

理論物理学

古典的統一理論，素粒子標準理論，弦理論

——要点と途中計算を分離——

理論物理学のノートを公開中

<http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/>

まえがき

本稿は一言で言えば、「要点と途中計算を分離した見通しの良い構成により、古典物理学から弦理論までを近道で登りつめる、素粒子物理学を中心とした独学可能なテキスト」である。

「要点と途中計算の分離」は次のような問題意識に基づいている。すなわち物理の教科書にありがちな難点として、

- 結論が計算に埋もれていて要点を掴みにくい
- しかしながら内容を丁寧に追いかけるには、途中計算や説明が省かれすぎている

ということが挙げられる。「帯に短し襷に長し」である。そこで本稿は第 I 部であらかじめ要点のみを述べ、細かい途中計算や補足を第 II 部で行うという構成を採用した。(もちろん、このような書き方にも一長一短はあるだろう。また計算式のどこまでを要点に取り込むかの判断は恣意性を免れない。) 大まかに言うと、第 I 部(要点編)が勉強の後に頭に残したい知識であり、第 II 部(導出編)はそれを理解・納得するために必要な式の導出と論理展開の詳細である。読者は第 II 部(導出編)を度外視して、第 I 部(要点編)のみを読み物として読み進めることもできる。

第 I 部(要点編)は以下のように進む。

まず第 1 章では古典物理学について説明する。古典論において自然は粒子と場(電磁場と重力場)から成る。それらの時間発展は最小作用原理の下で、作用の表式の中に完全に含まれており、この意味である種の古典的統一理論と呼べる体系を提示することができる。一般相対性理論に対する明快な説明と洞察を与えることも、この章の主要な目的の 1 つである。

次に第 2 章では素粒子物理学の準備を兼ねて、量子力学の基礎(主に非相対論的量子力学)について簡潔にまとめる。

第 3 章では量子電磁力学(QED)を概観する。QED は古典電磁気学を量子化した理論にあたる。量子力学は系の時間発展を記述する枠組みであり、Lagrangian を与えると理論の量子ダイナミクスが決定される。ここから理論のあらゆる予言が得られることになる。我々は QED の Lagrangian から出発して場を量子化する。量子化の手続きには正準量子化を採用する。これは場を演算子と見なして正準(反)交換関係を課すと、古典場の Fourier 係数が粒子の生成・消滅演算子になるというものである。さらに具体的な素粒子の反応として $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ を取り上げ、その確率振幅と断面積を導く。これを通して Feynman ダイアグラムを確率振幅の表式に翻訳する、QED の Feynman 規則を垣間見ることができる。QED のすべての Feynman 規則をその起源とともに例示的に説明し、繰り込みと理論の正則化についても入門的な解説を行う。

続く第 4 章では量子色力学(QCD)と電弱統一理論へと進み、素粒子標準理論(標準模型)の説明を完成させる。自然界の基本的な力には重力と電磁力に加えて、弱い力と強い力があることが知られている。一般にニュートリノを含む過程は弱い力によって媒介されている。弱い力と電磁力は電弱理論によって統一される。また強い力はハドロン(強粒子)を構成するクォークを互いに束縛しており、QCD によって記述される。標準理論は素粒子物理の現在の知見を完全にまとめたものであり、QCD と電弱理論から形成される。

第 5 章からは弦理論に入る。弦理論は重力を含むすべての力を統一する理論の有力な候補である。弦は 1 種類であり、弦の振動としてあらゆる粒子が現れるので、すべての粒子が単一の理論に自然に組み込まれる。第 5 章では弦の古典論から始めて、光錐ゲージを利用した弦の量子化までを扱う。

第 6 章では弦理論のさらに発展的な話題に触れる。

全体を改めてまとめると、本稿は標語的には、言わば物理学の主要な「駅」だけに停車する「古典物理学」発「弦理論」行きの急行列車である。過度に専門的な内容には踏み入らず、簡単な応用のみを取り上げ、原理と基礎的な内容を最小限の時間と労力で網羅できるように努めた。しかしながらそのような記述は当然、多くの題材や重要事項を容赦なく切り捨てることで可能となっている。自戒を込めて、本稿で扱っている内容は限られており、物理学のほんの一部でしかないことを断っておく。本稿では扱いきれなかった内容を含め、本稿の他にも理論物理学の各種ノートを以下のページで公開している。

<http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/>

特に概要を述べるに留めた第4章(素粒子の相互作用)と第6章(弦理論《発展編》)の詳細に関しては、それぞれ文献 [1](F. マンドル/G. ショー『場の量子論 第2巻 素粒子の相互作用』)と文献 [2](B. ツヴィーバハ『初級講座 弦理論《発展編》)のノートを参照されたい。

なお本稿には誤りや筆者の勘違いが潜んでいるかもしれないことを告白しておく。至らぬ点は、筆者の勉強不足である。

目次

第 I 部	要点編	7
1	古典物理学	7
1.1	一般相対性理論の概念	8
1.2	特殊相対性理論の概念	21
1.3	Lagrange 形式と Hamilton 形式	25
1.4	古典的統一理論	36
1.5	粒子と場の運動方程式	40
1.6	特殊相対性理論における運動方程式	42
1.7	電磁気学	53
1.8	重力場	61
2	量子力学の基礎	70
2.1	ケット, ブラおよび演算子	70
2.2	不確定関係	75
2.3	位置, 運動量および平行移動	77
2.4	時間的発展と Schrödinger 方程式	80
2.5	Schrödinger 描像, Heisenberg 描像, 相互作用描像	85
2.6	生成・消滅演算子	87
2.7	古典的極限	88
2.8	角運動量	95
2.9	水素原子	105
3	量子電磁力学 (QED)	109
3.1	場の量子論の準備	110
3.2	Klein-Gordon 場	112
3.3	電磁場	119
3.4	場の Lorentz 変換とスピノル	125
3.5	Dirac 場	131
3.6	量子電磁力学 (QED) の Lagrangian 密度	144
3.7	S 行列展開	148
3.8	反応 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ の確率振幅と断面積	152
3.9	QED の Feynman 規則	160
3.10	輻射補正	172
3.11	正則化	184
4	素粒子の相互作用	189

4.1	ゲージ理論	189
4.2	場の理論の方法	194
4.3	径路積分	199
4.4	量子色力学	202
4.5	漸近的自由性	210
4.6	弱い相互作用	211
4.7	弱い相互作用のゲージ理論	215
4.8	自発的な対称性の破れ	220
4.9	電弱標準理論	227
4.10	クォークの電弱相互作用	232
5	弦理論《基礎編》	234
5.1	弦の古典論——序論	234
5.2	光錐座標系と余剰次元	241
5.3	相対論的な弦	245
5.4	世界面カレントと保存量	251
5.5	相対論的な光錐弦	255
5.6	弦の量子論——序論	260
5.7	各種の光錐場とボゾン	269
5.8	光錐ゲージにおける点粒子	273
5.9	相対論的な量子開弦	274
5.10	相対論的な量子閉弦	281
5.11	超弦理論入門	285
6	弦理論《発展編》	291
6.1	D-ブレーンとゲージ場	291
6.2	弦のチャージと電荷	293
6.3	閉弦の T 双対性	296
6.4	開弦および D-ブレーンの T 双対性	299
6.5	電磁場を持つ D-ブレーンと T 双対性	303
6.6	Born-Infeld 理論と D-ブレーンの電磁場	305
6.7	弦理論と素粒子物理	308
6.8	弦の熱力学とブラックホール	314
6.9	強い相互作用と AdS/CFT 対応	317
6.10	弦の共変な量子化	321
6.11	弦の基本的な相互作用と Riemann 面	325
6.12	弦のダイアグラムの構造とループ振幅	329

7	古典物理学 (補足)	334
7.1	一般相対性理論の概念 (補足)	334
7.2	特殊相対性理論の概念 (補足)	345
7.3	Lagrange 形式と Hamilton 形式 (補足)	346
7.4	古典的統一理論 (補足)	353
7.5	粒子と場の運動方程式 (補足)	358
7.6	特殊相対性理論における運動方程式 (補足)	362
7.7	電磁気学 (補足)	370
7.8	重力場 (補足)	380
8	量子力学の基礎 (補足)	391
8.1	ケット, ブラおよび演算子 (補足)	391
8.2	不確定関係 (補足)	395
8.3	位置, 運動量および平行移動 (補足)	396
8.4	時間的発展と Schrödinger 方程式 (補足)	399
8.5	Schrödinger 描像, Heisenberg 描像, 相互作用描像 (補足)	405
8.6	生成・消滅演算子 (補足)	406
8.7	古典的極限 (補足)	408
8.8	角運動量 (補足)	413
8.9	水素原子 (補足)	428
9	量子電磁力学 (QED)(補足)	436
9.1	場の量子論の準備 (補足)	436
9.2	Klein-Gordon 場 (補足)	437
9.3	電磁場 (補足)	444
9.4	場の Lorentz 変換とスピノル (補足)	454
9.5	Dirac 場 (補足)	462
9.6	量子電磁力学 (QED) の Lagrangian 密度 (補足)	483
9.7	S 行列展開 (補足)	485
9.8	反応 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ の確率振幅と断面積 (補足)	489
9.9	QED の Feynman 規則 (補足)	499
9.10	輻射補正 (補足)	508
9.11	正則化 (補足)	514
10	弦理論《基礎編》(補足)	522
10.1	光錐座標系と余剰次元 (補足)	522
10.2	相対論的な弦 (補足)	524
10.3	世界面カレントと保存量 (補足)	526
10.4	相対論的な光錐弦 (補足)	527
10.5	各種の光錐場とボゾン (補足)	532
10.6	光錐ゲージにおける点粒子 (補足)	533

10.7	相対論的な量子開弦 (補足)	534
10.8	相対論的な量子閉弦 (補足)	546
10.9	超弦理論入門 (補足)	553

第 I 部

要点編

1 古典物理学

古典物理学において自然界は粒子と場 (電磁場と重力場) から成る。その振舞いを記述する最も広い枠組みは一般相対性理論である。そこでまず 1.1 節では、一般相対性理論で用いられる概念を説明する。1.2 節では特に重力を含まない (すなわち平坦な時空における) 理論である特殊相対性理論に焦点を当てる。Lagrange 形式と Hamilton 形式により古典的な理論を定式化する一般的な手法については 1.3 節で導入する。ここで我々は対称性と保存則の関係を基調として、各種の保存量を定義する。ここまでで具体的な物理を論じるための準備が一通り完了する。

1.4 節では粒子・電磁場・重力場の複合系に対する作用を原理として提示する。この節は本章の最も重要な部分の 1 つに位置付けられる。次いで我々は最小作用原理から粒子と場の運動方程式を導く (1.5 節)。後の章への応用も念頭に置いて、1.6 節では特殊相対性理論の範囲での理論の定式化を併せて入念に調べる。(実際、本稿では形の上で一般相対性理論における運動方程式を与えてはいるものの、電磁気学に関しては特に興味を持たれる、重力場のない場合しか扱っていない。) さらに以下にまとめたように、運動方程式をいくつかの簡単な系に適用し、粒子と場の振舞いを研究する。

最小作用原理

↓

- 粒子の運動方程式
 - 与えられた (一様不変な) 電磁場中の粒子の (非相対論的な) 運動 (1.7.1 節)
 - 重力場中の粒子の運動 (1.8.2 節)
- 重力場中の Maxwell 方程式 → (平坦な時空での) 電磁気学
 - 静電場・静磁場 (1.7.2 節)
 - * 電荷分布 → 静電場 (Coulomb の法則)
 - * 電流分布 → 静磁場 (Biot-Savart の法則)
 - 電磁波 (1.7.3 節)
 - * 任意に運動する電荷の作る電磁場 (1.7.4 節)
遅延ポテンシャル
 - * 幾何光学 (1.7.5 節)
- Einstein 方程式 → 物体の作る定常的な重力場, 重力波
 - Newton の万有引力の法則 (1.8.1 節)
 - 中心対称な重力場・Schwarzschild 時空 (1.8.2 節)
 - * 空間の歪み
 - * 時間の遅れ
 - * 「時空の歪みに沿った」粒子の運動
現実の軌道と仮想的な軌道に対する粒子の固有時間の数値シミュレーション
 - 重力波 (1.8.3 節)

■表記法など 本章では以下の約束に従う。

- 断りのない限り,
 - 時空の 4 成分 $0, 1, 2, 3$ をとる添字にギリシア文字 $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots$ を用い,
 - 空間成分 $1, 2, 3$ のみをとる添字にラテン文字 i, j, k, \dots を用いることにする.
- 慣性系での計量テンソル (Minkowski 計量) の全成分を

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とする流儀を採用する.

- 計量テンソルと慣性系については 1.1.2 節, 1.1.3 節を参照せよ.
- 任意の 4 元反変ベクトルを $a^\mu = (a^0, \mathbf{a})$ のように書く.
 - ここに a^0 はベクトル a^μ の時間成分, \mathbf{a} はベクトル a^μ の空間成分である.
 - 4 元反変ベクトルを表すのに, a^μ の他に a, \vec{a} という表記も併用する.
- 電磁気学の単位系として Gauss 単位系を採用する*1.

1.1 一般相対性理論の概念

1.1.1 テンソル

物理学の指導原理として, どのような座標系を用いても物理法則は同じ形の方程式で記述されることが要請される (共変性の要請). そこで物理量が座標変換に対してどのように変化するかを調べるのが有用となる.

■テンソルの定義 時空の座標を $x \equiv (x^0, \dots, x^3)$ のように表記する. $t = x^0/c$ は時間座標であり, 空間座標 (x^1, x^2, x^3) はデカルト座標に限らない一般座標である.

座標変換に伴い時空に固定した点の座標が³

$$x \equiv (x^0, \dots, x^3) \rightarrow x' \equiv (x'^0, \dots, x'^3)$$

と変わるとき, 値が³

$$T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} \rightarrow T'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} T^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q} \quad (1)$$

と変化する量 $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ を p 階反変 q 階共変テンソルまたは (p, q) テンソル (の成分) と呼ぶ.

Einstein の規約 テンソルを定義する変換則 (1) 右辺の $\rho_1, \dots, \sigma_1, \dots$ ように 2 度以上現れる添字については

*1 Gauss 単位系において (平坦な時空では) 磁場 \mathbf{H} と磁束密度 \mathbf{B} は等しい. 実際, 国際単位系における磁場と磁束密度をそれぞれ $\mathbf{H}_{\text{SI}}, \mathbf{B}_{\text{SI}}$ とすると, Gauss 単位系における磁場 \mathbf{H}_{G} と磁束密度 \mathbf{B}_{G} は

$$\mathbf{B}_{\text{G}} = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} \mathbf{B}_{\text{SI}} = \sqrt{4\pi\mu_0} \mathbf{H}_{\text{SI}} = \mathbf{H}_{\text{G}}$$

によって関係付けられる (μ_0 は真空の透磁率).

0 から 3 までの和をとる。例えば

$$A^\mu{}_\nu B^\nu \equiv \sum_{\nu=0}^3 A^\mu{}_\nu B^\nu = \sum_{\rho=0}^3 A^\mu{}_\rho B^\rho \equiv A^\mu{}_\rho B^\rho$$

である。添字 μ と違って和をとられる添字 ν は式変形の途中で (μ 以外の) 別の文字 ρ に置き換えても式の意味が変わらない。このような添字をダミー添字と呼ぶ。

テンソル場 テンソル場に対して変換則 (1) は、与えられた時空点における場の値の変化を規定する。右辺は座標 x の関数であるのに対し、左辺 T'^{\dots} は同一の点を表す新しい座標 x' の関数と見なされる。

特に

$$\begin{aligned} (0,0) \text{ テンソル} &= \text{スカラー} \\ (1,0) \text{ テンソル} &= \text{反変ベクトル} \\ (0,1) \text{ テンソル} &= \text{共変ベクトル} \end{aligned}$$

である [3, pp.256–257] [4, pp.126–127]。以下の量は数学的に変換則が定まっている [5, pp.26–27]。

$$\begin{aligned} \text{座標の微分 } dx^\mu \text{ は反変ベクトル: } dx'^\mu &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \leftarrow \text{全微分} \\ \text{微分演算子 } \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \text{ は共変ベクトル: } \partial'_\mu &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu \leftarrow \text{合成関数の微分} \end{aligned}$$

Kronecker の記号 $\delta^\mu{}_\nu$ を混合テンソル ((1,1) テンソル) とすれば、その成分が任意の座標系で同じ値を持つことが保証される [4, p.51] :

$$\delta^{\mu'}{}_{\nu'} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^{\rho'}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^{\nu'}} \delta^\rho{}_\sigma = \delta^{\mu'}{}_{\nu'}$$

また線形変換 $x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu$ は、係数 $a^\mu{}_\nu$ が座標に依らなければ反変ベクトルの変換則 $x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} x^\nu$ に他ならない (実際 $x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu$ を両辺 x^λ で微分すると $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} = a^\mu{}_\nu \delta^\nu{}_\lambda = a^\mu{}_\lambda$ となる)。ただし一般には座標 x^μ そのものが常にベクトルを形成するとは限らない。

ここで (反変) ベクトル \vec{V} の成分は座標系に依るけれども \vec{V} 自体は座標系に依らない幾何学的な対象である。 \vec{V} の成分 V^α に対する上記の変換則 $V'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} V^\beta$ はこのことと整合している。これは次のように理解できる。各位置での座標系の基底 \vec{e}_α は、座標 x^α が増大する方向のベクトルである。特に (時空の内部に横たわる) 位置ベクトル \vec{x} に対して $\partial_\alpha \vec{x}$ を基底 \vec{e}_α に用いると、これは共変ベクトルの変換則

$$\vec{e}'_\alpha = \partial'_\alpha \vec{x} = \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \partial_\beta \right) \vec{x} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \vec{e}_\beta$$

に従う。よって V^α が反変ベクトル成分として変換されれば

$$V'^\alpha \vec{e}'_\alpha = \left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} V^\beta \right) \left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \vec{e}_\gamma \right) = \delta^\gamma{}_\beta V^\beta \vec{e}_\gamma = V^\alpha \vec{e}_\alpha = \vec{V}$$

となり、どのような座標系を用いても $V^\alpha \vec{e}_\alpha$ は同一のベクトル \vec{V} を与える [5, pp.25–26]。

最後に、上式 (1) の右辺に Jacobian が掛かった変換則

$$\mathbf{T}^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\nu_1 \dots \nu_q} \rightarrow \mathbf{T}'^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\nu_1 \dots \nu_q} = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} \mathbf{T}^{\rho_1 \dots \rho_p}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_q}$$

に従う量 $\mathbf{T}^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ を p 階反変 q 階共変テンソル密度 (または擬テンソル) と呼ぶ [4, pp.60–62, pp.127–128]。「密度」という名前の由来は、1.1.6 節で説明する。

■物理法則の共変性 両辺が同じ種類のテンソルで書かれた方程式 $T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} = U^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q}$ の形に物理法則を表せば、テンソルの定義によりこれは両辺が同じように変換されるので、座標変換に対して形を変えず、共変性の要請を満たす [4, pp.53–54]:

$$\begin{aligned} T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} T^{\rho_1 \cdots \rho_p}_{\sigma_1 \cdots \sigma_q} \\ &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} U^{\rho_1 \cdots \rho_p}_{\sigma_1 \cdots \sigma_q} = U^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q}. \end{aligned}$$

■テンソルの和、積、縮約から新たなテンソルが作られること テンソルを定義する変換則 (1) から、以下が容易に示される (7.1.1 節参照).

- 同じ種類のテンソルに対しては和が定義される。
(p, q) テンソル $T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q}, U^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q}$ の和

$$A^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} \equiv T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} + U^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} \quad (2)$$

は (p, q) テンソルである。

- (p, q) テンソル $T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q}$ と (r, s) テンソル $U^{\rho_1 \cdots \rho_r}_{\sigma_1 \cdots \sigma_s}$ の積

$$B^{\mu_1 \cdots \mu_p \rho_1 \cdots \rho_r}_{\nu_1 \cdots \nu_q \sigma_1 \cdots \sigma_s} \equiv T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} U^{\rho_1 \cdots \rho_r}_{\sigma_1 \cdots \sigma_s} \quad (3)$$

は ($p+r, q+s$) テンソルである。

- (p, q) テンソル $T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q}$ の添字 μ_i, ν_j をダミー添字 λ にして和をとる操作を縮約という。
これにより ($p-1, q-1$) テンソル

$$C^{\mu_1 \cdots \mu_{i-1} \mu_{i+1} \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_{j-1} \nu_{j+1} \cdots \nu_q} \equiv T^{\mu_1 \cdots \mu_{i-1} \lambda \mu_{i+1} \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_{j-1} \lambda \nu_{j+1} \cdots \nu_q} \quad (4)$$

が得られる。

このため以上の方法で新たに作られたテンソルの種類は上下の添字の個数から期待される通りのものとなる。しかし逆に、複数の添字を持つ量がテンソルであるとは限らない。なお $\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$ が座標 x に依る場合、反変ベクトル V^{α} に対して $\partial_{\beta} V^{\alpha}$ を単に共変ベクトル ∂_{β} との積と見てこれを (1, 1) テンソルであると結論することができなくなる。実際、 $\partial_{\beta} V^{\alpha}$ は

$$\partial_{\beta}' V'^{\alpha} = \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \partial_{\mu} \right) \left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu} \right) = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \partial_{\mu} V^{\nu} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \left(\partial_{\mu} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \right) V^{\nu} \quad (5)$$

と変換する [3, pp.264–265].

■商の定理 反変ベクトル A^{λ} に対して $Q_{\mu\nu} = A^{\lambda} P_{\lambda\mu\nu}$ が 2 階共変テンソルとなるためには、 $P_{\lambda\mu\nu}$ が 3 階共変テンソルであれば良いことを我々は学んだ。実はこのとき、 $P_{\lambda\mu\nu}$ は 3 階共変テンソルでなければならないことまで言うことができる (証明は 7.1.1 節)。 A, Q が他の勝手な種類のテンソルである場合にも、同様の論法を適用できる (商の定理) [6, p.24].

■対称な量と反対称な量の“縮約” 一般に添字 α, β について対称な量 $A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}$ と反対称な量 $B_{\alpha\beta} = -B_{\beta\alpha}$ (テンソルでなくても良い) に対して $A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}$ は

$$\begin{aligned} A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} &= \sum_{\alpha>\beta} (A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} + A^{\beta\alpha} B_{\beta\alpha}) \quad (\because \alpha = \beta \Rightarrow B_{\alpha\beta} = 0) \\ &= \sum_{\alpha>\beta} A^{\alpha\beta} (B_{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta}) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

となって消える。

1.1.2 世界間隔と計量テンソル

時空には無限に近い2点の世界間隔 ds が定義される。 ds は値が用いている座標系に依らずに時空の幾何学だけで決まる量、従ってスカラーである。これは座標系 $\{x^\mu\}$ で測った2点の座標の差 dx^μ の2次形式

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

で表される ($ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$)。座標の微分 dx^μ は反変ベクトルだから ds がスカラーとなるためには $g_{\mu\nu}$ は2階共変テンソルでなければならない (1.1.1 節参照)。 $g_{\mu\nu}$ を計量テンソルと呼ぶ。

反変計量テンソル $g^{\mu\nu}$ を計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の逆テンソルとして定義する (以下、 $g^{\mu\nu}$ も単に計量テンソルと呼ぶ)：

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu. \quad (7)$$

(ここで δ^μ_ν は単位テンソルと見なされている。単位行列は δ^μ_ν を (μ, ν) 成分に持つ。) テンソルの添字を上げ下げした量は $A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu$, $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$ のように計量テンソルとの縮約で定義する [3, pp.257–258]。このとき計量テンソルとの縮約の結果得られた量も添字の位置から期待される種類のテンソルとなる (1.1.1 節参照)。

1.1.3 局所慣性系

次の局所的平坦性定理によれば、時空の与えられた点 P の近くで計量テンソルの成分が

$$(\eta_{\mu\nu}) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

となる座標系をとることができる (7.1.2 節参照) [7, pp.186–187]。

局所的平坦性定理 適当な座標系 $\{x^\mu\}$ をとれば、点 P の座標を x_0^μ として

$$g_{\alpha\beta}(x^\mu) = \eta_{\alpha\beta} + O((x^\mu - x_0^\mu)^2)$$

とできる。このような座標系 $\{x^\mu\}$ を点 P における局所慣性系と呼ぶ。

ここではひとまず局所的平坦性定理を、単に数学的事実として提示した。読者の便宜のために、その物理的意味についても前もって予告しておこう。計量テンソル (8) の含意については 1.2 節で説明する。後に 1.1.9 節で明らかになるように、局所的平坦性定理は局所慣性系で Christoffel 記号がゼロになることを意味する*2。

*2 単に点 P での計量テンソルの値を $\eta_{\mu\nu}$ とできるだけでなく、点 P から座標 $x^\mu - x_0^\mu$ だけ隔たる時空点における計量テンソルの $\eta_{\mu\nu}$ からのズレが、座標の2次の微小量であることが重要である。

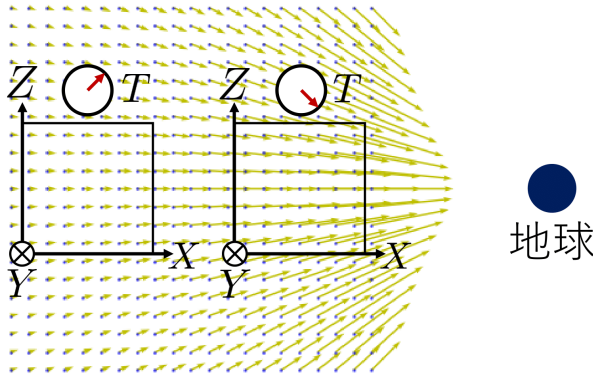


図1 局所慣性系

しかるに 1.5.1 節で述べるように、Christoffel 記号が消えることは重力場が消えることに対応する。よって局所的平坦性定理は適当に座標系を選び、時空の与えられた点 P の周りの小さな領域に限ってその中の重力場を消去できることを意味する。具体的にはそのような座標系として、自由落下する小さな箱に固定した座標系が考えられる。これは箱の部分では図1のように、時計が一定の割合で進む XYZ 直交座標系を成す。実際、箱が占める領域で重力場を一様と見なせるほど箱が十分小さければ、箱の内部は無重力となる。しかし箱が地球の周りの静的で非一様な重力場中を自由落下する場合、時間が経ち箱が地球に近づくと図1のように、箱の占める領域での重力場の非一様性が無視できなくなる。こうして箱の中で重力場を消去できるのは一般には短い時間に限られる [7, p.148].

1.1.4 固有時間と 4 元速度

空間のある点での現象または時計の進み方は、その点での固有時間と呼ばれる時間 τ の流れ方で決まる。これは固有時間が $\tau, \tau + d\tau$ となるという 2 事件に対応する時空の 2 点間の世界間隔を ds とすると、固有時間の経過が $d\tau = ds/c$ となるように定義される。ただし c は (局所慣性系で測った) 真空中の光速である。考えている空間の点が運動する粒子の位置であればこれは粒子の固有時間と呼ばれる。

粒子の固有時間の経過 $d\tau = ds/c$ はスカラーだから、任意の座標系で測った粒子の時空における変位 dx^μ との比 $\frac{dx^\mu}{d\tau}$ は反変ベクトルとなる (1.1.1 節参照) [4, p.89]. これに対し座標時間 t で測った粒子の速度 $\frac{dx^\mu}{dt}$ が反変ベクトルとなる保証はない [4, p.92]. $u^\mu \equiv \frac{1}{c} \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{ds}$ を 4 元速度と定義する*3.

1.1.5 空間距離

空間の点 A と空間座標が無限小 dx^i だけ異なる空間の点 B との空間距離 dl は、座標の差 dx^i から

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad \gamma_{ij} \equiv -g_{ij} + \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} \quad (9)$$

と求まる (ただしラテン文字 i, j, \dots は空間成分 1, 2, 3 を動くものとする). この関係は次の順序で見いだされる (7.1.3 節参照) [3, pp.260–262].

$$\begin{aligned} & 2 \text{ 点 A, B の空間座標の差 } dx^i \\ \rightarrow & 2 \text{ 点 A, B 間を光が往復するのにかかる座標時間 } dx^0 \end{aligned}$$

*3 $\frac{dx^\mu}{d\tau}$ の前に係数 $\frac{1}{c}$ を付けて定義したため、長さの次元を持つ座標 x^μ に対して 4 元速度 u^μ は無次元量である [3, p.25].

$$\begin{aligned} \rightarrow & \text{点 A での対応する固有時間 } d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}dx^0 \\ \rightarrow & \text{2点 A, B 間の距離 } dl = \frac{1}{2}cd\tau. \end{aligned}$$

1.1.6 固有体積要素

一般に任意の座標系で各座標が dx^μ 変化して作られる時空の体積要素は $d^4x (\equiv dx^0 dx^1 dx^2 dx^3)$ とならない。実際 d^4x は時空の体積要素の次元を持つ保証すらない。しかし局所慣性系 $\{X^\mu\} \equiv \{cT, X, Y, Z\}$ では体積要素の表式は $d^4X (\equiv cdTdXdYdZ)$ であり、 $J \equiv \frac{\partial(X)}{\partial(x)}$ を Jacobian として任意の座標系での体積要素の表式は Jd^4x となる。

ここで計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は局所慣性系での成分が式 (8) の $\eta_{\mu\nu}$ で与えられ、2 階共変テンソルの変換則に従うことから、行列 $(g_{\mu\nu})$ の行列式を g として

$$g = -J^2 < 0, \quad \therefore J = \sqrt{-g}$$

が帰結される (7.1.4 節参照)。

以上より任意の座標系で各座標が dx^μ 変化して作られる時空の体積要素の真の体積は

$$\sqrt{-g}d^4x$$

である。これを固有体積要素と呼ぶ [7, pp.188–190]。

なお上式 $J = \sqrt{-g}$ は、因子 $\sqrt{-g(x)} \left(= \frac{\partial(X)}{\partial(x)} \right)$ がスカラー密度の変換則 $\sqrt{-g'} = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \sqrt{-g}$ に従うことを含意している (1.1.1 節)。したがってスカラー場 S との積 $S\sqrt{-g}$ もまたスカラー密度である。これをスカラー密度と呼ぶのは、積分

$$\int S\sqrt{-g}d^4x$$

が不変量となるからである。任意のテンソル場 $T^{\mu\nu\dots}$ に対して $T^{\mu\nu\dots}\sqrt{-g}$ と同じ変換則に従う量を同様にテンソル密度と呼ぶけれど (1.1.1 節)、積分

$$\int T^{\mu\nu\dots}\sqrt{-g}d^4x$$

をテンソルと見なせるのは、積分範囲が小さい場合に限られることに注意しなければならない。と言うのもテンソルの変換則 (変換係数の値) は時空点ごとに異なるので、異なる時空点でのテンソルの和は一般にテンソルとはならないからである [4, p.130] [6, p.82]。

1.1.7 完全反対称テンソル $E^{\lambda\mu\nu\rho}$, 完全反対称テンソル密度 $\mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\rho}$

$\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ を局所慣性系 $\{X^\mu\}$ で $\varepsilon^{0123} = 1$ となる添字に関して完全反対称な量とする。

このときこれを 4 階反変テンソルの変換則

$$E^{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\gamma} \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

に従って任意の座標系 $\{x^\mu\}$ に変換した量は $E^{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}}{\sqrt{-g}}$ である [3, pp.258–259]。

一方、これを 4 階反変テンソル密度の変換則

$$\mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{\partial(X)}{\partial(x)} \frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\gamma} \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

に従って任意の座標系 $\{x^\mu\}$ に変換した量は $E^{\lambda\mu\nu\rho} = \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ となり、座標系に依らず $E^{0123} = 1$ となる [4, pp.62–63]. 以上の証明は 7.1.5 節で行う.

1.1.8 共変微分

ベクトル場 \vec{V} を考え、座標が dx^β 異なる点でのベクトルとの差 $(\partial_\beta \vec{V})dx^\beta$ を $d\vec{V}$ とする. 以下で見るように、任意の座標系では一般に時空の各点で基底 \vec{e}_μ が異なることに関係して、 $(\partial_\beta V^\alpha)dx^\beta$ はベクトル $d\vec{V}$ の成分 DV^α とならない. これは dx^β と縮約される \vec{V} の成分の変化率 $\partial_\beta V^\alpha$ が一般には (1,1) 成分テンソル成分として変換しないことを意味する (このことを 1.1.1 節の式 (5) で直接確認した). そこで $V^\alpha_{;\beta} dx^\beta$ がベクトル $d\vec{V}$ の成分 DV^α を与え、従って (1,1) 成分テンソル成分であるような量 $V^\alpha_{;\beta}$ を以下で導入する.

ベクトル $\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha$ の微分は

$$\partial_\beta \vec{V} = (\partial_\beta V^\alpha) \vec{e}_\alpha + V^\mu \partial_\beta \vec{e}_\mu$$

であり、任意の座標系では一般に時空の各点で基底 \vec{e}_μ が異なるため右辺第 2 項の $\partial_\beta \vec{e}_\mu$ はゼロとならない. $\partial_\beta \vec{e}_\mu$ の α 番目の成分を Christoffel 記号 $\Gamma^\alpha_{\mu\beta}$ と呼ぶ:

$$\partial_\beta \vec{e}_\mu = \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \vec{e}_\alpha. \quad (10)$$

局所慣性系では Christoffel 記号はゼロとなる. ここから Christoffel 記号はテンソルではないことが分かる. と言うのも、もし局所慣性系でゼロとなる Christoffel 記号がテンソルの変換則 (1) に従って変換するならば、任意の曲線座標系でも全ての Christoffel 記号はゼロとなる. ところが曲線座標系では一般に Christoffel 記号はゼロでない値を持つからである [3, p.266].

Christoffel 記号を用いると上式は

$$\begin{aligned} \partial_\beta \vec{V} &= (\partial_\beta V^\alpha + V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu\beta}) \vec{e}_\alpha = V^\alpha_{;\beta} \vec{e}_\alpha, \\ V^\alpha_{;\beta} &\equiv \partial_\beta V^\alpha + V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \end{aligned} \quad (11)$$

となる [7, pp.161–163]. さらに両辺に dx^β をかけて β で和をとると

$$(\partial_\beta \vec{V}) dx^\beta = (V^\alpha_{;\beta} dx^\beta) \vec{e}_\alpha$$

を得る. これは $d\vec{V} \equiv (\partial_\beta \vec{V}) dx^\beta$ の α 番目の成分 DV^α が $V^\alpha_{;\beta} dx^\beta$ であることを意味する. ここでベクトル $d\vec{V}$ が座標系に依らない幾何学的な対象となるためには、その成分 DV^α は反変ベクトル成分として変換しなければならない. また dx^β は反変ベクトル成分である. よって上式は $V^\alpha_{;\beta}$ を反変ベクトル成分 dx^β と縮約すると反変ベクトル成分 DV^α が得られることを意味するから、 $V^\alpha_{;\beta}$ は (1,1) テンソル成分である (以上, 1.1.1 節参照). $V^\alpha_{;\beta}$ を V^α の共変微分と呼ぶ.

(p, q) テンソル $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ の共変微分は

$$\begin{aligned} T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q; \lambda} &= \partial_\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} + \sum_{k=1}^p T^{\mu_1 \dots \mu_{k-1} \alpha \mu_{k+1} \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} \Gamma^{\mu_k}_{\alpha \lambda} \\ &\quad - \sum_{k=1}^q T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_{k-1} \alpha \nu_{k+1} \dots \nu_q} \Gamma^\alpha_{\nu_k \lambda} \end{aligned} \quad (12)$$

である. これは次の 2 つの演算規則を設けると導ける [4, p.143]. 同時にこれは $(p, q+1)$ テンソル成分であることが分かる (7.1.6 節参照).

$$\text{スカラー } S \text{ の共変微分} \quad S_{;\mu} \equiv \partial_\mu S, \quad (13)$$

$$\text{テンソル } A^{\nu\cdots}, B^{\nu\cdots} \text{ に対する Leibniz ルール} \quad (A^{\nu\cdots} B^{\nu\cdots})_{;\mu} = (A^{\nu\cdots})_{;\mu} B^{\nu\cdots} + A^{\nu\cdots} (B^{\nu\cdots})_{;\mu}. \quad (14)$$

計量テンソルとの縮約により, 反変導関数

$$V_{\mu}{}^{;\nu} = g^{\nu\rho}V_{\mu;\rho}, \quad V^{\mu;\nu} = g^{\nu\rho}V^{\mu}{}_{;\rho}$$

が (テンソルとして) 得られる [3, p.268].

1.1.9 Christoffel 記号と計量テンソルの関係

Christoffel 記号と計量テンソルに関する公式を, 以降で用いるもの限定して列挙する [3, pp.270–273]. 導出は 7.1.7 節で行う.

- 基底ベクトルとして座標基底 $\vec{e}_{\alpha} = \partial_{\alpha}\vec{x}$ を採用
→ Christoffel 記号の下付き添字の対称性 $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}$.
- 対称性 $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}$
→ Christoffel 記号を計量テンソルで表した式

$$\Gamma_{\lambda,\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_{\mu}g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu}g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}), \quad \Gamma_{\lambda,\mu\nu} \equiv g_{\lambda\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}. \quad (15)$$

局所慣性系では $\partial_{\mu}g_{\nu\lambda} = 0$ となることを考え合わせると $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} = 0$ となり (1.1.3 節参照), テンソルの共変微分は通常の微分に一致する (1.1.8 節参照).

- 行列式 $g \equiv |g_{\mu\nu}|$ に対する恒等式

$$dg = gg^{\mu\nu}dg_{\mu\nu} = -gg_{\mu\nu}dg^{\mu\nu}. \quad (16)$$

- 式 (15), (16) の帰結

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\mu} = \frac{\partial_{\nu}g}{2g}, \quad (17)$$

$$g^{\nu\lambda}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\nu}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}). \quad (18)$$

- 任意の座標系で $g^{\mu\nu}{}_{;\lambda} = 0$

$$\Leftrightarrow \partial_{\lambda}g^{\mu\nu} = -\Gamma^{\mu}{}_{\rho\lambda}g^{\rho\nu} - \Gamma^{\nu}{}_{\rho\lambda}g^{\mu\rho}. \quad (19)$$

- 式 (17)

→ 反変ベクトル A^{μ} , 反対称テンソル $A^{\mu\nu} (= -A^{\nu\mu})$ の発散

$$A^{\mu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}(\sqrt{-g}A^{\mu}), \quad (20)$$

$$A^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\nu}(\sqrt{-g}A^{\mu\nu}). \quad (21)$$

上式 (20) から

$$\int A^{\mu}{}_{;\mu}\sqrt{-g}d^4x = \int \partial_{\mu}(A^{\mu}\sqrt{-g})d^4x$$

の関係が得られる. 両辺は不変量となっていることが見て取れる.

発散定理により, 右辺は 3 次元の表面積分に直すことができる.

1.1.10 Christoffel 記号の変換則

Christoffel 記号を計量テンソルで表した式 (15):

$$\Gamma_{\lambda,\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu})$$

を用いて直接 Christoffel 記号の変換則を調べると

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \quad (22)$$

となる (7.1.8 節参照) [5, p.29]. これは 1.1.8 節で述べたように, 確かに Christoffel 記号はテンソルではないことを意味する (右辺第 2 項がゼロであればテンソルの変換則となる).

ここで計量テンソルの変分に伴い Christoffel 記号が

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$$

と変化したとする. このとき $\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$ も Christoffel 記号である以上, 式 (22) と同様の変換則

$$\bar{\Gamma}'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}} \bar{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}}$$

に従わなければならない, これと式 (22) を辺々引いて

$$\delta\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}} \delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$$

を得る. これは Christoffel 記号 $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ はテンソルではないけれども, 変分 $\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ は (1,2) テンソルであることを意味する [8, p.69].

1.1.11 曲率テンソル

1.1.3 節で局所的平坦性定理として述べたように, 時空の与えられた点 P において局所慣性系をとると, 点 P の近くで計量テンソルが式 (8) の $\eta_{\mu\nu}$ となり全ての Christoffel 記号をゼロにできる. これは時空が曲がっているという本来座標系に依らない事実を特徴付けるのに, Christoffel 記号は十分でないことを意味する. これに対し計量テンソルの 2 階導関数は, 局所慣性系を用いた場合にも曲がった時空ではゼロでない成分を持つ. そして本節で導入する曲率テンソルは計量テンソルの 2 階導関数を含み, 時空が曲がっているという座標系の選択に依らない幾何学的な性質を特徴付けることができる. 時空が平坦であるか曲がっているかは, 曲率テンソル (の全成分) がゼロであるか否かによって判定される [3, pp.290–291] [6, pp.53–54].

■ベクトルの平行移動の定義 ベクトルの微小平行移動は, 局所慣性系でベクトルの成分が変化しない変位として定義される [3, p.288]. よってベクトル \vec{V} がある曲線に沿って平行移動するとき, 曲線を λ でパラメトライズし接ベクトル $\vec{U} = d\vec{x}/d\lambda$ を定義すると局所慣性系でその成分は

$$0 = \frac{dV^{\mu}}{d\lambda} = U^{\nu} \partial_{\nu} V^{\mu} = U^{\nu} V^{\mu}_{;\nu}$$

を満たす. ここで $U^{\nu} V^{\mu}_{;\nu}$ は反変ベクトルだから, $U^{\nu} V^{\mu}_{;\nu} = 0$ は平行移動に際して任意の座標系で成り立つ関係である (1.1.1 節, 1.1.8 節参照) [7, p.199]. 両辺に $d\lambda$ をかけると $0 = V^{\mu}_{;\nu} dx^{\nu} = DV^{\mu}$ となる. DV^{μ} は

\vec{V} の曲線上で $d\vec{x}$ 隔たる点でのベクトルとの差 $d\vec{V}$ の、(考えている点での) μ 番目の成分だから (1.1.8 節参照), これは平行移動の前後でベクトル \vec{V} が局所的には変化しないことを意味する. このことから, 上記のように平行移動を定義したことは理に適っていると言えよう. 一方, 基底ベクトルが各点で異なる曲線座標系ではベクトル \vec{V} を平行移動させるとその成分が変化する. 曲線の媒介変数 λ に対する成分の変化率 $U^\nu \partial_\nu V^\mu$ は $0 = U^\nu V^\mu{}_{;\nu} = U^\nu (\partial_\nu V^\mu + V^\rho \Gamma^\mu{}_{\rho\nu})$ から

$$U^\nu \partial_\nu V^\mu = -U^\nu V^\rho \Gamma^\mu{}_{\rho\nu} \quad (23)$$

と求まる.

■参考 [4, pp.140–144] [6, pp.27–37] [5, pp.30–35]

共変微分 (再論) 上式 (23) は dx 隔たる点へのベクトルの平行移動に伴う成分変化が

$$dV^\mu = -\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} V^\rho dx^\nu$$

であることを意味する. よって共変微分において考えているベクトルの差 ($d\vec{V}$ の成分)

$$DV^\mu = (\partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} V^\rho) dx^\nu$$

とは, $\vec{V}(x)$ を位置 $x + dx$ に平行移動したベクトル

$$V^\mu_{\parallel}(x + dx) = V^\mu(x) - \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}(x) V^\rho(x) dx^\nu$$

と, 位置 $x + dx$ にもとからあるベクトル $V^\mu(x + dx)$ との差

$$V^\mu(x + dx) - V^\mu_{\parallel}(x + dx) = V^\mu(x + dx) - \{V^\mu(x) - \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} V^\rho dx^\nu\}$$

であることになる*4.

高次元空間を持ち出したベクトルの平行移動の説明 ここではベクトルの平行移動を, 物理空間の中だけで理解できる方法で定義した. もし一時的に物理空間を高次元の平坦な空間 Ω に埋め込まれている超曲面 S と考えるならば, ベクトルの平行移動は等価的に次のように定義することもできる (ここでは簡単にしか論じない). V^μ を超曲面 S 内のベクトル場とし, S は座標 x でパラメトライズされているものとしよう. このとき S 上の点 P (座標 x) におけるベクトル $V^\mu(x)$ を, (面 S 内で) 近接した点 P' に平行移動させる操作は, 次の2段階から成る (図2参照).

1. まず $V^\mu(x)$ を高次元空間 Ω の中で, 通常の意味で点 P' まで平行移動させる.

このとき $V^\mu(x)$ は点 P' において, 一般には S の外に突き出る (S に垂直な成分を持つ).

2. そこで S に垂直な成分を切り捨てたベクトルを, 求める平行移動したベクトル $V^\mu_{\parallel}(x + dx)$ とする.

このときベクトルの平行移動による成分変化は上式 (23), すなわち

$$dV^\mu \equiv V^\mu_{\parallel}(x + dx) - V^\mu(x) = -\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} V^\rho dx^\nu$$

で与えられること, またベクトルの長さは平行移動の際に変化しないことが示される.

■測地線 [6, pp.38–44] [7, pp.199–200] ここで λ でパラメトライズされた曲線の接ベクトル $\vec{U} = d\vec{x}/d\lambda$ が, 曲線をたどるにつれて平行移動を受ける場合を考える. 言い換えれば今から考える曲線は, 以下に述べる方法で形成される. まず始点 \vec{x}_0 とそこでのベクトル \vec{U}_0 を与える. すると曲線上の隣接した点 $\vec{x}_1 = \vec{x}_0 + \vec{U}_0 d\lambda$ をとることができる. 次に \vec{U}_0 を点 \vec{x}_1 まで平行移動し, これを点 \vec{x}_1 での曲線の接ベクトル \vec{U}_1 とする. このとき $\vec{x}_2 = \vec{x}_1 + \vec{U}_1 d\lambda$ は曲線上の新たな点となる. 以上の手順を繰り返して曲線上の点を逐次定めれば曲線全体が得られ, 同時に曲線に割り当てられる λ の値も決まる. このようにして作られる曲線は測地線と呼ばれる. 平たく言えば, 測地線は曲がった空間に “可能な限りまっすぐに” 描いた曲線である.

*4 この差は全体として dx の1次の量なので, 位置 x でのベクトルの差をこのような位置 $x + dx$ での差で代用することによる誤差は, dx の2次の微小量となり, 微分公式に影響を与えない.

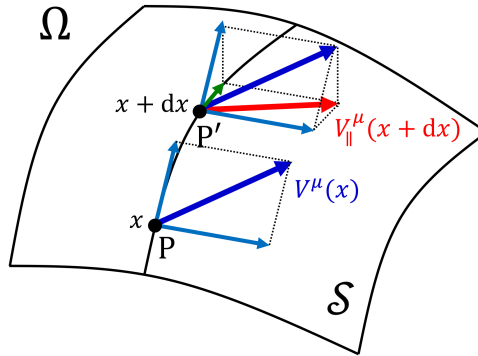


図2 高次元空間を持ち出したベクトルの平行移動の説明

測地線の方程式は、ベクトル \vec{V} の接ベクトル \vec{U} に沿う平行移動を定義する関係式 $U^\nu V_{;\nu}^\mu = 0$ において、 $V^\mu = U^\mu$ とおいて得られる。

$$0 = U^\alpha U^\mu_{;\alpha} = U^\alpha (\partial_\alpha U^\mu + U^\beta \Gamma^\mu_{\alpha\beta}) = \frac{dU^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta.$$

これは測地線上のある点での接ベクトル \vec{U}_1 が、近接する点での接ベクトル \vec{U}_0 を測地線、従ってその接ベクトル \vec{U}_0 自身に沿って平行移動したものであることを表している。

測地線は2点を結ぶ局所的な最短曲線となる。実際、後で見るように与えられた2点を結ぶ曲線の固有の長さ $\int ds$ が停留値をとる条件として、測地線の方程式が得られる(比例係数の違いを除いて、粒子の作用は粒子の世界線に沿う固有の長さ $\int ds$ で与えられ(1.4.3節の式(69))、最小作用原理から得られる粒子の運動方程式(78)は測地線の方程式となっている(1.5.1節)*5。

■曲がった空間でのベクトルの平行移動 曲率テンソルを定義するにあたって次のことに注目する。すなわち曲がった時空では閉曲線に沿ってベクトルを平行移動し1周させると、元のベクトルに一致しなくなる。4次元の曲がった時空の代わりに平坦な3次元空間の中の2次元の球面を考えるとこのことを理解しやすい(ただし球面と異なり我々の時空の場合には、それを超曲面として含むより高次元の空間の存在は保証されない)。図3のように球面上に赤道上で90度離れた2点A、Cと極Bをとる。そしてAで赤道に平行なベクトル \vec{V} を球面内で、すなわち \vec{V} が球面に接した状態で弧AB、弧BC、弧CAに沿って平行移動させてAに戻ること考える。弧AB、弧BC、弧CAが大円の一部を成すとすると、これらは球面上の2点を結ぶ局所的な最短曲線すなわち測地線である*6。測地線の接ベクトルは測地線に沿って平行移動させると移動先の点での接ベクトルに一致する。しかるに2つのベクトルが平行移動するときそれらの間の角度は変化しないから、 \vec{V} を測地線に沿って平行移動するとき測地線の接ベクトル、従って測地線との成す角は一定に保たれる [3, p.288]。このため \vec{V} は図3のように移動し、Aに戻ったとき元のベクトルに比べて90度回転している [7, pp.197–198]。

■ベクトルの閉曲線に沿う平行移動に伴う成分変化と曲率テンソル 図4のように時空の中の曲面を a, b でパラメトライズし、曲線 $a = 0, \delta a$ および $b = 0, \delta b$ から作られる微小な閉曲線に沿ってベクトル \vec{V} を $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ と平行移動させることを考える。ベクトル成分の変化率の式(23)を用いて \vec{V} を1周

*5 零(ヌル)・測地線、すなわち曲線全体で線要素の世界間隔が $ds = 0$ であるような測地線に対しては、この議論は適用できない。

*6 2点A、Bを結ぶ大円上の2つの弧はともに測地線であるけれども、一方が最短曲線(2点を結ぶ曲線のうち、最も短い曲線)であるのに対し他方はそれよりも長い。測地線が“局所的”最短曲線であることを示す良い例である [5, p.22]。

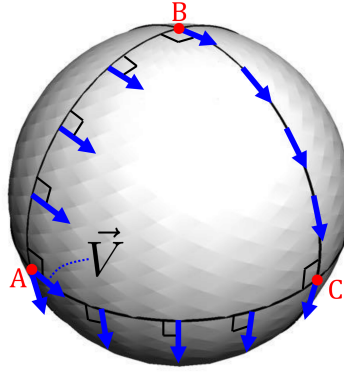


図3 平坦な3次元空間から見た2次元球面上でのベクトルの平行移動

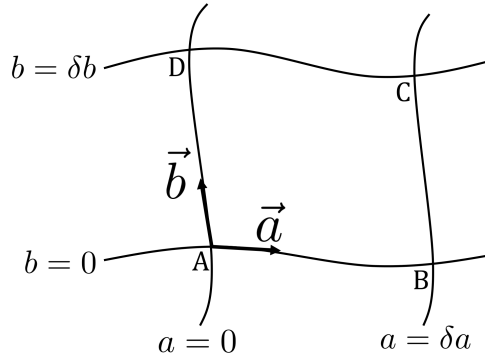


図4 ベクトルを平行移動させる微小な閉曲線

させたときの A での成分の変化 δV^μ を計算すると

$$\delta V^\mu = V^\nu (a^\sigma \delta a) (b^\rho \delta b) R^\mu_{\nu\rho\sigma}, \quad (24)$$

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} \equiv \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho} + \Gamma^\mu_{\alpha\rho} \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} \Gamma^\alpha_{\nu\rho} \quad (25)$$

となる。ここに V^ν, a^σ, b^ρ はそれぞれ平行移動する前のベクトルおよび接ベクトル $\vec{a} \equiv \partial \vec{x} / \partial a, \vec{b} \equiv \partial \vec{x} / \partial b$ の A での成分である (7.1.9 節参照) [7, p.203]. 式 (24) 左辺の δV^μ は反変ベクトル成分だから $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$ は (1,3) テンソル成分でなければならない (1.1.1 節参照). このことは式 (25) の右辺における Christoffel 記号や単なる微分がテンソルではないことを踏まえると非自明だが, Christoffel 記号の変換則 (22) に基づき直接に確認できる. また $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$ は Christoffel 記号の 1 階導関数を, 従って計量テンソルの 2 階導関数を含んでおり, これが曲がった時空を特徴付ける量として求めていたものである (図 5 参照). $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$ を曲率テンソルと呼ぶ. ここから以下の Ricci テンソル $R_{\mu\nu}$, スカラー曲率 R が作られる. R はスカラーだから, 時空が曲がっているという座標系に依らない幾何学的な性質を, 座標系に依らない値として表した量である.

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\rho_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\rho} + \Gamma^\rho_{\sigma\rho} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\rho}, \quad (26)$$

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (27)$$

■曲率テンソルの性質 [3, pp.291–293] 共変曲率テンソル $R_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv g_{\mu\alpha} R^\alpha_{\nu\rho\sigma}$ を計算すると,

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_\rho \partial_\nu g_{\mu\sigma} + \partial_\sigma \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho \partial_\mu g_{\nu\sigma}) + g_{\alpha\beta} (\Gamma^\alpha_{\nu\rho} \Gamma^\beta_{\mu\sigma} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} \Gamma^\beta_{\mu\rho}) \quad (28)$$

計量 $g_{\mu\nu}$ (↔ 重力ポテンシャル)

- 局所慣性系で $\eta_{\mu\nu}$
- 適当な座標系での計量から、幾何学(座標系によらない真の距離 ds の関係)が分かる



Christoffel記号(接続) $\Gamma_{\lambda,\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu})$ (↔ 重力の強さ)

計量(重力ポテンシャル)の1階微分までを含み、局所慣性系で 0 (↔ テンソルではない)



曲率テンソル $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\rho} \Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\sigma} \Gamma^\alpha{}_{\nu\rho}$

- 計量の2階微分までを含み、一般には局所慣性系で $\neq 0$.
- テンソルなので、全成分がゼロか否かは座標系によらない
- ↔ 時空が曲がっているか否かという、座標系によらない幾何学的性質を特徴付ける

図5 一般相対性理論の基礎概念(まとめ)

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}$$

↕ 反対称 ↕ 反対称
↕ 対称

図6 曲率テンソルの添字に関する(反)対称性

となる(導出は7.1.9節). ここから曲率テンソルは添字に関する(反)対称性

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho}$$

を持つことが読み取れる(図6参照). また曲率テンソルの添字を縮約して得られる2階のテンソルは、符号の違いを除けば Ricci テンソル(26)以外にあり得ないことが分かる. さらに Ricci テンソルは添字に関して対称である:

$$R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\rho\mu\sigma\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\sigma\nu\rho\mu} = R_{\nu\mu}.$$

次に重力場の方程式(Einstein方程式, 1.5節)の含意を調べる上で有用となる, Bianchiの恒等式

$$R^\lambda{}_{\mu\nu\rho;\sigma} + R^\lambda{}_{\mu\sigma\nu;\rho} + R^\lambda{}_{\mu\rho\nu;\sigma} = 0 \tag{29}$$

を紹介しておこう(導出は7.1.9節). 重力場の方程式の中で曲率テンソルは,

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

という形で現れる(1.5節). この $G_{\mu\nu}$ を Einstein テンソルと呼ぶ. Bianchiの恒等式は Einstein テンソルに対する式

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \right)_{;\nu} = 0 \tag{30}$$

に書き換えられる (導出は 7.1.9 節) [7, p.210].

1.2 特殊相対性理論の概念

1.1 節では重力を含む理論である一般相対性理論の枠組みを提示した. ところが重力は天体のスケールでは支配的となるけれど, 素粒子物理のスケールでは重力は他の基本的な力に比べて無視し得る (実際, 素粒子の標準模型は重力を含まない理論である). 同じ事情で巨視的な物体に働く力としても, 例えば地上物体間の力のように, 電磁相互作用に起因する力だけを考慮すれば十分である場合は少なくない. そこで重力が存在しない平坦な時空における理論の定式化に興味を持たれる. そのような理論は特殊相対性理論と呼ばれ, 一般相対性理論の特別な場合にあたる. 本節ではこれについて簡単にまとめておく.

なお非相対論的とは重力が弱く, 物体の速さ v が光速に比べて非常に遅い場合を指す. あらかじめ特殊相対性理論を考えている場合には, 非相対論的極限として後者の条件 $v \ll c$ のみを考慮すれば良い.

1.2.1 Minkowski 計量

我々は一般相対性理論の文脈で時空における無限に近い 2 点の世界間隔 ds を, 座標系 $\{x^\mu\}$ で測った 2 点の座標の差 dx^μ の 2 次形式

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

によって定義した ($ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$). ここで計量テンソル $g_{\mu\nu}$ が 2 階共変テンソルであれば, 世界間隔 ds がスカラーとなることが保証される (1.1.2 節).

特殊相対性理論は重力を含まない平坦な時空での理論であり, 時空の各点で計量テンソルの全成分が式 (8):

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で与えられるような慣性系 (Lorentz 系) をとることができる (特殊相対性理論の慣性系はそのような座標系として定義される). 上記の計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$ を Minkowski 計量と呼び, $\eta_{\mu\nu}$ によって特徴付けられる空間 (時空) を Minkowski 空間と呼ぶ. このとき $x^\mu = (ct, x, y, z)$ と書くと, 世界間隔の定義式は

$$ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (31)$$

となる. すると与えられた時刻 ($dt = 0$) で空間座標が dx^i だけ隔たる 2 点の空間距離 dl は

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

と表される (1.1.5 節の式 (9) 参照). すなわち空間の幾何学は Euclid 的であり, (x, y, z) は通常のデカルト座標と見なせる.

計量テンソルとの縮約によってテンソルの添字を上げ下げする操作 $A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu, A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$ は, 具体的には添字の上げ下げの規則

$$A_0^1 = A^{01} = -A^0_1 = -A_{01}, \quad \text{etc.}$$

を与える.

任意の 4 元反変ベクトル $A^\mu = (A^0, \mathbf{A}), B^\mu = (B^0, \mathbf{B})$ の 4 元内積を

$$A \cdot B \equiv g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^\mu B_\mu = A_\nu B^\nu = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

で定義する．特に自分自身との内積を $A^2 \equiv A \cdot A$ と表記する．テンソルの一般論 (1.1.1 節) から理解されるように，これは相対論的不変量である．

1.2.2 非相対論における時間の絶対性と速度の合成則

非相対論においては同一の 2 事件を 2 つの座標系 K, K' で見た時間差 $\Delta t, \Delta t'$ は等しい．このような絶対時間の概念は速度が単純なベクトル和として合成されることと関係している．実際 K' 系が K 系から見て速度 \mathbf{V} で運動しているとすると， K 系， K' 系から見た同一の粒子の座標 \mathbf{r}, \mathbf{r}' は Galilei 変換 $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t$ によって関係付けられる．よって K 系で見て粒子が無限小時間 dt のうちに $d\mathbf{r}$ 変位するのを K' 系から見ると，無限小時間 dt' のうちに $d\mathbf{r}'$ 変位するとき， $d\mathbf{r}' = d\mathbf{r} - \mathbf{V}dt$ となる．ここで時間の絶対性

$$dt' = dt$$

を仮定して両辺を $dt' = dt$ で割ると，速度の合成則として

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$$

を得る．

1.2.3 光速不変の原理と相対性原理

一方，特殊相対性理論は以下の光速不変の原理と相対性原理の上に成り立っている [3, pp.1-4]．

- 光速不変の原理
 - 古典力学 (非相対論的力学) においてポテンシャル・エネルギーは粒子の座標 $\mathbf{r} \equiv \{r_1, r_2, \dots\}$ の関数 $U(\mathbf{r}) \rightarrow$ 粒子間相互作用は瞬時に伝播する．実際には相互作用の伝播速度は有限であり，座標系に依らない最大の伝播速度 c (実はこれは光速) を持つ*7．
- 相対性原理
 - 相対性原理によれば，すべての自然法則はあらゆる慣性基準系において同一である．これは原理として物理法則の共変性を要請したものと見ることができる．相対性原理自体は非相対論でも成り立つが (Galilei の相対性原理)，慣性系間の座標変換則が相対論とは異なっている．

■ 光速一定 \leftrightarrow 世界間隔の不変性 光速不変の原理は，世界間隔 ds を不変量として導入したことから保証されていることを説明する．今，時空において無限に近接した 2 事象をそれぞれ光 (信号) の送信と受信にとると，2 つの慣性基準系 K, K' で測った光速度がともに c であることは，式 (31) にしたがって K 系と K' 系で計算した 2 事象の世界間隔をそれぞれ ds, ds' とすると，

$$ds = 0 \quad \Rightarrow \quad ds' = 0$$

であることを意味する．この要請は世界間隔の不変性

$$ds = ds'$$

*7 ここで相互作用の伝播速度の最大値として定義された c が，電磁場の波動方程式における波 (光) の伝播速度となる (1.7.3 節)．

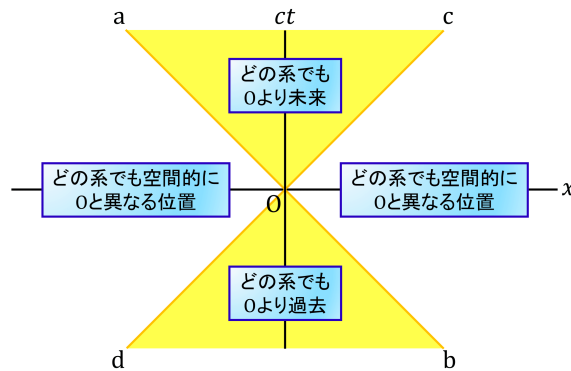


図7 光 (円) 錐による世界間隔の分類

によって満たされている．逆に光速が一定であることは，数学的には世界間隔の不変性 $ds = ds'$ として表されることを説明できる [3, pp.4-6].

■光 (円) 錐による世界間隔の分類

- ある慣性系で (空間の) 同一点で起きる 2 事象
- その系で測った世界間隔 $ds^2 > 0$
- 任意の系で測った世界間隔 $ds^2 > 0$
- ⇔ 世界間隔は時間的,
- ある慣性系で同時の 2 事象
- その系で測った世界間隔 $ds^2 < 0$
- 任意の系で測った世界間隔 $ds^2 < 0$
- ⇔ 世界間隔は空間的.

こうして任意の事象は事象 O との関係に応じて，光 (円) 錐によって図 7 のように分類される．この分類は世界間隔の不変性により，座標系に依らない意味を持つ [3, pp.6-8]. 同様に 4 元ベクトル A^μ に対して

$$\begin{aligned}
 A^2 > 0 &\Rightarrow A^\mu \text{は時間的ベクトル,} \\
 A^2 < 0 &\Rightarrow A^\mu \text{は空間的ベクトル,} \\
 A^2 = 0 &\Rightarrow A^\mu \text{は零 (ヌル) ベクトル}
 \end{aligned}$$

と定義する．粒子の速度は光速 c を超えられないため，粒子が時空に描く軌道 (世界線) に沿うベクトル dx^μ は必ず時間的ベクトル (または零ベクトル) である．

1.2.4 Lorentz 変換

慣性系間の座標変換は Lorentz 変換と呼ばれる．Lorentz 変換についての洞察を得るために，1 つの重要な場合として， K 系から見て x 軸方向に速度 V で推進する K' 系を考える (はじめ 2 つの座標系の空間軸は一致しており，この瞬間をそれぞれの座標系の時間 t, t' の原点にとる)．このとき

- 光速不変の原理
- 相対性原理

を満たす座標変換則，すなわち同一の事象を K 系， K' 系で見た座標 $(ct, x, y, z), (ct', x', y', z')$ の関係は

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad ct' = \frac{ct - \frac{V}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (32)$$

で与えられることが見出される (導出は 7.2 節) [3, pp.10–14].

■ Lorentz 収縮 ここでは Lorentz 変換から帰結するいくつかの興味深い事実のうち，Lorentz 収縮を取り上げる．Lorentz 変換の式 (32) の第 1 式によれば， K' 系の $x'_1 \leq x' \leq x'_2$ に固定された x' 軸に沿う棒の両端が， K 系で見て同時刻 t に位置 $x = x_1, x_2 (> x_1)$ を占めるものとする，

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \therefore x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1) \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} (< x'_2 - x'_1)$$

となる．このように K 系で測った運動する棒の長さ $x_2 - x_1$ は，棒の固定系 (K' 系) で測った棒の長さ $x'_2 - x'_1$ に比べて縮む (Lorentz 収縮)．ただし Lorentz 変換の式 (32) の第 4 式より， K 系で見て同時刻 t に，Lorentz 収縮を起こした棒の両端が位置 $x = x_1, x_2$ を占めるという 2 事象は， K' 系では同時には起こらないことに注意する．

1.2.5 固有時間と 4 元速度 (再論)

■ 固有時間 [3, pp.8–9] 運動する物体に固定された時計の示す時間 τ を，その物体の固有時間という．固有時間はその定義により Lorentz スカラーである．実際，固有時間は瞬間的に粒子とともに動く慣性系で見た時間であり，この座標系では粒子の空間座標の変化は $dx^i = 0$ なので，固有時間の経過 $d\tau$ は粒子の対応する時空における変位の世界間隔 ds と

$$ds = cd\tau$$

の関係にある．既に見たように世界間隔 ds は Lorentz 不変量だから，確かに固有時間の変化 $d\tau$ もまた Lorentz 不変量となっている (以上，1.1.4 節参照)．なお固有時間は物体の運動を観察する基準系の時間 t と

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad \mathbf{v} \equiv \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) : \text{座標で測った物体の速度} \quad (33)$$

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \leq \Delta t$$

によって関係付けられる (動いている時計の遅れ，導出は 7.2 節)．

■ 4 元速度，4 元加速度 [3, p.25] これを用いて粒子の 4 元速度と 4 元加速度をそれぞれ

$$u^\mu = \frac{1}{c} \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \frac{\mathbf{v}/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right), \quad a^\mu = \frac{du^\mu}{ds} = \frac{d^2 x^\mu}{ds^2}$$

を定義する (4 元速度 $u^\mu = dx^\mu/ds$ は 1.1.4 節で導入したものであり，第 2 の等号で特殊相対性理論を仮定している)．座標の微分 dx^μ は反変ベクトル成分であり固有時間 $d\tau$ は Lorentz スカラーだから，4 元速度 u^μ は反変ベクトル成分であり，それ故 4 元加速度 a^μ も反変ベクトル成分となる．またこれらは非相対論的極限 $v \ll c$ で $d\tau \rightarrow dt$ よりそれぞれ座標時間 t で測った速度 $\frac{1}{c} \frac{dx^i}{dt}$ と加速度 $\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^i}{dt^2}$ に移行する．これに対して座標時間 t で測った速度 $\frac{dx^i}{dt}$ や加速度 $\frac{d^2 x^i}{dt^2}$ は一般にベクトル成分ではない．

$ds^2 = c^2 d\tau^2 = dx^\mu dx_\mu$ より 4 元速度は

$$u^\mu u_\mu = 1$$

と規格化されていることが分かる。さらに両辺を固有時間で微分すると、4 元速度と 4 元加速度の“直交性”

$$u^\mu a_\mu = 0$$

が見出される。

1.3 Lagrange 形式と Hamilton 形式

1.3.1 Lagrange 形式

古典物理学において自然は粒子と場から成る。まず粒子の位置を記述するには、粒子の系（これは一般に場と相互作用する）の自由度と同じ個数の一般座標 q_1, q_2, \dots を用いれば良い。系は Lagrangian と呼ばれる、 $q \equiv \{q_1, q_2, \dots\}$ 、一般速度の組 $\dot{q} \equiv \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots\}$ 、および時刻 t の関数 $L(q, \dot{q}, t)$ で特徴付けられる（ドットは時刻 t による微分）。古典力学における運動の法則は最小作用原理（または Hamilton の原理）を用いて定式化できる。最小作用原理によれば時刻 $t = t_1, t_2$ における系の位置 $q(t_1), q(t_2)$ が与えられたとき、その間の経路 $q(t)$ に沿う作用積分

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (34)$$

を極小にするような経路 $q(t)$ が時刻 t_1 から t_2 までの系の実際の時間発展を与える。作用 S が極小になる条件は次の Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (35)$$

で与えられる（7.3.1 節参照）。これが一般座標 q のとり方に依らず、拘束力を含まない、系の自由度と同じ個数の運動方程式を成す [9, pp.1–4]。

次に場の時間発展の記述に移ろう。最小作用原理は時刻 $t = t_1, t_2$ での空間における場の分布が与えられたとき、 t_1 から t_2 までの実際の場の時間変化に対して作用 S が極小となることを要求する。場と粒子の系の Lagrangian を体積積分 $L = \int \mathcal{L} dV$ の形に書く。これは格子点 \mathbf{x} を中心とする体積要素 ΔV に空間を分割すると、言わば体積要素 ΔV の持つ Lagrangian が $\mathcal{L} \Delta V$ であると見なしていることになる。 \mathcal{L} は Lagrangian 密度と呼ばれる。作用の定義式 (34) は Lagrangian 密度を用いて

$$S = \int \mathcal{L} dV dt \quad (36)$$

と書ける。ただしこのとき、我々は暗に時空が平坦な特殊相対性理論を仮定していることになる。一般相対性理論では座標の微分の積 $dV dt = d^4 x / c$ は対応する時空の体積を与える保証がなく、代わりに固有体積 $\sqrt{-g} d^4 x / c$ を用いて $S = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4 x$ と書く必要がある（1.1.6 節, 1.3.3 節）。ここでは Lagrangian 密度が複数の場 $\phi \equiv \{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ とその導関数の組 $\partial_\mu \phi \equiv \{\partial_\mu \phi_1, \partial_\mu \phi_2, \dots\}$ の関数 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ であるような任意の系を考える。このとき最小作用原理から場の運動方程式として、Euler-Lagrange 方程式

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} = 0 \quad (37)$$

が導かれる（7.3.1 節参照） [10, pp.31–33] [3, p.87]。

場と粒子の複合系に対しても系全体を記述する作用（したがって Lagrangian(密度)）を導入でき、最小作用原理は粒子の座標と場の空間分布がそれぞれ、運動方程式 (35), (37) に従って時間変化することを含意する。

■最小作用原理と目的論的世界観 最小作用原理は粒子や場を擬人化し、作用を最小にするという目的を持って振る舞う存在として捉えているような印象を与え得る。しかし例えば粒子は、終点に辿り着くという最小作用原理で課される境界条件を実現するような初期条件を自分が満たしているかを知らないから、このような解釈は不適當である。実際、最小作用原理から導かれる運動方程式は、粒子や場が目的因ではなく古典的・機械論的因果律に従って時間変化することを意味している。

1.3.2 対称性と保存則

一般に系が何らかの操作に関して対称性を持つとき、それに付随する系の保存量が見出される。本節では対称性と保存則の関係について論じる。

一般座標 $q = \{q_1, q_2, \dots\}$ で空間的な配置が指定されるような物体の系から始めよう。Lagrangian に陽に含まれない座標 q_i を循環座標と呼ぶ。簡単な場合には、系の対称性は循環座標の存在によって表される。例えば系が x 方向への平行移動に関して対称であれば、Lagrangian は x 座標を陽に含まないと期待できる。一般に座標 q_i に共役な一般運動量

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

を定義すると、循環座標 q_i に共役な運動量 p_i は保存することが分かる。実際、Lagrange 方程式 (35) により

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

である (最後の等号で q_i が循環座標であることを用いた) [9, p.37].

系がある変換に関して対称性を持つためには、Lagrangian が不変であれば十分である。しかしながら系の対称性とは運動方程式の不変性のことであって、そのためには Lagrangian までもが対称変換に対して不変である必要はない。実際、同一の運動方程式を与える Lagrangian は無数にあり、Lagrangian には座標と時間の任意関数 $f(q, t)$ の全微分 df/dt を付け加えるだけの不定性がある (証明は 7.3.2 節) [9, pp.4-5]. とは言え以下で見ると、いくつかの重要な保存量は Lagrangian の不変性から導かれる (もちろん実際に Lagrangian が不変であるかは、個々の系の具体的な Lagrangian に対して確かめられる)。

まず、時間並進対称性を持つ系を考える。このとき系の Lagrangian は時刻 t を陽に含まず、座標 q と一般速度 \dot{q} を通してのみ時間に依存すると期待できる。すると運動方程式 (35) から、エネルギーと呼ばれる量

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \quad (38)$$

が保存することが導かれる (証明は 7.3.2 節) [9, pp.16]. これは系の Hamiltonian を速度 \dot{q} の関数として表したものに他ならない (1.3.4 節)。

次に系の対称変換として、連続パラメーター λ によって特徴づけられる変換 $q_i \rightarrow \Phi_i(\lambda; q)$ を考える。ただしこれは恒等変換と連続的につながっており、 $\Phi(0; q) = q$ とする ($\Phi \equiv \{\Phi_1, \Phi_2, \dots\}$)。もしこの変換に対して Lagrangian が不変であれば、モーメント関数と呼ばれる量

$$F = \sum_i f_i p_i$$

が保存することが示される。ここに $f_i \equiv d\Phi_i/d\lambda|_{\lambda=0}$ である。この命題を Noether の定理という (証明は 7.3.2 節) [5, pp.122-123].

特に 3 次元 Euclid 空間の質点系を考え、 a 番目の粒子の位置ベクトルを $\mathbf{r}_a = (x_{1a}, x_{2a}, x_{3a})$ とする。一般座標 q_i の添字はここでは、空間方向の添字 $i = 1, 2, 3$ と粒子番号 a の組に対応する。粒子 a の運動量は $\mathbf{p}_a = \partial L / \partial \dot{\mathbf{r}}_a = (p_{1a}, p_{2a}, p_{3a})$ である。

系が単位ベクトル \mathbf{n} の方向に並進対称性を持つとする。 \mathbf{n} 方向への系の平行移動は

$$\mathbf{r}_a \rightarrow \mathbf{r}_a + \lambda \mathbf{n}$$

と書けるので $f_{ia} = n_i$ と同定される。よって対応する保存量は

$$F = \sum_{i,a} f_{i,a} p_{ia} = \sum_i n_i \sum_a p_{ia} = \mathbf{n} \cdot \sum_a \mathbf{p}_a$$

となる。これは全運動量 $\mathbf{P} = \sum_a \mathbf{p}_a$ の \mathbf{n} 方向成分となっている。このように運動量とは、系の並進対称性から導かれる保存量に他ならない。

また系が単位ベクトル \mathbf{n} の周りに回転対称性を持つとする。 \mathbf{n} を軸とする系の回転は、回転角を θ として

$$\mathbf{r}_a \rightarrow \mathbf{r}_a + \theta \mathbf{n} \times \mathbf{r}_a, \quad \therefore x_{ia} \rightarrow x_{ia} + \theta \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} n_j x_{ka}$$

と表されるから (ε_{ijk} は添字に関して反対称な Levi-Civita 記号であり、 $\varepsilon_{123} = 1$)、 $f_{ia} = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} n_j x_{ka}$ と同定される。よって対応する保存量は

$$F = \sum_{i,a} f_{ia} p_{ia} = \sum_{i,j,k,a} \varepsilon_{ijk} n_j x_{ka} p_{ia} = \mathbf{n} \cdot \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a$$

となる。最右辺における $\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a$ は a 番目の粒子の (軌道) 角運動量と呼ばれ、この結果は全角運動量 $\mathbf{M} = \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a$ の \mathbf{n} 方向成分が保存することを意味している [5, p.124]。

特殊相対性理論において、Lorentz 変換は 4 元動径ベクトルの長さ $x_\mu x^\mu$ を不変にするような時空内の回転と見なせる (7.2 節)。そして 4 次元時空における回転対称性を考えれば、角運動量の相対論的な表現が得られる [3, pp.45-47] [11, p.170]。無限小の Lorentz 変換は、反対称な無限小パラメーター $\varepsilon^{\mu\nu} (= -\varepsilon^{\nu\mu})$ を用いて

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad \delta x^\mu = x_\nu \varepsilon^{\mu\nu} \quad (39)$$

と表される (証明は 7.3.2 節)。

能動の変換と受動の変換 ここで次のことに注意を促しておかねばならない。すなわち物体の空間座標が変化する状況としては以下の 2 通りが考えられる。

能動の変換 空間に固定した座標系に対して物体 (より一般には物理的な系) を移動させる。

- ★ 物理的な系として場を考えている場合には、それが分布する空間ごと (座標系に対して) 移動させる。

受動の変換 物理的な系を空間に固定して、座標系を移動させる。

能動の変換と受動の変換の間には次のような関係がある。すなわち座標系の基底にある変換をすると、座標系に固定した視点からは空間に固定したベクトルがその逆変換で移されて見える。

- 例 1: 駅に向かう者にとっては、逆に駅が自分の方に近づいて来るように見える。
- 例 2: 回転する椅子に座ると、周りの風景が逆回転して見える。

上記において運動量と角運動量の保存則を導く際には能動的な変換を考えたのに対し、ここで考えている Lorentz 変換は受動的な変換として良い。

パラメーター $\varepsilon^{\mu\nu}$ の意味 x^1 方向の等速推進に対する Lorentz 変換は

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (\beta \equiv V/c, \gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2})$$

と表される。小さな β を想定すると $\gamma = 1 + O(\beta^2)$, $\beta\gamma = \beta + O(\beta^3)$ なので、変換係数は

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\beta & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv (\delta^\mu_\nu) + (\varepsilon^\mu_\nu)$$

となる。これは無限小パラメータ ε^μ_ν を $\varepsilon^0_1 = \varepsilon^1_0 = -\beta$, その他の $\varepsilon^\mu_\nu = 0$ と選んだ場合に対応している。(添字を上げると $\varepsilon^{10} = -\varepsilon^{01} = \beta$, その他の $\varepsilon^{\mu\nu} = 0$.) 同様に成分 $\varepsilon^0_2 (= \varepsilon^2_0)$, $\varepsilon^0_3 (= \varepsilon^3_0)$ はそれぞれ x^2, x^3 方向の等速推進に関係付けられ得る。

次に $x^1 x^2$ 面内の空間回転は、回転角を θ として

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

と表される。小さな θ を想定すると、変換係数は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & 0 \\ 0 & -\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv (\delta^\mu_\nu) + (\varepsilon^\mu_\nu)$$

となる。これは無限小パラメータ ε^μ_ν を $\varepsilon^1_2 = -\varepsilon^2_1 = \theta$, その他の $\varepsilon^\mu_\nu = 0$ と選んだ場合に対応している。(添字を上げると $\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = -\theta$, その他の $\varepsilon^{\mu\nu} = 0$.) 同様に成分 $\varepsilon^2_3 (= -\varepsilon^3_2)$, $\varepsilon^3_1 (= \varepsilon^1_3)$ はそれぞれ $x^2 x^3$ 面内, $x^3 x^1$ 面内の空間回転に関係付けられ得る。

無限小の Lorentz 変換 (39) に対する Lagrangian の不変性を要求すると、粒子系の角運動量 4 元テンソル

$$M^{\mu\nu} \equiv \sum (x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu) = -M^{\nu\mu} \quad (40)$$

の保存が導かれる (証明は 7.3.2 節). ただし \sum は粒子に関する和であり, ここでは粒子番号の添字 a を省略している. また $p^\mu = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p})$ は各粒子のエネルギー \mathcal{E} と (正準) 運動量 \mathbf{p} から成る 4 元運動量ベクトルである. $M^{\mu\nu}$ の空間成分は通常の角運動量

$$M^{ij} = \varepsilon^{ijk} M_k, \quad M_k = \left[\sum \mathbf{r} \times \mathbf{p} \right]_k$$

を与える (ε^{ijk} は添字に関して反対称な Levi-Civita 記号であり, $\varepsilon^{123} = 1$). $\mu = \nu = 0$ の時間成分は, 反対称性より $M^{00} = 0$ である. 新たに現れた保存する角運動量成分

$$M^{0i} = \left[c \sum \left(t\mathbf{p} - \frac{\mathcal{E}\mathbf{r}}{c^2} \right) \right]^i$$

の意味を解釈しよう. 閉じた系は回転対称性だけでなく時間並進対称性を持つ. そこで全エネルギー $\sum \mathcal{E}$ の保存と併せると, 相対論的な慣性中心 $\mathbf{R} \equiv \sum \frac{\mathcal{E}\mathbf{r}}{\mathcal{E}}$ は一様な運動をすることが分かる:

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}t + \text{const.}, \quad \mathbf{V} = \frac{\sum c^2 \mathbf{p}}{\sum \mathcal{E}}.$$

非相対論的極限では $\mathcal{E} \simeq mc^2$ なので (m は各粒子の質量, 1.6 節) これらは通常の質量中心 (重心) とその速度

$$\mathbf{R} \simeq \frac{\sum m\mathbf{r}}{\sum m}, \quad \mathbf{V} \simeq \frac{\sum m\mathbf{v}}{\sum m}.$$

に移行する。

次に場の理論に移ろう。対称性と保存則の説明に入る前に、保存するチャージとカレントの概念を導入しておく。ある 4 元ベクトル f^α が連続の式

$$\partial_\alpha f^\alpha = 0, \quad \text{または} \quad \frac{\partial f^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f} = 0$$

(ただし $\mathbf{f} = (f^1, f^2, f^3)$) を満たすとき、 f^α は保存するチャージの時空における流れの密度、 f^0/c をチャージの密度、 \mathbf{f} を空間におけるチャージの流れの密度と解釈できる。実際、このとき連続の式は、単位時間に単位体積から流出したチャージの量 $\nabla \cdot \mathbf{f}$ だけ、その中のチャージの減少 $\left(-\frac{\partial f^0}{\partial t}\right)$ がもたらされることを表している。これは、それ以外にチャージの生成・消滅などの理由で単位体積中のチャージの増減が起こることはないという、チャージの局所的な保存則に他ならない。次に連続の式を空間全体にわたって積分すると

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int d^3x f^0 = - \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{f} = 0$$

となるため*8、チャージ

$$F^0 \equiv \frac{d}{dt} \int d^3x f^0$$

は(大域的)保存量となる*9。なお f^α は簡単に、保存する流れ(カレント)と呼ばれる(もっとも正確には保存するのはカレント f^α ではなくチャージ F^0 である) [10, p.37].

参考 連続の式 $\partial_\alpha f^\alpha = 0$ を空間積分する代わりに、2つの時刻 $t = t_1, t_2$ の超平面によって挟まれた時空領域にわたって積分するならば、これを 3 次元的な“表面”の積分に変換するのに 4 次元 Gauss の定理が必要となる。直観的に言って、連続の式 $\partial_\alpha f^\alpha = 0$ は時空において f^α のわき出しがないことを意味することから期待されるように、超平面 $t = t_1$ から流入するチャージと超平面 $t = t_2$ から流出するチャージは等しくなければならないことが導かれる。これが保存則の主張となる。上記の導出は時間差 $t_2 - t_1$ を単位時間に選んだ場合に相当する。

さて、特殊相対性理論を想定して作用を $S = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} d^4x$ と書く (\mathcal{L} は Lagrangian 密度, 1.3.1 節)。場の理論においても理論の不変性は運動方程式の不変性のことであって、必ずしも Lagrangian 密度そのものは不変でなくても良い。実際、Lagrangian 密度には任意の場 Λ^μ の 4 元発散 $\partial_\mu \Lambda^\mu$ を加えるだけの不定性がある(証明は 7.3.2 節)。とは言えやはり、いくつかの重要な保存量は Lagrangian 密度の不変性から導かれる。そこで Lagrangian 密度を不変に保つような場 $\{\phi_r\}$ の変更

$$\phi_r(x) \rightarrow \phi'_r(x) = \phi_r(x) + \delta\phi_r(x)$$

を考えよう。このとき Euler-Lagrange 方程式 (37) を用いると

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} \delta\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)} \delta(\partial_\alpha\phi_r) = \left(\partial_\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)}\right) \delta\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)} \partial_\alpha \delta\phi_r \\ &= \partial_\alpha \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)} \delta\phi_r \right) \end{aligned} \quad (41)$$

*8 第 2 の等号では通常の (Gauss の) 発散定理によって体積積分を無限遠の表面積分に変換し、常套的に無限遠において、物理的な場 \mathbf{f} が充分速くゼロに近づくものと仮定した。

*9 $f^0(\mathbf{x}, t)$ の空間積分 F^0 は数学的には時間だけの関数となるため、上式において常微分の記号 $\frac{d}{dt}$ を用いている。 F^0 が実際には時間にも依らないということが物理的な主張である。

であり、今の場合これがゼロとなるから、保存するカレント

$$f^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \delta \phi_r \quad (42)$$

が得られる [10, pp.37-38]. ただしこれ以降、繰り返された場の種類の添字 r についても和をとるものと約束する.

変分を場の評価される時空点 x の変更に伴う変化と見なせば、上式 (41) の意味は変わるものの計算自体は再利用でき、

$$\partial_\alpha \mathcal{L} = \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \phi_r)} \partial_\alpha \phi_r \right)$$

となる. 左辺に $\partial_\alpha \mathcal{L} = \delta_\alpha^\beta \partial_\beta \mathcal{L}$ を代入すると、保存則

$$\partial_\beta T_\alpha{}^\beta = 0, \quad T_\alpha{}^\beta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \phi_r)} \partial_\alpha \phi_r - \delta_\alpha^\beta \mathcal{L} : \text{エネルギー・運動量テンソル} \quad (43)$$

が得られる. これは

$$P^\alpha = \frac{1}{c} \int T^{\alpha 0} d^3x \quad (44)$$

が保存することを意味する. ここでは Lagrangian 密度の不変性をあからさまに用いておらず、保存則は Euler-Lagrange 方程式 (37) だけから導かれていることに注意されたい. ところで Euler-Lagrange 方程式 (37) の導出は系が閉じており、それ故 Lagrangian 密度が x^μ に陽に依存しないことに基づいている. よってこれは時間と空間の並進対称性から導かれる保存量であり、 P^α は (定数係数の任意性を除けば) 系の運動量の 4 元ベクトルと見なされる. ここで 4 元運動量とは、時間成分 P^0 にエネルギー (を c で割った値)、空間成分 P^i に運動量を持つ反変ベクトルである (我々は 1.6 節の式 (90) の箇所で、電磁場と相互作用する荷電粒子系に対してそのようなベクトルを具体的に構成できることを示す). ところが空間の各格子点における場の値 ϕ_r を力学変数と見ると、1 つの格子点の占める体積 dV の胞 (セル) に含まれる場の運動量は $\partial(\mathcal{L}dV)/\partial \dot{\phi}_r$ と表されるため、 $\pi_r = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\phi}_r$ を場の運動量密度に同定できる. この解釈の下で

$$T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_r} \dot{\phi}_r - \mathcal{L}$$

をエネルギーの一般式 (38) と比較すると、これは確かにエネルギー密度 (Hamiltonian 密度) となっているから、4 元運動量 P^α は既に適正に規格化されていることが分かる [3, pp.87-89].

以上よりエネルギー・運動量テンソルの全成分の物理的な意味を解釈することができる [3, pp.90-91].

$$T^{00} = W : \text{エネルギー密度}, \quad \frac{1}{c} T^{i0} : \text{運動量密度}$$

である. このとき

$$\begin{aligned} \partial_\alpha T^{0\alpha} = 0 &\quad \rightarrow \quad cT^{0i} = S^i : \text{エネルギー流束}, \\ \partial_\alpha T^{i\alpha} = 0 &\quad \rightarrow \quad T^{ij} = \sigma^{ij} : \text{応力テンソル} \quad (i : \text{力の向き}, j : \text{面}) \end{aligned}$$

となる*10. よって

$$T^{0i} = c \times (\text{運動量密度})^i = \frac{1}{c} \times (\text{エネルギーの流れの密度})^i.$$

場の Lorentz 変換の形を具体的に指定して, 系の Lorentz 対称性に付随する保存量を調べよう [10, pp.39–43]. 原点の時空内並進も含めた無限小の Lorentz 変換は

$$x_\alpha \rightarrow x'_\alpha = x_\alpha + \delta x_\alpha = x_\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta} x^\beta + \delta_\alpha \quad (45)$$

と書ける ($\varepsilon_{\alpha\beta}$ は反対称, 式 (39) を参照). これに伴う場の変換が, 次のように表されるものと仮定する (3.4 節参照).

$$\phi_r(x) \rightarrow \phi'_r(x') = \phi_r(x) + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} S_{rs}^{\alpha\beta} \phi_s(x).$$

これは同一の時空点における場の値の変化が

$$\delta_T \phi_r(x) \equiv \phi'_r(x') - \phi_r(x) = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} S_{rs}^{\alpha\beta} \phi_s(x) \quad (46)$$

で与えられることを意味しており, 引数における場を評価する時空点の座標も変換により $x \rightarrow x'$ と変化している. $S_{rs}^{\alpha\beta}$ の添字 $\alpha\beta$ に関する反対称性を仮定しても一般性を失わない ($S_{rs}^{\alpha\beta}$ の対称部分は $\varepsilon_{\alpha\beta} S_{rs}^{\alpha\beta}$ に寄与を持たないから). 理論の不変性として, 今度は Lagrangian 密度の不変性

$$\mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\alpha \phi_r(x)) = \mathcal{L}(\phi'_r(x'), \partial'_\alpha \phi'_r(x'))$$

(ただし $\partial'_\alpha \equiv \partial/\partial x'^\alpha$) を要求すると, 連続の式

$$\partial_\alpha f^\alpha = 0, \quad f^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)} \delta_T \phi_r - \mathcal{T}^{\alpha\beta} \delta x_\beta \quad (47)$$

が導かれる (導出は 7.3.2 節). ただしここではエネルギー・運動量テンソルを

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)} \partial_\beta \phi_r - \mathcal{L} \eta^{\alpha\beta} \quad (48)$$

と再定義している.

まず並進操作 ($\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$) を考えると, 上式 (45), (46) において $\delta x_\beta = \delta_\beta$, $\delta_T \phi_r = 0$ となるので, カレントの式 (47) は $f^\alpha = -\mathcal{T}^{\alpha\beta} \delta_\beta$ と簡略化される. 変位 δ_β の 4 成分は独立にとれるので, 連続の式はエネルギー・運動量保存則 (43):

$$\partial_\alpha \mathcal{T}^{\alpha\beta} = 0$$

を再現する.

次に時空内の回転操作 ($\delta_\alpha = 0$) を考えると, カレントの式 (47) は

$$f^\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon_{\beta\gamma} \mathcal{M}^{\alpha\beta\gamma}, \quad \mathcal{M}^{\alpha\beta\gamma} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)} S_{rs}^{\beta\gamma} \phi_s + (x^\beta \mathcal{T}^{\alpha\gamma} - x^\gamma \mathcal{T}^{\alpha\beta}) (= -\mathcal{M}^{\alpha\gamma\beta}) \quad (49)$$

*10 保存則 $\partial_\alpha T^{i\alpha} = 0$ から分かるように, 応力 σ^{ij} は x^j 軸に垂直な単位面積を介して, x^j 座標の小さい側から大きい側へ及ぼす力の第 i 成分である. このとき例えば流体を想定すると, 圧力は $\sigma^{ij} = p \delta^{ij}$ であり, 右辺に負号は現れない. 有限の領域 V に働く力は, 発散定理

$$\int_V (-\partial_j \sigma^{ij}) dV = \int_S (-\sigma^{ij} n_j) dS$$

が意味するように, V の表面 S に働く応力によってもたらされる.

を与える (導出は 7.3.2 節). 回転操作 $\varepsilon_{\beta\gamma}$ は (反対称性を有する点を除けば) 互いに独立なので, 連続の式 $\partial_\alpha f^\alpha = 0$ は $\partial_\alpha M^{\alpha\beta\gamma} = 0$ に帰着する. ここから保存するチャージ

$$\begin{aligned} cM^{\alpha\beta} &= \int d^3x \mathcal{M}^{0\alpha\beta} \\ &= \int d^3x \{ (x^\alpha \mathcal{T}^{0\beta} - x^\beta \mathcal{T}^{0\alpha}) + c\pi_r S_{rs}^{\alpha\beta} \phi_s \} (= -cM^{\beta\alpha}) \end{aligned} \quad (50)$$

が得られる. これは回転対称性に付随する保存量なので, 角運動量と見なされる. $T^{i0}/c = \mathcal{T}^{0i}/c$ は運動量密度であり, $dP^i \equiv \frac{T^{0i}}{c} dV$ は 3 次元空間の体積 dV が持つ運動量なので, M^{ik} の第 1 項

$$\int (x^i dP^k - x^k dP^i)$$

は場全体の持つ軌道角運動量となっていることが見て取れる. $S_{rs}^{\alpha\beta}$ の項は固有スピン角運動量を表すものと解釈できる. ここでスピン角運動量とは量子力学において想定される粒子 (場) の内部自由度である.

角運動量がスピンを含まず, 古典論の水準で軌道角運動量のみを保存則が得られるようにエネルギー・運動量テンソルを再定義することが可能である [3, pp.89–90]. 実際

$$T^{\alpha\beta} \rightarrow T'^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} + \partial_\gamma \psi^{\alpha\beta\gamma}, \quad \psi^{\alpha\beta\gamma} = -\psi^{\alpha\gamma\beta}$$

とすると, $T'^{\alpha\beta}$ もまた保存則 $\partial_\beta T'^{\alpha\beta} = 0$ を満たす. ただし $T^{\alpha\beta}$ と $T'^{\alpha\beta}$ は同じ全 4 元運動量 P^α を与える (理由は 7.3.2 節). ところで 4 元運動量密度 $T^{\alpha 0}/c$ を用いて角運動量密度を表せる, すなわち 4 元角運動量が

$$M^{\alpha\beta} = \frac{1}{c} \int (x^\alpha T^{\beta 0} - x^\beta T^{\alpha 0}) dV$$

によって与えられることを要求すると, 角運動量の保存則 $\partial_\gamma (x^\alpha T^{\beta\gamma} - x^\beta T^{\alpha\gamma}) = 0$ は $T^{\alpha\beta}$ の対称性

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$$

を帰結する (導出は 7.3.2 節). 前述の $T^{\alpha\beta}$ の任意性を利用して $T^{\alpha\beta}$ を対称に選ぶことができる (1.6.9 節ではそのような例を具体的に見る).

最後に複素場 ϕ_r のゲージ変換 (位相変換) に関する対称性から, 電荷保存則が導かれることを説明する [10, p.38]. ここでは量子論への移行を容易にするために, 古典場 $\phi_r (r = 1, 2, \dots)$ の複素共役を ϕ_r^\dagger と書くことにする. 我々は ϕ_r と ϕ_r^\dagger を独立な場として扱わなければならない. ここで ε を無限小の実パラメーターとして, 大域的な位相変換 (第 1 種ゲージ変換)*11

$$\phi_r \rightarrow \phi'_r = e^{i\varepsilon} \phi_r, \quad \phi_r^\dagger \rightarrow \phi'^{\dagger}_r = e^{-i\varepsilon} \phi_r^\dagger \quad (51)$$

を考える. このとき Lagrangian の不変性からは, 保存量

$$Q = \frac{-iq}{\hbar} \int d^3x [\pi_r(x) \phi_r(x) - \pi_r^\dagger(x) \phi_r^\dagger(x)] \quad (52)$$

が導かれる ($\pi_r \equiv \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\phi}_r$, etc., 導出は 7.3.2 節)*12. ここに q は定数であり, 後に第 3 章で明らかになるように, (場の量子論において) この複素場 ϕ_r で記述される粒子の電荷が $\pm q$ である. なお 1.6.1 節ではゲージ対称性と電荷保存則の関係を, 電磁気学に関して古典論の水準で説明する.

*11 位相パラメーター ε が各時空位置 x に共通であることが, 「大域的」の意味である.

*12 その導き方より, 全ての種類 r の場に対して一斉に位相変換 (51) を施す場合には, 対応する保存量 (52) の右辺では場の種類 r に関する和が含意されているものと見なさなければならない.

■対称性と保存則, まとめ 無限小の Lorentz 変換

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^{\mu\nu} x_\nu + \delta^\mu$$

に関する対称性と保存則の関係は, 粒子系と場の系を併せて以下のようにまとめられる.

- 時空内の推進 (並進) 操作 (δ^μ) に関する対称性
 - 空間並進 \rightarrow 運動量の保存
 - 時間並進 \rightarrow エネルギーの保存
- 回転操作 ($\varepsilon^{\mu\nu}$) に関する対称性
 - 空間内の回転 \rightarrow 角運動量の保存
 - 時空内の回転, すなわち等速推進 (Lorentz ブースト)
 - \rightarrow (粒子系の) 重心 (エネルギー中心) の等速度運動 (エネルギー・運動量保存則の下で)
- (ある種の) ゲージ対称性 \rightarrow 電荷保存則

1.3.3 エネルギー・運動量テンソル [3, pp.301-304]

1.3.2 節では特殊相対性理論の範囲で, エネルギー・運動量テンソルの一般公式 (43) を導いた. 一般相対性理論では, 作用は

$$S = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x$$

という形をとる ($\sqrt{-g} d^4x$ は固有体積要素 (1.1.6 節), 慣性系で $\sqrt{-g} = 1$). ただしここでの作用 S は, 力学変数 $g^{\mu\nu}(x)$ を記述する項 (重力場項) を含まないものとしておく. ここで作用がスカラーであり, 無限小の座標変換

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu \tag{53}$$

に対して不変であることを要求すると*13, 保存則

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{54}$$

が導かれる (導出は 7.3.3 節). ここに $T^{\mu\nu}$ は, 計量テンソル $g^{\mu\nu}$ の変分 $\delta g^{\mu\nu}$ に伴う作用の変化

$$\delta S = \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \delta (\partial_\lambda g^{\mu\nu}) \right\} d^4x = \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right\} (\delta g^{\mu\nu}) d^4x$$

(ただし $\Lambda \equiv \mathcal{L} \sqrt{-g}$) において

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right\} \tag{55}$$

で定義される対称テンソルである. 従ってこれは $g^{\mu\nu}, \partial_\lambda g^{\mu\nu}$ による微分が $g^{\nu\mu}, \partial_\lambda g^{\nu\mu}$ を固定して行われることを意味する.

保存則 (54) は一般座標変換 (53) に関する対称性から導かれていることを踏まえると, 上式 (55) の $T_{\mu\nu}$ は (重力場を含まない物理系の) エネルギー・運動量テンソルを与えると期待できる (定数係数の違いはあり得るにしても). この解釈を正当化するために, 1.6.9 節では電磁場の系に対して上式 (55) に基づいて計算したエ

*13 この条件は最小作用原理から導かれる運動方程式が, 任意の座標系で成り立つことを保証する (十分条件, 1.4.3 節).

エネルギー・運動量テンソルが、平坦な時空において 1.3.2 節の一般公式 (43) と等価な結果を与えることを示す予定である。(上式 (55) の $T_{\mu\nu}$ はエネルギー・運動量テンソルそのものであり、定数係数は 1 であることが同時に分かる。)

公式 (55) には最初から対称なエネルギー・運動量テンソルが得られるという利点がある。重力がない場合にもエネルギー・運動量テンソルを計算するのに、形式的に公式 (55) を利用できる。

注意 上式 (54): $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ は厳密な意味での保存則ではない。と言うのも、 $\int T^{\mu 0} \sqrt{-g} d^3x$ が保存するための連続の式は $\partial_\nu(\sqrt{-g}T^{\mu\nu}) = 0$ であって、式 (54) ではない(発散公式 (20) による)。これは重力場もエネルギーと運動量を担うため、重力場を除く物理系のエネルギー・運動量保存則は近似的にしか成り立たないことに関係している [3, p.313] [6, p.95].

1.3.4 Hamilton 形式

Lagrangian は q, \dot{q}, t の関数であった。ここで一般座標 q_i に共役な一般運動量 $p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ の組 $p \equiv \{p_1, p_2, \dots\}$ に対して $\sum_i p_i \dot{q}_i - L$ が q, p, t の関数として

$$H(q, p, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

と表されるとき、これを系の Hamiltonian と呼ぶ。数学的にはこの変換 $L(q, \dot{q}, t) \rightarrow H(q, p, t)$ は Legendre 変換となっている。Lagrange 方程式 (35)(および一般運動量の定義 $p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$) は Hamiltonian に対する正準方程式

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (56)$$

になる (7.3.4 節参照) [9, pp.166–167].

q, p, t の任意の関数 f, g に対して Poisson 括弧を

$$\{f, g\}_P = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right)$$

と定義する。ここから直ちに Poisson 括弧が次の性質を満たすことが分かる。

$$\begin{cases} \{f, g\}_P = -\{g, f\}_P \\ \{f, c\}_P = 0 \\ \{f, ag_1 + bg_2\}_P = a\{f, g_1\}_P + b\{f, g_2\}_P \\ \{f, g_1g_2\}_P = g_1\{f, g_2\}_P + \{f, g_1\}_P g_2 \end{cases} \quad (57)$$

ただし a, b, c は定数, g_1, g_2 は q, p, t の任意の関数である。

Poisson 括弧を用いると、正準方程式 (56) に従う点 (q, p) の運動に伴う f の時間変化率は

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}_P \quad (58)$$

と書ける。また、各正準変数 $\{q_i\}, \{p_i\}$ は独立なので

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_k} = 0, \quad \frac{\partial p_i}{\partial q_k} = 0, \quad \frac{\partial q_i}{\partial q_k} = \delta_{ik}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial p_k} = \delta_{ik}$$

となることに注意すると，正準変数間の Poisson 括弧は

$$\{q_i, q_j\}_P = 0, \quad \{p_i, p_j\}_P = 0, \quad \{q_i, p_j\}_P = \delta_{ij} \quad (59)$$

となることが分かる [9, pp.171–172].

1.3.5 座標の関数としての作用

最小作用原理から Lagrange 方程式を導く際に確かめたように (7.3.1 節)，系の軌道 $q_i(t)$ の変分に伴う作用 S の変化は

$$\delta S = \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right]_{t_0}^t + \int_{t_0}^t \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt$$

と表される．ただし最小作用原理では与えられた始点 (時刻 t_0) と終点 (時刻 t) の下で，2 点を結ぶ作用の積分路を変更することを考えた (1.3.1 節)．これに対しこれ以降では，作用の積分路を系の実際の軌道に限定し，作用を終点の時刻と座標の値 (t, q) の関数と見なす ($q = \{q_i\}$)．(これを Hamilton の主関数と呼ぶ [5, p.184].) すなわち積分の始点 (t_0, q_0) は固定されており，我々が終点 (t, q) を指定すると，それに応じて始点 (t_0, q_0) と終点 (t, q) を結ぶ現実の運動に対応する軌道が積分路として定まる．実際に起こる運動の軌道は Lagrange 方程式を満たすので，このとき上式右辺の積分は消え，終点の座標の変化 δq_i に伴う作用の変化の式 $\delta S = \sum_i p_i \delta q_i$ が得られる．この関係から，座標についての作用の偏導関数は

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$$

となる．さらに時間についての作用の偏導関数 $\partial S / \partial t$ が

$$\begin{aligned} L &= \frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i, \\ \therefore \frac{\partial S}{\partial t} &= L - \sum_i p_i \dot{q}_i = -H \end{aligned}$$

と求まる．こうして座標の関数としての作用積分 (Hamilton の主関数) は

$$S = \int \left(\sum_i p_i dq_i - H dt \right)$$

の形に書ける [9, pp.175–177]．このことはその導き方から分かるように，言わば最小作用原理の裏返しであって，Weiss の原理と呼ばれる [5, p.183].

特に Hamiltonian が時間を陽に含まず，系のエネルギーが保存している場合には，そのエネルギーを $(H(q, p) =) E$ として

$$S = \int \sum_i p_i dq_i - E(t - t_0)$$

と書ける．右辺の第 1 項 $S_0 = \int \sum_i p_i dq_i$ は簡約された作用と呼ばれる [9, p.178].

さらに $\frac{\partial S}{\partial t} = -H(q, p, t)$ における運動量を $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ で置き換えると，関数 $S(q, t)$ に対する Hamilton-Jacobi 方程式

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left(\{q_i\}, \left\{ \frac{\partial S}{\partial q_i} \right\}, t \right) = 0 \quad (60)$$

を得る．Hamilton-Jacobi 理論の基礎方程式である [9, pp.186–187].

1.4 古典的統一理論

1.4.1 電磁場

古典的には自然は粒子と電磁場、重力場から成る。重力場の強度は Christoffel 記号に対応することが、まもなく示される (1.5.1 節)。本節では電磁場を導入する。

電磁ポテンシャルと呼ばれる反変 4 元ベクトル A^μ から電磁場テンソル

$$F_{\mu\nu} \equiv A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

が作られる (第 2 の等号は共変微分の式 (12) による)。これは添字に関して反対称であり ($F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$)、以下のように電磁場の成分を与える。すなわち電場 $\mathbf{E} = (E^1, E^2, E^3)$ と磁束密度 $\mathbf{B} = (B^1, B^2, B^3)$ はそれぞれ

$$E^i = \gamma^{ij} E_j, \quad E_i = F_{0i}, \quad (61)$$

$$B^i = -\frac{1}{2} E^{ijk} B_{jk}, \quad B_{ij} = F_{ij} \quad (62)$$

で定義される。ここに γ^{ij} は 1.1.5 節の 3 次元計量テンソル γ_{ij} の逆テンソルで $\gamma^{ij}\gamma_{jk} = \delta^i_k$ を満たし、行列式 $\gamma \equiv |\gamma_{ij}|$ に対し $E^{ijk} \equiv \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \varepsilon^{ijk}$ は 3 次元の反対称テンソルである (ただし $\varepsilon^{123} = 1$, 1.1.7 節参照)。ラテン文字 i, j, \dots は空間成分 1, 2, 3 を動くものとする [3, pp.286–287]。

電磁場 \mathbf{E}, \mathbf{B} (場の強度) は物理的実体であり、その成分は時空の各点で決まった値を持つものに対し、同一の電磁場の成分、従って電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ を導く電磁ポテンシャル A^μ は無数に存在する。実際ある電磁ポテンシャル A^μ から作られる電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ と、 f を時空座標の任意の関数として電磁ポテンシャル $A'^\mu \equiv A^\mu + \partial^\mu f$ から作られる電磁場テンソル $F'_{\mu\nu}$ は同じ値を持つ (7.4.1 節参照)。変換

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu \equiv A^\mu + \partial^\mu f$$

を (電磁場の) ゲージ変換と呼ぶ。この任意性を利用して、Lorenz 条件

$$A^\mu{}_{;\mu} = 0 \quad (63)$$

を満たすポテンシャルをとることができる (7.4.1 節参照)。なおゲージ変換は単に場の強度を不変に保つというだけでなく、理論 (運動方程式) をも不変に留める変換である (1.6.1 節)。

1.4.2 4 元電流 (密度)

電流密度の 4 元ベクトルを

$$j^\mu(x) = \sum_a \frac{e_a c}{\sqrt{-g(x)}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \frac{dx_a^\mu}{dx^0} \quad (64)$$

で定義する (a は粒子の番号)。ただしここでは空間座標をまとめて $\mathbf{r} \equiv (x^1, x^2, x^3)$ と表し、デルタ関数を $\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3) \equiv \delta(\mathbf{r})$ と書いている (曲線座標系において \mathbf{r} は位置ベクトルではない) [3, pp.285–286]。

7.4.2 節では 4 元電流密度 (64) を

$$j^\mu(x) = \sum_a \frac{e_a c}{\sqrt{-g(x)}} \int \delta(x - x_a) \frac{dx_a^\mu}{d\tau_a} d\tau_a \quad (65)$$

と書き換え、実際にこれが反変ベクトルとして変換することを証明する。以下では j^μ がその名の通り電流密度の 4 元ベクトルと解釈できることを、特殊相対性理論の文脈で説明する。(ひるがえって電流密度の定義式 (64) は、その重力がある場合への自然な一般化と理解できる。)

■平坦な時空での電流密度 j^μ の意味付け 平坦な時空を想定して慣性系をとると、電流密度の定義式 (64) は

$$j^\mu = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \frac{dx_a^\mu}{dt}$$

と簡略化される。その成分を $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$ と書こう*14。

特殊相対性理論の文脈で ρ, \mathbf{j} の意味は次のように分かる。まず

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \quad (66)$$

に対して $\int_V \rho d^3x$ は領域 V 内部の電荷の総和を与える。これは ρ が電荷密度であることを意味している [3, pp.78–79]。また式 (66) の ρ と

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \quad \mathbf{v}_a \equiv \frac{d\mathbf{r}_a}{dt} \quad (67)$$

は連続の式 (1.3.2 節)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (68)$$

を自動的に満たす (7.4.2 節参照) [3, pp.81–82] [12, p.195]。これは \mathbf{j} を電流密度 (電荷の流れの密度) と見なすことを (したがって j^μ を 4 元電流密度と見なすことを) 正当化する*15。

ρ : 電荷密度, \mathbf{j} : 電流密度.

この結果は言い換えれば、系が生成消滅しない点電荷で構成されていることを電荷密度・電流密度の式 (66),(67) は適切に表現しているため、電荷保存則すなわち連続の式が満たされるものと解釈できる。

参考——電荷密度 (66) の引数 (t, \mathbf{r}) 依存性 位置 \mathbf{r} は場の値を評価する観測点の位置であるのに対し、 \mathbf{r}_a は粒子の位置であり、その引数 t が場 $\rho(\mathbf{r}, t)$ の時間依存性となっている。これは荷電粒子の運動が電荷分布の時間変化を引き起こすという、当然の事実を表している。(曲がった時空では因子 $\sqrt{-g}$ も $x = (ct, \mathbf{r})$ 依存性を担う。)

1.4.3 最小作用原理

古典物理学において自然界は粒子と場 (電磁場と重力場) から成り、粒子と場は相互作用しながら決定論的に時間発展する。時間発展は最小作用原理から決定され、原理的には古典物理学における自然界の振舞いは、作用 S の表式に完全に含まれていると言える。作用 S は次式で与えられる [3, p.304, pp.306–308] [6, pp.115–116] [13, pp.261–262, pp.266–267]。

*14 4 元電流 j^μ の時間成分と空間成分の次元は等しい: $[c\rho] = [\mathbf{j}]$ 。時間成分は電荷密度 ρ に c が掛かり、電流密度の次元になっている。

*15 ここで電荷の流れの密度とは、面積素ベクトル $d\mathbf{S}$ を持つ面要素を単位時間に通過する電荷を $\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ で与えるベクトル \mathbf{j} のことである。それ故、単位時間に単位体積から流出する電荷の総量は $\nabla \cdot \mathbf{j}$ と表される。

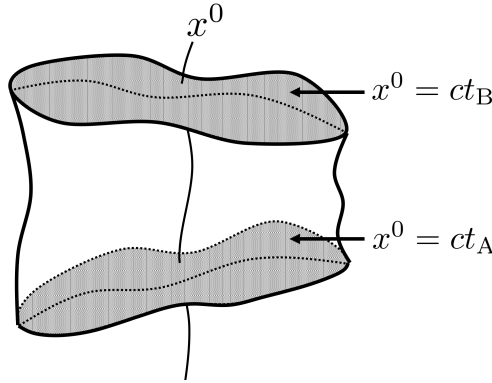


図8 作用の積分範囲

$$S = - \sum mc \int ds - \sum \frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu - \frac{1}{16\pi c} \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x - \frac{c^3}{16\pi k} \int G \sqrt{-g} d^4x. \quad (69)$$

ここに

$$m : \text{粒子の質量}, \quad e : \text{粒子の電荷}, \quad k : \text{万有引力定数},$$

$$G \equiv g^{\mu\nu} (\Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\sigma\rho})$$

である。ただし電磁気学の単位系として Gauss 単位系を用いている。作用 (69) 右辺第 1,2 項の積分は与えられた座標時間 $t = t_A, t_B$ の間の粒子の軌道に沿って行う。 \sum は粒子ごとに値の異なる表式的全粒子についての和を表し、右辺第 2 項の A_μ は粒子の位置で評価する。右辺第 3,4 項の積分は図 8 の時刻 $t = t_A, t_B$ に挟まれた“円柱状”の領域に渡って行う。“円柱”の“側面”は空間の無限遠にあり、ここでは場の値はゼロになるものと仮定する。

式 (64):

$$j^\mu(x) = \sum_a \frac{e_a c}{\sqrt{-g(x)}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \frac{dx_a^\mu}{dx^0}$$

で定義した電流密度の 4 元ベクトルを用い (a は粒子の番号)、電磁場と粒子の相互作用項 $S_{mf} \equiv - \sum \frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu$ は場を基調とした表現

$$S_{mf} = - \frac{1}{c^2} \int j^\mu(x) A_\mu(x) \sqrt{-g(x)} d^4x \quad (70)$$

に書き換えられる (7.4.3 節参照)。

作用 S の表式 (69) の段階で理論の共変性を考察することができる。作用における $ds, A_\mu dx^\mu, F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ はスカラーである。また固有体積要素 $\sqrt{-g} d^4x$ は不変量である (1.1.6 節)。さらに第 4 項 $S_g \equiv - \frac{c^3}{16\pi k} \int G \sqrt{-g} d^4x$ における G そのものはスカラーではないけれど、計量テンソルの変化に伴う変分は

$$\delta S_g = - \frac{c^3}{16\pi k} \delta \int R \sqrt{-g} d^4x$$

となるので (7.5.3 節)、スカラーである (粒子の座標や電磁場の変化に伴う変分はもちろん、 $\delta S_g = 0$)。以上より作用の変分は座標系に依らない量なので、作用が極値 (停留値) をとる条件に他ならない運動方程式も座

標系の変更によって形を変えない。実際、1.5 節で導く場と粒子の運動方程式は両辺が同じ種類のテンソルから成り、座標変換に対して共変的であることが明白に見て取れる。

重力場項 S_g について $S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \int G\sqrt{-g}d^4x$ の変分を $\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \delta \int R\sqrt{-g}d^4x$ と計算できることは、重力場の作用を $S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \int R\sqrt{-g}d^4x$ としても良いことを意味する。(そうすれば、作用そのものがスカラーとなる。) ただし R は $g_{\mu\nu}$ の 2 階導関数を含む。これに対し $S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \int G\sqrt{-g}d^4x$ とすれば G は場 $g_{\mu\nu}$ とその 1 階導関数だけを含むことになり、自由電磁場の Lagrangian 密度 $-\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ が場 A_μ の 1 階導関数だけを含むこととの類似性が確保される。このとき場の方程式は時間に関して 2 階の微分方程式となり、場とその時間変化率の初期値が与えられればその後の場の時間発展が完全に決まるという、古典的因果律の保証されることが明瞭である。

1.4.4 電磁場を含めた物質の系のエネルギー・運動量テンソル

本節では a 番目の粒子の質量を m_a 、電荷を e_a 、座標を $x^\mu(a)$ 、固有時間を τ_a 、 $\dot{x}^\mu(a) \equiv \frac{dx^\mu(a)}{d\tau_a}$ と表記する。作用 (69) の重力場項 S_g を除いた右辺第 1,2,3 項の和を、

$$S'_m = \frac{1}{c} \int \mathcal{L}\sqrt{-g}d^4x$$

と書いたときの Lagrangian 密度 \mathcal{L} は

$$\Lambda(x) \equiv \mathcal{L}(x)\sqrt{-g(x)} = \int \left\{ -\sum_a \left(m_a c^2 \sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu(a)\dot{x}^\nu(a)} + e_a A_\mu(x)\dot{x}^\mu(a) \right) \delta^4(x - x(a)) \right\} d\tau_a - \frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta}(x)F_{\gamma\delta}(x)g^{\alpha\gamma}(x)g^{\beta\delta}(x)\sqrt{-g(x)} \quad (71)$$

で与えられる (7.4.4 節参照) [4, p.163] [8, p.116].

重力場を除く物理系のエネルギー・運動量テンソルの一般公式 (55) は、この Λ に対して具体的には

$$T_{\mu\nu}(x) = \sum_a \frac{m_a c}{\sqrt{-g(x)}} \int \dot{x}_\mu(a)\dot{x}_\nu(a)\delta^4(x - x(a))d\tau_a + \frac{1}{4\pi} \left(-F_{\mu\alpha}(x)F_\nu{}^\alpha(x) + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}(x)F^{\alpha\beta}(x)g_{\mu\nu}(x) \right) \quad (72)$$

となる (7.4.4 節参照) [4, p.165] [8, p.113,p.118]. これが粒子と電磁場のエネルギー・運動量テンソルである。

■物質のエネルギー・運動量テンソル 特に電磁場がないときの物質のエネルギー・運動量テンソルは

$$T^{(m)\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \sum_a m_a c \int \dot{x}^\mu(a)\dot{x}^\nu(a)\delta^4(x - x(a))d\tau_a \quad (73)$$

である。4 元電流密度 (64) が反変ベクトルになっていることの証明 (7.4.2 節) で見たように、 $1/\sqrt{-g}$ はデルタ関数の変換性を打ち消すので、上式 (73) 右辺は確かに 2 階共変テンソルとなっていることが分かる。上式 (73) は

$$T^{(m)\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \sum_a m_a \dot{x}^\mu(a)\dot{x}^\nu(a)\sqrt{1 - \left(\frac{v_a}{c}\right)^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \quad (74)$$

と書き換えられる (導出は 7.4.4 節)*16。この表式には明瞭な解釈を与えることができる (1.6.9 節)。

*16 ここでは 1.4.2 節と同様、空間座標をまとめて $\mathbf{r} \equiv (x^1, x^2, x^3)$ と表し、デルタ関数を $\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3) \equiv \delta(\mathbf{r})$ と書いている。

ここで粒子の系を連続体 (流体) と見なせる場合に, 上式 (73) を簡略化することを考える [4, pp.107–110, pp.165–166, p.169]. まず粒子が狭い範囲に局在しているとき, 各粒子の 4 元速度 $\dot{x}^\mu(a)$ を共通の流体要素の 4 元速度 \dot{x}^μ に置き換え, 粒子の和の外に出すことができる.

$$T^{(m)\mu\nu}(x) = \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \varrho(x), \quad \varrho(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \sum_a m_a c \int \delta^4(x - x(a)) d\tau_a. \quad (75)$$

再び $1/\sqrt{-g}$ はデルタ関数の変換性を打ち消すので, ここで定義した $\varrho(x)$ はスカラーである. 流体とともに運動する ($v_a = 0$) 局所慣性系 ($\sqrt{-g} = 1, d\tau_a = dx^0(a)/c$) では, $\dot{x}^\mu = (c, \mathbf{0})$ より

$$T^{(m)\mu\nu} = \begin{cases} \varrho c^2 : & \mu = \nu = 0 \\ 0 : & \text{その他の成分} \end{cases}, \quad \varrho(x) = \sum_a m_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \quad (76)$$

となる. したがって $\varrho(x)$ はスカラー量であって, x における局所慣性系のうち特に静止系を採用したとき, x における質量密度を与える*17. 粒子系が流体要素として振舞ういくつかの部分集団に分かれている場合には, その各集団ごとに上式 (75) が成り立つことになる. 4 元速度 \dot{x}^μ は部分集団ごとに異なることを踏まえると, 系全体のエネルギー・運動量密度を得るには, 単に式 (75) の \dot{x}^μ を空間の各位置で定義された速度場と読み替えれば良い.

1.5 粒子と場の運動方程式

最小作用原理から導かれる運動方程式を列挙する [6, pp.115–116]. 導出は 7.5 節を見よ.

1.5.1 粒子の運動方程式

実際の粒子の軌道が作用を極小にすることから, 粒子の運動方程式

$$mc \frac{Du^\mu}{ds} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu \quad (77)$$

が導かれる. ここに Du^μ は粒子が世界線に沿って ds 変位したときの 4 元速度 \vec{u} の変化 $d\vec{u}$ の, 変位前の点での μ 番目の成分である (1.1.8 節参照).

■重力場中の粒子の運動方程式 粒子の運動方程式 (77): $mc \frac{Du^\mu}{ds} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu$ は

$$Du^\mu = u^\mu{}_{;\nu} dx^\nu = (\partial_\nu u^\mu + u^\rho \Gamma^\mu{}_{\rho\nu}) dx^\nu, \quad u^\nu \partial_\nu u^\mu = \frac{du^\mu}{ds}$$

を用いて

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -m \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} + \frac{e}{c} F^{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{d\tau}$$

と書き換えられる. 簡単のために電磁場がない場合を考えると $F^{\mu\nu} = 0$ なので,

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -m \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} \quad (78)$$

となる. 右辺を粒子に働く重力と見なせば, これは重力が粒子の 4 元速度 $\frac{1}{c} \frac{dx^\mu}{d\tau}$ を変化させることを表していると解釈できる. また両辺に質量 m が共通だから, 重力場の中の粒子の運動は粒子の質量に依らないことが

*17 この“質量密度” $\varrho(x)$ の定義はやや特殊である. 空間の与えられた体積に含まれる質量は不変量であるけれど, 座標で測った空間の体積は, したがって質量密度は本来, 不変量ではない.

見て取れる。ここで Christoffel 記号は計量テンソルの導関数で決まるから (式 (15) 参照), Christoffel 記号が重力場の“強さ”に相当し, 計量テンソルは重力ポテンシャルと見なせる [3, pp.273–274] [4, p.122].

このことは重力場の弱い場合の非相対論的な運動方程式との対応を考えるとより明確になる。重力場がないときには時空の各点で Christoffel 記号が消え, 計量テンソルが式 (8) の $\eta_{\mu\nu}$ となるような慣性系がとれる。よって重力場が弱いとき時空の各点で計量テンソルが $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, |h_{\mu\nu}| \ll 1$ を満たすような座標系をとれる [7, p.244]. この座標系 (ct, \mathbf{r}) で測った粒子の速度 $\dot{\mathbf{r}}$ を \mathbf{v} と書くと (ドットは t による微分), 重力場が弱いとき粒子は速度が小さい範囲 $v/c \ll 1$ に留まることが可能である。このような非相対論的極限では重力ポテンシャル ϕ が定義されて, 粒子の運動方程式は

$$\dot{\mathbf{v}} = -\nabla\phi \quad (79)$$

と表される [3, p.252]. 粒子の運動方程式 (78) を導く作用 $S = S_m = -\sum mc \int ds$ が非相対論的極限 $\phi/c^2 \ll 1, v/c \ll 1$ で, 運動方程式 (79) を導く作用の 1 つ

$$S = \sum \int dt \left(-mc^2 + \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - m\phi \right) \quad (80)$$

に移行することを要求すると*18,

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} \quad (81)$$

が見いだされる (7.5.1 節参照) [3, p.275]. こうして計量テンソルが重力ポテンシャル ϕ と具体的に関係づけられる。

1.5.2 電磁場の方程式すなわち Maxwell 方程式

実際の電磁ポテンシャル A^μ の時間変化が作用を極小にすることから, 重力場中の電磁場に対する Maxwell 方程式

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -\frac{4\pi}{c}j^\mu \quad (82)$$

が導かれる。

■電荷保存則 1.4.2 節では特殊相対性理論の水準で, 荷電粒子系の電荷密度・電流密度が自動的に連続の式を満たすことを見た。一方で電荷密度・電流密度の具体的な表式とは無関係に, Maxwell 方程式 (82) の中には連続の式

$$\partial_\mu(j^\mu\sqrt{-g}) = 0 \quad (83)$$

が含まれている (導出は 7.5.2 節) [6, p.93]. これは平坦な時空では, 通常の連続の式

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

に帰着する。

*18 作用 (80) は場 ϕ の項を度外視すれば, 自由粒子の作用 $S = -\sum mc^2 \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$ (1.6.1) の非相対論的極限に一致する。

1.5.3 重力場の方程式すなわち Einstein 方程式

実際の計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の時間変化が作用を極小にすることから、重力場に対する Einstein 方程式

$$(G_{\mu\nu} \equiv) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi k}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (84)$$

が導かれる。ただし右辺の $T_{\mu\nu}$ は物質と電磁場のエネルギー・運動量テンソルである (1.4.4 節)。

■物質粒子と電磁場の運動方程式との関係 Bianchi の恒等式 (30): $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ によれば、Einstein 方程式は物質と電磁場のエネルギー・運動量保存則

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

を含意することになる^{*19}。そしてエネルギー・運動量保存則には、物質粒子の運動方程式と電磁場の方程式 (Maxwell 方程式) が含まれている (1.6.9 節では重力がない場合に、このことを具体的に見る)。したがって重力場の方程式 (Einstein 方程式) は、物質粒子と電磁場の運動方程式をも含んでいることになる [3, p.309]。

1.6 特殊相対性理論における運動方程式

我々は 1.4 節, 1.5 節において具体的な物理を打ち立てた。これを踏まえて特殊相対性理論 (1.2 節) をさらに推し進めることができる。本節では重力場がない場合の荷電粒子と電磁場の系を対象とし、特殊相対性理論の範囲内で電磁気学を定式化する。実際、素粒子のスケールでは (そして場合によっては巨視的な物体においても)、重力の影響は極めて弱く無視し得るため、重力のない場合に電磁場と荷電粒子の系を記述することは、特別に興味を持たれることでもある。

1.6.1 特殊相対性理論の作用

重力場のない平坦な時空を想定して慣性系をとると ($\sqrt{-g} = 1, \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} = 0$)、荷電粒子と電磁場の系に対して作用 (69) は、

$$\begin{aligned} S &= S_m + S_{mf} + S_f, \\ S_m &= - \sum mc \int ds, \quad (\text{自由粒子の項}) \\ S_{mf} &= - \sum \frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu = - \frac{1}{c^2} \int A_\mu j^\mu d^4x, \quad (\text{粒子と場の相互作用項}) \\ S_f &= - \frac{1}{16\pi c} \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^4x \quad (\text{自由電磁場項}) \end{aligned}$$

となる。慣性系で電磁ポテンシャルの成分を $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ と書いて

$$\phi: \text{スカラー・ポテンシャル}, \quad \mathbf{A}: \text{ベクトル・ポテンシャル}$$

^{*19} この保存則は近似的である (1.3.3 節)。

を定義すると*20, 対応する Lagrangian は

$$\begin{aligned}
 L &= L_m + L_{mf} + L_f, \\
 L_m &= - \sum mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, & (\text{自由粒子の項}) \\
 L_{mf} &= \sum \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - \sum e\phi, & (\text{粒子と場の相互作用項}) \\
 L_f &= - \frac{1}{16\pi} \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^3x & (\text{自由電磁場項})
 \end{aligned}$$

と表される (L_m の表式は式 (33): $ds = cd\tau = cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ による).

■ゲージ不変性と電荷保存則 ここでゲージ不変性と電荷保存則の関係性について論じることができる [3, p.56, pp.82-83]. 作用のゲージ不変性が非自明な項は粒子と場の相互作用項であり, その2通りの表現

$$S_{mf} = - \sum \frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu, \quad S_{mf} = - \frac{1}{c^2} \int A_\mu j^\mu d^4x$$

に応じてゲージ不変性と電荷保存則の関係を2通りに見ることができる. 相互作用項 S_{mf} のゲージ変換

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \delta A_\mu, \quad \delta A_\mu = -\partial_\mu f$$

に伴う変化

$$\delta S_{mf} = \sum \frac{e}{c} \int df, \quad \delta S_{mf} = \frac{1}{c^2} \int (\partial_\mu f) j^\mu d^4x$$

は電荷保存則により e が時間に依らない定数であれば, あるいは連続の式 $\partial_\mu j^\mu = 0$ が成り立てば, それぞれ

$$\delta S_{mf} = \sum \int d\left(\frac{e}{c}f\right), \quad \delta S_{mf} = \frac{1}{c^2} \int \partial_\mu (f j^\mu) d^4x$$

となる. これらは与えられた境界の値で決まるような, 変分をとると落ちる量となっているから, 運動方程式は不変に保たれる*21. (ここでの δ はゲージ変換に伴う変化量を表し, 変分の意味ではないことに注意する.) このようにゲージ不変性と電荷保存則は密接に関係している.

1.6.2 荷電粒子の4元運動量

1.6.1 節の Lagrangian に対して 1.3.2 節の一般式で定義される粒子の正準運動量は

$$\mathbf{P} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}$$

となる. ここに

$$\mathbf{p} \equiv \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

は粒子の力学的運動量と見なされ, 付加的な項 $\frac{e}{c}\mathbf{A}$ は場の寄与を表す.

*20 Gauss 単位系で ϕ と \mathbf{A} の次元は等しい ($[\phi] = [\mathbf{A}]$).

*21 運動方程式の不変性は, 運動方程式 (1.5 節) に現れるのがポテンシャルではなく場の強度であり, またゲージ変換は場の強度を不変に保つことから理解できる.

手始めに与えられた電磁場中での荷電粒子の運動を想定して，作用における自由電磁場の項を無視しよう [3, pp.51-52]. このときの Lagrangian $L_m + L_{mf}$ の Legendre 変換によって得られる Hamiltonian は

$$H \equiv \mathcal{H}_m + \mathcal{H}_{mf} = \sum \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + e\phi \right) = \sum \left(\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} + e\phi \right) \quad (85)$$

である (導出は 7.6.1 節). ここに

$$\mathcal{E} \equiv \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$$

は粒子のエネルギーと解釈される. したがって簡単のために 1 粒子系を考えると, 電磁場と相互作用する粒子の力学的運動量 \mathbf{p} とエネルギー \mathcal{E} は, 電磁場がない場合と比べて

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} \quad \rightarrow \quad \mathbf{p} = \mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}, \quad (86)$$

$$\mathcal{E} = H \quad \rightarrow \quad \mathcal{E} = H - e\phi \quad (87)$$

と変化する. またエネルギーと運動量の関係は

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2} + e\phi \\ \Leftrightarrow (H - e\phi)^2 - c^2\mathbf{p}^2 &= (mc^2)^2 \end{aligned} \quad (88)$$

とまとめられる. ここで $\mathbf{P} = \partial S / \partial \mathbf{r}$, $H = -\partial S / \partial t$ により (1.3.5 節), これを作用 S に対する偏微分方程式に読み替えると, Hamilton-Jacobi 方程式

$$\left(\nabla S - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\phi \right)^2 + (mc)^2 = 0 \quad (89)$$

を得る (1.3.5 節の式 (60) を参照).

なお全エネルギー (を c で割った値) H/c と正準運動量 \mathbf{P} は, 運動量 4 元ベクトルと呼ばれる反変ベクトル

$$P^\mu = \left(\frac{H}{c}, \mathbf{P} \right) = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + \frac{e}{c}\phi, \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + \frac{e}{c}\mathbf{A} \right) = mcu^\mu + \frac{e}{c}A^\mu \quad (90)$$

を作る (u^μ は 1.2.5 節で計算した 4 元速度) [3, p.69]^{*22}.

自由電磁場の項を含めた完全な理論を考える. 場の理論では Hamiltonian は, 1.3.2 節で説明した場の運動量密度を用いて, Hamiltonian 密度の体積積分として計算できる. 荷電粒子と電磁場の相互作用系に対して, Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (\dot{A}_\mu \text{ を含まない項})$$

^{*22} ここで 1.3.5 節で一般論を示したように, 正準運動量と Hamiltonian は座標の関数と見た作用 (Hamilton 主関数) の微分 $\mathbf{P} = \partial S / \partial \mathbf{r}$, $H = -\partial S / \partial t$ によって得られる. これらの関係は

$$P_\mu = -\partial_\mu S$$

とまとめられる. 実際, 作用の端点微分を計算すると, 再び式 (90) の P^μ が得られる [3, pp.67-69]. 式 (88) を作用 S に対する偏微分方程式に読み替えると, Hamilton-Jacobi 方程式

$$\left(\nabla S - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\phi \right)^2 + (mc)^2 = 0$$

を得る (1.3.5 節参照).

という形をとるので (ドットは時間 t による微分), 電磁場の運動量密度は

$$\pi^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -\frac{1}{4\pi c} F^{0\mu} \quad (91)$$

となる (導出は 7.6.1 節). すると全 Hamiltonian \mathcal{H} には, 付加的な項

$$\mathcal{H}_f = \int dV \pi^\mu \dot{A}_\mu - L_f = \int dV \frac{E^2 + B^2}{8\pi} - \sum e\phi \quad (92)$$

が現れるため (導出は 7.6.1 節),

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_m + \mathcal{H}_{mf} + \mathcal{H}_f = \sum \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + \int dV \frac{E^2 + B^2}{8\pi}$$

となる. 最右辺の第 2 項における $\frac{E^2+B^2}{8\pi}$ は場のエネルギー密度と見なされる. このように粒子の“位置エネルギー” $\sum e\phi$ は相殺し, (見かけ上) 全エネルギーには現れない*23.

1.6.3 自由粒子系

1.6.2 節の議論で電磁場をゼロとおけば, 自由粒子系のエネルギーと運動量に対する結論を引き出すことができる. 自由粒子の運動量 4 元ベクトルは, 式 (90) より

$$p^\mu = mcu^\mu = \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right) = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p} \right)$$

である. ここで時間成分と空間成分の次元は等しい: $[\mathcal{E}/c] = [p^i]$. これにより Lorentz 変換におけるこれらの線形結合が意味を成す. また 1.6.2 節と同様の議論を自由粒子に対して繰り返すと以下のようなものである [3, pp.28–33].

- Lagrangian $L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$
- 運動量 $\mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.
 - 非相対論的極限 ($v \ll c$) $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.
- エネルギー $\mathcal{E} \equiv \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$.
 - 静止エネルギー $\mathcal{E}_0 = mc^2$,
 - 非相対論的極限 ($v \ll c, p \ll mc$) $\mathcal{E} = mc^2 + \frac{mv^2}{2} = mc^2 + \frac{p^2}{2m}$.
 - 相対論的力学では自由な物体のエネルギーには付加定数の任意性がない ($\mathcal{E}_0 = mc^2$).
- これらの表式はたくさんの粒子からできている複合的な物体にも適用できる.
 - ただし静止している物体 m のエネルギーには
 - それを構成している粒子 (質量 m_a) の運動エネルギーと粒子間の相互作用のエネルギーも含まれ,
 - 質量保存の法則は成立しない: $mc^2 \neq \sum_a m_a c^2$.
- 運動量とエネルギーの関係 $\mathbf{p} = \mathcal{E} \frac{\mathbf{v}}{c^2}$.

*23 このような事情に関して, 静電場の位置エネルギー $\sum e\phi$ が場のエネルギー $\frac{1}{8\pi} \int E^2 dV$ に含まれており [3, pp.101–102], 同一のエネルギーを空間的に拡がりを持つ場のエネルギーとも, 粒子の位置に局在した電荷の担うエネルギーとも見なせることになる.

- 光速で運動する質量ゼロの粒子に対して $p = \mathcal{E}/c$.
- $\mathcal{E} \gg mc^2 \neq 0$ の超相対論的粒子に対しても近似的に $p = \mathcal{E}/c$ が成り立つ.
- 運動量とエネルギーの関係 $\mathcal{E}^2/c^2 = p^2 + m^2c^2$ (式 (88) に対応) は

$$p^\mu p_\mu = m^2c^2 \quad (\because u^\mu u_\mu = 1)$$

に他ならない.

★ この結果は次のように理解される.

すなわち縮約 $p^\mu p_\mu$ は Lorentz スカラーであり, その値は座標系に依らない (1.1.1 節参照).

そこで $p^\mu = (mc, \mathbf{0})$ となる座標系でこれを評価すると $p^\mu p_\mu = m^2c^2$ を得る.

- S を作用とすると $p_\mu = -\partial_\mu S$ より (1.3.5 節), Hamilton-Jacobi 方程式

$$(\partial^\mu S)(\partial_\mu S) = (mc)^2 \quad (93)$$

を得る (1.3.5 節の式 (60) を参照).

これは電磁場中の荷電粒子に対する式 (89) において, 場をゼロと置いた関係式になっている.

1.6.4 相対論的力学 [3, p.32]

4 元力 g^μ を反変ベクトルとして導入して, 粒子の相対論的な運動方程式を

$$\frac{dp^\mu}{ds} = g^\mu$$

と書くと, これは相対論的に不変となることが保証される (1.1.1 節).

このとき 4 元力 g^μ と, $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$ を満たす 3 次元的な力 \mathbf{f} との関係は

$$g^\mu = \left(\frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{c^2 \sqrt{1 - (v/c)^2}}, \frac{\mathbf{f}}{c \sqrt{1 - (v/c)^2}} \right) \quad (94)$$

となる (導出は 7.6.2 節).

$ds = cd\tau = cdt\sqrt{1 - (v/c)^2}$ に注意すると, 運動方程式 $dp^\mu/ds = g^\mu$ の空間成分と時間成分はそれぞれ

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{\mathbf{f}}{c\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ \frac{dp^0}{ds} = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{c^2\sqrt{1 - (v/c)^2}} \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f} \\ \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \end{cases} \quad (95)$$

となる. ただし運動方程式の空間成分において $\mathbf{p} = m\mathbf{v}/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ は 4 元運動量成分であり, 非相対論的な極限 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ でこれはよく知られた Newton の運動方程式

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}$$

に移行する. また運動方程式の時間成分は仕事と運動エネルギーの関係を表していると解釈できる.

注意 運動方程式 $g^\mu = dp^\mu/ds$, $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$ を力の定義式と見なしてはならない.

原因としての力と結果としての運動量変化は物理的に異なる概念である.

参考—— 3 次元的な量との関係

$$u^i = \frac{v^i}{c\sqrt{1-\beta^2}}, \quad g^i = \frac{f^i}{c\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta \equiv v/c.$$

4 元速度 u^i はいくらでも大きな値をとり得るのに対し [3, p.29], $\beta \rightarrow 1$ とすると $\sqrt{1-\beta^2}$ はゼロになるため, 3 次元的な速度 $v^i = cu^i\sqrt{1-\beta^2}$ は有限に留まる. v が $-c \rightarrow c$ を動くとき $u = \frac{v}{c\sqrt{1-\beta^2}}$ は $-\infty \rightarrow \infty$ を動く. 一方, 力の 4 元ベクトル成分 g^i と 3 次元的な力 f^i の範囲には数学的にはともに制限がない.

「相対論的質量」について 相対論的な運動方程式の 1 つの説明に, 非相対論的な運動方程式における質量を「相対論的質量」

$$m(\mathbf{v}) = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

に置き換えるというものがある [14, pp.218–220]. ここに m_0 は $\mathbf{v} = 0$ のときの質量 $m(0)$ だから静止質量と呼べる. 一方で上記の議論を逆にたどり, 非相対論的な運動方程式の 4 元ベクトルの関係式へ修正すれば, 得られる運動方程式の座標変換に対する共変性が明白である. またこのような見方を採れば質量は単に質量であって, 「相対論的質量」「静止質量」の区別は必要ない.

1.6.5 平坦な時空での電磁場

本節では引き続き平坦な時空を想定して慣性系を採用し, このとき成分計算の規則や電磁場成分とポテンシャルの関係がどのように簡略化されるかを調べておく.

■慣性系での成分計算 慣性系では式 (9) の 3 次元計量テンソル γ_{ij} の成分は

$$(\gamma_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる (1.2.1 節). 3 次元の量に対しては添字の上げ下げを γ_{ij}, γ^{ij} との縮約で定義すると (γ^{ij} は γ_{ij} の逆テンソル) [3, pp.286–287], 慣性系では

$$\varepsilon_{ijk} = \gamma_{il}\gamma_{jm}\gamma_{kn}\varepsilon^{lmn} = \varepsilon^{ijk}, \quad \delta_{ij} = \gamma_{ik}\delta_j^k = \delta_j^i$$

が成り立ち (ε^{ijk} は 1.4.1 節で定義), 電磁場成分 E^i, B^i (式 (61), 式 (62)) については

$$E_i = \gamma_{ij}E^j = E^i, \quad B_i = \gamma_{ij}B^j = B^i$$

と計算される. 一方 4 元テンソルの添字の上げ下げは $\eta_{\mu\nu}, \eta^{\mu\nu}$ との縮約で定義されるので, 電磁ポテンシャル A^μ , 電流密度 j^μ , 電磁場テンソル $F^{\mu\nu}$ に対しては

$$A_0 = A^0, \quad A_i = -A^i, \quad j_0 = j^0, \quad j_i = -j^i, \quad F_{0i} = -F^{0i}, \quad F_{ij} = F^{ij}$$

である (1.2.1 節) [3, p.258].

Levi-Civita 記号の縮約公式 ここでしばしば有用となる Levi-Civita 記号の縮約公式を書いておく。

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \quad (96)$$

これは Kronecker のデルタと Levi-Civita 記号に対する公式

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{prs} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{ir} & \delta_{is} \\ \delta_{kp} & \delta_{kr} & \delta_{ks} \\ \delta_{lp} & \delta_{lr} & \delta_{ls} \end{vmatrix} \quad (97)$$

から得られる [3, pp.20–21]. (上式 (97) の確認は 7.6.3 節を参照.)

■電磁場とポテンシャル 電磁場の定義式 (61): $E^i = \gamma^{ij}F_{0j}$, 式 (62): $B^i = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^{ijk}}{\sqrt{\gamma}}F_{jk}$ より慣性系で電磁場テンソルの成分は

$$F^{i0} = E^i, \quad (98)$$

$$F^{jk} = F_{jk} = -\varepsilon^{ijk}B^i, \quad (99)$$

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (100)$$

で与えられる (7.6.3 節参照)*²⁴ [3, p.68]. これは電磁場が電磁ポテンシャルから

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi, \quad (101)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (102)$$

と導かれることを意味する (7.6.3 節参照) [3, p.54].

1.6.6 荷電粒子の運動方程式

平坦な時空では $Du^\mu = du^\mu$ なので*²⁵, 粒子の運動方程式 (77) は

$$mc\frac{du^\mu}{ds} = \frac{e}{c}F^{\mu\nu}u_\nu \quad (103)$$

となる [3, p.68]. その空間成分と時間成分は以下の式を与える (導出は 7.6.4 節).

- 空間成分は粒子の運動方程式

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right) \quad (104)$$

を与える. 粒子が磁場から受ける力の項 $e\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$ は Lorentz 力と呼ばれ, 粒子の速度 \mathbf{v} と磁束密度 \mathbf{B} の両方に垂直である*²⁶.

*²⁴ Gauss 単位系で電場 \mathbf{E} と磁束密度 \mathbf{B} の次元は等しい ($[\mathbf{E}] = [\mathbf{B}]$). このことは例えば以降の非相対論的な粒子の運動方程式 (124) や, 電磁波の振幅の関係 $E_0 = B_0$ (1.7.3 節) に見て取れる.

*²⁵ 計算によって詳しく示すと,

$$Du^\mu = u^\mu{}_{;\nu}dx^\nu = (\partial_\nu u^\mu + u^\rho\Gamma^\mu{}_{\rho\nu})dx^\nu \rightarrow (\partial_\nu u^\mu)dx^\nu = du^\mu.$$

*²⁶ 右辺全体を Lorentz 力と呼ぶ流儀もある.

– 一般式 (95) と比較すると、右辺を 3 次元的な力

$$\mathbf{f} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$$

に同定できる。

– 左辺 $d\mathbf{p}/dt$ は固有時間 τ ではなく座標時間 t による微分であるのに対し、

\mathbf{p} は 4 元運動量の空間成分 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}/\sqrt{1-(v/c)^2}$ であることを改めて注意しておく。

- 場と相互作用する (個々の) 粒子の運動エネルギーを $\mathcal{E}_{\text{kin}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ と定義すると*27,

(このとき $\mathcal{H} = \sum(\mathcal{E}_{\text{kin}} + e\phi)$), 時間成分は

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{kin}}}{dt} = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad (105)$$

を与える。右辺は電場の粒子に対する仕事率にあたる。

磁場は電荷の速度に垂直な力を及ぼすため、仕事をしない。

運動方程式 (104) はもちろん、ここまで導いた特殊相対性理論の Lagrangian に Lagrange 方程式 $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$ を適用しても得られる。また上式 (105) は運動方程式 (104) から再び導かれる [3, pp.52–55]。もっとも一般式 (95): $\frac{d\mathcal{E}_{\text{kin}}}{dt} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$ に Lorentz 力 $\mathbf{f} = e(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B})$ を代入すれば式 (105) は直ちに得られるため、改めて導くには及ばない。なお作用の積分パラメータを粒子の固有時にとれば、4 次元的な形の運動方程式 (103) を Lagrange 方程式として導くこともできる [4, pp.102–103]。

1.6.7 場の方程式

我々は特殊相対性理論を想定し、電磁場と相互作用する荷電粒子の運動方程式を見出した。本節では電磁場の運動方程式を調べよう。

■ 慣性系での電磁気学の基礎方程式 平坦な時空における電磁場の方程式は、特殊相対性理論における作用 (1.6.1 節) から改めて導くことができるけれど、1.5 節で調べた重力の存在下の運動方程式から始める方が容易である。Lorenz 条件 (63) を満たす電磁ポテンシャル A^μ を考えると、慣性系では

$$\text{Lorenz 条件 (63): } A^\mu{}_{;\mu} = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_\mu A^\mu = 0,$$

$$\text{Maxwell 方程式 (82): } F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu \quad \rightarrow \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu, \quad (106)$$

$$\text{電流密度の定義式 (64): } j^\mu \equiv \sum_a \frac{e_a c}{\sqrt{-g}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \frac{dx_a^\mu}{dx^0} \quad \rightarrow \quad j^\mu = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \frac{dx_a^\mu}{dt} \quad (107)$$

となるから、場の方程式

$$-\frac{4\pi}{c} j^\mu = \partial_\nu F^{\mu\nu} = \partial_\nu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -\partial_\nu \partial^\nu A^\mu, \quad \therefore \partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (108)$$

を得る。

■ 電磁場で書き表した Maxwell 方程式 特殊相対性理論において、電磁場は電磁ポテンシャルから

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned}$$

*27 これは静止エネルギー mc^2 を含む。

と導かれる (式 (101), 式 (102) 参照). このとき電磁場に対して

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (109)$$

が恒等的に満たされる (7.6.5 節参照) [3, p.74]. これは電磁場テンソルに対する恒等式

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \quad (110)$$

にまとめられる (7.6.5 節参照)*28. また電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ は添字に関して反対称なので, 完全反対称テンソル $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ (ただし $\varepsilon^{0123} = 1$) を用いて, 対偶 (デュアル) なテンソル

$$F^{*\mu\nu} \equiv \frac{1}{2!} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$$

を導入することができる (7.6.5 節参照). 対偶テンソルの全成分は

$$\begin{aligned} F^{*0i} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{0i\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon^{0ijk} F_{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{jk}, & \therefore F^{*01} &= -H_x, \text{ etc.} \\ F^{*ij} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ij\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \varepsilon^{ij0k} F_{0k} = \varepsilon^{ijk} F_{0k}, & \therefore F^{*12} &= E_z, \text{ etc.} \end{aligned}$$

のようにして見出される [2, p.435]. なるほど, もとのテンソル F_{ik} と比べると, (符号の違いを除けば) 電場と磁場が入れ替わっている. すると式 (110) は

$$F^{*\mu\nu} = 0 \quad (111)$$

と書き換えられる (7.6.5 節参照). 式 (110), 式 (111) のように書けば Lorentz 変換に対する共変性は明白である (1.1.1 節参照).

さらに Maxwell 方程式 (106): $\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$ は

$$\mu = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (112)$$

$$\mu = 1, 2, 3 \quad \rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (113)$$

と書ける (7.6.5 節参照) [3, p.84].

1.6.8 電磁場のエネルギーの密度と流れ

ここでは電磁場と粒子の系に対するエネルギー保存則について説明する [3, pp.85–87]. Maxwell 方程式から

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} \right) = \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{S} \equiv \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} : \text{Poyntingベクトル} \quad (114)$$

が導かれる (導出は 7.6.6 節). また粒子の運動方程式より, 静止エネルギーを含めた運動エネルギー $\mathcal{E}_{\text{kin}} = \sum \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ (1.6.6 節) に対して, 電場のする仕事と粒子系の運動エネルギーの関係

$$\int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV = \sum ev \cdot \mathbf{E} = \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\text{kin}} \quad (115)$$

*28 重力の存在する場合にも電磁場テンソルは $F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ なので, 恒等式 (110) を満たす. これは共変性が明白な形 $F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\lambda\mu;\nu} + F_{\nu\lambda;\mu} = 0$ にも書ける (7.6.5 節参照) [3, p.285].

が成り立つ (導出は 7.6.6 節, \sum は積分範囲内の全粒子にわたる和). よって式 (114) の両辺を空間全体にわたって体積積分すると

$$\frac{d}{dt} \left(\int \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} dV + \sum \mathcal{E}_{\text{kin}} \right) = 0$$

となる (無限速で場はゼロになるから, \mathbf{S} の表面積分は落ちる). 空間全体の電磁場と粒子から成る閉じた系に対して全エネルギーは保存することを要求すると,

$$W \equiv \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi}$$

は電磁場のエネルギー密度と解釈できる. これは Hamiltonian の計算から導かれる解釈と整合している (1.6.2 節).

次に空間の有限領域にわたる体積積分を考えると

$$\frac{d}{dt} \left(\int \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} dV + \sum \mathcal{E}_{\text{kin}} \right) = - \oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f} \quad (116)$$

となるので ($d\mathbf{f}$ は表面の面要素ベクトル), \mathbf{S} は場のエネルギーの流れの密度と解釈できる. 実際このとき上式 (116) は単位時間に流出する場のエネルギーだけ内部の場と粒子のエネルギーが減少することを表すことになる*29.

以上を踏まえて最初の式 (114) を振り返ると, これは単位時間において単位体積の場のエネルギーの減少量 $-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} \right)$ が, 場のエネルギーの流出 $\nabla \cdot \mathbf{S}$ と電場の粒子に対する仕事 $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ によってもたらされることを意味している.

1.6.9 粒子系と電磁場のエネルギー・運動量テンソル [3, pp.91–95]

本節では粒子と電磁場の系のエネルギー・運動量テンソルを調べ, 1.6.8 節の結果と整合してエネルギー・運動量保存則が導かれることを示す. これはエネルギー・運動量テンソルに対する理解を深める良い機会となる.

■電磁場のエネルギー・運動量テンソル 電荷のない真空中の電磁場の Lagrangian 密度 $\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ に対して, エネルギー・運動量テンソルを一般公式 (43) に基づいて計算すると

$$T^{(\text{f})\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \partial^\mu A^\rho F^\nu{}_\rho + \frac{1}{16\pi} \eta^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \quad (117)$$

となる (導出は 7.6.7 節). ここで電荷のない電磁場に対して Maxwell 方程式 $\partial_\rho F^{\nu\rho} = 0$ が成り立つことを踏まえると,

$$\frac{1}{4\pi} (\partial^\rho A^\mu) F^\nu{}_\rho = \frac{1}{4\pi} \partial_\rho (A^\mu F^{\nu\rho})$$

となるので, これをエネルギー・運動量テンソルに付け加えることが許される (1.3.2 節). すると電磁場のエネルギー・運動量テンソルとして, 対称テンソル

$$T^{(\text{f})\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(-F^{\mu\rho} F^\nu{}_\rho + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) \quad (118)$$

*29 ここでは粒子が注目している空間領域から逃げる場合は考えていない.

が得られる。これは再び、1.6.8 節のエネルギーの密度と流束

$$T^{(f)00} = \frac{E^2 + B^2}{8\pi}, \quad cT^{(f)0i} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})_i$$

を与える (導出は 7.6.7 節)。空間成分は Maxwell の応力テンソル

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left\{ -E_i E_j - B_i B_j + \frac{1}{2} \delta_{ij} (E^2 + B^2) \right\} \quad (119)$$

になる (導出は 7.6.7 節)。電荷がなくとも、電磁場を持つ空間の体積要素の間には応力が作用している。

■一般相対性理論におけるエネルギー・運動量テンソルとの比較 1.3.3 節では一般相対性理論において、エネルギー・運動量テンソルを計算する規則 (55) を見出した。これを電磁場の系に適用すると、エネルギー・運動量テンソルとして

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(-F_{\mu\alpha} F_{\nu}{}^{\alpha} + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} \right)$$

が得られる (1.4.4 節)。他方、特殊相対性理論を想定した 1.3.2 節の一般公式 (43) から、我々は電磁場のエネルギー・運動量テンソル (118) を得た。1.3.3 節で予告したように、これらは平坦な時空では全く同じ結果を与える。

■粒子系のエネルギー・運動量テンソル 物質 (粒子) 系のエネルギー・運動量テンソル (74) は、慣性系では

$$T^{(m)\mu\nu}(x) = \sum_a m_a \dot{x}^\mu(a) \dot{x}^\nu(a) \sqrt{1 - \left(\frac{v_a}{c}\right)^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \quad (120)$$

となる。自由粒子のエネルギーと運動量の表式

$$\mathcal{E}_a = \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - (v_a/c)^2}}, \quad p_a^i = \frac{m_a v_a^i}{\sqrt{1 - (v_a/c)^2}}$$

を思い出すと (1.6.3 節)、時間-時間成分

$$T^{(m)00}(x) = \sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - (v_a/c)^2}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))$$

は期待されるように (1.3.2 節)、粒子系のエネルギー密度となっていることが明白である。また時間-空間成分

$$T^{(m)0i} = \sum_a \frac{m_a c v_a^i}{\sqrt{1 - (v_a/c)^2}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))$$

は確かに、エネルギー流束の第 i 成分の $1/c$ 倍とも、運動量密度の第 i 成分の c 倍とも解釈できる。このように、エネルギー・運動量テンソルを意味付ける関係 (1.3.2 節)

$$T^{0i} = c \times (\text{運動量密度})^i = \frac{1}{c} \times (\text{エネルギーの流れの密度})^i$$

は、粒子系に対しては見易い^{*30}。最後に空間-空間成分

$$T^{(m)ij} = \sum_a \frac{m_a v_a^i v_a^j}{\sqrt{1 - (v_a/c)^2}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))$$

が応力と見なせることは、次のように納得できる。まず、この $T^{(m)ij}$ は運動量の流束となっている。ところが単位時間における単位体積への運動量の流入は、巨視的には応力による運動量変化として捉えられるから、 $T^{(m)ij}$ は応力テンソルを与える。(これが 1.3.2 節の一般論で (暗に) 用いた論法である。)

^{*30} 同じ関係が場に対しても一般に成り立つことは、場が粒子から構成されていることを示唆しているということもできる。

■粒子と電磁場の相互作用系 粒子と電磁場の共存する場合には、系全体のエネルギー・運動量テンソルは式 (120) の $T^{(m)\mu\nu}$ と式 (118) の $T^{(f)\mu\nu}$ の和で与えられる (実際、重力が存在する場合の物質と電磁場のエネルギー・運動量テンソルは式 (72) である)*³¹。

1.5 節で見たように、重力の存在下では物質と電磁場の系に対する近似的なエネルギー・運動量保存則 $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ が成立する。平坦な時空では、これは正確な保存則 $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ になる。他方、特殊相対性理論を背景としたエネルギー・運動量保存則 (43): $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ は粒子が存在しないことを前提としている。そこで 7.6.7 節では、系全体の保存則

$$\partial_\nu \left(T^{(f)\mu\nu} + T^{(m)\mu\nu} \right) = 0 \quad (121)$$

が成り立つことを改めて確かめる。具体的には粒子の運動方程式と Maxwell 方程式を用いて、

$$\partial_\nu T^{(f)\mu\nu} = -\frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu, \quad (122)$$

$$\partial_\nu T^{(m)\mu\nu} = +\frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu \quad (123)$$

を導く (これらを辺々足すと上式 (121) が得られる)。この導出過程の中にも、物理的な意味を見て取ることができる。すなわち式 (122) の時間成分 ($\mu = 0$) は、1.6.8 節のエネルギー方程式 (114):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2 + B^2}{8\pi} \right) = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \nabla \cdot \mathbf{S}$$

を再現する。これは単位時間において単位体積中の場のエネルギーが、粒子の場にした仕事 ($-\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$) と、流入した場のエネルギー ($-\nabla \cdot \mathbf{S}$) の分だけ増大することを表している。式 (122) の空間成分 ($\mu = i$) は

$$\partial_t \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_i = -\partial_j \sigma_{ij} - \left(\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right)_i$$

を与える。これは単位時間において単位体積中の場の運動量が、空間の隣接する領域から受ける場の応力と、単位体積中の電荷に場の及ぼす力 (力積) の反作用だけ増大することを表している。そして式 (123) は場の得たエネルギー・運動量と正確に等しいエネルギー・運動量を粒子が失うことを意味している。

1.7 電磁気学

本節では特殊相対性理論の範囲で、電磁気学の簡単な応用を論じる。

1.7.1 電磁場中の粒子の運動

本節では与えられた場の中での粒子の運動を、特殊相対性理論の範囲で考える。すなわち場として電磁場のみを考える。簡単のために電磁場は一様で定常的であると仮定し、粒子の運動は非相対論的であるとする。

*³¹ 和 $T^{(f)\mu\nu} + T^{(p)\mu\nu}$ の (0,0) 成分は

$$\sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - (v_a/c)^2}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) + \frac{E^2 + B^2}{8\pi}$$

であり、見かけ上、位置エネルギー $\sum e\phi$ の密度が含まれない。これは 1.6.2 節で説明したように、位置エネルギー $\sum e\phi$ が場のエネルギーに含まれているからである。

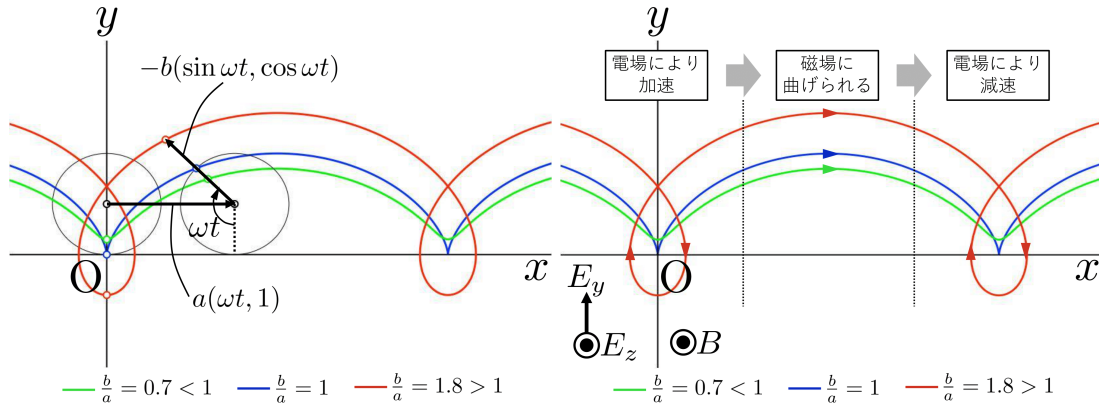


図9 トロコイド

図10 一様で不変な電磁場中の粒子の運動

空間的に一様で時間的に一定の電磁場中の粒子の運動を調べよう^{*32*33}。また電場は十分弱いので粒子の速度はしばらくの間、非相対論的な範囲 $v/c \ll 1$ に留まる場合を考える。このとき運動方程式 (104) は、非相対論的表式 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ を代入すると

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right) \quad (124)$$

となる [3, p.54]。磁場方向を z 軸にとると Lorentz 力 $e\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$ は磁束密度 \mathbf{B} に垂直なので、粒子は z 方向には一定の力 eE_z を受けて等加速度運動をする:

$$z = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2} \frac{eE_z}{m} t^2. \quad (125)$$

そこで磁場に垂直な xy 平面に投影した粒子の運動に興味を持たれる。電場が yz 面内に含まれるように y 軸の方向を選び、さらに時間と空間座標の原点を適当に選ぶと、粒子の xy 面内の位置は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \omega t \\ 1 \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix}, \quad \omega \equiv \frac{eB}{mc}, \quad a \equiv \frac{eE_y}{m\omega^2} = \frac{cE_y}{\omega B} \quad (126)$$

の形に書ける (b は積分定数, 7.7.1 節参照)。これは図9のように x 軸上を半径 a の円盤が角速度 ω で転がるときの、円盤上の中心から距離 b の位置に固定された点の運動に他ならない。このような動点の描く軌跡はトロコイドと呼ばれる [3, pp.63–64]。この結果は定性的には次のように解釈できる。時刻 $t = 0$ を過ぎてからしばらくの間、粒子は電場の方向に加速する。すると粒子は磁場に進行方向を曲げられ、いずれ電場と逆向きに運動するようになるため電場に減速させられる。こうして図10のように1周期分のトロコイドが描かれる [12, pp.135–136]。

特に $\mathbf{E} = 0$ のとき、粒子の位置の時間発展 (125),(126) は磁場方向への等速らせん運動

$$x = -b \sin \omega t, \quad y = -b \cos \omega t, \quad z = z_0 + v_{0z}t$$

に帰着する。

座標系の設定に関する注意 以上の議論では空間内で座標原点を移動しても、また座標軸を回転させても電磁場そのものは不変であり、それ故、電磁場は3次元空間におけるベクトル成分のように変換することを

^{*32} ただし電荷は与えられた場をかき乱さないものとする。

^{*33} 一様不変な電磁場は Maxwell 方程式を満たすため、実現可能である。

暗に仮定した用いた。この措置は互いに相対速度を持たない慣性系の間における、電磁場の Lorentz 変換を具体的に調べることで正当化できる (7.7.1 節)。

1.7.2 静電場・静磁場

電荷分布・電流分布が定常的であり、従って場 A^μ が時間変化しないとき、場の方程式 (108): $\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$ は d'Alembert 演算子

$$\partial_\nu \partial^\nu = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad \Delta \equiv \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x^i{}^2}$$

における時間微分の項が落ちて Poisson 方程式

$$\Delta A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \phi = -4\pi \rho \\ \Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \end{cases}$$

になる。これは特殊解

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}') d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (127)$$

を持ち、式 (101)、式 (102) によりここから導かれる電磁場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla \phi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = \sum_a \frac{e_a(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_a|^3}, \quad (128)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (129)$$

となる (7.7.2 節参照)。このように場が時間変化しないときには、場の方程式は静電場を決定する式 (128) と静磁場を決定する式 (129) に分離される [3, pp.100–101, pp.116–117] [12, pp.220–223]。式 (128) は Coulomb の法則と呼ばれ、電荷素片 $\rho(\mathbf{x}') d^3 x'$ または点電荷 e_a が位置 \mathbf{x} に電場 $\frac{\rho(\mathbf{x}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$ または $\frac{e_a(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_a|^3}$ を作ることを表している。これは基となる Maxwell 方程式 (112): $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho$ が意味するように、電荷は周りにわき出すような電場を作ることに対応する。式 (129) は Biot-Savart の法則と呼ばれ、仮に $\mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3 x'$ を電流素片と呼ぶことが許されるならばこれは電流素片 $\mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3 x'$ が位置 \mathbf{x} に磁束密度 $\frac{1}{c} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$ を作ることを表している。これは基となる Maxwell 方程式 (113): $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ が意味するように ($\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$)、電流は周りに渦を巻くような磁場を作ることに対応する。

1.7.3 電磁波

電荷が存在しないときの電磁場の時間変化を調べよう。電荷が存在しなければ $j^\mu = 0$ なので場の方程式 (108): $\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$ は波動方程式

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = 0$$

になる [3, pp.123–124]。これは平面波解

$$A^\mu = a^\mu e^{-ik_\nu x^\nu}, \quad k_\mu k^\mu = 0$$

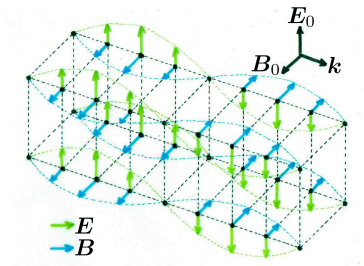


図 11 電磁場の平面波

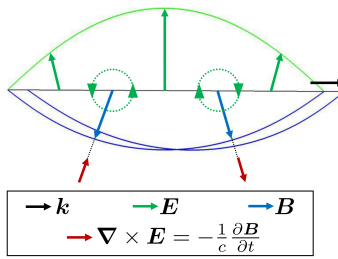


図 12 磁場の時間変化が作る電場の渦

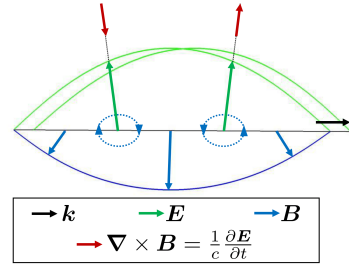


図 13 電場の時間変化が作る磁場の渦

を持つ (7.7.3 節参照). ここで複素定数 a^μ は振幅である. これ以降 A^μ に限らず場の実部が実際の物理量を与えるものとする^{*34}. $x^\mu = (ct, \mathbf{r}), k^\mu = (\frac{\omega}{c}, \mathbf{k})$ と書くと

$$A^\mu = a^\mu e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \mathbf{k}^2 = 0$$

であり, これに対する電磁場は

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

の形になる. これは同位相面 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \text{const}$ が波数ベクトル \mathbf{k} の方向に進行する平面波を表し, 波の伝播速度 (位相速度) $\frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = c$ は光速に一致する. さらに

$$\text{式 (112)} : \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \rightarrow \quad i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0,$$

$$\text{式 (109)} : \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \rightarrow \quad i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0,$$

$$\text{式 (109)} : \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = i\frac{\omega}{c} \mathbf{B}_0$$

が満たされるので (7.7.3 節参照), 平面波は図 11 のように $\mathbf{k}, \mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$ がこの順に右手直交系を成す横波であり振幅には $E_0 = B_0$ の関係がある [12, pp.283–284].

この結果は次のように解釈できる. すなわち各時刻に各位置で図 12 のように式 (109): $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ に従って磁場の時間変化から電場の渦が作られ, 図 13 のように式 (113): $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ に従って電場の時間変化から磁場の渦が作られる. これは 1.7.2 節において静電場と静磁場がそれぞれ独立に電荷分布と電流分布から生み出されたのとは対照的に, 物質が存在しない場合にも電場と磁場はお互いを生み出しながら波として空間を伝播することを意味する [12, pp.272–273]. このような波は電磁波と呼ばれる. 光の正体である.

ただし図 11 では場の振動方向が時間的・空間的に一定であるような直線偏光を描いている. しかしながら平面波の式

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

は一般には楕円偏光を表す (導出は 7.7.3 節参照) [3, pp.129–131]. 楕円偏光とは波の伝播方向を z 軸にとったときに, 電場ベクトルの先端が xy 面内で楕円

$$E_x = b_1 \cos(\omega t - kz + \alpha), \quad E_y = \pm b_2 \sin(\omega t - kz + \alpha)$$

^{*34} このような扱いは波動方程式の線形性

$$0 = \partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \partial_\nu \partial^\nu \text{Re}(A^\mu) + i \partial_\nu \partial^\nu \text{Im}(A^\mu)$$

により A^μ が波動方程式を満たせばその実部 $\text{Re}(A^\mu)$ も波動方程式を満たすことから正当化される.

を描く場合を言う。

- 直線偏光は $b_1 = 0$ または $b_2 = 0$ の場合として含まれている。
楕円偏光の波はこれら 2 つの独立な直線偏光の重ね合せと見なせる。
- $b_1 = b_2$ の場合を円偏光という。
円偏光において電場 \mathbf{E} と磁束密度 \mathbf{B} は、座標系 (時間の原点を含めて) を適当に選ぶと

$$\mathbf{E} = a \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t) \\ \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = a \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (130)$$

という形に表される [3, pp.130–131]. よって z 軸上の各点に分布する電磁場ベクトル \mathbf{E}, \mathbf{B} の先端は図 14 のように常螺旋を描く. そしてベクトル \mathbf{E}, \mathbf{B} は $z = \text{const}$ の水平面内で回転する. この様子は床屋のサインポールに似ている.

床屋のサインポールでは赤と青の螺旋が中心軸の周りに高さ一定の面内で回転しており, その結果として赤と青の縞模様が増えように見える. (これは弦の質点がある場で振動する結果, 波動が弦の方向に沿って伝播することと比較される.) x 軸正の方向をサインポールの正面とすると, より正確には図 14 に示した正面の中心線と, 螺旋との交点が増える. すなわち正面方向の方位角は $\phi = 0$ であり, 常螺旋の式 (130) においてベクトルの指す方向の方位角が

$$kz - \omega t = \text{const}(= 0), \quad kz - \omega t + \frac{\pi}{2} = \text{const}(= 0)$$

を満たすような座標 (高さ) z が時間とともに増大する. ここで上昇速度は

$$\dot{z} = \frac{\omega}{k}$$

であり, これは式 (130) の位相が一定となる条件から得られたものだから, 位相速度と呼ばれるのもっともである.

特に円偏光に対してはその時間発展 (130) が Maxwell 方程式に従うことから, 上昇速度は

$$\frac{\omega}{k} = c$$

でなければならない. すなわち電磁波の位相速度は光速 c である.

もちろん $\mathbf{k}, \mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$ がこの順に右手直交系を成すことや振幅の関係 $E_0 = B_0$ は, その導き方から分かるように楕円偏光に対しても正しく, このとき磁場ベクトルも電場ベクトルと同様に楕円を描く.

このような平面電磁波に対して伝播方向の単位ベクトル $\mathbf{n}(= \mathbf{k}/|\mathbf{k}|)$ を定義すると, 1.6.8 節の Poynting ベクトルは $\mathbf{S} = Wc\mathbf{n}$ となる ($W = E_0^2/4\pi$ は電磁場のエネルギー密度). この量をエネルギーの流れの密度と見なすのはもっともなことである.

真空中の任意の電磁波はあらゆる波数ベクトル \mathbf{k} に対する平面波 $\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \pm \omega_{\mathbf{k}}t)}$, $\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \pm \omega_{\mathbf{k}}t)}$ を重ね合わせて得られ ($\omega_{\mathbf{k}} \equiv c|\mathbf{k}|$),

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\mathcal{E}_+(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \omega_{\mathbf{k}}t)} + \mathcal{E}_-(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} \right), \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\mathcal{B}_+(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \omega_{\mathbf{k}}t)} + \mathcal{B}_-(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} \right) \end{aligned} \quad (131)$$

と表される (7.7.3 節参照). ただし振幅 $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$ と異なり, Fourier 成分 $\mathcal{E}_{\pm}(\mathbf{k}), \mathcal{B}_{\pm}(\mathbf{k})$ は (電磁場) \times (長さ)³ の次元を持つ. これは次の事情による. 空間を 1 辺 L の立方体領域 V と見なすと周期境界条件の下で場は $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}\mathbf{n}$ と Fourier 展開される (\mathbf{n} は整数を成分とするベクトル). $L \rightarrow \infty$ の極

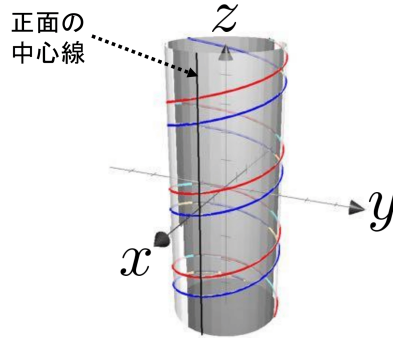


図 14 円偏光と床屋のサインポール

限で展開係数 $\mathbf{E}(\mathbf{k}, t)$ から波数空間の体積要素 d^3k がくり出されて

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\mathbf{k}} \left| \begin{array}{c} \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) \\ \downarrow \\ \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ \downarrow \\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \end{array} \right| \end{aligned} \quad (132)$$

と積分に移行する (7.7.3 節参照).

1.7.4 任意に運動する電荷の作る電磁場

最後に、任意に運動する電荷の作る時間変化する場 A^μ に触れておく。定常的な電荷分布・電流分布が電磁ポテンシャル (127):

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

を作ったのに対し、電荷分布・電流分布が時間変化するときの電磁ポテンシャル A^μ はある意味で 1.7.3 節の波動的な性格を兼ね備えたものとなる。すなわち場の方程式 (108): $\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$ は

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (133)$$

を特殊解に持つ (7.7.4 節参照)。これは遅延ポテンシャルと呼ばれ、電荷分布・電流分布の時間変化に伴って時刻 $t' \equiv t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$ に位置 \mathbf{x}' の電荷素片 $\rho(\mathbf{x}', t')d^3x'$ 、"電流素片" $\mathbf{j}(\mathbf{x}', t')d^3x'$ から発生した電磁波が光速 c で伝わり、時刻 t で位置 \mathbf{x} に電磁ポテンシャル $\frac{\rho(\mathbf{x}', t')d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$ 、 $\frac{1}{c} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}', t')d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$ を作ることを示唆している [3, pp.178–180] [12, pp.287–288]。距離依存性 $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ はエネルギー保存則の要請から期待されるものである。実際、源 (電荷) から発せられる球面波を考えると、源からの距離を R として場が $1/R$ に比例するとき、エネルギーの流れの密度は $1/R^2$ に比例する (1.6.8 節の Poynting ベクトルの表式 $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ による)。すると立体角要素 $d\Omega$ の方向にある半径 R の球面上の要素 $R^2 d\Omega$ を、単位時間に通過するエネルギーは、距離 R に依らない。これはエネルギーが (源の外側の真空中で) 生成・消滅することなく、光速 c で広がっていくため、どこにも溜まらないという事実を表している [3, pp.192–193]。遅延ポテンシャル (133) に基づき、具体的に与えられた運動を行う電荷の放射する電磁波を調べれば、ここに述べた事情はより明瞭に理解できるけれど、本稿ではこれ以上、この問題には立ち入らない。

1.7.5 幾何光学 [3, pp.146–149]

電磁波を空間の小さい領域では平面波と見なせる場合には、波面およびこれに垂直な射線 (光線) を導入することができる、波動的性質を捨象して光を光線として捉える、幾何光学を適用できる。そのためには波の振幅と伝播方向とが、波長程度の領域にわたっては近似的に一定であれば良い。言い換えれば幾何光学は波長 $\lambda \rightarrow 0$ の極限として、波動光学の中に近似的に含まれている^{*35}。電磁場 \mathbf{E}, \mathbf{B} の任意の成分を $f = ae^{i\psi}$ と書く^{*36}、考えている位置と時刻 (原点に選ぶ) の周りの狭い空間領域と短い時間において、位相を

$$\psi = \psi_0 + \mathbf{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} + t \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

と近似できる。ここから分かるように、この極限で波数 (と振動数) $k_\mu = (\omega/c, -\mathbf{k})$ にあたる量 $\partial_\mu \psi (= -k_\mu)$ は大きな量と想定されていることになる^{*37}。このとき、位相 ψ に対する方程式

$$(\partial_\mu \psi)(\partial^\mu \psi) = 0 \tag{134}$$

が導かれる (導出は 7.7.5 節)。位相 ψ はアイコナルと呼ばれ、上式 (134) はアイコナル方程式と呼ばれる。

幾何光学では空間の狭い領域で場を平面波と見なせる場合を考えていることからあらかじめ期待されるように、アイコナル方程式 (134) は平面波に対応する解 $\psi = k_\mu x^\mu + \text{const.}$ (ただし k_μ は $k_\mu k^\mu = 0$ を満たす定数ベクトル) を持つ。このとき光線は直線となる。よって真空中では明らかに、現実の光線軌道は空間において始点と終点を結ぶあらゆる経路のうち、所要時間が最小となる経路で与えられる (Fermat の原理)^{*38}。

幾何光学におけるアイコナル ψ を粒子の作用 S に対応させると、光学と力学の間に以下の類似性が見出される。

$$\begin{aligned} \text{アイコナル方程式 (134)} : (\partial_\mu \psi)(\partial^\mu \psi) = 0 & \leftrightarrow \text{Hamilton-Jacobi 方程式 (93)} : (\partial_\mu S)(\partial^\mu S) = (mc)^2 \\ \mathbf{k} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}}, \omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t} & \leftrightarrow \mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}, \mathcal{H} = -\frac{\partial S}{\partial t}. \text{ (1.3.5 節, 1.6.3 節)} \end{aligned}$$

さらに

$$\text{Fermat の原理} \quad \leftrightarrow \quad \text{最小作用原理}$$

のアナロジーも成立している。

注意 ただし最小作用原理 (Hamilton の原理) が粒子の時空内の軌道を定めるのに対し、Fermat の原理は (単色) 光線の空間における軌跡を定めるという違いがある。正確には Fermat の原理に対応するのは、Hamilton の最小作用原理そのものよりもむしろ、そこから導かれる Maupertuis の原理であると言うことができる。

参考— **Maupertuis の原理** エネルギーが保存する系を考え、保存法則 $H(p, q) = E = \text{const.}$ を満たす運動だけを比較するような変分原理から物体の軌跡を決定することを考える。図 15 のように配位空間 (一般座標 $q = \{q_i\}$ の張る空間) 内の軌跡を端点は固定して変化させたとき、軌跡上の点 A が点 B に移ったとする。 q の値の異なる 2 点 A, B で $H(p, q)$ が共通の値 E を持つためには、A と B は異なる一般運動量 $p = \{p_i\}$ の値を持たなければならない

^{*35} 厳密な平面波ならばいくらでも波長は長くなり得るけれど、任意の電磁波は波長が長くなるにつれ、波の振幅と伝播方向とが、波長程度の領域にわたっては実際上一定であることが困難となる。

^{*36} 任意の複素数 f は、その絶対値を a 、偏角を ψ として必ずこのように書ける

^{*37} もちろんここでの「大きい」とは、興味のある空間スケールを a 、時間スケールを T としたとき、 $|\mathbf{k}|a \gg 1, \omega T \gg 1$ という意味である。

^{*38} より非自明な場合として、媒質中の単色光線に対しても Fermat の原理は成立する。これを示すには現象論的に屈折率 $n(\mathbf{r})$ を導入し、波の伝播速度を $u(\mathbf{r}) = c/n(\mathbf{r})$ に置き換えた波動方程式に基づく必要がある [15, pp.370–373]。

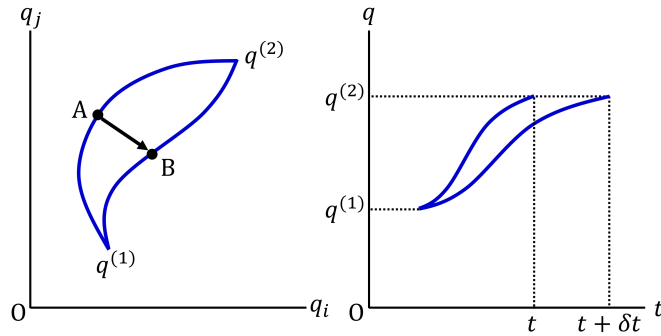


図 15 エネルギー保存法則を満たし、かつ、勝手な時刻に終点を通り過ぎる軌跡

い. したがって系は 2 点を異なる速度で通過することになるから、終点を通り過ぎる時刻は異なって良い (図 15 参照) [5, pp.197–198]. このような軌跡の中で、現実の軌跡に対して簡約された作用

$$S_0 \equiv \int \sum_i p_i dq_i$$

は極小値 (停留値) をとる (Maupertuis の原理) [9, pp.178–180].

■幾何光学の限界 [3, pp.162–163] 平均振動数 ω_0 を持つ、厳密には単色でない波を考え、与えられた点での場 (例えば電場) を $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega_0 t}$ という形に書こう. すると場の振動数 ω の Fourier 成分

$$\mathbf{E}_\omega = \int \mathbf{E}(t)e^{i\omega t} dt = \int \mathbf{E}_0(t)e^{i(\omega - \omega_0)t} dt$$

は、 $1/|\omega - \omega_0|$ 程度の時間のうちに $\mathbf{E}_0(t)$ がほとんど変化しなければ、打ち消しあってゼロに近づく. よって \mathbf{E}_ω がゼロとかなり異なる値をとるためには、 $1/|\omega - \omega_0|$ の時間範囲の間に振幅 $\mathbf{E}_0(t)$ が際立って変化しなければならない. すなわち $\mathbf{E}_0(t)$ が際立って変化する時間の長さを Δt , また $|\omega - \omega_0| \equiv \Delta\omega$ と書いたとき、

$$\frac{1}{\Delta\omega} \gtrsim \Delta t, \quad \therefore \Delta\omega \Delta t \lesssim 1$$

であれば良い. これは十分条件であって、この範囲 $\Delta\omega \lesssim 1/\Delta t$ の外の ω に対しても \mathbf{E}_ω がゼロと大きく異なる値を持つことはあり得る. すなわちそのような ω の範囲を改めて $\Delta\omega$ と書くと、波の“非単色度” $\Delta\omega$ は、いずれにせよ $1/\Delta t$ より小さくはありえない (それより大きいことは、もちろんありうる):

$$\Delta\omega \gtrsim \frac{1}{\Delta t}.$$

同様に与えられた時刻に、各軸の方向に波の振幅が目立って変化する距離の大きさを $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ とすると、波動ベクトルは

$$\Delta k_x \gtrsim \frac{1}{\Delta x}, \quad \Delta k_y \gtrsim \frac{1}{\Delta y}, \quad \Delta k_z \gtrsim \frac{1}{\Delta z}$$

程度の幅を持つ. よって x 軸に沿って進む光のビーム (波長 λ , 波数 $k = 2\pi/\lambda$) が Δy 程度の幅を持つとき、実際にはビームは角度

$$\theta_y \sim \frac{\Delta k_y}{k} \gtrsim \frac{1}{k\Delta y} \sim \frac{\lambda}{\Delta y}$$

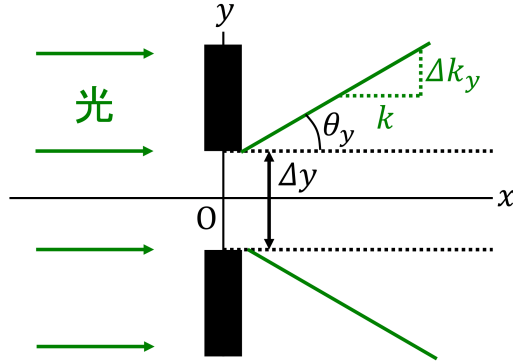


図 16 有限幅 Δy を持つ光のビームの回折

だけ平均方向からそれる (図 16 参照). 幾何光学の極限 $\lambda \rightarrow 0$ では $\theta_y \rightarrow 0$ となって光は直進するのに対し, 図 16 のスリットが波長程度に短くなると, 光の回折が著しくなる [3, p.164].

不確定関係 $\Delta x \Delta k_x \gtrsim 1$ の導出には場が電磁波であることをあからさまには用いていないから, これは波動一般に当てはまる数学的な関係である.

1.8 重力場

1.8.1 Newton の万有引力の法則

用いている座標系に対して静止している物体の作る不変な重力場を考える. 重力場が弱ければ物体静止系のうち, 計量テンソルが $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, |h_{\mu\nu}| \ll 1$ を満たすものがとれて, Einstein 方程式から近似的に Newton の万有引力の法則

$$\phi = -\frac{km}{R} \quad (135)$$

が得られる. ただし ϕ は, この座標系で空間座標 \mathbf{x}' に位置する質量 m の物体が $R \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ 隔たる位置 \mathbf{x} に作る重力ポテンシャルである (7.8.1 節参照) [3, pp.329–330] [4, pp.174–175].

1.8.2 中心対称な重力場

星がその周りの真空に作る静的で中心対称な重力場を調べる. 適当な球座標 (ct, r, θ, ϕ) を用いたときの世界間隔の表式を

$$ds^2 = e^{\nu(r)}(cdt)^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - e^{\lambda(r)}dr^2$$

の形に仮定し, 右辺の係数である計量テンソルの未知関数 $\nu(r), \lambda(r)$ を $T_{\mu\nu} = 0$ となる真空中の Einstein 方程式 $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$ から定めると, Schwarzschild 解

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)(cdt)^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} \quad (136)$$

が導かれる ($r > r_g$, 7.8.2 節参照). ここで星の質量を m とすると重力場が弱いときの式 (81): $g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$ における重力ポテンシャル ϕ に対して Newton の万有引力の法則 (135): $\phi = -\frac{km}{r}$ が満たされるためには

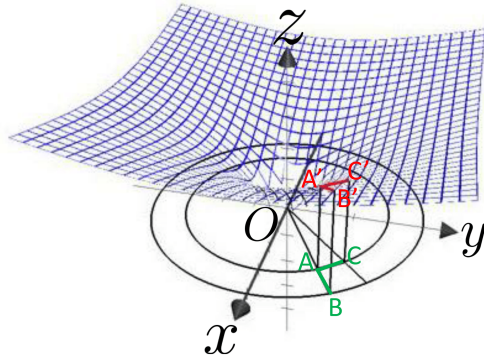


図 17 Schwarzschild 時空における空間の歪みの視覚化

$r_g = \frac{2km}{c^2}$ ととれば良い^{*39}. 定数 r_g は重力半径と呼ばれる [3, pp.333–336].

■空間の歪み 場の中心を含む赤道面 $\theta = \pi/2$ 上の、座標 r, ϕ がそれぞれ $dr, d\phi$ だけ異なる 2 点間の空間的な距離 dl は式 (9), Schwarzschild 解 (136) より

$$dl^2 = (rd\phi)^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}$$

で与えられる. よってここで用いた球座標 r は, $r = \text{const}$ の円周の長さが $2\pi r$ となるようなものである. 一方, 動径 $\phi = \text{const}$ 上の $r = r_1, r_2 (> r_1)$ となる 2 点間の距離は $\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}}$ であり, これは座標の読み $r_2 - r_1$ より大きい. こうして場の中心を中心とした円周 $2\pi r_1, 2\pi r_2$ の同心円に挟まれた円環の幅は $r_2 - r_1$ よりも長くなるという幾何学的な性質が見いだされる [3, p.336].

このような空間の歪みを次のように視覚化できる [3, p.339]. 図 17 では

座標が dr だけ異なる動径上の 2 点 A, B 間の距離が dr ,
座標が $d\phi$ だけ異なる円周上の 2 点 A, C 間の距離が $rd\phi$

となるように場の中心を含む赤道面上の点が xy 平面に描かれている. すなわち xy 平面は球座標 r, ϕ の読みを表示している. 一方, 線分 AB, AC の真上にある曲面上の線分 $A'B', A'C'$ の長さがそれぞれ AB 間, AC 間の真の距離 $\frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}}, rd\phi$ を与える. このような性質を持つ曲面の方程式は $z = \pm 2\sqrt{r_g(r - r_g)} + \text{const}$ である (7.8.2 節参照).

■時間の遅れ Schwarzschild 解 (136) において計量テンソルは座標時間 t に依らない. このような座標時間 t としては, 光の振動の回数で測った時間を考えれば良い [13, p.253]. 実際, 計量テンソルが座標時間 t に依らないとき, t で測った光の振動数は光線上で一定となる (7.8.2 節参照). これは図 18 のように空間の任意の 2 点 A, B 間を光が伝わる時, 座標 t で測った光 (電場または磁場) の振動に要する時間 T が 2 点 A, B で等しくなることを意味する.

一方, 空間の各点に置かれた造りの全く同じ時計の示す固有時間 τ は Schwarzschild 解 (136) より座標時間

^{*39} ここで Schwarzschild 解 (136) における極座標 r は重力が弱いとき, Newton の万有引力の法則 (135): $\phi = -\frac{km}{r}$ における r と同一視できると仮定した.

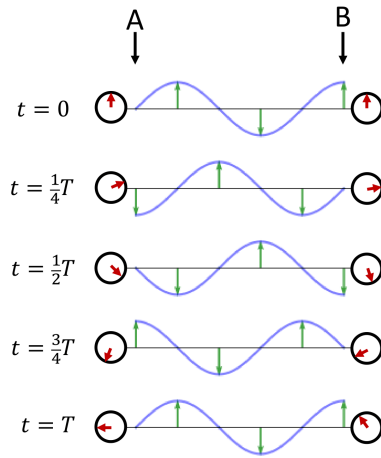


図 18 座標時間と固有時間

が dt 経過するうちに

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} dt \quad (137)$$

だけ進む。よって重力源の星の近くほど r は小さくなり図 18 のように時計は遅れることになる (図 18 は A の方が B よりも星に近いものとして描いている) [3, pp.277–278]^{*40}。

■「時空の歪みに沿った」粒子の運動 太陽の作る重力場中を惑星 (以下、粒子) は「時空の歪みに沿って」運動し、軌道を「曲げられる」ことを考察する。粒子は世界間隔が式 (136) で $\theta = \pi/2$ とおいた

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (cdt)^2 - (rd\phi)^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}$$

で与えられる Schwarzschild 時空の赤道面を運動し、近似的に粒子は与えられえた重力場をかき乱さないものとする。時刻 $t = t_1, t_2$ での粒子の位置が与えられたとき、粒子の軌道は作用 $S_m = -mc \int ds$ が極小になること、すなわち粒子の固有時間

$$\tau = \int \frac{ds}{c} = \frac{1}{c} \int \sqrt{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (cdt)^2 - (rd\phi)^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}}$$

が極大になることから定まる。ここで微小時間 dt 中の粒子の空間座標の変化を $dr, d\phi$ と書いている。定性的には r の大きい太陽の遠方ほど最右辺において

$$dt \text{ 中の真の時間の進み } d\tau = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} dt \text{ の項は大きくなり,}$$

$$dr \text{ に対応する動径方向の真の距離 } dl = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} \text{ の項は小さくなって,}$$

^{*40} 座標時間 t を示す光の振動を利用した時計と固有時間 τ を示す時計で用いている時間の単位の関係は、式 (137) より無限遠 $r \rightarrow \infty$ で t と τ が一致することから決まる。

粒子の固有時間を増大させる．しかし粒子が太陽から離れすぎると角度変化 $d\phi$ の項が大きくなるので固有時間が減少する．以上を踏まえると，粒子の空間的な軌道は太陽から見てある程度外側に膨らんだ曲線になると想像される．

以上の議論を裏付けるため重力半径 r_g の太陽が作る Schwarzschild 時空中を運動する粒子を考え，粒子の時空における実際の軌道と仮想的な軌道の固有時間を比較する数値シミュレーションを次の手順で行う^{*41}．まず実際の軌道を求めるため，以下の時間発展方程式を用いる（ドットは t による微分）．

$$\dot{r} = f(r) \equiv c \times \frac{1}{a} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{a^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(1 + \frac{b^2}{c^2 r^2}\right)}, \quad (138)$$

$$\dot{\phi} = g(r) \equiv \frac{b}{r^2} \times \frac{1}{a} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right). \quad (139)$$

これは粒子の固有時間が極大となる条件として導かれる（7.8.2 節参照）．ここに

$$a \equiv \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} (> 0), \quad (140)$$

$$b \equiv r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \quad (141)$$

は初期条件から定まる保存量である． $t = 0$ での初期条件を

$$r(0) = r_0 (> r_g), \quad \phi(0) = 0, \quad \dot{r}(0) = \dot{r}_0 = 0, \quad \dot{\phi}(0) = \dot{\phi}_0 (> 0)$$

と与える．このときこれらを時間発展方程式 (138),(139) に代入して a, b について解くと

$$a = \left[\frac{1}{1 - \frac{r_g}{r_0}} \left\{ 1 - \frac{\dot{r}_0^2}{c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r_0}\right)^2} \right\} - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r_0}\right)^2} \frac{r_0^2 \dot{\phi}_0^2}{c^2} \right]^{-1/2}, \quad (142)$$

$$b = a \times \dot{\phi}_0 \frac{r_0^2}{1 - \frac{r_g}{r_0}} \Big|_{a=(142)}$$

となる．座標時間を $t = i\Delta t (i = 0, 1, \dots, N)$ と離散化し ($T \equiv N\Delta t$)，上記の初期条件と a, b に対して時間発展方程式 (138),(139) を修正 Euler 法にて

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= t(t) + f(r(t))\Delta t, \\ r(t + \Delta t) &= r(t) + \frac{f(\tilde{r}) + f(r(t))}{2} \Delta t, \\ \phi(t + \Delta t) &= \phi(t) + \frac{g(\tilde{r}) + g(r(t))}{2} \Delta t \end{aligned}$$

と数値的に解き時空中における粒子の実際の軌道を求める．また軌道の端点 $(ct, x, y) = (0, x(0), y(0)), (T, x(T), y(T))$ を固定して，各時刻 $t = i\Delta t \equiv t_i$ での動径座標 r を

$$r(t_i) \rightarrow r(t_i) + \frac{A}{(N/2)^2} i(N - i)$$

^{*41} Schwarzschild 時空中の粒子の運動は解析的に調べることができるけれど [3, pp.341–344]，ここでは上記の最小作用原理に基づく定性的・直観的議論を直接的に裏付けるため，数値シミュレーションを手法として採用した．もっとも正確には，この数値シミュレーションで裏付けられるのは，最小作用原理と運動方程式の同等性である．

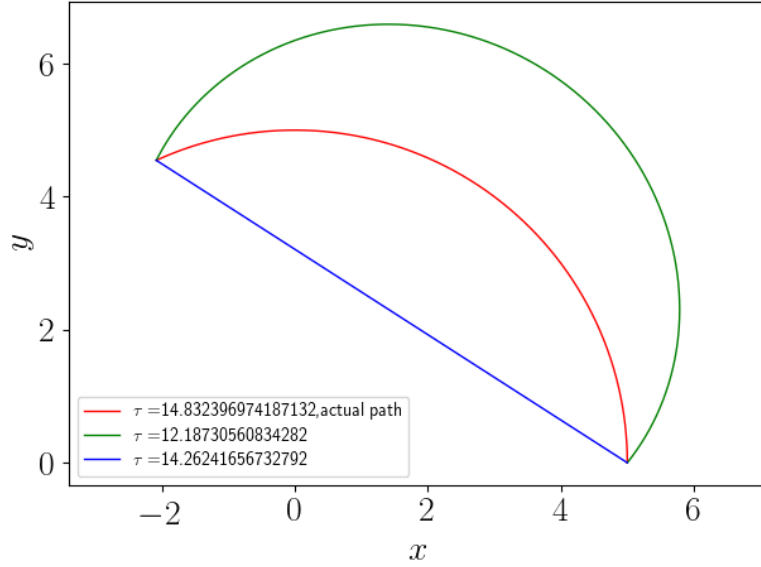


図 19 Schwarzschild 時空中の粒子の軌道と固有時間

と増加させた軌道，および座標系に対して等速直線運動をする軌道

$$x(t_i) = x(0) + (x(T) - x(0))\frac{t_i}{T}, \quad y(t_i) = y(0) + (y(T) - y(0))\frac{t_i}{T}$$

を仮想的に考える．ただし xy 座標は Schwarzschild 解 (136) の球座標と $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\phi = \arctan(y/x)$ の関係にある．そしてそれぞれの軌道について粒子の固有時間を

$$\begin{aligned} \tau &= \int \frac{ds}{c} = \int \sqrt{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) - \left(\frac{r}{c} \frac{d\phi}{dt}\right)^2 - \frac{\left(\frac{1}{c} \frac{dr}{dt}\right)^2}{1 - \frac{r_g}{r}}} dt \\ &\simeq \sum_{i=0}^{N-1} \frac{F_i + F_{i+1}}{2} \Delta t, \\ F_i &\equiv \sqrt{\left(1 - \frac{r_g}{r(t_i)}\right) - \left(\frac{r(t_i)}{c} \frac{\phi(t_{i+1}) - \phi(t_i)}{\Delta t}\right)^2 - \frac{\left(\frac{r(t_{i+1}) - r(t_i)}{c \Delta t}\right)^2}{1 - \frac{r_g}{r(t_i)}}}, \\ F_{i+1} &\equiv \sqrt{\left(1 - \frac{r_g}{r(t_{i+1})}\right) - \left(\frac{r(t_{i+1})}{c} \frac{\phi(t_{i+1}) - \phi(t_i)}{\Delta t}\right)^2 - \frac{\left(\frac{r(t_{i+1}) - r(t_i)}{c \Delta t}\right)^2}{1 - \frac{r_g}{r(t_{i+1})}}}. \end{aligned}$$

と求める．長さや時間を適当に無次元化した上で

$$r_g = 1, \quad c = 1, \quad \Delta t = 10^{-3}, \quad N = 2 \times 10^4, \quad r_0 = 5r_g, \quad \dot{\phi}_0 = 0.1, \quad A = 2$$

として以上の数値シミュレーションを行うと結果は図 19 のようになった．実際の軌道 (actual path) では他の 2 つの軌道と比べて固有時間が大きくなっているのが分かる．また実際の軌道に対する固有時間は確かに座標時間 $T = 20$ よりも遅れていることになる．

なお，ステップ数を $N = 10^5$ に増やしたときの実際の xy 面内の軌道は図 20 のようになった．

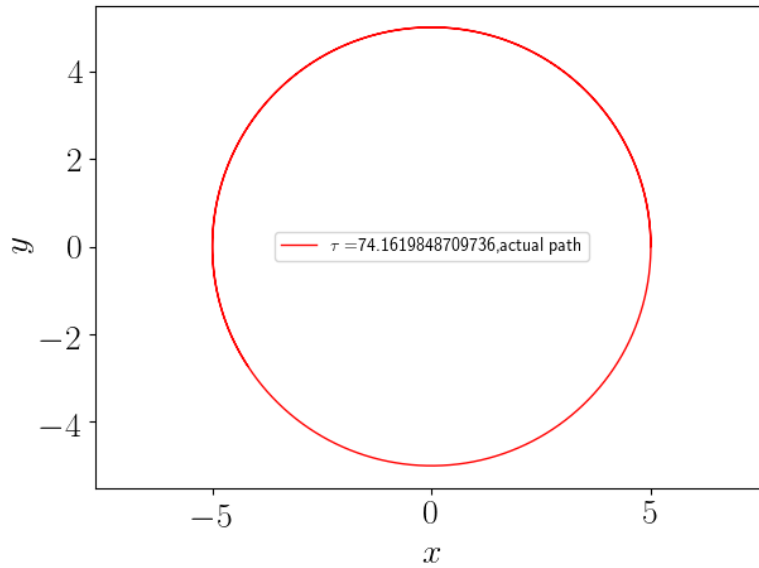


図 20 Schwarzschild 時空中の粒子の長時間挙動

1.8.3 重力波

ここまでは物体の作る定常的な重力場を調べてきた．そこで本節では重力場が弱い場合に限って，重力場のダイナミクスを論じる．

■重力場のゲージ変換 重力場が弱い場合を考えると，計量が

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

となる座標系が存在すると考えられる．座標変換を行うと計量も変換されるけれど，新しい座標系の計量もこれと同じ条件を満たすような一連の座標変換が存在する．実際，

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x) \quad (143)$$

という座標変換に対して $h^{\mu\nu}$ は

$$h^{\mu\nu} \rightarrow h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + \partial^\mu \varepsilon^\nu + \partial^\nu \varepsilon^\mu \quad (144)$$

と変化するので (導出は 7.8.3 節)， $|\partial^\mu \varepsilon^\nu|$ が十分小さいようなゲージ関数 ε^μ を用いて変換を行えば良い．重力場のゲージ変換とは，具体的にはこのような座標変換のことである．

これ以降， $h^{\mu\nu}$ の添字の上げ下げは Minkowski 計量 $\eta_{\mu\nu}, \eta^{\mu\nu}$ を用いて行うものとする．

1 つの便利なゲージは Lorenz ゲージと呼ばれるものである (その他の重要な例として，5.7 節の光錐ゲージが挙げられる)．ゲージ変換によって結ばれる無数の近似的 Lorenz 座標系の中に，

$$\bar{h}^{\mu\nu} \equiv h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h \quad (\text{ただし } h \equiv h^\mu{}_\mu)$$

が Lorenz ゲージ条件

$$\partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$$

を満たすものが存在する (証明は 7.8.3 節). 電磁場に対する Lorenz ゲージ条件 (1.4.1 節) との類似性に注目されたい [4, pp.186–188] [7, pp.248–250].

■線形化された Einstein 方程式 引き続き弱い重力場を想定して, Einstein 方程式 (84): $G_{\mu\nu} = \frac{8\pi k}{c^4} T_{\mu\nu}$ において $h_{\mu\nu}$ の 1 次までの項を残すと, ($h_{\mu\nu}$ について) 線形化された重力場の方程式として

$$\{\partial^2 h^{\mu\nu} - \partial_\alpha(\partial^\mu h^{\nu\alpha} + \partial^\nu h^{\mu\alpha}) + \partial^\mu \partial^\nu h\} + \eta^{\mu\nu}(\partial^\sigma \partial^\tau h_{\sigma\tau} - \partial^2 h) = -\frac{16\pi k}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (145)$$

あるいは

$$\partial^\mu \partial_\mu \bar{h}_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} - \partial^\mu \partial_\beta \bar{h}_{\alpha\mu} - \partial^\mu \partial_\alpha \bar{h}_{\beta\mu} = -\frac{16\pi k}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (146)$$

が得られる (導出は 7.8.3 節). Lorenz ゲージの下では, 線形化された Einstein 方程式は源の項を持つ波動方程式

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = -\frac{16\pi k}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (\square \equiv \partial^\mu \partial_\mu) \quad (147)$$

に簡略化される (これは上式 (146) において見やすい) [4, p.186] [7, pp.248–250]. 電磁場の方程式 (108)(1.6.7 節) との類似性に注意する.

■重力波 場の源の遠方における真空中 ($T^{\alpha\beta} = 0$) の, 弱い非定常的な重力場を考える. Lorenz ゲージ条件の下での線形化された場の方程式 (Einstein 方程式)(147) は波動方程式 $\square \bar{h}^{\alpha\beta} = 0$ に帰着する. これは平面波解

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} \exp(ik \cdot x), \quad k^2 = 0$$

を持つ. これは光速で伝播する重力波を表している. $h_{\mu\nu}$ の変動は空間の固有距離の伸び縮みという幾何学的な意味を持ち, それ故, 重力波は固有距離の測定によって捉えられる. ここで重力波により空間がのぼされるとももの差しもぼされるから, 空間ののびはもの差しでは測定できないのではないかという疑問が生じ得る. これには次のように答えられる [7, pp.271–272].

もの差しを構成している原子は自由粒子ではなく, 近くの原子から電気的な力を受けているので, もの差しは, 重力による潮汐力が内部の結合力と比べてどれほど大きいかによってそののび方が変化する. ふつう, 重力は電気的な力に比べて非常に弱いので, もの差しは実際にはまったくのびることがない. したがってもの差しを使って, 接近した自由粒子が潮汐力によって受ける変位を測定できるのである. つまり「空間ののび」を測定できることになる.

重力波の様子をさらに詳しく調べよう. それに適した便利なゲージを選ぶところから始める [7, pp.265–267]. まず Lorenz ゲージ条件 $\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} = 0$ は複素定数 $A^{\alpha\beta}$ に対する制限

$$A^{\alpha\beta} k_\beta = 0 \quad (148)$$

を与える. $\bar{h}_{\alpha\beta}$ と同様, 振幅 $A_{\alpha\beta}$ は添字に関して対称でなければならないことにも注意する. 実は Lorenz ゲージ条件を壊すことなく, なおゲージ変換を行う自由度が残されている. この自由度を利用し, 振幅に対するゲージ条件 (148) に加えてさらに条件

$$A^\alpha{}_\alpha = 0, \quad (149)$$

$$A_{\alpha\beta} U^\beta = 0 \quad (150)$$

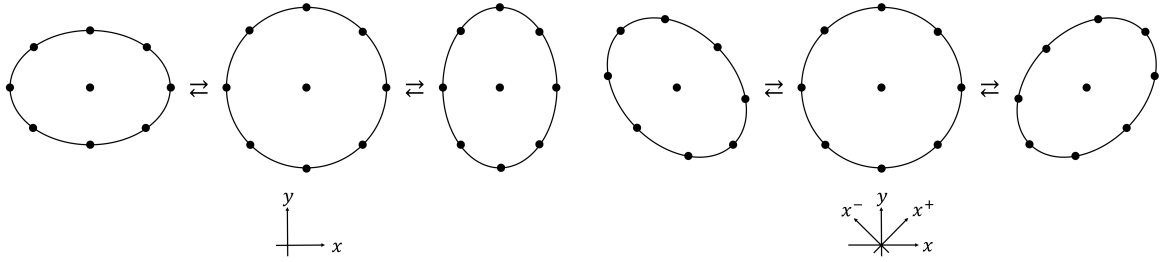


図 21 “+” 偏りを持つ重力波による固有距離の変化

図 22 “×” 偏りを持つ重力波による固有距離の変化

を課することができる (U^β は任意の時間的な定数単位ベクトル, 導出は 7.8.3 節). 以上の一連の条件をトランスバース-トレースレス (TT) ゲージ条件という.

ここで U^β を $U^\beta = \delta^\beta_0$ と選ぶ. その上で波の伝播方向を z に選ぶ (このとき波の振動数 ω を用いて $k = (\omega/c, 0, 0, \omega/c)$). すると

- 第 2 の条件 (150): $A_{\alpha\beta}U^\beta = 0$ は $A_{\alpha 0} = 0$ を意味する.
Lorenz 条件 (148): $A^{\alpha\beta}k_\beta = 0$ と合わせると $A_{\alpha z} = 0$ となる*42.
- このときトレースレスの条件 (149): $A^\alpha_\alpha = 0$ は $A_{xx} = -A_{yy}$ を意味する.

最後に $A_{\alpha\beta}$ が添字に関して対称であることを考慮すると, 我々の座標系で $A_{\alpha\beta}$ は

$$(A_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ 0 & A_{xy} & -A_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (151)$$

という形を持つ.

TT ゲージ条件 (149): の下で平面波解 $\bar{h}^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} \exp(ik_\mu x^\mu)$ は

$$\bar{h} \equiv \bar{h}^\alpha_\alpha = A^\alpha_\alpha \exp(ik_\mu x^\mu) = 0, \quad \therefore h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\bar{h} = \bar{h}_{\alpha\beta}$$

を満たす. こうして $\bar{h}_{\alpha\beta}$ の時間発展は, $h_{\alpha\beta}$ の時間発展に読み換えられる.

TT ゲージにおいて z 方向に伝わる波の各平面波成分は式 (151) の形の振幅 $A_{\alpha\beta}$ を持つから, その重ね合せとして得られる重力波もまた 2 つだけの独立成分 h_{xx}, h_{xy} を持つ.

空間の伸びに対するこれらの寄与は次のように解釈できる [7, p.272]. まず $h_{xy} = 0$ とおくと

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (1 - h_{xx})dx^2 - (1 + h_{xx})dy^2 - dz^2$$

となるので, h_{xx} の寄与は図 21 のような固有距離の変動に対応する. ただし座標で測ってある点から等距離にある点の固有距離を, 図 21 の上での長さに反映させて描いている. x 方向の固有距離が伸びている間には y 方向の固有距離が縮む.

*42 言い換えると基底ベクトル $\vec{e}_z = (0, 0, 0, 1)$ に対して $A_{\alpha\beta}(\vec{e}_z)^\beta = 0$ であり, この意味で $A_{\alpha\beta}$ は波の伝播方向 \vec{e}_z に直交する (“トランスバース” の語源).

一方, h_{xy} の寄与は同じ描き方で図 22 のような固有距離の変動に対応し, これは図 21 のパターンを 45 度回転したものになっている. このことは次のように理解できる. xy 面内で座標軸を角度 θ だけ回転した座標軸 $x'y'$ への座標変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R(-\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

を考え, 2 階共変テンソルの変換則

$$\begin{pmatrix} h'_{xx} & h'_{xy} \\ h'_{yx} & h'_{yy} \end{pmatrix} = R(+\theta)^T \begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{xy} & -h_{xx} \end{pmatrix} R(+\theta)$$

を書き下すと, 新しい座標系でも TT ゲージの条件

$$h'_{yy} = -h_{xx}, \quad h'_{yx} = h'_{xy}$$

が満たされ, 独立な 2 成分は

$$\begin{pmatrix} h'_{xx} \\ h'_{xy} \end{pmatrix} = R(-2\theta) \begin{pmatrix} h_{xx} \\ h_{xy} \end{pmatrix}$$

と変換することが分かる [4, pp.189–190]. そこで $h_{xx} = 0$ とおき, 図 22 のように x 軸, y 軸と $\theta = 45^\circ$ を成す x^\pm 軸への変換を行うと,

$$\begin{pmatrix} 0 & h_{xy} \\ h_{xy} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} h_{++} & h_{+-} \\ h_{-+} & h_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{xy} & 0 \\ 0 & -h_{xy} \end{pmatrix}$$

となる. これは $h_{xx} \neq 0, h_{xy} = 0$ のときの計量テンソルの xy 座標系に関する成分と同じ形をしているから, 重力波の偏りは図 21 の振動状態を 45 度回転させたパターンになることが分かる. 実際, 上の結果より固有距離の式をあからさまに書くと

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (1 - h_{xy}) dx_+^2 - (1 + h_{xy}) dx_-^2 - dz^2$$

となり, ここから図 22 のように x^\pm 方向の固有距離が伸びている瞬間には x^\mp 方向の固有距離が縮むことが見て取れる.

2 量子力学の基礎

本章では後の章の準備も兼ねて、量子力学の基本事項を説明する。

はじめに量子論において重要となる普遍定数として、Planck 定数 h を 2π で割った値

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec}$$

を導入しておく [16, pp.46–47]. これは作用の次元を持っている*43.

2.1 ケット, ブラおよび演算子

本節では量子力学の定式化に用いられる数学的な基礎形式を、半ば公理的に導入する。

物理的状態はケットと呼ばれる状態ベクトル $|\alpha\rangle$ で表される。 $|\alpha\rangle$ がベクトルであるとは

- 和 $|\gamma\rangle = |\alpha\rangle + |\beta\rangle$
- 定数倍 $c|\alpha\rangle$ (c は複素数)

が定義されるという意味である。和 $|\gamma\rangle$ は状態 $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ の重ね合せを表す。また、 $|\alpha\rangle$ とその定数倍 $c|\alpha\rangle$ は同じ状態を表す*44*45.

観測量は状態 $|\alpha\rangle$ に作用する演算子 A で表される。

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle \quad (152)$$

を満たす $|a'\rangle$ は演算子 A の固有値 a' に属する固有ケットと呼ばれ、 $|a'\rangle$ で表される状態は固有状態と呼ばれる [18, pp.13–14].

次にケット $|\alpha\rangle$ の共役としてブラ $\langle\alpha|$ を導入する。ただし

$$|\gamma\rangle = c_\alpha |\alpha\rangle + c_\beta |\beta\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\gamma| = c_\alpha^* \langle\alpha| + c_\beta^* \langle\beta|$$

と約束する。さらにケット $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ の内積 $(\langle\beta|) \cdot (|\alpha\rangle) = \langle\beta|\alpha\rangle$ を定義し、以下を要請する [18, pp.15–17].

- 内積は一般に複素数であり、 $\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^*$
 - このとき $\langle\alpha|\alpha\rangle$ は実数となる。
- $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0$ (等号は零ケット $|\alpha\rangle = 0$ に対してのみ成立)
 - $|\alpha\rangle (\neq 0)$ と同じ状態を表し、 $\langle\tilde{\alpha}|\tilde{\alpha}\rangle = 1$ となるように規格化されたケット $|\tilde{\alpha}\rangle \equiv \frac{1}{\langle\alpha|\alpha\rangle} |\alpha\rangle$ をとれる。

*43 詳しくまとめると、

$$[h] = [\text{作用}] = [\text{エネルギー}] \times [\text{時間}] = [\text{運動量}] \times [\text{長さ}] = [\text{角運動量}].$$

*44 これにより同一の状態 $c_1 |\alpha\rangle, c_2 |\alpha\rangle$ の重ね合せ $(c_1 + c_2) |\alpha\rangle$ が、もとの状態と変わらないことが保証される [17, p.18].

*45 ここで量子力学の定式化には複素数の利用が不可欠であることを、簡単な例で説明する。2 状態 $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ の線形結合

$$|\gamma\rangle = c_\alpha |\alpha\rangle + c_\beta |\beta\rangle$$

はその定数倍 $c|\gamma\rangle$ と同じ状態と見なされるため、状態 $|\gamma\rangle$ は係数 c_α, c_β の比によってのみ区別されることになる。比が複素数であれば2つの実数パラメーターが含まれるため、例えば z 方向に進行する光子に対して、 x 方向と y 方向の直線偏光状態を重ね合わせて、2重の無限大だけある xy 面内の任意の楕円偏光を表すことができる [17, pp.19–20].

ここで内積の2乗 $|\langle a'|\alpha\rangle|^2$ の確率解釈について述べる。観測量 A が a' であることが測定されるとき、系は A の測定により状態 $|\alpha\rangle$ から固有状態 $|a'\rangle$ に跳び移る。そして状態 $|a'\rangle$ に跳び移る確率が $|\langle a'|\alpha\rangle|^2$ であると解釈する(少なくとも $|\langle a'|\alpha\rangle|^2$ は非負なので、確率の資格がある)。これは量子力学の基本的仮定の1つである^{*46} [18, pp.30–31]。 $\langle a'|\alpha\rangle$ は確率振幅と呼ばれる。ただしここまでは固有値 a' が離散的な値をとる場合を考えている。一方、固有値が連続変数 ξ' となるような観測量 ξ を考える場合には、 $|\langle \xi'|\alpha\rangle|^2$ は確率密度と解釈される。すなわち測定値が ξ' の周りの幅 $d\xi'$ の区間に得られる確率は $|\langle \xi'|\alpha\rangle|^2 d\xi'$ で与えられる [18, p.57]。

観測量 A を測定すると、ある値 a' が固有値として得られる。固有値 a' は実数であることが期待される [18, p.23]。さらに固有値 a' が確実に得られる状態 $|a'\rangle$ において A の測定を行い、系を固有値の異なる固有状態 $|a''\rangle$ ($a'' \neq a'$) に見出す確率、従ってその振幅 $\langle a''|a'\rangle$ はゼロとなることが要求される [18, p.32]。これらは観測量を表す演算子 A が Hermite であれば満たされる(8.1節参照)。ここで演算子 X が Hermite であるとは X の Hermite 共役 X^\dagger を

$$|\beta\rangle = X|\alpha\rangle \Rightarrow \langle\beta| = \langle\alpha|X^\dagger$$

で定義したとき $X = X^\dagger$ となることである [18, p.19]。また固有状態 $|a'\rangle$ を得た直後に A を測定すると、確率1で再び $|a'\rangle$ が得られなければならない [18, p.32]。そこで観測量 A は Hermite であり、その固有ケット $\{|a'\rangle\}$ は規格直交条件

$$\langle a''|a'\rangle = \delta_{a''a'} \quad (153)$$

を満たすものとする [18, pp.22–23]。

固有ケット $\{|a'\rangle\}$ の規格直交性の下で、任意のケット $|\alpha\rangle$ が $\{|a'\rangle\}$ を基底ケットに用いて

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} c_{a'} |a'\rangle \quad (154)$$

と展開できることは

$$\sum_{a'} |a'\rangle \langle a'| = 1 \quad (155)$$

と等価であり、このとき展開係数は $c_{a'} = \langle a'|\alpha\rangle$ と定まる(8.1節参照) [18, p.24]。

この式(155)に現れた $|\beta\rangle \langle\alpha|$ という表現はケット $|\beta\rangle$ とブラ $\langle\alpha|$ の外積と呼ばれ、これは

$$(|\beta\rangle \langle\alpha|) \cdot |\gamma\rangle = |\beta\rangle \cdot (\langle\alpha|\gamma\rangle) = |\beta\rangle \langle\alpha|\gamma\rangle$$

のように何らかのケット $|\gamma\rangle$ に作用して $|\beta\rangle$ に比例する別のケットを作る演算子である [18, pp.20–21]。一方、式(155)右辺の1は恒等演算子と見なされる。式(155)は完全性条件(完備関係式)と呼ばれる。固有値が連続変数 ξ' となる場合には、固有ケット $|\xi'\rangle$ の規格直交性と $\{|\xi'\rangle\}$ による展開を

$$\text{式(153): } \langle a'|a''\rangle = \delta_{a'a''} \rightarrow \langle \xi'|\xi''\rangle = \delta(\xi' - \xi''), \quad (156)$$

$$\text{式(154): } |\alpha\rangle = \sum_{a'} c_{a'} |a'\rangle \rightarrow |\alpha\rangle = \int d\xi' c_{\xi'} |\xi'\rangle \quad (157)$$

と再定義する。このとき展開係数は $c_{\xi'} = \langle \xi'|\alpha\rangle$ と表され、完全性条件は

$$\text{式(155): } \sum_{a'} |a'\rangle \langle a'| = 1 \rightarrow \int d\xi' |\xi'\rangle \langle \xi'| = 1 \quad (158)$$

^{*46} このように量子力学的な予言は確率的に行うことができるに過ぎない。このことは自然の本性に含まれていると見なければならない。

と置き換わる (8.1 節参照) [18, p.55]^{*47}.

状態ケット $|\alpha\rangle$ が $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$ と規格化されていることは全確率, すなわち測定によりいずれかの固有値 $\{a'\}, \{\xi'\}$ を見出す確率が 1 であることを意味する. このことは完全性条件を用いて

$$1 = \langle\alpha|\alpha\rangle = \begin{cases} \sum_{a'} \langle\alpha|a'\rangle \langle a'|\alpha\rangle = \sum_{a'} |\langle a'|\alpha\rangle|^2 \\ \int d\xi' \langle\alpha|\xi'\rangle \langle\xi'|\alpha\rangle = \int d\xi' |\langle\xi'|\alpha\rangle|^2 \end{cases}$$

と確かめられる.

以上を踏まえると, 系の状態が $|\alpha\rangle$ にあるとき観測量 A の期待値は $\langle\alpha|A|\alpha\rangle$ で与えられることが分かる (8.1 節参照) [18, p.32].

縮退に関する注意 ここまでの議論では暗に「縮退」のない場合を仮定してきた.

縮退のある場合への議論の一般化は直接的である (2.2 節).

■理論が状態ベクトル $|\alpha\rangle$ という, 直接検証できない概念を含んで良いこと 状態ベクトル $|\alpha\rangle$ や状態の重ね合せ $\sum_{a'} c_{a'} |a'\rangle$ といった概念は抽象的で, 一見すると現実との対応が不明瞭な空想の産物に過ぎないという印象を受けるかもしれない. しかし Feynman が注意しているように「直接実験にかかる概念だけを使って, 完全に科学を追求できると考えるのは, 正しくない」のであり, 理論の正否はその予言の能力にかかっている [19, p.178]. そしてケット, ブラおよび演算子に関する数学的性質が種々の計算を実行するのに十分に与えられさえすれば, $|\langle a'|\alpha\rangle|^2$ の確率的解釈の下で現象を確率的に予言できるのだから, 物理的状态がケット $|\alpha\rangle$ で表されるという考えを受け容れることができる.

2.1.1 重要な数学的性質

■Hermite 共役に関する性質 [18, pp.19–22]

- 演算子積の Hermite 共役

$$(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger. \quad (159)$$

- 外積の Hermite 共役

$$X = |\beta\rangle \langle\alpha| \quad \Rightarrow \quad X^\dagger = |\alpha\rangle \langle\beta|. \quad (160)$$

- 行列要素の Hermite 共役

$$\langle\beta|X|\alpha\rangle = \langle\alpha|X^\dagger|\beta\rangle^*. \quad (161)$$

(「行列要素」と上式 (161) の意味は, 2.1.2 節で説明する.)

以上の導出は 8.1.1 節で行う.

■交換子, 反交換子 任意の演算子 A, B の積は一般に順序を交換できない: $AB \neq BA$. ここで演算子の交換子と反交換子をそれぞれ

$$[A, B] \equiv AB - BA, \quad \{A, B\} = AB + BA$$

^{*47} 式 (157), 式 (158) における積分は元の式 (154), 式 (155) における $c_{a'} |a'\rangle, |a'\rangle \langle a'|$ の和と異なり, $d\xi' c_{\xi'} |\xi'\rangle, d\xi' |\xi'\rangle \langle\xi'|$ の和を意味する.

で定義すると、これらは A, B を交換ないし反交換した際のお釣りの項である (反交換とは、 AB を $-BA$ に置き換えることを指す) :

$$AB = BA + [A, B], \quad AB = -BA + \{A, B\}.$$

特に演算子 A, B は $[A, B] = 0$ のときには交換し、 $\{A, B\} = 0$ のときには反交換する。

ここで交換子の性質を本稿に必要な範囲で証明する。まず、ほぼ自明な関係として

$$\begin{aligned} [A, A] &= 0, \\ [A, B] &= -[B, A], \\ [A, c] &= 0, \quad (c \text{ は単なる数}) \\ [A + B, C] &= [A, C] + [B, C] \end{aligned}$$

が成立する。さらに交換子、反交換子に関して次の恒等式が成り立つ (証明は 8.1.1 節) [10, pp.65–66] [18, p.68].

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B, \quad (162)$$

$$[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B. \quad (163)$$

これらは古典力学における Poisson 括弧の満たす代数的性質 (57) と類似していることを指摘しておく。

$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$ を繰り返し用いると、公式

$$\begin{aligned} [A, B^n] &= B[A, B^{n-1}] + [A, B]B^{n-1} = B^2[A, B^{n-2}]B + B[A, B]B^{n-2} + [A, B]B^{n-1} = \dots \\ &= B^{n-1}[A, B] + B^{n-2}[A, B]B + \dots + B[A, B]B^{n-2} + [A, B]B^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} B^{n-k-1}[A, B]B^k. \end{aligned} \quad (164)$$

が見出される。

■ユニタリー演算子 ここでユニタリー演算子を定義しておく。

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1$$

(右辺の 1 は恒等演算子) を満たす U をユニタリー演算子と呼ぶ。

状態 $|\Psi\rangle$ と演算子 O に対するユニタリー変換

$$|\Psi\rangle \rightarrow |\Psi'\rangle = U|\Psi\rangle, \quad O \rightarrow O' = UOU^\dagger$$

は交換関係 $[A, B] = C$ と内積 $\langle \Phi | \Psi \rangle$ を不変に留める [10, p.36].

$$[A', B'] = U[A, B]U^\dagger = UCU^\dagger = C', \quad \langle \Phi' | \Psi' \rangle \langle \Phi | U^\dagger U | \Psi \rangle = \langle \Phi | \Psi \rangle.$$

(同じ理由で反交換関係も不変である。)

■可換な量 A, B に対する指数法則 $e^A e^B = e^{A+B}$ 演算子 A の指数関数を $e^A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ で定義する。このとき A, B が演算子であるか否かに関わらず交換する量であれば、指数法則 $e^A e^B = e^{A+B}$ が成り立つ (証明は 8.1.1 節を参照)。

■ Baker-Hausdorff (ベーカー・ハウスドルフ) の補助定理 任意の演算子 A, G と定数パラメーター λ に対して, Baker-Hausdorff の補助定理

$$e^{i\lambda G} A e^{-i\lambda G} = A + i\lambda[G, A] + \frac{(i\lambda)^2}{2!}[G, [G, A]] + \cdots + \frac{(i\lambda)^n}{n!}[G, [G, \cdots [G, A] \cdots]] + \cdots \quad (165)$$

が成り立つ (証明は 8.1.1 節) [18, p.129].

2.1.2 行列表現 [18, pp.25–28]

与えられた基底ケット

$$\{|a'\rangle\} = \{|a^{(1)}\rangle, |a^{(2)}\rangle, \dots\}$$

に対して, 任意の演算子 X とケット $|\alpha\rangle$, ブラ $\langle\alpha|$ の行列表現

$$X \rightarrow \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|X|a^{(1)}\rangle & \langle a^{(1)}|X|a^{(2)}\rangle & \cdots \\ \langle a^{(2)}|X|a^{(1)}\rangle & \langle a^{(2)}|X|a^{(2)}\rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad |\alpha\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|\alpha\rangle \\ \langle a^{(2)}|\alpha\rangle \\ \vdots \end{pmatrix},$$

$$\langle\alpha| \rightarrow (\langle\alpha|a^{(1)}\rangle \quad \langle\alpha|a^{(2)}\rangle \quad \cdots) = (\langle a^{(1)}|\alpha\rangle^* \quad \langle a^{(2)}|\alpha\rangle^* \quad \cdots)$$

を定義する. このとき

- 式 (161) より X とその Hermite 共役な演算子 X^\dagger は, 互いに転置複素共役な行列 (共役転置行列, 同じく \dagger で表される) に対応付けられることになる.

$$\langle a''|X|a'\rangle = \langle a'|X^\dagger|a''\rangle.$$

– 特に Hermite 演算子は Hermite 行列で表される.

- 演算子 X, Y の積 XY は, X, Y の表現行列の積で表される:

$$\langle a''|XY|a'\rangle = \sum_{a'''} \langle a''|X|a'''\rangle \langle a'''|Y|a'\rangle.$$

- 演算子とケットの積 $X|\alpha\rangle$ は, 演算子 X とケット $|\alpha\rangle$ の表現行列の積で表される:

$$\langle a'|(X|\alpha\rangle) = \sum_{a''} \langle a'|X|a''\rangle \langle a''|\alpha\rangle.$$

- ブラと演算子の積 $\langle\alpha|X$ は, ブラ $\langle\alpha|$ と演算子 X の表現行列の積で表される:

$$(\langle\alpha|X) \cdot |a'\rangle = \sum_{a''} \langle\alpha|a''\rangle \langle a''|X|a'\rangle.$$

- 内積 $\langle\beta|\alpha\rangle$ は $\langle\beta|$ と $|\alpha\rangle$ の表現行列の積で表される:

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \sum_{a'} \langle\beta|a'\rangle \langle a'|\alpha\rangle = (\langle a^{(1)}|\beta\rangle^* \quad \langle a^{(2)}|\beta\rangle^* \quad \cdots) \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|\alpha\rangle \\ \langle a^{(2)}|\alpha\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

最右辺は全体の複素共役 (したがって転置複素共役) をとると, $\langle\alpha|\beta\rangle$ の計算になる.

$$\langle\alpha|\beta\rangle = (\langle a^{(1)}|\alpha\rangle^* \quad \langle a^{(2)}|\alpha\rangle^* \quad \cdots) \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|\beta\rangle \\ \langle a^{(2)}|\beta\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

これは内積の性質 $\langle \beta | \alpha \rangle^* = \langle \alpha | \beta \rangle$ と整合している*48.

- 外積 $|\beta\rangle \langle \alpha|$ の表現行列は

$$|\beta\rangle \langle \alpha| \rightarrow \begin{pmatrix} \langle a^{(1)} | \beta \rangle \langle a^{(1)} | \alpha \rangle^* & \langle a^{(1)} | \beta \rangle \langle a^{(2)} | \alpha \rangle^* & \cdots \\ \langle a^{(2)} | \beta \rangle \langle a^{(1)} | \alpha \rangle^* & \langle a^{(2)} | \beta \rangle \langle a^{(2)} | \alpha \rangle^* & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (166)$$

である (理由は導出は 8.1.2 節).

2.2 不確定関係

2.2.1 両立できる観測量 [18, pp.38–42]

$$\begin{aligned} [A, B] = 0 &\Leftrightarrow \text{観測量 } A, B \text{ は両立できる,} \\ [A, B] \neq 0 &\Leftrightarrow \text{観測量 } A, B \text{ は両立できない} \end{aligned}$$

と定義する. 以下ではこの術語の定義が理に合っていることを説明する.

手始めに重要な定理を述べる.

定理 A と B が両立できる観測量であるとき, 行列要素 $\langle a'' | B | a' \rangle$ は対角型

$$\langle a'' | B | a' \rangle = \delta_{a'' a'} \langle a' | B | a' \rangle \quad (167)$$

である (証明は 8.2 節)*49*50.

ここから A の固有状態 $|a'\rangle$ は, B の固有方程式

$$B |a'\rangle = b' |a'\rangle, \quad b' \equiv \langle a' | B | a' \rangle \quad (168)$$

を満たし, それ故 A, B の同時固有ケット $|a', b'\rangle$ となることが導かれる (導出は 8.2 節). このとき A の測定により固有値 a' を (したがって固有状態 $|a', b'\rangle$ を) 得たとすると, 次に B の測定を行っても最初の A の測定に関する情報は失われない.

$$|\alpha\rangle \xrightarrow[A \text{ の測定}]{} |a', b'\rangle_{\text{固有値 } a'} \xrightarrow[B \text{ の測定}]{} |a', b'\rangle_{\text{固有値 } b'} \xrightarrow[A \text{ の測定}]{} |a', b'\rangle_{\text{固有値 } a'}$$

このように $[A, B] = 0$ を満たす観測量 A, B の測定は互いに干渉せず, 文字通り両立する.

*48 同じことは行列表記を用いずに書き表すこともできる.

$$\begin{aligned} \langle \beta | \alpha \rangle^* &= \left(\sum_{a'} \langle \beta | a' \rangle \langle a' | \alpha \rangle \right)^* = \left(\sum_{a'} \langle a' | \beta \rangle^* \langle a' | \alpha \rangle \right)^* \\ &= \sum_{a'} \langle a' | \alpha \rangle^* \langle a' | \beta \rangle = \sum_{a'} \langle \alpha | a' \rangle \langle a' | \beta \rangle \\ &= \langle \alpha | \beta \rangle. \end{aligned}$$

*49 ただし A の固有値は縮退していないとする (縮退については後述).

*50 (基底ケット $\{|a'\rangle\}$ に対して) A を表す行列は既に対角化されていることを思い出そう.

2.3 位置, 運動量および平行移動

1 粒子系を考え, 粒子がデカルト座標 $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ に位置する状態を $|\mathbf{x}'\rangle$ と書く. これは位置演算子 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ の固有値 \mathbf{x}' に属する固有ケットである^{*51}.

$$x_i |\mathbf{x}'\rangle = x'_i |\mathbf{x}'\rangle.$$

同時固有ケット $|\mathbf{x}'\rangle = |x'_1, x'_2, x'_3\rangle$ を考えられる条件として, 位置演算子の各成分は互いに交換するものと仮定して良い.

$$[x_i, x_j] = 0. \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (170)$$

系の状態を粒子の位置のみによって特徴付けるとき, 固有状態 $\{|\mathbf{x}'\rangle\}$ を基底にとって, 状態を

$$|\alpha\rangle = \int d^3x' |\mathbf{x}'\rangle \langle \mathbf{x}'|\alpha\rangle$$

と展開できる. このとき展開係数

$$\psi_\alpha(\mathbf{x}') = \langle \mathbf{x}'|\alpha\rangle$$

は状態 $|\alpha\rangle$ を表す波動関数と呼ばれる (しばしば, 添字の α は省略する). その意味は, $|\langle \mathbf{x}'|\alpha\rangle|^2 d^3x'$ が状態 $|\alpha\rangle$ における測定により, 粒子を位置 \mathbf{x}' の周りの狭い範囲 d^3x' に見出す確率を与えるということの中に含まれている. すなわち $|\langle \mathbf{x}'|\alpha\rangle|^2$ は確率密度である [18, pp.56–58, p.69].

