

今井功 『流体力学』

本稿は流体力学の教科書

いまい いさお
今井 功, 2003, 流体力学 物理テキストシリーズ 9, 株式会社岩波書店, 東京

を, 要点と途中計算の分離した見通しの良い自己完結的テキストへと再構成し, さらに補足・考察を加えたノートである. ただし本稿は教科書の内容をほぼ網羅しているものの, 内容を多少, 取捨選択してある. さらに本稿には筆者の誤りや勘違いが潜んでいるかもしれないことをあらかじめ断っておく. 言うまでもなく, 原著を当てるに越したことはない.

なお本稿の他にも理論物理の各種ノートを以下のページで公開している.

<http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/>

目次

第 I 部 完全流体の力学	3
第 1 章 流体力学の基礎方程式	3
第 2 章 縮まない流体の渦無し運動	31
第 3 章 2 次元の渦無し運動	52
第 4 章 3 次元の渦無し運動	78
第 5 章 渦運動	88
第 6 章 水の波	104
第 II 部 粘性流体と縮む流体の力学	126
第 7 章 実在流体の力学	126
第 8 章 粘性流体の運動	137
第 9 章 高速気流	157
付録 A 微分形式に対する Stokes の定理の使い方	185
付録 B 無限小振幅波 (§ 32–§ 38) まとめ	190
付録 C テンソル	193
付録 D 弾性体の理論	198

まえがき

- 流体 …… 液体と気体 (容易に形を変え, ‘流れる’)
- 流体力学 …… 連続物体の近似
 - 一辺の長さ 10^{-3}cm の立方体の空気は無微小 [の点粒子] として扱えるけれど, 10^7 個程度の多数の分子を含んでいる [→ 流体粒子 (p.9 脚注も参照)]
 - 希薄気体 …… [連続物体の仮定が当てはまらず] 気体分子運動論が必要
→ 「希薄気体の力学」
 - 連続物体の仮定が当てはまる条件 (目安)
流れの代表的な長さが気体分子の平均自由行程の数倍以上
- 流体の厳密な定義: 流体は自由に変形する
 - ↔ 静止流体の応力は垂直応力のみであり, 互いに押し合う向きを持つ (圧力)
 - 実際, 流体が自由に変形するとき,
 - 接線応力があれば流体は面に沿って流れる [静止流体に矛盾 (背理法)]
 - 垂直応力が張力であれば, 流体はその面で裂ける [静止流体に矛盾 (背理法)]
- 運動している流体は接線応力を持ち得る → 粘性
完全流体 …… 粘性を無視した仮想的な流体
- 縮まない流体 (近似) …… 運動中の密度が一定 [一様不変] の流体
 - 気体も縮まない流体として扱える場合がある
 - 液体も音波のような密度変化が本質的となる問題を考える場合には, 縮まない流体として扱えない

第 I 部

完全流体の力学

第 I 部では完全流体を扱う。

第 1 章 流体力学の基礎方程式

§ 1 流れを表す量

■完全流体の各点の圧力は、その点を通る平面の向きによらない 完全流体の微小要素 [長さ a 程度とする] に対する運動方程式

$$(\text{質量}) \times (\text{加速度}) = (\text{圧力の総和}) + (\text{体積に比例する力})$$

において

- 圧力は面積に比例し、
- 左辺の (質量) \times (加速度) は体積に比例する。

体積に比例する項 [$\sim a^3$] を面積に比例する項 [$\sim a^2$] に比べて無視すると、圧力のつり合い

$$(\text{圧力の総和}) = 0$$

に帰す。これは図 1 の三角柱の流体部分について、点 P を通る 2 つの側面 PA, PB に働く圧力 p_A, p_B が等しいこと

$$p_A \sin \theta = p_B \sin \theta, \quad \therefore p_A = p_B$$

を意味する。

■流れの状態が分かるとはどういうことか 流体の各点で

- 流体の速度 (3 成分)
- 熱力学的に独立な 2 変数

の合計 5 つの量が定まれば、流れの状態が分かったと言える。

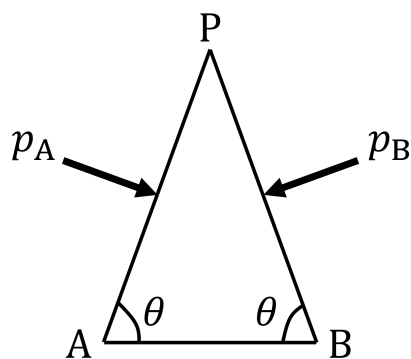


図 1 点 P を頂点とする微小な二等辺三角形 PAB (教科書の図 1.1(p.7))

§ 1 について

■「完全流体では、……圧力であるが」 (§ 1, 1.1,2 について) 一般に流体内の面を介して働く力は、面に接する成分を有する。ところがこのような接線応力は摩擦に対応するため、粘性を無視する完全流体は法線応力のみを持つことになる。さらに法線応力として張力を考えなければ、完全流体に働く応力は圧力のみとなる(まえがき参照)。

■「プリズム形の流体部分」(p.7, 1.9) について これは流体に固定した領域であると同時に、空間に固定した領域としても考えられる。両者は瞬間的に一致している。実際、圧力を考えている側面 PA, PB は空間に固定されているけれど、2面に働く圧力のつり合いは、瞬間的にそのプリズム形の領域を占めていた流体要素の運動方程式から得られている。§ 3 において運動方程式を見出す際に考えられる「領域 V を占める流体」についても同様の指摘ができる。

§ 2 運動の調べ方

■Lagrange の方法 系の典型的な長さに比べれば十分に小さく、質点として扱えるけれど、その中になお膨大な数の分子を含み、それ故、平均の速度や圧力、密度などを定義できるような、流体の微小部分を考えることができる。このような流体の要素を流体粒子と呼ぶことにする。これを1個1個の分子と混同してはならない。

さて、Lagrange の方法では個々の流体粒子の運動を問題にする。流体粒子の初期時刻 $t = t_0$ における座標 (a, b, c) [Lagrange 座標と呼ぶ] をその粒子の“名前”に用いることができる。Lagrange の方法では、流体粒子の位置は Lagrange 座標 $\mathbf{a} = (a, b, c)$ と時刻 t の関数 $\mathbf{r}(\mathbf{a}, t)$ であり、 \mathbf{a} を固定した微分 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}$ はそれぞれ流体粒子の速度と加速度に他ならない。

■時間変化率

● Lagrange の方法

注目している流体粒子の位置 $\mathbf{r}(t)$ において、物理量 F の値 $F(\mathbf{r}(t), t)$ を評価する。
その時間変化率を Lagrange 的な微分と呼び、 $D F / D t$ と書く。

● Euler の方法

空間に固定した位置 \mathbf{r} において、物理量 F の値 $F(\mathbf{r}, t)$ を評価する。
その時間変化率を Euler 的な微分と呼ぶ。
これは場 $F(\mathbf{r}, t)$ の独立変数 \mathbf{r} を固定して行われる微分 $\partial F / \partial t$ に他ならない。

Lagrange 的な微分と Euler 的な微分の間には、純粋に数学的な関係

$$\frac{D}{D t} F(\mathbf{r}(t), t) = \frac{\partial F}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}}$$

がある。ここで右辺の $\dot{\mathbf{r}}$ は、注目している粒子の(したがって流体の)速度 \mathbf{v} に他ならない。よって

$$\frac{D}{D t} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla).$$

§ 2 について

■Lagrange の方法における表記 (2.1) について 流体粒子を指定するために粒子に割り当てる“番号”として、その粒子が時刻 $t = 0$ に占めていた位置 \mathbf{a} が用いられている。

p.9 の $\partial u / \partial t$ は $u(\mathbf{a}, t)$ における粒子の“番号” \mathbf{a} を固定して行われる微分を表すため Lagrange 的な微分であるのに対し、式 (2.4) の $\partial u / \partial t$ は同じ記号が用いられてはいるけれど、 $u(\mathbf{r}, t)$ における場の観測点の位置 \mathbf{r} を固定して行われる微分を表すため Euler 的な微分であることに注意する。

■Lagrange 的な微分 Dv/Dt が加速度であること (p.9, l.13 および p.11, l.8) 流体の速度の Lagrange 微分は、ある流体粒子の位置での流体の速度の時間変化率だから、その粒子の速度の時間変化率に他ならない。一方、流体の速度の Euler 微分では、空間に固定した点を異なる時刻に通過する 2 つの粒子の速度が比べられているから、流体粒子の加速度とは異なる概念である。

§ 3 オイラーの連続方程式と運動方程式

流れの状態 \leftrightarrow 5 個の未知量 (§ 1)

\leftarrow 5 つの関係式 (下記) [導出は本稿次節] から決定

- 質量保存則 (連続の式) \dots 1 つの関係式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.1)$$

– ρ は流体の密度。

- 運動量保存則 (運動方程式) \dots 3 つの関係式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3.5)$$

– \mathbf{K} は流体の単位質量に働く外力、 p は流体の圧力。

- エネルギー保存則 (熱力学的関係, § 4) \dots 1 つの関係式

– 縮まない流体では $\rho = \text{const.}$

§ 3 について

■連続の式 (3.1) の導出とその解釈 連続の式 (3.1):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

は $\rho \mathbf{v}$ が質量の流れの密度であることに注意すると、単位時間に単位体積に流入する流体の質量 $-\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$ だけ、単位体積中の質量 ρ が増加することを意味している。

質量保存則は次のように言い表される。すなわち空間に固定した領域内部の質量が増加したならばそれは領域内部で質量が無から生じたからではなく、領域の表面を通して質量が内部に流入したからである。特に空間

の各位置の周りに無限小領域 d^3x を考えれば、 ρ を流体の質量密度として単位時間当たりの内部の質量 ρd^3x の増加量は $\frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x$ 、質量の流入量は $-\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) d^3x$ なので、これらを等置して連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) d^3x, \quad \therefore \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

を得る。逆に各体積要素 d^3x でこれが成り立てば、任意の有限の領域 V に対しても上記の主張が成り立つ。すなわち領域 V 内部の質量 $\int_V \rho d^3x$ (これは時間だけの関数である) は、単位時間に流入した分の質量だけ増加することになる:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho d^3x = - \int_S (\rho \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (d\mathbf{S} \text{ は表面 } S \text{ の外向き法単位ベクトル}).$$

何故なら領域 V を構成する全ての体積要素 d^3x について質量の流入量 $-\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) d^3x$ を足し合わせると体積要素間の質量の出入りがキャンセルされ、表面 S からの流入量 $-\int_S (\rho \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S}$ になるからである*1。

■縮まない流体にはわき出しがないことの解釈 縮まない流体に対して質量保存則は式 (3.3):

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

を与える。これは次のように背理的に解釈できる。すなわち空間に固定した単位体積の領域から、単位時間にある体積の流体が正味で流出したとすると、その体積に密度 ρ をかけた分の質量を単位体積の領域は失うことになる。これは密度 ρ が時間変化しないとしたことと矛盾するから、流体のわき出し $\nabla \cdot \mathbf{v}$ はゼロでなければならない。

■非圧縮性の定義について 非圧縮性として密度 ρ が一様不変であることまで要求せずとも、Lagrange 微分 $D\rho/Dt = 0$ だけを仮定すれば、連続の式から $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ が導かれる [1, pp.7-8]:

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad \therefore \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

■水道から流れ落ちる水の概形 縮まない流体の質量保存則の応用例として、水道から流れ落ちる水の概形を考えよう。図 2 のように z 軸対称な定常流をあらかじめ仮定すると、ある高さの幅に含まれる水の質量は一定でなければならない。ところが水は落下するにしたがって速度を増すから、それに伴って断面積は減少しなければならない。実際、図 2 の記号を用いると、高さ z までに含まれる質量が一定である条件

$$\pi a^2 v_0 = \pi r^2 v = \pi r^2 \sqrt{v_0^2 + 2gz}$$

から水の概形

$$r = \frac{a}{\left(1 + \frac{2gz}{v_0^2}\right)^{1/2}}$$

を得る。

■Euler の運動方程式 (3.5) について

*1 このことは体積要素 dV が直方体 d^3x に限らず無限小の四面体の場合にも成り立ち、数学的には発散定理と呼ばれ、

$$\int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV = \int_S (\rho \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S}$$

と書かれる。

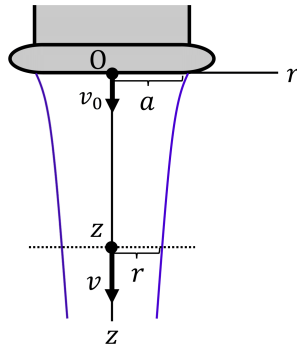


図2 水道から流れ落ちる水の概形

運動量保存則との関係 Euler の運動方程式 (3.5):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

は単位質量を持つ流体粒子に対して Newton の運動方程式を書き下したものであり、左辺は流体の単位質量についての積 (質量) × (加速度), すなわち加速度 $D\mathbf{v}/Dt$ を Euler 的な表現に直したものである. 一方, 右辺は流体の単位質量に働く力を表す.

- 定性的には, 力 $-\frac{1}{\rho} \nabla p$ は圧力の高い方から低い方へ向かって働く.
この項の導出は下記『『ガウスの定理』(p.14, 1.2)について』を参照.
- 外力として重力を考えれば, 単位質量に働く外力 \mathbf{K} は重力場 (重力加速度) \mathbf{g} に他ならない.

ところで Newton の運動方程式とは, 単位時間あたりの運動量変化と力積の関係に他ならないから, これを運動量の保存則 (§ 3, 1.3,4 および p.13, 1.9) に対応するものと見ることができる.

Euler の運動方程式と運動量保存則の関係をより明確にするために, 質量保存則 (3.1):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

の下で Euler の運動方程式 (3.5):

$$\rho(\partial_t + v_j \partial_j) v_i = \rho K_i - \partial_i p$$

の左辺を次のように書き換えられることに注意する.

$$\begin{aligned} \rho(\partial_t + v_j \partial_j) v_i &= \{\partial_t \rho + \partial_j (\rho v_j)\} + \rho(\partial_t + v_j \partial_j) v_i \\ &= (\partial_t \rho) v_i + \rho \partial_t v_i + \{\partial_j (\rho v_j)\} v_i + \rho v_j \partial_j v_i \\ &= \partial_t (\rho v_i) + \partial_j (\rho v_i v_j) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \nabla \cdot (\rho v_i \mathbf{v}). \end{aligned}$$

よって Euler 方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \nabla \cdot (\rho v_i \mathbf{v}) = \rho K_i - \partial_i p$$

と書き換えられる. ここで ρv_i が流体の運動量密度の第 i 成分であり, $\rho v_i \mathbf{v}$ が運動量の第 i 成分の流れの密度であることに注意すると, これは単位時間における単位体積中に含まれる流体の運動量の増加 $\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i)$ は, 流

体の流入によって運ばれる運動量 $-\nabla \cdot (\rho v_i v)$ と、単位体積に働く力の力積 $\rho K_i - \partial_i p$ によってもたらされることを意味している。このように質量保存則の下で、運動方程式と運動量保存則は等価である。

静力学への帰着 「ダランベールの原理」(p.13, 1.13) はしばしば「加えられた力 \mathbf{F} (拘束力を含まない力のこと) と慣性力 $-m\mathbf{a}$ で物体がつり合う」のように説明される。しかしその本質的内容は、仮想変位 $\delta\mathbf{r}$ (ある時刻における拘束条件に矛盾しない変位) に対して拘束力 \mathbf{F}' が仕事をしないこと

$$\mathbf{F}' \cdot \delta\mathbf{r} = 0$$

であり、これを拘束力を含まない形

$$(m\mathbf{a} - \mathbf{F}) \cdot \delta\mathbf{r} = 0$$

に書いたものが d'Alembert の原理に他ならない ($m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}'$) [2, pp.102-103]。今の場合、拘束条件がないため仮想変位 $\delta\mathbf{r}$ を 3次元空間の任意のベクトルにとることができるから、d'Alembert の原理は「力のつり合い」

$$(m\mathbf{a} - \mathbf{F}) \cdot \delta\mathbf{r} = 0, \quad \therefore m\mathbf{a} - \mathbf{F} = 0$$

に帰着する。

有限の領域 V に対する運動方程式

$$\int_V dV \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \int_V dV \rho \mathbf{K} - \int_S dS p \mathbf{n}$$

から被積分関数の関係として Euler 方程式を得るには、これを

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V dV \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \int_V dV \rho \mathbf{K} + \int_S dS p \mathbf{n} \\ &= \int_V dV \rho \left\{ \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \left(\mathbf{K} - \frac{1}{\rho} \nabla p \right) \right\} \end{aligned}$$

と書き換えれば良い。この単なる数学的操作を「静力学の問題に帰着」(p.13, 1.15) と言うことはできる。

「ガウスの定理」(p.14, 1.2) について 領域 V の流体に働く総圧力は

$$-\int_{\partial V} p d\mathbf{f} = -\int_V \nabla p dV$$

で与えられる。この積分公式は Gauss の定理と呼ばれる (p.14)。これは直観的には次のように考えられる。

図 3 の位置 x のブロックに働く圧力の x 成分は

$$\{p(x) - p(x + dx)\} dydz = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz$$

だから*2, ブロック列の両端にかかる圧力の x 成分は

$$-\left(\int_a^b \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dydz$$

である。図 3 の微小なプリズム形の流体部分に働く面積力はつり合わなければならないから (§ 1), ブロック列の端 $x = a$ にかかる圧力の x 成分 $p(x = a) dydz$ は表面 df にかかる圧力の x 成分 $p df \cos \theta$ に等しい。よって総圧力の x 成分は $-\int_V \frac{\partial p}{\partial x} dV$ で与えられることが分かる。

なお、これは通常の Gauss の発散定理と同様、2 形式に対する Stokes の定理から導かれる (表 1 参照)。これについては付録 A で改めて論じる。

*2 圧力の y, z, t 依存性を省略した。

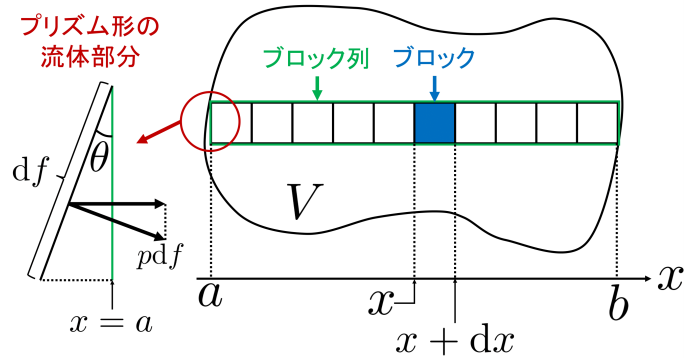


図3 領域 V の流体をブロックに分ける

表1 2形式に対する Stokes の定理

2形式	Stokes の定理
$J_x dy \wedge dz + J_y dz \wedge dx + J_z dx \wedge dy$ $p dy \wedge dz$	$\int_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV$ $\int_{\partial V} p dy dz = \int_V \partial_x p dx dy dz$

■回転バケツ ここで Euler の運動方程式の簡単な応用例として、回転バケツの問題を取り上げる。図4のように水を入れたバケツを一定の角速度 ω で回転させると、水面が湾曲した定常状態に落ち着く。水面の形 $z = f(r)$ を、水の運動との関係を説明しつつ求めよう。位置 (r, z_0) にある流体粒子は、角速度 ω で z 軸の周りに半径 r の一様な回転運動を行っており、その加速度は $r\omega^2$ である。この回転運動を実現するには粒子に向心力が働いていなければならないから、圧力

$$p = p_0 - \rho g(f(r) - z_0)$$

は外側 (r の大きい方向) の方が高くなっていなければならない。これは水面の高さ $z = f(r)$ が r の増大とともに高くなることを要求する。実際、水面の湾曲により生じる圧力勾配が粒子の向心力をもたらすこと

$$r\omega^2 = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = g f'(r)$$

から、水面の形として回転放物面

$$z = f(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + \text{const.}$$

を得る [3, pp.232–234].

なお Newton は水面の湾曲を、水とバケツが一体となって絶対空間に対して回転しているからであると主張し、絶対空間の概念を擁護した [4, pp.122–133]. 少なくともバケツとともに回転する観測者は、自身が慣性系に対して回転していることを知り得ると言える。

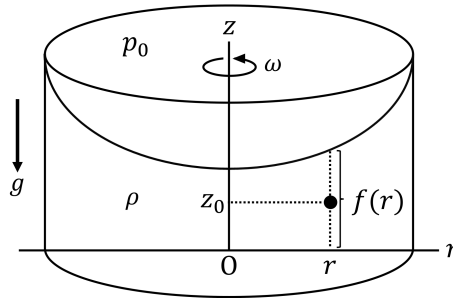


図4 回転バケツと水面の湾曲

§ 4 状態方程式

エネルギー保存則 (熱力学の第1法則) \leftrightarrow “流体は熱力学の法則にしたがう”

- 気体の等温変化 $p \propto \rho$
 - 流体が一定温度の外界にさらされながらゆるやかに流れる場合
- 気体の断熱変化 $p \propto \rho^\gamma$ (γ :比熱比)
 - 流体の粘性や熱伝導性が小さい場合

密度が圧力の関数として $\rho = f(p)$ と表される流体……バロトロピー流体。

気体の密度変化を考慮する必要がある問題：

- 気象学
- 高速気流 (速度が大きい \rightarrow 断熱変化)
- 音響学 (加速度が大きい \rightarrow 断熱変化)
- 対流

§ 4 について

■状態方程式 (4.3), 断熱変化に対する式 (4.5) について

$$\text{熱力学第1法則 } nc_V dT = TdS - pdV, \quad \text{状態方程式 } pV = nRT$$

より

$$\begin{aligned} S &= \int \left(nc_V \frac{dT}{T} - \frac{p}{T} dV \right) = \int n \left(c_V \frac{dT}{T} - R \frac{dV}{V} \right) \\ &= n(c_V \ln T + R \ln V) + \text{const} = nc_V (\ln T + \ln V^{R/c_V}) + \text{const} \\ &= nc_V \ln(TV^{R/c_V}) + \text{const} \quad \left(\because c_p - c_V = R, \quad \gamma - 1 = \frac{R}{c_V} \right) \\ &= nc_V \ln(pV^\gamma) + \text{const} \end{aligned}$$

を得る。積分定数から適当な因子をくくり出して、これを真数が無次元化された形

$$S = c_V \ln \frac{p/p_0}{(\rho/\rho_0)^\gamma} + S_0$$

に書くことができる。ここから状態方程式 (4.3):

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \exp \left(\frac{S - S_0}{c_V} \right)$$

を得る。

断熱変化を考え、上式

$$S = nc_V \ln(pV^\gamma) + \text{const}$$

において $S = \text{const}$ として得られる関係 $pV^\gamma = \text{const}$ はよく知られており、これは式 (4.5):

$$p \propto \rho^\gamma$$

に他ならない。

■比熱比の式 (4.4) について

$$\text{エネルギー等分配則 } E = f \times \frac{1}{2} NkT, \quad \text{理想気体のする仕事 } dW = pdV = NkdT$$

より比熱比は

$$\gamma = \frac{dQ/dT}{dE/dT} = \frac{f+2}{f} : (4.4)$$

で与えられる。

■バロトロピー流体を定義する式 (4.6) について 一般に流体の密度 ρ は、熱力学的に独立な 2 変数の関数である。等温変化を考え、温度 T を空間的にも時間的にも一定とすると、密度は圧力だけの関数

$$\rho = f(p, T = \text{const})$$

として表される。

断熱変化に対しては流体要素の持つエントロピーが一定なので、単位体積あたりのエントロピーを s として

$$0 = \frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s$$

となる。しばしば起こるように、ある初期時刻に s が空間的に一様な場合には常に

$$\frac{\partial s}{\partial t} = 0$$

となり、後の時刻にも s は一様で、空間の各位置で同じ値をとり続ける [5, § 2]。このとき密度は圧力だけの関数

$$\rho = f(p, s = \text{const})$$

として表される。

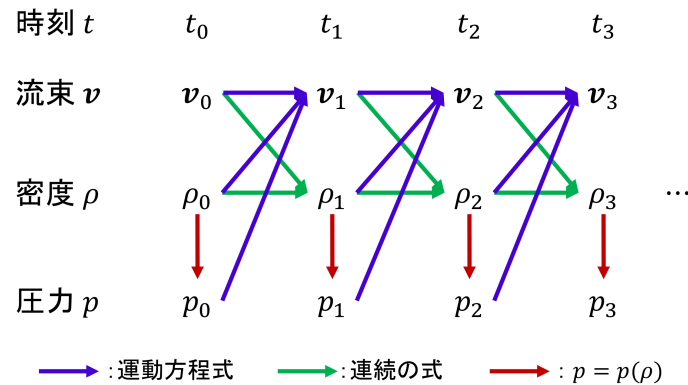


図5 基礎方程式による流体の時間発展の記述

■基礎方程式が流体の時間発展を記述することの直観的説明 § 3 の Euler 方程式 (運動方程式), 連続の式 (質量保存則) と § 4 の熱力学的関係式の合計 5 つの基礎方程式から, 流速 \mathbf{v} と熱力学的に独立な 2 変数の合計 5 つの物理量の時間発展が決まることを, ここでは直観的に説明してみよう*3. 以下で述べることは数値シミュレーションの手法に通じるものである. ただし簡単のためにバロトロピー流体を考えて $p = f(\rho)$ の関係を仮定する. このとき熱力学的に独立な変数は 1 つとなり, それを密度 ρ にとることができるため, 未知量として \mathbf{v} と ρ の合計 4 変数だけを考えれば十分である.

まずある位置における単位体積内の運動量 $\rho\mathbf{v}$ の変化は, 周囲からの流体の流入 (流出を含む) と圧力 (および外力の作用) によってもたらされる. これは図 5 に模式的に示すように, ある位置における速度 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ の微小時間後の値 \mathbf{v}_1 が, 流速, 密度, および圧力の初期分布 $\mathbf{v}_0, \rho_0, p_0$ を用いて運動方程式から決定されることを意味している. 次にある位置の密度変化は, 流体の流入 (流出を含む) によってもたらされる. これは図 5 のように, 密度 $\rho = \rho_0$ の微小時間後の値 ρ_1 が速度と密度の初期分布 \mathbf{v}_0, ρ_0 を用いて連続の式から決定されることを意味している. 微小時間後の圧力は $p_1 = f(\rho_1)$ によって決まる. 以上の繰り返しにより未知量 \mathbf{v}, ρ の値が逐次求まる.

なお圧力 $p = f(\rho)$ は密度 ρ のみによって決まると仮定したため, 図 5 の手順は \mathbf{v} と ρ だけで閉じている. このため圧力 p から速度 \mathbf{v} に向かう矢印は不要ではないかと思われるかもしれない. しかし物理的な観点からは力が運動を決めるという因果関係が重要であると考え, 敢えて圧力 p から速度 \mathbf{v} に向かう矢印を明示した.

§ 5 ラグランジュの連続方程式と運動方程式

連続の式と運動方程式の Lagrange 的な表現を導こう.

Lagrange の連続の式

Lagrange 的な見方では質量保存則を次のように述べることができる. すなわち流体に固定した領域の中に含まれる質量は, 時間とともに変化しない. いま初期時刻 $t = t_0$ に体積 d^3a を占める密度 ρ_0 の粒子粒子を考える ($\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ は Lagrange 座標, § 2). 後の時刻 t におけるこの粒子の密度を ρ と書くと, その体

*3 正確には § 6 にあるように, さらに初期条件と境界条件を与える必要がある.

積は

$$d^3x = \frac{\partial(x)}{\partial(a)} d^3a$$

に変化するので $(\partial(x)/\partial(a))$ は Jacobi 行列式, 質量保存則の条件は

$$\rho_0 d^3a = \rho d^3x = \rho \frac{\partial(x)}{\partial(a)} d^3a, \quad \therefore \rho_0 = \rho \frac{\partial(x)}{\partial(a)}$$

と表される. これが Lagrange の連続の式である.

Lagrange の運動方程式

Euler 方程式は

$$\left(\frac{\partial^2 x_j}{\partial t^2} \right)_a - X_j = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j}$$

である (X_j は外力 \mathbf{K} の第 j 成分). 両辺に $\partial x_j / \partial a_i$ をかけて j について和をとると, Lagrange の運動方程式

$$\sum_j \left\{ \left(\frac{\partial^2 x_j}{\partial t^2} \right)_a - X_j \right\} \frac{\partial x_j}{\partial a_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a_i}$$

が得られる.

§ 6 の第 1 段落を引用

以上オイラーの方法とラグランジュの方法の両方について連続および運動の方程式を導いたが, ラグランジュの運動方程式は形式的に非常に複雑なために, 一般的な流れの性質 (たとえばラグランジュの渦定理) を議論したり, 1 次元的な非定常流 (独立変数が a, t の 2 つ) を研究するのに利用されるだけであって, 具体的な流れの計算にはもっぱらオイラーの方法が用いられる.

§ 5 について

■ Lagrange 的な連続の式を得る別の方法 連続の式は

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \rho) \cdot \mathbf{v} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad \therefore \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}$$

と書き換えられる. これは流体粒子の密度変化 $\frac{D\rho}{Dt}$ が流体粒子の体積変化 $\nabla \cdot \mathbf{v}$ によってもたらされることを意味している. なお第 3 の等号では

$$(\nabla \rho) \cdot \mathbf{v} = (\partial_i \rho) v_i = v_i \partial_i \rho = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho$$

を用いた.

■ pp.20-21 における加速度の表記 $\partial^2 x / \partial t^2$ について これは微分が Lagrange 座標 \mathbf{a} を固定して行われていることによる (§ 2 参照). § 12 の式 (12.3a-c) における $\partial u / \partial t$ も同様であり, それ故, 流体粒子の速度を表している.

■Lagrange 的な運動方程式を得る別の方法 文献 [5, § 2] では 1 次元系での Lagrange 的な運動方程式を次のように導いている. すなわち Euler 方程式

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)_a - X = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

における密度 ρ を, Lagrange の連続の式を用いて書き換えると,

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)_a - X = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_t \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_t = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_a$$

となる. しかしながらこの方法は, 3 次元の場合への拡張が困難であるように見える.

§ 6 境界条件

固体の表面に穴があいていない限り, 流体が境界面を出入りせず, 流体が境界に押し込んだり境界から離れて空孔を生じたりすることはない. そこで通常, 境界条件としては, 流体と境界の相対速度が境界に垂直な成分を持たないことを課す. このときある時刻に境界面上に乗っていた粒子は, 後の時刻にも面上にあることになる. これは境界面が常に同じ流体粒子で占められていることを意味する. 以上の議論は 2 種類の流体の境界面にも適用される.

1. 流体の中を [変形しない] 固体が運動する場合

流体の速度を \boldsymbol{v} , 固体の速度を \boldsymbol{v}' , 固体表面の法単位ベクトルを \boldsymbol{n} とすると,

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}') = 0.$$

2. 境界面が変形する場合

境界面が $F(\boldsymbol{r}, t) = 0$ によって与えられるとすると, 流体粒子が常にこの面上にあることから,

$$F(\boldsymbol{r}(t), t) = 0, \quad \therefore \frac{DF}{Dt} = 0.$$

§ 6 について

■境界層 完全流体に対しては, 流体と境界面の相対速度がゼロになることまでを要求することはできない. これは, 物体の表面に対して流体が静止するのは物体との間の摩擦が原因であるため, 粘性を考慮しなければそのような解を得ることはできないという事情による. ところが粘性の効くのは物体表面近くの薄い層 (境界層) に限られるため, その外側の流れに関しては相対速度の法線成分のみがゼロになることを要求して, 完全流体の理論によって記述すれば十分である (pp.158–159).

■p.23 脚注 1 について ある時刻に境界面上に乗っていた粒子は後の時刻にも面上にあると論じたにも関わらず, 図 6.1(p.23) の物体の尖点 B からは流体が離れていく. これは「B 点では境界面に立てた外向きの法線が一義的にきまらないために上の結論が適用されないから」と説明されている. では図 11.3(p.40) のよどみ点 B, あるいは § 20b で見るような, 一様流の中に置かれた円柱を過ぎる流れ (ただし循環は伴わないとする, 式 (20.7) 参照) の場合はどうだろうか. この場合 B 点 (あるいは点 B に対応する点) では法線を定義できる. しかしこの点において流体の速度はゼロとなるため, A 点に対する議論と同様, 表面に沿って運動する流体粒子は B 点に達するのに無限に時間がかかり, 表面から離れることはないと考えられる.

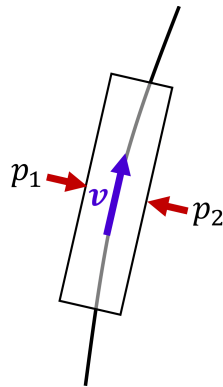


図6 流速が不連続面に垂直な成分を持たない限り，圧力は連続的に変化する

§ 7 不連続面

以下のように速度，密度，圧力，温度が不連続的に変化する境界面があり得る．

- 2種類の流体の境界 → 密度が不連続的に変化
- 速度の不連続面 = 渦の層
- 高速気流中の衝撃波 = 速度，密度，圧力，温度の不連続面

ただし流速が不連続面に垂直な成分を持たない限り，圧力は（より一般に応力は）連続的に変化する．[境界面に沿って流れる流体の薄い層に対して，面に垂直な方向に関する運動方程式を考えれば，面を介した両側の圧力 p_1, p_2 が等しくなければならないことが導かれる（図6参照）.]

§ 7 について

§ 7で説明されているように，流速が不連続面に垂直な成分を持たない限り，圧力は連続的に変化する．これは§ 11で Bernoulli の定理を応用したり，第6章で水の波を考えたりする際に，水面の圧力を大気圧に等しいとして良い理由となっている．

§ 8 流線と流れのみちすじ

各時刻において速度ベクトルを滑らかに繋いで得られる曲線 [積分曲線] を流線 (streamline) と呼ぶ．[流線の速度場に対する関係は電気力線の電場に対する関係と同じである．] 流線は，それに沿う線要素 $d\mathbf{r}$ が速度 \mathbf{v} に平行であるという条件

$$d\mathbf{r} \parallel \mathbf{v}$$

によって与えられる．

流れの中に任意に小さな閉曲線を取り，その上の各点を通る流線群を考えると，それらは1つの管をつくる．これを流管 (stream tube) という (図8.1 [本稿の図7]) . (p.26より)

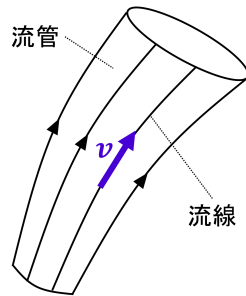


図7 流管 (§ 8)

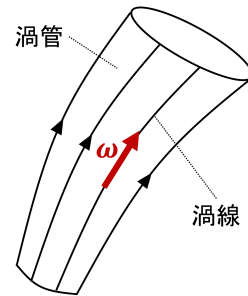


図8 渦管 (§ 9)

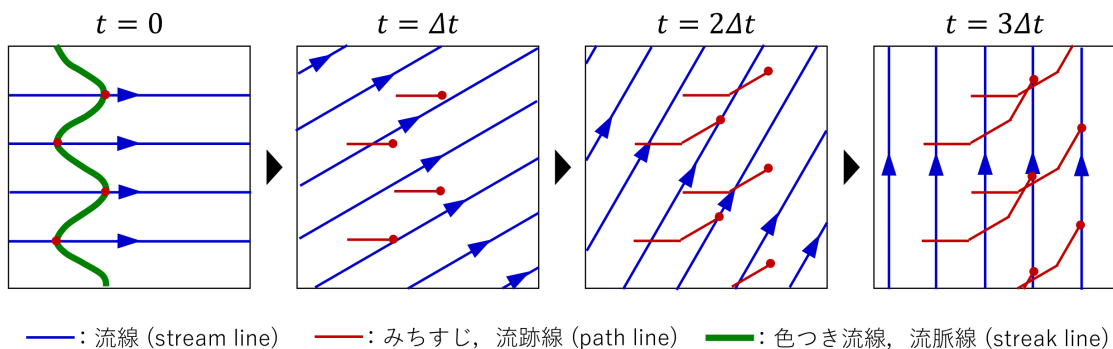


図9 流線, 流跡線, 流脈線

簡単のために一様な流れを考え、流線が図9のように時々刻々とその向きを変化させていったとすると、流体粒子は流れに従って運動し、図9の赤線で示したような弧を描くと考えられる。このように流体粒子の空間に描く軌跡を流れのみちすじ (流跡線, path line) と呼ぶ。流れのみちすじは、流体粒子の変位がそれに沿う線要素 $d\mathbf{r}$ を成すという条件

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$$

によって与えられる。

最後にインクや煙によって着色された流体の線を色つき流線 (流脈線, streakline) と呼ぶ。図9のように、流線、流れのみちすじ、色つき流線は一般には一致しない。

§ 8 について

■ 「流線は…… ∞^2 個の曲線群」 (p.26, l.7,8) について 流線の本数を数えるには、図10のような2次元の断面との交点を数えれば良い。このことから流線は2次元集合であることが分かる。これは流線の式(8.2)において、2つの積分定数 c_1, c_2 の選び方の数だけ流線があることと整合している。

■ 「流れのみちすじは…… ∞^3 個の曲線群」 (p.27, l.14,15) について 流れのみちすじは流体粒子の世界線の、3次元空間への射影である。よって流れのみちすじの本数を数えるには、図10のような3次元の断面 (超曲面) との交点を数えれば良い。このことから流線は3次元集合であることが分かる。これは流れのみちすじの式(8.4)において、3つの積分定数 c_1, c_2, c_3 の選び方の数だけ流れのみちすじがあることと整合している。

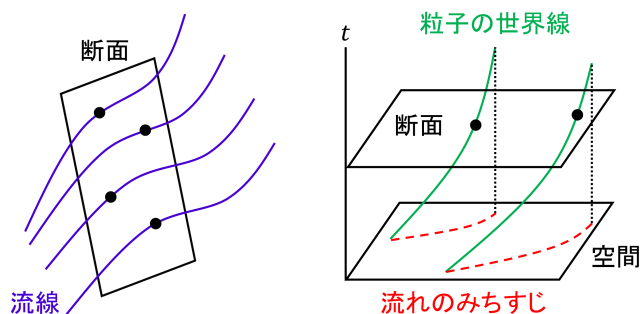


図 10 流線と流れのみちすじ

§ 9 渦運動と渦無し運動

$$\begin{array}{lll}
 \text{速度 } \boldsymbol{v} & \rightarrow & \text{流線, 流管,} \\
 \text{渦度 } \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{v} & \rightarrow & \text{渦線, 渦管(図 8),} \\
 \text{渦糸} & = & \text{断面が無限小の渦管.}
 \end{array}$$

後に述べるように、ある瞬間に渦管 [渦糸] を構成していた流体粒子は時間が経っても同じ渦管 [渦糸] を成す (§ 25).

$$\begin{array}{lll}
 \text{幾何学的な点} + \text{質量} & \rightarrow & \text{質点,} \\
 \text{渦線 (幾何学的な概念)} + \text{質量} & \rightarrow & \text{渦糸.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \boldsymbol{\omega} = 0 & \Rightarrow \text{「渦無し」} \\
 & \boldsymbol{v} = \nabla\Phi \text{ なる速度ポテンシャル } \Phi \text{ が存在,} \\
 \boldsymbol{\omega} \neq 0 & \Rightarrow \text{「渦がある」「渦運動をする」.}
 \end{array}$$

[$\boldsymbol{v} = \nabla\Phi$ の右辺に負号を付けずに速度ポテンシャル Φ を定義する.]

位置 \boldsymbol{x}_0 の近く $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \delta\boldsymbol{x}$ における流体の速度は

$$v_i = v_{i0} + \sum_k a_{ik} \delta x_k, \quad a_{ik} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)_0$$

である。添字のゼロは位置 \boldsymbol{x}_0 での値を意味する。 a_{ik} の非対角成分を

$$a_{ik} = \frac{1}{2} \gamma_{ik} + \Omega_{ik}, \quad \gamma_{ik} = a_{ik} + a_{ki} = \gamma_{ki}, \quad \Omega_{ik} = \frac{a_{ik} - a_{ki}}{2} = -\Omega_{ki} \quad (i \neq k)$$

のように対称部分と反対称部分に分けると,

$$\begin{aligned} v_i &= v_{i0} + \sum_{k(\neq i)} a_{ik} \delta x_k + a_{ii} \delta x_i \\ &= v_{i0} + \sum_{k(\neq i)} \left(\frac{1}{2} \gamma_{ik} + \Omega_{ik} \right) \delta x_k + \varepsilon_i \delta x_i, \quad \varepsilon_i = a_{ii} \end{aligned}$$

と書ける (添字 i については和をとらない).

各項を解釈するために位置 \mathbf{x}_0 を原点にとり, その近くの $x_1 x_2$ 面内の速度場を図示しよう. ε_i の項は第 i 軸方向への一様な伸縮を表す (図 11 参照).

速度の x_1, x_2 成分に寄与する γ_{ik} と Ω_{ik} の項はそれぞれ

$$\begin{aligned} v_1 &\leftarrow \Omega_{12} \delta x_2 + \Omega_{13} \delta x_3 + \frac{1}{2} \gamma_{12} \delta x_2 + \frac{1}{2} \gamma_{13} \delta x_3, \\ v_2 &\leftarrow \Omega_{21} \delta x_1 + \Omega_{23} \delta x_3 + \frac{1}{2} \gamma_{21} \delta x_1 + \frac{1}{2} \gamma_{23} \delta x_3 \end{aligned}$$

である. そこで $x_1 x_2$ 平面上の速度場

$$v_1 = \Omega_{12} \delta x_2 = -\Omega_{21} \delta x_2, \quad v_2 = \Omega_{21} \delta x_1 = -\Omega_{12} \delta x_1$$

を軸上でのみ描画すると図 11 のようになる. これは正方形で示した流体要素に注目すると, 流体要素の剛体的な回転を表し, 変形には寄与しないことが分かる. また回転の角速度 $\Omega_{21} = -\Omega_{12} = \frac{1}{2}(\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1)_0$ は渦度 ω_{30} の $1/2$ 倍である.

さらに $x_1 x_2$ 平面上の速度場

$$v_1 = \frac{1}{2} \gamma_{12} \delta x_2, \quad v_2 = \frac{1}{2} \gamma_{21} \delta x_1 = \frac{1}{2} \gamma_{12} \delta x_1$$

を軸上でのみ描画すると, これは図 11 のような流体の変形を表すことが分かる. これを純粹のずり運動と呼ぶ.

以上より [純粹に数学的な事実として], 位置 \mathbf{x}_0 を中心とする流体要素の運動は必ず

- 速度 \mathbf{v}_0 の並進運動
- 角速度 $\boldsymbol{\omega}_0/2$ の剛体的な回転運動 ($\boldsymbol{\omega}_0$ は渦度)
- 純粹のずり運動
- 各軸方向への一様な伸び縮み

に分解されることが分かる.

§ 9 について

流体の変形と関係するのは ε_i と γ_{ik} の項であり, これが粘性応力の基となる (§ 44). これらは変形速度 (44.6): $e_{ij} = \partial_i v_j + \partial_j v_i$ (の $1/2$ 倍) に他ならない.

また本稿の表記 $\Omega_{ik} = \frac{a_{ik} - a_{ki}}{2}$ と角速度 $\boldsymbol{\Omega}$, 渦度 $\boldsymbol{\omega}$ との関係

$$\Omega_1 = -\Omega_{23}, \quad \Omega_2 = -\Omega_{31}, \quad \Omega_3 = -\Omega_{12}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}$$

は次のようにまとめられる.

$$\Omega_i = \frac{1}{2} \omega_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} \Omega_{kl}.$$

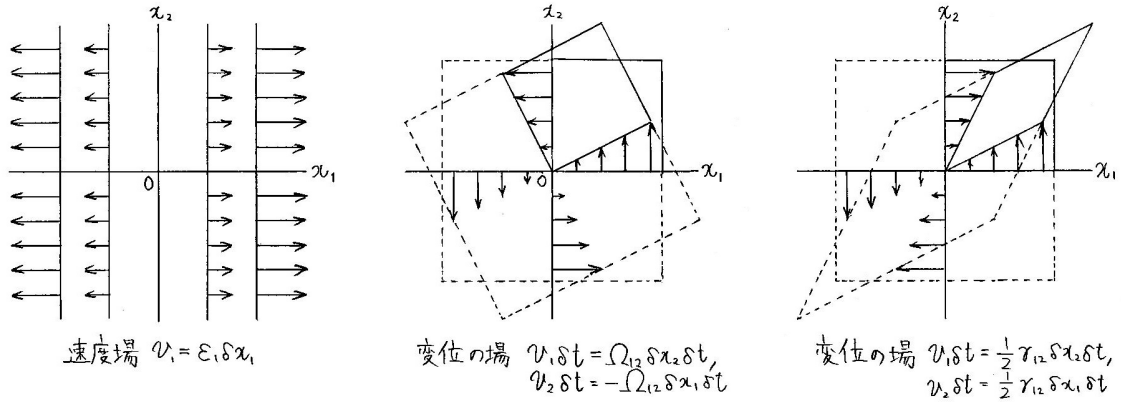


図 11 一様な伸縮，剛体的回転，ずり運動

§ 10 運動方程式の第一積分

本節では次の仮定の下で議論を進める。

- 完全流体 → Euler 方程式が成立
- バロトロピー流体 $\rho = \rho(p)$ → 圧力関数 $P = \int^p \frac{dp}{\rho}$ (p の関数) を導入

このとき流体の運動方程式は，Euler 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{K} - \nabla \left(P + \frac{q^2}{2} \right) + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \quad q = |\mathbf{v}| \quad (10.5)$$

によって与えられる (導出は下記)。

- 静止流体 ($\mathbf{v} = 0$)

外力は保存力であることが導かれる。そこで外力を $\mathbf{K} = -\nabla\Omega$ と書くと

$$\nabla(P + \Omega) = 0, \quad \therefore P + \Omega = \text{const.} \text{ [空間的に]}$$

- 対偶をとれば，非保存力の場合では流体は静止し得ない。
- 重力の等ポテンシャル面 $\Omega = \text{const.}$ は圧力が一定の面に一致する。

しかるに水平面は圧力が大気圧に一致するから [§ 7]，重力の等ポテンシャル面である。

- 渦無しの流れ ($\boldsymbol{\omega} = 0 \rightarrow \mathbf{v} = \nabla\Phi$)

外力は保存力であることが示され，圧力方程式 (拡張された Bernoulli の定理)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}q^2 + P + \Omega = F(t), \quad F(t) : \text{任意関数} \quad (10.10)$$

が導かれる (導出は下記)。

- 対偶をとれば，非保存力の場合では流体は渦無しであることが保証されない [Lagrange の渦定理 (§ 13) も参照]。

- 保存力場 ($\mathbf{K} = -\nabla\Omega$) での定常な流れ ($\partial\mathbf{v}/\partial t = 0$)

Bernoulli の定理

$$\frac{1}{2}q^2 + P + \Omega = \text{const.} \quad (\text{各々の Bernoulli 面上で}) \quad (10.12)$$

が導かれる (導出は下記). ここで Bernoulli 面とは \mathbf{v} と $\boldsymbol{\omega}$ に垂直な面, すなわち任意の流線とそれを通る全ての渦線とによって形成される面である. この定義により流線と渦線は Bernoulli 面内に含まれる.

§ 10, 式の導出など

■運動方程式 (10.5) の導出 Euler 方程式

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho}\nabla p$$

の左辺第 2 項を恒等式

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nabla\frac{q^2}{2} - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \quad q = |\mathbf{v}|$$

[本稿次節で確認] によって書き換えると,

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\frac{q^2}{2} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$$

を得る. さらに上式右辺の第 2 項は

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla P$$

と書き直せることに注意すると [本稿次節で補足], 式 (10.5) が導かれる.

■圧力方程式 (10.10) の導出 式 (10.5) に $\boldsymbol{\omega} = 0, \mathbf{v} = \nabla\Phi$ を代入すると,

$$\mathbf{K} = \nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}q^2 + P\right)$$

となる. よって外力はポテンシャル Ω から導かれなければならない. そこで上式に $\mathbf{K} = -\nabla\Omega$ を代入すると

$$\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}q^2 + P + \Omega\right) = 0$$

であり, これを積分して式 (10.10) を得る.

■Bernoulli の定理 (10.12) の導出 式 (10.5) に $\partial\mathbf{v}/\partial t = 0, \mathbf{K} = -\nabla\Omega$ を代入すると,

$$\nabla\left(\frac{1}{2}q^2 + P + \Omega\right) = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \quad (10.11)$$

となる. 両辺, Bernoulli 面内における任意の曲線の接単位ベクトル \mathbf{e} との内積をとると,

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{2}q^2 + P + \Omega\right) = 0$$

が得られる (s は曲線に沿う長さ) [本稿次節で補足]. これを積分して式 (10.12) を得る.

§ 10 について

■p.34, l.13 の恒等式について

$$\begin{aligned} [\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}]_i &= [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})]_i = \varepsilon_{ijk} v_j \varepsilon_{klm} \partial_l v_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) v_j \partial_l v_m = v_j \partial_i v_j - v_j \partial_j v_i \\ &= \left[\nabla \frac{q^2}{2} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right]_i \end{aligned}$$

より

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \frac{q^2}{2} - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \quad q = |\mathbf{v}|$$

である。なお $|\mathbf{v}|$ を v と書かずに q と書いているのは、速度の y 成分 v との混同を避けるためであると推察される。

■圧力関数の微分, ポテンシャルとしての圧力関数 式 (10.4): $\nabla p / \rho = \nabla P$ について, 位置が $d\mathbf{r}$ 変化するときの圧力, 圧力関数の変化をそれぞれ dp, dP と書くと

$$dP \equiv \frac{dp}{\rho} \rightarrow \nabla P \cdot d\mathbf{r} = \frac{\nabla p \cdot d\mathbf{r}}{\rho} \rightarrow \nabla P = \frac{1}{\rho} \nabla p$$

となる。

なお式 (10.8) の下の $p = \text{const}, \rho = \text{const.}$ について,

$$dP = 0 \Rightarrow dp = 0$$

であり, また $\rho = \rho(p)$ だから $\rho = \text{const.}$ である。

式 (10.4): $\nabla P = \nabla p / \rho$ より圧力関数は単位質量の完全流体に働く面積力のポテンシャルと見ることができ。それ故, 圧力方程式 (10.10) や Bernoulli の定理 (10.12) に外力のポテンシャル Ω と同列の項として現れるものと理解できる。

■式 (10.11) の流線方向成分をとること 式 (10.11) と Bernoulli 面内の単位ベクトル \mathbf{e} の内積を作ると, 式 (10.11) の \mathbf{e} 方向の成分をとることができる。その際, 左辺は方向微分 $\frac{\partial}{\partial s} = \mathbf{e} \cdot \nabla$ になる (式 (14.12) 参照)。

§ 11 ベルヌーイの定理

Bernoulli の定理 $\frac{1}{2}q^2 + P + \Omega = \text{const.}$ は, 縮まない流体を仮定し ($P = p/\rho$), 外力が重力の場合 ($\Omega = gz$) を考えると

$$p + \frac{1}{2}\rho q^2 + \rho g z = \text{const.}$$

となる。普通, この式を Bernoulli の定理と呼ぶ。 $\frac{1}{2}\rho q^2$ と $\rho g z$ はそれぞれ単位体積の流体の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーである。[また p は流体に働く圧力のポテンシャルと見なせることを § 10 の補足において指摘した。ところで定常流では流線上の下流の流体粒子が上流の流体粒子の未来の状態となるから, $q^2/2 + P + \Omega$ あるいは $p + \frac{1}{2}\rho q^2 + \rho g z$ の値が流線上の 2 粒子について等しいことは, 1 つの流体粒子についてその値が時間変化しないことを意味する。よって] Bernoulli の定理はエネルギー保存則を表している。

Bernoulli の定理を応用して得られるいくつかの結果を以下に挙げる。

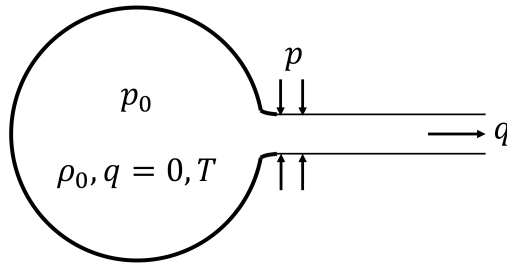


図 12 容器から噴出する気体の速度

■Torricelli の定理 容器に入れた流体が壁にあげた穴から流れ出す速度は、液面から穴までの深さを h とすると、

$$q = \sqrt{2gh}$$

で与えられる [本稿次節で補足].

■容器から噴出する気体の速度 (図 12 参照) 理想気体を仮定する.

断熱変化に対して $q^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left\{ 1 - \left(\frac{p_0}{p} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right\}$: Zeuner の公式 (γ : 比熱比) (11.6)

$$\Leftrightarrow q = q_m \left\{ 1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right\}^{1/2}, \quad q_m = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} c_0, \quad (11.9)$$

$$c_0 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma \frac{R}{m} T} : \text{容器内での気体の音速}$$

→ 容器内の圧力 p_0 を上げて流速 q は最大速度 q_m を超えない。
流速を上げるには容器内の温度を上げることが必要。

等温変化に対して $q^2 = \frac{2p_0}{\rho_0} \ln \frac{p_0}{p}$: Navier の公式 [p_0 の増加関数].

(Zeuner の公式 (11.6) と Navier の公式の導出は下記.)

■ピトー静圧管 流れの中のある位置における圧力 p とよどみ点での圧力 p_0 の差を測定し、圧力 p の位置での流速 q を

$$p + \frac{\rho}{2} q^2 = p_0$$

の関係から求めるもの (図 13 参照). [ただしここでは近接する 2 本の流線に対して、 $p + \frac{\rho}{2} q^2 = \text{const.}$ の値が等しいと仮定していることになる.]

§ 11, 式の導出など

■Zeuner の公式 (11.6) と Navier の公式の導出 容器から噴出する気体に対して Bernoulli の定理を適用すると

$$\frac{1}{2} q^2 + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \text{const}$$

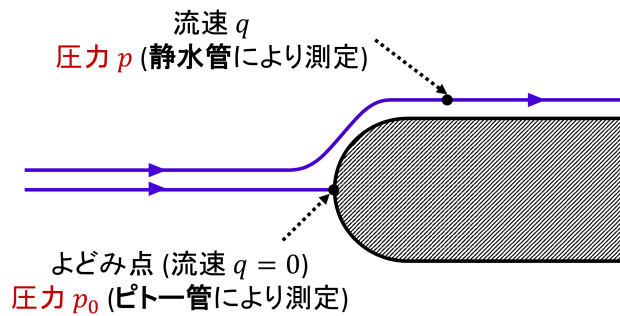


図 13 ピトー静圧管

であり、この一定値は容器の内部 ($p = p_0, q = 0$) で評価すると、ゼロであることが分かる。よって

$$q^2 = 2 \int_p^{p_0} \frac{dp}{\rho}. \quad (11.4)$$

断熱変化を仮定すると

$$p \propto \rho^\gamma, \quad \text{i.e.} \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\gamma}$$

なので、上式 (11.4) 右辺の積分は

$$\begin{aligned} 2 \int_p^{p_0} \frac{dp}{\rho} &= 2 \frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0} \int_p^{p_0} p^{-1/\gamma} dp = 2 \frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0} \frac{1}{1-1/\gamma} \left[p^{1-1/\gamma} \right]_p^{p_0} = 2 \frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0} \frac{\gamma}{\gamma-1} p_0^{1-1/\gamma} \left\{ 1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right\} \\ &= \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left\{ 1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right\} \end{aligned}$$

と計算される。よって Zeuner の公式 (11.6) が導かれる。

他方、等温変化を仮定すると

$$p \propto \rho, \quad \text{i.e.} \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0}$$

なので、上式 (11.4) 右辺の積分は

$$2 \int_p^{p_0} \frac{dp}{\rho} = \frac{2p_0}{\rho_0} \int_p^{p_0} \frac{dp}{p} = \frac{2p_0}{\rho_0} \ln \frac{p_0}{p}$$

と計算される。こうして Navier の公式が導かれる。

§ 11 について

■Bernoulli の定理の適用条件 Bernoulli の定理の導出過程で仮定したことを改めて列挙する。

1. 完全流体
2. 定常流
3. 外力が保存力場であること
(例) 重力場

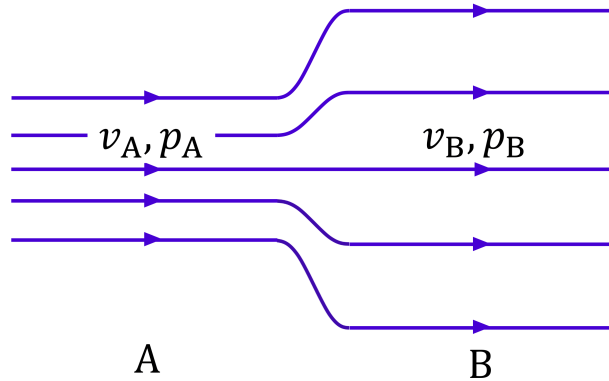


図 14 上流 A より下流 B で流管の断面が大きくなる定常流

4. バロトロピー流体

(例) 縮まない流体

5. Bernoulli 面内に適用すること

(例) 流線

■Bernoulli の定理は〈運動→力〉 Bernoulli の定理は流れを決定するというより、むしろ既知の定常流からそれを実現する圧力分布を調べるのに用いられることになる(〈運動→力〉)。その際、運動方程式の積分である Bernoulli の定理は、力から運動を決める(〈力→運動〉)という因果方程式としての役割を演じない。これは、非圧縮性流体の渦無し運動の理論では流体のモデルから流れが決まってしまう、圧力は言わば拘束力として後から求まるという、p.47 で述べられている事情に似ている。

実際、Bernoulli の定理はしばしば次のような定性的な議論に用いられる。まず図 14 のような定常流を仮定すると、縮まない流体の質量保存則より流速は

$$v_A > v_B$$

を満たさなければならない。このため Bernoulli の定理により、圧力は

$$p_A < p_B$$

でなければならない。なおこのことは Bernoulli の定理を持ち出さずとも、運動方程式に立ち戻って説明することができる。すなわち流速が v_A から $v_B (< v_A)$ へと減速するには、流体に B から A に向かう力が働かなければならないから、

$$p_A < p_B$$

である。

■Torricelli の定理について 次のことが仮定されていることになる。

- 水面の落下速度 $\simeq 0$ (\Leftrightarrow 穴の大きさ $\simeq 0$)
- 定常流 (ある点を流体が占めている限り、その点での流速は時間変化しない)

■水時計 Bernoulli の定理 (Torricelli の定理) に関係する問題として、砂時計の砂の代わりに水を用いた「水時計」を取り上げよう。水面が一定の速度で低下するためには、どのような容器の形を持つ水時計を用いれば

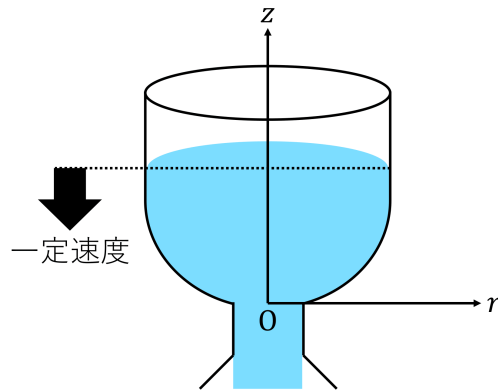


図 15 軸対称な水時計

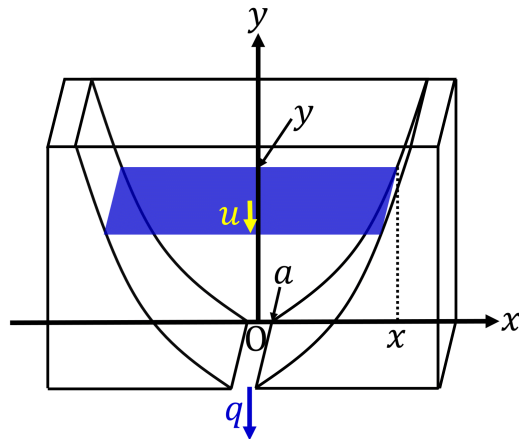


図 16 2 次元的な水時計

良いだろうか．図 15 のような容器の形が $z = f(r)$ と表される軸対称な水時計を考えると (z, r は円筒座標, z 軸は鉛直上向き), 水面の降下速度を一定にするような容器の形は 4 次曲線の回転体 $z \propto r^4$ であることが示される [6, p.77].

ここでは図 16 のように作成が比較的容易な 2 次元的な水時計 (各断面 $z = \text{const}$ で容器の淵が同じ形である) を考え, 文献 [6, p.77] と同様の考えで水面の降下速度を一定にするような容器の断面形を求め直す. ただしここでは底面 $y = 0$ において, 有限の大きさの孔 $-a \leq x \leq a$ を考える.

図 16 のように水面の高さを y , 水面の降下速度を u , 底面からの水の流出速度を q と書く. また重力加速度を g とする. このとき連続の式は

$$xu = qa$$

である. これは z 方向の単位の厚みを持つ部分に注目したとき, 単位時間に容器から $\rho q \times 2a$ の質量が逃げて容器内の質量が $\rho x \times 2u$ 減少することを意味する. あるいはある瞬間に底面と水面に挟まれた部分にいた水は, 時間がたっても体積が変化しないと見ることもできる (したがって密度一定の仮定の下, その質量も変化

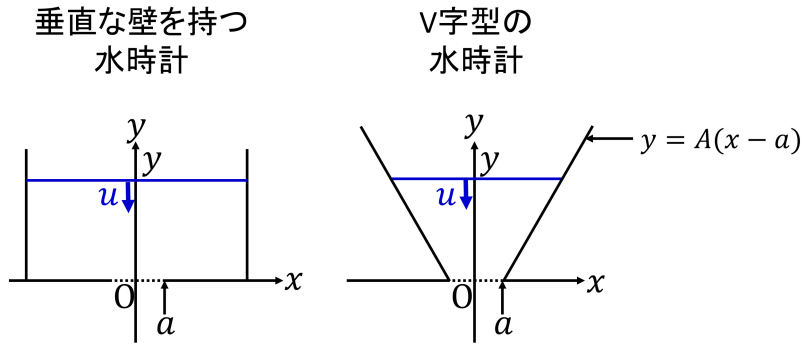


図 17 垂直な壁, V 字型の壁を持つ水時計

表 2 垂直な壁, V 字型の壁を持つ水時計

垂直な壁を持つ水時計	V 字型の水時計
$u = -\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2gy}{(b/a)^2 - 1}}$ $y = \left(\sqrt{y_0} - \sqrt{\frac{g}{2\{(b/a)^2 - 1\}} t} \right)^2$ $u = 2\sqrt{\frac{g}{2\{(b/a)^2 - 1\}}} \left(\sqrt{y_0} - \sqrt{\frac{g}{2\{(b/a)^2 - 1\}} t} \right)$ <p>水面の降下速度は時間とともに遅くなる</p>	$u = -\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2gy}{(y/aA)((y/aA) + 2)}}$ $y = aA \left[\left\{ -\frac{3}{2} \left(\frac{2g}{aA} \right)^{1/2} t + \left(\frac{y_0}{aA} + 2 \right)^{3/2} \right\}^{2/3} - 2 \right]$ $u = (ga)^{1/2} (2A)^{1/2} \left\{ -\frac{3}{2} \left(\frac{2g}{aA} \right)^{1/2} t + \left(\frac{y_0}{aA} + 2 \right)^{3/2} \right\}^{-1/3}$ <p>水面の降下速度は時間とともに速くなる</p>

しない). Bernoulli の定理

$$\frac{u^2}{2} + gy = \frac{q^2}{2}$$

と連立して q を消去すると, 求める断面の方程式

$$y = \frac{1}{2} \frac{u^2}{g} \left(\frac{x}{a} + 1 \right) \left(\frac{x}{a} - 1 \right)$$

を得る. すなわち水面の降下速度を一定にする容器の形は放物線である.

放物線の水時計との比較のため, 図 17 のような垂直な壁を持つ水時計と V 字型の水時計を用いた場合の水位の時間変化を調べることにする. これは放物線の水時計の場合とは逆に, 与えられた容器の形から水面の降下速度を求める問題である. 放物線の水時計の場合と同様に考えれば, 図 17 の水時計に対して水位の時間変化が表 2 のように与えられることを, 読者は容易に示すことができるだろう.

§ 12 ラグランジュの渦定理

- 保存力 $\mathbf{K} = -\nabla\Omega$
- バロトロピー流体 $\rho = f(p) \rightarrow$ 圧力関数 $P = \int^p \frac{dp}{\rho}$ を導入

の仮定の下で, Lagrange の運動方程式と連続の式から

$$\omega_1 \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(a_2, a_3)} + \omega_2 \frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(a_2, a_3)} + \omega_3 \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(a_2, a_3)} = \omega_{10}, \quad \text{etc.} \quad (12.7)$$

$$\omega_i = \frac{\rho}{\rho_0} \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \omega_{j0} \quad (12.8)$$

が導かれる (導出は下記). ここに ρ_0, a_i, ω_{i0} はそれぞれ [任意の流体粒子に関する] 密度 ρ , 座標 x_i , 渦度 ω_i の初期値であり, これらの関係式は Cauchy の積分と呼ばれる. 式 (12.8) に渦は不生であり, また式 (12.7) により渦は不滅である*4. このことは Lagrange の渦定理と呼ばれ, 角運動量保存則に相当する.

ただし物体表面のごく近く (境界層) では, ここで無視した粘性が効くため渦が発生し, またその渦が下流で消滅することがある.

§ 12, 式の導出など

■Cauchy の積分の導出 教科書における表記を多少改め, Cauchy の積分の導出を行う.

Lagrange の方法を採用し, 物理量を Lagrange 座標 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = (a, b, c)$ と時刻 t の関数と見なす. Lagrange の運動方程式は

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} - X_i \right) \frac{\partial x_i}{\partial a_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a_k} \quad (k = 1, 2, 3)$$

である (§ 5). バロトロピー流体と保存力を仮定し, 圧力関数 P と外力のポテンシャル Ω を導入すると ($X_i = -\partial\Omega/\partial x_i$),

$$\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial a_k} = -\frac{\partial}{\partial a_k} (P + \Omega)$$

となる. ここで $k = 3$ とした式を b で微分し, $k = 2$ とした式を c で微分して辺々引くと

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i \left\{ \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial c} \right) - \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial b} \right) \right\} \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial b \partial t} \frac{\partial x_i}{\partial c} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial c \partial t} \frac{\partial x_i}{\partial b} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial b} \frac{\partial x_i}{\partial c} - \frac{\partial u_i}{\partial c} \frac{\partial x_i}{\partial b} \right) \quad \left(\because \frac{\partial x_i}{\partial t} = u_i \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i,k} \left\{ \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial b} \right) \frac{\partial x_i}{\partial c} - \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial c} \right) \frac{\partial x_i}{\partial b} \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i,k(\neq i)} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial x_k}{\partial b} \frac{\partial x_i}{\partial c} - \frac{\partial x_k}{\partial c} \frac{\partial x_i}{\partial b} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i>k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial(x_k, x_i)}{\partial(b, c)} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\zeta \frac{\partial(x, y)}{\partial(b, c)} \right] \quad \leftarrow (i, k) = (2, 1) \end{aligned}$$

*4 式 (12.7) において $\omega = 0$ とおくと $\omega_0 = 0$ となるため, 初めに渦があったことに矛盾する.

$$\begin{aligned}
& + (-\eta) \frac{\partial(x, z)}{\partial(b, c)} \quad \Leftarrow \quad (i, k) = (3, 1) \\
& + \xi \frac{\partial(y, z)}{\partial(b, c)} \Big], \quad \Leftarrow \quad (i, k) = (3, 2) \\
\therefore & \xi \frac{\partial(y, z)}{\partial(b, c)} + \eta \frac{\partial(z, x)}{\partial(b, c)} + \zeta \frac{\partial(x, y)}{\partial(b, c)} = \text{const.}
\end{aligned}$$

を得る。ここに $\omega = (\xi, \eta, \zeta) = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ は渦度であり，積分定数は初期条件 $x_i(\mathbf{a}, t = 0) = a_i$ より $\text{const} = \xi_0$ と定まる ($\omega(\mathbf{a}, t = 0) = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = (\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30})$)。同様に上式において Lagrange 座標 (a, b, c) を巡回置換した式が得られる。それらを合わせて書くと

$$\begin{aligned}
\xi \frac{\partial(y, z)}{\partial(b, c)} + \eta \frac{\partial(z, x)}{\partial(b, c)} + \zeta \frac{\partial(x, y)}{\partial(b, c)} &= \xi_0, \\
\xi \frac{\partial(y, z)}{\partial(c, a)} + \eta \frac{\partial(z, x)}{\partial(c, a)} + \zeta \frac{\partial(x, y)}{\partial(c, a)} &= \eta_0, \\
\xi \frac{\partial(y, z)}{\partial(a, b)} + \eta \frac{\partial(z, x)}{\partial(a, b)} + \zeta \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} &= \zeta_0
\end{aligned}$$

となる。これが Cauchy の積分の第 1 の組 (12.7) である。

次に第 1 式に $\partial x / \partial a$ を，第 2 式に $\partial x / \partial b$ を，第 3 式に $\partial x / \partial c$ を掛けて辺々足す。すると ξ の係数は

$$\frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial(x, y)}{\partial(b, c)} + \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial(x, y)}{\partial(c, a)} + \frac{\partial x}{\partial c} \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = \frac{\rho_0}{\rho}$$

となる。実際，第 1 の等号について，例えば行列式 $\partial(x, y, z) / \partial(a, b, c)$ を 1 行目で展開すると最左辺に戻る事が確かめられる。また第 2 の等号では Lagrange の連続の式を用いた。さらに η, ζ の係数はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial(z, x)}{\partial(b, c)} + \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial(z, x)}{\partial(c, a)} + \frac{\partial x}{\partial c} \frac{\partial(z, x)}{\partial(a, b)} &= \frac{\partial(x, z, x)}{\partial(a, b, c)} = 0, \\
\frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial(x, y)}{\partial(b, c)} + \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial(x, y)}{\partial(c, a)} + \frac{\partial x}{\partial c} \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} &= \frac{\partial(x, x, y)}{\partial(a, b, c)} = 0
\end{aligned}$$

となるので，

$$\xi = \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{\partial x}{\partial a} \xi_0 + \frac{\partial x}{\partial b} \eta_0 + \frac{\partial x}{\partial c} \zeta_0 \right)$$

を得る。同様に Cauchy の積分の第 1 の組に対して，第 k 式に $\partial x_i / \partial a_k$ を掛けて $k = 1, 2, 3$ について和をとれば，Cauchy の積分の第 2 の組 (12.8):

$$\omega_i = \frac{\rho}{\rho_0} \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial a_k} \omega_{k0}$$

が導かれる。

§ 12 について

■Lagrange の渦定理は Lagrange 的な保存則　ここでの渦の不生不滅はその導き方により，各々の流体粒子の渦度について言われていることに注意しよう。このため「一様な流れ……の中に物体がおかれているときの流れも渦無しである。それは……上流の渦無しの領域から流れてきたものと考えられるからである」(p.45, 1.1 ~5) と言うことができる。

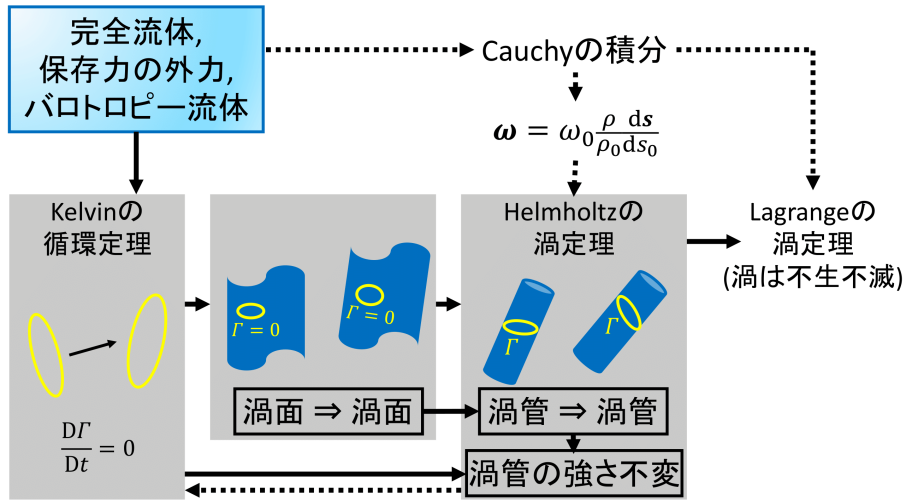


図 18 種々の渦定理の関係

■種々の渦定理の関係 § 12, § 27 では図 18 の破線の手順で諸々の渦の定理を導いたのに対し, 文献 [6, 5-3] では図 18 の実線の手順で渦の諸定理を導いた。

■Kelvin の循環定理の導出について 文献 [5, § 8] [6, 5-3-1] における Kelvin の循環定理の導出を紹介しよう。流体に固定した閉曲線は時間とともに変化するけれど, 循環, すなわち閉曲線に沿う積分

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$$

は時間変化しない (Kelvin の循環定理)。これは次のように証明される。今, 時間が経過すると速度 \mathbf{v} だけでなく, 流体要素を結ぶベクトル $d\mathbf{x}$ も変化することに注意すると,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\mathbf{x} + \oint \mathbf{v} \cdot \frac{D(d\mathbf{x})}{Dt}$$

である。右辺第 2 項について,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \frac{D(d\mathbf{x})}{Dt} &= \mathbf{v} \cdot d\left(\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\right) = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = d\left(\frac{v^2}{2}\right), \\ \therefore \oint \mathbf{v} \cdot \frac{D(d\mathbf{x})}{Dt} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

なので,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\mathbf{x} = \int \left(\nabla \times \frac{D\mathbf{v}}{Dt}\right) \cdot d\mathbf{f} = \int [\nabla \times \{-\nabla(P + \Omega)\}] \cdot d\mathbf{f} = 0$$

を得る。

上式 (1) における順序交換

$$\frac{D}{Dt}(d\mathbf{x}) = d\left(\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\right)$$

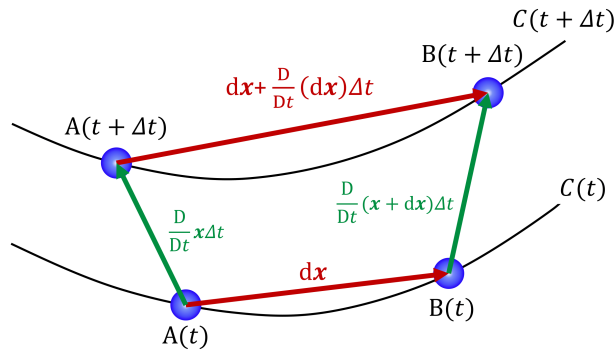


図 19 Kelvin の循環定理の導出について

を解釈し、これを正当化しよう。図 19 のような流体に固定した閉曲線 $C(t)$ 上の無限に近い流体粒子 $A(t), B(t)$ に注目する ($d\mathbf{x} = \overrightarrow{AB}$)。

$$\overrightarrow{A(t)A(t + \Delta t)} + \overrightarrow{A(t + \Delta t)B(t + \Delta t)} + \overrightarrow{B(t + \Delta t)B(t)} + \overrightarrow{B(t)A(t)} = 0$$

なので

$$\overrightarrow{A(t + \Delta t)B(t + \Delta t)} - \overrightarrow{A(t)B(t)} = \overrightarrow{B(t)B(t + \Delta t)} - \overrightarrow{A(t)A(t + \Delta t)}$$

が成り立つ。両辺を Δt で割ると

$$\frac{D}{Dt}(d\mathbf{x}) = d\left(\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\right)$$

を得る。

なお文献 [6, 5-3-1] の式 (5.35) の直前ですべての量が連続と仮定しているのは、閉曲線を 1 周したときにその上で定義される量がもとの値に戻ることを保証するためであると考えられる。もっとも物理量は連続的に変化すると考えるのが普通である。

第2章 縮まない流体の渦無し運動

§ 13 渦無し運動とラプラスの方程式

Lagrange の渦定理 (§ 12) によれば, ある瞬間に渦の無い場合は常に渦無しである. そこで完全流体の渦無し運動を考えよう.

