t} \left\{ \int_0^t \frac{1}{m} F(t) e^{-i\omega t} dt + \xi(0) \right\}. \quad (22.10)$$

(導出は下記.)

- 系が外力の源から得るエネルギー

系のエネルギーは  $E = \frac{1}{2}m|\xi|^2$  と表される.

よって系が力の働いている全期間  $-\infty \leq t \leq \infty$  に得るエネルギーは、  
系のはじめのエネルギーをゼロと仮定すると、

$$E = \frac{1}{2}m|\xi(\infty)|^2 = \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2$$

(系の固有振動数  $\omega$  に関する力  $F(t)$  の Fourier 成分の絶対値の 2 乗).

## § 22, 式の導出など

■一般解 (22.4),(22.5) について  $\gamma \neq \omega$  のときの特殊解は  $x = b \cos(\gamma t + \beta)$  という形であり, 運動方程式から  $b = f/m(\omega^2 - \gamma^2)$  と定まる. これを同次方程式の一般解  $x = a \cos(\omega t + \alpha)$  に加えて式 (22.4) を得る.

次に  $\gamma \rightarrow \omega$  の場合の一般解を見いだすために, 定数の記号を適当に改めて, 式 (22.4) を

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} [\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)]$$

と書き直す [具体的には  $a \rightarrow a - f/m(\omega^2 - \gamma^2)$  とすれば良い]. 第 2 項の  $\gamma \rightarrow \omega$  における極限は, ロピタルの定理を適用 [して分母・分子を  $\gamma$  で微分し,  $\gamma \rightarrow \omega$  と] すると, 式 (22.5) 第 2 項を与える. [実際,  $\gamma = \omega$  のときの特殊解は  $x = bt \cos(\omega t + \beta)$  の形を持つことが知られている.]

■式 (22.10) の導出 複素量  $\xi = \dot{x} + i\omega x$  を導入すると, 運動方程式は

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F(t) \quad \rightarrow \quad \frac{d\xi}{dt} - i\omega \xi = \frac{1}{m} F(t)$$

と書き換えられる. 解を  $\xi = A(t)e^{i\omega t}$  とおくと,  $A$  に対する式

$$\dot{A} = \frac{1}{m} F(t) e^{-i\omega t}$$

が得られる. これを積分して式 (22.10) を得る.

## § 22 について

■周期的な外力に対する特殊解 式 (22.5) における  $\gamma = \omega$  の場合の特殊解が式 (22.4) における  $\gamma \neq \omega$  の場合の特殊解と  $\gamma \rightarrow \omega$  の極限でつながっているという数学的事実を、式 (22.5) の導出過程 (p.76 下から 2 行目 ~ p.77, 1.7) で確かめたことになる。

■p.77 脚注について  $A + Be^{i\epsilon t} = Ce^{i\delta}$  と書くと  $x = Ce^{i(\omega t + \delta)}$  となる。ここで  $\delta$  が時間変化するということ。

■ $C^2$  の式 (22.7) について

$$\begin{aligned} C^2 &= (ae^{i\alpha} + be^{i\beta}e^{i\epsilon t})(ae^{i\alpha} + be^{i\beta}e^{i\epsilon t})^* \\ &= (ae^{i\alpha} + be^{i\beta}e^{i\epsilon t})(ae^{-i\alpha} + be^{-i\beta}e^{-i\epsilon t}) \\ &= a^2 + b^2 + abe^{i(\epsilon t + \beta - \alpha)} + abe^{-i(\epsilon t + \beta - \alpha)} \\ &= a^2 + b^2 + 2ab \cos(\epsilon t + \beta - \alpha). \end{aligned}$$

■式 (22.9):  $\xi = \dot{x} + i\omega x$  について これは位相空間を複素平面と同一視して、その中での系の位置を表したものである。ただし実部と虚部はともに速度の次元を持ち、外力がない場合、系は  $\xi(t) = \xi_0 e^{i\omega t}$  で表される複素平面上の円運動を行う。

■「 $\xi(-\infty) = 0$  として」(p.78, 1.15) について  $E = m|\xi|^2/2$  なので「系のはじめのエネルギーをゼロと仮定し」(p.78, 1.12) たことに対応している。

■「 $e^{-i\omega t} \cong 1$  とおくことができる」(p.78 下から 2 行目) について 一般性を失うことなく、つまりエネルギー (22.12) の値を変えることなく外力の働く時間を  $t = 0 \sim \Delta t (\omega \Delta t \ll 1)$  とでき、この間  $e^{-i\omega t} \cong e^{-i\omega \cdot 0} = 1$  となるからであると考えられる。

■p.79, 1.1~1.3 について 「系のはじめのエネルギーをゼロと仮定」(p.78, 1.12) したため、始状態  $t = -\infty$  での系の運動量はゼロである。よって終状態  $t = \infty$  における系の運動量は運動量変化  $\Delta p = \int F dt$  に一致する。運動量  $\Delta p = \int F dt$  が伝えられる短い時間では系の位置したがってポテンシャル・エネルギーは変化せず、全エネルギーの変化は運動エネルギーの変化  $\Delta p^2/2m$  に一致する。

## § 22, 問題

1(d) 外力を複素表示した運動方程式

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} e^{(-\alpha + i\beta)t}$$

の特殊解を  $x = Ae^{(-\alpha + i\beta)t}$  の形に仮定すると、

$$A\{(-\alpha + i\beta)^2 + \omega^2\} = \frac{F_0}{m}, \quad \therefore A = \frac{F_0}{m} \frac{(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2) + 2i\alpha\beta}{(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}$$

となる。この  $A$  に対して一般解は

$$x = a \cos \omega t + b \sin \omega t + Ae^{(-\alpha + i\beta)t}$$

と書くことができる。初期条件を考慮して任意定数  $a, b$  を定めると

$$x(0) = 0 \quad \rightarrow \quad a = -A, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \rightarrow \quad b = -\frac{A(\alpha - i\beta)}{\omega}A$$

となるから

$$x = \frac{F_0\{(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2) + 2i\alpha\beta\}}{m\{(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2\}} \left\{ -\cos\omega t + \frac{\alpha - i\beta}{\omega} \sin\omega t + e^{(-\alpha+i\beta)t} \right\}$$

を得る。実部をとると

$$x = \frac{F_0}{m\{(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2\}} \left[ -(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2) \cos\omega t + \frac{\alpha}{\omega}(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2) \sin\omega t + e^{-\alpha t} \{(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2) \cos\beta t - 2\alpha\beta \sin\beta t\} \right]$$

となる。これは系の固有振動数  $\omega$  と外力の振動数  $\beta$  での振動の重ね合せとなっている。

$\beta = 0$  とおくと

$$A = \frac{F_0}{m(\omega^2 + \alpha^2)}, \quad a = -A, \quad b = \frac{\alpha}{\omega}A$$

より小問 (c) の答

$$\begin{aligned} x &= a \cos\omega t + b \sin\omega t + Ae^{-\alpha t} \\ &= \frac{F_0}{m(\omega^2 + \alpha^2)} \left( -\cos\omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin\omega t + e^{-\alpha t} \right) \end{aligned}$$

が再現される。

2  $t > T$  に対する運動方程式  $\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m}$  は特殊解  $x = \frac{F_0}{m\omega^2}$  を持つので、その一般解は

$$\begin{aligned} x &= c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t + \frac{F_0}{m\omega^2} \\ &= a \cos(\omega\tau - \alpha) + \frac{F_0}{m\omega^2}, \quad \tau \equiv t - T \end{aligned}$$

と書ける。これは位置  $x = \frac{F_0}{m\omega^2}$  を中心とする振幅  $a \equiv \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$  の振動を表す。初期条件

$$x(\tau = 0) = x_0 \equiv \frac{F_0}{mT\omega^3}(\omega T - \sin\omega T), \quad \dot{x}(\tau = 0) = v_0 \equiv \frac{F_0}{mT\omega^2}(1 - \cos\omega T)$$

から任意定数  $c_1, c_2$  を定めると、

$$\begin{aligned} c_1 + \frac{F_0}{m\omega^2} &= x_0, \quad \therefore c_1 = x_0 - \frac{F_0}{m\omega^2} = -\frac{F_0}{mT\omega^3} \sin\omega T, \\ c_2\omega &= v_0, \quad \therefore c_2 = \frac{v_0}{\omega} = \frac{F_0}{mT\omega^3}(1 - \cos\omega T) \end{aligned}$$

となる。

3 「公式  $|\xi|^2 = a^2\omega^2$ 」は  $t > T$  におけるエネルギー (22.11):  $\frac{m}{2}|\xi|^2$  を単振動のエネルギー (21.10):  $\frac{1}{2}m\omega^2 a^2$  と等置して得られる。ここに

$$|\xi|^2 = \left( \frac{F_0}{m\omega} \right)^2 (1 - e^{i\omega T})(1 - e^{-i\omega T}) = 2 \left( \frac{F_0}{m\omega} \right)^2 (1 - \cos\omega T) = \left( \frac{2F_0}{m\omega} \right)^2 \sin^2 \frac{\omega T}{2}$$

を代入して  $a = \frac{2F_0}{m\omega^2} \sin \frac{\omega T}{2}$  を得る。力  $F_0$  が大きいほど、また力の作用する時間  $T$  が長いほど振幅は大きくなっていく (これは自然な結果である)。

このようにある時刻  $T$  以降には外力が作用しないという場合には、同じやり方によって振幅を求めることができる (問題 4, 5 参照)。

4

$$\begin{aligned}
\xi &= e^{i\omega t} \int_0^T \frac{F_0}{m} \frac{t'}{T} e^{-i\omega t'} dt' \\
&= \frac{iF_0}{m\omega T} \left\{ T e^{-i\omega T} - \frac{i}{\omega} (e^{-i\omega T} - 1) \right\}, \\
|\xi|^2 &= \left( \frac{F_0}{m\omega T} \right)^2 \left\{ T e^{i\omega T} + \frac{i}{\omega} (e^{i\omega T} - 1) \right\} \left\{ T e^{-i\omega T} - \frac{i}{\omega} (e^{-i\omega T} - 1) \right\} \\
&= \left( \frac{F_0}{m\omega T} \right)^2 \left( T^2 - 2\frac{T}{\omega} \sin \omega T + \frac{2}{\omega^2} (1 - \cos \omega T) \right)
\end{aligned}$$

を公式  $|\xi|^2 = a^2 \omega^2$  に代入して

$$a = \frac{F_0}{Tm\omega^3} \sqrt{\omega^2 T^2 - 2\omega T \sin \omega T + 2(1 - \cos \omega T)}$$

を得る.

5

$$\begin{aligned}
\xi &= e^{i\omega t} \int_0^T \frac{F_0}{m} \sin \omega t' e^{-i\omega t'} dt' = \frac{F_0}{2im} e^{i\omega t} \int_0^T (1 - e^{-2i\omega t'}) dt' = \frac{F_0}{2im} e^{i\omega t} \left( T - \frac{e^{-2i\omega T} - 1}{2i\omega} \right), \\
|\xi|^2 &= \left( \frac{F_0}{2m} \right)^2 \left( T + \frac{e^{2i\omega T} - 1}{2i\omega} \right) \left( T - \frac{e^{-2i\omega T} - 1}{2i\omega} \right) \\
&= \left( \frac{F_0}{2m\omega} \right)^2 \left\{ (\omega T)^2 + \omega T \sin(2\omega T) + \frac{1 - \cos(2\omega T)}{2} \right\} \\
&= \left( \frac{F_0 \pi}{m\omega} \right)^2 \quad (\because \omega T = 2\pi)
\end{aligned}$$

を公式  $|\xi|^2 = a^2 \omega^2$  に代入し  $a = \frac{F_0 \pi}{m\omega^2}$  を得る.

### § 23. 多くの自由度をもつ系の振動

多くの自由度  $q_i$  を持つ系の、ポテンシャル・エネルギー  $U$  が極小となる位置  $q_i = q_{i0}$  の周りの自由な微小振動を考える. 変位  $x_i = q_i - q_{i0}$  を導入すると,  $U$  の  $x_i$  に関する 2 次近似の下で

$$L = \frac{1}{2} m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - \frac{1}{2} k_{ik} x_i x_k, \quad (23.4)$$

$$\therefore m_{ik} \ddot{x}_k + k_{ik} x_k = 0 \quad (23.5)$$

となる (説明は下記) [和の記号は省略].

各座標  $x_k$  に共通の振動数  $\omega$  での振動

$$x_k = A_k e^{i\omega t} \quad (23.6)$$

を仮定すると, 特有 [永年] 方程式

$$|k_{ik} - \omega^2 m_{ik}| = 0 \quad (23.8)$$

を満たす固有振動数  $\omega = \omega_\alpha$  のみが許容される (理由は下記). 一般解は基準振動

$$\Theta_\alpha = \text{Re}\{C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\}, \quad C_\alpha: \text{任意の複素定数}$$

の重ね合せ  $x_k = \sum_{\alpha} \Delta_{k\alpha} \Theta_{\alpha}$  である.

これは座標  $\{x_k\}$  から, その各々がただ 1 つの単振動を行う基準座標  $\{\Theta_{\alpha}\}$  (または  $\{Q_{\alpha}\}$ ,  $Q_{\alpha} = \sqrt{m_{\alpha}} \Theta_{\alpha}$ ) への変換が可能であることを意味する.

- 基準座標  $\Theta_{\alpha}$  (または  $Q_{\alpha}$ ) は運動方程式

$$\ddot{\Theta}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 \Theta_{\alpha} = 0, \quad \ddot{Q}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha} = 0$$

を満たす. これは各基準座標ごとに成り立つ独立な方程式である.

- ラグランジアン (Lagrangian) の形は

$$L = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{2} (\dot{\Theta}_{\alpha}^2 - \omega_{\alpha}^2 \Theta_{\alpha}^2) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (\dot{Q}_{\alpha}^2 - \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha}^2)$$

となる.

すなわち基準座標への変換は

運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーを同時に対角化する [付録 A 参照].

■ 不変な外場のなかにおかれた 1 個の質点の 3 次元運動 基準座標  $x_i$  (デカルト座標) を用いるとポテンシャル・エネルギーは対角形  $U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 k_i x_i^2$  に, ラグランジアンは  $L = \sum_{i=1}^3 (\frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2} k_i x_i^2)$  の形になる.

→ 第  $i$  軸方向の振動の振動数は  $\omega_i = \sqrt{k_i/m_i}$ .

[ここでは基準座標の選択はポテンシャルの主軸変換に他ならない.]

■ 多くの自由度をもつ系の強制振動 基準座標  $Q_{\alpha}$  を用いると運動方程式は

$$\ddot{Q}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha} = f_{\alpha}(t)$$

の形になる.

## § 23, 式の導出など

■ ラグランジアン (23.4), 運動方程式 (23.5) について ラグランジアン (23.4) における運動エネルギーの表式は § 5 を参照. [ポテンシャルの項については本稿次節で補足.]

対称性  $m_{ik} = m_{ki}, k_{ik} = k_{ki}$  より

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_l} (m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k) = 2m_{lk} \dot{x}_k, \quad \frac{\partial}{\partial x_l} (k_{ik} x_i x_k) = 2k_{lk} x_k$$

となることに注意して, ラグランジアン (23.4) に Lagrange 方程式を適用すると,

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l} - \frac{\partial L}{\partial x_l} = m_{lk} \ddot{x}_k + k_{lk} x_k : (23.5)$$

を得る.

■ 特有方程式 (23.8) について 式 (23.6) を運動方程式 (23.5) に代入すると,

$$(-\omega^2 m_{ik} + k_{ik}) A_k = 0 \tag{23.7}$$

を得る. ここで行列  $(k_{ik} - \omega^2 m_{ik})$  が逆行列を持つと仮定すると, 全ての  $A_k$  がゼロとなる. よって上式 (23.7) が非自明な解  $A_k$  を持つ条件として, 行列式  $|k_{ik} - \omega^2 m_{ik}| = 0$ : (23.8) が要求される.

## § 23 について

■2次近似でのポテンシャル (23.2) について 多変数関数の Taylor 展開

$$\begin{aligned} U(\{x_i\}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x_{i_1} \cdots x_{i_n} (\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} U)_0 \\ &= U_0 + x_i \left( \frac{\partial U}{\partial x_i} \right)_0 + \frac{1}{2} x_i x_j \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0 + \cdots \end{aligned}$$

(添字のゼロは値を安定なつり合いの位置  $x_i = 0$  で評価することを表す) において,

- ポテンシャルの付加定数の任意性を利用して,  $U_0 = 0$  と設定
- 極値条件  $\left( \frac{\partial U}{\partial x_i} \right)_0 = 0$  を適用
- 2次の項の係数を  $k_{ij} \equiv \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0 (= k_{ji})$  と同定
- $x_i$  の3次以上の項を無視

すると, 式 (23.2):  $U = \frac{1}{2} k_{ij} x_i x_j$  を得る.

■「同じことは純粋に数学的な方法によっても確認される」(p.83, l.6) について  $\omega^2$  が正であることが数学的な方法で確認されるから, 物理的な要請であるエネルギーの保存法則に違反しないことが保証される.

■ $m_{ik} A_i^* A_k > 0$  であること 運動エネルギー (23.3):  $\frac{1}{2} m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k$  が正確定の2形式であることに注意すると,  $k_{ik} A_i^* A_k > 0$  を説明する p.83 注脚 1 と同じ論法で  $m_{ik} A_i^* A_k > 0$  も言えて,

$$\omega^2 = \frac{k_{ik} A_i^* A_k}{m_{ik} A_i^* A_k} > 0$$

となる.

■ $A_k = \Delta_{k\alpha} C_\alpha$  (p.83, l.16-21) について

$$M = (m_{ik}), \quad K = (k_{ik}), \quad D = \omega^2 M - K, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_s \end{pmatrix}$$

とおくと, 式 (23.7) は

$$\sum_k (-\omega^2 m_{ik} + k_{ik}) A_k = 0 \quad \rightarrow \quad D\mathbf{A} = 0 \quad (25)$$

とまとめられる. 特有方程式  $|D| = 0$  の解 (固有振動数)  $\omega_\alpha$  に対して  $D = D^{(\alpha)}$ , 上式の解を  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(\alpha)}$  と表記する.

ところで行列  $D^{(\alpha)}$  から第  $i$  行と第  $k$  列を除いた行列の行列式を,  $D^{(\alpha)}$  の小行列式という ( $i, k$  でラベルされる). ここでは慣例に従い, この小行列式に符号  $(-1)^{i+k}$  を付けた余因子を  $\Delta_{ik}^{(\alpha)}$  と書こう. このとき

$$A_k^{(\alpha)} = \Delta_{jk}^{(\alpha)} \quad (j \text{ は任意}) \quad (26)$$

とおくと (次元を合わせる係数は後で導入する),

$$\sum_k D_{ik}^{(\alpha)} A_k^{(\alpha)} = \sum_k D_{ik}^{(\alpha)} \Delta_{jk}^{(\alpha)} = \delta_{ij} |D^{(\alpha)}| = 0 \quad (27)$$

となるので、これは式 (25):  $DA = 0$  の解となる。

上式 (27) の理由 第 3 の等号は、特有方程式  $|D^{(\alpha)}| = 0$  が成り立つことによる。

第 2 の等号

$$\sum_k D_{ik}^{(\alpha)} \Delta_{jk}^{(\alpha)} = \delta_{ij} |D^{(\alpha)}| \quad (28)$$

については、 $|D^{(\alpha)}| \neq 0$  のとき  $(D^{(\alpha)})^{-1} = \left( \frac{\Delta_{ji}^{(\alpha)}}{|D^{(\alpha)}|} \right)$  が  $D^{(\alpha)}$  の逆行列となること

$$\sum_k D_{ik}^{(\alpha)} \frac{\Delta_{jk}^{(\alpha)}}{|D^{(\alpha)}|} = \delta_{ij}$$

がもともと、 $|D^{(\alpha)}| = 0$  の場合も含めて式 (28) が成り立つことから導かれたことを思い出そう。実際、式 (28) は  $i = j$  のとき、行列式  $|D^{(\alpha)}|$  の第  $i$  行での展開

$$|D^{(\alpha)}| = \sum_k D_{ik}^{(\alpha)} \Delta_{ik}^{(\alpha)} \quad (i \text{ で和をとらない})$$

に他ならない。また  $i \neq j$  のとき、式 (28) の左辺は  $D^{(\alpha)}$  の第  $j$  行を第  $i$  行で置き換えた行列

$$\begin{matrix} i) \\ j) \end{matrix} \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ D_{i1}^{(\alpha)} & D_{i2}^{(\alpha)} & \dots & D_{is}^{(\alpha)} \\ \dots\dots\dots \\ D_{j1}^{(\alpha)} & D_{j2}^{(\alpha)} & \dots & D_{js}^{(\alpha)} \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}$$

の、行列式の第  $j$  行に関する展開に等しい。ところが等しい行を持つ行列の行列式はゼロだから、この場合にも式 (28) は成り立つことになる [7, pp.63–64].

最後に次元を合わせるのに必要な係数  $C_j^{(\alpha)}$  を導入すると、式 (26) の線形結合

$$A_k^{(\alpha)} = \sum_j C_j^{(\alpha)} \Delta_{jk}^{(\alpha)}$$

は式 (25) の解である。

■ラグランジアン (23.15):  $L = L_0 + \sum_k F_k(t)x_k$  の外力の項について 1 次元の場合 (§ 22) と同様、外場のポテンシャル

$$U_e(\{x_i\}, t) \simeq U_e(\{0\}, t) + \sum_k x_k \left( \frac{\partial U_e}{\partial x_k} \right)_0 = U_e(\{0\}, t) - \sum_k F_k(t)x_k$$

から得られる。

■ラグランジアン (23.16) における外力の項について 式 (23.9):  $x_k = \sum_\alpha \Delta_{k\alpha} \theta_\alpha = \sum_\alpha \frac{\Delta_{k\alpha}}{\sqrt{m_\alpha}} Q_\alpha$  を用いると

$$\sum_k F_k(t)x_k = \sum_\alpha \left( \sum_k F_k(t) \frac{\Delta_{k\alpha}}{\sqrt{m_\alpha}} \right) Q_\alpha = \sum_\alpha f_\alpha(t) Q_\alpha.$$

§ 23, 問題

1 与えられたラグランジアンを表式より, 座標  $x, y$  は式 (23.13) の基準座標と同じく, 長さの次元を持たない.

式 (1):

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -\alpha \\ \alpha & -(\omega_0^2 - \omega^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = 0$$

を満たす  $(A_x, A_y) \neq 0$  が存在する条件は, 特有方程式

$$0 = \begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -\alpha \\ \alpha & -(\omega_0^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = -(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \alpha^2$$

で与えられる.

基準振動は 2 種類の基準座標  $Q_1 = C_1 e^{i\omega_1 t}, Q_2 = C_2 e^{i\omega_2 t}$  を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q_2 \\ -Q_2 \end{pmatrix}$$

と表され, 一般解はこれらの重ね合せ

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_2 \\ -Q_2 \end{pmatrix} \right\}$$

で与えられる. 係数  $1/\sqrt{2}$  は, ラグランジアンにおける速度の 2 乗の項について,

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}(\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2)$$

のように  $\{\dot{Q}_\alpha\}$  の係数が  $1/2$  となるように選ばれている.

「座標  $x$  の振幅がその最大値に達するときに,  $y$  の振幅はその最小値に達する」(p.87, 1.3) について,

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + e^{i\alpha t/\omega_0}) \exp \left\{ i \left( \omega_0 - \frac{\alpha}{2\omega_0} \right) t \right\}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - e^{i\alpha t/\omega_0}) \exp \left\{ i \left( \omega_0 - \frac{\alpha}{2\omega_0} \right) t \right\}$$

より座標  $x, y$  に関して, うなりにおけるゆっくりとした振幅の変化はそれぞれ

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + e^{i\alpha t/\omega_0}), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - e^{i\alpha t/\omega_0})$$

で与えられる.

2 (2 重平面振子)  $m_1 \rightarrow \infty$  のとき

$$\omega_{1,2}^2 \rightarrow \frac{g}{2l_1 l_2} \{ (l_1 + l_2) \pm |l_1 - l_2| \} = \begin{cases} g/l_{2,1} & (l_1 > l_2) \\ g/l_{1,2} & (l_1 < l_2) \end{cases}$$

となる. また

$$A_1 m_1 (g - l_1 \omega^2) = 0, \quad -A_1 l_1 \omega^2 + A_2 (g - l_2 \omega^2) = 0$$

となるから,  $\omega = \sqrt{g/l_2}$  の基準振動に対しては  $A_1 = 0$  でなければならず, これは質点  $m_2$  だけの振動に対応する. その振動数が  $\omega = \sqrt{g/l_2}$  であるのは自然である. この結果は  $m_1 \rightarrow \infty$  の極限で  $m_1$  が静止するため,  $m_2$  だけが長さ  $l_2$  の振子として振動すると解釈できる. また  $m_1 \rightarrow \infty$  の極限をとる前の式

$$A_1 (m_1 + m_2) (g - l_1 \omega^2) - A_2 \omega^2 m_2 l_2 = 0$$

に近似的な固有振動数  $\omega = \sqrt{g/l_1}$  を代入すれば  $A_2 = 0$  となり、質点  $m_1$  のみの振動が得られる。しかしこの取り扱いには一貫性がない。

そこで  $m_1 \rightarrow \infty$  の極限をとった運動方程式

$$l_1 \ddot{\varphi}_1 + g\varphi_1 = 0, \quad l_1 \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 + g\varphi_2 = 0$$

に立ち返ると、異なる解釈が得られる。第 1 式は  $\varphi_1$  そのもの ( $\varphi_2$  ではなく) が基準座標であることを意味する。また 2 式より線形結合

$$\varphi = \frac{l_1}{l_2 - l_1} \varphi_1 + \varphi_2$$

が、 $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l_2} \varphi$  を満たすもう 1 つの基準座標となることが示される。さて運動方程式の第 1 式は、軽い質点  $m_2$  の運動の影響に依らず、質点  $m_1$  が長さ  $l_1$  の振子として単振動  $\varphi_1 \sim e^{i\omega^{(1)}t}$ ,  $\omega^{(1)} = \sqrt{g/l_1}$  を行うことを意味する。これを第 2 式に代入すると、振動数  $\omega^{(1)}$  で振動する外力の下での、 $\varphi_2$  に対する強制振動の方程式になる。言わば第 1 の振子 (長さ  $l_1$  の部分) が第 2 の振子 (長さ  $l_2$  の部分) を揺さぶる形になる。よって  $\varphi_2$  の運動は第 2 の振子自身の固有振動数  $\omega^{(2)} = \sqrt{g/l_2}$  での振動と、外力の振動数  $\omega^{(1)}$  での強制振動の重合せになる。このため系全体の運動は 2 つの固有振動数  $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}$  で特徴付けられると考えられる。

3 (空間振動子：基準振動の振動数  $\omega_i = \sqrt{k_i/m}$  が縮重している場合の例) 軌跡の方程式

$$\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{\cos \delta}{ab}xy + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \delta$$

が楕円を表していることについて、文献 [5, p.130] (ランダウ=リフシツ 『場の古典論』 p.130) には複素ベクトルを用いたエレガントな証明が見られる。一般に 2 次曲線

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

は  $h^2 - ab < 0$  のとき楕円になる (§ 15 のノート参照)。

## § 24. 分子の振動

$n$  分子の自由度は

- 合計  $\dots 3n$ 
  - 分子の位置は  $3n$  個の座標  $(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$  で指定される
- 並進  $\dots 3$ 
  - 例えば、慣性中心の位置  $\mathbf{R}$  の 3 成分で指定される
- 回転  $\dots 3$ 
  - 例えば回転ベクトルの 3 成分、回転軸の向きを指定する 2 つのパラメーターと回転角、あるいは 3 つの Euler 角で指定される
  - 直線状の分子に対しては自分自身の周りの回転を除き、自由度 2

なので、振動の自由度は  $3n - 6$  である (直線状の分子に対しては  $3n - 5$ )。

$a$  番目の原子の位置  $\mathbf{r}_a$  の、つり合い点  $\mathbf{r}_{a0}$  からのズレを  $\mathbf{u}_a \equiv \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_{a0}$  とすると

- 分子の並進を除く:

$$\sum_a m_a \mathbf{r}_a = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_a m_a \mathbf{u}_a = 0.$$

- 分子の回転を除く:

$$\begin{aligned} \sum_a \mathbf{r}_a \times (m_a \dot{\mathbf{r}}_a) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_a \mathbf{r}_{a0} \times (m_a \mathbf{u}_a) &= 0. \quad (O(\mathbf{u}_a^2) \text{ を無視した, 導出は下記}) \end{aligned} \quad (24.2)$$

同一平面内の  $n$  分子の自由度

- 振動の全自由度  $\cdots 3n - 6$
- 面内の振動の自由度  $\cdots 2n - 3$  (下記)
- 面からはみ出る振動の自由度  $\cdots (3n - 6) - (2n - 3) = n - 3$

ここで面内 ( $xy$  平面にとる) に拘束された振動の自由度が  $2n - 3$  であることは次のように分かる.

- 面内の運動の全自由度  $\cdots 2n$ 
  - 分子の位置は  $2n$  個の座標  $(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n)$  で指定される
- 並進の自由度  $\cdots 2$ 
  - 慣性中心  $\mathbf{R} = (X, Y, 0)$  の 2 成分  $X, Y$  で指定される
- 回転の自由度  $\cdots 1$ 
  - 回転ベクトル  $\boldsymbol{\theta} = (0, 0, \theta)$  の 1 成分  $\theta$  で指定される

直線状の  $n$  分子の自由度

- 振動の全自由度  $\cdots 3n - 6$
- 直線上の振動の自由度  $\cdots n - 1$  (下記)
- 直線 ( $z$  軸にとる) からはみ出る振動の自由度  $\cdots (3n - 5) - (n - 1) = 2(n - 2)$ 
  - $yz$  平面内,  $zx$  平面内の振動それぞれに  $n - 2$  種類の基準振動が分けられる.  
振動数は  $n - 2$  種類.

ここで直線 ( $z$  軸) 上の振動の自由度が  $n - 1$  であることは次のように分かる.

- 直線上の運動の全自由度  $\cdots n$ 
  - 分子の位置は  $n$  個の座標  $(z_1, \cdots, z_n)$  で指定される
- 並進の自由度  $\cdots 1$ 
  - 慣性中心  $\mathbf{R} = (0, 0, Z)$  の 1 成分  $Z$  で指定される
- 回転の自由度  $\cdots 0$

## § 24, 式の導出など

■式 (24.2) について 微小変位  $\mathbf{u}_a$  の 2 次以上の項を無視する近似では, 角運動量

$$\mathbf{M} = \sum_a \mathbf{r}_a \times (m_a \dot{\mathbf{r}}_a) \simeq \sum_a \mathbf{r}_{a0} \times (m_a \dot{\mathbf{u}}_a) = \frac{d}{dt} \sum_a \mathbf{r}_{a0} \times (m_a \mathbf{u}_a)$$

[第2の等号では2次の微小量  $\sum_a \mathbf{u}_a \times (m_a \dot{\mathbf{u}}_a)$  を落とした] は、最右辺のように時間の完全導関数で書ける。そこで分子の回転を除く、角運動量がゼロになる条件は、式(24.2):

$$\sum_a \mathbf{r}_{a0} \times (m_a \mathbf{u}_a) = 0$$

のように表せる。[全原子がつり合い点にある ( $\mathbf{u}_a = 0$ ) ときの  $\sum_a \mathbf{r}_{a0} \times (m_a \mathbf{u}_a) = \text{const}$  の値はゼロである.]

## § 24 について

$n$  原子分子の配置を  $s = 3n$  個のデカルト座標で表した場合、§ 23 の  $s$  種類の基準振動には言わば振動数ゼロのモードとして、並進と回転が含まれることになる。他方§ 24 では、並進と回転の自由度を除いた座標を用いている。

分子の運動を常に並進・回転・振動の重ね合せと見なせることは次のように納得できる。まず慣性中心系に移って系全体の並進を除くと、原子の相対位置ベクトルの変化する運動だけが可能である。このうち各相対位置ベクトルの長さが一定の運動は剛体的な回転に他ならない。(剛体とは各構成要素間の距離が一定であり、それ故、変形しない物体として定義されることを思い出そう。) よって回転の自由度を除くと、生き残る運動は原子間の相対距離の伸縮を伴う運動となる。これは振動と解釈できる(平衡位置の近傍では)。

2 原子分子の場合は特に簡単である。原子間の中心力<sup>\*12</sup>による相互作用は、原子の安定な平衡位置の近くではばねの弾性力で近似できるので、質点をばねで繋いだ系は2原子分子の簡単な古典的モデルとなる。その空間における位置は重心の位置ベクトル  $\mathbf{R}$  と相対位置ベクトル  $\mathbf{r}$  で指定できる。 $\mathbf{r}$  を球座標  $(r, \theta, \phi)$  で表すと、 $\mathbf{R}$  の変化は分子の全体としての並進に、 $r$  の変化は分子の振動に、向き  $(\theta, \phi)$  の変化は分子の回転に対応する。よって2原子分子の任意の運動は、並進、振動、回転に分解できることになる。

## § 24, 問題

### 1 対称な直線状の分子 $ABA$ ( $\overline{AB} = l$ ) [ $\text{CO}_2$ など]

■基準振動の様子 基準振動  $Q_i$  の各々は、その他の基準座標  $Q_j (j \neq i)$  がゼロとなる振動である。ここで  $Q_j$  がもとの座標  $\{x_i\}$  の線形結合であることから、条件  $Q_j = 0$  をもとの座標  $\{x_i\}$  に対する条件に読み替えると、振動の様子が分かる。

■分子の縦方向の運動のラグランジアン (p.90, 1.7) について 分子の縦方向の運動のラグランジアン (p.90, 1.3) の各項は

$$\begin{aligned} \frac{m_A}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) &= \frac{m_A}{2} \left\{ \left( \frac{\dot{Q}_a + \dot{Q}_s}{2} \right)^2 + \left( \frac{\dot{Q}_a - \dot{Q}_s}{2} \right)^2 \right\} = \frac{m_A}{4}(\dot{Q}_a^2 + \dot{Q}_s^2), \\ \frac{m_B}{2}(\dot{x}_2^2) &= \frac{m_B}{2} \left( \frac{m_A}{m_B} \dot{Q}_a \right)^2 = \frac{m_A^2}{2m_B} \dot{Q}_a^2, \\ -\frac{k_1}{2}(x_1 - x_2)^2 &= -\frac{k_1}{2} \left\{ x_1 + \frac{m_A}{m_B}(x_1 + x_3) \right\}^2 = -\frac{k_1}{2} \left\{ \frac{1}{2}(Q_a + Q_s) + \frac{m_A}{m_B} Q_a \right\}^2, \end{aligned}$$

<sup>\*12</sup> 相対位置ベクトル  $\mathbf{r}$  の方向に沿い、その成分が  $r = |\mathbf{r}|$  だけの関数である力  $\mathbf{F}$  のこと。 $r$  だけの関数  $U(r)$  をポテンシャルに持つ力と言うこともできる(実際  $\nabla$  を球座標で表せば  $\mathbf{F} = -\nabla U = -\frac{dU(r)}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}$ )。

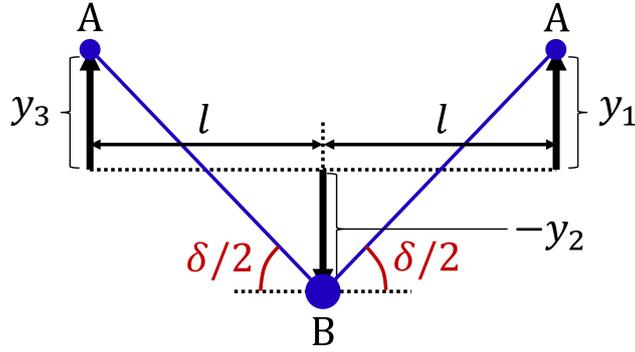


図 47 分子の対称な屈曲運動 (教科書の図 28(p.89) を改変)

$$-\frac{k_1}{2}(x_3 - x_2) = -\frac{k_1}{2} \left\{ x_3 + \frac{m_A}{m_B}(x_1 + x_3) \right\}^2 = -\frac{k_1}{2} \left\{ \frac{1}{2}(Q_a - Q_s) + \frac{m_A}{m_B}Q_a \right\}^2$$

となる。ここで分子の質量を  $\mu \equiv 2m_A + m_B$  とすると

$$\begin{aligned} \left( \frac{m_A}{4} + \frac{m_A^2}{2m_B} \right) \dot{Q}_a^2 &= \frac{m_A \mu}{4m_B} \dot{Q}_a^2, \\ -\frac{k_1}{2} \cdot 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{m_A}{m_B} \right)^2 Q_a^2 &= -k_1 \left( \frac{\mu}{2m_B} \right)^2 Q_a^2 = -\frac{k_1 \mu^2}{4m_B^2} Q_a^2 \end{aligned}$$

なので、ラグランジアンを p.90, 1.7 のように書き換えられる。

■原子の横方向の変位に対する条件 (p.90, 1.15) について 角運動量がゼロとなる条件 (24.2) は

$$0 = m_A \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + m_A \begin{pmatrix} -l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 0 \end{pmatrix} = m_A l m_A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_1 - y_3 \end{pmatrix}, \quad \therefore y_1 = y_3$$

を与える。ここで静止系の角運動量が基準点の選び方に依らないこと (§ 9) を考慮し、角運動量の基準点を原子 2 のつり合いの位置にとった。

■屈曲の角度  $\delta$  の式 (p.90, 1.19) について 図 47 のように定義される微小角  $\delta$  は、幾何学的関係

$$\frac{\delta}{2} = \frac{y_1 - y_2}{l} = \frac{y_3 - y_2}{l}, \quad \therefore \delta = \frac{1}{l} [(y_1 - y_2) + (y_3 - y_2)]$$

を満たしている。

■横方向の運動のラグランジアン (p.90, 1.21) について 屈曲のポテンシャル・エネルギーは  $\delta^2$  に比例し、それを  $k_2 l^2 \delta^2 / 2$  と書いて比例定数  $k_2$  を定義している。このとき  $k_2$  は  $k_1$  と同じ次元を持つ。

横方向の変位に対する条件 (p.90, 1.15) を屈曲の角度  $\delta$  の式 (p.90, 1.19) に代入すると

$$\delta = \frac{2}{l}(y_1 - y_2) = \frac{2}{l} \left( 1 + \frac{2m_A}{m_B} \right) y_1 = \frac{2\mu}{lm_B} y_1$$

となるので、変位  $y_1, y_2, y_3$  は  $\delta$  を用いて

$$y_1 = y_3 = l \frac{m_B}{2\mu} \delta, \quad y_2 = -\frac{2m_A}{m_B} y_1 = l \frac{m_A}{\mu} \delta$$

と表される。よって

$$\frac{m_A}{2}(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_3^2) + \frac{m_B}{2}\dot{y}_2^2 = m_A \frac{m_B^2}{4\mu^2} l^2 \dot{\delta}^2 + \frac{m_B}{2} \frac{m_A^2}{\mu^2} l^2 \dot{\delta}^2 = \frac{m_A m_B}{4\mu} l^2 \dot{\delta}^2$$

を得る。

■ポテンシャル・エネルギーが距離  $A-B, B-A$  と角  $ABA$  のみに依存するという設問の仮定について 2 原子分子は簡単には、2つの原子がばねを通じて相互作用する系としてモデル化できる。しかしながら 3 原子分子  $ABA$  を同様に、隣接する原子のみがばね (ばね定数  $k$ ) で繋がっているものと見なすと、 $\mathbf{l} = (l, 0)$  に対して距離  $A-B, B-A$  の伸びは

$$\begin{aligned} \delta l_{12} &= \sqrt{(\mathbf{l} + \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)^2} - l = \sqrt{2(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{l} + (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)^2}, \\ \delta l_{32} &= \sqrt{(-\mathbf{l} + \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2)^2} - l = \sqrt{-2(\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{l} - (\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2)^2} \end{aligned}$$

と表されるので、ポテンシャル・エネルギーは

$$\begin{aligned} \frac{k}{2} \{(\delta l_{12})^2 + (\delta l_{32})^2\} &= \frac{k}{2} \{(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2\} + \frac{k}{2} \{(y_1 - y_2)^2 + (y_3 - y_2)^2\} + kl(x_1 - x_3) \\ &= \frac{k}{2} \{(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2\} + \frac{k}{4} l^2 \delta^2 + kl(x_1 - x_3) \end{aligned}$$

と書ける。このため

- 縦方向の運動のラグランジアン (p.90, 1.3)
- 横方向の運動のラグランジアン (p.90, 1.21)

を足した全ラグランジアンを、正確には再現できないことになる。これはばねのモデルが単純すぎるためであると考えられる。実際の 3 体の相互作用はより複雑であり<sup>\*13</sup>、ただし単振動の近似で微小振動を考えるため、「分子のポテンシャル・エネルギーは距離  $A-B, B-A$  および角  $ABA$  にだけ依存すると仮定」できると考えられる。

## 2 三角形をした分子 $ABA$ [したがって対称] ( $\angle ABA = 2\alpha$ ) [ $\text{H}_2\text{O}$ など]

■変位に対する条件 (p.91, 1.4) 角運動量がゼロとなる条件 (24.2):

$$0 = m_A \begin{pmatrix} -l \sin \alpha \\ l \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 0 \end{pmatrix} + m_A \begin{pmatrix} l \sin \alpha \\ l \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (y_1 - y_3) \sin \alpha - (x_1 + x_3) \cos \alpha \end{pmatrix}$$

は p.91, 1.4 の式を与える。ここで静止系の角運動量が基準点の選び方に依らないこと (§ 9) を考慮し、角運動量の基準点を原子 2 のつり合いの位置にとった。

■系の自由度 変位  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  の 6 個の成分には p.91, 1.2~4 の 3 つの条件が課せられているため、独立に選べる座標は p.91, 1.18 の  $Q_a, q_{s_1}, q_{s_2}$  の 3 つのみである。

■ $y_1, y_3$  の式 (p.91, 1.21) p.91, 1.4 の式は

$$y_1 - y_3 = Q_a \cot \alpha, \quad Q_a \equiv x_1 + x_3$$

と書き換えられることに注意すると、 $y_1, y_3$  の式 (p.91, 1.21) を得る。

<sup>\*13</sup> このことは問題 2 の“三角形の”分子  $ABA$  を考えれば、直観的により分かりやすい。つり合いの位置における分子の折れ曲がった形を説明するには、少なくとも両端の 2 原子  $A$  の間の相互作用も導入しなければならない。

■ラグランジアンの表式 (p.91, 1.23~26) の導出 分子のラグランジアン (p.91, 1.16) における運動エネルギーの項は

$$\begin{aligned}
 \frac{m_A}{2}(\dot{\mathbf{u}}_1^2 + \dot{\mathbf{u}}_3^2) &= \frac{m_A}{2} \left[ \left\{ \frac{1}{2}(\dot{Q}_a + \dot{q}_{s1}) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{2}(\dot{Q}_a - \dot{q}_{s1}) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{2}(\dot{q}_{s2} + \dot{Q}_a \cot \alpha) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{2}(\dot{q}_{s2} - \dot{Q}_a \cot \alpha) \right\}^2 \right] \\
 &= \frac{m_A}{2} \frac{1 + \cot^2 \alpha}{2} \dot{Q}_a^2 + \frac{m_A}{4} \dot{q}_{s1}^2 + \frac{m_A}{4} \dot{q}_{s2}^2 \\
 &= \frac{m_A}{4} \frac{1}{\sin^2 \alpha} \dot{Q}_a^2 + \frac{m_A}{4} \dot{q}_{s1}^2 + \frac{m_A}{4} \dot{q}_{s2}^2, \\
 \frac{m_B}{2} \dot{\mathbf{u}}_2^2 &= \frac{m_B}{2} \left\{ \left( \frac{m_A}{m_B} \dot{Q}_a \right)^2 + \left( \frac{m_A}{m_B} \dot{q}_{s2} \right)^2 \right\} \\
 &= \frac{m_A}{4} \left( \frac{2m_A}{m_B} \dot{Q}_a^2 + \frac{2m_A}{m_B} \dot{q}_{s2}^2 \right)
 \end{aligned}$$

と書き換えられる。ここで

$$\frac{m_A}{4} \left( 1 + \frac{2m_A}{m_B} \right) \dot{q}_{s2}^2 = \frac{m_A \mu}{4m_B} \dot{q}_{s2}^2$$

である。

次に長さの変化  $\delta l_1, \delta l_2$  において

$$\begin{aligned}
 x_1 - x_2 &= \left( \frac{1}{2} + \frac{m_A}{m_B} \right) Q_a + \frac{1}{2} q_{s1}, \\
 x_3 - x_2 &= \left( \frac{1}{2} + \frac{m_A}{m_B} \right) Q_a - \frac{1}{2} q_{s1}, \\
 y_1 - y_2 &= \left( \frac{1}{2} + \frac{m_A}{m_B} \right) q_{s2} + \frac{1}{2} Q_a \cot \alpha, \\
 y_3 - y_2 &= \left( \frac{1}{2} + \frac{m_A}{m_B} \right) q_{s2} - \frac{1}{2} Q_a \cot \alpha
 \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}
 & - \frac{k_1}{2} (\delta l_1^2 + \delta l_2^2) \\
 = & - \frac{k_1}{2} \left[ \left\{ \left( \frac{1}{2} + \frac{m_A}{m_B} \right) Q_a + \frac{1}{2} q_{s1} \right\}^2 \sin^2 \alpha + \left\{ \left( \frac{1}{2} + \frac{m_A}{m_B} \right) q_{s2} + \frac{1}{2} Q_a \cot \alpha \right\}^2 \cos^2 \alpha \right. \\
 & + 2 \left\{ \left( \frac{1}{2} + \frac{m_A}{m_B} \right) Q_a + \frac{1}{2} q_{s1} \right\} \left\{ \left( \frac{1}{2} + \frac{m_A}{m_B} \right) q_{s2} + \frac{1}{2} Q_a \cot \alpha \right\} \sin \alpha \cos \alpha \\
 & + \left\{ \left( \frac{1}{2} + \frac{m_A}{m_B} \right) Q_a - \frac{1}{2} q_{s1} \right\}^2 \sin^2 \alpha + \left\{ \left( \frac{1}{2} + \frac{m_A}{m_B} \right) q_{s2} - \frac{1}{2} Q_a \cot \alpha \right\}^2 \cos^2 \alpha \\
 & \left. - 2 \left\{ \left( \frac{1}{2} + \frac{m_A}{m_B} \right) Q_a - \frac{1}{2} q_{s1} \right\} \left\{ \left( \frac{1}{2} + \frac{m_A}{m_B} \right) q_{s2} - \frac{1}{2} Q_a \cot \alpha \right\} \sin \alpha \cos \alpha \right] \\
 = & - \frac{k_1}{2} \cdot 2 \left\{ \left( \frac{1}{2} + \frac{m_A}{m_B} \right)^2 \sin^2 \alpha + \frac{\cot^2 \alpha \cos^2 \alpha}{4} + \left( \frac{1}{2} + \frac{m_A}{m_B} \right) \cos^2 \alpha \right\} Q_a^2 \\
 & - \frac{k_1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{4} q_{s1}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{k_1}{2} \cdot 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{m_A}{m_B} \right)^2 \cos^2 \alpha q_{s_2}^2 \\
& -\frac{k_1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{m_A}{m_B} \right) \sin \alpha \cos \alpha q_{s_1} q_{s_2} \\
= & -Q_a^2 \frac{k_1}{4} \left( \frac{2m_A}{m_B} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) \left( 1 + \frac{2m_A}{m_B} \sin^2 \alpha \right) \\
& -\frac{q_{s_1}^2}{4} k_1 \sin^2 \alpha - q_{s_2}^2 \frac{\mu^2}{4m_B^2} k_1 \cos^2 \alpha - q_{s_1} q_{s_2} \frac{\mu}{2m_B} k_1 \sin \alpha \cos \alpha \\
& \left( \because \left( \frac{1}{2} + \frac{m_A}{m_B} \right)^2 \sin^2 \alpha + \frac{\cot^2 \alpha \cos^2 \alpha}{4} + \left( \frac{1}{2} + \frac{m_A}{m_B} \right) \cos^2 \alpha \right. \\
= & \frac{1}{4} \left\{ \left( 1 + \frac{2m_A}{m_B} \right)^2 \sin^2 \alpha + \left( \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 2 + \sin^2 \alpha \right) + 2 \left( 1 + \frac{2m_A}{m_B} \right) (1 - \sin^2 \alpha) \right\} \\
= & \frac{1}{4} \left\{ \left( \frac{2m_A}{m_B} \right)^2 \sin^2 \alpha + \frac{4m_A}{m_B} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right\} \\
= & \frac{1}{4} \left( \frac{2m_A}{m_B} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) \left( 1 + \frac{2m_A}{m_B} \sin^2 \alpha \right)
\end{aligned}$$

を得る.

さらに

$$\delta = (x_1 - x_3) \cos \alpha - \{(y_1 + y_3) - 2y_2\} \sin \alpha = q_{s_1} \cos \alpha - \left( 1 + \frac{2m_A}{m_B} \right) q_{s_2} \sin \alpha$$

より

$$-\frac{k_2 l^2}{2} \delta^2 = -\frac{k_2}{2} \left( q_{s_1}^2 \cos^2 \alpha + q_{s_2}^2 \frac{\mu^2}{m_B^2} \sin^2 \alpha - q_{s_1} q_{s_2} \frac{2\mu}{m_B} \sin \alpha \cos \alpha \right)$$

なのでラグランジアンを p.91, 1.23~26 のように書き換えられる.

■座標  $q_{s_1}, q_{s_2}$  に対応する 2 つの振動  $Q_a \equiv x_1 + x_3 = 0$  のとき p.91, 1.4 の式より  $y_1 - y_3 = 0$  だから, 「 $x_1 = -x_3, y_1 = y_3$ 」の「Y 軸について対称」(p.92, 1.3) な振動が得られる.

これらの振動は

$$(m_{ik}) = \begin{pmatrix} \frac{m_A}{2} & 0 \\ 0 & \frac{m_A \mu}{2m_B} \end{pmatrix}, \quad (k_{ik}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(k_1 \sin^2 \alpha + 2k_2 \cos^2 \alpha) & -\frac{\mu}{2m_B}(2k_2 - k_1) \sin \alpha \cos \alpha \\ -\frac{\mu}{2m_B}(2k_2 - k_1) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{\mu^2}{2m_B^2}(k_1 \cos^2 \alpha + 2k_2 \sin^2 \alpha) \end{pmatrix} \quad (29)$$

とすると, 座標  $q_{s_i} (i = 1, 2)$  に対するラグランジアン

$$L_s = \frac{1}{2} \sum_{i,k} m_{ik} \dot{q}_{s_i} \dot{q}_{s_k} - \frac{1}{2} \sum_{i,k} k_{ik} q_{s_i} q_{s_k}$$

によって記述されるため, その振動数  $\omega_{s_1}, \omega_{s_2}$  は特有方程式 (23.8):

$$\begin{aligned}
0 = & |k_{ik} - \omega^2 m_{ik}| \\
= & \left\{ \frac{1}{2}(k_1 \sin^2 \alpha + 2k_2 \cos^2 \alpha) - \frac{m_A}{2} \omega^2 \right\} \left\{ \frac{\mu^2}{2m_B^2}(k_1 \cos^2 \alpha + 2k_2 \sin^2 \alpha) - \frac{m_A \mu}{2m_B} \omega^2 \right\} \\
& - \left\{ \frac{\mu}{2m_B}(2k_2 - k_1) \sin \alpha \cos \alpha \right\}^2
\end{aligned}$$

の根として与えられる。ここで最右辺を展開して得られる  $\omega^2$  の係数 (に  $-1$  をかけたもの) は

$$\begin{aligned} & \frac{m_A^2 \mu}{4m_B} \left\{ \frac{\mu}{m_A m_B} (k_1 \cos^2 \alpha + 2k_2 \sin^2 \alpha) + \frac{1}{m_A} (k_1 \sin^2 \alpha + 2k_2 \cos^2 \alpha) \right\} \\ &= \frac{m_A^2 \mu}{4m_B} \left\{ \frac{k_1}{m_A} \left( \frac{\mu}{m_B} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \right) + \frac{2k_2}{m_A} \left( \frac{\mu}{m_B} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \right) \right\} \\ &= \frac{m_A^2 \mu}{4m_B} \left\{ \frac{k_1}{m_A} \left( 1 + \frac{2m_A}{m_B} \cos^2 \alpha \right) + \frac{2k_2}{m_A} \left( 1 + \frac{2m_A}{m_B} \sin^2 \alpha \right) \right\} \end{aligned}$$

であり, 定数項は

$$\begin{aligned} & \frac{\mu^2}{4m_B^2} \{ (k_1 \sin^2 \alpha + 2k_2 \cos^2 \alpha)(k_1 \cos^2 \alpha + 2k_2 \sin^2 \alpha) - (2k_2 - k_1)^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \} \\ &= \frac{m_A^2 \mu}{4m_B} \cdot \frac{\mu}{m_B m_A^2} 2k_1 k_2 (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) \\ &= \frac{m_A^2 \mu}{4m_B} \cdot \frac{2\mu k_1 k_2}{m_B m_A^2} \quad (\because (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = 1) \end{aligned}$$

と書き換えられるので, p.92, 1.5 の式

$$\omega^4 - \left\{ \frac{k_1}{m_A} \left( 1 + \frac{2m_A}{m_B} \cos^2 \alpha \right) + \frac{2k_2}{m_A} \left( 1 + \frac{2m_A}{m_B} \sin^2 \alpha \right) \right\} \omega^2 + \frac{2\mu k_1 k_2}{m_B m_A^2} = 0$$

を得る.

$2\alpha = \pi$  のときこれは

$$\begin{aligned} 0 &= \omega^4 - \left( \frac{k_1}{m_A} + \frac{2k_2 \mu}{m_A m_B} \right) \omega^2 + \frac{2\mu k_1 k_2}{m_B m_A^2} = \left( \omega^2 - \frac{k_1}{m_A} \right) \left( \omega^2 - \frac{2k_2 \mu}{m_A m_B} \right), \\ \therefore \omega &= \sqrt{\frac{k_1}{m_A}}, \sqrt{\frac{2k_2 \mu}{m_A m_B}} \end{aligned}$$

となり, 問題 1 の振動数  $\omega_{s_1}, \omega_{s_2}$  が得られる.

