

ランダウ＝リフシッツ 『場の古典論』 前半

本稿は場の古典論の教科書

エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, 2015, ランダウ=リフシッツ理論物理学教程  
場の古典論 (原書第 6 版)(恒藤敏彦, 広重徹訳), 東京図書株式会社, 東京

の第 9 章までを, 要点と途中計算の分離した見通しの良い自己完結的テキストへと再構成し, さらに補足・考察を加えたノートである。(この教科書を前半と後半に分ける場合, 特殊相対性理論の範囲で論じることができる第 9 章までを前半とするのが自然だと考えられる。第 10 章以降は一般相対性理論の内容となっており, 「小教程」からは除かれている [1]. )

ただし本稿は教科書の内容 (第 9 章まで) をほぼ網羅しているものの, 内容を多少, 取捨選択してある。さらに本稿には筆者の誤りや勘違いが潜んでいるかもしれないことをあらかじめ断っておく。言うまでもなく, 原著を当てるに越したことはない。

なお本稿の他にも理論物理の各種ノートを以下のページで公開している。

<http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/>

## 目次

第 1 章 相対性原理	3
第 2 章 相対論的力学	22
第 3 章 場のなかの電荷	46
第 4 章 場の方程式	73
第 5 章 不変な場	103
第 6 章 電磁波	134
第 7 章 光の伝播	160
第 8 章 運動している電荷の場	196
第 9 章 電磁波の放射	212
付録 A 計量の符号系について	264
付録 B テンソルと物理法則の共変性	265
付録 C 微分形式に対する Stokes の定理の使い方	271
付録 D 古典的統一理論	282
付録 E 場の理論における対称性と保存則	299

付録 F Poisson 方程式	302
付録 G 遅延ポテンシャルの導出	305
付録 H 媒質中の電磁気学の基礎方程式	310
付録 I Schwarzschild 解の導出過程	320

教科書では一般的に,

- 時空の 4 成分  $0, 1, 2, 3$  をとる添字にラテン文字  $i, k, \dots$
- 空間成分  $1, 2, 3$  のみをとる添字にギリシャ文字  $\alpha, \beta, \dots$

を用いていることに注意する. これは現在の一般的な表記と逆だが, 本稿では基本的に教科書の約束に従う.  
(「小教程」ではラテン文字が  $1, 2, 3$ , ギリシャ文字が  $0, 1, 2, 3$  をとる流儀に改められている [1]. )

# 第 1 章 相対性原理

## § 1. 相互作用の伝播速度

- 外力を受けないで運動する物体が、一定の速度で進む基準系を慣性系と呼ぶ。  
ある慣性系に対して一様な運動をするあらゆる基準系もまた慣性系となる。
- 古典力学 (非相対論的力学) においてポテンシャル・エネルギーは  
粒子の座標  $\mathbf{r} \equiv \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots\}$  の関数  $U(\mathbf{r}) \rightarrow$  粒子間相互作用は瞬時に伝播する。  
実際には相互作用の伝播速度は有限であり、最大の伝播速度  $c$  (これは光速) をもつ。
- 相対性原理
  - 相対性原理によれば、すべての自然法則はあらゆる慣性基準系において同一である\*1。
  - 相互作用の伝播速度の有限性を前提とした相対性原理を Einstein の相対性原理という。  
これに基づく力学は相対論的といわれ、  
相対論的力学の式で形式的に  $c \rightarrow \infty$  とすると非相対論に移行する。
- 時間の相対性
  - 空間は非相対論においても相対的。
  - 時間の絶対性
    - $\rightarrow$  速度はベクトル和として合成される [本稿次節で補足]
    - $\rightarrow$  伝播速度は慣性系によって異なる  $\leftarrow$  実験, 光速不変の原理に矛盾
  - 時間の相対性を示す思考実験  
図 1 において点 A から出た信号は  $K'$  系では同時に点 B, C に達するのに対し,  
 $K$  系では点 B は信号の源の方向に、点 C は信号から遠ざかる方向に動くので、  
点 B, C に信号が到達する時間は同時ではない。  
(信号の伝播速度は  $K$  系,  $K'$  系のいずれでも  $c$  である。)

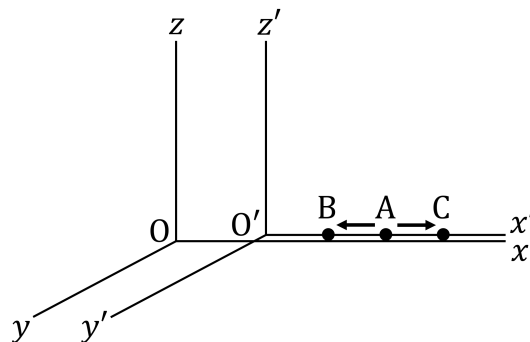


図 1  $K'$  系は  $K$  系の  $x$  軸方向に運動する。3 点 A, B, C は  $K'$  系の  $x'$  軸上に固定されており、点 B, C は点 A から等距離にある。

\*1 これは原理として物理法則の共変性を要請したものと見ることができる。

## § 1 について

■「……明らかに他方も慣性系である (……)」(p.1, 1.6~8) について これは Galilei 変換の帰結として他方の基準系に対しても粒子が等速直線運動することを述べているのではない。逆にある慣性系に対し等速直線運動する粒子が別の慣性系から見ても等速直線運動することが座標変換則に制約を課す (§ 4).

■「この速度は、本来なら、相互作用の最大の伝播速度と呼ばれる……」(p.2, 1.2~) について この段落では相互作用の伝播速度が有限ならば、それは最大値を持つことが述べられている。

■「この一定の速度は、のちに示すようにまた真空中を光が伝わる速度でもある」(p.2, 1.14) について 相互作用の伝播速度の最大値として定義された  $c$  が、電磁場の波動方程式 (46.10) における波の伝播速度となっている。

■「空間は、古典力学においてすでに相対的」(p.2 下から 2 行目) について 例えばある 2 事件を  $K$  系で見た座標が  $(ct_1, x), (ct_2, x)$  のように空間的に同じ位置  $x$  であっても、これを  $K$  系に対し速度  $V$  で  $x$  軸方向に運動する  $K'$  系で見た座標は  $(ct_1, x), (ct_2, x - V(t_2 - t_1))$  のようになることを考えれば良い。

■「絶対時間の概念……速度の単なる (ベクトル) 和である」(p.3, 1.9~11) について 絶対時間の概念と速度の合成法則は次のように関係する。  $K'$  系が  $K$  系から見て速度  $V$  で運動しているとすると、  $K$  系、  $K'$  系から見た同一の粒子の座標  $r, r'$  は  $r' = r - Vt$  によって関係付けられる。 よって  $K$  系で見て粒子が無限小時間  $dt$  のうちに  $dr$  変位するのを  $K'$  系から見ると、無限小時間  $dt'$  のうちに  $dr'$  変位するとき、  $dr' = dr - Vdt$  となる。ここで時間の絶対性

$$dt' = dt$$

を仮定して両辺を  $dt' = dt$  で割ると、速度の合成則として

$$v' = v - V$$

を得る。

## § 2. 世界間隔

■光速一定  $\leftrightarrow$  世界間隔の不変性 ある慣性基準系で見た 2 事象の座標をそれぞれ  $(ct_1, r_1), (ct_2, r_2)$  とし、これらの間の世界間隔を

$$s_{12} = [c^2(t_2 - t_1)^2 - (r_2 - r_1)^2]^{1/2}$$

によって定義する。ここで 2 事象をそれぞれ信号の送信と受信にとると、光速度が一定であることは

$$ds = 0 \quad \Rightarrow \quad ds' = 0$$

を意味する。(ここに  $ds, ds'$  は 2 つの慣性系で測った、同一の事象間の世界間隔である。) これは  $ds^2 = ads'^2$  のとき満たされる。時間と空間の一様性および空間の等方性より、係数  $a$  は慣性系の相対速度の絶対値のみに依存し、 $a = 1$  が見出される (導出は下記)。こうして光速度が一定であることは、世界間隔の不変性

$$ds = ds', \quad s = s'$$

として表される。

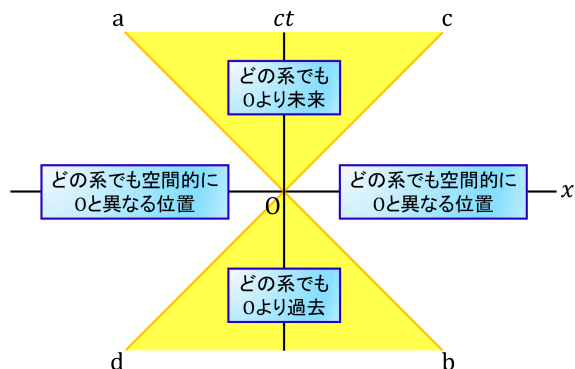


図2 光 (円) 錐による世界間隔の分類

■光 (円) 錐による世界間隔の分類

- ある慣性系で (空間の) 同一点で起きる 2 事象
- その系で測った世界間隔  $ds^2 > 0$
- 任意の系で測った世界間隔  $ds^2 > 0$
- ⇔ 世界間隔は時間的,
- ある慣性系で同時の 2 事象
- その系で測った世界間隔  $ds^2 < 0$
- 任意の系で測った世界間隔  $ds^2 < 0$
- ⇔ 世界間隔は空間的.

こうして任意の事象は事象  $O$  との関係に応じて, 光 (円) 錐によって図 2 のように分類される. この分類は世界間隔の不変性により, 座標系に依らない意味を持つ.

§ 2, 式の導出など

■ $a = 1$  の論証 2つの慣性系で測った世界間隔  $ds, ds'$  の間の比例関係を

$$ds^2 = a ds'^2$$

と書いたとき, 係数  $a$  は, 時間と空間の一様性より座標と時間には依存しない. また空間の等方性より,  $a$  は慣性系の相対速度  $V$  の方向にも関係しない. よって  $a$  は相対速度の絶対値だけの関数  $a(V)$  である.

今, 3つの基準系  $K, K_1, K_2$  で測った同一の事象間の世界間隔を, 順に  $ds, ds_1, ds_2$  と書く. また系  $K$  に対する  $K_1, K_2$  の速度を  $V_1, V_2$ ,  $K_2$  の  $K_1$  に対する速度を  $V_{12}$  とする. このとき

$$ds^2 = a(V_1) ds_1^2, \quad ds^2 = a(V_2) ds_2^2, \quad ds_1^2 = a(V_{12}) ds_2^2$$

とおくことができ, 第 3 式を第 1 式に代入して第 2 式と比べると

$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12}) \tag{2.5}$$

が見出される. ここで  $V_1, V_2$  の絶対値を一定として, それらの間の角度を変化させると, 上式 (2.5) の右辺の引数  $V_{12}$  は変化するのに対して, 左辺の値は一定に留まる. よって  $a(V_{12})$  は実のところ,  $V_{12}$  によらない定

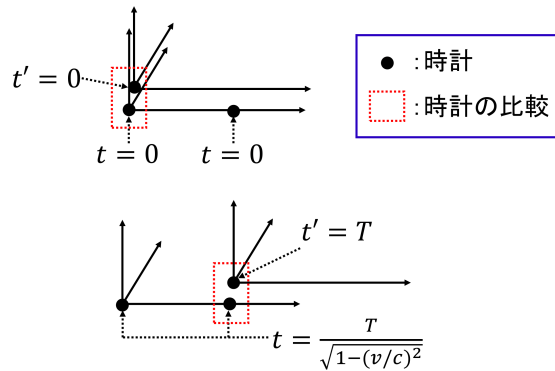


図3 K系とK'系の時計を比べる操作の非対称性

数関数であることになる。その一定値  $a$  は、再び上式 (2.5) を用いると

$$\frac{a}{a} = a, \quad \therefore a = 1$$

と定まる。

## § 2 について

■「このように、領域  $aOc$  内のすべての事象は、すべての基準系において、 $O$  に対して未来の事象である」(p.8, 1.6,7) について これは世界間隔の不変性から説明されている。ところで世界間隔の不変性を満たす変換則として、Lorentz 変換が見出される (§ 4)。そして Lorentz 変換 (4.3) では  $ct'$  軸が時空図 (図 2 参照) の領域  $aOc$  に収まることから、再び同じ結論が得られる。

## § 3. 固有時間

- 運動する物体に固定された時計の示す時間  $t'$  を、その物体の固有時間という。  
[固有時間はその定義により Lorentz スカラーである.]

これは物体の運動を観察する基準系の時間  $t$  と

$$\Delta t' = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \leq \Delta t \quad (v: \text{座標で測った物体の速度}) \quad (1)$$

によって関係付けられる (動いている時計の遅れ, 導出は下記)。

- 所謂、双子のパラドックスについて  
系  $K$  の  $x$  軸方向に一定速度で運動する系  $K'$  を考える。  $K$  から見て  $K'$  の時計がゆっくりと進むなら、「対称性」より  $K'$  から見て  $K$  の時計がゆっくりと進むことになる。このパラドックスは次のように解消される。
  - $K'$  系の原点の時計を  $K$  系の時計と比べるには、 $K$  系では複数の時計を必要とするから (図 3 参照)、時計を比べる操作は 2 つの基準系について非対称。
  - 一方の系は (折り返しの際) 非慣性系となる。

### § 3, 式の導出など

■固有時間の式 (1) の導出 固有時間は瞬間的に粒子とともに動く慣性系で見た時間であり, この座標系では粒子の空間座標の変化は  $dx^\alpha = 0$  なので, 固有時間の経過  $dt'$  は粒子の対応する時空中における変位の世界間隔  $ds$  と

$$ds = cdt'$$

の関係にある. [ところが§ 2 で見たように世界間隔  $ds$  は Lorentz 不変量だから, 再び固有時間の変化  $dt'$  もまた Lorentz 不変量となっていることが確かめられる.]

さて, 慣性系で測って時間  $dt$  の間に粒子が空間中で  $dx, dy, dz$  変位し粒子の固有時間が  $dt'$  変化したとすると,

$$ds^2 = (cdt')^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

の関係が成立する. よって固有時間は物体の運動を観察する基準系の時間  $t$  と, 式 (1):

$$dt' = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad \mathbf{v} \equiv \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) : \text{座標で測った物体の速度}$$

によって関係付けられる.

### § 3 について

■「……慣性系ではないからである」(p.10, l.10) について 一見すると  $K'$  系から見れば  $K$  系の時計が送れると結論できそうであるが, 動く時計 ( $K'$  系) が出発点へと折り返す際, 出発点に静止した時計 ( $K$  系) が進むため, 結局  $K'$  系の時計が遅れることになる. 実際, 折り返しの際, 動く時計に固定された  $K'$  系は非慣性形となり,  $K'$  系には重力場が現れる. そして出発点の時計の進みは, 重力場による折り返し地点側の時計の遅れとして理解できる [2, pp.20–27].

#### ■最終段落について

- 与えられた一対の世界点を結ぶまっすぐな線が  $t$  軸に平行でなくても, 2 点が時間的間隔で隔たっていれば, それが時間軸に平行になるような座標系を見出すことができる.
- 世界点を結ぶ線に沿う積分  $\int ds$  がまっすぐな線に対して最大になるということ (図 4 参照) は, 最小作用原理 (§ 8) において見るように, まっすぐな世界線が自由粒子の軌道となることを意味する.

### § 4. ローレンツ変換

$K$  系から見て  $x$  軸方向に速度  $V$  で推進する  $K'$  系を考える (はじめ 2 つの座標系の空間軸は一致しており, この瞬間を時間  $t, t'$  の原点にとる). 同一の事象を  $K$  系,  $K'$  系で見た座標  $(ct, x, y, z), (ct', x', y', z')$  の関係は世界間隔  $(ct)^2 - x^2$  を不変に保つ  $tx$  平面内の“回転”として表されると考えると,  $\tanh \psi = V/c$  を満たす“回転角”  $\psi$  をとれば良いことが分かる [本稿次節で補足]. こうして Lorentz 変換の式

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad ct' = \frac{ct - \frac{V}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (2)$$

を得る (導出は下記).



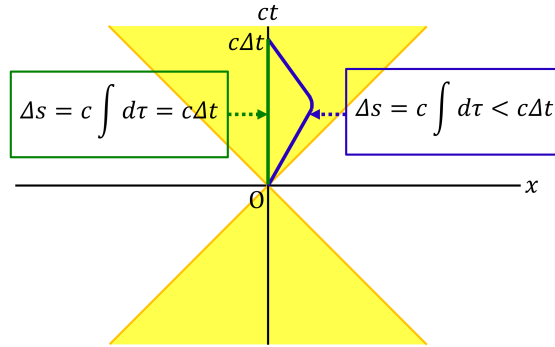


図4 世界点を結ぶ線に沿う積分  $\int ds$  はまっすぐな線に対して最大になる。

- Lorentz 変換において分母の根号内  $1 - (V/c)^2 > 0$   
 → 慣性系に対する速度が  $V < c$  となる慣性系しかとれない。
- Lorentz 変換 → Lorentz 短縮 [収縮].  
 Lorentz 変換の式 (2) の第 1 式によれば,  $K'$  系の  $x'_1 \leq x' \leq x'_2$  に固定された  $x'$  軸に沿う棒の両端が,  $K$  系で見て同時刻  $t$  に位置  $x = x_1, x_2 (> x_1)$  を占めるものとする,

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \therefore x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1) \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} (< x'_2 - x'_1)$$

となる. このように  $K$  系で測った運動する棒の長さ  $x_2 - x_1$  は, 棒の固定系 ( $K'$  系) で測った棒の長さ  $x'_2 - x'_1$  に比べて縮む (Lorentz 短縮). [ただし Lorentz 変換の式 (2) の第 4 式より,  $K$  系で見て同時刻  $t$  に, Lorentz 短縮を起こした棒の両端が位置  $x = x_1, x_2$  を占めるという 2 事象は,  $K'$  系では同時には起こらないことに注意する.]

- 一般に 2 つの Lorentz 変換 (“回転”) の合成は,  
 その順序によって異なる変換を与える [本稿次節で確認].

#### § 4, 式の導出など

■ Lorentz 変換 (2) の導出 求める座標変換が (有限の) 世界間隔  $(ct)^2 - x^2$  を不変に保つ  $tx$  平面内の “回転” として

$$x' = x \cosh \psi + ct \sinh \psi, \quad ct' = x \sinh \psi + ct \cosh \psi$$

と表されると考えると,

- これは線形変換であるため, 逆変換も同じ形となり, 相対性原理を満たす。
- この変換は確かに世界間隔  $c^2t^2 - x^2$  を不変とするため, 光速度一定の条件を満たす。

ここで  $K$  系の原点  $x' = 0$  に注目すると, これを  $K'$  系で見た座標は

$$x' = ct \sinh \psi, \quad ct' = ct \cosh \psi$$

となる。  $x'/ct' = \tanh \psi$  が  $K$  系の座標で測った  $K'$  系の速度 (を  $c$  で割った値) だから、  $\tanh \psi = -V/c$  を満たす “回転角”  $\psi$  をとれば良いことが分かる。  $1 - \tanh^2 \psi = 1/\cosh^2 \psi$  および定義域  $\cosh \beta \geq 1$  より

$$\tanh \psi = -\beta \quad \Rightarrow \quad \cosh \psi = \gamma \quad \Rightarrow \quad \sinh \psi = -\beta\gamma$$

(ただし  $\beta \equiv V/c, \gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$ ) となるので、 Lorentz 変換の式 (2) を得る。

## § 4 について

### ■4 次元座標系の回転 (4.2) として Lorentz 変換を導くこと

- 式 (4.2) は線形変換であるため、逆変換も同じ形となり、相対性原理を満たす。
- 式 (4.2) の変換は世界間隔  $c^2t^2 - x^2$  を不変とするため、光速一定の条件を満たす。

なお  $tx$  面内の “回転”

$$x' = x \cosh \psi - ct \sinh \psi, \quad ct' = -x \sinh \psi + ct \cosh \psi, \quad \tanh \psi = \frac{V}{c}$$

( $\psi$  を再定義した) は、虚時間  $x^4 = ict$  を導入し、  $\psi \equiv i\psi'$  を代入すると、虚数角  $\psi'$  の回転の形

$$x'^1 = x^1 \cos \psi' - x^4 \sin \psi', \quad x'^4 = x^1 \sin \psi' + x^4 \cos \psi'$$

に書ける [2, pp.44–45]. いずれにせよ回転というのは解釈に過ぎず、それ以上のものではない。

■同時刻の相対性 (再論) Lorentz 変換の式 (2) の第 4 式によれば、  $K$  系で見て同時刻  $t$  に位置  $x = x_1, x_2 (> x_1)$  で起きる 2 事象が、  $K'$  系の座標時間で測って時刻  $t' = t'_1 \leq x' \leq t'_2$  に起こるとすると、

$$c(t'_2 - t'_1) = \frac{ct - \frac{V}{c}x_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{ct - \frac{V}{c}x_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\frac{V}{c}(x_1 - x_2)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \neq 0$$

となる。ここから同時刻の相対性 (§ 1) が改めて確認される [2, pp.17–18].

■Lorentz 収縮について——棒と物置 (pole in the barn) の逆理 地面 (物置) に固定した座標系から見ると、運動する棒は Lorentz 収縮を起こすため、棒が物置に差し掛かったときに物置の入口と出口を閉めれば、棒をその固有長さより短い奥行き物置に閉じ込め得る。しかしながら棒に固定した座標系で考えれば、棒を自分自身より狭い奥行き物置に閉じ込めることはできないはずである。実際このとき、棒に固定した座標系の座標時間で測ると、物置の入口と出口が閉まるのは同時ではないため、棒が物置に閉じ込められることはなく、パラドックスは生じない。棒固定系では、棒の背後で物置の入口が閉められたときには、棒の先端では既に閉じられた出口への衝突が始まっている (地面固定系では衝突は、棒を物置に閉じ込めてからしばらくすると起こる)。

■最終段落について 2 つの Lorentz 変換の合成がその順序によって異なる変換になり得ることが述べられている。実際、Lorentz 変換はその特別な場合として通常の空間回転を含んでおり、「2 つの回転 (異なる軸のまわりの) の結果は、それを実施する順序に依存する」 (p.14, 1.4.5).

非自明な場合として、2 つの等速推進を続けて行った結果が順序に依ることを確かめる。  $K$  系での座標が  $(ct, x, y, z)$  の事件を図 5 で定義した  $K_{12}, K_{21}$  系で見た座標をそれぞれ

$$(ct_{12}, x_{12}, y_{12}, z_{12}), \quad (ct_{21}, x_{21}, y_{21}, z_{21})$$

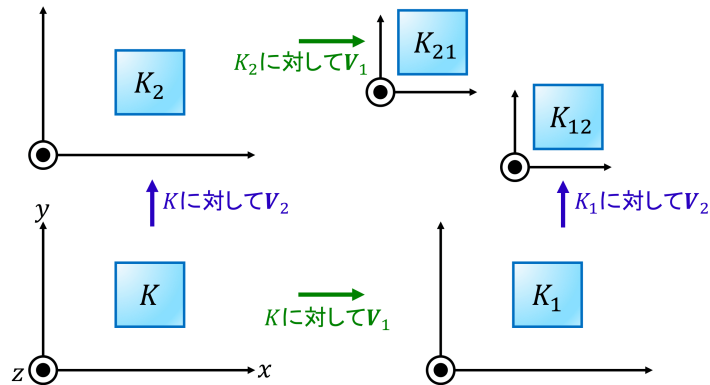


図5 2つの Lorentz 変換の合成

とすると

$$\begin{pmatrix} ct_{12} \\ x_{12} \\ y_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_2\gamma_2 & 0 & \gamma_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma_2 & 0 & -\beta_2\gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta_1\gamma_1 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & -\beta_1\gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2 & -\beta_2\gamma_1\gamma_2 & \gamma_2 \\ \gamma_1 & -\beta_1\gamma_1 & 0 \\ -\beta_1\gamma_1\gamma_2 & \gamma_1\gamma_2 & -\beta_2\gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

である。  $(ct, x, y) \rightarrow (ct_{21}, x_{21}, y_{21})$  の変換行列は行列の積を順序交換したものであり、最右辺で添字の 1 と 2 を入れ替えて得られる。それは  $(ct, x, y) \rightarrow (ct_{12}, x_{12}, y_{12})$  の変換行列と青字の部分が異なる。

■無限小 Lorentz 変換の合成について 無限小 Lorentz 変換の変換係数

$$\Lambda(\beta) = 1 + \beta X, \quad X \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して

$$e^{\beta X} = \begin{pmatrix} \cosh \beta & -\sinh \beta & 0 & 0 \\ -\sinh \beta & \cosh \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を作っても、有限の  $\beta$  に対する変換係数

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \psi & -\sinh \psi & 0 & 0 \\ -\sinh \psi & \cosh \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\beta \equiv \tanh \psi)$$

は得られない。これは有限の速度  $\beta$  が、無限小速度の単純な和によっては得られないという事情に関係していると考えられる (§ 5)。

## § 5. 速度の変換

- 速度の合成法則

相対性理論において速度  $\mathbf{v}'$  と  $\mathbf{V}$  の合成とは、系  $K$  に対して速度  $\mathbf{V}$  を持つ系  $K'$  から見て、速度  $\mathbf{v}'$  を持つ粒子を、系  $K$  から見た速度  $\mathbf{v}$  を得ることである。

$x$  軸方向への等速推進  $\mathbf{V}$  に対して Lorentz 変換の式から、そのような公式は

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x \frac{V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + v'_x \frac{V}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + v'_x \frac{V}{c^2}} \quad (5.1)$$

となる (導出は下記)。

– 非相対論的極限 (形式的に  $c \rightarrow \infty$ ) で、通常 velocities の合成法則

$$v_x = v'_x + V, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z$$

を再現する。

–  $V/c$  の 1 次までの近似では

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}') \mathbf{v}' \quad (5.3)$$

となる [本稿次節で補足]。

- $xy$  面内 (したがって  $x'y'$  面内) を運動する粒子の、 $K$  系と  $K'$  系で見た速度  $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$  が  $x, x'$  軸と成す角を  $\theta, \theta'$  とする。速度の合成法則の式より、これらは

$$\tan \theta' = \frac{v' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sin \theta}{v' \cos \theta' + V} \quad (5.4)$$

によって関係付けられる [本稿次節で補足]。

– 光に対して  $v = v' = c$  であり、 $V/c$  の 1 次までの近似で光行差の式

$$\Delta \theta' \equiv \theta' - \theta = \frac{V}{c} \sin \theta \quad (5.7)$$

が得られる。(導出は下記。光の速度は大きさが変わらずに、向きが変わる。)

## § 5, 式の導出など

■速度の合成法則 (5.1) の導出 Lorentz 変換の式

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

の微分をとると、

$$dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (3)$$

を得る [その意味は本稿次節]。はじめ 3 つの式を第 4 式で割り、速度  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt, \mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt'$  を導入すると式 (5.1) を得る。

■光行差の式 (5.7) の導出 式 (5.1) の第 2 式において

$$v_y = c \sin \theta, \quad v'_x = c \cos \theta', \quad v'_y = c \sin \theta'$$

とおくと,

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c} \cos \theta'} \sin \theta'$$

となる. ここから  $V/c$  の 1 次までの近似で, 公式 (5.7) が導かれる [本稿次節で補足].

## § 5 について

■ Lorentz 変換の式の微分をとること (本稿の式 (3) について) 粒子が  $K'$  系で見て時間  $dt'$  のうちに  $d\mathbf{r}'$  変位するのを  $K$  系で見ると,  $dt$  のうちに  $d\mathbf{r}$  変位するとき, これらの微小量の間には式 (3) (教科書 § 5, 1.6 の式) の関係がある. また, このとき比  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt, \mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt'$  は, それぞれの系の座標で測った粒子の速度を意味する.

■ 式 (5.3) の近似について  $\beta \equiv V/c$  とおくと, 式 (5.1) より

$$v_x = \frac{v'_x + c\beta}{1 + v'_x\beta/c} = (v'_x + c\beta) \left( 1 - \frac{v'_x}{c}\beta + O(\beta^2) \right) = v'_x + V \left( 1 - \frac{v'^2_x}{c^2} \right) + O(\beta^2),$$

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + v'_x\beta/c} = v'_y (1 + O(\beta^2)) \left( 1 - \frac{v'_x}{c}\beta + O(\beta^2) \right) = v'_y - v'_x v'_y \frac{V}{c^2} + O(\beta^2).$$

■ 「ローレンツ変換の非可換性に関連している」 (式 (5.3) の 4 行下) について  $K$  系に対して速度  $\mathbf{V}$  を持つ  $K_{\mathbf{V}}$  系をとり,  $K_{\mathbf{V}}$  系に対して速度  $\mathbf{v}'$  を持つ  $K_{\mathbf{V}\mathbf{v}'}$  系をとる. このとき  $K$  系に対して速度  $\mathbf{v}$  を持つ粒子は  $K_{\mathbf{V}\mathbf{v}'}$  系で静止する. ここでもし Lorentz 変換が可換ならば,  $K$  系に対して速度  $\mathbf{v}'$  を持つ  $K_{\mathbf{v}'}$  系をとり,  $K_{\mathbf{v}'}$  系に対して速度  $\mathbf{V}$  を持つ  $K_{\mathbf{v}'\mathbf{V}}$  系をとったとき,  $K_{\mathbf{v}'\mathbf{V}}$  系でも粒子は静止しなければならない. これは  $K_{\mathbf{v}'}$  系に対して粒子が速度  $\mathbf{V}$  を持つことを意味するから, 式 (5.3) において  $\mathbf{v}'$  と  $\mathbf{V}$  を入れ替えた式も同時に成立しなければならない. ところが実際には Lorentz 変換の非可換性により, そのようにはなっていないということ.

■ 式 (5.4) について 式 (5.1) において

$$v_x = v \cos \theta, \quad v_y = v \sin \theta, \quad v'_x = v' \cos \theta', \quad v'_y = v' \sin \theta'$$

とおくと,

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{v'_x + V} = \frac{v' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sin \theta'}{v' \cos \theta' + V} : (5.4)$$

を得る.

非相対論的極限では

$$\tan \theta = \frac{v' \sin \theta'}{v' \cos \theta' + V}$$

となる. これは速度のベクトル和としての合成 (図 6) から期待される結果である.

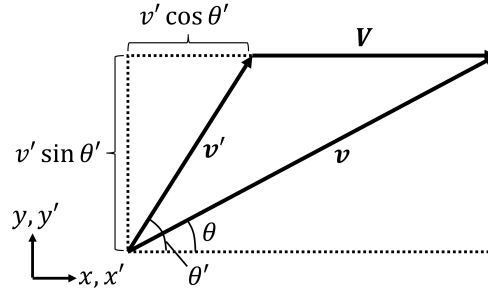


図6 非相対論における速度の合成

■ 光行差の式 (5.7) の近似について  $\beta \equiv V/c$  とおくと

$$\begin{aligned} \sin \theta - \sin \theta' &= \left( \frac{\sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 + (V/c) \cos \theta'} - 1 \right) \sin \theta' \\ &= \{(1 + O(\beta^2))(1 - \beta \cos \theta' + O(\beta^2)) - 1\} \sin \theta' \\ &= -\beta \sin \theta' \cos \theta' + O(\beta^2) \end{aligned}$$

となる。ところで図6において  $v = v' = c \gg V$  の場合を考えると、 $\Delta\theta \equiv \theta' - \theta$  は微小角となる。そこで最左辺を

$$\sin \theta - \sin \theta' = 2 \cos \frac{\theta + \theta'}{2} \sin \frac{\theta - \theta'}{2} \simeq -(\cos \theta') \Delta\theta + O(\Delta\theta^2)$$

と書き換えると、上式は  $\Delta\theta$  が  $\beta$  の1次の微小量であることを意味する。よって  $\beta$  の1次までの近似で

$$\Delta\theta = \beta \sin \theta' : (5.7)$$

として良い。

## § 6. 4元ベクトル

本稿では後の曲線座標における議論 (§ 83) も踏まえ、テンソル解析を中心に § 6 の内容を少し一般化して付録 B にまとめておく。付録に回したとは言え内容は極めて重要であり、以下のことが丁寧に確認される。

- テンソルは成分の座標変換則によって定義されること。
- 座標の微分  $dx^i$  と微分演算子  $\partial_i$  は数学的にあらかじめテンソルの種類が定まっていること。
- テンソルから新たなテンソルが作られること。その際テンソルを定義する変換則によれば、テンソルに関する限り、その種類は上下の添字の付き方から期待されるものとなること。
- 両辺が同じ種類のテンソルから成る方程式は座標変換に対して共変的となること。

4次元積分を変換するための定理 (6.15),(6.17),(6.19) については、付録 C において微分形式に対する Stokes の定理から導出する。

以下では付録でカバーしきれていない主な内容を、いくらか書き留めておく。

時空における無限に近い 2 点の世界間隔  $ds$  の定義式

$$ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

は, 座標  $x^i = (ct, x, y, z)$  で測った 2 点の座標の差  $dx^i$  の 2 次形式である. それを

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

と書いて  $g_{ik}$  を定義すると,

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

と同定される. [ところが座標の微分  $dx^i$  はベクトル成分として変換するのに対し, 世界間隔  $ds$  はスカラーだから (§ 2)  $g_{ik}$  は 2 階共変テンソルとして変換しなければならない (付録 B.1 参照). そこで]  $g_{ik}$  を計量テンソルと呼ぶ. [特に全成分が式 (4) で与えられる計量テンソルを Minkowski 計量と呼び,  $g_{ik}$  によって特徴付けられる空間 (時空) を Minkowski 空間と呼ぶ. こうして特殊相対性理論では, 計量テンソルは座標変換によって成分が変わらないことになる.]

反変計量テンソル  $g^{ik}$  を計量テンソル  $g_{ik}$  の逆テンソルとして定義する (以下,  $g^{ik}$  も単に計量テンソルと呼ぶ):

$$g^{il} g_{lk} = \delta^i_k.$$

(ここで  $\delta^i_k$  は単位テンソルと見なされている. Kronecker のデルタ  $\delta^i_k$  は混合テンソルとして定義され, 単位行列は  $\delta^i_k$  を  $(i, k)$  成分に持つ.) テンソルの添字を上げ下げした量は

$$A^i = g^{ik} A_k, \quad A_i = g_{ik} A^k \quad (6.6)$$

のように計量テンソルとの縮約で定義する (pp.257-258). [このとき計量テンソルとの縮約の結果得られた量も添字の位置から期待される種類のテンソルとなる (付録 B.1 参照).] Minkowski 計量に対しては

$$(g^{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

であり, 添字の上げ下げの規則は具体的には

$$A_0^1 = A^{01} = -A^0_1 = -A_{01}, \quad \text{etc.}$$

を与える.

任意の 4 元反変ベクトル  $A^i = (A^0, \mathbf{A}), B^i = (B^0, \mathbf{B})$  の 4 元内積を

$$A \cdot B \equiv g_{ik} A^i B^k = A^i B_i = A_k B^k = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

で定義する. 特に自分自身との内積を  $A^2 \equiv A \cdot A$  と表記する. [テンソルの一般論 (B.1 節) から理解されるように, これは相対論的不変量である].

§ 2 では光 (円) 錐による世界間隔の分類を行った. 同様に 4 元ベクトル  $A^i$  に対して

$$\begin{aligned} A^2 > 0 &\Rightarrow A^i \text{ は時間的ベクトル,} \\ A^2 < 0 &\Rightarrow A^i \text{ は空間的ベクトル,} \\ A^2 = 0 &\Rightarrow A^i \text{ は零 (ヌル) ベクトル} \end{aligned}$$

と定義する。粒子の速度は光速  $c$  を超えられないため、粒子が時空に描く軌道 (世界線) に沿うベクトル  $dx^i$  は必ず時間的ベクトル (または零ベクトル) である。

## § 6 について

■4元ベクトルの定義 「4次元座標系の変換によって4元動径ベクトルの成分  $x^i$  と同じように変換される4つの量  $A^0, A^1, A^2, A^3$  の総体を4元ベクトルとよぶ」 (p.16) に注目。

■添字の上げ下げについて 特殊相対性理論における添字の上げ下げ  $A_0^1 = A^{01} = -A_1^0 = -A_{01}$  (p.18) は計量テンソルとの縮約 (6.6) によって成され、それ故、添字の位置から期待される種類のテンソルが得られる。計量テンソルの符号を逆にして世界間隔を定義する場合、 $A_0^1 = -A^{01} = -A_1^0 = A_{01}$  等となるが、式 (6.6) 自体は正しい。

■Lorentz 変換の条件 [2, pp.38–39] § 6 の要約で言及したように、Minkowski 計量を2階共変テンソルの変換則に従って変換しても、新しい座標系での値はもとと変わらない。

$$(a^{-1})^i_l (a^{-1})^k_m g_{ik} = g_{lm}. \quad \left( (a^{-1})^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \right)$$

このことは線形変換  $x'^i = a^i_k x^k$  が Lorentz 変換であるための、係数  $a^i_k$  に対する条件である。上式は対称な添字の独立な組  $(l, m)$  が 10 通りあるから、 $4^2 = 16$  個の成分  $a^i_k$  のうち 6 個までを任意に選べる。これが Lorentz 変換の自由度である。(ただしここでは、座標原点の変更を伴う変換は除外している。)

より直観的には次のように考えても良い。Lorentz 変換は4次元時空における回転と見なせる。そこで  $x^i x^k$  面内の回転を考えると、面  $x^i x^k$  の選び方は

$$\binom{4}{2} = 6 \text{ 通り}$$

あるから、やはり Lorentz 変換の自由度は 6 である。

■用語 「テンソルの跡」 (p.18, 1.27)  $A^i_i$  は trace, 「テンソルの積」 (p.20, 1.12)  $A^{ik} A^*_{ik}$  は product である。「対偶」テンソル (p.20, 1.12) はデュアルテンソルとも呼ばれる [2, pp.63–64].

■式 (6.9):  $e^{iklm} e_{iklm} = -24$  の理由  $e^{iklm}$  の添字に関する反対称性より  $i, k, l, m$  が相異なる 4! 個の項の和のみを考えれば良い。これらは  $iklm$  が 0123 の偶置換か奇置換のいずれかとなっており、

$$\begin{aligned} iklm \text{ が } 0123 \text{ の偶置換のとき} & \quad e^{iklm} = e^{0123}, \quad e_{iklm} = e_{0123}, \\ iklm \text{ が } 0123 \text{ の奇置換のとき} & \quad e^{iklm} = -e^{0123}, \quad e_{iklm} = -e_{0123} \end{aligned}$$

となるので、4! 個の項はすべて  $e^{0123} e_{0123}$  に等しい。ここで

$$e_{0123} = g_{0i} g_{1j} g_{2k} g_{3l} e^{ijkl} = g_{00} g_{11} g_{22} g_{33} e^{0123} = 1 \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times 1 = -1$$

となるので\*2,  $e^{iklm} e_{iklm} = 4! e^{0123} e_{0123} = -24$ : (6.9) を得る。

\*2 符号系が  $(-, +, +, +)$  の場合も  $e_{0123} = g_{00} g_{11} g_{22} g_{33} e^{0123} = (-1) \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = -1$ .