- 渦無し $\rightarrow v = \nabla\Phi$
- バロトロピー流体 $\rho = f(p) \rightarrow$ 圧力関数 $P = \int^p \frac{dp}{\rho}$ を導入

未知数 Φ, p に対する連立方程式

$$\begin{aligned} \text{圧力方程式} \quad & \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}q^2 + P + \Omega = F(t), \\ \text{連続の式} \quad & \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\nabla\Phi) = 0. \end{aligned}$$

特に

- 渦無し $\rightarrow v = \nabla\Phi$
- 縮まない流体 $\rightarrow \nabla \cdot v = 0$ (わき出し無し)

のとき, 2式を組合せると, 流れ $v = \nabla\Phi$ は Laplace 方程式

$$\Delta\Phi = 0$$

から定まることになる. 次いで圧力方程式から圧力 p が求まる.

流れは各瞬間ごとに $\Delta\Phi = 0$ の解として定まり, 過去の流れの影響を受けない
 \leftrightarrow 縮まない流体では流れの影響は瞬時に伝わる (音速無限大).

以降, 第 I 部では常に縮まない流体を考える.

§ 13 について

■非圧縮性完全流体の渦無し運動の理論と因果律

運動方程式は因果方程式としての役割を果たさない 運動方程式は物体の運動が, 物体に作用する力によって決まるという因果律を表している. ところが非圧縮性完全流体の渦無し運動の理論では, 運動方程式を解かずとも,

ラプラスの方程式を適当な境界条件のもとに解いて速度ポテンシャル Φ を定めると, (13.1) [$v = \nabla\Phi$] によって速度が定まり, さらに [運動方程式の第一積分である圧力方程式] (13.2) から

$$p = \rho \left\{ F(t) - \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \Omega - \frac{1}{2}q^2 \right\} \quad (13.5)$$

によって圧力 p を求めることができる. (中略) その際 (13.2) は微分方程式ではなくて, 圧力 p を求めるのに役立つだけである. (13.2) を圧力方程式と呼ぶのはこのためである. (p.47, [] 内引用者)

因果律



流体力学の説明

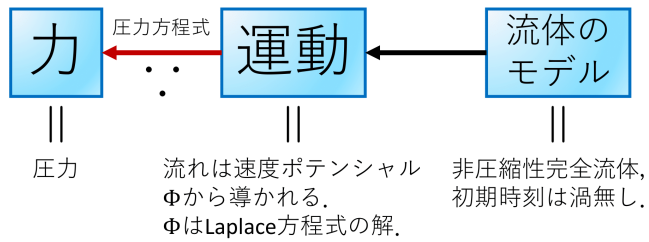


図 20 非圧縮性完全流体の渦無し運動の理論の説明と因果律

つまり図 20 にまとめたように、ここでは運動方程式 (の積分形である圧力方程式) は与えられた力から物体の運動を予言する因果方程式の役割を果たさず、むしろ得られた流れを実現させる圧力場を求めるのに用いられる。これは非圧縮性の仮定が一種の熱力学的条件であり、それ故、力学的因果律に対して盲目であることを反映していると考えられる。

サイフォンの原理 この事情を見るためにサイフォンの原理を取り上げよう。図 21 のように水で満たした管を水槽から垂らし、管に沿って x 軸をとる。もし管の先端が水槽の液面よりも低ければ水は $x > 0$ の側へ流れ続ける。この現象はサイフォンの原理として知られる。

何故 $x < 0$ の部分において水は途切れることなく、重力に逆らって上り続けられるのだろうか。もし水を非

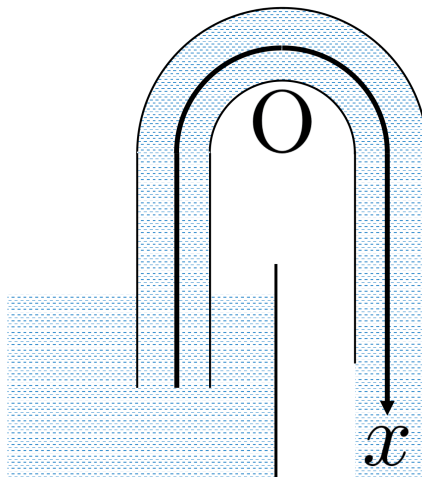


図 21 サイフォンの原理の実験

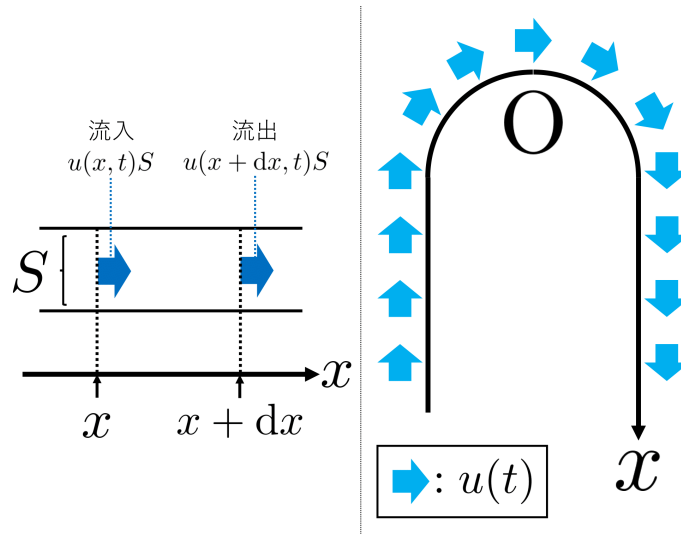


図 22 非圧縮性流体はわき出さない

圧縮性流体と見なすならば、質量保存則 (連続の式) は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

となる。このため図 22 のように管の各位置 x にある水は共通の速度 $u(t)$ で一齐に流れることになる。このように原理的にはサイフォンの水の流れは、流体に作用する力で決まっているはずであるけれど、流体の非圧縮性を仮定すると運動方程式を用いることなく、水の各部分は共通の速度で一齐に流れるという結論が得られる。

水の非圧縮性をもたらすメカニズム によってサイフォンの原理を説明するには、水を非圧縮性流体と見なすことが正当化できれば良い。水の非圧縮性、すなわち密度が一定に保たれる仕組みは次のように考えられる。もし水の微小要素が膨張したとすると、その部分では密度が減少する。そのため密度の増加関数である圧力もまた周囲に比べて減少し、膨張した部分は周囲の流体に押し戻されることになる：

膨張 → 密度減少 → (周囲より) 圧力低下 → 収縮

実際、初期時刻の一律な密度を $\rho = \rho_0$ と書き、密度 ρ が ρ_0 からわずかに変化する場合の流体の時間変化を調べることで、密度が一定の状態 $\rho = \rho_0$ が安定であることを確かめられる。流体を構成する各粒子を初期時刻に粒子がいた位置の座標 a でラベルし、図 23 のように粒子の時刻 t における初期位置 a からの変位を $x(a, t)$ と書くと、 $\rho \simeq \rho_0$ であることは $|\frac{\partial x}{\partial a}| \ll 1$ を意味する。 $\frac{\partial x}{\partial a}$ の 1 次まで考慮する近似で流体の運動方程式と質量保存則から波動方程式

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 x}{\partial a^2}, \quad c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}$$

が導かれる。ただし p は圧力であり、 $\frac{\partial p}{\partial \rho}$ は断熱変化における微分係数 $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$ を、 $\rho = \rho_0$ で評価した値と考えれば良い (s は単位体積あたりのエントロピー、導出は後述) [7, pp.300–304]。これは図 23 のように波のない初期時刻に各幅 Δa に含まれる流体を質量 $m = \rho_0 \Delta a$ の 1 つの質点に置き換えると、流体をバネ定数

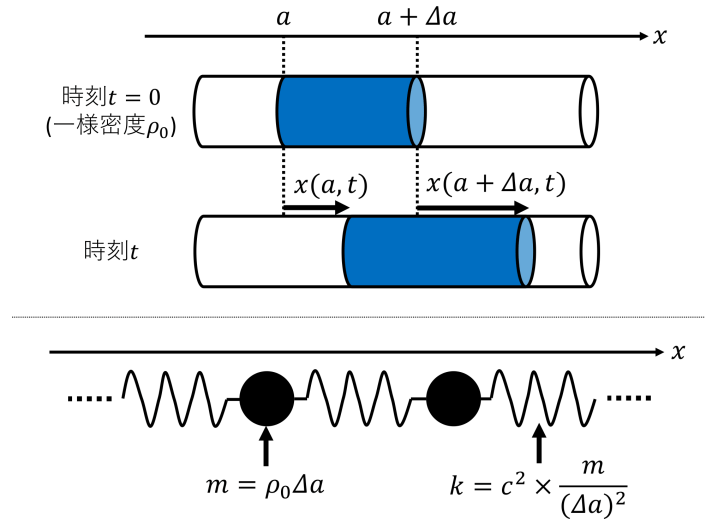


図 23 1次元流における密度変化

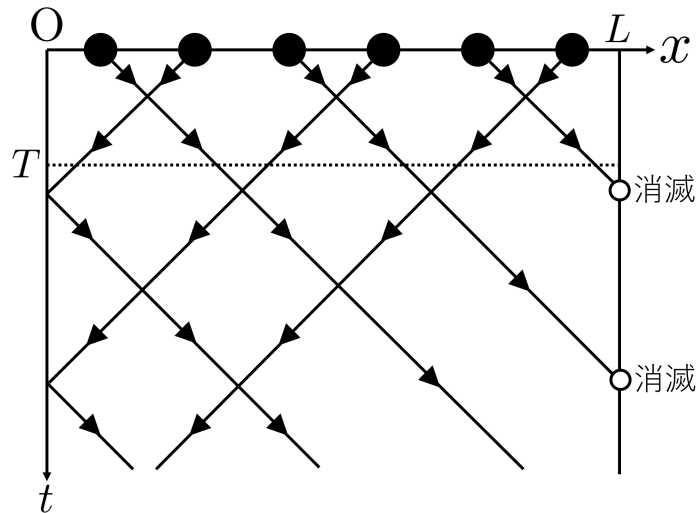


図 24 玉突きモデルでの流れの生成機構

$k = c^2 \frac{m}{(\Delta a)^2}$ のバネでつながれた質点系と見なせることを意味している。このとき流体の密度変化はバネの自然長からの伸び縮みに対応し、質点に働く復元力が密度変化を妨げることになる。水中の音速 $c \sim 10^3 \text{m/s}$ が、従ってバネ定数 $k = c^2 \frac{m}{(\Delta a)^2}$ が“大きな”値であるため、質点には強い復元力が働く。

玉突きの思考実験 最後に分子レベルの衝突を念頭に置いた思考実験を行う。 x 軸上の壁 $x = 0, L$ の間に並べられた質量 m の同種粒子を考え、隣り合う粒子の初速度が逆符号となるように各粒子に初速度 $\pm v$ を与えたとする。粒子は壁や他の粒子と完全弾性衝突をし、接触時以外は壁や他の粒子と相互作用しないものとする。このとき粒子は左右の粒子との衝突の度に進行方向を変えられて初期位置の周りに往復運動をする。ここである時刻 $t = T$ 以降に壁 $x = L$ に達した粒子を消滅させると、図 24 のように粒子は $x > 0$ の側へ流れ出し、いずれ $x = L$ に達する。

次に時刻 $t = T$ 以降に、 $x < 0$ 方向の一樣な重力場 g がかった場合にも、全粒子が端 $x = L$ へ流れつく

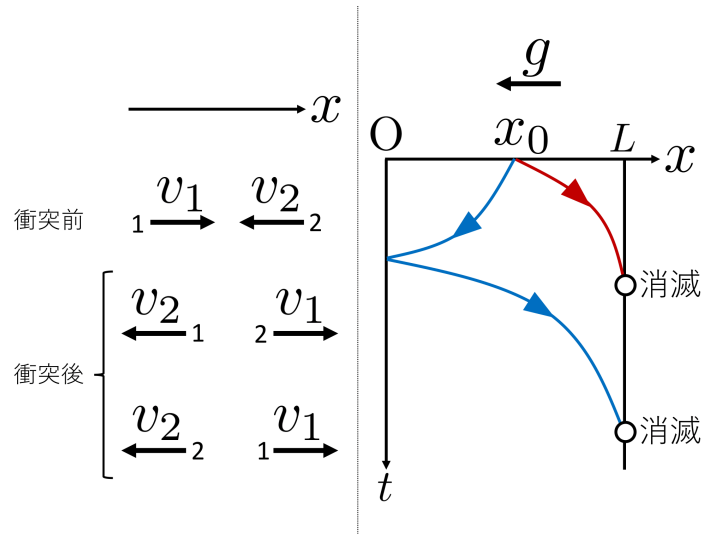


図 25 同種粒子の完全弾性衝突は無視できること

ための条件を考える．同種粒子 1,2 の弾性衝突において 2 粒子は速度を交換するので，同時に粒子の番号も交換すると図 25 のように 2 粒子はお互いをすり抜けるように見える．ここで他の粒子をすり抜ける粒子は初速度の符号に応じて図 25 の赤と青のいずれかの放物線で表される運動をするので，全粒子が $x = L$ に達する条件は

$$\forall x_0 \quad \frac{1}{2}mv^2 + mgx_0 \geq mgL \quad \Leftrightarrow \quad v \geq \sqrt{2gL}$$

となる．ここで重力に逆らってサイフォンを上る水を想定して， L をサイフォンの高さ $L \lesssim 10\text{m}$ に設定すると $\sqrt{2gL} \lesssim 10\text{m/s}$ なので，初速 v を水分子の熱運動の代表的な速さ $\sqrt{kT/m} \sim 10^2\text{m/s}$ にとればこの条件は満たされる（ここに k は Boltzmann 定数であり， $T = 300\text{K}$ とした）．

まとめ 「サイフォンの原理」において，水が部分的に重力に逆らって上昇するのは一見すると直感に反するかもしれない．

非圧縮性流体を仮定すると，質量保存則により水は各位置に共通の速度 $u(t)$ で，足並みを揃えて一齐に流れなければならない．このとき運動方程式は圧力を決定するのに用いられ（運動 \rightarrow 力），〈力 \rightarrow 運動〉という因果方程式の役割を果たさないから，「何故，水が流れるのか」という問いには答えられない．そこで「何故，水が流れるのか」という問いに答えるには，水の非圧縮性をもたらすメカニズムを説明しなければならない．

今，水が局所的に膨張し，密度が薄まったとすると，その部分では圧力が減少するから，周りから密度のゆらぎを打ち消すような復元力を受ける．密度は定常状態における値の周りに振動し，音波を成す．こうして非圧縮性流体の仮定は良い近似となる．

■音波 「縮まない流体のばあいには，いわば音波の速度が無限に大きくて」(p.47, 1.20,21) について，これまでに流体の非圧縮性と音波の関係を考察した．(流体の密度変化を考察する必要がある問題については§ 4 も参照．) そこで予告したように，以下では流体の基礎方程式から音波の存在を説明する．なおここでは流体の速度を v の代わりに u と書く．

音波に対する直観 よく知られているように，音は空気の密度変化が波として伝播する現象である．これに対する直観的なイメージから初めて，流体力学において音波の存在がどのように説明されるかを概観しよう．

まず空気の塊に注目し，その体積が増大したとする．空気の塊の持つ質量は変化しないため，このとき空気

の質量密度は薄まる。通常、質量密度の低下は圧力の低下を意味するので、空気の塊は周囲に比べて相対的に低い圧力を持つことになる。以上より空気は膨らむと、周りの空気からそれを押し戻すような“復元力”を受けることが分かる：

膨張 → (質量) 密度減少 → (周囲より) 圧力低下 → 収縮.

同様に収縮した空気には元の大きさに戻ろうとする力が働くことが結論される。するとこのような復元力により、各位置にある空気の塊がその場で膨張と収縮を繰り返している状態が考えられる。ここである空気の塊が膨張して低密度の状態にあるときには、隣接する空気の塊は収縮して高密度の状態にあるだろう。次の瞬間には注目している空気の塊は収縮して高密度の状態になり、隣接する空気は膨張して低密度の状態となる。この結果、密度が一定の位置 (例えば空気が低密度状態にある位置) は空間を移動していく。これが音波を成す。

以上の議論で本質的なことは

- 空気の塊の持つ質量が変化しないこと
- (質量) 密度の増大に伴って圧力も増大すること
- 周りの空気からの“復元力”が空気の塊の運動 (膨張・収縮) をもたらすこと

の3点にまとめられる。実際、以上の直観的な議論を反映して、

- 質量保存則
- 圧力と (質量) 密度の熱力学的関係*5
- 流体の運動方程式

を用いると、空気の微小な密度変化に対してそれが波動方程式を満たすことを次に示す。ここから音波に対応する波動解が得られる。

音波の解析的な表現 [5, § 64] 流体の (質量) 密度 ρ , 速度 \mathbf{u} , 圧力 p の, 静止流体における値 $\rho_0, 0, p_0$ からのズレ

$$\rho' \equiv \rho - \rho_0, \quad \mathbf{u}, \quad p' \equiv p - p_0$$

の1次までとると、質量保存則 (連続の式) は

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho_0 + \rho') \mathbf{u}] \\ &\simeq \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2)$$

となる。次に運動方程式 (Euler 方程式) について、単位質量を持つ流体粒子の加速度

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \simeq \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$$

を、粒子に働く圧力

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \nabla p' \simeq -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \nabla \rho'$$

*5 考えている空気の素早い振動の間に行われる、周りの空気との熱のやりとりを無視し、断熱変化を仮定する。熱力学的に独立な2変数を (質量) 密度 ρ と流体の単位質量の持つエントロピー s にとって圧力を $p = p(\rho, s)$ と表すと、このとき圧力は密度だけの関数 $p = p(\rho, s = \text{const})$ になる。

と等置して

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \nabla \rho' \quad (3)$$

を得る。ただし $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0$ は断熱変化に対する変化率 $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$ の静止流体における値だから定数であることに注意し、質量保存則 (2) と運動方程式 (3) を合わせると、密度変化 ρ' に対する波動方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} (-\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (\because \text{式 (2)}) \\ &= -\rho_0 \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \\ &= \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \nabla^2 \rho' \quad (\because \text{式 (3)}) \end{aligned}$$

が導かれる。よって音速は

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0}$$

で与えられる。これが式 (11.7) で引用されている音速の式である。

断熱変化では

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \rho'$$

であり、また (渦無し場を仮定して) $\mathbf{u} = \nabla \phi$ によって速度ポテンシャル ϕ を導入すると、Euler 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad \therefore \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p'$$

(再び 2 次の微小量を見捨てた) より

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (4)$$

とできるので、 ρ' だけでなく p', ϕ (したがって \mathbf{u}) も同じく波動方程式を満たすことが分かる。そこで

$$\mathbf{u}, p' \sim e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)}, \quad \omega_k = c|\mathbf{k}|$$

とおき、これを式 (3): $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} \propto \nabla p'$ に代入すると $\mathbf{u} \propto \mathbf{k}$ となるから、音波は縦波である。

1次元の場合 文献 [7, pp.298-302] では、あらかじめ x 方向の 1次元の縦波を想定して音波の波動方程式を導いている (図 26 参照)。その際、波のない状態において位置 $x = a$ にいた流体要素の座標を $x = x(a, t)$ と書き、その時間変化を調べる方法をとる。これは流体力学における Lagrange の方法であり、Euler 的な見方を採用した以上の計算よりも冒頭の直観的な議論をより忠実に表現している。

今の場合には質量保存則は次のように表される。すなわち空気に固定した領域内の質量 Δm が不変であることから、気柱の質量密度の式

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\partial x}{\partial a} \right)$$

が得られる。これをこの領域の空気の塊に対する運動方程式

$$\Delta m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{da} \Delta a S$$

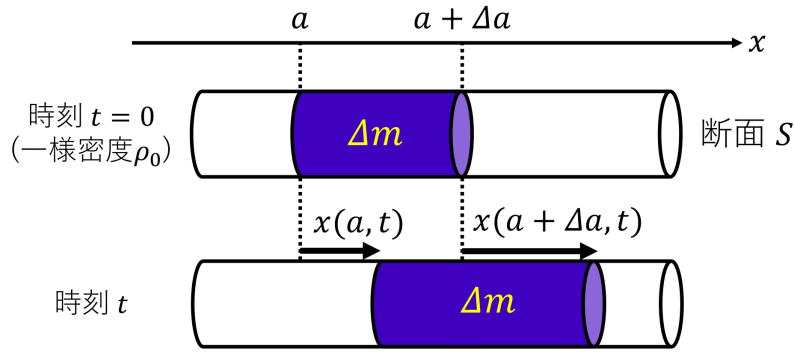


図 26 1 次元的な管の中の音波

と合わせると、波動方程式

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial^2 x}{\partial a^2}$$

が導かれる。圧力 p が質量密度 ρ だけの関数 $p(\rho(x))$ となっているのは、断熱変化を考えているためである。

質量密度の式の説明 図 26 において時刻 t における気柱の長さは

$$\Delta x = \Delta a + x(a + \Delta a, t) - x(a, t) \simeq \Delta a \left(1 + \frac{\partial x}{\partial a} \right)$$

なので、質量密度は

$$\rho = \frac{\Delta m}{S \Delta x} \simeq \rho_0 \left(1 - \frac{\partial x}{\partial a} \right), \quad \rho_0 \equiv \frac{\Delta m}{S \Delta a}$$

となる。

運動方程式の説明 図 26 において時刻 t における気柱に働く力の x 成分は

$$p(\rho(a, t))S - p(\rho(a + \Delta a, t))S \simeq -\frac{dp}{d\rho} \Delta a S = -\frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{d\rho} \Delta a S$$

である。

音のスペクトル分解 以上の議論により、波動方程式は 1 つの波数ベクトル \mathbf{k} (したがって波長と伝播方向) によって特徴付けられる平面波解

$$p'(\mathbf{r}, t) = p_{\mathbf{k}}' e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)}$$

を持つ。一般の波は、あらゆる波数ベクトル \mathbf{k} に関するこのような平面波の重ね合せとして表現できる。空間を 1 辺 L の立方体領域 V と見なして周期境界条件を課すと、可能な \mathbf{k} の値 $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}$ (\mathbf{n} は整数を成分とするベクトル) を用いて

$$p'(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}}' e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)}$$

と Fourier 展開される。 $L \rightarrow \infty$ の極限で展開係数 $p_{\mathbf{k}}'$ から波数空間の体積要素 $d^3 k$ がくり出されて

$$p'(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \left| \begin{array}{c} p_{\mathbf{k}}' \\ \downarrow \\ \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tilde{p}'_{\mathbf{k}} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \\ \downarrow \\ e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \end{array} \right|$$

と Fourier 積分に移行する。よって

- Fourier 成分 $\tilde{p}'_{\mathbf{k}}$ は展開係数 $p_{\mathbf{k}'}$ と異なり, (圧力) \times (長さ)³ の次元を持つ:

$$[p_{\mathbf{k}'}] = [p'], \quad [\tilde{p}'_{\mathbf{k}}] = \frac{[p']}{[d^3k]} = [p']L^3.$$

- Fourier 積分は「平面波 $\tilde{p}'_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_{\mathbf{k}}t)}$ の重ね合せ」ではなく, 正確には「平面波 $\frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{p}'_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_{\mathbf{k}}t)}$ の重ね合せ」である.

最後に, 観測点の位置 \mathbf{r} を固定すると, 圧力変動の時間変化は

$$p'(t) = \sum_{\omega} p_{\omega}' e^{-i\omega t}$$

という形を持つ. Fourier 係数 $\{p_{\omega}'\}$ は音の大きさ, 高さ, 音色の 3 要素を担っている. その絶対値の 2 乗 $|p_{\omega}'|^2$ はパワー・スペクトルと呼ばれ, 粗く言って, これが音の強度に対応する.

■ 圧力の力学的な求め方 (粒子系から流体へ)

ビリアル定理 流体近似に移行する前の粒子系の描像では, 圧力を力学的に求めることが可能である. そのために, ビリアル定理

$$\left\langle \frac{1}{2} \sum_{a,b} F_{ab,i} (x_{aj} - x_{bj}) \delta(\mathbf{r}_b - \mathbf{r}) \right\rangle = \delta_{ij} \delta(p - nkT) \quad (5)$$

を用いることができる (証明は例えば文献 [8, pp.30–33](のノート) を参照). ただし粒子 a, b, \dots の位置を $\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b, \dots$, 粒子 a が粒子 b から受ける中心力を \mathbf{F}_{ab} , そのデカルト座標成分を添字 i, j, \dots で指定しており, また n は流体の粒子数密度である. $\langle \dots \rangle$ はグランドカノニカル分布による平均値であるが, 代わりに時間平均を考えても良い.

参考——ビリアル定理について 理想気体では左辺の粒子間力はゼロだから, 状態方程式 $p = nkT$ が再現される. 上式 (5) は圧力が理想気体の値と, 粒子間相互作用の寄与を表す付加的な項の和で与えられることを意味している. とここで理想気体の圧力は衝突シリンダー内の粒子がシリンダーの底面 (壁) に及ぼす力積から計算できる. これは粒子が壁を通過できるならば, 粒子の移動による運動量の流入量と見なすこともできる. したがって気体の圧力への寄与は,

$$\underbrace{(\text{粒子の流入による運動量変化})}_{\rightarrow \text{理想気体の圧力}} + \underbrace{(\text{粒子間力による運動量変化})}_{\rightarrow \text{理想気体からのズレ}}$$

と分けて理解することができる. このことは以下のビリアル定理の別表現 (6),(7) において見やすい.

ビリアル定理 (5) を

$$p = \frac{N}{V} kT + \frac{1}{3V} \sum_{a < b} \overline{(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) \cdot \mathbf{F}_{ab}} \quad (6)$$

と書き直そう (バーは時間平均) [9, pp.235]. ここに $g(r)$ は動径関数であり, ある粒子 (または適当な空間原点) を中心とする球殻体積 $4\pi r^2 dr$ の中の粒子数を

$$\frac{N}{V} g(r) 4\pi r^2 dr$$

と書いて $g(r)$ を定義することができる.

参考——動径分布関数について このとき

- 粒子の近く $r \rightarrow 0$ では斥力が強くなるので, 他の粒子が存在できず $g(r) \rightarrow 0$ となり,

- 遠方 $r \rightarrow \infty$ では相互作用が及ばず、球殻には体積に比例する粒子数

$$\frac{N}{V} 4\pi r^2 dr$$

が含まれるので、 $g(r) \rightarrow 1$ となる
ことが期待される [9, pp.240–241].

ここでの $g(r)$ の定義より、粒子 a, b 間の相互作用のポテンシャルを $u(|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|)$ として、上式 (6) はさらに

$$\frac{pV}{NkT} = 1 - \frac{N/V}{6kT} \int g(r) r \frac{du(r)}{dr} \cdot 4\pi r^2 dr \quad (7)$$

と書き換えられる [9, pp.241]. ここで $g(r)$ は各瞬間の密度分布 ρ から定まるから、粒子間相互作用の形があらかじめ知られていれば、上式 (7) にしたがって圧力 p を計算することができる. このため流体のモデルと境界条件からあらかじめ決定された流れから、圧力方程式を用いて事後的に圧力を求める場合とは対照的に、原理的には § 4 の図 5 に模式的に示した古典力学的因果律に従って、逐次的に流体変数の時間発展を追跡できることになる.

Boltzmann 方程式 (詳細は文献 [8] のノートを参照) 希薄な気体に対しては、1 粒子分布関数 f に関する Boltzmann 方程式から流体方程式を導くことができる [10, pp.117–120]. その際、応力テンソルは

$$P_{ij} \equiv \int d^3v m (v_i - u_i)(v_j - u_j) f \quad (8)$$

で定義される. ここに m は気体分子に共通の質量、 u_i は分子速度 v_i を単位体積中で平均して得られる流体の速度である. 上式 (8) は流体方程式における応力が、原理的には個々の粒子の運動状態で決まることを意味する. そして右辺は運動量流束を表していることが読み取れる. ところが局所平衡分布関数 $f^{(0)}$ の寄与は理想気体の圧力 $P_{ij}^{(0)} = p\delta_{ij}$ を与えることが判明する. このため運動量流束 (8) が応力としての意味も持つことは、単に視点・解釈の違いに還元されず、実際的なレベルで正しい. さらに $P_{ij}^{(0)}$ からのズレ

$$\sigma'_{ij} = -P'_{ij} = -(P_{ij} - P_{ij}^{(0)})$$

の巨視的な表現を与えて Navier-Stokes 方程式を導くには、式 (8) に直接取り組むのではなく、改めて変形速度と応力の線形関係に依らねばならない.

Boltzmann 方程式は密度の高い液体などには適用できない. 実際、一般には

- 1 粒子分布関数の時間発展は 2 粒子分布関数を用いて記述され、
- 2 粒子分布関数の時間発展は 3 粒子分布関数を用いて記述され、
- ⋮

と無限後退する (BBGKY 階層性). BBGKY 階層性は Bogoliubov (ボゴリユーボフ), Born (ボルン) と Green (グリーン), Kirkwood (カークウッド), Yvon (イボン) によって独立に発見された.

■非定常流であっても流れの様子は変わらないこと Laplace 方程式が線形の方程式であること (§ 14) と境界条件 $v_n = 0$ (§ 6) を考えると、ある境界条件を満たす流れ $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ の定数倍 $c\mathbf{v}(\mathbf{r})$ も、同じ境界条件を満たす可能な流れとなると考えられる. よって

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = c(t)\mathbf{v}(\mathbf{r})$$

という形の非定常流が考えられ、このとき流れの様 (流線) は不変である.

§ 14 ラプラス方程式の簡単な解

Laplace 方程式 $\Delta\Phi = 0$ の線形性 → 重ね合せの原理.

Laplace 方程式の簡単な解と、それらを重ね合わせて得られる解を以下にいくつか挙げる. 対応する流れは図 27 のようである*6. [これらの解は読者にとって、静電気学において既に馴染みのあるものだろう (本稿「§ 14 について」の節を参照).]

- 一様な流れ

$$\Phi = \mathbf{U} \cdot \mathbf{r} \quad (\mathbf{U} \text{ は位置に依らない定ベクトル}), \quad \mathbf{v} = \mathbf{U}.$$

- わき出し, すいこみ

$$\Phi = -\frac{m}{r} + \text{const.} \quad \mathbf{v} = \frac{m}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

- 原点は $m > 0$ のときわき出し, $m < 0$ のときすいこみと呼ばれる.
- 原点を含む任意の閉曲面から単位時間に流出する流体の体積

$$Q = \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = v_r \times 4\pi r^2 = 4\pi m$$

をわき出しの強さと呼ぶ (m を強さと呼ぶこともある).

- 半無限体

$$\Phi = Ux - \frac{m}{r}.$$

- よどみ点 $(-a, 0, 0)$ ($a = \sqrt{m/U}$) を通る流線群は半無限長の筒を形成する.
これを固体表面と見なすと, その外側の流れは半無限長の物体を過ぎる流れと解釈できる.
- 遠方 $x \rightarrow \infty$ における筒の半径 b は

$$4\pi m = \pi b^2 U, \quad \therefore b = 2\sqrt{m/U} = 2a$$

と求まる.

- Rankine の卵形

2点 O, O_1 にそれぞれ強さ m のわき出しとすいこみを考え,
観測点の2点からの距離をそれぞれ r, r_1 と書く.

$$\Phi = Ux - \frac{m}{r} + \frac{m}{r_1}.$$

- 流れは Rankine の卵形と呼ばれる閉曲面によって分けられる.
これを固体表面と見なすと, その外側の流れは Rankine の卵形の物体を過ぎる流れと解釈できる.
- わき出しとすいこみが無限に近い場合 → § 25.

*6 原点を中心とし, 横軸を x 軸, 縦軸を y 軸として xy 面内の速度場を描いている. 3次元の流れは x 軸に関して対称である. 二重わき出しについては速度場そのものではなく, 方向場 $\mathbf{n} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ を描いている. またモーメント $\mu \mathbf{e}$ を x 軸正の向きにとった.

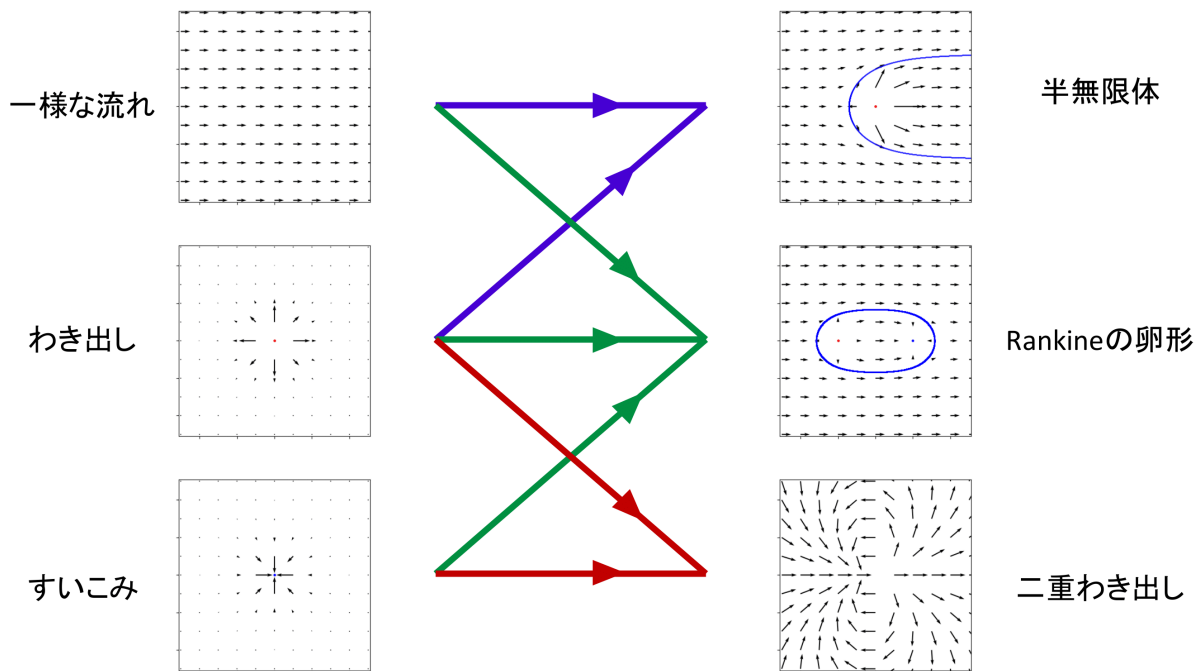


図 27 渦とわき出しのない流れの例

● 二重わき出し

距離 δs 隔たる 2 点 O, O_1 にそれぞれ強さ m のすいこみとわき出しを考え、
観測点の 2 点からの距離をそれぞれ r, r_1 と書く。

図 28 の記号を用いると、 $m \rightarrow \infty, \delta s \rightarrow 0, m\delta s \rightarrow \mu$ の極限でこの場合の速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} \Phi &= -m \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) = -m\delta \left(\frac{1}{r} \right) \\ &= \begin{cases} m \frac{\delta r}{r^2} = -m\delta s \frac{\cos \theta}{r^2} \rightarrow -\mu \frac{\cos \theta}{r^2} \\ -m \left(\nabla_O \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{e} \delta s = m \left(\nabla_P \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{e} \delta s \rightarrow \mu \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{r} \end{cases} \end{aligned}$$

と求まる。

§ 14 について

■ 一様な流れ (14.2) について 位置に依存しない定ベクトル \mathbf{U} に対し

$$\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{r}) \right]_i = \partial_i (U_j x_j) = U_j \delta_{ij} = U_i, \quad \therefore \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{U}$$

である。すなわち内積 $\mathbf{U} \cdot \mathbf{r}$ を “ \mathbf{r} で微分する” と、 \mathbf{r} が取り除かれる。

■ わき出し (14.3), (14.4) について 後で見る 2 次元流のわき出し (19.10) と混同しないように注意する。

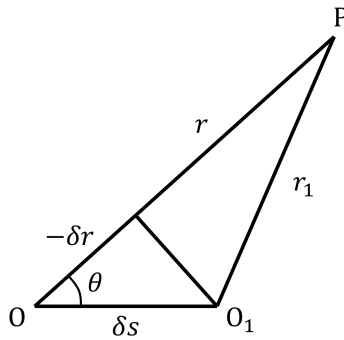


図 28 距離 δ_s 隔たる 2 点 O, O_1 からの距離 r, r_1 (教科書の図 14.4(p.51))

ラプラシアン公式

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right), \quad (\text{球座標 } r \text{ のみの関数に対して})$$

$$\Delta\phi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right). \quad (\text{円筒座標 } r \text{ のみの関数に対して})$$

が有用である*7. なお球座標系で

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\Phi) \quad (\text{球座標 } r \text{ のみの関数に対して})$$

も成立する.

O をとりかこむ任意の閉曲面 S からの流出量 Q が「閉曲面のとり方によらず一定である」(p.49, 1.13,14) ことについて. 図 29 のように 2 つの閉曲面 S_1, S_2 に挟まれた領域 V は原点を含まないから, V の表面からの正味のわき出しはゼロである. よって

$$0 = \int_{S_2} - \int_{S_1}, \quad \therefore \int_{S_1} = \int_{S_2}.$$

2 つの閉曲面 S_1, S_2 が図 30 のように交わっている場合には, S_1 と S_2 を内に含む十分大きな閉曲面 S_3 をとれば良い. すると上の議論を適用できて

$$\int_{S_1} = \int_{S_3}, \quad \int_{S_2} = \int_{S_3} \quad \Rightarrow \quad \int_{S_1} = \int_{S_2}$$

である.

■流れに渦やわき出しがないことの直観的理解 § 14 の流れは渦とわき出しがない条件から得られた (§ 13). なるほど, わき出し (14.4) については原点からは流体がわき出ししているけれど, 原点では流速 $v_r = m/r^2$ は定義されておらず, その外側 $r > 0$ ではわき出しはない. 実際, 一様な流れ (14.2) やわき出し (14.4) には確かに渦やわき出しがないことが直観的に理解できることを説明する. まず一様流 (14.2): $\mathbf{v} = (U, 0, 0)$ を考えよう. 図 31 のように各辺が座標軸に平行な直方体をとれば, ここからの流体のわき出しはなく, また各面の縁を成す辺に沿う速度場の周回積分はゼロとなることが明らかである. わき出し (14.4): $v_r = m/r^2$ に対し

*7 覚え方: まず 2 階微分 $\frac{d}{dr} \frac{d\phi}{dr}$ を作り, 次元を崩さないように r^{-2}, r^2 または r^{-1}, r の組を隙間に挿入すれば良い.

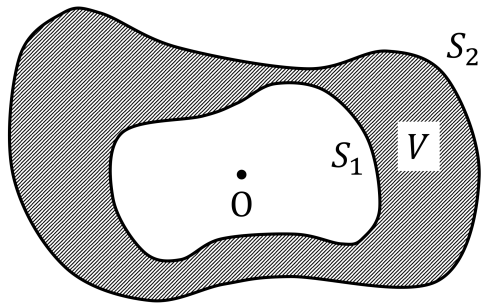


図 29 閉曲面 S_1, S_2

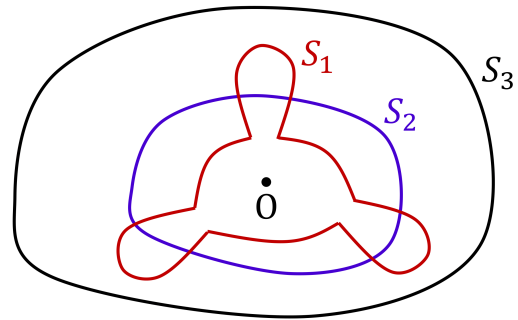


図 30 閉曲面 S_1, S_2, S_3

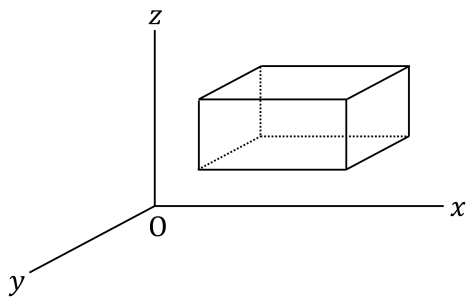


図 31 各辺が座標軸に平行な直方体

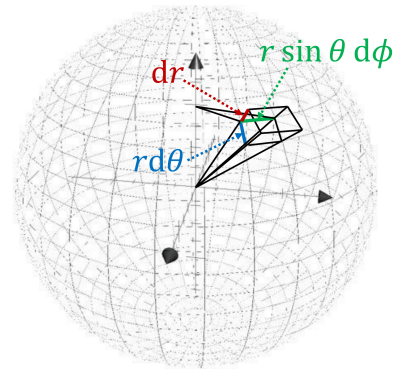


図 32 球座標が $dr, d\theta, d\phi$ 変化して得られる“直方体”

ては、図 32 の“直方体”に着目して同様の議論を行えば良い。ここで長方形の縁に沿う速度場 \mathbf{v} の周回積分は、長方形の面積要素ベクトルを $\Delta \mathbf{f}$ とすると $(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \Delta \mathbf{f}$ なので (Stokes の定理), 周回積分がゼロであることは渦度 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ の $\Delta \mathbf{f}$ 方向成分がゼロであることを意味する。

なお図 33 の長方形に沿うベクトル場 \mathbf{v} の周回積分は、したがって渦度

$$\omega_z \simeq \frac{v_y(x + \Delta x/2) - v_y(x - \Delta x/2)}{\Delta x} - \frac{v_x(y + \Delta y/2) - v_x(y - \Delta y/2)}{\Delta y}$$

は位置 $x \pm \Delta x/2$ (または $y \pm \Delta y/2$) における速度成分 v_y (または v_x) の差を捉えた量であり、差がなければゼロになる。これは図 33 のように中心 (x, y) にプロペラを置いたとき、中心線 $x = \text{const.}$ (または $y = \text{const.}$) に関して流れが対称であればプロペラは回転しないことに対応する。ベクトル場が渦無しであることは、あるいはより一般にベクトル場の回転は、直観的にはこのように理解できる [11, pp.68-73].

■式 (14.5) の半無限体の半径が $x \rightarrow \infty$ で一定値に近づくことについて 原点の遠方では流れは一様流となることによる。半無限体の大部分は半径 b の円筒と見なすことができ、原点付近でのみ先端が丸まっている。

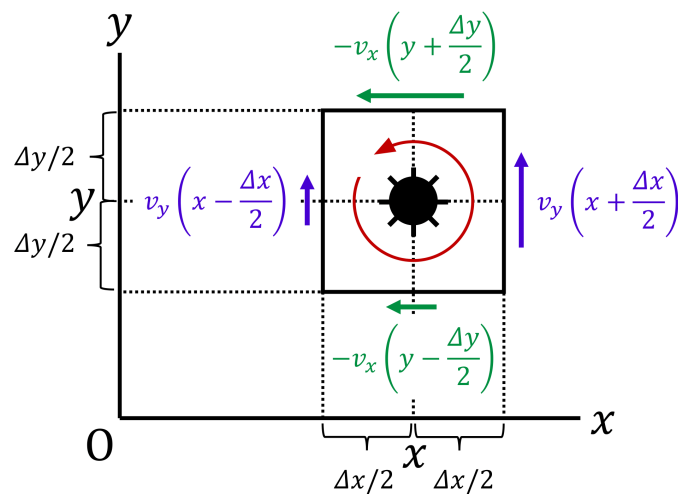


図 33 ベクトル場の回転の直観的解釈

■Rankine の卵形のおよみ点 Rankine の卵形 (14.6) に対して x 軸上のおよみ点の存在を調べる. わき出しを $O(0,0)$, 吸い込みを $O_1(s,0)$ とすると

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{m}{|x^2 + y^2|^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{m}{|(x-s)^2 + y^2|^{3/2}} \begin{pmatrix} x-s \\ y \end{pmatrix} \quad (z=0)$$

なので, x 軸上で流体がよどむ条件

$$0 = u = U + m \left(\frac{x}{|x|^3} - \frac{x-s}{|x-s|^3} \right)$$

は

$$f^{(\pm)}(x/s) \equiv \frac{1}{\left(\frac{x}{s} - 1\right)^2} \pm \frac{1}{\left(\frac{x}{s}\right)^2}, \quad \begin{cases} f^{(-)}(x/s) = -\frac{U}{m}s^2 < 0 & (x/s < 0 \text{ のとき}) \\ f^{(+)}(x/s) = -\frac{U}{m}s^2 < 0 & (0 < x/s < 1 \text{ のとき}) \\ f^{(-)}(x/s) = \frac{U}{m}s^2 > 0 & (1 < x/s \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる. $f^{(\pm)}(x/s)$ のグラフの概形は図 34, 図 35 のようなので, $x < 0, s < x$ に 1 つずつよどみ点ができる (教科書の図 14.3(p.50) の 2 点 A, B に相当).

また $(xy$ 平面上で) $y \neq 0$ によどみ点はない. 実際 $y \neq 0$ に対して

$$0 = v = my \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_1^3} \right)$$

となるのは

$$r^3 - r_1^3 = (r - r_1)(r^2 + rr_1 + r_1^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = r_1$$

の 1 直線上に限り, この直線 $x = s/2$ の上では $u = U \neq 0$ だから $y \neq 0$ では $\mathbf{v} = 0$ となり得ない. こうしてよどみ点は x 軸上の 2 点に限られることが分かる.

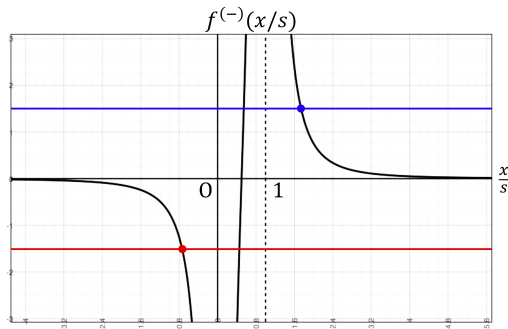


図 34 $f^-(x/s)$ のグラフ

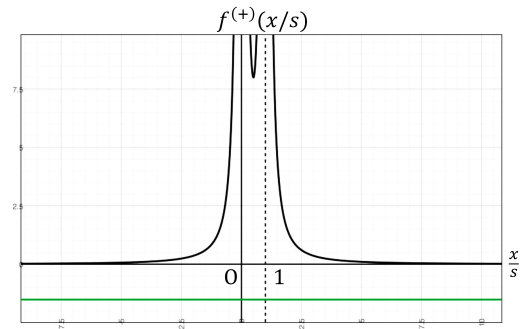


図 35 $f^+(x/s)$ のグラフ

■静電場との対応 静電場もまたポテンシャルが Laplace 方程式 (電荷のある空間では Poisson 方程式) を満たす、渦とわき出しのない場である。実際、わき出しの強さ m を電荷、速度場 \mathbf{v} を電荷と解釈すれば、わき出し (14.4) は点電荷の作る Coulomb 場に対応する。また二重わき出しのモーメント $\mu\mathbf{e}$ を電気双極子モーメント \mathbf{d} に対応させると、二重わき出しのポテンシャル (14.13) は電気双極子モーメント \mathbf{d} の作る静電ポテンシャル $\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}/r^3$ に他ならない [12, pp.109–110].

§ 15–§ 17 について

第 2 章ではこれ以降、やや数学的な議論が続く。とは言え、数学的議論を必要最小限に抑え、それらを物理的に意味付けし解釈することを心がけて書かれている印象を受ける。

§ 15 グリーンの公式の流体力学的解釈

閉曲面 S の内部の領域 V で Laplace 方程式 $\Delta\Phi = 0$ を満たす関数 Φ に対して、 V の任意の点 P における値は Green の公式

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ -\frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial n} + \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dS \quad (15.1)$$

を用いて表される [本稿次節で補足]。ここに r は面要素 dS から点 P までの距離であり、 $\partial/\partial n$ は内向き法線方向の微分を表す。これは次のように流体力学的な意味付けを行なって解釈できる。すなわち流体を取り囲む閉曲面上に強さ $dQ = (\partial\Phi/\partial n)dS$ のわき出しと、モーメント $d\mu = \Phi dS/4\pi$ の二重わき出しを考えると、非圧縮性完全流体の渦なし運動に関する速度ポテンシャルは必ずわき出しと二重わき出しの重ね合せ

$$\Phi(P) = \int_S \left\{ -\frac{dQ}{4\pi r} + d\mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right\}$$

の形に表される。ただし境界面上で $\Phi, \partial\Phi/\partial n$ の両方の値を勝手に決めたとときにこの式から計算される Φ は確かに Laplace 方程式を満たすけれど、その境界 S 上での $\Phi, \partial\Phi/\partial n$ の値は最初に与えた値とは一致しない。これは閉曲面上で $\Phi, \partial\Phi/\partial n$ のいずれか一方の値を指定すると、Laplace 方程式を満たす内部の Φ が完全に決まるため、 $\Phi, \partial\Phi/\partial n$ の両方を勝手に与えることはできないという事実に関係している (§ 17).

■参考 さらに流れを表面のわき出しのみ、または二重わき出しのみで表した形

$$\Phi(P) = - \int_S \frac{dQ}{4\pi r}, \quad \Phi(P) = \int_S d\mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right)$$

に Green の公式を書き直すことができる。この事実は近似計算法にも利用される。

§ 15 について

■Green の公式 (15.1) の導出 ϕ, ψ を任意の関数として、ベクトル $\psi \nabla \phi$ に対して Gauss の発散定理を適用すると

$$\int \nabla \cdot (\psi \nabla \phi) dV = - \int (\psi \nabla \phi) \cdot dS,$$

$$\therefore \int \{(\nabla \psi) \cdot (\nabla \phi) + \psi \Delta \phi\} dV = - \int \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS$$

となる。右辺の負号は面積素ベクトルと法単位ベクトルを内向きにとったことによる。これを ϕ と ψ を入れ替えた式と辺々引くと

$$\int (\psi \Delta \phi - \phi \Delta \psi) dV = - \int \psi \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS$$

を得る。今、左辺の被積分関数の引数を \mathbf{x}' と書き、積分領域内の定点 \mathbf{x} を考えて距離 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ を定義する。その上で $\psi = 1/r$ ととると

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

である。(Poisson 方程式の Green 関数は $1/4\pi r$ である。) さらに ϕ を積分領域内で Laplace 方程式 $\Delta \Phi = 0$ を満たす関数 Φ にとると、上式左辺は

$$\int \left(\frac{1}{r} \Delta \Phi - \Phi \Delta \frac{1}{r} \right) dV = 4\pi \int \Phi(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3 x' = 4\pi \Phi(\mathbf{x})$$

となるので、Green の公式 (15.1):

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dS$$

を得る。

■p.54, 1.9 の式について p.54 の式

$$\Phi(P) = - \int_S \frac{m}{r} dS, \quad \Phi(P) = \int_S \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS$$

においてわき出しの強さと二重わき出しのモーメントに対応するのはそれぞれ $m dS, \mu dS$ であり、 m と μ そのものはわき出しの強さやモーメントの次元を持たないことに注意する。

§ 16 循環、速度ポテンシャル

■領域の連結性 まず必要最小限の数学的概念を導入する。空間の領域 D の中に任意にとった 2 点 A, B を、 D 中の適当な連続曲線で結ぶことができるとき、 D を連結領域という。さらに D の任意の 2 点を結ぶ任意の曲線 C, C' を、領域内で連続的に変化させることで互いに一致させることができる場合、 D は単連結であるという (図 36 参照)。これに対して図 37 のように穴のあいた領域は本来、単連結でない。ところが、例えば図 37 のように 3 箇所切目を入れると、この領域は単連結になる。一般に n 個の切目を入れてはじめて単連結になる領域を $(n+1)$ 重連結であるという。

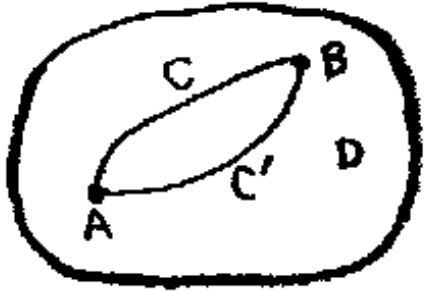


図 36 単連結な領域 D

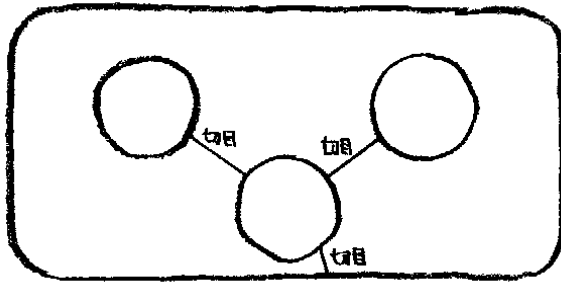


図 37 (3 + 1) 重連結領域

■循環 流体の中にとった任意の曲線 C に沿う積分

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

を C についての流れと呼び、特に C が閉曲線の場合には C についての循環と呼ぶ。

閉曲線 C の循環は C に囲まれた曲面上での渦度によってもたらされることを考えると (Stokes の定理), 単連結領域内で流体が渦無しであることは, 領域内の任意の閉曲線についての循環がゼロになることと同値である。

ところが渦無しの領域が多重連結の場合には, 領域内の閉曲線についての循環は一般にゼロとならない [閉曲線内部にある渦領域が循環をもたらすから]. この点について, 具体例を用いて教科書の議論を補足しつつまとめよう. まず 2 重連結の領域 ($n = 1$) を考えると, これは図 38 のようなドーナツである. このとき切目 Σ をある向き [順の向きと呼ぼう] に 1 回横切るような閉曲線 C についての循環は, 閉曲線 C のとり方に依らず一定である:

$$0 = \oint_C = \int_C - \int_{C'}. \quad (\text{図 38 参照})$$

そこでこの一定値を Γ と書くことにする. さらに図 39 のように, Σ を順の向きに横切る閉曲線

$$C = C_1(A \rightarrow B) + C_2(B \rightarrow A)$$

を考えると,

$$\oint_C = \oint_{C_1+C_0} + \oint_{C_2+C_0} = \Gamma + \Gamma = 2\Gamma \quad (\text{図 39 参照})$$

となる. 一般に Σ を [順の向きに] 横切る回数が p (逆向きに横切るときは負とする) の閉曲線についての循環は $p\Gamma$ である.

次に図 40 の多重連結領域 ($n = 3$) とその内部の閉曲線 C を考えると, 渦領域 1,3 が C の循環をもたらす:

$$0 = \oint_{C'} = \oint_C - \oint_{C_1} - \oint_{C_3}, \quad (\text{図 40 参照})$$

$$\therefore \oint_C = \Gamma_1 + \Gamma_3, \quad \Gamma_1 = \oint_{C_1}, \quad \Gamma_3 = \oint_{C_3}.$$

一般に流体が $(n + 1)$ 重連結で渦無しとなるとき, 領域内の任意の閉曲線 C についての循環は

$$\Gamma(C) = \sum_{i=1}^n p_i \Gamma_i, \quad p_i = 0, \pm 1, \dots, \quad \Gamma_i : \text{循環定数}$$

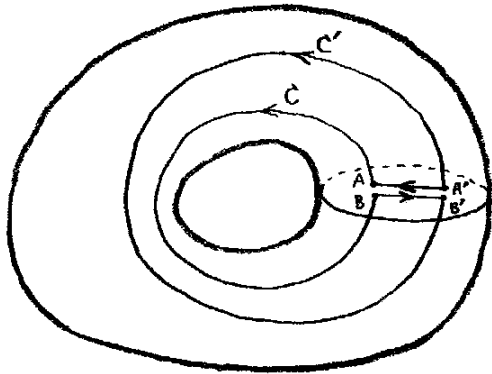


図 38 Σ を 1 回切る閉曲線 C, C'

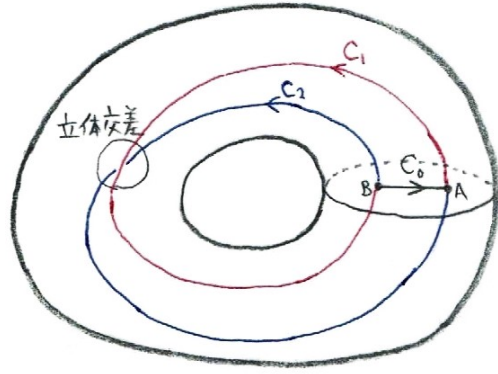


図 39 Σ を 2 回切る閉曲線 C

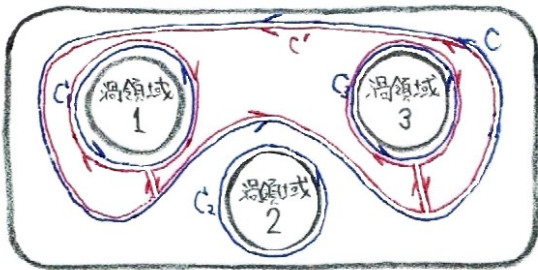


図 40 (3 + 1) 重連結領域と循環

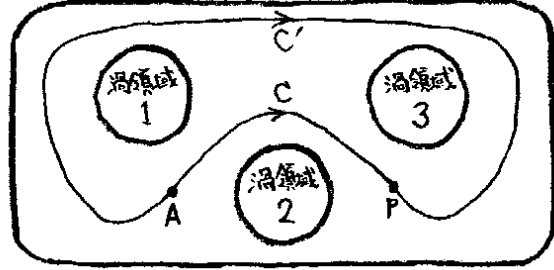


図 41 (3 + 1) 重連結領域と速度ポテンシャル

と表される.

■速度ポテンシャル 速度ポテンシャルは渦無しの領域の定点 A から観測点 P までの線積分 $\int_A^P \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$ である. 再び図 41 の多重連結領域 ($n = 3$) を考えると, A から P に向かう 2 曲線 C, C' を積分路とする 2 種類の速度ポテンシャル

$$\Phi = \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}, \quad \Phi' = \int_{C'} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

は循環定数 Γ_i の整数倍だけ異なっている:

$$\int_C - \int_{C'} = \oint_{C-C'} = \Gamma_1 + \Gamma_3.$$

(一般に速度ポテンシャルには $\sum_{i=1}^n p_i \Gamma_i$ という不定性がある.) しかしどちらも同じ速度場 $\mathbf{v} = \nabla\Phi = \nabla\Phi'$ を与えるため, 速度ポテンシャルの資格がある.

§ 17 流体の運動エネルギー, 解の一意性

■運動エネルギー 閉曲面 S に囲まれた流体の, 渦とわき出しのない流れに対して, 運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}\rho \int (\nabla\Phi)^2 dV = \dots = -\frac{1}{2}\rho \int_S \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial n} dS \quad (17.1)$$

と表される (導出は本稿次節, $\partial\Phi/\partial n$ は内向き法線方向の微分). [内向きの方向微分を考えるのは, Φ が境界 S の内側で定義されているためと考えられる.] よって

$$S \text{ が固体表面} \rightarrow S \text{ 上で } \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \rightarrow \text{静止流体.}$$

(水で満たした容器をどれだけ振り動かしても, 粘性を無視した場合, 中の流体は容器に対して運動しない.)

■解の一意性 以下の (i)–(iii) の場合に 2 つの解 Φ_1, Φ_2 に対して $\Phi_1 - \Phi_2 \equiv \Phi$ とおくと,

$$K = -\frac{1}{2}\rho \int_S \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial n} dS \rightarrow \Phi \text{ は静止流体を表す}$$

$$\rightarrow \Phi_1, \Phi_2 \text{ の表す流れは同一 (解の一意性)}$$

と言える.

(i) $S =$ (単連結領域表面),

S 上で Φ または $\partial\Phi/\partial n$ を与える (Φ_1, Φ_2 に共通の値).

(ii) $S = S_0 + (S_1 + S_2 + \dots)$,

$S_0 =$ (無限遠) (S_0 上で流体は静止), $S_1, S_2, \dots =$ (S_0 内の固体表面).

(iii) $S =$ (多重連結領域表面),

S 上で Φ または $\partial\Phi/\partial n$ を与える (Φ_1, Φ_2 に共通の値).

§ 17 について

■式 (17.1) の導出 部分積分により

$$K = \frac{1}{2}\rho \int (\nabla\Phi)^2 dV$$

$$= \frac{1}{2}\rho \int \{\nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi) - \Phi\Delta\Phi\} dV$$

$$= \frac{1}{2}\rho \int_S (\Phi\nabla\Phi) \cdot (-\mathbf{n}) dS \quad (\because \Delta\Phi = 0, \mathbf{n}: \text{内向き法単位ベクトル})$$

$$= -\frac{1}{2}\rho \int_S \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial n} dS$$

とすれば良い.

§ 17 について

■運動エネルギーの式 (17.1) の導出について これは静電場の持つエネルギーが電荷の位置エネルギーに関係付けられることを示す際の部分積分

$$\frac{1}{8\pi} \int E^2 dV = \frac{1}{8\pi} \int (\nabla\phi)^2 dV = -\frac{1}{8\pi} \int \phi\Delta\phi dV = \frac{1}{2} \int \rho\phi dV$$

と同様の式変形である [12, pp.101–102].

■(ii) の場合

$$K = -\frac{1}{2}\rho \int_{S_0} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS - \frac{1}{2}\rho \int_{S_1+S_2+\dots} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS$$

において

$$\int_{S_0} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS \sim O\left(\frac{1}{R}\right) O\left(\frac{1}{R^2}\right) 4\pi R^2 \rightarrow 0,$$

$$\int_{S_1+S_2+\dots} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = 0 \quad \left(\because \text{境界条件 } \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0\right)$$

である。

■(iii) の場合

「 $\Phi_- - \Phi_+$ は…… Γ に等しい」(p.61, 1.12,13) について 例えば図 38 のドーナツについて、点 A, A' 側を Σ の表、点 B, B' 側を Σ の裏と決めると、

$$\Phi_- - \Phi_+ = \int_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \Gamma$$

である。 Σ を横切って 2 点 A, B を直接繋ぐ無限小の経路について

$$\Phi_- - \Phi_+ = \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

としてはならないと考えられる。

「……この証明は読者にまかせよう」(p.62, 1.5) について

$$S \text{ 上で } \Phi \text{ を与える} \rightarrow \text{式 (17.3) 右辺第 2 項において } \Gamma = \int_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

(S 上の Φ_+ と Φ_- の値にとびはないから),

$$S \text{ 上で } \partial \Phi / \partial n \text{ を与える} \rightarrow \text{式 (17.3) 右辺第 2 項において } Q_i \neq 0.$$

■解の一意性は信じるもの 正しい物理法則の解は一意的であると信じれば、解の一意性を証明するための数学的議論にこだわる必要はない。これが物理屋のスタンスというものである。

第3章 2次元の渦無し運動

§ 18 2次元の流れ, 流れの関数

速度場 $\mathbf{v} = (u, v, w)$ がある軸 (z 軸に選ぼう) に垂直な面内にあり, $z = (\text{一定})$ のどの面上でも速度場が同一であるような流れ

$$u = u(x, y, t), \quad v = v(x, y, t), \quad w = 0$$

を2次元的であるという (xy 面内の流れが z 方向に繰り返されている).

2次元の流れに対して定点 A と任意の点 P を結ぶ曲線 C (z 軸方向に単位の厚みを持つ) を, 単位時間に通過する流体の体積を考える (図 42 参照). 縮まない流体に対しては, これは曲線 C のとり方に依らず終点 P だけの関数 $\Psi(P)$ となる*8. $\Psi(P)$ を流れ (の) 関数と呼ぶ.

流線はその上で流れ関数が一定となる曲線である. この一定値 $\Psi = \text{const}$ は図 43 の緑色で示した, 曲線を単位時間に通過する流体の体積である.

終点 P の位置の変化 $d\mathbf{r} = d\mathbf{s} = (dx, dy)$ に伴う流れ関数の変化は

$$d\Psi = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}ds = -vdx + udy$$

なので (図 42 参照), 流速は流れ関数を用いて

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

と表される.

2次元流では渦度は z 成分 ζ のみを持ち, 流れ関数を用いて

$$\zeta = \partial_x v - \partial_y u = -\Delta \Psi$$

と表される.

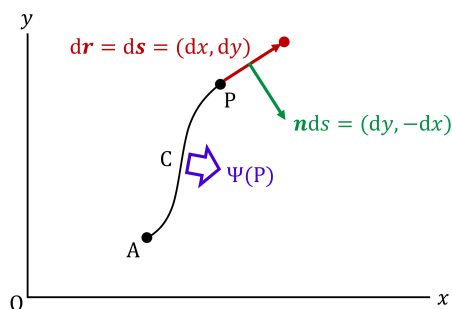


図 42 流れ関数の定義

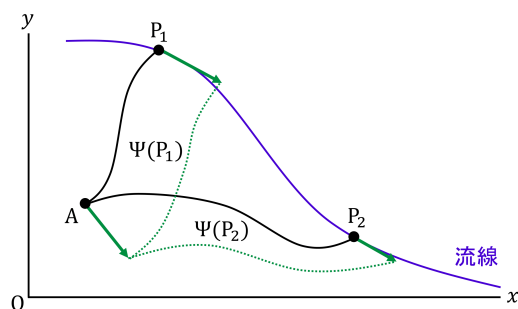


図 43 流線上で流れ関数は一定

*8 A, P を結ぶ 2 つの曲線 C, C' に囲われた領域からのわき出しがゼロなので, C からの領域への流入量と同じだけの流体が C' から流出しなければならないことによる.

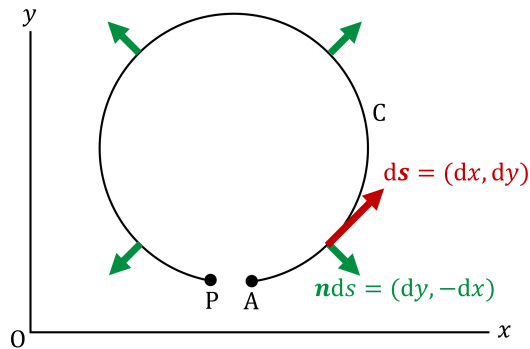


図 44 流れ関数を定義する法線の向き

§ 18 について

■流れ関数 (18.2) を定義する法線の向きについて 流れ関数 (18.2) は単位時間に「C を通って左から右に流れる流体の体積」(p.63, 1.6,7) と説明されている. 図 44 のように点 A から点 P に至る一続きの曲線 C を考えると,

$$\Psi = \int_C (-v dx + u dy)$$

によって定義される流れ関数は, 単位時間に曲線 C を図 44 に示した法線ベクトル $\mathbf{n}ds$ の方向に通過する流体の体積

$$\Psi = \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}ds$$

である. 特に終点 P を点 A に一致させて閉曲線 C を作ると, 流れ関数 $\Psi(P = A)$ は閉曲線 C の内側から外側に流出する流体の体積 Q であり, これがゼロであることは, 流れ関数を導入できる根拠として非圧縮性流体を仮定したことを反映している (§ 19 参照).

また

$$\nabla \Psi = \begin{pmatrix} \partial \Psi / \partial x \\ \partial \Psi / \partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

は速度ベクトル \mathbf{v} を反時計回りに 90 度回転した方向を向いているので, 流速は流れ関数の値の大きい方を左手に見る.

§ 19 2次元の流れ, 流れの函数

2次元の流れに対して

- 縮まない流体 → 流れ関数 Ψ を導入
- 渦無し運動 → 速度ポテンシャル Φ を導入

とすると,

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

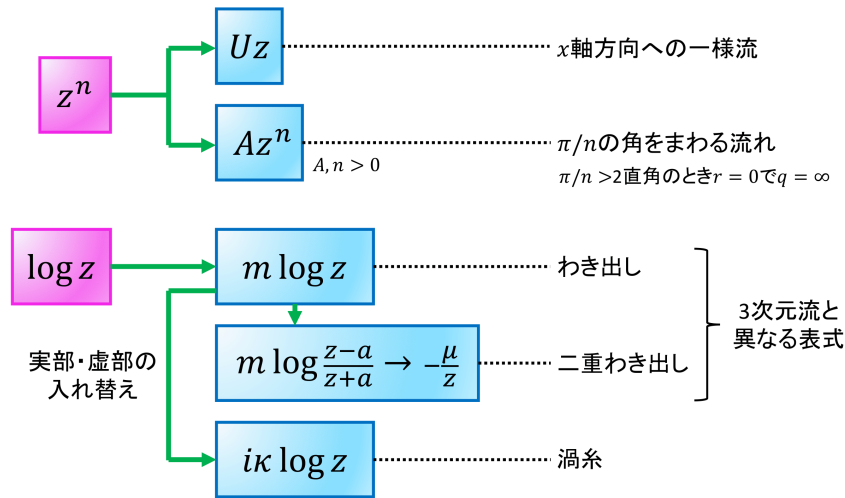


図 45 複素速度ポテンシャルと対応する 2次元流

これは $f = \Phi + i\Psi$ を解析関数として導入できるための条件 (Cauchy-Riemann の関係式) となっている. f を $z = x + iy$ で微分すると流体の速度

$$\frac{df}{dz} = u - iv \quad (19.3)$$

が得られるため [本稿次節で補足, $u + iv$ ではないことに注意], f は複素速度ポテンシャルと呼ばれる.