最後に座標  $q_{s_1}, q_{s_2}$  に対応する図 29b),c)(p.91) の振動について,

- $q_{s_1}$  のみがゼロでない振動ではすべての  $y_i = 0$
- $q_{s_2}$  のみがゼロでない振動ではすべての  $x_i = 0$

である. ただし式 (29) の行列  $(k_{ik})$  は対角形ではないので,  $q_{s_1}, q_{s_2}$  は基準座標ではないことに注意する. 基準座標を見出すには, 行列 (29) を  $P^{-1}(k_{ik})P$  のように対角化する直交行列  $P$  (これは同時に  $(m_{ik})$  を対角化する) を用いて, 主軸変換  $(q_{s_i}) \rightarrow P^{-1}(q_{s_i})$  を行う必要がある. なお図 29b),c)(p.91) の振動は  $2\alpha = \pi$  のとき問題 1 の図 28b),c)(p.89) に移行するものと考えられる.

### 3 直線状の非対称な分子 $ABC$ ( $\overline{AB} = l_1, \overline{BC} = l_2$ )

■横方向の振動 幾何学的な関係

$$\delta = \frac{y_1 - y_2}{l_1} + \frac{y_3 - y_2}{l_2}$$

と変位の間関係

$$y_3 = \frac{m_A l_1}{m_C l_2} y_1, \quad y_2 = -\frac{1}{m_B} (m_A y_1 + m_C y_3) = -\frac{2m_A l}{m_B l_2} y_1$$

を用いて変位  $y_1, y_2, y_3$  を  $\delta$  で表すと

$$\delta = \left\{ \frac{1}{l_1} \left( 1 + \frac{2m_A l}{m_B l_2} \right) + \frac{1}{l_2} \left( \frac{m_A l_1}{m_C l_2} + \frac{2m_A l}{m_B l_2} \right) \right\} y_1 = \frac{(ML)^2}{m_B m_C l_1 l_2^2},$$

$$\therefore y_1 = \frac{m_B m_C l_1 l_2^2}{(ML)^2} \delta, \quad y_2 = -\frac{2m_A m_C l_1 l_2 l}{(ML)^2} \delta, \quad y_3 = \frac{m_A m_B l_1^2 l_2}{(ML)^2} \delta,$$

$$(ML)^2 \equiv m_A m_B l_1^2 + m_B m_C l_2^2 + 4m_A m_C l^2$$

となる．よって横方向の運動のラグランジアンは

$$L = \frac{m_A}{2} \dot{y}_1^2 + \frac{m_B}{2} \dot{y}_2^2 + \frac{m_C}{2} \dot{y}_3^2 - \frac{k_2 l^2}{2} \delta^2$$

$$= \frac{m_A m_B m_C l_1^2 l_2^2}{2(ML)^4} \underbrace{(m_B m_C l_2^2 + 4m_A m_C l^2 + m_A m_B l_1^2)}_{(ML)^2} \dot{\delta}^2 - \frac{k_2 l^2}{2} \delta^2$$

$$= \frac{m_A m_B m_C l_1^2 l_2^2}{2(ML)^2} \dot{\delta}^2 - \frac{k_2 l^2}{2} \delta^2$$

と表されるから，横振動の振動数の式

$$\omega_t^2 = \frac{k_2 l^2 (ML)^2}{m_A m_B m_C l_1^2 l_2^2} = \frac{k_2 l^2}{l_1^2 l_2^2} \left( \frac{l_1^2}{m_C} + \frac{l_2^2}{m_A} + \frac{4l^2}{m_B} \right)$$

(p.92, 1.18) を得る．

横振動の振動数  $\omega_t$  は  $l_1 = l_2, m_A = m_C$  のとき，問題 1 の振動数  $\omega_{s_1} = \sqrt{\frac{2k_2 \mu}{m_A m_B}}$  に一致する．

■縦方向の振動  $x_1, x_3$  を独立な座標に選び， $m_A x_1 + m_B x_2 + m_C x_3 = 0$  を用いて  $x_2$  を消去すると，縦方向の運動のラグランジアンは

$$L = \frac{m_A}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_B}{2} \dot{x}_2^2 + \frac{m_C}{2} \dot{x}_3^2 - \frac{k_1}{2} (x_1 - x_2)^2 - \frac{k'_1}{2} (x_2 - x_3)^2$$

$$= \frac{m_A}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{(m_A \dot{x}_1 + m_C \dot{x}_3)^2}{2m_B} + \frac{m_C}{2} \dot{x}_3^2 - \frac{k_1}{2} \left\{ \frac{(m_A + m_B)x_1 + m_C x_3}{m_B} \right\}^2 - \frac{k'_1}{2} \left\{ \frac{m_A x_1 + (m_B + m_C)x_3}{m_B} \right\}^2$$

$$= \frac{m_A}{2} \left( 1 + \frac{m_A}{m_B} \right) \dot{x}_1^2 + \frac{m_C}{2} \left( 1 + \frac{m_C}{m_B} \right) \dot{x}_3^2 + \frac{m_A m_C}{m_B} \dot{x}_1 \dot{x}_3$$

$$- \frac{1}{2} \left\{ k_1 \left( 1 + \frac{m_A}{m_B} \right)^2 + k'_1 \left( \frac{m_A}{m_B} \right)^2 \right\} x_1^2 - \frac{1}{2} \left\{ k_1 \left( \frac{m_C}{m_B} \right)^2 + k'_1 \left( 1 + \frac{m_C}{m_B} \right)^2 \right\} x_3^2$$

$$- \left\{ k_1 \frac{m_C}{m_B} \left( 1 + \frac{m_A}{m_B} \right) + k'_1 \frac{m_A}{m_B} \left( 1 + \frac{m_C}{m_B} \right) \right\} x_1 x_3$$

と表される．よって

$$(m_{ik}) = \begin{pmatrix} m_A \left( 1 + \frac{m_A}{m_B} \right) & \frac{m_A m_C}{m_B} \\ \frac{m_A m_C}{m_B} & m_C \left( 1 + \frac{m_C}{m_B} \right) \end{pmatrix},$$

$$(k_{ik}) = \begin{pmatrix} k_1 \left( 1 + \frac{m_A}{m_B} \right)^2 + k'_1 \left( \frac{m_A}{m_B} \right)^2 & k_1 \frac{m_C}{m_B} \left( 1 + \frac{m_A}{m_B} \right) + k'_1 \frac{m_A}{m_B} \left( 1 + \frac{m_C}{m_B} \right) \\ k_1 \frac{m_C}{m_B} \left( 1 + \frac{m_A}{m_B} \right) + k'_1 \frac{m_A}{m_B} \left( 1 + \frac{m_C}{m_B} \right) & k_1 \left( \frac{m_C}{m_B} \right)^2 + k'_1 \left( 1 + \frac{m_C}{m_B} \right)^2 \end{pmatrix}$$

とおくと、縦方向の振動数  $\omega$  は特有方程式 (23.8):

$$\begin{aligned}
0 &= |k_{ik} - \omega^2 m_{ik}| \\
&= \left\{ k_1 \left( 1 + \frac{m_A}{m_B} \right)^2 + k'_1 \left( \frac{m_A}{m_B} \right)^2 - m_A \left( 1 + \frac{m_A}{m_B} \right) \omega^2 \right\} \left\{ k_1 \left( \frac{m_C}{m_B} \right)^2 + k'_1 \left( 1 + \frac{m_C}{m_B} \right)^2 - m_C \left( 1 + \frac{m_C}{m_B} \right) \omega^2 \right\} \\
&\quad - \left\{ k_1 \frac{m_C}{m_B} \left( 1 + \frac{m_A}{m_B} \right) + k'_1 \frac{m_A}{m_B} \left( 1 + \frac{m_C}{m_B} \right) - \frac{m_A m_C}{m_B} \omega^2 \right\} \quad (30)
\end{aligned}$$

の根として与えられる。上式 (30) の最右辺において、

$$(\omega^4 \text{の係数}) = m_A m_C \left( 1 + \frac{m_A}{m_B} \right) \left( 1 + \frac{m_C}{m_B} \right) - \left( \frac{m_A m_C}{m_B} \right)^2 = \frac{m_A m_C}{m_B} \mu$$

である ( $\mu \equiv m_A + m_B + m_C$  は分子質量)。また

$$\begin{aligned}
(\omega^2 \text{の係数}) &= \frac{m_A m_C}{m_B} \left[ 2 \left\{ k_1 \frac{m_C}{m_B} \left( 1 + \frac{m_A}{m_B} \right) + k'_1 \frac{m_A}{m_B} \left( 1 + \frac{m_C}{m_B} \right) \right\} \right. \\
&\quad \left. - \frac{m_A + m_B}{m_C} \left\{ k_1 \left( \frac{m_C}{m_B} \right)^2 + k'_1 \left( 1 + \frac{m_C}{m_B} \right)^2 \right\} \right. \\
&\quad \left. - \frac{m_C + m_B}{m_A} \left\{ k_1 \left( 1 + \frac{m_A}{m_B} \right)^2 + k'_1 \left( \frac{m_A}{m_B} \right)^2 \right\} \right] \\
&= \frac{m_A m_C}{m_B} \left[ k_1 \left\{ \frac{m_C}{m_B} \left( 1 + \frac{m_A}{m_B} \right) - \frac{m_C + m_B}{m_A} \left( 1 + \frac{m_A}{m_B} \right)^2 \right\} - \{A \leftrightarrow C\} \right]
\end{aligned}$$

であり、最右辺の第 1 の  $\{\dots\}$  内は通分すると

$$- \left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) \mu$$

とまとめられることが分かるので、

$$(\omega^2 \text{の係数}) = - \frac{m_A m_C}{m_B} \mu \left[ \left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) k_1 + \left( \frac{1}{m_B} + \frac{1}{m_C} \right) k_2 \right]$$

と書き換えられる。さらに式 (30) 最右辺の定数項は

$$\begin{aligned}
&\left\{ \left( \frac{m_C}{m_B} \right)^2 \left( 1 + \frac{m_A}{m_B} \right)^2 - \left( \frac{m_C}{m_B} \right)^2 \left( 1 + \frac{m_A}{m_B} \right)^2 \right\} k_1^2 \\
&+ \left\{ \left( \frac{m_A}{m_B} \right)^2 \left( 1 + \frac{m_C}{m_B} \right)^2 - \left( \frac{m_A}{m_B} \right)^2 \left( 1 + \frac{m_C}{m_B} \right)^2 \right\} k'_1{}^2 \\
&+ \left\{ \left( 1 + \frac{m_A}{m_B} \right)^2 \left( 1 + \frac{m_C}{m_B} \right)^2 + \left( \frac{m_A}{m_B} \right)^2 \left( \frac{m_C}{m_B} \right)^2 - 2 \frac{m_A m_C}{m_B^2} \left( 1 + \frac{m_A}{m_B} \right) \left( 1 + \frac{m_C}{m_B} \right) \right\} k_1 k'_1 \\
&= m_A m_C \left( 1 + \frac{m_A}{m_B} \right) \left( 1 + \frac{m_C}{m_B} \right) \\
&\times \left\{ \frac{1}{m_A m_C} \left( 1 + \frac{m_A}{m_B} \right) \left( 1 + \frac{m_C}{m_B} \right) - \frac{2}{m_B^2} + \frac{m_A m_C}{m_B^4} \left( 1 + \frac{m_A}{m_B} \right)^{-1} \left( 1 + \frac{m_C}{m_B} \right)^{-1} \right\} k_1 k'_1
\end{aligned}$$

と計算される。右辺の  $\{\dots\}$  部分を通分して整理すると

$$\frac{\mu^2}{m_A m_C (m_A + m_B) (m_B + m_C)}$$

となるので、

$$(\text{定数項}) = \frac{m_A m_C}{m_B} \mu \times \frac{\mu k_1 k'_1}{m_A m_B m_C}$$

を得る。以上より特有方程式 (30) は

$$\omega^4 - \omega^2 \left[ \left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) k_1 + \left( \frac{1}{m_B} + \frac{1}{m_C} \right) k_2 \right] + \frac{\mu k_1 k'_1}{m_A m_B m_C} = 0$$

となる。もちろんこれは  $k_1 = k'_1, m_A = m_C$  とおくと

$$0 = \omega^4 - 2\omega^2 k_1 \left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) + \frac{\mu k_1^2}{m_A^2 m_B} = \left( \omega^2 - \frac{k_1 \mu}{m_A m_B} \right) \left( \omega^2 - \frac{k_1}{m_A} \right)$$

となり、小問 1 の振動数  $\omega_a, \omega_{s1}$  を与える。

## § 25. 減衰振動

媒質中の物体の運動

- $\left\{ \begin{array}{l} \text{媒質の運動, 媒質・物体内部の熱的状态の考慮が必要} \\ \ddot{q} = \ddot{q}(q, \dot{q}) \text{ とできない} \end{array} \right.$
- 力学の問題ではない。

しかし

- 振動 (の時間スケール) が散逸よりも遅い
  - 摩擦力  $f(\dot{x})$  は媒質ごとに定まる, 物体の速度  $\dot{x}$  だけの関数
- 速度  $\dot{x}$  が十分小さい

$$\begin{aligned} f(\dot{x}) &= \text{const} + (-\alpha)\dot{x} + O(\dot{x}^2) \quad (\alpha > 0) \\ &\simeq -\alpha\dot{x} \quad (\because \text{const} = f(0) = 0) \end{aligned}$$

とできる。この力を運動方程式 (21.4):  $m\ddot{x} + kx = 0$  の右辺に付け加えると

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{25.3}$$

となる ( $k/m = \omega_0^2$ ,  $\alpha/m = 2\lambda$ ,  $\lambda$ : 減衰率)。

- $\lambda < \omega_0 \dots$  減衰振動  $x = ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \delta)$ 
  - ここに  $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$   $\leftrightarrow$  「摩擦は運動を遅らせる」
  - $\lambda^2 \ll \omega_0^2$  のとき

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 + O\left(\left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2\right)$$

であり,  $e^{-\lambda t}$  を一定と見なせる短い時間での系のエネルギーの平均は

$$\bar{E} \propto \overline{x^2} = a^2 (e^{-\lambda t})^2 \overline{\cos^2(\omega t + \delta)} \propto e^{-2\lambda t}.$$

- $\lambda \geq \omega_0 \dots$  振動しない

–  $\lambda > \omega_0$  非周期的減衰 [過減衰]  $x = c_1 e^{-(\lambda - \sqrt{\lambda - \omega_0^2})t} + c_2 e^{-(\lambda + \sqrt{\lambda - \omega_0^2})t}$

- $\lambda = \omega_0$  のときの運動 [臨界減衰]

$$x = (c_1 + c_2 t) e^{-\lambda t}$$

は  $\lambda > \omega_0$  の非周期的減衰の特別な場合

★ こうして抵抗が十分大きければ物体の位置は  $x \sim e^{-\alpha t}$  のように安定位置  $x = 0$  に戻る.

ドアクローザーを用いればドアは自動的にゆっくりと閉まり, 「バン」という音を立てない.

多自由度の系の摩擦力  $f_i = -\alpha_{ik} \dot{x}_k$  [和の記号は省略] に対して

$$\text{統計物理学} \rightarrow \alpha_{ik} \text{は対称}$$

なので [本稿次節で補足],

$$f_i = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}, \quad F \equiv \frac{1}{2} \alpha_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k : \text{散逸関数.} \quad [\text{本稿次節で補足}]$$

散逸の速度はこの散逸関数で表される:

$$(0 >) \frac{dE}{dt} = -2F, \quad \left( \because \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x_i}}_{\text{力}} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) \quad (\text{導出は下記}) \quad (25.13)$$

$$\therefore F > 0.$$

摩擦があるときの微小振動に対する運動方程式

$$m_{ik} \ddot{x}_k + k_{ik} x_k = -\alpha_{ik} \dot{x}_k.$$

解を  $x_k = A_k e^{rt}$  の形に仮定すると, 特有 [永年] 方程式 [§ 23] は

$$|m_{ik} r^2 + \alpha_{ik} r + k_{ik}| = 0$$

となる.

## § 25, 式の導出など

■ 運動方程式 (25.3) の一般解 2 階定数係数線形同次微分方程式 (25.3):

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

の一般解は, 特有 [補助] 方程式

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

の解  $r = r_{\pm} \equiv -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$  を用いて

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

と表される [ $r_+ \neq r_-$  すなわち  $\lambda \neq \omega_0$  のとき]. 特に  $\lambda < \omega_0$  のときには,  $r_{\pm}$  は互いに共役な複素数であり,

$$\begin{aligned} x &= \text{Re}[A e^{(-\lambda + i\omega)t}] \quad (\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}, A : \text{複素定数}) \\ &= a e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha) \quad (a, \alpha : \text{実定数}) \end{aligned}$$

と書き換えられる [1 行目の導出を本稿次節で補足].  $\lambda = \omega_0$  のとき, 特有方程式は重根  $r = -\lambda$  を持ち, このときの一般解はよく知られているように

$$x = (c_1 + c_2 t)e^{-\lambda t}$$

という形をとる.

■式 (25.13) の導出 [Lagrange 方程式は一般 (化) 運動量  $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$  と一般 (化) 力  $F_i = \partial L / \partial q_i$  の関係 (7.7):  $\dot{p}_i = F_i$  と見なせることを念頭に,] Lagrange 方程式に摩擦力  $f_i = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$  を付け加えて

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}}_{\text{力}}$$

とする. するとエネルギーの時間変化率は

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L \right) = \dot{x}_i \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) = - \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \quad (31)$$

と計算される [第 2 の等号について本稿次節で補足]. 速度の 2 次の同次関数  $F$  に対して, 同次関数についての Euler の定理を適用すると, 上式 (31) の最右辺は  $-2F$  に等しいので, 式 (25.13) を得る.

## § 25 について

■減衰振動を表す解 (p.93 の一番下) の, p.94, 1.4 への書き換え

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\lambda t} \text{Re}[c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}] \quad (\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}) \\ &= e^{-\lambda t} \{C_1 \cos(\omega t + \delta_1) + C_2 \cos(\omega t - \delta_2)\} \quad (c_k \equiv C_k e^{i\delta_k}) \\ &= e^{-\lambda t} (a \cos \omega t - b \sin \omega t) \quad (a \equiv C_1 \cos \delta_1 + C_2 \cos \delta_2, \quad b \equiv C_1 \sin \delta_1 - C_2 \sin \delta_2) \\ &= e^{-\lambda t} \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\omega t + \alpha) \quad \left( \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \\ &= \text{Re}[A e^{(-\lambda + i\omega)t}]. \quad (A \equiv \sqrt{a^2 + b^2} e^{i\alpha}) \end{aligned}$$

■係数の対称性 (25.9):  $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$  について 巨視的変数の平衡値からのズレ  $x = \{x_i\}$  を用いて, 平衡分布からのズレが小さいときの系のエントロピー  $S(x) = S(0) + \Delta S$  の変化速度は

$$\dot{S} = \sum_i \frac{\partial \Delta S}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_i X_i J_i, \quad X_i \equiv \frac{\partial \Delta S}{\partial x_i} : \text{熱力学的な力}, \quad J_i \equiv \dot{x}_i : \text{変化速度 (流れ)}$$

と表される. ここで時間変化  $J_i$  は力  $X_i$  によってかりたてられていると考え, 平衡状態の近く, したがって小さな  $X_i$  を想定して線形関係

$$J_i = \sum_j \gamma_{ij} X_j$$

を仮定すると, 微視的な可逆性により係数の対称性 (Onsager の相反関係)

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji} \quad (32)$$

が成り立つ (Onsager の相反定理証明は統計力学のノート参照). 変数  $x_i, x_j$  のうち一方のみが時間反転に対して符号を変える場合には, 導かれる係数の対称性は反対称性

$$\gamma_{ij} = -\gamma_{ji} \quad (33)$$

に置き換わる [8, § 120].

さて, 媒質中を運動する物体を考えよう. 物体の巨視的な座標のみを用いる純粋に力学的な取り扱いでは, 媒質へとエネルギーが散逸する過程には統計力学を援用しなければならない. 通常の力学で仮定されるように, 系の状態は各瞬間ごとに物体の座標と速度の組  $(q, \dot{q})$  のみを用いて指定できる場合を考える. また速度  $\dot{q}_i$  は小さく, その高次の項は無視できるとする (速度の 1 次式 (25.8):  $f_i^{\text{摩擦}} = \sum_k \alpha_{ik} \dot{q}_k$  に整合).

はじめに散逸過程を完全に無視した場合を考える. 運動エネルギー  $K(\dot{q})$  が速度のみに依存し, ポテンシャル・エネルギー  $U(q)$  が座標のみに依存するように一般座標  $q$  をとる. このとき運動量  $p_i$  の定義式と運動方程式は

$$p_i = \frac{\partial K(\dot{q})}{\partial \dot{q}_i}, \quad (34)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial U(q)}{\partial q_i}. \quad (35)$$

$K(\dot{q})$  を速度  $\dot{q}_i$  の 2 次形式として式 (34) を  $\dot{q}_i$  について解くと

$$\dot{q}_i = \frac{\partial K(\dot{q})}{\partial p_i} \quad (36)$$

となる\*14. これらは係数  $\gamma_{ik}$  の正しい (反) 対称性を確かに満たしている. 実際, 変数  $\{x_i\}$  として座標  $\{q_i\}$  と運動量  $\{p_i\}$  をとると, 平衡状態  $q_i, p_i = 0$  から物体を状態  $q_i, p_i$  に移行する最小の仕事は

$$R_{\min} = K(p) + U(q)$$

である. ところがこれは一定温度  $T$  の下でのエントロピー変化  $\Delta S$  と

$$\Delta S = -\frac{R_{\min}}{T}$$

によって関係付けられるから\*15,

$$X_{q_i} = \frac{1}{T} \frac{\partial R_{\min}}{\partial q_i} = \frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial q_i} = -\frac{1}{T} \dot{p}_i, \quad (37)$$

$$X_{p_i} = \frac{1}{T} \frac{\partial R_{\min}}{\partial p_i} = \frac{1}{T} \frac{\partial K}{\partial p_i} = \frac{1}{T} \dot{q}_i \quad (38)$$

となる. それぞれ最後の等号では式 (35), 式 (36) を考慮した. ここから係数は

$$\gamma_{q_i p_i} = T = -\gamma_{p_i q_i}, \quad \text{その他の } \gamma_{ik} = 0$$

\*14  $K = \frac{1}{2} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$  とおくと (繰り返された添字について和をとる),

$$p_i = \frac{\partial K(\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} = a_{ik} \dot{q}_k, \quad \therefore \dot{q}_i = (a^{-1})_{ik} p_k, \quad \therefore K = \frac{1}{2} a_{ik} \{(a^{-1})_{il} p_l\} \{(a^{-1})_{km} p_m\} = \frac{1}{2} (a^{-1})_{km} p_k p_m$$

だから.

\*15 第 1 法則を機械的に書き下せば

$$R = -T\Delta S + \Delta E$$

であり, 物体の内部エネルギー変化  $\Delta E = 0$  のとき外からの仕事  $R = R_{\min}$  が対応すると考えられる.

と同定される。これは時間反転に対して  $q_i$  が不変に留まり、 $p_i$  が符号を反転させることから期待される通りの反対称性 (式 (33)) となっている。

散逸がある場合には、式 (35)、式 (36) に  $X_{q_i}, X_{p_i}$  の適当な線形結合を加えれば良い\*16。ところが式 (36) は運動量の定義式 (34) の帰結であって、散逸過程の導入によって変化してはならない。これは式 (38) が不変であり、それ故

$$\gamma_{q_i p_i} = T, \quad \text{その他の } \gamma_{q_i k} = 0$$

が依然として成り立つことを意味する。すると反対称性式 (33):  $\gamma_{p_i q_i} = -\gamma_{q_i p_i} = -T$  を壊さずに式 (35) に付け加えることが許される項は、 $\sum_k \gamma_{ik} \frac{\partial K}{\partial p_k}$  のみである。実際、このとき式 (37) の最右辺には  $\frac{1}{T} \sum_k \gamma_{ik} \frac{\partial K}{\partial p_k}$  が付加されることになり、この場合  $\gamma_{p_i q_i} = -T$  の関係は不変に留まる ( $X_{q_k}$  の項が追加されると、この関係は破られる)。こうして運動方程式は

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial U}{\partial q_i} - \sum_k \gamma_{ik} \frac{\partial K}{\partial p_k} \\ &= -\frac{\partial U}{\partial q_i} - \sum_k \gamma_{ik} \dot{q}_k \end{aligned}$$

となる。最右辺第 2 項は媒質からの抵抗力 (摩擦力) を表し、係数は対称性 (32):  $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$  を満たす [8, § 121]\*17。『力学』§ 25 本文の表記では  $\gamma_{ik} \rightarrow \alpha_{ik}$ 。

#### ■摩擦力の式 (25.10) について

$$-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} (\alpha_{kl} \dot{x}_k \dot{x}_l) = -\frac{1}{2} (\alpha_{il} \dot{x}_l + \alpha_{ki} \dot{x}_k) = -\alpha_{il} \dot{x}_l$$

の最後の等号で対称性  $\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$  を用いた。

#### ■系のエネルギーの時間変化率の計算 (p.95 下から 10 行目、本稿の式 (31)) における第 2 の等号について

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) &= \ddot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}, \\ \frac{dL}{dt} &= + \frac{\partial L}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i. \end{aligned}$$

■2s 次方程式が実係数を持つならば、解は実数が複素共役な対からなること (最終段落) について 複素数の範囲では、 $n$  次代数方程式

$$f(x) \equiv \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_n = 0 \quad (\alpha_i : \text{複素数}, \alpha_0 \neq 0)$$

は  $n$  個の根  $x = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  を持ち (重根を許す)、したがって

$$f(x) = \alpha_0 (x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_n)$$

と分解される (代数学の基本定理)。特に係数  $\{\alpha_i\}$  がすべて実数であれば、

$$f(x) = \alpha_0 \left\{ \prod_i (x - x_i) \right\} \left\{ \prod_j (x - \xi_j)(x - \xi_j^*) \right\} \quad (x_i : \text{実数}, \xi_j : \text{実数でない複素数})$$

\*16 すぐ後で見ると、このとき媒質からの抵抗力が速度の 1 次までの式として得られる。

\*17  $p_i, p_k$  の符号がともに時間反転に対して入れ替わるから。

と書ける. 実際,  $\xi_j$  が  $f(x) = 0$  の 1 つの根ならば ( $f(\xi_j) = 0$ ),

$$0 = (f(\xi_j))^* = f(\xi_j^*)$$

より  $\xi_j^*$  も  $f(x)$  の根となる. したがって  $f(x)$  は  $(x - \xi_j)(x - \xi_j^*)$  でくくれることになる [7, pp.31-32].

## § 26. 摩擦があるときの強制振動

- 周期的な強制力  $f \cos \gamma t$  の下での, 摩擦がある系の運動方程式は

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \operatorname{Re} \left[ \frac{f}{m} e^{i\gamma t} \right] \quad (26.2)$$

となる.

この外力の項 (右辺) がないときの解は時間とともに減衰し (§ 25), 十分長い時間が経った後の運動は特殊解

$$x = \operatorname{Re}[B e^{i\gamma t}] = b \cos(\gamma t + \delta) \quad (26.5)$$

によって記述される ( $B \equiv b e^{i\delta}$ , 下記的一般解 (26.4) を参照).

- 振幅  $b \equiv |B|$  を最大にする  $\gamma$  の値

$$\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} \quad [\text{本稿次節で補足}]$$

は,  $\lambda \ll \omega_0$  であれば, ほぼ  $\omega_0$  となる ( $\frac{\gamma}{\omega_0} = 1 + O((\frac{\lambda}{\omega_0})^2)$ ).

- 摩擦がないときの共鳴 [式 (22.4), (22.5)] と違って,  $\gamma \rightarrow \omega_0$  としても振幅が発散することはない.
- $\lambda \ll \omega_0$  のとき, 共鳴の近くは  $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$  として調べれば良く ( $\varepsilon$  は微小量),

$$B = - \frac{f}{2m(\varepsilon - i\lambda)\omega_0}, \quad (26.6)$$

$$b = \frac{f}{2m\omega_0\sqrt{\varepsilon^2 + \lambda^2}}, \quad \tan \delta = \frac{\lambda}{\varepsilon} \quad (26.7)$$

を得る<sup>\*18</sup>.

- 外力に対し, 質点の振動の位相は遅れる ( $\delta < 0$ ). 図 48 参照.
- 系が単位時間に外力の源泉から吸収するエネルギーの平均  $I(\gamma)$  の  $\gamma (= \omega_0 + \varepsilon)$  依存性は

$$I(\gamma) = \frac{f^2}{4m} \frac{\lambda}{\varepsilon^2 + \lambda^2} \quad (\varepsilon \text{ が小さいとき}) \quad (26.9)$$

となる (導出は下記, 図 49 参照, このような形で振動数に依存する吸収を分散的と呼ぶ).

- 図 49 の共鳴曲線の下での面積

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{f^2 \lambda}{4m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2 + \lambda^2} = \frac{\pi f^2}{4m}$$

は  $\lambda$  に依らずに一定 (曲線の概形 (図 49) を念頭に近似式 (26.9) を採用し, 積分範囲を  $\gamma \rightarrow \pm\infty$  に広げた).

<sup>\*18</sup> 式 (26.6) は  $B$  の式 (26.2) で近似的に

$$\gamma^2 - \omega_0^2 = (\gamma + \omega_0)(\gamma - \omega_0) \simeq 2\omega_0\varepsilon, \quad 2i\lambda\gamma \simeq 2i\lambda\omega_0$$

とおくと得られる.

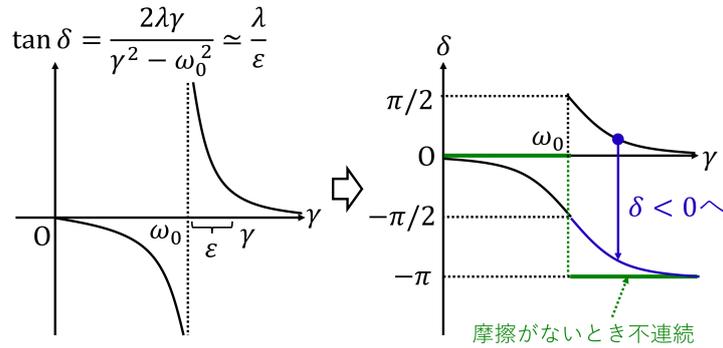


図 48 振動の位相  $\delta$  と外力の周期  $\gamma$  の関係 (式 (26.3),(26.7))

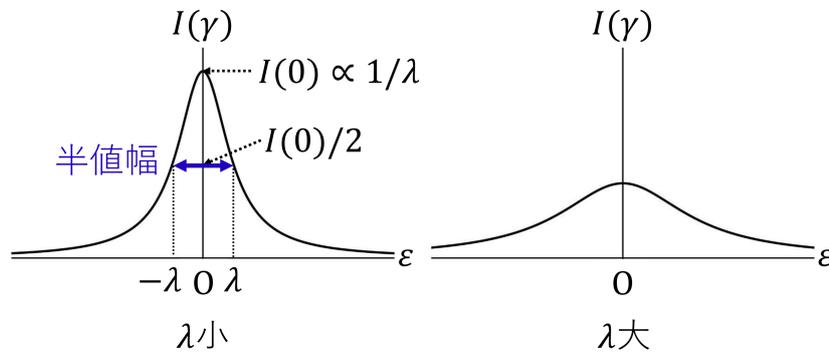


図 49 共鳴曲線 (式 (26.8),(26.9))

§ 26, 式の導出など

■運動方程式 (26.1) の一般解 変数の実部が実際の物理量を表すものと約束して, 運動方程式 (26.1) を

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} e^{i\gamma t}$$

と書く. 特殊解は  $x = B e^{i\gamma t}$  という形をとり, これを上式に代入すると,

$$B = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma)} \quad (26.2)$$

と定まる.  $B \equiv b e^{i\delta}$  の絶対値と偏角はそれぞれ

$$b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}, \quad \tan \delta = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (26.3)$$

で与えられる [本稿次節で補足].

運動方程式 (26.1) の一般解は, 同次方程式の一般解 (§ 25) と, 特殊解の和

$$x = A e^{(-\lambda+i\omega)t} + B e^{i\gamma t} = a e^{-\lambda t} e^{i(\omega t + \alpha)} + b e^{i(\gamma t + \delta)}$$

で与えられる. 実部をとれば

$$x = a e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha) + b \cos(\gamma t + \delta). \quad (26.4)$$

■式 (26.9) の導出 系が特殊解 (26.5) で表される運動に落ち着いた後では、系のエネルギーは一定にとどまる。このとき単位時間に

- 系が吸収するエネルギーの平均 ( $= I(\gamma)$ ) と、
- 系の失うエネルギーの平均 ( $= -\overline{dE/dt} = 2\overline{F}$ )

は等しくなる (バーは振動の周期にわたる時間平均)。ここに散逸関数

$$F = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2 = \lambda m \dot{x}^2$$

(§ 25) は、式 (26.5) を代入すると

$$F = \lambda m b^2 \gamma^2 \sin^2(\gamma t + \delta)$$

と評価できるから、

$$I(\gamma) = \lambda m b^2 \gamma^2 \left[ = \frac{f^2}{m} \frac{\lambda \gamma^2}{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2} \right] \quad (26.8)$$

が得られる (第 1 の等号は  $\overline{\sin^2(\gamma t + \delta)} = 1/2$ , 第 2 の等号は式 (26.3) による)。共鳴の近くでは振幅の表式 (26.7) を代入して、式 (26.9) を得る [本稿次節で補足]。

## § 26 について

■電気回路の系との対応 強制振動の方程式は、変数とパラメーターを適当に読み替えることにより回路方程式に対応付けられる：

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F \quad \leftrightarrow \quad L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = E.$$

したがって § 26 の結果は、交流電源に接続された LCR 直列回路にも適用できる。

■特殊解の複素振幅  $B = be^{i\delta}$  の式 (26.3) について 式 (26.2) は

$$B = \frac{f (\omega_0^2 - \gamma^2) + i(-2\lambda\gamma)}{m (\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + (2\lambda\gamma)^2}$$

と書き直され、

$$\tan \delta = \frac{\text{Im}(B)}{\text{Re}(B)}$$

である。

■「振動の振幅は  $\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$  という振動数に対して最大」(p.97, 1.9) について  $b \equiv |B|$  の式 (26.3) の根号内

$$\gamma^4 - 2(\omega_0^2 - 2\lambda^2)\gamma^2 + \omega_0^4$$

は  $\gamma^2 = \omega_0^2 - 2\lambda^2$  のとき最小になる。

■式 (26.8) ⇒ 式 (26.9) について  $I(\gamma)$  の式 (26.8) に  $b$  の式 (26.7) を代入した

$$I(\gamma) = \frac{f^2}{4m} \frac{\lambda}{\varepsilon^2 + \lambda^2} \times \left( \frac{\gamma}{\omega_0} \right)^2$$

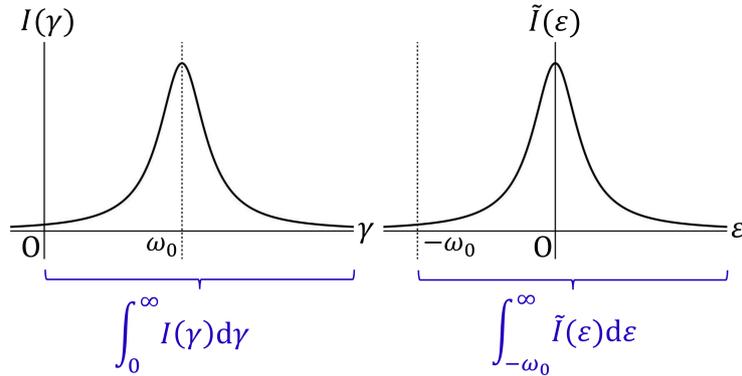


図 50  $I(\gamma)$  と  $\tilde{I}(\varepsilon)$

において  $\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2 \simeq 1$  とする. さらにこれを  $\varepsilon$  の関数と見ると関数形が変わる. そこで式 (26.9) の代りに

$$\tilde{I}(\varepsilon) = \frac{f^2}{4m} \frac{\lambda}{\varepsilon^2 + \lambda^2}$$

と書く. p.98 下から 5 行目, および p.98 一番下の積分における  $I(\varepsilon)$  はいずれもこの  $\tilde{I}(\varepsilon)$  の意味である (図 50 参照). なお  $\lambda \rightarrow 0$  で  $\tilde{I}(\varepsilon) \sim \delta(\varepsilon)$  (デルタ関数) となる.

### § 26, 問題 外力 $f = f_0 e^{\alpha t} \operatorname{Re}(e^{i\gamma t})$

強制振動に対応する特殊解を  $x = B e^{(\alpha+i\gamma)t}$  の形に仮定して運動方程式に代入すると,

$$B\{(\alpha + i\gamma)^2 + 2\lambda(\alpha + i\gamma) + \omega_0^2\} = \frac{f_0}{m}, \quad \therefore B = \frac{f_0}{m\{(\alpha^2 - \gamma^2 + 2\lambda\alpha + \omega_0^2) + 2\gamma(\alpha + \lambda)i\}}$$

となる.

$$b \equiv |B| = \frac{f_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 + \alpha^2 - \gamma^2 + 2\lambda\alpha)^2 + 4\gamma^2(\alpha + \lambda)^2}}, \quad \delta \equiv \arg(B) = -\arctan\left(\frac{2\gamma(\alpha + \lambda)}{\alpha^2 - \gamma^2 + 2\lambda\alpha + \omega_0^2}\right)$$

を用いて

$$B = b e^{i\delta}, \quad x = b e^{\alpha t} e^{i(\gamma t + \delta)}$$

と書ける.

$f_0 \rightarrow F_0, \omega_0 \rightarrow \omega, \alpha \rightarrow -\alpha, \gamma \rightarrow \beta$  の置き換えをして  $\lambda = 0$  とおくと, § 22, 問題 1(d) の特殊解

$$x = B e^{(-\alpha+i\beta)t}, \quad B = \frac{F_0}{m\{(\alpha^2 - \beta^2 + \omega^2) - 2\alpha\beta i\}}$$

に一致する.

### § 27. パラメーター共鳴

$m, k$  が時間変化する場合の運動方程式

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = 0$$

は, 適当な変数変換により

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0 \quad (27.2)$$

の形に帰着する [本稿次節で確認].  $\omega(t)$  が周期  $T$  を持つ場合の独立な 2 解は

$$x_1(t) = \mu_1^{t/T} \Pi_1(t), \quad x_2(t) = \mu_2^{t/T} \Pi_2(t) \quad (27.3)$$

という形をとる (説明は下記,  $\Pi_1, \Pi_2$  は周期  $T$  の関数). 特に実数  $\mu (\neq 1, 0)$  に対して

$$x_1(t) = \mu^{t/T} \Pi_1(t), \quad x_2(t) = \mu^{-t/T} \Pi_2(t) \quad (27.6)$$

という解が可能であることに注目する (説明は下記). このとき  $|\mu| > 1$  ならば  $x_1$  が,  $|\mu| < 1$  ならば  $x_2$  が指数関数的に増大する (パラメーター共鳴).

$x$  および  $\dot{x}$  の初期値が厳密にゼロに等しければ, それらはその後もずっとゼロである [本稿次節で補足]. この点は通常の共鳴  $x \sim t \sin(\omega t)$  (§ 22) とは異なる.

特に Mathieu (マチウ) 方程式

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2(t) = \omega_0^2(1 + h \cos \gamma t), \quad (0 < h \ll 1)$$

に従うパラメーター共鳴について, 実は

$$\gamma = 2\omega_0/n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

付近で共鳴が起き,

$$\begin{cases} (\text{共鳴の起こる } \gamma \text{ の幅}) \sim h^n \\ (\text{振幅}) \sim e^{st}, \quad s \sim h^n \end{cases}$$

である ( $n = 1$  については本文,  $n = 2$  については問題 2 で確認).

そこで [これらの最も大きい]  $n = 1$  を考えて  $\gamma \equiv 2\omega_0 + \varepsilon$  とし, 解として振動数  $\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}$  のパラメーター共鳴

$$x(t) = a(t) \cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + b(t) \sin\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t, \quad a, b \propto e^{st} \quad (27.9)$$

の形を仮定すると,

$$s^2 = \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{h\omega_0}{2} \right)^2 - \varepsilon^2 \right] \quad (27.10)$$

およびパラメーター共鳴の起きる条件

$$\begin{aligned} & \mu, \text{ 従って } s \text{ は実数} \\ \Leftrightarrow & \text{共鳴幅} \quad -h\omega_0/2 < \varepsilon < h\omega_0/2 \end{aligned} \quad (27.11)$$

が見出される (式 (27.11) の導出は下記). [式 (27.11) の下で, 式 (27.10) は指数  $s \sim h$  を意味する.]

なお, 解の一般的な表式 (27.6) と式 (27.9):

$$x \sim e^{st} \cos \frac{\gamma}{2}t + e^{st} \sin \frac{\gamma}{2}t$$

とは,  $\mu = e^{2\pi/\omega_0}$  で対応付けられる. [p.102 脚注の式  $\mu = -e^{2\pi/\omega_0}$  から負号を除いた. 実際このとき  $T = \frac{2\pi}{\gamma} \simeq \frac{\pi}{\omega_0}$  より  $\mu^{t/T} \simeq e^{st}$  である.]

摩擦がある場合には、振幅は減衰の因子  $e^{-\lambda t}$  (§ 25) を含めた  $e^{(s-\lambda)t}$  のようになり、境界の限界は  $s-\lambda=0$  から定まる。ただしここでは  $s(>0)$  は摩擦がないときの解である。このとき  $\gamma=2\omega_0$  付近の共鳴の区間 (27.11) は、

$$-\sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - 4\lambda^2} < \varepsilon < \sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - 4\lambda^2} \quad (27.12)$$

に狭まる [本稿次節で補足]。[根号内は正なので、] 共鳴は

$$h > h_k \equiv \frac{4\lambda}{\omega_0}$$

の場合にのみ可能である。一般に振動数  $\gamma=2\omega_0/n$  付近の共鳴に対するしきい値  $h_k$  は、 $\lambda^{1/n}$  に従って  $n$  とともに増大することが知られている [共鳴の条件が厳しくなる]。

## § 27, 式の導出など

### ■一般解 (27.3) について

$$\omega(t+T) = \omega(t)$$

を満たす周期関数  $\omega(t)$  を仮定しているので、 $x(t)$  が方程式 (27.2) の解ならば  $x(t+T)$  も解となる [本稿次節で補足]。[ところで式 (27.2) は 2 階の微分方程式なので、独立な解は 2 つまでである。そこで]  $x_1(t), x_2(t)$  を方程式 (27.2) の 2 つの独立な積分とすると、 $[x_1(t+T), x_2(t+T)]$  もまた解なので、 $x_1(t), x_2(t)$  の線形結合で表されなければならない。したがって] これらは線形変換

$$x_i(t+T) = A_{ij}x_j(t) \quad (i, j = 1, 2, \text{和の記号は省略}) \quad (39)$$

を受ける。これが簡単な形

$$x_1(t+T) = \mu_1 x_1(t), \quad x_2(t+T) = \mu_2 x_2(t) \quad (40)$$

をとるように  $x_1, x_2$  を選ぶことができる ( $\mu_1 \neq \mu_2$  であれば) [本稿次節で補足]。上式 (40) を満たす最も一般的な解は、周期  $T$  の周期関数  $\Pi_1(t), \Pi_2(t)$  を用いて式 (27.3) の形に書ける [本稿次節で補足]。

### ■式 (27.6) について 運動方程式

$$\ddot{x}_1 + \omega^2(t)x_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 + \omega^2(t)x_2 = 0$$

にそれぞれ  $x_2, x_1$  をかけて差をとると、

$$\ddot{x}_1 x_2 - \ddot{x}_2 x_1 = \frac{d}{dt}(\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2) = 0, \quad \therefore \dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2 = \text{const} \quad (27.4)$$

が得られる。ところが式 (27.3) の  $x_1, x_2$  に対しては、左辺  $\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2$  は  $t \rightarrow t+T$  のとき  $\mu_1 \mu_2$  倍されるから、

$$\mu_1 \mu_2 = 1 \quad (27.5)$$

でなければならない。

また方程式 (27.2) は係数が実なので、 $x(t)$  を解とすれば、その複素共役  $x^*(t)$  も解でなければならない。ここから、

$$(\mu_1^*, \mu_2^*) = (\mu_2, \mu_1), (\mu_1, \mu_2)$$

でなければならない [本稿次節で考察]. 第 1 の場合  $(\mu_1^*, \mu_2^*) = (\mu_2, \mu_1)$  には, 式 (27.5) とより  $|\mu_1|^2 = |\mu_2|^2 = 1$  となる.

第 2 の場合には  $\mu_1, \mu_2$  は実数である. [ $\mu_1 \neq \mu_2$  と式 (27.5) を考え合わせると,] 実数  $\mu (\neq 1, 0)$  を用いて  $\mu_1 = \mu, \mu_2 = \mu^{-1}$  とおくことができるので, 式 (27.6) を得る.

■式 (27.11) の導出  $\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon$  において Mathieu 方程式は

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + h \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t]x = 0 \quad (27.8)$$

となる. その解を式 (27.9) の形に仮定する. ただし係数  $a(t), b(t)$  は三角関数  $\cos(\omega_0 t + \varepsilon/2), \sin(\omega_0 t + \varepsilon/2)$  に比べてゆっくり時間変化する. 実際には  $x(t)$  には  $\omega_0 + \varepsilon/2$  と  $(2\omega_0 + \varepsilon)$  の整数倍だけ異なる振動数を持つ項が含まれるが, それらの項は  $h$  について高次の微小量なので (問題 1), 第 1 近似では無視できる.

そこで式 (27.9) を上式 (27.8) に代入する. さらに  $\dot{a} \sim \varepsilon a, \dot{b} \sim \varepsilon b$  を仮定する (共鳴の条件の下でこの仮定が正しいことは, 結果によって確認される [ $a, b \sim e^{st}$ , 式 (27.10), 式 (27.11) を見よ]). このとき  $\varepsilon$  の 1 次まで残すと

$$-\left(2\dot{a} + b\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2}b\right)\omega_0 \sin\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + \left(2\dot{b} - a\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2}a\right)\omega_0 \cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t = 0 \quad (41)$$

を得る [本稿次節で補足]. すると  $\sin$  と  $\cos$  の係数の各々がゼロでなければならないので, 関数  $a(t), b(t)$  に対する 2 つの微分方程式が得られる.  $a, b \sim e^{st}$  という解を考えると

$$sa + \frac{1}{2}\left(\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2}\right)b = 0, \quad \frac{1}{2}\left(\varepsilon - \frac{h\omega_0}{2}\right)a - sb = 0 \quad (42)$$

となる. これらが「両立するための条件」は式 (27.10) で与えられる [本稿次節で補足].

パラメータ共鳴が起きる条件は  $s$  が実であることであり, そこで上式 (27.10) において  $s^2 > 0$  を要求すると, 共鳴領域の幅 (27.11) を得る.

## § 27 について

■運動方程式 (27.2) について 「 $t$  の代わりに,  $d\tau = dt/m(t)$  によって新しい独立変数  $\tau$  を導入」 (§ 27, 1.6) し,  $t$  による微分をドット,  $\tau$  による微分をプライムで表そう. すると

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{m} \frac{d}{d\tau}, \quad \therefore m\dot{x} = x', \quad \therefore \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = \frac{1}{m}x''$$

より

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = 0 \quad \rightarrow \quad x'' + mkx = 0$$

となる. これは式 (27.2) の形をしている.