■  $e^{iklm}$  が擬テンソルであることについて 例えば  $z$  軸正の向きを入れ替える空間反転を考える。テンソルの成分は  $\partial z'/\partial z = -1$  がかかって符号を変えるのに対し、擬テンソルの成分  $e^{iklm}$  は  $(\partial z'/\partial z)(\partial(x)/\partial(x')) = (-1) \cdot (-1) = 1$  がかかって符号を変えない。

一般に  $e^{iklm}$  を擬テンソルとすれば、これは任意の座標系で同じ成分を持つことが次のように確かめられる。変換係数  $a^\mu_\nu$  に対して行列式  $|a^\mu_\nu| = e^{prst} a^0_p a^1_r a^2_s a^3_t$  は行を入れ替えると符号が変わるので

$$e^{iklm} |a^\mu_\nu| = e^{prst} a^i_p a^k_r a^l_s a^m_t \quad (5)$$

となる。これを  $i, k, l, m$  については和をとらないものとして  $|a^\mu_\nu| = e^{iklm} e^{prst} a^i_p a^k_r a^l_s a^m_t$  と書くのは誤りである。実際、この左辺は一般に 0 でないのに対し右辺は  $i = k$  等に対し常に 0 になる。一方、(5) は例えば  $i = k = 1$  に対しても (左辺) = 0 かつ

$$(\text{右辺}) = \sum_{p>r} \{e^{prst} a^1_p a^1_r a^l_s a^m_t + (p \leftrightarrow r)\} = 0$$

となって正しい。

さて、式 (5) を用いると

$$e^{iklm'} = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^r} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^s} \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^t} e^{prst} = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \frac{\partial(x')}{\partial(x)} e^{iklm} = e^{iklm}$$

となる。

「積  $e^{iklm} e^{prst}$  は、……真のテンソルをつくる」(p.20, 1.3) のは変換則に  $(\partial(x)/\partial(x'))^2 = 1$  がかかるから。

■ 軸性ベクトル 「軸性ベクトルは、ある反対称テンソルに対偶な擬ベクトルである」(p.21, 1.6) について。軸性ベクトル  $C = A \times B$  の成分  $C_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} A_\beta B_\gamma$  は

$$C_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} A_\beta B_\gamma = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} (A_\beta B_\gamma - A_\gamma B_\beta) = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} C_{\beta\gamma}$$

と書き換えられる。これは反対称テンソル  $C_{\beta\gamma} \equiv A_\beta B_\gamma - A_\gamma B_\beta$  に対偶なテンソルを作る操作に他ならない。このとき逆に  $C_{\beta\gamma}$  を  $C_\alpha$  で表すと

$$C_{\beta\gamma} = -e_{\beta\gamma\alpha} C_\alpha.$$

■ 反対称 4 元テンソル (6.10) について 変換則は  $A'^{ik} = \Lambda^i_p \Lambda^k_r A^{pr}$  であり、3 次元空間内の回転では

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \quad R \text{ は } 3 \times 3 \text{ の回転行列,}$$

$$\therefore \Lambda^0_\alpha = \delta^0_\alpha = 0, \quad \Lambda^\alpha_0 = \delta^\alpha_0 = 0$$

だから、3 次元テンソルの変換則

$$A'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu A^{\mu\nu}$$

が得られる。これは擬ベクトルの成分  $a_\mu \equiv \frac{1}{2} e_{\mu\alpha\beta} A^{\alpha\beta}$  を用いて

$$A^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (A^{\alpha\beta} - A^{\beta\alpha}) = -e^{\mu\alpha\beta} a_\mu$$

と表される。さらに 3 次元ベクトルの変換則

$$A'^{0\alpha} = \Lambda^\alpha_\beta A^{0\beta}$$

が得られるから、 $\mathbf{p} = (A^{01}, A^{02}, A^{03})$  は 3 次元極性ベクトルである。

■p.22 脚注 1) について “共変座標”  $x_i$  による微分演算子  $\partial^i$  は、添字の位置から期待されるように確かに反変ベクトルになる。実際  $x^j = g^{jk}x_k$  より

$$\partial^i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial x^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x^j} = g^{ji} \partial_j.$$

ただし最後の等号では、計量が座標によらないことを仮定した。計量が座標による場合に最後の等号が成り立たなくなることは、そのような一般の曲線座標では  $\partial_j$  がベクトルにならないため、計量による添字の上げ下げの規則が適用されないことと関係していると考えられる。これに対し共変微分は  $(\dots)^{;k} = g^{kl}(\dots)_{;l}$  とできる (§ 86)。

■「3次元空間では、……対偶ベクトル…… $df_\alpha = (1/2)e_{\alpha\beta\gamma}df_{\beta\gamma}$  が用いられる」(p.22, l.14~16) について

$$df_\alpha = \frac{1}{2}e_{\alpha\beta\gamma}(dx_\beta dx'_\gamma - dx_\gamma dx'_\beta) = e_{\alpha\beta\gamma}dx_\beta dx'_\gamma = (d\mathbf{r} \times d\mathbf{r}')_\alpha.$$

■式 (6.11) の 2 行下について 乱丁・誤記があるように見える。英語版を見ると  $df^{ik}df_{ik}^* = 0$  となっている。  $dx^i dx^l dx^k dx^{m'} \equiv (il, km)$  と略記してこれを示そう。

$$\begin{aligned} df^{ik}df_{ik}^* &= \frac{1}{2}e_{iklm}df^{ik}df^{lm} \\ &= \frac{1}{2}e_{iklm}\{(il, km) - (im, kl) - (kl, im) + (km, il)\} \\ &= \frac{1}{2}(e_{iklm} - e_{ikml} - e_{kil m} + e_{kiml})(il, km) \\ &= 2e_{iklm}(il, km) \\ &= 2 \sum_{i>l} \{e_{iklm}(il, km) + (i \leftrightarrow l)\} = 0. \end{aligned}$$

■対偶テンソルで元のテンソルを表すこと 体積要素 (6.12) の第 2 式について、p.20 脚注 1) の公式を用いると

$$\begin{aligned} e_{nkml}dS^n &= -\frac{1}{6}e_{nkml}e^{nprs}dS_{prs} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \delta_k^p & \delta_l^p & \delta_m^p \\ \delta_k^r & \delta_l^r & \delta_m^r \\ \delta_k^s & \delta_l^s & \delta_m^s \end{vmatrix} dS_{prs} \\ &= \frac{1}{6}(dS_{klm} - dS_{kml} - dS_{lkm} + dS_{mkl} + dS_{lmk} - dS_{mlk}) \quad (\text{行列を 1 列目で展開した}) \\ &= dS_{klm}. \end{aligned}$$

■p.20 脚注 1) の公式について

$$e^{iklm}e_{prst} = - \begin{vmatrix} \delta_p^i & \delta_r^i & \delta_s^i & \delta_t^i \\ \delta_p^k & \delta_r^k & \delta_s^k & \delta_t^k \\ \delta_p^l & \delta_r^l & \delta_s^l & \delta_t^l \\ \delta_p^m & \delta_r^m & \delta_s^m & \delta_t^m \end{vmatrix}$$

の両辺は添字  $i, k, l, m$  および  $p, r, s, t$  について反対称であり、 $(i, k, l, m) = (p, r, s, t) = (0, 1, 2, 3)$  のとき左辺は  $-1$  であり、右辺もまた単位行列の行列式の符号を入れ替えたものなので  $-1$  となり、両辺の値は一致する。よって任意の添字の組合せについて上式が成立する。

あるいは次のように説明することもできる。上式の右辺は負号を除けば、4次の単位行列  $I$  の行や列を入れ替えた行列の行列式である。ところが行列式は行や列を入れ替える度に符号が入れ替わるため、

$$\begin{vmatrix} \delta_p^i & \delta_r^i & \delta_s^i & \delta_t^i \\ \delta_p^k & \delta_r^k & \delta_s^k & \delta_t^k \\ \delta_p^l & \delta_r^l & \delta_s^l & \delta_t^l \\ \delta_p^m & \delta_r^m & \delta_s^m & \delta_t^m \end{vmatrix} = e^{iklm}(-e_{prst})|I| = -e^{iklm}e_{prst}.$$

同様に

$$e^{iklm}e_{prsm} = - \begin{vmatrix} \delta_p^i & \delta_r^i & \delta_s^i \\ \delta_p^k & \delta_r^k & \delta_s^k \\ \delta_p^l & \delta_r^l & \delta_s^l \end{vmatrix}$$

の両辺は添字について同じ反対称性を持ち、 $(i, k, l) = (p, r, s) = (0, 1, 2)$  のとき左辺は  $e^{0123}e_{0123} = -1$ 、右辺も  $-1$  であること等から、これは任意の添字の組合せについて成立する。

脚注3)も同様である。残り2つの公式は上の公式から導かれる。

行列式

$$A = e^{prst}A_{0p}A_{1r}A_{2s}A_{3t}$$

の0, 1, 2, 3行目に  $i, k, l, m$  行目が来るように入れ替えた行列式

$$A' = e^{prst}A_{ip}A_{kr}A_{ls}A_{mt}$$

は  $A$  の  $e^{iklm} = -e_{iklm}$  倍であることから

$$e^{prst}A_{ip}A_{kr}A_{ls}A_{mt} = -Ae_{iklm}$$

を得る。両辺を  $e^{iklm}$  と縮約して

$$e^{iklm}e^{prst}A_{ip}A_{kr}A_{ls}A_{mt} = 24A$$

を得る。

■  $e_{0123} = -e_{1023} = -e_{2130} = -e_{3120} = +e_{2310}$  等 図7のように添字  $a_n$  と  $a_{n+m}$  を入れ替えると、隣接する添字を  $2m-1$  回入れ替えることになる。ここから  $e_{0123} = -e_{1023} = -e_{2130} = -e_{3120} = +e_{2310}$  等が判断できる。

## § 6, 問題 (2階反変テンソルの Lorentz 変換)

Lorentz 変換の変換係数

$$(a^i_k) \equiv \left( \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \right) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\beta \equiv V/c, \gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2})$$

に対して、2階反変テンソル  $A^{ik}$  の変換則 (付録B.1) を書き下すと、例えば

$$\begin{aligned} A'^{01} &= a^0_i a^1_k A^{ik} = \gamma^2(-\beta A^{00} + A^{01} + \beta^2 A^{10} - \beta A^{11}) \\ &= \begin{cases} \gamma^2\{-\beta A^{00} + (1 + \beta^2)A^{01} - \beta A^{11}\} & (\text{対称な } A^{ik} \text{ に対して}) \\ A^{01} & (\text{反対称な } A^{ik} \text{ に対して}) \end{cases} \end{aligned}$$

となる。

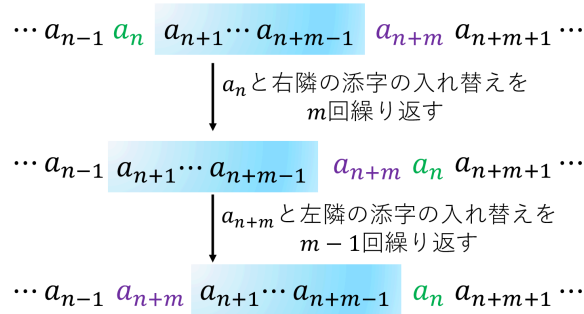


図7 任意の2つの添字  $a_n$  と  $a_{n+m}$  の入れ替え

## § 7. 4次元的速度

粒子の固有時間  $\tau$  を用いて、粒子の4元速度と4元加速度をそれぞれ

$$u^i = \frac{1}{c} \frac{dx^i}{d\tau} = \left( \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \frac{\mathbf{v}/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right), \quad w^i = \frac{du^i}{ds} = \frac{d^2x^i}{ds^2}$$

を定義する。ここでは  $\tau$  そのものではなく  $s$  による微分を用いているため ( $ds = cd\tau$ )、4元速度  $u^i$  は無次元であり、4元加速度  $w^i$  も通常の加速度の次元を持たないことに注意する。

note 座標の微分  $dx^i$  は反変ベクトル成分であり固有時間  $d\tau$  は Lorentz スカラーだから、4元速度  $u^i$  は反変ベクトル成分であり、それ故4元加速度  $w^i$  も反変ベクトル成分となる。またこれらは非相対論的極限  $v \ll c$  で  $d\tau \rightarrow dt$  よりそれぞれ座標時間  $t$  で測った速度  $\frac{1}{c} \frac{dx^\alpha}{dt}$  と加速度  $\frac{1}{c^2} \frac{d^2x^\alpha}{dt^2}$  に移行する。これに対して座標時間  $t$  で測った速度  $\frac{dx^\alpha}{dt}$  や加速度  $\frac{d^2x^\alpha}{dt^2}$  は一般にベクトル成分ではない。

$ds^2 = c^2 d\tau^2 = dx^i dx_i$  より4元速度は

$$u^i u_i = 1$$

と規格化されていることが分かる。さらに両辺を固有時間で微分すると、4元速度と4元加速度の“直交性”

$$u^i w_i = 0$$

が見出される。

## § 7 について

### ■4元速度, 4元加速度

	ランダウ=リフシツ『場の古典論』	文献 [2]
4 元速度	$u^i = dx^i/ds$ : 無次元 $u^i u_i = 1$	$u^i = dx^i/d\tau$ $u^i u_i = -c^2$
4 元加速度	$w^i = d^2 x^i/ds^2$	$a^i = d^2 x^i/d\tau^2$

符号の違いは計量の符号系の違いに由来

$\tau$  そのものではなく  $s$  による微分で 4 元速度や 4 元加速度を定義しているのには、あらかじめ  $c = 1$  といった自然単位系の式との対応を見やすくする意味があると推察される。

### ■ 3 次元的な量との関係

$$u^\alpha = \frac{v^\alpha/c}{\sqrt{1-\beta^2}} : (7.2), \quad g^\alpha = \frac{f^\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} : (9.18), \quad \beta \equiv v/c.$$

4 元速度  $u^\alpha$  はいくらでも大きな値をとり得るのに対し\*3,  $\beta \rightarrow 1$  とすると  $\sqrt{1-\beta^2}$  はゼロになるため, 3 次元的な速度  $v^\alpha = cu^\alpha \sqrt{1-\beta^2}$  は有限にとどまる.  $v$  が  $-c \rightarrow c$  を動くとき  $u = \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$  は  $-\infty \rightarrow \infty$  を動く. 一方, 力の 4 元ベクトル成分  $g^\alpha$  と 3 次元的な力  $f^\alpha$  の範囲にはともに制限がない.

### § 7, 問題 (相対論的な等加速度運動)

特殊相対性理論においては, 空間に固定した慣性系で測って, 粒子が常に一定の加速度  $d^2 x/dt^2 = w$  を持つような直線運動は不可能である (速度  $v \sim wt$  が光速を超えるから). そこで瞬間的に粒子と同じ速度で運動する慣性系で測った粒子の加速度が, どの瞬間にも与えられた値

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} = w$$

をとるような直線運動を考える ( $t'$  は粒子の固有時間に他ならない). この共動座標系に関する 4 元加速度の成分は

$$w^i = \frac{d^2 x^i}{ds^2} = \left(0, \frac{w}{c^2}, 0, 0\right)$$

なので,

$$w^i w_i = -\frac{w^2}{c^4}$$

が成立する. ところがこの関係自体は, 両辺が Lorentz スカラーなので任意の座標系で成立する (付録 B.1). そこで粒子が速度  $v$  を持つような空間固定系に関する成分

$$w^i = \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, 0, 0 \right) = \frac{1}{c^2 \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} \left( \frac{v}{c} \frac{dv}{dt}, \frac{dv}{dt}, 0, 0 \right)$$

を代入すると,

$$-\frac{w^2}{c^4} = (w^0)^2 - (w^1)^2 = -\frac{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}{c^4 \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}, \quad \therefore \frac{dv}{dt} = w \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

\*3 「 $v = c$  に対しては, 運動量  $\mathbf{p}$  は無限大になる」 (p.29, 1.2).

となる。(速度が小さいうちは、加速度は近似的に  $w$  となっている。また  $v \rightarrow c$  で加速度  $\rightarrow 0$ .)

これを変数分離して積分すると、

$$v = \frac{wt}{\sqrt{1 + \left(\frac{wt}{c}\right)^2}} \quad \left(\frac{u}{c} = \sin \theta \text{ と置換}\right)$$

を得る ( $t = 0$  で  $v = 0$  となるように時間の原点を選んだ).  $t \rightarrow 0$  で  $v \rightarrow wt$  であり、速度  $v$  は非相対論的な場合の  $v = wt$  の  $1/\sqrt{1 + (wt/c)^2}$  倍に遅れて、 $t \rightarrow \infty$  で  $v \rightarrow c$  となることが読み取れる。

これをもう1度積分すると、

$$x = \int_0^t v dt = \frac{c^2}{w} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{wt}{c}\right)^2} - 1 \right) \quad \left(\frac{wt}{c} = \tan \theta \text{ と置換}\right)$$

が得られる ( $t = 0$  で  $x = 0$  となるように座標原点を選んだ).  $t \rightarrow 0$  を想定して平方根を展開すると、非相対論的表式  $x \simeq \frac{1}{2}wt^2$  が再現される.  $xt$  平面上の軌道は双曲線

$$\left(\frac{x}{c^2/w} + 1\right)^2 - \left(\frac{wt}{c}\right)^2 = 1$$

で与えられ、 $t \rightarrow \infty$  で  $x \sim ct$  に漸近する (光速での運動に対応).

最後に粒子の固有時間は

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{wt}{c}\right)^2}} = \frac{c}{w} \sinh^{-1} \frac{wt}{c} \quad \left(\frac{wt}{c} = \sinh \theta \text{ と置換}\right)$$

と計算される.  $\tau \rightarrow \infty$  では

$$t = \frac{c}{w} \sinh \frac{w\tau}{c} \simeq \frac{c}{2w} e^{w\tau/c}, \quad \therefore \tau = \frac{c}{w} \ln \frac{2wt}{c}$$

であり、固有時間  $\tau$  は  $t$  に比べてゆっくと増大する (宇宙船が亜光速飛行に至るには長い時間を要する).

**note** 最後の積分は

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin \theta}{1-\sin \theta} + \text{const.} \quad (x \equiv \tan \theta)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \phi + \text{const.} \quad (x \equiv \sinh \phi)$$

の2通りに解ける.

$$\frac{1}{2} \log \frac{1+\sin \theta}{1-\sin \theta} = \frac{1}{2} \ln \frac{(1+\sin \theta)^2}{\cos^2 \theta} = \ln \left( \tan \theta + \frac{1}{\cos \theta} \right) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}),$$

$$\phi = \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

より、これらの結果は等価である.

## 第 2 章 相対論的力学

### § 8. 最小作用の原理

自由粒子に対する作用は、粒子の世界線に沿う積分

$$S = -\alpha \int_a^b ds = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

の形をとる。これは Lorentz スカラーであり、ラグランジアン  $L$  は座標の 1 階の微分  $v$  を含む。これが粒子の現実の世界線に対して極小値をもつには  $\alpha > 0$  が必要であり、非相対論的極限でラグランジアンが  $L = \frac{1}{2}mv^2 + \text{const.}$  となることを要求すると、 $\alpha = mc$  と定まる。こうして自由粒子の作用とラグランジアンは

$$S = -mc \int_a^b ds = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

となる。

### § 8 について

■「積分記号の下にはいるのは 1 階の微分でなければならない」(p.27, l.9) について これは次のことと関係している。すなわち粒子の初期位置と初速度を与えれば未来の粒子の運動は完全に決定されるという古典的因果律が満たされるためには、運動方程式は 2 階の微分方程式でなければならない(『力学』§ 1, § 2 参照 [3, pp.1-2])。

### § 9. エネルギーと運動量

ラグランジアン  $L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  によって記述される自由粒子に対して

- 運動量  $\mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ .
  - 非相対論的極限  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ .
- エネルギー  $\mathcal{E} \equiv \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ .
  - 静止エネルギー  $\mathcal{E}_0 = mc^2$ , 非相対論的極限  $\mathcal{E} = mc^2 + \frac{mv^2}{2}$ .

これらの表式はたくさんの粒子からできている複合的な物体にも適用できる。

- 相対論的力学では自由な物体のエネルギーには付加定数の任意性がない ( $\mathcal{E}_0 = mc^2$ ).
- 静止している物体  $m$  のエネルギーにはそれを構成している粒子 (質量  $m_a$ ) の運動エネルギーと粒子間の相互作用のエネルギーも含まれ、質量保存の法則は成立しない:  $mc^2 \neq \sum_a m_a c^2$ .
- ハミルトニアン  
運動量  $\mathbf{p}$  とエネルギー  $\mathcal{E}$  の 2 式から  $\mathbf{v}$  を消去し、エネルギーを運動量で表すと

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} \tag{9.7}$$

を得る [本稿次節で補足]. これが粒子のハミルトニアンである.

– 非相対論的極限  $\mathcal{H} = mc^2 + \frac{p^2}{2m}$ .

● 運動量とエネルギーの関係  $\mathbf{p} = \mathcal{E} \frac{\mathbf{v}}{c^2}$ .

– 光速で運動する質量ゼロの粒子に対して  $p = \mathcal{E}/c$ .

–  $\mathcal{E} \gg mc^2 \neq 0$  の超相対論的粒子に対しても近似的に  $p = \mathcal{E}/c$  が成り立つ.

● 最小作用原理: 粒子の世界線の端点を固定した変分に対して  $\delta S = 0$

~> 粒子の運動方程式  $\frac{du_i}{ds} = 0$  (4元加速度ゼロ, 導出は下記)

● 作用の積分路を現実の世界線に限定し, 作用を終点の関数と見たとき

$$\mathcal{H} = -\frac{\partial S}{\partial t}, \mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}} \quad (\text{『力学』 § 43}) \quad \rightarrow \quad p_i = -\partial_i S.$$

● エネルギーと運動量は 4 元ベクトル

$$p^i = mcu^i = \left( \frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p} \right)$$

を作る  $\rightarrow$  4 元反変ベクトルとして変換.

● 運動量とエネルギーの関係  $\mathcal{E}^2/c^2 = p^2 + m^2c^2$  は

$$p^i p_i = m^2 c^2 \quad (\because u^i u_i = 1)$$

に他ならない.

★ この結果は次のように理解される.

すなわち縮約  $p^i p_i$  は Lorentz スカラーであり, その値は座標系に依らない (B.1 節参照).

そこで  $p^i = (mc, \mathbf{0})$  となる座標系でこれを評価すると  $p^i p_i = m^2 c^2$  を得る.

● 4 元力  $g^i$  を反変ベクトルとして導入して, 粒子の相対論的な運動方程式を

$$\frac{dp^i}{ds} = g^i \tag{9.17}$$

と書く [と, これは相対論的に不変となることが保証される (B.1 節)].

このとき 4 元力  $g^i$  と,  $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$  を満たす 3 次元的な力  $\mathbf{f}$  との関係は

$$g^i = \left( \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{c^2 \sqrt{1 - (v/c)^2}}, \frac{\mathbf{f}}{c \sqrt{1 - (v/c)^2}} \right) \tag{9.18}$$

となる [導出は本稿次節].

●  $p^i p_i = m^2 c^2$  に  $p_i = -\partial_i S$  を代入すると,

$$\text{作用に対する偏微分方程式} \quad (\partial^i S)(\partial_i S) = m^2 c^2 : \text{Hamilton-Jacobi 方程式.} \tag{9.19}$$

## § 9. 式の導出など

■ 最小作用原理から運動方程式  $du_i/ds = 0$  の導出  $ds = \sqrt{dx_i dx^i}$  より

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= -mc \delta \int_a^b ds = -mc \int_a^b \frac{dx_i \delta dx^i}{ds} = -mc \int_a^b u_i \delta dx^i \\ &= \cancel{-mc u_i \delta x^i} \Big|_a^b + mc \int_a^b \delta x^i \frac{du_i}{ds} ds \end{aligned} \tag{9.10}$$

となるので [本稿次節で補足], 自由粒子の運動方程式  $du_i/ds = 0$  を得る.



■相対論的自由粒子に対する Hamilton-Jacobi 方程式 (9.19) の極限移行 相対論的自由粒子に対する Hamilton-Jacobi 方程式 (9.19):  $(\partial^i S)(\partial_i S) = (mc)^2$  が, 非相対論的極限で適正な Hamilton-Jacobi 方程式に移行することを確認する.

相対論的自由粒子のエネルギーと作用をそれぞれ  $\mathcal{E}, S$  と書くと, これらは非相対論的な場合の値  $\mathcal{E}', S'$  と,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}' + mc^2 \Rightarrow -\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial S'}{\partial t} + mc^2 \Rightarrow S = S' - mc^2 t$$

によって関係付けられる. これを式 (9.19):

$$\frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = (mc)^2$$

に代入すると

$$\frac{1}{2mc^2} \left( \frac{\partial S'}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial S'}{\partial t} - \frac{1}{2m} \left\{ \left( \frac{\partial S'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial S'}{\partial z} \right)^2 \right\} = 0$$

を得る. 非相対論的極限 (粒子の速度  $v \ll c$ ) をとるには, 形式的に  $c \rightarrow \infty$  とすれば良く, このとき上式の左辺第 1 項は消える. 自由粒子に対する非相対論的なハミルトニアンは  $H(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m$  で与えられることを踏まえると, これは自由粒子に対する Hamilton-Jacobi 方程式

$$\frac{\partial S'}{\partial t} + H\left(\mathbf{p} = \frac{\partial S'}{\partial \mathbf{r}}\right) = 0$$

となっていることが分かる.

## § 9 について

■ $d\mathbf{p}/dt$  の式 (9.2), (9.3) について 一般に

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m\dot{\mathbf{v}}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + \mathbf{v} \left( -\frac{1}{2} \frac{-\frac{d}{dt} \left( \frac{v}{c} \right)^2}{\{1-(v/c)^2\}^{3/2}} \right) = \frac{m\dot{\mathbf{v}}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + \frac{m\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}/c^2)}{\{1-(v/c)^2\}^{3/2}}$$

である.

$v = \text{const.}$  のとき  $\frac{d}{dt} v^2 = 2\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}$  に比例する最右辺第 2 項が落ちるので式 (9.2) を得る.

$\mathbf{v} \parallel \dot{\mathbf{v}}$  のときこれらの方向単位ベクトルを  $\mathbf{n}$  とすると最右辺第 2 項において

$$\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) = (v\mathbf{n})v\dot{v} = v^2(\dot{v}\mathbf{n}) = v^2\dot{\mathbf{v}}$$

となるので式 (9.3) を得る.

■相対論では自由粒子のエネルギーに付加定数の任意性がないこと (pp.29-30) について これは自然なラグランジアン  $L$  が § 8 のように決まることに起因している. もちろん例えば定数  $a$  を付け加えて, ラグランジアンを  $L' = L + a$  と再定義することを認めれば, エネルギー

$$E' = \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} - L' = E - a$$

にも付加定数の任意性が導入される.

■「しかしながら……質量ゼロの粒子が存在することができる」(p.30, 1.22,23)について 式(9.8) $\mathbf{p} = \mathcal{E} \frac{\mathbf{v}}{c^2}$  は  $m > 0 (\alpha = mc > 0)$  として得られたが (§ 8 参照), この式で  $\mathbf{v} \rightarrow c$  とした式(9.9):  $p = \mathcal{E}/c$  が質量ゼロの粒子に対して成り立つ.

■式(9.7),(9.8)について エネルギーから  $\mathbf{v}$  を消去してハミルトニアン(9.7)を得るには, 粒子の力学的運動量の表式

$$\mathbf{p} \equiv \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

を粒子の速度について逆に解くと  $\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{p^2}{m^2c^2 + p^2}$  となることを用いれば良い.  
 $c = 1$  とおく自然単位系を採用すると, 覚えやすい形

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2 + p^2}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{\mathcal{E}}$$

になる. もとの単位系に戻るには, 次元の正しい関係式になるように,

$$\mathcal{H} = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}, \quad \frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{\mathbf{p}c}{\mathcal{E}}$$

と  $c$  を補えば良い.

■式(9.9):  $p = \mathcal{E}/c$  について  $p = \mathcal{E}/c$  と訂正する.

■作用の変分(9.10)の導出について

$$-mc\delta \int_a^b \sqrt{dx_i dx^i} = -mc \int_a^b \frac{\partial}{\partial(dx^k)} \sqrt{dx_i dx^i} \delta(dx^k) = -mc \int_a^b \frac{dx_k \delta dx^k}{ds}.$$

ここで計量テンソルが変分されないため, 以下のように通常の規則  $A^i B_i = A_i B^i$  (p.17) に従ってダミー添字を上げ下げできることを用いた:

$$dx^i \delta dx_i = dx^i \delta g_{ij} dx^j = g_{ij} dx^i \delta dx^j = dx_j \delta dx^j, \quad \therefore dx^k \delta dx_k + dx_k \delta dx^k = 2 dx_k \delta dx^k.$$

p.83 の  $F^{ik} \delta F_{ik} \equiv F_{ik} \delta F^{ik}$  も同様. 最右辺の  $\delta dx^k$  の意味は次のように考えられる. すなわち 4元ベクトル  $dx^i$  によって隔たった世界線上の 2点 A, B について, 軌道の変分後の移動先 A', B' が定義されると考えると, 変化量  $\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{AB}$  が 4元ベクトル  $\delta dx^k$  によって与えられる.

部分積分(9.10)について, A, B のどのような意味での微小変化 dA, dB に対しても  $d(AB) = B dA + A dB$  だから, 状態 1  $\rightarrow$  2 で両辺積分して

$$\int_1^2 A dB = AB|_1^2 - \int_1^2 B dA$$

のように部分積分できる. 特に独立変数  $x$  の微小変化  $dx$  に伴う微小変化  $dA = A' dx, dB = B' dx$  に対してこれは通常の部分積分の公式

$$\int_{x_1}^{x_2} AB' dx = [AB]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} BA' dx$$

を与える.

式(9.10)の  $du_i = (du_i/ds) ds$  で導入された  $ds$  は勝手にとれず, 粒子に沿った 2事象  $x^i, x^i + dx^i$  の間の世界距離  $ds$  と見なさなければならない. だからこそ  $du_i/ds$  は粒子の 4元加速度になる.

■ $p_i = -\partial_i S$ : (9.12) について 式 (9.12) 直後の「力学において示されているように」 $p_i \equiv -\partial_i S = -m c u_i$  が  $\mathbf{p} \equiv \partial L / \partial \mathbf{v} = m \mathbf{v} / \sqrt{1 - (v/c)^2}$  の成分であるという言い方は問題ない. 空間成分  $x^\alpha, \alpha = 1, 2, 3$  についてのみ変分して式 (9.10) を

$$\delta S = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \delta x^\alpha \right|_a^b + \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) \delta x^\alpha dt$$

と書き直すと  $-\partial_\alpha S = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}$  となるからである.

なお, 時間成分についての Lagrange 方程式は  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial (c\dot{t})} = \frac{\partial L}{\partial (ct)}$  で定数  $c\dot{t} = c$  による微分が現れると考えるのは誤りである. ラグランジアンが  $\dot{x}^0 = c$  を変数にもたないことと境界条件  $\delta x^0 = 0$  より積分区間が変わらないことを考えると,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial x^0} \delta x^0 + \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \delta x^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \delta \dot{x}^\alpha \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial x^0} \delta x^0 + \left( \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) \delta x^\alpha \right) dt$$

となるので ( $\alpha$  は空間成分を動く), 正しくは  $\partial L / \partial x^0 = 0$  が導かれる.  $L = -\sum m c \sqrt{1 - (v/c)^2}$  は  $x^0$  を陽に含まないから, これは自明な式  $0 = 0$  を与えるだけだと考えられる.

非相対論的な場合と異なり  $\partial_t S = -\mathcal{E}$  は式 (9.12) の時間成分として得られている. その導き方から理解されるように, 他粒子系において時間座標  $t$  はすべての粒子に共通であるけれど, ある粒子  $a$  の座標の時間成分  $x_a^0$  による作用の微分は, その粒子のエネルギー  $-\mathcal{E}_a/c$  を与えることになる.

■4元運動量 (9.13) について 時間成分と空間成分の次元は等しい:  $[\mathcal{E}/c] = [p^\alpha]$ . これにより座標変換則におけるこれらの線形結合が意味を成す.

■力の4元ベクトル (9.17), (9.18) について  $g^i = dp^i/ds$  は力の定義とされているけれど, これはあくまで運動方程式であり, もちろん原因としての力  $g^i$  と結果としての運動量変化  $dp^i/ds$  は物理的に異なる概念である.

時間成分  $g^0$  の表式の導出は次のようにすれば良い. 直交性

$$0 = m u_i w^i = u_i g^i = u^0 g^0 - u^\alpha g^\alpha, \quad \therefore u^0 g^0 = u^\alpha g^\alpha$$

において

$$u^0 g^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} g^0, \quad u^\alpha g^\alpha = \frac{\mathbf{v}}{c \sqrt{1 - (v/c)^2}} \cdot \frac{\mathbf{f}}{c \sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

なので

$$g^0 = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{c^2 \sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

を得る.

$ds = c d\tau = c dt \sqrt{1 - (v/c)^2}$  に注意すると, 運動方程式 (9.17):  $dp^i/ds = g^i$  の空間成分と時間成分はそれぞれ

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{\mathbf{f}}{c \sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ \frac{dp^0}{ds} = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{c^2 \sqrt{1 - (v/c)^2}} \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f} \\ \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \end{cases} \quad (6)$$

となる. ただし運動方程式の空間成分において  $\mathbf{p} = m \mathbf{v} / \sqrt{1 - (v/c)^2}$  は4元運動量成分であり, 非相対論的な極限  $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$  でこれはよく知られた Newton の運動方程式

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}$$

に移行する。また運動方程式の時間成分は仕事と運動エネルギーの関係を表していると解釈できる。

「相対論的質量」について 相対論的な運動方程式の 1 つの説明に、非相対論的な運動方程式における質量を「相対論的質量」

$$m(\mathbf{v}) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

に置き換えるというものがある [4, pp.218-220]. ここに  $m_0$  は  $\mathbf{v} = 0$  のときの質量  $m(0)$  だから静止質量と呼べる。一方で式 (9.17) のように、非相対論的な運動方程式を 4 元ベクトルの関係式へ修正すれば、得られる運動方程式の座標変換に対する共変性が明白である。またこのような見方を採れば質量は単に質量であって、「相対論的質量」「静止質量」の区別は必要ない。

## § 10. 分布関数の変換

運動量空間の体積要素  $d^3p$  に含まれる粒子数は分布関数  $f(\mathbf{p})$  によって  $f(\mathbf{p})d^3p$  と表される (分布関数の定義). 粒子数

$$f(\mathbf{p})d^3p = f(\mathbf{p})\mathcal{E} \frac{d^3p}{\mathcal{E}}$$

は不変量である。また右辺において比

$$\frac{d^3p}{\mathcal{E}} \tag{10.1}$$

は不変量であることを説明できるので (下記), 分布関数の変換則は

$$f(\mathbf{p})\mathcal{E} = f'(\mathbf{p}')\mathcal{E}', \quad \therefore f'(\mathbf{p}') = \frac{f(\mathbf{p})\mathcal{E}}{\mathcal{E}'}$$

によって与えられることになる (第 2 式右辺の  $\mathbf{p}$  と  $\mathcal{E}$  は Lorentz 変換の式によって  $\mathbf{p}'$  と  $\mathcal{E}'$  で表されているものと見る)。

運動量空間の極座標  $p \equiv |\mathbf{p}|$ , etc. の微小変化  $dp$ , etc. に伴う体積要素をとり, その立体角要素を  $do$ , 変化  $dp$  に伴う  $\mathcal{E} = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$  の変化を  $d\mathcal{E}$  と書く。このとき  $d^3p/\mathcal{E}$  の不変性から,

$$pd\mathcal{E}do \tag{10.3}$$

もまた不変量であることが見出される (証明は下記)。

気体運動論では, 位相空間の体積要素  $d\tau = dVd^3p$  に含まれる粒子数は, 位相空間における分布関数  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  によって  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})d\tau$  と表される (分布関数の定義). 粒子数  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})d\tau$  は不変量である。ところが空間要素  $dV$  の Lorentz 短縮と  $d^3p/\mathcal{E}$  の不変性を考え合わせると, 位相空間の体積要素  $d\tau$  もまた不変量となること

$$d\tau = d\tau' \tag{10.4}$$

が示される (証明は下記)。よって位相空間における分布関数  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  は不変である:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = f'(\mathbf{r}', \mathbf{p}').$$

§ 10, 式の導出など

■式 (10.1):  $d^3p/\mathcal{E}$  が不変量であることについて まず教科書本文 (p.33) にある直観的な説明を載せる. 4次元の運動量空間において, “位置ベクトル”  $p^i$  の先端は超曲面  $p^i p_i = m^2 c^2$  上にある. そしてベクトル  $p^i = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p})$  は超曲面に直交するから [本稿次節で補足], 面の要素 (法線方向の 4 元ベクトル) に一致する. ところが面の要素の第 0 成分は体積要素  $d^3p$  だから,  $p^i$  の第 0 成分との比 (の  $1/c$  倍)  $d^3p/\mathcal{E}$  は不変量である [本稿次節で補足].

次に p.33 の脚注に従った, より直接的な手堅い説明を載せる [5, p.150]. すなわち

$$\frac{d^3p}{2\mathcal{E}/c} = \int d^4p \delta(p^i p_i - (mc)^2) \theta(p^0) \quad (\because p^i p_i - (mc)^2 = (p^0)^2 - (\mathcal{E}/c)^2, \mathcal{E} = \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2})$$

と書けば, その不変性は明白である. ただし  $\theta(p^0)$  は階段関数であり, 右辺の積分は  $p^0$  に関してのみ実行するものとする. 実際, 右辺の  $d^4p$  およびデルタ関数の引数は相対論的な不変量であり, 時間反転を含まない Lorentz 変換に対しては  $p^0$  の符号も不変である.

■式 (10.3) の不変性の証明  $\mathcal{E}^2/c^2 = p^2 + m^2 c^2$  を微分すると  $p dp = \mathcal{E} d\mathcal{E}/c^2$  が得られる. これを代入すると, 不変量 (10.1) は

$$\frac{d^3p}{\mathcal{E}} = \frac{p^2 dp do}{\mathcal{E}} = \frac{p d\mathcal{E} do}{c^2}$$

と書き換えられる. 最右辺は式 (10.3) の  $1/c^2$  倍だから, 式 (10.3) もまた不変量である.

■位相体積の不変性 (10.4):  $d\tau = d\tau'$  の証明 2つの基準系  $K, K'$  の座標に対して, 対応する位相空間の体積要素

$$d\tau = d^3p dV, \quad d\tau' = d^3p' dV'$$

を考える. 考えている要素に含まれる粒子の静止系  $K_0$  をとり,  $K_0$  における要素の空間体積を  $dV_0$  と書く. すると系  $K, K'$  に対する  $K_0$  の速度は, 注目している粒子の  $K, K'$  で見た速度  $v, v'$  に他ならないから,

$$dV = dV_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad dV' = dV_0 \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}, \quad \therefore \frac{dV}{dV'} = \frac{\mathcal{E}'}{\mathcal{E}}.$$

ところが式 (10.1) の不変性より

$$\frac{\mathcal{E}'}{\mathcal{E}} = \frac{d^3p'}{d^3p}$$

であり, これを上式に代入して式 (10.4) を得る.

§ 10 について

■「法線の方向は明らかに 4 元ベクトル  $p_i$  の方向に一致する」 (§ 10, l.12,13) について

$$p^i p_i = m^2 c^2, \quad \therefore p^i dp_i = 0$$

であり, この意味で超曲面 (上の線要素  $dp^i$ ) と 4 元ベクトル  $p^i$  は直交する (図 8 参照).

■「2つの平行な 4 元ベクトルの同一成分の比であり, したがって不変量である」 (§ 10, l.15) について 面要素のベクトル  $(d^3p, \dots)$  と 4 元ベクトル  $p^i = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p})$  の比  $\frac{d^3p}{\mathcal{E}/c}$  は座標系に依らない幾何学的な意味を持つ.

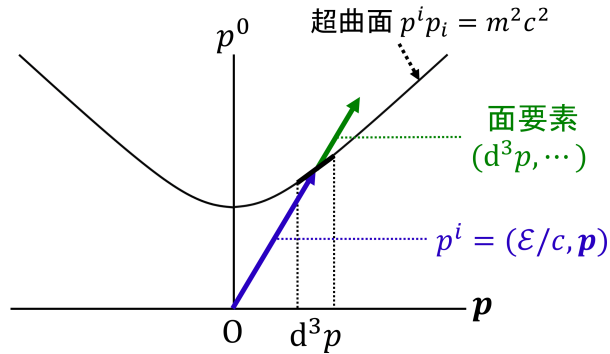


図8 面要素のベクトル  $(d^3 p, \dots)$  と4元ベクトル  $p^i = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p})$  は平行

## § 11. 粒子の崩壊

§ 11~13 では  $c = 1$  とおく.

質量  $M$  の物体が自発的に [外場の介入なしに (『力学』 § 16)] 質量  $m_1, m_2$  の2つの部分に崩壊する過程を, 質量  $M$  の静止系で考える. この基準系に対する破片  $m_1, m_2$  のエネルギーを  $\mathcal{E}_{10}, \mathcal{E}_{20}$ , 運動量を  $\mathbf{p}_{10}, \mathbf{p}_{20}$  と書く. このとき

- エネルギー保存則  $M = \mathcal{E}_{10} + \mathcal{E}_{20}$   
 -  $\mathcal{E}_{10} > m_1, \mathcal{E}_{20} > m_2$  より自発的な崩壊が可能な条件は  $M > m_1 + m_2$ .
- 運動量保存則  $\mathbf{p}_{10} + \mathbf{p}_{20} = 0, \therefore \mathcal{E}_{10}^2 - m_1^2 = \mathcal{E}_{20}^2 - m_2^2$

であり, これらを連立すると破片のエネルギーは

$$\mathcal{E}_{10} = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}, \quad \mathcal{E}_{20} = \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M}$$

と定まる.

次に  $L$  系 (実験室系) において質量  $m_1$ , エネルギー  $\mathcal{E}_1$ , 運動量  $\mathbf{p}_1$  の粒子が質量  $m_2$  の静止粒子に衝突する過程を考える. このとき2粒子のエネルギーの和は  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + m_2$ , 運動量の和は  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1$  である. 2粒子を1個の複合粒子のように考えたときの, その全体としての速度は

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{p}}{\mathcal{E}} = \frac{\mathbf{p}_1}{\mathcal{E}_1 + m_2}$$

であり, これは  $C$  系の  $L$  系に対する速度でもある. また2粒子の  $C$  系におけるエネルギーの総和  $M$  は, 簡単には複合粒子の質量

$$M^2 = \mathcal{E}^2 - \mathbf{p}^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathcal{E}_1$$

として求められる. 衝突により粒子の状態変化や“創成”が起きるためには, “反応生成物”の質量の和がこの  $M$  を超えてはならない.

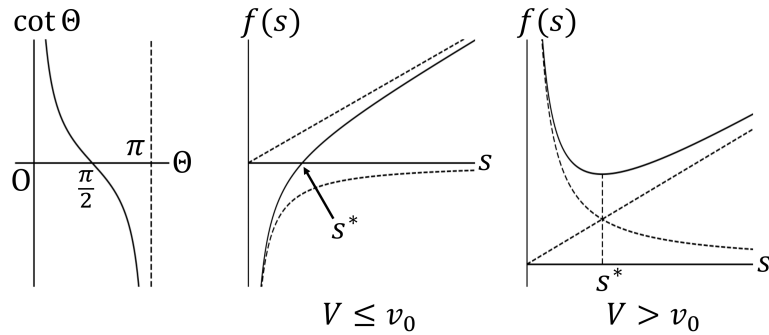


図9 § 11の小問3について

## § 11 について

『力学』§ 16における粒子の崩壊の議論と比較すると、非相対論的力学では粒子のエネルギーを  $E = E_{\text{内部}} + \frac{p^2}{2m}$  のように書けた。これに対し相対論では、粒子のエネルギーの表式

$$\mathcal{E} = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} = mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \dots$$

において運動エネルギーを単一の項として分離できないという点で、事情が異なっている。

### § 11, 問題

1 (崩壊粒子の飛行方向とエネルギーの関係) 非相対論的な結果 (『力学』§ 16) との対応は、教科書の図3 (p.37) のダイアグラムにおいて見易い。この極限で楕円は長半軸、短半軸がともに  $p_0$  の円になり、 $\overline{OA} \rightarrow \mathcal{E}_0 V$  となる。また

$$\sin \theta_{1\text{max}} \rightarrow \frac{p_0/m}{V} \simeq \frac{v_0}{V}$$

となって、『力学』§ 16の式(16.4)を再現する。

2 ( $L$ 系における崩壊粒子のエネルギー分布) 得られた結果は非相対論的極限で、『力学』§ 16の式(16.8)を再現する。

3 (2個の同種粒子への崩壊において、崩壊粒子の間の角度(飛散角)が $L$ 系でとり得る値の範囲)  $\cot \theta_1, \cot \theta_2$ の式は非相対論的極限で、『力学』§ 16の式(16.5)に移行する。

$\cot \theta_1, \cot \theta_2$ の式を

$$\cot \Theta = \cot(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\cot \theta_1 \cot \theta_2 - 1}{\cot \theta_1 + \cot \theta_2}$$

に代入すると、

$$\cot \Theta = f(\sin \theta_0), \quad f(s) \equiv \frac{V^2 - v_0^2 + V^2 v_0^2 s^2}{2V v_0 \sqrt{1 - V^2} s} = \frac{1}{2V v_0 \sqrt{1 - V^2}} \left( \frac{V^2 - v_0^2}{s} + V^2 v_0^2 s \right)$$

を得る。 $s \equiv \sin \theta_0$ は0から1までの値をとり、 $\cot \Theta$ と $f(s)$ のグラフの概形は図9のようである。

$V \leq v_0$ のとき、 $f(s) = 0$ となる $s$ の値は

$$s^* = \frac{\sqrt{v_0^2 - V^2}}{V v_0}$$

である。ここで  $s^* > 1$  を仮定すると

$$v_0^2(1 - V^2) < V^2$$

となるが、 $V < v_0$  の下で左辺は  $v_0^2(1 - V^2) < V^2(1 - V^2) < V^2$  となるので ( $V$  は光速 1 を超えないことにも注意)、実際には  $s^* \leq 1$  であることが分かる。すると図 9 より

$$\cot \Theta \leq f(1) = \frac{V^2 - v_0^2 + V^2 v_0^2}{2V v_0 \sqrt{1 - V^2}}$$

であり、等号が成立する場合の  $\Theta$  の値を  $\Theta^*$  として

$$\Theta^* \leq \Theta < \pi$$

となる。ここで具体的には  $\Theta^* = 2 \tan^{-1} \left( \frac{v_0}{V} \sqrt{1 - V^2} \right)$  と書ける。実際、

$$\begin{aligned} \Theta^* = 2 \tan^{-1} \left( \frac{v_0}{V} \sqrt{1 - V^2} \right) &\Rightarrow \tan \frac{\Theta^*}{2} = \frac{v_0}{V} \sqrt{1 - V^2} \\ &\Rightarrow \tan \Theta = \frac{2 \tan \frac{\Theta^*}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\Theta^*}{2}} = \frac{2V v_0 \sqrt{1 - V^2}}{V^2 - v_0^2 + V^2 v_0^2} \\ &\Rightarrow \cot \Theta = f(1). \end{aligned}$$

以上より

$$V \leq v_0 \text{ ならば, } 2 \tan^{-1} \left( \frac{v_0}{V} \sqrt{1 - V^2} \right) \leq \Theta < \pi.$$

次に  $V > v_0$  の場合を考えると、図 9 のように  $f(s)$  は極小値を持つ。 $f(s)$  の極小を与える  $s = s^* (> 0)$  は、

$$f'(s) = \frac{1}{2V v_0 \sqrt{1 - V^2}} \left( -\frac{V^2 - v_0^2}{s^2} + V^2 v_0^2 \right)$$

より

$$s^* = \frac{\sqrt{V^2 - v_0^2}}{V v_0}$$

と求まる。

$s^* < 1$  であれば

$$\cot \Theta \geq f(s^*) = \frac{\sqrt{V^2 - v_0^2}}{\sqrt{1 - V^2}} (> 0)$$

であり、 $1 + \cot^2 \Theta = \frac{1}{\sin^2 \Theta}$  に注意すると

$$\sin \Theta \leq \left\{ 1 + \left( \frac{\sqrt{V^2 - v_0^2}}{\sqrt{1 - V^2}} \right)^2 \right\}^{-1/2} = \frac{\sqrt{1 - V^2}}{\sqrt{1 - v_0^2}}$$

を得る。ところで  $s^* < 1$  の条件は  $V < \frac{v_0}{\sqrt{1 - v_0^2}}$  と書き換えられるので、

$$v_0 < V < \frac{v_0}{\sqrt{1 - v_0^2}} \text{ ならば, } 0 < \Theta < \sin^{-1} \frac{\sqrt{1 - V^2}}{\sqrt{1 - v_0^2}} < \frac{\pi}{2}$$

である (図 9 における  $\cot \Theta$  のグラフの概形も考慮した)。

$s^* \geq 1$  のときには  $\cot \Theta \geq f(1)$  なので、 $\cot \Theta$  の図 9 とより

$$0 < \Theta \leq \Theta^* \leq \frac{\pi}{2}$$



である (ここに再び  $\Theta^* = 2 \tan^{-1} \left( \frac{v_0}{V} \sqrt{1 - V^2} \right)$ ). ところが  $s^* \geq 1$  の条件は  $V \geq \frac{v_0}{\sqrt{1 - v_0^2}}$  と書き換えられるので,

$$V \geq \frac{v_0}{\sqrt{1 - v_0^2}} \text{ ならば, } \quad 0 < \Theta \leq 2 \tan^{-1} \left( \frac{v_0}{V} \sqrt{1 - V^2} \right) \leq \frac{\pi}{2}.$$

ここで得られた結果は非相対論的極限で、『力学』§ 16 の問題 3 の結果 (ただし同種の崩壊粒子を考えているので,  $v_{10} = v_{20} \equiv v_0$ ) に移行することが見て取れる. 確認の際には, 特に

$$\tan \frac{\Theta^*}{2} \rightarrow \frac{v_0}{V}, \quad \therefore \sin \Theta^* = \frac{2 \tan \frac{\Theta^*}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\Theta^*}{2}} \rightarrow \frac{2v_0V}{V^2 + v_0^2}, \quad \therefore \Theta^* \rightarrow \theta_m$$

に注意すれば良い.