解析関数 $f(z)$ を指定すると, 必ず対応する縮まない完全流体の 2次元の渦無し運動が得られる. 簡単な例を図 45 に示す (青い四角で囲まれている関数が複素速度ポテンシャルである). 速度場の様子を調べるには, 速度の極座標成分が

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$$

で求まるのが有用となる [本稿次節で補足].

角をまわる流れ 詳細は本稿次節を参照.

渦糸

$$f = i\kappa \log z = -\kappa\theta + i\kappa \log r, \quad (\kappa : \text{実数})$$

$$v_r = 0 \quad v_\theta = -\frac{\kappa}{r}. \quad (r, \theta \text{ は平面極座標, 以下同じ})$$

わき出し

$$f = m \log z = m \log r + im\theta, \quad (m : \text{実数})$$

$$v_r = \frac{m}{r} \quad v_\theta = 0.$$

二重わき出し $z = a$ のわき出しと $z = -a$ のすいこみの重ね合せ

$$f = m \log(z - a) - m \log(z + a)$$

において, $2ma = \mu$ を一定に保ち $m \rightarrow \infty, a \rightarrow 0$ の極限をとって得られる [本稿次節で補足].

§ 19 について

■Cauchy-Riemann の関係式 (p.65), Cauchy の積分定理 (p.66) について Cauchy の積分定理や完全微分方程式は、渦無し場と関係付けて理解できることを以下に示そう。

Cauchy の積分定理

- Cauchy-Riemann の関係式 [13, p.136]

領域 D で定義された関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ について、

$u(x, y)$ と $v(x, y)$ が連続な偏導関数をもつとする。

[f は複素速度ポテンシャルでなくても良く、またここでの u, v は速度成分を意味しない.]

このとき (複素) 関数 $f(z)$ が正則であるための必要十分条件は、(領域 D で)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (9)$$

これを Cauchy-Riemann の関係式という。

- Cauchy の積分定理 [13, p.160]

単一閉曲線 C と C の内部を含む領域で正則な関数 $f(z)$ に対して

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

となる。

以上は次のように解釈できる。複素積分

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (udx - vdy) + i \oint_C (vdx + udy)$$

は 2 種類のベクトル場 $\mathbf{A} = (u, -v)$, $\mathbf{B} = (v, u)$ の線積分から成る。ここで Cauchy-Riemann の関係式 (9) はベクトル場 \mathbf{A}, \mathbf{B} が渦無し場であることを意味し、従ってこの周回積分はゼロになる [11].

完全微分方程式 1 階微分方程式

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (10)$$

は、左辺 $Pdx + Qdy$ がある関数 $u(x, y)$ の全微分となっているとき完全微分方程式と呼ばれ、その一般解は

$$u(x, y) = \text{const}$$

で与えられる。そして式 (10) が完全微分方程式であるための条件は

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

である [13, p.17].

以上は次のように解釈できる。式 (10) が完全微分方程式であれば、ベクトル場 (P, Q) の線積分 (終点を (x, y) とする) は経路によらず

$$\int (Pdx + Qdy) = u(x, y) + \text{const}$$

となるはずである。これはベクトル場 (P, Q) に渦が無いこと

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

を意味する。

■複素速度ポテンシャルの微分 (19.3) の計算について Cauchy-Riemann の関係式は、複素関数 $f = u+vi$ (ただし f は複素速度ポテンシャルでなくても良く、またここでの u, v は速度成分を意味しない) の微分

$$\frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

が $\Delta z = \Delta x + i\Delta y \rightarrow 0$ の近づけ方に、したがって比 $m = \Delta y/\Delta x$ に依らずに定義できる条件であることを思い出そう。実際、

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \frac{(u_x dx + u_y dy) + i(v_x dx + v_y dy)}{dx + i dy} \quad (u_x = \partial_x u, \text{etc.}) \\ &= \frac{(u_x + i v_x) + (u_y + i v_y)m}{1 + im} \quad (m = dy/dx) \\ &\equiv \varphi(m) \end{aligned}$$

が m に依らない条件

$$\frac{d\varphi(m)}{dm} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (u_y + v_y i) - (u_x + v_x i)i = 0$$

は Cauchy-Riemann の関係式

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

に他ならない [13, pp.136–137].

よって複素速度ポテンシャル f の微分を計算するには、 $\Delta z = \Delta x$ または $\Delta z = i\Delta y$ ととって

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = u - iv, \quad \frac{df}{dz} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + i \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = u - iv$$

とすれば良い。

■複素速度 df/dz の周回積分 (19.5) について 式 (19.5):

$$\oint_C \frac{df}{dz} dz = \oint_C df = \oint_C d\Phi + i \oint_C d\Psi = \Gamma + iQ$$

は C についての循環 Γ と C を横切る流量 Q が、"速度" df/dz の周回積分によって与えられることを示している。このことは

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{df}{dz} dz &= \oint_C (u - iv)(dx + i dy) \\ &= \oint_C (u dx + v dy) + i \oint_C (u dy - v dx) \\ &= \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} + i \oint_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds \\ &= \Gamma + iQ \end{aligned}$$

と書けばより明瞭に理解される。ただし $d\mathbf{s}, \mathbf{n} ds$ は図 42 のように定義した。

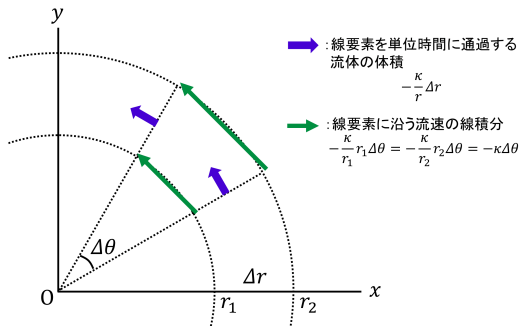


図 46 渦糸 (19.9): $v_\theta = -\kappa/r$

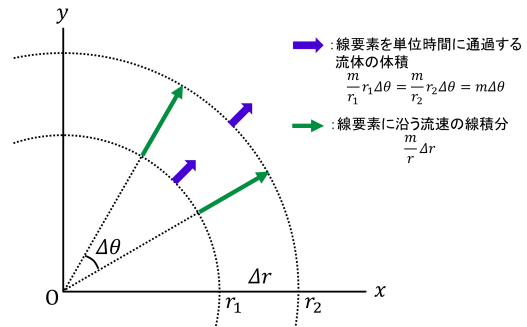


図 47 わき出し (19.10): $v_r = m/r$

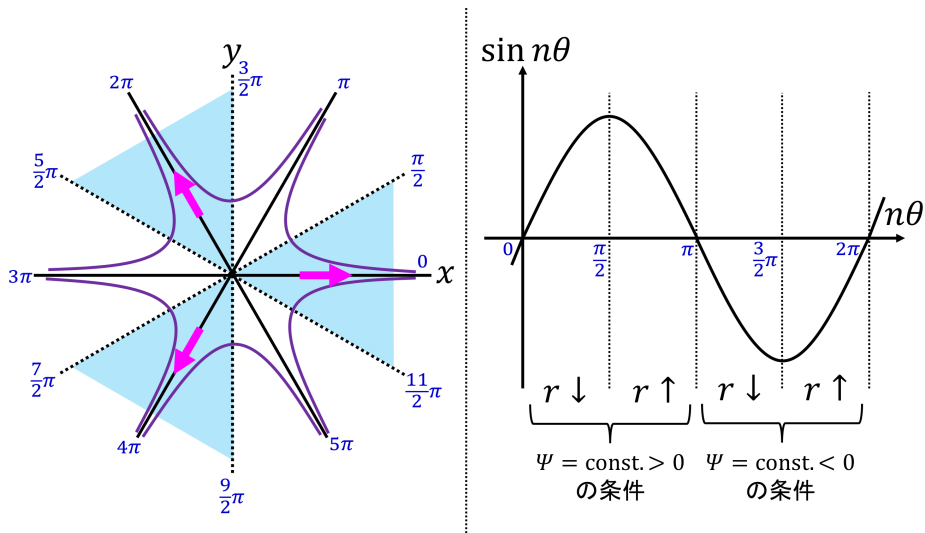


図 48 角をまわる流れ

■流れに渦やわき出しがないことの直観的理解 一様な流れ (19.6) や渦糸 (19.9): $v_\theta = -\kappa/r$, わき出し (19.10): $v_r = m/r$ には確かに渦やわき出しがないことを, 3 次元的な流れに対して § 14 の補足にて議論したのと同様の方法で直観的に理解できる (図 46, 図 47 参照). (ただし渦糸とわき出しについては, 流れの定義されている, 原点の外側 $r > 0$ で渦とわき出しがない.)

■角をまわる流れ 式 (19.7): $f = Az^n = Ar^n \cos n\theta + iAr^n \sin n\theta$, $A > 0, n > 0$ の流れの概形を $n = 3$ に対して調べる. 図 48 左側の直線には $n\theta$ の値を書き添えた. 図 48 右側の $\Psi = \text{const.}$ の条件から左側の流線の概形を得る. 左側の水色で影を付けた部分では $\cos n\theta > 0$ なので, Φ は r の増加関数だから $v_r > 0$ となり, 流線上の流れの向きが分かる.

「流れがはがれ」と「渦の領域が作られる」(p.67, 1.15) のは, 図 49 のように渦の層に他ならない速度の不連続面ができるからであると考えられる (p.102 参照).

なお流れは $n \notin \mathbb{N}$ としても定義されるが, θ が $0 \leq n\theta \leq 2\pi$ となる範囲で考えないと流れが一意的に決まらない. もっとも興味のあるのは $0 \leq \theta \leq \pi/n$ の部分だけである.

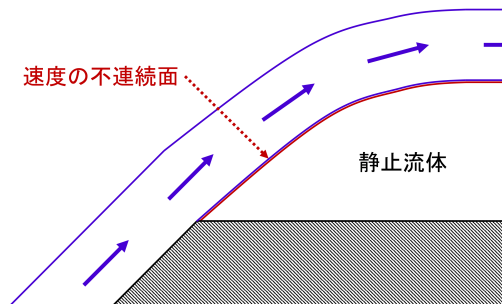


図 49 角をまわる流れの剥離

■対数関数 (19.8),(19.10) 等について いずれも真数が長さの次元を持っている．しかし複素速度ポテンシャルには任意の定数を付け加える不定性があり，これを利用していつでも

$$\log z \rightarrow \log z - \log z_0 = \log(z/z_0)$$

のように真数を無次元化できる．

■速度の r, θ 成分 式 (19.9): $v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$ について，速度の極座標成分 $v_r = \hat{r} \cdot (\nabla \phi), v_\theta = \hat{\theta} \cdot (\nabla \phi)$ ($\hat{r}, \hat{\theta}$ は方向単位ベクトル) はそれぞれ r 方向微分， θ 方向微分である．よって速度の r 成分は，半径が δr 変化した位置とのポテンシャルの差を $\delta \Phi$ とし $\delta \Phi / \delta r \rightarrow \partial \Phi / \partial r$ である．同様に速度の θ 成分は，方位角が $\delta \theta$ (距離は $r \delta \theta$) 変化した位置とのポテンシャルの差を $\delta \Phi$ とし $\delta \Phi / (r \delta \theta) \rightarrow (1/r)(\partial \Phi / \partial \theta)$ である．

実際，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = u \cos \theta + v \sin \theta, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = -u \sin \theta + v \cos \theta \end{aligned}$$

であって，これらがそれぞれ速度の r, θ 成分となっていることは，図 50 から幾何学的に確かめられる．

■二重わき出しの式 (19.11) について 公式

$$\log(1 + \zeta) = \zeta - \frac{\zeta^2}{2} + \frac{\zeta^3}{3} - \dots \quad (|\zeta| < 1)$$

を利用すると，

$$f = m \log \frac{1 - a/z}{1 + a/z} = -2m \left\{ \frac{a}{z} + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{z} \right)^3 + \dots \right\} \rightarrow -\frac{\mu}{z}.$$

■教科書の例にないポテンシャル流 § 19 では解析関数 $f(z)$ を指定すると，必ずそれを複素速度ポテンシャルに持つような縮まない完全流体の 2 次元の渦無し運動が得られることを学んだ．余興としてこのようなポテンシャル流の，教科書で取り上げていない簡単な例を図 51 に示す．

§ 20 円柱の運動

a) 静止流体中を動く円柱

xy 面内の断面が半径 a の円であるような， z 軸方向に伸びる無限に長い円柱を考える．これが x 軸の正の方向に速さ U で動いているとき，円の中心が原点を通過した瞬間に円柱の周りに作られる 2 次元流は，複素

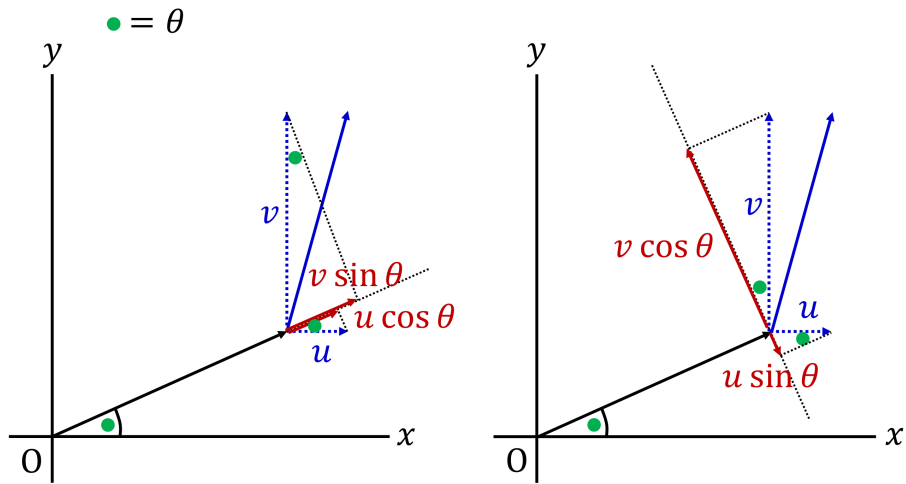
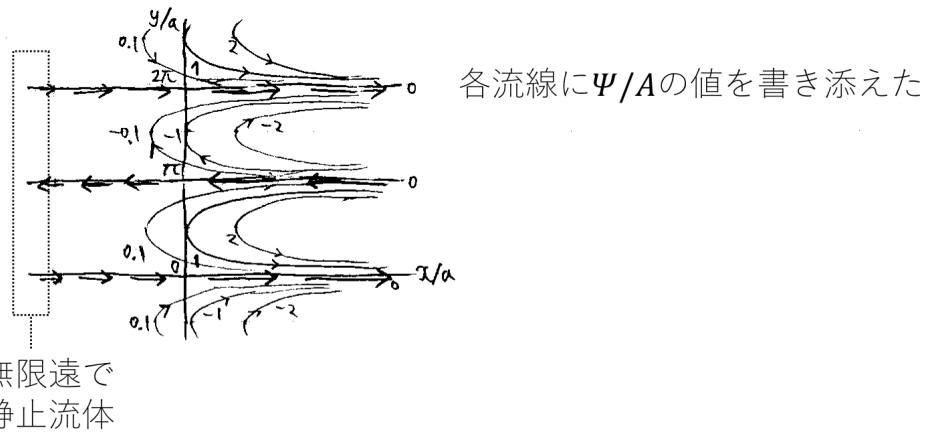


図 50 速度の r, θ 方向への分解

$$w = Ae^{z/a} \begin{cases} \Psi = Ae^{x/a} \sin(y/a) \\ \Phi = Ae^{x/a} \cos(y/a) \end{cases} \begin{cases} u = +(A/a)e^{x/a} \cos(y/a) \\ v = -(A/a)e^{x/a} \sin(y/a) \end{cases}$$



$$w = A \cosh(z/a) \begin{cases} \Psi = A \sinh(x/a) \sin(y/a) \\ \Phi = A \cosh(x/a) \cos(y/a) \end{cases} \begin{cases} u = +(A/a) \sinh(x/a) \cos(y/a) \\ v = -(A/a) \cosh(x/a) \sin(y/a) \end{cases}$$

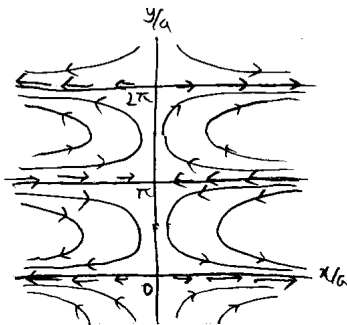


図 51 教科書の例にないポテンシャル流

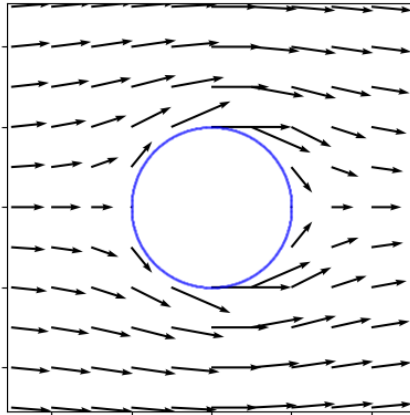


図 52 円柱を過ぎる一様流

速度ポテンシャル

$$f = -\frac{Ua^2}{z} + \text{const.} \quad (20.5)$$

によって記述される (導出は下記, 付加定数 const は速度場に影響しないので省略して良い). これは強さ $\mu = Ua^2$ を持つ二重わき出しを表す (§ 19).

b) 一様流中に静止する円柱

- x 軸負の方向に速さ U で運動する円柱の作る流れ ($f = Ua^2/z$)
- x 軸方向の速度 U の一様流 ($f = Uz$)

を重ね合せた複素速度ポテンシャル

$$f = Uz + \frac{Ua^2}{z}$$

は, 速度 U の一様流の中に半径 a の円柱を置いたときの流れを表す (図 52 参照).

表面 $z = ae^{i\theta}$ での値

$$f = Uae^{i\theta} + Uae^{-i\theta} = 2Ua \cos \theta$$

より $\Psi = 0$ なので, 円柱表面は確かに流線になっている. 表面の流速は

$$v_\theta = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)_{r=a} = -2U \sin \theta$$

であり, 特に $\theta = \pm\pi/2$ では $v_\theta = -2U$ (一様流 U の 2 倍).

c) 循環を伴うばあい

さらに時計回りに測った循環 Γ を持つ渦糸の作る流れを重ね合せて, 複素速度ポテンシャルを

$$f = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \log z$$

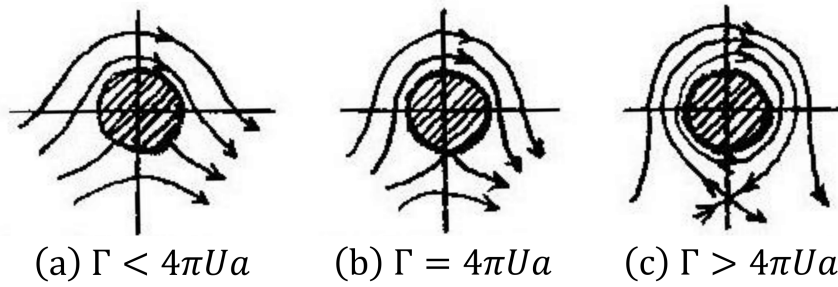


図 53 一様流の中に置かれた円柱の周りの、循環を伴う流れ

としても、これは境界条件を満たす可能な流れを表す。循環 Γ の増大に伴って、流れは図 53 のように変化する (下記参照)。

時計回りの循環

- 流速は円柱の下側より上側の方が速くなる
- 圧力は円柱の上側より下側の方が高くなる (Bernoulli の定理)
- 円柱は上向きの力を受ける。

実際、

$$f \rightarrow \frac{df}{dz} \rightarrow q \rightarrow p \quad (\text{Bernoulli の定理})$$

の順に圧力分布を求め、円柱に働く力

$$P = - \oint p n ds$$

を調べると、

$$\text{抵抗 } P_x = 0 \quad (\rightarrow \text{d'Alembert のパラドックス, § 23}) \quad (11)$$

$$\text{揚力 } P_y = \rho U \Gamma \quad (\rightarrow \text{Kutta-Joukowski の定理, § 23}) \quad (12)$$

を得る (導出は下記)。

d) 任意に運動する円柱

静止流体中で任意の運動をする円柱を考え、円の中心を $z = \zeta(t)$ と表す。円柱の周りに循環 Γ があるとき、複素速度ポテンシャルは

$$f = -\frac{a^2 \dot{\zeta}}{z - \zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \log(z - \zeta) \quad (20.13)$$

となる [本稿「§ 20 について」の節で補足]。再び

$$f \rightarrow \frac{df}{dz} \rightarrow q \rightarrow p$$

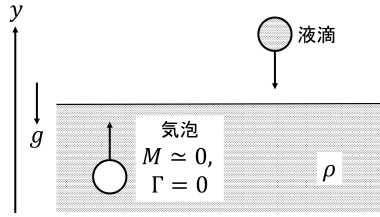


図 54 水中の気泡

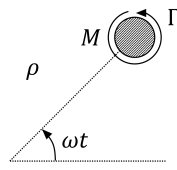


図 55 円柱の自由な運動

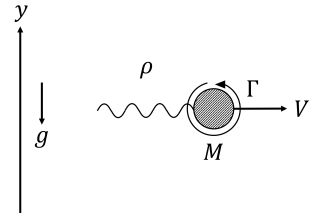


図 56 重力下の円柱の運動

の順に圧力を求めよう。[b)c] では定常流を扱っていたので、Bernoulli の定理を用いて流速 q から圧力 p の分布を得ることができた。これに対し、今考えている流れは非定常的である。そこで] 圧力方程式を用いて円柱表面の圧力分布を求めると、円柱に働く力 \mathbf{P} の進行方向成分 P_1 と、それに垂直な成分 P_2 として

$$P_1 = -\pi a^2 \rho \dot{U}, \quad (20.19)$$

$$P_2 = -\pi a^2 \rho U \dot{\chi} + \rho U \Gamma \quad (20.20)$$

を得る (導出は下記)。ここに U と χ はそれぞれ円柱の速度の大きさと偏角である ($\dot{\zeta} = Ue^{i\chi}$)。 (加速度 $\dot{U}, \dot{\chi} = 0$ とおくと、上式 (20.19),(20.20) は式 (11),(12) の結果を再現する。) ここから円柱に対する運動方程式

$$M\ddot{\zeta} = Z + (P_x + iP_y)$$

を書き下すと (M は円柱の [単位厚みあたりの] 質量, $Z = X + iY$ は円柱に働く外力 (X, Y) の複素表示, $P_x + iP_y = (P_1 + iP_2)e^{i\chi}$ は円柱に働く圧力 $P_1 + iP_2$ の x, y 座標系で見た成分),

$$(M + M')\ddot{\zeta} = Z + i\rho\Gamma\dot{\zeta}, \quad (M' = \pi a^2 \rho) \quad (20.22)$$

を得る。 M' は仮想質量と呼ばれ、物体とともに流体が動くことによる慣性の増加と解釈される。上式は円柱の運動が、外力 Z と揚力 $i\rho\Gamma\dot{\zeta}$ の下での質量 $M + M'$ の物体の運動と同等であることを意味している。

- 水中の気泡 ($M \simeq 0$)

$$M'\ddot{y} = M'g \quad \rightarrow \quad \text{真空中の水滴の運動と同じ (図 54 参照)}$$

- 円柱の自由な ($Z = 0$) 運動

$$\zeta = \zeta_0 + Ce^{i\omega t} : \text{円運動 (図 55 参照)}, \quad \omega = \rho\Gamma/(M + M').$$

- 重力 (と浮力) を受ける円柱の運動 ($Z = -i(M - M')g$)

$$\zeta = \zeta_0 + Ce^{i\omega t} + Vt : \text{水平にトロコイド運動 (図 56 参照)}, \quad V = (M - M')g/\rho\Gamma. \quad (20.24)$$

[本稿「§ 20 について」の節で補足.]

e) ミルン-トムソンの円定理

原点 $z = 0$ から距離 a 以内にわき出しや渦糸のような特異点を持たない、複素速度ポテンシャル $f(z)$ を考える。このとき、 $f(z)$ の表す流れの中に円柱 $|z| = a$ を置いた場合の流れは、複素速度ポテンシャル

$$F(z) = f(z) + f^*(a^2/z)$$

によって与えられる (Milne-Thomson の円定理). [ここで $f^*(a^2/z)$ は $f^*(a^2/z^*)$ の意味で用いられているものと考えられる.] 何故なら,

1. $f^*(a^2/z)$ の項は円柱の外に新たな渦糸やわき出し (特異点) を作らず,
[本稿「§ 20 について」の節で教科書を補足しつつ確認]
2. 流線が円に沿うからである.
 - [$f^*(a^2/z) \rightarrow f^*(a^2/z^*)$ と表記を改めると,] 円柱表面 $zz^* = a^2$ では

$$F(z) = f(z) + f^*(a^2/z^*) = f(z) + f^*(z) = (\text{実数}), \quad \therefore \Psi = \text{Im}F = 0$$

となるので, 円柱表面は流線となる.

例えば一様流 $f = Uz$ をとると, 式 (20.6) の複素速度ポテンシャル

$$F(z) = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

が得られる.

§ 20, 式の導出など

■式 (20.5) の導出 円柱の外側での複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots \quad (20.1)$$

と Laurent 展開される [本稿次節で補足]. $c_n = a_n + ib_n, z = re^{i\theta}$ において上式 (20.1) を実部と虚部分けると

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^{-n}, \\ \Psi &= \sum_{n=0}^{\infty} (b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta) r^{-n} \end{aligned}$$

となる. ここで境界条件として円柱表面 $r = a$ で円柱と流体との相対速度の法線成分がゼロになること

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = U \cos \theta \quad (r = a) \quad (20.4)$$

[図 57 参照] を要求すると,

$$-\sum_{n=1}^{\infty} na^{-n-1} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = U \cos \theta$$

が得られる. よって

$$\begin{aligned} -a^{-2}a_1 &= U, & b_1 &= 0, \\ a_n &= b_n = 0 & (n > 1) \end{aligned}$$

と同定されるので, 複素速度ポテンシャル (20.5):

$$f = c_0 - \frac{Ua^2}{z}$$

を得る (c_0 は任意定数).

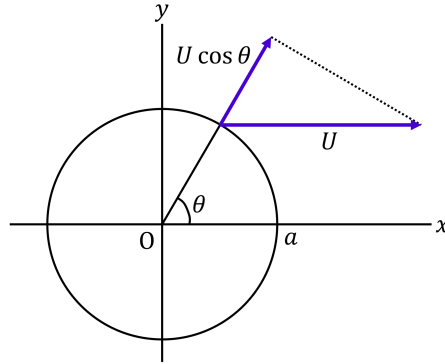


図 57 静止流体中を動く円柱周りの 2 次元流に対する境界条件 (20.4)

■円柱周りの循環を伴う流れの様子 (図 53) について 速度場 $u - iv$ は

$$\frac{df}{dz} = U \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z}$$

である。よどみ点の位置 z は $df/dz = 0$ とおくと、

$$\frac{z}{a} = -i \frac{\Gamma}{4\pi U a} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\Gamma}{4\pi U a} \right)^2} \quad (20.9)$$

と求まる [本稿次節で補足].

■抵抗 (11) と揚力 (12) の導出 円柱表面の速度は

$$q = v_\theta = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)_{r=a} = -2U \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi a}$$

なので, Bernoulli の定理は

$$p = p_0 - \frac{\rho}{2} q^2 = p_0 - \frac{\rho}{2} U^2 \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a U} \right)^2 \quad (20.11)$$

と書ける [本稿次節で補足]. 表面の線要素 $ds = a d\theta$ と法単位ベクトル $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta)$ を用いて, 圧力 (20.11) の合力は $\mathbf{P} = -\oint p \mathbf{n} ds$ と計算できる. よって

$$P_x = - \int_0^{2\pi} a \left\{ p_0 - \frac{\rho}{2} U^2 \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a U} \right)^2 \right\} \cos \theta = 0 : (11),$$

$$P_y = - \int_0^{2\pi} a \left\{ p_0 - \frac{\rho}{2} U^2 \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a U} \right)^2 \right\} \sin \theta = \rho U \Gamma : (12)$$

を得る.

■運動する円柱に働く力 (20.19), (20.20) の導出 円柱の速度を, 大きさ U , x 軸との成す角 χ として $\dot{\zeta} = U e^{i\chi}$ と書く. また円柱の進行方向を基準とする偏角 θ を用いて, 円柱の中心と観測点の隔たりを $z - \zeta = r e^{i(\theta + \chi)}$

と表す. このとき複素速度ポテンシャル (20.13) に対して

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= -\frac{a^2\ddot{\zeta}}{z-\zeta} - \frac{a^2\dot{\zeta}^2}{(z-\zeta)^2} - \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{\dot{\zeta}}{z-\zeta}, \\ \frac{df}{dz} &= \frac{a^2\dot{\zeta}}{(z-\zeta)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z-\zeta} = \left(\frac{Ua^2}{r^2} e^{-i\theta} + \frac{\Gamma}{2\pi ir} \right) e^{-i(\theta+\chi)}\end{aligned}$$

なので, 円柱表面 $r = a$ では

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{r=a} &= \text{Re} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{r=a} \\ &= \text{Re} \left[U^2 e^{-2i\theta} - \left(a\dot{U} + iaU\dot{\chi} + \frac{U\Gamma}{2\pi ia} \right) e^{-i\theta} \right] \\ &= U^2 \cos 2\theta - a\dot{U} \cos \theta - \left(aU\dot{\chi} - \frac{U\Gamma}{2\pi a} \right) \sin \theta, \\ q^2 &= \left| \frac{df}{dz} \right|^2 = U^2 + \left(\frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2 + \frac{\Gamma U}{\pi a} \sin \theta\end{aligned}$$

となる. これらを圧力方程式 (13.5):

$$p = \rho \left\{ F(t) - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \Omega - \frac{1}{2} q^2 \right\}$$

[ただしここでは $\Omega = 0$] に代入すると, 円柱表面の圧力分布

$$p = \rho \left\{ F(t) - \frac{1}{2} U^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2 - U^2 \cos 2\theta + a\dot{U} \cos \theta + \left(aU\dot{\chi} - \frac{U\Gamma}{\pi a} \right) \sin \theta \right\}$$

が得られる. よって円柱に働く力 $\mathbf{P} = -\oint p \mathbf{n} ds$ の進行方向成分 P_1 とそれに垂直な方向成分 P_2 はそれぞれ,

$$P_1 = -a \int_0^{2\pi} p \cos \theta d\theta = -\pi a^2 \rho \dot{U} : (20.19),$$

$$P_2 = -a \int_0^{2\pi} p \sin \theta d\theta = -\pi a^2 \rho U \dot{\chi} + \rho U \Gamma : (20.20)$$

と計算される.

§ 20 について

■ Laurent 展開 (20.1) について 無限遠で流体が静止すること

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{df}{dz} = 0$$

から z, z^2, z^3, \dots の項が消えている.

■ 静止流体中を動く円柱の作る流れ (20.5) について 式 (20.5) の表す流れは図 58 のように, 円柱表面との相対速度が法線成分を持たないという境界条件を満たす具合に, 円柱の進行方向の前方から背後にまわり込む. また円柱の遠方では流体は静止している.

2次元流における二重わき出し (20.5) の流線は,

$$\Psi = Ua^2 \frac{y}{x^2 + y^2} = \text{const}, \quad \therefore x^2 + (y - A)^2 = A^2$$

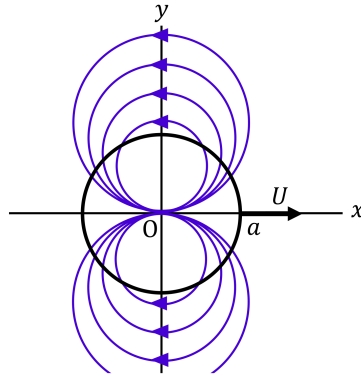


図 58 静止流体中を動く円柱が周りに作る 2 次元流

によって表される一連の円である (A は任意定数).

§ 20a) では円の中心が原点に来た瞬間を考えており, 円柱に固定した座標系を用いているのではない. 円柱が x 方向に運動を続けると, 流れ全体も一緒に平行移動すると考えられる.

■円柱の周りの一様な流れ (20.8) について § 20c) 冒頭は, 流線が円柱に沿うという境界条件を満たす渦とわき出しのない 2 つの流れの重ね合せもやはり境界条件を満たし渦とわき出しがないことを述べている. 式 (20.8) がそのような流れの最も一般的な形となることは次のように分かる. $|z| \rightarrow \infty$ のとき $df/dz \rightarrow U$ なので,

$$\frac{df}{dz} = U + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

と展開される. これを積分すると

$$f = Uz + a_1 \log z - \frac{a_2}{z} + \dots$$

となる. (複素数 z による不定積分は定義されないけれど, 式 (23.3) にならった. 逆にこれを微分すれば上の df/dz が得られる.) $a_1 \equiv m + i\kappa$ (m, κ は実数) とおくと, 円柱表面 $z = ae^{i\phi}$ において

$$f = U(ae^{i\phi}) + (m + i\kappa)(\log a + i\phi) - \frac{a_2}{a}e^{-i\phi} + \dots$$

である. 境界条件は円柱表面で

$$\Psi = \text{Im}[f] = Ua \sin \phi + m\phi + \kappa \log a + \frac{\text{Re}[a_2]}{a} \sin \phi - \frac{\text{Im}[a_2]}{a} \cos \phi + \dots$$

が ϕ に依らないことだから,

$$Ua + \frac{\text{Re}[a_2]}{a} = m = \text{Im}[a_2] = \dots = 0, \quad \therefore f = Uz + i\kappa \log z + \frac{Ua^2}{z} : (20.8)$$

を得る.

■よどみ点の式 (20.9) について 2 次方程式に対する解の公式を用いて求めれば良い.

循環が大きく $\Gamma/4\pi aU \equiv X > 1$ のとき, よどみ点 (20.9):

$$\frac{z}{a} = -i(X \mp \sqrt{X^2 - 1})$$

に対し $X + \sqrt{X^2 - 1} > X > 1$ であり, またイメージ図 59 より $X - \sqrt{X^2 - 1} < 1$ が分かる. したがって円柱の外部にあるよどみ点は $z/a = -i(X + \sqrt{X^2 - 1})$ のみである.

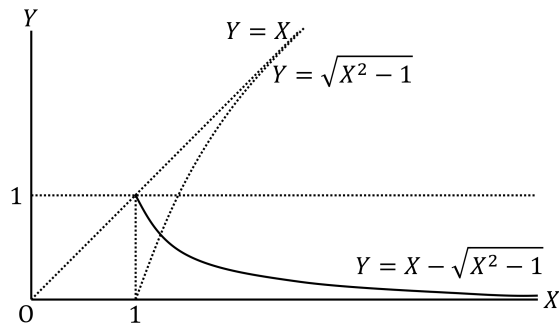


図 59 $Y = X - \sqrt{X^2 - 1}$ のグラフの概形

■Bernoulli の定理 (20.11) について p_0 をよどみ点の圧力 (総圧) として Bernoulli の定理を書き下すと式 (20.11) を得る. 一方 p_0 を無限遠での圧力として Bernoulli の定理を書き下すと, 式 (20.11) の中央と最右辺に付加的な項 $\rho U^2/2$ が必要となる. ところがこれは合力 (20.12) に寄与しない.

p_0 に対するいずれの解釈を採用した場合にも, $\Gamma > 4\pi Ua$ のとき (教科書の図 20.2(c)(p.71) 参照) には, 圧力が p_0 となる点と円柱表面上の点は流線で結ばれていない. しかし圧力方程式 (10.10) において $\partial\Phi/\partial t = 0$ とした量は空間的に一様なので, この場合にも式 (20.11) は正しい.

なお円柱の運動する座標系では流れは定常的でないから, Bernoulli の定理を用いることはできない.

■任意に運動する円柱の作る流れ (20.13) について 文献 [6, 8-3-3] の説明に従って, これを丁寧に導こう. まず原点を速度 U で通過する円柱の作る流れ (20.5) に循環を付け加えて

$$f = -\frac{Ua^2}{z} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log z$$

とする. ここで渦糸の作る流れは円柱の法線方向の速度成分を持たないので, これを重ね合せた流れも境界条件を満たすことに注意した. 続いて円柱の速度が偏角 α を持つような座標系に移るために, $z \rightarrow ze^{-i\alpha}$ の置き換えを行う. さらに円柱の中心が $z = \zeta(t)$ となるように $z \rightarrow z - \zeta$ の置き換えを施し, 速度 $Ue^{i\alpha}$ を $\dot{\zeta}$ と等置する.

■円柱に働く力 (20.19),(20.20) の計算について 三角関数の直交性を利用する. 複素表示を用いて三角関数を指数関数に置き換えると, 計算はいくぶん簡略化される. このとき, 与えられた瞬間に円柱表面 $z = \zeta + ae^{i\theta}$ 上の線要素は $dz = aie^{i\theta} d\theta$ である. また三角関数の直交性の代わりに,

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta = 2\pi\delta_{n0}$$

を用いれば良い [6].

■円柱の周りの流れ・まとめ ここまでに見てきた a) から d) の円柱周りの流れの関係を図 60 にまとめる. (図 60 では文献 [6] を「巽」と表記している.)

■円柱に対する運動方程式 (20.22) について 「流体が動く」ことによる「慣性の増加」(p.76, 1.4) の項 $M'\ddot{\zeta}$ は本来, 物体に働く力 $-M'\ddot{\zeta}$ である.

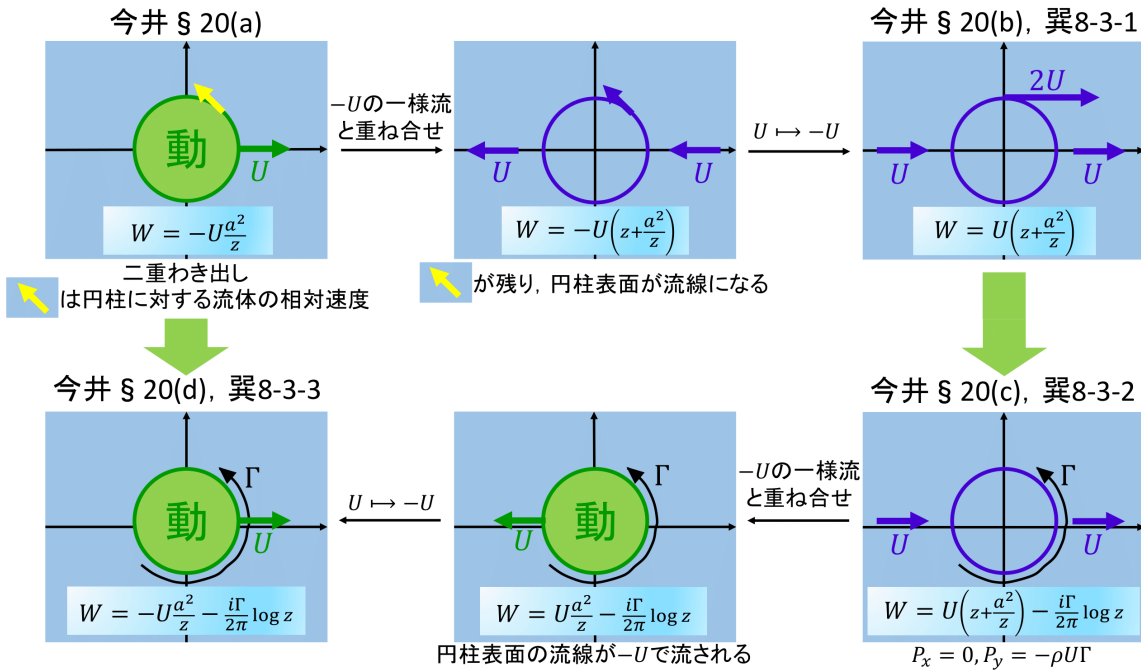


図 60 円柱の周りの流れ・まとめ

速度ポテンシャル $W = -\frac{a^2 \dot{z}_0}{z - z_0} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log(z - z_0)$, 円柱の速度 $\dot{z}_0 = Ue^{i\alpha}$ を圧力方程式に代入して

$$M\ddot{z}_0 = \underbrace{G - m\ddot{z}_0}_{\partial\Phi/\partial t \text{ 由来}} - \underbrace{\frac{1}{2}i\rho\Gamma\dot{z}_0 - \frac{1}{2}i\rho\Gamma\dot{z}_0}_{q^2/2 \text{ 由来}} + \underbrace{\rho a \int_0^{2\pi} (\Omega)e^{i\theta} d\theta}_{\Omega \text{ 由来}}$$

$$\Leftrightarrow (M + m)M\ddot{z}_0 = \underbrace{G}_{\text{外力}} - \underbrace{i\rho\Gamma\dot{z}_0}_{\text{揚力}} + \underbrace{\rho a \int_0^{2\pi} (\Omega)e^{i\theta} d\theta}_{\text{Archimedes の浮力 } (\Omega = gy \text{ で } img)}$$

$m \equiv \rho\pi a^2$: 仮想質量 (誘導質量)

を得る。ただし (Ω) は保存力のポテンシャル Ω の、円柱表面での値である [6, 8-4-3]。このように円柱の表面の圧力分布を適切に計算すれば、浮力の存在は自然と導かれる。これに反し円柱に働く力 (20.19), (20.20) の計算では $\Omega = 0$ としたため、「重力を受ける円柱の運動」(p.77) では浮力を外力の一部として改めて考慮する必要が生じた。

ポテンシャル Ω を考慮しない式 (20.22) の代わりに上式を用いて、図 54 の気泡に対する運動方程式を書き下すと、

$$(M + M')\ddot{y} = -Mg + M'g$$

となる。ここで $\ddot{y} = 0$ とおいて得られる重力と浮力のつり合いの式は、よく知られている初等的な関係式である。気泡の質量を無視して $M = 0$ とおくと、再び p.76 の

$$M'\ddot{y} = M'g$$

を得る。

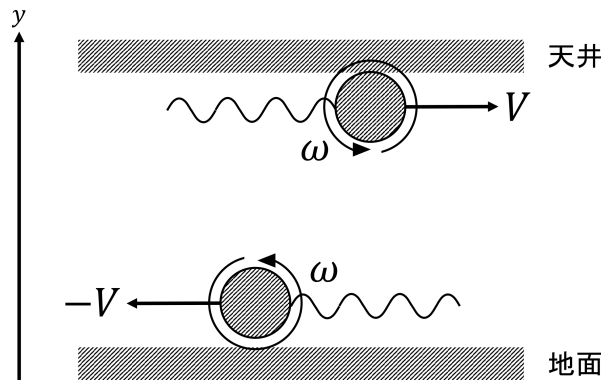


図 61 $M \geq M'$ に応じた 2 種類のトロコイド運動

■「例 1 円柱の自由な運動」(p.76) について 「回転を与えられたボール」とあるのは、ボールの周りの流れに積極的に循環を作り出すことを意図しているものと想像される。

■「例 2 重力を受ける円柱の運動」(p.77) について 運動方程式 (20.22) を ζ についての 2 階定数係数線形非同次微分方程式と見て、一般解 $\zeta = Ae^{i\omega t} + B$ と特殊解 $\zeta = Vt$ (ただし $V = (M - M')/\rho\Gamma$) の和をとり、式 (20.24) の解を得た。一方これを変数分離形の微分方程式と見て、

$$\int \frac{d\dot{\zeta}}{i\rho\Gamma\dot{\zeta} - i(M - M')g} = \frac{1}{M + M'} \int dt,$$

$$i\rho\Gamma\dot{\zeta} - i(M - M')g = C \exp\left(\frac{i\rho\Gamma}{M + M'}t\right),$$

$$\zeta = \zeta_0 + C \exp\left(\frac{i\rho\Gamma}{M + M'}t\right) + \frac{M - M'}{\rho\Gamma}gt$$

としても、解 (20.24) を導けるように思われるかもしれない。しかし複素変数 $\dot{\zeta}$ についての不定積分は定義されないことに注意しなければならない。

式 (20.24) はトロコイド運動を表す。トロコイドとは、図 62 のように x 軸上を半径 a の円盤が角速度 ω で転がるとき、円盤上の中心から距離 b の位置に固定された点が描く軌跡のことである。

- $M > M'$ のとき $\omega > 0, V > 0$ なので、
式 (20.24) は図 61 のような“天井を転がる円”についてのトロコイド運動を表す。
- $M < M'$ のとき $\omega > 0, V < 0$ なので、
式 (20.24) は図 61 のような“地面を転がる円”についてのトロコイド運動を表す。

■円柱の運動 (pp.76–77) に対する直観 円柱の運動方程式 (20.21) において、揚力 $i\rho\Gamma\dot{\zeta}$ は円柱の速度 $\dot{\zeta}$ に垂直な方向に働く。これは運動する荷電粒子が磁場から受ける Lorentz 力と類似している。円柱が磁場中の荷電粒子と同様にカーブする (例 1, p.76) のは、このためである。

このアナロジーを推し進めれば、重力を受ける円柱の運動 (例 2, p.77) は電場と磁場の下での荷電粒子の運動に対応する。実際、一様な電場と磁場の下での荷電粒子の運動は、磁場に垂直な面に射影するとトロコイド運動となる。そこで電磁場中の荷電粒子に対して、上記との内容の重複を厭わずに、トロコイド運動の直観的な解釈・説明を試みよう。

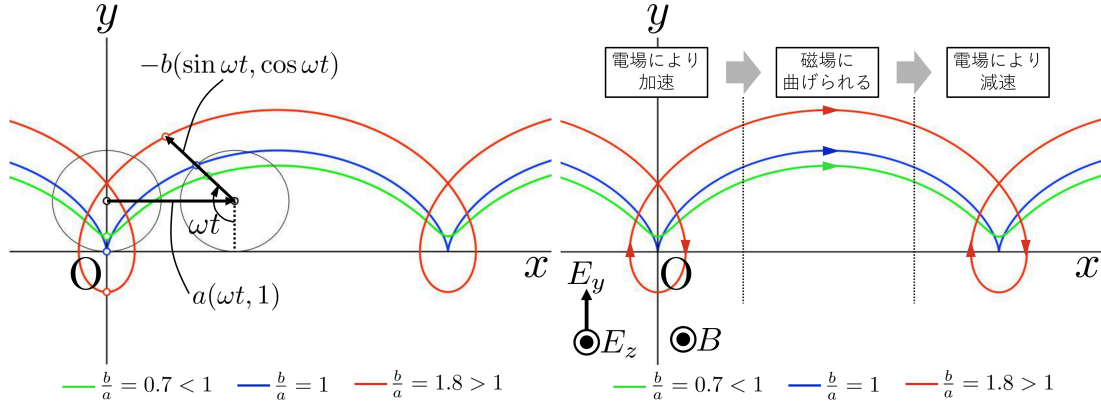


図 62 トロコイド

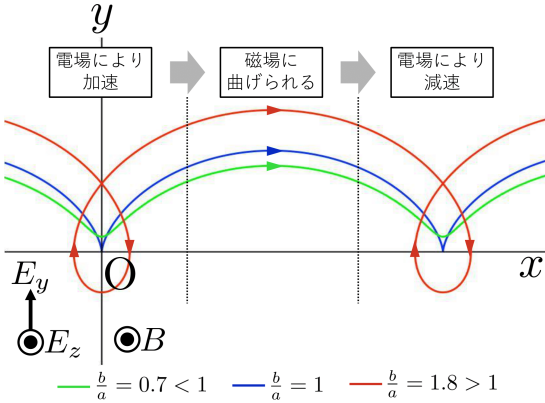


図 63 一様で不変な電磁場中の粒子の運動

磁場方向を z 軸にとると Lorentz 力 $e\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$ は磁束密度 \mathbf{B} に垂直なので、粒子は z 方向には一定の力 eE_z を受けて等加速度運動をする:

$$z = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2} \frac{eE_z}{m} t^2. \quad (13)$$

そこで磁場に垂直な xy 平面に投影した粒子の運動に興味を持たれる。電場が yz 面内に含まれるように y 軸の方向を選び、さらに時間と空間座標の原点を適当に選ぶと、粒子の xy 面内の位置は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix}, \quad \omega \equiv \frac{eB}{mc}, \quad a \equiv \frac{eE_y}{m\omega^2} = \frac{cE_y}{\omega B} \quad (14)$$

の形に書ける (b は積分定数)。これは図 62 のように x 軸上を半径 a の円盤が角速度 ω で転がる時の、円盤上の中心から距離 b の位置に固定された点の運動に他ならない。このような動点の描く軌跡はトロコイドと呼ばれる [12, pp.63–64]。この結果は次のように解釈できる。時刻 $t = 0$ を過ぎてからしばらくの間、粒子は電場の方向に加速する。すると粒子は磁場に進行方向を曲げられ、いずれ電場と逆向きに運動するようになるため電場に減速させられる。こうして図 63 のように 1 周期分のトロコイドが描かれる [14, pp.135–136]。

特に $\mathbf{E} = 0$ のとき、粒子の位置の時間発展 (13),(14) は磁場方向への等速らせん運動

$$x = -b \sin \omega t, \quad y = -b \cos \omega t, \quad z = z_0 + v_{0z}t$$

に帰着する。

■Milne-Thomson の円定理 (pp.77–78) について 文献 [6, 8-3-4] について、正則関数 $f(z) = f_r(x, y) + if_i(x, y)$ の共役複素関数 $f^*(z^*) = f_r(x, -y) - if_i(x, -y)$ も Cauchy-Riemann の関係式を満たすことは次のように確かめられる。すなわち $\eta \equiv -y$ とすると、

$$\begin{aligned} -\partial_y f_i(x, -y) &= -\partial_\eta f_i(x, \eta) \partial_y \eta = \partial_\eta f_i(x, \eta) = \partial_x f_r(x, \eta) = \partial_x f_r(x, -y), \\ \partial_y f_r(x, -y) &= \partial_\eta f_r(x, \eta) \partial_y \eta = -\partial_\eta f_r(x, \eta) = -\partial_x f_i(x, \eta) = -\partial_y f_i(x, -y). \end{aligned}$$

それぞれ第 3 の等号で $f(z)$ についての Cauchy-Riemann の関係式を用いた。

$W(z) = f(z) + f^*(z^*)$: (8.45), $W(z) = f(z) + f^*(a^2/z^*)$: (8.46) はそれぞれ x 軸, 円 $|z| = a$ を流線とす

る一つの流れを与える。これらの特異点の位置はそれぞれ次のように考えられる。

$$\begin{aligned}
 & f(z) : \text{Im}z = y > 0 \text{ に特異点} \\
 \Rightarrow & (f^*(z^*) \text{ の特異点}) = (f(z^*) \text{ の特異点}) \text{ は } \text{Im}z^* = -y > 0 \quad (\Leftrightarrow \quad y < 0), \\
 & f(z) : |z| > a \text{ に特異点} \\
 \Rightarrow & (f^*(a^2/z^*) \text{ の特異点}) = (f(a^2/z^*) \text{ の特異点}) \text{ は } |a^2/z^*| > a \quad (\Leftrightarrow \quad |z| < a).
 \end{aligned}$$

§ 21 等角写像の応用

点 z_0 と無限に近い 2 点 z_1, z_2 をとる。正則関数 $w = f(z)$ によるこれらの写像 w_0, w_1, w_2 は, $f'(z_0) \neq 0$ ならば,

$$\angle z_1 z_0 z_2 = \angle w_1 w_0 w_2$$

のように角を保つから, 等角写像と呼ばれる [13, pp.185–186] :

$$z = g(\zeta) \text{ は等角写像} \quad \Leftrightarrow \quad g \text{ は解析関数.}$$

等角写像により解析関数 $f(z)$ から解析関数

$$F(\zeta) = f(g(\zeta))$$

が作られる。これは z 面上の流れを表す速度ポテンシャル $f(z)$ から, ζ 面上の流れを表す速度ポテンシャル $F(\zeta)$ が得られることを意味する。逆にこれを ζ 面の流れから z 面の流れを得るための方法と見ても良い。この際,

$$\begin{aligned}
 z \text{ 面上の流線} \quad \Psi(z) = \text{const.} & \quad \Leftrightarrow \quad \zeta \text{ 面上の流線} \quad \Psi(g(\zeta)) = \text{const.}, \\
 z \text{ 面上の等ポテンシャル線} \quad \Phi(z) = \text{const.} & \quad \Leftrightarrow \quad \zeta \text{ 面上の等ポテンシャル線} \quad \Phi(g(\zeta)) = \text{const.}
 \end{aligned}$$

と対応する。また z 面上の閉曲線 C と, 対応する ζ 面上の閉曲線 C' について, 循環 Γ と流出量 Q は等しい :

$$\begin{aligned}
 \oint_C df &= \oint_C d\Phi + i \oint_C d\Psi = \Gamma + iQ, \\
 \oint_C df &= \oint_C \frac{df}{dz} dz = \oint_C \frac{dF}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} dz = \oint_{C'} \frac{dF}{d\zeta} d\zeta = \oint_{C'} dF.
 \end{aligned}$$

[閉曲線の中に固体, あるいはわき出しや渦糸のような特異点があれば, $Q \neq 0, \Gamma \neq 0$ となり得る.]

Joukowski 変換, 平板の周りの流れ

以上の事実を応用して, 平板の周りの流れを求めよう。 ζ 面の半径 a の円 $\zeta = ae^{i\theta}$ は,

$$z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta} \tag{21.1}$$

によって定義される Joukowski 変換により, z 面の実軸上の平板

$$z = 2a \cos \theta$$

に移される。そこで ζ 面上での円柱を過ぎる一様流のポテンシャル

$$F(\zeta) = U \left\{ \left(\zeta e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{\zeta e^{-i\alpha}} \right) \right\} + i \frac{\Gamma}{2\pi} \log \zeta \tag{21.3}$$

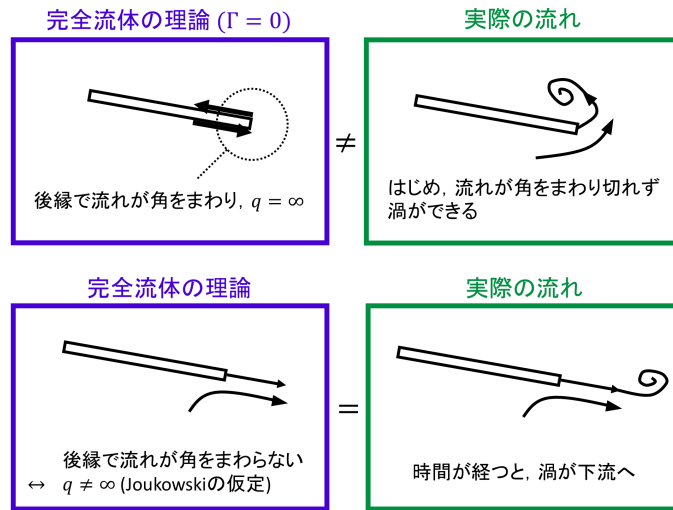


図 64 Joukowski の仮定と実際の流れ

をとると、Joukowski 変換によって定義される z 面上の流れ $f(z)(= F(\zeta))$ は平板の周りの流れを表す。しかも $|z| \rightarrow \infty$, したがって $|\zeta| \rightarrow \infty$ のとき $df/dz \rightarrow Ue^{-i\alpha}$ となるので、これは一様流が実軸に対して、したがって平板に対して角度 α を成してあたっている場合を表す。平板の後縁で流速が有限になることを要求すると (Kutta の条件, Joukowski の仮定), 循環 Γ の値が定まり, Kutta-Joukowski の定理 $L = \rho U \Gamma$ から揚力 L が求まる。結果は

$$L = 4\pi\rho U^2 a \sin \alpha \quad (21.6)$$

となる (詳細は下記)。

板の両端での流速 q の発散は、流体が角をまわることによる (§ 19)。このとき実際には、流体は角をまわり切れずに両端に渦を作る。ところが前縁の渦は停滞し続けるのに対し、後縁の渦は時間が経つと下流に吹き流されて、流れは後縁を滑らかに離れるので、後縁に対して Joukowski の仮定を適用して流速 q が有限になることを要求すると、現実と合う流れを得ることができる (図 64 参照)。なお迎え角が大きくなると、前縁で作られる渦が板の上面を覆いつくすようになるため、渦無しの理論から得た上の揚力の式は迎え角が 15 度程度より大きくなると実験と合わなくなる。[また抵抗が増大し、揚力は減少し、失速する。]

Joukowski 翼

平板に対しては [前縁を流れがまわり切れずに] 流れがはがれて [渦ができて] しまう。そこで流れがはがれないように前縁にまるみを持たせた形の翼として、Joukowski 翼がある。これは $\zeta = \xi + i\eta$ とし、図 65, 図 66 の青線のような ζ 面上の 2 円

$$K_1 : (\xi + \xi_0)^2 + \eta^2 = (a + \xi_0)^2, \quad K_3 : (\xi + \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 = (a + \xi_0)^2 + \eta_0^2$$

のそれぞれに Joukowski 変換 $z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta}$ を施して得られる、図 65, 図 66 の赤線のような z 面上の形の翼 P_1, P_3 である*⁹。

*⁹ ただし図 65, 図 66 では円 K_1, K_3 と Joukowski 翼 P_1, P_3 を同一平面上に描いた。長さを適当に無次元化し, $a = 1, \xi_0 = \eta_0 = 0.25$ として描画した。添字 1,3 は教科書に合わせた。

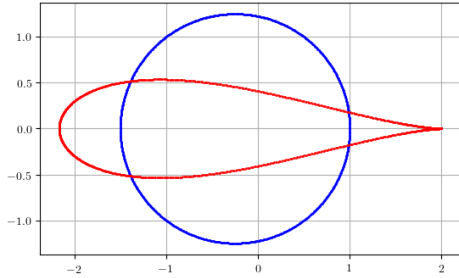


図 65 対称 Joukowski 翼 P_1

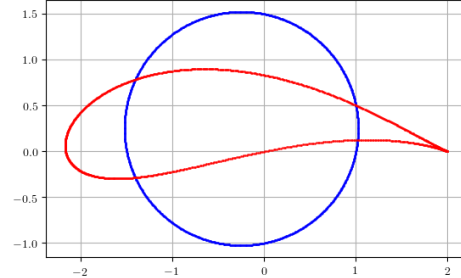


図 66 一般 Joukowski 翼 P_3

§ 21, 式の導出など

■Kutta の条件から揚力 (21.6) を導出 流速

$$\frac{df}{dz} = \frac{df/d\zeta}{dz/d\zeta}$$

における分母

$$\frac{dz}{d\zeta} = 1 - \frac{a^2}{\zeta^2}$$

は $\zeta = \pm a$, すなわち板の両端 $z = \pm 2a$ においてゼロになる。したがって流速は ∞ に、圧力は $-\infty$ になり、不合理である。物理的な考察 (本稿・教科書「平板の周りの流れ」の最終段落) により、意味のある結果を得るには後縁 $z = 2a (\zeta = a)$ でのみ、分子 $df/d\zeta$ が同時にゼロになることを要求すれば充分である。すると

$$\Gamma = 4\pi a U \sin \alpha, \quad \therefore L = \rho U \Gamma = 4\pi \rho U^2 a \sin \alpha : (21.6)$$

が得られる。

§ 21 について

■対称 Joukowski 翼 教科書の図 21.4(p.82) における対称 Joukowski 翼の後縁に尖点ができるのは、

$$\zeta \simeq a \text{ において } K_1 \simeq K_0 \rightarrow z \simeq 2a \text{ において } P_1 \simeq P_0$$

から分かる。

§ 22 ブラジウスの公式

物体の周りの流れを表す複素速度ポテンシャル f が分かれば、

$$f \rightarrow \frac{df}{dz} \rightarrow q \rightarrow p$$

の順に物体の周りの圧力分布 p を調べ、物体が流体から受ける力とモーメント

$$P = - \oint p n ds, \quad M_z = \oint p (x dx + y dy)$$

を求めることができる [M_z の式について, 本稿「§ 22 について」の節で補足]. この一連の手続きは Blasius の第 1, 第 2 公式

$$P_x - iP_y = \frac{i}{2}\rho \oint_C \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz, \quad (22.3)$$

$$M_z = -\frac{1}{2}\rho \operatorname{Re} \oint_C \left(\frac{df}{dz}\right)^2 z dz \quad (22.4)$$

に集約される (導出は下記). ここに積分路 C は物体を囲む任意の閉曲線である. [$q \rightarrow p$ の箇所では定常流を仮定して, Bernoulli の定理を用いた. 外力のない場合 $\Omega = 0$ も仮定している.]

§ 22, 式の導出など

■Blasius の第 1 公式 (22.3) の導出 $\mathbf{n}ds = (dy, -dx)$ に注意すると, 物体の受ける力 $\mathbf{P} = \oint p \mathbf{n}ds$ の 2 成分は

$$\begin{aligned} P_x - iP_y &= -i \oint pdz^* \quad (\because z^* = x - iy) \\ &= -i \oint \left(p_0 - \frac{1}{2}\rho q^2\right) dz^* \\ &\quad \text{[物体表面のよどみ点 ($q = 0$) を仮定し, そこでの圧力を p_0 とした]} \\ &= \frac{i}{2}\rho \oint q^2 dz^* \quad \left(\because \oint dz^* = 0\right) \end{aligned}$$

とまとめられる. ここで物体表面 ($\Psi = \text{const}$ の流線) では

$$df = df^* = d\Phi, \quad \therefore q^2 dz^* = \frac{df}{dz} \frac{df^*}{dz^*} dz^* = \frac{df}{dz} df^* = \frac{df}{dz} df = \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz \quad (22.2)$$

なので, Blasius の第 1 公式 (22.3):

$$P_x - iP_y = \frac{i}{2}\rho \oint_C \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz$$

を得る. 最後の積分は $(df/dz)^2$ が解析関数なので, 物体表面の代わりに物体をとりかこむ任意の閉曲線 C を積分路に用いることが許される.

■Blasius の第 2 公式 (22.4) の導出 次にモーメント $M_z = \oint p(xdx + ydy)$ を考える. これは

$$M_z = \frac{1}{2} \oint pd(zz^*) = \frac{1}{2} \oint \left(p_0 - \frac{\rho}{2}q^2\right) d(zz^*) = -\frac{\rho}{4} \oint q^2 d(zz^*)$$

と書き換えられる. ここで

$$d(zz^*) = zdz^* + z^*dz = 2\operatorname{Re}(zdz^*)$$

であり, これを式 (22.2) と合わせて用いると

$$q^2 d(zz^*) = 2\operatorname{Re}(q^2 zdz^*) = 2\operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{df}{dz}\right)^2 zdz \right\}$$

が見出されるので, Blasius の第 2 公式 (22.4):

$$M_z = -\frac{1}{2}\rho \operatorname{Re} \oint_C \left(\frac{df}{dz}\right)^2 zdz$$

を得る (C は物体をとりかこむ任意の閉曲線).

§ 22 について

■モーメントの式 (p.84) について 線要素 ds に働く力

$$d\mathbf{P} = -pnds = -p(dy, -dx)$$

のモーメントは

$$dM_z = xdP_y - ydP_x = p(xdx + ydy)$$

である。

§ 23 クッタ-ジューコフスキーの定理

x 軸と角 α を成す一様流 U の中に物体を置いたときの流体の速度は,

$$\frac{df}{dz} = Ue^{-i\alpha} + \frac{k_0}{z} - \frac{k_1}{z^2} + \dots$$

と Laurent 展開される。よって複素速度ポテンシャルの一般形は

$$f = Ue^{-i\alpha}z + k_0 \log z + \frac{k_1}{z} + \dots$$

である。物体を囲う時計回りの循環を Γ , 物体表面からの流出量を Q とすると,

$$-\Gamma + iQ = \oint df = \oint \frac{df}{dz} dz = k_0 \oint \frac{dz}{z} = 2\pi i k_0$$

だから,

$$f = Ue^{-i\alpha}z + \frac{Q + i\Gamma}{2\pi} \log z + \frac{k_1}{z} + \dots$$

となる。すなわち循環 Γ と流出量 Q に寄与するのは, それぞれ渦糸の項 $\frac{i\Gamma}{2\pi} \log z$ とわき出しの項 $\frac{Q}{2\pi} \log z$ だけである。これを Blasius の公式に代入して物体に働く力とモーメントを計算すると, 以下の一般公式が導かれる*10。

- 抵抗 $D = -\rho UQ$
 - ふつう物体の表面からの流出量は $Q = 0$ だから, $D = 0$ となる。
 - すなわち完全流体を仮定すると, 物体に抵抗は働かない (**d'Alembert** のパラドックス)。
- 揚力 $L = \rho U\Gamma$
 - **Kutta-Joukowski** の定理 [揚力は循環によってもたらされることを意味している]。
- モーメント

$$M_z = \frac{\rho Q\Gamma}{2\pi} - 2\pi\rho U \operatorname{Im}(k_1 e^{-i\alpha}) \quad (23.7)$$

よって物体に働く揚力, 抵抗, モーメントは, 複素速度ポテンシャルにおける一様流の項 $Ue^{-i\alpha}z$, 渦糸とわき出しの項 $k_0 \log z$, 二重わき出しの項 k_1/z だけで決まることになる。

*10 計算では

$$\oint \frac{dz}{z} = 2\pi i, \quad \oint z^n dz = 0 \quad (n \neq -1)$$

を用いる。

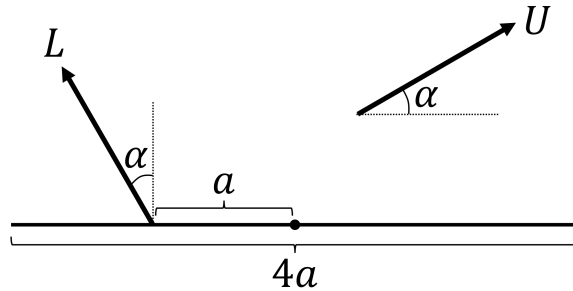


図 67 平板のモーメント

■平板のモーメント 1つの応用例として、§ 21 で取り上げた一様流中の平板を考えよう。上で得たモーメント M_z の一般公式を適用すると、板の中心に関する平板のモーメントは

$$M_z = -4\pi\rho U^2 a^2 \sin\alpha \cos\alpha = -La \cos\alpha \quad (23.8)$$

と計算される (L は揚力, 導出は下記)。これは図 67 のように、揚力 L の作用線が板の前縁から $1/4$ の点を通るように考えられることを意味する。

§ 23, 式の導出など

■平板のモーメント (23.8) の導出 平板に対して迎え角 α を持つ流れのポテンシャルは、式 (21.3):

$$f(z) = U \left(e^{-i\alpha} \zeta + \frac{a^2 e^{i\alpha}}{\zeta} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \log \zeta$$

と与えられる。ただし右辺の ζ は Joukowski 変換 (21.1): $z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta}$ を通して z の関数となっており、[逐次代入 $\zeta = z - \frac{a^2}{\zeta} = z - \frac{a^2}{z - \frac{a^2}{\zeta}} = z - \frac{a^2}{z} + O\left(\frac{a^4}{z^2 \zeta}\right) = z - \frac{a^2}{z} + O\left(\frac{a^4}{z^3}\right)$ により]

$$\zeta = z - \frac{a^2}{z} + \dots$$

なので、 $f(z)$ における $1/z$ の係数は

$$k_1 = U a^2 (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) = 2i U a^2 \sin\alpha$$

と同定される。これをモーメントの一般公式 (23.7):

$$M_z = \frac{\rho Q \Gamma}{2\pi} - 2\pi \rho U \operatorname{Im}(k_1 e^{-i\alpha})$$

に代入し、Kutta の条件から得られた揚力の式 (21.6):

$$L = 4\pi \rho U^2 a \sin\alpha$$

を思い出すと式 (23.8) を得る。

§ 23 について

■飛行機の翼に働く揚力をめぐる議論 翼の周りの流れに循環があると、翼の上面と下面に流体の速度差が生じたがって圧力差が生じ、揚力が得られる。このように循環が揚力をもたらすことは、Kutta-Joukowski の定理 (23.4): $L = \rho U \Gamma$ に端的に表されている。すると翼に働く揚力を説明することは、翼の周りの循環がどのように生じるのかを説明する問題に還元される。ところが非圧縮性完全流体の渦無し運動に対する理論の範囲内では、これに答えることはできないと考えられる。実際、円柱の周りの流れについて § 20 で見たように、循環 Γ の任意の値に対して境界条件を満たす可能な流れが得られるため、循環 Γ の値は向きも含めて定まらない。(平板の周りの流れに対しては Kutta の条件から循環を決めることができたけれど、あくまでこれは経験則である (§ 21).) 翼を囲む閉曲線について循環がゼロでない値を持つことは、その内部に渦領域があり、翼の断面が渦糸に貫かれていることを意味する。この渦糸は流体領域にはみ出し、下流まで伸びていなければならない (pp.106–107). Lagrange の渦定理により、流体の中の渦は翼の境界付近で粘性によって作られたものでなければならないから、結局、揚力は翼の表面における流体と翼の相互作用によってもたらされることになる (これは自然な結論と言える)。

翼の上下の速度差の説明 我々は翼の上下の速度差の理由を、翼の周りの循環に求めた。一方、翼の上面は下面より出っ張っているため、流体が翼に沿って移動する距離は上面の方が長いことが指摘されることがある。しかし流体が翼に沿う時間が上面と下面とで同じでなければならない理由はないため [15, p.169], このことを速度差の理由とすることはできない。

流線曲率の定理 翼の下側の流れは翼に沿って曲げられるため、曲率中心への向心力を受けていることになる。この反作用として揚力が説明されることがある [15, pp.168–169]. しかしこの説明では

- 翼の上面に働く力を考慮していない。
- 平板に働く揚力を説明できない。

運動方程式は流れから力を決め、流れそのものを説明しない いずれにせよ翼の周りの流れを既知として、翼に働く力が求められることになる。このとき既に指摘したように、運動方程式の積分形である

- Bernoulli の定理 (定常流に対して)
- 圧力方程式 (非定常流に対して)

はいずれも、力から運動を決めるという因果方程式の役割を果たさない。

分子の衝突 なお流体が翼に沿って運動するならば、翼に揚力が働くのは一見すると不思議に思われるかもしれない。しかし流体の速度はあくまで分子の速度を平均して得られる、巨視的な運動を定義する量であって、実際には翼には多数の分子が衝突している。これが圧力に他ならない。

第4章 3次元の渦無し運動

§ 24 3次元の渦無し運動

a) 静止流体中を動く球

静止流体中を x 軸に沿って速度 U で運動している、半径 a の球を考えよう。球の中心が原点を通過した瞬間に球の周りに作られる流れの速度ポテンシャル Φ は、Laplace 方程式 $\Delta\Phi = 0$ を変数分離して (適切な境界条件の下で) 解くことにより、

$$\Phi = -\frac{Ua^3 \cos\theta}{2r^2} \quad (24.3)$$

と求まる (θ は x 軸から測った観測点の天頂角) [導出は本稿次節]。これはモーメント $Ua^3/2$ の二重わき出しを表す。この結果は、静止流体中を動く円柱の作る2次元流が複素速度ポテンシャル $f = -Ua^2/z$ の二重わき出しであったこと比較される (§ 20)。

b) 一様流中に静止する球

- x 軸負の方向に速さ U で運動する球の作る流れ ($\Phi = \frac{Ua^3 \cos\theta}{2r^2}$)
- x 軸方向の速度 U の一様流 ($\Phi = Ux = Ur \cos\theta$)

を重ね合せた流れは、一様流の中に半径 a の球を静止させたときの流れを表し、速度ポテンシャル

$$\Phi = U \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos\theta \quad (24.4)$$

を持つ。球の表面の流れは

$$v_\theta = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right)_{r=a} = -\frac{3}{2}U \sin\theta$$

であり、これは $\theta = \pi/2$ において最大値 $|v_\theta| = \frac{3}{2}U$ をとる。

§ 24 について

■速度ポテンシャル (24.3) の導出 球面調和関数 Y_l^m を用いて速度ポテンシャルを

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_l^m(r) Y_l^m(\theta, \phi)$$

と展開する。軸対称な解を考えると、解は対称軸周りの方位角 ϕ に依らない。そこで Y_l^m の ϕ 依存性 $e^{im\phi}$ を消すために $m=0$ とおき、

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l(r) P_l(\cos\theta)$$

と書いて良い。さらに展開係数 $a_l(r)$ を

$$a_l(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{ln} r^n$$

と r について展開する. これを Laplace 方程式

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} \right] \Phi = 0$$

に代入し, P_l が球面調和関数の固有方程式

$$\left\{ \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} P_l = -l(l+1)P_l$$

を満たすことを用いると,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{r^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{n(n+1) - l(l+1)\} r^n a_{ln} P_l(\cos \theta) \\ &= \frac{1}{r^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n-l)(n+l-1) r^n a_{ln} P_l(\cos \theta) \end{aligned}$$

を得る. よって $a_l(r)$ の展開において許されるのは $n=l$ の項と $n=-(l+1)$ の項だけなので, 軸対称な解は

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

という形を持つ.