■「関数  $x(t+T)$  もまた解である」 (p.100, 1.5,6) について

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + \omega^2(t)x(t) &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{x}(t+T) + \omega^2(t+T)x(t+T) &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{x}(t+T) + \omega^2(t)x(t+T) &= 0. \end{aligned}$$

■式 (40) について

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = (A_{ij})$$

とおくと、線形変換 (39) は行列表記で

$$\mathbf{x}(t+T) = A\mathbf{x}(t)$$

となる。これは新しい変数  $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$  に対する式

$$\mathbf{y}(t+T) = B\mathbf{x}(t+T) = BA\mathbf{x}(t) = (BAB^{-1})\mathbf{y}(t)$$

を含意する。ところで  $A$  は 2 次正方行列だから、固有方程式は複素数の範囲で常に 2 解  $\mu_1, \mu_2$  を持つ。そして p.100 脚注 1 で断っているように、 $\mu_1 \neq \mu_2$  でありさえすれば、対応する固有ベクトルを並べて行列  $B$  を構成し、

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \equiv \mu$$

と対角化できる。よってこの  $B$  を用い新しい変数  $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$  を採用すれば、線形変換は線形変換 (40) の形

$$y_1(t+T) = \mu_1 y_1(t), \quad y_2(t+T) = \mu_2 y_2(t)$$

をとる。

■式 (40) を満たす解が式 (27.3) の形をとること 解を式 (27.3):

$$x_1(t) = \mu_1^{t/T} \Pi_1(t), \quad x_2(t) = \mu_2^{t/T} \Pi_2(t)$$

の形に書いて  $\Pi_1(t), \Pi_2(t)$  を定義しても、何ら一般性は失われない。これを式 (40) に代入すると、

$$\mu_1^{(t+T)/T} \Pi_1(t+T) = \mu_1 \cdot \mu_1^{t/T} \Pi_1(t), \quad \therefore \Pi_1(t+T) = \Pi_1(t),$$

同様に  $\Pi_2(t+T) = \Pi_2(t)$  となるので、 $\Pi_1(t), \Pi_2(t)$  は周期  $T$  の周期関数でなければならないことになる。この結果は Floquet (フロケ) の定理と呼ばれる (固体物理の文脈では Bloch (ブロッホ) の定理として知られている)。

■式 (27.4) について 式 (27.3) の導出には式 (27.4):  $\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2 = \text{const}$  をあからさまには用いていないから、式 (27.3) の  $x_1, x_2$  が自動的に条件 (27.4) を満たしている保証はない。(後の条件  $(\mu_1^*, \mu_2^*) = (\mu_2, \mu_1), (\mu_1, \mu_2)$  についても同様。)

■式 (27.5):  $\mu_1 \mu_2 = 1$  について これは

$$1 = \mu_1 \mu_2 = |BAB^{-1}| = |B||A||B^{-1}| = |A||BB^{-1}| = |A|$$

を意味している。

■ $(\mu_1^*, \mu_2^*) = (\mu_2, \mu_1), (\mu_1, \mu_2)$  の考察 最終的に解 (27.3) における  $\mu_1, \mu_2$  が (実数でない) 複素数になる場合 (p.101, 1.1-4) が考えられている以上、線形変換の係数行列  $A$  を実と仮定することはできない。

さて、式 (40) の複素共役をとると

$$x_1^*(t+T) = \mu_1^* x_1^*(t), \quad x_2^*(t+T) = \mu_2^* x_2^*(t) \quad (43)$$

を得る。他方、解  $x_1^*, x_2^*$  も  $x_1, x_2$  の線形結合で表されなければならないから、適当な  $2 \times 2$  の行列  $C = (C_{ij})$  を用いて

$$\mathbf{x}^* = C\mathbf{x}$$

とおける ( $\mathbf{x}^*$  は単に  $\mathbf{x}$  の成分の複素共役をとったベクトル)。このとき  $C$  は

$$\mathbf{x} = C^* \mathbf{x}^* = C^* C \mathbf{x} \quad \rightarrow \quad C^* C = 1$$

を満たさなければならないことになる ( $C^*$  は単に  $C$  の全成分の複素共役をとった行列)。また対角行列  $\mu$  を用いて式 (40) は  $\mathbf{x}(t+T) = \mu\mathbf{x}(t)$  と書けるので、

$$\mathbf{x}^*(t+T) = C\mathbf{x}(t+T) = C\mu\mathbf{x}(t) = (C\mu C^*)\mathbf{x}^*(t)$$

であり、これを冒頭の式 (43) と比べると

$$\begin{pmatrix} \mu_1^* & 0 \\ 0 & \mu_2^* \end{pmatrix} = C\mu C^* = \begin{pmatrix} C_{11}\mu_1 C_{11}^* + C_{12}\mu_2 C_{21}^* & C_{11}\mu_1 C_{12}^* + C_{12}\mu_2 C_{22}^* \\ C_{21}\mu_1 C_{11}^* + C_{22}\mu_2 C_{21}^* & C_{21}\mu_1 C_{12}^* + C_{22}\mu_2 C_{22}^* \end{pmatrix} \quad (44)$$

が見出される。

ここから  $(\mu_1^*, \mu_2^*) = (\mu_2, \mu_1), (\mu_1, \mu_2)$  を読み取るとは困難である。そこで具体的に  $\mathbf{x}^* = C\mathbf{x}$  を満たす  $C$  の簡単な形として、 $C$  の対角成分のみ、または非対角成分のみがゼロでない値をとる場合を考える。すると  $x_1 = r_1 e^{i\theta_1}, x_2 = r_2 e^{i\theta_2}$  と書いたとき、

$$C = \begin{pmatrix} e^{-2i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{-2i\theta_2} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{r_1}{r_2} e^{-i(\theta_1+\theta_2)} \\ \frac{r_2}{r_1} e^{-i(\theta_1+\theta_2)} & 0 \end{pmatrix}$$

と定まる。ただし  $C$  は時間によらない定数行列だから、1つ目の  $C$  は位相  $\theta_1, \theta_2$  が一定のとき、2つ目の  $C$  は比  $r_2/r_1$  と和  $\theta_1 + \theta_2$  が一定のとき有効である。2通りの  $C$  それぞれに対して、式 (44) は順に

$$\begin{pmatrix} \mu_1^* & 0 \\ 0 & \mu_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mu_1^* & 0 \\ 0 & \mu_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_2 & 0 \\ 0 & \mu_1 \end{pmatrix}$$

となる。パラメータ共鳴には第1の場合が対応し (p.101)、その前提  $\theta_1, \theta_2 = \text{const}$  はさほど無理のある制約ではないようにも見える。

■ 「 $x$  および  $\dot{x}$  の初期値が厳密にゼロに等しければ、それらはその後もずっとゼロである」 (p.101, l.12,13) について

$$\begin{cases} 0 = \dot{x}_1(0) = \dot{\Pi}_1(0) \\ 0 = \dot{x}_1(0) = \frac{\log \mu}{T} \Pi_1(0) + \dot{\Pi}_1(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Pi_1(0) = 0 \\ \dot{\Pi}_1(0) = 0 \end{cases}$$

である。さらに

$$\ddot{x}_1 = \left\{ \left( \frac{\log \mu}{T} \right)^2 \Pi_1 + 2 \frac{\log \mu}{T} \dot{\Pi}_1 + \ddot{\Pi}_1 \right\} \mu^{t/T}$$

を運動方程式 (27.2) に代入すると

$$\ddot{\Pi}_1 = - \left[ \left\{ \left( \frac{\log \mu}{T} \right)^2 + \omega^2 \right\} \Pi_1 + 2 \frac{\log \mu}{T} \dot{\Pi}_1 \right]$$

なので上記とより  $\ddot{\Pi}_1 = 0$ 。このとき図 51 に示すように恒等的に  $\Pi_1(t) = 0$ 、したがって  $x_1(t) \equiv 0$  となる。

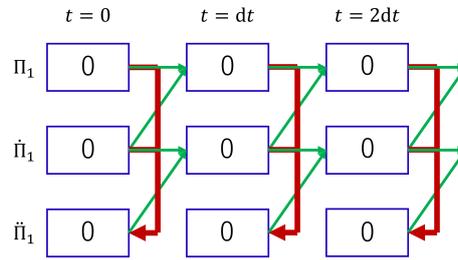


図 51  $\Pi_1(0) = 0, \dot{\Pi}_1(0) = 0 \Rightarrow \Pi_1(t) = 0$  の説明

■解の形 (27.9) について Mathieu で完全に  $h = 0$  とおくと角振動数  $\omega_0$  の単振動となるから、 $\gamma$  の値に依らず、解をそれに近い形に仮定するのは理に適っている (問題 2 も参照)。

■ $a(t), b(t)$  の満たす p.102, l.13,14 の式 (本稿の式 (41)) について 解 (27.9) を微分すると厳密に

$$\ddot{x} = \left\{ \ddot{a} + 2\dot{b} \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) - a \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \right\} \cos \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t + \left\{ \ddot{b} - 2\dot{a} \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) - b \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \right\} \sin \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t$$

となる。ここで

$$\dot{a}\varepsilon \sim a\varepsilon^2, \quad \dot{b}\varepsilon \sim b\varepsilon^2, \quad \ddot{a} \sim \dot{a}\varepsilon \sim a\varepsilon^2, \quad \ddot{b} \sim \dot{b}\varepsilon \sim b\varepsilon^2$$

を落とすと

$$\ddot{x} \simeq \{2\dot{b}\omega_0 - a(\omega_0^2 + \varepsilon\omega_0)\} \cos \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t + \{-2\dot{a}\omega_0 - b(\omega_0^2 + \varepsilon\omega_0)\} \sin \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \quad (45)$$

となる。また教科書の指示通り

$$\cos \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \cdot \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t = \frac{1}{2} \cos \left( 3\omega_0 + \frac{3\varepsilon}{2} \right) t + \frac{1}{2} \cos \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t, \quad \text{etc.}$$

とすると、

$$\begin{aligned} & h\omega_0^2 \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t x(t) \\ &= h\omega_0^2 \frac{a}{2} \left\{ \cos 3 \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t + \cos \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \right\} + h\omega_0^2 \frac{b}{2} \left\{ \sin 3 \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t - \sin \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \right\} \\ &= \frac{h\omega_0^2}{2} \left\{ a \cos \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t - b \sin \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \right\}. \end{aligned} \quad (46)$$

式 (45), 式 (46) を運動方程式 (27.8) に代入して、 $a(t), b(t)$  の満たす式 (41) を得る。

■「これら 2 つの代数方程式が両立するための条件」(27.10) について 式 (27.10) は、式 (42) の 2 式をまとめた

$$\begin{pmatrix} s & \frac{1}{2} \left( \varepsilon + \frac{h\omega_0}{2} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \varepsilon - \frac{h\omega_0}{2} \right) & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

において、 $(a, b) \neq (0, 0)$  であるための永年方程式

$$\begin{vmatrix} s & \frac{1}{2} \left( \varepsilon + \frac{h\omega_0}{2} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \varepsilon - \frac{h\omega_0}{2} \right) & s \end{vmatrix} = 0$$

である。

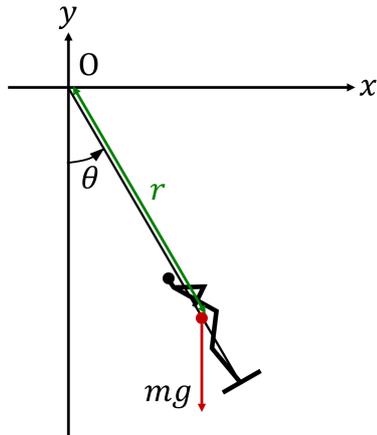


図 52 ブランコの立ち漕ぎ

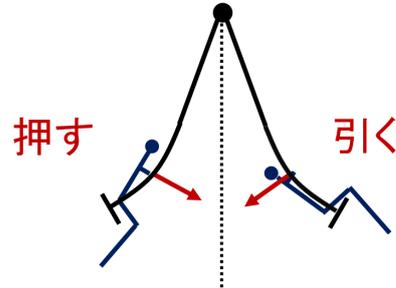


図 53 座って漕ぐ場合 (自己流)

■p.103 脚注について  $e^{st}$  に従う振幅の増大が起きるのは  $s > 0$  のときだから、共鳴領域の限界は  $s = 0$  で与えられる。

■摩擦があるときの共鳴の区間 (27.12) について 摩擦がないときの式 (27.10) で決まる

$$s = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - \varepsilon^2} > 0$$

に対して、共鳴領域の限界に対応する  $\varepsilon$  が満たす式  $s - \lambda = 0$  は

$$\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - \varepsilon^2}, \quad \therefore \varepsilon = \pm \sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - 4\lambda^2}$$

を与えるので、式 (27.12) を得る。

■具体例——ブランコの立ち漕ぎ ブランコを漕ぐ場合を考え、図 52 のように座標系を設定すると、重心の運動方程式は

$$m\ddot{x} = -T \sin \theta, \quad m\ddot{y} = T \cos \theta - mg$$

となる ( $T$  はつり紐の張力)。ここで立ち漕ぎによる重心の上下動を

$$r = l_0(1 + \varepsilon \cos \omega t) \quad (|\varepsilon| \ll 1)$$

とモデル化する。このとき微小振動を仮定すると、 $x$  と  $\varepsilon$  の 1 次までの近似で  $x$  座標に対する運動方程式は、Mathieu 方程式

$$\ddot{x} = -\{\omega_0^2 + \varepsilon(\omega^2 - \omega_0^2) \cos \omega t\}x$$

になる ( $\omega_0 \equiv \sqrt{g/l_0}$  は長さ  $r = l_0$  (一定) のときの角振動数)。よって § 27 で見たように、 $\omega = 2\omega_0$  とするとブランコの振幅は大きくなっていく [9, pp.77–81, pp.116–123]。  $\varepsilon$  の符号は任意であり、例えば  $\varepsilon > 0$  に対してこれは、ブランコが最下点に来たときに立ち上がり、振動の両端でしゃがむ場合に対応する。

なおブランコは立ち漕ぎよりも座って漕ぐ方が一般的である。私はあるとき、図 53 のように振動の両端に来たときに鎖を手で押す (または引く) と、ブランコを上手く漕げることに気が付いた。この個人的な経験則

は一見すると、ブランコの固有振動数と同じ振動数の外力による強制振動 (共鳴) として理解できそうである。しかしながら手で鎖を押し引きする力は内力であって、系全体 (人とブランコ) の重心の運動には寄与しない。したがってこのような方法は理論的には、髪の毛を掴んで自分の身体を泥沼から引き上げるのと同様に不可能に見える。

この困難は暗に人と椅子をブランコ全体から独立した系として扱っていることに起因していると考えられる。1つのアナロジーとして、2個のおもりをばねでつないだ系を考えよう。ばねを縮めてそとと離すと、おもりは相対運動を行うものの、質量中心は不動であり系全体の並進は得られない。しかしばねを壁に押し込んでから離せば、系は壁から飛び出す。ここでは壁からの反作用の力積が、系にゼロでない全運動量を与えており、これは水泳のターンの際に壁を蹴って発進するのに似ている<sup>\*19</sup>。同様にブランコを座って漕ぐ場合にも、ブランコを支えている地面に固定された構造物による反作用から、重心の運動量変化を得ることができると想像できる。

## § 27, 問題

1 Mathieu 方程式,  $\gamma = 2\omega_0$  付近の共鳴,  $h^2$  までの近似 「関数  $x(t)$  には,  $\omega_0 + \varepsilon/2$  と  $(2\omega_0 + \varepsilon)$  の整数倍だけ異なるような振動数をもつ項が含まれる」 (p.102, 1.3,4) ことを考えて, 運動方程式 (27.8) の解を

$$x = a_0 \cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + b_0 \sin\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + a_1 \cos 3\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + b_1 \sin 3\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t$$

とおく. 共鳴領域の限界で係数  $a_0, b_0, a_1, b_1 \sim e^{st}$  は  $s = 0$  より定数になる (p.103, 脚注 1). このとき運動方程式 (27.8) において

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x = & -a_0 \left(\omega_0 \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) \cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t - b_0 \left(\omega_0 \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) \sin\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t \\ & - a_1 \left(8\omega_0^2 + 9\omega_0 \varepsilon + \frac{9}{4}\varepsilon^2\right) \cos 3\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t - b_1 \left(8\omega_0^2 + 9\omega_0 \varepsilon + \frac{9}{4}\varepsilon^2\right) \sin 3\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t \end{aligned}$$

となる. ここで「振動数  $3(\omega_0 + \varepsilon/2)$  の項では 1 次の微小量だけを残」 (p.104, 1.9,10) すとあるけれど, 振動数  $3(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})$  の項における 1 次 (以上) の微小量を落とすことにする (後の結果  $a_1 \sim ha_0 \sim \varepsilon a_0, b_1 \sin hb_0 \sim \varepsilon b_0$  にも関わらず). また

$$\begin{aligned} \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t \cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t &= \frac{1}{2} \left\{ \cos 3\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + \cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t \right\}, \\ \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t \sin\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t &= \frac{1}{2} \left\{ \sin 3\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t - \sin\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t \right\}, \\ \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t \cos 3\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t &= \frac{1}{2} \left\{ \cos 5\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + \cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t \right\}, \\ \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t \sin 3\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t &= \frac{1}{2} \left\{ \sin 5\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + \sin\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t \right\} \end{aligned}$$

に注意し, 振動数  $5(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})$  を持つ項を捨てると

$$\begin{aligned} & \omega_0^2 h \{ \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t \} x \\ = & \frac{h\omega_0^2}{2} \left\{ (a_0 + a_1) \cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + (-b_0 + b_1) \sin\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + a_0 \cos 3\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + b_0 \sin 3\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t \right\} \end{aligned}$$

<sup>\*19</sup> ただし壁が固定されているとすれば壁は仕事をしないため, エネルギー的な観点からはばねの弾性エネルギーが並進運動のエネルギーに変換されたことになる. 以上の議論の着想は文献 [10, pp.110–111].

となるので, p.104, 1.5~8 の式

$$\begin{aligned}
 & \left[ -a_0 \left( \omega_0 \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4} \right) + \frac{h\omega_0^2}{2} a_0 + \frac{h\omega_0^2}{2} a_1 \right] \cos \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \\
 & + \left[ -b_0 \left( \omega_0 \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4} \right) - \frac{h\omega_0^2}{2} b_0 + \frac{h\omega_0^2}{2} b_1 \right] \sin \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \\
 & + \left[ \frac{h\omega_0^2}{2} a_0 - 8\omega_0^2 a_1 \right] \cos 3 \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \\
 & + \left[ \frac{h\omega_0^2}{2} b_0 - 8\omega_0^2 b_1 \right] \sin 3 \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t = 0
 \end{aligned} \tag{47}$$

を得る. 各係数 [...] の各々がゼロであり, あとの2つから,

$$a_1 = \frac{h}{16} a_0, \quad b_1 = \frac{h}{16} b_0.$$

[よって式 (27.9) に対する付加的な項は高次の微小量となっている.] これを用いると, 最初の2つから

$$\omega_0 \varepsilon \pm \frac{h\omega_0^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{h^2 \omega_0^2}{32} = 0 \quad (\text{p.104, 1.14}) \tag{48}$$

が得られる.

$\varepsilon$  についての2次方程式 (48) を解くと

$$\varepsilon = 2\omega_0 \left( -1 \pm \sqrt{1 \mp \frac{h}{2} + \frac{h^2}{32}} \right)$$

となる. 第2の複号は考えている2つの2次方程式 (48) に含まれているものであり, 第1の複号はそれぞれの2次方程式が2解を持つことに対応している. 式 (27.11) の限界  $\varepsilon = \pm h\omega_0/2$  と適合する解は, 第1の複号で正号を選ぶと得られる:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon = 2\omega_0 \left( -1 + \sqrt{1 \mp \frac{h}{2} + \frac{h^2}{32}} \right) & \simeq \pm \frac{h\omega_0}{2} - \frac{1}{32} h^2 \omega_0 \\
 \left( \because \sqrt{1 \mp \frac{h}{2} + \frac{h^2}{32}} \simeq 1 + \frac{1}{2} \left( \mp \frac{h}{2} + \frac{h^2}{32} \right) + \frac{\frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \right)}{2!} \left( \mp \frac{h}{2} \right)^2 = 1 \mp \frac{h}{4} - \frac{1}{64} h^2 \right).
 \end{aligned}$$

一方の限界  $\varepsilon = \frac{h\omega_0}{2} - \frac{1}{32} h^2 \omega_0$  に対しては式 (47) における  $\sin \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t$  の係数がゼロとなる. 同時に  $\cos \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t$  の係数をゼロにするためには,  $a_0 = 0$  とすれば良い. 他方の限界  $\varepsilon = -\frac{h\omega_0}{2} - \frac{1}{32} h^2 \omega_0$  に対しては式 (47) における  $\cos \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t$  の係数がゼロとなる. 同時に  $\sin \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t$  の係数をゼロにするためには,  $b_0 = 0$  とすれば良い.

2 Mathieu 方程式,  $\gamma = \omega_0$  付近の共鳴  $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$  に対する運動方程式

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + h \cos(\omega_0 + \varepsilon)t] x = 0$$

の解を

$$x = a_0 \cos(\omega_0 + \varepsilon)t + b_0 \sin(\omega_0 + \varepsilon)t + a_1 \cos 2(\omega_0 + \varepsilon)t + b_1 \sin 2(\omega_0 + \varepsilon)t + c_1$$

の形におく. [定数項  $c_1$  は振動数  $(\omega_0 + \varepsilon) - (\omega_0 + \varepsilon)$  の項と見なせる.] 再び共鳴領域の限界を考えて係数を定数として扱おうと,

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} + \omega_0^2 x & = -a_0(2\omega_0\varepsilon + \varepsilon^2) \cos(\omega_0 + \varepsilon)t - b_0(2\omega_0\varepsilon + \varepsilon^2) \sin(\omega_0 + \varepsilon)t \\
 & - a_1(3\omega_0^2 + 8\omega_0\varepsilon + 4\varepsilon^2) \cos 2(\omega_0 + \varepsilon)t - b_1(3\omega_0^2 + 8\omega_0\varepsilon + 4\varepsilon^2) \sin 2(\omega_0 + \varepsilon)t + \omega_0^2 c_1.
 \end{aligned}$$

ここで青字で示した項は落とす (後の結果  $a_1 \sim ha_0 \sim \varepsilon^{1/2}a_0, b_1 \sim hb_0 \sim \varepsilon^{1/2}b_0$  よりそれで良い). また

$$\omega_0^2 h \{ \cos(\omega_0 + \varepsilon)t \} x = \frac{h\omega_0^2}{2} [a_0 \{ 1 + \cos 2(\omega_0 + \varepsilon)t \} + b_0 \sin 2(\omega_0 + \varepsilon)t \\ + a_1 \{ \cos 3(\omega_0 + \varepsilon)t + \cos(\omega_0 + \varepsilon)t \} + b_1 \{ \sin 3(\omega_0 + \varepsilon)t + \sin(\omega_0 + \varepsilon)t \} + 2c_1 \cos(\omega_0 + \varepsilon)t]$$

において, 振動数  $3(\omega_0 + \varepsilon)$  を持つ項を捨てると, 教科書 pp.104–105 にまたがる式

$$\left[ -2\omega_0 \varepsilon a_0 + \frac{h\omega_0^2}{2} a_1 + h\omega_0^2 c_1 \right] \cos(\omega_0 + \varepsilon)t + \left[ -2\omega_0 \varepsilon b_0 + \frac{h\omega_0^2}{2} b_1 \right] \sin(\omega_0 + \varepsilon)t \\ + \left[ -3\omega_0^2 a_1 + \frac{h\omega_0^2}{2} a_0 \right] \cos 2(\omega_0 + \varepsilon)t + \left[ -3\omega_0^2 a_1 + \frac{h\omega_0^2}{2} a_0 \right] \sin 2(\omega_0 + \varepsilon)t + \left[ c_1 \omega_0^2 + \frac{h\omega_0^2}{2} a_0 \right] = 0$$

が得られる. 各係数  $[\dots]$  の各々がゼロになることを要求すると, 後ろの3つから

$$a_1 = \frac{h}{6} a_0, \quad b_1 = \frac{h}{6} b_0, \quad c_1 = -\frac{h}{2} a_0.$$

ここから振動数  $2(\omega_0 + \varepsilon)$  は高次の項となることが保証される. これらを用いると, 最初の2つの係数が  $[\dots] = 0$  となる条件は, それぞれ順に共鳴領域の限界

$$\varepsilon = -\frac{5}{24} h^2 \omega_0, \quad \varepsilon = \frac{1}{24} h^2 \omega_0$$

を与える. よって本文にあるように, 確かに (共鳴領域の幅)  $\sim h^2$  である.

3 パラメータ共鳴の簡単な例 支点が鉛直方向に振動している平面振子の微小振動は Mathieu 方程式によって記述される. 振子の固有振動数に十分近い振動数で支点を振動させると, 共鳴する.

## § 28. 非調和振動

線形な運動方程式を導く微小振動のラグランジアン (23.4) は, 次の近似に進むと

$$L = \frac{1}{2} (m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik} x_i x_k) + \frac{1}{2} n_{ikl} \dot{x}_i \dot{x}_k x_l - \frac{1}{3} l_{ikl} x_i x_k x_l \quad (28.1)$$

という形をとる ( $n_{ikl}, l_{ikl}$  は定数係数) [本稿次節で確認]. 基準座標  $Q_\alpha$  への移行は線形変換なので,  $Q_\alpha$  を用いても第3, 第4の項の形は変わらず,

$$L = \frac{1}{2} (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2) + \frac{1}{2} \lambda_{\alpha\beta\gamma} \dot{Q}_\alpha \dot{Q}_\beta Q_\gamma - \frac{1}{3} \mu_{\alpha\beta\gamma} Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma$$

と書ける [ $\dot{Q}_\alpha^2, \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2$  の項も  $\alpha$  で和をとる]. ここから得られる運動方程式は

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(Q, \dot{Q}, \ddot{Q}) \quad (28.3)$$

の形をしており,  $f_\alpha$  は  $Q, \dot{Q}$  のいずれに関しても2次の同次関数である [本稿次節で確認].

通常の調和振動を表す, 同次方程式  $\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = 0$  の解

$$Q_\alpha^{(1)} = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \alpha_\alpha)$$

を用いて

$$Q_\alpha = Q_\alpha^{(1)} + Q_\alpha^{(2)} \quad (|Q_\alpha^{(2)}| \ll |Q_\alpha^{(1)}|)$$

とおくと、運動方程式 (28.3) より  $Q_\alpha^{(2)}$  に対する方程式

$$\ddot{Q}_\alpha^{(2)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(2)} = f_\alpha(Q^{(1)}, \dot{Q}^{(1)}, \ddot{Q}^{(1)}) \quad (28.6)$$

が得られる。[両辺のオーダーを本稿次節で考察。このように逐次近似の取扱いでは、非線形項は与えられた外力の役割を果たす。] 上式 (28.6) 右辺における非線形項  $[Q_\alpha^{(1)} Q_\beta^{(1)}, \dot{Q}_\alpha^{(1)} \dot{Q}_\beta^{(1)}, Q_\alpha^{(1)} \ddot{Q}_\beta^{(1)}$  の線形結合である (本稿次節の式 (52) を参照)] は、

$$\begin{aligned} Q_\alpha^{(1)} Q_\beta^{(1)} &= a_\alpha a_\beta \cos(\omega_\alpha t + \alpha_\alpha) \cos(\omega_\beta t + \alpha_\beta) \\ &= \frac{1}{2} [\cos\{(\omega_\alpha + \omega_\beta)t + \alpha_\alpha + \alpha_\beta\} + \cos\{(\omega_\alpha - \omega_\beta)t + \alpha_\alpha - \alpha_\beta\}], \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

のように単周期関数の和に直せるので、解  $Q_\alpha^{(2)}$  もまた結合振動数

$$\omega_\alpha + \omega_\beta \quad (28.7)$$

( $2\omega_\alpha$  や 0 (一定の変位に対応) も含まれる) を持つことになる。

第 3 近似では外力の項に結合振動数  $\omega_\alpha^{(0)} \pm \omega_\beta^{(0)} \pm \omega_\gamma^{(0)}$  を持つ周期関数が現れる。これには系の固有振動数  $\omega_\alpha^{(0)}$  に一致するものが含まれるため ( $\omega_\alpha^{(0)} + \omega_\beta^{(0)} - \omega_\beta^{(0)} = \omega_\alpha^{(0)}$ )、共鳴項が現れる。しかし物理的に言って、振動の強度の自発的な増大は、外部のエネルギー源を持たない孤立系では不可能である。

実際には、高い近似では基礎振動数  $\omega_\alpha$  が、ポテンシャル・エネルギーの 2 次的な表現 [線形振動・調和振動による近似] に現 [わ] れる《非摂動》値  $\omega_\alpha^{(0)}$  に比べてちがってくる。解のなかに増大項が現 [わ] れるのは、

$$\cos(\omega_\alpha^{(0)} + \Delta\omega_\alpha)t \approx \cos\omega_\alpha^{(0)}t - t\Delta\omega_\alpha \sin\omega_\alpha^{(0)}t$$

という形の展開にもとづくのであるが、明らかに、十分大きな  $t$  に対してはこれは許されない。

したがって、さらに近似をすすめる際には、解に入ってくる因数が、はじめから近似的な値ではなくて正確な値の振動数をもつように、逐次近似法を変更しなければならない。ところで、このような振動数の変化は、運動方程式を解いた結果において、まさに共鳴項が存在しないという条件からきまるのである。

我々は自由度 1 の非調和振動を例に、具体的な計算方法を示す (下記「まとめ」以降に回す)。

まとめ

- ここまでの微小振動の理論において、運動方程式は線形である。  
このときの基準振動数を  $\omega_\alpha^{(0)}$  とする。
- 第2近似では結合振動数  $\omega_\alpha^{(0)} \pm \omega_\beta^{(0)}$  での振動が現れる。
- 第3近似では外力の項に結合振動数  $\omega_\alpha^{(0)} \pm \omega_\beta^{(0)} \pm \omega_\gamma^{(0)}$  を持つ周期関数が現れる。  
これには系の固有振動数  $\omega_\alpha^{(0)}$  に一致するものが含まれるため ( $\omega_\alpha^{(0)} + \omega_\beta^{(0)} - \omega_\beta^{(0)} = \omega_\alpha^{(0)}$ ),  
共鳴項が現れる。しかし物理的に言って、振動の強度の自発的な増大は、  
外部のエネルギー源を持たない孤立系では不可能である。  
そこで例えば自由度1の系について、逐次近似により級数

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}, \quad x^{(1)} = a \cos \omega^{(0)} t$$

における高次の項を得るには、振動数を

$$\omega^{(0)} \rightarrow \omega = \omega^{(0)} + \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \dots$$

として ( $x^{(1)}$  の中でも), 共鳴項が現れない条件から  $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots$  を定めれば良い。

§ 28, 式の導出など

■例：自由度1の非調和振動

$$\begin{aligned} \text{ラグランジアン } L &= \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega_0^2}{2}x^2 - \frac{m\alpha}{3}x^3 - \frac{m\beta}{4}x^4, \\ \therefore \text{運動方程式 } \ddot{x} + \omega_0^2 x &= -\alpha x^2 - \beta x^3 \end{aligned} \quad (28.9)$$

で記述される, 自由度1の非調和振動を取り上げる [ $x$ の4次(ないし3次)までの近似]. その解を逐次近似級数の形

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + \dots, \quad x^{(1)} = a \cos \omega t, \quad \omega = \omega_0 + \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \dots$$

におく(時間の原点を適当にとって,  $x^{(1)}$ の初期位相をゼロとした). 運動方程式(28.9)を, [ $x = x^{(1)}$ を代入すると左辺が消えるように] 等価な式

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3 - \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \ddot{x} \quad (28.11)$$

に書き換えておく [この右辺を改めて非同次項と見なす].

ここに  $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ ,  $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)}$  を代入すると,  $x^{(2)}$  に対する方程式

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} &= -\alpha a^2 \cos^2 \omega t + 2\omega_0 \omega^{(1)} a \cos \omega t \\ &= -\frac{\alpha a^2}{2} - \frac{\alpha a^2}{2} \cos 2\omega t + 2\omega_0 \omega^{(1)} a \cos \omega t \end{aligned} \quad (49)$$

が得られる [本稿次節で補足]. 共鳴項を消すには, [最右辺における共鳴因子  $\cos \omega t$  の係数]  $\omega^{(1)} = 0$  とおけば良い. すると非同次線形方程式の通常の解法にしたがって

$$x^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2} \cos 2\omega t \quad (28.12)$$

が得られる [本稿次節で補足].

さらに式 (28.11) に  $x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}$ ,  $\omega = \omega_0 + \omega^{(2)}$  を代入すると,  $x^{(3)}$  に対する方程式

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = -2\alpha x^{(1)} x^{(2)} - \beta x^{(1)3} + 2\omega_0 \omega^{(2)} x^{(1)} \quad (50)$$

$$= -a^3 \left[ \frac{\beta}{4} + \frac{\alpha^2}{6\omega_0^2} \right] \cos 3\omega t + a \left[ 2\omega_0 \omega^{(2)} + \frac{5a^2 \alpha^2}{6\omega_0^2} - \frac{3}{4} a^2 \beta \right] \cos \omega t \quad (51)$$

が得られる [本稿次節で補足]. 共鳴因子  $\cos \omega t$  の係数をゼロとおくと, 基本振動数への補正

$$\omega^{(2)} = \left( \frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3} \right) a^2 \quad (28.13)$$

が見出される ( $a^2$  に比例する微小量となっている). 3 次の結合振動は

$$x^{(3)} = \frac{a^3}{16\omega_0^2} \left( \frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} + \frac{\beta}{2} \right) \cos 3\omega t \quad (28.14)$$

となる. [教科書の式 (28.14) 右辺の, 全体に掛かる因子  $a^2$  を  $a^3$  に訂正し (それ故  $x^{(3)}$  は  $x^{(2)}$  より高次の項である), また括弧内第 1 項における  $a$  を  $\alpha$  に訂正した. 導出は式 (28.12) と同様.]

## § 28 について

### ■高次の項を考慮したラグランジアン (28.1) について

$$\begin{aligned} \text{運動エネルギー} \quad T &= \frac{1}{2} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = \frac{1}{2} \left\{ a_{ik}(q_0) + \frac{\partial a_{ik}(q_0)}{\partial q_l} (q_l - q_{0l}) + \dots \right\} \dot{q}_i \dot{q}_k \\ &\simeq \frac{1}{2} m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k + \frac{1}{2} n_{ikl} \dot{x}_i \dot{x}_k x_l, \\ \text{ポテンシャル・エネルギー} \quad U &\simeq \frac{1}{2} k_{ik} x_i x_k + \frac{1}{3} l_{ikl} x_i x_k x_l \end{aligned}$$

による.

### ■非同次項 $f_\alpha(Q, \dot{Q}, \ddot{Q})$ について 運動方程式 (28.3) において

$$f_\alpha = - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{Q}_\alpha} - \frac{\partial}{\partial Q_\alpha} \right) \left( \frac{1}{2} \lambda_{\beta\gamma\delta} \dot{Q}_\beta \dot{Q}_\gamma Q_\delta - \frac{1}{3} \mu_{\beta\gamma\delta} Q_\beta Q_\gamma Q_\delta \right) \quad (52)$$

なので, これは「座標  $Q$  およびその時間についての導関数の 2 次の同次関数である」(p.106, 1.13,14).

### ■ $Q_\alpha^{(2)}$ に対する方程式 (28.6) について 非同次項 (かつ非線形項) $f_\alpha(Q^{(1)}, \dot{Q}^{(1)}, \ddot{Q}^{(1)})$ は,

$$Q_\alpha^{(1)} Q_\beta^{(1)}, \quad \dot{Q}_\alpha^{(1)} \dot{Q}_\beta^{(1)}, \quad Q_\alpha^{(1)} \ddot{Q}_\beta^{(1)}$$

の線形結合である (その係数は  $\lambda_{\alpha\beta\gamma}, \mu_{\alpha\beta\gamma}$ , 式 (52) を見よ). そこで線形振動  $Q_\alpha^{(1)}$  の振幅  $a_\alpha$  を適当な摂動パラメーター  $a$  程度の量と見なそう. このとき同時に  $Q_\alpha^{(2)} \sim a Q_\alpha^{(1)}$  と仮定すれば, 式 (28.6) の両辺のオーダーはそろふ. 実際, 「結合振動の振幅は, 対応する基準振動の振幅の積  $a_\alpha a_\beta$  (または 2 乗  $a_\alpha^2$ ) に比例する」(p.107, 1.9,10) ことから, この仮定は正当化される.

### ■結合振動数 (28.7) について 運動方程式 (28.3) における非線形項は, 異なる振動数を結合させる, と言える.

■ $x^{(2)}$  に対する p.108, l.19,20 の方程式 (本稿の式 (49)) について 運動方程式 (28.11) は, 左辺  $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}(\ddot{x} + \omega^2 x)$  が  $x = x^{(1)}$  を代入すると消えるように書き換えられている. また

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \ddot{x} &\simeq \frac{1}{\omega^2} (2\omega_0\omega^{(1)} + \omega^{(1)2}) (-a\omega^2 \cos \omega t + \ddot{x}^{(2)}) \\ &\simeq -2a\omega_0\omega^{(1)} \cos \omega t \end{aligned}$$

に注意すると  $x^{(2)}$  に対する方程式 (49) を得る. 基準振動数の《非摂動》値  $\omega_\alpha^{(0)}$  を用いた場合, 外力に共鳴項が現れるのは第3近似からである (p.107) のに対し, ここでは  $\omega = \omega^{(0)} + \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \dots$  としたため, 2次近似の段階で共鳴項が現れている.

■ $x^{(2)}$  の式 (28.12) について  $\omega^{(1)} = 0$  と定めると,  $x^{(2)}$  に対する式 (49) は

$$\ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2} - \frac{\alpha a^2}{2} \cos 2\omega t$$

となる. 右辺をゼロとおいた同次方程式の一般解は, 調和振動  $x^{(1)}$  と変わらない. そこで特殊解だけに興味を持たれる. ここで変数  $y^{(2)} = x^{(2)} + \frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2}$  を定義して, 右辺の目障りな定数項を消去する:

$$\ddot{y}^{(2)} + \omega_0^2 y^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2} \cos 2\omega t.$$

すると特殊解は

$$y^{(2)} = A \cos 2\omega t + B \sin 2\omega t$$

の形であり, 上式に代入すると

$$(\omega_0^2 - 4\omega^2)A = -\frac{\alpha a^2}{2}, \quad (\omega_0^2 - 4\omega^2)B = 0$$

を得る.  $\omega^{(1)} = 0$  なので,  $\omega^{(2)}$  を無視する近似の下では  $\omega = \omega^{(0)}$  とできるから,

$$A = \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2}, \quad B = 0, \quad \therefore y^{(2)} = \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2} \cos 2\omega t, \quad \therefore x^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2} \cos 2\omega t : (28.12).$$

■ $x^{(3)}$  に対する p.108, 1 番下の行の方程式 (本稿の式 (50)) について 運動方程式 (28.11) に  $x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}$  を代入すると

$$\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)}\right) + \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)}\right) = -\alpha \{x^{(1)2} + 2x^{(1)}x^{(2)}\} - \beta x^{(1)3} - \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \ddot{x}$$

となる. ここから  $x^{(2)}$  に対する方程式

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -\alpha x^{(1)2} - \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) (-2\omega_0\omega^{(1)}x^{(1)})$$

を辺々引くと

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = -2\alpha x^{(1)}x^{(2)} - \beta x^{(1)3} - \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) (\ddot{x} + 2\omega_0\omega^{(1)}x^{(1)})$$

となる. ここで

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \ddot{x}^{(3)} = \ddot{x}^{(3)} + \dots, \quad 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 2\frac{\omega^{(2)}}{\omega_0} + \dots, \quad \ddot{x} + 2\omega_0\omega^{(1)}x^{(1)} = -\omega^2 x^{(1)} + \dots = -\omega_0^2 x^{(1)} + \dots$$

とすると  $x^{(3)}$  に対する方程式 (50) を得る.

■ $x^{(3)}$  に対する p.109, 1.3,4 の式 (本稿の式 (51)) について  $\cos \omega t \cos 2\omega t = \frac{1}{2}(\cos 3\omega t + \cos \omega t)$  を用い

$$\begin{aligned} -2\alpha x^{(1)}x^{(2)} &= -2\alpha(a \cos \omega t) \frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} \left(-1 + \frac{1}{3} \cos 2\omega t\right) = \frac{\alpha^2 a^3}{\omega_0^2} \left(\frac{5}{6} \cos \omega t - \frac{1}{6} \cos 3\omega t\right), \\ -\beta x^{(1)3} &= -\beta a^3 \cos \omega t \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} = -\beta a^3 \left(\frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t\right) \end{aligned}$$

とすれば良い.

■Duffing (ダフィン) 振動子 運動方程式 (28.9) は特に  $\alpha = 0$  の場合,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\beta x^3$$

となる. これは Duffing 方程式と呼ばれ, 例としては振幅の 4 次まで考慮した振子の運動方程式が挙げられる. そこで § 29 の最終的な結果

$$x(t) = \underbrace{a \cos \omega t}_{x^{(1)}} + \underbrace{\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2} \cos 2\omega t}_{x^{(2)}} + \underbrace{\frac{a^3}{16\omega_0^2} \left(\frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} + \frac{\beta}{2}\right) \cos 3\omega t}_{x^{(3)}}, \quad \omega = \omega_0 + \underbrace{\left(\frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}\right) a^2}_{\omega^{(2)}}$$

において  $\alpha = 0$  とおき, また  $\beta$  は小さいと仮定して  $O(\beta^2)$  の項を捨てると,

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos \left(\omega_0 + \frac{3\beta a^2}{8\omega_0}\right) t + \frac{\beta a^3}{16\omega_0^2} \cos 3 \left(\omega_0 + \frac{3\beta a^2}{8\omega_0}\right) t \\ &\simeq a \cos \left(\omega_0 + \frac{3\beta a^2}{8\omega_0}\right) t + \frac{\beta a^3}{16\omega_0^2} \cos 3\omega_0 t \end{aligned}$$

となる.  $x^{(2)}, x^{(3)}$  の式 (28.12), (28.14) では, 式 (49), (50-51) の右辺をゼロとおいた同次方程式の一般解  $A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$  (したがって  $A, B \sim a^2, a^3$  と想定) を無視してきた. 改めてこれを付け加え, 例えば初期条件

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

を課すと,

$$x(t) = a \cos \left(\omega_0 + \frac{3\beta a^2}{8\omega_0}\right) t - \frac{\beta a^3}{16\omega_0^2} (\cos \omega_0 t - \cos 3\omega_0 t)$$

となる. これが文献 [4, pp.192-198] [1, pp.180-181] [11, pp.453-455, pp.478-479] の式である.

## § 29. 非線形振動における共鳴

摩擦力和周期的な外力の下での微小振動の運動方程式は, 非線形項を考慮すると

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \gamma t - \alpha x^2 - \beta x^3 \quad (29.1)$$

となる. 簡単のために強制力の振幅  $f$  は変位に依存しないものとする. そうしても, 現象の質的な特徴は変わらない.

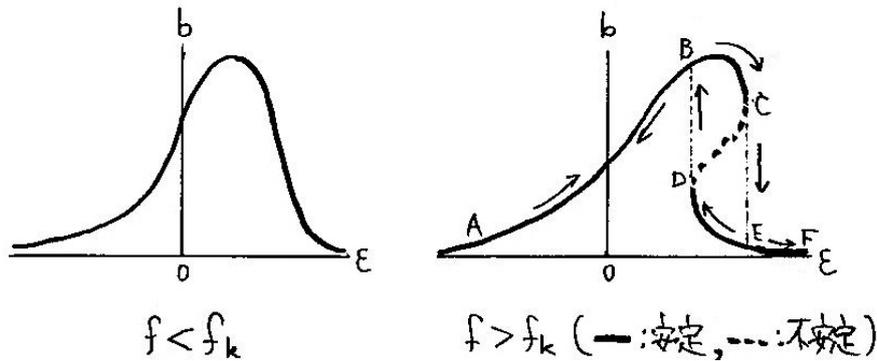


図 54  $\gamma \simeq \omega_0$  の共鳴における振幅  $b$  と  $\varepsilon \equiv \gamma - \omega_0$  の関係

■  $\gamma \simeq \omega_0$  における共鳴 通常の共鳴の近く  $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$  ( $\varepsilon$  は小) を考える. 線形振動における関係は式 (26.7):

$$b^2(\varepsilon^2 + \lambda^2) = \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2} \quad (29.2)$$

で与えられる ( $b$  は振幅). ここで強制力のない場合, 非線形項の導入により基本振動数は式 (28.13):  $\omega_0 \rightarrow \omega_0 + \kappa a^2$  のように変化することに注意して, 上式で  $\omega_0 \rightarrow \omega_0 + \kappa b^2$  の置き換えを行うと

$$b^2[(\varepsilon - \kappa b^2)^2 + \lambda^2] = \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2}, \quad \varepsilon \equiv \gamma - \omega_0 \quad (29.4)$$

を得る [本稿次節で確認]. ここから  $b$  と  $\varepsilon$  の関係は図 54 のようになる [本稿次節で補足]. 外力の振幅  $f \rightarrow 0$  では  $b$  も小さく, グラフは近似的に式 (29.2) で表される対称な曲線にもどるのに対し,  $f$  がある値  $f_k$  を超えると, 図 54 のようにグラフは 2 つの異なった振幅  $b$  を許すような振動数  $\gamma$  (したがって  $\varepsilon$ ) の領域を持つ.  $f_k$  の値は

$$f_k^2 = \frac{32m^2\omega_0^2\lambda^3}{3\sqrt{3}|\kappa|} \quad (29.7)$$

で決まる (導出は下記).

■  $\gamma \simeq \omega_0/2, \gamma \simeq 2\omega_0$  における共鳴 第 1(線形) 近似では系は強制振動

$$x^{(1)} = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \gamma^2)} \cos \gamma t \quad (53)$$

をおこなう (式 (22.4)) [本稿次節で補足].

$\gamma \simeq \omega_0/2$  のとき 第 2 近似に進むと

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -\frac{8\alpha f^2}{9m^2\omega_0^4} \cos(\omega_0 + 2\varepsilon)t + \dots \quad (29.8)$$

のように右辺に共鳴項が現れるため (導出は下記),  $b(\varepsilon)$  の式 (29.4) において

$$f \rightarrow -\frac{8\alpha f^2}{9m^2\omega_0^4}, \quad \varepsilon \rightarrow 2\varepsilon$$

と置き換えた関係を満たす振幅  $b$  を持つ, 強さの小さい共鳴が生じる (共鳴が小さいのは式 (29.8) 右辺が  $f^2$  に比例する微小量だから).

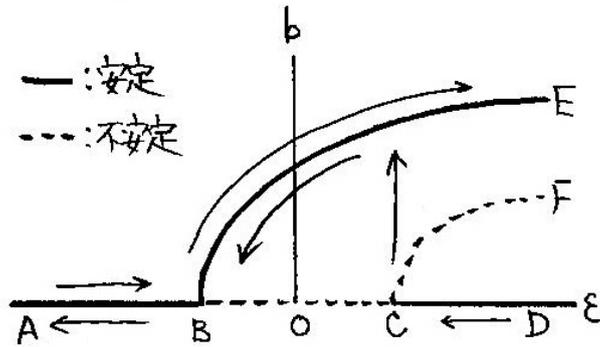


図 55  $\gamma \simeq 2\omega_0$  の共鳴における振幅  $b$  と  $\varepsilon \equiv \gamma - 2\omega_0$  の関係. 曲線  $BE$ ,  $CF$  は  $b$  と  $\varepsilon$  が十分小さいときに正しい.

$\gamma \simeq 2\omega_0$  のとき 第 2 近似に進むと

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^2} \cos\{(2\omega_0 + \varepsilon)t\} x^{(2)} + \dots \quad (29.11)$$

となる. これは非線形項を除けば,

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 \left[ 1 - \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^4} \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t \right] x^{(2)} = 0 \quad (29.10)$$

となる (さらに摩擦項も除けば, これは Mathieu 方程式 (27.8) と同じ形を持つ).

$$x^{(2)} = b \cos \left[ \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t + \delta \right]$$

を仮定すると

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = \frac{\alpha f b}{3m\omega_0^2} \cos \left[ \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t - \delta \right] + \dots$$

のように右辺に共鳴項が現れるため,  $b(\varepsilon)$  の式 (29.4) において

$$f \rightarrow \frac{\alpha f b}{3m\omega_0^2}, \quad \varepsilon \rightarrow \frac{\varepsilon}{2}$$

と置き換えた関係を満たす振幅  $b$  を持つ, 強さの小さい共鳴が生じる. このとき  $b$  と  $\varepsilon$  の関係は図 55 のようである.

■より高い近似 さらに近似を高めると, 整数  $p, q$  に対して振動数  $\gamma = p\omega_0/q$  において共鳴が現れる. しかし高い近似での共鳴は強度が小さく, 観測にかからない.

## § 29, 式の導出など

■ $f_k$  の式 (29.7) の導出 図 54 の点  $D, C$  では  $db/d\varepsilon = \pm\infty$  となる. ところで式 (29.4) を  $\varepsilon$  で微分すると

$$\frac{db}{d\varepsilon} = \frac{-\varepsilon b + \kappa b^3}{\varepsilon^2 + \lambda^2 - 4\kappa\varepsilon b^2 + 3\kappa^2 b^4} \quad (54)$$

となるので [本稿次節で補足], 点  $D, C$  における  $\varepsilon$  の値は

$$(\text{分母}) = \varepsilon^2 + \lambda^2 - 4\kappa\varepsilon b^2 + 3\kappa^2 b^4 = 0$$

を満たす。

さて、 $f = f_k$  のとき曲線分  $CD$  は 1 つの変曲点に収縮してしまう。このとき  $b^2$  に関する 2 次方程式 (29.5) は重解を持つから、判別式をゼロとおいて  $\varepsilon^2 = 3\lambda^2$  を得る。重解は  $\kappa b^2 = 2\varepsilon/3$  であり、これを曲線の式 (29.4) に代入すると式 (29.7) を得る [式 (29.7) における  $|\kappa|$  の絶対値記号を含め、本稿次節で補足]。

■振幅  $b$  の最大値 最大値を与える  $\varepsilon$  は、 $db/d\varepsilon$  の式 (54) をゼロとおくと  $\varepsilon = \kappa b^2$  と求まる。これを曲線の式 (29.4) に代入すると、

$$b_{\max} = \frac{f}{2m\omega_0\lambda}$$

となる。

■式 (29.8) の導出 式 (22.4) より、 $\gamma = \frac{\omega_0}{2} + \varepsilon$  に対して第 1(線形) 近似での解は

$$x^{(1)} = \frac{4f}{3m\omega_0^2} \cos\left(\frac{\omega_0}{2} + \varepsilon\right) t \quad (55)$$

と書ける [本稿次節で補足]。第 2 近似に進もう。方程式

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -\alpha x^{(1)2} \quad (56)$$

[本稿次節で補足] に上式 (55) を代入し、右辺で半角の公式を用いて振動数  $2\gamma \simeq \omega_0$  の共鳴項だけを残すと、式 (29.8) を得る。

## § 29 について

■ $b$  と  $\varepsilon$  の関係 (29.4) の導出 減衰率  $\lambda$  を「以下では小さいものと仮定」(式 (29.1) の 1 行下) したため、式 (29.2):

$$b^2(\varepsilon^2 + \lambda^2) = \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2}$$

の左辺は微小量である。よって右辺の  $\omega_0$  を  $\omega_0 + \kappa b^2$  に置き換えたときの変化は高次の微小量として無視できると考えられる。実際これを

$$\omega_0^2 \times b^2(\varepsilon^2 + \lambda^2) = \frac{f^2}{4m^2}$$

と書き換えて

$$\begin{aligned} \omega_0 &\rightarrow \omega_0 + \kappa b^2, \\ \varepsilon \equiv \gamma - \omega_0 &\rightarrow \gamma - (\omega_0 + \kappa b^2) = \varepsilon - \kappa b^2 \end{aligned}$$

とすると

$$\frac{f^2}{4m^2} = (\omega_0 + \kappa b^2)^2 \times b^2 [(\varepsilon - \kappa b^2)^2 + \lambda^2] \simeq \omega_0^2 \times b^2 [(\varepsilon - \kappa b^2)^2 + \lambda^2], \quad \therefore b^2 [(\varepsilon - \kappa b^2)^2 + \lambda^2] = \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2} : (29.4)$$

を得る。

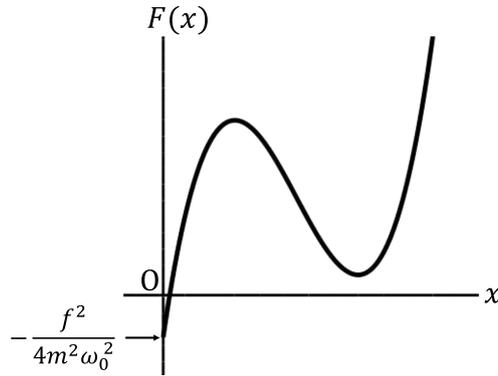


図 56  $F(x) = x[(\varepsilon - \kappa x)^2 + \lambda^2] - \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2}$  のグラフ

■本稿の図 54(教科書の図 32(p.110)) について 式 (29.4) を

$$F(b^2; \varepsilon, f) \equiv b^2[(\varepsilon - \kappa b^2)^2 + \lambda^2] - \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2} = 0$$

と書き, 与えられた  $\varepsilon, f$  に対してこれを満たす  $b^2 (\geq 0)$  の値を考える. (以降しばらく  $F$  の引数  $\varepsilon, f$  を省略し,  $F(b^2)$  と表記する.)

$$F'(x) = (3\kappa x - \varepsilon)(\kappa x - \varepsilon) + \lambda^2$$

であり, 十分小さな  $\lambda (< \sqrt{3\varepsilon})$  に対して (判別式)/4 =  $\kappa^2(\varepsilon^2 - 3\lambda^2) > 0$  なので,  $\varepsilon$  が正の値に固定されているとき,  $F(x)$  の概形は図 56 のようである.  $f$  の増大に伴ってグラフは“下向き”に平行移動するので, 与えられた  $\varepsilon > 0$  に対して  $F(x) = 0$  を満たす  $x$  (したがって  $b$ ) の値は

$$1 \text{ 個} \rightarrow (2 \text{ 個}) \rightarrow 3 \text{ 個} \rightarrow (2 \text{ 個}) \rightarrow 1 \text{ 個}$$

と変化することが分かる.  $\varepsilon \leq 0$  のときには定義域  $x \geq 0$  で常に  $F'(x) \geq 0$  となるので,  $F(x)$  は単調増加し,  $f$  の値に依らず  $F(x) = 0$  を満たす  $x$  (したがって  $b$ ) の値はただ 1 つである.

■ $db/d\varepsilon$  の式 (54)(教科書 p.111, 1.5) について 式 (29.4) を  $\varepsilon$  で微分すると

$$\begin{aligned} 0 &= 2b \frac{db}{d\varepsilon} [(\varepsilon - \kappa b^2)^2 + \lambda^2] + 2b^2(\varepsilon - \kappa b^2) \left(1 - 2\kappa b \frac{db}{d\varepsilon}\right) \\ &= 2b \left\{ \frac{db}{d\varepsilon} (\varepsilon^2 + \lambda^2 - 4\kappa\varepsilon b^2 + 3\kappa^2 b^4) + b(\varepsilon - \kappa b^2) \right\} \end{aligned}$$

となることによる.

■「この値は, (29.2) という関係で与えられる極大値に一致する」(式 (29.6) の 1 行下) について これは  $b$  と  $\varepsilon$  の関係を表す曲線 (教科書の図 32(p.110), 本稿の図 54) が,  $f$  の増大に伴ってその極大値を変えずに変形することを意味する.

■ $f_k$  の式 (29.7) に現れる絶対値について 変曲点  $C = D$  に対応する  $\varepsilon$  は  $\kappa b^2 = 2\varepsilon/3$  を満たすので,  $\varepsilon$  と  $\kappa$  は同符号である. よって  $\varepsilon^2 = 3\lambda^2$  において減衰率  $\lambda > 0$  にも注意すると,  $\kappa \geq 0$  に対して

$$\varepsilon = \pm\sqrt{3}\lambda, \quad \therefore \frac{\varepsilon}{\kappa} = \pm \frac{\sqrt{3}\lambda}{\kappa} = \frac{\sqrt{3}\lambda}{|\kappa|}$$

となる。これを踏まえると式 (29.4) より

$$\begin{aligned} b^2[(\varepsilon - \kappa b^2)^2 + \lambda^2] &= \frac{2\varepsilon}{3\kappa} \left( \frac{\varepsilon^2}{9} + \lambda^2 \right) \quad \left( \because \kappa b^2 = \frac{2}{3}\varepsilon \right) \\ &= \frac{8}{3\sqrt{3}} \frac{\lambda^3}{|\kappa|}, \quad \left( \because \varepsilon^2 = 3\lambda^2, \frac{\varepsilon}{\kappa} = \frac{\sqrt{3}\lambda}{|\kappa|} \right) \\ \therefore f_k^2 &= 4m^2\omega_0^2 \times \frac{8}{3\sqrt{3}} \frac{\lambda^3}{|\kappa|} = \frac{32m^2\omega_0^2\lambda^3}{3\sqrt{3}|\kappa|} : (29.7) \end{aligned}$$

を得る。

■第 1(線形) 近似における強制振動 (53),(55)(教科書 p.112, l.12 および p.113, l.1) について 摩擦のある場合の式 (26.4) ではなく摩擦がない場合の式 (22.4) を用いているのは、減衰率  $\lambda$  を「以下では小さいものと仮定」(式 (29.1) の 1 行下) したことによる。

■ $x^{(2)}$  に対する式 (56)(教科書 p.112, l.16) について 運動方程式 (29.1) において  $x = x^{(1)} + x^{(2)}$  として、 $x^{(1)}$  に対する式

$$\ddot{x}^{(1)} + 2\lambda\dot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = \frac{f}{m} \cos \gamma t$$

を辺々引くと

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -\alpha(x^{(1)} + x^{(2)})^2 - \beta(x^{(1)} + x^{(2)})^3$$

となると考えられる。これをもとの運動方程式 (29.1) と比較するために

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -\alpha x^{(1)2} - 2\alpha x^{(1)}x^{(2)} - \beta x^{(1)3} - 3\beta x^{(1)2}x^{(2)} - 3\beta x^{(1)}x^{(2)2}$$

と書く。

このとき  $\gamma = \frac{\omega_0}{2} + \varepsilon$  に対して共鳴項は

$$-\alpha x^{(1)2} = -\alpha \frac{16f^2}{9m^2\omega_0^4} \times \frac{1 + \cos(\omega_0 + 2\varepsilon)t}{2}$$

から現れる (式 (29.8) とその導出に対応)。

$$-\beta x^{(1)3} = -\beta b^3 \left( \frac{3}{4} \cos \gamma t + \frac{1}{4} \cos 3\gamma t \right), \quad b \equiv \frac{4f}{3m\omega_0^2}$$

からは共鳴項は現れない。

式 (29.10),(29.11) について また  $\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon$  のときパラメター型の共鳴に寄与する項として、 $-2\alpha x^{(1)}x^{(2)}$  の他に  $-3\beta x^{(1)2}x^{(2)}$  が考えられるけれど、これは式 (29.10) および式 (29.11) において捨てられている。

## § 29, 問題 ( $\gamma = 3\omega_0 + \varepsilon$ での共鳴)

■ $x^{(1)}$  の表式 (p.115, 解の 2 行目) 式 (22.4) による。

■ $x^{(2)}$  に対する式と共鳴項 式 (29.1):

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \gamma t - \alpha x^2 - \beta x^3$$

において  $x = x^{(1)} + x^{(2)}$  とおき,  $x^{(1)}$  の満たす式

$$\ddot{x}^{(1)} + 2\lambda\dot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = \frac{f}{m} \cos \gamma t$$

を考えると

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -\alpha\{x^{(1)} + x^{(2)}\}^2 - \beta\{x^{(1)} + x^{(2)}\}^3$$

を得る. これをもとの運動方程式 (29.1) と比較するために

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -\alpha x^{(1)2} - 2\alpha x^{(1)}x^{(2)} - \beta x^{(1)3} - 3\beta x^{(1)2}x^{(2)} - 3\beta x^{(1)}x^{(2)2}$$

と書く. このとき  $x^{(2)} = b \cos\left\{\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right)t + \delta\right\}$  とおくと, 右辺において共鳴をもたらす項は

$$\begin{aligned} & -3\beta x^{(1)}x^{(2)2} \\ &= \frac{3\beta b^2 f}{8m\omega_0^2} \cos(3\omega_0 + \varepsilon)t \cos^2\left\{\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right)t + \delta\right\} \\ &= \frac{3\beta b^2 f}{16m\omega_0^2} \cos(3\omega_0 + \varepsilon)t \left[1 + \cos\left\{2\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right)t + 2\delta\right\}\right] \\ &= \frac{3\beta b^2 f}{16m\omega_0^2} \cos(3\omega_0 + \varepsilon)t + \frac{1}{2} \left[\cos\left\{5\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right)t + 2\delta\right\} + \cos\left\{\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right)t - 2\delta\right\}\right] \end{aligned}$$

から得られる

$$\frac{3\beta b^2 f}{32m\omega_0^2} \cos\left\{\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right)t - 2\delta\right\}$$

(p.115, 解の 8 行目) のみである.