次に $|\mathbf{x}'\rangle$ から定ベクトル \mathbf{a} だけ粒子を平行移動した状態

$$\mathcal{T}(\mathbf{a}) |\mathbf{x}'\rangle = |\mathbf{x}' + \mathbf{a}\rangle$$

を作る平行移動演算子 $\mathcal{T}(\mathbf{a})$ を定義する^{*52*}^{*53}. このとき無限小平行移動の演算子 $\mathcal{T}(d\mathbf{x}')$ は以下の性質を満たすことが要請される.

$$\text{確率保存} \quad \langle \alpha|\alpha\rangle = \langle \alpha|\mathcal{T}^\dagger(d\mathbf{x}')\mathcal{T}(d\mathbf{x}')|\alpha\rangle$$

$$\Leftrightarrow \text{ユニタリー性} \quad \mathcal{T}^\dagger(d\mathbf{x}')\mathcal{T}(d\mathbf{x}') = 1, \quad (171)$$

$$\mathcal{T}(d\mathbf{x}'')\mathcal{T}(d\mathbf{x}') = \mathcal{T}(d\mathbf{x}' + d\mathbf{x}''), \quad (172)$$

$$\mathcal{T}(-d\mathbf{x}') = \mathcal{T}^{-1}(d\mathbf{x}'), \quad (173)$$

$$\lim_{d\mathbf{x}' \rightarrow 0} \mathcal{T}(d\mathbf{x}') = 1. \quad (174)$$

ここで最後の条件に加えて, $\mathcal{T}(d\mathbf{x}')$ と恒等演算子との差が $d\mathbf{x}'$ の 1 次であることも要求しよう. \mathbf{K} を Hermite 演算子として

$$\mathcal{T}(d\mathbf{x}') = 1 - i\mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}' \quad (175)$$

とおくと, これらの性質が満たされる (確認は 8.3 節) [18, pp.58–61].

有限のベクトル \mathbf{a} だけの平行移動に関する演算子は, $N \gg 1$ に対して微小変位 $\Delta\mathbf{x}' = \mathbf{a}/N$ を N 回合成して

$$\mathcal{T}(\mathbf{a}) = (1 - i\mathbf{K} \cdot \Delta\mathbf{x}')^N = \left(1 - i\frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{a}}{N}\right)^N \rightarrow e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{a}} \quad (N \rightarrow \infty) \quad (176)$$

^{*51} ここでも演算子にハットを付ける常套的な表記法の代わりに, 固有値にプライムを付ける表記を踏襲している.

^{*52} ここで考えているのは, 空間に固定した座標系に対して物理系を並進させる, いわゆる能動的変換である.

^{*53} \mathbf{a} は演算子ではないことを断っておく.

と求まる (8.3 節参照) [18, p.64]^{*54}.

ここで $\mathbf{K} = \mathbf{p}/\hbar$ と書いて運動量演算子 \mathbf{p} を導入する [18, pp.62–63]. 量子力学では運動量はこのように定義される. その動機は主に次の点に求められる^{*55}.

- 古典力学において, 系の空間並進対称性に付随する保存量は運動量であり (1.3.2 節) [16, p.66], 系の並進操作と運動量は密接な関係にある.
 - このとき式 (175): $\mathcal{T}(d\mathbf{x}') = 1 - i\mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}'$ における \mathbf{K} が 1/(長さ) の次元を持つことが保証される.
- ★ 2.7.1 節では古典的な極限を考え, 運動量の定義を正当化する.

すると平行移動の演算子は

$$\mathcal{T}(\mathbf{a}) = e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}/\hbar} \quad (177)$$

となる^{*56}.

平行移動演算子の表式 (177) は, 交換関係

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad (178)$$

を満たす演算子として運動量 \mathbf{p} を導入することと同等である (確認は 8.3 節). 式 (169) よりこれは Heisenberg の唱えた位置と運動量の不確定関係

$$\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p_x)^2\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad \text{etc.} \quad (179)$$

を含意する [18, pp.61–64]^{*57}.

平行移動の性質として, 系を $\Delta\mathbf{r} = \Delta x\hat{\mathbf{x}} + \Delta y\hat{\mathbf{y}}$ を並進させるとき ($\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$ はそれぞれ x, y 方向の単位ベクトル), x 方向の変位 $\Delta x\hat{\mathbf{x}}$ と y 方向の変位 $\Delta y\hat{\mathbf{y}}$ の順序を入れ替えても結果は変わらないことが要請される. そこで演算子の性質

$$\mathcal{T}(\Delta\mathbf{r}) = \mathcal{T}(\Delta y\hat{\mathbf{y}})\mathcal{T}(\Delta x\hat{\mathbf{x}}) = \mathcal{T}(\Delta x\hat{\mathbf{x}})\mathcal{T}(\Delta y\hat{\mathbf{y}}), \quad \therefore [\mathcal{T}(\Delta y\hat{\mathbf{y}}), \mathcal{T}(\Delta x\hat{\mathbf{x}})] = 0, \text{ etc.}$$

を要請すると,

$$[p_i, p_j] = 0 \quad (180)$$

が導かれる (導出は 8.3 節). よって $p_i|\mathbf{p}'\rangle = p'_i|\mathbf{p}'\rangle$ となる, 運動量演算子 $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ の同時固有ケット $|\mathbf{p}'\rangle$ の存在が保証される [18, pp.64–66].

^{*54} \mathbf{K} の Hermite 性により $\mathcal{T}^\dagger(\mathbf{a}) = e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{a}}$ となるため, Baker-Hausdorff の補助定理 (165) を用いると, 有限の変位 \mathbf{a} に対してもユニタリ性

$$\mathcal{T}^\dagger(\mathbf{a})\mathcal{T}(\mathbf{a}) = \mathcal{T}(\mathbf{a})\mathcal{T}^\dagger(\mathbf{a}) = 1$$

が満たされていることが分かる. 同じことは演算子 $\mathbf{K}\cdot\mathbf{a}$ が自分自身と交換するため,

$$e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{a}}e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{a}} = e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{a}}e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{a}} = 1$$

と理解することもできる (A, B が交換すれば, 指数法則 $e^Ae^B = e^{A+B}$ が成り立つ, 2.1.1 節参照).

^{*55} もちろん, これは積極的な飛躍である. 量子力学は古典力学をその極限の場合として含み, またそれと同時にこの極限の場合をそれ自身の基礎づけのために必要とする [16, p.19, p.502]. とは言え, それはあくまで古典論からボトムアップ式により根源的な量子と論を探り当てる場合の話であり, 「古典力学は量子力学から導けるがその逆はできない」 [18, p.113].

^{*56} このとき運動量 \mathbf{p} は平行移動の生成演算子であると言われる.

^{*57} ただし $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ である (以下, 同じ). $\sqrt{\langle(\Delta x)^2\rangle} \rightarrow \Delta x, \sqrt{\langle(\Delta p_x)^2\rangle} \rightarrow \Delta p_x$ と再定義すれば, これは $\Delta x\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} = \frac{\hbar}{4\pi}$ と書ける.

式 (170), (178), (176):

$$[x_i, x_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0, \quad [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

はまとめて正準交換関係と呼ばれる^{*58}. これらは正準変数に対する古典的な Poisson 括弧の式 (59) と類似している [18, pp.66–68]^{*59}.

さらに平行移動演算子の表式 (177): $\mathcal{T}(\mathbf{a}) = e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}/\hbar}$ から, 状態 $|\alpha\rangle, \mathbf{p}|\alpha\rangle$ の波動関数 $\langle\mathbf{x}'|\alpha\rangle, \langle\mathbf{x}'|\mathbf{p}|\alpha\rangle$ に対する式

$$\langle\mathbf{x}'|\mathbf{p}|\alpha\rangle = -i\hbar\nabla'\langle\mathbf{x}'|\alpha\rangle \quad (181)$$

が得られる ($\nabla' \equiv \partial/\partial\mathbf{x}'$, 導出は 8.3 節) [18, p.72,p.79]. 上式 (181) に関連した公式として,

$$\langle\mathbf{x}'|p_i^n|\alpha\rangle = (-i\hbar)^n \frac{\partial^n}{\partial x'_i{}^n} \langle\mathbf{x}'|\alpha\rangle \quad (182)$$

も有用である (導出は 8.3 節). これらは \mathbf{p} が状態に作用する演算子であるのに対し, $\langle\mathbf{x}'|p_i^n|\alpha\rangle = \hat{p}_i^n \langle\mathbf{x}'|\alpha\rangle$ の関係により波動関数 $\psi = \langle\mathbf{x}'|\alpha\rangle$ に作用する場合の運動量演算子 $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla'$ を定義できることを意味する.

上式 (181) から運動量固有状態 $|\mathbf{p}'\rangle$ の波動関数が平面波であること

$$\langle\mathbf{x}'|\mathbf{p}'\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}'/\hbar} \quad (183)$$

が導かれる (導出は 8.3 節) [18, pp.74–75,pp.79–80]^{*60}.

以上のことは次のフローチャートのようにまとめられる.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathbf{a}) = e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}/\hbar} &\leftrightarrow [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \\ \rightarrow \text{式 (181): } \langle\mathbf{x}'|\mathbf{p}|\alpha\rangle &= -i\hbar\nabla'\langle\mathbf{x}'|\alpha\rangle \\ \rightarrow \text{式 (183): } \langle\mathbf{x}'|\mathbf{p}'\rangle &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}'/\hbar} \end{aligned}$$

ここで運動量表示の (あるいは運動量空間における) 波動関数 $\phi_\alpha(\mathbf{p}') = \langle\mathbf{p}'|\alpha\rangle$ を定義する. $|\phi_\alpha(\mathbf{p}')|^2$ は粒子の運動量を \mathbf{p}' に見出す確率密度を与える. (これに対して $\psi_\alpha(\mathbf{x}') = \langle\mathbf{x}'|\alpha\rangle$ は座標表示の波動関数と呼ばれる.) このとき平面波の式 (183) より, 運動量空間の波動関数 $\phi_\alpha(\mathbf{p}')$ は座標空間の波動関数 $\psi_\alpha(\mathbf{x}')$ の Fourier 変換にあたることを見出される [18, pp.75–76,p.80]:

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(\mathbf{x}') = \langle\mathbf{x}'|\alpha\rangle &= \int d^3p' \langle\mathbf{x}'|\mathbf{p}'\rangle \langle\mathbf{p}'|\alpha\rangle = \int \frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}'/\hbar} \phi_\alpha(\mathbf{p}'), \\ \phi_\alpha(\mathbf{p}') = \langle\mathbf{p}'|\alpha\rangle &= \int d^3x' \langle\mathbf{p}'|\mathbf{x}'\rangle \langle\mathbf{x}'|\alpha\rangle = \int \frac{d^3x'}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}'/\hbar} \psi_\alpha(\mathbf{x}'). \end{aligned}$$

これは物質波 $\psi_\alpha(\mathbf{x}')$ の波数 \mathbf{k}' が, 係数 \hbar の違いを除いて運動量に一致すること

$$\mathbf{p}' = \hbar\mathbf{k}'$$

を意味している (de Broglie の関係式). 対応する波長 $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}'|$ は de Broglie 波長と呼ばれる.

^{*58} 正準交換関係は変数 x_i, p_j の間の不確定関係を持ち込み, 理論を量子化する際の出発点となる.

^{*59} 古典的な関係式からの類推で適正な量子力学的関係式を得る (発見的・歴史的な) 手続きとして, Poisson 括弧を交換子に置き換える規則 $\{, \}_P \rightarrow [,]/i\hbar$ が見出されている (Dirac の規則). 因子 $i\hbar$ の必要性は

- Poisson 括弧と交換子の次元の違い
- Poisson 括弧が実であるのに対し, Hermite 演算子の交換子は反 Hermite であること (2.2 節) から理解できる.

^{*60} 運動量固有関数 (183): $\psi_{\mathbf{p}'} = \langle\mathbf{x}'|\mathbf{p}'\rangle \sim e^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}'/\hbar}$ に対して $|\psi_{\mathbf{p}'}|^2 = \text{const}$ (空間的に) なので, 運動量が確定した状態では粒子の位置はすべて同じ確率である. これは不確定関係と整合している ($\sqrt{(\Delta x_i)^2} = \infty, \sqrt{(\Delta p_i)^2} = 0$) [16, pp.71–72].

注意 このように座標空間と運動量空間の各々で波動関数が適正な規格化条件

$$1 = \langle \alpha | \alpha \rangle = \begin{cases} \int d^3x' \langle \alpha | \mathbf{x}' \rangle \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle = \int d^3x' |\psi_\alpha(\mathbf{x}')|^2 \\ \int d^3p' \langle \alpha | \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p}' | \alpha \rangle = \int d^3p' |\phi_\alpha(\mathbf{p}')|^2 \end{cases}$$

を満たすためには、Fourier 変換と逆変換の各々に因子 $(2\pi\hbar)^{3/2}$ を割り当てなければならない。

因子 \hbar は波数 \mathbf{k}' と運動量 $\mathbf{p}' = \hbar\mathbf{k}'$ の違いに起因している。

波動関数 $\psi_\alpha(\mathbf{x}')$ とその Fourier 成分 $\phi_\alpha(\mathbf{p}')$ に対して、波動一般の持つ不確定関係 (1.7.5 節) は特に、粒子の位置と運動量の間の不確定関係

$$\Delta x \Delta p_x \gtrsim \hbar, \quad \Delta y \Delta p_y \gtrsim \hbar, \quad \Delta z \Delta p_z \gtrsim \hbar$$

を意味する。ただしここでは $\Delta x, \Delta p_x, \text{etc.}$ はそれぞれ、粒子の座標と運動量の見出される範囲の大きさの程度を表す [16, pp.70–72]。これは正準交換関係の帰結としての不確定関係 (179) と整合している。

2.4 時間的发展と Schrödinger 方程式

本節では量子力学的な系の時間発展へと話を進める。

2.4.1 時間的发展の演算子 [18, pp.91–96]

時刻 t_0 に状態 $|\alpha, t_0\rangle$ にあった系の、時刻 t における状態を

$$|\alpha, t_0; t\rangle = U(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle, \quad U(t, t_0) : \text{時間的发展の演算子}$$

と表す。時間的发展の演算子に対して

- ユニタリー性

$$U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0) = U(t, t_0)U^\dagger(t, t_0) = 1 \\ \Rightarrow \text{確率保存 } \langle \alpha, t_0 | \alpha, t_0 \rangle = \langle \alpha, t_0; t | \alpha, t_0; t \rangle (= 1).$$

- 合成の性質

$$U(t_2, t_0) = U(t_2, t_1)U(t_1, t_0). \quad (t_2 > t_1 > t_0)$$

- $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} U(t_0 + \Delta t, t_0) = 1.$

を要請する。平行移動の演算子の場合 (2.3 節) と同様、 Ω を Hermite 演算子として $U(t_0 + dt, t_0) = 1 - i\Omega dt$ とおくと、これらの性質が満たされる。ここで

- 古典力学において、系の時間並進対称性に付随する保存量はエネルギーであり、系の時間的发展と Hamiltonian は密接な関係にあること
- Ω は時間の逆数の次元を持つこと

を踏まえ、 H を量子力学的な演算子としての Hamiltonian (Hamilton 演算子) として $\Omega = H/\hbar$ とおき、無限小の時間発展の演算子を

$$U(t_0 + dt, t_0) = 1 - \frac{iHdt}{\hbar}$$

とする。この措置は 2.7.1 節で理論の古典的な極限を考える際に正当化される。

2.4.2 Schrödinger 方程式 [18, pp.96–98]

時間的发展の演算子 $U(t, t_0)$ に対し,

$$\begin{aligned} \text{合成の性質} \quad U(t + dt, t_0) &= U(t + dt, t)U(t, t_0) = (1 - iHdt/\hbar)U(t, t_0) \\ &\quad (\text{時間差 } t - t_0 \text{ は有限であって良い}) \end{aligned} \quad (184)$$

$$\Rightarrow U(t, t_0) \text{ に対する Schrödinger 方程式} \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = HU(t, t_0) \quad (185)$$

$$\Rightarrow |\alpha, t_0; t\rangle \text{ に対する Schrödinger 方程式} \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0; t\rangle = H |\alpha, t_0; t\rangle. \quad (186)$$

(以上の導出は 8.4 節を参照.)

上式 (185) の形式的な解は次のように表される (導出は 8.4 節).

- Hamilton 演算子 H が時間に依存し, 異なる時間の H が交換しない場合 (最も一般的な場合)

$$U(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H(t_1)H(t_2) \cdots H(t_n). \quad (\text{Dyson 級数}) \quad (187)$$

– Dyson 級数は場の量子論において 3.7.1 節以降で本格的に扱う。

- 特に Hamilton 演算子 H が時間に依存するものの, 異なる時間の H が交換する場合

$$U(t, t_0) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H(t') \right]. \quad (188)$$

- 特に Hamilton 演算子が時間に依存しない場合

$$U(t, t_0) = \exp[-iH(t - t_0)/\hbar]. \quad (189)$$

エネルギー固有状態 [18, pp.99–100]

時間に依らない H で記述される系を考え, 時間的发展の演算子の式 (189) を仮定する. 観測量 A が H と両立するとき ($[A, H] = 0$), A の固有ケット $|a', t_0\rangle$ はエネルギー固有ケット (A, H の固有値 $a', E_{a'}$ に属する同時固有状態) でもある. これは

$$|a', t\rangle = U(t, t_0) |a', t_0\rangle = |a', t_0\rangle \exp(-iE_{a'}(t - t_0)/\hbar) \quad (190)$$

のように位相だけが時間変化し, 時間が経っても系は固有状態に留まる. 固有値 a' は時間とともに変化しないため, H と両立する観測量 A は運動の定数と呼ばれる.

de Broglie の関係式 特に 1 粒子系を考えると, H の固有値に他ならない粒子のエネルギー E が一定の状態 $|\alpha, t_0; t\rangle = U(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle$ は, $e^{-iE(t-t_0)/\hbar}$ という時間依存性を持つことになる. これは物質波 $\langle \alpha' | \alpha, t_0; t \rangle$ の振動数が, de Broglie の関係式

$$E = \hbar\omega$$

で与えられることを意味する.

2.4.3 時間とエネルギーの不確定関係 [18, pp.105–107]

一般に初期ケットがエネルギー固有状態 $\{|a'\rangle\}$ の重ね合せで与えられる場合、時間が経つと系の状態は変化し、もとの状態には留まらない。エネルギー固有値 $\{E_{a'}\}$ がある値 E_0 の周りの幅 ΔE に集中した、準連続的スペクトルを形成している場合、時間

$$\Delta t \gtrsim \frac{\hbar}{\Delta E}$$

が経過すると、系は初期状態から著しく変化していることを説明できる (8.4 節参照)。言い換えれば物理系の状態ケットが原形を保つことのできる時間は、せいぜい $\hbar/\Delta E$ である。このことはしばしば、時間とエネルギーの不確定関係として言及される。

この不確定関係において時間は観測量ではなくパラメーターである。両立できない観測量の間の不確定関係 (2.2 節)、特に位置と運動量の不確定関係 $\Delta x \Delta p_x \gtrsim \hbar$ (2.3 節、ここでは $\langle(\Delta x)^2\rangle \rightarrow \Delta x$, etc. と表記) との違いを理解するために、最初に量子力学における、時間と空間の非対称性を指摘しておく [18, p.91]。主として粒子を扱う非相対論的量子力学では

- 時刻 t …… パラメーター
- 粒子の位置 \mathbf{x} …… 観測量

なので、時間と空間は対称的に扱われていないのに対し、場 $\phi(\mathbf{x}, t)$ を対象とする相対論的量子力学では

- 位置 \mathbf{x} , 時刻 t …… パラメーター
- 場 $\phi(\mathbf{x}, t)$ …… 観測量

のように、時間と空間は共にパラメーターとして扱われる。

2.4.4 時間に依存する波動方程式 [18, pp.131–133]

Hamilton 演算子を

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) \quad (191)$$

ととる。

Hamiltonian(191) について 完全を期すために、上式 (191) の Hamiltonian について一通りの説明を行っておく。第 1 項 $\frac{\mathbf{p}^2}{2m}$ は非相対論的な粒子の運動エネルギーであり (第 1 章)、第 2 項 $V(\mathbf{x})$ はポテンシャル・エネルギーと呼ばれる。この H に対して古典力学における正準方程式 (56) は、運動量の (非相対論的な) “定義式” $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ (ただし $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$) と、初等的によく知られた Newton の運動方程式

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\nabla V$$

を再現する。右辺 $\mathbf{F} = -\nabla V$ はポテンシャルから導かれる力と呼ばれ、これが粒子の運動量変化 $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ をもたらすものと見なされる。ここでは粒子に働く力が、粒子の位置のみで決まる場合を考えていることになる。量子力学では粒子の位置が不確かなので、力の概念は必ずしも上手くなじまないけれど、ポテンシャルの概念は依然として有効である [14, p.200]。

Lagrange 形式において対応する Lagrangian は

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - V(\mathbf{x}) \quad (192)$$

である。実際、これは運動量 $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v}$ を与え (したがって Lagrangian の第 1 項 $\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$ は運動エネルギー)、この Lagrangian を Legendre 変換すると Hamiltonian(191):

$$H = \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} - L = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x})$$

が得られる。Euler-Lagrange 方程式 (35) より再び Newton の運動方程式 $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla V$ が導かれる。
このとき

状態ケットに対する Schrödinger 方程式 (186) :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0; t\rangle &= H |\alpha, t_0; t\rangle \\ \Rightarrow \text{波動関数 } \psi(\mathbf{x}', t) \equiv \langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0; t \rangle &\text{ に対する方程式} \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}', t) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla'^2 \psi(\mathbf{x}', t) + V(\mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}', t) \end{aligned} \quad (193)$$

となる (導出は 8.4 節)*61。上式 (193) は時間に依存する波動方程式と呼ばれ、いわゆる波動力学の出発点となる*62。

Schrödinger 方程式 (193) は初期時刻での波動関数 ψ の分布が与えられると、後の時刻での ψ の値が逐次的に定まることを意味している。(またこれは線形の方程式なので、物理的な状態の重ね合せもまた物理的な状態であるという、重ね合せの原理が保証される。) このように波動関数 (の絶対値の 2 乗) は確率分布を表し、量子力学的な予言は確率的にしか行えないものの、波動関数自体の時間発展は決定論的である [16, p.51] [18, p.149]。

2.4.5 時間に依存しない波動方程式 [18, pp.133–134]

A を Hamilton 演算子 H と交換する観測量とする。 A と H の同時固有状態 (したがって定常状態)(190): $|a', t\rangle = |a'\rangle e^{-iE_{a'}t/\hbar}$ を考えると、波動関数は

$$\psi(\mathbf{x}', t) = \langle \mathbf{x}' | a' \rangle e^{-iE_{a'}t/\hbar}$$

と表されるので、

時間に依存する波動方程式 (193) :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}', t) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla'^2 \psi(\mathbf{x}', t) + V(\mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}', t) \\ \Rightarrow \text{エネルギー固有関数 } u_E(\mathbf{x}') \equiv \langle \mathbf{x}' | a' \rangle &\text{ (ただし } E_{a'} \rightarrow E) \text{ に対する波動方程式} \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla'^2 u_E(\mathbf{x}') + V(\mathbf{x}') u_E(\mathbf{x}') &= E u_E(\mathbf{x}') \end{aligned} \quad (194)$$

となる。上式 (194) は時間に依存しない波動方程式と呼ばれる*63。

*61 導出を通して見て取れるように、これは式 (182) に基づき単に Hamiltonian(191) における運動量演算子 \mathbf{p} を、波動関数に作用する場合の表式 $-i\hbar \nabla'$ に置き換えさえすれば良いことを表している。

*62 時間に依存する波動方程式 (193) は平面波解 $\psi \sim e^{i(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}' - Et)/\hbar}$ が、適正な波数と振動数の関係 (エネルギーの関係)

$$\frac{\mathbf{p}'^2}{2m} + V(\mathbf{x}') = E$$

を満たすことを保証する。初等的には逆にこのことから波動方程式 (193) が発見的に“導出”される、任意の Hamiltonian の下での一般的な状態 ψ に対しても適用できるものと仮定される。

*63 波動方程式 (194) では観測量 A を具体的に指定する必要がなくなっている。これは H と交換するどのような観測量 A を選んでも、エネルギー固有状態に変わりはないという事情による。そのような観測量 A として特に H 自身を選べることに注意すれば、特定の A を指定する必要がないことは明らかである。

2.4.6 波動関数 ψ の解釈 [18, pp.136–138]

2.3 節で説明したように, $\rho(\mathbf{x}, t) = |\psi(\mathbf{x}, t)|^2$ は時刻 t において粒子を位置 \mathbf{x} に見出す確率密度を表す*64.

時間に依存する波動方程式 (193)(ポテンシャル V は実数):

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi$$

$$\Rightarrow \text{連続の方程式} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (\text{確率保存}) \quad (195)$$

$$\rho \equiv |\psi|^2 : \text{確率密度}, \quad \mathbf{j} \equiv \frac{\hbar}{m} \text{Im}(\psi^* \nabla \psi) : \text{確率の流れ.} \quad (196)$$

(上式 (195) の導出は 8.4 節参照.)

波動関数の位相の空間変化が確率の流れを示す:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\rho(\mathbf{x}, t)} e^{iS(\mathbf{x}, t)/\hbar} \Rightarrow \mathbf{j} = \frac{\rho \nabla S}{m}. \quad (197)$$

(上式 (197) の導出は 8.4 節参照.)

2.4.7 電磁場と相互作用する荷電粒子

電磁場中の粒子の正しい波動方程式を古典物理学の観点からボトムアップ式に探り当てるような, 発見的な議論を行う. 質量 m , 電荷 q の粒子を古典的に考え, 粒子の速度を \mathbf{v} , 粒子を記述する Lagrangian を L , Hamiltonian を H と書く. $\mathbf{P} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}$ は粒子の正準運動量である. 粒子の力学的運動量 $\mathbf{p} \equiv \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$ とエネルギー $E \equiv \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}$ は電磁場がある場合,

$$\text{式 (86)} : \mathbf{p} = \mathbf{P} \quad \rightarrow \quad \mathbf{p} = \mathbf{P} - \frac{q}{c} \mathbf{A},$$

$$\text{式 (87)} : E = H \quad \rightarrow \quad E = H - q\phi$$

と置き換わる.

これに対応して非相対論的量子力学では, ψ を波動関数とした自由粒子の Schrödinger 方程式

$$\frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla)^2 \psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi$$

において

$$-i\hbar \nabla \quad \rightarrow \quad -i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A}, \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \rightarrow \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\phi$$

と置き換えると, 電磁場中の粒子の正しい波動方程式

$$\frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\phi \right) \psi \quad (198)$$

が得られる. この置き換えは

$$\partial_\mu \quad \rightarrow \quad D_\mu \equiv \partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c} A_\mu$$

*64 ここでは演算子ではなくパラメーターとしての位置を表すのに, \mathbf{x}' の代わりに \mathbf{x} を用いている. 続く 2.4.7 節でもこの表記を踏襲する.

とまとめられる [2, p.401] [10, p.82].

Schrödinger 方程式 (198) は, 電磁ポテンシャル $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ と波動関数 ψ に同時にゲージ変換

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi, \quad \psi \rightarrow \psi' = e^{iq\chi/\hbar c} \psi$$

を施すと不変に保たれる ($\chi(\mathbf{x}, t)$ はゲージ関数, 証明は 8.4.1 節) [2, p.402].

2.5 Schrödinger 描像, Heisenberg 描像, 相互作用描像

ここでは量子力学において系の時間発展を記述する 3 通りの方法として, Schrödinger 描像, Heisenberg 描像, 相互作用描像を導入する.

■Schrödinger 描像 2.4 節で導入した量子ダイナミクスへのアプローチは Schrödinger 描像と呼ばれる. これについての要点を改めてまとめておこう. Schrödinger 描像において時刻 t での系の状態を $|\alpha, t\rangle$ とすると, その時間発展は

$$|\alpha, t\rangle = U(t) |\alpha, 0\rangle$$

と書ける. ここに系の Hamilton 演算子 H に対して $U(t)$ は Schrödinger 方程式 (185):

$$i\hbar \frac{d}{dt} U = HU$$

および $U(0) = 1$ (恒等演算子) を満たす時間発展の演算子である. これは状態ケット $|\alpha, t\rangle$ が Schrödinger 方程式 (186):

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha, t\rangle = H |\alpha, t\rangle$$

に従って時間発展することを意味する. これに対し観測量 A の固有ケット $\{|a'\rangle\}$ を基底ケットに用いると (ここでは固有値 a' として, 離散的な値をとるものも考えても連続的な値をとるものも考えても良い), Schrödinger 描像において観測量 A は時間変化しないので, 基底ケット $\{|a'\rangle\}$ も時間変化しない. 以下, Hamiltonian が時間に陽に依らない場合を考える. このとき時間発展の演算子は

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar} : (189)$$

と書ける [10, pp.23–24] [18, pp.91–92, pp.96–97, pp.116–117].

■Heisenberg 描像 一方, Heisenberg 描像において状態ケットは

$$|\alpha\rangle_{\text{H}} = |\alpha, 0\rangle$$

のように時間変化しない. また, Heisenberg 描像の観測量は Schrödinger 描像の観測量を A として

$$A^{\text{H}}(t) = U^\dagger(t) A U(t) \quad (199)$$

で定義される. このとき観測量の期待値は Schrödinger 描像と Heisenberg 描像とで同じになる:

$$\langle \alpha, t | A | \alpha, t \rangle = \langle \alpha, 0 | U^\dagger(t) A U(t) | \alpha, 0 \rangle = {}_{\text{H}} \langle \alpha | A^{\text{H}}(t) | \alpha \rangle_{\text{H}}.$$

このように Schrödinger 描像では系の状態が時間変化するのに対し, Heisenberg 描像では観測量を表す演算子が時間変化する. そして時間発展の演算子 $U(t)$ が Schrödinger 方程式 (185) に従うことから, Heisenberg 描像の観測量 (199) は Heisenberg 方程式

$$\frac{dA^{\text{H}}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [A^{\text{H}}, H] \quad (200)$$

に従って時間変化することが導かれる (ただし右辺の H は Schrödinger 描像の Hamilton 演算子と同じである, 8.5 節参照)^{*65}. さらに Schrödinger 描像の観測量 A に対する固有方程式 (152):

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle$$

は Heisenberg 描像の観測量 $A^H(t)$ に対する固有方程式

$$A^H(t)|a',t\rangle_H = a'|a',t\rangle_H, \quad (201)$$

$$|a',t\rangle_H = U^\dagger(t)|a'\rangle, \quad \therefore {}_H\langle a',t| = \langle a'|U(t) \quad (202)$$

になる (8.5 節参照). これは Heisenberg 描像の基底ケットが式 (202) の $|a',t\rangle_H$ であることを意味する. Heisenberg 描像の基底ケット $|a',t\rangle_H = U^\dagger(t)|a'\rangle$ は Schrödinger 描像の状態ケット $|\alpha,t\rangle = U(t)|\alpha,0\rangle$ と言わば“逆向きに回転”する. このため状態ケットと基底ケットの内積に他ならない確率 (または確率密度) の振幅は Schrödinger 描像と Heisenberg 描像とで同じ値となることが保証される [10, p.24] [18, pp.110–112, pp.116–119]:

$$\langle a'|\alpha,t\rangle = \langle a'|U(t)|\alpha,0\rangle = {}_H\langle a',t|\alpha\rangle_H.$$

■相互作用描像 最後に相互作用描像について述べる. ここでは Hamiltonian を $H = H_0 + H_1$ と 2 つの部分に分けることになる. 場の量子論では例えば H_0 として自由場を記述する項を, H_1 として場の相互作用を記述する項を考えれば良い. このとき $U_0(t) \equiv e^{-iH_0t}$ を用いて相互作用描像の状態ケットと観測量はそれぞれ

$$\begin{aligned} |\alpha,t\rangle_I &\equiv U_0^\dagger(t)|\alpha,t\rangle, \\ A^I(t) &\equiv U_0^\dagger(t)AU_0(t) \end{aligned} \quad (203)$$

と定義される. Schrödinger 描像の状態ケット $|\alpha,t\rangle$ は Schrödinger 方程式 (186) に従うことから, 相互作用描像の状態ケット $|\alpha,t\rangle_I$ は時間発展方程式

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha,t\rangle_I = H_I^I(t)|\alpha,t\rangle_I, \quad H_I^I(t) \equiv U_0^\dagger(t)H_1(t)U_0(t) \quad (204)$$

に従うことが示される (8.5 節参照)^{*66}. これは相互作用 Hamilton 演算子 $H_I^I(t)$ の下での Schrödinger 方程式のような形をしており, 相互作用描像では場の相互作用が状態 $|\alpha,t\rangle_I$ の時間変化を引き起こすと見ることができる. 一方, Heisenberg 方程式 (200) の導出と同様にして, 相互作用描像の観測量 (203) は時間発展方程式

$$\frac{dA^I}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A^I, H_0] \quad (205)$$

に従うことが示される. これは H_0 を Hamiltonian とする Heisenberg 方程式のような形をしている.

後の都合のため, Heisenberg 描像の観測量 (199) と相互作用描像の観測量 (203) が

$$A^I(t) = \mathcal{U}^\dagger(t)A^H(t)\mathcal{U}(t), \quad \mathcal{U}(t) \equiv U^\dagger(t)U_0(t) = e^{iHt/\hbar}e^{-iH_0t/\hbar} \quad (206)$$

と関係付けられることにここで言及しておくのが適当だろう (8.5 節参照) [10, pp.24–25].

なお Heisenberg 描像の基底ケット $|a',t\rangle_H$ が式 (202) で与えられるのと同じ理由で, 相互作用描像の基底ケットは

$$|a',t\rangle_I = U_0^\dagger(t)|a'\rangle$$

となると考えられる.

^{*65} Heisenberg 方程式 (200) は時間に陽に依らない量 A に対する古典的な時間発展方程式 $\frac{dA}{dt} = \{A, H\}_P$ (式 (58) 参照) に, Dirac の規則 $\{, \}_P \rightarrow [,]/i\hbar$ (2.3 節) を適用した形となっている.

^{*66} H_1, H_1^I の引数 t は場を通した時間依存性を表し, これらが時間に陽に依存することを表すものではない.

表1 Schrödinger 描像, Heisenberg 描像, 相互作用描像の比較

	Schrödinger 描像	Heisenberg 描像	相互作用描像
状態ケット	$ \alpha, t\rangle$ Schrödinger 方程式 (186) に従う	$ \alpha\rangle_{\text{H}} = U^\dagger(t) \alpha, t\rangle = \alpha, 0\rangle$ 時間変化しない	$ \alpha\rangle_{\text{I}} = U_0^\dagger(t) \alpha, t\rangle$ “Schrödinger 方程式” (204) に従う
観測量	A 時間変化しない	$A^{\text{H}}(t) = U^\dagger(t) A U(t)$ Heisenberg 方程式 (200) に従う	$A^{\text{I}}(t) = U_0^\dagger(t) A U_0(t)$ “Heisenberg 方程式” (205) に従う
基底ケット	$ a'\rangle$ 時間変化しない	$ a', t\rangle_{\text{H}} = U^\dagger(t) a'\rangle$	$ a', t\rangle_{\text{I}} = U_0^\dagger(t) a'\rangle$

■まとめ 以上の結果は表1のようにまとめられる。

最後に, ユニタリ変換は交換関係を不変に保つことを思い出そう (2.1.1 節). このため例えば Heisenberg 描像の演算子 $x_i(t), p_i(t)$ もまた, Schrödinger 描像の演算子 x_i, p_i と同様, 正準交換関係 $[x_i(t), p_i(t)] = i\hbar\delta_{ij}$, etc. を満たすことに注意を促しておく.

2.6 生成・消滅演算子

本節では生成・消滅演算子について, 一通り要約を行う (結論の導出は 8.6 節で行う).

Hamiltonian

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

によって記述される 1 次元調和振動子を考える*67. 量子論では一般化座標 q と一般化運動量 p を演算子として正準交換関係 $[q, p] = i\hbar$ が課せられる. これは新たに定義した演算子

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega q + ip), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega q - ip) \quad (207)$$

に対する交換関係

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (208)$$

を含意する. これを調和振動子の交換関係と呼ぶ.

演算子 a, a^\dagger に対して個数演算子 $N \equiv a^\dagger a$ を定義すると, Hamiltonian は

$$H = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right) \quad (209)$$

と書き直される. よって N と H は交換するから, N の固有値 n に属する, H との同時固有ケット $|n\rangle$ が存在する. このとき a, a^\dagger は $|n\rangle$ に作用して, それぞれ固有値を 1 だけ減少, 増加させた N の固有ケットを作る:

$$a |n\rangle \propto |n-1\rangle, \quad a^\dagger |n\rangle \propto |n+1\rangle. \quad (210)$$

このことから a は消滅演算子, a^\dagger は生成演算子と呼ばれる. さらに任意のケット $|\alpha\rangle$ に対して $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0$ が成り立つという要請 (2.1 節) から, 固有値 n はゼロ以上の整数であることが結論される. そして固有値 $n=0$ に属する固有ケット $|0\rangle$ に対して

$$a |0\rangle = 0$$

*67 これが調和振動子の適正な Hamiltonian であることは, 初等的によく知られている. 実際これを Hamilton の正準方程式に代入すれば, 運動量の定義式 $p = m\dot{q}$ と調和振動子に対する Newton の運動方程式 $\dot{p} = -m\omega^2 q$ が得られる.

となる [18, pp.120–123].

$|0\rangle$ を $\langle 0|0\rangle = 1$ と規格化された基底状態 (真空状態) として, これに a^\dagger を逐次作用させると, 規格化された N の一連の固有状態

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle \quad (211)$$

が得られる. 対応するエネルギー固有値は $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ である [18, pp.123–124].

ここで Heisenberg 描像に移ると, 演算子 $a(t)$ に対する Heisenberg 方程式は

$$\frac{da(t)}{dt} = -i\omega a(t) \quad (212)$$

となり, 解は $a(t) = a(0)e^{-i\omega t}$ で与えられる [18, p.128].

ここまで, 調和振動子の交換関係 (208): $[a, a^\dagger] = 1$ を満たす演算子 a, a^\dagger が生成・消滅演算子となることを説明してきた. 一方, 演算子 a, a^\dagger に反交換関係

$$\{a, a^\dagger\} = 1, \quad \{a, a\} = 0, \quad \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0 \quad (213)$$

を課した場合にも, a, a^\dagger はそれぞれ消滅, 生成演算子となる (ここに $\{A, B\} \equiv AB + BA$ は A と B の反交換子である). ただしこの場合, N の固有値は $n = 0, 1$ に限られる. ところで同じ状態を 2 つ以上のフェルミオンが占めることはできない. よってこれはある状態を占める粒子数を n とする解釈の下で, フェルミオン系を扱うのに適切な形式となっている. 複数の演算子 $a_r, a_r^\dagger (r = 1, 2, \dots)$ がある場合には, 反交換関係 (213) を

$$\{a_r, a_s^\dagger\} = \delta_{rs}, \quad \{a_r, a_s\} = 0, \quad \{a_r^\dagger, a_s^\dagger\} = 0$$

と一般化するだけで良い. このとき各ラベル r の演算子 $a_r, a_r^\dagger, N_r \equiv a_r^\dagger a_r$ に対して上記の議論はそのまま成り立つ. “2 粒子状態” $|1_r, 1_s\rangle = a_r^\dagger a_s^\dagger |0\rangle$ は粒子の入れ替えに関して反対称である.

$$\{a_r^\dagger, a_s^\dagger\} = 0 \rightarrow |1_r, 1_s\rangle = -|1_s, 1_r\rangle.$$

これはやはり同じ 1 粒子状態に 2 つ以上の粒子が入れないこと $|2_r\rangle = (a_r^\dagger)^2 |0\rangle = 0$ を含意している [10, pp.65–67].

2.7 古典的極限

本節では古典力学が量子力学の中にどのように含まれているのかを論じる. この問題を考える上で, 1.7.5 節で言及した力学・光学アナロジーが足掛かりとなる. 古典力学と幾何光学の間に成り立つ類似性を踏まえると, 幾何光学が波動光学に短波長極限として含まれているのと同様に, 古典力学は Schrödinger の波動力学の “短波長極限” にあたると予想することができる. ここで波動力学の短波長極限とは, 物質波の de Broglie 波長 $\lambda \rightarrow 0$ の場合を意味する. あるいは力学・光学アナロジーに基づき, 準古典的は波動関数の位相を (\hbar で無次元化した) 作用 S/\hbar に対応付けると, 短波長極限は S (の絶対値) が \hbar に比べて大きい場合と言い換えることもできる. 等価的, 形式的にはあたかも \hbar が変数であるかのように見なして, 式の上で $\hbar \rightarrow 0$ の極限をとれば良い [16, pp.45–47] [15, p.380].

2.7.1 節では実際に $\hbar \rightarrow 0$ において, Schrödinger の波動方程式から Hamilton-Jacobi 方程式が導き出されることを示す. 続く 2.7.2 節では理解を深める意味で, Schrödinger 方程式の近似的解法への応用 (半古典的あるいは WKB 近似) を取り上げる. これを通して Bohr-Sommerfeld の量子化の規則を導き, (空間的) 自由

度 s の系の微視状態が位相空間に体積 h^s を占めることを説明する (2.7.3 節). さらに 2.7.4 節では波動関数の Green 関数 (あるいは遷移振幅) が Feynman の経路積分で与えられることを説明し, $\hbar \rightarrow 0$ の極限で波動力学は古典的な最小作用原理を再現することを確かめる.

$$\begin{aligned} \text{アイコナル方程式} &\leftrightarrow \text{Hamilton-Jacobi 方程式 (2.7.1 節)}, \\ \text{Fermat の原理} &\leftrightarrow \text{最小作用原理 (2.7.4 節)}. \end{aligned}$$

以上より力学・光学アナロジーに基づく予想は正しかったと言える. 最後に 2.7.5 節で Ehrenfest の定理に及する.

2.7.1 古典的極限 [18, pp.139–140]

確率密度を $\rho = |\psi|^2$ とし波動関数を

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\rho(\mathbf{x}, t)} e^{iS(\mathbf{x}, t)/\hbar}$$

と書くと*68, 時間に依存する波動方程式 (193) は

$$\begin{aligned} &\sqrt{\rho} \left(\frac{1}{2m} |\nabla S|^2 + V + \frac{\partial S}{\partial t} \right) \\ &- \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \sqrt{\rho} - \frac{i\hbar}{m} (\nabla \sqrt{\rho}) \cdot (\nabla S) - \frac{i\hbar}{2m} \sqrt{\rho} \nabla^2 S - i\hbar \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (214)$$

となる (導出は 8.7.1 節). ここで \hbar を

$$\hbar |\nabla^2 S| \ll |\nabla S|^2 \quad (215)$$

などの意味で小さな量と見なせると仮定して, \hbar を含む項を落とすと

$$\frac{1}{2m} |\nabla S|^2 + V + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (216)$$

を得る. これは S を作用と見なせば, Hamilton-Jacobi の方程式 (1.3.5 節の式 (60)) である. よって条件 (215) (等価的・形式的に $\hbar \rightarrow 0$ と表せる) は準古典的な場合に対応し, この極限で波動関数の位相 (\hbar 倍) S は作用に一致すると考えることができる.

運動量演算子の定義 (再論) 波動関数 ψ に対して運動量演算子は $\mathbf{p} = -i\hbar \nabla$ という形をとるので, $\hbar \rightarrow 0$ のとき

$$\mathbf{p}\psi = -i\hbar \nabla \psi = -i\hbar \left\{ (\nabla \sqrt{\rho}) e^{iS/\hbar} + \sqrt{\rho} \frac{i}{\hbar} (\nabla S) e^{iS/\hbar} \right\} \simeq (\nabla S) \psi$$

となる. この極限で S を作用と見なせることを踏まえれば, これは古典的な運動量が $\mathbf{p} = \nabla S$ で与えられることと比較される結果となっている. このことから 2.3 節で平行移動の演算子を $\mathcal{T}(d\mathbf{x}') = 1 - \frac{i\mathbf{p} \cdot d\mathbf{x}'}{\hbar}$ と書いて, 量子力学的な演算子としての運動量 \mathbf{p} を定義したことが正当化される [16, pp.66–67].

Hamilton 演算子の定義 (再論) 同様に Hamiltonian H を具体的に指定しなければ, $\hbar \rightarrow 0$ のとき

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = i\hbar \left(\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t} e^{iS/\hbar} + \sqrt{\rho} \frac{i}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial t} e^{iS/\hbar} \right) \simeq -\frac{\partial S}{\partial t} \psi$$

*68 任意の複素数は必ずこの形に書ける. 以降, 2.7.3 節までは, 演算子ではなくパラメーターとしての位置を表すのに, \mathbf{x}' の代わりに \mathbf{x} を用いる.

となる。この極限で S を作用と見なせることを踏まえれば、これは古典的な Hamiltonian が $H = -\frac{\partial S}{\partial t}$ で与えられることと比較される結果となっている。このことから 2.4 節で時間的发展の演算子を $U(t_0 + dt, t_0) = 1 - \frac{iHdt}{\hbar}$ と書いて、量子力学的な演算子としての Hamiltonian H を定義したことが正当化される [16, p.52].

また古典力学において運動量は $\mathbf{p}_{\text{古典的}} = \nabla S$ と表されるため、粒子は波面 $S = \text{const.}$ に垂直な方向に進むことになる。このことは、波動光学の短波長極限にあたる幾何光学において、光が波面に垂直な方向に進む光線を成すことに類似している。

さらに古典的な極限 $\hbar \rightarrow 0$ では位相の微分は古典的な運動量 $\nabla S = \mathbf{p}_{\text{古典的}}$ となり (1.3.5 節)*69, ある種の速度 " \mathbf{v} " = \mathbf{p}/m を定義すると、確率の流れ (196) は流れの密度としてもっともな式 $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ で表せることになる [18, p.138]*70. これは確率の密度分布の (流体としての) 運動が、古典的な速度 " \mathbf{v} " で行われることを意味する [16, p.129]. ただし古典力学の法則に従う軌道に沿った運動を得るには、さらに初期時刻の分布が空間的に局在した波束となっていることが必要である [16, pp.47-48]. 2.7.5 節では Ehrenfest の定理に関して、これと同じ事情を別の角度から再論する。

2.7.2 半古典的 (WKB) 近似 [18, pp.140-142]

1 次元の空間においてエネルギー E (一定) の定常状態を考え、波動関数 $\psi = \sqrt{\rho} e^{iS/\hbar}$ に対し、 S を作用 (Hamilton 主関数, 1.3.5 節) とする :

$$\begin{aligned} S(x, t) &= W(x) - Et, \\ W(x) &= \pm \int^x p(x') dx' : \text{簡約された作用}, \\ p(x') &= \sqrt{2m(E - V(x'))} = \begin{cases} \sqrt{2m(E - V(x'))} & (E > V) \\ i\sqrt{2m(V(x') - E)} & (E < V) \end{cases} \end{aligned}$$

- このとき $\hbar \rightarrow 0$ で成り立つ Hamilton-Jacobi 方程式 (216):

$$\frac{1}{2m} |\nabla S|^2 + V + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

が満たされる ($\frac{1}{2m} |\nabla S|^2 \rightarrow \frac{1}{2m} \left| \frac{\partial S}{\partial x} \right|^2 = E - V, \frac{\partial S}{\partial t} = -E$).

- このとき

$$\sqrt{\rho} = \frac{\text{const}}{[E - V]^{1/4}} \quad (217)$$

となる。実際、

$$\begin{aligned} \text{定常状態における連続の式} \quad 0 &= \frac{\partial j_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho \partial_x S}{m} \right), \\ \therefore \text{const} &= \rho \partial_x S = \rho \frac{dW}{dx} = \pm \sqrt{2m(E - V(x))} \end{aligned}$$

である (この結果の解釈は 8.7.2 節参照).

*69 この関係が成り立つことは、特に平面波 (運動量固有関数) $\psi \sim e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)/\hbar}$ に対して容易に見て取れる。

*70 しかしながら、量子力学では位置と速度を同時に正確に測定することはできないため、各位置で定義された速度 " \mathbf{v} " を文字通りに解釈してはならない。

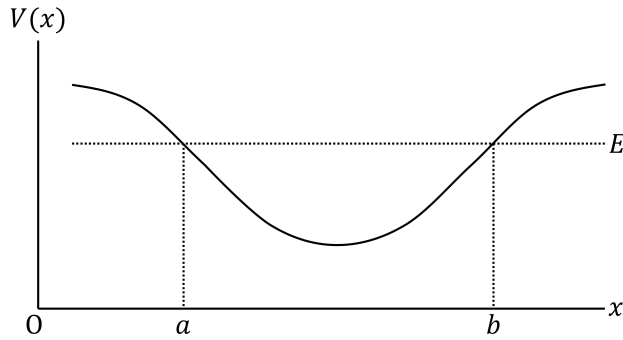


図 23 古典的転回点 $x = a, b$

以上より WKB 解

$$E > V \quad \psi(x, t) \simeq \frac{\text{const}}{[E - V(x)]^{1/4}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\pm \int^x \sqrt{2m(E - V(x'))} dx' - Et \right) \right], \quad (218)$$

$$E < V \quad \psi(x, t) \simeq \frac{\text{const}}{[V(x) - E]^{1/4}} \exp \left[\frac{1}{\hbar} \left(\pm \int^x \sqrt{2m(V(x') - E)} dx' - Et \right) \right] \quad (219)$$

を得る (指数関数の中身は同じものである).

作用 (Hamilton 主関数, 1.3.5 節)

$$S = \pm \int^x \sqrt{2m(E - V(x'))} dx' - Et$$

に対して, Hamilton-Jacobi 方程式の導出に用いた条件 (215): $\hbar |\nabla^2 S| \ll |\nabla S|^2$ は短波長の極限, すなわち

$$\lambda \left| \frac{dV}{dx} \right| \ll |E - V| \quad (\lambda \text{ は de Broglie 波長}) \quad (220)$$

\Leftrightarrow 1 波長進んだときのポテンシャルの変化 $\lambda \left| \frac{dV}{dx} \right|$ が ($|E - V|$ に比べて) 小さい

\Leftrightarrow ポテンシャルが緩やかに変化する間に de Broglie 波は幾度も振動する

を意味する (上式 (220) の導出は 8.7.2 節参照).

2.7.3 Bohr-Sommerfeld の量子化の規則

図 23 のようなポテンシャル $V(x)$ において, 古典的転回点 $x = a, b$ の近くでは $E \simeq V$ より $|p(x)|$ が小さくなり, 短波長の条件が満たされない. そこで転回点を挟んで異なる領域の WKB 解を適切に接続する必要がある. 証明抜きに述べると, 転回点付近でポテンシャル $V(x)$ を 1 次関数で近似した場合の解を媒介する手法では, 波動関数の一価性の条件から

$$\int_a^b p(x) dx = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \hbar \quad (221)$$

が見出される (n は整数) [18, pp.142–145].

しかしながら, 同様の結果をより簡単に得るには, 領域 $a \leq x \leq b$ の波動関数 (218):

$$\psi(x) = \frac{C_1}{\sqrt{p}} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x p dx \right) + \frac{C_2}{\sqrt{p}} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x p dx \right)$$

に対して、転回点 $x = a, b$ でゼロになるという境界条件を課せば十分である [16, pp.132–135]. (ただし定常状態における波動関数の時間依存性 $e^{-iEt/\hbar}$ を省いた. x_0 は適当な積分の下限であり, C_1, C_2 は定係数である.) この措置は, 古典的には粒子の侵入不可能な領域 $x < a, b < x$ において, 波動関数が (式 (219) に従って) 急速に減衰することから正当化される. このとき波動関数は

$$\psi = \frac{C}{\sqrt{p}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_a^x p dx\right) = \frac{C'}{\sqrt{p}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^b p dx\right)$$

という形をとり, 上式 (221) は粗い結果

$$\int_a^b p dx = n\pi\hbar, \quad \therefore \oint p dx = 2\pi n\hbar (= nh) \quad (222)$$

に置き換わる (導出は 8.7.3 節参照). ただし第 1 式までは運動量を $p(x) = \sqrt{2m(E - V(x))} \geq 0$ で定義してきたのに対し, 第 2 式では x が b から a まで減少するときの運動量を $p \leq 0$ と見なす. 上式 (222) は前期量子論における Bohr-Sommerfeld の量子化の規則として知られている. 例えば Bohr の水素原子模型に対して, 左辺の積分 $\oint p dx$ は電子の運動量 p の円軌道 (半径 r) に沿った線積分と解釈できるので, これはよく知られた Bohr の量子条件 $p \times 2\pi r = nh$ (または軌道角運動量 $pr = n\hbar$) を与える (de Broglie 波 (波長 λ) が円周上に定常波を作る条件 $2\pi r = n\lambda$ である).

量子条件 (222) において, 仮定により \hbar は小さな量と見なされるので, 右辺の整数 n は大きな量である. したがって上式 (221) との因子 $1/2$ の違いは重要でない.

なお波動関数が $x = a$ から $x = b$ までの区間でゼロになる回数は $n - 1 \simeq n$ であり, これが量子数 n の意味となる. 隣り合う波動関数がゼロの点の間隔 ($\sim (b - a)/n$) は de Broglie 波長の目安となるから, n が大きいことは波長が短い場合を考えていることと整合している.

Bohr-Sommerfeld の量子条件 (222) は次のように解釈できる [16, pp.137–138]. すなわち左辺の積分 $\oint p dx$ は位相空間 (xp 平面) において, 粒子の古典的な周期運動の軌道が囲む面積である. 他方, 量子数 n は考えている位相軌道のエネルギーを超えないエネルギーを持つ量子状態の数である. よって準古典的な場合には, 個々の量子状態は位相空間に面積 $h (= 2\pi\hbar)$ を占めると言うことができる. s 個の自由度を持つ系の準古典的運動に対する, この結果の一般化は直接的である. すなわち各量子状態は位相空間に体積 h^s を占める.

■自由粒子系 理想気体の統計力学による取り扱いや, 粒子の散乱の量子論では, 特に自由粒子の量子状態に興味を持たれる. ところが十分大きな空間体積の中の自由運動は常に準古典的だから, 微視的状態の位相空間に占める体積が h^s で与えられることはこの場合にも適用できる [16, pp.138–139].

自由粒子系に対してはこの結果を, 改めて次のように導くこともできる. 1 辺 L , 体積 $V = L^3$ の立方体領域 $0 \leq x, y, z \leq L$ における 1 つの粒子を考えよう. この粒子の波動関数 $\psi(\mathbf{r})$ に周期境界条件

$$\psi(x + L, y, z) = \psi(x, y + L, z) = \psi(x, y, z + L) = \psi(x, y, z)$$

を課す. このとき波動関数は周期境界条件の下で許容される波数 $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}\mathbf{n}$ (ただし $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ は整数を成分に持つベクトル) を用いて,

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

と展開される. 離散的な波数 $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}\mathbf{n}$ の 1 つ 1 つは波数空間に体積 $(2\pi/L)^3$ を占めるので, 波数空間の体積要素 $\Delta^3 k$ に含まれる波数 \mathbf{k} の数は $\frac{\Delta^3 k}{(2\pi/L)^3}$ である. ところで波数 \mathbf{k} は運動量の固有値 $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ に対応するか

ら、これは運動量空間の体積要素 $\Delta^3 p$ に含まれる固有振動の数が

$$\frac{\Delta^3 p}{(2\pi\hbar/L)^3} = \frac{V\Delta^3 p}{h^3}$$

であることを意味する*71. これは各量子状態が位相空間に体積 h^3 を占めることと整合している.

粒子が N 個ある場合への一般化は直接的である. $3N$ 次元の運動量空間の体積要素 $\Delta^{3N} p$ に含まれる状態数は

$$\frac{V^N \Delta^{3N} p}{h^{3N}}$$

で与えられる.

2.7.4 プロパゲーターと Feynman の経路積分 [18, pp.148–151, pp.154–166]

波動関数 $\psi(\mathbf{x}', t) = \langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0; t \rangle$ の時間発展を

$$\psi(\mathbf{x}'', t) = \int d^3 x' K(\mathbf{x}'', t; \mathbf{x}', t_0) \psi(\mathbf{x}', t_0)$$

と書いてプロパゲーター $K(\mathbf{x}'', t; \mathbf{x}', t_0)$ を定義すると,

$$K(\mathbf{x}'', t; \mathbf{x}', t_0) = \langle \mathbf{x}'' | e^{-iH(t-t_0)/\hbar} | \mathbf{x}' \rangle \quad (223)$$

と表される (導出は 8.7.4 節). これは初期時刻 $t = t_0$ に粒子が位置 \mathbf{x}' に局在していた系の状態 $e^{-iH(t-t_0)} | \mathbf{x}' \rangle$ における波動関数となっており, それ故 \mathbf{x}' と t_0 を固定し, \mathbf{x}'' と t の関数と見たプロパゲーターは Schrödinger の波動方程式を満たす*72.

我々は Schrödinger 描像においてプロパゲーター (223) を, 時刻 $t = t_0$ に位置 \mathbf{x}' に局在していた粒子が時刻 t に位置 \mathbf{x}'' に見出される確率 (密度の) 振幅と解釈した. もちろん Heisenberg 描像に移行しても, 同じ解釈へと導かれる. 実際 Heisenberg 描像の位置固有ケットは $|\mathbf{x}', t\rangle = e^{+iH(t-t_0)/\hbar} |\mathbf{x}'\rangle$ と変化するため (ただし $|\mathbf{x}'\rangle = |\mathbf{x}', t_0\rangle$, 2.5 節), プロパゲーターは

$$K(\mathbf{x}'', t; \mathbf{x}', t_0) = (\langle \mathbf{x}'' | e^{-iH(t-t_0)/\hbar} \cdot | \mathbf{x}' \rangle) = \langle \mathbf{x}'', t | \mathbf{x}', t_0 \rangle$$

と書き直される. これはやはり粒子がある時空点 (\mathbf{x}', t_0) から他の時空点 (\mathbf{x}'', t) に移る遷移振幅と見なせる.

ここからは簡単のために, 粒子の x 軸に沿う 1 次元的な運動を考えよう. 各時刻における Heisenberg 表示の基底ケット $\{|x', t\rangle\}$ の完備関係式を次々と挿入すると, 遷移振幅は

$$\begin{aligned} & \langle x_N, t_N | x_1, t_1 \rangle \\ &= \int dx_{N-1} dx_{N-2} \cdots dx_2 \langle x_N, t_N | x_{N-1}, t_{N-1} \rangle \langle x_{N-1}, t_{N-1} | x_{N-2}, t_{N-2} \rangle \cdots \langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle \end{aligned} \quad (224)$$

*71 なお, エネルギー固有値は

$$E = \frac{(\hbar\mathbf{k})^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \mathbf{n}^2$$

と表されるので, 隣り合うエネルギー準位の差

$$\Delta E = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2$$

は $L \rightarrow \infty$ のとき $\Delta E \rightarrow 0$ となる. すなわち大きな体積 V を想定すれば, エネルギー準位は密集していると考えて良い.

*72 ここから推察されるように, 実はプロパゲーターは時間に依存する波動方程式のグリーン関数となっている.

と表される (合成の性質). 右辺は時間間隔 $\Delta t = \frac{t_N - t_1}{N-1}$ おきに, 途中の時刻 $t_n = n\Delta t (n = 2, \dots, N-1)$ を十分密にとれば ($N \gg 1$), 時空において始点 (x_1, t_1) と終点 (x_N, t_N) を結ぶあらゆる経路からの寄与 (粗く言えばある種の “和”) を表す (経路の 1 例を図 24 に示す).

このように量子力学では (不確定性原理に関係して), 粒子の軌道 (経路) を追跡することはできず, 仮に経路の概念を許容した場合, 粒子は可能な経路を確率的にとることになる [15, p.383]. これとは対照的に古典力学では, 粒子の軌道は最小作用原理により 1 つに定まる. そこで量子力学の, 古典的な最小作用原理への極限移行はどのように達成されるのかを問題にしよう. 我々は作用を S として, 準古典的な波動関数が $\psi \sim e^{iS/\hbar}$ と表されることを既に知っている. これを踏まえて微小時間 $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ に関する遷移振幅を

$$\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle = \frac{1}{w(\Delta t)} e^{iS(n, n-1)/\hbar}, \quad \frac{1}{w(\Delta t)} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \quad (225)$$

と仮定する. ただし微小時間 Δt における経路は線分と見なすことができ, $S(n, n-1)$ はこの線分の経路に沿う作用積分である. また規格化因子 $w(\Delta t)$ はポテンシャル $V(x)$ の具体形には依らないものと仮定し, 自由粒子に対して規格化条件

$$\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle \rightarrow \delta(x_n - x_{n-1}) \quad (\Delta t \rightarrow 0 \text{ のとき})$$

が満たされるように定めた (詳細は 8.7.4 節). このとき粒子の遷移振幅 (224) は, Feynman の経路積分

$$\begin{aligned} \langle x_N, t_N | x_1, t_1 \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{w(\Delta t)^{(N-1)/2}} \int dx_{N-1} \cdots dx_2 e^{iS(N, 1)/\hbar} \\ &\equiv \int_{x_1}^{x_N} \mathcal{D}[x(t)] e^{iS[x(t)]/\hbar} \end{aligned} \quad (226)$$

で与えられる (ここに $S(N, 1) \equiv \sum_{n=2}^N S(n, n-1)$ は図 24 の与えられた経路に沿う作用積分であり, $N \rightarrow \infty$ で $S(N, 1) \rightarrow S[x(t)]$ である). これは始点と終点を結ぶあらゆる経路が遷移振幅に対して $e^{iS[x(t)]/\hbar}$ の寄与することを意味する. ところが古典的極限 $\hbar \rightarrow 0$ では経路の変化に伴って位相が急激に変化するため, 異なる経路からの寄与が打消し合い, 例外的に作用 S が停留値をとる (したがって経路の変化に伴ってゆっくりと変化する) 古典的経路の近傍からの寄与だけが残る. こうして古典論における最小作用原理が再現される.

Feynman の経路積分 (226) で表された遷移振幅 $\langle x_N, t_N | x_1, t_1 \rangle$ は終点 $(x_N, t_N) = (x, t)$ の関数と見なすと, その規格化の仕方により初期条件 $\lim_{t \rightarrow t_1} \langle x, t | x_1, t_1 \rangle = \delta(x - x_1)$ を満たす. またこれは Schrödinger の時間に依存する波動方程式を満たすことが確かめられるので (確認は 8.7.4 節), プロパゲーター $K(x, t; x_1, t_1) = \langle x, t | x_1, t_1 \rangle$ に一致することになる. 上式 (225) の仮定 (規格化定数の表式を含む) はこのことから正当化され, 経路積分による量子力学の定式化は Schrödinger の波動力学と等価であることが結論される.

なお遷移振幅の経路積分による表現を, (時間的発展の演算子の表式から) 直接に導出することも可能である. その際, (拡大) 位相空間における経路積分を経由し, 次いで運動量変数に関する積分を実行して, (拡大) 配位空間における経路積分を得ることになる [20, pp.32–41].

2.7.5 Ehrenfest の定理 [18, pp.113–116]

直観的に言って, 粒子の古典的な運動は狭い範囲に局在した波動関数の波束で表されると考えられる. そこで波束の中心の運動を調べよう. 古典論との対応を調べるには, Heisenberg 描像を用いるのが便利である.

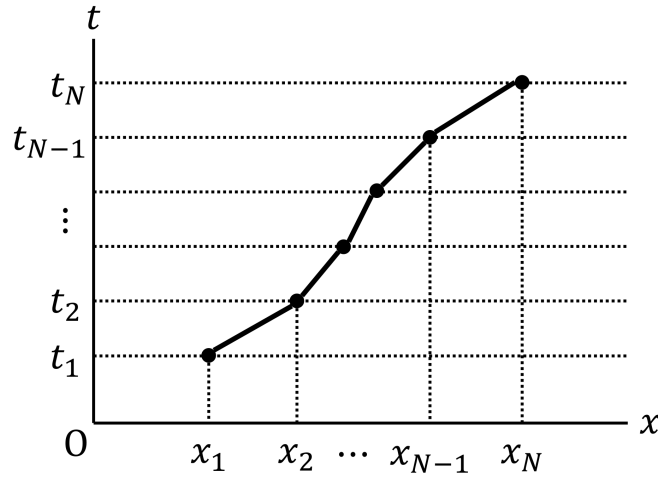


図 24 各時刻 $t_n = n\Delta t (n = 2, \dots, N-1)$ における粒子の位置 x_n を指定して得られる, 始点 (x_1, t_1) と終点 (x_N, t_N) を結ぶ経路

Hamilton 演算子 (191): $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x})$ で記述される, ポテンシャル $V(\mathbf{x})$ の下での粒子に対し,

Heisenberg 方程式

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[p_i, H] = -\frac{\partial}{\partial x_i}V(\mathbf{x}), \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[x_i, H] = \frac{p_i}{m}, \quad \frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{dx_i}{dt}, H\right] = \frac{1}{m}\frac{dp_i}{dt} \quad (227)$$

→ 演算子の関係 $m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\nabla V(\mathbf{x})$

→ Ehrenfest の定理 $m\frac{d^2\langle\mathbf{x}\rangle}{dt^2} = \frac{d\langle\mathbf{p}\rangle}{dt} = -\langle\nabla V(\mathbf{x})\rangle$

が成り立つ ($\langle\cdots\rangle$ は Heisenberg 描像の状態ケット (時間変化しない) に関してとった期待値, 導出は 8.7.5 節). Ehrenfest の定理は, 波束の中心 $\langle\mathbf{x}\rangle$ が古典的な Newton の運動方程式に従って運動することを意味している. よって特に波束が狭い範囲に局在している場合には, 波束は古典の粒子に対応付けられ, 古典力学の法則が再現されることになる^{*73}.

2.8 角運動量

2.8.1 節では回転の生成演算子として量子力学における角運動量を導入し, 角運動量が基本的交換関係 (と Hermite 性) によって定義付けられることを学ぶ. 続く 2.8.2 節では角運動量の基本的交換関係から導かれる

^{*73} ただし一般に局在した波束も時間が経てば, 拡がっていくものである [17, p.150]. 例えば自由粒子 ($V(\mathbf{x}) = 0$) に対しては

$$x_i(t) = x_i(0) + \frac{p_i(0)}{m}t, \quad \therefore [x_i(t), x_i(0)] = \left[\frac{p_i(0)}{m}t, x_i(0)\right] = -\frac{i\hbar t}{m}$$

となるため, 不確定関係

$$\langle(\Delta x_i(t))^2\rangle \langle(\Delta x_i(0))^2\rangle \geq \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2}$$

が成立する (以上, i で和をとらない). これは粒子がたとえ初期時刻 $t = 0$ で局在していたとしても, 時間が経つにつれて位置は不確定になることを意味している.

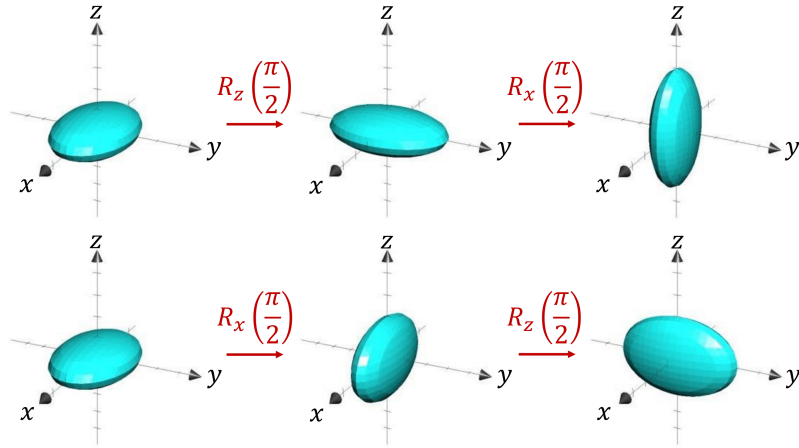


図 25 有限回転の非可換性の例解 ($R_i(\pi/2)$ は第 i 軸周りの 90° 回転を表す)

一般論を説明する。2.8.3 節では軌道角運動量を，2.8.4 節ではスピン角運動量を扱う。

2.8.1 回転および角運動量の交換関係 [18, pp.205–213]

よく知られているように，物体に 2 つの有限角の回転操作を施した結果は，回転の順序によって異なる (図 25 参照)。このことを反映して，ベクトル \mathbf{V} を $i = x, y, z$ 軸の周りに角度 ϕ だけ回転したベクトルを $\mathbf{V}' = R_i(\phi)\mathbf{V}$ と書いて回転行列 $R_i(\phi)$ を定義すると*74，一般に 2 つの回転行列は交換しない。具体的には微小な回転角 ε に対して， ε の 2 次まで考慮すると，

$$[R_x(\varepsilon), R_y(\varepsilon)] = R_z(\varepsilon^2) - R_{\text{任意}}(0) \quad (228)$$

が見出される ($R_{\text{任意}}(0)$ は恒等演算子 1 に他ならない，導出は 8.8.1 節)。右辺は ε の 2 次の量であり (8.8.1 節の導出過程を参照)，この結果は ε の 1 次近似では， $R_x(\varepsilon)$ と $R_y(\varepsilon)$ が交換することを意味している*75。

次に状態 $|\alpha\rangle$ にある系を単位ベクトル \mathbf{n} の周りに角度 ϕ だけ回転させたときの状態の変化を

$$|\alpha\rangle \rightarrow D(\mathbf{n}, \phi) |\alpha\rangle$$

と書いて回転の演算子 $D(\mathbf{n}, \phi)$ を定義する*76。ここで角度 $d\phi$ の無限小回転の演算子を

$$D(\mathbf{n}, d\phi) = 1 - i \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}}{\hbar} d\phi \quad (229)$$

と書こう。その動機は，2.3 節における平行移動の演算子の場合と同様である。さて，

- 上式 (229) において \mathbf{J} は角運動量の次元を持たなければならないこと
- 古典力学において，系の空間回転対称性に付随する保存量は角運動量であり (1.3.2 節)，系の回転操作と角運動量は密接な関係にあること

*74 回転角 ϕ は第 i 軸の正の側から見て反時計回りを正とする。ここで考えている回転操作は能動的変換である。

*75 このように，質点の微小時間 Δt における，角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2$ での回転では，変位の合成する順序の違いによる差は $O(\Delta t^2)$ となる。角速度ベクトルの和 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ が意味を持つのはこのためである。

*76 $D(\mathbf{n}, \phi)$ の行列表現の次元は，考えている個々のケット空間の次元に依存する。例えばスピン 1/2 に対する 2.8.4 節の式 (260) を参照。

を踏まえ、無限小回転の演算子を上式 (229) で与えるような Hermite 演算子 \mathbf{J} を角運動量演算子と定義する。

- これが量子力学における角運動量の定義である。
 - この定義は古典的対応物のないスピン角運動量 (2.8.4 節で導入する) にも適用できる。
 - 軌道角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ がこの定義 (あるいはその帰結としての交換関係 (231)) を満たしていることは、2.8.3 節で説明する。
- \mathbf{J} の Hermite 性により $\mathcal{D}(\mathbf{n}, d\phi)$ のユニタリー性が保証される。

有限の角度 ϕ に関する回転の演算子は、微小角度 $\phi/N (N \gg 1)$ の回転を N 回合成して得られる：

$$\mathcal{D}(\mathbf{n}, \phi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{i\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\phi/\hbar}{N} \right]^N = e^{-i\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\phi/\hbar}. \quad (230)$$

通常のベクトル \mathbf{V} に作用する回転行列 R は状態ベクトルに作用する回転の演算子 \mathcal{D} に対応付けられるから、回転の演算子は回転行列の交換関係 (229) と類似の関係

$$[\mathcal{D}_x(\varepsilon), \mathcal{D}_y(\varepsilon)] = \mathcal{D}_z(\varepsilon^2) - 1, \quad \text{etc.}$$

(ただし $\mathcal{D}_x(\varepsilon) \equiv \mathcal{D}(\hat{x}, \varepsilon)$, etc.) を満たさなければならないと考えるのが自然である^{*77}。ここから角運動量の基本的交換関係

$$[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k \quad (231)$$

が導かれる (導出は 8.8.1 節)^{*78}。結局、角運動量は交換関係 (231) (と Hermite 性) によって定義付けられると言って良い。

実際に角運動量の交換関係 (231) を満たす Hermite 演算子 \mathbf{J} に対して、 $\mathcal{D}(\mathbf{n}, \phi) = e^{-i\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\phi/\hbar}$ が回転の演算子となることの証拠を挙げることができる。すなわち状態が $|\alpha\rangle \rightarrow \mathcal{D}(\mathbf{n}, \phi) |\alpha\rangle$ と変化すると、角運動量の期待値 $\langle \mathbf{J} \rangle \equiv \langle \alpha | \mathbf{J} | \alpha \rangle$ はベクトルの変換則

$$\langle J_k \rangle \rightarrow \sum_l R_{kl} \langle J_l \rangle \quad (232)$$

に従って回転することが導かれる ((R_{kl}) は \mathbf{n} 軸周りの角度 ϕ 回転の回転行列、導出は 8.8.1 節) [18, pp.213–216]^{*79}。

2.8.2 角運動量の固有値と固有状態

これから展開する角運動量の一般論はすべて、角運動量の交換関係 (231) から導かれる。

■交換関係とはしご演算子 [18, pp.253–256] 角運動量の自乗の演算子 $\mathbf{J}^2 \equiv J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ を定義すると、角運動量の交換関係 (231) から

$$[\mathbf{J}^2, J_k] = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \quad (233)$$

が導かれる (導出は 8.8.2 節)。ところが J_x, J_y, J_z は互いに交換しない。そこで \mathbf{J}^2 (固有値 a) と 1 つの角運動量成分 J_z (固有値 b) の同時固有ケット $|a, b\rangle$ を考える。

^{*77} 回転群のあらゆる表現が回転操作と同じ掛け算則を満たすことは、群の表現の定義に含まれている [21, p.3].

^{*78} 両辺とも角運動量の 2 乗の次元を持っていることに注意する。

^{*79} 角運動量 \mathbf{J} に限らず、任意のベクトル演算子 \mathbf{V} の期待値が同様の交換関係 $\langle V_k \rangle = \sum_l R_{kl} \langle V_l \rangle$ に従って変換しなければならないという事実はむしろ、ベクトル演算子 \mathbf{V} を定義するのに利用される [18, pp.318–320].

はしご演算子 $J_{\pm} \equiv J_x \pm iJ_y$ を定義すると、再び角運動量の交換関係 (231) により、これは

$$J_{\pm} |a, b\rangle = c_{\pm} |a, b \pm \hbar\rangle \quad (234)$$

のように \mathbf{J}^2 の固有値を不変に保ち、 J_z の固有値を \hbar だけ増加・減少させることが導かれる (c_{\pm} は比例定数、導出は 8.8.2 節).

■ \mathbf{J}^2 および J_z の固有値 [18, pp.256–259] 演算子 \mathbf{J}^2, J_z の固有値 a, b は

$$a \geq b^2 \quad (235)$$

を満たすことが見出される (証明は 8.8.2 節)*80. このため b は最大値 b_{\max} と最小値 b_{\min} を持つ. 次いで基本的交換関係 (231), およびその帰結としてのはしご演算子の性質 (234) を用いると、 n をゼロ以上の整数として、固有値のとり得る値は

$$a = \hbar^2 j(j+1), \quad j = \frac{n}{2} : \text{整数または半整数} \quad (236)$$

$$b = m\hbar \quad m = -j, -j+1, \dots, j-1, j \quad (237)$$

となることが示される (導出は 8.8.2 節)*81. そこで \mathbf{J}^2 と J_z の同時固有ケットを $|a, b\rangle$ と書く代わりに、 $|j, m\rangle$ と書くのが便利である.

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 |j, m\rangle &= \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle, \\ J_z |j, m\rangle &= m\hbar |j, m\rangle. \end{aligned} \quad (238)$$

■ 角運動量演算子の行列要素 [18, pp.259–260] 各固有ケット $|j, m\rangle$ が規格化されているとすると、式 (238) より \mathbf{J}^2, J_z の行列要素は

$$\langle j', m' | \mathbf{J}^2 | j, m \rangle = j(j+1)\hbar^2 \delta_{j'j} \delta_{m'm}, \quad \langle j', m' | J_z | j, m \rangle = m\hbar \delta_{j'j} \delta_{m'm}$$

となる.

式 (234):

$$J_{\pm} |j, m\rangle = c_{\pm}^{j,m} |j, m \pm 1\rangle$$

(ここでは係数 $c_{\pm}^{j,m}$ の j, m 依存性を明示した), および $|j, m\rangle, |j, m \pm 1\rangle$ が規格化されていることから

$$J_{\pm} |j, m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \hbar |j, m \pm 1\rangle \quad (239)$$

が導かれ (導出は 8.8.2 節), J_{\pm} の行列要素は

$$\langle j', m' | J_{\pm} | j, m \rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \hbar \delta_{j'j} \delta_{m', m \pm 1}$$

と表される.

*80 これは古典的なベクトル \mathbf{J} に対して $\mathbf{J}^2 \geq J_z^2$ が成り立つのに似ている.

*81 粗く言えば固有値 j は、角運動量の (古典的なベクトルとしての) 大きさ $|\mathbf{J}|/\hbar$ に対応する.

2.8.3 軌道角運動量

■回転の生成演算子としての軌道角運動量 [18, pp.265–269] 古典的に馴染みのある粒子の軌道角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ を考えよう. 正準交換関係 $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$, etc. により, 演算子としての \mathbf{L} は

- Hermite であること
- 角運動量の基本的交換関係

$$[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k \quad (240)$$

を満たすこと

が確かめられる (確認は 8.8.3 節). よって $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ は量子力学的な定義の下でも, 角運動量と呼べる.

ここからは水素原子の問題への応用 (2.9 節) を念頭に, 軌道角運動量の理論をもう少し掘り下げよう. 運動量が平行移動の生成演算子であることから

$$\langle \mathbf{x}' | L_z | \alpha \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle, \quad \text{etc.} \quad (241)$$

と表すことができ, ここから

$$\langle \mathbf{x}' | \mathbf{L}^2 | \alpha \rangle = -\hbar^2 r^2 \underbrace{\left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \right) \right]}_{\nabla'^2 \text{の角度部分}} \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle \quad (242)$$

となる ($\partial_\theta \equiv \partial/\partial\theta$, etc, 導出は 8.8.3 節)*82. 一方, 同じ量を

$$\langle \mathbf{x}' | \mathbf{L}^2 | \alpha \rangle = \langle \mathbf{x}' | \mathbf{x}^2 \mathbf{p}^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})^2 + i\hbar \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} | \alpha \rangle \quad (243)$$

$$= -r^2 \hbar^2 \nabla'^2 \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle + \hbar^2 r^2 \underbrace{\left[\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r \right]}_{\nabla'^2 \text{の動径部分}} \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle \quad (244)$$

と計算することもできる (導出は 8.8.3 節). これは上式 (242) の結果に合致する (∇'^2 からその動径部分を除くと角度部分が残るから).

*82 Laplacian $\Delta = \nabla'^2$ の球座標系での表式

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

を思い出そう. ここで任意関数 $f(\mathbf{x}')$ に対して,

- Laplacian の動径部分

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) f(\mathbf{x}') = \begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f(\mathbf{x}')}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f(\mathbf{x}')) \end{cases}$$

- θ 微分の項

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) f(\mathbf{x}') = \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f(\mathbf{x}')}{\partial \theta} \right)$$

とまとめられる.

■球面調和関数 [18, pp.270–274] 球対称なポテンシャルの下での 1 粒子を考えよう (スピンの自由度は無視する). 古典力学では系の回転対称性から角運動量保存則が導かれたことを踏まえると (1.3.2 節), 軌道角運動量 \mathbf{L} の“大きさ”と“射影” L_z の固有値 l, m が確定した定常状態 $|l, m\rangle$ が可能であると期待される*83. 固有値 l, m だけを与えても, 式 (241), 式 (242) から作られる L_z, \mathbf{L}^2 の固有方程式

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \langle \mathbf{x}' | l, m \rangle = m\hbar \langle \mathbf{x}' | l, m \rangle, \quad (245)$$

$$\left[\left(\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \right) + l(l+1) \right] \langle \mathbf{x}' | l, m \rangle = 0 \quad (246)$$

は, 波動関数 $\langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle$ の角度 θ, ϕ 依存性しか決めない. このため波動関数には r の任意関数を掛ける不定性が残り, 定常状態 $|l, m\rangle$ の波動関数 (エネルギー固有関数) は

$$\langle \mathbf{x}' | l, m \rangle = R(r) Y_l^m(\theta, \phi), \quad Y_l^m(\theta, \phi) = \langle \mathbf{n} | l, m \rangle$$

と分離される (\mathbf{n} は θ, ϕ で指定される方向の単位ベクトル)*84. 状態 $|l, m\rangle$ において粒子を \mathbf{n} 方向の立体角 $d\Omega$ に見出す確率は $|Y_l^m(\theta, \phi)|^2 d\Omega$ で与えられる [16, p.83, p149].

上式 (245), 式 (246) は \mathbf{x}' を方向単位ベクトル $\mathbf{n} = \mathbf{x}'/|\mathbf{x}'|$ に置き換えても成り立つから, 角度部分 $Y_l^m(\theta, \phi)$ に対する微分方程式となっている. これと規格化条件

$$\begin{aligned} \delta_{ll'} \delta_{mm'} &= \langle l', m' | l, m \rangle \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) Y_{l', m'}^*(\theta, \phi) Y_l^m(\theta, \phi) \\ &\left(\because \text{完備関係式 } \int d\Omega |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}| = 1, d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi \text{ は } \mathbf{n} \text{ 方向の立体角} \right) \end{aligned} \quad (247)$$

を満たす $Y_l^m(\theta, \phi)$ は, $m \geq 0$ として

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!}{4\pi(l-m)!}} e^{im\phi} \frac{1}{\sin^m \theta} \frac{d^{l-m}}{d(\cos \theta)^{l-m}} (\sin \theta)^{2l}, \quad (248)$$

$$Y_l^{-m}(\theta, \phi) = (-1)^m [Y_l^m(\theta, \phi)]^* \quad (249)$$

で定義される球面調和関数である*85. 8.8.3 節ではこのことを, 角運動量の理論の数学構造を経由する形で証明する.

*83 量子力学における対称性 (3.1.2 節) として, 回転による Hamiltonian の不変性

$$H = e^{i\mathbf{L} \cdot \mathbf{n} \phi / \hbar} H e^{-i\mathbf{L} \cdot \mathbf{n} \phi / \hbar} \simeq H + \frac{i\phi}{\hbar} \mathbf{n} \cdot [\mathbf{L}, H] \quad (\text{微小角 } \phi \text{ に対して})$$

を要求すると $[\mathbf{L}, H] = 0$ となるので, H, \mathbf{L}^2, L_z の同時固有状態が可能である. Heisenberg 描像に移ると Heisenberg 方程式 $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\mathbf{L}, H]$ より, 交換関係 $[\mathbf{L}, H] = 0$ は \mathbf{L} が運動の定数であることを意味する [22, pp.342–343].

*84 結果論として詳しく述べると, l, m と異なる適当な量子数 n を用いて定常状態は $|n, l, m\rangle$ と表され, 波動関数は $\langle \mathbf{x}' | n, l, m \rangle = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi)$ という形をとる. 2.9 節における水素原子の例を参照.

*85 ひるがえって式 (246) は, 球面調和関数が Laplacian の角度部分の固有値 $-l(l+1)/r^2$ に属する固有関数であることを意味する.

ここで $l = 0, 1, 2$ に対する球面調和関数を具体的に書き出しておこう.

$$\begin{aligned}
 Y_0^0(\theta, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\
 Y_1^0(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, & Y_1^{\pm 1}(\theta, \phi) &= \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (\sin \theta) e^{\pm i\phi}, \\
 Y_2^0(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1), & Y_2^{\pm 1}(\theta, \phi) &= \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (\sin \theta \cos \theta) e^{\pm i\phi}, & Y_2^{\pm 2}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} (\sin^2 \theta) e^{\pm 2i\phi}.
 \end{aligned}$$

l は半整数値をとらないこと 8.8.3 節における, Y_l^m が球面調和関数であることの証明では, l が半整数ではなく整数であることを仮定した. 実際に l が半整数をとってはならないとする議論をいくつか提示できる (8.8.3 節).

2.8.4 スピン

粒子の軌道角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ は, 粒子の空間運動に伴う角運動量である. これに対して素粒子や複合粒子は, その空間運動に無関係な“固有の”角運動量 \mathbf{S} を持ち, 粒子の全角運動量は和 $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ で与えられる*86. \mathbf{S} はスピン角運動量と呼ばれ, $\hbar \rightarrow 0$ の極限で消失するような, 量子力学に特有の量である*87. 角運動量の一般論 (2.8.2 節) より,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}^2 \text{の固有値} & \quad s(s+1)\hbar^2, & \left(s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \right) \\
 S_z \text{の固有値} & \quad m\hbar \quad (m = -s, -s+1, \dots, s-1, s)
 \end{aligned}$$

である. 各種の素粒子は決まった s の値を持ち, 「スピン s の粒子」として言及される. 経験的に大部分の素粒子はスピンの $1/2$ であることが知られている [16, pp.195–196, pp.198–199]. そこで以下では最も重要な, スピンが $1/2$ の場合を重点的に調べよう.

■スピン $1/2$ に対するスピン演算子 [18, p.29, pp.34–37, p.213] スピン $1/2$ の系に対して, スピン成分 S_i の固有値 $\pm\hbar/2$ に属する固有ケットを $|S_i, \pm\rangle$ と書こう. S_z の固有状態 $|\pm\rangle \equiv |S_z; \pm\rangle$ を基底に選ぶと, スピン演算子は具体的に

$$\begin{cases}
 S_x = \frac{\hbar}{2} \{ (|+\rangle \langle -|) + (|-\rangle \langle +|) \} \\
 S_y = \frac{i\hbar}{2} \{ -(|+\rangle \langle -|) + (|-\rangle \langle +|) \} \\
 S_z = \frac{\hbar}{2} \{ (|+\rangle \langle +|) - (|-\rangle \langle -|) \}
 \end{cases} \quad (250)$$

と表現できる. ここで各係数は, 状態間の遷移の確率振幅 $\langle S_i; \pm | S_j; \pm \rangle$ (複号任意) が図 26 の確率推移図を満たし, なおかつ演算子 S_i が角運動量の基本的交換関係 (231):

$$[S_i, S_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} S_k \quad (251)$$

を満たすように選ばれている (確認は 8.8.4 節).

以上のスピン演算子 (250) は, 反交換関係

$$\{S_i, S_j\} = \frac{1}{2} \hbar^2 \delta_{ij} \quad (252)$$

*86 ここでは和 $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ の意味を直観的に理解して良い. 本稿の水準では, 角運動量の合成に関する理論に立ち入る必要はない.

*87 それ故しばしば行われるように, スピン \mathbf{S} を粒子の“自転”に関係付けて古典的に解釈することは最初から無意味である.

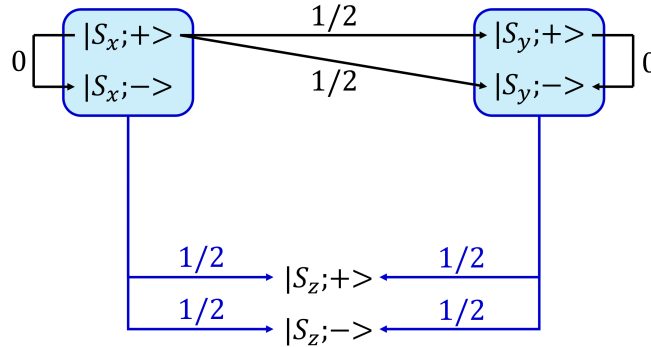


図 26 確率推移図

を満たしていることを直接確かめられる (確認は 2.8.4 節). 角運動量の交換関係 (251) とは対照的に, 反交換関係 (252) はスピン 1/2 の系に特別な性質である.

反交換関係 (252) は $\mathbf{S}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$ を含意している ($i = j$ とおけば良い). これは角運動量の一般論 (2.8.2 節) より, スピン $s = 1/2$ の系は \mathbf{S}^2 の固有値 $s(s+1)\hbar^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$ を持たなければならないことと整合している. また \mathbf{S}^2 は恒等演算子となっているので, 角運動量の交換関係 (251) の帰結としての交換関係 (233): $[\mathbf{S}^2, S_i] = 0$ が満たされていることは, スピン 1/2 の場合には明白である.

■スピン 1/2 の系の 2π 回転 [18, p.216] スピン 1/2 の場合には, 状態 $|\alpha\rangle$ にある系を z 軸周りに 1 回転 (角度 $\phi = 2\pi$ だけ回転) させた後の状態は

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_z(\phi = 2\pi)|\alpha\rangle &= e^{-iS_z\phi/\hbar}\Big|_{\phi=2\pi} \{(|+\rangle\langle +|) + (|-\rangle\langle -|)\} \cdot |\alpha\rangle \\ &= \{(e^{-\pi i}|+\rangle\langle +|) + (e^{\pi i}|-\rangle\langle -|)\} \cdot |\alpha\rangle \\ &= -\{(|+\rangle\langle +|) + (|-\rangle\langle -|)\} \cdot |\alpha\rangle \\ &= -|\alpha\rangle \end{aligned}$$

と計算できる. 興味深いことに, これはもとの状態 $|\alpha\rangle$ と比べて符号が異なっている. 最右辺における非自明な負号の存在の正しさは, 中性子干渉法を利用して実験的に確かめられている (中性子はスピン 1/2 を持つ) [18, pp.218-220].

■Pauli の 2 成分形式 [18, pp.220-223] スピン 1/2 の系に対して

$$\begin{aligned} \text{2 成分量} \quad \chi &= \begin{pmatrix} \langle +|\alpha\rangle \\ \langle -|\alpha\rangle \end{pmatrix}, \quad (\text{状態 } |\alpha\rangle \text{ の行列表現}) \\ \text{行列} \quad \sigma_k &= \frac{1}{\hbar/2} \begin{pmatrix} \langle +|S_k|+\rangle & \langle +|S_k|-\rangle \\ \langle -|S_k|+\rangle & \langle -|S_k|-\rangle \end{pmatrix} \quad (\text{スピン演算子 } S_k \text{ の行列表現, } k = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

を定義する*88. これらを用いた行列表現に移行すると, 例えばスピンの期待値は

$$\begin{aligned} \langle S_k \rangle &\equiv \langle \alpha|S_k|\alpha\rangle = \sum_{a'=+,-} \sum_{a''=+,-} \langle \alpha|a'\rangle \langle a'|S_k|a''\rangle \langle a''|\alpha\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2} \chi^\dagger \sigma_k \chi \end{aligned}$$

*88 後述するように, χ はスピノルと呼ばれる. スピノルは空間回転に対する変換則 (261) で定義される.

と表される。またスピン演算子の表式 (250) より、行列 σ_k の成分を具体的に書くと

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (253)$$

となる。上式 (253) の 3 つの行列を Pauli 行列と呼ぶ。

以下、Pauli 行列の重要な性質をまとめよう。スピン演算子の反交換関係 (252): $\{S_i, S_j\} = \frac{1}{2}\hbar^2\delta_{ij}$ と交換関係 (251): $[S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k$ は、Pauli 行列の (反) 交換関係

$$\{\sigma_1, \sigma_2\} = 2\delta_{ij}, \quad (254)$$

$$[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \quad (255)$$

に置き換わる (導出は 8.8.4 節)。上式 (254), (255) を用いて積 $\sigma_i\sigma_j$ を対称部分と反対称部分に分けると、

$$\begin{aligned} \sigma_i\sigma_j &= \frac{1}{2}\{\sigma_i, \sigma_j\} + \frac{1}{2}[\sigma_i, \sigma_j] \\ &= \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \end{aligned} \quad (256)$$

を得る。これは具体的には

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \quad \text{etc.}$$

を与える。また Pauli 行列の具体的表式 (253) に直接見て取れるように、

$$\sigma_i^\dagger = \sigma_i, \quad \det(\sigma_i) = -1, \quad \text{tr}(\sigma_i) = 0$$

が成立する。第 1 式はスピン演算子 S_i の Hermite 性を反映している。ここで 3 つの Pauli 行列をベクトルの形にまとめた記法 $\boldsymbol{\sigma} \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ を導入する。この表記は例えば $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$ を任意の 3 次元ベクトルとして、

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a} \equiv a_k\sigma_k = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix} \quad (\because \text{式 (253)})$$

のように用いる。上式 (256) より有用な公式

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) &= (a_i\sigma_i)(a_j\sigma_j) = a_i a_j (\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \end{aligned}$$

が導かれる。特例として、実数ベクトル \mathbf{a} に対しては

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})^2 = |\mathbf{a}|^2 \quad (257)$$

が成り立つ。

■2 成分形式での回転 [18, pp.223–224] 回転演算子 $\exp\left(\frac{-i\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}\phi}{\hbar}\right)$ の行列表現は

$$\exp\left(\frac{-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\phi}{2}\right) = \left(\left\langle a' \left| \exp\left(\frac{-i\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}\phi}{\hbar}\right) \right| a'' \right\rangle \right) \quad (258)$$

である (導出は 8.8.4 節)。これは具体的には

$$\exp\left(\frac{-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\phi}{2}\right) = \mathbf{1} \cos \frac{\phi}{2} - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \sin \frac{\phi}{2} \quad (259)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi}{2} - in_z \sin \frac{\phi}{2} & (-in_x - in_y) \sin \frac{\phi}{2} \\ (-in_x + in_y) \sin \frac{\phi}{2} & \cos \frac{\phi}{2} + in_z \sin \frac{\phi}{2} \end{pmatrix} \quad (\because \text{式 (253)}) \quad (260)$$

と計算される (上式 (259) の導出は 8.8.4 節).

状態が回転演算子により

$$|\alpha\rangle \rightarrow \exp\left(\frac{-i\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\phi}{\hbar}\right)|\alpha\rangle$$

と変化するとき, 等価的に χ は

$$\chi \rightarrow \exp\left(\frac{-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\phi}{2}\right)\chi \quad (261)$$

と変化する (導出は 8.8.4 節).

■ユニタリー・ユニモジュラー群 [18, pp.228–230] ここで回転操作を群の観点から調べる. 群とは任意の元 a, b, \dots に対して, 次の性質を持つ積 ab の定義されている集合のことである [23, p.824].

1. 閉包性 元 a, b の積 ab もまた群の元である.
2. 結合法則 $a(bc) = (ab)c$ が成り立つ.
3. 単位元 $a = aI = Ia$ を満たす単位元 I が存在する.
4. 逆元 $aa^{-1} = a^{-1}a = I$ を満たす a の逆元 a^{-1} が存在する.

行列 $e^{-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\phi/2}$ が, ユニタリー・ユニモジュラー行列であることを説明する. ここでユニタリー・ユニモジュラー行列とは, 行列式が 1 であるユニタリー行列を意味する. 行列 $e^{-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\phi/2}$ のユニタリー・ユニモジュラー性は具体的表式 (260) から直接確かめられるけれど, ここではユニタリー・ユニモジュラー行列の一般的な表現を考えてこのことを示そう. 2×2 のユニタリー・ユニモジュラー行列は一般に, 複素数 a, b を用いて

$$U(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad (262)$$

と表すことができる (証明は 8.8.4 節). ただし a, b にはユニモジュラー条件

$$(\det U = 1) |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (263)$$

が課される. そこで上式 (262) を行列 $e^{-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\phi/2}$ の表式 (260) と比較すると,

$$\operatorname{Re}(a) = \cos \frac{\phi}{2}, \quad \operatorname{Im}(a) = -n_z \sin \frac{\phi}{2}, \quad \operatorname{Re}(b) = -n_y \sin \frac{\phi}{2}, \quad \operatorname{Im}(b) = -n_x \sin \frac{\phi}{2}$$

と同定される. これらはユニモジュラー条件 (263) も満たしている. よって回転を表す行列 $e^{-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\phi/2}$ は, ユニタリー・ユニモジュラー行列の最も一般的な表現となることが分かる.

$U = e^{-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\phi/2}$ のユニタリー性はやはり, 確率保存に関係している. すなわち全確率

$$\chi^\dagger \chi = |\langle +|\alpha\rangle|^2 + |\langle -|\alpha\rangle|^2 = 1$$

は, 回転操作 $\chi \rightarrow U\chi$ の下で不変に保たれる:

$$\chi^\dagger \chi \rightarrow \chi^\dagger U^\dagger U \chi = \chi^\dagger \chi.$$

行列 (262) は 2 つの複素数 a, b で指定されるので, ユニモジュラー条件 (263) の下で 3 つの独立な実数パラメーターを持つ. これはユニタリー・ユニモジュラー行列が回転を表すことから期待されることである*89.

*89 3次元空間内の原点周りの一般的な回転を特徴付けるには, 3つの実数が必要である. 例えば

- 回転軸の向き \mathbf{n} を表す天頂角と方位角, および回転角 ϕ
- 回転ベクトル $\phi\mathbf{n}$ のデカルト座標系に関する 3成分
- 3つの Euler 角
を用いれば良い.

また同じ理由から期待されるように、ユニタリー・ユニモジュラー行列は行列の積に関して群を成す (証明は 8.8.4 節). この群は SU(2) と呼ばれ, S は “特殊 (special)” (行列式が 1), U は “ユニタリー (unitary)”, 2 は ($|S_z; \pm\rangle$ の張るケット空間の) 次元を表す.

■スピノルの変換則 空間回転に際して式 (261): $\chi \rightarrow \exp\left(\frac{-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\phi}{2}\right)\chi$ に従い, ユニタリー・ユニモジュラー行列によって変換する 2 成分量 χ を (1 階の) スピノルと呼ぶ. ここまで一時的に無視してきた粒子の位置 \mathbf{x}' の自由度を考慮すると, χ は波動関数

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{x}') \\ \psi_-(\mathbf{x}') \end{pmatrix}, \quad \psi_{\pm}(\mathbf{x}') \equiv \langle \mathbf{x}', \pm | \alpha \rangle$$

に置き換わる. $\psi_{\pm}(\mathbf{x}')$ は位置 \mathbf{x}' において, スピン $S_z = \pm\hbar/2$ の粒子を見出す確率密度を表す. こうしてスピンの 1/2 の系の波動関数はスピノルとなる [16, p.205] [18, p.376].

2.9 水素原子

最後に具体的な系への応用として水素原子の問題を取り上げ, 本章を締めくくろう (これは量子力学における定番の題材の 1 つである).

2.9.1 球対称な場に関する一般論 [16, pp.148–152]

2.8.3 節では球対称なポテンシャル $V(r)$ の下での定常状態の波動関数 (エネルギー固有関数) が, $Y_l^m(\theta, \phi)$ を球面調和関数として

$$\psi(\mathbf{x}') = R(r)Y_l^m(\theta, \phi)$$

の形に変数分離されることを学んだ. そこで次に, 与えられた $V(r)$ に対して “動径関数” $R(r)$ を求める問題に移ろう. $Y_l^m(\theta, \phi)$ が Laplacian の角度部分の固有関数であること (式 (194)) より, 時間に依存しない波動方程式 (194):

$$\begin{aligned} E\psi &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta' + V\right)\psi \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right\} \right] + V\psi \end{aligned}$$

は $R(r)$ に対する方程式

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) R = 0 \quad (264)$$

になる*90.

上式 (264) から, 場の中心付近 $r \rightarrow 0$ における $R(r)$ の漸近形を引き出すことができる. ただし $V(r)$ は $r \rightarrow 0$ で $-\infty$ になる引力ポテンシャルであったとしても, $1/r^2$ よりはずっと早く $-\infty$ になる場合

$$r^2 V(r) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0 \text{ のとき}) \quad (265)$$

を仮定する. このとき R は原点付近で, 与えられた l に対して

$$R \simeq \text{const} \cdot r^l \quad (266)$$

という形を持つことが示される (導出は 8.9.1 節).

*90 式 (264) における $\frac{l(l+1)}{r^2} R$ の項は, もとの Schrödinger 方程式から現れる遠心力ポテンシャルの項 $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \psi$ に由来している (8.9.1 節における古典力学の復習を参照).

■条件 (265) の物理的意味 古典的には上式 (265) が満たされなければ、保存する角運動量の適当な値に対して、粒子は場の中心 $r = 0$ に到達 (落下) することが可能となる [9, p.40]. このとき量子力学的には、“基底”状態は $r = 0$ に見出される粒子に対応することになると考えられる. 式 (265) はこのような場合を除外する条件となっている (詳細は 8.9.1 節を参照) [16, p.108]. 我々がこれから考える Coulomb ポテンシャル $V(r) \sim 1/r$ はこの条件 (265) を満たしている.

2.9.2 水素原子 [16, pp.160–165]

水素型イオンにおける、原点に固定された電荷 $+Ze$ を持つ核の作る場の中の電子 (質量 m , 電荷 $-e$) を考えよう. 相互作用 $V(r)$ は球対称な Coulomb ポテンシャル

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$$

で与えられる^{*91}. 水素原子に対しては $Z = 1$ である. 以下では束縛状態に対応した, $E < 0$ のエネルギー固有値を仮定する.

簡単のために, 長さの尺度 $a \equiv \frac{\hbar^2}{me^2}$ とエネルギーの尺度 $\frac{me^4}{\hbar^2}$ を用いて, 変数を

$$\frac{r}{a} \rightarrow r, \quad a^{3/2}R \rightarrow R, \quad \frac{E}{me^4/\hbar^2} \rightarrow E$$

と無次元化して再定義する.

原子単位 この措置は原子単位を採用することに相当する. 原子単位では質量, 長さ, 時間の単位をそれぞれ

$$m, \quad a = \frac{\hbar^2}{me^2}, \quad \frac{\hbar^3}{me^4}$$

に選ぶ. このときエネルギーを測る単位は

$$m \left(\frac{\hbar^2}{me^2} \right)^2 \left(\frac{\hbar^3}{me^4} \right)^{-2} = \frac{me^4}{\hbar^2} (\equiv 2\text{Ry})$$

となる. ここに a は Bohr 半径, Ry は Rydberg と呼ばれる. 原子単位に移行するには, 単に式の中で $e = 1, m = 1, \hbar = 1$ とおけば良い.

さて, Coulomb ポテンシャル $V(r)$ に対して R の満たす方程式 (264) を適用すると, $n \geq l + 1$ を満たす整数 n を用いてエネルギーは

$$E = E_n = -\frac{Z^2}{2n^2} \quad \left(\text{もとの単位で } E = -\frac{Z^2me^4}{2\hbar^2n^2} \right) \quad (267)$$

と離散化されることが示される (導出は 8.9.2 節). $E_1 \geq E < 0$ の範囲に無数のエネルギー準位が存在しており, $E = 0$ に近づくにつれて準位が密になり準連続的なスペクトルに移行する^{*92}.

^{*91} 古典論においてこの $V(r)$ から導かれる力 $\mathbf{F} = -\nabla V$ は, 1.7.2 節で見た Coulomb の法則に従う静電場 \mathbf{E} から電荷が受ける力 $(-e)\mathbf{E}$ を与える.

^{*92} ここで一般に無限遠でゼロになるポテンシャルに対して, $E < 0$ のスペクトルは離散的であるのに対し, $E > 0$ のスペクトルは連続的であることを思い出す [16, pp.108–110].

また対応する (すなわち与えられた n, l の値に対する) 動径関数は,

$$L_{\nu}^k(x) \equiv \sum_{s=0}^{\nu-k} (-1)^{s+k} \frac{(\nu!)^2}{s!(s+k)!(\nu-s-k)!} x^s \quad (k=0, 1, \dots, \nu) \quad (268)$$

で定義される Laguerre 陪多項式を用いて

$$R(\rho) = R_{nl}(\rho) = \text{const} \cdot \rho^l e^{-\rho/2} L_{n+l}^{2l+1}(\rho) \quad (269)$$

(ただし $\rho \equiv \frac{2rZ}{n}$) と表されることが示される (導出は 8.9.2 節). 規格化定数を条件

$$1 = \int |\psi|^2 r^2 dr d\Omega = \int_0^{\infty} |R|^2 r^2 dr \int |Y_l^m|^2 d\Omega = \int_0^{\infty} |R|^2 r^2 dr \quad (270)$$

から定めると (この式は原子単位ともとの単位とで変わらない),

$$R(\rho) = \frac{2Z^{3/2}}{n^2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{[(n+l)!]^3}} \cdot \rho^l e^{-\rho/2} L_{n+l}^{2l+1}(\rho) \quad (271)$$

を得る (導出は 8.9.2 節) [18, p.352] [24, p.93]. 上式 (270) に見て取れるように, 粒子 (電子) を動径方向の距離 r に見出す確率の密度は $|rR|^2$ で与えられることにも注意しよう [16, p.152].

ここで量子数について説明する. 球対称な場の問題に対して l は方位量子数, m は磁気量子数と呼ばれる. 慣習的に $l = 0, 1, 2, \dots$ の状態は, アルファベット s, p, d, ... で表される. n は主量子数と呼ばれ, その値のとり得る範囲 $n \geq l+1$ は l で決まる. $l = 0, 1, 2, \dots$ なので $n = 1, 2, \dots$ が可能である. よって n と l の値に応じて, 例えば次のような状態が得られる.

$$\begin{aligned} s &\leftrightarrow l=0 \Rightarrow n=1, 2, 3, 4, \dots \rightarrow 1s, 2s, 3s, 4s, \dots \\ p &\leftrightarrow l=1 \Rightarrow n=2, 3, 4, \dots \rightarrow 2p, 3p, 4p, \dots \\ d &\leftrightarrow l=2 \Rightarrow n=3, 4, \dots \rightarrow 3d, 4d, \dots \end{aligned}$$

なお n の代わりに, 最低準位に対して $n_r = 0$ となる動径量子数 $n_r = n - l - 1$ を用いることができる [16, p.151].

逆にあらかじめ n を指定すると, l は n 個の値

$$l = 0, 1, \dots, n-1$$

をとり得る. しかるにエネルギー固有値 (267) は量子数 n だけで決まっているので, 各エネルギー準位は l について縮退していることになる (これは Coulomb 場に特有の事情である). さらに軌道角運動量の一般論より, l で指定される各状態は m について $(2l+1)$ 重に縮退している. こうして n 番目のエネルギー準位の縮退度は

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2$$

となる.

最後に $n = 1$ (したがって $l = 0, m = 0$) の基底状態に限って, 一般式 (271) が具体的にどのような結果を意味するかを見よう. 議論を確定するために, 水素原子 ($Z = 1$) を考える. このとき $L_1^1(\rho) = -1, \rho = 2r$ より, 波動関数 ψ は

$$R_{10} = -2e^{-r}, \quad Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad \psi = R_{10}Y_0^0 = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-r}$$

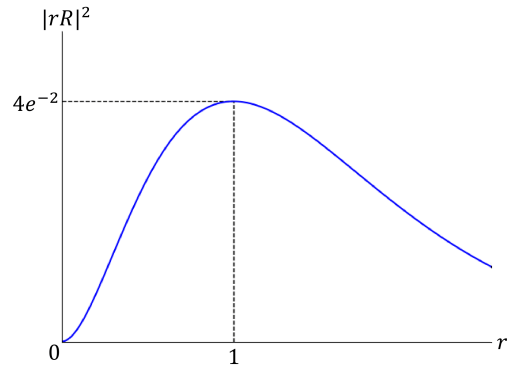


図 27 基底状態の水素原子における，電子の動径方向の存在確率分布

と求まる．すなわち基底状態では波動関数自身も球対称であり，波動関数は $r = 1$ (Bohr 半径) 程度の広がりを持つ．動径方向の確率分布は

$$f(r) \equiv |rR|^2 = 4r^2e^{-2r}$$

であり (今の場合 ψ の球対称性より，これは $f = 4\pi r^2|\psi|^2$ としても得られる)，これは Bohr 半径 $r = 1$ で極大となる (図 27 参照)． $f(r)$ による平均値

$$\langle r \rangle \equiv \int_0^\infty r f(r) dr = \frac{3}{2} \quad (272)$$

は Bohr 半径の $3/2$ 倍である (導出は 8.9.2 節) [18, pp.352–353].

3 量子電磁力学 (QED)

■表記法など 本章と続く第4章では以下の約束に従う。

- 断りのない限り,
 - 時空の4成分 0, 1, 2, 3 をとる添字にギリシア文字 $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots$ を用い,
 - 空間成分 1, 2, 3 のみをとる添字にラテン文字 i, j, k, \dots を用いることにする.
- 重力場がない場合を考えて慣性系を用い, 慣性系での計量テンソル (Minkowski 計量) の全成分を

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とする流儀を採用する.

- 任意の反変ベクトルを $a^\mu = (a^0, \mathbf{a})$ または $a = (a^0, \mathbf{a})$ のように書く.
ここに \mathbf{a} はベクトル a^μ の空間成分である.
- 自然単位系を採用する.
これは Planck 定数 h を 2π で割った値 \hbar , および真空中の光速 c が

$$\hbar = 1, \quad c = 1$$

となる単位系である [10, pp.101–102]*93.

- 電磁気学の単位系として Heaviside-Lorentz 単位系を採用する.
作用の自由電磁場項 $S_f = a \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^4x$ (1.6.1 節) において, Gauss 単位系では係数の値が $a = -1/16\pi$ と選ばれていたのに対し, Heaviside 単位系では $a = -1/4$ となる. すると Maxwell 方程式は

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu \quad \rightarrow \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = -j^\mu$$

のように 4π が除かれて簡略化され ($c = 1$ も考慮した), 他方 Coulomb の法則や Biot-Savart の法則, 遅延ポテンシャルの式に 4π が現れる [3, pp.77–78]. (対照的に Gauss 単位系では, Maxwell 方程式が 4π を含む代わりに Coulomb の法則が簡単になる (第1章).)

- 素電荷を e と書く.
微細構造定数 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137.04}$ を定義する (普通の単位系では $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{137.04}$) [10, p.102].

■ボゾンとフェルミオン [17, pp.252–257] [16, pp.219–225] 量子力学では不確定原理により, 個々の粒子の位置を時間追跡することはできない. このため複数の同種粒子を互いに区別することは原理的に不可能であり, 2つの粒子を入れ替えた系の状態はもとの状態と物理的に同等である. 以下, このことの含意を調べよう. 今, N 個の同種粒子から成る系を考え, 便宜的に (ある瞬間に) $i = 1, \dots, N$ の番号を各粒子に割り当てる.

*93 このとき例えば (波数) = (運動量) = (エネルギー) = (質量), (長さ) = (時間) = (質量)⁻¹ であり, 任意の量は質量のべきとして表される. また, 一般に指数関数の引数は無次元である. ここで作用 S , 運動量 \mathbf{p} , 位置ベクトル \mathbf{r} , エネルギー E , 時刻 t , 角運動量 \mathbf{J} に対して

$$1 = [S] = [Et] = [\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}] = [\mathbf{J}]$$

なので, $e^{iS}, e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)}, e^{i\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\phi}$ といった表現において位相は確かに無次元である (\mathbf{n} は単位ベクトル, ϕ は角度を表す).

そして i 番目の粒子の状態を指定する変数の組 (位置やスピンの z 成分など) をまとめて ξ_i で表し, 系全体の基本状態を

$$|\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\rangle = |\xi_1\rangle |\xi_2\rangle \cdots |\xi_N\rangle$$

と書く. すると上で述べた事情により, i 番目と j 番目の粒子 (の状態) を入れ替えても, 系全体の状態は位相しか変わらない.

$$|\cdots, \xi_i, \cdots, \xi_j, \cdots\rangle = e^{i\alpha} |\cdots, \xi_j, \cdots, \xi_i, \cdots\rangle.$$

ここに α は実数であり, 粒子の同等性より位相因子 $e^{i\alpha}$ は粒子対 i, j の選び方には依らない. 再び ξ_i と ξ_j を入れ替えると状態はもとに戻るので,

$$(e^{i\alpha})^2 = e^{2i\alpha} = 1, \quad \therefore \alpha = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots, \quad \therefore e^{i\alpha} = \pm 1$$

でなければならない. すなわち状態は粒子の入れ替えに関して対称 ($e^{i\alpha} = +1$) か, 反対称 ($e^{i\alpha} = -1$) かのいずれかであることになる. 基本状態 (固有状態) $|\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\rangle$ の重ね合せによって得られる任意の状態 $|\psi\rangle$ (したがって波動関数 $\psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = \langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N | \psi \rangle$) も同じ (反) 対称性を持つ.

同種粒子系の状態が対称か反対称かは, 粒子の種類に応じて決まっており,

- 対称な状態によって記述される粒子をボゾン
- 反対称な状態によって記述される粒子をフェルミオン

と呼ぶ. フェルミオン系に対して基本状態 $|\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\rangle$ は反対称性により, $|\xi_i\rangle = |\xi_j\rangle$ とおくとゼロになるので, 2つ以上の粒子が同時に同じ状態を占めることはできない (Pauli の排他律). このように状態の (反) 対称性は粒子の統計性を支配する.

ところで一般に粒子のスピンは整数 ($0, 1, 2, \dots$) または半整数 ($\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$) であり (2.8.4 節), ひとまず経験事実として述べると,

- ボゾンは整数スピンを持つ.
- フェルミオンは半整数スピンを持つ.

我々は 3.5.4 節において, このような粒子のスピンの統計性の関係を論じる機会を持つ.

3.1 場の量子論の準備

3.1.1 場の正準交換関係 [10, p.35]

任意の (ボゾン) 場 $\phi_r(x) (r = 1, 2, \dots)$ の理論を考えよう. 空間を体積 ΔV の胞 (セル) に分割し, 各格子点 (胞の中心点) における場の値 ϕ_r を力学変数と見なす. このとき胞に含まれる共役な運動量は $\pi_r \Delta V$ だから ($\pi_r \equiv \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\phi}_r$: 運動量密度, \mathcal{L} : Lagrangian 密度), Heisenberg 描像の場の演算子に対して通常の正準交換関係は

$$[\phi_r(j, t), \pi_s(j', t) \Delta V] = i\hbar \delta_{rs} \delta_{jj'}, \quad [\phi_r(j, t), \phi_s(j', t)] = 0, \quad [\pi_r(j, t), \pi_s(j', t)] = 0$$

と書ける. ただし j, j' は格子点を指定する番号である. 体積 $\Delta V \rightarrow 0$ の極限をとると, 場の交換関係を

$$[\phi_r(\mathbf{x}, t), \pi_s(\mathbf{x}', t)] = i\hbar \delta_{rs} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad [\phi_r(\mathbf{x}, t), \phi_s(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad [\pi_r(\mathbf{x}, t), \pi_s(\mathbf{x}', t)] = 0$$

と設定すれば良いことが分かる (\mathbf{x}, \mathbf{x}' は胞 j, j' の中の格子点, 9.1.1 節参照). これらは同時刻交換関係である.

3.1.2 量子力学における対称性と保存則

一般に系が何らかの操作に関して対称性を持つとき、それに付随する系の保存量が見出される。1.3.2節ではこのことを古典論の水準で学んだ。量子論では、対称性と保存則の関係は次のようにまとめられる(詳しくは9.1.2節を参照) [10, pp.35–36]。ユニタリー演算子 $U = e^{i\alpha T}$ (α : 実数の連続パラメーター, T : Hermite 演算子) による, ($\alpha = 0$ で恒等変換とつながった) 連続的な変換に対して*94, 任意の状態 $|\Psi\rangle$ と演算子 O はユニタリー変換

$$|\Psi\rangle \rightarrow |\Psi'\rangle = U|\Psi\rangle, \quad O \rightarrow O' = UOU^\dagger$$

を受ける。

このとき

$$\begin{aligned} \text{系の対称性} &\Leftrightarrow H \text{ の対称性} \\ &\Leftrightarrow [T, H] = 0 \\ &\Leftrightarrow T \text{ は運動の定数.} \quad (\because \text{Heisenberg 方程式}) \end{aligned} \quad (273)$$

これを踏まえ、以下では古典場の大域的な位相変換 (51): $\phi'_r = e^{i\varepsilon} \phi_r$, etc. から導かれる“電荷” Q (式 (52)) の保存について、量子論の立場から考察しよう。

準備として場を演算子と見なし、必要となる交換関係を調べておく。3.1.1節の正準交換関係 $[\phi_r(\mathbf{x}, t), \pi_s(\mathbf{x}', t)] = i\hbar \delta_{rs} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, etc. を用いると*95

$$[Q, \phi_r(x)] = -q\phi_r(x), \quad [Q, \phi_r^\dagger(x)] = +q\phi_r^\dagger(x) \quad (274)$$

が導かれる(導出は9.1.2節)。

ここから ϕ_r と ϕ_r^\dagger はそれぞれ、電荷 q を消滅・生成させることが示される。すなわち Q の固有値 Q' を持つ固有状態を $|Q'\rangle$ と書くと、

$$\phi_r |Q'\rangle \sim |Q' - q\rangle, \quad \phi_r^\dagger |Q'\rangle \sim |Q' + q\rangle. \quad (275)$$

(確認は9.1.2節で行う。)

電荷の式 (52):

$$Q = \frac{-iq}{\hbar} \int d^3x [\pi_r(x)\phi_r(x) - \pi_r^\dagger(x)\phi_r^\dagger(x)]$$

を見ると、これがゼロでない値を持つためには場 ϕ_r は非 Hermite でなければならないことが分かる。また Q は Hermite 演算子となることが見て取れる。そこで位相変換 (51) に対応するユニタリー変換を

$$U = e^{i\alpha Q}, \quad \phi'_r = U\phi_r U^\dagger \simeq \phi_r + i\alpha [Q, \phi_r] = (1 - i\alpha q)\phi_r$$

と書くと、 $\varepsilon = -\alpha q$ と同定すれば良いことが分かる。このとき古典論の水準で位相変換 (51) に対して Lagrangian が不変ならば、対応するユニタリー変換に対しても Hamiltonian は不変でなければならない。このとき量子論における対称性と保存則の一般論(冒頭)から、再び Q は運動の定数(保存量)となることが帰結される。

*94 この形の演算子 U を考える動機については、平行移動の演算子に関する議論 (2.3節) を参照

*95 その際 ϕ_r と ϕ_r^\dagger は独立な場なので、 ϕ_r は π_r 以外のすべての場と可換であることに注意する。

3.2 Klein-Gordon 場

本節では、スピンのゼロで有限の固有質量を持つ相対論的な物質粒子を考察する。そのような粒子はスカラー場 (Klein-Gordon 場) によって記述される。これは最も単純な場の理論であり、本節の結果は後から必要となる。ただし本稿では実 Klein-Gordon 場のみを取り上げ、複素 Klein-Gordon 場については割愛する。

3.2.1 実 Klein-Gordon 場 [10, pp.45–50]

質量 m の粒子の 4 元運動量 $p = (E, \mathbf{p})$ は、

$$p^2 = m^2 \quad (E^2 = m^2 + \mathbf{p}^2)$$

の関係を満たす。そこで非相対論的な量子力学からの類推により

$$p_\mu = i\partial_\mu \quad \left(\mathbf{p} \rightarrow -i\nabla, \quad E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} \right)$$

と置き換えると、演算子の関係 $\square + m^2 = 0$ (ただし $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu$) が得られる。今、対象としている粒子が単一のスカラー場 $\phi(x)$ で記述されるものと仮定すると、 $\phi(x)$ は場の方程式

$$(\square + m^2)\phi = 0 \tag{276}$$

を満たさなければならないと考えられる。これを Klein-Gordon 方程式と呼ぶ^{*96}。

このように演算子への置き換えによって 1 粒子の波動方程式を導出する手続きを‘第一’量子化と呼ぶことがある。しかしながら $\phi(x)$ を 1 粒子の波動関数と解釈しようとする、

- 粒子密度の正定値性の欠如
- エネルギー $E = \pm\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ の 2 通りの符号

に起因した困難が生じる。正しくは $\phi(x)$ を古典場と見て場を量子化しなければならず (第二量子化)、このとき得られる多体の理論にはそのような困難は生じない。

以上の議論では粒子の種類を仮定しておらず、質量 m のあらゆる相対論的な粒子に当てはまらなければならないと考えられる。次に π 中間子や K 中間子のようにスピンのゼロの粒子を考えると、場の角運動量の一般式 (50) において $S_{rs}^{\alpha\beta} = 0$ でなければならないから、そのような粒子はスカラー場によって記述されることになる。特に電氣的に中性の粒子を想定すると、実スカラー場を考えれば良いことになる (荷電粒子は複素場によって記述される, 3.1.2 節)。そこで原理として、実スカラー場の適正な Lagrangian 密度を

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \{ (\partial_\alpha \phi)(\partial^\alpha \phi) - m^2 \phi^2 \} \tag{277}$$

で与える。この \mathcal{L} はスカラーになっており、それ故、場の方程式の不変性が保証される。また \mathcal{L} は場の 1 階微分までを含んでおり、古典的因果律が満たされる。すると $\phi(x)$ の運動方程式として Klein-Gordon 方程式 (276) が導かれる (導出は 9.2.1 節)。そして平面波解 $\phi \sim e^{-ip \cdot x}$ が期待される分散関係 $p^2 = m^2$ を満たすことが、逆に保証される^{*97}。

^{*96} Klein-Gordon 方程式における質量 m は、自然単位系を採用しない場合には $\mu = mc/\hbar$ になる。これは Compton 波長 (を 2π で割った値) $\lambda = \hbar/2\pi mc$ の逆数である。

^{*97} 平面波 $e^{\mp i p \cdot x}$ に対し $\partial_\mu = \mp i p_\mu$, $p_\mu = \pm i \partial_\mu$, $\square \equiv \partial^2 = (ip)^2$ である。

ここで実 Klein-Gordon 場 ϕ を Hermite 演算子と見て量子化を行う。 ϕ に対して共役な場は

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}$$

となるので、正準交換関係は

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}', t)] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad [\dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}', t)] = 0 \quad (278)$$

である。この含意を調べるために、Klein-Gordon 方程式 (276) の解を

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x), \quad (279)$$

$$\phi^+(x) = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} a(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x}, \quad (280)$$

$$\phi^-(x) = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} a^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x} \quad (281)$$

と Fourier 展開する。ただし $k^0 = \omega_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$ である。またここでは便宜的に空間を一辺 L 、体積 $V = L^3$ の立方体領域と見なして周期境界条件

$$\phi(0, y, z, t) = \phi(L, y, z, t), \quad \text{etc.}$$

を課しており、和は離散的な波数ベクトル $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}\mathbf{n}$ (\mathbf{n} は整数を成分に持つベクトル) にわたってとる。展開係数 $a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})$ を互いに Hermite 共役としてあるため、場 ϕ の Hermite 性が保証されている。

波数の離散化について 周期境界条件の下で許容される離散的な値 \mathbf{k} の各々は、波数空間において体積 $(2\pi/L)^3$ を占める。よって $L \rightarrow \infty$ の極限で離散的な和 $\sum_{\mathbf{k}}$ は Fourier 積分 $\int \frac{d^3k}{(2\pi/L)^3}$ に移行する。より正確には、 $L \rightarrow \infty$ の極限で L は定義されていないから、積分への移行の規則は

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

と書くのが好ましい。逆に \mathbf{k} についての積分は、体積 $V = L^3$ の空間を考えることにより離散的な和として理解できる。

「正振動数部分」「負振動数部分」 非相対論的な量子力学における、エネルギー $E(\equiv \omega)$ の状態の時間依存性 $e^{-i\omega t}$ と比べたとき、振動数にあたる量の正負 $\pm\omega_{\mathbf{k}} \geq 0$ に応じて ϕ^+ を正振動数部分、 ϕ^- を負振動数部分と呼ぶ。正振動数部分は消滅演算子のみを含み、負振動数部分は生成演算子のみを含んでいる。

すると正準交換関係 (278) は、展開係数に対する調和振動子の交換関係

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = 0, \quad [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 0 \quad (282)$$

になる (証明は 9.2.1 節)^{*98}。このため $a(\mathbf{k})$ は消滅演算子、 $a^\dagger(\mathbf{k})$ は生成演算子となる。そして真空状態 $|0\rangle$ を条件

$$a(\mathbf{k}) |0\rangle = 0 \quad (\text{全ての } \mathbf{k} \text{ に対して}) \quad (283)$$

^{*98} これを見越して場の展開式 (279)–(281) において、因子 $\left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2}$ をくり出して係数 $a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})$ を定義しておいた。

によって定義すると、数演算子 $N(\mathbf{k}) = a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})$ の固有値 (占有数) $n(\mathbf{k})$ を持つ固有状態

$$|\cdots, n(\mathbf{k}), \cdots\rangle \sim \prod_{\mathbf{k}} [a^\dagger(\mathbf{k})]^{n(\mathbf{k})} |0\rangle$$

が作られる。これはエネルギーが $\omega_{\mathbf{k}}$, 運動量が \mathbf{k} の各モードを $n(\mathbf{k})$ 個の粒子が占有している状態と解釈される^{*99}。この解釈は Klein-Gordon 場の Hamiltonian H と運動量演算子 \mathbf{P} を計算すると,

$$H = \int d^3x \frac{1}{2} \left\{ \dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 \right\} \quad (284)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left(N(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right), \quad (285)$$

$$\mathbf{P} = - \int d^3x \dot{\phi} \nabla\phi \quad (286)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \left(N(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right) \quad (287)$$

となることから裏付けられる (導出は 9.2.1 節, これらは期待されるように時刻 t に依らない保存量となっている)。

なお真空状態を定義する式 (283) は, 粒子が全くない $n(\mathbf{k}) = 0$ の状態を表していることになる。この条件は場の演算子 (280) を用いて, 等価的に

$$\phi^+(x)|0\rangle = 0 \quad (\text{全ての } x \text{ に対して})$$

と書くこともできる。

占有数はゼロ以上の任意の整数値 $n(\mathbf{k}) = 0, 1, 2, \dots$ を取り得るから, Klein-Gordon 場によって記述される粒子はボゾンである。生成演算子同士は可換なので, 同種ボゾン系は粒子の入れ替え操作に関する対称性を持つ。

$$a^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}')|0\rangle = a^\dagger(\mathbf{k}')a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle.$$

Hamiltonian の式 (285) より, 真空状態でのエネルギー期待値は $\langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}$ となる。これは無限大の定数である。そこでこれを省き, 真空状態のエネルギー期待値がゼロとなるようにエネルギーを測る基準をとり直すと, Hamiltonian は

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} N(\mathbf{k})$$

に置き換わる。これは Hamiltonian を正規 (順序) 化することと等価であることを説明する。正規順序化とは, 演算子積を全ての消滅演算子が全ての生成演算子よりも右側に配置される順序に並び替えることを指す。この際, ボゾン系に関しては, すべての演算子が可換であるかのように考えて順序変更を施せば良い。Hamiltonian の無限大の定数を捨てる操作が正規順序化と等価であることは, 任意の正規積について, その真空期待値が必ずゼロになることから理解できる。この点をより丁寧に考察すると次のようになる。Hamiltonian における無限大の定数 $\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}$ は, 演算子積 $a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k})$ を $a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})$ に置き換えるときのおつりの項である交換子 $[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})]$ に由来する (9.2.1 節参照)。正規順序化はこのゼロでない交換子を積極的に捨てる操作であって, それ故すべてのボゾン因子を可換であるかのように扱うことが, 正準交換関係に反していることは問題ない。

^{*99} 自然単位系では, 4 元波数ベクトル $k = (\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$ は 4 元運動量 $p = (E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$ に一致する。

正規順序化された演算子積を正規積と呼び、 $N[\dots]$ で表す：

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \omega_{\mathbf{k}} N [a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}) + a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})] = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} N(\mathbf{k}).$$

もう少し具体例を挙げておこう。

$$\begin{aligned} N[a(\mathbf{k}_1)a(\mathbf{k}_2)a^\dagger(\mathbf{k}_3)] &= a^\dagger(\mathbf{k}_3)a(\mathbf{k}_1)a(\mathbf{k}_2) = a^\dagger(\mathbf{k}_3)a(\mathbf{k}_2)a(\mathbf{k}_1), \\ N[\phi(x)\phi(y)] &= N[\phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^+(x)\phi^-(y) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^-(y)] \\ &= \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^-(y). \end{aligned}$$

演算子の順序は量子化の前には任意に入れ替えられるので、正規順序化によって古典論との対応が損なわれることはない。

3.2.2 共変な交換関係 [10, pp.53–56]

実 Klein-Gordon 場 ϕ を考えよう。微視的因果律によれば信号は光速を超えられないから、空間的に隔たる任意の 2 つの時空点 x, y における場 $\phi(x), \phi(y)$ の観測は互いに干渉を及ぼさない (不確定関係を持たない)。この条件は

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0, \quad \text{for } (x - y)^2 < 0 \quad (288)$$

と表される。ところで空間的に隔たった時空点 x, y が同時刻となるような座標系を見出すことは常に可能であり、そのような座標系で上式 (288) は正準交換関係

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = 0$$

として満たされている。しかるにスカラー場の交換子 $[\phi(x), \phi(y)]$ はスカラーだから、任意の座標系で上式 (288) が成り立つことになる。

次に交換子 $[\phi(x), \phi(y)]$ を具体的に評価しよう。場の Fourier 展開 (279) と調和振動子の交換関係 (282) を利用すると、

$$[\phi^+(x), \phi^-(y)] = i\Delta^+(x - y), \quad (289)$$

$$[\phi^-(x), \phi^+(y)] = i\Delta^-(x - y), \quad (290)$$

$$[\phi(x), \phi(y)] = i\Delta(x - y) \quad (291)$$

を得る (導出は 9.2.2 節)。ただし ($V \rightarrow \infty$ の極限を想定して書くと)、

$$\Delta^+(x) \equiv -\frac{i}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} e^{-ik \cdot x}, \quad (292)$$

$$\Delta^-(x) \equiv -\Delta^+(-x) = \frac{i}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} e^{ik \cdot x}, \quad (293)$$

$$\Delta(x) \equiv \Delta^+(x) + \Delta^-(x) = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} \sin(k \cdot x) \quad (294)$$

である。

$$i\Delta(x - y) = [\phi(x), \phi(y)] = -[\phi(y), \phi(x)] = -i\Delta(y - x)$$

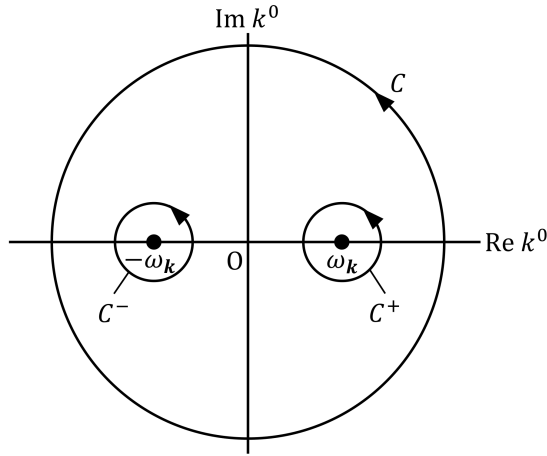


図 28 関数 $\Delta^\pm(x), \Delta(x)$ を複素 k_0 平面上の積分で表すときの積分路

の関係から期待されるように、式 (294) の $\Delta(x)$ は奇関数となっていることが見て取れる。また同時刻交換関係 $[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = 0$ から期待されるように、 $x^0 = 0$ に対して式 (294) の被積分関数は \mathbf{k} の奇関数となり、 $\Delta(x)$ はゼロになる。さらに $\Delta^\pm(x)$ は、したがって $\Delta(x)$ は Klein-Gordon 方程式

$$(\square_x + m^2)\Delta^\pm(x - y) = 0, \quad (\square_x + m^2)\Delta(x - y) = 0 \quad (295)$$

を満たす*100。

交換関係 (291) の共変性は、左辺の交換子 $[\phi(x), \phi(y)]$ がスカラーなので、右辺の Δ 関数もまたスカラーであれば保証される。ところが Δ 関数の式 (294) は、 k^0 を \mathbf{k} と独立な変数として

$$\Delta(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^4k \delta(k^2 - m^2) \varepsilon(k_0) e^{-ik \cdot x} \quad (296)$$

と書き直すことができる (導出は 9.2.2 節)。ここに

$$\varepsilon(k_0) \equiv \frac{k_0}{|k_0|} = \begin{cases} +1 & (k_0 > 0 \text{ に対して}) \\ -1 & (k_0 < 0 \text{ に対して}) \end{cases}$$

である。固有 Lorentz 変換 (本義 Lorentz 変換, 空間反転や時間反転を含まない Lorentz 変換) では過去と未来が入れ替わらないので、符号 $\varepsilon(k_0)$ は不変である。よって体積要素 d^4k , 4 元内積 $k^2 - m^2$, $k \cdot x$ が不変量であることを考え合わせると、式 (296) の Δ 関数は Lorentz スカラーとなっていることが明白である。

最後に、 Δ 関数は図 28 のような複素 k^0 平面上の閉路 C^\pm, C に沿う積分

$$\Delta^\pm(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C^\pm} \frac{d^4k e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2}, \quad \Delta(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_C \frac{d^4k e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2} \quad (297)$$

として表現できる (証明は 9.2.2 節)。

*100 $e^{\mp ik \cdot (x-y)}$ が Klein-Gordon 方程式の基本解であることによる。

$$(\square_x + m^2)\Delta^\pm(x - y) = \frac{\mp i}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_k} (\square_x + m^2) e^{\mp ik \cdot (x-y)} = 0.$$

3.2.3 中間子の伝播関数 [10, pp.56–61]

本節では実 Klein-Gordon 場を対象として、共変な摂動論の体系的な展開のために重要となる Feynman の Δ_F 関数を導入する。

まず 2 つのボゾン場 $A(x), B(x)$ に対して、時間順序化積 (T 積) を

$$\begin{aligned} T\{A(x)B(x')\} &\equiv \begin{cases} A(x)B(x') & (t > t' \text{ のとき}) \\ B(x')A(x) & (t < t' \text{ のとき}) \end{cases} \\ &= \theta(t-t')A(x)B(x') + \theta(t'-t)B(x')A(x) \end{aligned}$$

で定義する。ただし $t \equiv x^0, t' \equiv x'^0$ であり、

$$\theta(t) \equiv \begin{cases} 1 & (t > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (t < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

は段差関数 (階段関数) である。T 積は引数の時刻の順序が右から左の順序になるように演算子が並び替えられ、より早い時刻の演算子が先に状態ベクトルに作用する形となっている。

さて、 Δ_F 関数を実 Klein-Gordon 場同士の T 積の真空期待値

$$i\Delta_F(x-x') \equiv \langle 0|T\{\phi(x)\phi(x')\}|0\rangle = \begin{cases} \langle 0|\phi(x)\phi(x')|0\rangle & (t > t' \text{ のとき}) \\ \langle 0|\phi(x')\phi(x)|0\rangle & (t < t' \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって定義する。Klein-Gordon 場は中間子を記述し、左辺の Δ_F もしくは右辺の真空期待値は、“中間子の Klein-Gordon 場に関する Feynman 伝播関数” (あるいは単に“中間子の伝播関数”) と呼ばれる。その意味は次のように解釈される。

- $t > t'$ の場合の伝播関数 $\langle 0|\phi(x')\phi(x)|0\rangle$
中間子が時空点 x' において生成され、 x まで伝播して消滅する過程を表す。
- $t < t'$ の場合の伝播関数 $\langle 0|\phi(x)\phi(x')|0\rangle$
中間子が時空点 x において生成され、 x' まで伝播して消滅する過程を表す。

そのような過程として、具体的には核子-核子散乱における核子間での仮想中間子の交換が考えられる (図 29 参照)。

Feynman 伝播関数の解釈について 実際、例えば $t < t'$ の場合の Feynman 伝播関数は

$$\langle 0|\phi(x')\phi(x)|0\rangle = (\langle 0|\phi^+(x')\rangle \cdot \langle \phi^-(x)|0\rangle)$$

と見ることができる。ここで

$$\phi(x)|0\rangle = \phi^-(x)|0\rangle = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2} e^{i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} |\mathbf{k}\rangle$$

は 1 粒子状態 $|\mathbf{k}\rangle \equiv a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle$ の重ね合せとなっており、非相対論的な量子力学における Heisenberg 描像の基底ケット

$$|\mathbf{x}, t\rangle = e^{iHt} \left(\sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}| \right) \cdot |\mathbf{x}\rangle \sim \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} |\mathbf{k}\rangle$$

との類似性より、これは粒子が時刻 t に位置 \mathbf{x} に局在している状態と解釈できる。

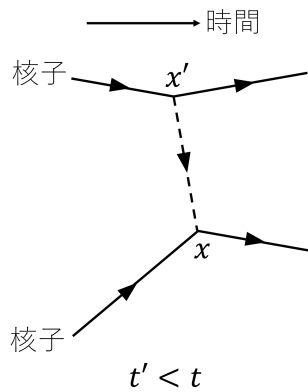


図 29 核子-核子散乱に対する 1-中間子交換からの寄与

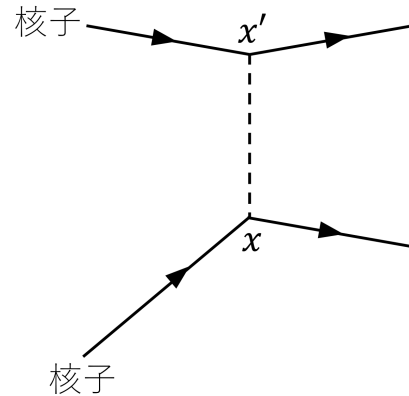
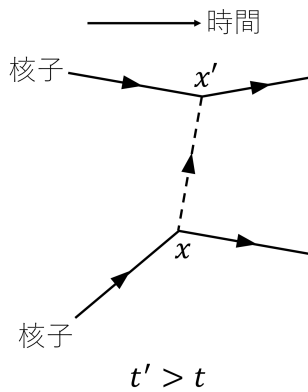


図 30 1-中間子交換による核子-核子散乱を表す Feynman グラフ

「仮想中間子」について 図 29 の Feynman ダイアグラムを例にとって述べると、時空点 x または x' では、一方の核子 (質量を M とする) から核子と中間子が生成される。ここで始状態の核子はその静止系ではエネルギー M を持つ。ところが中間子を運動量 p が $p^2 = m^2$ を満たす (質量殻に乗る) 物理的な粒子と仮定する限り、崩壊により核子と中間子を生じるには、エネルギー保存則より始状態の核子はそれらの静止エネルギーの和 $m + M$ 以上のエネルギーを持たなければならない。これは核子間を伝播する中間子が決して物理的な粒子ではあり得ないことを意味する。このように一般には、中間状態の粒子が物理的な粒子であること (質量殻上に乗っていること) は期待できない [2, p.598].

中間子の放出と吸収が起こる 2 つの時空点 x, x' が空間的に隔たっている場合 ($(x - x')^2 < 0$),

- 時刻 t, t' の前後は座標系に依存する。そこで図 29 の 2 つのグラフをまとめて図 30 のような単一の Feynman グラフで表し、中間子線から伝播方向を表す矢印を取り除く。
- 素朴に解釈すると、中間子が光速を超える速さで 2 点間を伝播することになる。実際には点 x (または x') を発した中間子が一度消滅し、再度別の時空点に生成してから点 x' (または x) に伝播する量子力学的過程が、確率的に起こっていると解釈しなければならない。

式 (289), (290) より, Δ_F 関数は

$$\begin{aligned}
 i\Delta_F(x - x') &= \begin{cases} \langle 0|\phi(x)\phi(x')|0\rangle = \langle 0|\phi^+(x)\phi^-(x')|0\rangle = \langle 0|[\phi^+(x), \phi^-(x')]|0\rangle & (t > t' \text{ のとき}) \\ \langle 0|\phi(x')\phi(x)|0\rangle = \langle 0|\phi^+(x')\phi^-(x)|0\rangle = \langle 0|[\phi^+(x'), \phi^-(x)]|0\rangle & (t < t' \text{ のとき}) \end{cases} \\
 &= \pm \Delta^\pm(x - x') \quad (t \gtrless t' \text{ のとき}) \\
 &= \theta(t - t')\Delta^+(x - x') - \theta(t' - t)\Delta^-(x - x')
 \end{aligned}$$

と表すこともできる。ここから Δ_F が確かに差 $x - x'$ の関数であることが読み取れる。

Feynman 伝播関数は式 (297) と同様の、波数 (運動量) 空間における積分 (Fourier 展開)

$$\Delta_F = \int_{C_F} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2} \quad (298)$$

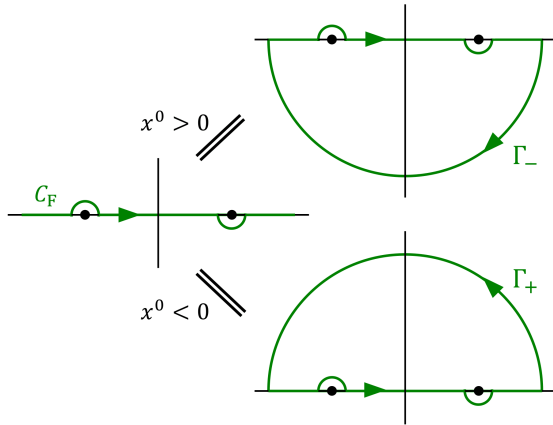


図 31 伝播関数 $\Delta_F(x)$ を複素 k_0 平面上の積分で表すときの積分路 C_F

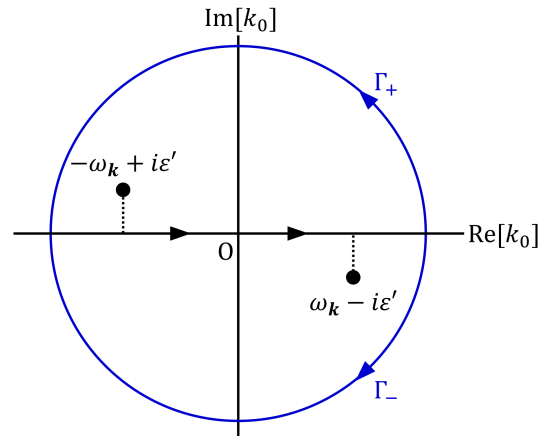


図 32 複素 k_0 平面上の極 $k_0 = \pm\omega_k \mp i\varepsilon'$ と半円 Γ_{\pm}

で与えられる (導出は 9.2.3 節). ただし複素 k_0 平面上の積分路として, 図 31 のように極 $k_0 = \pm\omega_k$ をよける径路 C_F をとる.

代わりに

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (299)$$

と書いて, k^0 に関する積分を実軸に沿って行っても良い. ただし ε は微小な正数であり, 積分 (299) を実行した後でゼロとおくものとする. この措置は図 32 のように極を実軸からずらすことにある (説明は 9.2.3 節).

3.3 電磁場

本節では自由電磁場の正準量子化について述べる. 電磁ポテンシャル (または単に電磁場) を A^μ , 電磁場テンソルを $F_{\mu\nu}$ と書く (電磁ポテンシャル A^μ と電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ については 1.4.1 節を参照せよ).

3.3.1 古典電磁場

自由電磁場の正準量子化に先立ち, ここでは古典電磁場について論じる [10, pp.87–92]. 古典電磁気学において自由電磁場は Lagrangian 密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (300)$$

によって記述され (1.4 節参照)^{*101}, 特に電磁場 A^μ として Lorenz 条件

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (301)$$

を満たすものを考えると, 場の方程式として波動方程式

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = 0 \quad (302)$$

が導かれる (1.7 節参照). Lorenz 条件を採用することの利点は, その式 (301) が座標変換に対して共変的であることと (1.1.1 節参照), 場の方程式が波動方程式 (302) に単純化されることにある.

^{*101} ただしここでは電磁気学の単位系として Heaviside 単位系を用いているため, 係数が $-1/4$ となっている.

ここで便宜的に空間を一辺 L , 体積 $V = L^3$ の立方体領域と見なして周期境界条件

$$A^\mu(0, y, z, t) = A^\mu(L, y, z, t), \quad \text{etc.}$$

を課すと, 離散的な 4 元波数ベクトル

$$k = (\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}), \quad \mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}, \quad \omega_{\mathbf{k}} \equiv |\mathbf{k}|$$

を用いて (\mathbf{n} は整数を成分に持つベクトル), 波動方程式 (302) の解は

$$A^\mu(x) = A^{\mu+}(x) + A^{\mu-}(x), \quad (303)$$

$$A^{\mu+}(x) \equiv \sum_{\mathbf{k}, r} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x}, \quad (304)$$

$$A^{\mu-}(x) \equiv \sum_{\mathbf{k}, r} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) a_r^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x} \quad (305)$$

と Fourier 展開される ($r = 0, 1, 2, 3$, 1.7.3 節参照). ただし $k \cdot x = \omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ は 4 元内積である ($x \equiv (t, \mathbf{x})$). また, この段階では展開係数 $a_r(\mathbf{k}), a_r^\dagger(\mathbf{k})$ は演算子ではなく通常の数であり, 後の都合のために因子 $(1/2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}$ をくくり出してある. 展開係数 $a_r(\mathbf{k}), a_r^\dagger(\mathbf{k})$ を互いに複素共役にとり $\varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})$ を実数の 4 元ベクトルとすると, 電磁場 A^μ が実数であることが保証される. $\varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})$ は偏極ベクトルと呼ばれる.

例えば特定の波数ベクトル \mathbf{k} を考え $\mathbf{k}/|\mathbf{k}| = (0, 0, 1)$ となる座標系をとり, $\varepsilon_1(\mathbf{k}), \varepsilon_2(\mathbf{k}), \varepsilon_3(\mathbf{k}) \equiv \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ を互いに直交する単位ベクトル

$$\varepsilon_1(\mathbf{k}) = (1, 0, 0), \quad \varepsilon_2(\mathbf{k}) = (0, 1, 0), \quad \varepsilon_3(\mathbf{k}) = (0, 0, 1)$$

として

$$\varepsilon_0^\mu = n^\mu \equiv (1, \mathbf{0}), \quad (306)$$

$$\varepsilon_r^\mu = (0, \varepsilon_r(\mathbf{k})), \quad r = 1, 2, 3 \quad (307)$$

とすると, 電磁場 $A^\mu \equiv (\phi, \mathbf{A})$ の Fourier 展開 (303),(304),(305) において $r = 0$ の項はスカラーポテンシャル ϕ を, $r = 1, 2$ の項はベクトルポテンシャル \mathbf{A} の横波成分を, $r = 3$ の項はベクトルポテンシャル \mathbf{A} の縦波成分を成す. このため ε_0^μ はスカラー偏極, $\varepsilon_1^\mu, \varepsilon_2^\mu$ は横偏極, ε_3^μ は縦偏極と呼ばれる. このように電磁場を横波成分に限定せずに 4 つの偏極ベクトルを導入したことにより, 電磁場の Fourier 展開 (303),(304),(305) は座標変換に対して共変的な形となる. ところが電磁波は本来, 横波だから (1.7.3 節参照), $r = 0, 3$ の 2 つの偏極状態は系の実際に持つ自由度に比べて余分な自由度であることになる. これについては 3.3.2 節で改めて論じる.

任意の座標系では偏極ベクトルの成分は式 (306), 式 (307) のように具体的には指定されず,

$$\zeta_0 = -1, \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 1$$

として偏極ベクトル (306),(307) の満たす性質

$$\varepsilon_r(\mathbf{k}) \cdot \varepsilon_s(\mathbf{k}) \equiv \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}) = -\zeta_r \delta_{rs}, \quad r, s = 0, 1, 2, 3, \quad (308)$$

$$\sum_r \zeta_r \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}) = -g^{\mu\nu} \quad (309)$$

のみが要請される (上式 (308) 最右辺では r について和をとらない, 9.3.1 節参照). 座標系を変えるとベクトルの成分は変化するため, 偏極ベクトルの具体的な表式 (306),(307) は特定の座標系でしか成り立たないのに対し, 偏極ベクトルの正規直交性 (308) と完全性の条件 (309) は座標変換に対して共変的であり (1.1.1 節参照), 任意の座標系で成り立つ関係式である.

3.3.2 節で電磁場に正準量子化を施す際, 電磁場 A^μ と共役な場

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu}$$

(ドットは時間微分を表す) を Heisenberg 描像の演算子と見なして同時刻交換関係

$$[A^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] = ig^{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (310)$$

を課す. ところが Lagrangian 密度 (300) に対して共役な場は式 (91):

$$\pi^\mu = -F^{0\mu}, \quad \therefore \pi^0 = 0$$

で与えられ (Gauss 単位系との係数 4π の違いに注意), これは交換関係 (310) を満たすことができない. そこで Lagrangian 密度を

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) \quad (311)$$

に改める. これは Fermi によって提案されたものである. このとき再び Lorenz 条件の下での場の方程式 (302) が導かれるため, 電磁場の Fourier 展開 (303),(304),(305) は変更されない (9.3.1 節参照). また Lagrangian 密度 (311) はどの成分もゼロとならない共役な場

$$\pi^\mu = -\dot{A}^\mu \quad (312)$$

を与えるため, 正準量子化に適している (9.3.1 節参照). (量子化の後に Lorenz 条件を適正に考慮する必要がある.)

■光子のスピン ここでは c と \hbar をあからさまに書く.

粒子の静止系では軌道角運動量がゼロになるので, 粒子のスピン \mathbf{S} は静止系での全角運動量として定義できる. ところが光子はすべての慣性系に対して光速で運動しているので, この定義を適用することはできない. このように光子のスピン概念は限られた意味しか持たない [16, pp.376-377]. しかしながら素朴には光子のスピンを 1 と見なせることが次のように理解できる [25, pp.59-60]. 光子が z 方向に運動している場合を考えれば, 軌道角運動量の z 成分はゼロになるので, スピンの z 成分 S_z は全角運動量の z 成分 J_z として求まる. 共変な取り扱いを放棄し, Coulomb ゲージ $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \phi = 0$ を想定して場 \mathbf{A} の z 方向を向いた波数 $\mathbf{k} = (0, 0, k)$ に関する Fourier 成分を取り出すと

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \left\{ (a_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2 e^{i(kz - \omega_{\mathbf{k}} t)} + (\text{複素共役}) \right\}$$

となる. 偏極ベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2$ (xy 面内の単位ベクトルである) をそれぞれ x, y 方向に選ぶと, z 軸周りの角度 ϕ の空間回転は振幅の変更の規則

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = R_z(\phi) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

に帰着する (これは光子場を考えているからである). $R_z(\phi) = e^{-iJ_z\phi/\hbar}$ から角運動量 (の行列表現) J_z を読み取ると

$$J_z = i\hbar \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{R_z(\phi) - 1}{\phi} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

であり, これは

$$\begin{aligned} \text{固有値 } J_z = +\hbar & & \text{固有ベクトル } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \\ \text{固有値 } J_z = -\hbar & & \text{固有ベクトル } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を持つ. 固有値 $J_z = \pm\hbar$ より光子はスピン 1 と見なせる. ただしスピンの第 3 成分 ($J_z = 0$) は, 光子場の横波の性質のために現れない. なお古典的な描像では, $J_z = \pm\hbar$ に対応する振幅 $(a_1, a_2) \sim (1, \pm i)$ は場

$$\mathbf{A} \sim (\boldsymbol{\varepsilon}_1 \pm i\boldsymbol{\varepsilon}_2) e^{i(kz - \omega_k t)}$$

を意味する. 古典電磁気学で調べたことから分かるように (1.7.3 節, 7.7.3 節), これは右回りと左回りの円偏光状態を表す [10, pp.9–10].

参考——重力子のスピン 1.8.3 節で見出した弱い重力場の変換則

$$\begin{pmatrix} h'_{xx} \\ h'_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{xx} \\ h_{xy} \end{pmatrix}$$

は, 2 つの独立な波 $\varphi_{\pm} = (h_{xx} \pm ih_{xy}) e^{ik \cdot x}$ に対する変換則 $\varphi'_{\pm} = e^{\mp 2i\theta} \varphi_{\pm}$ を意味する [4, pp.189–190]. ここから同様に角運動量の固有値を読み取ると $J_z = \pm 2\hbar$ である. 重力子はスピン 2 を持つ [6, p.137].

3.3.2 自由電磁場の正準量子化

ここでは自由電磁場の正準量子化について述べる [10, pp.92–95]. 電磁場 A^μ と共役な場 (312): $\pi^\mu = -\dot{A}^\mu$ を Heisenberg 描像における演算子と見なして, 正準交換関係として同時刻交換関係 (310):

$$\begin{aligned} [A^\mu(\mathbf{x}, t), A^\nu(\mathbf{x}', t)] &= 0, & [\pi^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] &= 0, & [A^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] &= ig^{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ \Leftrightarrow [A^\mu(\mathbf{x}, t), \dot{A}^\nu(\mathbf{x}', t)] &= 0, & [\dot{A}^\mu(\mathbf{x}, t), \dot{A}^\nu(\mathbf{x}', t)] &= 0, & [A^\mu(\mathbf{x}, t), \dot{A}^\nu(\mathbf{x}', t)] &= -ig^{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned} \quad (313)$$

を課するのが自然である. これは電磁場の Fourier 展開 (303), (304), (305) における展開係数 $a_r(\mathbf{k}), a_r^\dagger(\mathbf{k})$ に対する交換関係

$$[a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] = \zeta_r \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad [a_r(\mathbf{k}), a_s(\mathbf{k}')] = 0, \quad [a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] = 0 \quad (314)$$

になる (9.3.2 節参照).

このとき場の交換関係は

$$[A^\mu(x), A^\nu(x')] = iD^{\mu\nu}(x - x'), \quad D^{\mu\nu}(x) \equiv -g^{\mu\nu} \Delta(x) \quad (315)$$

と計算される (第 9.3.2 節参照). ここに

$$\Delta(x) \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} \sin(k \cdot x)$$

は Klein-Gordon 場の交換関係 (の $1/i$ 倍) を表す不変 Δ 関数 (297) である (ただし $m = 0, \omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$). また Feynman の光子伝播関数は

$$\langle 0 | T \{ A^\mu(x) A^\nu(x') \} | 0 \rangle = i D_F^{\mu\nu}(x - x'), \quad D_F^{\mu\nu}(x) \equiv -g^{\mu\nu} \Delta_F(x) \quad (316)$$

となる (第 9.3.2 節参照). ここに

$$\Delta_F(x) \equiv \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 + i\varepsilon}$$

は Klein-Gordon 場に関する Feynman 伝播関数 (299) である (ただし $m = 0, \omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$).

さて, $r = 1, 2, 3$ に対しては $\zeta_r = 1$ なので, 式 (314) は生成・消滅演算子に対する交換関係 (208):

$$[a_r(\mathbf{k}), a_r^\dagger(\mathbf{k})] = 1, \quad [a_r(\mathbf{k}), a_r(\mathbf{k})] = 0, \quad [a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_r^\dagger(\mathbf{k})] = 0$$

になる (\mathbf{k}, r の異なる値を持つ展開係数 $a_r(\mathbf{k}), a_r^\dagger(\mathbf{k})$ どうしは交換する). そこで $a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_r(\mathbf{k})$ をそれぞれ $r = 1, 2$ に対しては運動量 \mathbf{k} を持つ横波光子の生成・消滅演算子, $r = 3$ に対しては運動量 \mathbf{k} を持つ縦波光子の生成・消滅演算子と解釈する. 一方 Gupta-Bleuler 理論に従い, $\zeta_r = -1$ となる $r = 0$ に対しても $a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_r(\mathbf{k})$ をそれぞれ運動量 \mathbf{k} を持つスカラー光子の生成・消滅演算子と解釈する. さらに真空状態 $|0\rangle$ をどの種類の光子も含んでいない状態, すなわち全ての \mathbf{k}, r に対して

$$a_r(\mathbf{k}) |0\rangle = 0$$

を満たす状態と定義し, 占有数演算子を

$$N_r(\mathbf{k}) = \zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) \quad (317)$$

で定義する. このとき偏極の添字 r で指定され, 運動量 \mathbf{k} を持つ各状態 (モード) (\mathbf{k}, r) を光子が $n_r(\mathbf{k})$ 個占有している状態

$$|\cdots, n_r(\mathbf{k}), \cdots\rangle = C \left\{ \prod_{\mathbf{k}', s} a_s^\dagger(\mathbf{k}')^{n_s(\mathbf{k}')} \right\} |0\rangle \quad (318)$$

(C は規格化定数) に対して, $N_r(\mathbf{k})$ の固有値は $n_r(\mathbf{k})$ となることが示される (9.3.2 節参照). このため式 (317) を占有数演算子と呼ぶのはもっともなことである.

さらに全ての r に対して $a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_r(\mathbf{k})$ をそれぞれ光子の生成・消滅演算子と解釈したことを正当化するために, 系のエネルギーを考える. それは Hamiltonian

$$H \equiv \int d^3 x \left\{ \pi^\mu(x) \dot{A}_\mu(x) - \mathcal{L}(x) \right\}$$

の固有値である. ここに電磁場の Fourier 展開 (303), (304), (305) を代入すると (ただし展開係数 $a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_r(\mathbf{k})$ はもはや通常の数ではなく, それぞれ生成・消滅演算子と見なされている), Hamiltonian は生成・消滅演算子を用いて

$$H = \sum_{\mathbf{k}, r} \frac{1}{2} \omega_{\mathbf{k}} \zeta_r \{ a_r(\mathbf{k}) a_r^\dagger(\mathbf{k}) + a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) \} \quad (319)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}, r} \omega_{\mathbf{k}} \zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, r} \omega_{\mathbf{k}} \quad (320)$$

と表される (9.3.2 節参照).

ここでもエネルギーを測る基準をとり直して、真空状態でのエネルギー期待値 $\langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},r} \omega_{\mathbf{k}}$ を取り除くために、Hamiltonian を

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3x N \left[\pi^\mu(x) \dot{A}_\mu(x) - \mathcal{L}(x) \right] \\
&= \sum_{\mathbf{k},r} \frac{1}{2} \omega_{\mathbf{k}} \zeta_r N \left[a_r(\mathbf{k}) a_r^\dagger(\mathbf{k}) + a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) \right] \\
&= \sum_{\mathbf{k},r} \omega_{\mathbf{k}} \zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) \\
&= \sum_{\mathbf{k},r} \omega_{\mathbf{k}} N_r(\mathbf{k})
\end{aligned} \tag{321}$$

と正規順序化する。

さて、演算子 $a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_r(\mathbf{k})$ の解釈の問題に戻ろう。全ての r に対してこれらをモード (\mathbf{k}, r) の光子の生成・消滅演算子と見なすとき、式 (318) で定義される $|\dots, n_r(\mathbf{k}), \dots\rangle$ は各モード (\mathbf{k}, r) を $n_r(\mathbf{k})$ 個の光子が占める状態となる。ところで Einstein の関係によれば、モード (\mathbf{k}, r) を占める 1 個の光子はエネルギー $\omega_{\mathbf{k}}$ を持つから、この状態のエネルギーは $\sum_{\mathbf{k},r} \omega_{\mathbf{k}} n_r(\mathbf{k})$ となるはずである。そして Hamiltonian の式

$$(321): H = \sum_{\mathbf{k},r} \omega_{\mathbf{k}} N_r(\mathbf{k}) \text{ はここから期待される通りの固有方程式}$$

$$H |\dots, n_r(\mathbf{k}), \dots\rangle = \left\{ \sum_{\mathbf{k},r} \omega_{\mathbf{k}} n_r(\mathbf{k}) \right\} |\dots, n_r(\mathbf{k}), \dots\rangle$$

を満たすため、矛盾なく全ての r に対して $a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_r(\mathbf{k})$ をそれぞれモード (\mathbf{k}, r) の光子の生成・消滅演算子と見なすことができる。こうして電磁場は光子によって構成されているという描像に移行し、自由電磁場の量子化が達成される。

最後に電磁場の Fourier 展開 (303),(304),(305) に導入された $r = 0, 3$ の余分な偏極状態について述べる。電磁場のスカラー偏極 ε_0^μ 、縦偏極 ε_3^μ に関する成分を構成するのがそれぞれスカラー光子と縦波光子であった。ここで Lorenz 条件 (301) を適切に考慮すると、観測量の期待値にはスカラー光子と縦波光子は寄与せず、それ故、スカラー光子と縦波光子は (自由粒子の形では) 観測されないことが示される*102。以下では系のエネルギー期待値に関してこのことを確認して満足することにする。

まず、古典電磁場に対する Lorenz 条件 (301) はそのままの形では量子化された場に対する演算子の式と見なせないことに注意する。と言うのも、場の演算子 A^μ が Lorenz 条件 (301): $\partial_\mu A^\mu = 0$ を満たすとすると

$$0 = [\partial_\mu A^\mu(x), A^\nu(x')] = \partial_\mu [A^\mu(x), A^\nu(x')]$$

でなければならない (∂_μ は x' の関数 $A^\nu(x')$ には作用しないから)。しかし最右辺の交換関係は式 (315): $iD^{\mu\nu}(x-x')$ であり、その微分 $i\partial_\mu D^{\mu\nu}(x-x')$ は恒等的にはゼロとならないからである。そこで Gupta-Bleuler 理論に従い、古典電磁場に対する Lorenz 条件 (301) に対応する量子論における条件として、状態ケット $|\Psi\rangle$ は次式を満たさなければならないものとする。

$$\partial_\mu A^{\mu+} |\Psi\rangle = 0. \tag{322}$$

*102 中間状態の仮想光子としてはスカラー光子と縦波光子も許容され、それらは電荷の同時刻 Coulomb 相互作用に関する [10, pp.96-99].

ここに $A^{\mu+}$ は式 (304) で定義される, 消滅演算子のみを含む項である. このとき期待値に関する Lorenz 条件

$$\langle \Psi | \partial_\mu A^\mu | \Psi \rangle = \langle \Psi | \cdot (\partial_\mu A^{\mu+} | \Psi \rangle) + (\langle \Psi | \partial_\mu A^{\mu-} \cdot | \Psi \rangle) = 0$$

が成立し, 古典的な極限で Lorenz 条件 (301): $\partial_\mu A^\mu = 0$ が満たされることになる.

式 (306) のスカラー偏極, 式 (307) の横偏極, 縦偏極に対して条件式 (322) は

$$\{a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k})\} | \Psi \rangle = 0 \quad (\text{全ての } \mathbf{k} \text{ に対して}) \quad (323)$$

となり, ここから

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle = \langle \Psi | \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 \omega_{\mathbf{k}} a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) | \Psi \rangle \quad (324)$$

が帰結される (9.3.2 節参照). これはエネルギー期待値には横波光子 ($r = 1, 2$) だけが寄与することを意味している.

ゲージ条件により自由度が 2 つ除かれる理由 一見すると 1 つのゲージ条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ を考慮しただけで, 4 つの偏極状態から 2 つの自由度が除かれ, 観測量には横波光子 ($r = 1, 2$) しか寄与しないことが示されるのは不思議である. しかしながら Lorenz 条件を満たすポテンシャル A^μ は無数にあり, Lorenz ゲージの下でもなお, ゲージ変換 $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu f$ を行う自由度が残されている. そこでゲージ関数 f を固定すると, さらに自由度が 1 だけ減り, 古典論でよく知られているように電磁場の自由度は 2 となる^{*103*104}.

3.4 場の Lorentz 変換とスピノル

本節では Lorentz 変換に対する場の変換則を論じる. 特に興味を持たれるスピン 1/2 の粒子を記述するスピノル場の変換則を理解することが目的であり, 過度に一般的な内容には踏み入らない.

3.4.1 無限小変換 [26, pp.4–5]

Lorentz 変換 $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ における変換係数は, 無限小変換に対しては

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \varepsilon^\mu_\nu$$

という形をとる. ここに $\varepsilon_{\mu\nu}$ は添字に関して反対称な無限小パラメータである (1.3.2 節). (μ, ν) 成分

$$(M_{\rho\sigma})^\mu_\nu \equiv i(\delta^\mu_\rho g_{\sigma\nu} - \delta^\mu_\sigma g_{\rho\nu}) \quad (325)$$

を持つ 4×4 行列 $M_{\rho\sigma} (= -M_{\sigma\rho})$ を定義すると, 無限小 Lorentz 変換は

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu_\nu x^\nu = \left(1 - \frac{i}{2} \varepsilon^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma} \right)^\mu_\nu x^\nu$$

^{*103} このような事情は“軸性ゲージ”において, より見やすい. すなわち $A_0 = -\phi = 0$ と置くと, 場 A_μ の成分は 3 つになり, ここで物理的な状態 $|\Psi\rangle$ に対する補助条件 $(\nabla \cdot \mathbf{E}) |\Psi\rangle = 0$ を課すと, さらに自由度が 1 つ減る [29, p.94]

^{*104} 一見すると, 我々はゲージ条件を古典論と量子論の 2 段階で考慮していると考えたくなるかもしれない. すなわち, まず古典において, 自由電磁場はゲージ条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ を課すと波動方程式に従うため, 4 つの偏極ベクトルを用いて展開される. 次いで量子論において再びゲージ条件を式 (5.34): $\partial_\mu A^{\mu+}(x) |\Psi\rangle = 0$ によって考慮したところ, 合計 2 つの自由度が取り除かれ, 2 つの横波成分だけが観測量に寄与を持つことが説明される, と. しかし正しくは, 自由度は古典論の段階で 2 である.

と書き直され (最右辺の 1 は 4×4 の単位行列), これを繰り返して合成して得られる有限の変換は

$$x'^{\mu} = \left[\exp \left(-\frac{i}{2} \varepsilon^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma} \right) \right]^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

と表される.

有限の変換と無限小変換 一般に連続変数 $\{\alpha_k\}$ によって特徴付けられ, $\alpha_k \rightarrow 0$ で恒等変換と連続的につながっている連続変換の演算子として, ユニタリー演算子

$$U = e^{i\alpha_k T_k}$$

の形を考える. T_k は生成子と呼ばれ, U のユニタリー性より Hermite 演算子でなければならない. 具体例として量子力学における平行移動の演算子 $e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}/\hbar}$, 時間発展演算子 $e^{-iHt/\hbar}$, 空間回転の演算子 $e^{-i\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\phi/\hbar}$ を挙げることができる (ここでは \hbar を明示した). 無限小変換を想定すると $U \simeq 1 + i\alpha_k T_k$ である. 逆にもとの有限パラメーター α_k による変換は, 無限小パラメーター α_k/N (ただし $N \gg 1$) による変換を N 回合成することで

$$\left(1 + \frac{i\alpha_k T_k}{N} \right)^N \rightarrow \exp(i\alpha_k T_k) \quad (N \rightarrow \infty)$$

と合成される [18, p.64]. (詳しくは平行移動の演算子に関する 2.3 節の議論を参照.)

行列 $M_{\rho\sigma}$ は交換関係

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}) \quad (326)$$

を満たす (確認は 9.4.1 節).

“抽象的”な本義 Lorentz 変換の群 $SO(3,1)$ の元を

$$\hat{\Lambda} = \exp \left(-\frac{i}{2} \varepsilon^{\rho\sigma} \hat{M}_{\rho\sigma} \right) \quad (327)$$

と書いたときの“生成子” $\hat{M}_{\rho\sigma} (= -\hat{M}_{\sigma\rho})$ は, その x^{μ} の上での表現行列 $M_{\rho\sigma}$ と同じ交換関係

$$[\hat{M}_{\mu\nu}, \hat{M}_{\rho\sigma}] = -i(g_{\mu\rho}\hat{M}_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}\hat{M}_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}\hat{M}_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}\hat{M}_{\mu\rho}) \quad (328)$$

を満たさなければならない*105*106.

3.4.2 場の Lorentz 変換 [26, pp.5–6]

慣性系 O から O' への Lorentz 変換 Λ に対して, 同一の点の座標が $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ と変化するものとする. 一般に N 成分の場 $\varphi_i(x)$ を考えると ($i = 1, \dots, N$), 2 つの系 O, O' で見た同一の点における場の値 $\varphi_i(x), \varphi'_i(x')$ の間には線形関係

$$\varphi'_i(x') = D(\Lambda)_i^j \varphi_j(x)$$

が期待される. 係数 $D(\Lambda)_i^j$ は Lorentz 変換 Λ に応じて決まる $N \times N$ 行列 $D(\Lambda)$ を形成する. N 成分 $\varphi_i(x)$ を縦に並べたベクトル $\varphi(x)$ を定義すれば, 行列表記で $\varphi'(x') = D(\Lambda)\varphi$ と書ける.

*105 Lorentz 群は原点の移動を含まない線形変換 $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ から成る. 変換係数の行列式 $\Lambda \equiv |\Lambda^{\mu}_{\nu}|$ は $\Lambda = \pm 1$ のいずれかである (1.1.6 節の式 $J^2 = -g$ は Lorentz 変換に対して $\Lambda^2 = 1$ を意味するから). また計量テンソルの変換則 $g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} = g_{\rho\sigma}$ の $\rho = \sigma = 0$ 成分を考えると $\Lambda^0_0 = \pm \sqrt{1 + (\Lambda^i_0)^2}$ だから, $\Lambda^0_0 \geq 1$ または $\Lambda^0_0 \leq -1$ である. 空間反転・時間反転を含まない Lorentz 変換は特に本義 Lorentz 変換と呼ばれ, $\Lambda = +1$ かつ $\Lambda^0_0 \geq 1$ の場合に対応する [4, pp.36–42] [26, pp.2–3].

*106 本義 Lorentz 変換は恒等変換と連続的に繋がる群を成し, その条件 $\det(\Lambda^{\mu}_{\nu}) = +1$ により, この群は $SO(3,1)$ と書かれる. 元 $\hat{\Lambda}$ は言わば個々の Lorentz 変換の“名前”である. $\hat{M}_{\rho\sigma}$ がある表現行列 $M_{\rho\sigma}$ と同じ交換関係を満たすのは, 群の表現がその定義により, 元と同じ掛け算則を満たすことによる.

ここで $D(\Lambda)$ は群を成すことを説明する. 同一の点の座標がそれぞれ x^μ, x'^μ, x''^μ であり, 場の値がそれぞれ $\varphi, \varphi', \varphi''$ であるような 3 つの慣性系 O, O', O'' を改めて用意し, $O-O'$ 間の Lorentz 変換を Λ_1 , $O'-O''$ 間の Lorentz 変換を Λ_2 で表す. すると場の変換則は

$$\varphi''(x'') = D(\Lambda_2)\varphi'(x') = D(\Lambda_2)D(\Lambda_1)\varphi(x)$$

であり, 最右辺の係数 $D(\Lambda_2)D(\Lambda_1)$ は O から O'' への Lorentz 変換 $\Lambda_2\Lambda_1$ に対する変換係数に相当する:

$$D(\Lambda_2\Lambda_1) = D(\Lambda_2)D(\Lambda_1).$$

こうして Lorentz 変換 Λ の全体が Lorentz 群を成すのに対応して, 行列 $D(\Lambda)$ の全体もまた群を成す. そして上式を満たす行列 $D(\Lambda)$ は Lorentz 群の表現と呼ばれる.

場の変換係数 $D(\Lambda)$ は Lorentz 群の表現でなければならないため, Lorentz 群の (既約) 表現をすべて見出せば^{*107}, あらゆる可能な場のタイプを尽くすことができる. (Lorentz 群のどの表現に従って変換するかが, 場のタイプを決める.)

3.4.3 Lorentz 群の表現 [26, pp.6–8]

Lorentz 変換の生成子 $\hat{M}_{\mu\nu}$ の表現を $S_{\mu\nu} = D(\hat{M}_{\mu\nu})$ と書くと ($N \times N$ 行列), 有限 Lorentz 変換 (327): $\hat{\Lambda} = \exp\left(-\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu}\hat{M}_{\mu\nu}\right)$ には行列

$$D(\hat{\Lambda}) = \exp\left(-\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu}\right) \quad (329)$$

が対応する^{*108}. よって Lorentz 群の表現 $D(\hat{\Lambda})$ を求めるには, $S_{\mu\nu}$ を求めれば良い. ところが $S_{\mu\nu}$ は $\hat{M}_{\mu\nu}$ の交換関係 (328) と同様の交換関係を満たさなければならない. ここで $\hat{M}_{\mu\nu}$ の各成分を

$$J_i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\hat{M}^{jk}, \quad K_i \equiv \hat{M}_{i0} (= -\hat{M}_{0i})$$

と書いて演算子 $\mathbf{J} = (\hat{M}_{23}, \hat{M}_{31}, \hat{M}_{12})$, \mathbf{K} を定義すると, $\hat{M}_{\mu\nu}$ の交換関係 (328) は J_i, K_i に対する交換関係

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k, \quad [K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k \quad (330)$$

に焼き直される (確認は 9.4.2 節). さらに新たな演算子

$$\mathbf{A} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{J} + i\mathbf{K}), \quad \mathbf{B} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{J} - i\mathbf{K})$$

を定義すると, これらは (\hbar を単位として無次元化した) 角運動量の交換関係

$$[A_i, A_j] = i\varepsilon_{ijk}A_k, \quad [B_i, B_j] = i\varepsilon_{ijk}B_k, \quad [A_i, B_j] = 0 \quad (331)$$

を満たす (確認は 9.4.2 節). よって固有値 A, B は整数または半整数であり, それらの組 (A, B) に応じて A_3, B_3 の固有値 a, b はそれぞれ $(2A+1)$ および $(2B+1)$ 通りの値

$$a = -A, -A+1, \dots, A-1, A, \quad b = -B, -B+1, \dots, B-1, B$$

^{*107} 既約な場の組は互いに変換し合い, その数は場の適当な線形結合を作ること減らすことができない [16, p.91,208]. 実際ブロック対角な表現行列の既約な各ブロック D_i は, 基底の変更 (相似変換) によりさらに細かいブロックに分割することはできない. もしできたとすると, 部分表現 D_i が作用するベクトル \mathbf{v}_i はその中に不変部分空間を持つことになり, 定義より可約となるからである [21, pp.5–6]. (ただし逆に可約な (すなわち不変部分空間を持つ) 行列が, 常にブロック対角な形にできる (完全可約である) とは限らないことに注意する.)

^{*108} 無限小の Lorentz 変換 $\hat{\Lambda} = 1 - \frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu}\hat{M}_{\mu\nu}$ の表現が $D(\Lambda) = 1 - \frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu}$ であることによる. ここでは暗に $c = a + b$ ならば $D(c) = D(a) + D(b)$ という事実を用いている (これ以降も用いる).

が可能である。よって固有値 (A, B) で指定される Lorentz 群の表現に対応する場は $(2A+1)(2B+1)$ 成分場

$$\varphi_{a,b}^{(A,B)}(x)$$

である。これで可能な既約な場のタイプをすべて見出したことになる。

3.4.4 $SL(2, \mathbf{C})$ スピノル [26, pp.8-9]

最も簡単な表現として $(A, B) = (0, 1/2)$ および $(A, B) = (1/2, 0)$ の場合を考えよう。

まず表現 $(A, B) = (0, 1/2)$ に対する場 $\varphi_{a,b}^{(A,B)}(x)$ は 2 成分である ($a = 0, b = \pm 1/2$)。そのような場を $\xi_\alpha(x)$ ($\alpha = 1, 2$) と表記しよう。非相対論的量子力学で学んだように (2.8.4 節), このとき ξ_α の上での, \mathbf{A} -スピ, \mathbf{B} -スピンの表現は

$$D(\mathbf{A}) = 0, \quad D(\mathbf{B}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \quad (\boldsymbol{\sigma} : \text{Pauli 行列})$$

で与えられることになる (第 2 式は 3 本の関係式 $D(B_i) = \frac{\sigma_i}{2}$, $i = 1, 2, 3$ をまとめて書いている)。ここから \mathbf{J}, \mathbf{K} の表現は

$$D(\mathbf{J}) = D(\mathbf{A}) + D(\mathbf{B}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}, \quad D(\mathbf{K}) = -i\{D(\mathbf{A}) - D(\mathbf{B})\} = i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}$$

となる。有限 Lorentz 変換 (327): $\hat{\Lambda} = \exp\left(-\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu}\hat{M}_{\mu\nu}\right)$ は, パラメータ $\varepsilon^{\mu\nu}$ が

$$(\varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12}) = -\boldsymbol{\theta}, \quad (\varepsilon_{10}, \varepsilon_{20}, \varepsilon_{30}) = \boldsymbol{\omega}$$

で与えられるとき,

$$\hat{\Lambda} = \exp(i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J} + i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K})$$

と書ける^{*109}。よって表現行列 (329): $D(\hat{\Lambda}) = \exp\left(-\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu}D(\hat{M}_{\mu\nu})\right)$ は今の場合, (α, β) 成分

$$a_\alpha^\beta = [\exp\{i\boldsymbol{\theta} \cdot D(\mathbf{J}) + i\boldsymbol{\omega} \cdot D(\mathbf{K})\}]_\alpha^\beta = \left[\exp\left(i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\right]_\alpha^\beta \quad (332)$$

を持つ 2×2 行列 $a = (a_\alpha^\beta)$ になる。行列 a は $\det a = 1$ を満たす (証明は 9.4.3 節)。そして実数パラメータ $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}$ を変化させると a は 2×2 の複素数の行列全体を動くから, $SL(2, \mathbf{C})$ 群を成す^{*110}。 $(0, 1/2)$ 表現における場 $\xi_\alpha(x)$ は Lorentz 変換に際して, この a_α^β によって

$$\xi'_\alpha(x') = a_\alpha^\beta \xi_\beta(x) \quad (333)$$

と変換されるため, $SL(2, \mathbf{C})$ 群の $\mathbf{2}$ スピノルと呼ばれる。

次に点付きスピノル $\eta_{\dot{\alpha}}(\dot{\alpha} = 1, 2)$ を, ξ_α の複素共役 $(\xi_\alpha)^*$ と同様に変換する量として導入する。すなわち $a^*_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \equiv (a_\alpha^\beta)^*$ と表記すると,

$$(\xi'_\alpha)^*(x') = (a_\alpha^\beta)^* \xi_\beta^*(x) \quad \rightarrow \quad \eta'_{\dot{\alpha}}(x') = a^*_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}}(x). \quad (334)$$

^{*109} 実際,

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\hat{M}^{\mu\nu} = (\varepsilon_{23}\hat{M}^{23} + \varepsilon_{31}\hat{M}^{31} + \varepsilon_{12}\hat{M}^{12}) + (\varepsilon_{10}\hat{M}^{10} + \varepsilon_{20}\hat{M}^{20} + \varepsilon_{30}\hat{M}^{30}) = -\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J} - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}.$$

^{*110} $SL(2, \mathbf{C})$ 群は 2 次元複素特殊線形群とも呼ばれ, 「S」は行列式が 1 であることを, 「L」は線形を, 「2」は 2 次元を, 「C」は複素数を意味する。こうして Lorentz 群 $SO(3, 1)$ は 1 つの方法として, $SL(2, \mathbf{C})$ 群で表現できることになる。

この変換則に従う量 $\eta_{\dot{\alpha}}$ を $SL(2, \mathbf{C})$ 群の $\mathbf{2}^*$ スピノルと呼ぶ。これが表現 $(A, B) = (1/2, 0)$ の場合の場であることを説明できる (理由は 9.4.3 節)。

非相対論的量子力学においてスピン 1/2 の粒子の波動関数は、空間回転の際に $SU(2)$ 群のユニタリー・ユニモジュラー行列 $e^{-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\phi/2}$ で変換される 2 成分スピノルであったことから類推すると (2.8.4 節), Lorentz 変換に対してスピン 1/2 の粒子は $SL(2, \mathbf{C})$ 群の $\mathbf{2}$ スピノル $\xi_{\alpha}(x)$ および $\mathbf{2}^*$ スピノル $\eta_{\dot{\alpha}}(x)$ によって記述されると考えるのが自然である*111。

3.4.5 スピノル算法 [26, pp.9–13]

■添字の上げ下げ 2 階反対称テンソル $\epsilon^{\alpha\beta} \equiv \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \equiv \epsilon_{\alpha\beta} \equiv \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ (ただし $\epsilon^{12} = 1$) を不変量として導入することができる*112。行列表記では

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (= i\sigma_2)$$

であり、逆行列は

$$\epsilon^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \epsilon^T = -\epsilon$$

となる。スピノルの上げ下げはこれらを用いて行う*113。まず添字を上げる規則を

$$\xi^{\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta} \xi_{\beta}, \quad \eta^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}}$$

と約束する。(これは具体的には $\xi_1 = -\xi^2, \xi_2 = \xi^1$ を意味する。) このとき上式との整合性から、添字を下げるには ϵ の逆を用いて

$$\xi_{\alpha} = (\epsilon^{-1})_{\alpha\beta} \xi^{\beta} = -\epsilon_{\alpha\beta} \xi^{\beta}, \quad \eta_{\dot{\alpha}} = (\epsilon^{-1})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}} = -\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}}$$

としなければならない (最右辺の負号に注意)。代わりに和をとる添字を、常に「左が上、右が下」で隣り合う形

$$\xi_{\alpha} = \xi^{\beta} \epsilon_{\beta\alpha}, \quad \eta_{\dot{\alpha}} = \eta^{\dot{\beta}} \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}$$

に書くことにすれば、負号はあらわには現れない。

■スカラー 2 つの点なしスピノル $\xi_{\alpha}, \Xi_{\alpha}$ どうし、あるいは 2 つの点付きスピノル $\eta_{\dot{\alpha}}, H_{\dot{\alpha}}$ どうしのスピノル添字を縮約した量

$$\xi^{\alpha} \Xi_{\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta} \xi_{\beta} \Xi_{\alpha} = -\xi_{\beta} \Xi^{\beta}, \quad \eta^{\dot{\alpha}} H_{\dot{\alpha}} = -\eta_{\dot{\alpha}} H^{\dot{\alpha}} \quad (335)$$

はスカラーであることを証明できる (9.4.4 節参照)。

■4-ベクトル 1 対の点なし・点付きスピノルから 4 元ベクトルが作られることを説明する。

準備として 4 次元化した Pauli 行列

$$\sigma_{\mu} \equiv (1, \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}_{\mu} \equiv (1, -\boldsymbol{\sigma}) \quad (336)$$

*111 非相対論的理論とは対照的に、Lorentz 変換に対しては粒子の密度はスカラーではあり得ないから、スピノルの変換行列にはユニタリー性の条件は課されない [16, pp.384–385]。

*112 Levi-Civita 記号である。Lorentz 変換のパラメーター $\epsilon^{\alpha\beta}$ と区別するために、 ϵ の字体を用いている。

*113 つまりテンソルの添字の上げ下げにおいて計量テンソルが果たすのと同じ役割を、スピノルに対しては反対称テンソル ϵ が担う。

を定義する．ただし行列の成分を指定するスピノル添字は， $(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}}, (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\beta}$ を標準位置を約束する^{*114}.
 $\sigma_\mu, \bar{\sigma}_\mu$ の満たす性質もここで触れておくのが適当である：

$$\frac{1}{2}\text{tr}(\bar{\sigma}^\mu\sigma_\nu) = \delta^\mu_\nu, \quad (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}(\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\gamma}\delta} = 2\delta^\delta_\alpha\delta^{\dot{\gamma}}_{\dot{\beta}}, \quad (337)$$

$$\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu + \sigma_\nu\bar{\sigma}_\mu = \bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu + \bar{\sigma}_\nu\sigma_\mu = 2g_{\mu\nu}. \quad (338)$$

式 (337) の確認は 9.4.4 節で行う．式 (338) は反交換関係 $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$ からほぼ明らかである．

さて，式 (332) の行列 a に対して

$$\sigma_\mu\Lambda^\mu_\nu = a\sigma_\nu a^\dagger \quad (339)$$

が成り立つ (導出は 9.4.4 節)．このためスピノルの対 $\xi_\alpha, \eta_{\dot{\beta}}$ から

$$V_\mu = \xi^\alpha(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\eta^{\dot{\beta}} = \xi_\alpha(\epsilon^T\sigma_\mu\epsilon)^{\alpha\dot{\beta}}\eta_{\dot{\beta}} = \xi_\alpha(\bar{\sigma}_\mu^T)^{\alpha\dot{\beta}}\eta_{\dot{\beta}} \quad (340)$$

という量を作ると (第 2, 第 3 の等号については 9.4.4 節参照)，これは 4 元 (共変) ベクトルの変換則

$$V'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu V_\nu$$

に従って変換することになる (証明は 9.4.4 節)．

積 $\xi_\alpha\eta_{\dot{\beta}}$ のように変換する量 $V_{\alpha\dot{\beta}}$ を点なし・点付き混合スピノルと呼ぶ．これは 4 元ベクトル V_μ と等価である．実際，以上の議論は式 (340): $V_\mu = (\bar{\sigma}_\mu^T)^{\alpha\dot{\beta}}\xi_\alpha\eta_{\dot{\beta}} = (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\beta}\alpha}\xi_\alpha\eta_{\dot{\beta}}$ において $\xi_\alpha\eta_{\dot{\beta}} \rightarrow V_{\alpha\dot{\beta}}/2$ と置き換えた

$$V_\mu = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\beta}\alpha}V_{\alpha\dot{\beta}}, \quad \therefore V^\mu = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}\alpha}V_{\alpha\dot{\beta}} \quad (341)$$

が 4 元ベクトルとなることを意味している (ベクトル添字 μ はもちろん計量テンソルとの縮約で上げ下げして良い)．そして上式 (341) はスピノル表示 $V_{\alpha\dot{\beta}}$ (スピノル添字) をベクトル・テンソル表示 V_μ (ベクトル・テンソル添字) に移す規則を与えている．上式 (337) の第 2 式を用いてこれを $V_{\alpha\dot{\beta}}$ について逆に解くと，

$$V_{\alpha\dot{\beta}} = V^\mu(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \quad (342)$$

を得る．

■ $\sigma^{\mu\nu}$ 行列の導入 ここで 2×2 の行列 $\sigma^{\mu\nu}, \bar{\sigma}^{\mu\nu}$ を

$$(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta \equiv \frac{i}{2}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_\alpha^\beta, \quad (\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \equiv \frac{i}{2}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \quad (343)$$

で定義する．上式のスピノル添字の位置は標準位置のスピノル添字を持つ行列 $\sigma^\mu, \bar{\sigma}^\mu$ の積から得られる通りの構造となっており，この位置を行列 $\sigma^{\mu\nu}, \bar{\sigma}^{\mu\nu}$ のスピノル添字の標準位置と約束する．また行列 $\sigma^{\mu\nu}, \bar{\sigma}^{\mu\nu}$ は Lorentz 添字 μ, ν に関して反対称であることが見て取れる．そしてゼロでない独立な $\sigma^{\mu\nu}$ 行列は

$$(\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}) = \boldsymbol{\sigma}, \quad (\sigma_{10}, \sigma_{20}, \sigma_{30}) = i\boldsymbol{\sigma} \quad (344)$$

である (確認は 9.4.4 節)．ところがこれらはそれぞれ， $(0, 1/2)$ 表現のスピノル ξ_α 上での表現行列

$$D(\mathbf{J}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}, \quad D(\mathbf{K}) = i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}$$

^{*114} $\bar{\sigma}_\mu$ のスピノル添字を標準位置から下ろした $(\bar{\sigma}_\mu)_{\dot{\alpha}\beta} \equiv \epsilon_{\dot{\alpha}\gamma}\epsilon_{\beta\delta}(\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\gamma}\delta}$ を定義すると，これは σ_μ の複素共役 $[(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}}]^*$ となる．すなわちバーはもともと複素共役の意味である．

の2倍となっているから、 ξ_α の Lorentz 変換 (333) は具体的に

$$\xi'_\alpha(x') = a_\alpha^\beta \xi_\beta(x) = \left[\exp\left(-\frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right) \right]_\alpha^\beta \xi_\beta(x) \quad (345)$$

と書ける (確認は 9.4.4 節, つまり Lorentz 群生成子 $\hat{M}_{\mu\nu}$ の表現は $\sigma_{\mu\nu}/2$ に同定される). また $\eta_{\dot{\alpha}}$ の変換則 (333) より, $\eta^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\eta_{\dot{\beta}}$ の Lorentz 変換は

$$\eta'^{\dot{\alpha}}(x') = (\epsilon a^T \epsilon^T)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}}(x) = \left[\exp\left(-\frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu}\bar{\sigma}_{\mu\nu}\right) \right]^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}}(x) \quad (346)$$

となる (確認は 9.4.4 節).

3.5 Dirac 場

3.5.1 節ではスピノルの変換則を踏まえて, 古典場としての Dirac 場の理論を共変性が明白な形で導入する. この段階では Dirac 場と γ 行列の特定の表示 (スピノル表示) に依拠していることになる. そこで 3.5.2 節では表示に依らない定式化に移行する. 量子化の準備として, 平面波解による場の Fourier 展開を調べる. Dirac 場と γ に関する公式も, そこで本稿に必要な範囲で 1 通り説明する. 次いで 3.5.3 節では Dirac 場の正準量子化を行う. そこまでに得た知識を利用して, 粒子のスピンと統計性の関係について洞察を得ることができる (3.5.4 節). 最後に 3.5.5 節において, 応用上重要となるフェルミオンの伝播関数を計算する.

3.5.1 スピノル表示の Dirac 場と Dirac 方程式 [26, pp.23–27]

半整数のスピンを持つ粒子はフェルミオンと呼ばれる. 3.4.4 節で述べたように, 相対論的量子力学ではスピン 1/2 の粒子は, 変換則 (333),(334) で定義される **2** スピノルおよび **2*** スピノルの場

$$\xi_\alpha(x), \quad \eta^{\dot{\alpha}}(x)$$

によって記述される. 以後, これをスピノル添字の標準位置と約束する. ここで一般にこれら 2 種類のスピノルの力学 (ダイナミクス) は互いに独立ではなく, それ故, スピン 1/2 の相対論的粒子は $\xi_\alpha(x)$ と $\eta^{\dot{\alpha}}(x)$ の組

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \xi_\alpha(x) \\ \eta^{\dot{\alpha}}(x) \end{pmatrix}$$

で表されると考える. この 4 つの複素場 $\psi_\alpha(x)$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) を成分に持つスピノル $\psi(x)$ を Dirac 場 (Dirac スピノル) と呼ぶ. これに対応して 3.4.5 節で導入した 4 次元 Pauli 行列 $\sigma^\mu = (1, -\boldsymbol{\sigma})$, $\bar{\sigma}^\mu = (1, \boldsymbol{\sigma})$ を 2 階建てにし, 4×4 行列

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (347)$$

を定義する (スピノル添字の標準位置は相変わらず $(\sigma^\mu)_{\alpha\beta}$, $(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$). これを Dirac (の γ) 行列と呼ぶ. γ^0 を用い, Dirac 場に随伴する場 $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ を定義する. γ 行列は

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (348)$$

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \\ \gamma^{j\dagger} = -\gamma^j \quad (j = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (349)$$

を満たす (確認は 9.5.1 節). ただし上式 (348) の右辺には 4×4 の単位行列が掛かっているものと解す. また上式 (348) が $(\gamma^0)^2 = 1$ を含意していることを覚えておくのは有用である. 式 (349) は γ^0 が Hermite であるのに対し, γ^j は反 Hermite であることを意味している.

γ 行列の交換関係は

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \begin{pmatrix} (\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta & 0 \\ 0 & (\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \end{pmatrix} \quad (350)$$

と計算される (9.5.1 節参照)*115.

ここで

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

を定義する. 相異なる γ 行列は反交換することに注意すると, これは

$$\gamma_5 = \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$$

と書くこともできる (ここでは $\varepsilon_{0123} = +1$) [10, p.250]. 具体的には

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (351)$$

と成分計算される (確認は 9.5.1 節). γ_5 の固有値はカイラリティと呼ばれ, 2 成分スピノル $\xi_\alpha, \eta^{\dot{\alpha}}$ はカイラリティがそれぞれ $+1, -1$ の固有状態に対応している.

$$\gamma_5 \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}.$$

カイラリティが ± 1 の成分への Dirac スピノル ψ の分解は, 射影演算子 $(1 \pm \gamma_5)/2$ で行われる.

$$\frac{1 + \gamma_5}{2}\psi = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1 - \gamma_5}{2}\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}.$$

(3.5.2 節におけるヘリシティ射影演算子の説明を併せて参照.)

ところで $\xi_\alpha, \eta^{\dot{\alpha}}$ スピノルの変換則 (345), (346) を合わせると, Dirac スピノル ψ は上式 (350) の $\sigma^{\mu\nu}$ を用いて

$$\psi'(x') = \exp\left(-\frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right)\psi(x) \equiv A\psi(x) \quad (352)$$

と変換されることが分かる. この行列 A は

$$\bar{A}\gamma^\mu A = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu, \quad \bar{A} \equiv \gamma_0 A^\dagger \gamma_0 \quad (353)$$

を満たす (証明は 9.5.1 節). 上式 (352), (353) より,

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\psi}\psi \\ \bar{\psi}\gamma_5\psi \\ \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \\ \bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi \\ \bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi \end{array} \right\} \text{はそれぞれ} \left\{ \begin{array}{l} \text{スカラー} \\ \text{擬スカラー} \\ \text{ベクトル} \\ \text{軸性ベクトル (擬ベクトル)} \\ \text{(反対称な 2 階) テンソル} \end{array} \right\} \text{として変換する} \quad (354)$$

ことが示される (証明は 9.5.1 節).

*115 表記を区別していないが, 最左辺の 4×4 行列 $\sigma^{\mu\nu}$ と最右辺の 2×2 行列 $(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta$ の混同に注意する.

次に原理として、Dirac 場の古典的な力学 (ダイナミクス) を決定する Lagrangian (密度) は次式で与えられると宣言する.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi. \quad (355)$$

ここに m は粒子の質量であり, また任意の 4 元ベクトル A_μ に対して Feynman のスラッシュ記法

$$\not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu$$

を導入した. 式 (354) より Lagrangian 密度 (355) は Lorentz スカラーである. (このことはスピノル $\xi_\alpha, \eta^{\dot{\alpha}}$ の変換性に立ち戻って説明することもできる (9.5.1 節).) ここから理論の共変性が保証される. と言うのも Lagrangian 密度が, したがって作用がスカラーであれば, 作用の変分は座標系に依らない量なので, 作用が極値 (停留値) をとる条件に他ならない運動方程式も座標系の変更によって形を変えない.

Dirac 場の Lagrangian 密度 (355) から場の運動方程式として, Dirac 方程式

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = 0, \quad i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 \quad (356)$$

が導かれる (導出と 2 式の等価性の確認は 9.5.1 節). この Dirac 方程式の共変性は, 式 (352), (353) から直接確かめることもできる (9.5.1 節参照).

さらに Dirac 場 $\psi, \bar{\psi}$ に共役な場

$$\pi \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi)} = i\psi^\dagger, \quad \bar{\pi} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\bar{\psi})} = 0$$

を定義する^{*116}.

■Dirac 場に関する注意 Dirac 場はスピン 1/2 の粒子を“記述する”場であるけれど, これを 1 粒子の波動関数として解釈することはできない. 実際, 一時的に Dirac 場を 1 粒子の波動関数と考えるにしても, これから説明するように, 次いでそれを古典的な場と見なして場の量子化を行うと (第 2 量子化), 粒子の生成・消滅を含む過程を記述する理論が得られる.

また我々は量子化に先立って Dirac 場を古典場として取り扱うけれど, これは Dirac 場に古典的対応物があることを意味しない (このため原理的に量子論は古典論を含んでいるはずであると言えど, 理論の古典的極限を理解することは必ずしも容易ではない).

実際, フェルミオン場 ψ を量子化する際, これは反交換関係 $\{\psi, \psi\} = 0$ を満たす演算子と見なされる. このためフェルミオン場 ψ は (そして $\mathbf{2}$ スピノル ξ_α 場と $\mathbf{2}^*$ スピノル場 $\eta^{\dot{\alpha}}$ も) 本来, 古典場としては反交換関係 $\{\psi, \psi\} = 0$ を満たす Grassmann 場として扱わなければならない. その場合には例えば Grassmann 場 $\bar{\psi}$ や $\partial_0\psi$ による微分は通常微分とは異なり, 左微分の約束に従って行うものとされる. これは反交換関係を用いて Lagrangian 密度における $\bar{\psi}$ や $\partial_0\psi$ を Grassmann 場の積の左端まで移動し, “微分”によってそれを除去するというものである [1, pp.316–318] [20, pp.81–82]^{*117}. しかしながら本稿の水準では結果的に, Dirac 場が Grassmann 場であることに特別に注意を払う必要はない. (第 4 章では径路積分による QCD の定式化を説明する際, Dirac 場の Grassmann 場としての取り扱いにいくらか触れる予定である.)

^{*116} スピノル添字を明記すると, スピノルによる微分は $\pi_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi_\alpha)} = i\psi_\alpha^\dagger, \bar{\pi}_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\bar{\psi}_\alpha)} = 0$ の意味である.

^{*117} Grassmann 場としての取り扱いに移行するには, 式の符号を適当に改める必要が生じる. 例えば左微分の約束では $\pi \equiv -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi)}$ と定義する必要がある (反交換関係を用いて Lagrangian 密度における Grassmann 場 $\partial_0\psi$ を Grassmann 場の積の左端まで移動させる必要があるため) [20, p.94, p.211]. 他方, 文献 [26, p.40] では $\partial_0\psi$ による微分については右微分の約束をとっている. このとき共役な場の定義式 $\pi \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi)}$ には負号が現れない.

とは言い、電磁場中の粒子に対する Dirac 方程式は非相対論的極限で Schrödinger 方程式の形 (Pauli 方程式) に帰着することを示すことができ、この意味で Dirac 場の成分を波動関数と対応付けることができる。このとき同時に電子の磁気モーメントが理論的に導出される (3.6.1 節)。そして非相対論的な波動力学は短波長の極限として古典力学を含んでいる (2.7 節)。このように非相対論的極限を経由すれば、Dirac 理論の古典的極限を (間接的に) 理解することができる (以下の図式を参照)。

	相対論		非相対論
量子論	○	→	○
古典論			↓ ○

3.5.2 表示に依らない定式化 [10, pp.67–71]

我々は Dirac 場の古典論を、相対論的不変性が明白な形式で導入した。しかしながらそれは、Dirac 場と γ 行列の成分を特定する具体的な表示——スピノル表示——に依拠したものであった。具体的な表示に頼って理論を展開することは、普通は不適當である [16, p.394, p.397]。そこで Dirac 場の成分の選び方をあらかじめ決めないような一般の表示に移るには、Dirac 場と γ 行列にユニタリー変換

$$\psi \rightarrow U\psi, \quad \gamma^\mu \rightarrow U\gamma^\mu U^\dagger$$

を施せば良い [10, p.259]。このとき Dirac 場の 4 成分 ψ_α は、スピノル表示の 4 成分の 1 次結合として再定義される。また

- Dirac 場の Lagrangian 密度の表式 (355) とその (Lorentz 変換に対する) 不変性
- Dirac 方程式 (356) とその (Lorentz 変換に対する) 不変性

を始めとした 3.5.1 節までの主要な結論は保持されることになる。 γ 行列は依然として反交換関係 (348) と “Hermite 性” の条件 (349):

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$$

を満たす^{*118}。一般には γ 行列はこれらの性質を満たす 4×4 行列として定義される。ところで質量 m の相対論的な粒子を記述する場 ϕ は何であれ、Klein-Gordon 方程式 $(\square + m^2)\phi = 0$ を満たさなければならないと考えられる (3.2.1 節)。反交換関係 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ は Dirac 場 ψ の各成分が Klein-Gordon 方程式を満たすための条件となっている (証明は 9.5.2 節) [16, pp.396–397]。また第 2 式 $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$ は Lagrangian (密度) から導かれる ψ に対する Dirac 方程式と $\bar{\psi}$ に対する随伴する方程式が等価となることを保証する (9.5.1 節)。

Dirac 場の無限小 Lorentz 変換は

$$\psi_\alpha(x) \rightarrow \psi'_\alpha(x') = \psi_\alpha(x) - \frac{i}{4} \varepsilon_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \psi_\beta(x), \quad \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (357)$$

という形をとる (式 (352) を参照)。よって角運動量の一般式 (50) から、Dirac 場の角運動量

$$\mathbf{M} = \int d^3x \psi^\dagger(x) \{ \mathbf{x} \times (-i\nabla) \} \psi(x) + \int d^3x \psi^\dagger(x) \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \right) \psi(x) \quad (358)$$

^{*118} これらの性質を満たす任意の γ 行列への変換を受け持つユニタリー行列 U が存在することは、Pauli の基本定理によって保証されている。その証明は文献 [27, pp.395–399] に見られる。

が得られる (導出は 9.5.2 節). ただし $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12})$ であり*119, 右辺第 1 項が軌道角運動量に, 第 2 項がスピン角運動量に対応する.

Dirac 場の Lagrangian 密度 (355) は大域的位相変換の下で不変であり, これに付随する保存する電荷は一般式 (52) に基づき

$$Q = q \int d^3x \psi^\dagger \psi \quad (359)$$

と計算される. 対応する電荷-電流密度 (電磁カレント) は

$$s^\alpha = q \bar{\psi} \gamma^\alpha \psi \quad (360)$$

である (9.5.2 節参照). 実際にこれが連続の式を満たすことは, Dirac 方程式から直接に確かめることもできる (確認は 9.5.2 節).

自由 Dirac 場の正準量子化の準備として, 場の Fourier 展開に必要な Dirac 方程式の基本解を調べておく. 3.3.1 節と同様に, 便宜的に空間を一辺 L , 体積 $V = L^3$ の立方体領域と見なし, 周期境界条件

$$\psi(0, y, z, t) = \psi(L, y, z, t), \quad \text{etc.}$$

を課す. この下で許される運動量 $\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}$ (\mathbf{n} は整数を成分に持つベクトル) に対して平面波 $\psi(x) \sim e^{\mp i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$ が Dirac 方程式 $(i\partial - m)\psi = 0$ の解となるためには $p_0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \equiv \pm E_{\mathbf{p}}$ でなければならない*120. そこで以降 $p_0 = E_{\mathbf{p}}$ とすると, 周期境界条件の下で許される 4 元運動量は $\pm p = \pm(E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$ によって網羅されることになり, 基本解は

$$\psi(x) = u(\mathbf{p}) \frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{\sqrt{V}}, \quad \psi(x) = v(\mathbf{p}) \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{\sqrt{V}}$$

のいずれかの形をとる*121. 再びこれらが Dirac 方程式の解となることを要求すると, 4 成分スピノル $u(\mathbf{p}), v(\mathbf{p})$ はそれぞれ

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}) = 0, \quad (\not{p} + m)v(\mathbf{p}) = 0 \quad (361)$$

を満たさなければならない*122. この方程式はそれぞれスピンの向きへの自由度に起因する 2 個の独立な解を持つ. 実際スピンの運動量方向への射影 (ヘリシティ) の 2 倍

$$\sigma_{\mathbf{p}} = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$$

を定義すると (固有値 ± 1 , 角運動量の表式 (358) を参照), これは $(\pm\not{p} + m)$ と可換なので (確認は 9.5.2 節), 同時に固有値を指定できる [26, p.42]. そこで $\sigma_{\mathbf{p}}$ の固有状態を添字 $r = 1, 2$ によって区別して $u_r(\mathbf{p}), v_r(\mathbf{p})$ と書き,

$$\sigma_{\mathbf{p}} u_r(\mathbf{p}) = (-1)^{r+1} u_r(\mathbf{p}), \quad \sigma_{\mathbf{p}} v_r(\mathbf{p}) = (-1)^r v_r(\mathbf{p}), \quad r = 1, 2 \quad (362)$$

*119 2×2 Pauli 行列をまとめた表記 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ との混同に注意する. スピノル表示において見やすいように (3.5.1 節) 4×4 行列の集合 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12})$ は Pauli 行列の一般化にあたる.

*120 既に述べたように, Dirac 方程式は, Dirac 場が Klein-Gordon 方程式 $(\square + m^2)\psi = 0$ を満たすことを含意するため, 質量殻の条件 $p^2 = m^2$ が導かれる [25, p.78].

*121 これらは慣習的に, それぞれ正エネルギー解, 負エネルギー解と呼ばれる. 場の Fourier 展開において時間依存因子 $e^{\mp i\omega t}$, $\omega > 0$ を含む項が正/負振動数部分と呼ばれるのと同じ事情である.

*122 u, v -スピノルは x 依存性を担わないから,

$$0 = \frac{u_r(\mathbf{p})}{\sqrt{V}} (i\partial - m) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = \{(\not{p} - m)u_r(\mathbf{p})\} \frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{\sqrt{V}}, \quad \text{etc.}$$

とする。(粒子と反粒子を扱うのに便利のように、 u -スピノルと v -スピノルの添字の付け方を非対称に選んである。3.5.3節の式(394)(ヘリシティの議論)の箇所を参照。) 以上により Dirac 方程式の4つの独立な解

$$\psi(x) = u_r(\mathbf{p}) \frac{e^{-ip \cdot x}}{\sqrt{V}}, \quad \psi(x) = v_r(\mathbf{p}) \frac{e^{ip \cdot x}}{\sqrt{V}}, \quad r = 1, 2$$

を得る。この下でスピノル $u_r(\mathbf{p}), v_r(\mathbf{p})$ を

$$u_r^\dagger(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) = v_r^\dagger(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p}) = \frac{E_{\mathbf{p}}}{m}$$

と規格化し^{*123}, 直交性

$$u_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = v_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \frac{E_{\mathbf{p}}}{m} \delta_{rs}, \quad u_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(-\mathbf{p}) = 0 \quad (363)$$

を要求することができる。正規直交関係(363)の第2式は式(361)の帰結である(導出は9.5.2節)。

■ γ^5 に関する表示に依らない公式 [10, p.250] $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ は性質

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (\gamma^5)^2 = 1, \quad \gamma^{5\dagger} = \gamma^5 \quad (364)$$

を満たす(証明は9.5.2節)。(ただし $\mu = 0, 1, 2, 3$ であり, ギリシア文字は5を表すことは決していないものとする。)

i, j, k に1,2,3を巡回的(サイクリック)な順序で充てると, $\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ に対して

$$\sigma^{ij} = -\gamma^0\gamma^5\gamma^k \quad (365)$$

が成り立つ(証明は9.5.2節)。

■縮約の公式 [10, p.251] γ 行列の反交換関係から, 以下の(縮約の)公式が導かれる(証明は9.5.2節)。

$$\gamma_\lambda\gamma^\lambda = 4, \quad (366)$$

$$\gamma_\lambda\gamma^\alpha\gamma^\lambda = -2\gamma^\alpha, \quad (367)$$

$$\gamma_\lambda\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\lambda = 4g^{\alpha\beta}, \quad (368)$$

$$\gamma_\lambda\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\lambda = -2\gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\alpha, \quad (369)$$

$$\gamma_\lambda\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\gamma^\lambda = 2(\gamma^\delta\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma + \gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\alpha\gamma^\delta). \quad (370)$$

ここに4元ベクトル A, B, \dots を“縮約”すると

$$\gamma_\lambda A \gamma^\lambda = -2A,$$

$$\gamma_\lambda A B \gamma^\lambda = 4A \cdot B,$$

$$\gamma_\lambda A B C \gamma^\lambda = -2C B A$$

$$\gamma_\lambda A B C D \gamma^\lambda = 2(D A B C + C B A D)$$

が得られる。

^{*123} 古典論を想定して粒子の速度 v を導入すると, 最右辺の因子は $E_{\mathbf{p}}/m = 1/\sqrt{1-v^2}$ であり, Lorentz 収縮による高密度化に関係する。

■ γ 行列の積のトレースに対する公式 [10, pp.251–252] ここで本稿で後に有用となる, γ 行列の積のトレースに対する公式について触れておく. γ 行列を定義付ける反交換関係 (348): $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ だけから次のことが導かれる.

まず, 奇数個の γ 行列 $\gamma^\alpha, \gamma^\beta, \dots, \gamma^\mu, \gamma^\nu$ の積のトレースはゼロになる:

$$\text{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \dots \gamma^\mu \gamma^\nu) = 0. \quad (371)$$

また偶数個の γ 行列の積に対するトレースの公式としては, 次の 2 つを挙げておけば十分である:

$$\text{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4g^{\alpha\beta}, \quad (372)$$

$$\text{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) = 4(g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}). \quad (373)$$

トレースを評価する際には, 次の関係も有用である (A, B は任意の 4 元ベクトル).

$$A\cancel{B} = A \cdot B - i\sigma^{\alpha\beta} A_\alpha B_\beta = 2A \cdot B - \cancel{B}A. \quad (374)$$

この公式の特例として,

$$\begin{aligned} \cancel{A}A &= A^2, \\ \cancel{A}B &= -\cancel{B}A \quad (A \cdot B = 0 \text{ のとき}) \end{aligned} \quad (375)$$

が成り立つ.

以上の公式の導出は 9.5.2 節で行う.

■平面波解の公式 [10, p.254] スピノルの正規直交関係 (363):

$$u_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = v_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \frac{E_{\mathbf{p}}}{m}\delta_{rs}, \quad u_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(-\mathbf{p}) = 0$$

から

$$\bar{u}_r(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = -\bar{v}_r(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \delta_{rs}, \quad \bar{u}_r(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \bar{v}_r(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = 0 \quad (376)$$

が導かれる.

また u, v -スピノルは “完全性の条件”

$$\sum_{r=1}^2 [u_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{u}_{r\beta}(\mathbf{p}) - v_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{v}_{r\beta}(\mathbf{p})] = \delta_{\alpha\beta} \quad (377)$$

を満たす.

以上の公式の導出は 9.5.2 節で行う.

■エネルギー射影演算子 [10, pp.254–255] 演算子

$$\Lambda^\pm(\mathbf{p}) = \frac{\pm\not{p} + m}{2m} \quad (378)$$

は正エネルギー解と負エネルギー解を射影する性質を持つため, エネルギー射影演算子と呼ばれる. 実際,

$$\not{p}u_r(\mathbf{p}) = mu_r(\mathbf{p}), \quad \not{p}v_r(\mathbf{p}) = -mv_r(\mathbf{p}), \quad \bar{u}_r(\mathbf{p})\not{p} = m\bar{u}_r(\mathbf{p}), \quad \bar{v}_r(\mathbf{p})\not{p} = -m\bar{v}_r(\mathbf{p})$$

を用いると,

$$\begin{aligned}\Lambda^+(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) &= u_r(\mathbf{p}), & \Lambda^-(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p}) &= v_r(\mathbf{p}), \\ \bar{u}_r(\mathbf{p})\Lambda^+(\mathbf{p}) &= \bar{u}_r(\mathbf{p}), & \bar{v}_r(\mathbf{p})\Lambda^-(\mathbf{p}) &= \bar{v}_r(\mathbf{p}),\end{aligned}\tag{379}$$

$$\begin{aligned}\Lambda^+(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p}) &= \Lambda^-(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) = 0, \\ \bar{v}_r(\mathbf{p})\Lambda^+(\mathbf{p}) &= \bar{u}_r(\mathbf{p})\Lambda^-(\mathbf{p}) = 0\end{aligned}\tag{380}$$

が成り立つ. また式 (375): $\not{p}\not{p} = p^2 (= m^2)$ より, 射影演算子の冪等性^{*124}

$$[\Lambda^\pm(\mathbf{p})]^2 = \Lambda^\pm(\mathbf{p})$$

および

$$\Lambda^\pm(\mathbf{p})\Lambda^\mp(\mathbf{p}) = 0, \quad \Lambda^+(\mathbf{p}) + \Lambda^-(\mathbf{p}) = 1$$

が満たされる. 完全性の関係 (377) を用いると, 射影演算子の便利な表式

$$\Lambda_{\alpha\beta}^+(\mathbf{p}) = \sum_{r=1}^2 u_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{u}_{r\beta}(\mathbf{p}), \quad \Lambda_{\alpha\beta}^-(\mathbf{p}) = -\sum_{r=1}^2 v_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{v}_{r\beta}(\mathbf{p})\tag{381}$$

が導かれる (導出は 9.5.2 節).

■ヘリシティ射影演算子 [10, pp.255–256] 我々は固有方程式 (362):

$$\sigma_{\mathbf{p}}u_r(\mathbf{p}) = (-1)^{r+1}u_r(\mathbf{p}), \quad \sigma_{\mathbf{p}}v_r(\mathbf{p}) = (-1)^r v_r(\mathbf{p}), \quad r = 1, 2$$

を満たす u, v -スピノルを導入した. これは $u_1(\mathbf{p})$ がヘリシティ正の, $u_2(\mathbf{p})$ がヘリシティ負の正エネルギー電子 (Dirac 粒子) を表すことを意味している.

参考——スピノル $v_r(\mathbf{p})$ の空孔理論による解釈 場の量子論は多粒子系の理論と捉えて初めて無矛盾な理論となるけれど, 負エネルギー状態 $v_r(\mathbf{p})$ についても単一粒子理論の枠内で解釈することができる. 例えば $v_1(\mathbf{p})$ は運動量が $-\mathbf{p}$ の負エネルギー電子を表しており, $\sigma_{\mathbf{p}}v_1(\mathbf{p}) = -v_1(\mathbf{p})$ よりスピンは $-\mathbf{p}$ と平行なので, ヘリシティは正である. 空孔理論の観点では, この負エネルギー電子の欠如は運動量 \mathbf{p} , ヘリシティ正の陽電子に対応する.

さて, 上式 (362) により演算子

$$\Pi^\pm(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(1 \pm \sigma_{\mathbf{p}})$$

は正/負のヘリシティ解を射影することが分かる.

$$\Pi^+(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) = \delta_{1r}u_r(\mathbf{p}), \quad \Pi^+(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p}) = \delta_{2r}v_r(\mathbf{p}), \quad \Pi^-(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) = \delta_{2r}u_r(\mathbf{p}), \quad \Pi^-(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p}) = \delta_{1r}v_r(\mathbf{p}).$$

実際, $\Pi^\pm(\mathbf{p})$ は性質

$$[\Pi^\pm(\mathbf{p})]^2 = \Pi^\pm(\mathbf{p}), \quad \Pi^\pm(\mathbf{p})\Pi^\mp(\mathbf{p}) = 0, \quad \Pi^+(\mathbf{p}) + \Pi^-(\mathbf{p}) = 1 \quad (\text{複号同順})\tag{382}$$

$$[\Lambda^\pm(\mathbf{p}), \Pi^\pm(\mathbf{p})] = 0 \quad (\text{複号任意})\tag{383}$$

を満たし, 上式 (382) より互いに直交する状態への射影演算子となっている (証明は 9.5.2 節).

^{*124} 一般に射影は 1 度行くと, その後で何度射影を繰り返しても結果は変わらない.

質量がゼロの Dirac 粒子に対してヘリシティ射影演算子は

$$\Pi^\pm(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5) \quad (384)$$

で与えられる (理由は 9.5.2 節).

“右手型” “左手型” の場 [10, p.85] [1, pp.457–458] 射影演算子 (384):

$$P_L \equiv \frac{1 - \gamma_5}{2}, \quad P_R \equiv \frac{1 + \gamma_5}{2}$$

を用いて右手型と左手型の場

$$\psi_R \equiv P_R \psi(x), \quad \psi_L \equiv P_L \psi(x)$$

を定義すると, これらに対する場の方程式は

$$i\partial\psi_L - m\psi_R = 0, \quad i\partial\psi_R - m\psi_L = 0 \quad (385)$$

となる (導出は 9.5.2 節). これらの式は質量がゼロの極限において互いに分離する. この極限での場の方程式 $i\partial\psi^L = 0$ は, Lagrangian 密度

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_L \partial\psi_L$$

から導かれる. ところで $m = 0$ の極限では $(1 - \gamma_5)/2$ はヘリシティ射影演算子となるので, ψ_L は負のヘリシティだけを持つフェルミオンと, 正のヘリシティだけを持つ反フェルミオンを記述する. ψ_L を Weyl 場と呼ぶ.

■カイラル位相変換と軸性ベクトルカレント [10, p.85] α を実パラメーターとする Dirac 場の変換

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp(i\alpha\gamma_5)\psi(x), \quad \psi^\dagger(x) \rightarrow \psi'^\dagger(x) = \psi^\dagger(x) \exp(-i\alpha\gamma_5)$$

をカイラル位相変換と呼ぶ. Lagrangian 密度 $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$ は質量ゼロの極限においてのみ, カイラル位相変換に関して不変となり, これに付随した保存する流れとして軸性ベクトルカレント

$$J_A^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$$

が見出される (証明は 9.5.2 節).

3.5.3 自由 Dirac 場の正準量子化 [10, pp.71–77]

Dirac 方程式の基本解を用いて Dirac 場を

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi^+(x) + \psi^-(x), \\ \psi^+(x) &\equiv \sum_{\mathbf{p}, r} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} c_r(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}, \\ \psi^-(x) &\equiv \sum_{\mathbf{p}, r} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} d_r^\dagger(\mathbf{p}) v_r(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \end{aligned} \quad (386)$$

と Fourier 展開する。このとき随伴する場 $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ は

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}^+(x) + \bar{\psi}^-(x), \\ \bar{\psi}^+(x) &\equiv \sum_{\mathbf{p}, r} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} d_r(\mathbf{p}) \bar{v}_r(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p} \cdot x}, \\ \bar{\psi}^-(x) &\equiv \sum_{\mathbf{p}, r} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} c_r^\dagger(\mathbf{p}) \bar{u}_r(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot x}\end{aligned}\quad (387)$$

と展開される ($\bar{u}_r \equiv u_r^\dagger \gamma^0, \bar{v}_r \equiv v_r^\dagger \gamma^0$)。ただしこの段階では展開係数 $c_r(\mathbf{p}), c_r^\dagger(\mathbf{p}), d_r(\mathbf{p}), d_r^\dagger(\mathbf{p})$ は演算子ではなく通常の数であり、後の都合のために因子 $(m/E_{\mathbf{p}})^{1/2}$ をくくり出してある。

以上を踏まえ、自由 Dirac 場の正準量子化に移ろう [10, pp.70–74, p.76] [20, pp.219–221] [26, pp.41–44]。Dirac 場 ψ と共役な場 $\pi = i\psi^\dagger$ を Heisenberg 描像における演算子と見なして同時刻反交換関係

$$\begin{aligned}\{\psi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)\} &= i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), & \{\psi(\mathbf{x}, t), \psi(\mathbf{y}, t)\} &= 0, & \{\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \{\psi(\mathbf{x}, t), \psi^\dagger(\mathbf{y}, t)\} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), & \{\psi(\mathbf{x}, t), \psi(\mathbf{y}, t)\} &= 0, & \{\psi^\dagger(\mathbf{x}, t), \psi^\dagger(\mathbf{y}, t)\} &= 0\end{aligned}\quad (388)$$

を課す^{*125*126}。これらは場の Fourier 展開 (386), (387) における展開係数に対する反交換関係

$$\begin{aligned}\{c_r(\mathbf{p}), c_s^\dagger(\mathbf{p}')\} &= \{d_r(\mathbf{p}), d_s^\dagger(\mathbf{p}')\} = \delta_{rs} \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}, \\ \{c_r, c_s\} &= \{c_r^\dagger, c_s^\dagger\} = \{d_r, d_s\} = \{d_r^\dagger, d_s^\dagger\} \\ &= \{c_r, d_s\} = \{c_r, d_s^\dagger\} = \{c_r^\dagger, d_s\} = \{c_r^\dagger, d_s^\dagger\} = 0\end{aligned}\quad (389)$$

になる (9.5.3 節参照)。これらは生成・消滅演算子に対する反交換関係 (213):

$$\{c_r(\mathbf{p}), c_r^\dagger(\mathbf{p})\} = \{d_r(\mathbf{p}), d_r^\dagger(\mathbf{p})\} = 1, \quad \text{etc.}$$

を与える。ここから $c_r^\dagger(\mathbf{p}), c_r(\mathbf{p})$ および $d_r^\dagger(\mathbf{p}), d_r(\mathbf{p})$ はそれぞれ運動量 \mathbf{p} を持ちスピン状態が r で指定される 2 種類のフェルミオン c, d の生成・消滅演算子と解釈できる。真空状態 $|0\rangle$ は

$$\begin{aligned}c_r(\mathbf{p})|0\rangle &= d_r(\mathbf{p})|0\rangle = 0 & (\text{全ての } \mathbf{p}, r) \\ \text{あるいは } \psi^+(x)|0\rangle &= \bar{\psi}^+(x)|0\rangle = 0 & (\text{全ての } x)\end{aligned}$$

で定義される。

c 粒子, d 粒子の物理的な性質を得るために、保存量を生成・消滅演算子で表現する。ただし真空期待値がゼロとなるように正規順序化した形で保存量の演算子を定義する。その際、フェルミオンの演算子を反交換し入れ替えなければならないことに注意する (図 33 参照)。例えば

$$N[\psi_\alpha^+ \psi_\beta^-] = -\psi_\beta^- \psi_\alpha^+$$

である。

^{*125} スピノル添字 α, β を明記すると, $\{\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \pi_\beta(\mathbf{y}, t)\} = i\delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, etc. である。

^{*126} Dirac 方程式を Euler-Lagrange 方程式として導出する際や Hamiltonian, 電磁カレントの計算では Dirac 場 ψ と $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ を独立な場と見なすのに対し、正準量子化の手続きでは $\bar{\psi}$ を ψ と独立なもう一種類の場とは見なさないのは一貫性に欠ける。 ψ と $\bar{\psi}$ を独立な場として扱うのが正確だが、これには“特異系の量子化”の手続きが必要になる [26, p.41]。

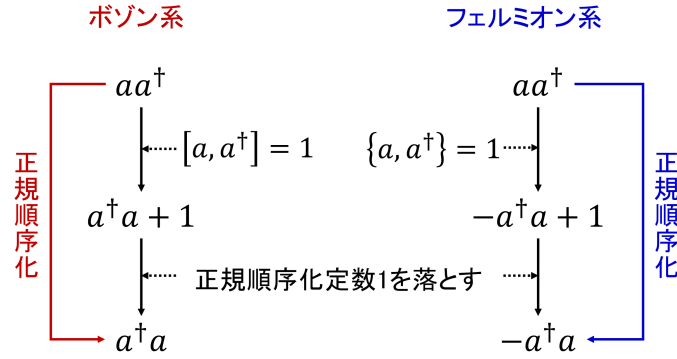


図 33 観測量の無限大の定数を落とす措置と正規順序化の等価性 (ボゾン系の議論は 3.2.1 節参照)

すると Dirac 場のエネルギー (Hamiltonian) H , 運動量 \mathbf{P} , 電荷 Q は

$$H = \sum_{r, \mathbf{p}} E_{\mathbf{p}} [N_r(\mathbf{p}) + \bar{N}_r(\mathbf{p})] \quad (390)$$

$$\mathbf{P} = \sum_{r, \mathbf{p}} \mathbf{p} [N_r(\mathbf{p}) + \bar{N}_r(\mathbf{p})] \quad (391)$$

$$Q = q \sum_{r, \mathbf{p}} [N_r(\mathbf{p}) - \bar{N}_r(\mathbf{p})] \quad (392)$$

(ただし $N_r(\mathbf{p}) \equiv c_r^\dagger(\mathbf{p})c_r(\mathbf{p}), \bar{N}_r(\mathbf{p}) \equiv d_r^\dagger(\mathbf{p})d_r(\mathbf{p})$) と計算される (導出は 9.5.3 節). エネルギー・運動量の式 (390), (391) は期待通りの結果となっており, また電荷の式 (392) により c 粒子に電荷 $+q$, d 粒子に電荷 $-q$ が充てられる. ここから c, d 粒子は互いに反粒子の関係にあると解釈できる. さらにヘリシティ演算子を

$$S_{\mathbf{p}} = \frac{1}{2} \int d^3x N[\psi^\dagger \sigma_{\mathbf{p}} \psi] \quad (393)$$

によって定義すると, 1 粒子状態 $c_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle, d_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$ は固有方程式

$$S_{\mathbf{p}} c_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle = (-1)^{r+1} \frac{1}{2} c_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle, \quad S_{\mathbf{p}} d_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle = (-1)^{r+1} \frac{1}{2} d_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle \quad (394)$$

を満たす (導出は 9.5.3 節). したがって c 粒子と d 粒子のいずれに対しても, $r=1$ がヘリシティ $+1/2$ の“右巻き”の状態を, $r=2$ がヘリシティ $-1/2$ の“左巻き”の状態を表している*127.

式 (390), (391), (392), (394) は粒子 c と反粒子 d に関して対称である. これを踏まえ, 例えば Dirac 場が記述するスピン $1/2$ の粒子として電子と陽電子を想定した場合, 我々は電荷を $q = -e$ (e は素電荷) と設定して c 粒子を電子, d 粒子を陽電子と見なすことにする.

参考—— Majorana 表示 γ 行列の成分が純虚数となる Majorana (マヨラナ) 表示を採用すれば, 場の展開は

*127 これは指数 r について非対称な $\sigma_{\mathbf{p}}$ の固有方程式 (362) を満たすように u, v -スピノルを選んだことによる. またスピン $1/2$ の系に対して期待されるようにヘリシティが $\pm 1/2$ となることは, 式 (362) において論点が先取りされていることに注意する.

粒子と反粒子に関して対称な形

$$\begin{aligned}\psi_M(x) &= \sum_{r,\mathbf{p}} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \{c_r(\mathbf{p})u_{Mr}(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x} + d_r^\dagger(\mathbf{p})u_{Mr}^*(\mathbf{p})e^{ip \cdot x}\}, \\ \psi_M^{\dagger T}(x) &= \sum_{r,\mathbf{p}} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \{d_r(\mathbf{p})u_{Mr}(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x} + c_r^\dagger(\mathbf{p})u_{Mr}^*(\mathbf{p})e^{ip \cdot x}\}\end{aligned}\quad (395)$$

となる (添字 M は Majorana 表示を表す, 説明は 9.5.3 節).

展開係数の反交換関係 (389) を用い, Dirac 場の (同時刻に限らない) 反交換関係を調べておこう. (これはフェルミオン伝播関数の計算の準備という意味がある. 自明な反交換関係

$$\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(y)\} = \{\bar{\psi}_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} = 0$$

に加えて,

$$\{\psi^\pm(x), \bar{\psi}^\mp(y)\} = iS^\pm(x-y) \quad (396)$$

が成立する (導出は 9.5.3 節). ただし左辺は反交換子 $\{\psi_\alpha^\pm(x), \bar{\psi}_\beta^\mp(y)\}$ を (α, β) 成分に持つ 4×4 行列の意味であり*128, 右辺における 4×4 行列の関数 $S^\pm(x)$ は式 (292), (293) の $\Delta^\pm(x)$ を用いて

$$S^\pm(x) = (i\rlap{/}\partial + m)\Delta^\pm(x)$$

と定義されている. ここから

$$\begin{aligned}\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} &= \{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\} + \{\psi^-(x), \bar{\psi}^+(y)\} = i(S^+(x-y) + S^-(x-y)) \equiv iS(x-y), \\ S(x) &\equiv S^+(x) + S^-(x) = (i\rlap{/}\partial + m)\Delta(x) \quad (\Delta(x) \equiv \Delta^+(x) + \Delta^-(x) : (294))\end{aligned}$$

が見出される. 式 (297): $\Delta^\pm(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C^\pm} \frac{d^4k e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2}$ に対応した S 関数の式は

$$S^\pm(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C^\pm} d^4p e^{-ip \cdot x} \frac{\rlap{/}p + m}{p^2 - m^2} = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C^\pm} d^4p \frac{e^{-ip \cdot x}}{\rlap{/}p - m}$$

となる. 最右辺の被積分関数における行列の逆数 $1/(\rlap{/}p - m)$ は, $(\rlap{/}p - m)$ の逆行列の意味である. 実際, 公式 (375): $A A = A^2$ により

$$(\rlap{/}p \pm m)(\rlap{/}p \mp m) = p^2 - m^2$$

の関係があるので, $\frac{\rlap{/}p + m}{p^2 - m^2}$ は $(\rlap{/}p - m)$ の逆行列である.

3.5.4 スピン統計定理 [10, pp.77-78]

スピン 0 の粒子系 (スカラー場) とスピン 1/2 の粒子系 (Dirac 場) に関する知識を利用して, 粒子のスピンと統計性の関係に対する入門的な解説を与えることができる.

- Dirac 場 (スピン 1/2 の粒子を記述)

Bose-Einstein 統計に従うよう, 交換関係 $[c_r(\mathbf{p}), c_s^\dagger(\mathbf{p}')] = [d_r(\mathbf{p}), d_s^\dagger(\mathbf{p}')] = \delta_{rs} \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$, etc. で量子化.

↓

*128 実際, $\psi^\pm(x)\bar{\psi}^\mp(y)$ という形の行列の積は定義されないことに注意する.

場のエネルギーは式 (390) の代わりに

$$H = \sum_{r, \mathbf{p}} E_{\mathbf{p}} [N_r(\mathbf{p}) - \bar{N}_r(\mathbf{p})] \quad (397)$$

となり (導出は 9.5.4 節), 際限なく低くなり得る.

- 実 Klein-Gordon 場 (スピン 0 の粒子を記述)

Fermi-Dirac 統計に従うよう, 反交換関係 $\{a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')\} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$, etc. で量子化.

↓

場の観測量 $A(x), B(y)$ に対して, 微視的因果律

$$[A(x), B(y)] = 0, \quad \text{for } (x - y)^2 < 0 \quad (398)$$

が成立しなくなる (証明は 9.5.4 節).

一般にこのような困難を避けるには,

- 整数スピンを持つ粒子は Bose-Einstein 統計に従うように
- 半整数スピンを持つ粒子は Fermi-Dirac 統計に従うように

量子化しなければならない (スピン-統計定理).

3.5.5 フェルミオンの伝播関数 [10, pp.78–82]

フェルミオン場に関する時間順序化積を

$$\begin{aligned} T\{\psi(x)\bar{\psi}(x')\} &= \theta(t - t')\psi(x)\bar{\psi}(x') - \theta(t' - t)\bar{\psi}(x')\psi(x) \\ &= \begin{cases} \psi(x)\bar{\psi}(x') & (t > t' \text{ のとき}) \\ -\bar{\psi}(x')\psi(x) & (t' > t \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

のように定義する ($t \equiv x^0, t' \equiv x'^0$). つまりボゾン場の時間順序化を正規化と同様にボゾン因子の交換によって行ったように, フェルミオン場の時間順序化もまた正規化と同様, フェルミオン因子の反交換によって行う.