次に境界条件を考える. まず無限遠 $r \rightarrow \infty$ で流体が静止することを要求すると, $v_r = \partial \Phi / \partial r \rightarrow 0$ でなければならない, ここから

$$A_1 = A_2 = \dots = 0$$

が分かる. また $P_0 = 1$ より A_0 の項は定数項となるので, あらかじめ省いて良い. さらに球の表面での境界条件は

$$U \cos \theta = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{r=a} = - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)B_l}{a^{l+2}} P_l(\cos \theta)$$

であり, $P_l(\cos \theta) = \cos \theta$ に注意すると

$$B_0 = 0, \quad B_1 = -\frac{Ua^3}{2}, \quad B_2 = B_3 = \dots = 0$$

と定まる. 以上より速度ポテンシャルの式 (24.3):

$$\Phi = -\frac{Ua^3 \cos \theta}{2r^2}$$

を得る.

■球を過ぎる一様流 (24.4) の x 軸上の流れ 速度ポテンシャル (24.4): $\Phi = Ux(1 + a^3/2r^3)$ より x 軸上で

$$v = \partial_y \Phi|_{y,z=0} = -\frac{3}{2} \frac{Ua^3 xy}{r^5} \Big|_{y,z=0} = 0 (= w), \quad u = \partial_x \Phi|_{y,z=0} = U \left(1 - \frac{a^3}{|x|^3} \right)$$

なので ($r = |x|$ の絶対値を忘れないように注意), x 軸上の流れは原点对称ある. また $x = \pm a$ はよどみ点となり, 境界条件を満たしている*11.

*11 なお 2 次元流 (20.6) に対しては, x 軸上の速度は

$$u = U \left\{ 1 - \frac{(x^2 - y^2)a^2}{(x^2 + y^2)^2} \right\} \Big|_{y=0} = U \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right), \quad v = -\frac{2Uxya^2}{(x^2 + y^2)^2} \Big|_{y=0} = 0$$

である.

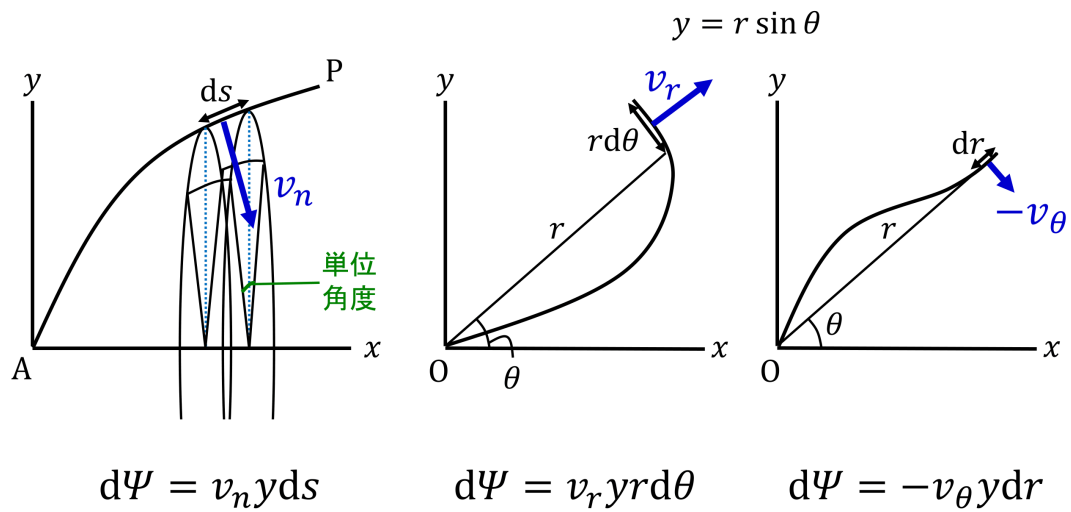


図 68 Stokes の流れ関数

§ 25 ストークスの流れの関数

縮まない流体の軸対称な流れに対しては、対称軸を x 軸に選ぶと、Stokes の流れ関数

$$\Psi = \int_A^P v_n y ds$$

を導入できる。この量は結局、次のように解釈できる。すなわち図 68 の左端の図において、弧 AP を x 軸のまわりに回転して得られる回転面を考える。このとき線要素 ds が描く円環部分が単位の方位角に切り取られる面要素を単位時間に横切る流量 $v_n y ds$ の、A から P までの和が Ψ である。(したがって言い換えれば、弧 AP の回転面全体を単位時間に通過する流体の体積は $2\pi\Psi$ である。) 定点 A を固定すると Ψ は終点 P の関数と見なすことができ、[縮まない流体の仮定により] Ψ の値は A と P を結ぶ曲線のとり方にはよらない。

このとき流速は流れ関数から

$$v_x = \frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (25.3)$$

と導ける。[導出は本稿次節。これは通常の流れ関数に対する式 (18.5): $v_x = \partial_y \Psi, v_y = -\partial_x \Psi$ に $1/y$ が付いた形になっている。] また xy 面内に平面極座標 r, θ を導入すると ($x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$)、流速の極座標成分は

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (25.5)$$

で与えられる [導出は本稿次節]。

渦無しの場合

Stokes の流れ関数は、流れが軸対称でありさえすれば、渦無しでなくとも定義できる。特に渦無し場を仮定して速度ポテンシャル Φ を導入すると、 $v_x = \partial \Phi / \partial x, v_y = \partial \Phi / \partial y$ と上式 (25.3) より

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$$

が得られる。このように 2 次元の場合 $[\Delta\Phi = 0, \Delta\Psi = 0]$ とは異なり、 Φ と Ψ は別々の方程式を満足する。

Stokes の流れ関数の例

1. 一様な流れ ($v_x = U, v_y = 0$)

$$\Psi = \frac{U}{2}y^2 = \frac{U}{2}r^2 \sin^2 \theta.$$

2. 二重わき出し

$$\Phi = -\mu \frac{\cos \theta}{r^2} : (14.3), \quad \Psi = \mu \frac{\sin^2 \theta}{r}.$$

3. 一様な流れの中におかれた球

$$\Psi = \frac{U}{2} \left(r^2 - \frac{a^3}{r} \right) \sin^2 \theta. \quad (\text{球面 } r = a \text{ で } \Psi = 0) \quad (25.11)$$

[上式 (25.11) については本稿次節で導出を行う.]

§ 25 について

■Stokes の流れ関数と速度成分 v_x, v_y の関係 (25.3) の導出 終点 P の変位 $d\mathbf{r} = (dx, dy)$ を考え、その長さを $ds = |d\mathbf{r}|$, $d\mathbf{r}$ を時計回りに 90 度回転した向きの単位ベクトルを \mathbf{n} とする。このとき線要素 $d\mathbf{r}$ の“面積要素ベクトル”は

$$\mathbf{n}ds = (dy, -dx)$$

なので、P の変位に伴う流れ関数の変化は

$$d\Psi = y\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}ds = y(-v_y dx + v_x dy)$$

と計算される。ここから式 (25.3) が読み取れる。

■Stokes の流れ関数と速度成分 v_r, v_θ の関係 (25.5) の導出 教科書にある通り「 δs として $r\delta\theta, \delta r$ を選」(p.92, 1.8) ぶと、図 68 の右側 2 つの図から式 (22.5) が得られる。

あるいは極座標の基底ベクトル (方向単位ベクトル) $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ を導入して終点 P の変位を

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + (rd\theta)\mathbf{e}_\theta$$

と書くと、今度は $d\mathbf{r}$ を時計回りに 90 度回転して得られる“面積要素ベクトル”は

$$\mathbf{n}ds = dr(-\mathbf{e}_\theta) + rd\theta\mathbf{e}_r$$

となるので、

$$d\Psi = y\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}ds = r \sin \theta (v_r rd\theta - v_\theta dr)$$

を得る。これは式 (22.5) に他ならない。

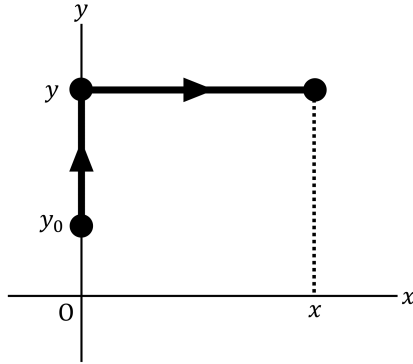


図 69 積分路

■Stokes の流れ関数 (25.11) の導出 球を過ぎる一様流について、速度ポテンシャル

$$\Phi = Ux - \mu \frac{x}{r^3} = \left(Ur - \frac{\mu}{r^2} \right) \cos \theta$$

から Stokes の流れ関数 (25.11) を求めよう。

$$\frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = U - \mu \frac{1}{r^3} - 3\mu \frac{x^2}{r^5}, \quad -\frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 3\mu \frac{xy}{r^5}.$$

そこで図 69 の積分路を用いて Stokes の流れ関数を

$$\Psi = \Psi(0, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{x=0} dy + \int_0^x \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx$$

と計算する。ここで

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^y \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{x=0} dy &= \int_{y_0}^y \left(Uy - \frac{\mu}{y^2} \right) dy = \frac{1}{2} Uy^2 + \mu \frac{1}{y} + \text{const}, \\ \int_0^x \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx &= \int_0^x \left(-3\mu \frac{xy^2}{r^5} \right) dx \\ &= \frac{3\mu}{y} \int_1^{\cos \phi} \cos^2 \phi d(\cos \phi) \quad (x \equiv y \tan \phi, \quad \therefore \cos \phi = y/r) \\ &= \mu \frac{1}{y} \left(\frac{y^3}{r^3} - 1 \right) \end{aligned}$$

なので、Stokes の流れ関数 (25.11):

$$\Psi = \left(\frac{U}{2} + \frac{\mu}{r^3} \right) y^2 + \text{const}.$$

を得る。

なお、積分定数 const は落として良い。と言うのも、流れ関数には始点 A の選び方の任意性に対応して、定数を付け加えるだけの不定性がある。実際、図 70 のように、 x 軸上の異なる 2 点 A, A' に関して定義された流れ関数

$$\Psi_A(P) = (\text{弧 AP を貫く流量}), \quad \Psi_{A'}(P) = (\text{弧 A'P を貫く流量})$$

には、弧 A'B を貫く流量だけの差がある。領域 AA'B からのわき出しがないから、これは弧 AA' を貫く流量に等しく、それは終点 P に依らない定数である。

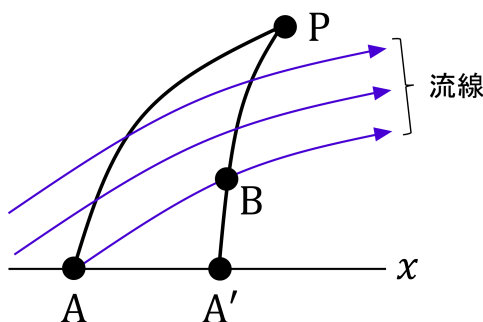


図 70 始点 A の選び方の任意性

■Rankine の卵形 一様流の中に球を静止させたときの流れは、一様流と二重わき出しの重ね合せ (24.4) によって与えられる。これは Rankine の卵形 (§ 14) においてわき出しとすいこみを無限に近づけた場合に相当するため、そのような極限で卵形は球になることを意味している。実際、対応する流れ関数 (25.11) は $r = a$ において一定値 $\Psi = 0$ をとる。

■半無限体に対する Stokes の流れ関数 速度ポテンシャルが式 (14.5):

$$\Phi = Ux - \frac{m}{r}$$

で与えられる、半無限体の周りの流れに対して、Stokes の流れ関数は

$$\Psi = \frac{1}{2}Uy^2 - m\frac{x}{r}$$

である [6, 演習問題 7.1]。これも上記と同様に証明できる。

$$\frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = U + m\frac{x}{r^3}, \quad -\frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = m\frac{y}{r^3}.$$

であり、図 69 の積分路 (ただし $y_0 = 0$ とする) を用いて Stokes の流れ関数を

$$\Psi = \Psi(0,0) + \int_0^y \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{x=0} dy + \int_0^x \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx$$

と計算する。前述の流れ関数の不定性を利用して $\Psi(0,0) = 0$ とおくと、

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{x=0} dy &= \int_0^y U y dy = \frac{1}{2}Uy^2, \\ \int_0^x \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx &= -m \int_0^x \frac{y^2}{r^3} dx = -m \int_0^\phi \cos \phi d\phi \quad (x \equiv y \tan \phi) \\ &= -m \tan \phi \cos \phi = -m\frac{x}{r}, \\ \therefore \Psi &= \frac{1}{2}Uy^2 - m\frac{x}{r}. \end{aligned}$$

§ 26 ワイスの球定理

原点を中心とする半径 a の球の周りの流れを得るのに有用な、球定理を用いる数学的技法を紹介する。

Wiess の球定理

無限に広い領域における渦無し運動の速度ポテンシャル Φ_0 が与えられたとする。その特異点は原点から距離 a 以上離れているとする。このとき Φ_0 の表す流れの中に、原点を中心とする半径 a の球を置いた場合に実現される流れは、速度ポテンシャル $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$ によって与えられる。ここに

$$\Phi_1(\mathbf{r}) = \frac{a}{r} \Phi_0(a^2 \mathbf{r}/r^2) - \frac{2}{ar} \int_0^a \lambda \Phi_0(\lambda^2 \mathbf{r}/r^2) d\lambda \quad (26.2)$$

である (Wiess の球定理) [証明は本稿次節]。これは 2 次元流の場合の Milne-Thomson の円定理 (§ 20) に対応するものである。 Φ_1 の式は等価的に

$$\Phi_1(\mathbf{r}) = \frac{r}{a} \int_{\xi=0}^{\xi=(a/r)^2} \xi d[\Phi_0(\xi \mathbf{r})] \quad (26.2a)$$

と書くこともできる [証明は本稿次節]。

■例 一様流のポテンシャル $\Phi_0 = Ux$ に対して

$$\begin{aligned} \text{式 (26.2) より } \Phi_1 &= \frac{a}{r} U \frac{a^2 x}{r^2} - \frac{2}{ar} \int_0^a \lambda U \frac{\lambda^2 x}{r^2} d\lambda \\ &= U a^3 \frac{x}{r^3} - \frac{1}{2} U a^3 \frac{x}{r^3} = \frac{U a^3}{2} \frac{x}{r^3}, \\ \text{式 (26.2a) より } \Phi_1 &= \frac{r}{a} \int_0^{(a/r)^2} \xi d(U \xi x) = \frac{r}{a} U x \int_0^{(a/r)^2} \xi d\xi = \frac{U a^3}{2} \frac{x}{r^3} \end{aligned}$$

なので、いずれにせよ再び一様流中に球を静止させたときの速度ポテンシャル (24.4):

$$\Phi = Ux + \frac{U a^3}{2} \frac{x}{r^3}$$

が得られる。

Butler の球定理 [本稿では紹介のみ]

軸対称な流れを考える。無限に広い領域における渦無し運動を表す Stokes の流れ関数 $\Psi_0(r, \theta)$ が与えられたとする。このとき Ψ_0 の表す流れの中に、原点を中心とする半径 a の球を置いた場合に実現される流れは、Stokes の流れ関数

$$\Psi(r, \theta) = \Psi_0(r, \theta) - \frac{r}{a} \Psi_0\left(\frac{a^2}{r}, \theta\right)$$

によって与えられる (Butler の球定理)。

§ 26 について

■Wiess の球定理の証明

これ [Wiess の球定理] を証明するには、

- (i) $\Delta \Phi_1 = 0$,
- (ii) Φ_1 は $r > a$ に特異点を持たない、

(iii) $r \rightarrow \infty$ で $\Phi_1 \rightarrow 0$,

(iv) $(\partial\Phi_1/\partial r)_{r=a} = -(\partial\Phi_0/\partial r)_{r=a}$

がいえればよい。証明は読者にまかせる。(p.94 より)

なるほど、(i) により $\Delta\Phi = 0$ であり、(ii) により $r > a$ における Φ の特異点は Φ_0 と同じであり、 Φ は (iii) により無限遠 $r \rightarrow \infty$ でもとのポテンシャル Φ_0 と同じ境界条件を満たし、(iv) により球の表面 $r = a$ で境界条件 $(\partial\Phi/\partial r)_{r=a} = 0$ が満たすことが保証される。さて、証明に移ろう。

(i) 式 (26.2) の Φ_1 に対して Leibniz の公式

$$\begin{aligned}\Delta(uv) &= \partial_i \partial_i (uv) = (\partial_i \partial_i u)v + 2(\partial_i u)(\partial_i v) + u(\partial_i \partial_i v) \\ &= (\Delta u)v + 2(\partial_i u)(\partial_i v) + u(\Delta v) \quad (u, v : \text{任意の関数})\end{aligned}$$

を適用し、 $\Delta \frac{1}{r} = 0$ を考慮すると

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_1 &= \frac{a}{r} \Delta\Phi_0(a^2\mathbf{r}/r^2) + 2a \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi_0(a^2\mathbf{r}/r^2) \\ &\quad - \frac{2}{ar} \int_0^a \lambda \Delta\Phi_0(\lambda^2\mathbf{r}/r^2) d\lambda - 2 \cdot \frac{2}{a} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^a \lambda \Phi_0(\lambda^2\mathbf{r}/r^2) d\lambda\end{aligned}\quad (15)$$

となる。ここで $\mathbf{X} = \lambda^2\mathbf{r}/r$ とおくと

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial X_j} = \lambda^2 \left(-\frac{2x_i x_j}{r^4} + \frac{\delta_{ij}}{r^2} \right) \frac{\partial}{\partial X_j}\quad (16)$$

となるので、上式 (15) 第 4 項において

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^a \lambda \Phi_0(\lambda^2\mathbf{r}/r^2) d\lambda &= -\frac{x_i}{r^3} \int_0^a \lambda \cdot \lambda^2 \left(-\frac{2x_i x_j}{r^4} + \frac{\delta_{ij}}{r^2} \right) \frac{\partial}{\partial X_j} \Phi_0(\mathbf{X}) d\lambda \\ &= \int_0^a \frac{\lambda^3 x_j}{r^5} \left[\frac{\partial}{\partial X_j} \Phi_0(\mathbf{X}) \right]_{\mathbf{X}=\lambda^2\mathbf{r}/r} d\lambda\end{aligned}$$

である。 $\lambda = a$ とすると、同様に式 (15) 第 2 項において

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi_0(a^2\mathbf{r}/r^2) = \frac{a^2 x_j}{r^5} \left[\frac{\partial}{\partial X_j} \Phi_0(\mathbf{X}) \right]_{\mathbf{X}=a^2\mathbf{r}/r}$$

となる。次に式 (15) の第 3 項を考えよう。式 (16):

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1}{\lambda^2} (-2X_i X_j + R^2 \delta_{ij}) \frac{\partial}{\partial X_j} \quad (R \equiv |\mathbf{X}|)$$

より

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 \\ &= \frac{1}{\lambda^4} \left\{ (-2X_i X_j + R^2 \delta_{ij}) \frac{\partial}{\partial X_j} \right\} \left\{ (-2X_i X_k + R^2 \delta_{ik}) \frac{\partial}{\partial X_k} \right\} \\ &= \frac{1}{\lambda^4} \left\{ (-2X_i X_j + R^2 \delta_{ij}) (-2\delta_{ij} X_k - 2X_i \delta_{jk} + 2X_j \delta_{ik}) \frac{\partial}{\partial X_k} + (-2X_i X_j + R^2 \delta_{ij}) (-2X_i X_k + R^2 \delta_{ik}) \frac{\partial}{\partial X_j} \frac{\partial}{\partial X_k} \right\} \\ &= \frac{1}{\lambda^4} \left\{ -2R^2 X_j \frac{\partial}{\partial X_j} + R^4 \left(\frac{\partial}{\partial X_j} \right)^2 \right\}\end{aligned}$$

であり、仮定より Φ_0 は Laplace 方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial X_j}\right)^2 \Phi_0(\mathbf{X}) = 0$$

を満たすので

$$\Delta \Phi_0(\mathbf{X}) = -\frac{2}{\lambda^4} R^2 X_j \frac{\partial}{\partial X_j} \Phi_0(\mathbf{X}) = -\frac{2\lambda^2 x_j}{r^4} \left[\frac{\partial}{\partial X_j} \Phi_0(\mathbf{X}) \right]_{\mathbf{X}=\lambda^2 \mathbf{r}/r}$$

を得る. $\lambda = a$ とすると, 同様に式 (15) 第 1 項において

$$\Delta \Phi_0(a^2 \mathbf{r}/r^2) = -\frac{2a^2 x_j}{r^4} \left[\frac{\partial}{\partial X_j} \Phi_0(\mathbf{X}) \right]_{\mathbf{X}=a^2 \mathbf{r}/r}$$

と書ける. 以上を式 (15) に代入すると

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_1 = & \cancel{-\frac{2a^3 x_j}{r^5} \left[\frac{\partial}{\partial X_j} \Phi_0(\mathbf{X}) \right]_{\mathbf{X}=a^2 \mathbf{r}/r}} + \cancel{\frac{2a^3 x_j}{r^5} \left[\frac{\partial}{\partial X_j} \Phi_0(\mathbf{X}) \right]_{\mathbf{X}=a^2 \mathbf{r}/r}} \\ & \cancel{-\frac{2}{ar} \int_0^a \lambda \left(-\frac{2\lambda^2 x_j}{r^4} \left[\frac{\partial}{\partial X_j} \Phi_0(\mathbf{X}) \right]_{\mathbf{X}=\lambda^2 \mathbf{r}/r} \right) d\lambda} - \cancel{2 \cdot \frac{2}{a} \int_0^a \frac{\lambda^3 x_j}{r^5} \left[\frac{\partial}{\partial X_j} \Phi_0(\mathbf{X}) \right]_{\mathbf{X}=\lambda^2 \mathbf{r}/r} d\lambda} \\ = & 0. \end{aligned}$$

(ii) Φ_1 の式 (26.2) において $\Phi_0(a^2 \mathbf{r}/r)$ の特異点は

$$\frac{a^2}{r} \geq a \Leftrightarrow r \leq a,$$

$\Phi_0(\lambda^2 \mathbf{r}/r)$ の特異点は

$$\frac{\lambda^2}{r} \geq a \Leftrightarrow r \leq \frac{\lambda^2}{a} \leq a$$

にあり, 係数 $1/r$ の特異点は $r = 0$ にあるから, Φ_1 の特異点はすべて球内 $r \leq a$ に収まっている.

(iii) $r \rightarrow \infty$ のとき $\Phi_0(a^2 \mathbf{r}/r^2), \Phi_0(\lambda^2 \mathbf{r}/r^2) \rightarrow \Phi_0(0)$ である. ところが仮定により Φ_0 は球内部 $r < a$ に特異点を持たないから, $\Phi_0(0)$ は有限の値である. よって式 (26.2) の Φ_1 は無限遠 $r \rightarrow \infty$ においてゼロになる.

(iv) 式 (26.2) の Φ_1 を微分すると

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\right)_{r=a} = \left[-\frac{a}{r^2} \Phi_0(a^2 \mathbf{r}/r^2) + \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \Phi_0(a^2 \mathbf{r}/r^2) + \frac{2}{ar^2} \int_0^a \lambda \Phi_0(\lambda^2 \mathbf{r}/r^2) d\lambda - \frac{2}{ar} \int_0^a \lambda \frac{\partial}{\partial r} \Phi_0(\lambda^2 \mathbf{r}/r^2) d\lambda \right]_{r=a}$$

となる. ここで

$$\frac{\partial}{\partial r} \Phi_0(a^2 \mathbf{r}/r^2) = \frac{\partial X_k}{\partial r} \frac{\partial}{\partial X_k} \Phi_0(\mathbf{X}) \Big|_{\mathbf{X}=a^2 \mathbf{r}/r^2}$$

において, 方向単位ベクトル $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ を導入すると

$$\frac{\partial X_k}{\partial r} = a^2 \frac{\partial x_k}{\partial r} \frac{1}{r^2} = a^2 \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial r} \right)_k = -\frac{a^2}{r^2} (\hat{\mathbf{r}})_k = -\frac{a^2 x_k}{r^3}$$

なので,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\right)_{r=a} = & -\frac{1}{a} \Phi_0(\mathbf{r}) - \frac{x_k}{a} \left[\frac{\partial}{\partial X_k} \Phi_0(\mathbf{X}) \right]_{\mathbf{X}=\mathbf{r}} \\ & + \frac{2}{a^3} \int_0^a \lambda \Phi_0(\lambda^2 \mathbf{r}/a^2) d\lambda - \frac{2}{a^2} \int_0^a \lambda \left(-\frac{\lambda^2 x_k}{a^3} \left[\frac{\partial}{\partial X_k} \Phi_0(\mathbf{X}) \right]_{\mathbf{X}=\lambda^2 \mathbf{r}/a^2} \right) d\lambda \end{aligned}$$

と書き直せる。ただし右辺の \mathbf{r} は (したがってこれ以降の \mathbf{r} は) 球面 $r = a$ 上の位置である。最後に上式右辺の 2 行目 (第 3 項と第 4 項) が

$$\frac{1}{a^3} \int_0^a \frac{d}{d\lambda} \{ \lambda^2 \Phi_0(\lambda^2 \mathbf{r}/a^2) \} d\lambda = \frac{1}{a} \Phi_0(\mathbf{r})$$

とまとめられることに気付くと,

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)_{r=a} = -\frac{x_k}{a} \left[\frac{\partial}{\partial X_k} \Phi_0(\mathbf{X}) \right]_{\mathbf{X}=\mathbf{r}} = -\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \right)_{r=a}$$

を得る。

■式 (26.2a) の導出 式 (26.2):

$$\Phi_1(\mathbf{r}) = \frac{a}{r} \Phi_0(a^2 \mathbf{r}/r^2) - \frac{2}{ar} \int_0^a \lambda \Phi_0(\lambda^2 \mathbf{r}/r^2) d\lambda$$

における積分を部分積分により

$$\begin{aligned} \int_0^a \lambda \Phi_0(\lambda^2 \mathbf{r}/r^2) d\lambda &= \left[\frac{\lambda^2}{2} \Phi_0(\lambda^2 \mathbf{r}/r^2) \right]_0^a - \int_0^a \frac{\lambda^2}{2} \frac{d\Phi_0(\lambda^2 \mathbf{r}/r^2)}{d\lambda} d\lambda \\ &= \frac{a^2}{2} \Phi_0(a^2 \mathbf{r}/r^2) - \int_{\lambda=0}^{\lambda=a} \frac{\lambda^2}{2} d[\Phi_0(\lambda^2 \mathbf{r}/r^2)] \\ &= \frac{a^2}{2} \Phi_0(a^2 \mathbf{r}/r^2) - \int_{\xi=0}^{\xi=(a/r)^2} \frac{\xi r^2}{2} \xi d[\Phi_0(\xi \mathbf{r})] \end{aligned}$$

と書き換えると, 式 (26.2a):

$$\Phi_1(\mathbf{r}) = \frac{r}{a} \int_{\xi=0}^{\xi=(a/r)^2} \xi d[\Phi_0(\xi \mathbf{r})]$$

を得る。

第 5 章 渦運動

§ 27 ヘルムホルツの渦定理

a) 渦管の強さ

渦管を側面に沿って一周する閉曲線 C についての循環 $\Gamma(C)$ は、 C の選び方に依らない。実際、2 つの閉曲線 C, C' に挟まれた図 71 の渦壁 S を考えると、

$$0 = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \Gamma(C) - \Gamma(C'), \quad \therefore \Gamma(C) = \Gamma(C').$$

よって $\Gamma(C)$ は渦管に固有の量であり、これを渦管の強さと呼ぶ。

小さな直断面 σ を持つ渦管を考えると、Stokes の定理

$$\Gamma(C) = \omega\sigma$$

は σ の縁 C に関する循環 $\Gamma(C)$ が内部の σ 上の渦度 ω によってもたらされることを意味している。渦管の各位置の断面 σ について $\omega\sigma$ の値が等しいとき、 $\sigma = 0$ とはなり得ないから、渦糸は流れの中で中断することは許されず、端点が流れの境界にあるか、自分自身で閉じて渦輪を作るかのいずれかである。

b) 渦管の時間的变化

Lagrange の渦定理の証明に用いた Cauchy の積分 (§ 12) から、次の **Helmholtz** (ヘルムホルツ) の渦定理が見出される (導出は下記)。

- ある瞬間に渦線を形成していた流体粒子は、時間が経っても渦線を形成する。
 - このためある渦糸を時間追跡することは、同じ流体部分を見ていることになる。
- 渦糸の強さ $\omega\sigma$ [これが渦糸に固有の量であることは既に保証されている] は時間変化しない。
 - このため渦糸が伸縮して細くなると、渦度 ω は、したがって § 9 より渦糸の各部分の自転角速度 $\omega/2$ は増大する。
[これは角運動量保存則として理解できる.]

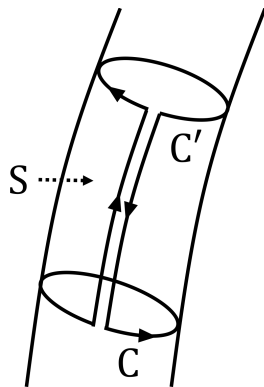


図 71 渦管

ヘルムホルツの渦定理を使うと、つぎのケルヴィン (KELVIN) の循環定理がすぐ導かれる：“完全流体では流体とともに動く任意の閉曲線についての循環は時間がたっても変化しない。” なぜならば、循環の値はその閉曲線を通りぬける渦糸の強さの和であって [Stokes の定理]、その強さは時間的に変化しないからである。(p.99 より)

§ 27, 式の導出など

■Helmholtz の渦定理の証明

“最初渦線を形成していた流体粒子はいつまでも渦線を形成する” ことの証明 初期時刻 $t = 0$ に渦線要素 $d\mathbf{s}_0 = (da_1, da_2, da_3)$ を占めていた流体粒子を考えると、渦線要素 $d\mathbf{s}_0$ は (その位置での) 渦度 $\boldsymbol{\omega}_0$ に平行だから、

$$\frac{\boldsymbol{\omega}_0}{\omega_0} = \frac{d\mathbf{s}_0}{ds_0}, \quad \therefore \omega_{0i} = \omega_0 \frac{da_i}{ds_0}.$$

これを Cauchy の積分 (12.8):

$$\omega_i = \frac{\rho}{\rho_0} \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \omega_{j0}$$

に代入すると、

$$\omega_i = \omega_0 \frac{\rho}{\rho_0} \frac{dx_i}{ds}, \quad \therefore \boldsymbol{\omega} = \omega_0 \frac{\rho}{\rho_0} \frac{d\mathbf{s}}{ds_0} \quad (27.4)$$

を得る。ここに $d\mathbf{s} = (dx_1, dx_2, dx_3)$ は $t = 0$ での流体要素 $d\mathbf{s}_0$ が時刻 t に移る線要素であり、渦度 $\boldsymbol{\omega}$ は流体粒子 $d\mathbf{s}$ の位置で評価されている [それが Cauchy の積分 (12.8) における文字の定義であった]。よって上式 (27.4) は時刻 t の流体要素 $d\mathbf{s}$ が渦線になっていることを意味するから、示された。

“渦糸の強さは時間がたっても変化しない” ことの証明 着目している渦糸の要素について、時刻 $t = 0$ および時刻 t での断面積をそれぞれ σ_0, σ と書くと、質量保存則は

$$\rho \sigma ds = \rho_0 \sigma_0 ds_0$$

と表される。ところで式 (27.4) の絶対値を考えると

$$\frac{\rho ds}{\omega} = \frac{\rho_0 ds_0}{\omega_0}$$

であり、これら 2 式を辺々割ると

$$\omega \sigma = \omega_0 \sigma_0$$

となるから、示された。

§ 27 について

■Helmholtz の渦定理 (式 (27.4)) の証明について 時刻 t で流体粒子の作る線要素 $d\mathbf{s}$ とは、式 (27.4) の導出過程で用いることになる関係

$$d\mathbf{s} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a} da + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b} db + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial c} dc$$

が示しているように、Lagrange 座標 (流体粒子の背番号) (a, b, c) が (da, db, dc) だけ異なる隣接する流体粒子を結ぶ無限小ベクトルである。したがって定理の証明の概略は次のようなものである。すなわち初期時刻 $t = 0$ に近接する 2 粒子を結ぶベクトルが渦線上に乗っていると、後の時刻 t にも同じ 2 粒子を結ぶベクトルは渦線上に乗る。

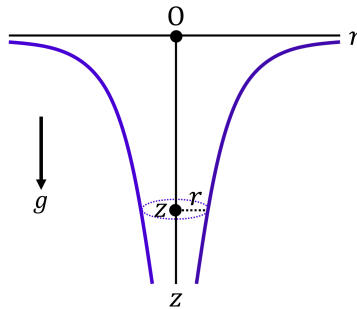


図 72 浴槽にできる渦の孔

■ 諸々の渦定理の関係 § 12 の補足における図 18 参照.

■ 浴槽にできる渦の孔の形 (Kelvin の循環定理の応用) 浴槽に水をためて栓を外すと, 渦の孔ができる. 文献 [6, 演習問題 5-2] では, このような孔の形を次のように求めている. まず図 72 のように z 軸を鉛直下向きにとり, 求める水面の形は z 軸対称とする. はじめの水面 $z = 0$ では静止流体であり, 鉛直下向きに距離 z だけ落ちると流速は $q = \sqrt{2gz}$ になると考える. さらに次のことを仮定する.

- 流線の 1 周はほぼ水平面内にあり, 円を成す.
- このため流れは準定常的であり,
ある高さ $z = z_2 (> z_1)$ の円は別の高さ $z = z_1$ の円を成す流体部分の未来の状態である.

このとき Kelvin の循環定理により

$$\Gamma = 2\pi r \times \sqrt{2gz} = \text{const}, \quad \therefore z = \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 g r^2} \propto r^{-2}$$

となる. ($z \rightarrow 0$ のとき, $\Gamma = 2\pi r q$ を一定に保ちながら $q \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$ となる.)

なお, このような水の孔を日常的に渦と呼んでいるけれど, 流体の占める部分では渦無し ($\omega = 0$) となっていると考えられる. 上流では $q = 0$ の静止流体なので, Lagrange の渦定理のより下流には渦を生じないから. 循環は内部の渦領域によってもたらされるが (Stokes の定理), 今の場合, 円の内部に流体 (水) は存在していない.

§ 28 速度の不連続面

速度の不連続面は渦の層である. [実際, 渦度 $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ は速度差を捉えた量であったことを思い出そう (図 33 参照). 以下ではこのような直観に対応した, 渦と速度差の間の定量的な関係を調べる.]

まず不連続面の両側の流体の速度を $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ として速度差を $\{\mathbf{v}\} \equiv \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ と書くと, 不連続面上の渦糸の向き \mathbf{e} (単位ベクトル) は $\{\mathbf{v}\}$ に垂直である. 実際, 不連続面を挟む無限に薄い矩形 (面に沿って単位長さを持つ) を考え, 単位長さの方向を渦糸の向き \mathbf{e} と平行にとると, 矩形を貫く渦糸は存在しない. よって矩形の縁に沿う循環の強さは

$$\{\mathbf{v}\} \cdot \mathbf{e} = 0$$

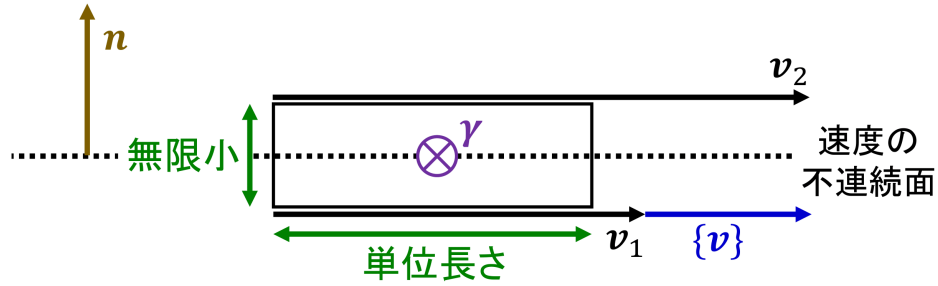


図 73 速度の不連続面

となる。これは $\{v\} \perp e$ を意味する。

そこで次に図 73 のように、矩形を渦糸の向き e に垂直にとる。このとき矩形の縁に沿う循環の強さ γ を大きさに持つ渦層ベクトル $\gamma = \gamma e$ を定義すると、図 73 から

$$\gamma = n \times \{v\}$$

の関係が読み取れる (n は不連続面の法単位ベクトル)。上式は図 73 のように v_1, v_2 が不連続面に接していなくても成り立つ。

§ 28 について

■ n, V_t, e がこの順に右手系を成すこと 速度の不連続面によって分けられる領域 1,2 を定義すると、領域 1 から領域 2 に向かう法単位ベクトル n および $V_t = (v_2 - v_1)_t, \gamma \equiv \gamma e$ が一義的に決まる。こうして n, V_t, e は必ずこの順に右手系を成す。

■ なめらかに変化する剪断流 [1, p.243] 速度の不連続面の簡単な例として、平面 $y = 0$ を隔てて x 方向の 2 種類の一様流 $(U^{(1)}, 0, 0), (U^{(2)}, 0, 0)$ が接している場合を取り上げる。境界の渦の層に L 程度の幅を持たせて、代わりに連続的に空間変化する流れ

$$v = (u, 0, 0), \quad u = \frac{1}{2}(U^{(1)} - U^{(2)}) \tanh(y/L) + \frac{1}{2}(U^{(1)} + U^{(2)})$$

を考えることができる (図 74 参照)。このとき渦度

$$\omega = (0, 0, \omega_z), \quad \omega_z = -\frac{du}{dy} = -\frac{U^{(1)} - U^{(2)}}{L} \frac{1}{2 \cosh^2(y/L)}$$

は確かに $|y| \lesssim L$ の範囲でゼロと著しく異なる値を持つ。速度の不連続面は $L \rightarrow 0$ の極限として理解できる。

§ 29 わき出し分布と渦分布

$\Theta = \nabla \cdot v$ は単位時間に、考えている点の周りの単位体積から流出する流体の体積を表し、わき出しの密度と呼ぶことができる。

与えられたわき出し分布と渦分布

$$\Theta = \nabla \cdot v, \quad \omega = \nabla \times v$$

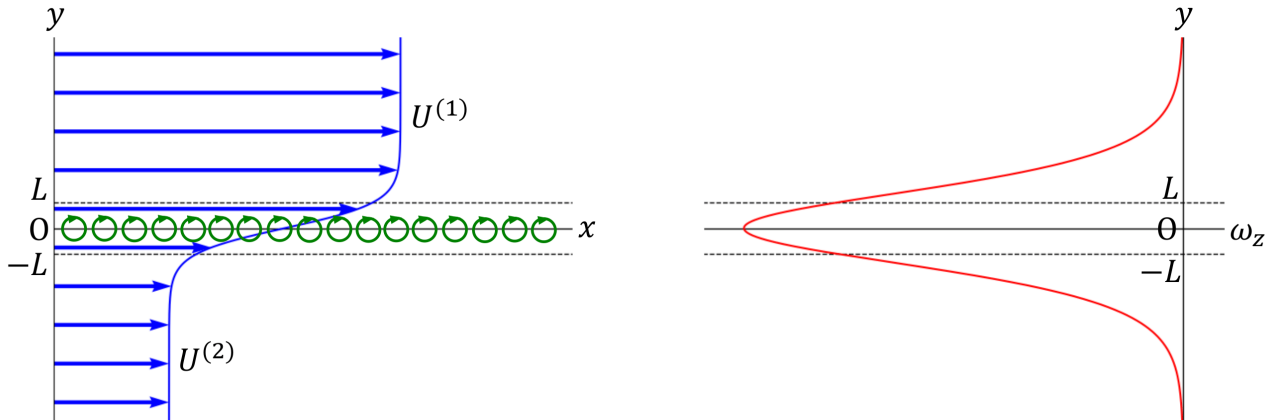


図 74 なめらかに変化する剪断流

から，速度場を求めることを考えよう． \mathbf{v}_1 を渦無し場 ($\nabla \times \mathbf{v}_1 = 0$)， \mathbf{v}_2 を無発散場 ($\nabla \cdot \mathbf{v}_2 = 0$) として，

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

と分解できると仮定する．この仮定は結果によって正当化される^{*12*13}．このとき渦無し場 \mathbf{v}_1 は速度ポテンシャル Φ から導かれ，無発散場 \mathbf{v}_2 はベクトルポテンシャル \mathbf{A} から導かれる：

$$\mathbf{v}_1 = \nabla \Phi, \quad \mathbf{v}_2 = \nabla \times \mathbf{A}.$$

ポテンシャルは

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = \Theta &\rightarrow \Delta \Phi = \Theta, \\ \nabla \times \mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\omega} &\rightarrow \Delta \mathbf{A} = -\boldsymbol{\omega} \quad (\text{ゲージ条件 } \nabla \cdot \mathbf{A} = 0) \end{aligned}$$

のように Poisson 方程式を満たすから，速度場は

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3x' \Theta(\mathbf{x}') (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} : \text{“Coulomb の法則”}, \\ \mathbf{v}_2(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3x' \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} : \text{“Biot-Savart の法則”} \end{aligned}$$

から求まる．[場の引数は時刻 t をパラメーターとして含んで良いと考えられる．すなわち各瞬間ごとに上の関係が成立する．これは電磁気学においてそのような関係が，あくまで準定常的な場に対する近似的な取り扱いであるのとは対照的である.]

有限翼と U 字渦

図 75 に要約するように，翼からは渦糸が下流まで伸びており (U 字渦)，これは翼に抵抗をもたらす。

^{*12} これは循環論法に陥っているように思われるかもしれない．このような論法の背後には解の一意性の仮定がある．すなわち正しい“物理法則”の解はただ 1 つであり，それ故に一度解が見つればそれが求める解であるという暗黙の了解がある．実際，教科書ではあらかじめ解の一意性を証明しているけれど，おそらく多数派の物理学者がそうしているように，本稿では常に正しい“物理法則”の解は一意的に定まると信じることにする．

^{*13} 任意のベクトル場を渦無し場と無発散場に分けられるという数学的な事実は，Helmholtz の定理と呼ばれる．

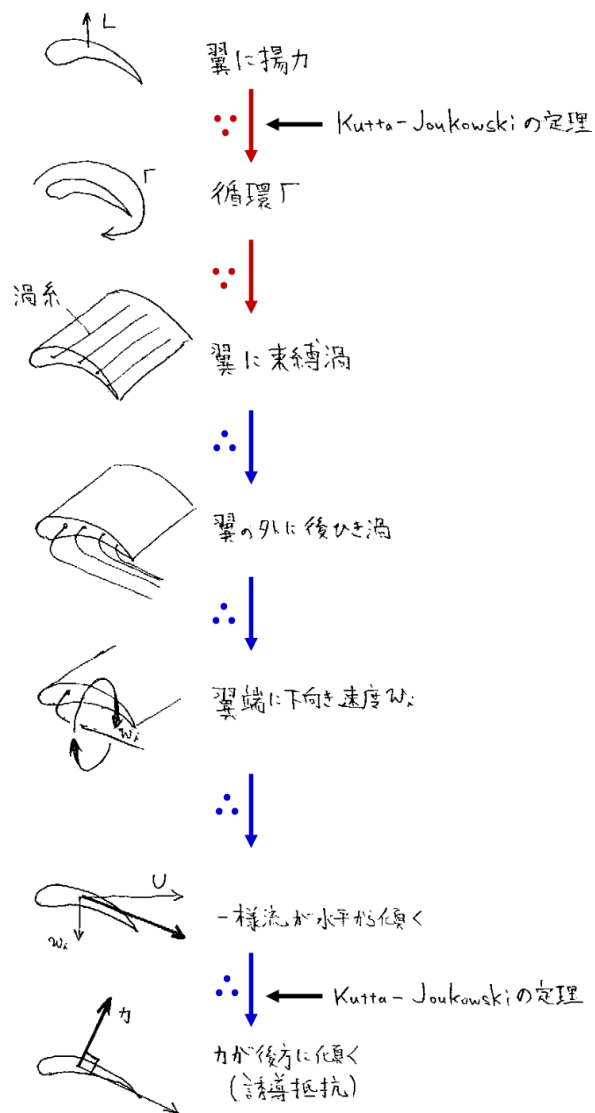


図 75 翼に働く誘導抵抗の説明

§ 29 について

■ベクトルポテンシャルの副条件 (29.7) について ベクトルポテンシャル A に任意の関数 f の勾配を付け加えて得られる新しいポテンシャル

$$A' = A - \nabla f$$

もまた、もとのポテンシャル A と同一の流れを表す：

$$\nabla \times A' = \nabla \times A.$$

この自由度を利用して \mathbf{A}' が副条件 (29.7): $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$ を満たすようにするには, Poisson 方程式

$$\Delta f = \nabla \cdot \mathbf{A}$$

の解 f を用いれば良い.

副条件 (29.7): $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ の下での $\nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = -\boldsymbol{\omega}$ の解 (29.9) が $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を満たすことは, 次のように確かめられる [14, p.165]:

$$\begin{aligned} 4\pi \nabla \cdot \mathbf{A}_P(\mathbf{x}) &= \int_V \partial_i \frac{\omega_i(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \\ &= \int_V \left\{ -\partial_i' \left(\frac{\omega_i(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) + \frac{\partial_i' \omega_i(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right\} d^3x' = 0. \quad (\because \partial_i' \omega_i(\mathbf{x}') = \nabla' \cdot (\nabla' \times \mathbf{v}(\mathbf{x}')) = 0) \end{aligned}$$

ここで最右辺の被積分関数第 1 項を無限遠の表面積分に変えて落とせるのは, 常套手段として「流体が無限にひろがっているばあいに, $\Theta, \boldsymbol{\omega}$ を有限の範囲に分布させかつ無限遠方では流体が静止しているものと」(p.103, 1.12~1.14) 仮定しているからである.

■ポテンシャルから速度場を求める計算 ポテンシャル (29.5),(29.9) から速度場の式 (29.10) を導くような計算では,

$$\nabla_x |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad \nabla_{x'} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

のように距離を微分すると単位ベクトルになることを公式的に利用するのが容易である.

ベクトルポテンシャルの微分は, 以下のように第 i 成分に注目して計算するのが容易である.

$$\left[\nabla_x \times \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right]_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \frac{\omega_k(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \varepsilon_{ijk} \left(-\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{x_j - x_j'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \omega_k(\mathbf{x}') = \left[\frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right]_i.$$

■直線状の渦糸の作る速度場の式 (29.12) について (Biot-Savart の法則の応用) 図 76 において

$$r = \frac{h}{\sin \theta}, \quad s = \frac{h}{\tan \alpha} - \frac{h}{\tan \theta}$$

より $ds = (h/\sin^2 \theta)d\theta$ なので, 渦線上の線素が点 P に誘導する速度の y 成分は

$$\frac{\Gamma \sin \theta d\theta}{4\pi r^2} = \frac{\Gamma}{4\pi h} \sin \theta d\theta$$

である. ここまでは線素が $z \geq 0$ にあっても $z \leq 0$ にあっても言える. ds は線素の長さとして定義されているので, これが正となるように $d\theta$ をとらなければならないことから積分の向きが決まり,

$$v_P = \frac{\Gamma}{4\pi h} \left(\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta + \int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \right) = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos \alpha + \cos \beta)$$

を得る. $\alpha, \beta \rightarrow 0$ とすると, 無限に長い直線電流が h 離れた点に誘導する磁束密度の式と同じ形 $\Gamma/2\pi h$ になる.

■有限翼と U 字渦について 「渦糸は流れの中で切れることはないから, 翼の外まではみ出ているはずである」(p.106, 下から 3,2 行目) とは言うものの, 翼を貫く渦糸は仮想的なものであり, 実際には翼の占める位置に流体は存在しない.

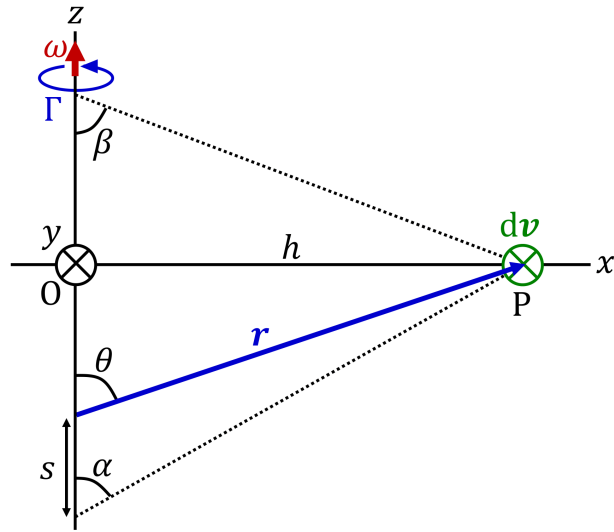


図 76 直線状の渦糸の作る速度場

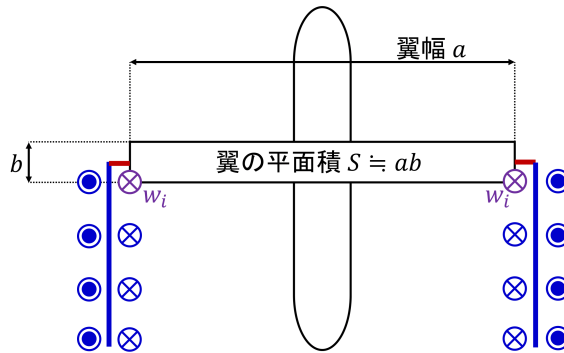


図 77 有限翼と U 字渦

渦糸の翼端から「はみ出た部分は風に流されて下流にのびている」(p.106 一番下)のは、渦糸が常に同じ流体粒子の集団で構成されていることを思い出せば、流体粒子が流されることとして理解できる。

「翼の縦横比 (aspect ratio, [翼幅]² ÷ [翼の平面積] で定義される)」(p.107, 1.5,6) を図 77 の矩形の翼に対して (縦横比) $a^2/S = a/b$ と解すれば、これは a/b で文字通り縦横比となる。これが「大きいばあいには」(p.107, 1.6) 翼は棒状になるため、近似的に 1 本の渦糸で置き換えられるから、自由渦は「だいたい翼端から出る 2 本の渦のひもになっている」(p.107, 1.6,7) ものと考えられる。

「図 29.3 から明らかなように、……速度 w_i が誘導され」(p.107, 1.8,9) について、図 77 のように w_i は自由渦の青い部分から作られ、自由渦の微小な赤い部分が作る流れは無視されている。

■電磁気学との対応 § 29 では流体の速度場を、静電場のような渦無し場と、静磁場のような無発散場に分けられることを学んだ。実際それぞれの速度場を決定する“法則”と、静電場に対する Coulomb の法則、静磁場に対する Biot-Savart の法則の間には完全なアナロジーが成立することが示された。(電場と磁場は一方の時間変化が他方の時間変化をもたらすという点で、流体の速度場と事情が異なっている。) この事実を反映して、§ 14 で取り上げられた縮まない流体の渦無し場のいずれも、速度場を電場に置き換えて得られる静電

場は電磁気学においてよく知られたものであった：

$$\begin{aligned} \text{一様流} &\leftrightarrow \text{平板コンデンサー間の電場,} \\ \text{わき出し} &\leftrightarrow \text{点電荷の作る電場,} \\ \text{二重わき出し} &\leftrightarrow \text{電気双極子モーメントの作る電場.} \end{aligned}$$

また電磁気学の諸概念には、渦やわき出しのように流体力学に由来するものがある。電場のわき出しと言っても、電場に沿って物質が流れているわけではないため、本来その意味は曖昧である。このような表現は電場を流体の速度ベクトル場に読み替えて初めて意味を成す。さらに電磁気学と流体力学の対応する概念として、以下のような例が挙げられる。

$$\begin{aligned} \text{流線, 渦線} &\leftrightarrow \text{電気力線, 磁力線,} \\ \text{循環} &\leftrightarrow \text{起電力.} \end{aligned}$$

§ 30 2次元の渦運動

縮まない流体の2次元流に対しては流れ関数 Ψ を定義でき、 Ψ は2次元の Poisson 方程式

$$\Delta\Psi = -\omega \tag{30.2}$$

を満たす (§ 18). 流れが無遠速で静止している場合の解は

$$\Psi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int \omega_Q \log r dS, \tag{30.3}$$

$$\omega_Q = \omega(\mathbf{x}_Q), \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_Q| \tag{30.4}$$

で与えられる [本稿「§ 30 について」の節で証明]. 特に渦度が点 Q の付近に集中している場合、これは強さ $\Gamma = \int \omega_Q dS$ の渦糸

$$\Psi(\mathbf{x}) \simeq -\frac{1}{2\pi} \log r \int \omega_Q dS = -\frac{\Gamma}{2\pi} \log r$$

と見なせる。

そこで複数の渦糸から成る系を考える。 i 番目の渦糸 (位置 \mathbf{x}_i , 強さ Γ_i) が周りに作る流れは、流れ関数

$$\Psi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \Gamma_i \log r_i \quad (r_i = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|)$$

で表される。よって k 番目の渦糸の位置に作られる流れ (渦糸の速度) $(u_k, v_k) = (dx_k/dt, dy_k/dt)$ は、流れ関数

$$\Psi_k = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i(\neq k)} \Gamma_i \log r_{ik} \quad (r_{ik} = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|) \tag{30.9}$$

を用いて

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial \Psi_k}{\partial y_k}, \quad \frac{dy_k}{dt} = -\frac{\partial \Psi_k}{\partial x_k} \tag{30.8}$$

と書ける。これは“Hamilton 関数”

$$H = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i>k} \Gamma_i \Gamma_k \log r_{ik} \tag{30.10}$$

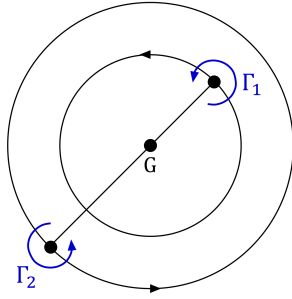


図 78 $\Gamma_1 + \Gamma_2 \neq 0$ の場合

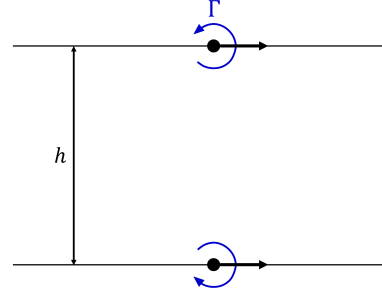


図 79 $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$ の場合

を定義すると，“Hamilton の正準方程式”

$$\Gamma_k \frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \Gamma_k \frac{dy_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_k} \quad (30.11)$$

が成り立つことを意味する (導出は下記).

すると以下の保存量が見出される (導出は下記) [渦糸では共役な正準変数が x 座標と y 座標であるため, 力学との類推は完全には成り立たない].

- (i) H は時間変化しない [エネルギー保存則に対応]
- (ii) H は渦糸の相対距離で決まるから, 系全体の並進に対して不変
→ 渦糸群の重心

$$x_0 = \frac{\sum_k \Gamma_k x_k}{\sum_k \Gamma_k}, \quad y_0 = \frac{\sum_k \Gamma_k y_k}{\sum_k \Gamma_k} \quad \left(\sum_k \Gamma_k \neq 0 \text{ に対して定義される} \right)$$

は動かない [↔ 並進対称性と運動量保存則].

- (iii) $\sum_k \Gamma_k = 0$ の場合, 渦糸を任意の 2 つの渦糸群に分けると, それぞれの重心の相対位置は不変.
- (iv) 原点周りの慣性モーメント $\sum_k \Gamma_k (x_k^2 + y_k^2)$ は不変.
- (v) 原点周りの角運動量は不変:

$$\sum_k \Gamma_k \left(x_k \frac{dy_k}{dt} - y_k \frac{dx_k}{dt} \right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i < k} \Gamma_i \Gamma_k. \quad (30.13)$$

■ 2 本の渦糸

$$H = -\frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{2\pi} \log r_{12} = \text{const}$$

より, 渦糸の距離 r_{12} は一定である.

- $\Gamma_1 + \Gamma_2 \neq 0$ の場合, 渦糸は不変な重心 G を中心とする円運動を行う (図 78).
- $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$ の場合,
渦対は自分自身に直角に速度 $\Gamma/2\pi h$ で進む (図 79, (iii),(iv) に整合) [本稿次節で補足].

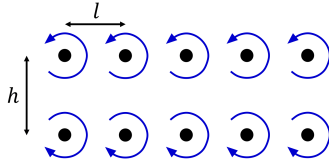


図 80 渦系の対称的な配置

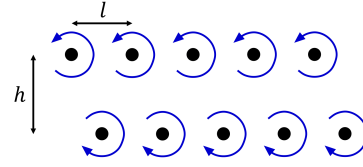


図 81 渦系のたがいちがいの配置

■カルマン渦

静止流体中を適当な速さで物体を動かすと、規則正しくならんだ美しい 2 列の渦が見られる (図 30.4)。この渦系の系は VON KÁRMÁN によってはじめて数学的に研究されたのでカルマン渦 (VON KÁRMÁN's vortex street) と呼ばれている。一般に、 h だけへだたった平行線の上に一定の距離 l をおいて強さ $\Gamma, -\Gamma$ の渦糸が並んでいるとき、この渦列が形を崩さず自分自身に平行に進むためには、図 30.5 の (a) [本稿の図 80] のような対称的な配置と (b) [本稿の図 81] のようなたがいちがいの配置のいずれかでなければならないことが証明される。ところが、このような配置が小さい攪乱を受けたとして、その攪乱が生長するか減衰するかを調べてみると、(b) のばあいでは、

$$\cosh \frac{\pi h}{l} = \sqrt{2} \quad \text{すなわち} \quad \frac{h}{l} = 0.2806$$

のときしか安定 (中立) でないことがわかる。実際観測される渦列はたがいちがいの配列で、 h/l は大体 0.3 に近い。VON KÁRMÁN の理論との一致は驚くべきものといえよう。(pp.113–114 より)

§ 30, 式の導出など

■ “Hamilton の正準方程式” (30.11) の導出 “Hamilton 関数” (30.10):

$$H = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i>j} \Gamma_i \Gamma_j \log r_{ij}$$

における渦糸対に関する和のうち、 k 番目の渦糸の座標 (x_k, y_k) による微分に寄与するのは k 番目の渦糸との対の項

$$-\frac{1}{2\pi} \sum_{j(\neq k)} \Gamma_k \Gamma_j \log r_{kj}$$

に限られるから [本稿次節で図解],

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x_k} &= \Gamma_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(-\frac{1}{2\pi} \sum_{j(\neq k)} \Gamma_j \log r_{kj} \right) = \Gamma_k \frac{\partial \Psi_k}{\partial x_k}, \\ \frac{\partial H}{\partial y_k} &= \Gamma_k \frac{\partial}{\partial y_k} \left(-\frac{1}{2\pi} \sum_{j(\neq k)} \Gamma_j \log r_{kj} \right) = \Gamma_k \frac{\partial \Psi_k}{\partial y_k} \end{aligned}$$

とできる。これを式 (30.8) に代入して式 (30.11) を得る。

■ 渦糸群に対する保存則の導出

(i) 正準方程式 (30.11) より

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} \right) \\ &= \sum_k \left(-\Gamma_k \frac{dy_k}{dt} \frac{dx_k}{dt} + \Gamma_k \frac{dx_k}{dt} \frac{dy_k}{dt} \right) = 0. \end{aligned}$$

[力学におけるエネルギー保存則の導出と同様である.]

(ii) 系全体を(したがって全ての渦糸を) $(\delta x, \delta y)$ だけ平行移動したときの H の変化量は, 正準方程式 (30.11) より

$$0 = \delta H = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial H}{\partial y_k} \delta y_k \right) = -\delta x \sum_k \Gamma_k \frac{dy_k}{dt} + \delta y \sum_k \Gamma_k \frac{dx_k}{dt}$$

と計算される. 最右辺において δx と δy は独立にとれるので, 各々の係数をゼロと置くと

$$\sum_k \Gamma_k x_k = \text{const}, \quad \sum_k \Gamma_k y_k = \text{const}.$$

を得る. $\sum_k \Gamma_k \neq 0$ に対して, これは渦糸の重心が動かないことを意味する.

(iii) 第1の渦糸群(プライムで表す)の重心を (x_0', y_0') , 第2の渦糸群(プライムで表す)の重心を (x_0'', y_0'') とすると,

$$\begin{aligned} \sum \Gamma_k x_k &= \sum \Gamma_{m'} x_{m'} + \sum \Gamma_{n''} x_{n''} \\ &= x_0' \sum \Gamma_{m'} + x_0'' \sum \Gamma_{n''} \quad (\text{重心 } x_0', x_0'' \text{ の定義による}) \\ &= (x_0' - x_0'') \sum \Gamma_{m'} \quad (\text{仮定 } 0 = \sum \Gamma_k = \sum \Gamma_{m'} + \sum \Gamma_{n''} \text{ による}) \end{aligned}$$

である. ところが (ii) で示したように最左辺は一定なので,

$$x_0' - x_0'' = \text{const}.$$

同様に $y_0' - y_0'' = \text{const}$. となる.

(iv),(v)

これらの証明は読者にまかせる. (iv) を証明するには, 系全体を $\delta\theta$ だけ回転して H の不変であることを使えばよい. (v) を証明するには, $H(\lambda x_k, \lambda y_k)$ を λ で微分して $\lambda = 1$ とおけばよい. (p.112 より)

[証明の詳細は本稿次節を参照. 系の回転対称性から導かれる保存量が角運動量 (v) ではなく慣性モーメント (iv) であることに注意する.]

§ 30 について

■2次元の Poisson 方程式の解 (30.3) の導出 2次元の Poisson 方程式 (30.2): $\Delta\Psi = -\omega$ の解が式 (30.3):

$$\Psi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int \omega_Q \log r dS$$

であることを, 結論から Green 関数が $\log r$ に比例すると予想して, 次のように証明できた.

\mathbf{x} を注目している xy 平面上の任意の定点, \mathbf{x}_Q を xy 平面上の動点,

$$r \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}_Q|, \quad \Delta_{2D} \equiv (\partial_{x_Q})^2 + (\partial_{y_Q})^2, \quad \Delta_{3D} \equiv (\partial_{x_Q})^2 + (\partial_{y_Q})^2 + (\partial_{z_Q})^2, \quad \nabla_{3D} = (\partial_{x_Q}, \partial_{y_Q}, \partial_{z_Q})$$

とする. $r \neq 0$ では

$$\Delta_{2D} \log r = \frac{1}{r^2} - 2 \frac{(x - x_Q)^2}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{2(y - y_Q)^2}{r^2} = 0$$

である.

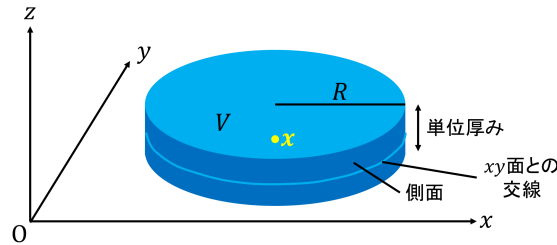


図 82 \boldsymbol{x} を中心とする半径 R の円柱 V

さらに図 82 のように \boldsymbol{x} を中心とする半径 R の円柱 V をとる. この 3 次元領域に対し通常の Gauss の発散定理を用いると,

$$\begin{aligned} \int_V \Delta_{3D} \log r dV &= \int_{\partial V} (\nabla_{3D} \log r) \cdot d\boldsymbol{S} \\ &= \int_{\text{側面}} \frac{1}{R} \boldsymbol{n} \cdot d\boldsymbol{S} \quad (\because (\nabla_{3D} \log r)_z = 0) \\ &= 2\pi R \cdot \frac{1}{R} \rightarrow 2\pi \quad (R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

より $\Delta_{2D} \log r = \Delta_{3D} \log r = 2\pi\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_Q)$ となる. 以上より (数係数の違いを除いて) $\log r$ は 2 次元 Poisson 方程式の Green 関数である.

なお $\Delta_{2D} \log r = 2\pi\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_Q)$ を満たす Green 関数を用いて, 解を式 (30.3) のように書けることは次のように理解できる. 円柱 V が xy 平面から切り取る円を S とすると, Green の公式より

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial V} (\log r \nabla_{3D} \Psi + \Psi \nabla_{3D} \log r) \cdot d\boldsymbol{S} \quad (\text{境界 } \partial V \text{ で (被積分関数) } = 0) \\ &= \int_{\partial V} \nabla_{3D} \cdot (\log r \nabla_{3D} \Psi + \Psi \nabla_{3D} \log r) dV \\ &= \int_V (\log r \Delta_{3D} \Psi + \Psi \Delta_{3D} \log r) dV \\ &= \int_V (\log r \Delta_{2D} \Psi + \Psi \Delta_{2D} \log r) dV \\ &= - \int_S \omega_Q \log r dS + 2\pi\Psi(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

最後は被積分関数が z によらないことに注意して $\int dz = 1$ (単位長さ) を用いた. 教科書では法線を内向きにとっているため, 式 (30.3) 右辺の負号を要する.

■ 渦糸の「自分自身による流速は除外しなければならない」(p.109 下から 2,3 行) について 流れ関数 (30.9) の和 \sum'_i を $i \neq k$ の範囲にとることへの注意を促している. 「自分自身による流速」はそもそも定義されていない.

■ “Hamilton の正準方程式” (30.11) 導出の補足 “Hamilton 関数” (30.10) における和の中の各項

$$a_{ij} \equiv -\frac{1}{2\pi} \Gamma_i \Gamma_j \log r_{ij}$$

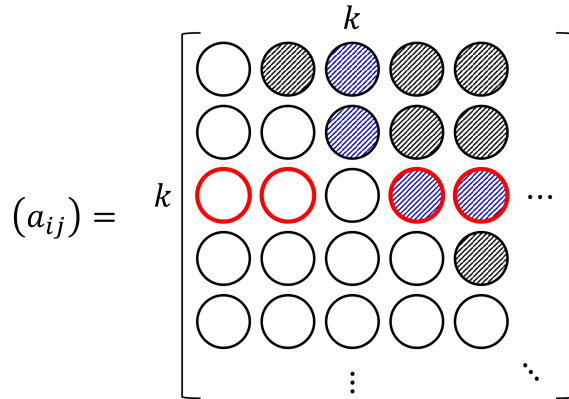


図 83 渦糸の対についての和の図解

を (i, j) 成分に持つ対称行列 (a_{ij}) を作ると、渦糸対についての和 (30.10): $H = \sum_{i>j} a_{ij}$ は図 83 で影を付けた上三角成分の和である。このうち k 番目の渦糸の座標 (x_k, y_k) による微分に寄与するのは、 k 行目ないし k 列目に含まれる図 83 の青色で示した成分に限られる。行列 (a_{ij}) の対称性より、それらの和は図 83 の赤色で示した k 行目の成分の合計

$$\sum_{j(\neq k)} a_{kj}$$

に一致する。式 (30.11) の導出で示したように、このことは意味レベルで理解できる。

■(iv) 慣性モーメントの保存の証明 [6] H は渦糸間の相対距離のみで決まるので、系全体を $\delta\theta$ だけ回転したときの H の変化量は

$$\begin{aligned} 0 = \delta H &= \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial H}{\partial y_k} \delta y_k \right) \\ &= \sum_k \{ (-\Gamma_k \dot{y}_k) (-y_k \delta\theta) + (\Gamma_k \dot{x}_k) (x_k \delta\theta) \} \\ &= \delta\theta \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_k \Gamma_k (x_k^2 + y_k^2) \end{aligned}$$

と計算される。これは慣性モーメント $\sum_k \Gamma_k (x_k^2 + y_k^2)$ が保存量であることを意味する。

■(v) 角運動量の保存 (30.13) の証明 [6] 各渦糸の座標 (x_k, y_k) を $\lambda \equiv 1 + \delta\lambda$ 倍したときの H の変化量は

$$\begin{aligned} \delta H &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{i<k} \Gamma_i \Gamma_k \log \frac{\lambda r_{ik}}{r_{ik}} \\ &\simeq -\frac{\delta\lambda}{2\pi} \sum_{i<k} \Gamma_i \Gamma_k, \\ \delta H &= \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial H}{\partial y_k} \delta y_k \right) \\ &= -\delta\lambda \sum_k \Gamma_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k) \end{aligned}$$

と計算される。これらを等置して式 (30.13) を得る。

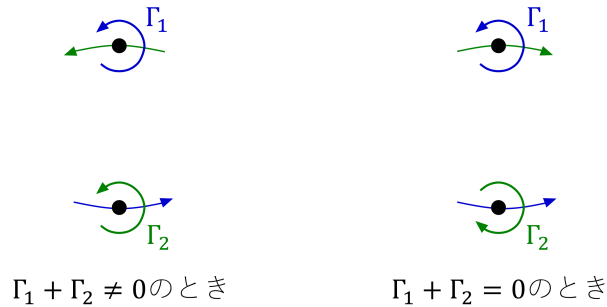


図 84 2本の渦糸

■2本の渦糸 一方の渦糸が他方の渦糸を流す向きは，図 84 のように定性的に理解できる。

ここで教科書で見た，2本の渦糸の連星系のような運動と似た運動が，複数の渦糸の系に対しても想像し得る．すなわち原点を中心とする正 n 角形の頂点に位置する，共通の循環 Γ をもった n 本の渦糸が，原点周りに半径 a の等速円運動を行う流れ (図 85) は，少なくとも定性的には無理がなく，また以下の保存則に抵触しない。

- (ii) 重心不変 (原点)
- (iv) 慣性モーメント不変 ($n\Gamma a^2$)
- (v) 角運動量不変 ($n\Gamma a^2\omega$)

実際， $n \geq 2$ より自然数 $m = 1, 2, \dots$ を用いて $n = 2m$ または $n = 2m + 1$ とおける．そこで n 個の渦糸が円 $r = a$ 上に位置するように，適当に平面極座標 (r, θ) を設定して，与えられた瞬間に1つの渦糸の位置を $\theta = 0$ に選ぶと，残りの渦糸の位置は $\theta_k \equiv \frac{2\pi}{n}k$ を用いて

$$\theta = \pm\theta_k \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

と表される．ただし $n = 2m$ に対して， $\theta = \pm\theta_m = \pm\pi$ は同一の渦糸を表す．このとき x 軸に関して対称な位置 $\theta = \pm\theta_k$ の2つの渦糸が，注目している渦糸の位置 $(r, \theta) = (a, 0)$ に作る流速は，円に沿っている (図 86 参照)．また $n = 2m$ に対して， $\theta = \pm\pi$ の渦糸は単独で円周に沿う流速を誘導する．よって各瞬間に各渦糸の速度は円 $r = a$ に接するので，安定性はともかく，図 85 のような流れは実現可能である．

■「渦対は自分自身に直角に $\Gamma/2\pi h$ の速度で進む」(p.113, l.6)の「直接証明」(p.113, l.7)について 正準方程式 (30.11) は2本の渦糸の Hamiltonian $H = -\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi} \log r_{12}$ に対して，

$$\Gamma_1 \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_1} = -\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi} \frac{y_1 - y_2}{r_{12}^2}, \quad \text{etc.}$$

となる． $r_{12} = h$ (一定)， $\Gamma_1 = -\Gamma_2 \equiv \Gamma$ とおき，渦糸の相対位置ベクトル $\mathbf{r} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ を時計回りに 90 度回転した向きの単位ベクトル

$$\mathbf{n} = \frac{(y_1 - y_2, -(x_1 - x_2))}{h}$$

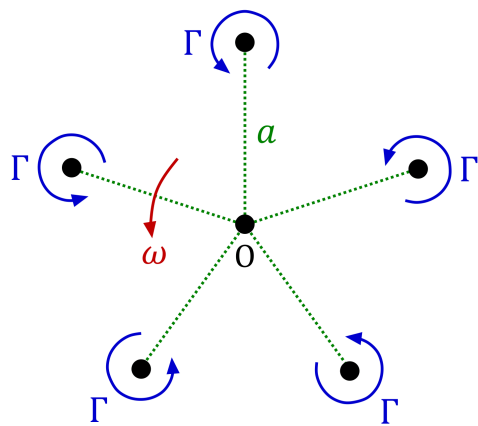


図 85 $n(=5)$ 本の渦糸

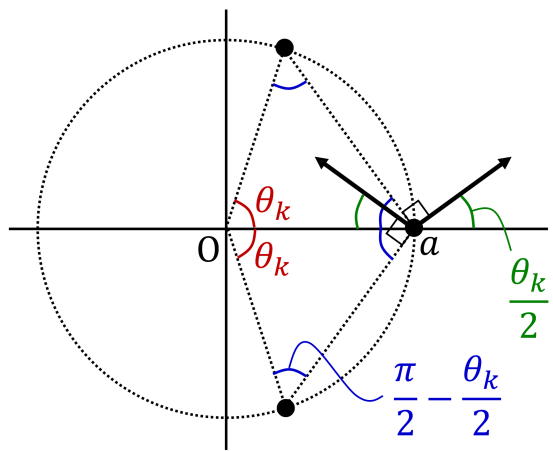


図 86 渦糸の速度の幾何学的考察

を導入すると，渦糸の速度は

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \frac{\Gamma}{2\pi h} \mathbf{n}$$

とまとめられる．

第6章 水の波

§ 34 (p.127) より: 以下, ‘水’ ということばを使うが, その議論はもちろん任意の液体についても成り立つ.