■  $b$  と  $\varepsilon$  の関係  $b$  と  $\varepsilon$  の関係 (p.115, 解の 11 行目) は

$$b^2 \left\{ \kappa^2 b^4 - \left(\frac{2}{3}\varepsilon\kappa + A\right) b^2 + \frac{\varepsilon^2}{9} + \lambda^2 \right\} = 0$$

と書き換えられるため,  $b \neq 0$  の根は

$$\begin{aligned} b^2 &= \frac{1}{2\kappa^2} \left\{ \left(\frac{2}{3}\varepsilon\kappa + A\right) \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3}\varepsilon\kappa + A\right)^2 - 4\kappa^2 \left(\frac{\varepsilon^2}{9} + \lambda^2\right)} \right\} \\ &= \frac{\varepsilon}{3\kappa} + \frac{A}{2\kappa^2} \pm \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\varepsilon A}{3\kappa} + \frac{A^2}{4\kappa^2} - \lambda^2} \end{aligned}$$

(p.115, 解の 13 行目) で与えられる. これが図 34(p.116) の曲線 BAC の方程式である. 点 A における  $\varepsilon$  の値は根号内をゼロにすることから, p.116, 1.5 の  $\varepsilon_k$  と  $b_k^2$  の式

$$\varepsilon_k = \frac{3\kappa}{A} \left( \lambda^2 - \frac{A^2}{4\kappa^2} \right) = \frac{3(4\kappa^2\lambda^2 - A^2)}{4\kappa A}, \quad b_k^2 = \frac{\varepsilon_k}{3\kappa} + \frac{A}{2\kappa^2} = \frac{4\kappa^2\lambda^2 + A^2}{4\kappa^2 A}$$

を得る.

■ まとめ 振動数が  $\gamma = 3\omega_0 + \varepsilon$  のとき

$$x = x^{(1)} + x^{(2)}, \quad x^{(1)} = -\frac{f}{8m\omega_0^2} \cos(3\omega_0 + \varepsilon)t, \quad x^{(2)} = b \cos\left\{\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right)t + \delta\right\}$$

とすると,  $x^{(2)}$  の振幅  $b$  と  $\varepsilon$  の関係として図 34(p.116) の“共鳴曲線”が得られる.

### § 30. 急激に振動する場合における運動

不変な場  $U$  の他に、大きな振動数  $\omega$  (場  $U$  の下での運動の振動数に比べて) で変化する力の作用を受ける粒子の運動を考える。簡単のために 1 次元運動を考えると、運動方程式は

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} + f, \quad (30.2)$$

$$f(x, t) = f_1(x) \cos \omega t + f_2(x) \sin \omega t \quad (30.1)$$

である。力  $f$  が場  $U$  のもたらす力に比べて小さいことは仮定しない。このとき粒子の運動は、力  $f$  のもたらす振動数  $\omega$  の小さな振動  $\xi(t)$  と、急激な振動をならしてしまつた《なめらかな》運動  $X(t)$  の重ね合せの形

$$x(t) = X(t) + \xi(t) \quad (30.3)$$

に表される。振動  $\xi(t)$  の 1 周期  $2\pi/\omega$  のうちには近似的に  $X(t)$  は変化しないものとして、周期  $2\pi/\omega$  にわたる時間平均をとることにすると (これをバーで表す)、《なめらかな》運動  $X(t)$  は

$$m\ddot{X} = -\frac{dU_{\text{有効}}}{dX}, \quad (30.7)$$

$$U_{\text{有効}} = U + \frac{1}{2m\omega^2} \overline{f^2} = \frac{1}{4m\omega^2} (f_1^2 + f_2^2) \quad (30.8)$$

に従うことが結論される (導出は下記)\*20。付加的な項  $\frac{1}{2m\omega^2} \overline{f^2}$  は振動運動の平均の運動エネルギー  $\frac{m}{2} \overline{\dot{\xi}^2}$  に一致する [本稿次節で確認]。

なお一般座標  $q = \{q_i\}$  で記述される系では、有効ポテンシャル・エネルギーを

$$U_{\text{有効}} = U + \frac{1}{2\omega^2} \sum_{i,k} a_{ik}^{-1} \overline{f_i f_k} = U + \sum_{i,k} \frac{a_{ik}}{2} \overline{\dot{\xi}_i \dot{\xi}_k}$$

とすれば良い。[第 2 の等号は本稿次節の式 (57) の一般化になっている。] ここに  $a_{ik}^{-1}(q)$  は式 (5.5) で定義した係数  $a_{ik}(q)$  の逆行列要素である。

#### § 30, 式の導出など

■式 (30.7),(30.8) の導出 式 (30.3) を運動方程式 (30.2) に代入して  $\xi$  の 1 次までとると、

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = -\frac{dU}{dX} - \xi \frac{d^2U}{dX^2} + f(X, t) + \xi \frac{\partial f}{\partial X} \quad (30.4)$$

となる [本稿次節で補足]。これは振動的な項と《なめらかな》項から成っており、それらは 2 つのグループの各々で、別々の等式を形づくっているはずである。振動的な項が作る方程式は、 $\xi$  のかかっている高次の項を省略すれば、

$$m\ddot{\xi} = f(X, t) \quad (30.5)$$

である ( $\ddot{\xi}$  は  $\omega^2$  に比例するから小さくない) [本稿次節で補足]。式 (30.1) の  $f$  に対しては、上式 (30.5) は

$$\xi = -\frac{f}{m\omega^2} \quad (30.6)$$

\*20 導出では  $m$  を定数と仮定しているが、実はこの結果は  $x$  がデカルト座標でなく、したがって  $m$  が  $x$  に依存する場合にも正しいことが直接確かめられる。

と積分できる ( $X$  を定数と見なした).

次に式 (30.4) の時間平均をとると,

$$\begin{aligned} m\ddot{X} &= -\frac{dU}{dX} + \xi \overline{\frac{\partial f}{\partial X}} \quad \left( \because \bar{f} = 0, \bar{\xi} = 0, \text{ただし } f, \xi \text{ の非線形項 } \xi \overline{\frac{\partial f}{\partial X}} \neq 0 \text{ [本稿次節]} \right) \\ &= -\frac{dU}{dX} - \frac{1}{m\omega^2} f \overline{\frac{\partial f}{\partial X}} \quad (\because \text{式 (30.6)}) \\ &= -\frac{dU_{\text{有効}}}{dX} : (30.7), \quad U_{\text{有効}} = U + \frac{1}{2m\omega^2} \overline{f^2} : (30.8). \end{aligned}$$

## § 30 について

### ■ベキ展開 (30.4) について

$$\frac{dU(x)}{dx} \equiv u(x) = u(X + \xi) \simeq u(X) + \xi \left. \frac{du(x)}{dx} \right|_{x=X} = u(X) + \xi \frac{du(X)}{dX} = \frac{dU(X)}{dX} + \xi \frac{d^2U(X)}{dX^2}$$

による.

■「それらは明らかに、2つのグループのおのおので、別々に等式を形づくっている」(p.117, l.11,12) について  $-\frac{dU(X)}{dX}$  は《なめらかな》粒子の運動に関係するから、振動的な項に対して

$$m\ddot{\xi} = -\xi \frac{d^2U(X)}{dX^2} + f(X, t) + \xi \frac{\partial f}{\partial X} \simeq f(X, t) : (30.5)$$

である. 一方、《なめらかな》項に対する等式を  $m\ddot{X} = -\frac{dU(X)}{dX}$  としてはいけない. と言うのも、 $f, \xi$  の非線形項  $\xi \frac{\partial f}{\partial X} \sim \sin^2 \omega t, \cos^2 \omega t$  は時間平均がゼロにならない. 実際、このため右辺に付加的な項  $\frac{1}{2m\omega^2} \overline{f^2}$  が現れるというのが、この節の結論である (式 (30.7), 式 (30.8)).

### ■有効ポテンシャル・エネルギーの式 (30.9) について

$$\text{式 (30.1)} \Rightarrow \bar{f} = \omega \bar{\xi}, \quad \text{式 (30.6)} \Rightarrow \bar{\xi} = -\frac{\bar{f}}{m\omega^2}$$

より  $\bar{\xi} = -\bar{f}/m\omega$  となることを用いると

$$\frac{1}{2m\omega^2} \overline{f^2} = \frac{m}{2} \bar{\xi}^2 \quad (57)$$

と書き換えられる.

## § 30, 問題

§ 30 の状況の具体例として、振子 (長さ  $l$ ) の支点を鉛直方向または水平方向に振動 (振幅  $a$ , 振動数  $\gamma$ ) させた場合の有効ポテンシャル・エネルギーを調べると、安定なつり合いの位置が分かる. 支点の振動数が十分大きいとき ( $a^2\gamma^2 > 2gl$ ),

- 鉛直方向の振動に対して倒立状態  $\phi = \pi$  も安定となる (問題 1) [倒立振子].
- 水平方向の振動に対して安定な位置は  $\phi = 0$  から  $\cos \phi = \frac{2gl}{a^2\gamma^2}$  を満たす  $\phi$  に移る (問題 2).

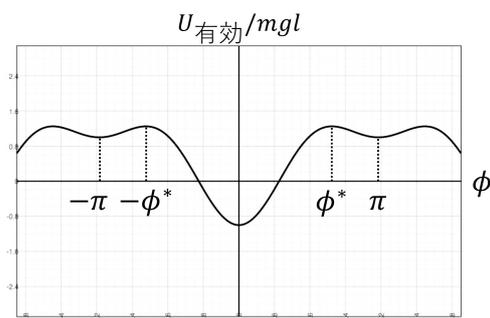


図 57 問題 1 の  $U_{\text{有効}} (\frac{a^2\gamma^2}{4gl} = 1 \text{ として描画})$

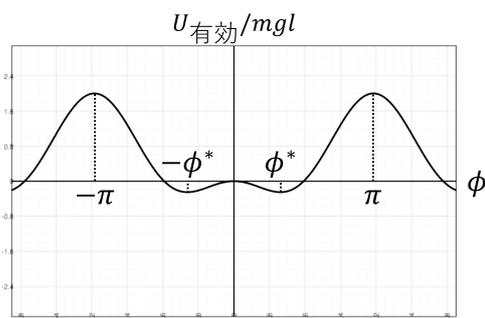


図 58 問題 2 の  $U_{\text{有効}} (\frac{a^2\gamma^2}{4gl} = 1 \text{ として描画})$

$U_{\text{有効}}$  の式について 有効ポテンシャル・エネルギーの式 (30.8) における付加的な項  $\frac{1}{4m\omega^2}(f_1^2 + f_2^2)$  は, 問題 1 の場合

$$m \rightarrow ml^2, \quad \omega \rightarrow \gamma, \quad f_1 = -mla\gamma^2 \sin \phi, \quad f_2 = 0$$

なので

$$\frac{1}{4}ma^2\gamma^2 \sin^2 \phi = mgl \times \frac{a^2\gamma^2}{4gl} \sin^2 \phi$$

となる. 問題 2 も同様.

$U_{\text{有効}}$  の概形について

$$\frac{dU_{\text{有効}}}{d\phi} = mgl \sin \phi \left( 1 \pm \frac{a^2\gamma^2}{2gl} \cos \phi \right) \quad (\text{複号は問題 1 に対して + を, 問題 2 に対して - をとる})$$

であり, ここから  $a^2\gamma^2 > 2gl$  のときの  $U_{\text{有効}}$  の概形は図 57, 図 58 のようになることが分かる. ただし  $\phi^* (> 0)$  は

$$1 \pm \frac{a^2\gamma^2}{2gl} \cos \phi^* = 0 \quad (\text{複号は問題 1 に対して + を, 問題 2 に対して - をとる})$$

を満たす角である.

## 第 6 章 剛体の運動

### § 31. 角速度

剛体……相互間の距離が不変であるような質点の集まり (近似)

剛体は質点の集まりと見なしても、連続体と見なしても良い。質点に対する式から連続体に対する式に移るには

$$\begin{array}{ll} \text{質点の質量 } m & \rightarrow \text{体積要素 } dV \text{ 内の質量 } \rho dV, \\ \text{質点についての和 } \sum & \rightarrow \text{物体の全体積にわたる積分 } \int \end{array}$$

とすれば良い ( $\rho$  は質量密度)\*21.

- 静止座標系 …… 慣性座標系  $XYZ$
- 運動座標系 …… 慣性座標系  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ , 原点  $O$

を導入すると、静止座標系で見た運動座標系の

- 原点  $O$  の位置  $\mathbf{R}$  …… 3 成分
  - その速度  $\mathbf{V}$
- 軸の方向 …… 独立な 3 つの角度によって指定される\*22
  - 原点  $O$  のまわりの回転に関する角速度  $\boldsymbol{\Omega}$

なので剛体の自由度は 6 であり、運動座標系における位置ベクトル  $\mathbf{r}$  を持つ剛体中の点の、静止座標系に対する速度は

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (31.2)$$

となる。この表式が原点  $O$  のとり方に依らずに成り立つことから、全ての運動座標系は原点が異なっても共通の角速度  $\boldsymbol{\Omega}$  を持つことが見いだされる。よって  $\boldsymbol{\Omega}$  は剛体の回転それ自体の角速度と呼べる。

### § 31 について

■ 離散的な点に対する式から、連続体に対する式への移行 (第 2 段落) について 逆に連続体に対する式から離散的な点に対する式に戻るには、粒子の系に対する質量密度の表式

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_a m_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))$$

を用いれば良い。

あるいはより簡単に、各体積要素  $dV$  の中の質量を 1 つの質点に対応させて

$$\rho dV \rightarrow m, \quad \int \rightarrow \sum$$

\*21 粒子の質量  $m$  は粒子ごとに異なるため、正確には粒子の番号  $a$  を用いて  $m_a$  と表される。同様に粒子についての和は  $\sum_a$  と書ける。ここでは煩わしいので粒子の番号  $a$  を省いている (§ 5 のノートでも断った)。

\*22 例えば § 35 の Euler の角度を用いれば良い。

と置き換えれば良い。

■瞬間的回転軸の段落 (p.122) について 剛体の運動を、運動座標系の原点  $O$  を通る軸の周りの純粋な回転として表せるような、瞬間的回転軸を見いだせる場合を考える。このとき剛体の全ての点の (静止座標系で見た) 速度  $\boldsymbol{v}$  が、角速度  $\boldsymbol{\Omega}$  に垂直な平面の中になければならないから、式 (31.2):

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$$

により  $\boldsymbol{V} \perp \boldsymbol{\Omega}$  が必要である。

さらに剛体の運動が純粋な回転として表されるように、運動座標系の原点が静止しているような原点を見いだしたい ( $\boldsymbol{V} = 0$ )。ところである運動座標系の原点  $O$  の速度  $\boldsymbol{V}$  が  $\boldsymbol{V} \perp \boldsymbol{\Omega}$  を満たすとき、式 (31.3):

$$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{a}$$

より他の運動座標系の原点  $O'$  の速度  $\boldsymbol{V}'$  も  $\boldsymbol{V}' \perp \boldsymbol{\Omega}$  を満たす。この自由度を利用して  $\boldsymbol{V}' = 0$  となる原点  $O'$  をとれば良い。

## § 32. 慣性テンソル

これ以降、運動座標系の原点  $O$  を剛体の慣性中心にとる。この場合には剛体の運動エネルギーは並進運動のエネルギーと回転運動のエネルギーに分離される (導出は下記):

$$T = \sum \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \mu V^2 + T_{\text{回転}}, \quad \mu \equiv \sum m : \text{剛体の質量},$$

$$T_{\text{回転}} \equiv \frac{1}{2} \sum \{ \Omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{r})^2 \}. \quad (32.1)$$

慣性テンソル

$$I_{ik} = \sum m (x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k), \quad (I_{ik}) = \begin{pmatrix} \sum m (y^2 + z^2) & -\sum m xy & -\sum m xz \\ -\sum m yx & \sum m (x^2 + z^2) & -\sum m yz \\ -\sum m zx & -\sum m zy & \sum m (x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

を導入すると、回転運動のエネルギーは

$$T_{\text{回転}} = \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k \quad (32.3)$$

と表される (導出は下記) [ここで  $\Omega_i$  は静止座標系に対する剛体の角速度  $\boldsymbol{\Omega}$  の、運動座標系に関する成分である]。

慣性テンソルが対角型

$$(I_{ik}) = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

となるような  $x_1, x_2, x_3$  軸の方向 (慣性主軸と呼ばれる) をとることができる ( $I_1, I_2, I_3$ : 主慣性モーメント) [本稿次節参照]。

- 3つの主慣性モーメントのどれをとっても、残り2つの和より大きいことはあり得ない:

$$I_1 + I_2 = \sum m (x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) \geq \sum m (x_1^2 + x_2^2) = I_3.$$

- 対称こま

– 非対称こま (3つの主慣性モーメントが相異なる)

– 対称こま ( $I_1 = I_2 \neq I_3$ )

平面  $x_1x_2$  内の主軸の方向は任意に選ぶことができる

– 球状こま ( $I_1 = I_2 = I_3$ )

3つの慣性主軸をすべて任意に選ぶことができる

- 慣性主軸の向きは剛体の対称性を反映する。
- $x_1x_1$  面内に分布した粒子からなる系に対して  $I_3 = I_1 + I_2$ .
- 次数が2より大きい対称軸を持つ剛体 (すなわち対称軸のまわりに角度  $2\pi/n, n > 2$  だけ回転させても形状に変わらない剛体) は対称こまである。
- 回転子 ( $x_3$  軸に沿って分布した粒子の系,  $I_3 = 0$ )
  - $x_3$  軸まわりの回転が意味を成さないため, 回転の自由度は2となる\*23.

慣性テンソルを計算する際,

- 慣性中心を原点  $O$  とする座標系において定義される, 慣性テンソル  $I_{ik} = \sum m(x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k)$
- 他の原点  $O'$  に関して定義される類似のテンソル  $I'_{ik} = \sum m(x'_l{}^2 \delta_{ik} - x'_i x'_k)$
- 原点の隔たり  $\mathbf{a} \equiv \overrightarrow{OO'}$

に対する公式

$$I'_{ik} = I_{ik} + \mu(a^2 \delta_{ik} - a_i a_k) \quad (32.12)$$

が有用となる [導出は本稿次節].

## § 32, 式の導出など

### ■式 (32.1) の導出

$$\begin{aligned} T &= \sum \frac{mv^2}{2} = \sum \frac{m}{2} (\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 \quad (\because \text{式 (31.2)}) \\ &= \sum \frac{m}{2} V^2 + \sum m \mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \sum \frac{m}{2} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 \\ &= \left( \sum m \right) \frac{V^2}{2} + (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \sum m \mathbf{r} + \sum \frac{m}{2} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 \\ &= \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} \sum m \{ \Omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r})^2 \}. \quad (\because \sum m \mathbf{r} = 0) \end{aligned}$$

### ■式 (32.3) の導出

$$T_{\text{回転}} = \frac{1}{2} \sum m \{ \Omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r})^2 \} = \frac{1}{2} \sum m (\Omega_i^2 x_l^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k) = \frac{1}{2} \Omega_i \Omega_k \sum m (x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k) = \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k.$$

## § 32 について

■回転運動のエネルギーの式 (p.123), 慣性テンソルの定義式 (32.2) について  $\Omega_i^2$  や  $x_l^2$  といった表現において, それぞれ添字  $i, l$  について和をとることに注意する.

\*23 逆に  $x_3$  軸まわりの回転を問題にするなら, 回転子としての扱いは適切でないと考えられる.

■主軸変換 「慣性テンソルは,  $x_1, x_2, x_3$  軸の方向を適当にえらぶことによって対角型になおすことができる」(p.124) について,  $I = (I_{ik})$  は対称行列なので, 適当な直交行列  $O$  を用いて

$$OIO^{-1} = I' = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

と対角化される. これは同一の点の新しい座標が  $x'_i = O_{ik}x_k$  で与えられるような座標変換における, 2 階テンソルの変換則になっている (付録 A 参照).

■慣性テンソルに対する公式 (32.12) について  $x'_i = x_i - a_i$  より

$$\begin{aligned} I'_{ik} &= \sum m(x'_l)^2 \delta_{ik} - x'_i x'_k \\ &= \sum m(x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k) + \left( \sum m \right) (a_l^2 \delta_{ik} - a_i a_k) - \sum m(2x_l a_l \delta_{ik} - x_i a_k - x_k a_i) \\ &= I_{ik} + \mu(a^2 \delta_{ik} - a_i a_k) : (32.12). \quad (\because \sum m x_i = 0) \end{aligned}$$

得られた公式 (32.12) は,  $\mathbf{a} \equiv \overrightarrow{OO'}$  とする代わりに  $\mathbf{a} \equiv \overrightarrow{O'O}$  と再定義しても不変である. このときこの公式は次のように解釈できる. すなわち原点  $O'$  まわりの“慣性テンソル”  $I'_{ik}$  は, ベクトル  $\mathbf{a} \equiv \overrightarrow{O'O}$  で示される慣性中心  $O$  に剛体の全質量  $\mu$  が集中した質点の, 原点  $O'$  まわりの“慣性テンソル”  $\mu(a^2 \delta_{ik} - a_i a_k)$  と, 慣性中心  $O$  を原点とする座標系で定義された慣性テンソル  $I_{ik}$  の和である.

### § 33. 剛体の角運動量

ここからは基準点  $O$  を剛体の慣性中心にとった場合の,

$$\text{粒子の位置ベクトル } \mathbf{r}, \quad \text{剛体の角運動量 } \mathbf{M} = \sum \mathbf{r} \times (m\mathbf{v})$$

を考える. 剛体の慣性中心を原点とする慣性系 [運動座標系ではない] に対する剛体中の点の速度は  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  だから,

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{r} \times (m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})) \Rightarrow M_i = I_{ik} \Omega_k. \quad (\text{導出は下記}) \quad (33.1)$$

一般には  $\mathbf{M}$  と  $\boldsymbol{\Omega}$  は平行とならない.

外力の作用を受けない剛体の自由な回転を考えると, 角運動量が保存する:

$$\mathbf{M} = \text{const.}$$

- 球状こま ( $I_1 = I_2 = I_3 \equiv I$ )
- 回転子 ( $I_1 = I_2 \equiv I, I_3 = 0$ )
  - $x_3$  軸まわりの回転は意味を成さないの  $\Omega_3 = 0, \quad M_3 = I_3 \Omega_3 = 0.$

に対しては  $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\Omega}$  なので

$$\boldsymbol{\Omega} = \text{const.}$$

の一樣な回転となる.

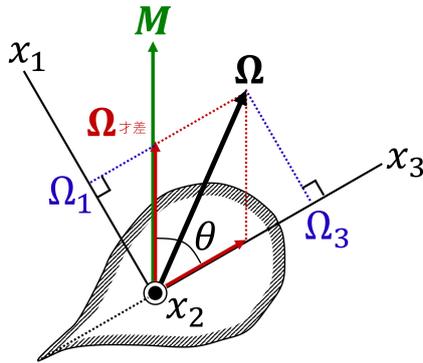


図 59 自由な対称こまの歳差運動 (教科書の図 46(p.134) を改変)

対称こま (対称軸  $x_3$ ,  $I_1 = I_2 \neq I_3$ ) を考えると

与えられた瞬間に,  $x_3$  軸に垂直な慣性主軸  $x_2$  を, 保存されるベクトル  $\mathbf{M}$  とも直交するようにとる.

[すなわち  $x_3$  軸方向の単位ベクトル  $\mathbf{e}_3$  に対して,  $x_2$  軸は  $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{M}$  の方向]

→  $M_2 = 0$ ,  $\Omega_2 = M_2/I_2 = 0$ .

→  $\mathbf{M}, \boldsymbol{\Omega}, x_3$  軸は同一の平面内 (図 59 参照).

→ こまの軸上の点 [ $\mathbf{r} = x_3 \mathbf{e}_3$ ] の速度  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  はこの平面に垂直.  
このことが各瞬間に成り立つ.

→ こまの軸は  $\mathbf{M}$  の方向のまわりに才差運動.

[対称こまは言わば“自転”と“公転”をし,]

- 自身の軸のまわりのこまの様な回転の角速度  $\Omega_3$  → 図 59 の青字
- こまの軸の才差運動の角速度  $\Omega_{\text{才差}}$  → 図 59 の赤字

である.

### § 33, 式の導出など

#### ■式 (33.1) の導出

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{r} \times (m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})) = \sum m\{r^2 \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega})\},$$

$$\therefore M_i = \sum m(x_l^2 \Omega_i - x_i x_k \Omega_k) = \Omega_k \sum m(x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k) = I_{ik} \Omega_k : (33.1).$$

### § 33 について

対称こまの自由な回転運動について, 対称軸  $x_3$  の才差運動とともに,  $\mathbf{M}$  と  $x_3$  軸を含む面内にあるベクトル  $\boldsymbol{\Omega}$  も才差運動をする [4, pp.372–373]. このように  $M_i = I_{ik} \Omega_k$  において  $\mathbf{M} = \text{const.}$  であっても,  $\boldsymbol{\Omega} = \text{const.}$  とならないことがあり得る.

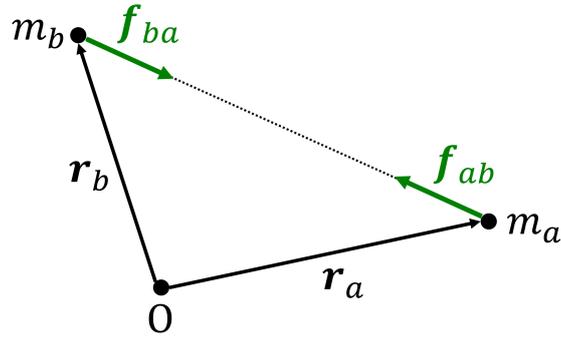


図 60 作用・反作用の法則  $\mathbf{f}_{ab} = -\mathbf{f}_{ba}$  に従う内力が質点  $a, b$  を結ぶ直線上にあれば (中心力), モーメントへの寄与は相殺する

### § 34. 剛体の運動方程式

運動量に対する式

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p} &: \text{静止座標系に対する剛体中の粒子の運動量,} \\
 \mathbf{P} = \sum \mathbf{p} &: \text{剛体の全運動量,} \\
 \mathbf{F} = \sum \mathbf{f} &: \text{各粒子に働く力 } \mathbf{f} \text{ の合力}
 \end{aligned}$$

に対して,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}}, \quad L = \frac{1}{2} \mu V^2 + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k - U. \quad (34.1)$$

合力  $\mathbf{F}$  において内力はうち消し合う [作用・反作用の法則の仮定]

$\Leftrightarrow$  外力の働かない剛体に対する運動量保存則

[このこと (そして運動方程式  $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}$ ) は剛体に限らず, 任意の多粒子系に対して正しい]

角運動量に対する式

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} = \sum \mathbf{r} \times (m\dot{\mathbf{r}}) &: \text{剛体の慣性中心に関する角運動量,} \\
 \mathbf{K} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f} &: \text{剛体の慣性中心に関する力のモーメント}
 \end{aligned}$$

に対して,

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{K} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\Omega}} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\phi}}, \quad \delta\boldsymbol{\phi}: \text{剛体の無限小回転, } L = \frac{1}{2} \mu V^2 + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k - U. \quad (34.3)$$

力のモーメント  $\mathbf{K}$  において内力のモーメントの和はゼロ [図 60]

$\Leftrightarrow$  外力の働かない剛体に対する角運動量保存則

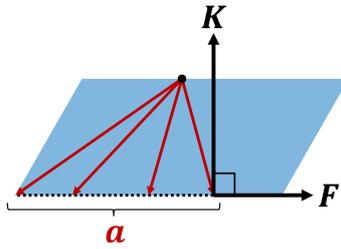


図 61  $\mathbf{K} = \mathbf{a} \times \mathbf{F}$  となるようなベクトル  $\mathbf{a}$

- 異なる座標原点に関する力のモーメントの関係

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{K} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \sum \mathbf{r}' \times \mathbf{f} + \sum \mathbf{a} \times \mathbf{f} \\ = \mathbf{K}' + \mathbf{a} \times \mathbf{F}.$$

偶力 (全合力  $\mathbf{F} = 0$ ) に対して力のモーメントは  $\mathbf{K} = \mathbf{K}'$  (原点に依らない).

- $\mathbf{K} \perp \mathbf{F}$  のとき

図 61 のように  $\mathbf{K} = \mathbf{a} \times \mathbf{F}$  となるようなベクトル  $\mathbf{a}$  をとれて,

$\mathbf{K}$  は位置  $\mathbf{a}$  に合力  $\mathbf{F}$  が作用する場合の力のモーメントと見なせる.

- 一様な場  $\mathbf{E}$  から各粒子が  $\mathbf{f} = e\mathbf{E}$  の力を受ける場合 (一般に  $e$  の値は粒子ごとに異なる).

$\mathbf{K} = \sum \mathbf{r} \times (e\mathbf{E}) = (\sum e\mathbf{r}) \times \mathbf{E}$  は位置

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\sum e\mathbf{r}}{\sum e} \quad (\text{ただし } \sum e \neq 0 \text{ と仮定})$$

に合力  $\mathbf{F} = \sum e\mathbf{E} = (\sum e)\mathbf{E}$  が働く場合の力のモーメントと見なせる:

$$\mathbf{K} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{F}.$$

### § 34, 式の導出など

■式 (34.1) の導出 Lagrange 方程式における  $\partial L / \partial \mathbf{R}$  の項について, 剛体の質量中心の変位  $\delta \mathbf{R}$  に伴って, 各質点の位置  $\mathbf{r}$  (空間に固定した静止座標系に関する位置ベクトル) も  $\delta \mathbf{R}$  変位するから, ポテンシャル・エネルギーは

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{R} \cdot \sum \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = -\delta \mathbf{R} \cdot \sum \mathbf{f} = -\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{R}$$

だけ変化する. よって

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}} \quad (34.2)$$

となることに注意すれば良い.

■式 (34.3) の導出 Lagrange 方程式における  $\partial L / \partial \phi$  の項について, 回転ベクトル  $\delta \phi$  で表される剛体の回転に伴って, ポテンシャル・エネルギーは

$$\delta U = -\sum \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} = -\sum \mathbf{f} \cdot (\mathbf{r} \times \delta \phi) = -\delta \phi \cdot \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f} = -\mathbf{K} \cdot \delta \phi$$

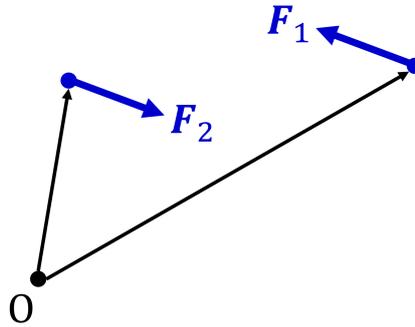


図 62 偶力  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 (= -\mathbf{F}_1)$

だけ変化する。よって

$$\mathbf{K} = -\frac{\partial U}{\partial \phi} \quad (34.6)$$

となることに注意すれば良い。

初等的には式 (34.3) は

$$\dot{\mathbf{M}} = \sum \dot{\mathbf{r}} \times (m\dot{\mathbf{r}}) + \sum \mathbf{r} \times (m\ddot{\mathbf{r}}) = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \mathbf{K}$$

と導ける [この証明は剛体に限らず任意の多粒子系に適用できる]。

## § 34 について

■剛体のポテンシャル・エネルギーについて § 32 で述べられているように、「ポテンシャル・エネルギーは一般に、剛体の位置を定める 6 つの変数、すなわち慣性中心の 3 つの座標  $X, Y, Z$  と運動座標軸の静止座標軸に対する位置を定める 3 つの角度との関数である」(p.124)。ポテンシャル・エネルギー  $U$  の変化の計算 (p.135) では、 $U$  は剛体の慣性中心の定義式  $\mathbf{R} = \sum m\mathbf{r}/\mu$  を通して (静止座標系から見た) 粒子の位置  $\mathbf{r}$  の関数であり、 $\partial U/\partial \mathbf{r}$  が各粒子に働く力  $\mathbf{f}$  を与えると見なしていることになる。

■「偶力」(p.136 一番下の行) について 2 つの力  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$  の合力がゼロになる場合にも ( $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$ )、これらの作用線が異なっていれば力のモーメントはゼロにならず、物体の回転を引き起こす (図 62 参照)。このような力を偶力と呼ぶ\*24。

剛体がつり合っているならば合力を  $\mathbf{F}_1$  と  $\mathbf{F}_2$  に分けたとき、力のつり合いより  $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$  となるからそれらは一般には偶力である。しかし剛体がつり合っているならば力のモーメントもゼロにならないから、偶力が存在してはならず、 $\mathbf{F}_1$  と  $\mathbf{F}_2$  は共通の作用線を持つことになる。こうして剛体がつりあっているならば、すべての力の作用線は 1 点で交わり、かつ、すべての力のベクトル和はゼロ・ベクトルになる。

■剛体の運動に関する説明の仕方と直観 剛体の運動は角運動量とトルク (力のモーメント) の関係を用いて理解される。剛体の運動を直観に落とし込めないとすれば、それは我々が角運動量とトルクの関係よりも運動量と力の関係から現象を理解することに慣れているからかもしれない。剛体の運動を剛体の各要素に働く力か

\*24 偶力は両手でハンドルを回すときの力である。

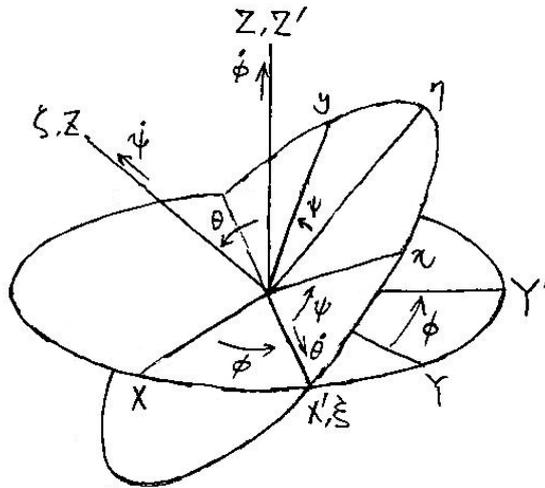


図 63 Euler 角  $\phi, \theta, \psi$  (教科書の図 47(p.138) を改変)

ら理解するには、各要素の間に働く力を知る必要がある。しかし剛体近似において各要素間の距離は不変であり、そのような力は拘束力として扱われる。

### § 35. オイラーの角

運動座標系の軸  $x_1, x_2, x_3$  の静止座標系  $X, Y, Z$  に対する方向を定める 3 つの角度として、図 63 のような Euler の角  $\phi, \theta, \psi$  を用いる。このとき [静止座標系から見た剛体の運動の] 角速度ベクトル  $\Omega$  の、運動軸  $x_1, x_2, x_3$  方向の成分は Euler の角を用いて

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (35.1)$$

と表される [本稿次節で補足]。

Euler の角の簡単な応用例として、再び対称こま ( $I_1 = I_2 \neq I_3$ ) の自由な運動を考える。静止座標系の  $Z$  軸を、こまの保存される角運動量ベクトル  $M$  の方向にとる。また運動座標系  $x_1, x_2, x_3$  を、 $x_3$  軸がこまの軸に一致するような慣性主軸に選び、与えられた瞬間に  $\psi = 0$  となるように  $x_1$  軸の方向をとる。するとこまの角運動量の運動座標系  $x_1, x_2, x_3$  に関する成分は  $M = (0, M \sin \theta, M \cos \theta)$  であり [図 64 参照]、これを一般的な表式 (ただし  $\psi = 0$  を考慮する)

$$M_1 = I_1 \Omega_1 = I_1 \dot{\theta}, \quad M_2 = I_1 \Omega_2 = I_1 \dot{\phi} \sin \theta, \quad M_3 = I_3 \Omega_3$$

と等置することにより

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = 0 & \rightarrow \text{こまの軸の傾き } \theta = \text{const.} \\ I_1 \dot{\phi} = M & \rightarrow \text{才差運動の角速度 } \dot{\phi} = M/I_1 \\ I_3 \Omega_3 = M \cos \theta & \rightarrow \text{こまの自分自身の軸のまわりの回転の角速度 } \Omega_3 = M \cos \theta / I_3 \end{aligned}$$

を得る (§ 33 の結果に一致)。

## § 35 について

まず, Euler 角を定義する図 63 について補足説明する.

- 静止座標系  $X, Y, Z$  は  $Z$  軸周りの角度  $\phi$  の回転によって座標系  $X', Y', Z'$  に移り,
- 座標系  $X', Y', Z'$  は  $X'$  軸周りの角度  $\theta$  の回転によって座標系  $\xi, \eta, \zeta$  に移り,
- 座標系  $\xi, \eta, \zeta$  は  $\zeta$  軸周りの角度  $\psi$  の回転によって運動座標系  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$  に移る.

■角速度  $\Omega$  の  $x, y, z$  軸に関する成分 角速度  $\dot{\phi}$  を  $x, y, z$  軸に射影しよう.  $X'$  軸周りの角度  $\theta$  の回転過程を考えると  $Z$  軸は  $\eta z$  面内にあり, 角速度  $\dot{\phi}$  の

- $z$  軸への正射影は  $\dot{\phi} \cos \theta$ ,
- $\eta$  軸への正射影は  $\dot{\phi} \sin \theta$

である.  $\zeta$  軸周りの角度  $\psi$  の回転過程を考えると  $\eta$  軸は  $xy$  面内にあり, 角速度  $\dot{\phi} \sin \theta$  の

- $x$  軸への正射影は  $\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi$ ,
- $y$  軸への正射影は  $\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi$

である. ここまでで図 64 左側のように, 「 $\theta$  および  $\pi/2 - \psi$  はそれぞれ,  $x_1, x_2, x_3$  軸に関する  $Z$  軸の方向の極角および方位角である」(p.139 注脚 1) ことが分かる.

角速度  $\dot{\theta}$  を  $x, y, z$  軸に射影しよう.  $\zeta$  軸周りの角度  $\psi$  の回転過程を考えると  $\xi$  軸は  $xy$  面内にあり, 角速度  $\dot{\theta}$  の

- $x$  軸への正射影は  $\dot{\theta} \cos \psi$ ,
- $y$  軸への正射影は  $-\dot{\theta} \sin \psi$

である.

角速度  $\dot{\psi}$  はすでに  $z$  軸方向を向いている. 以上より式 (35.1):

$$\begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

を得る.

■角速度  $\Omega$  の  $X, Y, Z$  軸に関する成分 ここではさらに, 角速度  $\Omega$  の  $X, Y, Z$  軸に関する成分 ( $\Omega_X, \Omega_Y, \Omega_Z$ ) を, Euler 角を用いて表すことを考える.  $\dot{\phi}$  はすでに  $X$  軸方向を向いている. そこで角速度  $\dot{\theta}$  を  $X, Y, Z$  軸に射影しよう.  $Z$  軸周りの角度  $\phi$  の回転過程を考えると  $\xi$  軸は  $XY$  面内にあり, 角速度  $\dot{\theta}$  の

- $X$  軸への正射影は  $\dot{\theta} \cos \phi$ ,
- $Y$  軸への正射影は  $\dot{\theta} \sin \phi$

である.

角速度  $\dot{\psi}$  を  $X, Y, Z$  軸に射影しよう.  $X'$  軸周りの角度  $\theta$  の回転過程を考えると  $z$  軸は  $Y'Z$  面内にあり, 角速度  $\dot{\psi}$  の

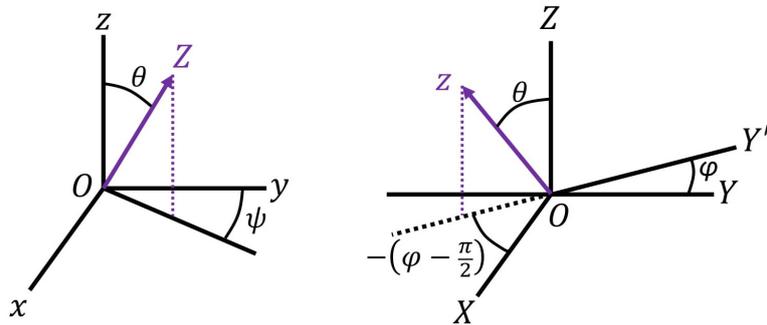


図 64 静止座標系と運動座標系の位置関係

- $Y'$  軸への正射影は  $\dot{\psi} \sin \theta$ ,
- $Z$  軸への正射影は  $\dot{\psi} \cos \theta$

である。  $Z$  軸周りの角度  $\phi$  の回転過程を考えると  $Y'$  軸は  $XY$  面内にあり、角速度  $\dot{\psi} \sin \theta$  の

- $X$  軸への正射影は  $\dot{\psi} \sin \theta \sin \phi$ ,
- $Y$  軸への正射影は  $\dot{\psi} \sin \theta \cos \phi$

である。

ここまでで図 64 右側のように、「角度  $\theta$  および  $\phi - \pi/2$  は、それぞれ  $X, Y, Z$  軸に関する  $x_3$  軸の方向の極角および方位角を表す」(p.139 注脚 1) ことが分かる。以上より

$$\begin{pmatrix} \Omega_X \\ \Omega_Y \\ \Omega_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi \\ \dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}.$$

### § 35 問題 1 下端の固定された対称こまの重力場のもとでの運動

下端の固定された対称こまの重力場のもとでの運動を考える。こまの質量を  $m$ 、下端から重心までの距離を  $l$ 、主慣性モーメントを  $A, A, C$  とする。静止座標系 (空間固定系) と運動座標系 (剛体系) の原点をともにこまの不動点  $O$  にとり、静止座標系の  $Z$  軸を鉛直上向きにとる。こまのラグランジアンは

$$L = \frac{A + ml^2}{2} (\dot{\theta} + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{C}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta \quad (58)$$

となる ( $\theta, \phi, \psi$  は Euler 角, 詳細は下記)。循環座標  $\psi, \phi$  に対応した保存量

$$C(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \equiv M_\psi = \text{const}, \quad (59)$$

$$(A' \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta) \dot{\phi} + C \dot{\psi} \cos \theta \equiv M_\phi = \text{const} \quad (60)$$

が見出される ( $A' \equiv A + ml^2$ )。これらを用いてエネルギー保存則

$$E = \frac{A + ml^2}{2} (\dot{\theta} + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{C}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + mgl \cos \theta = \text{const}$$

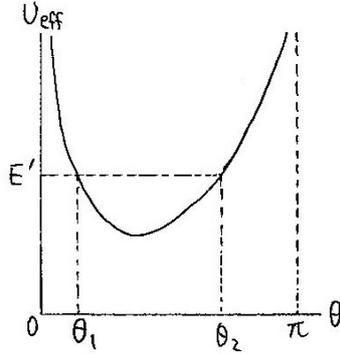


図 65 実効ポテンシャル  $U_{\text{eff}}(\theta)$  の概形

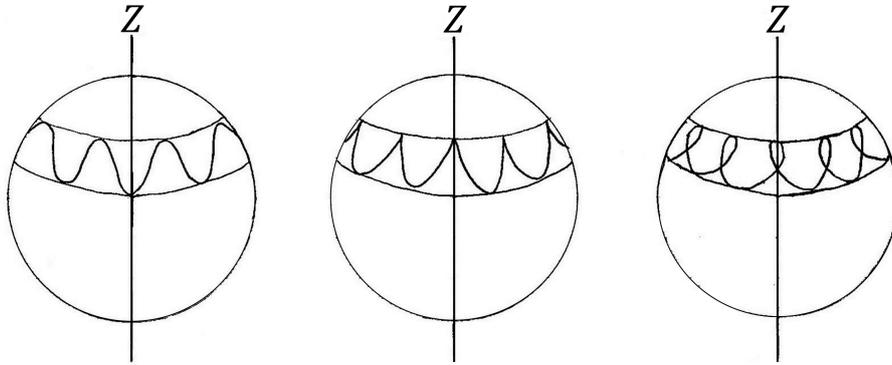


図 66 こまの軸がこまの不動点を中心とする球面上に描く軌跡

から  $\dot{\phi}, \dot{\psi}$  を消去すると

$$\begin{aligned}
 E' &\equiv E - \frac{M_\psi^2}{2C} \\
 &= \frac{A'}{2} \dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}}(\theta) = \text{const}, \\
 U_{\text{eff}}(\theta) &\equiv \frac{(M_\phi - M_\psi \cos \theta)^2}{2A' \sin^2 \theta} + mg \cos \theta
 \end{aligned}$$

となる.  $U_{\text{eff}}(\theta)$  の概形は図 65 のようであり, こまの傾き  $\theta$  は条件  $E' \geq U_{\text{eff}}(\theta)$  から決まる範囲  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$  を往復する. 式 (59), (60) より

$$\dot{\phi} = \frac{M_\phi - M_\psi \cos \theta}{A' \sin^2 \theta}$$

であり,  $\theta$  の変化に伴ってこれが符号を変えるか否かに応じて図 66 のような運動が実現される.

■ラグランジアン (58) について ラグランジアン (58) における項  $\frac{ml^2}{2} (\dot{\theta} + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)$  はこまの並進運動のエネルギーとして得られる. 以下, このことを確かめる. こまの下端を原点とした重心の位置ベクトルを  $\mathbf{R}$  とすると, その運動座標系 (剛体系) に関する成分は

$$\mathbf{R} = (X_1, X_2, X_3) = (0, 0, l)$$

である。剛体の角運動量  $\boldsymbol{\Omega}$  の運動座標系 (剛体系) に関する成分を  $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$  とすると, こまの並進運動のエネルギーは

$$\begin{aligned} T_{\text{並進}} &= \frac{1}{2} m (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R})^2 = \frac{1}{2} m \{ \Omega^2 R^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{R})^2 \} \\ &= \frac{1}{2} m (l^2 \delta_{ik} - X_i X_k) \Omega_i \Omega_k \end{aligned}$$

と表される。ここで慣性テンソルに類似の量  $m(l^2 \delta_{ik} - X_i X_k)$  の全成分は

$$\begin{pmatrix} l^2 & 0 & 0 \\ 0 & l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられるから, こまの並進運動のエネルギーは確かに

$$T_{\text{並進}} = \frac{1}{2} m l^2 (\Omega_x^2 + \Omega_y^2) = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)$$

となる (第 2 の等号については角速度を Euler 角で表した式 (35.1) を参照せよ)。

■トロコイドとの類似性 図 66 における, こまの軸がこまの不動点を中心とする球面上に描く軌跡は, 初期条件に応じて

- 尖点を持たない波形
- つるまき状
- 尖点を持つ波形

の 3 種類があり, これらはトロコイドと共通の特徴である (下記も参照)。

#### 自転角速度が十分大きいときのこまの運動

下端の固定された対称こまの重力場のもとでの運動について, こまを鉛直軸に対して角度  $\theta_0$  だけ傾けてそっと置いたとき, こまが十分大きな自転角速度で回っているという近似の下で, こまの先端はサイクロイドを描くことが文献 [1, pp.138–141]

山本義隆, 中村孔一, 2013, 朝倉物理学大系 1 解析力学 I, 株式会社朝倉書店, 東京, 138–141

で示されている。以下ではこれについて計算の補足を行う。

#### 計算の補足

■訂正  $A \rightarrow A' \equiv A + ml^2$  ラグランジアン (2.2.85) では先に論じた並進運動のエネルギー  $\frac{ml^2}{2} (\dot{\theta} + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)$  が抜け落ちている。このため以降に現れる全ての  $A$  を  $A' \equiv A + ml^2$  で置き換えなければならないことに注意する。

■Routhian の式 (2.2.87) Routhian(2.2.87) を求める計算過程を補足する．循環座標に共役な一般化運動量を消去して

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \frac{1}{2}A'\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \underbrace{(A'\sin^2\theta + C\cos^2\theta)}_{\text{式 (2.2.86a) と同じ形, そのまま残す}} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \underbrace{C(\dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta)}_{M_\psi^2 \text{ を作る}} - mgl\cos\theta \\
 &= \frac{1}{2}A'\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{A'\sin^2\theta + C\cos^2\theta} (M_\phi - C\cos\theta\dot{\psi})^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{C} M_\psi^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{C} \dot{\phi}^2 \cos^2\theta - mgl\cos\theta \quad (\because \text{式 (2.2.86b)}) \\
 &= \frac{1}{2}A'\dot{\theta}^2 - \frac{M_\psi^2}{2C} - mgl\cos\theta + \frac{1}{2} \frac{1}{C} \dot{\phi}^2 \cos^2\theta - \frac{1}{2}(A'\sin^2\theta + C\cos^2\theta)\dot{\phi}^2 \\
 &= \frac{1}{2}A'\dot{\theta}^2 - \frac{(M_\phi - M_\psi\cos\theta)^2}{2A'\sin^2\theta} - \frac{M_\psi^2}{2C} - mgl\cos\theta : (2.2.87)
 \end{aligned}$$

と段階的に計算できる．(ランダウ『力学』ではこの Routh 関数の計算は§ 41 の問題となっている．)

■ $u = \cos\theta$  に対する式 (2.2.91)  $\theta$  に対する式 (2.2.89) を  $u = \cos\theta$  に対する式 (2.2.91) に書き換えるには, (2.2.89)  $\times 2A'(1-u^2)$  を作って整理すれば良い．

■ $a, b, \alpha, \beta$  の導入 式 (2.2.92) 直後では (2.2.90)  $\div A'$ , (2.2.91)  $\div A'^2$  に現れる係数を  $a, b, \alpha, \beta$  とおいている．

■ $\theta_1$  の式 (p.140, 1.7)  $u_1$  の式 (p.140, 1.5) は  $\beta/b^2$  の 2 次以上を無視する近似で

$$\begin{aligned}
 u_1 &\equiv \cos\theta_0 - \frac{\beta}{b^2} \sin^2\theta_0 \\
 &\simeq \cos\theta_0 \cos\left(\frac{\beta}{b^2} \sin\theta_0\right) - \sin\theta_0 \left(\frac{\beta}{b^2} \sin\theta_0\right) \\
 &= \cos\left(\theta_0 + \frac{\beta}{b^2} \sin\theta_0\right)
 \end{aligned}$$

となるから,

$$\theta_1 = \arccos(u_1) = \theta_0 + \frac{\beta}{b^2} \sin\theta_0$$

(p.140, 1.7) を得る．

■式 (2.2.97) 式 (2.2.96) の 1 つ上の式  $u = \cos\theta_0 - \Delta\theta \sin\theta_0(1 - \cos bt)$  を  $u_0 - u = \Delta\theta \sin\theta_0(1 - \cos bt)$  と書き直し, これを式 (2.2.93b)  $\Leftrightarrow \dot{\phi} \sin^2\theta = b(u_0 - u)$  の右辺に代入すると良い．その後  $\beta/b^2$  の 2 次以上を無視する近似により

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi} &= \frac{b\Delta\theta}{\sin\theta_0} \frac{1 - \cos bt}{1 + 2\Delta\theta \frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0} + O(\Delta\theta^2)} \\
 &= \frac{b\Delta\theta}{\sin\theta_0} (1 - \cos bt) \left\{ 1 - \Delta\theta \frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0} + O(\Delta\theta^2) \right\} \\
 &\simeq \frac{\beta}{2b} (1 - \cos bt) : (2.2.97)
 \end{aligned}$$

を得る．

■式 (2.2.99) 式 (2.2.99) の確認はランダウ=リフシツ『力学』p.143 の 1 番上の式の導出

$$\begin{aligned} \frac{M_3^2(1 - \cos \theta)^2}{2I_1' \sin^2 \theta} &= \frac{M_3^2}{2I_1'} \left( \frac{\theta^2 + O(\theta^4)}{\theta + O(\theta^3)} \right)^2 \\ &= \frac{M_3^2}{2I_1'} \left( \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^3) \right) (1 + O(\theta^2)) = \frac{M_3^2}{8I_1'} \theta^2 + O(\theta^4) \end{aligned}$$

と同じものであり, 記号を

$$M_3 \rightarrow M_\psi = C\Omega, \quad I_1' \rightarrow A'$$

と読み替えれば良い.

### § 36. オイラーの運動方程式

§ 34 における剛体の運動方程式 (34.1),(34.3):

$$\mu \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{K}$$

の, 慣性主軸を持つ運動座標系 (したがって  $M_i = I_i \Omega_i$  が成立,  $i$  について和をとらない) に関する成分を書き下すと

$$\mu \left( \frac{dV_i}{dt} + \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \Omega_j V_k \right) = F_i, \quad I_i \frac{d\Omega_i}{dt} + \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} I_k \Omega_j \Omega_k = K_i \quad (36.3-4)$$

となる (導出は下記). 第 2 式は Euler の運動方程式と呼ばれる ( $i$  については和をとらない)<sup>\*25</sup>.

再び対称こま ( $I_1 = I_2$ ) の自由な回転 ( $\mathbf{K} = 0$ ) を考えて Euler の方程式を解くと,

$$\Omega_3 = \text{const}, \quad \Omega_1 = A \sin(\omega(t - t_0)), \quad \Omega_2 = A \cos(\omega(t - t_0)), \quad \omega \equiv \Omega_3 \frac{I_3 - I_1}{I_1} \quad (61)$$

を得る ( $A, t_0$  は積分定数, 導出は下記). よって角速度  $\boldsymbol{\Omega}$  は, したがって角運動量  $\mathbf{M} = (I_1 \Omega_1, I_2 \Omega_2, I_3 \Omega_3)$  はこまの軸  $x_3$  のまわりに角速度  $\omega$  で回転する.