6 (静止している粒子  $M$  の, 3 個の粒子  $m_1, m_2, m_3$  への崩壊) より多くの粒子  $m_1, m_2, \dots, m_N$  がある場合には, この結果は直ちに

$$\mathcal{E}_{1\max} = \frac{M^2 + m_1^2 - (m_2 + \dots + m_N)^2}{2M}$$

と一般化できる.

## § 12. 不変な断面積

2 種類の粒子のビームの衝突を考え,

- 粒子 1 (質量  $m_1$ , 速度  $\mathbf{v}_1$ , 運動量  $p_1 = (\mathcal{E}_1, \mathbf{p}_1)$ , 数密度  $n_1$ )
- 粒子 2 (質量  $m_2$ , 速度  $\mathbf{v}_2$ , 運動量  $p_2 = (\mathcal{E}_2, \mathbf{p}_2)$ , 数密度  $n_2$ )

とする [任意の基準系で同じ記号を用いるが, 質量を除きこれらの量は変換する]. 粒子 2 の静止系では, この基準系に対する粒子 1 の速度として定義される相対速度を  $v_r$  と書くと [この流儀では  $v_r$  は不変量であり変換しない]\*4, 断面積  $\sigma$  は

$$d\nu = \sigma v_r n_1 n_2 dV dt$$

によって定義される [本稿次節で補足]. ここに  $d\nu$  は体積  $dV$  の内部で時間  $dt$  のうちに生じる衝突の回数である. また断面積  $\sigma$  は必ず一方の粒子の静止系に関して定義されるものとし, その定義により不変量と考える. 任意の基準系において

$$d\nu = A n_1 n_2 dV dt \tag{12.1}$$

と書ける. 実際, これが粒子 2 の静止系において上式を再現することを要求すると

$$A = \sigma v_r \frac{p_1 \cdot p_2}{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} = \sigma \frac{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} = \sigma \sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^2} \tag{7}$$

と定まる. (証明は下記. 本稿では 4 元内積  $p_{1i} p_2^i$  を  $p_1 \cdot p_2$  のように書く (以下同じ). )

\*4  $v_r$  の式 (12.6) から,  $v_r$  は一方の粒子の静止系でのもう一方の粒子の速度というとき, どちらの粒子の静止系を選ぶかによらないことが見て取れる.

§ 12, 式の導出など

■  $A$  の式 (7) の導出 式 (12.1) において左辺の衝突回数  $d\nu$  は不変量であり, また右辺における  $dVdt$  は不変量なので [本稿次節で補足],  $An_1n_2$  もまた不変量でなければならない.

そこで一般に速度  $\mathbf{v}$ , 対応する運動量  $\mathbf{p} = (\mathcal{E}, \mathbf{p})$  を持つ粒子 (質量  $m$ ) の数密度  $n$  の変換則を調べておく. 与えられた体積要素  $dV$  の中の粒子数は不変量なので, 静止系での量を添字のゼロで表すと

$$ndV = n_0dV_0$$

が成り立つ. ところが体積は Lorentz 収縮を受けて  $dV = dV_0\sqrt{1-v^2}$  となるので, 数密度は

$$n = \frac{n_0}{\sqrt{1-v^2}} \left( = \frac{n_0\mathcal{E}}{m} \right) \quad (12.2)$$

に従って変換しなければならない.

すると  $An_1n_2$  の不変性は,  $A\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2$  の不変性を意味することになる. その条件は, 今一つの不変量  $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2$  との比を作って

$$A \frac{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2} = A \frac{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2} = \text{inv} \quad (12.3)$$

と書く方が便利である [inv は invariant (不変量) の略]. これを粒子 2 の静止系で評価すると,  $A = \sigma v_r$ ,  $\mathcal{E}_2 = m_2$ ,  $\mathbf{p}_2 = 0$  なので, 不変量 (12.3) の値は  $\sigma v_r$  と定まる. よって

$$A = \sigma v_r \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}. \quad (12.4)$$

次に  $v_r$  を任意の基準系における粒子の運動量あるいは速度で表す. はじめに粒子 2 の静止系では  $\mathbf{p}_1 = \left( \frac{m_1}{\sqrt{1-v_r^2}}, \mathbf{p}_1 \right)$ ,  $\mathbf{p}_2 = (m_2, \mathbf{0})$  より,

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = \frac{m_1}{\sqrt{1-v_r^2}} m_2$$

となることに注意する. これを  $v_r$  について解くと

$$v_r = \sqrt{1 - \frac{m_1^2 m_2^2}{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)^2}}. \quad (12.5)$$

あるいは 4 元運動量の内積を速度で表すと

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = \frac{m_1}{\sqrt{1-v_1^2}} \frac{m_2}{\sqrt{1-v_2^2}} - \frac{m_1 \mathbf{v}_1}{\sqrt{1-v_1^2}} \cdot \frac{m_2 \mathbf{v}_2}{\sqrt{1-v_2^2}} = m_1 m_2 \frac{1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\sqrt{(1-v_1^2)(1-v_2^2)}} \quad (8)$$

となるので, 上式 (12.5) は

$$v_r = \frac{\sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^2}}{1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2} \quad (12.6)$$

と書き換えられる [本稿次節で補足]. これは  $\mathbf{v}_1$  と  $\mathbf{v}_2$  に関して対称なので, 相対速度はどちらの粒子の静止系に対して定義するかによらないことが分かる.

式 (12.5) または式 (12.6) を  $A$  の式 (12.4) に代入すると

$$A = \sigma \frac{\sqrt{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}, \quad A = \sigma \sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^2}$$

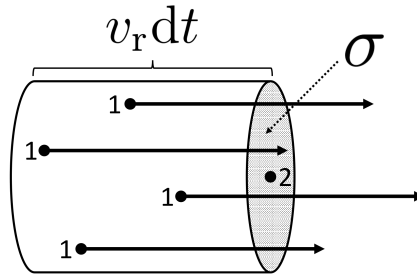


図 10 標的粒子 2 は断面積  $\sigma$  を持ち、ここに粒子 1 が達すると衝突が起きると考える

が得られ、これらに応じて式 (12.1) は

$$d\nu = \sigma \frac{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} n_1 n_2 dV dt, \quad (12.7)$$

$$d\nu = \sigma \sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^2} n_1 n_2 dV dt \quad (12.8)$$

となる [第 2 式の導出を本稿次節で補足].

## § 12 について

■ 「断面積  $\sigma$  の定義によって、…… $d\nu = \sigma v_r n_1 n_2 dV dt$  である」 (p.39, 1.4~7) について 図 10 のように標的粒子 2 が断面積  $\sigma$  を持ち、ここに粒子 1 が達すると衝突が起きると考える。このとき

- 体積  $dV$  中の粒子 2 の個数は  $n_2 dV$
- 1 つの粒子 2 に時間  $dt$  のうちに達する粒子 1 の個数は、図 10 の円筒に含まれる粒子 1 の個数  $n_1 \times \sigma v_r dt$

だから、衝突回数は

$$d\nu = \sigma v_r n_1 n_2 dV dt$$

で与えられる。

■ 「積  $dV dt$  は不変量である」 (p.39, 1.15) について 時空の体積要素  $dV dt = d^4 x$  の変換に現れる Jacobi 行列

$$a^{-1} = ((a^{-1})^i_k) = \left( \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \right)$$

の行列式を  $J = |a^{-1}|$  と書く。Minkowski 計量の 2 階共変テンソルとしての変換則

$$(a^{-1})^i_l (a^{-1})^k_m g_{ik} = g_{lm} \quad \text{i.e.} \quad (a^{-1})^T (g_{ik}) a^{-1} = (g_{lm})$$

の行列式をとり、 $|g_{ik}| = 1 \cdot (-1)^3 = -1$  に注意すると

$$J = \pm 1$$

を得る ( $J = -1$  は座標変換が空間反転を含む場合に対応)。よって

$$d^4 x = |J| d^4 x' = d^4 x'$$

となる。この結果は直観的には、単なる時空内の回転に際して体積は不変であると解釈できる。曲線座標を含めた一般的な座標変換に対する体積の変換則も、同様に調べられる (付録 B.1.1)。

■粒子数密度の変換則 (12.2) について 同じ結果は数密度  $n$  が、粒子数流束の 4 元ベクトル

$$j^i = (cn, \mathbf{j}^0)$$

( $c$  を明示した) の第 0 成分であることに注目しても得られる。実際、 $j^i$  は反変ベクトルの変換則に従い [電流密度に関する § 28 のノートを参照]、また静止系 (座標  $x^{i(0)}$ ) での値は

$$j^{i(0)} = (cn_0, \mathbf{0})$$

だから、

$$cn = j^0 = \frac{\partial x^0}{\partial x^{i(0)}} j^{i(0)} = \frac{\partial x^0}{\partial x^{0(0)}} j^{0(0)} = \gamma cn_0. \quad (\gamma \equiv 1/\sqrt{1-(v/c)^2})$$

これは式 (12.2) に他ならない。

■ $v_r$  の式 (12.6) の確認 式 (8):  $p_1 \cdot p_2 = m_1 m_2 \frac{1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\sqrt{(1-v_1^2)(1-v_2^2)}}$  を  $v_r$  の式 (12.5) に代入すると

$$\begin{aligned} v_r &= \sqrt{1 - \frac{(1-v_1^2)(1-v_2^2)}{(1-\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(v_1^2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + v_2^2) - \{v_1^2 v_2^2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2\}}}{1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2} \\ &= \frac{\sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^2}}{1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2} : (12.6) \end{aligned}$$

を得る。

■結論 (12.7),(12.8) とその解釈 式 (12.8) を得るには、式 (8) により  $\frac{p_1 \cdot p_2}{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} = 1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$  となることと式 (12.6) を用いて

$$v_r \frac{p_1 \cdot p_2}{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} = \sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^2}$$

とすれば良い。

結論 (12.7),(12.8) は次のように述べることもできる。すなわち

$$d\nu = An_1 n_2 dV dt : (12.1), \quad A = \sigma v_r \frac{p_1 \cdot p_2}{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} : (12.4)$$

は、任意の基準系における“相対速度”を

$$\bar{v}_r \equiv \frac{p_1 \cdot p_2}{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}$$

によって導入すれば、これを粒子 2 の静止系における式 (p.39, 1.6) と同じ形

$$d\nu = \sigma \bar{v}_r n_1 n_2 dV dt$$

に書くことができる。つまり  $A$  は静止系では円筒の体積  $\sigma v_r$  であり、任意の座標系ではこれが  $\sigma \bar{v}_r$  に置き換わると見る。このとき式 (12.7), 式 (12.8) は、この“相対速度”が

$$\bar{v}_r = \frac{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}, \quad \bar{v}_r = \frac{\sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^2}}{1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}$$

と表されることを意味している。

第2式がある種の相対速度を表していることは、式(12.9)の箇所で見たとように、 $\mathbf{v}_1$  と  $\mathbf{v}_2$  が平行(反平行を含む)のときこれが  $\bar{v}_r = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$  を与えることから頷ける。根号内の第2項  $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^2$  を無視できる別の状況として、非相対論的極限を考えても良い。実際、見やすいように  $c$  を復元すれば

$$\bar{v}_r = \sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - \left(\frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}{c}\right)^2}$$

なので、この極限で  $\bar{v}_r \rightarrow |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ 。

## § 12, 問題 (相対論的な“速度空間”における“線要素”)

2つの速度  $\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v}$  の相対速度として、相対論的な“速度空間”における“線要素”  $dl_v$  を定義すると、相対速度の式(12.6)より

$$dl_v^2 = \frac{(d\mathbf{v})^2 - (\mathbf{v} \times d\mathbf{v})^2}{(1 - v^2)^2}$$

となる。ただし分子がすでに2次の無限小なので、分母における無限小を無視した、ここで  $\mathbf{v}$  の極座標  $(v, \theta, \phi)$  を導入し、その方向単位ベクトルを  $\mathbf{e}_v, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$  と書くと、

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_v, \quad d\mathbf{v} = dv\mathbf{e}_v + v d\theta\mathbf{e}_\theta + v \sin\theta d\phi\mathbf{e}_\phi$$

より

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{v} = v^2(d\theta\mathbf{e}_\phi - \sin\theta d\phi\mathbf{e}_\theta), \quad \therefore (\mathbf{v} \times d\mathbf{v})^2 = v^4(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

となる。これを上式に代入すると、

$$dl_v^2 = \frac{dv^2}{(1 - v^2)^2} - \left(\frac{v^2}{1 - v^2}\right)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (9)$$

が得られる。 $v = \tanh\chi$  によって新たな変数  $\chi$  を導入すると、

$$dv = \frac{d\chi}{\cosh^2\chi}, \quad 1 - v^2 = \frac{1}{\cosh^2\chi}, \quad \frac{v^2}{1 - v^2} = \sinh^2\chi$$

より

$$dl_v^2 = d\chi^2 - \sinh^4\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (10)$$

と書ける。

本稿の計算結果(9),(10)は教科書と比べて第2項の係数が異なっている。あらかじめ  $c = 1$  とおいているため、次元のチェックによる検算ができないが、基になる式(12.6)に  $c$  を補って計算をやり直せば、

$$\begin{aligned} dl_v^2 &= \frac{dv^2}{(1 - (v/c)^2)^2} - \left(\frac{v^2/c}{1 - (v/c)^2}\right)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \\ &= c^2[d\chi^2 - \sinh^4\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \quad (v = c \tanh\chi) \end{aligned}$$

となる。

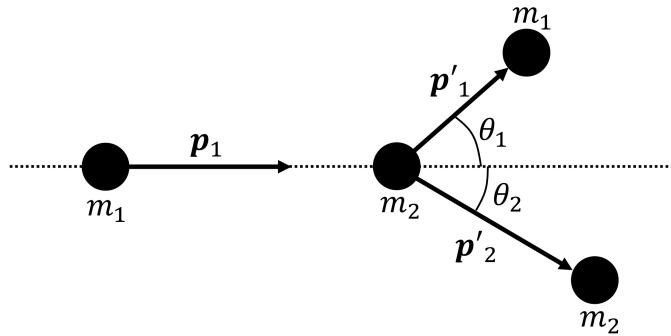


図 11 散乱角  $\theta_1, \theta_2$  の定義

### § 13. 弾性衝突

粒子 1,2 の衝突を考え,

- 衝突前の 2 粒子の運動量を  $p_1 = (\mathcal{E}_1, \mathbf{p}_1), p_2 = (\mathcal{E}_2, \mathbf{p}_2)$
- 衝突後の 2 粒子の運動量を  $p'_1 = (\mathcal{E}'_1, \mathbf{p}'_1), p'_2 = (\mathcal{E}'_2, \mathbf{p}'_2)$

とする。弾性衝突を考えると、エネルギー・運動量保存則

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2 \quad (13.1)$$

が成り立つ。

衝突の前に粒子 2 が静止しているような基準系 ( $L$  系) をとり、この系で  $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$  の  $\mathbf{p}_1$  の成す角をそれぞれ  $\theta_1, \theta_2$  とすると (図 11 参照)、保存則 (13.1) により散乱角  $\theta_1, \theta_2$  は

$$\cos \theta_1 = \frac{\mathcal{E}'_1(\mathcal{E}_1 + m_2) - \mathcal{E}_1 m_2 - m_1^2}{p_1 p'_1}, \quad \cos \theta_2 = \frac{(\mathcal{E}_1 + m_2)(\mathcal{E}'_2 - m_2)}{p_1 p'_2} \quad (13.5-6)$$

と求まる (導出は下記、ただしここでは  $p_1 \equiv |\mathbf{p}_1|$ , etc. と再定義)。

次に保存則を考慮した上でまだ残る唯一つのパラメーターとして、 $C$  系における散乱角 (粒子 1 の衝突前後の運動量  $\mathbf{p}_{10}, \mathbf{p}'_{10}$  の成す角)  $\chi$  を用いると、 $L$  系における 2 粒子の衝突後のエネルギーは

$$\mathcal{E}'_1 = \mathcal{E}_1 - \frac{m_2(\mathcal{E}_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathcal{E}_1}(1 - \cos \chi), \quad \mathcal{E}'_2 = m_2 + \frac{m_2(\mathcal{E}_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathcal{E}_1}(1 - \cos \chi) \quad (13.11-12)$$

と表される (導出は下記、これらは保存則の帰結である)。2 式の右辺第 2 項は粒子 1 が失い、粒子 2 が受け取ったエネルギーを表し、これは  $\chi = \pi$  のときに最大となる。

### § 13, 式の導出など

■式 (13.5),(13.6) の導出 保存則 (13.1) を移項して

$$p_1 + p_2 - p'_1 = p'_2, \quad p_1 + p_2 - p'_2 = p'_1$$

と書き、それぞれ両辺を 2 乗する (自分自身との 4 元内積を作る) と、

$$m_1^2 + p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot p'_1 - p_2 \cdot p'_1 = 0, \quad (13.2)$$

$$m_2^2 + p_1 \cdot p_2 - p_2 \cdot p'_2 - p_1 \cdot p'_2 = 0, \quad (13.3)$$

を得る。これらの関係は任意の基準系で成立する。

ここではじめに粒子  $m_2$  が静止しているような基準系 ( $L$  系) をとると、 $p_2 = (m_2, \mathbf{0})$  であり、上式 (13.2) において

$$p_1 \cdot p_2 = \mathcal{E}_1 m_2, \quad p_2 \cdot p'_1 = m_2 \mathcal{E}'_1, \quad p_1 \cdot p'_1 = \mathcal{E}_1 \mathcal{E}'_1 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}'_1 = \mathcal{E}_1 \mathcal{E}'_1 - p_1 p'_1 \cos \theta_1 \quad (13.4)$$

(ただし第 3 式の最右辺では  $p_1 \equiv |\mathbf{p}_1|$ , etc. と再定義) となるので、式 (13.5) を得る。同様に式 (13.3) から式 (13.6) が得られる [本稿次節で確認]。

### ■式 (13.11),(13.12) の導出

この系 [ $C$  系] での諸量の値に添字 0 を加えて表 [わ] すと、ここで  $\mathbf{p}_{10} = -\mathbf{p}_{20} \equiv \mathbf{p}_0$  となる。運動量保存のために、2 つの粒子の運動量は衝突によってただ回転するだけで、大きさは相等しく、方向は逆のままである。またエネルギー保存則のおかげで、各々の運動量の絶対値も [したがって各々のエネルギーも] 変化しない。(p.42, l.13-16)

式 (13.2) における不変量  $p_1 \cdot p'_1$  を  $C$  系で評価すると

$$p_1 \cdot p'_1 = \mathcal{E}_{10} \mathcal{E}'_{10} - \mathbf{p}_{10} \cdot \mathbf{p}'_{10} = \mathcal{E}_{10}^2 - p_0^2 \cos \chi = p_0^2 (1 - \cos \chi) + m_1^2$$

となる。残りの不変量  $p_1 \cdot p_2$ ,  $p_2 \cdot p'_1$  には  $L$  系で評価した値 (13.4) を代入すると、

$$\mathcal{E}'_1 - \mathcal{E}_1 = -\frac{p_0^2}{m_2} (1 - \cos \chi)$$

が得られる。あとは、 $p_0^2$  を  $L$  系に関する量で表せば十分である。それには、不変量  $p_1 \cdot p_2$  の  $C$  系および  $L$  系で評価した値を等置して

$$\mathcal{E}_{10} \mathcal{E}_{20} - \mathbf{p}_{10} \cdot \mathbf{p}_{20} = \mathcal{E}_1 m_2, \quad \therefore \sqrt{(p_0^2 + m_1^2)(p_0^2 + m_2^2)} = \mathcal{E}_1 m_2 - p_0^2, \quad \therefore p_0^2 = \frac{m_2^2 (\mathcal{E}_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 \mathcal{E}_1}$$

とすれば良い。こうして  $\mathcal{E}'_1$  の式 (13.11) を得る。 $\mathcal{E}'_2$  の式 (13.12) は、式 (13.11) を保存則

$$\mathcal{E}_1 + m_2 = \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2$$

に代入して得られる。

## § 13 について

■ $\cos \theta_2$  の式 (13.6) の確認  $p_1 \cdot p_2$  の式 (13.4) と

$$p_2 \cdot p'_2 = \mathcal{E}'_2 m_2, \quad p_1 \cdot p'_2 = \mathcal{E}_1 \mathcal{E}'_2 - p_1 p'_2 \cos \theta_2$$

(ただし第 2 式の右辺では  $p_1 \equiv |\mathbf{p}_1|$ , etc.) を式 (13.3) に代入すると

$$m_2^2 + \mathcal{E}_1 m_2 - \mathcal{E}'_2 m_2 - (\mathcal{E}_1 \mathcal{E}'_2 - p_1 p'_2 \cos \theta_2) = 0$$

となる。これを  $\cos \theta_2$  について解くと式 (13.6) を得る。

■ $\mathcal{E}'_2$  を  $\theta_2$  で表した式 (13.7) の確認 「(13.6) に  $p_1 = \sqrt{\mathcal{E}_1^2 - m_1^2}$ ,  $p'_2 = \sqrt{\mathcal{E}'_2{}^2 - m_2^2}$  を代入し, 両辺の 2 乗をと」 (p.41 下から 3 行目) ると,  $\mathcal{E}'_2$  についての 2 次方程式

$$\{(\mathcal{E}_1 + m_2)^2 - (\mathcal{E}_1^2 - m_1^2) \cos^2 \theta_2\} \mathcal{E}'_2{}^2 - 2m_2(\mathcal{E}_1 + m_2)^2 \mathcal{E}'_2 + m_2^2\{(\mathcal{E}_1 + m_2)^2 + (\mathcal{E}_1^2 - m_1^2) \cos^2 \theta_2\}$$

を得る. これは  $A \equiv (\mathcal{E}_1 + m_2)^2$ ,  $B \equiv (\mathcal{E}_1^2 - m_1^2) \cos^2 \theta_2$  と略記すると

$$(A - B)\mathcal{E}'_2{}^2 - 2m_2A\mathcal{E}'_2 + m_2^2(A + B) = 0, \quad \therefore (\mathcal{E}'_2 - m_2) \left( \mathcal{E}'_2 - m_2 \frac{A+B}{A-B} \right) = 0$$

となるので,  $\mathcal{E}'_2 > m_2$  を満たす解として

$$\mathcal{E}'_2 = m_2 \frac{A+B}{A-B} : (13.7)$$

を得る.

■散乱角  $\theta_1$  の最大値を与える式 (13.8) について  $L$  系において速度  $V$  で運動している粒子が 2 個の粒子に崩壊した場合を考え, 崩壊粒子 1 の質量を  $m_1$ ,  $L$  系で見た散乱角を  $\theta_1$ ,  $C$  系で見た速度と運動量をそれぞれ  $v_{10}, p_0$  とする. このとき  $V > v_{10}$  ならば,  $\theta_1$  の最大値は

$$\sin \theta_{1\max} = \frac{p_0 \sqrt{1 - V^2}}{m_1 V}$$

によって与えられる (§ 11, 問題 1). これを 2 粒子の弾性衝突に適用するには, 崩壊する粒子を衝突前の 2 粒子の複合物体と見なせばよい.  $C$  系では衝突後の粒子 1 の運動量  $p_0$  は, 弾性衝突の場合, 衝突前の粒子 2 の運動量に等しいから, これを

$$p_0 = \frac{m_2 V}{\sqrt{1 - V^2}}$$

と評価できる. よって  $V > v_{10}$  のとき式 (13.8):

$$\sin \theta_{1\max} = \frac{m_2}{m_1}$$

を得る.

条件  $V > v_{10}$  が  $m_1 > m_2$  (p.42, 1.3) と等価であることは次のように確かめられる.  $p_0$  の式を  $V$  について逆に解くと

$$V = \frac{p_0}{\sqrt{m_2^2 + p_0^2}}$$

であり, また

$$v_{10} = \frac{p_0}{\mathcal{E}_{10}} = \frac{p_0}{\sqrt{m_1^2 + p_0^2}}$$

なので

$$V > v_{10} \Leftrightarrow m_2 < m_1.$$

「小教程」の巻末注では次のように説明されている [1, pp.383-384]. 式 (13.5):

$$\cos \theta_1 = \frac{\mathcal{E}'_1(\mathcal{E}_1 + m_2) - \mathcal{E}_1 m_2 - m_1^2}{p_1 p'_1}$$



に  $\mathcal{E}'_1 = \sqrt{p_1'^2 + m_1^2}$  を代入する：

$$\sqrt{p_1'^2 + m_1^2}(\mathcal{E}_1 + m_2) - \mathcal{E}_1 m_2 - m_1^2 = p_1 p_1' \cos \theta_1.$$

これより  $p_1'$  についての 2 次方程式

$$\{(\mathcal{E}_1 + m_2)^2 - p_1^2 \cos^2 \theta_1\} p_1'^2 - 2\{(\mathcal{E}_1 m_2 + m_1^2)\} p_1 \cos \theta_1 p_1' + \{(\mathcal{E}_1 + m_2)^2 m_1^2 - (\mathcal{E}_1 m_2 + m_1^2)^2\} = 0$$

が得られる。この第 3 項は

$$(\mathcal{E}_1^2 - m_1^2)(m_1^2 - m_2^2) = p_1^2(m_1^2 - m_2^2)$$

と書き直される。 $p_1'$  が実数であるためには

$$\begin{aligned} \frac{(\text{判別式})}{4p_1^2} &= (\mathcal{E}_1 m_2 + m_1^2)^2 \cos^2 \theta_1 - \{(\mathcal{E}_1 + m_2)^2 - p_1^2 \cos^2 \theta_1\}(m_1^2 - m_2^2) \\ &= (\mathcal{E}_1 + m_2)^2 (m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \theta_1) \geq 0. \end{aligned}$$

したがって  $m_1 > m_2$  であれば

$$\sin \theta_1 \leq \frac{m_2}{m_1} = \sin \theta_{1\max}.$$

なお、「これは古典力学 [非相対論的力学] の結果と完全に一致する」(p.42, 1.7) ことについては『力学』の式 (17.8) を参照 [3, p.57].

■式 (13.14) の確認  $A \equiv m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 \mathcal{E}_1$  と略記すると

$$\mathcal{E}'_{1\min} - m_1 = \mathcal{E}_1 - m_1 - \frac{2m_2(\mathcal{E}_1^2 - m_1^2)}{A} = \frac{\mathcal{E}_1 - m_1}{A} \{A - 2m_2(\mathcal{E}_1 + m_1)\} = \frac{\mathcal{E}_1 - m_1}{A} (m_1 - m_2)^2.$$

■ $\mathcal{E}_1$  の大きい極限での式 (13.14) の値 (p.43, 1.18) について

$$\mathcal{E}'_{1\min} = \frac{\mathcal{E}_1(m_1^2 + m_2^2) + 2m_2 m_1^2}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 \mathcal{E}_1} \simeq \frac{m_1^2 + m_2^2}{2m_2}. \quad (\mathcal{E}_1 \gg m_1, m_2)$$

■「この場合、軽い粒子から重い粒子へ移ることのできるエネルギーは、……とるにたりないものである (第 1 巻『力学』§ 17 をみよ)」(p.43, 1.21,22) について 『力学』の式 (17.7) により、はじめ静止していた粒子が獲得できる最大のエネルギーは

$$E'_{2\max} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

である ( $E_1$  は入射粒子がはじめに持っていたエネルギー) [3, p.57].  $m_2 \gg m_1$  のとき、これは

$$E'_{2\max} \simeq \frac{4m_1}{m_2} E_1 \ll E_1$$

となる。

■「エネルギーが  $\mathcal{E}_1 \sim m_2$  の程度であることが必要である」(p.43, .26~28) について  $m_2 \gg m_1$  のとき式 (13.14) は

$$\frac{\mathcal{E}'_{1\min} - m_1}{\mathcal{E}_1 - m_1} \simeq \frac{m_2^2}{m_2^2 + 2m_2 \mathcal{E}_1} = \frac{1}{1 + \frac{\mathcal{E}_1}{m_2}}$$

となる。よって移動するエネルギーの割合が 1 程度になる、すなわち  $\frac{1}{1 + \frac{\mathcal{E}_1}{m_2}} \ll 1$  となるには  $\mathcal{E}_1 \gtrsim m_2$  が必要である。

■「このときにも、……、ほとんど無視しうるエネルギーの移動しか起こらない」(p.44, 1.2)について 上記の移動しうる最大のエネルギーの表式  $E'_{2\max} = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}$  において、右辺の  $E_1$  の係数は  $m_1$  と  $m_2$  に関して対称であることに注意する。このため  $m_2 \ll m_1$  の場合にも

$$E'_{2\max} \simeq \frac{4m_2}{m_1} E_1 \ll E_1$$

となる。

■「エネルギーが  $\mathcal{E}_1 \sim \frac{m_1^2}{m_2}$  の程度になってはじめて、……」(p.44, 1.3~5)について  $m_2 \ll m_1$  のとき式 (13.14) は

$$\frac{\mathcal{E}'_{1\min} - m_1}{\mathcal{E}_1 - m_1} \simeq \frac{m_1^2}{m_1^2 + 2m_2\mathcal{E}_1} = \frac{1}{1 + 2\frac{m_2}{m_1^2}\mathcal{E}_1}$$

となる。よって「移動するエネルギーの割合がめだつようになる」(p.44, 1.5), すなわち  $\frac{1}{1 + 2\frac{m_2}{m_1^2}\mathcal{E}_1} \ll 1$  となるには  $\mathcal{E}_1 \gtrsim \frac{m_1^2}{m_2}$  が必要である。

## § 14. 角運動量

閉じた系の持つ 4 次元時空における回転対称性

↔ 4 次元時空内の無限小回転  $x^i \rightarrow x'^i = x^i + \delta x^i$ ,  $\delta x^i = x_k \delta\Omega^{ik}$  における  $\delta\Omega^{ik} (= -\delta\Omega^{ki})$  は循環座標

↪ 角運動量 4 元テンソル  $M^{ik} \equiv \sum (x^i p^k - x^k p^i) = -M^{ki}$ ,

$$M^{0\alpha} = \left[ c \sum \left( t\mathbf{p} - \frac{\mathcal{E}\mathbf{r}}{c^2} \right) \right]^\alpha, \quad M^{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta\gamma} M_\gamma, \quad M_\gamma = \left[ \sum \mathbf{r} \times \mathbf{p} \right]_\gamma$$

が保存 (一連の導出過程は下記).

$M^{0\alpha}$  の保存  $\sum (t\mathbf{p} - \frac{\mathcal{E}\mathbf{r}}{c^2}) = \text{const.}$  を一定の全エネルギー  $\sum \mathcal{E}$  で割ると、相対論的な慣性中心  $\mathbf{R} \equiv \frac{\sum \mathcal{E}\mathbf{r}}{\sum \mathcal{E}}$  は一様な運動をすることが分かる:

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}t + \text{const.}, \quad \mathbf{V} = \frac{\sum c^2\mathbf{p}}{\sum \mathcal{E}}.$$

非相対論的極限では  $\mathcal{E} \simeq mc^2$  なので

$$\mathbf{R} \simeq \frac{\sum m\mathbf{r}}{\sum m}, \quad \mathbf{V} \simeq \frac{\sum m\mathbf{v}}{\sum m}.$$

### § 14, 式の導出など

■時空内の回転対称性から角運動量 4 元テンソルの保存の導出 無限小の座標変換

$$x^i \rightarrow x'^i = x^i + \delta x^i, \quad \delta x^i = x_k \delta\Omega^{ik} \quad (14.1)$$

が Lorentz 変換であるためには、4 元動径ベクトルの長さの不変性  $x'_i x'^i = x_i x^i$  が無限小パラメーター  $\delta\Omega^{ik}$  の 1 次までの近似で成り立たねばならない。この条件は

$$x^i x^k \delta\Omega_{ik} = 0 \quad (\text{任意の } x^i \text{ に対して}) \quad (11)$$

を与える [本稿次節で確認]. ここで  $x^i x^k$  は対称テンソルなので,  $\delta\Omega_{ik}$  は反対称テンソルでなければならない [本稿次節で補足].

さて, 各粒子の座標  $x^i$  の関数としての作用  $S(x)$  を考えると, 無限小 Lorentz 変換 (14.1) に伴って作用は

$$\delta S = \sum (\partial_i S) \delta x^i = - \sum p_i \delta x_i = -\delta\Omega_{ik} \sum p^i x^k$$

だけ変化する (和は全ての粒子にわたってとる). [変換 (14.1) を能動的な変換と見れば (それは可能である), 異なる時空点  $x^i, x'^i$  での作用の差  $\delta S$  はゼロでない.]  $\delta\Omega_{ik}$  は反対称なので, 係数の反対称部分  $\frac{1}{2} \sum (p^i x^k - p^k x^i) \equiv \frac{1}{2} M^{ik}$  だけを用いて, 等価的に

$$\delta S = -\frac{1}{2} M^{ik} \delta\Omega_{ik} \quad (14.3)$$

と書ける [本稿次節で補足].

ここで閉じた系の持つ, 4次元時空内の回転対称性として, ラグランジアンの不変性を要求しよう. すなわち回転のパラメーター  $\delta\Omega_{ik}$  は循環座標であり, それに共役な一般化運動量は  $\partial S / \partial\Omega_{ik}$  で与えられる. 上式 (14.3) から

$$\frac{\partial S}{\partial\Omega_{ik}} = -M^{ik}$$

が読み取れるので [ $\delta\Omega_{ik}$  と  $\delta\Omega_{ki}$  が独立に選べないことを踏まえ, 式 (14.3) を  $\delta S = \sum_{i>k} M^{ik} \delta\Omega_{ik}$  と書き直しておけば良い], 角運動量 4元テンソル  $M^{ik}$  が保存することになる.

## § 14 について

■ p.46, 1.3 の式  $x^i x^k \delta\Omega_{ik} = 0$  (本稿の式 (11)) について

$$\begin{aligned} x^i x'^i &= g_{ij} x'^j x'^i \\ &= g_{ij} (x^i + x_k \delta\Omega^{ik}) (x^j + x_l \delta\Omega^{jl}) \\ &\simeq x_i x^i + g_{ij} x^i x_l \delta\Omega^{jl} + g_{ij} x^j x_k \delta\Omega^{ik} \\ &= x_i x^i + x_j x_l \delta\Omega^{jl} + x_i x_k \delta\Omega^{ik} \\ &= x_i x^i + 2x_i x_k \delta\Omega^{ik} \end{aligned}$$

とすれば良い.

■ 「 $\delta\Omega_{ik}$  は反対称テンソルでなければならない」 (p.46, 1.4) について 「対称テンソルと反対称テンソルとの積は, 明らかに, 恒等的にゼロである」 (p.46, 1.5,6) この説明から始めよう. 一般に 2つの添字を持つ量  $A^{ik}$  (テンソルでなくても良い) の対称部分と反対称部分への分解は

$$A^{ik} = \frac{A^{ik} + A^{ki}}{2} + \frac{A^{ik} - A^{ki}}{2}$$

によって行われる. また添字に関して対称な量  $A^{ik}$  と反対称な量  $B_{ik}$  について  $A^{ik} B_{ik}$  (テンソルに対してこれは縮約) は,

$$A^{ik} B_{ik} = \sum_{i>k} (A^{ik} B_{ik} + A^{ki} B_{ki}) = \sum_{i>k} A^{ik} (B_{ik} - B_{ik}) = 0$$

となって消える. ここで  $i = k$  に対して  $B_{ik} = 0$  となることも考慮した.

これを踏まえて  $\delta\Omega_{ik}$  が反対称であることを丁寧に説明すると以下のようである. p.46, 1.3 の式

$$x^i x^k \delta\Omega_{ik} = 0$$

において,  $\delta\Omega_{ik}$  の反対称部分は左辺に寄与を持たないので,  $\delta\Omega_{ik}$  の対称部分  $\delta\Omega_{ik}^{(S)}$  に対して

$$0 = x^i x^k \delta\Omega_{ik}^{(S)} = 2 \sum_{i>k} x_i x_k \delta\Omega_{ik}^{(S)} + x^i x^i \delta\Omega_{ii}^{(S)}$$

が課される (最右辺では繰り返された添字  $i$  について和をとらない). これにより対称部分  $\delta\Omega_{ik}^{(S)}$  はゼロになるから,  $\delta\Omega_{ik}$  は添字に関して反対称でなければならない.

■「反対称部分をとる」(式 (14.3) の 1 行上) だけで良い理由 対称部分  $\sum(p^i x^k + p^k x^i)/2$  が反対称テンソル  $\delta\Omega_{ik}$  と縮約されて消えるから.

■「この一般化運動量は  $\partial S/\partial\Omega_{ik}$  で与えられる」(式 (14.3) の 4 行下) について 式 (9.12):  $p_i = -\partial_i S$  から分かる.

あるいは Lagrange 方程式より,

$$(\delta\Omega_{ik} \text{ に共役な運動量}) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\Omega}_{ik}} = \int^t \frac{\partial L}{\partial \Omega_{ik}} dt = \frac{\partial S}{\partial \Omega_{ik}}.$$

■  $M^{ik}$  の式 (14.4) の係数  $1/2$  について  $\{\delta\Omega_{ik}\}$  のうちある成分  $\delta\Omega_{ik}, \delta\Omega_{ki} = -\delta\Omega_{ik}$  のみがゼロでない値を持つような無限小回転に伴う  $S$  の変化は

$$\delta S = \frac{1}{2} \delta\Omega_{ik} \sum \{(x^i p^k - x^k p^i) + (i \leftrightarrow k)\} = \delta\Omega_{ik} \sum (x^i p^k - x^k p^i) \quad (i, k \text{ について和をとらない})$$

なので  $\partial S/\partial\Omega_{ik} = \sum (x^i p^k - x^k p^i)$  となる. よって式 (14.4) に反しこれを  $M_{ik}$  と定義すれば, 式 (14.5) のように右辺に  $1/2$  が現れない.

■ラグランジアンの不変性, 循環座標  $\delta\Omega_{ik}$  と作用の変化について 系の回転対称性は回転のパラメーター  $\delta\Omega_{ik}$  が循環座標であることとして表されている (実際, 式 (14.1):  $x'^i - x^i = x_k \delta\Omega^{ik}$  において,  $\delta\Omega_{ik}$  はある種の角度変数のように見える). すなわちラグランジアン  $L$  は  $\delta\Omega_{ik}$  に陽に依らない.

ただし  $L$  の不変性は同一の点での座標の受動的変換に関して言われていると考えられる. これに対して変換 (14.1) を能動的な変換と見れば (それは可能である), 異なる時空点  $x^i, x'^i$  での作用の差

$$\delta S = -\delta\Omega_{ik} \sum p^i x^k$$

はゼロでない. 式 (14.1) を受動的変換と見なして  $\delta S$  をゼロと考えてしまうと, 反対称な量  $\delta\Omega_{ik}$  の係数の反対称部分がゼロでなければならないため,  $M^{ik} = 0$  となってしまうことに注意する.

■  $M^{ik}$  の保存の別証 [6, p.170] 簡単のために 1 粒子系を考える (粒子番号の添字は不要となる).