§ 31 波

海や湖に起こる波のようにスケールの大きい流体の運動では粘性の効果は小さいので (§ 45 参照), 縮まない完全流体が重力場の下で行う非定常流として議論できる.

§ 32 長い波

海に生ずる波として図 87 のような鉛直面内の 2 次元流を考え, 面内に静止状態での水面に沿って x 軸, 鉛直上向きに y 軸をとる. 波の波長は水の深さに比べて十分大きいものと仮定する. このとき直観的に, 水の鉛直方向の加速度は小さく*14, 無視できると期待される (長い波). 本節末尾で, 実際にこの予想が成り立つための条件に言及する.

運動方程式

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (32.1)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \quad (32.2)$$

は長い波の仮定の下で

$$p = p_{\infty} + \rho g(\eta - y), \quad (32.3)$$

$$\frac{Du}{Dt} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (32.4)$$

を意味する (p_{∞} は大気圧, 導出は下記). [圧力 (32.3) が水深 $\eta - y$ に比例して増すのは, 静止流体の場合と変わらない. これは仮定からもっともである.] 大抵の場合, 波に伴う水の運動速度 u は小さくなく,

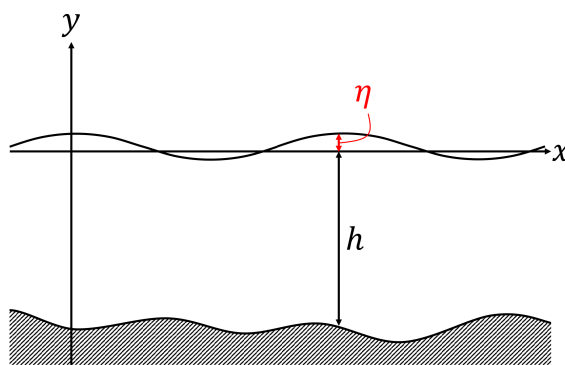


図 87 $\eta(x,t)$ は水が運動しているときの水面の盛り上がり, $h(x)$ は静止状態での水の深さ

*14 何と比べて小さいかと言えば, もちろん重力加速度 g に比べて小さいということになる.

$Du/Dt = \partial u/\partial t + u\partial u/\partial x$ の右辺第 2 項を第 1 項に比べて無視し、上式 (32.4) を

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (32.7)$$

と簡略化して良い。

次に質量保存則を考える。それには、以下のことに注意するのが容易である。すなわち上式 (32.4) より、水平加速度 Du/Dt は x だけの関数となっている。このため初期条件として静止状態を考えると、水の水平速度 u は常に y には依らない。したがってある瞬間に x 軸方向の幅 δx の薄片に含まれていた水は、鉛直に立ったまま水平方向に運動する。そこで今度は空間に固定された幅 δx の薄片状の領域をとり、単位時間においてここに含まれている水の体積の増加量と、この領域の前後両面を通過して流入する水の体積を等置すると、質量保存則は

$$\frac{\partial}{\partial t} \{(\eta + h)\delta x\} = -\frac{\partial}{\partial x} \{u(\eta + h)\}\delta x$$

と表される。左辺において深さ h は x だけの関数であり、また右辺においてふつう、波の高さ η は水深 h に比べてはるかに小さいことを考慮すると、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (hu) \quad (32.6)$$

を得る。

式 (32.6), (32.7) から η あるいは u を消去すると、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (hu) = gh \frac{\partial^2}{\partial x^2} (hu), \quad (32.8)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \eta}{\partial x} \right). \quad (32.9)$$

[結局、長い波の基礎方程式は圧力の式 (32.3) と、上式 (32.8), (32.9) である (§ 3 の要約を参照).]

以下、簡単のために水深 h が一定の場合を考えると、上式 (32.8), (32.9) は波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad c \equiv \sqrt{gh}$$

になる。よく知られているように、一般解は

$$\begin{aligned} \eta &= f_1(x - ct) + f_2(x + ct), \\ u &= \frac{g}{c} \{f_1(x - ct) - f_2(x + ct)\} \end{aligned}$$

という形をとる (η と u の関係 (32.7) を考慮した)。

[Fourier 展開を念頭に、1 つの波数 k で特徴づけられる振動モードを考えよう.] 正弦波

$$\eta = a \sin(kx - \omega t), \quad \omega = ck$$

に対して、長い波の適用条件

$$\frac{a}{h} \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 \ll 1 \quad (32.22)$$

が見出される ($\lambda = 2\pi/k$ は波長、導出は下記) [本稿では式 (32.22) 左辺において、つまらない数係数 $(2\pi)^2$ を落とした]. 詳しい議論によれば、振幅が小さい条件 $a/h \ll 1$ と [長い波の名前の由来である] 条件 $h/\lambda \ll 1$ の両方が個々に成り立っていなければならない [条件 $a/h \ll 1$ は式 (32.6) の箇所で、長い波の仮定 $|Dv/Dt| \ll g$ に加えてあからさまに要求した].

§ 32, 式の導出など

■式 (32.3), (32.4) の導出 運動方程式 (32.2) は, 長い波の仮定 $|Dv/Dt| \ll g$ を適用して, 左辺の加速度 Dv/Dt をゼロと置くと,

$$p = -\rho g y + f(x, t)$$

と積分される ($f(x, t)$ は任意の関数). 水面 $y = \eta$ での境界条件 $p = p_\infty$ を考慮すると [§ 7], 圧力は式 (32.3): $p = p_\infty + \rho g(\eta - y)$ のように表される. これを式 (32.1) に代入すると, 式 (32.4) を得る.

■長い波の適用条件 (32.22) の導出 鉛直加速度 Dv/Dt を評価しよう. 連続の式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

および, 水底 $y = -h$ で $v = 0$ であることより [§ 6 の境界条件],

$$v = - \int_{-h}^y \frac{\partial u}{\partial x} dy = - \frac{\partial u}{\partial x} (y + h)$$

を得る. [第 2 の等号では式 (32.6) より, $\partial u/\partial x$ が y に依らないことを考慮した.] よって

$$\begin{aligned} \frac{Dv}{Dt} &\simeq \frac{\partial v}{\partial t} = -(y+h) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= g(y+h) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (\because \text{式 (32.7)}) \\ &= -g(y+h) k^2 a \sin(kx - \omega t), \quad (\text{正弦波 } \eta = a \sin(kx - \omega t) \text{ に対して}) \\ \therefore \left| \frac{Dv}{Dt} \right| &\leq g(h+a) k^2 a \simeq g h k^2 a = \frac{a}{h} \left(\frac{2\pi h}{\lambda} \right)^2 g \sim \frac{a}{h} \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 g \end{aligned}$$

となるので, 長い波の条件 $|Dv/Dt| \ll g$ は式 (32.22) を意味する.

§ 33 2次元の長い波

図 88 のような任意の形の湖や容器におこる 2次元の長い波を考える. 静止状態における水面 (xy 平面にとる) からの水面の変位 (鉛直上向きを正とする) を ζ と書こう. また $\mathbf{v} = (u, v)$ を水平方向の速度成分, grad や div などを 2次元の微分演算子とすると, 前節の長い波の基礎方程式は

$$\text{運動方程式 (32.4): } \frac{Du}{Dt} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -g \text{grad } \zeta, \quad (33.1)$$

$$\text{質量保存則 (32.6)': } \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \{(h + \eta)u\} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\text{div}\{(h + \zeta)\mathbf{v}\} \quad (33.2)$$

と一般化される [本稿次節で確認].

無限小振幅の波 [定義は § 34 で言及] を仮定して, 上式 (33.1), (33.2) をそれぞれ

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -g \text{grad } \zeta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\text{div}(h\mathbf{v})$$

と線形化する [非線形項として, 力学変数の 2 次の項 $(\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{v}, -\text{div}(\zeta\mathbf{v})$ を落とした]. さらに静止状態からはじまる運動は渦無しなので [§ 12], 速度ポテンシャル Φ を導入することができる ($\mathbf{v} = \text{grad } \Phi$). する

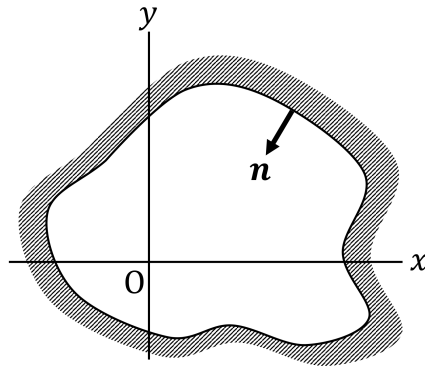


図 88 任意の形の湖や容器

と上式は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -g\zeta, \quad (33.6)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = g \operatorname{div}(h \operatorname{grad} \Phi) \quad (33.7)$$

となる。特に水深 h が一定の場合、式 (33.7) は 2 次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Phi, \quad c = \sqrt{gh}$$

となる [位相速度は § 32 と同じ値]。これは平面波解

$$\Phi = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (\omega = ck)$$

を持つ。[教科書の式 (33.14)。本稿では次元を合わせるために必要な係数 A を補った ($[A] = L^2/T$).]

■長方形の湖 長方形の湖 $0 < x < a, 0 < y < b$ におこる長い波を考える。振動数 ω の時間依存性を仮定し $\Phi = e^{-i\omega t} \phi(x, y)$ とおくと、 Φ に対する波動方程式は ϕ に対する Helmholtz 方程式

$$(\Delta + k^2)\phi = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}$$

になる。これは

$$\phi = A \cos k_x x \cos k_y y$$

という形の解を持つ。境界条件 [§ 6]

$$\begin{cases} \partial \phi / \partial x = 0 & (x = 0, a) \\ \partial \phi / \partial y = 0 & (y = 0, b) \end{cases}$$

の下で許容される波数は

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}$$

と離散化され ($m, n = 0, 1, 2, \dots$)、対応する固有振動数は

$$\omega = ck = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} c \equiv \omega_{mn}$$

と表される。よって Φ は、したがって式 (33.6) より ζ は定常波の重ね合せ

$$\zeta = \sum_{m,n} A_{mn} e^{-i\omega_{mn}t} \cos \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b} \quad (33.22)$$

で与えられる。なお任意の形の湖に対しても、このような固有振動 (静振と呼ばれる) が存在することが知られている。

§ 33 について

■2次元の長い波に対する基礎方程式 (33.1),(33.2) の確認 ここで § 32 の手順を繰り返す、式 (33.1),(33.2) が導かれることを確認しておこう。まず運動方程式の z 成分

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

において、長い波の仮定 $|Dw/Dt| \ll g$ を適用して左辺の加速度を無視すると、圧力は式 (32.3) と同様に

$$p = p_{\infty} + \rho g(\zeta - z)$$

と表される。これを運動方程式の水平成分

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

に代入すると、式 (33.1) を得る。

水の運動が静止状態からはじまったとすると、運動方程式 (33.1) より再び \mathbf{v} は z に依らないことになる。よって底面積 δS の細い柱状の領域 (空間に固定) に注目すると、質量保存則は

$$\frac{\partial}{\partial t} \{(\zeta + h)\delta S\} = -\text{div}\{(\zeta + h)\mathbf{v}\}\delta S$$

と表される。ここから式 (33.2) が得られる。

■長方形の湖について これは典型的な固有値問題であり、固有状態 (33.22) は波動の数理では馴染みのある定常波となっている。ここでは水の波という具体的な系に対して、実際にそのような波が (長い波の近似の下で) 物理に従って実現可能であることを見たことになる。

§ 34 表面波

鉛直方向の加速度が重力の加速度 g に比べて無視できるという ‘長い波’ の仮定を特に設けずに水の波の理論を展開すると、結論として、水の運動は水面からほぼ波長程度の深さのみに限られるということがわかる [§ 35, § 36]。それゆえ、波長と同程度またはそれ以上の深さの海や容器におこる波を表面波 (surface wave) とよぶ。(第1段落より)

静止流体からはじまる流体は渦なしなので [§ 12], 速度ポテンシャル Φ を持つ。そして縮まない流体さえ仮定すれば、非定常流に対しても Φ は Laplace 方程式

$$\Delta \Phi = 0$$

を満たす [§ 13]。

次に境界条件を考える [§ 6, § 7]。

1. 固定境界 (水底) (水側に向かう法単位ベクトル \mathbf{n})

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0. \quad (34.2)$$

2. 自由表面 (水面) $z = \zeta(x, y, t)$ (静止状態の水面は $z = 0$ とする)

(a) 運動学的な境界条件

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \quad (34.4)$$

[本稿次節で補足.]

(b) 力学的な境界条件 (水面に大気圧 p_∞ が働いていること)

圧力方程式 (10.10):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} + gz = f(t)$$

において任意関数を $f(t) = p_\infty/\rho$ と選ぶと, 表面 $z = \zeta$ で成り立つ関係

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2g} (\nabla \Phi)^2 \quad (34.5)$$

が見出される.

[式 (34.4),(34.5) における Φ の微分は $z = \zeta$ で評価される].

ここで波に伴って起こる水の運動を 1 次の微小量として ($\Phi = O(\varepsilon), \therefore \mathbf{v} = O(\varepsilon)$), $O(\varepsilon^2)$ の微小量を無視する近似を行う (無限小振幅の波の理論). 式 (34.5) より $\zeta = O(\varepsilon)$ となることに注意すると, 式 (34.4),(34.5) はこの近似の下で

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \zeta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{z=\zeta}$$

となる. さらに $O(\varepsilon^2)$ を無視する近似の下では, ここに現れた Φ の微分を $z = 0$ での値に置き換えられるので, 線形の境界条件

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad z = 0 \quad (34.8)$$

を得る.

けっきょく, 問題は $\Delta \Phi = 0$ を境界条件 (34.2), (34.8) のもとに解くことに帰着する. Φ が求めれば, 波の形 $z = \zeta$ は (34.7) [$\zeta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{z=0}$] によって見出される. (p.129 より)

§ 34 について

■水面の運動学的境界条件 (34.4) について 境界の方程式 (34.3): $F(\mathbf{r}, t) \equiv z - \zeta(x, y, t) = 0$ における z は, 以下で解釈するように流体粒子の位置を表しており, 境界条件 (6.4): $DF/Dt = 0$ を適用する際,

$$\frac{Dz}{Dt} = w$$

とする.

このことは公式的に $DF/Dt = 0$ を用いるよりも、その起源に立ち戻った方が理解できる [1, p.244]. すなわち注目している流体粒子の座標を $(x(t), y(t), z(t))$ とすると、この粒子が境界 $z = \zeta(x, y, t)$ 上にあることは、座標の間の関係

$$z(t) = \zeta(x(t), y(t), t)$$

として表現できる. 両辺を時間微分しよう. すると左辺の微分は流体粒子の速度成分 w を与える. (丁寧に言えば、これは粒子の Lagrange 座標 \mathbf{a} を固定した Lagrange 微分 $\partial z(\mathbf{a}, t)/\partial t$ である.) 一方、右辺の微分は粒子の位置 $(x(t), y(t))$ で評価された ζ の値の Lagrange 微分となるから、両辺を等置すると式 (34.4):

$$w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

を得る.

§ 35 一様な深さの海

深さ h が一定の海におこる、鉛直面内の 2 次元流で記述される波を考える (座標系の設定と文字の定義は § 32 に準ずる).

$$\text{Laplace 方程式} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad (-h < y < 0) \quad (35.1)$$

$$\text{境界条件 (34.2):} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad (y = -h) \quad (35.2)$$

$$\text{境界条件 (34.8):} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0. \quad (y = 0) \quad (35.3)$$

x 軸方向に進む進行波

$$\Phi = f(y) \cos(kx - \omega t) \quad (35.5)$$

の形の解を考えると、

$$\omega^2 = gk \tanh kh, \quad (35.10)$$

$$f = C \cosh k(y + h) \quad (35.11)$$

となる (C は任意定数, 導出は下記). このとき波の形 $y = \eta(x, t)$ は

$$\eta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{y=0} = a \sin(kx - \omega t), \quad a \equiv -\frac{\omega C}{g} \cosh kh$$

であり、波の速度は

$$c = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{g}{k} \tanh kh \right)^{1/2} = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda} \right)^{1/2}$$

と求まる. 以上より速度ポテンシャルは

$$\Phi = -ca \frac{\cosh k(y + h)}{\sinh kh} \cos(kx - \omega t) \quad (35.14)$$

と表される [係数の計算は本稿「§ 35 について」の節を参照].

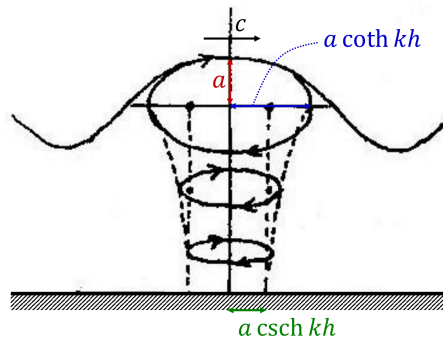


図 89 水の運動

a) 水の運動

速度 \mathbf{v} は 1 次の微小量なので、各流体粒子 P の運動はある点 $A(x_0, y_0)$ の近くに限定されると期待される。そこで動点 P の時間発展方程式

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

の右辺の値を点 A において評価すると、

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ckA \sin(kx_0 - \omega t), & A &\equiv a \frac{\cosh k(y_0 + h)}{\sinh kh}, \\ \frac{dy}{dt} &= -ckB \cos(kx_0 - \omega t), & B &\equiv a \frac{\sinh k(y_0 + h)}{\sinh kh} \end{aligned}$$

となる。これらは

$$x = A \cos(kx_0 - \omega t) + x_0', \quad y = B \sin(kx_0 - \omega t) + y_0' \quad (35.17)$$

と積分される。ところが点 A として点 P の近くの任意の点を選べるから、積分定数 (x_0', y_0') を A の座標 (x_0, y_0) そのものとして良い。このとき式 (35.17) は点 A (x_0, y_0) を中心とする長半径 A, 短半径 B の楕円に沿う時計回りの運動を表す (図 89)。

- 楕円の厚み比 $B/A = \tanh k(y_0 + h)$ は深さとともに減少する (水底 $y_0 = -h$ ではゼロ)。
- 楕円の焦点距離 $2\sqrt{A^2 - B^2} = 2a \operatorname{csch} kh$ は深さによらず一定である。
[$\operatorname{csch} x = \operatorname{cosech} x \equiv 1/\sinh x$.]
- 水面 $y_0 = 0$ では流体粒子の上下振動の幅 B が、水面の振幅 a に一致する。
(流体粒子の運動が水面の上下振動を成す。)
- η と dx/dt はともに $\sin(kx - \omega t)$ という因子を持つから、水面の盛り上がったところではその下の流体粒子はすべて波の進行方向に動き、水面のくぼんだところでは逆方向に動くことがわかる。

b) 定常波, 容器内の水の振動

ここまで考えてきた x 方向への進行波 (の 1/2 倍) $\eta_1 = \frac{a}{2} \sin(kx - \omega t)$ を, 後退波 $\eta_2 = \frac{a}{2} \sin(kx + \omega t)$ と重ね合わせて得られる定常波

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = a \sin kx \cos \omega t$$

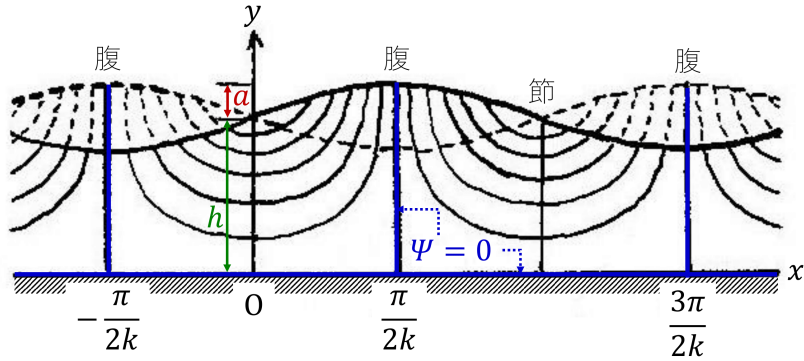


図 90 流体粒子は腹 $x = \frac{\pi}{2k}(2N+1)$ では鉛直方向に振動し ($u=0$), 節 $x = \frac{N\pi}{k}$ では水平方向にのみ運動する ($v=0$)

を考える.

$$\text{速度ポテンシャル } \Phi = ca \frac{\cosh k(y+h)}{\sinh kh} \sin kx \sin \omega t \quad (35.20)$$

[本稿「§ 35 について」の節で補足],

$$\text{複素速度ポテンシャル } f = ca \frac{\sin k(z+ih) \sin \omega t}{\sinh kh}$$

[$\sin k(z+ih) = \sin kx \cosh k(y+h) + i \cos kx \sinh k(y+h)$ より $\text{Re} f = \Phi$]

$$\rightarrow \text{流れ関数 } \Psi = ca \frac{\sinh k(y+h)}{\sinh kh} \cos kx \sin \omega t.$$

$\Psi = \text{const}$, すなわち

$$\sinh k(y+h) \cos kx = \text{const} \quad (35.25)$$

とおくと, 流線の概形は図 90 のようになることが分かる [本稿「§ 35 について」の節で補足]. 右辺の const は時間 t の関数であるが, 流線の形自身は時間的に変化しない (このため流体粒子はこれらの流線上で微小振幅の単振動を行うことが分かる).

半波長 $\pi/k (= \lambda/2)$ の整数倍の幅

$$l = \frac{N\pi}{k} \quad (N = 1, 2, \dots)$$

を持つ区間

$$-\frac{\pi}{2k} < x < \frac{\pi}{2k}(2N-1)$$

における定常波は, 両端 $x = -\frac{\pi}{2k}, \frac{\pi}{2k}(2N-1)$ を鉛直な固体壁に置き換えても実現可能である. したがって逆に容器の深さ h と長さ l を固定し, 定常波の波数 $k = N\pi/l$ を与えられた長さ l に応じて決まるものと見なすと, 式 (35.10) より “容器” の水の固有振動数は

$$\omega = \left\{ N \frac{\pi g}{l} \tanh \left(N \frac{\pi h}{l} \right) \right\}^{1/2}$$

と表される.

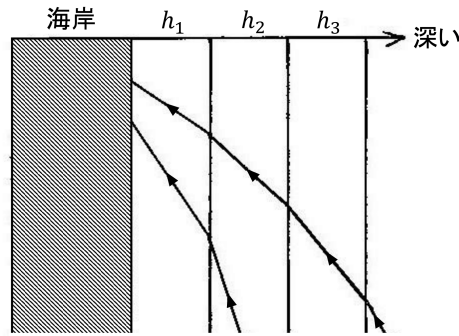


図 91 深さ h_i が段階的に変化する海岸に打ち寄せる波の屈折

§ 35, 式の導出など

■分散関係 (35.10) と $f(y)$ の式 (35.11) の導出 式 (35.5) を式 (35.1-3) に代入すると

$$f'' - k^2 f = 0, \quad (-h < y < 0) \quad (35.6)$$

$$f' = 0, \quad (y = -h) \quad (35.7)$$

$$gf' - \omega^2 f = 0 \quad (y = 0) \quad (35.8)$$

となる. 式 (35.6) の一般解 $f = Ae^{ky} + Be^{-ky}$ に境界条件 (35.7) を適用すると

$$Ae^{-kh} = Be^{kh}, \quad \therefore A = \frac{1}{2}Ce^{kh}, \quad B = \frac{1}{2}Ce^{-kh} \quad (C \text{ は任意定数})$$

が課されるので,

$$f = \frac{1}{2}C\{e^{k(y+h)} + e^{-k(y+h)}\} = C \cosh k(y+h) : (35.11)$$

を得る. これを式 (35.8) に代入すると, 式 (35.10): $\omega^2 = gk \tanh kh$ が得られる.

§ 35 について

■海岸付近での波の屈折 一様な深さの海における表面波の速度 (35.13): $c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh}$ は, 水深 h とともに増大する. ここで海岸付近の波を念頭に浅い水 (長い波) の極限 $kh \ll 1$ を考えると, $c = \sqrt{gh}$ は依然として深さ h が大きいほど速い. このため海岸に打ち寄せる波は, 水深が浅くなるにつれて減速する. (ところで, この極限では速度の波長 (波数 k) 依存性は消えているため, 振動数が一定の波の波長は, 単純に速度に比例して減少する.) すると海岸に打ち寄せる波は図 91 のように屈折し, 波面は海岸線に平行に近づいてゆくと考えられる.

■速度ポテンシャル (35.14) の係数の計算 式 (35.11) の $f(y)$ を式 (35.5) に代入すると,

$$\Phi = C \cosh k(y+h) \cos(kx - \omega t).$$

係数 C を振幅

$$a = -\frac{\omega C}{g} \cosh kh$$

によって表すことを考える。その際、

$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh kh = c \frac{g}{\omega} \tanh kh, \quad (\because c = \frac{\omega}{k})$$

$$\therefore \frac{\omega}{g} = -\frac{1}{c} \tanh kh$$

より

$$a = -\frac{1}{c} \tanh kh \times C \cosh kh = -\frac{C}{c} \sinh kh, \quad \therefore C = -\frac{ca}{\sinh kh}$$

と表されることに気付くと、式 (35.14):

$$\Phi = -ca \frac{\cosh k(y+h)}{\sinh kh} \cos(kx - \omega t)$$

が得られる。

■水の運動 (§ 35a) について 得られた結果は、任意の位置 (x_0, y_0) の周りに、式 (35.17) で与えられる楕円運動を行う流体粒子が存在することを意味している。流体粒子の楕円運動が水の波を成す様子は、以下の動画のように可視化できる。

https://www.youtube.com/watch?v=LWYfbAQ_73E

■定常波 (§ 35b) について 速度ポテンシャル (35.20) の計算には $\eta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{y=0}$ を用いるのが安全である。 $\Phi = A \cosh k(y+h) \cos(kx - \omega t) \equiv f(\omega)$ を直接用いるなら、 $\Phi = \{f(-\omega) - f(\omega)\}/2$ とする。

Ref = Φ となるように、複素速度ポテンシャル f の式 (35.23) を定めた。与えられた Φ に対して $f = \Phi + i\Psi$ が解析関数となるならば、 $\Psi = \text{Im} f$ は速度ポテンシャル Φ と同一の流れを表す流れ関数である。流線の概形を知るには速度ポテンシャルよりも流れ関数 Ψ を用いる方が容易である。流れ関数を $\Psi = \text{const}$ とおいた式 (35.25) より、

$$|x| \text{ 増大} \rightarrow \cos kx \text{ 減少} \rightarrow \sinh k(y+h), y+h \text{ 増大}$$

と流線の概形が分かる。

§ 36 浅い水, 深い水

一様な深さ h の海でおこる波の速度 (35.13):

$$c = \left(\frac{g}{k} \tanh kh \right)^{1/2}$$

は、水深に比べて波長が極めて長い極限 $kh \ll 1$ (したがって $\tanh kh \rightarrow kh$) で、長い波 (浅い水) の速度 [§ 32]

$$c = \sqrt{gh}$$

を再現する。

逆の極限 $kh \gg 1$ (深い水) では、波の速度は

$$c = \left(\frac{g}{k} \right)^{1/2} = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} \right)^{1/2}$$

となり，流体粒子の運動 (35.17) は円運動

$$\begin{aligned}x &= x_0 + ae^{ky_0} \cos(kx_0 - \omega t), \\y &= y_0 + ae^{ky_0} \sin(kx_0 - \omega t)\end{aligned}$$

に帰着する．これによれば円運動の半径は水深 $|y_0|$ とともに， e^{ky_0} にしたがって指数関数的に減衰するため，運動は水面から波長程度の深さに限られることになる．[なお $kh \gg 1$ の極限の近似理論を適用できる条件はそれほど厳しくなく，] 深さが半波長以上もあれば，深い水の理論は良い近似となると考えられる．実際，例えば $\tanh kh \simeq 1$ の近似の誤差が 1% に収まる条件は

$$\tanh kh > 0.99 \quad \leftrightarrow \quad kh = \frac{2\pi h}{\lambda} > 2.65 \quad \leftrightarrow \quad h > 0.422\lambda.$$

§ 36 について

■長い波への帰着について 浅い水の理論 ($kh \ll 1$) でのポテンシャル

$$\Phi = -\frac{ca}{kh} \cos(kx - \omega t)$$

(p.136 一番下) は，長い波において水平速度 u が y に依らないこと (§ 32) と整合している．長い波の仮定 $|Dv/Dt| \ll g$ が満たされるためには， $kh \ll 1$ だけでなく振幅の条件 $a/h \ll 1$ も成り立たなければならないが，これはもとの微小振幅の理論 (§ 34) において既に仮定されているものと考えられる．

§ 37 群速度

群速度の公式

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} \tag{37.3}$$

$$= \frac{d}{dk}(ck) = c + k \frac{dc}{dk} = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} \tag{37.4}$$

を一樣な深さ h の海における波の位相速度 (35.13):

$$c = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda} \right)^{1/2}$$

に適用すると，

$$c_g = \frac{c}{2} \left(1 + \frac{4\pi h}{\lambda} \operatorname{csch} \frac{4\pi h}{\lambda} \right) \tag{37.6}$$

を得る [本稿次節を参照]．特に

$$\text{浅い水 } (h/\lambda \rightarrow 0): \quad c_g = (gh)^{1/2} = c, \tag{37.7}$$

$$\text{深い水 } (h/\lambda \rightarrow \infty): \quad c_g = \frac{1}{2} \left(\frac{g\lambda}{2\pi} \right)^{1/2} = \frac{1}{2}c. \tag{37.8}$$

[なお一般公式 (37.3) については，本稿次節で教科書を大幅に補足しつつ説明・導出する.]

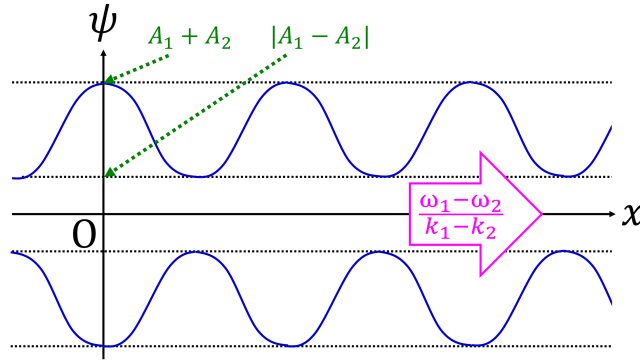


図 92 振幅の異なる 2 つの正弦波に対する合成波の包絡線

§ 37 について

■群速度の一般公式 (37.3) について

2 つの波の合成 (三角関数) 振幅の異なる 2 つの波

$$\begin{aligned}\psi_1 &= A_1 \sin(k_1 x - \omega_1 t + \delta_1), \\ \psi_2 &= A_2 \sin(k_2 x - \omega_2 t + \delta_2)\end{aligned}$$

を合成する場合、振幅を

$$A_1 = \frac{A_1 + A_2}{2} + \frac{A_1 - A_2}{2}, \quad A_2 = \frac{A_1 + A_2}{2} - \frac{A_1 - A_2}{2}$$

と書き換えれば良い。こうすれば振幅が $(A_1 \pm A_2)/2$ の 2 種類に揃うので和積の公式を用いることができ、

$$\begin{aligned}\psi_1 + \psi_2 &= (A_1 + A_2) \sin\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) \\ &\quad + (A_1 - A_2) \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right)\end{aligned}$$

を得る。波数 $(k_1 - k_2)/2$ の項は空間的にゆっくりと振動する因子であり、与えられた時刻に図 92 のような包絡線を作る。包絡線は形を崩さずに時間とともに速度

$$v_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$$

で並進する。 x 軸上の定点で観測されるうなりの (角) 振動数はやはり $|\omega_1 - \omega_2|$ となることが見て取れる。

2 つの波の合成 (指数関数) この結果は物理量の複素表示を用いれば容易に得ることができる [16, p.77]. ただし以下では波の観測点を固定し、空間依存性を省略する。例えば a を複素振幅とすると、振動数 ω_1 の波は複素量 $ae^{i\omega_1 t}$ の実部として得られる。非常に近い振動数 ω_1, ω_2 と異なる振幅を持つ 2 つの波の合成

$$ae^{i\omega_1 t} + be^{i\omega_2 t} = ce^{i\bar{\omega}t}, \quad \bar{\omega} \equiv \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

を考えると、平均振動数 $\bar{\omega}$ での振動の振幅

$$c = a \exp\left(i\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) + b \exp\left(i\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)$$

もまた振動数 $|\omega_2 - \omega_1|$ でゆっくりと振動する。さらに振幅 $|c|$ の振動範囲を調べると

$$|c|^2 = c^*c = |a|^2 + |b|^2 + 2\text{Re} \left[a^*b \exp \left(i \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \right]$$

となるので、一般性を失うことなく $|a| > |b|$ とすれば

$$|a| - |b| \leq |c| \leq |a| + |b|$$

である。

群速度 (議論の一般化) 一般に異なる波長の波を多数重ね合わせて作った波束の進行速度 v_g は群速度と呼ばれる。分散関係 (ω と k の関係) が $\omega = \omega(k)$ で与えられる媒質における群速度は $v_g = d\omega/dk$ となる。通常の分散関係 $\omega = ck$ は非分散的であると言われる。この場合全ての波長の波が同一の位相速度 $c = \omega/k$ を持つため、異なる波長の波を多数重ね合わせた合成波は時間が経っても形が崩れないことが名前の由来である。このとき群速度は $v_g = d\omega/dk = c$ となり、位相速度に一致する。

群速度 (場の Fourier 展開) § 37 では 2 つの単色平面波を重ねさせた波の群速度が

$$v_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$$

で与えられることを示した。しばしばここからひとつ飛びに、分散関係が $\omega = \omega(k)$ で与えられる媒質における群速度は、公式

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

で与えられると説明される。(ただし波に含まれる波数はある値 k の近くに分布しており、微分 $d\omega/dk$ はその値 k において評価されるものと考えられる。) しかしながら、これはやや飛躍の感がある。そこで次のように考察してみよう。

分散関係 $\omega = \omega(\mathbf{k})$ を持つ場 $f(\mathbf{x}, t)$ の Fourier 展開は

$$f(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t)}$$

と書ける。Fourier 成分 $f(\mathbf{k})$ は波数のある値 \mathbf{k}_0 の周りでのみゼロと著しく異なる値を持つものとし、被積分関数において $\mathbf{k}' \equiv \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ の 1 次までとると、

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} f(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}') \exp \left[i \left\{ (\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x} - \left(\omega(\mathbf{k}_0) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \right)_0 \cdot \mathbf{k}' + O(k'^2) \right) t \right\} \right] \\ &= e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}_0)t)} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} f(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}') \exp \left[i \mathbf{k}' \cdot \left\{ \mathbf{x} - \left(\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \right)_0 t \right\} + O(k'^2) \right] \\ &= e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}_0)t)} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \left\{ f(\mathbf{k}_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}} \right)_0 \cdot \mathbf{k}' + O(k'^2) \right\} \left[1 + i \mathbf{k}' \cdot \left\{ \mathbf{x} - \left(\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \right)_0 t \right\} + O(k'^2) \right] \\ &\simeq A(\mathbf{x}, t) e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}_0)t)} \\ A(\mathbf{x}, t) &\equiv \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \left[f(\mathbf{k}_0) + \left\{ i f(\mathbf{k}_0) \left(\mathbf{x} - \left(\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \right)_0 t \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}} \right)_0 \cdot \mathbf{k}' \right\} \right] \end{aligned}$$

となる。(ただし $(\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}})_0, (\frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}})_0$ において $\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial k_x}, \frac{\partial}{\partial k_y}, \frac{\partial}{\partial k_z} \right)$ であり、添字のゼロは $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ において値を評価することを表す。) 最右辺は位相速度 $\frac{\omega(\mathbf{k}_0)}{|\mathbf{k}_0|} \cdot \frac{\mathbf{k}_0}{|\mathbf{k}_0|}$ で進行する単色平面波が、“振幅” (包絡線) $A(\mathbf{x}, t)$ に

よって変調された波を表している。\$\mathbf{k}'\$ の 1 次近似の結果として，“振幅” \$A\$ の引数 \$(\mathbf{x}, t)\$ 依存性は

$$\mathbf{x} - \left(\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \right)_0 t$$

という形でのみ現れ，ここから群速度は \$\left(\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \right)_0\$ で与えられることが読み取れる。

■表面波の群速度 (37.6),(38.13) の計算 式 (38.7): \$\omega = \sqrt{\left(g + \frac{\gamma}{\rho} k^2\right) k \tanh kh}\$ (これは \$\gamma = 0\$ とおくと式 (35.10) を再現) より

$$\begin{aligned} c_g &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2\omega} \left\{ \left(g + \frac{\gamma}{\rho} k^2 + 2\frac{\gamma}{\rho} k^2\right) \tanh kh + \left(g + \frac{\gamma}{\rho} k^2\right) \frac{kh}{\cosh^2 kh} \right\} \\ &= c \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\frac{\gamma}{\rho} k^2 \tanh kh}{g + \frac{\gamma}{\rho} k^2 \tanh kh} + \frac{kh}{2 \sinh kh \cosh kh} \right\} \end{aligned}$$

であり，第 1,2 項を \$(\lambda/\lambda_m)^2 = \gamma k^2/g\rho\$ によって書き換えると

$$1 - \frac{1}{2} \frac{1 - (\lambda/\lambda_m)^2}{1 + (\lambda/\lambda_m)^2}$$

となる。第 3 項について，三角関数の倍角公式と類似の関係式 \$2 \sinh X \cosh X = \sinh 2X\$ が成り立つことを，双曲線関数の定義から直接確かめる。これを用い，\$\operatorname{csch} X \equiv 1/\sinh X\$ に注意すると

$$c_g = c \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{1 - (\lambda/\lambda_m)^2}{1 + (\lambda/\lambda_m)^2} + kh \operatorname{csch} 2kh \right\}$$

を得る [6, 式 (6.59)]. 深い水の理論では第 3 項が落ちて，式 (38.13) になる。張力 \$\gamma\$ の現れる \$(\lambda/\lambda_m)^2 = \gamma k^2/g\rho\$ の項を消すと，張力を考慮しない場合の表式 (37.6) になる。

§ 38 さざなみ

重力だけでなく表面張力もまた，水面を水平にもどそうとする働きを持ち，波の原因となる。そこで水の波に対する表面張力の影響を考えよう。そのためには表面 \$z = \zeta\$ において，表面張力による圧力のとび \$\delta p = p - p_\infty\$ を考慮して，(力学的な) 境界条件 (34.5) を修正しさえすれば良い。このとき線形化した境界条件 (34.7): \$\zeta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{z=0}\$ は

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\gamma}{g\rho} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \quad (38.4)$$

に置き換わる (\$\gamma\$ は表面張力，導出は下記)。これを線形化した (運動学的な) 境界条件 (34.6): \$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}\$ と組合せると，

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \left\{ g - \frac{\gamma}{\rho} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right\} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (38.5)$$

が得られる。

ここで

$$\Phi = f(z) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (\mathbf{k} = (k_x, k_y), \mathbf{r} = (x, y)) \quad (38.6)$$

という形の平面波解を考えると，式 (35.11) の代わりに

$$f(z) = C \cosh k(z + h)$$

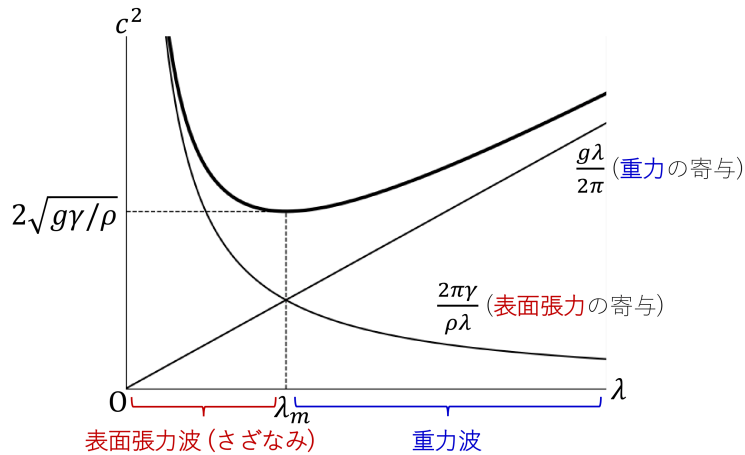


図 93 c^2 と λ の関係 (38.9)

が得られる. 式 (38.6) を式 (38.5) に代入すると, 分散関係

$$\omega^2 = k \left(g + \frac{\gamma}{\rho} k^2 \right) \tanh kh \quad (38.7)$$

が見出される.

これ以降は深い水の極限 $kh \rightarrow \infty$ を考える. すると

$$\begin{aligned} \omega^2 &= k \left(g + \frac{\gamma}{\rho} k^2 \right) \\ c = \frac{\omega}{k} &= \left(\frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho} \right)^{1/2} = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda} \right) \end{aligned} \quad (38.9)$$

であり, c^2 と λ の関係は図 93 のようになる. c^2 の極小値を与える波長

$$\lambda_m = 2\pi \left(\frac{\gamma}{g\rho} \right)^{1/2}$$

を境として, 重力の寄与が主要となる波長範囲 $\lambda > \lambda_m$ の波を重力波, 表面張力の寄与が主要となる波長範囲 $\lambda < \lambda_m$ の波を表面張力波 (さざなみ) と呼ぶ. 水 ($\gamma = 73 \text{ dyn/cm}$) に対しては $\lambda_m \simeq 1.72 \text{ cm}$ なので, 波長がおおよそ 2 cm 以下の波はさざなみと考えられる.

なお, 群速度は

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 - \lambda_m^2}{\lambda^2 + \lambda_m^2} \right) c \quad (38.13)$$

と計算される [導出は § 37 のノートを参照, これは $\gamma = 0$ (したがって $\lambda_m = 0$) とおくと式 (37.8) に帰着する].

§ 38, 式の導出など

■境界条件 (38.4) の導出 表面 $z = \zeta$ での圧力を $p = p_\infty + \delta p$ とすると, 境界条件 (34.5) は

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2g} (\nabla \Phi)^2 - \frac{1}{g\rho} \delta p$$

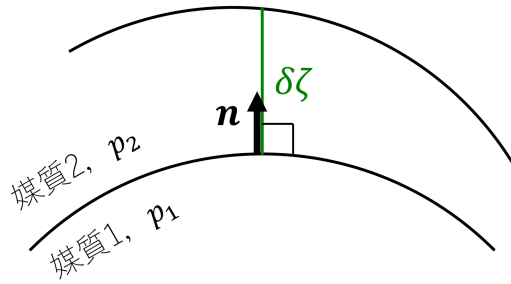


図 94 媒質の境界面の無限小変位

へと変更される．ここで表面張力による圧力のとびが

$$\delta p = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (R_1, R_2 \text{は水面の主曲率半径}) \quad (38.2)$$

$$= -\gamma \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \quad (38.3)$$

と表されることを用いると [上式 (38.2),(38.3) については本稿次節を参照]，上の境界条件は式 (38.4) のように線形化される．

§ 38 について

■表面張力に関する式 (38.2),(38.3) について [5, § 61] 曲面に関する幾何学的公式から始めよう．曲面の各点に法線ベクトル \mathbf{n} を立て，その点における主曲率半径を R_1, R_2 と書く．ただし R_1, R_2 は \mathbf{n} と逆向きを正とする．また曲面に沿った，半径 R_1, R_2 に対応する主軸方向の線要素を dl_1, dl_2 として，面積要素 $df = dl_1 dl_2$ を定義する．

ここで曲面の無限小変位に伴う面積変化を考えよう．曲面の法線が変位前後の面によって切り取られる長さを $\delta\zeta$ と書くと (変位が \mathbf{n} の側に向くときの $\delta\zeta$ を正にとる，図 94 参照)，[半径の変化 $R_1 \rightarrow R_1 + \delta\zeta$, $R_2 \rightarrow R_2 + \delta\zeta$ に対応して] 線要素は

$$dl'_1 = \frac{R_1 + \delta\zeta}{R_1} dl_1, \quad dl'_2 = \frac{R_2 + \delta\zeta}{R_2} dl_2$$

に変化し，面積要素は

$$df = dl_1 dl_2 \rightarrow df' = dl'_1 dl'_2 = \left(1 + \frac{\delta\zeta}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\delta\zeta}{R_2}\right) dl_1 dl_2 \simeq \left\{1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \delta\zeta\right\} df$$

と変化する．よって曲面の有限領域に関する面積 $f = \int df$ の変化は，公式

$$\delta f = \int \delta\zeta \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) df \quad (17)$$

で与えられることになる．

次に平面 $z = 0$ からわずかに変位した曲面 $z = \zeta(x, y)$ を考察する．良く知られているように，面積 f は公式

$$f = \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

を用いて計算される*15. 仮定により $|\partial\zeta/\partial x|, |\partial\zeta/\partial y| \ll 1$ であることを用いると, 近似的に

$$f = \int \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\zeta}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

と書き換えられる. よって曲面の変位 $\delta\zeta$ に伴う面積変化は

$$\begin{aligned} \delta f &= \int \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} \frac{\partial\delta\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\zeta}{\partial y} \frac{\partial\delta\zeta}{\partial y} \right) dx dy \\ &= - \int \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} \right) \delta\zeta dx dy \quad (\text{部分積分した}) \end{aligned}$$

と表される. これを一般式 (17) と比較すると, 平面からのずれがわずかな曲面に対する関係

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = - \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} \right) \quad (38.3)$$

が見出される.

物理の問題に移ろう. 上式 (17) を踏まえ, 異なる媒質 1,2 の境界面で成り立つ平衡条件を調べたい. そのような条件は, 境界面を無限小変位させる仕事 δR がゼロになることとして表現できる. 境界面の方単位ベクトル \mathbf{n} を媒質 1 から媒質 2 に向かってとり, 媒質 1,2 それぞれの圧力を p_1, p_2 とすると, 圧力に逆らって面を変位させる仕事は $\int (-p_1 + p_2) \delta\zeta df$ と表される (再び図 94 を参照). δR には表面の面積変化 δf に関する付加的な項を含める必要がある. それは δf に比例し, $\gamma\delta f$ と書ける (γ は表面張力 (係数)). 以上より

$$\begin{aligned} \delta R &= \int (-p_1 + p_2) \delta\zeta df + \gamma\delta f \\ &= - \int \delta\zeta \left\{ (p_1 - p_2) - \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right\} df \quad (\because \text{式 (17)}) \end{aligned}$$

であり, 任意の変位 $\delta\zeta$ に対してこれがゼロになる条件として,

$$p_1 - p_2 = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

が得られる. これは Laplace の公式と呼ばれ, 境界面が曲がっていることによる媒質の圧力差を与える. この結果によれば,

- $R_1, R_2 > 0$ のとき $p_1 > p_2$.
- 平面 ($R_1 = R_2 = \infty$) に対して, 期待されるように $p_1 = p_2$.

媒質 1 を水 (圧力 $p_1 = p$), 媒質 2 を空気 (大気圧 $p_2 = p_\infty$) としてこの結果を適用すると,

$$p = p_\infty + \delta p, \quad \delta p = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (38.2)$$

が得られる.

*15 この公式は曲面の面積要素ベクトル $d\mathbf{f}$ が

$$d\mathbf{r}_1 \equiv \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ \frac{\partial\zeta}{\partial x} dx \end{pmatrix}, \quad d\mathbf{r}_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ \frac{\partial\zeta}{\partial y} dy \end{pmatrix}, \quad d\mathbf{f} = d\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\partial\zeta}{\partial x} \\ -\frac{\partial\zeta}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} dx dy$$

で与えられることから理解できる.

§ 39 ゲルストナーのトロコイド波

渦運動を許容すると、以下に紹介するように有限振幅の波に対する厳密解が得られる。これは Gerstner のトロコイド波と呼ばれ、現在までに得られている有限振幅の波に対する唯一の厳密解である。

鉛直上向きに y 軸をとり、一様な重力場 $(0, -g)$ の下での xy 面内の 2 次元運動を考える。流体粒子の運動を

$$x = a + \frac{1}{k} e^{kb} \sin k(a - ct), \quad y = b - \frac{1}{k} e^{kb} \cos k(a - ct) \quad (18)$$

の形に仮定する。ただし $c = \sqrt{g/k}$ であり、このとき上式 (18) は“波数” k をパラメーターに持つ。 (a, b) は流体粒子を指定し、これは点 (a, b) を中心とする半径 e^{kb}/k 、角速度 $\omega = ck$ の時計回りの等速円運動を表す。上式 (18) は Lagrange の連続の式 $\partial(x, y)/\partial(x_0, y_0) = 1$ を満たし [流体粒子の初期位置 (x_0, y_0) を円運動の中心 (a, b) と区別した、本稿「§ 39 について」の節を参照]、式 (18) に対して Lagrange の運動方程式

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\partial y}{\partial a} = -\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{p}{\rho} + gy \right), \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\partial y}{\partial b} = -\frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{p}{\rho} + gy \right) \quad (19)$$

は

$$\frac{p}{\rho} = -gb + \frac{1}{2} c^2 e^{2kb} + \left(\frac{g}{k} - c^2 \right) e^{kb} \cos k(a - ct) + \text{const.} \quad (20)$$

と積分される [const は a, b に依らない定数] (導出は下記)。これは式 (20) のような圧力分布の下で、流体の運動 (18) が連続の式と運動方程式に従って実現可能であることを意味している。

式 (20) より共通の b の値を持つ流体粒子には同じ圧力が働く。そこで特に大気に接する水面の粒子に対して $b = b_0$ とすると、

$$p = p_\infty - \rho g(b - b_0) + \frac{\rho}{2} c^2 (e^{2kb} - e^{2kb_0})$$

となり (p_∞ は大気圧)、[この段階で初めて] 各流体粒子に働く圧力は時間変化しないことが分かる。

等圧面 $b = \text{const}$ の形を調べるために、式 (18) を

$$x - ct = \frac{\theta}{k} + \frac{1}{k} e^{kb} \sin \theta, \quad y = b - \frac{1}{k} e^{kb} \cos \theta, \quad \theta \equiv k(a - ct)$$

と書き換える。これは与えられた時刻 t に、共通の b の値を持ち、異なる a の値を、したがって異なる θ の値を持つ流体粒子の位置 (x, y) を θ でパラメトライズした式と見ることができる。すなわち θ を変化させたときに得られる点 (x, y) の軌跡が、求める等圧面 $b = \text{const}$ の形である。それはトロコイドであり、 $b > 0$ に対してはループを描き、 $b < 0$ に対しては波状となる。水面 $b = b_0$ の形として適しているのは $b_0 < 0$ であり、水中の流体粒子に対して $b < b_0$ である。また上式から θ を消去すれば、進行波の形 $y = f(x - ct)$ となる。

以上をまとめると、各流体粒子は図 95 のように等速円運動を行い、その半径 e^{kb}/k は水深が深くなるにつれて ($b \rightarrow -\infty$) 指数関数的に減少する。また等圧面 $b = \text{const}$ の各々は、したがって特に水面は任意の時刻にトロコイドを成し、時間とともに速度 $c = \sqrt{g/k}$ で x 方向に進行する。

最後に渦度

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

を求めよう。これは

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial(v, y)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(v, y)/\partial(a, b)}{\partial(x, y)/\partial(a, b)}$$

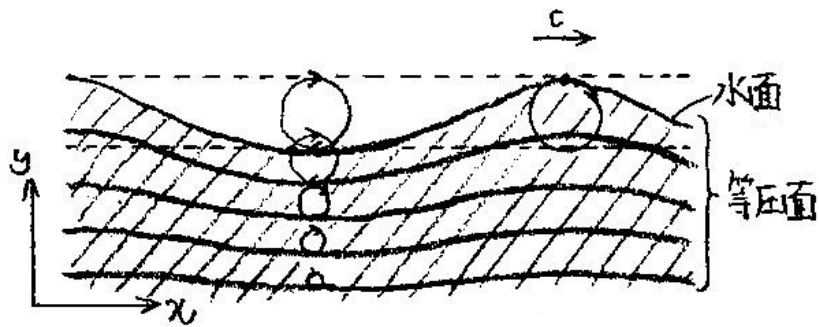


図 95 Gerstner のトロコイド波

のように (a, b) を介した微分に帰着させれば計算することができ、

$$\zeta = \frac{2e^{2kb}}{1 - e^{2kb}} kc \quad (21)$$

を得る (導出は下記). 水深が深くなると $(b \rightarrow -\infty)$ 速度は e^{kb} のように減少するのに対し, 渦度は e^{2kb} のように減少する.

§ 39, 式の導出など

■式 (20) の導出 式 (18) を運動方程式 (19) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{p}{\rho} + gy \right) &= kc^2 e^{kb} \sin k(a - ct), \\ \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{p}{\rho} + gy \right) &= -kc^2 e^{kb} \cos k(a - ct) + kc^2 e^{2kb} \end{aligned}$$

となる. これは積分可能であり, 実際に積分すると

$$\frac{p}{\rho} + gy = -c^2 e^{kb} \cos k(a - ct) + \frac{1}{2} c^2 e^{2kb} + \text{const}$$

を得る [本稿次節で補足]. ここに式 (18) の第 2 式を代入すると, 式 (20) が導かれる.

■渦度 (21) の導出 式 (18) より

$$u = -ce^{kb} \cos k(a - ct), \quad v = -ce^{kb} \sin k(a - ct)$$

なので, 渦度

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \left\{ \frac{\partial(v, y)}{\partial(a, b)} - \frac{\partial(x, u)}{\partial(a, b)} \right\} / \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)}$$

における各行列式は

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(v, y)}{\partial(a, b)} &= \begin{vmatrix} -kce^{kb} \cos k(a-ct) & -kce^{kb} \sin k(a-ct) \\ e^{kb} \sin k(a-ct) & 1 - e^{kb} \cos k(a-ct) \end{vmatrix} \\
 &= kc\{e^{2kb} - e^{kb} \cos k(a-ct)\}, \\
 \frac{\partial(x, u)}{\partial(a, b)} &= \begin{vmatrix} 1 + e^{kb} \cos k(a-ct) & e^{kb} \sin k(a-ct) \\ kce^{kb} \sin k(a-ct) & -kce^{kb} \cos k(a-ct) \end{vmatrix} \\
 &= -kc\{e^{2kb} + e^{kb} \cos k(a-ct)\}, \\
 \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} &= \begin{vmatrix} 1 + e^{kb} \cos k(a-ct) & e^{kb} \sin k(a-ct) \\ e^{kb} \sin k(a-ct) & 1 - e^{kb} \cos k(a-ct) \end{vmatrix} \\
 &= 1 - e^{2kb}
 \end{aligned} \tag{39.4}$$

と計算される。よって式 (21) を得る。

§ 39 について

■円運動の式 (39.3) における (a, b) は Lagrange 座標でないこと 式 (39.3) は点 (a, b) を中心とする円運動を表すため (式 (39.9) も参照), (a, b) は流体粒子の初期位置とはなり得ず, また流体粒子を一意的に指定するような粒子の名前にもなり得ない。しかし流体粒子の初期位置を (x_0, y_0) と書くと, 式 (39.4) により

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x_0, y_0)} = \frac{\partial(x, y)/\partial(a, b)}{\partial(x_0, y_0)/\partial(a, b)} = \frac{1 - e^{2kb}}{1 - e^{2kb}} = 1$$

となるので, 結局 Lagrange の連続の式 (5.7) は満たされている。また Lagrange の運動方程式 (5.8) の導出には (a, b) が流体粒子の初期位置であることを用いておらず, これは (a, b) が流体粒子の名前でありさえすれば成立する。

■「この第 1 式を b について微分したものは……存在する」(p.145 下 3 行) について

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{p}{\rho} + gy \right) = P(a, b), \quad \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{p}{\rho} + gy \right) = Q(a, b)$$

が完全微分方程式となるための条件 (可積分条件) は

$$\partial_a Q = \partial_b P$$

であり (§ 19 の補足を参照), 上式は

$$\begin{aligned}
 \frac{p}{\rho} + gy &= \int_{a_0}^a P(a, b_0) da + \int_{b_0}^b Q(a, b) db + \text{const} \\
 &= -c^2 e^{kb_0} \{ \cos k(a-ct) - \cos k(a_0-ct) \} - c^2 (e^{kb} - e^{kb_0}) \cos k(a-ct) + \frac{1}{2} c^2 (e^{2kb} - e^{2kb_0}) + \text{const} \\
 &= -c^2 e^{kb} \cos k(a-ct) + \frac{1}{2} c^2 e^{2kb} + \text{const}
 \end{aligned}$$

と積分される (p.146, 1.3 の式)。

■「こうすれば, p は t によらないから」(p.146, 1.14,15) について 圧力の式 (39.5) [本稿の式 (20)] における積分定数 const は a と b に依らない定数であり, その導き方から時間には依存しても良いと考えられる。しかしながら水面の圧力は大気圧 p_∞ (一定値) に一致するという境界条件を考慮すれば, (式 (39.6)): $c = \sqrt{g/k}$ の選択の下で const は時間に依らないことが分かる (p.146, 1.18,19)。

■水面での境界条件 式 (39.7) において水面 $b = b_0$ での圧力を大気圧 p_∞ にとることができたから、境界条件 (34.5) は満たされていると考えられる。また水面は常に b の値 b_0 を持つ同一の流体粒子群で占められていることから、境界条件 (34.4) は満たされていると考えられる。

第 II 部

粘性流体と縮む流体の力学

第 7 章 実在流体の力学

§ 40 は第 8 章の概要となっており，流体の粘性が考慮される．

§ 41 は第 9 章の概要となっており，流体の圧縮性が考慮される．

§ 40 粘性流体

完全流体 → 抵抗 0 (d'Alembert のパラドックス)，
粘性 → 抵抗を説明．

a) ナヴィエ-ストークスの方程式

非圧縮性 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ の下での Navier-Stokes 方程式

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\mu}{\rho}\Delta\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \mathbf{K} - \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} \right) + \frac{\mu}{\rho}\Delta\mathbf{v}$$

[§ 44 参照] は，渦無しの流れ

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0, \quad \Delta\mathbf{v} = \nabla\Delta\Phi = 0$$

を仮定すると完全流体に対する Euler 方程式に一致し， \mathbf{v} について線形になる (ただし $q^2/2$ の項は圧力の項に含める)．[これは渦無し場が完全流体でないと実現されないことを意味していると解釈できる．逆に完全流体に対して，ある時刻で渦無しの流れは常に渦無しであった (Lagrange の渦定理).]

b) おそい流れ

Navier-Stokes 方程式において $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ を慣性項， $\nu\Delta\mathbf{v}$ を粘性項 ($\nu \equiv \mu/\rho$ は運動粘性率)，その比

$$\frac{(\text{慣性項})}{(\text{粘性項})} = \frac{U^2/l}{\nu U/l^2} = \frac{lU}{\nu} \equiv R$$

を Reynolds 数と呼ぶ (l, U は流れを特徴付ける代表的な長ささと速度)．[運動粘性率 ν が小さい方が Reynolds 数 R は大きくなることに注意する．直観的には粘性 ν を小さくすることは，流速 U を大きくすること，スケール l の大きい流体の運動を考えることに対応する (§ 45 参照).]

Stokes の近似	Oseen の近似
$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \simeq \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}$	$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \simeq \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + U\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}$
$O(v^2)$ を無視 ← おそい流れ	-
慣性項を無視	物体の遠方 (物体からの距離 l が大きい) での表式

→ R が小さいとき有効	→ R が大きいとき有効
2次元流で解を持たない (Stokes のパラドックス)	2次元流で解を持つ
Stokes の抵抗法則 $D = 6\pi\mu aU$ の導出に用いる	渦領域が物体の上流・下流で非対称であることを説明

c) 境界層

実在の流体では物体の表面で流速は 0 にならなければならない*16.

物体の表面付近で、表面に近づくにつれ流速が大きい値から 0 へと変化する渦の層
 = 境界層 ← 摩擦応力 $\mu \frac{\partial u}{\partial y}$ が実現

流線形の物体 → 境界層が物体の表面を薄く覆う → 表面の圧力分布が完全流体とほぼ等しい
 → 圧力抵抗 0, 摩擦抵抗のみ,
 にぶい物体 → 境界層が物体表面からはがれる → 表面の圧力分布が完全流体と全く違う
 → 圧力抵抗 + 摩擦抵抗.

d) 乱流

Reynolds 数 R 増大 → 乱流 (時間的・場所的に不規則な流れ) へ移行.

乱流について,

円筒内の流れ → 理論的に可能な Poiseuille 流は実現しない,
 境界層 → 壁の近くまで流速が大きい → 速度勾配が大きい → 摩擦応力が大きい.

(i) 発生の問題

層流の安定性 → 与えた小さい攪乱の時間的な生長・減衰から判断,
 層流から乱流へ移行する機構 → 現在, 的確な理論は存在しない.

(ii) 構造の問題

分子が運動量を運搬 → 粘性 (文献 [17, pp.45-47] 参照)
 乱流 → 流体のかたまりが運動量を運搬 → 見かけの粘性.

気体分子運動論に類似を求めた乱流の輸送理論 → ある程度の実用的成功,
 Navier-Stokes 方程式に統計的処理 → 一様等方性乱流について乱流の本質を研究.

*16 物体表面で流体と物体の速度が一致する粘性境界条件が課せられる [6, p.64]. 対照的に完全流体に対して意味のある結果を得るには, 法線成分に対する境界条件 (6.1): $v_n - v_n' = 0$ を要求までしか要求できない. ところが粘性が効くのは物体の表面付近の薄い境界層に限られるため, このような取り扱いでも境界層の外側の流れを正確に記述することができる.

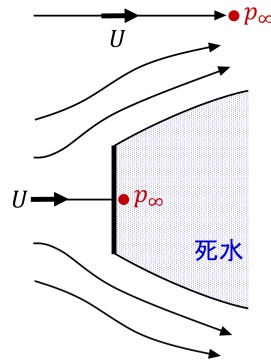


図 96 死水の内部と無限遠の圧力 p_∞

§ 40 について

■完全流体を仮定して抵抗を説明する，死水の理論 (pp.153–154) について まず「板の前面では流速 q は一様流での値 U より小さい」(p.154, 1.5,6) について，境界条件より板の表面で速度 (の法線成分) は 0 であることから，板に近づくにつれて流速が U から 0 まで連続的に減速することが理解できる．従って流体を減速させるような，板に近づくほど高圧となる圧力分布が実現されているはずであり，これは「ベルヌーイの定理 $p - p_\infty = (1/2)\rho(U^2 - q^2)$ により $p > p_\infty$ 」(p.154, 1.6,7) であることと合致する． (§ 11 の補足でも同様の考察を行った．)

ここで得た流速 U の上流と板の表面での圧力の大小関係を板の表裏の圧力の大小関係に読み替えることになるから，下流において流速 U の一様流の中であるか死水の中であるかに関わらず無限遠では共通の圧力 p_∞ を持つことが暗に仮定されている (図 96 参照)．

■「 $\partial/\partial x \sim O(l^{-1})$ である」(p.156 一番下) について 一般に空間微分 $df(x)/dx$ はそれを良く近似する差分 $\Delta f(x)/\Delta x$ 程度であり，近似が有効な条件は $\Delta x \sim l$ であることによると考えられる．

§ 41 高速気流

高速気流に対する基礎方程式

高速気流 → 流れの中の圧力変化が大きい
→ 流れの中の密度変化が大きい．

音源の速度 U (または音源に対する流体の速度) と音速 c の比 $M = U/c$: Mach 数

- $M < 1$: 音よりおそい (亜音速) 流れ
音波は全空間に広がる．
- $M < 1$: 音よりはやく (超音速) 流れ
音源の影響は音源を頂点とする，
半頂角 $\beta = \sin^{-1}(1/M)$ の円錐 (Mach 円錐) の内部に限られる (図 97 参照)．

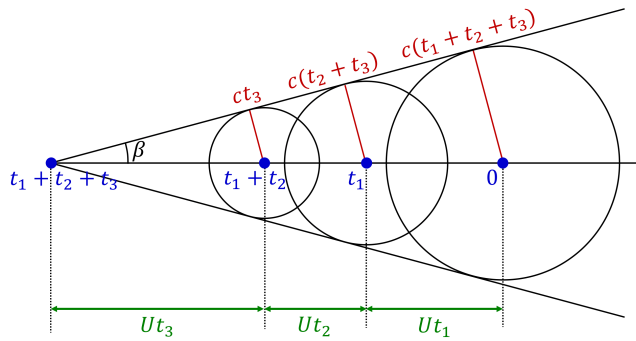


図 97 時刻 $t = 0, t_1, t_1 + t_2, t_1 + t_2 + t_3$ での音源 (青丸) を発した球面波の、時刻 $t = t_1 + t_2 + t_3$ における様子を示している。球面波の包絡面として Mach 円錐が得られる。

渦無しの流れ $\mathbf{v} = \nabla\Phi$ を考えると、運動方程式は速度ポテンシャル Φ に対する 2 階非線形微分方程式

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - 2 \frac{vw}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} - 2 \frac{wu}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} - 2 \frac{uv}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0, \quad (22)$$

$$c^2 = c_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2} q^2 \quad (\text{断熱変化に対して})$$

に帰着する (§ 50, § 51 参照, c_0 はよどみ点 $q = 0$ での音速)。

局所 Mach 数 $M = q/c$ を導入する。 $O(M^2)$ を省略すると、上式 (22) は Laplace 方程式 $\Delta\Phi = 0$ となるから、この近似は空気を縮まない流体と見なすことに対応する。式 (22) を解く方法には以下のようなものがある。

- M^2 展開法 (Rayleigh, Janzen), 薄翼展開法 (Prandtl, Grauert)
 - $M^2 \ll 1$ あるいは一様流からのずれが小さいとして、摂動論的に逐次近似。
- ホドグラフ法 (Molenbroek, Chaplygin)
 - 2 次元流に対してのみ応用できる。解析的に厳密な解を与える。

図 98 のように、物体の近くに $M > 1$ と $M < 1$ の両方の領域が現れることがあり、このとき流れは音に近い (遷音速) と言われる。音よりは早い領域は密度と速度の不連続的な変化を行って音よりおそい領域に移行し、不連続面は衝撃波を成す。理論的には式 (22) は楕円型 ($M < 1$ に対して) と双曲型 ($M > 1$ に対して) の混合型となり、数学的な取り扱いが困難となるけれど、 $M \geq 1$ の両方を含むような流れを厳密解に持つことが Cherry によって示された。

薄い流線形の物体を考えると、式 (22) は近似的に

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad M^2 = \frac{q^2}{c^2} \quad (41.4)$$

と書き換えられる。 $\Phi = Ux + \phi$ において一様流からのずれ ϕ の 2 次以上を無視すると、これは ϕ に対する線形の方程式

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (41.6)$$

になる [詳細は § 52]。

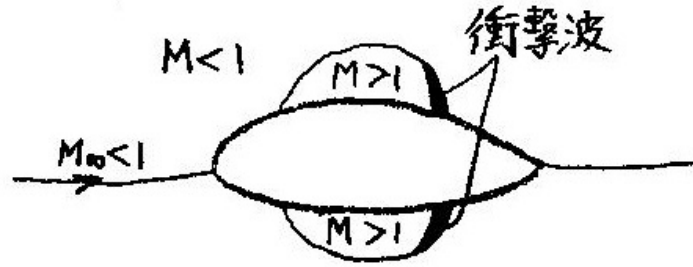


図 98 音に近い流れ

- 音よりおそい一様流 $M_\infty < 1$ に対して,
これは

$$\sqrt{1 - M_\infty^2} y \rightarrow y, \quad \sqrt{1 - M_\infty^2} z \rightarrow z$$

のスケール変換により Laplace 方程式になるから,
縮まない流体に対する結果を援用できる (Prandtl-Glauert の法則).

- 音よりはやい一様流 $M_\infty > 1$ に対して,
これは波動方程式に帰着する.
これが現在の超音速翼理論の基礎となっている.

$M \simeq 1$ の場合には流速 q はほぼ音速に等しいと考えて

$$\Phi = c_* x + \varphi$$

とおき*17, 式 (22) を近似的に書き換えて得られる式

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\gamma + 1}{c_*} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (41.12)$$

[本稿次節で導出] を基礎方程式にとる. これに基づく音に近い流れの研究では, Kármán の見出した次の相似法則が重要である (紹介のみ). すなわち x 方向の一様流中に薄翼

$$z = tG(x/a, y/b) \quad (t: \text{厚み}, a: \text{翼弦}, b: \text{翼幅})$$

を考えると, 音に近い流れ $M_\infty \rightarrow 1$ に対して薄翼の空気力学的な性質が同じになるためには,

$$t \sim (1 - M_\infty^2)^{3/2}, \quad b/a \sim (1 - M_\infty^2)^{-1/2}$$

に従って厚み t を薄くし, 比 b/a を大きくしなければならない.

17 $c_ \equiv [2/(\gamma + 1)]^{1/2} c_0$ は音速の式

$$c^2 = c_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2} q^2 \quad (41.3)$$

[導出は本稿次節] において $q = c$ を満たす c の値 [導出は本稿次節, 音速は流速に依ることに注意].

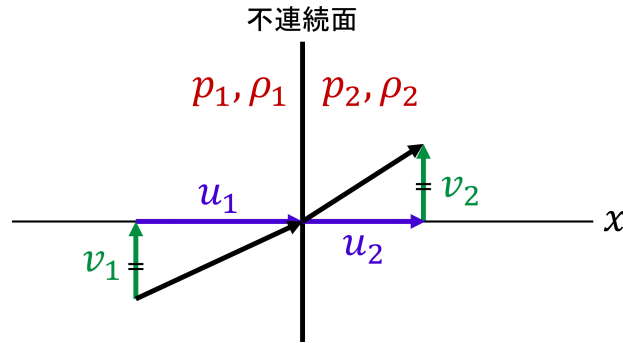


図 99 衝撃波

衝撃波

x 軸に垂直な不連続面を持つ衝撃波を考え、図 99 のようにその前後の速度の x 成分を u_1, u_2 , 圧力を p_1, p_2 , 密度を ρ_1, ρ_2 , 内部エネルギー [単位質量当たり] を E_1, E_2 とする. このとき不連続面を含むような無限に薄い領域についての質量, 運動量, エネルギー保存則

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 (= Q), \quad (41.13)$$

$$Q u_1 + p_1 = Q u_2 + p_2, \quad (41.14)$$

$$Q \left(\frac{1}{2} u_1^2 + E_1 \right) + p_1 u_1 = Q \left(\frac{1}{2} u_2^2 + E_2 \right) + p_2 u_2 \quad (41.15)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} u_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} \quad (\text{理想気体に対して}) \quad (41.17)$$

[式 (41.13–15) については本稿次節で補足]*¹⁸により, 衝撃波の前の状態 p_1, ρ_1, u_1 が与えられると, 後の状態 p_2, ρ_2, u_2 が決まる. (実際, 断熱変化に対して $u_2 = c_*^2 / u_1$ となり, これを質量と運動量の保存則にもどすと ρ_2, p_2 が順次求まる.)