フェルミオン伝播関数は

$$\langle 0 | T\{\psi(x)\bar{\psi}(x')\} | 0 \rangle = \begin{cases} \langle 0 | \psi(x)\bar{\psi}(x') | 0 \rangle & (t > t' \text{ のとき}) \\ -\langle 0 | \bar{\psi}(x')\psi(x) | 0 \rangle & (t' > t \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義される.

- $t > t'$ の場合の伝播関数 $\langle 0 | \psi(x)\bar{\psi}(x') | 0 \rangle$

$\bar{\psi}(x)$ は $c_r^\dagger(\mathbf{p})$ を含む $\rightarrow \bar{\psi}(x) | 0 \rangle$ は c 粒子 (電子) が x' に局在した状態,

$\psi(x)$ は $c_r(\mathbf{p})$ を含む $\rightarrow \langle 0 | \psi(x)$ は c 粒子 (電子) が x に局在した状態

c 粒子 (以下, 電子) が時空点 x' において生成され, x まで伝播して消滅する過程を表す.

- $t < t'$ の場合の伝播関数 $-\langle 0 | \bar{\psi}(x')\psi(x) | 0 \rangle$

$\psi(x)$ は $d_r^\dagger(\mathbf{p})$ を含む $\rightarrow \psi(x) | 0 \rangle$ は d 粒子 (陽電子) が x に局在した状態,

$\bar{\psi}(x')$ は $d_r(\mathbf{p})$ を含む $\rightarrow \langle 0 | \bar{\psi}(x')$ は d 粒子 (陽電子) が x' に局在した状態

d 粒子 (以下, 陽電子) が時空点 x において生成され, x' まで伝播して消滅する過程を表す.

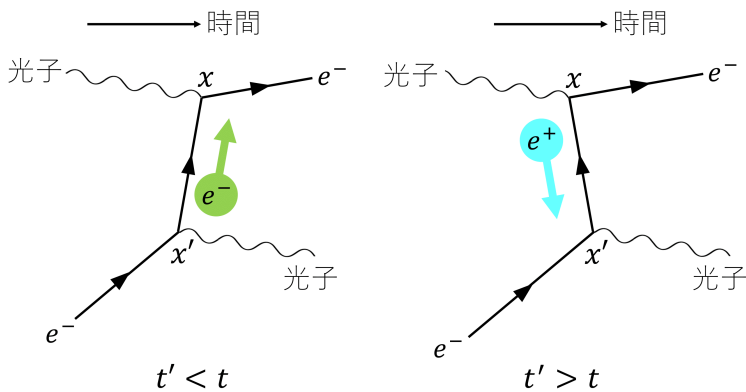


図 34 Compton 散乱への寄与を表す時間順序化グラフ

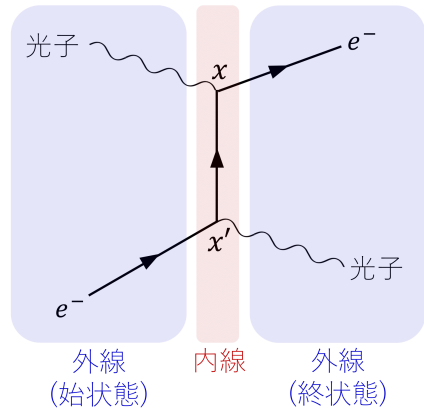


図 35 Compton 散乱への寄与を表す Feynman グラフ

★ 中間子の伝播関数に対して指摘したように、これを額面通りに解釈してはならない。

そのような過程として、具体的には Compton 散乱 (光子-電子散乱) における中間状態が考えられる (図 34 参照). ここで約束として、矢印を場 $\bar{\psi}$ の関係する点 x' から場 ψ の関係する点 x に向けて描いている. 言い換えれば電子の矢は時間と同じ向きであり、陽電子の矢は時間と逆向きに描く. このとき接続したフェルミオン線に沿って、矢は一方通行になる. そして図 34 の 2 つのダイアグラムは連続的な変形によって互いに移行できる、トポロジ的に等価な関係となることが保証される.

そこで図 34 の 2 つのグラフをまとめて図 35 のような単一の Feynman グラフで表す. Feynman グラフでは内線 xx' における点 x, x' の時間的前後は指定されない. これに対し慣習的に始状態の粒子は左からダイアグラムに入る外線で、終状態の粒子はダイアグラムから右側に出る外線で表され、時間の向きを伴った線と見なされる. フェルミオンの外線は矢の向きで、粒子 (電子) と反粒子 (陽子) を区別する.

フェルミオン伝播関数は

$$\langle 0 | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(x') \} | 0 \rangle = i S_F(x - x') \quad (399)$$

と表される. ここに S_F 関数は

$$S_F(x) = \theta(t) S^+(x) - \theta(-t) S^-(x) = (i \not{\partial} + m) \Delta_F(x)$$

で定義される (この S_F もフェルミオン伝播関数と呼ぶ, 上式 (399) の導出は 9.5.5 節).

$\Delta_F(x)$ の積分表示 (299) より, $S_F(x)$ の積分表示は

$$S_F(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

となる.

3.6 量子電磁力学 (QED) の Lagrangian 密度

■レプトン 量子電磁力学 (QED) ではスピン $\frac{1}{2}$ の粒子として、荷電レプトンと中性レプトン (ニュートリノ) $\nu_l, \bar{\nu}_l$ が Dirac 場によって記述される. 荷電レプトンは電荷 $\mp e$ を持つ粒子であり (e は素電荷), 電子 e^\mp ,

ミュー粒子 μ^\mp , タウ粒子 τ^\mp から成る. これらは異なる質量

$$m_e = 0.511\text{MeV}, \quad m_\mu = 105.7\text{MeV}, \quad m_\tau = (1776.84 \pm 0.17)\text{MeV}$$

を持つ*129. 荷電レプトンの各種類 $l = e, \mu, \tau$ に対して充てがわれる Dirac 場を ψ_l と書くことにする [10, p.141]. 中性レプトン $\nu_l, \bar{\nu}_l$ の電荷はゼロであり, 質量を m_{ν_l} , Dirac 場を ψ_{ν_l} と書くことにする ($l = e, \mu, \tau$). ただし本章では基本的にニュートリノは扱わない.

QED の Lagrangian 密度

電磁場との相互作用がある場合の Dirac 場の Lagrangian 密度は, 自由 Dirac 場の Lagrangian 密度 (355): $\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi$ において

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu \quad (400)$$

と置き換えて得られるものと仮定する. 置き換え $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ は極小置換と呼ばれ, これは非相対論的量子力学において電磁場中の粒子の正しい波動方程式を導く置き換え

$$-i\nabla \rightarrow -i\nabla - q\mathbf{A}, \quad i\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} - q\phi$$

に他ならない (2.4.7 節, ただし電子の電荷 $q = -e$ をとる). 自由電磁場項 $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ を含めると, 完全な Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \sum \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (401)$$

あるいは

$$\mathcal{L} = \sum \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + e \sum \bar{\psi}\mathbf{A}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

で与えられる. これが QED の原理である*130. ただしここでは QED の対象とするあらゆるスピン 1/2 の粒子を想定して, それぞれを記述する Dirac 場について和をとっている. 具体的には

$$\sum \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = \sum_l \{ \bar{\psi}_l(i\partial\!\!\!/ - m_l)\psi_l + \bar{\psi}_{\nu_l}(i\partial\!\!\!/ - m_{\nu_l})\psi_{\nu_l} \}, \quad e \sum \bar{\psi}\mathbf{A}\psi = e \sum_l \bar{\psi}_l\mathbf{A}\psi_l$$

と書ける [10, p.141] [1, p.502, p.538]. なお自由電磁場の項 $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ は式 (311) の正準量子化に適した形 $\mathcal{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu)$ に改めて良い.

ゲージ不変性 [10, pp.83–84, p.141] [20, pp.218–219]

電磁ポテンシャルを $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$ と変化させても導かれる電磁場 \mathbf{E}, \mathbf{B} は変化しない (1.4.1 節参照). また電磁場のゲージ変換 $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$ と同時に Dirac 場に局所的な位相変換

$$\psi(x) \rightarrow \psi(x)e^{ief(x)}, \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x)e^{-ief(x)}$$

を施せば Lagrangian 密度 (401) は (従って理論は) 不変に留まる (この位相変換が局所的と呼ばれるのは, 位相 $\pm ef(x)$ が x に依存するからである)*131. 電磁場と Dirac 場の変換を一括してゲージ変換と呼ぶ. 逆に言

*129 単位に MeV を用いているのは, 自然単位系において質量とエネルギーの次元が等しくなるからである.

*130 全 Lagrangian 密度は「自由 Dirac 場項」「自由電磁場項」「相互作用項」の 3 つから成っていると見ることができる.

*131 これは非相対論的量子力学において, 電磁場と相互作用する荷電粒子の波動関数の位相変換により, 理論のゲージ不変性が回復するのと同じ事情である (2.4.7 節) [18, pp.179–182].

えば, Dirac 場の局所的位相変換に対して不変な Lagrangian 密度を得るには $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$ と変換するゲージ場 A_μ を導入して, 極小置換 $\partial_\mu \rightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu$ を施せば良い (9.6 節参照).

理論のゲージ不変性から得られる保存する流れは, 自由 Dirac 場の場合と同じ電磁カレント (360): $s^\alpha = -e\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi$ となる (導出は 9.6 節). 相互作用項 $\mathcal{L}_I \equiv e\sum\bar{\psi}A\psi$ は保存するカレントと電磁場の結合項となっている.

$$\mathcal{L}_I = -\sum s_\alpha A^\alpha.$$

これは電磁場と相互作用する荷電粒子の古典論と全く同じ結果である (第 1 章) [3, p.80].

QED の Hamiltonian 密度

Dirac 場 ψ , 電磁場 A_μ に共役な場

$$\begin{aligned}\pi_\psi &\equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi)} = \bar{\psi}i\gamma^0 = i\psi^\dagger, \\ \pi^\mu &\equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu} = \begin{cases} 0 & (\mu=0) \\ -F^{0i} & (\mu=i=1,2,3) \end{cases}\end{aligned}\quad (402)$$

(自由場の場合の $\pi_\psi \equiv \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{Dirac}}}{\partial(\partial_0\psi)}$, $\pi^\mu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{EM}}}{\partial(\partial_0 A_\mu)}$ と同じ) を用いて [10, p.69] [20, p.211,p.225], Hamiltonian は

$$H = \int \mathcal{H} d^3x, \quad \text{Hamiltonian 密度: } \mathcal{H} = \sum \pi_\psi \dot{\psi} + \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}$$

で定義される. ただし \dot{A}^μ は式 (402) を用いて共役な場 π^μ で表されており, 具体的には

$$\mathcal{H} = \sum (i\psi^\dagger)\dot{\psi} - \sum \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - e\sum\bar{\psi}A\psi - \frac{1}{2}\pi_k\pi^k + \pi^k\partial_k A_0 + \frac{1}{4}F_{kl}F^{kl}\quad (403)$$

である (ラテン文字 k, l, \dots は空間成分 1,2,3 を動く, 9.6 節参照) [20, p.225].

演算子と正規積

QED の Lagrangian 密度 (401) は

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I, \\ \mathcal{L}_0 &= \sum \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{EM}}, \quad \mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi, \\ \mathcal{L}_I &= e\sum\bar{\psi}A\psi\end{aligned}$$

のように, 自由場を記述する項 \mathcal{L}_0 と場の相互作用を記述する項 \mathcal{L}_I から成る. Hamiltonian 密度の定義式

$$\mathcal{H} = \sum \pi_\psi \dot{\psi} + \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}$$

により, Lagrangian 密度を

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \quad \rightarrow \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$$

と置き換えたとき Hamiltonian 密度には付加的な項

$$\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I = -e\sum\bar{\psi}A\psi$$

が現れる. これは相互作用 Hamiltonian と呼ばれる.

次に場を量子化された Heisenberg 描像の演算子と見なす。これに伴い正規積を導入すると、演算子としての自由場の Lagrangian 密度 \mathcal{L}_0 , 相互作用 Lagrangian 密度 \mathcal{L}_I , 相互作用 Hamiltonian 密度 \mathcal{H}_I はそれぞれ

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &= N \left[\sum \bar{\psi}(i\partial - m)\psi - \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu) \right], \\ \mathcal{L}_I &= e \sum N [\bar{\psi} A \psi], \\ \mathcal{H}_I &= -e \sum N [\bar{\psi} A \psi]\end{aligned}\quad (404)$$

となる [10, pp.104–105, p.110].

■正規積 ここで正規積 $N[QR \cdots W]$ とは演算子積 $QR \cdots W$ を、全ての生成演算子が全ての消滅演算子よりも右側にある配置 $Q'R' \cdots W'$ に並べ替えたものであり、ボゾン因子とフェルミオン因子を含む一般的な系に対して次式で定義される。

$$N[QR \cdots W] = (-1)^P Q'R' \cdots W'. \quad (405)$$

ただし $QR \cdots W$ はそれぞれ生成演算子または消滅演算子のいずれか一方のみを含む、生成・消滅演算子に関して1次の演算子であり、 P は $QR \cdots W$ を $Q'R' \cdots W'$ に並べ替えるときに隣接するフェルミオン演算子を入れ換える回数である。また任意の演算子積に対して正規積が定義されるように、分配則

$$N[RS \cdots + VW \cdots] = N[RS \cdots] + N[VW \cdots] \quad (406)$$

が成り立つものとする。こうして Lagrangian 密度やエネルギー・運動量、電荷などの観測量 A を正規積 $N[A]$ で再定義すると、古典論との対応を損なうことなくその真空期待値 $\langle 0|A|0 \rangle$ をゼロにできる [10, pp.48–49, p.73, p.110]. 以上はボゾン系とフェルミオン系に対して定義した正規積 (3.2.1 節, 3.5.3 節) の一般化にあたる。

3.6.1 Dirac 方程式の非相対論的極限と電子の磁気モーメント

我々は Dirac 粒子の電磁場との相互作用を論じることができ段階に達した。本節では電磁場の存在下での Dirac 方程式の非相対論的極限を調べよう。Dirac 場は4つの成分を持つものに対し、非相対論的な場合には (スピン 1/2 の) 粒子は Pauli の2成分スピノルで記述される。実際、スピノル表示の Dirac 場

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix}$$

はこの極限で $\xi = \eta$ となり、独立な成分を2つしか持たない。このことは次のように理解できる。すなわち自由 Dirac 場を考えると、スピノル形式での Dirac 方程式

$$(\hat{p}_0 - \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma})\xi = m\eta, \quad (\hat{p}_0 + \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma})\eta = m\xi \quad (407)$$

(ただし $\hat{p}_0 = i\partial_0$, $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$, 導出は 9.6.1 節) は、運動量 \mathbf{p} , エネルギー $E = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ の自由粒子を表す平面波状態 $\psi \sim e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)}$ (したがって $\hat{p}_0 \rightarrow E$, $\hat{\mathbf{p}} \rightarrow \mathbf{p}$) に対して、

$$(E - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})\xi = m\eta, \quad (E + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})\eta = m\xi$$

となる。ここで非相対論的な極限 $\mathbf{p} \rightarrow 0$, $E \rightarrow m$ をとると、 $\xi = \eta$ が見出される [16, pp.392–394].

そこで標準表示の Dirac 場

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta), \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta)$$

を定義すると、この極限で $\chi = 0$ となるため便利である。このとき Dirac 場 ψ のゼロでない独立な 2 成分を φ が担うことになる。場の方程式 (407) の 2 式を辺々足す、または引くと、 φ, χ に対する式

$$\hat{p}_0\varphi - \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}\chi = m\varphi, \quad -\hat{p}_0\chi + \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}\varphi = m\chi \quad (408)$$

が得られる [16, pp.398–399].

さて、電磁場との相互作用を導入するために Dirac 方程式において極小置換 $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ を行う^{*132}。これはもとを正せば演算子の置き換え $\hat{p}_\mu \rightarrow \hat{p}_\mu - eA_\mu$ に他ならず、Dirac 方程式 (408) は

$$\begin{aligned} (\hat{p}_0 - e\Phi)\varphi - \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})\chi &= m\varphi, \\ -(\hat{p}_0 - e\Phi)\chi + \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})\varphi &= m\chi \end{aligned} \quad (409)$$

に置き換わる ($\hat{p}_\mu = (\hat{p}_0, -\hat{\mathbf{p}}) = i(\partial_t, \nabla)$, $A_\mu = (\Phi, -\mathbf{A})$)。非相対論的表式と比べて、場の時間依存性 e^{-iEt} に余計に含まれる静止エネルギー m の寄与 e^{-imt} を取り除いて場 ψ を再定義すると^{*133}、非相対論的極限での場の方程式 (409) は φ に対する式

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}(\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})^2 - \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + e\Phi \right] \varphi \quad (410)$$

を与えることが示される ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ は磁束密度、導出は 9.6.1 節)。これは Pauli 方程式と呼ばれ、 $-\frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$ の項を除けば、電磁場中の荷電粒子に関する Schrödinger 方程式と同じである。付加的な項は磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ に付随するエネルギーの形 $-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ をしており (9.6.1 節参照)、磁気モーメントの演算子は

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} = \frac{e}{m}\hat{\mathbf{s}} \quad (411)$$

($\hat{\mathbf{s}} = \boldsymbol{\sigma}/2$ は電子のスピン演算子) と同定される。これは電子が大きさ

$$\mu_B = \frac{e}{2m}$$

の固有磁気モーメントを持つことを意味している^{*134}。古典的な軌道運動に起因する磁気モーメントが軌道角運動量の $e/2m$ 倍であるのに対し (9.6.1 節参照)、磁気モーメント (411) はスピン角運動量の e/m 倍である [16, pp.433–437]。磁気能率の Dirac 値 ($-e/2m$) からのずれ (異常磁気能率) は、場の量子論に基づく“輻射補正”によって説明される [10, pp.211–215].

3.7 S 行列展開

3.7.1 S 演算子の Dyson 展開

ここでは素粒子の反応を念頭に置き、場の相互作用を摂動として扱う方法を定式化する [10, pp.104–109]。それを行うには相互作用描像 (2.5 節参照) が適している。実際、相互作用描像の場 $A^I(t)$ に対する運動方程式 (205):

$$\frac{dA^I}{dt} = \frac{1}{i}[A^I, H_0]$$

*132 こうして得られる方程式 ($i\mathcal{D} - m$) $\psi = 0$ はもちろん、Lagrangian 密度 (401) から導くことができる。

*133 すなわち $\psi = \psi' e^{-imt}$ と表したときの場 ψ' を改めて ψ と書く。

*134 普通の単位系では $\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$ 。この量を Bohr 磁子と呼ぶ。

は、自由場の Hamilton 演算子 H_0 によって記述される Heisenberg 描像の自由場 $A^H(t)$ に対する運動方程式 (200):

$$\frac{dA^H}{dt} = \frac{1}{i}[A^H, H_0]$$

と同じものなので、相互作用する場は自由場と同様に Fourier 展開される。また QED を考えると、相互作用 Lagrangian 密度 $\mathcal{L}_I = e \sum \bar{\psi} A \psi$ は場の微分に依らない。よって相互作用する場に共役な場は自由場に共役な場と同じものとなる:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{A}_\mu}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\psi}}.$$

このため A^μ, ψ を Heisenberg 描像における自由場, π^μ, π_ψ をそれぞれ A^μ, ψ に共役な場とすると、相互作用描像における場はユニタリー変換 (206):

$$A^{\mu I} = U^\dagger A^\mu U, \quad \psi^I = U^\dagger \psi U, \quad \pi^{\mu I} = U^\dagger \pi^\mu U, \quad \pi_\psi^I = U^\dagger \pi_\psi U$$

で与えられるため、これらは自由場と同じ同時刻 (反) 交換関係

$$[A^{\mu I}(\mathbf{x}, t), \pi^{\nu I}(\mathbf{x}', t)] = ig^{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad \{\psi^I(\mathbf{x}, t), \pi_\psi^I(\mathbf{x}', t)\} = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad \text{etc}$$

を満たす (3.1.2 節参照)。以上より場の Fourier 展開や正準 (反) 交換関係をはじめとし、ここから導かれる Heisenberg 描像の自由場に対する結果 (占有数表示や Feynman 伝播関数の表式) を相互作用描像における場にも流用することができる。

相互作用描像を採用し、以降ケットやブラ、演算子から相互作用描像のものであることを表す添字の I を省く。そして系の状態を $|\Phi(t)\rangle$ と書き、始状態を粒子の衝突が起こるよりも十分前の時刻 $t = -\infty$ の状態

$$|i\rangle = |\Phi(-\infty)\rangle$$

に設定する。時刻 $t = -\infty$ において粒子は互いに無限に離れており相互作用していないので、始状態 $|i\rangle$ として粒子の個数、運動量、スピン・偏極が確定した状態を考えられる。一方、時刻 $t = \infty$ の状態 $|\Phi(\infty)\rangle$ を終状態と呼ぶ。これは衝突した (すなわち相互作用した) 粒子が再び無限に遠ざかった状態に対応する。そして系の状態 $|\Phi(t)\rangle$ は式 (204):

$$i \frac{d}{dt} |\Phi(t)\rangle = H_I(t) |\Phi(t)\rangle$$

に従って時間発展し、始状態 $|i\rangle$ から終状態 $|\Phi(\infty)\rangle$ に変化する。ここで始状態 $|i\rangle$ と終状態 $|\Phi(\infty)\rangle$ を次式で関係付ける演算子として S 演算子を定義する。

$$|\Phi(\infty)\rangle = S |i\rangle.$$

すなわち S 演算子は相互作用描像における、時刻 $t = -\infty$ から時刻 $t = \infty$ への時間的发展の演算子である。そして終状態 $|\Phi(\infty)\rangle$ には、S 演算子によって引き起こされるあらゆる可能な時間的发展の結果が重畳として含まれている。

今 QED を考え、中性レプトンを度外視して物質粒子として荷電レプトンのみを考慮すると、相互作用 Hamiltonian は

$$H_I(t) = \int \mathcal{H}_I(x) d^3x, \quad \mathcal{H}_I(x) = -e \sum_l N[\bar{\psi}_l(x) A(x) \psi_l(x)] : \text{相互作用 Hamiltonian 密度 (404)}$$

である。これは偶数個のフェルミオン場を含むので、異なる時刻の $H_I(t)$ が交換することに注意すると、時間発展方程式 (204) の帰結として S 演算子は

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T\{\mathcal{H}_I(x_1) \cdots \mathcal{H}_I(x_n)\} \quad (412)$$

と展開されることが分かる ($T\{\cdots\}$ は以下で定義する時間順序化積, 9.7.1 節参照)。これは Dyson 展開と呼ばれ^{*135}, 場の相互作用を摂動とした S 演算子の摂動級数を成す。相互作用 Hamiltonian 密度の式 (404) を代入してこれを具体的に書くと

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \sum_{l_1, \dots, l_n} T\{N(\bar{\psi}_{l_1} A \psi_{l_1})_{x_1} \cdots N(\bar{\psi}_{l_n} A \psi_{l_n})_{x_n}\} \quad (413)$$

となる (ただし $N(\bar{\psi}_l A \psi_l)_x \equiv N[\bar{\psi}_l(x) A(x) \psi_l(x)]$ である)。n 次の項は $e^n \sim \alpha^{n/2}$ 程度であり、結合の強さに相当する微細構造定数 $\alpha \simeq 1/137$ が小さいため、QED では摂動解が意味を持つ。

時間順序化積 時間順序化積または T 積を $T\{\cdots\}$ と書く。これは引数の時刻がより早い演算子が先にケットに作用するように、演算子積の演算子を引数の時刻の順序が右から左になるように並べ替えたものである。ただし並べ替えの際、隣接するフェルミオン場どうしを入れ替えると符号が入替わるものとする。例えば $x_1^0 < x_2^0 < x_3^0$ とすると、ボゾン場 ϕ , フェルミオン場 ψ_a, ψ_b に対して

$$T\{\phi(x_1)\psi_a(x_2)\psi_b(x_3)\} = -\psi_b(x_3)\psi_a(x_2)\phi(x_1)$$

である。また演算子積を T 積に並び替えることを時間順序化と呼ぶ [10, pp.56–57, p.78, p.108]。これは 2 つの演算子に対する T 積 (3.2.3 節, 3.5.5 節) の自然な一般化にあたり、演算子の入れ替えの規則は正規順序化の場合と同じである。

相互作用 \mathcal{H}_I の特徴 [10, pp.141–143]

- \mathcal{H}_I は同一時空点 x の場のみを含む → 相互作用は局所的
 - 実験的にもレプトンは点粒子的であり、これは適正な取り扱いと言える。
(強粒子 (ハドロン) は対照的に、有限の寸法を持つ。)
- 同じ結節点に接続する 2 本のフェルミオン線は、必ず同種のレプトンでなければならない。
 - 3.8.1 節で見るレプトン対の生成過程 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ では
Bhabha 散乱 $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ とは対照的に、散乱ダイアグラム (図 45 参照) が寄与しない。
 - レプトン数を

$$N(l) = N(l^-) - N(l^+)$$

で定義すると、これは (\mathcal{H}_I の行列要素がゼロにならない任意の状態間において) 保存する (表 2 参照)。

■断熱仮説 例えば電子は他の電子と離れた状態にあっても、仮想的な光子の雲を“衣にまどって”いる。このため始・終状態 $|i\rangle, |f\rangle$ を自由場 Hamiltonian H_0 の固有状態 (裸の粒子の状態) と考えることは非現実的で

^{*135} Dyson 展開は通常の指数 $\exp\{-i \int dt H_I(t)\}$ の展開とよく似た形を持つため、 $S = T \exp\{-i \int dt H_I(t)\}$ と書く。

表2 レプトン数 $N(l)$ の保存. $-eN[\bar{\psi}_l(x)A(x)\psi_l(x)]$ の含む全ての生成・消滅演算子の組合せを左の欄に書いた.

演算子	$N(l^-)$ の変化	$N(l^+)$ の変化	$N(l)$ の変化
$c_l^\dagger c_l$	$-1 + 1$	0	0
$d_l^\dagger s_l$	0	$+1 - 1$	0
$c_l d_l$	-1	-1	0
$c_l^\dagger d_l^\dagger$	$+1$	$+1$	0

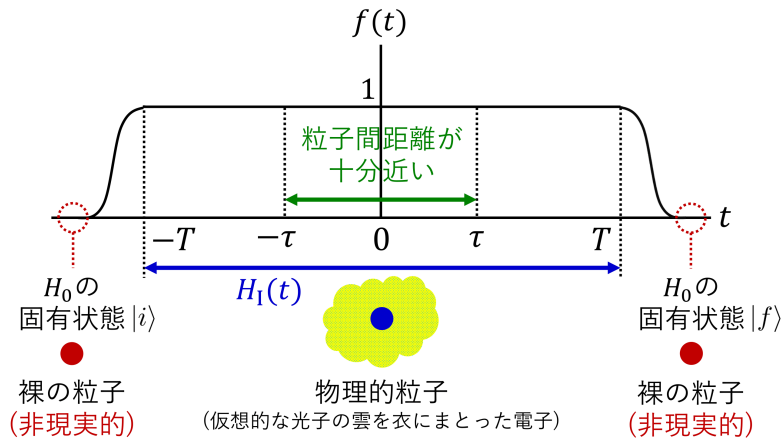


図36 断熱仮説

ある. そこで断熱仮説を導入する^{*136}. これは散乱を, 実質的に相互作用の起きている間よりも遥か以前・以後の記述に依らないものと仮定して $t \rightarrow \pm\infty$ において相互作用 H_I をゼロにし, 始・終状態の粒子を裸の粒子とする扱いを正当化するものである. そのためには $t \rightarrow \pm\infty$ においてゼロになり, 散乱過程の(実質的な)時間よりも充分長い時間 T においてほとんど1となるような関数 $f(t)$ を用い, 相互作用 $H_I(t)$ を $f(t)H_I(t)$ に置き換えれば良い(図36参照). これはQEDでは, 素電荷 e を $ef(t)$ に置き換える措置と等価である.

3.7.2 確率振幅 $\langle f|S|i\rangle$ と Wick の定理

粒子の衝突・散乱後の時刻 $t = \infty$ における終状態として, 粒子の個数, 運動量, スピン・偏極を指定した状態 $|f\rangle$ を考える. このとき遷移 $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ は具体的な素粒子の反応を表し, 考えている素粒子の反応 $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ が起きる確率, すなわち系の終状態 $|\Phi(\infty)\rangle$ を状態 $|f\rangle$ に見出す確率は $|\langle f|\Phi(\infty)\rangle|^2$ で与えられる. そして対応する確率振幅

$$\langle f|\Phi(\infty)\rangle = \langle f|S|i\rangle \equiv S_{fi}$$

は S 演算子の行列要素となる.

ここではこれを指定した摂動の次数に関して求める考え方を述べる [10, pp.109–113]. 式(412)の S 演算子は, 相互作用 Hamiltonian 密度 $\mathcal{H}_I(x)$ に含まれる場が生成・消滅演算子の1次であるため, 多数の粒子の生成・消滅過程を記述している. このうち行列要素 $\langle f|S|i\rangle$ に寄与するのは, 始状態 $|i\rangle$ の粒子を消す消滅演算

^{*136} 物理学では, 断熱という言葉がいろいろな意味に使われる. ときにはその間に共通なものを見出すことが困難なこともある [19, p.187].

子と終状態 $|f\rangle$ の粒子を創る生成演算子を含む項だけである。そのような項を S 演算子の Dyson 展開 (412) から拾い出すのに、以下の Wick の定理が有用である。

■Wick の定理 n 個の場 A_1, A_2, \dots, A_n をそれぞれ電磁場 A^μ (従ってボゾン場), フェルミオン場 $\psi_l, \bar{\psi}_l$ のいずれかとする, これらが異なる時刻を引数に持つとき次の恒等式が成り立つ (Wick の定理).

$$\begin{aligned} T\{A_1 A_2 \cdots A_n\} = & N[A_1 A_2 \cdots A_n] \\ & + N[\underbrace{A_1 A_2}_{\text{縮約}} \cdots] + \cdots + N[\cdots \underbrace{A_{n-1} A_n}_{\text{縮約}}] \\ & + N[\underbrace{A_1 A_2}_{\text{縮約}} \underbrace{A_3 A_4}_{\text{縮約}} \cdots] + \cdots + N[\cdots \underbrace{A_{n-3} A_{n-2}}_{\text{縮約}} \underbrace{A_{n-1} A_n}_{\text{縮約}}] \\ & + \cdots \end{aligned} \quad (414)$$

ここに A, B, \dots を電磁場 A^μ , フェルミオン場 $\psi_l, \bar{\psi}_l$ のいずれかとする,

$$\underbrace{A(x_1) B(x_2)}_{\text{縮約}} \equiv \langle 0 | T\{A(x_1) B(x_2)\} | 0 \rangle \quad (415)$$

であり, これは $A(x_1)$ と $B(x_2)$ の縮約と呼ばれる。ゼロでない縮約は Feynman 伝播関数

$$\begin{aligned} \underbrace{\psi_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_2)}_{\text{縮約}} &= - \underbrace{\bar{\psi}_\beta(x_2) \psi_\alpha(x_1)}_{\text{縮約}} = i S_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2), \quad (\text{各 Dirac 場に対して}) \\ \underbrace{A^\mu(x_1) A^\nu(x_2)}_{\text{縮約}} &= i D_F^{\mu\nu}(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

である。また, 例えば

$$N[\underbrace{ABCDEF \cdots JKLM \cdots}] = (-1)^P \underbrace{AK}_{\text{縮約}} \underbrace{BCEL}_{\text{縮約}} \cdots N[DF \cdots JM \cdots]$$

であり, P は $ABC \cdots$ を $AKB \cdots$ に並べ替える際に隣接するフェルミオン場を入れ換える回数である。そして上式 (414) 右辺の 2 行目, 3 行目, \dots はそれぞれ縮約を 1 回, 2 回, \dots 含む項から成る。本稿では $n = 2$ の場合に Wick の定理 (414) が成り立つことを確かめて満足することにする (9.7.2 節参照)*137。

さて, Dyson 展開 (412) における $T\{\mathcal{H}_I(x_1) \cdots \mathcal{H}_I(x_n)\}$ からは $T\{N(AB \cdots)_{x_1} \cdots N(AB \cdots)_{x_n}\}$ の形の混合 T 積 (正規積で表される因子の T 積) が得られる。ただし $(AB \cdots)_x \equiv A(x)B(x) \cdots, N(AB \cdots)_x \equiv N[A(x)B(x) \cdots]$ である。これに対しては Wick の定理 (414) と同じ形の展開

$$\begin{aligned} & T\{N(AB \cdots)_{x_1} \cdots N(AB \cdots)_{x_n}\} \\ &= N[(AB \cdots)_{x_1} \cdots (AB \cdots)_{x_n}] \\ &+ N[\underbrace{(AB \cdots)_{x_1}}_{\text{縮約}} \cdots (AB \cdots)_{x_n}] + N[\underbrace{(ABC \cdots)_{x_1}}_{\text{縮約}} \cdots (AB \cdots)_{x_n}] + \cdots \\ &+ N[\underbrace{(ABCD \cdots)_{x_1}}_{\text{縮約}} \cdots (AB \cdots)_{x_n}] + \cdots \\ &+ \cdots \end{aligned} \quad (416)$$

において, 右辺から同時刻縮約を除いた式が成り立つ。同時刻縮約とは, 共通の時刻 x_r^0 を引数に持つ場のグループ $(AB \cdots)_{x_r}$ の範囲内の縮約のことである (9.7.2 節参照)。

3.8 反応 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ の確率振幅と断面積

本節では 1 つの興味ある応用として, 反応 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ の断面積を求める。

*137 一般の n に対する証明は帰納的に行われ, さほど教育的ではない。

3.8.1 反応 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ の確率振幅と Feynman 規則

一般に断面積を始めとする観測量の予言は、考えている過程の確率振幅 (S 行列要素) の計算を基に行うことができる。ここでは具体的な素粒子の反応として e^+e^- 衝突によるレプトン対 $\mu^+\mu^-$ の生成過程

$$e^+(\mathbf{p}_1, r_1) + e^-(\mathbf{p}_2, r_2) \rightarrow \mu^+(\mathbf{p}_1', s_1) + \mu^-(\mathbf{p}_2', s_2) \quad (417)$$

を取り上げ、この反応が起こる確率振幅を考える [10, pp.137–140, pp.143–145]. これを通して QED の Feynman 規則を垣間見ることができる。上式 (417) の引数は順番に粒子の運動量とスピンを表している。また粒子の 4 元運動量を

$$e^+ : p_1 = (E_{\mathbf{p}_1}, \mathbf{p}_1), \quad e^- : p_2 = (E_{\mathbf{p}_2}, \mathbf{p}_2), \quad \mu^+ : p_1' = (E_{\mathbf{p}_1'}, \mathbf{p}_1'), \quad \mu^- : p_2' = (E_{\mathbf{p}_2'}, \mathbf{p}_2')$$

と書く。この反応 (417) は始状態 $|i\rangle = |e^-\mathbf{p}_2 r_2; e^+\mathbf{p}_1 r_1\rangle$ から終状態 $|f\rangle = |\mu^-\mathbf{p}_2' s_2; \mu^+\mathbf{p}_1' s_1\rangle$ への遷移

$$|i\rangle = |e^-\mathbf{p}_2 r_2; e^+\mathbf{p}_1 r_1\rangle \rightarrow |f\rangle = |\mu^-\mathbf{p}_2' s_2; \mu^+\mathbf{p}_1' s_1\rangle \quad (418)$$

に対応する。

3.7.2 節の議論を踏まえると、遷移 (418) の起きる確率振幅は 2 次の摂動論で

$$S_{fi} = \left\langle f \left| (-e^2) \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi}_\mu A \psi_\mu)_{x_1} (\bar{\psi}_e A \psi_e)_{x_2}] \right| i \right\rangle \quad (419)$$

となることが分かる (9.8.1 節参照)。さらにこれを運動量空間に移すと*138

$$S_{fi} = \left[(2\pi)^4 \delta^4(p_1' + p_2' - p_1 - p_2) \left(\frac{m_e}{VE_{\mathbf{p}_1}} \right)^{1/2} \left(\frac{m_e}{VE_{\mathbf{p}_2}} \right)^{1/2} \left(\frac{m_\mu}{VE_{\mathbf{p}_1'}} \right)^{1/2} \left(\frac{m_\mu}{VE_{\mathbf{p}_2'}} \right)^{1/2} \right] \mathcal{M}, \quad (420)$$

$$\mathcal{M} = [\bar{u}_{(\mu)s_2}(\mathbf{p}_2')(ie\gamma_\alpha)v_{(\mu)s_1}(\mathbf{p}_1')] iD_F^{\alpha\beta}(p_1 + p_2) [\bar{v}_{(e)r_1}(\mathbf{p}_1)(ie\gamma_\beta)u_{(e)r_2}(\mathbf{p}_2)] : \text{Feynman 振幅} \quad (421)$$

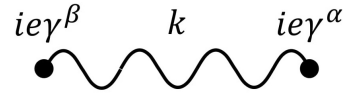
となる (ただし例えば $u_{(l)r}(\mathbf{p})$ は、レプトン l を表す Dirac 場に対して 3.5.3 節で導入したスピノル $u_r(\mathbf{p})$ であり、ここではレプトンの種類 l を添字として明示している、9.8.1 節参照)。反応 (417) がエネルギー・運動量保存則を破る場合を想定すると $p_1 + p_2 \neq p_1' + p_2'$ である。 S_{fi} の式 (420) の $\delta^4(p_1' + p_2' - p_1 - p_2)$ はそのような遷移の確率をゼロにする。

ここで Feynman 振幅 (421) は、反応 $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ を表す図 37 のグラフに対応していることを説明する。図 37 は Feynman ダイアグラムと呼ばれ、左側に外部からダイアグラムに入る線を 2 本、右側にダイアグラムから外部に出る線を 2 本持つ。これらは外線と呼ばれ、それぞれ始状態に存在する粒子 e^\pm と終状態に存在する粒子 μ^\pm を表している。外線については時間はグラフの左から右に流れるものと見なし、外線の矢印は粒子 l^- に対しては時間と同じ方向を向き (左から右を向き)、反粒子 l^+ に対しては時間と反対の方向を向く (右から左を向く) ように描く [10, p.81]. ダイアグラム中央の線は内線と呼ばれる。図 37 の場合、内線は光子を表す波線である。

このダイアグラムの各要素に対して以下の操作を施すと Feynman 振幅の表式 (421) が得られる。これらは QED で扱われる素粒子の反応に対して、Feynman ダイアグラムを描き、そこから確率振幅を書き下すための Feynman 規則の一部を成す。

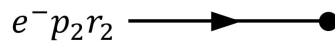
*138 ここで運動量空間に移すとは、適切な生成・消滅演算子を選び出すために場を Fourier 展開し、行列要素を (座標空間の代わりに、一般には) 運動量空間の積分で表すことを意味する。

1. 各結節点に因子 $ie\gamma^\alpha$ を充てる.
2. 運動量 k の付随する光子の内線



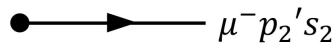
に因子 $iD_{F\beta\alpha}(k) = iD_{F\alpha\beta}(k)$ を充てる.

3. (a) 始状態の e^- の外線



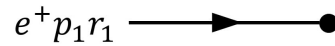
に因子 $u_{(e)r_2}(\mathbf{p}_2)$ を充てる.

- (b) 終状態の μ^- の外線



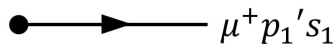
に因子 $\bar{u}_{(\mu)s_2}(\mathbf{p}_2')$ を充てる.

- (c) 始状態の e^+ の外線



に因子 $\bar{v}_{(e)r_1}(\mathbf{p}_1)$ を充てる.

- (d) 終状態の μ^+ の外線



に因子 $v_{(\mu)s_1}(\mathbf{p}_1')$ を充てる.

4. フェルミオン線を矢印の向きにたどって出会う因子を順に右から並べて,

$[\bar{u}_{(\mu)s_2}(\mathbf{p}_2')(ie\gamma_\alpha)v_{(\mu)s_1}(\mathbf{p}_1')]$ と $[\bar{v}_{(e)r_1}(\mathbf{p}_1)(ie\gamma_\beta)u_{(e)r_2}(\mathbf{p}_2)]$ を得る.

これらと $iD_F^{\alpha\beta}(k)$ の合わせて 3 つの因子を並べて

$$\mathcal{M} = [\bar{u}_{(\mu)s_2}(\mathbf{p}_2')(ie\gamma_\alpha)v_{(\mu)s_1}(\mathbf{p}_1')] iD_F^{\alpha\beta}(k) [\bar{v}_{(e)r_1}(\mathbf{p}_1)(ie\gamma_\beta)u_{(e)r_2}(\mathbf{p}_2)]$$

とする (この 3 つの因子は交換するので, どのような順に並べても良いと考えられる).

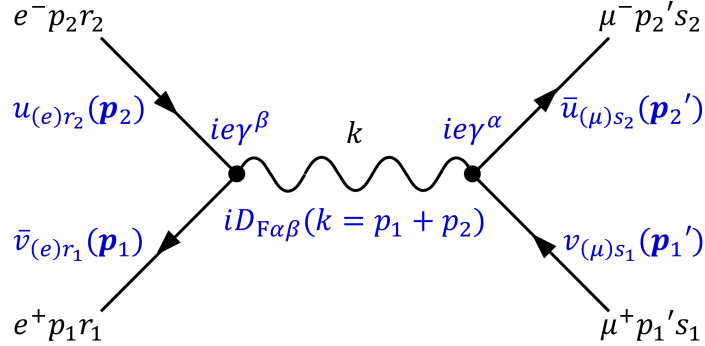


図 37 反応 $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ を表す Feynman ダイアグラム

5. 結節点でのエネルギー・運動量保存則を要求し $k = p_1 + p_2$ とする.

S_{fi} の式 (420) には $\delta^4(p_1' + p_2' - p_1 - p_2)$ が含まれているため、
このときもう一方の結節点における保存則 $k = p_1' + p_2'$ も保証される。

3.8.2 断面積

ある素粒子の反応が起きる確率振幅に関係して、実験的に得られる量は断面積である。ここでは断面積を定義し、反応 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ を念頭に置きつつも他の任意の過程に適用できる形で、S 行列要素から断面積を計算する一般的な手法を確立する。素粒子 1,2 の反応

$$1 + 2 \longrightarrow 3 + \cdots + i + \cdots + n \quad (422)$$

において、検出器に単位時間に入る終状態の粒子 i の個数 dN を

$$dN = V \rho_1 \rho_2 v_{\text{rel}} d\sigma \quad (423)$$

と書き、この式で微分断面積 $d\sigma$ を定義する。ここで $V, \rho_1, \rho_2, v_{\text{rel}}$ は以下のように定義されている。

- V : 空間の体積
- ρ_1, ρ_2 : 粒子 1,2 の数密度
- 粒子 1,2 の“相対速度”

$$v_{\text{rel}} \equiv \frac{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2}}{E_1 E_2} \quad (424)$$

– 粒子 1,2 の 4 元運動量をそれぞれ $p_1 \equiv (E_1, \mathbf{p}_1), p_2 \equiv (E_2, \mathbf{p}_2)$, 質量をそれぞれ m_1, m_2 とした。
 $p_1 \cdot p_2$ は 4 元内積である。

– これは 2 粒子の速度が平行 (反平行や一方の速度がゼロとなる場合を含む) となる場合には、その相対速度

$$v_{12} \equiv \frac{\mathbf{p}_1}{E_1} - \frac{\mathbf{p}_2}{E_2}$$

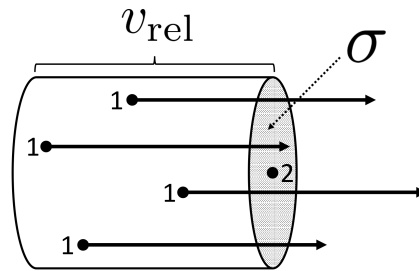


図 38 標的粒子 2 の断面積 σ に粒子 1 がぶつかる度に素粒子の反応 (422) が起こると考える。

の大きさを与える (9.8.2 節参照).

2 粒子の重心系や一方の粒子の静止系 (実験室系) ではこの条件が満たされている。

- この“相対速度”の定義は、上式で定義される微分断面積 $d\sigma$ が不変量、すなわちスカラーであることを保証する (9.8.2 節参照).
- 相対速度を粒子 2 の静止系における粒子 1 の速度と定義する流儀もあり、このとき相対速度はその定義によって不変量となる [3, p.39]. この流儀については 9.8.2 節で言及する。

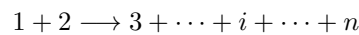
単位時間に散乱される粒子 i の個数は、検出器の方向に散乱される粒子数 (423) の全方向についての和として

$$N = V \rho_1 \rho_2 v_{\text{rel}} \sigma \quad (425)$$

と表される。ここで $\sigma = \int d\sigma$ は微分断面積 $d\sigma$ の全方向についての和であり、これを全断面積 (または単に断面積) と呼ぶ。全断面積を σ_{tot} と書くこともある [26, pp.129–130].

ここで粒子 2 を標的粒子と見なしてその静止系をとると、入射粒子 1 どうし、あるいは散乱体 2 どうしの相互作用は無視できるから、断面積 σ は入射粒子数の流束 $\rho_1 v_{\text{rel}}$ や散乱体の個数 $\rho_2 V$ には依らない [28, pp.8–12]. このため断面積 σ は散乱される粒子数 N に比例した、素粒子の反応に固有の量であり、それゆえ実験の詳細に依らずに素粒子の反応の性質そのものを特徴付ける量であると言える。

σ が断面積と呼ばれるのは以下の事情による。粒子 2 の静止系をとると、粒子 2 に対し相対速度 $v_{12} = v_{\text{rel}}$ で粒子 1 が入射してくる。ここで図 38 のように標的粒子 2 が断面積 σ の広がりを持ち、ここに粒子 1 がぶつかりさえすればその度ごとに素粒子の反応 (422):



が起こると考える。このとき単位時間に断面積 σ に達する粒子 1 は図 38 の体積 $v_{\text{rel}} \sigma$ の円筒に含まれる $\rho_1 v_{\text{rel}} \sigma$ 個であり、体積 V の中に含まれる粒子 2 は $\rho_2 V$ 個あるから、単位時間に散乱される粒子 i の個数は式 (425): $N = \rho_2 V \times \rho_1 v_{\text{rel}} \sigma$ となる [26, p.130].

ここで

- w : 終状態の粒子の運動量とスピン・偏極を指定した素粒子の反応 (422) が単位時間に起きる確率、すなわち遷移率、

dW : 終状態の各粒子 f が指定したスピン・偏極を持ち,
各粒子 f の運動量 \mathbf{p}_f が運動量の範囲 d^3p_f' に含まれるようなミクロな状態の数

とすると, 1組の粒子対 1,2 について終状態の各粒子を運動量の範囲 d^3p_f' に得る確率は単位時間あたり wdW である. 体積 V の中には粒子 1,2 はそれぞれ $\rho_1 V, \rho_2 V$ 個存在するから, 体積 V の中で起きるこのような反応の総数は $(\rho_1 V)(\rho_2 V)wdW$ である. 終状態が2個の粒子から成る反応を考え, 終状態の粒子を改めて 1,2 と呼ぶことにする. 粒子 1 の運動量の範囲 d^3p_1' が占める立体角 $d\Omega_1'$ を散乱中心から見た検出器の立体角 $d\Omega$ にとると,

$$dN = \int_{\mathbf{p}_2', |\mathbf{p}_1'|} (\rho_1 V)(\rho_2 V)wdW$$

となる. これを式 (423) と等置すると, 微分断面積は

$$d\sigma = \frac{1}{v_{\text{rel}}/V} \int_{\mathbf{p}_2', |\mathbf{p}_1'|} wdW = \int_{\mathbf{p}_2', |\mathbf{p}_1'|} d\sigma'$$

で与えられる. ここに

$$d\sigma' \equiv \frac{wdW}{v_{\text{rel}}/V}$$

は終状態の粒子 1,2 のスピン・偏極と運動量の範囲 d^3p_1', d^3p_2' を指定した反応の断面積である.
なお我々の採用している1粒子状態

$$|\gamma \mathbf{k} r\rangle = a_r^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle, \quad |e^- \mathbf{p} r\rangle = c_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle, \quad |e^+ \mathbf{p} r\rangle = d_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$$

は規格化条件

$$\begin{aligned} \langle \gamma \mathbf{k} r | \gamma \mathbf{k} r \rangle &= \langle 0 | a_r(\mathbf{k}) a_r^\dagger(\mathbf{k}) | 0 \rangle = \langle 0 | [a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) + 1] | 0 \rangle = 1, \\ \langle e^- \mathbf{p} r | e^- \mathbf{p} r \rangle &= \langle 0 | c_r^\dagger(\mathbf{p}) c_r(\mathbf{p}) | 0 \rangle = \langle 0 | [-c_r(\mathbf{p}) c_r^\dagger(\mathbf{p}) + 1] | 0 \rangle = 1, \\ \langle e^+ \mathbf{p} r | e^+ \mathbf{p} r \rangle &= \langle 0 | d_r^\dagger(\mathbf{p}) d_r(\mathbf{p}) | 0 \rangle = \langle 0 | [-d_r(\mathbf{p}) d_r^\dagger(\mathbf{p}) + 1] | 0 \rangle = 1 \end{aligned}$$

を満たす ($r = 1, 2$). これは (1 粒子状態 $|\dots\rangle$ の波動関数 $\varphi(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | \dots \rangle$ を用いて記述される 1 粒子系の理論では, $|\varphi(\mathbf{x})|^2$ を粒子数密度とする解釈の下で規格化体積 V に粒子が 1 個存在することを意味する ($\int d^3x |\varphi(\mathbf{x})|^2 = 1$) [26, p.130]. そこで (規格化) 体積 V の中に散乱中心がひとつ含まれることを考慮すると, $\rho_1 v_{\text{rel}} = v_{\text{rel}}/V, \rho_2 V = 1$ となるので, 式 (423) は

$$dN = d\sigma \frac{v_{\text{rel}}}{V}$$

と書ける. 一方, 体積 V に含まれる散乱中心が 1 個だから, 単位時間に検出器に入る粒子 1 の個数 dN は粒子 1 が検出器の方向に散乱される確率に他ならない. これに注意すると, 上式は

$$dN = \int_{\mathbf{p}_2', |\mathbf{p}_1'|} wdW$$

と簡略化される. これらを等置して, 再び

$$d\sigma = \int_{\mathbf{p}_2', |\mathbf{p}_1'|} d\sigma', \quad d\sigma' \equiv \frac{wdW}{v_{\text{rel}}/V}$$

を得る [10, p.149].

特に e^+e^- 衝突によるレプトン対 $\mu^+\mu^-$ の生成過程 (417):

$$e^+(\mathbf{p}_1, r_1) + e^-(\mathbf{p}_2, r_2) \rightarrow \mu^+(\mathbf{p}_1', s_1) + \mu^-(\mathbf{p}_2', s_2)$$

を考えると、その確率振幅 S_{fi} は 2 次の摂動論で式 (420) によって与えられることから遷移率 w が求まり、

$$d\sigma' = (2\pi)^4 \delta^4(\Delta p) \frac{1}{4E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} v_{\text{rel}}} \left(\prod_l (2m_l) \right) \left(\prod_f \frac{d^3 p_{f'}}{(2\pi)^3 2E_{f'}} \right) |\mathcal{M}|^2$$

が導かれる。ここで l は始・終状態のレプトン e^\pm, μ^\pm を、 f は終状態の粒子 μ^\pm を表し、

$$\prod_l (2m_l) = (2m_e)^2 (2m_\mu)^2, \quad \prod_f \frac{d^3 p_{f'}}{(2\pi)^3 2E_{f'}} = \frac{d^3 p_{1'}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_{1'}}} \cdot \frac{d^3 p_{2'}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_{2}'}}$$

である。また \mathcal{M} は式 (421) の Feynman 振幅である。

ここから重心系での微分断面積の表式

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CoM}} = \frac{1}{64\pi^2 (E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2})^2} \frac{|\mathbf{p}_{1'}|}{|\mathbf{p}_1|} \left(\prod_l (2m_l) \right) |\mathcal{M}|^2 \quad (426)$$

が導かれる (9.8.2 節参照) [10, pp.148–151]。この公式は記号の意味を適当に読み替えれば、そのまま任意の 2 粒子の衝突過程に適用できる。

3.8.3 反応 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ の断面積

以上を踏まえ、反応 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ の断面積を求めよう。断面積の表式 (426) の中で始・終状態の粒子のスピンの依存するのは Feynman 振幅 (421):

$$\mathcal{M} = -ie^2 \bar{u}_{(\mu)s_2}(\mathbf{p}_2') \gamma^\alpha v_{(e)s_1}(\mathbf{p}_1') D_{F\alpha\beta}(p_1 + p_2) \bar{v}_{(e)r_1}(\mathbf{p}_1) \gamma^\beta u_{(e)r_2}(\mathbf{p}_2)$$

である。ここでレプトンのスピンと光子の偏極をまとめて偏極と呼ぶと、一般に実験では始状態の粒子は非偏極であり、また終状態の粒子の偏極は測定されない。よって実験に対応する (微分) 断面積を得るには、偏極を指定した (微分) 断面積において

- 始状態の粒子の偏極 r_1, r_2 について平均をとり $\left(\frac{1}{2} \sum_{r_1} \frac{1}{2} \sum_{r_2} \right)$ を作用させ、
- 終状態の粒子の偏極 s_1, s_2 について和をとった $\left(\sum_{s_1} \sum_{s_2} \right)$ を作用させた、

非偏極の (微分) 断面積を計算する必要がある。

重心系での粒子のエネルギー・運動量は図 39 のように表記できる。

図 39 の記号を用い、始状態の粒子のエネルギー E が十分大きく終状態の粒子 μ^\pm を生成できる条件 $E \geq m_\mu \gg m_e$ を用いると、2 次の摂動論での非偏極の微分断面積の表式

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CoM}} = \frac{\alpha^2}{16E^4} \left(\frac{p'}{E} \right) (E^2 + m_\mu^2 + p'^2 \cos^2 \theta) \quad (427)$$

を得る。ここで p' は $|\mathbf{p}'|$ の意味であり、4 元運動量ではない。2 次の摂動論での確率振幅 S_{fi} の式 (420) は e の 2 次の量であり、その絶対値の 2 乗が確率を与えることに対応して、これは微細構造定数 $\alpha \equiv e^2/4\pi$ の 2 次の量である。ここから全断面積 σ_{tot} は

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{\pi\alpha^2}{4E^4} \left(\frac{p'}{E} \right) (E^2 + m_\mu^2 + \frac{1}{3}p'^2), \quad \therefore E^2 \sigma_{\text{tot}} = \frac{\pi\alpha^2}{6} \frac{\sqrt{E^2 - m_\mu^2}}{E^3} (2E^2 + m_\mu^2) \quad (428)$$

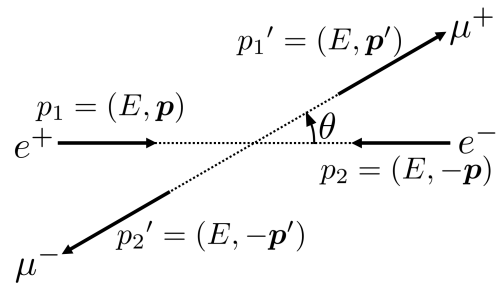


図 39 重心系で見た反応 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ における粒子の 4 元運動量

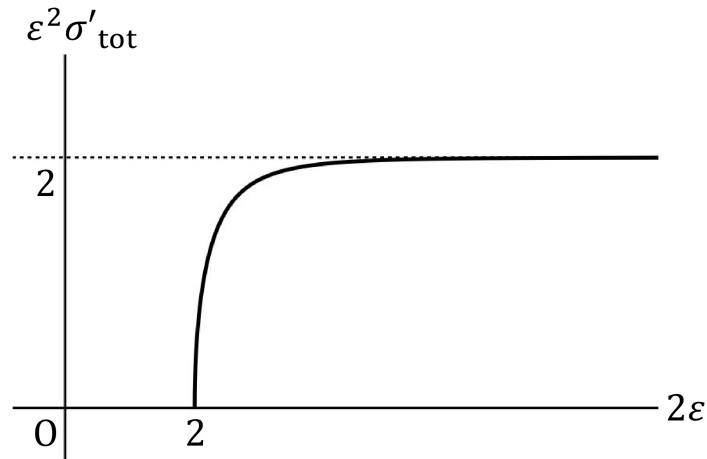


図 40 重心系における反応 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ の全断面積 σ_{tot} と全エネルギー $2E$ の関係

となる。これは $E \gg m_\mu$ の相対論的極限で

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{\pi\alpha^2}{3E^2} \quad (429)$$

となる [10, pp.156–160]。以上の導出過程は 9.8.3 節に記す。

全断面積 σ_{tot} と重心系での全エネルギー $2E$ の関係を図示しよう。断面積とエネルギーをそれぞれ

$$\sigma'_{\text{tot}} \equiv \frac{m_\mu^2 \sigma_{\text{tot}}}{\pi\alpha^2/6}, \quad \varepsilon \equiv \frac{E}{m_\mu}$$

と無次元化すると、全断面積 σ_{tot} の式 (428) は

$$\varepsilon^2 \sigma'_{\text{tot}} = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\varepsilon^3} (2\varepsilon^2 + 1)$$

となる。これをグラフに描くと図 40 のようになる。

3.9 QED の Feynman 規則

第 1 原理 (Dyson-Wick 形式) に基づいて, 指定された始状態 $|i\rangle$ から終状態 $|f\rangle$ への遷移を起こす行列要素 $\langle f|S|i\rangle$ を, 任意の次数の摂動論で計算することができる. その結果は Feynman ダイアグラムに対応付けて理解することができ, 反応 $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ の確率振幅には, 可能なあらゆるダイアグラムによって表される過程が寄与するものと解釈できる. 数式と Feynman ダイアグラムの対応関係は一連の規則 (Feynman 規則) にまとめ上げることができる. これを踏まえると, もはや詳細な計算をせずとも Feynman グラフを描き, それを Feynman 規則に従って数式に翻訳することで, 直接, 遷移振幅 (行列要素) を書き下すことができるようになる. 3.8.1 節ではレプトン対の生成過程 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ を例にとり, QED の Feynman 規則を部分的に垣間見た. 3.9.6 節では全ての規則を紹介し, QED の Feynman 規則を完成させる. まずは全ての Feynman 規則の起源を理解するために, 追加の具体例として

- 互いにフェルミオンの外線を入れ替えた関係にある複数のダイアグラムの関与する過程 (3.9.3 節)
- ループを含むダイアグラムの関与する過程 (3.9.4 節)
- 静的な外場との相互作用 (3.9.5 節)

を重点的に取り上げる必要がある.

3.9.1 S 行列要素の計算の一般論

3.8.1 節で行った S 行列要素の計算手法を一般化することから始めよう [10, pp.115–118]. ただし以下では簡単のためにフェルミオンとして電子 (と陽電子) e^\pm のみを想定し, QED の相互作用を

$$\mathcal{H}_I(x) = -eN[\bar{\psi}(x)A(x)\psi(x)] = -eN[(\bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^-)(A^+ + A^-)(\psi^+ + \psi^-)]_x \quad (430)$$

として, S 行列展開

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}, \quad S^{(n)} \equiv \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T\{\mathcal{H}_I(x_1) \cdots \mathcal{H}_I(x_n)\} \quad (431)$$

(ここに $S^{(0)} = 1, S^{(1)} = -i \int d^4x N[\mathcal{H}_I(x)]$) を考えれば十分である. 相互作用 (430)(したがって 1 次項 $S^{(1)}$) は, 最右辺における場 $\bar{\psi}^\pm, A^\pm, \psi^\pm$ の各々について, 正・負振動数部分の選び方に応じて図 41 の 8 種類の過程を起こし得る (ここではレプトンとして電子 $l = e$ のみを想定, γ は光子). これらは QED の基本結節点と呼ばれ, QED のあらゆる Feynman ダイアグラムはこれらの基本結節点を組合せることで得られる. 図 41 のグラフは実過程ではあり得ない. と言うのも, 物理的な光子とフェルミオンの条件 $k^2 = 0, p^2 = m^2$ を要請すると, どの過程もエネルギー・運動量保存則を両立できないからである (9.9.1 節で確認). このため QED の基本結節点を組合せたダイアグラムに現れる中間状態の粒子は, 4 元運動量が質量殻上に乗らないような仮想粒子であることになる [10, p.133] [2, p.598].

次に 2 次の項 $S^{(2)}$ に対して Wick の定理を適用すると, 次のようになる (9.9.1 節で確認). Wick 展開の各項は座標空間の Feynman ダイアグラムに対応付けて解釈できる (すぐ後で具体例を見る).

$$S^{(2)} = \sum_{i=A}^F S_i^{(2)},$$

$$S_A^{(2)} \equiv -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi}A\psi)_{x_1}(\bar{\psi}A\psi)_{x_2}],$$

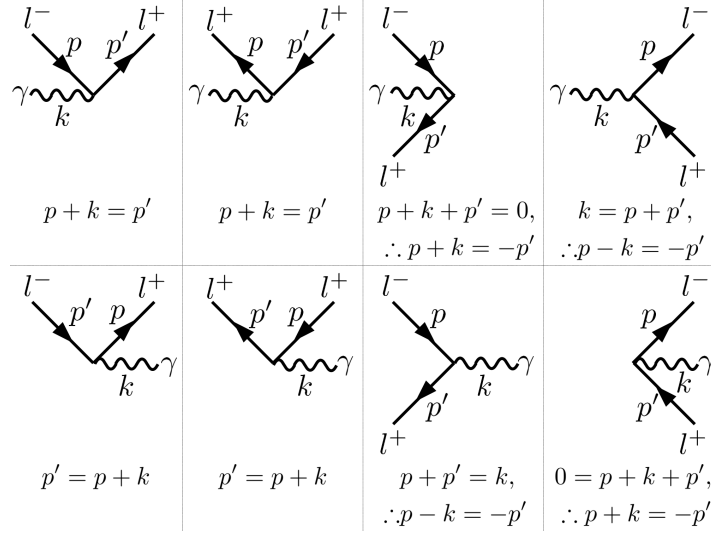


図 41 QED の基本結節点

$$S_B^{(2)} \equiv -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \{N[(\bar{\psi} A \psi)_{x_1} (\bar{\psi} A \psi)_{x_2}] + N[(\bar{\psi} A \psi)_{x_1} (\bar{\psi} A \psi)_{x_2}]\}$$

$$= -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi} A \psi)_{x_1} (\bar{\psi} A \psi)_{x_2}],$$

→ e^\pm の Compton 散乱, $e^+ e^-$ の対生成・対消滅の振幅に寄与

$$S_C^{(2)} \equiv -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi} \gamma^\alpha A_\alpha \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \gamma^\beta A_\beta \psi)_{x_2}],$$

→ フェルミオン-フェルミオン散乱の振幅に寄与

$$S_D^{(2)} \equiv -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \{N[(\bar{\psi} \gamma^\alpha A_\alpha \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \gamma^\beta A_\beta \psi)_{x_2}] + N[(\bar{\psi} \gamma^\alpha A_\alpha \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \gamma^\beta A_\beta \psi)_{x_2}]\}$$

$$= -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi} \gamma^\alpha A_\alpha \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \gamma^\beta A_\beta \psi)_{x_2}]$$

→ フェルミオンの自己エネルギーダイアグラム (図 42) に寄与

$$S_E^{(2)} \equiv -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi} A \psi)_{x_1} (\bar{\psi} A \psi)_{x_2}],$$

→ 光子の自己エネルギーダイアグラム (図 42) に寄与

$$S_F^{(2)} \equiv -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 (\bar{\psi} \gamma^\alpha A_\alpha \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \gamma^\beta A_\beta \psi)_{x_2}$$

→ 外線のない“真空ダイアグラム” (図 42) で表され, 実遷移を起こさない

縮約は中間状態における粒子の伝播関数 (c-数関数) となり, ここではその両端の時空点 x_1, x_2 に関する積分が自然に導入されている. 残りの場の演算子が始・終状態の粒子を生成・消滅させる.

図 42 に示した“自己エネルギーダイアグラム”は無有限大を生じる. これについては, 3.10 節で改めて詳しく論じる^{*139}.

^{*139} 例えば電子が自ら放出した光子を再び吸収する過程から発散が現れることは, 場の古典論において電荷が自身の作った電場によって無限大の自己エネルギーを持つことに似ている.

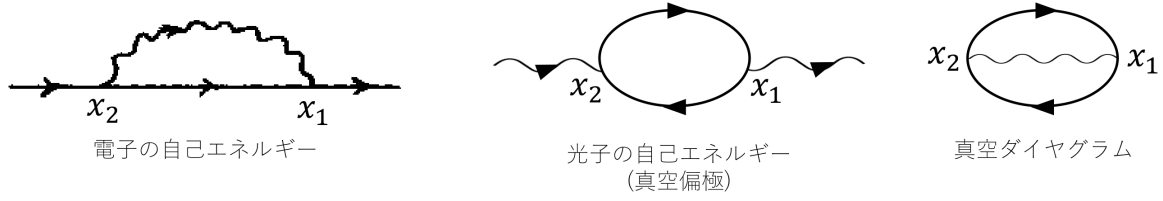


図 42 $S_D^{(2)}$, $S_E^{(2)}$, $S_F^{(2)}$ が関与する Feynman グラフ

さらに 3.8.1 節で行ったように、関心のある行列要素 $\langle f|S^{(n)}|i\rangle$ を運動量空間に移して評価することを考える [10, pp.128–129]. ここで運動量空間に移すとは、適切な生成・消滅演算子を選び出すために場を Fourier 展開し、行列要素を (座標空間の代わりに、一般には) 運動量空間の積分で表すことを意味する. その結果は運動量空間の Feynman ダイアグラム (運動量を付記したダイアグラム) に対応付けて解釈できる. これを行うために有用となる関係を以下にまとめておく.

- 4 元運動量空間における伝播関数

$$S_F(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon}, \quad D_F^{\alpha\beta}(k) = \frac{-g^{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon}.$$

- 縮約されていない演算子 ψ^+ , $\bar{\psi}^+$, A_α^+ は、始状態 $|i\rangle$ を $|0\rangle$ に移行させる作用を持つ.

$$\begin{aligned} \psi^+(x) |e^- \mathbf{p} r\rangle &= \sum_{\mathbf{q}, s} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{q}}} \right)^{1/2} c_s(\mathbf{q}) u_s(\mathbf{q}) e^{-iq \cdot x} |e^- \mathbf{p} r\rangle \\ &= |0\rangle \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} u_r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}, \end{aligned} \quad (432)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^+(x) |e^+ \mathbf{p} r\rangle &= \sum_{\mathbf{q}, s} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{q}}} \right)^{1/2} d_s(\mathbf{q}) \bar{v}_s(\mathbf{q}) e^{-iq \cdot x} |e^+ \mathbf{p} r\rangle \\ &= |0\rangle \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \bar{v}_r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}, \end{aligned} \quad (433)$$

$$\begin{aligned} A_\alpha^+(x) |\gamma \mathbf{k} r\rangle &= \sum_{s, \mathbf{k}'} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \varepsilon_{s\alpha}(\mathbf{k}') a_s(\mathbf{k}') e^{-ik' \cdot x} |\gamma \mathbf{k} r\rangle \\ &= |0\rangle \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x}. \end{aligned} \quad (434)$$

(ただし例えば $|e^- \mathbf{p} r\rangle = c_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle$ は 1 電子状態, $|\gamma \mathbf{k} r\rangle = a_r^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle$ は 1 光子状態である.)

- 式 (432)–(434) の両辺の Hermite 共役をとると (フェルミオンの式 (432), (433) については、さらに右から γ^0 をかける),

$$\langle e^- \mathbf{p} r | \bar{\psi}^-(x) = \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \bar{u}_r(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \langle 0 |, \quad (435)$$

$$\langle e^+ \mathbf{p} r | \bar{\psi}^-(x) = \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} v_r(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \langle 0 |, \quad (436)$$

$$\langle \gamma \mathbf{k} r | A_\alpha^-(x) = \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x} \langle 0 | \quad (437)$$

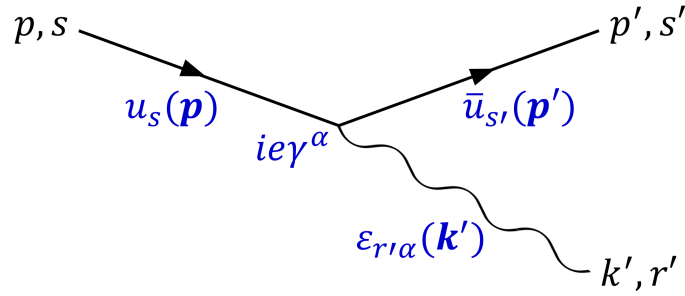


図 43 1 次過程 $e^-(\mathbf{p}, s) \rightarrow e^-(\mathbf{p}', s') + \gamma(\mathbf{k}', r')$. 3.9.6 節の Feynman 規則を考慮して、結節点因子と外線因子を付してある。

となることも有用である。

★ これ以降、スピン・偏極状態の指標を省略した表記を頻繁に用いる。

3.9.2 1 次の項 $S^{(1)}$ [10, pp.129–131]

最初の例として過程 $e^- \rightarrow e^- + \gamma$, すなわち遷移

$$|i\rangle = |e^- \mathbf{p} s\rangle = c_s^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle \quad \rightarrow \quad |f\rangle = |e^- \mathbf{p}' s'; \gamma \mathbf{k}' r'\rangle = c_{s'}^\dagger(\mathbf{p}') a_{r'}^\dagger(\mathbf{k}') |0\rangle$$

を考える。場を Fourier 展開して運動量空間に移行すると、 $S^{(1)}$ の振幅への寄与は

$$\langle f | S^{(1)} | i \rangle = \left[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathbf{p}' + \mathbf{k}' - \mathbf{p}) \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \right] \mathcal{M}, \quad (438)$$

$$\mathcal{M} = ie \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}_{r'}(\mathbf{k}' = \mathbf{p} - \mathbf{p}') u_s(\mathbf{p}) \quad (439)$$

と計算される (導出は 9.9.2 節)。 \mathcal{M} は個々の過程に固有の部分であり、Feynman 振幅と呼ばれ、図 43 に示す運動量空間の Feynman ダイアグラムに対応付けられる。デルタ関数 $\delta^{(4)}(\mathbf{p}' + \mathbf{k}' - \mathbf{p})$ は座標空間のダイアグラム (図 41) における結節点 x に関する積分から生じており (9.9.2 節の導出過程を参照)、結節点におけるエネルギー・運動量の保存を保証する。(保存則 $p = p' + k'$ を満たさない遷移 $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ を想定すると、確率振幅はゼロになる。

3.9.1 節で見たように、 $e^- \rightarrow e^- + \gamma$ を含め図 41 の 1 次過程ではエネルギー・運動量保存則が成立しないので、実過程にならない。(すなわち始・終状態の粒子を質量殻上にある物理的粒子とすると、その過程の確率振幅は自然に導かれるデルタ関数因子のためにゼロとならざるを得ない。)

3.9.3 電子-電子散乱 (Møller 散乱) [10, pp.121–124, pp.135–136]

ここで $S_C^{(2)}$ の寄与する過程として、Møller (メラ) 散乱

$$e^-(1) + e^-(2) \quad \rightarrow \quad e^-(1') + e^-(2')$$

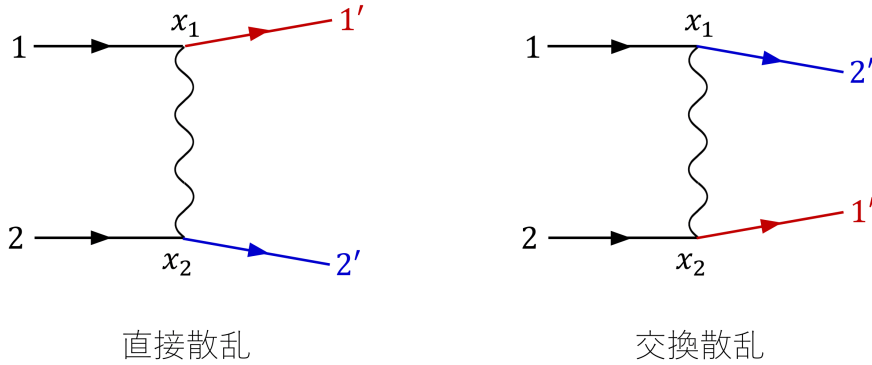


図 44 電子-電子散乱 (Møller 散乱) を表す 2 つのダイアグラム

を考えよう. ただし $1, 2, 1', 2'$ はそれぞれ電子の状態の指標 (スピン状態と運動量をまとめたもの) である. Møller 散乱の振幅に対する S 演算子の (最低次の) 寄与は, $S_C^{(2)}$ における 2 つの部分

$$S_a = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi}_{1'} \gamma^\alpha \psi_1)_{x_1} (\bar{\psi}_2 \gamma^\beta \psi_2)_{x_2}] iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2),$$

$$S_b = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi}_2 \gamma^\alpha \psi_1)_{x_1} (\bar{\psi}_{1'} \gamma^\beta \psi_2)_{x_2}] iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) \quad (440)$$

の和 $S_a + S_b$ となる (導出は 9.9.3 節). S_a は図 44 に示した直接散乱を引き起こすのに対し, S_b は同図の交換散乱を引き起こす^{*140}. 正規順序化においてフェルミオン場の演算子を反交換する規則に基づけば, S_a と S_b は互いに $1', 2'$ を反交換した関係にあり, 相対的な符号が異なることが示される (9.9.3 節参照):

$$\langle f | S^{(2)} (2e^- \rightarrow 2e^-) | i \rangle = \langle f | S_a^{(2)} | i \rangle + \langle f | S_b^{(2)} | i \rangle, \quad (441)$$

$$\langle f | S_a^{(2)} | i \rangle = \left\{ -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 g_{1'}(x_1) \gamma^\alpha f_1(x_1) g_2(x_2) \gamma^\beta f_2(x_2) iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) \right\},$$

$$\langle f | S_b^{(2)} | i \rangle = -\{1' \leftrightarrow 2'\}. \quad (442)$$

これは非相対論的な量子力学において, 2 つの同種フェルミオンが反対称な波動関数で記述されたことを想起させる (本章の冒頭を参照) [16, pp.220–222].

一般論 1 S 行列展開 (431) における n 次項 $S^{(n)}$ は, 因子 $1/n!$ と, n 個の変数 x_1, x_2, \dots, x_n を含む. 後者は単に積分を実行するための時空座標変数であり, 同じトポロジーを持つ Feynman グラフが含む n 個の結節点に対して $n!$ 通りの方法であてがわれる. したがって, 我々がトポロジー的に互いに異なる Feynman ダイアグラムだけを考えるならば (すなわち各結節点にあてがわれた座標変数が違うだけのグラフは同じものと見なすならば), 因子 $1/n!$ を省くことができる [10, p.122].

ただし例えば図 44 に示された 2 つのグラフは, トポロジー的に異なるグラフと見なさなければならないことに注意する.

一般論 2 始状態または終状態に複数の同種フェルミオンが含まれる場合, 完全に反対称な $\langle f | S | i \rangle$ が得られる. たとえば始状態 $|i\rangle$ が s 個の陽電子を含み, それらの占める 1 粒子状態が $1, 2, \dots, s$ であるとする. これに対応する S 演算子は s 個の縮約されていない演算子 $N[\bar{\psi}(x_1)\bar{\psi}(x_2)\cdots\bar{\psi}(x_s)]$ を

*140 もちろん図 44 においてどちらのダイアグラムを「直接散乱」と見なすかは任意である.

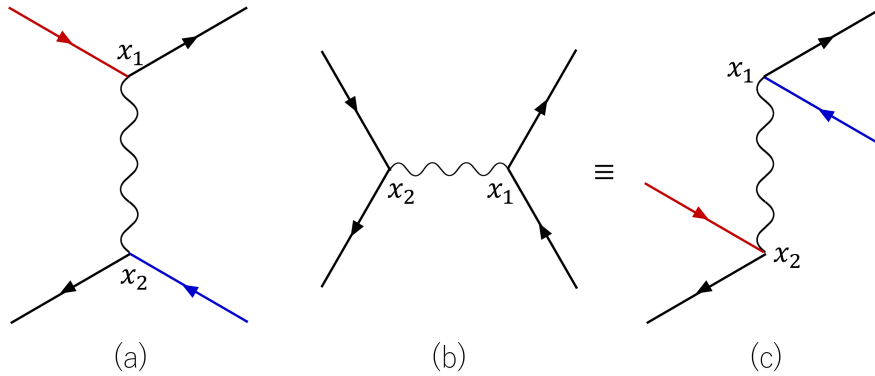


図 45 電子-陽電子散乱 (Bhabha 散乱) を表すダイアグラム

含む。これらの演算子 $\bar{\psi}(x_1), \bar{\psi}(x_2), \dots, \bar{\psi}(x_s)$ のどれでも状態 1 の陽電子を消滅させることができる、等々ということでは $s!$ 個の項が得られ、 $\bar{\psi}(x_1), \bar{\psi}(x_2), \dots, \bar{\psi}(x_s)$ が反交換するために、 $s!$ 個の項の和は $1, 2, \dots, s$ の置換に関して完全に反対称である。

さらに奇妙なことに、演算子 $\psi(x)$ は電子を消滅させることも陽電子を生成することもできるという事実は、遷移振幅が始状態の 1 電子状態と終状態の 1 陽電子状態間でも反対称となることを意味する。(もちろん $\bar{\psi}(x)$ に着目した始状態の陽電子と終状態の電子の議論も同様に成立する。) [10, p.124]

例えば Bhabha (バーバ) 散乱

$$e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$$

に寄与するダイアグラムには、図 45 に示す 2 つのグラフ (a),(b) がある。(b) を変形させて得られる等価なグラフ (c) は (a) のグラフと比べて、 x_1 に接続する始状態の電子線と x_2 に接続する終状態の陽電子線が入れ替わっている。これら 2 種類のグラフ (a), (b)(\equiv (c)) からの寄与には、符号因子 (-1) の相対的な違いがある。

次に運動量空間に移ろう。電子-電子散乱 (Møller 散乱)

$$|i\rangle = c_s^\dagger(\mathbf{p}_2)c_r^\dagger(\mathbf{p}_1)|0\rangle \rightarrow |f\rangle = c_{s'}^\dagger(\mathbf{p}'_2)c_{r'}^\dagger(\mathbf{p}'_1)|0\rangle$$

の確率振幅には、図 44 で見た座標空間の Feynman グラフに対応して、図 46 に示す 2 つの運動量空間のグラフが寄与する。それぞれのグラフに関する Feynman 振幅を $\mathcal{M}_a, \mathcal{M}_b$ とすると、対応する S 行列要素は

$$\langle f|S^{(2)}(2e^- \rightarrow 2e^-)|i\rangle = \left[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p - k) \right. \\ \left. \times \left(\frac{m}{VE_1} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE_2} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE'_1} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE'_2} \right)^{1/2} \right] (\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b), \quad (443)$$

$$\mathcal{M}_a = -e^2 \bar{u}_{r'}(\mathbf{p}'_1) \gamma^\alpha u_r(\mathbf{p}_1) i D_{F\alpha\beta}(k = p_2 - p'_2) \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}'_2) \gamma^\beta u_s(\mathbf{p}_2), \quad (444)$$

$$\mathcal{M}_b = +e^2 \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}'_2) \gamma^\alpha u_r(\mathbf{p}_1) i D_{F\alpha\beta}(k = p_2 - p'_1) \bar{u}_{r'}(\mathbf{p}'_1) \gamma^\beta u_s(\mathbf{p}_2) \quad (445)$$

となる ($E'_1 \equiv E_{p'_1}$, etc., 導出は 9.9.3 節)。2 つの振幅 $\mathcal{M}_a, \mathcal{M}_b$ の相対的な符号の違いはそのまま、式 (442) で見た直接散乱と交換散乱の符号の違いに由来している。また再びデルタ関数 $\delta^{(4)}(p' + k' - p - k)$ は反応全体のエネルギー-運動量保存則を表している。

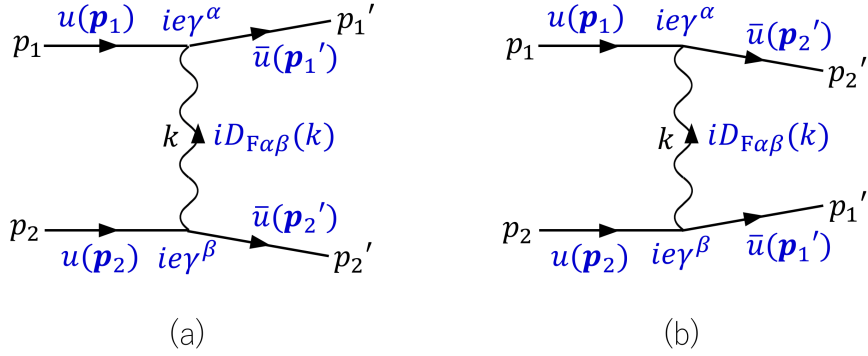


図 46 電子-電子散乱 (Møller 散乱). スピン状態の添字を省き, 3.9.6 節の Feynman 規則に基づく因子を付してある.

上式における光子の運動量 $k = p_2 - p_2', p_2 - p_1'$ は, 図 46 のように光子の内線の運動量 k を上向きに定義した場合と整合している.

$$D_{F\alpha\beta}(k) = \frac{-g_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} = D_{F\alpha\beta}(-k)$$

なので, 行列要素を計算する際に波数 k の代わりに $-k$ を用いて伝播関数の Fourier 展開を行えば, 単純に上式で $k \rightarrow -k$ と置き換えた式が得られる. この場合には Feynman 振幅は図 46 の代わりに, 内線の運動量 k を下向きに定義したグラフと整合することになる. 結局 k の向きを任意に決めておき, それに応じて保存則を適切に表せば, Feynman 振幅が正しく得られることになる.

3.9.4 閉じたループ

■電子の自己エネルギー [10, pp.136–137] 一般に内線がループを形成している Feynman ダイアグラムでは, エネルギー-運動量保存則の下でなお 4 元運動量が外線から固定されない内線が生じる. 例えば図 47 に示す電子の自己エネルギーダイアグラムでは, 保存則を考慮すると, 与えられた外線の運動量 $p, p' (= p)$ に対して光子と電子の内線の運動量は $k, q = p - k$ とおくことができる. このとき運動量 k の値は (したがって q の値は) 固定されない. 第 1 原理により遷移

$$|i\rangle = c^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle \rightarrow |f\rangle = c^\dagger(\mathbf{p}')|0\rangle$$

(スピン状態の添字を省略) に関する, 図 47 に対応する S 行列要素は

$$\langle f|S^{(2)}|i\rangle = \left[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p) \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \right] \mathcal{M}, \quad (446)$$

$$\mathcal{M} = -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iD_{F\alpha\beta}(k) \bar{u}(\mathbf{p}) \gamma^\alpha iS_F(p-k) \gamma^\beta u(\mathbf{p}) \quad (447)$$

と計算される (導出は 9.9.4 節). これは保存則 $p = p'$ を含意しており, 独立に選べる運動量 k の可能なすべての値からの寄与が, k に関する積分として自然に導入されている. このような内部運動量に関する積分は, 閉じたループに一般的な特徴である. もう 1 つの例として, 光子の自己エネルギーを次に取り上げる.

■光子の自己エネルギー [10, pp.126–127, p.145] 光子の自己エネルギーダイアグラム (図 42 参照) に寄与するのは,

$$S_E^{(2)} \equiv -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N \left[\underbrace{(\bar{\psi} A \psi)_{x_1} (\bar{\psi} A \psi)_{x_2}} \right]$$

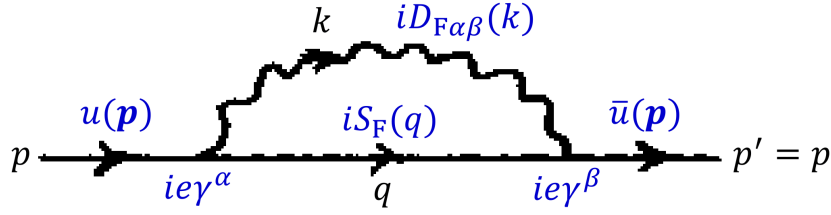


図 47 電子の自己エネルギー．スピン状態の添字を省き，3.9.6 節の Feynman 規則に基づく因子を付してある．

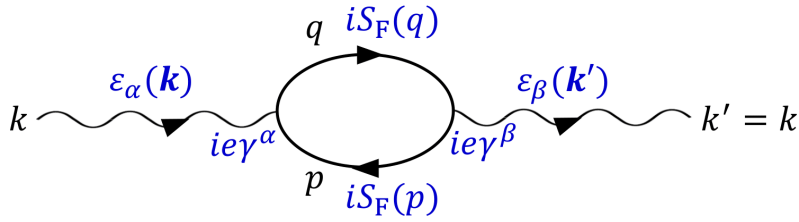


図 48 光子の自己エネルギー．偏極状態の添字を省き，3.9.6 節の Feynman 規則に基づく因子を付してある．

のうち

$$S^{(2)}(\gamma \rightarrow \gamma) = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N[\underbrace{(\bar{\psi} A^- \psi)_{x_1} (\bar{\psi} A^+ \psi)_{x_2}}] \quad (448)$$

である．スピノル添字を明記し $A_{\lambda\mu}^-(x) \equiv \gamma_{\lambda\mu}^\alpha A_\alpha^-(x)$ などと書くと，正規積の部分は

$$\begin{aligned} & N[\underbrace{(\bar{\psi}_\lambda A_{\lambda\mu}^- \psi_\mu)_{x_1} (\bar{\psi}_\sigma A_{\sigma\tau}^+ \psi_\tau)_{x_2}}] \\ &= (-1) \underbrace{\psi_\tau(x_2) \bar{\psi}_\lambda(x_1) A_{\lambda\mu}^-(x_1) \psi_\mu(x_1) \bar{\psi}_\sigma(x_2) A_{\sigma\tau}^+(x_2)} \\ &= (-1) \text{Tr}[iS_F(x_2 - x_1) A^-(x_1) iS_F(x_1 - x_2) A^+(x_2)] \end{aligned} \quad (449)$$

と計算される．ここで

- 負号 (フェルミオン場を演算子積の一端から他端に移動する際に生じている)
- 対角和 (Tr)

は，閉じたフェルミオンループ (図 42 参照) に特徴的である．

運動量空間に移ると，図 48 の遷移 $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ に対応する S 行列要素は

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(2)}(\gamma \rightarrow \gamma) | i \rangle &= \left[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k' - k) \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \right] \mathcal{M}, \\ \mathcal{M} &= -e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\not{\epsilon}(\mathbf{k}) iS_F(p + k) \not{\epsilon}(\mathbf{k}' = \mathbf{k}) iS_F(p)] \end{aligned} \quad (450)$$

と計算される (導出は 9.9.4 節)．期待されるように，ここでもループを作る内線の固定されない運動量 p に関する積分が施されている．

3.9.5 外場による散乱 [10, pp.170–173]

量子ゆらぎが重要ではない外部電磁場 $A_e^\alpha(x)$ は、古典場として記述するのが適切である。より一般には S 行列展開において、 $A^\alpha(x)$ を量子場と古典場の和 $A^\alpha(x) + A_e^\alpha(x)$ に置き換えれば良い。

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T \{ N[\bar{\psi}(A + A_e)\psi]_{x_1} \cdots N[\bar{\psi}(A + A_e)\psi]_{x_n} \}. \quad (451)$$

特に静的な外場

$$A_e^\alpha(x) = A_e^\alpha(\mathbf{x})$$

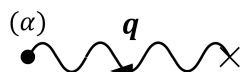
を考えると、次の規則が見出される。

(i) Feynman 振幅と S 行列要素を関係付ける式 (453) において

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum p'_f - \sum p_i \right) \rightarrow (2\pi) \delta \left(\sum E'_f - \sum E_i \right)$$

と置き換える。

(ii) 荷電粒子と外部の静的電磁場 $A_{e\alpha}(\mathbf{x})$ との相互作用



(× 印は外場の源を表す) それぞれに対して、因子

$$A_{e\alpha}(\mathbf{q}) = \int d^3x e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} A_{e\alpha}(\mathbf{x})$$

を充てる。 \mathbf{q} は場の源 (×) から粒子へ移行する運動量である。

このことを見るための簡単な例として、静的な外場 $A_e^\alpha(\mathbf{x})$ による電子 (質量 m) の散乱

$$|i\rangle = |e^- \mathbf{p} r\rangle \rightarrow |f\rangle = |e^- \mathbf{p}' s\rangle$$

を取り上げる。最低次の近似で、この過程の S 行列要素は

$$\begin{aligned} \langle f | S_e^{(1)} | i \rangle &= \left[(2\pi) \delta(E' - E) \left(\frac{m}{VE} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE'} \right)^{1/2} \right] \mathcal{M}, \\ \mathcal{M} &= ie \bar{u}_s(\mathbf{p}') A_e(\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (452)$$

と計算される ($E \equiv E_{\mathbf{p}}, E' \equiv E_{\mathbf{p}'}$, 導出は 9.9.5 節). 対応する運動量空間の Feynman ダイアグラムを図 49 に示す. これを 3.9.2 節における量子場による散乱 (図 43) の式 (438), (439) と比べると,

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathbf{p}' + \mathbf{k}' - \mathbf{p}) &\rightarrow (2\pi) \delta(E' - E), \\ \text{光子の因子} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \varepsilon_\alpha(\mathbf{k}') &\rightarrow \text{外場の因子} A_{e\alpha}(\mathbf{q}) \end{aligned}$$

と置き換わっている。これは上記の規則 (i), (ii) へと一般化される。なお、この例で言うと

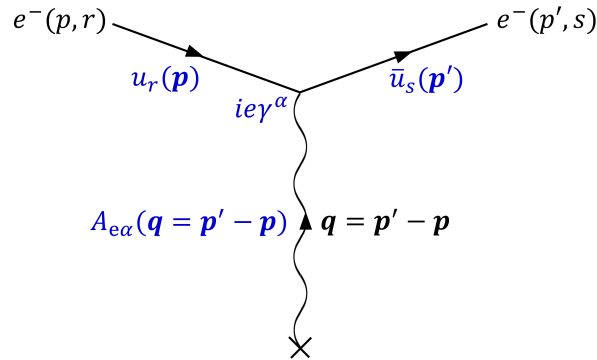


図 49 静的な外場による電子散乱. \times 印は外場の源を表す. $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$ である.

- 始・終状態とで運動量が保存しないのは、静的な外場の仮定において、外場から電子への運動量 $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$ の移行に伴う外場の源の反跳を無視しているためである。
- デルタ関数 $\delta(E' - E)$ は静的な外場のエネルギーが一定であることに対応して、残りの粒子 (電子) だけでエネルギーが保存されることを意味している。弾性散乱の条件 $E' = E$ より $|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}|$ としなければならない。

3.9.6 QED の Feynman 規則

我々は QED の全ての Feynman 規則を列挙できる段階に達した [10, pp.137–141] [1, pp.537–540]. 荷電レプトン $l^\mp = e^\mp, \mu^\mp, \tau^\mp$ に対する Feynman 規則は、中性レプトン $\nu_l, \bar{\nu}_l$ (ゼロでない質量 m_{ν_l} を持つ Dirac 粒子と仮定) にも適用できる。そこで以下では中性レプトンも対象に含める。

Feynman 規則の紹介に先立ち、Feynman ダイアグラムに運動量の指標を付ける方法の慣習についてここで説明しておく [10, pp.134–136].

外線・内線 (特にフェルミオン線) の運動量の向き

- “外線” に付記する 4 元運動量は、始・終状態に存在する粒子の “実際の” 4 元運動量である。
 - “電子の外線” に付記された 4 元運動量は、外線の矢と同じ向きである。
 - “陽電子の外線” に付記された 4 元運動量は、外線の矢と反対向きである。
 - フェルミオンの “内線” に付記する 4 元運動量は、“常に” 矢と “同じ向き” の 4 元運動量を表す。
- 光子の内線の運動量 運動量 k の光子の伝播関数は

$$D_{F\alpha\beta}(k) = \frac{-g_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} = D_{F\alpha\beta}(-k)$$

なので、光子の内線における運動量 k の向きは任意である。 k の向きを任意に決めておき、それに応じて保存則を適切に表せば、Feynman 振幅が正しく得られることになる。このような任意性は行列要素を計算する際に、波数 (運動量) k の代わりに $-k$ を用いて伝播関数の Fourier 展開を行うことができるという事情に由来している。(例えば 3.9.3 節における Møller 散乱の Feynman 振幅を参照。)

さて、遷移 $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ に関する S 行列要素は

$$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta\left(\sum p'_f - \sum p_i\right) \prod_i \left(\frac{1}{2VE_i}\right)^{1/2} \prod_f \left(\frac{1}{2VE'_f}\right)^{1/2} \prod_l (2m)^{1/2} \mathcal{M} \quad (453)$$

という形をとる．ここに $p_i = (E_i, \mathbf{p}_i)$ は始状態における各粒子の 4 元運動量， $p'_f = (E'_f, \mathbf{p}'_f)$ は終状態における各粒子の 4 元運動量である．添字 l は全ての外線レプトン (荷電レプトン l^\mp および中性レプトン $\nu_l, \bar{\nu}_l$) を指し， m は外線レプトン l の質量 (m_l および m_{ν_l}) を表す．この式で遷移 $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ に関する Feynman 振幅 \mathcal{M} が定義される．

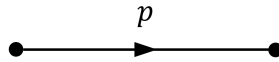
以下の Feynman 規則に従って，QED の過程に関するグラフから対応する Feynman 振幅を得ることができる．読者は既に各規則の起源を理解できるはずである．

1. 各結節点に因子 $ie\gamma^\alpha$ を充てる．
2. 運動量 k の付随する光子の内線



に因子 $iD_{F\alpha\beta}(k) = i\frac{-g_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon}$ を充てる．

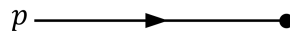
3. 運動量 p の付随するレプトンの内線



に因子 $iS_F(p) = i\frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon}$ を充てる．

m は対象とするレプトンの質量 m_l や m_{ν_l} を表す ($l = e, \mu, \tau$)．

4. (a) 始状態のレプトン l^-, ν_l の外線



に因子 $u_r(\mathbf{p})$ を充てる．

- (b) 終状態のレプトン l^-, ν_l の外線



に因子 $\bar{u}_r(\mathbf{p})$ を充てる．

- (c) 始状態のレプトン $l^+, \bar{\nu}_l$ の外線



に因子 $\bar{v}_r(\mathbf{p})$ を充てる.

(d) 終状態のレプトン $l^+, \bar{\nu}_l$ の外線



に因子 $v_r(\mathbf{p})$ を充てる.

(e) 始状態の光子の外線



に因子 $\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k})$ を充てる.

(f) 終状態の光子の外線



に因子 $\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k})$ を充てる^{*141}.

ここに \mathbf{p} と \mathbf{k} は外線粒子の 3 次元運動量を表し, $r(= 1, 2)$ はスピン状態もしくは偏極状態を表す.

5. 各フェルミオン線と,

それらを接続する各結節点に付随するスピノル因子 (4 元スピノル, S_F 関数, γ 行列) を, 相互に接続している一連のフェルミオン線を矢印の向きに辿る順序で右から左に並べる.

6. 閉じたフェルミオン線それぞれに関して対角和をとり, 因子 (-1) を掛ける.

7. 結節点においてエネルギー・運動量の保存を成立させる.

エネルギー・運動量保存の要請の下でも固定されないパラメーターとして残る

内部 4 元運動量 q それぞれに関して積分 $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ を施す.

このような内部運動量変数 q に関する積分は, 閉じたループそれぞれにおいて生じる.

★ このように積分に因子 $(2\pi)^{-4}$ を含めておけば, 次の規則 8 による位相因子を除き, 必要な数値因子が全て出揃う (9.9.6 節で確認する).

8. 位相因子 δ_P として $+1$ または -1 を掛ける.

これは外線フェルミオン因子 (演算子) の順序を外線指数 (引数) の順序が適正になるように並べ直すときに, フェルミオン因子同士の置換が必要な回数が偶数回ならば $+1$, 奇数回ならば -1 とする.

★ 位相因子が重要となるのは, 複数の Feynman グラフからの寄与を足し合わせる必要のある場合に限られ, その場合にも相対的な符号の違いのみが関心の対象となる.

“外部の静的な電磁場” $A_{e\alpha}(\mathbf{x})$ との相互作用を扱う際には, Feynman 振幅と S 行列要素を関係付ける式

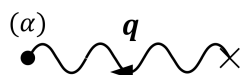
^{*141} これは 3.3.1 節で選んだ線形偏極 (偏光) 状態 $\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k})$ が実数であることによる. 一般に $\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k})$ は複素数であり (例えば円偏光を考えよ), その場合には終状態の $\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k})$ を $\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k})^*$ に置き換えなければならない.

(453)において

$$(2\pi)^4 \delta \left(\sum p'_f - \sum p_i \right) \rightarrow (2\pi) \delta \left(\sum E'_f - \sum E_i \right)$$

と置き換えた上で、次のFeynman規則を追加する。

9. 荷電粒子と外部の静的電磁場 $A_{e\alpha}(\mathbf{x})$ との相互作用



それぞれに対して、因子

$$A_{e\alpha}(\mathbf{q}) = \int d^3x e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} A_{e\alpha}(\mathbf{x})$$

を充てる。 \mathbf{q} は場の源 (X) から粒子へ移行する運動量である。

これまでに取り上げた具体的な過程のFeynman振幅をFeynman規則から改めて導く作業は、9.9.6節でまとめを行うことにする。

3.10 輻射補正

QEDの最低次の摂動計算に対する高次の補正は輻射補正と呼ばれる。そのような計算を行うと、発散する積分が現れる。これは次の手順により解消される [10, p.185].

1. 理論を正則化する。
 - 全次数において、諸量が有限で数学的によく定義されるように、理論の形を修正する。
2. 繰り込み。
 - 相互作用する物理的な粒子を、相互作用のない(裸の)粒子と区別する。
 - 物理的な粒子の性質を裸の粒子の性質と関係付け、理論の予言を物理的な粒子の質量や電荷によって表現する。
3. 正則化された理論を再びQEDに戻す。
 - 発散は裸の粒子と物理的粒子の関係の部分にだけ残る。これは裸の粒子自体を観測できないために、物理的な検証の対象とはなり得ない。
 - 観測可能量、輻射補正は有限となる。

最低次の輻射補正の一般的な計算方法を3.10.1-3.10.5節で展開する。本稿では摂動の任意次数への一般化には言及しない。正則化の詳細については3.11節にて改めていくらか説明する。本節ではフェルミオンとして(陽)電子 e^\mp のみを考察する。

繰り込みについて 例えば3.10.2節, 3.10.3節では2次の輻射補正として、光子とフェルミオンの伝播関数に対する自己エネルギー部分の挿入を考察する。このような伝播関数の修正は等価的に電荷や質量の繰り込みとして表現され、それ故、自己エネルギー部分は裸の粒子を物理的な粒子へと移行させる過程と解釈できる。

3.10.1 QEDにおける2次の輻射補正 [10, pp.186–192]

輻射補正は仮想光子の放射と再吸収を表す結節点を付け加える補正にあたる。以下、結節点を2つだけ追加する2次の輻射補正を考える。これは元の行列要素に対する $\alpha = e^2/4\pi$ 程度の補正となる。

今まで e, m と書いていた裸の粒子の電荷と質量を、それが裸の粒子の電荷と質量であることを明確にするために、これ以降それぞれ e_0, m_0 と書く。2次の輻射補正として、基のグラフの基本要素に対する図50の置き換えが考えられる。図50(a)は電子の自己エネルギー部分であり(3.9.1節)、裸の電子を物理的な電子へ移行させる最低次の過程を表す。図50(b)は光子の自己エネルギー部分であり、真空偏極ダイアグラムと呼ばれる(3.9.1節)。図50(c)は結節点補正と呼ばれる。

Feynman ルールに基づいて、これらのループ部分に関して以下の積分が現れる(図50を参考にせよ)。

$$ie_0^2 \Sigma(p) \equiv \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k iD_{F\alpha\beta}(k) \gamma^\alpha iS_F(p-k) \gamma^\beta,$$

$$ie_0^2 \Pi^{\mu\nu}(q) \equiv \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr} \int d^4\bar{p} \gamma^\mu iS_F(\bar{p}+q) \gamma^\nu iS_F(\bar{p}),$$

$$e_0^2 \Lambda^\mu(p', p) \equiv \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \gamma^\alpha iS_F(p'-k) \gamma^\nu iS_F(p-k) \gamma^\beta iD_{F\alpha\beta}(k)$$

これらのループ積分は積分変数の運動量が大きくなるところで発散する。任意の過程に対する最低次の輻射補正を計算する際に発散積分として現れるのは、必ずこれら3種類の積分なので、それらの扱い方を確立すれば十分である。(実際、上の置き換えによっては得られないような2次の輻射補正も一般に存在するけれど、それらの寄与は有限で数学的によく定義されている。) 3.10.2–3.10.5節において、これら3種類の発散積分を正規化した後の繰り込み処方について論じる。

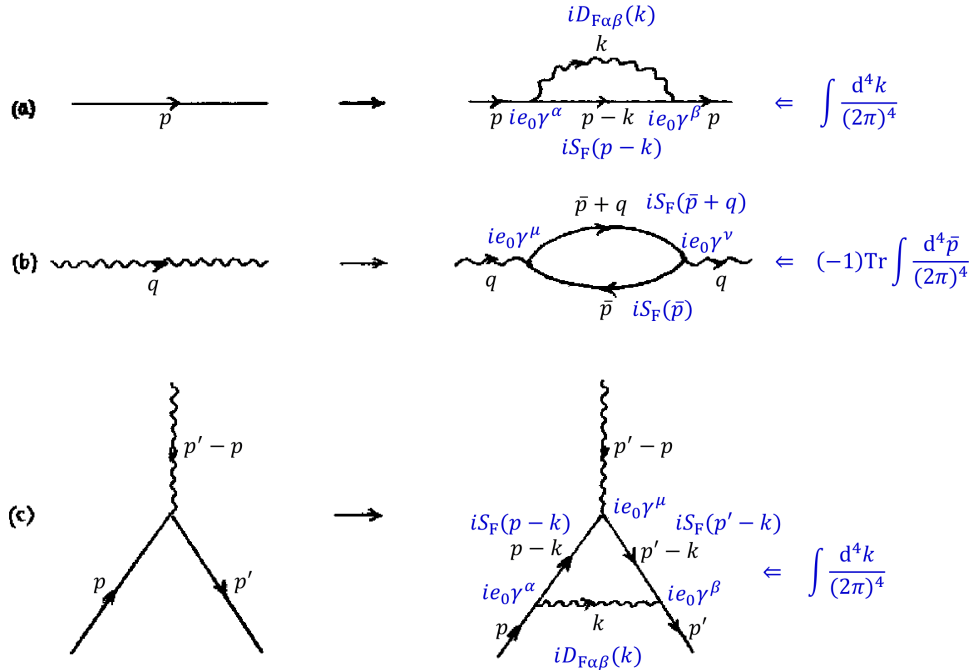


図50 フェルミオン線, ボゾン線, 結節点に対する2次の輻射補正

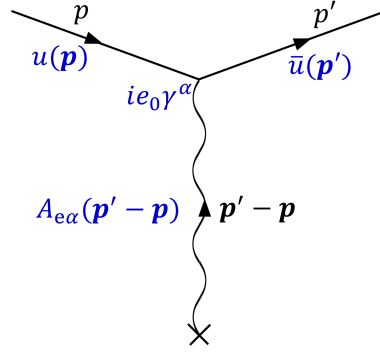


図 51 静的な外場による電子弾性散乱への最低次の寄与

輻射補正と S 行列展開の関係

輻射補正がどのように現れるのかを簡単に見るために、具体例として静的な外場 $A_e^\mu(\mathbf{x})$ (引数が時刻 t に依らない) による電子の弾性散乱を考える。最低次の過程は図 51 の Feynman ダイアグラムで表され、対応する Feynman 振幅は

$$\mathcal{M}^{(0)} = ie_0 \bar{u}(\mathbf{p}') A_e(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p})$$

である (3.9.5 節)。

このダイアグラムの要素に対して図 50 の置き換えを施すと、2 次輻射補正に対応する図 52 の 4 通りのダイアグラム (a)–(d) が得られる。それぞれの Feynman 振幅は

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a^{(2)} &= ie_0 \bar{u}(\mathbf{p}') A_e(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) iS_F(p) \left[(ie_0)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} iD_{F\alpha\beta}(k) \gamma^\alpha iS_F(p - k) \gamma^\beta \right] u(\mathbf{p}) \\ &= ie_0 \bar{u}(\mathbf{p}') A_e(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) iS_F(p) ie_0^2 \Sigma(p) u(\mathbf{p}), \\ \mathcal{M}_b^{(2)} &= ie_0 \bar{u}(\mathbf{p}') ie_0^2 \Sigma(p') iS_F(p') A_e(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p}), \\ \mathcal{M}_c^{(2)} &= ie_0 \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma^\lambda u(\mathbf{p}) iD_{F\lambda\mu}(q) \left[(ie_0)^2 (-1) \text{Tr} \int \frac{d^4 \bar{p}}{(2\pi)^4} \gamma^\mu iS_F(\bar{p} + q) \gamma^\nu iS_F(\bar{p}) \right] A_{e\nu}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \\ &= ie_0 \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma^\lambda u(\mathbf{p}) iD_{F\lambda\mu}(q) ie_0^2 \Pi^{\mu\nu}(q) A_{e\nu}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}), \\ \mathcal{M}_d^{(2)} &= ie_0 \bar{u}(\mathbf{p}') \left[(ie_0)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\alpha S_F(p' - k) \gamma^\mu iS_F(p - k) \gamma^\beta iD_{F\alpha\beta}(k) \right] u(\mathbf{p}) A_{e\mu}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \\ &= ie_0 \bar{u}(\mathbf{p}') e_0^2 \Lambda^\mu(p', p) u(\mathbf{p}) A_{e\mu}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \end{aligned}$$

である。

さて、これらが S 行列展開にどのように含まれているのかを考えよう。電磁場を静的な外場 $A_e^\mu(\mathbf{x})$ と輻射場 $A^\mu(x)$ に分けて $A^\mu(x) \rightarrow A_e^\mu(\mathbf{x}) + A^\mu(x)$ と考えると、S 行列展開は

$$\begin{aligned} S &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ie_0)^n}{n!} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_n \text{T} \{ N[\bar{\psi}(A + A_e)\psi]_{x_1} \cdots N[\bar{\psi}(A + A_e)\psi]_{x_n} \} : (451) \\ &\simeq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ie_0)^n}{(n-1)!} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_n \text{T} \{ N(\bar{\psi} A_e \psi)_{x_1} N(\bar{\psi} A \psi)_{x_2} \cdots N(\bar{\psi} A \psi)_{x_n} \} \end{aligned}$$

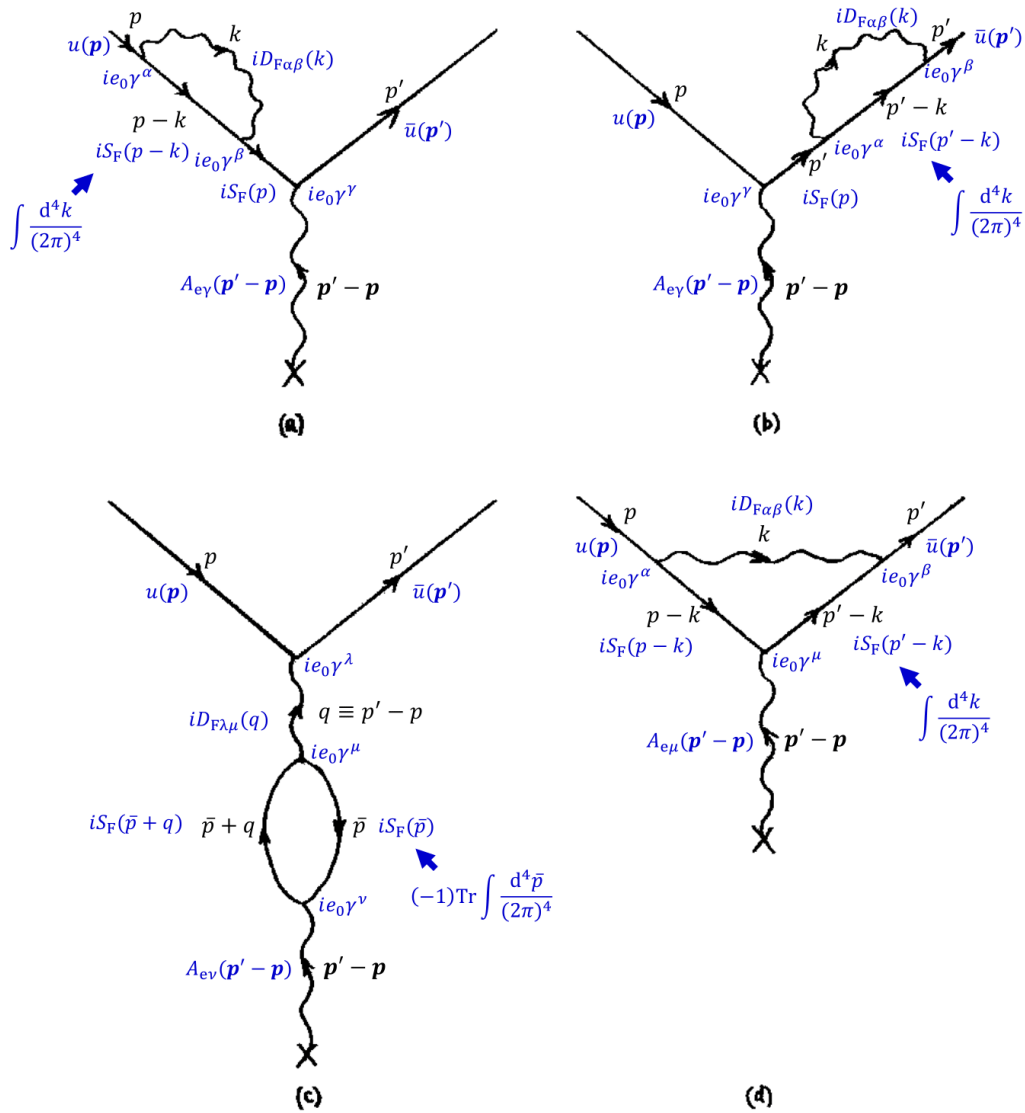


図 52 電子散乱への 2 次輻射補正の 4 通りの寄与を表すグラフ

によって与えられる。ただし第 2 の等号では、外場は弱いものと仮定して $A_e^\mu(x)$ の 1 次の項だけを拾った。最初の振幅 $\mathcal{M}^{(0)}$ は $n = 1$ の項から生じる (3.9.5 節)。2 次の輻射補正は仮想光子の放射と再吸収を表す 2 つの結節点を付け加える補正なので、輻射場 $A^\mu(x)$ を 2 つ含んでいる $n = 3$ の項から現れる。

3.10.2 光子の自己エネルギー [10, pp.192–197]

正則化

光子の自己エネルギー部分に関するループ積分 (3.10.1 節)

$$ie_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{-e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p} + \not{k} + m_0)\gamma^\nu(\not{p} + m_0)]}{[(p+k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon][p^2 - m_0^2 + i\varepsilon]} \quad (454)$$

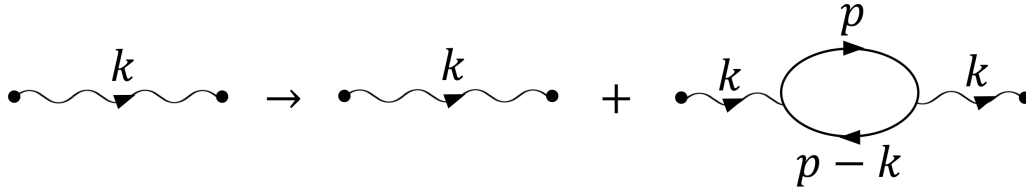


図 53 光子伝播関数の修正

(右辺の負号は 2 つの伝播関数 S_F の係数 i に由来) は, p が大きいところで発散する^{*142}. これを正則化する, すなわち数学的によく定義された有限積分へと修正するには, 例えば被積分関数に切断因子

$$f(p^2, \Lambda^2) = \left(\frac{-\Lambda^2}{p^2 - \Lambda^2} \right)^2$$

を掛ければ良い. Λ の値を大きな有限の値にとれば, (それに比べて p の小さいところで) $f \simeq 1$ であり, 積分は p の大きいところで $\int d^4p/p^6$ のように振舞い収束する. 現時点ではこの措置を単なる数学的な道具とも, QED の高エネルギー領域において本質的な修正とも見なせる^{*143}. ただしこの措置はこのままでは実光子の固有質量をゼロと保証できず, また理論のゲージ不変性を破る. 光子の固有質量がゼロとなり, ゲージ不変性が保証されるような別の正則化の方法も存在する. 今後は $\Pi^{\mu\nu}(k)$ などと書く場合, それは式 (454) そのものではなく, 何らかの方法で既に正則化がなされたものと見なすことにする.

繰り込み

図 53 のように光子伝播関数を, 光子の自己エネルギー部分を挿入したグラフと一緒に考える修正を行う. これは

$$\begin{aligned} iD_{F\alpha\beta}(k) &\rightarrow iD_{F\alpha\beta}(k) + iD_{F\alpha\mu}(k)ie_0^2\Pi^{\mu\nu}(k)iD_{F\nu\beta}(k), \\ \therefore \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} &\rightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} + \frac{-ig_{\alpha\mu}}{k^2 + i\varepsilon}ie_0^2\Pi^{\mu\nu}(k)\frac{-ig_{\nu\beta}}{k^2 + i\varepsilon} \end{aligned} \quad (455)$$

という修正に対応する^{*144}.

この置き換えが Lorentz 不変であるためには $\Pi^{\mu\nu}$ は k^μ から作られる 2 階 (反変) テンソルでなければならず, その最も一般的な形は

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = -g^{\mu\nu}A(k^2) + k^\mu k^\nu B(k^2) \quad (456)$$

である (A, B はスカラー関数). ところが光子伝播関数は S 行列展開の中に, 保存するカレントと結合した形でしか現れないため, 第 2 項 $k^\mu k^\nu B(k^2)$ はこれに寄与しないことが示される (説明は 9.10.1 節). そこで $k^\mu k^\nu B(k^2)$ の項を省いて上の修正を

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} \left[1 - e_0^2 A(k^2) \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \right]$$

*142 p の大きいところで積分は $\int d^4p/p^2$ のように振舞い, 2 次の発散をする.

*143 実際 QED が有限の Λ を持つ理論によって修正されるとしても, 実験的・理論的に不都合は生じない [10, pp.210–211].

*144 これは今考えている光子の線が内線 (光子伝播関数) であることによる. 外線の場合は 3.10.4 節で議論する.

とすると、これは $A(k^2)$ を有限の量とする仮定の下で

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon + e_0^2 A(k^2)} + O(e_0^4) \quad (457)$$

と書き直される (詳しい計算は 9.10.1 節). 上式 (457) は裸の光子の伝播関数を現実の光子の伝播関数へと修正しているものと見ることができる. ところで一般に、質量が m の粒子の伝播関数は引数の 4 元運動量 p が $p^2 = m^2$ のところで極を持つので、現実の光子についても質量がゼロになるためには

$$A(0) = 0, \quad \therefore A(k^2) = k^2 A'(0) + k^2 \Pi_c(k^2) \quad (458)$$

でなければならない. ただしここに $A(0) \equiv A(k^2 = 0)$, $A'(0) \equiv \left. \frac{dA(k^2)}{dk^2} \right|_{k^2=0}$ であり, $\Pi_c(k^2)$ は $k^2 = 0$ の近くで k^2 の 1 次以上のべきに比例してゼロに近づく. よって式 (457) は, (伝播関数の端の 2 つの結節点に関わる電荷 e_0 を含めて考えると^{*145})

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} e_0^2 \rightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} e_0^2 [1 - e_0^2 A'(0)] + \frac{ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} e_0^4 \Pi_c(k^2) \quad (459)$$

となる (詳しい計算は 9.10.1 節). 右辺第 1 項は裸の電子の電荷 ($-e_0$) の, 物理的な電子の電荷 ($-e$) への修正

$$e^2 = e_0^2 [1 - e_0^2 A'(0)] \quad (460)$$

と捉えることができる. これが“電荷の繰り込み”であり, ($-e$) は“繰り込まれた電荷”である. ここでは 2 次の自己エネルギー部分だけを考慮しており, より高次の補正も含めると

$$e \equiv Z_3^{1/2} e_0 = e_0 \left[1 - \frac{1}{2} e_0^2 A'(0) + O(e_0^4) \right]$$

となる. ここに Z_3 は“繰り込み定数”と呼ばれる. ここから逆に e_0 を観測可能な実電荷 e によって表すと, 結局, 光子の伝播関数 (の e^2 倍) の修正として

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} e_0^2 \rightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} e^2 + \frac{ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} e^4 \Pi_c(k^2) + O(e^6) \quad (461)$$

を得る. これは電荷の置き換え $e_0 \rightarrow e$ (第 1 項) と, 第 1 項に対する α のオーダーの輻射補正 (第 2 項) から成る.

正則化した理論の QED への復元

正則化した理論から QED を復元するような極限操作 (例: 切断パラメーター $\Lambda \rightarrow \infty$) を行った後に, 光子伝播関数 (461) は, したがって各種の物理的な予言は, 観測される素電荷 e と, 正則化の詳細に依らない有限の極限值を持つ $\Pi_c(k^2)$ だけを含む. 発散はこの極限操作により $A'(0)$, Z_3 に残り, これらは e と e_0 の関係を決めるため, 実験検証の対象とはなり得ない. 詳しくは 3.11.3 節を参照.

3.10.3 電子の自己エネルギー [10, pp.197–202]

正則化

フェルミオンの自己エネルギー部分に関するループ積分 (3.10.1 節) を具体的に書くと

$$ie_0^2 \Sigma(p) = \frac{e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \frac{2\not{p} - 2\not{k} - 4m_0}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \quad (462)$$

^{*145} これによって伝播関数の修正 (459) を, すぐ後の電荷の繰り込み (460) と見ることが可能となっている.



図 54 フェルミオン伝播関数の修正

となる (9.10.2 節で確認). これは $k \rightarrow \infty$ での発散 (紫外発散) のみならず, $k \rightarrow 0$ でも発散する (赤外発散). 両方の発散を取り除くような正則化の方法の 1 つに,

$$\frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon} \quad (463)$$

と置き換えることが考えられる (9.10.2 節参照). この場合, $\lambda \rightarrow 0, \Lambda \rightarrow \infty$ の極限で QED が復元される. 以降 $i e_0^2 \Sigma(p)$ は何らかの方法で既に正則化されているものと見なす.

質量の繰り込み (その 1)

図 54 のようにフェルミオン伝播関数を, 自己エネルギー部分の挿入されたグラフと併せて考える修正を行う. これは置き換え

$$\begin{aligned} \frac{i}{\not{p} - m_0 + i\varepsilon} &\rightarrow \frac{i}{\not{p} - m_0 + i\varepsilon} i e_0^2 \Sigma(p) \frac{i}{\not{p} - m_0 + i\varepsilon} \\ &= \frac{i}{\not{p} - m_0 + e_0^2 \Sigma(p) + i\varepsilon} + O(e_0^4) \end{aligned} \quad (464)$$

$$\left(\because \text{恒等式 } \frac{1}{A-B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \dots \right) \quad (465)$$

に対応する (恒等式 (465) の確認は 9.10.2 節参照).

この置き換えは裸のフェルミオン伝播関数を物理的な粒子のそれへと修正していると見ることができる. 一般に質量 m の粒子の伝播関数は引数 p が $\not{p} = m$ のところで極を持つので, 式 (464) は裸のフェルミオンの質量 m_0 の, 物理的な粒子の質量

$$m = m_0 + \delta m$$

への修正と見なせる. 置き換え $m_0 \rightarrow m$ は “質量の繰り込み” と呼ばれ, m は繰り込まれた質量と呼ばれる. 伝播関数 (464) の極 $\not{p} = m$ を特定するには, その分母を $\not{p} - m + i\varepsilon$ と等置して δm について解けば良い.

$$\Sigma(p) = A + (\not{p} - m)B + (\not{p} - m)\Sigma_c(p) \quad (466)$$

と展開するならば^{*146*147}, 結果として

$$\delta m = -e_0^2 A \quad (467)$$

を得る (9.10.2 節参照).

^{*146} $\not{p} - m_0$ による展開ではないことに注意する.

^{*147} $\not{p} \rightarrow m$ において $\Sigma_c(p)$ は $(\not{p} - m)$ の 1 次 (以上) でゼロに近づく.

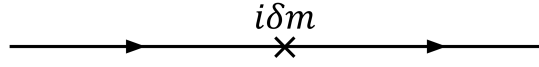


図 55 質量相殺項 $-\delta m\bar{\psi}\psi$ を表す 2 伝播線結節点のグラフ

質量の繰り込み (その 2)

質量の繰り込みを行うには次のような方法もある：

- 自由場 Hamiltonian 密度に $-\bar{\psi}(i\not{\partial} - m_0)\psi$ として含まれる m_0 を物理的フェルミオン質量 m に置き換え、
- その代償として“質量相殺項” $-\delta m\bar{\psi}\psi$ を相互作用 Hamiltonian 密度に含める。

$$\mathcal{H}_I = -e_0\bar{\psi}A\psi - \delta m\bar{\psi}\psi. \quad (468)$$

これにより

- 全体を通じて (特にフェルミオン伝播関数において) 裸の質量 m_0 が物理的フェルミオン質量 m に置き換わる：
- $$m_0 \rightarrow m. \quad (469)$$
- 相互作用 Hamiltonian 密度の質量相殺項 $-\delta m\bar{\psi}\psi$ に対応する 2 伝播線結節点 (図 55, $i\delta m \equiv -ie_0^2 A$ を充てる) を自己エネルギーループと併せて考える (両者はともに e_0^2 程度)：

$$\begin{aligned} ie_0^2\Sigma(p) &\rightarrow ie_0^2\Sigma(p) + i\delta m \\ &= ie_0^2(\not{p} - m)B + ie_0^2(\not{p} - m)\Sigma_c(p). \quad (\because \text{式 (466), (467)}) \end{aligned} \quad (470)$$

2 次の輻射補正と併せて考えたフェルミオン伝播関数 (464) は

$$\frac{i}{(\not{p} - m)(1 + e_0^2 B) + e_0^2(\not{p} - m)\Sigma_c(p) + i\varepsilon} + O(e_0^4) \quad (471)$$

と書き換えられるけれど、これは式 (464) に上記の置き換え (469), (470) を施すことでも得られる (9.10.2 節参照). これは $m_0\bar{\psi}\psi$ を $m\bar{\psi}\psi$ と $-\delta m\bar{\psi}\psi$ に分けて自由場項と相互作用項に割り当てても、全 Hamiltonian は変わらないことによる。

電荷の繰り込み (フェルミオンの自己エネルギー一部分に由来)

いずれの質量の繰り込みの方法によっても、フェルミオン伝播関数は

$$\frac{i}{\not{p} - m_0 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} [(1 - e_0^2 B) - e_0^2 \Sigma_c(p)] + O(e_0^4) \quad (472)$$

と修正される (9.10.2 節参照). これは伝播関数の端の 2 つの結節点に関わる電荷 e_0 を含めて考え、 e_0^2 を掛けると、裸の電荷 e_0 の繰り込まれた電荷 e への修正

$$e^2 \equiv Z_2 e_0^2 = e_0^2(1 - e_0^2 B) + O(e_0^6) \quad (473)$$

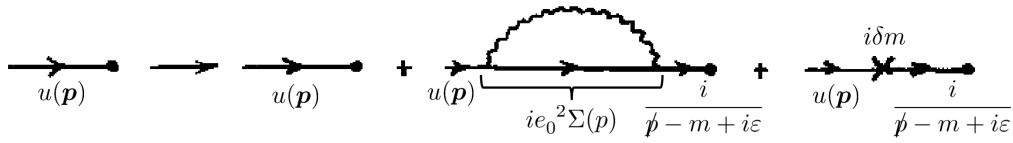


図 56 始状態側の電子の外線に対する 2 次補正

と見ることができる．そこで e_0 を e によって表せば，繰り込まれたフェルミオン伝播関数 (の e^2 倍) は

$$\frac{ie_0^2}{\not{p} - m_0 + i\epsilon} \rightarrow \frac{ie^2}{\not{p} - m + i\epsilon} [1 - e^2 \Sigma_c(p)] + O(e^6)$$

によって e^4 の精度まで与えられる．これは光子伝播関数の場合 (3.10.2 節) と同様，電荷の置き換え $e_0 \rightarrow e$ と有限の輻射補正から成る．

QED の復元

正則化された理論から QED を復元する極限操作 (切断法では $\Lambda \rightarrow \infty$ および $\lambda \rightarrow 0$) において，

- 測定可能な輻射補正に関わる補正項 $\Sigma_c(p)$ は，正則化の詳細に依らない有限値に留まる．
- 物理的な量と裸の量とを関係付ける検証不可能な部分にのみ現れる定数 A, B, Z_2 が発散する．

詳しくは 3.11.4 節参照．

3.10.4 外線の繰り込み [10, pp.202–205]

自己エネルギー部分の挿入による 2 次の輻射補正を，伝播関数 (内線) ではなく外線に施した場合，これは単に電荷の繰り込みとして表現することができ，それ以外の補正は生じない．

例として入射電子の (外) 線の輻射補正を，3.10.3 節における質量の繰り込みを行う 2 つ目の方法に従って図 56 のように考える．対応する式は

$$u(\mathbf{p}) \rightarrow u(\mathbf{p}) + \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} [ie_0^2 \Sigma(p) + i\delta m] u(\mathbf{p}) \quad (474)$$

$$= \left[1 - \frac{e_0^2}{\not{p} - m + i\epsilon} (\not{p} - m) B \right] u(\mathbf{p}) \quad (475)$$

である (導出は 9.10.3 節)．

B に比例する項の不定性を取り除くために，断熱仮説を導入する．これは散乱を，実質的に相互作用の起きている間よりも遙か以前・以後の記述に依らないものと仮定して $t \rightarrow \pm\infty$ において相互作用項 \mathcal{H}_I をゼロにし，始・終状態の粒子を裸の粒子とする扱いを正当化するものである．そのためには $t \rightarrow \pm\infty$ においてゼロになり，散乱過程の (実質的な) 時間よりも充分長い時間 T においてほとんど 1 となるような関数 $f(t)$ を用い，相互作用項 (468):

$$\mathcal{H}_I = -e_0 \bar{\psi} A \psi - \delta m \bar{\psi} \psi, \quad \delta m = -e_0^2 A$$

における e_0 を $e_0 f(t)$ に置き換えれば良い (3.7.1 節)．このように相互作用を修正すると，図 57 のようにグラ

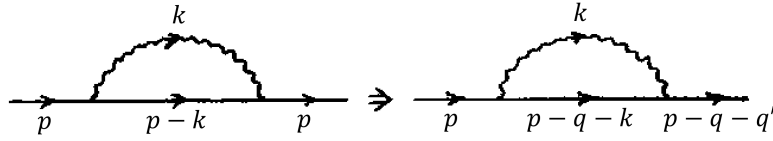


図 57 フェルミオン自己エネルギーループ

フは、結節点においてエネルギーの保存しないグラフに置き換わる ($q = (E, \mathbf{0}), q' = (E', \mathbf{0})$)*148. これに対応して

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(E)e^{iEt}dE = \int_{-\infty}^{\infty} F(E)e^{iq \cdot x}dE \quad (476)$$

と Fourier 展開すると、式 (475) は

$$u(\mathbf{p}) \rightarrow \left[1 - \int dE dE' F(E)F(E') \frac{e_0^2 B}{\not{p} - \not{q} - \not{q}' - m + i\varepsilon} (\not{p} - \not{q} - m) \right] u(\mathbf{p}) \quad (477)$$

$$= \dots = Z_2^{1/2} u(\mathbf{p}), \quad Z_2 \equiv 1 - e_0^2 B : (473) \quad (478)$$

と変更される (導出は 9.10.3 節). 最終的な結果は $F(E)$ に依らないため, 断熱仮説を導入する前の $f(t) = 1$ の理論に戻した結果と見ても良い.

以上は 2 次の輻射補正に関する結果であるけれど, 実はフェルミオン線の各外線および光子の外線に対して任意の次数の摂動論において

$$u(\mathbf{p}) \rightarrow Z_2^{1/2} u(\mathbf{p}), \quad \bar{u}(\mathbf{p}) \rightarrow Z_2^{1/2} \bar{u}(\mathbf{p}), \quad v(\mathbf{p}) \rightarrow Z_2^{1/2} v(\mathbf{p}), \quad \bar{v}(\mathbf{p}) \rightarrow Z_2^{1/2} \bar{v}(\mathbf{p}), \\ \varepsilon^\mu(\mathbf{k}) \rightarrow Z_3^{1/2} \varepsilon^\mu(\mathbf{k})$$

となる. よって外線の繰り込みは, 外線に接続する結節点に関する電荷を

$$e_0 \rightarrow e = Z_3^{1/2} e_0, \quad e_0 \rightarrow e = Z_2^{1/2} e_0$$

と繰り込みさえすれば良い (冒頭の措置 $m_0 \rightarrow m$ も併せて行う).

3.10.5 結節点補正 [10, pp.205–210]

結節点補正のループ積分 (3.10.1 節)

$$\Lambda^\mu(p', p) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 + i\varepsilon} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m + i\varepsilon} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\varepsilon} \gamma^\alpha \quad (479)$$

(右辺の表式について 9.10.4 節で補足) は紫外と赤外において発散する. フェルミオンの自己エネルギーループの場合 (3.10.3 節) と同様の置き換え

$$\frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon}$$

によってこれを正則化する.

*148 時間並進対称性はエネルギー保存則に関係していることを思い出そう.

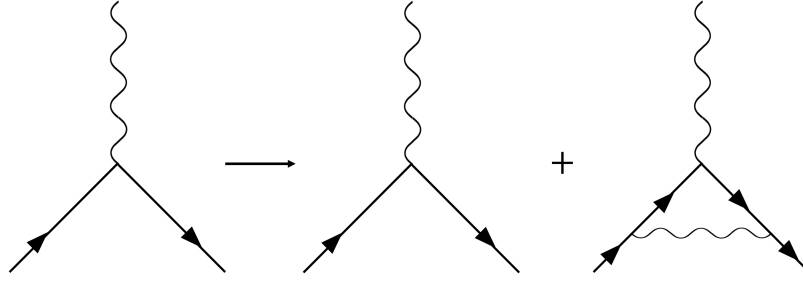


図 58 2 次の結節点補正

図 58 に示すような結節点補正を考えよう。これは

$$ie_0\gamma^\mu \rightarrow i\Gamma^\mu(p', p) = ie_0[\gamma^\mu + e_0^2\Lambda^\mu(p', p)] \quad (480)$$

という置き換えに対応する。 $\Lambda^\mu(p', p)$ において切断パラメーター Λ に対して発散する分離したい部分は、

$$\bar{u}(\mathbf{P})\Lambda^\mu(P, P)u(\mathbf{P})$$

である (図 58 のフェルミオン線を外線と見なした上で式に含めた)^{*149}。ここに運動量 P は $P^2 = m^2$ を満たす値であり、自由粒子の値と呼べる。これは L をスカラーの定数として

$$\bar{u}(\mathbf{P})\Lambda^\mu(P, P)u(\mathbf{P}) = L\bar{u}(\mathbf{P})\gamma^\mu u(\mathbf{P}) \quad (481)$$

と書けることが分かるので (理由は 9.10.4 節), $\Lambda^\mu(p', p)$ において発散する部分は $L\gamma^\mu$ として分離され、

$$\Lambda^\mu(p', p) = L\gamma^\mu + \Lambda_c^\mu(p', p) \quad (482)$$

と書けば $\Lambda_c^\mu(p', p)$ は $\Lambda \rightarrow \infty$ においても有限になる。実際にループ積分 (479) を式 (482) のように書き分けられることの直接的確認を 9.10.4 節で行う。

置き換え (480) は $\Lambda^\mu(p', p) = L\gamma^\mu + \Lambda_c^\mu(p', p)$ とすると、

$$ie_0\gamma^\mu \rightarrow i\Gamma^\mu(p', p) = ie_0[\gamma^\mu(1 + e_0^2L) + e_0^2\Lambda_c^\mu(p', p)]$$

となる。第 1 項は電荷の繰り込み

$$e \equiv \frac{e_0}{Z_1} = e_0(1 + e_0^2L) + O(e_0^5) \quad (483)$$

と解釈できる。これにより結節点補正における e_0 を繰り込まれた電荷 e で表すと、最終的な結果として

$$ie_0\gamma^\mu \rightarrow i\Gamma^\mu(p', p) = ie[\gamma^\mu + e^2\Lambda_c^\mu(p', p)] + O(e^5)$$

を得る。これは電荷の置き換え $e_0 \rightarrow e$ と補正項 $\Lambda_c^\mu(p', p)$ の導入から成る。

^{*149} これを示すには、ループ積分 (479) がすぐ後で見える式 (482) のように書き分けられることを示せば良い。

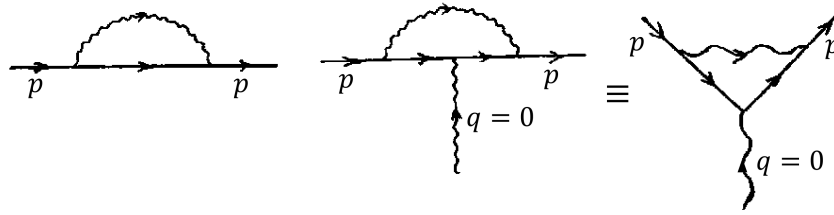


図 59 光子伝播関数の修正

2 次の輻射補正による正味の電荷の繰り込み

QED において各結節点には 1 本の光子線と 2 本のフェルミオン線が接続しているので、光子・フェルミオンの自己エネルギー部分、および結節点補正に伴う電荷の繰り込み (それぞれ $e = Z_3^{1/2} e_0$, $e = Z_2^{1/2} e_0$, $e = e_0/Z_1$) を同時に施すと、正味の効果は

$$e = e_0 \frac{Z_3^{1/2} Z_2}{Z_1} \quad (484)$$

である (9.10.4 節参照). ここで Ward 恒等式

$$\frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p_\mu} = \Lambda^\mu(p, p) \quad (485)$$

に注目する (導出は 9.10.4 節). これは図 59 に示したフェルミオン自己エネルギーと、4 元運動量 $q = 0$ の光子外線 (ゼロエネルギー光子) を持つ結節点補正を関係付ける式であり、ここから

$$Z_2 = Z_1 \quad (486)$$

が導かれる (導出は 9.10.4 節).

結局、電荷の繰り込みは

$$e = e_0 Z_3^{1/2}$$

となって、光子の自己エネルギー効果、すなわち真空偏極効果だけに起因することになる. 以上は 2 次摂動において導かれているけれど、摂動のあらゆる次数において成立する.

2 次の輻射補正まとめ

他の荷電レプトン μ^\mp, τ^\mp についても同様の結果が得られることを踏まえ、2 次の輻射補正の手順を次のようにまとめられる.

- 各レプトンに物理的な質量 (m_e, m_μ, m_τ) を充てる.
- 裸の電荷 e_0 を物理的な電荷 $e = e_0 Z_3^{1/2}$ に置き換える.

その上で伝播関数の自己エネルギー補正

$$\begin{aligned} \frac{-ig^{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} &\rightarrow \frac{-ig^{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} [1 - e^2 \Pi_c(k^2)] + O(e^4), \\ \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} &\rightarrow \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} [1 - e^2 \Sigma_c(p)] + O(e^4) \end{aligned}$$

および結節点補正

$$ie_0\gamma^\mu \rightarrow ie[\gamma^\mu + e^2\Lambda_c^\mu(p', p)] + O(e^5)$$

を施せば十分である。

3.11 正則化

理論の正則化には次の 2 通りの手法がある。

- 切断法
 - 発散を，理論における短距離 (高エネルギー) の挙動に関係付けることができる。
 - 一般に適用が難しく，
摂動の全次数にわたってゲージ不変性と Ward 恒等式を保証することが困難である。
- 次元正則化
 - 解釈は簡単ではないが，応用がやりやすい。
 - すべての摂動次数において自動的にゲージ不変性が保証され，Ward 恒等式が成り立つ。
→ 量子色力学や Weinberg-Salam 理論のような非 Abel ゲージ理論において特に重要となる。

3.10.5 節 (実質的には 9.10.4 節) では切断法により結節点補正 $\Lambda^\mu(p', p)$ の正則化を行い，これが発散部分 $L\gamma^\mu$ と収束部分 $\Lambda_c^\mu(p', p)$ に分離されることを具体的に示した。そこで以下では次元正則化の手続きを，光子の自己エネルギー (真空偏極) と電子の自己エネルギーの輻射補正 $\Pi^{\mu\nu}(k), \Sigma(p)$ に適用する (それぞれ 3.11.3 節, 3.11.4 節)。3.10.2 節と 3.10.3 節で予告していたように，各々から有限の量 $\Pi_c(k^2), \Sigma_c(p)$ を分離することができ，発散は裸の粒子と物理的な粒子を関係付ける部分だけに残ることを説明する。

3.11.1 数学的な準備

標準的な積分 [10, pp.234–235]

(輻射補正から生じる) ループ積分の評価において最も頻繁に遭遇する標準的な積分の式を，以下に列挙する (証明は 9.11.1 節)。

$$\int \frac{d^4k}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = i\pi^2(-1)^n \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-2}}, \quad n \geq 3 \quad (487)$$

$$\int d^4k \frac{k^\mu}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = 0, \quad n \geq 3 \quad (488)$$

$$\int d^4k \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = i\pi^2(-1)^{n+1} \frac{\Gamma(n-3)}{2\Gamma(n)} \frac{g^{\mu\nu}}{s^{n-3}}, \quad n \geq 4 \quad (489)$$

$$\int \frac{d^4p}{(p^2 + 2p \cdot q + t + i\varepsilon)^n} = i\pi^2 \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{(t - q^2)^{n-2}}, \quad n \geq 3 \quad (490)$$

$$\int d^4p \frac{p^\mu}{(p^2 + 2p \cdot q + t + i\varepsilon)^n} = -i\pi^2 \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{q^\mu}{(t - q^2)^{n-2}}, \quad n \geq 3 \quad (491)$$

$$\int d^4p \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 + 2p \cdot q + t + i\varepsilon)^n} = i\pi^2 \frac{\Gamma(n-3)}{2\Gamma(n)} \frac{2(n-3)q^\mu q^\nu + (t - q^2)g^{\mu\nu}}{(t - q^2)^{n-2}}. \quad n \geq 4 \quad (492)$$

ここにガンマ関数 $\Gamma(n)$ は自然数 n に対して $\Gamma(n) = (n-1)!$ である^{*150}。また右辺では $\varepsilon = 0$ と置いてあり、これが許容されない場合には

$$s \rightarrow s - i\varepsilon, \quad t \rightarrow t + i\varepsilon$$

と戻せば良い。

Feynman のパラメーター積分 [10, pp.235–236]

通常、扱う必要の生じる積分は、被積分関数の分母がいくつかの 2 次因子の積を含む。積分公式 (487)–(492) を用いるには、これを被積分関数の分母が単一の 2 次因子の n 乗の形となるように直さなければならない。そのために 2 次因子 a_0, a_1, \dots に対して恒等式

$$\frac{1}{a_0 a_1 a_2 \cdots a_n} = \Gamma(n-1) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \cdots \int_0^{z_{n-1}} dz_n \frac{1}{[a_0 + (a_1 - a_0)z_1 + \cdots + (a_n - a_{n-1})z_n]^{n+1}} \quad (493)$$

が有用となる (証明は 9.11.1 節)。右辺は単一の 2 次因子 $a_0 + (a_1 - a_0)z_1 + \cdots + (a_n - a_{n-1})z_n$ の $(n+1)$ 乗を分母とする積分となっており、これは Feynman のパラメーター積分と呼ばれる。

特に $n=1$ の式を書くと

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[b + (a-b)z]^2}. \quad (494)$$

3.11.2 次元正則化

次元正則化の導入 [10, pp.237–239]

次元正則化は発散するループ積分の次元数を修正することによって積分を有限にする方法である。ここでは例として式 (487):

$$\int \frac{d^4 k}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = i\pi^2 (-1)^n \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-2}}$$

を取り上げる。これは $n \geq 3$ に対して成り立つ式であって、 $n=2$ の場合を考えると左辺の積分は対数的に発散する (右辺は $\Gamma(0)$ が特異となる)。ここでこの関係式は、 D 次元空間 (D は時間も含めた次元) における式

$$\int \frac{d^D k}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = i\pi^{D/2} (-1)^n \frac{\Gamma(n-D/2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-D/2}}, \quad n > D/2 \quad (495)$$

へと一般化されることに着眼する^{*151}。今 D を非整数値とすることを考えると、(左辺の積分の意味は明瞭でなくなるけれど) 右辺はよく定義された量となるため、右辺を用いて左辺の積分を定義できる。そこで $n=2$ に対して $D=4$ のときに現れる積分の発散を避けるために、微小な正のパラメーター η を用いて次元を $D=4-\eta$ に修正する (次元正則化)。(修正された次元 $D=4-\eta$ は上式の条件 $n=2 > D/2$ を満たす。)

^{*150} ここでは $(n-1)!$ と書く代わりに $\Gamma(n)$ と書くことに積極的な意味はないけれど、ガンマ関数を用いて表記しておくこと、後に 3.11.2 節で導入される非整数次元の積分への一般化が見易くなる。

^{*151} 証明は行わない。(式 (490) を D 次元に一般化した公式の導出は、文献 [29, p.66] に見出される。) D 次元ベクトル k^μ の“自乗”は、

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (dx^0)^2 - \sum_{i=1}^{D-1} (dx^i)^2$$

となる計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いて $k^2 = g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu$ と定義されている。

$\eta \rightarrow 0$ の極限を考える際, 展開公式

$$x^{-\eta/2} = 1 - \frac{1}{2}\eta \ln x + \dots, \quad (x \text{ は無次元量}) \quad (496)$$

$$\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{2}{\eta} - \gamma + \dots \quad (497)$$

が有用となる ($\gamma = 0.5772\dots$ は Euler 定数, 式 (497) の説明は 9.11.2 節).

次元正則化に用いる一般的な技法 [10, pp.240–242]

3.11.1 節と同様の方法で, D 次元空間における式 (495)

$$\int \frac{d^D k}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = i\pi^{D/2} (-1)^n \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-D/2}}, \quad n > D/2$$

から積分公式

$$\int d^D k \frac{k^\mu}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = 0, \quad (498)$$

$$\int d^D k \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = i\pi^{D/2} (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(n - (D/2) - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{g^{\mu\nu}}{s^{n-(D/2)-1}}, \quad (499)$$

$$\int d^D k \frac{k^2}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = i\pi^{D/2} (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(n - (D/2) - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{D}{s^{n-(D/2)-1}}. \quad (500)$$

が得られる*152.

また D 次元空間において

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I$$

を満たす γ 行列 $\gamma^0, \gamma^1, \dots, \gamma^{D-1}$ を導入する. ただし γ 行列は次元に応じたサイズ $f(D) \times f(D)$ を持ち, I は $f(D) \times f(D)$ の単位行列とする. このとき γ 行列の反交換関係から, 縮約に関する公式

$$\gamma_\lambda \gamma^\lambda = DI, \quad \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\lambda = -(D-2)\gamma^\alpha, \quad \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda = (D-4)\gamma^\alpha \gamma^\beta + 4g^{\alpha\beta} I \quad (501)$$

および対角和に関する公式

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta) &= f(D) g^{\alpha\beta}, \\ \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) &= f(D) [g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}], \\ \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \dots \gamma^\mu \gamma^\nu) &= 0 \quad (\text{奇数個の } \gamma \text{ 行列の積に対して}) \end{aligned} \quad (502)$$

が得られる.

整数次元 D における以上の公式を非整数次元 $D = 4 - \eta$ の場合にも用いることにする. その際, 計量テンソル (積分公式の右辺に現れる) と γ 行列の意味は明らかでなくなるが, これらは $\eta \rightarrow 0$ すなわち $D \rightarrow 4$ の極限で定義されていれば充分である. そしてこの点を除けば, 非整数次元においても積分公式の右辺はよく定義されている. そこで非整数次元では, 右辺によって左辺の積分が定義されると考える.

*152 式 (498) は奇関数の積分なので, 式 (495) と無関係にゼロになる. 式 (499) は式 (489) の一般化にあたる. 式 (500) は式 (499) の両辺に $g_{\mu\nu}$ を掛け, 添字 μ, ν について和をとって得られる.

3.11.3 真空偏極と次元正則化 [10, pp.242–244]

光子の自己エネルギー (真空偏極) に対する輻射補正 (3.10.1 節)

$$ie_0^2\Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{-e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p} + \not{k} + m_0)\gamma^\nu(\not{p} + m_0)]}{[(p+k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon][p^2 - m_0^2 + i\varepsilon]}$$

を次元正則化すると

$$ie_0^2\Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{-\tilde{e}_0^2\mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int d^Dp \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p} + \not{k} + m)\gamma^\nu(\not{p} + m)]}{[(p+k)^2 - m^2 + i\varepsilon][p^2 - m^2 + i\varepsilon]}, \quad \tilde{e}_0^2 \equiv \mu^{-\eta}e_0^2 \quad (503)$$

となる^{*153}. ただし適当な質量尺度 μ を導入して, 任意の空間次元 D に対して無次元となる電荷 \tilde{e}_0 を定義した (その必要性については 9.11.3 節を参照).

- Feynman のパラメーター積分 (恒等式 (494))
- D 次元空間における γ 行列の公式 (502)
- D 次元空間における積分公式 (495), (498)–(500)

を用いてこれを評価すると,

$$e_0^2\Pi^{\mu\nu}(k) = (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})\tilde{e}_0^2\Pi(k^2), \quad (504)$$

$$\Pi(k^2) = \frac{1}{12\pi^2} \left\{ \frac{2}{\eta} - \gamma - \frac{f'(4)}{2} + \ln(4\pi) \right\} - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left\{ \frac{m^2 - k^2 z(1-z)}{\mu^2} \right\} + O(\eta) \quad (505)$$

を得る ($\gamma = 0.5772\dots$ は Euler 定数, 導出は 9.11.3 節). 式 (456), 式 (458):

$$e_0^2\Pi^{\mu\nu}(k) = e_0^2[-k^2 g^{\mu\nu}\{A'(0) + \Pi_c(k^2)\} + k^\mu k^\nu B]$$

と比較すると,

$$e_0^2\{A'(0) + \Pi_c(k^2)\} = \tilde{e}_0^2\Pi(k^2)$$

と同定される. $\Pi_c(0) = 0$ より $e_0^2 A'(0) = \tilde{e}_0^2 \Pi(0)$ なので

$$e_0^2\Pi_c(k^2) = \tilde{e}_0^2\{\Pi(k^2) - \Pi(0)\}$$

と書き換えられ, $\eta \rightarrow 0$ の極限で

$$e_0^2\Pi_c(k^2) = e_0^2\{\Pi(k^2) - \Pi(0)\} = -\frac{2\alpha_0}{\pi} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left[1 - \frac{k^2 z(1-z)}{m^2} \right]$$

となる ($\alpha_0 \equiv e_0^2/4\pi$). この結果は質量尺度 μ に依らず, 最低次では $e_0 = e$ なので

$$e^2\Pi_c(k^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left[1 - \frac{k^2 z(1-z)}{m^2} \right].$$

また $\Pi_c(k^2)$ の式を含め, 一般に観測可能量の予言は $f'(4)$ の値には依存しないので, $f'(4) = 0$ と置くのが慣例となっている.

^{*153} 最初に m_0 を m に置き換え, 質量相殺項を相互作用 Hamiltonian に含めるアプローチ (3.10.3 節) を採用していることを反映している.

3.11.4 電子の自己エネルギーと次元正則化 [10, p.248]

電子の自己エネルギー (3.10.1 節) は次元正則化により

$$ie_0^2 \Sigma(p) = \frac{-\tilde{e}_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int d^D k \frac{\gamma^\alpha (\not{p} - \not{k} + m) \gamma^\beta}{(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{g_{\alpha\beta}}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} \quad (506)$$

となる。ただしここでも μ は質量尺度, $e_0^2 = \tilde{e}_0^2 \mu^\eta$ であり, 赤外発散を防ぐために小さい切断パラメーター λ も導入してある。 $\eta = 4 - D \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0$ の極限で

$$e_0^2 \Sigma(p) = \frac{\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} (\not{p} - 4m) \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right] + \tilde{e}_0^2 \Sigma_c(p), \quad (507)$$

$$16\pi^2 \Sigma_c(p) = (2m - \not{p}) - 2 \int_0^1 dz [\not{p}(1-z) - 2m] \ln \left(\frac{m^2 z - p^2 z(1-z)}{\mu^2} \right) \quad (508)$$

となる (導出は 9.11.4 節)。ここで定義した $\Sigma_c(p)$ は QED の復元操作 $\eta \rightarrow 0$ の際に有限に留まる。

式 (507), 式 (508) の結果を 3.10.3 節における展開

$$e_0^2 \Sigma(p) = -\delta m + (\not{p} - m)(1 - Z_2) + (\not{p} - m)e_0^2 \Sigma_c(p)$$

と比較する*154。式 (507), 式 (508) において発散する $1/\eta$ の項

$$\frac{\alpha_0}{4\pi} (\not{p} - m) \frac{2}{\eta} = -\frac{3\alpha_0 m}{2\pi} \frac{1}{\eta} + (\not{p} - m) \frac{\alpha_0}{2\pi}$$

は δm と Z_2 の項に

$$\delta m \sim \frac{1}{\eta} \left(\frac{3\alpha_0 m}{2\pi} \right), \quad Z_2 \sim -\frac{1}{\eta} \left(\frac{\alpha_0}{2\pi} \right)$$

と入る。

*154 これは式 (466) の両辺に e_0^2 を掛け, 式 (467): $e_0^2 A = -\delta m$, 式 (473): $e_0^2 B = 1 - Z_2$ を用いて得られる。

4 素粒子の相互作用

本章では文献 [1](F. マンドル/G. ショー『場の量子論 第2巻 素粒子の相互作用』)の内容を基に、量子色力学と電弱理論を説明し、素粒子標準理論(標準模型)を完成させる。ただし本稿では概略を述べるに留め、式の導出などの詳細は、以下のページにて公開している文献 [1] の自己完結的なノートに譲ることにする。

<http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/>

- 強い相互作用 (4.1 節–4.5 節)
- 電弱統一理論 (4.6 節–4.9 節)
- 標準理論 (4.10 節)

4.1 ゲージ理論

量子色力学 (quantum chromodynamics : QCD) は強い相互作用を記述するゲージ理論であり、いわゆる色電荷が中心的な役割を担う。

まず強い相互作用を行う物質粒子として、クォークの説明をする。クォークはスピン 1/2 の粒子であり、質量と電荷の異なる 6 種類の“香り”(フレーバー) u, d, c, s, t, b が存在する。

	軽い	↔	重い
電荷 $2e/3$	u : up	c : charm	t : top
電荷 $-e/3$	d : down	s : strange	b : bottom

重粒子(バリオン)と中間子(メソン)は以下のようなクォークの束縛状態であり(クォーク q の反クォークを \bar{q} と表記)、これらを総称して強粒子(ハドロン)と呼ぶ [25, pp.5–7].

- 重粒子(バリオン) $\sim qqq$
 - 例: 陽子 (uud), 中性子 (udd)
- 中間子(メソン) $\sim q\bar{q}$
 - パイオン: $\pi^+(u\bar{d}), \pi^-(\bar{u}d), \pi^0((u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2})$

さて、強い/弱い相互作用には古典的対応物がなく、相互作用の形は前もって明らかではない。しかしながら理論の形は、主に繰り込み可能性とゲージ不変性によって強い制約を受けることになる。Yagn (ヤン) と Mills (ミルズ) はこれらを指導原理として一般的なゲージ理論を構築した。今では電磁相互作用や強い/弱い相互作用はその実例にあたるのが理解されている。そこで QCD の背景として、Yang-Mills 理論の初歩を簡単に一瞥するところから始めよう [26, pp.137–138,p.145].

N 種類の Dirac 場

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = (\bar{\psi}_1 \quad \bar{\psi}_2 \quad \cdots \quad \bar{\psi}_N)$$

に対する Lagrangian 密度

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi = \sum_{\alpha=1}^N \bar{\psi}_{\alpha}(i\cancel{\partial} - m)\psi_{\alpha}$$

は、 $N \times N$ のユニタリー行列 $U = e^{iH}$ (したがって H は Hermite 行列) による大域的位相変換 $\psi \rightarrow U\psi$ の下で不変に留まる. このような対称変換は 2 回繰り返して行っても, \mathcal{L} を不変に保つ $N \times N$ ユニタリー行列による変換となるから, $U(N)$ 群と呼ばれる群を成す. ところで一般に $N \times N$ の Hermite 行列 H は N^2 個の独立な実数によって特定できる [25, p.254]. そこで N^2 個の適当な Hermite 行列 T_i と実パラメーター α_i を用いて, 一般に

$$H = \sum_i \alpha_i T_i, \quad U = \exp\left(i \sum_i \alpha_i T_i\right)$$

と書くことができる (このとき T_i を変換の生成子と呼ぶ).

次に QCD を念頭に, $N = 3$ の場合を考えよう. 我々の目的のためには, 生成子 T_i の具体的な行列表現に頼って議論を進めれば充分である. このとき $N^2 = 9$ 個の T_i として, Gell-Mann (ゲルマン) 行列

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

の 1/2 倍

$$T_i = \frac{1}{2} \lambda_i (\equiv \hat{F}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, 8)$$

と, 単位行列 $\mathbf{1}$ に比例した $T_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{1}$ を選ぶことができる. T_0 を生成子とするユニタリー行列 $\exp(i\alpha_0 T_0) = \exp\left(i \frac{\alpha_0}{\sqrt{6}}\right) \mathbf{1}$ による変換

$$\psi \rightarrow \exp(i\alpha_0 T_0) \psi, \quad \text{i.e.} \quad \psi_\alpha \rightarrow \exp\left(i \frac{\alpha_0}{\sqrt{6}}\right) \psi_\alpha$$

は $U(1)$ 部分群を成す. また残りの 8 個の生成子 \hat{F}_i はいずれもトレースがゼロになっていることに注目すると*155, $\exp\left(i \sum_{i=1}^8 \alpha_i \hat{F}_i\right)$ は行列式が 1 となることが分かる. こうして $\exp\left(i \sum_{i=1}^8 \alpha_i \hat{F}_i\right)$ による位相変換は特殊ユニタリー群 $SU(3)$ を成し, 半ば直観的に述べると, $U(3)$ 群は $U(1)$ 群と $SU(3)$ 群に分解される:

$$U(3) = U(1) \times SU(3).$$

QCD は $SU(3)$ 変換に関してゲージ不変な理論であり, いわゆる $SU(3)$ Yang-Mills 理論の実例にあたる. クォークの各香り $f = d, u, s, c, b, t$ について 3 種類の色状態 $c = r, g, b$ の Dirac 場 ψ_c^f が定義され, 8 種類の色演算子 $\hat{F}_i = \lambda_i/2$ が $SU(3)$ 変換の生成子となる. 改めて Dirac 場を

$$\Psi^f = \begin{pmatrix} \psi_r^f \\ \psi_g^f \\ \psi_b^f \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}^f = \left(\bar{\psi}_r^f \quad \bar{\psi}_g^f \quad \bar{\psi}_b^f \right)$$

*155 一般に $U(N)$ 変換の N^2 個の生成子 T_i は, 規格直交条件

$$\text{Tr}(T_i T_j) = \frac{1}{2} \delta_{ij}$$

を満たすようにとるのが慣例となっている. このとき T_0 を除く $N^2 - 1$ 個の T_i は特に

$$\text{Tr}(T_i) = 0 \quad (i \neq 0)$$

を満たすことになる.

表 3 色電荷の固有値 F_3, F_8

	クォーク		反クォーク		
	F_3	F_8	F_3	F_8	
r	$1/2$	$1/2\sqrt{3}$	\bar{r}	$-1/2$	$-1/2\sqrt{3}$
g	$-1/2$	$1/2\sqrt{3}$	\bar{g}	$1/2$	$-1/2\sqrt{3}$
b	0	$-1/\sqrt{3}$	\bar{b}	0	$1/\sqrt{3}$

とまとめると、自由クォークの Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}^f (i\cancel{\partial} - m_f) \Psi^f = \sum_{c=r,g,b} \bar{\psi}_c^f (i\cancel{\partial} - m_f) \psi_c^f$$

で与えられる (繰り返された香りの添字 $f = d, u, s, c, b, t$ について和をとる). 大域的位相変換 $\Psi^f(x) \rightarrow e^{i\alpha_i \lambda_i/2} \Psi^f(x)$ の下での \mathcal{L} の不変性から導かれる, 保存するカレントと色電荷は

$$S_i^\mu(x) = \frac{1}{2} \bar{\Psi}^f(x) \gamma^\mu \lambda_i \Psi^f(x),$$

$$\hat{F}_i = \int d^3x S_i^0(x) = \frac{1}{2} \int d^3x \Psi^{f\dagger}(x) \lambda_i \Psi^f(x) \quad (i = 1, 2, \dots, 8)$$

である. 演算子を正規順序化し, Gell-Mann 行列 λ_i の具体的な表式と場の Fourier 展開を利用すると,

$$\begin{aligned} \hat{F}_3 &= \frac{1}{2} \int d^3x N [\psi_r^{f\dagger}(x) \psi_r^f(x) - \psi_g^{f\dagger}(x) \psi_g^f(x)] \\ &= \frac{1}{2} (N_r - \bar{N}_r) - \frac{1}{2} (N_g - \bar{N}_g), \\ \hat{F}_8 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int d^3x N [\psi_r^{f\dagger}(x) \psi_r^f(x) + \psi_g^{f\dagger}(x) \psi_g^f(x) - 2\psi_b^{f\dagger}(x) \psi_b^f(x)] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} (N_r - \bar{N}_r) + \frac{1}{2\sqrt{3}} (N_g - \bar{N}_g) - \frac{1}{\sqrt{3}} (N_b - \bar{N}_b), \\ \hat{F}_1 &= \frac{1}{2} \int d^3x N [\psi_r^{f\dagger}(x) \psi_g^f(x) - \psi_g^{f\dagger}(x) \psi_r^f(x)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s,\mathbf{p},f} \{ c_{sr}^{f\dagger}(\mathbf{p}) c_{sg}^f(\mathbf{p}) - d_{sr}^{f\dagger}(\mathbf{p}) d_{sg}^f(\mathbf{p}) + c_{sg}^{f\dagger}(\mathbf{p}) c_{sr}^f(\mathbf{p}) - d_{sg}^{f\dagger}(\mathbf{p}) d_{sr}^f(\mathbf{p}) \}, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

が得られる (上記の \hat{F}_i との混同に注意). ただし例えば $c_{sr}^{f\dagger}(\mathbf{p}), d_{sr}^{f\dagger}(\mathbf{p})$ はそれぞれ, 色 r , 運動量 \mathbf{p} , スピン s のクォークと反クォークの生成演算子を表す. またクォークと反クォークの数演算子はそれぞれ $N_r \equiv \sum_{s,\mathbf{p},f} c_{sr}^{f\dagger}(\mathbf{p}) c_{sr}^f(\mathbf{p}), \bar{N}_r \equiv \sum_{s,\mathbf{p},f} d_{sr}^{f\dagger}(\mathbf{p}) d_{sr}^f(\mathbf{p})$ のように定義されている. クォークの色状態 r, g, b は \hat{F}_3, \hat{F}_8 の同時固有状態であり, 色電荷の固有値は表 3 のようにまとめられる (反クォークの固有状態は $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$ で表す).

ここでクォークが色の自由度を持つことの含意を見ておこう. 色の閉じ込めの仮説によれば, 一般に多クォーク状態 $|\chi_h^c\rangle$ には条件

$$\hat{F}_i |\chi_h^c\rangle = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 8)$$

が課される. これは固有値に対する条件 $F_3 = F_8 = 0$ を含意する. すると表 3 の値より,

- 自由クォーク q やクォーク対 qq は存在できない.
- クォーク対 $q\bar{q}$ や重粒子 qqq は許容される.

この結果は観測と合っている. さらに閉じ込め条件を完全に考慮すると, 重粒子 (バリオン) の色状態が

$$|\chi_B^c\rangle \sim \varepsilon_{ijk} |r_i, g_j, b_k\rangle = \begin{vmatrix} |r_1\rangle & |r_2\rangle & |r_3\rangle \\ |g_1\rangle & |g_2\rangle & |g_3\rangle \\ |b_1\rangle & |b_2\rangle & |b_3\rangle \end{vmatrix}$$

という形をとることが導かれる. ただし例えば $|r_1, g_2, b_3\rangle = |r_1\rangle |g_2\rangle |b_3\rangle$ は, 重粒子を構成するクォーク 1,2,3 の色がそれぞれ r, g, b となる状態であり, 添字 $i, j, k = 1, 2, 3$ について和をとる. このように色状態が同種クォークの入れ替えに関する反対称性を担っており, このときクォークの位置, スピン, 香りの自由度を含めた重粒子の状態が, スピン-統計定理から期待される適正な反対称性を持つことが保証される [25, p.200].

我々は自由クォーク場に関して, 大域的な位相変換の下での不変性から保存する色電荷を見出した. 次に QED の場合と同様に, クォーク場と相互作用するゲージ場を導入し, 局所的な位相変換の下でゲージ不変な理論を構築する. QED に対する式において

$$\begin{aligned} \text{物質場} \quad \psi(x) &\rightarrow \Psi^f(x), \\ \text{電荷} \quad q &\rightarrow g_s \lambda_j / 2, \quad (g_s : \text{結合定数}) \\ \text{ゲージ関数} \quad f(x) &\rightarrow \omega_j(x), \\ \text{ゲージ場} \quad A^\mu(x) &\rightarrow A_j^\mu(x) : \text{グルーオン場} \end{aligned}$$

(ただし $j = 1, 2, \dots, 8$) と置き換えると, QCD に対する式が得られる:

- 局所的な位相変換

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \psi(x)e^{-iqf(x)} \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{-iqf(x)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Psi^f(x) \rightarrow \psi^{f'}(x) = \exp[ig_s \lambda_j \omega_j(x)/2] \Psi^f \\ \bar{\Psi}^f(x) \rightarrow \bar{\psi}^{f'}(x) = \bar{\Psi}^f \exp[ig_s \lambda_j \omega_j(x)/2] \end{cases} \quad (509)$$

- 共変微分

$$D_\mu \psi(x) = [\partial_\mu + iqA_\mu(x)]\psi(x) \rightarrow D^\mu \Psi^f(x) = [\partial^\mu + ig_s \lambda_j A_j^\mu(x)/2]\Psi^f(x).$$

- Lagrangian 密度

$$\begin{cases} \mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi \\ \mathcal{L}_1 = -q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}_q = \bar{\Psi}^f(i\not{D} - m_f)\Psi^f = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_0 \equiv \bar{\Psi}^f(i\not{\partial} - m_f)\Psi^f \\ \mathcal{L}_1 \equiv -\frac{1}{2}g_s \bar{\Psi}^f \gamma_\mu \lambda_j \Psi^f A_j^\mu \end{cases} \quad (510)$$

これにより QCD における極小置換 $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ が定義され, クォーク場とゲージ場 (グルーオン場) の相互作用が導入されたことになる. ここで得たクォークを記述する Lagrangian 密度 (510) がゲージ不変となるためには, 無限小の $\omega_j(x)$ に対してグルーオン場 $A_j^\mu(x)$ は

$$A_i^\mu(x) \rightarrow A_j^{\mu'}(x) \equiv A_i^\mu(x) - \partial^\mu \omega_i(x) - g_s f_{ijk} \omega_j(x) A_k^\mu(x) \quad (511)$$

と変換しなければならない. ここに f_{ijk} は交換関係 $[\hat{F}_i, \hat{F}_j] = if_{ijk}\hat{F}_k$ で定義される構造定数である. 上式 (509), (511) を合わせて SU(3) ゲージ変換と呼ぶ.

式 (511) 右辺の最後の項 $-g_s f_{ijk} \omega_j(x) A_k^\mu(x)$ は電磁場のゲージ変換と比べて新たな特徴である。この項のために、ゲージ場のゲージ不変な Lagrangian 密度 \mathcal{L}_G を得るには、場の強度 $F_i^{\mu\nu} \equiv \partial^\nu A_i^\mu - \partial^\mu A_i^\nu$ に付加的な項を導入した

$$G_i^{\mu\nu} \equiv F_i^{\mu\nu} + g_s f_{ijk} A_j^\mu A_k^\nu$$

を用いて

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} G_{i\mu\nu} G_i^{\mu\nu}$$

としなければならない^{*156}。

以上より QCD (量子色力学) の完全な Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}^f (i\not{D} - m_f) \Psi^f - \frac{1}{4} G_{i\mu\nu} G_i^{\mu\nu} \quad (512)$$

である。純粋なグルーオン場の項を具体的に書くと

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G &= -\frac{1}{4} G_{i\mu\nu} G_i^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} F_{i\mu\nu} F_i^{\mu\nu} \quad \leftarrow \text{自由グルーオン場} \\ &\quad + g_s f_{ijk} A_{i\mu} A_{j\nu} \partial^\mu A_k^\nu \quad \leftarrow A_i^\mu \text{を 3 つ含む} \\ &\quad - \frac{1}{4} g_s^2 f_{ijk} f_{ilm} A_j^\mu A_k^\nu A_{l\mu} A_{m\nu} \quad \leftarrow A_i^\mu \text{を 4 つ含む} \end{aligned} \quad (513)$$

となる。

- 式 (510) の相互作用 Lagrangian \mathcal{L}_I

– 図 60(a) のようなクォーク-グルーオンの 3 点結節点を作る。 \mathcal{L}_I における

$$\bar{\Psi}^{f\dagger}(x) \lambda_1 \Psi^f(x) = \psi_r^{f\dagger}(x) \psi_g^f(x) - \psi_g^{f\dagger}(x) \psi_r^f(x)$$

のような項はクォークの色状態を変化させる。ところが色電荷は保存するから、

QED とは対照的に、ゲージ場の量子 (グルーオン) もゼロでない電荷を持たなければならない。

- 式 (513) 最右辺の第 1 項 (自由グルーオン場)

– グルーオンは色電荷を持つので、色の閉じ込め効果のために、孤立状態では観測されない。

- 式 (513) 最右辺の第 2 項, 第 3 項

– それぞれ図 60(b),(c) に示された、

3 本, 4 本のグルーオン線の集まるグルーオン-グルーオン結節点を作る。

– グルーオンの自己相互作用は、グルーオン自体がゼロでない色電荷を持つことに起因する。

- “香り独立性”

\mathcal{L}_I の式 (510) におけるクォーク-グルーオン相互作用の強さと形は、香り $f = d, u, s, \dots$ に依らない。

- 相互作用 \mathcal{L}_I の形 (510) より、クォーク数

$$N_f \equiv N(f) - N(\bar{f}) \quad (f = d, u, s, c, b, t)$$

が保存する (QED においてレプトン数が保存するのと同じ事情である)。

^{*156} ここでは電磁場テンソルを $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ で定義する流儀と比べて、添字 μ, ν を逆に付けてある。

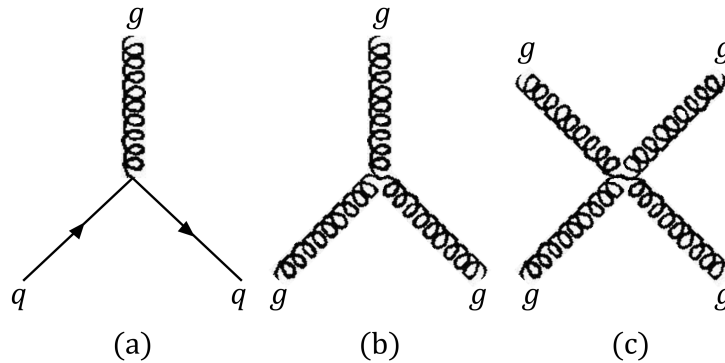


図 60 QCD の相互作用

最後に、ゲージ不変性の観点からは、極小置換によって得られないゲージ不変な項を Lagrangian 密度に付け加えた理論も考えられる。しかしながら、そのような“極小でない”相互作用は、繰り込み可能性によって排除される。

4.2 場の理論の方法

QCD はグルーオン場のゲージ変換 (511) が電磁場よりも複雑であるために (言い換えれば構造定数 f_{ijk} がゼロでなく生成子 \hat{F}_i が交換しない, 非 Abel ゲージ理論であるために [26, p.144]), 実は量子化を行うには正準形式よりも経路積分形式の方が適している^{*157}。本節と次節では QED の文脈において, 経路積分を用いた定式化のために必要となる新たな概念——すなわち Green 関数と生成汎関数——を導入する。

Green 関数の定義からはじめよう。任意の場の量子論による物理的な予言はその S 行列要素に含まれている。これに対して Green 関数は S 行列要素ほど観測可能量と直接的な関係を持つわけではないものの, 計算しやすく, いくつかの異なる過程の S 行列要素を単一の Green 関数から導くことが可能である。Green 関数は Heisenberg 描像 (添字 H で表す) において, 複数の場の演算子の時間順序化積の真空期待値

$$G^{\mu\dots}(x, \dots y, \dots z, \dots) \equiv {}_{\text{H}}\langle 0 | T \{ A^{\mu\text{H}}(x) \dots \psi^{\text{H}}(y) \dots \bar{\psi}^{\text{H}}(z) \dots \} | 0 \rangle_{\text{H}} \quad (514)$$

として定義される。これは伝播関数を“脚”に持つダイアグラムに対応付けられ,

- 電磁場演算子 $A^{\mu\text{H}}$ には光子の脚が,
- 電磁場演算子 ψ^{H} には外向きの電子の脚が,
- 電磁場演算子 $\bar{\psi}^{\text{H}}$ には内向きの電子の脚が

充てられる。例えば Green 関数

$$G^{\mu\nu}(x, y, z, w) = {}_{\text{H}}\langle 0 | T \{ A^{\mu\text{H}}(x) A^{\nu\text{H}}(y) \psi^{\text{H}}(z) \bar{\psi}^{\text{H}}(w) \} | 0 \rangle_{\text{H}} \quad (515)$$

は図 61 のダイアグラムで表される。(グラフとの対応付けは, この後で述べるように, Green 関数もまたグラフに Feynman 規則を適用して求められることから正当化される。) S 行列要素が外線を持つのに対し, Green 関数の各脚は伝播関数であり, S 行列要素と関係付けるときに始・終状態の粒子のいずれにも対応し得る。ま

^{*157} 本章では「経路積分」と表記せず, 「経路積分」で統一する。

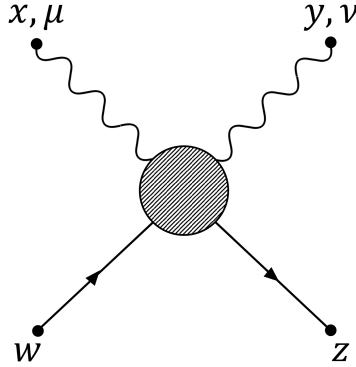


図 61 Green 関数 (515) を表すダイアグラム

た Green 関数の中央の斜線部分には、脚に接続する可能なあらゆるグラフが摂動展開の形で寄与する。Green 関数の定義式 (514) は、相互作用描像に移行させると

$$G^{\mu\cdots}(x, \cdots, y, \cdots, z, \cdots) = \frac{\langle 0 | T \{ S A^\mu(x) \cdots \psi(y) \cdots \bar{\psi}(z) \cdots \} | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle} \quad (516)$$

となる^{*158}。運動量空間の Green 関数 $G^{\mu\cdots}(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ は、慣例に従って運動量変数 q_i をダイアグラムの内向きにとり、Fourier 変換

$$\begin{aligned} & \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_n \left(\prod_{i=1}^n e^{-iq_i \cdot x_i} \right) G^{\mu\cdots}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ & = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1 + q_2 + \cdots + q_n) G^{\mu\cdots}(q_1, q_2, \cdots, q_n) \end{aligned}$$

で定義される。エネルギー-運動量保存を保証する δ 関数は Fourier 変換に伴って必ず現れる。

Green 関数 (516) に S 行列展開を代入すると、分母と分子はそれぞれ

$$\begin{aligned} \langle 0 | S | 0 \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \langle 0 | T \{ \mathcal{L}_I(x_1) \cdots \mathcal{L}_I(x_n) \} | 0 \rangle, \\ \langle 0 | T \{ S A B \cdots \} | 0 \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \langle 0 | T \{ A B \cdots N(\bar{\psi} A \psi)_{x_1} \cdots N(\bar{\psi} A \psi)_{x_n} \} | 0 \rangle \end{aligned}$$

と摂動展開される ($\mathcal{L}_I(x) = eN(\bar{\psi} A \psi)_x$)。上式に Wick の定理を適用し、S 行列要素の計算と同様の手法で Green 関数を評価できる。

例えば Green 関数

$$G^{\mu\nu}(x, y, z, w) = \frac{\langle 0 | T \{ A^\mu(x) A^\nu(y) \psi(z) \bar{\psi}(w) S \} | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle} \quad (517)$$

は図 62 のように、連結ダイアグラム (連結 Green 関数 $G_c^{\mu\nu}(x, y, z, w)$) と、非連結ダイアグラム (の寄与) に分解される。非連結ダイアグラムはその構成要素となっている独立な過程のダイアグラム以上の情報を含んではいない。そこで興味のある連結 Green 関数を運動量空間に移すと、2 次までの計算で

$$G_c^{\mu\nu}(k_1, k_2, p_1, p_2) = iD_F^{\mu\alpha}(k_1) iS_F(-p_2) \Gamma_{\alpha\beta}(k_1, k_2, p_1, p_2) iS_F(p_1) iD_F^{\beta\nu}(k_2), \quad (518)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}(k_1, k_2, p_1, p_2) \equiv (ie\gamma_\beta) iS_F(p_1 + k_1) (ie\gamma_\alpha) + (ie\gamma_\alpha) iS_F(p_1 + k_2) (ie\gamma_\beta) \quad (519)$$

^{*158} 式 (516) の関係を Gell-Mann Low の定理という [29, pp.69–71].

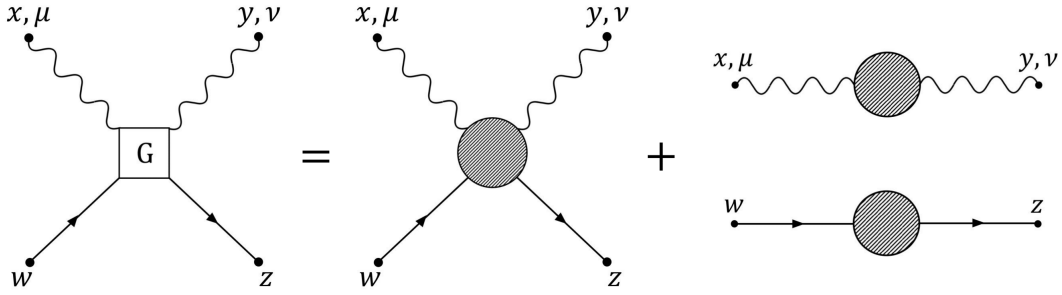


図 62 Green 関数 (517) の連結部分と非連結部分への分解. 丸い灰色 (斜線) の部分は連結ダイアグラムの和を表す.

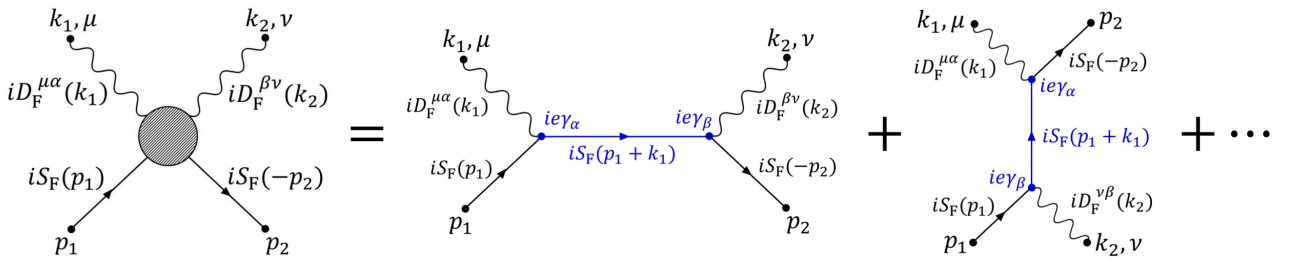


図 63 連結 Green 関数 (518)(図 63 の青い字で示した因子が結節部分関数 (519) に対応)

となる. これは Green 関数の脚を表す伝播関数と“結節部分関数” $\Gamma_{\alpha\beta}(k_1, k_2, p_1, p_2)$ から構成されており, 図 63 のダイアグラムに Feynman 規則を適用した結果に一致している. Green 関数に付した運動量 p_2 は内向きを基準としているのに対し, 伝播関数 S_F の引数は常にフェルミオン線の矢の向きに一致させる約束だから, $iS_F(-p_2)$ における引数の負号を要する.

このように, 一般に運動量空間の Green 関数もまた Feynman 規則に従う. よって任意の過程の Feynman 振幅を得るには, 関係する (連結) Green 関数の脚 (内線) を表す伝播関数を, 外線粒子の因子に適切に置き換えさえすれば良い^{*159}. 例えば図 65 のダイアグラムで表される Compton 散乱

$$\gamma(k, r) + e^-(p, s) \rightarrow \gamma(k', r') + e^-(p', s')$$

の Feynman 振幅 \mathcal{M} を求めるには, 図 64 のダイアグラムで表される Green 関数 (518) において内向き運動量を

$$k_1 = k, \quad p_1 = p, \quad k_2 = -k', \quad p_2 = -p'$$

と同定し, さらに Green 関数の脚 (伝播関数) の外線因子への置き換え

$$\begin{aligned} iD_F^{\mu\alpha}(k_1) &\rightarrow \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}), & iS_F(p_1) &\rightarrow u_s(\mathbf{p}), \\ iD_F^{\beta\nu}(k_2) &\rightarrow \varepsilon_{r'}^\beta(\mathbf{k}'), & iS_F(-p_2) &\rightarrow \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \end{aligned} \quad (520)$$

を施せば良い:

$$\mathcal{M}(k, k', p, p') = \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \Gamma_{\alpha\beta}(k, -k', p, -p') u_s(\mathbf{p}) \varepsilon_{r'}^\beta(\mathbf{k}').$$

ただしここでは最低次の摂動論を念頭に, 結節部分関数 $\Gamma_{\alpha\beta}$ は 2 次の表式 (519) を想定しており, また置き換え (520) では伝播関数と外線に対する輻射補正を考慮していない.

^{*159} このような Green 関数と Feynman 振幅 (S 行列要素) の関係は一般に, LSZ 簡約公式としてまとめられる [26, pp.71–76]. LSZ

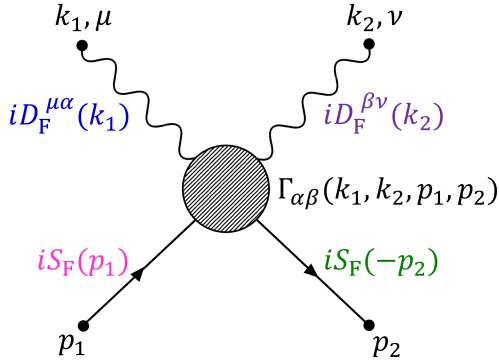


図 64 Green 関数 $G_c^{\mu\nu}(k_1, k_2, p_1, p_2)$

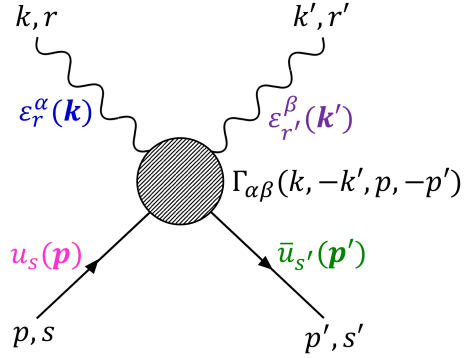


図 65 Compton 散乱の Feynman 振幅

次に生成汎関数の議論に移ろう。任意の過程の S 行列要素は、関係する Green 関数から得られる。そして特定の場の理論に対するあらゆる Green 関数は、生成汎関数から導くことができる。

生成汎関数 → Green 関数 → S 行列要素.

このため理論の予言は全て生成汎関数に集約されることになる。

生成汎関数を導入するための数学的準備として、汎関数微分と Grassmann 場について述べておく必要がある。もっとも本稿では具体的な計算を行わないため、以下の内容は完全を期すための形式的な、最低限の説明にすぎない。

汎関数 時空座標 x の関数 $\phi(x)$ に対し、汎関数 $F[\phi]$ とは関数 $\phi(x)$ の“関数”のことである。 $\phi(x)$ の変化 $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$ に伴う $F[\phi]$ の 1 次の変化を $\delta F[\phi]$ として、汎関数微分 $\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)}$ を

$$\delta F[\phi] = \int d^4x \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x) \quad (521)$$

で定義する*160。

Grassmann 代数と Grassmann 場 Grassmann 変数 (生成子) $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ は次の反交換関係を満たすものとして定義される。

$$\{\theta_i, \theta_j\} = 0. \quad (522)$$

よって $\theta_i^2 = 0$ となるから、 n 個の生成子 θ_i の Grassmann 代数における最も一般的な代数要素 (Grassmann 変数 θ_i の“関数”) は次の形を持つ。

$$f(p) = p_0 + \sum p_i \theta_i + \sum p_{ij} \theta_i \theta_j + \dots + p_{12\dots n} \theta_1 \theta_2 \dots \theta_n. \quad (523)$$

ここで \sum は $1 \leq i < j < \dots \leq n$ を満たす添字 i, j, \dots に関する和を表す。また係数 p_0, p_i, p_{ij}, \dots は通常の数であり、我々は代数要素 (523) を θ_i よりもむしろ係数 $p \equiv \{p_0, p_i, p_{ij}, \dots\}$ の関数と見なす。

次に Grassmann 変数 $\{\theta_i\} \equiv \theta$ の任意の関数 $f(\theta)$ の、Grassmann 変数 θ_i による微分 $\partial/\partial\theta_i$ を定義しよう。Grassmann 数は連続変数のようなものではなく、純粋に上述のような操作上の性質だけで定義された抽象的な対象であり、 $\partial/\partial\theta_i$ もまた通常の微分とは全く異なるものである (表面的には類似の性質を持つにせよ)。 $f(\theta)$ は式 (523) の形を持つので、 θ_i による微分が線形性を持つものとして式 (523) の各項の微分

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i} (\theta_{j_1} \theta_{j_2} \dots \theta_{j_\omega}) \quad (524)$$

簡約公式が外線因子の置き換えに対応していることは、文献 [29, pp.75–76] の説明が見やすい。

*160 汎関数微分 $\delta F/\delta\phi$ は定義式 (521) より、通常の微分とは異なり $\frac{1}{L^4} \times \frac{[F]}{[\phi]}$ の次元を持つ (L は長さの次元を表す)。

を定義すれば十分である。ここで θ_i による微分は

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial \theta_j} = \delta_{ij} \quad (525)$$

を満たすものとする。また通常の数の θ_i による微分はゼロとする。これを踏まえ、 $\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_\omega}$ の θ_i による微分 (524) を定義する。まず $\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_\omega}$ が θ_i を含まないとき、式 (524) はゼロとする。次に $\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_\omega}$ が θ_i を 2 つ以上含むとき、反交換関係 (522) によりこれはゼロになるので、その θ_i による微分 (524) もゼロである。そこで $\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_\omega}$ が θ_i を 1 つだけ含む場合を考える。このとき θ_i による微分 (524) を実行するには、次のように反交換関係 (522) を用いて θ_i を積 $\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_\omega}$ の左端まで移動してから、式 (525) を適用すれば良い (左微分の約束)。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_i}(\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_{k-1}}\theta_i\theta_{j_{k+1}}\cdots\theta_{j_\omega}) &= (-1)^{k-1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} \theta_i \right) \theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_{k-1}}\theta_{j_{k+1}}\cdots\theta_{j_\omega} \\ &= (-1)^{k-1} \theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_{k-1}}\theta_{j_{k+1}}\cdots\theta_{j_\omega}. \end{aligned}$$

さらに

$$\theta_i \rightarrow \text{各時空点 } x \text{ に付随する無限個の生成子 } \theta(x) : \text{Grassmann 場}, \quad \{\theta(x), \theta(y)\} = 0$$

とし、Grassmann 汎関数を

$$F[\theta] = f_0 + \int d^4x f_1(x)\theta(x) + \iint d^4x d^4y f_2(x,y)\theta(x)\theta(y) + \cdots$$

によって定義する (f_i は通常の関数)。そして Grassmann 場による汎関数微分 $\delta/\delta\theta(x)$ を、 $\partial/\partial\theta_i$ と類似の性質

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\theta(x)} \{\theta(x_1)\theta(x_2)\theta(x_3)\cdots\theta(x_n)\} \\ = \delta^{(4)}(x-x_1)\{\theta(x_2)\theta(x_3)\cdots\theta(x_n)\} - \delta^{(4)}(x-x_2)\{\theta(x_1)\theta(x_3)\cdots\theta(x_n)\} \\ + \cdots + (-1)^{n-1} \delta^{(4)}(x-x_n)\{\theta(x_1)\theta(x_2)\cdots\theta(x_{n-1})\} \end{aligned}$$

を満たす線形演算子として“定義”する。

さて、QED の生成汎関数を構築するにあたり、QED の量子場 $A^\kappa, \psi, \bar{\psi}$ に対応 (結合) する虚構的な古典的源 $J_\kappa, \bar{\sigma}, \sigma$ (ただし $\sigma, \bar{\sigma}$ は独立なスピノル Grassmann 場) を導入し、Lagrangian 密度を

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_S, \quad \mathcal{L}' \equiv \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_S : \text{源がある場合の相互作用}$$

とする。ここに

- 自由場の Lagrangian 密度 $\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu)$
- 相互作用 Lagrangian 密度 $\mathcal{L}_I = -s^\mu A_\mu$
- 源の Lagrangian 密度 $\mathcal{L}_S = J_\kappa A^\kappa + \bar{\sigma}\psi + \bar{\psi}\sigma$

である。源の項 \mathcal{L}_S を含む Lagrangian 密度に対する S 演算子を S' として、生成汎関数は

$$Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \frac{\langle 0|S'|0 \rangle}{\langle 0|S|0 \rangle} \quad (526)$$

で定義される (したがって $Z[0, 0, 0] = 1$)。このとき次式のように生成汎関数を源で汎関数微分すると、Green 関数が得られることが示される。

$$\begin{aligned} G^{\mu\cdots}(\underbrace{x_1, \cdots, y_1, \cdots, z_1, \cdots}_{n \text{ 個}}) &\equiv \frac{\langle 0|T\{SA^\mu(x_1)\cdots\psi(y_1)\cdots\bar{\psi}(z_1)\cdots\}|0 \rangle}{\langle 0|S|0 \rangle} \\ &= (-1)^{\bar{n}} \left(\frac{1}{i} \right)^n \frac{\delta^n Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x_1)\cdots\delta\bar{\sigma}(y_1)\cdots\delta\sigma(z_1)\cdots} \Bigg|_0. \end{aligned} \quad (527)$$

ただし最右辺の添字 0 は汎関数微分の後、虚構的な源の項をゼロとおくことを意味する。 σ と $\bar{\sigma}$ を Grassmann 源としたため、Green 関数 (527) は y_1, \dots に関して反対称かつ z_1, \dots に関して反対称となり、Pauli 原理に整合する。

さらに以上の定式化の下で、次のことが見出される。

- 相互作用のない ($\mathcal{L}_I = 0$) 自由場の生成汎関数は具体的に

$$Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = Z_0[J_\kappa] Z_0[\sigma, \bar{\sigma}], \quad \begin{cases} Z_0[J_\kappa] = \exp \left\{ -\frac{i}{2} [J_\mu D_F^{\mu\nu} J_\nu] \right\} \\ Z_0[\sigma, \bar{\sigma}] = \exp \{ -i [\bar{\sigma} S_F \sigma] \} \end{cases} \quad (528)$$

と求まる。ここに

$$\begin{aligned} [J_\mu D_F^{\mu\nu} J_\nu] &\equiv \int d^4x' d^4x'' J_\mu(x') D_F^{\mu\nu}(x' - x'') J_\nu(x''), \\ [\bar{\sigma} S_F \sigma] &\equiv \int d^4x' d^4x'' \bar{\sigma}(x') S_F(x' - x'') \sigma(x'') \end{aligned}$$

である。

- 一般の (すなわち相互作用がある場合の) 生成汎関数は、自由場の生成汎関数 (528) に対して摂動展開

$$\begin{aligned} \langle 0|S|0 \rangle Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] &= \exp \left\{ i e \int d^4x I_\delta(x) \right\} Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} \left[\int d^4x I_\delta(x) \right]^n Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] \end{aligned} \quad (529)$$

で与えられる。ここに

$$I_\delta(x) \equiv \left(-\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} \right) \gamma_\mu \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\bar{\sigma}(x)} \right) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \right)$$

である。

4.3 径路積分

本節では径路積分による場の量子論の定式化を、QED の文脈において導入する。QCD への応用は次節で行う。本稿では具体的な計算を行わないものの、はじめに最低限、汎関数積分 (径路積分と同義) の定義をまとめておく。

汎関数積分の定義 時空を微小体積 Δ の胞 (セル) に分割し、胞の内部における実スカラー場 ϕ の値を、胞の中心点 x_i における値 $\phi_i = \phi(x_i)$ で近似する。このとき ϕ の汎関数は $F[\phi] = F(\{\phi_i\})$ と表され、 $F[\phi]$ の汎関数積分は

$$\int \mathcal{D}\phi F[\phi] \equiv \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\prod_i \left(\frac{\Delta}{2\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_i \right) F(\{\phi_i\}) \quad (530)$$

で定義される。上式 (530) にはあらゆる $\phi(x)$ の関数形 (したがって場のあらゆる時間発展の仕方) に対する $F[\phi]$ が寄与する^{*161}。我々は粒子の遷移振幅を表す Feynman の径路積分を 2.7.4 節で学んでおり、ここではパラメーターが $t \rightarrow x = (t, \mathbf{x})$, 観測量が $\mathbf{x}(t) \rightarrow \phi(x)$ と置き換わっている。

^{*161} 粗く言えば、汎関数積分 (530) はあらゆる $\phi(x)$ にわたる $F[\phi]$ のある種の “和” である。

汎関数積分は等価的に次のように定義することもできる．完全正規直交関数系 $\{u_i(x)\}$ で場を

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i(x)$$

と展開し，右辺の級数を第 n 項で打ち切る．このとき ϕ の汎関数 $F[\phi] = F(\alpha)$ はパラメーターの組 $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ で指定され， $F[\phi]$ の汎関数積分は

$$\int \mathcal{D}\phi F[\phi] \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_i}{\sqrt{2\pi}} \right) F(\alpha). \quad (531)$$

なお式 (530) と式 (531) における $(\Delta/2\pi)^{1/2}$ や $1/\sqrt{2\pi}$ の“加重因子”はいずれも，場の理論において特に興味を持たれる“Gauss 型”の積分公式が簡単になるように選んである．

Grassmann 数による積分の定義 Grassmann 変数 $\{\theta_i\} \equiv \theta$ の任意の関数 $f(\theta)$ の，Grassmann 変数 θ_i による積分を定義しよう． $f(\theta)$ は式 (523):

$$f(p) = p_0 + \sum p_i \theta_i + \sum p_{ij} \theta_i \theta_j + \dots + p_{12\dots n} \theta_1 \theta_2 \dots \theta_n$$

の形を持つので，それには θ_i による積分が線形性を持つものとして式 (523) の各項の積分

$$\int d\theta_i (\theta_{j_1} \theta_{j_2} \dots \theta_{j_\omega})$$

を定義すれば良い．そしてこれを計算するには，次の規則を与えれば十分である．

$$\begin{aligned} \int d\theta_i 1 &= 0, & \int d\theta_i \theta_i &= 1, \\ \int d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} d\theta_n F(\theta) &= \int d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \left\{ \int d\theta_n F(\theta) \right\}, \\ \int d\theta_i (\theta_{j_1} \theta_{j_2} \dots \theta_{j_{k-1}} \theta_i \theta_{j_{k+1}} \dots \theta_{j_\omega}) &= (-1)^{k-1} \left(\int d\theta_i \theta_i \right) \theta_{j_1} \theta_{j_2} \dots \theta_{j_{k-1}} \theta_{j_{k+1}} \dots \theta_{j_\omega} \\ &= (-1)^{k-1} \theta_{j_1} \theta_{j_2} \dots \theta_{j_{k-1}} \theta_{j_{k+1}} \dots \theta_{j_\omega}. \end{aligned}$$

ただし第 3 式の $F(\theta)$ は Grassmann 変数 $\{\theta_i\} \equiv \theta$ の任意の関数であり，第 4 式の Grassmann 変数 $\theta_{j_1}, \theta_{j_2}, \dots, \theta_{j_{k-1}}, \theta_{j_{k+1}}, \dots, \theta_{j_\omega}$ は θ_i を含まないものとする．以上により，例えば p_0, p_1, p_2, p_{12} を通常の数として

$$\int d\theta_1 d\theta_2 (p_0 + p_1 \theta_1 + p_2 \theta_2 + p_{12} \theta_1 \theta_2) = -p_{12} \int d\theta_1 d\theta_2 \theta_2 \theta_1 = -p_{12}$$

となる．なお，Grassmann 数に関する積分を微分の逆演算として定義することは不可能である．と言うのも， θ_i についての微分が θ_i となるような Grassmann 代数の要素 (523) は存在しないからである．

Grassmann 場による汎関数積分の定義 場の量子論において興味を持たれる，2 つの独立な Grassmann 場 $\theta(x), \tilde{\theta}(x)$ の汎関数 $F[\theta, \tilde{\theta}]$ を考える．Grassmann 場を正規直交関数系で

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i u_i(x), \quad \tilde{\theta}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\theta}_i u_i(x)$$

と展開したときの展開係数 $\theta_i, \tilde{\theta}_i$ は Grassmann 数であり，展開を第 n 項で打ち切ると $F[\theta, \tilde{\theta}] = F(\theta_i, \tilde{\theta}_i)$ は $2n$ 個の生成子 $\theta_1, \dots, \theta_n, \tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_n$ の関数となる． θ と $\tilde{\theta}$ による 2 重の汎関数積分は

$$\int \mathcal{D}\theta \mathcal{D}\tilde{\theta} F[\theta, \tilde{\theta}] \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{i=1}^n d\theta_i d\tilde{\theta}_i \right) F(\theta_i, \tilde{\theta}_i)$$

で定義される．

さて、正準形式の場の量子論では、Green 関数と生成汎関数をそれぞれ

$$\text{式 (514)} : G^{\mu\dots}(x, \dots, y, \dots, z, \dots) \equiv_{\text{H}} \langle 0 | T \{ A^{\mu\text{H}}(x) \dots \psi^{\text{H}}(y) \dots \bar{\psi}^{\text{H}}(z) \dots \} | 0 \rangle_{\text{H}},$$

$$\text{式 (526)} : Z[J_{\kappa}, \sigma, \bar{\sigma}] \equiv \frac{\langle 0 | S' | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle}$$

によって定義したところ、生成汎関数から Green 関数を導く式 (527):

$$G^{\mu\dots}(x, \dots, y, \dots, z, \dots) = (-1)^{\bar{n}} \left(\frac{1}{i} \right)^n \frac{\delta^n Z[J_{\kappa}, \sigma, \bar{\sigma}]}{\delta J_{\mu}(x) \dots \delta \bar{\sigma}(y) \dots \delta \sigma(z) \dots} \Big|_0$$

が示された。ところで正準形式の場の量子論から、Feynman による経路積分形式の場の量子論を導くことができる。この点を納得するために、代わりに生成汎関数に対する経路積分の表式を天下りに引用し、その正準形式との等価性を確認することも可能である。生成汎関数に対する経路積分の表式は、

$$Z[J_{\kappa}, \sigma, \bar{\sigma}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX'}, \quad X' = \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_S) : \text{源を含む作用} \quad (532)$$

と与えられる。ただし $\mathcal{D}A = \prod_{\mu=0}^3 \mathcal{D}A^{\mu}$, $\mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi = \prod_{\alpha} \mathcal{D}\bar{\psi}_{\alpha} \mathcal{D}\psi_{\alpha}$ (α はスピノル添字)。規格化定数 N は条件 $Z[0, 0, 0] = 1$ から

$$N = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX}, \quad X \equiv \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1) : \text{QED の作用}$$

と定まる。相互作用を $\mathcal{L}_1 = 0$ とおくと、自由場の生成汎関数 Z_0 の経路積分表式

$$Z_0[J_{\kappa}, \sigma, \bar{\sigma}] = \frac{1}{N_0} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX'_0}, \quad N_0 = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L}_0 \right) \quad (533)$$

(ただし $X'_0 \equiv \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_S)$) が得られる。まず式 (532) が正準形式において定義した生成汎関数 (526) に一致することを、次の手順で証明できる。

1. 生成汎関数 (532) もまた正準形式の式 (529) と同様に

$$Z[J_{\kappa}, \sigma, \bar{\sigma}] = \text{const} \times \exp \left\{ ie \int d^4x I_{\delta}(x) \right\} Z_0[J_{\kappa}, \sigma, \bar{\sigma}]$$

と摂動展開されることを証明できる (どちらも $Z[0, 0, 0] = 1$ となるように規格化されている)。

このため 2 つの形式で自由場の生成汎関数 Z_0 が一致すれば、相互作用を含む場合の生成汎関数 Z も一致する。

2. ところが実際に経路積分表式 (533) より、自由場の生成汎関数 Z_0 は正準形式の場合 (式 (528)) と同様、自由な電磁場の生成汎関数

$$Z_0[J_{\kappa}] = \frac{1}{N_1} \int \mathcal{D}A \exp(iX[J_{\kappa}]), \quad X[J_{\kappa}] = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2} (\partial_{\nu} A_{\mu}) (\partial^{\nu} A^{\mu}) + J_{\kappa} A^{\kappa} \right\}$$

(ただし $Z_0[J_{\kappa} = 0] = 1$ となるように規格化定数 N_1 を選ぶ) と、自由スピノル場の生成汎関数

$$Z_0[\sigma, \bar{\sigma}] = \frac{1}{N_2} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp(iX[\sigma, \bar{\sigma}]), \quad X[\sigma, \bar{\sigma}] = \int d^4x \{ \bar{\psi} (i\rlap{/}{\partial} - m) \psi + \bar{\sigma} \psi + \bar{\psi} \sigma \}$$

(ただし $Z_0[\sigma = 0, \bar{\sigma} = 0] = 1$ となるように規格化定数 N_2 を選ぶ) に分解できる :

$$Z_0[J_{\kappa}, \sigma, \bar{\sigma}] = Z_0[J_{\kappa}] Z_0[\sigma, \bar{\sigma}].$$

そして自由電磁場と自由スピノル場の生成汎関数それぞれが、正準形式の場合と同様の表式 (528):

$$Z_0[J_{\kappa}] = \exp \left(-\frac{i}{2} [J^{\kappa} D_{\text{F}\kappa\lambda} J^{\lambda}] \right), \quad Z_0[\sigma, \bar{\sigma}] = \exp(-i[\bar{\sigma} S_{\text{F}} \sigma])$$

に書き換えられることを証明できる。

よって2つの形式で生成汎関数が一致するので、生成汎関数を源で(汎関数)微分してGreen関数を得る式(527)を経路積分形式でのGreen関数の定義と見れば、2つの形式でGreen関数は一致し、したがって理論の予言もまた一致することになる。あるいは等価的に、式(532)を式(527)に代入して得られる経路積分の表式

$$G^{\mu\dots}(x_1, \dots, y_1, \dots, z_1, \dots) = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \{ e^{iX} A^\mu(x_1) \dots \psi(y_1) \dots \bar{\psi}(z_1) \dots \} \quad (534)$$

でGreen関数を定義しても良い。

最後にGreen関数について議論する。以下では相互作用する場のGreen関数を

$$\langle A^\mu(x_1) \dots \psi(y_1) \dots \bar{\psi}(z_1) \dots \rangle \equiv G^{\mu\dots}(x_1, \dots, y_1, \dots, z_1, \dots)$$

と表記し、自由場の(すなわち相互作用項 \mathcal{L}_I をゼロとした場合の)Green関数を $\langle A^\mu(x_1) \dots \psi(y_1) \dots \bar{\psi}(z_1) \dots \rangle_0$ と表す。

Wickの定理 自由場に関しては生成汎関数が具体的に得られているので(式(528)),これを汎関数微分してGreen関数を求めることができる。すると一般に自由場Green関数 $\langle ABCD \dots WXYZ \rangle_0$ は、場 A, \dots, Z が奇数個ならばゼロになり、偶数個ならば

$$\langle ABCD \dots WXYZ \rangle_0 = \underbrace{ABCD \dots WXYZ}_{\text{pairings}} + \underbrace{ABCD \dots WXYZ}_{\text{pairings}} + \dots$$

となることを帰納的に証明し得る。ただし右辺は全ての場が縮約された全ての可能な項の和であり、任意の自由場Green関数は、光子伝播関数 $iD_F^{\mu\nu}(x)$ とフェルミオン伝播関数 $iS_F(x)$ だけで表されることになる。この結果はT積の真空期待値 $\langle 0|T(ABCD \dots WXYZ)|0 \rangle$ にWickの定理を適用した結果と一致しており、経路積分形式の自由場Green関数

$$\langle ABC \dots \rangle_0 = \frac{1}{N_0} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX_0} (ABC \dots), \quad X_0 = \int d^4x \mathcal{L}_0(x)$$

に対するWickの定理と見なされる。

相互作用 相互作用する場のGreen関数 $\langle ABC \dots \rangle$ は、式(534)より

$$\langle ABC \dots \rangle = \frac{\left\langle \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right\} (ABC \dots) \right\rangle_0}{\left\langle \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right\} \right\rangle_0}$$

のように自由場Green関数に関係付けて評価できる。指数関数を級数展開すれば、Green関数の摂動展開が得られる。上式は正準形式における式(516)と似た関係である。

4.4 量子色力学

- 4.4.1 節 グルーオン場だけの力学に対してFaddeev-Popov(ファデエフ-ポポフ)の手続きを適用
- 4.4.2 節 クォークを含む理論へと一般化
- 4.4.3 節 QCDの摂動論^{*162}
- 4.4.4 節 QCDのFeynman規則

^{*162} 強い相互作用では最低次の摂動論が有効な近似を与えないという事情はあれど、理論的に摂動展開を考えることは可能である。特に短距離の相互作用に関しては、漸近的自由性(4.5節)により摂動論を利用することが可能となる。

4.4.1 グルーオン場

径路積分法により QCD の定式化を行う際の困難は、もっぱらグルーオン場の量子化に由来する。そこで最初にグルーオン場だけの力学を考える。8つのグルーオン場 $A_i^\kappa(x)$ に関する源を表す古典場 $J_{i\kappa}(x)$ を導入し、グルーオン場の生成汎関数

$$Z[J_{i\kappa}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A e^{iX[J_{i\kappa}]}, \quad X[J_{i\kappa}] = \int d^4x (\mathcal{L}_G + J_{i\kappa} A_i^\kappa) \quad (535)$$

(ただし $\mathcal{D}A \equiv \prod_{i=1}^8 \prod_{\mu=0}^3 \mathcal{D}A_i^\mu(x)$, 規格化条件 $Z[J_{i\kappa} = 0] = 1$) を考えると, 自由場 ($g_s = 0$) に対しては

$$G_i^{\mu\nu} = F_i^{\mu\nu}, \quad \mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} F_{i\mu\nu} F_i^{\mu\nu}$$

である。実は何らかのゲージ固定を行わなければ, 上式 (535) の生成汎関数を適正に定義することはできない。このことは次のように自然に説明できる。すなわち電磁場については4成分のうち2つの横波成分だけが独立であったのと同様に, グルーオン場も全ての成分が独立ではないにも関わらず, 上記の積分は場の4成分 $\mu = 0, 1, 2, 3$ の全てに対して施される。よって余分の自由度に関する積分を取り除く措置が必要である。しかしながらグルーオン場に対してはゲージ変換 (511) が電磁場の場合よりも複雑であるために, 一般に Lorenz 条件

$$\partial_\mu A_i^\mu(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 8)$$

を課することはできない。また無理に Lorenz 条件を課したとしても, 相互作用を考える際に矛盾が生じてくることが知られている。そこで $h_i(x)$ を任意関数として, より一般的なゲージ条件

$$f_i(A_i^\mu(x)) \equiv \partial_\mu A_i^\mu(x) - h_i(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \quad (536)$$

を課し, 生成汎関数を修正する (Faddeev-Popov の方法)。まず生成汎関数 (535) の代わりに, n 変数 z_{k+1}, \dots, z_{k+n} にも依存する“作用” X に対して, 積分

$$Z = \int \left(\prod_{i=1}^{k+n} dz_i \right) e^{-X}$$

を考える。これを, 余計な自由度に関する積分を取り除いた

$$Z = \int \left(\prod_{i=n+1}^{k+n} dz_i \right) e^{-X}$$

に置き換えた上で, 再び元と同じように $(k+n)$ 変数に関する等価な積分として表したい。そのためには, n 変数 z_{k+1}, \dots, z_{k+n} の値から z_1, \dots, z_k を定める条件

$$f_i(z_1, z_2, \dots, z_{k+n}) = 0 \quad (i = 1, \dots, k)$$

を導入し,

$$\begin{aligned} Z &= \int \left(\prod_{i=n+1}^{k+n} dz_i \right) e^{-X} = \int \left\{ \prod_{i=1}^k \int df_i \delta(f_i) \right\} \left(\prod_{i=n+1}^{k+n} dz_i \right) e^{-X} \\ &= \int \left(\prod_{i=1}^{k+n} dz_i \right) e^{-X} \det \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \prod_{i=1}^k \delta(f_i) \end{aligned} \quad (537)$$

と書き換えれば良い ($\partial f/\partial z$) は ($\partial f_i/\partial z_j$) を (i, j) 成分に持つ Jacobi 行列). そこで生成汎関数を式 (537) に類似の

$$Z[J_{i\mu}] \propto \int \mathcal{D}A e^{iX} \det \left(\frac{\delta f_i}{\delta \omega_j} \right) \left(\prod_{i=1}^8 \delta[f_i] \right) \quad (538)$$

に置き換え, さらに Grassmann 場 $\eta_i(x), \tilde{\eta}_i(x)$ を導入して右辺の“汎関数行列式”を“Gauss 型”の積分公式

$$\det \left(\frac{\delta f_i}{\delta \omega_j} \right) \propto \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} \left\{ i \int d^4x d^4x' \eta_i(x) \frac{\delta f_i}{\delta \omega_j} \tilde{\eta}_j(x') \right\} \quad (539)$$

(ただし $\mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} \equiv \prod_{i=1}^8 \mathcal{D}\eta_i \mathcal{D}\tilde{\eta}_i$) によって与える. こうすれば少なくとも S 行列要素の計算に関して, 適正な生成汎関数が得られることを Faddeev と Popov は示した^{*163}. ここに $\delta[f_i]$ は任意の汎関数 $F[f_i]$ に対して, δ 関数と類似の性質

$$\int \mathcal{D}f_i F[f_i] \delta[f_i] = F[0] \quad (540)$$

を満たすように定義された δ 汎関数である. この δ 汎関数があるため, ゲージ場 $A_{i\mu}(x)$ に関する汎関数積分 (538) には, ゲージ条件 (536) を満たす場 $A_{i\mu}^{(0)}(x)$ のみが寄与する. したがって場 $A_{i\mu}^{(0)}(x)$ から任意の場 $A_{i\mu}(x)$ へのゲージ変換に対するゲージ関数 $\omega \equiv [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_8]$ がゼロになる極限を考えれば十分である. そこで汎関数微分を

$$\frac{\delta f_i}{\delta \omega_j} \equiv \left. \frac{\delta f_i(A_{i\mu}(x))}{\delta \omega_j(x')} \right|_{\omega=0}$$

と解釈する^{*164}. 最後に生成汎関数における汎関数行列式を評価して, 目障りな δ 汎関数があからさまには現れない, 摂動論に適した形

$$\begin{aligned} Z[J_{i\kappa}] &= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L} + J_{i\kappa} A_i^\kappa) \right\}, \\ \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{G'} + \mathcal{L}_g, \\ \mathcal{L}_{G'} &= -\frac{1}{4} G_{i\mu\nu} G_i^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A_i^\mu)^2, \\ \mathcal{L}_g &= (\partial_\mu \eta_i) [\partial^\mu \tilde{\eta}_i + g_s f_{ijk} \tilde{\eta}_j A_k^\mu] : \text{ゴースト項} \end{aligned} \quad (541)$$

$$\mathcal{L}_g = (\partial_\mu \eta_i) [\partial^\mu \tilde{\eta}_i + g_s f_{ijk} \tilde{\eta}_j A_k^\mu] : \text{ゴースト項} \quad (542)$$

(ただし $Z[J_{i\mu} = 0] = 1$) に書き換えることができる. $\mathcal{L}_{G'}$ における付加的な項 $-\frac{1}{2} (\partial_\mu A_i^\mu)^2$ は“ゲージ固定項”と呼ばれる. ここで Grassmann 場 $\eta_i(x), \tilde{\eta}_i(x)$ に関する項 \mathcal{L}_g が現れていることに注目する. 場 $\eta_i(x), \tilde{\eta}_i(x)$ はゴースト場と呼ばれる. ゴーストはあくまで都合の良い人工的な概念であって, 実在の場 (ないし粒子) ではない. 結局 Faddeev-Popov の手続きによりゲージ固定を行うと, 生成汎関数において Lagrangian 密度が修正され, ゴースト場に関する径路積分が現れる.

4.4.2 クォークの導入

クォークを含むようにこれまでの理論を拡張しよう. QED においてははじめに荷電レプトンのうち電子-陽電子だけを考えたのと同様に, 簡単のために全体を通じて対象とするクォークの香りを 1 種類に限定し, 香りの添字 f を省くことにする.

^{*163} ただし生成汎関数の雛形 (537) との類推関係は正確には成り立たず, 以上の説明は厳密なものではない.

^{*164} これにより式 (539) 右辺の量を曖昧さなしに理解できる.

- グルーオン場と相互作用するクォークの Lagrangian 密度 (510):

$$\mathcal{L}_q = \bar{\psi}_a (i\not{D}_{ab} - m\delta_{ab})\psi_b, \quad D_{ab}^\mu = \delta_{ab}\partial^\mu + \frac{i}{2}g_s(\lambda_j)_{ab}A_j^\mu.$$

- 繰り返されたクォークの色の添字 $a, b, \dots = r, g, b$ について和をとる.
 $i, j, \dots = 1, 2, \dots, 8$ はグルーオンの色電荷の添字.

- 純粋なグルーオン場の Lagrangian 密度 (541):

$$\mathcal{L}_{G'} = -\frac{1}{4}G_{i\mu\nu}G_i^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A_i^\mu)^2.$$

- 等価的に

$$-\frac{1}{4}F_{i\mu\nu}F_i^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A_i^\mu)^2 \rightarrow -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_{i\mu})(\partial^\nu A_i^\mu).$$

- ゴースト場の Lagrangian 密度 (542):

$$\mathcal{L}_g = (\partial_\mu \eta_i)(\partial^\mu \tilde{\eta}_i + g_s f_{ijk} \tilde{\eta}_j A_k^\mu).$$

これらを足し合わせた全 Lagrangian 密度は

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{G'} + \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_g \\ &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_{i\mu})(\partial^\nu A_i^\mu) + \bar{\psi}_a (i\not{\partial} - m)\psi_a + (\partial_\mu \eta_i)(\partial^\mu \tilde{\eta}_i),$$

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2}g_s \bar{\psi}_a \gamma_\mu (\lambda_j)_{ab} \psi_b A_j^\mu + g_s f_{ijk} A_{i\mu} A_{j\nu} \partial^\mu A_k^\nu - \frac{1}{4}g_s^2 f_{ijk} f_{ilm} A_j^\mu A_k^\nu A_{l\mu} A_{m\nu} + g_s f_{ijk} (\partial_\mu \eta_i) \tilde{\eta}_j A_k^\mu$$

である ($g_s = 0$ とおくと $\mathcal{L}_1 = 0$).

生成汎関数 クォーク場 $\bar{\psi}_a, \psi_a$ に対応する Grassmann 源 $\sigma_a, \bar{\sigma}_a$ に加え, ゴースト場 $\eta, \tilde{\eta}$ に対応する Grassmann 源 S_i, \tilde{S}_i を導入し, 源による作用

$$\mathcal{L}_S = J_{i\kappa} A_i^\kappa + \bar{\sigma}_a \psi_a + \bar{\psi}_a \sigma_a + S_i \eta_i + \tilde{S}_i \tilde{\eta}_i$$

を定義する. 生成汎関数は径路積分

$$Z[J_{i\kappa}, \sigma_a, \bar{\sigma}_a, S_i, \tilde{S}_i] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} e^{iX'}, \quad X' = \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_S)$$

によって与えられる. ただし $a = r, g, b$ を色の添字, $\alpha = 0, \dots, 3$ をスピノル添字として, クォーク場の積分は $\mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \equiv \prod_a \prod_\alpha \mathcal{D}\bar{\psi}_{a,\alpha} \mathcal{D}\psi_{a,\alpha}$ を表す. また規格化条件は $Z[0, 0, 0, 0] = 1$ である.

Green 関数 QED の場合と同様, Green 関数は

$$\begin{aligned} \langle A_1(x_1) \cdots A_n(x_n) \rangle &= (-1)^{\bar{n}} \left(\frac{1}{i} \right)^n \frac{\delta^n Z}{\delta s_1(x_1) \cdots \delta s_n(x_n)} \Big|_0 \\ &= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} \{ e^{iX} A_1(x_1) \cdots A_n(x_n) \} \end{aligned}$$

と定義される. ここに $A_1(x_1), \dots, A_n(x_n)$ はクォーク場, グルーオン場, ゴースト場の任意の組合せであり^{*165}, $s_1(x_1), \dots, s_n(x_n)$ は対応する虚構的な場である. また \bar{n} は随伴クォーク場 $\bar{\psi}_a$ の数を表す.

^{*165} 物理的な状態はゴースト粒子を含まないものの, 摂動論を構築するにはゴースト場を含む Green 関数が有用となる.

4.4.3 摂動論

QED の場合と同様, Green 関数は

$$\langle ABC \cdots \rangle = \frac{\left\langle \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right\} (ABC \cdots) \right\rangle_0}{\left\langle \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right\} \right\rangle_0}$$

のように自由場 Green 関数に関係付けられる. 指数関数を級数展開すると摂動展開が得られる. A, B, C, \dots をクォーク場, グルーオン場, ゴースト場の任意の組合せとすると, 自由場の Green 関数 $\langle ABC \cdots \rangle_0$ は場 A, B, C, \dots が奇数個のときゼロになり, 偶数個のとき Wick の定理

$$\langle ABCD \cdots WXYZ \rangle_0 = \underbrace{ABCD}_{\square} \cdots \underbrace{WXYZ}_{\square} + \underbrace{ABCD}_{\square} \cdots \underbrace{WXYZ}_{\square} + \cdots$$

から評価される. ここでゼロにならない縮約は

$$\begin{aligned} \underbrace{A_i^\mu(x) A_j^\nu(y)}_{\square} &= \underbrace{A_j^\nu(y) A_i^\mu(x)}_{\square} = i D_{Fij}^{\mu\nu}(x-y) = i \delta_{ij} D_F^{\mu\nu}(x-y) : \text{グルーオン場の伝播関数,} \\ \underbrace{\psi_a(x) \bar{\psi}_b(y)}_{\square} &= - \underbrace{\bar{\psi}_b(y) \psi_a(x)}_{\square} = i S_{Fab}(x-y) = i \delta_{ab} S_F(x-y) : \text{クォーク場の伝播関数,} \\ \underbrace{\tilde{\eta}_i(x) \eta_j(y)}_{\square} &= - \underbrace{\eta_j(y) \tilde{\eta}_i(x)}_{\square} = i \Delta_{Fij}(x-y) = i \delta_{ij} \Delta_F(x-y) : \text{ゴーストの伝播関数} \end{aligned}$$

に限られる.

4.4.4 QCD の Feynman 規則

まずは QED の場合と類似した, 以下の規則 1-7 が成立する.

1. 結節点に応じた因子

$$-ig_s(T_i)_{cd}\gamma_\mu, \quad g_s f_{lmn} V_{\sigma\tau\nu}, \quad -ig_s^2 F_{lmno} V_{\lambda\mu\nu\sigma}, \quad g_s f_{lmn} k_{2\mu}$$

を充てる (図 66, 図 67, 図 68, 図 69 参照)*166. ここに

$$\begin{aligned} T_i &\equiv \frac{\lambda_i}{2} (= \hat{F}_i), & V_{\sigma\tau\nu} &\equiv [g_{\nu\tau}(k_3 - k_2)_\sigma + g_{\sigma\nu}(k_1 - k_3)_\tau + g_{\tau\sigma}(k_2 - k_1)_\nu], \\ F_{lmno} V_{\lambda\mu\nu\sigma} &\equiv f_{ilm} f_{ino} (g_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma}) + f_{inm} f_{ilo} (g_{\nu\lambda} g_{\mu\sigma} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma}) + f_{iln} f_{imo} (g_{\lambda\mu} g_{\nu\sigma} - g_{\nu\mu} g_{\lambda\sigma}). \end{aligned}$$

*166 単一種類の結節点に因子 $ie\gamma^\mu$ を充てれば良い QED と違って, このように QCD では, 異なる結節点に応じて異なる因子を充てなければならない.

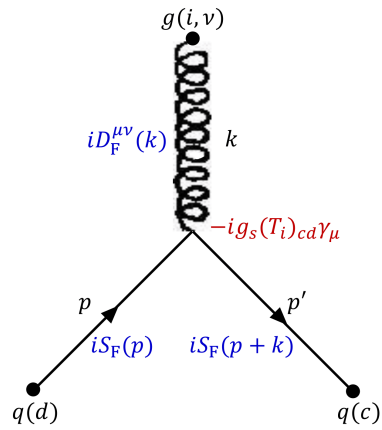


図 66 クォーク-グルーオン結節点

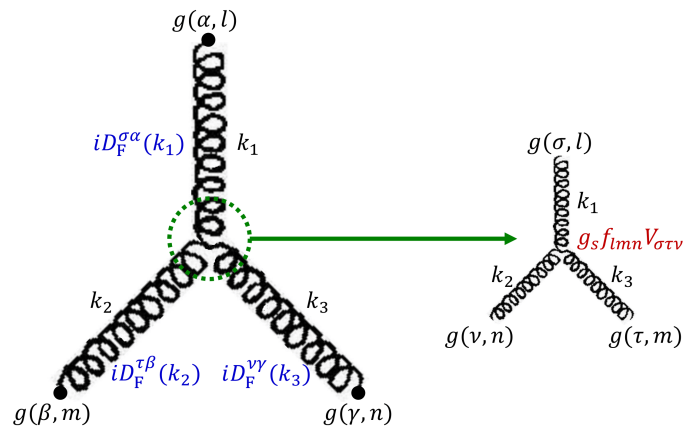


図 67 3 グルーオン結節点

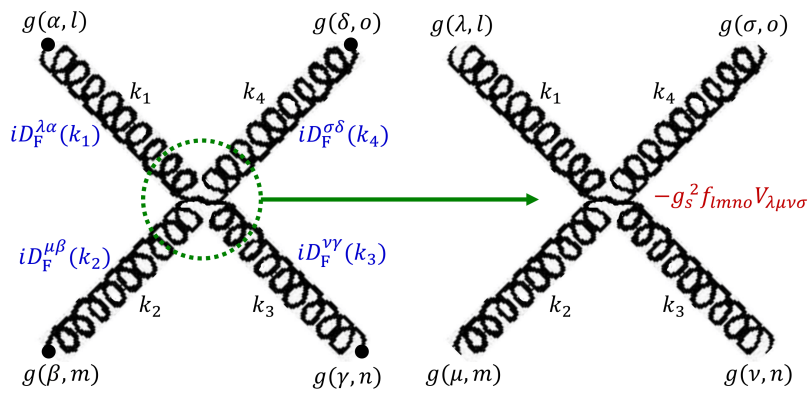


図 68 4 グルーオン結節点

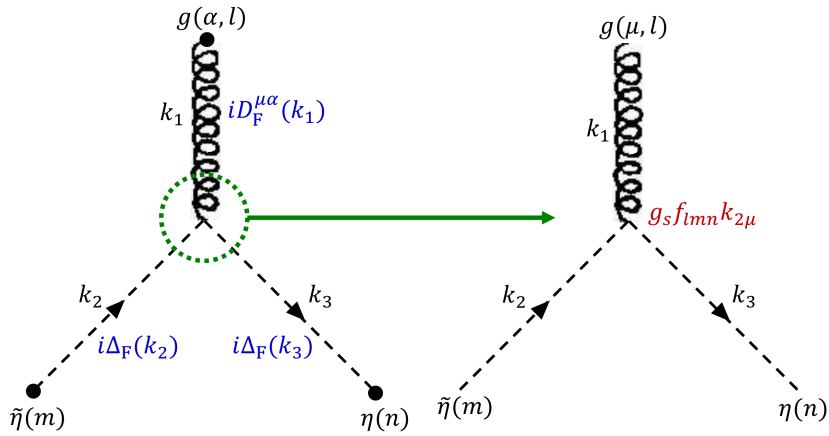


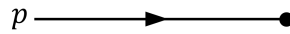
図 69 ゴースト-グルーオン結節点

2. グルーオン, クォーク, ゴーストの内線に, それぞれの伝播関数

$$iD_{F\mu\nu}(k)\delta_{ij}, \quad iS_F(p)\delta_{ab}, \quad i\Delta_F(k)\delta_{ij}$$

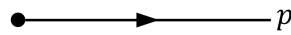
を充てる*167.

3. (a) 始状態のクォークの外線



に因子 $u_{ar}(\mathbf{p})$ を充てる.

(b) 終状態のクォークの外線



に因子 $\bar{u}_{ar}(\mathbf{p})$ を充てる.

(c) 始状態の反クォークの外線



に因子 $\bar{v}_{ar}(\mathbf{p})$ を充てる.

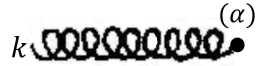
(d) 終状態の反クォークの外線

*167 伝播関数因子における Kronecker のデルタは, Green 関数の中で添字に関する和をとる際に消費されるため, $a = b, i = j$ と置いてあらかじめ省いて良い. あるいは Kronecker のデルタは色や色電荷の保存を表しており, はじめから保存則を満たす過程のみを考えて Kronecker のデルタを省いたと考えても良い. このとき結果的に各内線には, グルーオンやクォーク, ゴーストの伝播関数の代わりに光子伝播関数 $iD_F^{\mu\nu}(k)$ とフェルミオン伝播関数 $iS_F(p)$, 中間子伝播関数 $i\Delta_F(k)$ を充てれば良い.



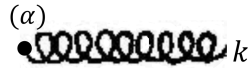
に因子 $v_{ar}(\mathbf{p})$ を充てる.

(e) 始状態のグルーオンの外線



に因子 $\varepsilon_{ir\alpha}(\mathbf{k})$ を充てる.

(f) 終状態のグルーオンの外線



に因子 $\varepsilon_{ir\alpha}^*(\mathbf{k})$ を充てる.

ここに

- \mathbf{p} と \mathbf{k} は外線粒子の 3 次元運動量を表し,
 $r(=1, 2)$ はクォークのスピン状態もしくはグルーオンの偏極状態を表す.
 自由グルーオン場は自由電磁場と同じ方程式に従うため,
 グルーオンの偏極としても横波 $r(=1, 2)$ だけが許容される.
 - $a(=r, g, b)$ はクォークの色状態を表し, $i(=1, 2, \dots, 8)$ はグルーオンの色電荷を表す.
4. 各クォーク線と, それらを接続する各結節点に付随するスピノル因子を,
 相互に接続している一連のクォーク線を矢印の向きに辿る順序で右から左に並べる.
 5. 閉じたクォーク線それぞれに関して対角和をとり, 因子 (-1) を掛ける.
 6. 結節点においてエネルギー・運動量の保存を成立させる.
 エネルギー・運動量保存の要請の下でも固定されないパラメーターとして残る
 内部 4 元運動量 q それぞれに関して積分 $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ を施す.
 このような内部運動量変数 q に関する積分は, 閉じたループそれぞれにおいて生じる.
 7. 位相因子 δ_P として $+1$ または -1 を掛ける.
 これは外線 Grassmann 場の順序を外線指数 (引数) の順序が適正になるように
 並べ直すときに, Grassmann 場同士の置換が必要な回数が偶数回ならば $+1$,
 奇数回ならば -1 とする.
- ★ これは QED に対する Feynman 規則 (3.9.6 節) の規則 8 に対応する.

さらに QCD に特有の次の規則が加わる.

8. 閉じたゴースト線それぞれに対して, 因子 (-1) を掛ける.
 ★ これはクォークのループに対する規則 5 の因子 (-1) と同じ起源を持つ.
9. グルーオンの閉ループの各々に対して, 適切な“対称性因子” S を掛ける.