ラグランジアンを不変に保つ対称変換  $x^i \rightarrow x^i + \delta x^i$  を考える. 時間座標  $x^0$  を力学変数として扱う代わりに, 時間の役割を果たす粒子の軌道に沿ったパラメーター  $\tau$  を導入し,  $\tau$  による微分をプライムで表す. 他方  $t$  による微分はドットで表す. また作用の積分変数を  $t, \tau$  としたときのラグランジアンをそれぞれ  $L, \tilde{L}$  と書くと,

$$\int \tilde{L} d\tau = \int L dt \quad \rightarrow \quad \tilde{L} = L \frac{dt}{d\tau} = L t'.$$

時間  $\tau$  とラグランジアン  $\tilde{L}$  に対しても Lagrange 方程式が成り立つから、変換に伴うラグランジアンの変化量は

$$0 = \delta\tilde{L} = \frac{\partial\tilde{L}}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{\partial\tilde{L}}{\partial x'^i} \delta x'^i = \left( \frac{d}{d\tau} \frac{\partial\tilde{L}}{\partial x'^i} \right) \delta x^i + \frac{\partial\tilde{L}}{\partial x'^i} \delta x'^i = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial\tilde{L}}{\partial x'^i} \delta x^i \right)$$

と計算できる。ここから保存量  $\frac{\partial\tilde{L}}{\partial x'^i} \delta x^i$  が見出される。

無限小 Lorentz 変換:  $\delta x^i = x_k \delta\Omega^{ik}$  に関する対称性に付随する保存量は

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial x'^i} \delta x^i = \delta\Omega^{ik} \frac{\partial\tilde{L}}{\partial x'^i} x_k = -\delta\Omega^{ik} \tilde{p}_i x_k = -\sum_{i>k} \delta\Omega^{ik} (x_i \tilde{p}_k - x_k \tilde{p}_i), \quad \tilde{p}_i \equiv -\frac{\partial\tilde{L}}{\partial x'^i}$$

となる (最後の等号では  $\delta\Omega^{ik}$  の反対称性を用いた)。  $i > k$  の各成分  $\delta\Omega^{ik}$  は独立にとれることに注意すると、

$$\tilde{M}_{ik} = x_i \tilde{p}_k - x_k \tilde{p}_i$$

の保存が導かれる。

最後に  $\tilde{p}_i \equiv -\frac{\partial\tilde{L}}{\partial x'^i}$  と 4 元運動量  $p^i$  の関係を調べれば充分である\*5。それには次のようにすれば良い [22, p.170]。まず空間成分  $i = \alpha = 1, 2, 3$  について、

$$x'^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \dot{x}^\alpha t'$$

に注意すると

$$\tilde{p}_\alpha = -\frac{\partial\tilde{L}}{\partial x'^\alpha} = -\sum_\beta \frac{\partial(Lt')}{\partial \dot{x}^\beta} \frac{\partial \dot{x}^\beta}{\partial x'^\alpha} = -\sum_\beta \frac{\partial(Lt')}{\partial \dot{x}^\beta} \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} \left( \frac{x'^\beta}{t'} \right) = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}$$

となる。最右辺は通常の正準運動量に負号を付けたもの  $-p^\alpha = p_\alpha$  になっていることが見て取れる。次に時間成分  $i = 0$  について、同様に

$$c\tilde{p}_0 = -\frac{\partial\tilde{L}}{\partial t'} = -\frac{\partial}{\partial t'}(Lt') = -L - \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \frac{\partial \dot{x}^\alpha}{\partial t'} t' = -L - \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \frac{\partial}{\partial t'} \left( \frac{x'^\alpha}{t'} \right) t' = -L + \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \frac{x'^\alpha}{t'} = -L + \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \dot{x}^\alpha$$

となる。最右辺は粒子のエネルギー  $\mathcal{E}$  なので、 $\tilde{p}_0 = \mathcal{E}/c$  である。以上をまとめると  $\tilde{p}_i = (\mathcal{E}/c, -\mathbf{p})$  なので、これは運動量の 4 元共変ベクトルに一致する。

$$\tilde{p}_i = p_i.$$

よって角運動量テンソル

$$M_{ik} = \tilde{M}_{ik} = x_i p_k - x_k p_i$$

が保存する。

以上を多粒子系に対して一般化するには、

- $\tau$  を拡大配位空間の軌道のパラメーターと見なす方法
- $\tau$  を個々の粒子ごとに定義されるパラメーター (例えば粒子の固有時間) と見なす方法

\*5 はじめから  $\tau$  を  $t$  そのものにとったならば、 $\dot{x}^0 = 1$  による微分  $\tilde{p}_0 = -\partial L/\partial \dot{x}^0$  はよく定義されなくなることに注意する。

の 2通りの戦略が考えられる。いずれにせよ個々の粒子の力学変数  $x^0$  が単一のパラメーター  $t$  でもあるという点について、注意深い取り扱いが必要となる。

これに対し場の理論では時刻  $t$  が単なるパラメーターであることは明白であり、系の Lorentz 変換に関する対称性から、場の 4 元角運動量

$$M^{ik} = \int (x^i dP^k - x^k dP^i) = \frac{1}{c} \int (x^i T^{k0} - x^k T^{i0}) dV$$

が保存することを証明できる (付録 E 参照)。ここに  $T^{ik}$  は場のエネルギー・運動量テンソルであり、 $dP^i = \frac{T^{i0}}{c} dV$  は体積要素  $dV$  に含まれる場の運動量である (§ 32)。またスピン角運動量の項は捨てた。そこで自由粒子系に対する表式

$$T^{ik} = \sum_a m_a c^2 u_a^i u_a^k \sqrt{1 - \left(\frac{v_a}{c}\right)^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \quad \therefore T^{i0} = \sum_a m_a c^2 u_a^i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) = c \sum_a p_a^i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))$$

(§ 33 のノート参照) を代入すると、4 元角運動量

$$M^{ik} = \sum_a (x_a^i p_a^k - x_a^k p_a^i)$$

が得られる。

■ 「ベクトル (14.6) の成分はどんな 4 元ベクトルの空間成分にもならない」 (p.47, l.16) について その成分が (2 階反変テンソル)/(反変ベクトル) の変換則に従うため。

## 第3章 場のなかの電荷

### § 15. 相対性理論における素粒子

- 場の物理的実在性

場は粒子の相互作用を記述するための単なる概念ではない。

実に相対性理論において相互作用の伝播速度が有限であることは、場それ自体が物理的実在であり、相互作用が空間の隣接した点の間でしかおこなわれないからである\*6。

- 相対性理論は剛体の存在を不可能にすること

- 回転している剛体円盤について

- \* 半径に沿う線要素は Lorentz 短縮を受けないから、半径は円盤が静止しているときと変わらない。

- \* 円盤のふちの線要素は Lorentz 短縮を受けるから、円周は円盤が静止しているときより短くなる。

よって円周と半径の比は  $2\pi$  とならないことが結論される。しかし、これは不条理である。

ここでは円盤が剛体であるため、線要素の共動座標系で測った長さは、静止している場合と変わらないことを仮定しており、これは剛体の仮定が誤りであったことを意味する。

- 剛体の両端は同時に運動 ← 相互作用の伝播速度が有限であることに矛盾。

- 素粒子は点であること

素粒子が広がりをもつとすると、素粒子は剛体でなければならない。

ところが相対性理論では剛体は不可能だから、素粒子は点と見なさなければならない。

### § 15 について

■剛体円盤の回転の思考実験について ここでは背理的に剛体が不可能であることを示すのに用いたが、§ 82 では非慣性基準系へ移ると空間が非 Euclid 的になることの簡単な例として再登場する。

■素粒子の定義について 素粒子が変形可能ならその「部分が独立に動きうる」、すなわち内部構造をもつことになり、素粒子の定義に矛盾することが p.50, 1.22~24 で述べられている。ここから理解されるように、素粒子の定義 (p.50, 1.18~20) は素粒子が内部構造を持たないことを意味していると考えれば良い。

なお、素粒子の力学的状態が「3つの座標と全体としての運動の3つの速度成分」(p.50, 1.19)の他に回転の角速度も与えないと定まらないならば、そのとき素粒子の内部の異なる点が区別されることになり、内部構造を認めることになると思える。

### § 16. 場の4元ポテンシャル

与えられた電磁場のなかで運動する粒子に対する作用  $S$  は、電磁場を特徴付ける量

$$A^i = (\phi, \mathbf{A}) : 4 \text{元ポテンシャル}, \quad \phi : \text{スカラー・ポテンシャル}, \quad \mathbf{A} : \text{ベクトル・ポテンシャル}$$

\*6 『ファインマン物理学 I』においても同様の趣旨のことが述べられている [4, pp.173-174].

を導入すると

$$\begin{aligned}
 S &= S_m + S_{mf}, \\
 S_m &= - \sum mc \int_a^b ds : \text{自由粒子の作用}, \quad (\S 8) \\
 S_{mf} &= - \sum \frac{e}{c} \int_a^b A_i dx^i : \text{粒子と場の相互作用項} \quad [\text{Lorentz スカラー}]
 \end{aligned}$$

によって与えられる ( $e$  は粒子の電荷, 場  $A_i$  は時空における粒子の位置で評価)<sup>\*7</sup>. ここからラグランジアンは

$$L = - \sum mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \sum \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - \sum e\phi \quad (16.4)$$

と同定される (確認は下記).

粒子の通常の [力学的] 運動量を  $\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}/\sqrt{1 - (v/c)^2}$  とすると, 一般化運動量 [正準運動量] は

$$\mathbf{P} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}$$

と表される.

対応するハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \sum \left( \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + e\phi \right) = \sum \left( \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} + e\phi \right) \quad (16.6)$$

と計算される (導出は下記). ここに

$$\mathcal{E} \equiv \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$$

は粒子のエネルギーと解釈される. したがって簡単のために 1 粒子系を考えると, 電磁場と相互作用する粒子の力学的運動量  $\mathbf{p}$  とエネルギー  $\mathcal{E}$  は, 電磁場がない場合と比べて

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p} = \mathbf{P} &\rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}, \\
 \mathcal{E} = H &\rightarrow \mathcal{E} = H - e\phi
 \end{aligned}$$

と変化する. またエネルギーと運動量の関係は

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} &= \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2} + e\phi \\
 \Leftrightarrow (\mathcal{H} - e\phi)^2 - c^2 \mathbf{p}^2 &= (mc^2)^2
 \end{aligned} \quad (16.7)$$

とまとめられる. ここで  $\mathbf{P} = \partial S / \partial \mathbf{r}$ ,  $\mathcal{H} = -\partial S / \partial t$  により [§ 23 も参照], これを作用  $S$  に対する偏微分方程式に読み替えると, Hamilton-Jacobi 方程式

$$\left( \nabla S - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial S}{\partial t} + e\phi \right)^2 + (mc)^2 = 0 \quad (16.11)$$

を得る [場をゼロとおくと式 (9.20) に戻る].

<sup>\*7</sup> ここでは粒子が複数ある場合を想定した式を書いた. 和の記号の下に入る表式は粒子ごとに定義される量であり,  $\sum$  はその全ての粒子に対する和を表す:

$$\sum (\dots) \rightarrow \sum_{\text{粒子}} (\text{粒子ごとに異なる量}).$$



§ 16, 式の導出など

■ラグランジアン (16.4) の確認 作用を

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b \sum \left( -mcds - \frac{e}{c} A_i dx^i \right) = \int_a^b \sum \left( -mcds + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} - e\phi dt \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum \left( -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi \right) dt \end{aligned}$$

と書き換えれば良い。

■ハミルトニアン (16.6) の導出 求めるハミルトニアンをひとまず速度  $\mathbf{v}$  によって表すと,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} - L \\ &= \sum \left( \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \mathbf{v} + \sum mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - \sum \left( \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi \right) \\ &= \sum \left( \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + e\phi \right) \end{aligned}$$

となる。ここで粒子の力学的運動量の表式

$$\mathbf{p} \equiv \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

を粒子の速度について逆に解くと  $\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{p^2}{m^2c^2 + p^2}$  となるので, ハミルトニアンは運動量  $\mathbf{p}$  を用いて

$$\mathcal{H} = \sum \left( \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} + e\phi \right)$$

と書き換えられる (§ 9 と同様)。

§ 16 について

■「与えられた電磁場のなかで運動する粒子」 (§ 16, 1.1) について 一般に粒子と場は相互作用しながら, それぞれが時間発展する。第3章では粒子の場に及ぼす影響を無視し, 近似的に場は与えられたものとして, そのなかでの粒子の運動を考える (§ 17 第1段落参照)。

■作用の表式と符号系 作用 (16.3):

$$S = \int_a^b \left\{ -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - \left( e\phi - \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right) \right\} dt$$

は (±, ±, ±, ±) の符号系を持つ計量を採用すると

$$S = \int_a^b \left( -mcds \mp \frac{e}{c} A_i dx^i \right)$$

と表される。

■正準運動量 (16.5) について 場の寄与を表す付加的な項は、場それ自体が持つ運動量 (§ 33) とは概念的に異なる。

## § 17. 場のなかの粒子の運動方程式

- 与えられた電磁場のなかで運動する粒子系のラグランジアン

$$L = - \sum mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \sum \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - \sum e\phi$$

に対して、Lagrange 方程式  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$  は粒子の運動方程式

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right), \quad \mathbf{E} \equiv -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi: \text{電場}, \quad \mathbf{H} \equiv \nabla \times \mathbf{A}: \text{磁場} \quad (17.5)$$

を与える。

- 場と相互作用する (個々の) 粒子の運動エネルギーを  $\mathcal{E}_{\text{kin}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$  と定義すると (このとき  $\mathcal{H} = \sum (\mathcal{E}_{\text{kin}} + e\phi)$ ), 運動方程式 (17.5) より

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{kin}}}{dt} = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad (17.7)$$

を得る。これは磁場が電荷の速度に垂直な力  $e\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}$  を及ぼすため、電場のみが仕事をすることを意味している。

- 置き換え  $t \rightarrow -t, \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}, \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{H}$  によって運動方程式は変化しない。

## § 17, 式の導出など

■運動方程式 (17.5) の導出 与えられた電磁場のなかで運動する粒子系のラグランジアンは

$$L = - \sum mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \sum \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - \sum e\phi$$

である。Lagrange 方程式  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{v}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}$  の左辺における

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{v}}} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}$$

は粒子の正準 (一般化) 運動量である (式 (16.5)). 場の値  $\mathbf{A}(\mathbf{r}(t), t)$  は粒子の位置  $\mathbf{r}(t)$  で評価されているので、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{v}}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{e}{c} \left\{ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} \right\}$$

と書ける ( $\nabla = \partial/\partial \mathbf{r}$ ). 一方、Lagrange 方程式の右辺の微分  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$  は  $\mathbf{v}$  を固定して行われることに注意して、ラグランジアンの中で粒子の位置  $\mathbf{r}$  に依る項のみの微分を書くと、

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{e}{c} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - e \nabla\phi$$

となる。これらを等置すると

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e \nabla\phi + \frac{e}{c} \{ \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} \}$$

を得る。ここで右辺の  $\{\dots\}$  部分は

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

と書き換えられるので [本稿次節で補足], 運動方程式 (17.5):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= e \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \right) + e \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) \end{aligned}$$

を得る。

■運動方程式 (17.5) から仕事とエネルギーの関係 (17.7) を導出 粒子の運動エネルギー  $\mathcal{E}_{\text{kin}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$  を定義すると,

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{kin}}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

が直接確かめられる [本稿次節で確認\*8]. 上式の右辺に運動方程式 (17.5):  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right)$  を代入して  $(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{v} = 0$  を考慮すると, 式 (17.5):

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{kin}}}{dt} = e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$$

が得られる。

## § 17 について

■Lagrange 方程式 (17.1) について 「§ 9 について」 で考えたように, 粒子の空間座標だけ変分をとれば Lagrange 方程式 (17.1) が得られる。

■ $\partial L / \partial \mathbf{r}$  の計算 (p.53) について  $\nabla$  の公式  $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \dots$  (p.53, 1.14) を忘れても, その証明に当たる計算

$$\begin{aligned} [\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}]_{\alpha} &= v_{\beta} (\partial_{\alpha} A_{\beta} - \partial_{\beta} A_{\alpha}) = (\delta_{\alpha\rho} \delta_{\beta\sigma} - \delta_{\alpha\sigma} \delta_{\beta\rho}) v_{\beta} \partial_{\rho} A_{\sigma} = e_{\alpha\beta\gamma} v_{\beta} e_{\gamma\rho\sigma} \partial_{\rho} A_{\sigma} \\ &= [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_{\alpha} = [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{\alpha} \end{aligned}$$

を行えば良い (これなら右辺から逆算できる).

■磁場の強さ (17.4) について Gauss 単位系では磁場  $\mathbf{H}$  と磁束密度  $\mathbf{B}$  は等しいため, 運動方程式における  $\mathbf{H}$  は  $\mathbf{B}$  に置き換えても構わない. 実際, 国際単位系における磁場と磁束密度をそれぞれ  $\mathbf{H}_{\text{SI}}, \mathbf{B}_{\text{SI}}$  とすると, Gauss 単位系における磁場  $\mathbf{H}_{\text{G}}$  と磁束密度  $\mathbf{B}_{\text{G}}$  は

$$\mathbf{B}_{\text{G}} = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} \mathbf{B}_{\text{SI}} = \sqrt{4\pi\mu_0} \mathbf{H}_{\text{SI}} = \mathbf{H}_{\text{G}}$$

によって関係付けられる。

ランダウ=リフシッツ『連続媒質の電気力学』では, 真空中の磁場  $\mathbf{h}$  の空間的平均  $\bar{\mathbf{h}} = \mathbf{B}$  が磁場の強さ  $\mathbf{H}$  と  $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$  で関係付けられている ( $\mathbf{M}$  は磁化ベクトル). これを踏まえると, ここで  $\mathbf{h}$  と記されているものは実のところ微視的な (真空中の) 磁束密度  $\mathbf{b}$  を意味しており, 『場の古典論』の  $\mathbf{H}$  はむしろ  $\mathbf{B}$  に読み替えるのが理に適っていると, 『小教程』末尾の解説で説明されている [1, pp.412–413, pp.423–424]. 詳しくは本稿の付録 H を参照。

\*8 非相対論的極限  $\mathcal{E}_{\text{kin}} \rightarrow mc^2 + \frac{1}{2}mv^2, \mathbf{p} \rightarrow m\mathbf{v}$  ではこの関係はほぼ自明である。

■運動方程式 (17.5) について 左辺  $d\mathbf{p}/dt$  は固有時間ではなく座標時間  $t$  による微分であるのに対し,  $\mathbf{p} = m d\mathbf{r}/d\tau$  は 4 元運動量成分であり, これは固有時間  $\tau$  による微分となっていることに注意する. 運動量を非相対論的表式  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  に置き換えると, 非相対論的な運動方程式 (17.6) になる.

一般式 (6):  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}$  (§ 9) と比較すると, Lorentz 力を 3 次元的な力に同定できることが分かる.

$$\mathbf{f} = e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right)$$

なお, 運動方程式 (17.5) において Gauss 単位系では電場と磁場が同じ次元を持つことが見て取れる:

$$[\mathbf{E}] = [\mathbf{H}].$$

さらに Gauss 単位系においてポテンシャル (16.1):  $A^i = (\phi, \mathbf{A})$  の時間成分と空間成分は等しい次元を持つ:

$$[\phi] = [A^\alpha].$$

■運動方程式からラグランジアンへ 良く知られているように, 非相対論的な荷電粒子の運動方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$$

と書ける. そこで運動方程式 (17.5) の導出過程を逆にたどると, 右辺の力は

$$\begin{aligned} e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) &= -e \nabla \phi - \frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= -e \nabla \phi - \frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{e}{c} \{ \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} \} \\ &= -e \nabla \left\{ \phi - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right\} - \frac{e}{c} \left\{ (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right\} \\ &= -e \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left\{ \phi - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right\} - \frac{e}{c} \frac{d\mathbf{A}}{dt} \\ &= - \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \right\} e \left\{ \phi - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right\} \end{aligned}$$

と書き換えられるので, 一般化ポテンシャル (速度に依存するポテンシャル)

$$U = e \left\{ \phi - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right\}$$

を用いて非相対論的なラグランジアンを

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - U$$

とすれば, Lagrange 方程式  $\left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \right\} L = 0$  から正しい運動方程式を再現できることが分かる [22, pp.110-111].

■式 (17.7) の直前の式について

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{kin}}}{dt} = \frac{m\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{(1 - (v/c)^2)^{3/2}}, \quad \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \left( \frac{m\dot{\mathbf{v}}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + \frac{m(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})\mathbf{v}/c^2}{(1 - (v/c)^2)^{3/2}} \right) = \frac{m\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{(1 - (v/c)^2)^{3/2}}$$

よりこれらは一致する.

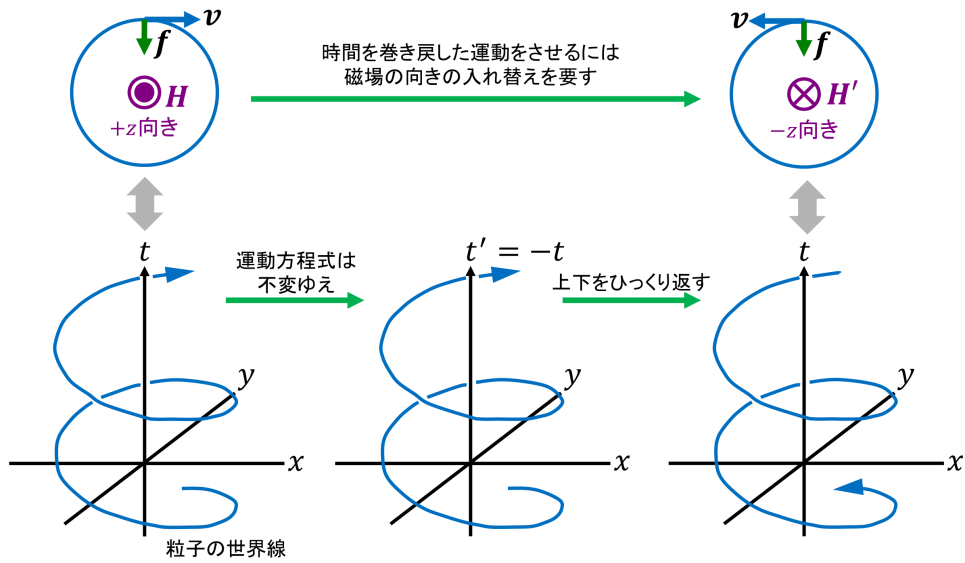


図 12 一様不変な磁場の中のらせん運動において、 $t \rightarrow t' = -t$ ,  $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}' = -\mathbf{H}$  とした運動も実現可能

■エネルギーの関係 (17.7) について 一般式 (6):  $\frac{d\mathcal{E}_{\text{kin}}}{dt} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$  (§ 9) に Lorentz 力  $\mathbf{f} = e(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B})$  を代入すれば式 (17.7) は直ちに得られ、改めて導くには及ばない。

■式 (17.8) の入れ替えに対する運動方程式の不変性について  $t \rightarrow -t$  のとき  $dt \rightarrow -dt$ ,  $d\mathbf{p} \rightarrow -d\mathbf{p}$  なので、 $d\mathbf{p}/dt$  は不変である。さらに  $t \rightarrow -t$  のとき  $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$  なので、 $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}' = -\mathbf{H}$  とすると  $(\mathbf{v}/c) \times \mathbf{H}$  は不変となる。よって  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$  のとき運動方程式 (17.5) は変化しない。これはある運動が運動方程式に従って実現されるとき、その時間を逆向きにたどる運動も逆向きの磁場の下では運動方程式に従うことを意味する。このことが一様不変な磁場の中のらせん運動 (21.5) に対して成り立っていることは図 12 から読み取れる。

## § 17, 問題

運動方程式 (17.5) の右辺  $\dot{\mathbf{p}}$  を速度  $\mathbf{v}$  で表すことを考える。

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\mathbf{v}\mathcal{E}_{\text{kin}}}{c^2}$$

および  $\dot{\mathcal{E}}_{\text{kin}}$  の式 (17.7) より  $\dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{c^2} \{ \dot{\mathbf{v}}\mathcal{E}_{\text{kin}} + \mathbf{v}(e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) \}$  であり、これを式 (17.5) に代入すると

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \right\}$$

が得られる。 $v/c$  の 2 次の項を無視すると、非相対論的な運動方程式に移行することが見て取れる。

## § 18. ゲージ不変性

$f$  を座標と時刻の任意関数とすると、新しいポテンシャル  $A'_k = A_k - \partial_k f$  はもとのポテンシャル  $A_k$  と同じ電磁場  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  を与える (確認は下記)。また運動方程式も変わらない (理由は下記)。全ての方程式はこの

変換

$$A_k \rightarrow A'_k = A_k - \partial_k f \quad (18.1)$$

に対して不変でなければならない (ゲージ不変性またはグラジエント不変性). ゲージ関数  $f$  の自由度に対応するポテンシャルの任意性を利用して, 都合の良い条件を 1 つだけポテンシャルに課することができる (同じ電磁場を導くポテンシャルのうち, そのような条件を満たすポテンシャルを考えれば良い).

## § 18, 式の導出など

■ゲージ変換 (18.1) に対する電磁場の不変性の確認 ゲージ変換 (18.1) は

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f, \quad \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$$

を意味する. よって § 17 で定義した電磁場は, この変換によって変化しない:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \nabla f) - \nabla \left( \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \right) = \mathbf{E}, \\ \mathbf{H}' &= \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla f) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{H}. \end{aligned}$$

note 場の強度  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  は電磁場テンソル  $F_{ik}$  の成分として与えられるので (§ 23), 等価的に

$$F'_{ik} = \partial_i (A_k - \partial_k f) - \partial_k (A_i - \partial_i f) = F_{ik}$$

と確認できる.

■ゲージ変換 (18.1) に対する運動方程式の不変性の確認 ゲージ変換 (18.1) に伴う作用積分 (§ 16) の付加的な項

$$\sum \frac{e}{c} \int_a^b (\partial_k f) dx^k = \int_a^b d \left( \sum \frac{e}{c} f \right) = \left[ \sum \frac{e}{c} f \right]_a^b$$

は, 最小作用原理の境界条件より, 変分をとると落ちる. よって作用が停留値をとる条件に他ならない運動方程式は, ゲージ変換 (18.1) に対して不変である (この論法は『力学』 § 2).

実際, 運動方程式に現れるのはポテンシャルでなく場の強さ  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  であり, ゲージ変換に対してそれらが不変であることから, 運動方程式は不変であることが分かる.

## § 18 について

■p.56 脚注 1) について 例えば粒子の電荷  $e$  が時間の関数  $e(t)$  であることは, 電荷が保存しないことを意味する. このとき運動方程式のゲージ不変性を示す議論 (p.56) は無効となる. ゲージ不変性と電荷保存則の関係については § 29 で再論される.

量子論においてもゲージ不変性から電荷保存則が導かれる [5, pp.82-84].

## § 19. 不変な電磁場

不変な (すなわち時間的に一定の) 場に対して

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (\phi \text{ だけで決まる}), \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\mathbf{A} \text{ だけで決まる})$$

であり,

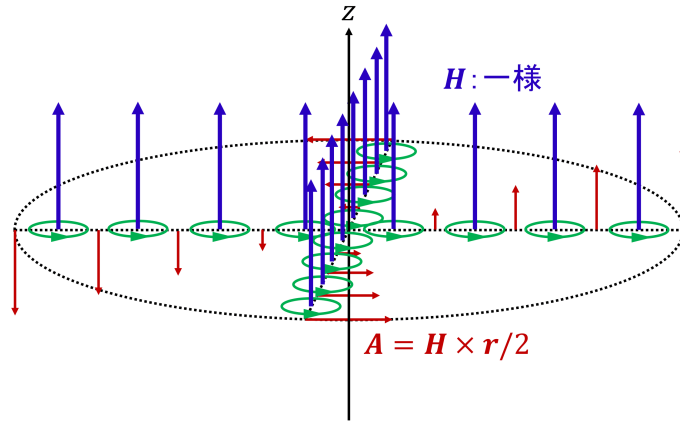


図 13 一様磁場  $\mathbf{H}$  のベクトル・ポテンシャル  $\mathbf{A} = \mathbf{H} \times \mathbf{r}/2$  の渦を緑色で表している。

- $\phi$ : 任意の定数を加えることができ、不定性を持つ。
- $\mathbf{A}$ : 座標の任意の関数のグラジエントを加えることができ、不定性を持つ。

不変な場の中では、ラグランジアンが時間に陽によらないので、粒子のエネルギー

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + e\phi \quad (19.2)$$

が保存する (式 (16.6)). 電荷の位置エネルギーがスカラー・ポテンシャルのみに依存し、ベクトル・ポテンシャルに依らないのは、磁場が仕事をしないことと関係している。

さらに場が一様な (すなわち空間的に一定の) 場合を考えると、ポテンシャルとして

$$\phi = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{H} \times \mathbf{r}$$

をとれる [第 2 式を本稿次節で補足].

## § 19 について

■「われわれが知っているように、……, ハミルトニアンに一致する」 (§ 19, l.17,18) について ハミルトニアンの定義と Lagrange 方程式は相対論か非相対論かに関わらず共通なので、ラグランジアンが時間を陽に含まないことを用いて  $dH/dt = 0$  を示す過程も非相対論的力学と全く同じになる。

■一様な場のポテンシャル (19.3),(19.4) について 電場がスカラー・ポテンシャル (19.3) で与えられるには、電場は一様なだけでなく、不変でもなければならぬ。一方、磁場は一様でありさえすれば、それが時間変化する場合にもベクトル・ポテンシャル (19.4) から導かれる。

■式 (19.5):  $\mathbf{A} = (-Hy, 0, 0)$  について  $\mathbf{A} = (A_x, 0, 0)$  と仮定し、 $\nabla \times \mathbf{A} = (0, 0, H)$  と付加条件  $\partial_x A_x = 0$  から逆算できる。これが一様磁場  $\mathbf{H} = (0, 0, H)$  を作る様子を図 13 のように視覚的にイメージできる。

実際にベクトル・ポテンシャル  $\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{H} \times \mathbf{r}$  が一様な磁場  $\mathbf{H}$  を導くことは、

$$\left[ \nabla \times \left( \frac{1}{2} \mathbf{H} \times \mathbf{r} \right) \right]_\lambda = \frac{1}{2} e_{\lambda\mu\nu} \partial_j (e_{\nu\rho\sigma} H_\rho x_\sigma) = \frac{1}{2} (\delta_{\lambda\rho} \delta_{\mu\sigma} - \delta_{\lambda\sigma} \delta_{\mu\rho}) H_\mu \delta_{\mu\sigma} = \frac{1}{2} (3H_\lambda - H_\lambda) = H_\lambda$$

と確かめられる。

### § 19, 問題 (Maupertuis の原理)

不変な電磁場中の粒子の運動ではエネルギーが保存するので、空間における軌跡を決定するのに Maupertuis の原理 (『力学』 § 44)

$$0 = \delta \int \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} = \delta \int \left( p dl + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \right)$$

を適用できる ( $dl = \sqrt{d\mathbf{r}^2}$  は軌跡の線要素). ただし第 2 の等号では  $\mathbf{p}, d\mathbf{r}$  [ $\propto \mathbf{v}$ ] が平行であることを考慮した. ここでも運動量を座標で表すには, エネルギー保存則  $p^2 + m^2 c^2 = \left( \frac{\mathcal{E} - e\phi}{c} \right)^2$  (§ 16) を用いれば良く,

$$\delta \int \left\{ \sqrt{\left( \frac{\mathcal{E} - e\phi}{c} \right)^2 - m^2 c^2} dl + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \right\} = 0$$

を得る.

■考察 『力学』 § 44 の問題で行ったように, ここから軌跡の方程式を調べよう. 上式の根号を  $\sqrt{\dots} (= p)$  と略記する.

$$dl^2 = d\mathbf{r}^2, \quad \therefore \delta(dl) = \frac{d\mathbf{r}}{dl} \cdot d(\delta\mathbf{r}), \quad \text{および} \quad \delta\phi = -\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{r}$$

に注意して変分を実行すると

$$\begin{aligned} 0 &= \int \left\{ \frac{e(\mathcal{E} - e\phi)\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{r}}{\sqrt{\dots}} dl + \sqrt{\dots} \frac{d\mathbf{r}}{dl} \cdot d(\delta\mathbf{r}) + \frac{e}{c} (\delta\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{A} \cdot d(\delta\mathbf{r})) \right\} \\ &= \int \left\{ \frac{e(\mathcal{E} - e\phi)\mathbf{E}}{\sqrt{\dots}} - \frac{d}{dl} \left( \sqrt{\dots} \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right) \right\} \cdot (\delta\mathbf{r}) dl + \int \frac{e}{c} (\delta\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} - d\mathbf{A} \cdot \delta\mathbf{r}) \end{aligned}$$

となる. ただし第 2 の等号では  $d(\delta\mathbf{r})$  の項を部分積分した. ここでベクトル・ポテンシャルの項は

$$\delta\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} - d\mathbf{A} \cdot \delta\mathbf{r} = (\partial_\alpha A_\beta) \delta x_\alpha dx_\beta - (\partial_\beta A_\alpha) dx_\beta \delta x_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} H_\gamma \delta x_\alpha \frac{dx_\beta}{dl} dl = \left( \frac{d\mathbf{r}}{dl} \times \mathbf{H} \right) \cdot \delta\mathbf{r}$$

とまとめられるので,

$$\int \left\{ \frac{e(\mathcal{E} - e\phi)\mathbf{E}}{\sqrt{\dots}} - \frac{d}{dl} \left( \sqrt{\dots} \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right) + \frac{e}{c} \frac{d\mathbf{r}}{dl} \times \mathbf{H} \right\} \cdot (\delta\mathbf{r}) dl = 0$$

を得る.  $\delta\mathbf{r}$  の係数  $\{\dots\}$  をゼロとおくと軌跡の方程式が得られる.

$$\frac{d\mathbf{r}}{dl} = \mathbf{t} : \text{接単位ベクトル}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2} = \frac{\mathbf{n}}{R} \quad (R : \text{曲率半径}, \mathbf{n} : \text{主法線方向の単位ベクトル})$$

と整理すると

$$\underbrace{\left\{ \frac{e(\mathcal{E} - e\phi)^2}{c^2 p^2} - m^2 c^4 \right\}}_{c^2 p^2} \frac{\mathbf{n}}{R} = e \underbrace{\frac{(\mathcal{E} - e\phi)}{\sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}}}_{\sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}} \mathbf{E}_n + e c \underbrace{\sqrt{\dots}}_p \mathbf{t} \times \mathbf{H}$$

となる. ここに  $\mathbf{E}_n \equiv \mathbf{E} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t}$  は電場の軌跡に垂直な成分であり, 磁場の項  $\mathbf{t} \times \mathbf{H}$  もまた軌跡の方向  $\mathbf{t}$  に垂直である. この非相対論的極限

$$m^2 v^2 c^2 \frac{\mathbf{n}}{R} = e m c^2 \mathbf{E}_n + e m c v \mathbf{t} \times \mathbf{H}, \quad \therefore \frac{m v^2}{R} \mathbf{n} = e \left( \mathbf{E}_n + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right)$$

は理に合っている.



## § 20. 一様な不変の電場のなかの運動

一様な不変の電場  $\mathbf{E}$  の中を運動する粒子を考えよう。粒子は1つの平面の中を運動する [ $\dot{\mathbf{p}} = e\mathbf{E}$  より粒子の速度は常に初速と  $\mathbf{E}$  の張る平面内にあるから]。そこで電場の方向に  $x$  軸をとり、粒子の運動が起こる面を  $xy$  平面に選ぶ。運動方程式  $\dot{\mathbf{p}} = e\mathbf{E}$  を、

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}c^2}{\mathcal{E}_{\text{kin}}}, \quad \mathcal{E}_{\text{kin}} = \sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2}$$

に注意して積分すると、粒子の運動が

$$x = \frac{1}{eE} \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}, \quad y = \frac{p_0c}{eE} \sinh^{-1} \left( \frac{ceEt}{\mathcal{E}_0} \right) \quad (20.3-4)$$

と定まる (導出は下記)。ただし座標原点を適当に選び、時刻  $t = 0$  における  $\mathcal{E}_{\text{kin}}, |\mathbf{p}|$  の値をそれぞれ  $\mathcal{E}_0, p_0$  とした。

(p.59 脚注を引用) この結果 ( $p_0 = 0$  のとき) は、一定の“固有加速度”  $w_0 = eE/m$  をもつ相対論的な運動についての問題の解と一致する (§ 7 の問題をみよ)。いまの場合、この加速度が一定であるということは、電場の方向を向いた速度  $\mathbf{V}$  でもってローレンツ変換をおこなっても電場が変化しないことに関係している (§ 24 をみよ)。ここから  $t$  を消去すると、粒子の軌道として懸垂線

$$x = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \cosh \left( \frac{eEy}{p_0c} \right)$$

が得られる。これは非相対論的極限で、放物線  $x = \frac{eE}{2mv_0^2} y^2 + \text{const}$  に移行する (等加速度運動に対するよく知られた結果) [本稿次節で補足]。

### § 20, 式の導出など

■粒子の位置と時間の関係 (20.3),(20.4) の導出 運動方程式

$$\dot{p}_x = eE, \quad \dot{p}_y = 0$$

より、時間の原点を適当にとると

$$p_x = eEt, \quad p_y = p_0$$

とおける。ここで  $p_0$  は  $t = 0$  における粒子の運動量に他ならない。すると粒子の運動エネルギーは

$$\mathcal{E}_{\text{kin}} = \sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2} \quad (20.2)$$

となる。ここに  $\mathcal{E}_0 = \sqrt{m^2c^4 + p_0^2c^2}$  は  $t = 0$  での  $\mathcal{E}_{\text{kin}}$  の値である。以上を粒子の速度の表式  $\mathbf{v} = \mathbf{p}c^2/\mathcal{E}_{\text{kin}}$  に代入すると、微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2eEt}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{p_0^2}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}}$$

が得られる。これらを積分して、 $x(t), y(t)$  の式 (20.3-4) を得る (座標原点を適当に選び、積分定数をゼロとする) [ $y(t)$  の計算について本稿次節で補足]。

note このように運動方程式  $\dot{\mathbf{p}} = e\mathbf{E}$  を積分する方が、

$\dot{\mathbf{v}}$  で表した運動方程式 (§ 17 の問題) から出発するよりも容易である。

## § 20 について

■一様不変な場について それは Maxwell 方程式 (§ 26, § 30) を満たすため、実現可能である。

■「場の方向を  $z$  軸にとる」(p.58 一番下の行) について 正しくは「場の方向を  $x$  軸にとる」だと考えられる。  
 ここでは座標軸の回転と座標・時間の原点の変更(互いに相対速度を持たない座標系の間の変換)の際には、与えられた場を単なるベクトル場と見なせると暗に仮定している。この措置を正当化する議論を § 24 のノートで行う。

■ $dy/dt$  の式の積分 (p.59) について 問題の積分は

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \log \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} + \text{const.} \quad (x \equiv \tan\theta)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \phi + \text{const.} \quad (x \equiv \sinh\phi)$$

の 2 通りに解ける (§ 7 問題のノート参照)。  $y$  の式 (20.4) を導くには第 2 式を用いるのが便利である。

■エネルギー保存の確認 不変な場の下で、粒子のエネルギー (19.2):  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{kin}} + e\phi$  は一定でなければならない (§ 19)。 実際  $x(t)$  の式 (20.3) より

$$e\phi = -eEx = -\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}$$

であり、これは式 (20.2) の  $\mathcal{E}_{\text{kin}}$  と逆符号なので、 $\mathcal{E} = 0$  (一定) となっている。

■非相対論的な軌道 (p.60, l.1) について これは  $\beta \equiv v/c$  とすると、 $O(\beta^2)$  を落とす近似になっている：

$$x = \frac{mc^2(1+O(\beta^2))}{eE} \left\{ 1 + \frac{1}{2!} \left( \frac{yeE}{mcv_0}(1+O(\beta^2)) \right)^2 + \frac{1}{4!} \left( \frac{yeE}{mcv_0}(1+O(\beta^2)) \right)^4 + \dots \right\}$$

$$= \frac{mc^2}{eE} + \frac{eE}{2mv_0^2} y^2 + O(\beta^2).$$

## § 21. 一様な不変の磁場のなかの運動

[不変な磁場の下では\*9] 粒子のエネルギー  $\mathcal{E}$  が保存し、運動方程式  $\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}$  は  $pc^2 = v\mathcal{E}$  を用いて

$$\frac{\mathcal{E}}{c^2} \dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \quad (21.1)$$

と書き換えられる [等価的に § 17 の問題の結果を利用しても良い]。ここから磁場が一様であれば、粒子は磁場の方向 ( $z$  軸に選ぶ) へのらせん運動

$$x = x_0 + r \sin(\omega t + \alpha), \quad y = y_0 + r \cos(\omega t + \alpha), \quad (21.5)$$

$$z = z_0 + v_{0z} t \quad (21.7)$$

\*9 § 21 のタイトルには書いてあるように、磁場は不変である(時間変化しない)。そうでないと § 21 の結果は成り立たない。

を行うことが分かる (導出は下記). ただし

$$\omega = \frac{ecH}{\mathcal{E}}, \quad r = \frac{cp_t}{eH}$$

である ( $p_t = \frac{v_{0t}\mathcal{E}}{c^2}$  は運動量の磁場に垂直な成分) [添字  $t$  は tangential の頭文字か]. 非相対論的極限では  $\omega \rightarrow \frac{eH}{mc}$ .

■ ゆっくり時間変化する一様な磁場 磁場が一様なままゆっくり時間変化する場合を考えると, 断熱不変量 (『力学』 § 49) は

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{P}_t \cdot d\mathbf{r} = \dots = \frac{p_t^2 c}{2eH} \quad (21.9)$$

と計算されるので (導出は下記),

$$p_t \propto \sqrt{H}$$

が見出される. ただし  $\mathbf{P}_t, \mathbf{p}_t$  はそれぞれ磁場に垂直な面への  $\mathbf{P}, \mathbf{p}$  の射影である.

■ 準一様な一定の磁場 準一様な場を考えると, 軌道に沿って場は一様なまま時間変化するように見える. よって  $C$  を定数として  $p_t = \sqrt{CH}$  と書ける. 運動量の磁場に平行な成分を  $p_l$  と書くと

$$p^2 = p_t^2 + p_l^2 = CH + p_l^2 = \text{const.}$$

なので, 粒子は磁場の弱い範囲  $p_l^2 = p^2 - CH \geq 0$  内で近似的にらせん運動をする.

## § 21, 式の導出など

■ 粒子の等速らせん運動 (21.5), (21.7) の導出  $\mathbf{H} = (0, 0, H)$  として粒子の運動方程式 (21.1) を成分ごとに書くと

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega v_x, \quad \dot{v}_z = 0 \quad (21.2)$$

となる ( $\omega \equiv \frac{ecH}{\mathcal{E}}$ ). はじめの 2 式は速度空間における円運動

$$v_x = v_{0t} \cos(\omega t + \alpha), \quad v_y = -v_{0t} \sin(\omega t + \alpha)$$

を意味する\*10. これを積分して  $x(t), y(t)$  の式 (21.5) を得る. ただし

$$r = \frac{v_{0t}}{\omega} = \frac{v_{0t}\mathcal{E}}{ecH} = \frac{cp_t}{eH} \quad \left( p_t = \frac{v_{0t}\mathcal{E}}{c^2} \right)$$

である. また式 (21.2) の第 3 式から, 直ちに  $z(t)$  の式 (21.7) が得られる.

\*10 実際,

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\omega(v_x + iv_y), \quad \therefore v_x + iv_y = ae^{-i\omega t} \quad (a: \text{複素定数})$$

とできる. [あるいは代入により単振動の式  $\ddot{v}_x = -\omega^2 v_x, \ddot{v}_y = -\omega^2 v_y$  を作っても良い. もとの微分方程式 (21.2) から,  $\dot{\mathbf{v}}$  が円運動の接線方向を向いていることが見て取れる.]

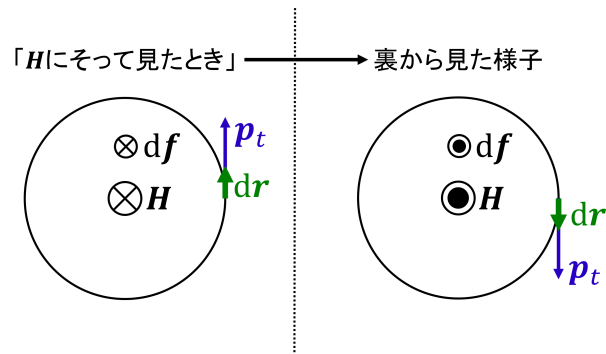


図 14 「 $\mathbf{H}$  にそって見たとき」電荷は「時計の針と反対方向に動く」(p.62 脚注)

■断熱不変量の式 (21.9) の導出

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{P}_t \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2\pi} \oint \left( \mathbf{p}_t + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \cdot d\mathbf{r}.$$

最右辺の第 1 項において、 $\mathbf{p}_t$  は大きさが一定で  $d\mathbf{r}$  と同じ向きであることに注意し、第 2 項には Stokes の定理を適用すると、

$$I = r p_t - \frac{e}{2c} H r^2$$

と書き換えられる [第 2 項について本稿次節で補足]. ここに  $r = \frac{2p_t}{eH}$  を代入して式 (21.9) を得る.

§ 21 について

■非相対論的極限 非相対論的極限では、単に運動方程式 (21.1) 左辺の  $\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \text{const.}$  が  $mc^2$  に置き換わり、やはりらせん運動 (21.5) が得られる.

■p.62 の脚注について 図 14 参照.

この計算で分かるように、一般に与えられた閉曲線  $C$  を貫く磁束  $\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{f}$  は、ベクトル・ポテンシャルの周回積分  $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  で表される.

■「 $p_l$  がゼロになる限界に達すると、粒子はそこから反射する」(p.62, l.18,19) について 図 15 参照. 図 15 のように運動量の磁場方向成分  $p_l$  は反射後も反射前と同じ向きを変えないと考えられる.  $p_l$  の符号が変わったとすると反射前の運動を時間について巻き戻した運動をすることになり、それは磁場の向きを入れ替えないと不可能だから.