衝撃波の強さ $\xi \equiv p_2/p_1$ を導入すると, 密度, 速度, 温度などに関する衝撃波の前後の値の比はこれを用いて, Rankine-Hugoniot (ランキン-ユゴニオ) の関係式

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)\xi + (\gamma-1)}{(\gamma-1)\xi + (\gamma+1)}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \xi \frac{(\gamma-1)\xi + (\gamma+1)}{(\gamma+1)\xi + (\gamma-1)} \quad (23)$$

[本稿次節で導出] によって与えられる.

*¹⁸ 式 (41.17) を導くには, エンタルピー $I = E + p/\rho$ を用いて式 (41.15) を

$$I_1 + \frac{1}{2} u_1^2 = I_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \quad (41.16)$$

と書き換え, 理想気体に対して

$$p = \frac{R}{m} \rho T, \quad E = c_v T, \quad I = c_p T, \quad c_p - c_v = \frac{R}{m}, \quad \therefore I = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}$$

[I の表式について本稿次節で補足] となることを用いれば良い.

[状態方程式 (4.3): $\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma e^{(S_2-S_1)/c_v}$ により,] 衝撃波を通過するときのエントロピー変化は

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= c_v \left(\ln \frac{p_2}{p_1} - \gamma \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \\ &= c_v \left[\ln \xi - \gamma \ln \left\{ \frac{(\gamma+1)\xi + (\gamma-1)}{(\gamma-1)\xi + (\gamma+1)} \right\} \right] \end{aligned} \quad (41.22)$$

によって与えられる. 第2法則 $S_2 > S_1$ より $\xi > 1$ でなければならず, ここから衝撃波を通過すると,

$$p_2 > p_1, \quad \rho_2 > \rho_1, \quad T_2 > T_1, \quad u_1 > c_* > u_2$$

のように密度は圧縮され, 温度は上昇し, 音よりはやい流れからおそい流れへ移行することが結論される.

[不連続面がない場合には $\xi \equiv p_2/p_1 = 1$ であり, 断熱変化を仮定したことに対応して, このとき上式のエントロピー変化はゼロになる.] 弱い衝撃波の極限 $\xi \rightarrow 1$ でエントロピー変化は,

$$S_2 - S_1 = c_v \frac{\gamma^2 - 1}{12\gamma^2} (\xi - 1)^3$$

のように展開が3次の項からはじまるような微小量となるため, 状態変化は等エントロピー的 (断熱変化) と見なし得る.

$\xi > 1$ に注意すると, 強烈な衝撃波は $\xi \gg 1$ の場合に相当し, このとき Rankine-Hugoniot の関係式は

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \simeq \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad \frac{T_2}{T_1} \simeq \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \xi \quad (41.23)$$

となるので [本稿次節で導出], $\xi \rightarrow \infty$ のとき衝撃波の背後の密度 ρ_2 は一定値に近づき, 温度 T_2 は ξ に比例して高くなる.

- 不連続面は実際には粘性のために, 急激ではあるが連続な変化を行う薄い層にぼやける.
その厚さは強い衝撃波に対して分子の平均自由行程と同程度であることが知られている.
- 衝撃波と境界層の相互作用
 - 音よりはやい高速気流中の物体

強い衝撃波

- 物体付近の空気の温度が上昇
- 運動粘性率 $\nu = \mu/\rho$ が増大
- 境界層の厚さ (40.8): $\delta \sim \sqrt{\nu x/U}$ [§ 46b 参照] が増大
- 境界層が衝撃波と相互作用.

– 音に近い流れでも重要

- 衝撃波の形

- | | | | |
|----------|---|------------------|--|
| 先のとがった物体 | → | 衝撃波は | $\left\{ \begin{array}{l} \text{物体の先端にくっつく (Mach 数がある程度大きいとき)} \\ \text{物体の先端から離れた位置にできる (Mach 数が比較的小さいとき)} \end{array} \right.$ |
| 先のまるい物体 | → | 物体の先端から離れた位置にできる | |

§ 41 について

■音速の式 (41.3) の導出 式 (11.9):

$$q = q_m \left\{ 1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right\}^{1/2}, \quad q_m = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} c_0$$

を書き換えると

$$c_0^2 - \frac{\gamma-1}{2} q^2 = c_0^2 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

となる。ここで仮定している断熱変化 $p \propto \rho^\gamma$ に対して、

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} \propto \rho^{\gamma-1}, \quad \therefore \frac{c^2}{c_0^2} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

なので、式 (41.3):

$$c^2 = c_0^2 - \frac{\gamma-1}{2} q^2$$

を得る。

■ c_* の式 (p.169, 下から 4 行目) について 式 (41.3) に $q = c_*, c = c_*$ を代入すると、

$$c_*^2 = c_0^2 - \frac{\gamma-1}{2} c_*^2, \quad \therefore c_* = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{1/2} c_0$$

を得る。

■音に近い流れに対する基礎方程式 (41.12) の導出 $M^2 = q^2/c^2$ の分子は

$$q^2 = (c_* \mathbf{i} + \nabla \varphi)^2 \simeq c_*^2 + 2c_* \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

と近似される (\mathbf{i} は x 方向の単位ベクトル)。一方、分母は式 (41.3): $c^2 = c_0^2 - \frac{\gamma-1}{2} q^2$ で与えられ、ここに

$$c_0^2 = \frac{\gamma+1}{2} c_*^2, \quad q^2 \simeq c_*^2 + 2c_* \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

を代入すると

$$c^2 \simeq c_*^2 - (\gamma-1)c_* \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

となる。以上より

$$M^2 \simeq \frac{c_*^2 + 2c_* \frac{\partial \varphi}{\partial x}}{c_*^2 - (\gamma-1)c_* \frac{\partial \varphi}{\partial x}} \simeq \left(1 + \frac{2}{c_*} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \left(1 + \frac{\gamma-1}{c_*} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \simeq 1 + \frac{\gamma+1}{c_*} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

であり、これを式 (41.4) に代入して式 (41.12):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\gamma+1}{c_*} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

を得る。

■不連続面における保存則 (41.13-15) について 今の場合、流れは不連続面に垂直な成分を持つので、応力は連続的に変化するという § 7 の結論を適用することはできないことに注意する。

不連続面を含む領域が無限に薄いために、その内部に含まれる流体の質量、運動量、エネルギーの時間変化はゼロになることを要求して得られる。実際、領域の不連続面に平行な 2 面がそれぞれ単位面積を持つものとする、単位時間当たりの質量の流入は $\rho_1 u_1 - \rho_2 u_2$ なので、質量保存則 (41.13):

$$0 = \rho_1 u_1 - \rho_2 u_2$$

を得る。また単位時間当たりの運動量の流入は $(\rho u_1)u_1 - (\rho u_2)u_2$ であり、力積による運動量変化は $p_1 - p_2$ なので、運動量保存則 (41.14):

$$0 = \{(\rho u_1)u_1 - (\rho u_2)u_2\} + (p_1 - p_2)$$

を得る。最後に内部エネルギー E を単位質量当たりの量と解釈すると、単位時間当たりのエネルギーの流入量は

$$u_1 \rho_1 \left(\frac{1}{2} u_1^2 + E_1 \right) - u_2 \rho_2 \left(\frac{1}{2} u_2^2 + E_2 \right)$$

であり、仕事によるエネルギー変化は $p_1 u_1 - p_2 u_2$ なので、エネルギー保存則 (41.15):

$$0 = \left\{ u_1 \rho_1 \left(\frac{1}{2} u_1^2 + E_1 \right) - u_2 \rho_2 \left(\frac{1}{2} u_2^2 + E_2 \right) \right\} + (p_1 u_1 - p_2 u_2)$$

を得る。

■理想気体のエンタルピーの式 (p.171, 1.12) について

$$I = c_p T = \frac{c_p}{c_p - c_v} \frac{R}{m} T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}.$$

■式 (41.19) の導出 質量と運動量の保存則

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 = Q : (41.13), \quad Q u_1 + p_1 = Q u_2 + p_2 : (41.14)$$

から速度を消去すると、

$$p_2 - p_1 = Q(u_2 - u_1) = Q^2 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (24)$$

を得る。よって

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{Q^2}{\rho_1 \rho_2} = u_1 u_2$$

となるので、式 (41.19) の第 1 の等号が成立する。

次にエネルギー保存則 (41.17):

$$\frac{1}{2} u_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} c_*^2$$

を次のように書き換える。

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2\gamma} \rho_1 \{ (\gamma + 1) c_*^2 - (\gamma - 1) u_1^2 \}, \\ p_2 &= \frac{1}{2\gamma} \rho_2 \{ (\gamma + 1) c_*^2 - (\gamma - 1) u_2^2 \}, \\ \therefore p_2 - p_1 &= \frac{1}{2\gamma} \{ (\gamma + 1) c_*^2 (\rho_2 - \rho_1) - (\gamma - 1) (\rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2) \}. \end{aligned}$$

ここで再び式 (41.14): $\rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2 = p_1 - p_2$ を用いると

$$p_2 - p_1 = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} c_*^2 (\rho_2 - \rho_1) + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} (p_2 - p_1), \quad \therefore \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = c_*^2$$

となって, 式 (41.19) 第 2 の等号が成立する.

■ Rankine-Hugoniot の関係式 (41.20), (41.21) [本稿の式 (23)] の導出 式 (24) より

$$(p_2 - p_1) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) = Q^2 \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right) = u_1^2 - u_2^2$$

を得る. これをエネルギー保存則 (41.17):

$$u_1^2 - u_2^2 = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right)$$

と等置すると

$$(p_2 - p_1) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right)$$

を得る. 分母を払うと

$$(p_2 - p_1)(\rho_2 + \rho_1) = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} (\rho_1 p_2 - \rho_2 p_1), \quad \therefore (\xi - 1) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + 1 \right) = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left(\xi - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)$$

となり ($\xi \equiv p_2/p_1$), これを ρ_2/ρ_1 について解くと式 (41.20):

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)\xi + (\gamma - 1)}{(\gamma - 1)\xi + (\gamma + 1)}$$

が導かれる.

次いで理想気体の音速の式 (11.8):

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma \frac{R}{m} T$$

を用いると, 式 (41.21):

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2} = \xi \frac{(\gamma - 1)\xi + (\gamma + 1)}{(\gamma + 1)\xi + (\gamma - 1)}$$

を得る.

■ 式 (41.23) の導出 エントロピー変化の式 (41.22) の最右辺第 1 項について, ξ を 1 と 1 からのずれ $\xi - 1$ に分けて

$$\xi = 1 + (\xi - 1)$$

と書き,

$$\ln \xi = (\xi - 1) - \frac{(\xi - 1)^2}{2} + \frac{(\xi - 1)^3}{3} - \dots$$

と展開する。第2項についても同様に展開すると、

$$\begin{aligned}
 \frac{(\gamma+1)\xi+(\gamma-1)}{(\gamma-1)\xi+(\gamma+1)} &= \frac{2\gamma+(\gamma+1)(\xi-1)}{2\gamma+(\gamma-1)(\xi-1)} \\
 &= \left\{ 1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma}(\xi-1) \right\} \\
 &\quad \times \left\{ 1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma}(\xi-1) + \frac{(\gamma-1)^2}{4\gamma^2}(\xi-1)^2 - \frac{(\gamma-1)^3}{8\gamma^3}(\xi-1)^3 + \dots \right\} \\
 &= 1 + \frac{1}{\gamma}(\xi-1) - \frac{\gamma-1}{2\gamma^2}(\xi-1)^2 + \frac{(\gamma-1)^2}{4\gamma^3}(\xi-1)^3 + \dots, \\
 \therefore \ln \left\{ \frac{(\gamma+1)\xi+(\gamma-1)}{(\gamma-1)\xi+(\gamma+1)} \right\} &= \frac{1}{\gamma}(\xi-1) - \frac{\gamma-1}{2\gamma^2}(\xi-1)^2 + \frac{(\gamma-1)^2}{4\gamma^3}(\xi-1)^3 + \dots \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\gamma^2}(\xi-1)^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma^3}(\xi-1)^3 + \dots \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{3} \frac{1}{\gamma^3}(\xi-1)^3 + \dots
 \end{aligned}$$

となるので、これらを式(41.22)に代入して

$$\begin{aligned}
 S_2 - S_1 &= c_v \left[\left(1 - \gamma \cdot \frac{1}{\gamma} \right) (\xi - 1) \right. \\
 &\quad + \left\{ -\frac{1}{2} + \gamma \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma^2} + \frac{1}{2\gamma^2} \right) \right\} (\xi - 1)^2 \\
 &\quad + \left. \left\{ \frac{1}{3} - \gamma \left(\frac{(\gamma-1)^2}{4\gamma^3} + \frac{\gamma-1}{2\gamma^3} + \frac{1}{3\gamma^3} \right) \right\} (\xi - 1)^3 + \dots \right] \\
 &\simeq c_v \frac{\gamma^2 - 1}{12\gamma^2} (\xi - 1)^3 : (41.23)
 \end{aligned}$$

を得る。

■ 「弱い衝撃波は音波にほかならない」(p.173, l.13) について 流速 u が音速の式 $u = \sqrt{(\delta p / \delta \rho)_{S=\text{const}}}$ を満たすことは、弱い衝撃波が音波を成していることを示唆する。

第 8 章 粘性流体 of 運動

§ 42 応力

- 応力 p_{ij}

第 i 軸に垂直な単位面積を介して [x_i 座標の大きい側から小さい側に] 流体の及ぼす力の第 j 成分.

- 無限に小さい四面体 (図 100) に対する運動方程式

→ 応力のつり合い [§ 1 と同じ事情による]

→ 法線 \mathbf{n} を持つ面に働く応力 \mathbf{p}_n [図 101 の②が①の側に及ぼす力] の第 i 成分

$$p_{ni} = p_{ij}n_j. \quad (\text{導出は下記}) \quad (25)$$

– p_{ij} はベクトル成分 n_j と縮約されてベクトル成分 p_{ni} を作るため, テンソルである [付録 C].

- 無限に小さい立方体 (図 102) に対する角運動量とモーメントの関係

→ 応力のモーメントのつり合い [本稿「§ 42 について」の節を参照].

$$\Delta z(p_{xy}\Delta y\Delta x - p_{yx}\Delta x\Delta y) = 0, \quad \text{etc.} \quad (26)$$

→ 応力テンソル p_{ij} は対称テンソル ($p_{ij} = p_{ji}$).

– (p_{ij}) が対角的となるような座標系が存在する (主軸変換) [本稿「§ 42 について」の節を参照].

- 領域 V を占める流体に働く応力の第 i 成分

$$\int_{\partial V} p_{ij}n_j dS = \int_V \partial_j p_{ij} dV. \quad (\text{Gauss の定理})$$

– 流体の単位体積に働く応力成分 $\partial_j p_{ij}$.

§ 42, 式の導出など

■式 (25) の導出 流体の中の着目している位置において, 法単位ベクトル $\pm \mathbf{n}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ (ただし例えば $\hat{\mathbf{x}}$ は x 方向の単位ベクトル) を持つ単位面積に働く力を, それぞれ $\mathbf{p}_{\pm n}, \mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, \mathbf{p}_z$ と書く. 図 100 の 4 面体につ

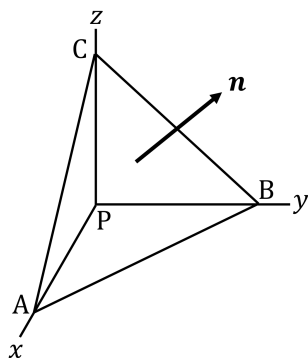


図 100 四面体

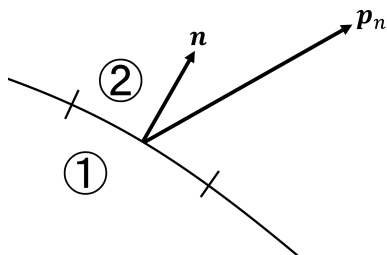


図 101 応力

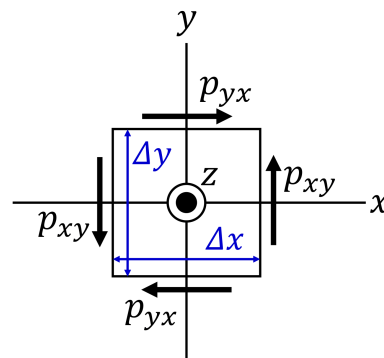


図 102 立方体

いて,

$$\triangle ABC = \Delta S, \quad \triangle PBC = \Delta S_x = \Delta S n_x, \quad \triangle PCA = \Delta S_y = \Delta S n_y, \quad \triangle PAB = \Delta S_z = \Delta S n_z$$

なので, 応力のつり合いは

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{p}_x \Delta S_x + \mathbf{p}_y \Delta S_y + \mathbf{p}_z \Delta S_z + \mathbf{p}_{-n} \Delta S \\ &= (\mathbf{p}_x n_x + \mathbf{p}_y n_y + \mathbf{p}_z n_z - \mathbf{p}_n) \Delta S \end{aligned}$$

と表される (作用・反作用の法則 $\mathbf{p}_{-n} = -\mathbf{p}_n$ を用いた). よって式 (25) を得る.

§ 42 について

■微小立方体のモーメントのつり合いについて 立方体に含まれる流体の体積を M , 密度を ρ とし, 立方体の各辺の長さを $\Delta x = \Delta y = \Delta z = l$ とおくと, z 軸周りの慣性モーメントは

$$I \sim M l^2 \sim \rho l^5$$

と見積もられる. 他方, 立方体に作用する応力による力のモーメントは式 (26) 左辺:

$$(p_{xy} - p_{yx}) l^3$$

のように表される. (これに比べて体積力 ($\sim l^3$) によるモーメント ($\sim l^4$) は無視できる. 特に重力は重心周りのモーメントに全く寄与しない.) よって z 軸周りの回転角を θ で表すと

$$\ddot{\theta} \propto \frac{p_{xy} - p_{yx}}{l^2}$$

であり, これが $l \rightarrow 0$ で発散しない条件は $p_{xy} = p_{yx}$ で与えられる [18, pp.123–125].

■対称テンソルの主軸変換について 対称テンソル p_{ij} に対する 2 次形式 $p_{ij} x_i x_j$ が一定であるテンソル 2 次曲面 (これは座標系に依らない幾何学的対象) の方程式が $p_{11} x^2 + p_{22} y^2 + p_{33} z^2 = \text{const}$ となる座標系が存在することから, テンソルの行列表現が対角行列になる座標系の存在を示している点が目をつく. 同じことは対称行列が適当な直交行列を用いて対角化され, その際, 各成分は (1,1) テンソルの変換則に従って変換されることから理解される. ここで直交座標系の間の変換では変換行列が直交行列となるために, (0,2),(1,1),(2,0) テンソルの変換則は同じになる (付録 C.2 参照).

§ 43 テンソル

この節はテンソルを定義する変換則の復習に充てられている. 本稿ではテンソルについて付録 C にまとめている. そこで以下のことが説明される.

- 物理法則が座標変換に対して共変的となるためには,
方程式の両辺が同じ種類のテンソルであれば良いこと.
ここから以下の教科書の記述が理解できるようになる.
– 「(44.11) は任意の座標系について成り立つ式である」 (p.185, 1.1,2)
- テンソルから新しいテンソルを作ること.

- 「ベクトル \mathbf{n} との積 (……) がまたベクトル \mathbf{p}_n になっている.
- このような性質をもつ量をテンソル (tensor) という」 (p.178, 1.7~9)
- 「 $s_{ij} \pm t_{ij}$ を成分とするテンソル」 (p.181 下から 4 行目)
- 「 ct_{ij} を成分とするテンソル」 (p.181 最後の行)
- 「法線応力の平均値 $\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz})$ を考えると,
 テンソルの性質によりこれは不変量」 (p.185, 1.10,11)

§ 43 について

テンソル \mathbf{T} をその成分 t_{ij} と区別して $\mathbf{T} \equiv t_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ とするとき, \mathbf{T} は不変量となるので (付録 C.1 参照), 「 \mathbf{T} は座標軸の選び方によらない一定の意味をもつ物理量」 (p.181, 1.10,11) となることに注目する.

後で見るとひずみ応力関係式 (44.11): $\mathbf{P} = (-p + 2\lambda\Theta)\mathbf{I} + \mu\mathbf{E}$ もまた不変量の間関係と見ることができると, 「任意の座標軸について成り立つ式」 (p.185, 1.1,2) である. このことは両辺の成分をとると, 両辺が同じ種類のテンソルであることから分かる (付録 C.1 参照).

§ 44 変形速度, ナヴィエ-ストークスの方程式

はじめに粘性を考慮した流体の運動方程式の導出について概略を述べ, 後から詳細を補足する. 運動方程式

$$\frac{Dv_i}{Dt} = K_i + \frac{1}{\rho}\partial_j p_{ij}$$

における応力 p_{ij} は一般に, 流体の変形によってもたらされる. 流体の変形は変形速度テンソル

$$e_{ij} = \partial_j v_i + \partial_i v_j (= e_{ji})$$

によって特徴付けられる (§ 9). ここで応力が変形速度の 1 次式で表される流体 (Newton 流体) を考えると, 流体が等方的である場合には, 変形速度と応力の関係式は

$$p_{ij} = (-p + 2\lambda\Theta)\delta_{ij} + \mu e_{ij}, \quad \Theta \equiv \frac{1}{2}e_{ii} = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (44.11)$$

の形になることが示される. p を圧力と解釈し,

$$\frac{p_{ii}}{3} = -p \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{3}\mu : \text{Stokes の関係式} \quad (44.14)$$

を要求する. 以上より流体の運動方程式として, Navier-Stokes 方程式

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{3}\frac{\mu}{\rho}\nabla\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\mu}{\rho}\Delta\mathbf{v}, \quad \mu : \text{粘性率} \quad (44.17)$$

を得る [計算の詳細は本稿次節]. ただし粘性率 μ の温度 [を通した空間] 依存性を無視した. [粘性率 μ をゼロと置けば完全流体に対する応力 $p_{ij} = -p\delta_{ij}$ が得られ, Navier-Stokes 方程式は Euler 方程式になる.] 粘性率 μ は比 μ/ρ の形でのみ運動方程式に現れ, これが実際の流れに関係する. そこで $\nu = \mu/\rho$ を運動粘性率と名付ける.

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{3}\nu\nabla\nabla \cdot \mathbf{v} + \nu\Delta\mathbf{v}, \quad \nu : \text{運動粘性率.}$$

密度 ρ の小さい空気の方が水より, 運動粘性率 $\nu = \mu/\rho$ は大きい.

次に以上の内容に関する補足説明を行う.

■変形速度テンソル 応力は流体の変形に関係するため、流体の運動方程式を得るには変形を特徴付ける量が必要である。§ 9 で見たように、変形速度テンソル

$$e_{ij} = \partial_j v_i + \partial_i v_j (= e_{ji})$$

がその役割を果たす。このことをややストーリー仕立てにして復習しよう。流体の要素が変形するのは、位置によって流体の速度が異なることによるものと考えられる。すると素朴には、流体の変形は速度の空間微分 $\partial_j v_i$ と関係していると想像される。ところが図 11 (§ 9 の補足) のような、流体の変形を伴わない剛体的な回転の場合にも速度は位置によって異なる。そこで剛体的な回転に寄与する反対称部分

$$\frac{1}{2}(\partial_j v_i - \partial_i v_j)$$

を $\partial_j v_i$ から取り除いて得られる反対称部分

$$\frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j)$$

が、結果的に流体の変形を特徴付けることになる (図 11 参照)。

■変形速度と応力の関係 (44.11)

- 応力 p_{ij} が変形速度 e_{ij} の 1 次式で表されること (Newton 流体)
- 流体の等方性

を仮定する。応力 p_{ij} と変形速度 e_{ij} の主軸は一致すると考えられる。それぞれの主値を p_i, e_i と書くと、Newton 流体の仮定により

$$p_i = a_i + \sum_j b_{ij} e_j = a_i + b_{ii} e_i + \sum_{j(\neq i)} b_{ij} e_j \quad (\text{添字 } i \text{ について和をとらない})$$

と表される。さらに等方性を考えて

$$a_i = -p, \quad b_{ij} = \begin{cases} \lambda + \mu & (i = j) \\ \lambda & (i \neq j) \end{cases}$$

と書くと、これは

$$\begin{aligned} p_i &= -p + \lambda \sum_i e_i + \mu e_i \\ &= -p + 2\lambda\Theta + \mu e_i, \quad \Theta \equiv \frac{1}{2} e_{ii} = \nabla \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

となる。よって主軸に関しては

$$p_{ij} = (-p + 2\lambda\Theta)\delta_{ij} + \mu e_{ij}$$

が成り立ち、これはテンソルの関係式だから任意の座標系で成立する (付録 C.1 参照)。

§ 44 について

■式 (44.11) の別証 2 階と 4 階の等方テンソルの最も一般的な形は

$$C_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad C_{ijk} = A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{jk} \quad (27)$$

である (p, A, B, C はスカラーの定数). これを変形速度の 1 次式 $p_{ij} = C_{ij} + C_{ijkl}e_{kl}$ に代入し, 対称性 $e_{ij} = e_{ji}$ を考慮すると

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + A\delta_{ij}e_{kk} + (B + C)e_{ij}$$

となる. ここで $A = \lambda, B + C = \mu$ とおくと, 応力の式 (44.11):

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}e_{kk} + \mu e_{ij}$$

が得られる (第 1 項 $-p\delta_{ij}$ は圧力と解釈できる). これに対し教科書における式 (44.11) の導出では, 等方テンソルの一般的表式 (27) の直接的証明と利用を上手に回避している.

■「法線応力の平均値 $\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz})$ を考えると, テンソルの性質によりこれは不変量」(p.185, l.10,11) について 2 階テンソルの 2 つの添字を縮約するとスカラーとなることが付録 C.1 の議論で保証されている.

■Navier-Stokes 方程式 (44.17) の導出について Stokes の関係 (44.14) の下でひずみ応力関係式 (44.11) の ij 成分をとると

$$p_{ij} = \left(-p - \frac{2}{3}\mu\Theta\right)\delta_{ij} + \mu e_{ij}$$

となるので,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\partial_j p_{ij} &= -\frac{1}{\rho}\partial_i p - \frac{2}{3}\frac{\mu}{\rho}\partial_i(\partial_k u_k) + \frac{\mu}{\rho}\partial_j(\partial_i u_j + \partial_j u_i) \\ &= -\frac{1}{\rho}\partial_i p + \frac{1}{3}\frac{\mu}{\rho}\partial_i\partial_j u_j + \frac{\mu}{\rho}\partial_{jj}u_i \\ &= \left(-\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{3}\frac{\mu}{\rho}\nabla\Theta + \frac{\mu}{\rho}\Delta\mathbf{v}\right)_i. \end{aligned}$$

§ 45 レイノルズの相似法則

保存力場ではポテンシャルを圧力に繰り込めるから ($p + \rho\Omega \rightarrow p$), 非圧縮性 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ の下で Navier-Stokes 方程式として

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\mu}{\rho}\Delta\mathbf{v}$$

を考えれば良い. これは代表的な長さ, 速さ L, U によって無次元化した物理量 (プライムを付けて表す) を用い,

$$\frac{D\mathbf{v}'}{Dt'} = -\nabla' p' + \frac{1}{R}\Delta' \mathbf{v}', \quad R = \frac{UL}{\mu/\rho}$$

となる*19.

*19 無次元化を具体的に書くと

$$\mathbf{v} = U\mathbf{v}', \quad (x, y, z) = L(x', y', z'), \quad t = \frac{L}{U}t', \quad p = \rho U^2 p'.$$

ここで幾何学的に相似な境界 (したがって共通の境界条件) を持つ流れ 1,2 を考えると

- 流れ 1, 2 の R が共通
- ↔ 流れ 1 の L_1, U_1 を用いて無次元化した物理量と
流れ 2 の L_2, U_2 を用いて無次元化した物理量が同じ運動方程式に従う
- ↔ 解 \mathbf{v}' が共通
- ↔ 2 つの流れ $\mathbf{v}_1 = U_1 \mathbf{v}', \mathbf{v}_2 = U_2 \mathbf{v}'$ は力学的相似 (同時に実現できる).

§ 46 一方向の流れ

一方向の流れ $\mathbf{v} = (u, 0, 0)$ を考えると, 連続の式 $\partial u / \partial x = 0$ より u は x に依らない. このとき Navier-Stokes 方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \alpha(t), \quad (\text{熱伝導型}) \quad (46.4)$$

$$p = p_0 - \rho \alpha(t) x \quad (46.5)$$

となる (導出は下記).

a) ポアズイユの流れ

定常な流れ ($\partial u / \partial t = 0$) を考えよう. このとき式 (46.4) は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\alpha}{\nu} \quad (46.6)$$

となる.

半径 a の無限に長い円管内の流れ 円筒座標 r を用いると, 管壁 $r = a$ での境界条件 $u = 0$ の下で, 解として Poiseuille (ポアズイユ) の流れ

$$u = -\frac{dp}{dx} \frac{1}{4\mu} (a^2 - r^2) \quad (46.7)$$

が得られる (図 103, 導出は下記). [直観的にも理解できるように, $u > 0$ の流れを実現するには圧力勾配 $dp/dx < 0$ を要する.] 管を単位時間に通過する流量は

$$Q = \int_0^a u \cdot 2\pi r dr = -\frac{dp}{dx} \frac{\pi a^4}{8\mu}$$

と表される (Poiseuille の法則).

無限に広い 2 枚の平行な平板 [y 軸に垂直] の間の流れ 式 (46.4) より

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{\alpha}{\nu}, \quad \therefore u = -\frac{\alpha}{2\nu} y^2 + Ay + B$$

となる.

- 両方の板が静止している場合
 - 2次元の Poiseuille 流 (図 104, 速度分布は放物線的)
- 圧力勾配 (46.5): $\alpha = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$ がゼロで, 一方の板のみが一定速度で動く場合
 - Couette (クエット) の流れ (図 105, 速度分布は直線的)

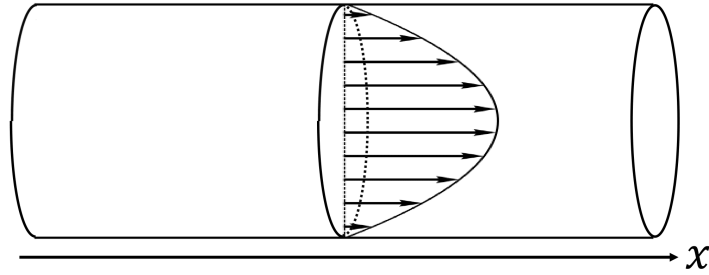


図 103 Poiseuille の流れ (直断面上の速度分布が回転放物面を成す)

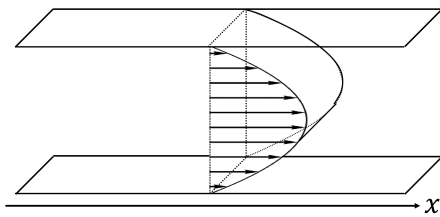


図 104 2次元の Poiseuille 流

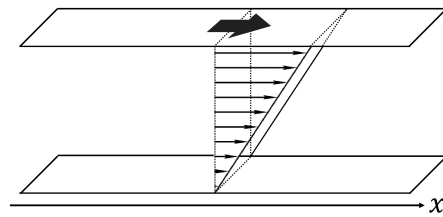


図 105 Couette の流れ

b) レーリー [Rayleigh] の問題

平面 $y = 0$ に静止していた無限に広い平板が、ある瞬間 ($t = 0$) から一定の速度 U で、 x 方向に運動を始める場合を考える。この場合 [x 方向の並進対称性より] 圧力は一様と考えられるから (圧力勾配 $\alpha = 0$)、式 (46.4) は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (46.10)$$

となる。これを

$$t = 0 \text{ で } u = 0, \quad y = 0 \text{ で } u = U, \quad y \rightarrow \infty \text{ で } u \rightarrow 0$$

という条件の下で解けば良く、熱伝導理論においてよく知られているように、解は

$$u = U(1 - \operatorname{erf} \eta), \quad (46.11)$$

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}, \quad \operatorname{erf} \eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-t^2} dt \text{ [誤差関数 (error function)]}$$

で与えられる [本稿「§ 46 について」の節で補足]。速度分布は図 106 のようであり、板の面から

$$\delta = 4\sqrt{\nu t}$$

だけ離れると、流速は板の速度の 0.5% 以下に落ちる ($\operatorname{erf} 2 = 0.9953$)。 δ は境界層の厚さの目安を与えており [もっとも数係数 4 は重要でないと考えられる]、 \sqrt{t} に従って厚くなるのが注目される。

これを踏まえ、半無限長の平板が一様流 U に平行に置かれている場合を考える (図 107)。板の先端から x だけ下流の位置では、流れの様子は上の Rayleigh の問題で、時間が $t = x/U$ だけ経った場合とほぼ同じと考えられるから [本稿「§ 46 について」の節で考察]、境界層の厚さは

$$\delta = 4\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

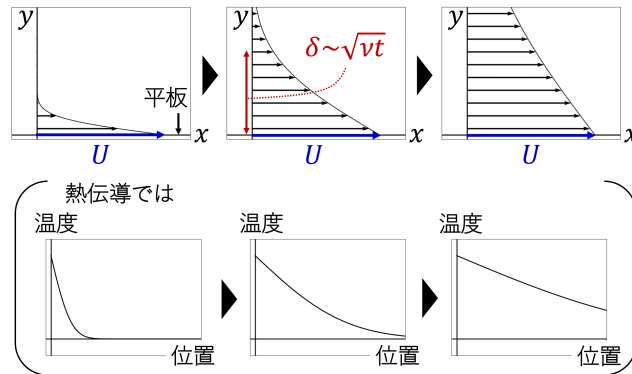


図 106 板の運動に付随する速度場

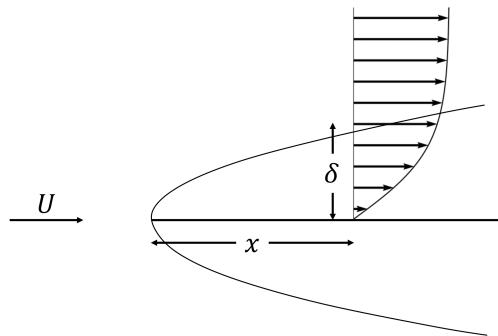


図 107 粘性のために流速は板の表面でゼロになる

と見積もられる。[§ 48 のノートを併せて参照.]

§ 46, 式の導出など

■式 (46.4),(46.5) の導出 $\mathbf{v} = (u, 0, 0), \partial u / \partial x = 0$ より

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

なので, Navier-Stokes 方程式 $\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v}$ [ただし外力 $\mathbf{K} = 0$ を仮定, あるいは保存力に対し $p + \rho\Omega \rightarrow p$ と再定義] の x 成分は

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \equiv \alpha$$

となる。また Navier-Stokes 方程式の y, z 成分 $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$ より p は x と t のみの関数なので, 上式の第 1 辺は x を含まず, 第 2 辺は y, z を含まない。このため α は t だけの関数となるから, 上式は式 (46.4) および式 (46.5) を意味する。

■Poiseuille の流れ (46.7) の導出 円筒座標 r を用いると, 式 (46.6) より

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = -\frac{\alpha}{\nu}, \quad \therefore u = -\frac{1}{4\nu} r^2 + A \log r + B$$

となる [log r の真数 r は積分定数 B から適当な因子をくくり出して, 無次元化できる]. $r = 0$ で流れに特異性がないことを要求すると $A = 0$ と定まり, さらに管壁 $r = a$ での境界条件 $u = 0$ を考慮すると $B = \alpha a^2 / 4\nu$ となる. 最後に式 (46.5): $\alpha = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ を用いて, 結果を圧力勾配で表すと, Poiseuille の流れ (46.7) が得られる.

§ 46 について

■「速度 u は……熱伝導型の方程式を満 [た] す」(p.190, l.10) について $\alpha(t) = 0$ とおいた非斉次の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0$$

は, まさに熱伝導方程式である (u の流速という, 物理的な意味を度外視すれば).

■圧力勾配について 流速 u は x によらず, x 方向への並進対称性を持つのに対し, 圧力 (46.5): $p = p_0 - \rho\alpha(t)x$ は x に依存して良いことに注意する. 実際, Poiseuille の流れ (2 次元の Poiseuille 流を含む) では, ゼロでない圧力勾配と粘性が相殺して, 加速度

$$\frac{Du}{Dt} \left(= \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0$$

の流れが実現している. これに対し Couette の流れでは, 平板に引きずられること (粘性) のみが流体を加速させ, 圧力勾配はゼロである (Rayleigh の問題も同様).

■誤差関数で与えられる速度場 (46.11) が解であることの直接的確認 “ $t > 0$ では” $y = 0$ のとき $\eta = 0$ なので, 式 (46.11) の値は U となる. さらに $f(t) \equiv e^{-t^2}$ の原始関数を $F(t)$ とおくと,

$$\begin{aligned} \partial_t u &= -U \frac{2}{\sqrt{\pi}} \partial_t \{F(\eta(y, t)) - F(0)\} \\ &= -U \frac{2}{\sqrt{\pi}} f(\eta(y, t)) \partial_t \eta(y, t) \\ &= U \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\nu t}\right) \frac{y}{4t\sqrt{\nu t}}, \\ (\partial_y)^2 u &= -U \frac{2}{\sqrt{\pi}} \partial_y \{f(\eta(y, t)) \partial_y \eta(y, t)\} \\ &= -U \frac{2}{\sqrt{\pi}} \partial_y \left\{ \exp\left(-\frac{y^2}{4\nu t}\right) \frac{1}{2\sqrt{\nu t}} \right\} \\ &= U \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\nu t}\right) \frac{y}{4\nu t\sqrt{\nu t}} \end{aligned}$$

より, 式 (46.10) が満たされる.

■p.193 下 3 行について 図 46.3 [本稿の図 107] を流体とともに速度 U で動く座標系で見ると, 板の先端から x 隔たった位置 (図 108 の★印の箇所) では流体が板に時間 $t = U/x$ の間だけ引きずられているのが分かる.

§ 47 おそい流れ

Navier-Stokes 方程式は未知数 \mathbf{v} に関して非線形であり ($D\mathbf{v}/Dt$ が \mathbf{v} に関して 2 次の項を含む), 数学的な取り扱いが困難である. 実際, 一様流の中に置かれた物体の周りの流れを表す厳密解は, 現在 1 つも知られて

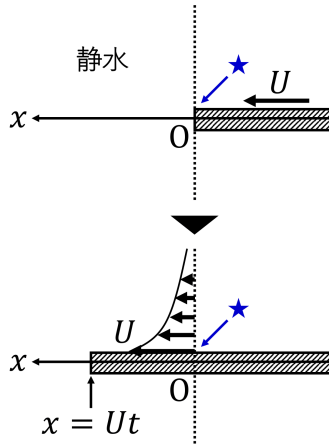


図 108 遠方の一様流 U とともに動く座標系では、板の一定速度 U での運動に伴い、表面近くの流体が運動する

いない。そこでおそい流れ (slow motion) の近似を導入しよう。

a) ストークスの近似

非圧縮条件 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, 外力 $\mathbf{K} = 0$ の下での Navier-Stokes 方程式

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v}$$

は、流速が遅い場合を仮定して、その 2 次以上の項を無視すると

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} \quad (47.2)$$

となる (Stokes の近似).

$$\text{式 (47.2) の div をとる} \rightarrow \Delta p = 0, \quad (\text{Laplace 方程式}) \quad (47.3)$$

$$\text{式 (47.2) の rot をとる} \rightarrow \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nu\Delta\boldsymbol{\omega}. \quad (\text{熱伝導方程式})$$

非定常流に対しては

$$\text{式 (47.2)} \rightarrow \Delta\mathbf{v} = \frac{1}{\mu}\nabla p, \quad (47.5)$$

$$\text{連続の式} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

が成り立つ。ここで

$$p_e = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right), \quad \mathbf{v}_e = \frac{1}{2\mu} \nabla \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \mathbf{i} \quad (\mathbf{i} \text{ は } x \text{ 方向の単位ベクトル}) \quad (47.6)$$

$$\text{i.e.} \quad p_e = -\frac{x}{r^3}, \quad (\mathbf{v}_e)_i = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\delta_{1i}}{r} + \frac{xx_i}{r^3} \right)$$

とおくと、上の基礎方程式が [したがって式 (47.3): $\Delta p = 0$ が] 満たされる [確認は本稿「§ 47 について」の節]. p_e, \mathbf{v}_e およびこれらを空間座標で任意の回数微分したもの ($\partial p_e / \partial x, \partial \mathbf{v}_e / \partial x$, etc.) は基本解となる [適正な次元を持つ解を得るには、適当な定数係数を掛けて線形結合を作る必要がある]. さらに流速には、 $\Delta\Phi = 0$ を満たす渦無しの流れ $\mathbf{v}_i = \nabla\Phi$ を付け加えることが許される. [$\Delta\Phi = 0$ より式 (47.5) において、 \mathbf{v}_i には $p = 0$ が対応するので、 \mathbf{v}_i を付け加える際、圧力は変更しなくて良いと考えられる.]

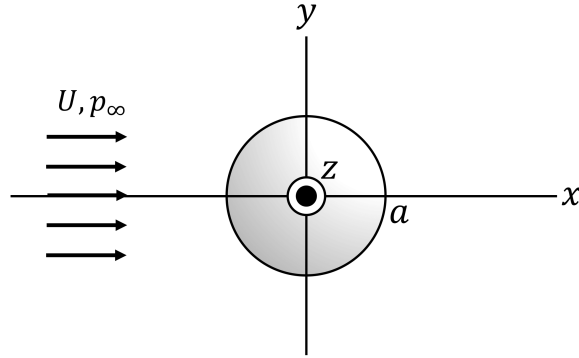


図 109 一様流の中の球

球の抵抗 図 109 のように，半径 a の球が一様流 U の中に置かれている場合を考える．Stokes 近似の下での解を

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= U\mathbf{i} + \left(\frac{3}{2}\mu aU\right) \mathbf{v}_e + \left(\frac{1}{4}a^3U\right) \nabla \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r}\right), \\ p &= p_\infty + \left(\frac{3}{2}\mu aU\right) p_e \end{aligned} \quad (47.9)$$

と選ぶと [式 (47.2) などより \mathbf{v}_e, p_e は共通の係数を持たなければならない]，これは境界条件

$$\begin{aligned} r = a : \quad \mathbf{v} &= 0, \\ r \rightarrow \infty : \quad \mathbf{v} &= U\mathbf{i}, \quad p \rightarrow p_\infty \end{aligned}$$

を満たすから，球の周りの流れを表す ($r = a$ の境界条件が満たされることの確認は下記)．[流速 (47.9) は完全流体の結果 (24.4): $\mathbf{v} = U\nabla \left(x + \frac{a^3x}{2r^3}\right)$ とは一致しない． $\mathbf{v}_e \propto 1/\mu$ より流速 (47.9) は μ に依らず， $\mu \rightarrow 0$ で完全流体の結果を再現することもない.]

ここから球に働く力を求めよう．対称性より力は x 成分 D (抵抗) のみを持ち，その値は

$$\text{流速 (47.9)} \rightarrow \text{応力 } p_{rx} \rightarrow D = \int (p_{rx})_{r=a} dS = 6\pi\mu aU \quad (47.11)$$

と計算される (Stokes の抵抗の法則，導出は下記)． [$\mu = 0$ とすると $D = 0$ (d'Alembert のパラドックス).]

この結果は抵抗係数の式

$$C_D \equiv \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 \cdot (\pi a^2)} = \frac{24}{R}, \quad R = \frac{(2a) \cdot U}{\nu} : \text{Reynolds 数}$$

にまとめられる．

b) オセーンの近似

非圧縮条件 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ，外力 $\mathbf{K} = 0$ の下で，Oseen 近似の Navier-Stokes 方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (47.14)$$

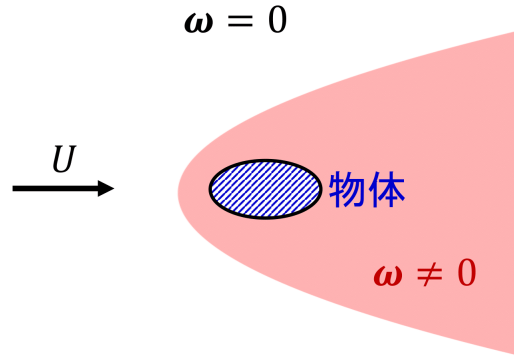


図 110 渦度がゼロと著しく異なる領域 [流れの上流と下流の非対称性 (§ 40)]

となる.

$$\text{式 (47.14) の div をとる} \quad \rightarrow \quad \Delta p = 0, \quad (\text{Laplace 方程式}) \quad (47.15)$$

$$\text{式 (47.14) の rot をとる} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + U \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial x} = \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (47.16)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}(e^{-kx} \boldsymbol{\omega}) = \nu(\Delta - k^2)e^{-kx} \boldsymbol{\omega}, \quad k \equiv \frac{U}{2\nu} \quad (47.17)$$

$$\rightarrow (\Delta - k^2)(e^{-kx} \boldsymbol{\omega}) = 0 : \text{Helmholtz 方程式. (定常流に対して)} \quad (47.18)$$

[式 (47.16),(47.17) の等価性について, 本稿「§ 47 について」の節で補足する.]

Helmholtz 方程式 (47.18) を用いると, 渦度がゼロと著しく異なる領域は, c を 1 程度の数として回転放物面の内部

$$y^2 + z^2 \leq \frac{2c}{k}x + \frac{c^2}{k^2} \quad (28)$$

と与えられることを説明できる (図 110 参照, 詳細は下記).

参考 Oseen 近似理論に基づき球の抵抗を計算すると,

$$C_D = \frac{24}{R} \left(1 + \frac{3}{16}R - \frac{19}{1280}R^2 + \frac{71}{20480}R^3 - \frac{30179}{34406400}R^4 + \frac{122519}{560742400}R^5 - \dots \right) \quad (47.21)$$

という結果が得られる (Goldstein). 第 1 項は Stokes の抵抗法則と一致している. ただしこれは Oseen 近似理論に対する厳密な展開式ではあるが, Navier-Stokes 方程式に対する厳密解ではない. Navier-Stokes 方程式に基づく計算では

$$C_D = \frac{24}{R} \left\{ 1 + \frac{3}{16}R + \frac{9}{160}R^2 \left(\log R + \gamma + \frac{2}{3} \log 2 - \frac{323}{360} \right) + \frac{27}{640}R^3 \log R + O(R^3) \right\} \quad (\gamma : \text{Euler の定数}) \quad (47.22)$$

という結果が得られている (Chester, Breach). Oseen 近似理論の結果 (47.21) は最初の第 2 項まで正しい.

§ 47, 式の導出など

■解 (47.9) が球面 $r = a$ での境界条件を満たすことの確認 $r \rightarrow \infty$ で $\boldsymbol{v} \rightarrow U\boldsymbol{i}$ となる基本解として,

$$\boldsymbol{v} = U\boldsymbol{i} + A\boldsymbol{v}_e + \nabla\Phi$$

の形を考える． $r = a$ での境界条件 $\mathbf{v} = 0$ を実現するには， $\Phi = B \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right)$ と選べば良い．実際，このとき

$$\nabla \Phi = B \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}, \frac{3xy}{r^5}, \frac{3xz}{r^5} \right)$$

となるので， $r = a$ で $\mathbf{v} = 0$ を要求すると

$$A = \frac{3}{2}\mu a U, \quad B = \frac{1}{4}a^3 U$$

と定まる．

■Stokes の抵抗の法則 (47.11) の導出 応力の式 (25): $p_i(\mathbf{n}) = p_{ij}n_j$ より，球表面 (法単位ベクトル $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$) の単位面積に働く力の x 成分は

$$(p_{rx})_{r=a} \equiv (p_x(\hat{\mathbf{r}}))_{r=a} = (p_{ix} \times (\hat{\mathbf{r}})_i)_{r=a} = \left(\frac{x}{r} p_{xx} + \frac{y}{r} p_{yx} + \frac{z}{r} p_{zx} \right)_{r=a}$$

と表される．これは変形速度と応力の関係式 (44.11): $p_{ix} = -p\delta_{i1} + \mu(\partial_i u + \partial_x v_i)$ を用いると，

$$(p_{rx})_{r=a} = \frac{1}{a} \left\{ -xp + 2\mu x \frac{\partial u}{\partial x} + \mu y \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \mu z \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\}_{r=a}$$

のように流速に関係付けられる．そこで流速の式 (47.9) を代入すると

$$(p_{rx})_{r=a} = \frac{1}{a} \left(-p_\infty x + \frac{3}{2}\mu U \right) \quad (29)$$

となる [導出は本稿次節]．よって球に働く抵抗

$$D = \int (p_{rx})_{r=a} dS \\ = 6\pi\mu a U : (47.11) \quad \left(\because \int x dS = 0, \int dS = 4\pi a^2 \right)$$

を得る．

■渦度がゼロと著しく異なる領域 (28) の導出 Helmholtz 方程式 (47.18): $(\Delta - k^2)\chi = 0$ は基本解

$$\chi_e = \frac{e^{-kr}}{r} \quad (47.19)$$

を持つ [本稿「§ 47 について」の節を参照]． χ_e を空間座標で任意の回数だけ微分したのも Helmholtz 方程式の解であり，それらの線形結合は

$$(e^{-kx} \boldsymbol{\omega} =) e^{-kr} P(\mathbf{r}) \quad (P(\mathbf{r}) : x, y, z \text{ の分数式})$$

という形を持つ．よって [Oseen 近似で想定している] $r \rightarrow \infty$ に対して

$$\boldsymbol{\omega} = e^{kx} e^{-kr} P(\mathbf{r}) = e^{-kr(1-\cos\theta)} P(\mathbf{r}) \quad (x = r \cos\theta)$$

と表され，渦度 $\boldsymbol{\omega}$ の強い領域は $kr(1-\cos\theta) \lesssim 1$ で与えられる．そこで 1 程度の適当な数 c を用いて，渦度の強い領域

$$kr(1-\cos\theta) \leq c \quad (47.20)$$

を線引きすると，これは回転放物面内の領域 (28) を意味する [本稿次節で確認]．

§ 47 について

■Stokes 近似 (または Oseen 近似) の下での Laplace 方程式 (47.3)(または (47.15)): $\Delta p = 0$ について これは近似を施す前の Navier-Stokes 方程式

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v}$$

からは導かれない. 実際, 左辺の div をとって

$$\nabla \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \neq \frac{D}{Dt}(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$$

であり, 正しくは付加的な項

$$\nabla \cdot \{(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}\} = \partial_i(v_j\partial_jv_i) = (\partial_iv_j)(\partial_jv_i)$$

のため,

$$\Delta p = -\rho(\partial_iv_j)(\partial_jv_i)$$

となる [1, p.12].

■Stokes 近似 (または Oseen 近似) の下での渦度に対する式 (47.4)(または (47.16)) について より一般に, 近似を施す前の Navier-Stokes 方程式

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{K}$$

の rot をとると渦度方程式

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu\Delta\boldsymbol{\omega} + \nabla \times \mathbf{K}$$

が導かれる [1, p.13].

■式 (47.6) が「(47.3),(47.5) および $\text{div } \mathbf{v} = 0$ を満足する」(p.195, l.12) について 式 (47.6) の p_e, \mathbf{v}_e に対して, 式 (47.5) と $\text{div } \mathbf{v} = 0$ が成り立つことを確認すれば充分である (このとき自動的に式 (47.3) も満たされるから). まず式 (47.5) について,

$$\left(\frac{1}{\mu}\nabla p_e - \Delta\mathbf{v}_e\right)_i = \frac{1}{\mu} \left\{ -\partial_i \frac{x}{r^3} + \partial_j \partial_j \left(\frac{\delta_{1i}}{2r} + \frac{xx_i}{2r^3} \right) \right\}. \quad (30)$$

ここで

$$\begin{aligned} \partial_i \frac{x}{r^3} &= \frac{\delta_{1i}}{r^3} - \frac{3xx_i}{r^5}, & \partial_j \partial_j \frac{1}{r} &= \Delta \frac{1}{r} = 0, \\ \partial_j \partial_j \frac{xx_i}{r^3} &= \partial_j \left(\frac{\delta_{1j}x_i}{r^3} + \frac{x\delta_{ij}}{r^3} - 3\frac{xx_ix_j}{r^5} \right) = 2 \left(\frac{\delta_{1i}}{r^3} - \frac{3xx_i}{r^5} \right) + 0 \end{aligned}$$

により, 上式 (30) の右辺はゼロになる. 式 (47.6) の p_e, \mathbf{v}_e は式 (47.5) を満たす. また

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{v}_e &= -\frac{1}{2\mu} \partial_i \left(\frac{\delta_{1i}}{r} + \frac{xx_i}{r^3} \right) \\ &= -\frac{1}{2\mu} \left(-\frac{x}{r^3} + \frac{x}{r^3} + \frac{3x}{r^3} - \frac{3xx_i}{r^5} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

なので, \mathbf{v}_e は連続の式 $\text{div } \mathbf{v} = 0$ を満たす.

■式 (29) の導出 (「(47.9) を代入すれば, 簡単な計算の後」(p.197, l.5) について)

$$\begin{aligned}
 p_{rx} &= \frac{1}{a} \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 (-xp_{\infty}) & & & & & \\
 \hline
 +\frac{3}{4}\mu a U \left\{ \frac{2x^2}{r^3} \right. & + \left(-\frac{2x^2}{r^3} + \frac{6x^4}{r^5} \right) & + \left(\frac{y^2}{r^3} + \frac{3x^2y^2}{r^5} \right) & + \left(-\frac{y^2}{r^3} + \frac{3x^2y^2}{r^5} \right) & + \left(\frac{z^2}{r^3} + \frac{3x^2z^2}{r^5} \right) & + \left(-\frac{z^2}{r^3} + \frac{3x^2z^2}{r^5} \right) \\
 \hline
 +\frac{3}{4}\mu a^3 U \left\{ \right. & + \left(\frac{6x^2}{r^5} - \frac{10x^4}{r^7} \right) & + \left(\frac{y^2}{r^5} - \frac{5x^2y^2}{r^7} \right) & + \left(\frac{y^2}{r^5} - \frac{5x^2y^2}{r^7} \right) & + \left(\frac{z^2}{r^5} - \frac{5x^2z^2}{r^7} \right) & + \left(\frac{z^2}{r^5} - \frac{5x^2z^2}{r^7} \right) \\
 \hline
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 -xp & 2\mu x \frac{\partial u}{\partial x} & \mu y \frac{\partial u}{\partial y} & \mu y \frac{\partial v}{\partial x} & \mu z \frac{\partial u}{\partial z} & \mu z \frac{\partial w}{\partial x}
 \end{array} \right] \\
 &= \frac{1}{a} \left\{ -p_{\infty} x + \mu a U \frac{9}{2} \frac{x^2}{r^3} + \frac{3}{2} \mu a^3 U \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

であり, これに $r = a, x = a \cos \theta$ を代入して式 (29) を得る.

■Stokes の抵抗の法則 (抵抗 $\propto U$) について 媒質中を運動する物体に働く抵抗力が, 物体の速度 v に比例することは次のように説明される. すなわち媒質の種類 (例えば空気) を固定すれば, 抵抗力は速度だけの関数になると考え, 十分小さい速度に対してその 1 次までの近似で $f(v) = -kv$ とできる. 定数項は $f(v=0) = 0$ の条件から消える [16, p.93]. 実際 Stokes の抵抗の法則 (47.11): $D = 6\pi\mu a U$ は (座標変換して考えると), 媒質中を物体が速度 U で運動する場合の抵抗を表しており, 抵抗の Reynolds 数による (したがって U による) 展開 (47.22) の第 1 近似にあたる.

なお媒質中を速度 v で運動する物体について, 物体への媒質分子 (質量 m) の衝突が重要となる場合, 分子 1 個が物体に及ぼす力積は mv 程度であり, 単位時間当たりに物体に衝突する分子数もまた v に比例するため, 大雑把に言って v^2 に比例する力が期待される.

大まかには媒質中をゆっくり運動するときの抵抗は速度の 1 乗に比例し ($F = cv$), ある程度運動が速くなると抵抗は速度の 2 乗に比例するようになる ($F = cv^2$) [7, p.166].

■「式 (47.17) \Rightarrow 式 (47.16)」の確認 Δ が $e^{-kx}\omega$ 全体に作用しており,

$$\Delta(e^{-kx}\omega) = (\Delta e^{-kx})\omega + 2(\partial_i e^{-kx})(\partial_i \omega) + e^{-kx} \Delta \omega = \left(k^2 \omega - 2k \frac{\partial \omega}{\partial x} + \Delta \omega \right) e^{-kx}$$

となることから分かる.

■Helmholtz 方程式 (47.18) について 波動方程式を満たす場 $u(\mathbf{r})e^{\pm i\omega t}$ のうち空間依存部分 $u(\mathbf{r})$ が満たす式

$$0 = \square(u(\mathbf{r})e^{\pm i\omega t}) = \left(\frac{1}{c^2}(\pm i\omega)^2 - \Delta \right) u(\mathbf{r})e^{\pm i\omega t}, \quad \therefore (\Delta + k^2)u(\mathbf{r}) = 0 : \text{Helmholtz 方程式}$$

とは k^2 の符号が逆である (k が純虚数の場合にあたる).

■基本解 (47.19) について これが Helmholtz 方程式 (47.18) を満たすことは,

$$(\Delta - k^2) \frac{e^{-kr}}{r} = 2(\partial_i e^{-kr}) \left(\partial_i \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \Delta e^{-kr} - k^2 \frac{e^{-kr}}{r} \quad \left(\because \Delta \frac{1}{r} = 0 \right)$$

において

$$(\partial_i e^{-kr}) \left(\partial_i \frac{1}{r} \right) = \frac{ke^{-kr}}{r^2}, \quad \frac{1}{r} \Delta e^{-kr} = \frac{-k}{r} \partial_i \left(e^{-kr} \frac{x_i}{r} \right) = \frac{-k}{r} e^{-kr} \left(-k + \frac{2}{r} \right)$$

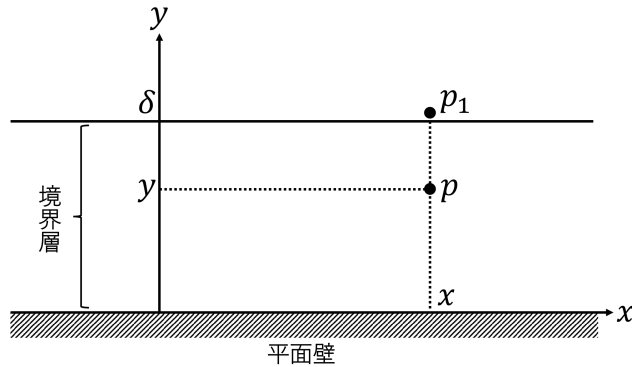


図 111 平面壁に沿う境界層

であることから分かる。

上記の Helmholtz 方程式と波動方程式の関係を踏まえると、式 (47.19): $\chi_e = e^{-kr}/r$ が Helmholtz 方程式の解であることは、球面波 $e^{i(kr-\omega t)}/r$ が波動方程式の解であることから、あらかじめ期待される結果である ($ik \rightarrow k$)。

■ 「式 (47.20) \Rightarrow 式 (28)」の確認

$$\text{式 (47.20)} : kr(1 - \cos \theta) \leq c \Leftrightarrow r - x \leq \frac{c}{k}$$

であり、両辺がゼロ以上であることに注意してこれを平方すると、

$$y^2 + z^2 \leq 2x(r - x) + \frac{c^2}{k^2}$$

を得る。再び式 (47.20) を用いて、右辺を上から押さえると式 (28) が得られる。

§ 48 境界層理論

縮まない流体の速度 \mathbf{v} と圧力 p は、(適当な境界条件の下で) Navier-Stokes 方程式と連続の式から決定される。ここで図 111 のような平面壁付近の薄い境界層 (厚さ δ) を考えると、これらの基礎方程式から近似的に、境界層の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (48.9)$$

が得られる (導出は下記)。ここに p_1 は境界層のすぐ外側での与えられた圧力であり、その値は完全流体の渦無しの理論から決定される。(したがって境界層方程式では、未知量は流速 \mathbf{v} のみである。にぶい物体の場合には [流れの中に渦を生じ、完全流体の理論を適用できないので (§ 40)], 実験的に求めた p_1 の値を用いなければならない。) 物体の表面が曲面の場合にも、 x を壁に沿う長さ、 y を壁に垂直に測った長さとして境界層方程式 (48.9) を適用できる (表面の曲率半径に比べて境界層が非常に薄ければ)。

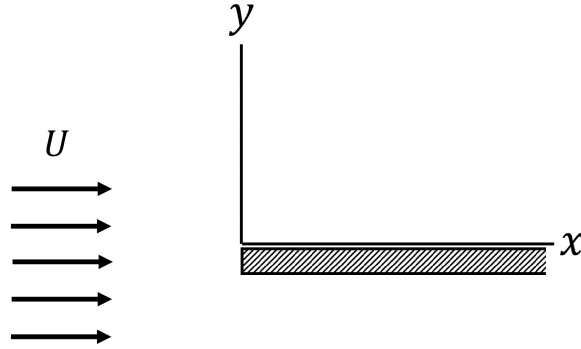


図 112 平板に沿う境界層

a) 平板に沿う境界層，ブラジウスの解

図 112 のように一様流 U の中に半無限の平板が置かれている場合を考える． $\partial/\partial t = 0, \partial p_1/\partial x = 0$ とすると [本稿「§ 48 について」の節で補足]，境界層方程式は

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (48.11)$$

となる．解を

$$u = \frac{1}{2} U f'(\eta), \quad v = \frac{1}{2} \left(\frac{\nu U}{x} \right)^{1/2} (\eta f'(\eta) - f(\eta)), \quad \eta \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{U}{\nu x} \right)^{1/2} y \quad (48.16)$$

とおくと，境界条件

$$\begin{aligned} y = 0: & \quad u = v = 0, \\ y \rightarrow \infty: & \quad u \rightarrow U \end{aligned}$$

の下で

$$f = \frac{\alpha \eta^2}{2!} - \frac{\alpha^2 \eta^5}{5!} + \frac{11\alpha^3 \eta^8}{8!} - \frac{375\alpha^4 \eta^{11}}{11!} + \frac{27897\alpha^5 \eta^{14}}{14!} - \dots \quad (\alpha = 1.32824) \quad (48.20)$$

と求まる (Blasius の解， α の値は Goldstein による)．結果が天下りであることには変わらないものの，詳細を下記にて補足する．

$$\text{板の表面の摩擦応力} \quad \tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{1}{4} \alpha \rho U \left(\frac{\nu U}{x} \right)^{1/2}, \quad (48.22)$$

$$\text{長さ } l \text{ の板 (の両面) に働く抵抗} \quad D = 2 \int_0^l \tau dx = \alpha \rho U^2 l \left(\frac{Ul}{\nu} \right)^{-1/2}, \quad (48.23)$$

$$\text{抵抗係数} \quad C_D = \frac{D}{(1/2)\rho U^2 l} = 2\alpha R^{-1/2}, \quad R = \frac{Ul}{\nu}.$$

[本稿「§ 48 について」の節で補足.]

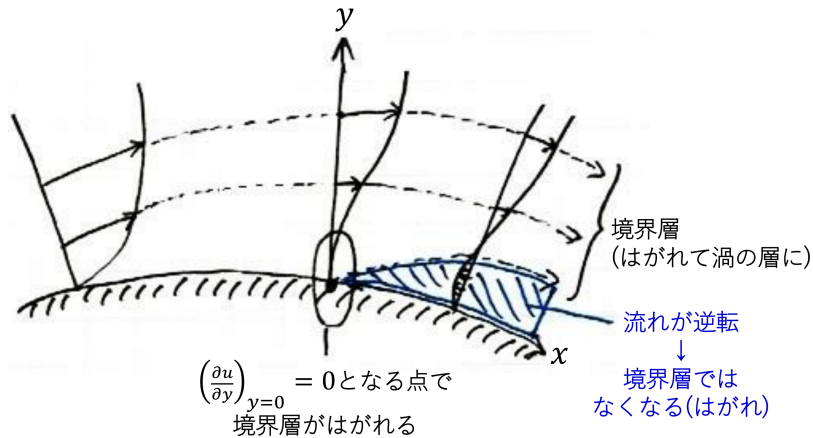


図 113 壁に近い流体ほど粘性による減速が著しいため、境界層の流れはこの図のようになる

b) 境界層のはがれ

図 113 に要約する.

§ 48, 式の導出など

■境界層の方程式 (48.9) の導出 境界層内部で $y = O(\delta)$ なので, $\partial/\partial y = O(\delta^{-1})$ となる [任意関数 $f(y)$ の微分 $\partial f/\partial y$ を近似する差分が $\Delta f/\Delta y \sim f/\delta$ と見積もられることによる]. また

$$\frac{\partial}{\partial x} = O(1), \quad \frac{\partial}{\partial t} = O(1), \quad u = O(1)$$

である [この 1 は δ の 0 乗の意味であり, 1 程度の無次元量という意味ではない]. このとき

$$\begin{cases} \text{連続の式} & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \text{境界条件} & u = 0 \quad (y = 0) \end{cases} \quad \rightarrow \quad v = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy = O(\delta).$$

すると Navier-Stokes 方程式の x 成分

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}}_{O(1)} = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}_{O(1)} + \nu \left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{O(1)} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{O(\delta^{-2})} \right) \quad (48.1)$$

より

$$O(1) = \nu O(\delta^{-2}), \quad \therefore \delta = O(\nu^{1/2})$$

が要請される. したがって Navier-Stokes 方程式の y 成分

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

から,

$$- \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = O(\delta), \quad \therefore p - p_1 = \int_{\delta}^y \frac{\partial p}{\partial y} dy = O(\delta^2)$$

が見出される。以上より Navier-Stokes 方程式 (48.1) において $O(1)$ の項を残す近似では [これは今の場合 $O(\delta^2)$ を無視することと同じ], 圧力 p を p_1 で置き換え, さらに $\partial^2 u / \partial x^2$ の項を無視して良い。こうして境界層の方程式 (48.9) を得る。

■ブラジウスの解 (詳細の補足) 解を式 (48.16) の形に置くことの動機付けから始めよう。縮まない流体に対しては流れ関数 Ψ を導入できる。

$$\Psi = (\nu U x)^{1/2} f(\eta), \quad \eta \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{U}{\nu x} \right)^{1/2} y$$

と仮定すると, 流速 $u = \partial \Psi / \partial y, v = -\partial \Psi / \partial x$ は式 (48.16) のように表される。

このとき境界層方程式 (48.11) は

$$f''' + ff'' = 0 \tag{48.17}$$

となる [導出は下記]。境界条件は $f(\eta)$ に対する条件

$$\begin{aligned} \eta = 0: & \quad f = 0, f' = 0, \\ \eta \rightarrow \infty: & \quad f' \rightarrow 2 \end{aligned}$$

に焼き直される。

§ 48 について

■境界層方程式 (48.9) について $y = O(\delta), \partial / \partial y = O(\delta^{-1})$ のとき, Navier-Stokes 方程式 (48.1) において $\partial^2 u / \partial y^2 = O(\delta^{-2})$ であり, これに比べて $\partial^2 u / \partial x^2 = O(1)$ が無視される。直観的には, u は薄い境界層内で y 方向に急激に変化し,

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|$$

となっていると考えられる。

■境界層方程式 (48.11) で $\partial p_1 / \partial x = 0$ となっていることについて 境界層の外側 ($u = u_1, v = 0, p = p_1$) [$v = 0$ は完全流体での境界条件] では粘性を無視できるので, 式 (48.9) は [Euler 方程式]

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \tag{48.10}$$

になる。ここで「 $\partial / \partial t = 0, u_1 = U$ とおけば」(p.202, 1.11), $\partial p_1 / \partial x = 0$ となる。

■式 (48.17) の確認

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} U f'' \times \left(-\frac{1}{2x} \eta \right), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} U f'' \times \frac{1}{2} \left(\frac{U}{\nu x} \right)^{1/2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2} U f'' \times \left(\frac{1}{2} \left(\frac{U}{\nu x} \right)^{1/2} \right)^2$$

より,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U^2}{8x} (-\eta f' f''), \quad v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U^2}{8x} (\eta f' - f) f'', \quad \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U^2}{8x} f'''$$

となることによる。

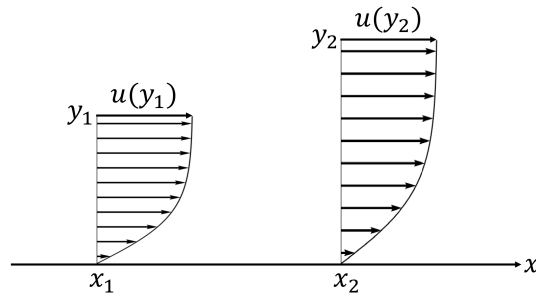


図 114 「平板に沿う境界層では、 y に対する速度分布の形 $u(y)$ は、(48.16) に示すごとく、 y 方向に伸縮するとどの x に対しても同じ形になる」(p.203 下から 4~2 行目)

■摩擦応力 (48.22), 抵抗 (48.23) について 摩擦応力 (48.22) は上記の $\partial u/\partial y$ に $\eta = 0$ での値 $f''(0) = \alpha$ (式 (48.20)) を代入し、 $\mu = \nu\rho$ を掛けて得る。抵抗 (48.23) は z 軸方向の単位厚みに対応するもので、因子 2 は板の両面に応力が働くことに対応している。

■「 $\delta \propto \sqrt{\nu x/U}$ の結果は、後述の境界層理論による正しい結果と一致する」(p.194, l.1,2) ことの確認 § 46 では簡単な考察により、境界層の厚さの式 $\delta = 4\sqrt{\nu x/U}$ を得た。これについて、本節の内容を踏まえて再考しよう。境界層 $y = 0$ の近くを考え、式 (48.20) を初項だけで近似すると、式 (48.16) より

$$\frac{u}{U} = \frac{\alpha}{4} \frac{y}{\sqrt{\nu x/U}}$$

となる。よって Rayleigh の問題で u が表面の速度のある割合 u/U に減じる高さは $y(=\delta) \propto \sqrt{\nu x/U}$ 。

■「速度分布の形 $u(y)$ は……同じ形になる」(p.203 下から 3,2 行目) について 図 114 のように $u(y_1) = u(y_2)$ となる条件は

$$\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{U}{\nu x_1} \right)^{1/2} y_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{U}{\nu x_2} \right)^{1/2} y_2, \quad \therefore y_2 = \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{1/2} y_1$$

なので、 x_2 の分布の形を y 方向に $(x_1/x_2)^{1/2}$ 倍すれば x_1 の分布の形に一致する。

第9章 高速気流

§ 49 縮む完全流体の力学

- 熱力学的関係式

$$\nabla I = T\nabla S + \frac{1}{\rho}\nabla p. \quad (49.9)$$

ここに E は内部エネルギー, $I = E + p/\rho$ はエンタルピー, S はエントロピーである.

[いずれも単位質量あたり. 式 (49.9) について本稿「§ 49 について」の節で補足.]

- 運動方程式 [Euler 方程式]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \frac{q^2}{2} - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho}\nabla p.$$

2 式から $\nabla p/\rho$ を消去すると

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - \nabla \left(\frac{q^2}{2} + \Omega + I \right) + T\nabla S \quad (49.10)$$

を得る. また断熱変化に対して $DS/Dt = 0$ が成立する.

特に定常流では, ここから

$$S = \text{const}, \quad (\text{流線に沿って}) \quad (49.12)$$

$$H \equiv \frac{1}{2}q^2 + \Omega + I = \text{const}. \quad (\text{流線に沿って}) \quad (49.13)$$

が導かれる (導出は下記). 上式 (49.13) は Bernoulli の定理に他ならない [$I = E + p/\rho$ を代入すると $H = \left(\frac{1}{2}q^2 + \Omega + \frac{p}{\rho} \right) + E$ となるので, $H = \text{const}$ は内部エネルギーを含めた保存則を表している].

一様な流れの中に物体が置かれている場合, 上流にさかのぼって考えれば, 流線ごとの一定値 (49.13) はすべての流線に共通である. このとき流れの各点で H は同じ値をとる (一様エネルギー流). このことは流れが衝撃波を経る場合にも成り立つ. すると式 (49.10) より [$\partial \mathbf{v}/\partial t = 0, \nabla H = 0$ とおく]

$$\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = -T\nabla S \quad (49.14)$$

となる. ここから引き出される結論を図 115 に示す.

§ 49, 式の導出など

■定常流に対する式 (49.12), (49.13) の導出 まず断熱変化の式

$$0 = \frac{DS}{Dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)S$$

は定常な流れ ($\partial S/\partial t = 0$) に対して, $(\mathbf{v} \cdot \nabla)S = 0$ となる. これは流線に沿う長さを s [とし, \mathbf{v} 方向への S の方向微分を $\partial S/\partial s$ とすると $v\partial S/\partial s = 0$ と書けるので,] $\partial S/\partial s = 0$ を意味する (式 (49.12)).