### § 36, 式の導出など

■式 (36.3),(36.4) の導出 任意のベクトル  $\mathbf{A}$  の, 静止座標系と運動座標系で見た時間変化率をそれぞれ  $\frac{d\mathbf{A}}{dt}, \frac{d'\mathbf{A}}{dt}$  と書くと, これらの間には

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d'\mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A} \quad (36.1)$$

の関係がある. [本稿次節を参照. その意味に注意して] これを剛体の運動方程式 (34.1),(34.3) に適用すればよい.

<sup>\*25</sup> 具体的に書けば,

$$I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2) \Omega_2 \Omega_3 = K_1, \quad \text{etc.}$$

■式 (61) の導出  $K = 0$  の自由な回転に対して Euler の方程式 (36.4) は

$$\frac{d\Omega_1}{dt} + \frac{I_3 - I_2}{I_1} \Omega_2 \Omega_3 = 0, \quad \frac{d\Omega_2}{dt} + \frac{I_1 - I_3}{I_2} \Omega_3 \Omega_1 = 0, \quad \frac{d\Omega_3}{dt} + \frac{I_2 - I_1}{I_3} \Omega_1 \Omega_2 = 0 \quad (36.5)$$

となる。ここで対称こまを想定して  $I_1 = I_2$  とおくと、第 3 式から

$$\dot{\Omega}_3 = 0, \quad \therefore \Omega_3 = \text{const.}$$

このときはじめの 2 式は

$$\dot{\Omega}_1 = -\omega \Omega_2, \quad \dot{\Omega}_2 = \omega \Omega_1, \quad \omega \equiv \Omega_3 \frac{I_3 - I_1}{I_1} : \text{一定}$$

となるので、

$$\frac{d}{dt}(\Omega_1 + i\Omega_2) = i\omega(\Omega_1 + i\Omega_2), \quad \therefore \Omega_1 + i\Omega_2 = Ae^{i\omega t}$$

が得られる。[このように複素平面上的円運動を考えるのは、式 (22.10) の導出と同様の計算手法である。] 時間の原点を適当に選べば、定数  $A$  を実数とすることができ、

$$\Omega_1 = A \cos \omega t, \quad \Omega_2 = A \sin \omega t.$$

## § 36 について

■一般公式 (36.1) について 公式 (36.1):

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d'\mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}$$

は次のように理解できる。基底ベクトル  $\{\mathbf{e}_i\}$  を持つ運動座標系で見たベクトル  $\mathbf{A}$  の成分を  $A_i$  と書くと

$$\mathbf{A} = A_i \mathbf{e}_i, \quad \therefore \dot{\mathbf{A}} = \dot{A}_i \mathbf{e}_i + A_i \dot{\mathbf{e}}_i$$

となる。ここで  $\dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_i$  であることに注意すると

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{A}_i \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}$$

を得る。よってベクトル  $\mathbf{A}$  の時間変化率  $\dot{\mathbf{A}}$  を運動座標系で見た成分  $(\dot{\mathbf{A}})_i$  は

$$(\dot{\mathbf{A}})_i = \dot{A}_i + \varepsilon_{ijk} \Omega_j A_k$$

と表される。これが一般公式 (36.1) の意味するところである。

■最終段落について (自由な対称こまの軸に対する  $M$  の相対的な回転) 自由な対称こまについて、「ベクトル  $\mathbf{M}$  (図 48 の  $Z$  軸) の  $x_3$  軸のまわりの回転の角速度は、オイラーの角を使うと、角速度  $-\dot{\psi}$  に一致する」のは、 $x_1, x_2, x_3$  軸に関する  $Z$  軸の方向の方位角が  $\pi/2 - \psi$  だからである (p.139 注脚 1(本稿の図 64))。1 行下の式

$$\dot{\psi} = \frac{M \cos \theta}{I_3} - \dot{\phi} \cos \theta = M \cos \theta \left( \frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right)$$

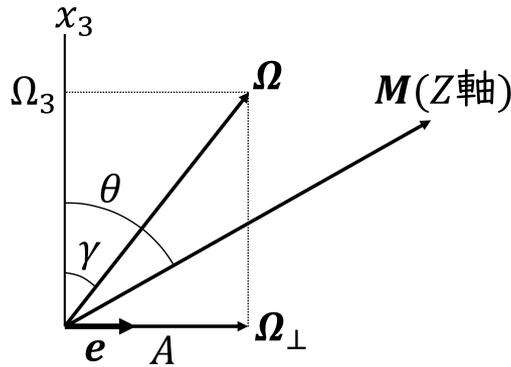


図 67  $\theta, \gamma$  はそれぞれ,  $M$  ( $Z$  軸),  $\Omega$  がこまの対称軸 ( $x_3$  軸) となす角である

の第 1 の等号では (35.4) 第 3 式  $I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) = M \cos \theta$  を, 第 2 の等号では (35.4) 第 2 式  $I_1 \dot{\phi} = M$  を用いている. これをさらに 2 行下の式

$$-\dot{\psi} = \Omega_3 \frac{I_3 - I_1}{I_1}$$

に書き換えるには,  $M \cos \theta = M_3 = I_3 \Omega_3$  (p.140) を思い起こせば良い. これが「(36.6) に合致する」とあるのは,  $\Omega, M$  ( $Z$  軸),  $x_3$  軸が同一面内にある以上 (§ 33, § 35), 運動座標系で見て  $M$  もまた  $\Omega$  と同じ角速度で  $x_3$  軸の周りに回転していなければならないからである ( $-\dot{\psi} = \omega$ ).

■空間固定系と剛体固定系で見た対称こまの  $\Omega$  の運動の関係 [4, pp.372–373, pp.424–426] 対称こまの角速度  $\Omega$  は, こまの対称軸 ( $x_3$  軸) と保存するベクトル  $M$  ( $Z$  軸) と常に同一平面内にあり, 空間固定系で見ると  $\Omega$  は  $M$  ( $Z$  軸) の周りに歳差運動 (等速回転運動) を行う (§ 33, § 35). 他方, 剛体固定系で見ると,  $\Omega$  は対称軸 ( $x_3$  軸) の周りに等速回転運動を行う (§ 36). 以下ではこれら 2 つの見方を総合的に把握することを試みる.

まず  $\Omega$  と  $x_3$  軸のなす角  $\gamma$  を調べる.  $\Omega$  の  $x_3$  軸に垂直な成分  $\Omega_{\perp} = \Omega_1 e_1 + \Omega_2 e_2$  は, その方向単位ベクトルを  $e$  とすると, § 36 より  $\Omega_{\perp} = Ae$  とおける. ところで, こまの軸対称性より  $e$  も主軸方向なので,  $M \cdot e = I_1 A$  が成り立つから,

$$M \cdot \Omega_{\perp} = (M \cdot e)A = I_1 A^2.$$

他方, 図 67 より幾何学的に  $M \cdot \Omega_{\perp} = MA \sin \theta$  であり, これらを等置して

$$M \sin \theta = I_1 A$$

を得る. これを式 (33.4):  $M \cos \theta = I_3 \Omega_3$  で辺々割り, 図 67 から読み取れる関係  $A/\Omega_3 = \tan \gamma$  (§ 36) を考慮すると

$$\tan \theta = \frac{I_1}{I_3} \tan \gamma \quad (62)$$

となる. よって  $I_1 \geq I_3$  に対して  $\theta \geq \gamma$  なので, 各瞬間の  $\Omega, M, x_3$  軸の位置関係は図 68 のようである. 次に  $\Omega$  の

- $M$  周りの歳差運動によって作られる円錐 (空間円錐 (space cone) という)
- 対称軸 ( $x_3$  軸) 周りの回転運動によって作られる円錐 (物体円錐 (body cone) という)

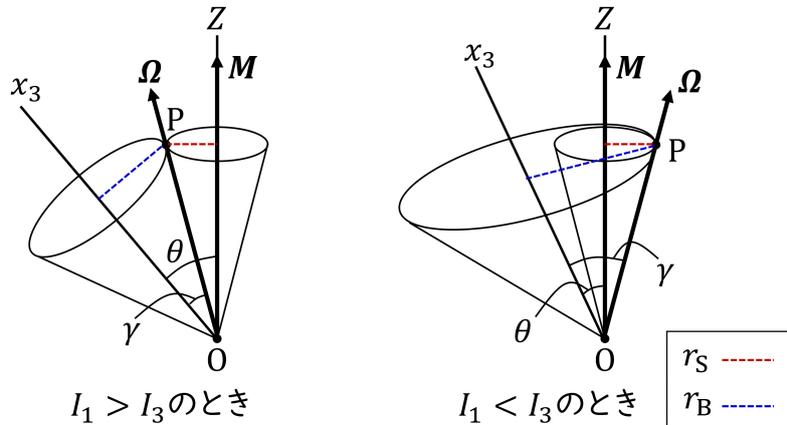


図 68 空間円錐と物体円錐

を考える. これらは定義より図 68 のように,  $\Omega$  に沿う線で接しており, そこで単位長さの共通の母線  $OP$  をとると ( $\overline{OP} = 1$ ),  $P$  を通る空間円錐と物体円錐の半径はそれぞれ

$$r_S = |\sin(\theta - \gamma)|, \quad r_B = |\sin \gamma|$$

と表される. 式 (62) とより,

$$\frac{r_S}{r_B} = \left| \cos \theta - \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \sin \theta \right| = \left| \cos \theta \left( 1 - \frac{\tan \theta}{\tan \gamma} \right) \right| = \left| \frac{I_3 - I_1}{I_3} \cos \theta \right|. \quad (63)$$

ところで式 (35.1):  $\Omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}$  を § 36 最終段落の式  $-\dot{\psi} = \Omega_3 \frac{I_3 - I_1}{I_1}$  に代入して,  $\dot{\psi}$  について解くと

$$\dot{\psi} = \frac{I_1 - I_3}{I_3} \dot{\phi} \cos \theta \quad (64)$$

となるので, 式 (63) は

$$|r_S \dot{\phi}| = |r_B \dot{\psi}|$$

を意味する. ここで  $\dot{\phi}$  は対称軸 ( $x_3$  軸) の, したがって  $\Omega$  の歳差運動の角速度であり, またこまのスピン (自転) の角速度  $-\dot{\psi}$  は  $\Omega$  の  $x_3$  軸周りの回転角速度でもあるので, この結果は物体円錐と空間円錐が接しながら滑らずに転がってゆくことを示している. このとき確かに  $\Omega$  は空間固定系で  $M$  周りに歳差運動すると同時に, 剛体固定系で  $x_3$  軸周りに回転運動する (改めて図 68 参照). なお式 (64) より,  $\dot{\psi}$  と  $\dot{\phi}$  の符号 (スピンと歳差運動の向き) は,  $I_1 > I_3$  に対して同符号,  $I_1 < I_3$  に対して異符号となる.

### § 37. 非対称こま

非対称こま (慣性モーメント  $I_1, I_2, I_3$ ) の自由な回転を考える.  $I_1 < I_2 < I_3$  とする (そうしても一般性を失わない).

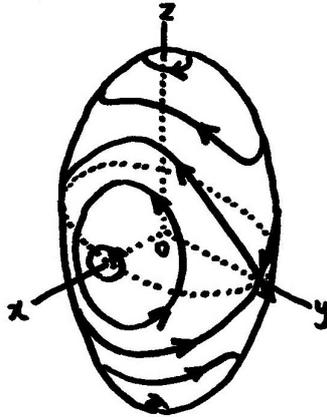


図 69 こまの慣性 (主) 軸から見た  $M$  の運動の軌跡 [Euler の方程式  $I_1\dot{\Omega}_1 = (I_2 - I_3)\Omega_2\Omega_3$  を考慮して, 軌道上の時間発展の向きを描き加えた]

■こまの慣性 (主) 軸から見た  $M$  の運動 (定性的) こまの慣性 (主) 軸に関する角運動量の成分を  $M = (M_1, M_2, M_3)$  と書くと,  $M$  がこまの慣性 (主) 軸に対して動くとき,

$$\text{エネルギー保存則} \quad \frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} = 2E, \quad (37.3)$$

$$\text{角運動量保存則} \quad M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M^2 \quad (37.4)$$

で表される楕円体表面と球面の交線に沿って移動する (図 69 参照)\*26.

- 交線が存在する条件として,

$$2EI_1 < M^2 < 2EI_3 \quad (37.5)$$

が成り立つことになる.

- 交線は閉曲線  $\Rightarrow M$  の運動は周期的.
- 図 69 より  $x_1, x_3$  軸周りの回転は安定,  $x_2$  軸周りの回転は不安定.

■こまの慣性 (主) 軸から見た  $\Omega$  の運動 (定量的) こまの慣性 (主) 軸から見た  $\Omega$  の成分 (したがって  $M$  の成分) の時間発展を, Euler 方程式を用いて調べる.  $M^2 > 2EI_2$  の場合を考えると (逆の場合は以降の式で添字 1 と 3 を入れかえねばならない), 無次元化した時間

$$\tau = t \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)}{I_1 I_2 I_3}}$$

を用いて

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{2EI_3 - M^2}{I_1(I_3 - I_1)}} \operatorname{cn}\tau, \quad \Omega_2 = \sqrt{\frac{2EI_3 - M^2}{I_2(I_3 - I_2)}} \operatorname{sn}\tau, \quad \Omega_3 = \sqrt{\frac{M^2 - 2EI_3}{I_3(I_3 - I_1)}} \operatorname{dn}\tau \quad (37.10)$$

\*26 第 1 式 (37.3) は

$$E = \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2)$$

による.

となる (導出は下記). ここに

$$\operatorname{sn}\tau, \quad \operatorname{cn}\tau = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2\tau}, \quad \operatorname{dn}\tau = \sqrt{1 - k^2\operatorname{sn}^2\tau}$$

は Jacobi の楕円関数であり,  $\operatorname{sn}\tau$  は第 1 種楕円積分

$$\tau = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$

の逆関数  $s = \operatorname{sn}\tau$  として定義される. ただし今の場合  $k^2$  は

$$k^2 = \frac{(I_2 - I_1)(2EI_3 - M^2)}{(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)}$$

で与えられ,  $M^2 > 2EI_2$  の場合を考えていることから  $k^2 < 1$  が保証される [本稿次節で確認].

- $\Omega$  の運動の周期 [本稿次節で補足]

$$T = 4K \sqrt{\frac{I_1 I_2 I_3}{(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)}}, \quad (37.12)$$

$$K \equiv \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} : \text{第 1 種完全楕円積分}. \quad (37.11)$$

- 対称こま ( $I_1 = I_2$ ) に対して, 式 (37.10) は § 36 の公式 (61) に帰着する\*27.
- $M^2 = 2EI_3$  のとき  $\Omega \parallel x_3$  軸
- $M^2 = 2EI_1$  のとき  $\Omega \parallel x_1$  軸

■ 静止座標系  $X, Y, Z$  に対するこまの運動 静止座標系  $X, Y, Z$  に対するこまの運動は Euler 角  $\phi, \theta, \psi$  の時間発展として表される. 以上の結果から  $Z$  軸を不変なベクトル  $\mathbf{M}$  の方向にとったとき,  $\theta$  と  $\psi$  は

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{I_3(M^2 - 2EI_1)}{M^2(I_3 - I_1)}} \operatorname{dn}\tau, \quad \tan\psi = \sqrt{\frac{I_1(I_3 - I_2)}{I_2(I_3 - I_1)}} \frac{\operatorname{cn}\tau}{\operatorname{sn}\tau} \quad (37.15)$$

に従って時間変化することが分かる (導出は下記). このため  $\theta$  と  $\psi$  もまた周期  $T$  の周期関数となる. ところが角  $\phi$  は

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi_1(t) + \phi_2(t), \\ \phi_1(t) &: \text{周期 } T \text{ の周期関数}, \\ \phi_2(t) &: \text{周期 } T' (T \text{ と通約不可能な値) の周期関数} \end{aligned}$$

となり\*28, 周期  $T$  が経った後, こまは静止座標系に対してもとの位置にもどらない.

\*27  $I_1 \rightarrow I_2$  とすると  $k^2 \rightarrow 0$  で,

$$\tau \rightarrow \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \arcsin s, \quad \operatorname{sn}\tau \rightarrow \sin\tau, \quad \operatorname{cn}\tau = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2\tau} \rightarrow \cos\tau, \quad \operatorname{dn}\tau = \sqrt{1 - k^2\operatorname{sn}^2\tau} \rightarrow 1$$

となることによる.

\*28 教科書では煩雑な計算を避けるために以下の参考文献だけを示し (p.151 脚注 1), 結果だけを天下一りに引用するに留めている. E. T. Whittaker; *A Treatise on the Analytical Dynamics*, Cambridge, 1937.

§ 37, 式の導出など

■式 (37.10) の導出 エネルギーと角運動量の保存則は,  $\Omega$  の成分を用いて

$$I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2 = 2E, \quad (37.2a)$$

$$I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2 = M^2 \quad (37.2b)$$

と書ける. ここから  $\Omega_1, \Omega_3$  を  $\Omega_2$  で表そう.  $I_3 \times (\text{式 (37.2a)}) - (\text{式 (37.2b)})$ ,  $I_1 \times (\text{式 (37.2a)}) - (\text{式 (37.2b)})$  を作ると,

$$\begin{aligned} \Omega_1^2 &= \frac{1}{I_1(I_3 - I_1)} \{(2EI_3 - M^2) - I_2(I_3 - I_2)\Omega_2^2\}, \\ \Omega_3^2 &= \frac{1}{I_3(I_3 - I_1)} \{(M^2 - 2EI_1) - I_2(I_2 - I_1)\Omega_2^2\} \end{aligned} \quad (37.6)$$

となる. 次に, これを Euler の方程式に代入すると,  $\Omega_2(t)$  に対する式

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_2}{dt} &= \frac{I_3 - I_1}{I_2} \Omega_1 \Omega_3 \\ &= \frac{1}{I_2 \sqrt{I_1 I_3}} \{[(2EI_3 - M^2) - I_2(I_3 - I_2)\Omega_2^2][(M^2 - 2EI_1) - I_2(I_2 - I_1)\Omega_2^2]\}^{1/2} \end{aligned} \quad (37.7)$$

が得られる. ここで  $t$  と  $\Omega_2$  の代わりに, 無次元化した変数

$$\tau = t \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)}{I_1 I_2 I_3}}, \quad s = \Omega_2 \sqrt{\frac{I_2(I_3 - I_2)}{2EI_3 - M^2}}$$

とパラメータ

$$k^2 = \frac{(I_2 - I_1)(2EI_3 - M^2)}{(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)}$$

を導入すると ( $0 \leq k^2 < 1$ ),

$$\tau = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} \quad (65)$$

となる ( $\Omega_2 = 0$  の瞬間を時間の原点にとった) [本稿次節で確認]. ここから

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{2EI_3 - M^2}{I_2(I_3 - I_2)}} s = \sqrt{\frac{2EI_3 - M^2}{I_2(I_3 - I_2)}} \text{sn}\tau.$$

さらにこれを式 (37.6) に代入すると, 式 (37.10) における  $\Omega_1, \Omega_3$  の式も得られる [本稿次節で確認].

■式 (37.15) の導出 § 35 のノートの図 64 を参考に,  $M$  の  $x_1, x_2, x_3$  軸に関する成分を書き下すと,

$$M \sin \theta \sin \psi = M_1 = I_1 \Omega_1, \quad M \sin \theta \cos \psi = M_2 = I_2 \Omega_2, \quad M \cos \theta = M_3 = I_3 \Omega_3.$$

ここから

$$\cos \theta = \frac{I_3 \Omega_3}{M}, \quad \tan \psi = \frac{I_1 \Omega_1}{I_2 \Omega_2}.$$

これらの右辺に  $\Omega$  の式 (37.10) を代入すればよい.

## § 37 について

■Poinsot 楕円体とポールホード [4, pp.371–372, pp.415–416] 自由な非対称こまについて, 図 69 では慣性主軸で見て  $M$  の先端が描く軌道を調べた. 比例関係  $M_i = I_i \Omega_i$  より ( $i$  で和をとらない),  $\Omega$  が描く軌道もまた図 69 と似たものになる. 実際,  $\Omega$  の先端の軌道も保存則 (37.2a), (37.2b) が定める楕円体表面と球面の交線として与えられる.

特にエネルギー保存則 (37.2a):

$$\left( \frac{\Omega_1}{\sqrt{2E/I_1}} \right)^2 + \left( \frac{\Omega_2}{\sqrt{2E/I_2}} \right)^2 + \left( \frac{\Omega_3}{\sqrt{2E/I_3}} \right)^2 = 1$$

が表す楕円体を Poinsot 楕円体という.

ところでエネルギー保存則は  $M \cdot \Omega = 2E = \text{const.}$  と書くこともできる. このため  $\Omega$  の先端は角運動量ベクトル  $M$  に垂直な定平面 (不変平面という) 上を動く.

$\Omega$  の先端が常に Poinsot 楕円体にあるため, 微小時間  $\Delta t$  の経過に伴う  $\Omega$  の変化  $\Delta \Omega$  は Poinsot 楕円体に接している. そして

$$M \cdot \Omega = 2E \quad \Rightarrow \quad M \cdot \Delta \Omega = 0$$

より  $\Delta \Omega$  は不変平面上にあるから, Poinsot 楕円体は不変平面に接している.

さらに剛体の運動とともに Poinsot 楕円体も運動する.  $\Omega$  は剛体の瞬間的回転軸なので Poinsot 楕円体の瞬間的回転軸となる. よって楕円体と不変平面の接点に他ならない  $\Omega$  の先端は瞬間的に静止しており, Poinsot 楕円体は不変平面上を滑らずに転がっていく (図 70 参照).  $\Omega$  の先端が

- Poinsot 楕円体上に描く軌跡をポールホード曲線
- 不変平面上に描く軌跡をハーポールホード曲線

という.

■対称こま再論 (矢の運動) 空間に打ち出された矢の運動を, 自由な対称こまの運動として考える. 矢の慣性主軸 ( $x, y, z$  軸) を  $z$  軸が対称軸に一致するようにとり, 各軸に関する主慣性モーメントを  $I_1, I_2 (= I_1), I_3$  とする. 非対称こまの場合と同様, 矢の  $z$  軸周りの定常回転は安定であると考えられる. 実際, 角運動量  $M$  は, 剛体系で見た成分 ( $M_1, M_2, M_3$ ) を用いて

$$\begin{aligned} \text{エネルギー保存則} \quad & \frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_1} + \frac{M_3^2}{I_3} = 2E, \\ \text{角運動量保存則} \quad & M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M^2 \end{aligned}$$

で表される曲面の交線上を運動する. そして交線は図 71 左側のように,  $z$  軸を囲む小さな閉曲線を作る. これに対応して, 角速度  $\Omega$  (剛体系で見た成分  $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = (M_1/I_1, M_2/I_1, M_3/I_3)$ ) は  $z$  軸の周りに

$$(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = (A \cos \omega t, A \sin \omega t, \text{const})$$

で表される歳差運動をする (§ 36).

これは空間固定系から見た矢の運動の安定性をも意味する. と言うのもこれは角速度  $\Omega$  および矢の方向 ( $z$  軸) の, 保存する角運動量ベクトル  $M$  周りの歳差運動に対応している (§ 33). よってこれを空間固定系

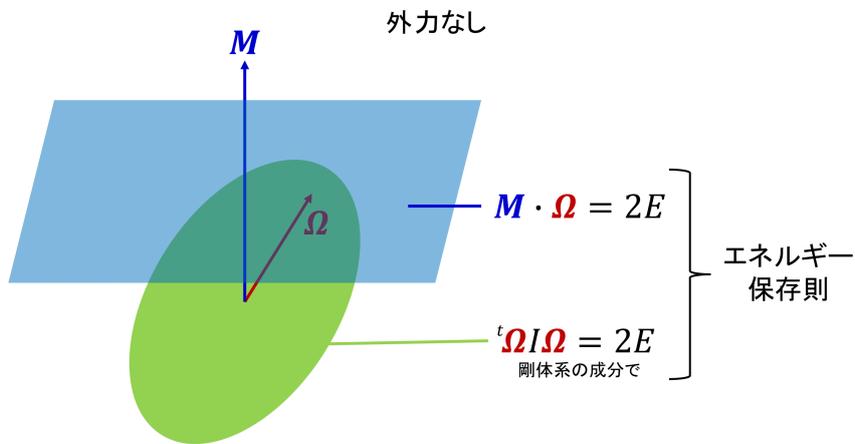


図 70 Poinsot の楕円体と不変平面

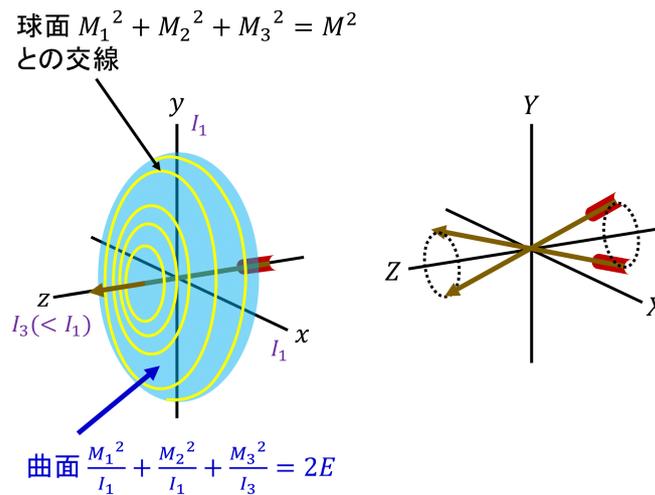


図 71 剛体系から見た角運動量  $M$  の軌跡と、空間固定系から見た矢の歳差運動

( $X, Y, Z$  軸) の  $Z$  軸に沿って打ち出された、 $z$  軸まわりに定常回転する矢の摂動を受けた後の運動と見なせば、矢は図 71 右側のように依然として平均的に  $Z$  軸方向に進むことになるからである。ただし摂動を受けた後も角運動量  $M$  は  $Z$  軸の向きを保つと仮定した。

■ 「 $M^2 > 2EI_2$  とみなそう」 (p.149, 1.6,7) について これは式 (37.9) の  $k^2$  が  $k^2 < 1$  を満たすことを保証する条件である。実際、式 (37.1):  $I_3 > I_2 > I_1$  と式 (37.5):  $2EI_1 < M^2 < 2EI_3$  に注意すると

$$k^2 \equiv \frac{(I_2 - I_1)(2EI_3 - M^2)}{(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)} < 1$$

$$\Leftrightarrow (I_2 - I_1)(2EI_3 - M^2) < (I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)$$

$$\Leftrightarrow 2EI_2I_3 + I_1M^2 < I_3M^2 + 2EI_1I_2$$

$$\Leftrightarrow 2EI_2 < M^2.$$

■  $s(\tau)$  に対する p.149, l.13 の式 (本稿の式 (65)) について 無次元の変数 (37.8) および式 (37.9) の  $k^2$  を用いて方程式 (37.7) の両辺を書き換えると

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_2}{dt} &= \frac{\sqrt{(2EI_3 - M^2)/I_2(I_3 - I_2)}ds}{\sqrt{I_1I_2I_3/(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)}d\tau} = \frac{\sqrt{(2EI_3 - M^2)(M^2 - 2EI_1)} ds}{I_2\sqrt{I_1I_3}} \frac{ds}{d\tau}, \\ &= \frac{1}{I_2\sqrt{I_1I_3}} \{[(2EI_3 - M^2) - I_2(I_3 - I_2)\Omega_2^2][(M^2 - 2EI_1) - I_2(I_2 - I_1)\Omega_2^2]\}^{1/2} \\ &= \frac{1}{I_2\sqrt{I_1I_3}} \left\{ [(2EI_3 - M^2)(1 - s^2)] \times \left[ (M^2 - 2EI_1) - (2EI_3 - M^2) \frac{I_2 - I_1}{I_3 - I_2} s^2 \right] \right\}^{1/2} \\ &= \sqrt{(2EI_3 - M^2)(M^2 - 2EI_1)} \sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2s^2)} \end{aligned}$$

となるので

$$\frac{ds}{d\tau} = \sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2s^2)}, \quad \therefore \tau = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2s^2)}} : (65)$$

を得る.

■ 式 (37.10) における  $\Omega_1, \Omega_3$  の式の導出 式 (37.6) を

$$\Omega_1^2 = \frac{2EI_3 - M^2}{I_1(I_3 - I_1)}(1 - s^2), \quad \Omega_3^2 = \frac{M^2 - 2EI_1}{I_3(I_3 - I_1)}(1 - k^2s^2)$$

と書き換えると得られる.

■ 式 (37.10) の  $M^2 \rightarrow 2EI_3$  の極限 得られた結果 (37.10) の吟味として, 仮定  $M^2 > 2EI_2$  の下で可能な極限  $M^2 \rightarrow 2EI_3$  を考える. すると  $\Omega_1, \Omega_2 \rightarrow 0$  となることが見て取れる. これは安定な定常解  $\Omega = (0, 0, \Omega)$  の近くの運動に対応する.

■ 周期の計算 (37.11), (37.12) について  $k^2 < 1$  より根号の中身  $(1 - s^2)(1 - k^2s^2) \geq 0$  となる,  $s = 0$  を含む範囲は  $-1 \leq s \leq 1$  である.

$$\frac{ds}{d\tau} = \sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2s^2)} = 0$$

となるとき  $s = \pm 1$  である.

■  $d\phi/dt$  の式 (37.16) について 式 (37.13) の第 1 式, 第 2 式を用いて  $\psi$  を消去すると

$$\dot{\phi} = \frac{1}{M \sin^2 \theta} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2)$$

となる. 再び式 (37.13) の第 1 式, 第 2 式より

$$(M \sin \theta)^2 = (I_1 \Omega_1)^2 + (I_2 \Omega_2)^2$$

なることを用いて  $\theta$  を消去すると式 (37.16) を得る.

§ 37, 問題

1 慣性軸  $x_3$  (または  $x_1$ ) に近い軸周りの, こまの自由回転 こまの慣性主軸に関する角運動量の成分が  $\mathbf{M}_0 = (0, 0, M_0)$  と表される定常解を考え,  $\Omega_0 \equiv M_0/I_3$  を定義する. 微小なズレ  $\mathbf{m} = \mathbf{M} - \mathbf{M}_0$  に関して 1 次までの近似で, Euler の方程式 (36.5) は

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 &= -(I_3 - I_2) \frac{m_2}{I_2} \frac{M_0 + m_3}{I_3} \simeq \left(1 - \frac{I_3}{I_2}\right) \Omega_0 m_2, \\ \dot{m}_2 &= -(I_2 - I_1) \frac{M_0 + m_3}{I_3} \frac{m_1}{I_1} \simeq \left(\frac{I_3}{I_1} - 1\right) \Omega_0 m_1, \quad \dot{m}_3 = -(I_2 - I_1) \frac{m_1}{I_1} \frac{m_2}{I_2} \simeq 0 \end{aligned}$$

となる. はじめの 2 式が教科書の解 1.4 にある式であり, これらは

$$\ddot{m}_1 = -\omega^2 m_1, \quad \ddot{m}_2 = -\omega^2 m_2, \quad \omega \equiv \Omega_0 \sqrt{\left(\frac{I_3}{I_1} - 1\right) \left(\frac{I_3}{I_2} - 1\right)}$$

を含意する. よって定常解  $\mathbf{M}_0 = (0, 0, M_0)$  は安定であり, その近くで  $\mathbf{M}$  の先端は  $x_3$  軸の周りに小さな楕円を描く.

他方, 定常解  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 \equiv (0, M_0, 0)$  の近くを考え,  $\Omega_0 \equiv M_0/I_2$  を再定義すると, 添字を巡回置換した式

$$\begin{pmatrix} \ddot{m}_3 \\ \ddot{m}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} I_2 \\ I_1 \end{pmatrix} - 1 \Omega_0^2 \begin{pmatrix} m_3 \\ m_1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ. 右辺の係数は正なので,  $m_3, m_1$  の大きさは時間とともに指数関数的に増大し,  $x_2$  軸に平行な定常解  $\mathbf{M}_0$  は不安定である [4, pp.417–418].

このように定常解からのズレの時間発展を, ズレに関する 1 次までの近似で調べ, 安定性を吟味する手法を線形安定性解析という. 少なくとも解が線形安定でなければ, 厳密に安定であることは期待できない.

2  $M^2 = 2EI_2$  のとき ( $\mathbf{M}$  の先端が図 69 の  $x_2$  軸上の極を通る曲線に沿って移動する場合)

$$\Omega_1 = \Omega_0 \sqrt{\frac{I_2(I_3 - I_2)}{I_1(I_3 - I_1)}} \frac{1}{\cosh \tau}, \quad \Omega_2 = \Omega_0 \tanh \tau, \quad \Omega_3 = \Omega_0 \sqrt{\frac{I_2(I_2 - I_1)}{I_3(I_3 - I_1)}} \frac{1}{\cosh \tau}$$

は  $\tau \rightarrow \infty$  で, 固定点  $\Omega_* = (0, \Omega, 0)$  に限りなく近づく.  $\Omega_*$  は不安定な固定点だが, 図 69 のように正確に  $M^2 = 2EI_2$  を満たす, 対極にある固定点  $\pm\Omega_*$  を結ぶ軌道上では,  $\Omega$  は  $\pm\Omega_*$  から  $\mp\Omega_*$  に向かう.

§ 38. 剛体の接触

互いに接触したいくつかの剛体を考える.

- 剛体がつり合っているとき
  - 接触点に等しい大きさの反対方向の抗力が働く
  - 抗力を考慮したつり合いの条件

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{K} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f} = 0$$

から抗力が決定される ( $\mathbf{F} = 0$  のとき,  $\mathbf{K}$  の値は原点の選び方に依らない (§ 34))

- 物体が互いの表面を自由に滑ることができる場合, 抗力は表面の法線方向を向く

- 接触した物体が互いに相対的に動くとき
  - 抗力のほかに、散逸的な性質の力——摩擦力が働く
  - 滑り
    - \* 抗力 (接触面に垂直), 摩擦力 (接触面に沿う)
    - \* 摩擦を無視できるとき (表面は完全に滑らかという) → 問題は純力学的
  - ころがり …… 接触点において相対運動がない
    - \* 滑りがなく, 摩擦を無視できるとき (表面は《完全に粗い》という) → 問題は純力学的

《拘束の式》は一般に

$$\sum_{i=1}^s c_{\alpha i} \dot{q}_i = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, p) \quad (38.2)$$

という形をとる. これが積分できないとき, 拘束は非ホロノームと言われる (例: 平面上をころがる球). このとき拘束条件をいくつかの座標だけのあいだの関係に還元し, その関係を利用して, 物体の位置を, 現実の自由度の数に対応するより少数の座標によって表現するということが不可能である.

そこで未定乗数 (座標の関数)  $\lambda_\alpha$  を導入すると,  $s$  個の方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{\alpha=1}^p \lambda_\alpha c_{\alpha i} \quad (i = 1, \dots, s) \quad (38.5)$$

(導出は下記) と  $p$  個の拘束の式から, 未知量  $q_i$  ( $s$  個),  $\lambda_\alpha$  ( $p$  個) が決定される.

d'Alembert の原理 …… 抗力を未知量として運動方程式に含めて解くこと [本稿次節で補足].

## § 39, 式の導出など

■式 (38.5) の導出 最小作用原理に立ち戻ると, 作用の変分は

$$\delta S = \int \sum_i \delta q_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) dt$$

であり (§ 2), 拘束条件があるため, 座標の変分  $\delta q_i$  はすべてが独立ではない. そこで被積分関数に  $\lambda_\alpha$  を未定乗数として, 拘束の式 (38.2) (の  $\delta t$  倍) の線形結合

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha \sum_i c_{\alpha i} \delta q_i = 0$$

を付け加えると, すべての変分  $\delta q_i$  を独立と見なすことができ [後で拘束の式 (38.2) と連立すればよい], 運動方程式 (38.5) を得る.

## § 39 について

■「ころがりの際の摩擦がまったく無視できる」(p.115, l.24) について とは言え, 物体が転がるには摩擦力 (いわゆる転がり摩擦) が必要である. 例えば時刻  $t = 0$  に, 一様な球 (質量  $M$ , 半径  $a$ ) を斜面 (水平面との成す角  $\theta$ ) の上に静かに置いたとき, 球は斜面に沿って滑ることなく転がり始めたとする. ただし球の重心は常に一定の鉛直面内にあるとし, その面内で斜面に沿って  $x$  軸をとる (球の初期位置を  $x = 0$  とする, 図 72 参照). このとき球は重心周りのゼロでない角運動量を獲得することになる. ころがりに働く重力は重心周りのトルク (力のモーメント) に寄与しないから, 摩擦力がトルクを働かせていなければならない.

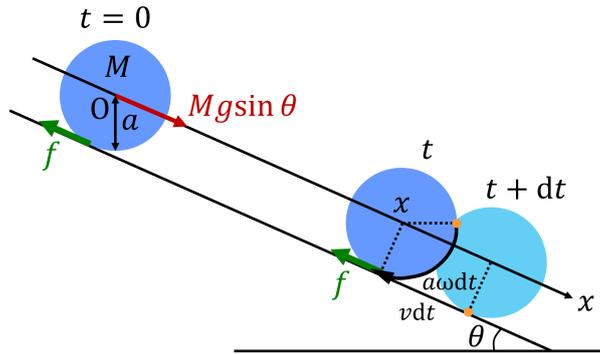


図 72 転がり摩擦

同じことはエネルギー的な考察からも説明できる。球が時間  $t$  後に斜面に沿って位置  $x$  まで移動したとき、解放される位置エネルギー  $Mgx \sin \theta$  のうち、一部は回転運動のエネルギー  $\frac{1}{2}I\omega^2$  に転化する ( $I = \frac{2}{5}Ma^2$  は慣性モーメント,  $\omega$  は回転の角速度)。よって並進運動のエネルギー  $\frac{1}{2}Mv^2$  は、したがって並進速度  $v$  は、質点の斜面に沿う自由落下の場合に比べて小さくなる。そうであるならば、やはり摩擦力が運動を妨げていなければならない。

以上の考察に従って、摩擦力  $f$  を拘束力として求めよう。仕事とエネルギーの関係は

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - Mgx \sin \theta = \text{const} = 0$$

と表される。ここで球と斜面の接点は瞬間的回転中心であり瞬間的に静止しているから、この摩擦力は仕事をしないことに注意した。実際、接点の斜面に沿う速度は  $v - a\omega = 0$  である [1, p.5]。上式に球が滑らず転がる時の拘束条件  $v = a\omega$  を代入すると、

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{10}{7}gx \sin \theta}, \quad \therefore x = \frac{5}{7} \times \frac{1}{2}g \sin \theta t^2$$

を得る。なるほど  $x \sim t^2$  に変わりはないが、与えられた時間  $t$  のうちの移動距離は、質点の(斜面に沿う)自由落下の場合の  $5/7$  倍に減っている。上式の  $x(t)$  ないし角速度  $\omega(t) = \frac{\dot{x}(t)}{a} = \frac{5}{7} \frac{g}{a} \sin \theta t$  を運動方程式

$$M\ddot{x} = Mg \sin \theta - f, \quad I\dot{\omega} = fa$$

に代入すると、2 式のいずれからとも摩擦力

$$f = \frac{2}{7}Mg \sin \theta$$

が求まる。

■ 「非ホロノーム」「ホロノーム」(p.156, l.14-15) について [1, p.4]

- ホロノミックな拘束  $f_\alpha(q, t) = 0$ 
  - $f_\alpha$  が  $t$  を陽に含む  $\rightarrow$  レオノーマス
  - $f_\alpha$  が  $t$  を陽に含まない  $\rightarrow$  スクレロノーマス
- 非ホロノミックな拘束
  - 例 1: 不等式で与えられる拘束条件
  - 例 2: 座標の微分の間積分の関係で与えられる拘束条件

■「非ホノームな拘束の式は……すべてが独立とはいえない座標……」(pp.156–157)について これに対してホノミックな拘束  $f_\alpha(q, t) = 0$  では、もとの座標  $\{q_i\}$  はすべてが独立ではないけれど、拘束条件を用いて座標の数を減らし、系の実際の自由度と同じ数の、互いに独立な最小限の座標  $\{Q_i\}$  をとり直すことができる。

■d'Alembert の原理 (最終段落) について d'Alembert の原理とは、仮想変位の際に拘束力が仕事をしないこと言う。ここで仮想変位とは、与えられた瞬間の拘束条件を破らない無限小変位のことである\*29。

以下では d'Alembert の原理と Lagrange 方程式の等価性を確認する [1, pp.101–104]。その際、ホノミックな拘束が与えられており、各粒子  $a$  の位置が一般座標  $q$  を用いて  $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_a(q, t)$  とパラメトライズされる場合を仮定する。準備として、このとき

$$\dot{\mathbf{r}}_a = \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial t}, \quad \therefore \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_a}{\partial \dot{q}_i}, \quad (66)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_a}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_a}{\partial t \partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_a}{\partial q_i} \quad (67)$$

が成り立つことを述べておく(繰り返された添字について和をとる)。第1式(66)は結果的に、分子分母のドット記号(時間微分)をあたかも“約分”できることを意味している。第2式(67)は  $\mathbf{r}_a(q, t)$  に対して、微分  $\partial/\partial q_i$  を全微分  $d/dt$  と順序交換できることを示している。

さて、与えられた時刻  $t$  における仮想変位は  $\delta \mathbf{r}_a = \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial q_i} \delta q_i$  と表される。また各粒子  $a$  (質量  $m_a$ ) に働く拘束力は、拘束力を除く力  $\mathbf{F}_a = -\partial U/\partial \mathbf{r}_a$  (ポテンシャル  $U$  は  $\{\mathbf{r}_a\}$  だけの関数) を用いて

$$\mathbf{F}_a' = \mathbf{F}_a - m_a \ddot{\mathbf{r}}_a$$

と表される。よって d'Alembert の原理は、

$$\sum_a \left\{ (\mathbf{F}_a - m_a \ddot{\mathbf{r}}_a) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial q_i} \right\} \delta q_i = 0$$

と書ける\*30。

以下では煩わしい粒子番号  $a$  を省略する。すべての  $\delta q_i$  は独立にとれるから、各係数について

$$\begin{aligned} 0 &= \sum (\mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{r}}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \\ &= \sum \left\{ \frac{d}{dt} \left( m\dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) - m\dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right\} \\ &= \sum \left\{ \frac{d}{dt} \left( m\dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i} \right) - m\dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i} \right\} + \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (\because \text{公式 (66), (67)}) \\ &= \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \right) \left( \sum \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \right) + \frac{\partial U}{\partial q_i} \\ &= \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \right) L, \\ L &\equiv \sum \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - U : \text{ラグランジアン} \end{aligned}$$

\*29 ただし三角台の斜面に沿って物体が落下すると、物体の垂直抗力が斜面を押して台も運動を始めるように、実際の時間変化に伴う変位に対しては拘束力は仕事をし得る (§ 5 のノートの図 9 を参照)。

\*30 このことはしばしば、加えられた力  $\mathbf{F}_a$  と慣性力 ( $-m_a \ddot{\mathbf{r}}_a$ ) で物体がつり合うと説明されるが、その本質的内容は仮想仕事为零になる点にあり、そのことを未知の拘束力を含まない形で表したのである。

が成り立つ。これは Lagrange 方程式に他ならない。

我々は Lagrange 方程式をいきなり最小作用原理から導いたが (§ 2), ランダウ以前の力学書ではこのように、仮想仕事をゼロと置いて Lagrange 方程式を導き出すのが定石であった [12, pp.405–406].

### § 39. 非慣性基準系における運動

[剛体の章ではあるが,] ここでは 1 粒子の系を考える。一般的な非慣性基準系  $K$  は次のように構成される。

- 慣性基準系  $K_0$  に対して速度  $\mathbf{V}(t)$ , 加速度  $\mathbf{W}(t) = \dot{\mathbf{V}}(t)$  で並進する基準系  $K'$  を考える。
  - $K'$  から見た粒子の位置を  $\mathbf{r}'$  とする。
  - $K_0$  から見た粒子の速度を  $\mathbf{v}_0$ ,  $K'$  から見た粒子の速度を  $\mathbf{v}'$  とする。  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$ .
- $K'$  と原点を共有し,  $K'$  に対して角速度  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  で回転する系  $K$  を考える。
  - $K$  から見た粒子の位置を  $\mathbf{r}$  とする。  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ .
  - $K$  から見た粒子の速度を  $\mathbf{v}$  とする。  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ . [式 (36.1)]

このときラグランジアンを非慣性基準系  $K$  に関する粒子の位置  $\mathbf{r}$  と速度  $\mathbf{v}$  を用いて書き換えると

$$L = \frac{mv_0^2}{2} - U = \frac{mv^2}{2} + m\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \frac{m}{2}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - m\mathbf{W} \cdot \mathbf{r} - U + (\text{時間の完全導関数}) \quad (39.6)$$

となる (導出は下記) [第 2 の等号は  $L$  がスカラーであることによる]. Lagrange 方程式は任意の座標系において正しいから [本稿次節で補足], 非慣性基準系  $K$  における運動方程式

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} - m\mathbf{W} + m\mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}} + 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} + m\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}) \quad (39.7)$$

を得る (導出は下記). 右辺の《慣性力》[非慣性系に現れる見かけの力] について,

- $-m\mathbf{W}$ : 一様な力の場合から受ける力に相当.
- $m\mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}}$ : 角速度  $\boldsymbol{\Omega}$  が時間変化するとき現れる.
- $2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}$ : Coriolis の力 (粒子の速度に依存).
- $m\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega})$ : 遠心力.

特に非慣性基準系  $K$  が慣性基準系  $K_0$  に対して一様に回転しており ( $\boldsymbol{\Omega} = \text{const}$ ), 並進運動はしていない場合 ( $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0, \mathbf{V} = 0, \mathbf{W} = 0$ ) を考える.

- 回転系  $K$  における運動量

$$\mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m(\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = m\mathbf{v}_0 \equiv \mathbf{p}_0.$$

- 回転系  $K$  における角運動量

$$\mathbf{M} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{p}_0 \equiv \mathbf{M}_0.$$

- 回転系  $K$  におけるエネルギー

$$\begin{aligned} E &\equiv \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L \\ &= \frac{mv^2}{2} + U - \frac{m}{2}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 \quad \left( -\frac{m}{2}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2: \text{遠心エネルギー} \right) \end{aligned} \quad (39.11)$$

$$= E_0 - \mathbf{M}_0 \cdot \boldsymbol{\Omega}, \quad E_0 \equiv \frac{mv_0^2}{2} + U. \quad (39.13)$$

(導出は下記. )

§ 39, 式の導出

■ラグランジアン (39.6) の導出 慣性系  $K_0$  に関する量で表したラグランジアン

$$L = \frac{mv_0^2}{2} - U$$

に  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$  を代入すると,

$$\begin{aligned} L &= \frac{m\mathbf{v}'^2}{2} + m\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V} + \frac{m}{2}\mathbf{V}^2 - U \\ &= \frac{m\mathbf{v}'^2}{2} + \frac{d}{dt}(m\mathbf{r}' \cdot \mathbf{V}) - m\mathbf{r}' \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{m}{2}\mathbf{V}^2 - U \end{aligned}$$

と書き換えられる. 最右辺の第 2 項と第 4 項は時間  $t$  による完全導関数となっているから, 落として良い. ここで  $K'$  系における粒子のラグランジアンとして, 改めて

$$L' = \frac{m\mathbf{v}'^2}{2} - m\mathbf{W} \cdot \mathbf{r}' - U$$

をとることができる. (これは一様な慣性力  $(-m\mathbf{W})$  の下でのラグランジアンになっている.) 次いで, ここに  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}, \mathbf{v}' = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  を代入すると,  $K$  系における粒子のラグランジアン (39.6) が得られる.

■運動方程式 (39.7) の導出 ラグランジアン (39.6):

$$L = \frac{mv^2}{2} + m\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \frac{m}{2}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - m\mathbf{W} \cdot \mathbf{r} - U$$

の全微分をとると

$$\begin{aligned} dL &= m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} + md\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + m\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times d\mathbf{r}) + m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times d\mathbf{r}) - m\mathbf{W} \cdot d\mathbf{r} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \\ &= m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} + md\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + m d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) + m\{(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\Omega}\} \cdot d\mathbf{r} - m\mathbf{W} \cdot d\mathbf{r} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \quad (68) \end{aligned}$$

となる [第 4 項の変形を本稿次節で補足]. ここから微分係数を読み取ると

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} &= m\mathbf{v} + m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} &= m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} + m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\Omega} - m\mathbf{W} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \end{aligned}$$

であり, これらを用いて Lagrange 方程式  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$  を書き下せば良い.

■エネルギーの表式 (39.11),(39.13) の導出

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L \\ &= m(\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} - \left\{ \frac{mv^2}{2} + m\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \frac{m}{2}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - U \right\} \\ &= \frac{mv^2}{2} - \frac{m}{2}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 + U : (39.11). \end{aligned}$$

ここに  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  を代入すると,

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - m\mathbf{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + U = \frac{mv_0^2}{2} + U - m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}_0) \cdot \boldsymbol{\Omega} = E_0 - \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\Omega} : (39.13).$$

## § 39 について

■Lagrange 方程式の不変性 (§ 39 第 2 段落) について 一般座標の点変換に関する Lagrange 方程式の不変性の直接的確認は、§ 2 のノートで既に行った。等価的に作用はスカラーなので (スカラーは全ての座標系で見て同じ値を持つ量として定義される)、最小作用原理は座標系に依らない意味を持つ。よって運動方程式もまた、全ての座標系で成り立たなければならない。

ラグランジュ方程式が非慣性系でも形を変えずに成り立つという事実をこのように明示的に指摘した書物は意外に少ない。実際、このランダウたちの『力学』は邦訳にして 200 頁に満たない (新版でも 209 頁) コンパクトな書であるが、必要なことはきちんと書かれている [12, pp.406-407]。

■教科書 p.162, 1.1.2 の式 (本稿の式 (68)) における第 4 項の変形について

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times d\boldsymbol{r}) &= (\varepsilon_{ijk} \Omega_j x_k)(\varepsilon_{ilm} \Omega_l x_m) = (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) \Omega_j \omega_l x_k x_m \\ &= \Omega^2 \boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\Omega} \cdot d\boldsymbol{r}) = \{\Omega^2 - \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{r})\} \cdot d\boldsymbol{r} \\ &= \{(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{\Omega}\} \cdot d\boldsymbol{r}.\end{aligned}$$

■非慣性系の運動方程式 (39.7) の初等的導出  $K$  系の基底ベクトルを  $\{\boldsymbol{e}_i\}$  と書くと  $\dot{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{e}_i$  である。よって任意のベクトル  $\boldsymbol{A}$  の  $K$  系で見た成分を  $A_i$  として  $\boldsymbol{A} = A_i \boldsymbol{e}_i$  と書き、 $K$  系で見た  $\boldsymbol{A}$  の時間変化率を  $\dot{\boldsymbol{A}} = \dot{A}_i \boldsymbol{e}_i$  で定義すると、これは  $\boldsymbol{A}$  の時間変化率  $\dot{\boldsymbol{A}}'$  と

$$\dot{\boldsymbol{A}}' = \dot{A}_i \boldsymbol{e}_i + A_i \dot{\boldsymbol{e}}_i = \dot{A}_i \boldsymbol{e}_i + A_i (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{e}_i) = \dot{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{A}$$

の関係にある (式 (36.1))。よって

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}, \quad \therefore \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{W}$$

である。(記号の見かけに流され、「 $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}$  より  $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}$ 」と誤らないように注意する必要がある。) また表記を統一して右辺第 1 項  $\boldsymbol{v}$  の時間変化率を  $\dot{\boldsymbol{v}}'$  で表すと、 $K$  における運動方程式を得るにはこれを  $K$  で見た  $\boldsymbol{v}$  の時間変化率  $\dot{\boldsymbol{v}}$  で表す必要がある:

$$\dot{\boldsymbol{v}}' = \dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}.$$

これに注意して加速度を求めると

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{v}}_0 &= \dot{\boldsymbol{v}}' + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{W} \\ &= (\dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{W} \\ &= \dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{W} - \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}} - 2\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\Omega})\end{aligned}$$

となる。これを  $K$  系の運動方程式  $m\dot{\boldsymbol{v}}_0 = -\partial U/\partial \boldsymbol{r}$  に代入すると ( $-\partial U/\partial \boldsymbol{r}$  は粒子に働く物理的な力)、非慣性基準系  $K$  における運動方程式

$$m \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} - m\boldsymbol{W} + m\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}} + 2m\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\Omega} + m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\Omega})$$

を得る ( $\dot{\boldsymbol{v}} \rightarrow d\boldsymbol{v}/dt$  と改めた)。

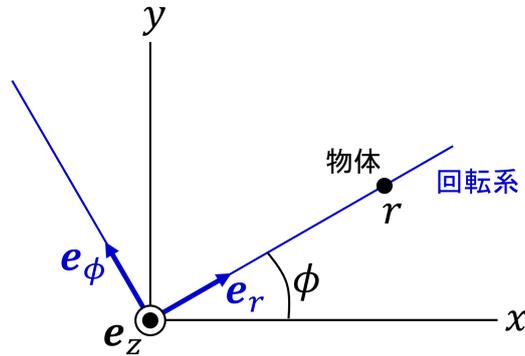


図 73 2次元の回転系

■2次元系における慣性力 式(39.7)における遠心力  $m\Omega \times (\mathbf{r} \times \Omega)$  と Coriolis 力  $2m\mathbf{v} \times \Omega$  の表式は、§ 14 のノートに示した2次元系における表式  $mr\dot{\phi}^2\mathbf{e}_r, -2m\dot{r}\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$  と整合している。実際、物体とともに回転する座標系(図73参照)の角速度は、慣性系と回転系に共通する  $z$  軸の方向単位ベクトル  $\mathbf{e}_z$  を用いて  $\Omega = \dot{\phi}\mathbf{e}_z$  と表される。また物体は常に回転系の  $\mathbf{e}_r$  方向の座標軸上にあるから(位置ベクトル  $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ )、回転系で見た物体の速度は  $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r$  と表される。よって

$$2m\Omega \times (\mathbf{r} \times \Omega) = m\dot{\phi}^2\mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_z) = m\dot{\phi}^2\mathbf{e}_r, \quad 2m\mathbf{v} \times \Omega = 2m\dot{r}\dot{\phi}\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_z = -2m\dot{r}\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi.$$

■式(39.1)における遠心エネルギー  $-\frac{m}{2}(\Omega \times \mathbf{r})^2$  (p.163, l.5) について 前に負号があるため、これは中心力の下での2次元平面上の運動に対して、§ 14 (p.38)の遠心力のポテンシャル・エネルギー  $\frac{m}{2}(r\dot{\phi})^2 = \frac{M^2}{2mr^2}$  には一致しない。ただし2次元の運動に対して式(39.11):

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{m}{2}(\Omega r)^2 + U$$

に  $v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2$  を代入すると、式(14.4):

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U$$

が得られる。このように遠心エネルギーと遠心力ポテンシャルは別物であり、式(39.11)と式(14.4)とではエネルギーの分け方が異なっている。

### § 39, 問題

1 自由落下する物体の鉛直線からのそれ 重力場  $\mathbf{g}$  は考えている地点の近くで一様として扱う。

原点を考えている地点に固定した、地球とともに回転する座標系(座標軸の方向単位ベクトル  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ )は図74のようにとっている。地球固定系は座標系の原点の位置に依らずに、共通の角速度  $\Omega$  (地球の自転の角速度に一致)を持つ (§ 31)。

地球の回転角速度  $\Omega = 2\pi/(24 \times 60 \times 60\text{s}) \simeq 7.27 \times 10^{-5}\text{s}^{-1}$  は小さいので、遠心力  $m\Omega \times (\mathbf{r} \times \Omega)$  は Coriolis 力  $2m\mathbf{v} \times \Omega$  に比べて無視できる。我々の座標系の選択では、遠心力  $m\Omega \times (\mathbf{r} \times \Omega)$  における  $\mathbf{r}$  は物体の地表からの高さ程度の大きさであり、地球の半径程度の動径を考える必要はない。

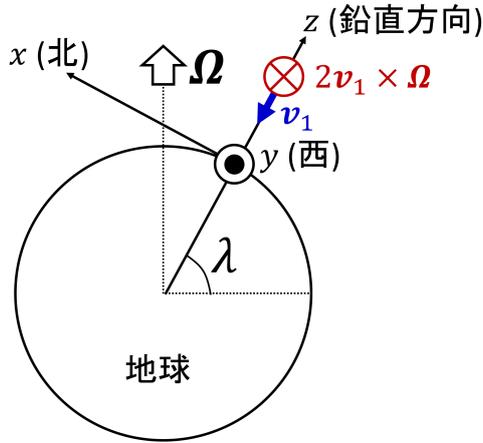


図 74 地球固定系と Coriolis 力

$v_2$  に対する方程式 (教科書 p.164, 1.2) について, p.163 の運動方程式 (1):  $\dot{v} = 2v \times \Omega + g$  に  $v = v_1 + v_2$  を代入して  $\dot{v}_1 = g$  を用いると,

$$\dot{v}_2 = 2(v_1 + v_2) \times \Omega$$

となることによる. 右辺において  $v_2$  を無視することは, 近似的に鉛直下向き速度  $v_1$  を持つ物体の Coriolis 力を考えることに対応する. この措置は, その結果得られる

$$v_2 = t^2 g \times \Omega + 2tv_0 \times \Omega$$

(初速  $v_0$  は  $v_1$  が担うことを考慮した) が  $\Omega$  の 1 次のオーダーであることから正当化される.