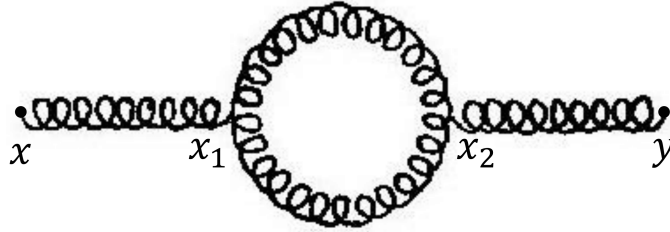


図 70 グルーオンの自己エネルギーを表すループダイアグラム

ここでグルーオンのループを持つ図 70 のグラフを取り上げ、規則 9 の対称性因子について説明する。3 グルーオン結節点に因子 $g_s f_{lmn} V_{\sigma\tau\nu}$ を充てると自動的に、3 グルーオン結節点を生じる Green 関数

$$\langle \mathcal{L}_3(x) A_l^\alpha(x_1) A_m^\beta(x_2) A_n^\gamma(x_3) \rangle, \quad \mathcal{L}_3(x) \equiv g_s f_{ijk} A_{i\mu}(x) A_{j\nu}(x) \partial^\mu A_k^\nu(x)$$

において \mathcal{L}_3 に含まれる 3 つの場を $A_l^\alpha(x_1), A_m^\beta(x_2), A_n^\gamma(x_3)$ と縮約する 3! 通りの方法を考慮したことになる。図 70 のグラフは 3 グルーオン結節点を 2 つ持つので、規則 1-8 に従ってグラフに対応する因子を充てると、 $(3!)^2$ 通りの組合せを考慮したことになる。ところがこれから説明するように、これは組合せを余分に重複して考慮していることになる。実際、図 70 に対応する項は、2 点 Green 関数 $\langle A_l^\alpha(x) A_m^\beta(y) \rangle$ に由来する

$$\langle \mathcal{L}_3(x_1) \mathcal{L}_3(x_2) A_l^\alpha(x) A_m^\beta(y) \rangle_0$$

から現れる。図 70 のように時空点 x_1 を伝播関数によって点 x と繋ぎ、時空点 x_2 を伝播関数によって点 y と繋ぐには、 $\mathcal{L}_3(x_1)$ に含まれる 3 つの場から 1 つを選んで $A_l^\alpha(x)$ と縮約し、 $\mathcal{L}_3(x_2)$ に含まれる 3 つの場から 1 つを選んで $A_m^\beta(y)$ と縮約しなければならない。 $\mathcal{L}_3(x_1)$ の残り 2 つの場は $\mathcal{L}_3(x_2)$ の残り 2 つの場のいずれかと縮約しなければならない。その方法は 2 通りである。よって正しい縮約の組合せの総数は $3 \times 3 \times 2 = 18$ 通りである。これは $(3!)^2 = 36$ の $1/2$ 倍なので、この場合は対称性因子として $S = 1/2$ を掛けなければならない。

4.5 漸近的自由性

強い相互作用は $1\text{f}(= 10^{-15}\text{m})$ 程度よりも短距離になると、距離が短くなるにつれて弱くなる。この性質は“漸近的自由性”と呼ばれる。漸近的自由性は“繰り込み群”の方法を用いて理論的に導き出された。

説明の準備として、まず“修正極小減算法”(以下 $\overline{\text{MS}}$) と呼ばれる繰り込みの枠組みを QED に対して導入する。これは次元正則化の文脈の下で因子 $\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi)$ を含むように繰り込み定数 Z_1, Z_2, Z_3 を選ぶ手法である。すると繰り込まれた電荷 $e_r = e_0 \mu^{-\eta/2} Z_3^{1/2} Z_2 / Z_1$ は μ に対して増大することが示される (e_0 は裸の電荷)。ただし μ は次元正則化の際に必然的に導入される質量尺度である(以上、次元正則化については 3.11 節を参照)。

次に結節部分関数を定義する。 f 本のフェルミオン外線と b 本の光子外線を持つ固有結節部分関数を、各外線の運動量を $p_i (i = 1, 2, \dots, b + f \equiv n)$ として $\Gamma^{fb}(p_i, m_0, e_0)$ と表す (m_0 は裸の質量)。ここで結節部分関数は $n > 2$ の場合、連結 Green 関数から“脚”にあたる伝播関数因子を除いた関数である。固有結節部分関数とは与えられた結節部分関数に寄与を持つすべての 1 粒子既約なグラフの和であり、“1 粒子既約”とは線を 1 本だけ切断することで 2 つの部分に分割できないことを意味する。結節部分関数 $\Gamma^{fb}(p_i, m_0, e_0)$ は繰

り込みの後に、伝播関数から因子 $Z_2^{1/2}, Z_3^{1/2}$ を吸収し、繰り込まれた結節部分関数

$$\Gamma_r^{fb}(p_i, m_r, e_r, \mu) = Z_2^{f/2} Z_3^{b/2} \Gamma_r^{fb}(p_i, m_0, e_0)$$

になる。ここに $m_r = m_r(\mu), e_r = e_r(\mu)$ は繰り込まれた質量と電荷であり、いずれも質量尺度 μ に依存するため、それぞれ“走行質量”“走行電荷”と呼ばれる。

物理的な観測量は、したがって結節部分関数 $\Gamma_r^{fb}(p_i, m_0, e_0)$ は質量尺度 μ に依存してはならない。このことは't Hooft-Weinberg (ト・フーフト-ワインバーグ) 方程式と呼ばれる、繰り込まれた結節部分関数 $\Gamma_r^{fb}(p_i, m_r, e_r, \mu)$ (こちらは μ に依る) に対する繰り込み群方程式

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial e_r} - f\gamma_2 - b\gamma_3 + m_r \gamma_m \frac{\partial}{\partial m_r} \right] \Gamma_r^{fb}(p_i, m_r, e_r, \mu) = 0,$$

$$\beta \equiv \mu \frac{\partial e_r}{\partial \mu}, \quad \gamma_2 \equiv \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} (\ln Z_2), \quad \gamma_3 \equiv \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} (\ln Z_3), \quad m_r \gamma_m \equiv \mu \frac{\partial m_r}{\partial \mu}$$

として表現できる。これを期待される次元スケーリング

$$\Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu) = t^d \Gamma_r^{fb}(p_i, t^{-1}m_r, e_r, t^{-1}\mu).$$

(ただし d は結節部分の自然次元 (質量の何乗か)) と組み合わせると、任意に固定した μ の値 μ_0 に対して

$$\Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu) = t^d \exp \left[- \int_1^t \frac{f\gamma_2 + b\gamma_3}{t} dt \right] \Gamma_r^{fb}(p_i, t^{-1}m_r(\mu = t\mu_0), e_r(\mu = t\mu_0), \mu_0)$$

が得られる。この結果によれば質量尺度 $\mu = t\mu_0$ を増大させることは、結節部分において移行する運動量 tp_i を増大させることに、したがって短距離の相互作用を考えることに対応する。ところで既に述べたように電荷 $e_r(\mu)$ は μ に対して増大するから、QED では電荷 $e_r(\mu)$ は短距離になるほど増大することになる。逆に言えば、長距離の相互作用ほど $e_r(\mu)$ は減少する。これは定性的には、電荷の遠方ほど量子揺らぎで生じる真空偏極によって、電荷が著しく遮蔽されることとして理解できる。

これとは対照的に QCD では、“輻射補正”を考慮したクォークとグルーオンの伝播関数、クォーク-グルーオン結節点の繰り込み (関係する繰り込み定数を順に Z_2, Z_3, Z_1 とする) を再び $\overline{\text{MS}}$ 体系において行くと、繰り込まれた結合

$$g_r = g_0 \mu^{-\eta/2} \frac{Z_3^{1/2} Z_2}{Z_1}$$

は質量尺度 μ の増大に対して減少することが示される (標準理論で想定される、香りの種類の数 $n_f = 6$ に対して)。ここに g_0, g_r はそれぞれ強い相互作用における結合 g_s の、裸の値と繰り込まれた値である。このため QCD では、短距離になるほど結合 $g_r(\mu)$ が減少することになり、漸近的自由性が成立する。

4.6 弱い相互作用

4.6.1 緒論

弱い相互作用を媒介する粒子はスピン 1 の“仲介ベクトルボゾン” (intermediate vector boson : IVB) W^\pm, Z^0 である。本節 (4.6 節) では基本となる理論として、 W^\pm の交換だけを考慮する IVB 理論を扱う。またこれ以降、ハドロンの関与しない純粋なレプトンの過程に話を限定する。

4.6.2 レプトンの弱い相互作用

弱い相互作用における相互作用 Hamiltonian 密度 \mathcal{H}_I は、QED の場合

$$\mathcal{H}_{\text{QED}} = s^\mu A_\mu, \quad s^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi : \text{電磁カレント}$$

と同様に、レプトン場演算子に関して双一次のレプトン (荷電) カレント

$$J_\alpha = \sum_l \bar{\psi}_l \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l}, \quad J_\alpha^\dagger = \sum_l \bar{\psi}_{\nu_l} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \psi_l$$

を用いて

$$\mathcal{H}_I = g_W (J^{\alpha\dagger} W_\alpha + J^\alpha W_\alpha^\dagger) \quad (543)$$

と表される。ただし ψ_l と ψ_{ν_l} はそれぞれレプトン $l = e, \mu, \tau$ と対応するニュートリノ $\nu_l, \bar{\nu}_l$ を表す量子場 (Dirac 場) である*168。また $W_\alpha(x)$ は W ボゾンを記述する場であり (4.6.3 節参照), g_W は無次元の結合定数である*169。

レプトンカレント J^α は

$$\begin{aligned} \text{ベクトルカレント} \quad J_V^\alpha &= \sum_l \bar{\psi}_l \gamma^\alpha \psi_{\nu_l}, \\ \text{軸性ベクトルカレント} \quad J_A^\alpha &= \sum_l \bar{\psi}_l \gamma^\alpha \gamma_5 \psi_{\nu_l} \end{aligned}$$

の差 $J^\alpha = J_V^\alpha - J_A^\alpha$ で与えられる (式 (354) 参照)。ここではこのため、 J^α は空間反転を考えなければ Lorentz 変換に対してベクトルとして変換されることにまず注意を促しておく。

- J^α がベクトルなので、 \mathcal{H}_I が Lorentz スカラーとなるためには $W_\alpha(x)$ は (共変) ベクトル場でなければならず、したがって W ボゾンはスピン 1 のベクトルボゾンとなる。
- \mathcal{H}_I の作る結節点には荷電レプトン、中性レプトン、 W ボゾンが 1 つずつ接続するので、(電荷保存則を満たすには) W ボゾンは電荷を持たねばならず、したがって場 $W_\alpha(x)$ は非 Hermite である*170。
- ニュートリノを考慮してレプトン数を

$$N(l) = N(l^-) - N(l^+) + N(\nu_l) - N(\bar{\nu}_l), \quad l = e, \mu, \tau$$

と再定義すると、 \mathcal{H}_I は

- l^- を生成して (消滅させて) ν_l を消滅させ (生成し)
- l^+ を生成して (消滅させて) $\bar{\nu}_l$ を消滅させる (生成する)

ので、レプトン数 $N(l)$ を保存する (観測事実にも整合)。

レプトンカレント $J^\alpha = J_V^\alpha - J_A^\alpha$ は、したがって相互作用 Hamiltonian はパリティ変換 $(\mathbf{x}, t) \rightarrow (-\mathbf{x}, t)$ の下で不変ではないため、パリティは保存されない。実際、質量がゼロに極めて近いニュートリノに対してはカレントにおける $P_L = (1 - \gamma_5)/2$ を近似的にヘリシティ射影演算子と見なせるので (3.5.2 節), 相互作用 Hamiltonian には

*168 ψ_l は l^- の消滅演算子と l^+ の生成演算子を含み、 ψ_{ν_l} はニュートリノ ν_l の消滅演算子と反ニュートリノ $\bar{\nu}_l$ の生成演算子を含む。

*169 ここでは結合 g_W はカレント $J_\alpha, J_\alpha^\dagger$ からくり出されている。また 4.6.1 節の予告通り、弱い力を媒介する粒子として W ボゾンだけが考慮されている。

*170 このことを考慮して、 \mathcal{H}_I の式において既に W_α と W_α^\dagger を区別してある。

- ヘリシティが負の ($r = 2$) ニュートリノ
- ヘリシティが正の ($r = 1$) 反ニュートリノ

の生成・消滅演算子のみが含まれることになり、それ故、弱い相互作用にはこれらの(反)ニュートリノしか関与しない(パリティの非保存に対応するカイラル対称性の破れ)。

ここで“左手型の”場 $\psi_l^L = P_L \psi_l, \psi_{\nu_l}^L = P_L \psi_{\nu_l}$ を定義すると、レプトンカレントは左手型の場のみを用いて

$$J_\alpha = 2 \sum_l \bar{\psi}_l^L \gamma_\alpha \psi_{\nu_l}^L$$

と表される。ところで荷電レプトンについても粒子のエネルギーが質量 m に比べて非常に高い極限では、近似的に P_L をヘリシティ射影演算子と見なせる。このため弱い相互作用によって生成した電子(陽電子)は負(正)のヘリシティを持つことになる。

4.6.3 自由なベクトルボゾン場

本節ではベクトルボゾン場 $W_\alpha(x)$ について説明する。

■場の方程式 自由なスピン 1 のベクトルボゾン場 W^α に対する場の方程式は、質量を m_W として Proca 方程式

$$\square W^\alpha - \partial^\alpha (\partial_\beta W^\beta) + m_W^2 W^\alpha = 0 \quad (544)$$

によって与えられ、これは Lagrangian 密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F_{W\alpha\beta}^\dagger F_W^{\alpha\beta} + m_W^2 W_\alpha^\dagger W^\alpha, \quad F_W^{\alpha\beta} = \partial^\beta W^\alpha - \partial^\alpha W^\beta$$

から導かれる^{*171}。Proca 方程式 (544) は(その 4 元発散をとれば直ちに導かれるように)、 $m_W \neq 0$ に対して自動的に Lorenz 条件

$$\partial_\alpha W^\alpha = 0 \quad (545)$$

を含意し、

$$(\square + m_W^2) W^\alpha = 0$$

と簡略化される (Klein-Gordon 方程式の形)。

■平面波展開と偏極ベクトル 場の方程式から得られる分散関係 $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{m_W^2 + \mathbf{k}^2}$ を考慮して、波数 $k = (\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$ によって特徴付けられる平面波を用いて場を次のように展開する^{*172*173}。

$$W^\alpha(x) = W^{\alpha+}(x) + W^{\alpha-}(x),$$

$$W^{\alpha+}(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^3 \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x},$$

^{*171} これを古典場の理論と見なせば、Hermite 共役 (\dagger) は複素共役 ($*$) に置き換わる。

^{*172} $W^{\alpha\dagger}$ に関しては $W^{\alpha\pm\dagger} = (W^{\alpha\mp})^\dagger$ とする。すなわち消滅演算子 $b_r(\mathbf{k})$ を含む正振動数部分を $W^{\alpha+\dagger}$ とおき、生成演算子 $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ を含む負振動数部分を $W^{\alpha-\dagger}$ とおく。

^{*173} 光子の場合とは異なり、 $r = 0$ の偏極ベクトル $\varepsilon_0^\mu(\mathbf{k})$ は導入されていない。古典電磁場の自由度は 2 であり、場の量子論においてもゲージ条件を適切に考慮すると、2 つの横波成分だけが観測量に寄与を持つことが説明された (3.3.1 節, 3.3.2 節)。これに対して質量 $m_W \neq 0$ を持つベクトルボゾン場 W^α はゲージとは無関係に常に式 (545): $\partial_\alpha W^\alpha = 0$ を満たすため、最初から電磁場よりも自由度が 1 だけ少ない ($m_W = 0$ では関係 $\partial_\alpha W^\alpha = 0$ が場の方程式から導かれなため、この論法は適用されない)。3 つの偏極ベクトルを用いて W^α を展開しなければならないのはこのためである [29, p.93] [2, p.211]。

$$W^{\alpha-}(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^3 \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) b_r^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x}.$$

ここに $\varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) (r=1, 2, 3)$ は偏極ベクトルであり, Lorenz 条件により

$$k_\alpha \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) = 0$$

を満たす. $k = (\omega_{\mathbf{k}}, 0, 0, |\mathbf{k}|)$ となる座標系では偏極ベクトルを

$$\begin{cases} \varepsilon_1^\alpha(\mathbf{k}) = (0, 1, 0, 0), \\ \varepsilon_2^\alpha(\mathbf{k}) = (0, 0, 1, 0), \\ \varepsilon_3^\alpha(\mathbf{k}) = (|\mathbf{k}|, 0, 0, \omega_{\mathbf{k}})/m_W \end{cases} \quad (546)$$

と選ぶのが便利である. これらは

$$\varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) \varepsilon_s^\alpha(\mathbf{k}) = -\delta_{rs}, \quad \sum_{r=1}^3 \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\beta(\mathbf{k}) = -g^{\alpha\beta} + \frac{k^\alpha k^\beta}{m_W^2} \quad (547)$$

という性質を満たす*174.

■正準量子化 正準形式での量子化により

- $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ と $a_r(\mathbf{k})$ をそれぞれモード (r, \mathbf{k}) の W^+ の消滅・生成演算子
- $b_r^\dagger(\mathbf{k})$ と $b_r(\mathbf{k})$ をそれぞれモード (r, \mathbf{k}) の W^- の消滅・生成演算子

と見なすことが可能となる.

■ W ボゾンの伝播関数

$$\begin{aligned} iD_F^{\alpha\beta}(x-y, m_W) &= \langle 0 | T \{ W^\alpha(x) W^{\beta\dagger}(y) \} | 0 \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} iD_F^{\alpha\beta}(k, m_W), \\ iD_F^{\alpha\beta}(k, m_W) &= \frac{i(-g^{\alpha\beta} + k^\alpha k^\beta / m_W^2)}{k^2 - m_W^2 + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (548)$$

4.6.4 IVB 理論に対する Feynman 規則

4.6.2 節で導入した IVB 理論における相互作用 Hamiltonian 密度 (543) が作る基本結節点は図 71 のようである. ここではレプトン数の保存と電荷保存を満たす可能なレプトン線の組を代表して描いている. この場合の Feynman 規則は QED の規則 (3.9.6 節) を, 電子と同様の規則をすべてのレプトン (ニュートリノ・反ニュートリノを含む) に適用してレプトンを含むように拡張した上で, 次のように修正して得られる.

- 結節点 因子 $-ig_W \gamma^\alpha (1 - \gamma_5)$ を充てる.
- ボゾンの内線 W ボゾンの内線と見なして, その伝播関数 $iD_{F\alpha\beta}(k, m_W)$ を充てる.
- ボゾンの外線 W ボゾンの外線と見なして, その偏極ベクトル $\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k})$ を充てる.

*174 電磁場の場合 (3.3.1 節) と同様に式 (546) は特定の座標系でしか成り立たないのに対し, 性質 (547) は相対論的に不変な式となっているので, $k = (\omega_{\mathbf{k}}, 0, 0, |\mathbf{k}|)$ となる座標系において成分が式 (546) で与えられる偏極ベクトルを考える限り任意の座標系で成立する. したがって式 (547) の性質だけを要求すれば十分であると考えられる.

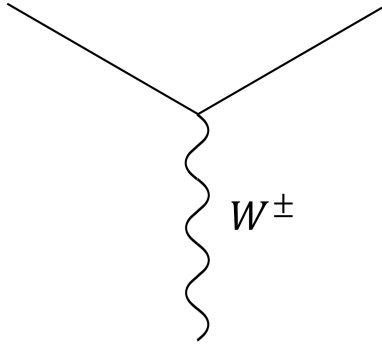


図 71 IVB 相互作用の基本結節点

4.7 弱い相互作用のゲージ理論

本節 (4.7 節) では弱い相互作用をゲージ理論として定式化する. ゲージ理論を構築するには, QED(や QCD) の場合と同様に以下の手順を踏めば良い.

1. 自由場の Lagrangian を不変に保つような大域的位相変換の組を見出し, それに付随する適切な電荷-電流保存則を導く (4.7.1 節).
2. 局所的な位相変換 (局所的ゲージ変換) へと一般化して, この局所変換における理論の不変性を仮定し, そこから相互作用の形を推定する (4.7.2 節).

すると IVB 理論に対して中性ベクトルボゾンと中性のレプトンカレントが追加され, さらに弱い相互作用は電磁相互作用と自然に統一される. ところが理論のゲージ不変性は, 全てのレプトンとベクトルボゾンが質量を持たないという困難へと導く. この問題は 4.8 節において解消される.

4.7.1 大域的な位相変換と保存する弱カレント

手始めに全てのレプトン (ニュートリノを含むは質量を持たないと仮定し, 自由レプトン系の Lagrangian 密度を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= i(\bar{\psi}_l \not{\partial} \psi_l + \bar{\psi}_{\nu_l} \not{\partial} \psi_{\nu_l}) \\ &= i(\bar{\Psi}_l^L \not{\partial} \Psi_l^L + \bar{\psi}_l^R \not{\partial} \psi_l^R + \bar{\psi}_{\nu_l}^R \not{\partial} \psi_{\nu_l}^R), \quad \Psi_l^L \equiv \begin{pmatrix} \psi_{\nu_l}^L \\ \psi_l^L \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}_l^L \equiv (\bar{\psi}_{\nu_l}^L \quad \bar{\psi}_l^L) \end{aligned}$$

と書く. ただしこれ以降, 繰り返されたレプトンの添字 l については全ての世代 $l = e, \mu, \tau$ にわたって和をとるものと約束する. また任意の Dirac スピノル ψ に対して左手型と右手型の場を

$$\psi^{L,R} = P_{L,R} \psi = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5) \psi$$

と定義しており, 最右辺では Lagrangian 密度を敢えて右手型と左手型に関して非対称な形に書いている. なお 4.7.4 節以降において, 実際のレプトンは質量を持つという問題に立ち戻る.

この自由場の Lagrangian 密度 \mathcal{L}_0 は, 大域的 SU(2) 変換

$$\Psi_l^L \rightarrow U(\alpha) \Psi_l^L, \quad \bar{\Psi}_l^L \rightarrow \bar{\Psi}_l^L U^\dagger(\alpha)$$

(ただし $U(\alpha) \equiv \exp(i\alpha_j \tau_j/2)$, τ_1, τ_2, τ_3 : Pauli 行列) の下で不変である*175. ただし右手型の場 ψ^R の各々はこの変換に対して不変と見なす. SU(2) 変換に対する変換性から

- 2成分場 Ψ_l^L は弱アイソスピノル
- 右手型の場 ψ^R の各々は弱アイソスカラー

と呼ばれる.

SU(2) 変換に対する Lagrangian 密度の不変性から, 保存する電荷-電流密度として弱アイソスピンカレント

$$J_i^\alpha = \frac{1}{2} \bar{\Psi}_l^L \gamma^\alpha \tau_i \Psi_l^L \quad (i = 1, 2, 3)$$

と弱アイソスピン電荷

$$I_i^W = \int d^3x J_i^0 = \frac{1}{2} \int d^3x \bar{\Psi}_l^L \tau_i \Psi_l^L$$

が導かれる*176. これは IVB 理論におけるレプトン (荷電) カレント

$$\begin{aligned} J^\alpha &= \bar{\psi}_l \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l} = 2(J_1^\alpha - J_2^\alpha), \\ J^{\alpha\dagger} &= \bar{\psi}_{\nu_l} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_l = 2(J_1^\alpha + J_2^\alpha) \end{aligned}$$

が保存するカレントであることに加え, “中性カレント”

$$J_3^\alpha = \frac{1}{2} \bar{\Psi}_l^L \gamma^\alpha \tau_3 \Psi_l^L = \frac{1}{2} (\bar{\psi}_{\nu_l}^L \gamma^\alpha \psi_{\nu_l}^L + \bar{\psi}_l^L \gamma^\alpha \psi_l^L)$$

が保存することを意味する. さらに電磁カレントを $s^\alpha = -e \bar{\psi}_l \gamma^\alpha \psi_l$ として, 弱超電荷カレント

$$J_Y^\alpha = \frac{1}{e} s^\alpha - J_3^\alpha$$

を定義する. このとき弱アイソスピン電荷 I_3^W の保存は通常の電荷 Q の保存則と合わせると, 弱超電荷

$$Y \equiv \int d^3x J_Y^3 = \frac{Q}{e} - I_3^W \quad (549)$$

が保存することを意味する.

ここで左手型の (すなわちヘリシティが負の) レプトン l^- が 1 個だけ存在している状態を $|l^-, L\rangle$ 等と書き, レプトンの 1 粒子状態について各種電荷の固有値を調べると, その結果は表 4 のようにまとめられる.

なお ψ を $\psi_{\nu_l}^L, \psi_l^L, \psi_{\nu_l}^R, \psi_l^R$ のいずれかとし, Y を場 ψ によって消滅する粒子の弱超電荷とすると, 弱超電荷 Y の保存は変換

$$\psi \rightarrow e^{i\beta Y} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-i\beta Y} \quad (550)$$

(U(1) 変換と呼ばれる) に対する Lagrangian の不変性から直接導かれる. したがって弱い相互作用の理論では, 対称性から弱アイソスピン電荷と弱超電荷の保存が独立に導かれ, 逆に通常の電荷保存則が保証されることになる. 以上の大域的な位相変換と保存する電荷の関係は図 72 のようにまとめられる*177.

*175 SU(N) 変換に関するまとめ (4.1 節) を併せて参照. 一般に SU(N) 変換では生成子 T_i , 保存する電荷, 導入されるゲージ場はそれぞれ $(N^2 - 1)$ 種類である. 今考えている $N = 2$ の場合, Pauli 行列 τ_i , 弱アイソスピン電荷 I_i^W , ゲージ場 $W_i^\mu(x)$ (4.7.2 節) はそれぞれ 3 種類である ($i = 1, 2, 3$).

*176 今一度確認すると, 正確には保存するのはカレントではなく電荷であり, 保存するカレントとは保存する電荷に対するカレントのことである.

*177 文献 [2, pp.460–461] にならって, QED における U(1) 電磁ゲージ変換と本節の U(1) 弱超電荷変換 (550) をそれぞれ U(1)_{em}, U(1)_Y と書いて区別した.

表4 レプトンの1粒子状態における各種電荷の固有値

	$ l^-, L\rangle$	$ \nu_l, L\rangle$	$ l^-, R\rangle$	$ \nu_l, R\rangle$
Q/e	-1	0	-1	0
I_3^W	-1/2	+1/2	0	0
Y	-1/2	-1/2	-1	0

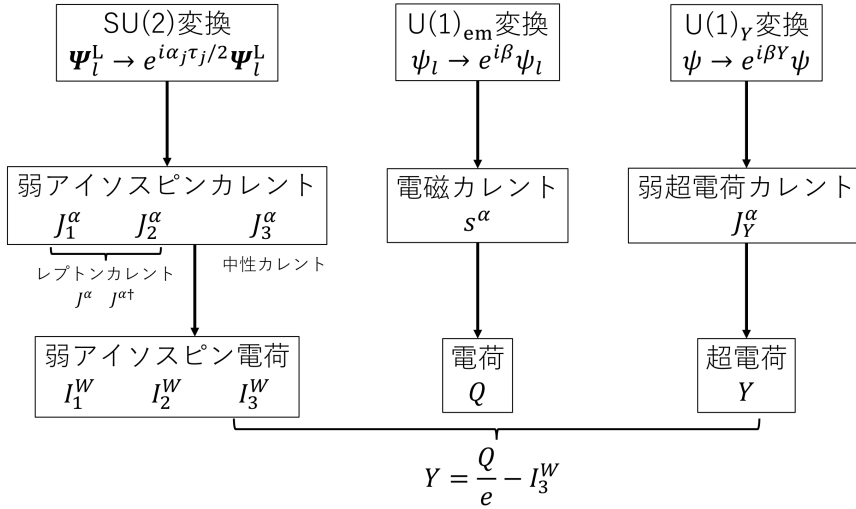


図72 大域的な位相変換と保存する電荷 (4.7.1節のまとめ)

4.7.2 ゲージ不変な電弱相互作用

SU(2) 変換と U(1) 変換^{*178}において $\alpha_j \rightarrow g\omega_j(x)$, $\beta \rightarrow g'f(x)$ と置き換えた局所的位相変換を考える (g, g' は定数). Lagrangian 密度のゲージ不変性を回復するために, QED や QCD の場合と同様に, 微分の共変微分への置き換え

$$\begin{aligned} \partial^\mu \Psi_l^L &\rightarrow D^\mu \Psi_l^L = \left[\partial^\mu + \frac{i}{2} g \tau_j W_j^\mu - \frac{i}{2} g' B^\mu \right] \Psi_l^L, \\ \partial^\mu \psi_l^R &\rightarrow D^\mu \psi_l^R = [\partial^\mu - ig' B^\mu] \psi_l^R, \\ \partial^\mu \psi_{\nu_l}^R &\rightarrow D^\mu \psi_{\nu_l}^R = \partial^\mu \psi_{\nu_l}^R \end{aligned}$$

を通して実ゲージ場 $W_i^\mu (i = 1, 2, 3)$, $B^\mu(x)$ を導入する. ただしゲージ場は

$$\begin{aligned} W_i^\mu &\rightarrow W'^i{}^\mu = W_i^\mu - \partial^\mu \omega_i - g \varepsilon_{ijk} \omega_j W_k^\mu, & (\text{SU(2) 変換, } \omega_j(x) : \text{無限小}) \\ B^\mu &\rightarrow B'^\mu = B^\mu - \partial^\mu f & (\text{U(1) 変換}) \end{aligned}$$

*178 式 (550) の変換を指す.

と変換する。また場 $W_i^\mu(x)$ は U(1) ゲージ変換の下で不変であり、 $B^\mu(x)$ は SU(2) ゲージ変換の下で不変であるものとする。すると共変微分への置き換えによって得られるレプトン系の Lagrangian 密度

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^L &= i(\bar{\Psi}_l^L \not{D}\Psi_l^L + \bar{\psi}_l^R \not{D}\psi_l^R + \bar{\psi}_{\nu_l}^R \not{D}\psi_{\nu_l}^R) \\ &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \\ \mathcal{L}_1 &= -gJ_i^\mu W_{i\mu} - g'J_Y^\mu B_\mu\end{aligned}$$

は U(1) ゲージ変換と SU(2) ゲージ変換の下で不変となる (SU(2)×U(1) ゲージ不変)。ここで g, g' は \mathcal{L}_1 における結合定数に同定される。

ここで $W_{1\mu}$ と $W_{2\mu}$ の代わりに非 Hermite なゲージ場

$$W_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_{1\mu} - iW_{2\mu}), \quad W_\mu^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_{1\mu} + iW_{2\mu})$$

を導入し、また $W_{3\mu}$ と B_μ の代わりにこれらの 1 次結合

$$\begin{aligned}Z_\mu &= \cos\theta_W W_{3\mu} - \sin\theta_W B_\mu, \\ A_\mu &= \sin\theta_W W_{3\mu} + \cos\theta_W B_\mu\end{aligned}\tag{551}$$

(θ_W は弱混合角または Weinberg 角と呼ばれる) を用いて相互作用 Lagrangian 密度を表すことを考える^{*179}。その際、場 A_μ を電磁場と見なして、これが相互作用 Lagrangian 密度に $-s^\mu A_\mu$ という形でのみ現れることを要求すると、弱混合角 θ_W は条件

$$g \sin\theta_W = g' \cos\theta_W = e\tag{552}$$

から定まり^{*180},

$$\mathcal{L}_1 = -s^\mu A_\mu - \frac{g}{2\sqrt{2}}(J^{\mu\dagger}W_\mu + J^\mu W_\mu^\dagger) - \frac{g}{\cos\theta_W}(J_3^\mu - \sin^2\theta_W s^\mu/e)Z_\mu\tag{553}$$

となる。

- 第 1 項 $-s^\mu A_\mu$ は QED の相互作用である (電磁相互作用と弱い相互作用の統一)^{*181}。
- 第 2 項 $-\frac{g}{2\sqrt{2}}(J^{\mu\dagger}W_\mu + J^\mu W_\mu^\dagger)$ は、
 $g_W = \frac{g}{2\sqrt{2}}$ とおき、場 $W_\mu(x)$ を W ボゾンの量子場と見なせば、IVB 理論の相互作用に他ならない。
- 第 3 項は中性カレント

$$J_3^\mu - \sin^2\theta_W s^\mu/e = \frac{1}{4}\bar{\psi}_{\nu_l}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_{\nu_l} - \frac{1}{4}\bar{\psi}_l\gamma^\mu\{(1-4\sin^2\theta_W) - \gamma_5\}\psi_l$$

と場 Z_μ の相互作用を表し、実ベクトル場 Z_μ は中性ベクトルボゾン Z^0 の量子場と解釈される。

実験と整合する弱混合角の値は

$$\sin^2\theta_W = 0.23122 \pm 0.00015\tag{554}$$

であり、これは中性カレントの右辺第 2 項がほとんど純粋な軸性カレントであることを意味している ($1 - 4\sin^2\theta_W \simeq 0$, 式 (354) 参照)。

最後に本節で導入されたゲージ場は図 74 のようにまとめられる。

^{*179} 図 73 において、同一の点を表す座標 ($W_{3\mu}, B_\mu$), (Z_μ, A_μ) の間の関係は式 (551) によって与えられる。

^{*180} もっとも式 (552) は実質 2 つの条件式なので、1 つの未知数 θ_W を定めるものと見なすと条件過剰である。実際には式 (554) のような実験に合う θ_W の値を与えると、式 (552) の関係を通して未知の結合定数 $g_W = \frac{g}{2\sqrt{2}}$, g' の値が決まるものと考えられる。

^{*181} 低エネルギーにおいては、電磁相互作用と弱い相互作用は明確に分離している。

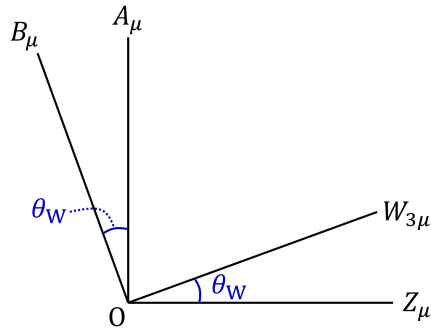


図 73 弱混合角 (Weinberg 角) θ_W

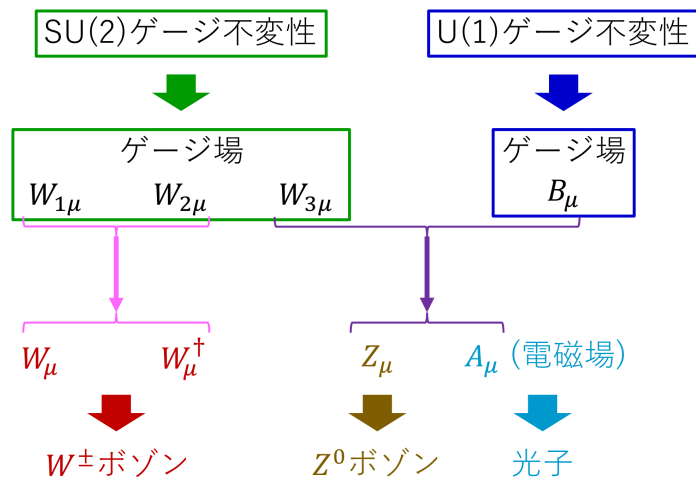


図 74 電弱相互作用を媒介するゲージボゾン (4.7.2 節で導入)

4.7.3 ゲージボゾンの性質

完全な Lagrangian 密度を得るには、レプトン系の Lagrangian 密度 $\mathcal{L}^L = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ に純粋なゲージボゾンの Lagrangian 密度 \mathcal{L}^B を加えて

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}^B$$

としなければならない。ここでは全てのゲージボゾンの質量をゼロとして、レプトンがない場合のゲージボゾンの項 \mathcal{L}^B を考える。実際には光子以外のゲージボゾンがゼロでない質量を持つことについては、次節以降で考察する。

電磁場テンソル $F^{\mu\nu}$ に類似の場

$$B^{\mu\nu} \equiv \partial^\nu B^\mu - \partial^\mu B^\nu, \quad G_i^{\mu\nu} \equiv F_i^{\mu\nu} + g\varepsilon_{ijk} W_j^\mu W_k^\nu, \quad F_i^{\mu\nu} \equiv \partial^\nu W_i^\mu - \partial^\mu W_i^\nu$$

を定義してゲージボゾンの Lagrangian 密度を

$$\mathcal{L}^B = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{i\mu\nu} G_i^{\mu\nu}$$

とすると、これは $SU(2) \times U(1)$ 不変となる。 \mathcal{L}^B は電磁場、 W^\pm ボゾン場、 Z^0 ボゾン場に対する自由場 Lagrangian 密度の項

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0^B &\equiv -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{i\mu\nu}F_i^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}F_{W\mu\nu}^\dagger F_W^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu}, \\ Z^{\mu\nu} &\equiv \partial^\nu Z^\mu - \partial^\mu Z^\nu\end{aligned}$$

と、ゲージボゾン同士の相互作用を表す付加的な項

$$g\varepsilon_{ijk}W_{i\mu}W_{j\nu}\partial^\mu W_k^\nu - \frac{1}{4}g^2\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}W_j^\mu W_k^\nu W_{l\mu}W_{m\nu}$$

から成っている^{*182}。このゲージボゾン同士の相互作用はゲージボゾンが弱アイソスピン電荷を持つことによるものである^{*183}。

4.7.4 レプトンとゲージボゾンの質量

ここまでは全てのレプトンとゲージボゾンの質量をゼロと扱ってきたけれど、実際には光子を除き、これらの粒子はゼロでない質量を持つ。ところがゲージボゾン W^\pm, Z^0 の質量 m_W, m_Z を考慮して Lagrangian 密度に質量項

$$m_W^2 W_\mu^\dagger W^\mu + \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu$$

を加えると、理論の $SU(2) \times U(1)$ 不変性が失われてしまう。同様にレプトンの質量を考慮して、例えば電子 (場 $\psi = \psi_e$, 質量 $m = m_e$) について Lagrangian 密度に質量項

$$-m\bar{\psi}\psi = -m\bar{\psi}(P_R + P_L)\psi = -m(\bar{\psi}^L\psi^R + \bar{\psi}^R\psi^L)$$

を加えることが考えられるけれど、最右辺を見れば明らかのようにこれは $SU(2) \times U(1)$ 不変性を持たない^{*184}。そして実はこれらの理論は繰り込み不能となる。そこで理論のゲージ不変性・繰り込み可能性を壊すことなくゼロでない質量を導入する方法として、自発的な対称性の破れについて 4.8 節で議論する。

4.8 自発的な対称性の破れ

本節 (4.8 節) では自発的な対称性の破れの機構により、Lagrangian 密度のゲージ不変性を (そして理論の繰り込み可能性を) 損なうことなく質量が導入されることを説明する。

● 4.8.1 節

Goldstone モデル ($U(1)$ 位相変換の下で不変な場の理論のモデル) において、

自発的な対称性の破れの概念を導入する。

Goldstone モデルからは自然界で観測されない質量ゼロの (光子以外の) ボゾンが生じる。

^{*182} 場 $W_{1\mu}, W_{2\mu}$ は W^\pm ボゾン場に、場 $W_{3\mu}$ は電磁場 A_μ と Z^0 ボゾン場 Z_μ に関係付けられていたことを思い出そう (図 74 参照)。

^{*183} これは QCD においてグルーオンが色電荷を持つことに対応してグルーオン同士の相互作用を表す 3 グルーオン結節点や 4 グルーオン結節点が現れたのと同じ事情である。

^{*184} これは左手型の場と右手型の場とで変換則が異なるためであり、電磁的なゲージ変換や QCD におけるゲージ変換に対してこの項が不変であったのとは対照的である。

- 4.8.2 節

この問題は全域的な位相変換を局所的な位相変換に改めてゲージ不変な理論を構築し、自発的な対称性の破れを導入することによって解消すること (Higgs 機構) を説明する。

- 4.8.3 節

以上を $SU(2) \times U(1)$ ゲージ不変な電弱理論へと一般化

→ Weinberg と Salam による電弱標準理論

ゲージ不変・繰り込み可能であり, Lagrangian 密度が W^\pm, Z^0 ボゾンの質量項を含む。

■複素 Klein-Gordon 場 本稿では既に実 Klein-Gordon 場を扱ったものの, 複素 Klein-Gordon 場についての説明をまだ行っていない。複素 Klein-Gordon 場 $\phi(x)$ はスピン 0 の荷電粒子を表し, Klein-Gordon 方程式

$$(\square + m^2)\phi = 0, \quad (\square + m^2)\phi^* = 0$$

を満たす (m は粒子の質量)。Klein-Gordon 方程式は Lagrangian 密度

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi$$

から導かれる。

4.8.1 Goldstone モデル

まず初めに自発的な対称性の破れの身近な例として, 強磁性を取り上げよう。磁性体の系の Hamiltonian は回転に対して不変であるにも関わらず, 基底状態では磁性体全体として特定の方向を向いたゼロでない磁化 \mathbf{M} が生じており, \mathbf{M} の方向の異なる状態が縮退している。このように縮退した状態から任意の状態が選ばれると, その基底状態は一般に系の Lagrangian や Hamiltonian と同じ対称性を持たず, 非対称な基底状態が現れる (自発的な対称性の破れ)。

場の理論においても基底状態 (真空) が縮退していれば, 自発的な対称性の破れが起こり得る。このことを最も簡単な理論モデルである, Goldstone モデルを用いて説明する。Goldstone モデルでは複素スカラー場

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\phi_1(x) + i\phi_2(x)\}$$

($\phi_1(x), \phi_2(x)$ は実スカラー場) を Lagrangian 密度

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) - \mu^2 |\phi|^2 - \lambda |\phi|^4, \quad \lambda > 0$$

によって記述する。古典的に考えた“基底状態”は Hamiltonian 密度

$$\mathcal{H} = (\partial^0 \phi^*)(\partial_0 \phi) + (\nabla \phi^*) \cdot (\nabla \phi) + \mathcal{V}(\phi), \quad \mathcal{V}(\phi) \equiv \mu^2 |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4 \quad (555)$$

が最小の状態であり, したがって場 $\phi(x)$ がポテンシャルエネルギー密度 $\mathcal{V}(\phi)$ を最小にするような定数値をとる状態である。(Hamiltonian 密度 (555) の最初の 2 項は正定値であり, $\phi(x)$ が定数のときゼロになるから。) 以下のように μ^2 の符号に応じて, “基底状態”の性格は異なる。

1. $\mu^2 > 0$ のとき。

Lagrangian 密度や Hamiltonian 密度は, Klein-Gordon 場に対する表式に

摂動項 $\lambda |\phi|^4$ を加えたものと見なせるようになる。

ポテンシャル $\mathcal{V}(\phi)$ の概形は図 75 のようであり, 古典的な“基底状態”は $\phi = 0$ である。

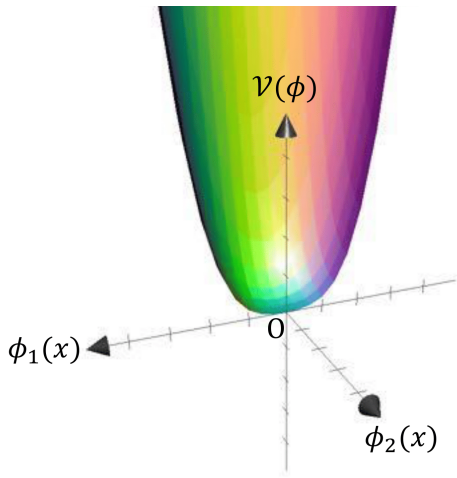


図 75 $\mu^2 > 0$ のとき

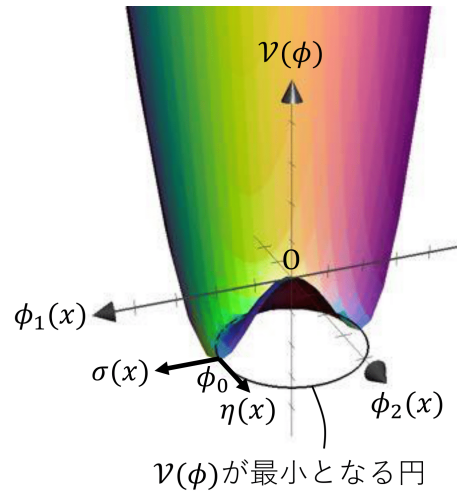


図 76 $\mu^2 < 0$ のとき

2. $\mu^2 < 0$ のとき.

ポテンシャル $\mathcal{V}(\phi)$ の概形は図 76 のようであり (回転 4 次曲面),
古典的な“基底状態”はその最低値を与える円周

$$\phi(x) = \phi_0 \equiv \left(\frac{-\mu^2}{2\lambda} \right)^{1/2} e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

において実現される.

位相角 θ の任意性に応じた異なる“基底状態”が“縮退”しており,
もとの Lagrangian 密度自体は U(1) 位相変換

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi e^{i\alpha}, \quad \phi^* \rightarrow \phi'^* = \phi^* e^{-i\alpha}$$

に対して不変であるにも関わらず, 特定の θ で指定される“基底状態”は対称性を自発的に破っている.

$\mu^2 < 0$ の場合に対して例えば $\theta = 0$ の安定な平衡値

$$\phi_0 = \left(\frac{-\mu^2}{2\lambda} \right)^{1/2} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} v (> 0) \quad (556)$$

を考え,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{v + \sigma(x) + i\eta(x)\} \quad (557)$$

によってその周りの摂動 $\sigma(x), \eta(x)$ (ともに実場) を導入すると, Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \lambda v \sigma(\sigma^2 + \eta^2) - \frac{1}{4} \lambda (\sigma^2 + \eta^2)^2, \quad \mathcal{L}_0 \equiv \frac{1}{2} (\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) - \frac{1}{2} (2\lambda v^2) \sigma^2 - \frac{1}{2} (\partial^\mu \eta)(\partial_\mu \eta) \quad (558)$$

と書き換えられる (定数項は省いた). 3 つの項 $-\frac{1}{2} (2\lambda v^2) \sigma^2, -\lambda v \sigma(\sigma^2 + \eta^2), -\frac{1}{4} \lambda (\sigma^2 + \eta^2)^2$ がポテンシャル $\mathcal{V}(\phi)$ に由来しており, これは ϕ_1 軸方向の変位 σ に対してポテンシャルが 2 次の変化をするのに対し, ϕ_2 軸方向の, したがって円周方向の変位 η に対して, 2 次までの近似ではポテンシャルは変化しないことを表している (図 76 参照). ところで相互作用項を除いた自由場項と見なされる \mathcal{L}_0 の部分は, $\sigma(x), \eta(x)$ が

Klein-Gordon 場であることを意味しており、場の 2 次の項の係数が質量に対応するため、場の量子化によって生じる σ ボゾンはゼロでない質量 $\sqrt{2\lambda v^2}$ を持つのに対し、 η ボゾンの質量はゼロとなる。

4.8.2 Higgs モデル

Goldstone モデルから質量ゼロのボゾンが生じる問題は、局所的なゲージ変換へと一般化した U(1) 変換

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x)e^{-iqf(x)}, \quad \phi^*(x) \rightarrow \phi'^*(x) = \phi^*(x)e^{iqf(x)} \quad (559)$$

に対して不変な理論において解消される。理論のゲージ不変性を回復するには、これと同時に

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu f(x)$$

というゲージ変換を受けるゲージ場 $A_\mu(x)$ を導入し、微分の共変微分への置き換え

$$\partial_\mu \phi \rightarrow D_\mu \phi \equiv [\partial_\mu + iqA_\mu]\phi$$

を行えば良い。Higgs モデルはさらに自由ゲージ場項

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (\text{ただし } F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)$$

を付け加えた、ゲージ不変な Lagrangian 密度

$$\mathcal{L} = (D^\mu \phi)^*(D_\mu \phi) - \mu^2 |\phi|^2 - \lambda |\phi|^4 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

によって定義される。Higgs モデルは Goldstone モデルと同様の機構により、 $\mu^2 < 0$ に対して自発的な対称性の破れを起こす。

再び $\mu^2 < 0$ の場合に対して安定な平衡値 (556):

$$\phi_0 = \left(\frac{-\mu^2}{2\lambda} \right)^{1/2} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}v (> 0)$$

を考え、式 (557):

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{v + \sigma(x) + i\eta(x)\}$$

によってその周りの摂動 $\sigma(x), \eta(x)$ (ともに実場) を導入すると、Higgs モデルの Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\sigma^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(qv)^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial^\mu \eta)(\partial_\mu \eta) + qv A^\mu \partial_\mu \eta + (\text{相互作用項}) \quad (560)$$

と書き換えられる^{*185}。ただし定数項は省いた。また場の 2 次の項を自由場項と見なし、場の 3 次以上の項を相互作用項に含めた。この結果を解釈する前に、次の問題を解消しなければならない。すなわち

- 自由場項に双 1 次項 $A^\mu \partial_\mu \eta$ が現れることは、 A_μ と η が独立な場ではないことを示唆している。

^{*185} Goldstone モデルの Lagrangian 密度 (558) に対する付加的な自由場項は

$$qv A^\mu \partial_\mu \eta + \frac{1}{2}(qv)^2 A_\mu A^\mu$$

である。

- 初めは質量のないベクトル場 A_μ を考えており、その独立な自由度は光子と同様に 2 であるのに対し、書き換えられた Lagrangian 密度には質量項 $\frac{1}{2}(qv)^2 A_\mu A^\mu$ が現れるので、ゲージ場は 3 つの偏極状態を持つ (4.6.3 節).
このように自由度が見かけ上 1 つ増えていることは、書き換えられた Lagrangian 密度が非物理的な場を余計に 1 つ含んでいることを意味している.

実際スカラー場 $\eta(x)$ は非現実的なゴースト場であり、局所的な U(1) ゲージ変換を利用して場

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{v + \sigma(x) + i\eta(x)\}$$

の位相を調節すれば、その虚部 $\eta(x)$ を消去することができる。このような場 $\eta(x)$ の現れないゲージは“ユニタリゲージ”と呼ばれ、このゲージにおいて Higgs モデルの Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\sigma^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(qv)^2 A_\mu A^\mu + (\text{相互作用項})$$

と表される。これが本節の最終的な結果である。

以上で見たことは次のようにまとめられる。すなわち理論のゲージ不変性を損なうことなくゲージ場 A_μ は質量を獲得し、これに伴ってゲージ場の自由度は 2 から 3 に増大する。このような現象を“Higgs 機構”と呼ぶ。一方 Goldstone モデルにおける、目障りな質量ゼロの η 粒子は、Higgs モデルにおいてはゲージ不変性を根拠に消し去ることができる。ゲージ場 A_μ の獲得した第 3 の自由度は、もともとはこの場 $\eta(x)$ が持っていた自由度に他ならない：

$$\begin{aligned} & \text{“複素” スカラー場 } \phi(x), \phi^*(x) \quad (\leftrightarrow \sigma(x), \eta(x)) \quad (\text{自由度 } 2) \\ & + \text{“質量のない” 実ベクトル場 } A_\mu(x) \quad (\text{自由度 } 2) \\ & \quad \downarrow \\ & \text{“実” スカラー場 } \sigma(x) \quad (\leftrightarrow \text{Higgs ボゾン}) \quad (\text{自由度 } 1) \\ & + \text{“質量を持つ” 実ベクトル場 } A_\mu(x) \quad (\text{自由度 } 3). \end{aligned}$$

最後にこの理論の繰り込み可能性について言及する。質量を持つ中性ベクトルボゾン場の伝播関数は W ボゾンの伝播関数 (548) と同じ形

$$iD_F^{\alpha\beta}(k, m) = \frac{i(-g^{\alpha\beta} + k^\alpha k^\beta / m^2)}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

を持ち、これは $k^\alpha k^\beta / m^2$ の項のために見かけ上、ループ積分の発散を引き起こす。ところが実際には自発的に対称性を破っているゲージ理論では、実際の発散は見かけの次数よりも弱まり、理論は繰り込み可能となる。このことを簡単に理解するには、't Hooft (ト・フーフト) ゲージ

$$\partial_\mu A^\mu - m\eta = 0$$

の下で Lagrangian 密度 (560) に

$$-\frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu - m\eta)^2$$

を付け加えれば良い。(したがって再び $\eta(x)$ 場が導入されることになる。) すると Lagrangian 密度から $\eta(x)$

と $A_\mu(x)$ の結合した双 1 次項が除かれる.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial^\mu\sigma)(\partial_\mu\sigma) - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\sigma^2 \\ & - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \\ & + \frac{1}{2}(\partial^\mu\eta)(\partial_\mu\eta) - \frac{1}{2}m^2\eta^2 \\ & + (\text{相互作用項}).\end{aligned}$$

このため, $\sigma(x), \eta(x), A_\mu(x)$ のそれぞれを独立な自由場と見なして量子化を行うことが許される. そしてこのとき場 $A^\mu(x)$ の運動方程式が

$$(\square + m^2)A^\mu(x) = 0$$

となることから予想されるように, 場 $A_\mu(x)$ を量子化すると, 伝播関数として

$$iD_F^{\alpha\beta}(k, m) = \frac{-ig^{\alpha\beta}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

が得られることを証明し得る. この't Hooft の結果では伝播関数に発散を起こす項 $k^\alpha k^\beta / m^2$ が現れないため, 理論の繰り込み可能性が明白である.

4.8.3 電弱標準理論

ここでは質量のないレプトンとゲージボソンを想定した, 第 4.7 章における電弱統一理論モデルに Higgs 機構を適用する. まず元の理論が SU(2) ゲージ不変性を持つことを踏まえて, Goldstone モデルや Higgs モデルにおけるスカラー場 $\phi(x)$ の代わりに弱アイソスピン 2 重項

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_a(x) \\ \phi_b(x) \end{pmatrix}$$

を考える. ただし $\phi_a(x)$ と $\phi_b(x)$ は Lorentz スカラーである. これは (変換則に基づく定義 (4.7.1 節) により,) アイソスピン 2 重項 $\Psi_L^I(x)$ と同様の変換則

$$\begin{aligned}\Phi(x) & \rightarrow \Phi'(x) = \exp[ig\tau_j\omega_j(x)/2]\Phi(x), & (\text{SU}(2) \text{ 変換に対して}) \\ \Phi(x) & \rightarrow \Phi'(x) = \exp[ig'Yf(x)/2]\Phi(x), & (\text{U}(1) \text{ 弱超電荷変換に対して})\end{aligned}$$

に従う. ただし Y は場 $\Phi(x)$ の弱超電荷であり, その値はすぐ後で決める.

元の理論における Lagrangian 密度 $\mathcal{L}^L + \mathcal{L}^B$ は既に見たように SU(2)×U(1) ゲージ不変性を持つ. そこで $\Psi_L^I(x)$ の共変微分と同様に Higgs 場 $\Phi(x)$ の共変微分

$$D^\mu\Phi = \left(\partial^\mu + \frac{1}{2}ig\tau_j W_j^\mu + ig'YB^\mu \right) \Phi$$

を定義し, Higgs 場 $\Phi(x)$ の Lagrangian 密度を

$$\mathcal{L}^H = (D^\mu\Phi)^\dagger(D_\mu\Phi) - \mu^2\Phi^\dagger\Phi - \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2$$

とすれば, 全 Lagrangian 密度 $\mathcal{L} = \mathcal{L}^L + \mathcal{L}^B + \mathcal{L}^H$ の SU(2)×U(1) ゲージ不変性が保証される.

Higgs モデルの場合と同様、 $\lambda > 0, \mu^2 < 0$ に対して古典的なエネルギー密度が最低値をとるのは、Higgs 場 $\Phi(x)$ が

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} \phi_a^0 \\ \phi_b^0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_0^\dagger \Phi_0 = |\phi_a^0|^2 + |\phi_b^0|^2 = \frac{-\mu^2}{2\lambda}$$

の条件を満たす定数値 Φ_0 をとるときであり、自発的な対称性の破れはこのうち特定の Φ_0 が“基底状態”に選ばれることに対応する。ここで大域的な位相変換の自由度を利用して

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad v \equiv \left(\frac{-\mu^2}{\lambda} \right)^{1/2} (> 0)$$

と選んでも一般性を失わない。

Higgs 機構の導入の後にも通常の電荷保存則が成り立つためには、基底状態は U(1) 電磁ゲージ変換 (式 (559) と同様の変換 $\Phi(x) \rightarrow e^{-iQf(x)} \Phi(x)$, etc.) の下で不変でなければならない。ここでは Φ_0 を下側の成分 ϕ_b^0 だけがゼロでないように選んだので、成分 ϕ_b^0 の電荷が中性 $Q = 0$ であれば、この変換に対する不変性が満たされる。(しかるに $\Psi_l^L(x)$ の下側の成分 $\psi_l^L(x)$ の弱アイソスピン I_3^W が $-1/2$ であったのと同様に (4.7.1 節), Higgs 場 $\Phi(x)$ の下側の成分 ϕ_b^0 の弱アイソスピン I_3^W もまた $-1/2$ であると考え、) 成分 ϕ_b^0 の電荷が $Q = 0$ となるためには、式 (549):

$$Y = \frac{Q}{e} - I_3^W$$

において Higgs 場の弱超電荷を $Y = 1/2$ とすれば良い。このとき Higgs 機構の導入の後にも電磁的なゲージ不変性は自発的な対称性の破れを起こさないで、光子の質量はゼロに保たれる。

再び Higgs 場を真空場 Φ_0 (“基底状態”の場) とそこからのズレに分けて

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \eta_1 + i\eta_2 \\ v + \sigma + i\eta_3 \end{pmatrix}$$

と書くと、実は 3 つの場 $\eta_1(x), \eta_2(x), \eta_3(x)$ を非物理的な場に同定することができる。実際これらは適当なユニタリーゲージにおいて消去することができ、失われた自由度は 3 つのボゾン W^\pm, Z^0 の場に吸収され、 W^\pm, Z^0 ボゾンは質量を獲得する。一方、場 $\sigma(x)$ はユニタリーゲージにおいても残り、Higgs スカラーボゾン (ゼロでない質量を持つ、電氣的に中性なスピン 0 の粒子) を生じる。

レプトンに質量を与えるために、レプトンと Higgs ボゾンの相互作用として“標準模型” (standard model) では Lagrangian 密度

$$\mathcal{L}^{\text{LH}} = -g_l [\bar{\Psi}_l^L \psi_l^R \Phi + \Phi^\dagger \bar{\psi}_l^R \Psi_l^L] - g_{\nu l} [\bar{\Psi}_l^L \psi_{\nu l}^R \tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}^\dagger \bar{\psi}_{\nu l}^R \Psi_l^L],$$

$$\tilde{\Phi} \equiv -i[\Phi^\dagger \tau_2]^T = \begin{pmatrix} \phi_b^* \\ -\phi_a^* \end{pmatrix} \quad (\tau_2: \text{Pauli 行列}, T: \text{転置})$$

を考える (レプトンの世代 l について和をとる)。これはスカラー場 ϕ をスピノル場 ψ で挟んだ $\bar{\psi}\phi\psi$ という形をしており (例えば $\bar{\Psi}_l^L \psi_l^R \Phi = \bar{\psi}_{\nu l}^L \phi_a \psi_l^R + \bar{\psi}_l^L \phi_b \psi_{\nu l}^R$)、このような項は一般に湯川型相互作用と呼ばれる。この Lagrangian 密度 \mathcal{L}^{LH} は $SU(2) \times U(1)$ ゲージ不変であることを確認できる。次節でこの項がゼロでないレプトンの質量を生じることを見る。

- ニュートリノの質量をゼロとする取り扱いは、相互作用項 \mathcal{L}^{LH} における $g_{\nu l}$ の項において $g_{\nu l} = 0$ と置くことに対応する。

- クォーク・ハドロンを含む半レプトン過程を扱えるように理論を拡張して初めて、理論は繰り込み可能となる^{*186}。

4.9 電弱標準理論

4.9.1 ユニタリーゲージにおける Lagrangian 密度

ここで 4.8 節までに導入した、Higgs 機構を含む電弱標準理論の全 Lagrangian 密度 \mathcal{L} を改めてまとめると以下のようになる。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^L + \mathcal{L}^B + \mathcal{L}^H + \mathcal{L}^{LH}. \quad (561)$$

- レプトン系の Lagrangian 密度 \mathcal{L}^L

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^L &= i(\bar{\Psi}_l^L \not{D} \Psi_l^L + \bar{\psi}_{\nu_l}^R \not{D} \psi_{\nu_l}^R + \bar{\psi}_{\nu_l}^L \not{D} \psi_{\nu_l}^L) \\ &= \mathcal{L}_0^L + \mathcal{L}_1^{LB}, \\ \mathcal{L}_0^L &= \bar{\psi}_l^L i \not{\partial} \psi_l^L + \bar{\psi}_{\nu_l}^L i \not{\partial} \psi_{\nu_l}^L + \bar{\psi}_l^R i \not{\partial} \psi_l^R + \bar{\psi}_{\nu_l}^R i \not{\partial} \psi_{\nu_l}^R \\ &= \bar{\psi}_l i \not{\partial} \psi_l + \bar{\psi}_{\nu_l} i \not{\partial} \psi_{\nu_l}, \\ \mathcal{L}_1^{LB} &= -g J_i^\mu W_{i\mu} - g' J_Y^\mu B_\mu \\ &= -s^\mu A_\mu - \frac{g}{2\sqrt{2}} (J^\mu \dagger W_\mu + J^\mu W_\mu^\dagger) - \frac{g}{\cos \theta_W} \left(J_3^\mu - \sin^2 \theta_W \frac{s^\mu}{e} \right) Z_\mu. \end{aligned}$$

- ゲージボゾンの Lagrangian 密度 \mathcal{L}^B

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^B &= -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{i\mu\nu} G_i^{\mu\nu} \\ &= \mathcal{L}_0^B + g \varepsilon_{ijk} W_{i\mu} W_{j\nu} \partial^\mu W_k^\nu - \frac{1}{4} g^2 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} W_j^\mu W_k^\nu W_{l\mu} W_{m\nu}, \\ \mathcal{L}_0^B &= -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{i\mu\nu} F_i^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} F_{W\mu\nu}^\dagger F_W^{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

- Higgs 場の Lagrangian 密度 \mathcal{L}^H

$$\mathcal{L}^H = (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2.$$

- レプトンと Higgs 場の相互作用項 \mathcal{L}^{LH}

$$\mathcal{L}^{LH} = -g_l (\bar{\Psi}_l^L \psi_l^R \Phi + \Phi^\dagger \bar{\psi}_l^R \Psi_l^L) - g_{\nu_l} (\bar{\Psi}_l^L \psi_{\nu_l}^R \tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}^\dagger \bar{\psi}_{\nu_l}^R \Psi_l^L).$$

Lagrangian 密度 \mathcal{L} の物理的な意味を解釈するために、ゲージ場 W_i^μ, B^μ を W^\pm ボゾン場 $W^\mu, W^{\mu\dagger}, Z^0$ ボゾン場 Z^μ , 電磁場 A^μ によって表す。さらに非現実的な場 η_i を理論から取り除くためにユニタリーゲージを採用し、Higgs 場を

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \sigma(x) \end{pmatrix}$$

^{*186} 拡張は 4.10 節を参照。

と表す. すると Lagrangian 密度は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I, \\
\mathcal{L}_0 &= \bar{\psi}_l(i\cancel{\partial} - m_l)\psi_l + \bar{\psi}_{\nu_l}(i\cancel{\partial} - m_{\nu_l})\psi_{\nu_l} \quad \Leftarrow \quad \text{荷電レプトン (質量 } m_l), \text{ ニュートリノ (質量 } m_{\nu_l}) \\
&\quad - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad \Leftarrow \quad \text{光子} \\
&\quad - \frac{1}{2}F_{W\mu\nu}^\dagger F_W^{\mu\nu} + m_W^2 W_\mu^\dagger W^\mu \quad \Leftarrow \quad W^\pm \text{ボゾン (質量 } m_W) \\
&\quad - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu \quad \Leftarrow \quad Z^0 \text{ボゾン (質量 } m_Z) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) - \frac{1}{2}m_H^2 \sigma^2, \quad \Leftarrow \quad \text{Higgs スカラーボゾン (質量 } m_H) \\
\mathcal{L}_I &= \mathcal{L}_I^{\text{LB}} + \mathcal{L}_I^{\text{BB}} + \mathcal{L}_I^{\text{HH}} + \mathcal{L}_I^{\text{HB}} + \mathcal{L}_I^{\text{HL}}
\end{aligned}$$

と書き換えられる. ただし各ボゾンと各レプトンの質量は

$$\begin{aligned}
m_W &= \frac{1}{2}vg, & m_Z &= \frac{m_W}{\cos\theta_W}, & m_H &= \sqrt{-2\mu^2}, \\
m_l &= \frac{vg_l}{\sqrt{2}}, & m_{\nu_l} &= \frac{vg_{\nu_l}}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

である. 自由場項 \mathcal{L}_0 の表式を見ると, 系は光子, 荷電レプトン, 中性レプトン, W^\pm ボゾン, Z^0 ボゾン, Higgs ボゾンから成ることが明白である. ボゾンの質量項は $SU(2) \times U(1)$ ゲージ不変性の自発的な破れを生じる Higgs 場の Lagrangian 密度 \mathcal{L}^H に由来しており, またレプトンの質量項はレプトンと Higgs 場の相互作用項 \mathcal{L}^{LH} に由来している^{*187}. なお各相互作用項は以下で与えられる.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_I^{\text{BB}} &= ig \cos\theta_W [(W_\mu^\dagger W_\nu - W_\nu^\dagger W_\mu) \partial^\mu Z^\nu + (\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu) W^{\mu\dagger} Z^\nu - (\partial_\mu W_\nu^\dagger - \partial_\nu W_\mu^\dagger) W^\nu Z^\mu] \\
&\quad + ie [(W_\mu^\dagger W_\nu - W_\nu^\dagger W_\mu) \partial^\mu Z^\nu + (\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu) W^{\mu\dagger} Z^\nu - (\partial_\mu W_\nu^\dagger - \partial_\nu W_\mu^\dagger) W^\nu Z^\mu] \\
&\quad + g^2 \cos^2 \theta_W (W_\mu W_\nu^\dagger Z^\mu Z^\nu - W_\mu W^{\mu\dagger} Z_\nu Z^\nu) \\
&\quad + e^2 (W_\mu W_\nu^\dagger A^\mu A^\nu - W_\mu W^{\mu\dagger} A_\nu A^\nu) \\
&\quad + eg \cos\theta_W \{ W_\mu W_\nu^\dagger (Z^\mu A^\nu + A^\mu Z^\nu) - 2W_\mu W^{\mu\dagger} A_\nu Z^\nu \} \\
&\quad + \frac{1}{2}g^2 W_\mu^\dagger W_\nu (W^{\mu\dagger} W^\nu - W^\mu W^{\nu\dagger}), \\
\mathcal{L}_I^{\text{HH}} &= -\lambda v \sigma^3 - \frac{1}{4}\lambda \sigma^4, \\
\mathcal{L}_I^{\text{HB}} &= \frac{1}{2}vg^2 W_\mu^\dagger W^\mu \sigma + \frac{1}{4}g^2 W_\mu^\dagger W^\mu \sigma^2 + \frac{vg^2}{4\cos^2\theta_W} Z_\mu Z^\mu \sigma + \frac{g^2}{8\cos^2\theta_W} Z_\mu Z^\mu \sigma^2, \\
\mathcal{L}_I^{\text{LB}} &= e\bar{\psi}_l A \psi_l \\
&\quad - \frac{g}{2\sqrt{2}} \{ \bar{\psi}_{\nu_l} W (1 - \gamma_5) \psi_l + \bar{\psi}_l W^\dagger (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l} \} \\
&\quad - \frac{g}{4\cos\theta_W} \bar{\psi}_{\nu_l} Z (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l} \\
&\quad + \frac{g}{4\cos\theta_W} \bar{\psi}_l Z (1 - 4\sin^2\theta_W - \gamma_5) \psi_l, \\
\mathcal{L}_I^{\text{HL}} &= -\frac{1}{v} m_l \bar{\psi}_l \psi_l \sigma - \frac{1}{v} m_{\nu_l} \bar{\psi}_{\nu_l} \psi_{\nu_l} \sigma. \quad (\mathcal{L}^{\text{LH}} \text{ との混同に注意})
\end{aligned}$$

^{*187} まとめよう. 4.7.4 節で見たように, Lagrangian 密度の質量項はゲージ不変ではない. Higgs 機構ではもとの Lagrangian 密度がゲージ不変であり, 系が自発的に対称性を破る, すなわち Higgs 場が特定の基底状態 (の近く) に選ばれると, Lagrangian 密度の質量項が得られる.

以上により

- W^\pm, Z^0 ボゾンの質量は,
実験的に値の知られている微細構造定数 α , Fermi 結合定数 G , 弱混合角 θ_W を用いて

$$m_W = \left(\frac{\alpha\pi}{G\sqrt{2}} \right)^{1/2} \frac{1}{\sin\theta_W} = 77.5\text{GeV}, \quad m_Z = \left(\frac{\alpha\pi}{G\sqrt{2}} \right)^{1/2} \frac{2}{\sin 2\theta_W} = 88.4\text{GeV}$$

と表される (輻射補正・繰り込みを無視した場合).

- 理論に含まれるパラメーターは

$$g, \quad g', \quad v, \quad \lambda, \quad g_l, \quad g_{\nu_l}$$

の 6 つであり ($-\mu^2 = \lambda v^2$ は λ と v から決定される),

– v は

$$v = \frac{1}{(G/\sqrt{2})^{1/2}}$$

と表されるので, その値を実験的に知ることができる.

– 結合 g, g' は

$$g \sin\theta_W = g' \cos\theta_W = e$$

の関係をを用いて値を実験的に知ることができる.

– 結合 g_l, g_{ν_l} の値は, 質量 m_l, m_{ν_l} の実験的な値と

$$m_l = \frac{vg_l}{\sqrt{2}}, \quad m_{\nu_l} = \frac{vg_{\nu_l}}{\sqrt{2}}$$

の関係をを用いて知ることができる.

– λ の値は決まっておらず, Higgs ボゾンの質量 m_H が分かれば,

$$m_H = \sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{2\lambda v^2}$$

の関係から値を知ることができる.

4.9.2 Feynman 規則

本節では電弱標準理論における Feynman 規則の説明を行う.

ただし

- 最低次の Feynman 振幅の計算に必要な規則だけを考える.
- ユニタリーゲージにおける Lagrangian 密度 (4.9.1 節) に基づく.
- 場の演算子としての Lagrangian 密度には正規順序化を施す.
- 自由場の Lagrangian 密度 \mathcal{L}_0 を Feynman ゲージにおける表式

$$\mathcal{L}_0^{\text{Feynman}} = \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$$

に置き換え, 改めてこれを \mathcal{L}_0 と表記する.

– これは自由な電磁場の Lagrangian 密度として, Fermi による表式

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu)$$

を採用する措置と等価である.

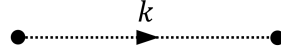
- 電弱理論では相互作用 Lagrangian 密度が場の微分を含んでいるため, 相互作用する場が自由場と同じ運動方程式と交換関係を満たすことは保証されない. しかしながら S 行列要素を評価する際に自由場の交換関係を用いるものと約束すれば, S 行列展開を QED と同様に

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T\{\mathcal{L}_I(x_1) \cdots \mathcal{L}_I(x_n)\}$$

として良い.

このとき QED の Feynman 規則はそのまま引き継がれ、4.6.4 節の IVB 理論における規則に加えて次の規則が追加される。

- Z^0 ボゾンの内線に伝播関数 (の i 倍) を充てる。
 Z^0 ボゾンの伝播関数は W ボゾンの伝播関数において $m_W \rightarrow m_Z$ と置き換えて得られる。
- Higgs ボゾンの内線



に伝播関数因子

$$i\Delta_F(k, m_H) = \frac{i}{k^2 - m_H^2 + i\epsilon}$$

を充てる。

さらに相互作用 Lagrangian 密度が 18 個の項を含んでいることに対応して (4.9.1 節), 18 種類の基本結節点が生じる。各々の結節点因子は QED の場合と同様に導くことができる。各相互作用項が含む場の組合せ (したがって基本結節点・相互作用の種類) と, 対応する結節点因子を表 5 にまとめる。ただし場を

$$\psi_l \rightarrow l, \quad \bar{\psi}_l \rightarrow \bar{l}, \quad \psi_{\nu_l} \rightarrow \nu_l, \quad \bar{\psi}_{\nu_l} \rightarrow \bar{\nu}_l$$

と略記してある*188。

電弱理論の結節点に関する新たな注意事項を以下にまとめる。

1. 組合せ因子

結節点因子の導出は QED の場合と同様に行うことができる。

結果的に QED に関しては, 結節点因子を簡単に推定するには,

S 行列表展開の 1 次の項 $S^{(1)} = i \int d^4x \mathcal{L}_1$ における

$$i\mathcal{L}_1 = ie\bar{\psi}A\psi$$

から場を取り除いて $ie\gamma^\alpha$ とすれば良い。

これに対して例えば電弱理論における相互作用項

$$\frac{vg^2}{4\cos^2\theta_W} g^{\alpha\beta} Z_\alpha Z_\beta \sigma$$

は同種の場 Z_α を 2 つ含んでおり,

結節点に接続する 2 本の Z^0 ボゾン線に 2 つの場 Z_α を充てる方法は 2! 通りある。

このため結節点因子は $\frac{ivg^2}{4\cos^2\theta_W} g^{\alpha\beta}$ ではなく, これに組合せ因子 2! をかけた

$$\frac{ivg^2}{2\cos^2\theta_W} g^{\alpha\beta}$$

となる。

2. テンソル添字の順序

例えば $W^\dagger W Z^2$ 相互作用項

$$g^2 \cos^2\theta_W (W_\alpha W_\beta^\dagger Z^\alpha Z^\beta - W_\beta W^{\beta\dagger} Z_\alpha Z^\alpha)$$

*188 ここには QED の基本結節点 (因子 $ie\gamma^\alpha$) も含まれている。h.c. は Hermite 共役を意味している。本稿では図 77 を除き, 結節点因子における運動量や Lorentz 添字を定義する結節点のダイアグラムを示していない。

表 5 電弱標準理論における 18 種類の基本相互作用

相互作用項	相互作用の種類	結節点因子
$\mathcal{L}_1^{\text{BB}}$	$W^\dagger W Z$	$ig \cos \theta_W \{g^{\alpha\beta}(k_1 - k_2)^\gamma + g^{\beta\gamma}(k_2 - k_3)^\alpha + g^{\gamma\alpha}(k_3 - k_1)^\beta\}$
	$W^\dagger W A$	$ie \{g^{\alpha\beta}(k_1 - k_2)^\gamma + g^{\beta\gamma}(k_2 - k_3)^\alpha + g^{\gamma\alpha}(k_3 - k_1)^\beta\}$
	$W^\dagger W Z^2$	$ig^2 \cos^2 \theta_W (g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} + g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - 2g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta})$
	$W^\dagger W A^2$	$ie^2 (g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} + g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - 2g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta})$
	$W^\dagger W A Z$	$ieg \cos \theta_W (g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} + g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - 2g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta})$
	$(W^\dagger W)^2$	$ig^2 (2g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma})$
$\mathcal{L}_1^{\text{HH}}$	σ^4	$-6i\lambda$
	σ^3	$-6i\lambda v$
$\mathcal{L}_1^{\text{HB}}$	$W^\dagger W \sigma$	$(ivg^2/2)g^{\alpha\beta}$
	$W^\dagger W \sigma^2$	$(ig^2/2)g^{\alpha\beta}$
	$Z^2 \sigma$	$(ivg^2/2 \cos^2 \theta_W)g^{\alpha\beta}$
	$Z^2 \sigma^2$	$(ig^2/2 \cos^2 \theta_W)g^{\alpha\beta}$
$\mathcal{L}_1^{\text{LB}}$	$\bar{l}l A$	$ie\gamma^\alpha$
	$\bar{\nu}_l l W + \text{h.c.}$	$(-ig/2\sqrt{2})\gamma^\alpha(1 - \gamma_5)$
	$\bar{\nu}_l \nu_l Z$	$(-ig/4 \cos \theta_W)\gamma^\alpha(1 - \gamma_5)$
	$\bar{l}l Z$	$(-ig\gamma^\alpha/4 \cos \theta_W)(1 - 4 \sin^2 \theta_W - \gamma_5)$
$\mathcal{L}_1^{\text{HL}}$	$\bar{l}l \sigma$	$(-i/v)m_l$
	$\bar{\nu}_l \nu_l \sigma$	$(-i/v)m_{\nu_l}$

の結節点因子が

$$ig^2 \cos^2 \theta_W (g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} + g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - 2g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta})$$

となるのは、各ボゾン線に付随するテンソル添字を図 77 のように定義したときである。

すなわち例えばボゾン線を外線と見なす場合、

テンソル添字 α を付した Z^0 ボゾン線には偏極ベクトル $\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k})$ を充てる。

3. 微分に由来する運動量因子

$W^\dagger W Z$ と $W^\dagger W A$ の項は場の微分を含んでいるため、運動量因子を生じる。

例えば $W^\dagger W Z$ 相互作用項

$$ig \cos \theta_W \{ (W_\alpha^\dagger W_\beta - W_\beta^\dagger W_\alpha) \partial^\alpha Z^\beta + (\partial_\alpha W_\beta - \partial_\beta W_\alpha) W^{\beta\dagger} Z^\alpha - (\partial_\alpha W_\beta^\dagger - \partial_\beta W_\alpha^\dagger) W^{\beta} Z^\alpha \}$$

は、図 77 のように各運動量を結節点に向かう向きに定義したとき、結節点因子

$$ig \cos \theta_W \{ g^{\alpha\beta}(k_1 - k_2)^\gamma + g^{\beta\gamma}(k_2 - k_3)^\alpha + g^{\gamma\alpha}(k_3 - k_1)^\beta \}$$

を生じる。

4. $(W^\dagger W)^2$ 相互作用項

$$\frac{1}{2} g^2 W_\alpha^\dagger W_\beta (W^{\alpha\dagger} W^\beta - W^\alpha W^{\beta\dagger})$$

の結節点因子が

$$ig^2 (2g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma})$$

となるのは、図 77 のように運動量の向きとテンソル添字を定義したときである。

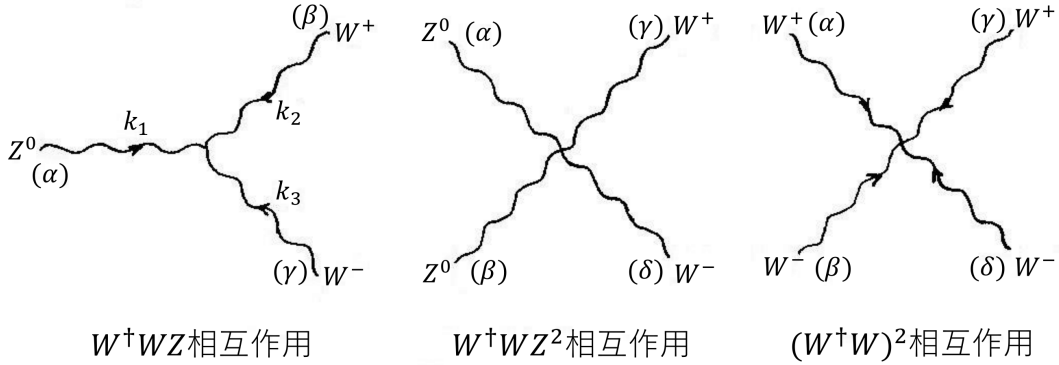


図 77 W^+WZ , W^+WZ^2 , $(W^+W)^2$ 相互作用を表す結節点

4.10 クォークの電弱相互作用

我々はこれまで、QCD と電弱理論を別々に論じてきた。QCD では Lagrangian 密度 (512):

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\Psi}^f (i\not{D} - m_f) \Psi^f - \frac{1}{4} G_{i\mu\nu} G_i^{\mu\nu}$$

を用いてクォークの強い相互作用を記述し、また電弱理論では Lagrangian 密度 (561):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^L + \mathcal{L}^B + \mathcal{L}^H + \mathcal{L}^{\text{LH}},$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}^L = i(\bar{\Psi}_l^L \not{D} \Psi_l^L + \bar{\psi}_l^R \not{D} \psi_l^R + \bar{\psi}_{\nu_l}^R \not{D} \psi_{\nu_l}^R) \\ \mathcal{L}^B = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{i\mu\nu} W_i^{\mu\nu} \\ \mathcal{L}^H = (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \\ \mathcal{L}^{\text{LH}} = -g_l (\bar{\Psi}_l^L \psi_l^R \Phi + \Phi^\dagger \bar{\psi}_l^R \Psi_l^L) - g_{\nu_l} (\bar{\Psi}_l^L \psi_{\nu_l}^R \tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}^\dagger \bar{\psi}_l^R \Psi_l^L) \end{cases}$$

を用いてレプトンの電弱相互作用を記述した。(ここではグルーオン場 A_i^μ に対して定義したテンソル場 $G_i^{\mu\nu}$ と区別するために、ゲージ場 W_i^μ に対する類似の量 $G_i^{\mu\nu}$ を $W_i^{\mu\nu}$ と書き改めた。) しかしながら現実には、クォークは強い力だけでなく弱い力も感じる。そこでクォークの電弱相互作用を扱うために、理論を拡張する必要がある。その方法は既に見たレプトンの電弱理論の定式化と似たものになるので、結果だけを記そう [25, pp.177–183].

まずクォークの Lagrangian 密度を、レプトンの項 \mathcal{L}^L と類似の形

$$\mathcal{L}^q = \bar{\Psi}_{qk}^L i\not{D} \Psi_{qk}^L + \bar{\psi}_{u_k}^R i\not{D} \psi_{u_k}^R + \bar{\psi}_{d_k}^R i\not{D} \psi_{d_k}^R \quad (562)$$

で与える。ただしここではクォークの香りを $(u_1, u_2, u_3) = (u, c, t)$, $(d_1, d_2, d_3) = (d, s, b)$ と表記しており、例えば $\psi_{u_k}^R$ は香り u_k の右手型クォーク場、

$$\Psi_{qk}^L = \begin{pmatrix} \psi_{u_k}^L \\ \psi_{d_k}^L \end{pmatrix}$$

は第 k 世代の左手型クォーク場の SU(2)_c 重項である。上式 (562) の \mathcal{L}^q では世代 $k = 1, 2, 3$ に関する和が含意されている。また式 (562) 各項の共変微分はそれぞれ順に

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{2} ig\tau_j W_j^\mu + \frac{1}{6} ig' B_\mu, \quad D_\mu = \partial_\mu + \frac{2}{3} ig' B_\mu, \quad D_\mu = \partial_\mu - \frac{1}{3} ig' B_\mu$$

で定義されており，これによりクォークの W^\pm, Z^0 ボゾン，光子との相互作用が導入される．QCD における SU(3) 変換に対しても不変な理論を得るには，これら各クォーク場の共変微分 D_μ に付加的なグルーオンとの結合項

$$\frac{1}{2}ig_s\lambda_j A_j^\mu$$

を含めれば良い．このときクォークの Lagrangian 密度 (562) は \mathcal{L}_{QCD} における第 1 項 $\bar{\Psi}^f i\not{D}\Psi^f$ を含むことになる．

次にクォークに質量を与えるために，クォークを \mathcal{L}^{LH} と類似の形

$$\mathcal{L}^{\text{qH}} = - \left[G_{ij}^u \bar{\Psi}_{q_i}^{\text{L}} \tilde{\Phi} \psi_{u_j}^{\text{R}} + G_{ij}^d \bar{\Psi}_{q_i}^{\text{L}} \Phi \psi_{d_j}^{\text{R}} \right] + \text{h.c.}$$

によって Higgs 場と結合する．ここに G_{ij}^u, G_{ij}^d は定係数，h.c. は Hermite 共役であり，世代の添字 $i, j = 1, 2, 3$ について和をとるものとする．系が自発的に対称性を破ると， \mathcal{L}^{qH} は \mathcal{L}_{QCD} における質量項 $-m_f \bar{\Psi}^f \Psi^f$ を生じる．

最後に \mathcal{L}_{QCD} における純粋なグルーオン場の項 $-\frac{1}{4}G_{i\mu\nu}G_i^{\mu\nu}$ を含めてボゾン場の Lagrangian 密度を

$$\mathcal{L}^{\text{B}} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{i\mu\nu}W_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{i\mu\nu}G_i^{\mu\nu}$$

と再定義する．

以上より標準理論の完全な Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\text{L}} + \mathcal{L}^{\text{q}} + \mathcal{L}^{\text{B}} + \mathcal{L}^{\text{H}} + \mathcal{L}^{\text{LH}} + \mathcal{L}^{\text{qH}}$$

で与えられる．

5 弦理論《基礎編》

本章では弦理論の文献 [11] の内容に基づき、弦の量子化を行う。

弦理論では 4 次元よりも高次元の時空を扱う。時間は 1 次元で、余剰次元は空間的である [11, p.27]。そこで $D = d + 1$ 次元の時空における Lorentz 座標を (x^0, x^1, \dots, x^d) と書こう。 d は空間の次元であり、 x^0 が時間座標、 x^1, \dots, x^d が空間座標を表す。これまで同様、断りのない限り、時空の 4 成分 0, 1, 2, 3 をとる添字にギリシア文字 $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots$ を用い、空間成分 1, 2, 3 のみをとる添字にラテン文字 i, j, k, \dots を用いることにする。

本章と続く第 6 章ではある慣性系で見た座標が $x^\mu, x^\mu + dx^\mu$ の 2 つの事象間の不変な世界距離 ds^2 を

$$-ds^2 \equiv -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + \dots + (dx^d)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

で定義する。最左辺の ds^2 にも負号が付いていることに注意されたい。このとき Minkowski 計量の全成分は、例えば 4 次元時空を想定して書くと

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

余剰次元を持つ時空における Lorentz 変換は、 ds^2 を不変に保つ線形の座標変換として定義される。このとき光速の不変性が保証される [11, pp.27-28]。

任意の反変ベクトルを $a^\mu = (a^0, \vec{a})$ のように書く。ここに \vec{a} はベクトル a^μ の空間成分である。

また電磁気学の単位系として Heaviside-Lorentz 単位系 (第 3 章の冒頭で説明) を採用する。基本的に 5.2 節から 5.4 節では光速 c と Planck 定数 \hbar をあからさまに書いており、それ以外の節では自然単位系を採用して $c = 1, \hbar = 1$ とおいている。

5.1 弦の古典論——序論

本節では次節以降の予告として、弦の古典論の概略を一通り述べる。やや長くなるが、次節以降との内容の重複を厭わず、本節だけでも概要として読み得るように書いた。

弦の運動の記述

弦の量子化を行うには、あらかじめ弦の古典論を調べておく必要がある。古典物理学は物体 (および場) の運動を予言することを主眼とする。そこでまず、弦の古典的な運動を記述する方法について述べる (以下、図 78 参照)。一般に物体の運動は、物体の空間位置を時間の関数 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ として決めることで表現できる。あるいは物体の運動を定めることは、物体が時空に描く軌道を与えることと等価である。ここでは物体が時空に描く世界領域を用いて物体の運動を表現する観点を採用しよう。

ところで弦理論では時空は 4 次元に限らず、より高次元の時空も想定される。しかしながら弦は空間的に 1 次元的な広がりを持つので、時空の次元 D の値が何であろうと、時間経過に伴って弦はその時空の中に 2 次元の面を描く。よって弦の運動を決定するには、弦の描く 2 次元の世界面が時空に占める位置を定めれば良いことになる。世界面上の位置は 2 つのパラメーター τ, σ を用いて指定できるので、弦の世界面の位置は τ と

σ の関数として

$$x^\mu = X^\mu(\tau, \sigma)$$

と表される。こうして弦の運動を決定することは、我々が任意に導入した世界面上のパラメーター τ, σ に対して、弦座標 $X^\mu(\tau, \sigma)$ の関数形を決定することに帰着する。ここで弦座標 $X^\mu(\tau, \sigma)$ は物理的な意味としては物体の位置であるけれど、数学的にはむしろこれを、 τ と σ を引数に持つ場と見た方が有用な場合もある。実際、——話が進むにつれて明らかになるように——弦理論の定式化は場の理論によく馴染んでいるように見える。

パラメーター τ, σ の選択は任意であり、弦座標のゲージとは弦の世界面を τ, σ でパラメトライズする方法のことである。理論はゲージ不変でなければならない。ところが本章の大部分では、後で説明する光錐ゲージと呼ばれるゲージの下で解析を行うことになる。この処置は弦の量子化に適しており、大抵の物理的な問題を扱うのに充分に有用であるものの、特定のゲージだけで成り立つ方程式を扱うことを意味しているため、理論のゲージ不変性は見えづらくなるという短所がある。さらに光錐ゲージは、後述の光錐座標と呼ばれる特定の座標系を前提として定義されるため、理論の座標変換に対する共変性も同時に隠されてしまう。

いずれにせよこれ以降、 τ はある意味で時間座標の役割を果たし、 σ は空間座標の役割を果たすものと見なすことにする。そのためには具体的には τ を、座標時間 x^0 の経過に伴って単調に増大するようにとれば良い。こうすれば τ を時間の代わりに用いることができる。極端な例としては τ を座標時間 x^0 そのものにとれば良い。このとき τ が一定の線は時刻 $x^0 = \tau$ における弦を表し、その弦に沿う位置がパラメーター σ によって表されることになる (再び図 78 参照)。このようなパラメーターの取り方は静的ゲージと呼ばれる。他方、光錐ゲージでは τ, σ は無次元量として導入されるけれど、 τ が時間座標の役割を演じることに変わりはない。

弦の運動を記述する方法

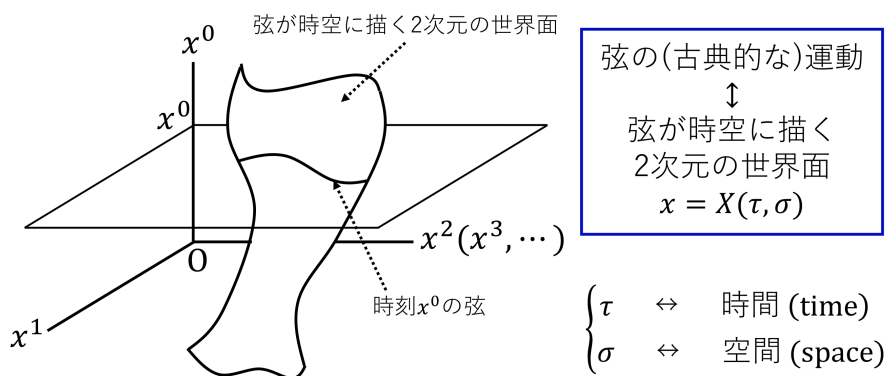


図 78

弦の作用

ここまでは弦の運動を記述する数学的・運動学的な方法について述べてきた。次に弦が実際におこなう運動を決定する問題に移ろう。弦の運動を決めるのは物理法則であり、ここからが物理の問題である。一般に古典的な理論は最小作用原理を用いて定式化できる。弦理論も例外ではない。以下では弦の作用を与えて最小作用原理から弦の運動方程式を導き、そこから弦の運動を決定することを考える (図 79 参照)。その際、理論を非相対論的な範囲に限らない。

弦の作用の表式は最終的には原理として天下りに提示されるものであるけれど、その適切な形を推定するには、相対論的な点粒子の作用からの類推という方法が役に立つ。相対論的な点粒子に対して、作用は粒子の世界線に沿う固有長さ $\int ds$ に比例した形をとる。そこで相対論的な弦の作用を、弦が描く世界面の固有面積に比例するものと考え、

$$S = -T_0 \int d\tau d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}$$

と書く (記号・表記の定義は図 79 参照)。これは南部-後藤作用と呼ばれ、積分 $\int d\tau d\sigma \sqrt{\dots}$ が世界面の固有面積に対応する。南部-後藤作用はパラメーター τ, σ の付け替えに対して不変であることを確かめることができ、ここから理論 (運動方程式) のゲージ不変性は保証される。

T_0 は作用が適正な次元を持つため必要とされる、力の次元を持つ量であり、弦の張力と呼ばれる。これは文字通り弦の張力と見なされ、弦の状態によらず弦上の各位置で一定の値をとるものとする。弦の張力 T_0 は弦理論が含む唯一の次元を持つパラメーターである。ここで弦の張力 T_0 と

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi T_0}$$

で関係付けられる量 α' を導入する。 α' は慣習的に勾配パラメーターと呼ばれる。(名前の由来は 5.4.4 節で説明する。それは強い相互作用の弦モデルにおいて重要となるが、差し当たり、名前そのものにそれほど意味はない。) すると弦理論において唯一次元を持つパラメーターとして、 T_0 の代わりに α' を用いることができる。なお自然単位系で α' が長さの 2 乗の次元を持つことを記憶しておくことは有用である。 $l_s = \sqrt{\alpha'}$ は弦の長さと呼ばれる (ただし必ずしもその意味を文字通りに解釈できるわけではない)。

弦の作用

- 相対論的な点粒子の作用

$$S = -mc \int ds \quad \text{世界線の固有長さ}$$

- 相対論的な弦の作用 (南部-後藤作用)

$$S = -T_0 \int d\tau d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} \quad \text{世界面の固有面積}$$

$$\dot{X}^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}, \quad X^{\mu'} \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma},$$

$$\dot{X} \cdot X' \equiv \dot{X}^\mu X_{\mu'}, \quad (\dot{X})^2 \equiv \dot{X}^\mu \dot{X}_\mu, \quad (X')^2 \equiv X^{\mu'} X_{\mu'} : \text{相対論的スカラー積},$$

T_0 : 弦の張力,

$$\alpha' \equiv \frac{1}{2\pi T_0} : \text{勾配パラメーター}$$

図 79

- 弦の Lagrangian L は、それを時間 τ で積分すると南部-後藤作用 S が得られるように定義される。
- また弦の Lagrangian 密度 \mathcal{L} は、その空間座標 σ による積分が弦の Lagrangian L を与えるように定義される。

したがって

$$S = \int d\tau d\sigma \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = -T_0 \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}$$

である。一般に作用と Lagrangian 密度の定義により、Lagrangian 密度を時空領域で積分すると作用が得られるけれど、このように弦理論では積分領域として通常の時空ではなく、 τ, σ でパラメトライズされた弦の世界面であることに注意する。

さらに弦の Lagrangian 密度に対して、それを弦の座標の導関数によって微分した量

$$\mathcal{P}^\tau_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -T_0 \frac{(\dot{X} \cdot X') X'_\mu - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}},$$

$$\mathcal{P}^\sigma_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} = -T_0 \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}$$

を定義する。 \mathcal{P}^τ は弦の運動量密度と見なされる量である。これに対し \mathcal{P}^σ は—— 5.4.1 節で時空における並進対称性から運動量保存則を導く際に理解されるように——運動量の流れの密度を表している。 $(\mathcal{P}^\tau_\mu, \mathcal{P}^\sigma_\mu)$ は (“時間成分” を併せた) 弦の世界面における流れの密度 (カレント) であり (μ がチャージの種類を指定し、 τ, σ が世界面内の成分を指定する)、その τ が一定の線を貫く流束は、 τ が一定の線で表される弦が持つ保存するチャージ p^μ になる (5.4.2 節における図 90 を参照)。 p^μ は弦の運動量と解釈される量であり、カレントとは対照的に、ここでは μ は時空における成分を表す。こうした事情の中に、弦の時空の中での運動と弦の世界面における場の理論という、前述の弦理論の二面性の一端を見ることができる。

境界条件, 運動方程式

閉弦は端点を持たないのに対し開弦は 2 つの端点 ($\sigma = \sigma_* \equiv 0, \pi$ とする) を持つため、両端に対して適切な境界条件を考慮しなければならない。そのような境界条件は最小作用原理から弦座標に関する運動方程式を導く際、部分積分によって現れる境界の項を消すことができるような自然な条件として同時に見出され、座標成分 $\mu = 0, 1, \dots, d$ (d : 空間次元, $D = d + 1$: 時空次元) の各々に対して

- Dirichlet 境界条件 $X^\mu(\tau, \sigma_*) = \text{const.}$
- 条件 $\mathcal{P}^\sigma_\mu(\tau, \sigma_*) = 0$

のいずれかを選べば良いことが分かる。Dirichlet 境界条件は固定端の条件であるのに対し、後者の \mathcal{P}^σ をゼロとおく条件は端点の座標を固定しないという意味で、自由端点の条件と見なされる。ただし弦の時間座標 X^0 は必ずパラメーター τ とともに増大するため、 $\mu = 0$ に対しては常に自由端点の境界条件を課さなければならない。このとき南部-後藤作用に対する最小作用原理から、開弦と閉弦のいずれに対しても運動方程式

$$\frac{\partial \mathcal{P}^\tau_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}^\sigma_\mu}{\partial \sigma} = 0$$

が得られる (以上, 図 80 参照)。これは運動量保存則を表している。

なお Dp-ブレーンは p 次元の “空間的な” 拡がりを持つ物体であり、開弦の端点都在这里に接続されていると、端点はブレーンに沿った方向には動けるため自由な端点の条件が適用されるのに対し、それに直交する方向には動けないため Dirichlet 境界条件が適用される。端点が空間の全方向に動ける場合には、全空間を埋める D-ブレーンが想定される。ここでは弦の端点が D-ブレーンに接続されていると、端点の運動はブレーン上

境界条件, 運動方程式

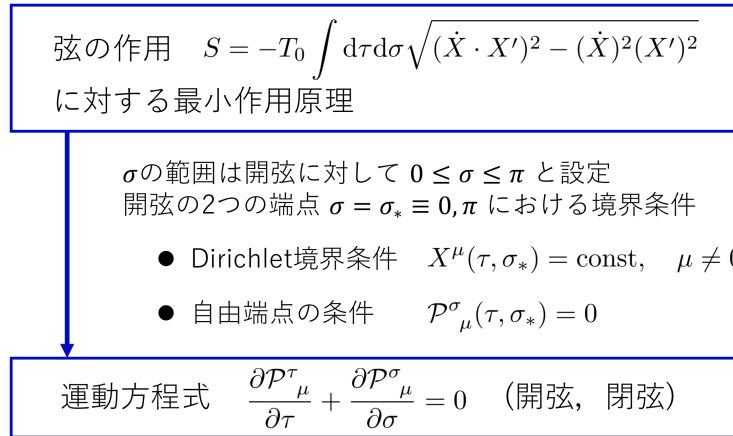


図 80

に拘束されてしまうと消極的・否定的に捉えるよりも、むしろ端点はブレインに沿った方向に運動できるようになると積極的・肯定的に捉えるという“発想の転換”を行うと理解しやすい。

光錐座標, 光錐ゲージ

次にパラメーター τ, σ の選び方の任意性を利用して、運動方程式を簡略化することを考える。既に予告したように、我々は光錐ゲージを利用する。これは光錐座標を導入して初めて定義可能なものとなっている。

そこで光錐ゲージの準備として光錐座標を定義する (図 81 参照)。光錐座標は Lorentz 座標

$$(x^0, x^1, x^2, \dots, x^d)$$

(d は空間の次元) における x^0, x^1 軸の代わりに、これらを 45 度回転させた x^+, x^- 軸を用いたものである。 x^\mp 方向に光速で運動する物体を除けば、物体の x^\pm 座標は時間とともに増加するから、光錐座標 x^\pm はともに時間座標の資格を持つ。我々は x^+ を光錐時間に同定する。(このとき平面波状態 $e^{ip \cdot x/\hbar}$ に対する関係 $i\hbar \partial_+ = cp^-$ から p^- が光錐エネルギーに同定される。) 残りの座標 $x^I (I = 2, \dots, d)$ は横方向座標と名付け、そのまま用いる^{*189}

光錐ゲージではパラメーター τ を光錐時間 X^+ に比例するように選ぶ。さらに弦の持つ運動量の x^+ 方向成分について、 σ -密度が一定となるようにパラメーター σ の目盛り付けを行う。このとき $\mathcal{P}^\tau, \mathcal{P}^\sigma$ はそれぞれ、 \dot{X}, X' に比例する形に簡略化される。したがって光錐ゲージにおいて、自由端点の条件 $\mathcal{P}^\sigma_\mu = 0$ は Neumann 境界条件 $X''^\mu = 0$ に帰着する。また弦の運動方程式は波動方程式に簡略化される (以上、図 82 参照)。

開弦の運動

ここからは運動方程式を基に、弦の運動を議論する。まず自由な端点を持つ開弦の運動を考えると、Neumann 境界条件の下で弦の座標 X^μ に対する波動方程式の実数解は、図 83 のようにモード展開される。さらに弦の運動量 p^μ および展開係数 a_n^μ の代わりに量 α_n^μ を導入して、モード展開を簡単に書くことも可能である。後で見ると量子化の後に通常の意味での生成・消滅演算子となるのは α ではなく a であるが、 α

^{*189} x^\pm のみを光錐座標と呼ぶのか、横方向座標 x^I を併せて光錐座標と呼ぶのかはやや曖昧である。

光錐座標

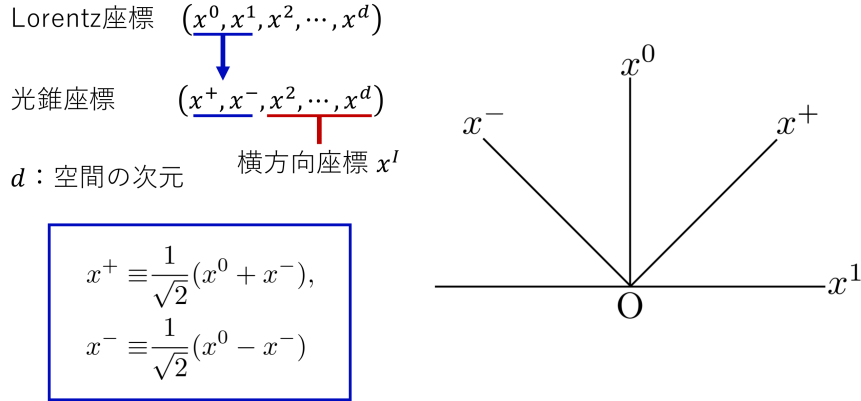


図 81

光錐ゲージ

$\beta = \begin{cases} 2 & \text{開弦} \\ 1 & \text{閉弦} \end{cases}$ とし、以降パラメータ τ, σ は無次元とする。

光錐ゲージ条件 $X^+(\tau, \sigma) = \beta \alpha' p^+ \tau$
 σ の目盛付けの条件 $p^+ = \frac{2\pi}{\beta} \mathcal{P}^{\tau+}$
 (弦の線要素 $d\sigma$ が担う運動量の x^+ 成分は $\mathcal{P}^{\tau+} d\sigma$)

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu, \quad \mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X^{\mu'}$$

運動方程式 $\ddot{X}^\mu - X^{\mu''} = 0$: 波動方程式
 (ドットは τ , プライムは σ による微分)

図 82

を用いた方が式が整理され便利な場合もある。展開係数 $\alpha_n^\mu, \alpha_n^\mu$ を単に振動子と呼ぶ。弦座標の実数条件のために、番号 $n (\neq 0)$ の符号の異なる振動子 $\alpha_n^\mu, \alpha_{-n}^\mu$ は互いに複素共役となることに注意する。量子論に移行した際にこれらは Hermite 共役な演算子に置き換わるが、これは後で述べるように、 $\alpha_n^\mu, \alpha_{-n}^\mu$ を対応する生成・消滅演算子の組と見なせるために必要なことである。

光錐ゲージ条件により、弦座標の全ての成分が独立とはいかない。例えば図 84 のように光錐座標 X^- を考えると、これは X^0 と X^1 の線形結合なので $X^\mu (\mu = 0, 1, \dots, d)$ と同じ波動方程式と境界条件を満たし、それ故、展開係数を α_n^- として X^μ 同様にモード展開されることは正しい。ところがパラメーター付けの制約条件によれば X^- (の導関数) は横方向座標 X^I (の導関数) を用いて表され、その結果、 X^- の展開係数 α_n^- は横方向成分 X^I の展開係数 α_n^I を用いて表されることが分かる。具体的には α_n^- は、 α_n^I から作られる横方向の Virasoro モード L_n^\perp に比例する。

よって横方向成分 X^I が与えられているとき、 X^- の展開の定数項 x_0^- を与えれば X^- のダイナミクスは決

開弦の運動

自由端点の条件 $\mathcal{P}^{\sigma\mu}(\tau, \sigma_*) = 0$
 \rightarrow Neumann境界条件 $X^{\mu'}(\tau, \sigma_*) = 0$

波動方程式の実数解は

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}) \frac{\cos n\sigma}{\sqrt{n}}$$

とモード展開される ($p^\mu = \int_0^\pi \mathcal{P}^{\tau\mu} d\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi \dot{X}^\mu d\sigma$ を考慮した).

$$\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu, \quad \alpha_n^\mu = a_n^\mu \sqrt{n}, \quad \alpha_{-n}^\mu = a_n^{\mu*} \sqrt{n}, \quad n \geq 1$$

を導入すると

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma$$

と書ける.

図 83

定される. さらに保存する弦の運動量の光錐成分 p^+ が与えられると, 残る弦の光錐座標 X^+ も光錐ゲージ条件 $X^+(\tau, \sigma) = 2\alpha' p^+ \tau$ によって決定される. したがって光錐ゲージにおいて, 弦の時間発展は

$$X^I(\tau, \sigma), \quad p^+, \quad x_0^-$$

によって決定されることになる.

横方向のVirasoroモード

- 光錐座標 X^- のモード展開

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos n\sigma$$

- パラメータ τ, σ の選択の含意

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2$$

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp,$$

$$L_n^\perp \equiv \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I : \text{横方向のVirasoroモード}$$

弦の時間発展は $X^I(\tau, \sigma), p^+, x_0^-$ により決定される (参考: 光錐ゲージ条件 $X^+(\tau, \sigma) = \beta\alpha' p^+ \tau$)

図 84

弦の質量 M は弦の運動量 p^μ の相対論的なスカラー積として求められる. ここで α_0^- が, したがって p^- が横方向の Virasoro モード L_0^\perp で与えられることを用いると, 質量の自乗を横方向座標の展開係数で表した公式

$$M^2 = -p^2 = 2p^+ p^- - p^I p^I = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I*} a_n^I$$

が得られる.

閉弦の運動

次に閉弦の座標のモード展開を考える (図 85 参照). 閉弦に対しては便宜的に σ の範囲を 0 から 2π に設定する. このとき σ を 2π だけ増加させると世界面上のもとの点にもどる. このようなパラメーター σ に関する周期 2π の周期境界条件がの下で, 波動方程式の解である弦座標のモード展開には 2 種類の展開係数 $\alpha_n^\mu, \bar{\alpha}_n^\mu$ が現れる. 開弦の場合と同様に, ゼロモード α_0^μ は弦の運動量に比例する.

閉弦の運動

閉弦 → 周期境界条件 $X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi)$

波動方程式の実数解は

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\alpha_n^\mu e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma})$$

とモード展開される.

α_0^μ は弦の運動量に比例する:

$$p^\mu = \int_0^{2\pi} \mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau, \sigma) d\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} \dot{X}^\mu(\tau, \sigma) d\sigma = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \alpha_0^\mu, \quad \alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu.$$

図 85

5.2 光錐座標系と余剰次元

5.2.1 光錐座標

相対論的な弦の量子化は光錐ゲージ (5.5 節) を用いて最も直接的に行える. 光錐ゲージは光錐座標と呼ばれる特定の座標系を前提として定義されている. 特別の座標系を用いない, 共変性が明白な形での弦の量子化には多くの知識が必要であるため, 本稿では詳しく取り上げない (6.10 節で共変な量子化について簡単に触れる). 本節では光錐座標について説明する [11, pp.20–22].

時間座標 x^0 と空間座標のひとつ x^1 を用いて, その代りとして光錐座標

$$x^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^1), \quad x^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^1)$$

を定義する (それ以外の Lorentz 座標 x^2, x^3, \dots, x^d を横方向座標と呼び, これらはそのまま用いる). このとき図 86 のように x^-, x^+ 軸は, x^0, x^1 軸を反時計回りに 45° 回転させて得られる光子の世界線を成す. 実際, 時空の同一点を 2 つの座標系から見た座標 $(x^0, x^1), (x^-, x^+)$ の関係

$$\begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^0 \end{pmatrix}$$

は, 座標軸を x^0, x^1 から x^-, x^+ へと反時計回りに 45° 回転させるとき, 座標系に固定された視点からは時空点が時計回りに 45° 回転して見えることを意味している.

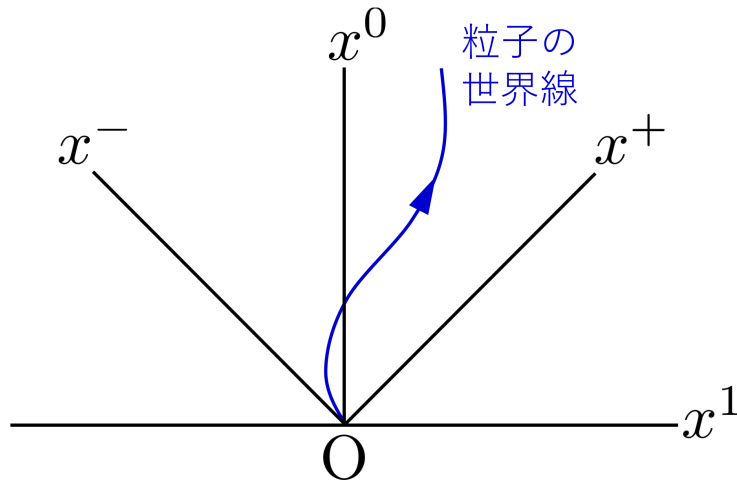


図 86 光錐座標 x^\pm

図 86 のように物理的な粒子の世界線に沿って、常に座標 x^\pm は増大する^{*190}。この意味で x^\pm はともに時間座標と見なせる。そこで我々は x^+ を“光錐時間”の座標、 x^- を空間座標と見なすことにする。

任意の反変ベクトル a^μ の光錐座標成分を、 x^\pm と同様に

$$a^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a^0 + a^1), \quad a^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a^0 - a^1)$$

で定義する。

計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$ の光錐座標成分 $\hat{\eta}_{\mu\nu}$ は、Lorentz 座標から光錐座標への変換

$$x = (x^0, x^1, x^2, \dots, x^d) \rightarrow x' = (x'^+, x'^-, x'^2, \dots, x'^d) = \left(\frac{x^0 + x^1}{\sqrt{2}}, \frac{x^0 - x^1}{\sqrt{2}}, x^2, \dots, x^d \right)$$

に対する 2 階共変テンソルの変換則

$$\hat{\eta}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \eta_{\alpha\beta}$$

により

$$\hat{\eta}_{+-} = \hat{\eta}_{-+} = -1, \quad \hat{\eta}_{II} = 1, \quad \text{その他の } \hat{\eta}_{\mu\nu} = 0 \quad (563)$$

と求まる (導出は 5.2.1 節参照)。ただし $I = 2, \dots, d$ は横方向添字であり、ここでは繰り返された添字 I について和をとらない。例えば 4 次元時空を想定して成分をあからさまに書くと

$$(\hat{\eta}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。なお、この座標変換は線形変換であり、それ故にベクトル成分の変換則になっているけれど、これは Lorentz 変換ではあり得ないことを指摘しておく (5.2.1 節参照)。

^{*190} ただし光子は例外である。例えば世界線が x^- 軸に沿う光子の x^+ 座標は一定である。

テンソルに対する一般論からあらかじめ分かっているように、反変ベクトル a^μ, b^μ の相対論的内積

$$a \cdot b = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$$

はスカラーとして変換することが保証されており、右辺を光錐成分に関して評価しても Lorentz 座標系での成分計算と同じ値を得ることができる。このことはもちろん、直接の計算によっても確かめることができる (5.2.1 節参照)。

計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$ と反変ベクトル a^μ の縮約によって得られる共変ベクトルを、通例に従って $a_\nu \equiv \hat{\eta}_{\nu\mu} a^\mu$ と書くと、これは光錐座標では添字を下げる規則

$$a_+ = -a^-, \quad a_- = -a^+, \quad a_2 = a^2, \quad a_3 = a^3$$

を与える。

なお、これ以降は計量テンソルの光錐成分 $\hat{\eta}_{\mu\nu}$ も、ハットを省いて単に $\eta_{\mu\nu}$ と書く。つまり $\eta_{\mu\nu}$ の添字に光錐成分 $\mu, \nu = +, -, 2, \dots$ を代入しても良い。

5.2.2 光錐座標系のエネルギーと運動量 [11, pp.22-23, pp.26-27]

質量 m の粒子の運動量 $p^\mu = (p^0, \vec{p})$ に対して

$$p^0 = \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p} + m^2 c^2} \geq |\vec{p}| \geq |p^1|$$

$$\Rightarrow p^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 \pm p^1) \geq 0$$

であり、この意味で p^\pm は両方ともエネルギー的である (エネルギーと解釈できるための必要条件を満たしている)^{*191}。光錐エネルギーを E_{lc} として、平面波状態に対するエネルギーの式

$$E = i\hbar\partial_t = -cp_0$$

と同様の関係が光錐成分に関しても成り立つこと

$$E_{lc} = -cp_+ = cp^-$$

を要求すると、 p^- がエネルギーと解釈されることになる。

x^1 軸に沿って運動する粒子 ($\vec{p} = (p^1, 0, \dots, 0)$) の光錐エネルギー (を c で割った値)

$$p^- = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{(p^1)^2 + (mc)^2} - p^1\}$$

と p^1 の関係は図 87 のようである。この結果は次のように解釈できる。例えば速度と運動量の x^1 成分がそれぞれ $v = c, p^1 \rightarrow \infty$ の粒子の世界線は x^+ 軸で表され、粒子の空間座標 x^- は変化しないから、“光錐速度” dx^-/dx^+ はゼロになる。これに対応して光錐エネルギー p^- もゼロになる。また $v = -c, p^1 \rightarrow -\infty$ の粒子の世界線は x^- 軸で表され、一定の光錐時間 x^+ のうちに空間座標 x^- が変化するため、光錐速度 dx^-/dx^+ は発散する。これに対応して光錐エネルギー p^- も ∞ になる。 x^1 軸に沿って運動する粒子の速度 v と光錐速度 dx^-/dx^+ 、光錐エネルギー p^- の関係は表 6 と図 88 のようにまとめられる。

^{*191} 相対論的力学における自由粒子 (質量 m , 速度 v) のエネルギー $E = mc^2/\sqrt{1-(v/c)^2} = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2}$ には不定性がなく、常に正の値を持つ [3, p.29]。もちろんポテンシャル・エネルギーを含めた全エネルギーは一般に負の値をとっても良い。

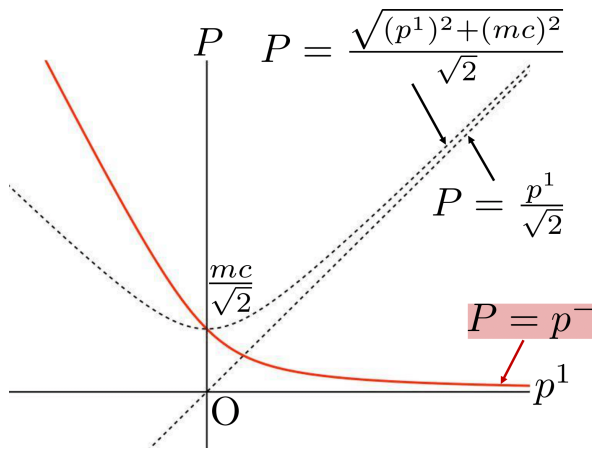


図 87 p^1 と光錐エネルギー p^- の関係

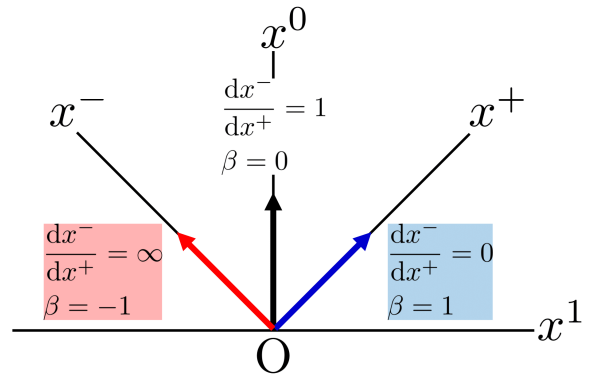


図 88 速度パラメーター $\beta = v/c$ と光錐速度 dx^-/dx^+ の関係

表 6 v と dx^-/dx^+ , p^- の関係

v	$-c \rightarrow$	0	$\rightarrow c$
dx^-/dx^+	$\infty \rightarrow$	1	$\rightarrow 0$
p^-	$\infty \rightarrow$	$mc/\sqrt{2}$	$\rightarrow 0$

5.2.3 コンパクト化した余剰次元 [11, pp.28–32]

小さな体積しか持たない余剰次元 (コンパクト空間) を構築する 1 つの簡単な方法に、同一視がある。1 次元世界を考え、 x 座標を直線に沿う原点からの距離として導入する。距離 $2\pi R$ 進むごとに同じ風景が繰り返される時、互いに $2\pi R$ だけ座標値が異なる任意の 2 点を同一視することにし、これを

$$x \sim x + 2\pi R$$

と書く。区間 $0 \leq x < 2\pi R$ がこの同一視の“基本領域”を成す。

このとき 1 次元世界を半径 R の円として捉えられる。実際コンパクト化について言及するとき、簡便な言い回しとして「 x 方向が半径 R の円へと巻き取られている」といった表現が用いられる。しかしこの同一視は必ずしも 1 次元世界が円であることを意味しない。半径 R の円を考えるにはそれを内に含む高次元の空間 (2 次元の平面) の存在が前提として必要になるけれど、実際の時空の外にそのようなものを想定することは許されない。あくまで平坦な空間の有効範囲がコンパクト化のために、 $2\pi R$ の区間 (基本領域) で実効的に途切れているということであって、同一視にそれ以上の意味はない。同一視が導入されても、それだけで空間内の計量が変わることはない。

もし余剰次元の空間的な体積が (したがって今の例では半径 R が) 小さければ、余剰次元が低エネルギー実験によって検出されないということがあり得る^{*192}。量子力学の初等的な題材として井戸型ポテンシャルの問題を例に、このことを見ることができる (10.1.2 節参照)。

^{*192} 定性的には余剰次元は小さくなければならないとは言っても、具体的には 0.1mm 程度のかなり大きな余剰次元が許容される。驚くべきことに、そのような大きな余剰次元がこれまで未検出であり続けた可能性がある [11, p.7, pp.64–66].

5.3 相対論的な弦

5.3.1 空間内の面に関する面積汎関数 [11, pp.99–102]

弦は時空において2次元の世界面を描く。相対論的な弦の作用は、相対論的な点粒子の作用からの自然な一般化によって得られる。

- 点粒子の作用 … 粒子の描く世界線の“固有長さ”に比例
- 弦の作用 … 弦の描く世界面の“固有面積”に比例 (南部-後藤作用)

そこでまず、任意に指定された時刻に空間内に存在する2次元面の面積を考える。2次元面を含んでいる世界 (今の場合、 $x^1x^2x^3$ 空間) を標準空間と呼ぶ。面上の各位置 \vec{x} は2つのパラメーター ξ^1, ξ^2 で指定される。パラメーターの値の変化 $d\xi^1, d\xi^2$ に対応する面上の変位

$$d\vec{v}_1 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} d\xi^1, \quad d\vec{v}_2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} d\xi^2$$

の張る面積要素は

$$dA = \sqrt{|d\vec{v}_1|^2 |d\vec{v}_2|^2 - (d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_2)^2} = d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \right) \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \right) - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \right)^2}$$

なので、曲面の面積は

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \right) \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \right) - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \right)^2} \quad (564)$$

で与えられる。

5.3.2 面積のパラメーター付け替え不変性 [11, pp.102–105]

面全体の面積も、面の小さな部分の面積も、それを計算するためのパラメーターの付け方に依存してはならない。そこで面積の式 (564) のパラメーター不変性を確かめる。

考えている面 S 上の線要素は

$$d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} d\xi^i, \quad \therefore ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^j} d\xi^i d\xi^j$$

なので (添字 i, j は2つの値1と2をとる)、面 S の上に誘導された計量テンソルを

$$g_{ij} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^j} \quad (565)$$

として

$$ds^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j \quad (566)$$

と書ける。計量 g_{ij} を用いて面積の式 (564) は

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g}, \quad g \equiv \det(g_{ij}) \quad (567)$$

と書き換えられる。

さて、線要素の式 (566) が任意のパラメーター ξ に対して成り立つためには、もう一組のパラメーターを $(\tilde{\xi}^1, \tilde{\xi}^2)$, その計量を \tilde{g}_{pq} としたとき、計量が 2 階共変テンソルの変換則

$$g_{ij} = \tilde{g}_{pq} \frac{\partial \tilde{\xi}^p}{\partial \xi^i} \frac{\partial \tilde{\xi}^q}{\partial \xi^j}$$

を満たさなければならず (計量の定義式 (565) はこれを満たしている), ここから

$$\sqrt{g} = \sqrt{\tilde{g}} \left| \det \left(\frac{\partial \tilde{\xi}^i}{\partial \xi^j} \right) \right|, \quad \tilde{g} \equiv \det(\tilde{g}_{pq})$$

が得られる. よって面積の式 (567) は

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g} = \int [d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 \left| \det \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial \tilde{\xi}^j} \right) \right|] \left[\sqrt{\tilde{g}} \left| \det \left(\frac{\partial \tilde{\xi}^i}{\partial \xi^j} \right) \right| \right] = \int d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 \sqrt{\tilde{g}} \\ \left(\because \frac{\partial \xi^i}{\partial \tilde{\xi}^k} \frac{\partial \tilde{\xi}^k}{\partial \xi^j} = \delta^i_j \Rightarrow \det \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial \tilde{\xi}^j} \right) \det \left(\frac{\partial \tilde{\xi}^i}{\partial \xi^j} \right) = 1 \right)$$

となり, パラメーター付け替え不変性を満たしている.

なお 1.1.6 節で行ったのと同様に, 面積の公式 (567): $A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g}$ は次のような, S の空間次元に依らない仕方でも説明できる. まずパラメーター (ξ^1, ξ^2) として正規直交座標 (Ξ^1, Ξ^2) を導入すると (計量は δ_{ij}), 面積は

$$A = \int d\Xi^1 d\Xi^2 = \int \left| \frac{\partial(\Xi)}{\partial(\xi)} \right| d\xi^1 d\xi^2$$

と計算できる. ここで任意のパラメーター (ξ^1, ξ^2) への変数変換を行う際の Jacobi 行列式 $\partial(\Xi)/\partial(\xi)$ は, 計量テンソルの変換則から

$$g_{ij} = \frac{\partial \Xi_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial \Xi_l}{\partial \xi_j} \delta_{kl} \rightarrow \sqrt{g} = \frac{\partial(\Xi)}{\partial(\xi)}$$

と定まる.

5.3.3 時空内の面に関する面積汎関数 [11, pp.105–110]

ここからは弦が $(d+1)$ 次元時空に描く 2 次元の面を考える. 時空には座標 $x^\mu = (x^0, x^1, \dots, x^d)$ が与えられており, 面はパラメーター (τ, σ) を用いて

$$x^\mu = X^\mu(\tau, \sigma)$$

と表される. 粗く言うと

- σ は弦に沿った位置に関係し,
- τ の増加は時間の経過に対応する

ものとし^{*193}, 弦の端点が描く世界線は一定の σ の値を持ち, また世界面上の各点で $dX^0/d\tau \neq 0$ とする.

^{*193} σ は space(空間) の頭文字 s に対応するギリシア文字, τ は time(時間) の頭文字 t に対応するギリシア文字として用いられているものと考えれば良い.

世界面の面積は、面積の式 (564) で内積を $d + 1$ 次元時空中におけるスカラー積に置き換え、根号の中身の符号を入れ替えた

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2} \quad (568)$$

で定義されると考える。これは Lorentz 不変量となっている。

根号の中身の符号を考えるにあたって、次のことに注意する。すなわち実は、弦理論で考える弦はその各部の動きを辿れるような連続体ではない。弦の内部の点の運動を辿ることは、弦の上でパラメーター σ が一定の点の運動を辿ることを意味しており、 σ のパラメーター付けは人為的である。したがって弦のどの点が何処へ動いたかを言うことはできず、それは単に見方の問題に還元されることになる。(このような曖昧さは量子論の不確定性原理とは無関係に、古典論の段階から存在するものである。) ただ、終状態の弦の各点 p に対して、始状態の弦において、そこへ光速以下の運動によって到達できるような点 p' を見いだすことは可能でなければならない。ところで可能な運動は時間的な方向に起こるから、これは世界面の各点において、時間的な正接方向があることを意味する(弦が局所的に光速で動いている点は例外である)。一方、空間的な方向は必ず存在する。各点は同時刻に弦を構成している点と空間的に隔たっている。このとき面積の式 (568) の根号の中身は正になることを以下で説明する(時間的な正接を持たないような例外的な点ではゼロになる)。なお、時間的な正接を持たないような例外的な点は連続無限個とならない、すなわち弦の有限の寸法を持つ部分が光速で動くことはできない(これにより面積の式 (568) の被積分関数がゼロになるのは世界面上の離散的な点に限られる)。

■面積の式 (568) の根号の中身が正になること

$$v^\mu(\lambda) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} + \lambda \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$$

とおくと、これは λ の値を変化させることにより、世界面上の任意の点におけるすべての方向の正接ベクトルを表せる。

任意の点が時間的な正接ベクトルと空間的な正接ベクトルの両方を持つためには

$$v^2(\lambda) = \lambda^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 + 2\lambda \frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma} + \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2$$

が、 λ の値を変化させることにより正と負の両方の値をとり得なければならない。

時間的な正接ベクトルを持たない例外的な点においては、光速での運動のみが物理的な運動として許容されるため、これに対応する零ベクトルの方向が存在しなければならない。このとき唯一つの λ に対して $v^2(\lambda) = 0$ となり、それ以外の λ に対して $v^2(\lambda) > 0$ である。

以上が成立する条件は λ の 2 次式 $v^2(\lambda)$ の判別式に他ならない、面積の式 (568) の根号の中身が

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 \geq 0$$

となることである(等号は時間的な正接ベクトルを持たない例外的な点で成立する)。

5.3.4 南部-後藤作用 [11, pp.110-111]

σ が長さの次元を持ち、 τ が時間の次元を持つものと見なす。パラメーター (τ, σ) の単位に依らず、面積の式 (568) は長さの自乗の次元を持っている。ここで弦理論が含む唯一の次元を持つパラメーターとして、弦の

張力 T_0 を導入する．弦の張力 T_0 は弦の状態に依らず，弦に沿って一定である（弦理論で考える弦はそのように‘定義’される，5.3.7 節参照）．面積の式 (568) に T_0/c をかけて作用の次元を持つ量にし（さらに負号を付けた），

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}, \quad \dot{X}^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}, \quad X'^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \quad (569)$$

が相対論的な弦の作用となる（弦の世界面上におけるパラメーター σ の範囲を一般に $0 \leq \sigma \leq \sigma_1$ と書く）．これは南部-後藤作用と呼ばれる．

弦の描く世界面上の線要素は

$$-ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

となる（ $\xi^1 = \tau, \xi^2 = \sigma$ とし， α, β の値は 1 と 2 を取るものとする）．そこで世界面上に誘導された計量

$$\gamma_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \cdot \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\beta}$$

を定義すると，南部-後藤作用 (569) は

$$S = -\frac{T_0}{c} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma}, \quad \gamma \equiv \det(\gamma_{\alpha\beta})$$

と表される．これは 5.3.2 節と同じ理由で，パラメーターの付け替えに対して不変である．

南部-後藤作用 (569) は弦座標の 1 階微分までを含む．このため後で見えるように運動方程式は 2 階微分方程式となり，古典的因果律が満たされることをこの段階で指摘できる．ここで古典的因果律とは弦座標 X^μ とその時間変化率の初期値を与えると，その後の弦の運動が逐次的に完全に決定されることを指す．

なお南部-後藤作用の正当性を非相対論的極限の観点から理解するには，弦の各要素が持つ何らかの意味での速度を定義しなければならない．5.3.8 節では弦の横方向速度を定義し，南部-後藤作用と（適切な非相対論的極限の表式を持つ）点粒子の作用との類似性を議論する．

5.3.5 運動方程式，境界条件，D-ブレイン [11, pp.111–115]

南部-後藤作用 (569) を

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X'^\mu), \quad \mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X'^\mu) = -\frac{T_0}{c} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} \quad (570)$$

と書き（ \mathcal{L} は Lagrangian 密度），記号

$$\mathcal{P}^\tau_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') X'_\mu - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}, \quad (571)$$

$$\mathcal{P}^\sigma_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} \quad (572)$$

を導入すると（最右辺については 10.2.1 節を参照），変分原理により，弦座標の変化 δX^μ に伴う作用の変分は

$$0 = \delta S = \int_0^{\sigma_1} d\sigma [\delta X^\mu \mathcal{P}^\tau_\mu]_{\tau_i}^{\tau_f} + \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau [\delta X^\mu \mathcal{P}^\sigma_\mu]_0^{\sigma_1} - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \delta X^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{P}^\tau_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}^\sigma_\mu}{\partial \sigma} \right) \quad (573)$$

と表される (導出は 10.2.1 節を参照). 弦の始状態・終状態は指定されているため $\delta X^\mu(\tau_i, \sigma) = \delta X^\mu(\tau_f, \sigma) = 0$ であることから最右辺第 1 項は消える. よって最右辺第 2 項をゼロとするような適正な境界条件の下で, 相対論的な弦の運動方程式

$$\frac{\partial \mathcal{P}^\tau_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}^\sigma_\mu}{\partial \sigma} = 0$$

を得る. $\partial \mathcal{P}^\tau_\mu, \mathcal{P}^\sigma_\mu$ はそれぞれ弦の運動量密度と運動量流束と見なされる量であって, これは運動量保存則を表している (5.4.1 節参照).

最右辺第 2 項 $\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau [\delta X^\mu \mathcal{P}^\sigma_\mu]_0^{\sigma_1}$ は μ のとる値 $0, 1, \dots, d$ および弦の端点での σ の値 $\sigma_* \equiv 0, \sigma_1$ で指定される $2D$ 個の項から成る. その各々をゼロにするような, 弦の端点に課すことのできる境界条件として以下の 2 つを考える.

- Dirichlet 境界条件

$$\frac{\partial X^\mu(\tau, \sigma_*)}{\partial \tau} = 0 \quad \text{または} \quad X^\mu(\tau, \sigma_*) = \text{const}, \quad \therefore \delta X^\mu(\tau, \sigma_*) = 0$$

- 自由端点の条件 $\mathcal{P}^\sigma_\mu(\tau, \sigma_*) = 0$

– これが自由端点の条件と呼ばれるのは, 端点の座標に制約を課していないからである

なお τ が変化すると時間 X^0 が変化するため, $\mu = 0$ に対しては Dirichlet 境界条件を課することができず, 自由端点の境界条件が適用される. 閉弦は端点を持たないので境界条件を必要としない.

Dirichlet 境界条件は開弦の端点がある対象に取り付けられているときに成立する. このような対象を D-ブレイン (D は Dirichlet を意味する), 特に p 次元の空間的な拡がりを持つものを Dp -ブレインと呼ぶ. 例として 3 次元空間において D2-ブレインが (x^1, x^2) 面に拡がっており, 弦の両端がここに接続されている場合, 弦の端点は (x^1, x^2) 面内では動けるが x^3 方向には動けない. このとき適用される境界条件は

$$\begin{aligned} \mu = 1, 2 &\rightarrow \text{自由端点の境界条件} \\ \mu = 3 &\rightarrow \text{Dirichlet 境界条件} \end{aligned}$$

となる. なお D-ブレインは弦理論において物理的に存在する実体であり, 恣意的に導入されるものではない.

5.3.6 静的ゲージ [11, pp.115–117]

弦の作用はパラメーター付け替え不変性を備えているので, 我々は自由にパラメーターを選ぶことが許される. 適切なパラメーターの選択により, 弦の運動の記述が容易となる.

本章ではこれ以降, パラメーター τ を

$$\tau = t$$

と選ぶ. これは静的ゲージと呼ばれる. $X^0 = ct$ なので弦が持つ座標は $X^\mu = \{ct, \vec{X}(t, \sigma)\}$ となる.

5.3.7 弦の張力とエネルギー [11, pp.117–119]

本節では南部-後藤作用 (569) の係数 $-T_0/c$ の妥当性を理解し, 弦の張力に対する洞察を得るために, x^1 軸に沿って引き伸ばされた静的な弦を考える.

x^1 軸の $0 \leq x^1 \leq a$ を占める弦に対して, 弦の座標は $X^\mu = (ct, f(\sigma), \vec{0})$ となる. ただし $f(\sigma)$ は $f(0) = 0, f(\sigma_1) = a$ を満たす, 単調増加する連続関数であり, $\vec{0}$ は $(d-1)$ 次元ベクトルである. 静的ゲージ

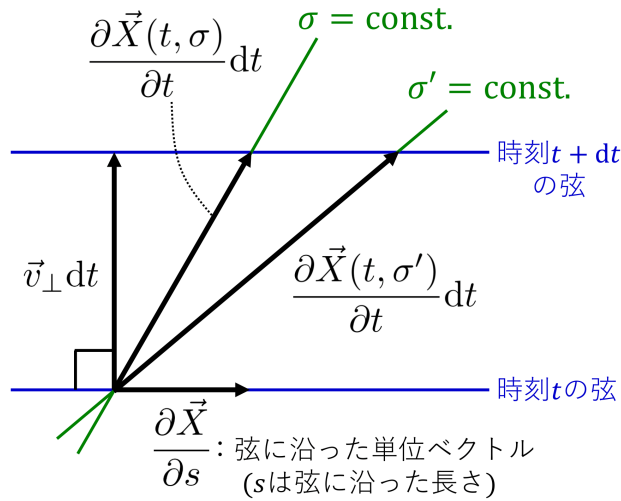


図 89 空間における弦の運動と横方向速度 \vec{v}_\perp

を用いると弦の作用 (569) は

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} = -\frac{T_0}{c} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{df}{d\sigma} = \int_{t_i}^{t_f} dt (-T_0 a)$$

と計算できる。最右辺の $-T_0 a$ は Lagrangian に相当する。今の場合、系の運動エネルギーがゼロだから、これはポテンシャルエネルギーが $V = T_0 a$ であることを意味する。 T_0 を弦の持つ (一定の) 張力とする解釈の下で、これは弦を無限小の寸法から長さ a まで引き伸ばす仕事となっている。このことから作用の式における T_0 を弦の張力と見なすことと、作用の式に付けてある負号の存在が正当化される。

弦にはあらかじめ質量が付与されているのではなく、弦は引き伸ばされてエネルギーを得ることによってのみ質量を持つ。よって単位長さあたりの質量を μ_0 とすると

$$(\mu_0 a) c^2 = T_0 a, \quad \therefore \mu_0 = T_0 / c^2. \quad (574)$$

なお本節で考えた、弦が x^1 軸の $0 \leq x^1 \leq a$ を占めるという状況 $X^\mu = (ct, f(\sigma), \vec{0})$ は運動方程式と境界条件に矛盾するものではないことが確かめられる (確認は 10.2.2 節)。

5.3.8 横方向速度から見た作用 [11, pp.119–123]

弦の速度のようなものを定義したい。 $\partial \vec{X} / \partial t$ は (図 89 のように σ が一定の曲線に沿い)、パラメーター σ の選択に依存するため物理的に重要でない。一方、ある指定された時刻 t における弦の上の点が弦に垂直に動いたと仮定した場合の速度として横方向速度 \vec{v}_\perp を定義すると (図 89 参照)、定義によりこれはパラメーターの選択に依らない。弦に沿った単位ベクトル $\partial \vec{X} / \partial s$ (s は弦に沿った長さ) を用いて横方向速度は

$$\vec{v}_\perp = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$$

と表される。(これがパラメーター σ の選択に依らずに同一のベクトル \vec{v}_\perp を与えることが図 89 から読み取れる。)

静的ゲージの下で弦の作用 (569) は横方向速度 v_{\perp} を用いて

$$S = -T_0 \int dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}} \quad (575)$$

と表される (導出は 10.2.3 節を参照). これは Lagrangian が $L = -T_0 \int ds \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}$ であることを意味する. ここで $T_0 ds$ が弦の素片 ds の静止エネルギーであることに注意すると (単位長さあたりの静止エネルギーは式 (574): $\mu_0 c^2 = T_0$), これは相対論的な粒子の Lagrangian $L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ の自然な一般化になっていることが分かる.

■横方向速度と縦方向の振動, σ のパラメーター付けについて 弦の速度を定義する方法には曖昧さがあり, 横方向速度の導入は 1 つの見方に過ぎないと言える. しかしそれは σ の選択に依らない意味を持っているため, 「物理的な運動は弦に対して横方向のものに限られる」と言って良い. 言い換えると, 相対論的な弦では縦方向の振動を考えることに意味がない.

ところで 5.3.3 節で述べたように, 弦の各点の運動を追うことは σ の人為的なパラメーター付けに還元される. しかしながら横方向速度自体はパラメーター σ の選択に依らずに定義でき, σ のパラメーター付けによって弦の各点の軌跡を定義づけることは別問題である. また例えば弦の線要素が運ぶエネルギーの σ -密度が弦に沿って一定となるような σ のパラメーター付け

$$\frac{ds}{d\sigma} = \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}$$

の下では [11, pp.133–135], 弦に固定した 2 点 (一定の $d\sigma$ の値だけ隔たる) の間の弦に沿う長さ ds は変化し得ると考えられる.

5.4 世界面カレントと保存量

本節では対称性から導かれる弦の保存量について学ぶ.

5.4.1 世界面において保存するカレント [11, pp.158–160]

弦の作用 (569), (570) は

$$S = \int d\sigma d\tau \mathcal{L}(\partial_{\tau} X^{\mu}, \partial_{\sigma} X^{\mu})$$

という形をしているため

$$\begin{array}{lll} \text{場の変数} & \phi_r & \rightarrow \text{弦の座標} & X^{\mu} \\ \text{場の存在する世界の座標} & \xi^{\alpha} & \rightarrow \text{世界面のパラメーター} & (\tau, \sigma) \end{array}$$

と対応する. Lagrangian 密度は $\partial_{\alpha} X^{\mu}$ だけに依存するため, 世界面上の各点が時空において同じベクトル量 ε^{μ} だけ推進するような変分

$$\delta X^{\mu}(\tau, \sigma) = \varepsilon^{\mu}$$

に対して不変であり, カレントの一般式 (42) より, これに対応して保存するカレント

$$j^{\alpha}_{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\alpha} X^{\mu})} = \mathcal{P}^{\alpha}_{\mu}$$

が得られる。ここで作用の積分変数が時空座標ではなく世界面のパラメーター $\xi^\alpha = (\tau, \sigma)$ であるため、連続の式は

$$0 = \partial_\alpha \mathcal{P}^\alpha_\mu = \frac{\partial \mathcal{P}^\tau_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}^\sigma_\mu}{\partial \sigma}$$

という形をとる。これは 5.3.5 節で得た弦の運動方程式に他ならない。

- $\mu = 0, 1, 2, 3$ は対称変換におけるパラメーターを、従ってチャージの種類を識別する添字
- $\alpha = \tau, \sigma$ はカレントの“成分”を識別する添字

であり、カレントは世界面上に存在する。保存するチャージは

$$p_\mu(\tau) = \int_0^{\sigma_1} \mathcal{P}^\tau_\mu(\tau, \sigma) d\sigma \quad (576)$$

であり、これは時空内の並進不変性から生じているので弦の運動量である。実際、 $\mathcal{P}^\tau_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}$ は弦が運ぶ運動量の σ -密度と解釈される量である。ここから \mathcal{P}^α は“時空” $((\tau, \sigma)$ 空間)における運動量の流束であり、空間成分 $\alpha = \sigma$ は“空間”における運動量の流束と解釈できる。

弦に対して

$$\partial_\alpha j^\alpha_\mu = \partial_\alpha \mathcal{P}^\alpha_\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp_\mu}{d\tau} = 0$$

を確かめる。(と言うのも、1.3.2 節の一般論でカレントが $\partial_\alpha j^\alpha_\mu = 0$ を満たすことは言えるけれど、以下で見るように弦に関する境界条件に対しては改めてチャージの保存 $\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0$ を確かめる必要がある。)

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \int_0^{\sigma_1} \frac{\partial \mathcal{P}^\tau_\mu}{\partial \tau} d\sigma = - \int_0^{\sigma_1} \frac{\partial \mathcal{P}^\sigma_\mu}{\partial \sigma} d\sigma = -\mathcal{P}^\sigma_\mu|_0^{\sigma_1} \quad (577)$$

において最右辺は

- 閉弦に対しては $\sigma = 0$ と $\sigma = \sigma_1$ は世界面上における同じ位置を表すので
- 自由な端点を持つ開弦では境界条件 $\mathcal{P}^\sigma_\mu(\tau, \sigma = 0, \sigma_1) = 0$ により

ゼロになり、 p_μ は保存する:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0.$$

次節で見るように $\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0$ も成立する。なお Dirichlet 境界条件を与えられた開弦の運動量は一般に保存しない(例えば両端を壁に接続された非相対論的な開弦の運動量は、壁から力を受けることにより上下に変化する)。

■場の理論としての定式化について ここまでの議論を改めて振り返ると、弦の座標 $X^\mu(\tau, \sigma)$ は物体の位置というよりもむしろ、数学的には世界面座標 (τ, σ) を引数とする場として扱われる。このとき Lorentz 座標 μ は場の種類の指標にすぎず、 (τ, σ) が場を定義する座標となる。そして場の各種類 μ に応じて保存するカレント \mathcal{P}^α_μ が得られる ($\alpha = \tau, \sigma$ は世界面内の座標成分)。これは世界面座標 (τ, σ) の関数となっており、それ故、世界面の中にもみ存在するカレントと見なせる。これに対して保存する運動量 $p_\mu = \int \mathcal{P}^\tau_\mu d\sigma$ の添字 μ は、再び弦を含む時空における成分を指定することにも注意する (5.4.3 節の $M_{\mu\nu}$ も同様)。

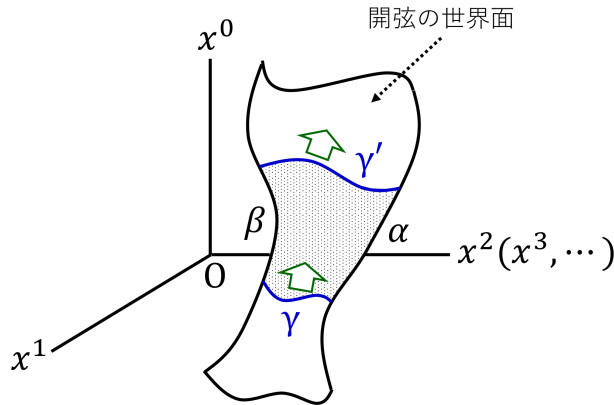


図 90 弦の世界面を流れる運動量流束 (カレント)

5.4.2 全運動量カレント [11, pp.160–163]

まず自由端を持つ開弦を想定すると、図 90 のような世界面を横切る任意の曲線 γ は“面積素ベクトル” $(d\sigma, -d\tau)$ を持つので、曲線 γ を通過する 2 次元カレント $(\mathcal{P}^\tau_\mu, \mathcal{P}^\sigma_\mu)$ の流束にあたる全運動量は

$$p(\gamma) = \int_\gamma (\mathcal{P}^\tau_\mu d\sigma - \mathcal{P}^\sigma_\mu d\tau)$$

と表される。ところで保存則 $\partial_\alpha \mathcal{P}^\alpha_\mu = 0$ によれば、図 90 の 2 つの曲線 γ, γ' と境界 α, β に囲まれた世界面領域からのわき出しはゼロになる。しかるに境界 α, β では $d\sigma = 0$ および自由端点の条件 $\mathcal{P}^\sigma_\mu = 0$ によりカレントの通過量がゼロになるから、

$$p(\gamma) = p(\gamma')$$

でなければならない。直観的に言えば、曲線 γ から流入したのと同じだけのチャージ (運動量) が曲線 γ' から流出する。以上より保存則は $p_\mu(\gamma)$ の値が曲線 γ の選び方に依らないことを意味する (対応する計算は 10.3.1 節)。

特に曲線 γ として $\tau = (\text{一定})$ の線を考えて、

$$p_\mu(\gamma) = \int \mathcal{P}^\tau_\mu d\sigma = p_\mu$$

のように $p_\mu(\gamma)$ は式 (576) の $p_\mu(\tau)$ になるので、これは狭義の保存則 $dp_\mu/d\tau = 0$ に帰着する。さらに $t = (\text{一定})$ の線もまた図 90 の曲線 γ のような形で表されるので、 p_μ を $t = (\text{一定})$ の線 γ に沿う積分 $p_\mu(\gamma)$ とすると、これは $dp_\mu/dt = 0$ を含んでいる。なお閉弦に対しても同様に議論できる。

5.4.3 Lorentz 対称性とカレント [11, pp.164–166]

相対論的な弦の Lagrangian 密度 (570):

$$\mathcal{L} = -\frac{T_0}{c} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} \quad (578)$$

は Lorentz 不変量である (そして我々は弦の量子化を行う際, 理論の Lorentz が失われないか注意する必要がある). 弦座標の無限小の Lorentz 変換 (39):

$$X^\mu \rightarrow X^\mu + \delta X^\mu, \quad \delta X^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} X_\nu, \quad \varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu} \quad (579)$$

に対して Lagrangian 密度は不変であり (証明は 10.3.2 節), ここから保存するカレント

$$\mathcal{M}^\alpha{}_{\mu\nu} = X_\mu \mathcal{P}^\alpha{}_\nu - X_\nu \mathcal{P}^\alpha{}_\mu (= -\mathcal{M}^\alpha{}_{\nu\mu}) \quad (580)$$

が見出される ($\partial_\alpha \mathcal{M}^\alpha{}_{\mu\nu} = 0$, 導出は 10.3.2 節). 運動量チャージの場合の説明 (5.4.2 節) と同様に, 開弦と閉弦のいずれに対してもチャージ

$$M_{\mu\nu} = \int \mathcal{M}^\tau{}_{\mu\nu}(\tau, \sigma) d\sigma \quad (581)$$

は任意の曲線 γ に対して

$$M_{\mu\nu} = \int_\gamma (\mathcal{M}^\tau{}_{\mu\nu} d\sigma - \mathcal{M}^\sigma{}_{\mu\nu} d\tau)$$

と計算される. ただし 5.4.2 節の議論を繰り返す際, 開弦に対しては世界面の境界 $\sigma = 0, \sigma_1$ において $\mathcal{P}^\sigma{}_\mu = 0$, したがって $\mathcal{M}^\sigma{}_{\mu\nu} = 0$ であることに注意する.

τ が一定の線を用いたチャージ $M_{\mu\nu}$ の計算式 (581) により

- 空間回転に関するチャージ

$$M_{ij} = \int (X_i \mathcal{P}^\tau{}_j - X_j \mathcal{P}^\tau{}_i) d\sigma$$

は弦の角運動量 $L_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M_{jk}$ を与える.

– 実際 $L_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M_{jk}$ は

$$L_1 = \frac{1}{2} (M_{23} - M_{32}) = M_{23} = \int (X^2 \mathcal{P}^\tau{}_3 - X^3 \mathcal{P}^\tau{}_2) d\sigma, \quad \text{etc.}$$

を与える. 弦の素片 $d\sigma$ の持つ運動量は $(\mathcal{P}^\tau{}_1, \mathcal{P}^\tau{}_2, \mathcal{P}^\tau{}_3) d\sigma$ だから,

これは確かに弦の角運動量成分を成す.

- 等速推進に関するチャージ M^{0i} は

弦の保存するエネルギー E と合わせて, 弦の重心 (エネルギー中心)

$$X_{\text{cm}}^i(t) \equiv \frac{1}{E} \int d\sigma X^i c \mathcal{P}^{\tau 0}$$

の運動を記述する:

$$X_{\text{cm}}^i(t) = -\frac{cM^{0i}}{E} + t \frac{c^2 p^i}{E}.$$

– 粒子系に対する同様の議論を 1.3.2 節で行った.

5.4.4 勾配パラメーター α' [11, pp.166–168]

弦理論において唯一, 単位を持つパラメーターとして, 弦の張力 T_0 の代わりに

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi T_0 \hbar c} \quad (582)$$

を用いることができる。 α' は慣習的に——あるいは歴史的事情により、と言っても良いかもしれないが——勾配パラメーターと呼ばれている。

α' の名前の由来を簡単に説明しておく。直線状の開弦が (x, y) 面内で固定された中点のまわりを一定の角速度で回転するとき、角運動量の大きさ $J = M_{12}$ とエネルギー E には

$$\frac{J}{\hbar} = \alpha' E^2$$

という関係があることが見出される。よって比例係数 α' は角運動量をエネルギーの自乗に対してプロットしたときの勾配を表すため、勾配パラメーターと呼ばれる。このような背景の事情はそれ自体、理論的に興味深いものである。と言うのも強粒子励起の角運動量をエネルギーの自乗の関数としてプロットすると、Regge 軌跡と呼ばれる近似的な直線が得られる。このため回転する古典的な開弦における角運動量とエネルギーの自乗の線形関係 $J = \alpha' E^2$ は、中間子励起が形成する Regge の説明を、弦理論から与え得る可能性を示唆している。この話題については 6.9 節で手短かに再論する。

あるいは弦理論の特徴的な長さ

$$l_s = \hbar c \sqrt{\alpha'}$$

を導入することができる。 l_s は“弦の長さ”と呼ばれるけれど、これを額面通りの意味にとってはならない。 l_s はあくまで長さの次元を持つ弦理論の基礎パラメーターであり、確かに弦の典型的な長さの目安と見なされるけれど、弦が固定された長さ l_s を持っているわけではない。

5.5 相対論的な光錐弦

本節では弦の運動方程式の完全な解を具体的に得ることができるような、量子化に適したゲージとして、光錐ゲージを導入する。簡単に述べると、光錐ゲージは

- τ が光錐時間 X^+ に関係づけられ
- σ が p^+ の密度を一定にするように選ばれている

パラメーター付けである。

5.5.1 τ の選択の方法 [11, pp.173–176]

光錐ゲージを導入するにあたって、静的ゲージの条件式 (5.3.6 節) を

$$n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = \lambda \tau$$

と一般化する。時空座標 x^μ に対して $n_\mu x^\mu = \lambda \tau$ は右辺の τ の値に応じて、異なる超平面を表す。そして上式は各 τ の値で指定される超平面と弦の世界面の交線に、その τ の値が割り当てられることを意味する。ベクトル n^μ に垂直な超平面と弦の世界面の交線が、共通の τ の値を持つ点 $X^\mu(\tau, \sigma)$ から成り、弦を成す。 n^μ を時間的ベクトルに選べば、弦上の 2 点の隔たり ΔX^μ が空間的なベクトルとなることが保証される (理由は 10.4.1 節)。

さらにベクトル n^μ を $n \cdot p$ が一定となるように選び (これは弦の運動量 p^μ のある成分が保存しない場合にも可能である)^{*194}、ゲージ条件を

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = \tilde{\lambda}(n \cdot p)\tau$$

^{*194} これは n^μ が時間的なベクトルであることと両立すると考えられる。

と書き換える^{*195}. 開弦に対して $n \cdot p$ が保存する条件は, 式 (577):

$$0 = \frac{d}{d\tau}(n \cdot p) = n^\mu \frac{dp_\mu}{d\tau} = n^\mu \int_0^{\sigma_1} \frac{\partial \mathcal{P}^\tau}{\partial \tau} d\sigma = -n^\mu \int_0^{\sigma_1} \frac{\partial \mathcal{P}^\sigma}{\partial \tau} d\sigma = -n^\mu \mathcal{P}^\sigma \Big|_0^{\sigma_1}$$

より端点 $\sigma = 0, \sigma_1$ で $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ となることである. (閉弦では運動量が保存するので (5.4.1 節), この条件は自動的に満たされている.)

- これまで τ が時間, σ が長さの単位を持つものとして扱ってきたが, ここからは τ も σ も無単位と見なす.
→ $\tilde{\lambda}$ は $\frac{c}{T_0} = 2\pi\alpha' \hbar c^2$ の単位を持つ.
- 自然単位系を採用 ($\hbar = 1, c = 1$).
→ $[\tilde{\lambda}] = [\alpha']$.
そこで開弦に対して $\tilde{\lambda} = 2\alpha'$ と選び

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = 2\alpha'(n \cdot p)\tau \quad (\text{開弦})$$

とする.

5.5.2 σ のパラメータ付け [11, pp.176–180]

次の条件を満たすようなパラメータ σ を選ぶことができる.

- 弦全体 (τ が一定の曲線) にわたり

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau = (\text{一定}).$$
- パラメータの範囲を開弦に対して $0 \leq \sigma \leq \pi$, 閉弦に対して $0 \leq \sigma \leq 2\pi$ とする.

このとき運動量密度 $n \cdot \mathcal{P}^\tau$ は全運動量 $n \cdot p$ を σ の全長 π または 2π で割ったものとなる:

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau = \begin{cases} n \cdot p / \pi & (\text{開弦}) \\ n \cdot p / 2\pi & (\text{閉弦}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow n \cdot p = \frac{2\pi}{\beta} n \cdot \mathcal{P}^\tau, \quad \beta = \begin{cases} 2 & (\text{開弦}) \\ 1 & (\text{閉弦}) \end{cases}.$$

これに併せて τ に対するパラメータ付けの条件を

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = \beta\alpha'(n \cdot p)\tau \quad (583)$$

とすると便利である (開弦 $\beta = 2$ に対する条件は 5.5.1 節で与えたものである).

この条件 $n \cdot \mathcal{P}^\tau = \frac{\beta}{2\pi} n \cdot p$ の下で

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}(n \cdot \mathcal{P}^\sigma) = -\frac{\partial}{\partial \tau}(n \cdot \mathcal{P}^\tau) = 0, \quad (\text{運動方程式 } \partial_\sigma \mathcal{P}^{\sigma\mu} + \partial_\tau \mathcal{P}^{\tau\mu} = 0)$$

$$\therefore n \cdot \mathcal{P}^\sigma = (\text{一定}) \quad (\text{弦に沿って})$$

となる.

^{*195} 右辺の $\tilde{\lambda}(n \cdot p)$ は $\tilde{\lambda} \times (n \cdot p)$ の意味であり, $n \cdot p$ は $\tilde{\lambda}$ の引数ではない.

開弦に対しては $n \cdot p$ が保存されるための条件として端点で $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ が課せられるから (5.5.1 節), 弦 (の世界面) 全体で $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ となる.

閉弦に対しては, 世界面に $\sigma = 0$ の線を導入する方法の任意性がなお残されている. そこで閉弦でも $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ が成り立つように $\sigma = 0$ の線を定めることができる (説明は 10.4.2 節).

5.5.3 パラメーター付けの制約条件と波動方程式 [11, pp.180–181]

パラメーター付けの定義式 (583): $n \cdot X(\tau, \sigma) = \beta \alpha' (n \cdot p) \tau$ (および閉弦では世界面全体で $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ が成り立つように $\sigma = 0$ の線を導入できること) により, (世界面の各点で)

$$\dot{X} \cdot X' = 0 \quad (584)$$

が成り立つ (説明は 10.4.3 節). これを用いるとパラメーター付けの定義式

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = \beta \alpha' (n \cdot p) \tau, \quad n \cdot p = \frac{2\pi}{\beta} n \cdot \mathcal{P}^\tau \quad (585)$$

から

$$\dot{X}^2 + X'^2 = 0 \quad (586)$$

が得られる (導出は 10.4.3 節). パラメーター付けから生じる制約条件 (584), (586) は

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0 \quad (587)$$

とまとめられる. この制約条件の下で $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ と $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$ の式は

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu, \quad \mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X'^{\mu'} \quad (588)$$

と簡略化され (導出は 10.4.3 節), 運動方程式 $\partial_\tau \mathcal{P}^{\tau\mu} + \partial_\sigma \mathcal{P}^{\sigma\mu} = 0$ は波動方程式

$$\ddot{X} - X'' = 0$$

を与える. 弦の質量線密度 μ_0 が式 (582): $T_0 = 1/2\pi\alpha'$ であることを踏まえると, 光錐ゲージにおける運動量密度の表式 (9.36): $\mathcal{P}^{\tau\mu} = \dot{X}^\mu/2\pi\alpha'$ は大まかに (質量密度) \times (速度) となっている.

5.5.4 波動方程式とモード展開 [11, pp.181–184]

自由な端点を持つ開弦に対する境界条件

$$0 = \mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X'^{\mu'} \\ \Leftrightarrow \text{Neumann 境界条件 } X'^{\mu'} = 0$$

の下での波動方程式 $\ddot{X} - X'' = 0$ の解は

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} \{ f^\mu(\tau + \sigma) + f^\mu(\tau - \sigma) \} \quad (589)$$

の形をとる (導出は 10.4.4 節). ただし $f^{\mu'}$ は周期 2π の周期関数となることに注意すると (説明は 10.4.4 節)

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + f_1^\mu \tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}) \frac{\cos n\sigma}{\sqrt{n}} \quad (590)$$

の形に Fourier 展開される (導出は 10.4.4 節). これは点粒子の運動を表す項 $x_0^\mu + f_1^\mu \tau$ と, 振動モードに対応する項から成る. ここで展開係数 a_n^μ が無単位となるように因子 $\sqrt{2\alpha'}$ をくくり出してある. この結果は弦座標の実数性を考慮して導かれている (5.5.4 節) 確かに

$$(a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau})^* = -(a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau})$$

なので $a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}$ は純虚数であり, これに $-i\sqrt{2\alpha'}$ をかけると実数になる. また係数 f_1^μ は弦の運動量 p^μ に比例する:

$$p^\mu = \int_0^\pi \mathcal{P}^{\tau\mu} d\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi \dot{X}^\mu d\sigma = \frac{1}{2\alpha'} f_1^\mu, \quad \therefore f_1^\mu = 2\alpha' p^\mu.$$

弦の質量線密度 μ_0 は式 (582): $T_0 = 1/2\pi\alpha'$ であり, 開弦に対して σ の全範囲は π なので, τ の 1 次の項の係数 $2\alpha' p^\mu = p^\mu / \pi T_0$ は大まかには運動量 p^μ に対応する速度と見なせることが分かる. さらに

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu \\ \alpha_n^\mu = a_n^\mu \sqrt{n}, & \alpha_{-n}^\mu = a_n^{\mu*} \sqrt{n} \quad (n \geq 1) \end{cases} \\ \Rightarrow & \alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^* \end{aligned} \quad (591)$$

を導入すると, これは

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma$$

と簡略化される. このとき

$$\begin{aligned} \dot{X}^\mu &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^\mu \cos n\sigma e^{-in\tau}, \\ X^{\mu'} &= -i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^\mu \sin n\sigma e^{-in\tau}, \\ \dot{X}^\mu \pm X^{\mu'} &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau \pm \sigma)} \end{aligned} \quad (592)$$

である. 我々はこの解 $X^\mu(\tau, \sigma)$ が制約条件 (587): $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ を満たすように係数 α_n^μ を決めなければならない. 今後, 展開係数 a_n^μ, α_n^μ を簡単に振動子とも呼ぶ.

5.5.5 運動方程式の光錐解 [11, pp.184–188]

パラメーター付けの定義式 (585):

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = \beta\alpha' (n \cdot p)\tau, \quad n \cdot p = \frac{2\pi}{\beta} n \cdot \mathcal{P}^\tau$$

は $n^\mu = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0\right)$ と選ぶと

$$X^+(\tau, \sigma) = \beta\alpha' p^+ \tau, \quad p^+ = \frac{2\pi}{\beta} \mathcal{P}^{\tau+} \quad (593)$$

となる (光錐ゲージ). このとき制約条件 (587): $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ は

$$\begin{aligned} \dot{X}^- \pm X^{-'} &= \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2, \\ X^I &\equiv (X^2, X^3, \dots, X^d): \text{横方向座標} \end{aligned} \quad (594)$$

となる (導出は 10.4.5 節). ここで $p^+ \neq 0$, したがって $p^+ > 0$ を仮定した (一般に $p^+ \geq 0$ である (5.2.2 節)). ただし繰り返された横方向添字 I について和をとる (以下同じ).

すると弦の時間発展は

$$X^I(\tau, \sigma), \quad p^+, \quad x_0^-(X^- \text{の積分定数})$$

によって決定される. 実際, $X^\mu(\tau, \sigma)$ のうち $X^I(\tau, \sigma)$ が与えられているとき, $X^\pm(\tau, \sigma)$ を求めれば完全な解が得られる. そして自由端点を持つ開弦を考えると

- $X^+(\tau, \sigma)$ は与えられた p^+ を用いて式 (593):

$$X^+(\tau, \sigma) = 2\alpha' p^+ \tau \quad (\text{開弦に対して } \beta = 2) \quad (595)$$

と定まる.

- $X^- = (X^0 - X^1)/\sqrt{2}$ は X^μ と同じ波動方程式と境界条件を満たすため

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos n\sigma \quad (596)$$

と展開される.

今 X^I が, したがってその展開係数 α_n^I が与えられており,

式 (594) よりこれを用いて X^- の展開係数 α_n^- は

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp, \quad L_n^\perp \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I : \text{横方向の Virasoro モード} \quad (597)$$

と表される (導出は 10.4.5 節). よって積分定数 x_0^- が与えられれば X^- が定まる.

弦の質量 M は弦の運動量 p^μ から

$$M^2 = -p^2 = 2p^+ p^- - p^I p^I$$

によって求められる. α_n^- が横方向の Virasoro モードで与えられることを用いると

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n^{I*} \alpha_n^I \quad (598)$$

が得られる (導出は 10.4.5 節). $M^2 \geq 0$ となっているので, 古典的な弦の質量 M は実数であることが保証される.

弦を量子化すると

- M^2 は量子化される.
 - 自然界において, 連続した質量の値をとる粒子状態は観測されない.
- 無質量状態は, Maxwell 理論や重力とは全く異なったものになる.
- M^2 の式に付加定数が現れる \rightarrow ゲージ場と重量を記述可能.

■光錐ゲージ条件 (595): $X^+(\tau, \sigma) = 2\alpha' p^+ \tau$ について これは弦座標 X^μ (ただし $\mu = 0, 1, \dots, d$) のモード展開 (590) における τ の項と一致しており, モード展開の式 (590) と矛盾しない. これは X^0 と X^1 の線形結合である光錐座標 X^\pm も X^μ と同じ境界条件と波動方程式を満たすので, 式 (590) と同様にモード展開されなければならないことから期待されることである.

5.5.6 光錐ゲージまとめ

5.5 節でここまで論じてきたパラメーターの制約条件とその帰結は、図 91 のように整理される。

5.6 弦の量子論——序論

本節では次節以降の予告として、弦の量子化の概略を一通り述べる。やや長くなるが、次節以降との内容の重複を厭わず、本節だけでも概要として読み得るように書いた。

開弦の正準量子化

ここまで弦の古典論を一通り見てきた。次に弦の量子論に移ろう。量子力学は系を量子化する枠組みであり、どのような対象にも適用することができるような量子化の手続きを提供する。我々は弦の古典論を踏まえ、正準量子化の手法に従って弦の量子化を行う。

はじめに自由な端点を持つ開弦の量子化を考える (図 92 参照)。光錐ゲージにおいては基本となる力学変数の組を、横方向座標 X^I とこれに共役な運動量密度 $\mathcal{P}^{\tau I}$ 、および x_0^-, p^+ にとることができる。Heisenberg 描像を採用して、これらを時間に、したがってパラメーター τ に依存する演算子と見なす。そして正準交換関係

$$[X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma'), \quad [x_0^-(\tau), p^+(\tau)] = i\eta^{-+} = -i$$

を課し、量子化を行う。すると横方向座標の展開係数 α_n^I と定数項 x_0^I は図 92 に示した交換関係を満たす演算子となる。展開係数 α_n^I と関係付けられるものとの展開係数 a_n^I, a_n^{I*} もまた演算子 $a_n^I, a_n^{I\dagger}$ となり、展開係数 α に対する交換関係は演算子 a に対する調和振動子の交換関係に読み替えられる。よって $a_n^I, a_n^{I\dagger}$ の一方は生成演算子、他方は対応する消滅演算子となる。我々は a_n^I を消滅演算子、 $a_n^{I\dagger}$ を生成演算子と見なす。このとき演算子 α_n^I について言えば、 n が正の整数をとるものが消滅演算子、負の整数をとるものが生成演算子となる。

開弦の基本状態

図 93 のように運動量固有状態 $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ を、消滅演算子が作用すると状態が消失するような基底状態 (真空状態) にとる。運動量が確定した一般的な基本状態は、これに生成演算子を作用させることで得られる。ただしこれは多粒子状態ではなく、1 粒子状態と見なす。1 本の弦を量子化しているため、得られる粒子が 1 個であると考えるのは自然だと言えよう。ここでは生成演算子は粒子数を増加させるのではなく、粒子の種類を変えていることになる。

開弦の状態としてどのような種類の粒子が得られているかを調べたい。その判断基準となるのは主に

- 弦の質量
- 弦状態の自由度
- 弦状態の波動関数の満たす方程式

の 3 つである*196。まず考えている状態における弦の質量を計算し、それを粒子の質量と比較する必要がある。次に弦の量子化を光錐ゲージの下で行っているため、その結果を場の量子論によって記述される粒子と比較す

*196 もっともこれらはあくまで判断材料であり、これだけでは粒子の種類を特定する決定的な証拠とまでは言えないだろう。実際には例えば「開弦の状態から 1 光子状態が得られた」と断言できるものではなく、「開弦のある状態を 1 光子状態に同定し得る」「1 光子状態を示唆する状態が得られる」と述べるのが穏当と考えられる。

$$\beta = \begin{cases} 2 & \text{(開弦)} \\ 1 & \text{(閉弦)} \end{cases} \text{ に対して}$$

- τ のパラメーター付けの条件

$$\underbrace{n \cdot X(\tau, \sigma)}_{\text{時間的ベクトル}} = \beta \alpha' \underbrace{(n \cdot p)}_{\text{開弦では端点で } n \cdot p^\sigma = 0 \text{ であれば一定}} \tau \quad \textcircled{1}$$

開弦では端点で $n \cdot p^\sigma = 0$ であれば一定
閉弦では運動量が保存するから一定

$$(n^\mu = (1, 0, \dots, 0) \text{ で静的ゲージ } X^0 \sim \tau)$$

- σ のパラメーター付けの条件

弦全体 (τ が一定の線) にわたり

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau = \frac{n \cdot p}{2\pi/\beta} \quad \text{(一定)} \quad \textcircled{2}$$

$(n^\mu = (1, 0, \dots, 0) \text{ でエネルギー密度 } \mathcal{P}^{\tau 0} = \text{(一定)})$

$$\leftarrow \text{運動方程式 } \partial_\tau \mathcal{P}^{\tau\mu} + \partial_\sigma \mathcal{P}^{\sigma\mu} = 0$$

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma = \text{(一定)} = 0$$

- 開弦では端点で $n \cdot p^\sigma = 0$ を要求 (上記)
- 閉弦ではある線 $\sigma = 0$ を, その上で $n \cdot \mathcal{P}^\sigma \propto \dot{X} \cdot X' = 0$ となるように導入できる

制約条件 世界面上の各点で

$$\left[\begin{array}{l} (n \cdot \mathcal{P}^\sigma \propto) \dot{X} \cdot X' = 0 \quad (\text{静的ゲージ } X^0 \sim \tau \text{ で } \frac{\partial \bar{X}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \bar{X}}{\partial \sigma} = 0) \\ \text{また, } \textcircled{1} \& \textcircled{2} \Rightarrow \dot{X}^2 + X'^2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow (\dot{X} \pm X')^2 = 0$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{l} \mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu, \quad \mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X'^\mu \\ \text{(静的ゲージでも } \mathcal{P}^{\tau\mu} \sim \dot{X}^\mu, \mathcal{P}^{\sigma\mu} \sim X'^\mu) \\ \text{運動方程式 } \ddot{X} - X'' = 0 \quad (\text{波動方程式}) \\ \text{(静的ゲージで } \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial \sigma^2} = 0) \end{array} \right.$$

光錐ゲージでは $n^\mu = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0)$ と選択

$$\textcircled{1} : X^+(\tau, \sigma) = \beta \alpha' p^+ \tau, \quad \textcircled{2} : p^+ = \frac{2\pi}{\beta} \mathcal{P}^{\tau+}$$

$$\text{制約条件 } \dot{X}^- \pm X'^- = \frac{1}{\beta \alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^l \pm X'^l)^2$$

($X^- \leftarrow$ 横方向座標 X^l)

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^-, \quad L_n^- \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^l \alpha_p^l : \text{横方向のVirasoroモード}$$

図 91 光錐ゲージまとめ

開弦の正準量子化

基本となる変数 $(X^I(\sigma), x_0^-, \mathcal{P}^{\tau I}(\sigma), p^+)$

正準交換関係

$$[X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma'), \quad [x_0^-(\tau), p^+(\tau)] = -i, \quad \text{etc.}$$

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\eta^{IJ}\delta_{m+n,0}, \quad [x_0^-, p^+] = i\eta^{IJ}, \quad [x_0^-, \alpha_n^J] = 0 \quad \text{for } n \neq 0$$

$\alpha_n^I = a_n^I\sqrt{n}$, $\alpha_{-n}^I = a_n^{I\dagger}\sqrt{n}$, $n \geq 1$ に対する **調和振動子の交換関係**

$$[a_m^I, a_n^{J\dagger}] = \delta_{mn}\eta^{IJ}, \quad [a_m^I, a_n^J] = 0, \quad [a_m^{I\dagger}, a_n^{J\dagger}] = 0$$

a_n^I, α_n^I ($n \geq 1$): 消滅演算子, $a_n^{I\dagger}, \alpha_{-n}^I$ ($n \geq 1$): 生成演算子

図 92

るには、場の量子化も光錐ゲージを用いてやり直す必要がある (5.7 節)。その上で弦状態の自由度を場の自由度と比較することができる。さらに場の量子論において場によって記述される粒子が弦理論からも現れるならば、何らかの意味で弦理論から粒子と関係する場を導けると期待するのは自然である。実は粒子を記述する古典場は弦の状態を表す波動関数に同定される。基底状態に作用する生成演算子 $a_{n_1}^{I_1\dagger} \cdots a_{n_k}^{I_k\dagger}$ の定まった状態 $|\Psi, \tau\rangle$ に対して運動量空間の波動関数 $\psi_{I_1 \cdots I_k}(\tau, p^+, \vec{p}_T) = \langle p^+, \vec{p}_T | \Psi, \tau \rangle$ を導入すると、これは Schrödinger 方程式

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_{I_1 \cdots I_k} = H \psi_{I_1 \cdots I_k}$$

に従う (異なる弦状態は異なる Hamiltonian H を持つ)。このためある弦の状態に対する波動方程式が場の方程式と一致するかを調べることも、弦の状態が表す粒子を推定するための 1 つの判断材料となる。

開弦の基本状態

- 基底状態 (真空状態) $|p^+, \vec{p}_T\rangle$

$\vec{p}_T = (p^2, \cdots, p^{D-1})$: 横方向成分, D : 時空の次元

$$a_n^I |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0$$

- 開弦の基本状態

$$|\lambda\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{D-1} (a_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}} |p^+, \vec{p}_T\rangle \leftrightarrow \text{1粒子状態}$$

$\lambda_{n,I}$: 非負整数 (生成演算子が作用する回数)

図 93

開弦の質量と Hamiltonian

そこで以下では特に、弦の質量と Schrödinger 方程式における Hamiltonian H についてあらかじめ詳しく調べよう (図 94 参照). 質量の自乗 M^2 の公式は既に古典論において与えてあり, その中で展開係数 a_n^I, a_n^{I*} は生成・消滅演算子 $a_n^I, a_n^{I\dagger}$ に置き換わる. Hamiltonian は τ 方向の推進操作を生成しなければならないことから,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial X^+}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial X^+} = 2\alpha' p^+ \frac{\partial}{\partial X^+} \quad \leftrightarrow \quad H = 2\alpha' p^+ p^- = L_0^\perp$$

とおく ($p^- \sim \alpha_0^- \sim L_0^\perp$). ここで Hamiltonian が無次元になっているのは, 時間座標 τ を無次元に選んでいるからである. ただし横方向の Virasoro モード L_0^\perp も, ここでは展開係数が生成・消滅演算子 $a_n^I, a_n^{I\dagger}$ に置き換わった横方向の Virasoro 演算子である. これらを扱いやすい形にするために正規順序化する, すなわち全ての消滅演算子が全ての生成演算子の右側に配置されている順序に並び替えることを考える (以下では正規順序化を $N[\dots]$ で表す). 生成・消滅演算子の交換関係を用いて

$$H = L_0^\perp, \quad \alpha' M^2 = \alpha'(2p^+ p^- - p^I p^I) = L_0^\perp - \alpha' p^I p^I$$

を正規順序化すると, これらはともに同じ正規順序化定数 a だけシフトする.

$$L_0^\perp = N[L_0^\perp] + a, \quad \alpha' M^2 = \alpha' N[M^2] + a.$$

正規順序化した質量の自乗の演算子 $N[M^2]$ は, (係数 α' の違いを除いて) 数演算子 N^\perp となる. これは基本状態 $|\lambda\rangle$ を作っている生成演算子のモード番号の和を固有値 N_λ^\perp に持つ. 例えば

$$\begin{aligned} |\lambda\rangle &= a_5^{I\dagger} a_3^{J\dagger} a_3^{K\dagger} a_2^{L\dagger} a_1^{M\dagger} a_1^{N\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \quad (I, J \text{ について和をとらない}) \\ \Rightarrow N_\lambda^\perp &= 5 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 \end{aligned}$$

である. 展開係数の交換関係を用いて付加定数 a を計算した結果

$$a = \frac{1}{2}(D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p = \frac{1}{2}(D-2)(1+2+3+4+\dots)$$

は, 無限大であるように見える. しかし最右辺において整数を無限に足した結果が $1+2+3+4+\dots = -1/12$ になるという数学公式により, これは有限値をとることが示唆される.

理論の Lorentz 不変性, 時空次元・正規順序化定数の決定

これを正当化するために, 理論の Lorentz 不変性を要請する (図 95 参照). Lorentz 不変性の条件は次のように考える. 相対論的な点粒子に対して, Lorentz 不変性に付随するチャージ $M^{\mu\nu}$ は図 95 に示した交換関係を満たす. これは両辺が同じ種類のテンソルから成るため, Lorentz 変換に対して共変的な関係式になっている. そして (それ故) これは光錐成分 M^{-I} に対する交換関係 $[M^{-I}, M^{-J}] = 0$ を含んでいる. そうであるならば, 類似の演算子 $M^{\mu\nu}$ が交換関係 $[M^{-I}, M^{-J}] = 0$ を満たさない理論は Lorentz 不変ではない.

そこで光錐ゲージを用いた弦理論に対しても, 弦の作用の Lorentz 不変性に伴うチャージの光錐成分 M^{-I} を, 正規順序化された Hermite 演算子の形に定義し, これが同様の交換関係を満たすことを要求する. すると再び質量の定数シフトの式 $a = -\frac{1}{24}(D-2)$ が得られ, 同時に時空の次元も $D = 26$ に確定する. よって質量の定数シフトは $a = -1$ であることになり, したがって

$$H = N[L_0^\perp] - 1 = \alpha' p^I p^I + N^\perp - 1, \quad \alpha' M^2 = N^\perp - 1$$

となる.

開弦の質量 (演算子)

$N[\dots]$: 正規順序化

$$\begin{aligned}\alpha' M^2 &= \alpha' N[M^2] + a, \\ \alpha' N[M^2] &= N^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I : \text{数演算子}, \\ \text{正規順序化定数 } a &= \frac{1}{2}(D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p = -\frac{1}{24}(D-2) \\ &\left(\because \sum_{p=1}^{\infty} p = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12} \right)\end{aligned}$$

図 94

タキオン, 光子

以上を踏まえて, 開弦の状態として固有値 $N^\perp = 0, 1$ の状態を調べよう (図 96 参照).

基底状態 $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ は数演算子の固有値が $N^\perp = 0$ なので, 質量の自乗が負の値を持つ. これはタキオンを表している.

また質量がゼロとなる時, 数演算子の固有値は $N^\perp = 1$ でなければならないため, そのような状態は一般には基底状態に第 1 モードの展開係数 $a_1^{I\dagger}$ を 1 つだけ作用させた基本状態の線形結合

$$\sum_{I=2}^{25} \xi_I a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

の形をとる. これは 1 光子状態に同定される. 実際, 光子は質量を持たない. また光錐ゲージ条件の下では電磁ポテンシャルの Fourier 成分 $A^\mu(p)$ の独立な成分は $D-2 (= 24)$ 個の横方向成分のみであり, 場の方程式は単に質量のないスカラー場の方程式 $p^2 A^I(p) = 0$ になる. これを

$$\left(i \frac{\partial}{\partial \tau} - \alpha' p^J p^J \right) A^I(\tau, p^+, \vec{p}_T) = 0$$

と書き換えると, $N^\perp = 1$ の弦の波動関数に対する Schrödinger 方程式に一致していることが見て取れる. さらに電磁場はスカラー場と同様に量子化され, 展開係数は生成演算子 $a_{p^+, \vec{p}_T}^{I\dagger}$ になり, $D-2 (= 24)$ 個の自由度を担う偏光ベクトル ξ_I で特徴付けられる 1 光子状態

$$\sum_{I=2}^{25} \xi_I a_{p^+, \vec{p}_T}^{I\dagger} |\Omega\rangle$$

を形成する. これは上記の開弦の無質量状態と同じ構造をしており, 両者を互いに対応付けることができる. 以上より開弦の量子論において無質量で偏極を持ち, 波動方程式が電磁場の方程式に従うような, 光子状態に対応する状態が得られたことになる.

理論の Lorentz 不変性

点粒子の Lorentz チャージ $M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu$ は交換関係
 $[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i\eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - i\eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + i\eta^{\mu\sigma} M^{\rho\nu} - i\eta^{\nu\sigma} M^{\rho\mu}$,
 $\therefore [M^{-I}, M^{-J}] = 0$ を満たす.

弦の Lorentz チャージ

$$M^{\mu\nu} = \int_0^\pi (X_\mu \mathcal{P}^\nu - X_\nu \mathcal{P}^\mu) d\sigma = x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu)$$

(開弦を考え $0 \leq \sigma \leq \pi$ とした, 最右辺のモード展開は光錐ゲージに対して)
 の光錐成分を, 正規順序化された Hermite 演算子

$$M^{-I} = x_0^- p^I - \frac{1}{2} (x_0^I p^- + p^- x_0^I) - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^I \alpha_n^- - \alpha_{-n}^- \alpha_n^I)$$

$$= x_0^- p^I - \frac{1}{4\alpha' p^+} \{x_0^I (N[L_0^\perp] + a) + (N[L_0^\perp] + a) x_0^I\} - \frac{i}{\sqrt{2\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (L_{-n}^\perp \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I L_n^\perp)$$

$$\left(\because \sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp, \quad 2\alpha' p^- = \frac{1}{p^+} (N[L_0^\perp] + a) \right) \text{ として定義し,}$$

$$0 = [M^{-I}, M^{-J}]$$

$$= -\frac{1}{\alpha' (p^+)^2} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{-m}^I \alpha_m^J - \alpha_{-m}^J \alpha_m^I) \left[m \left\{ 1 - \frac{1}{24} (D-2) \right\} + \frac{1}{m} \left\{ \frac{1}{24} (D-2) + a \right\} \right]$$

を要求

$$a = -\frac{1}{24} (D-2), \quad D = 26$$

$$\alpha' M^2 = N^\perp - 1$$

図 95

閉弦の正準量子化

次に閉弦の量子化に移ろう (図 97 参照). 再び正準交換関係を考えると, ここから 2 組の展開係数 $\alpha, \bar{\alpha}$ に対する交換関係, および x_0^I の満たす交換関係が導かれる. ただし 2 種類の振動子のゼロモード $\alpha_0^\mu, \bar{\alpha}_0^\mu$ は等しいものとして定義されている (図 85 における閉弦座標のモード展開を参照). 開弦の場合と同様に $\alpha, \bar{\alpha}$ と関係付けられる演算子 a, \bar{a} とその Hermite 共役を導入すると, これらは調和振動子の交換関係を満たすため, a_n^I と \bar{a}_n^I を消滅演算子, $a_n^{I\dagger}$ と $\bar{a}_n^{I\dagger}$ を生成演算子と見なすことができる. このとき演算子 α_n^I および $\bar{\alpha}_n^I$ について言えば, n が正の整数をとるものが消滅演算子, 負の整数をとるものが生成演算子となる.

閉弦の質量と Hamiltonian

閉弦に対しては 2 組の横方向 Virasoro 演算子 $\bar{L}_n^\perp, L_n^\perp$ を定義できる. そして横方向座標 X^- の 2 種類の展開係数 $\bar{\alpha}_n^-, \alpha_n^-$ は, それぞれ 2 種類の横方向 Virasoro 演算子 $\bar{L}_n^\perp, L_n^\perp$ で与えられることが分かる. また閉弦に対して Hamiltonian H は

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial X^+}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial X^+} = \alpha' p^+ \frac{\partial}{\partial X^+} \quad \leftrightarrow \quad H = \alpha' p^+ p^- = L_0^\perp$$

と設定される (開弦の場合との係数の違いは光錐ゲージ条件 $X^+ = \beta \alpha' p^+ \tau$ における係数 β の違いに由来) 閉弦に対して質量の自乗 M^2 と Hamiltonian は, とともに 2 種類の横方向 Virasoro 演算子 $\bar{L}_n^\perp, L_n^\perp$ ないし 2 種類の数演算子 N^\perp, \bar{N}^\perp を用いて

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} (N[L_0^\perp] + N[\bar{L}_0^\perp] - 2) - p^I p^I = \frac{2}{\alpha'} (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2),$$

$$\alpha' M^2 = N^\perp - 1$$

タキオン

- 基底状態 $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ ($N^\perp = 0, \alpha' M^2 = -1$)

タキオン状態

光子

- 無質量状態 ($N^\perp = 1, \alpha' M^2 = 0$)

$$\sum_{I=2}^{25} \xi_I a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

$$\text{1光子状態 } \sum_{I=2}^{25} \xi_I a_{p^+, \vec{p}_T}^{I\dagger} |\Omega\rangle$$

ξ_I : 偏極ベクトル,
 $a_{p^+, \vec{p}_T}^{I\dagger}$: 生成演算子, $|\Omega\rangle$: 真空状態

電磁ポテンシャルのFourier成分 $A^\mu(p)$
 光錐ゲージ条件 $A^+(p) = 0$
 場の方程式 \rightarrow 質量のないスカラー場の方程式 $p^2 A^I(p) = 0$

図 96

閉弦の正準量子化

正準交換関係

$$[X^I(\tau, \sigma), P^{\tau J}(\tau, \sigma')] = i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma'), \quad [x_0^-, p^+] = -i, \quad \text{etc.}$$

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0}, \quad [\bar{\alpha}_m^I, \bar{\alpha}_n^J] = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0}, \quad [\alpha_m^I, \bar{\alpha}_n^J] = 0,$$

$$[x_0^I, p^J] = i\eta^{IJ}, \quad [x_0^I, \alpha_n^J] = 0, \quad [x_0^I, \bar{\alpha}_n^J] = 0 \quad \text{for } n \neq 0$$

ただし $\bar{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu$

$$\alpha_n^I = a_n^I \sqrt{n}, \quad \alpha_{-n}^I = a_n^{I\dagger} \sqrt{n},$$

$$\bar{\alpha}_n^I = \bar{a}_n^I \sqrt{n}, \quad \bar{\alpha}_{-n}^I = \bar{a}_n^{I\dagger} \sqrt{n}, \quad n \geq 1 \quad \text{に対する調和振動子の交換関係}$$

$$[a_m^I, a_n^{J\dagger}] = \delta_{mn} \eta^{IJ}, \quad [\bar{a}_m^I, \bar{a}_n^{J\dagger}] = \delta_{mn} \eta^{IJ}, \quad \text{etc.}$$

$a_n^I, \alpha_n^I, \bar{a}_n^I, \bar{\alpha}_n^I$: 消滅演算子, $a_n^{I\dagger}, \alpha_{-n}^I, \bar{a}_n^{I\dagger}, \bar{\alpha}_{-n}^I$: 生成演算子 ($n \geq 1$)

図 97

$$H = N[L_0^\perp] + \bar{N}[\bar{L}_0^\perp] - 2 = \frac{\alpha'}{2} p^I p^I + N^\perp + \bar{N}^\perp - 2$$

と表されることが見出される (以上, 図 98 参照).

閉弦のVirasoro演算子

$$\begin{aligned} \text{閉弦のVirasoro演算子} \quad \bar{L}_n^\perp &= \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \bar{\alpha}_p^I \bar{\alpha}_{n-p}^I, \quad L_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I \\ \sqrt{2\alpha'} \bar{\alpha}_n^- &= \frac{2}{p^+} \bar{L}_n^\perp, \quad \sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{2}{p^+} L_n^\perp \end{aligned}$$

閉弦の質量

$$\begin{aligned} \alpha' p^- &= \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- \quad (\because \alpha_0^\mu = \sqrt{\alpha'/2} p^\mu) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{p^+} L_0^\perp + \frac{2}{p^+} \bar{L}_0^\perp \right) \\ &= \frac{1}{p^+} \left(\frac{\alpha'}{2} p^I p^I + N^\perp + \bar{N}^\perp - 2 \right), \\ N^\perp &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I, \quad \bar{N}^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{a}_n^{I\dagger} \bar{a}_n^I \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \nearrow M^2 \\ = 2p^+ p^- - p^I p^I \\ = \frac{2}{\alpha'} (N[L_0^\perp] + N[\bar{L}_0^\perp] - 2) - p^I p^I \\ = \frac{2}{\alpha'} (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2) \end{array}$$

図 98

レベル整合条件

ところで2つのゼロモード $\alpha_0^\mu, \bar{\alpha}_0^\mu$ が等しいことから、2つの数演算子 N^\perp, \bar{N}^\perp が等しいことが導かれる。これはレベル整合条件と呼ばれ、2つの数演算子の固有値が等しくなければならないという、閉弦の状態に対する制約を与える。我々は閉弦の状態として、これを満たす状態だけを考えなければならない。

レベル整合条件の意味は次のように解釈できる (図 99 参照)。まず2つの数演算子の差 $P = N^\perp - \bar{N}^\perp$ を考えると、これはパラメーター σ の巡回的なずらしを生成する。パラメーター σ を定数 σ_0 だけ変化させる操作に伴う閉弦の状態 $|\Psi\rangle$ の変化は、演算子 P を用いて $|\Psi\rangle \rightarrow e^{-iP\sigma_0} |\Psi\rangle$ と表される。このときレベル整合条件により P がゼロになることは、パラメーター σ のずらしの操作の下で、閉弦の状態が不変に留まることを意味する。これは閉弦の世界面にパラメーター σ を導入するとき、 $\sigma = 0$ の線をどこに入れるかを選ぶ任意性が残されていることを考えれば、もっともである。この任意性に対応して、我々はパラメーター σ の巡回的なずらしの操作の下で不変な閉弦の状態だけを考えなければならないことになる。

重力子

閉弦の量子状態から現れる粒子を調べるにあたり、ここでは特に無質量状態を取り上げる。レベル整合条件の下で無質量状態 ($M^2 = 0$) は、2つの数演算子の固有値がともに $N^\perp = \bar{N}^\perp = 1$ となるときに実現される。そのような一般的な状態は、生成演算子の第1モード $a_1^{I\dagger}, \bar{a}^{J\dagger}$ を1つずつ基底状態に作用させて得られる基本状態の線形結合

$$\sum_{I,J} R_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

の形をとる。次に係数 R_{IJ} を分解することを考える。一般に2つの添字を持つ量 R_{IJ} は

- 対称部分 $S_{IJ} \equiv \frac{1}{2}(R_{IJ} + R_{JI})$
- 反対称部分 $A_{IJ} \equiv \frac{1}{2}(R_{IJ} - R_{JI})$

に分けることができ、さらに対称部分 S_{IJ} は

レベル整合条件

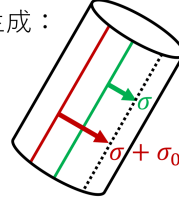
$$\alpha_0^\mu = \bar{\alpha}_0^\mu \Rightarrow N^\perp = \bar{N}^\perp : \text{レベル整合条件}$$

$P \equiv N^\perp - \bar{N}^\perp$ はパラメータ σ の巡回的なずらしを生成：

$$[P, X^I(\tau, \sigma)] = -i \frac{\partial X^I}{\partial \sigma}$$

パラメータ σ のずらしの操作 $\sigma \rightarrow \sigma + \sigma_0$ の下での閉弦の状態の変化

$$|\Psi\rangle \rightarrow e^{-iP\sigma_0} |\Psi\rangle$$



閉弦の世界面

レベル整合条件 $P = 0$	\Leftrightarrow	パラメータ σ の巡回的なずらしの下での、 閉弦の状態の不変性
--------------------	-------------------	---

図 99

- トレース $S \equiv \delta_{IJ} S_{IJ} = \text{tr}(S_{IJ})$, $S' \equiv \frac{S}{D-2}$ に比例する部分 $S' \delta_{IJ}$
- トレースレスの対称部分 $\hat{S}_{IJ} \equiv S_{IJ} - S' \delta_{IJ}$

に分けることができる。

$$R_{IJ} = \hat{S}_{IJ} + A_{IJ} + S' \delta_{IJ}.$$

ここでトレースレスの対称部分 \hat{S}_{IJ} が担う状態

$$\sum_{I,J} \hat{S}_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

は重力子の 1 粒子状態に同定されることを説明する。弱い重力場を考え、計量テンソルの Minkowski 計量からのズレを $h_{\mu\nu}$ とする。このとき $h_{\mu\nu}$ が小さいという条件を保持するような一連の座標変換が存在して、 $h^{\mu\nu}$ の Fourier 成分 $h^{\mu\nu}(p)$ が光錐ゲージ条件 $h^{+\mu}(p) = 0$ (ただし $\mu = \pm, I$) を満たすような座標系をとることができる (このように弱い重力場に対するゲージ変換は、具体的には座標変換である)。重力場の方程式によれば、光錐ゲージにおいて独立な Fourier 成分は横方向成分 $h^{IJ}(p)$ のみであり、これはトレースレスの条件 $h^{II}(p) = 0$ を満たすため $n(D) = \frac{1}{2}D(D-3)$ 個の自由度を担い ($D = 26$)、質量のないスカラー場の運動方程式 $p^2 h^{IJ}(p) = 0$ に従う。したがって重力子もまた無質量である。これを

$$\left(i \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\alpha'}{2} p^K p^K \right) h^{IJ}(\tau, p^+, \vec{p}_T) = 0$$

と書き換えると、 $N^\perp = \bar{N}^\perp = 1$ の弦の波動関数に対する Schrödinger 方程式に一致する。このため重力場はスカラー場と同様に量子化され、展開係数は生成演算子 $a_{p^+, \vec{p}_T}^{IJ\dagger}$ になり、 $n(D)$ 個の自由度を担う重力場の偏極テンソル ξ_{IJ} (ただし $\xi_{II} = 0$) で特徴付けられる 1 重力子状態

$$\sum_{I,J} \xi_{IJ} a_{p^+, \vec{p}_T}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle$$

を形成する。これは確定した運動量を持つ無質量状態であり、係数がトレースレスで対称であるという点で閉弦の状態 $\sum_{I,J} \hat{S}_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$ と同じ構造を持つ (それ故、同じ数の自由度を持つ)。こうして閉弦の状態

から、1 重力子状態に対応付けられる状態が得られたことになる。弦理論を特殊相対性理論の範囲で考えているにも関わらず、重力場の量子状態が現れていることに注意する。

5.7 各種の光錐場とボゾン

我々は場の量子化について既に第 3 章で学んだ。しかしながら本稿では弦の量子化は光錐ゲージの下で行うため、その結果を場の量子論と比較するためには、場の量子化も光錐ゲージを用いてやり直す必要がある。本節ではスカラー場、電磁場、および弱い重力場の光錐ゲージ (スカラー場では単に光錐座標) による取り扱いを示す [11, pp.191–192].

- スカラー場 (Klein-Gordon 場)
 - ゲージ不変性を持たない
 - 基本的なスカラー粒子は発見されていない
 - 最も単純な場の理論
 - 弦理論においてスカラー粒子が現れる (例: タキオン, ディラトン)
- 電磁場
 - ゲージ不変性を持つ
 - 電磁場の量子論に関係づけられる粒子は光子
- 重力場
 - ゲージ不変性を持つ

5.7.1 スカラー場の古典的な平面波解 [11, pp.194–197]

スカラー場 (実 Klein-Gordon 場) $\phi(x)$ を

$$\phi(x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot x} \phi(p) \quad (599)$$

と全ての時空座標について Fourier 展開すると、 $\phi(x)$ が実場であるための条件

$$(\phi(p))^* = \phi(-p) \quad (600)$$

が課せられる (導出は 10.5.1 節)。また、これが Klein-Gordon 方程式を満たす条件

$$(p^2 + m^2)\phi(p) = 0 \quad (\text{全ての } p \text{ に対して})$$

より

- $p^2 + m^2 \neq 0$ となる p に対して $\phi(p) = 0$.
- $p^2 + m^2 = 0$ となる p に対して $\phi(p)$ は任意.
 - 超曲面 $p^2 + m^2 = 0$ は質量殻と呼ばれ、点 $(\pm E_p, \vec{p})$ から成る ($E_p \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$).
 - 質量殻上の点 p^μ に対して複素数 $\phi(p)$ の値を、したがって 2 つの実数値を指定すると、点 $(-p^\mu)$ における場の値 $\phi(-p) = (\phi(p))^*$ も決定される。
平均すると質量殻上の各点にひとつの実数値があてがわれる。
↔ 質量殻上の各点あたりにひとつの自由度がある。

横方向成分をまとめて

$$\vec{x}_T = (x^2, x^3, \dots, x^d), \quad \vec{p}_T = (p^2, p^3, \dots, p^d)$$

と書き,

$$\phi(x^+, x^-, \vec{x}_T) = \int \frac{dp^+}{2\pi} \frac{d^{D-2}p_T}{(2\pi)^{D-2}} e^{-ix^- p^+ + i\vec{x}_T \cdot \vec{p}_T} \phi(x^+, p^+, \vec{p}_T) \quad (601)$$

によって“空間”座標に関する場の Fourier 変換 $\phi(x^+, p^+, \vec{p}_T)$ を定義すると (10.5.1 節で補足), Klein-Gordon 方程式よりこれは

$$\left(i \frac{\partial}{\partial x^+} - \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2) \right) \phi(x^+, p^+, \vec{p}_T) = 0 \quad (602)$$

を満たす (導出は 10.5.1 節). これは光錐時間 x^+ に関して 1 階の微分方程式になっている.

5.7.2 スカラー場の量子化と粒子状態 [11, pp.197–202]

質量殻条件 $p^2 + m^2 = 0$ により, 物理的な粒子の時空における運動量は空間成分 \vec{p} だけで指定される. このことを反映して, 量子化されたスカラー場の生成・消滅演算子は運動量ラベル \vec{p} を持つ (第 3 章). 光錐成分を用いると質量殻条件は

$$0 = p^2 + m^2 = -2p^+ p^- + p^I p^I + m^2, \quad \therefore p^- = \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2).$$

と表されることを踏まえて, 状態を指定するのに \vec{p} の代わりに p^+ と \vec{p}_T を用いる (いずれも d 個の量):

$$a_p \rightarrow a_{p^+, \vec{p}_T}, \quad a_p^\dagger \rightarrow a_{p^+, \vec{p}_T}^\dagger.$$

任意の消滅演算子を作用させると消失するような真空状態を $|\Omega\rangle$ で表すと, スカラー場の 1 粒子状態は

$$a_{p^+, \vec{p}_T}^\dagger |\Omega\rangle \quad (603)$$

と書かれる.

5.7.3 Maxwell 場と光子状態 [11, pp.202–206]

(自由な) 電磁場の方程式とゲージ変換

$$0 = \partial_\nu F^{\mu\nu} = -\{\partial^2 A^\mu - \partial^\mu (\partial \cdot A)\},$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \delta A_\mu, \quad A_\mu = \partial_\mu \varepsilon$$

は, 電磁ポテンシャル A^μ とゲージパラメーター ε を

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot x} A^\mu(p), \quad A^\mu(-p) = (A^\mu(p))^*,$$

$$\varepsilon(x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot x} \varepsilon(p), \quad \varepsilon(-p) = \varepsilon^*(p)$$

と Fourier 展開すると, それぞれ

$$p^2 A^\mu - p^\mu (p \cdot A) = 0, \quad \delta A_\mu(p) = ip_\mu \varepsilon(p)$$

となる.

ここで光錐ゲージの条件

$$A^+(p) = 0$$

を課す。ゲージパラメーターを $\varepsilon(p) = iA^+(p)/p^+$ と選んでゲージ変換を行えば、この条件を満たす電磁ポテンシャルをとることができる：

$$A^+(p) \rightarrow A^+(p) + ip^+\varepsilon(p) = 0.$$

光錐ゲージにおいて $p^+ \neq 0$ を仮定すると、運動方程式

$$p^2 A^\mu - p^\mu (p \cdot A) = 0 \quad (604)$$

(10.5.2 節で補足) は $\mu = +$ に対して

$$0 = p \cdot A = -p^+ A^- + p^I p^I, \quad \therefore A^- = \frac{1}{p^+} p^I A^I$$

となる (ただし 5.5.5 節と同様, $p^+ \neq 0$ を仮定している)。この $p \cdot A = 0$ を運動方程式にもどすと

$$p^2 A^\mu = 0$$

を得る。よって $p^2 \neq 0$ のとき $A^\mu(p) = 0$ であり、 $p^2 = 0$ のとき $D - 2$ 個の成分 A^I によって A^- が決まる。Maxwell 場は質量殻 $p^2 = 0$ 上の各点あたりに $(D - 2)$ 個の自由度を持つ。 ($D = 4$ 次元時空中における自由度は 2 であり、これは決まった波数で特徴付けられる電磁平面波が相互に独立な 2 種類の偏光状態を持つことに対応する (1.7.3 節参照)。)

最後に光子状態について簡単に論じる。Maxwell 場 $A^I(p)$ は質量のないスカラー場の運動方程式 $p^2 A^I = 0$ に従う。ここでは生成・消滅演算子となる場 $A^I(p)$ の展開係数 $a_{p^+, \vec{p}_T}^{I\dagger}, a_{p^+, \vec{p}_T}^I$ が横方向の添字 I を持つため、スカラー場の 1 粒子状態 (603) の代わりに 1 光子状態

$$a_{p^+, \vec{p}_T}^{I\dagger} |\Omega\rangle$$

が得られる。ここで添字 I は偏光状態を表す指標となる。運動量 p^+, \vec{p}_T を持つ一般の 1 光子状態は

$$\sum_{I=2}^{D-1} \xi_I a_{p^+, \vec{p}_T}^{I\dagger} |\Omega\rangle \quad (605)$$

という形をとる。ここに横方向ベクトル ξ_I は偏光ベクトルと呼ばれる。

5.7.4 重力場と重力子状態 [11, pp.206–209]

真空中 (エネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu} = 0$) における弱い重力場を考えよう。

線形化された Einstein 方程式 (145) : $\partial^2 h^{\mu\nu} - \partial_\alpha (\partial^\mu h^{\nu\alpha} + \partial^\nu h^{\mu\alpha}) + \partial^\mu \partial^\nu h + \eta^{\mu\nu} (\partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} - \partial^2 h) = 0,$

ゲージ変換 (144) : $\delta h^{\mu\nu} = \delta_0 h^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu \varepsilon^\nu + \partial^\nu \varepsilon^\mu$

は、 $h^{\mu\nu}(x)$ と $\varepsilon^\mu(x)$ の Fourier 変換 $h^{\mu\nu}(p), \varepsilon^\mu(p)$ に対する式

$$\begin{aligned} S^{\mu\nu}(p) &\equiv \{p^2 h^{\mu\nu} - p_\alpha (p^\mu h^{\nu\alpha} + p^\nu h^{\mu\alpha}) + p^\mu p^\nu h\} + \eta^{\mu\nu} (p^\alpha p^\beta h_{\alpha\beta} - p^2 h) = 0, \\ \delta_0 h^{\mu\nu}(p) &= ip^\mu \varepsilon^\nu(p) + ip^\nu \varepsilon^\mu(p) \end{aligned} \quad (606)$$

になる。

ゲージパラメーター ε^μ を適当に選んでゲージ変換を行えば、光錐ゲージ条件

$$h^{+\mu} = 0, \quad \mu = +, -, I$$

を満たすような $h^{\mu\nu}$ をとれる。光錐ゲージにおいて $p^+ = 0$ が仮定される。このとき運動方程式は

$$0 = S^{++}(p) = (p^+)^2 h, \quad \therefore 0 = h = \eta_{\mu\nu} h^{\mu\nu} = h^{II}$$

となる。このとき運動方程式 (606) は

$$\{p^2 h^{\mu\nu} - p^\mu (p_\alpha h^{\nu\alpha}) - p^\nu (p_\alpha h^{\mu\alpha})\} + \eta^{\mu\nu} p^\alpha p^\beta h_{\alpha\beta} = 0 \quad (607)$$

に置き換わるけれど、ここで $\mu = +$ または $\nu = +$ と置いて得られる 2 式

$$p^+ p_\alpha h^{\nu\alpha} + \eta^{+\nu} p^\alpha p^\beta h_{\alpha\beta} = 0, \quad -p^+ p_\alpha h^{\mu\alpha} + \eta^{\mu+} p^\alpha p^\beta h_{\alpha\beta} = 0$$

を辺々引くと

$$p_\alpha h^{\nu\alpha} = 0$$

を得る。さらにこれを上式 (607) に戻せば、光錐ゲージの下での運動方程式として

$$p^2 h^{\mu\nu} = 0$$

が導かれる。よって $p^2 \neq 0$ のとき $h^{\mu\nu} = 0$ である。 $p^2 = 0$ のとき、対角和がゼロになる条件 $h^{II} = 0$ と対称性 $h^{IJ} = h^{JI}$ の下で h^{IJ} は

$$n(D) = \frac{1}{2} D(D-3) \quad (608)$$

個の独立な成分を持つ (10.5.3 節参照)。そして $p_\alpha h^{\nu\alpha} = 0$ によれば、横方向成分 h^{IJ} を決めると

$$h^{I-} = \frac{1}{p^+} p_J h^{IJ}$$

によって h^{I-} が決まり、

$$h^{-I} = \frac{1}{p^+} p_I h^{-I}$$

によって h^{-I} が決まる。以上で光錐ゲージ条件 $h^{+\mu} = 0$ において残された自由度を担う量 (h^{IJ}, h^{I-}, h^{-I}) の全てが決まる。古典的な重力波は質量殻 $p^2 = 0$ 上の各点あたりに $n(D)$ 個の自由度を持つ。

独立な古典場 $h^{IJ}(p)$ はここでも質量のないスカラー場の方程式に従い、その展開係数 $a_{p^+, \vec{p}_T}^{IJ\dagger}, a_{p^+, \vec{p}_T}^{IJ}$ は 2 つの横方向添字 I, J を持つ。1 粒子の基本状態は

$$a_{p^+, \vec{p}_T}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle$$

という形をとり、運動量 (p^+, \vec{p}_T) を持つ 1 重力子状態は

$$\sum_{I, J=2}^{D-1} \xi_{IJ} a_{p^+, \vec{p}_T}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle \quad (\xi_{II} = 0) \quad (609)$$

と表される。 ξ_{IJ} は重力子の偏極テンソルと呼ばれ、対角和が $\xi_{II} = 0$ の対称テンソルを形成し、 $n(D)$ 個の自由度を担う。

5.8 光錐ゲージにおける点粒子

5.8.1 光錐粒子 [11, pp.213–215]

本節では弦の量子化の準備として、相対論的な点粒子の光錐ゲージによる取り扱いに簡単に触れる。相対論的な点粒子に対して、作用 S と運動方程式は

$$S = \int L d\tau, \quad L = -m\sqrt{-\dot{x}^2},$$

$$\therefore p_\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}, \quad \frac{dp_\mu}{d\tau} = 0$$

である。ただし τ は無単位のパラメーターとし、 τ による微分をドットで表す。運動量 p_μ は運動の定数であり、 $p^2 + m^2 = 0$ を満たしている。

弦に対する光錐ゲージ条件 $X^+(\tau, \sigma) = \beta\alpha'p^+\tau$ と類似の条件

$$x^+ = \frac{1}{m^2}p^+\tau \quad (610)$$

を粒子に対して課すと、運動量の表式と運動方程式はそれぞれ

$$p_\mu = m^2\dot{x}_\mu, \quad (611)$$

$$\ddot{x}_\mu = 0$$

と簡単になる (上式 (611) の導出は 10.6.1 節)。(τ を無単位に選んだので、式 (611) の両辺の単位 (次元) はこれで合っている。) p^+ と p^I を指定すると、条件 $p^2 + m^2 = 0$ から

$$p^- = \frac{1}{2p^+}(p^I p^I + m^2)$$

と定まり、これを用い点粒子の運動は

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{1}{m^2}p^\mu (= \text{const.}) \quad \Rightarrow \quad x^-(\tau) = x_0^- + \frac{p^-}{m^2}\tau, \quad x^I(\tau) = x_0^I + \frac{p^I}{m^2}\tau$$

と表される (x^+ は光錐ゲージ条件 $x^+ = \frac{1}{m^2}p^+\tau$ によって与えられる)。以上より独立な力学変数を

$$(x^I, x_0^-, p^I, p^+)$$

に選ぶことができる。 x_0^I の代わりに x^I を選んだのは、座標と運動量の対称な取扱いのためである。

5.8.2 Lorentz 生成子と Lorentz 代数 [11, pp.226–227]

相対論的な点粒子について、Lorentz 変換 $\delta x^\mu = \varepsilon^{\mu\nu}x_\nu$ に関する対称性からチャージ

$$M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu$$

の保存が結論される (1.3.2 節)。量子論に移行するために、 $x^\mu(\tau)$ と $p^\mu(\tau)$ を Heisenberg 演算子として Lorentz 共変な交換関係

$$[x^\mu(\tau), p^\nu(\tau)] = i\eta^{\mu\nu}, \quad [x^\mu(\tau), x^\nu(\tau)] = 0, \quad [p^\mu(\tau), p^\nu(\tau)] = 0$$

を課すと、チャージ $M^{\mu\nu}$ は座標の Lorentz 変換を生成すること

$$\delta x^\rho = \left[-\frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}, x^\rho \right] = \varepsilon^{\rho\nu} x_\nu$$

が見て取れる (10.6.2 節参照). (よって $M^{\mu\nu}$ を Lorentz 生成子と呼ぶことができる.)

Lorentz 共変な交換関係の下では

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i\eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - i\eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + i\eta^{\mu\sigma} M^{\rho\nu} - i\eta^{\nu\sigma} M^{\rho\mu} \quad (612)$$

が導かれる (導出は 10.6.2 節)*197. これは (テンソル方程式なので) 添字を光錐成分に選んでも成立し,

$$[M^{+-}, M^{+I}] = iM^{+I}, \quad [M^{-I}, M^{-J}] = 0, \quad \text{etc.} \quad (613)$$

を与える (10.6.2 節参照). この交換関係を満たす類似の演算子 $M^{\mu\nu}$ を構築できない理論は Lorentz 不変なものではない.

5.9 相対論的な量子開弦

本節では

- 光錐ゲージにおいて開弦の量子化を行う.
- 全空間を満たした D-ブレインの存在を仮定する (\leftrightarrow 自由端点の境界条件).

5.9.1 光錐 Hamiltonian と交換子 [11, pp.233–237]

光錐ゲージにおいて

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X^{\mu'}, \quad \mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu, \quad \dot{X}^- = \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \dot{X}^I + X^{I'} X^{I'}) \quad (614)$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}^{\tau-} = \frac{\pi}{2p^+} \left(\mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I} + \frac{X^{I'} X^{I'}}{(2\pi\alpha')^2} \right) \quad (615)$$

と書けることに注意する (導出は 10.7.1 節).

5.8.1 節における点粒子に関する基本となる力学変数 (x^I, x_0^-, p^I, p^+) からの類推により, 弦に関する基本となる Schrödinger 演算子の組を

$$(X^I(\sigma), x_0^-, \mathcal{P}^{\tau I}(\sigma), p^+)$$

とし, これらの間に交換関係

$$[X^I(\sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\sigma')] = i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma'), \quad [x_0^-, p^+] = -i$$

を課す (その他の交換子はゼロ). 対応する Heisenberg 演算子 $(X^I(\tau, \sigma), x_0^-(\tau), \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), p^+(\tau))$ も同じ同時刻交換関係 (正準交換関係)

$$[X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma'), \quad [x_0^-(\tau), p^+(\tau)] = -i \quad (616)$$

*197 我々はこの交換関係を式 (328) において既に見ている.

を満たす*198.

Hamiltonian が τ 方向の並進操作

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial X^+}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial X^+} = 2\alpha' p^+ \frac{\partial}{\partial X^+} \leftrightarrow 2\alpha' p^+ p^-$$

を生成しなければならないことから*199, 弦の Hamiltonian を

$$\begin{aligned} H &= 2\alpha' p^+ p^- = 2\alpha' p^+ \int_0^\pi d\sigma \mathcal{P}^{\tau-} \\ &= \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma \left(\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) + \frac{X^{I'}(\tau, \sigma) X^{I'}(\tau, \sigma)}{(2\pi\alpha')^2} \right) \quad (\because \text{式 (615)}) \end{aligned} \quad (617)$$

と仮定する*200. 実際, 上で設定した交換関係を用いると, この Hamiltonian に対し Heisenberg 方程式は, 例えば $X^I(\tau, \sigma)$ の運動方程式

$$\dot{X}^I(\tau, \sigma) = 2\pi\alpha' \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) \quad (618)$$

を与えることが確かめられる (導出は 10.7.1 節). これは古典的な運動方程式 (614) と整合しているから, 上の Hamiltonian は適正である. なお古典的な境界条件は量子論において, 変数を演算子に置き換えた式になる. 例えば Neumann 境界条件は演算子 $\partial_\sigma X^I(\tau, \sigma)$ に対する条件式

$$\partial_\sigma X^I(\tau, \sigma) = 0, \quad \sigma = 0, \pi$$

になる.

最後に次節で正準交換関係 (616) を弦座標のモード展開における振動子の交換関係に読み替えるための準備として, $\dot{X}^I \pm X^{I'}$ を考える. ここで得た運動方程式 $\dot{X}^I(\tau, \sigma) = 2\pi\alpha' \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma)$ および再び上で設定した交換関係を用いると,

$$\left[(\dot{X}^I \pm X^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J \pm X^{J'}) (\tau, \sigma') \right] = \pm 4\pi\alpha' i \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'), \quad (619)$$

$$\left[(\dot{X}^I \pm X^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J \mp X^{J'}) (\tau, \sigma') \right] = 0 \quad (620)$$

が示される (複号同順, $0 \leq \sigma, \sigma' \leq \pi$, 導出は 10.7.1 節).

5.9.2 振動子の交換関係 [11, pp.237–242]

波動方程式と境界条件は演算子 $X^I(\tau, \sigma)$ に対しても成立するので (境界条件については 5.9.1 節, 波動方程式については 10.7.2 節), 古典的な弦座標と同様 (5.5.4 節),

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^I \cos n\sigma e^{-in\tau}$$

*198 右辺の計量テンソルについて, 例えば電磁場 A^μ の共変な量子化の際にも, 同様の交換関係 (313):

$$[A^\mu(\mathbf{x}, t), \dot{A}^\nu(\mathbf{x}', t)] = -ig^{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

が用いられる (計量の定義の違い $g^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu}$ に注意) [10, p.92].

*199 物理的な状態 $|\psi, \tau\rangle$ に対する Schrödinger 方程式 $i \frac{\partial}{\partial \tau} |\psi, \tau\rangle = H |\psi, \tau\rangle$ を想起せよ.

*200 これは光錐エネルギー p^- を適当に無次元化したものとして理解できる. ここで Hamiltonian が無次元となるのは, 時間座標 τ を無次元に選んだことによる.

とモード展開できる。そして 5.9.1 節で得た交換関係 (619), (620) から, 振動モード α_n^I に対する交換関係

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\eta^{IJ}\delta_{m+n,0} \quad (621)$$

を引き出せる (導出は 10.7.2 節)。さらにこれと交換関係

$$[X^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha'[X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{rJ}(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha'i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma') \quad (622)$$

(第 2 の等号は式 (618) による) を用いると, $\alpha_0^I = \sqrt{2\alpha'}p^I$ (5.5.4 節) が交換関係

$$[x_0^I, p^J] = i\eta^{IJ} \quad (623)$$

を満たすことを確かめられる (導出は 10.7.2 節)。振動子の交換関係 (621) より $p^I = \alpha_0^I/\sqrt{2\alpha'}$ は振動モード α_n^J とは交換する。

弦の古典論において振動子 a_n^μ は $n \geq 1$ に対して定義されており, これに対して古典変数 α_n^μ は

$$\alpha_n^\mu = a_n^\mu\sqrt{n}, \quad \alpha_{-n}^\mu = a_n^{\mu*}\sqrt{n}$$

によって導入された (5.5.4 節)。そこで演算子 $a_n^I, a_n^{I\dagger}$ を

$$\alpha_n^\mu = a_n^\mu\sqrt{n}, \quad \alpha_{-n}^\mu = a_n^{\mu\dagger}\sqrt{n}, \quad n \geq 1$$

で定義すると, α_n^I の交換関係 (621) は

$$[a_m^I, a_n^{J\dagger}] = \delta_{m,n}\eta^{IJ}, \quad [a_m^I, a_n^J] = 0, \quad [a_m^{I\dagger}, a_n^{J\dagger}] = 0 \quad (624)$$

となる (導出は 10.7.2 節)。よって a_n^I (したがって $\alpha_n^I, n \geq 1$) は消滅演算子, $a_n^{I\dagger}$ (したがって $\alpha_{-n}^I, n \geq 1$) は生成演算子である。

なお α_n^I と α_n^I の関係により, 弦座標の実数性の条件 $(\alpha_n^\mu)^* = \alpha_{-n}^\mu$ は “Hermite 性”

$$(\alpha_n^I)^\dagger = \alpha_{-n}^I \quad (n \geq 1)$$

に置き換わったことになる。(これは $n \geq 1$ に対して $\alpha_{-n}^I, \alpha_n^I$ をそれぞれ生成・消滅演算子に同定できるために必要なことである。) $\alpha_0^I = \sqrt{2\alpha'}p^I$ における p^I を Hermite 演算子とすると, これは $n = 0$ に対しても正しい。ここから $X^I(\tau, \sigma)$ が Hermite 演算子となることが保証される (導出は 10.7.2 節, ただし x_0^I は Hermite 演算子と仮定している)^{*201}。

5.9.3 横方向の Virasoro 演算子 [11, pp.246–248]

$X^-(\tau, \sigma)$ のモード展開における展開係数 α_n^- は, 横方向の Virasoro モード

$$L_n^\perp \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I$$

を用いて $\sqrt{2\alpha'}\alpha_n^- = \frac{1}{p^\dagger} L_n^\perp$ と与えられた (5.5.5 節)。量子論に移行すると L_n^\perp は Virasoro “演算子” となる。ここで $n = 0$ に対しては α_{n-p}^I と α_p^I は非可換だから, その順序が問題となる。

*201 この条件がもともと弦座標の実数性の条件であったことを考えれば, これは自然な結果である。

Virasoro 演算子 L_0^\perp を正規順序, すなわち消滅演算子 α_p^I が生成演算子 α_{-p}^I の右側に配置されている順序で定義する ($p > 0$). (本稿では正規順序化された演算子を $N[\dots]$ と表すことにすると,) L_0^\perp は

$$N[L_0^\perp] = \frac{1}{2}\alpha_0^I\alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty}\alpha_{-p}^I\alpha_p^I = \alpha'p^I p^I + \sum_{p=1}^{\infty}p a_p^{I\dagger} a_p^I$$

として再定義される (これは Hermite である). この措置は正規順序化定数

$$a = \frac{1}{2}(D-2)\sum_{p=1}^{\infty}p \quad (625)$$

のシフト

$$L_0^\perp = N[L_0^\perp] + a$$

をもたらす (導出は 10.7.3 節). ところで p^- は以下のように L_0^\perp と関係付けられているから, p^- にも, したがって質量の自乗の演算子にも定数シフトが導入される (結果について 10.7.3 節で補足):

$$\begin{aligned} 2\alpha'p^- &= \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^- & (5.5.4 \text{ 節}) \\ &= \frac{1}{p^+}L_0^\perp \\ &= \frac{1}{p^+}(N[L_0^\perp] + a), \\ M^2 = -p^2 &= 2p^+p^- - p^I p^I = \frac{1}{\alpha'}\left(a + \sum_{n=1}^{\infty}n a_n^{I\dagger} a_n^I\right). \end{aligned} \quad (626)$$

付加定数 $a = \frac{1}{2}(D-2)\sum_{p=1}^{\infty}p$ は無限大であるように見えるけれど, 数学公式

$$\sum_{p=1}^{\infty}p = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12} \quad (627)$$

(証明は 10.7.3 節) を認めれば, これは有限値

$$a = -\frac{1}{24}(D-2)$$

をとる. 次節では量子力学的な無矛盾性の要請から同じ結果が得られることを説明する.

5.9.4 Lorentz 生成子 [11, pp.254–257]

弦の作用の Lorentz 不変性に伴うチャージ (581):

$$M_{\mu\nu} = \int_0^\pi (X_\mu \mathcal{P}_\nu^\tau - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\tau) d\sigma$$

(ただし開弦を仮定し $0 \leq \sigma \leq \pi$ とした) は, 光錐ゲージにおいて

$$M^{\mu\nu} = x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu) \quad (628)$$

とモード展開される (導出は 10.7.4 節). そこで量子 Lorentz チャージ M^{-I} を

$$\begin{aligned}
M^{-I} &= x_0^- p^I - \frac{1}{2}(x_0^I p^- + p^- x_0^I) - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^- \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I \alpha_n^-) \\
&\quad (\text{非 Hermite な項 } -x_0^I p^- \text{ を対称化して Hermite にした}) \\
&= x_0^- p^I - \frac{1}{4\alpha' p^+} \{x_0^I (N[L_0^\perp] + a) + (N[L_0^\perp] + a)x_0^I\} - \frac{i}{\sqrt{2\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (L_{-n}^\perp \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I L_n^\perp) \\
&\quad \left(\because \sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp, \quad 2\alpha' p^- = \frac{1}{p^+} (N[L_0^\perp] + a) \right)
\end{aligned} \tag{629}$$

と考えると (上式 (629) の各項の Hermite 性について, 10.7.4 節で説明)^{*202}, これは Hermite であり正規順序化されている. この M^{-I} に対して

$$[M^{-I}, M^{-J}] = -\frac{1}{\alpha' (p^+)^2} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{-m}^I \alpha_m^J - \alpha_{-m}^J \alpha_m^I) \left[m \left\{ 1 - \frac{1}{24} (D-2) \right\} + \frac{1}{m} \left\{ \frac{1}{24} (D-2) + a \right\} \right]$$

となる (導出は行わない). Lorentz 不変性の条件 $[M^{-I}, M^{-J}] = 0$ (5.8.2 節) が成り立つことを要求すると, 時空次元 D と粒子の質量の定数シフト a が^s

$$D = 26, \quad a = -\frac{1}{24} (D-2) = -1$$

に確定する. 第 2 式は 5.9.3 節で無限和の計算から得られた結果 $a = \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} = -\frac{1}{24} (D-2)$ と同一である.

$a = -1$ を踏まえると, Hamiltonian は式 (617): $H = 2\alpha' p^+ p^-$, および $2\alpha' p^- = \frac{1}{p^+} (N[L_0^\perp] + a)$ (5.9.3 節) より

$$H = 2\alpha' p^+ p^- = N[L_0^\perp] - 1 \tag{630}$$

で与えられる.

5.9.5 状態空間の構築 [11, pp.257–262]

運動量固有状態 $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ を基底状態 (真空状態), すなわち

$$\alpha_n^I |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0, \quad n \geq 1, \quad I = 1, 2, \dots, 25$$

を満たす状態とする.

注意 ここでの真空状態はその呼び名に反して運動量 p^+, \vec{p}_T の 1 つの弦が存在する状態である. 場の理論では真空状態 $|\Omega\rangle$ が基底状態であり, これに (粒子の) 生成演算子が作用して 1 粒子状態 $|p^+, \vec{p}_T\rangle = a_{p^+, \vec{p}_T}^\dagger |\Omega\rangle$ が作られる. これとは対照的に弦理論では運動量固有状態 $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ が基底状態 (真空状態) であることになる.

ここから一般的な基本状態

$$|\lambda\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (a_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

^{*202} 本稿では正規順序化を $N[\dots]$ によって表している. $n \neq 0$ に対して $L_n^\perp = N[L_n^\perp]$ である.

が作られる。ここに非負の整数 $\lambda_{n,I}$ は $a_n^{I\dagger}$ が基底状態 $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ に作用する回数である。また生成演算子どうしは可換だから、その順序を気にする必要はない。

質量の自乗の演算子 (626):

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}(-1 + N^\perp)$$

($a = -1$ を考慮した) における励起の数演算子

$$N^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I$$

を考える。基本状態 $|\lambda\rangle$ に関する N^\perp の固有値 N_λ^\perp は、その基本状態を作っている生成演算子のモード番号の和

$$N_\lambda^\perp = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{25} n \lambda_{n,I} \quad (631)$$

になることが分かる (説明は 10.7.5 節)。例えば

$$\begin{aligned} |\lambda\rangle &= a_5^{I\dagger} a_3^{J\dagger} a_3^{J\dagger} a_2^{K\dagger} a_1^{J\dagger} a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \quad (I, J \text{ について和をとらない}) \\ \Rightarrow N_\lambda^\perp &= 5 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 \end{aligned}$$

である。

$M^2 = \frac{1}{\alpha'}(-1 + N^\perp)$ より基底状態 (固有値 $N^\perp = 0$) に対して質量の自乗は $M^2 = -1/\alpha' < 0$ となる。このように粒子質量 m が純虚数の仮想的な相対論的粒子は‘タキオン’と呼ばれる*203。

また $M^2 = 0$ となる無質量状態は、固有値 $N^\perp = 1$ を持つ状態

$$a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad I = 2, 3, \dots, 25$$

の重ね合せ

$$\sum_{I=2}^{25} \xi_I a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

として実現される。これは光錐ゲージにおける 1 光子状態は式 (605):

$$\sum_{I=2}^{D-1} \xi_I a_{p^+, \vec{p}_T}^{I\dagger} |\Omega\rangle$$

と対応付けられる。我々は開弦の量子論において無質量で偏極を持ち、それ故、光子状態に対応する状態が得たことになる。この結論は質量のシフト (正規順序化定数 $a = -1$) に多分に依存している。

このように量子弦のそれぞれの状態 $|\lambda\rangle$ は、確定した運動量を持つ 1 粒子状態を表す (多粒子状態ではない)。ここでは生成演算子は粒子数を増加させるのではなく、粒子の種類を変えていると言える。1 本の弦を量子化しているため、得られる粒子が 1 個であるというのは自然である。

*203 そのような粒子は、速度を v とするとエネルギー $E = |m|c^2\{v^2/c^2 - 1\}^{-1/2}$ を持ち、通常の因果律の枠外において振舞う超光速粒子 ($v \geq c$) ということになる。

5.9.6 運動方程式 [11, pp.262–264]

点粒子の量子化では、粒子を記述する波動関数が対応する場の量子論の古典場に同定される [11, pp.221–222].

- “第 1 量子化”
点粒子の量子化 \rightarrow 1 粒子状態.
- “第 2 量子化”
1 粒子状態の波動関数に対する Schrödinger 方程式を
スカラー場の古典的な場の方程式と再解釈し、場を量子化 \rightarrow 多粒子状態.

また場の量子論において場によって記述される粒子が弦理論からも現れるならば、弦理論から粒子と関係する場を導けると期待するのは自然である。実際そのような場は、弦の状態を表す波動関数に同定される。その証拠として本節では弦に関して波動関数の満たす Schrödinger 方程式が、場の古典的な場の方程式と同型であることを見る。

基本状態 $a_{n_1}^{I_1\dagger} \cdots a_{n_k}^{I_k\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$ の重ね合せを

$$|\Psi, \tau\rangle = \int dp^+ d^{D-2} p_T \psi_{I_1 \dots I_k}(\tau, p^+, \vec{p}_T) a_{n_1}^{I_1\dagger} \cdots a_{n_k}^{I_k\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad D = 26 \quad (632)$$

と書いて $\psi_{I_1 \dots I_k}(\tau, p^+, \vec{p}_T)$ を導入すると、 $(\langle p^+, \vec{p}_T | \Psi, \tau\rangle = \psi_{I_1 \dots I_k}(\tau, p^+, \vec{p}_T)$ だから) これは (運動量空間の) 波動関数である*204。ところで Hamiltonian(630): $H = N[L_0^\perp] - 1$ には 5.9.5 節で導入した数演算子 N^\perp が入っており、

$$H = \alpha' p^I p^I + N^\perp - 1 \quad (633)$$

と書ける (導出は 10.7.6 節)。一般的な状態 $|\Psi, \tau\rangle$ が満たす Schrödinger 方程式

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} |\Psi, \tau\rangle = H |\Psi, \tau\rangle, \quad H = \alpha' p^I p^I + N^\perp - 1 \quad (634)$$

は波動関数に対する式

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_{I_1 \dots I_k} = (\alpha' p^I p^I + N^\perp - 1) \psi_{I_1 \dots I_k} \quad (635)$$

になる (導出は 10.7.6 節)。ただしここでの N^\perp は状態 $|\Psi, \tau\rangle$ における演算子 N^\perp の固有値 $(n_1 + \cdots + n_k)$ である。

これはスカラー場 $\phi(\tau, p^+, \vec{p}_T)$ に対する式 (602):

$$i \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \alpha' (p^I p^I + m^2) \phi \quad (636)$$

と同じ形をとる (開弦の光錐ゲージ条件 $X^+ = 2\alpha' p^+ \tau$ を念頭に時間座標 x^+ を変数 τ に変換した)。

特にタキオン状態 $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ (固有値 $N^\perp = 0$) の波動関数 ψ に対してこれは

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = (\alpha' p^I p^I - 1) \psi$$

*204 この波動関数 $\psi_{I_1 \dots I_k}(\tau, p^+, \vec{p}_T)$ は、基本状態を作る振動子のモード番号 $\{n_i\}$ を含まない。

となり，スカラー場 $\phi(\tau, p^+, \vec{p}_T)$ に対する式 (636) でスカラー場の質量を $m^2 = -1/\alpha'$ と置いたものと完全に一致する*205。

また $N^\perp = 1$ の波動関数 ψ_I に対しては

$$i \frac{\partial \psi_I}{\partial \tau} = \alpha' p^J p^J \psi_I$$

となり，これは Maxwell 場 $A^I(\tau, p^+, \vec{p}_T)$ の満たす式

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} A^I = \alpha' p^J p^J A^I \quad (637)$$

(導出は 10.7.6 節) と完全に一致する。

5.10 相対論的な量子閉弦

5.10.1 モード展開と交換関係 [11, pp.275–280]

ゲージ条件

$$n \cdot X = \alpha' (n \cdot p) \tau, \quad n \cdot p = 2\pi n \cdot \mathcal{P}^\tau$$

の下では，開弦と閉弦のいずれに対しても

$$\begin{aligned} \text{制約条件} & \quad (\dot{X} \pm X')^2 = 0, \\ \text{運動方程式} & \quad \ddot{X}^\mu - X^{\mu''} = 0, \\ \mathcal{P}^\sigma, \mathcal{P}^\tau \text{ の式} & \quad \mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X^{\mu'}, \quad \mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu \end{aligned}$$

が成り立つ (5.5.3 節)。閉弦を考えよう。このとき σ の値が 2π の整数倍だけ異なる点は同じ点を表す。よって周期性条件

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi)$$

が課せられることに注意して，制約条件 $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ の下で波動方程式を解くと

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\alpha_n^\mu e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma}) \quad (638)$$

となる (確かに σ に関する周期性が見て取れる，導出は 10.8.1 節)。開弦に対する式 $\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu$ (5.5.4 節) と同様に， α_0^μ は弦の運動量に比例する：

$$p^\mu = \int_0^{2\pi} \mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau, \sigma) d\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} \dot{X}^\mu(\tau, \sigma) d\sigma = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \alpha_0^\mu, \quad \therefore \alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu.$$

量子論に移り正準交換関係

$$[X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = i\delta(\sigma - \sigma') \eta^{IJ}, \quad [x_0^-, p^+] = -i, \quad \text{etc.}$$

を課すと，2組の振動子 $\bar{\alpha}, \alpha$ に対する交換関係

$$[\bar{\alpha}_m^I, \bar{\alpha}_n^J] = m\delta_{m+n,0} \eta^{IJ}, \quad [\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\delta_{m+n,0} \eta^{IJ}, \quad [\alpha_m^I, \bar{\alpha}_n^J] = 0 \quad (639)$$

*205 これはタキオンに対して M^2 の固有値が $-1/\alpha'$ であること (5.9.5 節) と整合している。

を得る (導出は 10.8.1 節). ただし $\bar{\alpha}_0^\mu \equiv \alpha_0^\mu$ である (上式 (638) の導出過程を参照). $n \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned}\alpha_n^I &= a_n^I \sqrt{n}, & \alpha_{-n}^I &= a_n^{I\dagger} \sqrt{n}, \\ \bar{\alpha}_n^I &= \bar{a}_n^I \sqrt{n}, & \bar{\alpha}_{-n}^I &= \bar{a}_n^{I\dagger} \sqrt{n}\end{aligned}$$

によって $a_n^I, a_n^{I\dagger}, \bar{a}_n^I, \bar{a}_n^{I\dagger}$ を導入すると, これらは (開弦の場合と同じ次理由で)

$$[\bar{a}_m^I, \bar{a}_n^{J\dagger}] = \delta_{m,n} \eta^{IJ}, \quad [a_m^I, a_n^{J\dagger}] = \delta_{m,n} \eta^{IJ}, \quad \text{etc.}$$

を満たすため, 生成・消滅演算子となる. x_0^I と $\alpha_n^J (n \neq 0)$, $\alpha_0^J = \sqrt{\alpha'/2} p^J$ の交換関係

$$\begin{aligned}[x_0^I, \alpha_n^J] &= [x_0^I, \bar{\alpha}_n^J] = 0 \quad \text{for } n \neq 0, \\ [x_0^I, p^J] &= i\eta^{IJ}\end{aligned}\tag{640}$$

も見出される (導出は 10.8.1 節). 閉弦に対して Hamiltonian は

$$H = \alpha' p^+ p^- \tag{641}$$

である (説明は 10.8.1 節).

5.10.2 閉弦の Virasoro 演算子 [11, pp.281-284]

閉弦に対しては 2 組の横方向 Virasoro 演算子

$$\bar{L}_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_p^I \bar{\alpha}_{n-p}^I, \quad L_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I$$

を定義できる. X^- を横方向座標に関係付ける式

$$\begin{aligned}\dot{X}^- + X^{-\prime} &= \frac{1}{\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I + X^{I\prime})^2 = \frac{2}{p^+} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{L}_n^\perp e^{-in(\tau+\sigma)}, \\ \dot{X}^- - X^{-\prime} &= \frac{1}{\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I - X^{I\prime})^2 = \frac{2}{p^+} \sum_{n \in \mathbf{Z}} L_n^\perp e^{-in(\tau-\sigma)}\end{aligned}\tag{642}$$

(第 2 の等号については 10.8.2 節参照) を X^- (の導関数) のモード展開 (795)(10.8.1 節):

$$\dot{X}^- + X^{-\prime} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_n^- e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad \dot{X}^- - X^{-\prime} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau-\sigma)}$$

と比較すると, 閉弦においても X^- の振動子モード $\bar{\alpha}_n^-, \alpha_n^-$ が横方向 Virasoro 演算子に相当することが分かる:

$$\sqrt{2\alpha'} \bar{\alpha}_n^- = \frac{2}{p^+} \bar{L}_n^\perp, \quad \sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{2}{p^+} L_n^\perp.$$

$n = 0$ の場合を考えると

$$\alpha_0^\mu = \bar{\alpha}_0^\mu \quad \Rightarrow \quad \alpha_0^- = \bar{\alpha}_0^-$$

なので

$$L_0^\perp = \bar{L}_0^\perp$$

が得られる. これは閉弦の任意の状態 $|\Psi\rangle$ が $L_0^\perp |\Psi\rangle = \bar{L}_0^\perp |\Psi\rangle$ を満たさなければならないという, 状態 $|\Psi\rangle$ に対する制約である.

$L_0^\perp, \bar{L}_0^\perp$ を正規順序化すると

$$N[\bar{L}_0^\perp] = \frac{\alpha'}{4} p^I p^I + \bar{N}^\perp, \quad N[L_0^\perp] = \frac{\alpha'}{4} p^I p^I + N^\perp \quad (643)$$

(ただし $N^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I$, $\bar{N}^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{a}_n^{I\dagger} \bar{a}_n^I$) および

$$\bar{L}_0^\perp = N[\bar{L}_0^\perp] - 1, \quad L_0^\perp = N[L_0^\perp] - 1 \quad (644)$$

となるので (10.8.2 節参照), この制約条件は

$$N^\perp = \bar{N}^\perp$$

と書き換えられることが有用となる.