次に定常流を想定しているので, 式 (49.10) において $\partial \mathbf{v}/\partial t = 0$ とおく. さらに両辺の \mathbf{v} との内積を作り, $(\mathbf{v} \cdot \nabla)S = 0$ および恒等式 $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) = 0$ を考慮すると

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2}q^2 + \Omega + I \right) = 0$$

を得る. これは流線に沿う保存則 (49.13) を表している.

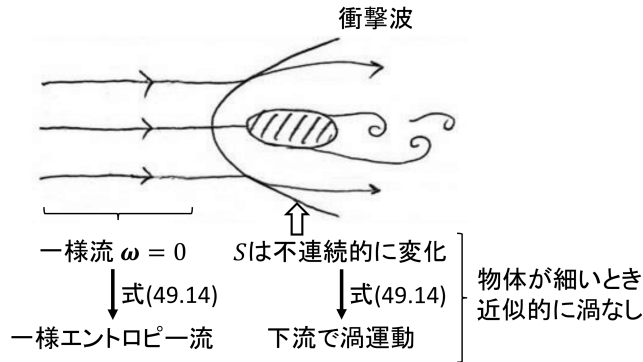


図 115 式 (49.14): $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = -T\nabla S$ の帰結

§ 49 について

■理想気体の式 (49.5), (49.6) について 式 (49.5) 第 2 式 $I = c_p T$ について,

$$dI = dQ + Vdp, \quad \therefore \left(\frac{\partial I}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_p \equiv c_p.$$

よって c_p が一定ならば $I = c_p T$.

状態方程式 (49.6) (\Leftrightarrow 式 (4.1)): $\frac{p}{\rho} = \frac{R}{m} T$ は見慣れた形

$$p = \frac{\rho}{m} RT = \frac{1}{\frac{m}{N_A}} \times \frac{R}{N_A} T = \frac{N}{V} kT$$

に書き換えられる. ここで m/N_A は 1 分子の質量なので, $\frac{m}{N_A}$ は 1 分子の占める体積 N/V であることに注意した.

さらに 1mol あたりの熱容量の差 $R = C_p - C_V$ を 1mol の気体の質量 m で割った比 R/m は, 単位質量あたりの熱容量の差 $c_p - c_v$ である. 同時に式 (49.5): $E = c_v T, I = c_p T$ はそれぞれ, 単位質量のもつ内部エネルギーとエンタルピーとなる.

■式 (49.9) について $1/\rho$ は単位質量の占める体積であることに注意すると, 熱力学で学んだように単位質量あたりのエンタルピーは $I = E + p/\rho$: (49.7), その微分は

$$dI = TdS + \frac{dp}{\rho} \tag{49.8}$$

と表される. これを空間において $d\mathbf{r}$ 隔たった 2 点での差とすると

$$(\nabla I) \cdot d\mathbf{r} = \left(T\nabla S + \frac{1}{\rho}\nabla p \right) \cdot d\mathbf{r}$$

となるので, 式 (49.9) を得る.

■理想気体の仮定について 教科書ではエンタルピーの式 (49.7): $I = E + p/\rho$, (49.8): $dI = TdS + \frac{dp}{\rho}$ を, 理想気体の式 (49.5): $E = c_v T, I = c_p T$, (49.6): $\frac{p}{\rho} = \frac{R}{m} T$ から改めて導いている. しかし上記のように式

(49.7),(49.8) は理想気体を仮定せずとも成り立つ。それ故、Bernoulli の定理 (49.13) が「ここでは単に理想気体の状態方程式から導かれている」(p.207, 1.4,5) とあるけれど、これについても理想気体に限らず、一般の断熱変化に対して成り立つ関係と見て良いと考えられる。

■下流の渦運動 (図 115) について なるほど完全流体では Lagrange の渦定理が成り立つものの、それは衝撃波を通過する場合には適用できない。

§ 50 渦無し的高速気流

前節の図 115 の事情を踏まえ、渦無しの流れを考えよう。[これは圧力方程式 $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}q^2 + \int^p \frac{dp}{\rho} = F(t)$ が成り立つ条件である (§ 13).] 特に定常流を仮定すると、

$$\text{圧力方程式} \quad \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}d(q^2) = 0, \quad (50.4)$$

$$\text{連続の式} \quad \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (50.5)$$

である。式 (50.4) と音速の公式

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (50.9)$$

[§ 13 のノートを参照、圧力方程式の前提としてバロトロピー流体を仮定] を用いて連続の式 (50.5) を書き換えると、基礎方程式

$$\Delta \Phi = \frac{1}{2c^2} (\partial_i(q^2)) (\partial_i \Phi), \quad (50.10)$$

$$\begin{aligned} \text{i.e.} \quad & \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \\ & - 2 \frac{vw}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} - 2 \frac{wu}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} - 2 \frac{uv}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (50.11)$$

が得られる (Φ は速度ポテンシャル、導出は下記)。

局所 Mach 数 $M \equiv q/c$ (各点で定義される) が小さい場合、 $O(M^2)$ を無視すると、これは縮まない流体の満たす式 $\Delta \Phi = 0$ (Laplace 方程式) になる。

§ 50, 式の導出など

■基礎方程式 (50.10),(50.11) の導出 連続の式 (50.5):

$$0 = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \rho \left\{ \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} (\nabla \rho) \cdot \mathbf{v} \right\} \quad (50.6)$$

の最右辺における $\{\dots\}$ 内第 2 項 $\frac{1}{\rho} (\partial_i \rho) v_i$ について、

$$\text{圧力方程式 (50.4)} : \frac{dp}{d(q^2)} = -\frac{\rho}{2}, \quad (p \text{ は } q^2 \text{ のみの関数})$$

$$\text{音速の式 (50.9)} : \frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{c^2}$$

より

$$\frac{1}{\rho}(\partial_i \rho) = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \frac{dp}{d(q^2)} \frac{\partial q^2}{\partial x_i} = -\frac{1}{2c^2} \partial_i(q^2) \quad (31)$$

$$= -\frac{1}{c^2} v_j \partial_i v_j \quad (32)$$

となる。式 (31) の表現を上式 (50.6) に代入すると、 $\mathbf{v} = \nabla \Phi$ とより

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho}(\partial_i \rho)v_i = \Delta \Phi - \frac{1}{2c^2}(\partial_i \Phi)\partial_i(q^2) : (50.10)$$

を得る。また式 (32) の表現を上式 (50.6) に代入すると、

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho}(\partial_i \rho)v_i = \Delta \Phi - \frac{1}{c^2} v_i v_j \partial_i \partial_j \Phi$$

となる。さらに最右辺の第 2 項を

$$\frac{1}{c^2} v_i v_j \partial_i \partial_j \Phi = \underbrace{\left(\frac{u^2}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \dots \right)}_{i=j \text{ の和}} + 2 \underbrace{\left(\frac{vw}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} + \dots \right)}_{i \neq j \text{ の和}}$$

と書き換えると、式 (50.11) が得られる。

§ 50 について

基礎方程式 (50.10),(50.11) において、未知量は Φ のみである。実際、圧力方程式においてバロトロピー流体を仮定しているのだから (実際的には断熱変化 (§ 49)), p が決まれば ρ も決まる。そして p は圧力方程式により、流速 q で決まる。

$$\Phi \rightarrow q^2 \rightarrow p \rightarrow \rho.$$

§ 51 M^2 展開法

基礎方程式 (50.10): $\Delta \Phi = F[\Phi]$ は非圧縮性流体に対する Laplace 方程式を第 0 近似として、図 116 のように高次の近似解 Φ_N を得られる (逐次近似法)。

理想気体の断熱変化を仮定しよう。物体に一樣流があたる場合には、無限遠での局所 Mach 数 $M_\infty \equiv U/c_\infty$ で

$$\Phi = \Phi_0 + M_\infty^2 \Phi_1 + M_\infty^4 \Phi_2 + \dots$$

と展開し、 Φ_0, Φ_1, \dots を求めるのも有効である (M^2 展開法)。そのためには基礎方程式 (50.10) における c^2 を、Bernoulli の定理により M_∞^2 で表し、 Φ_0, Φ_1, \dots についての方程式を立てれば良い (詳細は下記)。2 次元の流れでは非圧縮性流体に対し

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \rightarrow \quad u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

であったが、ここで扱う、縮む流体の定常流では代わりに

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \rightarrow \quad u = \frac{\rho_\infty}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\rho_\infty}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

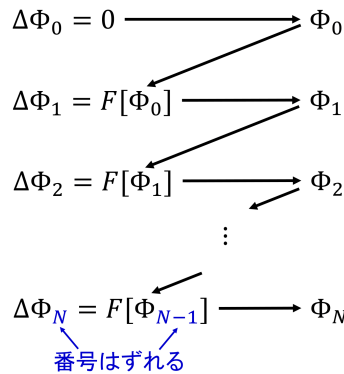


図 116 逐次近似法

(ただし ρ_∞ は一様流の密度) によって流れ関数 Ψ と複素量 $F = \Phi + i\Psi$ を導入できる ($\Psi = \text{const}$ は流線).
このとき展開

$$F = F_0 + M_\infty^2 F_1 + M_\infty^4 F_2 + \dots$$

において, 各 $F_N (\equiv \Phi_N + i\Psi_N)$ を定める式

$$F_0 = f_0(z), \quad (\text{以降, 単に } f(z) \text{ と略記}) \quad (51.18)$$

$$F_N = \int \left(\rho_1 \frac{\partial \Phi_{N-1}}{\partial z^*} + \dots + \rho_N \frac{\partial \Phi_0}{\partial z^*} \right) dz^* + f_N(z) \quad (51.19)$$

が得られる (導出は下記). ただし

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{q_0^2}{U^2} - 1 \right), \\ \rho_2 &= \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{U^2} - \frac{2-\gamma}{8} \left(\frac{q_0^2}{U^2} - 1 \right)^2, \\ &\vdots \\ q_N^2 &= 4 \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \frac{\partial \Phi_N}{\partial z^*} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial \Phi_{N-1}}{\partial z^*} + \dots + \frac{\partial \Phi_N}{\partial z} \frac{\partial \Phi_0}{\partial z^*} \right) \end{aligned}$$

である. また $f_N(z) (N = 0, 1, 2, \dots)$ は任意の解析関数であり, 境界条件から定められる.

境界条件

$$u - iv = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 2i \frac{\rho_\infty}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad (51.13)$$

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\rho}{\rho_\infty} \right) (u - iv). \quad (51.20)$$

[上式 (51.13) について, 例えば $\partial \Phi / \partial z = \partial \Phi / \partial x = u, \partial \Phi / \partial z = \partial \Phi / \partial (iy) = -iv$ の 2 式を平均すると $\partial \Phi / \partial z = (u - iv)/2$ を得る.]

- $z \rightarrow \infty$ のとき

$$(u, v) \rightarrow (U, 0), \quad \rho \rightarrow \rho_\infty, \quad \therefore \frac{\partial F}{\partial z} \rightarrow U,$$

$$\therefore \frac{df}{dz} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial F_N}{\partial z} \rightarrow 0 \quad (N \neq 0).$$

- 物体表面

$$\text{流線に一致,} \quad \therefore \Psi = \text{Im } F = \text{const}(= 0), \quad (51.22)$$

$$\therefore \Psi_0 = \text{Im } f = 0, \quad \Psi_N = \text{Im } F_N = 0 \quad (N \neq 0).$$

第 1 近似

式 (51.19) を第 1 近似に対して詳しく書くと,

$$F_1 = \frac{1}{4U^2} \frac{df}{dz} \int \left(\left(\frac{df}{dz} \right)^* \right)^2 dz^* - \frac{1}{4} (f(z))^* + f_1(z) \quad (51.25)$$

となる (導出は下記).

例 円柱を過ぎる一様流

円柱 (半径 a) を過ぎる一様流 U を考え, 簡単のために $a = 1, U = 1$ と無次元化する. [a と U を復元するには, 以下の式がもとの単位系で適正な次元を持つように a と U のべきを補えば良い. そのような方法は一意的である.] このとき “ポテンシャル” が M_∞^2 までの近似で

$$F = f(z) + M_\infty^2 [H_1(z, z^*) + f_1(z)] + O(M_\infty^4), \quad (51.30)$$

$$f = z + \frac{1}{z} : \text{非圧縮性流体の結果 (§ 20)}, \quad (51.26)$$

$$H_1(z, z^*) \equiv \frac{1}{4} \frac{1}{z^*} - \frac{1}{12} \frac{1}{z^{*3}} - \frac{1}{4} \frac{z^*}{z^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{z^2 z^*} + \frac{1}{12} \frac{1}{z^2 z^{*3}} \quad (51.28)$$

$$f_1 \equiv \frac{5}{6} \frac{1}{z} + \frac{1}{6} \frac{1}{z^3} \quad (51.29)$$

と求まる (導出は下記). このとき $z = re^{i\theta}$ によって極座標を導入すると,

- 速度ポテンシャル

$$\Phi = \text{Re } F$$

$$= \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta + M_\infty^2 \left\{ \left(\frac{13}{12} \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \frac{1}{r^3} + \frac{1}{12} \frac{1}{r^5} \right) \cos \theta - \left(\frac{1}{4} \frac{1}{r} - \frac{1}{12} \frac{1}{r^3} \right) \cos 3\theta \right\} + O(M_\infty^4) \quad (51.31)$$

- 円柱表面の速度分布

$$q(\theta) = - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)_{r=1} \quad (\theta \text{ の減る向きを正とした})$$

$$= 2 \sin \theta + M_\infty^2 \left(\frac{2}{3} \sin \theta - \frac{1}{2} \sin 3\theta \right) + O(M_\infty^4) \quad (51.32)$$

となる [確認できた].

§ 51, 式の導出など

■基礎方程式を M_∞^2 で表し, Φ_0, Φ_1, \dots についての方程式を立てる 教科書 pp.211-212 から引用する.

ベルヌーイの定理 (49.13) により

$$\frac{1}{2}q^2 + c_p T = \frac{1}{2}q^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \text{const.} \quad (33)$$

[確認は本稿次節. 式番号は本稿独自.] 断熱変化 $p = k\rho^\gamma$ のばあいには立ち帰って考えると, 上の式から

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1/(\gamma-1)}, \quad (51.4)$$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{c^2}{c_0^2} = 1 - \frac{q^2}{q_m^2}, \quad q_m = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} c_0 \quad (51.5)$$

が得られる [本稿次節で導出]. 添字 0 はよどみ点での値を示す.

一様流中での値を添字 ∞ で示すことにすれば

$$c^2 = c_0^2 - \frac{\gamma-1}{2} q^2 = c_\infty^2 - \frac{\gamma-1}{2} (q^2 - U^2) \quad (51.6)$$

であるから [本稿次節で補足], (50.10) は

$$\left\{ 1 - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \left(\frac{q^2}{U^2} - 1 \right) \right\} \Delta\Phi = \frac{M_\infty^2}{2} \left(\text{grad} \frac{q^2}{U^2} \cdot \text{grad} \Phi \right) \quad (51.7)$$

となる [本稿次節で補足]. ただし $M_\infty = U/c_\infty$ は一様流のマッハ数である. いま

$$\Phi = \Phi_0 + M_\infty^2 \Phi_1 + M_\infty^4 \Phi_2 + \dots \quad (51.8)$$

の形を仮定して (51.7) に代入し, M_∞^2 の同じべきを比較すれば

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_0 &= 0, \\ \Delta\Phi_1 &= \frac{1}{2} \left(\text{grad} \frac{q_0^2}{U^2} \cdot \text{grad} \Phi_0 \right), \quad q_0^2 = (\text{grad} \Phi_0)^2, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (51.9)$$

のような一連の方程式を得る [本稿次節で導出]. これを解けば逐次 Φ_0, Φ_1, \dots が得られるのである. この方法を M^2 展開法 (M^2 -expansion method) という.

■ F_0, F_1, \dots を与える式 (51.18), (51.19) の導出

$$\text{式 (51.13)} : u - iv = 2 \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 2i \frac{\rho_\infty}{\rho} \frac{\partial\Psi}{\partial z}, \quad \therefore \frac{\partial\Phi}{\partial z} = i \frac{\rho_\infty}{\rho} \frac{\partial\Psi}{\partial z}$$

であり, 上式の複素共役と ρ/ρ_∞ の積を $\partial\Phi/\partial z^*$ から引くと

$$\frac{\partial F}{\partial z^*} = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_\infty} \right) \frac{\partial\Phi}{\partial z^*} \quad (51.15)$$

を得る [本稿次節で補足]. ところで式 (51.4-6) より, 先に定義した ρ_1, ρ_2, \dots , を用いて

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{\rho_\infty} &= \left\{ 1 - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \left(\frac{q^2}{U^2} - 1 \right) \right\}^{1/(\gamma-1)} \\ &= 1 - M_\infty^2 \rho_1 - M_\infty^4 \rho_2 - \dots\end{aligned}\quad (51.17)$$

と表されるから [本稿次節で導出], 式 (51.15) を M_∞^2 で展開すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_0}{\partial z^*} &= 0, \\ \frac{\partial F_N}{\partial z^*} &= \rho_1 \frac{\partial \Phi_{N-1}}{\partial z^*} + \rho_2 \frac{\partial \Phi_{N-2}}{\partial z^*} + \dots + \rho_N \frac{\partial \Phi_0}{\partial z^*}\end{aligned}$$

が導かれる. これを積分して式 (51.18), (51.19) を得る.

■ F_1 の式 (51.25) の導出 式 (51.19) を $N=1$ に対して素直に書くと

$$F_1 = \int \rho_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial z^*} dz^* + f_1(z), \quad \rho_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{q_0^2}{U^2} - 1 \right).$$

ここに

$$\Phi_0 = \operatorname{Re} f = \frac{1}{2} [f(z) + (f(z))^*], \quad q_0^2 = \left(\frac{df}{dz} \right) \left(\frac{df}{dz} \right)^* \quad (34)$$

を代入すると式 (51.25) が得られる [上式 (34) を含め, 本稿次節で確認].

■ 一様流中の円柱周りの流れ (51.30) の導出 “ポテンシャル” の第 0 近似はもちろん, 非圧縮性流体に対する結果 (51.26): $f = z + \frac{1}{z}$ で与えられる. これを第 1 近似の一般公式 (51.25) に代入すると,

$$F_1 = H_1(z, z^*) + f_1(z) \quad (51.27)$$

が得られる (H_1 は式 (51.28) で与えられる) [導出は本稿次節]. 次に任意関数 $f_1(z)$ を境界条件から定めよう. まず円柱表面 ($zz^* = 1$) での境界条件は

$$\Psi_1 = \operatorname{Im} F_1 = 0, \quad \therefore \operatorname{Im} f_1 = -\operatorname{Im} H_1(z, z^*)$$

である. ここで

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} H_1 &= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{4} \frac{1}{z^*} - \frac{1}{12} \frac{1}{z^{*3}} - \frac{1}{4} \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2} \frac{1}{z} + \frac{1}{12} \frac{1}{z^*} \right) \quad (\because zz^* = 1) \\ &= \operatorname{Im} \left(-\frac{1}{4} \frac{1}{z} + \frac{1}{12} \frac{1}{z^3} - \frac{1}{4} \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2} \frac{1}{z} - \frac{1}{12} \frac{1}{z} \right) \quad (\because \operatorname{Im}[(g(z))^*] = -\operatorname{Im}[g(z)]) \\ &= \operatorname{Im} \left(-\frac{5}{6} \frac{1}{z} - \frac{1}{6} \frac{1}{z^3} \right)\end{aligned}$$

なので, $f_1 = \frac{5}{6} \frac{1}{z} + \frac{1}{6} \frac{1}{z^3}$: (51.29) とおけば円柱表面の境界条件は満たされる. このとき df_1/dz は円柱の外側 $|z| > 1$ で 1 価正則であり, また $z \rightarrow \infty$ での境界条件

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} \rightarrow 0, \quad \therefore \frac{df_1}{dz} \rightarrow 0$$

も満たされる. こうして複素速度ポテンシャルの第 1 近似 (51.30) を得る.

§ 51 について

■「 $F[\Phi]$ の大きさは $O(M^2)$ 程度の大きさである」(式(51.1)の1行下)について 基礎方程式(50.10)の導出時に見たように,

$$F[\Phi] = \frac{v_i v_j}{c^2} \partial_i \partial_j \Phi$$

である.

■Bernoulliの定理のp.211, l.9(本稿の式(33))への書き換えについて $I = c_p T$:(49.5)であり, さらに

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} &= \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{p}{\rho} = \frac{p}{\rho} + \frac{c_v}{c_p - c_v} \frac{p}{\rho} \\ &= \frac{p}{\rho} + c_v T \quad \left(\because \text{状態方程式 (49.6)} : \frac{p}{\rho} = (c_p - c_v)T\right) \\ &= c_p T. \quad \left(\because \text{状態方程式 (49.6)} : \frac{p}{\rho} = \frac{R}{m}T\right) \end{aligned}$$

■ $p/p_0, \rho/\rho_0$ の式(51.4)の導出 Bernoulliの定理より

$$c_p T = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}.$$

また, $q = 0$ のよどみ点で

$$c_p T_0 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0}.$$

これらを辺々割り,

$$\frac{T}{T_0} = \frac{p}{p_0} \times \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{-1} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (\because p = k\rho^\gamma)$$

として得る.

■音速で T/T_0 を現した式(51.5)の導出 第1の等号について, $c^2 = \frac{dp}{d\rho} = k\gamma\rho^{\gamma-1}$ より

$$\frac{c^2}{c_0^2} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} = \frac{T}{T_0}. \quad (\because \text{式 (51.4)})$$

第2の等号について, $c^2 = k\gamma\rho^{\gamma-1} = \gamma p/\rho$ をBernoulliの定理

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0}$$

に代入して,

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{\gamma-1}c^2 = \frac{1}{\gamma-1}c_0^2, \quad \therefore \frac{c^2}{c_0^2} = 1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{q^2}{c_0^2} \equiv 1 - \frac{q^2}{q_m^2} : (51.1).$$

■式 (51.6) について すると式 (51.6) 第 1 の等号

$$c^2 = c_0^2 - \frac{\gamma-1}{2}q^2$$

が成り立つ. 第 2 の等号についても同様に, $\gamma p/\rho = c^2$ を Bernoulli の定理

$$\frac{1}{2}U^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0}$$

に代入して得られる

$$\frac{1}{2}U^2 + \frac{1}{\gamma-1}c_\infty^2 = \frac{1}{\gamma-1}c_0^2, \quad \therefore c_0^2 = c_\infty^2 + \frac{\gamma-1}{2}U^2$$

を用いれば良い.

■基礎方程式の M_∞^2 依存性を明示した式 (51.7) について

$$\begin{aligned} (\text{左辺 } \{\dots\} \text{ 内}) &= \frac{1}{c_\infty^2} \left\{ c_\infty^2 - \frac{\gamma-1}{2}U^2 \left(\frac{q^2}{U^2} - 1 \right) \right\} = \frac{c^2}{c_\infty^2}, \quad (\because \text{式 (51.6)}) \\ (\text{右辺}) &= \frac{1}{2c_\infty^2} (\nabla q^2) \cdot (\nabla \Phi) \end{aligned}$$

なので, これは式 (50.10) に戻る.

■式 (51.9) の確認 基礎方程式 (51.7) の Φ を M_∞^2 で展開すると,

$$\begin{aligned} &\left\{ 1 - \frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2 \left(\frac{(\nabla \Phi_0)^2 + 2M_\infty^2 \nabla \Phi_0 \cdot \nabla \Phi_1 + \dots}{U^2} - 1 \right) \right\} (\Delta \Phi_0 + M_\infty^2 \Delta \Phi_1) \\ &= \frac{M_\infty^2}{2} \left(\nabla \frac{(\nabla \Phi_0)^2 + 2M_\infty^2 \nabla \Phi_0 \cdot \nabla \Phi_1 + \dots}{U^2} \right) \cdot (\nabla \Phi_0 + M_\infty^2 \nabla \Phi_1 + \dots) \end{aligned}$$

となる. ここで

$$\begin{aligned} (\text{左辺の } O(1) \text{ の項}) &= \Delta \Phi_0, \\ (\text{右辺の } O(1) \text{ の項}) &= 0, \quad \therefore \Delta \Phi_0 = 0 \text{ (期待される結果)}, \\ (\text{左辺の } O(M_\infty^2) \text{ の項}) &= M_\infty^2 \left(\Delta \Phi_1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{(\nabla \Phi_0)^2}{U^2} \Delta \Phi_0 \right) \\ &= M_\infty^2 \Delta \Phi_1, \quad (\because \Delta \Phi_0 = 0) \\ (\text{右辺の } O(M_\infty^2) \text{ の項}) &= M_\infty^2 \frac{1}{2} \nabla \frac{(\nabla \Phi_0)^2}{U^2} \cdot \nabla \Phi_0 \\ &\equiv M_\infty^2 \frac{1}{2} \nabla (q_0^2/U^2) \cdot \nabla \Phi_0 \end{aligned}$$

より, Φ_0, Φ_1 に対する式 (51.9) を得る.

■2 変数 z, z^* の複素関数の取り扱いについて “ポテンシャル” (51.12): $F = \Phi + i\Psi$ を独立変数 z, z^* の関数と見て, それぞれの微分を $\partial/\partial z, \partial/\partial z^*$ とする. このため $\partial F_0/\partial z^* = 0$ を積分すると z だけの関数 (51.18): $F_0 = f_0(z)$ となる. このような z だけの関数 $f(z)$ の微分は d/dz と書いて良い.

■複素共役の表記について $f(z) = 1/z$ に対して $(f(z))^* = 1/z^*$ は z^* の関数である。このことを明示するには $(f(z))^* \equiv g(z^*)$ などと表すのが望ましく、これを $f^*(z^*)$ と書くと

$$f^*(z^*) = \left(\frac{1}{z} \right)^* \Big|_{z=z^*} = \frac{1}{z}$$

という誤解を招く。しかし既に見てきたように、教科書では

$$f^*(z^*) \equiv (f(z))^* \quad (35)$$

である。

■“ポテンシャル”を用いた基礎方程式 (51.15) について

$$\left(1 - \frac{\rho}{\rho_\infty} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial z^*} = \frac{\partial \Phi}{\partial z^*} - \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial z^*} = \frac{\partial \Phi}{\partial z^*} + i \frac{\partial \Psi}{\partial z^*} = \frac{\partial F}{\partial z^*}.$$

■ ρ/ρ_∞ の展開 (51.17) について 第1の等号について、式 (51.7) の箇所で見たように $(\{\dots\} \text{内}) = c^2/c_\infty^2$ であり、ここで $c^2 = dp/d\rho = \gamma k \rho^{\gamma-1}$ なので

$$\{\dots\} = \left(\frac{c^2}{c_\infty^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \frac{\rho}{\rho_\infty}$$

とできる。

第2の等号について、

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + i \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \left(1 + \frac{\rho}{\rho_\infty} \right) \quad (\because \text{式 (51.14)})$$

より

$$\begin{aligned} q^2 &= \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^* \\ &= \left(1 + \frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^2 \left\{ \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \frac{\partial \Phi_0}{\partial z^*} + \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z^*} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial \Phi_0}{\partial z^*} \right) M_\infty^2 + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^2 (q_0^2 + M_\infty^2 q_1^2 + M_\infty^4 q_2^2 + \dots) \\ &\equiv \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^2 Q^2 \end{aligned}$$

なので、逐次代入により

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\rho_\infty} &= \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \left\{ \frac{Q^2}{4U^2} \left(1 + \frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^2 - 1 \right\} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ &= \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \left\{ \frac{Q^2}{4U^2} \left(1 + \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \left(\frac{Q^2}{4U^2} \left(1 + \frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^2 - 1 \right) \right) \right) - 1 \right\} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \end{aligned}$$

である。最右辺において

$$\begin{aligned}\{\dots\} &= \frac{Q^2}{4U^2}(2 + O(M_\infty^2))^2 - 1 \\ &= \frac{Q^2}{U^2} - 1 + O(M_\infty^2) \\ &= \frac{q_0^2}{U^2} - 1 + O(M_\infty^2)\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{\rho_\infty} &= \left[1 - M_\infty^2 \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{q_0^2}{U^2} - 1 \right) + O(M_\infty^4) \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}} \\ &= 1 - M_\infty^2 \frac{1}{2} \left(\frac{q_0^2}{U^2} - 1 \right) + O(M_\infty^4) \\ &\equiv 1 - M_\infty^2 \rho_1 + O(M_\infty^4)\end{aligned}$$

を得る。

■ $\partial F / \partial z$ の式 (51.20) について 上記の $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \left(1 + \frac{\rho}{\rho_\infty} \right)$ に

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \Phi = \frac{1}{2}(u - iv)$$

を代入して得る。

■ 境界条件 (51.22) について 付加的な定数の不定性を利用し, $\text{const} = 0$ ととっている。

■ 第 0 近似 $F_0 = f(z)$ に対する条件 (51.23) について $f(z)$ が非圧縮性流体の流れを表すことによる。実際, 円柱を過ぎる一様流に対しては $f = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$: (51.26)。

■ p.215, l.13 の式 [本稿の式 (34)] について $\Phi_0 = \text{Re } f$ の式において, 式 (35): $f^*(z^*) \equiv (f(z))^*$ である。さらに $u_0 \equiv \partial \Phi_0 / \partial x, v_0 \equiv \partial \Phi_0 / \partial y$ とおくと,

$$\frac{df}{dz} = u_0 - iv_0, \quad \therefore \left(\frac{df}{dz} \right) \left(\frac{df}{dz} \right)^* = u_0^2 + v_0^2 = 4 \left| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right) \right|^2 = 4 \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \frac{\partial \Phi_0}{\partial z^*} = q_0^2.$$

■ F_1 の式 (51.25) について

$$\begin{aligned}\int \rho_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial z^*} dz^* &= \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{U^2} \frac{df}{dz} \left(\frac{df}{dz} \right)^* - 1 \right) \times \frac{1}{2} \frac{d}{dz^*} (f(z))^* dz^* \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{U^2} \frac{df}{dz} \int \left(\left(\frac{df}{dz} \right)^* \right)^2 dz^* - \frac{1}{4} (f(z))^*.\end{aligned}$$

これを式 (35): $f^*(z^*) \equiv (f(z))^*$ の表記に改めれば良い。

■ 円柱を過ぎる一様流に対する F_1 の式 (51.27) の導出

$$\left(\frac{df}{dz} \right)^* = U \left(1 - \frac{a^2}{z^{*2}} \right)$$

なので,

$$\begin{aligned}
 \text{(式 (51.25) 第 1 項)} &= \frac{U}{4} \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) \int \left(1 - \frac{a^2}{z^{*2}}\right)^2 dz^* \\
 &= \frac{U}{4} \left\{ z^* + a^2 \left(-\frac{z^*}{z^2} + \frac{2}{z^*}\right) - a^4 \left(\frac{2}{z^2 z^*} + \frac{1}{3z^{*3}}\right) + \frac{a^6}{3z^2 z^{*3}} \right\}, \\
 \text{(式 (51.25) 第 2 項)} &= -\frac{1}{4} U \left(z^* + \frac{a^2}{z^*}\right).
 \end{aligned}$$

以上 2 式と $f_1(z)$ を合わせると

$$F_1(z) = f_1(z) + a^2 \frac{U}{4} \left(\frac{1}{z^*} - \frac{z^*}{z^2}\right) - a^4 \frac{U}{4} \left(\frac{1}{3z^{*3}} + \frac{2}{z^2 z^*}\right) + \frac{U a^6}{12z^2 z^{*3}}$$

となる. これは式 (51.27)(あるいは式 (51.30)) が (速度) \times (長さ) の次元を持つように U, a を補った結果に一致している.

■p.216, 1.9 について ここでも表記法 (35): $f^*(z^*) \equiv (f(z))^*$ を思い出す.

§ 52 薄翼の理論

薄翼の理論における基礎方程式 (41.6) を改めて引用しよう (導出は下記).

$$\Phi = Ux + \phi, \quad (1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (36)$$

a) プラントル-グラウアートの相似法則

音よりおそい様流 $M_\infty < 1$ に対して, 上式 (36) はスケール変換

$$\xi = x, \quad \eta = \mu y, \quad \zeta = \mu z, \quad \mu = \sqrt{1 - M_\infty^2}$$

により Laplace 方程式になる. [$\mathbf{r} = (x, y, z)$ を引数とする関数 $\phi(\mathbf{r})$ を $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ の関数と見ると, 関数形が変わることに注意して]

$$\phi(\mathbf{r}) = \lambda \phi_i(\boldsymbol{\xi})$$

とおくと (λ の値の選択は任意である),

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial \zeta^2} = 0.$$

式 (36) を導いたのと同じ近似で, 物体表面 $z = g(x, y)$ と無限遠での境界条件はそれぞれ

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=0} = U \partial_x g(x, y), \quad |\mathbf{r}| \rightarrow \infty \text{ のとき } \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} \rightarrow 0$$

となる [第 1 式の導出は本稿「§ 52 について」の節を参照]. これは $\boldsymbol{\xi}$ 空間において

$$\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=0} = \frac{U}{\lambda \mu} \partial_\xi g(\xi, \eta/\mu), \quad |\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty \text{ のとき } \frac{\partial \phi_i}{\partial \boldsymbol{\xi}} \rightarrow 0$$

と翻訳される。よって ξ 空間空間での流れは、速度 U の一様流の中に物体

$$\zeta = \frac{1}{\lambda\mu}g(\xi, \eta/\mu)$$

を置いたときの縮まない流体の流れと同一である。流れの中の圧力 p に対して、圧力係数は

$$C_p \equiv \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty U^2} \simeq -2 \frac{\partial_x \phi}{U} \quad (52.15)$$

と計算される (導出は下記)。これは x 方向の付加速度 $\partial_x \phi$ にのみ関係しており、 ξ 空間の流れに対する圧力係数

$$C_{pi} = -2 \frac{\partial_\xi \phi_i}{U}$$

の λ 倍となっている ($\phi = \lambda\phi_i$)。

以上の結論をまとめたものが、次の Prandtl-Glauert の相似法則である。すなわち「Mach 数 M_∞ の高速気流が薄翼にあたる時の表面の圧力係数は、翼幅を $\mu = \sqrt{1 - M_\infty^2}$ 倍に縮め、厚みを $1/\lambda\mu$ 倍にふくらませた薄翼が縮まない流体の中にあるときの圧力係数の値を λ 倍したものである」(p.221, 1.6~11)。

- 特に

- $\lambda = 1$ と選ぶと次の結論が得られる。

- 「低速のときと同じ圧力係数 (したがって同じ揚力係数) を得るためには、高速翼の厚み、反り、迎え角を μ 倍に縮めなければならない」(p.221, 1.14~16)。

- $\lambda = 1/\mu$ と選ぶと次の結論が得られる。

- 「一定の断面形をもつ翼で Mach 数を上げていくと、圧力係数は $1/\mu$ に比例して増加する」(p.221, 1.16~p.222, 1.1)。

いずれの場合も ξ 空間の翼幅は実際の μ 倍に縮まっている。

- 複数の翼が列を成している場合

ξ 空間では翼幅と同時に翼の相互間距離も μ 倍に縮められるため、 ξ 空間の流れは、したがって対応する実際の流れは、高速になるほど翼相互の干渉の影響を受けるようになる。

b) 薄翼展開法

さらに摂動論的に高い近似に進むための方法として、薄翼展開法の紹介が半ば天下りの成されている。式 (36) において捨てられた高次の微小量を右辺にまとめて

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = F[\phi],$$

$$F[\phi] \equiv \frac{1}{c^2} [\{(U + \phi_x)^2 - U^2\} \phi_{xx} + \phi_y^2 \phi_{yy} + \phi_z^2 \phi_{zz} + 2\phi_y \phi_z \phi_{yz} + 2\phi_z \phi_x \phi_{zx} + 2\phi_x \phi_y \phi_{xy}]$$

と書く ($\phi_x = \partial_x \phi$, etc.). 右辺 $F[\phi]$ をゼロと置いたときの解 ϕ_1 は、Prandtl-Glauert の近似に一致する。 ϕ_1 を右辺に代入したときの解として、第 2 近似 ϕ_2 を得る。これを繰り返して高次の近似 ϕ_m が逐次的に算出される。

2次元の流れに対しては、式 (51.10):

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$$

によって導入した流れ関数 Ψ を用いることができる。ここに ϕ_m, ψ_m を $O(\varepsilon^m)$ の微小量として、一様流を第 0 近似とした展開

$$\Phi = U(x + \phi_1 + \phi_2 + \cdots), \quad \Psi = U(y + \psi_1 + \psi_2 + \cdots)$$

を代入し、 ε の同じべきを比較すると ϕ_m, ψ_m に対する連立方程式を得る。 M^2 展開法 (§ 51) の場合と同様に、次のような結果が得られる。

$$\begin{aligned} \zeta &\equiv \xi + i\eta, & \bar{\zeta} &\equiv \xi - i\eta, & G_m &\equiv \phi_m + i\psi_m/\mu, \\ G_1 &= f(\zeta), \\ G_2 &= \frac{M_\infty^2}{4} \left[\nu \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2 \bar{\zeta} + (1 + \nu) \left\{ 2 \frac{df}{d\zeta} \bar{f} + \int \left(\frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}} \right) d\bar{\zeta} \right\} \right] + f_2(\zeta), \\ &\vdots \\ \nu &\equiv \frac{\gamma + 1}{4} \frac{M_\infty^2}{1 - M_\infty^2}. \end{aligned}$$

最後に、

$$x = \cos \vartheta, \quad y = g(\vartheta)$$

[x 座標は適当に無次元化されている] によって表される翼が、 x 軸と角度 α を成す速度 U の一様流中にある場合を考える。このとき翼の表面上での流速と圧力係数は、 $O(\varepsilon^2)$ の精度で次のように与えられることを証明し得る。

$$\begin{aligned} \frac{q}{U} &= 1 + \frac{1}{\mu} \frac{A}{\sin \vartheta} + \frac{\lambda}{2} \frac{A^2}{\sin^2 \vartheta} - (1 + \lambda) \left(\frac{1}{2} \frac{B^2}{\sin^2 \vartheta} - \frac{C}{\sin \vartheta} \right), \\ C_p &= -\frac{2}{\mu} \frac{A}{\sin \vartheta} - (1 + \lambda) \left(\frac{A^2 - B^2}{\sin^2 \vartheta} + \frac{2C}{\sin \vartheta} \right). \end{aligned}$$

ここに A, B, C は

$$\begin{aligned} A &= g^*(\vartheta) - \alpha \cos \vartheta + \kappa_{10}, & B &= g'(\vartheta) + \alpha \sin \vartheta, & C &= P'(\vartheta) - Q^*(\vartheta) + \kappa_{20}, \\ P + iQ &= -i \frac{g(\vartheta)}{\sin \vartheta} (A + iB) \end{aligned}$$

から定まり、また

$$\lambda = \frac{M_\infty^2}{\mu^2} \left(1 + \frac{\gamma + 1}{4} \frac{M_\infty^2}{\mu^2} \right)$$

である。さらに $g^*(\vartheta)$ は

$$g(\vartheta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta)$$

に対して

$$\begin{aligned} g(\vartheta) &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta - b_n \sin n\vartheta) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [g(\vartheta + \varphi) - g(\vartheta)] \cot \frac{\varphi}{2} d\varphi \end{aligned}$$

によって定義される, $g(\vartheta)$ の共役 Fourier 級数である. 定数 κ_{10}, κ_{20} は Joukowski の仮定 (§ 21) から決定され, これを用いて翼の周りの循環は

$$\Gamma = 2\pi\{(\kappa_{10}/\mu) + (1 + \lambda)\kappa_{20}\}$$

と表される. 縮む流体に対しても Kutta-Joukowski の定理と同じ関係

$$L = \rho_{\infty}U\Gamma$$

が成り立つことが知られており (§ 23), これにより翼に働く揚力 L が求まる.

長軸方向に一様流を受ける楕円柱

$$g(\vartheta) = t \sin \vartheta$$

に対して

$$\begin{aligned} g^*(\vartheta) &= -t \cos(\vartheta), & A &= t \sin \vartheta, & B &= t \cos(\vartheta), & C &= 0, \\ P + iQ &= t^2 e^{-i\vartheta}, & P - Q^* &= 0, \\ C_p &= -\frac{2t}{\mu} - (1 + \lambda)t^2(1 - \cot^2 \vartheta). \end{aligned}$$

薄翼 $t \ll 1$ (無次元化された長さ) に対して t の 1 次近似では, 楕円柱表面の圧力分布は一様である.

§ 52, 式の導出など

■式 (36) の導出 飛行機の翼や導体のような, 薄い, あるいは細長い物体が一様流 U (x 方向にとる) の中に小さい迎え角で置かれている場合を考える. このとき流れはほぼ x 軸に平行となることから, 速度の y, z 成分 v, w を $O(\varepsilon)$ の微小量として, 基礎方程式 (50.11) において $O(\varepsilon^2)$ を無視すると

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (52.1)$$

となる [本稿次節で補足]. さらに $\Phi = Ux + \phi$ とおくと, 一様流からのずれは $\phi = O(\varepsilon)$ と考えられる. このとき同じ近似で $M^2 \rightarrow M_{\infty}^2$ として良いので [本稿次節で補足], 式 (36) を得る.

■圧力係数 (52.15) の導出 式 (51.4-6) で $O(\varepsilon^2)$ を無視すると

$$\frac{p}{p_{\infty}} = \left(\frac{c^2}{c_{\infty}^2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \simeq \left\{ 1 - (\gamma-1) \frac{U\phi_x}{c_{\infty}^2} \right\}^{\gamma/(\gamma-1)} \simeq 1 - \frac{\gamma U\phi_x}{c_{\infty}^2} \quad (37)$$

となることによる [本稿次節で補足].

§ 52 について

■薄翼理論の式 (52.1) について 基礎方程式 (50.11) において

$$\frac{u^2}{c^2} = M^2 + O(\varepsilon^2), \quad \frac{v^2}{c^2}, \frac{w^2}{c^2}, \frac{vw}{c^2} = O(\varepsilon^2), \quad \frac{wu}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} \propto w \frac{\partial w}{\partial x} = O(\varepsilon^2), \quad \frac{uv}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \propto v \frac{\partial v}{\partial x} = O(\varepsilon^2)$$

として式 (52.1):

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

を得る.

■ $M^2 = M_\infty^2$ (p.218) について $M^2 = q^2/c^2$ の分母は式 (51.6):

$$c^2 = c_\infty^2 - \frac{\gamma-1}{2}(q^2 - U^2)$$

で与えられる。分子について, $q^2 = u^2 + O(\varepsilon^2)$ (p.217) の代わりに

$$q^2 = (U + O(\varepsilon))^2 + O(\varepsilon^2) = U^2 + O(\varepsilon)$$

を用いると, p.218 の式

$$\frac{q^2}{c^2} = \frac{U^2 + O(\varepsilon)}{c_\infty^2 - O(\varepsilon)} = M_\infty^2 + O(\varepsilon)$$

を得る。 M_∞^2 との差は $O(\varepsilon^2)$ ではないけれど, 式 (52.4) においてこれに $\partial\phi/\partial x$ がかかり, 2 次の微小量となる。

■ $z = g(x, y)$ における境界条件 (52.10) について 物体表面内に 2 つのベクトル

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x g \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y g \end{pmatrix}$$

をとることができるから, 法線方向は

$$\mathbf{n} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x g \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_x g \\ -\partial_y g \\ 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。よって物体表面の境界条件は

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \\ &\propto -(\partial_x g)u - (\partial_y g)v + w \\ &= -(\partial_x g) \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} + U \right)_g - (\partial_y g) \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right)_g + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)_g \\ &= -(\partial_x g)U + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)_g + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

と書ける。ただし添字の g は物体表面 $z = g(x, y)$ での値を意味する。ここで p.219 脚注で説明されているように,

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)_g = \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)_{z=0} + O(\varepsilon^2)$$

であることに注意すると, 式 (52.10):

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)_{z=0} = (\partial_x g)U$$

を得る。

■ 式 (52.12) の確認と訂正

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)_{z=0} = \lambda\mu \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial\zeta} \right)_{\zeta=0}, \quad U \frac{\partial}{\partial x} g(x, y) = U \frac{\partial}{\partial\xi} g(\xi, \eta/\mu)$$

を等置して,

$$\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial\zeta} \right)_{\zeta=0} = \frac{1}{\lambda\mu} g_\xi(\xi, \eta/\mu)$$

を得る。教科書の式 (52.12) における右辺の g の添字 ζ は ξ の間違いと考えられる。

■圧力の式 (p.220, l.14)[本稿の式 (37)]について 状態方程式 (11.5): $(p/p_0)^{1/\gamma} = \rho/\rho_0$, 音速の式 (11.8): $c^2 = \gamma p/\rho$ より

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^\gamma = \left(\frac{p}{p_\infty} \frac{c_\infty^2}{c^2}\right)^\gamma, \quad \therefore \frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{c^2}{c_\infty^2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

となるので, 第1の等号が成立する. 次いで

$$u = U + \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad q^2 - U^2 \simeq 2U \frac{\partial\phi}{\partial x}$$

を式 (51.5): $c^2 = c_\infty^2 - \frac{\gamma-1}{2}(q^2 - U^2)$ に代入すると, 第2の等号が確かめられる.

■圧力係数の式 (52.15) について 音速の式 (11.8): $c^2 = \gamma p/\rho$ を用いると,

$$\frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty U^2} = -\frac{\gamma p_\infty}{\rho_\infty c_\infty^2} \frac{2\partial_x\phi}{U} = -\frac{2\partial_x\phi}{U} : (52.15)$$

を得る.

§ 53 音よりはやい流れ

音よりはやい一様流 $M_\infty > 1$ に対して, 式 (36) は波動方程式

$$B^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}, \quad B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$$

になる. [ただし変数が全て空間座標であることに注意する.]

特に xy 面内の2次元翼に対しては

$$B^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}, \quad \therefore \phi = f_1(x - By) + f_2(x + By)$$

となる. 空間内の線 $x \pm By = \text{const}$ はその上で f_1 または f_2 が一定値をとるような“射線”であり, x 軸との成す角が

$$\beta = \sin^{-1} \frac{1}{M_\infty}$$

であるため [本稿次節で補足], これは Mach 円錐 (§ 41) を説明するものと見ることができる. (それ故, Mach 線, Mach 波などと呼ばれる.)

図 117 のように一様流と平行な平面壁上の突起 $y = g(x)$ を考えよう. $f(x + By)$ の項を許容すると, 上流 ($x = -\infty$ 側) から x 軸上の壁に向かう“射線”が現れることになり不合理だから, 解は

$$\phi = f(x - By)$$

の形でなければならない. f の関数形は

$$\text{境界条件 (52.10)} : \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{y=0} = U g'(x) \rightarrow f'(x) = -\frac{U}{B} g'(x)$$

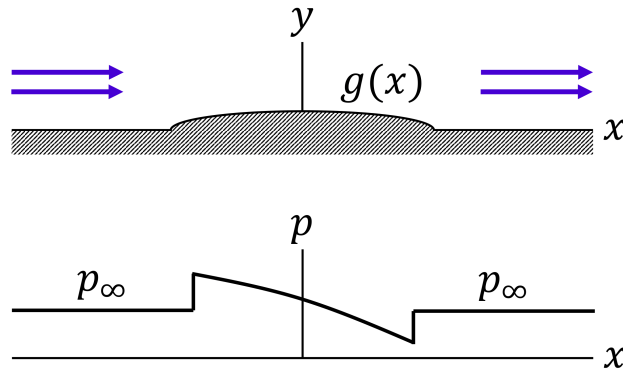


図 117 一様流に平行な平面壁上の突起 $y = g(x)$ と、その上の圧力分布

から決定される。流速と揚力係数の任意の点での値は

$$u = U + \partial_x \phi = U \left\{ 1 - \frac{1}{B} g'(x - By) \right\}, \quad v = \partial_y \phi = U g'(x - By),$$

$$C_p = -2 \frac{\partial_x \phi}{U} \quad (\because \text{式 (52.15)})$$

$$= \frac{2}{B} g'(x - By)$$

である。圧力係数の壁の上での値は

$$C_p \simeq \frac{2}{B} g'(x) \simeq \frac{2}{B} \vartheta \quad (\tan \vartheta = g'(x))$$

となるので、これは曲面の局所的な傾き ϑ だけで決まり、図 117 のような分布を持つことが分かる。

次に図 118 のように翼弦の長さ l を持ち、上下両面が

$$y = g_{\pm}(x)$$

で与えられる翼型を、流れに対して迎え角 α で置いた場合を考える。図 118 のように翼面に沿う流線によって分けられた上下の流れのそれぞれに対して、以上の結論を適用できる。すなわち翼の一様流に対する局所的な傾き

$$\vartheta_{\pm} = \pm \{ g_{\pm}'(x) - \alpha \}$$

を用いて圧力係数は

$$C_p = \pm \frac{2}{B} \{ g_{\pm}'(x) - \alpha \} [\equiv C_{p\pm}]$$

と表される。揚力 L は

$$C_L \equiv \frac{L}{(1/2)\rho_{\infty} U^2 l} = \frac{1}{l} \int_0^l (C_{p-} - C_{p+}) dx$$

$$= -\frac{2}{Bl} \left\{ \int_0^l g_+'(x) dx + \int_0^l g_-'(x) dx \right\} + \frac{4\alpha}{Bl} \int_0^l dx$$

$$= \frac{4\alpha}{B} = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \quad \left(\because \int_0^l g_{\pm}'(x) dx = g_{\pm}(l) - g_{\pm}(0) = 0 \right)$$

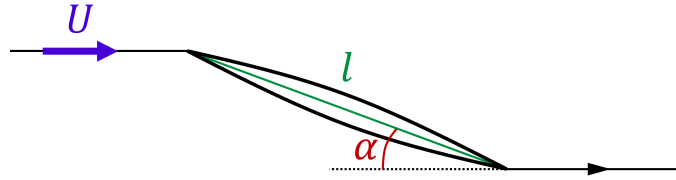


図 118 翼弦の長さ l を持ち、迎え角 α を成す翼型

と計算される。これは翼の具体的な形に依らず、迎え角 α と Mach 数 M_∞ だけで決まる。比較のために、縮まない流体の理論における平板 (長さ $4a$) の揚力係数の式 (21.7) を書いておく：

$$C_L \equiv \frac{L}{(1/2)\rho U^2 \cdot 4a} = 2\pi \sin \alpha \simeq 2\pi\alpha.$$

縮む流体の音より遅い流れに対しては、Prandtl-Glauert の相似法則 (§ 52) を用いると

$$C_L = \frac{2\pi\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

である。

図 117 の圧力分布の概形から期待されるように、音よりはやい流れに対しては抵抗は 0 にならず、d'Alembert のパラドックスは成り立たない。実際、抵抗 D は

$$\begin{aligned} C_D &\equiv \frac{D}{(1/2)\rho_\infty U^2 l} = \frac{1}{l} \int_0^l (C_{p+}\vartheta_+ + C_{p-}\vartheta_-) dx && \text{[本稿次節で補足]} \\ &= \frac{2}{Bl} \int_0^l [\{g_+'(x)\}^2 + \{g_-'(x)\}^2] dx + \frac{4\alpha^2}{B} \\ &= C_{D0} + \alpha C_L \end{aligned}$$

と計算される。ここで迎え角がゼロの場合の抵抗係数

$$C_{D0} \equiv \frac{2}{Bl} \int_0^l [\{g_+'(x)\}^2 + \{g_-'(x)\}^2] dx$$

は、翼の表面の傾きが大きいほど、したがって翼が厚いほど大きくなる。

$M_\infty \rightarrow 1$ に対しては揚力係数 C_L が発散するため、薄翼の近似が無効となる。

§ 53 について

■ Mach 線の傾き (p.227) について

$$\tan \beta = \frac{1}{B} = \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}, \quad \sin \beta = \frac{1}{M_\infty}.$$

■抵抗係数 C_D の式 (p.229, 1 番下の行) について 一様流の方向 (X 軸にとる) との成す角が θ の線要素 ds に働く圧力の X 成分は

$$p \sin \theta ds \simeq p \theta dX$$

である.

§ 54 ホドグラフ法, 厳密解

2次元流に対して基礎方程式の厳密解を与える, ホドグラフ法について説明する. [ここではいかにして方程式の解を得るかということに重点が置かれているため, 数学的な側面の強い内容となっている印象を受ける.]

式 (51.10):

$$u = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

によって流れ関数 Ψ を導入すると, 定常流における質量保存則 (50.5): $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$ が満たされる (§ 51). また渦無しの流れを仮定すると, 速度成分は

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

のように速度ポテンシャル Φ から導かれる. ここから速度の大きさ q および x 軸との成す角 θ を独立変数とした, Φ, Ψ に関する連立方程式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q} = q \frac{d}{dq} \left(\frac{\rho_0}{q\rho} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = q \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial q} \quad (54.4)$$

が導かれる (導出は下記). これらは線形の方程式となっているため, 重ね合せの原理が成立する. uv 平面 (速度平面) はホドグラフ面と呼ばれ, 独立変数 q, θ はホドグラフ面上の極座標となっているので, 上式 (54.4) を基礎に置く手法はホドグラフ法と呼ばれる.

[バロトロピー流体の仮定と Bernoulli の定理 (50.4) により] 密度 ρ は速度 q だけの関数なので, 速度 q の代わりに q だけの関数として

$$t = \int^q \frac{\rho dq}{\rho_0 q}$$

を独立変数に用いることができる. このとき上式は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -K \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad K(t) \equiv q \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{q} \right) = \left(1 - \frac{q^2}{c^2} \right) \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2$$

となり, 2式から Φ を消去すると Ψ に対する式

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + K \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = 0$$

を得る [本稿「§ 54 について」の節で (K の式を) 導出]. $\Psi = T_n(t) e^{\pm i n \theta}$ と変数分離すると T_n は

$$\frac{d^2 T_n}{dt^2} - n^2 K T_n = 0$$

から定まり, これを基本解として一般解は重ね合せ

$$\Psi = \sum A_n T_n(t) e^{i n \theta}$$

によって与えられる。

縮まない流体 ($\rho = \rho_0, c = \infty$) に対しては

$$t = \int^q \frac{dq}{q} = \ln q, \quad K = \left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right) \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 = 1, \quad \therefore \frac{d^2 T_n}{dt^2} - n^2 T_n = 0$$

なので、解として

$$T_n = e^{\pm nt} = q^{\pm n}, \\ \Psi = \text{Im} \sum A_n q^n e^{-in\theta} = \text{Im} \sum A_n w^n \quad (w \equiv qe^{-i\theta})$$

が得られる。これは縮まない流体の理論において、 $w = df/dz$ の関係により複素速度ポテンシャル f が w の解析関数となり、 w の Laurent 級数に展開されることを反映している。

速度 U の一様流中に置かれた円柱の周りの流れ

$$f = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right), \quad w = \frac{df}{dz} = U \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right)$$

[教科書では円柱の半径 a を 1(無次元) とおいている] に対して、具体的に複素速度ポテンシャル f を w によって表すと

$$f = Ua \left\{ \left(1 - \frac{w}{U}\right)^{-1/2} + \left(1 - \frac{w}{U}\right)^{1/2} \right\}$$

となる。ここから $|w| < U$ に対する Taylor 展開

$$\Psi = \text{Im} f = \text{Im} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{w}{U}\right)^n = \text{Im} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{q}{U}\right)^n e^{-in\theta} = \text{Im} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{T_n(t)}{T_n(t_\infty)} e^{-in\theta}$$

が得られる。[ただし添字の ∞ は無限遠での値を表す。ここまでは縮まない流体に対する結果である。ここで最右辺において、 a_n の値はそのままにして $T_n(t)$ を断熱変化に対する解に置き換えると、] これは上式 $\Psi = \sum A_n T_n(t) e^{in\theta}$ の形を持ち、 $t = t_\infty$ ではもとの Ψ に一致するから、一様流中に物体を置いたときの縮む流れを表していると考えられる。ところがこの事実を応用するには、

- 断熱変化に対して T_n が超幾何関数になる
- $q > U$ への解析接続を必要とする

といった困難を伴う。そこで T_n を扱いやすい形にするために、 $K(t)$ を次のような近似式で置き換えることが考えられる。

- $K = \text{const}$ Kármán-Tsien (カルマン-チエン) の近似
- $K = at$ 音に近い近似
- $K = a(1 - be^{2kt})$ 友近・玉田の仮想気体

$K = \left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right) \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2$ は局所 Mach 数 $M = q/c \leq 1$ に対して $K \geq 1$ であり、流れの中でいたるところ $M < 1$ または $M > 1$ の場合には Kármán-Tsien の近似が有効となる。これについて § 55 で簡単に触れる。

§ 54, 式の導出など

■ q, θ を独立変数とした式 (54.4) の導出

$$d\Phi = udx + vdy, \quad \frac{\rho_0}{\rho} d\Psi = -vdx + udy$$

より

$$d\Phi + i\frac{\rho_0}{\rho}\Psi = (u - iv)(dx + idy) = qe^{-i\theta}dz, \quad \therefore dz = \frac{1}{q}e^{i\theta} \left(d\Phi + i\frac{\rho_0}{\rho}\Psi \right) \quad (54.3)$$

となる ($z = x + iy$). この続きの計算は本稿次節にて詳しく示す.

§ 54 について

■ q, θ を独立変数とした式 (54.4) の導出 (続き)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial q \partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{q} e^{i\theta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + i \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \\ &= -\frac{1}{q^2} e^{i\theta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + i \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{q} e^{i\theta} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q \partial \theta} + i \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right\} \\ &= e^{i\theta} \left[\left(-\frac{1}{q^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{q} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q \partial \theta} \right) + i \left\{ -\frac{1}{q^2} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right\} \right], \\ \frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial q} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{q} e^{i\theta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q} + i \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial q} \right) \\ &= \frac{i}{q} e^{i\theta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q} + i \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial q} \right) + \frac{1}{q} e^{i\theta} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial q} + i \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial q} \right) \right\} \\ &= e^{i\theta} \left[\left(-\frac{1}{q} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial q} + \frac{1}{q} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial q} \right) + i \left\{ \frac{1}{q} \frac{\partial \Phi}{\partial q} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial q} \right) \right\} \right]. \end{aligned}$$

2 式を等置して実部を比較すると, 式 (54.4) の第 2 式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = q \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial q}$$

を得る. 次に虚部を比較すると,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q} + \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\rho_0}{\rho} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial q} = -\frac{1}{q} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial}{\partial q} \frac{\rho_0}{\rho} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$$

となる. ここでバロトロピー流体の仮定, および定常流に対する Bernoulli の定理 (50.4): $\frac{q^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = 0$ により, 「密度 ρ は速度 q のきまった関数である」 (p.232, 1.8) ことに注意すると, $\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\rho_0}{\rho} = 0$ とできるので, 式 (54.4) の第 1 式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q} = \left(-\frac{1}{q} \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{\partial}{\partial q} \frac{\rho_0}{\rho} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = q \frac{d}{dq} \left(\frac{\rho_0}{q\rho} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$$

を得る.

■ K の式 (54.7) の導出

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -K \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad K = -\frac{dq}{dt} q \frac{d}{dq} \left(\frac{\rho_0}{q\rho} \right) = q \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho_0}{q\rho} \right)$$

において

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{q} \right) = -\frac{1}{q^2} \frac{dq}{dt} = -\frac{\rho_0}{q\rho}$$

なので, 式 (54.7) 第 1 の等号

$$K = q \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{q} \right)$$

が成立する。次に

$$\begin{aligned} K &= -\frac{dq}{dt} q \frac{d}{dq} \left(\frac{\rho_0}{q\rho} \right) = -\frac{\rho_0 q^2}{\rho} \frac{d}{dq} \left(\frac{\rho_0}{q\rho} \right) \\ &= -\frac{\rho_0 q^2}{\rho} \left(\frac{d}{dq} \frac{1}{q} \right) \frac{\rho_0}{\rho} - \frac{\rho_0 q}{\rho} \frac{d}{dq} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right) \\ &= -\left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 \left(1 + \frac{q}{\rho} \frac{d\rho}{dq} \right) \end{aligned}$$

と書き換える。最右辺第 2 項について、Bernoulli の定理 (50.4): $\frac{q^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = 0$ を微分すると

$$q \frac{dq}{d\rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\rho}, \quad \therefore \frac{q}{\rho} \frac{d\rho}{dq} = -q^2 \left(\frac{d\rho}{d\rho} \right)^{-1} = -\frac{q^2}{c^2}$$

なので、式 (54.7) 第 2 の等号

$$K = \left(1 - \frac{q^2}{c^2} \right) \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2$$

が成立する。

§ 55 カルマン-チエンの近似

Kármán-Tsien の近似 $K = \text{const}$ を満たすような仮想的な気体を考えると、よどみ点 ($q = 0$) での密度を ρ_0 、音速を c_0 とし、式 (54.7):

$$K = q \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{q} \right) = \left(1 - \frac{q^2}{c^2} \right) \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2$$

から

$$K = 1, \quad \frac{1}{q} = Ae^t + Be^{-t}, \quad \text{状態方程式: } p = p_1 - c_0^2 \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \quad (38)$$

が導かれる (A, B, p_1 は積分定数, 導出は下記).

$K = 1$ に対して式 (54.6):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -K \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$$

は Cauchy-Riemann の関係式となるため、

$$F = \Phi + i\Psi$$

は $\theta + it$ の、したがって $e^{-i(\theta+it)} = e^{t-i\theta}$ の解析関数である。 F を任意に選び、 ζ 面上の縮まない流体の複素速度ポテンシャルと見なして流速を

$$\frac{dF}{d\zeta} = Qe^{-i\theta}$$

と書く。ここから仮想気体の z 面での運動 (流速 q) を得るには、 $\zeta \rightarrow z$, $Q \rightarrow q$ の対応関係を見出せば良い。 F が $Qe^{-i\theta}$ の解析関数であると同時に $e^{t-i\theta}$ の解析関数でもあることから $e^t = Q$ と同定すると、式 (38) は q と Q の関係

$$q = \frac{Q}{1 - Q^2/4c_0^2} \quad (55.13)$$

になる (導出は下記). これに対し式 (54.3):

$$dz = \frac{1}{q} e^{i\theta} \left(d\Phi + i \frac{\rho_0}{\rho} d\Psi \right)$$

は z と ζ の関係

$$z = \zeta - \frac{1}{4c_0^2} \int \left\{ \left(\frac{dF}{d\zeta} \right)^* \right\}^2 d\bar{\zeta} \quad (39)$$

を与える (導出は下記). ただし $q \rightarrow 0$ のとき $q/Q \rightarrow 1$ となることを [我々の都合で勝手に] 要求して積分定数 A, B を定めた*20.

ζ 面上の縮まない流体に対する圧力係数を C_{pi} とすると, これは

$$\text{Bernoulli の定理 (11.2)} : p + \frac{1}{2} \rho Q^2 = p_\infty + \frac{1}{2} \rho Q_\infty^2 \quad \therefore C_{pi} \equiv \frac{p - p_\infty}{(1/2) \rho Q_\infty^2} = 1 - \frac{Q^2}{Q_\infty^2}$$

によって与えられる (添字 ∞ は一様流中での値). そして状態方程式 (38) の圧力に対する圧力係数 C_p は

$$C_p \equiv \frac{p - p_\infty}{(1/2) \rho_\infty q_\infty^2} = \frac{(1 + \lambda) C_{pi}}{1 - \lambda + \lambda C_{pi}}, \quad \lambda \equiv \frac{Q_\infty^2}{4c_0^2} = \frac{1 - \sqrt{1 - M_\infty^2}}{1 + \sqrt{1 - M_\infty^2}} \quad (40)$$

と計算される (Kármán-Tsien の圧力換算式, 導出は下記). 翼型 P_i 上の点 ζ に対応する点 z は上式 (39) により近似的に ζ に等しいので, これは C_{pi} から, 縮む流体の中に同じ翼型 P_i があるときの圧力係数 C_p を与える式と見て良い.

薄翼に対しては $C_{pi} \simeq 0$ なので, これは Prandtl-Glauert の法則

$$C_p \simeq \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} C_{pi} = \frac{C_{pi}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$$

を再現する.

なお, 翼型 P_i の周りに循環がある場合には, 式 (39) によって与えられる, 対応する z 面上の翼型表面は閉曲線とならないため, 取り扱いに注意と工夫を要する.

§ 55, 式の導出など

■式 (38) の導出

$$K = q \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{q} \right) = \left(1 - \frac{q^2}{c^2} \right) \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 \quad (54.7)$$

の最右辺によどみ点での値 $q = 0, \rho = \rho_0$ (および $c = c_0$) を代入すると, 一定値 $K = \text{const.}$ は $K = 1$ と定まる. このとき上式 (54.7) の第 1 の等号より

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{q} \right) = \frac{1}{q}, \quad \therefore \frac{1}{q} = Ae^t + Be^{-t} \quad (55.2)$$

となる (A, B は任意定数). すると t の定義式 (54.5): $dt = \frac{\rho dq}{\rho_0 q}$ より

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{1}{q} \frac{dq}{dt} = - \frac{Ae^t - Be^{-t}}{Ae^t + Be^{-t}} \quad (55.3)$$

*20 正確には, 式 (38) の導出時に見出した関係 $1/c_0^2 = -4AB$ を併せて用いることで, 2 つの定数 A, B を決定する.

であり, 上式 (55.2),(55.3) を式 (54.7) に代入すると

$$c^2 = -\frac{1}{4AB} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 \quad (41)$$

を得る [本稿次節で補足]. よどみ点での値 $\rho = \rho_0, c = c_0$ を代入すると $1/c_0^2 = -4AB$ となるので, $\rho c = \rho c_0$. よって

$$\frac{dp}{d\rho} = c^2 = \frac{c_0^2 \rho_0^2}{\rho^2}, \quad \therefore p = p_1 - \frac{c_0^2 \rho_0^2}{\rho} : (55.5)$$

を得る (p_1 は積分定数).

■ $Q \rightarrow q$ の関係 (55.13), $\zeta \rightarrow z$ の関係 (39) の導出 $e^t = Q$ の下で式 (55.2),(55.3) は

$$\frac{1}{q} = AQ + BQ^{-1}, \quad \frac{1}{q} \frac{\rho_0}{\rho} = -AQ + BQ^{-1} \quad (55.9)$$

となるので,

$$\begin{aligned} dz &= \frac{1}{q} e^{i\theta} \left(d\Phi + i \frac{\rho_0}{\rho} d\Psi \right) : (54.3) \\ &= e^{i\theta} (AQ + BQ^{-1}) d\Phi + i e^{i\theta} (-AQ + BQ^{-1}) d\Psi \\ &= AQ e^{i\theta} (d\Phi - id\Psi) + BQ^{-1} e^{i\theta} (d\Phi + id\Psi) \\ &= A \left(\frac{dF}{d\zeta} \right)^* dF^* + B \frac{d\zeta}{dF} dF \\ &= B d\zeta + A \left\{ \left(\frac{dF}{d\zeta} \right)^* \right\}^2 d\zeta^* \end{aligned} \quad (55.10)$$

を得る.

ここで $q \rightarrow 0$ のとき $q/Q \rightarrow 1$ となることを要求すると, 式 (55.9) より $B = 1$ であり [本稿次節で補足], 式 (38) の導出時に見出した関係 $1/c_0^2 = -4AB$ とより $A = -1/4c_0^2$ となる. このとき式 (55.10) は式 (39) を与える. また式 (55.9) の 2 式はそれぞれ, 式 (55.13) および

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1 - Q^2/4c_0^2}{1 + Q^2/4c_0^2} \quad (55.14)$$

となる [本稿次節で補足].

■ Kármán-Tsien の圧力換算式 (40) の導出 p の式 (55.5), ρ/ρ_0 の式 (55.14) を用いると,

$$C_p = \frac{2c_0^2 \rho_0^2}{\rho_\infty q_\infty^2} \left(\frac{1}{\rho_\infty} - \frac{1}{\rho} \right) = \frac{(1+\lambda)C_{pi}}{1-\lambda+\lambda C_{pi}} \quad (55.17)$$

が導かれる [第 2 の等号の確認は本稿次節].

次に式 (55.13),(55.14) から得られる

$$q_\infty = \frac{Q_\infty}{1\lambda}, \quad \frac{\rho_\infty}{\rho_0} = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \quad (55.19)$$

を, λ の定義式 (55.18): $\lambda = Q_\infty^2/4c_0^2$ と合わせると,

$$4\lambda = \frac{Q_\infty^2}{c_0^2} = \frac{\rho_0^2 Q_\infty^2}{\rho_\infty^2 c_0^2} = \frac{(1-\lambda)^2 \rho_0^2 q_\infty^2}{\rho_\infty^2 c_0^2} = (1+\lambda)^2 M_\infty^2 \quad (42)$$

となる [本稿次節で補足]. これを λ について解くと

$$\lambda = \frac{1 - \sqrt{1 - M_\infty^2}}{1 + \sqrt{1 - M_\infty^2}} = \frac{M_\infty^2}{\left(1 + \sqrt{1 - M_\infty^2}\right)^2} \quad (55.20)$$

を得る [本稿次節で補足].

§ 55 について

■p.237, 1.7 の c^2 の式 (本稿の式 (41)) について

$$\text{式 (54.7)} : 1 = \left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right) \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2, \quad \therefore c^2 = \frac{q^2}{1 - (\rho/\rho_0)^2} = \frac{q^2}{(\rho_0/\rho)^2 - 1} \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2$$

において

$$\frac{q^2}{(\rho_0/\rho)^2 - 1} = \frac{1}{(Ae^t + Be^{-2})^2} \left\{ \frac{(Ae^t - Be^{-2})^2 - (Ae^t + Be^{-2})^2}{(Ae^t + Be^{-2})^2} \right\}^{-1} = -\frac{1}{4AB}$$

である.

■式 (55.6) について

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 - 1 &= \frac{-4AB}{(Ae^t + Be^{-2})^2} \quad (\because \text{式 (55.3)}) \\ &= \frac{q^2}{c_0^2} : (55.6). \quad (\because \text{式 (55.2)}, 1/c_0^2 = -4AB) \end{aligned}$$

■「 $B = 1$ 」(p.239, 1.6) について 式 (55.9) 第 1 式を

$$1 = AqQ + B\frac{q}{Q}$$

と書いて, $q \rightarrow 0$ のとき $q/Q \rightarrow 1$, したがって $Q \rightarrow 0$ となることを要求すると $B = 1$ と定まる.