§ 21, 問題 (電荷をもつ振動子の一様不変な磁場中での強制振動)

強制振動の方程式

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eH}{mc} \dot{y}, \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = -\frac{eH}{mc} \dot{x}, \quad \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

は、非相対論的な運動方程式

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\omega_0^2 \mathbf{r} + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{H}$$

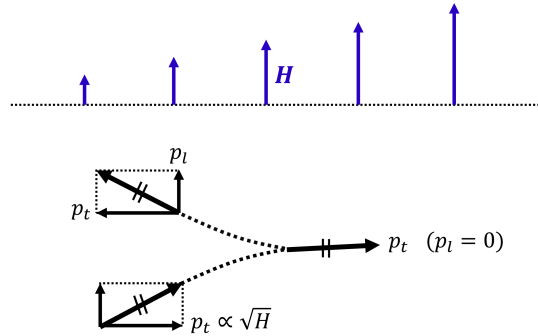


図 15 磁場の増大する方向へ運動する粒子の限界での反射

を成分ごとに書き下したものである ( $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ ).  $xy$  面内の運動方程式は Foucault 振子の運動方程式

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2\Omega_z \dot{y}, \quad \ddot{y} + \omega^2 y = -2\Omega_z \dot{x}$$

(『力学』§ 39 問題 3) と同じ形をしているので、そこでの解析結果をそのまま流用できる。ここでは Coriolis 力の役割を、Lorentz 力が演じていることが見て取れる (いずれも速度に依存する力の代表例である)。

## § 22. 一様な不変の電場および磁場のなかの電荷の運動

空間的に一様で時間的に一定の電磁場中の粒子の運動を調べよう<sup>\*11</sup>。電場は十分弱いため粒子の速度はしばらくの間、非相対論的な範囲  $v/c \ll 1$  に留まる場合を考えて  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  と近似し、運動方程式

$$m\dot{\mathbf{v}} = e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right)$$

を用いる。磁場方向を  $z$  軸にとると Lorentz 力  $e\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}$  は磁場  $\mathbf{H}$  に垂直なので、粒子は  $z$  方向には一定の力  $eE_z$  を受けて等加速度運動をする:

$$z = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2} \frac{eE_z}{m} t^2. \quad (12)$$

そこで磁場に垂直な  $xy$  平面に投影した粒子の運動に興味を持たれる。電場が  $yz$  面内に含まれるように  $y$  軸の方向を選び、さらに時間と空間座標の原点を適当に選ぶと、粒子の  $xy$  面内の位置は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \omega t \\ 1 \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix}, \quad \omega \equiv \frac{eH}{mc}, \quad a \equiv \frac{eE_y}{m\omega^2} = \frac{cE_y}{\omega H} \quad (13)$$

の形に書ける ( $b$  は積分定数, 導出は下記)。これは図 16 のように  $x$  軸上を半径  $a$  の円盤が角速度  $\omega$  で転がるときの、円盤上の中心から距離  $b$  の位置に固定された点の運動に他ならない。このような動点の描く軌跡はトロコイドと呼ばれる。

粒子は  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  の張る平面に垂直な方向に平均速度

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{c\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{H^2} \quad (22.4)$$

<sup>\*11</sup> ただしこれまでと同様、電荷は近似的に、与えられた場をかき乱さないものとする。

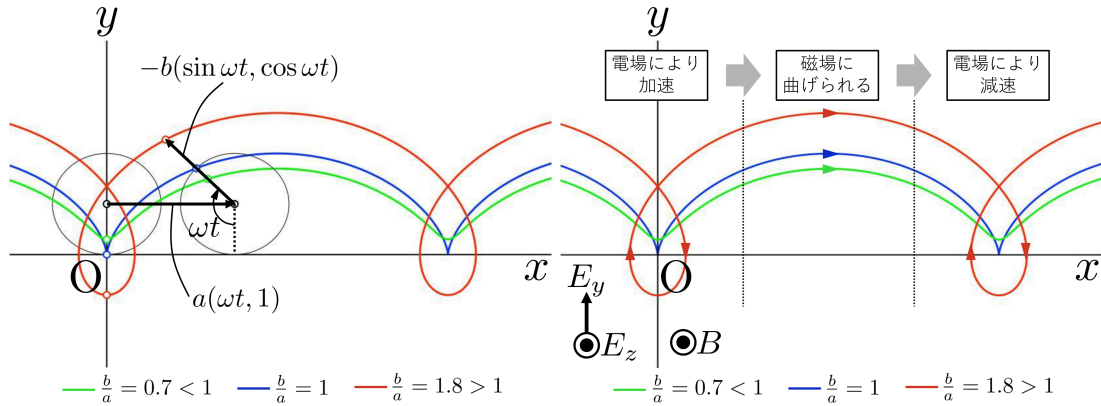


図 16 トロコイド

図 17 一様で不変な電磁場中の粒子の運動

(「電気的な移動速度」という，導出は下記) で運動する．粒子の  $[xy$  面内の] 速度が非相対論的であるための [必要] 条件  $[|\bar{v}| \ll c]$  は

$$\frac{|E_y|}{H} \ll 1$$

を与える ( $E_y$  と  $H$  の各々の絶対値は任意).

## § 22, 式の導出など

■トロコイドの式 (13) の導出 運動方程式  $m\dot{\mathbf{v}} = e(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H})$  を解き，磁場に垂直な面内で粒子が描くトロコイドの式 (13) を導く．電磁場成分が  $\mathbf{E} = (0, E_y, E_z)$ ,  $\mathbf{H} = (0, 0, H)$  となる座標系を設定することができ [この点について § 24 のノートで補足]，このとき運動方程式は

$$m\ddot{x} = \frac{\dot{y}}{c}H, \quad (14)$$

$$m\ddot{y} = eE_y - \frac{\dot{x}}{c}H \quad (15)$$

となる． $\{(14) + i(15)\}/m$  を作ると  $V \equiv \dot{x} + iy$  に対する式

$$\dot{V} + i\omega V = i\frac{eE_y}{m}, \quad \omega \equiv \frac{eH}{mc}$$

を得る．一般解は特殊解  $V = \frac{eE_y}{m\omega} = \frac{cE_y}{H}$  と  $\dot{V} + i\omega V = 0$  の解  $V = Ae^{-i\omega t}$  の和  $V = Ae^{-i\omega t} + \frac{cE_y}{H}$  である．実数  $\alpha, \delta$  を用いて積分定数  $A$  を  $\alpha e^{i\delta}$  と書くと

$$\dot{x} + iy \equiv V = \alpha e^{-i(\omega t - \delta)} + \frac{cE_y}{H}$$

であり， $\delta = \pi$  となるように時間の原点を選ぶと

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha \cos \omega t + \frac{cE_y}{H} \\ \dot{y} = \alpha \sin \omega t \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x = -\frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t + \frac{cE_y}{H}t + \text{const} \\ y = -\frac{\alpha}{\omega} \cos \omega t + \text{const} \end{cases}$$

となる．よって  $\frac{\alpha}{\omega} \equiv b$  と改め，座標軸の原点を適当に選べばこれは式 (13) になる．

■平均速度 (22.4) の導出 上で求めた速度  $\dot{x}, \dot{y}$  を, その周期にわたって平均すると

$$\bar{\dot{x}} = \frac{cE_y}{H}, \quad \bar{\dot{y}} = 0$$

となる. これは式 (22.4) のようにまとめられる.

## § 22 について

■ $\zeta = x + iy$  に対する微分方程式の解法

$$\ddot{\zeta} + i\omega\dot{\zeta} = \frac{ieE_y}{m} \left( = ic\omega \frac{E_y}{H} \right)$$

の解  $\dot{\zeta}$  は, p.63 のように同次方程式の一般解と特殊解 ( $\dot{\zeta} = Bt + C$  の形) の和として得られる. もし変数  $\zeta$  が実数ならば

$$\int \frac{d\dot{\zeta}}{\dot{\zeta} - (cE_y/H)} = -i\omega \int dt, \quad \dot{\zeta} = ae^{-i\omega t} + \frac{cE_y}{H}$$

と変数分離して解くことができるけれど, 複素変数  $\dot{\zeta}$  に対して左辺の積分の意味は必ずしも明確でない (複素積分に対して不定積分は定義されない).

■粒子の速度が光速に比べて小さいための条件  $\dot{x}/c = E_y/H \ll 1$ : (22.5) について これに加えて

$$\frac{\dot{z}}{c} = \frac{1}{c} \left( \frac{eE_z t}{m} + v_{0z} \right) \ll 1$$

の条件も要求されると考えられる. これは  $|E_z|$  が小さく, また  $E_z$  に加速される時間が短いときに満たされる.

■教科書の図 6(p.64) について

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \omega t \\ 1 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ -\cos \omega t \end{pmatrix}$$

の表すトロコイドが原点を通るように  $y$  軸方向に平行移動したのが教科書の図 6(p.64) であり, これは式 (22.6) で  $a < 0$  として描いた図となっている.

■トロコイド運動 (22.7) の定性的な解釈 結果は定性的には次のように解釈できる. 時刻  $t = 0$  を過ぎてからしばらくの間, 粒子は電場の方向に加速する. すると粒子は磁場に進行方向を曲げられ, いずれ電場と逆向きに運動するようになるため電場に減速させられる. こうして図 17 のように 1 周期分のトロコイドが描かれる [7, pp.135-136]. (ただし図 17 では磁場  $H$  の代わりに磁束密度  $B$  を書いている.)

■ $E = 0$  のとき 特に  $E = 0$  のとき, 粒子の位置の時間発展 (12),(13) は磁場方向への等速らせん運動

$$x = -b \sin \omega t, \quad y = -b \cos \omega t, \quad z = z_0 + v_{0z} t$$

に帰着する.

§ 22, 問題

3 (準一様な磁場中の案内中心の移動) 不変な磁場中の荷電粒子の非相対論的な運動 (§ 21) を再考する. 磁場が準一様であれば, 粒子はらせん運動を行い, その案内中心がゆっくり横方向 (磁場に垂直な方向) に移動 (drift) する. まず粒子が縦方向 (磁場の方向) の速度を持たない場合を考え, 粒子の位置を  $\mathbf{r} = \mathbf{R}(t) + \boldsymbol{\zeta}(t)$  と表す. ここに  $\mathbf{R}(t)$  は案内中心の位置であり,  $\boldsymbol{\zeta}(t)$  はその周りの素早い回転を記述する. 運動方程式を

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{v}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}),$$

$$\therefore m(\ddot{\mathbf{R}} + \ddot{\boldsymbol{\zeta}}) = \frac{e}{c}(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\boldsymbol{\zeta}}) \times \{\mathbf{H}(\mathbf{R}) + (\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla)\mathbf{H}(\mathbf{R})\} \quad \left( \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right) \quad (16)$$

と書き, 円運動の 1 周期にわたって両辺の時間平均をとると,  $\boldsymbol{\zeta}$  の 1 次の項はゼロになり,

$$m\ddot{\mathbf{R}} = \frac{e}{c}\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{H}(\mathbf{R}) + \mathbf{f}$$

が得られる. ここに現れる  $\boldsymbol{\zeta}$  の 2 次の項

$$\mathbf{f} \equiv \frac{e}{c}\overline{\dot{\boldsymbol{\zeta}} \times (\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla)\mathbf{H}}$$

が, 案内中心  $\mathbf{R}$  の移動をもたらす力を与える (『力学』 § 30). (式 (16) の右辺第 1 項  $\frac{e}{c}\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{H}(\mathbf{R})$  も最後に考慮する.)

これに続く, 円運動に対する式

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \omega \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{n}, \quad \zeta = \frac{v_{\perp}}{\omega} \quad (\mathbf{n} \text{ は } \mathbf{H} \text{ 方向の単位ベクトル})$$

(p.66, 下から 4 行目) については, 図 18 を参照. p.66 一番下の行の式

$$\overline{\zeta_{\alpha}\zeta_{\beta}} = \frac{1}{2}\zeta^2\delta_{\alpha\beta}$$

については, 円運動の式  $\zeta_{\alpha} \sim |\zeta| \cos(\omega t)$  から直接確認できる. あるいは次のように考えても良い. すなわち円運動における等方性より,

$$\begin{aligned} \alpha \neq \beta \text{ のとき} & \quad \overline{\zeta_{\alpha}\zeta_{\beta}} = \overline{\zeta_{\alpha}} \cdot \overline{\zeta_{\beta}} = 0, \\ \alpha = \beta \text{ のとき} & \quad \overline{\zeta_{\alpha}\zeta_{\beta}} = C \quad (\alpha = 1, 2 \text{ に共通の値}) \end{aligned}$$

であり, これらは  $\overline{\zeta_{\alpha}\zeta_{\beta}} = C\delta_{\alpha\beta}$  とまとめられる. 両辺の添字  $\alpha, \beta$  を縮約すると  $\zeta^2 = 2C$  より,  $C = \zeta^2/2$  と定まる (式 (50.7) の箇所や pp.211-212 の脚注と同じ論法).

すると

$$\begin{aligned} f_{\lambda} &= \frac{e}{c}\omega \overline{e_{\lambda\mu\nu}(e_{\mu\alpha\beta}\zeta_{\alpha}n_{\beta})\zeta_{\gamma}\partial_{\gamma}H_{\nu}} \quad (\because \dot{\boldsymbol{\zeta}} = \omega \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{n}) \\ &= \frac{e\omega\zeta^2}{2c} \overline{e_{\lambda\mu\nu}(e_{\mu\alpha\beta}n_{\beta}\partial_{\alpha})H_{\nu}} \quad \left( \because \overline{\zeta_{\alpha}\zeta_{\gamma}} = \frac{1}{2}\zeta^2\delta_{\alpha\gamma} \right) \\ &= -\frac{mv_{\perp}^2}{2H} [(\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{H}]_{\lambda} \quad \left( \because \zeta = \frac{v_{\perp}}{\omega}, \omega = \frac{eH}{mc} \right) \end{aligned}$$



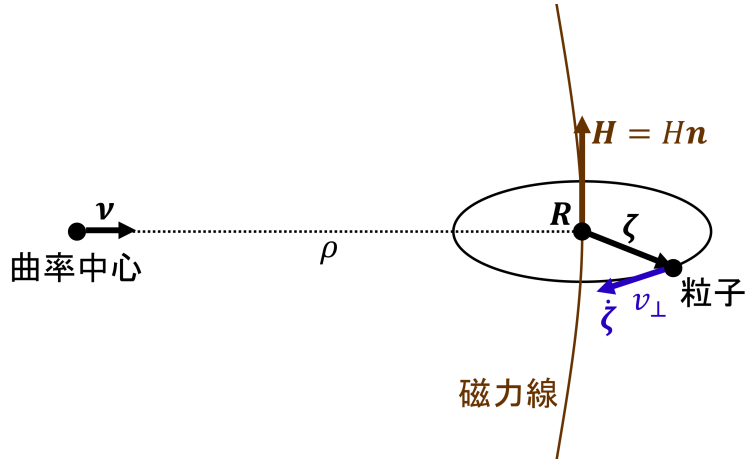


図 18 案内中心  $R$  周りの粒子の円運動と、 $R$  を通る曲がった磁力線

と書き換えられるので, p.67, 1.2 の式  $\mathbf{f} = -\frac{mv_{\perp}^2}{2H}(\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{H}$  を得る. ベクトル 3 重積を再び成分計算の形に戻すと,

$$\begin{aligned}
 [(\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{H}]_{\lambda} &= e_{\lambda\mu\nu}(e_{\mu\alpha\beta}n_{\alpha}\partial_{\beta})H_{\nu} \\
 &= (-\delta_{\lambda\alpha}\delta_{\nu\beta} + \delta_{\lambda\beta}\delta_{\nu\alpha})n_{\alpha}\partial_{\beta}H_{\nu} \\
 &= -n_{\lambda}\partial_{\beta}H_{\beta} + n_{\alpha}\partial_{\lambda}H_{\alpha} \\
 &= n_{\alpha}\partial_{\lambda}H_{\alpha} \quad (\because \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \text{ (§ 26)}) \\
 &= n_{\alpha}\partial_{\alpha}H_{\lambda} + n_{\alpha}(\partial_{\lambda}H_{\alpha} - \partial_{\alpha}n_{\lambda}) \\
 &= n_{\alpha}\partial_{\alpha}H_{\lambda} \quad (\because \nabla \times \mathbf{H} = 0 \text{ (§ 30)}) \\
 &= [(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{H}]_{\lambda}
 \end{aligned}$$

と変形できる. さらに  $\mathbf{H} = H\mathbf{n}$  を代入すると,  $\mathbf{f}$  において

$$(\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{H} = H(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n} + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla)H$$

となるので (p.67, 1.4 の式),

$$\mathbf{f} = -\frac{mv_{\perp}^2}{2}(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n} + \dots$$

を得る. ただし「 $\dots$ 」は力の  $\mathbf{n}$  方向成分であり, すぐ後で見ると案内中心の移動に寄与しない. ここで  $\mathbf{n}$  は注目している点  $R$  における磁力線の接単位ベクトルに他ならず,  $\mathbf{n} \cdot \nabla = \frac{d}{ds}$  は磁力線に沿う方向微分なので ( $s$  は磁力線に沿う弧長), Frenet-Serret の公式を適用して

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nu}$$

とできる. ここに  $\rho$  は磁力線の曲率半径,  $\boldsymbol{\nu}$  は曲率中心から点  $R$  に向かう方向単位ベクトルである (図 18 を参照). すると,

$$\mathbf{f} = \frac{mv_{\perp}^2}{2\rho}\boldsymbol{\nu} + \dots$$

次に粒子が縦方向 ( $\mathbf{n}$  方向) の速度成分  $v_{\parallel}$  を持つ場合を考える. このとき各瞬間に力線の曲率中心まわりに角速度  $v_{\parallel}/\rho$  で回転する基準系に移れば, ここまで調べてきた円運動の場合に帰着する.

場の変換 このことを納得するには、回転系で見た電磁場  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{H}'$  を調べておかなければならない。瞬間的に座標原点が位置  $\mathbf{R}$  と一致する慣性基準系  $K, K'$  を考え、 $K$  系に対する  $K'$  系の相対速度を  $\mathbf{V} \equiv v_{\parallel} \mathbf{n}$  とすれば、 $K'$  系は回転系の瞬間的な共動座標系となる。よって慣性系  $K'$  で回転系を代用できると考えられる。そこで  $V/c \ll 1$  の場合の変換則 (24.4) を適用すると、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \mathbf{E} - \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{H} = 0, & (\because \mathbf{E} = 0, \mathbf{V} \parallel \mathbf{H}) \\ \mathbf{H}' &= \mathbf{H} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{E} = \mathbf{H} & (\because \mathbf{E} = 0)\end{aligned}$$

となるので、電磁場はもとの座標系と変わらない。

文献 [8, p.643] には  $v_{\parallel} \ll c$  だから、Lorentz 変換に伴う場の変化は無視できるとある。

回転系では遠心力  $\nu m v_{\parallel}^2 / \rho$  が現れるので\*12、合力は

$$\mathbf{f} = \nu \frac{m}{\rho} \left( v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) + \dots$$

となる。これは不変な電場  $\mathbf{E} = \mathbf{f}/e$  と等価である。その磁場方向成分  $(\dots)/e$  は  $\mathbf{R}$  の磁場方向への加速をもたらすだけであり、案内中心の移動速度 (22.4):

$$\mathbf{v}_d = \frac{c\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{H^2} = \frac{1}{\omega\rho} \left( v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) \nu \times \mathbf{n}$$

には寄与しない。この速度  $\mathbf{v}_d$  の向きは電荷の符号に依存する ( $\omega = eH/mc$  だから)。

案内中心の移動は、磁場が非一様であっても磁力線が真っ直ぐであれば起こらないことになる。これは § 21 で調べた、領域  $p^2 < CH$  の境界での粒子の“反射” (図 15) とは対照的である。

冒頭の式 (16) の右辺第 1 項  $\frac{e}{c} \dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{H}(\mathbf{R})$  について 移動速度の公式 (22.4) を適用した際、“電場”からの力  $\mathbf{f}$  だけでなく、冒頭の式 (16) の右辺第 1 項における磁場からの力  $\frac{e}{c} \dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{H}(\mathbf{R})$  も考慮したことになる。 $\dot{\mathbf{R}}$  を上で得た移動速度  $v_d \sim \frac{v_{\perp}^2}{\omega\rho}$  の程度として見積もると、第 1 項  $\frac{e}{c} \dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{H}(\mathbf{R})$  は  $\frac{mv_{\perp}^2}{\rho}$  のオーダーとなる。これは  $\mathbf{f}$  と同程度なので、 $\mathbf{f}$  に比べて無視することはできない。) )

## § 23. 電磁場テンソル

§ 16 の作用  $S = S_m + S_{mf}$  に対して最小作用原理を適用し、粒子の座標の変分に対して  $\delta S = 0$  を要求すると、運動方程式として

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k \quad (23.4)$$

が得られる (導出は下記)。ここに  $F_{ik} \equiv \partial_i A_k - \partial_k A_i (= -F_{ki})$  は電磁場テンソルであり、その成分

$$(F_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (F^{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \quad (23.5)$$

は電磁場の強度を与える [本稿次節で確認]。

\*12 一定の角速度を持つ  $\mathbf{R}$  の共動座標系を考えているので、見かけの力としては遠心力のみを考慮すれば十分である。

運動方程式 (23.4) は § 17 で得た方程式

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right), \quad \frac{d\mathcal{E}_{\text{kin}}}{dt} = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$$

と等価である [本稿次節で確認]. ところで第 2 式 (エネルギーの式) は第 1 式 (運動方程式) から導かれる (§ 17). よって 4 つの式 (23.4) のうち 3 つだけが独立である. 実際このことは式 (23.4) の両辺を  $u_i$  と縮約すると, 左辺は  $u_i$  と  $du^i/ds$  の直交性からゼロになり, 右辺は反対称テンソル  $F^{ik}$  と対称テンソル  $u_i u_k$  の縮約となってゼロになることから理解できる.

積分路を現実の軌道に限定し作用を終点の座標の関数と見たとき, 終点の座標による微分は

$$-\partial_i S = p_i + \frac{e}{c} A_i \quad (23.7)$$

となる (式 (23.4) の導出時に得た, 作用の変分の式 (17) を見よ). ところで全エネルギー (を  $c$  で割った値)  $\mathcal{H}/c$  と正準運動量  $\mathbf{P}$  は, 運動量 4 元ベクトル

$$P^i = \left( \frac{\mathcal{H}}{c}, \mathbf{P} \right) = \left( \mathcal{E}_{\text{kin}} + \frac{e}{c} \phi, \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) = \left( \frac{mc}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + \frac{e}{c} \phi, \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) = mcu^i + \frac{e}{c} A^i$$

を作る (§ 16) [最右辺より, これは本当にベクトルである]. よって期待されるように, 式 (23.7) は一般化運動量  $P_i$  に一致している ( $\partial_i S = -P_i$ ).

## § 23, 式の導出など

■運動方程式 (23.4) の導出 粒子の軌道の変化に伴う粒子の作用  $S_m = -mc \int ds$  の変分は式 (9.10):

$$\delta S_m = - \sum mc u_i \delta x^i \Big| + \sum mc \int \delta x^i \frac{du_i}{ds} ds$$

で与えられる. 一方, 粒子と場の相互作用項  $S_{mf} = - \sum \frac{e}{c} \int A_i dx^i$  の変分は次のように計算できる.

$$\begin{aligned} \delta S_{mf} &= - \sum \frac{e}{c} \int \{ A_i \delta(dx^i) + (\delta A_i) dx^i \} \\ &= - \sum \frac{e}{c} A_i \delta x^i \Big| - \sum \frac{e}{c} \int \{ (-dA_i) \delta x^i + (\delta A_k) dx^k \} \quad (\text{部分積分した}) \\ &= - \sum \frac{e}{c} A_i \delta x^i \Big| - \sum \frac{e}{c} \int \{ (-\partial_k A_i) dx^k \delta x^i + (\partial_i A_k) \delta x^i dx^k \} \\ &\quad (\text{場 } A_i \text{ の値は時空における粒子の位置で評価されるから}) \\ &= - \sum \frac{e}{c} A_i \delta x^i \Big| - \sum \frac{e}{c} \int F_{ik} u^k \delta x^i ds. \end{aligned}$$

以上より作用の変分は

$$\delta S = \delta(S_m + S_{mf}) = - \sum \left( mc u_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x^i \Big| + \sum \int \left( mc \frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c} F_{ik} u^k \right) \delta x^i ds \quad (17)$$

と表される. 最小作用原理では端点で  $\delta x^i = 0$  が課されるので, 境界項は消える. よって  $\delta S = 0$  を要求すると, 粒子の運動方程式 (23.4):  $mc \frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c} F_{ik} u^k$  が導かれる. [本稿の付録 D では以上の議論を, 一般相対性理論の場合へと一般化する.]

## § 23 について

■  $du_i = (du_i/ds)ds, dx^i = u^i ds$  (p.68, 1.4) で導入した  $ds$  について これは粒子が  $x^i$  にいることと  $x^i + dx^i$  にいることの 2 事件の間の世界距離である。だからこそ  $du_i/ds, u^i$  がそれぞれ粒子の 4 元加速度, 4 元速度の意味になる。

■ 4 次元的な形の運動方程式 (23.4) について 作用の積分パラメータを粒子の固有時にとれば Euler 方程式としても導ける [2, pp.102-103].

■ 電磁場テンソルの成分 (23.5) の確認

$$F_{0\alpha} = \partial_0 A_\alpha - \partial_\alpha A_0 = -\partial_0 A^\alpha - \partial_\alpha A^0 = \left[ -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \right]_\alpha = E_\alpha,$$

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha = -(\partial_\alpha A^\beta - \partial_\beta A^\alpha) = -e_{\alpha\beta\gamma} H_\gamma \quad (\text{ただし } e_{123} = +1)$$

および  $F^{0\alpha} = -F_{0\alpha}, F^{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}$  による。場の強度  $E_\alpha, H_\alpha$  の添字はもはやテンソルとしての変換則を正しく表さないから、添字の位置にこだわらず、ここでは下付きに統一して  $E_1 = E_x, \text{etc.}$  と約束する。

■ 電磁場と相互作用する粒子の運動方程式 (23.4) の空間成分と時間成分 運動方程式 (23.4):  $mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k$  が § 17 でラグランジアンから導いた式と「同じ方程式」 (§ 23, 1.2) であることを確かめよう。式 (23.4) の両辺はそれぞれ

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{dp^i}{ds} = \frac{1}{c} \frac{dp^i}{d\tau}, \quad \frac{e}{c} F^{ik} u_k = \frac{e}{c^2} F^{ik} \frac{dx_k}{d\tau}$$

と書き換えられるので ( $\tau$  は固有時間), これらに  $d\tau/dt$  を掛けて等置すると

$$\frac{dp^i}{dt} = \frac{e}{c} F^{ik} \frac{dx_k}{dt}$$

が得られる。

空間成分をとると

$$\begin{aligned} \frac{dp^\alpha}{dt} &= \frac{e}{c} F^{\alpha i} \frac{dx_i}{dt} = e F^{\alpha 0} - \frac{e}{c} F^{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{dt} \\ &= e E^\alpha + \frac{e}{c} e^{\gamma\alpha\beta} B^\gamma \frac{dx^\beta}{dt} \quad (\because F^{\alpha 0} = E^\alpha, F^{\alpha\beta} = -e^{\gamma\alpha\beta} B^\gamma) \\ &= e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)^\alpha \end{aligned}$$

となるので, 運動方程式 (17.5):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$$

を得る。

また上式の両辺の時間成分はそれぞれ

$$\frac{dp^0}{dt} = \frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}_{\text{kin}}}{dt}, \quad \frac{e}{c} F^{0\alpha} \frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{e}{c} (-E^\alpha) \left( -\frac{dx^\alpha}{dt} \right) = \frac{e}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$$

と書き換えられるので、これらを等置すると仕事とエネルギーの関係 (17.7):

$$\frac{d\mathcal{L}_{\text{kin}}}{dt} = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$$

が導かれる.

■式 (23.7):  $\partial_i S = -P_i$  について 成分の関係  $(P_0, P_1, P_2, P_3) = (H/c, -P_x, -P_y, -P_z)$  よりこれは

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{P}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H$$

となり, 符号も含めて『力学』における関係

$$\frac{\partial S}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H$$

に対応している [3, pp.175–176].

## § 24. 場のローレンツ変換

電場と磁場は電磁場テンソルの成分として変換する. 特に  $K$  系の  $x$  軸方向に  $K'$  系が一定速度  $\mathbf{V}$  で運動しているとき, 変換則は具体的には

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c}H'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c}H'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (24.2)$$

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c}E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c}E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (24.3)$$

であり [本稿次節で確認 (§ 6 の問題と同様)],

- $O((V/c)^2)$  を落とす近似では

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \mathbf{H}' \times \frac{\mathbf{V}}{c}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}' - \mathbf{E}' \times \frac{\mathbf{V}}{c} \quad (24.4)$$

- $K$  系で  $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{V}$  が直交  $\Leftrightarrow K'$  系で  $\mathbf{E}' = 0$  または  $\mathbf{H}' = 0$ .

このように電場または磁場がある基準系ではゼロであっても, 他の系ではゼロでないということが起こり得る.

## § 24 について

■電磁場の変換則 (24.2),(24.3) について 電場と磁場が電磁場テンソル (23.5) の成分として変換するとき, 例えば粒子の運動方程式 (23.4) は両辺が同じ種類のテンソル (今の場合, 反変ベクトル) となり, このことが運動方程式の Lorentz 変換に対する共変性を保証する.

- 注意点 1

計量の符号系により  $F_{ik}, F^{ik}$  の成分が異なる.

$$\begin{aligned} \text{符号系 } (-, +, +, +) \text{ に対して } \quad & F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = \frac{1}{c} \partial_t A_x + \partial_x \phi = -E_x, \\ & F_{23} = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = \partial_y A_z - \partial_z A_y = H_x, \\ \text{符号系 } (+, -, -, -) \text{ に対して } \quad & F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = -\frac{1}{c} \partial_t A_x - \partial_x \phi = E_x, \\ & F_{23} = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = -\partial_y A_z + \partial_z A_y = -H_x. \end{aligned}$$

$F_{01}, F_{23}$  だけ計算すれば ( $F_{ik}$ ) の全成分を推測できる.

計量がいずれの符号系をもつ場合でも  $F_{ik}$  と  $F^{ik}$  は電場成分だけ符号が異なる.

● 注意点 2

–  $K \rightarrow K', K' \rightarrow K$  のどちらの変換を考えているか.

– 共変テンソル  $F_{ik}$ , 反変テンソル  $F^{ik}$  のどちらの変換則を考えているか.

これらは変換係数をあからさまに  $\partial x'^i / \partial x^j, \partial x^i / \partial x'^j$  と書けば意識が行き届く.

$K' \rightarrow K$  の変換則

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}'_{\parallel}, \quad \mathbf{H}_{\parallel} = \mathbf{H}'_{\parallel}, \quad \mathbf{E}_{\perp} = \frac{\mathbf{E}'_{\perp} + \mathbf{H}'_{\perp} \times (\mathbf{V}/c)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \mathbf{H}_{\perp} = \frac{\mathbf{H}'_{\perp} - \mathbf{E}'_{\perp} \times (\mathbf{V}/c)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

は計量の符号系や  $F_{ik}, F^{ik}$  のどちらで計算するかに依らない. そこで符号系  $(+, -, -, -)$  を持つ計量を採用し, 上記に注意して  $F_{ik}$  の成分の変換則を調べると

$$\begin{aligned} E_y = F_{02} &= \frac{\partial x'^i}{\partial x^0} \frac{\partial x'^k}{\partial x^2} F'_{ik} = a^0_0 a^2_2 F'_{02} + a^1_0 a^2_2 F'_{12} = \gamma \{E'_y - \beta(-H'_z)\}, \quad \text{etc.} \\ \left( \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \right) &\equiv (a^i_k) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る ( $\beta \equiv V/c, \gamma \equiv 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ ).

■互いに相対速度を持たない慣性系間の電磁場の変換 単に原点の位置と座標軸の方向が異なるだけで, 互いの位置関係が時間変化しない慣性系 (座標  $x^i, x'^i$ ) の間の座標変換に対しては,  $R$  を  $3 \times 3$  の適当な回転行列 (直交行列,  $R^T = R^{-1}$ ) として

$$\left( \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

となる. よって電場の変換則は

$$E'_\alpha = F'_{0\alpha} = \frac{\partial x'^i}{\partial x'^0} \frac{\partial x^k}{\partial x'^\alpha} F_{ik} = \delta^i_0 (R^{-1})_{k\alpha} F_{ik} = (R^{-1})_{k\alpha} F_{0k} = R_{\alpha k} F_{0k} = R_{\alpha\beta} E_\beta$$

となる. 磁場の変換則については, § 25 の補足で証明するように磁場が対偶テンソルの成分  $F^*_{0\alpha} = H_\alpha$  として与えられることに注目すると便利である. このとき電場と同様の変換則

$$H'_\alpha = R_{\alpha\beta} H_\beta$$

が導かれることは明白である。以上より電磁場は一般にはテンソル成分として変換し、その際に電場と磁場は“混ざる”けれど、互いに相対速度を持たない慣性系の間では電場と磁場の各々は、単に3次元空間におけるベクトル成分として変換されることになる。このことは例えば§ 22 で一様不変な場における電荷の運動を調べた際に、暗黙のうちに仮定した、あるいは自明と考えたことである。

空間座標と時間の原点の変更  $x'^i = x^i + \text{const.}$  に対しても、 $\partial x'^i / \partial x^k = \delta_k^i$  より電磁場成分は不変である。

## § 25. 場の不変量

電磁場の強度から2つの不変量

$$H^2 - E^2 = \frac{1}{2} F^{ik} F_{ik} = \text{inv.}, \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{8} e^{iklm} F_{ik} F_{lm} = \text{inv.}$$

を作ることができる(第2式は擬スカラー)。[第1の等号を本稿次節で確認。inv. は不変量 invariant の略.]  
すると

$$H^2 - E^2 = \frac{1}{2} F^{ik} F_{ik} \gtrless 0 \quad \Leftrightarrow \quad H \gtrless E,$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{8} e^{iklm} F_{ik} F_{lm} \gtrless 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{E} \text{ と } \mathbf{H} \text{ の成す角}) \lesseqgtr \frac{\pi}{2}$$

であり(複号同順)、この不等式はすべての基準系で成り立つことになる。

$x$  軸方向への Lorentz ブーストで  $\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}$  の成分が虚数角の回転(25.6)を被ることから予想されるように、一般の Lorentz 変換に対して不変量は  $\mathbf{F}^2 = (E^2 - H^2) + 2i\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$  で上の2つに限られる。

## § 25 について

■p.71 脚注について まず第2の不変量が<sup>s</sup>, p.71 脚注の式

$$e^{iklm} F_{ik} F_{lm} = 4\partial_i (e^{iklm} A_k \partial_l A_m) \quad (18)$$

のように書き換えられることを確かめる。上式(18)左辺において

$$\begin{aligned} e^{iklm} F_{ik} &= e^{iklm} (\partial_i A_k - \partial_k A_i) \\ &= (e^{iklm} - e^{kilm}) \partial_i A_k \quad (\text{第2項でダミー添字の入れ替え } i \leftrightarrow k) \\ &= 2e^{iklm} \partial_i A_k \quad (e^{iklm} \text{ の反対称性}) \end{aligned}$$

であり、同様の手続きを繰り返すと

$$e^{iklm} F_{ik} F_{lm} = 4e^{iklm} (\partial_i A_k) (\partial_l A_m)$$

を得る。これを式(18)の右辺に置き換えたときのおつりの項  $4e^{iklm} A_k \partial_i \partial_l A_m$  は、添字  $i, l$  について対称な量と反対称な量の縮約となっているのでゼロである。よって上式(18)が成立する。

不変量  $e^{iklm} F_{ik} F_{lm}$  が式(18)のように場の4元発散の形に書き換えられることは、その定数倍をラグランジアン密度(§ 32)に付け加えても、運動方程式が変わらないことを意味している(作用の付加的な項は変分をとると落ちる表面積分を与えるから(§ 32のノート参照)). p.77の脚注も参照。

とは言え、不変量  $e^{iklm} F_{ik} F_{lm}$  を非自明な(非線形な)形で理論に取り込むことは可能である。例えば Born-Infeld 理論は真空の電磁気学を修正する試みであり、ゲージ不変な場の強度  $F_{ik}$  から作られる Lorentz 不変量

$$s \equiv -\frac{1}{4} F^{ik} F_{ik} = \frac{1}{2} (E^2 - B^2), \quad p \equiv -\frac{1}{4} F^{*ik} F_{ik} = -\frac{1}{8} e^{iklm} F_{ik} F_{lm} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

を用いてラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = -b^2 \sqrt{1 - \frac{2s}{b^2} - \frac{p^2}{b^4}} + b^2 = -b^2 \sqrt{1 - \frac{E^2 - B^2}{b^2} + \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2}{b^4}} + b^2$$

を構築する<sup>\*13</sup>。平方根の中身が正でなければならないことから、 $\mathbf{B} = 0$  のときに  $E \leq b$  でなければならず、理論には電場の最大値が導入されている。また場の強度  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  が弱い  $s \sim p \ll b^2$  のとき

$$\mathcal{L} = -b^2 \left[ 1 - \frac{s}{b^2} + \mathcal{O}\left(\frac{s^2}{b^4}, \frac{p^2}{b^4}\right) \right] + b^2 = s + \mathcal{O}\left(\frac{s^2}{b^2}\right)$$

となって、Maxwell 理論のラグランジアン密度  $s$  (§ 27) に移行する。Born-Infeld 理論では点粒子の静電的な自己エネルギーは有限になる [9, pp.435–440].

■  $F_{ik}F_{ik} = \text{inv.} : (25.1) \Leftrightarrow H^2 - E^2 = \text{inv.} : (25.3)$  の確認

$$F^{0\alpha} = -E_\alpha, \quad F^{\alpha\beta} = -e_{\alpha\beta\gamma}H_\gamma$$

により、

$$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\delta}H_\gamma H_\delta = 2\delta_{\gamma\delta}H_\gamma H_\delta = 2H^2, \quad F_{ik}F^{ik} = 2F_{0\alpha}F^{0\alpha} + F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 2(H^2 - E^2)$$

となる。

■  $e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = \text{inv.} : (25.2) \Leftrightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = \text{inv.} : (25.4)$  の確認  $e^{iklm}F_{ik}F_{lm}$  (添字について和をとらない) のうち  $i < k$  かつ  $l < m$  のものは以下の 6 つのみであり、それらの和は  $-2\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$  なので

$$e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = -4 \times 2\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}.$$

$i$	$k$	$l$	$m$	$e^{iklm}F_{ik}F_{lm}$ (和とらず)
0	1	2	3	$1 \times E_x \times (-H_x)$
0	2	1	3	$(-1) \times E_y \times H_y$
0	3	1	2	$1 \times E_z \times (-H_z)$
1	2	0	3	$1 \times (-H_z) \times E_z$
1	3	0	2	$(-1) \times H_y \times E_y$
2	3	0	1	$1 \times (-H_x) \times E_x$

より教育的な確認の仕方は、 $e^{iklm}F_{ik}F_{lm}$  を対偶テンソル  $F^{*ik} \equiv \frac{1}{2}e^{iklm}F_{lm}$  との縮約  $2F^{*ik}F_{ik}$  と見ることである (p.71, 1.7) [9, p.435]. 対偶テンソルの全成分は

$$F^{*0\alpha} = \frac{1}{2}e^{0\alpha ik}F_{ik} = \frac{1}{2}e^{0\alpha\beta\gamma}F_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}e^{\alpha\beta\gamma}F_{\beta\gamma}, \quad \therefore F^{*01} = -H_x, \text{ etc.}$$

$$F^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2}e^{\alpha\beta ik}F_{ik} = e^{\alpha\beta 0\gamma}F_{0\gamma} = e^{\alpha\beta\gamma}F_{0\gamma}, \quad \therefore F^{*12} = E_z, \text{ etc.}$$

のようにして見出される。なるほど、もとのテンソル  $F_{ik}$  と比べると、(符号の違いを除けば) 電場と磁場が入

<sup>\*13</sup> ここでは Heaviside 単位系を採用しており、 $b$  は場の強度の次元を持つパラメーターである。また磁場は  $\mathbf{H} = -\partial\mathcal{L}/\partial\mathbf{B}$  で定義され、真空においても  $\mathbf{D}, \mathbf{H}$  は  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  と非自明な関係をもつ。Born-Infeld 理論をはじめとする非線形電磁気学では、真空自体がある種の媒質のように振舞う。



れ替わっている。すると

$$F^{*ik} F_{ik} = 2F^{*0\alpha} F_{0\alpha} + F^{*\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

において右辺第1項は  $F^{*0\alpha} F_{0\alpha} = (-\mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}$  となり、右辺第2項は

$$F^{*\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 2(F^{*12} F_{12} + F^{*23} F_{23} + F^{*31} F_{31}) = -2\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$$

となる。同じ結果は

$$F^{*\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = (e_{\alpha\beta\gamma} E_\gamma)(-e_{\alpha\beta\delta} H_\delta) = -2\delta_{\gamma\delta} E_\gamma H_\delta = -2\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$$

としても得られる (ただしここでは3次元テンソルの反変成分と共変成分を区別せず、単に  $E_\alpha = (E_x, E_y, E_z)$ ,  $e_{123} = +1$  などとした)。以上をまとめると

$$e^{iklm} F_{ik} F_{lm} = 2F^{*ik} F_{ik} = -8\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}.$$

■「 $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{H}$  の値を見いだすことができる」(p.71 下から2行目)について 大きさ  $E, H$  のことを言っているものと考えられる。

■「与えられた点で電場と磁場が平行になるような慣性系をつねに見いだすことができる」(p.71 下から6行目)について その後の2式はそのような慣性系が見つかること仮定したとき成り立つ関係である。

■p.72, 1.3~1.5 について  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  となる慣性系が見つければ  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0, H^2 - E^2 = \text{inv.} > 0$  である。

## 第4章 場の方程式

### § 26. マクスウェル方程式の第1の組

電場と磁場がポテンシャルから導かれること (ポテンシャルを用いて定義されること)

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$$

は, Maxwell 方程式の第1の組

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (26.1-2)$$

を含んでいる [逆にこれはポテンシャルを導入できる根拠となる]. 実際, これらは恒等式

$$\partial_i F_{kl} + \partial_k F_{li} + \partial_l F_{ik} = 0 \quad (26.5)$$

にすぎない [本稿次節で確認]. これは電磁場テンソルの対偶テンソル  $F^{*ik} \equiv \frac{1}{2!} e^{iklm} F_{lm}$  に対する式

$$\partial_k F^{*ik} = 0 \quad (26.6')$$

として表すこともできる [本稿次節で補足].

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{f} = 0$$

[各点の周りの単位体積からの磁場のわき出しはゼロ

$\Leftrightarrow$  任意の閉曲面からの磁場のわき出し (磁束) はゼロ],

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{f}$$

[各点の磁場の時間変化が周りに電場の渦を作る

$\Leftrightarrow$  任意の閉曲線を貫く磁束の変化が, その閉曲線に電場の循環 (起電力) をもたらす].

### § 26 について

■「磁場 (ないし電場) のわき出し」という表現について 実際には電場に沿って物質が流れているわけではないので, 「電場のわき出し」と言ってもそれが何を意味するのか本来は不明瞭である. しかしながら電場ベクトルを流体の速度ベクトルに読み替えれば, 面積積分  $\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f}$  は表面 S を通過して単位時間に流出する流体の体積を表す. そこで慣例に従い, 本稿ではこの量を「電場のわき出し」と呼ぶことにする.

■積分形の Maxwell 方程式 (26.4) について 右辺の磁束  $\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{f}$  は積分により位置依存性が失われ, 時間だけの関数となっているから, 前の  $\partial/\partial t$  は  $d/dt$  と書いて良い.

Maxwell 方程式の積分形の表現は微分形の表現と数学的には等価であるけれど, 物理的には Maxwell 方程式を微分形に書けることは, それが場 (物質場を含む) の近接作用であることを表している.