Coriolis 力  $2mv_1 \times \Omega$  は東を向いており (図 74 参照, このことは南半球においても正しい), このため落体は東にそれると期待される (実際, そのような計算結果が得られる). 落体が東にそれることは, 2次元の回転円盤に対する直観に反する. つまり物体が自由落下する間に地球は東側へと自転するため, 落下地点は西にそれると結論付けたくもなる. しかしこのような直観は誤りである.

p.164 の式 (2) において

$$v_0 = 0, \quad h = he_z, \quad g = -ge_z, \quad \Omega = \Omega \cos \lambda e_x + \Omega \sin \lambda e_z$$

を代入すると,

$$r = \left( h - \frac{1}{2}gt^2 \right) e_z + \frac{t^3}{3}g\Omega \cos \lambda e_y.$$

鉛直線からのそれに対応する第 2 項は, 赤道 ( $\lambda = 0$ ) に近いほど大きいことも見て取れる.

### 3 Foucault (フーコー) 振子 複素変数 $\xi = x + iy$ に対する微分方程式

$$\ddot{\xi} + 2i\Omega\dot{\xi} + \omega^2\xi = 0$$

においても,  $\xi \sim e^{\lambda t}$  を代入すると分かるように, 補助方程式の解

$$\lambda = \lambda_{\pm} \equiv i(-\Omega_z \pm \sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2})$$

を用いて一般解は

$$\xi = A_1 e^{i\lambda_+ t} + A_2 e^{i\lambda_- t}$$

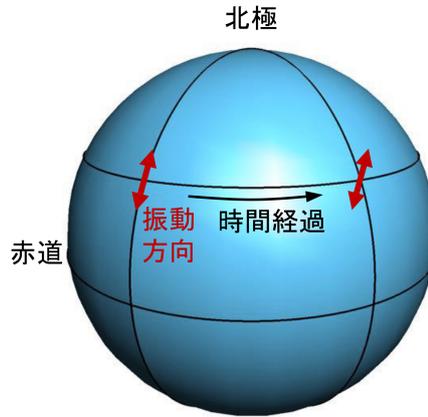


図 75 Foucault 振り子

と書ける. ここで  $\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} \simeq \omega$  とする. また複素係数を  $A_k = a_k + ib_k$  ( $k = 1, 2$ ) と書いて (4 つの実定数  $a_1, b_1, a_2, b_2$  が積分定数), 上式における  $e^{-i\Omega_z t}$  の係数を実部と虚部に分けると,

$$\begin{aligned} x + iy &= e^{-i\Omega_z t} \{ (A_1 + A_2) \cos \omega t + i(A_1 - A_2) \sin \omega t \} \\ &= e^{-i\Omega_z t} [ \{ (a_1 + a_2) \cos \omega t - (b_1 - b_2) \sin \omega t \} + i \{ (b_1 + b_2) \cos \omega t + (a_1 - a_2) \sin \omega t \} ] \\ &\equiv e^{-i\Omega_z t} (x_0 + iy_0). \end{aligned}$$

はじめの振動方向を経線に沿って選ぼう. するとこの結果は, 図 75 のように地球の自転に伴って, 振子の振動方向が経線 (子午線) からずれていくことから期待される通りである. ただし赤道面上では振動方向は常に経線に沿っていることが見て取れる. 実際, 式の上でも  $\lambda = 0$  では  $\Omega_z \sim \sin \lambda = 0$  なので, 振動方向の回転は起こらない.

## 第7章 正準方程式

### § 40. ハミルトン方程式

ラグランジアンは  $q, \dot{q}, t$  の関数である。ここで一般座標  $q_i$  に共役な一般運動量  $p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  の組  $p \equiv \{p_i\}$  に対して、エネルギー  $\sum_i p_i \dot{q}_i - L$  が  $q, p, t$  の関数として

$$H(q, p, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

と表されるとき、これを系の Hamiltonian と呼ぶ。Lagrange 方程式 (および一般運動量の定義  $p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ ) は Hamiltonian に対する正準方程式

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (40.4)$$

になる [導出は本稿次節].

- 正準方程式 (40.4) より、変数  $q, p$  の時間発展に伴うハミルトニアンの変化は

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (40.5)$$

- $L, H$  がパラメータ  $\lambda$  (力学系自身あるいは外場を特徴づける量) を含む場合、これを変数と見ると

$$\left( \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_{p,q} = - \left( \frac{\partial L}{\partial \lambda} \right)_{\dot{q},q} \quad (40.6)$$

となる [導出は本稿次節].

- $L, H$  が時間を陽に含む場合,

$$\left( \frac{\partial H}{\partial t} \right)_{p,q} = - \left( \frac{\partial L}{\partial t} \right)_{\dot{q},q} \quad (40.8)$$

となる [導出は本稿次節].

### § 40 について

■ Legendre 変換のまとめ (式 (40.4), (40.6), (40.8) の導出)

$$\begin{aligned} dL &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_i \dot{p}_i dq_i + d \left( \sum_i p_i \dot{q}_i \right) - \sum_i \dot{q}_i dp_i + \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial L}{\partial t} dt, \\ \therefore dH &= d \left( \sum_i p_i \dot{q}_i - L \right) = - \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \end{aligned}$$

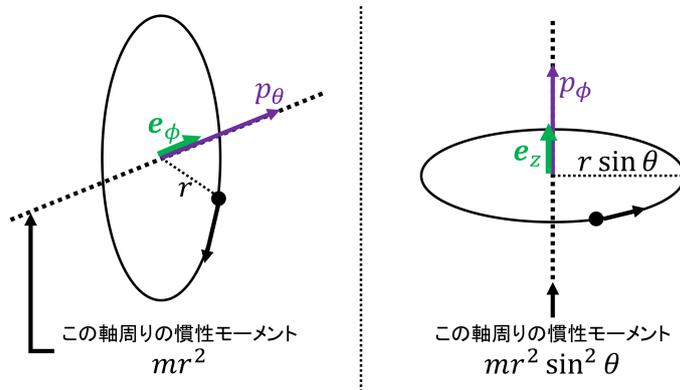


図 76  $\theta$  方向だけ,  $\phi$  方向だけに回転する回転子

$$\therefore \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i : (40.4),$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_{p,q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{\dot{q},q} : (40.6), \quad \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{p,q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{\dot{q},q} : (40.8).$$

■正準方程式 (40.4) について 符号はデカルト座標  $q$  を用いたハミルトニアン  $H = \frac{p^2}{2m} - U(q)$  に対して, 通常の運動量の定義式  $\dot{q} = p/m$  と Newton 方程式  $\dot{p} = -\partial U/\partial q$  が再現されることを要求すると, すぐに思い出せる.

運動量の定義式  $\dot{q} = p/m$  は Hamilton 形式の力学では, 力学変数  $p$  の時間発展方程式と見なされる.

■ハミルトニアンとエネルギー ラグランジアンやハミルトニアンを定数倍しても運動方程式は変わらないため, 数理的な観点からはエネルギーの次元を持たないハミルトニアンをとることもできてしまう (例えば p.184, 1.9,10).

#### § 40, 問題 1

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta}, \quad p_\phi = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$$

はそれぞれ図 76 のように  $\theta$  方向だけ,  $\phi$  方向だけに回転する回転子の回転軸周りの角運動量であり (式 (9.7) 参照), 球座標を用いたハミルトニアンに現れる項

$$\frac{p_\theta^2}{2mr^2}, \quad \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta}$$

は (正準運動量)<sup>2</sup>/2(慣性モーメント) となっている. § 9 問題 1 の結果よりこれらの和は

$$\frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 = \frac{M^2}{2mr^2}$$

となる. 特に平面  $\theta = \pi/2$  上の運動に対して, これは遠心力のポテンシャル・エネルギー (§ 14) に一致する.

## § 41. ラウス関数

要約を兼ねて、「上に得た式を、座標  $q$  および  $\xi$  がいくつがある場合へ一般化する」(式 (41.6) の 1 行下). 一般座標を 2 つのグループ  $q = \{q_i\}, \xi = \{\xi_i\}$  に分け,

$$\begin{aligned} q &\rightarrow \text{独立変数を } \dot{q}_i \text{ から } p_i \text{ に変える,} \\ \xi &\rightarrow \text{独立変数は } \dot{\xi}_i \text{ のまま} \end{aligned}$$

として Routh 関数 (ラウシアン)  $R = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$  を定義すると (以下, 和は添字が定義されている範囲でとる),

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad \frac{\partial R}{\partial p_i} = \dot{q}_i &\leftarrow q \text{ に対して } R \text{ はハミルトニアン,} \\ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}_i} - \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) R = 0 &\leftarrow \xi \text{ に対して } R \text{ はラグランジアン} \end{aligned}$$

となる (導出は下記).

Routh 関数を用いると, 系のエネルギーは

$$E = R - \dot{\xi}_i \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}_i} \quad (41.6)$$

と表される (導出は下記).

$q$  として循環座標を考えると  $p_i = \text{const}$  であり<sup>\*31</sup>, その値は初期条件で決まる.

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}_i} - \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) R(p, \xi, \dot{\xi}) = 0$$

から  $\xi$  が決まり, 次いで  $\dot{q}_i = \partial R(p, \xi, \dot{\xi}) / \partial p_i$  から  $q$  が決まる.

### § 41, 式の導出など

#### ■ Routh 関数を用いた運動方程式の導出

$$\begin{aligned} dL &= \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \xi_i} d\xi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} d\dot{\xi}_i \\ &= \dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \xi_i} d\xi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} d\dot{\xi}_i \end{aligned}$$

より

$$dR = d(p_i \dot{q}_i - L) = -\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \xi_i} d\xi_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} d\dot{\xi}_i$$

であり, ここから 1 組目の運動方程式

$$\dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial R}{\partial q_i}$$

<sup>\*31</sup> ラグランジアンに陽に含まれない一般座標  $q_i$  は循環座標と呼ばれ, 共役な一般運動量が保存する ( $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ , 教科書の初出は § 14). これは対称性と保存則の関係の分かりやすい場合である (系の対称性が常に循環座標の存在として表されるわけではない).

が見出される。また、残りの微分係数は

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_i} = -\frac{\partial R}{\partial \xi_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}_i}$$

と同定されるので、2組目の運動方程式

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}_i} - \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) R = - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}_i} - \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) L = 0$$

が得られる。

#### ■エネルギーの式 (41.6) の導出

$$E \equiv \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \dot{\xi}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} - L = p_i \dot{q}_i + \dot{\xi}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} - L = R - \dot{\xi}_i \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}_i} : (41.6).$$

最後の等号では  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}_i}$  を考慮した。

### § 41 について

Routh 関数を導入せずとも、§ 41 と同様の順序で座標の時間発展を決定できると考えられる。すなわち  $q$  が循環座標のとき  $p_i = \text{const}$  であり、その値は初期条件で決まる。

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}_i} - \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) L(p, \xi, \dot{\xi}) = 0$$

から  $\xi$  が決まり、次いで  $\dot{q}_i = \partial H(p, \xi, \eta) / \partial p_i$  から  $q$  が決まる。ただし  $\xi$  に共役な運動量を  $\eta = \{\eta_i\}, \eta_i = \partial L / \partial \dot{\xi}_i$  と書いた。

#### § 41, 問題

Routh 関数の 1 つの応用例は、外場の下での対称こまの運動である (本稿では § 35 のノートで言及)。

### § 42. ポアッソンの括弧式

$q, p, t$  の任意の関数  $f, g$  に対して Poisson 括弧を

$$\{f, g\} = \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right) \quad (42.5)$$

と定義する<sup>\*32</sup>。ここから直ちに Poisson 括弧が次の性質を満たすことが分かる。

$$\begin{cases} \{f, g\} = -\{g, f\} \\ \{f, c\} = 0 \\ \{f, ag_1 + bg_2\} = a\{f, g_1\} + b\{f, g_2\} \\ \{f, g_1g_2\} = g_1\{f, g_2\} + \{f, g_1\}g_2 \end{cases}$$

ただし  $a, b, c$  は定数,  $g_1, g_2$  は  $q, p, t$  の任意の関数である。

<sup>\*32</sup> 教科書では不都合の生じない限り、コンマを省いて  $\{fg\}$  と表記している。

Poisson 括弧を用いると、正準方程式に従う点  $(q, p)$  の運動に伴う  $f$  の時間変化率は

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} \quad (42.1)$$

と書ける。ここから運動の積分 (保存量)  $f$  に対して、

$$\frac{df}{dt} = 0, \quad \therefore \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} = 0. \quad (42.3)$$

特に  $f$  が時間に陽に依らない場合、

$$\{H, f\} = 0 \quad (42.3)$$

が成り立つ。

また、各正準変数  $\{q_i\}, \{p_i\}$  は独立なので

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_k} = 0, \quad \frac{\partial p_i}{\partial q_k} = 0, \quad \frac{\partial q_i}{\partial q_k} = \delta_{ik}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial p_k} = \delta_{ik}$$

となることに注意すると、有用な公式

$$\{f, q_k\} = \frac{\partial f}{\partial p_k}, \quad \{f, p_k\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k} \quad (42.11-12)$$

が見出される。特に正準変数間の Poisson 括弧は

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (42.13)$$

となることが分かる、

■Poisson の定理 運動の積分  $f, g$  に対して Poisson の括弧式  $\{f, g\}$  も運動の積分である (証明は下記)。証明には Jacobi の恒等式

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \quad (42.14)$$

[証明は本稿次節] を用いる。

もちろん、われわれはポアソンの定理を用いた結果として、いつでも新しい運動の積分を得るわけではない。その数はもともと制限されている ( $s$  を自由度として  $2s - 1$  個) のであるから、これは明らかである。ある場合には意味のない結果——ポアソンの括弧式が定数である——であったり、ある場合にはもとの積分  $f, g$  の単なる関数であったりするだろう。どちらの場合でもないなら、ポアソンの括弧式は新しい運動の積分を与える。(最終段落)

§ 42, 式の導出など

■Poisson の定理の証明

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{fg\} &= \frac{\partial}{\partial t}\{fg\} + \{H\{fg\}\} \\ &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} g \right\} + \left\{ f \frac{\partial g}{\partial t} \right\} + \{H\{fg\}\} \\ &= \left\{ \frac{df}{dt} - \{Hf\}, g \right\} + \left\{ f, \frac{dg}{dt} - \{Hg\} \right\} + \{H\{fg\}\} \\ &= \left\{ \frac{df}{dt} g \right\} + \left\{ f \frac{dg}{dt} \right\} + \{g\{Hf\}\} + \{f\{gH\}\} + \{H\{fg\}\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

最後の等号では  $\frac{df}{dt} = 0, \frac{dg}{dt} = 0$  の仮定と, Jacobi の恒等式 (42.14) を用いた.

特に  $f, g$  が時間に陽に依らなければ, Jacobi の恒等式 (42.14) は直ちに Poisson の定理

$$\{Hf\} = 0 \quad \text{かつ} \quad \{Hg\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \{H\{fg\}\} = 0$$

を意味する.

§ 42 について

■Poisson 括弧の定義式 (42.5) について 量子力学において

$$\text{正準交換関係} \quad \frac{1}{i\hbar}[x_i, p_j] = \delta_{ij}, \quad \text{Heisenberg 方程式} \quad \frac{dA^{(H)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A^{(H)}, H]$$

が成り立つ. (ここに  $[A, B] \equiv AB - BA$  は交換子であり,  $A^{(H)}$  は時間に陽に依らない観測量  $A$  の, Heisenberg 描像の演算子である.) Dirac の規則

$$\frac{1}{i\hbar}[, ] \leftrightarrow \{, \}$$

によって, 右辺の符号まで含めて, これらと正確に対応する古典的關係

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \frac{dA}{dt} = \{A, H\}$$

が導かれるのは, Poisson 括弧を

$$\{A, B\} = \sum_k \left( \frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial B}{\partial q_k} \right)$$

の順に定義したときである. 式 (42.5) では逆の順序で定義されているので

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij} : (42.13), \quad \frac{dA}{dt} = \{H, A\} : (42.1)$$

となっている. なお運動の定数  $f$  の満たす式 (42.4):  $\{H, f\} = 0$  には交換関係  $[H, f] = 0$  が対応する.

■Poisson 括弧で表した正準方程式 公式 (42.11–12) より, 正準方程式は

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{H, q_i\}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \{H, p_i\}$$

と書くこともできる.

■Poisson 括弧に対する Jacobi の恒等式 (42.14) の直接的証明 付録 B で導入したシンプレクティックな記法を用いると、証明を簡潔に書ける (特に式 (86) を見よ) [11, p.316]. 証明したい恒等式は,  $f, g, h$  の巡回置換に関する和

$$\sum_{(f,g,h)} \{\{f, g\}, h\} = 0$$

である. 左辺の Poisson 括弧は

$$\begin{aligned} \sum_{(f,g,h)} \{\{f, g\}, h\} &= \sum_{(f,g,h)} \frac{\partial}{\partial \eta_\mu} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta_\rho} J_{\rho\sigma} \frac{\partial g}{\partial \eta_\sigma} \right) J_{\mu\nu} \frac{\partial h}{\partial \eta_\nu} \\ &= \sum_{(f,g,h)} J_{\mu\nu} J_{\rho\sigma} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \eta_\mu \partial \eta_\rho} \frac{\partial g}{\partial \eta_\sigma} \frac{\partial h}{\partial \eta_\nu} + \frac{\partial f}{\partial \eta_\rho} \frac{\partial^2 g}{\partial \eta_\mu \partial \eta_\sigma} \frac{\partial h}{\partial \eta_\nu} \right) \end{aligned}$$

と計算される. ここで最右辺の第 2 項において,

- 巡回置換  $(f, g, h)$  の和の中で巡回置換  $f \rightarrow h \rightarrow g \rightarrow f$  を行っても式の意味は変わらず,
- またダミー添字の置き換え  $(\mu, \nu) \rightarrow (\rho, \sigma), (\rho, \sigma) \rightarrow (\nu, \mu)$  を施すと,

$$\sum_{(f,g,h)} \{\{f, g\}, h\} = \sum_{(f,g,h)} J_{\rho\sigma} (J_{\mu\nu} + J_{\nu\mu}) \frac{\partial^2 f}{\partial \eta_\mu \partial \eta_\rho} \frac{\partial g}{\partial \eta_\sigma} \frac{\partial h}{\partial \eta_\nu} = 0$$

とできる (最後の等号は  $J_{\mu\nu}$  の反対称性による). よって Jacobi の恒等式 (42.14) が成り立つ.

#### ■教科書における Jacobi の恒等式 (42.14) の証明 (pp.172–173)

- 「 $\{fg\}$  は量  $f, g$  の 1 階導関数についての双 1 次の同次式」(p.172 一番下)  
 $\Leftrightarrow$  「 $(\partial f / \partial p_i)(\partial g / \partial q_i) - (\partial f / \partial q_i)(\partial g / \partial p_i)$  は 2 項とも  $\partial f / \partial \bullet, \partial g / \partial \bullet$  のいずれについても 1 次式」  
 「等式 (42.14) の左辺全体としても, すべての関数  $f, g, h$  の 2 階導関数についての 1 次の同次式」(p.172, 12, 3)  
 $\Leftrightarrow$  「(42.14) のどの項も  $\partial^2 f / \partial \bullet \partial \bullet, \partial^2 g / \partial \bullet \partial \bullet, \partial^2 h / \partial \bullet \partial \bullet$  のいずれかを 1 個だけ含む」

から式 (42.14) において  $\partial^2 f / \partial \bullet \partial \bullet$  を含む項,  $\partial^2 g / \partial \bullet \partial \bullet$  を含む項,  $\partial^2 h / \partial \bullet \partial \bullet$  を含む項の各々が 0 になることを言えば良い.  $\partial^2 f / \partial \bullet \partial \bullet$  は

$$\begin{aligned} &\{g\{hf\}\} + \{h\{fg\}\} \\ &= \left( \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right) \left( \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right) f - \left( \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right) \left( \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right) f \\ &= (\xi_k \partial_k)(\eta_l \partial_l) f - (\eta_l \partial_l)(\xi_k \partial_k) f \end{aligned}$$

の中のみ  $(\xi_k \eta_l \partial_k \partial_l - \eta_l \xi_k \partial_l \partial_k) f = 0$  として含まれる.

■Poisson の定理について  $f, g$  が運動の積分であると言っても, 定数  $c$  に対する公式 (42.7):  $\{f, c\} = 0$  を適用して  $\{f, g\} = 0$  と考えてはならない. Poisson の定理は正準変数の関数として計算した  $\{f, g\}$  が, 正準変数の時間発展に対して一定値に留まるという主張である.

実際, 保存則  $f(q, p, t) = \text{const}$  は位相空間上の超曲面を指定し, 運動がその曲面上に限られることを意味する. ところが Poisson 括弧  $\{f, g\}$  を計算する際に必要な,  $p_i$  軸や  $q_i$  軸方向への微分  $\partial f / \partial p_i, \partial f / \partial q_i$  は, 一般には超曲面から飛び出す方向への微分なので,  $\{f, g\}$  はゼロにならない [11, pp.501–502].

他方, Poisson の定理の証明の際には, Poisson 括弧

$$\left\{ \frac{df}{dt}, g \right\}, \quad \left\{ f, \frac{dg}{dt} \right\}$$

の中の  $\frac{df}{dt}, \frac{dg}{dt}$  をゼロとおくことになる (教科書の式 (42.16) の箇所). これは初期条件に応じて定まる各超曲面  $f(q, p, t) = \text{const}$  上での, 実際の運動に伴う変化量  $\frac{df}{dt}$  がゼロだから, 正しい措置である.

## § 42, 問題

1 粒子のデカルト座標に対する基本的な Poisson 括弧  $\{x_i, p_j\} = -\delta_{ij}$  より,

$$\begin{aligned} \{M_i, p_j\} &= \{\varepsilon_{ikl} x_k p_l, p_j\} = \varepsilon_{ikl} p_l \{x_k, p_j\} = -\varepsilon_{ijl} p_l, \\ \{M_i, x_j\} &= \{\varepsilon_{ikl} x_k p_l, x_j\} = \varepsilon_{ikl} x_k \{p_l, x_j\} = -\varepsilon_{ijk} x_k. \end{aligned}$$

この結果は角運動量が空間回転の生成子であることを意味している (付録 B 参照).

2 小問 1 の結果より,

$$\begin{aligned} \{M_i, M_j\} &= \{M_i, \varepsilon_{jkl} x_k p_l\} \\ &= \varepsilon_{jkl} (x_k \{M_i, p_l\} + \{M_i, x_k\} p_l) \\ &= -\varepsilon_{jkl} (\varepsilon_{ilm} x_k p_m + \varepsilon_{ikl} x_m p_l) \\ &= (\delta_{jt} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{ki}) x_k p_m - (\delta_{jt} \delta_{lm} - \delta_{jm} \delta_{li}) x_m p_l \\ &= -(x_i p_j - x_j p_i) \\ &= -\varepsilon_{ijk} M_k. \end{aligned}$$

参考 量子力学では角運動量  $\mathbf{J}$  は, 交換関係

$$[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k$$

を満たす Hermite 演算子として定義される. 特に軌道角運動量  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  はこの関係を満たすことが, 正準交換関係に基づき, 上記と同様の計算で直接確かめられる.

多粒子系では, 異なる粒子の運動量と座標は独立な変数だから, 以上の結果は

$$\{M_{ai}, p_{bj}\} = -\varepsilon_{ijk} p_{ak} \delta_{ab}, \quad \{M_{ai}, x_{bj}\} = -\varepsilon_{ijk} x_{ak} \delta_{ab}, \quad \{M_{ai}, M_{bj}\} = -\varepsilon_{ijk} M_{ak} \delta_{ab}$$

と一般化される (いずれも右辺で, 繰り返された粒子番号  $a$  に関する和をとってはならない). よって全角運動量  $M_i = \sum_a M_{ai}$  に対する Poisson 括弧は

$$\{M_i, p_{bj}\} = -\varepsilon_{ijk} p_{bk}, \quad \{M_i, x_{bj}\} = -\varepsilon_{ijk} x_{bk}, \quad \{M_i, M_j\} = -\varepsilon_{ijk} M_k$$

となり, 第 1 式からは全運動量  $p_i = \sum_a p_{ai}$  に対する式

$$\{M_i, p_j\} = -\varepsilon_{ijk} p_k$$

が得られる (1 粒子に対する式と見た目は変わらない).

3 任意の量  $\varphi$  (スカラー関数でなくても良い) と方向単位ベクトル  $\mathbf{n}$  ( $z$  方向でなくても良い) に対して

$$\begin{aligned}\{\varphi, \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}\} &= \{\varphi, n_i \varepsilon_{ijk} x_j p_k\} = n_i \varepsilon_{ijk} (\{\varphi, x_j\} p_k + x_j \{\varphi, p_k\}) = n_i \varepsilon_{ijk} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial p_j} p_k - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} x_j \right) \\ &= n_i \varepsilon_{ijk} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} x_k + \frac{\partial \varphi}{\partial p_j} p_k \right)\end{aligned}$$

が成り立つ. ここから先に進むには教科書のように, 粒子の座標と運動量のスカラー関数  $\varphi$  が「 $\mathbf{r}$  および  $\mathbf{p}$  に依存するのは,  $\mathbf{r}^2, \mathbf{p}^2, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$  の形を通してだけである」ことを用いなければならない. すると

$$\{\varphi, \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}\} = n_i \varepsilon_{ijk} \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial (\mathbf{r}^2)} 2x_j + \frac{\partial \varphi}{\partial (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})} p_j \right) x_k + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial (\mathbf{p}^2)} 2p_j + \frac{\partial \varphi}{\partial (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})} x_j \right) p_k \right\}$$

であり, 右辺は添字  $j, k$  に関して  $\varepsilon_{ijk}$  が反対称,  $\{\dots\}$  部分全体が対称なので,  $j, k$  について和をとると消える. よって

$$\{\varphi, \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}\} = 0.$$

これは角運動量の生成する空間回転に対して, スカラー関数の値が不変でなければならないことから期待される結果である [16, p.569].

4 粒子の座標と運動量のベクトル関数が

$$\mathbf{f} = \varphi_1 \mathbf{r} + \varphi_2 \mathbf{p} + \varphi_3 (\mathbf{r} \times \mathbf{p})$$

(ただし  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  はスカラー関数) と書けるのは, 一般には  $\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  が 1 次独立で (互いに平行でない), 基底に用いることができるためと考えられる. すると小問 3 の結果より

$$\{f_i, \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}\} = \varphi_1 \{x_i, \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}\} + \varphi_2 \{p_i, \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}\} + \varphi_3 \{M_i, \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}\}$$

であり, 右辺の各項の因子は, 小問 1,2 の結果を用いて

$$\{x_i, \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}\} = -\varepsilon_{ijk} x_k n_j, \quad \{p_i, \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}\} = -\varepsilon_{ijk} p_k n_j, \quad \{M_i, \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}\} = -\varepsilon_{ijk} M_k n_j$$

と評価できる. よって

$$\begin{aligned}\{f_i, \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}\} &= -\varepsilon_{ijk} n_j (\varphi_1 x_k + \varphi_2 p_k + \varphi_3 M_k) = -\varepsilon_{ijk} n_j f_k \\ &= (\mathbf{f} \times \mathbf{n})_i\end{aligned}$$

を得る. これは角運動量がベクトル  $\mathbf{f}$  (正準変数のみの関数) の空間回転を生成することを表している (座標軸の基底ベクトルはそのままに) [16, pp.566-567].

### § 43. 座標の関数としての作用

最小作用原理から Lagrange 方程式を導く際に確かめたように (§ 2), 系の軌道  $q_i(t)$  の変分に伴う作用  $S$  の変化は

$$\delta S = \left[ \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right]_{t_0}^t + \int_{t_0}^t \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt$$

と表される. ただし最小作用原理では与えられた始点 (時刻  $t_0$ ) と終点 (時刻  $t$ ) の下で, 2 点を結ぶ作用の積分路を変更することを考えた. これに対しこれ以降では, 作用の積分路を系の実際の軌道に限定し, 作用を終

点の時刻と座標の値  $(t, q)$  の関数と見なす ( $q = \{q_i\}$ ). [これを Hamilton の主関数と呼ぶ [1, p.184].] すなわち積分の始点  $(t_0, q_0)$  は固定されており, 我々が終点  $(t, q)$  を指定すると, それに応じて始点  $(t_0, q_0)$  と終点  $(t, q)$  を結ぶ現実の運動に対応する軌道が積分路として定まる. 実際に起こる運動の軌道は Lagrange 方程式を満たすので, このとき上式右辺の積分は消え, 終点の座標の変化  $\delta q_i$  に伴う作用の変化の式  $\delta S = \sum_i p_i \delta q_i$  が得られる. この関係から, 座標についての作用の偏導関数は

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$$

となる. さらに時間についての作用の偏導関数  $\partial S / \partial t$  が

$$L = \frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i,$$

$$\therefore \frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}_i = -H$$

と求まる. こうして座標の関数としての作用積分 (Hamilton の主関数) は

$$S = \int \left( \sum_i p_i dq_i - H dt \right) \quad (43.8)$$

の形に書ける. [このことはその導き方から分かるように, 言わば最小作用原理の裏返しであって, Weiss の原理と呼ばれる [1, p.183].]

作用を式 (43.8) の形にとると [ただし位相空間  $(q, p)$  上の軌道に沿う積分と見なす\*33], 変分原理から正準方程式

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

が導かれる (導出は下記) [修正された Hamilton の原理 [16, p.493]].

### § 43, 式の導出など

■変分原理による Hamilton 方程式の導出 [Hamilton 主関数の形に書いた] 作用 (43.8) を [位相空間  $(q, p)$  上の軌道に沿う] 積分と見なし, 座標と運動量を独立変数として変分をとると,

$$0 = \delta S = \int \left( \delta p_i dq_i + p_i d(\delta q_i) - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i dt - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i dt \right)$$

$$= \int \delta p_i \left( dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dt \right) + [p_i \delta q_i] - \int \delta q_i \left( dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dt \right)$$

となる. 最右辺の境界項  $[p_i \delta q_i]$  は, 境界条件  $\delta q_i = 0$  より消える [境界で  $\delta p_i = 0$  まで要求しなくても良い [16, p.495]]. 変分  $\delta q_i, \delta p_i$  は独立にとれるので

$$dq_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} dt, \quad dp_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} dt$$

が導かれる. 両辺を  $dt$  で割れば, これは Hamilton 方程式に他ならない.

\*33 見かけ上は導関数  $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \frac{\partial S}{\partial t} = -H$  の線積分である. あるいは作用  $S = \int L dt$  において, ラグランジアンを  $L = p_i \dot{q}_i - H$  と書いてだけである.

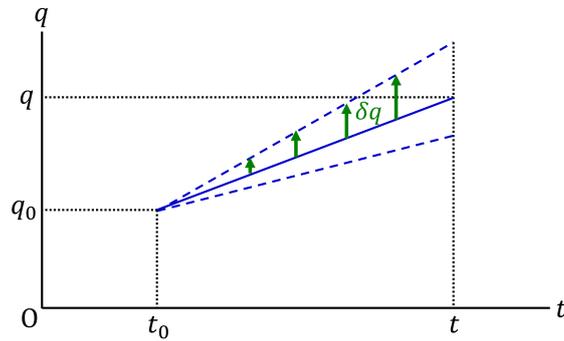


図 77 自由粒子の 1 次元運動における現実の経路 ( $q$  はデカルト座標)

### § 43 について

■ 「同じ点  $q(t_1) = q^{(1)}$  から出発して、時刻  $t_2$  にはさまざまなことなる位置を通過する」 (p.175 下から 2,3 行) 経路について これらは全て実際に起こる運動の軌跡である。例えば外力の働かない 1 粒子に対して図 77 の点  $(t_0, q_0)$  を通る様々な直線は、異なる初期条件 (初速度) に応じて実現可能な経路である。

このように異なる初期条件 (初速度) を許せば、任意に選んだ点  $(q, t)$  に対して、これを与えられた始点  $(q_0, t_0)$  と結ぶ現実の軌道が存在するため (ただし  $t > t_0$ )、作用  $S(q, t)$  は拡大配位空間の各点で値の定義された場と見なせる。(そして  $S(q, t)$  に対する“場の方程式”が § 47 における Hamilton-Jacobi の方程式である。) したがって終点の変分は、必ずしももとの軌道に沿った軌道の延長に限られない。

■ 「この意味での偏導関数  $\partial S/\partial t$  は……求められる」 (p.176 下から 12,11 行目)、および式 (43.7) について 端点の座標と時刻を固定しない軌道の変分 ( $\Delta$ -変分という) を考える。軌道上の点  $(q, t)$  の変分後の位置を  $(q', t') = (q + \Delta q, t + \Delta t)$  と書く (図 78 参照)。また新しい軌道上で評価されたラグランジアンを  $L'(t) \equiv L(q', \dot{q}', t')$  と表記する。このとき作用の  $\Delta$ -変分は、変分の 1 次までの近似で

$$\begin{aligned} \Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt &= \int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_2 + \Delta t_2} L' dt - \int_{t_1}^{t_2} L dt \\ &= \left( \int_{t_1}^{t_2} + \int_{t_2}^{t_2 + \Delta t_2} - \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t_1} \right) L' dt - \int_{t_1}^{t_2} L dt \\ &\simeq \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt + L'(t_2) \Delta t_2 - L'(t_1) \Delta t_1 \\ &\simeq \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt + L(t_2) \Delta t_2 - L(t_1) \Delta t_1 \quad (L(t) \equiv L(q, \dot{q}, t)) \end{aligned}$$

と計算される。これは図 78 から読み取れるように、作用の  $\Delta$ -変分が、軌道上の時刻を変えない変分

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt$$

と、端点の時間の延長に関する寄与  $[L \Delta t]_{t_1}^{t_2}$  から成ることを意味している：

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = [p_i \delta q_i + L \Delta t]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt.$$

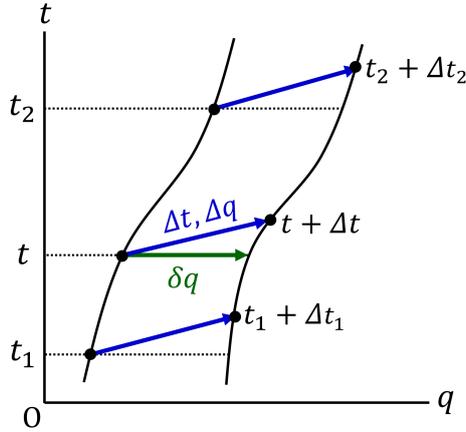


図 78 Δ-変分

さらに図 78 から読み取れる関係

$$\Delta q_i = \delta q_i + \dot{q}_i \Delta t$$

( $\dot{q}_i$  は考えている軌道に応じて定義される) を用いると, 境界項は

$$[p_i \delta q_i + L \Delta t]_{t_1}^{t_2} = [p_i \Delta q_i - (p_i \dot{q}_i - L) \Delta t]_{t_1}^{t_2} = [p_i \Delta q_i - H \Delta t]_{t_1}^{t_2}$$

と書き換えられるので, Δ-変分の公式

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = [p_i \Delta q_i - H \Delta t]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt$$

を得る [16, pp.496–499].

ここで作用の積分路を現実の軌道に限定すると, 上式の第 2 項は Lagrange 方程式によって消えるので,

$$dS = p_i^{(2)} dq_i^{(2)} - H^{(2)} dt^{(2)} - p_i^{(1)} dq_i^{(1)} + H^{(1)} dt^{(1)} \quad (43.7)$$

が得られる. ここから終点の座標と時刻による微分公式

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H$$

が読み取れる.

なお「(43.7) 式の右辺が完全微分である」(p.177, 1.10) のは, 作用が拡大配位空間  $(q, t)$  上の始点と終点だけの関数だからである.

■Hamilton の原理と修正された Hamilton の原理について これら 2 つの変分原理の等価性は, あらかじめ予見できることではない. しかしながら変分原理の正当性は正しい運動方程式を導けることに懸かっており, Lagrange 方程式と Hamilton 方程式は等価だから (§ 40), それぞれを導く 2 つの変分原理も結果的に等価であることが分かる [16, p.494].

## § 44. モーペルテュイの原理

- Hamilton の原理 (§ 2) … 拡大配位空間  $(q_1, \dots, q_s, t)$  の軌道に対する変分原理  
→ 物体の運動を決定
- Maupertuis の原理 (§ 44) … 配位空間  $(q_1, \dots, q_s)$  の軌道に対する変分原理  
→ 物体が空間内に描く軌跡を決定

エネルギーが保存する系を考え、保存法則  $H(p, q) = E = \text{const}$  を満たす運動だけを比較するような変分原理から物体の軌跡を決定することを考える\*<sup>34</sup>。図 79 のように配位空間内の軌跡を、端点は固定して変化させたとき、軌跡上の点 A が点 B に移ったとする。  $q$  の値の異なる 2 点 A, B で  $H(p, q)$  が共通の値  $E$  を持つためには、A と B は異なる  $p$  の値を持たなければならない。したがって系は 2 点を異なる速度で通過することになるから、終点を通り過ぎる時刻は異なって良い (図 79 参照) [1, pp.197–198]。このような軌跡の中で、現実の軌跡に対して簡約された作用

$$S_0 \equiv \int \sum_i p_i dq_i$$

は極小値 (停留値) をとること

$$\delta S_0 = 0 \quad (44.5)$$

が示される (導出は下記)。

ただしこの変分原理から空間における軌跡を定めるには、 $S_0$  における被積分関数を座標とその微分  $q, dq$  で表しておかねばならない。それには、運動量の定義式とエネルギー保存則の式

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(q, \dot{q}), \quad E(q, \dot{q}) = E$$

を用いれば良く、結果として

$$S_0 = \int \sqrt{2(E - U(q)) \sum_{i,k} a_{ik}(q) dq_i dq_k} \quad (44.9)$$

を得る (導出は下記)。ここに  $U(q)$  はポテンシャル、 $a_{ik}(q)$  は運動エネルギーを式 (5.5) における 2 次形式  $\frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k$  の形に書いたときの係数である。式 (44.5) を式 (44.9) と合わせて、Maupertuis (モーペルテュイ) の原理という。

特に

- 1 粒子 (質量  $m$ ) に対しては、

$$\delta S_0 = \delta \int \sqrt{2m(E - U)} dl = 0 \quad (dl : \text{軌跡の線素}) \quad (44.10)$$

という形をとる (Jacobi)。

- 1 個の自由粒子 ( $U = 0$ ) に対しては、

$$\delta \int dl = 0. \quad (\text{軌跡は直線})$$

\*<sup>34</sup> ラグランジアンが時間に陽に依らなければエネルギーが保存する (§ 6)。このときハミルトニアン  $H(p, q)$  も時間に陽に依らない。

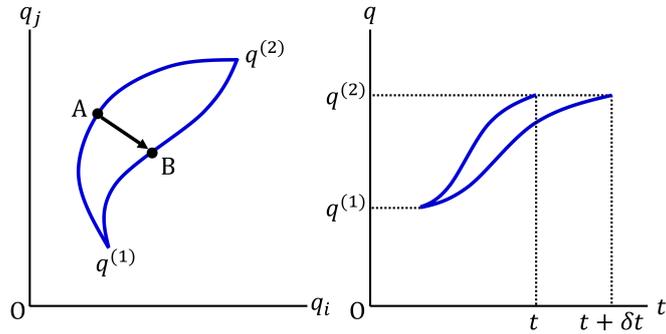


図 79 エネルギー保存法則を満たし、かつ、勝手な時刻に終点を通り過ぎる軌跡

なお、式 (44.9) の導出時に得た式 (44.8) を積分すると、

$$\int \sqrt{\frac{\sum_{i,k} a_{ik}(q) dq_i dq_k}{2(E - U(q))}} = t - t_0 \quad (44.12)$$

となる。得られた配位空間の軌跡に沿って上式 (44.12) の左辺を評価すれば、軌跡の各点を系が通過する時刻が求まるので、運動が完全に決定される。

#### § 44, 式の導出など

■変分原理 (44.5):  $\delta S_0 = 0$  の導出 制約  $H(p, q) = E$  の下で、図 79 のように始点と終点の座標は固定しておいて終点の時刻  $t$  を変化させる変分を考えると、作用  $S$  の変分は

$$\delta S = -E\delta t$$

となる (§ 43 より)。他方、作用を式 (43.8) の形

$$S = S_0 - E(t - t_0), \quad S_0 \equiv \int \sum_i p_i dq_i$$

に書くと、その変分は

$$\delta S = \delta S_0 - E\delta t$$

とも書ける。2 式を比較すると、変分原理 (44.5):

$$\delta S_0 = 0$$

が見出される。

■簡約された作用  $S_0$  の式 (44.9) の導出 一般にラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q)$$

と書ける (式 (5.5)). そこで

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_k a_{ik}(q) \frac{dq_k}{dt},$$

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k + U(q) \Rightarrow dt = \sqrt{\frac{\sum_{i,k} a_{ik}(q) dq_i dq_k}{2(E - U(q))}} \quad (44.8)$$

により, 簡約された作用における  $p_i$  を, 座標  $q$  とその微分  $dq$  を用いて

$$p_i = \sqrt{2(E - U(q))} \frac{\sum_k a_{ik}(q) dq_k}{\sqrt{\sum_{l,m} a_{lm}(q) dq_l dq_m}}$$

と表すと, 式 (44.9):

$$S_0 = \int \sqrt{2(E - U(q))} \sum_{i,k} a_{ik}(q) dq_i dq_k$$

を得る.

§ 44, 問題 変分原理 (44.10) から軌跡の微分方程式

変分原理 (44.10) は,

$$0 = \delta \int \sqrt{2m(E - U)} dl = - \int \left( \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\delta \mathbf{r}}{2\sqrt{E - U}} dl - \sqrt{E - U} \frac{d\mathbf{r}}{dl} \cdot d(\delta \mathbf{r}) \right)$$

と書ける. ただし変形には

$$\delta \sqrt{E - U} = \frac{-\delta U}{2\sqrt{E - U}} = \frac{-\partial U / \partial \mathbf{r}}{2\sqrt{E - U}} \cdot \delta \mathbf{r}, \quad dl^2 = d\mathbf{r}^2 \rightarrow dl d(\delta l) = d\mathbf{r} \cdot d(\delta \mathbf{r})$$

を用いた.

第 2 式についての補足 軌跡の各点に対して変分後の位置が定まっているので, 軌跡の線要素  $dl, d\mathbf{r}$  が移る先の線要素  $d\mathbf{r}', dl'$  も定義される. よって線要素の変分

$$\delta(dl) = dl' - dl, \quad \delta(d\mathbf{r}) = d\mathbf{r}' - d\mathbf{r}$$

を考慮することができる. そこで  $dl^2 = d\mathbf{r}^2$  の両辺の変分をとると,

$$dl \delta(dl) = d\mathbf{r} \cdot \delta(d\mathbf{r}).$$

次いで § 2 のノートで指摘したように, 微分と変分の入れ替えが可能なことを用いて,

$$\delta(dl) = d(\delta l), \quad \delta(d\mathbf{r}) = d(\delta \mathbf{r})$$

とすれば良い.

次いで境界条件  $\delta \mathbf{r} = 0$  に注意して, 冒頭の式の最右辺第 2 項を部分積分すると,

$$0 = - \int \left\{ \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{2\sqrt{E - U}} + \frac{d}{dl} \left( \sqrt{E - U} \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right) \right\} \cdot \delta \mathbf{r} dl$$

となる. 変分  $\delta \mathbf{r}$  の係数  $\{\dots\}$  をゼロとおいて, 軌跡の方程式

$$2\sqrt{E - U} \frac{d}{dl} \left( \sqrt{E - U} \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right) = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \quad (69)$$

を得る.

ここで力  $\mathbf{F} = -\partial U/\partial \mathbf{r}$  と軌跡の接単位ベクトル  $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/dl$  を導入する. また微分幾何学で知られているように, 軌跡の曲率半径を  $R$ , それへの主法線方向を  $\mathbf{n}$  として

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2} = \frac{\mathbf{n}}{R} \quad (70)$$

が成り立つ. (詳しくは付録 C の式 (100) を参照\*35. )

このとき上式 (69) の左辺は, 微分を実行して

$$\begin{aligned} 2\sqrt{E-U} \frac{d}{dl} \left( \sqrt{E-U} \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right) &= 2(E-U) \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2} + 2\sqrt{E-U} \frac{d\mathbf{r}}{dl} \frac{-dU/dl}{2\sqrt{E-U}} = 2(E-U) \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2} - \frac{d\mathbf{r}}{dl} \left( \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right) \\ &= mv^2 \frac{\mathbf{n}}{R} + \mathbf{t}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}) \end{aligned}$$

と書き換えられる. よって式 (69) は

$$\frac{\mathbf{n}}{R} = \frac{\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t}}{mv^2} = \frac{\mathbf{F}_n}{mv^2}, \quad \therefore \frac{mv^2}{R} \mathbf{n} = \mathbf{F}_n$$

を意味する. ここに  $\mathbf{F}_n = \mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t}$  は力の軌跡に垂直な成分である (しかもそれは曲線の主法線方向  $\mathbf{n}$  と平行でなければならない). この結果は曲線の法線加速度に対するよく知られた公式となっている.

なるほど, 軌跡は各位置での力の法線成分だけで決まる. 軌跡の接線方向の運動方程式と合わせれば, 軌跡の上の各点を粒子が通過する時刻が, したがって運動が決まる. あるいは式 (44.12) の箇所一般論に対応して, エネルギー保存則

$$dt = \frac{dl}{v} = \sqrt{\frac{m}{2(E-U)}} dl$$

と組合せれば十分である.

## § 45. 正準変換

■点変換 Lagrange 方程式は点変換  $q \rightarrow Q(q, t)$  に対して不変である. [§ 2, § 39 のノート参照.]

■正準変換 Hamilton 方程式が不変である変換  $p \rightarrow P(p, q, t), q \rightarrow Q(p, q, t)$  を正準変換と呼ぶ.

■変換  $p, q \rightarrow P, Q$  が正準変換であるための条件 (母関数  $F(q, Q, t)$  を用いた表現) 正準変数  $q_i, p_i$  に対する Hamilton 方程式

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

は最小作用の原理

$$\delta S = 0, \quad S = \int \left( \sum_i p_i dq_i - H dt \right)$$

から導かれる (§ 43, 積分は位相空間の軌道に沿って実行される). ここで変数  $q = \{q_i\}, p = \{p_i\}$  から新変数  $Q_i = Q_i(p, q, t), P_i = P_i(p, q, t)$  への変換が正準変換である, すなわち新しい Hamilton 関数  $H'(P, Q)$  を用いて運動方程式が

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}$$

\*35 式 (70) 左辺の 2 階微分は加速度を想起させ, 右辺は最終的に得られる法線方向の加速度  $(mv^2/R)\mathbf{n}$  に比例した形をしている.

と表されるためには、新変数に対しても最小作用の原理

$$\delta S = 0, \quad S = \int \left( \sum_i P_i dQ_i - H' dt \right)$$

が成り立たなければならない。その条件は2つの作用の差が変分をとると落ちることであり、それには2つの作用の差が座標、運動量および時間の任意関数  $F$  の全微分であれば良い：

$$\sum_i p_i dq_i - H dt = \sum_i P_i dQ_i - H' dt + dF, \quad (71)$$

$$dF = \sum_i p_i dq_i - \sum_i P_i dQ_i + (H' - H) dt. \quad (45.6)$$

[厳密には式 (71) の左辺全体に定数  $\lambda$  が掛かっても良いが、ふつう  $\lambda = 1$  の場合を正準変換と呼ぶ [16, pp.517-518].] よって関数  $F = F(q, Q, t)$  を与えると、新しい変数  $P, Q$ 、ハミルトニアン  $H'$  と古い変数  $p, q$ 、ハミルトニアン  $H$  は

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

で関係付けられる。

■変換  $p, q \rightarrow P, Q$  が正準変換であるための条件 (母関数  $\Phi(q, P, t)$  を用いた表現) 上式 (45.6) を基に Legendre 変換を行うと、

$$d\Phi \equiv d \left( F + \sum_i P_i Q_i \right) = \sum_i p_i dq_i + \sum_i Q_i dP_i + (H' - H) dt, \\ \therefore p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (45.8)$$

★ いずれにせよ [Legendre 変換は座標と運動量変数に関してのみ行われるので]、

$$H' - H = \frac{\partial}{\partial t} (\text{母関数})$$

という形は変わらない。特に母関数が時間によらないときには  $H' = H$  である。[本稿次節の母関数  $F_3, F_4$  に対する公式も参照.]

■正準変換の広さ 正準変換  $p, q \rightarrow P, Q$  は  $P, Q$  それぞれを座標  $q$ 、運動量  $p$  の両方に結び付けるから、座標と運動量の区別は名前の上のことにすぎなくなる。

■変換  $p, q \rightarrow P, Q$  が正準変換であるための条件 (Poisson の括弧式を用いた表現) 正準変数  $P, Q$  に関して定義された Poisson 括弧を  $\{, \}_{P, Q}$  と書くと、その定義より正準変数  $Q, P$  の間の Poisson 括弧は

$$\{Q_i, Q_j\}_{P, Q} = 0, \quad \{P_i, P_j\}_{P, Q} = 0, \quad \{P_i, Q_j\}_{P, Q} = \delta_{ij}.$$

となる (§ 42)。ところが、Poisson 括弧は正準変換によって不変である。つまり  $p, q \rightarrow P, Q$  が正準変換ならば、変数  $p, q$  に関して定義された Poisson 括弧を  $\{, \}_{p, q}$  とし、

$$\{f, g\}_{p, q} = \{f, g\}_{P, Q} \quad (45.9)$$

が成り立つ [証明は本稿次節]。よって

$$\{Q_i, Q_j\}_{p, q} = 0, \quad \{P_i, P_j\}_{p, q} = 0, \quad \{P_i, Q_j\}_{p, q} = \delta_{ij}$$

が得られる。これは変換  $p, q \rightarrow P, Q$  が正準変換であるための、新しい変数  $P, Q$  に対する条件になっている。

■運動に伴う  $p, q$  の変化 運動に伴う変化

$$q(t) \rightarrow q(t + \tau), \quad p(t) \rightarrow p(t + \tau)$$

は正準変換である．実際，2 時刻の座標  $q_t, q_{t+\tau}$  を変数とする作用  $S(q_{t+\tau}, q_t)$  の微分は，式 (43.7) より  $dS = \sum(p_{t+\tau}dq_{t+\tau} - p_t dq_t)$  のように表されるので [本稿次節で補足]，これを式 (45.6) と比較すると， $S$  [の逆符号  $F = -S$  [1, p.291]] がこの変換の母関数となっていることが分かる．[付録 B では系の時間発展がハミルトニアン生成する正準変換であることを説明した.]