■式 (55.13), 式 (55.14) について

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{AQ + BQ^{-1}} = \frac{Q}{AQ^2 + B} = \frac{Q}{1 - Q^2/4c_0^2} : (55.13), \\ q\frac{\rho}{\rho_0} &= \frac{1}{-AQ + BQ^{-1}} = \frac{Q}{-AQ^2 + B} = \frac{Q}{1 + Q^2/4c_0^2}, \\ \therefore \frac{\rho}{\rho_0} &= \frac{1 - Q^2/4c_0^2}{1 + Q^2/4c_0^2} : (55.14). \end{aligned}$$

■Kármán-Tsien の圧力換算式 (55.17), 第 2 の等号について 式 (55.14) と式 (55.16) から Q^2 を消去すると

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1 - \lambda(1 - C_{pi})}{1 + \lambda(1 - C_{pi})}, \quad \lambda \equiv \frac{Q_\infty^2}{4c_0^2}$$

となる。これと式 (55.19) を用いると、

$$\begin{aligned}
 C_p &= \frac{2c_0^2}{q_\infty^2} \frac{\rho_0}{\rho_\infty} \left(\frac{\rho_0}{\rho_\infty} - \frac{\rho_0}{\rho} \right) \\
 &= 2c_0^2 \frac{(1-\lambda)^2}{Q_\infty^2} \left\{ \frac{1+\lambda}{1-\lambda} - \frac{1+\lambda(1-C_{pi})}{1-\lambda(1-C_{pi})} \right\} \\
 &= \frac{1}{2\lambda}(1+\lambda) \left\{ (1+\lambda) - (1-\lambda) \frac{1+\lambda-\lambda C_{pi}}{1-\lambda+\lambda C_{pi}} \right\} \\
 &= \frac{(1+\lambda)C_{pi}}{1-\lambda+\lambda C_{pi}}
 \end{aligned}$$

となって、式 (55.17) 第 2 の等号が確かめられる。

■ λ を Mach 数に関係付ける式 (p.240, 1.9)(本稿の式 (42)) について

- 第 1 の等号 定義式 (55.18): $\lambda = Q_\infty^2/4c_0^2$ による。
- 第 3 の等号 分子を式 (55.19) 第 1 式により、分母を式 (55.4): $\rho c = \rho_0 c_0$ により書き換える。
- 第 4 の等号 式 (55.19) 第 2 式による。

■ λ の式 (55.20) について ここでは M_∞ を単に M と略記する。 λ に対する 2 次方程式

$$\lambda^2 + 2 \left(1 - \frac{2}{M^2} \right) \lambda + 1 = 0$$

を解くと

$$\lambda = - \left(1 - \frac{2}{M^2} \right) \pm \frac{2}{M} \sqrt{\frac{1}{M^2} - 1} = \frac{2 - M^2 \pm 2\sqrt{1 - M^2}}{M^2}$$

となる。式 (55.19):

$$(0 <) q_\infty = \frac{Q_\infty}{1 - \lambda}$$

より $\lambda < 1$ でなければならず、 $M \leq 1$ であることを考え合わせると、複号 \pm は負号をとらなければならない。この結果は式 (55.20):

$$\lambda = \frac{1 - \sqrt{1 - M^2}}{1 + \sqrt{1 - M^2}} = \frac{(1 - \sqrt{1 - M^2})^2}{M^2}$$

と一致している。

付録 A 微分形式に対する Stokes の定理の使い方

この付録は§ 3における「ガウスの定理」(p.14, 1.2)の補足である。
 まず付録 A.1 で、微分形式と呼ばれる写像 ω に対する Stokes の定理

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$$

の内容を理解するための説明を行う [2, pp.37-46, pp.67-76, pp.79-99]. そこで微分形式の積分

$$\int_A \omega \equiv \int_A \left\langle \omega \left| \frac{\partial}{\partial \xi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi^p} \right. \right\rangle d\xi^1 \dots d\xi^p$$

から、どのようにして無限小ベクトル $d^{(1)}q, \dots, d^{(p)}q$ の張る面積要素

$$\begin{vmatrix} d^{(1)}q^{i_1} & \dots & d^{(p)}q^{i_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ d^{(1)}q^{i_p} & \dots & d^{(p)}q^{i_p} \end{vmatrix}$$

が得られるかを明らかにする。Stokes の定理の証明は行わない。

続く付録 A.2 では Gauss の定理 (p.14), すなわち 3 次元空間の領域 V と、面積素ベクトル $d\mathbf{f}$ を持つその表面 ∂V に対して

$$\int_{\partial V} p d\mathbf{f} = \int_V \nabla p dV. \quad (43)$$

となることを、2 形式に対する Stokes の定理から導く。

A.1 微分形式に対する Stokes の定理

接ベクトル 多様体 M の各点における微分作用素 $v = v^i \partial_i$.

図 119 の曲線 c に沿った方向微分 $\frac{df(q(t))}{dt} = \dot{q}^i \partial_i$ ($\partial_i \equiv \partial/\partial q^i$)
 \rightarrow 方向微分作用素 $v = \dot{q}^i \partial_i$

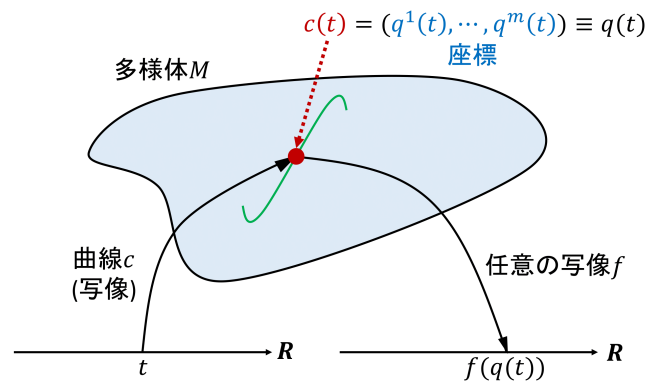


図 119 合成写像 $t \in \mathbf{R} \mapsto c(t) \in M \mapsto f \circ c(t) \equiv f(c(t)) \in \mathbf{R}$

$c(t)$ に応じて (つまり動点の運動に応じて) $\{\partial_i\}$ を基底とする様々な速度 $\{\dot{q}^i\}$ を持つ作用素 v が得られる。その全体が接空間を張る。

次に多様体の接空間に限らず、抽象的ベクトル空間 V を考える。その基底を $\{e_i\}$ 、元を $u_{(i)} = u_{(i)}^j e_j$ と書く。

p ベクトル p 個のベクトル $u_{(1)}, \dots, u_{(p)}$ を実数に対応させる写像のうち、引数となるベクトルについて

$$p \text{ 重線形: } \omega^p[u_{(1)}, \dots, au_{(i)} + bv_{(i)}, \dots, u_{(p)}] = a\omega^p[u_{(1)}, \dots, u_{(i)}, \dots, u_{(p)}] + b\omega^p[u_{(1)}, \dots, v_{(i)}, \dots, u_{(p)}]$$

$$\text{歪対称: } \omega^p[u_{(1)}, \dots, u_{(i)}, \dots, u_{(j)}, \dots, u_{(p)}] = -\omega^p[u_{(1)}, \dots, u_{(j)}, \dots, u_{(i)}, \dots, u_{(p)}]$$

となる ω^p のこと。

- 例えば 1 ベクトル ω は

$$\omega : V \rightarrow \mathbf{R} : u \in V \mapsto \omega[u] \in \mathbf{R}$$

という線形写像。

- 特に 1 ベクトル \mathcal{E}^i を,

$$\mathcal{E}^i[u^j e_j] = u^i$$

で定義しておく。これはベクトル $u = u^j e_j$ の第 i 成分 u^i を取り出す写像である。

1 ベクトル $\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(p)}$ から p ベクトルを構成することを考える。

テンソル積 $\omega_{(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{(p)}$

テンソル積 $\omega_{(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{(p)}$ を

$$(\omega_{(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{(p)})[u_{(1)}, \dots, u_{(p)}] = \omega_{(1)}[u_{(1)}] \cdots \omega_{(p)}[u_{(p)}]$$

で定義する。

外積 $\omega_{(1)} \wedge \dots \wedge \omega_{(p)}$

テンソル積 $\omega_{(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{(p)}$ を用いて外積 $\omega_{(1)} \wedge \dots \wedge \omega_{(p)}$ を

$$(\omega_{(1)} \wedge \dots \wedge \omega_{(p)})[u_{(1)}, \dots, u_{(p)}] = \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) (\omega_{(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{(p)})[u_{(\pi_1)}, \dots, u_{(\pi_p)}]$$

で定義する。ここに

$$\text{置換 } \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_p \end{pmatrix}, \quad \text{その符号 } \text{sgn}(\pi) = \begin{cases} +1 & (\text{偶置換}) \\ -1 & (\text{奇置換}) \end{cases}$$

である。

これは行列式

$$\begin{vmatrix} \omega_{(1)}[u_{(1)}] & \cdots & \omega_{(1)}[u_{(p)}] \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{(p)}[u_{(1)}] & \cdots & \omega_{(p)}[u_{(p)}] \end{vmatrix}$$

であり、 $u_{(1)}, \dots, u_{(p)}$ について歪対称だから p ベクトルである。

また、ここから外積は $\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(p)}$ についても歪対称であることが分かる。

さらにこれは転置行列の行列式にも一致するから

$$\sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) (\omega_{(\pi_1)} \otimes \dots \otimes \omega_{(\pi_p)})[u_{(1)}, \dots, u_{(p)}]$$

とも書け,

$$\omega_{(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{(p)} = \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) (\omega_{(\pi_1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{(\pi_p)}).$$

p ベクトル ω^p が

$$\omega^p = \sum' a_{i_1 \dots i_p} \mathcal{E}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathcal{E}^{i_p} \quad (44)$$

と展開されることを示す (ただし \sum' は $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq \dim V$ の和). $a_{i_1 \dots i_p} \equiv \omega^p[e_{i_1}, \dots, e_{i_p}]$ とおくと, これは添字に関して反対称である.

$$\begin{aligned} \omega^p[u_{(1)}, \dots, u_{(p)}] &= \omega^p[e_{i_1}, \dots, e_{i_p}] u_{(1)}^{i_1} \cdots u_{(p)}^{i_p} \quad (\omega^p \text{の線形性}) \\ &= a_{i_1 \dots i_p} \mathcal{E}^{i_1}[u_{(1)}] \cdots \mathcal{E}^{i_p}[u_{(p)}] \\ &= a_{i_1 \dots i_p} \mathcal{E}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}^{i_p}[u_{(1)}, \dots, u_{(p)}] \end{aligned}$$

なので,

$$\omega^p = a_{i_1 \dots i_p} \mathcal{E}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}^{i_p}$$

と書ける. よって

$$\begin{aligned} \omega^p &= \sum' \sum_{\pi} a_{\pi i_1 \dots \pi i_p} \mathcal{E}^{\pi i_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}^{\pi i_p} \\ &\quad (\text{ここで } \sum' \text{ で } 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq \dim V \text{ と大小関係を指定する代わりに,} \\ &\quad \text{置換 } \pi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ \pi i_1 & \pi i_2 & \cdots & \pi i_p \end{pmatrix} \text{ で順序を混ぜている)} \\ &= \sum' \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) a_{i_1 \dots i_p} \mathcal{E}^{\pi i_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}^{\pi i_p} \quad (a_{i_1 \dots i_p} \text{の反対称性}) \\ &= \sum' a_{i_1 \dots i_p} \mathcal{E}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathcal{E}^{i_p}. \end{aligned}$$

V として多様体の接空間をとり p ベクトル $\omega^p = \sum' a_{i_1 \dots i_p} \mathcal{E}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathcal{E}^{i_p}$ を考える.

微分 df 接ベクトル $v = v^i \partial_i$ に作用して方向微分 $v^i \partial_i f$ を与える 1 ベクトル (従って写像)

$$df[v] = v^i \partial_i f = (\partial_i f) \mathcal{E}^i[v], \quad \therefore df = (\partial_i f) \mathcal{E}^i \quad (45)$$

を導入する.

$$q^j(q) = q^j$$

で定義される座標関数 q^j を f にとると, 微分 df の式 (45) に現れる $\partial_i f$ における $f(q) = q^j(q) = q^j$ は座標関数ではなく座標成分となることに注意して

$$\partial_i f = \delta_i^j, \quad \therefore dq^j = \mathcal{E}^j$$

を得る.

よって p ベクトルは

$$\omega^p = \sum' a_{i_1 \dots i_p} dq^{i_1} \wedge \cdots \wedge dq^{i_p}$$

と表される. ω^p は多様体のある点 Q の接ベクトルに作用する (点 Q の接ベクトルを引数とする) 写像であることを明記するため, これを $(\omega^p)_Q$ と書く.

p (次微分)形式 ω^p 多様体の各点で p ベクトル $(\omega^p)_Q$ を与える “場”

$$\omega^p = \sum' a_{i_1 \dots i_p} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p}.$$

全微分 df 微分 $(df)_Q$ の “場” である 1 形式 $df = (\partial_i f) dq^i$.

座標関数の全微分は $d\bar{q}^i = \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^j} dq^j$ より反変ベクトル成分の変換則に従うため, p 形式 $\sum' a_{i_1 \dots i_p} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p}$ が座標系に依らない意味を持つには $a_{i_1 \dots i_p}$ は p 階共変テンソルの変換則に従わなければならない.

外微分 p 形式

$$\omega = \sum' f_{i_1 \dots i_p} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p}$$

を外微分すると, $df_{i_1 \dots i_p}$ を $f_{i_1 \dots i_p}$ の全微分 (従って 1 形式) として $p+1$ 形式

$$d\omega = \sum' df_{i_1 \dots i_p} \wedge dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p}$$

を得る.

■微分形式の積分 以下では $\omega^p[u_{(1)}, \dots, u_{(p)}] \equiv \langle \omega^p | u_{(1)}, \dots, u_{(p)} \rangle$ という記法を用いる. 多様体上の積分領域 A を (ξ^1, \dots, ξ^p) でパラメトライズし, 領域 A に対応する (ξ^1, \dots, ξ^p) の範囲を \bar{A} とする. このとき p 形式 ω^p の積分は

$$\int_A \omega^p \equiv \int_{\bar{A}} \left\langle \omega^p \left| \frac{\partial}{\partial \xi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi^p} \right. \right\rangle d\xi^1 \dots d\xi^p$$

で定義される. ここで

$$\frac{\partial}{\partial \xi^j} = \frac{\partial q^k}{\partial \xi^j} \frac{\partial}{\partial q^k}, \quad \therefore dq^i \left[\frac{\partial}{\partial \xi^j} \right] = \mathcal{E}^i \left[\frac{\partial q^k}{\partial \xi^j} \frac{\partial}{\partial q^k} \right] = \frac{\partial q^i}{\partial \xi^j}$$

なので

$$\begin{aligned} \left\langle \omega^p \left| \frac{\partial}{\partial \xi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi^p} \right. \right\rangle &= \sum' f_{i_1 \dots i_p} \left\langle dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p} \left| \frac{\partial}{\partial \xi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi^p} \right. \right\rangle \\ &= \sum' f_{i_1 \dots i_p} \begin{vmatrix} dq^{i_1} [\partial/\partial \xi^1] & \dots & dq^{i_1} [\partial/\partial \xi^p] \\ \dots & \dots & \dots \\ dq^{i_p} [\partial/\partial \xi^1] & \dots & dq^{i_p} [\partial/\partial \xi^p] \end{vmatrix} \\ &= \sum' f_{i_1 \dots i_p} \frac{\partial(q^{i_1}, \dots, q^{i_p})}{\partial(\xi^1, \dots, \xi^p)}, \\ \therefore \int_A \omega^p &= \int_{\bar{A}} \sum' f_{i_1 \dots i_p} \frac{\partial(q^{i_1}, \dots, q^{i_p})}{\partial(\xi^1, \dots, \xi^p)} d\xi^1 \dots d\xi^p \end{aligned} \quad (46)$$

と書き換えられる. なお

$$\frac{\partial(q^{i_1}, \dots, q^{i_p})}{\partial(\xi^1, \dots, \xi^p)} d\xi^1 \dots d\xi^p \equiv \frac{\partial(q)}{\partial(\xi)} d^p \xi = \frac{\partial(q)}{\partial(\xi)} \frac{\partial(\xi)}{\partial(\bar{\xi})} d^p \bar{\xi} = \frac{\partial(q)}{\partial(\bar{\xi})} d^p \bar{\xi}$$

より, この積分はパラメータ (ξ^1, \dots, ξ^p) の取り方に依らない.

■Stokes の定理 n 次元の領域 D と境界 ∂D に向きのつけられるとき, 任意の $p \equiv (n-1)$ 形式 ω に対して

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega \quad (47)$$

が成り立つ.

■面積要素を構成する 領域 D の境界 ∂D を (ξ^1, \dots, ξ^p) でパラメトライズする. 1つのパラメータ ξ^j が動いてできる座標曲線上の2点 $q(\xi^j), q(\xi^j + d\xi^j)$ を結ぶ ∂D の接ベクトルを $d^{(j)}q$ とすると, その第 i 成分は $d^{(j)}q^i = \frac{\partial q^i}{\partial \xi^j} d\xi^j$ (j について和をとらない) なので, ∂D にわたる ω^p の積分から

$$\frac{\partial(q^{i_1}, \dots, q^{i_p})}{\partial(\xi^1, \dots, \xi^p)} d\xi^1 \dots d\xi^p = \begin{vmatrix} \frac{\partial q^{i_1}}{\partial \xi^1} d\xi^1 & \dots & \frac{\partial q^{i_1}}{\partial \xi^p} d\xi^p \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial q^{i_p}}{\partial \xi^1} d\xi^1 & \dots & \frac{\partial q^{i_p}}{\partial \xi^p} d\xi^p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d^{(1)}q^{i_1} & \dots & d^{(p)}q^{i_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ d^{(1)}q^{i_p} & \dots & d^{(p)}q^{i_p} \end{vmatrix}$$

が現れる. これは無限小ベクトル $d^{(1)}q, \dots, d^{(p)}q$ の張る面積要素を与える.

A.2 微分形式に対する Stokes の定理 (47) を用いた Gauss の定理 (43) の証明

2形式 $\omega = pdy \wedge dz$ に対して外微分は

$$d\omega = \partial_x p dx \wedge dy \wedge dz \quad (\because dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0)$$

である. $\omega, d\omega$ の積分を定義式 (46) に従って通常の積分に書き換えよう.

積分変数に空間座標 (x, y, z) そのものをとれば

$$\int_V d\omega = \int_V \partial_x p dx \wedge dy \wedge dz = \int_V \partial_x p \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, y, z)} dx dy dz = \int_V \partial_x p dV$$

となる.

一方, ∂V を (ξ, ξ') でパラメトライズし, これらを積分変数にとる. ここで ξ (または ξ') が動いてできる座標曲線上で座標が ξ と $\xi + d\xi$ (または ξ' と $\xi' + d\xi'$) の2点を結ぶベクトルを $d\mathbf{X}$ (または $d\mathbf{X}'$) とする. このときこれらの第 i 成分は

$$dX^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi} d\xi, \quad dX'^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi'} d\xi'$$

なので

$$\left\langle dy \wedge dz \left| \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \xi'} \right. \right\rangle = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi'} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi'} \end{vmatrix} d\xi d\xi' = \begin{vmatrix} dX^2 & dX'^2 \\ dX^3 & dX'^3 \end{vmatrix} = (d\mathbf{X} \times d\mathbf{X}')_x \equiv df_x$$

は ∂V 上で $d\mathbf{X}, d\mathbf{X}'$ が張る平行四辺形の x 軸に垂直な面への射影を与える. よって

$$\int_{\partial V} \omega = \int_{\partial V} p df_x$$

を得る.

以上より Stokes の定理 (47) は Gauss の定理 (43):

$$\int_{\partial V} p df_x = \int_V \partial_x p dV$$

を与える.

付録 B 無限小振幅波 (§ 32–§ 38) まとめ

水の波の分類はおおよそ図 120 のようになる。ここでは無限小振幅波 (§ 32–§ 38) について、改めてまとめる。

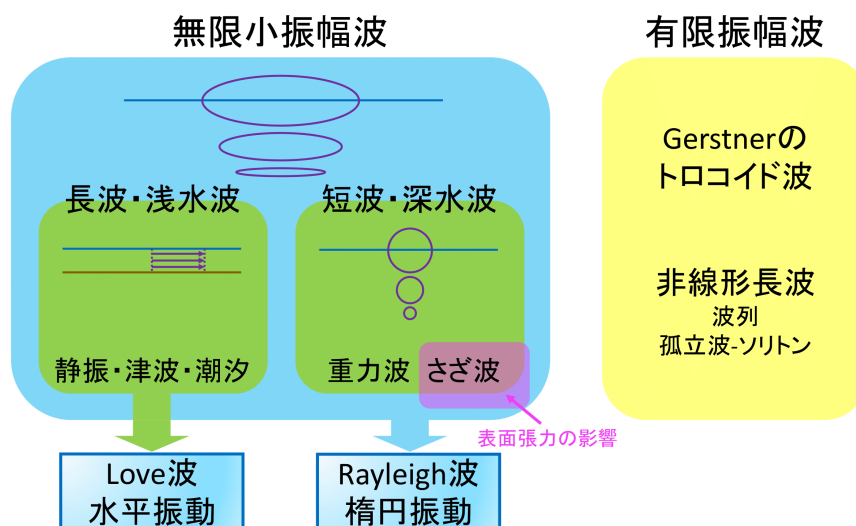


図 120 水の波

- 表面波，無限小振幅の波 (§ 34) (微小振幅波，線形波 [6, 6-1])
 - 基礎方程式： $\Delta\Phi = 0$ (非圧縮性，渦無し)
 - 境界条件：水底・水面の速度 (§ 6 参照)，水面の圧力 p_∞ (§ 7 参照)
 - 近似

$$\Phi = O(\varepsilon) \Rightarrow \mathbf{v} = O(\varepsilon), \quad \eta = O(\varepsilon)$$

として $O(\varepsilon^2)$ を落とす [方程式を線形にするため]

- 解を

$$\Phi = f(y) \cos(kx - \omega t)$$

の形に仮定すると，境界条件より

$$\Phi = A \cosh k(y + h) \cos(kx - \omega t)$$

と定まる (§ 35a) [6, 6-2-1]

- * 分散関係： $c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh}$
- * 流体粒子は楕円運動 (深さを増すとともに楕円は平たくなる)
- * 近似

流体粒子の運動は楕円の中心 \mathbf{x}_0 の近傍， $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$

$$A \sim \Phi = O(\varepsilon), \quad \mathbf{v} = O(\varepsilon), \quad \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \sim \eta = O(\varepsilon)$$

と考えれば, これも $O(\varepsilon^2)$ を落とす近似

流体粒子の位置 \boldsymbol{x} の時間平均が \boldsymbol{x}_0 となるように積分定数をとる

- 定常波, stationary wave (§ 35b) (定在波, standing wave [6, 6-4]*21)
- x 軸負の方向への進行波との重ね合わせ

$$\eta \sim \sin kx \cos \omega t$$

は定在波

これを与える速度ポテンシャル Φ から,

$$\text{腹: } \boldsymbol{u} = (0, v), \quad \text{節: } \boldsymbol{u} = (u, 0)$$

が見出される

- 長い波, 浅い水の理論 (§ 36 前半) (長波, 浅水波 [6, 6-2-1])
 - 近似 $h \ll \lambda$

$$\frac{y \text{ 方向の振幅}}{x \text{ 方向の振幅}} = (y_0 + h) \ll 1$$

として y 方向の運動を無視

- $c = \sqrt{gh}$: 非分散的*22
- x 座標が共通の水の層は, 深さによらない一定振幅の水平方向の単振動
- $kh \equiv \xi$ の一次近似

$$\begin{aligned} \tanh \xi &\simeq \xi, \\ \sinh \xi &= \xi + \frac{\xi^3}{3!} + \frac{\xi^5}{5!} + \cdots \simeq \xi, \\ \cosh \xi &= 1 + \frac{\xi^2}{2!} + \frac{\xi^4}{4!} + \cdots \simeq 1. \end{aligned}$$

- 深い波の理論 (§ 36 後半), 短波・深水波
 - 近似 $h \gg \lambda$ (目安: $\lambda < 2h$ で有効)
 - $c = \sqrt{g/k}$: 分散的*23
 - 流体粒子は円運動, 半径は深さとともに指数関数的に減少
 - $\xi \rightarrow \infty$ のとき

$$\begin{aligned} \tanh \xi &= \frac{e^\xi - e^{-\xi}}{e^\xi + e^{-\xi}} \simeq 1, \\ \sinh \xi &\simeq e^\xi / 2, \\ \cosh \xi &\simeq e^\xi / 2. \end{aligned}$$

*21 定常という表現は時間変化しないものを指すと考えられる. 定在波との使い分けについては文献 [6, p.92] 脚注参照.

*22 深いほど速い. 波が屈折して海岸線に平行になる理由.

*23 波長が長いほど速い.

- 表面張力波 = さざ波 (§ 38), 重力波 [6, 6-3]

微小振幅波において, 表面張力を考慮して境界条件を $p_\infty \rightarrow p_\infty + \delta p$ と修正

$$\delta p = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \simeq -\gamma(\partial_{xx} + \partial_{yy})\zeta,$$

$$\Phi = A \cosh k(y+h) \cos(kx - \omega t)$$

– 分散関係 $c = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho}\right) \tanh kh}$

長波: $c \simeq \sqrt{gh}$,

短波: $c \simeq \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho}} = \sqrt{c_\infty^2 + c_0^2}$

* $\lambda = \lambda_m = 2\pi \sqrt{\gamma/\rho g}$ で最小値 c_m

* $\lambda > \lambda_m$ で表面張力が無いときの $c = c_\infty$ にほぼ一致 → 重力波

* $\lambda < \lambda_m$ で重力が無いときの $c = c_0$ にほぼ一致 → 表面張力波・さざ波

群速度 $c_g = d\omega/dk$ に対し

$$\frac{c_g}{c} = 1 - \frac{1}{2} \frac{1 - (\lambda/\lambda_m)^2}{1 + (\lambda/\lambda_m)^2} \begin{cases} < 1 (\text{表面張力波}), & \rightarrow 1/2 (\lambda/\lambda_m \rightarrow 0) \\ > 1 (\text{重力波}), & \rightarrow 3/2 (\lambda/\lambda_m \rightarrow \infty) \end{cases}$$

– 近似

$\partial_t(q^2/2) = O(\varepsilon^2)$ を落とす

- 静振 (§ 33) [6, 6-4]

$$\begin{cases} \text{今井: 運動方程式, 水面の境界条件, 質量保存から} \\ \text{文献 [6, 6-4]: } \Delta\Phi = 0, \text{ 境界条件から} \end{cases}$$

$$\partial_{tt}\Phi = c^2(\partial_{xx} + \partial_{yy})\Phi, \quad c = \sqrt{gh}.$$

– $\Phi = \phi(x, y)e^{i\omega t}$ とおくと ϕ は Helmholtz 方程式

$$(\partial_{xx} + \partial_{yy} + k^2)\phi = 0$$

を満たす.

– 長方形の湖では固有振動の重ね合せ

$$\zeta = \sum_{m,n} A_{m,n} e^{-i\omega_{m,n}t} \cos \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b}$$

– 長波近似

付録 C テンソル

ここでは§ 43 の補足としてテンソルについてまとめる。まず付録 C.1 において相対論を念頭に置き、一般的なテンソルの変換則の説明から始め、次いで付録 C.2 にて、非相対論的な力学において重要となる 3 次元空間の直交座標系の変換に話を限定し、付録 C.1 の一般論との関係を明らかにしつつ、内容の重複を厭わずに再度テンソルについてまとめる。そこで§ 44 における主軸変換を再論する。

C.1 テンソル

物理学の指導原理として、どのような座標系を用いても物理法則は同じ形の方程式で記述されることが要請される (共変性の要請)。そこで物理量が座標変換に対してどのように変化するかを調べるのが有用となる。

■テンソルの定義 座標変換に伴い時空に固定した点の座標が

$$x \equiv (x^0, \dots, x^3) \rightarrow x' \equiv (x'^0, \dots, x'^3)$$

と変わるとき、値が

$$T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} \rightarrow T'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} T^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q} \quad (48)$$

と変化する量 $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ を p 階反変 q 階共変テンソルまたは (p, q) テンソル (の成分) と呼ぶ。

Einstein の規約 テンソルを定義する変換則 (48) 右辺の $\rho_1, \dots, \sigma_1, \dots$ ように 2 度以上現れる添字については 0 から 3 までの和をとる。例えば

$$A^\mu{}_\nu B^\nu \equiv \sum_{\nu=0}^3 A^\mu{}_\nu B^\nu = \sum_{\rho=0}^3 A^\mu{}_\rho B^\rho \equiv A^\mu{}_\rho B^\rho$$

である。添字 μ と違って和をとられる添字 ν は式変形の途中で (μ 以外の) 別の文字 ρ に置き換えても式の意味が変わらない。このような添字をダミー添字と呼ぶ。

特に

$$\begin{aligned} (0, 0) \text{ テンソル} &= \text{スカラー} \\ (1, 0) \text{ テンソル} &= \text{反変ベクトル} \\ (0, 1) \text{ テンソル} &= \text{共変ベクトル} \end{aligned}$$

である [12, pp.256–257] [19, pp.126–127]。以下の量は数学的に変換則が定まっている [2, pp.26–27]。

$$\begin{aligned} \text{座標の微分 } dx^\mu \text{ は反変ベクトル: } dx'^\mu &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \leftarrow \text{全微分} \\ \text{微分演算子 } \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \text{ は共変ベクトル: } \partial'_\mu &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu \leftarrow \text{合成関数の微分} \end{aligned}$$

Kronecker の記号 $\delta^\mu{}_\nu$ を混合テンソル ((1, 1) テンソル) とすれば、その成分が任意の座標系で同じ値を持つことが保証される [19, p.51] :

$$\delta^{\mu'}{}_{\nu'} = \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^{\nu'}} \delta^\rho{}_\sigma = \delta^{\mu'}{}_{\nu'}$$

また線形変換 $x'^{\mu} = a^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ は、係数 a^{μ}_{ν} が座標に依らなければ反変ベクトルの変換則 $x'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} x^{\nu}$ に他ならない (実際 $x'^{\mu} = a^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ を両辺 x^{λ} で微分すると $\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} = a^{\mu}_{\nu} \delta^{\nu}_{\lambda} = a^{\mu}_{\lambda}$ となる). ただし一般には座標 x^{μ} そのものが常にベクトルを形成するとは限らない.

ここで (反変) ベクトル \vec{V} の成分は座標系に依るけれども \vec{V} 自体は座標系に依らない幾何学的な対象である. \vec{V} の成分 V^{α} に対する上記の変換則 $V'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} V^{\beta}$ はこのことと整合している. これは次のように理解できる. 各位置での座標系の基底 \vec{e}_{α} は、座標 x^{α} が増大する方向のベクトルである. 特に (時空の内部に横たわる) 位置ベクトル \vec{x} に対して $\partial_{\alpha} \vec{x}$ を基底 \vec{e}_{α} に用いると、これは共変ベクトルの変換則

$$\vec{e}'_{\alpha} = \partial_{\alpha} \vec{x} = \left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} \partial_{\beta} \right) \vec{x} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} \vec{e}_{\beta}$$

に従う. よって V^{α} が反変ベクトル成分として変換されれば

$$V'^{\alpha} \vec{e}'_{\alpha} = \left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} V^{\beta} \right) \left(\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\alpha}} \vec{e}_{\gamma} \right) = \delta^{\gamma}_{\beta} V^{\beta} \vec{e}_{\gamma} = V^{\alpha} \vec{e}_{\alpha} = \vec{V}$$

となり, どのような座標系を用いても $V^{\alpha} \vec{e}_{\alpha}$ は同一のベクトル \vec{V} を与える [2, pp.25-26].

■物理法則の共変性 両辺が同じ種類のテンソルで書かれた方程式 $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = U^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ の形に物理法則を表せば, これは座標変換に対して形を変えず共変性の要請を満たす [19, pp.53-54]:

$$\begin{aligned} T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} T^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q} \\ &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} U^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q} = U^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}. \end{aligned}$$

■テンソルの和, 積, 縮約から新たなテンソルが作られること テンソルを定義する変換則 (48) から, 以下が容易に示される (付録 C.1.1 参照).

- 同じ種類のテンソルに対しては和が定義される.
(p, q) テンソル $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}, U^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ の和

$$A^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} \equiv T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} + U^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} \quad (49)$$

は (p, q) テンソルである.

- (p, q) テンソル $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ と (r, s) テンソル $U^{\rho_1 \dots \rho_r}_{\sigma_1 \dots \sigma_s}$ の積

$$B^{\mu_1 \dots \mu_p \rho_1 \dots \rho_r}_{\nu_1 \dots \nu_q \sigma_1 \dots \sigma_s} \equiv T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} U^{\rho_1 \dots \rho_r}_{\sigma_1 \dots \sigma_s} \quad (50)$$

は ($p+r, q+s$) テンソルである.

- (p, q) テンソル $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ の添字 μ_i, ν_j をダミー添字 λ にして和をとる操作を縮約という.
これにより ($p-1, q-1$) テンソル

$$C^{\mu_1 \dots \mu_{i-1} \mu_{i+1} \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_{j-1} \nu_{j+1} \dots \nu_q} \equiv T^{\mu_1 \dots \mu_{i-1} \lambda \mu_{i+1} \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_{j-1} \lambda \nu_{j+1} \dots \nu_q} \quad (51)$$

が得られる.

このため以上の方法で新たに作られたテンソルの種類は上下の添字の個数から期待される通りのものとなる。しかし逆に、複数の添字を持つ量がテンソルであるとは限らない。なお $\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$ が座標 x に依る場合、反変ベクトル V^{α} に対して $\partial_{\beta} V^{\alpha}$ を単に共変ベクトル ∂_{β} との積と見てこれを $(1, 1)$ テンソルであると結論することができなくなる。実際、 $\partial_{\beta} V^{\alpha}$ は

$$\partial_{\beta}' V'^{\alpha} = \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \partial_{\mu} \right) \left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu} \right) = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \partial_{\mu} V^{\nu} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \left(\partial_{\mu} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \right) V^{\nu} \quad (52)$$

と変換する [12, pp.264–265].

C.1.1 テンソル (補足)

付録 C.1 で述べたように、テンソルの和 $A^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ (式 (49)), 積 $B^{\mu_1 \dots \mu_p \rho_1 \dots \rho_r}_{\nu_1 \dots \nu_q \sigma_1 \dots \sigma_s}$ (式 (50)), 縮約 $C^{\mu_1 \dots \mu_{i-1} \mu_{i+1} \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_{j-1} \nu_{j+1} \dots \nu_q}$ (式 (51)) がそれぞれ (p, q) テンソル, $(p+r, q+s)$ テンソル, $(p-1, q-1)$ テンソルであることが、テンソルを定義する変換則 (48) から示される。実際これらの新しい座標系での成分をそれぞれ $A'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$, $B'^{\mu_1 \dots \mu_p \rho_1 \dots \rho_r}_{\nu_1 \dots \nu_q \sigma_1 \dots \sigma_s}$, $C'^{\mu_1 \dots \mu_{i-1} \mu_{i+1} \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_{j-1} \nu_{j+1} \dots \nu_q}$ と書くと、

$$\begin{aligned} & A'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} \\ &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} T^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q} + \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} U^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q} \\ &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} A^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q}, \\ & B'^{\mu_1 \dots \mu_p \rho_1 \dots \rho_r}_{\nu_1 \dots \nu_q \sigma_1 \dots \sigma_s} \\ &= \left(\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\alpha_p}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_q}}{\partial x'^{\nu_q}} T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} \right) \left(\frac{\partial x'^{\rho_1}}{\partial x^{\gamma_1}} \dots \frac{\partial x'^{\rho_r}}{\partial x^{\gamma_r}} \frac{\partial x^{\delta_1}}{\partial x'^{\sigma_1}} \dots \frac{\partial x^{\delta_s}}{\partial x'^{\sigma_s}} U^{\gamma_1 \dots \gamma_r}_{\delta_1 \dots \delta_s} \right) \\ &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\alpha_p}} \frac{\partial x^{\rho_1}}{\partial x^{\gamma_1}} \dots \frac{\partial x^{\rho_r}}{\partial x^{\gamma_r}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_q}}{\partial x'^{\nu_q}} \frac{\partial x^{\delta_1}}{\partial x'^{\sigma_1}} \dots \frac{\partial x^{\delta_s}}{\partial x'^{\sigma_s}} B^{\alpha_1 \dots \alpha_p \gamma_1 \dots \gamma_r}_{\beta_1 \dots \beta_q \delta_1 \dots \delta_s}, \\ & C'^{\mu_1 \dots \mu_{i-1} \mu_{i+1} \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_{j-1} \nu_{j+1} \dots \nu_q} \\ &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_{i-1}}}{\partial x^{\rho_{i-1}}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\mu_{i+1}}}{\partial x^{\rho_{i+1}}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \\ & \times \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_{j-1}}}{\partial x'^{\nu_{j-1}}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\sigma_{j+1}}}{\partial x'^{\nu_{j+1}}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} T^{\rho_1 \dots \rho_{i-1} \alpha \rho_{i+1} \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_{j-1} \beta \sigma_{j+1} \dots \sigma_q} \\ &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_{i-1}}}{\partial x^{\rho_{i-1}}} \frac{\partial x^{\mu_{i+1}}}{\partial x^{\rho_{i+1}}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_{j-1}}}{\partial x'^{\nu_{j-1}}} \frac{\partial x^{\sigma_{j+1}}}{\partial x'^{\nu_{j+1}}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} C^{\rho_1 \dots \rho_{i-1} \rho_{i+1} \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_{j-1} \sigma_{j+1} \dots \sigma_q} \\ & \left(\because \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\lambda}} = \delta^{\beta}_{\alpha}, \quad \delta^{\beta}_{\alpha} T^{\rho_1 \dots \rho_{i-1} \alpha \rho_{i+1} \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_{j-1} \beta \sigma_{j+1} \dots \sigma_q} = C^{\rho_1 \dots \rho_{i-1} \rho_{i+1} \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_{j-1} \sigma_{j+1} \dots \sigma_q} \right) \end{aligned}$$

となる。これらはそれぞれ (p, q) テンソル, $(p+r, q+s)$ テンソル, $(p-1, q-1)$ テンソルの変換則である。

C.2 直交変換

C.2.1 直交変換と反変ベクトル成分の変換則

原点を共有する 2 つの直交座標系を考え、それぞれの基底を $\{e_i\}, \{e'_i\}$ と書く。また、共通の位置ベクトル \mathbf{x} で表される、空間に与えられた同一点をそれぞれの座標系で見たときの座標を x_i, x'_i と書く。このとき $a_{ij} \equiv e'_i \cdot e_j$ として座標 x_i と基底 $\{e_i\}$ は共通の変換則

$$x'_i = \sum_j a_{ij} x_j, \quad e'_i = \sum_j a_{ij} e_j \quad (53)$$

に従う (付録 C.2.4 参照).

第 1 式を x_k で微分すると

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \sum_j a_{ij} \delta_{jk} = a_{ik} \equiv \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_k \quad (54)$$

となる. これは次のことを意味する.

- 線形変換 $x'_i = \sum_j a_{ij} x_j$ の変換係数 a_{ij} が作る行列

$$O \equiv (a_{ij}) = \left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \right)$$

は Jacobi 行列に他ならない.

- 変換則 (53) は反変ベクトル成分の変換則に他ならない [12, pp.256–257] [19, pp.126–127].
 - 微分演算子 $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$ は共変ベクトルだから (付録 C.2.4 参照), 基底ベクトル $\mathbf{e}_i = \partial_i \mathbf{x}$ もまた共変ベクトルとなるはずである [2, pp.26–27].
しかし付録 C.2.2 で見るように, 直交座標系を用いる限り反変ベクトル成分の変換則は, 共変ベクトル成分の変換則に一致してしまう.
 - このことは次の能動変換と受動変換の関係と何ら矛盾しない.
すなわち基底にある変換をすると,
座標系に固定した視点からは空間に固定したベクトルがその逆変換で移されて見える.
 - * (例 1) 駅に向かう者にとっては, 逆に駅が自分の方に近づいて来るように見える.
 - * (例 2) 回転する椅子に座ると, 周りの風景が逆回転して見える.

なお, 上式 (54) で 2 つの座標系の役割を入れ替えた式

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \quad (55)$$

が成り立つ.

C.2.2 直交変換に対する Newton の運動方程式の共変性

物理法則を両辺が同じ種類のテンソルで書かれた方程式で表せば, これは座標変換に対して形を変えず共変性の要請を満たす [19, pp.53–54]. ここで Newton の運動方程式の共変性を取り上げよう. ポテンシャル V を持つ保存力場の下で運動する質量 m の粒子に対し, Newton の運動方程式は

$$m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (56)$$

である. この式の左辺は反変ベクトル成分であるのに対し, 右辺は共変ベクトル成分である (付録 C.2.4 参照). 従ってこれが一般の座標変換に対して共変的であることは保証されない. しかし用いる座標系を直交座標系に限れば, 運動方程式 (56) は形を変えないと考えられる. 実際このとき, 式 (54), 式 (55) より

$$\frac{\partial x'_j}{\partial x_i} = \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \quad (57)$$

なので, 反変ベクトル成分の変換則は, 共変ベクトル成分の変換則に一致してしまう:

$$x'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} x_j = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} x_j.$$

このため運動方程式 (56) の両辺は同じ変換則に従い、新しい座標系でも式 (56) の形の運動方程式

$$m\ddot{x}'_i = -\frac{\partial V}{\partial x'_i}$$

が成り立つことになる。なお、上式 (57) は行列 O が直交行列であること

$$(O^T)_{ij} = (O^{-1})_{ij}$$

を意味している。

C.2.3 主軸変換とテンソルの変換則

慣性テンソル I_{ij} を (i, j) 成分に持つ行列 $I = (I_{ij})$ を考えるとこれは対称行列なので、適当な直交行列 O を用いて

$$I' = OIO^{-1}$$

と対角化できる。これは適当な座標系において $I = (I_{ij})$ が対角行列となることを意味する。実際、座標変換 $x'_i = \sum_j a_{ij}x_j$ における変換係数の成す行列

$$O \equiv (a_{ij}) = \left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \right)$$

を用い、2 階テンソルの変換則は

$$I' = OIO^{-1}$$

と書ける。ここで式 (57) により、 $(2, 0), (1, 1), (0, 2)$ テンソルの変換則が一致することを思い出そう。

C.2.4 直交変換 (補足)

座標 x_i と基底 $\{e_i\}$ の変換則 (53) は次のように確かめられる。

$$\begin{aligned} e'_i &= \sum_j (e'_i \cdot e_j) e_j = \sum_j a_{ij} e_j, \\ \mathbf{x} &= \sum_j x_j e_j = \sum_{i,j} x_j (e_j \cdot e'_i) e'_i, \quad \therefore x'_i = \sum_j (e_j \cdot e'_i) x_j = \sum_j a_{ij} x_j \end{aligned}$$

運動方程式 (56) の両辺の変換則について、以下の量は数学的に変換則が定まっている [2, pp.26–27].

$$\begin{aligned} \text{座標の微分 } dx_i \text{ は反変ベクトル: } \quad dx'_i &= \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} dx_j \quad \Leftarrow \quad \text{全微分} \\ \text{微分演算子 } \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ は共変ベクトル: } \quad \partial'_i &= \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \partial_j \quad \Leftarrow \quad \text{合成関数の微分} \end{aligned}$$

付録 D 弾性体の理論

連続体は流体と弾性体に大別される。流体とは対照的に、弾性体は応力を取り除くと変形が元に戻る。ここでは弾性体の理論について簡単にまとめ、本編の流体力学と合わせて連続体の力学を完成させよう。我々は等方的な線形弾性体を仮定して、ひずみと応力の関係式を説明し、運動方程式を立てる。静力学への応用としてねじり秤を、動力学への応用として弾性波を取り上げる。

D.1 変形 [20, pp.102–105]

ひずみがないときに位置 \mathbf{x} にあった弾性体の要素 (質点・粒子として扱う) の、時刻 t におけるひずみによる変位を $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ と表す。その成分を

$$\mathbf{D} = (\xi, \eta, \zeta) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

と表記しよう。そして、はじめに (ひずみがないときに) $\delta\mathbf{x}$ だけ隔たっていた 2 粒子の変位の差

$$\delta\xi_i = \frac{\partial\xi_i}{\partial x_j} \delta x_j$$

における係数を、対称部分と反対称部分に分けて

$$\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}E_{ij} + \frac{1}{2}F_{ij}, \quad E_{ij} \equiv \frac{\partial\xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}, \quad F_{ij} \equiv \frac{\partial\xi_i}{\partial x_j} - \frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}$$

と書く。このときテンソル E_{ij}, F_{ij} の意味は、流体に対する § 9, § 44 の議論と同様に解釈できる。実際、 $\mathbf{v} = \partial\mathbf{D}/\partial t$ は弾性体の位置 \mathbf{x} での速度であり*24、 E_{ij}, F_{ij} はそれぞれ、連続体の変形速度テンソル $e_{ij} = \partial_i v_j + \partial_j v_i$ 、渦度 $\boldsymbol{\omega}$ に双対なテンソル $\Omega_{ij} = \partial_i v_j - \partial_j v_i = \varepsilon_{ijk}\omega_k$ と

$$E_{ij} = \frac{\partial e_{ij}}{\partial t}, \quad F_{ij} = \frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial t}$$

のように関係付けられる。 E_{ij} をひずみテンソルと呼ぶ。

D.2 ひずみと応力関係式 [20, pp.105–107]

弾性体に対しても § 42 と同様に応力テンソル $p_{ij}(= p_{ji})$ を導入できる。ところで弾性体では、応力 p_{ij} とひずみ E_{ij} の間に 1 対 1 の対応関係があり、応力をゼロにするとひずみもゼロに戻る。このような取り扱い、ひずみがある値 (弾性の限界) より小さい範囲で有効である。そこで応力はひずみの 1 次式

$$p_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}$$

で表されると仮定する (線形弾性体)。上式を一般化された **Hooke の法則** と呼ぶ。

*24 考察：粒子の位置ベクトルを $\mathbf{r}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} + \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ とすると、

$$\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t).$$

ここで \mathbf{x} は流体力学における Lagrange 座標の役割を果たす。

ここでさらに等方的な弾性体を仮定すると，等方的な流体に対する変形速度と応力の関係 (44.11):

$$p_{ij} = (-p + \lambda e_{kk})\delta_{ij} + \mu e_{ij}$$

の代わりに，ひずみと応力の関係

$$p_{ij} = \frac{1}{2}\lambda E_{kk}\delta_{ij} + \mu E_{ij} \quad (58)$$

が得られる*25. ここでの λ, μ を **Lamé (ラメ) 定数** と呼ぶ.

D.3 種々の弾性率 [20, pp.107–110]

ひずみと応力の関係式 (58) の帰結をいくつか論じる.

■ $\lambda, \mu \leftrightarrow E, \sigma$ 図 121 のように x 軸に沿って弾性体 (長さ L , 断面積 S) を両側面から力 F で引っ張ったときの，一様な伸びを考える (全体で伸びた長さ ΔL). このとき張力 $p_{xx} = F/S$ 以外の応力成分はゼロである. 対称性より y, z 方向の縮み率 $-\partial\eta/\partial y, -\partial\zeta/\partial z$ は等しい. その x 方向の伸び率 $\partial\xi/\partial x = \Delta L/L$ との比として **Poisson 比**

$$\sigma \equiv \frac{-\partial\eta/\partial y}{\partial\xi/\partial x} = \frac{-\partial\zeta/\partial z}{\partial\xi/\partial x}$$

を定義すると，ひずみと応力の関係式 (58) に基づき，

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \left(< \frac{1}{2} \right) \quad (59)$$

が得られる (導出は下記). また応力 $F/S = p_{xx}$ と伸び率 $\Delta L/L = \partial\xi/\partial x$ は比例関係にあり，そこで局所的な関係

$$p_{xx} = E \frac{\partial\xi}{\partial x}$$

を用いて **Young 率** E を定義すると，

$$E = 2\mu + (1 - 2\sigma)\lambda \quad (60)$$

となる (導出は下記). 上式 (59), (60) は Lamé 定数 λ, μ を，測定可能な弾性率 E, σ で表せることを意味している. 実際，式 (59), (60) を λ, μ について逆に解くと

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)} \quad (61)$$

を得る (導出は下記).

■ **体積弾性率** K 直方体領域 $0 \leq x_i \leq L_i$ を占める弾性体 (体積 $V = L_x L_y L_z$) の各面に，圧力 p を加える (ゼロでない応力成分は $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p$). このときの弾性体の体積減少率 (ひずみ) $\Delta V/V$ (ただし ΔV は体積の減少量) は，圧力 p に比例する. そこで

$$p = K \frac{\Delta V}{V}$$

と書いて **体積弾性率** K を定義すると，

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\sigma)} \quad (62)$$

を得る (導出は下記). なお逆数 $\frac{1}{K} [= \frac{\Delta V/p}{V}]$ を **圧縮率** と呼ぶ.

*25 仮定より圧力 $-p\delta_{ij}$ に対応する項は現れない. $\lambda \rightarrow \lambda/2$.

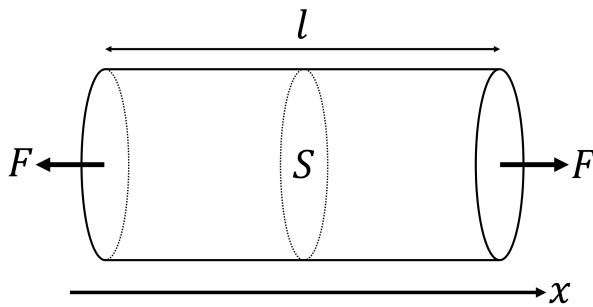


図 121 弾性体の両端に力 F を加えて引っ張る

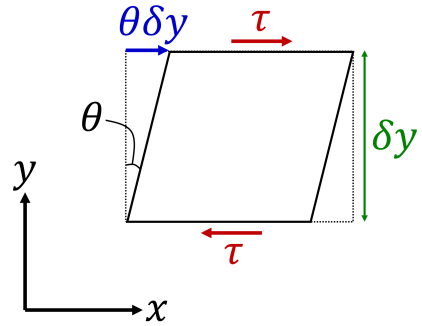


図 122 立方体状の固体の上下面に
ずれの応力 τ を加える

■剛性率 G 図 122 のように立方体状の固体の上下面にずれの応力 τ を加えたとき、ずれの角度 θ は応力 τ に比例する。

$$\tau = G\theta.$$

比例係数 G は剛性率 (ずれ弾性率) と呼ばれ、Lamé 定数 μ に一致する (導出は下記)。

$$G = \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}. \quad (63)$$

■弾性率の定義 (まとめ)

((法線) 応力) = (Young率) \times ((伸縮) ひずみ)	$T = Ee$
((法線) 応力) = (体積弾性率) \times (体積ひずみ)	$p = K(\Delta V/V)$
((接線) 応力) = (剛性率 (ずり弾性率)) \times (ひずみ)	$\tau = G\theta$

いずれも基本的には (応力) = (弾性率) \times (ひずみ) である。

付録 D.3 の式の導出と補足

■ x 方向の伸びにおける等方性 $\partial\eta/\partial y = \partial\zeta/\partial z$ について これはひずみと応力の関係式 (58):

$$(0 =) p_{yy} = \lambda \frac{\partial\xi}{\partial x} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial\eta}{\partial y} + \lambda \frac{\partial\zeta}{\partial z},$$

$$(0 =) p_{zz} = \lambda \frac{\partial\xi}{\partial x} + \lambda \frac{\partial\eta}{\partial y} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial\zeta}{\partial z}$$

を辺々引くことでも確かめられる。

■Poisson 比の式 (59) の導出 ひずみと応力の関係式 (58):

$$p_{yy} = \lambda \frac{\partial\xi}{\partial x} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial\eta}{\partial y} + \lambda \frac{\partial\zeta}{\partial z}$$

に $p_{yy} = 0$ と $\partial\eta/\partial y = \partial\zeta/\partial z$ を代入すると、

$$0 = \lambda \frac{\partial\xi}{\partial x} + 2(\lambda + \mu) \frac{\partial\eta}{\partial y}, \quad \therefore \sigma \equiv \frac{-\partial\eta/\partial y}{\partial\xi/\partial x} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} : (59)$$

が得られる。

■Poisson 比 σ に関する考察 図 121 の円筒状の弾性体 (半径を r とおく) について, 体積 $V = \pi r^2 l$, $dV = \pi r(r dl + 2l dr)$ より

$$\sigma = \frac{-dr/r}{dl/l} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{dV}{\pi r^2 dl} \right).$$

よって式 (59): $\sigma < 1/2$ は $dV > 0$ を意味する.

同じ伸び dl/l に対して太さ方向の縮み $-dr/r$ は, “伸びやすい” 材質ほど大きく, “固い” 材質ほど太さの方向にあまり縮まない*26. このため $\sigma_{ゴム} > \sigma_{ガラス}$ である.

直観的にも式の上でも理解できるように, 同じ伸び dl/l に対して太さの縮み $-dr/r$ が小さい材質ほど, 体積の増大 dV は大きく変化する. したがって “固い” 材質の方が同じ伸びに対する体積変化は大きいことになる (強引な変形と解釈できる).

■Young 率の式 (60) の導出 ひずみと応力の関係式 (58):

$$p_{xx} = (2\mu + \lambda) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \eta}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

に Poisson 比の定義

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\sigma \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

を代入して $\partial \eta / \partial y, \partial \zeta / \partial z$ を消去すると, 応力 p_{xx} と伸び率 $\partial \xi / \partial x$ の比例関係

$$p_{xx} = [2\mu + (1 - 2\sigma)\lambda] \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

が得られる. よって Young 率は式 (60): $E = 2\mu + (1 - 2\sigma)\lambda$ のように同定される.

■ λ, μ を測定できる σ, E で表した式 (61) の導出 式 (59): $\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ より

$$\left(\frac{1}{2\sigma} - 1 \right) \lambda = \left(\frac{1 - 2\sigma}{2\sigma} \right) \lambda = \mu. \quad (64)$$

これを式 (60): $E = 2\mu + (1 - 2\sigma)\lambda$ に代入して

$$\lambda = \frac{E}{(1/\sigma) - 1 - 2\sigma} = \frac{E\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}$$

を得る. これを上式 (64) にもどすと

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}$$

となる.

■体積弾性率 (62) の導出 各辺の長さの変化 dL_i に伴う, 直方体 $0 \leq x_i \leq L_i$ の体積 $V = L_x L_y L_z$ の変化量は

$$dV = L_y L_z dL_x + L_z L_x dL_y + L_x L_y dL_z$$

なので, 体積変化率は

$$\frac{dV}{V} = \frac{dL_x}{L_x} + \frac{dL_y}{L_y} + \frac{dL_z}{L_z}$$

*26 これは言い換えると, 同じ太さ方向の縮み $-dr/r$ に対し “伸びやすい” 材質ほど, 長さ方向の伸び dl/l は小さいということである (まだ伸びる余地がある). 逆と勘違いしないよう, 要注意である.

と表される．ここで特に直方体として弾性体の微小領域を考えると，長さの変化 dL_i は初期位置が $L_i = \Delta x_i$ だけ異なる質点の変位の差 $d\xi_i$ に起因するので，上式は局所的な関係式

$$(\text{体積変化率}) = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{D}$$

を与える．この公式によると，弾性体の微小体積 d^3x の体積変化量は $(\nabla \cdot \mathbf{D})d^3x$ と表される（これは直観的にも，もっともらしい）．そして弾性体の占める有限の領域 V にわたる積分

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{D})d^3x = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

（ただし S は V の表面， $d\mathbf{S}$ は面積要素ベクトル）は，右辺を見ると分かるように，確かに弾性体 V の体積変化を表している．

別証 ここでは連続体の変位 \mathbf{D} の代わりに，速度場 $\dot{\mathbf{D}}$ を考える．一般に n 次元空間の動点 $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ が速度場

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{X})$$

に導かれて運動するとき，動点の集合に固定した領域 $\Delta(t)$ の体積 $|\Delta(t)|$ の時間変化率は

$$\frac{d}{dt}|\Delta(t)| = \int_{\Delta(t)} d^n X \operatorname{div} \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{f} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial X_k} \quad (65)$$

で与えられる．これは速度場のわき出しが体積の膨張率となることを表しており，直観的にもっともらしい．

上式 (65) は次のように証明できる．

まず一般に $n \times n$ の行列 A と単位行列 E に対して，

$$\det(E + tA) = 1 + t\operatorname{Tr}A + O(t^2) \quad (66)$$

が成り立つ [8, pp.70–71]．実際， $\varepsilon^{1\dots n} = 1$ を満たす反対称テンソル $\varepsilon^{i_1\dots i_n}$ を用いて行列式を定義に従って計算すると，

$$\begin{aligned} & \det(E + tA) \\ &= \varepsilon^{i_1\dots i_n} (E + tA)_{1i_1} \cdots (E + tA)_{ni_n} \\ &= \varepsilon^{i_1\dots i_n} \delta_{1i_1} \cdots \delta_{ni_n} \\ & \quad + \varepsilon^{i_1\dots i_n} \{ (A_{1i_1} \delta_{2i_2} \cdots \delta_{ni_n}) + (\delta_{1i_1} A_{2i_2} \delta_{3i_3} \cdots \delta_{ni_n}) + \cdots + (\delta_{1i_1} \cdots \delta_{n-1, i_{n-1}} A_{ni_n}) \} t + O(t^2) \\ &= \varepsilon^{1\dots n} + (\varepsilon^{i_1 2 \dots n} A_{1i_1} + \varepsilon^{1 i_2 3 \dots n} A_{2i_2} + \cdots + \varepsilon^{1 \dots (n-1) i_n} A_{ni_n}) t + O(t^2) \\ &= 1 + \varepsilon^{1\dots n} (A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn}) t + O(t^2) \\ &= 1 + (\operatorname{Tr}A) t + O(t^2) \end{aligned}$$

となる．

ここで動点の時刻 t_0 における初期位置 \mathbf{X} から時刻 $t = t_0 + \Delta t$ における位置 $\mathbf{X}(t)$ への変化を座標変換と見なし，体積を

$$|\Delta(t)| = \int_{\Delta(t_0)} \frac{\partial(\mathbf{X}(t))}{\partial(\mathbf{X})} d^n X \quad (67)$$

と書く。上記の公式 (66) を適用すると、上式右辺における Jacobian は

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\mathbf{X}(t))}{\partial(\mathbf{X})} &= \det \left(E + \left(\frac{\partial f^i(\mathbf{X})}{\partial X^j} \right) \Delta t + O(\Delta t^2) \right) \\ &= 1 + \text{Tr} \left(\frac{\partial f^i(\mathbf{X})}{\partial X^j} \right) \Delta t + O(\Delta t^2) \\ &= 1 + (\text{div} \mathbf{f}) \Delta t + O(\Delta t^2)\end{aligned}$$

と計算される。よって式 (65):

$$\frac{d}{dt} |\Delta(t)| \Big|_{t=t_0} = \int_{\Delta(t_0)} (\text{div} \mathbf{f}) d^n X$$

を得る。

さて、ひずみと応力の関係式 (58):

$$\begin{aligned}p_{xx} &= (2\mu + \lambda) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \eta}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \\ p_{yy} &= \lambda \frac{\partial \xi}{\partial x} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial \eta}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \\ p_{zz} &= \lambda \frac{\partial \xi}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \eta}{\partial y} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial \zeta}{\partial z}\end{aligned}$$

に $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p$ を代入して、3 式を辺々足すと、圧力 p と体積減少率 $\Delta V/V$ の比例関係

$$-3p = (2\mu + 3\lambda)(\nabla \cdot \mathbf{D}) = -(2\mu + 3\lambda) \frac{\Delta V}{V}$$

が得られる。(ここでは ΔV を体積の減少量と定義しているため、最右辺の負号を要する。) よって体積弾性率は

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

と同定される。式 (61) を代入すると、これは E, σ を用いた表現 (62) に書き換えられる。

■剛性率 (62) の導出 図 122 においてゼロでない微分係数 $\partial \xi_i / \partial x_j$ は $\partial \xi_1 / \partial x_2 = \theta$ のみなので、ひずみテンソルのゼロでない成分は

$$E_{12} = E_{21} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = \theta$$

である*27。このときひずみと応力の関係式 (58):

$$p_{ij} = \frac{1}{2} \lambda E_{kk} \delta_{ij} + \mu E_{ij}$$

より、ゼロでない応力成分は

$$(\tau \equiv) p_{21} = p_{12} = \mu E_{12} = \mu \theta$$

であり、上式に見て取れるように、 τ と θ の比例係数は $G = \mu$ となっている。

*27 ただしひずみテンソル E_{12}, E_{21} による変位の場合 $\xi_i = \frac{1}{2} E_{ij} \xi_j$ は図 123 のような純粋なずれひずみであり (§ 9 における変形速度の解釈を参照)、図 122 のようなずれを実現するには、回転の寄与 $F_{12} = -F_{21} = \partial \xi_1 / \partial x_2 = \theta$ を要する。

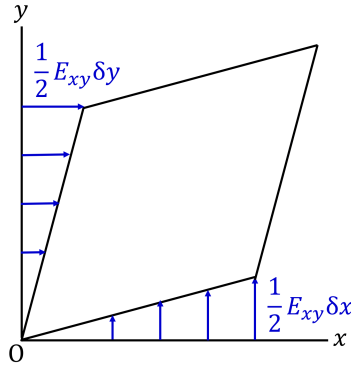


図 123 ひずみテンソル $E_{12}(= E_{21})$ による変形

D.4 弾性体の運動方程式 [20, pp.112–115]

連続体の単位体積に働く応力成分は $\partial_j p_{ij}$ なので (§ 42), 連続体の速度を v_i として運動方程式は

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) v_i = \rho K_i + \partial_j p_{ij}$$

と書ける (§ 44). 弾性体では変位 \mathbf{D} が微小なので, 速度 $\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ も微小である. よって非線形項 $v_j \partial_j v_i$ を無視して, 近似的に

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \rho K_i + \partial_j p_{ij}$$

として良い. これは位置 $\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{D}$ に変位した粒子の加速度 $\ddot{\mathbf{D}} = \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)$ を, 近似的に初期位置 \mathbf{x} における粒子の加速度と見なして, 運動方程式を

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} = \rho K_i + \partial_j p_{ij}$$

と書いた結果に一致している (右辺の力も位置 \mathbf{x} で評価されている). ここにひずみと応力の関係式 (58): $p_{ij} = \frac{1}{2} \lambda E_{kk} \delta_{ij} + \mu E_{ij}$ を代入すると, 等方的な線形弾性体の運動方程式

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} &= \rho K_i + \frac{1}{2} \lambda \partial_i E_{jj} + \mu \partial_j E_{ij} \\ &= \rho K_i + \mu \partial_j^2 \xi_i + (\lambda + \mu) \partial_i (\partial_j \xi_j), \\ \therefore \rho \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} &= \rho \mathbf{K} + \mu \Delta \mathbf{D} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{D}) \end{aligned} \quad (68)$$

を得る.

なお連続の式においても速度 \mathbf{v} を無視すると,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \simeq 0$$

となる. このため特に初期時刻において密度 ρ が一様であれば, ρ は時間的にも空間的にも一定である.

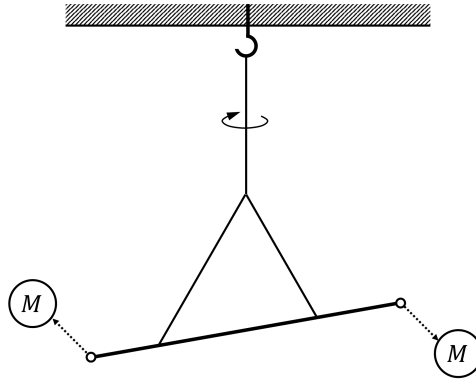


図 124 ねじり秤

D.5 ねじり秤

Cavendish (キャベンディッシュ) は図 124 のようなねじり秤を用いて、小物体間の万有引力を測定した。これにより万有引力の法則 (逆自乗則) が実験的に確かめられ、万有引力定数の値が求められた [7, p.102]。この実験ではねじり秤のねじれ角が、偶力のモーメントに比例するという事実が利用されている。このことは線形弾性体の仮定の下ではもっともらしく思われるが、以下では実際にそれが正しいことを証明しよう [21, § 16]。

細長い棒状の弾性体が、直線状を保ったままねじれる場合を考える。このとき棒のある断面に対して、棒の軸方向 (z 軸に選ぶ) に沿って dz だけ隔たる断面は、相対的に何らかの角度 $d\phi$ だけ回転している。そこでねじれ角 (torsion angle) τ を、単位長さあたりの回転角 $\tau = d\phi/dz$ として導入する。 τ は十分小さいものとして、我々は前節までの理論を適用する。(ただしこの場合にも棒が長ければ、棒の一端は他端に対して大きな角度回転し得る。)

原点近くにおいて局所的に、ねじれに伴うひずみと応力を計算しよう。その際 [z 軸がねじれの回転軸に一致するように] 棒の内部に座標原点をとる。原点の近くに限れば、 τ を一定と見なして、高さ z での回転角を $\delta\phi = \tau z$ として良い。また一般に棒がねじれる際には、質点は z 方向へも変位する。 τ が小さければ、そのような変位 ζ は τ に比例すると考えられるので、何らかの関数 $\psi(x, y)$ [z には依らないことに注意] を用いて変位 $\mathbf{D} = (\xi, \eta, \zeta)$ は

$$\xi = -(\tau z)y, \quad \eta = (\tau z)x, \quad \zeta = \tau\psi(x, y)$$

と表される。($\psi(x, y)$ はねじれ関数 (torsion function) と呼ばれる。) ここからひずみテンソル $E_{ij} = \partial_i\xi_j + \partial_j\xi_i$ のゼロでない成分は

$$E_{zx} = E_{xz} = \tau \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y \right), \quad E_{yz} = E_{zy} = \tau \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x \right) \quad (69)$$

と計算される。このとき $E_{kk} = 0$ となることに注意すると (ねじれは体積変化を引き起こさない)、ひずみと応力の関係式 (58): $p_{ij} = \frac{1}{2}\lambda E_{kk}\delta_{ij} + \mu E_{ij}$ よりゼロでない応力成分は

$$p_{zx} = p_{xz} = \mu\tau \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y \right), \quad p_{yz} = p_{zy} = \mu\tau \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x \right) \quad (70)$$

と求まる。

ここでつり合いの条件を見出すために、弾性体の自由エネルギー F の一般的な表現を調べておく [21, § 4]. (温度一定の下で) 自由エネルギー F はひずみ E_{ij} の関数であり、その微分 $\partial F/\partial E_{ij}$ が応力 (58) を与えるためには、

$$F = F_0 + \frac{1}{4}\lambda \sum_i E_{ii}^2 + \frac{1}{2}\lambda \sum_{i,j} E_{ij}^2$$

であれば良い。これはひずみテンソル E_{ij} から作られるスカラーとなっていることにも注意する。さらに定数項 F_0 (変形のないときのエネルギー) を落とせば、 F は E_{ij} の 2 次形式となるので、[同次関数についての] Euler の定理より

$$2F = E_{ij} \frac{\partial F}{\partial E_{ij}} = E_{ij} p_{ij}, \quad \therefore F = \frac{1}{2} p_{ij} E_{ij}$$

と表される。[これは局所的に定義されており、単位体積当たりの自由エネルギーと見なされる.]

さて、棒のねじれの問題に戻ろう。上式 (69), (70) より、棒のねじれによる全自由エネルギー $F_{\text{rod}} = \int \frac{1}{2} p_{ij} E_{ij} dV$ は

$$F_{\text{rod}} = \int \frac{1}{2} C \tau^2 dz$$

という形をとる (積分は棒全体にわたって行う)。特に棒の一端が固定されており、他端に棒のねじれを引き起こす偶力が作用している場合を考えよう。偶力によるポテンシャル・エネルギーを U とすると、つり合いの状態では全エネルギー $F_{\text{rod}} + U$ が最小値をとる。したがってねじれの角度 $\phi(z)$ の変分に伴う、全エネルギーの変化量は

$$\delta F_{\text{rod}} + \delta U = 0$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \delta F_{\text{rod}} &= \delta \int \frac{1}{2} C \tau^2 dz = \int C \tau (\delta \tau) dz = \int C \tau \left(\frac{d}{dz} \delta \phi \right) dz \\ &= - \int C \frac{d\tau}{dz} \delta \phi dz + [C \tau \delta \phi] \quad (\text{部分積分した}) \end{aligned}$$

において、棒の固定された一端では $\delta \phi = 0$ なので、境界項 $[C \tau \delta \phi]$ は外力の作用しているもう一端での値 $C \tau \delta \phi$ となる。また偶力のする仕事は、(端点での) 角度変化 $\delta \phi$ と偶力のモーメント M の積 $M \delta \phi$ で与えられるので [偶力 f に移動距離 $R \delta \phi$ (R は腕の長さ) をかけて $2 \times f \times R \delta \phi = M \delta \phi$ 。関連して力のモーメントは仕事 (エネルギー) の次元を持つ],

$$\delta U = -M \delta \phi.$$

よってつり合いの条件は

$$- \int C \frac{d\tau}{dz} \delta \phi dz + [\delta \phi (-M + C \tau)] = 0 \quad (71)$$

と表される。 z に関する積分において、変分 $\delta \phi$ は任意にとれるから、

$$C \frac{d\tau}{dz} = 0, \quad \therefore \tau = \text{const.}$$

こうして、ねじれ角は棒に沿って一定でなければならないことが導かれる。そしてこれを満たす実際のねじれに対して、今度は上式 (71) の端点の項がゼロになるから、

$$\tau = \frac{M}{C}.$$

すなわち、ねじれ角 τ は偶力のモーメント M に比例する。

D.6 弾性波 [20, pp.115–117]

動力学への応用として，弾性体のひずみが波として伝播する現象を取り上げよう (弾性波). ρ は一定とし，外力は $\mathbf{K} = 0$ とする. このとき x 方向に伝播する波を想定して $\mathbf{D} = \mathbf{D}(x, t)$ を仮定すると，運動方程式 (68) は

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \nabla \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

となる. これは成分ごとに書くと，波動方程式

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (72)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad (73)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (74)$$

になっており，ひずみが x 方向に伝播する平面波解を持つ.

- 縦波の伝播速度は，式 (72) より $v_l = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}}$ で与えられる.
- 横波の伝播速度は，式 (73), (74) より $v_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} (< v_l)$ で与えられる.
- ★ 添字 l, t はそれぞれ longitudinal wave (縦波), transverse wave (横波) を表す.

Lamé 定数の代わりに弾性率 E, σ を用いて表せば，

$$v_l = \sqrt{\frac{1 - \sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \cdot \frac{E}{\rho}}, \quad v_t = \sqrt{\frac{E}{2(1 + \sigma)\rho}} = v_l \sqrt{\frac{1 - 2\sigma}{2(1 - \sigma)}}.$$

この結果から地震における P 波と S 波を説明できる.

$$\begin{aligned} \text{P 波} &\leftrightarrow \text{縦波, 伝播速度 } v_l, \\ \text{S 波} &\leftrightarrow \text{横波, 伝播速度 } v_t (< v_l). \end{aligned}$$

(P は prime, S は second を表す. P 波が先に到達し, S 波が遅れてやって来る.)

参考文献

- [1] 木田重雄, 柳瀬眞一郎, 2018, 乱流力学, 株式会社朝倉書店, 東京.
- [2] 山本義隆, 中村孔一, 2013, 朝倉物理学大系 1 解析力学 I, 株式会社朝倉書店, 東京.
- [3] 江沢洋, 中村孔一, 山本義隆, 2022, 演習詳解 力学 [第 2 版], 株式会社 筑摩書房, 東京.
- [4] S.Okasha, 2011, 1 冊でわかる 科学哲学 (廣瀬覚訳), 株式会社岩波書店, 東京.
- [5] ランダウ=リフシツ 『流体力学』
- [6] 巽友正, 1982, 流体力学, 培風館, 東京.
- [7] ファインマンほか, 2012, ファインマン物理学 II (富山小太郎訳), 株式会社岩波書店, 東京.
- [8] 香取眞理, 2016, 裳華房テキストシリーズ-物理学, 非平衡統計力学, 株式会社裳華房, 東京.
- [9] ハーベイ・ゴールド, ジャン・トポチニク, 2000, 計算物理学入門 (石川正勝, 宮島佐介訳), 株式会社ピアソン・エデュケーション, 東京.
- [10] 北原和夫, 吉川研一, 1994, 非平衡系の科学 I 反応・拡散・対流の現象論, 講談社サイエンティフィク, 東京.
- [11] 長沼伸一郎, 2013, 物理数学の直観的方法〈普及版〉理工系で学ぶ数学「難所突破」の特効薬, 株式会社講談社, 東京.
- [12] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシツ, 2015, ランダウ=リフシツ理論物理学教程 場の古典論 (原書第 6 版)(恒藤敏彦, 広重徹訳), 東京図書株式会社, 東京.
- [13] 矢野健太郎, 石原繁, 2013, 基礎解析学 (改訂版), 株式会社裳華房, 東京.
- [14] 砂川重信, 2014, 電磁気学 物理テキストシリーズ 4, 株式会社岩波書店, 東京.
- [15] 石渡良三, 根本光正, 2004, 流れのふしぎ 遊んでわかる流体力学の ABC, 株式会社講談社.
- [16] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシツ, 2013, ランダウ=リフシツ理論物理学教程 力学 (増訂第 3 版)(広重徹, 水戸巖訳), 東京図書株式会社, 東京.
- [17] 中村伝, 1997, 統計力学 物理テキストシリーズ 10, 株式会社岩波書店, 東京.
- [18] シュッツ, 2010, 第 2 版シュッツ 相対論入門 (江里口良治, 二間瀬敏史訳), 丸善株式会社, 東京.
- [19] 内山龍雄, 2014, 相対性理論 物理テキストシリーズ 8, 株式会社岩波書店, 東京.
- [20] 寺沢徳雄, 2013, 振動と波動 物理テキストシリーズ 7, 株式会社岩波書店, 東京.
- [21] ランダウ=リフシツ 『弾性体の理論』