■式 (26.5) の確認

$$\partial_i F_{kl} + \partial_k F_{li} + \partial_l F_{ik} = \partial_i (\cancel{\partial_k A_l} - \cancel{\partial_l A_k}) + \partial_k (\cancel{\partial_l A_i} - \cancel{\partial_i A_l}) + \partial_l (\cancel{\partial_i A_k} - \cancel{\partial_k A_i}) = 0.$$

式 (26.5) の左辺は 3 つの添字に関して完全反対称なので、ゼロでない独立な成分は

$$(i, k, l) = (0, 1, 2), (0, 1, 3), (0, 2, 3), (1, 2, 3)$$

の 4 通りに限られる。電磁場テンソルの成分を代入すれば、上の 4 成分に対して式 (26.5) が Maxwell 方程式 (26.1), (26.2) を再現することを確認される。

「 $i \neq k \neq l$  のとき」(式 (26.5) の 2 行下) について これは  $i, k, l$  が相異なることを表しており、正確には  $i \neq k$  かつ  $k \neq l$  かつ  $l \neq i$  である。

■式 (26.6) について 式 (26.6):  $e^{iklm} \partial_k F_{lm} = 0$  は電磁場テンソルの対偶テンソル  $F^{*ik} \equiv \frac{1}{2!} e^{iklm} F_{lm}$  に対する式  $\partial_k F^{*ik} = 0$  となっている。実際に式 (26.5):  $\partial_i F_{kl} + \partial_k F_{li} + \partial_l F_{ik} = 0$  をこのように書き換えられることは次のように確かめられる。

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{3!} e^{iklm} (\partial_k F_{lm} + \partial_l F_{mk} + \partial_m F_{kl}) \\ &= \frac{1}{3!} (e^{iklm} + e^{imkl} + e^{ilmk}) \partial_k F_{lm} \\ &= \frac{1}{2!} e^{iklm} \partial_k F_{lm} \quad (\Leftrightarrow \text{式 (26.6)}) \\ &= \partial_k F^{*ik}. \end{aligned}$$

§ 25 のノートで調べたように、

$$F^{*0\alpha} = -H_\alpha, \quad F^{*\alpha\beta} = e_{\alpha\beta\gamma} E_\gamma \quad (e_{123} = +1)$$

なので、式 (26.6)’:  $\partial_k F^{*ik} = 0$  から改めて Maxwell 方程式

$$i = 0: \quad 0 = \partial_k F^{*0k} = -\nabla \cdot \mathbf{H}, \quad i = \alpha: \quad 0 = \partial_k F^{*\alpha k} = \left[ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} \right]_\alpha$$

が得られる。

## § 27. 電磁場の作用関数

電荷だけでなく場のダイナミクスも決定するには、電荷がないときの場に対する作用  $S_f$  を考えて系全体の作用を

$$S = S_m + S_{mf} + S_f$$

としなければならない。場の作用は

$$S_f = a \int F_{ik} F^{ik} dV dt$$

という形を持つ。このとき場のラグランジアン (密度) は

- 場の 2 次の量

→ 場の方程式は線形微分方程式 → 重ね合せの原理が成立。

- ポテンシャルと違って一義的に決まる量  $F_{ik}$  から成る.
- Lorentz スカラーである.
- 場の時間に関する 1 階導関数だけを含む  
→ 場の方程式は時間に関して 2 階の微分方程式 → 古典的因果律が満たされる.

$S_f$  が極小値をとるには  $a < 0$  が必要であり, Gauss 単位系で  $a = -1/16\pi$  である. こうして電磁場と粒子の系に対する完全な作用は

$$S = - \sum mc \int ds - \sum \frac{e}{c} \int A_k dx^k - \frac{1}{16\pi c} \int F_{ik} F^{ik} d^4x$$

となる.

(p.78 脚注 1 を引用) ガウスの単位系に加えて, いわゆるヘヴィサイド単位系が使われることもある. そのときには  $a = -1/4$  となる. この単位系では, 場の方程式 [Maxwell 方程式] はより便利な形になるけれども ( $4\pi$  が現れない), 他方クーロンの法則 [や Biot-Savart の法則, 遅延ポテンシャルの式] に  $4\pi$  が現れる. 逆に, ガウスの系では場の方程式が  $\pi$  [ $4\pi$ ] を含み, クーロンの法則は簡単な形になる.

## § 27 について

■粒子が場に与える影響 (最終段落) について 粒子の座標についての変分で  $\delta S_f = 0$  となるので  $S_f$  を作用に加えても運動方程式は変わらず, 「粒子の運動に影響をおよぼすことはできない」 (p.76, l.15). 本来  $S_{mf}$  の中に粒子と場の双方向への影響が含まれており, 特に  $S_{mf}$  の中の  $A_i$  を与えられたものと見ると粒子から場への反作用が無視されることになるにすぎない. 粒子から場への反作用があろうとも, 場に対する作用  $S_f$  を導入しなければ場のダイナミクスを記述することはできない.

■「 $S_{mf}$  においては, 一義的でないことは重要でない」 (p.77, l.6) について 実際, 電荷保存則によれば  $S_{mf}$  におけるポテンシャルの不定性は運動方程式に影響しないことが § 29 最終段落にて証明される.

## § 28. 4 次元電流ベクトル

点電荷の系の電荷密度は

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))$$

である. 実際これは

- 点電荷が存在している点を除いてはゼロになり,
- $\int \rho dV$  は積分領域に含まれる電荷の和を与える.

一般に電荷密度  $\rho$  は不変量ではなく, 積  $\rho dV$  が不変量となる<sup>\*14</sup>.

電流密度の 4 元ベクトル  $j^i = (c\rho, \mathbf{j})$  を導入すると, 作用の相互作用項は, 場を基調とした表現

$$S_{mf} = - \sum \frac{e}{c} \int A_i dx^i = - \frac{1}{c^2} \int A_i j^i d^4x$$

に書き換えられる [本稿次節で確認].

<sup>\*14</sup>  $dV$  の値は座標系ごとにも変わっても, これが指定する空間内の領域は座標系に依らずに定義され, そこに含まれる電荷  $\rho dV$  はどの座標系で見ても変わらない.

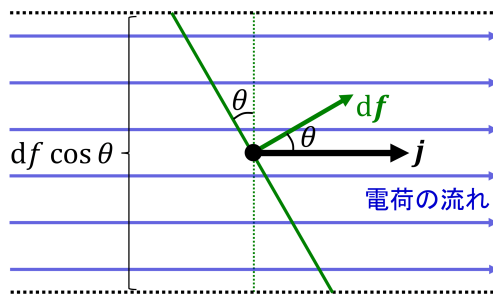


図 19 電流密度ベクトル (電荷の流れの密度・流束)  $\mathbf{j}$

## § 28 について

■電荷密度 (28.1) の引数  $(t, \mathbf{r})$  依存性 式 (28.1) の引数を明示すると

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))$$

となる。ここで位置  $\mathbf{r}$  は場の値を評価する観測点の位置であるのに対し、 $\mathbf{r}_a$  は粒子の位置であり、その引数  $t$  が場  $\rho(\mathbf{r}, t)$  の時間依存性となっている。これは荷電粒子の運動が電荷分布の時間変化を引き起こすという、当然の事実を表している。

■流れの密度 (流束)  $\mathbf{j}$  について 電流密度  $\mathbf{j}$  とは電荷の流れの方向を向き、大きさが自身に垂直な単位面積を単位時間に通過する電荷の総量に一致するようなベクトルである。ここから面積素ベクトル  $d\mathbf{f}$  を持つ面積素を単位時間に通過する電気量は  $\mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}$  で与えられることが分かる。実際、図 19 より電流密度  $\mathbf{j}$  と角度  $\theta$  を成す面要素を単位時間に通過する電荷の総量は

$$\mathbf{j} \times (d\mathbf{f} \cos \theta) = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}$$

となっている。

■電流密度 (28.2):  $j^i = \rho dx^i/dt$  の再定義 p.79, 1.6 で明確な意味を与えられずに導入された  $dx^i$  は、電荷が空間に連続的に分布している描像の下で点  $x^i$  にある流体粒子の  $dt$  中の変位 (の第  $i$  成分) を意味すると思われる。式 (28.2):  $j^i = \rho dx^i/dt$  はこの解釈と整合している。次に電荷が離散的な点粒子から成る描像に移るには、

$$j^i = \sum_a e_a \frac{dx^i}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \rightarrow j^i = \sum_a e_a \frac{dx_a^i}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad \frac{dx_a^i}{dt} \text{ は } a \text{ 番目の粒子の速度}$$

と再定義すれば良いと考えられる。連続体近似における表式は  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_a$  では  $dx^i/dt = dx_a^i/dt$ 、 $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_a$  では  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) = 0$  だから粒子系に対する表式に一致する。一方、粒子が希薄なとき、連続体に対する表式はもはや有効でない ( $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_a$  の位置では電荷の速度  $dx^i/dt$  はもはや定義されないから)。流体の速度  $dx^i/dt$  は  $\sum_a$  の外に出せるのに対し、粒子の速度  $dx_a^i/dt$  は  $\sum_a$  の外に出せない。

次元解析 電流密度 (28.4):  $j^i = (c\rho, \mathbf{j})$  の時間成分と空間成分は等しい次元を持つ：

$$[c\rho] = [j^\alpha].$$

$j^i$  が 4 元反変ベクトルであること  $j^i$  がベクトルとして変換することを確かめる p.79 の議論を, 粒子系に関して再定義した

$$j^i = \sum_a e_a \frac{dx_a^i}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$$

に対してやり直そう.

$$dt \int dV j^i = dt \sum_a e_a \frac{dx_a^i}{dt} = \sum_a e_a dx_a^i$$

の最右辺において  $e_a$  はスカラー,  $dx_a^i$  は 4 元反変ベクトルだから, 最右辺全体は 4 元反変ベクトルである. よって最左辺も 4 元反変ベクトルでなければならない. ところが  $dV dt$  はスカラーだから,  $j^i$  は 4 元反変ベクトルである.

あるいは  $j^i$  を反変ベクトルであることが明白な形に書き換えるのも教育的である [2, p.164].  $a$  番目の粒子の固有時間を  $\tau_a$  と書くと, 電流密度の 4 元ベクトルは

$$\begin{aligned} j^i(x) &= \sum_a e_a c \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \frac{dx_a^i}{dx^0} \\ &= \sum_a e_a c \int \delta(x - x_a) \frac{dx_a^i}{dx_a^0} dx_a^0 \\ &= \sum_a e_a c \int \delta(x - x_a) \frac{dx_a^i}{d\tau_a} d\tau_a \end{aligned} \quad (19)$$

と書き換えられる. 最右辺において  $d\tau_a$  はスカラーであり,  $dx_a^i/d\tau_a$  は 4 元反変ベクトルである. また座標変換  $x \rightarrow x'$  に伴うデルタ関数の変換則を調べると,

$$1 = \int \delta^4(x') d^4x' = \int \delta^4(x) d^4x = \int \delta^4(x) \frac{\partial(x)}{\partial(x')} d^4x', \quad \therefore \delta^4(x') = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \delta^4(x)$$

となるので, デルタ関数は一般にはスカラー密度である. ところが (空間反転を含まない) Lorentz 変換では  $\frac{\partial(x)}{\partial(x')} = +1$  だから, 上式の最右辺は全体として反変ベクトルになっていることが分かる.

$S_{mf}$  の  $j^i$  を用いた書き換え 作用の相互作用項が  $j^i$  を用いて p.80 のように書き換えられることを, 粒子系に関して再定義した

$$j^i = \sum_a e_a \frac{dx_a^i}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$$

に対して確かめる.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c^2} \int A_i j^i d^4x &= -\frac{1}{c} \int A_i \left\{ \sum_a e_a \frac{dx_a^i}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \right\} dV dt = -\sum_a \frac{e_a}{c} \int A_i(\mathbf{r}_a, t) \frac{dx_a^i}{dt} dt \\ &= -\sum_a \frac{e_a}{c} \int A_i(\mathbf{r}_a, t) dx_a^i. \end{aligned}$$

式 (31.3) の 3 行下の式について 同様に

$$\int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \sum_a e_a \mathbf{v}_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV = \sum_a e_a \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_a)$$

と考えれば良い. これは単位体積中の電荷が電場からされる仕事率 (Joule 熱) が  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$  と表されることを意味する. 共通の電荷  $e$  を持つ粒子が数密度  $n$  の連続体として分布しているときには, その局所的な速度を  $\mathbf{v}$  とすると

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = n(\mathbf{v} \cdot e\mathbf{E})$$

なので、そのことは見やすい。

式 (34.1) の 1 つ前の式から式 (34.1) への書き換えについて ここで  $v \rightarrow v_a$  と書き換えられているのも同様。

## § 29. 連続の方程式

電荷保存則は連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (20)$$

によって表されることを説明する。まず、電荷保存則は次のように言い表せる：

空間に固定した領域内部の電荷が増加したならば、それは領域内部で電荷が無から生じたからではなく、領域の表面を通して電荷が内部に流入したからである。 (21)

特に空間の各位置の周りに無限小領域  $d^3x$  を考えれば、単位時間当たりの内部の電荷  $\rho d^3x$  の増加量は  $\frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x$  である。一方、電流密度  $\mathbf{j}$  は名前の通り電荷の流れの密度を表すので、電荷の流入量は  $-\nabla \cdot \mathbf{j} d^3x$  である。これらを等置して連続の式 (20) を得る。さらに各体積要素  $d^3x$  で

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x = -\nabla \cdot \mathbf{j} d^3x$$

が成り立てば、任意の有限な領域  $V$  に対しても保存則の主張 (21) が成り立つ。実際、領域  $V$  を構成する全ての体積要素  $d^3x$  について電荷の流入量  $-\nabla \cdot \mathbf{j} d^3x$  を足し合わせると体積要素間の電荷の出入りが相殺され、表面  $S$  からの流入量  $-\int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}$  になる<sup>\*15</sup>。こうして領域  $V$  内部の電荷  $\int_V \rho d^3x$  は、単位時間に表面  $S$  から流入した分だけ増加することになる：

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho d^3x = -\int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}.$$

ここで総電荷  $\int_V \rho d^3x$  は時間  $t$  だけの関数であることに注意して、常微分の記号  $d/dt$  を用いた。  $d\mathbf{f}$  は表面  $S$  の外向き法単位ベクトルである。

連続の式は

$$\partial_i j^i = 0$$

とも表される。[このように書けば左辺はスカラーなので、共変性が明白である (付録 B 参照)。これは時空において電流がわき出さず、滞りなく流れることを意味する。]

■粒子系 粒子系に関する表式

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))$$

に対して連続の式は自動的に満たされる [本稿次節で確認]。

<sup>\*15</sup> このことは体積要素  $dV$  が直方体  $d^3x$  に限らず無限小の四面体の場合にも成り立ち、数学的には発散定理と呼ばれ、 $\int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}$  と書かれる

■ゲージ不変性と電荷保存則 最後にゲージ不変性と電荷保存則の関係性について、§ 18(p.56の脚注)の説明と併せて論じる。作用のゲージ不変性が非自明な項は粒子と場の相互作用項であり、その2通りの表現

$$S_{\text{mf}} = - \sum \frac{e}{c} \int A_i dx^i, \quad S_{\text{mf}} = - \frac{1}{c^2} \int A_i j^i d^4x$$

に応じてゲージ不変性と電荷保存則の関係を2通りに見ることができる。相互作用項  $S_{\text{mf}}$  のゲージ変換  $\delta A_i = -\partial_i f$  に伴う変化

$$\delta S_{\text{mf}} = \sum \frac{e}{c} \int df, \quad \delta S_{\text{mf}} = \frac{1}{c^2} \int (\partial_i f) j^i d^4x$$

は電荷保存則により  $e$  が時間に依らない定数であれば、あるいは連続の式  $\partial_i j^i = 0$  が成り立てば、それぞれ

$$\delta S_{\text{mf}} = \sum \int d \left( \frac{e}{c} f \right), \quad \delta S_{\text{mf}} = \frac{1}{c^2} \int \partial_i (f j^i) d^4x$$

となる。これらは与えられた境界の値で決まるような、変分をとると落ちる量となっているから、運動方程式は不変に保たれる。(ここでの  $\delta$  はゲージ変換に伴う変化量を表し、変分の意味ではないことに注意する。)このようにゲージ不変性と電荷保存則は密接に関係している。

## § 29 について

■粒子系に対する密度の表式が連続の式を自動的に満たすこと § 28の補足にて修正した電流密度の表式

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))$$

を用いて、粒子系に対する密度の表式が連続の式を自動的に満たすことの証明 pp.81-82を多粒子系の場合に拡張する。電荷密度・電流密度の式

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))$$

に対して  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$  を自動的に満たすことは、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) &= \sum_a e_a \frac{\partial}{\partial t} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) = \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_a(t)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \\ &= - \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \partial_i j^i(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a v_a^i(t) \partial_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \\ &= \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \end{aligned}$$

となるので、これらを辺々足すと連続の式が得られる [7, p.195]。これは系が生成消滅しない点電荷で構成されていることを電荷密度・電流密度の式が適切に表現しているため、電荷保存則すなわち連続の式が満たされるものと解釈できる。

一方で電荷密度・電流密度の具体的な表式とは無関係に、Maxwell方程式(30.2):  $\partial_k F^{ik} = -\frac{4\pi}{c} j^i$  の中に連続の式が含まれていることが次のように分かる (§ 30参照)。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = \partial_i j^i = -\frac{1}{4\pi/c} \partial_i \partial_k F^{ik} = 0.$$

最後の等号では添字  $i, k$  について  $\partial_i \partial_k$  は対称、 $F^{ik}$  は反対称なので  $\partial_i \partial_k F^{ik} = 0$  となることを用いた。



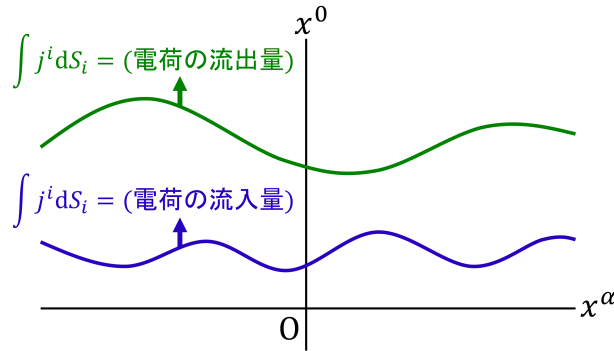


図 20 全 3 次元空間を含む無限超曲面と，面を通過する電荷

■全電荷の表式 (p.82, 1.9) について  $\int \rho dV = \frac{1}{c} \int j^0 dS_0 = \frac{1}{c} \int j^i dS_i$  の 2 番目の等号は， $x^0$  軸に垂直な超平面内のベクトルに対して  $dx^0 = 0$  より  $dS_1, dS_2, dS_3 = 0$  となるから．これは  $xy$  平面に平行な領域の面積分で  $d\mathbf{f}$  が  $x, y$  成分を持たない，あるいは領域の  $yz, zx$  面への正射影が面積を持たないのに似ている．

■全電荷の保存 「 $x^0 = \text{一定}$  というどの超平面についておこなっても積分  $\int j^i dS_i$  は同じである」 (p.82, 1.13) ことを示すのに，単位時間だけ隔たる 2 枚の  $x^0 = (\text{一定})$  の超平面における総電荷の差を考えれば，Gauss の定理 (6.15) を用いる必要はない：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int j^0 dV &= - \int \partial_\alpha j^\alpha dV \quad (\text{連続の式 } \partial_i j^i = 0) \\ &= 0. \quad (\text{空間の無限遠で } j^\alpha = 0) \end{aligned}$$

■「全 3 次元空間を含む 2 つの任意の無限超曲面」(式 (29.5) の 2 行下) について 図 20 参照．

■§ 29 最終段落について ポテンシャルの不定性が運動方程式に影響しないことの電荷保存則を用いた確認では次のように部分積分を用いる． $S_{mf}$  をゲージ変換すると

$$S_{mf} \rightarrow S_{mf} + \frac{1}{c^2} \int (\partial_i f) j^i d\Omega = S_{mf} + \frac{1}{c^2} \int \partial_i (f j^i) d\Omega - \frac{1}{c^2} \int f \underbrace{\partial_i j^i}_{=0} d\Omega = S_{mf} + \int f j^i dS_i.$$

最後の第 2 項の積分領域である「境界の超曲面」(p.83, 1.4) とは図 21 のような“円柱”の表面である．その“側面”すなわち 3 次元空間の無限遠では  $j^i = 0$  なので  $x^0 = ct_A, ct_B$  での積分が残る．ここでは変分をとる際，粒子の座標が変化しないからこの積分は変分によって落ちる．

### § 30. マクスウェル方程式の第 2 の組

場と粒子の完全な作用  $S = S_m + S_{mf} + S_f$  (§ 27, § 28) に最小作用原理を適用し，与えられた粒子の運動に対して，場  $A^i$  だけを変化させたとき作用の変分が  $\delta S = 0$  となることを要求すると，場の方程式

$$\partial_k F^{ik} = -\frac{4\pi}{c} j^i \quad (30.2)$$

が導かれる (導出は下記)．これは Maxwell 方程式の第 2 の組

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (30.3-4)$$

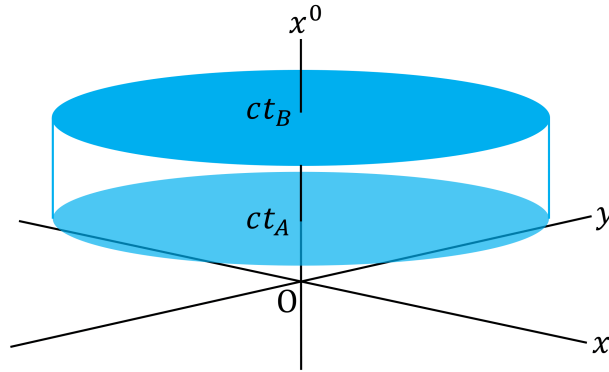


図 21 超平面  $x^0 = ct_A, ct_B$  によって切り取られた時空の領域

を与える (導出は下記). [このように Maxwell 方程式の非自明な組は源 (物質) の項を含む.]

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \Leftrightarrow \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = 4\pi \int \rho dV$$

[電荷はその周りにわき出すような電場を作る],

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \Leftrightarrow \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \left( \mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{f}$$

[電流 (密度) と変位電流  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  が周りに磁場の渦を作る].

Maxwell 方程式  $\partial_k F^{ik} = -\frac{4\pi}{c} j^i$  は連続の式  $\partial_i j^i = 0$  を含んでいる. [本稿では § 29 のノートで確認済み\*16. 逆に Maxwell 方程式が変位電流の項を欠いていたら, 電荷保存則・ゲージ不変性・Lorentz 不変性が破れる].

### § 30, 式の導出など

■場の方程式 (30.2) の導出 完全な作用

$$S = S_m - \frac{1}{c} \int \left( \frac{1}{c} A_i j^i + \frac{1}{16\pi} F_{ik} F^{ik} \right) d^4x$$

の場  $A_i$  に関する変分をとると,

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{c} \int \left( \frac{1}{c} j^i \delta A_i + \frac{1}{8\pi} F^{ik} \delta F_{ik} \right) d^4x \\ &\quad (\because \delta S_m = 0, F^{ik} \delta F_{ik} = F_{ik} \delta F^{ik} \text{ [計量は変分されないため]}) \\ &= -\frac{1}{c} \int \left\{ \frac{1}{c} j^i \delta A_i + \frac{1}{8\pi} F^{ik} (\partial_i \delta A_k - \partial_k \delta A_i) \right\} d^4x \\ &= -\frac{1}{c} \int \left( \frac{1}{c} j^i \delta A_i - \frac{1}{4\pi} F^{ik} \partial_k \delta A_i \right) d^4x \end{aligned}$$

\*16 等価的に

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \frac{1}{4\pi} \left( c \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad (\because \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0)$$

としても良い.

(第2項でダミー添字の入れ替え  $i \leftrightarrow k$  を行い, 反対称性  $F^{ki} = -F^{ik}$  を利用)

$$= -\frac{1}{c} \int \left( \frac{1}{c} j^i + \frac{1}{4\pi} \partial_k F^{ik} \right) \delta A_i d^4x + \frac{1}{4\pi c} \int F^{ik} \delta A_i dS_k \Big| . \quad (\text{部分積分した}) \quad (30.1)$$

となる. 最右辺の境界項は空間の無限遠と時間の限界から成り [§ 29 のノート の図 21 参照], 3次元空間の無限遠では場はゼロであり, 時間の限界では変分  $\delta A_i = 0$  である. よって境界項はゼロであり, そこで任意の変分  $\delta A_i = 0$  に対して  $\delta S = 0$  となることを要求すると, 場の方程式 (30.2) が得られる. [本稿の付録 D では以上の議論を, 一般相対性理論の場合へと一般化する.]

■ Maxwell 方程式 (30.2) の, 式 (30.3), (30.4) への書き換え 電磁場を用いて Maxwell 方程式 (30.2):  $\partial_k F^{ik} = -\frac{4\pi}{c} j^k$  を具体的に書き下すと,

$$-4\pi\rho = -\frac{4\pi}{c} j^0 = \partial_k F^{0k} = \partial_\alpha F^{0\alpha} = -\partial_\alpha E_\alpha \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho : (30.4),$$

$$-\frac{4\pi}{c} j^\alpha = \partial_k F^{\alpha k} = \partial_0 F^{\alpha 0} + \partial_\beta F^{\alpha\beta} = \partial_0 E_\alpha - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta H_\gamma \Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} : (30.3)$$

となる.

## § 30 について

■  $\delta S$  の式 (30.1) について 右辺第2項の符号は + と考えられる [本稿では修正済み]. これは以降の議論には影響しない.

■ Hamilton 主関数 作用を現実の場の時間発展に対して評価し, 終状態における力学変数の関数と見なす. このとき, 終状態の変化に伴う作用の変化は, 式 (30.1) より

$$\delta S = \frac{1}{4\pi c} \int F^{i0} \delta A_i dV$$

で与えられる. この結果は次のように解釈できる. 空間を体積  $\Delta V$  の胞 (セル) に分割し, その中心に位置する格子点  $\mathbf{r}$  での場の値  $A_i(\mathbf{r}, t)$  を力学変数  $q(t)$  と見なす. (ここでは Lorentz 添字  $i$  と位置  $\mathbf{r}$  が力学変数  $q$  の種類を指定するラベルである.) また

$$\pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_i)} = -\frac{1}{4\pi c} F^{0i}$$

(ただし  $\mathcal{L}$  はラグランジアン密度, 最後の等号は教科書 p.91 (§ 33 の式 (27)) を参照) は場の運動量密度,  $\pi^i \Delta V \equiv p^i$  は胞が持つ, 力学変数  $A_i(\mathbf{r}, t)$  に共役な運動量と見なせる. このとき上式は

$$\delta S = \sum_{\text{胞}} p^i \delta A_i, \quad \frac{\partial S}{\partial A_i} = p^i$$

を意味する.

なお, 我々のラグランジアン密度  $\mathcal{L}$  の選択では  $\pi^0 = 0$  である. Fermi によって提案されたラグランジアン密度  $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_i A_k) (\partial^i A^k)$  は我々の  $\mathcal{L}$  と場の4元発散だけ異なるため, 等価なラグランジアン密度であり (§ 32 のノート参照), これを用いた場合  $\pi^i = -\frac{1}{c^2} \dot{A}^i$  となる [5, p.89].

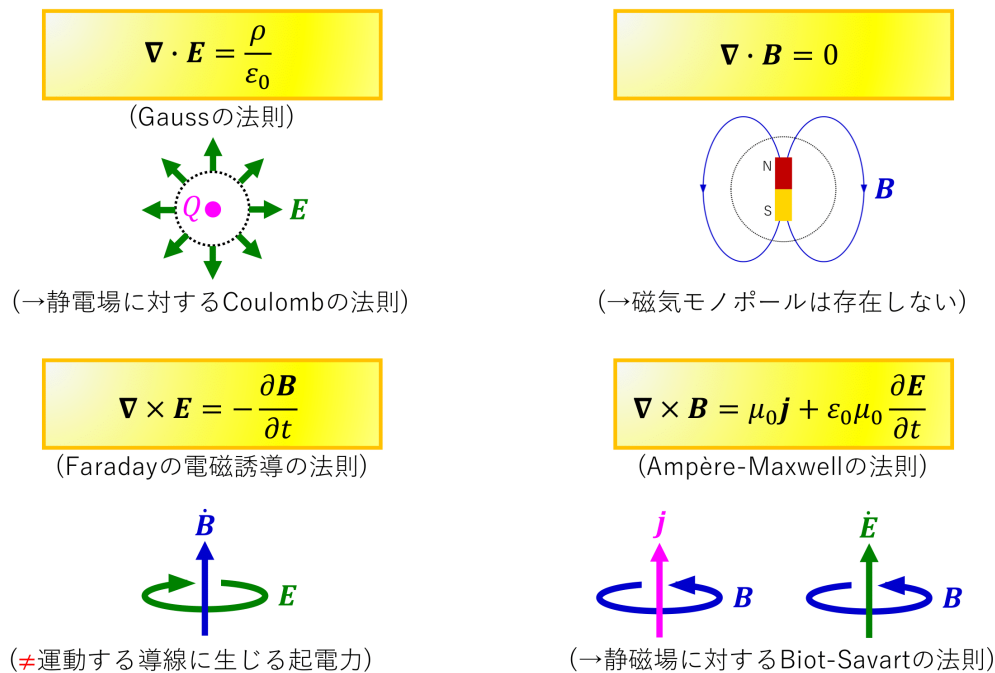


図 22 Maxwell 方程式まとめ (MKSA 単位系を採用)

■Gauss の法則 (30.5) について 任意の閉曲面  $S$  からの電場のわき出しが,  $S$  の外部の電荷分布とは無関係に  $S$  の内部の総電荷  $Q = \int_V \rho dV$  で決まることを意味している. 曲面の外部の電荷が作る電気力線 (電場ベクトルをなめらかに繋いだ積分曲線) は, 表面に入射した後, 再び表面の外へ出るため, 電場のわき出しに寄与しない. また表面が入り組んでいる場合, 内部の電荷が作る電気力線は表面において出入りを繰り返す得る. しかし表面を複雑に変形しても, 内部の電荷の総量が変わらない限り, 電荷の正味のわき出しは不変である.

■変位電流の定義について 教科書では変位電流を, 電流密度  $\mathbf{j}$  にならぶ量として  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  で定義している (p.85). これに対し積分形の Ampère-Maxwell の法則 (30.8):

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} \int_S \left( \mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{f}$$

において, 曲面  $S$  を貫く全電流  $I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}$  と同様に磁場の循環 (周回積分)  $\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}$  をもたらす量として, 電場の束の時間変化

$$\frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f}$$

を 1 種の電流と見て変位電流と定義することもある.

■Maxwell 方程式 (まとめ) § 26 と § 30 で得た Maxwell 方程式を, 電場と磁場に対する渦とわき出しの式として改めて図 22 にまとめておこう. 各式の定性的な意味合いは以下の通りである.

- Gauss の法則  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$   
電荷の周りに電場がわき出すように分布する。  
– 例えば静電場に対する Coulomb の法則はここから導かれる (§ 36).
- Faraday の電磁誘導の法則  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$   
磁場の時間変化は周りに渦を巻くような電場分布を作る。  
– 仮に空間にコイルが置かれていれば、導体内部の電荷がこの電場から力を受けて電流が流れる (電場そのものは導体の有無に関わらず存在する). これに対して一定の磁場の中を導体が動くときに生じる起電力は、Lorentz 力によるものである。
- 磁場はわき出さないこと  $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$   
– これにより磁気モノポール (N 極, S 極が単独で存在すること) が禁止される. 実際, 磁石の N 極だけを単離できたとする, それを取り囲む閉曲面からは磁場が “わき出す” ことになる。
- Ampère-Maxwell の法則  $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$   
「電流」と「電場の時間変化」は周りに渦を巻くような磁場分布を作る。  
– 直線電流や円形電流の作る静磁場の公式の基になる Biot-Savart の法則はここから導かれる (§ 43). 電場の時間変化が磁場を作ることは, 磁場の時間変化が電場を作ること (電磁誘導の法則) と対称的な関係にあり, 電磁波においては時間変化する電場と磁場がお互いを生み出しながら空間を伝播する (第 6 章).

次にいくつか詳細を補足する.

積分形の Maxwell 方程式の無矛盾性 まず積分形の電磁誘導の法則

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}$$

を考える (C は曲面 S の縁を成す閉曲線,  $d\mathbf{r}$  はその線要素ベクトル). Maxwell 方程式  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  によれば磁場はわき出さない. ここから磁束  $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}$  の値は閉曲線 C を縁として共有する全ての曲面 S に共通であることが保証される. 実際そのような 2 つの異なる曲面  $S_1, S_2$  をとると,  $S_1$  と  $S_2$  から作られる閉曲面  $S = S_2 - S_1$  からの磁場のわき出しはゼロになるため

$$0 = \oint_S = \int_{S_2} - \int_{S_1}, \quad \therefore \int_{S_1} = \int_{S_2}.$$

また Maxwell 方程式により電荷保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = \nabla \cdot \left( \mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0$$

が自動的に満たされる. これは第 2 辺を見ると分かるように, 変位電流も含めた電流の密度がわき出さないことを意味している. ここから積分形の Ampère-Maxwell の法則

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} \int_S \left( \mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{f}$$

の右辺における面積積分の値が, 閉曲線 C を縁として共有する全ての曲面 S に共通であることが保証される.

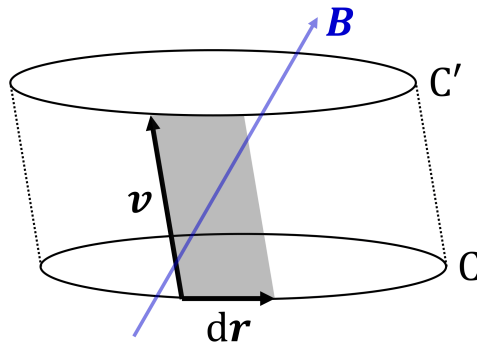


図 23 コイル C が単位時間に C' まで移動して作られる側面の要素  $\mathbf{v} \times d\mathbf{r}$

**運動する導体内に発生する起電力** 導線コイル C (閉じた導線) が磁場の中を動くとき, 導体内部の電荷が Lorentz 力を受けるため実効的に起電力  $V_{\text{emf}}$  が生じる (emf は electromotive force の略). しかしこれは上記の電磁誘導とは異なる現象であり, このときの起電力は磁場が時間変化しない場合にも生じ得る. ところが奇しくも, この場合の起電力も電磁誘導の場合と全く同じ形

$$V_{\text{emf}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \quad (22)$$

に表される ( $\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}$  はコイルを貫く磁束, 導出は下記). これは「現在のところ偶然のいたずらとしか考えようがない」 [7, pp.209–212].

**起電力の式 (22) の導出** 一般にはコイル C を貫く磁束の変化への寄与は, コイルの運動だけでなく磁場自身の変化からも来る. しかしそれらは Leibniz 則により, 個別に扱うことができるので, 以下では磁束密度  $\mathbf{B}$  が時間変化しない場合に話を限定する. 速度  $\mathbf{v}$  で運動する導線の素片  $d\mathbf{r}$  内の電荷  $e$  に働く Lorentz 力は, その位置での磁束密度  $\mathbf{B}$  を用いて  $e\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$  と表される. そこで実効的な電場を  $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$  と同定し, コイル C の起電力を

$$V_{\text{emf}} = \int_C \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \int_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{r})$$

と考えると, 最右辺の  $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{r})$  は図 23 のように C が単位時間のうちに移動して作られる側面の要素  $\mathbf{v} \times d\mathbf{r}$  を貫く磁束になっている. ところで単位時間後のコイルの位置を C' とすると, 磁場はわき出さないから ( $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ) C' を貫く磁束を計算するのに C' を縁とする任意の曲面を選んで良い. そこで

$$(C' \text{ を貫く磁束}) = (C \text{ を貫く磁束}) + (\text{側面を貫く磁束})$$

とすると, (側面を貫く磁束)  $= \int_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{r})$  は単位時間当たりの磁束の変化  $d\Phi/dt$  に一致していることが分かる. 以上より起電力の式 (22) を得る.

**磁場のわき出し** 磁場がわき出さないことは, 磁石の N 極または S 極が単独で存在できないこと (磁気モノポールが禁止されること) を含意する. 実際, 磁石の N 極だけを単離できたかすると, それを取り囲む閉曲面からは磁場が“わき出す”ことになる. 現実には図 24 のように磁石の N 極と S 極は必ずペアで現れ, 磁石を囲う閉曲面からの N 極側での磁場の“流出”と S 極側での“流入”は相殺するため, わき出しはゼロになる. 実は棒磁石内部には S 極から N 極に向かう磁場が分布しているため, 図 25 のように N 極だけを囲う閉曲面をとってもやはり磁場のわき出しはゼロになる.

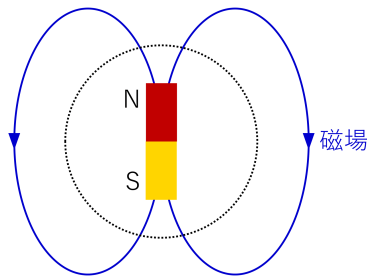


図 24 磁石全体を取り囲む閉曲面

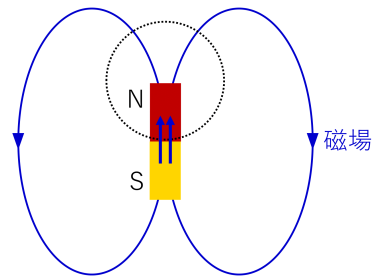


図 25 N 極だけを取り囲む閉曲面

### § 31. エネルギーの密度と流れ

Maxwell 方程式から

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi} \right) = \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{S} \equiv \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} : \text{Poyntingベクトル} \quad (23)$$

が導かれる (導出は下記).

一方, 粒子の運動方程式より, 静止エネルギーを含めた運動エネルギー  $\mathcal{E}_{\text{kin}} = \sum \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$  (§ 17) に対して電場のする仕事と粒子系の運動エネルギーの関係

$$\int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV = \sum e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\text{kin}} \quad (24)$$

が成り立つ (導出は下記,  $\sum$  は積分範囲内の全粒子にわたる和). よって式 (23) の両辺を空間全体にわたって体積積分すると

$$\frac{d}{dt} \left( \int \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi} dV + \sum \mathcal{E}_{\text{kin}} \right) = 0$$

となる (無限遠で場はゼロになるから,  $\mathbf{S}$  の表面積分は落ちる). 空間全体の電磁場と粒子から成る閉じた系に対して全エネルギーは保存することを要求すると,

$$W \equiv \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi}$$

は電磁場のエネルギー密度と解釈できる.

次に空間の有限領域にわたる体積積分を考えると

$$\frac{d}{dt} \left( \int \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi} dV + \sum \mathcal{E}_{\text{kin}} \right) = - \oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f} \quad (25)$$

となるので ( $d\mathbf{f}$  は表面の面要素ベクトル),  $\mathbf{S}$  は場のエネルギーの流れの密度と解釈できる. 実際このとき上式 (25) は単位時間に流出する場のエネルギーだけ内部の場と粒子のエネルギーが減少することを表すことになる. [ここでは粒子が目している空間領域から逃げる場合は考えていない.]

[以上を踏まえて最初の式 (23) を振り返ると, これは単位時間において単位体積の場のエネルギーの減少量  $-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi} \right)$  が, 場のエネルギーの流出  $\nabla \cdot \mathbf{S}$  と電場の粒子に対する仕事  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$  によってもたらされることを意味している.]

§ 31, 式の導出など

■式 (23) の導出 Maxwell 方程式 (26.1), (30.3):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \right) &= \frac{1}{4\pi} \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \\ &= -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \frac{c}{4\pi} \{ \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \} \\ &= -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \nabla \cdot \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} \equiv \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} : (23) \end{aligned}$$

を得る. 最後の等号はベクトル解析の公式  $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$  による.

■式 (24) の導出

- 第 1 の等号について

荷電粒子系の電流密度の表式

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))$$

による (本稿の § 28, § 29 の補足を参照).

- 第 2 の等号について, 式 (17.7) を参照. 粒子が多数ある場合への一般化は直接的である.

§ 31 について

■エネルギー密度の表式 (31.5) について コンデンサーやソレノイドコイルに蓄えられるエネルギーの計算から, 静電場または静磁場の一方のみが存在する場合のエネルギー密度がそれぞれ, 国際 (MKSA) 単位系において  $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2, \frac{1}{2}\mu_0 H^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}$  となることが分かっている. 国際単位系から Gauss 単位系に移るには

$$\sqrt{4\pi\epsilon_0} \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}, \quad \sqrt{4\pi\mu_0} \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H} \quad (\sqrt{4\pi/\mu_0} \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B})$$

とすれば良い. よって Gauss 単位系における表式はそれぞれ  $E^2/8\pi, H^2/8\pi$  となる. エネルギー密度の表式 (31.5):  $W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}$  はその自然な一般化となっている.

なお, 同様に Poynting ベクトルの表式を国際単位系から Gauss 単位系に移すと

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad \rightarrow \quad \mathbf{S} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{E} \times \mathbf{H} : (31.2)$$

となる.

§ 32. エネルギー・運動量テンソル

電磁場・重力場を想定し, 場  $q = \{q^{(l)}\}$  から成る系の作用を

$$S = \int L dt = \int \Lambda dV dt, \quad \Lambda(q, q_{,i}) : \text{Lagrangian 密度}$$



と書く ( $q_i \equiv \{q_i^{(l)}\}, q_i^{(l)} \equiv \partial_i q^{(l)}$ )\*17. 系が閉じていることを反映して,  $\Lambda$  は  $x^i$  に依存しない. このとき最小作用原理から, 運動方程式

$$\partial_i \frac{\partial \Lambda}{\partial q_i^{(l)}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q^{(l)}} = 0 \quad (32.2)$$

が導かれる (導出は下記). ここから保存則

$$\partial_k T_i^k = 0, \quad T_i^k = \sum_l q_i^{(l)} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k^{(l)}} - \delta_i^k \Lambda: \text{エネルギー・運動量テンソル} \quad (32.4-5)$$

が得られる (導出は下記). これは

$$P^i = \text{const} \int T^{i0} dV$$

が保存することを意味する. [この保存則は系が閉じており,  $\Lambda$  が  $x^i$  に依存しないことに由来しているから,] これは系の運動量の 4 元ベクトルと見なされる. ところが

$$T^{00} = \sum_l \dot{q}^{(l)} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}^{(l)}} - \Lambda$$

はエネルギー密度 [ハミルトニアン密度] だから, そのためには  $\text{const} = 1/c$  とおけば良い.

$$T^{ik} \rightarrow T'^{ik} = T^{ik} + \partial_l \psi^{ikl}, \quad \psi^{ikl} = -\psi^{ilk} \quad (32.7)$$

とすると  $T'^{ik}$  もまた保存則  $\partial_k T'^{ik} = 0$  を満たす ( $\because \partial_k \partial_l \psi^{ikl} = 0$ ). しかも  $T^{ik}$  と  $T'^{ik}$  は同じ全 4 元運動量  $P^i$  を与える (確認は下記). ところで運動量密度  $T^{i0}/c$  を用いて角運動量密度を表せる, すなわち角運動量が

$$M^{ik} = \frac{1}{c} \int (x^i T^{k0} - x^k T^{i0}) dV$$

によって与えられることを要求すると, 角運動量の保存則  $\partial_l (x^i T^{kl} - x^k T^{il}) = 0$  は  $T^{ik}$  が対称であること

$$T^{ik} = T^{ki} \quad (32.10)$$

を要請する (確認は下記). 前述の  $T^{ik}$  の任意性を利用して  $T^{ik}$  を対称に選ぶことができる.

以上より

$$T^{00} = W: \text{エネルギー密度}, \quad \frac{1}{c} T^{\alpha 0}: \text{運動量密度}$$

である. このとき

$$\begin{aligned} \partial_i T^{0i} = 0 &\rightarrow c T^{0\alpha} = S^\alpha: \text{エネルギー流束}, \\ \partial_i T^{\alpha i} = 0 &\rightarrow T^{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha\beta}: \text{応力テンソル} \quad (\alpha: \text{力の向き}, \beta: \text{面}) \end{aligned}$$

となる. よって

$$T^{0\alpha} = c \times (\text{運動量密度})^\alpha = \frac{1}{c} \times (\text{エネルギーの流れの密度})^\alpha.$$

\*17 場に対しては記号  $\phi$ , ラグランジアン密度に対しては記号  $\mathcal{L}$  を充てる方が一般的である.

§ 32, 式の導出など

■ Euler-Lagrange 方程式 (32.2) の導出 場  $q^{(l)}$  の変分に対して作用  $S = \int \Lambda dV dt$  が停留値をとる条件は

$$0 = \delta S = \int \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial q^{(l)}} \delta q^{(l)} + \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_i q^{(l)})} \delta (\partial_i q^{(l)}) \right\} dV dt = \int \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial q^{(l)}} - \partial_i \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_i q^{(l)})} \right\} \delta q^{(l)} dV dt$$

と書ける (ただし場の種類  $l$  についても和をとる). ただし最後の等号では  $\delta (\partial_i q^{(l)}) = \partial_i (\delta q^{(l)})$  に注意して被積分関数の第 2 項を部分積分した. その際, 作用の積分が行われる時空領域の境界は空間の無限遠の“側面”と, 場の値が指定された“平面”  $t = t_1, t_2$  から成り, ここでは場または変分  $\delta q^{(l)}$  がゼロになることを用いた. 上式最右辺において場の種類ごとに変分  $\{\delta q^{(l)}\}$  を独立にとれることから, Euler-Lagrange 方程式 (32.2):

$$\partial_i \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_i q^{(l)})} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q^{(l)}} = 0$$

を得る.