閉弦に対する質量や Hamiltonian を, 次のように Virasoro 演算子に関係付けることができる (導出は 10.8.2 節).

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{2}{\alpha'} (N[L_0^\perp] + N[\bar{L}_0^\perp] - 2) - p^I p^I \\ &= \frac{1}{\alpha'} (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2), \end{aligned} \quad (645)$$

$$\begin{aligned} H &= N[L_0^\perp] + N[\bar{L}_0^\perp] - 2 \\ &= \frac{\alpha'}{2} p^I p^I + N^\perp + \bar{N}^\perp - 2. \end{aligned} \quad (646)$$

Virasoro 演算子の閉弦座標への作用として以下が見出される (導出は 10.8.2 節).

- $[N[L_0^\perp] + N[\bar{L}_0^\perp], X^I(\tau, \sigma)] = -i \frac{\partial X^I}{\partial \tau}$
 - Hamiltonian $H = N[L_0^\perp] + N[\bar{L}_0^\perp] - 2$ は τ -推進を生成する.
- $[N[L_0^\perp] - N[\bar{L}_0^\perp], X^I(\tau, \sigma)] = i \frac{\partial X^I}{\partial \sigma}$
 - $P \equiv N[L_0^\perp] - N[\bar{L}_0^\perp]$ はパラメーター σ の巡回的なずらしを生成する.
 - * 光錐ゲージにおいてもパラメーター σ は固定されず,
 $\sigma \rightarrow \sigma + \sigma_0$ という変換を施せる任意性が残っている.
 - * このことから P は“世界面の”運動量と言える.
- $L_0^- = \bar{L}_0^- (\Rightarrow N[L_0^\perp] = N[\bar{L}_0^\perp])$ より,
 パラメーター σ のずらし操作の下で閉弦状態 $|\Psi\rangle$ は不変: $\exp(-iP\sigma_0)|\Psi\rangle = |\Psi\rangle$.

5.10.3 閉弦の状態空間 [11, pp.284–288]

基底状態を $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ とする状態

$$|\lambda, \bar{\lambda}\rangle = \left[\prod_{n,I} (a_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}} \right] \left[\prod_{m,J} (\bar{a}_m^{J\dagger})^{\bar{\lambda}_{m,J}} \right] |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

($\lambda_{n,I}, \bar{\lambda}_{n,I}$ は非負整数) のうち, 条件 $L_0^\perp = \bar{L}_0^\perp$ より固有値が

$$N^\perp = \bar{N}^\perp$$

を満たすものが一般的な基本状態を成す。この条件はパラメーター σ の巡回的なずらしの操作の下で不変な閉弦の状態だけが許容されることを意味する (5.10.2 節)。

$M^2 = \frac{2}{\alpha'}(N^\perp + \bar{N}^\perp - 2)$ より、基底状態 $|p^+, \vec{p}_T\rangle (N^\perp = \bar{N}^\perp = 0)$ は $M^2 = -4/\alpha' < 0$ を持つ閉弦タキオンである。閉弦タキオンは開弦タキオンに比べて理解がほとんど進んでいない。

$M^2 = 0$ の無質量状態は $N^\perp + \bar{N}^\perp = 2$ のとき実現され、条件 $N^\perp = \bar{N}^\perp$ よりこのとき $N^\perp = \bar{N}^\perp = 1$ である。そこで状態

$$\sum_{I,J} R_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

を考える。一般に行列 (R_{IJ}) はトレースレスの対称部分 (\hat{S}_{IJ}) と、反対称部分 (A_{IJ}) と、単位行列 (δ_{IJ}) に比例する部分に分解できる：

$$R_{IJ} = \hat{S}_{IJ} + A_{IJ} + S' \delta_{IJ}.$$

ここに

$$S_{IJ} \equiv \frac{1}{2}(R_{IJ} + R_{JI}) : \text{対称部分}, \quad A_{IJ} \equiv \frac{1}{2}(R_{IJ} - R_{JI}) : \text{反対称部分}$$

に対して

$$\begin{aligned} S &\equiv \delta_{IJ} S_{IJ} [= \text{tr}(S_{IJ})], \\ \hat{S}_{IJ} &\equiv S_{IJ} - \frac{1}{D-2} \delta_{IJ} S : \text{トレースレスの対称部分}, \\ S' &\equiv \frac{S}{D-2} \end{aligned}$$

である。

ここでトレースレス部分 \hat{S}_{IJ} の担う状態

$$\sum_{I,J} \hat{S}_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \quad (647)$$

は、重力子の 1 粒子状態に同定される。実際、運動量 (p^+, \vec{p}_T) を持つ 1 重力子状態は、式 (609):

$$\sum_{I,J=2}^{D-1} \xi_{IJ} a_{p^+, \vec{p}_T}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle$$

で与えられる。重力子の偏極テンソル ξ_{IJ} は \hat{S}_{IJ} と同じくトレースレスで対称だから、上の状態 (647) に対応付けられる。

- 反対称部分 A_{IJ} の担う状態

$$\sum_{I,J} A_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

↔ 反対称テンソル場 $B_{\mu\nu}$ (Kalb-Ramond 場, 6.2 節) の 1 粒子状態。

- トレース部分 $S' \delta_{IJ}$ の担う状態

$$\sum_{I,J} S' \delta_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle = S' a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

↔ 質量のないスカラー場の 1 粒子状態。粒子はディラトンと呼ばれる。

– ディラトン場の期待値は弦の結合 g を決定する [11, p.288].

最後に弦状態の波動関数と古典場の関係を論じる。無質量状態 $a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$ の重ね合せ

$$|\Psi, \tau\rangle = \int dp^+ d^{24} p_T \psi_{IJ}(\tau, p^+, \vec{p}_T) a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

が Schrödinger 方程式 $i\partial_\tau |\Psi, \tau\rangle = H |\Psi, \tau\rangle$ を満たすことから、波動関数 $\psi_{IJ}(\tau, p^+, \vec{p}_T) = \langle p^+, \vec{p}_T | \Psi, \tau \rangle$ は質量のないスカラー場の方程式

$$\left(i \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\alpha'}{2} p^K p^K \right) \psi_{IJ}(\tau, p^+, \vec{p}_T) = 0$$

を満たす (我々は同様の計算を開弦に対して行っている)。したがって波動関数の

- トレースレスの対称部分
- 反対称部分
- トレース部分

も同じ方程式を満たす。ところで重力場, Kalb-Ramond 場, デイラトン場も光錐ゲージでは、質量のないスカラー場の方程式 (602):

$$\left(i \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\alpha'}{2} p^K p^K \right) \phi(\tau, p^+, \vec{p}_T) = 0$$

(ただし (閉弦の光錐ゲージ条件を想定して) $x^+ = \alpha' p^+ \tau$ と設定した) を満たすことから (重力場については 10.5.3 節), これらをそれぞれ重力場, Kalb-Ramond 場, デイラトン場と見なすことが正当化される。

5.11 超弦理論入門

ここまではボゾンの弦の量子化を集中的に学んできた。本節ではフェルミオンを含む理論として、超弦理論の入門的な解説を行う。本節は難しい題材を扱っているため、読者はいくつかの天下りな説明を受け容れる必要があるが、それは初学者にとって適度な説明を与えるための配慮である。

5.11.1 反可換な変数と演算子 [11, pp.302–303]

弦理論においてフェルミオンを得るために、世界面上に反可換な古典的変数 $\psi_\alpha^\mu(\tau, \sigma)$ ($\alpha = 1, 2$) を導入する。(いわゆる Grassmann 場である。) ここで b_1, b_2 が反可換な変数であるとは、

$$b_i b_j = -b_j b_i \quad (\text{したがって } b_i^2 = 0)$$

が成り立つことを言う。

5.11.2 世界面フェルミオン [11, pp.303–306]

本節では開弦に関して、場 ψ_α^μ の境界条件に応じて、Neveu-Schwarz(NS) セクターと Ramond(R) セクターと呼ばれる 2 つの状態の集合が得られることを説明する。

- 光錐ゲージ条件 $\psi_\alpha^+ = 0$
 - ψ_α^- は ψ_α^I を用いて表される
- Lorentz 不変性の条件 $[M^{-I}, M^{-J}] = 0$ における交換子 $[M^{-I}, M^{-J}]$ には X^μ だけでなく ψ_α^μ も寄与する

- 時空は 10 次元になる
- 質量の自乗の下方シフトは -1 の代わりに $-1/2$ になる

光錐ゲージにおいて弦座標 X^I と場 ψ_α^I の力学は, X^I に対する作用 S_X と ψ_α^I に対する (Dirac) 作用

$$S_\psi = \frac{1}{2\pi} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma [\psi_1^I(\partial_\tau + \partial_\sigma)\psi_1^I + \psi_2^I(\partial_\tau - \partial_\sigma)\psi_2^I] \quad (648)$$

を合わせた全作用 $S = S_X + S_\psi$ によって記述される (ただしここでは開弦が考えられている). ψ_α^I が反可換であることに注意して ψ_α^I に関する作用の変分を計算すると, 境界条件

$$\psi_1^I \delta \psi_1^I - \psi_2^I \delta \psi_2^I = 0 \quad (\sigma = \sigma_* \equiv 0, \pi) \quad (649)$$

の下で変分原理から運動方程式

$$(\partial_\tau + \partial_\sigma)\psi_1^I = 0, \quad (\partial_\tau - \partial_\sigma)\psi_2^I = 0 \quad (650)$$

が導かれることが分かる (導出は 10.9.1 節). 解は

$$\psi_1^I(\tau, \sigma) = \Psi_1^I(\tau - \sigma), \quad \psi_2^I(\tau, \sigma) = \Psi_2^I(\tau + \sigma) \quad (651)$$

という形をとる (10.9.1 節で補足).

境界条件 (649) は

$$\psi_1^I(\tau, \sigma_*) = \pm \psi_2^I(\tau, \sigma_*)$$

とすると満たされる. ψ_1^I と ψ_2^I は作用の式において 2 次で現れるので, $(-\psi_\alpha^I \rightarrow \psi_\alpha^I)$ と改めても場 ψ_α^I が満たす運動方程式は変わらない. よって) 一般性を失うことなく, 一方の端点 $\sigma_* = 0$ において

$$\psi_1^I(\tau, 0) = \psi_2^I(\tau, 0)$$

とできる. このときもう一方の端点 $\sigma_* = \pi$ における 2 通りの符号

$$\psi_1^I(\tau, \pi) = \pm \psi_2^I(\tau, \pi) \quad (652)$$

が物理的意味を持つ.

$$\Psi^I(\tau, \sigma) = \begin{cases} \psi_1^I(\tau, \sigma) = \Psi_1^I(\tau - \sigma) & (0 \leq \sigma \leq \pi) \\ \psi_2^I(\tau, -\sigma) = \Psi_2^I(\tau - \sigma) & (-\pi \leq \sigma \leq 0) \end{cases}$$

を定義するとこれは $\tau - \sigma$ の関数であり, $\sigma = 0$ で連続である. 境界条件 (652) は $\Psi^I(\tau, \sigma)$ に対する境界条件

$$\Psi^I(\tau, \pi) = \pm \Psi^I(\tau, -\pi)$$

になる (複号同順).

- 複号の上側を選んだ場合の境界条件

$$\Psi^I(\tau, \pi) = +\Psi^I(\tau, -\pi)$$

は Ramond 境界条件と呼ばれ,

ここから得られる開弦の状態は Ramond(R) セクターを成す.

- 複号の下側を選んだ場合の境界条件

$$\Psi^I(\tau, \pi) = -\Psi^I(\tau, -\pi)$$

は Neveu-Schwarz 境界条件と呼ばれ,

ここから得られる開弦の状態は Neveu-Schwarz(NS) セクターを成す.

5.11.3 Neveu-Schwarz セクター [11, pp.306–309]

Neveu-Schwarz 境界条件を満たす, $\tau - \sigma$ の関数 Ψ^I のモード展開として

$$\Psi^I(\tau, \sigma) \sim \sum_{r: \text{半整数}} b_r^I e^{-ir(\tau - \sigma)}$$

の形を考える. (量子論に移行するためにこれを演算子と見なし) 展開係数 b_r^I に反交換関係

$$\{b_r^I, b_s^J\} = \delta_{r+s,0} \delta^{IJ}$$

を課すと, $b_{-1/2}^I, b_{-3/2}^I, b_{-5/2}^I, \dots$ を生成演算子, $b_{1/2}^I, b_{3/2}^I, b_{5/2}^I, \dots$ を消滅演算子とできる*206. このとき $(b_r^I)^2 = 0$ に注意すると, $b_{-1/2}^I, b_{-3/2}^I, b_{-5/2}^I, \dots$ に関する基底状態を |NS> として NS セクターにおける基本状態は

$$|\lambda\rangle = \left[\prod_{I=2}^9 \prod_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^I)^{\lambda_{n,I}} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right] \otimes \left[\prod_{J=2}^9 \prod_{r=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots} (b_{-r}^J)^{\rho_{r,J}} |\text{NS}\rangle \right] \quad (653)$$

と書ける ($\rho_{r,J}$ は 0 か 1 の値をとる).

NS セクターにおける質量の自乗の演算子は

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{r: \text{半整数}} r b_{-r}^I b_r^I \right) \quad (654)$$

であり, これを正規順序化すると

$$M^2 = N[M^2] - \frac{1}{2\alpha'} = \frac{1}{\alpha'} \left(-\frac{1}{2} + N^\perp \right), \quad N^\perp = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \sum_{r=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots} r b_{-r}^I b_r^I \quad (655)$$

となる (導出は 10.9.2 節). 基本状態 (653) が持ち得る数演算子 N^\perp の固有値および対応する質量の自乗 M^2 の固有値は

$$N^\perp = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, \quad \alpha' M^2 = -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \dots \quad (656)$$

である (理由は 10.9.2 節).

F がフェルミオン数を表す演算子であり, したがって

$$\begin{aligned} \text{状態がボゾンの} &\leftrightarrow \text{フェルミオン数が偶数} &\leftrightarrow \text{固有値 } (-1)^F = +1, \\ \text{状態がフェルミオンの} &\leftrightarrow \text{フェルミオン数が奇数} &\leftrightarrow \text{固有値 } (-1)^F = -1 \end{aligned}$$

となるように演算子 $(-1)^F$ を導入する. 基底状態 |NS> \otimes $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ に関する $(-1)^F$ の固有値を -1 と決めておくと, (等価的に F の固有値を 1 と見なせるので,) 基本状態 (653) に対して (フェルミオン数 F の固有値は $1 + \sum_{r,J} \rho_{r,J}$ だから)

$$(-1)^F |\lambda\rangle = -(-1)^{\sum_{r,J} \rho_{r,J}} |\lambda\rangle.$$

*206 r, s をそれぞれ正の奇数とすると, これは

$$\{b_r^I, b_s^J\} = 0, \quad \{b_{-r}^I, b_{-s}^J\} = 0, \quad \{b_r^I, b_{-s}^J\} = \delta_{rs} \delta^{IJ}$$

を意味する. よって b_r^I と b_{-r}^I のいずれか一方を生成演算子, もう一方を対応する消滅演算子と見なせる.

5.11.4 Ramond セクター [11, pp.309–311]

Ramond 境界条件を満たす, $\tau - \sigma$ の関数 Ψ^I のモード展開は

$$\Psi^I(\tau, \sigma) \sim \sum_{n \in \mathbf{Z}} d_n^I e^{-in(\tau - \sigma)}$$

という形をとる. (量子論に移行するためにこれを演算子と見なし) 展開係数 d_n^I に反交換関係

$$\{d_m^I, d_n^J\} = \delta_{m+n,0} \delta^{IJ}$$

を課すと, $d_{-1}^I, d_{-2}^I, d_{-3}^I, \dots$ を生成演算子, $d_1^I, d_2^I, d_3^I, \dots$ を消滅演算子とできる.

NS セクターの場合に Ψ^I が半整数モードの指数関数によって展開されたの異なり, R セクターにおいては 8 個のゼロモード $d_0^I (I = 2, \dots, 9)$ がある. これらの線形結合は 4 つの生成演算子

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \xi_4$$

と, 対応する 4 つの消滅演算子になることが判明する. 真空状態 $|0\rangle$ をとると, ここから相異なる ξ_i を偶数個持つ状態

$$\{|R_a\rangle\} = \{|0\rangle, \xi_1 \xi_2 |0\rangle, \xi_1 \xi_3 |0\rangle, \xi_1 \xi_4 |0\rangle, \xi_2 \xi_3 |0\rangle, \xi_2 \xi_4 |0\rangle, \xi_3 \xi_4 |0\rangle, \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 |0\rangle\}$$

および相異なる ξ_i を奇数個持つ状態

$$\{|R_{\bar{a}}\rangle\} = \{\xi_1 |0\rangle, \xi_2 |0\rangle, \xi_3 |0\rangle, \xi_4 |0\rangle, \xi_1 \xi_2 \xi_3 |0\rangle, \xi_1 \xi_2 \xi_4 |0\rangle, \xi_1 \xi_3 \xi_4 |0\rangle, \xi_2 \xi_3 \xi_4 |0\rangle\}$$

が作られる. これらが Ramond 基底状態 $|R_A\rangle$ を成す. $|0\rangle$ がフェルミオンの状態である, すなわち

$$(-1)^F |0\rangle = -|0\rangle$$

とすると, $|R_a\rangle$ 状態はフェルミオンの (固有値 $(-1)^F = -1$) であり, $|R_{\bar{a}}\rangle$ 状態はボゾンの (固有値 $(-1)^F = +1$) となる. $(d_n^I)^2 = 0$ に注意すると, 基本状態は

$$|\lambda\rangle = \left[\prod_{I=2}^9 \prod_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^I)^{\lambda_{n,I}} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right] \otimes \left[\prod_{J=2}^9 \prod_{m=1}^{\infty} (d_{-m}^J)^{\rho_{m,J}} |R_A\rangle \right]$$

と書ける ($\rho_{m,J}$ は 0 か 1 の値をとる).

R セクターにおける質量の自乗の演算子は

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} n d_{-n}^I d_n^I \right) \quad (657)$$

である. α^I 振動子の項と d^I 振動子の項の正規順序化定数は打ち消しあってゼロになり (確認は 10.9.3 節),

$$M^2 = N[M^2] = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n \geq 1} (\alpha_{-n}^I \alpha_n^I + n d_{-n}^I d_n^I)$$

を得る. 例えば状態 $\alpha_{-1}^I d_{-1}^J |R_a\rangle$ における $|R_a\rangle$ を $|R_{\bar{a}}\rangle$ に置き換えれば, フェルミオン数の偶奇の異なる状態 $\alpha_{-1}^I d_{-1}^J |R_{\bar{a}}\rangle$ が作られる. よって各質量レベルにおいてボゾンの状態とフェルミオンの状態が等しい数だけ現れる. これは世界面における超対称性である (X^μ と ψ_α^μ は世界面において定義されているから).

5.11.5 開いた超弦 [11, pp.314–316]

R セクターにおいて, Lorentz 変換の下で

- d_0^I はベクトル成分として変換する.
- $|R_a\rangle$ と $|R_{\bar{a}}\rangle$ はそれぞれスピノルとして変換する.
 - 2 種類の異なるフェルミオンが存在するという事実を反映.
 - * しかしここから 2 種類の時空フェルミオンを得ることはできない.
 - $|R_a\rangle$ と $|R_{\bar{a}}\rangle$ の一方はボゾンの状態だから.
 - * $|R_a\rangle$ を時空のフェルミオン, $|R_{\bar{a}}\rangle$ を時空のボゾンと同定することもできない.
 - 時空のボゾンはスピノル添字 \bar{a} を持ちえないから*207.

そこで固有値 $(-1)^F = -1$ の状態だけを含む集合 (R- セクターと呼ばれる) だけからすべてのフェルミオンが得られるものと考え, R セクターを R- セクターに縮小する. R- セクターに含まれる世界面におけるフェルミオンの状態が, 時空におけるフェルミオン状態に対応するものと見なす. なお $(-1)^F = +1$ となる R 状態の集合を R+ セクターと呼ぶ.

一方, NS セクターに関しては固有値 $(-1)^F = +1$ のボゾンの状態だけを残すことにする. これらは NS+ セクターを成す. このとき

- タキオン状態 ($\alpha' M^2 = -1/2$) である基底状態 $|\text{NS}\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle$ はフェルミオンのなので捨て去られる.
- 1 光子状態に同定される無質量状態 $b_{-1/2}^I |\text{NS}\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle$ はボゾンの状態なので保持される.

このとき R- セクターと NS+ セクターの組合せによって定義される開弦理論は, 各質量レベルにおいてフェルミオンの状態とボゾンの状態を同数持つことが示される (説明は 5.11.5 節). 超弦理論の備えるこの対称性を超対称性という.

5.11.6 閉じた超弦 [11, pp.316–320]

閉弦の理論において振動子 $\alpha, \bar{\alpha}$ はそれぞれ $e^{-in(\tau+\sigma)}, e^{-in(\tau-\sigma)}$ の展開係数である (式 (638)). そこで生成演算子 $\alpha, \bar{\alpha}$ の作る状態をそれぞれ左進セクター (添字 L で表す), 右進セクター (添字 R で表す) と呼ぶ. 左進セクターと右進セクターの各々は開弦の状態に当たり, それぞれ NS セクターと R セクターを持つ.

超対称性を備えた閉弦理論を得るために, 状態を

$$\text{左進セクター} : \left\{ \begin{array}{l} \text{NS+} \\ \text{R-} \end{array} \right\}, \quad \text{右進セクター} : \left\{ \begin{array}{l} \text{NS+} \\ \text{R+} \end{array} \right\}$$

と縮小する理論を IIA 型と呼ぶ. IIA 型の理論における無質量状態は

$$\begin{array}{llll} (\text{NS+}, \text{NS+}) : & \bar{b}_{-1/2}^I |\text{NS}\rangle_L \otimes b_{-1/2}^J |\text{NS}\rangle_R \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle & & 8 \times 8 \text{ 個のボゾン状態,} \\ (\text{NS+}, \text{R+}) : & \bar{b}_{-1/2}^I |\text{NS}\rangle_L \otimes |\text{R}_{\bar{b}}\rangle_R \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle & & 8 \times 8 \text{ 個のフェルミオン状態,} \\ (\text{R-}, \text{NS+}) : & |\text{R}_a\rangle_L \otimes b_{-1/2}^J |\text{NS}\rangle_R \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle & & 8 \times 8 \text{ 個のフェルミオン状態,} \\ (\text{R-}, \text{R+}) : & |\text{R}_a\rangle_L \otimes |\text{R}_{\bar{b}}\rangle_R \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle & & 8 \times 8 \text{ 個のボゾン状態} \end{array}$$

で与えられる. 無質量の (NS+, NS+) ボゾンは 2 つの Lorentz 添字を持ち, 重力子と Kalb-Ramond 場と, ディラトンの 1 粒子状態に同定される.

*207 「時空の」という但し書きは, 世界面におけるボゾン・フェルミオンとの区別を強調するために用いられている.

状態を

$$\text{左進セクター} : \begin{Bmatrix} \text{NS+} \\ \text{R-} \end{Bmatrix}, \quad \text{右進セクター} : \begin{Bmatrix} \text{NS+} \\ \text{R-} \end{Bmatrix}$$

と縮小する理論を IIB 型と呼ぶ。

II 型理論の無質量 R-R ボゾンは次のようにまとめられる (場は添字に関して反対称)。

$$\begin{aligned} \text{IIA 型における R-R 無質量場} : & \quad A_\mu, \quad A_{\mu\nu\rho} \\ \text{IIB 型における R-R 無質量場} : & \quad A, \quad A_{\mu\nu}, \quad A_{\mu\nu\rho\sigma} \end{aligned}$$

II 型超弦理論において安定となる D-ブレーンは、これらの場と結合する。

- II 型 (閉弦のみ)
開いた超弦の複製を左進部分と右進部分に充てて組み合わせる
 - IIA 型
 - IIB 型
- ヘテロ型 (閉弦のみ)
開いたボゾンの弦を左進部分, 開いた超弦を右進部分として組み合わせる。
 - $E_8 \times E_8$ ヘテロ型
 - $SO(32)$ ヘテロ型
- I 型 (閉弦と開弦)
無向の (12.6 節参照) 閉弦と開弦による超対称な理論

注意 ここでは 1980 年代の摂動論的観点の下で「閉弦のみ」としてある II 型の超弦理論も、D-ブレーンを導入して考えるならば開弦を併用することになる (6.7 節, 6.8 節)。

以上の 5 種類の超弦理論と M 理論 (膜を含んでいるが弦理論ではない) は、唯一の理論の異なる極限と見なされる。ボゾンの弦の理論も単一の理論に含まれるかはまだ不明である。

6 弦理論《発展編》

本章では文献 [2](B. ツヴィーバッハ『初級講座 弦理論《発展編》) の内容を基に、弦理論のさらに発展的なトピックについて紹介する。ただし本稿では概略を述べるに留め、式の導出などの詳細は、以下のページにて公開している文献 [2] の自己完結的なノートに譲ることにする。

<http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/>

6.1 D-ブレーンとゲージ場

25次元の全空間を埋める D25-ブレーンが存在する場合には、開弦の両端の座標が全て自由端の境界条件(適当なゲージの下で Neumann 境界条件に帰す)を満たす。これに対し空間に $p (< 25)$ 次元の単純な“超平面”

$$x^a = \bar{x}^a (= \text{const}), \quad a = p+1, \dots, d$$

として広がる Dp -ブレーンを仮定すると、ここに接続された開弦の端点 ($\sigma = \sigma_* = 0, \pi$) は、弦座標の x^a 方向成分が Dirichlet 境界条件 $X^a(\tau, \sigma_*) = \bar{x}^a$ を満たす。ただし時間座標 X^0 と組合せて光錐座標 X^\pm を定義するために、Neumann 境界条件を満たす空間座標 X^1 が最低 1 つは必要なので、 $1 \leq p (< 25)$ を仮定しよう。ここでは次の 2 つの場合のみを具体的に調べる。

- 両端を共通の Dp -ブレーン上に持つ開弦 (図 100 参照)
- 平行な 2 つの Dp -ブレーンの間の開弦 (図 101 参照)

まず両端を同じ Dp -ブレーンに接続している開弦について、Dirichlet 境界条件 $X^a(\tau, \sigma_*) = \bar{x}^a$ の下での弦座標のモード展開

$$X^a(\tau, \sigma) = \bar{x}^a + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^a e^{-in\tau} \sin n\sigma$$

には新たな特徴が現れる。

- 端点が $x^a = \bar{x}^a$ に止まり続けることから期待されるように、 x^a 方向の (正味の時間平均) 運動量 p^a での並進を表す τ の 1 次の項が現れない。

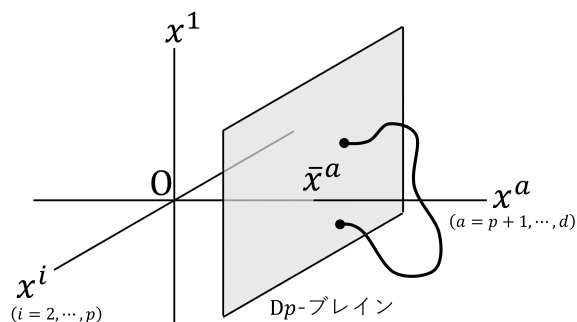


図 100 両端を共通の Dp -ブレーン上に持つ開弦

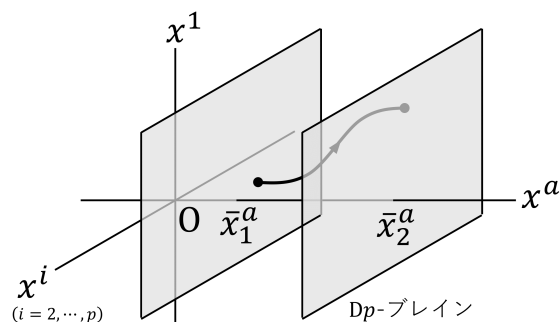


図 101 平行な 2 つの Dp -ブレーンの間の開弦

- \bar{x}^a は単なる定数であって、演算子にはならない.

量子化を行うと D25-ブレインの場合と同様、基底状態としてタキオンが得られ、また D25-ブレインにおいて $(d-1)$ 個あった光子状態は、D p -ブレインでは $(p-1)$ 個の光子状態と $(d-p)$ 個のスカラー状態になる.

- 基底状態 $|p^+, \vec{p}\rangle$
D25-ブレインの場合と同じ質量 $M^2 = -1/\alpha'$ を持つタキオン状態.
タキオン場は D p -ブレイン上のスカラー場.
- 無質量状態 ($M^2 = 0$)
 - $(p-1)$ 個の状態 $a_1^{i\dagger} |p^+, \vec{p}\rangle$, $i = 2, \dots, p$
独立な古典場 A^I に応じて $(d-1)$ 種類の 1 光子状態が得られたのと同様に、これは光子状態であり、Lorentz 添字 i を持つ D p -ブレイン上の Lorentz ベクトル場である Maxwell 場に関する.
 - $(d-p)$ 個の状態 $a_1^{a\dagger} |p^+, \vec{p}\rangle$, $a = p+1, \dots, d$
ブレインに垂直な方向を示す添字 a はブレインの Lorentz 添字ではなく、単なる番号のラベルであり、D p -ブレイン内のスカラー場が対応する.

ただし $\vec{p} \equiv (p^2, \dots, p^p)$ はブレインに沿う横方向運動量である. これらの場がどこに存在するのかを明確に結論付けるのには成功していない. しかしながら弦の状態 $|\Psi, \tau\rangle$ を表す運動量空間の波動関数は

$$\langle p^+, \vec{p} | \Psi, \tau \rangle = \psi \dots (\tau, p^+, \vec{p})$$

という形をとるので (「 \dots 」は状態 $|\Psi, \tau\rangle$ を構築する生成演算子のラベル), 弦の状態を表す場に同定される座標空間の波動関数は、D p -ブレインの世界領域を張る $(p+1)$ 個の座標 $x^+ (\sim \tau), x^-, x^i (i = 2, \dots, p)$ を引数を持つことになる. このため素朴には、場は D p -ブレイン上に存在すると考えるのが自然である.

次に 2 つの平行な D p -ブレイン

$$x^a = \bar{x}_1^a, \quad x^a = \bar{x}_2^a$$

のそれぞれに端点を持つ開弦を考えると、質量の自乗 $\left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2$ という寄与が加わる:

$$M^2 = \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \frac{1}{\alpha'}(N^\perp - 1), \quad N^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2}^p n a_n^{i\dagger} a_n^i + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=p+1}^d m a_m^{a\dagger} a_m^a.$$

これは粗く単純に解釈すれば、弦が張力 $T_0 = 1/2\pi\alpha'$ で D-ブレインの間隔 $|\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a|$ だけ引き伸ばされて得る静止エネルギーの自乗となっている. このため基底状態 ($N^\perp = 0$) における質量の自乗は、間隔 $|\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a|$ に応じて $M^2 \gtrless 0$ のいずれにもなり得る. また質量を持つ Maxwell ゲージ場は p 次元空間において、質量のない場合の自由度 $(p-1)$ よりも 1 つ多い p 個の状態を持つ. このため上で見た $N^\perp = 1$ の状態は、ここでは $(d-p)$ 個の状態 $a_1^{a\dagger} |p^+, \vec{p}\rangle$ のうち 1 つが $(p-1)$ 個の状態 $a_1^{i\dagger} |p^+, \vec{p}\rangle$ と合わせて質量 (の自乗) $M^2 = \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2$ を持つ Maxwell ゲージ場を形成し、残り $(d-p-1)$ 個の状態がそれぞれスカラー場を持つ*208. 以上の場はある意味で“両方の” D-ブレインに存在しており、2 つの D-ブレインが離れているという事実を反映して、場は非局所的な相互作用を持つことになる.

*208 このように Maxwell 場という用語は質量を持つ場を含め、“Maxwell 型”の場の方程式に従うゲージ場一般を指すのにも用いられる.

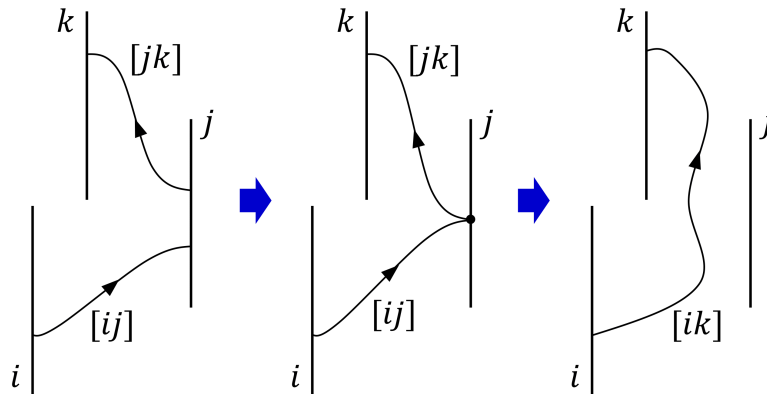


図 102 ゲージ場の相互作用の起源となる、 Dp -ブレーン上での弦の端点の結合

ブレーン i に始点 ($\sigma = 0$) を持ち、ブレーン j に終点 ($\sigma = \pi$) を持つ弦を $[ij]$ セクターと呼ぶ (後述のように弦には始点から終点に向かう向きがある)^{*209}. N 個の Dp -ブレーンが互いに重なり合っているとき ($|\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a| = 0$), 各 $[ij]$ セクターは質量のない 1 つのゲージ場を持つことになる. ところで弦の始点と終点の属するブレーンの選び方はそれぞれ N 通りだから, 全部で N^2 個のセクターが, したがって N^2 個の無質量ゲージ場が存在する. これらの場の相互作用は $U(N)$ Yang-Mills 理論によって記述される. 弦の描像では実は, このような場の相互作用は異なる弦の端点在同一の D -ブレーン上で結合する過程によって生じる. 図 102 のように $[ij]$ セクターの弦の終点と $[jk]$ セクターの弦の始点が j 番目のブレーン上で結合すると, この点ではもはや端点ではないから, 結果として形成される弦は j 番目の D -ブレーンには接続しておらず, $[ik]$ セクターの弦となる. このことを

$$[ij] * [jk] = [ik]. \quad (j \text{ について和をとらない})$$

と表記する.

6.2 弦のチャージと電荷

場の古典論において粒子が Maxwell 場 A_μ と相互作用するのと同様に, 弦と結合する場を考えると, (場と相互作用する能力としての) 弦のチャージが自然に導入されることを論じよう.

適正な作用の結合項を得るには, 弦と相互作用する無質量のゲージ場は, 添字に関して反対称な 2 階テンソル場 $B_{\mu\nu}$ でなければならないことが結論される. そのような場は Kalb-Ramond 場と呼ばれ, それ自身, 閉弦理論から現れる状態であることからその実在性が示唆されている. また閉弦は D -ブレーンによる拘束を受けないことから, 全時空に存在する Kalb-Ramond 場を想定できる.

最小作用原理から Kalb-Ramond 場 $B_{\mu\nu}$ の運動方程式を導こう. 場の強度は電磁場の強度 (電磁場テンソル) $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ に類似の完全反対称テンソル

$$H_{\mu\nu\rho} \equiv \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}$$

^{*209} これまで演算子や基底状態のセクターラベル $[ij]$ を省略してきた.

として定義される。弦と場に対する完全な作用は

$$S = S_{\text{str}} - \int d^D x B_{\mu\nu} j^{\mu\nu} - \frac{1}{6\kappa^2} \int d^D x H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho}$$

で与えられる (S_{str} は弦自体の作用)。ただし

$$j^{\mu\nu}(x) \equiv \frac{1}{2} \int d\tau d\sigma \delta^D(x - X(\tau, \sigma)) \frac{\partial X^{[\mu}}{\partial \tau} \frac{\partial X^{\nu]}{\partial \sigma}$$

であり、ここで反対称化の記法 $a^{[\mu} b^{\nu]} \equiv a^\mu b^\nu - a^\nu b^\mu$ (言わば“添字に対する交換子”) を用いている。これは荷電粒子と Maxwell 場の相互作用系に対する完全な作用

$$S = -m \int ds + \int d^D x j^\mu A_\mu - \frac{1}{4\kappa_0^2} \int d^D x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

と比較される式である。このとき最小作用原理から場の方程式

$$\frac{1}{\kappa^2} \partial_\rho H^{\mu\nu\rho} = j^{\mu\nu}$$

が導かれる。これは Maxwell 方程式 $\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$ に類似しており、通常の電荷保存則 $\partial_\mu j^\mu = 0$ が Maxwell 方程式 $\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$ に含まれているのと同様に、ここから保存則

$$\partial_\mu j^{\mu\nu} = 0, \quad \vec{j}^0 = (j^{01}, \dots, j^{0d}) : \text{チャージ密度}$$

が得られる。こうして予告通り、弦の保存するチャージ $\vec{Q} = \int d^D x \vec{j}^0$ が見出される。

チャージの密度 \vec{j}^0 の性質を調べよう。静的ゲージ $X^0 = \tau$ を用いて \vec{j}^0 の定義式を評価すると

$$\vec{j}^0(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \int d\sigma \delta(\vec{x} - \vec{X}(t, \sigma)) \vec{X}'(t, \sigma)$$

となる。これは弦のチャージ密度ベクトル \vec{j}^0 が弦の上のみ存在し、弦に正接し、 σ の増加する方向を指すことを意味している。我々が“向きを持つ(有向の)”弦を考えていることを反映して、 σ の増加する向きを変えるとチャージ密度 \vec{j}^0 の符号は反転する。 \vec{j}^0 の定義式は $\text{sgn}\left(\frac{\partial(\tau, \sigma)}{\partial(\tau', \sigma')}\right) = +1$ となる(つまりパラメーター空間 (τ, σ) を反転しない)パラメーターの付け替え $\tau, \sigma \rightarrow \tau', \sigma'$ に対して不変なので、 \vec{j}^0 が弦に沿って始点から終点に向かうことはゲージに依らない意味を持つと考えられる。

\vec{j}^0 は保存するチャージの密度であるという意味で、電流密度ではなく電荷密度に対応するけれど、その性質に関してはむしろ電流密度によく似ている。まず保存則 $\partial_\mu j^{\mu\nu} = 0$ は、チャージ密度 \vec{j}^0 が空間において発散を持たないこと $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}^0 = 0$ を含意している。これは電荷密度 ρ の時間変化しない静磁気学において、電荷保存則により電流密度はわき出しがゼロになり、電流は滞ることなく流れ続けることに類似している。静磁気学とのアナロジーをさらに推し進めることができる。簡単のために通常の 4 次元時空を考えよう。場の強度 H^{0kl} に双対な“磁場”

$$B_{Hk} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{klm} H^{0lm}$$

(ただし ε^{ijk} は $\varepsilon^{123} = 1$ を満たす完全反対称テンソル) を定義すると、場の方程式は電流密度とする Ampère の法則の形

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_H = \kappa^2 \vec{j}^0$$

になる。このためある閉曲線に沿う“磁場” \vec{B}_H の周回積分を求めると、閉曲線を貫く \vec{j}^0 の束を、したがって弦の本数を計算したことになる(定数係数の違いを除いて、図 103 参照)。

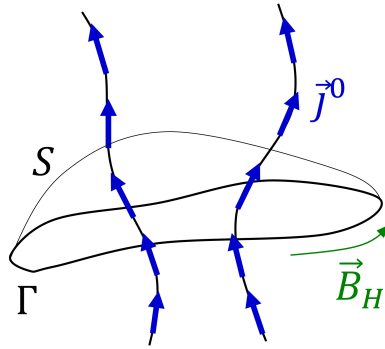


図 103 曲面 S を貫く弦のチャージ密度 \vec{j}^0 と面の縁 Γ に沿う “Kalb-Ramond 場” \vec{B}_H の周回積分

弦のチャージの保存によればチャージ密度 \vec{j}^0 はわき出さないから、静磁気学の電流と同様、孤立弦はループして閉弦を形成するか、または無限に伸びた開弦でなければならない。ところが D-ブレーンに接続した弦の端点でチャージ密度 \vec{j}^0 は止められるから、一見するとチャージの保存はそこで破綻する。この点を理論的に詳しく述べると次のようである。すなわち古典電磁気学において理論のゲージ不変性と電荷保存則には密接な関係があったように、弦理論においても保存則 $\partial_\mu j^{\mu\nu} = 0$ が成立するならば、場 $B_{\mu\nu}$ の運動方程式は場のゲージ変換

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B'_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + \delta B_{\mu\nu}, \quad \delta B_{\mu\nu} = \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu$$

に対して不変となることが保証される。ところが (両端を共通の Dp -ブレーン上に持つ開弦に対して)、実際に作用 (特にゲージ不変性が非自明な、弦と Kalb-Ramond 場の結合項 S_B) のゲージ変換に伴う変化量を計算すると、

$$\delta S_B = \int d\tau \Lambda_m \partial_\tau X^m \Big|_{\sigma=\pi} - \int d\tau \Lambda_m \partial_\tau X^m \Big|_{\sigma=0}$$

となり (ただし $m = 0, 1, \dots, p$ は (時間成分を含めた) ブレーンに沿う方向成分)、このブレーン上の境界項は運動方程式を不変には留めない。したがって保存則 $\partial_\mu j^{\mu\nu} = 0$ は成り立たないことになる。これは既に得られたチャージの保存則と矛盾しており、我々の議論に見落としがあったと言わねばならない。ここで D-ブレーン内には Maxwell 場 A_m が存在できることを思い出そう。その源として弦の端点が (Maxwell 場と関係する) 電荷 $\pm q$ を持つと仮定し、作用に Maxwell 場と弦の端点の適正な結合項

$$\int d\tau A_m(X) \frac{dX^m}{d\tau} \Big|_{\sigma=\pi} - \int d\tau A_m(X) \frac{dX^m}{d\tau} \Big|_{\sigma=0}$$

を加え、 $B_{\mu\nu}$ のゲージ変換と同時に Maxwell 場を

$$A_m \rightarrow A'_m = A_m + \delta A_m, \quad \delta A_m = -\Lambda_m$$

と変換すれば*210、作用のゲージ不変性は (したがってチャージの保存は) 回復する。この結果は次のように解釈される。すなわち図 104 のように弦の端点は電荷を持ち、D-ブレーンの内部 (だけ) に電場線を作る。チャージ密度 \vec{j}^0 は電場に担われて D-ブレーンの “内部へ” 流れ込むため、端点で止まらず保存則を破らない。

*210 これは通常のゲージ変換 $\delta A_\mu = \partial_\mu \varepsilon$ とは別に定義される。

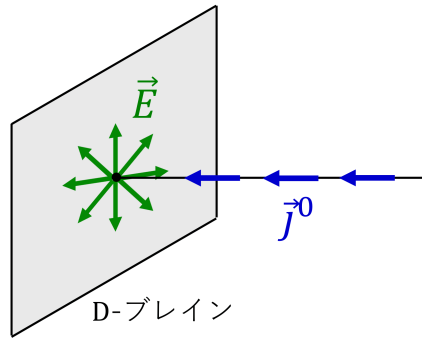


図 104 チャージ密度 \vec{j}^0 は端点の持つ電荷の作る電場 \vec{E} に担われ、D-ブレイン内に流れ込む

6.3 閉弦の T 双対性

閉弦の理論ではひとつの次元が半径 R に巻き取られた世界と、ひとつの次元が半径 α'/R に巻き取られた世界 (α' は長さの自乗の次元を持つことを思い出そう) は区別できない。この対称性は T 双対性と呼ばれ、T はトロイダル (toroidal) を、トロイダル (輪環型) はコンパクト化した空間が輪環 (トーラス) 状であることを意味する。以下、閉弦の T 双対性について説明する。

26 次元時空において座標 $x^{25} (\equiv x)$ が同一視 $x \sim x + 2\pi R$ によって、半径 R の円に巻き取られている場合を考える。このとき弦座標 X^0, X^1 を用いて光錐座標 X^\pm を定義することができる。弦座標を $X^{25} \equiv X$ と略記し、これを除く横方向座標を $X^i (i = 2, 3, \dots, 24)$ と書く。一般に弦が x の正の向きに円筒を m 回周回しているとき (m は整数)、弦の“巻き数”は m であると言われ、巻き数が多くなっても σ の全範囲を常に 2π と設定すれば、弦座標は

$$X(\tau, \sigma + 2\pi) = X(\tau, \sigma) + m(2\pi R)$$

を満たす (図 105 参照)。巻き数が異なる弦同士は、連続的な変形によって相互に移行させることが不可能であり、それゆえ閉弦の巻き数は、個々の弦のトポロジ的な性質と見なされる。

運動量の単位を持つ“巻き量” (winding)

$$w \equiv \frac{mR}{\alpha'}$$

を導入すると、上記の巻き数が m となる条件は

$$X(\tau, \sigma + 2\pi) = X(\tau, \sigma) + 2\pi\alpha'w$$

と書き換えられる。この下で弦座標は

$$\begin{aligned} X(\tau, \sigma) &= X_L(u) + X_R(v), \\ X_L(u) &= \frac{1}{2}x_0^L + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\bar{\alpha}_0 u + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\bar{\alpha}_n}{n} e^{-inu}, \\ X_R(v) &= \frac{1}{2}x_0^R + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0 v + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{n} e^{-inv} \end{aligned}$$

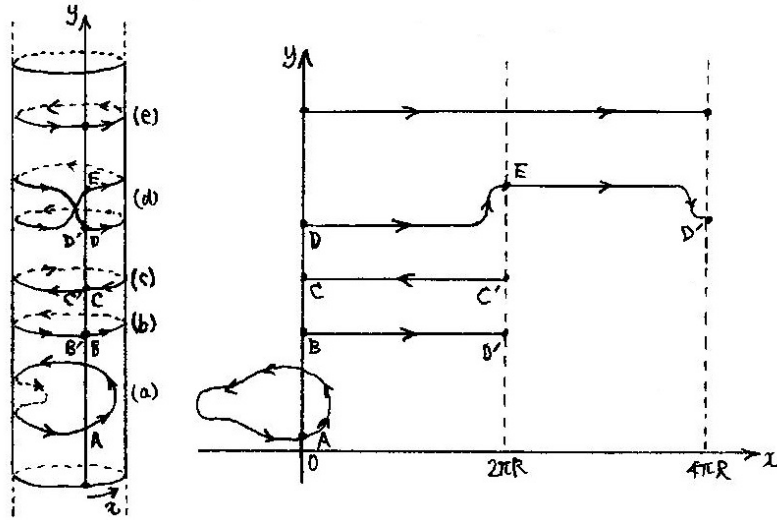


図 105 様々な巻き数 m を持つ円筒上の閉弦. y は横方向座標の 1 つ. (a) $m = 0$, (b) $m = 1$, (c) $m = -1$, (d), (e) $m = 2$.

という形を持ち, またコンパクト化から生じる新たな特徴として, 巻き量が $w = 0$ でない限り $\bar{\alpha}_0$ は α_0 と等しくならないこと

$$w = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}(\bar{\alpha}_0 - \alpha_0)$$

が導かれる. さらに $\frac{1}{2}(x_0^L + x_0^R) \equiv x_0$ とおき, x^{25} 方向の運動量 $p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} \dot{X} d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}(\alpha_0 + \bar{\alpha}_0)$ を用いると, 弦座標のモード展開は

$$X(\tau, \sigma) = x_0 + \alpha' p \tau + \alpha' w \sigma + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\bar{\alpha}_n e^{-in\sigma} + \alpha_n e^{in\sigma})$$

とまとめられる. (この展開式においてコンパクト化の影響は, 巻き量の項 $\alpha' w \sigma$ に現れている.)

コンパクト化した方向の弦座標 X に対しても通常の正準交換関係

$$[X(\tau, \sigma), \mathcal{P}^\tau(\tau, \sigma')] = i\delta(\sigma - \sigma')$$

を課すと, コンパクト化のない場合と同じ振動子の交換関係

$$[\bar{\alpha}_m, \bar{\alpha}_n] = [\alpha_m, \alpha_n] = m\delta_{m+n,0}, \quad [\alpha_m, \bar{\alpha}_n] = 0$$

が得られる. また x_0 を含む非自明な交換関係としては,

$$[x_0, \alpha_0] = [x_0, \bar{\alpha}_0] = i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}, \quad \therefore [x_0, p] = i, \quad [x_0, w] = 0$$

が導かれる. このとき巻き量 w は X に現れるすべての演算子と可換になっていることに注意しよう. この結果の最も保守的な解釈として, 巻き量 w が単なる定数であるということが考えられる. しかしながら (2種類のゼロモード $\alpha_0, \bar{\alpha}_0$ が区別されることは2種類の運動量があることを示唆しており, そこで) 巻き量 w を運動量 p と同列の運動量演算子と見なし, w の固有値が様々な可能な巻き量に対応するという解釈することにし

よう. x_0 は同一視 $x_0 \sim x_0 + 2\pi R$ を導入された円周上の座標なので, 交換関係 $[x_0, p] = i$ によりこれと共役な運動量となる p は

$$p = \frac{n}{R} \quad (n \text{ は整数})$$

と量子化される. もう 1 つの運動量 w の固有値は

$$w = \frac{mR}{\alpha'} \quad (m \text{ は整数})$$

のように量子化されている.

今, 我々が扱っている x^{25} 方向がコンパクト化した時空における量子閉弦に対して, 任意の消滅演算子を用させると消失するような基底状態は, $p^+, \vec{p}_T = (p^2, \dots, p^{24})$ とコンパクト化方向の運動量 $p = n/R$, 巻き量 $w = mR/\alpha'$ によって指定され,

$$|p^+, \vec{p}_T; n, m\rangle$$

と表される (ここに $\vec{p}_T = (p^2, \dots, p^{24})$ であり, n, m はコンパクト化方向の運動量 $p = n/R$ と巻き量 $w = mR/\alpha'$ に関する整数). しかしこれが物理的な状態となるとは限らない. 実際ここでも $\alpha_0^- = \bar{\alpha}_0^-$ が, したがって $L_0^\perp = \bar{L}_0^\perp$ が成立する. そして今の場合 $\alpha_0 \neq \bar{\alpha}_0$ であることに関係して, これは $N^\perp = \bar{N}^\perp$ (レベル整合条件) を意味せず, 代わりに

$$N^\perp - \bar{N}^\perp = \alpha' p w = n m$$

を帰結する. この制約条件により, 厳密な意味での基底状態は $n = 0$ または $m = 0$ の状態に限られる. 理論の一般的な基本状態の候補は

$$\left[\prod_{r=1}^{\infty} \prod_{i=2}^{24} (a_r^{i\dagger})^{\lambda_{i,r}} \right] \left[\prod_{s=1}^{\infty} \prod_{j=2}^{24} (\bar{a}_s^{j\dagger})^{\bar{\lambda}_{j,s}} \right] \left[\prod_{k=1}^{\infty} (a_k^\dagger)^{\lambda_k} \right] \left[\prod_{l=1}^{\infty} (\bar{a}_l^\dagger)^{\bar{\lambda}_l} \right] |p^+, \vec{p}_T; n, m\rangle$$

という形をとり, このうち数演算子の固有値

$$N^\perp = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{i=2}^{24} r \lambda_{i,r} + \sum_{k=1}^{\infty} k \lambda_k, \quad \bar{N}^\perp = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=2}^{24} s \bar{\lambda}_{j,s} + \sum_{l=1}^{\infty} l \bar{\lambda}_l$$

が制約条件 $N^\perp - \bar{N}^\perp = n m$ を満たす状態だけが実際に許容される物理的な状態となる.

ここではコンパクト化によって得られる物理的な状態を具体的に調べることは省略し, 各状態における質量の自乗に注意を向けよう. コンパクト化方向の運動量 p を含まない式

$$M^2 = 2p^+ p^- - p^i p^i \quad (i = 2, 3, \dots, 24)$$

によって, コンパクト次元を含まない 25 次元 Minkowski 空間における質量の自乗を定義すると, これは (演算子として)

$$M^2 = p^2 + w^2 + \frac{2}{\alpha'} (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2)$$

と計算される. ただし $N^\perp \equiv \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I$, $\bar{N}^\perp \equiv \sum_{p=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{-p}^I \bar{\alpha}_p^I$ には相変わらずコンパクト化方向の弦座標における振動子からの寄与が含まれていることに注意する. 巻き量 w の M^2 への寄与 $M = |w|$ は, 単純には張力 $1/2\pi\alpha'$ に抗して弦を引き伸ばし, コンパクト化方向の長さ $2\pi R$ に $|m|$ 周巻き付かせたとき弦の得るエネルギー

$$\frac{1}{2\pi\alpha'} \times |m| \times 2\pi R = \frac{|m|R}{\alpha'} = |w|$$

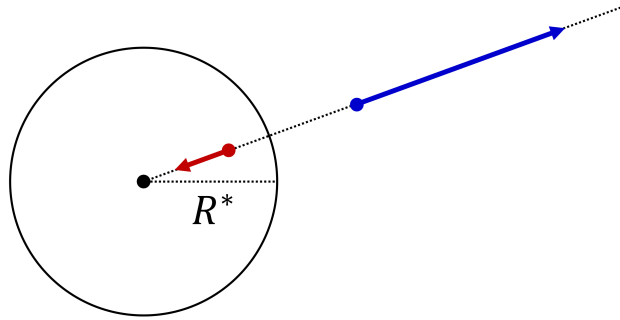


図 106 半径 R^* の円に関する反転によって関係付けられる, 互いに双対な半径

として (粗く) 理解できる. 物理的な基本状態での固有値は

$$M^2 = \left(\frac{n}{R}\right)^2 + \left(\frac{mR}{\alpha'}\right)^2 + \frac{2}{\alpha'}(N^\perp + \bar{N}^\perp - 2)$$

となる. コンパクト半径 R に対する依存性が, 運動量を介した部分 $(n/R)^2$ と巻き量を介した部分 $(mR/\alpha')^2$ とで反対になっていることに注目しよう. これにより半径 R を $\tilde{R} \equiv \alpha'/R$ に置き換えても, n と m がすべての可能な整数の値をとるときに得られる質量の“リスト” (質量スペクトル) は変わらない. このため半径 R と半径 $\tilde{R} = \alpha'/R$ は互いに双対な半径と呼ぶことができる. 双対な半径 R, \tilde{R} は自己双対半径 $R^* = \sqrt{\alpha'}$ (弦の長さに一致) の円に関する反転 $R\tilde{R} = \alpha' = R^{*2}$ によって関係付けられており, 半径 R の実質的な範囲 (モデュライ空間) は $R \geq R^*$ に限定されることになる (図 106 参照).

互いに双対な半径 $R, \alpha'/R$ によるコンパクト化は, 質量スペクトルが一致するだけでなく, 物理的に互いに区別できない (T 双対性). この等価性は, すべての交換関係を考慮した 2 つの理論の間の演算子写像を示すことによって証明される. $q_0 = (x_0^L - x_0^R)/2$ を用いて双対な“座標”演算子

$$\tilde{X}(\tau, \sigma) X_L(\tau + \sigma) - X_R(\tau - \sigma)$$

を定義すると, T 双対性の証明を通して,

- 半径 R の円の座標 x_0, X に関する運動量を p , 巻き量を w とする理論・解釈
- 半径 α'/R の円の座標 q_0, \tilde{X} に関する運動量を w , 巻き量を p とする理論・解釈

が区別できないことが見出される.

6.4 開弦および D-ブレーンの T 双対性

再び $x^{25} (\equiv x)$ 方向が同一視

$$x \sim x + 2\pi R$$

によってコンパクト化している時空において, 開弦の伝播を考察しよう^{*211}. ただし全空間を埋める D25-ブレーンの存在を仮定して, 開弦の両端は Neumann 境界条件を満たすものとする. 開弦のコンパクト化方

^{*211} 以下, これまで通りコンパクト化方向を表す添字 25 は省く.

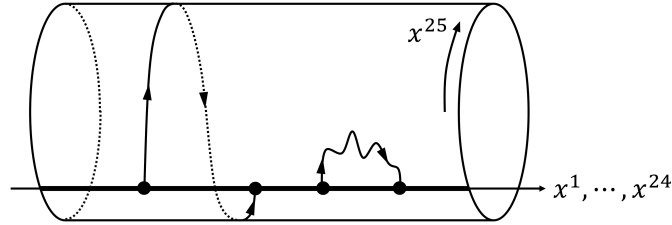


図 107 コンパクト化半径 \tilde{R} で D24-ブレーンを持つ双対世界

向の運動量は $p = n/R$ と量子化されるのに対し、コンパクト化半径 $\tilde{R} = \alpha'/R$ を持つ時空では運動量は $p = n/\tilde{R} = nR/\alpha'$ と量子化されるので、質量の自乗 M^2 に対するこれらの寄与 p^2 は異なる。(ここまでは閉弦の場合と同じであるが、) 閉弦の場合と異なり、開弦は次元のコンパクト化があっても常に連続的な変形によって点へと縮むことができる。このため開弦は巻き量 $w^{25} (\equiv w)$ を持たず、T 双対性が成り立たないように見える。しかしながらコンパクト化半径 \tilde{R} の双対世界は、 x 方向を Dirichlet 方向とするような D24-ブレーンを持つ時空 (図 107 参照) になると考えれば、開弦も T 双対性を持つ^{*212}。実際、図 107 のように双対世界では開弦の端点はこのように接続していなければならないから^{*213}、双対世界の開弦は巻き量 w を持つことになり、代わりに Dirichlet 境界条件により運動量 p はゼロになる：

$$p = \frac{n}{R}, \quad w = 0 \quad \rightarrow \quad p = 0, \quad w = \frac{m\tilde{R}}{\alpha'} = \frac{m}{R}.$$

すると 2 つのコンパクト化において、運動量と巻き量からの M^2 への寄与が等しくなる。閉弦の場合と同様に定義される双対な弦座標 \tilde{X} は、実際に D24-ブレーンに端点を持つ境界条件を満たすことから、双対世界は D24-ブレーンを持つことが正当化される。さらに

- 交換関係の不変性
- Hamiltonian の不変性

を確かめることで、弦の質量スペクトルに限らない双対世界の完全な物理的等価性が示される。

ここで空間のコンパクト化に伴い、電磁場のゲージ変換を再考する。電磁場と相互作用する荷電粒子 (電荷 q) に対して、電磁ポテンシャル A_μ と粒子の波動関数 ψ のゲージ変換は

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi, \quad \psi \rightarrow \psi' = e^{iq\chi} \psi$$

である。視点を変えて、 $\chi(x)$ そのものではなく $U(x) = e^{iq\chi(x)}$ をゲージパラメーターと考えて、ゲージ変換を

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{i}{q}(\partial_\mu U)U^{-1}, \quad \psi' = U\psi$$

と書く。するとゲージパラメーター $U(x)$ は固定された各時空点 x において $U(1)$ 群の要素と見なすことができ、Maxwell 理論を $U(1)$ ゲージ理論として捉えることができる。実際、ゲージパラメーター $U_1(x), U_2(x)$ に

^{*212} 閉弦では境界条件がないから、このようなブレーンの有無に言及する必要がなかった。

^{*213} ただし閉弦の場合と異なり、開弦は D24-ブレーンの上で両端が一致して閉じている必要はない。

よるゲージ変換 1,2 を続けて (2 → 1 の順に) 行ったときに, 積 $U_1 U_2$ が総体としてのゲージ変換のパラメーターとなることは, ゲージパラメーター $U(x)$ が $U(1)$ 群の要素であるという事実によって表される.

次にコンパクト化した次元の位相的 (トポロジカル) な効果を考察する. x を時空点ではなくコンパクト化方向の座標とする 1 次元の理論では, このように $U(x) = e^{iq\chi(x)}$ をゲージパラメーターと見なすと, これは周期的な条件

$$U(x + 2\pi R) = U(x)$$

を満たさなければならない. そのためには $\chi(x)$ は

$$q\chi(x + 2\pi R) = q\chi(x) + 2\pi m \quad (m \text{ は整数})$$

のように準周期的であれば良く, 完全に周期的でなくても良い. これを踏まえて, コンパクト化半径 R の円に沿ってベクトルポテンシャル \vec{A} が分布している状況を考えよう (すなわちスカラーポテンシャル ϕ を含め, コンパクト化方向成分 A_x 以外の A_μ の成分はゼロである). このような電磁場 A_x と相互作用する 1 個の電荷 q を想定し, 円に沿った無単位の線積分

$$w \equiv q \oint dx A_x$$

を定義すると, ゲージ変換 $A_x \rightarrow A_x + \partial\chi/\partial x$ に伴い, これは

$$\begin{aligned} w &\rightarrow w + q \oint dx \frac{\partial\chi}{\partial x} = w + q(\chi(x_0 + 2\pi R) - \chi(x_0)) \\ &= w + 2\pi m \end{aligned}$$

と変化する (x_0 は円上に任意にとった周回積分の始点). ところがゲージ変換によって物理的な内容は変更されないから, $2\pi m$ だけ異なる w の値は等価であることになる. そこで w を抽象的な角度変数と見て

$$w = \theta$$

と書き, “Wilson 巡回指標”

$$W \equiv e^{iw} = \exp\left(q \oint dx A_x\right) (= e^{i\theta})$$

を導入する^{*214}. W はゲージ変換 $\theta \rightarrow \theta + 2\pi m$ に対して不変となっている^{*215}.

なお $(\theta =)w = q \oint dx A_x$ は物理的には, 係数 q の違いを除けば円を貫く磁束と解釈できる. 実際 x 方向の円に沿うポテンシャル A_x の存在は, 円を貫く磁束 $\Phi = \oint A_x dx$ を意味する. ところが今の場合, 円の“内部”に空間はないので, 磁場は存在しない. そしてそれにも関わらず, 場 A_x (ただし x を含むすべての座標に依存しない“一定の”場とする) と相互作用する荷電粒子 (質量 m) のエネルギー固有値

$$E_l = \frac{1}{2m} \left(\frac{l}{R} - \frac{\theta}{2\pi R} \right)^2 \quad (l \text{ は整数})$$

は θ の, したがって A_x の影響を受ける. このような事情は Aharonov-Bohm 効果を想起させる [18, pp.183–188]

^{*214} “Wilson 巡回指標” という呼び方は一般的ではなく, 通常 W は “Wilson ライン” と呼ばれる. しかし W そのものは x 方向の閉じた線ではなく, あくまでその線において定義された位相因子である.

^{*215} ゲージ変換が $\theta \rightarrow \theta + 2\pi m$ という形をとるのは $U(x)$ をゲージパラメーターと見なしたためである. もし $\chi(x)$ そのものがゲージパラメーターであるならば, $\chi(x)$ は厳密な周期条件を満たさなければならず ($m = 0$), このときゲージ変換は $\theta \rightarrow \theta$ となる.

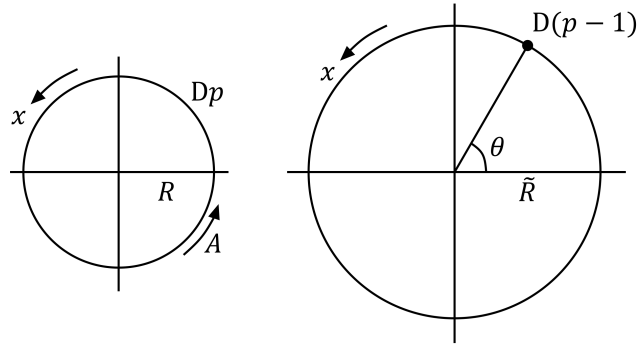


図 108 開弦の T 双対性と Wilson 巡回指標の角度変数 θ

さて、D-ブレーンと接続する開弦の端点は電荷 $\pm q$ を持つことを思い出そう。コンパクト化方向 x への拡がりを持つ Dp -ブレーンがあるとき、ゲージ場は Dp -ブレーンの世界領域に存在するので、これと結合する開弦の端点の電荷 $\pm q$ に関して角度変数 $\theta = q \oint A_x dx$ を定義できる。

注意 $\theta \equiv w = q \oint A_x dx$ における q は $\pm q$ を代入し得るような一般の電荷ではなく、弦の両端の電荷を $\pm q$ と書いたときの q であり、それ故、(同じブレーンに接続されている) 弦の 2 つの端点は共通の θ の値を持つことになる。

これに対し双対世界では、実は θ は双対円における $D(p-1)$ -ブレーンの位置を表す角度変数となる (図 108 参照)。

この主張が理に合っていると考えられる理由をいくつか挙げる事ができる。まず 2π の整数倍だけ異なる θ の値は物理的に等価であって、 θ が角度変数の資格を持つことは既に見た通りである。また直観的に言って、弦は全体として電氣的に中性なので、電磁場 $A_x (\equiv A)$ の影響を受けない。実際、弦は両端が反対の電荷 $\pm q$ を持つので、(力学的) 運動量は $p \rightarrow p - qA + qA = p$ のように不変に保たれ、(力学的運動量 p^μ から $M^2 = -p_\mu p^\mu$ と計算される) 質量の自乗のスペクトルも変わらない。これは双対世界では、 $D(p-1)$ -ブレーンの円における位置 θ が、そこに端点を持つ開弦のスペクトルに影響を与えないという、当然期待される事実に対応する。さらにもとの円に 2 つの Dp -ブレーンが巻き付いており、弦がそれらの間に伸びている場合を考えよう (図 109 参照)。電荷 $+q, -q$ を持つ端点の位置する Dp -ブレーンに加える (“一定の”) ゲージ場をそれぞれ A_1, A_2 、対応する Wilson 巡回指標の角度変数をそれぞれ θ_1, θ_2 と書く。すると電磁場を加える前の運動量 $p = l/R$ が $l = 0$ となる固有状態は、電磁場の存在下で質量の自乗

$$M^2 = \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi R} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} (N^\perp - 1)$$

を持つ。右辺第 1 項が電磁場の寄与であり、これは双対世界では我々の解釈に整合して、異なる角度 θ_1, θ_2 に位置する 2 つの $D(p-1)$ -ブレーン間で弦が引き伸ばされることで得るエネルギー (質量) の自乗に一致している (図 109 参照) :

$$\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi R} \right)^2 = \left((\theta_2 - \theta_1) \frac{\alpha'}{R} \frac{1}{2\pi\alpha'} \right)^2 = \left((\theta_2 - \theta_1) \tilde{R} T_0 \right)^2.$$

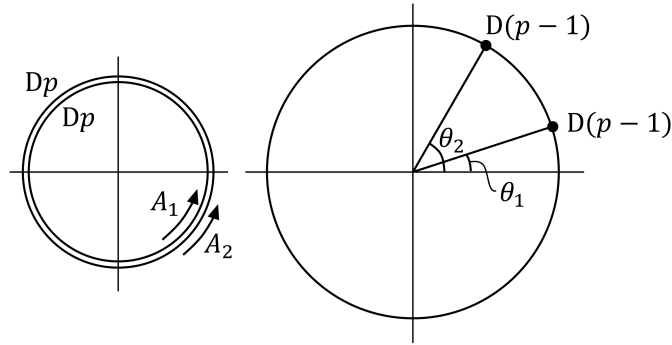


図 109 1つの円に巻き付く2つの Dp -ブレーンと、双対世界の $D(p-1)$ -ブレーン

6.5 電磁場を持つ D -ブレーンと T 双対性

あらかじめ D -ブレーン内全体に行き渡っているような背景電磁場の、開弦に対する影響を調べよう。背景場は、その背景場の下で弦の量子化をやり直すことができれば、弦理論において存在が許容される場であると考える。そして実際に量子化は適正に機能する(証明はしない)。簡単のために一定の強度 F_{mn} を持つ背景場だけを考え、背景電磁場が存在する場合の開弦の運動方程式を導こう。既に Kalb-Ramond チャージを保存するゲージ対称性を回復するために導入した、弦の端点と Maxwell ポテンシャル A_m との結合項を含めた作用

$$S = \int d\tau d\sigma \mathcal{L}(\dot{X}, X') + \int d\tau A_m(X) \frac{dX^m}{d\tau} \Big|_{\sigma=\pi} - \int d\tau A_m(X) \frac{dX^m}{d\tau} \Big|_{\sigma=0}$$

を出発点とすることができる (\mathcal{L} は南部-後藤 Lagrangian 密度)。ただし(これまでと同じく)次の慣例に従って添字を用いる。

- 添字 μ, ν, \dots : 時空添字 $(0, \dots, d)$
- 添字 m, n, \dots : ブレーンの世界領域の添字 $(0, \dots, p)$
- 添字 a, b, \dots : ブレーンに垂直な方向の添字 $(p+1, \dots, d)$

このときブレーンに沿った座標 X^m に対する適正な自由端点の条件は、結局のところ言わば Neumann 型と Dirichlet 型の混合型の境界条件

$$\partial_\sigma X^m - 2\pi\alpha' F_{mn} \partial_\tau X^n = 0, \quad \sigma = 0, \pi$$

に置き換わる (DD 座標 X^a には依然として Dirichlet 境界条件 $\delta X^a = 0$ が課せられる)。そしてここでも

$$\mathcal{P}^\tau_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}, \quad \mathcal{P}^\sigma_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}}$$

という記法を用いると(ただしここでは \mathcal{L} は全 Lagrangian 密度ではないので、例えば \mathcal{P}^τ_μ は完全な共役運動量ではないことに注意する)、境界条件の下で導かれる弦の運動方程式は相変わらず

$$\partial_\tau \mathcal{P}^\tau_\mu + \partial_\sigma \mathcal{P}^\sigma_\mu = 0$$

である。

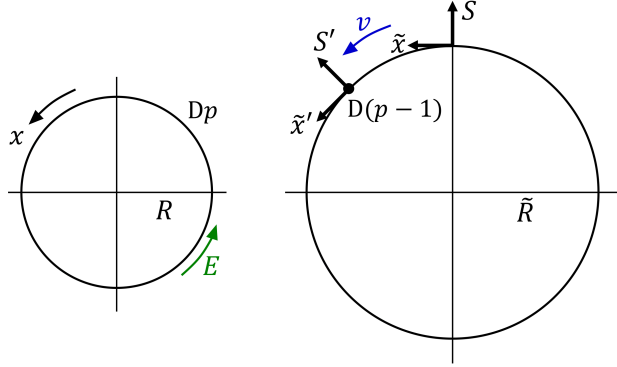


図 110 電場を持つ Dp -ブレーンと、双対円を運動する $D(p-1)$ -ブレーン

これから電磁場を持つ D -ブレーンに双対な描像を紹介する．電磁場が存在するときの違いは境界条件に現れ，運動方程式は不変だから，結論の証明には戦略として，双対な 2 つの世界で境界条件が一致することを確認できれば十分である．ただし以下では具体的な証明は省略し，結果だけを述べよう．

まず Dp -ブレーンの世界領域において，半径 R にコンパクト化した方向 $x^{25} \equiv x$ を向く強さ $F_{25,0} \equiv E$ が一定の電場が存在する状況を考える（その他の電磁場成分はゼロ）．このとき双対世界では，電場を持たない $D(p-1)$ -ブレーンが円に沿って一定速度 $v = 2\pi\alpha'/E$ で移動している（図 110 参照）．（特に電場が $E = 0$ のときは双対円上の $D(p-1)$ -ブレーンは静止しており，既に説明した通常の T 双対性に帰着する．）このとき速度が光速を超えられない条件 $v \leq 1$ は，ブレーン上の電場が最大値 $E_{\text{crit}} = 1/2\pi\alpha'$ を超えられないことを意味する．最大値 E_{crit} は臨界電場と呼ばれ，その値は弦の張力に一致している．

次に Dp -ブレーン上にゼロでない一定の磁場 $F_{23} = B$ が存在する場合を考える．ただし Dp -ブレーンの世界領域に含まれる 2 方向 (x^2, \tilde{x}^3) のうち \tilde{x}^3 方向が半径 \tilde{R}_3 にコンパクト化しているとする．このとき双対世界は共通の座標 x^2 と半径 $R_3 = \alpha'/\tilde{R}_3$ にコンパクト化した方向 x^3 を持つ．そして（磁場のない） $D(p-1)$ -ブレーンが図 111 のように，

$$2\pi\alpha'B = -\tan\alpha$$

で定まる角度 α だけ x^2 軸に対して傾いている．（磁場 B がゼロならば回転角度 α もゼロとなって，通常の双対関係が再現される．また磁場を強くすると回転角度 α は 90° に近づく．）

このとき双対世界では x^2 方向へ

$$\Delta x^2 = \frac{2\pi R_3}{\tan\alpha} n \quad (n \text{ は整数})$$

だけ変位しても物理的状況が変わらないという周期性を持つ．これは Dp -ブレーン上が磁場を持つ元の世界では，コンパクト化方向 \tilde{x}^3 の正しい準周期性を持つゲージ関数 $q\chi = -n\tilde{x}^3/\tilde{R}_3$ （ただし弦の端点の電荷 q は 1）による電磁ポテンシャル

$$A_2 = 0, \quad A_3 = Bx^2$$

のゲージ変換

$$A_3 \rightarrow A_3 - \frac{n}{\tilde{R}_3}$$

として理解できる．そこで D -ブレーンが円筒を $|n|$ 回 x^3 方向に巻き付くときの x^2 方向の幅を

$$2\pi R_2 = \frac{2\pi R_3}{\tan\alpha} n$$

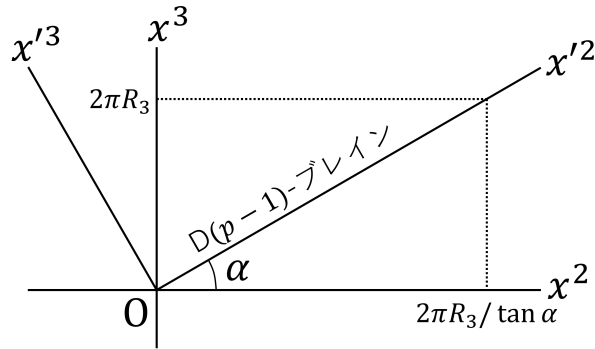


図 111 磁場は双対世界の D-ブレーンを回転させる (x^3 は双対世界のコンパクト化方向であり, $D(p-1)$ -ブレーンは x'^2 軸に沿っている)

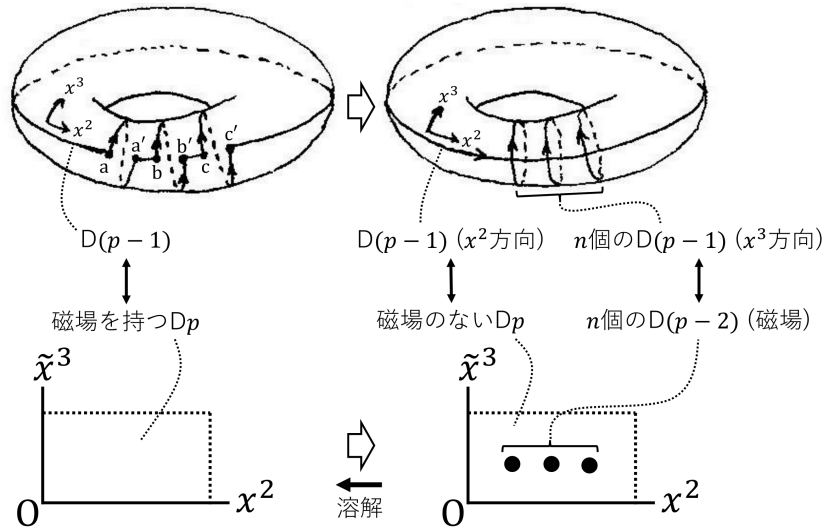


図 112 トーラスに巻き付くブレーンの連続的変形と, 双対世界の描像

と書いて x^2 方向にも R_2 を半径とするコンパクト化を施すと, 双対な 2 つの世界はともにトーラスとなる (ただしここでは $n > 1$ とする). “巻き数” n はもとの世界で基本領域の面積 $(2\pi\tilde{R}_3)(2\pi R_2)$ を貫く磁束

$$\Phi = B(2\pi\tilde{R}_3)(2\pi R_2)$$

の量子数となることが見出される. そして図 112 のような磁束を保つ連続的変形を考えたとき, Dp -ブレーンの磁場は (磁場を表す) n 個の $D(p-2)$ -ブレーンがブレーン全体に “溶解” (dissolve) したものと捉えることができる.

6.6 Born-Infeld 理論と D-ブレーンの電磁場

D-ブレーンの世界領域における電磁場は, 非線形電磁気力学の理論の 1 つである Born-Infeld 理論に支配される. 既に述べたように, 弦理論によれば D-ブレーンにおける電場は最大値 $E_{\text{crit}} = 1/2\pi\alpha'$ を持つ. 他方これから見るように, Born-Infeld 理論もまた電場の最大値の制約を組み込んでおり, そのためブレーンの電磁

場を記述するのに適しているように見える。また Maxwell 理論では点粒子の静電的な自己エネルギーは無限大になるのに対し、Born-Infeld 理論では電場が最大値を持つことに関して、点粒子の自己エネルギーは有限になる。開弦の端点は点電荷なので、弦理論において弦の端点が無限大のエネルギーを持つわけではないことが分かれば安心できる。最後に T 双対性から直接に、Born-Infeld 理論が D-ブレーンにおける電磁場の力学を支配するという証拠について説明する予定である。

まずは非線形電磁気力学の一般的な枠組みから始めよう。しばらくは 4 次元時空を想定し、また光速 c を明記する。電磁場 \vec{E}, \vec{B} は場の強度 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ の成分

$$F_{i0} = E_i, \quad F_{ij} = \varepsilon_{ijk} B_k$$

としてポテンシャルから導かれることから、源を含まない Maxwell 方程式

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

は恒等式としてそのまま成り立つ。次に源と相互作用する電磁場の作用

$$S = \int d^D x \mathcal{L}(F_{\mu\nu}) + \frac{1}{c} \int d^D x A_\mu j^\mu$$

において、電磁場の Lagrangian 密度 $\mathcal{L}(F_{\mu\nu})$ は場の強度 $F_{\mu\nu}$ だけに依存し、その微分 (導関数) には依存しないものと仮定する。このとき最小作用原理から、Maxwell 方程式 $\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\mu$ と同じ形の運動方程式

$$\partial_\nu G^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\mu, \quad G^{\mu\nu} \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}}$$

が導かれるので (ただしここでは反対称な場の強度 $F_{\mu\nu}$ による微分を $\delta M = \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial F_{\mu\nu}} \delta F_{\mu\nu}$ によって定義している), $D_i \equiv G^{0i}, H_i \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} G^{jk}$ と定義すれば、これは源を含む場の方程式

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

を与える。媒質中の電磁気学の文脈では、 ρ と \vec{j} は“自由な”すなわち媒質に起因する分極電荷や磁性電流を“含まない”源であり、代わりに Maxwell 方程式における \vec{E}, \vec{B} がこのように、一般に非線形な関係

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{B}), \quad \vec{H} = \vec{H}(\vec{E}, \vec{B})$$

によって導入される \vec{D}, \vec{H} へと修正される。しかしながら Born-Infeld 理論やそれに関連する非線形な電磁気学の理論は単なる媒質中の電磁気学ではなく、むしろ真空自体がある種の媒質のように振舞うことを想定して、真空中の電磁気学を修正するものである。なお $D_i \equiv G^{0i}, H_i \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} G^{jk}$ は Lagrangian 密度の微分

$$D_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_i}, \quad H_i = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_i}$$

として計算できることが分かる。また Hamiltonian 密度は

$$\mathcal{H} = \vec{D} \cdot \vec{E} - \mathcal{L}$$

で定義される。

ここで特に重要となる Born-Infeld 理論へと話を進めよう。Born-Infeld 理論における Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = -b^2 \sqrt{1 - \frac{2s}{b^2} - \frac{p^2}{b^4}} + b^2 = -b^2 \sqrt{1 - \frac{E^2 - B^2}{b^2} + \frac{(\vec{E} \cdot \vec{B})^2}{b^4}} + b^2$$

で与えられる。これは場の不変量

$$s \equiv -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(E^2 - B^2), \quad p \equiv -\frac{1}{4}\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \vec{E} \cdot \vec{B}$$

から構築されており、また場の強度 $F_{\mu\nu}$ はゲージ不変だから、ゲージ不変性と Lorentz 不変性を持つ。さらにパラメーター b は場の強度の次元を持ち、Born-Infeld 理論 Lagrangian 密度は

- \vec{E} と \vec{B} が小さいときに ($s \sim p \ll b^2$)、MaxwellLagrangian 密度 s に帰着する。
- $\vec{B} = 0$ のときに電場の最大値の制約 $E \leq b$ が存在する。

任意の次元数では

$$\mathcal{L} = -b^2 \sqrt{-\det\left(\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{b}F_{\mu\nu}\right)} + b^2$$

である (これは 4 次元時空において上式の \mathcal{L} を再現する)。

Born-Infeld 理論では点電荷の自己エネルギーが有限となることを説明する。場の方程式 $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ より (静止した) 点電荷 Q は球対称な場 $\vec{D} = (Q/4\pi r^2)\vec{e}_r$ を作る (r は電荷からの距離、 \vec{e}_r は電荷から見た動径方向の単位ベクトル)。すると位置 $r \rightarrow 0$ では $D \rightarrow \infty$ となる。ところが最大値の制約 $E \leq b$ から期待されるように、電場 \vec{E} は発散しない。実際、 $\vec{B} = 0$ のとき

$$\mathcal{L} = -b^2 \sqrt{1 - \frac{E^2}{b^2}} + b^2, \quad \therefore \vec{D} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{E}} = \frac{\vec{E}}{\sqrt{1 - E^2/b^2}}, \quad \therefore \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\sqrt{1 + D^2/b^2}}$$

なので、 $D \rightarrow \infty$ では $E \rightarrow b$ となる。このとき体積要素 $dV \sim r^2 dr$ に含まれるエネルギー

$$\mathcal{H}dV \sim \mathcal{H}r^2 dr \sim dr$$

は特異性を持たず、自己エネルギーは有限に留まる。このような事情を反映して、自己エネルギー U_Q を丁寧に計算すると

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \vec{E} \cdot \vec{D} - \mathcal{L} = b^2 \sqrt{1 + \frac{D^2}{b^2}} - b^2, \\ U_Q &= \int d^3x \mathcal{H} = b^2 \int_0^\infty 4\pi r^2 dr \left(\sqrt{1 + \left(\frac{Q}{4\pi b r^2}\right)^2} - 1 \right) \sim \sqrt{b} Q^{3/2} \end{aligned}$$

となる。

さて、最後に T 双対性を利用して、実際に D-ブレーンにおける電磁場が Born-Infeld 理論に支配されることの直接的な証拠を示そう。まずは一定の磁場または電場を持つブレーンの Lagrangian 密度を見出すために、あらかじめ分かっている双対世界のブレーンの Lagrangian から出発する。例えば以前考えた、一定の磁場 B を持つ Dp -ブレーンに双対な $D(p-1)$ -ブレーンの Lagrangian は

$$L = -V_{p-2} L_{\text{diag}} T_{p-1}(\tilde{g})$$

と表される。ここにブレーンの張力 $T_{p-1}(\tilde{g})$ と体積 $V_{p-2} L_{\text{diag}}$ の積は、静的なブレーンの質量 (静止エネルギー) を与えている*216。T 双対性を利用すると

$$L = -V_p T_p(g) \sqrt{1 + (2\pi\alpha' B)^2}, \quad V_p \equiv V_{p-2} (2\pi R_2) (2\pi \tilde{R}_3)$$

*216 $D(p-1)$ -ブレーンの世界領域の 1 つが、半径 R_2 と R_3 にコンパクト化した x_2, x_3 方向の対角線

$$L_{\text{diag}} = \sqrt{(2\pi R_2)^2 + (2\pi R_3)^2}$$

と書き換えられる。これは双対世界における磁場を持つ Dp -ブレーン (張力 $T_p(g)$) の Lagrangian と見なすことができ、 $B = 0$ の場合には静的な Dp -ブレーンの Lagrangian $L = -V_p T_p(g)$ に帰着する。体積 V_p の係数

$$\mathcal{L} = -T_p(g) \sqrt{1 + (2\pi\alpha' B)^2}$$

が Lagrangian 密度にあたる。同様に T 双対性を利用すると、一定の電場 E のみを持つ Dp -ブレーンの Lagrangian 密度

$$\mathcal{L} = -T_p(g) \sqrt{1 - (2\pi\alpha' E)^2}$$

が見出される。これらは (4 次元時空の) Born-Infeld Lagrangian 密度とよく似た形をしていることが分かる。実際、電場の最大値を $b = E_{\text{crit}} = 1/2\pi\alpha'$ と同定した、(任意次元での) Born-Infeld Lagrangian 密度

$$\mathcal{L} = -T_p(g) \sqrt{-\det(\eta_{mn} + 2\pi\alpha' F_{mn})}$$

(ただし付加的な定数を省き、全体の規格化定数を改めた) は、これらの電磁場を持つブレーンの Lagrangian 密度を再現するため、D-ブレーンにおける電磁場は確かに Born-Infeld 理論によって記述されると考えられる。

6.7 弦理論と素粒子物理

ここでは素粒子標準模型と多くの特徴を共有する完全な弦モデルの 1 つを紹介する。このモデルは暗に D6-ブレーンが安定となる IIA 型の超弦理論を想定しており、6-トーラス T^6 において交差する D6-ブレーンを含む。ここで IIA 型の超弦理論を出発点とした交差ブレーンモデルを詳しく取り上げるのは、これが十分に単純で、確実な理解が可能だからである。しかしこれは唯一の筋道ではなく、モデルの可能な出発点には 5 つの超弦理論と M 理論がある。

素粒子物理の弦モデルへと話を進めるに先立って、標準模型に含まれる粒子について学んでおく。左巻き (L) と右巻き (R) の粒子 (f) と反粒子 (\bar{f}) を、それぞれの生成演算子

$$(f_L^\dagger, f_R^\dagger), \quad (\bar{f}_L^\dagger, \bar{f}_R^\dagger)$$

で表す。場の量子論では 2 組の対

$$\begin{aligned} f_L^\dagger &\leftrightarrow \bar{f}_R^\dagger, \\ f_R^\dagger &\leftrightarrow \bar{f}_L^\dagger \end{aligned}$$

において、矢印「 \leftrightarrow 」で繋いだ粒子と反粒子は互いに反対符号の電荷を持つ (大きさは同じ)。ここで電荷は通常の電磁的な電荷に限らず、色電荷や弱電荷を含めた電荷一般を想定している。このとき例えば f_L^\dagger と f_R^\dagger の電荷を指定すれば、それですべての電荷が決まることになる。もし左巻き粒子 f_L^\dagger と右巻き粒子 f_R^\dagger が同じ電荷を持たないならば、そのフェルミオンはカイラルであると称する。カイラルフェルミオンの左巻き粒子と右巻き粒子はその定義により異なる電荷を持つので、同じゲージボソンの組に対して異なる応答をする。カイラルに働くゲージの対称性が破られると、フェルミオンは質量を獲得し、対称性が破れた後は、色の力も電磁力もカイラルな働き方をしない。

に沿って伸びており、他の $(p-2)$ 方向は体積 V_{p-2} にコンパクト化した空間に巻き付いているものと仮定している。また指数 \tilde{g} はこの世界の弦の結合であり、磁場を持つブレーンの存在する双対世界での弦の結合は g と書く。

標準模型におけるフェルミオンはクォークとレプトンともに3つの“世代”から構成され、世代間で対応する粒子の電荷は同じである。そこで1世代のクォークとレプトンの中で、左巻き粒子と左巻き反粒子の電荷のリストを作ることにする。まずクォークは、以下の $SU(3)_c$ 理論の色電荷を持つ。

- クォークの左巻き状態 q_L
3種類の色 (赤 (red : r), 青 (blue : b), 緑 (green : g)) の基本状態

$$q_{Lr}, q_{Lb}, q_{Lg} \rightarrow SU(3) \text{ 群の表現 } \mathbf{3} \quad (SU(3) \text{ 行列 } M \text{ が作用}).$$

- 反クォークの左巻き状態 \bar{q}_L
色に関してクォークはカイラルでないので、 q_L とちょうど反対の色電荷 (反赤 (anti-red : a-r), 反青 (anti-blue : a-b), 反緑 (anti-green : a-g)) を持つ :

$$\bar{q}_{La-r}, \bar{q}_{La-b}, \bar{q}_{La-g} \rightarrow SU(3) \text{ 群の表現 } \bar{\mathbf{3}} \quad (\text{複素共役な行列 } M^* \text{ が作用}).$$

また弱い相互作用 $SU(2)_w$ のアイソスピン $I = 1/2$ の表現 $\mathbf{2}$ は、アイソスピンの第3成分 I_3 が

- $I_3 = 1/2$ に対応する香り u の状態 u_L
- $I_3 = -1/2$ に対応する香り d の状態 d_L

から成る (前述のように1世代のクォークを考えているので、香りは u と d の2種類となっている)。ここでフェルミオンの電荷表現の記法

$$(\text{色}, \text{アイソスピン})_Y$$

を導入しておく。「色」の欄と「アイソスピン」の欄にはそれぞれ $SU(3)$ と $SU(2)$ の表現を記し、 Y には単に超電荷の値を示す。すると

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{1/6}, \quad \bar{u}_L \sim (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-2/3}, \quad \bar{d}_L \sim (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{1/3}$$

と書ける。(反クォーク \bar{u}_L, \bar{d}_L はアイソスピンの $I_3(\bar{u}_L) = I_3(\bar{d}_L) = 0$ なので、 $SU(2)$ -1 重項を形成している。) 標準模型の第1世代に含まれる左巻きのレプトン (粒子と反粒子) は

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1/2}, \quad e_L^+ \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1})_1, \quad \bar{\nu}_{eL} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0$$

と表される。(なお標準理論において、電磁気的な電荷 Q_{em} は、超電荷 Y とアイソスピンの第3成分 I_3 の線形結合 $Q_{em} = Y + I_3$ によって与えられる。)

次に弦モデルの説明の準備として、D-ブレーンの配置を表現する一般的な方法について述べる。超弦理論では10次元の時空を想定する。これを次のように簡単にコンパクト化する。

- 実効的な4次元時空 (座標 x^0, x^1, x^2, x^3)
- コンパクト空間 (座標 x^4, \dots, x^9)
同一視 $x^i \sim x^i + 2\pi R$ ($i = 4, \dots, 9$, 簡単のため半径 R は各次元に共通とする)
→ 6次元トーラス (6-トーラス) T^6

ここで6-トーラスは

$$x^4, x^5 \text{ 方向の 2-トーラス}, \quad x^6, x^7 \text{ 方向の 2-トーラス}, \quad x^8, x^9 \text{ 方向の 2-トーラス}$$

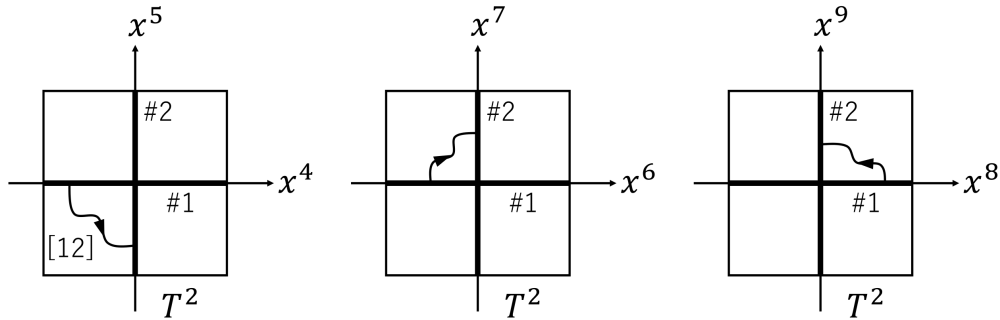


図 113 各 2-トーラスにおけるブレイン #1, #2 と [12] セクターの弦の射影

を併せたものと等価であり，これら 3 つの 2-トーラス T^2 に分けて考えられる．D6-ブレインが実効的な空間座標 x^1, x^2, x^3 の方向に拡がっており，また各 T^2 の中では線分として表される場合を考えよう．例えば 2 つのブレイン

$$\begin{aligned} \#1: & x^5 = x^7 = x^9 = 0, \\ \#2: & x^4 = x^6 = x^8 = 0 \end{aligned}$$

はそれぞれ各 T^2 において図 113 のような線分で表される．ブレインの 2-トーラス T^2 への射影が (線状となる場合には，それが) 直線状になることは，ブレインに張力があることから理解される．またブレインは (T^2 において) 両端が同一視されるような線分となっており，閉じていなければならない (さもなくばブレインは無限の長さを，したがって無限大の静止エネルギーを持つことになる)．簡単のために長さを適当に無次元化して 2-トーラスの基本領域を正方領域 $0 \leq x, y \leq 1$ にとると，互いに素な整数の組 (m, n) に対して原点 $(0, 0)$ と点 (m, n) を結ぶ線分を描き，同一視条件 $x \sim x+1, y \sim y+1$ を適用して線分全体を正方領域 $0 \leq x, y \leq 1$ の中に移行すれば，トーラス上に閉じた線が得られる．よってブレインの射影を表す閉じた線分 l は，整数の組 (m, n) で指定できる．このとき一般に 2 つの線 $l_1 = (m_1, n_1), l_2 = (m_2, n_2)$ がトーラス上で交差する回数は

$$\#(l_1, l_2) = m_1 n_2 - m_2 n_1 = \det \begin{pmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix}$$

で与えられる (図 114 参照，交差回数の定義の詳細は省略)．2 つの D6-ブレイン a と b を考えると，それぞれの配置は各々の 2-トーラス ($i = 1, 2, 3$ で表す) 上での 3 つの線

$$l_i^{(a)} = (m_i^a, n_i^a), \quad l_i^{(b)} = (m_i^b, n_i^b)$$

によって指定される．ブレイン a, b の T^6 における交差回数は，各 T^2 上での交差回数の積

$$I_{ab} = \prod_{i=1}^3 \#(l_i^{(a)}, l_i^{(b)}) = \prod_{i=1}^3 (m_i^a n_i^b - m_i^b n_i^a)$$

で与えられる．

さらに D-ブレインと標準模型のゲージ群について説明する．例えば 8 つのグルーオンを記述する $SU(3)$ Yang-Mills 理論 (量子色力学) は，その基になる $U(3)$ 理論から得られる．既に説明したように $U(3)$ 理論は 3 つの重なり合った D-ブレインから得られ， $3^2 = 9$ 個のゲージ場を持つ．基本状態の変更に伴う場と電

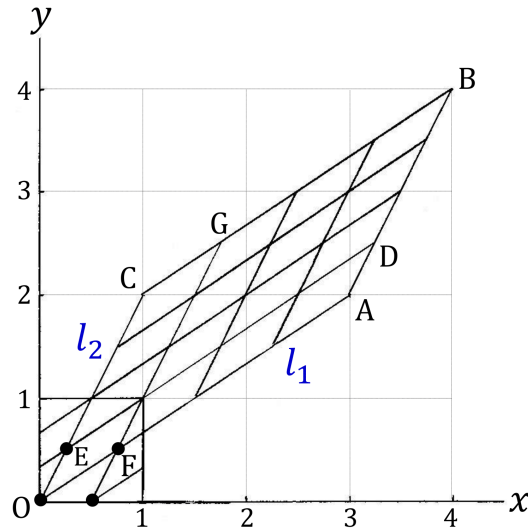


図 114 線 $l_1 = (3, 2)$, $l_2 = (1, 2)$ と単位トーラス $0 \leq x, y < 1$ における l_1, l_2 の 4 回の交差

荷の再定義により, 9 個のゲージ場のうち 1 つを, 他のゲージ場と相互作用を持たない $U(1)$ ゲージ場に分離できることが示される. 具体的には一般的な状態 (基本状態の線形結合) と作用を不変に留めるという制約の下で, 弦が 3 つのブレインに持つ $U(3)$ 電荷の組 (q_1, q_2, q_3) の 1 つを $Q_1 \sim (q_1 + q_2 + q_3)$ となるように再定義できる. ところがこれらのブレインに始点 (電荷 -1) と終点 (電荷 $+1$) を両方持つ開弦に対しては

$$Q_1 \sim q_1 + q_2 + q_3 = (-1) + (+1) = 0$$

となるので, Q_1 に関する 1 つの Maxwell 場は電荷 Q_1 を介して他のゲージ場と相互作用できず, $U(1)$ ゲージ場として分離される. 残り 8 個のゲージ場が 8 個のグルーオンを記述する $SU(3)$ 理論 (量子色力学) を定義する. 一般に N 個の重なり合った D-ブレインから得られる $U(N)$ Yang-Mills 理論の持つ N^2 個のゲージ場のうち 1 つを $U(1)$ ゲージ場に同定し,

$$U(N) = SU(N) \times U(1)$$

とできる. そこで素粒子の標準模型における完全なゲージ群

$$SU(3)_c \times SU(2)_w \times U(1)_Y, \quad c : \text{color}, \quad w : \text{weak}, \quad Y : \text{hypercharge}$$

における $SU(3)_c$ と $SU(2)_w$ を得るには, 3 つの重なったブレインと 2 つの重なったブレインを想定すれば良い. (ただしこれら 2 組のブレインを重ねてはならない. 5 つのブレインが重なると, 得られるのは $U(5)$ Yang-Mills 理論になってしまう.)

さて, 以上を踏まえて素粒子の標準模型に対する弦モデルの説明に移ろう. T^6 において交差する D6-ブレインを, 以下のように配置する (以下, ブレインの個数 N_i をブレインの名前として用いる).

1. 色ブレイン

$$\text{個数 } N_1 = 3, \quad l_1^{(1)} = (1, 2), \quad l_2^{(1)} = (1, -1), \quad l_3^{(1)} = (1, -2).$$

2. 左ブレイン

$$\text{個数 } N_2 = 2, \quad l_1^{(2)} = (1, 1), \quad l_2^{(2)} = (1, -2), \quad l_3^{(2)} = (-1, 5).$$

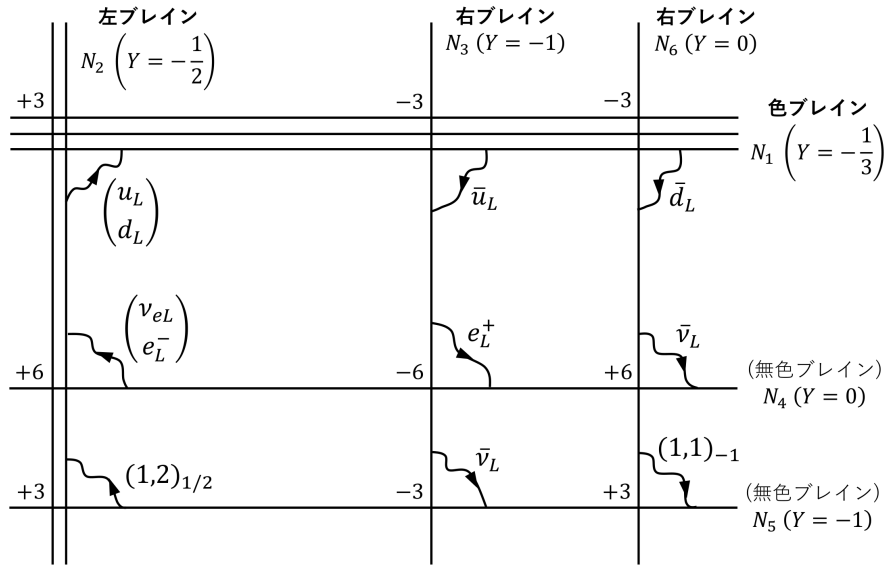


図 115 半現実的な交差ブレインモデル (無色ブレイン N_4, N_5 は慣習的には “レプトニック (軽粒子的) ・ブレイン” と呼ぶのが一般的である)

3. \bar{u}_L -反クォークを表す弦の終点を置くブレイン (右ブレインと呼ぶ*217)

$$\text{個数 } N_3 = 1, \quad l_1^{(3)} = (1, 1), \quad l_2^{(3)} = (1, 0), \quad l_3^{(3)} = (-1, 5).$$

4. レプトンを得るためのブレイン

$$\text{個数 } N_4 = 1, \quad l_1^{(4)} = (1, 2), \quad l_2^{(4)} = (-1, 1), \quad l_3^{(4)} = (1, 1).$$

5. レプトンを得るためのブレイン

$$\text{個数 } N_5 = 1, \quad l_1^{(5)} = (1, 2), \quad l_2^{(5)} = (-1, 1), \quad l_3^{(5)} = (2, -7).$$

6. \bar{d}_L -反クォークを表す弦の終点を置く (右) ブレイン

$$\text{個数 } N_6 = 1, \quad l_1^{(6)} = (1, 1), \quad l_2^{(6)} = (3, -4), \quad l_3^{(6)} = (1, -5).$$

ブレインの各交差部分は実効的な 3 次元空間への拡がりを持っている。弦はそのようなブレインの交差部分に局在している。

さらに各交差部分の弦から現れるフェルミオンは弦の向きに依存する。標準模型の左巻きフェルミオンを正しく得るには、実は次の規則に従って、ブレイン a, b の交差回数 I_{ab} の符号から弦の向きを決めれば良い。

規則 ブレイン a とブレイン b の交差部分の組において、 $|I_{ab}|$ 個の左巻きフェルミオンが存在する。

もし $I_{ab} > 0$ であれば、その左巻き状態はブレイン b からブレイン a へ伸びる弦である。

もし $I_{ab} < 0$ であれば、その左巻き状態はブレイン a からブレイン b へ伸びる弦である。

*217 u_R -クォークを表す反対向きの弦が接続するから。

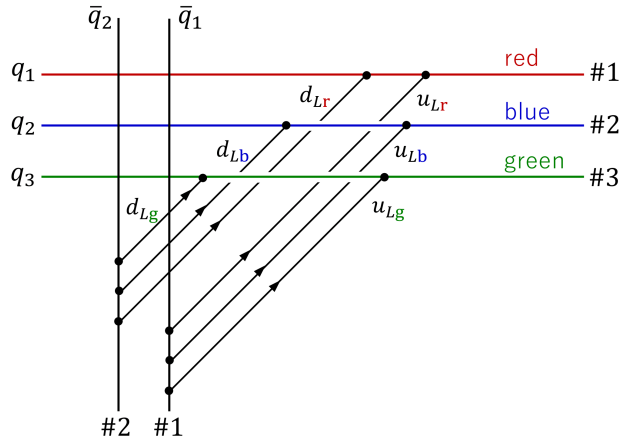


図 116 交差する D-ブレーンと u_L -クォーク, d_L -クォークを表す開弦

実際、以上よりブレーンの配置と各交差部分 $[ab]$ における左巻き状態のフェルミオンを表す弦は、図 115 のように示される。ただし図 115 では交差部分に、上記の公式から計算される交差回数 $I_{ab}(= -I_{ba})$ (ただし $a < b$) を付記している。

色ブレーン N_1 の組と左ブレーン N_2 の組の交差部分 $[12]$ は $I_{12} = 3$ 箇所ある。ここで特にそのうち 1 つの交差部分に注目してみよう。色ブレーン N_1 は $SU(3)_c$ を得るための 3 つの重なったブレーン (前述) であり、赤、青、緑のラベルで識別される。赤、青、緑の色電荷を持つ左巻きクォーク q_L を表す開弦はここに終点を持つ。また左ブレーン N_2 は $SU(2)_w$ を得るための 2 つの重なったブレーン (前述) であり、 u_L -クォークを表す開弦はその一方に、 d_L -クォークを表す開弦はもう一方に終点を持つ (図 116 参照)。なお、残り 2 つの交差部分からはその複製として c -クォークと s -クォーク、 t -クォークと b -クォークが得られると考えることができる。

ブレーンを交差させる必要があるのは次の事情による。すなわち D-ブレーンの組を平行に配置することを考えると、前述のように 2 組のブレーンを一致させると $U(5)$ Yang-Mills 理論が得られてしまうため、ブレーンの組は離して配置しなければならない。そこで D-ブレーンの組を分離して平行に配置すると、その間で引き伸ばされた弦は質量を持つ。ところが現実のカイラルフェルミオンが質量を持つことは許されないため、これでは標準模型のカイラリティを実現できない。

弦が 3 つの色ブレーンに持つ $U(3)$ 電荷の組 (q_1, q_2, q_3) 、および弦が 2 つの左ブレーンに持つ $U(2)$ 電荷の組 (\bar{q}_1, \bar{q}_2) から分離される $U(1)$ 電荷をそれぞれ、

$$Q_1 \equiv q_1 + q_2 + q_3, \quad Q_2 \equiv \bar{q}_1 + \bar{q}_2$$

と規格化して定義する (Q_1 については前述)。すると単純に例えば N_2 に始点を持ち (\bar{q}_1, \bar{q}_2) のいずれかが -1), N_1 に終点を持つ (q_1, q_2, q_3) のいずれかが $+1$) 弦に対しては $Q_1 = 1, Q_2 = -1$ となることが保証される。他の個数 $N_i = 1$ のブレーン N_3, N_4, N_5, N_6 に対しても、弦の端点がブレーンに持つ $U(1)$ 電荷 Q_i を定義する。これは弦の表す粒子の超電荷 Y に対して

$$Y = -\frac{1}{3}Q_1 - \frac{1}{2}Q_2 - Q_3 - Q_5$$

と寄与するものとする。すると各ブレーン上の終点電荷 $+1$ の超電荷に対する寄与は図 115 に Y の値として書き添えたようになる。

以上より図 115 の各交差部分からは次の電荷表現が得られることが見て取れる。

$$\begin{array}{ccc}
 \underbrace{3(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{1/6}}_{[12]} & + & \underbrace{3(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-2/3}}_{[13]} & + & \underbrace{3(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{1/3}}_{[16]}, \\
 \underbrace{6(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1/2}}_{[24]} & + & \underbrace{6(\mathbf{1}, \mathbf{1})_1}_{[34]} & + & \underbrace{6(\mathbf{1}, \mathbf{1})_0}_{[46]}, \\
 \underbrace{3(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{1/2}}_{[25]} & + & \underbrace{3(\mathbf{1}, \mathbf{1})_0}_{[35]} & + & \underbrace{3(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{-1}}_{[56]}.
 \end{array}$$

上式の 1 行目は単一世代のクォーク

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{1/6}, \quad \bar{u}_L \sim (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-2/3}, \quad \bar{d}_L \sim (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{1/3}$$

の 3 つの複製になっている。また上式の 2 行目は単一世代のクォーク

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1/2}, \quad e_L^+ \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1})_1, \quad \bar{\nu}_{eL} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0$$

の 6 つの複製になっている。これは標準模型で必要とされる 3 つの複製の他に、さらに余分の 3 つの複製を含んでいる。我々は望んだ種類よりも余分のレプトンを見出したが、これは D6-ブレーンだけを含む矛盾のないモデルにおいて避けられないことである。オリエンティフォールド O6-平面 (プレーン) と D6-ブレーンを併用するならば、標準模型に含まれる粒子のスペクトルを“正確に”再現するモデルを構築することが可能である。交差する D6-ブレーンを含むモデルは、標準模型の粒子構成を正確に再現できる最初の弦モデルとなった。

6.8 弦の熱力学とブラックホール

1 本の弦に対して統計力学を適用しよう*218。

“非相対論的”な量子弦を“量子バイオリン弦”と呼ぶことにしよう。これは振動数 $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$ の単純調和振動子の集団と等価であり、そのエネルギー $E = \hbar\omega_0 N$ のミクロカノニカル集団の状態数は、数演算子の固有値 N を和が N となる正の整数へと分割する方法の総数 $p(N)$ で与えられる。 $N \gg 1$ に対して分割 (partitions) の数 $p(N)$ の近似式を導くことは数学的な問題であるけれど、これを物理的に意味付けしつつ行うことができる。すなわち高温の極限 $\hbar\omega_0/kT \ll 1$ において、カノニカル集団に対して分配関数 Z を計算し、自由エネルギー $F = -kT \ln Z$ (ただし k は Boltzmann 定数) を熱力学的関係式に代入すると、エントロピー S とエネルギー E (したがって N) の関係

$$S(E) \simeq k2\pi \sqrt{\frac{N}{6}}$$

が導かれる。これをミクロカノニカル集団に対する Boltzmann の関係式 $S(E) = k \ln p(N)$ と比較すると、

$$\ln p(N) \simeq 2\pi \sqrt{\frac{N}{6}}$$

*218 1 本だけの弦に対する統計力学と言うと奇妙に聞こえるけれど、古典的には粗い描像として、1 本の弦が長さ $l_s = \sqrt{\alpha'}$ の素片から成ると考えることができる。

を得る。高温の極限は $N \gg 1$ に対応することが分かるので、これは大きな N に対する分割の数 $p(N)$ の近似式である。より正確には、Hardy-Ramanujan の近似式 $p(N) \simeq \frac{1}{4N\sqrt{3}} \exp\left(2\pi\sqrt{\frac{N}{6}}\right)$ が成立する。

相対論的な弦に対しても (横方向の振動子から構築される) 数演算子の固有値 N^\perp に対して、エントロピーは $S = k \ln p_{24}(N^\perp)$ で与えられる (ただし振動方向として $b = 24$ 個の横方向があることに対応して、整数 N を b 種類のラベルの付いた整数へと分割する方法の数 $p_b(N)$ を考えている)。しかしながら非相対論的な量子バイオリン弦の式 $E = \hbar\omega_0 N$ は、例えば開弦に対して

$$E = M = \sqrt{\frac{1}{\alpha'}(N^\perp - 1)} \simeq \sqrt{\frac{N^\perp}{\alpha'}}$$

へと修正される。最後の等号は N^\perp が (1 と比べて) 大きい場合を想定した近似であり、高エネルギーの場合に適用できる。上記の応用として N^\perp が大きい場合の近似式 $\ln p_b(N^\perp) \simeq 2\pi\sqrt{\frac{N^\perp b}{6}}$ が見出されるので、ミクロカノニカル集団に対するエントロピー-エネルギーの関係

$$S = k \ln p_{24}(N^\perp) \simeq k4\pi\sqrt{N^\perp} \simeq k4\pi\sqrt{\alpha'}E$$

が得られる。このようにエネルギーとエントロピーが比例するのは普通に見られる状況ではなく、このとき

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = k4\pi\sqrt{\alpha'}$$

のように温度 T は一定となる。この一定の温度 $T_H = 1/k4\pi\sqrt{\alpha'}$ は Hagedorn 温度と呼ばれる*219。Hagedorn 温度に対応する熱エネルギー kT_H は、第 1 質量レベル (M^2 が最小の正の値をとる状態 $N^\perp = 2$) における静止エネルギー $1/\sqrt{\alpha'}$ に比べて

$$\frac{kT_H}{1/\sqrt{\alpha'}} = \frac{1}{4\pi} \simeq \frac{1}{12.6}$$

のように小さい。よって Hagedorn 熱エネルギーはほとんどの弦の粒子状態のエネルギーに比べて小さいことになる*220。(閉弦に対しても高エネルギーでは、結果的に開弦と同じエントロピー-エネルギーの関係式が得られる。)

ここで再びカノニカル集団を考えよう。次の目標は体積 V の箱に入っている単一の (相対論的な) 開弦の分配関数を計算することである。弦の一般的な基本状態

$$|\lambda, p\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (a_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

は占有数 $\lambda_{n,I}$ と、光錐エネルギー p^- を除く弦の運動量 (p^+, \vec{p}_T) (質量殻条件の下で、代わりに運動量の d 個の空間成分 \vec{p}) で指定される。よって単一の弦の分配関数は

$$\begin{aligned} Z_{\text{str}} &= \sum_{\{\lambda_{n,I}\}} \sum_{\vec{p}} \exp\left[-\beta\sqrt{M^2(\{\lambda_{n,I}\}) + \vec{p}^2}\right] \\ &= \sum_{\{\lambda_{n,I}\}} Z(M^2(\{\lambda_{n,I}\})) \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} p_{24}(N) Z(M^2(N)) \quad \left(M^2(\{\lambda_{n,I}\}) = \frac{1}{\alpha'}(N-1), N \equiv N^\perp = \sum_{n,I} n\lambda_{n,I}\right) \end{aligned}$$

*219 分配関数は任意の熱浴の温度 T に対して計算できるのに対し、そこから高エネルギーの弦の平衡状態を実現するには、温度が (近似的に) Hagedorn 温度 T_H をとらなければならないことが結論されたことになる。

*220 相対論的な弦に対しては $N^\perp \gg 1$ は高温を意味しないので、これは矛盾ではない。

と書ける．ここに $Z(m^2) = \sum_{\vec{p}} e^{-\beta\sqrt{m^2+p^2}}$ は質量 m の相対論的な粒子の分配関数であり，統計力学において馴染みある，非相対論的な自由粒子に対する分配関数の導出と似た手法で計算できる（ただしここでは空間次元は d である）．これを踏まえてさらに計算を進めると， $T < T_H$ の場合だけ分配関数は収束し， T_H の下側から $T \rightarrow T_H$ とすると $N \gg 1$ からの寄与が重要となって，分配関数は

$$Z_{\text{str}} \simeq \frac{2^{11}}{\pi} V(kT_H)^{25} \left(\frac{T_H}{T_H - T} \right), \quad T \rightarrow T_H$$

と求まる．

最後にブラックホールのエントロピーについて議論する．高温の気体がブラックホールに引き込まれるとき，気体とブラックホールから成る系の総エントロピーは減少できないので，ブラックホールは最低限，気体が持っていたエントロピーを獲得しなければならない．このような素朴な議論からも期待されるように，通常の4次元時空における定常的な Schwarzschild ブラックホール（質量 M ，ブラックホールの半径 (Schwarzschild 半径) $R = 2GM$ ， G :Newton 定数）は，（質量を持つことに伴って）Bekenstein エントロピー

$$\frac{S_B}{k} = 4\pi GM^2$$

を持つことが知られている（Boltzmann 定数 k で割って無次元化してある）．しかしブラックホールが質量だけを持つ特異点であるとするならば，エントロピーを生じる微視的状态が何であるかを理解するのは困難である．そこで運動量がゼロの弦の非常に重い（高い励起を持つ）状態がブラックホールを形成すると考え，弦理論を用いて Schwarzschild ブラックホールのエントロピーを説明することを試みる．静止エネルギー M の弦のエントロピーは，上記のマイクロカノニカル集団に対する式

$$S \simeq k4\pi\sqrt{\alpha'} M$$

で与えられる．このエントロピーは自由な弦（したがって弦の結合 $g = 0$ ）に関する計算結果であり，示量性 $S_{\text{str}} \sim M \sim L$ （弦の長さ）を持っている．他方，ブラックホールのエントロピー S_B は示量性がなく（ $S_B \sim M^2$ ），また Newton 定数

$$G \sim g^2\alpha' = g^2 l_s^2$$

は弦の結合 g をゼロに設定するとゼロになるため， S_B は相互作用の必要な領域において計算されていることになる．このように両者は表面的には一致しない．ところがディラトンの期待値を変更して（可逆過程），弦の結合 g を有限の値から小さくしていく場合を考えると，エントロピー S_B/k は一定であり，ブラックホールの質量 $M \sim 1/g$ は増大し，ブラックホールの半径 R は減少することになる．Bekenstein エントロピーの前提とする一般相対性理論の有効となる最小値 $R_* = l_s$ に R が達したときの，弦の結合を g_* とする．現実的に結合 g_* は極めて小さくなければならないことを踏まえ，結合 g_* での弦のエントロピーを自由な弦のエントロピー S_{str} で代用すると， g_* に対するブラックホールの質量 M_* と同じ質量を持つ弦のエントロピーは，結合に依らないブラックホールの一定のエントロピーと

$$\frac{S_B}{k} \sim \frac{1}{g_*^2}, \quad \frac{S_{\text{str}}}{k} \sim \frac{1}{g_*^2}$$

のように，少なくとも定性的に一致する．なお最大荷電ブラックホールと呼ばれるある種の5次元ブラックホールに関しては，ブラックホールのエントロピーは弦モデルによる計算結果と正確に，定量的に一致する．

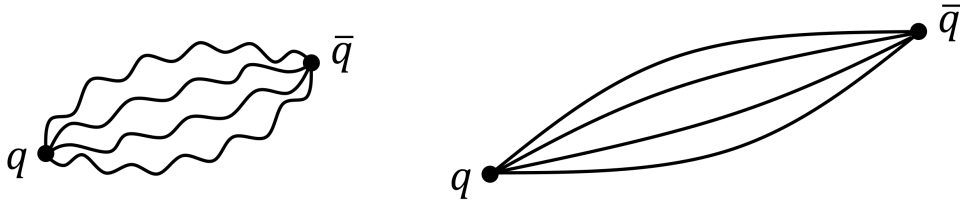


図 117 クォークと反クォークが色の場の流束線群によって結合し、中間子を形成している様子

6.9 強い相互作用と AdS/CFT 対応

- 強粒子 (ハドロン) 励起の角運動量 J とエネルギー E の関係は、おおよそ Regge (レッジ) 軌跡と呼ばれる直線 $J = \alpha' E^2$ に乗る。古典的な回転する開弦もこれと同じ関係を持つことから、弦理論は強い相互作用の理論となり得る可能性が示唆される。
 - (弦の) 量子化によって角運動量の値は離散的になり、 J と E^2 の線形な関係は付加定数の修正を受ける ($J = \alpha' E^2 + \beta'$)。これはデータとの一致のために必要なことであった。
- 中間子はグルーオンを介して (強い相互作用により) 束縛し合ったクォークと反クォークの対であり、弦の描像では中間子は一端にクォーク、他端に反クォークを持つ開弦として捉えられる。開弦本体は色の流束線が集まった細い管状構造を表している (図 117 参照)。
 - クォークが単独の孤立状態で観測されないことは、弦の張力に逆らってクォークと反クォークを引き離すのに無限大のエネルギーが必要となることから理解される。
 - クォークと反クォークの間のポテンシャルエネルギーの鍵となる特徴は、単純な弦のモデルからも現れる。
- このように (クォークと反クォークの複合体である) 中間子に 1 本の弦が対応する理論は、個々のクォークに弦が対応する前述の理論と並行し得る、QCD (量子色力学) を正確に記述する弦理論と信じられる。

ここでゲージ理論を弦理論によって記述することに関連して、AdS/CFT 対応に話題を転じる。これは下記のゲージ理論と閉弦の理論の物理的な等価性のことである。

- ゲージ理論：
 - N 個の重なり合った D3-ブレイン系において
 - 低エネルギーで生じる超対称 $SU(N)$ ゲージ理論 (すなわち CFT)
- 閉弦理論：
 - その D3-ブレイン系によって形成される
 - 重力的な背景に密接に関係する時空 (AdS₅ を含む) の中の IIB 型超弦理論

ここに

- AdS：超弦理論における、コンパクト化のない 5 つの次元が形成する

“反 de Sitter (アンチ-ド・ジッター)” 時空 (AdS_5 と表記).

その境界を成す 4 次元 Minkowski 時空にゲージ理論の場が存在する.

- CFT : ゲージ理論が共変場理論 (conformal field theory : CFT) であること.

であり, ゲージ理論の場は AdS_5 の境界を成す 4 次元 Minkowski 時空に存在する (言い換えれば, 閉弦はゲージ理論が存在する空間を境界として持つような, 次元がひとつ高い空間の中を伝播する). AdS/CFT 対応は Yang-Mills 流のゲージ理論が既に, ある種の重力理論を内在していることを示唆している. また AdS/CFT 対応は重力が存在する物理的世界が, 言わば境界の場の理論をホログラムデータとして再生された立体像に過ぎないことを意味し得るため, その ‘実在性’ に対して哲学的な疑問を投げかける. AdS/CFT 対応で考えられているのは超対称性を持つ $SU(N)$ ゲージ理論であるのに対し, QCD は超対称性を持たないゲージ理論であり, 弦理論によって QCD を記述する方法はまだ見出されていない. しかし AdS/CFT 対応は, そのような記述が存在し得ることの強力な論拠を与えている.

AdS/CFT 対応の詳しい説明の準備として, D-ブレーンの重力効果が及ぶ距離尺度について述べておく. 一般に質量 M を持つ物体が作る重力場に対して, $R^{D-3} \equiv G^{(D)} M$ によって特徴的な距離尺度 R を導入すると, これは重力の及ぶ距離の目安となる. D p -ブレーンに対してこの距離は

$$\left(\frac{R}{\sqrt{\alpha'}} \right)^{D-p-3} \sim gN$$

となることを証明でき, これによれば弦の結合 $g \rightarrow 0$ または $gN \rightarrow 0$ とすると $R \rightarrow 0$ となり, 重力効果はゼロになる.

AdS/CFT 対応はまだ証明されていない. 以下では最初に AdS/CFT 対応を動機付けた議論の 1 つとして, 低エネルギー極限の描像を基調とする議論を紹介する. D3-ブレーンの数 N を固定して弦の結合定数 g を変化させることで, 2 つの極限 $gN \ll 1, gN \gg 1$ を調べる.

まず $gN \ll 1$ の場合を考えると, 次の 2 つの系が得られる.

1. 10 次元 Minkowski 時空における閉弦の系

- 前述のように, $gN \ll 1$ では重力効果を無視できる \rightarrow 平坦な 10 次元 Minkowski 時空
- 低エネルギー極限 $\alpha' \rightarrow 0$ *221 では $G^{(10)} \sim g^2(\alpha')^4$ はゼロになり, 閉弦の場は自由場になる.

2. 超対称 4 次元 $U(N)$ Yang-Mills 理論

- D3-ブレーンに接続している開弦は低エネルギー極限 $E \ll \frac{1}{\sqrt{\alpha'}}$ では質量を持つ状態になれないので, 無質量の $U(N)$ Yang-Mills 理論によって記述される. (場は D3-ブレーン上に, したがって 4 次元時空に存在すると見なされる.)
- 前述のように, 実際にはひとつのゲージ場が分離し, 相互作用を持つ理論として残るのは $SU(N)$ Yang-Mills 理論である.

これら 2 つの系も結合 $G^{(10)} \rightarrow 0$ により相互作用を持たずに共存することになる.

次に $gN \gg 1$ の場合を考える. すると前述のように重力効果が重要になる. このとき D3-ブレーンの広がる方向に直交する 6 次元空間の幾何学 (重力を表す) は図 118 のように狭路 (throat) 状となり, 図 118 の円で表されている 5 次元球面 S^5 は狭路内を進むにしたがって, 一定の体積に近づく. 狭路の無限の先の “終端”

*221 弦のエネルギー尺度は $\frac{1}{\sqrt{\alpha'}}$ であり, すべてのエネルギー E をある値以下 $E \leq E_0$ に固定して $\alpha' \rightarrow 0$ とすれば, 低エネルギーの条件 $E \ll \frac{1}{\sqrt{\alpha'}}$ が成立する.

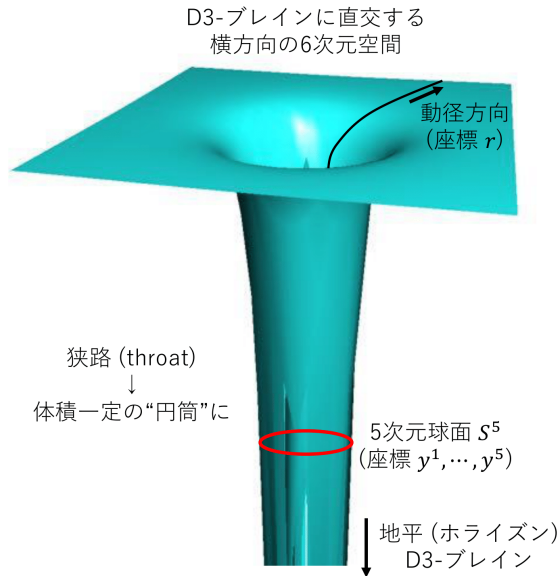


図 118 狭路 (throat) の幾何

は地平 (ホライズン) と呼ばれる。地平付近の幾何は $\text{AdS}_5 \times S^5$ となることが判明する。6次元空間ではブレインは点として現れ、(それは狭路の無限の先へと追い出されるので、) この幾何においてもはや D3-ブレインは現れない。こうして

1. 遠方の領域を表す平坦な空間における低エネルギー閉弦の系
2. 地平付近の $\text{AdS}_5 \times S^5$ の幾何を背景とする IIB 型超弦の系

という 2 つの分離した系が得られる。

以上で見たように低エネルギー極限では、 $gN \ll 1$ と $gN \gg 1$ の 2 つの領域において 2 つの分離した系が生じる。実際には低エネルギー極限において “すべての” gN の値の下で 2 つの系への分離が起こる。その一方は平坦な時空における自由な閉弦の系である。もう一方の系は $gN \ll 1$ では $SU(N)$ Yang-Mills 理論、 $gN \gg 1$ では $\text{AdS}_5 \times S^5$ における IIB 型の超弦理論となっている。これらは実際には同じものであり、 gN の中間的な値においても両者は等価になっているというシナリオが AdS/CFT 対応である (図 119 参照)。

最後に AdS 時空の幾何について説明する。通常 AdS_{n+1} 時空は、2 つの時間座標 u, v と n 個の空間座標 x^i に対して、

$$ds^2 = -du^2 - dv^2 + dx^i dx^i \quad (i = 1, \dots, n)$$

で与えられる計量を持つ平坦な空間 $\mathbf{R}^{2,n}$ に埋め込まれた曲面

$$-u^2 - v^2 + x^i x^i = -R^2$$

として定義される。これは独立な時間的方向を 1 つだけ含むことを踏まえて、

$$u = z \cos t, \quad v = z \sin t$$

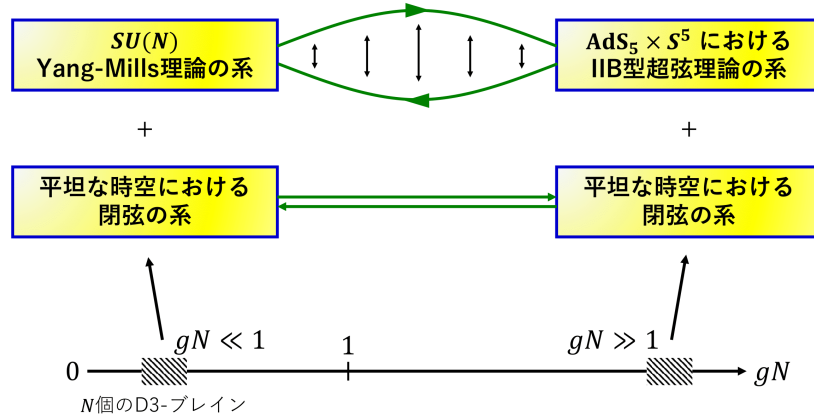


図 119 AdS/CFT 対応 (低エネルギー極限の描像)

によって, u, v の代わりに (無次元の) 時間 t と付加的な座標 z を導入すると,

$$\text{周囲の計量の式: } ds^2 = -z^2 dt^2 - dz^2 + dx^i dx^i,$$

$$\text{曲面の式: } -z^2 + x^i x^i = -R^2$$

となる. $dt = 0$ で与えられる AdS 時空の“空間”は双曲型空間 \mathbf{H}_n の幾何となっており, 次のように双曲面 \mathbf{H}_n をパラメトライズする $\xi^i (i = 1, \dots, n)$ 座標を導入できる. すなわち双曲面上の点 $P(z, \vec{x})$ (ただし $\vec{x} = (x^1, \dots, x^n)$) に対して, P と点 $Q(-R, \vec{0})$ を直線で結び, 超平面 $z = 0$ (スクリーン) との交点 P' の x^i 座標を点 P の座標 ξ^i として用いる (図 120 参照). また $r = \sqrt{(\xi^1)^2 + \dots + (\xi^n)^2}$ と表記する. 最後に $\xi^i/R \rightarrow \xi^i$ (したがって $r/R \rightarrow r$) と座標を無次元化して再定義すると, 座標 t, ξ^i に関して AdS_{n+1} に誘導された計量は

$$ds^2 = R^2 \left[-\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2 dt^2 + \frac{4d\xi^i \xi^i}{(1-r^2)^2} \right] \quad (r = \sqrt{\xi^i \xi^i})$$

となる. (計量が定まれば AdS 時空を内に含む高次元の空間を想定することなく, AdS 時空を理解できる.)

$r \rightarrow 1$ は \mathbf{H}_n の任意の点から無限に離れた境界に対応する. 共形因子 $(1-r^2)^2/4R^2$ を乗じると, 共形境界を持つ時空の世界距離は

$$ds'^2 = \frac{(1-r^2)^2}{4R^2} ds^2 = -\left(\frac{1+r^2}{2}\right)^2 dt^2 + d\xi^i d\xi^i$$

で与えられる*222. 共形境界 $r = 1$ の近くでは

$$ds'^2 \simeq -dt^2 + d\xi^i d\xi^i$$

となり, 共形境界は球面 $S^{n-1} : \xi^i \xi^i = 1$ と時間軸から形成される. AdS_5 時空に関しては, 共形境界が $\mathbf{R} \times S^3$ となる. AdS を背景とする IIB 型超弦理論に対して双対なゲージ理論は, このような境界に存在する.

*222 共形因子 Ω^2 の導入 $ds'^2 = \Omega^2 ds^2$ は空間に入れた座標系をそのままにして計量を, したがって空間の幾何学そのものを変更している. しかしながら時空の共形境界に対する正接ベクトルの性質 (空間的, 時間的, 零) など, 興味ある情報は不変に保たれる.

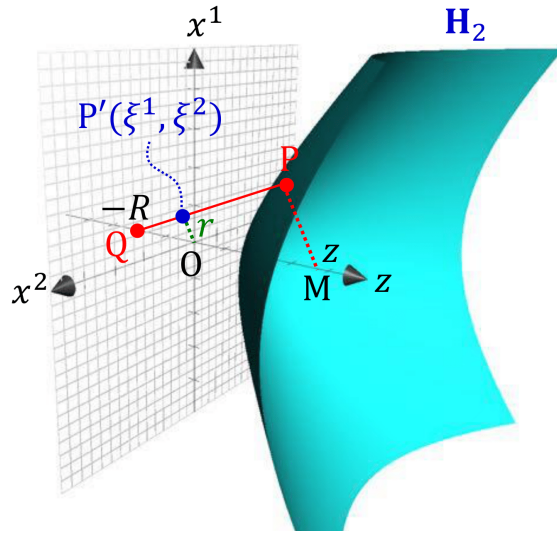


図 120 M_3 における双曲面 H_2 への座標 ξ^i の導入

6.10 弦の共変な量子化

Lorentz 不変性が明白な弦の量子化

- 利点
 - D0-ブレインにも適用できる。
(光錐量子化では光錐座標を定義する Neumann 型の弦の空間座標 X^1 が 1 つ必要.)
 - 弦理論において現れる場の方程式が理解しやすい表現になる^{*223}.
 - タキオンポテンシャルの計算が可能となる.
- 困難 (以下で説明)
 - 弦の時間座標 X^0 も演算子になる.
 - 弦の Hamiltonian は, 理論の物理的な状態を消滅させてしまう.
 - ノルムが正にならないような状態も論じる必要がある.

光錐量子化では南部-後藤作用の代わりに, (すべての弦座標 X^μ を同等に扱った) より単純な作用

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma (\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu - \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X_\mu)$$

を利用することができる. と言うのも, このとき運動量密度 (\mathcal{P}^τ および流束 \mathcal{P}^σ) は

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X^{\mu'}, \quad \mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu$$

となり, (Dirichlet 境界条件または自由端点の条件 (したがって Neumann 境界条件) の下で) 運動方程式として波動方程式

$$\ddot{X}^\mu - X^{\mu''} = 0$$

^{*223} 例えば質量のタキオン状態に関する運動量空間の波動関数 $\phi(p)$ の満たす古典場の方程式は $(\alpha' p^2 - 1)\phi(p) = 0$ となる. これは自乗 $M^2 = -1/\alpha'$ を持つ Klein-Gordon 方程式に一致していることが明白である.

が導かれる。共変な理論では弦の時間座標 X^0 も含めて $X^\mu(\tau, \sigma)$ と $\mathcal{P}_\mu(\tau, \sigma)$ を Heisenberg 演算子とし、標準な交換関係

$$[X^\mu(\tau, \sigma), \mathcal{P}^\nu(\tau, \sigma')] = i\eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma')$$

を課す*224。すると開弦に対して、弦座標のモード展開

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma$$

における展開係数などに対する交換関係

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu} \delta_{m+n, 0}, \quad [a_m^\mu, a_n^{\nu\dagger}] = \delta_{m,n} \eta^{\mu\nu}, \quad [x_0^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu} \quad (\alpha_0^\mu \equiv \sqrt{2\alpha'} p^\mu)$$

が導かれる。

さて、我々が学んだベクトル n^μ によって特徴付けられるパラメーター付けの条件の下では、制約条件

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0$$

が導かれた。光錐ゲージでは n^μ を具体的に選んでパラメーター付けを完全に固定するのに対し、共変な量子化では n^μ を決めずに、単に上式 $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ を“部分的な”ゲージ固定条件として課す。制約条件 $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ は光錐形式では X^- 座標の振動子を横方向の Virasoro モード L_n^\perp に関係付けるのに用いられた。しかし共変なアプローチでは、むしろ制約条件は理論が許容すべき状態に対して課される。まず Virasoro 演算子

$$L_n \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_{n-p}^\mu \alpha_{p,\mu}$$

を定義すると、古典論の水準で

$$\text{制約条件 } 0 = (\dot{X} \pm X')^2 = 4\alpha' \sum_{n \in \mathbf{Z}} L_n e^{-in(\tau \pm \sigma)} \quad \rightarrow \quad L_n = 0 \quad (n \in \mathbf{Z}, \text{ 古典論})$$

であり、量子論でも制約条件を表す式として、 $L_n = 0$ を何らかの形で考慮しなければならない。そこで物理的な状態 $|\Phi\rangle$ は、少なくとも $L_0 = N[L_0] - 1$ によって消失しなければならないと考える。

$$(N[L_0] - 1)|\Phi\rangle = 0.$$

ここから質量の自乗 $M^2 = -p^2$ は

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} (-1 + N), \quad N \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{\mu\dagger} a_{n,\mu} : \text{数演算子}$$

と表されることになる。実は負のノルムを持つ状態が存在することを証明でき、そのような状態を除くためにさらなる補助条件が必要である。しかし全ての Virasoro 演算子 L_n によって消滅するような状態は存在し得ないこともまた証明される。これを踏まえ、補助条件として正のモード番号を持つ Virasoro 演算子が物理的な状態を消滅させると考える。

$$L_n |\Phi\rangle = 0. \quad (n > 0)$$

*224 横方向成分と x_0^-, p^+ を独立な力学変数とする光錐量子化の場合と違い、交換関係 $[x_0^-, p^+] = -i$ を課す必要はない。

このとき全ての $n \neq 0$ に対して L_n の“期待値”がゼロになることができる。

$$\langle \Phi | L_n | \Phi \rangle = 0. \quad (n \neq 0)$$

ここで

$$\begin{aligned} L_n | \Phi \rangle = 0 \quad (n > 0) &\Leftrightarrow | \Phi \rangle \text{ は Virasoro “主要状態”,} \\ \begin{cases} L_n | \Phi \rangle = 0 \quad (n > 0) \\ (N[L_0] - 1) | \Phi \rangle = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow (N[L_n] - \delta_{n,0}) | \Phi \rangle = 0 \quad (n \geq 0) \\ &\Leftrightarrow | \Phi \rangle \text{ は “許容状態” (慣用的には「物理的状态」)} \end{aligned}$$

と呼ぶことにする。さらに負のモード番号を持つ有限個の Virasoro 演算子の線形結合を、与えられた主要状態に作用させた形で書くことのできる状態として、その主要状態の Virasoro 従属状態を定義する。“物理的”な状態は許容状態のうち、主要状態であって、他の主要状態の従属状態ではない状態である。

開弦の量子化に移ろう。

- 基底状態 $|p\rangle = |p^0, p^1, \dots, p^{25}\rangle$ (運動量の全成分で指定)
- 位置状態 $|x\rangle = |x^0, x^1, \dots, x^{25}\rangle$
 - 時刻のラベルも付いている。ある状態 $|\psi\rangle$ の波動関数 $\langle x | \psi \rangle$ は、Schrödinger 方程式を用いる前に、既に時間依存性を備えている。

Hamiltonian は

$$\begin{aligned} H &\equiv \int d\sigma (\mathcal{P}^\tau_\mu \dot{X}^\mu - \mathcal{L}) = \pi\alpha' \int d\sigma \left(\mathcal{P}^\tau \cdot \mathcal{P}^\tau + \frac{X' \cdot X'}{(2\pi\alpha')^2} \right) \\ &= L_0 = N[L_0] - 1 = \alpha' p^2 + N - 1 \end{aligned}$$

と計算され、 $H = N[L_0] - 1$ はすべての物理的な状態を消滅させる。このように共変な状態が既に時刻のラベルを備えていることに関係して、Schrödinger 方程式は状態の時間発展方程式ではなく、状態 $|\Phi\rangle$ に対する制約の式 $H|\Phi\rangle = 0$ へと転化する。共変な量子化では (振動子 $\alpha \sim a$ の満たす上記の交換関係により) 基本状態は

$$|r\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{\mu=0}^{25} (a_n^{\mu\dagger})^{\lambda_{n,\mu}} |p\rangle \quad (\lambda_{n,\mu} : \text{非負の整数})$$

という形をとる。このうち物理的な状態は許容状態であって従属状態ではないものに限られる。光錐量子化の場合と同様に、共変な量子化においても開弦の物理的な状態として、

- $N = 0$ の基底状態 $|p\rangle$
 - タキオン状態 ($M^2 = -1/\alpha'$)
- $N = 1$ の励起状態 $\xi_\mu \alpha_{-1}^\mu |p\rangle$
 - 1光子状態 (ξ_μ は偏極, $M^2 = 0$, $p \cdot \xi = 0$, 自由度 $D - 2$)

が得られる。

閉弦では $\alpha, \bar{\alpha}$ の2種類の振動子があることに応じて、2種類の Virasoro 演算子 L_n, \bar{L}_n を定義できるという点で開弦よりも複雑であるけれど、開弦の場合と同様に議論を進めることができる。そして閉弦の共変な量子化でも、光錐量子化の場合と同じく

- 基底状態 ($N = \bar{N} = 0$) → タキオン状態
- 無質量状態 ($N = \bar{N} = 1$) → Kalb-Ramond 場, 重力, デイラトン

が得られる.

ここまでは制約条件 $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ を運動方程式とは別に課してきた. 最後に制約条件も導くことができる Polyakov 作用の説明をする. 新たに導入された世界面の計量 $h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$ を力学変数として, Polyakov 作用は

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} (\partial_\alpha X^\mu) (\partial_\beta X^\nu) \eta_{\mu\nu}$$

で与えられる. ただし $\alpha, \beta, \dots = 1, 2$ は世界面座標 $(\xi^1, \xi^2) = (\tau, \sigma)$ の添字, $\mu, \nu, \dots = 0, 1, \dots, 25$ は時空添字であり, $h^{\alpha\beta} h_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha$, $h = \det(h_{\alpha\beta})$ とする. ここから導かれる計量 $h^{\alpha\beta}$ の運動方程式によれば, $h_{\alpha\beta}$ を (τ, σ) の導入によって弦の世界面に誘導された計量 $\gamma_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X$ に比例する形

$$h_{\alpha\beta} = f^2(\xi) \gamma_{\alpha\beta}$$

に比例する形に書ける. このとき Polyakov 作用は南部-後藤作用

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \sqrt{-\gamma} \quad (\gamma = \det(\gamma_{\alpha\beta}))$$

に一致する*225. このように古典論の水準では, Polyakov 作用は南部-後藤作用と等価である. さらにパラメーターの付け替えの自由度を利用して, 計量 $h_{\alpha\beta}$ を“2次元の” Minkowski 計量 $\eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に比例する形

$$h_{\alpha\beta} = \rho^2(\xi) \eta_{\alpha\beta}$$

に選ぶと, 弦座標に対する運動方程式は波動方程式

$$\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta X^\mu = 0$$

になる. また場の方程式は

$$(\partial_\alpha X) \cdot (\partial_\beta X) - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} (\eta^{\gamma\delta} (\partial_\gamma X) \cdot (\partial_\delta X)) = 0$$

を与える. 予告通り, これは

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) = (1, 1), (2, 2) &\rightarrow \dot{X}^2 + X'^2 = 0, \\ (\alpha, \beta) = (1, 2), (2, 1) &\rightarrow \dot{X} \cdot X' = 0 \end{aligned}$$

のように Virasoro 制約条件に帰す.

*225 このように Polyakov 作用が $f^2(\xi)$ に依らないことは, Polyakov 作用が Weyl 変換

$$h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) \rightarrow \Omega^2(\tau, \sigma) h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$$

に対して不変であることを意味している.

6.11 弦の基本的な相互作用と Riemann 面

弦が相互作用 (分裂・結合) する場合へと議論を進める。

相互作用をする弦の描像を、具体的な現象が起こる確率を与える数値へと結びつける作業は、以下の 3 段階から成る。

- (1) 弦のダイアグラムを描いて、ダイアグラムの正準表現を与えるような共形写像を計算する。
 - 最も非自明な内容を含んでおり、以下ではこの部分を詳しく説明する。
 - 場の理論では、Feynman ダイアグラムを描く作業にあたる (共形写像は不要)。
- (2) 共形場理論を利用して、その正準形式から散乱振幅を計算する。
 - 場の理論では Feynman 規則に基づき、ダイアグラムに対応する散乱振幅を書き下す作業にあたる。
- (3) 公式を用いて、その散乱振幅から断面積を求める。断面積は観測量 (observable) である。

弦の世界面を Riemann 面として見ることは理に合っていることを説明する。Riemann 面とは粗く言って複素数の座標 (チャート) を設定された 2 次元の実多様体である。

Riemann 面の例 複素平面 \mathbf{C} (座標 $z = x + iy$)、 \mathbf{C} の上側の半平面 $\mathbf{H}(y > 0)$ 、

境界を含んだ上側の半平面 ($y \geq 0$) と “無限遠の点” (25.6 節) を含んだ領域 $\bar{\mathbf{H}}$ 、

複素平面における円環 (annulus) の領域、Riemann 球面 (スフェア) $\hat{\mathbf{C}}$ 、

Riemann 輪環面 (トーラス)、……。

等価な Riemann 面と共形写像 2 つの Riemann 面の間の変換を座標の関係 $w = f(z)$ として表したとき、

$f(z)$ が解析関数であるならば、2 つの Riemann 面は等価であると見なされる。

解析的な写像は局所的に角度を保つため (ただし $f'(z) = 0$ となる点 z は例外である)、

共形写像 (等角写像) と呼ばれる。

Riemann 面内における距離 2 点 z_1, z_2 の間の自然な距離として $|z_1 - z_2|$ を考えると、

共形写像は一般に局所的な尺度変更 $|dw| = |f'(z)||dz|$ を伴うため、

Riemann 面内における距離の概念を、内在的な形で一意的に規定することはできない。

他方、Weyl 変換 $h_{\alpha\beta} \rightarrow \Omega^2 h_{\alpha\beta}$ の下で Polyakov 作用は不変であり (前述)、(このとき座標 τ, σ は変更しないので、) これは計量 $h_{\alpha\beta}$ を用いて測った世界面内の距離もまた物理的な重要性を持たないことを意味している。

弦の世界面上の距離 $-ds^2 \sim -d\tau^2 + d\sigma^2 (h_{\alpha\beta} \sim \eta_{\alpha\beta} \text{ と選んだとき) と複素平面上の距離 } |dz|^2 = dx^2 + dy^2$ の定義の違いはあるものの、このことは世界面を Riemann 面として捉えることが自然な措置であることを示唆している。

そこで自由に伝播する開弦 (光錐運動量 p^+) の世界面を、複素座標

$$w = \tau + i\sigma$$

を持つ Riemann 面と捉える (図 121 上段)。これは指数関数の写像と線形分数変換

$$z = \exp\left(\frac{w}{2\alpha'p^+}\right), \quad \eta = \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

によって、図 121 の左下と右下に示す等価な Riemann 面 (z 平面上の $\bar{\mathbf{H}}$ と、 η 平面上の単位円領域) に対応付けられる。ただし

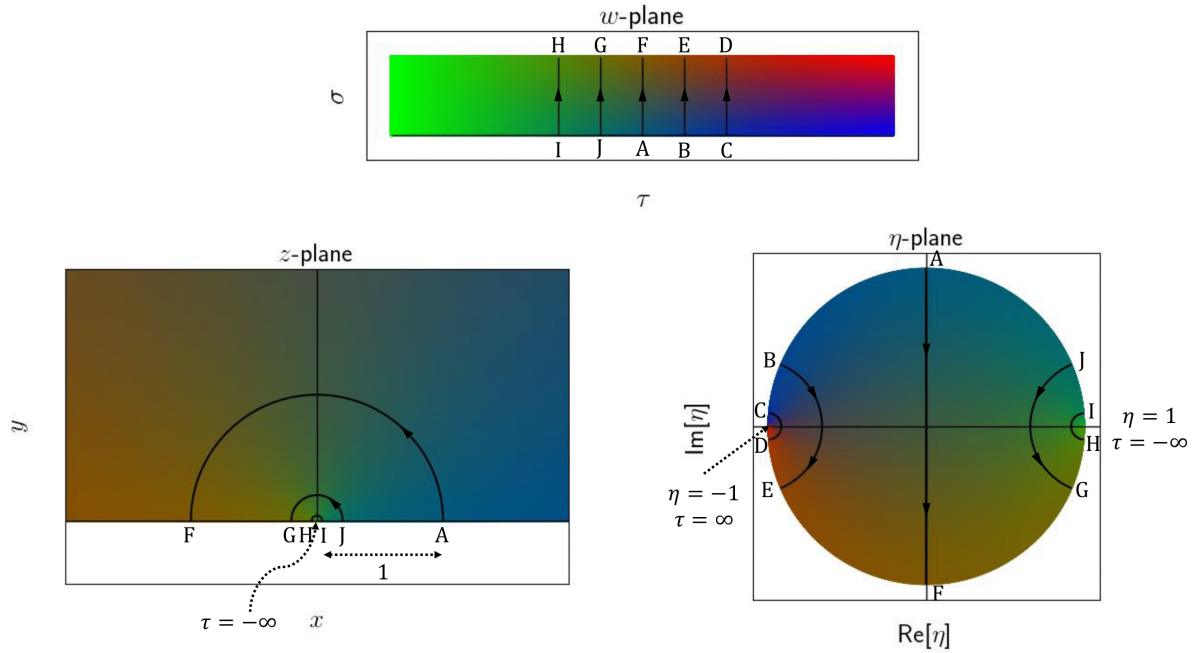


図 121 弦の世界面 (w 平面) と等価な Riemann 面 (z 平面, η 平面) と, 弦を表す $\tau = (\text{一定})$ の線の写像

- $\bar{\mathbf{H}}$ における $z = 0$ と “無限遠の点” $z = \infty (|z| = \infty \text{ のこと})$
- η 平面における 2 点 $\eta = \pm 1$

は無限の過去 ($\tau = -\infty$) および無限の未来 ($\tau = \infty$) における弦に対応し, これらは如何なる有限時刻の弦も到達できない “針孔 (puncture)” であって, 世界面からは除かれる.

相互作用をする開弦の世界面もまた, Riemann 面を比較できる正準表現として $\bar{\mathbf{H}}$ に写像できる. 例えば図 122 の弦の世界面は図 123 の多角形において, 頂点 P_1 を無限の過去 $\tau = -\infty$ へ, 頂点 P_2, P_3 を無限の未来 $\tau = \infty$ へ移行した,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \pi, \quad \alpha_Q = -\pi$$

となる極限にあたる^{*226}. ところで一般に図 124 のような w 平面上の n 角形は, Schwarz-Christoffel 写像によって z 平面の $\bar{\mathbf{H}}$ に関係付けることができる. 図 124 のように記号を定義すると, Schwarz-Christoffel 写像を表す微分方程式は

$$\frac{dw}{dz} = A(z - x_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}} (z - x_2)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}} \cdots (z - x_{n-1})^{-\frac{\alpha_{n-1}}{\pi}}$$

^{*226} 図 122 のように相互作用する弦の世界面に対しては, 運動量の光錐成分 p^+ を持つ弦に対してパラメータの範囲が $\sigma \in [0, 2\pi\alpha'p^+]$ となるように, 光錐ゲージの条件を定義する数係数を

$$X^+ = \tau, \quad p^+ = (2\pi\alpha'p^+)P^+$$

と設定する. こうすると弦の結合・分裂に伴って σ の範囲に矛盾が生じることはなく, また全ての弦の座標が共通の相互作用点 Q の時刻 X^+ を与えることが保証される.

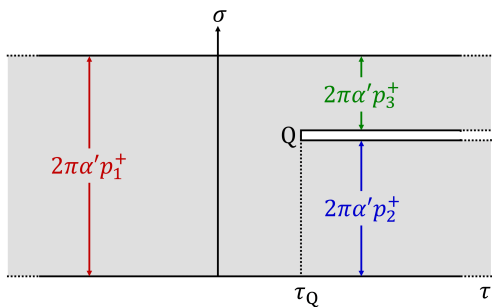


図 122 光錐ゲージにおいて弦の分裂を表す世界面ダイアグラム

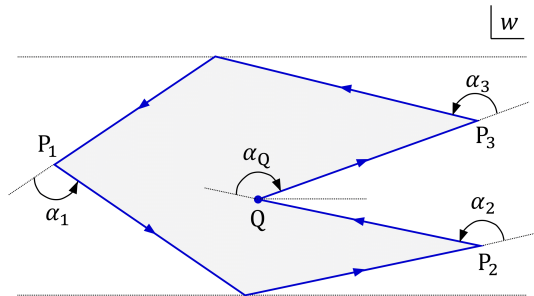


図 123 ある種の極限において弦の世界面を与える多角形 (Q は相互作用点に対応)

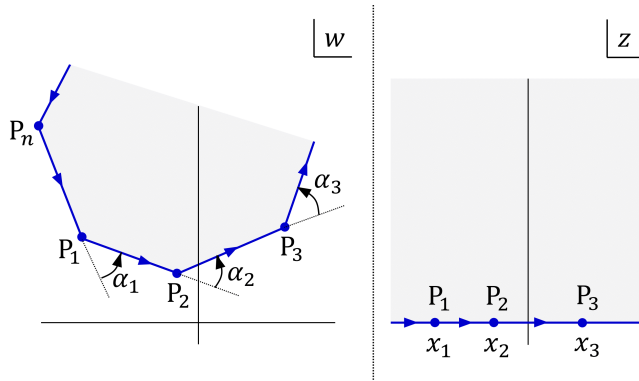


図 124 Schwarz-Christoffel 写像

で与えられる。ここから図 122 の弦の相互作用ダイアグラムに対して写像の式を具体的に書くと

$$w = -2\alpha' p_2^+ \ln(z+1) - 2\alpha' p_3^+ \ln(z-1),$$

$$x^* = \frac{p_2^+ - p_3^+}{p_2^+ + p_3^+}$$

となる。ただしここでは頂点 P_2 が $z = -1$ へ、 P_3 が $z = +1$ へ、 P_1 が $z = \infty$ へ移るように写像を構築しており、このため頂点 Q の写像される点 x^* は -1 と 1 の間にある。

ここで z 平面において頂点の写像される実軸上の位置を選べたのは次の事情による。すなわち $\bar{\mathbf{H}}$ から $\bar{\mathbf{H}}$ への自己写像を与える線形分数変換 $w(z)$ が存在し、これは実軸を左から右にたどるとき、実軸を無限遠の点も含む円と見なした場合の 3 個の針孔の巡回的な順序を保存する。このため z 平面と w 平面とで、対応する実軸上の針孔 P_1, P_2, P_3 が等価な巡回的な順序で現れる場合に限って、一方の $\bar{\mathbf{H}}$ を他方の $\bar{\mathbf{H}}$ に移すことが可能である。この自由度を利用して 3 個の針孔を指定した位置に移した。

次に 4 本の弦の相互作用を例にとり、相互作用する弦の世界面はすべての Riemann 面を、それに関係するモデュライによって構築する方法を正確に与えることを説明する。ここでモデュライとは、非等価な Riemann 面を区別するパラメーターである。図 125 のように 2 本の弦 3,4 が結合して 1 本の間状態の弦を形成し、その後 2 本の弦 1,2 に分裂する過程を考える (記号を図 125 のように定義する)。相互作用点の間の時間 $T = T_1 - T_2$ は $-\infty < T < \infty$ の範囲をとり得る。(ただし $T < 0$ において 2 つの切れ目が重なる $p_2^+ = p_3^+$ の場合には、実際には T は負になることはできない。) 図 125 の世界面を、3 点 P_1, P_2, P_3 が $0, 1, \infty$ に来る

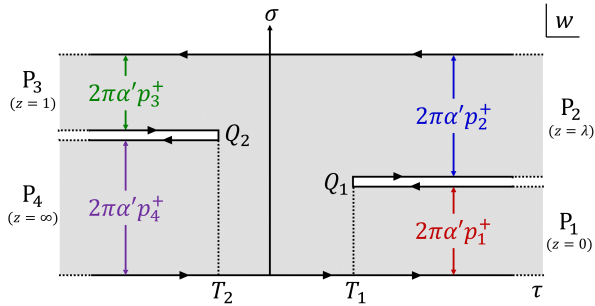


図 125 4本の弦の相互作用を表す世界面ダイアグラム

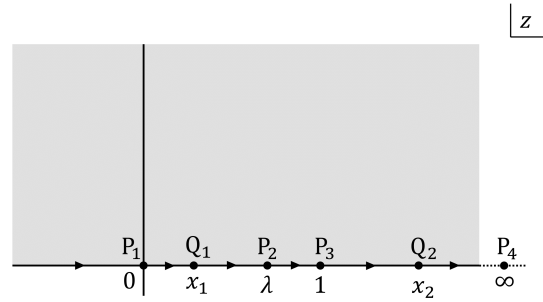


図 126 \bar{H} で見た 4本の弦の相互作用

ように Schwarz-Christoffel 写像を用いて \bar{H} に移すと、世界面上の点の巡回的順序 ($P_1 Q_1 P_2 P_3 Q_2 P_4$) は図 126 のように保持され、 P_2 の移る点 $\lambda \in (0, 1)$ がモデュライとなる。(4 個目の針孔 P_2 も指定された位置に移すことは、一般には不可能である。)

実は (p_i^+ を固定すると)、モデュライは T と 1 対 1 の関数 $\lambda(T)$ になる。よってもし $T \rightarrow \infty$ のときに λ が 0 に近づき、 $T \rightarrow -\infty$ のときに λ が 1 に近づくならば、 λ は $0 < \lambda < 1$ の範囲内のすべての値を 1 回ずつとることになる。この仮定は次の直観的な議論から、実際に正しいと予想される。まず図 125 のダイアグラムで $T \rightarrow \infty$ とすると、点 P_1, P_2 は P_3, P_4 と長い布によって隔てられる。このとき図 126 の \bar{H} においても共形的に、 P_1 と P_2 は互いに近づかなければならないから (あるいは P_2 と P_3 が離れなければならないから)、 $\lambda \rightarrow 0$ と考えることはもっともらしい。次に図 125 のダイアグラムで $T \rightarrow -\infty$ とすると、今度は点 P_2, P_3 が P_1, P_4 と長い布によって隔てられることになる。このとき図 126 の \bar{H} においても共形的に、 P_2 と P_3 は互いに近づかなければならないから、 $\lambda \rightarrow 1$ となると考えることはもっともらしい。このことは具体的な計算で厳密に証明することができる。こうして T が $-\infty$ から ∞ まで変化するとき、弦のダイアグラムは境界に 4 個の針孔 (無限の過去と未来の弦 P_1, P_2, P_3, P_4 に対応) を持つすべての \bar{H} をちょうど生成する。一般に任意の弦の相互作用に関して、弦のダイアグラムの位相的な型を固定しておいて、ダイアグラムのパラメーターを自然な範囲全体にわたって変化させると、位相的に与えられた型を持つ互いに非等価な Riemann 面の完全な集合 (したがってモデュライ空間) が形成される。

最後に関連して、4 個の開弦タキオン (入射 2 個, 出射 2 個) による散乱振幅 (Veneziano 振幅) について触れておく。無限の過去と未来に開弦タキオンを表す点 P_1, P_2, P_3, P_4 (時空運動量 p_1, p_2, p_3, p_4) を、巡回的順序を保って \bar{H} の境界 $x_1 = 0, x_2, x_3 = 1, x_4 = \infty$ に移すと、 $x_2 = \lambda$ がモデュライとなる (モデュライ空間は $0 < \lambda < 1$)。散乱振幅にはすべての可能な光錐ダイアグラムが寄与し、散乱振幅は面のモデュライ空間にわたる積分

$$A(p_1, p_2, p_3, p_4) = g_o^2 \int_0^1 d\lambda \lambda^{2\alpha'(p_1 \cdot p_2)} (1 - \lambda)^{2\alpha'(p_2 \cdot p_3)}$$

として表現される。これが Veneziano 振幅である。係数 g_o^2 は、この過程が 2 本の弦と 1 本の弦の基本的な相互作用を 2 回含んでおり、それぞれが振幅に対して開弦の結合 g_o の 1 乗の寄与を持つことによる。歴史的には弦理論は、Veneziano が 1960 年代の後半に、この公式を書いたことが端緒となって始まった。

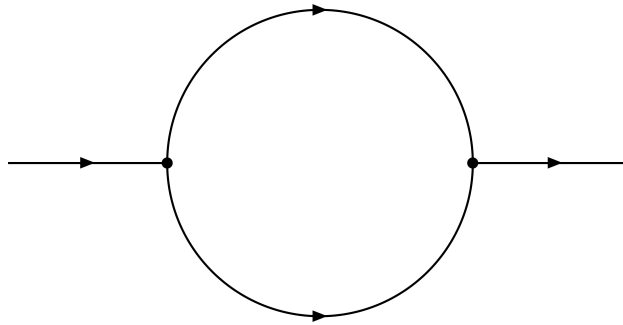


図 127 ひとつの仮想的な過程を表す 1 ループ Feynman グラフ

6.12 弦のダイアグラムの構造とループ振幅

素粒子物理学の摂動論による定式化において、最低次の近似に対する補正としてループを含むダイアグラムが現れる (図 127 参照). ループダイアグラムの表す仮想過程が非常に高いエネルギーや運動量を持つときに現れる発散は、紫外発散と呼ばれる. このときダイアグラムは等価的に短い時間や距離を含むので、小さいループを持つグラフと言われる. Einstein の重力理論を含むいくつかの理論では、正則化と繰り込みの手続きによって赤外発散に対処することができない. これに対し弦理論によれば、紫外発散は最初から存在しない. 潜在的に危険な短距離物理を表すように見える弦のダイアグラムは、実は、明らかに紫外発散の問題を含まないダイアグラムと等価であるからである. 弦理論が量子重力理論の最重要候補となった理由である. 我々は 1 ループの弦のダイアグラムに関してのみ、この Riemann 面の驚くべき性質を説明する.

まずは図 127 の Feynman グラフに対応する開弦の 1 ループ過程として、図 128 左上 (w 平面) に示すようなダイアグラムを考える. この世界面は図 128 右下 (η 平面) のような 1 種の円環面 (アニュラス) と共形等価であり*227, 必ず図 128 左下 (ξ 平面) のように同心円に挟まれた外径 1 の正準円環面に移すことができる.

この最後の写像は物理的に意味付けして理解できるという意味で興味深いものなので、ここで特筆しておこう. すなわち任意の形状を持つ円環面は、2 つの導電体に挟まれた筒形キャパシターの断面と見なせる. このとき充電されたキャパシターの電場線と等電位線は図 129 のように網目状になり、実はこれが正準円環面の極座標 (u, v) を定義することになる.

さて、本題に戻ろう. ここで「可能な弦」の概念を導入する.

- 可能な開弦

両方の端点が境界上にあつて、端点が針孔 (外部状態) を通過することを許さない限り、端点を境界上で動かしても収縮消滅することができないような曲線.

- (w 平面の光錐) ダイアグラムの上側の縁の左の部分に始点を持ち、そこから切れ目の下側を通過して上側の縁の右側の部分に終点を持つ曲線など、元々存在が想定されていなかった非自明な弦も含まれる.
- その名が意味する通り、可能な開弦とは、世界面に対するパラメーター付けを

*227 複素平面において円環面は、2 つの閉曲線の間の領域として定義される. それらの閉曲線は、相互にも、それ自身とも交差しておらず、一方が他方によって囲まれる領域の内部にある.

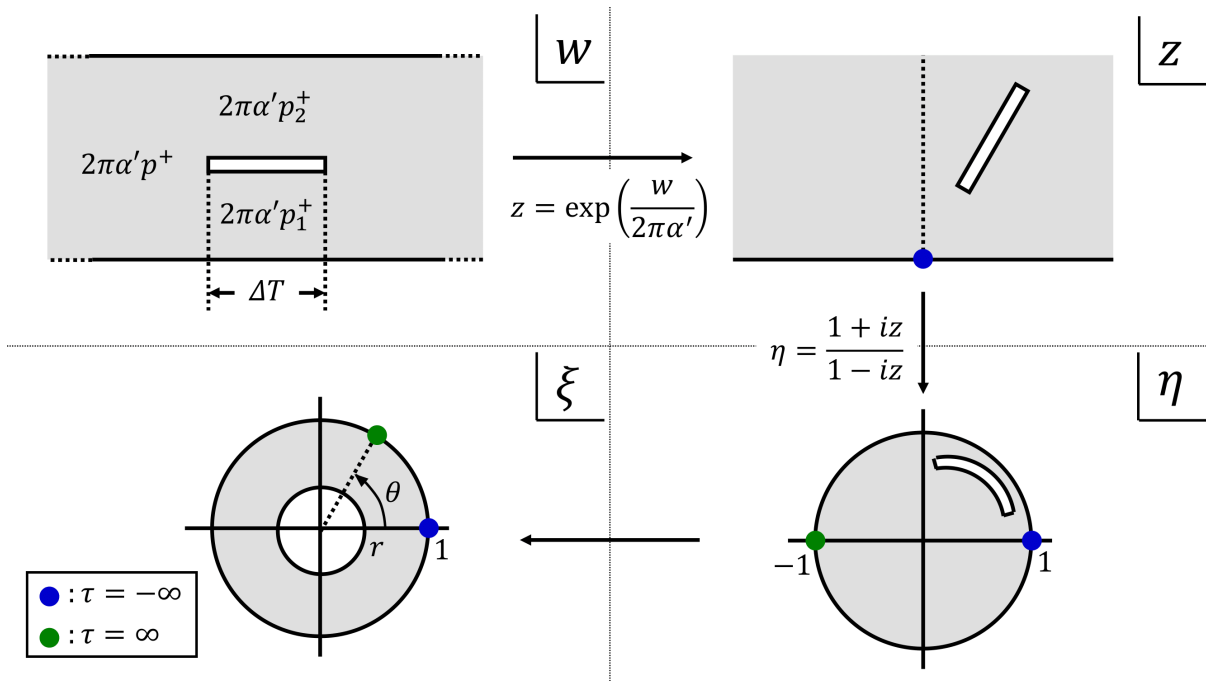


図 128 開弦の 1 ループ過程を表すダイアグラムの共形写像

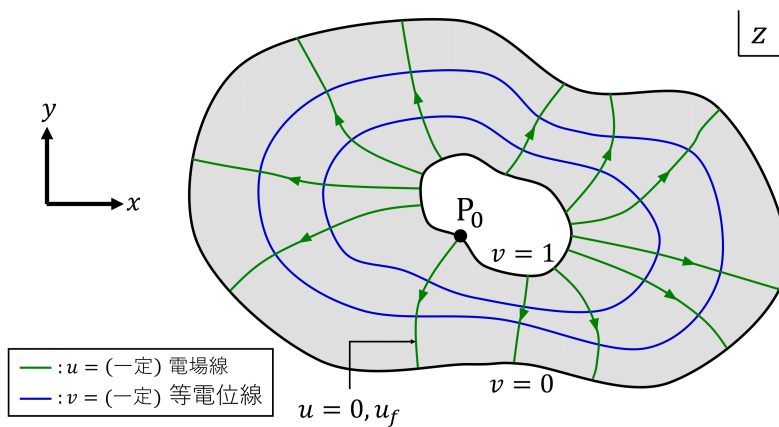


図 129 キャパシタの電場線と等電位線の張る網は、円環面の座標を定義する

適切にやり直すことによって、開弦と見なせるようになる曲線である。

- 可能な閉弦

同様に縮小消失させることのできない閉曲線によって表される閉弦。

紫外発散の恐れのある短距離物理の兆候としては、ダイアグラムにおいて短い可能な開弦や、短い可能な閉弦が現れるという状況が考えられる。ところがダイアグラムにおいて短い可能な開弦が現れるときには、常にそのダイアグラムを有限の長さの開弦が長時間伝播するという表現に直すことができる。またダイアグラムに小さい可能な閉弦が現れるときには、常にそのダイアグラムを有限の大きさの閉弦が長時間伝播するとい

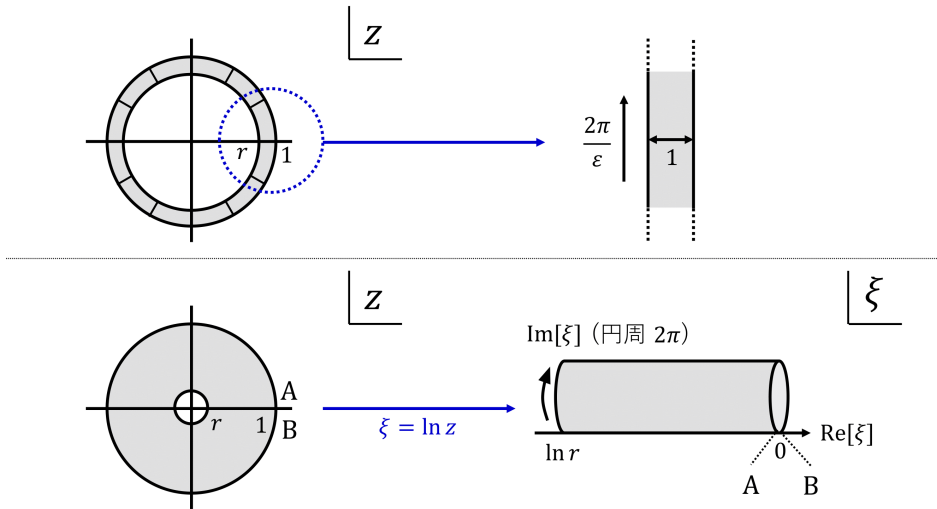


図 130 円環面に現れる可能な短い弦

う表現に直すことができる。このことを我々の考えている円環面の例で見よう (以下、円環面を z 平面に選ぶ)。

- 内径 $r \rightarrow 1$ の円環面 (図 130 上側)
 動径方向の長さ $\varepsilon = 1 - r \rightarrow 0$ の短線は可能な開弦であり、
 ダイアグラムは極めて短い開弦が円環面を周回する過程と見なせる。
 因子 $1/\varepsilon$ の尺度変更の共形変換 ($z \rightarrow z' = z/\varepsilon$) を行うと、
 弦は単位の長さ (有限) を持ち、非常に“長い”距離 $2\pi/\varepsilon$ を伝播する状況が得られる。
- 内径 $r \rightarrow 0$ の円環面 (図 130 下側)
 半径 r の穴を囲む極めて小さい閉弦を考えることができる。
 共形変換 $\xi = \ln z$ を施すと、周が 2π (有限) の閉弦が長い距離 $|\ln r|$ を伝播する状況が得られる。

このような解釈が可能であるのは、複素平面上の長さ $|dz|$ が共形不変量ではなく、絶対的な意味を持たないことによる。

なお 1 ループ Fynman ダイアグラム (図 127) に対応する弦のダイアグラムは、ここまで考察してきた 26.2 節の図 128 の他に、図 131 のような非平面ダイアグラムがある。非平面ダイアグラムとは、面の一部を切り裂いて広げるか、もしくは面の一部と別の部分を重ねるようにしなければ、平坦に描くことができないダイアグラムである。

閉弦の 1 ループ過程に移ろう。1 例として図 132 に示す光錐ダイアグラムが考えられる。このダイアグラムは 2 つの針孔を持つ輪環面 (トーラス) と共形等価である。と言うのも、自由な閉弦の伝播を表す $w = \tau + i\sigma$ 平面上の光錐ダイアグラムは、指数関数の写像 $z = \exp\left(\frac{w}{\alpha' p^+}\right)$ によって z 平面全体に移される。ただし無限の過去と未来の弦に対応する 2 点 $z = 0, \infty$ は針孔である。ところで複素 z 平面は (図 133 のように Riemann 球面 \hat{C} に対応し、 $z = 0, \infty$ は \hat{C} では対称的な位置 S (南極点), N (北極点) に対応する。そして自由な閉弦の伝播を表す 2 つの針孔を持つ Riemann 球面に、図 132 の光錐ダイアグラムの隙間に対応する穴を設けた構造として輪環面が得られる。

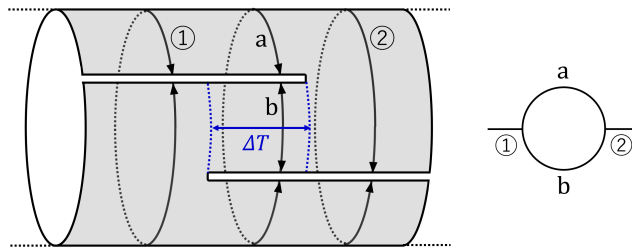


図 131 非平面ダイアグラム ($\Delta T \geq 0$)

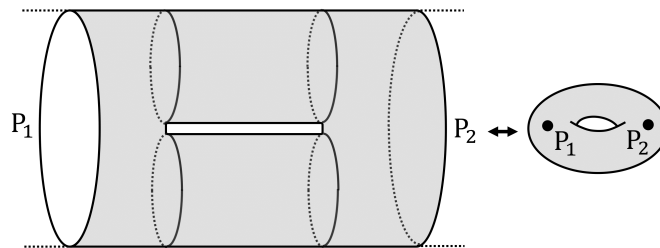


図 132 閉弦の 1 ループ過程を表す 1 つのダイアグラム

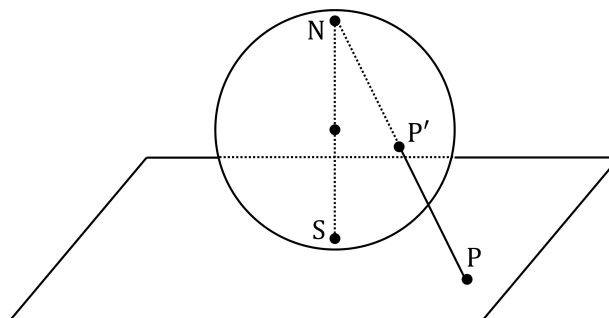


図 133 Riemann 球面 \hat{C} は南極点 S において複素平面の原点に接しており、複素平面上の点 P は、 P と北極点 N を結ぶ線分の球面との交点 P' に写像される

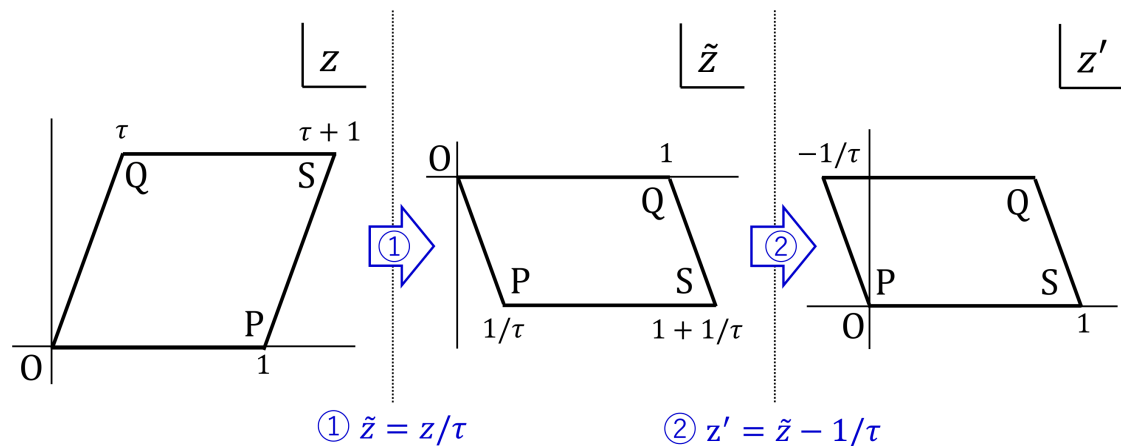


図 134 パラメーターが τ のトーラスと $-1/\tau$ のトーラスは共形等価である

以下では針孔のない輪環面について詳しく調べることを通して、紫外発散に対する洞察を得る。一般的な輪環面は、複素 z 平面に同一視 $z \sim z + \omega_1, z \sim z + \omega_2$ を導入して得られる。基本領域は複素数 $\omega_1, \omega_2 (\neq 0)$ を表す 2 つのベクトルの張る平行四辺形であり、その向かい合う辺が繋がれ一般的な輪環面が形成される。このとき共形写像 $z' = z/\omega_1$ によってベクトル ω_1 を 1 にしたときの、もう一方のベクトル $\tau \equiv \omega_2/\omega_1$ のみがパラメーターとなる。そして ω_1, ω_2 が平行でない条件 $\Im(\omega_2/\omega_1) > 0$ (ただし \Im は虚部を表す) の下では、 $\Im(\tau) > 0$ である。紫外発散の問題が生じないことを説明するだけならば、パラメーター τ と $(-1/\tau)$ を持つトーラスが共形等価であることだけを指摘すれば充分である (この等価性は図 134 から理解される)。実際そうすると、小さいトーラス ($\tau \rightarrow 0$) は大きいトーラスと等価となるので、紫外発散は生じ得ない。

第 II 部

導出編

7 古典物理学 (補足)

7.1 一般相対性理論の概念 (補足)

7.1.1 テンソル (補足)

■テンソルの和, 積, 縮約 (補足) 1.1.1 節で述べたように, テンソルの和 $A^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q}$ (式 (2)), 積 $B^{\mu_1 \cdots \mu_p \rho_1 \cdots \rho_r}_{\nu_1 \cdots \nu_q \sigma_1 \cdots \sigma_s}$ (式 (3)), 縮約 $C^{\mu_1 \cdots \mu_{i-1} \mu_{i+1} \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_{j-1} \nu_{j+1} \cdots \nu_q}$ (式 (4)) がそれぞれ (p, q) テンソル, $(p+r, q+s)$ テンソル, $(p-1, q-1)$ テンソルであることが, テンソルを定義する変換則 (1) から示される. 実際これらの新しい座標系での成分をそれぞれ $A'^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q}$, $B'^{\mu_1 \cdots \mu_p \rho_1 \cdots \rho_r}_{\nu_1 \cdots \nu_q \sigma_1 \cdots \sigma_s}$, $C'^{\mu_1 \cdots \mu_{i-1} \mu_{i+1} \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_{j-1} \nu_{j+1} \cdots \nu_q}$ と書くと,

$$\begin{aligned}
 & A'^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} \\
 &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} T^{\rho_1 \cdots \rho_p}_{\sigma_1 \cdots \sigma_q} + \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} U^{\rho_1 \cdots \rho_p}_{\sigma_1 \cdots \sigma_q} \\
 &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} A^{\rho_1 \cdots \rho_p}_{\sigma_1 \cdots \sigma_q}, \\
 & B'^{\mu_1 \cdots \mu_p \rho_1 \cdots \rho_r}_{\nu_1 \cdots \nu_q \sigma_1 \cdots \sigma_s} \\
 &= \left(\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\alpha_p}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_q}}{\partial x'^{\nu_q}} T^{\alpha_1 \cdots \alpha_p}_{\beta_1 \cdots \beta_q} \right) \left(\frac{\partial x'^{\rho_1}}{\partial x^{\gamma_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\rho_r}}{\partial x^{\gamma_r}} \frac{\partial x^{\delta_1}}{\partial x'^{\sigma_1}} \cdots \frac{\partial x^{\delta_s}}{\partial x'^{\sigma_s}} U^{\gamma_1 \cdots \gamma_r}_{\delta_1 \cdots \delta_s} \right) \\
 &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\alpha_p}} \frac{\partial x^{\rho_1}}{\partial x^{\gamma_1}} \cdots \frac{\partial x^{\rho_r}}{\partial x^{\gamma_r}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_q}}{\partial x'^{\nu_q}} \frac{\partial x^{\delta_1}}{\partial x'^{\sigma_1}} \cdots \frac{\partial x^{\delta_s}}{\partial x'^{\sigma_s}} B^{\alpha_1 \cdots \alpha_p \gamma_1 \cdots \gamma_r}_{\beta_1 \cdots \beta_q \delta_1 \cdots \delta_s}, \\
 & C'^{\mu_1 \cdots \mu_{i-1} \mu_{i+1} \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_{j-1} \nu_{j+1} \cdots \nu_q} \\
 &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_{i-1}}}{\partial x^{\rho_{i-1}}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\mu_{i+1}}}{\partial x^{\rho_{i+1}}} \cdots \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \\
 & \times \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma_{j-1}}}{\partial x'^{\nu_{j-1}}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\sigma_{j+1}}}{\partial x'^{\nu_{j+1}}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} T^{\rho_1 \cdots \rho_{i-1} \alpha \rho_{i+1} \cdots \rho_p}_{\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1} \beta \sigma_{j+1} \cdots \sigma_q} \\
 &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_{i-1}}}{\partial x^{\rho_{i-1}}} \frac{\partial x^{\mu_{i+1}}}{\partial x^{\rho_{i+1}}} \cdots \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma_{j-1}}}{\partial x'^{\nu_{j-1}}} \frac{\partial x^{\sigma_{j+1}}}{\partial x'^{\nu_{j+1}}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} C^{\rho_1 \cdots \rho_{i-1} \rho_{i+1} \cdots \rho_p}_{\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1} \sigma_{j+1} \cdots \sigma_q} \\
 & \left(\because \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\lambda}} = \delta^{\beta}_{\alpha}, \quad \delta^{\beta}_{\alpha} T^{\rho_1 \cdots \rho_{i-1} \alpha \rho_{i+1} \cdots \rho_p}_{\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1} \beta \sigma_{j+1} \cdots \sigma_q} = C^{\rho_1 \cdots \rho_{i-1} \rho_{i+1} \cdots \rho_p}_{\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1} \sigma_{j+1} \cdots \sigma_q} \right)
 \end{aligned}$$

となる. これらはそれぞれ (p, q) テンソル, $(p+r, q+s)$ テンソル, $(p-1, q-1)$ テンソルの変換則である.

■商の定理 (補足) 1.1.1 節で商の定理の具体例として述べたように, 反変ベクトル A^{λ} に対して $Q_{\mu\nu} = A^{\lambda} P_{\lambda\mu\nu}$ が 2 階共変テンソルとなるときの, $P_{\lambda\mu\nu}$ は 3 階共変テンソルであることが次のように示される [6, p.24]. すなわち仮定により

$$\begin{aligned}
 A^{\alpha} P_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\gamma}} A'^{\lambda} P'_{\lambda\mu\nu} \quad (\because Q_{\beta\gamma} \text{ の変換則}) \\
 &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\gamma}} \left(\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha} \right) P'_{\lambda\mu\nu} \quad (\because A^{\lambda} \text{ の変換則})
 \end{aligned}$$

である。これが A^α のすべての値に対して成り立たなければならないから、最左辺と最右辺の A^α を等置して

$$P_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} P'_{\lambda\mu\nu}.$$

これは $P_{\lambda\mu\nu}$ が 3 階共変テンソルであることを意味している。

7.1.2 局所慣性系 (補足)

1.1.3 節で局所的平坦性定理として述べたように、任意の座標系 $\{x^\mu\}$ から座標系 $x' \equiv \{x'^\mu\}$ に移り、時空の与えられた点 P の座標を $x'_0 \equiv \{x'_0{}^\mu\}$ として計量テンソルを

$$g_{\alpha\beta}(x') = \eta_{\alpha\beta} + O((x'^\mu - x'_0{}^\mu)^2)$$

とできることを示す [7, pp.190–192]。座標系 x^μ, x'^μ での任意の点の計量テンソルをそれぞれ座標 x' の関数として $f_{\alpha\beta}(x'), g_{\alpha\beta}(x')$ と書く。 $\Lambda^\gamma_\alpha \equiv \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha}, \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x'^\mu}$ と略記し $g_{\alpha\beta}(x')$ を点 P の周りに Taylor 展開すると、

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}(x') &= \Lambda^\gamma_\alpha(x') \Lambda^\delta_\beta(x') f_{\gamma\delta}(x') \\ &= \left[\Lambda^\gamma_\alpha(x'_0) + (\partial_\lambda \Lambda^\gamma_\alpha)_0 (x'^\lambda - x'_0{}^\lambda) + \frac{1}{2} (\partial_\lambda \partial_\mu \Lambda^\gamma_\alpha)_0 (x'^\lambda - x'_0{}^\lambda) (x'^\mu - x'_0{}^\mu) + \dots \right] \\ &\quad \times \left[\Lambda^\delta_\beta(x'_0) + (\partial_\nu \Lambda^\delta_\beta)_0 (x'^\nu - x'_0{}^\nu) + \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\rho \Lambda^\delta_\beta)_0 (x'^\nu - x'_0{}^\nu) (x'^\rho - x'_0{}^\rho) + \dots \right] \\ &\quad \times \left[f_{\gamma\delta}(x'_0) + (\partial_\sigma f_{\gamma\delta})_0 (x'^\sigma - x'_0{}^\sigma) + \frac{1}{2} (\partial_\sigma \partial_\tau f_{\gamma\delta})_0 (x'^\sigma - x'_0{}^\sigma) (x'^\tau - x'_0{}^\tau) + \dots \right] \end{aligned}$$

なので $g_{\alpha\beta}(x') = g_{\alpha\beta}(x'_0) + (\partial_\lambda g_{\alpha\beta})_0 (x'^\lambda - x'_0{}^\lambda) + \frac{1}{2} (\partial_\lambda \partial_\mu g_{\alpha\beta})_0 (x'^\lambda - x'_0{}^\lambda) (x'^\mu - x'_0{}^\mu) + \dots$ において

$$g_{\alpha\beta}(x'_0) = (\Lambda^\gamma_\alpha \Lambda^\delta_\beta f_{\gamma\delta})_0, \quad (658)$$

$$(\partial_\lambda g_{\alpha\beta})_0 = [(\partial_\lambda f_{\gamma\delta}) \Lambda^\gamma_\alpha \Lambda^\delta_\beta + (\partial_\lambda \Lambda^\gamma_\alpha) \Lambda^\delta_\beta f_{\gamma\delta} + (\partial_\lambda \Lambda^\delta_\beta) \Lambda^\gamma_\alpha f_{\gamma\delta}]_0, \quad (659)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\partial_\lambda \partial_\mu g_{\alpha\beta})_0 &= \left[(\partial_\lambda \Lambda^\gamma_\alpha) (\partial_\mu \Lambda^\delta_\beta) f_{\gamma\delta} + (\partial_\lambda \Lambda^\delta_\beta) (\partial_\mu f_{\gamma\delta}) \Lambda^\gamma_\alpha + (\partial_\lambda f_{\gamma\delta}) (\partial_\mu \Lambda^\gamma_\alpha) \Lambda^\delta_\beta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\partial_\lambda \partial_\mu \Lambda^\gamma_\alpha) \Lambda^\delta_\beta f_{\gamma\delta} + \frac{1}{2} (\partial_\lambda \partial_\mu \Lambda^\delta_\beta) \Lambda^\gamma_\alpha f_{\gamma\delta} + \frac{1}{2} (\partial_\lambda \partial_\mu f_{\gamma\delta}) \Lambda^\gamma_\alpha \Lambda^\delta_\beta \right]_0 \end{aligned} \quad (660)$$

となる。ただし添字のゼロは点 P での値を意味する。さて座標系 $\{x'^\mu\}$ を適当に選び

$$g_{\alpha\beta}(x'_0) = \eta_{\alpha\beta}, \quad (\partial_\lambda g_{\alpha\beta})_0 = 0, \quad (\partial_\lambda \partial_\mu g_{\alpha\beta})_0 = 0$$

とできるか考えよう。座標系 $\{x'^\mu\}$ を選ぶことは $\Lambda^\gamma_\alpha = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha}$ を、従って $(\Lambda^\gamma_\alpha)_0, (\partial_\lambda \Lambda^\gamma_\alpha)_0, (\partial_\lambda \partial_\mu \Lambda^\gamma_\alpha)_0, \dots$ を選ぶことに対応する。それぞれについて独立にとれるものの個数は以下ようになる。

- $(\Lambda^\gamma_\alpha)_0 = \left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \right)_0 \dots \dots \dots 16$ 個
- $(\partial_\lambda \Lambda^\gamma_\alpha)_0 = \left(\frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x'^\lambda \partial x'^\alpha} \right)_0 \dots \dots \dots 40$ 個
– 対称な添字 λ, α の選び方が 10 通りだから
- $(\partial_\lambda \partial_\mu \Lambda^\gamma_\alpha)_0 = \left(\frac{\partial^3 x^\gamma}{\partial x'^\lambda \partial x'^\mu \partial x'^\alpha} \right)_0 \dots \dots \dots 80$ 個

– 対称な添字 λ, μ, α の選び方は以下の合計 20 通りのだから

$$\begin{cases} \lambda, \mu, \alpha \text{ が相異なるもの} & \frac{4 \times 3 \times 2}{3!} = 4 \text{ 通り} \\ \text{ちょうど 2 つの添字が等しいもの} & 4 \times 3 = 12 \text{ 通り} \\ \text{全ての添字が等しいもの} & 4 \text{ 通り} \end{cases}$$

よって次のように局所的平坦性定理が示される.

- $g_{\alpha\beta}(x'_0) = \eta_{\alpha\beta}$ は 10 個の独立な条件式
(対称な添字 α, β の選び方が 10 通りだから).
 $\Leftarrow g_{\alpha\beta}(x'_0)$ の式 (658) において 16 個の独立な $(\Lambda^\gamma_\alpha)_0$ を適当に選べば満たされる.
- $(\partial_\lambda g_{\alpha\beta})_0 = 0$ は 40 個の独立な条件式
(対称な添字 α, β の選び方が 10 通りだから).
 $\Leftarrow (\partial_\lambda g_{\alpha\beta})_0$ の式 (659) において 40 個の独立な $(\partial_\lambda \Lambda^\gamma_\alpha)_0$ を適当に選べば満たされる.
- $(\partial_\lambda \partial_\mu g_{\alpha\beta})_0 = 0$ は 100 個の独立な条件式
(対称な添字 α, β および λ, μ の選び方がそれぞれ 10 通りだから).
 $\Leftarrow (\partial_\lambda \partial_\mu g_{\alpha\beta})_0$ の式 (660) における $(\partial_\lambda \partial_\mu \Lambda^\gamma_\alpha)_0$ の内, 独立に選べるものは 80 個だから
 一般には満たされない.

7.1.3 空間距離 (補足)

1.1.5 節に示した順序に従って空間距離を求める式 (9) を導こう [3, pp.260–262]. まず 2 点 A, B 間を光が往復するのにかかる座標時間を 2 点の空間座標の差 dx^i で表すために, 時空における光の軌道に沿う線要素の世界間隔が $ds = 0$ となることに注目する. 実際, 局所慣性系 (cT, X, Y, Z) で測った光速は c だから時空における光の軌道に沿って $ds^2 = c^2 dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 = 0$ である. ds はスカラーだから光の軌道に沿って任意の座標系で

$$0 = ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{ij} dx^i dx^j + 2g_{0i} dx^0 dx^i + g_{00} (dx^0)^2$$

となる (1.2 節も併せて参照). これを光が A から B または B から A に伝わる光に沿う世界間隔 ds に適用する. dx^i を 2 点 A, B の与えられた空間座標の差と見なし dx^0 について解くと

$$dx^0 = dx^{0(\pm)} \equiv \frac{1}{g_{00}} \left\{ -g_{0i} dx^i \pm \sqrt{(g_{0i} g_{0j} - g_{ij} g_{00}) dx^i dx^j} \right\}$$

を得る. ここで A で起きた事件の座標を x^μ , B で起きた事件の座標を $x^\mu + dx^\mu$ と書いていることに注意すると, 2 解はそれぞれ

$$\begin{aligned} dx^{0(-)} &= (\text{光が B を出発した時刻}) - (\text{光が A に到着した時刻}), \\ dx^{0(+)} &= (\text{光が B に到着した時刻}) - (\text{光が A を出発した時刻}) \end{aligned}$$

を意味する. よって B を出発した光が A に達し, 次いで B に戻るのに要する時間は座標 x^0 で測ると

$$dx^{0(+)} - dx^{0(-)} = \frac{2}{g_{00}} \sqrt{(g_{0i} g_{0j} - g_{ij} g_{00}) dx^i dx^j} \equiv dx^0$$

となる.

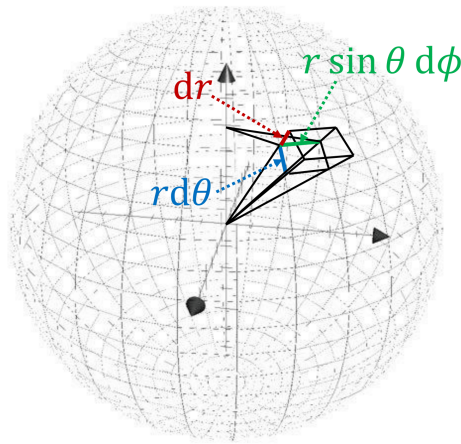


図 135 極座標が $dr, d\theta, d\phi$ だけ変化して作られる体積要素

次に座標時間が dx^0 変化する間に A で経過する真の時間 (固有時間) $d\tau$ を求めよう。これは空間の同一点 A で起きる 2 事件 $(x^0, x^1, x^2, x^3), (x^0 + dx^0, x^1, x^2, x^3)$ の世界間隔 ds を c で割った値に他ならないから

$$c^2 d\tau^2 = ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00} (dx^0)^2, \quad \therefore d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0.$$

最後に AB 間を光が往復するのに要する固有時間 $d\tau$ に $c/2$ をかけて、AB 間の空間距離 dl の式 (9):

$$dl^2 = \left(\frac{c}{2} \times \frac{\sqrt{g_{00}}}{c} dx^0 \right)^2 = \frac{g_{0i}g_{0j} - g_{ij}g_{00}}{g_{00}} dx^i dx^j \equiv \gamma_{ij} dx^i dx^j$$

を得る。

7.1.4 固有体積要素 (補足)

■極座標における体積要素の表式とのアナロジー 1.1.6 節における固有体積要素の議論は、極座標を用いた空間の体積要素の表式のことを考えると分かりやすい。極座標 r, θ, ϕ の増大する 3 方向は直交するから、極座標が $dr, d\theta, d\phi$ だけ変化して作られる領域は図 135 のように 3 辺が $dr, rd\theta, r \sin \theta d\phi$ の直方体となる。よってこの要素の体積は $r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ である。(体積要素は $dr d\theta d\phi$ ではない。 $dr d\theta d\phi$ は体積の次元を持たない。) $dr d\theta d\phi$ の前の係数 $r^2 \sin \theta$ は Descartes 座標から極座標への変数変換における Jacobian として得られることから、以上の直観的な議論が正当化される。

■ $g = -J^2 < 0, J = \sqrt{-g}$ の証明 1.1.6 節で述べたように Jacobian を $J = \sqrt{-g}$ と書けることが以下のよう示される [7, pp.188–189]. 共変ベクトルの変換則は行列の形を借りて

$$(g_{\mu\nu}) = \left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \right)^T (\eta_{\alpha\beta}) \left(\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} \right)$$

と書ける (例えば $\left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \right)$ は $\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}$ を (α, μ) 成分に持つ行列であり、その転置行列 $\left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \right)^T$ は $\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}$ を (μ, α) 成分に持つ). 両辺の行列式をとり $|\eta_{\alpha\beta}| = 1 \times (-1)^3 = -1$ を用いると

$$g = -J^2, \quad J = \sqrt{-g}$$

を得る. ここで $\left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}\right)$ は逆行列を持つからその行列式は $J \neq 0$ である. こうして時空の任意の点で局所慣性系がとれることから $g < 0$ が要請されることが分かる.

なお計量テンソルの代わりに任意の 2 階共変テンソル $A_{\mu\nu}$ に対して同様の議論を繰り返せば, $\sqrt{\det(A_{\mu\nu})}$ がスカラー密度の変換則に従うという一般的な事実の証明になる [4, p.128].

7.1.5 完全反対称テンソル $E^{\lambda\mu\nu\rho}$, 完全反対称テンソル密度 $\mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\rho}$ (補足)

1.1.7 節の $E^{\lambda\mu\nu\rho}$, $\mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\rho}$ の表式を確認する. $\frac{\partial x^\mu}{\partial X^\nu} \equiv \Lambda^\mu_\nu$ と略記すると 4 階反変テンソルの変換則は

$$E^{\lambda\mu\nu\rho} = \Lambda^\lambda_\alpha \Lambda^\mu_\beta \Lambda^\nu_\gamma \Lambda^\rho_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{vmatrix} \Lambda^\lambda_0 & \cdots & \Lambda^\lambda_3 \\ \Lambda^\mu_0 & \cdots & \Lambda^\mu_3 \\ \Lambda^\nu_0 & \cdots & \Lambda^\nu_3 \\ \Lambda^\rho_0 & \cdots & \Lambda^\rho_3 \end{vmatrix}$$

と書ける. 最右辺は行列式 $|\Lambda^\mu_\nu| = \frac{\partial(x)}{\partial(X)}$ の行を入れ換えたものである. 行列式は行を入れ換えると符号が変わるから

$$E^{\lambda\mu\nu\rho} = \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \frac{\partial(x)}{\partial(X)} = \frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}}{\sqrt{-g}}, \quad \therefore \mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{\partial(X)}{\partial(x)} E^{\lambda\mu\nu\rho} = \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$$

を得る ($\frac{\partial(X)}{\partial(x)} = \sqrt{-g}$ を用いた (1.1.6 節参照)).

7.1.6 共変微分 (補足)

(p, q) テンソルの共変微分の式 (12) と, これが $(p, q+1)$ テンソルであることを示す.

準備として共変ベクトル B_μ の共変微分の式を調べる. A^μ を反変ベクトルとすると $A^\mu B_\mu$ はスカラーだから (1.1.1 節参照), 規則 (13), (14) より

$$\partial_\nu(A^\mu B_\mu) = (A^\mu B_\mu)_{;\nu} = A^\mu_{;\nu} B_\mu + A^\mu B_{\mu;\nu}.$$

$A^\mu_{;\nu}$ は (1,1) テンソルであることを考えると最右辺の $A^\mu_{;\nu} B_\mu$ および最左辺は共変ベクトルだから, $B_{\mu;\nu}$ は (0,2) テンソルでなければならない (1.1.1 節参照). 反変ベクトルの共変微分の式 (11) を用い最右辺において

$$A^\mu_{;\nu} B_\mu = (\partial_\nu A^\mu + A^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu}) B_\mu = B_\mu \partial_\nu A^\mu + A^\mu B_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$$

(第 2 項でダミー添字を $\mu \leftrightarrow \lambda$ と入れ換えた) と書き換えて最左辺と比較すると

$$A^\mu \{B_{\mu;\nu} - (\partial_\nu B_\mu - B_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu})\} = 0$$

となるから B_μ の共変微分の式

$$B_{\mu;\nu} = \partial_\nu B_\mu - B_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \tag{661}$$

を得る.

$A^{\nu_1}, \dots, A^{\nu_q}$ を反変ベクトル, $B_{\mu_1}, \dots, B_{\mu_p}$ を共変ベクトルとすると, (p, q) テンソル $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ に対

しても規則 (13), (14) から同様に

$$\begin{aligned} & \partial_\lambda(A^{\nu_1} \cdots A^{\nu_q} B_{\mu_1} \cdots B_{\mu_p} T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q}) = (A^{\nu_1} \cdots A^{\nu_q} B_{\mu_1} \cdots B_{\mu_p} T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q}; \lambda) \\ & = A^{\nu_1} \cdots A^{\nu_q} B_{\mu_1} \cdots B_{\mu_p} T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q; \lambda} \\ & + \sum_{k=1}^q A^{\nu_1} \cdots A^{\nu_{k-1}} A^{\nu_{k+1}} \cdots A^{\nu_q} B_{\mu_1} \cdots B_{\mu_p} T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} A^{\nu_k}; \lambda \\ & + \sum_{k=1}^p A^{\nu_1} \cdots A^{\nu_q} B_{\mu_1} \cdots B_{\mu_{k-1}} B_{\mu_{k+1}} \cdots B_{\mu_p} T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} B_{\mu_k}; \lambda \end{aligned}$$

となる. これまでに $A^{\nu_k}; \lambda, B_{\mu_k}; \lambda$ はそれぞれ (1,1) テンソル, (0,2) テンソルであることが分かっているから, 最右辺の第 2 項, 第 3 項および最左辺は共変ベクトルである. よって $T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q; \lambda}$ は $(p, q+1)$ テンソルでなければならない (1.1.1 節参照). ベクトルの共変微分の式 (11), (661) を用い最右辺を

$$\begin{aligned} T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} A^{\nu_k}; \lambda & = T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} (\partial_\lambda A^{\nu_k} + A^\rho \Gamma^{\nu_k}_{\rho \lambda}) \\ & = T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} \partial_\lambda A^{\nu_k} + T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_{k-1} \rho \nu_{k+1} \cdots \nu_q} A^{\nu_k} \Gamma^{\rho}_{\nu_k \lambda} \\ & \quad (\text{第 2 項でダミー添字を } \rho \leftrightarrow \nu_k \text{ と入れ換えた}), \\ T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} B_{\mu_k}; \lambda & = T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} (\partial_\lambda B_{\mu_k} - B_\rho \Gamma^{\rho}_{\nu_k \lambda}) \\ & = T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} \partial_\lambda B_{\mu_k} - T^{\mu_1 \cdots \mu_{k-1} \rho \mu_{k+1} \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} B_{\mu_k} \Gamma^{\mu_k}_{\rho \lambda} \\ & \quad (\text{第 2 項でダミー添字を } \rho \leftrightarrow \nu_k \text{ と入れ換えた}) \end{aligned}$$

と書き換えて最左辺と比較すると

$$A^{\nu_1} \cdots A^{\nu_q} B_{\mu_1} \cdots B_{\mu_p} \left\{ T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q; \lambda} - \left(\partial_\lambda T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} + \sum_{k=1}^p T^{\mu_1 \cdots \mu_{k-1} \rho \mu_{k+1} \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} \Gamma^{\mu_k}_{\rho \lambda} - \sum_{k=1}^q T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_{k-1} \rho \nu_{k+1} \cdots \nu_q} \Gamma^{\rho}_{\nu_k \lambda} \right) \right\} = 0$$

となるから (p, q) テンソル $T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q}$ の共変微分の式 (12) を得る.

7.1.7 Christoffel 記号と計量テンソルの関係 (補足)

1.1.9 節で列挙した公式を導出する.

■Christoffel 記号の下付き添字の対称性の導出 時空の内部に横たわる位置ベクトル \vec{x} に対して座標基底 $\vec{e}_\alpha = \partial_\alpha \vec{x}$ をとると Christoffel 記号の定義式 (10) は

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \vec{e}_\mu = \partial_\beta \vec{e}_\alpha = \partial_\beta (\partial_\alpha \vec{x}) = \partial_\alpha (\partial_\beta \vec{x}) = \partial_\alpha \vec{e}_\beta = \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} \vec{e}_\mu$$

となるから対称性 $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}$ が示された [5, p.9].

ただし非座標基底を用いた場合には Christoffel 記号の対称性 $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}$ を証明できない [7, p.175].

■Christoffel 記号を計量テンソルで表した式 (15) の導出 各点で任意のベクトル \vec{V} は基底 \vec{e}_α を用いて $\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha$ と展開されるから, 特に \vec{V} として基底 \vec{e}_μ を考えれば $(\vec{e}_\mu)^\alpha = \delta^\alpha_\mu$ となることが分かる. よってベクトル \vec{A}, \vec{B} に対して $\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$ という記法を導入すると

$$\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu = g_{\alpha\beta} (\vec{e}_\mu)^\alpha (\vec{e}_\nu)^\beta = g_{\alpha\beta} \delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu = g_{\mu\nu}$$

となり, Christoffel 記号の定義式 (10): $\partial_\beta \vec{e}_\alpha = \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \vec{e}_\mu$ から

$$\vec{e}_\gamma \cdot (\partial_\beta \vec{e}_\alpha) = (\vec{e}_\gamma \cdot \vec{e}_\mu) \Gamma^\mu_{\alpha\beta} = g_{\gamma\mu} \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \equiv \Gamma_{\gamma,\alpha\beta}$$

を得る. ここで 1.1.8 節で指摘したように Christoffel 記号はテンソルではないけれども, テンソルに対する添字の上げ下げと同様に $\Gamma_{\gamma,\alpha\beta} \equiv g_{\gamma\mu} \Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ と定義した. 上式より

$$\begin{aligned} \partial_\mu g_{\lambda\nu} &= \partial_\mu (\vec{e}_\lambda \cdot \vec{e}_\nu) = \vec{e}_\nu \cdot (\partial_\mu \vec{e}_\lambda) + \vec{e}_\lambda \cdot (\partial_\mu \vec{e}_\nu) = \Gamma_{\nu,\lambda\mu} + \Gamma_{\lambda,\nu\mu}, \\ \therefore \partial_\nu g_{\lambda\mu} &= \Gamma_{\mu,\lambda\nu} + \Gamma_{\lambda,\nu\mu}, \\ \therefore -\partial_\lambda g_{\mu\nu} &= -\Gamma_{\nu,\mu\lambda} - \Gamma_{\mu,\lambda\nu} \end{aligned}$$

となり, これらを辺々足して対称性 $\Gamma_{\gamma,\alpha\beta} = g_{\gamma\mu} \Gamma^\mu_{\alpha\beta} = g_{\gamma\mu} \Gamma^\mu_{\beta\alpha} = \Gamma_{\gamma,\beta\alpha}$ を用いると式 (15):

$$\Gamma_{\lambda,\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu})$$

を得る [5, p.9].

■行列式 $g \equiv |g_{\mu\nu}|$ に対する恒等式 (16) の導出 導出過程 [3, p.270] を補足しつつまとめる.

1.1.7 節で定義した任意の座標系で $\mathbf{E}^{0123} = 1$ となる完全反対称テンソル密度 $\mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\rho}$ を用いて行列 $(g_{\mu\nu})$ の行列式 g と余因子 $\Delta^{\mu\nu}$ の定義は

$$\begin{aligned} g &\equiv \mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\rho} g_{0\mu} g_{1\nu} g_{2\lambda} g_{3\rho}, & \Delta^{0\lambda} &= \mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\rho} g_{1\mu} g_{2\nu} g_{3\rho}, & \Delta^{1\mu} &= \mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\rho} g_{0\lambda} g_{2\nu} g_{3\rho}, \\ & & \Delta^{2\nu} &= \mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\rho} g_{0\lambda} g_{1\mu} g_{3\rho}, & \Delta^{3\rho} &= \mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\rho} g_{0\lambda} g_{1\mu} g_{2\nu} \end{aligned}$$

と書き表されるから,

$$dg = \Delta^{0\lambda} dg_{0\lambda} + \Delta^{1\mu} dg_{1\mu} + \Delta^{2\nu} dg_{2\nu} + \Delta^{3\rho} dg_{3\rho} = \Delta^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}$$

と書ける. ここで $(g_{\mu\nu})$ の逆行列は $(g^{\mu\nu}) = \frac{(\Delta^{\mu\nu})^T}{g}$ なので $\Delta^{\mu\nu} = gg^{\nu\mu} = gg^{\mu\nu}$ となる. これを上式に代入して $dg = gg^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}$ を得る.

さらに

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \delta^\mu_\mu = 4, \quad \therefore g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu}$$

を用いると式 (16):

$$dg = gg^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu}$$

を得る.

■式 (17): $\Gamma^\mu_{\nu\mu} = \frac{\partial_\nu g}{2g}$ の導出 Christoffel 記号を計量テンソルで表した式 (15) より

$$\Gamma^\mu_{\nu\mu} = g^{\mu\rho} \Gamma_{\rho,\nu\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \{ \partial_\nu g_{\mu\rho} + (\partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\nu\mu}) \} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \partial_\nu g_{\mu\rho}.$$

ここで添字 μ, ρ について $g^{\mu\rho}$ は対称, $\partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\nu\mu}$ は反対称なので, 式 (6) により $g^{\mu\rho} (\partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\nu\mu}) = 0$ となることを用いた. さらに座標 x^ν の変化 dx^ν に伴う $g, g_{\mu\rho}$ の変化 $dg, dg_{\mu\rho}$ に対して式 (16): $dg = gg^{\mu\rho} dg_{\mu\rho}$ を適用して最右辺を書き換えると, 式 (17): $\Gamma^\mu_{\nu\mu} = \frac{\partial_\nu g}{2g}$ を得る [3, p.271].

■式 (18): $g^{\nu\lambda}\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})$ の導出 式 (18) 左辺は

$$\begin{aligned} g^{\nu\lambda}\Gamma^\mu_{\nu\lambda} &= g^{\nu\lambda}g^{\mu\rho}\Gamma_{\rho,\nu\lambda} \\ &= \frac{1}{2}g^{\nu\lambda}g^{\mu\rho}(\partial_\nu g_{\lambda\rho} + \partial_\lambda g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\nu\lambda}) \\ &\quad (\because \text{式 (15). 括弧内第 1 項はダミー添字を } \nu \leftrightarrow \lambda \text{ と入れ換えると第 2 項に等しいことが分かる。}) \\ &= g^{\nu\lambda}g^{\mu\rho} \left(\partial_\lambda g_{\rho\nu} - \frac{1}{2}\partial_\rho g_{\nu\lambda} \right) \end{aligned} \quad (662)$$

と変形できる。

一方、式 (18) 右辺は

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu \left(\frac{-\partial_\lambda g}{2\sqrt{-g}}g^{\mu\lambda} + \sqrt{-g}\partial_\lambda g^{\mu\lambda} \right) = -\frac{\partial_\nu g}{2g}g^{\mu\nu} - \partial_\nu g^{\mu\nu} \quad (663)$$

となる。ここで座標 x^ν の変化 dx^ν に伴う $g, g_{\lambda\rho}$ の変化 $dg, dg_{\lambda\rho}$ に対して式 (16): $dg = gg^{\lambda\rho}dg_{\lambda\rho}$ を適用して上式 (663) 最右辺第 1 項を書き換えると、

$$-\frac{\partial_\nu g}{2g}g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}\partial_\nu g_{\lambda\rho} = -\frac{1}{2}g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda}\partial_\rho g_{\nu\lambda}$$

となる (ダミー添字を $\nu \leftrightarrow \rho$ と入れ換えた)。また $g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda$ の両辺を x^ρ で微分して得られる $-(\partial_\rho g^{\mu\nu})g_{\nu\lambda} = g^{\mu\nu}\partial_\rho g_{\nu\lambda}$ の両辺にさらに $g^{\lambda\rho}$ をかけて λ で和をとると、上式 (663) 第 2 項は

$$-\partial_\nu g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}\partial_\rho g_{\nu\lambda} = g^{\mu\rho}g^{\lambda\nu}\partial_\lambda g_{\rho\nu}$$

となる (ダミー添字を $\nu \rightarrow \rho, \rho \rightarrow \lambda, \lambda \rightarrow \nu$ と巡回置換した)。以上より式 (663) は式 (662) に一致するから、式 (18) が示された。

■式 (19): $\partial_\lambda g^{\mu\nu} = -\Gamma^\mu_{\rho\lambda}g^{\rho\nu} - \Gamma^\nu_{\rho\lambda}g^{\mu\rho}$ の導出 $g^{\mu\nu}{}_{;\lambda}$ は (2,1) テンソルであり局所慣性系で $g^{\mu\nu}{}_{;\lambda} = 0$ となるから (1.1.8 節参照), 変換則 (1.1.1) より任意の座標系で

$$0 = g^{\mu\nu}{}_{;\lambda} = \partial_\lambda g^{\mu\nu} + g^{\rho\nu}\Gamma^\mu_{\rho\lambda} + g^{\mu\rho}\Gamma^\nu_{\rho\lambda}$$

が成り立つ。よって式 (19): $\partial_\lambda g^{\mu\nu} = -\Gamma^\mu_{\rho\lambda}g^{\rho\nu} - \Gamma^\nu_{\rho\lambda}g^{\mu\rho}$ が示された。

■反変ベクトル A^μ , 反対称テンソル $A^{\mu\nu}$ の発散の式 (20), (21) の導出 共変微分の式 $A^\mu{}_{;\mu} = \partial_\mu A^\mu + A^\nu\Gamma^\mu_{\nu\mu}$ の右辺第 2 項に式 (17): $\Gamma^\mu_{\nu\mu} = \frac{\partial_\nu g}{2g}$ を代入すると式 (20):

$$A^\mu{}_{;\mu} = \partial_\mu A^\mu + A^\nu \frac{\partial_\nu g}{2g} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}A^\mu)$$

を得る。

共変微分の式 $A^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \partial_\nu A^{\mu\nu} + A^{\rho\nu}\Gamma^\mu_{\rho\nu} + A^{\mu\rho}\Gamma^\nu_{\rho\nu}$ の右辺第 2 項は添字 ρ, ν について反対称な $A^{\rho\nu}$ と対称な $\Gamma^\mu_{\rho\nu}$ から成るので、式 (6) により消える。また右辺第 3 項に式 (17): $\Gamma^\nu_{\rho\nu} = \frac{\partial_\rho g}{2g}$ を代入すると式 (21):

$$A^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \partial_\nu A^{\mu\nu} + A^{\mu\rho} \frac{\partial_\rho g}{2g} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu(\sqrt{-g}A^{\mu\nu})$$

を得る。

7.1.8 Christoffel 記号の変換則 (補足)

1.1.10 節における Christoffel 記号の変換則 (22) を導こう。式 (15):

$$\Gamma'_{\lambda, \mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_{\mu'} g'_{\nu\lambda} + \partial_{\nu'} g'_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda'} g'_{\mu\nu})$$

において

$$\begin{aligned} \partial_{\lambda'} g'_{\mu\nu} &= \partial_{\lambda'} \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} g_{\beta\gamma} \right) \\ &= \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda} \partial_\alpha g_{\beta\gamma} \right) \quad \left(\because \partial_{\lambda'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda} \partial_\alpha \right) \\ &\quad + g_{\beta\gamma} \left(\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\lambda \partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} + \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\lambda \partial x'^\nu} \right) = A_{\lambda\mu\nu} + B_{\lambda\mu, \nu} + B_{\lambda\nu, \mu} \end{aligned}$$

である。ここに

$$\begin{aligned} A_{\lambda\mu\nu} &\equiv \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \partial_\alpha g_{\beta\gamma}, \\ \therefore A_{\mu\nu\lambda} &= \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \partial_\alpha g_{\beta\gamma} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \partial_\beta g_{\gamma\alpha} \\ &\quad (\text{第 2 の等号で } \alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma, \gamma \rightarrow \alpha \text{ と巡回置換した}), \\ A_{\nu\lambda\mu} &= \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} \partial_\alpha g_{\beta\gamma} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \partial_\gamma g_{\alpha\beta} \\ &\quad (\text{第 2 の等号で } \alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \alpha, \gamma \rightarrow \beta \text{ と巡回置換した}), \\ B_{\lambda\mu, \nu} &\equiv g_{\beta\gamma} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\lambda \partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} = B_{\mu\lambda, \nu}, \quad \therefore g_{\beta\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x'^\lambda \partial x'^\nu} = B_{\lambda\nu, \mu} \end{aligned}$$

であり, これらを用いると上記の Christoffel 記号は

$$\begin{aligned} \Gamma'_{\lambda, \mu\nu} &= \frac{1}{2}(A_{\mu\nu\lambda} + A_{\nu\lambda\mu} - A_{\lambda\mu\nu}) + \frac{1}{2}\{(B_{\mu\nu, \lambda} + B_{\mu\lambda, \nu}) + (B_{\nu\lambda, \mu} + B_{\nu\mu, \lambda}) - (B_{\lambda\mu, \nu} + B_{\lambda\nu, \mu})\} \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \cdot \frac{1}{2}(\partial_\beta g_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma}) + B_{\mu\nu, \lambda} \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\alpha, \beta\gamma} + g_{\beta\gamma} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\lambda}, \\ \therefore \Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} &= g'^{\lambda\rho} \Gamma'_{\rho, \mu\nu} = \left(g^{\sigma\tau} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\tau} \right) \Gamma'_{\rho, \mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \Gamma^\sigma_{\beta\gamma} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} : (22) \\ &\quad \left(\because g^{\sigma\tau} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\rho} \Gamma_{\alpha, \beta\gamma} = g^{\sigma\tau} \delta^\alpha_\tau \Gamma_{\alpha, \beta\gamma} = \Gamma^\sigma_{\beta\gamma}, \quad g^{\sigma\tau} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\rho} g_{\beta\gamma} = g^{\sigma\tau} \delta^\gamma_\tau g_{\beta\gamma} = \delta^\sigma_\beta \right) \end{aligned}$$

となる [5, p.29].

7.1.9 曲率テンソル (補足)

■ベクトルの閉曲線に沿う平行移動に伴う成分変化 ベクトル \vec{V} を平行移動させる閉曲線の図 4(1.1.11 節) を図 136 として再掲する。これに沿ってベクトル \vec{V} を 1 周だけ平行移動したときの成分変化の式 (24) を, 曲線 $a, b = \text{const}$ が座標曲線 $x^1, x^2 = \text{const}$ の場合の計算 [7, pp.201–202] を参考にして導く。

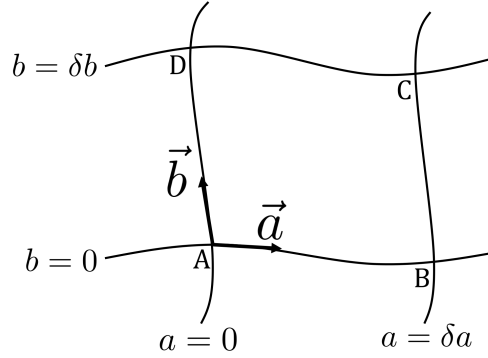


図 136 ベクトルを平行移動させる微小な閉曲線 (図 4 の再掲)

ベクトル成分 V^μ の変化率は式 (23) より

$$\begin{aligned}
 \text{経路 AB 上の点で経路に沿って} & \quad a^\nu \partial_\nu V^\mu = -a^\nu V^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\mu, \\
 \text{経路 BC 上の点で経路に沿って} & \quad b^\nu \partial_\nu V^\mu = -b^\nu V^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\mu, \\
 \text{経路 DC 上の点で経路に沿って} & \quad a^\nu \partial_\nu V^\mu = -a^\nu V^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\mu, \\
 \text{経路 AD 上の点で経路に沿って} & \quad b^\nu \partial_\nu V^\mu = -b^\nu V^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\mu
 \end{aligned}$$

だから (ただし各量は経路上の考えている点での値をとる), \vec{V} の 1 周したときの成分変化は

$$\begin{aligned}
 \delta V^\mu &= - \int_{AB} a^\nu V^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\mu da - \int_{BC} b^\nu V^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\mu db - \int_{CD} a^\nu V^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\mu da - \int_{DA} b^\nu V^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\mu db \\
 &= - \left(\int_{BC} - \int_{AD} \right) b^\nu V^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\mu db + \left(\int_{DC} - \int_{AB} \right) a^\nu V^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\mu da \\
 &\simeq - \int_{AD} \delta a \frac{\partial}{\partial a} (b^\nu V^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\mu) db + \int_{AB} \delta b \frac{\partial}{\partial b} (a^\nu V^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\mu) da \\
 &\simeq \delta a \delta b \left\{ - \frac{\partial}{\partial a} (b^\nu V^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\mu) + \frac{\partial}{\partial b} (a^\nu V^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\mu) \right\}
 \end{aligned}$$

と書ける. ここで再びベクトル成分の変化率の式 (23):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial b^\nu}{\partial a} &= a^\rho \partial_\rho b^\nu = -a^\rho b^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}^\nu, & \frac{\partial V^\lambda}{\partial a} &= a^\rho \partial_\rho V^\lambda = -a^\rho V^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}^\lambda, \\
 \frac{\partial a^\nu}{\partial b} &= b^\rho \partial_\rho a^\nu = -b^\rho a^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}^\nu, & \frac{\partial V^\lambda}{\partial b} &= b^\rho \partial_\rho V^\lambda = -b^\rho V^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}^\lambda
 \end{aligned}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
 \delta V^\mu &= \delta a \delta b V^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\mu \Gamma_{\sigma\rho}^\nu (a^\rho b^\sigma - a^\sigma b^\rho) + \delta a \delta b a^\rho b^\nu V^\sigma (\Gamma_{\sigma\rho}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\mu - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\rho}^\mu - \partial_\rho \Gamma_{\sigma\nu}^\mu + \partial_\nu \Gamma_{\sigma\rho}^\mu) \\
 &= V^\sigma (a^\rho \delta a) (b^\nu \delta b) R_{\sigma\nu\rho}^\mu
 \end{aligned}$$

となる (添字 σ, ρ に関して $a^\rho b^\sigma - a^\sigma b^\rho$ は反対称, $\Gamma_{\sigma\rho}^\nu$ は対称なので式 (6) より $\Gamma_{\sigma\rho}^\nu (a^\rho b^\sigma - a^\sigma b^\rho) = 0$). これは \vec{V} の 1 周したときの成分変化の式 (24) である.

■ 共変曲率テンソルの式 (28) の導出 曲率テンソルの式 (25):

$$R_{\nu\rho\sigma}^\mu \equiv \partial_\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\mu - \partial_\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\mu + \Gamma_{\alpha\rho}^\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha - \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu \Gamma_{\nu\rho}^\alpha$$

より,

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv g_{\mu\alpha} R^{\alpha}{}_{\nu\rho\sigma} = g_{\mu\alpha} \{(\partial_{\rho}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\sigma} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\rho}\Gamma^{\beta}{}_{\nu\sigma}) - (\rho \leftrightarrow \sigma)\}$$

となる. ただし $(\rho \leftrightarrow \sigma)$ は添字 ρ, σ を入れ替えた項を表す. ここで

$$\begin{aligned} \partial_{\rho}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\sigma} &= \partial_{\rho}(g^{\alpha\beta}\Gamma_{\beta,\nu\sigma}) = (\partial_{\rho}g^{\alpha\beta})\Gamma_{\beta,\nu\sigma} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_{\rho}\partial_{\sigma}g_{\beta\nu} + \partial_{\rho}\partial_{\nu}g_{\beta\sigma} - \partial_{\rho}\partial_{\beta}g_{\nu\sigma}), \\ \therefore g_{\mu\alpha} \{ \partial_{\rho}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\sigma} - (\rho \leftrightarrow \sigma) \} &= g_{\mu\alpha} \{ (\partial_{\rho}g^{\alpha\gamma})\Gamma_{\gamma,\nu\sigma} - (\rho \leftrightarrow \sigma) \} + \frac{1}{2}\delta^{\beta}{}_{\mu} \{ (\partial_{\rho}\partial_{\nu}g_{\beta\sigma} - \partial_{\rho}\partial_{\beta}g_{\nu\sigma}) - (\rho \leftrightarrow \sigma) \} \\ &= g_{\mu\alpha}g_{\beta\gamma} \{ (\partial_{\rho}g^{\alpha\gamma})\Gamma^{\beta}{}_{\nu\sigma} - (\rho \leftrightarrow \sigma) \} + \frac{1}{2} \{ (\partial_{\rho}\partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\rho}\partial_{\mu}g_{\nu\sigma}) - (\rho \leftrightarrow \sigma) \} \end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{1}{2} \{ (\partial_{\rho}\partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\rho}\partial_{\mu}g_{\nu\sigma}) - (\rho \leftrightarrow \sigma) \} \\ &\quad + g_{\mu\alpha} [\{ g_{\beta\gamma}(\partial_{\rho}g^{\alpha\gamma}) + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\rho} \} \Gamma^{\beta}{}_{\nu\sigma} - (\rho \leftrightarrow \sigma)] \end{aligned}$$

を得る. 右辺の 2 行目について, $g_{\beta\gamma}g^{\alpha\gamma} = \delta^{\alpha}{}_{\beta}$ を微分して得られる関係

$$g_{\beta\gamma}(\partial_{\rho}g^{\alpha\gamma}) = -(\partial_{\rho}g_{\beta\gamma})g^{\alpha\gamma}$$

を用いると,

$$g_{\mu\alpha} \{ g_{\beta\gamma}(\partial_{\rho}g^{\alpha\gamma}) + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\rho} \} = -\partial_{\rho}g_{\mu\beta} + \Gamma_{\mu,\beta\rho} = -\Gamma_{\beta,\mu\sigma} = -g_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\rho}$$

と書き換えられる (第 2 の等号については 7.1.6 節を参照). これを上式に戻すと, 式 (28):

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{1}{2} \{ (\partial_{\rho}\partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\rho}\partial_{\mu}g_{\nu\sigma}) - (\rho \leftrightarrow \sigma) \} - g_{\alpha\beta} \{ \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\rho}\Gamma^{\beta}{}_{\nu\sigma} - (\rho \leftrightarrow \sigma) \}, \\ &= \frac{1}{2} (\partial_{\rho}\partial_{\nu}g_{\mu\sigma} + \partial_{\sigma}\partial_{\mu}g_{\nu\rho} - \partial_{\sigma}\partial_{\nu}g_{\mu\rho} - \partial_{\rho}\partial_{\mu}g_{\nu\sigma}) + g_{\alpha\beta} (\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\rho}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\rho}) \end{aligned}$$

が得られる.

■ Bianchi の恒等式 (29) の導出 Bianchi の恒等式 (29):

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\rho;\sigma} + R^{\lambda}{}_{\mu\sigma\nu;\rho} + R^{\lambda}{}_{\mu\rho\sigma;\nu} = 0$$

はテンソルの関係式となっているから, ある座標系で成立すれば任意の座標系で成立する (1.1.1 節). よって局所慣性系でこれが成り立つことを示せば十分である. 局所慣性系では Christoffel 記号がゼロになるので (その微分がゼロになる保証はない),

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\rho;\sigma} = \partial_{\sigma}R^{\lambda}{}_{\mu\nu\rho} = \partial_{\sigma}(\partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho} - \partial_{\rho}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\rho} - \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\rho}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}) = \partial_{\sigma}\partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho} - \partial_{\sigma}\partial_{\rho}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$$

である. これと添字を入れ替えた式

$$\begin{aligned} R^{\lambda}{}_{\mu\sigma\nu;\rho} &= \partial_{\rho}\partial_{\sigma}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \partial_{\rho}\partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}, \\ R^{\lambda}{}_{\mu\rho\sigma;\nu} &= \partial_{\nu}\partial_{\rho}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma} - \partial_{\nu}\partial_{\sigma}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho} \end{aligned}$$

と辺々足すと, Bianchi の恒等式 (29) が得られる.

■Einstein テンソルに対する Bianchi の恒等式 (30) の導出 Bianchi の恒等式 (29):

$$R^\lambda{}_{\mu\nu\rho;\sigma} + R^\lambda{}_{\mu\sigma\nu;\rho} + R^\lambda{}_{\mu\rho\sigma;\nu} = 0$$

の添字 λ, ρ を縮約し, さらに添字 μ, ν についても縮約する (すなわち $g^{\mu\nu}$ をかけて μ, ν について和をとる). このとき計量テンソルの共変微分はゼロになることと (7.1.6 節), 曲率テンソルの添字に関する (反) 対称性 (1.1.11 節) を思い出すと, 各項は

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} R^\lambda{}_{\mu\nu\lambda;\sigma} &= -g^{\mu\nu} R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu;\sigma} = -g^{\mu\nu} R_{\mu\nu;\sigma} = -R_{;\sigma} (= -\partial_\sigma R), \\ g^{\mu\nu} R^\lambda{}_{\mu\sigma\nu;\lambda} &= g^{\mu\nu} g^{\lambda\alpha} R_{\alpha\mu\sigma\nu;\lambda} = g^{\mu\nu} g^{\lambda\alpha} R_{\mu\alpha\nu\sigma;\lambda} = g^{\lambda\alpha} R_{\alpha\sigma;\lambda} = R^\lambda{}_{\sigma;\lambda}, \\ g^{\mu\nu} R^\lambda{}_{\mu\lambda\sigma;\nu} &= g^{\mu\nu} R_{\mu\sigma;\nu} = R^\nu{}_{\sigma;\nu} \end{aligned}$$

となる. よって

$$R^\nu{}_{\sigma;\nu} = \frac{1}{2} R_{;\sigma}, \quad \therefore G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right)_{;\nu} = 0 : (30)$$

を得る.

7.2 特殊相対性理論の概念 (補足)

■Lorentz 変換 (32) の導出 求める座標変換が (有限の) 世界間隔 $(ct)^2 - x^2$ を不変に保つ tx 平面内の “回転” として

$$x' = x \cosh \psi + ct \sinh \psi, \quad ct' = x \sinh \psi + ct \cosh \psi$$

と表されると考えると,

- これは線形変換であるため, 逆変換も同じ形となり, 相対性原理を満たす.
- この変換は確かに世界間隔 $c^2 t^2 - x^2$ を不変とするため, 光速一定の条件を満たす.

ここで K 系の原点 $x' = 0$ に注目すると, これを K' 系で見た座標は

$$x' = ct \sinh \psi, \quad ct' = ct \cosh \psi$$

となる. $x'/ct' = \tanh \psi$ が K 系の座標で測った K' 系の速度 (を c で割った値) だから, $\tanh \psi = -V/c$ を満たす “回転角” ψ をとれば良いことが分かる^{*228}. $1 - \tanh^2 \psi = 1/\cosh^2 \psi$ および定義域 $\cosh \psi \geq 1$ より

$$\tanh \psi = -\beta \quad \Rightarrow \quad \cosh \psi = \gamma \quad \Rightarrow \quad \sinh \psi = -\beta\gamma$$

(ただし $\beta \equiv V/c, \gamma \equiv 1/\sqrt{1 - \beta^2}$) となるので, Lorentz 変換の式 (32) を得る.

^{*228} tx 面内の “回転”

$$x' = x \cosh \psi - ct \sinh \psi, \quad ct' = -x \sinh \psi + ct \cosh \psi, \quad \tanh \psi = \frac{V}{c}$$

(ψ を再定義した) は, 虚時間 $x^4 = ict$ を導入し, $\psi \equiv i\psi'$ を代入すると, 虚数角 ψ' の回転の形

$$x'^1 = x^1 \cos \psi' - x^4 \sin \psi', \quad x'^4 = x^1 \sin \psi' + x^4 \cos \psi'$$

に書ける [4, pp.44–45]. いずれにせよ回転というのは解釈に過ぎず, それ以上のものではない.

■固有時間の式 (33) の導出 慣性系で測って時間 dt の間に粒子が空間中で dx, dy, dz 変位し粒子の固有時間が $d\tau$ 変化したとすると,

$$ds^2 = (cd\tau)^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

だから, $d\tau$ と dt の間に式 (33):

$$d\tau = \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2} dt, \quad \mathbf{v} \equiv \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

の関係が成立する [3, p.9] [4, pp.88–89].

7.3 Lagrange 形式と Hamilton 形式 (補足)

7.3.1 Lagrange 形式 (補足)

1.3.1 節で述べたように, 最小作用原理から Euler-Lagrange 方程式 (35),(37) が導かれることを示す. まず粒子の軌道 $q_i(t)$ の変分に対して作用 (34): $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ が停留値をとる条件は

$$0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt$$

と書ける. ただし最後の等号では $\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i$ に注意して被積分関数の第 2 項を部分積分し, 境界条件 $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ を用いた. 上式最右辺において変分 $\{\delta q_i\}$ を独立にとれることから Euler-Lagrange 方程式 (35):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

を得る [9, pp.2–4].

同様に空間の各位置での場の値 $\phi_r(\mathbf{x}, t)$ の変分に対して作用 (36): $S = \int \mathcal{L} dV dt$ が停留値をとる条件は

$$0 = \delta S = \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \delta \phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \delta (\partial_\mu \phi_r) \right\} dV dt = \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \right\} \delta \phi_r dV dt$$

と書ける (ただし μ, r について和をとる). ただし最後の等号では $\delta (\partial_\mu \phi_r) = \partial_\mu (\delta \phi_r)$ に注意して被積分関数の第 2 項を部分積分した. その際, 作用の積分が行われる時空領域の境界は, 空間の無限遠の“側面”と場の値が指定された“平面” $t = t_1, t_2$ から成り (1.4 節の図 8 参照), ここでは場または変分 $\delta \phi_r$ がゼロになることを用いた. 上式最右辺において場の種類ごとに変分 $\{\delta \phi_r\}$ を独立にとれることから, Euler-Lagrange 方程式 (37):

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} = 0$$

を得る [3, p.87].

7.3.2 対称性と保存則 (補足)

本節では 1.3.2 節における式の導出などの補足を行う.

■Lagrangian の任意性 1.3.2 節で述べたように, Lagrangian を

$$L \rightarrow L' = L + \frac{df}{dt} \quad (f = f(q, t))$$

と変更しても運動方程式は不変であることを説明する [9, pp.4-5]. Lagrangian の変化に伴って, 作用積分 $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ は

$$S \rightarrow S' = \int_{t_1}^{t_2} L' dt = S + [f(q, t)]_{t_1}^{t_2}$$

と変化する. 最右辺における付加的な項は時間の両端 $t = t_1, t_2$ で評価されており, 作用の変分には寄与しない. よって軌道の変分に伴う 2 つの作用の変分 $\delta S, \delta S'$ は等しく, 作用が停留値をとる条件に他ならない運動方程式 (35) は不変に保たれる.

■時間並進対称性からエネルギー (38) の保存の導出 Lagrangian が時間に陽に依らないという仮定 $\partial L / \partial t = 0$ により,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i.$$

Lagrange 方程式 (35) を用いて右辺の第 1 項を書き換えると

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right)$$

となるので, エネルギー保存則

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad E \equiv \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L : (38)$$

を得る.