§ 45 について

■「同じようにして，……正準変換の公式も導かれる」(p.183, l.10,11) について 第 3, 第 4 の公式は，式 (45.6) に対する Legendre 変換

$$dF_3 \equiv d\left(F - \sum_i p_i q_i\right) = -\sum_i q_i dp_i - \sum_i P_i dQ_i + (H' - H)dt,$$

$$dF_4 \equiv d\left(F - \sum_i p_i q_i + \sum_i P_i Q_i\right) = -\sum_i q_i dp_i + \sum_i Q_i dP_i + (H' - H)dt$$

から，

$$\begin{aligned} \text{母関数 } F_3(p, Q, t) \text{ に対して} \quad q_i &= -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, & P_i &= -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}, & H' &= H + \frac{\partial F_3}{\partial t}, \\ \text{母関数 } F_4(p, P, t) \text{ に対して} \quad q_i &= -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, & Q_i &= \frac{\partial F_4}{\partial P_i}, & H' &= H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \end{aligned}$$

と得られる．

■Poisson 括弧の正準変換に対する不変性 (45.9) の証明 付録 B.3 では任意の正準変換が「シンプレクティック条件」を満たすことを示した (逆も正しい [1, pp.296–298]). ここではそれを利用して，Poisson 括弧が正準変換の下で不変であることを示そう．正準変数  $\eta$  に関して定義された Poisson 括弧は，式 (87):

$$\{f, g\}_\eta = \frac{\partial f}{\partial \eta_\alpha} J_{\alpha\beta} \frac{\partial g}{\partial \eta_\beta}$$

のように表される (付録 B). よって  $\zeta$  を新しい正準変数として行列  $M = (M_{\alpha\beta}) = (\partial\zeta_\alpha/\partial\eta_\beta)$  を定義すると，

$$\{f, g\}_\eta = \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta_\mu} \frac{\partial \zeta_\mu}{\partial \eta_\alpha}\right) J_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \zeta_\nu}{\partial \eta_\beta} \frac{\partial g}{\partial \zeta_\nu}\right) = \frac{\partial f}{\partial \zeta_\mu} (M_{\mu\alpha} J_{\alpha\beta} M_{\nu\beta}) \frac{\partial g}{\partial \zeta_\nu} = \frac{\partial f}{\partial \zeta_\mu} (MJM^T)_{\mu\nu} \frac{\partial g}{\partial \zeta_\nu}$$

となる．ところが正準変換  $\eta \rightarrow \zeta$  はシンプレクティック条件 (94):  $MJM^T = J$  を満たすから，

$$\{f, g\}_\eta = \frac{\partial f}{\partial \zeta_\mu} J_{\mu\nu} \frac{\partial g}{\partial \zeta_\nu} = \{f, g\}_\zeta$$

を得る．最右辺は正準変数  $\zeta$  を用いて計算された Poisson 括弧であり，これは Poisson 括弧が正準不変量であることを意味している [16, pp.541–542]. ここから逆に Poisson 括弧が不変であれば，変換はシンプレクティック条件を満たし，それ故，正準変換であることも見て取れる．

■「この関係は、正準交換の公式をつかって直接計算してもたしかめられる」(式(45.9)1行下)について母関数  $F$  の独立変数を  $q, Q, t$  と書いてはいるが、 $P_j(p, q, t) = -\partial F(q, Q, t)/\partial Q_j$  を  $p_i$  で微分するとき、 $\partial P_j/\partial p_i = -\partial^2 F/\partial p_i \partial Q_j \neq 0$  に注意せよ。同様に  $\partial Q_j/\partial p_i = -\partial^2 \Phi/\partial p_i \partial P_j \neq 0$  であって  $\{fg\}_{p,q} \neq 0$  である。

■「いま、ただ…… $\{fg\}_{p,q} = df/dt$ 。」(p.184, l.9~l.11) について  $f$  の時間発展が  $\{fg\}_{p,q} = df/dt$  に従う系を定義したのである(式(42.1)と比較すると  $\{fg\}_{p,q} = -df/dt$  とする方が自然だが)。これはいつでも可能であり、 $g$  がハミルトニアン次元を持っている必要はない。

■作用  $S(q_{t+\tau}, q_t)$  が時間発展の母関数であること(最終段落)について ここでは§ 43 とは対照的に、Hamilton 主関数  $S(q_{t+\tau}, t+\tau, q_t, t)$  は与えられた 1 本の軌道上だけで定義されていると推察される。実際このとき  $\Delta$ -変分 ( $\Delta q, \Delta t$ ) は軌道に沿っていなければならないから、Hamilton 主関数は実質、両端の座標だけの関数  $S(q_{t+\tau}, t+\tau, q_t)$  となる。その全微分(p.184, l.26)に  $dt$  の項が書かれていないのはそのためと考えられる。すると  $S(q_{t+\tau}, t+\tau, q_t)$  は時間によらない母関数であり、時間発展に伴ってハミルトニアンは変わらないことになる。

## § 46. リウヴィルの定理

与えられた力学系の  $s$  個の一般座標と  $s$  個の運動量の値を座標とする、 $2s$  次元の空間を位相空間という[教科書ではここが初出]。系の状態は位相空間の 1 点で表され、この点は時間発展に伴って 1 本の軌道を描く。

位相空間の領域の体積

$$\int d\Gamma = \int d^s q d^s p$$

は正準変換に対して不変である[本稿次節で導出]。(ただし変換前後で対応する積分領域をとる[能動的な変換と見るにせよ, 受動的な変換と見るにせよ].)

特に系の時間発展は正準変換だから(§ 46), 領域の体積  $\int d\Gamma$  は領域を構成する代表点の運動に伴って時間変化しないことになる(Liouville の定理)。[Liouville の定理の直接的証明は本稿の付録 D を参照.]

### § 46 について

■正準変換に対する位相体積の不変性の証明 [16, pp.547-548] 付録 B.3 では正準変換  $\eta \rightarrow \zeta$  に対する Jacobi 行列

$$M = (M_{\alpha\beta}) = \left( \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \eta_\beta} \right)$$

がシンプレクティック条件

$$MJM = J$$

を満たすことを示した。両辺の行列式をとると、変換の Jacobian は

$$D \equiv |M| = \pm 1,$$

その絶対値は  $|D| = 1$  となるので、

$$\int d^{2s} \zeta = \int |D| d^{2s} \eta = \int d^{2s} \eta.$$

■ 「 $\partial(q_1, \dots, q_s, P_1, \dots, P_s)$  で《分子, 分母を割り》」 (式 (46.3) の 3 行下) について

$$a = \{Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_s\}, \quad b = \{q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s\}, \quad c = \{q_1, \dots, q_s, P_1, \dots, P_s\}$$

と略記する.  $\sum_k \frac{\partial a_i}{\partial b_k} \frac{\partial b_k}{\partial c_j} = \frac{\partial a_i}{\partial c_j}$  を行列の形に書き, 両辺の行列式をとると

$$\frac{\partial(a)}{\partial(b)} \frac{\partial(b)}{\partial(c)} = \frac{\partial(a)}{\partial(c)}, \quad \therefore \frac{\partial(a)}{\partial(b)} = \frac{\partial(a)/\partial(c)}{\partial(b)/\partial(c)}$$

となる. これは式 (46.3) の 4 行下の式

$$D = \frac{\partial(Q, P)/\partial(q, P)}{\partial(q, p)/\partial(q, P)}$$

に他ならない.

■ 式 (46.4) について

$$\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, P)} = \left\{ \frac{\partial(Q)}{\partial(q)} \right\}_{P=\text{const}}, \quad \frac{\partial(q, p)}{\partial(q, P)} = \left\{ \frac{\partial(p)}{\partial(P)} \right\}_{q=\text{const}}$$

について, ここでは第 1 式を示す.  $\zeta = (Q, P), \eta = (q, p)$  と書くと, 完全反対称テンソル  $e_{\alpha_1 \dots \alpha_{2s}}$  (ただし  $e_{1, \dots, 2s} = 1$ ) を用いて

$$\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, P)} = \frac{\partial(\zeta)}{\partial(\eta)} = e_{\alpha_1 \dots \alpha_{2s}} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta_{\alpha_1}} \dots \frac{\partial \zeta_{2s}}{\partial \eta_{\alpha_{2s}}}$$

である. ここで  $i = 1, \dots, s$  に対して

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_{\alpha_i}} = \frac{\partial Q_i}{\partial \eta_{\alpha_i}}$$

であり, これは  $\alpha_i$  が  $s+1, \dots, s$  のいずれかの値をとるときゼロになる. よって  $\alpha_i$  が  $1, \dots, s$  のいずれかの値をとる項のみが生き残る. このとき

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_{\alpha_i}} = \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_{\alpha_i}} \right)_P$$

であり (添字の  $P$  は微分において定数と見なされる変数を表す), また  $j = s+1, \dots, 2s$  に対して  $\beta_j$  は  $s+1, \dots, 2s$  のいずれかの値をとることになるから

$$\frac{\partial \zeta_j}{\partial \eta_{\beta_j}} = \frac{\partial P_{j-s}}{\partial P_{\beta_j-s}} = \frac{\partial \zeta_j}{\partial \zeta_{\beta_j}} = \delta_{j\beta_j}$$

となる。以上より

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, P)} &= \frac{\partial(\zeta)}{\partial(\eta)} \\
 &= \sum' e_{\alpha_1 \cdots \alpha_s \alpha_{s+1} \cdots \alpha_{2s}} \left( \frac{\partial Q_1}{\partial q_{\alpha_1}} \right)_P \cdots \left( \frac{\partial Q_s}{\partial q_{\alpha_s}} \right)_P \delta_{s+1, \alpha_{s+1}} \cdots \delta_{2s, \alpha_{2s}} \\
 &\quad \left( \sum' \text{は } \alpha_i (i = 1, \dots, s) \text{ が } 1, \dots, s \text{ のいずれかの値を,} \right. \\
 &\quad \left. \text{したがって } \beta_i (i = s+1, \dots, 2s) \text{ が } s+1, \dots, 2s \text{ のいずれかの値をとるような項に関する和} \right) \\
 &= \sum_{\{\alpha_i\}} e_{\alpha_1 \cdots \alpha_s, s+1, \dots, 2s} \left( \frac{\partial Q_1}{\partial q_{\alpha_1}} \right)_P \cdots \left( \frac{\partial Q_s}{\partial q_{\alpha_s}} \right)_P \\
 &\quad \left( \sum_{\{\alpha_i\}} \text{は } \alpha_i (i = 1, \dots, s) \text{ が } 1, \dots, s \text{ のいずれかの値をとるような項に関する和} \right) \\
 &= \sum_{\{\alpha_i\}} e_{\alpha_1 \cdots \alpha_s} \left( \frac{\partial Q_1}{\partial q_{\alpha_1}} \right)_P \cdots \left( \frac{\partial Q_s}{\partial q_{\alpha_s}} \right)_P \\
 &= \left\{ \frac{\partial(Q)}{\partial(q)} \right\}_{P=\text{const.}}
 \end{aligned}$$

## § 47. ハミルトン=ヤコービの方程式

§ 43 で導入した座標と時間の関数としての作用  $S(q, t)$  について,  $\frac{\partial S}{\partial t} = -H(q, p, t)$  における運動量を  $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$  で置き換えると, Hamilton-Jacobi 方程式

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\{q_i\}, \left\{\frac{\partial S}{\partial q_i}\right\}, t\right) = 0 \tag{47.1}$$

を得る。[これは言わば作用  $S(q, t)$  に対する“場の方程式”である (本稿次節参照).]

■Hamilton-Jacobi の方法 次の手順で力学系の運動を決定できることが示される。

1. Hamilton-Jacobi 方程式の完全解 (独立変数  $q = \{q_1, \dots, q_s\}, t$  と同じ個数の任意定数を含む解) を求める。  $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}, A$  をそのような定数とすると完全解は

$$S = f(t, q; \alpha) + A \tag{47.2}$$

という形を持つ。(Hamilton-Jacobi の方程式は  $S$  の導関数だけを含むため, 任意定数の 1 つ  $A$  は加法的に含まれるから [本稿次節で補足].)

2. 新たに定数  $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_s\}$  を導入して

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \tag{47.4}$$

とおく (根拠は下記)。ここから座標の時間発展

$$q_i = q_i(t; \alpha, \beta)$$

が求まる。

3. 運動量の時間に対する関係は

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$$

によって求められる (右辺の座標には  $q_i = q_i(t; \alpha, \beta)$  を代入する).

■  $H$  が時間に陽によらないとき  $H = E$  (一定のエネルギー) より, 座標の関数としての作用 (43.8) は

$$S(q, t) = S_0(q) - Et \quad (47.5)$$

となる (§ 44). これを式 (47.1) に代入すると, Hamilton-Jacobi 方程式は

$$H\left(\{q_i\}, \left\{\frac{\partial S_0}{\partial q_i}\right\}\right) = E \quad (47.6)$$

と簡略化される.

#### § 47, 式の導出など

■ 式 (47.4) の根拠 完全解 (47.2) における  $\alpha = \{\alpha_i\}$  を新しい運動量とするような, 母関数  $f(t, q; \alpha)$  による正準変換を考え, 新しい座標を  $\beta = \{\beta_i\}$  と書く. すると正準変換の公式 (45.8) は

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, \quad H' = H + \frac{\partial f}{\partial t}$$

を与える. Hamilton-Jacobi 方程式とより, 新しいハミルトニアンは

$$H' = H + \frac{\partial f}{\partial t} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

である. よって新しい変数に対する正準方程式は簡単な形  $\dot{\alpha}_i = 0, \dot{\beta}_i = 0$  を持ち,

$$\alpha_i = \text{const}, \quad \beta_i = \text{const}$$

となる. このとき上式の第 2 式  $\beta_i = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}$ , あるいは式 (47.4):

$$\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$$

は  $2s$  個の定数  $\alpha, \beta$  を用いて, 座標を  $q_i = q_i(t; \alpha, \beta)$  と表せることを意味する.

#### § 47 について

■ Hamilton-Jacobi 方程式について 現実の軌道に対する端点座標  $(q, t)$  の関数としての作用  $S(q, t)$  (Hamilton の主関数) は 1 本の軌道上だけでなく,  $(q, t)$  空間全体で定義されている場のように見なせる. Hamilton-Jacobi 方程式は言わば作用  $S(q, t)$  に対する “場の方程式” である (§ 43 のノート参照).

■ 完全解 (47.2) において任意定数の 1 つが加法的に含まれること Hamilton-Jacobi 方程式は作用  $S(q, t)$  の勾配  $\partial S/\partial q, \partial S/\partial t$  に対する方程式だから, 曲面  $S = S(q, t)$  の形に対する条件を与えるだけで, その絶対的な標高が決まらない. 完全解 (47.2) において任意定数  $A$  が加法的に含まれるのは, このことに対応している.

■完全解から一般解が作られること (pp.187-188 の脚注) 言葉を補いつつまとめよう.  $A$  を  $\alpha$  の任意関数として

$$S = f(t, q; \alpha) + A(\alpha)$$

と書き,  $s$  個の条件

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = 0$$

を設ける. すると  $\alpha_i$  が座標と時間の関数  $\alpha_i = \alpha_i(q, t)$  として得られるので

$$S = f(t, q; \alpha(q, t)) + A(\alpha(q, t))$$

と書ける. ここで  $f$  と  $\alpha$  の関数形は定まっているのに対し  $A(\alpha)$  は任意関数だから, もしこれが Hamilton-Jacobi 方程式を満たすならばこれは一般解である.

さて, 実際に上の関数  $S = S(t, q; \alpha(q, t))$  が Hamilton-Jacobi 方程式を満たすことを示そう. 再び条件  $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = 0$  を用いると,  $S = S(t, q; \alpha(q, t))$  に対して

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial q_i} &= \left( \frac{\partial S}{\partial q_i} \right)_\alpha + \sum_k \left( \frac{\partial S}{\partial \alpha_k} \right)_q \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i} = \left( \frac{\partial S}{\partial q_i} \right)_\alpha = \frac{\partial}{\partial q_i} S(t, q; \alpha = \text{const}), \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)_\alpha + \sum_k \left( \frac{\partial S}{\partial \alpha_k} \right)_q \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} = \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)_\alpha = \frac{\partial}{\partial t} S(t, q; \alpha = \text{const}) \end{aligned}$$

であり, 完全解  $S = S(t, q; \alpha = \text{const})$  は Hamilton-Jacobi 方程式を満たすから,  $S = S(t, q; \alpha(q, t))$  もまた Hamilton-Jacobi 方程式を満たす.

なお一般解ではなく完全解が重要であるのは, 完全解さえ求めれば § 47 の手順で,  $2s$  個の積分定数  $\alpha, \beta$  を含む形で変数  $q, p$  の時間発展を決定できるからであると考えられる.

## § 48. 変数分離

適当な座標の選択の結果, ある座標  $q_1$  とその導関数  $\partial S / \partial q_1$  とが, 他の座標 (あるいは時間) や導関数を含まないそれだけの組合せ  $\phi(q_1, \partial S / \partial q_1)$  の形でのみ, Hamilton-Jacobi 方程式の中に入っているとす:

$$\Phi \left\{ q_2, \dots, t, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial t}, \phi \left( q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1} \right) \right\} = 0. \quad (48.1)$$

このとき完全解を

$$S = S'(q_2, \dots, t) + S_1(q_1) \quad (48.2)$$

と変数分離された形に求めることができる.

■理由 実際, 解 (48.2) を式 (48.1) に代入すると,

$$\Phi \left\{ q_2, \dots, t, \frac{\partial S'}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S'}{\partial t}, \phi \left( q_1, \frac{dS_1}{dq_1} \right) \right\} = 0$$

が恒等的に成り立つことになる. ところが  $q_1$  の変化は関数  $\phi$  だけを変えるので, 関数  $\phi$  は単独で定数となっていなければならない. よって Hamilton-Jacobi 方程式は

$$\begin{aligned} S_1 \text{ に対する式} \quad & \phi \left( q_1, \frac{dS_1}{dq_1} \right) = \alpha_1 = \text{const}, \\ S' \text{ に対する式} \quad & \Phi \left\{ q_2, \dots, t, \frac{\partial S'}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S'}{\partial t}, \alpha_1 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (48.4)$$

に分離される。常微分方程式 (48.4) を積分すると関数  $S_1(q_1)$  が求まる。

特に  $q_1$  が循環座標<sup>\*36</sup>の場合、

$$S = S'(q_2, \dots, t) + \alpha_1 q_1$$

と変数分離される (上式 (48.4) より)。ここでの係数  $\alpha_1$  は、循環座標に対応する運動量  $p_i = \partial S / \partial q_i$  の一定値に他ならない。

保存場に対しては式 (47.5), (47.6) から出発すれば良い。(このとき作用 (47.5) において時間の項  $-Et$  は最初から分離されており、それは《循環座標  $t$  に対する変数分離に対応している。》もし変数分離の手順を繰り返して、すべての座標を分離できたならば、作用は

$$S = \sum_k S_k(q_k; \alpha) - E(\alpha)t$$

という形をとる。

[作用を変数分離された形に求めた後は、§ 47 の手続きを踏めばよい。]

■球座標 球座標  $(r, \theta, \phi)$  を用いると、

$$U = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} \quad (48.8)$$

の形の場合に対して作用は

$$S = -Et + p_\phi \phi + \int \sqrt{\beta - 2mb(\theta) - \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}} d\theta + \int \sqrt{2m[E - a(r)] - \frac{\beta}{r^2}} dr \quad (48.9)$$

と変数分離された形に求まる (任意定数は  $p_\phi, \beta, E$ , 導出は下記)。

■放物線座標 円柱座標  $\rho, \phi, z$  の  $\rho$  と  $z$  の代わりに、これと

$$z = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad \rho = \sqrt{\xi\eta} \quad (48.10)$$

で関係付けられる放物線座標  $\xi, \eta (\geq 0)$  を用いる [座標曲線について本稿次節で補足]。半径

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2} = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$$

を導入すると、放物線座標は

$$\xi = r + z, \quad \eta = r - z$$

と書ける。

このとき

$$U = \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi + \eta} = \frac{a(r + z) + b(r - z)}{2r} \quad (48.15)$$

の形の場合に対して、作用は

$$S = -Et + p_\phi \phi + \int \sqrt{\frac{mE}{2} + \frac{\beta}{2\xi} - \frac{ma(\xi)}{2\xi} - \frac{p_\phi^2}{4\xi^2}} d\xi + \int \sqrt{\frac{mE}{2} - \frac{\beta}{2\eta} - \frac{mb(\eta)}{2\eta} - \frac{p_\phi^2}{4\eta^2}} d\eta \quad (48.16)$$

と変数分離された形に求まる (任意定数は  $p_\phi, \beta, E$ , 導出は下記)。

<sup>\*36</sup> ラグランジアンに陽に含まれない座標のことであり (教科書の初出は§ 14), ハミルトニアンや Hamilton-Jacobi 関数にも陽に含まれない。

■楕円座標 円柱座標  $\rho, \phi, z$  の  $\rho$  と  $z$  の代わりに, これと

$$\rho = \sigma\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}, \quad z = \sigma\xi\eta \quad (48.17)$$

で関係付けられる楕円座標  $\xi, \eta$  ( $\xi \geq 1, -1 \leq \eta \leq 1$ ) を用いる [本稿次節で補足]. 定数  $\sigma$  は変換のパラメータである. ここで  $z$  軸上の座標  $z = \sigma, -\sigma$  の 2 点  $A_1, A_2$  までの距離

$$r_1 = \sqrt{(z - \sigma)^2 + \rho^2}, \quad r_2 = \sqrt{(z + \sigma)^2 + \rho^2}$$

を導入し, ここに上式 (48.17) を代入すると

$$\begin{cases} r_1 = \sigma(\xi - \eta) \\ r_2 = \sigma(\xi + \eta) \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \xi = \frac{r_2 + r_1}{2\sigma} \\ \eta = \frac{r_2 - r_1}{2\sigma} \end{cases} \quad (48.18)$$

を得る. ここから  $\xi = (\text{一定}), \eta = (\text{一定})$  の曲線は, それぞれ  $A_1, A_2$  を焦点とする楕円と双曲線

$$\frac{z^2}{\sigma^2\xi^2} + \frac{\rho^2}{\sigma^2(\xi^2 - 1)} = 1, \quad \frac{z^2}{\sigma^2\eta^2} - \frac{\rho^2}{\sigma^2(1 - \eta^2)} = 1 \quad (72)$$

であることが分かる [本稿次節で補足].

このとき

$$U = \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi^2 - \eta^2} = \frac{\sigma^2}{r_1 r_2} \left\{ a \left( \frac{r_2 + r_1}{2\sigma} \right) + b \left( \frac{r_2 - r_1}{2\sigma} \right) \right\} \quad (48.21)$$

の形の場合に対して, 作用は

$$\begin{aligned} S = & -Et + p_\phi\phi + \int \sqrt{\frac{\beta - 2m\sigma^2\{a(\xi) - E\xi^2\}}{\xi^2 - 1} - \frac{p_\phi^2}{(\xi^2 - 1)^2}} d\xi \\ & + \int \sqrt{-\frac{\beta + 2m\sigma^2\{b(\eta) + E\eta^2\}}{1 - \eta^2} - \frac{p_\phi^2}{(1 - \eta^2)^2}} d\eta \end{aligned} \quad (73)$$

と変数分離された形に求まる (任意定数は  $p_\phi, \beta, E$ ). [これは教科書の式 (48.22) と異なっている. 本稿次節の導出過程を参照.]

## § 48, 式の導出など

■式 (48.9) の導出 ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U, \quad U = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} : (48.8)$$

は時間を陽に含まないで,  $S = S_0(r, \theta, \phi) - Et$  とおける.  $S_0$  に対する Hamilton-Jacobi 方程式は,

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_0}{\partial r} \right)^2 + a(r) + \frac{1}{2mr^2} \left[ \left( \frac{\partial S_0}{\partial \theta} \right)^2 + 2mb(\theta) \right] + \frac{1}{2mr^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial S_0}{\partial \phi} \right)^2 = E.$$

ここで  $\phi$  が循環座標であることを考慮して, 解を

$$S_0 = p_\phi\phi + S_1(r) + S_2(\theta)$$

の形に仮定する。このとき  $S_1(r), S_2(\theta)$  に対する方程式

$$\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 + 2mb(\theta) + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta} = \beta, \quad \frac{1}{2m} \left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + a(r) + \frac{\beta}{2mr^2} = E \quad (74)$$

が得られる [本稿次節で補足]. これを積分して, 作用の式 (48.9) を得る. [この結果から, 実際に  $S_0$  を上式のように変数分離できることが確認される.]

■式 (48.16) の導出 放物線座標を用いると, ラグランジアンは

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi} + \dot{z}^2) - U \\ &= \frac{m}{8} (\xi + \eta) \left( \frac{\dot{\xi}^2}{\xi} + \frac{\dot{\eta}^2}{\eta} \right) - U \end{aligned} \quad (48.13)$$

と表され [本稿次節で確認], ここから運動量は

$$p_\xi = \frac{m}{4\xi} (\xi + \eta) \dot{\xi}, \quad p_\eta = \frac{m}{4\eta} (\xi + \eta) \dot{\eta}, \quad p_\phi = m\xi\eta\dot{\phi} \quad (75)$$

となる. よってハミルトニアンは

$$H = \frac{2}{m} \frac{\xi p_\xi^2 + \eta p_\eta^2}{\xi + \eta} + \frac{p_\phi^2}{2m\xi\eta} + U(\xi, \eta, \phi) \quad (48.14)$$

と書ける [本稿次節で確認].

ここでポテンシャル・エネルギーが式 (48.15) の形に設定されたとすると,  $S = S_0 - Et$  として Hamilton-Jacobi 方程式は

$$\frac{2}{m(\xi + \eta)} \left[ \xi \left( \frac{\partial S_0}{\partial \xi} \right)^2 + \eta \left( \frac{\partial S_0}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{1}{2m\xi\eta} \left( \frac{\partial S_0}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi + \eta} = E$$

となる. 循環座標  $\phi$  は  $p_\phi\phi$  の形に分離されることを踏まえて  $\partial S_0/\partial \phi = p_\phi$  を代入し, さらに両辺に  $m(\xi + \eta)$  を乗じて項を組み直せば,

$$2\xi \left( \frac{\partial S_0}{\partial \xi} \right)^2 + ma(\xi) - mE\xi + \frac{p_\phi^2}{2\xi} + 2\eta \left( \frac{\partial S_0}{\partial \eta} \right)^2 + mb(\eta) - mE\eta + \frac{p_\phi^2}{2\eta} = 0.$$

ここで  $S_0 = p_\phi\phi + S_1(\xi) + S_2(\eta)$  とおくと,  $S_1(\xi), S_2(\eta)$  に対する方程式

$$2\xi \left( \frac{dS_1}{d\xi} \right)^2 + ma(\xi) - mE\xi + \frac{p_\phi^2}{2\xi} = \beta, \quad 2\eta \left( \frac{dS_2}{d\eta} \right)^2 + mb(\eta) - mE\eta + \frac{p_\phi^2}{2\eta} = -\beta \quad (76)$$

が得られる. これを積分して式 (48.16) を得る.

## § 48 について

■ $S_1, S_2$  に対する p.191, l.21,22 の式 (本稿の式 (74)) について 変数分離の結果, Hamilton-Jacobi 方程式は

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{dS_1}{dr} \right)^2 + a(r) + \frac{1}{2mr^2} \left[ \left\{ \left( \frac{dS_2}{d\theta} \right)^2 + 2mb(\theta) \right\} + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta} \right] = E$$

となる. ここで式 (48.4) により [...] の部分を定数  $\beta$  とおけば良い.

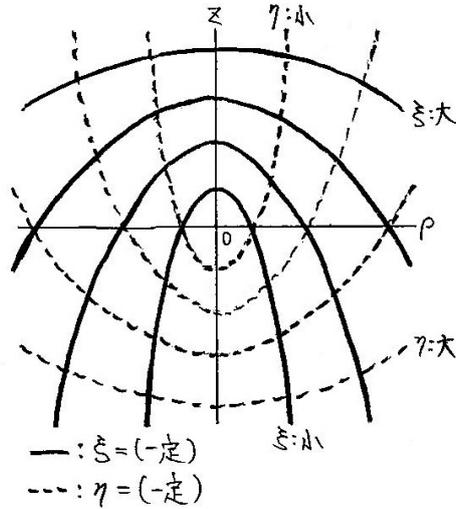


図 80 平面  $\phi = 0$  における  $\xi = (\text{一定})$  の放物線と  $\eta = (\text{一定})$  の放物線 (実際には半平面  $\rho \geq 0$  のみを用いる)

■放物線座標について 式 (48.10) によって導入される放物線座標  $\xi, \eta$  は長さの次元を持っている.

式 (48.10) から  $\xi$  または  $\eta$  を消去すると

$$\rho^2 = \xi(\xi - 2z) = \eta(\eta + 2z), \quad \therefore z = \frac{1}{2} \left( \xi - \frac{\rho^2}{\xi} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\rho^2}{\eta} - \eta \right)$$

となるので, 「 $\xi = \text{一定}$  の面および  $\eta = \text{一定}$  の面は, …… , 2 組の回転放物面 ( $z$  軸を対称軸とする) を表している」 (p.192, 1.5~1.7).  $\phi = 0$  の平面は放物線座標  $\xi, \eta$  によって図 80 のようにパラメトライズされている.

■ラグランジアン (48.13) について

$$\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2} \left\{ \left( \frac{\dot{\xi}\eta + \xi\dot{\eta}}{2\sqrt{\xi\eta}} \right)^2 + \left( \frac{\dot{\xi} - \dot{\eta}}{2} \right)^2 \right\} = \frac{m}{8} \left\{ \left( \frac{\eta}{\xi} + 1 \right) \dot{\xi}^2 + \left( \frac{\xi}{\eta} + 1 \right) \dot{\eta}^2 \right\} = \frac{m}{8}(\xi + \eta) \left( \frac{\dot{\xi}^2}{\xi} + \frac{\dot{\eta}^2}{\eta} \right).$$

■ハミルトニアン (48.14) について

$$\begin{aligned} H &= p_\xi \dot{\xi} + p_\eta \dot{\eta} + p_\phi \dot{\phi} - L \\ &= \frac{m}{8\xi}(\xi + \eta)\dot{\xi}^2 + \frac{m}{8\eta}(\xi + \eta)\dot{\eta}^2 + \frac{m}{2}\xi\eta\dot{\phi}^2 + U(\xi, \eta, \phi) \\ &= \frac{2}{m} \frac{\xi p_\xi^2 + \eta p_\eta^2}{\xi + \eta} + \frac{p_\phi^2}{2m\xi\eta} + U(\xi, \eta, \phi) : (48.14). \end{aligned}$$

■楕円座標について 式 (48.18) によって導入される楕円座標  $\xi, \eta$  は無次元量である.

式 (48.18) を用い, p.193 脚注 1 における楕円, および双曲線の式

$$\frac{z^2}{\sigma^2\xi^2} + \frac{\rho^2}{\sigma^2(\xi^2 - 1)} = 1, \quad \frac{z^2}{\sigma^2\eta^2} - \frac{\rho^2}{\sigma^2(1 - \eta^2)} = 1$$

(本稿の式 (72)) を得る. その焦点の  $z$  座標  $z_0$  は

$$z_0^2 = \sigma^2\xi^2 - \sigma^2(\xi^2 - 1) = \sigma^2, \quad z_0^2 = \sigma^2\eta^2 + \sigma^2(1 - \eta^2) = \sigma^2$$

よりいずれも  $z_0 = \pm\sigma$  である.

■ラグランジアン (48.19) について

$$\begin{aligned}
\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2) &= \frac{m}{2} \left[ \left\{ \sigma \frac{\xi \dot{\xi}(1-\eta^2) - \eta \dot{\eta}(\xi^2 - 1)}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}} \right\}^2 + \left\{ \sigma(\dot{\xi}\eta + \xi\dot{\eta}) \right\}^2 \right] \\
&= \frac{m}{2} \sigma^2 \frac{1}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \left[ \xi^2(1 - \eta^2) \{ \xi^2(1 - \eta^2) + \eta^2(\xi^2 - 1) \} + \dot{\eta}^2(\xi^2 - 1) \{ \eta^2(\xi^2 - 1) + \xi^2(1 - \eta^2) \} \right] \\
&= \frac{m}{2} \sigma^2 (\xi^2 - \eta^2) \left( \frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2 - 1} + \frac{\dot{\eta}^2}{1 - \eta^2} \right), \\
\therefore L &= \frac{m}{2} \sigma^2 (\xi^2 - \eta^2) \left( \frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2 - 1} + \frac{\dot{\eta}^2}{1 - \eta^2} \right) + \frac{m\sigma^2}{2} (\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) \dot{\phi}^2 - U(\xi, \eta, \phi). \quad (48.19)
\end{aligned}$$

■ハミルトニアン (48.20) について ラグランジアン (48.19) に対して, 座標  $\xi, \eta, \phi$  に共役な運動量はそれぞれ

$$p_\xi = m\sigma^2(\xi^2 - \eta^2) \frac{\dot{\xi}}{\xi^2 - 1}, \quad p_\eta = m\sigma^2(\xi^2 - \eta^2) \frac{\dot{\eta}}{1 - \eta^2}, \quad p_\phi = m\sigma^2(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) \dot{\phi}$$

となるので,

$$\begin{aligned}
H &= p_\xi \dot{\xi} + p_\eta \dot{\eta} + p_\phi \dot{\phi} - L \\
&= \frac{m\sigma^2}{2} (\xi^2 - \eta^2) \left( \frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2 - 1} + \frac{\dot{\eta}^2}{1 - \eta^2} \right) + \frac{m\sigma^2}{2} (\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) \dot{\phi}^2 + U(\xi, \eta, \phi) \\
&= \frac{(\xi^2 - 1)p_\xi^2 + (1 - \eta^2)p_\eta^2}{2m\sigma^2(\xi^2 - \eta^2)} + \frac{p_\phi^2}{2m\sigma^2(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} + U(\xi, \eta, \phi) \\
&= \frac{1}{2m\sigma^2(\xi^2 - \eta^2)} \left[ (\xi^2 - 1)p_\xi^2 + (1 - \eta^2)p_\eta^2 + \left( \frac{1}{\xi^2 - 1} + \frac{1}{1 - \eta^2} \right) p_\phi^2 \right]. \quad (48.20)
\end{aligned}$$

■完全解 (73) について 上で求めたハミルトニアン (48.20) と, ポテンシャル・エネルギーの式 (48.21) より, Hamilton-Jacobi 方程式は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2m\sigma^2(\xi^2 - \eta^2)} \left[ (\xi^2 - 1) \left( \frac{\partial S_0}{\partial \xi} \right)^2 + 2m\sigma^2 a(\xi) + (1 - \eta^2) \left( \frac{\partial S_0}{\partial \eta} \right)^2 + 2m\sigma^2 b(\eta) \right. \\
\left. + \left( \frac{1}{\xi^2 - 1} + \frac{1}{1 - \eta^2} \right) \left( \frac{\partial S_0}{\partial \phi} \right)^2 \right] = E
\end{aligned}$$

となる.  $\phi$  は循環座標なので  $S_0$  の中で  $p_\phi \phi$  の形に分離されることに注意すると ( $\frac{\partial S_0}{\partial \phi} = p_\phi$ ),

$$(\xi^2 - 1) \left( \frac{\partial S_0}{\partial \xi} \right)^2 + 2m\sigma^2 \{ a(\xi) - E\xi^2 \} + \frac{p_\phi^2}{\xi^2 - 1} + (1 - \eta^2) \left( \frac{\partial S_0}{\partial \eta} \right)^2 + 2m\{ \sigma^2 b(\eta) + E\eta^2 \} + \frac{p_\phi^2}{1 - \eta^2} = 0$$

と書き換えられる. そこで  $S_0 = S_1(\xi) + S_2(\eta) + p_\phi \phi$  と変数分離すると,  $\beta$  を定数として

$$\begin{aligned}
(\xi^2 - 1) \left( \frac{dS_1}{d\xi} \right)^2 + 2m\sigma^2 \{ a(\xi) - E\xi^2 \} + \frac{p_\phi^2}{\xi^2 - 1} &= \beta, \\
(1 - \eta^2) \left( \frac{dS_2}{d\eta} \right)^2 + 2m\{ \sigma^2 b(\eta) + E\eta^2 \} + \frac{p_\phi^2}{1 - \eta^2} &= -\beta
\end{aligned}$$

とおけるから、式 (48.22) の代わりに本稿の式 (73):

$$S = -Et + p_\phi \phi + \int \sqrt{\frac{\beta - 2m\sigma^2\{a(\xi) - E\xi^2\}}{\xi^2 - 1} - \frac{p_\phi^2}{(\xi^2 - 1)^2}} d\xi + \int \sqrt{-\frac{\beta + 2m\sigma^2\{b(\eta) + E\eta^2\}}{1 - \eta^2} - \frac{p_\phi^2}{(1 - \eta^2)^2}} d\eta$$

が得られると考えられる。

#### § 48, 問題 1

Coulomb 場と一様な場の重ね合せ

$$U = \frac{\alpha}{r} - Fz$$

は式 (48.15) で、

$$a(\xi) = \alpha - \frac{F}{2}\xi^2, \quad b(\eta) = \alpha + \frac{F}{2}\eta^2$$

と設定した場合にあたる。実際、このとき

$$U = \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi + \eta} = \frac{\alpha}{r} + F \frac{\eta^2 - \xi^2}{\eta + \xi} = \frac{\alpha}{r} + \frac{F}{2}(\eta - \xi) = \frac{\alpha}{r} - Fz.$$

この場合の完全解 (48.16) における定数  $\beta$  の意味を調べよう。  $p_\xi = \partial S / \partial \xi, p_\eta = \partial S / \partial \eta$  に注意して、式 (76) の 2 式を辺々引くと

$$\beta = \xi p_\xi^2 - \eta p_\eta^2 - \frac{mF}{4}(\xi^2 + \eta^2) - \frac{mE}{2}(\xi - \eta) + \frac{p_\phi^2}{4} \left( \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\eta} \right)$$

となる。ここに

$$E = \frac{2}{m} \frac{\xi p_\xi^2 + \eta p_\eta^2}{\xi + \eta} + \frac{p_\phi^2}{2m\xi\eta} + \frac{\alpha}{r} - Fz$$

を代入して  $E$  を消去すると、

$$\beta = \frac{2\xi\eta}{\xi + \eta}(p_\xi^2 - p_\eta^2) - \frac{\xi - \eta}{2\xi\eta} p_\phi^2 - \frac{mF}{4}\{\xi^2 + \eta^2 - 2(\xi - \eta)z\} - m\alpha \frac{\xi - \eta}{2r}$$

を得る。右辺の各項の係数はもとの円柱座標を用いて、

$$\frac{2\xi\eta}{\xi + \eta} = \frac{\rho^2}{r^2}, \quad \frac{\xi - \eta}{2\xi\eta} = \frac{z}{\rho^2}, \quad \xi^2 + \eta^2 - 2(\xi - \eta)z = 2(r^2 + z^2) - 4z^2 = 2\rho^2, \quad \frac{\xi - \eta}{2r} = \frac{z}{r}$$

と書き換えられる。次に放物線座標での運動量 (75) を、円柱座標での運動量  $p_\rho = m\dot{\rho}, p_z = m\dot{z}$  で表そう。

$$p_\xi = \frac{m}{4\xi}(\xi + \eta)\dot{\xi} = \frac{mr}{2(r+z)}(\dot{r} + \dot{z}), \quad p_\eta = \frac{m}{4\eta}(\xi + \eta)\dot{\eta} = \frac{mr}{2(r-z)}(\dot{r} - \dot{z})$$

において

$$r^2 = \rho^2 + z^2 \quad \rightarrow \quad mr\dot{r} = m(z\dot{z} + \rho\dot{\rho}) = zp_z + \rho p_\rho$$

なので、

$$p_\xi = \frac{1}{2(r+z)}\{(zp_z + \rho p_\rho) + rp_z\} = \frac{p_z}{2} + \frac{\rho}{2(r+z)}p_\rho, \quad p_\eta = \frac{1}{2(r-z)}\{(zp_z + \rho p_\rho) - rp_z\} = -\frac{p_z}{2} + \frac{\rho}{2(r-z)}p_\rho$$

が得られる。よって  $\beta$  の式において

$$p_\xi^2 - p_\eta^2 = \frac{\rho p_\rho p_z}{2} \left( \frac{1}{r+z} + \frac{1}{r-z} \right) + \frac{\rho^2 p_\rho^2}{4} \left\{ \frac{1}{(r+z)^2} - \frac{1}{(r-z)^2} \right\} = \frac{r p_\rho}{\rho^2} (\rho p_z - z p_\rho)$$

となる。以上より p.195, l.1 の式

$$\beta = -m \left[ \frac{\alpha z}{r} + \frac{p_\rho}{m} (z p_\rho - \rho p_z) + \frac{p_\phi^2}{m \rho^2} z \right] - \frac{m}{2} F \rho^2$$

が導かれる。

右辺第 1 項の  $[\dots]$  内が Lenz ベクトル (15.17):  $\mathbf{L} = \mathbf{v} \times \mathbf{M} + \frac{\alpha \mathbf{r}}{r}$  の  $z$  成分であることは,

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{v} = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{z} \mathbf{e}_z + \rho \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi = \frac{p_\rho}{m} \mathbf{e}_\rho + \frac{p_z}{m} \mathbf{e}_z + \frac{p_\phi}{m \rho} \mathbf{e}_\phi$$

( $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\phi$  は円柱座標方向の単位ベクトル) を代入すると

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{M} &= \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times m \mathbf{v}) = m \{ \mathbf{r} v^2 - \mathbf{v} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \} \\ &= \frac{1}{m} \left\{ \left( \rho p_z^2 - z p_\rho p_z + \frac{p_\phi^2}{\rho} \right) \mathbf{e}_\rho + \left( z p_\rho^2 - \rho p_\rho p_z + \frac{z p_\phi^2}{\rho^2} \right) \mathbf{e}_z - (\rho p_\rho + z p_z) \frac{p_\phi}{\rho} \mathbf{e}_\phi \right\} \end{aligned}$$

となることから確かめられる。

## § 49. 断熱不変量

パラメータ  $\lambda$  によって特徴づけられる 1 次元の有界な運動を考える。  $\lambda$  が一定のときには系は一定のエネルギー  $E$  および一定の周期  $T(E)$  を持つ周期運動をおこなう [§ 11]。系の位相空間上の周期軌道は

$$H(q, p, \lambda) = E \quad \text{i.e.} \quad p = p(q, E, \lambda) \quad (47)$$

で指定される。そこで軌道の 1 周期にわたる積分

$$I \equiv \frac{1}{2\pi} \oint p(q, E, \lambda) dq \quad (49.7)$$

を定義する。すると  $\lambda$  が  $T \left| \frac{d\lambda}{dt} \right| \ll |\lambda|$  の意味でゆっくり (いわゆる断熱的に) 時間変化するときにも、もとの厳密な周期運動における座標  $q$  の全変化に関して評価された式 (49.7) は、 $\lambda$  の 1 次までの近似で一定であることが示される (断熱定理) [証明は本稿次節] [11, pp.423–424]。このため  $I$  は断熱不変量と呼ばれる。

- 運動の周期と角振動数

$$T = 2\pi \frac{\partial I}{\partial E}, \quad (\text{証明は下記}) \quad (49.8)$$

$$\therefore \omega \equiv \frac{2\pi}{T} = \frac{\partial E}{\partial I} \quad [\text{本稿次節で補足}] \quad (49.9)$$

- $I$  は位相平面上の軌跡 (閉曲線) に囲まれた面積 (の  $1/2\pi$  倍)。 (したがって  $I = \frac{1}{2\pi} \int dq dp$  と書ける。)
- 調和振動子に対して

$$I = \frac{E}{\omega}. \quad (\text{証明は下記}) \quad (49.12)$$

→ 断熱定理 ( $I$  の不変性) は、振動子のパラメータがゆっくり変化する際、エネルギー  $E$  が振動数  $\omega$  に比例することを意味する。

§ 49, 式の導出など

■周期の式 (49.8) の導出 Hamilton 方程式  $\dot{q} = \partial H / \partial p$  より

$$dt = \frac{dq}{\partial H / \partial p}, \quad \therefore T = \oint \frac{dq}{\partial H / \partial p}$$

であり, 断熱定理の導出時に見出した関係 (79) を用いてこれを書き換えると,

$$T = \oint \frac{\partial p}{\partial E} dq = 2\pi \frac{\partial I}{\partial E} : (49.8)$$

を得る.

■調和振動子に対する式 (49.12) の導出 調和振動子に対するエネルギー保存則

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = E$$

は, 半軸  $\sqrt{2mE}$ ,  $\sqrt{2E/m\omega^2}$  の楕円軌道を表す. 断熱不変量はその内部の面積 (の  $1/2\pi$  倍) なので,

$$I = \frac{1}{2\pi} \pi \sqrt{2mE} \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} = \frac{E}{\omega} : (49.12).$$

§ 49 について

■断熱という術語について 物理学では, 断熱という言葉がいろいろな意味に使われる. ときにはその間に共通なものを見出すことが困難なこともある [13, p.187].

■断熱定理の証明  $\lambda$  がゆっくり変化すると, 式 (77) を通して系のエネルギーは変化する. 式 (40.5) より,  $\lambda$  のゆっくりとした変化に伴う系のエネルギーの変化速度は

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \quad (49.2)$$

と表される [下記にて補足]. [また式 (49.7) の積分変数  $q$  は  $\lambda$  の変化と無関係な独立変数である.] よって  $I$  の変化率は

$$\frac{dI}{dt} = \oint \left( \frac{\partial p}{\partial E} \frac{dE}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right) \frac{dq}{2\pi} = \oint \frac{d\lambda}{dt} \left( \frac{\partial p}{\partial E} \frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right) \frac{dq}{2\pi} \quad (78)$$

となる<sup>\*37</sup>. 最右辺の被積分関数は  $\lambda$  に比例しているのので,  $\lambda$  の 1 次までの近似では (...) 内の  $\lambda$  および  $E$  を定数, それゆえまた互いに独立なパラメータと見なして良い. そこで式 (77):  $H(q, p(q, E, \lambda), \lambda) = E$  を  $\lambda$  と  $E$  で微分して,

$$\frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial E} = 1 \quad (79)$$

を得る. 第 1 式に  $\partial p / \partial E$  を掛けて第 2 式を考慮すると,

$$0 = \frac{\partial p}{\partial E} \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{\partial p}{\partial E} \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{\partial p}{\partial E} \frac{\partial H}{\partial \lambda}$$

となって, 上式 (78) 最右辺はゼロであることが分かる. よって断熱定理  $dI/dt = 0$  が示された [11, pp.423–424].

<sup>\*37</sup>  $\lambda$  の時間変化が周期運動と相関しないことを要求すれば, 最右辺の  $d\lambda/dt$  を 1 周期にわたる平均値に置き換えて積分の外に出せる.

■ $\dot{E}$  の式 (49.2) について  $\partial H/\partial t$  は  $H(p, q, \lambda)$  に陽に含まれる  $t$  に関する微分だから,  $p, q$  を通した微分はおこなわれない:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt}.$$

根拠となる式 (40.5) を再び導くような形で

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q} \frac{dq}{dt}}_{\text{正準方程式より消える}} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt}$$

としても良い.

■ $H$  の  $\lambda$  による微分 (p.197, l.11 の式) について  $q$  が  $\lambda$  に依らないから  $\frac{\partial H}{\partial q} \frac{dq}{d\lambda}$  の項は現れない (上式 (79)). 実際  $q$  は与えられた  $\lambda$  に対する位相空間の周期軌道上の位置を指定する独立変数である.

■「分母の被積分関数を  $\partial p/\partial E$  の形に書きなお」せること (p.197 下から 7,6 行目) について p.196 下から 3,2 行の Hamilton 方程式における微分  $\partial H/\partial p$  は, 座標  $q$  はもちろん, パラメター  $\lambda$  を固定しておこなわれている. 一方, 微分  $\partial p/\partial E$  においても共通の変数  $q, \lambda$  が固定されているから

$$\left( \frac{1}{\partial H(p, q; \lambda)/\partial p} \right)_{q, \lambda} = \left( \frac{\partial p(q; E, \lambda)}{\partial E} \right)_{q, \lambda}.$$

あるいは等価的に  $H(p(q; E, \lambda), q; \lambda) = E$  を  $E$  で微分して,

$$\frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial E} = 1, \quad \therefore \frac{1}{\partial H/\partial p} = \frac{\partial p}{\partial E}. \quad (\text{上式 (79)})$$

■式 (49.9):  $\partial E/\partial I = \omega$  について  $I = I(\lambda, E)$  を  $E$  について解くと  $E = E(\lambda, I)$  となるから

$$\frac{1}{(\partial I/\partial E)_\lambda} = \left( \frac{\partial E}{\partial I} \right)_\lambda$$

とできると考えられる.

■断熱定理の具体例 ピストンを引きシリンダー内の気体を断熱膨張させると圧力が低下する. これに対応して図 81 において粒子は動く壁 (その位置が外部座標  $\lambda$  で表される) と弾性衝突するたびに運動量  $2m\dot{\lambda}$  を失い, 位相空間に図 81 のような軌跡を描く. 壁が止まっていれば粒子は一定のエネルギーを持ちその往復運動は厳密な周期運動となるため, 粒子の運動に比べて壁がゆっくり動くならこれは § 49 で考えている系の時間発展の具体例となる. このとき単位時間に粒子は動く壁と  $v/2\lambda$  回衝突するため,

$$\dot{p} = -2m\dot{\lambda} \times \frac{v}{2\lambda} = -p \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$$

だけ運動量が変化する. これは

$$\frac{d}{dt}(p\lambda) = \dot{p}\lambda + p\dot{\lambda} = 0$$

と書き換えられるため, 断熱定理  $p\lambda = \text{const}$  が成り立っている. なお, この例は断熱定理の説明 [14, pp.72-73] に着想を得た.

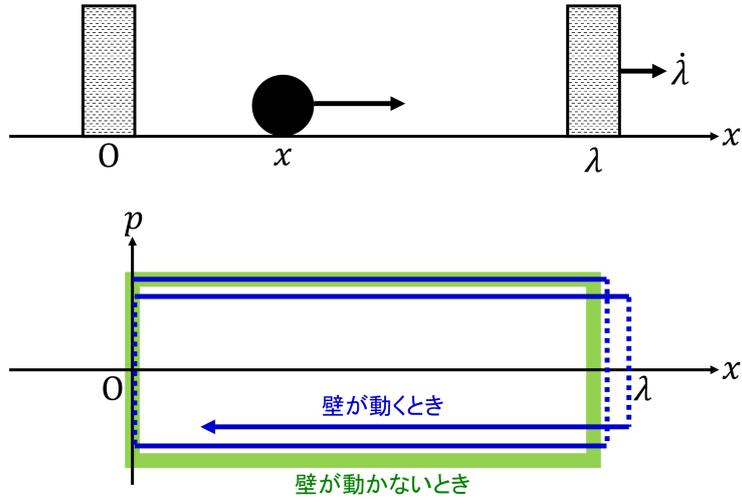


図 81 ピストンを模した動く壁  $x = \lambda$  と,  $x = 0$  に固定された壁との間を往復する粒子

## § 50. 正準変数

時間に依存するパラメータ  $\lambda$  を持つ系に対して《簡約された作用》 $S_0$  を次のように定義する. まず  $\lambda$  が一定の場合の運動に対して

$$I(E, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \oint p(q, E; \lambda) dq, \quad S_0(q, E; \lambda) = \int p(q, E; \lambda) dq$$

を計算する. 次にここから変数  $I$  を用いて,  $S_0 = S_0(q, I; \lambda)$  と表す. 最後に  $S_0(q, I; \lambda)$  における  $\lambda$  を与えられた関数  $\lambda(t)$  に置き換える. このように定義された《簡約された作用》 $S_0$  は, 本当の簡約された作用とは一致しない.

さて, この  $S_0$  を母関数として  $I$  が新しい《運動量》となるような正準変換

$$q, p, H \quad \rightarrow \quad w, I, H'$$

をおこなうことができる [本稿次節で補足]. 変数  $I, w$  は正準変数と呼ばれ,  $I$  は作用変数,  $w$  は角変数と呼ばれる. 正準変換の一般公式

$$H' = H + \frac{\partial S_0}{\partial t} = E(I; \lambda) + \Lambda \dot{\lambda}, \quad \Lambda \equiv \left( \frac{\partial S_0}{\partial \lambda} \right)_{q, I}$$

により Hamilton 方程式は

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{\partial H'}{\partial w} = -\left( \frac{\partial \Lambda}{\partial w} \right)_{I, \lambda} \dot{\lambda}, \\ \dot{w} &= \frac{\partial H'}{\partial I} = \omega(I; \lambda) + \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial I} \right)_{w, \lambda} \dot{\lambda}, \quad \omega(I; \lambda) \equiv \left( \frac{\partial E}{\partial I} \right)_{\lambda} \end{aligned}$$

となる.

特に  $\lambda$  が一定のとき  $I$  は一定であり,  $w$  は 1 周期経つごとに  $\omega T = 2\pi$  だけ増加する. 同じ時間  $T$  のあいだに  $S_0$  は  $\oint p dq = 2\pi I$  だけ増加する.

## § 50 について

■  $S_0$  を母関数に選べば良いこと 「変数  $p, q$  の正準変換を,  $I$  が新しい《運動量》となるように導入しよう. この場合, 母関数の役割は,  $q$  および  $I$  の関数として表(わ)された《簡約された作用》 $S_0$  がはたす」(p.199, 1.2~1.4) について, このことは  $(\partial S_0 / \partial q)_E = p$  が正準変換の公式 (50.2):

$$p = \frac{\partial S_0(q, I; \lambda)}{\partial q}$$

を再現することから正当化される.

■  $H'$  が  $w$  に依らないこと 「 $H'$  は…… $E(I)$  である」(p.199, 1.19) について, 一般にハミルトニアンは座標と運動量の関数  $H'(w, I)$  であるが,  $I = I(E)$  より  $E = E(I)$  と書けるので, これは  $w$  に依らない. 以上, 一定のパラメータ  $\lambda$  に対する依存性を省略した.