■ 保存則 (32.4-5) の導出

$$\begin{aligned} \partial_i \Lambda &= \frac{\partial \Lambda}{\partial q^{(l)}} \partial_i q^{(l)} + \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_k q^{(l)})} \partial_i (\partial_k q^{(l)}) \quad [\text{ここで } \Lambda \text{ が } x \text{ に陽によらないことを用いた}] \\ &= \left( \partial_k \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_k q^{(l)})} \right) \partial_i q^{(l)} + \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_k q^{(l)})} \partial_i \partial_k q^{(l)} \\ &\quad (\because \text{Euler-Lagrange 方程式 (32.2) [これも対称性の帰結]}) \\ &= \partial_k \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_k q^{(l)})} \partial_i q^{(l)} \right) \end{aligned}$$

より, 式 (32.4-5) を得る.

■  $T^{ik}$  と式 (32.7) の  $T^{ik}$  が同じ全 4 元運動量  $P^i$  を与える理由 再定義されたエネルギー・運動量テンソル (32.7) における付加的な項  $\partial_l \psi^{ikl}$  の, 運動量  $P^i = \frac{1}{c} \int T^{i0} dV$  への寄与は

$$\frac{1}{c} \int \partial_l \psi^{i0l} dV = \frac{1}{2c} \int \partial_l (\psi^{i0l} - \psi^{l0i}) dV = \frac{1}{2c} \int \partial_\alpha (\psi^{i0\alpha} - \psi^{i\alpha 0}) dV$$

である. 最右辺は 3 次元空間の無限遠の表面積分に変換されてゼロになるので, エネルギー・運動量テンソルの再定義に伴って全 4 元運動量  $P^i$  は変化を受けない.

■ 軌道角運動量が保存する条件としてエネルギー・運動量テンソルの対称性 (32.10) を導出 角運動量保存則は

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_l (x^i T^{ki} - x^k T^{il}) = \delta_l^i T^{ki} + x^i \partial_l T^{kl} - \delta_l^k T^{il} - x^k \partial_l T^{il} \\ &= T^{ki} - T^{ik} \quad (\because \partial_l T^{il} = 0) \end{aligned}$$

と書き換えられる. これはエネルギー・運動量テンソルの対称性を意味する.

§ 32 について

■ ラグランジアン密度の任意性 粒子系の理論では, ラグランジアンにはゲージ変換  $L \rightarrow L + df/dt$  を施す自由度がある (『力学』 § 2). 場の理論に関しても, ここで同様の考察を行っておくのが適切であろう.

ラグランジアン密度を

$$\Lambda \rightarrow \Lambda' = \Lambda + \partial_\mu f^\mu$$

と変更しても運動方程式は不変である。実際、作用は時空のある領域  $\Omega$  にわたるラグランジアン密度の積分であることを思い出すと、一般に場の関数  $f^\mu$  の 4 元発散  $\partial_\mu f^\mu$  だけ異なる 2 つのラグランジアン密度は、領域  $\Omega$  の表面にわたる  $f^\mu$  の積分だけ異なる 2 つの作用を与える。ところで最小作用原理において領域  $\Omega$  の表面は空間の無限遠の“側面”と、場の値が指定された“平面”  $t = t_1, t_2$  から成り、ここでは場またはその変分がゼロになるため、2 つの作用の差は変分をとると落ちる。よって作用が停留値をとる条件に他ならない場の方程式は、2 つのラグランジアン密度に対して共通となる。

■「力学でエネルギー保存を導きだす手続きと同じ」(p.87 一番下)について 『力学』 § 6 参照 [3, p.16].

■いくつかの量  $q^{(l)}$  があるときの  $T_i^k$  が式 (32.5) になることの確認 導出過程で  $q \rightarrow q^{(l)}$  の置き換えをし、 $l$  について Einstein の縮約記法を適用するだけで良い。

■式 (32.3) の  $T_i^k$  について  $\partial_k T_i^k = 0$ : (32.4) と  $\partial_k T^{ik} = 0$ : (32.12) を見比べると、あるいは p.92 の上 2 式を見比べると、 $T_i^k$  は  $T_i^k$  のことであり、 $g^{mi}$  と縮約すると ( $T^{km}$  でなく)  $T^{mk}$  になると考えられる。式 (32.3) の段階ではこれは対称テンソルでないから、この区別は重要である。

■「このベクトルは系の運動量の 4 元ベクトルと同一のものとみなさなければならない」(p.88 下から 9 行目) について  $\Lambda$  が  $x^i$  に依らないこと (時空並進対称性) に付随する保存量だから。電磁場に対してこれが妥当だったことは § 33 で裏付けられる。

■角運動量 (32.8) について  $dP^i$  を 3 次元空間の体積  $dV$  がもつ運動量または (エネルギー)/ $c$  とする、すなわち  $dP^i \equiv \frac{T^{i0}}{c} dV = \frac{T^{i0}}{c} dS_0$  とすると、3 次元空間全体にわたる積分

$$\int (x^i dP^k - x^k dP^i) = \frac{1}{c} \int (x^i T^{k0} - x^k T^{i0}) dS_0$$

は系の全角運動量となる。これが保存することは考えている系が閉じているため、時空における回転対称性を持つことから要求される (直接的な証明は付録 E)。これに対し § 14 の角運動量保存則は粒子系に対する議論であった。

式 (32.8) の 4 元角運動量が保存する条件として、エネルギー・運動量テンソル  $T^{ik}$  の対称性を導いた。 $T^{ik}$  の対称性を仮定せず、場の系の時空における回転対称性から導かれる保存量  $M^{ik}$  には、スピン角運動量に対応する付加的な項が現れる [5, pp.39-41].

■応力  $\sigma_{\alpha\beta}$  の定義について 保存則 (32.14) から分かるように、応力  $\sigma_{\alpha\beta}$  は  $x^\beta$  軸に垂直な単位面積を介して、 $x^\beta$  座標の小さい側から大きい側へ及ぼす力の第  $\alpha$  成分である。このとき圧力は  $\sigma_{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta}$  であり (§ 35), 右辺に負号は現れない。有限の領域  $V$  に働く力は、発散定理

$$\int_V (-\partial_\beta \sigma_{\alpha\beta}) dV = \int_S (-\sigma_{\alpha\beta} n_\beta) df$$

が意味するように、 $V$  の表面  $S$  に働く応力によってもたらされる。

### § 33. 電磁場のエネルギー・運動量テンソル

■電磁場のエネルギー・運動量テンソル 電荷のない系の電磁場のラグランジアン密度  $\Lambda = -\frac{1}{16\pi} F_{kl}F^{kl}$  に対して、エネルギー・運動量テンソルを一般公式 (32.5) に基づいて計算すると

$$T^{(f)ik} = -\frac{1}{4\pi} \partial^i A^l F_l^k + \frac{1}{16\pi} g^{ik} F_{lm} F^{lm} \quad (26)$$

となる (導出は下記). ここで [今考えている自由な電磁場に対して] Maxwell 方程式  $\partial_l F^{kl} = 0$  が成り立つことを踏まえると,

$$\frac{1}{4\pi} (\partial^l A^i) F_l^k = \frac{1}{4\pi} \partial_l (A^i F^{kl})$$

となるので、これをエネルギー・運動量テンソルに付け加えることが許される (§ 32). すると電磁場のエネルギー・運動量テンソルとして、対称テンソル

$$T^{(f)ik} = \frac{1}{4\pi} \left( -F^{il} F_l^k + \frac{1}{4} g^{ik} F_{lm} F^{lm} \right) \quad (33.1)$$

が得られる. これは [再び, § 31 のエネルギーの密度と流束]

$$T^{(f)00} = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}, \quad cT^{(f)0\alpha} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})^\alpha$$

を与える [本稿次節で確認]. 空間成分は Maxwell の応力テンソル

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left( -E_\alpha E_\beta - H_\alpha H_\beta + \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (E^2 + H^2) \right) \quad (33.3)$$

になる [本稿次節で確認]\*18.

■ $T^{ik}$  の対角化 一般にはある瞬間に、空間の 1 点で  $T^{ik}$  が対角形となるような基準系をとることが可能であることが分かる (下記参照).

■電荷がある場合 粒子のエネルギー・運動量テンソルを

$$T^{(p)ik} = \mu c u^i u^k \frac{ds}{dt}, \quad \mu = \sum_a m_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) : \text{質量密度} \quad (33.5)$$

とする [ $u^i$  は連続体近似の下での流体粒子の 4 元速度 (本稿次節で補足)]. これは正しいエネルギー密度・運動量密度の表式

$$T^{(p)00} = \sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}/c)^2}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad \frac{T^{(p)\alpha 0}}{c} = \sum_a \frac{m_a v^\alpha}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}/c)^2}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$$

を与える [ $\mathbf{v}$  は流体の速度]. このとき系の全エネルギー・運動量が保存すること, すなわち

$$\partial_k \left( T^{(f) i k} + T^{(p) i k} \right) = 0 \quad (33.6)$$

となることが, 粒子の運動方程式と Maxwell 方程式を用いて示される [本稿次節で連続体を仮定せずに導出].

\*18 もはや添字  $\alpha, \beta$  の位置はテンソルの種類を正しく表さないと考えられる.

§ 33, 式の導出など

■電磁場のエネルギー・運動量テンソル (26) の導出 自由電磁場  $A_i$  とそのラグランジアン密度  $\Lambda = -\frac{1}{16\pi}F_{ik}F^{ik}$  にエネルギー・運動量テンソルの公式 (32.5) を適用すると,

$$T^{(f)}_i{}^k = (\partial_i A_l) \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_k A_l)} - \delta_i{}^k \Lambda$$

と書ける. ここで第 1 項の導関数  $\frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_k A_l)}$  は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_k A_l)} &= -\frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial (\partial_k A_l)} F^{mn} F_{mn} = -\frac{1}{8\pi} F^{mn} \frac{\partial}{\partial (\partial_k A_l)} F_{mn} = -\frac{1}{8\pi} F^{mn} (\partial_m \delta_n^l - \partial_n \delta_m^l) \\ &= -\frac{1}{4\pi} F^{kl} \end{aligned} \quad (27)$$

と計算できる\*19. [特に電磁場の運動量密度は  $\pi^i \equiv \frac{\partial \Lambda}{\partial A_i} = -\frac{1}{4\pi c} F^{0i}$ .] よってエネルギー・運動量テンソル

$$T^{(f)}_i{}^k = -\frac{1}{4\pi} (\partial_i A_l) F^{kl} + \frac{1}{16\pi} \delta_i{}^k F_{lm} F^{lm}, \quad \therefore T^{(f)ik} = -\frac{1}{4\pi} \partial^i A^l F^k{}_l + \frac{1}{16\pi} g^{ik} F_{lm} F^{lm} : (26)$$

を得る.

■与えられた時空点で  $T^{ik}$  を対角形にする方法

テンソル  $T^{ik}$  を対角形にするためには, ベクトル  $\mathbf{E}$  および  $\mathbf{H}$  が (与えられた空間の点および与えられた瞬間において) たがいに平行になるか, あるいはそれらのうちの 1 つがゼロとなるような基準系に変換しなければならない [理由は本稿次節]: すでに知っているように (§ 25), このような変換は,  $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{H}$  がたがいに垂直でしかも大きさが等しい場合を除いて, いつでも可能である. たやすくわかるように, この変換ののち

$$T^{00} = -T^{11} = T^{22} = T^{33} = W$$

( $x$  軸を場の方向にとった) が唯一のゼロと異なる  $T^{ik}$  の成分となる. (pp.92-93)

§ 33 について

■§ 33, 1.6 の  $T_i{}^k$  の式について  $\delta_i{}^k$  の前の符号は, 式 (32.5) によればマイナスと考えられる [本稿では訂正済み]. そうであれば p.92, 1.2 の式が得られる. またここで  $q^{(l)}$  として 4 元ポテンシャルの共変成分  $A_l$  の代わりに反変成分  $A^l$  を用いても  $T_i{}^k$  は変わらない. 実際,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A^l{}_{,k}} &= \frac{\partial A_{p,r}}{\partial A^l{}_{,k}} \frac{\partial}{\partial A_{p,r}} = g_{ps} \delta^s{}_l \delta_r{}^k \frac{\partial}{\partial A_{p,r}} = g^{pl} \frac{\partial}{\partial A_{p,k}}, \\ \therefore A^l{}_{,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial A^l{}_{,k}} &= A^l{}_{,i} g^{pl} \frac{\partial \Lambda}{\partial A_{p,k}} = A_{p,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial A_{p,k}}. \end{aligned}$$

\*19 教科書では変分 (全微分)

$$\delta \Lambda = -\frac{1}{8\pi} F^{kl} \delta F_{kl} = -\frac{1}{8\pi} F^{kl} \delta (\partial_k A_l - \partial_l A_k) = -\frac{1}{4\pi} F^{kl} \delta (\partial_k A_l)$$

を計算して, この結果を得ている (p.91).

■「電荷のない場所でのマクスウェル方程式」(p.92, 1.7)を用いることについて これは「電荷のない電磁場を考察」(§ 32, 1.3)しているためである。

■エネルギー・運動量テンソル (33.1) が電磁場の正しいエネルギー・運動量密度を与えること

$$F^{0\alpha} = -E_\alpha, \quad F^{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta\gamma} H_\gamma, \quad F_{ik} F^{ik} = 2(H^2 - E^2)$$

の関係を思い出しておく。

すると

$$-F^0_l F^{0l} = F^{0l} F^{0l} = E^2$$

より, 式 (33.1) のエネルギー・運動量テンソル  $T^{ik}$  に対して

$$T^{00} = \frac{1}{4\pi} (-F^0_l F^{0l}) + \frac{1}{8\pi} (H^2 - E^2) = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2)$$

となる。また,

$$T^{0\alpha} = -\frac{1}{4\pi} F^{0i} F^{\alpha}_i = \frac{1}{4\pi} F^{0\beta} F^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} E_\beta e_{\alpha\beta\gamma} H_\gamma = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_\alpha$$

である。これらはそれぞれ電磁場のエネルギー密度, (エネルギーの流れの密度) $_\alpha/c$ となっているので (§ 31), エネルギー・運動量テンソルの各成分の意味付け (32.15) が正当化される。

一方, 対称な形に直す前のエネルギー・運動量テンソル (p.92, 1.4) に対して, 例えば  $T^{00}$  を考えると, これはエネルギー密度 (31.5):

$$W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}$$

には一致しない。実際, このときの  $T^{00}$  は  $W$  から

$$\frac{1}{4\pi} (\partial^l A^0) F^0_l = \frac{1}{4\pi} (\partial_l A^0) F^{0l} = \frac{1}{4\pi} (\nabla\phi) \cdot (-\mathbf{E}) = \frac{1}{4\pi} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E}$$

を除いたものである。このように全エネルギー  $P^0$  は一義的であっても, エネルギー密度 (と解釈される量)  $T^{00}$  は一義的に定まらないことを, § 32 で一般論として見た。

■Maxwell の応力テンソル (33.3) の導出 エネルギー・運動量テンソル (33.1) の空間成分は

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= \frac{1}{4\pi} \left( -F^{\alpha i} F^{\beta}_i + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{ik} F^{ik} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ -F^{\alpha 0} F^{\beta 0} + F^{\alpha\gamma} F^{\beta\gamma} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (H^2 - E^2) \right\} \end{aligned}$$

となる。ここに

$$F^{\alpha 0} F^{\beta 0} = E_\alpha E_\beta, \quad F^{\alpha\gamma} F^{\beta\gamma} = e_{\alpha\gamma\mu} e_{\beta\gamma\nu} H_\mu H_\nu = (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\mu\beta}) H_\mu H_\nu = \delta_{\alpha\beta} H^2 - H_\alpha H_\beta$$

を代入すると,

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left\{ -E_\alpha E_\beta - H_\alpha H_\beta + \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (H^2 - E^2) \right\}$$

と書き換えられる。これは Maxwell の応力テンソル (33.3) に一致している。

■静電場における Maxwell の応力 電荷がなくとも、電磁場を持つ空間の体積要素の間には応力 (33.3) が作用している。特に静電場を考え、与えられた点において電気力線に沿う方向に  $x$  軸をとると、

$$\mathbf{E} = (E, 0, 0), \quad \mathbf{H} = 0, \quad \therefore (\sigma_{\alpha\beta}) = \frac{1}{8\pi} \begin{pmatrix} -E^2 & 0 & 0 \\ 0 & E^2 & 0 \\ 0 & 0 & E^2 \end{pmatrix}$$

となる。これは電気力線 (あるいは太さを持つ電力管) の断面には張力が、側面には応力が作用していることを意味する [7, pp.80-83]。

■式 (33.3) の直後の、 $T^{ik}$  が対角形となる条件について

$$(cT^{01}, cT^{02}, cT^{03}) = \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = 0,$$

すなわち

$$\mathbf{E} \parallel \mathbf{H} \quad \text{または} \quad \mathbf{E} = 0 \quad \text{または} \quad \mathbf{H} = 0$$

が必要である。逆にこのとき、 $\mathbf{E}, \mathbf{H} = 0$  の場合も含めて  $\mathbf{E} = (E, 0, 0), \mathbf{H} = (H, 0, 0)$  となるように  $x$  軸をとることができ、 $\sigma_{\alpha\beta} = 0, \alpha \neq \beta$  となる。

■p.93, 1.7 の式について 詳しく書くと  $\mathbf{E} = (E, 0, 0), \mathbf{H} = (0, E, 0)$  より

$$T^{00} = \frac{E^2 + E^2}{8\pi} = \frac{E^2}{4\pi}, \quad (cT^{01}, cT^{02}, cT^{03}) = \frac{c}{4\pi} (E, 0, 0) \times (0, E, 0) = \left(0, 0, \frac{E^2}{4\pi}\right)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta),$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \left( -E_\alpha^2 - H_\alpha^2 + \frac{1}{2} \delta_{\alpha\alpha} (E^2 + H^2) \right) = 0 & (\alpha = 1, 2) \\ \frac{E^2}{4\pi} & (\alpha = 3) \end{cases}$$

となる。

■「全系のエネルギー・運動量テンソルは、……和である」(p.93, 1.9~11) について 電荷がある場合にも場のエネルギー・運動量テンソルは、電荷が存在しないことを仮定して導かれた式 (33.1) で与えられると考えられている。実際、一般相対性理論の文脈でエネルギー・運動量テンソルを計算する規則 (94.4) を、場と粒子のラグランジアン密度

$$\Lambda(x) \sqrt{-g(x)} = \int \left\{ - \sum_a \left( m_a c^2 \sqrt{g_{ik}(x) \dot{x}^i(a) \dot{x}^k(a)} + e_a A_i(x) \dot{x}^i(a) \right) \delta^4(x - x(a)) \right\} d\tau_a$$

$$- \frac{1}{16\pi} F_{ik}(x) F_{lm}(x) g^{il}(x) g^{km}(x) \sqrt{-g(x)}$$

に適用すると、平坦な時空における物質と電磁場の相互作用系のエネルギー・運動量テンソルが和  $T^{(p)ik} + T^{(f)ik}$  で与えられることを正当化できる (付録 D.1.5 を参照)。

和  $T^{(f)ik} + T^{(p)ik}$  の (0,0) 成分は

$$\sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - (v_a/c)^2}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) + \frac{E^2 + H^2}{8\pi}$$

であり、見かけ上、位置エネルギー  $\sum e\phi$  の密度が含まれない。これは静電場に対して § 37 で見るように、位置エネルギー  $\sum e\phi$  が場のエネルギー  $\frac{1}{8\pi} \int E^2 dV$  に含まれているからである。この点を理解するために、実際に全ラグランジアン  $L = L_m + L_{mf} + L_f$  を Legendre 変換して得られるハミルトニアンが(見かけ上)位置エネルギー  $\sum e\phi$  を含まないことを確かめる。  $L_m + L_{mf}$  の Legendre 変換によって得られるハミルトニアンは式 (16.6):

$$\mathcal{H}_m + \mathcal{H}_{mf} = \sum \left( \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + e\phi \right)$$

である(このように位置エネルギー  $\sum e\phi$  は相互作用ラグランジアン密度  $\Lambda_{mf} = -\frac{1}{c} A_i j^i$  にも関係している)。全ハミルトニアン  $\mathcal{H}$  には付加的な項

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_f &= \int dV \pi^i \dot{A}_i - L_f \\ &= \frac{1}{4\pi} \int dV \left( F^{i0} \partial_0 A_i + \frac{1}{4} F^{ik} F_{ik} \right) \quad \left( \because \pi^i \equiv \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{A}_i} = \dots = \frac{1}{4\pi c} F^{i0} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int dV \left( \frac{E^2 + H^2}{2} + \mathbf{E} \cdot \nabla \phi \right) \\ &\quad \left( \because F^{i0} \partial_0 A_i = E_\alpha (-\partial_0 A_\alpha) = \mathbf{E} \cdot (\mathbf{E} + \nabla \phi), \quad F^{ik} F_{ik} = 2(H^2 - E^2) \right) \\ &= \int dV \frac{E^2 + H^2}{8\pi} - \sum e\phi \quad (\because \text{部分積分により } \mathbf{E} \cdot \nabla \phi \rightarrow -(\nabla \cdot \mathbf{E})\phi = -4\pi\rho\phi) \end{aligned}$$

が現れる。よって  $\sum e\phi$  は相殺し

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_m + \mathcal{H}_{mf} + \mathcal{H}_f = \sum \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + \int dV \frac{E^2 + H^2}{8\pi}$$

となる。

■「粒子は相互に作用していないものとみなす」(p.93, l.11)について これは電磁気力以外の粒子に働く力を考慮しないことを断っている。p.94 で運動方程式 (23.4) を用いるから、電磁場を介した粒子の相互作用は考慮されている。

■粒子の系のエネルギー・運動量テンソルの表式 (33.5) について これを得る際、 $c = dx^0/dt$  を用い  $T^{0\alpha} = \mu c^2 u^\alpha$  を  $\mu c(dx^0/dt)u^\alpha = \mu c u^0 u^\alpha (ds/dt)$  と書き換えた。この変形は電荷密度  $\rho = j^0/c$  に対応する反変ベクトル成分  $\mu = \mu(dx^0/dt)/c$  を作り、 $T^{0\alpha}$  が2階反変テンソルであることをあからさまにしている。

連続体近似を仮定しない場合の表式は下記。

■系全体の保存則 (33.6) の導出 付録 D.1.1 で説明するように、重力の存在下では物質と電磁場の系に対する近似的なエネルギー・運動量保存則  $T^{ik}_{;k} = 0$  が成立する。平坦な時空では、これは正確な保存則  $\partial_k T^{ik} = 0$  になる。他方、特殊相対性理論を背景としたエネルギー・運動量保存則 (32.4-5):  $\partial_k T^{ik} = 0$  は粒子が存在しないことを前提としている。そこで以下では、系全体の保存則 (33.6):

$$\partial_k \left( T^{(f)ik} + T^{(p)ik} \right) = 0$$



が成り立つことを改めて確かめる (その際、物質を連続体と仮定しない). 具体的には粒子の運動方程式と Maxwell 方程式を用いて,

$$\partial_k T^{(f)ik} = -\frac{1}{c} F^{ik} j_k, \quad (33.7)$$

$$\partial_k T^{(p)ik} = +\frac{1}{c} F^{ik} j_k \quad (33.9)$$

を導く (これらを辺々足すと系全体の保存則 (36.6) が得られる). この導出過程の中にも, 物理的な意味を見取ることができる. すなわち式 (33.7) の時間成分 ( $i = 0$ ) は, § 31 のエネルギー方程式 (31.3):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \right) = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \nabla \cdot \mathbf{S}$$

を再現する. これは単位時間において単位体積中の場のエネルギーが, 粒子の場にした仕事 ( $-\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ ) と, 流入した場のエネルギー ( $-\nabla \cdot \mathbf{S}$ ) の分だけ増大することを表している. 式 (33.7) の空間成分 ( $i = \alpha$ ) は

$$\partial_t \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_\alpha = -\partial_\beta \sigma_{\alpha\beta} - \left( \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H} \right)_\alpha$$

を与える<sup>\*20\*21</sup>. これは単位時間において単位体積中の場の運動量が, 空間の隣接する領域から受ける場の応力と, 単位体積中の電荷に場の及ぼす力 (力積) の反作用だけ増大することを表している. そして式 (33.9) は場の得たエネルギー・運動量と正確に等しいエネルギー・運動量を粒子が失うことを意味している.

式 (33.7) の導出 まず Maxwell 方程式を用いて, 式 (33.7):  $\partial_k T^{(f)ik} = -\frac{1}{c} F^{ik} j_k$  を示そう.  $T^{(f)ik}$  の式 (33.1) を微分すると,

$$\begin{aligned} \partial_k T^{(f)ik} &= \frac{1}{4\pi} g_{ij} \partial_k \left( \frac{1}{4} g^{jklm} F_{lm} - F^{jl} F^k_l \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{2} \delta_i^k F^{lm} \partial_k F_{lm} - F^k_l \partial_k F_i^l - F_i^l \partial_k F^k_l \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{2} F^{lm} \partial_i F_{lm} - F^{kl} \partial_k F_{il} - F_{il} \partial_k F^{kl} \right). \quad (\text{p.94, 1.1 の式}) \end{aligned}$$

ここに Maxwell 方程式 (26.5),(30.2):

$$\partial_i F_{lm} = -\partial_l F_{mi} - \partial_m F_{il}, \quad \partial_k F^{kl} = \frac{4\pi}{c} j^l$$

を代入すると,

$$\partial_k T^{(f)ik} = \frac{1}{4\pi} \left( -\frac{1}{2} F^{lm} \partial_l F_{mi} - \frac{1}{2} F^{lm} \partial_m F_{il} - F^{kl} \partial_k F_{il} - \frac{4\pi}{c} F_{il} j^l \right)$$

が得られる. 右辺の括弧内で, 第 1 項に対し  $m \rightarrow l, l \rightarrow k$ , 第 2 項に対し  $m \rightarrow k$  と添字を書き直せば, 最初の 3 項は打ち消し合うことが分かる. こうして式 (33.7) に到達する.

★ すぐ後で, 準備として粒子系の  $T^{(p)ik}$  の表式に関する補足説明を済ませてから, 式 (33.9) を導出し, 保存則 (33.6) の証明を完成させる.

<sup>\*20</sup> 国際 (MKSA) 単位系から Gauss 単位系に移るには  $\sqrt{4\pi\epsilon_0} \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}, \sqrt{4\pi/\mu_0} \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{H}$  とし, 電流密度・電荷密度を電荷の置き換え  $e/\sqrt{4\pi\epsilon_0} \rightarrow e$  と同様に処理すれば良いから  $\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \rightarrow \rho \mathbf{E} + (1/c) \mathbf{j} \times \mathbf{H}$ .

<sup>\*21</sup> 右辺第 2 項が粒子からの反作用と分かっているので空間全体および有限の領域で体積分すれば, エネルギー・運動量テンソルの残りの成分の意味付け (32.15) が再び正当化される.

■p.94, l.11 の式について  $T^{(p)ik} = \mu c u^i \frac{dx^k}{dt}$  = (式 (33.5) 中央) を用いる。右辺第 1 項の  $u^i$  は正しくは  $u_i$  と考えられる。

■「 $\mu/m = \rho/e$ 」(p.94 下から 4,5 行目)における  $m, e$  の定義について 各粒子が共通の質量  $m$ , 電荷  $e$  を持つとは限らない。

■連続体近似を仮定しない場合 電流密度に対して § 28 において考察したのと同様に, 粒子系のエネルギー・運動量テンソル (33.5) を粒子が希薄な場合にも適用できる式

$$T^{(p)ik} = \sum_a m_a c u_a^i \frac{dx_a^k}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) = \sum_a m_a c^2 u_a^i u_a^k \sqrt{1 - \left(\frac{v_a}{c}\right)^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \quad (28)$$

によって再定義した場合を考える (付録 D.1.5)。この表式には明瞭な解釈を与えることができる。実際, 自由粒子のエネルギーと運動量の表式

$$\mathcal{E}_a = \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - (v_a/c)^2}}, \quad p_a^\alpha = \frac{m_a v_a^\alpha}{\sqrt{1 - (v_a/c)^2}}$$

を想起すると, まず時間-時間成分

$$T^{(p)00}(x) = \sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - (v_a/c)^2}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))$$

は期待されるように (§ 32), 粒子系のエネルギー密度となっていることが明白である。また時間-空間成分

$$T^{(p)0\alpha} = \sum_a \frac{m_a c v_a^\alpha}{\sqrt{1 - (v_a/c)^2}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))$$

は確かに, エネルギー流束の第  $\alpha$  成分の  $1/c$  倍とも, 運動量密度の第  $\alpha$  成分の  $c$  倍とも解釈できる。このように, エネルギー・運動量テンソルを意味付ける関係 (§ 32)

$$T^{0\alpha} = c \times (\text{運動量密度})^\alpha = \frac{1}{c} \times (\text{エネルギーの流れの密度})^\alpha$$

は, 粒子系に対しては見易い\*22。最後に空間-空間成分

$$T^{(p)\alpha\beta} = \sum_a \frac{m_a v_a^\alpha v_a^\beta}{\sqrt{1 - (v_a/c)^2}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))$$

が応力と見なせることは, 次のように納得できる。まず, この  $T^{(p)\alpha\beta}$  は運動量の流束となっている。ところが単位時間における単位体積への運動量の流入は, 巨視的には応力による運動量変化として捉えられるから,  $T^{(p)\alpha\beta}$  は応力テンソルを与える。(これが § 32 の一般論で (暗に) 用いた論法である。)

上式 (28) は粒子  $a$  の座標を  $x^i(a)$ , 固有時間を  $\tau_a$ ,  $\dot{x}^i(a) = \frac{dx^i(a)}{d\tau_a}$  と表記すると,

$$T^{(p)ik} = \sum_a m_a c \int \dot{x}^i(a) \dot{x}^k(a) \delta^4(x - x(a)) d\tau_a \quad (29)$$

\*22 同じ関係が場に対しても一般に成り立つことは, 場が粒子から構成されていることを示唆しているということもできる。

と書き換えられる。実際,

$$\begin{aligned}
T^{(p)\mu\nu}(x) &= \sum_a m_a c \int \dot{x}^\mu(a) \dot{x}^\nu(a) \delta^4(x - x(a)) d\tau_a \\
&= \sum_a m_a c \int \dot{x}^\mu(a) \frac{dx^\nu(a)}{dx^0(a)} \delta^4(x - x(a)) dx^0(a) \\
&= \sum_a m_a \dot{x}^\mu(a) \frac{dx^\nu(a)}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \\
&= \sum_a m_a \dot{x}^\mu(a) \dot{x}^\nu(a) \sqrt{1 - \left(\frac{v_a}{c}\right)^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a).
\end{aligned}$$

4元電流密度が反変ベクトルになっていることの証明 (§ 28 に関する本稿の補足) と同様に考えると, 上式 (29) 右辺は確かに2階共変テンソルとなっていることが分かる。

逆にエネルギー・運動量テンソル (33.5) が, 式 (29) において特に連続体を想定した場合にあたることを次のように説明できる [2, pp.107–110]. まず粒子が狭い範囲に局在しているとき, 各粒子の4元速度  $\dot{x}^i(a)$  を共通の流体要素の4元速度  $\dot{x}^i$  に置き換え, 粒子の和の外に出すことができる。

$$T^{(p)ik}(x) = \dot{x}^i \dot{x}^k \varrho(x), \quad \varrho(x) \equiv \sum_a m_a c \int \delta^4(x - x(a)) d\tau_a. \quad (30)$$

再び4元電流密度が反変ベクトルになっていることの証明 (§ 28 に関する本稿の補足) と同様に考えると, ここで定義した  $\varrho(x)$  はスカラーである。流体とともに運動する座標系 ( $v_a = 0, d\tau_a = dx^0(a)/c$ ) では,  $\dot{x}^i = (c, \mathbf{0})$  より

$$T^{(p)ik} = \begin{cases} \varrho c^2: & i = k = 0 \\ 0: & \text{その他の成分} \end{cases}, \quad \varrho(x) = \sum_a m_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))$$

となる。したがって  $\varrho(x)$  はスカラー量であって,  $x$  における流体の静止系を採用したとき,  $x$  における質量密度を与える\*23。粒子系が流体要素として振舞ういくつかの部分集団に分かれている場合には, その各集団ごとに上式 (30) が成り立つことになる。4元速度  $\dot{x}^\mu$  は部分集団ごとに異なることを踏まえると, 系全体のエネルギー・運動量密度を得るには, 単に式 (30) の  $\dot{x}^\mu$  を空間の各位置で定義された速度場と読み替えれば良い。式 (33.9) の導出 最後にエネルギー・運動量テンソルの表式 (29) に対して式 (33.9):  $\partial_k T^{(p)ik} = 0$  を改めて導き, 粒子と電磁場の系全体の保存則 (33.6) が成り立つことを確かめよう (式 (33.7):  $\partial_k T^{(f)ik} = 0$  は影響を受けない) [2, pp.106–108]. 式 (29) を微分すると

$$\begin{aligned}
\partial_k T^{(p)ik} &= \sum_a m_a c \int \dot{x}^i(a) \dot{x}^k(a) \{\partial_k \delta^4(x - x(a))\} d\tau_a \\
&= - \sum_a m_a c \int \dot{x}^i(a) \dot{x}^k(a) \frac{\partial}{\partial x^k(a)} \delta^4(x - x(a)) d\tau_a \\
&= - \sum_a m_a c \int \dot{x}^i(a) \frac{d}{d\tau_a} \delta^4(x - x(a)) d\tau_a \\
&= \sum_a m_a c \int \ddot{x}^i(a) \delta^4(x - x(a)) d\tau_a
\end{aligned}$$

\*23 この“質量密度”  $\varrho(x)$  の定義はやや特殊である。空間の与えられた体積に含まれる質量は不変量であるけれど, 座標で測った空間の体積は, したがって質量密度は本来, 不変量ではない。

となる。最右辺に粒子の運動方程式 (23.4):

$$m_a \ddot{x}^i(a) = \frac{e_a}{c} F^{ik}(x(a)) \dot{x}_k(a)$$

を代入し、被積分関数にデルタ関数  $\delta^4(x - x(a))$  があることに注意して場の強度を  $F^{ik}(x(a)) \rightarrow F^{ik}(x)$  と置き換え、粒子の和の外に出すと、

$$\partial_k T^{(p)ik} = \frac{1}{c} F^{ik} \left[ \sum_a e_a \int \dot{x}_k(a) \delta^4(x - x(a)) d\tau_a \right] = \frac{1}{c} F^{ik} j_k : (33.9)$$

を得る (最後の等号は§ 28 に関する本稿の補足に書いた、4 元電流密度の表式 (19) による)。

### § 34. ヴィリアル定理

荷電粒子の座標、運動量が有限の値に留まり、電磁場も無限遠で消えるような閉じた系を考える。(長) 時間平均をバーによって表すと、この条件の下で保存則  $\partial_i T^{\alpha i} = 0$  から

$$\mathcal{E} = \int \bar{T}^i_i dV \quad (31)$$

が導かれる ( $\mathcal{E} \equiv \int T^0_0 dV$  は系の全エネルギー、導出は下記)。ここでエネルギー・運動量テンソルの対角成分の和は

$$T^i_i = \sum_a m_a c^2 \sqrt{1 - (v_a/c)^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \quad (34.1)$$

となるから (電磁場のエネルギー・運動量テンソル (33.1) はトレースレスなので寄与しない ( $T^{(f)i}_i = 0$ )), 相対論的なヴィリアル定理

$$\mathcal{E} = \sum_a m_a c^2 \sqrt{1 - (v_a/c)^2} \quad (34.4)$$

が得られる。[本稿次節で非相対論的極限を調べる.]

### § 34, 式の導出など

■式 (31) の導出 運動量保存則は

$$0 = \partial_i T^i_\alpha = \partial_0 T^0_\alpha + \partial_\beta T^\beta_\alpha$$

と書ける [本稿では  $T^{\alpha i}$  をあらかじめ混合テンソルに書き換えた]。次いで時間平均をとる。右辺第 1 項について、仮定により  $T^0_\alpha$  は有限であり、一般に有限な量の時間微分の時間平均はゼロである\*24。[また右辺第 2 項では  $\overline{\partial_\beta T^\beta_\alpha} = \partial_\beta \bar{T}^\beta_\alpha$  とする.] すると

$$\partial_\beta \bar{T}^\beta_\alpha = 0$$

\*24 有界な (すなわち [絶対値が] 無限に大きな値をとることがない) 時間の関数  $F(t)$  に対して、その導関数  $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$  の時間平均  $\bar{f}$  はゼロである。実際、

$$\bar{f} \equiv \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dF(t)}{dt} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0.$$

[最後の等号で  $F(t)$  が有界であることを用いた。我々はこの定理を『力学』§ 10 で学んでいる.]

が得られる。この式に  $x^\alpha$  をかけて空間全体で積分しよう。無限遠で [十分素早く]  $T^\beta_\alpha \rightarrow 0$  となることに注意して部分積分を行うと

$$0 = \int x^\alpha \partial_\beta \bar{T}^\beta_\alpha dV = - \int \delta^\alpha_\beta \bar{T}^\beta_\alpha dV = - \int \bar{T}^\alpha_\alpha dV$$

となる。よって

$$\int \bar{T}^i_i dV = \int \bar{T}^0_0 dV = \mathcal{E} : (31)$$

が成立する。

## § 34 について

■トレース  $T^i_i$  の式 (34.1) について  $T^{(p)ik}$  の式 (33.5) の代わりに

$$T^{(p)ik} = \sum_a m_a c^2 u_a^i u_a^k \sqrt{1 - (v_a/c)^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \quad (\text{§ 33 のノート参照})$$

を用いても式 (34.1):  $T^i_i = \sum_a m_a c^2 \sqrt{1 - (v_a/c)^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$  が得られる。

■ヴィリアル定理 (34.4) について 左辺の  $\mathcal{E}$  は場と粒子の持つ全エネルギーであるのに対し、右辺は粒子に関係する量のみから成る。

■「これは、……古典的 [非相対論的] なヴィリアル定理が与える結果と一致している」(p.96, l.17,18) について 「静止エネルギーを除いた全エネルギー」(p.96, l.16) を、場のエネルギーを除いた粒子の全エネルギー  $E$  と見なし、運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーをそれぞれ  $T, U$  と書くと、非相対論的極限の式 (p.96, l.15) は

$$E = -\bar{T}, \quad \therefore 2\bar{T} = -\bar{U}$$

を意味する。これは Coulomb 場の下での非相対論的なヴィリアル定理

$$2\bar{T} = k\bar{U}, \quad k = -1$$

に他ならない。ここで相対論的なヴィリアル定理においては電磁場を介した粒子間相互作用が考えられているのに対し、非相対論的なヴィリアル定理では粒子間相互作用を表すポテンシャル・エネルギー  $U$  の形が、

- 粒子の座標だけの関数である ( $\rightarrow$  磁場から受ける力  $e\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}$  のような、速度に依存する力を考えない)
- 座標の同次関数である

という条件を除けば、指定されていないことに注意する [3, pp.27-28].

## § 35. 巨視的物体のエネルギー・運動量テンソル

連続的と見なされる巨視的物体を考える。物体の要素が静止している基準系では

- 応力は等方的な圧力  $\sigma_{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta}$  となる。
- $T^{00}$  は物体のエネルギー密度  $\varepsilon$  であり、 $\varepsilon/c^2$  は物体の質量密度を与える。
  - ここで密度とは、要素の静止系における体積 (固有体積) に関する単位体積あたりの量である。

よってこの系での要素のエネルギー・運動量テンソル  $T^{ik}$  は

$$(T^{ik}) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

という形をとる.

$$T^{ik} = (p + \varepsilon)u^i u^k - pg^{ik}$$

とするとこれは  $u^i = (1, 0)$  となる静止系において正しいエネルギー・運動量テンソルの成分を与え [ , 両辺が同じ種類のテンソルから成] るから任意の基準系で成立する.

- 物体の要素の全体的な運動速度  $v$  が光速に比べて小さいとき, エネルギーの流れの密度は

$$S_\alpha = cT^\alpha = \frac{(p + \varepsilon)v_\alpha}{1 - v^2/c^2} \simeq (p + \varepsilon)v_\alpha$$

となる.

– 運動量密度  $S_\alpha/c^2$  において, 質量密度に相当する  $(p + \varepsilon)/c^2$  には圧力  $p$  も寄与する.

- 要素のなかの微視的粒子の速度が光速に比べて小さいとき, 要素の単位の固有体積中にある粒子の質量の和を  $\mu_0$  とすると  $\varepsilon \simeq \mu_0 c^2 (\gg p$  として良い) なので

$$T^{ik} = \mu_0 c^2 u^i u^k.$$

[式 (33.5) と比較される.]

– 要素の全体としての速度は任意であって良い.

- $p \leq \frac{\varepsilon}{3}$ .  
– 一般のエネルギー・運動量テンソルに対して

$$T^i_i = \sum_a m_a c^2 \sqrt{1 - (v_a/c)^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \geq 0 \quad (32)$$

なので (式 (34.1)), 巨視的物体のエネルギー・運動量テンソルに対して

$$0 \leq T^i_i = \varepsilon - 3p \quad (33)$$

だから.

- 微視的粒子の速度が  $v_a \rightarrow c$  となる超相対論的極限で  $p = \frac{\varepsilon}{3}$ .

[具体的に光子ガスや電子ガス ( $v_a \rightarrow c$ ) に対して,

それぞれ B-E 分布と F-D 分布から状態方程式  $p = \frac{\varepsilon}{3}$  を導ける.]

– 式 (32) の単位体積にわたる平均を式 (33) と等置すると

$$\varepsilon - 3p = \sum_a m_a c^2 \sqrt{1 - (v_a/c)^2}$$

だから (右辺の和は単位体積中の粒子についてとる).

- 質量  $m$  の同種粒子から成る, 粒子数密度  $n$  の相対論的な理想気体に対し, 気体中に巨視的運動がないとき

$$\varepsilon = nm \overline{\left( \frac{c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right)}, \quad p = \frac{nm}{3} \overline{\left( \frac{v^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right)}$$

となる (横線は全ての粒子に関する平均).

- 理想気体に対しては、粒子系のエネルギー・運動量テンソル (33.5):  $T^{ik} = nmc \overline{\frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{ds}}$  を用いることができる。これを  $T^{00} = \varepsilon, T^{\alpha\alpha} = 3p$  と比較して得られる。
- 非相対論的極限で  $p = nm\overline{v^2}/3$  を再現する。

## § 35 について

■「物体の面要素を通る運動量の流れは、この要素に働く力にほかならない」 (§ 35, 1.3) について 微視的な粒子の移流に伴う運動量変化が巨視的には応力による運動量変化と見なされる。なお、与えられた要素の静止系では巨視的な流れはないから

$$T^{0\alpha} = 0, \quad T^{\alpha 0} = 0.$$

■「一般の場合には、 $\mu_0$  は物体の実際の質量密度  $\varepsilon/c^2$  と異なっていなければならない……(……含んでいる).」 (p.97, 1 番下~p.98, 1.2) について  $\varepsilon/c^2$  は要素の静止系においてはその質量密度になるけれど、静止系に対しても要素のなかの微視的粒子は一般に運動しているから、 $\varepsilon/c^2$  は  $\mu_0$  は一致しない。

■「この公式を、……あてはめてみよう」 (p.98, 1.20) について 「この公式」とは巨視的物体の静止系におけるエネルギー・運動量テンソルの表式 (35.1) のことと考えられる。

■「理想気体の粒子はたがいに作用しあわないから、……使うことができる」 (p.98, 1.20~22) について 場を介した相互作用があれば、エネルギー・運動量テンソルとして  $T^{(p)ik} + T^{(f)ik}$  を用いなければならないと考えられる。

■理想気体の  $T^{ik}$  の式 (p.98, 1.23) について 公式 (33.5) の代わりに

$$T^{(p)ik} = \sum_a m_a c u_a^i \frac{dx_a^k}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$$

を用いた場合にも、平均をとると同じ式になる。

■理想気体の  $\varepsilon$  の式 (35.9) について その導き方から明らかなように、 $\varepsilon$  は単位体積中の全粒子のエネルギー

$$\sum \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{nmc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad (\text{左辺の和は単位体積中の粒子についてとる})$$

の、全粒子に関する平均となっている。

## 第5章 不変な場

### § 36. クーロンの法則

- 静電場

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi \quad \Rightarrow \quad \Delta\phi = -4\pi\rho : \text{Poisson 方程式.}$$

– 真空中 ( $\rho = 0$ ) では

$$\Delta\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_{xx}\phi, \partial_{yy}\phi, \partial_{zz}\phi \text{ のすべてを同符号にできない} \quad \Rightarrow \quad \phi \text{ は極値をもたない}^{*25}.$$

- Maxwell 方程式  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = 4\pi \int \rho dV$  より, 原点の点電荷  $e$  が位置  $\mathbf{R}$  に作る電場とポテンシャルは

$$\mathbf{E} = \frac{e}{R^2} \frac{\mathbf{R}}{R} : \text{Coulomb の法則}, \quad \therefore \phi = \frac{e}{R} \quad (36.6-7)$$

で与えられる (電場の導出は下記) [球座標による微分公式  $\nabla\phi(R) = \frac{\mathbf{R}}{R} \frac{d\phi(R)}{dR}$ ].