■Noether の定理の証明 1.3.2 節で述べたように, Lagrangian を不変に保つ対称変換 $q_i \rightarrow \Phi_i(\lambda; q)$ に付随する保存量が, モーメント関数 $F = \sum_i f_i p_i$ によって与えられることを示す [5, pp.122-123]. 変換 $q_i \rightarrow \Phi_i(\lambda; q)$ に伴う Lagrangian の変化率は, $f_i \equiv d\Phi_i / d\lambda|_{\lambda=0}$ を用いて

$$\frac{dL}{d\lambda} = \sum_i \left(f_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \dot{f}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_i \left(f_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \dot{f}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \sum_i f_i p_i, \quad p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

と表される. ただし第 2 の等号で Lagrange 方程式 (35) を用いた. 仮定によりこれがゼロになるので, 保存則

$$\frac{dF}{dt} = 0, \quad F = \sum_i f_i p_i : \text{モーメント関数}$$

が見出される. エネルギー保存則の導出の手順 (上記) との類似性が注目される.

■Lorentz 変換 (39) における無限小パラメーターの反対称性 無限小 Lorentz 変換 (39) に対して

$$\begin{aligned} x'_{\mu} x'^{\mu} &= \eta_{\mu\nu} x'^{\nu} x'^{\mu} \\ &= \eta_{\mu\nu} (x^{\mu} + x_{\rho} \varepsilon^{\mu\rho}) (x^{\nu} + x_{\sigma} \varepsilon^{\nu\sigma}) \\ &\simeq x_{\mu} x^{\mu} + \eta_{\mu\nu} x^{\mu} x_{\sigma} \varepsilon^{\nu\sigma} + \eta_{\mu\nu} x^{\nu} x_{\rho} \varepsilon^{\mu\rho} \\ &= x_{\mu} x^{\mu} + x_{\nu} x_{\sigma} \varepsilon^{\nu\sigma} + x_{\mu} x_{\rho} \varepsilon^{\mu\rho} \\ &= x_{\mu} x^{\mu} + 2x_{\mu} x_{\rho} \varepsilon^{\mu\rho} \end{aligned}$$

であり, Lorentz 変換では 4 元動径ベクトルの長さ $x_\mu x^\mu$ は不変にとどまらなければならないから,

$$x_\mu x_\rho \varepsilon^{\mu\rho} = 0$$

を得る.

$\varepsilon^{\mu\nu}$ の反対称部分は左辺に寄与を持たないので (式 (6) の箇所を参照), $\varepsilon^{\mu\nu}$ の対称部分 $\varepsilon^{(S)\mu\nu}$ に対して

$$0 = x_\mu x_\rho \varepsilon^{(S)\mu\rho} = 2 \sum_{\mu>\rho} x_\mu x_\rho \varepsilon^{(S)\mu\rho} + x_\mu x_\mu \varepsilon^{(S)\mu\mu}$$

が課される (最右辺では繰り返された添字 μ について和をとらない). これにより対称部分 $\varepsilon^{(S)\mu\nu}$ はゼロになるから, $\varepsilon^{\mu\nu}$ は添字に関して反対称でなければならない.

■ Lorentz 対称性から角運動量 4 元テンソル (40) の保存の導出 [11, p.170] 簡単のために 1 粒子系を考える (粒子番号の添字は不要となる).

Lagrangian を不変に保つ対称変換 $x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu$ を考える. 時間座標 x^0 を力学変数として扱う代わりに, 時間の役割を果たす粒子の軌道に沿ったパラメーター τ を導入し, τ による微分をプライムで表す. 他方 t による微分はドットで表す. また作用の積分変数を t, τ としたときの Lagrangian をそれぞれ L, \tilde{L} と書くと,

$$\int \tilde{L} d\tau = \int L dt \quad \rightarrow \quad \tilde{L} = L \frac{dt}{d\tau} = Lt'$$

時間 τ と Lagrangian \tilde{L} に対しても Lagrange 方程式 (35) が成り立つから, 変換に伴う Lagrangian の変化量は

$$0 = \delta \tilde{L} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x'^\mu} \delta x'^\mu = \left(\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x'^\mu} \right) \delta x^\mu + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x'^\mu} \delta x'^\mu = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x'^\mu} \delta x^\mu \right)$$

と計算できる. ここから保存量 $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x'^\mu} \delta x^\mu$ が見出される.

無限小 Lorentz 変換 (39): $\delta x^\mu = x_\nu \varepsilon^{\mu\nu}$ に関する対称性に付随する保存量は

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x'^\mu} \delta x^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x'^\mu} x_\nu = -\varepsilon^{\mu\nu} \tilde{p}_\mu x_\nu = -\sum_{\mu>\nu} \varepsilon^{\mu\nu} (x_\mu \tilde{p}_\nu - x_\nu \tilde{p}_\mu), \quad \tilde{p}_\mu \equiv -\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x'^\mu}$$

となる (最後の等号では $\varepsilon^{\mu\nu}$ の反対称性を用いた). $\mu > \nu$ の各成分 $\varepsilon^{\mu\nu}$ は独立にとれることに注意すると,

$$\tilde{M}_{\mu\nu} = x_\mu \tilde{p}_\nu - x_\nu \tilde{p}_\mu$$

の保存が導かれる.

最後に $\tilde{p}_\mu \equiv -\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x'^\mu}$ と 4 元運動量 p^μ の関係を調べれば充分である*229. それには次のようにすれば良い [5, p.170]. まず空間成分 $\mu = i = 1, 2, 3$ について,

$$x'^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \dot{x}^i t'$$

に注意すると

$$\tilde{p}_i = -\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x'^i} = -\sum_j \frac{\partial(Lt')}{\partial \dot{x}^j} \frac{\partial \dot{x}^j}{\partial x'^i} = -\sum_j \frac{\partial(Lt')}{\partial \dot{x}^j} \frac{\partial}{\partial x'^i} \left(\frac{x'^j}{t'} \right) = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$$

*229 はじめから τ を t そのものにとったならば, $\dot{x}^0 = 1$ による微分 $\tilde{p}_0 = -\partial L / \partial \dot{x}^0$ はよく定義されなくなることに注意する.

となる。最右辺は通常の正準運動量に負号を付けたもの $-p^i = p_i$ になっていることが見て取れる。次に時間成分 $\mu = 0$ について、同様に

$$c\tilde{p}_0 = -\frac{\partial\tilde{L}}{\partial t'} = -\frac{\partial}{\partial t'}(Lt') = -L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial t'} t' = -L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{x'^i}{t'} \right) t' = -L + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \frac{x'^i}{t'} = -L + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \dot{x}^i$$

となる。最右辺は粒子のエネルギー \mathcal{E} なので (式 (38) 参照), $\tilde{p}_0 = \mathcal{E}/c$ である。以上をまとめると $\tilde{p}_\mu = (\mathcal{E}/c, -\mathbf{p})$ なので, これは運動量の 4 元共変ベクトルに一致する。

$$\tilde{p}_\mu = p_\mu.$$

よって角運動量テンソル

$$M_{\mu\nu} = \tilde{M}_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu$$

が保存する。

以上を多粒子系に対して一般化するには,

- τ を拡大配位空間の軌道のパラメーターと見なす方法
- τ を個々の粒子ごとに定義されるパラメーター (例えば粒子の固有時間) と見なす方法

の 2 通りの戦略が考えられる。いずれにせよ個々の粒子の力学変数 x^0 が単一のパラメーター t でもあるという点について, 注意深い取り扱いが必要となる。

対照的に場の理論では時刻 t が単なるパラメーターであることは明白であり, 系の Lorentz 変換に関する対称性から, 場の 4 元角運動量 (50):

$$M^{\mu\nu} = \int (x^\mu dP^\nu - x^\nu dP^\mu) = \frac{1}{c} \int (x^\mu T^{\nu 0} - x^\nu T^{\mu 0}) dV$$

が保存することを証明できる。ここに $T^{\mu\nu}$ は場のエネルギー・運動量テンソルであり, $dP^\mu = \frac{T^{\mu 0}}{c} dV$ は体積要素 dV に含まれる場の運動量である。またスピン角運動量の項は捨てた。そこで自由粒子系に対する表式 (120):

$$T^{\mu\nu} = \sum_a m_a c^2 u_a^\mu u_a^\nu \sqrt{1 - \left(\frac{v_a}{c}\right)^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \quad \therefore T^{\mu 0} = \sum_a m_a c^2 u_a^\mu \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) = c \sum_a p_a^\mu \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))$$

を代入すると, 4 元角運動量

$$M^{\mu\nu} = \sum_a (x_a^\mu p_a^\nu - x_a^\nu p_a^\mu)$$

が得られる。

■ Lagrangian 密度の任意性 1.3.2 節で述べたように, Lagrangian 密度を

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu \Lambda^\mu$$

と変更しても運動方程式は不変である。実際, 作用は時空のある領域 Ω にわたる Lagrangian 密度の積分であることを思い出すと, 一般に場の関数 Λ^μ の 4 元発散 $\partial_\mu \Lambda^\mu$ だけ異なる 2 つの Lagrangian 密度は, 領域 Ω の表面にわたる Λ^μ の積分だけ異なる 2 つの作用を与える。ところで最小作用原理において領域 Ω の表面は空間の無限遠の“側面”と, 場の値が指定された“平面” $t = t_1, t_2$ から成り, ここでは場またはその変分がゼロになるため, 2 つの作用の差は変分をとると落ちる。よって作用が停留値をとる条件に他ならない場の方程式は, 2 つの Lagrangian 密度に対して共通となる。

■場の理論の Lorentz 不変性から導かれる保存則 (47) の式 場の変分 (46) は微小量の 1 次までの近似で

$$\begin{aligned}\delta_{\mathbb{T}}\phi_r(x) &\equiv \phi'_r(x') - \phi_r(x) \\ &= [\phi'_r(x') - \phi_r(x')] + [\phi_r(x') - \phi_r(x)] \\ &= \delta\phi_r(x') + \frac{\partial\phi_r}{\partial x_\beta} \quad (\delta x_\beta = x'_\beta - x_\beta) \\ &= \delta\phi_r(x) + \frac{\partial\phi_r}{\partial x_\beta}\end{aligned}$$

と書き直される。同様に Lagrangian 密度の不変性は

$$0 = \mathcal{L}(\phi'_r(x'), \partial'_\alpha \phi'_r(x')) - \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\alpha \phi_r(x)) = \delta\mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\alpha} \delta x^\alpha$$

と表される。最右辺第 1 項 $\delta\mathcal{L}$ は場の変更 $\phi_r(x) \rightarrow \phi_r(x) + \delta\phi_r(x)$ に伴う Lagrangian 密度の変分であり、式 (41) において計算済みである：

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)} \delta\phi_r \right) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)} \left(\delta_{\mathbb{T}}\phi_r(x) - \frac{\partial\phi_r}{\partial x_\beta} \right) \right\}.$$

これを上式に代入すると、連続の式 (47):

$$\partial_\alpha f^\alpha = 0, \quad f^\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)} \delta_{\mathbb{T}}\phi_r - \mathcal{T}^{\alpha\beta} \delta x_\beta$$

が得られる。

■時空内の回転対称性に付随するカレント (49) の導出 回転操作 $\delta x_\beta = \varepsilon_{\beta\gamma} \delta x^\gamma$ を考え、カレント f^α の式 (47):

$$f^\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)} \delta_{\mathbb{T}}\phi_r - \mathcal{T}^{\alpha\beta} \delta x_\beta$$

に $\delta_{\mathbb{T}}\phi_r(x) = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta} S_{rs}^{\alpha\beta} \phi_s(x)$ および

$$-\mathcal{T}^{\alpha\beta} \delta x_\beta = -\mathcal{T}^{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta\gamma} \delta x^\gamma = -\frac{1}{2}(\mathcal{T}^{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta\gamma} \delta x^\gamma + \mathcal{T}^{\alpha\gamma} \varepsilon_{\gamma\beta} \delta x^\beta) = \frac{1}{2}\varepsilon_{\beta\gamma} (x^\beta \mathcal{T}^{\alpha\beta} - x^\gamma \mathcal{T}^{\alpha\beta})$$

を代入すると、式 (49):

$$f^\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon_{\beta\gamma} \mathcal{M}^{\alpha\beta\gamma}, \quad \mathcal{M}^{\alpha\beta\gamma} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)} S_{rs}^{\beta\gamma} \phi_s + (x^\beta \mathcal{T}^{\alpha\gamma} - x^\gamma \mathcal{T}^{\alpha\beta}) (= -\mathcal{M}^{\alpha\gamma\beta})$$

が得られる。

■ $T^{\alpha\beta}$ と $T'^{\alpha\beta}$ が同じ全 4 元運動量 P^α を与える理由 再定義されたエネルギー・運動量テンソル

$$T^{\alpha\beta} \rightarrow T'^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} + \partial_\gamma \psi^{\alpha\beta\gamma}, \quad \psi^{\alpha\beta\gamma} = -\psi^{\alpha\gamma\beta}$$

における付加的な項 $\partial_\gamma \psi^{\alpha\beta\gamma}$ の、運動量 $P^\alpha = \frac{1}{c} \int T^{\alpha 0} dV$ への寄与は

$$\frac{1}{c} \int \partial_\gamma \psi^{\alpha 0\gamma} dV = \frac{1}{2c} \int \partial_\gamma (\psi^{\alpha 0\gamma} - \psi^{\alpha\gamma 0}) dV = \frac{1}{2c} \int \partial_k (\psi^{\alpha 0k} - \psi^{\alpha k 0}) dV$$

である。最右辺は 3 次元空間の無限遠の表面積分に変換されてゼロになるので、エネルギー・運動量テンソルの再定義に伴って全 4 元運動量 P^α は変化を受けない。

■軌道角運動量が保存する条件としてエネルギー・運動量テンソルの対称性を導出 1.3.2 節で述べたように、場の 4 元角運動量が (軌道角運動量)

$$M^{\alpha\beta} = \frac{1}{c} \int (x^\alpha T^{\beta 0} - x^\beta T^{\alpha 0}) dV$$

によって表されることを要請する。あるいは等価的にカレント (49) が軌道角運動量の項だけから成ること

$$\mathcal{M}^{\alpha\beta\gamma} = x^\beta \mathcal{T}^{\alpha\gamma} - x^\gamma \mathcal{T}^{\alpha\beta} = x^\beta T^{\gamma\alpha} - x^\gamma T^{\beta\alpha}$$

を要求しても良い。すると保存則は

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\alpha \mathcal{M}^{\alpha\beta\gamma} = \delta_\alpha^\beta T^{\gamma\alpha} + x^\beta \partial_\alpha T^{\gamma\alpha} - \delta_\alpha^\gamma T^{\beta\alpha} - x^\gamma \partial_\alpha T^{\beta\alpha} \\ &= T^{\gamma\beta} - T^{\beta\gamma} \quad (\because \partial_\alpha T^{\beta\alpha} = 0) \end{aligned}$$

となる。これはエネルギー・運動量テンソルの対称性を意味する。

■保存する電荷の表式 (52) の確認 大域的位相変換 (51):

$$\phi'_r = e^{i\varepsilon} \phi_r \simeq (1 + i\varepsilon) \phi_r, \quad \phi'_{r^\dagger} = e^{-i\varepsilon} \phi_{r^\dagger} \simeq (1 - i\varepsilon) \phi_{r^\dagger}$$

に対して場の変分は $\delta\phi_r = i\varepsilon\phi_r, \delta\phi_{r^\dagger} = -i\varepsilon\phi_{r^\dagger}$ と同定されるので、Lagrangian の不変性に付随するカレント (42):

$$f^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)} \delta\phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_{r^\dagger})} \delta\phi_{r^\dagger}$$

は保存量

$$\begin{aligned} F^0 &= c \int d^3x [\pi_r(x) \delta\phi_r(x) + \pi_{r^\dagger}(x) \delta\phi_{r^\dagger}(x)] \\ &= i\varepsilon c \int d^3x [\pi_r(x) \phi_r(x) - \pi_{r^\dagger}(x) \phi_{r^\dagger}(x)] \end{aligned}$$

を与える。よって、これに適当な定数 $-q/\varepsilon c \hbar$ を掛けた式 (52) の Q も保存する。

7.3.3 エネルギー・運動量テンソル (補足)

1.3.3 節における保存則 (54) を導く [3, pp.302-304].

まず無限小変換 (53): $x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha$ に対する計量テンソルの変換則を調べる。 $\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta^\alpha_\mu + \partial_\mu \xi^\alpha$ に注意すると、 ξ^α の 1 次までの近似で

$$g'^{\alpha\beta} = (\delta^\alpha_\mu + \partial_\mu \xi^\alpha)(\delta^\beta_\nu + \partial_\nu \xi^\beta) g^{\mu\nu} \simeq g^{\alpha\beta} + \partial^\alpha \xi^\beta + \partial^\beta \xi^\alpha$$

となる。ここで一般にテンソル場に対して変換則 (1) は、与えられた時空点における場の値の変化を規定していることを思い出そう。上式の右辺は座標 x の関数であるのに対し、左辺は同一の点を表す新しい座標 x' の関数 $g'^{\alpha\beta}(x')$ である。引数を x にそろえるために、左辺を

$$g'^{\alpha\beta}(x') = g'^{\alpha\beta}(x + \xi) \simeq g'^{\alpha\beta}(x) + \xi^\gamma \partial_\gamma g'^{\alpha\beta}(x) \simeq g'^{\alpha\beta}(x) + \xi^\gamma \partial_\gamma g^{\alpha\beta}(x)$$

と書き直す (最後の等号では第 2 項において、 $g'^{\alpha\beta}$ を $g^{\alpha\beta}$ に置き換えたときの差が ξ^α の 2 次の微小量であることを考慮した)。すると

$$g'^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - \xi^\gamma \partial_\gamma g^{\alpha\beta} + \partial^\alpha \xi^\beta + \partial^\beta \xi^\alpha$$

を得る (両辺の各項の引数はいずれも x)。右辺の後ろ 3 つの項は $\xi^{\alpha;\beta} + \xi^{\beta;\alpha}$ とまとめられる。実際、

$$\begin{aligned}
& \xi^{\alpha;\beta} + \xi^{\beta;\alpha} \\
&= g^{\beta\delta} \xi^{\alpha}_{;\delta} + g^{\alpha\delta} \xi^{\beta}_{;\delta} \quad (\because \text{反変導関数の定義 (1.1.8 節)}) \\
&= g^{\beta\delta} (\partial_\delta \xi^\alpha + \Gamma^\alpha_{\gamma\delta} \xi^\gamma) + g^{\alpha\delta} (\partial_\delta \xi^\beta + \Gamma^\beta_{\gamma\delta} \xi^\gamma) \quad (\because \text{共変微分の公式 (12)}) \\
&= \partial^\beta \xi^\alpha + \partial^\alpha \xi^\beta + (g^{\beta\delta} \Gamma^\alpha_{\gamma\delta} + g^{\alpha\delta} \Gamma^\beta_{\gamma\delta} \xi^\gamma) \xi^\gamma \\
&= \partial^\beta \xi^\alpha + \partial^\alpha \xi^\beta - (\partial_\gamma g^{\alpha\beta}) \xi^\gamma. \quad (\because \text{式 (19)})
\end{aligned}$$

以上より計量テンソルは

$$g'^{\alpha\beta}(x) = g^{\alpha\beta}(x) + \delta g^{\alpha\beta}(x), \quad \delta g^{\alpha\beta} = \xi^{\alpha;\beta} + \xi^{\beta;\alpha} \quad (664)$$

に従って変換する。これは共変成分の変換則

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}, \quad \delta g_{\alpha\beta} = -\xi_{\alpha;\beta} - \xi_{\beta;\alpha}$$

を含意する (このとき今考えている ξ^α の 1 次までの近似で、 $g'^{\alpha\gamma} g'_{\gamma\beta} = \delta^\alpha_\beta$ が満たされる)。

さて、無限小の一般座標変換 (53) に対する作用 S の不変性を要求しよう。座標変換に伴って、計量テンソル $g^{\mu\nu}$ とそれ以外の力学変数 q はともに変化する。これによる S の変分は微小変化の 1 次近似で、 $g^{\mu\nu}$ だけが変化したときの変分 $\delta_g S$ と q だけが変化したときの変分 $\delta_q S$ の和 $\delta S = \delta_g S + \delta_q S$ である。ところが変数 q に関する運動方程式により $\delta_q S$ はゼロになるから^{*230}、作用の不変性として $\delta_g S = 0$ を要求すれば充分である。

$$\begin{aligned}
0 = \delta_g S &= \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \delta (\partial_\lambda g^{\mu\nu}) \right\} d^4 x = \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right\} (\delta g^{\mu\nu}) d^4 x \\
&= \frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4 x.
\end{aligned}$$

既に 1.3.3 節で述べたように、ここで $g^{\mu\nu}, \partial_\lambda g^{\mu\nu}$ による微分は $g^{\nu\mu}, \partial_\lambda g^{\nu\mu}$ を固定して行っていることになる。変分 $\delta g^{\mu\nu}$ として座標変換に伴う変化 (664) を考えているから、上式はさらに

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} (\xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu}) \sqrt{-g} d^4 x \\
&= \frac{1}{c} \int T_{\nu\mu} \xi^{\mu;\nu} \sqrt{-g} d^4 x \quad (T_{\mu\nu} \text{の対称性}) \\
&= \frac{1}{c} \int T^\nu_{\mu} \xi^{\mu}_{;\nu} \sqrt{-g} d^4 x \\
&= \frac{1}{c} \int (T^\nu_{\mu} \xi^\mu)_{;\nu} \sqrt{-g} d^4 x - \frac{1}{c} \int T^\nu_{\mu;\nu} \xi^\mu \sqrt{-g} d^4 x \\
&= \frac{1}{c} \int \partial_\nu (\sqrt{-g} T^\nu_{\mu} \xi^\mu) d^4 x - \frac{1}{c} \int T^\nu_{\mu;\nu} \xi^\mu \sqrt{-g} d^4 x \quad (\because \text{公式 (20)}) \\
&= -\frac{1}{c} \int T^\nu_{\mu;\nu} \xi^\mu \sqrt{-g} d^4 x
\end{aligned}$$

と書き換えられる。最右辺において ξ^μ は任意なので、 $T^\nu_{\mu;\nu} = 0$ を得る。計量テンソルの共変微分はゼロになること (1.1.9 節) に注意して添字を上げると、式 (54):

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$$

^{*230} 作用 S が力学変数 $g^{\mu\nu}(x)$ を記述する項 (重力場項) を含んでいるとすると、同じ理由で $\delta_g S = 0$ となり、非自明な結果は得られない。

が導かれる.

7.3.4 Hamilton 形式 (補足)

1.3.4 節における正準方程式 (56) を導く.

$$\begin{aligned} \text{一般運動量の定義式 } p_i &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \\ \text{Lagrange 方程式 (35): } \dot{p}_i &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \end{aligned}$$

より q, \dot{q}, t の関数である Lagrangian の全微分は

$$\begin{aligned} dL &= \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_i (\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= d \left(\sum_i p_i \dot{q}_i \right) + \sum_i (\dot{p}_i dq_i - \dot{q}_i dp_i) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned}$$

となる. よって q, p, t の関数である Hamiltonian の全微分は

$$dH = d \left(\sum_i p_i \dot{q}_i \right) - dL = \sum_i (-\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

となり, ここから正準方程式 (56):

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

および $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$ が得られる [9, pp.166–168].

7.4 古典的統一理論 (補足)

7.4.1 Lorenz ゲージ

1.4.1 節で述べたように同一の電磁場を, 従って同一の電磁場テンソルを与える電磁ポテンシャルは無数に存在する. 実際ある電磁ポテンシャル A^μ から作られる電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ と, f を時空座標の任意の関数として電磁ポテンシャル $A'^\mu \equiv A^\mu + \partial^\mu f$ から作られる電磁場テンソル $F'_{\mu\nu}$ は同じ値を持つ:

$$F'_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu f) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu f) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}.$$

仮に正しい電磁場を与える電磁ポテンシャル A^μ が Lorenz 条件 (63): $A^\mu_{;\mu} = 0$ を満たさなくても, 関数 f を適当に選べば同じ電磁場を与える電磁ポテンシャル $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f$ が Lorenz 条件を満たすようにできる. 実際そのためには $0 = A'^\mu_{;\mu} = A^\mu_{;\mu} + (\partial^\mu f)_{;\mu}$ より f を $(\partial^\mu f)_{;\mu} = -A^\mu_{;\mu}$ の解にとれば良い.

7.4.2 4元電流(密度)(補足)

■4元電流密度(64)が反変ベクトルであることの証明 [4, p.164] a 番目の粒子の座標を $x_a^\mu = (x_a^0, \mathbf{r}_a)$ (またはシンボリックに x_a), 固有時間を τ_a と書くと, 電流密度の4元ベクトル(64)は

$$\begin{aligned} j^\mu(x) &= \sum_a \frac{e_a c}{\sqrt{-g(x)}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \frac{dx_a^\mu}{dx^0} \\ &= \sum_a \frac{e_a c}{\sqrt{-g(x)}} \int \delta(x - x_a) \frac{dx_a^\mu}{dx_a^0} dx_a^0 \\ &= \sum_a \frac{e_a c}{\sqrt{-g(x)}} \int \delta(x - x_a) \frac{dx_a^\mu}{d\tau_a} d\tau_a : (65) \end{aligned}$$

と書き換えられる. 最右辺において $d\tau_a$ はスカラーであり, $dx_a^\mu/d\tau_a$ は4元反変ベクトルである(1.1.4節). また座標変換 $x \rightarrow x'$ に伴うデルタ関数の変換則を調べると,

$$1 = \int \delta^4(x') d^4x' = \int \delta^4(x) d^4x = \int \delta^4(x) \frac{\partial(x)}{\partial(x')} d^4x', \quad \therefore \delta^4(x') = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \delta^4(x)$$

となるので, デルタ関数はスカラー密度である. さらに因子 $\sqrt{-g(x')} = \partial(X)/\partial(x)$ (1.1.6節参照)もまたスカラー密度の変換則

$$\sqrt{-g'} = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \sqrt{-g}$$

に従うから, 分母の $\sqrt{-g}$ はデルタ関数の変換性を打ち消す. 以上より4元電流密度(64)は全体として反変ベクトルになっていることが分かる.

■慣性系での電流密度 j^μ の意味付け(補足) 電流密度 \mathbf{j} が名前の通り電荷の流れの密度を表すならば, 電荷密度 ρ と電流密度 \mathbf{j} に対して電荷保存則は連続の式(68): $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ で表されることを確かめる. 電荷保存則は次のように言い表せる:

空間に固定した領域内部の電荷が増加したならば, それは領域内部で電荷が無から生じたからではなく, 領域の表面を通して電荷が内部に流入したからである. (665)

特に空間の各位置の周りに無限小領域 d^3x を考えれば, 単位時間当たりの内部の電荷 ρd^3x の増加量は $\frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x$, 電荷の流入量は $-\nabla \cdot \mathbf{j} d^3x$ なので, これらを等置して連続の式(68)を得る. さらに各体積要素 d^3x で

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x = -\nabla \cdot \mathbf{j} d^3x$$

が成り立てば, 任意の有限な領域 V に対しても保存則の主張(665)が成り立つ. 実際, 領域 V を構成する全ての体積要素 d^3x について電荷の流入量 $-\nabla \cdot \mathbf{j} d^3x$ を足し合わせると体積要素間の電荷の出入りが相殺され, 表面 S からの流入量 $-\int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ になる*231. こうして領域 V 内部の電荷 $\int_V \rho d^3x$ は, 単位時間に表面 S から流入した分だけ増加することになる:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho d^3x = -\int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}.$$

*231 このことは体積要素 dV が直方体 d^3x に限らず無限小の四面体の場合にも成り立ち, 数学的には発散定理と呼ばれ, $\int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ と書かれる

ここで総電荷 $\int_V \rho d^3x$ は時間 t だけの関数であることに注意して, 常微分の記号 d/dt を用いた. $d\mathbf{S}$ は表面 S の外向き法単位ベクトルである [3, pp.80-81].

電荷密度・電流密度の式 (66),(67) が連続の式 (68): $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ を自動的に満たすことは,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) &= \sum_a e_a \frac{\partial}{\partial t} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) = \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_a(t)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \\ &= - \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \\ \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \partial_i j^i(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a v_a^i(t) \partial_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \\ &= \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))\end{aligned}$$

を辺々足して確かめられる [3, pp.81-82] [12, p.195].

7.4.3 最小作用原理 (補足)

■場を基調とした電磁場と粒子の相互作用項 (70) の導出

$$\begin{aligned}S_{\text{mf}} &= - \sum_a \frac{e_a}{c} \int A_\mu(x_a^\mu) \frac{dx_a^\mu}{dx^0} dx^0 \\ &= - \frac{1}{c^2} \int \left(\sum_a \frac{e_a c}{\sqrt{-g(x)}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \frac{dx_a^\mu}{dx^0} \right) A_\mu(x) \sqrt{-g(x)} d^4x \\ &= - \frac{1}{c^2} \int j^\mu(x) A_\mu(x) \sqrt{-g(x)} d^4x.\end{aligned}$$

7.4.4 電磁場を含めた物質の系のエネルギー・運動量テンソル (補足)

■電磁場を含めた物質の系の Lagrangian 密度 1.4.4 節における電磁場を含めた物質の系の Lagrangian 密度を与える式 (71) を確かめよう.

a 番目の粒子の世界線に沿う線要素の世界間隔は

$$ds_a = \sqrt{g_{\mu\nu}(x(a)) dx^\mu(a) dx^\nu(a)} = \sqrt{g_{\mu\nu}(x(a)) \dot{x}^\mu(a) \dot{x}^\nu(a)} d\tau_a$$

なので作用 (69) における粒子の項は

$$S_m \equiv - \sum_a m_a c \int ds_a = \frac{1}{c} \int \Lambda_m d^4x, \quad \Lambda_m \equiv - \sum_a m_a c^2 \int \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu(a) \dot{x}^\nu(a)} \delta^4(x - x(a)) d\tau_a$$

となる.

次に電磁ポテンシャルについて, 共変ベクトル A_μ を基本的な量と考える. このとき $A_\mu dx^\mu$ を計量テンソルに依存する量 $g_{\mu\nu} A^\mu dx^\nu$ と見なす必要はなく, 作用 (69) における粒子と電磁場の相互作用項は

$$S_{\text{mf}} \equiv - \sum_a \frac{e_a}{c} \int A_\mu(x(a)) dx^\mu(a) = \frac{1}{c} \int \Lambda_{\text{mf}} d^4x, \quad \Lambda_{\text{mf}} \equiv - \sum_a e_a \int A_\mu(x) \dot{x}^\mu(a) \delta^4(x - x(a)) d\tau_a$$

となる.

さらに共変ベクトル A_μ を基本的な量と見なしたことを踏まえて $F^{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}F_{\gamma\delta}$ と書くと、作用 (69) における電磁場の項は

$$S_f \equiv -\frac{1}{16\pi c} \int F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x = \frac{1}{c} \int \Lambda_f d^4x, \quad \Lambda_f \equiv -\frac{1}{16\pi} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \sqrt{-g}$$

となる。

以上の $\Lambda_m, \Lambda_{mf}, \Lambda_f$ を用いて

$$S'_m \equiv S_m + S_{mf} + S_f = \frac{1}{c} \int \Lambda d^4x, \quad \Lambda \equiv \Lambda_m + \Lambda_{mf} + \Lambda_f : (71)$$

と書ける。

■計量テンソルの変分に対する公式

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda, \quad \therefore g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\lambda} = -g_{\nu\lambda} \delta g^{\mu\nu}$$

の両辺に $g_{\mu\alpha}$ をかけて μ で和をとると

$$\delta g_{\alpha\lambda} = -g_{\nu\lambda} g_{\mu\alpha} \delta g^{\mu\nu}, \quad \therefore \delta g_{\mu\nu} = -g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \delta g^{\alpha\beta}$$

を得る。ここで $\alpha \rightarrow \mu, \lambda \rightarrow \nu$ とし、ダミー添字を $\mu \rightarrow \alpha, \nu \rightarrow \beta$ と改めた [4, p.146] [8, pp.42-43].

ここで計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の任意の関数 $f(g_{\mu\nu})$ を考えると、これは上式より $g_{\mu\nu}$ の変分 $\delta g_{\mu\nu}$ に伴い

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = \frac{\partial f}{\partial g_{\mu\nu}} (-g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu}) \delta g^{\alpha\beta}$$

だけ変化する。一方 $g_{\mu\nu}$ の変分 $\delta g_{\mu\nu}$ に伴い $g^{\alpha\beta}$ が $\delta g^{\alpha\beta}$ だけ変化したとすると、これは $\delta f = \frac{\partial f}{\partial g^{\alpha\beta}} \delta g^{\alpha\beta}$ とも書けるので、これらを等置して

$$\frac{\partial f}{\partial g^{\alpha\beta}} = -g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \frac{\partial f}{\partial g_{\mu\nu}} \quad (666)$$

を得る。

■粒子と電磁場に対するエネルギー・運動量テンソル (55) の導出 以上を踏まえ、式 (71) で与えられる Λ に対して粒子と電磁場のエネルギー・運動量テンソル (55) を計算しよう。まず

$$T_{(m)\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial \Lambda_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \Lambda_m}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right\} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \Lambda_m}{\partial g^{\mu\nu}}$$

を考える。 $g_{\alpha\beta}$ による微分が $g_{\beta\alpha}$ を固定して行われることに注意すると

$$\frac{\partial \Lambda_m}{\partial g_{\alpha\beta}} = -\sum_a m_a c^2 \int \frac{\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu \dot{x}^\mu(a) \dot{x}^\nu(a)}{2\sqrt{g_{\rho\sigma}(x) \dot{x}^\rho(a) \dot{x}^\sigma(a)}} \delta^4(x - x(a)) d\tau_a = -\frac{1}{2} \sum_a m_a c \int \dot{x}^\alpha(a) \dot{x}^\beta(a) \delta^4(x - x(a)) d\tau_a$$

($\delta^4(x - x(a))$ があるので $\sqrt{g_{\rho\sigma}(x) \dot{x}^\rho(a) \dot{x}^\sigma(a)} \rightarrow \sqrt{g_{\rho\sigma}(x(a)) \dot{x}^\rho(a) \dot{x}^\sigma(a)} = c$ とできる),

$$\therefore \frac{\partial \Lambda_m}{\partial g^{\mu\nu}} = -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \frac{\partial \Lambda_m}{\partial g_{\alpha\beta}} \quad (\because \text{式 (666)})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_a m_a c \int \dot{x}_\mu(a) \dot{x}_\nu(a) \delta^4(x - x(a)) d\tau_a$$

なので

$$T_{(m)\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \Lambda_m}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_a m_a c \int \dot{x}_\mu(a) \dot{x}_\nu(a) \delta^4(x - x(a)) d\tau_a$$

となる.

次に Λ_{mf} は計量テンソルとその微分に依らないので

$$T_{(mf)\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial \Lambda_{mf}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \Lambda_{mf}}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right\} = 0$$

となる.

さらに

$$T_{(f)\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial \Lambda_f}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \Lambda_f}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right\} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \Lambda_f}{\partial g^{\mu\nu}}$$

を考える. 再び $g^{\mu\nu}$ による微分が $g^{\mu\nu}$ を固定して行われることに注意すると

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \sqrt{-g} \frac{\partial g^{\alpha\gamma}}{\partial g^{\mu\nu}} g^{\beta\delta} &= F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \sqrt{-g} \delta^\alpha_\mu \delta^\gamma_\nu g^{\beta\delta} = F_{\mu\beta} F_\nu^\beta \sqrt{-g}, \\ F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \sqrt{-g} g^{\alpha\gamma} \frac{\partial g^{\beta\delta}}{\partial g^{\mu\nu}} &= F_{\alpha\mu} F_\nu^\alpha \sqrt{-g} = F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha \sqrt{-g} \\ &(\because F_{\alpha\mu} = -F_{\mu\alpha}, F_\nu^\alpha = g^{\alpha\beta} F_{\beta\nu} = -g^{\alpha\beta} F_{\nu\beta} = -F_\nu^\alpha), \\ F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} &= F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \left(-\frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}} \right) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} (-gg_{\lambda\rho} \delta^\lambda_\mu \delta^\rho_\nu) \quad (\because \text{式 (16)} : dg = -gg_{\lambda\rho} dg^{\lambda\rho}) \\ &= -\frac{\sqrt{-g}}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

なので

$$T_{(f)\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(-F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \right)$$

となる.

以上の $T_{(m)\mu\nu}, T_{(f)\mu\nu}$ を用いて

$$T_{\mu\nu} = T_{(m)\mu\nu} + T_{(f)\mu\nu} : (72)$$

と書ける ($T_{\mu\nu(mf)} = 0$).

■物質のエネルギー・運動量テンソル (74) の導出 物質のエネルギー・運動量テンソル (73) は

$$\begin{aligned} T^{(m)\mu\nu}(x) &= \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \sum_a m_a c \int \dot{x}^\mu(a) \dot{x}^\nu(a) \delta^4(x - x(a)) d\tau_a \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \sum_a m_a c \int \dot{x}^\mu(a) \frac{dx^\nu(a)}{dx^0(a)} \delta^4(x - x(a)) dx^0(a) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \sum_a m_a \dot{x}^\mu(a) \frac{dx^\nu(a)}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \sum_a m_a \dot{x}^\mu(a) \dot{x}^\nu(a) \sqrt{1 - \left(\frac{v_a}{c}\right)^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) : (74) \end{aligned}$$

と書き換えられる.

7.5 粒子と場の運動方程式 (補足)

1.5 節に挙げた運動方程式を最小作用原理から導く．ここではその際，Euler-Lagrange 方程式 (35),(37) を用いるのではなく，作用 (69) の変分を直接計算する方法をとることにする．

$$\begin{aligned} S_m &\equiv - \sum mc \int ds, \\ S_{mf} &\equiv - \sum \frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu, \\ S_f &\equiv - \frac{1}{16\pi c} \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \\ S_g &\equiv - \frac{c^3}{16\pi k} \int G \sqrt{-g} d^4x \end{aligned}$$

とおき，作用 (69) を $S = S_m + S_{mf} + S_f + S_g$ と書く． $S'_m \equiv S_m + S_{mf} + S_f$ とおく．

7.5.1 粒子の運動方程式 (補足)

時空における粒子の実際の軌道は作用の停留値 (極値) を与えることから，粒子の軌道の変分に伴い

$$0 = \delta S = \delta S_m + \delta S_{mf}.$$

ここで変分 δS_m は次のように書き表せる [3, p.276].

$$\begin{aligned} 2ds\delta(ds) &= \delta(ds^2) = \delta(g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu) = dx^\mu dx^\nu (\partial_\lambda g_{\mu\nu}) \delta x^\lambda + 2g_{\mu\nu} dx^\mu \delta(dx^\nu) \\ & \quad (\because g_{\mu\nu} \text{ は時空における粒子の位置で評価している. } g_{\mu\nu} dx^\nu \delta(dx^\mu) = g_{\nu\mu} dx^\mu \delta(dx^\nu) = g_{\mu\nu} dx^\mu \delta(dx^\nu)), \\ \therefore \delta S_m &= - \sum mc \int \delta(ds) \\ &= - \sum mc \int \left\{ \frac{1}{2} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} (\partial_\lambda g_{\mu\nu}) \delta x^\lambda + g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \delta \left(\frac{dx^\nu}{ds} \right) \right\} ds \\ &= - \sum mc \int \left\{ \frac{1}{2} u^\mu u^\nu (\partial_\lambda g_{\mu\nu}) - \frac{d}{ds} (g_{\mu\lambda} u^\mu) \right\} \delta x^\lambda ds \\ & \quad \left(\frac{dx^\mu}{ds} \equiv u^\mu \text{ と改め, 境界で } \delta x^\nu = 0 \text{ に注意して部分積分し, 第 2 項のダミ一添字を } \nu \rightarrow \lambda \text{ と改めた} \right) \\ &= \sum mc \int \left\{ g_{\mu\lambda} \frac{du^\mu}{ds} + \frac{1}{2} u^\mu u^\nu (\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \right\} \delta x^\lambda ds \\ & \quad \left(\because u^\mu \frac{d}{ds} g_{\mu\lambda} = u^\mu u^\nu \partial_\nu g_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} u^\mu u^\nu (\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\nu\lambda}) \right) \\ &= \sum mc \int \left(g_{\mu\lambda} \frac{du^\mu}{ds} + u^\mu u^\nu \Gamma_{\lambda,\mu\nu} \right) \delta x^\lambda ds \equiv \sum mc \int \frac{Du_\lambda}{ds} \delta x^\lambda ds. \quad (\because \text{式 (15)}) \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} Du_\lambda &\equiv \left(g_{\mu\lambda} \frac{du^\mu}{ds} + u^\alpha u^\beta \Gamma_{\lambda,\alpha\beta} \right) ds \\ &= g_{\mu\lambda} (\partial_\beta u^\mu + u^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\mu) u^\beta ds \quad \left(\because \Gamma_{\lambda,\alpha\beta} = g_{\mu\lambda} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu, \quad \frac{du^\mu}{ds} = u^\beta \partial_\beta u^\mu \right) \\ &= g_{\mu\lambda} u^\mu_{;\beta} dx^\beta = g_{\mu\lambda} Du^\mu \end{aligned}$$

は Du^μ を共変ベクトルにしたものである。 Du^μ は粒子が世界線に沿って ds 変位したときの 4 元速度 \vec{u} の変化 $d\vec{u}$ の、変位前の点での μ 番目の成分である (1.1.8 節参照)。

また特殊相対性理論における計算 [3, pp.67–68] を一般化して、変分 δS_{mf} を次のように書き表せる。

$$\begin{aligned}\delta S_{\text{mf}} &= - \sum \frac{e}{c} \int \{A_\mu \delta(dx^\mu) + (\delta A_\mu) dx^\mu\} \\ &= - \sum \frac{e}{c} \int \{(-dA_\mu) \delta x^\mu + (\delta A_\nu) dx^\nu\} \\ &\quad (\text{境界で } \delta x^\mu = 0 \text{ に注意して部分積分した}) \\ &= - \sum \frac{e}{c} \int \{(-\partial_\nu A_\mu) dx^\nu \delta x^\mu + (\partial_\mu A_\nu) \delta x^\mu dx^\nu\} \\ &\quad (\text{場 } A_\mu \text{ は時空における粒子の位置で評価している}) \\ &= - \sum \frac{e}{c} \int F_{\mu\nu} u^\nu \delta x^\mu ds.\end{aligned}$$

以上より

$$\sum \int \left(mc \frac{Du_\mu}{ds} - \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu \right) \delta x^\mu ds = 0$$

となり、これが任意の変分 δx^μ に対して成り立つことから粒子の運動方程式 (77):

$$mc \frac{Du^\mu}{ds} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu$$

を得る。

■重力場の中の粒子 (補足) 作用 (80):

$$S = \int L dt, \quad L \equiv \sum \left(-mc^2 + \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - m\phi \right)$$

は非相対論的な粒子の運動方程式 (79): $\dot{\mathbf{v}} = -\nabla\phi$ を再現する。実際 $L = \sum (-mc^2 + \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - m\phi)$ に対して Lagrange 方程式 (35) を書き下すと

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = m\dot{\mathbf{v}} + m\nabla\phi, \quad \therefore (79) : \dot{\mathbf{v}} = -\nabla\phi$$

となる。

非相対論的極限 $\phi/c^2 \ll 1, v/c \ll 1$ で作用 $S = S_{\text{m}} = -\sum mc \int ds$ が作用 (80) に移行するためには

$$\begin{aligned}ds &= cdt \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \right)^2 + \frac{\phi}{c^2} \right\}, \\ \therefore ds^2 &= (cdt)^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \right)^2 + \frac{2\phi}{c^2} + O \left(\left(\frac{\mathbf{v}}{c} \right)^4, \left(\frac{\phi}{c^2} \right)^2, \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \right)^2 \frac{\phi}{c^2} \right) \right\} \\ &\simeq \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) (cdt)^2 - d\mathbf{r}^2\end{aligned}$$

であれば良いから式 (81): $g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$ を得る [3, p.275].

7.5.2 電磁場の方程式すなわち Maxwell 方程式 (補足)

場 $j^\mu(x)$ を用いると,

$$S_{\text{mf}} = -\frac{1}{c^2} \int j^\mu(x) A_\mu(x) \sqrt{-g(x)} d^4x : (70)$$

と表されることを思い出そう. また場 A_μ の変分に伴う $g_{\mu\nu}$ の変分は $\delta g_{\mu\nu} = 0$ なので

$$F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = F^{\mu\nu} \delta(g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} F^{\rho\sigma}) = (F^{\mu\nu} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma}) \delta F^{\rho\sigma} = F_{\rho\sigma} \delta F^{\rho\sigma} = F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu}$$

となる.

以上のことに注意すると, 実際の場合 A_μ の時間変化は作用の停留値 (極値) を与えることから, 場 A_μ の変分に伴う作用の変分は次式で表される.

$$\begin{aligned} 0 = \delta S = \delta(S_{\text{mf}} + S_{\text{f}}) &= -\frac{1}{c} \int \left(\frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} d^4x \\ &= -\frac{1}{c} \int \left\{ \frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) \right\} \sqrt{-g} d^4x \\ &= -\frac{1}{c} \int \left\{ \left(\frac{1}{c} j^\mu - \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \partial_\nu \right) \delta A_\mu \right\} \sqrt{-g} d^4x \\ &\quad (\because F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu = F^{\nu\mu} \partial_\nu \delta A_\mu = -F^{\mu\nu} \partial_\nu \delta A_\mu) \\ &= -\frac{1}{c} \int \left\{ \frac{1}{c} j^\mu \sqrt{-g} + \frac{1}{4\pi} \partial_\nu (F^{\mu\nu} \sqrt{-g}) \right\} \delta A_\mu d^4x \\ &\quad (\text{境界で } \delta A_\mu = 0 \text{ に注意して部分積分した}) \\ &= -\frac{1}{c} \int \left(\frac{1}{c} j^\mu + \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu}{}_{;\nu} \right) \delta A_\mu \sqrt{-g} d^4x \\ &\quad (\because \text{式 (21)} : \partial_\nu (F^{\mu\nu} \sqrt{-g}) = \sqrt{-g} F^{\mu\nu}{}_{;\nu}). \end{aligned}$$

ここでの計算は特殊相対性理論における計算 [3, p.83] を参考にした. これが任意の変分 δA_μ に対して成り立つことから, 重力場中の Maxwell 方程式 (82):

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$$

を得る.

■ Maxwell 方程式から連続の式 (83) の導出 Maxwell 方程式 (82): $F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$, および反対称テンソル $A_{\mu\nu}$ の 4 元発散に対する一般公式 (21):

$$A^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (A^{\mu\nu} \sqrt{-g})$$

を用いると,

$$\partial_\mu (j^\mu \sqrt{-g}) = -\frac{c}{4\pi} \partial_\mu (F^{\mu\nu}{}_{;\nu} \sqrt{-g}) = -\frac{c}{4\pi} \partial_\mu \partial_\nu (F^{\mu\nu} \sqrt{-g}) = 0 : (83)$$

となる. 最後の等号では添字 μ, ν について $\partial_\mu \partial_\nu$ は対称, $F^{\mu\nu} \sqrt{-g}$ は反対称なので $\partial_\mu \partial_\nu (F^{\mu\nu} \sqrt{-g}) = 0$ となることを用いた (式 (6) の箇所を参照).

7.5.3 重力場の方程式すなわち Einstein 方程式 (補足)

実際の場合 $g_{\mu\nu}$ の時間変化は作用の停留値 (極値) を与えることから, 場 $g_{\mu\nu}$ の変分に伴い

$$0 = \delta S = \delta(S'_m + S_g), \quad S'_m \equiv S_m + S_{mf} + S_f.$$

ここで 1.4.3 節で述べたように, $S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \int G\sqrt{-g}d^4x$ の変分を $\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \delta \int R\sqrt{-g}d^4x$ と計算できることを示す.

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}R &= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\partial_\rho\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\rho} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\sigma}) \quad (\because \text{定義式 (26), (27)}) \\ &= \partial_\rho(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\nu}) - \partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\rho}) - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\partial_\rho(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) + \Gamma^\rho_{\mu\rho}\partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) \\ &\quad + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\sigma}) \end{aligned}$$

において

$$\begin{aligned} \Gamma^\rho_{\mu\nu}\partial_\rho(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) &= \Gamma^\rho_{\mu\nu} \left(\frac{-\partial_\rho g}{2\sqrt{-g}}g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\partial_\rho g^{\mu\nu} \right) \\ &= \Gamma^\rho_{\mu\nu}\sqrt{-g}(\Gamma^\sigma_{\rho\sigma}g^{\mu\nu} - \Gamma^\mu_{\sigma\rho}g^{\sigma\nu} - \Gamma^\nu_{\sigma\rho}g^{\mu\sigma}) \\ &\quad (\text{第 1 項に対して式 (17) を, 第 2 項に対して式 (19) を用いた}) \\ &= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} - 2\Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\sigma}) \\ &\quad (\text{第 2 項でダミ一添字を } \mu \leftrightarrow \sigma \text{ と入れ換え,} \\ &\quad \text{第 3 項でダミ一添字を } \rho \rightarrow \sigma, \sigma \rightarrow \nu, \nu \rightarrow \rho \text{ と巡回置換した}), \\ \Gamma^\rho_{\mu\rho}\partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) &= -\sqrt{-g}g^{\nu\sigma}\Gamma^\mu_{\nu\sigma}\Gamma^\rho_{\mu\rho} \quad (\because \text{式 (18)}) \\ &= -\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} \\ &\quad (\text{ダミ一添字を } \mu \rightarrow \rho, \rho \rightarrow \sigma, \sigma \rightarrow \nu, \nu \rightarrow \mu \text{ と巡回置換した}) \end{aligned}$$

なので,

$$\sqrt{-g}R = \partial_\mu(\sqrt{-g}W^\mu) + \sqrt{-g}G, \quad \begin{cases} W^\mu \equiv g^{\nu\rho}\Gamma^\mu_{\nu\rho} - g^{\rho\mu}\Gamma^\nu_{\rho\nu} \\ G \equiv g^{\mu\nu}(\Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma}) \end{cases}$$

を得る.

4 元発散 $\partial_\mu(\sqrt{-g}W^\mu)$ の積分は境界上の積分に置き換わる. 最小作用原理において境界での場の値は与えられているため, これは変分をとると落ちる. 以上より

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \delta \int G\sqrt{-g}d^4x = -\frac{c^3}{16\pi k} \delta \int R\sqrt{-g}d^4x$$

が示された.

そこで δS_g を次のように計算する.

$$\begin{aligned} &\delta \int R\sqrt{-g}d^4x \\ &= \int (R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} + R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\delta\sqrt{-g} + g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu})d^4x \\ &\quad (\because R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) \\ &= \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) \delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x + \int g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\nu})\sqrt{-g}d^4x \\ &\quad \left(\because \text{式 (16)} : dg = -gg_{\mu\nu}dg^{\mu\nu} \text{ より } \delta\sqrt{-g} = -\frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \right). \end{aligned}$$

最右辺第2項を考える。局所慣性系では $\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = 0, \partial_\lambda g^{\mu\nu} = 0$ だから (1.1.3 節, 1.1.9 節参照),

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} (\partial_\lambda \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda}) \\ &= \partial_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma^\nu_{\mu\nu}) \\ &\quad (\text{第2項でダミー添字を } \nu \leftrightarrow \lambda \text{ と入れ換えた}) \\ &\equiv \partial_\lambda w^\lambda. \end{aligned}$$

ここで 1.1.10 節で指摘したように $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ はテンソルではないけれども, 変分 $\delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ は (1,2) テンソルであることに注意すると, w^λ は反変ベクトルとなることが分かる (1.1.1 節参照). 局所慣性系で $\partial_\lambda w^\lambda = w^\lambda_{;\lambda}$ なので $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = w^\lambda_{;\lambda}$ となる. これは両辺がどちらもスカラーだから他の任意の座標系でも成り立つ関係式である (1.1.1 節参照). 式 (20): $w^\mu_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} w^\mu)$ より

$$\int g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4x = \int \partial_\mu (\sqrt{-g} w^\mu) d^4x$$

となり, これは境界上の積分に置き換わる. ここで w^μ は場の変分を含んでおり, 場の変分は境界上でゼロだから, この境界上の積分は消える.

一方 $S'_m = \frac{1}{c} \int \Lambda d^4x$ と書くと, 変分 $g^{\mu\nu}$ に伴う S'_m の変化は

$$\begin{aligned} \delta S'_m &= \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \delta (\partial_\lambda g^{\mu\nu}) \right\} d^4x \\ &= \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right\} \delta g^{\mu\nu} d^4x \\ &\quad (\text{境界で } \delta g^{\mu\nu} = 0 \text{ に注意して部分積分した}) \\ &\equiv \frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (\because \text{式 (55)}) \end{aligned}$$

以上より

$$0 = \delta S_g + \delta S'_m = -\frac{c^3}{16\pi k} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \frac{8\pi k}{c^4} T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x$$

となり, これが任意の変分 $\delta g^{\mu\nu}$ に対して成り立つことから Einstein 方程式 (84):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi k}{c^4} T_{\mu\nu}$$

を得る.

7.6 特殊相対性理論における運動方程式 (補足)

7.6.1 荷電粒子の4元運動量 (補足)

■Hamiltonian(85) の導出 求める Hamiltonian をひとまず速度 \mathbf{v} によって表すと,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_m + \mathcal{H}_{mf} &= \sum \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} - (L_m + L_{mf}) \\ &= \sum \left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \mathbf{v} + \sum mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - \sum \left(\frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi \right) \\ &= \sum \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + e\phi \right) \end{aligned}$$

となる。ここで粒子の力学的運動量の表式

$$\mathbf{p} \equiv \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

を粒子の速度について逆に解くと $\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{p^2}{m^2c^2 + p^2}$ となるので, Hamiltonian は運動量 \mathbf{p} を用いて式 (85):

$$\mathcal{H}_m + \mathcal{H}_{mf} = \sum \left(\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} + e\phi \right)$$

のように書き換えられる。

■電磁場の運動量密度 (91): $\pi^\mu = -\frac{1}{4\pi c} F^{0\mu}$ の導出 1.6.2 節で述べたように, Lagrangian 密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (\dot{A}_\mu \text{ を含まない項})$$

からは電磁場に共役な場の式 (91): $\pi^\mu = -\frac{1}{4\pi c} F^{0\mu}$ が導かれる。実際,

$$\pi^\lambda \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\lambda} = -\frac{1}{16\pi c} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

において

$$F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}) = (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu}) \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} F_{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} F_{\alpha\beta}$$

に注意すると

$$\begin{aligned} \pi^\lambda &= -2 \times \frac{1}{16\pi c} \left\{ \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} F_{\mu\nu} \right\} F^{\mu\nu} = -2 \times \frac{1}{16\pi c} \left\{ \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \right\} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= -2 \times \frac{1}{16\pi c} (\delta^0_\mu \delta^\lambda_\nu - \delta^0_\nu \delta^\lambda_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= -\frac{1}{4\pi c} (\partial^0 A^\lambda - \partial^\lambda A^0) = -\frac{1}{4\pi c} F^{0\lambda} : (91) \end{aligned}$$

を得る。

■Hamiltonian(92) の導出

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_f &= \int dV \pi^\mu \dot{A}_\mu - L_f \\ &= \frac{1}{4\pi} \int dV \left(F^{\mu 0} \partial_0 A_\mu + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \quad \left(\because \pi^\mu = \frac{1}{4\pi c} F^{\mu 0} : (91) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int dV \left(\frac{E^2 + B^2}{2} + \mathbf{E} \cdot \nabla \phi \right) \\ &\quad \left(\because F^{\mu 0} \partial_0 A_\mu = E_i (-\partial_0 A_i) = \mathbf{E} \cdot (\mathbf{E} + \nabla \phi), F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(B^2 - E^2) \right) \\ &= \int dV \frac{E^2 + B^2}{8\pi} - \sum e\phi \quad \left(\because \text{部分積分により } \mathbf{E} \cdot \nabla \phi \rightarrow -(\nabla \cdot \mathbf{E})\phi = -4\pi\rho\phi \right) \end{aligned}$$

7.6.2 相対論的力学 (補足)

■4元力 g^μ と3次元的な力 \mathbf{f} の関係 (94) の導出 4元力を $g^\mu = (g^0, \mathbf{g})$ と書くと、まず空間成分について

$$\mathbf{g} = \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{d\mathbf{p}/dt}{c\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{\mathbf{f}}{c\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

である。次に直交性

$$0 = mu_\mu a^\mu = u_\mu g^\mu = u^0 g^0 - u^i g^i, \quad \therefore u^0 g^0 = u^i g^i$$

(空間成分 $i = 1, 2, 3$ について和をとる) において

$$u^0 g^0 = \frac{c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} g^0, \quad u^\alpha g^\alpha = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \cdot \frac{\mathbf{f}}{c\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

なので、 g^0 の表式

$$g^0 = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{c^2 \sqrt{1-(v/c)^2}}$$

を得る。以上より4元力の成分は

$$g^\mu = \left(\frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{c^2 \sqrt{1-(v/c)^2}}, \frac{\mathbf{f}}{c\sqrt{1-(v/c)^2}} \right) : (94)$$

とまとめられる。

7.6.3 平坦な時空での電磁場 (補足)

■Kronecker のデルタと Levi-Civita 記号の関係式 (97) の確認 式 (97) を確かめるには、次のことに気付けば良い。まず式 (97) 左辺は添字 i, k, l および p, r, s について反対称である。一方、行列の行の入れ替えと列の入れ替えに対して行列式は符号を変えるから、式 (97) 右辺もまた添字 i, k, l および p, r, s について反対称である。よって相異なる添字のある組 i, k, l および p, r, s に対して式 (97) が成り立っていることを確かめれば、任意の添字の組 i, k, l および p, r, s に対して式 (97) が成り立つことになる。そこで例えば $(i, k, l) = (p, r, s) = (1, 2, 3)$ とすると

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{prs} = 1 \times 1 = 1, \quad \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{ir} & \delta_{is} \\ \delta_{kp} & \delta_{kr} & \delta_{ks} \\ \delta_{lp} & \delta_{lr} & \delta_{ls} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

だから成り立っている。

■慣性系における電磁場テンソルの成分 (100) の導出 電場の式 (61): $E^i = \gamma^{ij} F_{0j}$ は

$$F^{0i} = -E^i, \quad \therefore F^{i0} = E^i : (98)$$

を意味する。よって磁束密度の式 (62): $B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} F_{jk}$ が式 (99): $F^{jk} = F_{jk} = -\varepsilon^{ijk} B^i$ と書き換えられることを考え合わせると、電磁場テンソルの表式 (100) を得る。実際、式 (99) は次のように確かめられる。

$$-\varepsilon^{ijk} B^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ilm} F_{lm} = \frac{1}{2}(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})F_{lm} = \frac{1}{2}(F_{jk} - F_{kj}) = F_{jk}.$$

■場とポテンシャルの関係 (101), (102) の導出 慣性系で電磁場が式 (101), 式 (102) に従って電磁ポテンシャルから導かれることを確かめる. 電場の式 (61): $E^i = \gamma^{ij} F_{0j}$ は

$$E^i = F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = -\partial_0 A^i - \partial_i A^0, \quad \therefore \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi : (101)$$

となる. また磁束密度の式 (62): $B^i = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon^{ijk}}{\sqrt{\gamma}} F_{jk}$ は

$$B^i = -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{jk} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} (\partial_j A_k - \partial_k A_j) = -\varepsilon^{ijk} \partial_j A_k = \varepsilon^{ijk} \partial_j A^k, \quad \therefore \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} : (102)$$

となる.

7.6.4 荷電粒子の運動方程式 (補足)

■電磁場と相互作用する粒子の運動方程式 (103) の空間成分と時間成分 運動方程式 (103): $mc \frac{du^\mu}{ds} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu$ の両辺はそれぞれ

$$mc \frac{du^\mu}{ds} = \frac{dp^\mu}{ds} = \frac{1}{c} \frac{dp^\mu}{d\tau}, \quad \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu = \frac{e}{c^2} F^{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{d\tau}$$

と書き換えられるので, これらに $d\tau/dt$ を掛けて等置すると

$$\frac{dp^\mu}{dt} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{dt}$$

が得られる.

空間成分をとると

$$\begin{aligned} \frac{dp^i}{dt} &= \frac{e}{c} F^{i\nu} \frac{dx_\nu}{dt} = e F^{i0} - \frac{e}{c} F^{ij} \frac{dx^j}{dt} \\ &= e E^i + \frac{e}{c} \varepsilon^{kij} B^k \frac{dx^j}{dt} \quad (\because F^{i0} = E^i, F^{ij} = -\varepsilon^{kij} B^k) \\ &= e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)^i \end{aligned}$$

となるので, 運動方程式 (104):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$$

を得る.

また上式の両辺の時間成分はそれぞれ

$$\frac{dp^0}{dt} = \frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}_{\text{kin}}}{dt}, \quad \frac{e}{c} F^{0i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{e}{c} (-E^i) \left(-\frac{dx^i}{dt} \right) = \frac{e}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$$

と書き換えられるので, これらを等置すると仕事とエネルギーの関係 (104):

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{kin}}}{dt} = e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$$

が導かれる.

7.6.5 場の方程式 (補足)

■電磁場で書き表した Maxwell 方程式 (補足) 源を含まない場の方程式 (109): $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ が恒等的に成り立つことは, 式 (6) により

$$[\nabla \times \nabla \phi]^i = \varepsilon^{ijk} \partial_j \partial_k \phi = 0, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \varepsilon^{ijk} \partial_i \partial_j A^k = 0$$

となることから分かる. これが電磁場テンソルに対する恒等式 (110):

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$$

と等価であることを説明しよう. 式 (110) の左辺は 3 つの添字に関して完全反対称なので, ゼロでない独立な成分は

$$(\lambda, \mu, \nu) = (0, 1, 2), (0, 1, 3), (0, 2, 3), (1, 2, 3)$$

の 4 通りに限られる. 電磁場テンソルの成分を代入すれば, 上の 4 成分に対して式 (110) が源を含まない Maxwell 方程式 (109) を再現することを確認される.

重力が存在する場合への一般化

$$F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\lambda\mu;\nu} + F_{\nu\lambda;\mu} = 0$$

について, 共変微分

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu;\lambda} &= \partial_\lambda F_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} F_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} F_{\alpha\mu}, \\ F_{\lambda\mu;\nu} &= \partial_\nu F_{\lambda\mu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu} F_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} F_{\lambda\alpha}, \\ F_{\nu\lambda;\mu} &= \partial_\mu F_{\nu\lambda} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} F_{\alpha\lambda} - \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} F_{\nu\alpha} \end{aligned}$$

を辺々足すと Christoffel 記号を含む付加的な項は相殺して,

$$F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\lambda\mu;\nu} + F_{\nu\lambda;\mu} = \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu}$$

が恒等的に成り立つ.

次に対偶テンソルを用いた式 (111) への書き換えに先立って, 対偶テンソルの説明を行っておく.

対偶テンソル 添字に関して反対称なテンソルに対しては, 対偶 (デュアル) なテンソルが定義される. 例えば 3 階の反対称テンソル $f_{\mu\nu\rho}$ の対偶テンソルは

$$f^{*\lambda} = \frac{1}{3!} \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} f_{\mu\nu\rho}$$

で定義される. 反対称性より右辺の和の各項がゼロでない値をとり得るのは, ダミー添字 μ, ν, ρ が相異なる値をとる場合だけである. よって例として $\lambda = 0$ の場合を考えると, $(1, 2, 3)$ を入れ替えて得られる 3! 個の添字の組 (μ, ν, ρ) を持つ項のみを考えれば良い. そのような組 (μ, ν, ρ) は $(1, 2, 3)$ の偶置換か奇置換のいずれかであり, $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ と $f_{\mu\nu\rho}$ のそれぞれの添字に関する反対称性より

$$\begin{aligned} \text{偶置換のとき} \quad \varepsilon^{0\mu\nu\rho} &= +\varepsilon^{0123} = +1, & f_{\mu\nu\rho} &= +f_{123}, \\ \text{奇置換のとき} \quad \varepsilon^{0\mu\nu\rho} &= -\varepsilon^{0123} = -1, & f_{\mu\nu\rho} &= -f_{123} \end{aligned}$$

となるので, 3! 個の項は全て f_{123} に等しいことが分かる. そこでそれらの和を $1/3!$ で割ったものを対偶テンソル f^{*0} と定義しており, 具体的には上の関係は

$$f^{*0} = f_{123}, \quad f^{*1} = -f_{230}, \quad f^{*2} = f_{301}, \quad f^{*3} = -f_{012}$$

を与えることが分かる。

3 階以外の反対称テンソルに対偶なテンソルも同様に定義される [4, pp.62–64]。我々は 2 階反対称テンソルの対偶テンソルの例を、電磁場テンソルについて既に見ている：

$$B^i = -\frac{1}{2!}\varepsilon^{ijk}F_{jk}, \quad \therefore F_{ij} = -\varepsilon_{ijk}B^k.$$

(2 式は Levi-Civita 記号の縮約公式 (97) で関係付けられている。) このように電磁場テンソルの対偶テンソル B^i を磁場成分とすれば、ベクトル・ポテンシャルの回転 $F_{jk} = \partial_j A_k - \partial_k A_j$ が磁場成分を与えること

$$B^1 = -F_{23}, \quad B^2 = -F_{31}, \quad B^3 = -F_{12}$$

(ただし $A^i = -A_i$ に注意) をまとめて表現できる。

式 (110) が対偶テンソルを用いて式 (111): $F^{*\mu\nu} = 0$ のように書き換えられることは次のように確かめられる。

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{3!}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\nu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\nu} + \partial_\sigma F_{\nu\rho}) \\ &= \frac{1}{3!}(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} + \varepsilon^{\mu\sigma\nu\rho} + \varepsilon^{\mu\rho\sigma\nu})\partial_\nu F_{\rho\sigma} \\ &= \frac{1}{2!}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} \\ &= \partial_\nu F^{*\mu\nu}. \end{aligned}$$

最後に電磁場を用いて Maxwell 方程式 (106): $\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c}j^\mu$ を具体的に書き下すと

$$-4\pi\rho = -\frac{4\pi}{c}j^0 = \partial_\mu F^{0\mu} = \partial_i F^{0i} = -\partial_i E^i \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho : (112),$$

$$-\frac{4\pi}{c}j^i = \partial_\mu F^{i\mu} = \partial_0 F^{i0} + \partial_j F^{ij} = \partial_0 E^i - \varepsilon^{ijk}\partial_j B^k \quad (\because \text{式 (99)}) \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} : (113)$$

となる。

7.6.6 電磁場のエネルギーの密度と流れ (補足)

■式 (114) の導出 Maxwell 方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$$

(1.6.7 節) より,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2 + B^2}{8\pi} \right) &= \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \\ &= -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \frac{c}{4\pi} \{ \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \} \\ &= -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \nabla \cdot \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} \equiv \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} : (114) \end{aligned}$$

を得る。最後の等号ではナブラの公式

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \partial_i \varepsilon_{ijk} a_j b_k = \varepsilon_{ijk} k_b \partial_i a_j + a_j \varepsilon_{ijk} \partial_i b_k = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \quad (\because \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik})$$

を用いた。

■式 (115) の導出 電場のする仕事と粒子系の運動エネルギーの関係 (115):

$$\int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV = \sum e \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\text{kin}}$$

について, 第 1 の等号は荷電粒子系の電流密度の表式 (67):

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))$$

による. 第 2 の等号は各粒子に対する仕事とエネルギーの関係 (105) による.

7.6.7 電磁場のエネルギー・運動量テンソル (補足)

■公式 (43) による電磁場のエネルギー・運動量テンソル (117) の導出 自由電磁場 A_ρ とその Lagrangian 密度 $\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ にエネルギー・運動量テンソルの公式 (43) を適用すると,

$$T^{(\text{f})}{}_{\mu}{}^{\nu} = (\partial_\mu A_\rho) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\rho)} - \delta_\mu{}^\nu \mathcal{L}$$

と書ける. 導関数 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\rho)}$ の計算は, 電磁場の運動量密度 (91): $\pi^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -\frac{1}{4\pi c} F^{0\mu}$ の導出 (7.6.1 節) と同様に行うことができる.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\rho)} = -\frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\rho)} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = -\frac{1}{8\pi} F^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\rho)} F_{\alpha\beta} = -\frac{1}{8\pi} F^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \delta_\beta^\nu - \partial_\beta \delta_\alpha^\nu) = -\frac{1}{4\pi} F^{\nu\rho}.$$

よってエネルギー・運動量テンソル

$$T^{(\text{f})}{}_{\mu}{}^{\nu} = -\frac{1}{4\pi} (\partial_\mu A_\rho) F^{\nu\rho} + \frac{1}{16\pi} \delta_\mu{}^\nu F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}, \quad \therefore T^{(\text{f})\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \partial^\mu A^\rho F^\nu{}_\rho + \frac{1}{16\pi} \eta^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} : (117)$$

を得る*232.

■エネルギー・運動量テンソル (118) が電磁場の正しいエネルギー密度と流束を与えることの確認

$$F^{0i} = -E_i, \quad F^{ij} = \varepsilon_{ijk} B_k$$

を思い出そう. このとき

$$F_{ij} F^{ij} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijl} B_k B_l = 2\delta_{kl} B_k B_l = 2B^2, \quad F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 2F_{0i} F^{0i} + F_{ij} F^{ij} = 2(B^2 - E^2)$$

の関係があることに注意しておく.

さて, 式 (118) のエネルギー・運動量テンソルに対して, 成分 $T^{(\text{f})00}$ は電磁場のエネルギー密度を, 成分 $T^{(\text{f})0i}$ は (電磁場のエネルギー流束) $_i/c$ を与えなければならない (1.3.2 節).

実際,

$$-F^0{}_\alpha F^{0\alpha} = F^{0i} F^{0i} = E^2$$

*232 場 A_ρ の代わりに反変成分 A^ρ を用いても, 得られるエネルギー・運動量テンソルは変わらない. 実際,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A^\rho)} &= \frac{\partial (\partial_\alpha A_\beta)}{\partial (\partial_\nu A^\rho)} \frac{\partial}{\partial (\partial_\alpha A_\beta)} = \eta_{\gamma\beta} \delta_\alpha^\nu \delta_\rho^\gamma \frac{\partial}{\partial (\partial_\alpha A_\beta)} = \eta_{\rho\beta} \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\beta)}, \\ \therefore (\partial_\mu A^\rho) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A^\rho)} &= (\partial_\mu A^\rho) \eta_{\rho\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\beta)} = (\partial_\mu A_\beta) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\beta)}. \end{aligned}$$

より

$$T^{(f)00} = \frac{1}{4\pi}(-F^0_\alpha F^{0\alpha}) + \frac{1}{8\pi}(B^2 - E^2) = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2)$$

となる。これは電磁場のエネルギー密度となっている (1.6.8 節)。

また、

$$T^{(f)0i} = -\frac{1}{4\pi}F^{0\alpha}F^i_\alpha = \frac{1}{4\pi}F^{0j}F^{ij} = \frac{1}{4\pi}E_j\varepsilon_{ijk}B_k = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})_i$$

である。これは電磁場の (エネルギーの流れの密度) $_i/c$ となっている (1.6.8 節)。

注意 対称な形に直す前のエネルギー・運動量テンソル (117) に対しては、同じ結果は得られない。

■ Maxwell の応力テンソル (119) の導出 エネルギー・運動量テンソル (118) の空間成分は

$$\begin{aligned} T^{(f)ij} &= \frac{1}{4\pi} \left(-F^{i\alpha}F^j_\alpha + \frac{1}{4}\eta^{ij}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ -F^{i0}F^{j0} + F^{ik}F^{jk} - \frac{1}{2}\delta_{ij}(B^2 - E^2) \right\} \end{aligned}$$

となる。ここに

$$F^{i0}F^{j0} = E_iE_j, \quad F^{ik}F^{jk} = \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jkm}B_lB_m = (\delta_{ij}\delta_{lm} - \delta_{im}\delta_{lj})B_lB_m = \delta_{ij}B^2 - B_iB_j$$

を代入すると、

$$T^{(f)ij} = \frac{1}{4\pi} \left\{ -E_iE_j - B_iB_j + \frac{1}{2}\delta_{ij}(E^2 + B^2) \right\}$$

と書き換えられる。これは Maxwell の応力テンソル (119) に一致している。

■ 粒子と電磁場の系に対するエネルギー・運動量保存則 (121) の導出 まず Maxwell 方程式を用いて、式 (122): $\partial_\nu T^{(f)\mu\nu} = -\frac{1}{c}F^{\mu\nu}j_\nu$ を示そう [3, pp.93-94]。 $T^{(f)\mu\nu}$ の式 (118) を微分すると、

$$\begin{aligned} \partial_\nu T^{(f)\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi}g_{\mu\lambda}\partial_\nu \left(\frac{1}{4}g^{\lambda\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} - F^{\lambda\rho}F^\nu_\rho \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2}\delta_\mu^\nu F^{\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} - F^\nu_\rho\partial_\nu F_\mu^\rho - F_\mu^\rho\partial_\nu F^\nu_\rho \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2}F^{\rho\sigma}\partial_\mu F_{\rho\sigma} - F^{\nu\rho}\partial_\nu F_{\mu\rho} - F_{\mu\rho}\partial_\nu F^{\nu\rho} \right). \end{aligned}$$

ここに Maxwell 方程式 (106), (110):

$$\partial_\mu F_{\rho\sigma} = -\partial_\rho F_{\sigma\mu} - \partial_\sigma F_{\mu\rho}, \quad \partial_\nu F^{\nu\rho} = \frac{4\pi}{c}j^\rho$$

を代入すると、

$$\partial_\nu T^{(f)\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{1}{2}F^{\rho\sigma}\partial_\rho F_{\sigma\mu} - \frac{1}{2}F^{\rho\sigma}\partial_\sigma F_{\mu\rho} - F^{\nu\rho}\partial_\nu F_{\mu\rho} - \frac{4\pi}{c}F_{\mu\rho}j^\rho \right)$$

が得られる。右辺の括弧内で、第 1 項に対し $\sigma \rightarrow \rho, \rho \rightarrow \nu$, 第 2 項に対し $\sigma \rightarrow \nu$ と添字を書き直せば、最初の 3 項は打ち消し合うことが分かる。こうして式 (122):

$$\partial_\nu T^{(f)\mu\nu} = -\frac{1}{c}F^{\mu\nu}j_\nu$$

に到達する.

次に粒子の運動方程式を用いて, 式 (123): $\partial_\nu T^{(m)\mu\nu} = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu$ を示そう [4, p.107]. 粒子系のエネルギー・運動量テンソルを, 式 (73) の形

$$T^{(m)\mu\nu}(x) = \sum_a m_a c \int \dot{x}^\mu(a) \dot{x}^\nu(a) \delta^4(x - x(a)) d\tau_a$$

に書いておくのが便利である. これを微分すると

$$\begin{aligned} \partial_\nu T^{(m)\mu\nu} &= \sum_a m_a c \int \dot{x}^\mu(a) \dot{x}^\nu(a) \{ \partial_\nu \delta^4(x - x(a)) \} d\tau_a \\ &= - \sum_a m_a c \int \dot{x}^\mu(a) \dot{x}^\nu(a) \frac{\partial}{\partial x^\nu(a)} \delta^4(x - x(a)) d\tau_a \\ &= - \sum_a m_a c \int \dot{x}^\mu(a) \frac{d}{d\tau_a} \delta^4(x - x(a)) d\tau_a \\ &= \sum_a m_a c \int \ddot{x}^\mu(a) \delta^4(x - x(a)) d\tau_a \end{aligned}$$

となる. 最右辺に粒子の運動方程式 (103):

$$m_a \ddot{x}^\mu(a) = \frac{e_a}{c} F^{\mu\nu}(x(a)) \dot{x}_\nu(a)$$

を代入し, 被積分関数にデルタ関数 $\delta^4(x - x(a))$ があることに注意して場の強度を $F^{\mu\nu}(x(a)) \rightarrow F^{\mu\nu}(x)$ と置き換え, 粒子の和の外に出すと,

$$\partial_\nu T^{(m)\mu\nu} = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} \left[\sum_a e_a \int \dot{x}_\nu(a) \delta^4(x - x(a)) d\tau_a \right] = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu : (123)$$

を得る (最後の等号は 4 元電流密度の表式 (65) による).

以上の式 (122), 式 (123) を辺々足すと, 粒子と電磁場の系に対するエネルギー・運動量保存則 (121):

$$\partial_\nu (T^{(f)\mu\nu} + T^{(m)\mu\nu}) = 0$$

が導かれる.

7.7 電磁気学 (補足)

以下の関係式は式変形の前後でテンソルの種類が変化しているけれども, 慣性系においては成り立つ.

7.7.1 電磁場の中の粒子 (補足)

■トロコイドの式 (126) の導出 運動方程式 (124): $m\dot{\mathbf{v}} = e(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B})$ を解き, 磁場に垂直な面内で粒子が描くトロコイドの式 (126) を導く. 1.7.1 節で設定した座標系では $\mathbf{E} = (0, E_y, E_z)$, $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ となるから, 運動方程式 (124) は

$$m\ddot{x} = \frac{\dot{y}}{c} B, \quad (667)$$

$$m\ddot{y} = eE_y - \frac{\dot{x}}{c} B \quad (668)$$

となる. $\{(667) + i(668)\}/m$ を作ると $V \equiv \dot{x} + i\dot{y}$ に対する式

$$\dot{V} + i\omega V = i \frac{eE_y}{m}, \quad \omega \equiv \frac{eB}{mc}$$

を得る. 一般解は特殊解 $V = \frac{eE_y}{m\omega} = \frac{cE_y}{B}$ と $\dot{V} + i\omega V = 0$ の解 $V = Ae^{-i\omega t}$ の和 $V = Ae^{-i\omega t} + \frac{cE_y}{B}$ である. 実数 α, δ を用いて積分定数 A を $\alpha e^{i\delta}$ と書くと

$$\dot{x} + i\dot{y} \equiv V = \alpha e^{-i(\omega t - \delta)} + \frac{cE_y}{B}$$

であり, $\delta = \pi$ となるように時間の原点を選ぶと

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha \cos \omega t + \frac{cE_y}{B} \\ \dot{y} = \alpha \sin \omega t \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x = -\frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t + \frac{cE_y}{B} t + \text{const} \\ y = -\frac{\alpha}{\omega} \cos \omega t + \text{const} \end{cases}$$

となる. よって $\frac{\alpha}{\omega} \equiv b$ と改め, 座標軸の原点を適当に選べばこれは式 (126) になる [3, pp.63–64].

■互いに相対速度を持たない慣性系間の電磁場の変換 電場と磁場は電磁場テンソルの成分として変換する. 単に原点の位置と座標軸の方向が異なるだけで, 互いの位置関係が時間変化しない慣性系 (座標 x^μ, x'^μ) の間の座標変換に対しては, R を 3×3 の適当な回転行列 (直交行列, $R^T = R^{-1}$) として Lorentz 変換は

$$x'^\mu = \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) x^\nu, \quad \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

となる. よって電場の変換則は

$$E'_i = F'_{0i} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^0} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^i} F_{\mu\nu} = \delta^\mu_0 (R^{-1})_{\nu i} F_{\mu\nu} = (R^{-1})_{\nu i} F_{0\nu} = R_{i\nu} F_{0\nu} = R_{ij} E_j$$

となる. 磁場の変換則については, 1.6.7 節で説明したように, 磁場が対偶テンソルの成分 $F_{0i}^* = H_i$ として与えられることに注目すると便利である. このとき電場と同様の変換則

$$H'_i = R_{ij} H_j$$

が導かれることは明白である. 以上より電磁場は一般にはテンソル成分として変換し, その際に電場と磁場は“混ざる”けれど, 互いに相対速度を持たない慣性系の間では電場と磁場の各々は, 単に 3 次元空間におけるベクトル成分として変換されることになる. これがたった今一様不変な場における電荷の運動を調べた際に, 暗黙のうちに仮定した, あるいは自明と考えたことである.

7.7.2 静電場・静磁場 (補足)

1.7.2 節で述べたように, 電磁ポテンシャル (127) が Poisson 方程式の特殊解になっていることを確かめる.

■文献 [12, pp.57–60] における証明 位置 \mathbf{x} を中心とする半径 ε の球状の無限小領域を V_ε , V_ε の表面を S , V_ε の外部領域を $V - V_\varepsilon$ と書くと, スカラーポテンシャル (127): $\phi(\mathbf{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$ に対し

$$\Delta \phi(\mathbf{x}) = \left(\int_{V - V_\varepsilon} + \int_{V_\varepsilon} \right) \rho(\mathbf{x}') \Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'.$$

ここで領域 $V - V_\varepsilon$ では $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \neq 0$ であり, 距離 $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ の (\mathbf{x} による) 微分は $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ 方向の単位ベクトルになること

$$\partial_i |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \partial_i \sqrt{(x^1 - x'^1)^2 + \dots} = \frac{x^i - x'^i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad \therefore \partial_i \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -\frac{x^i - x'^i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (669)$$

に注意すると

$$\begin{aligned}\Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \partial_i \left(-\frac{x^i - x'^i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right) = -\frac{\partial_i(x^i - x'^i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} - (x^i - x'^i) \left(-\frac{3|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^6} \right) \partial_i |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \\ &= -\frac{3}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} + \frac{3}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = 0\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\Delta \phi(\mathbf{x}) &= \int_{V_\varepsilon} \rho(\mathbf{x}') \Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \simeq \rho(\mathbf{x}) \int_{V_\varepsilon} \Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \\ &= \rho(\mathbf{x}) \int_{V_\varepsilon} \nabla' \cdot \left(\nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3x' \quad (\nabla' \text{は } \mathbf{x}' \text{ による微分}) \\ &= \rho(\mathbf{x}) \int_S \left(\nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \cdot \mathbf{n} dS \\ &\quad (\mathbf{n}, dS \text{ はそれぞれ表面 } S \text{ 上の外向き単位法線ベクトルと面積要素}) \\ &= \rho(\mathbf{x}) \left(-\frac{\mathbf{n}}{\varepsilon^2} \right) \cdot \mathbf{n} \times 4\pi\varepsilon^2 \quad (\because \text{式 (669)}) \\ &= -4\pi\rho(\mathbf{x})\end{aligned}$$

となり，スカラーポテンシャル (127):

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}') d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

は Poisson 方程式 $\Delta\phi = -4\pi\rho$ を満たす。

以上の証明では ϕ, ρ の物理的な意味を用いなかったので，置き換え $\phi \rightarrow \mathbf{A}, \rho \rightarrow \mathbf{j}/c$ によりベクトルポテンシャル (127):

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

が Poisson 方程式 $\Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$ を満たすことが分かる。

■Green 関数法による証明 Poisson 方程式 $\Delta\psi(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})$ の解は $\Delta G(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$ を満たす Green 関数 $G(\mathbf{x})$ を用いて $\psi(\mathbf{x}) = \int d^3x' \sigma(\mathbf{x}') G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ と書ける。実際，このとき

$$\Delta\psi(\mathbf{x}) = \int d^3x' \sigma(\mathbf{x}') \Delta G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int d^3x' \sigma(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \sigma(\mathbf{x})$$

となる。そこで $G(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}$ であることを示せば良い。

$$G(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} G(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

と Fourier 展開すると

$$\Delta G(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad -k^2 G(\mathbf{k}) = 1 \quad \Rightarrow \quad G(\mathbf{k}) = -\frac{1}{k^2}$$

なので

$$G(\mathbf{x}) = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{k^2}$$

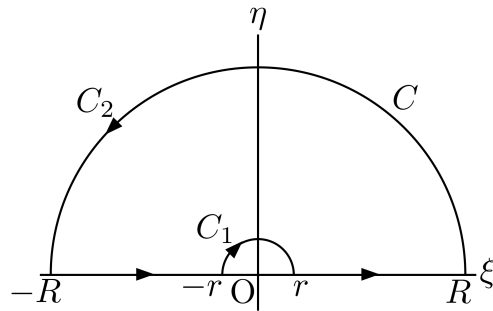


図 137 複素 z 平面上の積分路 C_1, C_2, C

となる。ここで x を極軸とする k の極座標 (k, θ, ϕ) を積分変数に選ぶと k 空間の体積要素は $k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi$ であり、この積分を実行する上で被積分関数が $k \rightarrow 0$ のとき発散することは次のように問題にならない:

$$\begin{aligned} G(x) &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 d(\cos \theta) k^2 \frac{e^{ikx \cos \theta}}{k^2} \quad (x \equiv |\mathbf{x}|) \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{ikx} \\ &= -\frac{2}{(2\pi)^2 x} \int_0^\infty d\xi \frac{\sin \xi}{\xi}. \quad (\xi \equiv kx) \end{aligned}$$

最右辺の積分を評価しよう。図 137 に示した複素 z 平面上の半径 r の半円 C_1 、半径 R の半円 C_2 、閉曲線 C に対して

$$0 = \oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{i\xi}}{\xi} d\xi + \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{i\xi}}{\xi} d\xi + \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

であり、この式の最右辺において

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{-r} \frac{e^{i\xi}}{\xi} d\xi &= -\int_r^R \frac{e^{-i\xi'}}{\xi'} d\xi', \quad (\xi' \equiv -\xi) \\ \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz &= i \int_\pi^0 \exp(re^{i\theta}) d\theta \quad (z \equiv re^{i\theta}) \\ &\rightarrow -i\pi, \quad (r \rightarrow 0) \\ \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz &\rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty, \text{Jordan の補助定理}) \end{aligned}$$

なので

$$0 = 2i \int_0^\infty \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi - i\pi, \quad \therefore \int_0^\infty \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi = \frac{\pi}{2}$$

を得る。よって Green 関数が

$$G(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi x} \quad (x \equiv |\mathbf{x}|)$$

と求まる。

検算 Green 関数の球対称性 $G(\mathbf{r}) = G(r)$ を仮定し、 $r > 0$ で

$$0 = \Delta G(\mathbf{r}) = \frac{(r^2 G')'}{r^2} \quad (\text{プライムは } r \text{ による微分})$$

を解くと、 A を積分定数として $G(r) = \frac{A}{r} + G(\infty)$ となる (逆に $\Delta \frac{1}{r} = 0$)。また半径 a の球における体積積分は

$$\int \Delta \left(\frac{1}{r} \right) dV = \int \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r} \right) dV = - \int \frac{\mathbf{n}}{r^2} \cdot \mathbf{n} dS = - \frac{1}{a^2} \cdot 4\pi a^2 = -4\pi \quad \left(\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r} \right)$$

となるので、 $G(r) = -\frac{1}{4\pi r}$ は Green 関数に対する式 $\Delta G(r) = \delta(\mathbf{r})$ から要求される性質を満たしている。

■Coulomb の法則を経由した証明 原点に静止している電荷 e が作る電場は球対称である。そこで $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\hat{\mathbf{r}}$ と書き ($\hat{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{r}/r$ は動径方向の単位ベクトル), 原点を中心とする半径 r の球において Maxwell 方程式 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ (Gauss の法則) を体積積分すると,

$$4\pi r^2 E(r) = 4\pi e, \quad \therefore \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{e}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} : \text{Coulomb の法則}, \quad \therefore \phi(\mathbf{r}) = \frac{e}{r}$$

を得る。場の方程式は線形だから、一般の電荷分布に対して場 ϕ は、重ね合せ (127) で与えられる。これは物理的な意味付けを取り除けば、Poisson 方程式の Green 関数が $G(r) \sim 1/r$ で与えられることの別証になっている。

■Coulomb の法則, Biot-Savart の法則 Coulomb の法則 (128) と Biot-Savart の法則 (129) を電磁ポテンシャル (127) から導くには、式 (669) を用い

$$E^i = - \int d^3 x' \rho(\mathbf{x}') \partial_i \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \int d^3 x' \rho(\mathbf{x}') \frac{x^i - x'^i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} : (128),$$

$$B^i = \frac{1}{c} \int d^3 x' \varepsilon^{ijk} \left(\partial_j \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) j^k(\mathbf{x}') = \frac{1}{c} \int d^3 x' \frac{\varepsilon^{ikj} j^k(\mathbf{x}') (x^j - x'^j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} : (129)$$

とすれば良い。

7.7.3 電磁波 (補足)

■平面波の式の微分 1.7.3 節の計算の補足として平面波の式 $f \equiv a e^{-ik_\mu x^\mu}$, $\mathbf{f} \equiv \mathbf{a} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ を微分した結果を調べておく:

$$\begin{aligned} \partial_\mu (-ik_\nu x^\nu) &= -ik_\nu \delta^\nu_\mu = -k_\mu, & \therefore \partial_\mu f &= -ik_\mu f, & \therefore \partial^\mu f &= -ik^\mu f. \\ \partial_i (a^i e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}) &= ik^i a^i e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, & \therefore \nabla \cdot \mathbf{f} &= i\mathbf{k} \cdot \mathbf{f}. \\ \varepsilon^{ijk} \partial_j (a^k e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}) &= \varepsilon^{ijk} (ik^j) (a^k e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}), & \therefore \nabla \times \mathbf{f} &= i\mathbf{k} \times \mathbf{f}. \end{aligned}$$

■楕円偏光 第 sec:electromagnetic-wave 節の予告通り、単色平面波の表式 $\mathbf{E} = \text{Re}\{\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}\}$ が一般に楕円偏光を表すことを示そう [3, pp.129–131]. この証明は 2 種類の単振動が共通の振動数を持つような Lissajous 曲線が楕円となることのエレガントな証明にもなっている。初等的な証明は文献 [9, p.87] に見られる。複素振幅 \mathbf{E}_0 の 2 乗 $\mathbf{E}_0^2 = |\mathbf{E}_0|^2 e^{-2i\alpha}$ によって定義される \mathbf{E}_0^2 の偏角 -2α に対して $\mathbf{E}_0 = \mathbf{b} e^{-i\alpha}$ となる複素ベクトル

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2 \quad (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \text{ は実数ベクトル})$$

を導入する*233. このとき

$$|\mathbf{E}_0|^2 = \mathbf{b}^2 = |\mathbf{b}_1|^2 - |\mathbf{b}_2|^2 + 2i\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2$$

は実数でなければならないから, $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = 0$, すなわち \mathbf{b}_1 と \mathbf{b}_2 は互いに直交している. そこで波の伝播方向 \mathbf{k} に沿って z 軸をとり, \mathbf{b}_1 の方向を x 軸をとり, $b_1 = |\mathbf{b}_1|, b_2 = |\mathbf{b}_2|$ と書くと,

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{b}e^{-i\alpha}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2 = (b_1, \pm ib_2, 0)$$

となるので, 楕円偏光の式

$$E_x = b_1 \cos(\omega t - kz + \alpha), \quad E_y = \pm b_2 \sin(\omega t - kz + \alpha)$$

を得る.

■Fourier 展開 電磁場の Fourier 展開 (131) を得るには任意の場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ を $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ と Fourier 展開し, 展開係数 $\mathcal{E}(\mathbf{k}, t)$ の時間依存性を波動方程式から

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \rightarrow \quad \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (i\mathbf{k})^2 \right\} \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) = 0 \quad \rightarrow \quad \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) = \mathcal{E}_+(\mathbf{k}) e^{i\omega_{\mathbf{k}} t} + \mathcal{E}_-(\mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}$$

と定めれば良い.

Fourier 展開の積分への移行 (132) は展開係数を求める式

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{L^3} \int_V \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3x, \quad \mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}, \\ \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_V \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3x \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{E}_V(\mathbf{k}, t) \end{aligned}$$

を比較すると

$$\mathbf{E} \left(\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}, t \right) = \frac{1}{L^3} \mathcal{E}_V \left(\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}, t \right) \rightarrow \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathcal{E}(\mathbf{k}, t)$$

となることから分かる.

7.7.4 任意に運動する電荷の作る電磁場 (補足)

1.7.4 節で述べたように, 遅延ポテンシャル (133) が場の方程式 (108): $\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$ の特殊解になっていることを確かめる.

■文献 [12, pp.288–291] における証明 位置 \mathbf{x} を中心とする半径 ε の球状の無限小領域を V_ε , V_ε の外部領域を $V - V_\varepsilon$ と書くと, 遅延ポテンシャル (133): $\phi(\mathbf{x}, t) = \phi_{V-V_\varepsilon}(\mathbf{x}, t) + \phi_{V_\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$,

$$\begin{aligned} \phi_{V_\varepsilon}(\mathbf{x}, t) &\equiv \int_{V_\varepsilon} \frac{\rho(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c) d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \simeq \int_{V_\varepsilon} \frac{\rho(\mathbf{x}', t) d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \\ \phi_{V-V_\varepsilon}(\mathbf{x}, t) &\equiv \int_{V-V_\varepsilon} \frac{\rho(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c) d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \end{aligned}$$

*233 複素ベクトルの 2 乗 \mathbf{E}_0^2 は内積であり, 実数ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} に対して

$$(\mathbf{a} + i\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 + 2i\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

のように計算する ($\mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{E}_0$ ではない).

に対して

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{V_\varepsilon}(\mathbf{x}, t) &= -4\pi\rho(\mathbf{x}, t), \\ \Delta\phi_{V-V_\varepsilon}(\mathbf{x}, t) &= \int_{V-V_\varepsilon} \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} \left(R \times \frac{\rho(\mathbf{x}', t-R/c)}{R} \right) d^3x' \quad (R \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{V-V_\varepsilon} \frac{\rho(\mathbf{x}', t-R/c) d^3x'}{R} \simeq \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\mathbf{x}, t), \\ \therefore \Delta\phi &= \Delta(\phi_{V_\varepsilon} + \phi_{V-V_\varepsilon}) = -4\pi\rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi\end{aligned}$$

となるので、遅延ポテンシャル (133):

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c) d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

は場の方程式 (108): $\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \phi = 4\pi\rho$ を満たす。

以上の証明では ϕ, ρ の物理的な意味を用いなかったので、置き換え $\phi \rightarrow \mathbf{A}, \rho \rightarrow \mathbf{j}/c$ によりベクトルポテンシャル (133):

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c) d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

が場の方程式 (108): $\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ を満たすことが分かる。

なお以上の計算により、遅延時間 $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$ の前の負号を正号に置き換えたポテンシャルも場の方程式の解となることが分かる。そのようなポテンシャルは先進ポテンシャルと呼ばれる。我々は場の方程式の解として遅延ポテンシャルを選んだとき、電荷の場に対する影響は未来に伝播するという境界条件を考慮していることになる。

■ Green 関数法による証明 場の方程式

$$\square\psi(x) = \sigma(x), \quad x \equiv (ct, \mathbf{x}), \quad \square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

に対して、 $\square G(x) = \delta^4(x)$ を満たす Green 関数 $G(x)$ を定義する。これは Green 関数が単位の源 $\sigma(x) = \delta^4(x)$ に対する場の応答であることを意味する。ここで電荷の影響は未来に伝わることを考慮すると、Green 関数 $G(x) = G(\mathbf{x}, t)$ には境界条件

$$G(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (t < 0 \text{ に対して})$$

が課せられる。

場の方程式の解は Green 関数を用いて

$$\psi(x) = \int d^4x' \sigma(x') G(x - x')$$

と書ける。実際、このとき

$$\square\psi(x) = \int d^4x' \sigma(x') \square G(x - x') = \int d^4x' \sigma(x') \delta^4(x - x') = \sigma(x)$$

となる。そこで上記の境界条件を満たす Green 関数が $G(x) = \frac{c}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta(|\mathbf{x}| - ct)$ であることを示せば良い。

$$G(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} G(k) e^{-ik \cdot x}, \quad k \equiv (\omega/c, \mathbf{k}) \quad (670)$$

と Fourier 展開すると

$$\square e^{-ik \cdot x} = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} = \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + \mathbf{k}^2 \right) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} = -k^2 e^{-ik \cdot x}$$

により

$$\square G(x) = \delta^4(x) \Rightarrow \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-k^2) G(k) e^{-ik \cdot x} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \quad (671)$$

を得る。ここで A, B を任意定数として

$$G(k) = -P \frac{1}{k^2} + A \delta(k^0 - |\mathbf{k}|) + B \delta(k^0 + |\mathbf{k}|)$$

ととれば、右辺第 2 項、第 3 項は式 (671) 左辺の積分に寄与しないので式 (671) が満たされる。右辺第 1 項の P は Fourier 展開 (670):

$$G(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ \int \frac{dk^0}{2\pi} G(k) e^{-ik^0 x^0} \right\} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

における k^0 の積分を実行する際、

$$\begin{aligned} & \int \frac{dk^0}{2\pi} G(k) e^{-ik^0 x^0} \\ &= -P \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{1}{(k^0)^2 - \mathbf{k}^2} e^{-ik^0 x^0} + \int \frac{dk^0}{2\pi} \{A \delta(k^0 - |\mathbf{k}|) + B \delta(k^0 + |\mathbf{k}|)\} e^{-ik^0 x^0} \\ &= c \left[-P \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} e^{-i\omega t} + \int \frac{d\omega}{2\pi} \{A \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) + B \delta(\omega + \omega_{\mathbf{k}})\} e^{-i\omega t} \right], \quad \omega_{\mathbf{k}} \equiv c|\mathbf{k}| \quad (672) \end{aligned}$$

のように Cauchy の主値をとることを意味する。ここで図 138 のように、実軸上の極 $\omega = \pm \omega_{\mathbf{k}}$ を無限小の半径 ε の半円に沿って迂回する複素 ω 平面上の経路 R_{\pm} をとると、Cauchy の主値は R_{\pm} に沿う積分の平均

$$P \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} \equiv \frac{1}{2} \left(\int_{R_+} + \int_{R_-} \right) \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}$$

である。

積分路の選択に応じて、異なる境界条件を満たす Green 関数が得られる。ここからは文献 [30, pp.197–198, pp.235–236] を参考にして、 ω による積分 (672) は $A = \frac{\pi i}{2\omega_{\mathbf{k}}}, B = -\frac{\pi i}{2\omega_{\mathbf{k}}}$ ととると

$$-c \int_{R_+} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}$$

となることを確かめる。まず図 138 のように、極 $\omega = \pm \omega_{\mathbf{k}}$ を中心とする半径 ε の円を反時計回りに回る経路をそれぞれ C_{\pm} とすると

$$\begin{aligned} \int_{R_{\pm}} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} &= \frac{1}{2} \left(\int_{R_+} + \int_{R_-} \right) \mp \frac{1}{2} \left(-\int_{R_+} + \int_{R_-} \right) \\ &= P \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} \mp \frac{1}{2} \left(\oint_{C_+} + \oint_{C_-} \right) \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} \end{aligned}$$

である。ここで

$$\oint_{C_{\pm}} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{-i(\pm\omega_{\mathbf{k}})t}}{2(\pm\omega_{\mathbf{k}})} \cdot 2\pi i = \pm \frac{\pi i}{\omega_{\mathbf{k}}} \int \frac{d\omega}{2\pi} \delta(\omega \mp \omega_{\mathbf{k}}) e^{-i\omega t}$$

なので

$$\int_{R_{\pm}} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} = P \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} \mp \frac{\pi i}{2\omega_{\mathbf{k}}} \int \frac{d\omega}{2\pi} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) e^{-i\omega t} \pm \frac{\pi i}{2\omega_{\mathbf{k}}} \int \frac{d\omega}{2\pi} \delta(\omega + \omega_{\mathbf{k}}) e^{-i\omega t}$$

を得る。よって ω による積分 (672) は $A = \frac{\pi i}{2\omega_{\mathbf{k}}}, B = -\frac{\pi i}{2\omega_{\mathbf{k}}}$ とすると

$$-c \int_{R_+} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}$$

となる。

最後にこれを計算し、適切な境界条件を満たす Green 関数が得られることを確かめよう。 $t < 0$ のとき図 138 に示した原点の無限遠にある半円 Γ_+ に沿う積分

$$-c \int_{\Gamma_+} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}$$

はゼロになるから、

$$-c \int_{R_+} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} = -c \oint_{R_+ + \Gamma_+} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} = 0$$

を得る。よって $t < t'$ のとき $G(x - x') = 0$ となる。これは時刻 t' での源 $\sigma(x')$ の状態が過去の時刻 $t (< t')$ における場の値 $\psi(x) = \int d^4x' \sigma(x') G(x - x')$ に影響しないことを意味する。一方、 $t > 0$ のとき図 138 に示した原点の無限遠にある半円 Γ_- に沿う積分

$$-c \int_{\Gamma_-} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}$$

はゼロになるから、

$$\begin{aligned} -c \int_{R_+} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} &= -c \oint_{R_+ + \Gamma_-} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} \\ &= (-c)(-2\pi i)(\text{Res}[-\omega_{\mathbf{k}}] + \text{Res}[\omega_{\mathbf{k}}]) \\ &\quad (\text{ここで周回積分が時計回りであることを注意した}) \\ &= (-c)(-2\pi i) \left(\frac{1}{2\pi} \frac{e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}}{2\omega_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}}{2\omega_{\mathbf{k}}} \right) \\ &= \frac{c}{\omega_{\mathbf{k}}} \sin(\omega_{\mathbf{k}} t) \end{aligned}$$

を得る。よって、 $x \equiv |\mathbf{x}|, k \equiv |\mathbf{k}|$ と書くことにすると (以降では x, k は 4 元ベクトルではない), Green 関数

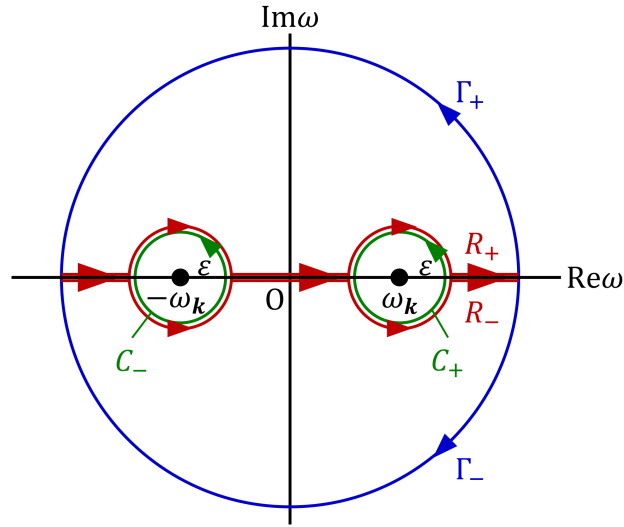


図 138 複素 ω 平面上の積分路 $R_{\pm}, C_{\pm}, \Gamma_{\pm}$

(670) が

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \theta(t) \frac{c}{\omega_{\mathbf{k}}} \sin(\omega_{\mathbf{k}} t) \right\} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\
 &= \frac{\theta(t)}{(2\pi)^3} \cdot 2\pi \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 d(\cos \theta) k^2 \frac{\sin(ckt)}{k} e^{i\mathbf{k}x \cos \theta} \quad (\theta \text{ は } \mathbf{k} \text{ の } \mathbf{x} \text{ とす角}) \\
 &= \frac{\theta(t)}{(2\pi)^2 ix} \int_0^\infty dk \sin(ckt) (e^{ikx} - e^{-ikx}) \\
 &= \frac{\theta(t)}{(2\pi)^2 ix} \int_{-\infty}^\infty dk \sin(ckt) e^{ikx} \\
 &= -\frac{\theta(t)}{2(2\pi)^2 x} \int_{-\infty}^\infty dk (e^{ickt} - e^{-ickt}) e^{ikx} \\
 &= -\frac{\theta(t)}{4\pi x} \{ \delta(x+ct) - \delta(x-ct) \} \\
 &= \frac{1}{4\pi x} \delta(x-ct) \quad (x \equiv |\mathbf{x}|)
 \end{aligned}$$

と求まる (これは $t < 0$ に対する境界条件 $G(\mathbf{x}, t) = 0$ を満たしている).

7.7.5 光学 (補足)

■ アイコナル方程式 (134) の導出 電磁場成分に対する波動方程式 $\partial^\mu \partial_\mu f = 0$ に, 場の表式 $f = ae^{i\psi}$ を代入しよう. Leibniz の公式 $(uv)^{(n)} = \sum_k {}_n C_k u^{(k)} v^{(n-k)}$ の $n = 2$ の場合

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + v''$$

により

$$\begin{aligned}
 0 = \partial^\mu \partial_\mu f &= \partial^\mu \partial_\mu (ae^{i\psi}) = (\partial^\mu \partial_\mu a) e^{i\psi} + 2(\partial^\mu a)(\partial_\mu e^{i\psi}) + a \partial^\mu \partial_\mu e^{i\psi} \\
 &= (\partial^\mu \partial_\mu a) e^{i\psi} + 2i(\partial^\mu a)(\partial_\mu \psi) e^{i\psi} + if(\partial^\mu \partial_\mu \psi) - (\partial^\mu \psi)(\partial_\mu \psi) f \quad (\mu \text{ について和をとらない})
 \end{aligned}$$

が各 $\mu = 0, 1, 2, 3$ に対して成り立つ。したがって上式で添字 μ について和をとった式もまた成り立つ。ここで短波長の極限を考えると ψ (正確には $\partial_\mu \psi$) は大きな量なので、最右辺における第 4 項に比べてはじめの 3 つの項を無視することができる。よってアイコナル方程式 (134): $(\partial_\mu \psi)(\partial^\mu \psi) = 0$ が得られる。

7.8 重力場 (補足)

7.8.1 Newton の万有引力の法則 (補足)

Einstein 方程式が重力場の弱い極限で Newton の万有引力の法則 (135) を再現することは次のように確かめられる [3, pp.329–330] [4, pp.174–175]。Einstein 方程式 (84): $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi k}{c^4}T_{\mu\nu}$ は両辺に $g^{\mu\nu}$ をかけて μ, ν について和をとると $R = -\frac{8\pi k}{c^4}T, T \equiv g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ となるので ($g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \delta^\mu_\mu = 4$ だから),

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi k}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) \quad (673)$$

と書き換えられる。この式の (0,0) 成分を考えよう。 $R_{\mu\nu}$ の定義式 (26) より

$$R_{00} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{00} - \partial_0 \Gamma^\alpha_{0\alpha} + \Gamma^\alpha_{00} \Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \Gamma^\alpha_{0\beta} \Gamma^\beta_{0\alpha}.$$

重力場が弱い場合を考えて時空の各点で計量テンソルが

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon\varphi_{\mu\nu}, \quad 0 \leq \varepsilon \ll 1$$

となる座標系を用いると $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \varepsilon\varphi^{\mu\nu} + O(\varepsilon^2)$, $\varphi^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\varphi_{\alpha\beta}$ となる。実際 $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \varepsilon\varphi^{\mu\nu}$ とおくと

$$g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = (\eta^{\mu\lambda} - \varepsilon\varphi^{\mu\lambda})(\eta_{\lambda\nu} + \varepsilon\varphi_{\lambda\nu}) = \delta^\mu_\nu + \varepsilon(\eta^{\mu\lambda}\varphi_{\lambda\nu} - \eta_{\lambda\nu}\varphi^{\mu\lambda}) + O(\varepsilon^2)$$

において ε の 1 次の項が消えるので $g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu$ が ε の 1 次の範囲で満たされる。よって

$$\begin{aligned} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (\because \text{式 (15)}) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon\eta^{\lambda\rho}(\partial_\nu \varphi_{\rho\mu} + \partial_\mu \varphi_{\rho\nu} - \partial_\rho \varphi_{\mu\nu}) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

となり、これは ε の 1 次の量だから

$$R_{00} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{00} - \partial_0 \Gamma^\alpha_{0\alpha} + O(\varepsilon^2)$$

と書ける。さらに重力場が不変である、すなわち $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0, \partial_0 \varphi_{\mu\nu} = 0$ とすると

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha_{00} &= \frac{1}{2}\varepsilon\eta^{\alpha\beta}(\partial_0 \varphi_{\beta 0} + \partial_0 \varphi_{\beta 0} - \partial_\beta \varphi_{00}) + O(\varepsilon^2) = -\frac{1}{2}\varepsilon\eta^{\alpha i} \partial_i \varphi_{00} + O(\varepsilon^2), \\ \partial_0 \Gamma^\alpha_{0\alpha} &= \frac{1}{2}\varepsilon\eta^{\alpha\beta} \partial_0 (\partial_\alpha \varphi_{\beta 0} + \partial_0 \varphi_{\beta\alpha} - \partial_\beta \varphi_{0\alpha}) + O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

なので

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\varepsilon\eta^{\alpha i} \partial_\alpha \partial_i \varphi_{00} + O(\varepsilon^2) = \frac{1}{2}\Delta(\varepsilon\varphi_{00}) + O(\varepsilon^2), \quad \Delta \equiv \partial_i \partial_i$$

となる。一方、電磁場がなく物質が用いている座標系に対して静止しているとき、重力が弱いという仮定の下で式 (76):

$$T_{\mu\nu} = \begin{cases} \rho c^2 : & \mu = \nu = 0 \\ 0 : & \text{その他の成分} \end{cases}$$

を適用できるから (ρ は質量密度),

$$T = g^{00}T_{00}, \quad \frac{8\pi k}{c^4} \left(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T \right) = \frac{8\pi k}{c^4} \times \rho c^2 \left(1 - \frac{1}{2}g_{00}g^{00} \right) = \frac{4\pi k}{c^2} \rho + O(\varepsilon^2)$$

$$(\because \varphi^{00} = \varphi_{00}, \quad g_{00}g^{00} = (1 + \varepsilon\varphi_{00})(1 - \varepsilon\varphi^{00}) + O(\varepsilon^2) = 1 + O(\varepsilon^2))$$

を得る. 以上より Einstein 方程式 (673) の (0,0) 成分 $R_{00} = \frac{8\pi k}{c^4} (T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T)$ を書き下すと, ε の 2 次以上を無視する近似で $\frac{1}{2}\Delta(\varepsilon\varphi_{00}) = \frac{4\pi k}{c^2}\rho$ となる*234. 弱い重力場がもたらす g_{00} への補正 $\varepsilon\varphi_{00}$ は重力ポテンシャル ϕ を用いた式 (81): $g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$ より $\frac{2\phi}{c^2}$ だから, これは Poisson 方程式

$$\Delta\phi = 4\pi k\rho$$

になる. よって静電場・静磁場のポテンシャル (127) の場合と同様に, ここから Newton の万有引力の法則 (135): $\phi = -\frac{km}{R}$ が導かれる.

7.8.2 中心対称な重力場 (補足)

1.8.2 節で述べた, 星が周りの真空中作る静的で中心対称な重力場について補足する.

■Schwarzschild 解の導出 Schwarzschild 解 (136) を導こう. そのためには, 適当な球座標 $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, r, \theta, \phi)$ を用いて計量テンソルの全成分が

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} e^{\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad \therefore (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} e^{-\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

の形となると仮定し, 未知関数 $\nu(r), \lambda(r)$ を真空中の Einstein 方程式 $G^\mu{}_\nu \equiv R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu R = 0$ から定めれば良い*235. 後で分かるように, Schwarzschild 解 (136) を導くには, Einstein 方程式の内 $G^0{}_0 = 0, G^1{}_1 = 0$ だけを用いれば十分である. そこで $G^0{}_0, G^1{}_1$ を $\nu(r), \lambda(r)$ で表すことを考える.

$(g_{\mu\nu})$ の非対角成分はゼロだから Christoffel 記号 (15): $\Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}(\partial_\nu g_{\lambda\mu} + \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\lambda})$ の α, ν, λ が相異なるものはゼロになる. よってゼロでない Christoffel 記号 $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$ は, 対称な添字 ν, λ が等しいものと異なるものに分類すると

$$\text{対称な添字が等しいもの} \quad \Gamma^\mu{}_{\nu\nu} = -\frac{1}{2}g^{\mu\mu}\partial_\mu g_{\nu\nu} \quad (\mu, \nu \text{ について和をとらない}), \quad (674)$$

$$\text{対称な添字が異なるもの} \quad \Gamma^\mu{}_{\nu\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\mu}\partial_\nu g_{\mu\mu} (= \Gamma^\mu{}_{\mu\nu}) \quad (\mu \neq \nu, \mu \text{ について和をとらない}) \quad (675)$$

に限られる. 以下, r による微分をプライムで表す.

*234 左辺が ε を含んでいるのに対し, 右辺も万有引力定数 k を含んでいるので微小な量と見なされる.

*235 ここではあらかじめ ν, λ が t に依らないような時間座標 t をとれると仮定して, 以降の計算を大幅に簡略化している. ν, λ を r と t の関数と仮定しても, Schwarzschild 解を導くことができる. このことは真空中の中心対称な重力場が, 静的でなければならないことを意味している.

式 (674) の形の Christoffel 記号は以下の 16 個である.

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2} e^{-\nu} \partial_0 e^\nu = 0, & \Gamma^0_{11} &= \frac{1}{2} e^{-\nu} \partial_0 e^\lambda = 0, \\
\Gamma^0_{22} &= \frac{1}{2} e^{-\nu} \partial_0 r^2 = 0, & \Gamma^0_{33} &= \frac{1}{2} e^{-\nu} \partial_0 (r^2 \sin^2 \theta) = 0, \\
\Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2} (-e^{-\lambda}) (-e^\nu)' = \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda}, & \Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2} (-e^{-\lambda}) (e^{-\lambda})' = \frac{\lambda'}{2}, \\
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2} (-e^{-\lambda}) (-r^2)' = -r e^{-\lambda}, & \Gamma^1_{33} &= \frac{1}{2} (-e^{-\lambda}) (-r^2 \sin^2 \theta)' = -r e^{-\lambda} \sin^2 \theta, \\
\Gamma^2_{00} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \partial_\theta e^\nu = 0, & \Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \partial_\theta e^{-\lambda} = 0, \\
\Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \partial_\theta (-r^2) = 0, & \Gamma^2_{33} &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \partial_\theta (-r^2 \sin^2 \theta) = -\sin \theta \cos \theta, \\
\Gamma^3_{00} &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_\phi e^\nu = 0, & \Gamma^3_{11} &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_\phi (-e^\lambda) = 0, \\
\Gamma^3_{22} &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_\phi (-r^2) = 0, & \Gamma^3_{33} &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_\phi (-r^2 \sin^2 \theta) = 0
\end{aligned}$$

式 (675) 左辺の形の Christoffel 記号は以下の 12 個である.

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{10} &= \frac{1}{2} e^{-\nu} \partial_r e^\nu = \frac{\nu'}{2}, & \Gamma^0_{20} &= \frac{1}{2} e^{-\nu} \partial_\theta e^\nu = 0, \\
\Gamma^0_{30} &= \frac{1}{2} e^{-\nu} \partial_\phi e^\nu = 0, & \Gamma^1_{01} &= \frac{1}{2} (-e^{-\lambda}) \partial_0 (-e^\lambda) = 0, \\
\Gamma^1_{21} &= \frac{1}{2} (-e^{-\lambda}) \partial_\theta (-e^\lambda) = 0, & \Gamma^1_{31} &= \frac{1}{2} (-e^{-\lambda}) \partial_\phi (-e^\lambda) = 0, \\
\Gamma^2_{02} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \partial_\theta (-r^2) = 0, & \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \partial_r (-r^2) = \frac{1}{r}, \\
\Gamma^2_{32} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \partial_\phi (-r^2) = 0, & \Gamma^3_{03} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_0 (-r^2 \sin^2 \theta) = 0, \\
\Gamma^3_{13} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_r (-r^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{r}, & \Gamma^3_{23} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_\theta (-r^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{\tan \theta}
\end{aligned}$$

ここから G^0_0, G^1_1 を求めるのに必要な Ricci テンソルを定義式 (26) に従って計算すると以下のようになる.

$$\begin{aligned}
R_{00} &= R^\mu_{0\mu 0} \\
&= \partial_\mu \Gamma^\mu_{00} - \partial_0 \Gamma^\mu_{0\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{00} - \Gamma^\mu_{0\nu} \Gamma^\nu_{0\mu} \\
&= \partial_1 \Gamma^1_{00} - 0 + \Gamma^\mu_{\mu 1} \Gamma^1_{00} - \sum \Gamma^\mu_{0\nu} \Gamma^\nu_{0\mu} \quad \left(\sum \text{は } (\mu, \nu) = (0, 1), (1, 0) \text{ の和} \right) \\
&= \left(\frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} \right)' + \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} \times 2 \right) \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} - 2 \times \frac{\nu'}{2} \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} \\
&= \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu' \lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right) e^{\nu-\lambda}, \\
R_{11} &= R^\mu_{1\mu 1} \\
&= \partial_\mu \Gamma^\mu_{11} - \partial_1 \Gamma^\mu_{1\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{11} - \Gamma^\mu_{1\nu} \Gamma^\nu_{1\mu} \\
&= \partial_1 \Gamma^1_{11} - \partial_1 \Gamma^1_{1\mu} + \Gamma^\mu_{\mu 1} \Gamma^1_{11} - \Gamma^\mu_{1\mu} \Gamma^1_{1\mu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\lambda'}{2} \right)' - \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} \times 2 \right)' + \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} \times 2 \right) \frac{\lambda'}{2} - \left(\frac{\nu'}{2} \right)^2 - \left(\frac{\lambda'}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{r} \right)^2 \times 2 \\
&= -\frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'^2}{4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{22} &= R^\mu_{2\mu 2} \\
&= \partial_\mu \Gamma^\mu_{22} - \partial_2 \Gamma^\mu_{2\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{22} - \Gamma^\mu_{2\nu} \Gamma^\nu_{2\mu} \\
&= \partial_1 \Gamma^1_{22} - \partial_2 \Gamma^3_{23} + \Gamma^\mu_{\mu 3} \Gamma^3_{22} - \sum \Gamma^\mu_{2\nu} \Gamma^\nu_{2\mu} \quad \left(\sum \text{は } (\mu, \nu) = (1, 2), (2, 1), (3, 3) \text{ の和} \right) \\
&= (-re^{-\lambda})' - \partial_\theta(\cot \theta) + \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} \times 2 \right) (-re^{-\lambda}) - \frac{1}{r} \times 2 - \cot^2 \theta \\
&= \left\{ -1 + r \left(\frac{\lambda'}{2} - \frac{\nu'}{2} \right) \right\} e^{-\lambda} \pm 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{33} &= R^\mu_{3\mu 3} \\
&= \partial_\mu \Gamma^\mu_{33} - \partial_3 \Gamma^\mu_{3\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{33} - \Gamma^\mu_{3\nu} \Gamma^\nu_{3\mu} \\
&= \sum_{\mu=1,2} \partial_\mu \Gamma^\mu_{33} - 0 + (\Gamma^\mu_{\mu 1} \Gamma^1_{33} + \Gamma^3_{32} \Gamma^2_{33}) - \sum \Gamma^\mu_{3\nu} \Gamma^\nu_{3\mu} \quad \left(\sum \text{は } (\mu, \nu) = (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2) \text{ の和} \right) \\
&= (-r \sin^2 \theta e^{-\lambda})' + \partial_\theta(-\sin \theta \cos \theta) + \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} \times 2 \right) (-r \sin^2 \theta e^{-\lambda}) \\
&\quad + \cot \theta (-\sin \theta \cos \theta) - (-\sin \theta \cos \theta) \cot \theta \times 2 - \frac{1}{r} \times 2 \\
&= - \left\{ 1 + r \left(\frac{\lambda'}{2} - \frac{\nu'}{2} \right) \right\} e^{-\lambda} \sin^2 \theta + \sin^2 \theta.
\end{aligned}$$

さらに $(g^{\mu\nu})$ の非対角成分がゼロであることに注意して $R^\mu_\nu = g^{\mu\alpha} R_{\alpha\nu}$, スカラー曲率 $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ を計算すると

$$\begin{aligned}
R^0_0 &= g^{00} R_{00} = e^{-\nu} R_{00}, & R^1_1 &= g^{11} R_{11} = -e^{-\lambda} R_{11}, \\
R^2_2 &= g^{22} R_{22} = -\frac{1}{r^2} R_{22}, & R^3_3 &= g^{33} R_{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} R_{33}, \\
R &= e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right) \Leftarrow g^{00} R_{00} \\
&\quad + e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\lambda'}{r} \right) \Leftarrow g^{11} R_{11} \\
&\quad + e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{2r} - \frac{\lambda'}{2r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \Leftarrow g^{22} R_{22} \\
&\quad + e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{2r} - \frac{\lambda'}{2r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \Leftarrow g^{33} R_{33} \\
&= e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + 2\frac{\nu'}{r} - 2\frac{\lambda'}{r} + \frac{2}{r^2} \right) - \frac{2}{r^2}
\end{aligned}$$

を得るから, Einstein 方程式を書き下すと

$$0 = G^0_0 = e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right) \Leftarrow R^0_0$$

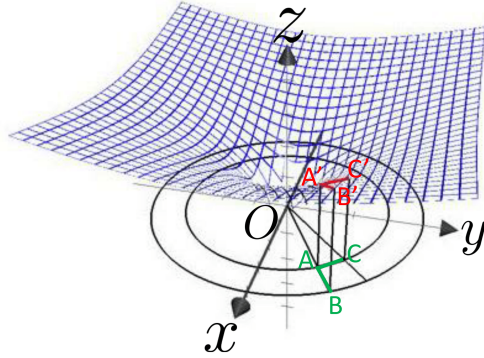


図 139 Schwarzschild 時空における空間の歪みの視覚化 (図 17 の再掲)

$$\begin{aligned}
 & +e^{-\lambda} \left(-\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'}{r} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\delta^0_0 R \\
 & = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \tag{676}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 = G^1_1 & = e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\lambda'}{r} + \frac{\nu'^2}{4} \right) \Leftrightarrow R^1_1 \\
 & +e^{-\lambda} \left(-\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\delta^1_1 R \\
 & = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \tag{677}
 \end{aligned}$$

となる.

$$\text{式 (676)} \Leftrightarrow 1 = e^{-\lambda}(1 - r\lambda') = (re^{-\lambda})', \quad \therefore e^{-\lambda} = 1 - \frac{r_g}{r} \quad (r_g \text{ は積分定数}).$$

さらに式 (676), 式 (677) を辺々引くと

$$(\lambda + \nu)' = 0, \quad \therefore \lambda + \nu = \text{const}, \quad \therefore e^\nu = \text{const} \times e^{-\lambda} = \text{const} \times \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$$

となる. 第 3 式の const に対して $\sqrt{\text{const}} \times t \rightarrow t$ と時間の尺度を改めると

$$e^{\nu(r)} c^2 dt^2 = \text{const} \times \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2$$

となり, Schwarzschild 解 (136) を得る.

■回転面の方程式 Schwarzschild 時空における空間の歪みを視覚化した図 17(1.8.2 節) を図 139 として再掲する. 図 139 の回転面 $z = f(r)$ の方程式を求めるには, 線分 A'B' の長さ $\sqrt{1 + f'^2} dr$ が $dr/\sqrt{1 - (r_g/r)}$ になることを要求し

$$f' = \pm \sqrt{\frac{r_g}{r - r_g}}, \quad \therefore f = \pm 2\sqrt{r_g(r - r_g)} + \text{const}$$

とすれば良い [3, p.339].

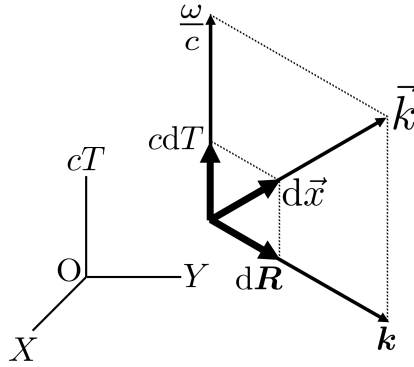


図 140 光の変位 $d\vec{x}$ と波数ベクトル \vec{k} の、局所慣性系で測った成分の関係

■計量テンソルが座標時間 t に依らない場合の t で測った光の振動数 1.8.2 節で述べたように計量テンソルが座標時間 t に依らないとき、 t で測った光の振動数は光線上で一定となることを説明する。

まず光線の位相 (アイコナル) ψ に対し反変 4 元波数ベクトル \vec{k} を $k^\mu = -\partial^\mu \psi$ と導入すると、これは時空における光線の軌道に接し、ある光線の媒介変数 λ を用いて $\vec{k} = \frac{d\vec{x}}{d\lambda}$ と書ける [3, p.274]. 実際、局所慣性系で測った光速は c だから光線に沿う変位 $d\vec{x}$ の局所慣性系で測った成分 $(cdT, d\mathbf{R})$ に対し $|\frac{d\mathbf{R}}{cdT}| = 1$ である。また電場または磁場の成分が (複素表示で) $ae^{-ik_\mu x^\mu}$ の形をとる平面単色波に対して局所慣性系で測った波数ベクトル \vec{k} の成分 $(\omega/c, \mathbf{k})$ は $(\omega/c)^2 - \mathbf{k}^2 = 0$ を満たすので $\frac{|\mathbf{k}|}{\omega/c} = 1$ であり、同位相面 $\text{const} = k_\mu x^\mu = \omega T - \mathbf{k} \cdot \mathbf{R}$ の進行方向、従って光線の進行方向 $d\mathbf{R}$ は \mathbf{k} と平行となる (1.7.3 節参照)。以上より図 140 のように \vec{k} は時空において光線に沿う変位 $d\vec{x}$ に平行となる。これは座標系に依らない幾何学的な関係である。

次に任意の座標系で波数ベクトル成分 k_μ の光線に沿った変化を調べる。局所慣性系では波数ベクトル成分 k_μ は光線に沿って変化しないから (1.7.3 節参照),

$$0 = \frac{dk_\beta}{d\lambda} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \partial_\alpha k_\beta = k^\alpha k_{\beta;\alpha}$$

が成り立つ。ここで等式 $k^\alpha k_{\beta;\alpha} = 0$ は測地線の方程式に他ならず、 $k^\alpha k_{\beta;\alpha}$ は共変ベクトルだから任意の座標系では

$$0 = k^\alpha k_{\beta;\alpha} = k^\alpha (\partial_\alpha k_\beta - k_\gamma \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}) = \frac{dk_\beta}{d\lambda} - \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} k^\alpha k_\gamma$$

が成り立つ (1.1.1 節, 1.1.8 節参照)。よって

$$\begin{aligned} \frac{dk_\beta}{d\lambda} &= \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} k^\alpha k_\gamma = \frac{1}{2} g^{\gamma\nu} (\partial_\beta g_{\alpha\nu} + \partial_\alpha g_{\nu\beta} - \partial_\nu g_{\beta\alpha}) k^\alpha k_\gamma \quad (\because \text{式 (15)}) \\ &= \frac{1}{2} \{ \partial_\beta g_{\alpha\nu} + (\partial_\alpha g_{\nu\beta} - \partial_\nu g_{\beta\alpha}) \} k^\alpha k^\nu \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\beta g_{\alpha\nu}) k^\alpha k^\nu \end{aligned}$$

に従い成分 k^β は光線に沿って変化する (添字 α, ν に関して $\partial_\alpha g_{\nu\beta} - \partial_\nu g_{\beta\alpha}$ は反対称、 $k^\alpha k^\nu$ は対称なので式 (6) より $(\partial_\alpha g_{\nu\beta} - \partial_\nu g_{\beta\alpha}) k^\alpha k^\nu = 0$)。特に計量テンソルの全成分が時間座標 $x^0 (= ct)$ に依らないような座標系では上式の $\beta = 0$ に対して最右辺で $\partial_0 g_{\alpha\nu} = 0$ となるので、 $x^0 (= ct)$ で測った光の振動数 $k_0 = -\partial_0 \psi$ は光

線に沿って一定となる [7, pp.230-231]. 従って空間の点 A から点 B に光波を送るとき, 座標時間 x^0 で測って A で電磁場が一定の振動数 ω で振動するならば, B でも電磁場は同じ振動数 ω で振動することになる.

■Schwarzschild 時空中における粒子の時間発展方程式 (138),(139) の導出 作用 $S_m = -mc \int ds$ に対する最小作用原理から, 座標時間 t に対する粒子の空間座標 r, ϕ の変化率の式 (138),(139) を導く. 固有時間 τ を積分変数にとり $S_m = -mc \int \Lambda d\tau$ と書くと,

$$\Lambda = c. \quad (678)$$

一方, 世界間隔 ds は Schwarzschild 解 (136) で与えられるから

$$\Lambda = \sqrt{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(c \frac{dt}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 - \frac{(dr/d\tau)^2}{1 - \frac{r_g}{r}}} \quad (679)$$

とも書ける. 技巧的ではあるがこれら 2 通りの表現を適宜使い分けると, Euler 方程式 (35) は

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial (dt/d\tau)} - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} = \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 \frac{dt}{d\tau}}{\Lambda} \right\} \quad (\because \text{式 (679)}) \\ &= c \frac{d}{d\tau} \left\{ \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \right\}, \quad (\because \text{式 (678)}) \\ 0 &= \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial (d\phi/d\tau)} - \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{-r^2 \frac{d\phi}{d\tau}}{\Lambda} \right) \quad (\because \text{式 (679)}) \\ &= -\frac{1}{c} \frac{d}{d\tau} \left(r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \right) \quad (\because \text{式 (678)}) \end{aligned}$$

となるから, 保存量

$$(140) : a \equiv \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} (> 0), \quad (141) : b \equiv r^2 \frac{d\phi}{d\tau}$$

を得る [4, pp.207-208]. $\frac{d\phi}{d\tau}$ は b の式 (141) から求まる. よってこれに加えて $\frac{dr}{d\tau}$ が求まれば a の式 (140) から得られる $\frac{dt}{d\tau}$ を用いて, これらを座標時間に対する変化率 $\frac{dr}{dt}, \frac{d\phi}{dt}$ の表式へと書き換えられる. $\frac{dr}{d\tau}$ を求めるには Λ の式 (678),(679) を等置して

$$\begin{aligned} c^2 &= \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(c \frac{dt}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 - \frac{(dr/d\tau)^2}{1 - \frac{r_g}{r}} \\ &= \frac{(ca)^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - \frac{b^2}{r^2} - \frac{(dr/d\tau)^2}{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad (\because \text{式 (140), (141)}) \\ \therefore \frac{dr}{d\tau} &= c \sqrt{a^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(1 + \frac{b^2}{c^2 r^2}\right)} \end{aligned}$$

とすれば良い. 以上より

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = c \times \frac{1}{a} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{a^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(1 + \frac{b^2}{c^2 r^2}\right)} : (138), \\ \frac{d\phi}{dt} &= \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{b}{r^2} \times \frac{1}{a} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) : (139) \end{aligned}$$

を得る.

7.8.3 重力波 (補足)

■弱い重力場のゲージ変換 (144) の導出 座標変換 (143): $x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}(x)$ に対して $\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} = \delta^{\mu}_{\alpha} + \partial_{\alpha}\varepsilon^{\mu}$ なので, 2 階反変テンソルの変換則は

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= (\delta^{\mu}_{\alpha} + \partial_{\alpha}\varepsilon^{\mu})(\delta^{\nu}_{\beta} + \partial_{\beta}\varepsilon^{\nu})(\eta^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta}) \\ &\simeq \delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta}(\eta^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta}) + \delta^{\mu}_{\alpha}(\partial_{\beta}\varepsilon^{\nu})\eta^{\alpha\beta} + \delta^{\nu}_{\beta}(\partial_{\alpha}\varepsilon^{\mu})\eta^{\alpha\beta} \\ &= \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu} + \partial^{\mu}\varepsilon^{\nu} + \partial^{\nu}\varepsilon^{\mu} \end{aligned}$$

となる. ここで右辺は座標 x の関数であるのに対し, 左辺は同一の点を表す新しい座標 x' の関数 $\eta^{\mu\nu} + h'^{\mu\nu}(x')$ である. しかしながら微小量の 1 次までの近似では

$$h'^{\mu\nu}(x') = h'^{\mu\nu}(x + \varepsilon) \simeq h'^{\mu\nu}(x) \simeq h^{\mu\nu}(x)$$

となって, 引数が x にそろうので, 式 (144):

$$\delta h^{\mu\nu} = \partial^{\mu}\varepsilon^{\nu} + \partial^{\nu}\varepsilon^{\mu}$$

が得られる.

■ゲージ変換によって Lorenz ゲージ条件 $\partial_{\nu}\bar{h}^{\mu\nu} = 0$ の満たされる座標系をとれることの証明 7.3.3 節で行ったのと同様の計算を繰り返せば良い. ゲージ変換 (143): $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}$ に対して

$$\partial_{\nu}\bar{h}^{\mu\nu} \rightarrow \partial_{\nu}\bar{h}'^{\mu\nu} = \partial_{\nu}\bar{h}^{\mu\nu} - \partial^{\nu}\partial_{\nu}\varepsilon^{\mu}$$

となるので,

$$\partial^{\nu}\partial_{\nu}\varepsilon^{\mu} = \square\varepsilon^{\mu} = \partial_{\nu}\bar{h}^{\mu\nu}$$

の解 ε^{μ} を用いてゲージ変換を行えば, 新しい座標系の $\bar{h}^{\mu\nu}$ はゲージ条件 $\partial_{\nu}\bar{h}'^{\mu\nu} = 0$ を満たす.

■ $h_{\mu\nu}$ について線形化された重力場の方程式 (145), (146) の導出 $h_{\mu\nu}$ の 1 次までとると, 曲率テンソルは

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu})$$

と表される [7, p.247]. ただし $(\dots)_{,\mu} \equiv \partial_{\mu}(\dots)$, $(\dots)^{\cdot\mu} \equiv \partial^{\mu}(\dots)$, etc とし, 以降いちいち断らない. これは次のように確かめられる.

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\lambda}R^{\lambda}_{\beta\mu\nu} = g_{\alpha\lambda}(\Gamma^{\lambda}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu})$$

において

$$g_{\alpha\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\nu} \equiv \Gamma_{\alpha\beta\nu} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\nu} + g_{\nu\alpha,\beta} - g_{\beta\nu,\alpha}) = \frac{1}{2}(h_{\alpha\beta,\nu} + h_{\nu\alpha,\beta} - h_{\beta\nu,\alpha})$$

は, したがって $\{\Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu}\}$ は $h_{\mu\nu}$ の 1 次だから

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} \simeq g_{\alpha\lambda}(\Gamma^{\lambda}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\mu,\nu}) = \frac{1}{2}\{(h_{\alpha\beta,\nu\mu} + h_{\nu\alpha,\beta\mu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu}) - (h_{\alpha\beta,\mu\nu} + h_{\mu\alpha,\beta\nu} - h_{\beta\mu,\alpha\nu})\}$$

を得る.

さらに Ricci テンソルとスカラー曲率はそれぞれ

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta} &\equiv R^{\mu}_{\alpha\mu\beta} = g^{\mu\nu} R_{\nu\alpha\mu\beta} \\
&= \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (h_{\nu\beta,\alpha\mu} + h_{\alpha\mu,\nu\beta} - h_{\nu\mu,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\nu\mu}) + O(h_{\alpha\beta}^2) \\
&= \frac{1}{2} (h_{\nu\beta,\alpha}{}^{,\mu} + h_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} - h_{,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu}) + O(h_{\alpha\beta}^2), \\
R &\equiv g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} \\
&= \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \frac{1}{2} (h_{\alpha\nu,\mu\beta} + h_{\mu\beta,\alpha\nu} - h_{\alpha\beta,\mu\nu} - h_{\mu\nu,\alpha\beta}) + O(h_{\alpha\beta}^2) \\
&= \frac{1}{2} (h_{\alpha\nu}{}^{,\nu\alpha} + h_{\mu\beta}{}^{,\beta\mu} - h_{,\mu}{}^{,\mu} - h_{,\alpha}{}^{,\alpha}) + O(h_{\alpha\beta}^2) \quad (\because \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = h) \\
&= (h_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu} - h_{,\mu}{}^{,\mu}) + O(h_{\alpha\beta}^2)
\end{aligned}$$

となるので, Einstein テンソルは

$$\begin{aligned}
G_{\alpha\beta} &\equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \\
&= R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} R + O(h_{\alpha\beta}^2) \\
&= \frac{1}{2} (h_{\nu\beta,\alpha}{}^{,\nu} + h_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} - h_{,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu}) - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} (h_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu} - h_{,\mu}{}^{,\mu}) + O(h_{\alpha\beta}^2) \tag{680}
\end{aligned}$$

で与えられる.

なおこれは

$$\bar{h}^{\alpha\beta} \equiv h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} h$$

を用いて

$$\begin{aligned}
G_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2} \left[\left(h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h \right)_{,\mu}{}^{,\mu} + \eta_{\alpha\beta} \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \right)_{,\mu\nu}{}^{,\mu\nu} - \left(h_{\alpha\mu} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\mu} h \right)_{,\beta}{}^{,\mu} - \left(h_{\beta\mu} - \frac{1}{2} \eta_{\beta\mu} h \right)_{,\alpha}{}^{,\mu} \right] + O(h_{\alpha\beta}^2) \\
&= -\frac{1}{2} [\bar{h}_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu} + \eta_{\alpha\beta} \bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu} - \bar{h}_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} - \bar{h}_{\beta\mu,\alpha}{}^{,\mu}] + O(h_{\alpha\beta}^2) \tag{681}
\end{aligned}$$

と書き換えられる [7, p.248].

さて, Einstein テンソルの表式 (680) を用いると

$$\begin{aligned}
G^{\mu\nu} &= g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} G_{\alpha\beta} \simeq \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} G_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \{ (\partial_{\alpha} \partial^{\tau} h_{\tau\beta} + \partial_{\beta} \partial^{\sigma} h_{\alpha\sigma} - \partial_{\alpha} \partial_{\beta} h - \partial_{\sigma} \partial^{\sigma} h_{\alpha\beta}) - \eta_{\alpha\beta} (\partial^{\sigma} \partial^{\tau} h_{\sigma\tau} - \partial_{\sigma} \partial^{\sigma} h) \} \\
&= -\frac{1}{2} \{ \partial^2 h^{\mu\nu} - \partial_{\alpha} (\partial^{\mu} h^{\nu\alpha} + \partial^{\nu} h^{\mu\alpha}) + \partial^{\mu} \partial^{\nu} h \} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial^{\sigma} \partial^{\tau} h_{\sigma\tau} - \partial^2 h)
\end{aligned}$$

なので, Einstein 方程式 (84): $G^{\mu\nu} = \frac{8\pi k}{c^4} T_{\mu\nu}$ は式 (145):

$$\{ \partial^2 h^{\mu\nu} - \partial_{\alpha} (\partial^{\mu} h^{\nu\alpha} + \partial^{\nu} h^{\mu\alpha}) + \partial^{\mu} \partial^{\nu} h \} + \eta^{\mu\nu} (\partial^{\sigma} \partial^{\tau} h_{\sigma\tau} - \partial^2 h) = -\frac{16\pi k}{c^4} T_{\mu\nu}$$

を与える [4, p.186]. 代わりに Einstein テンソルの表式 (681) を代入すれば, 式 (146):

$$\partial^{\mu} \partial_{\mu} \bar{h}_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta} \partial^{\mu} \partial^{\nu} \bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu} - \partial^{\mu} \partial_{\beta} \bar{h}_{\alpha\mu} - \partial^{\mu} \partial_{\alpha} \bar{h}_{\beta\mu} = -\frac{16\pi k}{c^4} T_{\mu\nu}$$

が得られる.

■TT ゲージをとることができること (式 (149), (150) の箇所) の証明 既に見たように, Lorenz ゲージをとるにはゲージ関数 ε^μ を

$$\square\varepsilon^\mu = \partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu}$$

の解にとってゲージ変換を行えば良く, そのような ε^μ には斉次の波動方程式 $\square\varepsilon^\mu = 0$ の平面波解

$$\varepsilon_\alpha = B_\alpha \exp(ik \cdot x) \quad (682)$$

を加える任意性がある. これは Lorenz ゲージの下でもなお, Lorenz ゲージ条件を壊すことなく, ゲージ関数 $\varepsilon_\alpha = B_\alpha \exp(ik \cdot x)$ を用いてゲージ変換を行う自由度が残されていることを意味する. 1.8.3 節で述べたように, この自由度を利用し, 振幅に対するゲージ条件 (148): $A^{\alpha\beta} k_\beta = 0$ 加えてさらに TT ゲージの条件

$$A^\alpha{}_\alpha = 0 : (149), \quad A_{\alpha\beta} U^\beta = 0 : (150)$$

を課することができることを確認する (U^β は任意の時間的な定数単位ベクトル).

準備としてゲージ変換に対する振幅 $A_{\alpha\beta}$ の変化を調べておく. 一般にゲージ変換 (144):

$$\begin{aligned} h^{\mu\nu} &\rightarrow h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + \partial^\mu \varepsilon^\nu + \partial^\nu \varepsilon^\mu, \\ h_{\mu\nu} &\rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \varepsilon_\nu - \partial_\nu \varepsilon_\mu \end{aligned}$$

に対して $\bar{h}_{\mu\nu}$ は

$$\begin{aligned} \bar{h}'_{\mu\nu} &= h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h' \\ &= (h_{\mu\nu} - \partial_\mu \varepsilon_\nu - \partial_\nu \varepsilon_\mu) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} (h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \varepsilon_\beta - \partial_\beta \varepsilon_\alpha) \\ &= \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \right) - \partial_\mu \varepsilon_\nu - \partial_\nu \varepsilon_\mu + \frac{1}{2} (\partial_\alpha \varepsilon^\alpha + \partial_\beta \varepsilon^\beta) \\ &= \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu \varepsilon_\nu - \partial_\nu \varepsilon_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \varepsilon^\alpha \end{aligned}$$

と変換する [7, p.249]. ゲージ関数 (682) に対しては $\partial_\beta \rightarrow ik_\beta$ と置き換わるので, これは振幅の変更

$$A'_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - iB_\alpha k_\beta - iB_\beta k_\alpha + i\eta_{\alpha\beta} B^\mu k_\mu \quad (683)$$

を意味する [7, pp.265-266].

以下では $A_{\alpha\beta}$ が TT ゲージの条件 (148), (149), (150) を満たすようにゲージ関数の振幅 B_α を選べることを, 順を追って説明する [7, p.325].

(a) $A_{\alpha\beta}$ がゲージ条件 (148): $A^{\alpha\beta} k_\beta = 0$ を満たすとき,

$$A'^{\alpha\beta} k_\beta = (A^{\alpha\beta} - iB^\alpha k^\beta - iB^\beta k^\alpha + i\eta^{\alpha\beta} B^\mu k_\mu) k_\beta = 0 \quad (\because k^\beta k_\beta = 0)$$

より式 (683) の $A'_{\alpha\beta}$ もこの条件を満たす.

(b) $A'_{\alpha\beta}$ が TT ゲージ条件 (149): $A'^\alpha{}_\alpha = 0$ を満たすには, B^μ は制約条件

$$0 = A'^\alpha{}_\alpha = A^\alpha{}_\alpha + 2iB^\alpha k_\alpha \quad (\because \eta^\alpha{}_\alpha = \delta^\alpha{}_\alpha = 4)$$

を満たさなければならない.

(c) また TT ゲージ条件 (150): $A'_{\alpha\beta}U^\beta = 0$ は一見すると $\alpha = 0, 1, 2, 3$ の 4 つの条件を B^μ に課すように考えられるけれど, 実際には $A'_{\alpha\beta}U^\beta$ の線形結合 $k^\alpha A'_{\alpha\beta}U^\beta$ について常に

$$k^\alpha A'_{\alpha\beta}U^\beta = k^\alpha (A_{\alpha\beta} - iB_\alpha k_\beta - iB_\beta k_\alpha + i\eta_{\alpha\beta} B^\mu k_\mu) U^\beta = 0 \quad (\because k^\alpha A_{\alpha\beta} = 0, k^\alpha k_\alpha = 0)$$

が成り立っているため, これは 3 つの制約条件である.

(d) B^μ に対する (b),(c) の条件を合わせると,

$$\begin{aligned} 0 &= A'_{\alpha\beta}U^\beta = (A_{\alpha\beta} - iB_\alpha k_\beta - iB_\beta k_\alpha + i\eta_{\alpha\beta} B^\mu k_\mu) U^\beta, & (\text{条件 (c)}) \\ \therefore ik_\beta U^\beta B_\alpha + ik_\alpha U^\beta B_\beta &= A_{\alpha\beta}U^\beta + \frac{1}{2} A^\mu{}_\mu U_\alpha & (\text{条件 (b)}: B^\mu k_\mu = A^\mu{}_\mu/2) \end{aligned}$$

となる. 両辺に U^α を縮約し, U^α が単位ベクトルであること $U \cdot U = +1$ を用いると

$$2i(k_\beta U^\beta)(B_\alpha U^\alpha) = U^\alpha A_{\alpha\beta}U^\beta - \frac{1}{2} A^\mu{}_\mu$$

を得る. これを用いて上式の左辺第 2 項から $U^\beta B_\beta$ を消去すると

$$B_\alpha = \frac{1}{ik_\nu U^\nu} \left\{ A_{\alpha\beta}U^\beta - k_\alpha \frac{U^\gamma A_{\gamma\beta}U^\beta}{2k_\lambda U^\lambda} + \frac{1}{2} A^\mu{}_\mu \left(U_\alpha - \frac{k_\alpha}{4k_\lambda U^\lambda} \right) \right\}$$

と求まる. これ以上のゲージ自由度はない*236.

(e) 以上より (d) で求めた B_α に対してゲージ関数 (682): $\varepsilon_\alpha = B_\alpha \exp(ik_\mu x^\mu)$ を用いて座標変換 (ゲージ変換) を行えば, 新しい座標系では TT ゲージ条件が満たされる.

(f) なお静的な場合 $\omega = 0$ に対しては

$$k^2 = 0, \quad \therefore \mathbf{k}^2 = 0, \quad \therefore k = 0$$

より分母の $k_\nu U^\nu$ がゼロになるため, 以上の議論を適用できず, TT ゲージをとれる保証はなくなる.

*236 1.8.3 節のように TT ゲージの範囲内で z 軸周りの空間回転を行うことができる.

8 量子力学の基礎 (補足)

8.1 ケット, ブラおよび演算子 (補足)

■Hermite 演算子の性質 2.1 節で述べたように, Hermite 演算子 A の固有値 a', a'', \dots は実数であり, 異なる固有値 a', a'' に属する A の固有ケット $|a'\rangle, |a''\rangle$ は直交すること, すなわち $\langle a'|a''\rangle = 0$ を示す. 固有方程式 (152):

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle$$

の両辺 Hermite 共役をとり, A が Hermite であること $A^\dagger = A$ を用いると

$$\langle a''|A = a''^* \langle a'| \quad (684)$$

となる. ここで

$$\begin{aligned} \langle a''|(式(152)): & \quad \langle a''|A|a'\rangle = a' \langle a''|a'\rangle \\ (式(684))|a'\rangle: & \quad \langle a''|A|a'\rangle = a''^* \langle a''|a'\rangle \end{aligned}$$

を辺々引いて

$$(a' - a''^*) \langle a''|a'\rangle = 0$$

を得る. 今, a' と a'' を等しくとると $(a' - a'^*) \langle a'|a'\rangle = 0$ であり, 固有ケット $|a'\rangle \neq 0$ より $\langle a'|a'\rangle > 0$ であることから $a' = a'^*$ が結論される. これは固有値 a' が実数であることを意味する. 次に相異なる a', a'' をとると上式において $a' - a''^* = a' - a'' \neq 0$ なので, 直交性 $\langle a''|a'\rangle = 0$ が示される [18, pp.22-23].

■完全性条件 (155), (158) 2.1 節で述べたように完全性条件が式 (155), 式 (158) で与えられることを確かめる. 任意のケット $|\alpha\rangle$ が固有ケット $\{|a'\rangle\}, \{|\xi'\rangle\}$ を用いて

$$式(154): |\alpha\rangle = \sum_{a''} c_{a''} |a''\rangle, \quad 式(157): |\alpha\rangle = \int d\xi'' c_{\xi''} |\xi''\rangle$$

と展開できるとする. このとき展開係数は

$$\begin{aligned} \langle a'|\alpha\rangle &= \sum_{a''} c_{a''} \delta_{a'a''} \quad (\because 規格直交性(153): \langle a'|a''\rangle = \delta_{a'a''}) \\ &= c_{a'}, \\ \langle \xi'|\alpha\rangle &= \int d\xi'' c_{\xi''} \delta(\xi' - \xi'') \quad (\because 規格直交性(156): \langle \xi'|\xi''\rangle = \delta(\xi' - \xi'')) \\ &= c_{\xi'} \end{aligned}$$

と定まる. これを上式に戻すと

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle \langle a'|\alpha\rangle, \quad |\alpha\rangle = \int d\xi' |\xi'\rangle \langle \xi'|\alpha\rangle \quad (685)$$

であり, これが任意のケット $|\alpha\rangle$ に対して成り立つことから完全性条件

$$式(155): \sum_{a'} |a'\rangle \langle a'| = 1, \quad 式(158): \int d\xi' |\xi'\rangle \langle \xi'| = 1$$

を得る。逆に完全性条件が成り立てば、任意のケット $|\alpha\rangle$ を式 (685) のように展開することができる。実際、完全性条件は任意の状態が基底で展開できることを仮定して導かれたため、基底が完全系を成す条件となっている [18, p.24].

■期待値 $\langle\alpha|A|\alpha\rangle$ 2.1 節で述べたように、系の状態が $|\alpha\rangle$ にあるとき観測量 A の期待値は $\langle\alpha|A|\alpha\rangle$ で与えられる。実際、観測量 A を離散的な固有値 a' に見出す確率は $|\langle a'|\alpha\rangle|^2$ 、連続的な固有値 ξ' に見出す確率密度は $|\langle\xi'|\alpha\rangle|^2$ なので、 A の期待値は

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \begin{cases} \sum_{a'} a' |\langle a'|\alpha\rangle|^2 \\ \int d\xi' |\langle\xi'|\alpha\rangle|^2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sum_{a', a''} \langle a'|\alpha\rangle^* a'' \delta_{a' a''} \langle a''|\alpha\rangle \\ \int d\xi' d\xi'' \langle\xi'|\alpha\rangle^* \xi'' \delta(\xi' - \xi'') \langle\xi''|\alpha\rangle \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sum_{a', a''} \langle\alpha|a'\rangle \langle a'|A|a''\rangle \langle a''|\alpha\rangle \\ \int d\xi' d\xi'' \langle\alpha|\xi'\rangle \langle\xi'|A|\xi''\rangle \langle\xi''|\alpha\rangle \end{cases} \\ &= \langle\alpha|A|\alpha\rangle \quad (\because \text{完全性条件 (155), (158)}) \end{aligned}$$

となる [18, p.32].

8.1.1 重要な数学的性質 (補足)

■式 (159): $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$ の証明 Hermite 共役を定義する式

$$\begin{aligned} |\beta\rangle \equiv Y|\alpha\rangle &\Rightarrow \langle\beta| = \langle\alpha|Y^\dagger, \\ |\gamma\rangle \equiv X|\beta\rangle &\Rightarrow \langle\gamma| = \langle\beta|X^\dagger \end{aligned}$$

の第 1 式を第 2 式に代入すると、

$$|\gamma\rangle = XY|\alpha\rangle \Rightarrow \langle\gamma| = \langle\alpha|Y^\dagger X^\dagger$$

が得られる。これが任意の $|\alpha\rangle$ に対して成り立つことを要求すると、式 (159): $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$ を得る。

別証を載せておこう [17, p.30]. 任意のケット $|P\rangle, |Q\rangle$ に対して $|A\rangle = X^\dagger|P\rangle, |B\rangle = |Q\rangle Y^\dagger$ を定義すると、

$$\langle Q|Y^\dagger X^\dagger|P\rangle = \langle B|A\rangle = \langle A|B\rangle^* = \langle P|XY|Q\rangle^* = \langle Q|(XY)^\dagger|P\rangle$$

とできる。ただし最後の等号では、すぐ後で示す式 (161) を用いた。これが任意の $|P\rangle, |Q\rangle$ に対して成り立つことから、再び式 (159) を得る。

■式 (160): $(|\beta\rangle\langle\alpha|)^\dagger = |\alpha\rangle\langle\beta|$ の証明 任意の $|\gamma\rangle$ に対して

$$|A\rangle = |\beta\rangle\langle\alpha|\gamma\rangle \Rightarrow \langle A| = \langle\alpha|\gamma\rangle^* \langle\beta| = (\langle\gamma|\alpha\rangle) \cdot \langle\beta| = \langle\gamma|\alpha\rangle \langle\beta|$$

となることから示される [17, p.31].

■式 (161): $\langle \beta | X | \alpha \rangle = \langle \alpha | X^\dagger | \beta \rangle^*$ の証明 $|\gamma\rangle \equiv X|\alpha\rangle$ と書き, Hermite 共役 X^\dagger の定義により $\langle \gamma | = \langle \alpha | X^\dagger$ となることを用いると,

$$\langle \beta | X | \alpha \rangle = \langle \beta | \gamma \rangle = \langle \gamma | \beta \rangle^* = \langle \alpha | X^\dagger | \beta \rangle^* : (161)$$

とできる.

■交換子, 反交換子に関する恒等式 (162), (163) の証明

$$[AB, C] = ABC - CAB = \begin{cases} A(BC - CB) + (AC - CA)B = A[B, C] + [A, C]B : (162). \\ A(BC + CB) - (AC + CA)B = A\{B, C\} - \{C, A\}B : (163). \end{cases}$$

■可換な量 A, B に対する指数法則 $e^A e^B = e^{A+B}$ (補足) 2.1.1 節で述べたように, 可換な量 A, B に対しては指数法則 $e^A e^B = e^{A+B}$ が成り立つことを示す. まず,

$$e^A e^B = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} B^m \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} A^n B^m$$

の最右辺において和をとられる項 $\frac{1}{n!} \frac{1}{m!} A^n B^m$ をいくつか書き出すと以下のようになる.

	1	B	$\frac{1}{2} B^2$	$\frac{1}{3!} B^3$	$\frac{1}{N!} B^N$
1	1	B	$\frac{1}{2} B^2$	$\frac{1}{3!} B^3$	$\frac{1}{N!} B^N$
A	A	AB	$\frac{1}{2} AB^2$	$\frac{1}{(N-1)!} AB^{N-1}$	$\frac{1}{N!} B^N$
$\frac{1}{2} A^2$	$\frac{1}{2} A^2$	$\frac{1}{2} A^2 B$	\dots		
$\frac{1}{3!} A^3$	$\frac{1}{3!} A^3$	$\frac{1}{(N-1)!} A^{N-1} B$			
$\frac{1}{N!} A^N$	$\frac{1}{N!} A^N$				

$n+m=N$ となる項の和 $\sum_{n=0}^N \frac{1}{n!(N-n)!} A^n B^{N-n}$ は上の図式で 1 列に並ぶ青い字で示した項の和であることに注意すると,

$$e^A e^B = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!(N-n)!} A^n B^{N-n} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} A^n B^{N-n}$$

となることが分かる (ただし上の図式は $N=4$ として書いている). 上式の最右辺は A, B が交換すれば

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} (A+B)^N = e^{A+B}$$

に等しいから指数法則 $e^A e^B = e^{A+B}$ が成り立つ.

■Baker-Hausdorff (ベーカー・ハウドルフ) の補助定理 (165) の証明 証明したい式 (165) を改めて以下に書いておこう.

$$e^{i\lambda G} A e^{-i\lambda G} = A + i\lambda [G, A] + \frac{(i\lambda)^2}{2!} [G, [G, A]] + \dots + \frac{(i\lambda)^n}{n!} [G, [G, \dots [G, A] \dots]] + \dots$$

この公式は次のように証明できる。はじめに $e^{i\lambda G} = 1 + i\lambda G + \dots$ を $Ae^{-i\lambda G} = A - i\lambda AG - \dots$ に左からかけたときに現れる項を以下に書き出す。

	1	$i\lambda G$	\dots	$\frac{(i\lambda)^{N-k}}{(N-k)!} G^{N-k}$	\dots	\dots	$\frac{(i\lambda)^N}{N!} G^N$	\dots
A							•	
$-i\lambda AG$							•	
\vdots								
$\frac{(-i\lambda)^k}{k!} AG^k$				$\frac{(i\lambda)^{N-k} (-i\lambda)^k}{(N-k)! k!} G^{N-k} AG^k$			•	
\vdots								
$\frac{(-i\lambda)^N}{N!} AG^N$	•							
\vdots								

上の図式において青い項 $\frac{(i\lambda)^N}{N!} \sum_{k=0}^N {}_N C_k (-1)^k G^{N-k} AG^k$ が $\frac{(i\lambda)^N}{N!} [G, [G, \dots, [G, A] \dots]]$ に一致すれば良い*237。これを数学的帰納法にて示す。まずこれは $N = 1$ に対して成り立つ。つぎにこれがある N に対して成り立つとすると

$$\begin{aligned}
 & [G, \underbrace{[G, [G, \dots, [G, A] \dots]]}_{N \text{ 個の } G}] \\
 &= \left(G^{N+1} A + \sum_{k=1}^N {}_N C_k (-1)^k G^{N+1-k} AG^k \right) - \left(\sum_{k=0}^{N-1} {}_N C_k (-1)^k G^{N-k} AG^{k+1} + (-1)^N AG^{N+1} \right) \\
 &= G^{N+1} A + \sum_{k=1}^N \left(\underbrace{{}_N C_k + {}_N C_{k-1}}_{{}_{N+1} C_k \text{ (Pascal の三角形)}} \right) (-1)^k G^{N+1-k} AG^k + (-1)^{N+1} G^{N+1}
 \end{aligned}$$

より $N \rightarrow N + 1$ と置き換えても成り立つ。以上よりベーカー・ハウスドルフの補助定理 (165) が示された。

8.1.2 行列表現 (補足)

■ $|\beta\rangle \langle \alpha|$ の行列表現 (166) の説明 $|\beta\rangle \langle \alpha|$ の行列表現が式 (166) で良いのは次のことから裏付けられる。すなわち式 (166) を仮定すると、 $(|\beta\rangle \langle \alpha|) \cdot |\gamma\rangle$ の行列表現が $|\beta\rangle \cdot (\langle \alpha|\gamma\rangle)$ の列ベクトル表現に一致する：

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|\beta\rangle \langle a^{(1)}|\alpha\rangle^* & \langle a^{(1)}|\beta\rangle \langle a^{(2)}|\alpha\rangle^* & \dots \\ \langle a^{(2)}|\beta\rangle \langle a^{(1)}|\alpha\rangle^* & \langle a^{(2)}|\beta\rangle \langle a^{(2)}|\alpha\rangle^* & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_{\text{行列表現 (166)}} \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|\alpha\rangle \\ \langle a^{(2)}|\alpha\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|\beta\rangle \\ \langle a^{(2)}|\beta\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} \langle \alpha|\gamma\rangle.$$

さらに $\langle \gamma| \cdot (|\beta\rangle \langle \alpha|)$ の行列表現は $(\langle \gamma|\beta\rangle) \cdot \langle \alpha|$ の行ベクトル表現に一致する：

$$\langle \gamma|a^{(1)}\rangle \quad \langle \gamma|a^{(2)}\rangle \quad \dots \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|\beta\rangle \langle a^{(1)}|\alpha\rangle^* & \langle a^{(1)}|\beta\rangle \langle a^{(2)}|\alpha\rangle^* & \dots \\ \langle a^{(2)}|\beta\rangle \langle a^{(1)}|\alpha\rangle^* & \langle a^{(2)}|\beta\rangle \langle a^{(2)}|\alpha\rangle^* & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_{\text{行列表現 (166)}} = \langle \gamma|\beta\rangle (\langle a^{(1)}|\alpha\rangle \quad \langle a^{(2)}|\alpha\rangle \quad \dots).$$

*237 $[G, [G, \dots, [G, A] \dots]]$ の右端の \dots は括弧の連なりを表し、 A の右側に G は来ない。

8.2 不確定関係 (補足)

■両立できる観測量の行列要素 $\langle a''|B|a' \rangle$ に関する定理 (式 (167)) の証明 両立できる観測量の定義式 $[A, B] = 0$ より

$$0 = \langle a''|[A, B]|a' \rangle = (a'' - a') \langle a''|B|a' \rangle$$

より $a'' \neq a'$ に対して $\langle a''|B|a' \rangle = 0$ となる。これは行列要素 $\langle a''|B|a' \rangle$ が対角型であることを意味する。

■固有方程式 (168) の導出

$$\begin{aligned} B|a' \rangle &= \sum_{a''} |a'' \rangle \langle a''|B|a' \rangle \\ &= \sum_{a''} |a'' \rangle (\delta_{a'a''} \langle a'|B|a' \rangle) \quad (\because \text{式 (167)}) \\ &= (\langle a'|B|a' \rangle) |a' \rangle : (168). \end{aligned}$$

■一般に両立できない観測量の同時固有ケットは存在しないことの証明 両立できない観測量 A, B の同時固有ケット $|a', b' \rangle$ が存在すると仮定すると、

$$\begin{cases} AB|a', b' \rangle = Ab'|a', b' \rangle = a'b'|a', b' \rangle \\ BA|a', b' \rangle = Ba'|a', b' \rangle = a'b'|a', b' \rangle \end{cases} \\ \therefore AB|a', b' \rangle = BA|a', b' \rangle \quad (686)$$

より $[A, B] = 0$ が成り立つ。これは仮定に反しているから、一般に両立できない観測量に対し $|a', b' \rangle$ は意味を持たない。

ただし例外として、固有値が $a' = b' = 0$ のときには上式 (686) の両辺は零ケットになる。少なくともこのときには $[A, B] = 0$ を引き出すことはできず、上の議論は適用できない。これが「一般に」と断った理由である。

■不確定関係 (169) の証明 まず補助定理を 3 つ準備する。

補助定理 1 : Schwarz の不等式

$$\langle \alpha|\alpha \rangle \langle \beta|\beta \rangle \geq |\langle \alpha|\beta \rangle|^2. \quad (687)$$

参考 これは実 Euclid 空間のベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} に対する

通常 Schwarz の不等式 $|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \geq |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2$ と比較される。

証明 任意の複素数 λ に対して

$$(\langle \alpha|\alpha \rangle + \lambda^* \langle \beta|\beta \rangle) \cdot (\langle \alpha|\alpha \rangle + \lambda \langle \beta|\beta \rangle) \geq 0$$

が成り立つ。ここで $\lambda = -\langle \beta|\alpha \rangle / \langle \beta|\beta \rangle$ とおくと、Schwarz の不等式 (687) を得る。

補助定理 2 Hermite 演算子の期待値は実数である。

証明 任意の状態 $|\alpha \rangle = \sum_{a'} c_{a'} |a' \rangle$ に関する Hermite 演算子 B の期待値は

$$\langle \alpha|B|\alpha \rangle = \sum_{a', a''} c_{a''}^* c_{a'} \langle a''|B|a' \rangle$$

と表される。ここで Hermite 演算子は Hermite 行列で表されること $\langle a''|B|a' \rangle^* = \langle a'|B|a'' \rangle$ を用いると、右辺の複素共役は

$$\sum_{a', a''} c_{a''} c_{a'} \langle a'|B|a'' \rangle$$

となって、元と変わらない。これは期待値 $\langle \alpha|B|\alpha \rangle$ が実数であることを意味する。

補助定理 3 $C = -C^\dagger$ で定義される Hermite 交代の (あるいは反 Hermiten な) 演算子の期待値は純虚数である。

証明 式 (161) より $\langle \alpha|C|\alpha \rangle = \langle \alpha|C^\dagger|\alpha \rangle^* = -\langle \alpha|C|\alpha \rangle^*$ 。

さて、Schwarz の不等式 (687) は $|\alpha\rangle = \Delta A|\rangle, |\beta\rangle = \Delta B|\rangle$ とおくと ($|\rangle$ は任意のケット), $\Delta A, \Delta B$ の Hermite 性より

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geq |\langle \Delta A \Delta B \rangle|^2 \quad (688)$$

となる ($\langle \dots \rangle$ は状態 $|\rangle$ に関する期待値)^{*238}。右辺の演算子積を対称部分と反対称部分に分けて

$$\Delta A \Delta B = \frac{1}{2} [\Delta A, \Delta B] + \frac{1}{2} \{\Delta A, \Delta B\}$$

と書くと、対称部分 (の 2 倍)

$$\begin{aligned} [\Delta A, \Delta B] &= [A - \langle A \rangle, B - \langle B \rangle] \\ &= [A, B] - [A, \langle B \rangle] - [\langle A \rangle, B] + [\langle A \rangle, \langle B \rangle] = [A, B] \end{aligned}$$

は Hermite 交代的である。

$$([A, B])^\dagger = (AB - BA)^\dagger = BA - AB = -[A, B].$$

他方、反交換子 $\{\Delta A, \Delta B\}$ は Hermite 的なので、補助定理 2,3 より

$$\begin{aligned} \langle \Delta A \Delta B \rangle &= \frac{1}{2} \underbrace{\langle [\Delta A, \Delta B] \rangle}_{\text{純虚数}} + \frac{1}{2} \underbrace{\langle \{\Delta A, \Delta B\} \rangle}_{\text{実数}}, \\ \therefore |\langle \Delta A \Delta B \rangle|^2 &= \frac{1}{4} |\langle [\Delta A, \Delta B] \rangle|^2 + \frac{1}{4} |\langle \{\Delta A, \Delta B\} \rangle|^2 \geq \frac{1}{4} |\langle [\Delta A, \Delta B] \rangle|^2 \end{aligned} \quad (689)$$

が言える。上式 (688), (689) を組合せると、不確定関係 (169) が導かれる。

なお、すぐ上で見たように、 A, B の固有値 a', b' がゼロの状態では $[A, B] \neq 0$ であっても、同時固有状態 $|a', b'\rangle$ が可能である。実際このとき $[A, B] \neq 0$ であっても $|\langle [A, B] \rangle|^2 = 0$ だから、このことは不確定関係 $\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geq |\langle [A, B] \rangle|^2 / 4$ に抵触しない。

8.3 位置、運動量および平行移動 (補足)

■式 (175) の $\mathcal{T}(d\mathbf{x}')$ が性質 (171)–(174) を満足することの確認 式 (175): $\mathcal{T}(d\mathbf{x}') = 1 - i\mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}'$ の Hermite 共役をとると

$$\mathcal{T}^\dagger(d\mathbf{x}') = 1 + i\mathbf{K}^\dagger \cdot d\mathbf{x}'$$

^{*238} 例えば左辺の $\langle (\Delta A)^2 \rangle$ は $(\langle (\Delta A^\dagger) \cdot (\Delta A) \rangle) = \langle |(\Delta A)^2| \rangle = \langle (\Delta A)^2 \rangle$ として得られる。

となるので、 \mathbf{K} が Hermite であるとするれば、 $d\mathbf{x}'$ の 1 次までの近似でユニタリー性の条件 (171) が満たされる。

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^\dagger(d\mathbf{x}')\mathcal{T}(d\mathbf{x}') &= (1 + i\mathbf{K}^\dagger \cdot d\mathbf{x}')(1 - i\mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}') \\ &\simeq 1 - i(\mathbf{K} - \mathbf{K}^\dagger) \cdot d\mathbf{x}' \\ &\simeq 1.\end{aligned}$$

また式 (172) は次のように確かめられる。

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(d\mathbf{x}'')\mathcal{T}(d\mathbf{x}') &= (1 - i\mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}'')(1 - i\mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}') \\ &\simeq 1 - i\mathbf{K} \cdot (d\mathbf{x}' + d\mathbf{x}'') \\ &= \mathcal{T}(d\mathbf{x}' + d\mathbf{x}'').\end{aligned}$$

次に式 (173): $\mathcal{T}(-d\mathbf{x}') = \mathcal{T}^{-1}(d\mathbf{x}')$ を考えよう。ここで逆の演算子 $\mathcal{T}^{-1}(d\mathbf{x}')$ は

$$\mathcal{T}^{-1}(d\mathbf{x}')\mathcal{T}(d\mathbf{x}') = \mathcal{T}(d\mathbf{x}')\mathcal{T}^{-1}(d\mathbf{x}') = 1$$

で定義されると考える。これを Hermite 性 (171): $\mathcal{T}^\dagger(d\mathbf{x}')\mathcal{T}(d\mathbf{x}') = 1$ と比較すると、

$$\mathcal{T}^{-1}(d\mathbf{x}') = \mathcal{T}^\dagger(d\mathbf{x}') = 1 + i\mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}' = \mathcal{T}(-d\mathbf{x}')$$

と同定される。実際、これはもう一方の関係

$$= \mathcal{T}(d\mathbf{x}')\mathcal{T}(-d\mathbf{x}') = 1 - (i\mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}')^2 \simeq 1$$

も満たしている。

最後に式 (174): $\lim_{d\mathbf{x}' \rightarrow 0} \mathcal{T}(d\mathbf{x}') = 1$ が満たされていることは明らかである。

■無限小平行移動の N 回合成 (176) について X が値か演算子かに関わらず $N \rightarrow \infty$ のとき

$$\left(1 + \frac{X}{N}\right)^N = \sum_{n=0}^N \frac{X^n}{n!} \frac{N!}{(N-n)!N^n} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} \quad \left(\because \frac{N!}{(N-n)!N^n} = \frac{N}{N} \cdot \frac{N-1}{N} \cdots \frac{N-n+1}{N} \rightarrow 1\right)$$

となる。演算子 X に対しても $\exp(X)$ を級数展開の形で定義したことにより

$$\left(1 + \frac{X}{N}\right)^N \rightarrow e^X$$

である。 $X = 1$ とすると、これは e の定義式になる。直観的には

$$e^X = \left(e^{\frac{X}{N}}\right)^N \simeq \left(1 + \frac{X}{N}\right)^N \quad (N \gg 1)$$

である。

■式 (177): $\mathcal{T}(\mathbf{a}) = e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}/\hbar}$ と正準交換関係 (178): の同等性の確認 運動量 \mathbf{p} の定義として平行移動演算子の表式 (177): $\mathcal{T}(\mathbf{a}) = e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}/\hbar}$ と正準交換関係 (178): $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ が等価であることを示す。 $\mathcal{T}(\mathbf{a})$ が平行移動演算子であることから

$$\begin{aligned}x_i\mathcal{T}(\mathbf{a})|\mathbf{x}'\rangle &= x_i|\mathbf{x}' + \mathbf{a}\rangle = (x'_i + a_i)|\mathbf{x}' + \mathbf{a}\rangle, \\ \mathcal{T}(\mathbf{a})x_i|\mathbf{x}'\rangle &= x'_i\mathcal{T}(\mathbf{a})|\mathbf{x}'\rangle = x'_i|\mathbf{x}' + \mathbf{a}\rangle\end{aligned}$$

であり, これらを辺々引くと

$$[x_i, \mathcal{T}(\mathbf{a})] |\mathbf{x}\rangle = a_i |\mathbf{x}' + \mathbf{a}\rangle$$

となる. ここで平行移動演算子が $\mathcal{T}(\mathbf{a}) = e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}/\hbar} = 1 - \frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{a} + O(\mathbf{a}^2)$ と表されるとして両辺 \mathbf{a} の 1 次の項を取り出すと

$$-\frac{i}{\hbar}a_j[x_i, p_j] |\mathbf{x}'\rangle = a_i |\mathbf{x}'\rangle$$

となるので, 正準交換関係 $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ を得る [18, pp.61-63].

■交換関係 (180): $[p_i, p_j] = 0$ の導出 $\Delta x'$ と $\Delta y'$ の 2 次までの近似で

$$\begin{aligned} 0 &= [\mathcal{T}(\Delta y \hat{y}), \mathcal{T}(\Delta x \hat{x})] = [e^{-ip_y \Delta y/\hbar}, e^{-ip_x \Delta x/\hbar}] \\ &= \left[\left(1 - \frac{ip_y \Delta y}{\hbar} - \frac{p_y^2 (\Delta y')^2}{2\hbar^2} + \dots \right), \left(1 - \frac{ip_x \Delta x}{\hbar} - \frac{p_x^2 (\Delta x')^2}{2\hbar^2} + \dots \right) \right] \\ &\simeq -\frac{(\Delta x')(\Delta y') [p_y, p_x]}{\hbar^2}, \quad (\text{自明な関係 } [p_x, p_x] = [p_y, p_y] = 0 \text{ に注意}) \\ &\therefore [p_x, p_y] = 0 \end{aligned}$$

を得る. 添字を巡回置換して得られる関係と $[p_x, p_x] = 0$, etc. を合わせると, 式 (180): $[p_i, p_j] = 0$ のようにまとめられる.

■式 (181): $\langle \mathbf{x}' | \mathbf{p} | \alpha \rangle = -i\hbar \nabla' \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle$ の導出 次に平行移動演算子の表式 (177): $\mathcal{T}(\mathbf{a}) = e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}/\hbar}$ から式 (181): $\langle \mathbf{x}' | \mathbf{p} | \alpha \rangle = -i\hbar \nabla' \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle$ を導こう.

$$\begin{aligned} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}/\hbar} |\alpha\rangle &= \mathcal{T}(\mathbf{a}) |\alpha\rangle \\ &= \int d^3 x' \mathcal{T}(\mathbf{a}) |\mathbf{x}'\rangle \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle \\ &= \int d^3 x' |\mathbf{x}' + \mathbf{a}\rangle \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle \\ &= \int d^3 x'' |\mathbf{x}''\rangle \langle \mathbf{x}'' - \mathbf{a} | \alpha \rangle \quad (\mathbf{x}'' \equiv \mathbf{x}' + \mathbf{a}) \end{aligned}$$

であり, 最左辺と最右辺について \mathbf{a} の 1 次の項を取り出すと

$$\begin{aligned} -\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{a} |\alpha\rangle &= \int d^3 x'' |\mathbf{x}''\rangle (-\mathbf{a}\cdot\nabla'') \langle \mathbf{x}'' | \alpha \rangle, \quad \left(\nabla'' \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}''} \right) \\ \therefore \mathbf{p} |\alpha\rangle &= \int d^3 x'' |\mathbf{x}''\rangle (-i\hbar \nabla'') \langle \mathbf{x}'' | \alpha \rangle \end{aligned}$$

となるので, 式 (181):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}' | \mathbf{p} | \alpha \rangle &= \int d^3 x'' \langle \mathbf{x}' | \mathbf{x}'' \rangle (-i\hbar \nabla'') \langle \mathbf{x}'' | \alpha \rangle \\ &= -i\hbar \nabla' \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle \quad (\because \text{規格直交性 } \langle \mathbf{x}' | \mathbf{x}'' \rangle = \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')) \end{aligned}$$

を得る [18, p.72].

■公式 (182) の導出 式 (182):

$$\langle \mathbf{x}' | p_i^n | \alpha \rangle = (-i\hbar)^n \frac{\partial^n}{\partial x_i^n} \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle$$

を数学的帰納法 (M.I.) にて証明する. まず $n = 1$ で上式 (182) が成り立つ (式 (181)). そこである n で式 (182) が成り立つと仮定し, $\partial_i' \equiv \partial/\partial x_i'$, $\partial_i'' \equiv \partial/\partial x_i''$ とおくと

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}' | p_i | \mathbf{x}'' \rangle &= -i\hbar \partial_i' \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') = +i\hbar \partial_i'' \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \quad (\because \text{式 (181)}), \\ \langle \mathbf{x}'' | p_i^n | \alpha \rangle &= (-i\hbar)^n \partial_i''^n \langle \mathbf{x}'' | \alpha \rangle \quad (\text{M.I. の仮定}), \\ \therefore \langle \mathbf{x}' | p_i^{n+1} | \alpha \rangle &= \int d^3 x'' \langle \mathbf{x}' | p_i | \mathbf{x}'' \rangle \langle \mathbf{x}'' | p_i^n | \alpha \rangle \\ &= \int d^3 x'' \{ i\hbar \partial_i'' \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \} \{ (-i\hbar)^n \partial_i''^n \langle \mathbf{x}'' | \alpha \rangle \} \\ &= -(-i\hbar)^{n+1} \left\{ [\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \partial_i''^n \langle \mathbf{x}'' | \alpha \rangle] - \int d^3 x'' \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \partial_i''^{n+1} \langle \mathbf{x}'' | \alpha \rangle \right\} \\ &\quad ([\dots] \text{ は無限遠の境界項}) \\ &= (-i\hbar)^{n+1} \partial_i''^{n+1} \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle \end{aligned}$$

より $n \rightarrow n+1$ としても式 (182) は成り立つ. 以上より示された.

■平面波状態 (183) の導出 さらにこれを用いて, 運動量固有状態 $|\mathbf{p}'\rangle$ の波動関数 $\langle \mathbf{x}' | \mathbf{p}' \rangle$ に対する微分方程式を作ると,

$$p_i' \langle \mathbf{x}' | \mathbf{p}' \rangle = \langle \mathbf{x}' | p_i | \mathbf{p}' \rangle = -i\hbar \partial_i' \langle \mathbf{x}' | \mathbf{p}' \rangle$$

となる. これは $\langle \mathbf{x}' | \mathbf{p}' \rangle = N e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}' / \hbar}$ とすると満たされ, さらに式 (181) の導出で用いた規格直交条件

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') &= \langle \mathbf{x}' | \mathbf{x}'' \rangle \\ &= \int d^3 p' \langle \mathbf{x}' | \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p}' | \mathbf{x}'' \rangle \\ &= \int d^3 p' (N e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}' / \hbar}) (N^* e^{-i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}'' / \hbar}) \\ &= |N|^2 \int d^3 p' e^{i\mathbf{p}' \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') / \hbar} \\ &= |N|^2 (2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \end{aligned}$$

から規格化定数 N を定めると,

$$N = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}, \quad \therefore \text{式 (183)} : \langle \mathbf{x}' | \mathbf{p}' \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}' / \hbar}$$

を得る. ただし波動関数 $\langle \mathbf{x}' | \mathbf{p}' \rangle$ の位相は確率密度 $|\langle \mathbf{x}' | \mathbf{p}' \rangle|^2$ に影響しないため, 任意にとって良いことに注意して $N > 0$ とした [18, pp,74-75].

8.4 時間的发展と Schrödinger 方程式 (補足)

■Schrödinger 方程式 (185), (186) の導出 式 (186):

$$U(t + \Delta t, t_0) = (1 - iH\Delta t/\hbar)U(t, t_0)$$

を移行して整理すると,

$$\frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{U(t + \Delta t, t_0) - U(t, t_0)}{\Delta t} = -i(H/\hbar)U(t, t_0), \quad \therefore i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = HU(t, t_0) : (185)$$

を得る. これに両辺右から $|\alpha, t_0\rangle$ をかけると, 式 (186):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0; t\rangle = H |\alpha, t_0; t\rangle$$

が得られる. その際, $|\alpha, t_0\rangle$ は t に依らないので

$$\{\partial_t U(t, t_0)\} |\alpha, t_0\rangle = \partial_t \{U(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle\}$$

とできることに注意する.

■Schrödinger 方程式の形式解 (187), (188), (189) の導出 式 (187), (188), (189) の各々が Schrödinger 方程式 (185) の解となっていることを個別に確認する. 次に 3 つの場合の解 (187), (188), (189) の関係を考察する.

式 (189) の導出 まず一番簡単な場合として, H は時間に依存しないと仮定すると, 式 (189):

$$U(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)/\hbar} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-iH(t-t_0)}{\hbar} \right)^n$$

は確かに

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = i\hbar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{-iH(t-t_0)}{\hbar} \right)^{n-1} \left(\frac{-iH}{\hbar} \right) = i\hbar \left(\frac{-iH}{\hbar} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-iH(t-t_0)}{\hbar} \right)^n = HU(t, t_0)$$

より Schrödinger 方程式 (185) を満たし, また境界条件 $\lim_{t \rightarrow t_0} U(t, t_0) = 1$ も満たしているので, Schrödinger 方程式 (185) の解となっている*239.

式 (188) の導出 次に $H(t)$ は時間に依存するものの, 異なる時刻の $H(t)$ は互いに交換する場合に移ろう.

このときも単に上式で

$$H(t-t_0) \rightarrow \int_{t_0}^t dt' H(t')$$

と置き換えさえすれば, 式 (188):

$$U(t, t_0) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H(t') \right]$$

が Schrödinger 方程式 (185) の適切な解となっていることを確かめられる.

*239 あるいは 2.3 節で行ったように, $N \gg 1$ に対して微小時間 $(t-t_0)/N$ の時間発展の演算子を N 回合成しても, 式 (189) を得ることができる.

$$U(t, t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[1 - \left(\frac{iH}{\hbar} \right) \frac{t-t_0}{N} \right]^N = e^{-iH(t-t_0)/\hbar}.$$

Dyson 級数 (187) の導出 [22, p.450] 時間的发展の演算子に対する Schrödinger 方程式 (185):

$$i \frac{d}{dt} U(t, t_0) = H(t)U(t, t_0)$$

は初期 (境界) 条件 $U(t, t_0)|_{t=t_0} = 1$ を考慮すると

$$U(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H(t') U(t', t_0)$$

と書き換えられる. 逐次代入により

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 H(t_1) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H(t_1) H(t_2) \dots H(t_n) \end{aligned}$$

を得る. ここで最右辺における $n=0$ の項は 1, $n=1$ の項は $-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 H(t_1)$ と約束する.

式 (187), (188), (189) の関係 明らかに式 (188) は H が時間に依らない場合, 式 (189): $U(t, t_0) = \exp[-iH(t-t_0)/\hbar]$ に帰着する.

また Dyson 級数 (187) は異なる時刻の H が交換する場合に限って式 (188) に一致する. このことは次のように確かめられる.

$$\begin{aligned} (\text{式 (188) 右辺}) &= \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H(t') \right] \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H(t_1) H(t_2) \dots H(t_n) \end{aligned}$$

において, n に関する和の中身は (t_1, t_2, \dots, t_n) 空間の領域 $t_0 \leq t_1, t_2, \dots, t_n \leq t$ にわたる積分であり, これは $n!$ 通りの置換

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \pi(1) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

に対して $t_0 \leq t_{\pi(n)} \leq t_{\pi(n-1)} \leq \dots \leq t_{\pi(1)} \leq t$ で表される $n!$ 個の領域にわたる積分から成る:

$$(\text{式 (188) 右辺}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \sum_{\pi} \int_{t_0}^t dt_{\pi(1)} \int_{t_0}^{t_{\pi(1)}} dt_{\pi(2)} \dots \int_{t_0}^{t_{\pi(n-1)}} dt_{\pi(n)} H(t_1) H(t_2) \dots H(t_n).$$

異なる時刻の Hamilton 演算子が互いに交換する場合には, 被積分関数を

$$H(t_1) H(t_2) \dots H(t_n) = H(t_{\pi(1)}) H(t_{\pi(2)}) \dots H(t_{\pi(n)})$$

と並び替えられるから, これは Dyson 級数

$$(\text{式 (187) 右辺}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H(t_1) H(t_2) \dots H(t_n)$$

に一致する.

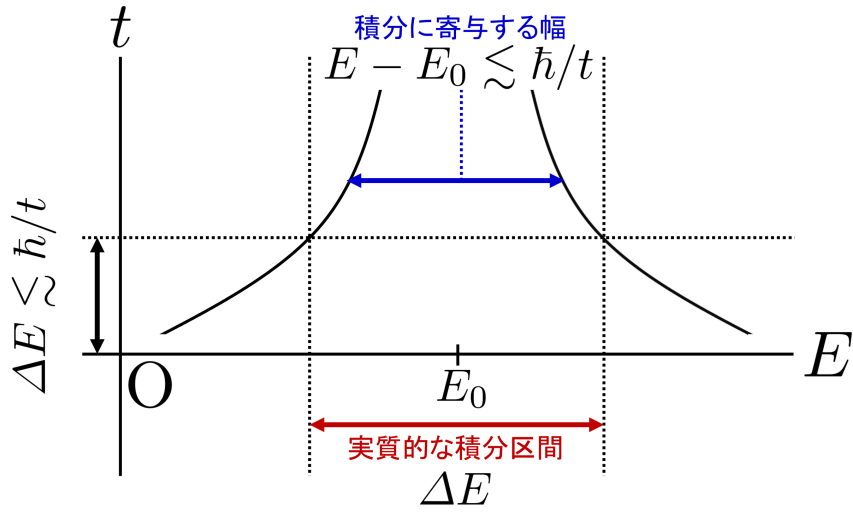


図 141 時間とエネルギーの不確定関係

■時間とエネルギーの不確定関係 (補足) 2.4 節で説明した時間とエネルギーの不確定関係を導出する。

相関の強さを $C(t) = \langle \alpha, t_0 | \alpha, t_0; t \rangle$ で定義し、時刻 t の状態と初期ケットの類似度の指標として、その絶対値 $|C(t)|$ を用いることができる。特に初期状態が固有ケット $|a'\rangle$ であれば、系の状態は $|a'\rangle$ から変化しない。この場合には

$$|C(t)| = |\langle a' | a', t_0; t \rangle| = |e^{-iE_{a'}(t-t_0)/\hbar}| = 1$$

である。

さて、簡単のために $t_0 = 0$ とおき、初期ケットを $|\alpha, t_0 = 0; t\rangle = \sum_{a'} c_{a'} |a'\rangle$ と展開すると、

$$\begin{aligned} C(t) &= \left(\sum_{a'} c_{a'}^* \langle a' | \right) \cdot \left[\sum_{a''} c_{a''} \exp\left(\frac{-iE_{a''}t}{\hbar}\right) |a''\rangle \right] \\ &= \sum_{a'} |c_{a'}|^2 \exp\left(\frac{-iE_{a'}t}{\hbar}\right) \end{aligned} \quad (690)$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \exp\left(\frac{-iE_0t}{\hbar}\right) \int dE \rho(E) |g(E)|^2 \exp\left(\frac{-i(E-E_0)t}{\hbar}\right), \quad (691) \\ &\rho(E) : \text{エネルギー固有状態の密度}, \quad g(E_{a'}) = c_{a'}. \end{aligned}$$

ここで現実の物理的状態では $\rho(E)|g(E)|^2$ が $E = E_0$ のまわりで幅 ΔE のピークを持つ。与えられた幅 ΔE が実質的な積分区間となる。一方、 $E - E_0 \gtrsim \hbar/t$ のとき、 E の変化に伴って $\exp\left(\frac{-i(E-E_0)t}{\hbar}\right)$ は激しく振動し、打ち消し合うから、 $C(t)$ への寄与は $E - E_0 \lesssim \hbar/t$ から来る。この幅は時間とともに狭まり、 $\hbar/t \lesssim \Delta E$ となると積分区間 ΔE の中で打ち消し合いが起き (図 141 参照)、 $C(t)$ が 1 からずれる。よって物理系の状態ケットが原形を保つ、すなわち $C(t) \simeq 1$ を保つ時間 Δt は

$$\Delta t \Delta E \simeq \hbar$$

で与えられる (時間とエネルギーの不確定関係)。

参考——エネルギー固有状態の密度 $\rho(E)$ について 上式の中の固有状態の密度は、エネルギーが離散的なスベクトルを成すという描像では $\rho(E) = \sum_{a'} \delta(E - E_{a'})$ と表される。実際これを式 (691) に代入すると

$$C(t) = \int dE \rho(E) |g(E)|^2 \exp\left(-i \frac{E}{\hbar} t\right) = \sum_{a'} |c_{a'}|^2 \exp\left(-i \frac{E_{a'}}{\hbar} t\right)$$

となって、式 (690) に戻る。また、 $\rho(E) = \sum_{a'} \delta(E - E_{a'})$ と書くと、規格化条件

$$\int dE \rho(E) |g(E)|^2 = \sum_{a'} |c_{a'}|^2 = 1$$

が容易に見出される。

■時間に依存する波動方程式 (193) の導出 状態ケットに対する Schrödinger 方程式 (186):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0; t\rangle = H |\alpha, t_0; t\rangle$$

の両辺に左から $\langle \mathbf{x}' |$ をかけ、Schrödinger 描像の位置固有ブラ $\langle \mathbf{x}' |$ は時間変化しないことに注意すると、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0; t\rangle = \langle \mathbf{x}' | H | \alpha, t_0; t\rangle = \langle \mathbf{x}' | \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) | \alpha, t_0; t\rangle$$

を得る。最右辺において

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}' | \frac{\mathbf{p}^2}{2m} | \alpha, t_0; t\rangle &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla'^2 \langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0; t\rangle \quad (\because \text{式 (182)}) \\ \langle \mathbf{x}' | V(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{x}' | V(\mathbf{x}') \quad (V(\mathbf{x}) \text{ は演算子, } V(\mathbf{x}') \text{ は固有値}) \end{aligned}$$

とできるので、波動関数 $\psi(\mathbf{x}', t) \equiv \langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0; t\rangle$ に対する方程式 (193):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}', t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla'^2 \psi(\mathbf{x}', t) + V(\mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}', t)$$

が導かれる。

■確率の流れ (196) について 式 (196):

$$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m} [\psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi^*) \psi] = \frac{\hbar}{m} \text{Im}(\psi^* \nabla \psi)$$

は

$$\mathbf{j} = \text{Re} \left[\psi^* \frac{\hbar}{im} \nabla \psi \right]$$

とも書ける。

■連続の式 (195) の導出 Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi$$

を利用すると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \\ &= \psi^* \left\{ \frac{1}{i\hbar} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi \right\} + \psi \left\{ -\frac{1}{i\hbar} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi^* \right\} \\ &= \frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*)\end{aligned}$$

を得る. また確率の流れの式 (196):

$$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

より

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*)$$

となる. これらを辺々足すと, 連続の式 (195) が導かれる.

■確率の流れ (197) の導出 $\psi = \sqrt{\rho} e^{iS/\hbar}$ に対して

$$\nabla \psi = (\nabla \sqrt{\rho}) e^{iS/\hbar} + \sqrt{\rho} \frac{i\nabla S}{\hbar} e^{iS/\hbar}, \quad \therefore \psi^* \nabla \psi = \sqrt{\rho} \nabla \sqrt{\rho} + \frac{i}{\hbar} \rho \nabla S$$

なので, 確率の流れの式 (196) は式 (197):

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{m} \text{Im}(\psi^* \nabla \psi) = \frac{\rho \nabla S}{m}$$

を与える.

8.4.1 電磁場と相互作用する荷電粒子 (補足)

■Schrödinger 方程式 (198) のゲージ不変性 [2, p.411] Schrödinger 方程式 (198) のゲージ不変性, すなわち変換後の場

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi, \quad \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \psi' = e^{iq\chi/\hbar c} \psi$$

が同じ形の式

$$i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A}' \right)^2 \psi' + q\phi' \psi' \quad (692)$$

を満たすことを確かめる. ゲージパラメーター $U = e^{iq\chi/\hbar c}$ と任意関数 M に対して

$$-i\hbar \nabla (UM) = \frac{q}{c} (\nabla \chi) UM + U (-i\hbar \nabla) M$$

なので, 有用な公式

$$\left(-i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} - \frac{q}{c} \nabla \chi \right) UM = U \left(-i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) M$$

が得られる. これを繰り返し用いると, 上式 (692) の右辺第 1 項について

$$\begin{aligned}\left(-i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A}' \right)^2 \psi' &= \left(-i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} - \frac{q}{c} \nabla \chi \right)^2 (U\psi) \\ &= \left(-i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} - \frac{q}{c} \nabla \chi \right) U \left(-i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \psi \\ &= U \left(-i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi\end{aligned}$$

と計算できる。さらに式 (692) の左辺と、右辺第 2 項はそれぞれ

$$i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t} = i\hbar U \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{q}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} U \psi, \quad q\phi' \psi' = q \left(\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) U \psi$$

と書き換えられるので、式 (692) は

$$i\hbar U \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} U \left(-i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi + qU\phi\psi$$

と等価である。これはもとの場に対する Schrödinger 方程式 (198) の両辺に (左から) U を掛けた関係式となっているから、成立する。

8.5 Schrödinger 描像, Heisenberg 描像, 相互作用描像 (補足)

ここでは 2.5 節の内容を補足する。

■ Heisenberg 方程式 (200) の導出

$$\begin{aligned} \frac{dA^H}{dt} &= \frac{dU^\dagger}{dt} AU + U^\dagger A \frac{dU}{dt} \quad (\because \text{式 (199)} : A^H(t) = U^\dagger(t)AU(t)) \\ &= \left(-\frac{1}{i\hbar} U^\dagger H \right) AU + U^\dagger A \left(\frac{1}{i\hbar} HU \right) \quad \left(\because \text{式 (185)} : i\hbar \frac{dU}{dt} = HU, \quad -i\hbar \frac{dU^\dagger}{dt} = U^\dagger H \right) \\ &= -\frac{1}{i\hbar} (U^\dagger HU)(U^\dagger AU) + \frac{1}{i\hbar} (U^\dagger AU)(U^\dagger HU) \quad (\because UU^\dagger = 1) \\ &= \frac{1}{i\hbar} [A^H, H^H]. \quad (\because \text{式 (199)} : A^H(t) = U^\dagger(t)AU(t)) \end{aligned}$$

ここで最右辺において $H^H \equiv U^\dagger HU$ は Heisenberg 描像の Hamilton 演算子であり、 H と $U(t) = e^{-iHt/\hbar}$: (189) は交換するから、これは Schrödinger 描像の Hamilton 演算子 H に等しい：

$$H^H \equiv U^\dagger HU = U^\dagger UH = H. \quad (\because U^\dagger U = 1)$$

よって上式は Heisenberg 方程式 (200):

$$\frac{dA^H}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [A^H, H]$$

に他ならない [18, pp.111-112].

■ Heisenberg 描像の観測量 $A^H(t)$ に対する固有方程式 (201) の導出 Schrödinger 描像の観測量 A に対する固有方程式 (152):

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle$$

に両辺左から $U^\dagger(t)$ をかけ、 $UU^\dagger = 1$ に注意すると

$$\begin{aligned} \{U^\dagger(t)AU(t)\}\{U^\dagger(t)|a'\rangle\} &= a'\{U^\dagger(t)|a'\rangle\}, \quad \therefore A^H(t)|a', t\rangle_H = a'|a', t\rangle_H : (201), \\ A^H(t) &\equiv U^\dagger(t)AU(t) : (199), \quad |a', t\rangle_H \equiv U^\dagger(t)|a'\rangle : (202) \end{aligned}$$

が得られる [18, pp.116-117].

■相互作用描像の状態ケット $|\alpha, t\rangle_I$ に対する時間発展方程式 (204) の確認

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha, t\rangle_I &= i\hbar \frac{d}{dt} (e^{iH_0 t/\hbar} |\alpha, t\rangle) \\
 &= -H_0 e^{iH_0 t/\hbar} |\alpha, t\rangle + e^{iH_0 t/\hbar} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha, t\rangle \\
 &= e^{iH_0 t/\hbar} (-H_0) |\alpha, t\rangle + e^{iH_0 t/\hbar} H |\alpha, t\rangle \quad (\because \text{Schrödinger 方程式 (186)}) \\
 &= e^{iH_0 t/\hbar} H_I |\alpha, t\rangle \\
 &= (e^{iH_0 t/\hbar} H_I e^{-iH_0 t/\hbar}) (e^{iH_0 t/\hbar} |\alpha, t\rangle) \\
 &= H_I^I |\alpha, t\rangle_I.
 \end{aligned}$$

■Heisenberg 描像と相互作用描像における観測量の関係 (206) の確認

$$\begin{aligned}
 A^I(t) &= U_0^\dagger(t) A U_0(t) \quad (\because \text{式 (203)}) \\
 &= U_0^\dagger(t) U(t) A^H(t) U^\dagger(t) U_0(t) \quad (\because \text{式 (199)}) \\
 &= U^\dagger(t) A^H(t) U(t) : (206), \\
 U(t) &\equiv U^\dagger(t) U_0(t) = e^{iHt/\hbar} e^{-iH_0 t/\hbar}.
 \end{aligned}$$

8.6 生成・消滅演算子 (補足)

■調和振動子の交換関係 (208) の導出 正準交換関係 $[q, p] = i\hbar$ より

$$[a, a^\dagger] = \frac{1}{2\hbar m\omega} [m\omega q + ip, m\omega q - ip] = \frac{1}{2\hbar m\omega} (-im\omega[q, p] + im\omega[p, q]) = \frac{1}{2\hbar m\omega} \cdot 2 \cdot (-im\omega)[q, p] = 1 : (208).$$

■調和振動子に対する Hamiltonian の表式 (209) の導出 演算子 a, a^\dagger の式 (207) を q, p について逆に解くと

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger), \quad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (-a + a^\dagger)$$

なので、調和振動子の Hamiltonian は

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 = \frac{1}{4} \hbar\omega \{ -(-a + a^\dagger)^2 + (a + a^\dagger)^2 \} = \frac{1}{2} \hbar\omega (aa^\dagger + a^\dagger a)$$

と計算される。交換関係 (208): を用いて最右辺において $aa^\dagger = a^\dagger a + 1$ と書き換えると、式 (209):

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right)$$

を得る。

■交換関係 (208): $[a, a^\dagger] = 1$ の帰結 2.6 節で述べたように、 a, a^\dagger は交換関係 (208): $[a, a^\dagger] = 1$ を課すと式 (210):

$$a |n\rangle \propto |n-1\rangle, \quad a^\dagger |n\rangle \propto |n+1\rangle$$

を満たす消滅、生成演算子となることを示す。交換関係 (208) および恒等式 (162) を用いると

$$[N, a] = [a^\dagger a, a] = a^\dagger [a, a] + [a^\dagger, a] a = -a \quad (693)$$

$$[N, a^\dagger] = [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger [a, a^\dagger] + [a^\dagger, a^\dagger] a = a^\dagger \quad (694)$$

が導かれる。ここから

$$\begin{aligned} N(a|n\rangle) &= (aN + [N, a])|n\rangle = a(N-1)|n\rangle = (n-1)(a|n\rangle), \\ N(a^\dagger|n\rangle) &= (a^\dagger N + [N, a^\dagger])|n\rangle = a^\dagger(N+1)|n\rangle = (n+1)(a^\dagger|n\rangle) \end{aligned}$$

を得る。これらは $a|n\rangle, a^\dagger|n\rangle$ がそれぞれ固有値 $n-1, n+1$ に属する N の固有ケットであることを意味する。よって c_\pm を数定数として

$$a|n\rangle = c_-|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = c_+|n+1\rangle$$

と書ける。これは式 (210) に他ならない。

次に固有値 n がゼロ以上の整数に限られることを示す。まず上式の係数 c_\pm を定めるに当たり、各固有値 n に対する固有ケット $|n\rangle$ が $\langle n|n\rangle = 1$ と規格化されていることを要求しよう。すると

$$\begin{aligned} |c_-|^2 &= (\langle n-1|c_-^*) \cdot (c_-|n-1\rangle) = (\langle n|a^\dagger) \cdot (a|n\rangle) \\ &= n\langle n|n\rangle = n, \\ |c_+|^2 &= (\langle n+1|c_+^*) \cdot (c_+|n+1\rangle) = (\langle n|a) \cdot (a^\dagger|n\rangle) = \langle n|a^\dagger a + [a, a^\dagger]|n\rangle \\ &= \langle n|N+1|n\rangle = (n+1)\langle n|n\rangle = n+1 \end{aligned}$$

を得る。係数 c_\pm の位相は物理的に意味がないから c_\pm を実の正数にとって良く、このとき $c_- = \sqrt{n}, c_+ = \sqrt{n+1}$ なので

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (695)$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (696)$$

となる。式 (695) によれば、ある固有ケット $|n\rangle$ から初めて N の固有ケットに消滅演算子 a をかける操作を繰り返すと、固有ケット

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a|n-1\rangle = \sqrt{n-1}|n-2\rangle, \quad \dots$$

が得られることになる。ゼロの整数 n から始めればいずれ

$$a|1\rangle = |0\rangle, \quad a|0\rangle = 0$$

が得られ、 $n=0$ よりも小さい固有値 n を持つ固有ケット $|n\rangle$ が作られることはない。一方、非整数の n から始めれば、負の値をとるいくらでも小さい固有値 n を持つ固有ケット $|n\rangle$ が作られることになる。ところで任意のケット $|\alpha\rangle$ に対して $\langle \alpha|\alpha\rangle \geq 0$ が成り立つという要請 (2.1) から、固有値 n は

$$0 \leq (\langle n|a^\dagger) \cdot (a|n\rangle) = \langle n|N|n\rangle = n$$

を満たさなければならない。以上より固有値 n として許されるのはゼロ以上の整数のみである。なお固有ケット (211): $|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{n!}|0\rangle$ が適正に規格化されていることは、上式 (696) から理解できる [18, pp.120-124].

■ $a(t)$ に対する Heisenberg 方程式 (212) の導出 Heisenberg 描像の演算子 $a(t), a^\dagger(t)$ も調和振動子の交換関係 (208) を、従って式 (693): $[N, a] = -a$ を満たすので、Heisenberg 方程式を書き下すと

$$i\hbar \frac{da}{dt} = [a, H] = \hbar\omega[a, N] = \hbar\omega a, \quad \therefore \frac{da(t)}{dt} = -i\omega a(t) : (212)$$

となる。

■反交換関係 (213): $\{a, a^\dagger\} = 1$, etc. を課した場合 さらに 2.6 節で述べたように, a, a^\dagger は反交換関係 (213):

$$\{a, a^\dagger\} = 1, \quad \{a, a\} = 0, \quad \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0$$

を課した場合にも, それぞれ式 (210):

$$a|n\rangle \propto |n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle \propto |n+1\rangle$$

を満たす消滅, 生成演算子となる. 実際, 反交換関係 (213) および恒等式 (163) を用いると

$$\begin{aligned} [N, a] &= [a^\dagger a, a] = a^\dagger \{a, a\} - \{a^\dagger, a\} a = -a, \\ [N, a^\dagger] &= [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger \{a, a^\dagger\} - \{a^\dagger, a^\dagger\} a = a^\dagger \end{aligned}$$

が導かれる. この結果はそれぞれ式 (693), 式 (694) と同じものであるから, 上の議論を繰り返すことで再び

$$\text{式 (695): } a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \text{式 (696): } a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

が得られ, さらに固有値 n はゼロ以上の整数であることが結論される. そこで固有値 $n=0$ に属する固有ケット $|0\rangle$ に生成演算子 a^\dagger を次々とかけて式 (696) を使い, N の固有ケットを作ることを考えよう. 今, 反交換関係 (213): $\{a^\dagger, a^\dagger\} = 0$ より $(a^\dagger)^2 = 0$ であることにも注意すると

$$a^\dagger|0\rangle = |1\rangle, \quad (a^\dagger)^2|0\rangle = 0, \quad \dots$$

なので固有値は $n=0, 1$ に限られる.

同じ結論は反交換関係 (213) およびその帰結 $a^2 = (a^\dagger)^2 = 0$ を用いると

$$N^2 = a^\dagger a a^\dagger a = a^\dagger (1 - a^\dagger a) a = N, \quad \therefore N(N-1) = 0$$

であることから, $n=0, 1$ と説明することもできる [10, pp.65-67].

8.7 古典的極限 (補足)

8.7.1 古典的極限 (補足)

■式 (214) の導出 式 (214) を得るには, $\sqrt{\rho}$ の微分を実行して

$$\partial_\mu \sqrt{\rho} = \frac{\partial_\mu \rho}{2\sqrt{\rho}}, \quad \mu = t, x, y, z$$

とする必要はない.

$\nabla^2 \psi$ について考える. 微分公式

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

を $u = \sqrt{\rho}, v = e^{iS/\hbar}$ として適用すると,

$$\partial_k^2 \psi = \left\{ \partial_k^2 \sqrt{\rho} + 2 \frac{i}{\hbar} (\partial_k \sqrt{\rho}) (\partial_k S) + \sqrt{\rho} \left(\frac{i}{\hbar} \partial_k S \right)^2 + \frac{i}{\hbar} \sqrt{\rho} \partial_k^2 S \right\} e^{iS/\hbar}$$

が各成分 k に対して成り立つ. そこで両辺 k について和をとると (すなわち繰り返された添字 k について和をとるものと見なすと), $\nabla^2 \psi$ の式が得られる.

こうして $\psi = \sqrt{\rho}e^{iS/\hbar}$ に対して Schrödinger 方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

の各項を書き換えると,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\nabla^2\sqrt{\rho} + \frac{2i}{\hbar}(\nabla\sqrt{\rho})\cdot(\nabla S) - \frac{1}{\hbar^2}\sqrt{\rho}|\nabla S|^2 + \frac{i}{\hbar}\sqrt{\rho}\nabla^2 S\right] + \sqrt{\rho}V = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\rho} + \frac{i}{\hbar}\sqrt{\rho}\frac{\partial S}{\partial t}\right)$$

となるので, 式 (214) が得られる.

8.7.2 半古典的 (WKB) 近似 (補足)

■式 (217) の解釈 これはある場所に粒子を見出す確率が速度 v に逆比例することと整合している. 古典論において, このことは次のように理解できる. 同一のポテンシャルの中で独立に運動する複数の粒子が x 軸上に定常流を作っているとすると, その粒子数密度を n , 流れの速度を v として, 粒子数の保存則は

$$\frac{\partial}{\partial x}(nv) = 0, \quad \therefore nv = \text{const}(\text{時間的, 空間的に})$$

(位置 x に特定の粒子を見出す確率) $\propto n \propto 1/v$

となる.

■短波長の条件式 (220) の導出 式 (215): $\hbar|\nabla^2 S| \ll |\nabla S|^2$ は, $S(x, t) = W(x) - Et$ および

$$\begin{cases} \frac{dW}{dx} = \pm\sqrt{2m(E-V)} \\ \frac{d^2W}{dx^2} = \pm\sqrt{2m}\frac{-V'}{2\sqrt{E-V}} \end{cases}, \quad \therefore \begin{cases} \left|\frac{dW}{dx}\right|^2 = 2m(E-V) \\ \left|\frac{d^2W}{dx^2}\right| = \sqrt{\frac{m}{2(E-V)}}|V'| \end{cases}$$

により,

$$\hbar\sqrt{\frac{m}{2(E-V)}}|V'| \ll 2m(E-V), \quad \therefore \frac{\hbar}{\sqrt{2m(E-V)}} \ll \frac{2(E-V)}{|V'|}$$

と書き換えられる. ここで最後の式の左辺は

$$\lambda \equiv \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{1}{|k|} = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(E-V)}}$$

なので, 式 (220) を得る.

8.7.3 Bohr-Sommerfeld の量子化の規則 (補足)

■Bohr-Sommerfeld の量子条件 (222) の導出 領域 $a \leq x \leq b$ の波動関数 (218):

$$\psi(x) = \frac{C_1}{\sqrt{p}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x p dx\right) + \frac{C_2}{\sqrt{p}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x p dx\right)$$

に対して境界条件

$$0 = \psi(a) = \frac{C_1}{\sqrt{p}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^a p dx\right) + \frac{C_2}{\sqrt{p}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^a p dx\right)$$

を課すと,

$$C_1 = \frac{C}{2i} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_a^{x_0} p dx\right), \quad C_2 = -\frac{C}{2i} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_a^{x_0} p dx\right)$$

とおけるので、波動関数は

$$\psi(x) = \frac{C}{\sqrt{p}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_a^x p dx\right)$$

と表される。これは確かに境界条件 $\psi(a) = 0$ を満たしていることが明白である。同様に境界条件 $\psi(b) = 0$ を考慮すると

$$\psi(x) = \frac{C'}{\sqrt{p}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^b p dx\right)$$

を得る。

これらが a と b の任意の x で一致する条件を丁寧に調べると、以下ようになる。位相を $\alpha(x) = \frac{1}{\hbar} \int_a^x p dx, \beta(x) = \frac{1}{\hbar} \int_x^b p dx$ と略記すると、波動関数の 2 通りの表現が一致する条件は

$$\begin{aligned} 0 &= C \sin \alpha - C' \sin \beta \\ &= \frac{C + C'}{2} (\sin \alpha - \sin \beta) + \frac{C - C'}{2} (\sin \alpha + \sin \beta) \\ &= (C + C') \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + (C - C') \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \end{aligned}$$

と書き直される。ここで $\alpha + \beta$ は x に依らない定数となるので、上式が任意の x で成り立つ条件は

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{2n + 1}{2} \pi \quad \text{かつ} \quad C - C' = 0, \quad \text{または} \quad \frac{\alpha + \beta}{2} = n\pi \quad \text{かつ} \quad C + C' = 0$$

である。これらは $\alpha + \beta = n\pi$: (222) かつ $C = (-1)^{n+1} C'$ とまとめられる。

8.7.4 プロパゲーターと Feynman の経路積分 (補足)

■プロパゲーターの表式 (223) の導出

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}'', t) &= \langle \mathbf{x}'' | \alpha, t_0; t \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}'' | e^{-iH(t-t_0)/\hbar} | \alpha, t_0 \rangle \\ &= \int d^3 x' \langle \mathbf{x}'' | e^{-iH(t-t_0)/\hbar} | \mathbf{x}' \rangle \langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0 \rangle \\ &= \int d^3 x' K(\mathbf{x}'', t; \mathbf{x}', t_0) \psi(\mathbf{x}', t_0), \\ K(\mathbf{x}'', t; \mathbf{x}', t_0) &= \langle \mathbf{x}'' | e^{-iH(t-t_0)/\hbar} | \mathbf{x}' \rangle : (223). \end{aligned}$$

■微小時間の遷移振幅 (225) における規格化定数の決定 規格化因子 $w(\Delta t)$ はポテンシャル $V(x)$ の具体形には依らないものと仮定すると、自由粒子に対してその値を評価すれば充分である。自由粒子の Lagrangian は運動エネルギー $\frac{m}{2} \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t}\right)^2$ で与えられるので (式 (192) 参照)、微小時間の遷移振幅 (225) は

$$\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle = \frac{1}{w(\Delta t)} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t} \right)^2 \Delta t \right]$$

と書ける。ここで Gauss 型の関数からデルタ関数が作られること

$$\sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \exp \left(\frac{i m \xi^2}{2 \hbar \Delta t} \right) \rightarrow \delta(\xi), \quad \Delta t \rightarrow 0 \quad (697)$$

を考えると、規格化条件

$$\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle \rightarrow \delta(x_n - x_{n-1}) \quad (\Delta t \rightarrow 0 \text{ のとき})$$

が満たされるには

$$\frac{1}{w(\Delta t)} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}}$$

とおけば良いことが分かる。

■Feynman の経路積分 (226) が Schrödinger 方程式を満たすことの確認 Feynman の経路積分 (226), ないしその基となる仮定 (225) によれば, 遷移振幅は

$$\begin{aligned} \langle x_N, t_N | x_1, t_1 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_{N-1} \langle x_N, t_N | x_{N-1}, t_{N-1} \rangle \langle x_{N-1}, t_{N-1} | x_1, t_1 \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_{N-1} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{x_N - x_{N-1}}{\Delta t} \right)^2 - V \right\} \Delta t \right] \langle x_{N-1}, t_{N-1} | x_1, t_1 \rangle \end{aligned}$$

と表される ($\Delta t = t_N - t_{N-1}$ は無限小, 式 (192) 参照). ここで変数 $\xi = x_N - x_{N-1}$ を導入し, $x_N \rightarrow x, t_N \rightarrow t + \Delta t$ と改めると

$$\langle x, t + \Delta t | x_1, t_1 \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp \left(\frac{im\xi^2}{2\hbar\Delta t} - \frac{iV\Delta t}{\hbar} \right) \langle x - \xi, t | x_1, t_1 \rangle$$

と書き換えられる. 両辺を Δt について展開し, また上式 (697) より $\Delta t \rightarrow 0$ のとき積分への主要な寄与が $\xi = 0$ の近くから来ることを踏まえて, ξ についても級数展開を行うと

$$\begin{aligned} &\langle x, t | x_1, t_1 \rangle + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \langle x, t | x_1, t_1 \rangle \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp \left(\frac{im\xi^2}{2\hbar\Delta t} \right) \left(1 - \frac{iV\Delta t}{\hbar} + \dots \right) \left[\langle x, t | x_1, t_1 \rangle + \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x, t | x_1, t_1 \rangle + \dots \right] \end{aligned} \quad (698)$$

を得る (右辺 [...] 内における ξ の 1 次の項はゼロになる奇関数の積分を与えるため, あらかじめ落とした). Fresnel 積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp \left(\frac{im\xi^2}{2\hbar\Delta t} \right) = \sqrt{\frac{2\pi i \hbar \Delta t}{m}} \quad (699)$$

より Δt の 0 次の項は, 両辺ともに $\langle x, t | x_1, t_1 \rangle$ である. 次に式 (699) と, これをパラメーター Δt で微分して得られる公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi^2 \exp \left(\frac{im\xi^2}{2\hbar\Delta t} \right) = \sqrt{2\pi} \left(\frac{i\hbar\Delta t}{m} \right)^{3/2}$$

を合わせて用い, 上式 (698) の両辺において Δt の 1 次の項を拾い上げると,

$$\begin{aligned} \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \langle x, t | x_1, t_1 \rangle &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp \left(\frac{im\xi^2}{2\hbar\Delta t} \right) \left(\frac{\xi^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x, t | x_1, t_1 \rangle - \frac{iV\Delta t}{\hbar} \langle x, t | x_1, t_1 \rangle \right) \\ &= \Delta t \left(\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x, t | x_1, t_1 \rangle - \frac{i}{\hbar} V \langle x, t | x_1, t_1 \rangle \right) \end{aligned}$$

となる. これは遷移振幅 $\langle x, t | x_1, t_1 \rangle$ に対する, 時間に依存する波動方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle x, t | x_1, t_1 \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x, t | x_1, t_1 \rangle + V \langle x, t | x_1, t_1 \rangle$$

に他ならない.

8.7.5 Ehrenfest の定理 (補足)

■粒子の位置と運動量に対する Heisenberg 方程式 (227) の導出 有用な一般公式の準備から始めよう. Heisenberg 描像の演算子 $x_i(t), p_i(t)$ もまた正準交換関係 $[x_i(t), p_j(t)] = i\hbar_{ij}$, etc. を満たすことから, $F(\mathbf{p})$ と $G(\mathbf{x})$ をそれぞれ p_j と x_j の級数に展開できる関数として, 公式

$$[x_i, F(\mathbf{p})] = i\hbar \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad (700)$$

$$[p_i, G(\mathbf{x})] = -i\hbar \frac{\partial G}{\partial x_i} \quad (701)$$

が導かれる. これらは Poisson 括弧の定義から容易に得られる関係

$$\{x_i, F(\mathbf{p})\}_P = \frac{\partial F(\mathbf{p})}{\partial p_i}, \quad \{p_i, G(\mathbf{x})\}_P = -\frac{\partial G(\mathbf{x})}{\partial x_i}$$

に, Dirac の規則 (2.3 節)

$$\{ \quad , \quad \}_P \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\quad , \quad]$$

を適用した形となっている.

公式 (700), (701) の導出

$$\begin{aligned} [x_i, F(\mathbf{p})] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} [x_i, p_i^n (\partial^n / \partial p_i^n) F(p_i = 0)] \quad \leftarrow \quad n=0 \text{ の項は } [x_i, \text{const}] = 0 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_i^n}{n!} \underbrace{[x_i, (\partial^n / \partial p_i^n) F(p_i = 0)]}_{p_i \text{ 以外の関数より } x_i \text{ と交換する}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} [x_i, p_i^n] (\partial^n / \partial p_i^n) F(p_i = 0) \quad (702) \end{aligned}$$

(ただし i について和をとらない) において, 公式 (164) より $[x_i, p_i^n] = ni\hbar p_i^{n-1}$ であり, これを上式 (702) に代入し

$$[x_i, F(\mathbf{p})] = i\hbar \sum_{n=1}^{\infty} p_i^{n-1} \frac{(\partial^n / \partial p_i^n) F(p_i = 0)}{(n-1)!} = i\hbar \frac{\partial F}{\partial p_i} : (700) \quad (703)$$

を得る.

式 (701) を示すには, 式 (702) で \mathbf{x} と \mathbf{p} を入れ替え $F \rightarrow G$ と置き換えた式が成り立つことに注意し, そこに公式 (164) より得られる $[p_i, x_j^n] = -ni\hbar x_i^n$ を代入すれば良い.

さて, Hamiltonian $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x})$ で記述される粒子を考えよう. 正準交換関係, あるいはその帰結としての公式 (700) より, x_i に対する Heisenberg 方程式は

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [x_i, H] = \frac{1}{i\hbar} \frac{1}{2m} [x_i, p_j^2] = \frac{1}{i\hbar} \frac{1}{2m} \times 2i\hbar p_i = \frac{p_i}{m}$$

となる. 次に公式 (701) を利用して p_i に対する Heisenberg 方程式を書き下すと,

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [p_i, H] = \frac{1}{i\hbar} [p_i, V(\mathbf{x})] = -\frac{\partial}{\partial x_i} V(\mathbf{x}).$$

最後にこれら 2 式から

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{dx_i}{dt}, H \right] = \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{p_i}{m}, H \right] = \frac{1}{m} \frac{dp_i}{dt}$$

が得られる.

8.8 角運動量 (補足)

8.8.1 回転および角運動量の交換関係 (補足)

■回転行列の交換関係 (228) の導出 回転行列

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は、回転角 ϕ を無限小パラメーター ε として ε の 2 次まで残すと

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。次に $R_x(\varepsilon), R_y(\varepsilon)$ を調べよう。物体の z 軸周りの回転は軸の名前をサイクリックに

$$x \rightarrow y, \quad y \rightarrow z, \quad z \rightarrow x$$

と置き替えれば、物体の x 軸周りの回転になる。したがって $R_x(\varepsilon)$ の表式を得るには $R_z(\varepsilon)$ において

$$(x, x) \text{ 成分} \rightarrow (y, y) \text{ 成分}, \quad (x, y) \text{ 成分} \rightarrow (y, z) \text{ 成分}, \quad \text{etc.}$$

と成分を移動させれば良い。これは図 142 のように、行列の右端と左端、上端と下端とが周期境界条件によってつながっていると考え、全成分を“右下に”ずらせば良いことを意味している。すると同様に

$$R_x(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & -\varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \end{pmatrix}, \quad R_y(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \end{pmatrix}$$

が得られる。直接の行列計算により、同じ近似で

$$\begin{aligned} R_x(\varepsilon)R_y(\varepsilon) &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & 1 - \varepsilon^2 \end{pmatrix}, \\ R_y(\varepsilon)R_x(\varepsilon) &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 0 & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & 1 - \varepsilon^2 \end{pmatrix}, \\ \therefore R_x(\varepsilon)R_y(\varepsilon) - R_y(\varepsilon)R_x(\varepsilon) &= \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon^2 & 0 \\ \varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_z(\varepsilon^2) - R_{任意}(0) : (228) \end{aligned}$$

となることを確かめられる。

■角運動量の基本的交換関係 (231) の導出 回転行列の交換関係 (228) は微小な回転角 ε の 2 次までを考慮して得られた。そこで回転の演算子の交換関係

$$[D_x(\varepsilon), D_y(\varepsilon)] = D_z(\varepsilon^2) - 1$$

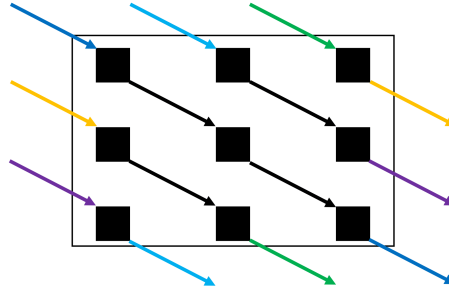


図 142 3×3 の行列 $R_z(\varepsilon)$ の各成分を “右下に” ずらす様子

についても，表式 (230): $\mathcal{D}(\mathbf{n}, \phi) = e^{-i\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \phi / \hbar}$ を用いて ε の 2 次まで正確に書き下すと，

$$\left(1 - \frac{iJ_x \varepsilon}{\hbar} - \frac{J_x^2 \varepsilon^2}{2\hbar^2}\right) \left(1 - \frac{iJ_y \varepsilon}{\hbar} - \frac{J_y^2 \varepsilon^2}{2\hbar^2}\right) - \left(1 - \frac{iJ_y \varepsilon}{\hbar} - \frac{J_y^2 \varepsilon^2}{2\hbar^2}\right) \left(1 - \frac{iJ_x \varepsilon}{\hbar} - \frac{J_x^2 \varepsilon^2}{2\hbar^2}\right) = 1 - \frac{iJ_z \varepsilon^2}{\hbar} - 1,$$

$$\therefore [J_x, J_y] = i\hbar J_z \quad (704)$$

が得られる．

交換関係 (231): $[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k$ は $(i, j) = (1, 2), (2, 3), (3, 1)$ とおくと，上式 (704) および添字を巡回置換した関係を再現する．また交換子は順序を入れ替えると，全体の符号が反転する．式 (231) はこの性質を満たしているから， $(i, j) = (2, 1), (3, 2), (1, 3)$ に対しても正しい．最後に $(i, j) = (1, 1), (2, 2), (3, 3)$ に対しては，式 (231) は自明な関係 $[J_i, J_i] = 0$ (ただし i について和をとらない) を与える．

■期待値 $\langle \mathbf{J} \rangle$ がベクトルとして回転すること (式 (232)) の証明 デモンストレーションとして， z 軸周りに系を有限角 ϕ だけ回転させる場合に証明すれば充分だろう．系の回転に伴って状態は $|\alpha\rangle \rightarrow e^{-iJ_z \phi / \hbar} |\alpha\rangle$ と変化するので，角運動量の期待値は

$$\langle \mathbf{J} \rangle \equiv \langle \alpha | \mathbf{J} | \alpha \rangle \rightarrow \langle \alpha | e^{iJ_z \phi / \hbar} \mathbf{J} e^{-iJ_z \phi / \hbar} | \alpha \rangle$$

と変化する．例えば演算子積 $e^{iJ_z \phi / \hbar} \mathbf{J} e^{-iJ_z \phi / \hbar}$ の x 成分は，Baker-Hausdorff の補助定理 (165) を用いて，

$$e^{iJ_z \phi / \hbar} J_x e^{-iJ_z \phi / \hbar} = J_x + \frac{i\phi}{\hbar} [J_z, J_x] + \frac{1}{2!} \left(\frac{i\phi}{\hbar}\right)^2 [J_z, [J_z, J_x]] + \dots$$

と計算できる．

ここで角運動量の交換関係 (231) を用いると，帰納的に

$$\underbrace{[J_z, [J_z, \dots [J_z, J_x] \dots]]}_{2n \text{ 個の } J_z} = (i\hbar)^{2n} (-1)^n J_x, \quad (705)$$

$$\underbrace{[J_z, [J_z, \dots [J_z, J_x] \dots]]}_{2n+1 \text{ 個の } J_z} = (i\hbar)^{2n+1} (-1)^n J_y \quad (706)$$

が見出される．すなわち式 (705) は $n = 0$ で成り立つ．そしてある n に対して式 (705) が成り立つと仮定すると式 (706) が，したがって式 (705) で $n \rightarrow n + 1$ とした式が成り立つことを証明できる．

式 (705), 式 (706) を用いると,

$$\begin{aligned} e^{iJ_z\phi/\hbar} J_x e^{-iJ_z\phi/\hbar} &= J_x \left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \cdots \right) - J_y \left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \cdots \right) \\ &= J_x \cos \phi - J_y \sin \phi \end{aligned}$$

とまとめられる. 同様に

$$e^{iJ_z\phi/\hbar} J_y e^{-iJ_z\phi/\hbar} = J_x \sin \phi + J_y \cos \phi$$

が得られる. さらに J_z と $e^{-iJ_z\phi/\hbar}$ は交換するので,

$$e^{iJ_z\phi/\hbar} J_z e^{-iJ_z\phi/\hbar} = J_z e^{iJ_z\phi/\hbar} e^{-iJ_z\phi/\hbar} = J_z.$$

以上より期待値 $\langle \mathbf{J} \rangle$ は z 軸周りの回転の行列により

$$\begin{pmatrix} \langle J_x \rangle \\ \langle J_y \rangle \\ \langle J_z \rangle \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle J_x \rangle \\ \langle J_y \rangle \\ \langle J_z \rangle \end{pmatrix}$$

と変化するため, ベクトルとしての変換則 (232) が満たされている.

8.8.2 角運動量の固有値と固有状態 (補足)

■式 (233): $[\mathbf{J}^2, J_k] = 0$ の導出 角運動量の交換関係 (231) より

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}^2, J_k] &= J_i [J_i, J_k] + [J_i, J_k] J_i \\ &= i\hbar \varepsilon_{ikl} (J_i J_l + J_l J_i) \end{aligned}$$

であり, 最右辺はダミー添字 i, l に関して ε_{ikl} が反対称, $(J_i J_l + J_l J_i)$ が対称なのでゼロになる.

■はしご演算子 $J_{\pm} \equiv J_x \pm iJ_y$ の性質 (234) の導出 角運動量の交換関係 (231) より

$$\begin{aligned} [J_z, J_{\pm}] &= [J_z, J_x] \pm i[J_z, J_y] \\ &= i\hbar J_y \pm i(-i\hbar J_x) \\ &= \pm \hbar J_x + i\hbar J_y \\ &= \pm \hbar (J_x \pm iJ_y) \\ &= \pm \hbar J_{\pm} \quad (\text{複号同順}) \end{aligned} \tag{707}$$

が導かれる. また式 (233): $[\mathbf{J}^2, J_k] = 0$ より直ちに

$$[\mathbf{J}^2, J_{\pm}] = 0 \tag{708}$$

が分かる. 以上を踏まえ, 状態 $J_{\pm} |a, b\rangle$ における J_z と \mathbf{J}^2 の固有値を調べると,

$$\begin{aligned} J_z(J_{\pm} |a, b\rangle) &= ([J_z, J_{\pm}] + J_{\pm} J_z) |a, b\rangle \\ &= (b \pm \hbar)(J_{\pm} |a, b\rangle), \quad (\because \text{式 (707)}) \\ \mathbf{J}^2(J_{\pm} |a, b\rangle) &= J_{\pm} \mathbf{J}^2 |a, b\rangle \quad (\because \text{式 (708)}) \\ &= a \mathbf{J}^2(J_{\pm} |a, b\rangle) \end{aligned}$$

を得る. すなわち $J_{\pm} |a, b\rangle$ は J_z と \mathbf{J}^2 の固有値 $b \pm \hbar, a$ に属する同時固有状態である (式 (234)).

■式 (235): $a \geq b^2$ の導出

$$\mathbf{J}^2 - J_z^2 = J_x^2 + J_y^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) = \frac{1}{2}(J_+ J_+^\dagger + J_+^\dagger J_+)$$

より,

$$\begin{aligned} a - b^2 &= \langle a, b | \mathbf{J}^2 - J_z^2 | a, b \rangle \\ &= \frac{1}{2}(\langle a, b | J_+ \rangle \cdot \langle J_+^\dagger | a, b \rangle) + \frac{1}{2}(\langle a, b | J_+^\dagger \rangle \cdot \langle J_+ | a, b \rangle) \geq 0. \quad (\text{要請 } \langle \alpha | \alpha \rangle \geq 0 (2.1 \text{ 節})) \end{aligned}$$

■固有値 a, b のとり得る値 (236), (237) の導出 固有値 b が b_{\max} を超えた状態や, b_{\min} を下回った状態を作ることはできないので,

$$J_+ |a, b_{\max}\rangle = 0, \quad J_- |a, b_{\min}\rangle = 0$$

でなければならない。ここで

$$\begin{aligned} J_\mp J_\pm &= (J_x \mp iJ_y)(J_x \pm iJ_y) \\ &= (J_x^2 + J_y^2) \pm i[J_x, J_y] \\ &= \mathbf{J}^2 - J_z^2 \mp \hbar J_z \end{aligned} \tag{709}$$

の関係に着目すると,

$$\begin{aligned} 0 &= J_- \underbrace{J_+ |a, b_{\max}\rangle}_{\text{零ケット}} = (a - \hbar b_{\max} - b_{\max}^2) \underbrace{|a, b_{\max}\rangle}_{\text{零ケットでない}}, \\ 0 &= J_+ \underbrace{J_- |a, b_{\min}\rangle}_{\text{零ケット}} = (a + \hbar b_{\min} - b_{\min}^2) \underbrace{|a, b_{\min}\rangle}_{\text{零ケットでない}} \end{aligned}$$

を得る。最右辺における固有値がゼロでなければならないから,

$$\begin{aligned} a &= b_{\max}(b_{\max} + \hbar) = b_{\min}(b_{\min} - \hbar), \\ \therefore (b_{\max} + b_{\min})(b_{\max} - b_{\min} + \hbar) &= 0, \quad \therefore b_{\max} = -b_{\min} \end{aligned} \tag{710}$$

である。他方 $|a, b_{\min}\rangle$ に J_+ を有限回作用させると $|a, b_{\max}\rangle$ に到達するため^{*240}, n を整数として

$$b_{\max} = b_{\min} + n\hbar$$

と書けることと考え合わせると, 固有値 b は式 (237):

$$b = -j\hbar, \dots, m\hbar, \dots, j\hbar \quad \left(j = \frac{n}{2}\right)$$

のように量子化されることになる。これを上式 (710) に戻して, 式 (236): $a = \hbar^2 j(j+1)$ を得る。

^{*240} さもなくば条件 $J_+ |a, b_{\max}\rangle = 0$ によって状態が消失することがなく, b が最大値を持つという我々の得た結論に反して, いくらでも大きな固有値 $b (> b_{\max})$ を持つ状態を作ることができる。

■式 (239) の導出 式 (709):

$$J_+^\dagger J_+ = \mathbf{J}^2 - J_z^2 - \hbar J_z$$

および式 (234):

$$J_+ |j, m\rangle = c_{jm}^+ |j, m+1\rangle$$

を用いると, 規格化されたケット $|j, m\rangle, |j, m+1\rangle$ に対して

$$\begin{aligned} |c_{jm}^+|^2 &= \langle j, m+1 | (c_{jm}^+)^* (c_{jm}^+) |j, m+1\rangle \\ &= \langle j, m | J_+^\dagger J_+ |j, m\rangle \\ &= \langle j, m | \mathbf{J}^2 - J_z^2 - \hbar J_z |j, m\rangle \\ &= \hbar^2 (j(j+1) - m^2 - m) \\ &= \hbar^2 (j-m)(j+m+1) \end{aligned}$$

が得られる. c_{jm}^+ の位相は任意に選べるから, c_{jm}^+ を正の実数を選んで

$$J_+ |j, m\rangle = \sqrt{(j-m)(j+m+1)} \hbar |j, m+1\rangle$$

として良い (式 (239) の上側の複号を選んだ関係). 同様に $J_- |j, m\rangle = c_{jm}^- |j, m-1\rangle$ とおくと

$$\begin{aligned} |c_{jm}^-|^2 &= \langle j, m-1 | (c_{jm}^-)^* (c_{jm}^-) |j, m-1\rangle \\ &= \langle j, m | J_-^\dagger J_- |j, m\rangle \\ &= \langle j, m | \mathbf{J}^2 - J_z^2 + \hbar J_z |j, m\rangle \\ &= \hbar^2 (j(j+1) - m^2 + m) \\ &= \hbar^2 (j+m)(j-m+1) \end{aligned}$$

となるので, 式 (239) の下側の複号に対する関係

$$J_- |j, m\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \hbar |j, m-1\rangle$$

も示される.