■ 式 (50.4), 式 (50.5) の訂正

$$\begin{aligned} \text{式 (50.4) 第 1 式において} & \quad I \rightarrow \dot{I}, \\ \text{式 (50.5) 最右辺において} & \quad w(I) \rightarrow \omega(I). \end{aligned}$$

■ 式 (50.11) における  $\omega = (\partial E / \partial I)_\lambda$  について 式 (49.9) 参照.

## § 51. 断熱不変量の一定さの精度

$$\begin{aligned} \Lambda &= \left( \frac{\partial S_0}{\partial \lambda} \right)_{q, I} \text{ は } w \text{ の周期関数} \\ \rightarrow \text{1 周期にわたる平均 } \bar{\dot{I}} &= - \overline{\left( \frac{\partial \Lambda}{\partial w} \right)_{I, \lambda}} \dot{\lambda} = 0 \text{ (} I \text{ の断熱不変性)}. \end{aligned}$$

断熱不変量がどのような精度で保存されるかを調べよう.  $\Lambda$  は変数  $w$  について周期  $2\pi$  の周期関数であることに注意すると

$$\Lambda = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{ilw} \Lambda_l \quad (51.3)$$

と Fourier 展開できる. このとき運動方程式  $\dot{I} = - \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial w} \right)_{I, \lambda} \dot{\lambda}$  より  $t = -\infty$  から  $t = \infty$  における  $I$  の変化量は

$$\Delta I = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Lambda}{\partial w} \dot{\lambda} dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \left( 2 \operatorname{Re} \sum_{l=-\infty}^{\infty} i l e^{ilw} \Lambda_l \right) \frac{\dot{\lambda} dw}{\dot{w}} \quad (51.4-5)$$

と表される. 最右辺の積分が  $w$  の実軸上に特異点を持たないものと仮定して積分路を複素  $w$  平面上の上半面内に移すと, この積分への主要な寄与は実軸に最も近い特異点  $w_0$  の近傍から生じる. そこで  $l = 1$  の項だけを考えて

$$\Delta I \sim \exp(-\operatorname{Im} w_0) \quad (51.6)$$

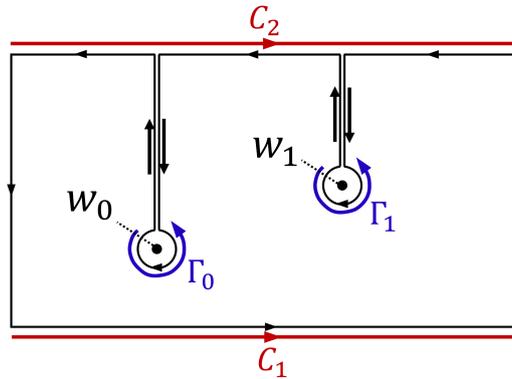


図 82 複素  $w$  平面上の積分路 (教科書の図 56(p.203) を改変)

と評価できる. よって断熱不変量の一定さの精度  $\Delta I$  を見積もるには, 特異点  $w_0$  を求めれば良い.  $\dot{w} = \omega(I, \lambda)$  と近似すると

$$\Delta I \sim \operatorname{Re} \int i e^{i w} \frac{\dot{\lambda} dw}{\omega(I, \lambda)}$$

となるから,  $w_0$  の候補として関数  $\dot{\lambda}(t)$  および  $1/\omega(t)$  の特異点を挙げられる.

## § 51 について

■ 「 $S_0$  は  $2\pi I$  の整数倍だけ増加する」 (§ 51, l.4) について これは  $\lambda$  を一定と近似した場合の結果である (式 (50.6) 参照).

■ 「積分 (51.5) への主要な寄与は, この点の近傍から生ずる」 (p.202 一番下の行~p.203, l.1) について 教科書の図 56 (p.203) が示唆しているように, 図 82 のように実軸  $C_1$  とこれに平行な直線  $C_2: \operatorname{Im} w = W (> 0)$ , 特異点  $w_k (k = 0, 1, \dots)$  を反時計回りに囲う閉曲線  $\Gamma_k$  を考える. 無限遠の経路

$$w = w_1 + i w_2, \quad w_1 = \pm \infty, \quad 0 \leq w_2 \leq W$$

に沿う積分はゼロと仮定すると

$$0 = \oint = \int_{C_1} - \int_{C_2} - \sum_k \oint_{\Gamma_k}, \quad \therefore \int_{C_1} = \int_{C_2} + \sum_k \oint_{\Gamma_k}$$

となる. ところが  $C_2$  を実軸から十分遠方にとれば (すなわち  $W \gg 1$  とすれば),  $C_2$  上で  $e^{i w} \sim e^{-l W} \ll 1$  とできるから, 特異点周りの経路  $\Gamma_k$  に沿う積分が重要となる. その各々は因数  $\exp(-l \operatorname{Im} w_k)$  を含む寄与をするから, 特にこれが最大となる  $k = 0$  の点  $w_0$  の近傍  $\Gamma_0$  に沿う積分が主要な項となる. (その他の項の寄与は  $\exp(-l \operatorname{Im} w_0)$  に比べて, さらに指数関数的に小さい.)

なお矩形の経路の代わりに半円の経路  $C: w = R e^{i \theta} (0 < \theta < \pi)$  を考え,  $R \rightarrow \infty$  とすれば,

$$0 = \oint = \int_{C_1} - \int_C - \sum_k \oint_{\Gamma_k}, \quad \therefore \int_{C_1} = \int_C + \sum_k \oint_{\Gamma_k}$$

であり,  $C$  上で  $|e^{i w}| = e^{-l \operatorname{Im}(w)} = e^{-l R \sin \theta} \rightarrow 0$ .

■式 (51.6) について 素朴には  $e^{ilw}$  に極の値  $w = w_0$  を代入した結果として、直観的に期待される。この点をもう少し丁寧に考えよう。積分 (51.5) に対する級数 (51.3) の第  $l$  項の寄与は

$$\int f_l(w)e^{ilw}dw$$

という形をしており、簡単のために  $w_0$  を  $f_l(w)$  の 1 位の特異点と仮定して Laurent 展開を

$$f_l(\xi) = \frac{a_{-1}}{w - w_0} + a_0 + a_1(w - w_0) + \dots$$

と書く。関数  $e^{ilw}$  は  $w = w_0$  で正則なので、このとき  $w_0$  は積  $F(\xi) \equiv f_l(w)e^{ilw}$  の 1 位の特異点でもある [2, p.176]。よって積分への極  $w_0$  の寄与は

$$\begin{aligned} 2\pi i \text{Res}[F(w), w_0] &= 2\pi i \lim_{w \rightarrow w_0} [(w - w_0)F(w)] \\ &= 2\pi i \lim_{w \rightarrow w_0} (a_{-1} + a_0(w - w_0) + \dots) e^{ilw} = 2\pi i a_{-1} e^{ilw_0} \sim e^{-l \text{Im } w_0} : (51.6) \end{aligned}$$

と求まる。

■p.203 脚注 3 について 「(49.4) によれば」とあるのは、正しくは式 (49.9):  $\partial E / \partial I = \omega$  のことであると考えられる。これは  $\lambda$  が一定の場合の式であり、これを用いることができるのは  $\lambda_+ = \lambda_-$  の場合を仮定しているからであると考えられる。

## § 52. 条件付きの周期運動

多自由度を持ち、すべての座標について有界な運動をする孤立系 (したがって時間に依存するパラメータ  $\lambda$  を含まない) を考える。

$$S_0 = \sum_i S_i(q_i), \quad S_i = \int p_i dq_i$$

と変数分離できるものと仮定する。このとき 1 次元運動の場合と同様に

$$\langle\langle \text{作用変数} \rangle\rangle I_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i, \quad \langle\langle \text{角変数} \rangle\rangle w_i = \frac{\partial S_0(q, I)}{\partial I_i}$$

を導入すると

$$I_i = \text{const}, \quad w_i = \frac{\partial E(I)}{\partial I_i} t + \text{const}$$

となり、 $q_i$  の有界な運動の、区間全体にわたる《前方》および《後方》への変化に対して  $w_i$  は  $2\pi$  だけ変化する。よって系の状態  $(p, q)$  の任意の 1 価関数  $F(p, q)$  は  $w_i$  のそれぞれについて周期  $2\pi$  の周期関数となるから、

$$\begin{aligned} F &= \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{l_s=-\infty}^{\infty} A_{l_1 \dots l_s} e^{i(l_1 w_1 + \dots + l_s w_s)} \\ &= \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{l_s=-\infty}^{\infty} A'_{l_1 \dots l_s} \exp \left\{ it \left( l_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} + \dots + l_s \frac{\partial E}{\partial I_s} \right) \right\} \end{aligned}$$

と Fourier 展開される。このためすべての基本振動数  $\omega_i = \partial E / \partial I_i$  が通約可能 (すなわち互いに有理数比を成す) でない限り  $F(p, q)$  は、特に座標  $q$  および運動量  $p$  そのものは周期関数とならず、もとの状態  $(p, q)$  に

はもどらない。しかし十分に大きい時間の後には、この状態と任意に近い状態へもどり得ることを証明できる(条件付きの周期運動)。

- 基本振動数  $\omega_i = \partial E / \partial I_i$  が通約可能 (縮重がある) とき :

$$n_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} = n_2 \frac{\partial E}{\partial I_2}.$$

- $I_1, I_2$  はエネルギーの中に和  $n_2 I_1 + n_1 I_2$  の形でのみ含まれる  
 $(\because n_1 \frac{\partial}{\partial I_1} (n_2 I_1 + n_1 I_2) = n_2 \frac{\partial}{\partial I_2} (n_2 I_1 + n_1 I_2) = n_1 n_2).$   
 $\rightarrow$  系のエネルギーが依存している独立な量 ( $I_i$ ) の数が減少する.
- 新たに  $w_1 n_2 - w_2 n_1$  の三角関数として系の状態の 1 価関数である運動の積分が作られる.  
 $\leftrightarrow$  変数分離が可能となる座標の選択は 1 通りでない.

- 変化するパラメーター  $\lambda(t)$  を持つ場合

$$\overline{\dot{I}_i} = - \frac{\overline{\partial \Lambda}}{\partial w_i} \dot{\lambda} = 0 \quad \rightarrow \quad I_i \text{ は断熱不変量.}$$

ここで  $\overline{\frac{\partial \Lambda}{\partial w_i}}$  は  $\lambda$  が一定の条件つき周期運動に関する平均なのでゼロになることに注意した。

変数分離できる系

$\leftrightarrow$   $s$  個の 1 価の運動の積分  $I_i$  を持つ.

$\rightarrow$  位相空間における軌跡は長い時間の後に、 $s$  次元多様体 (超平面) を埋めつくす.

変数分離できない系

$\leftrightarrow$  1 価の運動の積分は  $s$  個よりも減る.

$\rightarrow$  位相空間における軌跡は長い時間の後に、 $s$  よりも小さな次元を持つ領域を (全体あるいは部分的に) 埋める.

## § 52 について

■ p.205 下から 4 行目の運動方程式 第 1 式において  $I_i \rightarrow \dot{I}_i$  と訂正する.

■  $F$  の式 (52.9) が周期関数となる条件

- 「しかしすべての振動数 (52.10) は、一般には、それらのうちの 1 つの整数倍 (または有理数倍) ではないから、和全体は厳密には周期関数ではない。」 (p.206 下から 4~2 行)
- 「もしすべての  $s$  個の振動数が通約可能ならば……運動が厳密に周期的であり、すべての粒子の軌跡が閉じることは明らかである。」 (p.207, 1.9~1.11)

について、完全縮約の場合には

$$n_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} = \cdots = n_{s-1} \frac{\partial E}{\partial I_{s-1}} = n_s \frac{\partial E}{\partial I_s}$$

より、 $F$  の式 (52.9) の各項の振動数は基本振動数  $\omega_i = \partial E / \partial I_i$  の有理数倍

$$l_1 \omega_1 + \cdots + l_{s-1} \omega_{s-1} + l_s \omega_s = \left( \frac{n_1}{n_s} l_1 + \cdots + \frac{n_{s-1}}{n_s} l_{s-1} + l_s \right) \omega_s$$

となって、 $F$  は周期関数となる。

■式 (52.14) が運動の積分であること

$$\begin{aligned}w_1 n_2 - w_2 n_1 &= \left( n_2 \frac{\partial E}{\partial I_1} - n_1 \frac{\partial E}{\partial I_2} \right) t + \text{const} && (\because \text{式 (52.7)}) \\ &= \text{const.} && (\because \text{式 (52.12)})\end{aligned}$$

## 付録 A 直交変換

この付録は § 23 における基準座標への変換と、§ 32 における慣性テンソルの主軸変換に関する補足である。

### A.1 直交変換と反変ベクトル成分の変換則

原点を共有する 2 つの直交座標系を考え、それぞれの基底を  $\{\mathbf{e}_i\}, \{\mathbf{e}'_i\}$  と書く。また、共通の位置ベクトル  $\mathbf{x}$  で表される、空間に与えられた同一点をそれぞれの座標系で見たとときの座標を  $x_i, x'_i$  と書く。このとき  $a_{ij} \equiv \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j$  として座標  $x_i$  と基底  $\{\mathbf{e}_i\}$  は共通の変換則

$$x'_i = \sum_j a_{ij} x_j, \quad \mathbf{e}'_i = \sum_j a_{ij} \mathbf{e}_j \quad (80)$$

に従う (付録 A.4 参照)。

第 1 式を  $x_k$  で微分すると

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \sum_j a_{ij} \delta_{jk} = a_{ik} \equiv \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_k \quad (81)$$

となる。これは次のことを意味する。

- 線形変換  $x'_i = \sum_j a_{ij} x_j$  の変換係数  $a_{ij}$  が作る行列

$$O \equiv (a_{ij}) = \left( \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \right)$$

は Jacobi 行列に他ならない。

- 変換則 (80) は反変ベクトル成分の変換則に他ならない [5, pp.256–257] [15, pp.126–127].
  - 微分演算子  $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$  は共変ベクトルだから (付録 A.4 参照),  
基底ベクトル  $\mathbf{e}_i = \partial_i \mathbf{x}$  もまた共変ベクトルとなるはずである [1, pp.26–27].  
しかし付録 A.2 で見るように、直交座標系を用いる限り反変ベクトル成分の変換則は、共変ベクトル成分の変換則に一致してしまう。
  - このことは次の能動変換と受動変換の関係と何ら矛盾しない。  
すなわち基底にある変換をすると、  
座標系に固定した視点からは空間に固定したベクトルがその逆変換で移されて見える。
    - \* (例 1) 駅に向かう者にとっては、逆に駅が自分の方に近づいて来るように見える。
    - \* (例 2) 回転する椅子に座ると、周りの風景が逆回転して見える。

なお、上式 (81) で 2 つの座標系の役割を入れ替えた式

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \quad (82)$$

が成り立つ。

## A.2 直交変換に対する Newton の運動方程式の共変性

物理法則を両辺が同じ種類のテンソルで書かれた方程式で表せば、これは座標変換に対して形を変えず共変性の要請を満たす [15, pp.53-54]. ここで Newton の運動方程式の共変性を取り上げよう. ポテンシャル  $V$  を持つ保存力場の下で運動する質量  $m$  の粒子に対し、Newton の運動方程式は

$$m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (83)$$

である. この式の左辺は反変ベクトル成分であるのに対し、右辺は共変ベクトル成分である (付録 A.4 参照). 従ってこれが一般の座標変換に対して共変的であることは保証されない. しかし用いる座標系を直交座標系に限れば、運動方程式 (83) は形を変えないと考えられる. 実際このとき、式 (81)、式 (82) より

$$\frac{\partial x'_j}{\partial x_i} = \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \quad (84)$$

なので、反変ベクトル成分の変換則は、共変ベクトル成分の変換則に一致してしまう:

$$x'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} x_j = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} x_j.$$

このため運動方程式 (83) の両辺は同じ変換則に従い、新しい座標系でも式 (83) の形の運動方程式

$$m\ddot{x}'_i = -\frac{\partial V}{\partial x'_i}$$

が成り立つことになる. なお、上式 (84) は行列  $O$  が直交行列であること

$$(O^T)_{ij} = (O^{-1})_{ij}$$

を意味している.

■斜交座標系への変換に対して Newton の運動方程式は共変的でないこと さらに図 83 のような、直交座標系 (原点  $O$ ,  $x^1, x^2$  軸) から斜交座標系 (原点  $O'$ ,  $x'^1, x'^2$  軸) への変換に対して、Newton の運動方程式  $ma^i = -\partial_i V$  が共変的でないことを確かめる.

反変ベクトル  $\mathbf{v}$  の変換則は  $v'^1 = (v^x \mathbf{e}_1 + v^y \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}'_1$  等より

$$v'^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}v^1 + \frac{1}{2}v^2, \quad v'^2 = v^2$$

なので

$$\partial'_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\partial_1 + \partial_2, \quad \partial'_2 = \partial_2$$

となる. よって  $F_1 = -\partial_1 V = ma^1$ ,  $F_2 = -\partial_2 V = ma^2$  のとき

$$F'_2 = F_2 = ma^2 = ma'^2$$

は成り立つけれど、

$$F'_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}F_1 + F_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}ma^1 + ma^2 \neq \frac{\sqrt{3}}{2}ma'^1 + \frac{1}{2}ma'^2 = ma'^1$$

である.

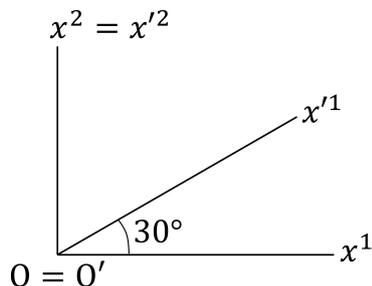


図 83 直交座標系 (原点  $O$ ,  $x^1, x^2$  軸) と斜交座標系 (原点  $O'$ ,  $x'^1, x'^2$  軸)

### A.3 主軸変換とテンソルの変換則

慣性テンソル  $I_{ij}$  を  $(i, j)$  成分に持つ行列  $I = (I_{ij})$  を考えるとこれは対称行列なので、適当な直交行列  $O$  を用いて

$$I' = OIO^{-1}$$

と対角化できる。これは適当な座標系において  $I = (I_{ij})$  が対角行列となることを意味する。実際、座標変換  $x'_i = \sum_j a_{ij}x_j$  における変換係数の成す行列

$$O \equiv (a_{ij}) = \left( \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \right)$$

を用い、2 階テンソルの変換則は

$$I' = OIO^{-1}$$

と書ける。ここで式 (84) により、 $(2, 0), (1, 1), (0, 2)$  テンソルの変換則が一致することを思い出そう。

### A.4 直交変換 (補足)

座標  $x_i$  と基底  $\{e_i\}$  の変換則 (80) は次のように確かめられる。

$$\begin{aligned} e'_i &= \sum_j (e'_i \cdot e_j) e_j = \sum_j a_{ij} e_j, \\ \mathbf{x} &= \sum_j x_j e_j = \sum_{i,j} x_j (e_j \cdot e'_i) e'_i, \quad \therefore x'_i = \sum_j (e_j \cdot e'_i) x_j = \sum_j a_{ij} x_j \end{aligned}$$

運動方程式 (83) の両辺の変換則について、以下の量は数学的に変換則が定まっている [1, pp,26-27].

$$\begin{aligned} \text{座標の微分 } dx_i \text{ は反変ベクトル: } \quad dx'_i &= \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} dx_j \quad \Leftarrow \quad \text{全微分} \\ \text{微分演算子 } \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ は共変ベクトル: } \quad \partial'_i &= \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \partial_j \quad \Leftarrow \quad \text{合成関数の微分} \end{aligned}$$

## 付録 B 正準変換

### B.1 準備

正準変数をまとめて

$$\boldsymbol{\eta} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)^T$$

と書こう ( $T$  は転置を表す).

$$J \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 : n \times n \text{ 零行列}, \quad 1 : n \times n \text{ 単位行列}$$

を導入すると, Hamilton の運動方程式 (正準方程式) は

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = J \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} \quad (85)$$

とまとめられる. このような表示をシンプレクティックな記法という [16, pp.478–480].

Poisson 括弧  $\{, \}$  を用いれば, 正準方程式は

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \{\boldsymbol{\eta}, H\}$$

とも表される.

■Poisson 括弧のシンプレクティックな表現  $\boldsymbol{\eta}, J$  を用いれば, Poisson 括弧の定義は

$$\{u, v\} \equiv \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} = \frac{\partial u}{\partial \eta_\alpha} J_{\alpha\beta} \frac{\partial v}{\partial \eta_\beta} \quad (86)$$

と書き換えられる ( $\alpha, \beta = 1, \dots, 2n$  で和をとる). 実際, 第 2 の等号は

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \eta_\alpha} J_{\alpha\beta} \frac{\partial v}{\partial \eta_\beta} &= \frac{\partial u}{\partial \eta_i} J_{i, n+j} \frac{\partial v}{\partial \eta_{n+j}} + \frac{\partial u}{\partial \eta_{n+i}} J_{n+i, j} \frac{\partial v}{\partial \eta_j} \quad (\because J_{ij} = 0, J_{n+i, n+j} = 0) \\ &= \frac{\partial u}{\partial q_i} \delta_{ij} \frac{\partial v}{\partial p_j} + \frac{\partial u}{\partial p_i} (-\delta_{ji}) \frac{\partial v}{\partial q_j} \\ &= \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \end{aligned}$$

と確かめられる. 上式 (86) は行列表記では

$$\{u, v\} = \left( \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right)^T J \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\eta}} \quad (87)$$

と書ける [16, p.540].

■正準変換と母関数 新しい正準変数

$$\boldsymbol{\zeta} \equiv (Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)^T, \quad Q_i = q_i + \delta q_i, \quad P_i = p_i + \delta p_i$$

への無限小正準変換

$$\boldsymbol{\eta} \rightarrow \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\eta} + \delta \boldsymbol{\eta}$$

を考える.  $\varepsilon$  を変換の無限小パラメータとすると, この変換の母関数は

$$F = \sum_i q_i P_i + \varepsilon G(q, P, t)$$

という形をとる (この  $F(q, P, t)$  は § 45 の  $\Phi$  に対応). 実際

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} = P_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} = p_i + \delta p_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial F}{\partial P_i} = q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}$$

なので,

$$\delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}, \quad \delta q_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} \simeq \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} \quad (88)$$

とすれば母関数  $F$  に対する条件 (45.8):

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F}{\partial P_i}$$

が満たされる. 条件式 (88) は

$$\delta \eta = \varepsilon \int \frac{\partial G}{\partial \eta} \quad (89)$$

と書き換えられる.  $G$  の引数  $P$  を  $p$  に置き換えて, 代わりに関数  $G(q, p, t)$  を用いても構わない ( $\varepsilon$  の 1 次までの近似で式 (88) は保持されるから) [16, pp.536–538]. 母関数  $F$  において,  $G$  は恒等変換からのズレを担っていることになる.

## B.2 Poisson 括弧と無限小正準変換 [16, pp.550–566]

系の時間発展に伴う観測量  $u(p_i(t), q_i(t), t)$  の時間変化率は

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \{u, H\}$$

と表されるので (式 (42.3)), 保存量  $u$  に対しては

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{H, u\} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

が成り立つ. 特に  $u$  が時間に陽に依らない量である場合には,  $\{H, u\} = 0$  である (式 (42.4)). 量子力学では, 交換関係  $[u, H] = 0$  が対応する.

$G$  を母関数とする無限小正準変換 (89):

$$\delta \eta = \varepsilon \int \frac{\partial G}{\partial \eta}$$

を考える ( $\varepsilon$  は無限小パラメーター). 公式 (86) より, これは

$$\delta \eta = \varepsilon \{ \eta, G \} \quad (90)$$

と書き換えられる.

上式 (90) の確認  $\varepsilon \{ \eta_\alpha, G \} = \varepsilon \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \eta_\beta} J_{\beta\gamma} \frac{\partial G}{\partial \eta_\gamma} = \varepsilon J_{\alpha\gamma} \frac{\partial G}{\partial \eta_\gamma} = \delta \eta_\alpha$ .

また能動的な無限小正準変換  $\boldsymbol{\eta} \rightarrow \boldsymbol{\eta} + \delta\boldsymbol{\eta}$  に伴う関数  $u(\boldsymbol{\eta})$  の変化は

$$\delta u = \varepsilon\{u, G\} \quad (91)$$

で与えられる。これは  $G$  が生成する無限小変換と言われる。

上式 (91) の確認

$$\begin{aligned} \delta u &= \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}} \cdot \delta\boldsymbol{\eta} \\ &= \varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right)^T \mathbb{J} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\eta}} \quad (\because \text{公式 (89)}) \\ &= \varepsilon\{u, G\}. \quad (\because \text{公式 (87)}) \end{aligned}$$

式 (91) は正準変換 (90) を特別な場合として含んでいる。

■具体例 式 (89) は,  $\varepsilon = dt$  とし, 母関数を  $G = H$  ととると

$$\delta\boldsymbol{\eta} = \dot{\boldsymbol{\eta}}dt = d\boldsymbol{\eta}$$

を与える。すなわち時間間隔  $dt$  における系の運動は, ハミルトニアンを母関数とする正準変換である。

次に 1 粒子系を考え, 一般座標  $q$  をそのデカルト座標  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$  にとる。このとき式 (89) は

$$\delta x_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}, \quad \delta p_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial x_i}$$

となる。

$G(q, p) = p_i$  ととると,

$$\delta x_k = \varepsilon \delta_{ki}, \quad \delta p_i = 0$$

となる。これは運動量  $\mathbf{p}$  が空間並進の生成子であることを意味している。

また軌道角運動量  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  と方向単位ベクトル  $\mathbf{n}$  に対して  $G = \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}$  とおくと,

$$\delta \mathbf{r} = \varepsilon \mathbf{n} \times \mathbf{r}, \quad \delta \mathbf{p} = \varepsilon \mathbf{n} \times \mathbf{p}$$

となる。これは  $\mathbf{n}$  軸周りの角度  $\varepsilon$  回転に伴う変化に一致しており, 角運動量  $\mathbf{L}$  が空間回転の生成子であることを意味している。

確認  $G = \mathbf{L} \cdot \mathbf{n} = \varepsilon_{ijk} x_j p_k n_i$  より,

$$\delta x_l = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_l} = \varepsilon \varepsilon_{ijl} x_j n_i = \varepsilon (\mathbf{n} \times \mathbf{r})_l, \quad \delta p_l = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial x_l} = -\varepsilon \varepsilon_{ilk} p_k n_i = \varepsilon \varepsilon_{lik} n_i p_k = \varepsilon (\mathbf{n} \times \mathbf{p})_l.$$

■有限の変換  $\alpha = 0$  で恒等変換と連続的に繋がる, パラメーター  $\alpha$  で特徴付けられる有限の変換を考える。すると式 (91) で無限小パラメーターを  $\varepsilon \rightarrow d\alpha$  と置き換えた式

$$\frac{du}{d\alpha} = \{u, G\} \quad (92)$$

が成り立つ。Poisson 括弧の入れ子  $\{\{u, G\}, G\}$ , etc. も正準変数の関数なので, 上式 (92) と同様の関係

$$\frac{d^2 u}{d\alpha^2} = \frac{d}{d\alpha} \{u, G\} = \{\{u, G\}, G\}, \quad \frac{d^3 u}{d\alpha^3} = \frac{d}{d\alpha} \{\{u, G\}, G\} = \{\{\{u, G\}, G\}, G\}, \quad \text{etc.}$$

を満たさなければならないことに注意すると、微分方程式 (92) の解は形式的に

$$\begin{aligned} u(\alpha) &= u_0 + \alpha \left. \frac{du}{d\alpha} \right|_0 + \frac{\alpha^2}{2!} \left. \frac{d^2u}{d\alpha^2} \right|_0 + \frac{\alpha^3}{3!} \left. \frac{d^3u}{d\alpha^3} \right|_0 + \cdots \\ &= u_0 + \alpha \{u, G\}_0 + \frac{\alpha^2}{2!} \{\{u, G\}, G\}_0 + \frac{\alpha^3}{3!} \{\{\{u, G\}, G\}, G\}_0 + \cdots \\ &= ue^{\hat{G}\alpha} \Big|_0 \end{aligned}$$

と書ける。ただし式の 1,2 行目における添字のゼロは、値を  $\alpha = 0$  において評価することを意味する。この結果は量子力学において、有限の変換の演算子が、無限小変換の生成子の指数関数で表されることを想起させる。

例として角運動量  $L_z = xp_y - yp_x$  による有限パラメータ  $\theta$  の変換を考える。関数  $u(\alpha)$  として変換後の位置  $\mathbf{r}(\theta)$  の  $x$  座標をとると、

$$\{x, L_z\} = -y, \quad \{y, L_z\} = x$$

より、

$$\begin{aligned} x(\theta) &= x_0 + \alpha \{x, L_z\}_0 + \frac{\theta^2}{2!} \{\{x, L_z\}, L_z\}_0 + \frac{\theta^3}{3!} \{\{\{x, L_z\}, L_z\}, L_z\}_0 + \cdots \\ &= x_0 \left( 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots \right) - y_0 \left( \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots \right) \\ &= x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta \end{aligned}$$

となる。これは期待される通り、 $z$  軸周りの角度  $\theta$  回転後の位置を表している。

### B.3 シンプレクティック条件

本節では任意の正準変換が「シンプレクティック条件」を満たすことを示す。(これは § 45, § 46 で有用となる。)

■「制限された正準変換」 シンプレクティックな記法を用いて、正準変数  $\boldsymbol{\eta}$  に対する Hamilton 方程式は

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}}$$

と書ける (式 (85))。ここで変数変換  $\boldsymbol{\eta} \rightarrow \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta})$  が正準変換であるためには、その定義より新しい変数  $\boldsymbol{\zeta}$  もまた同じ形の式

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \quad (93)$$

を満たさねばならない。ただしここでは正準変換の母関数が時間に依らない「制限された正準変換」を仮定して、新しいハミルトニアンとしても  $H$  をとった (ただし  $H$  は  $\boldsymbol{\zeta}$  で表されていると見る)。ここで Jacobi 行列

$$\mathbf{M} = (M_{\alpha\beta}) = \left( \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \eta_\beta} \right)$$

を定義すると、

$$\dot{\zeta}_\alpha = M_{\alpha\beta} \dot{\eta}_\beta = M_{\alpha\beta} J_{\beta\gamma} \frac{\partial H}{\partial \eta_\gamma} = M_{\alpha\beta} J_{\beta\gamma} M_{\delta\gamma} \frac{\partial H}{\partial \zeta_\delta} = (\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^T)_{\alpha\delta} \frac{\partial H}{\partial \zeta_\delta}$$

となるので ( $T$  は転置を表す)、制限された正準変換の条件 (93) は

$$\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^T = \mathbf{J} \quad (94)$$

を与える。これは正準変換に対する（したがって  $M$  に対する）シンプレクティック条件と呼ばれる。また、上式 (94) を満たす  $M$  をシンプレクティック行列という [16, pp.532–534]。[シンプレクティック条件 (94) は  $J$  の正準変換に対する不変性のように見ることができる\*38.]

■一般の正準変換 実にはシンプレクティック条件は、時間をパラメーターに含む変換

$$\zeta = \zeta(\eta, t)$$

が正準変換であるための条件にもなっている。そのことを示すにあたり、変換

$$\eta \rightarrow \zeta(t) \quad (95)$$

(以降、引数  $\eta$  を省略) が正準変換であるならば、特に

$$\eta \rightarrow \zeta(t_0) \quad (96)$$

も正準変換であり、したがって正準変換の定義より

$$\zeta(t_0) \rightarrow \zeta(t) \quad (97)$$

も正準変換となることに注目しよう。  $t_0$  は単なる変数だから、正準変換 (96) はシンプレクティック条件を満たすことが既に分かっている。このとき正準変換 (97) がシンプレクティック条件を満たすならば、一般の正準変換 (95) もシンプレクティック条件を満たすことが示される。実際、式 ((95),(96),(97) に応じた Jacobi 行列

$$M_a = \left( \frac{\partial \zeta_\alpha(t)}{\partial \eta_\beta} \right), \quad M_b = \left( \frac{\partial \zeta_\alpha(t_0)}{\partial \eta_\beta} \right), \quad M_c = \left( \frac{\partial \zeta_\alpha(t)}{\partial \zeta_\beta(t_0)} \right)$$

を定義すると  $M_a = M_c M_b$  である。よって  $M_b, M_c$  をシンプレクティック行列とすると、

$$M_a J M_a^T = (M_c M_b) J (M_b^T M_c^T) = M_c J (M_b^{-1})^T M_b^T M_c^T = M_c J M_c^T = J \quad (98)$$

となって、確かに  $M_a$  もシンプレクティック行列であることが言える。ただし第 2 の等号では、シンプレクティック条件 (94):  $M J M^T = J$  の両辺に右から  $(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$  を掛けた関係

$$M J = J (M^{-1})^T$$

が、  $M = M_b$  に対して成り立つことを用いた。よって式 (97) の形の正準変換がシンプレクティック条件を満たすことが証明できれば、目的は達成される [16, pp.535–537]。

■無限小正準変換 そのためには、無限小正準変換

$$\zeta(t_0) \rightarrow \zeta(t_0 + dt) \quad (99)$$

がシンプレクティック条件を満たすことを示せば十分である。実際、有限の変換 (97) は無限小変換 (99) の繰り返しによって得られるので、このとき上記の議論 (式 (98) の箇所) と同じ理由で、有限の変換 (97) もシンプレクティック条件を満たすからである。

ところが一般に、無限小の正準変換 (89):

$$\eta \rightarrow \zeta = \eta + \delta\eta, \quad \delta\eta = \varepsilon J \frac{\partial G}{\partial \eta} \quad (\varepsilon: \text{無限小パラメーター}, G: \text{母関数})$$

\*38 これは Lorentz 変換に対して Minkowski 計量が不変であることを想起させる。

(付録 B) はシンプレクティック条件を満たすことが次のように示される．考えている変換に対する Jacobi 行列成分は

$$M_{\alpha\beta} = \frac{\partial\zeta_\alpha}{\partial\eta_\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \varepsilon J_{\alpha\gamma} \frac{\partial^2 G}{\partial\eta_\beta \partial\eta_\gamma}$$

であり， $\varepsilon$  の 1 次までの近似で

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} J_{\beta\gamma} (M^T)_{\gamma\delta} &= \left( \delta_{\alpha\beta} + \varepsilon J_{\alpha\mu} \frac{\partial^2 G}{\partial\eta_\beta \partial\eta_\mu} \right) J_{\beta\gamma} \left( \delta_{\gamma\delta} + \varepsilon J_{\delta\nu} \frac{\partial^2 G}{\partial\eta_\gamma \partial\eta_\nu} \right) \\ &\simeq J_{\alpha\delta} + \varepsilon J_{\alpha\gamma} J_{\delta\nu} \frac{\partial^2 G}{\partial\eta_\gamma \partial\eta_\nu} + \varepsilon J_{\alpha\mu} J_{\beta\delta} \frac{\partial^2 G}{\partial\eta_\beta \partial\eta_\mu} \end{aligned}$$

となる．最右辺第 3 項は，ダミー添字を  $\mu \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \nu$  と置き換え， $J_{\nu\delta}$  の反対称性を用いると，ちょうど第 2 項を打ち消すことが見て取れる：

$$\varepsilon J_{\alpha\mu} J_{\beta\delta} \frac{\partial^2 G}{\partial\eta_\beta \partial\eta_\mu} = \varepsilon J_{\alpha\gamma} J_{\nu\delta} \frac{\partial^2 G}{\partial\eta_\gamma \partial\eta_\nu} = -\varepsilon J_{\alpha\gamma} J_{\delta\nu} \frac{\partial^2 G}{\partial\eta_\gamma \partial\eta_\nu}.$$

よってシンプレクティック条件

$$MJM^T = J$$

が満たされる（これは特に無限小変換 (99) に対しても正しい）．

以上より任意の正準変換（時間をパラメーターに含んでいても良い）はシンプレクティック条件を満たす [16, pp.538–539]．（なお逆にシンプレクティック条件を満たす変換は正準変換であることも証明できる [1, pp.296–298]. ）

## 付録 C Frenet-Serret の公式

§ 44 の問題における式 (70) の補足として, Frenet-Serret (フレネ-セレ) の公式について簡単な説明を行う.  
 まず曲線に沿う線要素  $d\mathbf{r}$  を自分自身の長さ  $ds$  で割ると, 接単位ベクトル

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

を得る.

また線要素  $ds$  を曲率半径  $\rho$ , 中心角  $d\theta$  の円弧の一部と見なすと, 図 84 より

$$d\mathbf{t} = \mathbf{n}d\theta, \quad ds = \rho d\theta$$

であり ( $\mathbf{n}$  は方向単位ベクトル), 2 式を辺々割って, 第 1 の公式

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n}, \quad \kappa \equiv \frac{1}{\rho} : \text{曲率} \quad (100)$$

を得る.

次に振率 (れいりつ)  $\tau$  に関する公式に移る. 振率とは曲線に沿って単位長さ進んだときの陪法線

$$\mathbf{b} \equiv \mathbf{t} \times \mathbf{n}$$

の角度変化  $\tau = |d\mathbf{b}/ds|$  である.  $d\mathbf{b}/ds$  の向きを調べよう.

$$\begin{cases} b^2 = 1 \rightarrow \mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{ds} = 0 \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{d}{ds}(\mathbf{t} \times \mathbf{n}) = \cancel{(\kappa \mathbf{n}) \times \mathbf{n}} + \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds} \end{cases}$$

より  $d\mathbf{b}/ds$  は  $\mathbf{b}$  と  $\mathbf{t}$  に垂直なので, 第 2 の公式

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n} \quad (101)$$

を得る. 右辺の負号は図 85 から理解される.

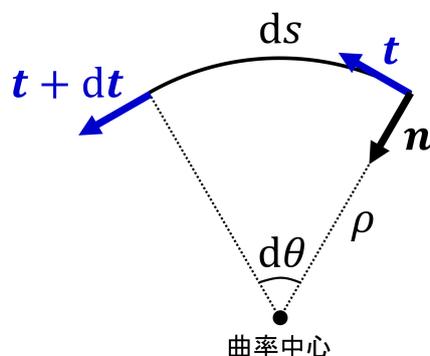


図 84 Frenet-Serret の公式 (100) の説明

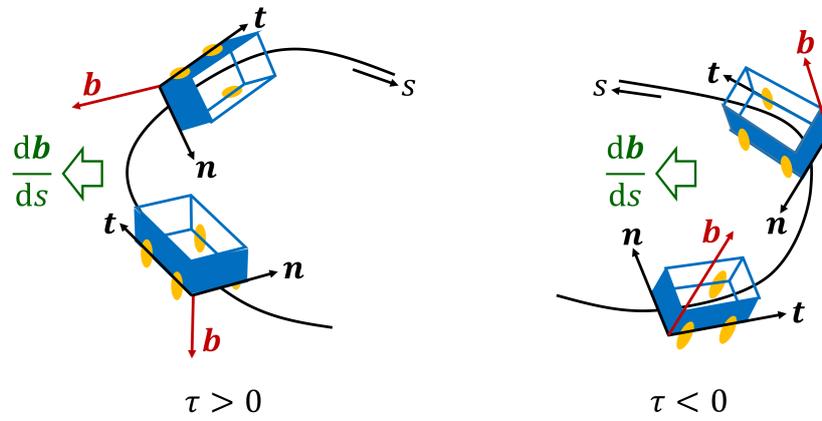


図 85 レールに沿うトロッキの運動と Frenet-Serret の公式 (101)

式 (100), 式 (101) より, 第 3 の公式

$$\begin{aligned}
 \frac{dn}{ds} &= \frac{d}{ds}(\mathbf{b} \times \mathbf{t}) = (-\tau \mathbf{n}) \times \mathbf{t} + \mathbf{b} \times (\kappa \mathbf{n}) \\
 &= -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}
 \end{aligned}
 \tag{102}$$

を得る.

方向単位ベクトル  $\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}$  の弧長  $s$  による微分公式 (100),(101),(102) を合わせて Frenet-Serret の公式という.

## 付録 D Liouville の定理

§ 46 では位相体積の正準変換に対する不変性から、その特例として Liouville の定理が証明された。ここでは文献 [17, pp.68–72] にならった Liouville の定理の直接的証明を載せる。以下の証明は Hamilton の正準方程式に基づいており、それ故、必ずしも粒子系を想定する必要はなく、またデカルト座標に限らず、一般座標と共役な運動量に対しても適用できる。

一般に  $n$  次元空間の動点  $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$  が速度場

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{X})$$

に導かれて運動するとき、動点の集合に固定した領域  $\Delta(t)$  の体積  $|\Delta(t)|$  の時間変化率は

$$\frac{d}{dt}|\Delta(t)| = \int_{\Delta(t)} d^n X \operatorname{div} \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{f} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial X_k} \quad (103)$$

で与えられる。これは速度場のわき出しが体積の膨張率となることを表しており、直観的にもっともらしい。実際に上式 (103) が成り立つことを付録 D.1 で証明する。

さて、 $N$  粒子系の位相空間としてまずは  $n = 6N$  次元の  $\Gamma$  空間を考えよう。 $a (= 1, \dots, N)$  番目の粒子の位置と運動量をそれぞれ  $\mathbf{r}_a, \mathbf{p}_a$  とすると、系の状態は空間座標と運動量の組

$$\mathbf{X} = (q, p) = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$$

を座標とする  $\Gamma$  空間の 1 点として表される。ここで Hamilton の正準方程式

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, 3N)$$

(ただし  $H$  は系のハミルトニアン) に従う複数の動点から成る  $\Gamma$  空間の領域  $\Gamma(t)$  を考えると、今の場合

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \sum_{i=1}^{3N} \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = \sum_{i=1}^{3N} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0$$

が対応するので、 $d|\Gamma(t)|/dt = 0$  となる。すなわち位相空間の体積は不変である (Liouville の定理)。

次に粒子間相互作用がないとして、同一のハミルトニアン  $H$  によって記述される  $N$  粒子系を  $n = 6$  次元の  $\mu$  空間  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  において考える。このとき  $\Gamma$  空間で考えた点の集合は異なる系を表していたのに対し、 $\mu$  空間における複数の点は現実の個々の粒子と見なされる。ただし  $N$  個の粒子は密に分布しており、 $\mu$  空間を運動する流体の塊と見なせるものとし、その体積を  $\mu(t)$  とする。するとやはり

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial x_i} \right) = 0, \quad \therefore \frac{d}{dt}|\mu(t)| = 0$$

となって、 $\mu$  空間の位相体積も不変である。実際、これは形式的には  $\Gamma$  空間の体積変化率を、特に 1 粒子系に対して書いた式と見なせる。

■力が速度に依る場合 実は個々の粒子に作用する力が粒子の速度に依存する場合、Liouville の定理は一般には成り立たない。このことを付録 D.2 で確かめる。上記の Liouville の定理の証明と一見矛盾する結果となるのは次の事情による。すなわち力が速度 (運動量) に依存するとき、粒子の正準運動量は力学的運動量とは異なり得る。とことが Hamilton 方程式における運動量変数は正準運動量であって力学的運動量ではないから、空間座標と力学的運動量によって張られる位相空間の体積に対して、上記の証明は適用できない。

速度に依存する力の重要な例として、荷電粒子が磁場から受ける Lorentz 力が挙げられる。実は Lorentz 力に対しては、結果的に Liouville の定理が成り立つことを付録 D.3 で示す。

## D.1 体積変化率の公式 (103) の証明

まず一般に  $n \times n$  の行列  $A$  と単位行列  $E$  に対して、

$$\det(E + tA) = 1 + t\text{Tr}A + O(t^2) \quad (104)$$

が成り立つ [17, pp.70–71]。実際、 $\varepsilon^{1\dots n} = 1$  を満たす反対称テンソル  $\varepsilon^{i_1\dots i_n}$  を用いて行列式を定義に従って計算すると、

$$\begin{aligned} & \det(E + tA) \\ &= \varepsilon^{i_1\dots i_n} (E + tA)_{1i_1} \cdots (E + tA)_{ni_n} \\ &= \varepsilon^{i_1\dots i_n} \delta_{1i_1} \cdots \delta_{ni_n} \\ &\quad + \varepsilon^{i_1\dots i_n} \{ (A_{1i_1} \delta_{2i_2} \cdots \delta_{ni_n}) + (\delta_{1i_1} A_{2i_2} \delta_{3i_3} \cdots \delta_{ni_n}) + \cdots + (\delta_{1i_1} \cdots \delta_{n-1, i_{n-1}} A_{ni_n}) \} t + O(t^2) \\ &= \varepsilon^{1\dots n} + (\varepsilon^{i_1 2 \cdots n} A_{1i_1} + \varepsilon^{1 i_2 3 \cdots n} A_{2i_2} + \cdots + \varepsilon^{1 \cdots (n-1) i_n} A_{ni_n}) t + O(t^2) \\ &= 1 + \varepsilon^{1\dots n} (A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn}) t + O(t^2) \\ &= 1 + (\text{Tr}A) t + O(t^2) \end{aligned}$$

となる。

ここで動点の時刻  $t_0$  における初期位置  $\mathbf{X}$  から時刻  $t = t_0 + \Delta t$  における位置  $\mathbf{X}(t)$  への変化を座標変換と見なして、体積を

$$|\Delta(t)| = \int_{\Delta(t_0)} \frac{\partial(\mathbf{X}(t))}{\partial(\mathbf{X})} d^n X \quad (105)$$

と書く。上記の公式 (104) を適用すると、上式右辺における Jacobian は

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{X}(t))}{\partial(\mathbf{X})} &= \det \left( E + \left( \frac{\partial f^i(\mathbf{X})}{\partial X^j} \right) \Delta t + O(\Delta t^2) \right) \\ &= 1 + \text{Tr} \left( \frac{\partial f^i(\mathbf{X})}{\partial X^j} \right) \Delta t + O(\Delta t^2) \\ &= 1 + (\text{div} \mathbf{f}) \Delta t + O(\Delta t^2) \end{aligned}$$

と計算される。よって式 (103):

$$\left. \frac{d}{dt} |\Delta(t)| \right|_{t=t_0} = \int_{\Delta(t_0)} (\text{div} \mathbf{f}) d^n X$$

を得る。

なお  $n = 3$  次元空間では、流体の有限の領域  $V$  にわたる速度場  $\mathbf{v}$  の積分は発散定理により

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{v}) d^3x = \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

と書き換えられる (ただし  $S$  は  $V$  の表面,  $d\mathbf{S}$  は面積要素ベクトル). これは右辺を見ると分かるように, 確かに流体  $V$  の体積変化を表している.

## D.2 力が速度に依る場合

$6N$  次元の  $\Gamma$  空間における動点  $\mathbf{X}(t) = (q, p)$  に対して, 付録 D.1 の体積 (105) における Jacobian を直接的に評価しよう. 各粒子の質量を  $m$ , 位置を  $\mathbf{x}$ , 運動量を  $\mathbf{p}$  とし, 粒子に作用する力を  $\mathbf{F}$  と書く (ここで粒子を指定する添字は省略している). まず簡単のために運動量の非相対論的表式  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  を利用すると,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \frac{\mathbf{p}(t_0)}{m} \Delta t + O(\Delta t^2), \quad \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t_0) + \mathbf{F}(t_0) \Delta t + O(\Delta t^2)$$

であり, Jacobi 行列は

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial q(t)}{\partial q(t_0)} & \frac{\partial q(t)}{\partial p(t_0)} \\ \frac{\partial p(t)}{\partial q(t_0)} & \frac{\partial p(t)}{\partial p(t_0)} \end{pmatrix} = 1 + A \Delta t + O(\Delta t^2), \quad A \equiv \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\partial p} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial p} \end{pmatrix}$$

となる. ただし各シンボル  $(\partial q(t)/\partial q(t_0)), \dots$  はそれぞれ  $3N \times 3N$  の行列であり, 例えば  $\frac{\partial F}{\partial p}$  については, 各粒子に対して定義される  $3 \times 3$  の行列

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial p_j} \end{pmatrix}$$

が  $N$  個, 対角部分に並んでいる. 付録 D.1 で示した公式 (104) を適用すると, Jacobian は

$$J = \frac{\partial(q(t), p(t))}{\partial(q(t_0), p(t_0))} = 1 + \sum_{N \text{ 粒子}} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial F_k}{\partial p_k} \Delta t + O(\Delta t^2)$$

と計算される. すると粒子に働く力が

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial F_k}{\partial p_k} = 0$$

を満たさない限り, 位相空間を運動する領域の体積は不変に保たれない. 特に運動量  $\mathbf{p}$  に依らない力  $\mathbf{F}$  に対しては, 条件  $\sum_{k=1}^3 \frac{\partial F_k}{\partial p_k} = 0$  が満たされるので, 位相体積は不変となる (Liouville の定理).

同じ事情は相対論的力学においても成り立つ. 粒子の 4 元運動量を  $p = (p^0, \mathbf{p})$ ,  $\mathbf{F}$  を運動量の座標時間による微分  $d\mathbf{p}/dt$  と等置される力とすると, 座標で測った粒子の速度は  $\mathbf{v} = c\mathbf{p}/p^0$  なので,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \frac{c\mathbf{p}(t_0)}{p^0} \Delta t + O(\Delta t^2), \quad \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t_0) + \mathbf{F}(t_0) \Delta t + O(\Delta t^2)$$

となる. すると同様の表記で, やはり

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{c\mathbf{p}}{p^0} \right) \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial p} \end{pmatrix}, \quad J = \det(E + A \Delta t) + O(\Delta t^2) = 1 + \sum_{N \text{ 粒子}} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial F_k}{\partial p_k} \Delta t + O(\Delta t^2)$$

が得られる\*39.

\*39 ただしここでは符号系  $(-+++)$  を持つ計量テンソルを想定して, 反変ベクトルの空間成分の添字を下付きにしてある.

### D.3 Lorentz 力

電荷  $e$  が磁束密度  $\mathbf{B}$  から受ける Lorentz 力

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

に対しては、付録 D.2 で見た条件  $\sum_{k=1}^3 \frac{\partial F_k}{\partial p_k} = 0$  が満たされるので、Liouville の定理は結果的に正しい。実際、粒子の速度の非相対論的な表式  $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$  に対して、このことは次のように確かめられる。

$$F_k = \varepsilon_{krs} \frac{p_r}{m} B_s, \quad \therefore \frac{\partial F_k}{\partial p_i} = \varepsilon_{krs} \frac{\delta_{ir}}{m} B_s = \varepsilon_{kis} \frac{B_s}{m}, \quad \therefore \frac{\partial F_k}{\partial p_k} = \varepsilon_{kks} \frac{B_s}{m} = 0.$$

相対論的力学においても、同じ結果が得られる。 $\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  は運動量の座標時間による微分  $d\mathbf{p}/dt$  と等置される通常の力の正しい表式となっており、単に座標で測った速度を相対論的表式  $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$  に置き換えれば良い。すると

$$\frac{\partial F_i}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} (\varepsilon_{ijk} v_j B_k) = c\varepsilon_{ijk} \left( \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{p_j}{p^0} \right)$$

の最右辺において

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \frac{p_j}{p^0} = \frac{\delta_{ij}}{p^0} + p_j \left\{ -\frac{1}{(p^0)^2} \right\} \frac{p_i}{p^0} = \frac{\delta_{ij}}{p^0} - \frac{p_i p_j}{(p^0)^3} \quad (\because p^0 = \sqrt{(mc)^2 + \mathbf{p}^2})$$

は添字  $i, j$  に関して対称であり、 $\varepsilon_{ijk}$  は添字  $i, j$  に関して反対称なので、 $\frac{\partial F_i}{\partial p_i} = 0$  となる。

## 参考文献

- [1] 山本義隆, 中村孔一, 2013, 朝倉物理学大系 1 解析力学 I, 株式会社朝倉書店, 東京.
- [2] 矢野健太郎, 石原繁, 2013, 基礎解析学 (改訂版), 株式会社裳華房, 東京.
- [3] ファインマンほか, 2014, ファインマン物理学 I (坪井忠二訳), 株式会社岩波書店, 東京.
- [4] 江沢洋, 中村孔一, 山本義隆, 2022, 演習詳解 力学 [第 2 版], 株式会社 筑摩書房, 東京.
- [5] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, 2015, ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 場の古典論 (原書第 6 版)(恒藤敏彦, 広重徹訳), 東京図書株式会社, 東京.
- [6] ゴールドスタインほか, 2008, 古典力学 (上) 原著第 3 版 (矢野忠ほか訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [7] 佐武一郎, 2017, 数学選書 1 線型代数学 (新装版), 株式会社裳華房, 東京.
- [8] ランダウ=リフシッツ『統計物理学 第 1 部』.
- [9] 江沢洋, 中村孔一, 山本義隆, 演習詳解 力学 [第 2 版], 株式会社 日本評論社, 東京.
- [10] 小出昭一郎, 2014, 力学 物理テキストシリーズ 1, 株式会社岩波書店, 東京.
- [11] 山本義隆, 中村孔一, 2012, 朝倉物理学大系 2 解析力学 II, 株式会社朝倉書店, 東京.
- [12] L.D. ランダウ, E.M. リフシッツ, 2009, ランダウ=リフシッツ物理学小教程 力学・場の理論 (水戸巖, 恒藤敏彦, 廣重徹訳), 株式会社筑摩書房, 東京.
- [13] ファインマンほか, 2012, ファインマン物理学 II (富山小太郎訳), 株式会社岩波書店, 東京.
- [14] 中村伝, 1997, 統計力学 物理テキストシリーズ 10, 株式会社岩波書店, 東京.
- [15] 内山龍雄, 2014, 相対性理論 物理テキストシリーズ 8, 株式会社岩波書店, 東京.
- [16] ゴールドスタインほか, 2009, 古典力学 (下) 原著第 3 版 (矢野忠ほか訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [17] 香取眞理, 2016, 裳華房テキストシリーズ-物理学, 非平衡統計力学, 株式会社裳華房, 東京.

## 謝辞

§ 11, 問題 2 の (b),(c) について, 友人に計算を教えていただきました. 心からの感謝を表明いたします.