8.8.3 軌道角運動量 (補足)

■軌道角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ の Hermite 性の確認

$$L_i^\dagger = \varepsilon_{ijk} (x_j p_k)^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k x_j = \varepsilon_{ijk} (x_j p_k + [p_k, x_j]) = \varepsilon_{ijk} (x_j p_k - i\hbar \delta_{jk}) = \varepsilon_{ijk} x_j p_k = L_i.$$

■軌道角運動量の交換関係 (240) の導出 まず

$$\begin{aligned} [L_i, x_j] &= \varepsilon_{ikl} x_k [p_l, x_j] = -i\hbar \varepsilon_{ikl} \delta_{lj} x_k = i\hbar \varepsilon_{ijk} x_k, \\ [L_i, p_j] &= \varepsilon_{ikl} [x_k p_l, p_j] = \varepsilon_{ikl} [x_k, p_j] p_l = i\hbar \varepsilon_{ijl} p_l \end{aligned}$$

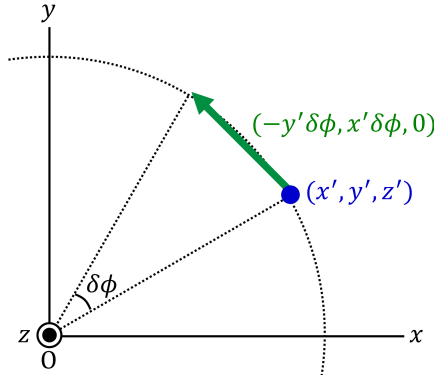


図 143 z 軸周りの無限小回転

であり, これらを用いると

$$\begin{aligned}
 [L_i, L_j] &= \varepsilon_{jkl} [L_i, x_k p_l] \\
 &= \varepsilon_{jkl} ([L_i, x_k] p_l + x_k [L_i, p_l]) \\
 &= i\hbar \varepsilon_{jkl} (\varepsilon_{ikm} x_m p_l + \varepsilon_{jlm} x_k p_m) \\
 &= i\hbar (\delta_{ji} \delta_{lm} - \delta_{jm} \delta_{li}) x_m p_l - i\hbar (\delta_{ji} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{ki}) x_k p_m \\
 &= i\hbar (x_i p_j - x_j p_i) \\
 &= i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k : (240)
 \end{aligned}$$

を得る.

■ $\langle \mathbf{x}' | L_z | \alpha \rangle$ などの式 (241) の導出 運動量が平行移動の生成演算子であること $e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}} |\mathbf{x}'\rangle = |\mathbf{x}' + \mathbf{a}\rangle$ より,

$$\begin{aligned}
 \left[1 - i \frac{\delta\phi}{\hbar} L_z \right] |x', y', z'\rangle &= \left[1 - i \frac{p_y}{\hbar} (\delta\phi x') + i \frac{p_x}{\hbar} (\delta\phi y') \right] |x', y', z'\rangle \\
 &= |x' - y' \delta\phi, y' + x' \delta\phi, z'\rangle
 \end{aligned}$$

を得る ($L_z = xp_y - yp_x = p_y x - p_x y$ と交換して, x, y を運動量演算子より先に $|x', y', z'\rangle$ に作用させれば良い). これは期待されるように, 演算子 $\left[1 - i \frac{\delta\phi}{\hbar} L_z \right]$ が z 軸周りの角度 $\delta\phi$ の無限小回転を引き起こすことを表している (図 143 参照).

デカルト座標 (x', y', z') に対応する球座標を (r, θ, ϕ) と書こう (したがって $|x', y', z'\rangle = |r, \theta, \phi\rangle$). すると上式より

$$\langle r, \theta, \phi | \left[1 - i \frac{\delta\phi}{\hbar} L_z \right] | \alpha \rangle = \langle r, \theta, \phi - \delta\phi | \alpha \rangle = \langle r, \theta, \phi | \alpha \rangle - \delta\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \langle r, \theta, \phi | \alpha \rangle$$

であり, 最右辺を

$$\left\langle \mathbf{x}' \left| 1 - i \frac{\delta\phi}{\hbar} L_z \right| \alpha \right\rangle = \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle - i \frac{\delta\phi}{\hbar} \langle \mathbf{x}' | L_z | \alpha \rangle$$

の右辺と等置して式 (241):

$$\langle \mathbf{x}' | L_z | \alpha \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi} \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle$$

を得る.

次に、同様の関係として

$$\langle \mathbf{x}' | L_x | \alpha \rangle = -i\hbar \left(-\sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle, \quad (711)$$

$$\langle \mathbf{x}' | L_y | \alpha \rangle = -i\hbar \left(\cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta \sin\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle \quad (712)$$

が成立することを証明する。

まず、一般に $1 - i(\delta\phi/\hbar)L_i$ は $\langle \mathbf{x}' |$ に作用して固有値 \mathbf{x}' を第 i 軸の周りに $-\delta\phi$ 回転させることを確かめる。

$$\langle \mathbf{x}' | \left(1 - i \frac{\delta\phi}{\hbar} L_i \right) = \langle \mathbf{x}' | \left(1 - i \frac{p_k}{\hbar} (\delta\phi \varepsilon_{ijk} x_j') \right) \leftrightarrow \left(1 - i \frac{p_k}{\hbar} (-\delta\phi) \varepsilon_{ijk} x_j' \right) | \mathbf{x}' \rangle$$

なので (\leftrightarrow は Hermite 共役を表す), 位置ケットの (したがって位置ブラの) 固有値は

$$x_k' \rightarrow x_k' + (-\delta\phi) \varepsilon_{ijk} x_j' = x_k' + (-\delta\phi) \varepsilon_{kij} x_j'$$

と変化する。この付加的な項は第 i 軸の方向単位ベクトルを \mathbf{n} (その第 i' 成分 $n_{i'}$ は $\delta_{ii'}$) とすると $(-\delta\phi)\mathbf{n} \times \mathbf{x}'$ の第 i 成分 $\varepsilon_{kij}(-\delta\phi n_{i'})x_j$ だから示された。

さて、 x 軸周りの $-\delta\phi_x$ 回転で \mathbf{x}' の変位は

$$\begin{pmatrix} -\delta\phi_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta\phi_x z' \\ -\delta\phi_x y' \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta \delta\phi_x \\ -\sin\theta \sin\phi \delta\phi_x \end{pmatrix}$$

である。これが $\theta \rightarrow \theta + \delta\theta, \phi \rightarrow \phi + \delta\phi$ としたときの $\delta\theta, \delta\phi$ の 1 次の範囲での \mathbf{x}' の変化

$$r \begin{pmatrix} -\delta\phi \sin\theta \sin\phi + \delta\theta \cos\theta \cos\phi \\ \delta\phi \sin\theta \cos\phi + \delta\theta \cos\theta \sin\phi \\ -\delta\theta \sin\theta \end{pmatrix} \quad (713)$$

に一致するような $\delta\theta, \delta\phi$ は $\delta\theta = \sin\phi \delta\phi_x, \delta\phi = \cot\theta \cos\phi \delta\phi_x$ であり、この $\delta\theta, \delta\phi$ に対して

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{x}' \left| 1 - i \left(\frac{\delta\phi_x}{\hbar} L_x \right) \right| \alpha \right\rangle &= \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle - i \frac{\delta\phi_x}{\hbar} \langle \mathbf{x}' | L_x | \alpha \rangle, \\ \left\langle \mathbf{x}' \left| 1 - i \left(\frac{\delta\phi_x}{\hbar} L_x \right) \right| \alpha \right\rangle &= \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle + \left(\delta\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \delta\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle \end{aligned}$$

を等置して式 (711):

$$\langle \mathbf{x}' | L_x | \alpha \rangle = -i\hbar \left(-\sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle$$

を得る。

一方、 y 軸周りの $-\delta\phi_y$ 回転で \mathbf{x}' の変位は $r(-\cos\theta \delta\phi_y, 0, \sin\theta \cos\phi \delta\phi_y)$ であり、これが式 (713) に一致するような $\delta\theta, \delta\phi$ は $\delta\theta = -\cos\phi \delta\phi_y, \delta\phi = \cot\theta \sin\phi \delta\phi_y$ なので、同様に式 (712):

$$\langle \mathbf{x}' | L_y | \alpha \rangle = -i\hbar \left(\cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta \sin\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle$$

を得る。

■ $\langle \mathbf{x}' | \mathbf{L}^2 | \alpha \rangle$ の式 (242) の導出 式 (711), (712) よりはしご演算子 $L_{\pm} \equiv L_x \pm iL_y$ に対して

$$\langle \mathbf{x}' | L_{\pm} | \alpha \rangle = -i\hbar e^{\pm i\phi} \left(\pm i \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle \quad (714)$$

となる。そこで

$$\mathbf{L}^2 = L_z^2 + \frac{1}{2}(L_+L_- + L_-L_+)$$

と書いておき, $\langle \mathbf{x}' | L_z | \alpha \rangle$ の表式 (241) と上式 (714) を用いると, 式 (242):

$$\langle \mathbf{x}' | \mathbf{L}^2 | \alpha \rangle = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \partial_{\theta} (\sin \theta \partial_{\theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_{\phi}^2 \right) \right] \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle$$

を得る。

■ 式 (243) の導出 演算子の関係として, 恒等的に

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2 &= \varepsilon_{ijk} x_i p_j \varepsilon_{lmk} x_l p_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) x_i p_j x_l p_m \\ &= \delta_{il} \delta_{jm} x_i (x_l p_j - i\hbar \delta_{jl}) p_m - \delta_{im} \delta_{jl} x_i p_j (p_m x_l + i\hbar \delta_{lm}) \\ &= \mathbf{x}^2 \mathbf{p}^2 - i\hbar \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} - \delta_{im} \delta_{jl} \{ x_i p_m (x_l p_j - i\hbar \delta_{jl}) + i\hbar \delta_{lm} x_i p_j \} \\ &= \mathbf{x}^2 \mathbf{p}^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})^2 + i\hbar \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} \end{aligned}$$

が成り立つ。

■ $\langle \mathbf{x}' | \mathbf{L}^2 | \alpha \rangle$ の式 (244) の導出 式 (181), 式 (182) を用いて $\langle \mathbf{x}' | \mathbf{L}^2 | \alpha \rangle$ の式 (243):

$$\langle \mathbf{x}' | \mathbf{L}^2 | \alpha \rangle = \langle \mathbf{x}' | \mathbf{x}^2 \mathbf{p}^2 | \alpha \rangle - \langle \mathbf{x}' | (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})^2 | \alpha \rangle + i\hbar \langle \mathbf{x}' | \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} | \alpha \rangle$$

の各項を評価すると,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}' | \mathbf{x}^2 \mathbf{p}^2 | \alpha \rangle &= r^2 \langle \mathbf{x}' | \mathbf{p}^2 | \alpha \rangle \\ &= -r^2 \hbar^2 \nabla'^2 \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle, \\ \langle \mathbf{x}' | \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} | \alpha \rangle &= \mathbf{x}' \cdot (-i\hbar \nabla' \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle) \\ &= -i\hbar r \frac{\partial}{\partial r} \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle, \quad \left(\frac{\mathbf{x}'}{r} \cdot \nabla' \text{は動径方向の方向微分 } \frac{\partial}{\partial r} \text{である} \right) \\ \langle \mathbf{x}' | (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})^2 | \alpha \rangle &= -\hbar^2 r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle \right) \\ &= -\hbar^2 \left(r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle + r \frac{\partial}{\partial r} \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle \right) \end{aligned}$$

となるので, 式 (244):

$$\langle \mathbf{x}' | \mathbf{L}^2 | \alpha \rangle = r^2 \hbar^2 \left[-\nabla'^2 + \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r \right) \right] \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle$$

を得る。

■波動関数の角度依存部分が球面調和関数 (248), (249) で与えられることの証明 式 (245):

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m(\theta, \phi) = m\hbar Y_l^m(\theta, \phi)$$

より角度部分 Y_l^m の ϕ 依存性は

$$Y_l^m(\theta, \phi) \sim e^{im\phi}$$

と定まる.

Y_l^m を完全に求めるために, $m = l$ の場合から始めよう. $L_+ |l, l\rangle = 0$ および $\langle \mathbf{x}' | L_+ | \alpha \rangle$ の表式 (714) より

$$0 = \langle \mathbf{n} | L_+ | l, l \rangle = -i\hbar e^{il\phi} \left(i \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) Y_l^l(\theta, \phi)$$

が得られる. ここで ϕ 依存性 $Y_l^l(\theta, \phi) \sim e^{il\phi}$ を考えると, 上式は

$$Y_l^l(\theta, \phi) = c_l e^{il\phi} \sin^l \theta \quad (715)$$

とすれば満たされることが分かる.

規格化条件 (247):

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) Y_{l'}^{m'*}(\theta, \phi) Y_l^m(\theta, \phi) = \delta_{l'l} \delta_{m'm'}$$

を用いて定数 c_l を定めよう. $l', m, m' = l$ と上式 (715) を代入すると

$$1 = 2\pi |c_l|^2 \int_{-1}^1 d(\cos \theta) (1 - \cos^2 \theta)^l$$

となる. ここに現れた積分 $I_l \equiv \int_{-1}^1 d(\cos \theta) (1 - \cos^2 \theta)^l$ は部分積分により

$$\begin{aligned} I_l &= \left[\cos \theta (1 - \cos^2 \theta)^{l-1} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \cos \theta \times l(1 - \cos^2 \theta)^{l-1} \times (-2) \cos \theta d(\cos \theta) \\ &= 2l \int_{-1}^1 \{1 - (1 - \cos^2 \theta)\} (1 - \cos^2 \theta)^{l-1} d(\cos \theta) \\ &= 2l(I_{l-1} - I_l) \end{aligned}$$

となるので, $I_0 = 2$ とより

$$I_l = 2 \times \frac{(2l)!!}{(2l+1)!!} = 2 \times \frac{(2^l l!)^2}{(2l+1)!!}$$

を得る. よって $c_l > 0$ とすれば

$$c_l = \frac{1}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)(2l)!}{4\pi}}$$

となる. ここで $(2l)! = 2^l l!$ とした際, l は半整数ではなく整数であることを考慮した (この点については後述). 最後に便宜的に位相因子 $(-1)^l$ を掛けて

$$c_l = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)(2l)!}{4\pi}}$$

としておこう.

さらに式 (239) および $\langle \mathbf{x}' | L_- | \alpha \rangle$ の表式 (714) より

$$\begin{aligned} Y_l^{m-1}(\theta, \phi) &= \langle \mathbf{n} | l, m-1 \rangle = \frac{\langle \mathbf{n} | L_- | l, m \rangle}{\sqrt{(l+m)(l-m+1)\hbar}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(l+m)(l-m+1)}} e^{-i\phi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) Y_l^m(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (716)$$

となることを用いると, m の値を 1 ずつ減らし, 帰納的にすべての可能な値 $m = -l, \dots, l$ に対する Y_l^m の式 (248), (249) を得ることができる. 実際, ある $m \geq 1$ で式 (248) が成り立つと仮定すると, 漸化式 (716) を用いて

$$Y_l^{m-1}(\theta, \phi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)(l+(m-1))!}{4\pi(l-(m-1))!}} e^{-i\phi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left\{ e^{im\phi} \frac{1}{\sin^m \theta} \frac{d^{l-m}}{d(\cos \theta)^{l-m}} (\sin \theta)^{2l} \right\}$$

とできる. ここで青字部分において

$$\begin{aligned} i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ e^{im\phi} \frac{1}{\sin^m \theta} \frac{d^{l-m}}{d(\cos \theta)^{l-m}} (\sin \theta)^{2l} \right\} &= -m \cot \theta \left\{ e^{im\phi} \frac{1}{\sin^m \theta} \frac{d^{l-m}}{d(\cos \theta)^{l-m}} (\sin \theta)^{2l} \right\}, \\ \text{および } e^{im\phi} \left(-\frac{d}{d\theta} \frac{1}{\sin^m \theta} \right) \frac{d^{l-m}}{d(\cos \theta)^{l-m}} (\sin \theta)^{2l} &= m \cot \theta \left\{ e^{im\phi} \frac{1}{\sin^m \theta} \frac{d^{l-m}}{d(\cos \theta)^{l-m}} (\sin \theta)^{2l} \right\} \end{aligned}$$

が相殺するため,

$$-e^{im\phi} \frac{1}{\sin^m \theta} \frac{d}{d\theta} \frac{d^{l-m}}{d(\cos \theta)^{l-m}} (\sin \theta)^{2l} = e^{im\phi} \frac{1}{\sin^{m-1} \theta} \frac{d^{l-m+1}}{d(\cos \theta)^{l-m+1}} (\sin \theta)^{2l}$$

が生き残る. よって $m \rightarrow m-1$ としても式 (248) は成り立つ.

以上より式 (248) が $m = 0, \dots, l$ に対して成り立つことが示された. このため式 (249):

$$\begin{aligned} Y_l^{-m}(\theta, \phi) &= (-1)^m [Y_l^m(\theta, \phi)]^* \\ &= \frac{(-1)^{l+m}}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!}{4\pi(l-m)!}} e^{-im\phi} \frac{1}{\sin^m \theta} \frac{d^{l-m}}{d(\cos \theta)^{l-m}} (\sin \theta)^{2l} \quad (m \geq 0) \end{aligned} \quad (717)$$

についても, $m=0$ で成り立つことになる. 漸化式 (716) 自体は各 m で成立しているため, 再びこれを用いれば, 上式 (717) が $m = 0, \dots, l$ で成り立つことを帰納的に証明できると期待できる. しかしながら実際的には, 改めて Y_l^{-l} から始めて, 同様に m の値を 1 ずつ増やしてゆく方が見通しが良い.

まず上式 (717) から得られる

$$Y_l^{-l}(\theta, \phi) = (-1)^l Y_l^{l*}(\theta, \phi) = \frac{1}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)(2l)!}{4\pi}} e^{-il\phi} \sin^l \theta$$

は, Y_l^{-l} に対する微分方程式

$$0 = \langle \mathbf{n} | L_- | l, -l \rangle = i\hbar e^{-i\phi} \left(i \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) Y_l^{-l}(\theta, \phi)$$

を満たしている. また Y_l^l が規格化されていることから, Y_l^{-l} の規格化も保証されている:

$$\int d\Omega Y_l^{-l*} Y_l^{-l} = \int d\Omega Y_l^l Y_l^{l*} = 1.$$

よって式 (717) は $m = l$ に対して正しい。そこで $1 \leq m \leq l$ を満たすある m に対して式 (717) が成り立つと仮定して、今度は m を増やす漸化式

$$Y_l^{m+1}(\theta, \phi) = \langle \mathbf{n} | L_+ | l, m \rangle = \frac{\langle \mathbf{n} | L_+ | l, m \rangle}{\sqrt{(l-m)(l+m-1)\hbar}}$$

$$= \frac{-i}{\sqrt{(l-m)(l+m-1)}} e^{i\phi} \left(i \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) Y_l^m(\theta, \phi)$$

を、 $m \rightarrow -m$ とおいて用いると、

$$Y_l^{-m+1}(\theta, \phi) = \frac{(-1)^{l+m}}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)(l+(m-1))!}{4\pi(l-(m-1))!}} (-i) e^{-i\phi} \left(i \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left\{ e^{-im\phi} \frac{1}{\sin^m \theta} \frac{d^{l-m}}{d(\cos \theta)^{l-m}} (\sin \theta)^{2l} \right\}$$

となる。ここで青字部分において

$$-\cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ e^{-im\phi} \frac{1}{\sin^m \theta} \frac{d^{l-m}}{d(\cos \theta)^{l-m}} (\sin \theta)^{2l} \right\} = im \cot \theta \left\{ e^{-im\phi} \frac{1}{\sin^m \theta} \frac{d^{l-m}}{d(\cos \theta)^{l-m}} (\sin \theta)^{2l} \right\},$$

$$\text{および } e^{-im\phi} \left(i \frac{d}{d\theta} \frac{1}{\sin^m \theta} \right) \frac{d^{l-m}}{d(\cos \theta)^{l-m}} (\sin \theta)^{2l} = -im \cot \theta \left\{ e^{-im\phi} \frac{1}{\sin^m \theta} \frac{d^{l-m}}{d(\cos \theta)^{l-m}} (\sin \theta)^{2l} \right\}$$

が相殺するため、

$$ie^{-im\phi} \frac{1}{\sin^m \theta} \frac{d}{d\theta} \frac{d^{l-m}}{d(\cos \theta)^{l-m}} (\sin \theta)^{2l} = -ie^{-im\phi} \frac{1}{\sin^{m-1} \theta} \frac{d^{l-m+1}}{d(\cos \theta)^{l-m+1}} (\sin \theta)^{2l}$$

が生き残る。よって $m \rightarrow m-1$ としても式 (717) は成り立つから、式 (717) は $m = 0, \dots, l$ に対して正しい。

■ l は半整数値をとらないこと ここでは l が半整数をとってはならないとする議論として、次の2点を挙げておく。仮に l が半整数をとると

- 半整数の m が可能となり、このとき波動関数 ($\sim e^{im\phi}$) は $\phi \rightarrow \phi + 2\pi$ とすると符号が入れ替わる。これは位置固有関数による展開が一意的であり、それ故、展開係数に他ならない波動関数は一価でなければならないという要請に反する。
- さらに

$$\text{式 (716)} \rightarrow Y_{1/2}^{-1/2} = \left\langle \mathbf{n} \left| L_- \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right\rangle = -i\hbar e^{-i\phi} \left(-i \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) Y_{1/2}^{1/2},$$

$$\text{式 (715)} \rightarrow Y_{1/2}^{1/2} \propto e^{i\phi/2} \sin^{1/2} \theta \quad (\text{もとの式 (715) は } l \text{ が半整数でないことを用いずに導かれた})$$

から求めた

$$Y_{1/2}^{-1/2}(\theta, \phi) = -c_{1/2} e^{-i\phi/2} \cot \theta \sqrt{\sin \theta}$$

は $\theta = 0, \pi$ で発散し、しかも微分方程式

$$0 = \left\langle \mathbf{n} \left| L_- \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right\rangle = -i\hbar e^{-i\phi} \left(-i \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) Y_{1/2}^{-1/2} \quad (718)$$

から求めた

$$Y_{1/2}^{-1/2}(\theta, \phi) = c'_{1/2} e^{-i\phi/2} \sqrt{\sin \theta} \quad (719)$$

と一致しない*241。

*241 式 (718) に $Y_{1/2}^{-1/2} = \langle \mathbf{n} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle = e^{-i\phi/2} f(\theta)$ を代入すると、 $f(\theta) = \text{const} \sqrt{\sin \theta}$ と定まることから式 (719) を得る。

よって、半整数の l を考えるのは無益である。

8.8.4 スピン (補足)

■式 (250) がスピン $1/2$ の適切なスピン演算子であることの確認 はじめに $|S_x; +\rangle$ を基底ケット $|\pm\rangle \equiv |S_z; \pm\rangle$ で展開すると、

$$|S_x; +\rangle = |+\rangle \langle +|S_x; +\rangle + |-\rangle \langle -|S_x; +\rangle$$

となる。ここで図 144 のように、遷移 $|S_x; +\rangle \rightarrow |\pm\rangle$ の確率がそれぞれ $1/2$ となる条件

$$|\langle \pm|S_x; +\rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

を考慮すると、展開係数は

$$\langle \pm|S_x; +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\delta_{\pm}}$$

と書ける (δ_{\pm} は実数)。この下でなお、全体の位相因子を調整する任意性が残されている。この自由度を利用して $|+\rangle$ の係数を正の実数に選ぶと、

$$|S_x; +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\delta_1} |-\rangle$$

と書ける (δ_1 は実数)。 $|S_x; -\rangle$ についても、

$$|S_x; -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\delta'_1} |-\rangle$$

とおき、直交性

$$0 = \langle S_x; +|S_x; -\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \langle +| + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\delta_1} \langle -| \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\delta'_1} |-\rangle \right) = \frac{1}{2} (1 + e^{i(\delta'_1 - \delta_1)})$$

を考慮すると、 $e^{i\delta'_1} = -e^{i\delta_1}$ より

$$|S_x; -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\delta_1} |-\rangle$$

となる。

同様に

$$|S_y; \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\delta_2} |-\rangle$$

とおける。ここで $|\langle S_y; \pm|S_x; \pm\rangle| = 1/\sqrt{2}$ (複号任意) を要求すると

$$\frac{1}{2} |1 \pm e^{i(\delta_1 - \delta_2)}| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \therefore \delta_2 - \delta_1 = \pm \frac{\pi}{2}$$

を得る。

演算子 A の固有ケット $\{|a'\rangle\}$ による展開の一般公式

$$A = A \left(\sum_{a'} |a'\rangle \langle a'| \right) = \sum_{a'} a' |a'\rangle \langle a'|$$

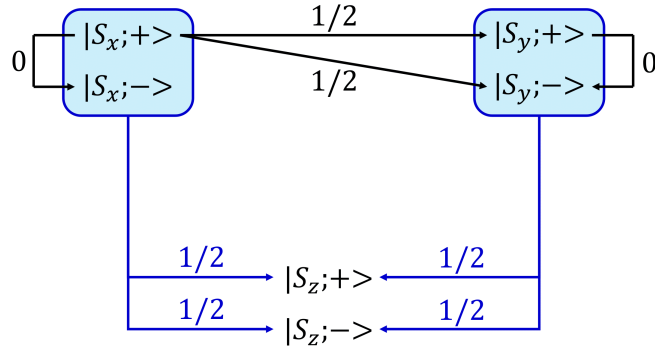


図 144 確率推移図 (図 26 の再掲)

を用いて、各スピン演算子を計算できる。すると

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{\hbar}{2} \{(|S_x; +\rangle \langle S_x; +|) - (|S_x; -\rangle \langle S_x; -|)\} \\ &= \frac{\hbar}{2} \{e^{-i\delta_1} (|+\rangle \langle -|) + e^{i\delta_1} (|-\rangle \langle +|)\} \end{aligned}$$

の最右辺は Hermite 的となっており、適当な位相因子を吸収させて $|\pm\rangle$ を再定義すれば、 $\delta_1 = 0$ とおくことができる。このとき $\delta_2 = \pm \frac{\pi}{2}$ であり、この 2 通りの符号に応じて

$$\begin{aligned} S_y &= \frac{\hbar}{2} \{(|S_y; +\rangle \langle S_y; +|) - (|S_y; -\rangle \langle S_y; -|)\} \\ &= \pm \frac{i\hbar}{2} \{-(|+\rangle \langle -|) + (|-\rangle \langle +|)\} \end{aligned}$$

は、全体の符号が逆となって得られる (この不定性は座標系の右手系と左手系の選択の余地に対応している)。一方の S_y に対して角運動量の交換関係 (251): $[S_i, S_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} S_k$ が満たされるならば、逆符号の S_y はこれを満たさない。すぐ後で確認するように、交換関係 (251) を満たす S_y の、したがって δ_2 の符号の正しい選択は $\delta_2 = +\frac{\pi}{2}$ である。このとき

$$|S_x; \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle, \quad |S_y; \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}} |-\rangle \quad (1.4.17)$$

と定まり、式 (250):

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{\hbar}{2} \{(|+\rangle \langle -|) + (|-\rangle \langle +|)\}, \\ S_y &= \frac{\hbar}{2} \{-i(|+\rangle \langle -|) + i(|-\rangle \langle +|)\}, \\ S_z &= \frac{\hbar}{2} \{(|+\rangle \langle +|) - (|-\rangle \langle -|)\} \end{aligned}$$

が得られる。

さて、以上で求めたスピン演算子 (250) が角運動量の交換関係 (251):

$$[S_i, S_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} S_k$$

を満たしていることを確かめよう. $(i, j) = (1, 2), (2, 3), (3, 1)$ の場合だけを調べれば十分である. ($i = j$ の場合は交換関係 (251) は自明な式 $0 = 0$ を与える. $(i, j) = (1, 2)$ に対して交換関係 (251) が成り立てば $(i, j) = (2, 1)$ に対しても成り立つ.)

$$\begin{aligned}
S_x S_y &= i \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \{(|+\rangle\langle +|) - (|-\rangle\langle -|)\} = \frac{1}{2} i \hbar S_z, \\
S_y S_x &= i \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \{-(|+\rangle\langle +|) + (|-\rangle\langle -|)\} = -\frac{1}{2} i \hbar S_z, \\
S_y S_z &= i \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \{(|+\rangle\langle -|) + (|-\rangle\langle +|)\} = \frac{1}{2} i \hbar S_x, \\
S_z S_y &= i \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \{-(|+\rangle\langle -|) - (|-\rangle\langle +|)\} = -\frac{1}{2} i \hbar S_x, \\
S_z S_x &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \{(|+\rangle\langle -|) - (|-\rangle\langle +|)\} = \frac{1}{2} i \hbar S_y, \\
S_x S_z &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \{-(|+\rangle\langle -|) + (|-\rangle\langle +|)\} = -\frac{1}{2} i \hbar S_y
\end{aligned} \tag{720}$$

により

$$[S_x, S_y] = i \hbar S_z, \quad [S_y, S_z] = i \hbar S_x, \quad [S_z, S_x] = i \hbar S_y$$

となる. これらはそれぞれ交換関係 (251) において $(i, j) = (1, 2), (2, 3), (3, 1)$ としたものに他ならない.

■反交換関係 (252) の確認 上式 (720) より

$$\{S_x, S_y\} = \{S_y, S_x\} = 0, \quad \{S_y, S_z\} = \{S_z, S_y\} = 0, \quad \{S_z, S_x\} = \{S_x, S_z\} = 0$$

となる. さらにスピン演算子 (250) に対して

$$\begin{aligned}
S_x^2 &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \{(|+\rangle\langle +|) + (|-\rangle\langle -|)\} = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2, \\
S_y^2 &= \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^2 \{-(|+\rangle\langle +|) - (|-\rangle\langle -|)\} = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2, \\
S_z^2 &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \{(|+\rangle\langle +|) + (|-\rangle\langle -|)\} = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

だから (完備関係式 (155): $(|+\rangle\langle +|) + (|-\rangle\langle -|) = 1$ を用いた), 全ての添字の組 (i, j) に対してスピンの反交換関係 (252): $\{S_i, S_j\} = \frac{1}{2} \hbar^2 \delta_{ij}$ が満たされている.

■Pauli 行列の (反) 交換関係 (254), (255) の導出 スピン演算子の反交換関係 (252): $\{S_i, S_j\} = \frac{1}{2} \hbar^2 \delta_{ij}$ より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \hbar^2 \delta_{ij} \langle a' | a'' \rangle &= \langle a' | \{S_i, S_j\} | a'' \rangle \\
&= \sum_{a'''} \langle a' | S_i | a''' \rangle \langle a''' | S_j | a'' \rangle + \sum_{a'''} \langle a' | S_j | a''' \rangle \langle a''' | S_i | a'' \rangle
\end{aligned}$$

であり, これを $(\hbar/2)^2$ で割ったものは反交換関係 (254): $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$ の (a', a'') 成分である.

同様に交換関係 (251): $[S_i, S_j] = i \hbar \varepsilon_{ijk} S_k$ より

$$\begin{aligned}
i \hbar \varepsilon_{ijk} \langle a' | S_k | a'' \rangle &= \langle a' | [S_i, S_j] | a'' \rangle \\
&= \sum_{a'''} \langle a' | S_i | a''' \rangle \langle a''' | S_j | a'' \rangle - \sum_{a'''} \langle a' | S_j | a''' \rangle \langle a''' | S_i | a'' \rangle
\end{aligned}$$

であり, これを $(\hbar/2)^2$ で割ったものは交換関係 (255): $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$ の (a', a'') 成分である.

■回転演算子の行列表現 (258) の導出 回転行列の (a', a'') 成分が

$$\begin{aligned} \langle a' | \exp\left(\frac{-i\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}\phi}{\hbar}\right) | a'' \rangle &\equiv \langle a' | \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{-i\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}\phi}{\hbar}\right)^k | a'' \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{-i\phi}{\hbar}\right)^k (\langle a' | \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} | a'' \rangle)^k \\ &\equiv \exp\left(\frac{-i\phi}{\hbar} \langle a' | \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} | a'' \rangle\right) = \exp\left(\frac{-i\phi}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\langle a' | S_i | a'' \rangle}{\hbar/2} \hat{n}_i\right) \\ &= \exp\left(\frac{-i\phi}{2} \sum_{i=1}^3 (\sigma_i)_{a'a''} \hat{n}_i\right) = \left(\exp\left(\frac{-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}\phi}{2}\right)\right)_{a'a''} \end{aligned}$$

となることによる. 結果的に回転演算子を行列表現にするには, $\mathbf{S}/\hbar \rightarrow \boldsymbol{\sigma}/2$ と置き換えれば良い.

■ $e^{-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\phi/\hbar}$ の式 (259) の導出 Pauli 行列の公式 (257) より

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})^m = \begin{cases} 1 & (m: \text{偶数}) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} & (m: \text{奇数}) \end{cases}$$

となるので,

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\phi}{2}\right) &= \left[1 - \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})^2}{2!} \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 + \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})^4}{4!} \left(\frac{\phi}{2}\right)^4 - \dots\right] \\ &\quad - i \left[(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \frac{\phi}{2} - \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})^3}{3!} \left(\frac{\phi}{2}\right)^3 + \dots\right] \\ &= \mathbf{1} \cos \frac{\phi}{2} - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \sin \frac{\phi}{2} : (259) \end{aligned}$$

を得る.

■式 (261) の導出

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &\rightarrow e^{-i\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}\phi/\hbar} |\alpha\rangle, \\ \therefore \langle a' | \alpha \rangle &\rightarrow \langle a' | e^{-i\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}\phi/\hbar} |\alpha\rangle = \sum_{a''} \langle a' | e^{-i\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}\phi/\hbar} | a'' \rangle \langle a'' | \alpha \rangle. \end{aligned}$$

ここで $\langle a' | \alpha \rangle$ は χ の a' 成分であり, また $\langle a' | e^{-i\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}\phi/\hbar} | a'' \rangle$ は行列 $e^{-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\phi/2}$ の (a', a'') 成分なので (式 (261) 参照), これは式 (261):

$$\chi \rightarrow e^{-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\phi/2} \chi$$

を意味する.

■ユニタリー・ユニモジュラー行列の一般的表式 (262) の導出

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とおき, ユニモジュラー性 $\det U = 1$ を仮定すると

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

となる。さらにユニタリー性を要求して、これを

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}$$

と等置すると $d = a^*, c = -b^*$ が見出される。 c, d を消去して式 (262):

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

を得る。

■ユニタリー・ユニモジュラー行列が群を成すことの確認

閉包性 ユニタリー・ユニモジュラー行列 (262):

$$U(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

に対して

$$U(a_1, b_1)U(a_2, b_2) = U(a_1a_2 - b_1b_2^*, a_1b_2 + a_2^*b_1)$$

と計算できる。右辺の行列は

$$|a_1a_2 - b_1b_2^*|^2 + |a_1b_2 + a_2^*b_1|^2 = (|a_1|^2 + |b_1|^2)(|a_2|^2 + |b_2|^2) = 1$$

よりユニモジュラー条件を満たしているので、ユニタリー・ユニモジュラー行列の積 $U(a_1, b_1)U(a_2, b_2)$ もユニタリー・ユニモジュラー行列である。

演算積の結合則 行列積の性質として自動的に満たされている。

単位元 行列の積の演算に関する単位元

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = U(1, 0)$$

はユニタリー・ユニモジュラー行列となっている。

逆元 $U(a, b)$ の逆行列は

$$U^{-1}(a, b) = U(a^*, -b) \tag{3.3.13}$$

である:

$$U(a, b)U(a^*, -b) = U(a^*, -b)U(a, b) = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & 0 \\ 0 & |b|^2 + |a|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.9 水素原子 (補足)

8.9.1 球対称な場に関する一般論 (補足)

■遠心力ポテンシャルと、条件 (265) の補足説明 古典力学を復習しよう [9, pp.36-40]. 中心力の場における 1 体の運動を考える。

$$\text{ポテンシャル } V(r) \Rightarrow \mathbf{F} = -\frac{dV}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}: \text{中心力.}$$

中心力の場において (軌道) 角運動量 \mathbf{L} が保存

⇒ 運動は \mathbf{L} に垂直な一平面内、平面内に極座標 r, ϕ を導入 (力の中心を原点とする).

$$\begin{cases} \text{エネルギー保存則} & E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r) \\ \text{角運動量保存則} & L = mr^2\dot{\phi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + V_{\text{有効}}(r), \quad V_{\text{有効}}(r) \equiv V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}, \quad \frac{L^2}{2mr^2}: \text{遠心力ポテンシャル.}$$

$L^2/2mr^2$ が遠心力のポテンシャル・エネルギーと呼ばれるのは次の事情による。粒子の速度と加速度を動径方向 (方向単位ベクトル \mathbf{e}_r) と角度方向 (方向単位ベクトル \mathbf{e}_ϕ) に分解すると

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi, \quad \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\mathbf{e}_\phi$$

となるので、一般に $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi$ を基底とする座標系における運動方程式について、 \mathbf{e}_r 成分は

$$m\ddot{r} = F_r + mr\dot{\phi}^2, \quad mr\dot{\phi}^2: \text{遠心力}$$

と書ける。中心力の場合には角運動量は $mr^2\dot{\phi} = L$ (一定) なので、遠心力は $mr\dot{\phi}^2 = \frac{L^2}{mr^3}$ と表される。これは遠心力ポテンシャル $\frac{L^2}{2mr^2}$ から導かれる。

引力の場合においても、ポテンシャル・エネルギーが $r \rightarrow 0$ で十分に速く $-\infty$ に近づかなければ、遠心力ポテンシャルのため粒子は場の中心に到達できない。粒子が場の中心に到達できる条件は

$$0 < \frac{m\dot{r}^2}{2} = E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}, \quad \therefore \lim_{r \rightarrow 0} r^2 V(r) < -\frac{L^2}{2m}$$

で与えられる。

■動径関数 $R(r)$ の $r \rightarrow 0$ における漸近形 (266) の導出 R に対する方程式 (264):

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) R = 0$$

に r^2 を掛けて $r \rightarrow 0$ とし、条件 (265): $r^2 V(r) \rightarrow 0$ を考慮すると

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - l(l+1) R = 0$$

を得る。 $r \rightarrow 0$ での動径関数を $R = \text{const} \cdot r^s$ の形に仮定し、これを上式に代入すると

$$\begin{aligned} \text{const} \cdot \{s(s+1) - l(l+1)\} r^s &= 0, \\ \therefore 0 &= s(s+1) - l(l+1) = (s-l)(s+l+1) \end{aligned}$$

となる。 $s = -l - 1$ に対して R は $r = 0$ で発散する。これは粒子が場の中心 $r = 0$ に“落下”しない条件 (265) の下で、確率密度 $|\psi|^2$ が $r = 0$ を含む空間全体で有限でなければならないことに反する。よって適正な解は式 (266): $R = \text{const} \cdot r^l$ に限られる。

8.9.2 水素原子 (補足)

■水素原子のエネルギー固有値 (267) と動径関数 (269) の導出 Coulomb ポテンシャル $V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$ に対して R の満たす方程式 (264) は

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} R + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{r} \right) R = 0 \quad (721)$$

となる。さて、原子単位を採用して変数を

$$r \rightarrow r' = \frac{r}{a}, \quad R \rightarrow R' = a^{3/2}R, \quad E \rightarrow E' = \frac{E}{me^4/\hbar^2}$$

(ただし $a = \hbar^2/me^2$ は Bohr 半径) と無次元化しよう。上式 (721) は両辺に $a^2 \cdot a^{3/2}$ を掛けると

$$\frac{d^2 R'}{dr'^2} + \frac{2}{r'} \frac{dR'}{dr'} - \frac{l(l+1)}{r'^2} R' + 2a^2 \frac{m}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{r} \right) R' = 0$$

と書き換えられる。さらに $a = \hbar^2/me^2$ より

$$a^2 \frac{m}{\hbar^2} E = \frac{E}{me^4/\hbar^2} E = E', \quad a^2 \frac{m}{\hbar^2} \frac{Ze^2}{r} = \left(a \frac{m}{\hbar^2} Ze^2 \right) \frac{a}{r} = \frac{Z}{r'}$$

となることに注意すると、

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} R + 2 \left(E + \frac{Z}{r} \right) R = 0 \quad (722)$$

が得られる。ただし無次元化を表すプライムは煩わしいので省いた。もちろん 2.9.2 節で説明したように、原子単位での式 (722) はもとの式 (721) で e, m, \hbar を 1 とおけば直ちに導かれる。

次に E と r の代わりとなる量

$$n = \frac{Z}{\sqrt{-2E}}, \quad \rho = \frac{2rZ}{n} \quad (723)$$

を導入する。 $E < 0$ なので、現段階では n は正の実数を取り得るものと想定されている。これらを用いて上式 (722) を書き換えよう。式 (722) の両辺に $\left(\frac{n}{2Z}\right)^2$ を掛けると

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dR}{d\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} R + 2 \left(\frac{n}{2Z} \right)^2 \left(E + \frac{Z}{r} \right) R = 0$$

が得られ、さらに $2 \left(\frac{n}{2Z}\right)^2 E = -\frac{1}{4}$, $2 \left(\frac{n}{2Z}\right)^2 \frac{Z}{r} = \frac{n}{\rho}$ と書き換えられるので

$$R'' + \frac{2}{\rho} R' + \left\{ -\frac{1}{4} + \frac{n}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right\} R = 0 \quad (724)$$

を得る (プライムは ρ による微分)。

計算を進める方針の洞察を得るために、式 (724) を満たす R の ρ の大きいところでの漸近的振舞いを調べよう。式 (724) において $\rho \rightarrow \infty$ を想定し、 $1/\rho$ や $1/\rho^2$ に比例する項を無視すると

$$R'' = \frac{R}{4}, \quad \therefore R \sim e^{\pm\rho/2}$$

が見出される。束縛状態の波動関数は無限遠でゼロになることが期待されるので、 $R \sim e^{-\rho/2}$ が物理的に適切な選択である。他方、 $\rho \rightarrow 0$ では動径関数は式 (266): $R \sim \rho^l$ の形を持つ。

以上の考察より、

$$R = \rho^l e^{-\rho/2} w(\rho) \quad (725)$$

という置換を行うことが動機付けられる。そこで上式 (724) を w に対する微分方程式に焼き直そう。

$$\begin{aligned} R &= \rho^l e^{-\rho/2} w, \\ \therefore R' &= \left\{ \left(\frac{l}{\rho} - \frac{1}{2} \right) w + w' \right\} \rho^l e^{-\rho/2}, \\ \therefore R'' &= \left[\left\{ \left(\frac{l}{\rho} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{l}{\rho^2} \right\} w + 2 \left(\frac{l}{\rho} - \frac{1}{2} \right) w' + w'' \right] \rho^l e^{-\rho/2} \end{aligned}$$

を式 (724) に代入して整理すると

$$\rho w'' + (2l + 2 - \rho)w' + (n - l - 1)w = 0 \quad (726)$$

が得られる。この解を級数

$$w(\rho) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s \rho^s \quad (727)$$

の形に求める。

$$w' = \sum_{s=1}^{\infty} s a_s \rho^{s-1}, \quad w'' = \sum_{s=2}^{\infty} s(s-1) a_s \rho^{s-2}$$

および

$$\rho w'' = \sum_{s=1}^{\infty} s(s-1) a_s \rho^{s-1}, \quad \rho w' = \sum_{s=0}^{\infty} s a_s \rho^s$$

(それぞれ $s = 1, 0$ の項を和に含めて良いことに注意) を式 (726) に代入すると,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{s=1}^{\infty} \{a_s s(s-1) + (2l+2)a_s s\} \rho^{s-1} + \sum_{s=0}^{\infty} \{-a_s s + a_s(n-l-1)\} \rho^s \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} a_s s(s+2l+1) \rho^{s-1} + \sum_{s=0}^{\infty} a_s (n-l-1-s) \rho^s \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \{a_{s+1}(s+1)(s+2l+2) + a_s(n-l-1-s)\} \rho^s. \end{aligned}$$

展開係数がゼロになることを要求すると、再帰公式

$$a_{s+1} = -a_s \frac{n-l-1-s}{(s+1)(s+2l+2)} \quad (728)$$

を得る。ここで級数展開 (727) は、 $\rho = 0$ で w が、したがって R が有限であることを保証している。他方 R の式 (725) を見ると、 $\rho \rightarrow \infty$ では w が ρ の有限のべきよりもはやく発散してはならないことが要求される。そのためには、ある $s(=0, 1, \dots)$ に対し $n = l + 1 + s$ であれば良い。と言うのも、このとき上式 (728) より $a_{s+1} = 0$ となり、級数は有限の項で打ち切られる。

こうして n は

$$n \geq l + 1$$

を満たす整数と決まった。 n の定義式 (723) に戻ると、これはエネルギーの可能な値が離散スペクトル (267):

$$E = -\frac{Z^2}{2n^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で与えられることを意味する。また動径関数はまとめると

$$\text{式 (725)} : R = \rho^l e^{-\rho/2} w(\rho), \quad \text{式 (727)} : w(\rho) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s \rho^s, \quad \text{式 (728)} : a_{s+1} = -a_s \frac{n-l-1-s}{(s+1)(s+2l+2)}$$

で定まる。 $s = n - l - 1$ に対して $a_{s+1} = 0$ なので

$$a_{n-l} = a_{n-l+1} = a_{n-l+2} = \dots = 0$$

であり，ゼロにならない（可能性のある）係数 $a_0, a_1, \dots, a_{n-l-1}$ は最初の係数 a_0 で決まる (a_0 の不定性は規格化条件で取り除かれる). これを Laguerre 陪多項式 (268):

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = \sum_{s=0}^{n-l-1} (-1)^{s+2l+1} \frac{[(n+l)!]^2}{s!(s+2l+1)!(n-l-1-s)!} \rho^s \quad (n \geq l+1)$$

と比較すると，全体に掛かる定数係数の違いを除いて $w(\rho)$ は $L_{n+l}^{2l+1}(\rho)$ に一致することが見て取れる ($w(\rho) = \text{const} \cdot L_{n+l}^{2l+1}(\rho)$). よって式 (269):

$$R(\rho) = \text{const} \cdot \rho^l e^{-\rho/2} L_{n+l}^{2l+1}(\rho)$$

に到達する.

■動径関数 (271) における規格化定数の導出 [24, pp.88–93] 原子単位において動径関数 (269):

$$R(\rho) = C \cdot \rho^l e^{-\rho/2} L_{n+l}^{2l+1}(\rho)$$

に対し，規格化条件 (270) は

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^\infty |R|^2 r^2 dr = \left(\frac{n}{2Z}\right)^3 \int_0^\infty |R|^2 \rho^2 d\rho \quad \left(\because \rho = \frac{2rZ}{n}\right) \\ &= |C|^2 \left(\frac{n}{2Z}\right)^3 \int_0^\infty [L_{n+l}^{2l+1}(\rho)]^2 \rho^{2l+2} e^{-\rho} d\rho \end{aligned}$$

となる. ここで Laguerre 陪多項式に関する積分公式

$$\int_0^\infty [L_\nu^k(x)]^2 x^{k+1} e^{-x} dx = (2\nu+1-k) \frac{(\nu!)^3}{(\nu-k)!} \quad (729)$$

(すぐ後で証明) を $k=2l+1, \nu=n+l$ として適用すると,

$$|C|^2 \left(\frac{n}{2Z}\right)^3 \times 2n \frac{[(n+l)!]^3}{(n-l-1)!} = 1$$

を得る. 動径関数の位相の任意性より C を正の実数に選ぶと,

$$C = \frac{2Z^{3/2}}{n^2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{[(n+l)!]^3}}$$

と定まる.

完全を期して，上で用いた数学公式 (729) の証明を行う. その手順は次のようにまとめられる.

1. 級数展開 (268):

$$L_\nu^k(x) \equiv \sum_{s=0}^{\nu-k} (-1)^{s+k} \frac{(\nu!)^2}{s!(s+k)!(\nu-s-k)!} x^s \quad (k=0, 1, \dots, \nu)$$

で定義される Laguerre 陪多項式は，等価的に

$$g(t, x) \equiv \frac{(-1)^k}{(1-t)^{k+1}} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{\nu=k}^{\infty} L_\nu^k(x) \frac{t^{\nu-k}}{\nu!} \quad (730)$$

と書いて，“母関数” $g(t, x)$ の展開係数として定義できることを示す.

2. 母関数 (730) を利用して, Laguerre 陪多項式の漸化式

$$\left(1 - \frac{k}{\nu+1}\right) L_{\nu+1}^k(x) + (x+k-2\nu-1)L_{\nu}^k(x) + \nu^2 L_{\nu-1}^k(x) = 0 \quad (731)$$

を導く.

3. 母関数 (730) を利用して, Laguerre 陪多項式の直交性

$$\int_0^{\infty} L_{\mu}^k(x)L_{\nu}^k(x)x^k e^{-x} dx = \frac{(\nu!)^3}{(\nu-k)!} \delta_{\mu\nu} \quad (732)$$

を導く.

4. 漸化式 (731) と直交性 (732) を用いて, 積分公式 (729) を導く.

母関数の式 (730) の導出 母関数 (730) は

$$g(t, x) \equiv \frac{(-1)^k}{(1-t)^{k+1}} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{s+k} \frac{x^s}{s!} \frac{t^s}{(1-t)^{s+k+1}}$$

と展開できる. さらに最右辺において

$$\begin{aligned} \frac{t^s}{(1-t)^{s+k+1}} &= t^s \left\{ 1 + (s+k+1)t + \frac{(s+k+1)(s+k+2)}{2!} t^2 + \dots \right\} \\ &= t^2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(s+k+1)!}{(s+k)!p!} t^p \\ &= \sum_{\nu=s+k}^{\infty} \frac{\nu!}{(s+k)!(\nu-k-s)!} t^{\nu-k} \quad (\nu = s+k+p) \end{aligned}$$

とできるので,

$$g(t, x) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\nu=s+k}^{\infty} (-1)^{s+k} \frac{x^s}{s!} \frac{\nu!}{(s+k)!(\nu-k-s)!} t^{\nu-k}$$

を得る. 和の順序を

$$\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\nu=s+k}^{\infty} \rightarrow \sum_{\nu=k}^{\infty} \sum_{s=0}^{\nu-k}$$

と入れ替え (和の範囲は図 145 から判断できる), $g(x, t)$ を

$$\sum_{\nu=k}^{\infty} L_{\nu}^k(x) \frac{t^{\nu-k}}{\nu!}$$

と等置すると, 展開係数は

$$L_{\nu}^k(x) \equiv \sum_{s=0}^{\nu-k} (-1)^{s+k} \frac{(\nu!)^2}{s!(s+k)!(\nu-s-k)!} x^s$$

と同定される. これは級数展開 (268) で定義した Laguerre 陪多項式に他ならないから, 母関数の式 (730) を改めて Laguerre 陪多項式の定義と見なしても良いことになる.

漸化式 (731) の導出 母関数の式 (730) の対数をとって t で微分すると,

$$\begin{aligned} \ln g &= \ln \frac{(-1)^k}{(1-t)^{k+1}} - \frac{xt}{1-t}, \\ \therefore \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial t} &= \frac{k+1}{1-t} - \frac{x}{1-t} - \frac{xt}{(1-t)^2} = \frac{k+1}{1-t} - \frac{x}{(1-t)^2} \end{aligned}$$

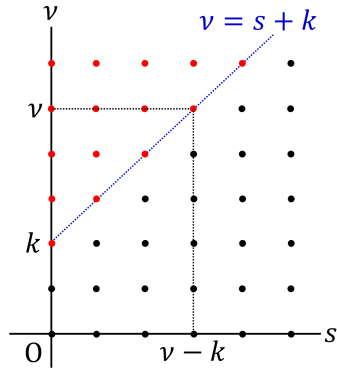


図 145 和をとられる添字の組 (s, ν) を赤い格子点で示した

となる。よって

$$\begin{aligned}
 0 &= (1-t)^2 \frac{\partial g}{\partial t} - (k+1)(1-t)g - xg \\
 &= \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{L_{\nu}^k(x)}{\nu!} \left\{ (\nu-k)(t^{\nu-k-1} - 2t^{\nu-k} + t^{\nu-k+1}) - (k+1)(t^{\nu-k} - t^{\nu-k+1}) + xt^{\nu-k} \right\} \\
 &= \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{L_{\nu}^k(x)}{\nu!} \left\{ (\nu-k)t^{\nu-k-1} + (x+k-2\nu-1)t^{\nu-k} + (\nu+1)t^{\nu-k+1} \right\} \\
 &= \sum_{\nu=k-1}^{\infty} \frac{L_{\nu+1}^k(x)}{(\nu+1)!} (\nu+1-k)t^{\nu-k} + \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{L_{\nu}^k(x)}{\nu!} (x+k-2\nu-1)t^{\nu-k} + \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \frac{L_{\nu-1}^k(x)}{(\nu-1)!} \nu t^{\nu-k} \\
 &= \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left[\left(1 - \frac{k}{\nu+1}\right) L_{\nu+1}^k(x) + (x+k-2\nu-1)L_{\nu}^k(x) + \nu^2 L_{\nu-1}^k(x) \right] t^{\nu-k} + (t^0 \text{ と } t^{-1} \text{ の項})
 \end{aligned}$$

であり、これが任意の t で成り立つことを要求して和の中で $t^{\nu-k}$ の係数 [...] をゼロと置くと、漸化式 (731) が導かれる。この導出方法から理解されるように、漸化式 (731) は Laguerre 陪多項式が定義される添字の範囲 $\nu = k+1, k+2, \dots$ で常に成立する。

直交性 (732) の導出 式 (730) の母関数 $g(t, x)$ に対して

$$\int_0^{\infty} g(t, x)g(s, x)x^k e^{-x} dx = \sum_{\nu=k}^{\infty} \sum_{\mu=k}^{\infty} \frac{t^{\nu-k} s^{\mu-k}}{\nu! \mu!} \int_0^{\infty} L_{\nu}^k(x)L_{\mu}^k(x)x^k e^{-x} dx \quad (733)$$

である。上式 (733) の左辺

$$\frac{1}{(1-t)^{k+1}(1-s)^{k+1}} \int_0^{\infty} x^k \exp\left(-x - \frac{xt}{1-t} - \frac{xs}{1-s}\right) dx \equiv \frac{1}{(1-t)^{k+1}(1-s)^{k+1}} I_k$$

における積分

$$I_k \equiv \int_0^{\infty} x^k e^{-\alpha x} dx, \quad \alpha \equiv 1 + \frac{t}{1-t} + \frac{s}{1-s} = \frac{1-st}{(1-t)(1-s)}$$

は、部分積分により

$$I_k = \frac{k}{\alpha} I_{k-1} = \dots = \frac{k!}{\alpha^k} I_0 = \frac{k!}{\alpha^{k+1}}$$

と計算できる. よって

$$\begin{aligned}
 (\text{式 (733) 左辺}) &= \frac{k!}{(1-t)^{k+1}(1-s)^{k+1}} \times \frac{(1-t)^{k+1}(1-s)^{k+1}}{(1-st)^{k+1}} = \frac{k!}{(1-st)^{k+1}} \\
 &= k! \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(k+p)!}{k!} \frac{(st)^p}{p!} \quad (\text{Taylor 展開}) \\
 &= \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{\nu!(st)^{\nu-k}}{(\nu-k)!} \quad (p = \nu - k)
 \end{aligned}$$

であり, これを式 (733) の右辺と比較すると, 直交性 (732):

$$\int_0^{\infty} L_{\mu}^k(x)L_{\nu}^k(x)x^k e^{-x} dx = \frac{(\nu!)^3}{(\nu-k)!} \delta_{\mu\nu}$$

が見出される.

積分公式 (729) の導出 漸化式 (731):

$$xL_{\nu}^k(x) = (2\nu + 1 - k)L_{\nu}^k(x) - \left(1 - \frac{k}{\nu + 1}\right)L_{\nu+1}^k(x) + \nu^2 L_{\nu-1}^k(x)$$

および直交性 (732):

$$\int_0^{\infty} L_{\mu}^k(x)L_{\nu}^k(x)x^k e^{-x} dx = \frac{(\nu!)^3}{(\nu-k)!} \delta_{\mu\nu}$$

を用いると,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} [L_{\nu}^k(x)]^2 x^{k+1} e^{-x} dx &= (2\nu + 1 - k) \int_0^{\infty} [L_{\nu}^k(x)]^2 x^k e^{-x} dx + \dots \\
 &= (2\nu + 1 - k) \frac{(\nu!)^3}{(\nu-k)!} : (729).
 \end{aligned}$$

ただし「…」は直交性 (732) によりゼロになる項を表す.

■基底状態における半径の期待値 (272) の導出 動径方向の確率分布 $f(r) = 4r^2 e^{-2r}$ を用いて

$$\langle r^k \rangle \equiv \int_0^{\infty} r^k f(r) dr = 4 \int_0^{\infty} r^{k+2} e^{-2r} dr$$

を定義すると, 部分積分により

$$\langle r^k \rangle = \frac{k+2}{2} \langle r^{k-1} \rangle = \dots = \frac{(k+2)!}{2^{k+2}} \langle r^{-2} \rangle = \frac{(k+2)!}{2^{k+1}}$$

と計算できる. ここから改めて規格化条件

$$\int_0^{\infty} f(r) dr = \langle r^0 \rangle = 1$$

が満たされていることが確かめられる. また式 (272): $\langle r \rangle = 3/2$ が得られる. (以上, 長さは Bohr 半径を単位として無次元化されていることに再度, 注意を促しておく.)

9 量子電磁力学 (QED)(補足)

9.1 場の量子論の準備 (補足)

9.1.1 場の正準交換関係 (補足)

3.1.1 節では離散的な格子近似を施した系の正準交換関係

$$[\phi_r(j, t), \pi_s(j', t)\Delta V] = i\hbar\delta_{rs}\delta_{jj'} \quad , \text{etc.}$$

が, 場の交換関係

$$[\phi_r(\mathbf{x}, t), \pi_s(\mathbf{x}', t)] = i\hbar\delta_{rs}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad , \text{etc.}$$

に移行することを述べた. これは各胞に共通の体積を $\Delta V \rightarrow 0$ とすると,

$$\frac{\delta_{jj'}}{\Delta V} \rightarrow \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

となるからである. 実際このとき各格子点 j で定義された量 f_j が場の量 $f(\mathbf{x})$ に移行するものとする, 恒等式

$$f_j = \sum_{j'} f_{j'} \delta_{jj'}$$

はデルタ関数を定義付ける正しい式

$$f(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{x}')\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')d^3x'$$

に移行する.

9.1.2 量子力学における対称性と保存則 (補足)

■量子力学における対称性と保存則 (式 (273) の周辺) について α を実数の連続パラメーターとして, 恒等変換と連続的に繋がった変換のユニタリー演算子を $U = e^{i\alpha T}$ と書くと, T は Hermite 演算子でなければならない. 実際, 小さなパラメーター α の 1 次までの近似でユニタリー性

$$1 = UU^\dagger = (1 + i\alpha T)(1 - i\alpha T^\dagger) = 1 + i\alpha(T - T^\dagger), \quad 1 = U^\dagger U = (1 - i\alpha T^\dagger)(1 + i\alpha T) = 1 - i\alpha(T^\dagger - T)$$

が成り立つことを要求すると, Hermite 性 $T = T^\dagger$ が得られる.

式 (273):

$$\begin{aligned} \text{系の対称性} &\Leftrightarrow H \text{ の対称性} \\ &\Leftrightarrow [T, H] = 0 \\ &\Leftrightarrow T \text{ は運動の定数.} \quad (\because \text{Heisenberg 方程式}) \end{aligned}$$

の 2 行目は次のように理解できる. 一般に演算子 O は無限小のユニタリー変換

$$O' = UOU^\dagger = (1 + i\alpha T)O(1 - i\alpha T) = O + i\alpha[T, O]$$

に対して $\delta O = i\alpha[T, O]$ だけ変化するので, 演算子 O が不変に留まる条件は $[T, O] = 0$ である. 特に Hamiltonian H の不変性は $[T, H] = 0$ を意味する.

上式 (273) の 3 行目は次のように理解できる。Heisenberg 描像において一般の演算子 $O(t)$ を考える。ただし演算子 $O(t)$ は時間に陽に依存しないと仮定すると、Heisenberg 方程式

$$i\hbar \frac{dO(t)}{dt} = [O(t), H]$$

が成立する。よって $[O, H] = 0$ であれば、 O は運動の定数 (保存量) であることになる。

■電荷 Q と場の交換関係 (274) の導出 電荷の式 (52):

$$Q = \frac{-iq}{\hbar} \int d^3x [\pi_r(x)\phi_r(x) - \pi_r^\dagger(x)\phi_r^\dagger(x)]$$

を思い出すと、場の正準交換関係 $[\phi_r(\mathbf{x}, t), \pi_s(\mathbf{x}', t)] = i\hbar\delta_{rs}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, etc. より

$$[Q, \phi_r(x)] = \frac{-iq}{\hbar} \int d^3x' [\pi_s(x'), \phi_r(x)]\phi_s(x') = -q\phi_r(x)$$

を得る。第 2 式 $[Q, \phi_r^\dagger(x)] = +q\phi_r^\dagger(x)$ も同様に確かめられる。

■ $\phi_r(x)|Q'\rangle, \phi_r^\dagger(x)|Q'\rangle$ が固有値 $(Q' \pm q)$ の固有状態であること (式 (275)) の確認 $|Q'\rangle$ が Q の固有状態
で、その固有値が Q' である、すなわち

$$Q|Q'\rangle = Q'|Q'\rangle$$

としたとき、固有方程式

$$Q\phi_r|Q'\rangle = (Q' - q)\phi_r|Q'\rangle$$

が成り立つことが次のように示される。交換関係 (274): の第 1 式 $[Q, \phi_r(x)] = -q\phi_r(x)$ を利用すると、

$$\begin{aligned} Q\phi_r|Q'\rangle &= (\phi_r Q + [Q, \phi_r])|Q'\rangle \\ &= \phi_r(Q - q)|Q'\rangle \\ &= (Q' - q)\phi_r|Q'\rangle. \end{aligned}$$

なお $\phi_r^\dagger|Q'\rangle$ は固有値 $(Q' + q)$ の固有状態になることも、交換関係 (274): の第 2 式 $[Q, \phi_r^\dagger(x)] = +q\phi_r^\dagger(x)$ を用いて同様に確かめられる。

9.2 Klein-Gordon 場 (補足)

9.2.1 実 Klein-Gordon 場 (補足)

■Lagrangian 密度 (277) から Klein-Gordon 方程式 (276) の導出

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} &= \partial_\mu \left\{ \frac{1}{2}(\partial_\alpha \phi)(\partial^\alpha \phi) \right\} = \partial_\mu \partial^\mu \phi, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= \frac{\partial}{\partial \phi} \left(-\frac{1}{2}m^2 \phi^2 \right) = -m^2 \phi \end{aligned}$$

より、Euler-Lagrange 方程式は Klein-Gordon 方程式 (276) を与える。

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi.$$

■実 Klein-Gordon 場の正準交換関係 (278) から、展開係数に対する交換関係 (282) を導出

展開係数を場で表す

$$k \equiv (\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}), \quad \omega_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}, \quad f \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} g \equiv f \partial_{\mu} g - (\partial_{\mu} f) g$$

に対して,

$$\begin{aligned} a(\mathbf{k}) &= \frac{i}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \\ &= \frac{i}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \{\dot{\phi}(x) - i\omega_{\mathbf{k}}\phi(x)\}, \end{aligned} \quad (734)$$

$$\begin{aligned} a^{\dagger}(\mathbf{k}) &= \frac{-i}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \\ &= \frac{-i}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \{\dot{\phi}(x) + i\omega_{\mathbf{k}}\phi(x)\} \end{aligned} \quad (735)$$

と書ける.

実際, 例えば式 (734) は次のように確かめられる. まず一辺 L , 体積 $V = L^3$ の立方体領域に関する周期境界条件の下で許される波数ベクトル $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(\mathbf{n}$ は整数を成分に持つベクトル) に対して, $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}/\sqrt{V}$ の規格直交性

$$\int \frac{d^3x}{V} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (736)$$

が成り立つことに注意する. すると式 (734) において

$$\begin{aligned} & \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \\ &= \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \{\dot{\phi}(x) - i\omega_{\mathbf{k}}\phi(x)\} \\ &= \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{k}'} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}}\right)^{1/2} \\ & \times \left[a(\mathbf{k}')(-i\omega_{\mathbf{k}'})e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} + a^{\dagger}(\mathbf{k}')(i\omega_{\mathbf{k}'})e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} - i\omega_{\mathbf{k}} \left\{ a(\mathbf{k}')e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} + a^{\dagger}(\mathbf{k}')e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} \right\} \right] \\ & \left(\because \text{式 (279)} : \phi(x) = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2} \left\{ a(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a^{\dagger}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right\} \right) \\ &= \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{k}'} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}}\right)^{1/2} \left\{ -ia(\mathbf{k}')(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} + ia^{\dagger}(\mathbf{k}')(-\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \right\} \\ &= \sum_{\mathbf{k}'} \left(\frac{V}{2\omega_{\mathbf{k}'}}\right)^{1/2} \left\{ -ia(\mathbf{k}')(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}e^{i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t} + ia^{\dagger}(\mathbf{k}')(-\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}e^{i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t} \right\} \\ & \quad (\because \text{式 (736)}, t \equiv x^0) \\ &= \left(\frac{V}{2\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2} \{-ia(\mathbf{k})\}2\omega_{\mathbf{k}} \\ &= -i(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}a(\mathbf{k}) \end{aligned}$$

なので, 式 (734):

$$a(\mathbf{k}) = \frac{i}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x)$$

を得る. 同様に式 (734) の Hermite 共役をとった式 (735) が成り立つことを確かめられる.

ところで展開係数 $a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})$ の表式 (734), (735) は見掛け上, 時刻 x^0 に依る. そこでこれらが実際には時刻 x^0 に依らないことを確かめておこう. $a(\mathbf{k})$ の式 (734) の時刻 x^0 による微分

$$\partial_0 \left[\frac{i}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \right] = \frac{i}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \int d^3x \partial_0 \left[e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left\{ \dot{\phi}(x) - i\omega_{\mathbf{k}}\phi(x) \right\} \right]$$

において, 場 $\phi(x)$ が Klein-Gordon 方程式 (276):

$$(\square + m^2)\phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\phi} = (\nabla^2 - m^2)\phi$$

を満たすことを用いると

$$\begin{aligned} & \int d^3x \partial_0 \left\{ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left(\dot{\phi} - i\omega_{\mathbf{k}}\phi \right) \right\} \\ &= \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left\{ i\omega_{\mathbf{k}}(\dot{\phi} - i\omega_{\mathbf{k}}\phi) + (\ddot{\phi} - i\omega_{\mathbf{k}}\dot{\phi}) \right\} \\ &= \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (\ddot{\phi} + \omega_{\mathbf{k}}^2\phi) \\ &= \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (\nabla^2 + \mathbf{k}^2)\phi \\ &= \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \{(-i\mathbf{k})^2 + \mathbf{k}^2\}\phi \quad (\text{部分積分した}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

なので, $a(\mathbf{k})$ の式 (734) は時刻 x^0 に依らない. 同様に $a^\dagger(\mathbf{k})$ の式 (735) が時刻 x^0 に依らないことも確かめられる.

展開係数の交換関係 (282) の導出 さて, 展開係数を場で表した式 (734), (735) を用いて, 場の正準交換関係 (278) から展開係数に対する交換関係 (282) を導こう. 式 (734), (735) は右辺が時刻 x^0 に依らないから, これらを用いて得られる

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = \frac{1}{2V(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \int d^3x d^3x' e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')} [\dot{\phi}(x) - i\omega_{\mathbf{k}}\phi(x), \dot{\phi}(x') + i\omega_{\mathbf{k}'}\phi(x')]$$

の右辺は時刻 x^0, x'^0 に依らない. そこでこれを同時刻 $x^0 = x'^0 \equiv t$ で評価すると

$$\begin{aligned} & [\dot{\phi}(x) - i\omega_{\mathbf{k}}\phi(x), \dot{\phi}(x') + i\omega_{\mathbf{k}'}\phi(x')] \\ &= [\dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}', t)] + i\omega_{\mathbf{k}'}[\dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] - i\omega_{\mathbf{k}}[\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}', t)] + (-i\omega_{\mathbf{k}})(i\omega_{\mathbf{k}'})[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] \\ &= (\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned}$$

$$(\because \text{同時刻交換関係 (278)} : [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad [\dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad [\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}', t)] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'))$$

なので, 上式は

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = \frac{1}{V} \frac{\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'}}{2(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})t} \int d^3x d^3x' e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

となる. 右辺の空間積分は

$$\int d^3x d^3x' e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int d^3x e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} = V\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (\because \text{式 (736)})$$

となるから,

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = \frac{\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'}}{2(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})t} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

を得る。右辺には $\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ があるため、その前の因子を $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ で評価すると、交換関係 (282):

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

を得る。同様に展開係数に対する交換関係 (282) の残りの 2 式

$$[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = 0, \quad [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 0$$

も導ける。

逆証 逆に調和振動子の交換関係 (282) から正準交換関係 (278) を導くことは容易である。

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}', t)] &= i \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{2V} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}'}}{\omega_{\mathbf{k}}}} \{ [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')} - [a^\dagger(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')} \} \\ &= i \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{2V} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}'}}{\omega_{\mathbf{k}}}} \{ e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')} + e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')} \} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\ &= i \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2V} (e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} + e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}) \quad (x, x' \text{ は同時刻}) \\ &= i \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{V} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \quad (\text{第 1 項で } \mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k} \text{ と置換した}) \\ &= i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

最後の等号は $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}$ において、 $V \rightarrow \infty$ の極限操作を解除した関係式である。

■Hamiltonian(285) と運動量演算子 (287) の導出 エネルギー・運動量の一般式 (44):

$$P^\alpha = \int d^3x (\pi_r \partial^\alpha \phi_r - \mathcal{L}g^{0\alpha})$$

は実 Klein-Gordon 場に対して

$$P^\alpha = \int d^3x \left[\dot{\phi} \partial^\alpha \phi - \frac{1}{2} g^{0\alpha} \{ (\partial_\beta \phi)(\partial^\beta \phi) - m^2 \phi^2 \} \right]$$

となる。ここに場の Fourier 展開 (279)–(281):

$$\phi(x) = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \{ a(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot x} + a^\dagger(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot x} \}$$

を代入すると、まず第 1 項は

$$\begin{aligned} & \int d^3x \dot{\phi} \partial^\alpha \phi \\ &= \int d^3x \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{2V(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} (-i\omega_{\mathbf{k}})(-ik'^\alpha) \{ a(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot x} - a^\dagger(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot x} \} \{ a(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\cdot x} - a^\dagger(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}'\cdot x} \} \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} k'^\alpha \\ & \quad \times \int \frac{d^3x}{V} \{ -a(\mathbf{k})a(\mathbf{k}') e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot x} + a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}') e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot x} + a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot x} - a^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot x} \} \end{aligned}$$

と書き換えられる。ここで $x \equiv (t, \mathbf{x})$ と書き、

$$\int \frac{d^3x}{V} e^{\mp i(k+k') \cdot x} = e^{\mp i(\omega_k + \omega_{k'})t} \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'}, \quad \int \frac{d^3x}{V} e^{\mp i(k-k') \cdot x} = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$$

を用いて空間積分を実行し、次いで \mathbf{k}' についての和をとると

$$\begin{aligned} \int d^3x \dot{\phi} \partial^\alpha \phi &= \sum_{\mathbf{k}} \left[\begin{pmatrix} \omega_{\mathbf{k}} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \{a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}) + a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})\} - \begin{pmatrix} \omega_{\mathbf{k}} \\ -\mathbf{k} \end{pmatrix} \frac{1}{2} (\dots) \right] \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \left[\begin{pmatrix} \omega_{\mathbf{k}} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \left(N(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right) - \begin{pmatrix} \omega_{\mathbf{k}} \\ -\mathbf{k} \end{pmatrix} \frac{1}{2} (\dots) \right] \quad (\because [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})] = 1) \end{aligned}$$

が得られる。ここに

$$(\dots) \equiv a(\mathbf{k})a(-\mathbf{k})e^{-2i\omega_{\mathbf{k}}t} + a^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(-\mathbf{k})e^{2i\omega_{\mathbf{k}}t}$$

は生成演算子同士、および消滅演算子同士の積の項である (以下、同じ)。同様の計算により

$$\begin{aligned} \int d^3x (\partial_\beta \phi)(\partial^\beta \phi) &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{k_\beta k'^\beta}{2(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \int \frac{d^3x}{V} \{-a(\mathbf{k})a(\mathbf{k}')e^{-i(k+k') \cdot x} + a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}')e^{-i(k-k') \cdot x} \\ &\quad + a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}')e^{i(k-k') \cdot x} - a^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}')e^{i(k+k') \cdot x}\} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \left[m^2 \left(N(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right) - \frac{\omega_{\mathbf{k}}^2 + \mathbf{k}^2}{2} (\dots) \right], \quad (\because k^2 = m^2) \\ \int d^3x (m^2 \phi^2) &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{m^2}{2(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \int \frac{d^3x}{V} \{a(\mathbf{k})a(\mathbf{k}')e^{-i(k+k') \cdot x} + a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}')e^{-i(k-k') \cdot x} \\ &\quad + a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}')e^{i(k-k') \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}')e^{i(k+k') \cdot x}\} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \left[m^2 \left(N(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right) + \frac{m^2}{2} (\dots) \right], \\ \therefore \int d^3x \left(-\frac{1}{2} g^{0\alpha} \right) \{(\partial_\beta \phi)(\partial^\beta \phi) - m^2 \phi^2\} &= \frac{1}{2} g^{0\alpha} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\omega_{\mathbf{k}}^2 + \mathbf{k}^2 + m^2}{2\omega_{\mathbf{k}}} (\dots) \end{aligned}$$

である。

以上より Hamiltonian は

$$H = P^0 = \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \omega_{\mathbf{k}} \left(N(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathbf{k}^2 + m^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}{2\omega_{\mathbf{k}}} (\dots) \right\}$$

となる。ここで $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$ より (\dots) の係数はゼロとなるので、式 (285):

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left(N(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right)$$

を得る。また運動量演算子は

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \left\{ \left(N(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} (\dots) \right\}$$

と計算される。ここで $\mathbf{k}(\dots)$ は全体として \mathbf{k} の奇関数なので相殺し、式 (287):

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \left(N(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right)$$

が導かれる。

9.2.2 共変な交換関係 (補足)

■実 Klein-Gordon 場の交換関係 (289),(290),(291) の導出 場の Fourier 展開 (279) と調和振動子の交換関係 (282) を利用すると,

$$\begin{aligned} [\phi^+(x), \phi^-(y)] &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{2V(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] e^{-i\mathbf{k}\cdot x + i\mathbf{k}'\cdot y} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} e^{-i\mathbf{k}\cdot(x-y)} \\ &= i\Delta^+(x-y) : (289) \end{aligned}$$

を得る. ただし第 2 の等号では $V \rightarrow \infty$ の極限を想定して, $\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$ とした.

式 (290) は

$$[\phi^-(x), \phi^+(y)] = -[\phi^+(y), \phi^-(x)] = -i\Delta^+(y-x) \equiv i\Delta^-(x-y)$$

による.

さらに式 (291) は, $[\phi^+(x), \phi^+(y)] = [\phi^-(x), \phi^-(y)] = 0$ に注意すると

$$[\phi(x), \phi(y)] = [\phi^+(x), \phi^-(y)] + [\phi^-(x), \phi^+(y)] = i\Delta^+(x-y) + i\Delta^-(x-y) = i\Delta(x-y)$$

と確かめられる.

■ Δ 関数の Lorentz 不変性が明白な表式 (296) の導出

$$\delta(k^2 - m^2) = \delta(k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2) = \delta[(k_0 - \omega_{\mathbf{k}})(k_0 + \omega_{\mathbf{k}})] = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \delta(k_0 - \omega_{\mathbf{k}}) + \frac{1}{|-2\omega_{\mathbf{k}}|} \delta(k_0 + \omega_{\mathbf{k}})$$

を用いると,

$$\begin{aligned} & \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^4k \delta(k^2 - m^2) \varepsilon(k_0) e^{-i\mathbf{k}\cdot x} \\ &= -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int dk_0 \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \{ \delta(k_0 - \omega_{\mathbf{k}}) + \delta(k_0 + \omega_{\mathbf{k}}) \} \varepsilon(k_0) e^{i(\mathbf{k}\cdot \mathbf{x} - k_0 t)} \\ &= -\frac{i}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} (e^{i(\mathbf{k}\cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} - e^{i(\mathbf{k}\cdot \mathbf{x} + \omega_{\mathbf{k}} t)}) \\ &= \frac{1}{2i} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} (e^{i(\mathbf{k}\cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} - e^{-i(\mathbf{k}\cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)}) \quad (\text{第 2 項で } \mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k} \text{ と置換した}) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} \sin(\mathbf{k}\cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t) \\ &= -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} \sin(k\cdot x) \quad (\text{ここでは } k_0 \equiv \omega_{\mathbf{k}}) \\ &= \Delta(x) \end{aligned}$$

となる.

■ Δ 関数を複素 k_0 平面上的閉路積分で表した式 (297) の導出 図 28 に示した複素 k^0 平面上的閉路 C^\pm, C (それを図 146 に再掲する) に対して, 式 (297) の積分

$$\frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C^\pm, C} \frac{d^4k e^{-i\mathbf{k}\cdot x}}{k^2 - m^2} = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot \mathbf{x}} \int_{C^\pm, C} dk_0 \frac{e^{-ik_0 t}}{(k_0 - \omega_{\mathbf{k}})(k_0 + \omega_{\mathbf{k}})}$$

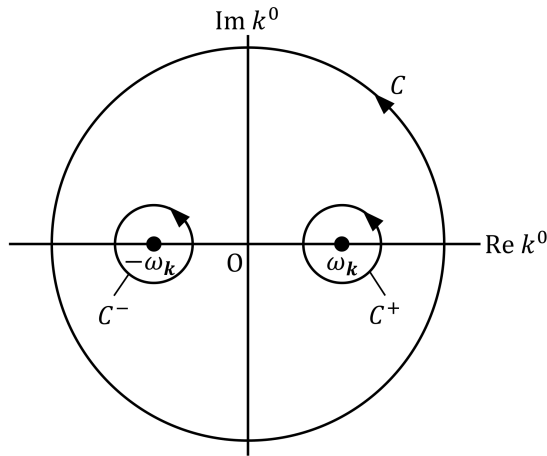


図 146 関数 $\Delta^\pm(x), \Delta(x)$ を複素 k_0 平面上の積分で表すときの積分路 (図 28 の再掲)

を考える。右辺における複素変数 k_0 の関数

$$\frac{e^{-ik_0 t}}{(k_0 - \omega_{\mathbf{k}})(k_0 + \omega_{\mathbf{k}})}$$

に対して、留数は

$$\text{Res}[\pm\omega_{\mathbf{k}}] = \pm \frac{e^{\mp i\omega_{\mathbf{k}} t}}{2\omega_{\mathbf{k}}}$$

と計算される。よって

$$\begin{aligned} \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C^\pm} \frac{d^4 k e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2} &= -i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot x} \text{Res}[\pm\omega_{\mathbf{k}}] \\ &= \mp \frac{i}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} e^{\pm i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \\ &\quad (\text{複号の下側では変数変換 } \mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k} \text{ を利用した}) \\ &= \Delta^\pm(x), \\ \therefore \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_C \frac{d^4 k e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2} &= -i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot x} (\text{Res}[\omega_{\mathbf{k}}] + \text{Res}[-\omega_{\mathbf{k}}]) \\ &= \Delta^+(x) + \Delta^-(x) \\ &= \Delta(x) \end{aligned}$$

を得る。

9.2.3 中間子の伝播関数 (補足)

■ Δ_F 関数の Fourier 展開 (298), (299) の導出 式 (298) の積分

$$\int_{C_F} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot x} \int_{C_F} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0 x^0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}$$

を考える。 $x^0 \geq 0$ のとき、図 31(図 147 として再掲) に示した無限大の半径を持つ半円 Γ_{\mp} に沿う時計回りの積分がゼロとなるから、 Γ_{\mp} を積分路に付け足して

$$\int_{C_F} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0 x^0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} = \oint_{C_F + \Gamma_{\mp}} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0 x^0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} = \mp i \text{Res}[\pm \omega_{\mathbf{k}}]$$

と評価できる。ただし最右辺の $\text{Res}[\pm \omega_{\mathbf{k}}]$ は被積分関数 $\frac{e^{-ik_0 x^0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}$ に対する留数であり、前の係数 \mp における上側の負号は積分が時計回りに行われていることに起因する。これを式 (297) の導出過程で見出した関係

$$\Delta^{\pm}(x) = -i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \text{Res}[\pm \omega_{\mathbf{k}}]$$

と比較すると、

$$\begin{aligned} \int_{C_F} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2} &= \pm \Delta^{\pm}(x) \quad (x^0 \geq 0) \\ &= \Delta_F(x) : (298) \end{aligned}$$

を得る。

次に式 (299) における複素 k_0 平面上の実軸に沿う積分

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0 x^0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + i\varepsilon}$$

を考えると、これは図 32(図 148 として再掲)5 のように

$$k_0 = \pm \sqrt{\omega_{\mathbf{k}}^2 - i\varepsilon} = \pm \omega_{\mathbf{k}} \mp i\varepsilon'$$

を極を持つ ($\varepsilon' = \varepsilon/2\omega_{\mathbf{k}}$ は微小な正数)。 $x^0 \geq 0$ のとき図 148 に示した無限大の半径を持つ半円 Γ_{\mp} に沿う時計回りの積分がゼロとなるから、 Γ_{\mp} を積分路に付け足して

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0 x^0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + i\varepsilon} = \oint \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0 x^0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + i\varepsilon} = \mp i \text{Res}[\pm \omega_{\mathbf{k}} \mp i\varepsilon']$$

と評価できる。よって最後に ε を、したがって ε' をゼロとおくと、再び

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0 x^0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + i\varepsilon} = \mp i \text{Res}[\pm \omega_{\mathbf{k}}] \quad (t \equiv x^0 \geq 0)$$

となるから、式 (299) の積分は Δ_F の式 (298) と同じ結果を与える。

9.3 電磁場 (補足)

9.3.1 古典電磁場 (補足)

■偏極ベクトルの性質 (308),(309) 3.3.1 節で述べたように、

$$\text{式 (306)} : \varepsilon_0^{\mu} = (1, \mathbf{0}), \quad \text{式 (307)} : \varepsilon_r^{\mu} = (0, \boldsymbol{\varepsilon}_r), \quad r = 1, 2, 3$$

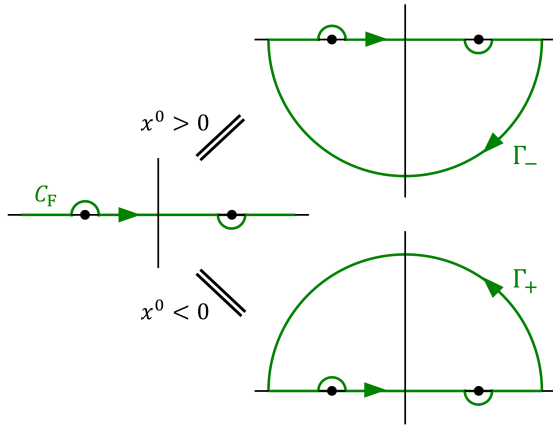


図 147 伝播関数 $\Delta_F(x)$ を複素 k_0 平面上の積分で表すときの積分路 C_F (図 31) の再掲

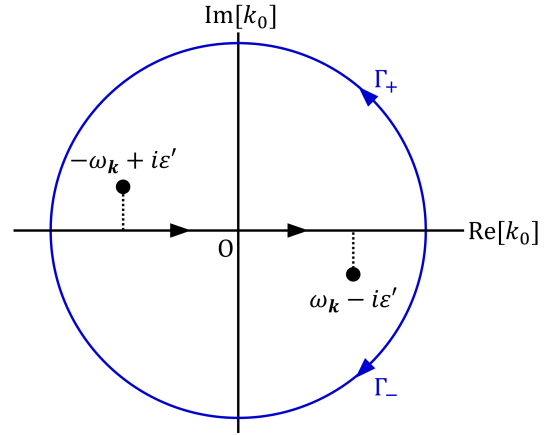


図 148 複素 k_0 平面上の極 $k_0 = \pm\omega_k \mp i\varepsilon'$ と半円 Γ_{\pm} (図 32) の再掲

で与えられる偏極ベクトル $\varepsilon_r^\mu = (\varepsilon_0^\mu, \varepsilon_r)$ は正規直交性 (308):

$$\begin{aligned} \varepsilon_r \cdot \varepsilon_s &= \varepsilon_r^0 \varepsilon_s^0 - \varepsilon_r \cdot \varepsilon_s \\ &= \begin{cases} (\varepsilon_0^0)^2 = 1 = -\zeta_0 \delta_{00} & (r = s = 0) \\ 0 \cdot 1 - \mathbf{0} \cdot \varepsilon_s = 0 = \zeta_0 \delta_{0s} & (r = 0, s = 1, 2, 3) \\ -\varepsilon_r \cdot \varepsilon_s = -\delta_{rs} = -\zeta_r \delta_{rs} & (r, s = 1, 2, 3) \end{cases} \\ &= -\zeta_r \delta_{rs} \end{aligned}$$

を満たす.

また

$$\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \quad \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \quad \varepsilon_3 = (0, 0, 1)$$

より $i, j = 1, 2, 3$ に対して

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1^i)^2 + (\varepsilon_2^i)^2 + (\varepsilon_3^i)^2 &= 1, \\ \sum_{r=1}^3 \varepsilon_r^i \varepsilon_r^j &= 0, \quad i \neq j \end{aligned}$$

であり, これらを

$$\sum_{r=1}^3 \varepsilon_r^i \varepsilon_r^j = -g^{ij} \quad (737)$$

とまとめられることに注意すると, 完全性の条件 (309):

$$\begin{aligned} \sum_r \zeta_r \varepsilon_r^\mu \varepsilon_r^\nu &= -\varepsilon_0^\mu \varepsilon_0^\nu + \sum_{r=1}^3 \varepsilon_r^\mu \varepsilon_r^\nu \\ &= \begin{cases} -(\varepsilon_0^0)^2 = -1 = -g^{00} & (\mu = \nu = 0) \\ -1 \cdot 0 + 0 \cdot \sum_{r=1}^3 \varepsilon_r^i = 0 = -g^{0i} & ((\mu, \nu) = (0, i), i = 1, 2, 3) \\ \sum_{r=1}^3 \varepsilon_r^i \varepsilon_r^j = -g^{ij} & ((\mu, \nu) = (i, j), i, j = 1, 2, 3, \therefore \text{式 (737)}) \end{cases} \end{aligned}$$

$$= -g^{\mu\nu}$$

が満たされていることが分かる。

■ Lagrangian 密度 (300),(311) の等価性 3.3.1 節で述べたように, 自由電磁場の Lagrangian 密度 (300):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

と Fermi によって提案された Lagrangian 密度 (311):

$$\mathcal{L}_{\text{Fermi}} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu)$$

が, Lorenz 条件の下で同じ場の方程式へと導くことを示す。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu) \\ &= \mathcal{L}_{\text{Fermi}} + \frac{1}{2}\partial_\mu(A_\nu\partial^\nu A^\mu) \quad (\because \text{Lorenz 条件 (301)}: \partial_\mu A^\mu = 0) \end{aligned}$$

のように, 2 つの Lagrangian 密度の差は $A_\nu\partial^\nu A^\mu/2$ の 4 元発散である。よって 1.3.2 節で説明したように, これら 2 つの Lagrangian 密度は等価である。

Fermi の Lagrangian 密度 (311): $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu)$ は (質量 $m = 0$ の) Klein-Gordon 場に対するそれと類似しており, Klein-Gordon 方程式が導かれるのと同様に A^μ に対する波動方程式が導かれる。

■ Lagrangian 密度 (300): $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu)$ から導かれる共役な場 (312): $\pi^\mu = -\dot{A}^\mu$ 3.3.1 節で述べたように, Fermi の提案した Lagrangian 密度 (300): $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu)$ に対して共役な場が式 (312): $\pi^\mu = -\dot{A}^\mu$ で与えられることが次のように確かめられる。

$$\begin{aligned} \pi^\lambda &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} = -2 \times \frac{1}{2}(\partial^\mu A^\nu) \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)}(\partial_\mu A_\nu) \\ &= -(\partial^\mu A^\nu) \delta^0_\mu \delta^\lambda_\nu \\ &= -\partial^0 A^\lambda \\ &= -\dot{A}^\lambda. \end{aligned}$$

9.3.2 自由電磁場の正準量子化 (補足)

■ 調和振動子の交換関係 (314) と正準交換関係 (313) 計算は Klein-Gordon 場の場合と似たものになる。

展開係数を電磁場で表す 3.3.2 節で述べたように, 電磁場に対する正準交換関係 (313) が展開係数に対する交換関係 (314) になることを確かめる。そのために電磁場を用いて展開係数を表すことを考える。自由スカラー場に対する議論 [26, p.35] を参考にすると,

$$k \equiv (\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}), \quad \omega_{\mathbf{k}} \equiv |\mathbf{k}|, \quad f \overleftrightarrow{\partial}_\mu g \equiv f \partial_\mu g - (\partial_\mu f) g$$

として電磁場に対する結論

$$\begin{aligned} a_r(\mathbf{k}) &= -i\zeta_r \frac{1}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \overleftrightarrow{\partial}_0 A^\mu(x) \\ &= i\zeta_r \frac{1}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \{\pi^\mu(x) + i\omega_{\mathbf{k}} A^\mu(x)\}, \end{aligned} \quad (738)$$

$$\begin{aligned} a_r^\dagger(\mathbf{k}) &= i\zeta_r \frac{1}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \overleftrightarrow{\partial}_0 A^\mu(x) \\ &= -i\zeta_r \frac{1}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \{\pi^\mu(x) - i\omega_{\mathbf{k}} A^\mu(x)\} \end{aligned} \quad (739)$$

にたどり着く (r については和をとらない, 式 (312): $\pi^\mu = -\dot{A}^\mu$).

実際, 例えば式 (738) は次のように確かめられる. まず一辺 L , 体積 $V = L^3$ の立方体領域に関する周期境界条件の下で許される波数ベクトル $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(\mathbf{n})$ (\mathbf{n} は整数を成分に持つベクトル) に対して, $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}/\sqrt{V}$ の規格直交性

$$\int \frac{d^3x}{V} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (740)$$

が成り立つことに注意する. すると式 (738) において

$$\begin{aligned} & \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \overleftrightarrow{\partial}_0 A^\mu(x) \\ &= \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \{\dot{A}^\mu(x) - i\omega_{\mathbf{k}} A^\mu(x)\} \\ &= \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{k}',s} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}') \\ & \times \left[a_s(\mathbf{k}')(-i\omega_{\mathbf{k}'})e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} + a_s^\dagger(\mathbf{k}')(i\omega_{\mathbf{k}'})e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} - i\omega_{\mathbf{k}} \left\{ a_s(\mathbf{k}')e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} + a_s^\dagger(\mathbf{k}')e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} \right\} \right] \\ & \left(\because \text{式 (303), (304), (305)} : A^\mu(x) = \sum_{\mathbf{k}',s} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}') \left\{ a_s(\mathbf{k}')e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} + a_s^\dagger(\mathbf{k}')e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} \right\} \right) \\ &= \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{k}',s} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}') \left\{ -ia_s(\mathbf{k}')(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} + ia_s^\dagger(\mathbf{k}')(-\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \right\} \\ &= \sum_{\mathbf{k}',s} \left(\frac{V}{2\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}') \left\{ -ia_s(\mathbf{k}')(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})t} + ia_s^\dagger(\mathbf{k}')(-\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})t} \right\} \\ & (\because \text{式 (740), } t \equiv x^0) \\ &= \sum_s \left(\frac{V}{2\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}) \{-ia_s(\mathbf{k})\} 2\omega_{\mathbf{k}} \\ &= -i(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2} \sum_s \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}) \end{aligned}$$

なので, 偏極ベクトルの正規直交性 (308):

$$\varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}) = -\zeta_r \delta_{rs}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
& -i\zeta_r \frac{1}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \overleftrightarrow{\partial}_0 A^\mu(x) \\
&= -\zeta_r \sum_s \{ \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}) \} a_s(\mathbf{k}) \\
&= \zeta_r \sum_s (\zeta_r \delta_{rs}) a_s(\mathbf{k}) \\
&= a_r(\mathbf{k}) : (738) \quad (\because \zeta_r = \pm 1, (\zeta_r)^2 = 1)
\end{aligned}$$

を得る. 同様に式 (738) の Hermite 共役をとった式 (739) が成り立つことを確かめられる.

ところで展開係数 $a_r(\mathbf{k}), a_r^\dagger(\mathbf{k})$ の表式 (738), (739) は見掛け上, 時刻 x^0 に依る. そこでこれらが実際には時刻 x^0 に依らないことを確かめておこう. $a_r(\mathbf{k})$ の式 (738) の時刻 x^0 による微分

$$\begin{aligned}
& \partial_0 \left[i\zeta_r \frac{1}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \{ \pi^\mu(x) + i\omega_{\mathbf{k}} A^\mu(x) \} \right] \\
&= i\zeta_r \frac{1}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \int d^3x \partial_0 \left[e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \{ -\dot{A}^\mu(x) + i\omega_{\mathbf{k}} A^\mu(x) \} \right] \quad (\because \text{式 (312)} : \pi^\mu = -\dot{A}^\mu)
\end{aligned}$$

において電磁場 A^μ が波動方程式 $\ddot{A}^\mu - \nabla^2 A^\mu = 0$ を満たすことを用いると

$$\begin{aligned}
& \int d^3x \partial_0 \left\{ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (-\dot{A}^\mu + i\omega_{\mathbf{k}} A^\mu) \right\} \\
&= \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left\{ i\omega_{\mathbf{k}} (-\dot{A}^\mu + i\omega_{\mathbf{k}} A^\mu) + (-\ddot{A}^\mu + i\omega_{\mathbf{k}} \dot{A}^\mu) \right\} \\
&= - \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (\ddot{A}^\mu + \omega_{\mathbf{k}}^2 A^\mu) \\
&= - \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (\nabla^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2) A^\mu \\
&= - \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \{ (i\mathbf{k})^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 \} A^\mu \quad (\text{部分積分した}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

なので $a_r(\mathbf{k})$ の式 (738) は時刻 x^0 に依らない. 同様に $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ の式 (739) が時刻 x^0 に依らないことも確かめられる.

展開係数の交換関係 (314) の導出 さて, 展開係数を電磁場で表した式 (738), (739) を用いて, 電磁場に対する正準交換関係 (313) から展開係数に対する交換関係 (314) を導こう. 式 (738), (739) は右辺が時刻 x^0 に依らないから, これらを用いて得られる

$$\begin{aligned}
& [a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] \\
&= -i^2 \zeta_r \zeta_s \frac{1}{2V(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon_{s\nu}(\mathbf{k}') \int d^3x d^3x' e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')} [\pi^\mu(x) + i\omega_{\mathbf{k}} A^\mu(x), \pi^\nu(x') - i\omega_{\mathbf{k}'} A^\nu(x')]
\end{aligned}$$

の右辺は時刻 x^0, x'^0 に依らない. そこでこれを同時刻 $x^0 = x'^0 \equiv t$ で評価すると

$$\begin{aligned}
& [\pi^\mu(x) + i\omega_{\mathbf{k}} A^\mu(x), \pi^\nu(x') - i\omega_{\mathbf{k}'} A^\nu(x')] \\
&= [\pi^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] - i\omega_{\mathbf{k}'} [\pi^\mu(\mathbf{x}, t), A^\nu(\mathbf{x}', t)] + i\omega_{\mathbf{k}} [A^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] + (i\omega_{\mathbf{k}})(-i\omega_{\mathbf{k}'}) [A^\mu(\mathbf{x}, t), A^\nu(\mathbf{x}', t)] \\
&= -g^{\mu\nu} (\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
&(\because \text{同時刻交換関係 (313)} : [A^\mu(\mathbf{x}, t), A^\nu(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad [\pi^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad [A^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] = ig^{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'))
\end{aligned}$$

なので上式は

$$[a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] = -\frac{1}{V} \frac{\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'}}{2(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \zeta_r \zeta_s g^{\mu\nu} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon_{s\nu}(\mathbf{k}') e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})t} \int d^3x d^3x' e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

となる。右辺の空間積分は

$$\int d^3x d^3x' e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int d^3x e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} = V \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (\because \text{式 (740)})$$

となるから、

$$[a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] = \frac{\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'}}{2(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \zeta_r \zeta_s g^{\mu\nu} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon_{s\nu}(\mathbf{k}') e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})t} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

を得る。右辺には $\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ があるため、その前の因子を $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ で評価すると

$$\begin{aligned} & [a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] \\ &= -\zeta_r \zeta_s \{g^{\mu\nu} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon_{s\nu}(\mathbf{k})\} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\ &= -\zeta_r \zeta_s (-\zeta_r \delta_{rs}) \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (\because \text{式 (308)} : \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}) = -\zeta_r \delta_{rs}) \\ &= \zeta_s \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} : (314) \quad (\because \zeta_r = \pm 1, (\zeta_r)^2 = 1) \end{aligned}$$

を得る。同様に展開係数に対する交換関係 (314) の残りの 2 式

$$[a_r(\mathbf{k}), a_s(\mathbf{k}')] = 0, \quad [a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] = 0$$

も導ける。

逆証 逆に調和振動子の交換関係 (314) から正準交換関係 (313) を導くことは容易である。例えば、

$$\begin{aligned} & [A^\mu(\mathbf{x}, t), \dot{A}^\nu(\mathbf{x}', t)] \\ &= \sum_{r,s} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{2V \sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'}}} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_s^\nu(\mathbf{k}') (-i\omega_{\mathbf{k}'}) \\ & \quad \times \left\{ -[a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')} + [a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_s(\mathbf{k}')] e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')} \right\} \\ &= i \sum_{r, \mathbf{k}} \frac{1}{2V} (\zeta_r \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\nu(\mathbf{k})) \left(e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} + e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \right) \\ & \quad (\because \text{式 (314)}, x, x' \text{ は同時刻}) \\ &= i \sum_r \frac{1}{V} (-g^{\mu\nu}) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \\ & \quad (\because \text{式 (309)}, \text{第 2 項で } -\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} \text{ と置換}) \\ &= -ig^{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned}$$

■非同時刻交換関係 $[A^\mu(x), A^\nu(y)]$ の式 (315) の導出 3.3.2 節における非同時刻交換関係 $[A^\mu(x), A^\nu(y)]$ の式 (315) を、実 Klein-Gordon 場に対する計算 [10, pp.53-54] を参考にして確かめる。まず生成演算子どうし、消滅演算子どうしは交換するから

$$[A^\mu(x), A^\nu(y)] = [A^{\mu+}(x), A^{\nu-}(y)] + [A^{\mu-}(x), A^{\nu+}(y)]$$

となる。右辺第1項は

$$\begin{aligned}
[A^{\mu+}(x), A^{\nu-}(y)] &= \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', r, s} \frac{1}{(\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \varepsilon_r^{\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon_s^{\nu}(\mathbf{k}') [a_r(\mathbf{k}), a_s^{\dagger}(\mathbf{k}')] e^{-i(\mathbf{k} \cdot x - \mathbf{k}' \cdot y)} \\
& (\because \text{電磁場の Fourier 展開 (303), (304), (305)}) \\
&= \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \left\{ \sum_r \zeta_r \varepsilon_r^{\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon_s^{\nu}(\mathbf{k}) \right\} e^{-i\mathbf{k} \cdot (x-y)} \\
& (\because \text{交換関係 (314) : } [a_r(\mathbf{k}), a_s^{\dagger}(\mathbf{k}')] = \zeta_r \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}) \\
&= -\frac{g^{\mu\nu}}{2V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{-i\mathbf{k} \cdot (x-y)} \\
& (\because \text{偏極ベクトルの完全性の条件 (309)})
\end{aligned}$$

と計算できる。後の都合のためにこれ以降は $V \rightarrow \infty$ の極限をとった結果を示すことにする。今、波数空間の体積要素 $\Delta^3 k$ の中には周期境界条件の下で許される波数ベクトル $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}$ を (波数空間の) 位置ベクトルに持つ点が $\frac{\Delta^3 k}{(2\pi/L)^3}$ 個含まれるため (\mathbf{n} は整数を成分に持つベクトル), 近似的に

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \sum \frac{\Delta^3 k}{(2\pi/L)^3} \quad \left(\sum \text{ は体積要素 } \Delta^3 k \text{ についての和} \right)$$

と置き換わり, $V \rightarrow \infty$ の極限で

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}$$

となることに注意すると

$$\begin{aligned}
[A^{\mu+}(x), A^{\nu-}(y)] &= -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} e^{-i\mathbf{k} \cdot (x-y)} \equiv -i g^{\mu\nu} \Delta^+(x-y), \quad (741) \\
\Delta^+(x) &\equiv -\frac{i}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} e^{-i\mathbf{k} \cdot x} : (292)
\end{aligned}$$

を得る。よって

$$[A^{\mu-}(x), A^{\nu+}(y)] = -[A^{\nu+}(y), A^{\mu-}(x)] = i g^{\mu\nu} \Delta^+(y-x) \quad (742)$$

$$\equiv -i g^{\mu\nu} \Delta^-(x-y), \quad (743)$$

$$\Delta^-(x) \equiv -\Delta^+(-x) = \frac{i}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} e^{i\mathbf{k} \cdot x} : (293)$$

となるから式 (315):

$$\begin{aligned}
[A^{\mu}(x), A^{\nu}(y)] &= -i g^{\mu\nu} \Delta(x-y) = i D^{\mu\nu}(x-y), \\
\Delta(x) &\equiv \Delta^+(x) + \Delta^-(x) = -\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} \sin(\mathbf{k} \cdot x), \\
D^{\mu\nu} &\equiv -g^{\mu\nu} \Delta(x)
\end{aligned}$$

が導かれる。

■Feynman の光子伝播関数 (316) の導出 導出は Klein-Gordon 場の場合と似たものになる。

$$\begin{aligned}\langle 0|\mathrm{T}\{A^\mu(x)A^\nu(x')\}|0\rangle &= \begin{cases} \langle 0|A^\mu(x)A^\nu(x')|0\rangle & (t > t') \\ \langle 0|A^\nu(x')A^\mu(x)|0\rangle & (t < t') \end{cases} \\ &= \theta(t-t') \langle 0|A^\mu(x)A^\nu(x')|0\rangle + \theta(t'-t) \langle 0|A^\nu(x')A^\mu(x)|0\rangle\end{aligned}$$

である。ところで上で得た結果

$$[A^{\mu+}(x), A^{\nu-}(x')] = -ig^{\mu\nu} \Delta^+(x-x')$$

を用いると,

$$-ig^{\mu\nu} \Delta^+(x-x') = \langle 0|[A^{\mu+}(x), A^{\nu-}(x')]|0\rangle = \langle 0|A^{\mu+}(x), A^{\nu-}(x')|0\rangle = \langle 0|A^\mu(x), A^\nu(x')|0\rangle$$

が成り立つ。よって式 (316):

$$\begin{aligned}\langle 0|\mathrm{T}\{A^\mu(x)A^\nu(x')\}|0\rangle &= -ig^{\mu\nu} \Delta_{\mathrm{F}}(x-x'), \\ \Delta_{\mathrm{F}}(x-x') &\equiv \theta(t-t') \Delta^+(x-x') + \theta(t'-t) \Delta^-(x-x')\end{aligned}$$

を得る。

■占有数表示 $N_r(\mathbf{k})$ の固有方程式 3.3.2 節で述べたように, 状態 (318):

$$|\cdots, n_r(\mathbf{k}), \cdots\rangle = C \left\{ \prod_{\mathbf{k}', s} a_s^\dagger(\mathbf{k}')^{n_s(\mathbf{k}')} \right\} |0\rangle$$

が占有数演算子 (317):

$$N_r(\mathbf{k}) = \zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k})$$

の固有値 $n_r(\mathbf{k})$ に属する固有状態であることを示す。

$$N_r(\mathbf{k}) |\cdots, n_r(\mathbf{k}), \cdots\rangle = C \zeta_r \left\{ \prod' a_s^\dagger(\mathbf{k}')^{n_s(\mathbf{k}')} \right\} a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) a_r^\dagger(\mathbf{k})^{n_r(\mathbf{k})} |0\rangle$$

(\prod' は $(\mathbf{k}', s) (\neq \mathbf{k}, r)$) についての積) において,

$$\begin{aligned}a_r(\mathbf{k}) a_r^\dagger(\mathbf{k}) &= a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) + [a_r(\mathbf{k}), a_r^\dagger(\mathbf{k})] \\ &= a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) + \zeta_r \quad (\because \text{交換関係 (314)})\end{aligned}$$

を繰り返し用いて $a_r(\mathbf{k})$ を $a_r^\dagger(\mathbf{k})^{n_r(\mathbf{k})}$ の右側に移動すると

$$\begin{aligned}a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) a_r^\dagger(\mathbf{k})^{n_r(\mathbf{k})} |0\rangle &= \left\{ a_r^\dagger(\mathbf{k})^{n_r(\mathbf{k})+1} a_r(\mathbf{k}) + n_r(\mathbf{k}) \zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k})^{n_r(\mathbf{k})} \right\} |0\rangle \\ &= n_r(\mathbf{k}) \zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k})^{n_r(\mathbf{k})} |0\rangle \quad (\because a_r(\mathbf{k}) |0\rangle = 0)\end{aligned}$$

となる。よって占有数演算子 $N_r(\mathbf{k})$ の固有方程式

$$\begin{aligned}N_r(\mathbf{k}) |\cdots, n_r(\mathbf{k}), \cdots\rangle &= (\zeta_r)^2 n_r(\mathbf{k}) \left\{ C \prod_{\mathbf{k}', s} a_s^\dagger(\mathbf{k}')^{n_s(\mathbf{k}')} \right\} |0\rangle \\ &= n_r(\mathbf{k}) |\cdots, n_r(\mathbf{k}), \cdots\rangle \quad (\because \zeta_r = \pm 1, (\zeta_r)^2 = 1)\end{aligned}$$

を得るから, 示された。

■Hamiltonian の式 (319),(320) の導出 3.3.2 節で述べたように, 自由電磁場の系の Hamiltonian が生成・消滅演算子を用いて式 (319),(320) のように表されることを確かめる. あらかじめ計算の方針を以下に示しておく.

- Hamiltonian の定義式に電磁場の Fourier 展開 (303),(304),(305) を代入する.
 - 2 種類の波数ベクトル \mathbf{k}, \mathbf{k}' , 2 種類の偏極の指数 r, s についての和が現れる.
 - Hamiltonian 密度の位置 \mathbf{x} 依存性が指数関数 $e^{\pm i(\mathbf{k}\pm\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}$ になる (複号任意).
- 位置 \mathbf{x} に関する積分を実行する.
 - $\delta_{\mathbf{k},\pm\mathbf{k}'}$ が現れる.
- \mathbf{k}' についての和をとる.
 - 展開に現れる 2 種類の偏極ベクトル $\varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}), \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}')$ の引数が \mathbf{k} に統一され, $\varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k})\varepsilon_s^\mu(\mathbf{k})$ が現れる.
- 偏極ベクトルの正規直交性 (308) を用いる.
 - δ_{rs} が現れる.
- s についての和をとる.

さて, 以上の流れに沿って Hamiltonian を具体的に計算しよう.

$$\begin{aligned}
 H &= \int d^3x (\pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}) \\
 &= \int d^3x \left\{ -\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu) (\partial^\nu A^\mu) \right\} \\
 &\quad \left(\text{式 (311)} : \mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu) (\partial^\nu A^\mu), \quad \text{式 (312)} : \pi^\mu = -\dot{A}^\mu \right) \\
 &= \int d^3x \left[- \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', r, s} \frac{1}{2V \sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'}}} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}') \right. \\
 &\quad \times \{ a_r(\mathbf{k}) (-i\omega_{\mathbf{k}}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a_r^\dagger(\mathbf{k}) (i\omega_{\mathbf{k}}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \} \{ a_s(\mathbf{k}') (-i\omega_{\mathbf{k}'}) e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} + a_s^\dagger(\mathbf{k}') (i\omega_{\mathbf{k}'}) e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} \} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', r, s} \frac{1}{2V \sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'}}} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}') \\
 &\quad \times \{ a_r(\mathbf{k}) (-ik_\nu) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a_r^\dagger(\mathbf{k}) (ik_\nu) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \} \{ a_s(\mathbf{k}') (-ik'^\nu) e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} + a_s^\dagger(\mathbf{k}') (ik'^\nu) e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} \} \left. \right] \\
 &\quad (\because \text{電磁場の Fourier 展開 (303), (304), (305)}) \\
 &= \int d^3x \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', r, s} \frac{1}{2V \sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'}}} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}') \left(\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'} - \frac{1}{2} k_\nu k'^\nu \right) \\
 &\quad \times \{ a_r(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - a_r^\dagger(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \} \{ a_s(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} - a_s^\dagger(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} \}
 \end{aligned}$$

において

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{d^3x}{V} \{ a_r(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - a_r^\dagger(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \} \{ a_s(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} - a_s^\dagger(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} \} \\
 &= \int \frac{d^3x}{V} \left\{ a_r(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}') e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})t} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \right. \\
 &\quad - a_r(\mathbf{k}) a_s^\dagger(\mathbf{k}') e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})t} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \\
 &\quad \left. - a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}') e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})t} e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_r^\dagger(\mathbf{k})a_s^\dagger(\mathbf{k}')e^{i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t}e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \quad (x \equiv (t, \mathbf{x})) \\
& = a_r(\mathbf{k})a_s(\mathbf{k}')e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t}\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} \\
& - a_r(\mathbf{k})a_s^\dagger(\mathbf{k}')e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\
& - a_r^\dagger(\mathbf{k})a_s(\mathbf{k}')e^{i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\
& + a_r^\dagger(\mathbf{k})a_s^\dagger(\mathbf{k}')e^{i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t}\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} \quad (\because \text{式 (740)})
\end{aligned}$$

であり, $\mathbf{k}' = \mp\mathbf{k}$ のとき

$$k_\nu k'^\nu = \omega_{\mathbf{k}}^2 \pm \mathbf{k}^2 = \begin{cases} 2\omega_{\mathbf{k}}^2 & (\mathbf{k}' = -\mathbf{k} \text{ に対して}) \\ 0 & (\mathbf{k}' = \mathbf{k} \text{ に対して}) \end{cases}, \quad \therefore \omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'} - \frac{1}{2}k_\nu k'^\nu = \begin{cases} 0 & (\mathbf{k}' = -\mathbf{k} \text{ に対して}) \\ \omega_{\mathbf{k}}^2 & (\mathbf{k}' = \mathbf{k} \text{ に対して}) \end{cases}$$

となることに注意すると

$$\begin{aligned}
H & = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', r, s} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k})\varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}') \\
& \quad \times \left\{ a_r(\mathbf{k})a_s(\mathbf{k}')e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t}\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} \right. \\
& \quad - a_r(\mathbf{k})a_s^\dagger(\mathbf{k}')e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\
& \quad - a_r^\dagger(\mathbf{k})a_s(\mathbf{k}')e^{i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\
& \quad \left. + a_r^\dagger(\mathbf{k})a_s^\dagger(\mathbf{k}')e^{i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t}\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} \right\} \\
& = - \sum_{\mathbf{k}, r, s} \frac{1}{2}\omega_{\mathbf{k}}\varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k})\varepsilon_s^\mu(\mathbf{k})\{a_r(\mathbf{k})a_s^\dagger(\mathbf{k}) + a_r^\dagger(\mathbf{k})a_s(\mathbf{k})\} \\
& = \sum_{\mathbf{k}, r, s} \frac{1}{2}\omega_{\mathbf{k}}\zeta_r\delta_{rs}\{a_r(\mathbf{k})a_s^\dagger(\mathbf{k}) + a_r^\dagger(\mathbf{k})a_s(\mathbf{k})\} \quad (\because \text{式 (308)} : \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k})\varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}) = -\zeta_r\delta_{rs}) \\
& = \sum_{\mathbf{k}, r} \frac{1}{2}\omega_{\mathbf{k}}\zeta_r\{a_r(\mathbf{k})a_r^\dagger(\mathbf{k}) + a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})\} : (319)
\end{aligned}$$

を得る.

さらに交換関係 (314) を用いて

$$a_r(\mathbf{k})a_r^\dagger(\mathbf{k}) = a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k}) + [a_r(\mathbf{k}), a_r^\dagger(\mathbf{k})] = a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k}) + \zeta_r$$

と書き換えると, 式 (320):

$$H = \sum_{\mathbf{k}, r} \omega_{\mathbf{k}}\zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, r} \omega_{\mathbf{k}} \quad (\because \zeta_r = \pm 1, (\zeta_r)^2 = 1)$$

を得る.

■スカラー光子, 縦波光子 3.3.2 節で述べたように, 条件式 (322): $\partial_\mu A^{\mu+}|\Psi\rangle = 0$ が式 (323): $\{a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k})\}|\Psi\rangle = 0$ に書き換えられることを確かめる. 条件式 (322) に $A^{\mu+}$ の定義式 (304) を代入すると

$$0 = \partial_\mu A^{\mu+}(x)|\Psi\rangle = \sum_{\mathbf{k}, r} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})(-ik_\mu)e^{-ik\cdot x}|\Psi\rangle$$

となる。ここで式 (306) のスカラー偏極，式 (307) の横偏極，縦偏極に対して，最右辺における μ, r に関する和は

$$\begin{aligned}\sum_r k_\mu \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) &= \sum_r \{ \omega_{\mathbf{k}} \varepsilon_r^0(\mathbf{k}) - \mathbf{k} \cdot \varepsilon_r(\mathbf{k}) \} a_r(\mathbf{k}) \\ &= \omega_{\mathbf{k}} a_0(\mathbf{k}) - |\mathbf{k}| a_3(\mathbf{k}) \\ &= -\omega_{\mathbf{k}} \{ a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k}) \}\end{aligned}$$

となるから，全ての \mathbf{k} に対して式 (323):

$$\{ a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k}) \} |\Psi\rangle = 0$$

が成り立つ。

次にエネルギー期待値の式 (324) を導こう。Hamiltonian の式 (321):

$$H = \sum_{\mathbf{k}, r} \omega_{\mathbf{k}} \zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k})$$

により

$$\begin{aligned}\langle \Psi | H | \Psi \rangle &= \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \langle \Psi | \sum_r \zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) | \Psi \rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left[\langle \Psi | \sum_{r=1}^2 a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) | \Psi \rangle + \langle \Psi | \{ a_3^\dagger(\mathbf{k}) a_3(\mathbf{k}) - a_0^\dagger(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}) \} | \Psi \rangle \right]\end{aligned}$$

となる。ところが式 (323): $\{ a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k}) \} |\Psi\rangle = 0$ を用いると，最右辺において

$$\begin{aligned}&\langle \Psi | \{ a_3^\dagger(\mathbf{k}) a_3(\mathbf{k}) - a_0^\dagger(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}) \} | \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | [a_3^\dagger(\mathbf{k}) \{ a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k}) \} + \{ a_3^\dagger(\mathbf{k}) - a_0^\dagger(\mathbf{k}) \} a_0(\mathbf{k})] | \Psi \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

となるから式 (324):

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle = \langle \Psi | \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 \omega_{\mathbf{k}} a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) | \Psi \rangle$$

を得る。

9.4 場の Lorentz 変換とスピノル (補足)

9.4.1 無限小変換 (補足)

■行列 $M_{\rho\sigma}$ の交換関係 (326) の確認 行列 $M_{\rho\sigma}$ の定義式 (325):

$$(M_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu \equiv i(\delta^\mu{}_\rho g_{\sigma\nu} - \delta^\mu{}_\sigma g_{\rho\nu})$$

より交換子 $[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}]$ の (α, β) 成分は

$$\begin{aligned}
& ([M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma})^\alpha_\beta \\
&= (M_{\mu\nu})^\alpha_\gamma (M_{\rho\sigma})^\gamma_\beta - (M_{\rho\sigma})^\alpha_\gamma (M_{\mu\nu})^\gamma_\beta \\
&= i^2 \{ (\delta^\alpha_\mu g_{\nu\gamma} - \delta^\alpha_\nu g_{\mu\gamma}) (\delta^\gamma_\rho g_{\sigma\beta} - \delta^\gamma_\sigma g_{\rho\beta}) - (\mu \leftrightarrow \rho, \nu \leftrightarrow \sigma) \} \\
&= - (\delta^\alpha_\mu g_{\nu\rho} g_{\sigma\beta} - \delta^\alpha_\mu g_{\nu\sigma} g_{\rho\beta} - \delta^\alpha_\nu g_{\mu\rho} g_{\sigma\beta} + \delta^\alpha_\nu g_{\mu\sigma} g_{\rho\beta}) \\
&\quad + (\delta^\alpha_\rho g_{\sigma\mu} g_{\nu\beta} - \delta^\alpha_\rho g_{\sigma\nu} g_{\mu\beta} - \delta^\alpha_\sigma g_{\rho\mu} g_{\nu\beta} + \delta^\alpha_\sigma g_{\rho\nu} g_{\mu\beta}) \\
&= g_{\mu\rho} (\delta^\alpha_\nu g_{\sigma\beta} - \delta^\alpha_\sigma g_{\nu\beta}) - g_{\nu\rho} (\delta^\alpha_\mu g_{\sigma\beta} - \delta^\alpha_\sigma g_{\mu\beta}) - g_{\mu\sigma} (\delta^\alpha_\nu g_{\rho\beta} - \delta^\alpha_\rho g_{\nu\beta}) + g_{\nu\sigma} (\delta^\alpha_\mu g_{\rho\beta} - \delta^\alpha_\rho g_{\mu\beta}) \\
&= -i \{ g_{\mu\rho} (M_{\nu\sigma})^\alpha_\beta - g_{\nu\rho} (M_{\mu\sigma})^\alpha_\beta - g_{\mu\sigma} (M_{\nu\rho})^\alpha_\beta + g_{\nu\sigma} (M_{\mu\rho})^\alpha_\beta \}
\end{aligned}$$

と計算される。これは交換関係 (326) を意味する。

9.4.2 Lorentz 群の表現 (補足)

■演算子 J, K の交換関係 (330) の導出 Lorentz 変換の生成子 $\hat{M}_{\rho\sigma}$ が満たす交換関係 (328), および演算子 J, K の定義式

$$J_i \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \hat{M}^{jk}, \quad K_i \equiv \hat{M}_{i0} (= -\hat{M}_{0i})$$

を思い出そう。すると

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= \frac{1}{4} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} [\hat{M}^{kl}, \hat{M}^{mn}] \\
&= -\frac{i}{4} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} (g_{km} \hat{M}_{ln} - g_{lm} \hat{M}_{kn} - g_{kn} \hat{M}_{lm} + g_{ln} \hat{M}_{km}) \\
&= \frac{i}{4} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} (\delta_{km} \hat{M}_{ln} - \delta_{lm} \hat{M}_{kn} - \delta_{kn} \hat{M}_{lm} + \delta_{ln} \hat{M}_{km}) \\
&= \frac{i}{4} \{ (\delta_{ij} \delta_{ln} - \delta_{in} \delta_{lj}) \hat{M}_{ln} + (\delta_{ij} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{kj}) \hat{M}_{kn} + (\delta_{ij} \delta_{lm} - \delta_{im} \delta_{lj}) \hat{M}_{lm} + (\delta_{ij} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kj}) \hat{M}_{km} \} \\
&= \frac{i}{4} \times 4 \times (-\hat{M}_{ji}) \quad (\hat{M}_{ij} \text{ は反対称}) \\
&= i \hat{M}_{ij} \\
&= i \varepsilon_{ijk} J_k, \\
[J_i, K_j] &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} [\hat{M}_{kl}, \hat{M}_{j0}] \\
&= -\frac{i}{2} \varepsilon_{ikl} (g_{kj} \hat{M}_{l0} - g_{lj} \hat{M}_{k0} - g_{k0} \hat{M}_{lj} + g_{l0} \hat{M}_{kj}) \\
&= \frac{i}{2} \varepsilon_{ikl} (\delta_{kj} \hat{M}_{l0} - \delta_{lj} \hat{M}_{k0}) \\
&= \frac{i}{2} (\varepsilon_{ijl} \hat{M}_{l0} - \varepsilon_{ikj} \hat{M}_{k0}) \\
&= i \varepsilon_{ijl} \hat{M}_{l0} \\
&= i \varepsilon_{ijk} K_k, \\
[K_i, K_j] &= [\hat{M}_{i0}, \hat{M}_{j0}] \\
&= -i (g_{ij} \hat{M}_{00} - g_{0j} \hat{M}_{i0} - g_{i0} \hat{M}_{0j} + g_{00} \hat{M}_{ij}) \\
&= -i \hat{M}_{ij} \\
&= -i \varepsilon_{ijk} J_k
\end{aligned}$$

となって, 交換関係 (330) を得る。

■演算子 A, B の交換関係 (331) の導出 演算子

$$\mathbf{A} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{J} + i\mathbf{K}), \quad \mathbf{B} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{J} - i\mathbf{K})$$

に対して

$$\begin{aligned} [A_i, A_j] &= \frac{1}{4}([J_i, J_j] + i[J_i, K_j] + i[K_i, J_j] + (+i)^2[K_i, K_j]), \\ [B_i, B_j] &= \frac{1}{4}([J_i, J_j] - i[J_i, K_j] - i[K_i, J_j] + (-i)^2[K_i, K_j]), \\ [A_i, B_j] &= \frac{1}{4}([J_i, J_j] - i[J_i, K_j] + i[K_i, J_j] + (+i)(-i)[K_i, K_j]) \end{aligned}$$

であり, ここに交換関係 (330):

$$[J_i, J_j] = -[K_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = [K_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k$$

を代入すると, 式 (331):

$$[A_i, A_j] = i\varepsilon_{ijk}A_k, \quad [B_i, B_j] = i\varepsilon_{ijk}B_k, \quad [A_i, B_j] = 0$$

が得られる.

9.4.3 $SL(2, \mathbf{C})$ スピノル (補足)

■式 (332) の行列 a の行列式が 1 であることの証明 この証明は非相対論的量子力学において, 空間回転の際に 2 成分に作用する行列 $e^{-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\phi/2}$ の行列式が 1 であることの確認 (8.8.4 節) と同様にできる. 今の場合, 行列 (332):

$$a = e^{i\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}}$$

において $\mathbf{b} \equiv \frac{\boldsymbol{\theta} + i\boldsymbol{\omega}}{2}$ は複素ベクトルである. この場合にも $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{b}^2$ は正しいので (式 (257) と見比べよ), 演算子の指数関数 a は

$$a = f(\mathbf{b}^2) + i(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma})g(\mathbf{b}^2), \quad f(\mathbf{b}^2) \equiv 1 - \frac{1}{2!}\mathbf{b}^2 + \frac{1}{4!}(\mathbf{b}^2)^2 - \dots, \quad g(\mathbf{b}^2) \equiv 1 - \frac{1}{3!}\mathbf{b}^2 + \frac{1}{5!}(\mathbf{b}^2)^2 - \dots$$

と展開される. Pauli 行列の成分

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を思い出すと

$$a = \begin{pmatrix} f + ib_3g & i(b_1 - ib_2)g \\ i(b_1 + ib_2)g & f - ib_3g \end{pmatrix}$$

となるので, 行列式は

$$\text{deta} = f^2 + \mathbf{b}^2 g^2$$

と表される. ここで複素数 $b = \sqrt{\mathbf{b}^2}$ を導入すると $f(\mathbf{b}^2) = \cos b, g(\mathbf{b}^2) = \sin b$ となるから,

$$\text{deta} = \cos^2 b + \sin^2 b = 1$$

である.

■**2*** スピノル $\eta_{\dot{\alpha}}$ が表現 $(A, B) = (1/2, 0)$ の場である理由 3.4.4 節で述べたように, **2*** スピノル $\eta_{\dot{\alpha}}$ は表現 $(A, B) = (1/2, 0)$ の場であることを説明する. 3.4.4 節の議論より, 任意の表現 $D(\mathbf{A}), D(\mathbf{B})$ に対して

$$D(\hat{\Lambda}) = \exp(i\boldsymbol{\theta} \cdot D(\mathbf{J}) + i\boldsymbol{\omega} \cdot D(\mathbf{K}))$$

であることは正しい. ところがこれは **2*** スピノル $\eta_{\dot{\alpha}}$ に対しては

$$a^*_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} = \left[\exp \left(-i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{2} - \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{2} \right) \right]_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}$$

なので,

$$\begin{cases} -\frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{2} = D(\mathbf{J}) = D(\mathbf{A}) + D(\mathbf{B}) \\ i\frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{2} = D(\mathbf{K}) = -i\{D(\mathbf{A}) + D(\mathbf{B})\} \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} D(\mathbf{A}) = -\frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{2} \\ D(\mathbf{B}) = 0 \end{cases}$$

と同定される. ここからこれは $(A, B) = (1/2, 0)$ の表現であると考えられる.

これは $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ の代わりに, 3.4.5 節で導入する $\eta^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}}$ を基本的な量と考えれば正当化できる ($\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ は 2 階反対称テンソルであり, $\epsilon^{12} = 1$). **2*** スピノル $\eta_{\dot{\alpha}}$ の変換則 (334): $\eta' = a^* \eta$ は, 改めてとった基本量 $\epsilon \eta = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix}$ に対しては

$$(\epsilon \eta') = (\epsilon a^* \epsilon^{-1})(\epsilon \eta)$$

となる. よって変換係数 a^* の中で $D(\mathbf{J}), D(\mathbf{K})$ は, したがって $D(\mathbf{A}), D(\mathbf{B})$ はそれぞれ $\epsilon D \epsilon^{-1}$ に置き換わる (無限小変換を考えよ). ところが Pauli 行列に対して直接確かめられるように

$$\epsilon(-\sigma_2^*)\epsilon^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2, \text{etc.} \quad \text{i.e.} \quad \epsilon(-\boldsymbol{\sigma}^*)\epsilon^{-1} = \boldsymbol{\sigma} \quad (744)$$

なので,

$$D(\mathbf{A}) \rightarrow \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}, \quad D(\mathbf{B}) \rightarrow 0$$

となる. これは $(A, B) = (1/2, 0)$ の表現であることが明瞭である.

9.4.4 スピノル算法 (補足)

■同種のスピノルの縮約 (335) がスカラーであることの証明 一般に 2×2 行列

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対して

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \epsilon M^T \epsilon^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

なので,

$$\epsilon M^T \epsilon^T = (\det M) M^{-1} \quad (745)$$

が恒等的に成立する.

さて、(下付き添字を持つ) 点なしスピノルをまとめて

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \Xi = \begin{pmatrix} \Xi_1 \\ \Xi_2 \end{pmatrix}$$

と表記すると、今考えている量 (335): $\epsilon^{\alpha\beta}\xi_\beta\Xi_\alpha$ は $\xi^T\epsilon^T\Xi$ と表される。変換則 (333): $\xi' = a\xi$ にしたがってこれを変換すると

$$\begin{aligned} (\xi^T\epsilon^T\Xi)' &= (\xi^T a^T)\epsilon^T(a\Xi) \\ &= \xi^T(\epsilon^T\epsilon)a^T\epsilon^T(a\Xi) \\ &= \xi^T\epsilon^T(\epsilon a^T\epsilon^T)(a\Xi) \\ &= \xi^T\epsilon^T\Xi \quad (\because \text{上式 (745)}: \epsilon a^T\epsilon^T = (\det a)a^{-1}, \det a = 1) \end{aligned}$$

となるので、縮約 $\xi^\alpha\Xi_\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\xi_\beta\Xi_\alpha = -\xi_\beta\Xi^\beta$ はスカラーである。 $\eta^\alpha H_\alpha = -\eta_\alpha H^\alpha$ がスカラーであることも同様に理解できる。

■式 (337) の確認 第 1 式 $\frac{1}{2}\text{tr}(\bar{\sigma}^\mu\sigma_\nu) = \delta^\mu_\nu$ について、 $(\mu, \nu) = (0, 0)$ のときには両辺が 1 となるので、これは成立する。また $\bar{\sigma}^i = -\bar{\sigma}_i = \sigma_i$ なので、 $(\mu, \nu) = (0, i), (i, 0)$ のとき左辺はいずれも $\frac{1}{2}\text{tr}(\sigma_i) = 0$ となるから、与式は成立している。最後に

$$\frac{1}{2}\text{tr}(\bar{\sigma}^i\sigma_j) = \frac{1}{2}\text{tr}(\sigma_i\sigma_j) = \frac{1}{2}\delta^i_j\text{tr}(1) = \delta^i_j$$

より、 $(\mu, \nu) = (i, j)$ のときにも与式は成立する。以上より第 1 式が確認できた。

第 2 式

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}(\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\gamma}\delta} = 2\delta^\delta_\alpha\delta^{\dot{\gamma}}_{\dot{\beta}}$$

の確認に移ろう。 $\sigma^\mu = (1, -\boldsymbol{\sigma}) = \bar{\sigma}_\mu$ より、左辺はスピノル添字の対 α, β と γ, δ の入れ替えに関して対称である。具体的には

$$\sigma^0 = \bar{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \bar{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \bar{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \bar{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。これらに注意すると、与式の左辺は表 7 のように成分計算される。左辺は $\alpha = \delta$ かつ $\beta = \gamma$ のとき 2 であり、それ以外のときは 0 となるから、与式は成立している。

■式 (339) の導出 無限小変換の場合を考えれば充分である。すると

$$\begin{aligned} a\sigma_\nu a^\dagger &\simeq \left(1 + \frac{i}{2}\theta_k\sigma_k - \frac{1}{2}\omega_k\sigma_k\right)\sigma_\nu\left(1 + \frac{i}{2}\theta_l\sigma_l - \frac{1}{2}\omega_l\sigma_l\right) \\ &\simeq \sigma_\nu + \frac{i}{2}\theta_k[\sigma_k, \sigma_\nu] - \frac{1}{2}\omega_k\{\sigma_k, \sigma_\nu\} \end{aligned}$$

となる。ここで Pauli 行列の交換関係と反交換関係

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$$

を思い出すと、

$$a\sigma_\nu a^\dagger \simeq \begin{cases} 1 - \omega_k\sigma_k & (\nu = 0) \\ \sigma_i - \varepsilon_{kil}\theta_k\sigma_l - \omega_i & (\nu = i) \end{cases}$$

表 7 $(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}(\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\gamma}\delta}$ の成分計算

	α	β	γ	δ	$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}(\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\gamma}\delta}$	
①	1	1	1	1	$1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1)$	$= 2$
②	1	1	1	2	$1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot i + (-1) \cdot 0$	$= 0$
③	1	1	2	1	$1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-i) + (-1) \cdot 0$	$= 0$
④	1	1	2	2	$1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1$	$= 0$
⑤	1	2	1	1	②に同じ	$\rightarrow 0$
⑥	1	2	1	2	$0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + i \cdot i + 0 \cdot 0$	$= 0$
⑦	1	2	2	1	$0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + i \cdot (-i) + 0 \cdot 0$	$= 2$
⑧	1	2	2	2	$0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + i \cdot 0 + 0 \cdot 1$	$= 0$
⑨	2	1	1	1	③に同じ	$\rightarrow 0$
⑩	2	1	1	2	⑦に同じ	$\rightarrow 2$
⑪	2	1	2	1	$0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + (-i) \cdot (-i) + 0 \cdot 0$	$= 0$
⑫	2	1	2	2	$0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + (-i) \cdot 0 + 0 \cdot 1$	$= 0$
⑬	2	2	1	1	④に同じ	$\rightarrow 0$
⑭	2	2	1	2	⑧に同じ	$\rightarrow 0$
⑮	2	2	2	1	⑫に同じ	$\rightarrow 0$
⑯	2	2	2	2	$1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1$	$= 2$

が得られる。他方、

$$\begin{aligned} \sigma_\mu \Lambda^\mu_\nu &\simeq \sigma_\mu (\delta^\mu_\nu + \varepsilon^\mu_\nu) \\ &= \begin{cases} 1 + \sigma_i \varepsilon^{i0} & (\nu = 0) \\ \sigma_i - \varepsilon^{0i} - \sigma_k \varepsilon^{ki} & (\nu = i) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - \omega_k \sigma_k & (\nu = 0) \\ \sigma_i - \omega_i + \varepsilon_{kil} \theta_l \sigma_k & (\nu = i) \end{cases} \end{aligned}$$

であり、最右辺において $\varepsilon_{kil} \theta_l \sigma_k = \varepsilon_{lik} \theta_k \sigma_l = -\varepsilon_{kil} \theta_k \sigma_l$ と書き換えられる。これらを等置して式 (339):

$$\sigma_\mu \Lambda^\mu_\nu = a \sigma_\nu a^\dagger$$

を得る。

■ V_μ の式 (340) の第 2, 第 3 の等号について まず式 (340):

$$V_\mu = \xi^\alpha (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}} = \xi_\alpha (\varepsilon^T \sigma_\mu \varepsilon)^{\alpha\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}} = \xi_\alpha (\bar{\sigma}_\mu^T)^{\alpha\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}}$$

の第 2 の等号は、

$$V_\mu = \xi^\alpha (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}} = (\varepsilon^{\alpha\gamma} \xi_\gamma) (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} (\varepsilon^{\dot{\beta}\delta} \eta_\delta) = \xi_\gamma \{ \varepsilon^{\alpha\gamma} (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \varepsilon^{\dot{\beta}\delta} \} \eta_\delta = \xi_\gamma (\varepsilon^T \sigma_\mu \varepsilon)^{\gamma\delta} \eta_\delta$$

と確かめられる。

第3の等号の確認に移ろう。既に言及した公式(744): $\epsilon(-\sigma^*)\epsilon^T = \sigma$ を両辺転置し、 $\epsilon^T = -\epsilon$ および Hermite 性 $\sigma^\dagger = \sigma$ を用いると

$$\epsilon^T \sigma \epsilon = -\sigma^T$$

を得る。これと $\epsilon^T \sigma_0 \epsilon = \epsilon^T \epsilon = 1$ を合わせると

$$\epsilon^T \sigma_\mu \epsilon = (1, -\sigma^T) = \bar{\sigma}_\mu^T$$

とまとめられるので、確かに第3の等号が成り立っている。

■式(340)の V_μ は4元ベクトルとして変換することの証明 ここでは点なし・点付きスピノルのいずれについても、下付き添字を持つ成分をまとめて

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

と表記すると、 $V_\mu = \xi_\alpha (\epsilon^T \sigma_\mu \epsilon)^{\alpha\beta} \eta_\beta$:(340) は

$$V_\mu = \xi^T \epsilon \sigma_\mu \epsilon \eta$$

と書ける。スピノルの変換則(333): $\xi' = a\xi$, (334): $\eta' = a^*\eta$ により、これは Lorentz 変換に際して

$$V'_\mu = (\xi^T a^T)(\epsilon^T \sigma_\mu \epsilon)(a^* \eta) = \xi^T (\epsilon^T \epsilon) a^T \epsilon^T \sigma_\mu \epsilon a^* (\epsilon^T \epsilon) \eta = \xi^T \epsilon^T (\epsilon a^T \epsilon^T) \sigma_\mu (\epsilon a^* \epsilon^T) \epsilon \eta$$

と変換する。ここで公式(745): $\epsilon M^T \epsilon^T = (\det M)M^{-1}$ を $M = a, a^\dagger$ とおいて適用し、 $\det a = 1$, それ故 $\det(a^\dagger) = 1$ であることを用いると、上式最右辺において

$$\epsilon a^T \epsilon^T = a^{-1}, \quad \epsilon a^* \epsilon^T = \epsilon (a^\dagger)^T \epsilon^T = (a^\dagger)^{-1}$$

となる。

$$V'_\mu = \xi^T \epsilon^T \{a^{-1} \sigma_\mu (a^\dagger)^{-1}\} \epsilon \eta. \quad (746)$$

ところで式(339)を $\Lambda \rightarrow \lambda^{-1}, a \rightarrow a^{-1}$ として書き下すと

$$a^{-1} \sigma_\mu (a^{-1})^\dagger = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \sigma_\nu$$

である。ここで $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ の Hermite 共役をとった式

$$(a^{-1})^\dagger a^\dagger = a^\dagger (a^{-1})^\dagger = 1$$

は、 $(a^{-1})^\dagger$ が a^\dagger の逆行列であることを示している。

$$(a^{-1})^\dagger = (a^\dagger)^{-1}.$$

以上より上式(746)は4元共変ベクトルの変換則

$$V'_\mu = \xi^T \epsilon^T \{(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \sigma_\nu\} \epsilon \eta = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu (\xi^T \epsilon^T \sigma_\nu \epsilon \eta) = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu V_\nu$$

になる。

■ $\sigma^{\mu\nu}$ 行列の式 (344) の確認 行列 $\sigma^\mu, \bar{\sigma}^\mu, \sigma^{\mu\nu}$ の定義式 (336), (343):

$$\sigma_\mu \equiv (1, \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}_\mu \equiv (1, -\boldsymbol{\sigma}), \quad (\sigma_{\mu\nu}) \equiv \frac{i}{2}(\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu)$$

および Pauli 行列の交換関係 $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$ より,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{i}{2}(\sigma_i \bar{\sigma}_j - \sigma_j \bar{\sigma}_i) = -\frac{i}{2}[\sigma_i, \sigma_j] = \varepsilon_{ijk}\sigma_k, \\ \sigma_{i0} &= \frac{i}{2}(\sigma_i \bar{\sigma}_0 - \sigma_0 \bar{\sigma}_i) = i\sigma_i \end{aligned}$$

となる。これらは式 (344):

$$(\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}) = \boldsymbol{\sigma}, \quad (\sigma_{10}, \sigma_{20}, \sigma_{30}) = i\boldsymbol{\sigma}$$

を意味する。

■ ξ_α の Lorentz 変換 (345) の確認 ξ_α の Lorentz 変換 (333): $\xi'_\alpha(x') = a_\alpha^\beta \xi_\beta(x)$ における変換行列

$$a = [\exp\{i\boldsymbol{\theta} \cdot D(\mathbf{J}) + i\boldsymbol{\omega} \cdot D(\mathbf{K})\}]$$

に

$$D(\mathbf{J}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} = \frac{1}{2}(\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}), \quad D(\mathbf{K}) = i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} = \frac{1}{2}(\sigma_{10}, \sigma_{20}, \sigma_{30})$$

および

$$\boldsymbol{\theta} = -(\varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12}), \quad \boldsymbol{\omega} = (\varepsilon_{10}, \varepsilon_{20}, \varepsilon_{30})$$

を代入すると,

$$a = \exp \left[-\frac{i}{2} \{ (\varepsilon^{12}\sigma_{12} + \varepsilon^{23}\sigma_{23} + \varepsilon^{31}\sigma_{31}) + (\varepsilon^{10}\sigma_{10} + \varepsilon^{20}\sigma_{20} + \varepsilon^{30}\sigma_{30}) \} \right] = \exp \left(-\frac{i}{4} \varepsilon^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \right)$$

となる。よって式 (345) が得られる。

■ $\eta^{\dot{\alpha}}$ の Lorentz 変換 (346) の確認 スピノル $\eta_{\dot{\alpha}}$ の変換則 (333): $\eta'_{\dot{\alpha}} = a^*_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}}$ は

$$\eta'^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \eta'_{\dot{\beta}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} a^*_{\dot{\beta}}{}^{\dot{\gamma}} \eta_{\dot{\gamma}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} a^*_{\dot{\beta}}{}^{\dot{\gamma}} (\varepsilon^T \varepsilon)_{\dot{\gamma}}{}^{\dot{\delta}} \eta_{\dot{\delta}} = (\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} a^*_{\dot{\beta}}{}^{\dot{\gamma}} \varepsilon^T_{\dot{\gamma}\dot{\delta}}) \varepsilon^{\dot{\delta}\dot{\alpha}} \eta_{\dot{\delta}} = (\varepsilon a^* \varepsilon^T)_{\dot{\delta}}{}^{\dot{\alpha}} \varepsilon^{\dot{\delta}\dot{\alpha}} \eta_{\dot{\delta}} = (\varepsilon a^* \varepsilon^T)_{\dot{\delta}}{}^{\dot{\alpha}} \eta_{\dot{\delta}}$$

と書き換えられる。ここで式 (345) の行列の指数関数 $a = \exp(-\frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu})$ を定義する Taylor 展開を考える
と、最右辺において

$$\varepsilon a^* \varepsilon^T = \varepsilon \left[\exp \left(-\frac{i}{4} \varepsilon^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \right) \right]^* \varepsilon^T = \exp \left(+\frac{i}{4} \varepsilon^{\mu\nu} (\varepsilon \sigma_{\mu\nu}^* \varepsilon^T) \right)$$

となる。さらに式 (344):

$$(\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}) = \boldsymbol{\sigma}, \quad (\sigma_{10}, \sigma_{20}, \sigma_{30}) = i\boldsymbol{\sigma}$$

および公式 (745) の帰結 $\varepsilon(-\boldsymbol{\sigma}^*)\varepsilon^T = \boldsymbol{\sigma}$ を思い出すと、 $\varepsilon \sigma_{\mu\nu}^* \varepsilon^T$ について

$$\begin{aligned} \varepsilon \sigma_{ij}^* \varepsilon^T &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon \sigma_k^* \varepsilon^T = -\varepsilon_{ijk} \sigma_k = -\sigma_{ij}, \\ \varepsilon \sigma_{i0}^* \varepsilon^T &= -i \varepsilon \sigma_i \varepsilon^T = i\sigma_i = \sigma_{i0} \end{aligned}$$

である。ところが式 (344):

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_{ijk}\sigma_k, \quad \sigma_{i0} = i\sigma_i$$

を同様に得られる関係

$$\bar{\sigma}_{ij} = \varepsilon_{ijk}\sigma_k, \quad \bar{\sigma}_{i0} = -i\sigma_i$$

と比較すると,

$$(\sigma_{ij})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} = (\bar{\sigma}_{ij})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}, \quad (\sigma_{i0})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} = -(\bar{\sigma}_{i0})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}$$

が見出される。よって上式は

$$(\varepsilon\sigma_{\mu\nu} * \epsilon^T)_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} = -(\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}$$

とまとめられる。以上よりスピノル $\eta^{\dot{\alpha}}$ の変換則 (346):

$$\eta'^{\dot{\alpha}}(x') = \left[\exp\left(-\frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu}\bar{\sigma}_{\mu\nu}\right) \right]_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \eta^{\dot{\beta}}(x)$$

が得られる。

9.5 Dirac 場 (補足)

9.5.1 スピノル表示の Dirac 場と Dirac 方程式 (補足)

■式 (355) と等価な Dirac 場の Lagrangian 密度 Lagrangian 密度

$$\mathcal{L}' = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\overleftrightarrow{\partial}_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (747)$$

(ただし $f\overleftrightarrow{\partial}_{\mu}g \equiv f\partial_{\mu}g - (\partial_{\mu}f)g$) は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\overleftrightarrow{\partial}_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi \\ &= \frac{i}{2}\{\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - (\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu})\psi\} - m\bar{\psi}\psi \\ &= \frac{i}{2}\{2\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \partial_{\mu}(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi)\} - m\bar{\psi}\psi \end{aligned}$$

と書き換えられる。ここで古典論において既に学んだように (1.3.2 節), 最右辺における 4 元発散の項 $\partial_{\mu}(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi)$ は落とすことができるから, これは Lagrangian 密度 (355):

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi$$

と等価である。

■Dirac 場の Lagrangian 密度 (747) が Lorentz スカラーであることの確認 式 (355) と等価な Lagrangian 密度 (747):

$$\mathcal{L}' = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\overleftrightarrow{\partial}_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

が Lorentz スカラーであることを, スピノル $\xi_{\alpha}, \eta^{\dot{\alpha}}$ の変換性に立ち戻って説明する。

Lagrangian 密度 (747):

$$\mathcal{L}' = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\overleftrightarrow{\partial}_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

の第 1 項は運動項と呼ばれ、これは

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^k &\equiv \frac{i}{2} \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi \\ &= \frac{i}{2} ((\xi_\alpha)^* \quad (\eta^{\dot{\alpha}})^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \begin{pmatrix} \xi_\beta \\ \eta^{\dot{\beta}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{i}{2} \left\{ (\xi_\alpha)^* (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \xi_\beta + (\eta^{\dot{\alpha}})^* (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \eta^{\dot{\beta}} \right\}\end{aligned}$$

と書き換えられる。この項が Lorentz スカラーとなっていることは、次のように理解できる。3.4.4 節で述べたように、点付きスピノルの複素共役 $(\eta^{\dot{\alpha}})^*$ は点無しスピノル $(\eta^*)^\alpha$ の変換性を持ち、逆に点なしスピノルの複素共役 $(\xi_\alpha)^*$ は点付きスピノル $(\xi^*)_{\dot{\alpha}}$ の変換性を持つ。そこで

$$(\eta^{\dot{\alpha}})^* = (\eta^*)^\alpha, \quad (\xi_\alpha)^* = (\xi^*)_{\dot{\alpha}}$$

と書いて右辺の量を定義することが許される。すると例えば η に関する項

$$(\eta^{\dot{\alpha}})^* (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \eta^{\dot{\beta}} = (\eta^{\dot{\alpha}})^* (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \partial_\mu \eta^{\dot{\beta}} - \{ \partial_\mu (\eta^{\dot{\alpha}})^* \} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}}$$

について、右辺第 1 項は $\eta^{*\alpha} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \partial_\mu \eta^{\dot{\beta}}$ と書ける。ここから微分演算子 ∂_μ を除いた量は、4 元反変ベクトルとして変換することを 9.4.4 節で証明した。微分演算子 ∂_μ を含めて同様に変換則を調べれば、全体として 4 元反変ベクトルと共変ベクトル ∂_μ の縮約から作られる Lorentz スカラーの変換性が得られることが分かる。また上式第 2 項は第 1 項の複素共役となっている。

$$\{ \eta^{*\alpha} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \partial_\mu \eta^{\dot{\beta}} \}^* = \{ \partial_\mu (\eta^{\dot{\beta}})^* \} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \eta^\alpha = \{ \partial_\mu (\eta^*)^\beta \} (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}} \eta^{\dot{\alpha}} = \{ \partial_\mu (\eta^{\dot{\alpha}})^* \} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}}.$$

(第 2 の等号では σ^μ の Hermite 性を用いた。) さらに ξ の項についてもまったく同様に議論できるから、運動項 \mathcal{L}^k 全体が Lorentz スカラーである。

Lagrangian 密度 (747) の第 2 項は Dirac 質量項と呼ばれ、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_D^m &\equiv -m \psi^\dagger \gamma^0 \psi \\ &= -m ((\xi_\alpha)^* \quad (\eta^{\dot{\alpha}})^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \\ &= -m \{ (\eta^{\dot{\alpha}})^* \xi_\alpha + (\xi_\alpha)^* \eta^{\dot{\alpha}} \} \\ &= -m \{ (\eta^*)^\alpha \xi_\alpha + (\xi^*)_{\dot{\alpha}} \eta^{\dot{\alpha}} \}\end{aligned}$$

と書き換えられる。最右辺は同種スピノル間の縮約となっているから、スカラーであることが明白である (3.4.5 節)。

以上より Dirac 場の Lagrangian 密度 (747) は Lorentz スカラーである。

■ Dirac 行列 (347) が性質 (348), (349) を満たすことの確認 Dirac 行列 (347) に対して

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\nu \\ \bar{\sigma}^\nu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \end{pmatrix}$$

なので、4 次元 Pauli 行列の性質 (338):

$$\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu = \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu + \bar{\sigma}_\nu \sigma_\mu = 2g_{\mu\nu}$$

を想起すると反交換関係 (348): $\{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} = 2g_{\mu\nu}$ を得る。

また Dirac 行列 (347) に対して

$$\gamma^{\mu\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & (\bar{\sigma}^\mu)^\dagger \\ (\sigma^\mu)^\dagger & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

となるので, 式 (349): $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$ が満たされる.

$(\gamma^0)^2 = 1$ より, 式 (349) の $\mu = 0$ 成分は $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$ を意味する. また空間成分 $\mu = j = 1, 2, 3$ は

$$\gamma^{j\dagger} = \gamma^0 \gamma^j \gamma^0 = \{\gamma^0, \gamma^j\} \gamma^0 - \gamma^j (\gamma^0)^2 = 2g^{0j} \gamma^0 - \gamma^j = -\gamma^j$$

となる.

■ γ 行列の交換関係 (350) の確認 γ 行列の反交換関係 (348) の導出過程で得た

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\nu \\ \bar{\sigma}^\nu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \end{pmatrix}$$

と $\sigma^{\mu\nu}, \bar{\sigma}^{\mu\nu}$ 行列の定義式 (343) により, 交換関係 (350):

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \begin{pmatrix} (\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta & 0 \\ 0 & (\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \end{pmatrix}$$

を得る.

■ γ_5 の具体的な表示 (351) の確認

$$\gamma_5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{pmatrix}$$

において, $\sigma_{ij} = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k$ より

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = (i\sigma_3) \sigma_3 = i$$

なので, 式 (351):

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を得る.

■Dirac スピノルに作用する行列 A の性質 (353) の導出 最初に式 (340) の V_μ が 4 元ベクトルとして変換することを証明する際に見たように,

$$\epsilon a^T \epsilon^T = a^{-1}, \quad \epsilon a^* \epsilon^T = \epsilon (a^\dagger)^T \epsilon^T = (a^\dagger)^{-1}, \quad (a^{-1})^\dagger = (a^\dagger)^{-1}$$

および

$$a^{-1} \sigma_\mu (a^{-1})^\dagger = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \sigma_\nu$$

の関係があることを思い出しておこう.

さて、式 (352) で定義した A の成分を 2×2 のブロックに分けて書くと、

$$\begin{aligned}
A &= \exp\left(-\frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right) \quad (\text{この}\sigma_{\mu\nu}\text{は } 4 \times 4 \text{ の行列}) \\
&= \exp\left[-\frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu}\begin{pmatrix}\sigma_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_{\mu\nu}\end{pmatrix}\right] \quad (\text{この}\sigma_{\mu\nu}, \bar{\sigma}_{\mu\nu}\text{は } 2 \times 2 \text{ の行列}) \\
&= \begin{pmatrix}\exp\left(-\frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu}\bar{\sigma}_{\mu\nu}\right)\end{pmatrix} \quad \left(\because \begin{pmatrix}\sigma_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_{\mu\nu}\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}(\sigma_{\mu\nu})^n & 0 \\ 0 & (\bar{\sigma}_{\mu\nu})^n\end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix}a & 0 \\ 0 & \varepsilon a^T \varepsilon^T\end{pmatrix} \quad (\because \text{式 (345), (346)}) \\
&= \begin{pmatrix}a & 0 \\ 0 & a^{\dagger-1}\end{pmatrix} \\
\therefore A^\dagger &= \begin{pmatrix}a^\dagger & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる。よって

$$\bar{A}\gamma_\mu A = (\gamma_0 A^\dagger \gamma_0)\gamma_\mu A = \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}a^\dagger & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & \sigma_\mu \\ 1\bar{\sigma}_\mu & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}a & 0 \\ 0 & a^{\dagger-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & a^{-1}\sigma_\mu a^{\dagger-1} \\ a^\dagger\bar{\sigma}_\mu a & 0\end{pmatrix}$$

と計算できる。最右辺の行列について、右上のブロックは $(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\sigma_\nu$ である。左下のブロックについては、式 (340) における $\varepsilon^T\sigma_\mu\varepsilon = \bar{\sigma}_\mu^T$ を用いると

$$\begin{aligned}
a^\dagger\bar{\sigma}_\mu a &= a^\dagger(\varepsilon^T\sigma_\mu\varepsilon)^T a = a^\dagger\varepsilon^T\sigma_\mu^T\varepsilon a = \varepsilon^T(\varepsilon a^\dagger\varepsilon^T)\sigma_\mu^T(\varepsilon a\varepsilon^T)\varepsilon = \varepsilon^T(\varepsilon a^\dagger\varepsilon^T)\sigma_\mu^T(\varepsilon a^\dagger\varepsilon^T)^\dagger\varepsilon \\
&= \varepsilon^T(a^{\dagger-1})^T\sigma_\mu^T(a^{-1})^T\varepsilon
\end{aligned}$$

となる。これは

$$(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\bar{\sigma}_\nu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu(\varepsilon^T\sigma_\nu\varepsilon)^T = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\varepsilon^T\sigma_\nu^T\varepsilon = \varepsilon^T(a^{-1}\sigma_\nu a^{\dagger-1})^T\varepsilon = \varepsilon^T(a^{\dagger-1})^T\sigma_\nu^T(a^{-1})^T\varepsilon$$

に一致する。以上より

$$\bar{A}\gamma_\mu A = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \begin{pmatrix}0 & \sigma_\nu \\ \bar{\sigma}_\nu & 0\end{pmatrix} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\gamma_\nu, \quad \therefore \bar{A}\gamma^\mu A = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu\gamma^\nu$$

を得る。

最後に $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu$ の関係があることに注意する [26, p.2]。実際、計量テンソルの Lorentz 変換

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}$$

の両辺に $g^{\tau\rho}$ を掛けて ρ で和をとると、

$$\delta^\tau{}_\sigma = (g^{\tau\rho}g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho)\Lambda^\nu{}_\sigma = \Lambda_\nu{}^\tau\Lambda^\nu{}_\sigma, \quad \therefore \Lambda_\nu{}^\tau = (\Lambda^{-1})^\tau{}_\nu$$

が見出される。こうして式 (353): $\bar{A}\gamma^\mu A = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$ に到達する。

■ Dirac スピノルについて双一次の基本量に対する Lorentz 変換性 (354) の証明 Dirac スピノルの変換則 (352): $\psi' = A\psi$ より、共役な場合は

$$\bar{\psi}' = \psi'^\dagger\gamma^0 = (A\psi)^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger A^\dagger\gamma^0 = (\psi^\dagger\gamma^0)(\gamma^0 A^\dagger\gamma^0) = \bar{\psi}\bar{A}$$

と変換する。ここで式 (353) の証明で確認したように

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{\dagger-1} \end{pmatrix}$$

であり、ここから \bar{A} は A の逆行列に他ならないこと

$$\bar{A} = (\gamma_0 A^{\dagger} \gamma_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{\dagger} & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a^{\dagger} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

が導かれる。

するとまず $\bar{\psi}\psi$ は

$$\bar{\psi}'\psi' = (\bar{\psi}\bar{A})(A\psi) = \bar{\psi}\psi$$

と変換するので、Lorentz スカラーである。

次に $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ は

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'\gamma_5\psi' &= (\bar{\psi}\bar{A})\gamma_5(A\psi) \\ &= \bar{\psi}i(\bar{A}\gamma^0 A)(\bar{A}\gamma^1 A)(\bar{A}\gamma^2 A)(\bar{A}\gamma^3 A)\psi \\ &= \Lambda^0_{\mu}\Lambda^1_{\nu}\Lambda^2_{\rho}\Lambda^3_{\sigma}\bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma})\psi \quad (\because \text{式 (353)}) \end{aligned}$$

と変換する。ここで相異なる γ 行列は反交換するので

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

と書けることに気付くと、

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'\gamma_5\psi' &= (\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^0_{\mu}\Lambda^1_{\nu}\Lambda^2_{\rho}\Lambda^3_{\sigma})\bar{\psi}(i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)\psi \\ &= \det(\Lambda)\bar{\psi}\gamma_5\psi \end{aligned}$$

を得る。ところが Lorentz 変換 $x \rightarrow x'$ では

$$\det(\Lambda) \equiv \det(\Lambda^{\mu}_{\nu}) = \frac{\partial(x')}{\partial(x)} = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} (= \pm 1)$$

なので、これは擬スカラーの変換則となっている。

この結果は応用しやすい公式

$$\bar{A}\gamma_5 A = \det(\Lambda^{-1})\gamma_5$$

にまとめられる。

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'\gamma^{\mu}\psi' &= (\bar{\psi}\bar{A})\gamma^{\mu}(A\psi) \\ &= \Lambda^{\mu}_{\nu}(\bar{\psi}\gamma^{\nu}\psi), \\ \bar{\psi}'\gamma_5\gamma^{\mu}\psi' &= (\bar{\psi}\bar{A})\gamma_5\gamma^{\mu}(A\psi) \\ &= \bar{\psi}(\bar{A}\gamma_5 A)(\bar{A}\gamma^{\mu} A)\psi \\ &= \det(\Lambda^{-1})\Lambda^{\mu}_{\nu}(\bar{\psi}\gamma_5\gamma^{\nu}\psi), \\ \bar{\psi}'\sigma_{\mu\nu}\psi' &= (\bar{\psi}\bar{A})\frac{i}{2}[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}](A\psi) \\ &= \bar{\psi}\frac{i}{2}(\Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma} - \Lambda^{\nu}_{\rho}\Lambda^{\mu}_{\sigma})\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\psi \\ &= \Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma}\bar{\psi}\frac{i}{2}[\gamma^{\rho}, \gamma^{\sigma}]\psi \\ &= \Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma}(\bar{\psi}\sigma_{\rho\sigma}\psi) \end{aligned}$$

はそれぞれベクトル, 擬 (軸性) ベクトル, 2 階テンソルの変換則となっている.

■Dirac 方程式 (356) の導出 Dirac 場の Lagrangian 密度 (355) に対して, Euler-Langange 方程式は Dirac 方程式 (356)

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}} \{ \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi \} = -(i\cancel{\partial} - m)\psi, \\ 0 &= \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \text{partial}_\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \psi)} (\bar{\psi}i\cancel{\partial}\psi) \right\} + m \frac{\partial}{\partial \psi} \bar{\psi}\psi = i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi} \end{aligned}$$

を与える. 例えば第 1 式は, スピノル添字 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ を明記すると, Euler-Lagrange 方程式 (37) は

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi}_\alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_\alpha} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_\alpha} \{ \bar{\psi}_\gamma(i\cancel{\partial} - m)_{\gamma\beta}\psi_\beta \} = -(i\cancel{\partial} - m)_{\alpha\beta}\psi_\beta$$

となる [10, pp.67-69] [20, pp.210-211].

これら 2 式の等価性は次のように確かめられる. まず Dirac 方程式 $i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0$ の両辺の Hermite 共役をとり, 式 (349): $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$ を用いると

$$0 = -i(\partial_\mu \psi^\dagger)\gamma^{\mu\dagger} - m\psi^\dagger = -i(\partial_\mu \psi^\dagger)(\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0) - m\psi^\dagger$$

となる. 右から γ^0 を掛けると, 随伴する Dirac 方程式

$$i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$$

を得る.

■Dirac 方程式 (356) の共変性の直接的確認 式 (352): $\psi' = A\psi$ (および $\bar{\psi}' = \bar{\psi}\bar{A}$), 式 (353): $\bar{A}\gamma^\mu A = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$ より, Dirac 方程式 (356):

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0, \quad i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$$

の第 1 式について,

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \partial'_\mu \psi' &= i\gamma^\mu \{ (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu \partial_\rho \} (A\psi) = i(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu A (\bar{A}\gamma^\mu A) (\partial_\rho \psi) = i(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu A (\Lambda^\mu{}_\sigma \gamma^\sigma) (\partial_\rho \psi) \\ &= A(i\gamma^\rho \partial_\rho \psi) \end{aligned}$$

となる. よって第 1 式は Lorentz 変換に対して共変的である.

$$i\gamma^\mu \partial'_\mu \psi' - m\psi' = A(i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi) = 0.$$

同様に第 2 式について,

$$\begin{aligned} i(\partial'_\mu \bar{\psi}')\gamma^\mu &= i\{ (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu \partial_\rho \} (\bar{\psi}\bar{A})\gamma^\mu = i(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu (\partial_\rho \bar{\psi})(\bar{A}\gamma^\mu A)\bar{A} = i(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu (\partial_\rho \bar{\psi})(\Lambda^\mu{}_\sigma \gamma^\sigma)\bar{A} \\ &= \{ i(\partial_\rho \bar{\psi})\gamma^\rho \}\bar{A} \end{aligned}$$

となるので, 第 2 式も Lorentz 変換に対して共変的である.

$$i(\partial'_\mu \bar{\psi}')\gamma^\mu + m\bar{\psi}' = \{ i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi} \}\bar{A} = 0.$$

9.5.2 表示に依らない定式化 (補足)

■ γ 行列の反交換関係 (348) が Dirac 場に対する Klein-Gordon 方程式を保証することの確認 Dirac 方程式 $i\gamma^\mu\partial_\mu\psi = m\psi$ の両辺に左から $i\gamma^\nu\partial_\nu$ を掛けると,

$$(i\gamma^\nu\partial_\nu)(i\gamma^\mu\partial_\mu)\psi = m(i\gamma^\nu\partial_\nu)\psi = m^2\psi$$

となる. 最左辺において $\partial_\nu\partial_\mu$ は添字 ν, μ に関して対称なので, 積 $\gamma^\nu\gamma^\mu$ の対称部分だけが最左辺に対して寄与を持つ:

$$-\frac{1}{2}\{\gamma^\nu, \gamma^\mu\}\partial_\nu\partial_\mu\psi = m^2\psi.$$

反交換関係 (348): $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ により, これは Klein-Gordon 方程式

$$(\square + m^2)\psi = 0$$

になる.

■Dirac 場の角運動量 (358) の導出 場の角運動量テンソルの一般式 (50):

$$M^{\alpha\beta} = \int d^3x \{ (x^\alpha\mathcal{T}^{0\beta} - x^\beta\mathcal{T}^{0\alpha}) + \pi_r S_{rs}^{\alpha\beta} \phi_s \}$$

において, エネルギー・運動量テンソルの一般式 (48):

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)} \frac{\partial\phi_r}{\partial x_\beta} - \mathcal{L}g^{\alpha\beta}$$

は Dirac 場に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{0i} &= \pi\partial^i\psi \quad (\bar{\pi} = 0) \\ &= -i\psi^\dagger\partial_i\psi \quad (\pi = i\psi^\dagger) \end{aligned}$$

を与える. また Dirac 場の変換則 (357) より場の変換則 (46) において $S^{ij} = -\frac{i}{2}\sigma^{ij}$ と同定されるので, Dirac 場の角運動量は

$$\begin{aligned} M^{ij} &= \int d^3x \left\{ (-i)\psi^\dagger(x^i\partial_j - x^j\partial_i)\psi + i\psi^\dagger \left(-\frac{i}{2}\sigma^{ij} \right) \psi \right\}, \quad (\because \bar{\pi} = 0) \\ \therefore \mathbf{M} &= \int d^3x \psi^\dagger(x) \{ \mathbf{x} \times (-i\nabla) \} \psi(x) + \int d^3x \psi^\dagger(x) \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \right) \psi(x) : (358) \end{aligned}$$

と計算される.

■電磁カレントの表式 (360) の導出 一般に場 $\phi_r(x)$ の変化 $\phi_r(x) \rightarrow \phi_r(x) + \delta\phi_r(x)$ の下で Lagrangian 密度 \mathcal{L} が不変であるとき,

$$f^\alpha \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)} \delta\phi_r$$

は連続の式 $\partial_\alpha f^\alpha = 0$ を満たし, 保存する流れ (4 元流束密度) となる (1.3.2 節). ε を無限小の定数としたゲージ変換

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow e^{i\varepsilon}\psi \simeq (1 + i\varepsilon)\psi & \therefore \delta\psi &= i\varepsilon\psi, \\ \bar{\psi} &\rightarrow e^{-i\varepsilon}\bar{\psi} \simeq (1 - i\varepsilon)\bar{\psi} & \therefore \delta\bar{\psi} &= -i\varepsilon\bar{\psi} \end{aligned}$$

に対する Lagrangian 密度の不変性に付随するカレントは,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \psi)} = i\bar{\psi}\gamma^\alpha, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \bar{\psi})} = 0$$

に注意すると

$$f^\alpha = (i\bar{\psi}\gamma^\alpha)(i\varepsilon\psi) = -\varepsilon\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi$$

となる. 定数係数を改めて, 電磁カレント (360):

$$s^\alpha \equiv q\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi$$

を得る.

■ Dirac 方程式から 4 元電流密度 (360) に対する連続の式の導出 Dirac 方程式

$$i\gamma^\alpha\partial_\alpha\psi = m\psi, \quad i(\partial_\alpha\bar{\psi})\gamma^\alpha = -m\bar{\psi}$$

を用いると,

$$\partial_\alpha s^\alpha = q\partial_\alpha(\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi) = q\{(\partial_\alpha\bar{\psi})\gamma^\alpha\psi + \bar{\psi}\gamma^\alpha\partial_\alpha\psi\} = \frac{q}{i}\{(-m\bar{\psi})\psi + \bar{\psi}(m\psi)\} = 0$$

となる.

■ $\sigma_{\mathbf{p}}$ が $(\pm\gamma^\mu p_\mu + m)$ と可換であることの確認

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{p}} &\equiv \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \frac{p_i}{|\mathbf{p}|} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \sigma^{jk} \right) = \frac{ip_i}{4|\mathbf{p}|} \varepsilon_{ijk} [\gamma^j, \gamma^k], \\ \therefore [\pm\not{p} + m, \sigma_{\mathbf{p}}] &= \pm p_\mu \frac{ip_i}{4|\mathbf{p}|} \varepsilon_{ijk} [\gamma^\mu, [\gamma^j, \gamma^k]] \end{aligned}$$

であり, $j \neq k$ の項だけが寄与を持つ. このため γ^j と γ^k を反交換して

$$[\gamma^j, \gamma^k] = \gamma^j\gamma^k - \gamma^k\gamma^j \rightarrow 2\gamma^j\gamma^k$$

と置き換えても, 上式の値は変わらない. すると恒等式 (163):

$$[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$$

の助けも借りて,

$$[\gamma^\mu, [\gamma^j, \gamma^k]] \rightarrow 2[\gamma^\mu, \gamma^j\gamma^k] = 2(\{\gamma^j, \gamma^\mu\}\gamma^k - \gamma^j\{\gamma^k, \gamma^\mu\}) = 4(\gamma^k g^{j\mu} - \gamma^j g^{k\mu}) = 4(\gamma^j \delta^\mu_k - \gamma^k \delta^\mu_j)$$

とできるので,

$$[\pm\not{p} + m, \sigma_{\mathbf{p}}] = \pm i \frac{p_i}{|\mathbf{p}|} \varepsilon_{ijk} (\gamma^j p_k - \gamma^k p_j) = \pm \frac{2i}{|\mathbf{p}|} \varepsilon_{ijk} p_i p_k \gamma^j = 0$$

を得る. 最後の等号では添字 i, k に関して ε_{ijk} が反対称であるのに対し, $p_i p_k$ は対称であることを考慮した.

■式 (361) からスピノルの直交性 (363) 第 2 式の導出 式 (361):

$$(\not{p} - m)u_r(\mathbf{p}) = 0, \quad (\not{p} + m)v_r(\mathbf{p}) = 0$$

の第 2 式より

$$u_r^\dagger(\mathbf{p})(p_0\gamma^0 - p_i\gamma^i + m)v_s(-\mathbf{p}) = 0 \quad (748)$$

を得る. また第 1 式から

$$v_s^\dagger(-\mathbf{p})(p_0\gamma^0 + p_i\gamma^i - m)u_r(\mathbf{p}) = 0$$

が得られ, Hermite 共役をとると

$$u_r^\dagger(\mathbf{p})(p_0\gamma^0 - p_i\gamma^i - m)v_s(-\mathbf{p}) = 0 \quad (749)$$

となる. $\{(式 (748)) - (式 (749))\}/2m$ を作るとスピノルの直交性 (363) の第 2 式

$$u_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(-\mathbf{p}) = 0$$

が導かれる.

■ γ^5 の満たす性質 (364) の証明 γ 行列の表示に依らない性質

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$$

に基づいて次のように証明できる.

まず第 1 式 $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ について, γ^μ は $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ において自分自身と等しい行列 γ^μ とは交換する (すり抜ける) のに対し, それ以外の 3 つの γ 行列とは反交換するから,

$$\gamma^\mu\gamma^5 = \gamma^\mu(i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = -\gamma^5\gamma^\mu, \quad \therefore \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0.$$

次に第 2 式 $(\gamma^5)^2 = 1$ について, 相異なる γ 行列は反交換し, また

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^i)^2 = -1 \quad (i \text{ で和をとらない})$$

となることから,

$$(\gamma^5)^2 = i^2(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = -(\gamma^0)^2(\gamma^1)^2(\gamma^2)^2(\gamma^3)^2 = 1$$

を得る.

最後に第 3 式 $\gamma^{5\dagger} = \gamma^5$ は, γ^0 が Hermite であり γ^i が反 Hermite であることに注意して

$$\gamma^{5\dagger} = -i\gamma^{3\dagger}\gamma^{2\dagger}\gamma^{1\dagger}\gamma^{0\dagger} = i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^5$$

と確かめられる.

■ σ^{ij} の表式 (365) の証明 相異なる γ 行列は反交換するので, $i \neq j$ に対して

$$[\gamma^i, \gamma^j] = \gamma^i\gamma^j - \gamma^j\gamma^i = 2\gamma^i\gamma^j, \quad \therefore \sigma^{ij} = \frac{i}{2}[\gamma^i, \gamma^j] = i\gamma^i\gamma^j$$

である. 他方,

$$-\gamma^0\gamma^5\gamma^k = -i\gamma^0(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)\gamma^k = -i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^k = \begin{cases} i\gamma^2\gamma^3 & (k=1) \\ i\gamma^3\gamma^1 & (k=2) \\ i\gamma^1\gamma^2 & (k=3) \end{cases}$$

であり (第3の等号は $(\gamma^k)^2 = -1$ (k で和をとらない) による), これらを等置して式 (365):

$$\sigma^{ij} = -\gamma^0 \gamma^5 \gamma^k$$

を得る.

■公式 (366)–(370) の導出 これらの公式は“縮約”されている2つの γ 行列に挟まれた行列の個数が1つ少ない公式へと帰着させることで, 逐次的に導くことができる. 実際, まず反交換関係 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ の両辺に $g_{\mu\nu}$ を掛け, μ, ν について和をとると, 最初の公式 (366): $\gamma_\mu \gamma^\mu = 4$ を得る. これを用いて,

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\lambda &= -\gamma_\lambda \gamma^\lambda + \gamma_\lambda \{\gamma^\alpha, \gamma^\lambda\} \\ &= -4\gamma^\alpha + \gamma_\lambda 2g^{\alpha\lambda} \quad (\because \text{式 (366)}) \\ &= -2\gamma^\alpha : (367), \\ \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda &= -\gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma^\beta + \gamma_\lambda \gamma^\alpha 2g^{\beta\lambda} \\ &= 2\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} \quad (\because \text{式 (367)}) \\ &= 4g^{\alpha\beta} : (368), \\ \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\lambda &= -\gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda \gamma^\gamma + \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta 2g^{\gamma\lambda} \\ &= -4g^{\alpha\beta} \gamma^\gamma + 2\gamma^\gamma \gamma^\alpha \gamma^\beta \quad (\because \text{式 (368)}) \\ &= -4g^{\alpha\beta} \gamma^\gamma + 2\gamma^\gamma (-\gamma^\beta \gamma^\alpha + 2g^{\alpha\beta}) \\ &= -2\gamma^\gamma \gamma^\beta \gamma^\alpha : (369), \\ \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta \gamma^\lambda &= -\gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\lambda \gamma^\delta + \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma 2g^{\delta\lambda} \quad (\because \text{式 (369)}) \\ &= 2(\gamma^\delta \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma + \gamma^\gamma \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\delta) : (370) \end{aligned}$$

とできる.

■ γ 行列の積のトレース公式 3.5.1 節に挙げた γ 行列の積のトレースに対する公式 (371), (372), (373) を導こう.

証明の準備として次のことに注意する. まず任意の $n \times n$ 行列 U, V に対して

$$\text{tr}(UV) = \sum_i \sum_j U_{ij} V_{ji} = \sum_j \sum_i V_{ji} U_{ij} = \text{tr}(VU) \quad (750)$$

である. また

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$$

を導入すると, これは

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3), \quad (751)$$

$$(\gamma^5)^2 = 1 \quad (752)$$

を満たす [10, pp.250–251].

実際, γ^5 が γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) と反交換すること (751): $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ は次のように理解できる. すなわち γ 行列 γ^μ は自分自身とは交換し, 反交換関係 (348): $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ により異なる γ 行列 γ^ν ($\nu \neq \mu$) とは反交換する. このことを用いて積 $\gamma^\mu \gamma^5$ における γ^μ を $\gamma^5 \equiv i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ の右側に移動すると $\gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu$ となる.

さらに式 (752): $(\gamma^5)^2 = 1$ について, γ 行列の反交換関係 (348): $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ によれば異なる γ 行列どうしは反交換するので

$$\begin{aligned} (\gamma^5)^2 &= (i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)(i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) \\ &= \dots \\ &= i^2(\gamma^0)^2(\gamma^1)^2(\gamma^2)^2(\gamma^3)^2 \end{aligned}$$

となる. ここで再び反交換関係 (348): $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ を考えると, これは

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^i)^2 = -1 \quad (i = 1, 2, 3)$$

を意味するので式 (752): $(\gamma^5)^2 = 1$ を得る.

以上を踏まえ, 奇数個の γ 行列の積 $\gamma^\alpha\gamma^\beta \dots \gamma^\mu\gamma^\nu$ のトレースがゼロになること (371):

$$\text{tr}(\gamma^\alpha\gamma^\beta \dots \gamma^\mu\gamma^\nu) = 0$$

を証明する.

$$\begin{aligned} \text{tr}(\gamma^\alpha\gamma^\beta \dots \gamma^\mu\gamma^\nu) &= \text{tr}[(\gamma^5)^2\gamma^\alpha\gamma^\beta \dots \gamma^\mu\gamma^\nu] \quad (\because \text{式 (752)}) \\ &= \text{tr}(\gamma^5\gamma^\alpha\gamma^\beta \dots \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) \quad (\because \text{式 (750)}) \end{aligned}$$

の最右辺の積 $\gamma^5\gamma^\alpha\gamma^\beta \dots \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5$ において, 反交換関係 (751) を用いて左端の γ^5 を右端の γ^5 の左隣まで移動すると, $\gamma^\alpha\gamma^\beta \dots \gamma^\mu\gamma^\nu$ は奇数個の γ 行列の積だから

$$\begin{aligned} \gamma^5\gamma^\alpha\gamma^\beta \dots \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5 &= -\gamma^\alpha\gamma^\beta \dots \gamma^\mu\gamma^\nu(\gamma^5)^2 \\ &= -\gamma^\alpha\gamma^\beta \dots \gamma^\mu\gamma^\nu \quad (\because \text{式 (752)}) \end{aligned}$$

となる. よって

$$\text{tr}(\gamma^\alpha\gamma^\beta \dots \gamma^\mu\gamma^\nu) = -\text{tr}(\gamma^\alpha\gamma^\beta \dots \gamma^\mu\gamma^\nu), \quad \therefore \text{tr}(\gamma^\alpha\gamma^\beta \dots \gamma^\mu\gamma^\nu) = 0 : (371)$$

を得る [10, pp.252–253].

2 個の γ 行列の積に対するトレースの公式 (372) の証明に移ろう. γ 行列の反交換関係 (348) は, 正確には 4×4 の単位行列 I を用いて

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2g^{\alpha\beta}I$$

と書ける. よって両辺のトレースをとり

$$\begin{aligned} \text{tr}\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} &= \text{tr}(\gamma^\alpha\gamma^\beta) + \text{tr}(\gamma^\beta\gamma^\alpha) = 2\text{tr}(\gamma^\alpha\gamma^\beta), \quad (\because \text{式 (750)}) \\ \text{tr}I &= 4 \end{aligned}$$

に注意すると公式 (372): $\text{tr}(\gamma^\alpha\gamma^\beta) = 4g^{\alpha\beta}$ を得る.

後の公式 (373) の証明の見通しを良くするため, 以上の証明を次のように書き換えられることに注意する. まず恒等式 (750) により

$$\text{tr}(\gamma^\alpha\gamma^\beta) = \text{tr}(\gamma^\beta\gamma^\alpha)$$

である. ここで右辺において

$$\gamma^\beta\gamma^\alpha = -\gamma^\alpha\gamma^\beta + \{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = -\gamma^\alpha\gamma^\beta + 2g^{\alpha\beta}I \quad (\because \text{式 (348)})$$

と書き換えると再び公式 (372) が導かれる。

同様に 4 個の γ 行列の積に対するトレースの公式 (373) を証明できる。実際、恒等式 (750) により

$$\text{tr}[\gamma^\alpha(\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta)] = \text{tr}[(\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta)\gamma^\alpha]$$

である。ここで右辺の積 $(\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta)\gamma^\alpha$ において、反交換関係 (348) を用いて右端の γ^α を左端に戻すと

$$\begin{aligned} & (\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta)\gamma^\alpha \\ &= -\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta + \{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\}\gamma^\gamma\gamma^\delta - \gamma^\beta\{\gamma^\alpha, \gamma^\gamma\}\gamma^\delta + \gamma^\beta\gamma^\gamma\{\gamma^\delta, \gamma^\alpha\} \\ &= -\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta + 2g^{\alpha\beta}\gamma^\gamma\gamma^\delta - 2g^{\alpha\gamma}\gamma^\beta\gamma^\delta + 2g^{\alpha\delta}\gamma^\beta\gamma^\gamma \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} & \text{tr}(\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta) \\ &= g^{\alpha\beta}\text{tr}(\gamma^\gamma\gamma^\delta) - g^{\alpha\gamma}\text{tr}(\gamma^\beta\gamma^\delta) + g^{\alpha\delta}\text{tr}(\gamma^\beta\gamma^\gamma) \\ &= 4(g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}) : (373) \quad (\because \text{式 (372)} : \text{tr}(\gamma^\alpha\gamma^\beta) = 4g^{\alpha\beta}) \end{aligned}$$

を得る。

■式 (374) の証明

$$\sigma^{\alpha\beta}A_\alpha B_\beta = \frac{i}{2}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]A_\alpha B_\beta = \frac{i}{2}(A\cancel{B} - \cancel{B}A)$$

より、式 (374) は

$$A\cancel{B} = A \cdot B + \frac{1}{2}(A\cancel{B} - \cancel{B}A) = 2A \cdot B - \cancel{B}A$$

を意味する。ところが $\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2g^{\alpha\beta}$ の両辺を $A_\alpha B_\beta$ と縮約すると

$$A\cancel{B} + \cancel{B}A = 2A \cdot B$$

となるから、上式は成り立っている。

■スピノルの直交関係 (376) の導出 式 (376) はユニタリー変換に対して不変だから、特定の表示で証明できれば十分である。そこでスピノル表示

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を利用する。証明は静止系 ($\mathbf{p} = 0$) を経由して行うことができる。

$$u_r(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} u_r^A(\mathbf{p}) \\ u_r^B(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad v_r(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} v_r^A(\mathbf{p}) \\ v_r^B(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

と書くと、静止系 ($\mathbf{p} = 0$) では

$$\begin{aligned} 0 &= (\not{p} - m)u_r = (m\gamma^0 - m)u_r = m \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} u_r = m \begin{pmatrix} -u_r^A + u_r^B \\ u_r^A - u_r^B \end{pmatrix}, \\ 0 &= (\not{p} + m)v_r = (m\gamma^0 + m)v_r = m \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v_r = m \begin{pmatrix} v_r^A + v_r^B \\ v_r^A + v_r^B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるから、 $u_r^A = u_r^B \equiv U_r, v_r^A = -v_r^B \equiv V_r$ とできる。

これを踏まえ、まず第 1 式

$$\bar{u}_r(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = -\bar{v}_r(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \delta_{rs}$$

を導出しよう。正規直交関係 (363) の第 1 式

$$u_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = v_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \frac{E_{\mathbf{p}}}{m}\delta_{rs}$$

は静止系では

$$2U_r^\dagger U_s = 2V_r^\dagger V_s = \delta_{rs}$$

となる。ところが静止系では

$$\bar{u}_r u_s = 2U_r^\dagger U_s, \quad \bar{v}_r v_s = -2V_r^\dagger V_s$$

と計算されるから、

$$\bar{u}_r u_s = \delta_{rs}, \quad \bar{v}_r v_s = -\delta_{rs}$$

でなければならない。ところが左辺の $\bar{\psi}\psi$ という形の積は Lorentz スカラーであることを、我々は既にスピノルの変換則に基づいて証明してある (式 (354) の箇所を参照)。よって任意の座標系で

$$\bar{u}_r(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = -\bar{v}_r(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \delta_{rs}$$

が成立する (右辺の δ_{rs} における r, s は Lorentz 添字ではないことに注意)。

同様に第 2 式

$$\bar{u}_r(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \bar{v}_r(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = 0$$

も示される。実際、静止系において

$$\bar{u}_r v_s = -U_r^\dagger V_s + U_r^\dagger V_s = 0, \quad \bar{v}_r u_s = V_r^\dagger U_s - V_r^\dagger U_s = 0$$

は既に自動的に満たされており、これを再び任意の座標系に移せば良い。

■ u, v -スピノルに対する完全性の条件 (377) の説明・導出 任意のスピノルの \mathbf{p} 成分は、 u, v -スピノルを用いて

$$\Psi(\mathbf{p}) = \sum_r \{ \Psi_r^{(u)}(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) + \Psi_r^{(v)}(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p}) \} \quad (753)$$

と展開できる。実際、スピノルの正規直交関係 (376) により展開係数を

$$\Psi_r^{(u)} = \bar{u}_r \Psi, \quad \Psi_r^{(v)} = -\bar{v}_r \Psi \quad (754)$$

と定めることができる (煩わしい引数 \mathbf{p} を省略した)。この事実は、完全性の条件 (377) として表すことができる。それを示すために、展開係数の表式 (754) をもとの式 (753) に代入して

$$\Psi = \sum_r \{ (\bar{u}_r \Psi)u_r - (\bar{v}_r \Psi)v_r \}$$

と書く。あるいはスピノル添字を明記すると

$$\Psi_\alpha = \sum_r (\bar{u}_{r\beta} \Psi_\beta u_{r\alpha} - \bar{v}_{r\beta} \Psi_\beta v_{r\alpha}) = \left[\sum_r (\bar{u}_{r\beta} u_{r\alpha} - \bar{v}_{r\beta} v_{r\alpha}) \right] \Psi_\beta$$

となるので、最右辺において式 (377):

$$\sum_r (u_{r\alpha} \bar{u}_{r\beta} - v_{r\alpha} \bar{v}_{r\beta}) = \delta_{\alpha\beta}$$

が成り立つ。

■エネルギー射影演算子の表式 (381) の導出 完全性の関係 (377) より式 (381):

$$\begin{aligned}\Lambda_{\alpha\beta}^{\pm}(\mathbf{p}) &= \Lambda_{\alpha\gamma}^{\pm}(\mathbf{p})\delta_{\gamma\beta} \\ &= \Lambda_{\alpha\gamma}^{\pm}(\mathbf{p}) \sum_{r=1}^2 [u_{r\gamma}(\mathbf{p})\bar{u}_{r\beta}(\mathbf{p}) - v_{r\gamma}(\mathbf{p})\bar{v}_{r\beta}(\mathbf{p})] \\ &= \begin{cases} \sum_r u_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{u}_{r\beta}(\mathbf{p}) & (\text{複号の+に対して}) \\ -\sum_r v_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{v}_{r\beta}(\mathbf{p}) & (\text{複号の-に対して}) \end{cases}\end{aligned}$$

を得る。最後の等号は射影演算子の性質 (379), (380) による。

■式 (382) の導出 $\sigma_{\mathbf{p}}^2 = 1$ を証明しさえすれば十分である。この目的のためには、 σ^{ij} の式 (365) が便利である。これを用いると

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathbf{p}} &= \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{p}|} = \frac{p^k}{|\mathbf{p}|} (-\gamma^0 \gamma^5 \gamma^k), \\ \therefore \sigma_{\mathbf{p}}^2 &= \frac{p^k p^l}{|\mathbf{p}|^2} (\gamma^0 \gamma^5 \gamma^k) (\gamma^0 \gamma^5 \gamma^l) = -\frac{p^k p^l}{|\mathbf{p}|^2} (\gamma^0)^2 (\gamma^5)^2 \gamma^k \gamma^l = -\frac{p^k p^l}{|\mathbf{p}|^2} \gamma^k \gamma^l\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}p^k \gamma^k &= \not{p} - p^0 \gamma^0, \\ \therefore (p^k \gamma^k)^2 &= \not{p}^2 - p^0 \{\not{p}, \gamma^0\} + (p^0)^2 (\gamma^0)^2 \\ &= p^2 + (p^0)^2 - p^0 p_{\mu} \cdot 2g^{0\mu} \quad (\because \text{式 (375)} : \not{p}^2 = p^2) \\ &= p^2 - (p^0)^2 \\ &= -|\mathbf{p}|^2\end{aligned}$$

なので、 $\sigma_{\mathbf{p}}^2 = 1$ を得る。

■式 (383) の導出 ここでは $\sigma_{\mathbf{p}}$ の表式として σ^{ij} の式 (365) を利用する代わりに、

$$\sigma_{\mathbf{p}} = \frac{p^i}{|\mathbf{p}|} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \sigma^{jk} \right) = \frac{ip^i}{4|\mathbf{p}|} \varepsilon_{ijk} [\gamma^j, \gamma^k] = \frac{ip^i}{2|\mathbf{p}|} \varepsilon_{ijk} \gamma^j \gamma^k$$

と書こう。すると

$$[\Lambda^+(\mathbf{p}), \Pi^{\pm}(\mathbf{p})] = \frac{\pm 1}{4m} [\not{p}, \sigma_{\mathbf{p}}], \quad [\Lambda^-(\mathbf{p}), \Pi^{\pm}(\mathbf{p})] = \frac{\mp 1}{4m} [\not{p}, \sigma_{\mathbf{p}}]$$

において

$$[\not{p}, \sigma_{\mathbf{p}}] = \frac{ip^i}{2|\mathbf{p}|} \varepsilon_{ijk} [\not{p}, \gamma^j \gamma^k]$$

であり、右辺の

$$[\not{p}, \gamma^j \gamma^k] = p_{\mu} (\{\gamma^{\mu}, \gamma^j\} \gamma^k - \gamma^j \{\gamma^{\mu}, \gamma^k\}) = 2p_{\mu} (g^{\mu j} \gamma^k - \gamma^j g^{\mu k}) = 2(p^j \gamma^k - p^k \gamma^j)$$

は ε_{ijk} と同様、 j, k について反対称なので

$$[\not{p}, \sigma_{\mathbf{p}}] = 2i \frac{p^i}{|\mathbf{p}|} \varepsilon_{ijk} p^j \gamma^k$$

となる。添字 i, j について $p^i p^j$ は対称であり, ε_{ijk} は反対称なので, これはゼロになる。よって式 (383):

$$[\Lambda^\pm(\mathbf{p}), \Pi^\pm(\mathbf{p})] = 0 \quad (\text{複号任意})$$

が成立する。

■質量ゼロの極限におけるヘリシティ演算子の表式 (384) の理由 $m = 0$ の極限では $p_0 = |\mathbf{p}|$ であり, $w_r(\mathbf{p})$ を $u_r(\mathbf{p}), v_r(\mathbf{p})$ のいずれかとすると式 (361):

$$(\not{p} - m)u_r(\mathbf{p}) = 0, \quad (\not{p} + m)v_r(\mathbf{p}) = 0$$

は次のようになる。

$$\gamma^0 |\mathbf{p}| w_r(\mathbf{p}) = -\gamma^k p_k w_r(\mathbf{p}) = \gamma^k p^k w_r(\mathbf{p}).$$

左から $\gamma^5 \gamma^0$ をかけて式 (365): $\sigma^{ij} = -\gamma^0 \gamma^5 \gamma^k$ を用いると,

$$\gamma^5 w_r(\mathbf{p}) = \sigma_{\mathbf{p}} w_r(\mathbf{p})$$

を得る。よって $m = 0$ の極限ではヘリシティ射影演算子 $\Pi^\pm(\mathbf{p}) = (1 \pm \sigma_{\mathbf{p}})/2$ の役割を, 演算子 (384): $(1 \pm \gamma_5)/2$ が果たす。

■右手型と左手型の場に対する運動方程式 (385) の導出 Dirac 方程式に射影演算子 P_L, P_R を作用させる。式 (364) $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$ により $P_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5)$ に対して $P_{L,R} \gamma^\mu = \gamma^\mu P_{R,L}$ なので

$$0 = P_{L,R}(i\not{\partial} - m)\psi = (i\not{\partial} P_{R,L} - m P_{L,R})\psi = i\not{\partial} \psi_{R,L} - m \psi_{L,R}$$

となるから, 運動方程式 (385) を得る。

■カイラル位相変換と軸性ベクトルカレント (補足) γ_5 は Hermite なので (式 (364) 参照), カイラル位相変換

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp(i\alpha\gamma_5)\psi(x), \quad \psi^\dagger(x) \rightarrow \psi'^\dagger(x) = \psi^\dagger(x) \exp(-i\alpha\gamma_5)$$

はユニタリー変換である。Lagrangian 密度 $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$ における第 1 項は

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi &\rightarrow i(\psi^\dagger e^{-i\alpha\gamma_5})\gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu (e^{i\alpha\gamma_5} \psi) \\ &= i\psi^\dagger (e^{-i\alpha\gamma_5} \gamma^0 \gamma^\mu e^{i\alpha\gamma_5}) \partial_\mu \psi \\ &= i\psi^\dagger (-\gamma^0 e^{-i\alpha\gamma_5} + \{e^{-i\alpha\gamma_5}, \gamma^0\})(-e^{i\alpha\gamma_5} \gamma^\mu + \{e^{i\alpha\gamma_5}, \gamma^\mu\}) \partial_\mu \psi \\ &= i\psi^\dagger \gamma^0 (e^{-i\alpha\gamma_5} e^{i\alpha\gamma_5}) \gamma^\mu \partial_\mu \psi \\ &= i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi \end{aligned}$$

と変換し, 不変に留まる。ただし第 3 の等号では式 (364): $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ を用いた。同様に考えると第 2 項は

$$m\bar{\psi}\psi \rightarrow m(\psi^\dagger e^{-i\alpha\gamma_5})\gamma^0 (e^{i\alpha\gamma_5} \psi) = -m\bar{\psi}\psi$$

と変換し, 符号を変える。以上より \mathcal{L} は質量ゼロの極限においてのみ, カイラル位相変換に関して不変となる。

これに付随する, 保存されるカレントを調べよう。無限小のカイラル位相変換による場の変化は

$$\delta\psi = i\alpha\gamma_5\psi, \quad \delta\bar{\psi} = \psi^\dagger(-i\alpha\gamma_5)\gamma^0 = i\alpha\gamma_5\bar{\psi}$$

なので、保存するカレントは

$$f^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \delta \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} \delta \bar{\psi} = (i\bar{\psi}\gamma^\mu)(i\alpha\gamma_5\psi) = -\alpha J_A^\mu,$$

$$J_A^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$$

と計算される。この J_A^μ が軸性ベクトルであることについては、式 (354) を参照。

9.5.3 自由 Dirac 場の正準量子化 (補足)

■正準反交換関係 (388) と展開係数の反交換関係 (389)

展開係数を Dirac 場で表す 3.5.3 節で述べたように、Dirac 場に対する正準反交換関係 (388) が展開係数に対する反交換関係 (389) になることを確かめる。準備として Dirac 場を用いて展開係数を表すと

$$c_r(\mathbf{p}) = \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}\right)^{1/2} \int d^3x u_r^\dagger(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \psi(x), \quad (755)$$

$$c_r^\dagger(\mathbf{p}) = \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}\right)^{1/2} \int d^3x \psi^\dagger(x) u_r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}, \quad (756)$$

$$d_r(\mathbf{p}) = \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}\right)^{1/2} \int d^3x \psi^\dagger(x) v_r(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}, \quad (757)$$

$$d_r^\dagger(\mathbf{p}) = \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}\right)^{1/2} \int d^3x v_r^\dagger(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} \psi(x) \quad (758)$$

となる [26, p.44]. 実際、例えば $c_r(\mathbf{p})$ に対する式 (755) は次のように確かめられる。あらかじめ計算の方針を以下に示しておく。

- Dirac 場の Fourier 展開 (386), (387) を代入する。
 - 運動量ベクトル \mathbf{p}' , スピン状態の指数 s についての和が現れる。
 - 位置 \mathbf{x} 依存性が指数関数 $e^{\pm i(\mathbf{p} \pm \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}}$ になる (複号任意)。
- 位置 \mathbf{x} に関する積分を実行する。
 - $\delta_{\mathbf{p}, \pm \mathbf{p}'}$ が現れる。
- \mathbf{p}' についての和をとる。
 - スピノル $u_r, u_r^\dagger, v_r, v_r^\dagger$ の引数が $\pm \mathbf{p}$ となる。
- スピノル u_r, v_r の正規直交関係 (363) を用いる。
 - δ_{rs} が現れる。
- s についての和をとる。

さて、以上の流れに沿って計算を進めると、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}\right)^{1/2} \int d^3x u_r^\dagger(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \psi(x) \\ &= \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}\right)^{1/2} \int d^3x u_r^\dagger(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \sum_{\mathbf{p}', s} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}}\right)^{1/2} \left\{ c_s(\mathbf{p}') u_s(\mathbf{p}') e^{-ip' \cdot x} + d_s^\dagger(\mathbf{p}') v_s(\mathbf{p}') e^{ip' \cdot x} \right\} \\ & (\because \text{式 (386)}) \\ &= u_r^\dagger(\mathbf{p}) \sum_{\mathbf{p}', s} \frac{m}{(E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}'})^{1/2}} \left\{ c_s(\mathbf{p}') u_s(\mathbf{p}') e^{i(E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}'})t} \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} + d_s^\dagger(\mathbf{p}') v_s(\mathbf{p}') e^{i(E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{p}'})t} \delta_{\mathbf{p}, -\mathbf{p}'} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\because \text{式 (740)}, t \equiv x^0) \\
& = u_r^\dagger(\mathbf{p}) \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} \sum_s \{c_s(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) + d_s^\dagger(-\mathbf{p})v_s(-\mathbf{p})e^{2iE_{\mathbf{p}}t}\} \\
& = \sum_s c_s(\mathbf{p})\delta_{rs} \quad (\because \text{式 (363)}) \\
& = c_r(\mathbf{p})
\end{aligned}$$

となって、式 (755) が導かれる。同様に式 (756), (757), (758) が成り立つことを確かめられる。\$c_r^\dagger(\mathbf{p})\$ の式 (756), \$d_r^\dagger(\mathbf{p})\$ の式 (758) はそれぞれ \$c_r(\mathbf{p})\$ の式 (755), \$d_r(\mathbf{p})\$ の式 (757) の両辺の Hermite 共役をとったものとなっている。

ところで展開係数の表式 (755), (756), (757), (758) は見掛け上、時刻 \$x^0\$ に依る。そこでこれらが実際には時刻 \$x^0\$ に依らないことを確かめておこう。\$c_r(\mathbf{p})\$ の式 (755) の \$x^0\$ による微分

$$\partial_0 \left\{ \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \int d^3x \bar{u}_r(\mathbf{p}) \gamma^0 e^{ip \cdot x} \psi(x) \right\} = \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \int d^3x \bar{u}_r(\mathbf{p}) \gamma^0 e^{ip \cdot x} (iE_{\mathbf{p}} + \partial_0) \psi(x)$$

において、Dirac 方程式

$$\begin{aligned}
0 &= (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = (i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^j \partial_j - m)\psi \\
\Leftrightarrow \gamma^0 \partial_0 \psi &= -(\gamma^j \partial_j + im)\psi
\end{aligned}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
& \int d^3x \bar{u}_r(\mathbf{p}) \gamma^0 e^{ip \cdot x} (iE_{\mathbf{p}} + \partial_0) \psi(x) \\
&= \int d^3x \bar{u}_r(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} (i\gamma^0 E_{\mathbf{p}} - \gamma^j \partial_j - im) \psi(x) \\
&= \int d^3x \bar{u}_r(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} i(\gamma^0 E_{\mathbf{p}} + \gamma^j p_j - m) \psi(x) \quad (\text{部分積分した}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる。ただし最後の等号では式 (361) により

$$\bar{u}_r(\mathbf{p})(\not{p} - m) = 0$$

となることに注意した。よって \$c_r(\mathbf{p})\$ の式 (755) は時刻 \$x^0\$ に依らない。同様に式 (756), (757), (758) が時刻 \$x^0\$ に依らないことを確かめられる。

展開係数の反交換関係 (389) の導出 さて、展開係数を Dirac 場で表した式 (755), (756), (757), (758) を用いて、Dirac 場に対する正準反交換関係 (388) から展開係数に対する反交換関係 (389) を導こう。式 (755), (756) は右辺が時刻 \$x^0\$ に依らないから、これを用いて得られる

$$\{c_r(\mathbf{p}), c_s^\dagger(\mathbf{p}')\} = \frac{m}{V(E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'})^{1/2}} \int d^3x d^3x' e^{i(p \cdot x - p' \cdot x')} u_r^\dagger(\mathbf{p}) \{\psi(x), \psi^\dagger(x')\} u_s(\mathbf{p}')$$

の右辺は時刻 x^0, x'^0 に依らない。そこでこれを同時刻 $x^0 = x'^0 \equiv t$ で評価すると、同時刻反交換関係 (388) により $\{\psi(x), \psi^\dagger(x')\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ なので

$$\begin{aligned} & \{c_r(\mathbf{p}), c_s^\dagger(\mathbf{p}')\} \\ &= \frac{m}{V(E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'})^{1/2}} e^{i(E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}'})t} u_r^\dagger(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}') \int d^3x e^{-i(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} \\ &= \frac{m}{(E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'})^{1/2}} e^{i(E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}'})t} u_r^\dagger(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}') \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \end{aligned}$$

となる。最右辺には $\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ があるため、その前の因子を $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$ で評価すると

$$\begin{aligned} \{c_r(\mathbf{p}), c_s^\dagger(\mathbf{p}')\} &= \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} u_r^\dagger(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \\ &= \delta_{rs} \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \quad (\because \text{式 (363)}) \end{aligned}$$

を得る。同様に式 (389) の残りの反交換関係を導ける。

■Dirac 場のエネルギー (390) の導出 場の Hamiltonian $H = \int d^3x (\pi_r \dot{\phi}_r - \mathcal{L})$ は Dirac 場に対して

$$H = \int d^3x \bar{\psi} (-i\gamma^j \partial_j + m) \psi$$

となる。場 ψ は Dirac 方程式を満たすため、

$$(-i\gamma^j \partial_j + m) \psi = i\gamma^0 \partial_0 \psi$$

と書き換えられることに注意し、正規順序化を施すと

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x N [\bar{\psi} (i\gamma^0 \partial_0) \psi] \\ &= \int \frac{d^3x}{V} \sum_{r,s} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} m \sqrt{\frac{E_{\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{p}}}} N [\{d_r(\mathbf{p}) v_r^\dagger(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + c_r^\dagger(\mathbf{p}) u_r^\dagger(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}\} \{c_s(\mathbf{q}) u_s(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} - d_s^\dagger(\mathbf{q}) v_s(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}\}] \\ &= \sum_{r,s} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} m \sqrt{\frac{E_{\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{p}}}} N [d_r(\mathbf{p}) c_s(\mathbf{q}) v_r^\dagger(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{q}) \delta_{\mathbf{p}, -\mathbf{q}} e^{-i(E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}})t} \\ &\quad - d_r(\mathbf{p}) d_s^\dagger(\mathbf{q}) v_r^\dagger(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{q}) \delta_{\mathbf{p}\mathbf{q}} e^{-i(E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{q}})t} \\ &\quad + c_r(\mathbf{p}) c_s(\mathbf{q}) u_r^\dagger(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{q}) \delta_{\mathbf{p}\mathbf{q}} e^{i(E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{q}})t} \\ &\quad - c_r^\dagger(\mathbf{p}) d_s^\dagger(\mathbf{q}) u_r^\dagger(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{q}) \delta_{\mathbf{p}, -\mathbf{q}} e^{i(E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}})t}] \\ &= \sum_{r,s} \sum_{\mathbf{p}} m N [-d_r(\mathbf{p}) d_s^\dagger(\mathbf{p}) + c_r^\dagger(\mathbf{p}) c_s(\mathbf{p})] \frac{E_{\mathbf{p}}}{m} \delta_{rs} \\ &= \sum_{r,\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}} [N_r(\mathbf{p}) + \bar{N}_r(\mathbf{p})] : (390) \end{aligned}$$

が得られる。

■ P の式 (391) の導出

$$\begin{aligned}
 P &= -i\hbar \int d^3x N[\psi^\dagger \nabla \psi] \quad (\text{エネルギー} \cdot \text{運動量の一般式 (44) による}) \\
 &= -i \int d^3x N \left[\sum_{r,s} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \frac{m}{V\sqrt{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} (d_r(\mathbf{p})v_r^\dagger(\mathbf{p})e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + c_r^\dagger(\mathbf{p})u_r^\dagger(\mathbf{p})e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \right. \\
 &\quad \left. \times i\mathbf{q}(c_s(\mathbf{q})u_s(\mathbf{q})e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} - d_s^\dagger(\mathbf{q})v_s(\mathbf{q})e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}) \right] \\
 &= N \left[\sum_{r,s} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \frac{m}{\sqrt{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \mathbf{q} \right. \\
 &\quad \times (d_r(\mathbf{p})c_s(\mathbf{q})v_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{q})\delta_{\mathbf{p},-\mathbf{q}}e^{-i(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} \\
 &\quad - d_r(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{q})v_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{q})\delta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}e^{-i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \\
 &\quad + c_r^\dagger(\mathbf{p})c_s(\mathbf{q})u_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{q})\delta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \\
 &\quad \left. - c_r^\dagger(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{q})u_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{q})\delta_{\mathbf{p},-\mathbf{q}}e^{i(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t}) \right] \\
 &= N \left[\sum_{r,s} \sum_{\mathbf{p}} \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} \mathbf{p} (-d_r(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{p}) + c_r^\dagger(\mathbf{p})c_s(\mathbf{p})) \frac{E_{\mathbf{p}}}{m} \delta_{rs} \right] \\
 &= \sum_{r,\mathbf{p}} \mathbf{p} (N_r(\mathbf{p}) + \bar{N}_r(\mathbf{p})) : (391).
 \end{aligned}$$

■ Q の式 (392) の導出

$$\begin{aligned}
 Q &= q \int d^3x N[\psi^\dagger \psi] : (359) \\
 &= q \int d^3x N \left[\sum_{r,s} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \frac{m}{V\sqrt{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} (d_r(\mathbf{p})v_r^\dagger(\mathbf{p})e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + c_r^\dagger(\mathbf{p})u_r^\dagger(\mathbf{p})e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \right. \\
 &\quad \left. \times (c_s(\mathbf{q})u_s(\mathbf{q})e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} + d_s^\dagger(\mathbf{q})v_s(\mathbf{q})e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}) \right] \\
 &= qN \left[\sum_{r,s} \sum_{\mathbf{p}} \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} (d_r(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{p}) + c_r^\dagger(\mathbf{p})c_s(\mathbf{p})) \frac{E_{\mathbf{p}}}{m} \delta_{rs} \right] \\
 &= q \sum_{r,\mathbf{p}} (N_r(\mathbf{p}) - \bar{N}_r(\mathbf{p})) : (392).
 \end{aligned}$$

■ $S_{\mathbf{p}}$ の固有方程式 (394) の導出 (Dirac 場がスピン 1/2 の粒子を記述することの証明)

$$\begin{aligned}
 S_{\mathbf{p}} &\equiv \frac{1}{2} \int d^3x N[\psi^\dagger \sigma_{\mathbf{p}} \psi] : (393) \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3x N \left[\sum_{r,s} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \frac{m}{V\sqrt{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} (-1)^{r+1} (d_r(\mathbf{p})v_r^\dagger(\mathbf{p})e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + c_r^\dagger(\mathbf{p})u_r^\dagger(\mathbf{p})e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \right. \\
 &\quad \left. \times (c_s(\mathbf{q})u_s(\mathbf{q})e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} - d_s^\dagger(\mathbf{q})v_s(\mathbf{q})e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}) \right] \\
 &= \frac{\hbar}{2} \sum_{r,\mathbf{p}} (-1)^{r+1} (N_r(\mathbf{p}) + \bar{N}_r(\mathbf{p})) \quad \rightarrow \quad S_{\mathbf{p}} \text{の固有方程式 (394)}.
 \end{aligned}$$

■Majorana 表示での場の展開 (395) について 証明抜きに述べると, γ 行列の全成分が純虚数となるような表示をとることができる. Majorana 表示の γ 行列 γ_M^μ はいずれも成分が純虚数である. このとき演算子 $(i\gamma_M^\mu \partial_\mu - m)$ は実だから, Dirac 方程式の正エネルギー解を $u_{Mr}(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}/\sqrt{V}$ とすると, その複素共役 $u_{Mr}^*(\mathbf{p})e^{ip \cdot x}/\sqrt{V}$ が負エネルギー解となる.

■場の演算子に対する反交換関係 (396) の導出 式 (396) はスピノル添字を明記すると,

$$\{\psi_\alpha^\pm(x), \bar{\psi}_\beta^\mp(y)\} = i(i\cancel{\partial} + m)_{\alpha\beta} \Delta^\pm(x-y)$$

の意味である. 複号の上側について, 左辺は $\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$ とすると, 場の展開係数の反交換関係 (389) より

$$\{\psi_\alpha^\pm(x), \bar{\psi}_\beta^\mp(y)\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_r \int d^3p \frac{m}{E_p} (u_r(\mathbf{p})\bar{u}_r(\mathbf{p}))_{\alpha\beta} e^{-ip \cdot (x-y)}$$

と計算される. 一方, 右辺は式 (292): $\Delta^+(x) \equiv -\frac{i}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_k} e^{-ik \cdot x}$ より

$$i(i\cancel{\partial} + m)_{\alpha\beta} \Delta^+(x-y) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{E_p} (\cancel{p} + m)_{\alpha\beta} e^{-ip \cdot (x-y)}$$

となる. これらはエネルギー射影演算子 (378) の満たす式 (381):

$$m \sum_r (u_r(\mathbf{p})\bar{u}_r(\mathbf{p}))_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\cancel{p} + m)_{\alpha\beta}$$

により一致する. 複号の下側についても同様である.

9.5.4 スピン統計定理 (補足)

■交換関係で量子化された Dirac 場のエネルギー (397) の導出 Dirac 場のエネルギー (390) の導出過程における式

$$H = \sum_{r, \mathbf{p}} E_p N[-d_r(\mathbf{p})d_r^\dagger(\mathbf{p}) + c_r^\dagger(\mathbf{p})c_r(\mathbf{p})]$$

を正規順序化する際, 生成・消滅演算子 $d_r^\dagger(\mathbf{p}), d_r(\mathbf{p})$ を交換することになる. よって式 (397):

$$H = \sum_{r, \mathbf{p}} E_p [N_r(\mathbf{p}) - \bar{N}_r(\mathbf{p})]$$

を得る.

■反交換関係で量子化された実 Klein-Gordon 場に対して, 微視的因果律 (398) が破られることの確認 実 Klein-Gordon 場の観測量 (式 (284),(286)) は $\mathbf{X} \equiv (\phi, \partial_\mu \phi)$ の 2 次形式

$$A = a_{ij} X_i X_j, \quad B = b_{ij} X_i X_j$$

の形をしており, 公式

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B, \quad [AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$$

を利用すると, 交換子

$$[A(x), B(y)] = a_{ij} b_{kl} [(X_i X_j)_x, (X_k X_l)_y]$$

を

$$\begin{aligned} [X_i(x), X_j(y)] & \quad \text{i.e.} \quad [\phi(x), \phi(y)], \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} [\phi(x), \phi(y)], \quad \frac{\partial}{\partial y^\mu} [\phi(x), \phi(y)], \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\mu} [\phi(x), \phi(y)], \\ \{X_i(x), X_j(y)\} & \quad \text{i.e.} \quad \{\phi(x), \phi(y)\}, \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} \{\phi(x), \phi(y)\}, \quad \frac{\partial}{\partial y^\mu} \{\phi(x), \phi(y)\}, \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \{\phi(x), \phi(y)\} \end{aligned}$$

の項へと分解することができる。よって微視的因果律 (398) が成り立つ条件は、

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= 0 & \text{for } (x-y)^2 < 0 \\ \{\phi(x), \phi(y)\} &= 0 & \text{for } (x-y)^2 < 0 \end{aligned}$$

のいずれかが成り立つことである。

次に Klein-Gordon 場を Fermi-Dirac 統計に従うように反交換関係 $\{a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')\} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$, etc. で量子化すると、上のどちらの条件も成立しないことを示す。まず 1 つ目の条件 $[\phi(x), \phi(y)] = 0$ について、

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= [\phi^+(x), \phi^-(y)] + [\phi^-(x), \phi^+(y)] \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{2V(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \left\{ [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] e^{-i(k \cdot x - k' \cdot y)} + [a^\dagger(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] e^{-i(k \cdot y - k' \cdot x)} \right\} \end{aligned}$$

における最右辺の交換子は

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] &= \{a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')\} - 2a^\dagger(\mathbf{k}')a(\mathbf{k}) \\ &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - 2a^\dagger(\mathbf{k}')a(\mathbf{k}), \\ [a^\dagger(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] &= \{a(\mathbf{k}'), a^\dagger(\mathbf{k})\} - 2a(\mathbf{k}')a^\dagger(\mathbf{k}) \\ &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - 2a(\mathbf{k}')a^\dagger(\mathbf{k}) \end{aligned}$$

に修正されるため、交換子 $[\phi(x), \phi(y)]$ には付加的な項が現れる。

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= i\Delta(x-y) - \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{V(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \left\{ a^\dagger(\mathbf{k}')a(\mathbf{k}) e^{-i(k \cdot y - k' \cdot x)} + a(\mathbf{k}')a^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i(k \cdot y - k' \cdot x)} \right\} \\ &= i\Delta(x-y) - \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{V(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \{a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')\} \left\{ e^{i(k \cdot x - k' \cdot y)} + e^{-i(k \cdot x - k' \cdot y)} \right\} \\ & \quad (\{\dots\} \text{内の第2項で } \mathbf{k}, \mathbf{k}' \text{ を入れ替えた)} \\ &= i\Delta(x-y) - \frac{2}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \cos\{k \cdot (x-y)\} \\ &\rightarrow i\Delta(x-y) - 2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} \cos\{k \cdot (x-y)\}. \quad (V \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

ここで時空点 x, y が空間的に隔たるとき $((x-y)^2 < 0)$, x と y が同時刻となる座標系をとることができる。既に見たように、そのような座標系では $i\Delta(x-y)$ はゼロになる。ところが付加的な項は \mathbf{k} の偶関数の積分となっており、ゼロにはならない。そしてこの項も Δ 関数と同様、相対論的な不変性が明白な形に書き換えられる。

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} \cos\{k \cdot (x-y)\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k \delta(k^2 - m^2) e^{-ik \cdot (x-y)}.$$

よって任意の座標系で $[\phi(x), \phi(y)] \neq 0$ である。

2 つ目の条件 $\{\phi(x), \phi(y)\} = 0$ に移ろう。交換関係 (289): $[\phi^+(x), \phi^-(y)] = i\Delta^+(x-y)$ は反交換関係

$$\{\phi^+(x), \phi^-(y)\} = i\Delta^+(x-y)$$

に置き換わり,

$$\{\phi(x), \phi(y)\} = \{\phi^+(x), \phi^-(y)\} + \{\phi^-(x), \phi^+(y)\} = i(\Delta^+(x-y) + \Delta^+(y-x)) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\omega_k} \cos\{k \cdot (x-y)\}$$

となるので, 同様に空間的に隔たる時空点 x, y に対して $\{\phi(x), \phi(y)\} \neq 0$ である。

9.5.5 フェルミオン伝播関数 (補足)

■フェルミオン伝播関数の式 (399) の導出

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(x') \} | 0 \rangle \\ &= \begin{cases} \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(x') | 0 \rangle = \langle 0 | \psi^+(x) \bar{\psi}^-(x') | 0 \rangle = \langle 0 | \{ \psi^+(x), \bar{\psi}^-(x') \} | 0 \rangle = iS^+(x-x') & (t > t' \text{ のとき}) \\ - \langle 0 | \bar{\psi}(x') \psi(x) | 0 \rangle = - \langle 0 | \bar{\psi}^+(x') \psi^-(x) | 0 \rangle = - \langle 0 | \{ \psi^-(x), \bar{\psi}^+(x') \} | 0 \rangle = -iS^-(x-x') & (t < t' \text{ のとき}) \end{cases} \\ &= \pm iS^\pm(x-x') \quad (t \geq t' \text{ のとき}) \\ &= iS_F(x-x') : (399). \end{aligned}$$

9.6 量子電磁力学 (QED) の Lagrangian 密度 (補足)

ゲージ不変性 (補足)

3.6 節で述べた QED の Lagrangian 密度 (401) のゲージ不変性を確かめる。まず, 電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ は, 従って Lagrangian 密度 (401) における自由電磁場の項 $-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ はゲージ変換 $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$ に対して不変である。実際ある電磁ポテンシャル A^μ から作られる電磁場テンソルを $F_{\mu\nu}$, f を時空座標の任意の関数として電磁ポテンシャル $A'^\mu \equiv A^\mu + \partial^\mu f$ から作られる電磁場テンソルを $F'_{\mu\nu}$ と書くと,

$$F'_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu f) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu f) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$$

である。そこで自由 Dirac 場の項 $\mathcal{L}_0 \equiv \bar{\psi}(i\partial - m)\psi$ と相互作用項 $\mathcal{L}_1 \equiv e\bar{\psi}A\psi$ に対して $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ の不変性を示せば十分である。ゲージ変換

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f, \quad \psi \rightarrow \psi e^{ief}, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-ief} \quad (759)$$

に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &\rightarrow (\bar{\psi} e^{-ief})(i\partial - m)(\psi e^{ief}) = \mathcal{L}_0 + \bar{\psi} i(\partial f)\psi = \mathcal{L}_0 - e\bar{\psi}(\partial f)\psi, \\ \mathcal{L}_1 &\rightarrow e(\bar{\psi} e^{-ief})(A + \partial f)(\psi e^{ief}) = \mathcal{L}_1 + e\bar{\psi}(\partial f)\psi \end{aligned}$$

だから $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ は不変である。

■ゲージ不変性から保存する電磁カレント (360) が導かれることについて $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1$, ゲージ変換の表式より

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \delta A_\mu = -s^\mu (\partial_\mu f), \quad \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \delta \psi \right) = \partial_\mu [(\bar{\psi} i\gamma^\mu)(ief\psi)] = \partial_\mu (s^\mu f), \quad \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \delta \bar{\psi} \right) = 0$$

であり, ここからカレントに対する連続の式が導かれる。

$$0 = \delta \mathcal{L} = -s^\mu (\partial_\mu f) + \partial_\mu (s^\mu f) + 0 = f \partial_\mu s^\mu, \quad \therefore \partial_\mu s^\mu = 0.$$

QED の Hamiltonian 密度 (補足)

3.6 節に記した QED の Hamiltonian 密度の式 (403) を導く. 以下, ラテン文字 k, l, \dots は空間成分 1, 2, 3 を動くものとする. Lagrangian 密度の式 (401), 共役な場の式 (402) より Hamiltonian 密度は

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \sum \pi_\psi \dot{\psi} + \pi^\mu A_\mu - \mathcal{L} \\ &= \sum (i\psi^\dagger) \dot{\psi} + \pi^k \dot{A}_k - \sum \bar{\psi} (i\partial\!\!\!/ - m)\psi - e \sum \bar{\psi} \mathbf{A} \psi + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\end{aligned}$$

となる. 最右辺に現れる \dot{A}_μ を π^μ で表すと

$$\begin{aligned}\pi^k \dot{A}_k &= \pi^k (-\pi_k + \partial_k A_0), & (\because \text{式 (402)}) \\ \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} F_{0k} F^{0k} + \frac{1}{4} F_{kl} F^{kl} & (\because F_{k0} F^{k0} = F_{0k} F^{0k}) \\ &= \frac{1}{2} \pi_k \pi^k + \frac{1}{4} F_{kl} F^{kl} & (\because \text{式 (402)})\end{aligned}$$

なので, Hamiltonian 密度の式 (403):

$$\mathcal{H} = \sum (i\psi^\dagger) \dot{\psi} - \sum \bar{\psi} (i\partial\!\!\!/ - m)\psi - e \sum \bar{\psi} \mathbf{A} \psi - \frac{1}{2} \pi_k \pi^k + \pi^k \partial_k A_0 + \frac{1}{4} F_{kl} F^{kl}$$

を得る [20, p.225].

9.6.1 Dirac 方程式の非相対論的極限と電子の磁気モーメント (補足)

■スピノル表示で Dirac 方程式が式 (407) になることの確認 スピノル表示の Dirac 場と γ 行列

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

に対して Dirac 方程式 $(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = 0$ を具体的に書き下すと,

$$\begin{aligned}i\partial\!\!\!/ - m &= i \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_0 + \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \partial_i \right\} - m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & i(\partial_0 - \sigma_i \partial_i) \\ i(\partial_0 + \sigma_i \partial_i) & -m \end{pmatrix}, \\ \therefore \begin{cases} -m\xi + i(\partial_0 - \sigma_i \partial_i)\eta = 0 \\ i(\partial_0 + \sigma_i \partial_i)\xi - m\eta = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

となる. これは式 (407) に他ならない.

■Pauli 方程式 (410) の導出 $\psi \rightarrow \psi e^{-imt}$ と改めると, 場の方程式 (409) は

$$(i\partial_t - e\Phi)\varphi = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})\chi, \quad (760)$$

$$(i\partial_t - e\Phi + 2m)\chi = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})\varphi \quad (761)$$

となる. 第 1 近似として上式 (761) 左辺の括弧内で $2m$ だけを残すと,

$$\chi = \frac{1}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})\varphi$$

を得る. これは非相対論的極限 (粒子の力学的運動量 $|\mathbf{p} - e\mathbf{A}| \ll m$) で $|\chi| \ll |\varphi|$ となることと整合している. これを式 (760) に代入すると, φ だけを含む方程式

$$(i\partial_t - e\Phi)\varphi = \frac{1}{2m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}))^2 \varphi \quad (762)$$

が得られる。ここで \mathbf{a}, \mathbf{b} を任意の 3 次元ベクトルとして (演算子であっても良い), Pauli 行列の公式

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

が成り立つことを思い出そう [18, p.223]. これを $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A} \equiv \hat{\mathbf{f}}$ として適用すると

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{f}})^2 = \hat{\mathbf{f}}^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{f}} \times \hat{\mathbf{f}})$$

であり,

$$(\hat{\mathbf{f}} \times \hat{\mathbf{f}})\varphi = -e(\hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{p}})\varphi$$

の右辺括弧内における $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$ は \mathbf{A} と φ の両方に作用するため,

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{f}} \times \hat{\mathbf{f}})\varphi &= -e\{(\hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{A})\varphi + (\hat{\mathbf{p}}\varphi) \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\hat{\mathbf{p}}\varphi)\} \\ &= ie\mathbf{B}\varphi \quad (\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}) \end{aligned}$$

となることに注意すると,

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}))^2 \varphi = \{(\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})^2 - e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}\} \varphi$$

を得る。これを上式 (762) に代入すると, Pauli 方程式 (410) が導かれる。

■古典的な軌道運動と結びついた磁気モーメントの, 磁場との相互作用エネルギー ここでは光速 c を明記し, m, e をそれぞれ任意の粒子の質量と電荷とする。(少なくとも局所的には) 一様な磁場 (磁束密度) \mathbf{B} を仮定すると, これはベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$ を持つので, 荷電粒子系の Lagrangian には孤立系の場合と比べて付加的な項

$$\begin{aligned} L_B &= \sum \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \sum \frac{e}{c} \left\{ \left(\frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r} \right) \cdot \mathbf{B} \right\} = \sum \frac{e}{2c} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}, \\ \boldsymbol{\mu} &\equiv \frac{1}{2c} \sum e \mathbf{r} \times \mathbf{v} : \text{磁気モーメント} \end{aligned}$$

が現れる。これは磁場と磁気モーメントの相互作用エネルギーが $-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ で与えられることを意味する。特に 1 粒子系の磁気モーメントは

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2mc} \mathbf{M}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v})$$

と書くことができ, (軌道) 角運動量の非相対論的な表式 \mathbf{M} との比は $e/2mc$ である [3, pp.119–120].

ベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$ について この \mathbf{A} が一様な磁束密度 \mathbf{B} を導くことは,

$$\left[\nabla \times \left(\frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r} \right) \right]_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} B_l x_m) = \frac{1}{2} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) B_j \delta_{jm} = \frac{1}{2} (3B_i - B_i) = B_i$$

と確かめられる。視覚的には図 149 のようにイメージできる (磁場の方向を z 軸にとって描いた)。

9.7 S 行列展開 (補足)

9.7.1 S 演算子の Dyson 展開 (補足)

■Dyson 級数 (412) 3.7.1 節で述べたように, QED において S 演算子が式 (412) のように Dyson 級数に展開されることを示す。状態 $|\Phi(t)\rangle$ の時間発展方程式 (204):

$$i \frac{d}{dt} |\Phi(t)\rangle = H_1(t) |\Phi(t)\rangle$$

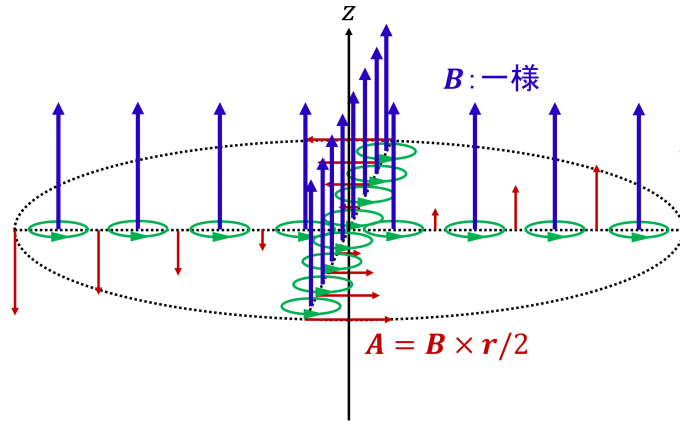


図 149 一様磁場 B のベクトル・ポテンシャル $A = B \times r/2$ の渦を緑色で表している。

は初期条件 $|\Phi(-\infty)\rangle = |i\rangle$ を考慮すると

$$|\Phi(t)\rangle = |i\rangle + (-i) \int_{-\infty}^t dt' H_I(t') |\Phi(t')\rangle$$

と書き換えられる。逐次代入により

$$\begin{aligned} |\Phi(t)\rangle &= |i\rangle + (-i) \int_{-\infty}^t dt_1 H_I(t_1) |i\rangle + (-i)^2 \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) |i\rangle + \cdots \\ &\rightarrow S |i\rangle \quad (t \rightarrow \infty), \\ \therefore S &= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \cdots H_I(t_n) \end{aligned} \quad (763)$$

を得る。ここで上式 (763) の右辺について、 $n = 0$ の項は 1、 $n = 1$ の項は $-i \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 H_I(t_1)$ と約束する。(ここまでは Dyson 級数 (187) の導出過程と何ら変わらない。) 次にこれを

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T\{H_I(t_1) H_I(t_2) \cdots H_I(t_n)\} \quad (764)$$

と書き換えられることについて説明する。式 (764) の積分範囲は n 次元空間 (t_1, t_2, \dots, t_n) 全体である。これは $n!$ 通りの置換

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \end{pmatrix}$$

に対して、不等式 $t_{\pi n} \leq t_{\pi(n-1)} \leq \cdots \leq t_{\pi 2} \leq t_{\pi 1}$ で表される $n!$ 個の領域に分けられる。その各々にわたる積分は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_{\pi 1} \int_{-\infty}^{t_{\pi 1}} dt_{\pi 2} \cdots \int_{-\infty}^{t_{\pi(n-1)}} dt_{\pi n} T\{H_I(t_1) H_I(t_2) \cdots H_I(t_n)\}$$

なので

$$\begin{aligned}
(\text{式 (764) 右辺}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \sum_{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt_{\pi_1} \int_{-\infty}^{t_{\pi_1}} dt_{\pi_2} \cdots \int_{-\infty}^{t_{\pi(n-1)}} dt_{\pi_n} T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\cdots H_I(t_n)\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \sum_{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt_{\pi_1} \int_{-\infty}^{t_{\pi_1}} dt_{\pi_2} \cdots \int_{-\infty}^{t_{\pi(n-1)}} dt_{\pi_n} H_I(t_{\pi_1})H_I(t_{\pi_2})\cdots H_I(t_{\pi_n}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \times n! \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1)H_I(t_2)\cdots H_I(t_n) \\
&= (\text{式 (763) 右辺})
\end{aligned}$$

となるから確かに式 (764) が成り立つ。ここで第2の等号で $H_I(t_1)H_I(t_2)\cdots H_I(t_n)$ を $H_I(t_{\pi_1})H_I(t_{\pi_2})\cdots H_I(t_{\pi_n})$ に並べ替えるとき、QED では異なる時刻の $H_I(t)$ が交換することを用いた。以上より

$$\begin{aligned}
\text{式 (764)} : S &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\cdots H_I(t_n)\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T\{\mathcal{H}_I(x_1)\cdots \mathcal{H}_I(x_n)\} : \text{式 (412)}
\end{aligned}$$

を得る。

9.7.2 確率振幅 $\langle f|S|i\rangle$ と Wick の定理 (補足)

■Wick の定理の導出 3.7.2 節で述べたように、異なる時刻を引数に持つ n 個の場 A_1, A_2, \dots, A_n に対して Wick の定理 (414):

$$\begin{aligned}
T\{A_1 A_2 \cdots A_n\} &= N[A_1 A_2 \cdots A_n] \\
&\quad + N[\underbrace{A_1 A_2}_{\square} \cdots] + \cdots + N[\cdots \underbrace{A_{n-1} A_n}_{\square}] \\
&\quad + N[\underbrace{A_1 A_2 A_3}_{\square} \underbrace{A_4}_{\square} \cdots] + \cdots + N[\cdots \underbrace{A_{n-3} A_{n-2} A_{n-1}}_{\square} \underbrace{A_n}_{\square}] \\
&\quad + \cdots
\end{aligned}$$

が成り立つ。ただし場 A_1, A_2, \dots, A_n はそれぞれ電磁場 A^μ (従ってボゾン場), フェルミオン場 $\psi_l, \bar{\psi}_l$ のいずれかである。ここで $n=2$ の場合を考えよう。縮約 $\underbrace{AB}_{\square}$ は通常の数なので $N[\underbrace{AB}_{\square}] = \underbrace{AB}_{\square}$ であることに注意すると、このとき Wick の定理 (414) は

$$T\{AB\} = N[AB] + \underbrace{AB}_{\square} \quad (765)$$

を与える。3.7.2 節で予告したように、ここではこの式 (765) が正しいことを確かめる [10, pp.110–111]。

電磁場の Fourier 展開 (303), (304), (305), Dirac 場の Fourier 展開 (386), (387) のように、一般に場 A の消滅演算子のみを含む部分を A^+ (これを正振動数部分と呼ぶ), 生成演算子のみを含む部分を A^- (これを負振動数部分と呼ぶ) と書くと,

$$AB = (A^+ + A^-)(B^+ + B^-) = A^+B^+ + A^+B^- + A^-B^+ + A^-B^-$$

となる。一方、これ以降に現れる複合は A, B が両方ともフェルミオン場のときには上側を、それ以外のときには下側をとるものと約束すると、正規積の一般的な定義式 (405), (406) により

$$N[AB] = A^+B^+ \mp B^-A^+ + A^-B^+ + A^-B^- \quad (766)$$

なので、これらを辺々引いて

$$AB - N[AB] = \begin{cases} \{A^+, B^-\} & \text{両方ともフェルミオン場} \\ [A^+, B^-] & \text{その他} \end{cases}$$

を得る。最右辺は通常の数なのでそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \{A^+, B^-\} &= \langle 0 | \{A^+, B^-\} | 0 \rangle \\ [A^+, B^-] &= \langle 0 | [A^+, B^-] | 0 \rangle \end{aligned} \right\} = \langle 0 | A^+ B^- | 0 \rangle = \langle 0 | AB | 0 \rangle$$

と書き換えられることに注意すると、これは

$$AB = N[AB] + \langle 0 | AB | 0 \rangle \quad (767)$$

となる。さらに正規積の式 (766) により

$$\begin{aligned} N[AB] &= B^+ A^+ \mp A^- B^+ + B^- A^+ + B^- A^- \\ &= \mp A^+ B^+ \mp A^- B^+ + B^- A^+ \mp A^- B^- \\ &= \mp N[AB] \end{aligned} \quad (768)$$

であることに注意する。以上より場 A, B の引数をそれぞれ x_1, x_2 とし、 $t_1 \equiv x_1^0, t_2 \equiv x_2^0 (\neq t_1)$ と書くと、 $t_1 > t_2$ のとき

$$\begin{aligned} T\{AB\} &= AB = N[AB] + \langle 0 | AB | 0 \rangle \quad (\because \text{式 (767)}) \\ &= N[AB] + \langle 0 | T\{AB\} | 0 \rangle, \end{aligned}$$

$t_2 > t_1$ のとき

$$\begin{aligned} T\{AB\} &= \mp BA = \mp(N[BA] + \langle 0 | BA | 0 \rangle) \quad (\because \text{式 (767)}) \\ &= \mp(\mp N[AB] \mp \langle 0 | T\{AB\} | 0 \rangle) \quad (\because \text{式 (768)}) \\ &= N[AB] + \langle 0 | T\{AB\} | 0 \rangle \end{aligned}$$

となり、確かに式 (765) が成り立っている。

最後に 3.7.2 節で述べたように、混合 T 積

$$T\{N(AB \cdots)_{x_1} \cdots N(AB \cdots)_{x_n}\}$$

に対しては Wick の定理 (414) と同じ形の展開 (416) から同時刻縮約を除いた式が成り立つことを説明する [10, p.113]. 共通の引数 $x_r = (x_r^0, \mathbf{x}_r)$ を持つ場のグループ $(AB \cdots)_{x_r}$ に対して、 $\varepsilon > 0$ として負振動数部分 (生成演算子のみを含む) A^-, B^-, \dots の引数を $(x_r^0 + \varepsilon, \mathbf{x}_r)$ に、正振動数部分 (消滅演算子のみを含む) A^+, B^+, \dots の引数を $(x_r^0 - \varepsilon, \mathbf{x}_r)$ に置き換える。そして引数を $\xi_r \equiv (x_r^0, \mathbf{x}_r)$ に置き換えられた場のグループを $(AB \cdots)_{\xi_r}$ と書く。このとき $(AB \cdots)_{\xi_r}$ を正規順序化することは $(AB \cdots)_{\xi_r}$ を時間順序化することと同じだから、

$$\begin{aligned} T\{N(AB \cdots)_{x_1} \cdots N(AB \cdots)_{x_n}\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T\{N(AB \cdots)_{\xi_1} \cdots N(AB \cdots)_{\xi_n}\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T\{(AB \cdots)_{\xi_1} \cdots (AB \cdots)_{\xi_n}\} \end{aligned}$$

となる。ここで最右辺の T 積に対して Wick の定理 (414) を適用することを考える。このとき 1 つのグループ $(AB \cdots)_{\xi_r}$ に含まれる 2 つの場 (それらを A', B' と呼ぼう) の縮約が現れる。ところが再び $A'B'$ の時間順

序化が $A'B'$ の正規順序化に一致することに注意し、さらに正規積の真空期待値はゼロになることを思い出すと、そのような縮約はゼロになることが分かる:

$$\underbrace{A'B'} \equiv \langle 0|T\{A'B'\}|0\rangle = \langle 0|N[A'B']|0\rangle = 0.$$

従って Wick の定理 (414) と同じ形の展開 (416) から同時刻縮約を除いた式が成り立つ.

9.8 反応 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ の確率振幅と断面積 (補足)

9.8.1 反応 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ の確率振幅と Feynman 規則 (補足)

3.8.1 節で述べたように、反応 (418):

$$|i\rangle = |e^- \mathbf{p}_2 r_2; e^+ \mathbf{p}_1 r_1\rangle \quad \rightarrow \quad |f\rangle = |\mu^- \mathbf{p}_2' s_2; \mu^+ \mathbf{p}_1' s_1\rangle$$

の確率振幅 $\langle f|S|i\rangle \equiv S_{fi}$ が 2 次の摂動論で式 (419) で与えられることを確かめる. 準備として次のことに注意する [10, p.129]. 場 $\psi_l, \bar{\psi}_l$ の Fourier 展開 (386), (387) により, レプトンの種類 l を明示すると, 消滅演算子を含む部分 $\psi_l^+, \bar{\psi}_l^+$ に対して

$$\psi_l^+(x) |l^- \mathbf{p} r\rangle = \sum_{\mathbf{q}, s} \left(\frac{m_l}{VE_{\mathbf{q}}} \right)^{1/2} c_{(l)s}(\mathbf{q}) u_{(l)s}(\mathbf{q}) e^{-iq \cdot x} |l^- \mathbf{p} r\rangle = |0\rangle \left(\frac{m_l}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} u_{(l)r}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}, \quad (769)$$

$$\bar{\psi}_l^+(x) |l^+ \mathbf{p} r\rangle = \sum_{\mathbf{q}, s} \left(\frac{m_l}{VE_{\mathbf{q}}} \right)^{1/2} d_{(l)s}(\mathbf{q}) \bar{v}_{(l)s}(\mathbf{q}) e^{-iq \cdot x} |l^+ \mathbf{p} r\rangle = |0\rangle \left(\frac{m_l}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \bar{v}_{(l)r}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} \quad (770)$$

が成り立つ. ここで例えば式 (769) では, 状態 $|l^- \mathbf{p} r\rangle$ において運動量, スピン $(\mathbf{q}, s) (\neq (\mathbf{p}, r))$ を持つ粒子 l^- は存在しないため, $c_{(l)s}(\mathbf{q})$ が $|l^- \mathbf{p} r\rangle$ 作用すると状態が消失する. これらの両辺の Hermite 共役をとり, 右から γ^0 をかけると

$$\langle l^- \mathbf{p} r | \bar{\psi}_l^-(x) = \langle 0 | \left(\frac{m_l}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \bar{u}_{(l)r}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}, \quad (771)$$

$$\langle l^+ \mathbf{p} r | \bar{\psi}_l^-(x) = \langle 0 | \left(\frac{m_l}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} v_{(l)r}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \quad (772)$$

となる.

さて, 確率振幅 S_{fi} を 2 次の摂動論で求めるには S 演算子の Dyson 展開 (413):

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}, \quad S^{(n)} \equiv \frac{(ie)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \sum_{l_1, \dots, l_n} T\{N(\bar{\psi}_{l_1} A \psi_{l_1})_{x_1} \cdots N(\bar{\psi}_{l_n} A \psi_{l_n})_{x_n}\}$$

の 2 次までの項 $S^{(0)}, S^{(1)}, S^{(2)}$ の寄与を考えれば良い. 確率振幅 S_{fi} に寄与するのは e^\pm の消滅演算子と μ^\pm の生成演算子を含む項だから (3.7.2 節参照)

$$S^{(0)} = 1, \quad S^{(1)} = ie \int d^4x \sum_l N[(\bar{\psi}_l A \psi_l)_x]$$

からの寄与はなく,

$$S^{(2)} = \frac{-e^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \sum_{l_1, l_2} T\{N(\bar{\psi}_{l_1} A \psi_{l_1})_{x_1} N(\bar{\psi}_{l_2} A \psi_{l_2})_{x_2}\}$$

の寄与は

$$\begin{aligned}
S_{\mu e}^{(2)} &= \frac{-e^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 T\{N(\bar{\psi}_\mu \not{A} \psi_\mu)_{x_1} N(\bar{\psi}_e \not{A} \psi_e)_{x_2}\} \Leftarrow (l_1, l_2) = (\mu, e) \text{ の項} \\
&+ \frac{-e^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 T\{N(\bar{\psi}_e \not{A} \psi_e)_{x_1} N(\bar{\psi}_\mu \not{A} \psi_\mu)_{x_2}\} \Leftarrow (l_1, l_2) = (e, \mu) \text{ の項} \\
&= -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 T\{N(\bar{\psi}_\mu \not{A} \psi_\mu)_{x_1} N(\bar{\psi}_e \not{A} \psi_e)_{x_2}\}
\end{aligned}$$

から来る．これに Wick の定理 (3.7.2 節参照) を適用すると，時刻 x_1^0 を引数に持つ場 $\bar{\psi}_\mu, \not{A}, \psi_\mu$ と時刻 x_2^0 を引数に持つ場 $\bar{\psi}_e, \not{A}, \psi_e$ の非同時刻縮約が現れる．縮約の定義式 (415):

$$\underline{A(x_1)B(x_2)} \equiv \langle 0|T\{A(x_1)B(x_2)\}|0\rangle$$

より，これがゼロとならないためには縮約される 2 つの場は同一粒子の生成演算子と消滅演算子を含んでいなければならない．よってゼロでない縮約は $\underline{A(x_1)A(x_2)}$ のみであることを注意すると

$$\begin{aligned}
S_{\mu e}^{(2)} &= S_A + S_B, \\
S_A &\equiv -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi}_\mu \not{A} \psi_\mu)_{x_1} (\bar{\psi}_e \not{A} \psi_e)_{x_2}], \\
S_B &\equiv -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi}_\mu \not{A} \psi_\mu)_{x_1} (\bar{\psi}_e \not{A} \psi_e)_{x_2}]
\end{aligned}$$

を得る [10, p.143].

S_A の確率振幅 S_{fi} への寄与はゼロとなる [10, pp.116–118, p.131]. 実際，式 (769)，式 (770)，式 (771)，式 (772) を用いると

$$\begin{aligned}
&\langle f|S_A|i\rangle \\
&= -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \langle \mu^- \mathbf{p}_2' s_2; \mu^+ \mathbf{p}_1' s_1 | N[(\bar{\psi}_\mu \not{A} \psi_\mu)_{x_1} (\bar{\psi}_e \not{A} \psi_e)_{x_2}] | e^- \mathbf{p}_2 r_2; e^+ \mathbf{p}_1 r_1 \rangle \\
&= -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \langle \mu^- \mathbf{p}_2' s_2; \mu^+ \mathbf{p}_1' s_1 | \bar{\psi}_\mu^-(x_1) \gamma^\alpha \psi_\mu^-(x_1) N[A_\alpha(x_1) A_\beta(x_2)] \bar{\psi}_e^+(x_2) \gamma^\beta \psi_e^+(x_2) | e^- \mathbf{p}_2 r_2; e^+ \mathbf{p}_1 r_1 \rangle \\
&= -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \left[\left(\frac{m_\mu}{VE_{\mathbf{p}_2'}} \right)^{1/2} \bar{u}_{(\mu)s_2}(\mathbf{p}_2') e^{ip_2' \cdot x_1} \right] \gamma^\alpha \left[\left(\frac{m_\mu}{VE_{\mathbf{p}_1'}} \right)^{1/2} v_{(\mu)s_1}(\mathbf{p}_1') e^{ip_1' \cdot x_1} \right] \\
&\times \langle 0|A_\beta^-(x_2) A_\alpha^+(x_1) + A_\alpha^-(x_1) A_\beta^+(x_2)|0\rangle \\
&\times \left[\left(\frac{m_e}{VE_{\mathbf{p}_1}} \right)^{1/2} \bar{v}_{(e)r_1}(\mathbf{p}_1) e^{-ip_1 \cdot x_2} \right] \gamma^\beta \left[\left(\frac{m_e}{VE_{\mathbf{p}_2}} \right)^{1/2} u_{(e)r_2}(\mathbf{p}_2) e^{-ip_2 \cdot x_2} \right]
\end{aligned}$$

を得る．最右辺 2 行目の真空期待値は消滅演算子を含む項 A_α^+, A_β^+ が $|0\rangle$ に作用して消える．このように Wick の定理を適用すると S 行列要素は正規積の和だけに限定されるから，各項は中間状態として仮想粒子の生成-再消滅を起こすことはない [10, p.110].

以上より 2 次の摂動論で確率振幅は式 (419):

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= \langle f|S_B|i\rangle \\
&= \left\langle f \left| -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi}_\mu \not{A} \psi_\mu)_{x_1} (\bar{\psi}_e \not{A} \psi_e)_{x_2}] \right| i \right\rangle \\
&= \left\langle f \left| -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{\psi}_\mu^-(x_1) \gamma_\alpha \psi_\mu^-(x_1) iD_F^{\alpha\beta}(x_1 - x_2) \bar{\psi}_e^+(x_2) \gamma_\beta \psi_e^+(x_2) \right| i \right\rangle \\
&\quad \left(\because \text{式 (316)} : \underline{A^\alpha(x_2)A^\beta(x_2)} = iD_F^{\alpha\beta}(x_1 - x_2) \right)
\end{aligned}$$

で与えられる.

最後にこれが式 (420) に書き換えられることを確かめる (計算の手法は文献 [10, pp.129–133] の箇所を参考にした). 式 (769), 式 (770), 式 (771), 式 (772), および $D_F^{\alpha\beta}(x)$ の Fourier 展開を用いると

$$S_{fi} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \left[\left(\frac{m_\mu}{VE_{\mathbf{p}_2'}} \right)^{1/2} \bar{u}_{(\mu)s_2}(\mathbf{p}_2') e^{ip_2' \cdot x_1} \right] \gamma_\alpha \left[\left(\frac{m_\mu}{VE_{\mathbf{p}_1'}} \right)^{1/2} v_{(\mu)s_1}(\mathbf{p}_1') e^{ip_1' \cdot x_1} \right] \\ \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iD_F^{\alpha\beta}(k) e^{-ik \cdot (x_1 - x_2)} \left[\left(\frac{m_e}{VE_{\mathbf{p}_1}} \right)^{1/2} \bar{v}_{(e)r_1}(\mathbf{p}_1) e^{-ip_1 \cdot x_2} \right] \gamma_\beta \left[\left(\frac{m_e}{VE_{\mathbf{p}_2}} \right)^{1/2} u_{(e)r_2}(\mathbf{p}_2) e^{-ip_2 \cdot x_2} \right]$$

となる. ここで x_1, x_2 に関する積分は

$$\int d^4x_1 e^{i(p_2' + p_1' - k) \cdot x_1} \int d^4x_2 e^{i(k - p_1 - p_2) \cdot x_2} = (2\pi)^4 \delta^4(p_1' + p_2' - k) (2\pi)^4 \delta^4(k - p_1 - p_2)$$

であり, これを用いると k に関する積分を

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iD_F^{\alpha\beta}(k) \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1' + p_2' - k) (2\pi)^4 \delta^4(k - p_1 - p_2) = (2\pi)^4 iD_F^{\alpha\beta}(p_1 + p_2) \delta^4(p_1' + p_2' - p_1 - p_2)$$

と実行できるから,

$$\text{式 (420)} : S_{fi} = \left[(2\pi)^4 \delta^4(p_1' + p_2' - p_1 - p_2) \left(\frac{m_e}{VE_{\mathbf{p}_1}} \right)^{1/2} \left(\frac{m_e}{VE_{\mathbf{p}_2}} \right)^{1/2} \left(\frac{m_\mu}{VE_{\mathbf{p}_1'}} \right)^{1/2} \left(\frac{m_\mu}{VE_{\mathbf{p}_2'}} \right)^{1/2} \right] \mathcal{M},$$

$$\text{式 (421)} : \mathcal{M} = -e^2 [\bar{u}_{(\mu)s_2}(\mathbf{p}_2') \gamma_\alpha v_{(\mu)s_1}(\mathbf{p}_1')] iD_F^{\alpha\beta}(p_1 + p_2) [\bar{v}_{(e)r_1}(\mathbf{p}_1) \gamma_\beta u_{(e)r_2}(\mathbf{p}_2)]$$

を得る.

9.8.2 断面積 (補足)

■ “相対速度” v_{rel} の定義式 (424) 3.8.2 節で述べたように, 粒子 1,2 の質量を m_1, m_2 , 4 元運動量を $p_1 = (E_1, \mathbf{p}_1), p_2 = (E_2, \mathbf{p}_2)$, その 4 元内積を $p_1 \cdot p_2$ として式 (424):

$$E_1 E_2 v_{\text{rel}} = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2}$$

で “相対速度” v_{rel} を定義すると, これは粒子 1,2 の速度が平行となる場合には実際の相対速度の大きさを与えることを確かめる. 粒子の質量を m , 座標を $x^\mu = (t, \mathbf{x})$, 固有時間を τ , 4 元速度を $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, 座標時間 t で測った速度を $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ とすると, 粒子の 4 元運動量 $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ は

$$p^\mu \equiv m u^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\frac{m}{\sqrt{1 - v^2}}, \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2}} \right)$$

で定義されるので (1.1.4 節参照),

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{E}, \quad \therefore \mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{p}_1}{E_1}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{p}_2}{E_2}$$

と表される. これに注意すると実際の相対速度は

$$\mathbf{v}_{12} \equiv \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{p}_1}{E_1} - \frac{\mathbf{p}_2}{E_2} = \frac{E_2 \mathbf{p}_1 - E_1 \mathbf{p}_2}{E_1 E_2}$$

と書けるので

$$(E_1 E_2 v_{12})^2 = E_2^2 |\mathbf{p}_1|^2 \mp 2E_1 E_2 |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2| + E_1^2 |\mathbf{p}_2|^2$$

を得る．ところで，2粒子の速度が平行となる場合には $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = \pm |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2|$ だから

$$(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2 = (E_1 E_2 \mp |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2|)^2 - (m_1 m_2)^2$$

であり，辺々引くと

$$\begin{aligned} (E_1 E_2 v_{12})^2 - \{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2\} &= - (E_1^2 - |\mathbf{p}_1|^2)(E_2^2 - |\mathbf{p}_2|^2) + (m_1 m_2)^2 \\ &= - (m_1 m_2)^2 + (m_1 m_2)^2 = 0, \\ \therefore v_{12} &= \frac{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2}}{E_1 E_2} = v_{\text{rel}} \end{aligned}$$

となるので示された．

■断面積の不変性 次に 3.8.2 節で述べたように，“相対速度” v_{rel} の定義式 (424) が式 (425) で定義される断面積 σ の不変性を保証していることを確かめる．単位時間に散乱される粒子数が式 (425):

$$N = V \rho_1 \rho_2 v_{\text{rel}} \sigma$$

で与えられることは，時間 T の内に散乱される粒子数が

$$\nu = VT \rho_1 \rho_2 v_{\text{rel}} \sigma \quad (773)$$

であることを意味する．まず上式 (773) 右辺における $\rho_1 \rho_2 v_{\text{rel}}$ の変換則を考えよう．そこで式 (424) を

$$E_1 E_2 v_{\text{rel}} = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2}$$

と書き換えると，この右辺は，従って左辺はスカラーである．ここで E_1, E_2 および ρ_1, ρ_2 はそれぞれ 4 元運動量，4 元粒子数流速の時間成分を成すため，これらはいずれも反変ベクトル成分として変換する．よって ν の式 (773) における $\rho_1 \rho_2 v_{\text{rel}}$ もスカラーとなる．さらに時空の与えられた領域の体積 VT は Lorentz 不変量であり (1.1.6 節参照)，その中で起こる散乱の回数 ν もまた座標系に依らないから断面積 σ はスカラー，すなわち相対論的不変量でなければならない (1.1.1 節参照) [3, pp.38–40] [26, pp.129–130].

もし相対速度を粒子 2 の静止系における粒子 1 の速度 v_r として定義するならば， v_r は定義によって不変量となる．この v_r を用いる場合，任意の座標系で散乱される粒子数を

$$\nu = VT \rho_1 \rho_2 v_r \sigma \frac{p_1 \cdot p_2}{E_1 E_2}$$

と書いてこの式で σ を定義すれば，断面積 σ は不変量であることが保証される [3, pp.38–40].

■断面積の表式 3.8.2 節の断面積の表式 (426) は次のように確かめられる [10, pp.148–151]. 反応 (418):

$$|i\rangle = |e^- \mathbf{p}_2 r_2; e^+ \mathbf{p}_1 r_1\rangle \rightarrow |f\rangle = |\mu^- \mathbf{p}_2' s_2; \mu^+ \mathbf{p}_1' s_1\rangle$$

の確率振幅は 2 次の摂動論において式 (420):

$$S_{fi} = \left[(2\pi)^4 \delta^4(\Delta p) \prod \left(\frac{m}{VE} \right)^{1/2} \right] \mathcal{M}$$

で与えられる．ここに

$$\begin{aligned} \Delta p &\equiv p_1' + p_2' - p_1 - p_2 : \text{反応前後のエネルギー・運動量の変化,} \\ \prod \left(\frac{m}{VE} \right)^{1/2} &\equiv \left(\frac{m_e}{VE_{\mathbf{p}_1}} \right)^{1/2} \left(\frac{m_e}{VE_{\mathbf{p}_2}} \right)^{1/2} \left(\frac{m_\mu}{VE_{\mathbf{p}_1'}} \right)^{1/2} \left(\frac{m_\mu}{VE_{\mathbf{p}_2'}} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

である。ここで反応時間 T と空間の体積 V を十分大きい有限の値にとると

$$(2\pi)^4 \delta^4(\Delta p) = \int d^4 x e^{ix \cdot \Delta p} \simeq \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_V d^3 x e^{ix \cdot \Delta p} \equiv \delta_{TV}(\Delta p),$$

$$[\delta_{TV}(\Delta p)]^2 \simeq \left(\int_{-T/2}^{T/2} dt \int_V d^3 x e^{ix \cdot \Delta p} \right) \times \{ (2\pi)^4 \delta^4(\Delta p) \} = TV (2\pi)^4 \delta^4(\Delta p)$$

(最後の等号では $\delta^4(\Delta p)$ があるから $e^{ix \cdot \Delta p}$ を $\Delta p = 0$ として評価した)

とできるから、単位時間あたりの遷移確率すなわち遷移率は

$$w = \frac{|S_{fi}|^2}{T} = \frac{1}{T} \{ (2\pi)^4 \delta^4(\Delta p) \}^2 \left\{ \prod \left(\frac{m}{VE} \right)^{1/2} \right\}^2 |\mathcal{M}|^2 \simeq V (2\pi)^4 \delta^4(\Delta p) \left(\prod \frac{m}{VE} \right) |\mathcal{M}|^2$$

と書ける。

参考——デルタ関数の 2 乗の公式 [27, pp.246–247]

このように、大きな反応時間 T に対して直観的に、デルタ関数の 2 乗の公式

$$[\delta(\omega)]^2 = \delta(\omega) \int_{-T/2}^{T/2} \frac{dt}{2\pi} e^{i\omega t} = \delta(\omega) \int_{-T/2}^{T/2} \frac{dt}{2\pi} = \frac{T}{2\pi} \delta(\omega)$$

を導くことができる (第 2 の等号では $\delta(\omega)$ の下で被積分関数の ω をゼロとおいた)。同様に大きな空間体積 V に対して

$$[\delta(\mathbf{k})]^2 = \frac{V}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k})$$

である。なるほど、デルタ関数の 2 乗もまたデルタ関数であり、両辺の次元を合わせるのに必要な時間 T (ないし空間の体積 V) が係数として現れる。他方、指数関数の積分を実行すると

$$[\delta(\omega)]^2 = \left| \int_{-T/2}^{T/2} \frac{dt}{2\pi} e^{i\omega t} \right|^2 = \left(\frac{\sin(\omega t/2)}{\pi\omega} \right)^2 = \frac{T}{2\pi} \delta(\omega)$$

とも表されるため、数学公式

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 \alpha x}{\alpha x^2} = \delta(x)$$

が見出される。(このように $y = (\sin x/x)^2$ のグラフからデルタ関数を作ることができる^{*242}。)ただし正確には、逆にこの公式を用いてデルタ関数の 2 乗の公式を導く方が厳密である。

1 つの粒子に関するマイクロな状態 1 つが位相空間に占める体積は $h^3 = (2\pi\hbar)^3 = (2\pi)^3$ だから (自然単位系で $\hbar = 1$, 2.7.3 節) 終状態に粒子 1,2 (反応 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ の場合 μ^+, μ^-) が (空間の体積 V の中に) 運動量 d^3p_1', d^3p_2' の範囲内に見いだされるようなマイクロな状態の数は

$$dW = \frac{V d^3p_1'}{(2\pi)^3} \cdot \frac{V d^3p_2'}{(2\pi)^3}$$

*242 同じく

$$\delta(x) = \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-K/2}^{K/2} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{e^{iKx/2} - e^{-iKx/2}}{2\pi ix} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sin Kx}{\pi x}$$

もまた、 $y = \sin x/x$ のグラフからデルタ関数を作る方法として有名である。

である。よって

$$\begin{aligned} d\sigma' &\equiv \frac{wdW}{v_{\text{rel}}/V} \\ &= \frac{V}{v_{\text{rel}}} \times V(2\pi)^4 \delta^4(\Delta p) \left(\prod \frac{m}{VE} \right) |\mathcal{M}|^2 \times \frac{V d^3 p_1' V d^3 p_2'}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(\Delta p) \frac{1}{4E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} v_{\text{rel}}} \left(\prod_l (2m_l) \right) \left(\prod_f \frac{d^3 p_f'}{(2\pi)^3 2E_{f'}} \right) |\mathcal{M}|^2 \times 4 \times \frac{1}{2^4} \times 2^2 \end{aligned}$$

を得る。ここに

$$\prod_l (2m_l) \equiv (2m_e)^2 (2m_\mu)^2, \quad \prod_f \frac{d^3 p_f'}{(2\pi)^3 2E_{f'}} \equiv \frac{d^3 p_1'}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_1'}} \cdot \frac{d^3 p_2'}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_2'}}$$

である。

この $d\sigma'$ の表式が Lorentz 不変量であることを確かめておこう。まず $\delta(\Delta p)$ がゼロにならない条件 $\Delta p = 0$ はベクトルの関係式なので Lorentz 変換に対して共変的である (1.1.1 節参照)。次に 4 元ベクトル $p = (p^0, \mathbf{p})$ に対して

$$p^2 - m^2 = (p^0)^2 - (\mathbf{p}^2 + m^2) = (p^0 - E_{\mathbf{p}})(p^0 + E_{\mathbf{p}}), \quad E_{\mathbf{p}} \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

に注意すると, $\prod_f \frac{d^3 p_f'}{(2\pi)^3 2E_{f'}}$ について,

$$\int d^4 p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) = \frac{d^3 p}{2E_{\mathbf{p}}}$$

となる (p^0 についての積分だけ実行した)。左辺は $\delta(p^2 - m^2)$ がゼロにならない条件 $p^2 - m^2 = 0$ がスカラーの関係式なので, p^0 の符号を変えない変換を考えるとこれは不変量である (1.1.1 節参照)^{*243}。さらに上記のように $E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} v_{\text{rel}}$ は不変量である。以上より $d\sigma'$ の表式は Lorentz スカラー, すなわち相対論的不変である。

さて, 微分断面積 $d\sigma = \int_{\mathbf{p}_2', |\mathbf{p}_1'|} d\sigma'$ を求めよう。上で得た $d\sigma'$ を

$$\begin{aligned} d\sigma' &= f(p_1', p_2') \delta^4(\Delta p) d^3 p_1' d^3 p_2' = f(p_1', p_2') \delta(\Delta \mathbf{p}) \delta(\Delta E) d^3 p_1' d^3 p_2', \\ f(p_1', p_2') &\equiv \frac{1}{64\pi^2 v_{\text{rel}} E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} E_{\mathbf{p}_1'} E_{\mathbf{p}_2'}} \left(\prod_l (2m_l) \right) |\mathcal{M}|^2, \\ \Delta \mathbf{p} &\equiv \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \\ \Delta E &\equiv E_{\mathbf{p}_1'} + E_{\mathbf{p}_2'} - E_{\mathbf{p}_1} - E_{\mathbf{p}_2} \end{aligned}$$

と書いておき, まずこれを \mathbf{p}_2' について積分すると

$$f(p_1', p_2')|_{\mathbf{p}_2' = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1'} \delta(\Delta E) d^3 p_1'$$

となる。さらに \mathbf{p}_1' を極座標で表し, 運動量空間の体積要素 $d^3 p_1'$ を各極座標が無限小変化して得られる領域

^{*243} $d^3 p/E_{\mathbf{p}}$ が不変量であることにより直観的な説明は文献 [3, p.33] に見られる。

の体積 $|\mathbf{p}_1'|^2 d|\mathbf{p}_1'| d\Omega_1'$ にとり, これを $|\mathbf{p}_1'|$ について積分すると

$$\begin{aligned} d\sigma &= d\Omega_1' \int_0^\infty f(p_1', p_2') |_{\mathbf{p}_2'=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1'} |\mathbf{p}_1'|^2 \delta(\Delta E) d|\mathbf{p}_1'| \\ &= d\Omega_1' \int_0^\infty f(p_1', p_2') |_{\mathbf{p}_2'=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1'} |\mathbf{p}_1'|^2 \delta(\Delta E) \left(\frac{\partial |\mathbf{p}_1'|}{\partial(\Delta E)} \right)_{|\mathbf{p}_2'|} d(\Delta E) \\ &= d\Omega_1' \left[f(p_1', p_2') |_{\mathbf{p}_2'=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1'} |\mathbf{p}_1'|^2 \left\{ \left(\frac{\partial(\Delta E)}{\partial |\mathbf{p}_1'|} \right)_{|\mathbf{p}_2'|} \right\}^{-1} \right] \Big|_{\Delta E=0} \end{aligned}$$

を得る. ここで始状態の粒子の運動量 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ は与えられており, ΔE は $|\mathbf{p}_1'|$ と $|\mathbf{p}_2'|$ の関数であることに注意した.

以下, 重心系 (CoM) を用いると $\mathbf{p}_1' = -\mathbf{p}_2'$ より

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(\Delta E)}{\partial |\mathbf{p}_1'|} \right)_{|\mathbf{p}_2'|} &= \left(\frac{\partial}{\partial |\mathbf{p}_1'|} (E_{\mathbf{p}_1'} + E_{\mathbf{p}_2'}) \right)_{|\mathbf{p}_2'|} = \frac{\partial}{\partial |\mathbf{p}_1'|} \left(\sqrt{m_1'^2 + |\mathbf{p}_1'|^2} + \sqrt{m_2'^2 + |\mathbf{p}_2'|^2} \right) \\ &= \frac{|\mathbf{p}_1'|}{E_{\mathbf{p}_1'}} + \frac{|\mathbf{p}_2'|}{E_{\mathbf{p}_2'}} = |\mathbf{p}_1'| \frac{E_{\mathbf{p}_1'} + E_{\mathbf{p}_2'}}{E_{\mathbf{p}_1'} E_{\mathbf{p}_2'}} \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} d\sigma &= d\Omega_1' f(p_1', p_2') |_{\mathbf{p}_2'=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1'} |\mathbf{p}_1'|^2 \frac{E_{\mathbf{p}_1'} E_{\mathbf{p}_2'}}{|\mathbf{p}_1'| (E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2})} \\ &= d\Omega_1' \frac{1}{64\pi^2 v_{\text{rel}} E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} E_{\mathbf{p}_1'} E_{\mathbf{p}_2'}} \left(\prod_l (2m_l) \right) |\mathcal{M}|^2 |\mathbf{p}_1'| \frac{E_{\mathbf{p}_1'} E_{\mathbf{p}_2'}}{E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2}} \\ &= d\Omega_1' \frac{1}{64\pi^2} \frac{E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2}}{|\mathbf{p}_1| (E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2})} \frac{1}{E_{\mathbf{p}_1'} E_{\mathbf{p}_2'}} \left(\prod_l (2m_l) \right) |\mathcal{M}|^2 \frac{|\mathbf{p}_1'|}{E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2}} \\ &\quad \left(\text{“相対速度” } v_{\text{rel}} \text{ は重心系で } v_{\text{rel}} = |\mathbf{v}_1| + |\mathbf{v}_2| = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{\mathbf{p}_1}} + \frac{|\mathbf{p}_2|}{E_{\mathbf{p}_2}} = |\mathbf{p}_1| \left(\frac{1}{E_{\mathbf{p}_1}} + \frac{1}{E_{\mathbf{p}_2}} \right) = |\mathbf{p}_1| \frac{E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2}}{E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2}} \right) \\ &= d\Omega_1' \frac{1}{64\pi^2 (E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2})^2} \frac{|\mathbf{p}_1'|}{|\mathbf{p}_1|} \left(\prod_l (2m_l) \right) |\mathcal{M}|^2 \quad (\text{CoM}) \end{aligned}$$

を得る. ここで $d\Omega_1'$ を散乱中心から見た検出器の立体角 $d\Omega$ に選んだものが断面積の表式 (426) に他ならない.

9.8.3 反応 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ の断面積 (補足)

3.8.3 節の反応 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ における断面積の式 (427),(428),(429) は次のように導かれる [10, pp.156–160].

$$D_F^{\alpha\beta}(p_1 + p_2) = \frac{-g^{\alpha\beta}}{(p_1 + p_2)^2 + i\varepsilon}$$

の分母について, 衝突のためには $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 \leq 0$ が必要であり, このとき

$$(p_1 + p_2)^2 = 2m_e^2 + 2p_1 \cdot p_2 = 2m_e^2 + 2(E_1 E_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) \geq 2m_e^2 + 2E_1 E_2 \geq 4m_e^2$$

なので $(p_1 + p_2)^2$ はゼロにならない. そこで $i\varepsilon$ を省いて

$$D_F^{\alpha\beta}(p_1 + p_2) = \frac{-g^{\alpha\beta}}{(p_1 + p_2)^2}$$

とすると

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= -ie^2 \bar{u}_{(\mu)s_2}(\mathbf{p}_2') \gamma^\alpha v_{(\mu)s_1}(\mathbf{p}_1') D_{F\alpha\beta}(p_1 + p_2) \bar{v}_{(e)r_1}(\mathbf{p}_1) \gamma^\beta u_{(e)r_2}(\mathbf{p}_2) \\ &= ie^2 [\bar{u}_{s_2}(\mathbf{p}_2') \gamma_\alpha v_{s_1}(\mathbf{p}_1')]_{(\mu)} \frac{1}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{v}_{r_1}(\mathbf{p}_1) \gamma^\alpha u_{r_2}(\mathbf{p}_2)]_{(e)} \end{aligned}$$

と書き換えられる.

非偏極断面積の計算に必要な量 $X \equiv \frac{1}{4} \sum_{r_1, r_2, s_1, s_2} |\mathcal{M}|^2$ を考える. これを求めるには Feynman 振幅 \mathcal{M} の複素共役 \mathcal{M}^* を計算する必要がある. \mathcal{M} の複素共役をとるにあたり, まず上記の Feynman 振幅 \mathcal{M} の式においてダミー添字を $\alpha \rightarrow \beta$ と置き換える. 次いで Feynman 振幅 \mathcal{M} の式において, 例えば $[\bar{u}_{s_2}(\mathbf{p}_2') \gamma_\beta v_{s_1}(\mathbf{p}_1')]_{(\mu)}$ に注目する. そしてスピノルの引数とレプトンの指標 (μ) を省いてこれを $\bar{u}_{s_2} \gamma_\beta v_{s_1}$ と書き, その複素共役をとると

$$(\bar{u}_{s_2} \gamma_\beta v_{s_1})^* = (\bar{u}_{s_2} \gamma_\beta v_{s_1})^\dagger = v_{s_1}^\dagger \gamma_\beta^\dagger (\gamma^0 u_{s_2}) = \bar{v}_{s_1} \gamma_\beta u_{s_2}$$

となること等に注意する. ここで第 1 の等号では $\bar{u}_{s_2} \gamma_\beta v_{s_1}$ が 1×1 の行列なので, その複素共役は共役転置行列に等しいことを, 第 2, 第 3 の等号では式 (349): $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$ を用いた. すると

$$\mathcal{M}^* = -ie^2 [\bar{v}_{s_1}(\mathbf{p}_1') \gamma_\beta u_{s_2}(\mathbf{p}_2')]_{(\mu)} \frac{1}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{u}_{r_2}(\mathbf{p}_2) \gamma^\beta v_{r_1}(\mathbf{p}_1)]_{(e)}$$

を得る. ここから得られる X を, エネルギー射影演算子

$$\Lambda_{(l)}^\pm(\mathbf{p}) \equiv \frac{\pm \not{p} + m_l}{2m_l}$$

を用いて書き換える. エネルギー射影演算子は

$$\Lambda_{(l)\alpha\beta}^+(\mathbf{p}) = \sum_r u_{(l)r\alpha}(\mathbf{p}) \bar{u}_{(l)r\beta}(\mathbf{p}), \quad \Lambda_{(l)\alpha\beta}^-(\mathbf{p}) = -\sum_r v_{(l)r\alpha}(\mathbf{p}) \bar{v}_{(l)r\beta}(\mathbf{p})$$

と表される (3.5.2 節). よってスピノル添字 $\mu, \nu, \rho, \sigma, \dots, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\rho}, \tilde{\sigma}, \dots$ を明記すると

$$\begin{aligned} X &= \frac{e^4}{4[(p_1 + p_2)^2]^2} A_{(\mu)\alpha\beta} B_{(e)}^{\alpha\beta}, \\ A_{(\mu)\alpha\beta} &\equiv \sum_{s_1, s_2} [(\bar{u}_{s_2})_{\tilde{\mu}} (\gamma_\alpha)_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} (v_{s_1})_{\tilde{\nu}}]_{(\mu)} [(\bar{v}_{s_1})_\mu (\gamma_\beta)_{\mu\nu} (u_{s_2})_\nu]_{(\mu)} \\ &= \left[\left(\sum_{s_2} (u_{s_2})_\nu (\bar{u}_{s_2})_{\tilde{\mu}} \right) (\gamma_\alpha)_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \left(\sum_{s_1} (v_{s_1})_{\tilde{\nu}} (\bar{v}_{s_1})_\mu \right) (\gamma_\beta)_{\mu\nu} \right]_{(\mu)} \\ &= \left[\Lambda_{\nu\tilde{\mu}}^+(\mathbf{p}_2') (\gamma_\alpha)_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \{ -\Lambda_{\tilde{\nu}\mu}^-(\mathbf{p}_1') \} (\gamma_\beta)_{\mu\nu} \right]_{(\mu)} \\ &= \text{tr} \left[\frac{\not{p}_2' + m_\mu}{2m_\mu} \gamma_\alpha \frac{\not{p}_1' - m_\mu}{2m_\mu} \gamma_\beta \right], \\ B_{(e)}^{\alpha\beta} &\equiv \sum_{r_1, r_2} [(\bar{v}_{r_1})_{\tilde{\rho}} (\gamma^\alpha)_{\tilde{\rho}\tilde{\sigma}} (u_{r_2})_{\tilde{\sigma}}]_{(e)} [(\bar{u}_{r_2})_\rho (\gamma^\beta)_{\rho\sigma} (v_{r_1})_\sigma]_{(e)} \\ &= \left[\left(\sum_{r_1} (v_{r_1})_\sigma (\bar{v}_{r_1})_{\tilde{\rho}} \right) (\gamma^\alpha)_{\tilde{\rho}\tilde{\sigma}} \left(\sum_{r_2} (u_{r_2})_{\tilde{\sigma}} (\bar{u}_{r_2})_\rho \right) (\gamma^\beta)_{\rho\sigma} \right]_{(e)} \\ &= \left[\{ -\Lambda_{\sigma\tilde{\rho}}^-(\mathbf{p}_1) \} (\gamma^\alpha)_{\tilde{\rho}\tilde{\sigma}} \Lambda_{\tilde{\sigma}\rho}^+(\mathbf{p}_2) (\gamma^\beta)_{\rho\sigma} \right]_{(e)} \\ &= \text{tr} \left[\frac{\not{p}_1 - m_e}{2m_e} \gamma^\alpha \frac{\not{p}_2 + m_e}{2m_e} \gamma^\beta \right] \end{aligned}$$

であり, これらの γ 行列の積のトレースを計算すると

$$\begin{aligned}
A_{(\mu)\alpha\beta} &= \frac{1}{4m_\mu^2} [\text{tr}(\not{p}_2' \gamma_\alpha \not{p}_1' \gamma_\beta) - m_\mu^2 \text{tr}(\gamma_\alpha \gamma_\beta)] \\
& (\because \text{式 (371)}, \text{すなわち奇数個の}\gamma\text{行列の積のトレースは消えること}) \\
&= \frac{1}{4m_\mu^2} [p_2'^\gamma p_1'^\delta \times 4(g_{\gamma\alpha} g_{\delta\beta} - g_{\gamma\delta} g_{\alpha\beta} + g_{\gamma\beta} g_{\alpha\delta}) - m_\mu^2 \times 4g_{\alpha\beta}] \quad (\because \text{式 (372)}, \text{式 (373)}) \\
&= \frac{1}{m_\mu^2} [p_1'_\alpha p_2'_\beta + p_2'_\alpha p_1'_\beta - (m_\mu^2 + p_1' \cdot p_2') g_{\alpha\beta}]
\end{aligned}$$

および同様に

$$B_{(e)\alpha\beta} = \frac{1}{m_e^2} [p_1^\alpha p_2^\beta + p_2^\alpha p_1^\beta - (m_e^2 + p_1 \cdot p_2) g^{\alpha\beta}]$$

となる. これらを X の式に代入し

$$\begin{aligned}
a_{\alpha\beta} &\equiv p_1'_\alpha p_2'_\beta + p_1'_\beta p_2'_\alpha, \\
b_{\alpha\beta} &\equiv -(p_1' \cdot p_2' + m_\mu^2) g_{\alpha\beta}, \\
c^{\alpha\beta} &\equiv p_1^\alpha p_2^\beta + p_1^\beta p_2^\alpha, \\
d^{\alpha\beta} &\equiv -(p_1 \cdot p_2 + m_e^2) g^{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
X &= \frac{e^4}{4[(p_1 + p_2)^2]^2 m_e^2 m_\mu^2} (a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta})(c^{\alpha\beta} + d^{\alpha\beta}) \\
&= \frac{e^4}{4m_e^2 m_\mu^2 [(p_1 + p_2)^2]^2} \\
&\quad \times 2\{ (p_1 \cdot p_1')(p_2 \cdot p_2') + (p_1 \cdot p_2')(p_2 \cdot p_1') - \cancel{(p_1' \cdot p_2')(p_1 \cdot p_2)} - (p_1' \cdot p_2') m_e^2 \quad \Leftarrow \quad a_{\alpha\beta} c^{\alpha\beta} \\
&\quad - \cancel{(p_1 \cdot p_2)(p_1' \cdot p_2')} - (p_1 \cdot p_2) m_\mu^2 \quad \Leftarrow \quad a_{\alpha\beta} d^{\alpha\beta} \\
&\quad + \cancel{2(p_1 \cdot p_2)(p_1' \cdot p_2')} + 2(p_1' \cdot p_2') m_e^2 \quad \Leftarrow \quad b_{\alpha\beta} c^{\alpha\beta} \\
&\quad + 2(p_1 \cdot p_2) m_\mu^2 + 2m_e^2 m_\mu^2 \} \quad \Leftarrow \quad b_{\alpha\beta} d^{\alpha\beta} \\
&= \frac{e^4}{2m_e^2 m_\mu^2 [(p_1 + p_2)^2]^2} \{ (p_1 \cdot p_1')(p_2 \cdot p_2') + (p_1 \cdot p_2')(p_2 \cdot p_1') + (p_1' \cdot p_2') m_e^2 + (p_1 \cdot p_2) m_\mu^2 + 2m_e^2 m_\mu^2 \}
\end{aligned}$$

となる.

さて, 重心系を採用して図 150 に示したように

$$p_1 \equiv (E, \mathbf{p}), \quad p_2 \equiv (E, -\mathbf{p}), \quad p_1' \equiv (E, \mathbf{p}'), \quad p_2' \equiv (E, -\mathbf{p}')$$

とおき, \mathbf{p} と \mathbf{p}' の成す角を θ とする. また, $p \equiv |\mathbf{p}|, p' \equiv |\mathbf{p}'|$ と書く. 今, μ^\pm を生成するのに十分大きなエネルギー $E \geq m_\mu \gg m_e$ が与えられているため $p \simeq E$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned}
(p_1 + p_2)^2 &= 2m_e^2 + 2p_1 \cdot p_2 \simeq 2p_1 \cdot p_2 = 2(E^2 + p^2) \simeq 4E, \\
p_1 \cdot p_1' &= p_2 \cdot p_2' = E^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' = E^2 - pp' \cos \theta \simeq E(E - p' \cos \theta), \\
p_1 \cdot p_2' &= p_2 \cdot p_1' = E^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' = E^2 + pp' \cos \theta \simeq E(E + p' \cos \theta), \\
p_1 \cdot p_2 &= E^2 + p^2 \simeq 2E^2
\end{aligned}$$

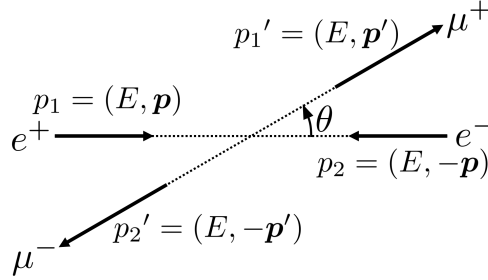


図 150 重心系で見た反応 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ における粒子の 4 元運動量 (3.8.3 節, 図 39 の再掲)

となる. X の式に中括弧 $\{$ 内の m_e^2 に比例する相対的に小さな項を無視した上でこれらを代入すると

$$X = \frac{e^4}{2m_e^2 m_\mu^2 (4E^2)^2} \{E^2(E-p' \cos \theta)^2 + E^2(E+p' \cos \theta)^2 + 2E^2 m_\mu^2\} = \frac{e^4}{16m_e^2 m_\mu^2 E^2} (E^2 + m_\mu^2 + p'^2 \cos^2 \theta)$$

を得る.

始・終状態の偏極を指定した微分断面積の表式 (426):

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CoM}} &= \frac{1}{64\pi^2 (E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2})^2} \frac{|\mathbf{p}_1'|}{|\mathbf{p}_1|} (2m_e)^2 (2m_\mu)^2 |\mathcal{M}|^2 \\ &\simeq \frac{m_e^2 m_\mu^2}{16\pi^2 E^2} \left(\frac{p'}{E}\right) |\mathcal{M}|^2 \\ &(\because E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2} = 2E, |\mathbf{p}_1| = p \simeq E) \end{aligned}$$

から得られる非偏極断面積の式

$$\frac{1}{4} \sum_{r_1, r_2, s_1, s_2} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CoM}} = \frac{m_e^2 m_\mu^2}{16\pi^2 E^2} \left(\frac{p'}{E}\right) X$$

を $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CoM}}$ と書き X の式を代入すると式 (427):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CoM}} = \frac{1}{16\pi^2 E^2} \frac{e^4}{16E^2} \left(\frac{p'}{E}\right) (E^2 + m_\mu^2 + p'^2 \cos^2 \theta) = \frac{\alpha^2}{16E^4} \left(\frac{p'}{E}\right) (E^2 + m_\mu^2 + p'^2 \cos^2 \theta)$$

を得る. 2 次の摂動論での確率振幅 S_{fi} の式 (420) は e の 2 次の量であり, その絶対値の 2 乗が確率を与えるため, これは微細構造定数 $\alpha \equiv e^2/4\pi$ の 2 乗に比例している. さらに $E \gg m_\mu$ の相対論的極限では

$$\frac{p'}{E} \simeq 1, \quad (E^2 + m_\mu^2 + p'^2 \cos^2 \theta) \simeq E^2(1 + \cos^2 \theta)$$

なので

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CoM}} = \frac{\alpha^2}{16E^2} (1 + \cos^2 \theta) \quad (E \gg m_\mu)$$

となる. これを全立体角で積分し, 全断面積 σ_{tot} を求めよう.

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2, \quad \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 \cos^2 \theta d(\cos \theta) = \frac{2}{3}$$

より

$$\int_0^\pi (E^2 + m_\mu^2 + p'^2 \cos^2 \theta) \times (2\pi \sin \theta d\theta) = 4\pi(E^2 + m_\mu^2) + 2\pi \cdot \frac{2}{3} p'^2 = 4\pi \left(E^2 + m_\mu^2 + \frac{1}{3} p'^2 \right)$$

なので式 (428):

$$\sigma_{\text{tot}} = \int d\sigma = \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CoM}} d\Omega = \frac{\pi\alpha^2}{4E^4} \left(\frac{p'}{E} \right) \left(E^2 + m_\mu^2 + \frac{1}{3} p'^2 \right)$$

を得る. これについても $E \gg m_\mu$ の相対論的極限での表式を求めると,

$$\frac{p'}{E} \simeq 1, \quad \left(E^2 + m_\mu^2 + \frac{1}{3} p'^2 \right) \simeq \frac{4}{3} E^2$$

なので式 (429):

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{\pi\alpha^2}{3E^2} \quad (E \gg m_\mu)$$

となる.

9.9 QED の Feynman 規則 (補足)

9.9.1 S 行列要素の計算の一般論 (補足)

■実過程としての QED の基本結節点エネルギー・運動量保存則を満たさないことの確認 3.9.1 節の図 41(図 151 として再掲) では $p = (E_p, \mathbf{p}), p' = (E_{p'}, \mathbf{p}')$ を l^\pm のいずれかの 4 元運動量, $k = (\omega, \mathbf{k})$ を γ の 4 元運動量として, 各々の過程でエネルギー・運動量が保存される条件式を付記している. このとき物理的な粒子の条件

$$p^2 = p'^2 = m_l^2, \quad k^2 = 0$$

の下で, 図 41 に記した保存則の式はいずれも両辺を 2 乗する (4 元内積をとる) ことにより $2p \cdot k = 0$ に帰着する. ところがこれは

$$p \cdot k = E_p \omega - \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} \geq E_p \omega - |\mathbf{p}| |\mathbf{k}| = \omega(E_p - |\mathbf{p}|) > 0$$

より成り立たない.

■3.9.1 節における $S^{(2)}$ の Wick 展開について ゼロでない縮約の作り方は表 8 のように網羅的にまとめられる. その他の縮約は

$$\begin{aligned} \underbrace{\psi}_{\square} \underbrace{\bar{\psi}}_{\square} \cdots \cdots \text{直交する状態 } |e^+ \rangle, |e^- \rangle \text{ の内積となって消える,} \\ \underbrace{\psi}_{\square} \underbrace{\bar{A}}_{\square} \cdots \cdots \text{直交する状態 } |e^\pm \rangle, |\gamma \rangle \text{ の内積となって消える.} \end{aligned}$$

(ただし例えば 1 電子状態を $\bar{\psi}^- |0\rangle = |e^- \rangle$ などと表記した.)

■3.9.1 節の $S_B^{(2)}$ の式における第 2 の等号について $S_B^{(2)}$ の式の 1 行目における 2 つの項は等しい.

$$N[\underbrace{(\bar{\psi} A \psi)_{x_1}}_{\square} (\bar{\psi} A \psi)_{x_2}] = N[(\bar{\psi} A \psi)_{x_1} \underbrace{(\bar{\psi} A \psi)_{x_2}}_{\square}].$$

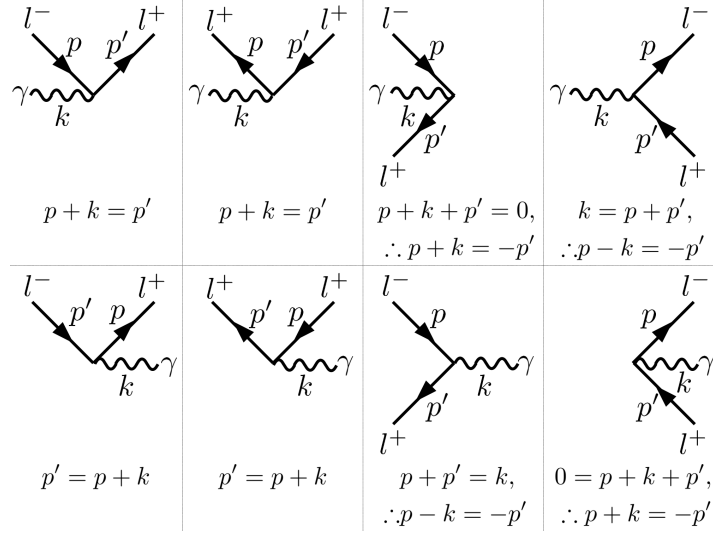


図 151 QED の基本結節点 (図 41 の再掲)

表 8 $S^{(2)}$ の Wick 展開 (3.9.1 節) におけるゼロにならない縮約

$\mathcal{H}_I(x_1)$ から選ぶ場	$\mathcal{H}_I(x_2)$ から選ぶ場
$\bar{\psi}$	ψ
A	A
ψ	$\bar{\psi}$

スピノル添字を明記すると、このことは次のように確かめられる。

$$\begin{aligned} & N[(\bar{\psi}_\alpha A_{\alpha\beta} \psi_\beta)_{x_1} (\bar{\psi}_\gamma A_{\gamma\delta} \psi_\delta)_{x_2}] \\ &= \langle 0 | T \{ \bar{\psi}_\alpha(x_1) \psi_\delta(x_2) \} | 0 \rangle N[(A_{\alpha\beta} \psi_\beta)_{x_1} (\bar{\psi}_\gamma A_{\gamma\delta})_{x_2}] \end{aligned} \quad (774)$$

$$\begin{aligned} &= (-\langle 0 | T \{ \psi_\delta(x_2) \bar{\psi}_\alpha(x_1) \} | 0 \rangle) (-N[(\bar{\psi}_\gamma A_{\gamma\delta})_{x_2} (A_{\alpha\beta} \psi_\beta)_{x_1}]) \\ &= \langle 0 | T \{ \psi_\delta(x_2) \bar{\psi}_\alpha(x_1) \} | 0 \rangle N[(\bar{\psi}_\gamma A_{\gamma\delta})_{x_2} (A_{\alpha\beta} \psi_\beta)_{x_1}] \\ &= N[(\bar{\psi}_\gamma A_{\gamma\delta} \psi_\delta)_{x_2} (\bar{\psi}_\alpha A_{\alpha\beta} \psi_\beta)_{x_1}]. \end{aligned} \quad (775)$$

上式 (774), (775) は 1×1 構造を持つけれど、スピノル添字を省くと、見かけ上 4×4 行列を作る行列積の形

$$\begin{pmatrix} (A\psi)_{x_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\bar{\psi}A)_{x_2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \psi(x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\psi}(x_1) \end{pmatrix}$$

が現れる。そこで誤解を防ぐために、ここではスピノル添字を導入した。

■3.9.1 節の $S_D^{(2)}$ の式における第 2 の等号について $S_D^{(2)}$ の式の 1 行目における 2 つの項は等しい。実際、第 2 項は積分変数を $x_1 \leftrightarrow x_2$ と入れ替えると、

$$\begin{aligned} & N[(\bar{\psi}_\gamma^\alpha A_{\alpha\beta} \psi_\beta)_{x_2} (\bar{\psi}_\gamma^\beta A_{\beta\alpha} \psi_\alpha)_{x_1}] \\ &= \gamma^\alpha \gamma^\beta \bar{\psi}(x_2) \psi(x_1) A_\alpha(x_2) A_\beta(x_1) N[\psi(x_2) \bar{\psi}(x_1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \gamma^\alpha \gamma^\beta \underbrace{\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)}_{\text{}} \underbrace{A_\beta(x_1) A_\alpha(x_2)}_{\text{}} N[\bar{\psi}(x_1) \psi(x_2)] \\
&= N[\underbrace{(\bar{\psi} \gamma^\alpha A_\alpha \psi)_{x_1}}_{\text{}} \underbrace{(\bar{\psi} \gamma^\beta A_\beta \psi)_{x_2}}_{\text{}}]
\end{aligned}$$

と書き換えられ、第1項に一致する。ただし第2の等号では縮約 (T 積) と正規積の中でフェルミオン場を入れ替えると、それぞれ符号が入れ替わることを考慮した。

9.9.2 1次の項 $S^{(1)}$ (補足)

■行列要素 $\langle f | S^{(1)} | i \rangle$ の式 (438), (439) の導出 専ら式 (432)–(437) を利用すると、

$$\begin{aligned}
&\langle f | S^{(1)} | i \rangle \\
&= \langle e^- \mathbf{p}' s'; \gamma \mathbf{k}' r' | i e \int d^4 x \bar{\psi}^-(x) \gamma^\alpha A_\alpha^-(x) \psi^+(x) | e^- \mathbf{p} s \rangle \\
&= i e \int d^4 x \left[\left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') e^{i\mathbf{p}' \cdot x} \right] \gamma^\alpha \left[\left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \varepsilon_{r'\alpha}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}' \cdot x} \right] \left[\left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} u_s(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p} \cdot x} \right] \langle 0 | 0 \rangle \\
&= \left[\int d^4 x e^{i(\mathbf{p}' + \mathbf{k}' - \mathbf{p}) \cdot x} \right] \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} [i e \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \not{\varepsilon}_{r'}(\mathbf{k}' = \mathbf{p} - \mathbf{p}') u_s(\mathbf{p})]
\end{aligned}$$

となる。最右辺における座標 x に関する積分は、保存則に関するデルタ関数になる。

$$\int d^4 x e^{i(\mathbf{p}' + \mathbf{k}' - \mathbf{p}) \cdot x} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathbf{p}' + \mathbf{k}' - \mathbf{p}).$$

よって式 (438), (439) を得る。

9.9.3 電子-電子散乱 (Møller 散乱) (補足)

■ $S_C^{(2)}$ における Møller 散乱へ寄与 (440) の導出

$$S_C^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4 x_1 d^4 x_2 N[(\bar{\psi} \gamma^\alpha \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \gamma^\beta \psi)_{x_2}] i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2)$$

において、この過程に寄与する部分は

$$S^{(2)}(2e^- \rightarrow 2e^-) = -\frac{e^2}{2!} \int d^4 x_1 d^4 x_2 N[(\bar{\psi}^- \gamma^\alpha \psi^+)_{x_1} (\bar{\psi}^- \gamma^\beta \psi^+)_{x_2}] i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2)$$

に限定できる。さらに $\psi^+(x)$, $\bar{\psi}^-(x)$ それぞれにおける $c(j)$, $c^\dagger(j)$ に比例する成分を

$$\psi_j^+(x) = c(j) f_j(x), \quad \bar{\psi}_j^-(x) = c^\dagger(j) g_j(x)$$

と書く。 $j = (r, \mathbf{p})$ として具体的に書くと

$$\psi_j^+(x) = c_r(\mathbf{p}) \underbrace{\left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} u_r(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p} \cdot x}}_{f_j(x)}, \quad \bar{\psi}_j^-(x) = c_r^\dagger(\mathbf{p}) \underbrace{\left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \bar{u}_r(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot x}}_{g_j(x)}$$

である。すると、

- ψ_1^+, ψ_2^+ を $\psi^+(x_1), \psi^+(x_2)$ のどちらから選ぶか (2通り)
- $\bar{\psi}_1^-, \bar{\psi}_2^-$ を $\bar{\psi}^-(x_1), \bar{\psi}^-(x_2)$ のどちらから選ぶか (2通り)

に応じて4つの項が得られる：

$$\begin{aligned}
& -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi}_1^- \gamma^\alpha \psi_1^+)_{x_1} (\bar{\psi}_2^- \gamma^\beta \psi_2^+)_{x_2} \\
& \quad + (\bar{\psi}_2^- \gamma^\alpha \psi_2^+)_{x_1} (\bar{\psi}_1^- \gamma^\beta \psi_1^+)_{x_2} \\
& \quad + (\bar{\psi}_2^- \gamma^\alpha \psi_1^+)_{x_1} (\bar{\psi}_1^- \gamma^\beta \psi_2^+)_{x_2} \\
& \quad + (\bar{\psi}_1^- \gamma^\alpha \psi_2^+)_{x_1} (\bar{\psi}_2^- \gamma^\beta \psi_1^+)_{x_2}] iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2).
\end{aligned}$$

上式の1行目と2行目、3行目と4行目はそれぞれ積分変数が $x_1 \leftrightarrow x_2$ と入れ替わっているだけの違いしかないで、互いに等しい。よって考えている Møller 散乱の振幅への寄与は、2本の式(440)：

$$\begin{aligned}
S_a &= -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi}_1^- \gamma^\alpha \psi_1^+)_{x_1} (\bar{\psi}_2^- \gamma^\beta \psi_2^+)_{x_2}] iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2), \\
S_b &= -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi}_2^- \gamma^\alpha \psi_1^+)_{x_1} (\bar{\psi}_1^- \gamma^\beta \psi_2^+)_{x_2}] iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2)
\end{aligned}$$

の和 $S_a + S_b$ となる。

■ Møller 散乱の行列要素 (442) の導出

$$\begin{aligned}
\langle f | S_a | i \rangle &= \langle f | N[c^\dagger(1')c(1)c^\dagger(2')c(2)] | i \rangle \times (-e^2) \int d^4x_1 d^4x_2 g_{1'}(x_1) \gamma^\alpha f_1(x_1) g_{2'}(x_2) \gamma^\beta f_2(x_2) iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) \\
&= \langle f | \{-c^\dagger(1')c^\dagger(2')c(1)c(2)\} | i \rangle \times (-e^2) \int d^4x_1 d^4x_2 g_{1'}(x_1) \gamma^\alpha f_1(x_1) g_{2'}(x_2) \gamma^\beta f_2(x_2) iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) \\
&= -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 g_{1'}(x_1) \gamma^\alpha f_1(x_1) g_{2'}(x_2) \gamma^\beta f_2(x_2) iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2), \\
\langle f | S_b | i \rangle &= \langle f | N[c^\dagger(2')c(1)c^\dagger(1')c(2)] | i \rangle \times (-e^2) \int d^4x_1 d^4x_2 g_{2'}(x_1) \gamma^\alpha f_1(x_1) g_{1'}(x_2) \gamma^\beta f_2(x_2) iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) \\
&= \langle f | \{+c^\dagger(1')c^\dagger(2')c(1)c(2)\} | i \rangle \times (-e^2) \int d^4x_1 d^4x_2 g_{2'}(x_1) \gamma^\alpha f_1(x_1) g_{1'}(x_2) \gamma^\beta f_2(x_2) iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) \\
&= +e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 g_{2'}(x_1) \gamma^\alpha f_1(x_1) g_{1'}(x_2) \gamma^\beta f_2(x_2) iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2).
\end{aligned}$$

ただし2式のいずれも、最後の等号では

$$\begin{aligned}
c(1)c(2) | i \rangle &= c(1)c(2) \{c^\dagger(2)c^\dagger(1) | 0 \rangle\} = c(1) \{-c^\dagger(2)c(2) + 1\} c^\dagger(1) | 0 \rangle = c(1)c^\dagger(1) | 0 \rangle = -| 0 \rangle, \\
\therefore \langle f | c^\dagger(1')c^\dagger(2') &= \{ \langle 0 | c(1')c(2') \} c^\dagger(1')c^\dagger(2') = -\langle 0 | c(1')c(2')^\dagger(2')c^\dagger(1') = +\langle 0 |, \\
\therefore \langle f | c^\dagger(1')c^\dagger(2')c(1)c(2) &| i \rangle = -\langle 0 | 0 \rangle = -1
\end{aligned}$$

を用いた。これらを足すと式(442)：

$$\begin{aligned}
\langle f | S^{(2)}(2e^- \rightarrow 2e^-) | i \rangle &= \langle f | S_a^{(2)} | i \rangle + \langle f | S_b^{(2)} | i \rangle, \\
\langle f | S_a^{(2)} | i \rangle &= \left\{ -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 g_{1'}(x_1) \gamma^\alpha f_1(x_1) g_{2'}(x_2) \gamma^\beta f_2(x_2) iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) \right\}, \\
\langle f | S_b^{(2)} | i \rangle &= -\{1' \leftrightarrow 2'\}
\end{aligned}$$

が得られる。

■Møller 散乱の S 行列要素 (443)–(445) の導出 既に導いた S 行列要素の式 (442) から出発すれば良い。電子状態を

$$1 = (r, \mathbf{p}_1), \quad 2 = (s, \mathbf{p}_2), \quad 1' = (r', \mathbf{p}'_1), \quad 2' = (s', \mathbf{p}'_s)$$

と表記・設定したことを念頭に置いて詳しく書くと、

$$\begin{aligned} \langle f | S_a | i \rangle &= -e^2 \int d^4 x_1 d^4 x_2 \left[\left(\frac{m}{VE'_1} \right)^{1/2} \bar{u}_{r'}(\mathbf{p}'_1) e^{ip'_1 \cdot x_1} \right] \gamma^\alpha \left[\left(\frac{m}{VE_1} \right)^{1/2} u_r(\mathbf{p}_1) e^{-ip_1 \cdot x_1} \right] \\ &\quad \times \left[\left(\frac{m}{VE'_2} \right)^{1/2} \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}'_2) e^{ip'_2 \cdot x_2} \right] \gamma^\beta \left[\left(\frac{m}{VE_2} \right)^{1/2} u_s(\mathbf{p}_2) e^{-ip_2 \cdot x_2} \right] iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2), \\ \langle f | S_b | i \rangle &= -\langle f | S_a | i \rangle |_{1' \leftrightarrow 2'} \end{aligned}$$

である。これらを完全に運動量空間に移すために、伝播関数を

$$iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} iD_{F\alpha\beta}(k) e^{-ik \cdot (x_1 - x_2)}$$

と Fourier 展開して計算を続けると、

$$\begin{aligned} \langle f | S_a | i \rangle &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int d^4 x_1 e^{i(p'_1 - p_1 - k) \cdot x_1} \int d^4 x_2 e^{i(p'_2 - p_2 + k) \cdot x_2} \left(\frac{m}{VE_1} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE_2} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE'_1} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE'_2} \right)^{1/2} \\ &\quad \times (-e^2) [\bar{u}_{r'}(\mathbf{p}'_1) \gamma^\alpha u_r(\mathbf{p}_1) \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}'_2) \gamma^\beta u_s(\mathbf{p}_2)] iD_{F\alpha\beta}(k) \end{aligned}$$

となる。座標 x_1, x_2 に関する積分はデルタ関数

$$\begin{aligned} &(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'_1 - p_1 - k) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'_2 - p_2 + k) \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'_2 - p_2 + k) \end{aligned}$$

になることに注意して 4 元運動量 k に関する積分を実行すると、

$$\begin{aligned} \langle f | S_a | i \rangle &= \left[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p - k) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{m}{VE_1} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE_2} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE'_1} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE'_2} \right)^{1/2} \right] \mathcal{M}_a, \\ \mathcal{M}_a &= -e^2 \bar{u}_{r'}(\mathbf{p}'_1) \gamma^\alpha u_r(\mathbf{p}_1) iD_{F\alpha\beta}(k = p_2 - p'_2) \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}'_2) \gamma^\beta u_s(\mathbf{p}_2) : (444) \end{aligned}$$

を得る。ここから

$$\begin{aligned} \langle f | S_b | i \rangle &= -\langle f | S_a | i \rangle |_{1' \leftrightarrow 2'} \\ &= \left[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p - k) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{m}{VE_1} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE_2} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE'_1} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE'_2} \right)^{1/2} \right] \mathcal{M}_b, \\ \mathcal{M}_b &= -(\mathcal{M}_a) |_{1' \leftrightarrow 2'} \\ &= +e^2 \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}'_2) \gamma^\alpha u_r(\mathbf{p}_1) iD_{F\alpha\beta}(k = p_2 - p'_1) \bar{u}_{r'}(\mathbf{p}'_1) \gamma^\beta u_s(\mathbf{p}_2) : (445), \\ \langle f | S^{(2)}(2e^- \rightarrow 2e^-) | i \rangle &= \langle f | S_a | i \rangle + \langle f | S_b | i \rangle : (443) \end{aligned}$$

が導かれる。

9.9.4 閉じたループ (補足)

■電子の自己エネルギーダイアグラムに関する S 行列要素 (446), (447) の導出 電子の自己エネルギーダイアグラム (図 47) に寄与するのは, 3.9.1 節の $S_D^{(2)}$ における

$$S^{(2)}(e^- \rightarrow e^-) = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\alpha iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_2) iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2)$$

の部分である. よって遷移

$$|i\rangle = c^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle \rightarrow |f\rangle = c^\dagger(\mathbf{p}') |0\rangle$$

に関する, 図 47 に対応する S 行列要素は

$$\begin{aligned} & \langle f | S^{(2)}(e^- \rightarrow e^-) | i \rangle \\ &= -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \left[\left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \bar{u}(\mathbf{p}') e^{ip' \cdot x_1} \right] \gamma^\alpha \left[\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} iS_F(q) e^{-iq \cdot (x_1 - x_2)} \right] \gamma^\beta \\ & \quad \times \left[\left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} u(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x_2} \right] \left[\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iD_{F\alpha\beta}(k) e^{-ik \cdot (x_1 - x_2)} \right] \end{aligned}$$

と計算される. 座標 x_1, x_2 に関する積分はデルタ関数

$$\begin{aligned} & (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - (p' - k)) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - (p - k)) \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - (p - k)) \end{aligned}$$

を与えることに注意し, 運動量 q に関する積分を実行すると, S 行列要素の式 (446), (447) が得られる.

■光子の自己エネルギーに関する S 行列要素 (450) の導出 S 演算子において電子の自己エネルギーダイアグラム (図 48) に寄与するのは, 3.9.1 節の式 (448):

$$S^{(2)}(\gamma \rightarrow \gamma) = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N[\underbrace{(\bar{\psi} A^- \psi)_{x_1} (\bar{\psi} A^+ \psi)_{x_2}}]$$

の部分である. そして正規積の部分はトレース (449):

$$N[\underbrace{(\bar{\psi} A^- \psi)_{x_1} (\bar{\psi} A^+ \psi)_{x_2}}] = (-1) \text{Tr}[iS_F(x_2 - x_1) A^-(x_1) iS_F(x_1 - x_2) A^+(x_2)]$$

で与えられたことを思い出そう. よって図 48 の遷移 $|i\rangle = |\gamma \mathbf{k}\rangle \rightarrow |f\rangle = |\gamma \mathbf{k}'\rangle$ に対応する S 行列要素は

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(2)}(\gamma \rightarrow \gamma) | i \rangle &= (-1)(-e^2) \int d^4x_1 d^4x_2 \text{Tr} \left[\left\{ \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} iS_F(q) e^{-iq \cdot (x_2 - x_1)} \right\} \gamma^\alpha \left\{ \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \varepsilon_\alpha(\mathbf{k}') e^{ik' \cdot x_2} \right\} \right. \\ & \quad \times \left. \left\{ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} iS_F(p) e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)} \right\} \gamma^\beta \left\{ \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_\beta(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x_1} \right\} \right] \end{aligned}$$

と計算される. 座標 x_1, x_2 に関する積分はデルタ関数

$$\begin{aligned} & (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p - k) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(-q + k' + p) \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p - k) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k' - k) \end{aligned}$$

を与えることに注意し、運動量 q に関する積分を実行すると、S 行列要素 (450):

$$\begin{aligned}\langle f|S^{(2)}(\gamma \rightarrow \gamma)|i\rangle &= \left[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k' - k) \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \right] \mathcal{M}, \\ \mathcal{M} &= \text{Tr} \left[e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} iS_F(p+k) \not{\epsilon}(\mathbf{k}') iS_F(p) \not{\epsilon}(\mathbf{k}) \right] \\ &= -e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\not{\epsilon}(\mathbf{k}) iS_F(p+k) \not{\epsilon}(\mathbf{k}') iS_F(p)]\end{aligned}$$

を得る.

9.9.5 外場による散乱 (補足)

■外場による電子散乱の S 行列要素 (452) の導出 S 演算子 (451) において散乱に最低次の寄与をするのは、1 次の項

$$S_e^{(1)} = ie \int d^4 x \bar{\psi}^-(x) A_e(x) \psi^+(x)$$

である. $p = (E, \mathbf{p}), p' = (E', \mathbf{p}')$ と書くと、その行列要素は

$$\begin{aligned}\langle f|S_e^{(1)}|i\rangle &= \langle e^- \mathbf{p}' s | ie \int d^4 x \bar{\psi}^-(x) A_e(x) \psi^+(x) | e^- \mathbf{p} r \rangle \\ &= ie \int d^4 x \left[\left(\frac{m}{VE'} \right)^{1/2} \bar{u}_s(\mathbf{p}') e^{ip' \cdot x} \right] \gamma^\alpha \left[\int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} A_{e\alpha}(\mathbf{q}) e^{-iq \cdot x} \right] \left[\left(\frac{m}{VE} \right)^{1/2} u_r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} \right] \\ &= \left(\frac{m}{VE'} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE} \right)^{1/2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left[\int d^4 x e^{ip' \cdot x} e^{-iq \cdot x} e^{-ip \cdot x} \right] ie \bar{u}_s(\mathbf{p}') \gamma^\alpha A_{e\alpha}(\mathbf{q}) u_r(\mathbf{p})\end{aligned}$$

であり、最右辺の座標 x に関する積分は

$$\int dt e^{i(E'-E)t} \int d^3 x e^{-i(\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{x}} = (2\pi)^4 \delta(E' - E) \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{q})$$

となることに注意して \mathbf{q} に関する積分を実行すると、S 行列要素の式 (452) が得られる.

9.9.6 QED の Feynman 規則 (補足)

■数値因子 $(2\pi)^4$ について 一見すると 3.9.6 節の Feynman 規則では数値因子として、

- 各結節点 x の積分から生じるデルタ関数に付随する $(2\pi)^4$
- 各内線に対応する伝播関数の Fourier 展開に付随する $(2\pi)^{-4}$

を考慮していない. よって n 個の結節点と f_i 本のフェルミオン内線, b_i 本のボゾン内線を持つ Feynman ダイアグラムに対して、Feynman 振幅には

$$[(2\pi)^4]^{n-f_i-b_i-1}$$

を補う必要があるように見える (指数末尾の -1 は、S 行列要素 (453) において Feynman 振幅から分離した $(2\pi)^4$ に対応する). しかしながら具体的なループダイアグラムを通して見たように、これは規則 7 のループ積分 $\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$ に含めておいた $(2\pi)^4$ 因子に他ならない*244. よって数値因子は既に出尽くしており、改めて因子 $(2\pi)^4$ を考慮するには及ばない.

*244 すなわちダイアグラムの含むループの個数を l とすると、 $n - f_i - b_i - 1 = -l$ が成り立つ. (特にループの個数が $l = 0$ のとき、デルタ関数と伝播関数からの寄与 $[(2\pi)^4]^{n-f_i-b_i-1}$ は自動的に相殺して 1 になる.)

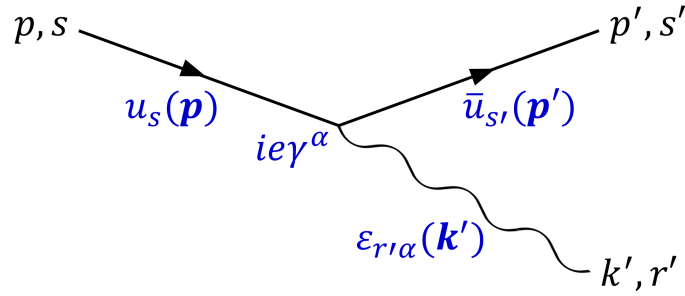


図 152 1 次過程 $e^-(\mathbf{p}, s) \rightarrow e^-(\mathbf{p}', s') + \gamma(\mathbf{k}', r')$ (図 43 の再掲)

■Feynman 振幅 (439) を 3.9.6 節の Feynman 規則に従って導くこと 3.9.6 節の Feynman 規則 1,4(a)(b)(f) に基づき図 43(図 152 として再掲) のように, Feynman グラフに結節点因子と外線因子を充てることができる. 規則 5 に従ってフェルミオン因子を並べ (この際, ボゾンの因子 $\epsilon_{r'\alpha}(\mathbf{k}')$ をどこに挿入しても式の意味は変わらない), 次いで規則 7 に従って保存則 $\mathbf{k}' = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ を成立させると Feynman 振幅 (439):

$$\mathcal{M} = ie\bar{u}_{s'}(\mathbf{p}')\not{\epsilon}_{r'}(\mathbf{k}' = \mathbf{p} - \mathbf{p}')u_s(\mathbf{p})$$

が得られる.

■Feynman 規則から改めて Møller 散乱の Feynman 振幅 (444), (445) を導くこと 3.9.6 節の Feynman 規則 1,2,4(a)(b) に基づき図 46(図 153 として再掲) のように, Feynman グラフに結節点・外線・内線因子を充てることができる (スピン添字は省略). 規則 5 に従ってフェルミオン因子を並べると

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_a &\sim [\bar{u}(\mathbf{p}'_1)ie\gamma^\alpha u(\mathbf{p}_1)]iD_{F\alpha\beta}(k)[\bar{u}(\mathbf{p}'_2)ie\gamma^\beta u(\mathbf{p}_2)], \\ \mathcal{M}_b &\sim [\bar{u}(\mathbf{p}'_2)ie\gamma^\alpha u(\mathbf{p}_1)]iD_{F\alpha\beta}(k)[\bar{u}(\mathbf{p}'_1)ie\gamma^\beta u(\mathbf{p}_2)]\end{aligned}$$

となる (式がまだ完全には確定していることを「 \sim 」で表しておいた). ここで $[\dots]$ 内の因子は一続きのフェルミオン線に由来しており, その内部で順番を入れ替えることはできないけれど, $[\dots]$ 全体を式のどこに書くかは任意と考えられる. 次いで規則 7 に従って保存則

$$\begin{cases} k = p_2 - p'_2 & (\mathcal{M}_a \text{ に対して}) \\ k = p_2 - p'_1 & (\mathcal{M}_b \text{ に対して}) \end{cases}$$

を成立させ, さらに規則 8 を考慮して \mathcal{M}_b に符号因子 (-1) を掛けると, Feynman 振幅 (444), (445) が得られる.

■Feynman 規則から改めて, 電子の自己エネルギーに関する Feynman 振幅 (447) を導くこと 3.9.6 節の Feynman 規則 1,2,3,4(a)(b) に基づき図 47(図 154 として再掲) のように, Feynman グラフに結節点・外線・内線因子を充てることができる (スピン添字は省略). 規則 5 に従ってフェルミオン因子を並べると

$$\mathcal{M} \sim iD_{F\alpha\beta}(k)\bar{u}(\mathbf{p})ie\gamma^\beta iS_F(q)ie\gamma^\alpha u(\mathbf{p})$$

となる (式がまだ完全には確定していることを「 \sim 」で表しておいた). 次に規則 7 に従って $q = p - k$ と書き, 積分 $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$ を施すと, Feynman 振幅 (447) が得られる.

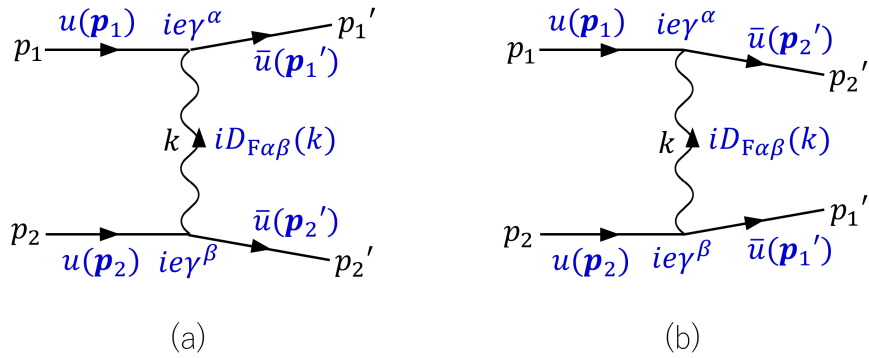


図 153 電子-電子散乱 (Møller 散乱). (図 46 の再掲)

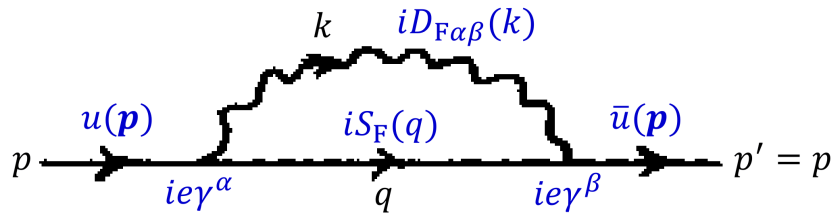


図 154 電子の自己エネルギー (図 47 の再掲)

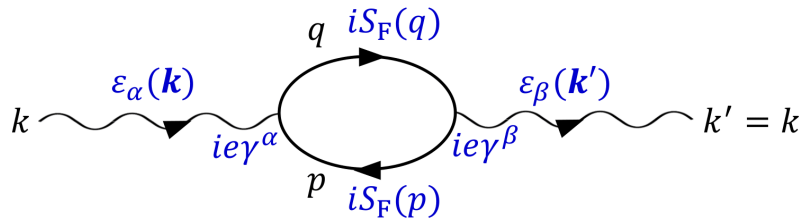


図 155 光子の自己エネルギー (図 48 の再掲)

■Feynman 規則から改めて、光子の自己エネルギーに関する Feynman 振幅 (450) を導くこと 式 (450) の Feynman 振幅 \mathcal{M} が、3.9.6 節の Feynman 規則から導かれることを確かめておこう。Feynman 規則 1,3,4(e)(f) に基づき図 48(図 155 として再掲) のように、Feynman グラフに結節点・外線・内線因子を充てることができる。規則 5 に従ってこれらの因子を並べると

$$\mathcal{M} \sim \epsilon_\alpha(\mathbf{k})\epsilon_\beta(\mathbf{k}' = \mathbf{k})iS_F(p)ie\gamma^\beta iS_F(q)ie\gamma^\alpha$$

となる (式がまだ完全には確定していないことを「 \sim 」で表しておいた)。次に規則 6 に従ってフェルミオン線に関してトレースをとり、 (-1) を掛ける。さらに規則 7 を適用して $q = p + k$ と書き、積分 $\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$ を施すと、再び Feynman 振幅 (450) が得られる。

■Feynman 規則から改めて、外場による散乱に関する Feynman 振幅 (452) を導くこと 式 (452) の Feynman 振幅 \mathcal{M} が、3.9.6 節の Feynman 規則から導かれることを確かめておこう。Feynman 規則 1,4(a)(b),9 に基づき図 49(図 156 として再掲) のように、Feynman グラフに対応する因子を充てることことができる。規則 5 に

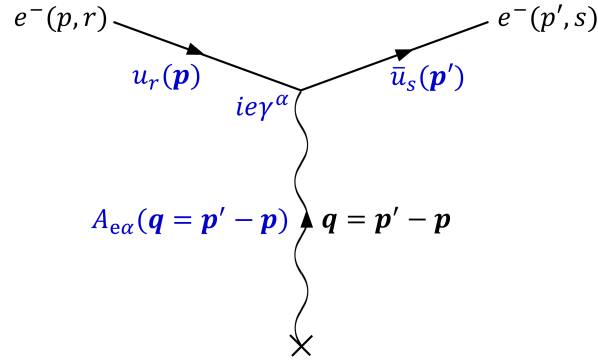


図 156 外場による散乱 (図 49 の再掲)

従ってこれらの因子を並べると

$$\mathcal{M} = [\bar{u}_s(\mathbf{p}')(ie\gamma^\alpha)u_r(\mathbf{p})] \times A_\alpha(\mathbf{q})$$

となる。最後に結節点における運動量保存則 $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$ を成立させると、Feynman 振幅 (452) が得られる。

9.10 輻射補正 (補足)

9.10.1 光子の自己エネルギー (補足)

■式 (456) における $k^\mu k^\nu B(k^2)$ の項を省ける理由 光子伝播関数は (S 行列展開において) 保存するカレントと結合しており、

$$\int d^4k s^\alpha(-k) iD_{F\alpha\beta}(k) s^\beta(k) \quad (776)$$

という形の結合が現れる。実際、S 行列展開の 2 次の項のうち、光子伝播関数を作る部分、例えば 3.9.1 節の

$$\begin{aligned} S_C^{(2)} &= \frac{(ie)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi)_{x_1}(\bar{\psi}\gamma^\beta\psi)_{x_2}] iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) \\ &= -\frac{1}{2} N \left[\int d^4x_1 d^4x_2 s^\alpha(x_1) iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) s^\beta(x_2) \right] \quad (\because s^\alpha = -e\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi) \end{aligned}$$

は光子伝播関数とカレントが結合した形をしている。これを運動量空間の積分に書き換えると、

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} N \left[\int \frac{d^4k d^4k' d^4k''}{(2\pi)^{12}} s^\alpha(k') iD_{F\alpha\beta}(k) s^\beta(k'') \int d^4x_1 d^4x_2 e^{-i(k'+k)\cdot x_1} e^{-i(k''-k)\cdot x_2} \right] \\ &= -\frac{1}{2} N \left[\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} s^\alpha(-k) iD_{F\alpha\beta}(k) s^\beta(k) \right] \end{aligned}$$

となる。

上式 (776) で伝播関数の置き換え (455) を行い、式 (456) を代入すると、カレント保存則

$$\partial_\mu s^\mu(x) = 0 \quad \rightarrow \quad k_\mu s^\mu(k) = 0$$

より光子の運動量 k に比例する項からの寄与はゼロになる。

■光子伝播関数の式 (457) への書き換えについて $A(k^2)$ を有限の量と仮定すれば

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon + e_0^2 A(k^2)} = \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon \left(1 + \frac{e_0^2 A(k^2)}{k^2 + i\varepsilon}\right)} = \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} \left(1 - \frac{e_0^2 A(k^2)}{k^2 + i\varepsilon}\right) + O(e_0^4).$$

■式 (459) の確認

$$\begin{aligned} \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon + e_0^2 A(k^2)} &= \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2} \frac{1}{1 + e_0^2 \{A'(0) + \Pi_c(k^2)\} + \frac{i\varepsilon}{k^2}} \\ &= \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2} \left\{ 1 - e_0^2 A'(0) - e_0^2 \Pi_c(k^2) - \frac{i\varepsilon}{k^2} \right\} \\ &= \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} [1 - e_0^2 A'(0) - e_0^2 \Pi_c(k^2)] \end{aligned}$$

による。

9.10.2 電子の自己エネルギー (補足)

■フェルミオンの自己エネルギー部分に関するループ積分の式 (462) の確認

$$\begin{aligned} ie_0^2 \Sigma(p) &= \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} \gamma^\alpha i \frac{\not{p} - \not{k} + m_0}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \gamma^\beta \quad (3.10.1 \text{ 節}) \\ &= -\frac{e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{\gamma^\alpha (\not{p} - \not{k} + m_0) \gamma_\alpha}{(k^2 + i\varepsilon) \{(p-k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon\}} \quad (\gamma_\alpha \equiv g_{\alpha\beta} \gamma^\beta) \\ &= \frac{e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \frac{2\not{p} - 2\not{k} - 4m_0}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon} : (462). \\ &(\because \gamma^\alpha (\not{p} - \not{k}) \gamma_\alpha = -2(\not{p} - \not{k}) : (366), \gamma^\alpha \gamma_\alpha = 4 : (367)) \end{aligned}$$

■正則化 (463) について 式 (463):

$$\frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon} = -\frac{\Lambda^2 - \lambda^2}{(k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon)(k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon)}$$

のように置き換えると、これは $k \rightarrow 0$ において分母が有限の値に留まり、 $k \rightarrow \infty$ において $1/k^2$ の代わりに $1/k^4$ のように振舞う。このため $ie_0^2 \Sigma(p)$ の式 (462) から赤外発散と紫外発散を取り除けるものと考えられる。

■恒等式 (465) の証明 任意の演算子 A, B (これらは非可換でもよい) に対して、恒等式 (465):

$$\frac{1}{A-B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \dots$$

が成立する。実際これは、両辺に左あるいは右から $A-B$ を掛けると

$$\begin{aligned} (A-B)(\text{上式右辺}) &= 1 + \cancel{B \frac{1}{A}} + \cancel{B \frac{1}{A} B \frac{1}{A}} + \dots \\ &\quad - \cancel{B \frac{1}{A}} - \cancel{B \frac{1}{A} B \frac{1}{A}} - \dots = 1, \\ (\text{上式右辺})(A-B) &= 1 + \cancel{\frac{1}{A} B} + \cancel{\frac{1}{A} B \frac{1}{A} B} + \dots \\ &\quad - \cancel{\frac{1}{A} B} - \cancel{\frac{1}{A} B \frac{1}{A} B} - \dots = 1 \end{aligned}$$

となることから分かる。

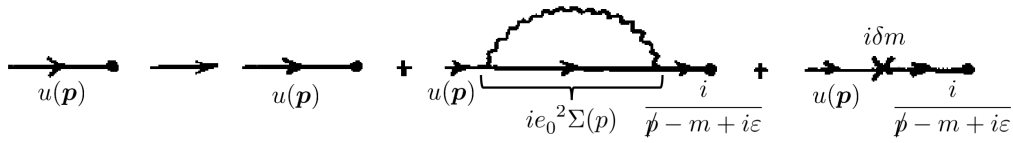


図 157 始状態側の電子の外線に対する 2 次補正 (図 56 の再掲)

■式 (467), (471), (472) の確認 修正された伝播関数 (464) の分母に $\Sigma(p)$ の展開 (466) を代入し, $\not{p} - m$ と等置すると

$$\not{p} - m_0 + e_0^2 \{A + (\not{p} - m)B + (\not{p} - m)\Sigma_c(p)\} = \not{p} - m$$

となる. これに $\not{p} = m$ を代入すると $\delta m = -e_0^2 A$: (467) を得る. このため伝播関数 (464) の分母に他ならない上式左辺は, $\not{p} - m_0 + e_0^2 A = \not{p} - m$ であることに注意して $\not{p} - m$ でくくると

$$(\not{p} - m)(1 + e_0^2 B + e_0^2 \Sigma_c(p))$$

となる (式 (471)). さらに式 (471) は

$$\begin{aligned} & \frac{i}{(\not{p} - m) \left\{ 1 + e_0^2 B + e_0^2 \Sigma_c(p) + \frac{i\varepsilon}{\not{p} - m} \right\}} + O(e_0^4) \\ &= \frac{i}{\not{p} - m} \left\{ (1 - e_0^2 B) - e_0^2 \Sigma_c(p) - \frac{i\varepsilon}{\not{p} - m} \right\} + O(e_0^4) \\ &= \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} \{ (1 - e_0^2 B) - e_0^2 \Sigma_c(p) \} + O(e_0^4) : (472) \end{aligned}$$

と書き換えられる.

なお式 (467): $\delta m = -e_0^2 A = -e_0^2 \Sigma(p)|_{\not{p}=m}$ は m_0 ではなく物理的な質量 m を既知として, その m_0 との差 δm を表した式である. 実際, 我々の観測するのは裸の粒子の質量 m_0 ではなく, 物理的粒子の質量 m である. 式 (467) を既知の m_0 から m を求める式と (誤って) 解釈した場合, これは未知量 δm を未知量 m で表した式に過ぎなくなる.

9.10.3 外線の繰り込み (補足)

■外線に対する補正の式 (474) について 図 56(図 157 として再掲) に対応する置き換え

$$u(\not{p}) \rightarrow u(\not{p}) + \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} [ie_0^2 \Sigma(p) + i\delta m]u(\not{p})$$

を書き, 式 (470) を代入して得られる.

■式 (474) の式 (475) への書き換え $(\not{p} - m)u(\not{p}) = 0$ であり, また $\not{p} \rightarrow m$ において $(\not{p} - m)\Sigma_c(p)$ は $(\not{p} - m)$ の 2 次でゼロに近づくので, 式 (474):

$$u(\not{p}) + \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} [ie_0^2 \Sigma(p) + i\delta m]u(\not{p})$$

の最後の項を省くことができる.

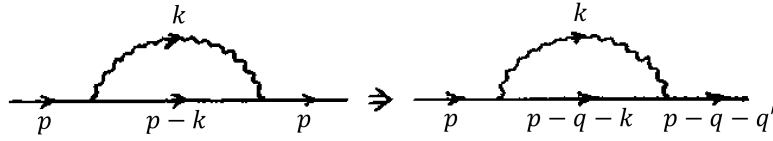


図 158 フェルミオン自己エネルギーループ (図 57 の再掲)

■断熱仮説の下での外線に対する補正の式 (477) について 式 (475) における分母 $\not{p} - m + i\varepsilon$ の p は図 57(図 158 として再掲する) 左側のグラフの右端のフェルミオン伝播関数の引数であり, $e_0^2 B(\not{p} - m)$ における p は同グラフ中央の補正項 $ie_0^2 \Sigma(p)$ の引数である. これを踏まえると図 57 右側のグラフに対応する式を書くには, 以上の 2 つの p を式 (477) のようにそれぞれ $\not{p} - q - \not{q}'$, $\not{p} - q$ に置き換えれば良い. さらに電荷 $e_0 f(t)$ の Fourier 展開に由来する, 不定のエネルギー E, E' に関する積分が施される.

もし Fourier 展開を式 (476) の代わりに

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(E) e^{iEt} \frac{dE}{2\pi}$$

のように定義したならば, 式 (477) にも $1/(2\pi)^2$ が現れると考えられる.

■式 (478) の導出 式 (477):

$$u(\mathbf{p}) \rightarrow \left[1 - \int dE dE' F(E) F(E') \frac{e_0^2 B}{\not{p} - \not{q} - \not{q}' - m + i\varepsilon} (\not{p} - \not{q} - m) \right] u(\mathbf{p})$$

において, $(\not{p} - m)u(\mathbf{p}) = 0$ より被積分関数の因子を

$$(\not{p} - \not{q} - m) \rightarrow (\not{p} - \not{q} - m) - \frac{1}{2}(\not{p} - m) = \frac{1}{2}(\not{p} - 2\not{q} - m)$$

と置き換えられる. ところがこの因子以外は q と q' に関して対称なので, さらに

$$\frac{1}{2}(\not{p} - 2\not{q} - m) \rightarrow \frac{1}{2}(\not{p} - \not{q} - \not{q}' - m)$$

と置き換えて良い.

理由 実際, 今考えている積分

$$I = \int dE dE' F(E) F(E') \frac{e_0^2 B}{\not{p} - \not{q} - \not{q}' - m + i\varepsilon} \frac{1}{2}(\not{p} - 2\not{q} - m)$$

は, 積分変数 E, E' を入れ替えた式

$$I = \int dE dE' F(E) F(E') \frac{e_0^2 B}{\not{p} - \not{q} - \not{q}' - m + i\varepsilon} \frac{1}{2}(\not{p} - 2\not{q}' - m)$$

と辺々足すことによって,

$$I = \int dE dE' F(E) F(E') \frac{e_0^2 B}{\not{p} - \not{q} - \not{q}' - m + i\varepsilon} \frac{1}{2}(\not{p} - \not{q} - \not{q}' - m)$$

とも書くことができる。結果的に

$$\frac{1}{2}(\not{p} - 2\not{q} - m) \rightarrow \frac{1}{2}(\not{p} - \not{q} - \not{q}' - m)$$

と置き換わっている。

よって

$$u(\mathbf{p}) \rightarrow \left[1 - \frac{1}{2}e_0^2 B \int dE dE' F(E)F(E') \right] u(\mathbf{p}).$$

さらに Fourier 展開 (476) は $F(E)$ に対する規格化条件

$$1 = f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} F(E) dE$$

を含意することを用いると、式 (478):

$$u(\mathbf{p}) \rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}e_0^2 B \right) u(\mathbf{p})$$

を得る。

9.10.4 結節点補正 (補足)

■ $\Lambda^\mu(p', p)$ の式 (479) における置き換え $m_0 \rightarrow m$ について $\Lambda^\mu(p', p)$ の式 (479) において m_0 が m に置き換わっているのは、3.10.3 節で導入された、最初に m_0 を m に置き換え質量相殺項を相互作用 Hamiltonian に含めるアプローチを採用していることを反映していると考えれば良い。外線の繰り込み (3.10.4 節) の際にもこちらのアプローチを採用した。

■ 式 (481) の導出 $\bar{\psi}\psi$ はスカラー、 $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ はベクトルとして変換することを思い出すと、Lorentz 不変性より a, b をスカラーの定数として

$$\bar{u}(\mathbf{P})\Lambda^\mu(P, P)u(\mathbf{P}) = a\bar{u}(\mathbf{P})\gamma^\mu u(\mathbf{P}) + bP^\mu\bar{u}(\mathbf{P})u(\mathbf{P}) \quad (777)$$

と表現できるはずである。ところが

$$2m\bar{u}_s(\mathbf{p}')\gamma^\mu u_r(\mathbf{p}) = \bar{u}_s(\mathbf{p}')[(p' + p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu]u_r(\mathbf{p}) \quad (778)$$

において $p' = p = P$ とおくと、右辺 (777) 第 2 項において

$$P^\mu\bar{u}(\mathbf{P})u(\mathbf{P}) = m\bar{u}(\mathbf{P})\gamma^\mu u(\mathbf{P})$$

と書き換えられる。よって上式 (777) は式 (481) の形 $L\bar{u}(\mathbf{P})\gamma^\mu u(\mathbf{P})$ をとる。

Gordon の恒等式 (778) の証明 [10, p.262] $u_r(\mathbf{p}) \equiv u, \bar{u}_s(\mathbf{p}') \equiv \bar{u}$ と略記すると、

$$(\not{p} - m)u = 0, \quad \bar{u}(\not{p}' - m) = 0$$

により任意のベクトル a_μ に対して

$$0 = \bar{u}[\not{a}(\not{p} - m) + (\not{p}' - m)\not{a}]u = \bar{u}[\not{a}\not{p} + \not{p}'\not{a} - 2m\not{a}]u$$

である。ここで公式 (374) により

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \sigma^{\nu\mu}$$

に対して

$$\not{a}\not{p} = a \cdot p - i\sigma^{\mu\nu} a_\mu p_\nu = a_\mu (p^\mu - i\sigma^{\mu\nu} p_\nu),$$

$$\not{p}'\not{a} = p' \cdot a - i\sigma^{\mu\nu} a_\nu p'_\mu = a_\mu (p'^\mu + i\sigma^{\mu\nu} p'_\nu)$$

なので, 上式は

$$a_\mu \bar{u}[(p' + p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu - 2m\gamma^\mu]u = 0$$

となる. これが任意の a_μ に対して成り立つことから, Gordon の恒等式 (778) を得る.

■ループ積分 (479) を式 (482) のように書き分けられることの直接的確認

$$\Delta \equiv \not{P} - \not{k} - m + i\varepsilon, \quad q \equiv p - P, \quad q' \equiv p' - P$$

と略記すると, 恒等式 (465) により

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu(p', p) &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 + i\varepsilon} \gamma^\alpha \left[\frac{1}{\not{q}' + \Delta} \gamma^\mu \frac{1}{\not{q} + \Delta} \right] \gamma_\alpha \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 + i\varepsilon} \gamma^\alpha \left[\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta} \not{q}' \frac{1}{\Delta} + \dots \right) \gamma^\mu \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta} \not{q} \frac{1}{\Delta} + \dots \right) \right] \gamma_\alpha \\ &\equiv L\gamma^\mu + \Lambda_c^\mu(p', p) \end{aligned}$$

なので,

$$L\gamma^\mu = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 + i\varepsilon} \gamma^\alpha \frac{1}{\Delta} \gamma^\mu \frac{1}{\Delta} \gamma_\alpha, \quad \Lambda_c^\mu(p', p) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 + i\varepsilon} O(\Delta^{-3})$$

と同定される (Δ が k の 1 次なので $k \rightarrow \infty$ において $L\gamma^\mu$ は対数的に発散し, $\Lambda_c^\mu(p', p)$ は収束する)^{*245}.

■2 次の輻射補正による正味の電荷の繰り込み (484) について 基のグラフとある輻射補正を行ったグラフを併せて考えた結果が, 電荷の繰り込みによって表現された. これを改めて基のグラフとして別の輻射補正を行ったグラフと併せて考える, というのを繰り返行うと, 正味の電荷の繰り込みは式 (484):

$$e = e_0 \frac{Z_3^{1/2} Z_2}{Z_1}$$

となる.

■Ward 恒等式 (485) の証明 $S_F(p)$ の引数を省略し, $S_F^{-1} = \not{p} - m$ に注意して $S_F S_F^{-1} = 1$ の両辺を p_μ で微分すると

$$\frac{\partial S_F}{\partial p_\mu} S_F^{-1} + S_F \frac{\partial}{\partial p_\mu} (\not{p} - m) = 0, \quad \therefore \frac{\partial S_F}{\partial p_\mu} S_F^{-1} = -S_F \gamma^\mu$$

を得る. 両辺に右から S_F をかけると

$$\frac{\partial S_F}{\partial p_\mu} = -S_F \gamma^\mu S_F$$

^{*245} これは光子伝播関数の部分が $1/(k^2 + i\varepsilon)$ のようになっているため, 既に $\Lambda \rightarrow \infty$ の極限をとって QED を復元した式と見なせることに注意しよう.

となる。これを用いると Ward 恒等式 (485):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p_\mu} &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} i D_{F\alpha\beta}(k) \gamma^\alpha i \frac{\partial S_F(p-k)}{\partial p_\mu} \gamma^\beta \quad (\because \Sigma(p) \text{ の式 (3.10.1 節)}) \\ &= i^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} i D_{F\alpha\beta}(k) \gamma^\alpha [i S_F(p-k) \gamma^\mu i S_F(p-k)] \gamma^\beta \\ &= \Lambda^\mu(p, p) \quad (\because \Lambda^\mu(p, p) \text{ の式 (3.10.1 節)})\end{aligned}$$

を得る。

■式 (486): $Z_2 = Z_1$ の導出 Ward 恒等式 (485) より自由粒子スピノル $u(\mathbf{P})$ に対する関係

$$\bar{u}(\mathbf{P}) \frac{\partial \Sigma(P)}{\partial P_\mu} u(\mathbf{P}) = \bar{u}(\mathbf{P}) \Lambda^\mu(P, P) u(\mathbf{P}) \quad (779)$$

が得られる。 $\Sigma(P)$ の具体的な表式 (466) を代入し

$$\bar{u}(\mathbf{P})(\not{P} - m) = 0, \quad \Sigma_c(P)u(\mathbf{P}) = 0$$

を用いると, 上式 (779) の左辺は

$$\bar{u}(\mathbf{P}) \left[\gamma^\mu B + \Sigma_c(P) + (\not{P} - m) \frac{\partial \Sigma_c(P)}{\partial P_\mu} \right] u(\mathbf{P}) = B \bar{u}(\mathbf{P}) \gamma^\mu u(\mathbf{P})$$

と計算できる。他方, 式 (779) の右辺は式 (481) より $L \bar{u}(\mathbf{P}) \gamma^\mu u(\mathbf{P})$ に等しいので, これらを等置して

$$B = L \quad (780)$$

が見出される。すると

$$\begin{aligned}Z_1 &\simeq 1 - e_0^2 L \quad (\text{式 (483)}) \\ &= 1 - e_0^2 B \quad (\text{式 (780)}) \\ &\simeq Z_2 : (486) \quad (\text{式 (473)})\end{aligned}$$

とできる。

9.11 正則化 (補足)

9.11.1 数学的な準備 (補足)

標準的な積分 (補足)

標準的な積分の公式 (487)–(492) は実のところ, すべてが独立であるわけではない。実際,

式 (487) の $n = 3$ の場合の式は, k^0 に関する積分を複素閉路において実行し, それから \mathbf{k} に関する積分を繰り返すことによって導く。式 (488) は対称性から自明である。式 (490) と式 (491) は, それぞれ式 (487) と式 (488) において変数を k と s から,

$$p = k - q, \quad t = q^2 - s \quad (781)$$

へ変更することによって得られる。式 (491) を q_ν について微分すると, 式 (492) が導かれる。式 (492) において $q = 0$ と置くと式 (489) になる [10, p.235].

以上の方針に沿って, 具体的に公式を証明しよう (確認は非自明な部分に限る)。

■式 (487) の導出 まず上記の方針に従い式 (487) を導出しよう。式 (487) の左辺は $n = 3$ の場合、

$$\int d^3k \int dk^0 f(k^0, \mathbf{k}), \quad f(k^0, \mathbf{k}) \equiv \frac{1}{\{(k^0)^2 - \mathbf{k}^2 - s + i\varepsilon\}^3}$$

となる。 $f(k^0, \mathbf{k})$ は 3 位の極

$$k^0 = k^\pm \equiv \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + s - i\varepsilon} = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + s} \mp i\varepsilon'$$

を持ち、

$$f(k^0, \mathbf{k}) = \frac{1}{(k^0 - k^-)^3(k^0 - k^+)^3}$$

と表される。原点を中心として無限大の半径を持つ、複素 k^0 平面上の $\text{Im}[k^0] > 0$ 側の半円に沿う $f(k^0, \mathbf{k})$ の複素積分はゼロになるため、

$$\int dk^0 f(k^0, \mathbf{k}) = 2\pi i \text{Res}[k^-]$$

である。ここで

$$\text{Res}[k^-] = \frac{1}{2!} \lim_{k^0 \rightarrow k^-} \left(\frac{d}{dk^0} \right)^2 \frac{1}{(k^0 - k^+)^3} = 6 \lim_{k^0 \rightarrow k^-} \frac{1}{(k^0 - k^+)^5} = -\frac{3}{16} \frac{1}{(\mathbf{k}^2 + s)^{5/2}}$$

なので (最後の等号では $\varepsilon = 0$ と置いた)、

$$\begin{aligned} \int d^3k \int dk^0 f(k^0, \mathbf{k}) &= 2\pi i \frac{-3}{16} \int_0^\infty \frac{1}{(|\mathbf{k}|^2 + s)^{5/2}} \times 4\pi |\mathbf{k}|^2 d|\mathbf{k}| \\ &= -\frac{3}{2} \pi^2 i \frac{1}{s} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \quad (|\mathbf{k}| = \sqrt{s} \tan \theta) \\ &= -\frac{3}{2} \pi^2 i \frac{1}{s} \int_0^1 \sin^2 \theta d(\sin \theta) \\ &= -\frac{\pi^2 i}{2} \frac{1}{s} \end{aligned}$$

となる。これは式 (487) 右辺において $n = 3$ と置いたものと一致しているから、 $n = 3$ のとき式 (487) が成り立つ。

そこで任意の自然数 $n \geq 3$ に対して式 (487):

$$\int \frac{d^4k}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = i\pi^2 (-1)^n \frac{(n-3)!}{(n-1)!} \frac{1}{s^{n-2}}$$

が成り立つと仮定する。両辺を s で微分すると、

$$\text{左辺は } n \int \frac{d^4k}{(k^2 - s + i\varepsilon)^{n+1}}, \quad \text{右辺は } i\pi^2 (-1)^n \frac{(n-3)!}{(n-1)!} \frac{-(n-2)}{s^{n-1}}$$

となり、これらを等置して

$$\int \frac{d^4k}{(k^2 - s + i\varepsilon)^{n+1}} = i\pi^2 (-1)^{n+1} \frac{(n-2)!}{n!} \frac{1}{s^{n-1}}$$

を得る。これは式 (487) において n を $n+1$ に置き換えた式となっているから、式 (487) は任意の自然数 $n \geq 3$ に対して成り立つ。

■式 (491) の導出 次に式 (491) の導出を補足する. 式 (488) において式 (781):

$$p = k - q, \quad t = q^2 - s$$

の置き換えを行うと, $n \geq 3$ に対して

$$\int d^4p \frac{p^\mu + q^\mu}{(p^2 + 2p \cdot q + t + i\varepsilon)^n} = 0, \quad \therefore \int d^4p \frac{p^\mu}{(p^2 + 2p \cdot q + t + i\varepsilon)^n} = -q^\mu \int \frac{d^4p}{(p^2 + 2p \cdot q + t + i\varepsilon)^n}$$

を得る. ここで右辺の積分が式 (490) で与えられることに注意すると, 式 (491) が導かれる.

■式 (492) の導出 最後に式 (492) の導出を補足する. 式 (491) の両辺を q^ν で微分すると, 左辺は

$$-2n \int d^4p \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 + 2p \cdot q + t + i\varepsilon)^n}$$

となる. 一方

$$\frac{\partial q^\mu}{\partial q^\nu} = \frac{\partial}{\partial q^\nu} (g^{\mu\lambda} q_\lambda) = g^{\mu\lambda} \delta^\nu_\lambda = g^{\mu\nu}$$

に注意すると, 右辺は

$$-i\pi^2 \frac{(n-3)! 2(n-2)q^\mu q^\nu + (t-q^2)g^{\mu\nu}}{(n-1)! (t-q^2)^{n-1}}$$

となる. これらを等置して

$$\int d^4p \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 + 2p \cdot q + t + i\varepsilon)^n} = i\pi^2 \frac{(n-3)! 2(n-2)q^\mu q^\nu + (t-q^2)g^{\mu\nu}}{2n! (t-q^2)^{n-1}}, \quad n \geq 3$$

を得る. $n \rightarrow n-1$ と置き換えて表記すれば, これは式 (492) に他ならない.

Feynman のパラメーター積分 (補足)

一般公式 (493):

$$\frac{1}{a_0 a_1 a_2 \cdots a_n} = \Gamma(n-1) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \cdots \int_0^{z_{n-1}} dz_n \frac{1}{[a_0 + (a_1 - a_0)z_1 + \cdots + (a_n - a_{n-1})z_n]^{n+1}}$$

を数学的帰納法にて証明する. $n=1$ の場合にこれが成り立つことは,

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{dt}{t^2} = \int_0^1 \frac{dz}{[b + (a-b)z]^2} : (494) \quad (t = b + (a-b)z)$$

と確認できる. そこである自然数 n に対して式 (493) が成り立つと仮定する.

$$A(z_1, \cdots, z_n) \equiv a_0 + (a_1 - a_0)z_1 + \cdots + (a_n - a_{n-1})z_n, \quad B \equiv a_{n+1} - a_n$$

と略記すると, 式 (493) 右辺において $n \rightarrow n+1$ と置き換えた式は

$$(n+1)\Gamma(n-1) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \cdots \int_0^{z_{n-1}} dz_n \int_0^{z_n} \frac{dz_{n+1}}{(A + Bz_{n+1})^{n+2}}$$

であり ($\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n-1)$), 新たに現れた変数 z_{n+1} に関する積分は

$$\int_0^{z_n} \frac{dz_{n+1}}{(A + Bz_{n+1})^{n+2}} = -\frac{1}{(n+1)B} \left[\frac{1}{(A + Bz_{n+1})^{n+1}} \right]_0^{z_n} = \frac{1}{(n+1)B} \left\{ \frac{1}{A^{n+1}} - \frac{1}{(A + Bz_n)^{n+1}} \right\}$$

と実行できる。ここで最右辺の $A + Bz_n$ は、多項式 A において a_n を a_{n+1} に置き換えたものになっていることに注意して数学的帰納法の仮定を用いると、上の積分は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{B} \Gamma(n+1) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \cdots \int_0^{z_{n-1}} dz_n \left\{ \frac{1}{A^{n+1}} - \frac{1}{(A + Bz_n)^{n+1}} \right\} \\ &= \frac{1}{B} \left(\frac{1}{a_0 \cdots a_{n-1} a_n} - \frac{1}{a_0 \cdots a_{n-1} a_{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{a_0 \cdots a_{n-1} a_n a_{n+1}} \end{aligned}$$

となる。よって式 (493) において $n \rightarrow n+1$ と置き換えた式が成り立つから、示された。

9.11.2 次元正則化 (補足)

次元正則化の導入 (補足)

■ 小さな引数に対するガンマ関数の近似式 (497) について $\eta \rightarrow 0$ に対する公式 (497):

$$\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{2}{\eta} - \gamma + \cdots$$

の起源を簡単にまとめておく [24, pp.137–139]。複素 x 平面全体で定義された解析関数としてのガンマ関数 $\Gamma(x)$ は、Weierstrass の無限乗積

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = e^{\gamma x} \prod_{p=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{p}\right) e^{-x/p} \right]$$

で表される。ここに

$$\gamma \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0.5772156649 \cdots$$

は Euler 定数である。ここから小さな x に対する $\Gamma(x)$ の近似式を見出すには、

$$\begin{aligned} \ln \Gamma(x+1) &= -\gamma x + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{x}{p} - \ln \left(1 + \frac{x}{p}\right) \right) = -\gamma x + O(x^2), \\ \therefore \Gamma(x+1) &= e^{-\gamma x + O(x^2)} = 1 - \gamma x + O(x^2), \\ \therefore \Gamma(x) &= \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{1}{x} - \gamma + O(x) \end{aligned}$$

とすれば良い。最後の式に $x = \eta/2$ を代入すると、式 (497) が得られる。

9.11.3 真空偏極と次元正則化 (補足)

■ 式 (505) の導出 式 (503) の被積分関数の分子は、対角和の公式 (502) より

$$\begin{aligned} N^{\mu\nu}(p, k) &\equiv \text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p} + \not{k} + m)\gamma^\nu(\not{p} + m)] \\ &= \text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p} + \not{k})\gamma^\nu\not{p}] + m^2 \text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu] \\ &= f(D) [(p^\mu + k^\mu)p^\nu + (p^\nu + k^\nu)p^\mu + \{m^2 - p \cdot (p + k)\}g^{\mu\nu}] \end{aligned}$$

となる。最後の等号では

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(\not{p} + \not{k})\gamma^\nu\not{p}] &= f(D)(p+k)_\alpha p_\beta [g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu}] \\ &= f(D)[(p+k)^\mu p^\nu - g^{\mu\nu}(p+k) \cdot p + (p+k)^\nu p^\mu], \\ \mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu] &= f(D)g^{\mu\nu}\end{aligned}$$

とした。すると式 (503) 全体は

$$\begin{aligned}ie_0^2\Pi^{\mu\nu}(k) &= \frac{-\tilde{e}_0^2\mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int_0^1 dz \int d^D p \frac{N^{\mu\nu}(p, k)}{[p^2 - m^2 + (k^2 + 2p \cdot k)z + i\varepsilon]^2} \\ &\quad (\text{Feynman のパラメータ積分と式 (494) を利用}) \\ &= \frac{-\tilde{e}_0^2\mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int_0^1 dz \int d^D q \frac{N^{\mu\nu}(q - kz, k)}{[q^2 + k^2z(1-z) - m^2 + i\varepsilon]^2} \quad (q^\mu = p^\mu + zk^\mu)\end{aligned}$$

と書き換えられる。ここで

$$\begin{aligned}(p^\mu + k^\mu)p^\nu &= \{q^\mu + (1-z)k^\mu\}(q^\nu - zk^\nu) = q^\mu q^\nu - z(1-z)k^\mu k^\nu + \dots, \\ m^2 - p \cdot (p+k) &= m^2 - (q - zk) \cdot \{q + (1-z)k\} = m^2 - q^2 + z(1-z)k^2 + \dots\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}(p^\mu + k^\mu)p^\nu + (p^\nu + k^\nu)p^\mu + [m^2 - p \cdot (p+k)]g^{\mu\nu} \\ = 2g^{\mu\nu} - 2z(1-z)k^\mu k^\nu + [m^2 - q^2 + z(1-z)k^2 + \dots]g^{\mu\nu} + \dots\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}N^{\mu\nu}(q - kz, k) &= f(D)([2q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}] + [m^2 - k^2z(1-z)]g^{\mu\nu} \\ &\quad + [-2z(1-z)(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})] + \dots)\end{aligned} \quad (782)$$

を得る*246。上式 (782) における「…」は q の 1 次の項であり、式 (498) により積分に寄与を持たない。式 (782) における 3 つの項 [...] からの寄与を分けて

$$ie_0^2\Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{-\tilde{e}_0^2\mu^{4-D}}{(2\pi)^D} f(D) \int_0^1 dz \sum_{i=1}^3 I_i^{\mu\nu}(k, z)$$

*246 $z(1-z)k^2 g^{\mu\nu}$ の項は式 (782) {...} 内の第 2 項と第 3 項に分けられていることに注意する。式 (782) のように項を分けておくと、すぐ後の $I_i^{\mu\nu}(k, z)$ の式において見るように第 1 項と第 2 項の寄与は相殺する。

と書くと、各 $I_i^{\mu\nu}(k, z)$ の部分は式 (495), (498)–(500) を用いて

$$\begin{aligned}
I_1^{\mu\nu}(k, z) &\equiv \int d^D q \frac{[2q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}]}{[q^2 + k^2 z(1-z) - m^2 + i\varepsilon]^2} \\
&= \frac{-ig^{\mu\nu} \pi^{D/2} \Gamma(1-D/2)}{[m^2 - k^2 z(1-z)]^{1-D/2}} (1-D/2), \\
I_2^{\mu\nu}(k, z) &\equiv [m^2 - k^2 z(1-z)] g^{\mu\nu} \int d^D q \frac{1}{[q^2 + k^2 z(1-z) - m^2 + i\varepsilon]^2} \\
&= [m^2 - k^2 z(1-z)] g^{\mu\nu} \frac{i\pi^{D/2} \Gamma(2-D/2)}{[m^2 - k^2 z(1-z)]^{2-D/2}} \\
&= -I_1^{\mu\nu}(k, z), \\
I_3^{\mu\nu}(k, z) &\equiv [-2z(1-z)(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})] \int d^D q \frac{1}{[q^2 + k^2 z(1-z) - m^2 + i\varepsilon]^2} \\
&= -2z(1-z)(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \frac{i\pi^{D/2} \Gamma(2-D/2)}{[m^2 - k^2 z(1-z)]^{2-D/2}}
\end{aligned}$$

と計算できるため、

$$\begin{aligned}
e_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) &= (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \tilde{e}_0^2 \Pi(k^2) : (504), \\
\Pi(k^2) &= \frac{2\mu^{4-D} f(D) \Gamma(2-D/2)}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dz \frac{z(1-z)}{[m^2 - k^2 z(1-z)]^{2-D/2}} \quad (783)
\end{aligned}$$

が得られる。

最後に $\eta = 4 - D \rightarrow 0$ の極限をとろう。 $f(D) = f(4 - \eta) = 4 - \eta f'(4) + \dots$ と書いて式 (496), (497):

$$x^{-\eta/2} = 1 - \frac{1}{2}\eta \ln x + \dots, \quad \Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{2}{\eta} - \gamma + \dots$$

を利用する。

$$\begin{aligned}
\Pi(k^2) &= \frac{2\mu^\eta f(4-\eta) \Gamma(\eta/2)}{(4\pi)^{2-\eta/2}} \int_0^1 dz \frac{z(1-z)}{[m^2 - k^2 z(1-z)]^{\eta/2}} \\
&= \frac{2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dz z(1-z) [4 - \eta f'(4) + O(\eta^2)] \left[1 + \frac{\eta}{2} \ln(4\pi) + O(\eta^2)\right] \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + O(\eta)\right] \\
&\quad \times \left[1 - \frac{\eta}{2} \ln \left\{ \frac{m^2 - k^2 z(1-z)}{\mu^2} \right\} + O(\eta^2)\right] \\
&= \frac{2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dz z(1-z) \left[4 \cdot \frac{2}{\eta} - 4\gamma + \frac{2}{\eta} \left[-\eta f'(4) + 4 \cdot \frac{\eta}{2} - 4 \cdot \frac{\eta}{2} \ln \left\{ \frac{m^2 - k^2 z(1-z)}{\mu^2} \right\}\right]\right] + O(\eta)
\end{aligned}$$

において $\int_0^1 dz z(1-z) = 1/6$ なので、式 (505):

$$\Pi(k^2) = \frac{1}{12\pi^2} \left\{ \frac{2}{\eta} - \gamma - \frac{f'(4)}{2} + \ln(4\pi) \right\} - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left\{ \frac{m^2 - k^2 z(1-z)}{\mu^2} \right\} + O(\eta)$$

を得る。

質量尺度 μ の導入について $ie_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k^2)$ における電荷 (の自乗) を $e_0^2 = \tilde{e}_0^2 \mu^\eta$ と書くと、 $\eta \rightarrow 0$ のとき \tilde{e}_0^2 は無次元を保ちながら e_0^2 になる。ここで現れた μ^η は $\Pi(k^2)$ の式 (783) の被積分関数を無次元化するのに是非とも必要とされるものであり、これにより

$$\frac{1}{\{[m^2 - k^2 z(1-z)]/\mu^2\}^{\eta/2}} = 1 - \frac{\eta}{2} \ln \left\{ \frac{m^2 - k^2 z(1-z)}{\mu^2} \right\} + O(\eta^2)$$

と展開することが可能となる (真数は無次元でなければならない).

9.11.4 電子の自己エネルギーと次元正則化 (補足)

■式 (507), 式 (508) の導出 γ 行列に関する縮約の公式 (501) より, 式 (506) の被積分関数の分子は

$$\gamma^\alpha(\not{p} - \not{k} + m)\gamma^\beta g_{\alpha\beta} = Dm - (D-2)(\not{p} - \not{k})$$

となる. Feynman のパラメーター積分 (494) を用いると, 式 (506) の積分は

$$\begin{aligned} & \int d^D k \frac{Dm - (D-2)(\not{p} - \not{k})}{\{(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon\}\{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon\}} \\ &= \int d^D k \{Dm - (D-2)(\not{p} - \not{k})\} \int_0^1 \frac{dz}{[\{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon\} + \{p^2 - 2p \cdot k - m^2 + \lambda^2\}z]^2} \\ &= \int_0^1 dz \int d^D q \frac{Dm - (D-2)(\not{p} - \not{q} - \not{p}z)}{(q^2 - s + i\varepsilon)^2} \\ & \quad (q = k - pz, s = m^2 z + \lambda^2(1-z) - p^2 z(1-z)) \end{aligned}$$

と書き換えられる. 次に式 (495), 式 (498) を用いて q に関する積分を実行すると,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dz \int d^D q \frac{Dm - (D-2)(\not{p} - \not{q} - \not{p}z)}{(q^2 - s + i\varepsilon)^2} \\ &= \int_0^1 dz \{Dm - (D-2)(1-z)\not{p}\} \int d^D q \frac{1}{(q^2 - s + i\varepsilon)^2} \\ &= i\pi^{D/2} \Gamma(2-D/2) \int_0^1 dz \frac{Dm - (D-2)(1-z)\not{p}}{s^{2-D/2}} \end{aligned} \quad (784)$$

を得る. この式はもはや赤外発散の恐れがないので, s の中で $\lambda = 0$ と置いて良い.

$$s = m^2 z - p^2 z(1-z).$$

式 (506) の積分に上式 (784) を代入して $D = 4 - \eta$ とおき, 式 (496), 式 (497) を用いて η について展開すると

$$\begin{aligned} e_0^2 \Sigma(p) &= -\tilde{e}_0^2 \frac{1}{(4\pi)^{D/2} (4\pi)^{-\eta/2}} \Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right) \int_0^1 dz \frac{4m - 2(1-z)\not{p} + \eta\{-m + (1-z)\not{p}\}}{(s/\mu^2)^{\eta/2}} \\ &= \frac{-\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} \left[1 + \frac{\eta}{2} \ln(4\pi) + \dots\right] \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \dots\right] \\ & \quad \times \int_0^1 dz [\{4m - 2(1-z)\not{p}\} + \eta\{-m + (1-z)\not{p}\}] \left[1 - \frac{1}{2}\eta \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) + \dots\right] \end{aligned}$$

となる.

$$\int_0^1 dz \{4m - 2(1-z)\not{p}\} = 4m - \not{p}, \quad \int_0^1 dz \{-m + (1-z)\not{p}\} = -\frac{1}{2}(2m - \not{p})$$

に注意しつつ, $\eta \rightarrow 0$ において生き残る $1/\eta$ の項と定数項までを拾い上げると,

$$\begin{aligned} e_0^2 \Sigma(p) &= \frac{-\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} \frac{2}{\eta} (4m - \not{p}) + \frac{-\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} \left[\{-\gamma + \ln(4\pi)\} (4m - \not{p}) - (2m - \not{p}) - \int_0^1 dz \{4m - 2(1-z)\not{p}\} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right] \\ &= \frac{\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} (\not{p} - 4m) \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right] + \tilde{e}_0^2 \Sigma_c(p) : (507), \end{aligned}$$

$$16\pi^2 \Sigma_c(p) = (2m - \not{p}) - 2 \int_0^1 dz [\not{p}(1-z) - 2m] \ln\left(\frac{m^2 z - p^2 z(1-z)}{\mu^2}\right) : (508)$$

を得る.

10 弦理論《基礎編》(補足)

10.1 光錐座標系と余剰次元(補足)

10.1.1 光錐座標(補足)

5.2.1 節で割愛した計算を示す。

■計量の光錐座標成分(563)の導出 Lorentz 座標 $x = (x^0, x^1)$ から光錐座標

$$x' = (x'^+, x'^-) = \left(\frac{x^0 + x^1}{\sqrt{2}}, \frac{x^0 - x^1}{\sqrt{2}} \right)$$

への座標変換を考える(変換に関係のない横方向座標 x^2, \dots, x^d は無視する)。

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x'^+ \\ x'^- \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

なので, 2 階共変テンソルの変換則

$$\hat{\eta}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \eta_{\alpha\beta}$$

は計量の光錐座標成分(563):

$$(\hat{\eta}_{\mu\nu}) = A^T (\eta_{\alpha\beta}) A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

を与える。

■光錐座標系への座標変換は Lorentz 変換ではないこと 座標 x'^μ が光錐座標 (x^+, x^-, x^2, x^3) であるとする
と, 式(563)の光錐計量 $\hat{\eta}_{\mu\nu}$ を用いて不変距離は

$$ds^2 = \hat{\eta}_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu$$

と表される。これは $\eta_{\mu\nu}$ を Minkowski 計量として, Lorentz 座標 x'^μ が

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu$$

を満たさなければならないことに矛盾するから, 座標 x^μ を光錐座標に移行させるような Lorentz 変換は存在しない。

■光錐成分を用いて Lorentz スカラーを $a \cdot b = \hat{\eta}_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$ と計算できることの直接的確認 光錐計量 $\hat{\eta}_{\mu\nu}$ と Minkowski 計量 $\eta_{\mu\nu}$ に対して,

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_{\mu\nu} a^\mu b^\nu &= -a^- b^+ - a^+ b^- + a^I b^I \\ &= -\frac{1}{2}(a^0 - a^1)(b^0 + b^1) - \frac{1}{2}(a^0 + a^1)(b^0 - b^1) + a^I b^I \\ &= -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^I b^I \\ &= \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu. \end{aligned}$$

ただし横方向添字 $I = 2, \dots, d$ について和をとるものとする。また反変ベクトルについて, 最左辺の光錐成分と最右辺の Lorentz 系で見た成分に同じ記号 a^μ, b^μ を充てている。

10.1.2 余剰次元を伴う矩形井戸

5.2.3 節で予告したように、井戸型ポテンシャルの問題を例に用いて、小さな余剰次元は低エネルギー実験による検出を逃れ得ることを説明する。

無限に高い障壁を持つ 1 次元矩形井戸ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq a) \\ \infty & (x \leq 0, a \leq x) \end{cases}$$

の下での粒子の波動関数 $\psi(x)$ に対して

$$\begin{aligned} \text{Schrödinger 方程式 (194):} & \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi, & (0 \leq x \leq a) \\ \text{境界条件} & \quad \psi(0) = \psi(a) = 0 \end{aligned}$$

であり、これを満たす波動関数とエネルギー

$$\psi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right), \quad E_k = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2, \quad k = 1, 2, \dots, \infty$$

を得る。

さて、ここで y 方向の余剰次元を加える。同一視 $(x, y) \sim (x, y + 2\pi R)$ を導入し、余剰次元は半径 $R \ll a$ にまでコンパクト化しているものとする。このとき Schrödinger 方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi = E\psi$$

を条件

$$\psi(0, y) = \psi(a, y) = 0, \quad \psi(x, y) = \psi(x, y + 2\pi R)$$

の下で変数分離法にて解くと

$$\begin{aligned} \psi_{k,l}(x, y) &= \psi_k(x) \phi_l(y), \\ \psi_k(x) &= c_k \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right), \quad k = 1, 2, \dots \\ \phi_l(y) &= a_l \sin\left(\frac{ly}{R}\right) + b_l \cos\left(\frac{ly}{R}\right), \quad l = 0, 1, 2, \dots \\ E_{k,l} &= \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{l}{R}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

を得る。

$l = 0$ のエネルギー準位 $E_{k,0}$ が余剰次元を導入する前のエネルギー準位を成し、新たに加わるエネルギー準位の中で最低の準位

$$E_{11} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{R}\right)^2 \right] \simeq \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{R}\right)^2 \quad (\because R \ll a)$$

は元の 1 次元問題の低エネルギー領域の準位に比べて遥かに高い。したがって小さな余剰次元の効果は通常のエネルギー水準における実験には現れない。

10.2 相対論的な弦 (補足)

10.2.1 運動方程式, 境界条件, D-ブレイン (補足)

■ $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{X}^\mu$ の表式 (571), $\partial\mathcal{L}/\partial X'^\mu$ の表式 (572) の導出

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\dot{X}^\mu}(\dot{X}\cdot X') &= \frac{\partial}{\partial\dot{X}^\mu}(\dot{X}^\nu\cdot X'_\nu) = \delta^\nu_\mu X'_\nu = X'_\mu, \\ \frac{\partial}{\partial\dot{X}^\mu}(\dot{X})^2 &= \frac{\partial}{\partial\dot{X}^\mu}(g_{\alpha\beta}\dot{X}^\alpha\dot{X}^\beta) = g_{\alpha\beta}(\delta^\alpha_\mu\dot{X}^\beta + \dot{X}^\alpha\delta^\beta_\mu) = 2\dot{X}_\mu, \quad \text{etc.}\end{aligned}$$

に注意して Lagrangian 密度 (570):

$$\mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X'^\mu) = -\frac{T_0}{c}\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}$$

を微分すると, 式 (571), 式 (572):

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^\tau_\mu &\equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}^\mu} = -\frac{T_0}{c}\frac{(\dot{X}\cdot X')X'_\mu - (X')^2\dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}}, \\ \mathcal{P}^\sigma_\mu &\equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X'^\mu} = -\frac{T_0}{c}\frac{(\dot{X}\cdot X')\dot{X}_\mu - (\dot{X})^2X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}}\end{aligned}$$

を得る.

■ 作用の変分 (573) の導出

$$\delta S = \int d\tau d\sigma \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}^\mu} \delta\dot{X}^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X'^\mu} \delta X'^\mu \right) = \int d\tau d\sigma \left(\mathcal{P}^\tau_\mu \frac{\partial}{\partial\tau} \delta X^\mu + \mathcal{P}^\sigma_\mu \frac{\partial}{\partial\sigma} \delta X^\mu \right)$$

の最右辺を部分積分して, 式 (573):

$$(0 =) \delta S = \int_0^{\sigma_1} d\sigma [\delta X^\mu \mathcal{P}^\tau_\mu]_{\tau_i}^{\tau_f} + \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau [\delta X^\mu \mathcal{P}^\sigma_\mu]_0^{\sigma_1} - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \delta X^\mu \left(\frac{\partial\mathcal{P}^\tau_\mu}{\partial\tau} + \frac{\partial\mathcal{P}^\sigma_\mu}{\partial\sigma} \right)$$

を得る.

10.2.2 弦の張力とエネルギー (補足)

5.3.7 節で述べたように, x^1 軸に沿って伸ばされた静的な弦が運動方程式と矛盾しないことを確認する. 考えている弦の座標 $X^\mu = (ct, f(\sigma), \vec{0})$ に対して

$$\dot{X}^\mu = (c, 0, \vec{0}), \quad X'^\mu = (0, f', \vec{0})$$

であり, これらは τ に依存しない. よって式 (571), 式 (572) の

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^\tau_\mu &\equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}^\mu} = -\frac{T_0}{c}\frac{(\dot{X}\cdot X')X'_\mu - (X')^2\dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}}, \\ \mathcal{P}^\sigma_\mu &\equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X'^\mu} = -\frac{T_0}{c}\frac{(\dot{X}\cdot X')\dot{X}_\mu - (\dot{X})^2X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}}\end{aligned}$$

も τ に依存せず，このとき運動方程式は

$$0 = \frac{\partial \mathcal{P}^\tau_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}^\sigma_\mu}{\partial \sigma} = \frac{\partial \mathcal{P}^\sigma_\mu}{\partial \sigma}$$

となり， \mathcal{P}^σ_μ が σ に依存しないことが要請される．ところが再び \mathcal{P}^σ_μ の式 (572) に戻り，今考えている弦に対して

$$(\dot{X})^2 = -c^2, \quad (X')^2 = (f')^2, \quad \dot{X} \cdot X' = 0$$

であることを用いると，

$$\mathcal{P}^\sigma_\mu = -\frac{T_0}{c} \frac{c^2 X'_\mu}{\sqrt{c^2 (f')^2}} = -T_0 \frac{X'_\mu}{f'} = -T_0 (0, 1, \vec{0})$$

が得られる．これは確かに σ に依存しないから，運動方程式は満たされている．また第 0 座標に課される自由端点の境界条件 $\mathcal{P}^\sigma_0 = 0$ が満たされていることも見て取れる．

10.2.3 横方向速度から見た作用 (補足)

■作用の式 (575) の導出 静的ゲージ $X^\mu = (ct, \vec{X})$ では

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = \left(0, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right), \quad \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} = \left(c, \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)$$

より

$$(\dot{X})^2 = -c^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2, \quad (X')^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2, \quad \dot{X} \cdot X' = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}$$

である．これを用いて南部-後藤作用 (569) における平方根の中を評価すると

$$\begin{aligned} (\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2 &= \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 + \left[c^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 - 2 \right] \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 \\ &= \left(\frac{ds}{d\sigma} \right)^2 \left[\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2 + c^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

となる (第 2 の等号では $\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2 = 1$ に注意する)．最右辺を

$$\vec{v}_\perp = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}, \quad \therefore v_\perp^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2$$

(再び $\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2 = 1$ を考慮した) によって書き換えると

$$\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} = c \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}$$

が得られるので，南部-後藤作用 (569) は式 (575):

$$S = -T_0 \int dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}$$

のように表される．

10.3 世界面カレントと保存量 (補足)

10.3.1 全運動量カレント (補足)

5.4.2 節の図 90 のように, 世界面の境界をつなぐ任意の曲線 $\gamma, \bar{\gamma}$, 世界面の境界に沿う線 α, β , およびこれらに囲われた領域 \mathcal{R} をとると, 保存則 $\partial_\alpha \mathcal{P}^\alpha{}_\mu = 0$ により

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{R}} (\partial_\alpha \mathcal{P}^\alpha{}_\mu) d\tau d\sigma \quad (\text{保存則 } \partial_\alpha \mathcal{P}^\alpha{}_\mu = 0) \\ &= \oint_{\bar{\gamma}-\beta-\gamma+\alpha} (\mathcal{P}^\tau{}_\mu d\sigma - \mathcal{P}^\sigma{}_\mu d\tau) \quad (\text{発散定理}) \\ &= \left(\int_{\bar{\gamma}} - \int_{\gamma} \right) (\mathcal{P}^\tau{}_\mu d\sigma - \mathcal{P}^\sigma{}_\mu d\tau) \\ &= p_\mu(\bar{\gamma}) - p_\mu(\gamma) \end{aligned}$$

となる (閉弦に対しても同様に議論できる).

10.3.2 Lorentz 対称性とカレント (補足)

■無限小 Lorentz 変換 (579) に対する Lagrangian 密度 (578) の不変性 世界面パラメーターを $(\xi_1, \xi_2) = (\tau, \sigma)$ と書くと, Lagrangian 密度 (578) に現れる全ての項は

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta}$$

という形を持つ. その無限小 Lorentz 変換 (579): $\delta X^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} X_\nu$ に伴う変化量は次のように計算される.

$$\begin{aligned} \delta \left(\eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} \right) &= \eta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \delta X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} + \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \delta X^\nu}{\partial \xi^\beta} \right) \\ &= \eta_{\mu\nu} \left(\varepsilon^{\mu\rho} \frac{\partial X_\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} + \varepsilon^{\nu\rho} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X_\rho}{\partial \xi^\beta} \right) \\ &= \varepsilon_{\nu\rho} \frac{\partial X^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} + \varepsilon_{\mu\rho} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\rho}{\partial \xi^\beta} \\ &= (\varepsilon_{\nu\rho} + \varepsilon_{\rho\nu}) \frac{\partial X^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} \\ &= 0. \quad (\varepsilon_{\nu\rho} \text{ の反対称性 (1.3.2 節) による}) \end{aligned}$$

よって Lagrangian 密度 (578) 全体もまた変化しない.

■カレント (580) の導出 無限小 Lorentz 変換 (579) に関する Lagrangian 密度の不変性から導かれるカレントは

$$\varepsilon^{\mu\nu} j_{\mu\nu}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha X^\mu)} \delta X^\mu = \mathcal{P}_\mu^\alpha \varepsilon^{\mu\nu} X_\nu$$

となる. これはカレントの一般式 (42):

$$f^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi_r)} \delta \phi_r$$

において

$$\phi_r \rightarrow X^\mu, \quad \delta \phi_r \rightarrow \delta X^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} X_\nu$$

とおき、このときカレント全体が $f^\alpha = \varepsilon^{\mu\nu} j_{\mu\nu}^\alpha$ という形を持つことを考慮して得られる。 $\varepsilon^{\mu\nu}$ の反対称性を利用して最右辺を書き換え、

$$\varepsilon^{\mu\nu} j_{\mu\nu}^\alpha = \left(-\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu} \right) (X_\mu \mathcal{P}_\nu^\alpha - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\alpha)$$

とできる。ここから直接にカレント $j_{\mu\nu}^\alpha$ を読み取ることができる。全体の規格化は我々が選択できるので (保存するカレントの定数倍もカレントである), カレントを式 (580):

$$\mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha = X_\mu \mathcal{P}_\nu^\alpha - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\alpha (= -\mathcal{M}_{\nu\mu}^\alpha)$$

のように定義できる。

10.4 相対論的な光錐弦 (補足)

10.4.1 τ の選択の方法 (補足)

5.5.1 節で述べたように、 n^μ を時間的ベクトルに選べば、弦上の 2 点の隔たり ΔX^μ が空間的なベクトルとなることは次のように理解できる。

- n^μ が時間的
- $n^\mu \propto (1, 0, \dots, 0)$ となる座標系をとれる。
この座標系でも条件 $n \cdot \Delta X = 0$ が成り立つから ΔX^μ は時間成分を持たない。
- 適当な座標系で ΔX^μ の時間成分を消去できる。
- ΔX^μ は空間的。

10.4.2 σ のパラメーター付け (補足)

5.5.2 節で述べたように、閉弦でも世界面全体で $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ が成り立つように $\sigma = 0$ の線を導入できることを示す。それには閉弦の世界面に $\sigma = 0$ の線を、その上で $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ が成り立つように導入できることを示せば良い。そうすれば、開弦・閉弦のいずれに対しても $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = (\text{一定})$ であることから、閉弦の世界面全体で $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ となることが保証される。

そこで世界面のある点において $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ となる条件を調べよう。 \mathcal{P}^σ の式 (572) より

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') \partial_\tau (n \cdot X) - (\dot{X})^2 \partial_\sigma (n \cdot X)}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}$$

であり、さらに分子の第 2 項においてパラメーター付けの条件 (583) より $\partial_\sigma (n \cdot X) = 0$ なので

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') \partial_\tau (n \cdot X)}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}$$

となる。再び式 (583) を考慮すると $\partial_\tau (n \cdot X)$ は定数なので、考えている点において $\dot{X} \cdot X' = 0$ であれば良い。結局示したいことは、 $\sigma = 0$ の線をその上で $\dot{X} \cdot X' = 0$ が成り立つように導入できることに帰着する。

そのような線 $\sigma = 0$ を得る手順を以下に述べる。まず閉弦の世界面における τ が一定の線 (弦) の 1 つに着目し、その上に $\sigma = 0$ の点 P を任意にとる。 $X^{\mu'}$ は弦に正接する (接する) 空間的ベクトルである。次に (直

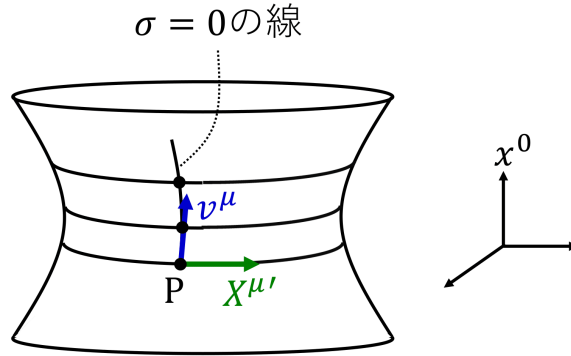


図 159 閉弦の世界面における $\sigma = 0$ の線を定める方法

観的にも理解できるように), 点 P において弦の正接 $X^{\mu'}$ に直交する世界面内の時間的ベクトル v^μ が存在することを説明する (図 159 参照). 世界面は点 P において (世界面に) 正接する時間的なベクトル t^μ を持つ. もし $t_\mu X^{\mu'} = 0$ であれば t^μ は求めるベクトル v^μ そのものである. 仮に $t_\mu X^{\mu'} \neq 0$ であっても, 線形結合

$$v^\mu = t^\mu + bX^{\mu'}$$

は世界面の点 P における正接であり, $v_\mu X^{\mu'} = 0$ となるように定数 b を決めることができる.

$$t \cdot X' + bX' \cdot X' = 0 \quad \rightarrow \quad v^\mu = t^\mu - \frac{t \cdot X'}{X' \cdot X'} X^{\mu'}$$

しかもこの v^μ のスカラー内積

$$v^2 = t^2 + 2bt \cdot X' + b^2 X'^2 = t^2 - \frac{(t \cdot X')^2}{X'^2} \quad \left(\because b = -\frac{t \cdot X'}{X'^2} \right)$$

において $X^{\mu'}$ は空間的なので $X'^2 > 0$ であり, t^μ は時間的なので $t^2 < 0$ である. よって $v^2 < 0$ となるから v^μ は時間的であり, 求めるベクトルとなっている.

注目している τ が一定の弦に隣接する弦における $\sigma = 0$ の点を, $X^\mu(P) + \varepsilon v^\mu$ で与える (ε は無限小の実数). これを逐次繰り返すと, 閉弦の世界面に $\sigma = 0$ の曲線が描かれる (図 159 参照). このとき $\sigma = 0$ の曲線に対する正接 \dot{X}^μ は v^μ に比例するので, 曲線上で $\dot{X} \cdot X' = 0$ となることが保証される. これが証明したいことであった.

10.4.3 パラメーター付けの制約条件と波動方程式 (補足)

■式 (584): $\dot{X} \cdot X' = 0$ の理由 5.5.2 節では閉弦の世界面全体で $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ が成り立つように $\sigma = 0$ の線を導入できることを証明した. その際, パラメーター付けの定義式 (583): $n \cdot X(\tau, \sigma) = \beta \alpha' (n \cdot p) \tau$ の下で

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') \partial_\tau (n \cdot X)}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}$$

と表されることを見た (10.4.2 節). (この表式は閉弦に特有の事情を仮定せずに導かれており, 開弦に対しても正しい.) そして開弦では端点で $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ が成り立ち, 閉弦では $\sigma = 0$ の線を, その上で $\dot{X} \cdot X' = 0$ が成り立つように導入できることから, 開弦と閉弦のいずれに関しても世界面全体で $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ となることが保証された. するとこのとき逆に, 弦の世界面全体で $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ であることから, 式 (584): $\dot{X} \cdot X' = 0$ が満たされていることになる.

■制約条件 (586) の導出 \mathcal{P}^τ の式 (571):

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X')X^{\mu'} - (X')^2 \dot{X}^\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}}$$

に式 (584): $\dot{X} \cdot X' = 0$ を適用すると

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{X'^2 \dot{X}^\mu}{\sqrt{-\dot{X} X'^2}} \quad (785)$$

となる. すると式 (585) の第 2 式は

$$n \cdot p = \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{X'^2 (n \cdot \dot{X})}{\sqrt{-\dot{X} X'^2}}$$

となる. ここに式 (585) の第 1 式から得られる $n \cdot \dot{X} = \beta\alpha' (n \cdot p)$ を代入すると,

$$1 = \frac{X'^2}{\sqrt{-\dot{X} X'^2}}, \quad \therefore \dot{X}^2 + X'^2 = 0 : (586)$$

が導かれる.

■ $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ と $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$ の式 (588) の導出 $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ の式 (785) は制約条件 (586): $\dot{X}^2 + X'^2 = 0$ により分母が

$$\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2} = \sqrt{X'^2 X'^2} = X'^2 \quad (\because X'^2 > 0)$$

と簡略化されるので, 式 (588):

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu$$

を得る.

また \mathcal{P}^σ の式 (572):

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X')\dot{X}^\mu - (\dot{X})^2 X'^\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}}$$

は, 式 (584): $\dot{X} \cdot X' = 0$ を利用した上で \mathcal{P}^τ と同様に分母を書き換えると

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\dot{X}^2 X'^\mu}{\sqrt{-\dot{X} X'^2}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\dot{X}^2 X'^\mu}{X'^2} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X'^\mu : (588)$$

となる. ただし最後の等号でも式 (586): $\dot{X}^2 + X'^2 = 0$ を用いた.

10.4.4 波動方程式とモード展開 (補足)

■弦座標の式 (589) の導出 波動方程式の一般解

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}(f^\mu(\tau + \sigma) + g^\mu(\tau - \sigma))$$

に対して $\sigma = 0$ における Neumann 境界条件を適用すると

$$0 = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}(\tau, 0) = \frac{1}{2}(f^{\mu'}(\tau) - g^{\mu'}(\tau)) \quad \text{for all } \tau$$

となるので, f^μ と g^μ には定数 c^μ の違いだけが許容される: $g^\mu = f^\mu + c^\mu$. よって

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}(f^\mu(\tau + \sigma) + f^\mu(\tau - \sigma) + c^\mu)$$

であり, c^μ を任意関数 f^μ に吸収させる, すなわち $f^\mu + \frac{1}{2}c^\mu \rightarrow f^\mu$ と再定義すると式 (589) を得る.

■ $f^{\mu'}$ が周期 2π の周期関数となる理由 弦座標の式 (589):

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}(f^\mu(\tau + \sigma) + f^\mu(\tau - \sigma))$$

に対して $\sigma = \pi$ における Neumann 境界条件を適用すると

$$0 = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}(\tau, \pi) = \frac{1}{2}(f^{\mu'}(\tau + \pi) - f^{\mu'}(\tau - \pi)) \quad \text{for all } \tau$$

となることによる。 2π は自然な周期なので、我々が開弦のパラメーター付けの範囲を $0 \leq \sigma \leq \pi$ と決めたのは適切であったことが判る。

■ 弦座標のモード展開 (590) の導出 周期 2π の周期関数 $f^{\mu'}$ の一般的な Fourier 級数展開

$$f^{\mu'}(u) = f_1^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^\mu \cos nu + b_n^\mu \sin nu)$$

を積分すると、

$$f^\mu(u) = f_0^\mu + f_1^\mu u + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos nu + B_n^\mu \sin nu)$$

という形になる。弦座標の式 (589) にこれを代入して整理すると

$$\begin{aligned} X^\mu(\tau, \sigma) &= f_0^\mu + \frac{1}{2}\{(\tau + \sigma) + (\tau - \sigma)\}f_1^\mu \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^\mu \{\cos(n(\tau + \sigma)) + \cos(n(\tau - \sigma))\} + B_n^\mu \{\sin(n(\tau + \sigma)) + \sin(n(\tau - \sigma))\}] \\ &= f_0^\mu + f_1^\mu \tau + \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau)\} \cos(n\sigma) \end{aligned}$$

を得る。 f_0^μ, f_1^μ および各 Fourier 係数 A_n^μ, B_n^μ が実数であれば、弦座標 X^μ の実数性が保証される。量子論への移行を容易にするために、次の関係を通じて、係数 A_n^μ, B_n^μ の代わりとなる定数 a_n^μ を導入する。

$$\begin{aligned} A_n^\mu \cos n\tau + B_n^\mu \sin n\tau &= -\frac{i}{2} \{ (B_n^\mu + iA_n^\mu)e^{in\tau} - (B_n^\mu - iA_n^\mu)e^{-in\tau} \} \\ &\equiv -i \frac{\sqrt{2\alpha'}}{\sqrt{n}} (a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}). \end{aligned}$$

ここで $*$ は複素共役を表す。これを上式に代入して弦座標のモード展開 (590) を得る。

10.4.5 運動方程式の光錐解 (補足)

■ X^- の導関数を X^I の導関数で与える式 (594) の導出 任意のベクトル a^μ に対して相対論的スカラー積は

$$a^2 = -2a^+a^- + a^I a^I$$

と成分計算される (I について和をとることを忘れないように、 $(a^I)^2$ とせず $a^I a^I$ と書いている)。ここで $a = \dot{X} \pm X'$ とおくと、制約条件 (587): $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ は

$$-2(\dot{X}^+ \pm X'^+)(\dot{X}^- \pm X'^-) + (\dot{X}^I \pm X'^I)^2 = 0$$

と書ける。ここに光錐ゲージ条件 (593) から得られる $X^{+'} = 0$, $\dot{X}^+ = \beta\alpha' p^+$ を代入すると, 式 (594):

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2$$

が導かれる。

■ α_n^- と横方向 Virasoro モードの関係 (597) の導出 全ての弦座標 $X^\mu = (X^0, X^1, X^I)$ と同様, 光錐成分 X^- もまた式 (596) のようにモード展開される。よって弦座標の導関数の線形結合に対するモード展開の式 (592) に $\mu = -, I$ を代入した式

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)}, \quad \dot{X}^I \pm X^{I'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau \pm \sigma)}$$

が成り立つ。これらを式 (594):

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2$$

に代入すると

$$\begin{aligned} \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)} &= \frac{1}{2p^+} \sum_{p, q \in \mathbf{Z}} \alpha_p^I \alpha_q^I e^{-i(p+q)(\tau \pm \sigma)} \\ &= \frac{1}{2p^+} \sum_{n, p \in \mathbf{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I e^{-in(\tau \pm \sigma)} \\ &= \frac{1}{2p^+} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left(\sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I \right) e^{-in(\tau \pm \sigma)} \end{aligned}$$

となるので, 式 (597):

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{2p^+} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I$$

を得る。

■質量の自乗の公式 (598) の導出 振動子 α の式 (591): $\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu$ により p^- は α_0^- で表され, 式 (597) より α_0^- は横方向 Virasoro モード L_0^\perp で表される:

$$2p^+ p^- = \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^I \alpha_n^I \right) = p^I p^I + \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I*} a_n^I.$$

これを弦の運動量 p^μ から弦の質量 M を計算する式

$$M^2 = -p^2 = 2p^+ p^- - p^I p^I$$

に代入すると, 質量の自乗の公式 (598):

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I*} a_n^I$$

を得る。

10.5 各種の光錐場とボゾン (補足)

10.5.1 スカラー場の古典的な平面波解 (補足)

■実場の条件 (600) の導出 場 $\phi(x)$ の Fourier 展開 (599) に対して実数条件 $(\phi(x))^* = \phi(x)$ を適用すると

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-ip \cdot x} (\phi(p))^* = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot x} \phi(p) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-ip \cdot x} \phi(-p)$$

となる。ただし第 2 の等号では変数変換 $p \rightarrow -p$ を行った。すると

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-ip \cdot x} (\phi(-p) - (\phi(p))^*) = 0$$

が任意の x に対して成り立たなければならないから、式 (600): $(\phi(p))^* = \phi(-p)$ を得る。

■Fourier 展開 (601) について 式 (601):

$$\phi(x^+, x^-, \vec{x}_T) = \int \frac{dp^+}{2\pi} \frac{d^{D-2} p_T}{(2\pi)^{D-2}} e^{-ix^- p^+ + i\vec{x}_T \cdot \vec{p}_T} \phi(x^+, p^+, \vec{p}_T)$$

における p^+ は積分変数だから他の記号に置き換えても構わない。しかし

$$p \cdot x = -p^- x^+ - p^+ x^- + p^I x^I = p_+ x^+ + p_- x^- + p_I p^I$$

に注意すると $e^{-ix^- p^+}$ が $e^{ip \cdot x}$ から現れるから、 x^- の係数を $-p^+$ と書くのは理に合っている。

■運動量空間におけるスカラー場の運動方程式 (602) の導出 実空間のスカラー場 $\phi(x) = \phi(x^+, x^-, \vec{x}_T)$ に対する Klein-Gordon 方程式は、光錐座標を用いて

$$0 = (\partial^2 - m^2)\phi(x) = \left(-2 \frac{\partial}{\partial x^+} \frac{\partial}{\partial x^-} + \frac{\partial}{\partial x^I} \frac{\partial}{\partial x^I} - m^2 \right) \phi(x^+, x^-, \vec{x}_T)$$

と表される。これを式 (601) によって定義される、“空間”座標に関する場の Fourier 変換 $\phi(x^+, p^+, \vec{p}_T)$ に対する式に翻訳すると

$$\begin{aligned} \left(-2 \frac{\partial}{\partial x^+} (-ip^+) - p^I p^I - m^2 \right) \phi(x^+, p^+, \vec{p}_T) &= 0, \\ \therefore \left(i \frac{\partial}{\partial x^+} - \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2) \right) \phi(x^+, p^+, \vec{p}_T) &= 0 : (602) \end{aligned}$$

となる。

10.5.2 Maxwell 場と光子状態 (補足)

■運動量空間の電磁場 $A^\mu(p)$ に対する運動方程式 (604) について $\partial_\mu e^{ip \cdot x} = ip_\mu e^{ip \cdot x}$ より

$$\begin{aligned} \partial^2 \{ e^{ip \cdot x} A^\mu(p) \} &= \partial_\nu \partial^\nu \{ e^{ip \cdot x} A^\mu(p) \} = (ip_\nu)(ip^\nu) \{ e^{ip \cdot x} A^\mu(p) \} = -p^2 A^\mu(p) e^{ip \cdot x}, \\ \partial^\mu \partial \cdot \{ e^{ip \cdot x} A(p) \} &= \partial^\mu \partial_\nu \{ e^{ip \cdot x} A^\nu(p) \} = (ip^\mu)(ip_\nu) \{ e^{ip \cdot x} A^\nu(p) \} = -p^\mu (p \cdot A) e^{ip \cdot x} \end{aligned}$$

となる。

10.5.3 重力場と重力子状態 (補足)

■ $n(D)$ の式 (608) について 行列 (h^{IJ}) の上三角要素と対角要素の合計数は

$$1 + 2 + \cdots + (D - 2) = \frac{1}{2}(D - 1)(D - 2)$$

である (行列 (h^{IJ}) の $k (= 1, 2, \dots, D - 2)$ 行目に考えている要素は $D - k + 1$ 個含まれる). 対角和がゼロとなる条件から, 独立な要素の個数が 1 だけ減少する. よって式 (608):

$$n(D) = \frac{1}{2}(D - 2)(D - 1) - 1 = \frac{1}{2}D(D - 3)$$

を得る.

10.6 光錐ゲージにおける点粒子 (補足)

10.6.1 光錐粒子 (補足)

■光錐ゲージにおける運動量の式 (611) の導出 運動量の表式 $p_\mu = m\dot{x}_\mu/\sqrt{-\dot{x}^2}$ の + 成分を粒子の光錐ゲージ条件 $x^+ = p^+\tau/m^2$ と組合せると

$$p^+ = \frac{m}{\sqrt{-\dot{x}^2}}\dot{x}^+ = \frac{1}{\sqrt{-\dot{x}^2}}\frac{p^+}{m}, \quad \therefore \dot{x}^2 = -\frac{1}{m^2}$$

を得る. (第 1 式の第 2 の等号では光錐ゲージ条件 (610) により $\dot{x}^+ = p^+/m^2$ となることを用いた.) これを運動量の表式 $p_\mu = m\dot{x}_\mu/\sqrt{-\dot{x}^2}$ に戻すと, 式 (611):

$$p_\mu = m^2\dot{x}_\mu$$

が得られる.

10.6.2 Lorentz 生成子と Lorentz 代数 (補足)

■連続的な変換の生成子について 5.8.2 節ではチャージ $M^{\mu\nu}$ が座標の Lorentz 変換を生成することを述べた. これについて補足説明を行う.

一般にユニタリー演算子 U による演算子 O の変換

$$O \rightarrow O' = UOU^\dagger$$

が実数の連続パラメーター α で特徴づけられる連続的な変換である場合, 適当な Hermite 演算子 $T (= T^\dagger)$ を用いて $U = e^{i\alpha T}$ と表される. $\alpha = 0$ のときに U は恒等演算子となる. α が無限小パラメーター $\delta\alpha$ であるとき, その 1 次までとると

$$U \simeq 1 + i\delta\alpha T, \quad \delta O \equiv O' - O \simeq (1 + i\delta\alpha T)O(1 - i\delta\alpha T) - O \simeq i\delta\alpha[T, O]$$

となる. 連続変換が複数の連続パラメーター $\{\alpha_i\}$ で特徴づけられる場合への一般化は直接的である.

■ Lorentz 代数 (612) の証明 [11, p.230] Lorentz 共変な交換関係

$$[x^\mu(\tau), p^\nu(\tau)] = i\eta^{\mu\nu}, \quad [x^\mu(\tau), x^\nu(\tau)] = 0, \quad [p^\mu(\tau), p^\nu(\tau)] = 0$$

を用いて, Lorentz 生成子 $M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu$ の満たす交換関係を調べる.

まず

$$[M^{\mu\nu}, x^\rho] = [x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu, x^\rho] = x^\mu [p^\nu, x^\rho] - x^\nu [p^\mu, x^\rho] = x^\mu (-i\eta^{\nu\rho}) - x^\nu (-i\eta^{\mu\rho}) = i\eta^{\mu\rho} x^\nu - i\eta^{\nu\rho} x^\mu$$

である. また

$$[M^{\mu\nu}, p^\rho] = [x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu, p^\rho] = [x^\mu, p^\rho] p^\nu - [x^\nu, p^\rho] p^\mu = i\eta^{\mu\rho} p^\nu - i\eta^{\nu\rho} p^\mu$$

が成り立つ. これらを用いると

$$\begin{aligned} [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= [M^{\mu\nu}, x^\rho p^\sigma - x^\sigma p^\rho] \\ &= x^\rho [M^{\mu\nu}, p^\sigma] + [M^{\mu\nu}, x^\rho] p^\sigma - x^\sigma [M^{\mu\nu}, p^\rho] - [M^{\mu\nu}, x^\sigma] p^\rho \\ &= x^\rho (i\eta^{\mu\sigma} p^\nu - i\eta^{\nu\sigma} p^\mu) + (i\eta^{\mu\rho} x^\nu - i\eta^{\nu\rho} x^\mu) p^\sigma - x^\sigma (i\eta^{\mu\rho} p^\nu - i\eta^{\nu\rho} p^\mu) - (i\eta^{\mu\sigma} x^\nu - i\eta^{\nu\sigma} x^\mu) p^\rho \\ &= i\eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - i\eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + i\eta^{\mu\sigma} M^{\rho\nu} - i\eta^{\nu\sigma} M^{\rho\mu} : (612) \end{aligned}$$

を得る.

■ Lorentz 生成子の光錐成分の交換関係 (613) について

$$[M^{+-}, M^{+I}] = i\eta^{++} M^{-I} - i\eta^{-+} M^{+I} + i\eta^{+I} M^{+-} - i\eta^{-I} M^{++}$$

における 4 つの η は

$$\eta^{++} = 0, \quad \eta^{+I} = 0, \quad \eta^{-+} = -1, \quad \eta^{-I} = 0$$

だから, η がゼロにならない唯一の添字の組合せは, 第 1 の生成子から $-$ を選び, 第 2 の生成子から $+$ を選ぶ場合に限られる. η^{-+} を持つ項は $-i\eta^{-+} M^{+I} = iM^{+I}$ なので

$$[M^{+-}, M^{+I}] = iM^{+I}$$

を得る.

また交換子 $[M^{-I}, M^{-J}]$ の計算に現れる 4 つの η は

$$\eta^{--} = 0, \quad \eta^{-J} = 0, \quad \eta^{I-} = 0, \quad \eta^{IJ} = \delta^{IJ}$$

なので, ここでは η に添字 I と J を使わねばならない. η^{IJ} を持つ項は $-i\eta^{IJ} M^{--}$ であり, 反対称性 $M^{--} = 0$ によりこれはゼロになる. ここで (テンソルの変換則より), Lorentz テンソル $M^{\mu\nu}$ の反対称性は光錐成分にも受け継がれることを用いた.

10.7 相対論的な量子開弦 (補足)

10.7.1 光錐 Hamiltonian と交換子 (補足)

■ \dot{X}^- の式 (614) の導出 式 (594):

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2$$

において開弦を想定して $\beta = 2$ とおき, 複号に応じた 2 式を辺々足すと式 (614):

$$\dot{X}^- = \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \dot{X}^I + X^{I'} X^{I'})^2$$

を得る.

■ $\mathcal{P}^{\tau-}$ の式 (615) の導出 式 (614) より

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\tau-} &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^- = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^+} \left(\mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I} + \frac{X^{I'} X^{I'}}{(2\pi\alpha')^2} \right) \\ &= \frac{\pi}{2p^+} \left(\mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I} + \frac{X^{I'} X^{I'}}{(2\pi\alpha')^2} \right) : (615) \end{aligned}$$

となる.

■ $\mathcal{P}^{\tau-}$ の式 (618) の導出 Heisenberg 方程式 $i\dot{X}^I(\tau, \sigma) = [X^I(\tau, \sigma), H(\tau)]$ において, Hamiltonian(617):

$$H = \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma' \left(\mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma') \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma') + \frac{X^{J'}(\tau, \sigma') X^{J'}(\tau, \sigma')}{(2\pi\alpha')^2} \right)$$

の第 2 項は, 次式より $X^I(\tau, \sigma)$ と可換である.

$$[X^I(\tau, \sigma), X^{J'}(\tau, \sigma')] = \frac{\partial}{\partial \sigma'} [X^I(\tau, \sigma), X^J(\tau, \sigma')] = 0.$$

正準交換関係 (616) より式 (618):

$$\begin{aligned} i\dot{X}^I(\tau, \sigma) &= \left[X^I(\tau, \sigma), \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma' \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma') \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma') \right] = \pi\alpha' \cdot 2 \int_0^\pi d\sigma' \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma') i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma') \\ &= 2\pi i\alpha' \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) \end{aligned}$$

を得る.

■ 交換関係 (619), (620) の導出

$$\begin{aligned} [X^I(\tau, \sigma), X^J(\tau, \sigma')] = 0 \text{ を } \sigma \text{ と } \sigma' \text{ について微分} &\rightarrow [X^{I'}(\tau, \sigma), X^{J'}(\tau, \sigma')] = 0, \\ [\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] &\rightarrow [\dot{X}^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 0 \quad (\because \text{式 (618)}) \end{aligned}$$

であり, これらに注意すると

$$\begin{aligned} [(\dot{X}^I \pm X^{I'})(\tau, \sigma), (\dot{X}^J \pm X^{J'})(\tau, \sigma')] &= \pm [\dot{X}^I(\tau, \sigma), X^{J'}(\tau, \sigma')] \pm [X^{I'}(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')], \\ [(\dot{X}^I \pm X^{I'})(\tau, \sigma), (\dot{X}^J \mp X^{J'})(\tau, \sigma')] &= \mp [\dot{X}^I(\tau, \sigma), X^{J'}(\tau, \sigma')] \pm [X^{I'}(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] \end{aligned}$$

となる. 2 式の右辺の第 2 項は, 正準交換関係 (616) に式 (618) を適用した式

$$[X^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma')$$

を両辺 σ で微分して,

$$[X^{I'}(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma')$$

と評価できる．すると第1項については

$$\left[\dot{X}^I(\tau, \sigma), X^{J'}(\tau, \sigma') \right] = \left[X^{J'}(\tau, \sigma'), \dot{X}^I(\tau, \sigma) \right] = -(2\pi\alpha')i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma'} \delta(\sigma' - \sigma) = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma')$$

となる．ただし最後の等号では差 $\Delta\sigma = \sigma' - \sigma$ の関数に対する微分の関係 $\frac{d}{d\sigma'} = -\frac{d}{d\sigma}$ および、 $\delta(\Delta\sigma) = \delta(-\Delta\sigma)$ を用いた．以上を上式に代入して、式 (619)、(620) を得る．

10.7.2 振動子の交換関係 (補足)

■演算子 $X^I(\tau, \sigma)$ もまた波動方程式を満たすことの確認 運動量密度に対する Heisenberg 方程式

$$i\dot{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma) = [\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), H(\tau)] = \frac{\pi\alpha'}{(2\pi\alpha')^2} \int d\sigma' [\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), X^{J'}(\tau, \sigma') X^{J'}(\tau, \sigma')]$$

において

$$[\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), X^{J'}(\tau, \sigma')] = -\frac{d}{d\sigma'} [X^J(\tau, \sigma'), \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma)] = -i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma'} \delta(\sigma - \sigma')$$

なので、

$$\begin{aligned} i\dot{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma) &= \frac{1}{4\pi\alpha'} (-2i\eta^{IJ}) \int d\sigma' X^{J'}(\tau, \sigma') \frac{d}{d\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') \\ &= \frac{i}{2\pi\alpha'} \int d\sigma' X^{I''}(\tau, \sigma') \delta(\sigma - \sigma') \\ &= \frac{i}{2\pi\alpha'} X^{I''}(\tau, \sigma), \\ \therefore \dot{\mathcal{P}}^{\tau I} &= X^{I''} \end{aligned}$$

を得る．これと $\dot{X}^I = 2\pi\alpha' \mathcal{P}^{\tau I}$:(618) を合わせると、演算子もまた波動方程式を満たすこと

$$\ddot{X}^I = 2\pi\alpha' \dot{\mathcal{P}}^{\tau I} = X^{I''}, \quad \therefore \ddot{X}^I - X^{I''} = 0$$

が導かれる．

■振動子の交換関係 (621) の導出 弦座標の導関数のモード展開は式 (592) の形

$$\begin{aligned} (\dot{X}^I + X^{I'}) (\tau, \sigma) &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad \sigma \in [0, \pi] \\ (\dot{X}^I - X^{I'}) (\tau, \sigma) &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau-\sigma)}, \quad \sigma \in [0, \pi] \end{aligned}$$

をとる．これらは弦座標を定義する範囲 $\sigma \in [0, \pi]$ で成立する．第2式は

$$(\dot{X}^I - X^{I'}) (\tau, -\sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad \sigma \in [-\pi, 0]$$

と書き換えられる．ここで (σ の全範囲で定義された) 演算子

$$A^I(\tau, \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau+\sigma)}$$

を導入する． A^I はその定義により周期性 $A^I(\tau, \sigma + 2\pi) = A^I(\tau, \sigma)$ を満たしており、1周期に相当する区間 $\sigma \in [-\pi, \pi]$ において弦座標と

$$A^I(\tau, \sigma) = \begin{cases} (\dot{X}^I + X^{I'}) (\tau, \sigma) & \sigma \in [0, \pi] \\ (\dot{X}^I - X^{I'}) (\tau, -\sigma) & \sigma \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

のように関係付けられる。

振動子の交換関係 (621) を導くにあたり，交換子 $[A^I(\tau, \sigma), A^J(\tau, \sigma')]$ を計算することが目下の目標となる。これは σ, σ' の範囲に応じて，以下の 4 通りの交換子を与える。

$$\begin{aligned} & [(\dot{X}^I + X^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J + X^{J'}) (\tau, \sigma')], & \sigma, \sigma' \in [0, \pi] \\ & [(\dot{X}^I + X^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J - X^{J'}) (\tau, -\sigma')], & \sigma \in [0, \pi], \sigma' \in [-\pi, 0] \\ & [(\dot{X}^I - X^{I'}) (\tau, -\sigma), (\dot{X}^J + X^{J'}) (\tau, \sigma')], & \sigma \in [-\pi, 0], \sigma' \in [0, \pi] \\ & [(\dot{X}^I - X^{I'}) (\tau, -\sigma), (\dot{X}^J - X^{J'}) (\tau, -\sigma')], & \sigma, \sigma' \in [-\pi, 0] \end{aligned}$$

第 1 と第 4 の交換子は，交換関係 (619) よりそれぞれ

$$\begin{aligned} & [(\dot{X}^I + X^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J + X^{J'}) (\tau, \sigma')] = 4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'), \\ & [(\dot{X}^I - X^{I'}) (\tau, -\sigma), (\dot{X}^J - X^{J'}) (\tau, -\sigma')] = -4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d(-\sigma)} \delta(-\sigma + \sigma') \\ & \qquad \qquad \qquad = 4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \end{aligned}$$

と計算される (これらは等しい)。第 2 と第 3 の交換子は，交換関係 (620) よりいずれもゼロになる。以上の結果は

$$[A^I(\tau, \sigma), A^J(\tau, \sigma')] = 4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma')$$

とまとめられる^{*247}。ここに $A^I(\tau, \sigma)$ の定義式を代入すると

$$\sum_{m', n' \in \mathbf{Z}} e^{im'(\tau+\sigma)} e^{in'(\tau+\sigma')} [\alpha_{m'}^I, \alpha_{n'}^J] = 2\pi i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma')$$

となる。この式は $\sigma, \sigma' \in [-\pi, \pi]$ において成立する。

ここから振動子の交換関係を取り出すために，両辺に次の積分を施す。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{im\sigma} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma' e^{in\sigma'}.$$

すると左辺においては $m' = m, n' = n$ の項が抽出されて

$$\begin{aligned} & \sum_{m', n'} e^{-i(m'+n')\tau} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{i(m-m')\sigma} \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma' e^{i(n-n')\sigma'} \right) [\alpha_{m'}^I, \alpha_{n'}^J] \\ & = \sum_{m', n'} e^{-i(m'+n')\tau} \delta_{mm'} \delta_{nn'} [\alpha_{m'}^I, \alpha_{n'}^J] \\ & = e^{-i(m+n)\tau} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] \end{aligned}$$

^{*247} 第 2 と第 3 の σ, σ' の範囲からは $\sigma = \sigma' (= 0)$ の場合を省いて良い (第 1 または第 4 の σ, σ' の範囲に含めれば良い)。このとき $\sigma \neq \sigma'$ に対しては $\delta(\sigma - \sigma') = 0$ なので，上式は第 2, 第 3 の交換関係を再現する。

となる。一方、右辺の積分は

$$\begin{aligned} & i\eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{im\sigma} \frac{d}{d\sigma} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma' e^{in\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') \\ &= i\eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{im\sigma} \frac{d}{d\sigma} e^{in\sigma} = -n\eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{i(m+n)\sigma} \\ &= -n\eta^{IJ} \delta_{m+n,0} = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0} \end{aligned}$$

となるので、これらを等置して振動子の交換関係 (621):

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0} e^{i(m+n)\tau} = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0}$$

を得る。

■交換関係 (623) の導出 交換関係 (622):

$$[X^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma')$$

を両辺 $0 \leq \sigma \leq \pi$ にわたって積分すると、左辺では X^I のモード展開

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^I \cos n\sigma e^{-in\tau}$$

における振動子の項は寄与を持たず、右辺ではデルタ関数が消えて

$$[x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau, \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 2\alpha' i\eta^{IJ}$$

となる。ここで \dot{X}^J は α_n^J を含む項の和なので、振動子の交換関係 (621) により $[\alpha_0^I, \dot{X}^J] = 0$ である。

$$[x_0^I, \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 2\alpha' i\eta^{IJ}.$$

さらに \dot{X}^J のモード展開を利用すると、上式から

$$\sqrt{2\alpha'} i\eta^{IJ} = \sum_{n' \in \mathbf{Z}} [x_0^I, \alpha_{n'}^J] \cos n' \sigma' e^{-in'\tau} = [x_0^I, \alpha_0^J] + \sum_{n'=1}^{\infty} [x_0^I, \alpha_{n'}^J e^{-in'\tau} + \alpha_{-n'}^J e^{in'\tau}] \cos n' \sigma' \quad (786)$$

が得られる。これに積分 $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\sigma' \cos n\sigma'$ を施すと

$$0 = [x_0^I, \alpha_n^J e^{-in\tau} + \alpha_{-n}^J e^{in\tau}] = [x_0^I, \alpha_n^J] e^{-in\tau} + [x_0^I, \alpha_{-n}^J] e^{in\tau} \quad (787)$$

となる。これが任意の τ で成り立つためには、最右辺の各項がそれぞれ単独でゼロにならなければならない。実際、上式 (787) において τ を $-\tau$ に置き換えた式 (これを式 (787)' と呼ぼう) が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} (\text{式 (787)}) \times e^{-in\tau} - (\text{式 (787)'}) \times e^{in\tau} &: [x_0^I, \alpha_n^J] = 0 \quad (n \geq 1) \\ (\text{式 (787)}) \times e^{in\tau} - (\text{式 (787)'}) \times e^{-in\tau} &: [x_0^I, \alpha_{-n}^J] = 0 \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

であり、これらは

$$[x_0^I, \alpha_n^J] = 0 \quad \text{for} \quad n \neq 0 \quad (788)$$

にまとめられる。これを上式 (786) に戻すと、

$$[x_0^I, \alpha_0^J] = \sqrt{2\alpha'} i\eta^{IJ} \quad (789)$$

すなわち交換関係 (623):

$$[x_0^I, p^J] = i\eta^{IJ}$$

が得られる ($\alpha_0^I = \sqrt{2\alpha'} p^I$)。

■振動子 $a_n^I, a_n^{I\dagger}$ に対する交換関係 (624) の導出 振動子の交換関係 (621) は

$$[\alpha_m^I, \alpha_{-n}^J] = m\delta_{m,n}\eta^{IJ}$$

と書き直せる.

m と n が異符号の場合, これは

$$m, -n \geq 1 \text{ のとき } [a_m^I, a_{-n}^J] = 0, \quad m, -n \leq -1 \text{ のとき } [a_{-m}^{I\dagger}, a_n^{J\dagger}] = 0$$

となり, これらは $m, n \geq 1$ として

$$[a_m^I, a_n^J] = 0. \quad [a_m^{I\dagger}, a_n^{J\dagger}] = 0$$

と書き換えられる.

m と n が同符号の場合の関係としては, $m, n > 0$ の場合だけを考えれば充分である. すると

$$[\sqrt{m}a_m^I, \sqrt{n}a_n^{J\dagger}] = m\delta_{m,n}\eta^{IJ}, \quad \therefore [a_m^I, a_n^{J\dagger}] = \frac{m}{\sqrt{mn}}\delta_{m,n}\eta^{IJ} = \delta_{m,n}\eta^{IJ}$$

となる.

■演算子 $X^I(\tau, \sigma)$ の Hermite 性 モード展開

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^I e^{-in\tau} - \alpha_{-n}^I e^{in\tau})\frac{\cos n\sigma}{n}$$

より $X^I(\tau, \sigma)$ の Hermite 性

$$\begin{aligned} (X^I(\tau, \sigma))^\dagger &= (x_0^I)^\dagger + \sqrt{2\alpha'}(\alpha_0^I)^\dagger\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^{I\dagger} e^{-in\tau} - \alpha_{-n}^{I\dagger} e^{in\tau})\frac{\cos n\sigma}{n} \\ &= x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau - i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_{-n}^I e^{in\tau} - \alpha_n^I e^{-in\tau})\frac{\cos n\sigma}{n} \\ &\quad (\because (x_0^I)^\dagger = x_0^I, (\alpha_n^I)^\dagger = \alpha_{-n}^I) \\ &= X^I(\tau, \sigma) \end{aligned}$$

が確かめられる.

10.7.3 横方向の Virasoro 演算子 (補足)

■正規順序化定数の表式 (625) の導出

$$L_0^\perp = \frac{1}{2}\sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I = \frac{1}{2}\alpha_0^I \alpha_0^I + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I$$

の最右辺において, 最初の 2 項は既に正規順序になっている. そこで最後の項を正規順序

$$N \left[\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I \right] = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I$$

に並び替えたときのお釣りを調べると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_{-p}^I \alpha_p^I + [\alpha_p^I, \alpha_{-p}^I]) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p \eta^{II} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p \\ &= N \left[\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I \right] + a, \\ a &= \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p : (625) \end{aligned}$$

となる.

■ M^2 の式 (626) について 正規順序化の操作を $N[\dots]$ という記法によって明記する.

$$M^2 = 2p^+ p^- - p^I p^I = \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp - p^I p^I = \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp - \frac{1}{2\alpha'} \alpha_0^I \alpha_0^I = \frac{1}{2\alpha'} \sum_{p \neq 0} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I$$

を正規順序化すると

$$N[M^2] = \frac{1}{\alpha'} N[L_0^\perp] - p^I p^I = N \left[\frac{1}{2\alpha'} \sum_{p \neq 0} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I \right] = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I$$

であり, 式 (626) は

$$\alpha' M^2 = \alpha' N[M^2] + a$$

と書ける.

■ ゼータ関数 $\zeta(-1)$ に関する数学公式 (627) の証明 式 (627):

$$\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}$$

を示すために, ゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \Re(s) > 1$$

について調べる (\Re は実部).

手始めに, ガンマ関数の極の構造を調べておく. 議論の要点は以下のようにまとめられる [11, p.67].

ガンマ関数の定義式において, 引数 z が正の実部を持つ複素数であると考え.

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{z-1}, \quad \Re(z) > 0.$$

$\Re(z) > 0$ において, 次式を証明できる.

$$\Gamma(z) = \int_0^1 dt t^{z-1} \left(e^{-t} - \sum_{n=0}^N \frac{(-t)^n}{n!} \right) + \sum_{n=0}^N \frac{(-t)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^{\infty} dt e^{-t} t^{z-1}$$

上の右辺が $(z) > -N-1$ において数学的に定義可能であり, $\Gamma(z)$ を $(z) > -N-1$ へ解析接続した式にあたることを論じる. このガンマ関数が $0, -1, -2, \dots$ において極を持つことを説明し, $z = -n$ (n は正の整数) における留数を求める.

まず与式は

$$\int_0^1 dt t^{z-1} \sum_{n=0}^N \frac{(-t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 dt t^{z+n-1} = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$$

より成立している。

もとの $\Gamma(z)$ の定義式では積分が下限 $t=0$ で収束するために $\Re(z) > 0$ が課されるが, 変形後は

$$\int_0^1 dt t^{z-1} \left(e^{-t} - \sum_{n=0}^N \frac{(-t)^n}{n!} \right)$$

において被積分関数が $t^{z-1} \mathcal{O}(t^{N+1}) = \mathcal{O}(t^{\Re(z)+N})$ なので, これは $(z) > -N-1$ であれば下限 $t=0$ で発散しない。(そしてこの N は任意に選べる.)

与式の $\frac{1}{\{z-(-n)\}}$ の項を見れば, $\Gamma(z)$ が $z = -n$ (n は正の整数) を 1 位の極に持つことが分かる。その留数は係数 $\frac{(-1)^n}{n!}$ である。

さて, 以上を踏まえてゼータ関数の解析接続を行う。再び, あらかじめ議論の概略を以下にまとめておく [11, p.269].

ガンマ関数の定義 $\Gamma(s) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{s-1}$ を考える。この積分において $t \rightarrow nt$ と置いて得られる式を用いて, 次式が証明される。

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty dt \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}, \quad \Re(s) > 1. \quad (790)$$

また, t が小さいときの展開が, 次のようになることを証明できる。

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{t}{12} + \mathcal{O}(t^2). \quad (791)$$

上の式を利用して $\Re(s) > 1$ において次式が得られる。

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^1 dt t^{s-1} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} - \frac{t}{12} \right) + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} + \frac{1}{12(s+1)} + \int_1^\infty dt \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}. \quad (792)$$

上式の右辺が $\Re(s) > -2$ において良く定義されており, この右辺が, 左辺の $\Re(s) > -2$ への解析接続を定義していることを説明する。 $\Gamma(s)$ の極の構造を思い出し, それを用いて $\zeta(0) = -1/2$ と $\zeta(-1) = -1/12$ を証明する。

まず, 上式 (790) は次のように示される。

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} &= \int_0^\infty dt e^{-t} t^{s-1} \frac{1}{1 - e^{-t}} \\ &= \int_0^\infty dt e^{-t} t^{s-1} (1 + e^{-t} + e^{-2t} + \dots) \\ &= \int_0^\infty dt t^{s-1} \sum_{n=1}^\infty e^{-nt} \\ &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \frac{dt'}{n} \left(\frac{t'}{n} \right)^{s-1} e^{-t'} \quad (nt = t') \\ &= \left(\int_0^\infty dt' e^{-t'} t'^{s-1} \right) \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \right) \\ &= \Gamma(s)\zeta(s). \end{aligned}$$

ただし $\zeta(s)$ の定義域として $\Re(s) > 1$ を要求する.

次に t が小さいとき ($0 < t < 1$),

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^t - 1} &= \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2!}t + \frac{1}{3!}t^2 + O(t^3)} \\ &= \frac{1}{t} \left\{ 1 - \frac{1}{2!}t - \frac{1}{3!}t^2 + \left(\frac{1}{2!}t\right)^2 + O(t^3) \right\} \\ &= \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{t}{12} + O(t^2) \end{aligned}$$

となるので, 上式 (791) が成り立つ.

上式 (792) は

$$\int_0^1 dt t^{s-1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{t}{12} \right) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} + \frac{1}{12(s+1)}$$

による. 式 (792) における $\left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} - \frac{t}{12}\right)$ は $O(t^2)$ なので, $\Re(s) > -2$ としても右辺第 1 項の積分は下限 $t=0$ で発散しない.

$\zeta(s)$ は $s = -n (n = 0, 1, 2, \dots)$ に極を持たないから,

$$\operatorname{Res}[\Gamma(-n)\zeta(-n)] = \zeta(-n)\operatorname{Res}[\Gamma(-n)]$$

として良い. また冒頭で得た結果

$$\operatorname{Res}[\Gamma(-n)] = \frac{(-1)^n}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

はその導き方より $n=0$ でも正しい. 以上より

$$\operatorname{Res}[\Gamma(0)\zeta(0)] = \zeta(0), \quad \operatorname{Res}[\Gamma(-1)\zeta(-1)] = -\zeta(-1)$$

となる. これを式 (792) から読み取れる関係

$$\operatorname{Res}[\Gamma(0)\zeta(0)] = -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{Res}[\Gamma(-1)\zeta(-1)] = \frac{1}{12}$$

と比較して

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

を得る. 第 2 式は示したかった式 (627): $1+2+3+4+\dots = -\frac{1}{12}$ である. なお第 1 式は $1+1+1+1+\dots = -1/2$ を意味している.

素朴な説明 無限等比級数和 (Taylor 展開)

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

を両辺 x で微分すると,

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

を得る. この式の成立範囲は $|x| < 1$ であるけれど, $x = -1$ を代入することを許すと

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots = \frac{1}{4}$$

を得る。よって無限級数和 $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ は

$$S = (1 - 2 + 3 - 4 + \dots) + 2 \cdot (2 + 4 + \dots) = \frac{1}{4} + 4S, \quad \therefore S = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}$$

と“求まる”。このような素朴な議論から、 $S = -1/12$ が示唆される。

10.7.4 Lorentz 生成子 (補足)

■角運動量テンソルの光錐ゲージにおける表式 (628) の導出 光錐ゲージでは

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X^{\mu'}, \quad \mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu$$

なので

$$M^{\mu\nu} = \int_0^\pi (X_\mu \mathcal{P}^{\tau\nu} - X_\nu \mathcal{P}^{\tau\mu}) d\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi (X^\mu \dot{X}^\nu - X^\nu \dot{X}^\mu) d\sigma$$

を得る。弦座標のモード展開 (5.5.4 節)

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma,$$

$$\dot{X}^\mu = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^\mu \cos n\sigma e^{-in\tau}$$

を用いてこれを評価しよう。例えば被積分関数の第 1 項は

$$X^\mu \dot{X}^\nu = x_0^\mu (\sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\nu) + i2\alpha' \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu \alpha_{-n}^\nu \cos^2 n\sigma + (\tau \text{ に依存しない項})$$

となる。第 2 項は μ と ν を入れ替えた類似の式によって与えられる。ところで $M^{\mu\nu}$ は τ に依存しないことがあらかじめ保証されているので、 τ に依存しない項だけを拾い上げれば充分である。すると $\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu$ より

$$\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma \{x_0^\mu (\sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\nu) - x_0^\nu (\sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu)\} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\sigma \right) (x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu) = x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu$$

であり、また

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma \left\{ i2\alpha' \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n^\mu \alpha_{-n}^\nu - \alpha_n^\nu \alpha_{-n}^\mu) \cos^2 n\sigma \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma \left\{ -i2\alpha' \times 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu) \cos^2 n\sigma \right\} \quad (\because \text{交換関係 (621)}) \\ &= -i \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu) \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\sigma \cos^2 n\sigma \\ &= -i \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu) \end{aligned}$$

なので、 $M^{\mu\nu}$ の式 (628):

$$M^{\mu\nu} = x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu)$$

が導かれる。

■ M^{-I} の式 (629) の各項の Hermite 性について まず x_0^I と p^- は非可換なので, $x_0^I p^-$ は Hermite ではないことを説明する. 準備として交換関係 $[L_0^\perp, x_0^I] = -i\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I$ を示す.

$$[L_m^\perp, x_0^I] = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} [\alpha_{m-p}^J \alpha_p^J, x_0^I] = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} (\alpha_{m-p}^J [\alpha_p^J, x_0^I] + [\alpha_{m-p}^J, x_0^I] \alpha_p^J).$$

ここで式 (788): $[x_0^I, \alpha_n^J] = 0 (n \neq 0)$, 式 (789): $[x_0^I, \alpha_0^J] = \sqrt{2\alpha'} i \eta^{IJ}$ より最右辺の和において第 1 項は $p = 0$ の項が, 第 2 項は $p = m$ の項が残る. よって上式

$$\begin{aligned} [L_m^\perp, x_0^I] &= -\frac{1}{2} \{ \alpha_m^J (\sqrt{2\alpha'} i \eta^{IJ}) + (\sqrt{2\alpha'} i \eta^{IJ}) \alpha_m^J \} \\ &= -i\sqrt{2\alpha'} \alpha_m^I \end{aligned}$$

を得る.

さて, これを 5.9.3 節で見た関係

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- = 2\alpha' p^- = \frac{1}{p^+} L_0^\perp$$

と合わせて用いると,

$$[x_0^I, p^-] = \frac{1}{2\alpha' p^+} [x_0^I, L_0^\perp] = \frac{i}{2\alpha' p^+} \alpha_0^I = i \frac{p^I}{p^+}$$

となるので, 確かに x_0^I と p^- は非可換である. このとき $(x_0^I p^-)^\dagger = p^- x_0^I \neq x_0^I p^-$ なので, $x_0^I p^-$ は非 Hermite である. そこで式 (629) では量子論に移行する際に, これを

$$\frac{1}{2} (x_0^I p^- + p^- x_0^I)$$

と対称な形に定義して, Hermite 性を保証している.

なお上式の第 1 の等号では $[x_0^I, p^+] = 0$ を用いた. これは正準交換関係において仮定されている $[X^I, p^+] = 0$ に X^I のモード展開を代入した関係が, 任意の σ, τ の値に対して成立しなければならないことから正当化される.

式 (629) 最後の項の Hermite 性は次のように確かめられる.

$$\{i(\alpha_{-n}^- \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I \alpha_n^-)\} = -i\{(\alpha_n^I)^\dagger (\alpha_{-n}^-)^\dagger - (\alpha_{-n}^-)^\dagger (\alpha_n^I)^\dagger\} = -i(\alpha_{-n}^I \alpha_n^- - \alpha_{-n}^- \alpha_n^I) = i(\alpha_{-n}^- \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I \alpha_n^-).$$

10.7.5 状態空間の構築 (補足)

■ 数演算子の固有値 (631) の説明 励起の数演算子

$$N^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I$$

は交換関係

$$\begin{aligned} [N^\perp, a_n^{I\dagger}] &= \sum_{m=1}^{\infty} m a_m^{J\dagger} [a_m^J, a_n^{I\dagger}] = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m^{J\dagger} \delta_{mn} \eta^{IJ} = n a_n^{I\dagger}, \\ [N^\perp, a_n^I] &= \sum_{m=1}^{\infty} m [a_m^{J\dagger}, a_n^I] a_m^J = \sum_{m=1}^{\infty} m (-\delta_{mn} \eta^{IJ}) a_m^J = -n a_n^I. \end{aligned}$$

を満たす。また N^\perp は正規順序化されているので、 $N^\perp |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0$ のように基底状態を消失させる。以上を踏まえ、例えば基本状態 $|\lambda\rangle = a_3^{J^\dagger} a_2^{I^\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$ に対する固有方程式を作ると

$$\begin{aligned} N^\perp |\lambda\rangle &= N^\perp a_3^{J^\dagger} a_2^{I^\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \\ &= [N^\perp, a_3^{J^\dagger}] a_2^{I^\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle + a_3^{J^\dagger} N^\perp a_2^{I^\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \\ &= [N^\perp, a_3^{J^\dagger}] a_2^{I^\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle + a_3^{J^\dagger} [N^\perp, a_2^{I^\dagger}] |p^+, \vec{p}_T\rangle + a_3^{J^\dagger} a_2^{I^\dagger} N^\perp |p^+, \vec{p}_T\rangle \\ &= (3a_3^{J^\dagger}) a_2^{I^\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle + a_3^{J^\dagger} (2a_2^{I^\dagger}) |p^+, \vec{p}_T\rangle \\ &= 5 |\lambda\rangle \end{aligned}$$

となるので、固有値は $N_\lambda^\perp = 5$ と求まる。

ここから同様に一般の基本状態に関する固有値 N_λ^\perp が、その基本状態を作っている生成演算子のモード番号の和 (631) で与えられることが容易に分かる。

10.7.6 運動方程式 (補足)

■Hamiltonian の表式 (633) の導出

$$N[L_0^\perp] = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I = \alpha' p^I p^I + N^\perp, \quad N^\perp \equiv \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I$$

を式 (630): $H = N[L_0^\perp] - 1$ に代入して、式 (633):

$$H = \alpha' p^I p^I + N^\perp - 1$$

を得る。

■波動方程式 (635) の導出 Schrödinger 方程式 (634) に式 (632) を代入すると

$$\int dp^+ d^{24} p_T \left[i \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_{I_1 \dots I_k}(\tau, p^+, \vec{p}_T) - (\alpha' p^I p^I + N^\perp - 1) \psi_{I_1 \dots I_k}(\tau, p^+, \vec{p}_T) \right] a_{n_1}^{I_1^\dagger} \dots a_{n_k}^{I_k^\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0$$

となる。ただしここでは Hamiltonian における演算子 p^I, N^\perp は状態 $a_{n_1}^{I_1^\dagger} \dots a_{n_k}^{I_k^\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$ に作用して固有値に置き換わっている。基底ベクトル $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ は固有値の異なるそれぞれが互いに線形独立なので、括弧 [...] の中がゼロでなければならないから、式 (635):

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_{I_1 \dots I_k} = (\alpha' p^I p^I + N^\perp - 1) \psi_{I_1 \dots I_k}$$

を得る。

■ $A^I(\tau, p^+, \vec{p}_T)$ の満たす式 (637) について この結果は、光錐ゲージにおいて Maxwell 場が質量のないスカラー場の方程式に従うため、スカラー場の方程式 (636) と全く同じ仕方で導かれる。スカラー場との唯一の違いは場が添字を持ちことだけである。

読者はこのことを奇妙の思うかも知れない。たとえば Maxwell の古典場の方程式は、スカラー場の方程式よりも複雑ではないだろうか？ 光錐ゲージではそうではない [5.7.3 節] [11, p.264].

10.8 相対論的な量子閉弦 (補足)

10.8.1 モード展開と交換関係 (補足)

■閉弦座標のモード展開 (638) の導出 波動方程式の一般解

$$X^\mu = X_L^\mu(u) + X_R^\mu(v), \quad u \equiv \tau + \sigma, \quad v \equiv \tau - \sigma$$

に周期境界条件 $X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi)$ を課すと,

$$\begin{aligned} X_L^\mu(u) + X_R^\mu(v) &= X_L^\mu(u + 2\pi) + X_R^\mu(v - 2\pi), \\ \therefore X_L^\mu(u + 2\pi) - X_L^\mu(u) &= X_R^\mu(v) - X_R^\mu(v - 2\pi) \end{aligned} \quad (793)$$

を得る。右辺の値は u に依らないから、左辺の値もまた u に依らない。よって

$$\frac{d}{du} \{X_L^\mu(u + 2\pi) - X_L^\mu(u)\} = 0, \quad \therefore X_L^{\mu'}(u + 2\pi) = X_L^{\mu'}(u)$$

である。これは $X_L^{\mu'}(u)$ が周期 2π を持つ周期関数となることを意味する。同様に $X_R^{\mu'}(v)$ も周期 2π の周期関数となるから、

$$X_L^{\mu'}(u) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-inu}, \quad X_R^{\mu'}(v) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^\mu e^{-inv} \quad (794)$$

とモード展開できる。このように閉弦は 2 組の振動子 $\bar{\alpha}_n^\mu, \alpha_n^\mu$ で記述される (ここで導入した α_n^μ は開弦の振動子とは関係ない)。これらを積分すると

$$\begin{aligned} X_L^\mu(u) &= \frac{1}{2} x_0^{L\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \bar{\alpha}_0^\mu u + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\bar{\alpha}_n^\mu}{n} e^{-inu}, \\ X_R^\mu(v) &= \frac{1}{2} x_0^{R\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \alpha_0^\mu v + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-inv} \end{aligned}$$

となる。ここで再び上式 (793) を考慮すると、

$$2\pi \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \bar{\alpha}_0^\mu = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \alpha_0^\mu, \quad \therefore \bar{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu$$

という制約が見出される。以上より閉弦座標のモード展開

$$\begin{aligned} X^\mu &= X_L^\mu(u) + X_R^\mu(v) \\ &= \frac{1}{2} (x_0^{L\mu} + x_0^{R\mu}) + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\alpha_n^\mu e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma}) \end{aligned}$$

が得られる。最後に $\frac{1}{2}(x_0^{L\mu} + x_0^{R\mu}) = x_0^\mu$ とおくと式 (638) に到達する*248。

*248 弦の運動量変数は 1 つだけなので、量子論において運動量演算子に共役なゼロモード座標は 1 つだけであり、2 種類のゼロモード $x_0^{L\mu} + x_0^{R\mu}$ の和 $x_0^\mu = \frac{1}{2}(x_0^{L\mu} + x_0^{R\mu})$ だけが意味を持つ。

■振動子の交換関係 (639) の導出

$$\begin{aligned}\dot{X}^\mu &= X_L^{\mu'}(\tau + \sigma) + X_R^{\mu'}(\tau - \sigma), \\ X^{\mu'} &= X_L^{\mu'}(\tau + \sigma) - X_R^{\mu'}(\tau - \sigma)\end{aligned}$$

および上式 (794) より, 弦座標の導関数の線形結合を作ると

$$\begin{aligned}\dot{X}^\mu + X^{\mu'} &= 2X_L^{\mu'}(\tau + \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau + \sigma)}, \\ \dot{X}^\mu - X^{\mu'} &= 2X_R^{\mu'}(\tau - \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau - \sigma)}\end{aligned}\quad (795)$$

となる. 導関数の和に振動子 $\bar{\alpha}_n^\mu$ が現れるのに対し, 差には振動子 α_n^μ が現れるという違いを除けば, これは開弦に対する式と全く同じ形をしている. また正準交換関係から, 交換関係

$$\left[(\dot{X}^I \pm X^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J \pm X^{J'}) (\tau, \sigma') \right] = \pm 4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'), \quad (\text{式 (619)})$$

$$\left[(\dot{X}^I \pm X^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J \mp X^{J'}) (\tau, \sigma') \right] = 0 \quad (\text{式 (620)})$$

(複号同順) が導かれることを思い出そう. ここではこれらの関係式の成り立つ閉弦座標の定義域が $\sigma, \sigma' \in [0, 2\pi]$ であることから, 振動子の交換関係を引き出すには単に, 上式 (795) を交換関係 (619), (620) に代入するところから始めれば良い. その後の解析は開弦の場合と似たものになる.

まず上式 (795) を交換関係 (619) に代入すると,

$$\sum_{m', n' \in \mathbf{Z}} \left\{ \begin{array}{l} [\bar{\alpha}_{m'}^I, \bar{\alpha}_{n'}^J] \\ [\alpha_{m'}^I, \alpha_{n'}^J] \end{array} \right\} e^{-im'(\tau \pm \sigma)} e^{-in'(\tau \pm \sigma')} = \pm 2\pi i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma')$$

が得られる (複号の上側に対しては上側の交換子を, 複号の下側に対しては下側の交換子をとる). 両辺に積分

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{\pm im\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{\pm in\sigma'}$$

を施すと, 右辺は

$$\begin{aligned}& \pm i\eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{\pm im\sigma} \frac{d}{d\sigma} \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{\pm in\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') \\ &= \pm i\eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{\pm im\sigma} \frac{d}{d\sigma} e^{\pm in\sigma} \\ &= -n\eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{i(m+n)\sigma} \\ &= -n\eta^{IJ} \delta_{m+n, 0} = m\eta^{IJ} \delta_{m+n, 0}\end{aligned}$$

となるので, 振動子の交換関係

$$e^{-i(m+n)\tau} \left\{ \begin{array}{l} [\bar{\alpha}_m^I, \bar{\alpha}_n^J] \\ [\alpha_m^I, \alpha_n^J] \end{array} \right\} = m\eta^{IJ} \delta_{m+n, 0}, \quad \therefore \left\{ \begin{array}{l} [\bar{\alpha}_m^I, \bar{\alpha}_n^J] \\ [\alpha_m^I, \alpha_n^J] \end{array} \right\} = m\eta^{IJ} \delta_{m+n, 0}$$

を得る.

同様に上式 (795) を交換関係 (620) に代入すれば,

$$[\alpha_m^I, \bar{\alpha}_n^J] = 0$$

が導かれる.

■交換関係 (640) の導出 [11, p.297] 交換関係 (640): $[x_0^I, p^J] = i\eta^{IJ}$, etc を導くことを考えよう。正準交換関係

$$[X^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma')$$

の両辺を $0 \leq \sigma \leq 2\pi$ にわたって積分すると、右辺は $2\pi\alpha' i\eta^{IJ}$ になる。一方、左辺において $X^I(\tau, \sigma)$ の含む $n \neq 0$ の振動モードの項

$$i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\alpha_n^I e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^I e^{-in\sigma})$$

は積分に寄与しない。よって

$$\int_0^{2\pi} d\sigma [X^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = \int_0^{2\pi} d\sigma [x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau, \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 2\pi[x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau, \dot{X}^J(\tau, \sigma')]$$

だから

$$[x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau, \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = i\alpha' \eta^{IJ}$$

を得る。ここで $\dot{X}^J(\tau, \sigma')$ のモード展開

$$\dot{X}^J(\tau, \sigma') = \alpha' p^J + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \neq 0} e^{-im\tau} (\alpha_m^J e^{im\sigma'} + \bar{\alpha}_m^J e^{-im\sigma'})$$

を利用すると

$$\sqrt{2\alpha'} [x_0^I, \alpha_0^J] + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \neq 0} e^{-im\tau} \{ [x_0^I, \alpha_m^J] e^{im\sigma'} + [x_0^I, \bar{\alpha}_m^J] e^{-im\sigma'} \} = i\alpha' \eta^{IJ} \quad (796)$$

となる。 $n \neq 0$ として両辺に $\int_0^{2\pi} d\sigma' e^{-in\sigma'}$ を作用させると

$$\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \{ [x_0^I, \alpha_n^J] e^{-in\tau} + [x_0^I, \bar{\alpha}_{-n}^J] e^{in\tau} \} = 0$$

となる。これが任意の τ に対して成り立つためには

$$[x_0^I, \alpha_n^J] = 0, \quad [x_0^I, \bar{\alpha}_n^J] = 0 \quad \text{for } n \neq 0$$

でなければならない。さらにこれを式 (796) にもどすと

$$\sqrt{2\alpha'} [x_0^I, \alpha_0^J] = i\alpha' \eta^{IJ}, \quad \therefore [x_0^I, \alpha_0^J] = i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \eta^{IJ} : (640)$$

を得る。

(我々は開弦に対しても同様の交換関係 (623), (788), (789) を得ている。)

■閉弦の Hamiltonian(641) について 光錐ゲージ条件は閉弦に対して $X^+ = \alpha' p^+ p^-$ であることを踏まえ

ると、

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \alpha' p^+ \frac{\partial}{\partial X^+} \quad \leftrightarrow \quad H = \alpha' p^+ p^- : (641).$$

10.8.2 閉弦の Virasoro 演算子 (補足)

■式 (642) 第 2 の等号について 弦座標の導関数の線形結合 (795):

$$\begin{aligned}\dot{X}^\mu + X^{\mu'} &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}, \\ \dot{X}^\mu - X^{\mu'} &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)}\end{aligned}$$

を用いると,

$$\begin{aligned}(\dot{X}^I + X^{I'})^2 &= 4\alpha' \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_p^I \bar{\alpha}_{n-p}^I \right) e^{-in(\tau+\sigma)} \equiv 4\alpha' \sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{L}_n^\perp e^{-in(\tau+\sigma)}, \\ (\dot{X}^I - X^{I'})^2 &= 4\alpha' \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I \right) e^{-in(\tau-\sigma)} \equiv 4\alpha' \sum_{n \in \mathbf{Z}} L_n^\perp e^{-in(\tau-\sigma)}\end{aligned}$$

となることによる。ただし第 1 の等号について, 例えば第 1 式では,

$$\begin{aligned}(\dot{X}^I + X^{I'})^2 &= 2\alpha' \sum_{p, m \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_p^I \bar{\alpha}_m^I e^{-i(p+m)(\tau+\sigma)} \\ &= 4\alpha' \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_p^I \bar{\alpha}_{n-p}^I \right) e^{-in(\tau+\sigma)} \quad (m+p=n)\end{aligned}$$

とすれば良い。

■ $N[\bar{L}_0^\perp], N[L_0^\perp]$ の式 (643) について

$$\begin{aligned}L_0^\perp &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} p(a_p^I a_p^{I\dagger} + a_p^{I\dagger} a_p^I) + \frac{\alpha'}{2} p^I p^I \right\} \quad (\because \alpha_0^I = \sqrt{\alpha'/2} p^I)\end{aligned}$$

なので

$$N[L_0^\perp] = \frac{\alpha'}{4} p^I p^I + N^\perp, \quad N^\perp \equiv \sum_{p=1}^{\infty} p a_p^{I\dagger} a_p^I$$

を得る。 $N[\bar{L}_0^\perp]$ についても同様。

■式 (644) について 上で行った $N[\bar{L}_0^\perp], N[L_0^\perp]$ の式 (643) の確認作業より, 例えば

$$L_0^\perp = N[L_0^\perp] + a$$

における正規順序化定数 a は，開弦の場合と同様に

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p [a_p^I, a_p^{I\dagger}] \\
 &= \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p : (625) \\
 &= -\frac{1}{24} (D-2) \\
 &= -1 \quad (\text{閉弦においても } D=26)
 \end{aligned}$$

となる． \bar{L}_0^\perp の正規順序化定数についても同様．

■ M^2 の式 (645)， H の式 (646) の導出

$$\begin{aligned}
 \alpha' p^- &= \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- \quad (\because \alpha_0^\mu = \sqrt{\alpha'/2} p^\mu) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{p^+} L_0^\perp + \frac{2}{p^+} \bar{L}_0^\perp \right) \\
 &= \frac{1}{p^+} (N[L_0^\perp] + N[\bar{L}_0^\perp] - 2) \quad (\because \text{式 (644)}) \\
 &= \frac{1}{p^+} \left(\frac{\alpha'}{2} p^I p^I + N^\perp + \bar{N}^\perp - 2 \right) \quad (\because \text{式 (643)})
 \end{aligned}$$

に注意して

$$\begin{aligned}
 M^2 &= 2p^+ p^- - p^I p^I \\
 &= \frac{2}{\alpha'} (N[L_0^\perp] + N[\bar{L}_0^\perp] - 2) - p^I p^I \\
 &= \frac{1}{\alpha'} (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2), \\
 H &= \alpha' p^+ p^- \\
 &= N[L_0^\perp] + N[\bar{L}_0^\perp] - 2 \\
 &= \frac{\alpha'}{2} p^I p^I + N^\perp + \bar{N}^\perp - 2
 \end{aligned}$$

とすれば良い．

■ Virasoro 演算子の閉弦座標への作用について ここでは 5.10.2 節に記した交換関係

$$[N[L_0^\perp] + N[\bar{L}_0^\perp], X^I(\tau, \sigma)] = -i \frac{\partial X^I}{\partial \tau}, \quad [N[L_0^\perp] - N[\bar{L}_0^\perp], X^I(\tau, \sigma)] = i \frac{\partial X^I}{\partial \sigma} \quad (797)$$

の導出を行う．以下，証明に必要な交換関係を順次，調べる．

Virasoro 演算子と振動子の交換関係 準備として

$$[\bar{L}_m^\perp, \bar{\alpha}_n^J] = -n \bar{\alpha}_{m+n}^J, \quad [L_m^\perp, \alpha_n^J] = -n \alpha_{m+n}^J \quad (798)$$

を示す [11, p.249].

ここでは L_0^\perp として、定義式 $L_n^\perp \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I$ に基づく正規順序化を施していない横方向 Virasoro 演算子を想定すると、上式 (798) 第 2 式

$$\begin{aligned} [L_m^\perp, \alpha_n^J] &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} [\alpha_{m-p}^I \alpha_p^I, \alpha_n^J] = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} (\alpha_{m-p}^I [\alpha_p^I, \alpha_n^J] + [\alpha_{m-p}^I, \alpha_n^J] \alpha_p^I) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} (p \delta_{p+n,0} \alpha_{m-p}^J + (m-p) \delta_{m-p+n,0} \alpha_p^J) \\ &= \frac{1}{2} (-n \alpha_{m+n}^J - n \alpha_{m+n}^J) \\ &= -n \alpha_{m+n}^J. \end{aligned}$$

を得る。第 1 式も同様に示される。

ここで正規順序化定数 a に対して $L_0^\perp = N[L_0^\perp] + a$ なので、 L_0^\perp の代わりに $N[L_0^\perp]$ を用いても、同様の交換関係

$$[N[L_0^\perp], \alpha_n^J] = [L_0^\perp, \alpha_n^J] = -n \alpha_n^J$$

が成り立つことが期待される。実際

$$N[L_0^\perp] = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I$$

より

$$\begin{aligned} [N[L_0^\perp], \alpha_n^J] &= \sum_{p=1}^{\infty} [\alpha_{-p}^I \alpha_p^I, \alpha_n^J] \quad (\because [\alpha_0^I, \alpha_0^J] = 0) \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} p (\delta_{p+n,0} \alpha_{-p}^J - \delta_{-p+n,0} \alpha_p^J) \\ &= \begin{cases} \sum_{p=1}^{\infty} p \delta_{p+n,0} \alpha_{-p}^J = -n \alpha_n^J & (n \leq 1) \\ 0 & (n = 0) \\ -\sum_{p=1}^{\infty} p \delta_{-p+n,0} \alpha_p^J = -n \alpha_n^J & (n \geq 1) \end{cases} \\ &= -n \alpha_n^J \end{aligned}$$

を得る。

最後に、異なる種類の振動子 α と $\bar{\alpha}$ は交換するので、

$$[L_m^\perp, \bar{\alpha}_n^J] = [\bar{L}_m^\perp, \alpha_n^J] = 0. \quad (799)$$

である。

Virasoro 演算子と x_0^I の交換関係 次に交換関係

$$[\bar{L}_m^\perp, x_0^I] = -i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \bar{\alpha}_m^I, \quad [L_m^\perp, x_0^I] = -i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \alpha_m^I \quad (800)$$

を導く [11, p.283].

$$\begin{aligned}
[\bar{L}_m^\perp, x_0^I] &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} (\bar{\alpha}_p^J [\bar{\alpha}_{m-p}^J, x_0^I] + [\bar{\alpha}_p^J, x_0^I] \bar{\alpha}_{m-p}^J) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \left\{ \bar{\alpha}_p^J \left(-i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \eta^{IJ} \delta_{pm} \right) + \left(-i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \eta^{IJ} \delta_{p0} \right) \bar{\alpha}_{m-p}^J \right\} \quad (\because \text{式 (640)}) \\
&= -i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \bar{\alpha}_m^I : (800) \text{ 第 1 式.}
\end{aligned}$$

$\bar{L}_0^\perp = N[\bar{L}_0^\perp] - 1$ より $m = 0$ に対してこれは \bar{L}_0^\perp を $N[\bar{L}_0^\perp]$ に置き換えても成り立つと期待される. 実際, $N[\bar{L}_0^\perp]$ の式 (643) より

$$[N[\bar{L}_0^\perp], x_0^I] = \frac{\alpha'}{4} [p^J p^J, x_0^I] = -i \frac{\alpha'}{2} p^I = -i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \alpha_0^I \quad (\because \alpha_0^\mu = \sqrt{\alpha'/2} p^\mu)$$

となる. 式 (800) の第 2 式

$$[L_m^\perp, x_0^I] = -i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \alpha_m^I$$

も同様に確かめられる ($m = 0$ に対してこれが L_0^\perp を $N[L_0^\perp]$ に置き換えても成り立つことも同様である).

Virasoro 演算子と閉弦座標の交換関係 さらに交換関係

$$[\bar{L}_m^\perp, X^I] = -\frac{i}{2} (\dot{X}^I + X^{I'}), \quad [L_m^\perp, X^I] = -\frac{i}{2} (\dot{X}^I - X^{I'}) \quad (801)$$

を導く [11, p.283].

$X^I(\tau, \sigma)$ のモード展開と交換関係 (798), (799), (800) を用いると, 上式 (801) 第 1 式

$$\begin{aligned}
[\bar{L}_0^\perp, X^I(\tau, \sigma)] &= [\bar{L}_0^\perp, x_0^I] + \sqrt{2\alpha'} [\bar{L}_0^\perp, \alpha_0^I] \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} ([\bar{L}_0^\perp, \alpha_n^I] e^{in\sigma} - [\bar{L}_0^\perp, \bar{\alpha}_n^I] e^{-in\sigma}) \\
&= -i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \alpha_0^I - i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \bar{\alpha}_n^I e^{-in(\tau+\sigma)} \\
&= -\frac{i}{2} \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_n^I e^{-in(\tau+\sigma)} \\
&= -\frac{i}{2} \{ \dot{X}^I(\tau, \sigma) + X^{I'}(\tau, \sigma) \} \quad (\because \text{式 (795)})
\end{aligned}$$

を得る. ここで用いた交換関係 (798), (799), (800) は \bar{L}_0^\perp を $N[\bar{L}_0^\perp]$ に置き換えても成り立つので, 式 (801) 第 1 式もまた \bar{L}_0^\perp を $N[\bar{L}_0^\perp]$ に置き換えても成り立つ. 式 (801) 第 2 式

$$[L_0^\perp, X^I] = -\frac{i}{2} (\dot{X}^I - X^{I'})$$

も同様に確かめられる (これが L_0^\perp を $N[L_0^\perp]$ に置き換えても成り立つことも同様である).

Virasoro 演算子の閉弦座標に対する作用 (797) の導出 式 (801) の 2 式

$$[\bar{L}_0^\perp, X^I(\tau, \sigma)] = -\frac{i}{2} (\dot{X}^I + X^{I'}), \quad [L_0^\perp, X^I(\tau, \sigma)] = -\frac{i}{2} (\dot{X}^I - X^{I'})$$

を辺々足すまたは引くと, 交換関係 (797):

$$[N[L_0^\perp] + N[\bar{L}_0^\perp], X^I(\tau, \sigma)] = -i \frac{\partial X^I}{\partial \tau}, \quad [N[L_0^\perp] - N[\bar{L}_0^\perp], X^I(\tau, \sigma)] = i \frac{\partial X^I}{\partial \sigma}$$

を得る.

10.9 超弦理論入門 (補足)

10.9.1 世界面フェルミオン (補足)

■場の運動方程式 (650) の導出 作用 (648) の場 ψ_α^I に関する変分をとると,

$$\delta S_\psi = \frac{1}{2\pi} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma [\delta\psi_1^I (\partial_\tau + \partial_\sigma)\psi_1^I + \psi_1^I (\partial_\tau + \partial_\sigma)\delta\psi_1^I \\ + \delta\psi_2^I (\partial_\tau - \partial_\sigma)\psi_2^I + \psi_2^I (\partial_\tau - \partial_\sigma)\delta\psi_2^I]$$

となる。ここで右辺の被積分関数における 1 行目と 2 行目の第 2 項について,

$$\psi_\alpha^I (\partial_\tau \pm \partial_\sigma)\delta\psi_\alpha^I = \partial_\tau(\psi_\alpha^I \delta\psi_\alpha^I) \pm \partial_\sigma(\psi_\alpha^I \delta\psi_\alpha^I) - [(\partial_\tau \pm \partial_\sigma)\psi_\alpha^I] \delta\psi_\alpha^I \\ = \partial_\tau(\psi_\alpha^I \delta\psi_\alpha^I) \pm \partial_\sigma(\psi_\alpha^I \delta\psi_\alpha^I) + \delta\psi_\alpha^I (\partial_\tau \pm \partial_\sigma)\psi_\alpha^I$$

と変形できる。ただし複号の + に対して $\alpha = 1$, - に対して $\alpha = 2$ を考えれば良く, α について和をとらない。また第 2 の等号では ψ_α^I と $\delta\psi_\alpha^I$ が反交換することを用いている。変分原理の仮定により, 時間 τ の境界で変分 $\delta\psi_\alpha^I$ をゼロとするため, τ に関する全微分の項 $\partial_\tau(\psi_1^I \delta\psi_1^I)$ および $\partial_\tau(\psi_2^I \delta\psi_2^I)$ は作用の変分 δS_ψ に寄与しない。そこでこれらの項を無視すると

$$\delta S_\psi = \frac{1}{\pi} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma [\delta\psi_1^I (\partial_\tau + \partial_\sigma)\psi_1^I + \delta\psi_2^I (\partial_\tau - \partial_\sigma)\psi_2^I] \\ + \frac{1}{2\pi} \int d\tau [\psi_1^I \delta\psi_1^I - \psi_2^I \delta\psi_2^I]_{\sigma=0}^{\sigma=\pi}$$

を得る。ここから適正な境界条件 (649) と場の運動方程式 (650) が読み取れる。

■式 (651) について 式 (651) が解となることは容易に見て取れる。この結果を丁寧に導くには次のようにすれば良い。

$\tau \pm \sigma \equiv u_\pm, \partial/\partial u_\pm \equiv \partial_\pm$ と書くと

$$\partial_\tau = \partial_+ + \partial_-, \quad \partial_\sigma = \partial_+ - \partial_-$$

より運動方程式 (650) は

$$0 = (\partial_\tau + \partial_\sigma)\psi_1^I = 2\partial_+\psi_1^I, \quad 0 = (\partial_\tau - \partial_\sigma)\psi_2^I = 2\partial_-\psi_2^I$$

となる。よって式 (651):

$$\psi_1^I(\tau, \sigma) = \Psi_1^I(u_-) = \Psi_1^I(\tau - \sigma), \quad \psi_2^I(\tau, \sigma) = \Psi_2^I(u_+) = \Psi_2^I(\tau + \sigma)$$

を得る。

10.9.2 Neveu-Schwarz セクター (補足)

■正規順序化した M^2 の式 (655) の導出 既に学んだように, M^2 の式 (654):

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{r: \text{半整数}} r b_{-r}^I b_r^I \right)$$

における各ボゾンの α^I 振動子からは, 正規順序化定数 a に対して

$$a_B = -\frac{1}{24}$$

の寄与がある. NS フェルミオンに関して正規順序化が必要な項は,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{r=-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots} r b_{-r}^I b_r^I &= \frac{1}{2} \sum_{r=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots} (-r) b_r^I b_{-r}^I \quad (r \rightarrow -r \text{ とした}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots} r b_{-r}^I b_r^I - \frac{1}{2} (D-2) \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \dots \right) \quad (\because \{b_r^I, b_s^J\} = \delta_{r+s,0} \delta^{IJ}) \end{aligned}$$

となる. ここで最右辺における正の奇数の “和” $\sum_{k \in Z_{\text{odd}}^+} k = 1 + 3 + 5 + \dots$ は, 公式 (627): $\sum_{k=1}^{\infty} k = -\frac{1}{12}$ を思い出すと次のように計算できる.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k = \sum_{k \in Z_{\text{odd}}^+} k + \sum_{k \in Z_{\text{even}}^+} k = \sum_{k \in Z_{\text{odd}}^+} k + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k, \quad \therefore \sum_{k \in Z_{\text{odd}}^+} k = -\sum_{k=1}^{\infty} k = \frac{1}{12}.$$

これを用いると

$$\frac{1}{2} \sum_{r=-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots} r b_{-r}^I b_r^I = \frac{1}{2} \sum_{r=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots} r b_{-r}^I b_r^I - \frac{1}{48} (D-2)$$

とできる. つまり NS フェルミオンの a に対する寄与は $a_{\text{NS}} = -\frac{1}{48}$ である. よって

$$a = (D-2)(a_B + a_{\text{NS}}) = (D-2) \left(-\frac{1}{24} - \frac{1}{48} \right) = -(D-2) \frac{1}{16}$$

が得られ, 最後に $D = 10$ と置くと $a = -\frac{1}{2}$ となるので, 正規順序化した M^2 の式 (655) を得る.

■数演算子 N^\perp の固有値 (656) の説明 恒等式 $[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$ を用いると, 正の奇数 r に対して

$$[N^\perp, b_{-r}^I] = \sum_{s=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots} s [b_{-s}^J b_s^J, b_{-r}^I] = \sum_{s=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots} s b_{-s}^J \delta_{rs} \delta^{IJ} = r b_{-r}^I$$

となる. よって正の奇数 r_1, r_2 に対して

$$\begin{aligned} N^\perp b_{-r_2}^J |\text{NS}\rangle &= (b_{-r_2}^J N^\perp + [N^\perp, b_{-r_2}^J]) |\text{NS}\rangle = r_2 b_{-r_2}^J |\text{NS}\rangle, \\ \therefore N^\perp b_{-r_1}^I b_{-r_2}^J |\text{NS}\rangle &= (b_{-r_1}^I N^\perp + [N^\perp, b_{-r_1}^I]) b_{-r_2}^J |\text{NS}\rangle = b_{-r_1}^I (r_2 b_{-r_2}^J |\text{NS}\rangle) + (r_1 b_{-r_1}^I) b_{-r_2}^J |\text{NS}\rangle \\ &= (r_1 + r_2) b_{-r_1}^I b_{-r_2}^J |\text{NS}\rangle \end{aligned}$$

となるから, 状態 $b_{-r_1}^I b_{-r_2}^J |\text{NS}\rangle$ は N^\perp の固有値 $r_1 + r_2$ を持つ.

10.9.3 Ramond セクター (補足)

■質量の自乗 (657) の正規順序化定数がゼロになることの確認 質量の自乗 (657):

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} n d_{-n}^I d_n^I \right)$$

における R フェルミオン部分について、正規順序化が必要な項に正規順序化を施すと、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{n=-1,-2,\dots} nd_{-n}^I d_n^I &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1,2,\dots} nd_n^I d_{-n}^I \quad (n \rightarrow -n \text{ とした}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1,2,\dots} nd_{-n}^I d_n^I - \frac{1}{2}(D-2)(1+2+3+\dots) \quad (\because \{d_m^I, d_n^J\} = \delta_{m+n,0}\delta^{IJ}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1,2,\dots} nd_{-n}^I d_n^I + \frac{1}{24}(D-2) \end{aligned}$$

となる。つまり R フェルミオンの正規順序化定数に対する寄与は $a_R = \frac{1}{24}$ であり、これはボゾンの振動子からの寄与 $a_B = -\frac{1}{24}$ と正確に相殺する。

10.9.4 開いた超弦 (補足)

10.9.4 節で述べた超対称性を詳しく説明する。

■状態の勘定 準備として、状態の数を数える数学的な道具立てを導入する [11, pp.311–313]。 $N^\perp = n$ となる状態数 $a(n)$ を展開係数に持つような母関数

$$f(x) = \sum_n a(n)x^n$$

を得る方法を考える。

ひとつの振動子 a_n^\dagger だけがある場合、 $N^\perp = 0, n, 2n, \dots$ の状態 $(a_n^\dagger)^k |0\rangle (k = 0, 1, 2, \dots)$ がそれぞれ 1 つずつ存在するから、求める母関数は

$$f_n(x) = 1 + x^n + x^{2n} + \dots = \frac{1}{1 - x^n}$$

である (ただしボゾンの振動子を仮定している)。

ひとつのフェルミオン振動子 f_{-r} だけがある場合には、 $(f_{-r})^2 = 0$ なのでこの結果を適用できない。この場合 $N^\perp = 0$ の状態 $|0\rangle$ と $N^\perp = r$ の状態 $f_{-r}|0\rangle$ だけがあるから、母関数は

$$g_r(x) = 1 + x^r$$

となる。

次に A 型の振動子 $\{a_m^\dagger\}$ の形成する状態に対する母関数

$$F_A(x) = \sum_m A(m)x^m$$

および B 型の振動子 $\{b_n^\dagger\}$ の形成する状態に対する母関数

$$F_B(x) = \sum_n B(n)x^n$$

が与えられているとき、A 型と B 型の両方の振動子によって構築される状態に関する母関数 $F_{AB}(x)$ を求めることを考える。以下では便宜的に A 型と B 型の振動子をともにボゾンの振動子とし、それゆえそれぞれが作る状態に関して N^\perp の固有値は $0, 1, \dots$ となるものとする。 $N^\perp = N$ の状態は $m + n = N$ を満たす

m, n に対して, $N^\perp = m$ の状態を作る A 型振動子の積 ($A(m)$ 種類) と $N^\perp = n$ の状態を作る B 型振動子の積 ($B(n)$ 種類) を $|0\rangle$ に作用させて得られる. よって $N^\perp = N$ の状態数は

$$\sum_{m=0}^N A(m)B(N-m)$$

である. これは

$$F_A(x)F_B(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A(m)B(n)x^{m+n} = \sum_{N=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^N A(m)B(N-m) \right) x^N$$

の展開係数となっているから, 求める母関数は

$$F_{AB}(x) = F_A(x)F_B(x)$$

である. この結果は A 型または B 型の振動子がフェルミオン振動子である場合にも正しい.

- ボゾンの開弦の母関数

$$\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{l=2}^{25} f_n(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^n)^{24}}.$$

$\alpha' M^2 = N^\perp - 1$ (5.9.5 節) の固有値が k の状態数を x^k の係数を持つ母関数

$$f_{\text{os}}(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^n)^{24}} = \frac{1}{x} + 24 + 324x + 3200x^2 + 25650x^3 + 176256x^4 + \dots \quad (802)$$

($\mathcal{O}(x^2)$ までの計算は下記.)

- NS セクターの母関数

$$\left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{l=2}^9 f_n(x) \right] \left[\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{j=2}^9 g_{m-\frac{1}{2}}(x) \right] = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^8.$$

– 左辺第 1 の因子はボゾンの振動子 α_n^I の作る状態数に関係し,

第 2 の因子はフェルミオン振動子 b_{-r}^J ($r = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, m - \frac{1}{2}, \dots$) の作る状態数に関係する.

$\alpha' M^2 = N^\perp - \frac{1}{2}$: (655) の固有値が k の状態数を x^k の係数を持つ母関数

$$f_{\text{NS}}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^8 = \frac{1}{\sqrt{x}} + 8 + 36\sqrt{x} + 128x + 402x\sqrt{x} + 1152x^2 + \dots$$

- R セクターの母関数

$$16 \left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{l=2}^9 f_n(x) \right] \left[\prod_{r=1}^{\infty} \prod_{j=2}^9 g_r(x) \right] = 16 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^n}{1-x^n} \right)^8 = 16 + 256x + 2304x^2 + 15360x^3 + \dots$$

– 最左辺第 1 の因子はボゾンの振動子 α_n^I の作る状態数に関係し,

第 2 の因子はフェルミオン振動子 d_{-r}^J の作る状態数関係する.

– 係数 16 は振動子の作用する Ramond 基底状態 $|R_A\rangle$ の種類の数である.

– これは $\alpha' M^2 = N^\perp$: (657) の固有値が k の状態数を x^k の係数を持つ母関数 $f_{\text{R}}(x)$ に一致する.

$f_{\text{R}}(x)$ における x^n ($n = 0, 1, 2, \dots$) の係数は, $f_{\text{NS}}(x)$ における x^n ($n = 0, 1, 2, \dots$) の係数の倍になっている. これが超弦理論の超対称性に関係していることを, この後すぐに見る.

ボゾンの開弦の、 $\alpha' M^2$ を基調とした母関数 (802) の計算

$$\frac{1}{(1-x^n)^{24}} = 1 + (-24)(-x^n) + \frac{1}{2!}(-24)(-25)(-x^n)^2 + \frac{(-24)(-25)(-26)}{3!}(-x^n)^3 + \dots$$

と冪展開されるので、

$$\begin{aligned} f_{\text{os}}(x) &= \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^n)^{24}} \\ &= \frac{1}{x} \left[1 + 24x + \frac{24 \cdot 25}{2} x^2 + \frac{24 \cdot 25 \cdot 26}{3!} x^3 + O(x^4) \right] [1 + 24x^2 + O(x^4)] [1 + 24x^3 + O(x^4)] \prod_{n=1}^{\infty} [1 + O(x^4)] \\ &= \frac{1}{x} \left[1 + 24x + \left(24 + \frac{24 \cdot 25}{2} \right) x^2 + \left(24 + 24 \cdot 24 + \frac{24 \cdot 25 \cdot 26}{3!} \right) x^3 + O(x^4) \right] \\ &= \frac{1}{x} + 24 + 324x + 3200x^2 + O(x^3) : (802) \end{aligned}$$

を得る.

■超対称性 さて、開いた超弦の超対称性 (10.9.4 節) の説明に移ろう [11, pp.314–316].

$\alpha' M^2$ を基調とする R-セクターの母関数は、 $f_{\text{R}}(x)$ の係数 16 を 8 に置き換えた

$$f_{\text{R-}}(x) = 8 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^n}{1-x^n} \right)^8 = 8 + 128x + 1152x^2 + 7680x^3 + 42112x^4 + \dots$$

である*249.

一方、フェルミオンの状態は半整数の $\alpha' M^2$ の値を持つから (5.11.3 節), $\alpha' M^2$ を基調とする NS+ セクターの母関数は $f_{\text{NS+}}(x)$ から半整数の冪の項を除いた

$$f_{\text{NS+}}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left[\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^8 - \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^8 \right] = 8 + 128x + 1152x^2 + \dots$$

となる. これは (すぐ上で指摘したように) $f_{\text{R-}}(x)$ に一致しているように見える. 実際, $f_{\text{NS+}}(x) = f_{\text{R-}}(x)$ すなわち

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \left[\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^8 - \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^8 \right] = 8 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^n}{1-x^n} \right)^8$$

は恒等式として Jacobi により証明されている. このことは R-セクターと NS+ セクターの組合せによって定義される開弦理論が, 各質量レベルにおいてフェルミオンの状態とボゾンの状態を同数持つこと (超対称性) を意味している.

*249 R+ セクターと R- セクターが, 各質量レベルにおいて同数の状態を持つことによる.

参考文献

- [1] F. マンドル, G. ショー, 2013, 場の量子論 第2巻 素粒子の相互作用 (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [2] B. ツヴィーバッハ, 2018, 初級講座 弦理論《発展編》(樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [3] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, 2015, ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 場の古典論 (原書第6版)(恒藤敏彦, 広重徹訳), 東京図書株式会社, 東京.
- [4] 内山龍雄, 2014, 相対性理論 物理テキストシリーズ8, 株式会社岩波書店, 東京.
- [5] 山本義隆, 中村孔一, 2013, 朝倉物理学大系1 解析力学I, 株式会社朝倉書店, 東京.
- [6] P.A.M. ディラック, 2012, 一般相対性理論 (江沢洋訳), 株式会社筑摩書房, 東京.
- [7] シュッツ, 2010, 第2版シュッツ 相対論入門 (江里口良治, 二間瀬敏史訳), 丸善株式会社, 東京.
- [8] 内山龍雄, 2016, 一般相対性理論, 裳華房, 東京.
- [9] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, 2013, ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 力学 (増訂第3版)(広重徹, 水戸巖訳), 東京図書株式会社, 東京.
- [10] F. マンドル, G. ショー, 2011, 場の量子論 第1巻 量子電磁力学 (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [11] B. ツヴィーバッハ, 2013, 初級講座 弦理論《基礎編》(樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [12] 砂川重信, 2014, 電磁気学 物理テキストシリーズ4, 株式会社岩波書店, 東京.
- [13] パウリ, 1980, 相対性理論 (内山龍雄訳), 株式会社講談社, 東京.
- [14] ファインマンほか, 2014, ファインマン物理学 I (坪井忠二訳), 株式会社岩波書店, 東京.
- [15] 山本義隆, 中村孔一, 2012, 朝倉物理学大系2 解析力学II, 株式会社朝倉書店, 東京.
- [16] L.D. ランダウ, E.M. リフシッツ, 2019, 量子力学 ランダウ=リフシッツ物理学小教程 (好村滋洋, 井上健男訳), 株式会社筑摩書房, 東京.
- [17] ディラック, 2020, 量子力学 (朝永振一郎ほか訳), 株式会社岩波書店, 東京.
- [18] J.J.Sakurai, 2017, 現代の量子力学 (上)(桜井明夫訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [19] ファインマンほか, 2012, ファインマン物理学 II (富山小太郎訳), 株式会社岩波書店, 東京.
- [20] 杉田勝実ほか, 2005, 経路積分と量子電磁力学 [POD版], 森北出版株式会社, 東京.
- [21] H. ジョージエイ, 2010, 物理学におけるリー代数——アイソスピンから統一理論へ—— (原著第2版) (九後汰一郎訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [22] J.J.Sakurai, 2014, 現代の量子力学 (下)(桜井明夫訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [23] ゴールドスタインほか, 2009, 古典力学 (下) 原著第3版 (矢野忠ほか訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [24] 小野寺嘉孝, 2014, 物理のための応用数学, 株式会社裳華房, 東京.
- [25] W.N. コッティンガム, D.A. グリーンウッド, 2013, 素粒子標準模型入門 (樺沢宇紀訳), 丸善出版株式会社, 東京.
- [26] 九後汰一郎, 2018, 新物理学シリーズ23 ゲージ場の量子論I, 株式会社培風館.
- [27] J.J. サクライ, 2010, 上級量子力学 第II巻 共変な摂動論 (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [28] 並木美喜雄, 大場一郎, 1997, 散乱の量子力学, 株式会社岩波書店, 東京.
- [29] M. ストーン, 2012, 量子場の物理 [新装版] (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [30] 今村勤, 1978, 物理とグリーン関数, 株式会社岩波書店, 東京.