– 複数の電荷がある場合, [場の方程式の線形性より] 重ね合せの原理を利用でき,

$$\phi = \sum_a \frac{e_a}{R_a} = \int \frac{\rho dV}{R}. \quad (36.8)$$

以上より

$$\Delta\left(\frac{e}{R}\right) = \Delta\phi = -4\pi\rho = -4\pi e\delta(\mathbf{R}), \quad \therefore \Delta\left(\frac{1}{R}\right) = -4\pi\delta(\mathbf{R}). \quad (36.9)$$

[これは物理的な意味付けを除けば,  $\Delta G(\mathbf{R}) = -4\pi\delta(\mathbf{R})$  を満たす Poisson 方程式の Green 関数が  $G(\mathbf{R}) = 1/R$  で与えられることの証明になっている. 付録 F では Poisson 方程式の Green 関数を改めて導き, 解を求める.]

### § 36, 式の導出など

■Coulomb の法則 (36.6) の導出 系の球対称性より求める電場もまた球対称であり,  $\mathbf{E}(\mathbf{R}) = E(R)\hat{\mathbf{R}}$  と表される ( $\hat{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{R}/R$  は動径方向の単位ベクトル). 実際このとき原点を中心として空間を回転しても電場分布は不変であり, 球対称性が満たされている. ここで原点を中心とする半径  $R$  の球面に対して Gauss の法則を適用すると  $4\pi R^2 E(R) = 4\pi e$  となるので,

$$E(R) = \frac{e}{R^2}, \quad \therefore \mathbf{E}(\mathbf{R}) = \frac{e}{R^2} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} : (36.6)$$

を得る [Gauss 単位系では係数が簡単である (p.78 脚注)]. これは Coulomb の法則と呼ばれ, 電場の強さは電荷  $e$  に比例し, 電荷からの距離  $R$  とともに  $1/R^2$  に従って弱まることを意味している.

注意 以上の議論は場の球対称性を仮定しているため, 点電荷が運動する場合には適用できない. 実際, 運動する点電荷が作る電場は Coulomb の法則に従う静電場とは異なったものになる (§ 38, § 67). 実は荷電粒子間の相互作用を Coulomb 相互作用によって記述するのは (したがって磁場を無視し, 相互作用を瞬時に伝わるものと仮定するのは), 粒子の速度が光速に比べて非常に小さい非相対論的な極限で成り立つ近似である (§ 65).

\*25 「電場はいかなる……」(式 (36.5) の 2 行下) は正しくはポテンシャルのことである.



## § 36 について

■式 (36.8) の 1 行下について ”観測点” → “観測点” と訂正する。

■国際単位系への移行 電場 (36.6) とポテンシャル (36.7) を電荷の再定義  $e \rightarrow e/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$  によって国際 (MKSA) 単位系の表式に書き換えるには、次のようにする。

$$E = \frac{e}{R^2} = \frac{e \times (\text{単位電荷})}{R^2} \rightarrow \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^2}, \quad \phi = \frac{e}{R} = \frac{e \times (\text{単位電荷})}{R} \rightarrow \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

## § 37. 電荷の静電エネルギー

電荷の作る静電場のエネルギーは

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV = \dots = \frac{1}{2} \int \rho \phi dV = \frac{1}{2} \sum_a e_a \phi_a \quad (37.1-2)$$

と書き換えられる (導出は下記)。

よって 1 個の電荷  $e$  は、自身の作るポテンシャルの、電荷の位置での値を  $\phi$  とすると、自己エネルギー  $e\phi/2$  を持つことになる。これは

$$|\phi| = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{|e|}{R} = \infty$$

より発散する。この困難は粒子を点として扱っていることに関係しており、電磁気学の基礎原理が、その適用限界をも示していることを意味する。すなわち粒子が実際には半径  $R_0$  を持つと考えると、自己エネルギーは  $e^2/R_0$  の程度であり、これが静止エネルギー  $mc^2$  と同程度になることを要求すると

$$R_0 \sim \frac{e^2}{mc^2}$$

を得る。これより小さな距離は古典電磁気学で扱えない。

また場のエネルギーは

$$U = \frac{1}{2} \sum_a e_a \sum_b \frac{e_b}{R_{ab}} = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_a \frac{e_a^2}{R_{aa}}}_{\text{無限大の定数}} + \frac{1}{2} \sum_a e_a \overbrace{\sum_{b(\neq a)} \frac{e_b}{R_{ab}}}^{\phi_a'}$$

$U'$ , 物理的に意味がある

のように 2 つの部分から成る。

## § 37, 式の導出など

■式 (37.1-2) の導出

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV = \frac{1}{8\pi} \int (\nabla\phi)^2 dV = \frac{1}{8\pi} \int \{\nabla \cdot (\phi\nabla\phi) - \phi\Delta\phi\} dV \\ &= \frac{1}{2} \int \rho\phi dV \quad (\text{第 1 項に発散定理を適用, 第 2 項に } \Delta\phi = -4\pi\rho \text{ を代入}) \end{aligned}$$

による。

## § 37 について

■エネルギーを持つのは粒子か場か 場のエネルギーは一般に空間全体に広がっていたと考えていたのが、実は粒子の位置に点在していると式 (37.2) では考えられている：

$$U = \underbrace{\int \frac{(-\nabla\phi)^2}{8\pi} dV}_{\text{場のエネルギー}} = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_a e_a \phi(\mathbf{r}_a)}_{\text{粒子のエネルギー}}.$$

するとエネルギーは電荷が持っているようにも見えるが、あくまでエネルギーは空間が持っているとも見ることが可能である。このように場のエネルギーと粒子の位置エネルギーは概念的に異なり、一見すると一方とは別に他方があるように考えられるけれど、実はこれらは同一のエネルギーを別の角度から見たときに現れる2つの異なる側面であることをこの計算は示している。(この点については§ 33 の考察も参照。)

半径  $a$  の球に分布する一様な電荷  $Q$  の場合は球の外でも場はエネルギーを持ち、 $a \rightarrow 0$  で球の内外のエネルギーがそれぞれ無限大に発散する。このため一見すると点電荷の場合と事情が異なるように思われる。実際、点電荷の場合と同様の変形

$$\int \frac{(-\nabla\phi)^2}{8\pi} dV = \frac{1}{8\pi} \int \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) dV + \frac{1}{2} \int \rho \phi dV \quad (34)$$

において<sup>\*26</sup>、各項は球の外部で

$$\begin{aligned} \int_{\text{球外}} \frac{(-\nabla\phi)^2}{8\pi} dV &= \frac{Q^2}{8\pi} \int_a^\infty \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{2a}, \\ \frac{1}{8\pi} \int_{\text{球外}} \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) dV &= \frac{1}{8\pi} \int_{\text{球外}} \nabla \cdot \left( \frac{Q}{r} \left( -\frac{Qr}{r^3} \right) \right) dV \\ &= \frac{Q^2}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_a^\infty \frac{1}{r^4} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = \frac{Q^2}{2a}, \\ \frac{1}{2} \int_{\text{球外}} \rho \phi dV &= 0 \quad (\because \rho = 0) \end{aligned} \quad (35)$$

となる(式 (35) は場の消える無限遠に加え球面上の面積分に置き換えられるため、この項が0になるという点電荷に対する議論は適用できない)。また球の内部で電場  $E = Qr/a^3$  が持つエネルギーは

$$\frac{1}{8\pi} \int_0^a \left( \frac{Qr}{a^3} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{5} \cdot \frac{Q^2}{2a}$$

となる。しかしながらこの場合も球の内部に含まれる場のエネルギーだけでなく、球の外部と合わせた空間全体での場のエネルギー  $\frac{3}{5} \frac{Q^2}{a}$  が点電荷の持つエネルギーと解釈される。

■「自己エネルギーは  $e^2/R_0$  程度になる」(p.102 下から4行目) について これは次元解析から期待されることである。

一見すると仮に電子に半径  $R_0$  の拡がりを与えたとしても、電荷がその中心を避けるように分布していなければ結局自己エネルギーは無限大になるように思われるかもしれない。しかしながらどのような有限の拡がり

<sup>\*26</sup> この変形はまた、容器に閉じ込められた非圧縮性完全流体の渦なし場が容器を振っても静止流体であることを確かめる計算と(消える項が異なるのを除けば) 同じである [10, p.59].

を持つ電荷分布も、その各位置を点電荷と見なせば再び自己エネルギーが発散する懸念が生じる。実際には上で言及したように、半径  $R_0$  の球内部に一様に分布した電荷  $e$  が持つエネルギーは  $\frac{3}{5}\frac{e^2}{R_0}$  である。これは確かに有限であって、また  $e^2/R_0$  程度である。

なお電子では電荷が球面に (面密度  $\sigma$  で) 一様に分布しているという J.J.Thomson の仮定に従うと [11, p.33], 表面の電荷が球の表面に作るポテンシャルは、全電荷  $e$  が球の中心に集中している場合と同じく  $e/R_0$  となるので、自己エネルギーは

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \sigma \pi R_0 \sin \phi \times R_0 d\phi \times \frac{e}{R_0} = \frac{e^2}{2R_0} \sim \frac{e^2}{R_0}$$

と見積もられる。

■ 「 $e^2/R_0 \sim mc^2$ 」 (p.102, 下から 2 行目) について これは

$$(\text{観測される電子の質量}) = (\text{電磁場のエネルギー}) + (\text{電子固有の質量})$$

の右辺の 2 項が同程度という要求である [11, p.35].

古典的な電荷の半径  $R_0 = e^2/mc^2$  は自己エネルギーを有限にするために電荷に拡がりを与える不鮮明化のパラメーターであって、大まかには電荷の自己エネルギーが静止エネルギーに等しくなるような電荷の半径として導入される [9, p.440].

■  $U'$  の表式 (37.7) について 元の式 (37.2) に由来する係数 1/2 があるため、これは粒子対についての和になっている。

$$\sum_{\text{粒子対}} = \sum_{a>b} = \sum_{a<b} = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b}$$

ここで粒子についての和が現れることは次のように解釈できる [4, p.189]. (ただし以下では相互作用ポテンシャルを  $U_{ab}(r_{ab})(=U_{ba}(r_{ba})) = e_a e_b / R_{ab}$  と書く ( $R_{ab}(=R_{ba})$  は粒子間距離). ) 全相互作用ポテンシャルは全粒子が互いに無限に離れており力を及ぼしあっていない状態から、各粒子間距離が  $\{R_{ab}\}$  で与えられる配置まで全ての粒子を運ぶ際にする仕事である。初めに粒子 1 を無限遠から持ち運び、次に粒子 2 を無限遠から持ち運び、……という具合に、この作業を段階的に行うことを考えると、

1. 粒子 1 を運ぶときには他の粒子は無限に離れていて力を及ぼさないから、仕事を必要としない。
2. 次に粒子 2 を運ぶときには、  
すでに配置されている粒子 1 との相互作用に逆らって  $U_{12}$  の仕事をしなければならない。
3. 続いて粒子 3 を運ぶときには、同様に  $U_{12} + U_{13}$  の仕事をしなければならない。

(ある粒子を運んでいる間、他の粒子を固定している力は仕事をしないことに注意する。) こうして全体の仕事は粒子対にわたる和  $\sum_{b>a} U_{ab}$  となる (図 26 参照).

実際これが相互作用ポテンシャルになっていることは、

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_c} \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} U_{ab} &= -\frac{1}{2} \left( \sum_{a(\neq c)} \frac{\partial U_{ac}}{\partial \mathbf{r}_c} + \sum_{b(\neq c)} \frac{\partial U_{cb}}{\partial \mathbf{r}_c} \right) \\ &= -\sum_{a(\neq c)} \frac{\partial U_{ca}}{\partial \mathbf{r}_c} \end{aligned}$$

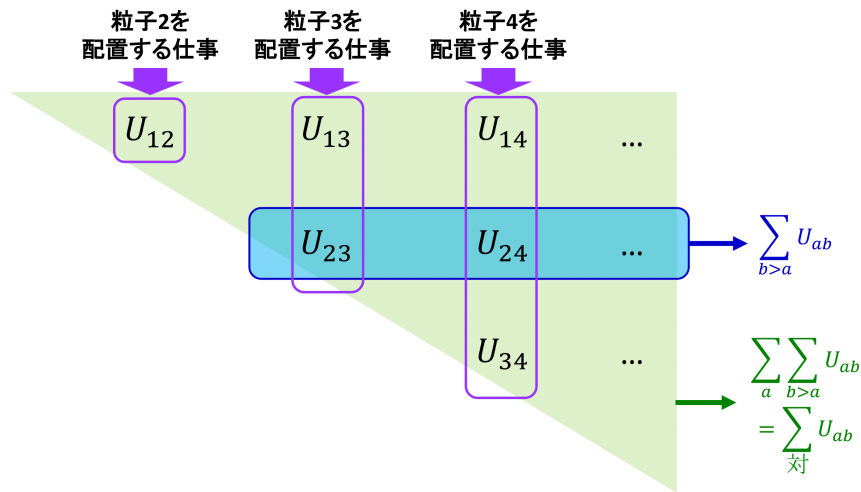


図 26 相互作用ポテンシャルの全粒子対にわたる和

$$\begin{aligned}
 &= - \sum_{a(\neq c)} \frac{\partial U_{ca}}{\partial R_{ca}} \hat{\mathbf{R}}_{ca} \quad \left( \frac{\partial R_{ca}}{\partial \mathbf{r}_c} = \frac{\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_a}{|\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_a|} \equiv \hat{\mathbf{R}}_{ca} : \text{方向単位ベクトル} \right) \\
 &= \sum_{a(\neq c)} \mathbf{f}_{ca} \quad \left( \mathbf{f}_{ca} = - \frac{\partial U_{ca}}{\partial \mathbf{r}_c} \hat{\mathbf{R}}_{ca} : \text{粒子 } c \text{ が粒子 } a(\neq c) \text{ から受ける中心力} \right)
 \end{aligned}$$

が粒子  $c$  に働く力を正しく与えていることから確かめられる。

### § 38. 一様な運動をしている電荷の場

実験室系  $K$  に対し電荷  $e$  とともに  $K'$  系が一様な速度  $\mathbf{V}$  で運動するとき<sup>\*27</sup>,  $K$  系において電荷の作る場を考える (図 27 のように  $\mathbf{R}, \mathbf{R}'$  を定義する). 座標の Lorentz 変換により

$$R'^2 \equiv x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{R^2}{1 - (V/c)^2}, \quad R^{*2} \equiv (x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) (y^2 + z^2)$$

となる. そこで  $K'$  系におけるポテンシャル

$$\phi' = \frac{e}{R'}, \quad \mathbf{A}' = 0$$

を Lorentz 変換すると,  $K$  系のポテンシャル

$$\phi = \frac{\phi'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} = \frac{e}{R^*}, \quad \mathbf{A} = \left( \frac{\frac{V}{c} \phi'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, 0, 0 \right) = \phi \frac{\mathbf{V}}{c} = \frac{e\mathbf{V}}{cR^*}$$

を得る. また  $K'$  系における電磁場

$$\mathbf{E}' = \frac{e\mathbf{R}'}{R'^3}, \quad \mathbf{H} = 0$$

<sup>\*27</sup> はじめ 2 つの座標系の原点と空間軸は一致しており, この瞬間をそれぞれの座標系の時間  $t, t'$  の原点にとる.

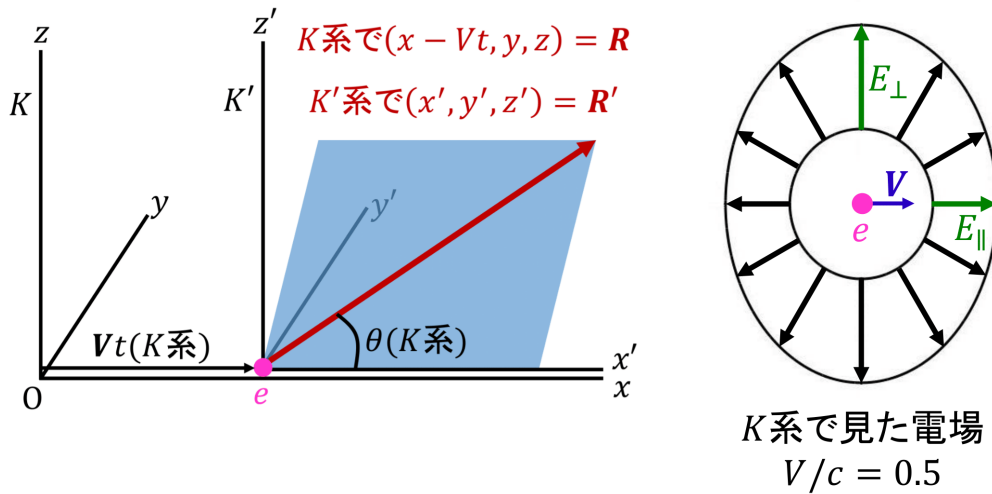


図 27 一様な運動をする電荷の作る電場は運動方向に“収縮する”.  $E_{\parallel} = \frac{e}{R^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)$ ,  $E_{\perp} = \frac{e}{R^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ .

を変換すると (§ 24),  $\theta$  を  $K$  系における電荷から観測点への動径ベクトル  $\mathbf{R}$  と運動方向の成す角として,  $K$  系の電磁場

$$\mathbf{E} = \underbrace{\frac{e\mathbf{R}}{R^3}}_{\text{くくりだす}} \frac{1 - (V/c)^2}{\{1 - (V/c)^2 \sin^2 \theta\}^{3/2}}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{E}$$

を得る (導出は下記, 式 (63.8-9) も参照). よって  $K$  系において電荷から等距離の球面上に分布する電場は, 運動方向  $\theta = 0, \pi$  よりも運動に垂直な方向  $\theta = \pi/2$  の方が大きい (図 27 参照). [この意味で電場は電荷の運動方向に“収縮する”これは定性的には物体の Lorentz 収縮 (§ 4) に類似しているけれど, 定量的には収縮の因子は異なっている.]

### § 38, 式の導出など

■  $K$  系で見た電磁場の表式の導出 電場の変換則 (24.2) を適用すると

$$E_x = E'_x = \frac{ex'}{R'^3}, \quad E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} = \frac{ey'}{R'^3 \sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad E_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} = \frac{ez'}{R'^3 \sqrt{1 - (V/c)^2}}$$

であり,  $R', x', y', z'$  を  $x, y, z$  で表すと

$$\mathbf{E} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \frac{e\mathbf{R}}{R^{*3}}, \quad \mathbf{R} \equiv (x - Vt, y, z)$$

とまとめられる. ここで関係式

$$R^{*2} \equiv (x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) (y^2 + z^2) = R^2 \cos^2 \theta + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) R^2 \sin^2 \theta = R^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)$$

を利用すると,

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3} \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}} \quad (38.8)$$

と書き換えられる。また式 (24.2),(24.3) より,  $\mathbf{H}' = 0$  のとき  $K$  系の電場と磁場の間には

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{E} \quad (38.9)$$

の関係がある (§ 24).

## § 38 について

■  $K$  系の電場 (38.6) と磁場 (38.9) について  $K$  系のポテンシャル (38.3),(38.5) から

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$$

によっても導かれる。

■ 「この区間の“幅”」 (p.105, l.17) について その定義を 2 通りに考えて  $\Delta\theta$  を見積もる。以下,  $\beta \equiv V/c$  とおく。

まず  $\theta = \pi/2 \pm \Delta\theta$  に対し  $\Delta\theta$  の 2 次の範囲で (式 (38.8) の分母) = 0 となる  $\Delta\theta$  の範囲を「この区間」と考えると

$$1 - \beta^2 \sin^2 \theta = 1 - \beta^2 \cos^2 \Delta\theta = 1 - \beta^2(1 - \Delta\theta^2 + O(\Delta\theta^4)) = 0, \\ \Delta\theta = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta}. \quad (36)$$

次に  $\theta = \pi/2 \pm \Delta\theta$  に対し  $E = E_{\perp}/2$  となる  $\Delta\theta$  の範囲を「この区間」と考えると

$$\frac{1}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = \frac{1}{2(1 - \beta^2)^{3/2}}, \\ \{1 - \beta^2(1 - \Delta\theta^2 + O(\Delta\theta^4))\}^3 = (1 - \beta^2)^3 + 3(1 - \beta^2)\beta^2\Delta\theta^2 + O(\Delta\theta^4) = 4(1 - \beta^2)^3, \\ \Delta\theta = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta}. \quad (37)$$

式 (36), 式 (37) において分母の  $\beta$  のみ 1 とおくと  $\Delta\theta \sim \sqrt{1 - (V/c)^2}$  (p.105, l.18) を得る。これは微量  $\alpha \equiv 1 - \beta$  について  $O(\alpha^{3/2})$  を落とす近似になっている:

$$\frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} = \frac{\sqrt{2\alpha - \alpha^2}}{1 - \alpha} = \sqrt{2\alpha - \alpha^2}(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots) \simeq \sqrt{2\alpha - \alpha^2} = \sqrt{1 - \beta^2}.$$

「小教程」の巻末注では次のように説明されている [1, p.385].  $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \epsilon, \theta = \frac{\pi}{2} \pm \Delta\theta$  とおくと, 式 (38.8) より

$$E = \frac{e}{R^2} \frac{\epsilon^2}{(\sin^2 \Delta\theta + \epsilon^2 \cos^2 \Delta\theta)^{3/2}} \simeq \frac{e}{R^2} \frac{\epsilon^2}{(\Delta\theta^2 + \epsilon^2)^{3/2}}.$$

これより,  $E$  が十分大きい範囲は  $|\Delta\theta| \lesssim \epsilon = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ .

■ 「近似的に  $\mathbf{E} = e\mathbf{R}/R^3$  が得られ」 (p.105 下から 4 行目) について  $\mathbf{E} = (e\mathbf{R}/R^3)(1 + O(\beta^2))$  である。

## § 39. クーロン場のなかの運動

質量  $m$ , 電荷  $e$  の粒子が, 固定された重い電荷  $e'$  のつくる引力の場のなかで運動する場合を考える.  $\alpha = ee'$  とおき,  $e$  の  $e'$  周りの保存する角運動量を  $M$  とする.

相対論的力学ではエネルギー

$$\mathcal{E} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} + \frac{\alpha}{r} = c\sqrt{p_r^2 + \frac{M^2}{r^2} + m^2c^2} + \frac{\alpha}{r} \quad (39.1)$$

が保存するので ( $p_r$  は運動量の動径成分) [第 2 の等号を本稿次節で補足],  $\alpha < 0$  (引力) であっても  $Mc < |\alpha|$  ならば,  $e$  は  $e'$  に落ち込む ( $e'$  との距離  $r \rightarrow 0$  となる) ことが可能である [本稿次節で補足]. これは非相対論的力学とは対照的である [『力学』 § 15 参照 [3, p.43]].

次に [角運動量保存則より, 電荷  $e$  の運動は電荷  $e'$  を含む平面内に限定される. そこで] 運動平面に極座標  $r, \phi$  を導入すると, Hamilton-Jacobi の方法から粒子の軌道は

$$Mc > |\alpha| \text{ のとき } (c^2M^2 - \alpha^2)\frac{1}{r} = c\sqrt{(M\mathcal{E})^2 - m^2c^2(M^2c^2 - \alpha^2)} \cos\left(\phi\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{c^2M^2}}\right) - \mathcal{E}\alpha, \quad (39.4)$$

$$Mc < |\alpha| \text{ のとき } (\alpha^2 - c^2M^2)\frac{1}{r} = \pm c\sqrt{(M\mathcal{E})^2 + m^2c^2(\alpha^2 - M^2c^2)} \cosh\left(\phi\sqrt{\frac{\alpha^2}{c^2M^2} - 1}\right) + \mathcal{E}\alpha, \quad (39.5)$$

$$Mc = |\alpha| \text{ のとき } \frac{2\mathcal{E}\alpha}{r} = \mathcal{E}^2 - m^2c^4 - \phi^2\left(\frac{\mathcal{E}\alpha}{cM}\right)^2 \quad (39.6)$$

と定まる (詳細は下記). ただし式 (39.5) の複号は  $\alpha < 0$  に対して正号を,  $\alpha > 0$  に対して負号を選ぶ<sup>\*28</sup>.

引力 ( $\alpha < 0$ ) に対して,

- $Mc > |\alpha|$  の場合, 式 (39.4) より
  - $\mathcal{E} < mc^2$  であれば粒子は閉じない有限運動をする.
  - \* 非相対論的力学において対応する楕円軌道が, 閉じているのとは対照的である.
  - $\mathcal{E} > mc^2$  であれば粒子は  $r$  が無限大となる運動をする.

[本稿次節で確認.]

- $Mc \leq |\alpha|$  の場合, 式 (39.5–6) より再び  $\phi \rightarrow \infty$  で  $r \rightarrow 0$  となることが確かめられる.  $r = 0$  への落下時間は有限である [本稿次節で確認].

## § 39, 式の導出など

■軌道の方程式 (39.4–6) の導出手順 Hamilton-Jacobi 方程式 (16.11) は

$$-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\alpha}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + m^2c^2 = 0$$

となる. ここから作用を決定するのに, 変数分離の方法 (『力学』 § 48) を適用することができ [理由は本稿次節],

$$S = -\mathcal{E}t + M\phi + f(r)$$

<sup>\*28</sup> 符号の逆の選び方は式 (39.1) の根の符号を逆転することにあたる.

とおいて上式に代入すると,

$$S = -\mathcal{E}t + M\phi + \int \sqrt{\frac{1}{c^2} \left( \mathcal{E} - \frac{\alpha}{r} \right)^2 - \frac{M^2}{r^2} - m^2 c^2} dr \quad (39.3)$$

が得られる. 次いで [Hamilton-Jacobi の方法の一般的な手順 (『力学』 § 47, 本稿次節で相対論への応用を議論) に従って]  $\partial S / \partial M = \text{const}$  とおくと, 軌道の方程式 (39.4-6) が得られる [本稿次節で導出].

## § 39 について

■エネルギー (39.1) における  $p^2$  の表式について 角運動量は  $M = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  で定義されるので, 運動量  $\mathbf{p}$  の  $r$  に垂直な成分  $p_\perp$  を用いて  $M = rp_\perp$  と表される. よって

$$p^2 = \frac{M^2}{r^2} + p_r^2 \quad (\text{p.106, 1.8 の式})$$

と書けることは, 相対論的力学においても正しい.

■「さらに引力の場合……(……了解する).」 (p.106, 1.14~19) について 式 (39.1) を

$$c^2 p_r^2 = \left( \mathcal{E} - \frac{\alpha}{r} \right)^2 - \frac{M^2 c^2}{r^2} - m^2 c^4$$

と書き換える.  $r \rightarrow 0$  のとき, これは条件

$$0 \leq c^2 p_r^2 \simeq \frac{\alpha^2 - M^2 c^2}{r^2}$$

を与える. これは  $Mc > |\alpha|$  に対しては満たされない.

■Hamilton-Jacobi の方法 (p.107) について Hamilton-Jacobi 方程式を解くとき, 「 $M$  は粒子の一定の角運動量である」 (§ 39, 1.9,10) り, 「 $\mathcal{E}$  (中略) は運動する粒子の一定のエネルギー」 (p.107, 1.11) であることを用いている. 実際には粒子  $e$  は加速運動をすると電磁波を放射してエネルギーと角運動量を失うけれど (§ 75), 非相対論的極限では粒子間相互作用を単なる Coulomb 相互作用として扱える (§ 65). こうして  $e'$  の作る与えられた Coulomb 場だけを考える近似の下では放射は無視され,  $\mathcal{E} = \text{const}$  とできると考えられる. この点については § 17 第 1 段落を参照 (そこにあるように, 放射を無視できる条件は § 75 で調べる). また, 興味あるのが  $e$  の運動だけなら p.107, 1.7 のように 1 粒子に対する Hamilton-Jacobi 方程式を書けば十分である\*29.

■Hamilton-Jacobi の方法により軌道の式 (39.4-6) を得ること Hamilton-Jacobi 方程式

$$-\frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\alpha}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 + (mc)^2 = 0 \quad (38)$$

に基づく軌道の式 (39.4-6) の導出について補足する. p.107, 1.8 の Hamilton-Jacobi 方程式と式 (39.3) では  $\alpha$  の符号は誤りであり, 以下で見ると式 (39.4-6) では符号は正しいと考えられる.

\*29 なお粒子ごとに  $\nabla S = \mathbf{P}$  が成り立つことに注意し  $\mathcal{H} = \sum \{ \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2} + e\phi \}$  を書き換えると, 系全体に対しては自己エネルギーを除き第 2 の電荷の質量を  $m'$  とし

$$-\frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{2\alpha}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 + m^2 c^4 + m'^2 c^4 = 0$$

となると考えられる.



相対性理論でも『力学』の解法を用いることができること [3, pp.186–190] 『力学』の式 (48.7) のように循環座標  $q$  は  $\alpha q$  の形に分離される。ここで  $\alpha = \partial S / \partial q$  は (同著式 (43.3) より)  $q$  に共役な一般座標である。以上の議論は系が非相対論的であることを用いていないので、相対性理論でもそのまま成り立つ。式 (38) では  $\phi$  が循環座標なので、作用において  $M\phi$  が分離される。ここに  $M$  は原点周りの角運動量である。

保存系で時間が  $S = S(q) - \mathcal{E}t$  ( $q$  は空間座標) と変数分離されることは、 $\partial_\mu S = -p_\mu$  が相対性理論でも成り立つから正しい。これは式 (38) において  $\partial S / \partial t$  が「他の座標 (あるいは時間) や導関数を含まないそれだけの組み合わせでのみ、ハミルトン=ヤコービの方程式のなかに入っている」(『力学』p.189 下から 11~9 行) なくても言える。ここで考えている Coulomb 場の中の電荷は、上記のように一定のエネルギー  $V$  を持つため、作用において  $-\mathcal{E}t$  を分離できる。

また以下の理由により、相対性理論においても解  $S$  に対して  $\partial S / \partial \alpha = \beta$  と置けば良い。すなわち相対性理論においても  $\partial_\mu S = -p_\mu$  より  $S$  を母関数とする正準変換公式が『力学』(非相対論) の場合と同じであり、またハミルトニアンがラグランジアン Legendre 変換で定義されることに変わらないため、『力学』§ 47 の議論がそのまま成り立つから。よって  $\partial S / \partial M = \text{const}$  である。

軌道の方程式 (39.4–6) の導出過程の補足 軌道の方程式を求める際、前もって作用の式 (39.3) における積分を実行するのは得策でない (これは Hamilton-Jacobi の方法により軌道を求める他の問題にも一般に言える)。式 (39.3) の平方根の前の符号を念のため  $\pm$  とし、角度  $\phi$  の基準線の任意性から  $\text{const} = 0$  とおくと

$$0 = \frac{\partial S}{\partial M} = \phi \mp \int \frac{(Mc/r^2)dr}{\sqrt{(\alpha^2 - M^2c^2) \left( \frac{1}{r} + \frac{\mathcal{E}\alpha}{\alpha^2 - M^2c^2} \right)^2 - \frac{(\mathcal{E}\alpha)^2}{\alpha^2 - M^2c^2} + \mathcal{E}^2 - m^2c^4}} \quad (39)$$

となる。最右辺を書き換えるには分子の  $1/r^2$  を分母の根号内に含めず、 $1/r$  を塊と見て根号内を平方完成することにだけ注意すれば良い。 $Mc \neq |\alpha|$  の場合には

$$\text{(式 (39) 右辺)} = \phi \mp \int \frac{(Mc/r^2)dr}{\sqrt{\frac{1}{M^2c^2 - \alpha^2} \left[ c^2 \{ (M\mathcal{E})^2 - (mc)^2 (M^2c^2 - \alpha^2) \} - \left( \frac{M^2c^2 - \alpha^2}{r} + \mathcal{E}\alpha \right)^2 \right]}} \quad (40)$$

である。

$Mc > |\alpha|$  のとき  $\frac{M^2c^2 - \alpha^2}{r} + \mathcal{E}\alpha \equiv c\sqrt{(M\mathcal{E})^2 - (mc)^2(M^2c^2 - \alpha^2)} \cos X$  と置換すると

$$\text{(式 (40) 右辺)} = \phi \mp \frac{1}{\sqrt{1 - (\alpha/cM)^2}} X$$

となるから式 (39.4) を得る。その際、複号は消える。

$Mc < |\alpha|$  のとき  $\frac{\alpha^2 - M^2c^2}{r} + \mathcal{E}\alpha \equiv c\sqrt{(M\mathcal{E})^2 + (mc)^2(\alpha^2 - M^2c^2)} \cosh X$  と置換すると

$$\text{(式 (40) 右辺)} = \phi \pm \frac{1}{\sqrt{(\alpha/cM)^2 - 1}} X$$

となる。ここから軌道の方程式を求めると、式 (39.5) は  $\sqrt{(\alpha^2/c^2M^2) - 1} \rightarrow \sqrt{(\alpha^2/c^2M^2) - 1}$  と訂正されるものと考えられる (本稿では訂正済み)。

$Mc = |\alpha|$  のとき式 (39) 右辺において根号内を  $X$  と置換して積分を実行すると式 (39.6) を得る。その際、複号は消える。

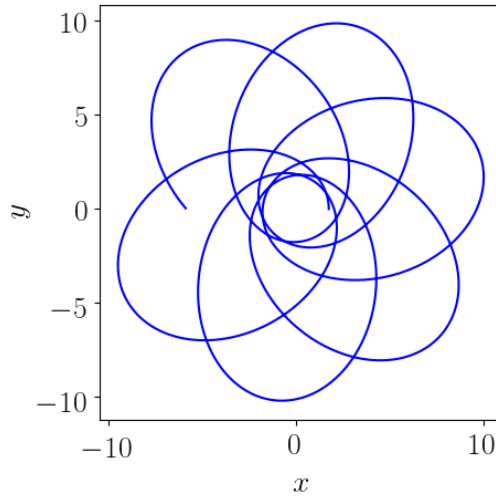


図 28 「開いたバラの花形の軌道」(p.107 の 1 番下)

■「もし  $\mathcal{E} < mc^2$ ……できる (無限運動)」(p.107 下から 6,5 行目) について  $Mc > |\alpha|$  を用いると式 (39.4) 右辺の  $\cos$  の係数が

$$\begin{aligned} \sqrt{(mc^2\alpha)^2 - (Mc)^2\{(mc^2)^2 - \mathcal{E}^2\}} &\leq -\mathcal{E}\alpha & (\mathcal{E} > mc^2 \text{ のとき}), \\ \sqrt{(Mc)^2\{\mathcal{E}^2 - (mc^2)^2\} - (mc^2\alpha)^2} &\geq -\mathcal{E}\alpha & (\mathcal{E} < mc^2 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

となるので,  $\mathcal{E} > mc^2$  の場合に限って式 (39.4) 右辺は 0 になり得るから.

■「開いたバラの花形 (open “rosettes”) の軌道」(p.107 の 1 番下) について 軌道の式 (39.4) は, 変数  $r$  と各パラメーターを適当に無次元化し, 引力の条件  $\alpha < 0$  および  $Mc > |\alpha|$  を満たすように

$$c = 1, \quad M = 2, \quad \alpha = -1, \quad \mathcal{E} = -1, \quad m = \sqrt{\frac{3.5}{3}}$$

ととると

$$\frac{3}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\phi\right) + 1$$

となる. この式で表される軌道は図 28 のようである.

■「電荷が原点に “落ち込む” ために必要な時間は有限である」(p.108, l.6) ことの確認 作用 (39.3) に対して  $\partial S/\partial \mathcal{E} = \text{const}$  とおくと, 動径が  $r = r_0$  から  $r = 0$  まで変化するのに要する時間は

$$\Delta t = \frac{1}{c^2} \int_{r_0}^0 \frac{(\mathcal{E} - \frac{\alpha}{r}) dr}{\sqrt{\frac{1}{c^2} (\mathcal{E} - \frac{\alpha}{r})^2 - \frac{M^2}{r^2} - m^2 c^2}} = \frac{1}{c^2} \int_{r_0}^0 \frac{(\mathcal{E} + \frac{|\alpha|}{r}) dr}{\sqrt{\frac{1}{c^2} \left\{ \mathcal{E}^2 + 2\frac{|\alpha|}{r} \mathcal{E} + \frac{|\alpha|^2 - M^2 c^2}{r^2} \right\} - m^2 c^2}}$$

と表される ( $\alpha < 0$  を考慮した). 最右辺における分母の  $1/r^2$  の係数は,  $Mc \leq |\alpha|$  の仮定により非負である. 分子の第 1 項  $\mathcal{E}$  の寄与は明らかに有限である. また発散の恐れのある第 2 項  $|\alpha|/r$  の積分に関しても,  $r \rightarrow 0$  のとき

- $Mc < |\alpha|$  に対して分母の主要項は  $1/r^2$  の項なので, 被積分関数は定数のように振舞う.
- $Mc = |\alpha|$  に対して分母の主要項は  $1/r$  の項なので, 被積分関数は  $1/\sqrt{r}$  のように振舞う.

よっていずれの場合にも積分は有限の結果を与える.

### § 39, 問題

1 (斥力 ( $\alpha > 0$ ) での電荷の散乱角) 既に得られている軌道の方程式から, 散乱角を求められる.  $Mc \leq |\alpha|$  の場合の軌道 (39.5-6) は  $r \rightarrow 0$  に到達するので, 斥力 ( $\alpha > 0$ ) の場合には不適である. よって  $Mc > |\alpha|$  でなければならないことが見出される. そこで軌道の式 (39.4) を考えると, これは非相対論における双曲線軌道の方程式と同じ形

$$\frac{p}{r} = -1 + e \cos \phi' \quad (\text{『力学』の式 (15.14)})$$

を持つ. ここに  $p \equiv \frac{c^2 M^2 - \alpha^2}{\mathcal{E} \alpha}$  は通径,  $\phi' \equiv \phi \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{c^2 M^2}}$  は尺度変更した方位角であり, 離心率は

$$e = \frac{c \sqrt{(M\mathcal{E})^2 - m^2 c^2 (M^2 c^2 - \alpha^2)}}{\mathcal{E} \alpha}$$

と同定される. このとき実際に  $e > 1$  であること (上式が双曲線を表すこと) は次のように確かめられる.  $e > 1$  を両辺平方して移項すると,

$$c^2 \{(M\mathcal{E})^2 - m^2 c^2 (M^2 c^2 - \alpha^2)\} > \mathcal{E}^2 \alpha^2, \quad \therefore (\mathcal{E}^2 - m^2 c^4)(M^2 c^2 - \alpha^2) > 0$$

となる. ここで仮定より  $M^2 c^2 - \alpha^2 > 0$  であり, またエネルギーの表式 (39.1) より  $\alpha > 0$  では  $\mathcal{E} > mc^2$  が満たされるので, この不等式は成り立っている.

以上を踏まえ, 散乱角  $\chi$  を求めよう. 「 $\varphi_0$  を軌道 (39.4) の 2 つの漸近線のあいだの角度としたとき」とあるが, 正確には始線と漸近線のなす角が  $\pm\phi_0$  であり, 2 つの漸近線のなす角は  $2\phi_0$  である. (このとき散乱角が  $\chi = \pi - 2\phi_0$  となることは正しい.) そこで軌道の式 (39.4) に  $r = \pm\infty$ ,  $\phi = \pm\phi_0$  を代入すると

$$\phi_0 = \frac{cM}{\sqrt{c^2 M^2 - \alpha^2}} \psi, \quad \psi \equiv \cos^{-1} \left( \frac{\mathcal{E} \alpha}{c \sqrt{(M\mathcal{E})^2 - m^2 c^2 (M^2 c^2 - \alpha^2)}} \right) \quad (41)$$

が得られる. これを電荷の無限遠での速度  $v$  で書き換えるには, エネルギーの表式 (39.1) に

$$r = \infty, \quad p = \frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

を代入し,  $v$  について解いた式

$$v = c \frac{\sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2 c^4}}{\mathcal{E}}$$

を用いれば良い. このとき教科書の答のように,

$$\psi = \tan^{-1} \left( \frac{v \sqrt{c^2 M^2 - \alpha^2}}{c \alpha} \right) \quad (42)$$

と書き換えられる. 実際, 式 (42) の  $\psi$  に対して

$$\begin{aligned} \cos^2 \psi &= (1 + \tan^2 \psi)^{-1} = \left( \frac{c^2 \alpha^2 + v^2 (c^2 M^2 - \alpha^2)}{c^2 \alpha^2} \right)^{-1} = \left( \frac{\mathcal{E}^2 c^2 \alpha^2 + c^2 (\mathcal{E}^2 - m^2 c^4) (c^2 M^2 - \alpha^2)}{c^2 \alpha^2 \mathcal{E}^2} \right)^{-1} \\ &= \frac{\alpha^2 \mathcal{E}^2}{c^2 \{(M\mathcal{E})^2 - m^2 c^2 (M^2 c^2 - \alpha^2)\}} \end{aligned}$$

となるので, もとの  $\psi$  の式 (41) に戻ることができる.

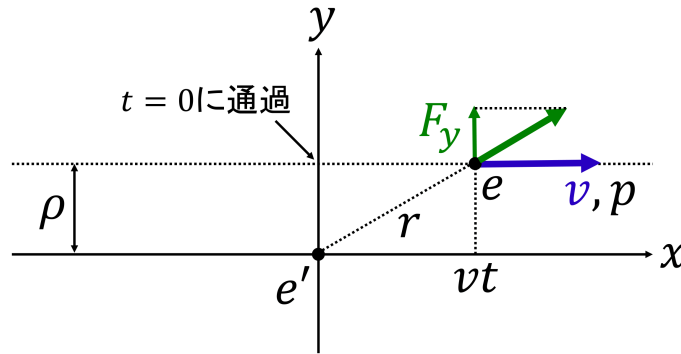


図 29 Coulomb 場による微小角散乱の近似的な取り扱い

2 (Coulomb 場による微小角散乱の断面積) 相対論的力学では、無限遠での運動量  $p_\infty = \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$  を用いて

$$M = \rho p_\infty = \rho \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

である。  $\alpha > 0$  を想定し、小問 1 の結果にこれを代入して得られる  $\rho$  と  $\chi$  の関係は、一般には複雑である。そこで微小角散乱を考える (このとき Rutherford の公式との関係を議論できる)。散乱角の評価は『力学』 § 20 と同様の手順で行われており、粒子は近似的に衝突パラメーター  $\rho$  の 1 直線上を、入射速度  $v$  (対応する運動量  $p = \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ ) のまま走っていると見なすと、力の運動方向に垂直な成分は、図 29 より

$$F_y = \frac{\alpha \rho}{r^2} \frac{\rho}{r}$$

と表される。また運動方程式  $\dot{p}_y = F_y$  が成立するので、

$$\chi = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} F_y dt = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha \rho dt}{(\rho^2 + v^2 t^2)^{3/2}}$$

と立式できる。

## § 40. 双極モーメント

電荷が原点付近に集中しているとき、遠方  $\mathbf{R}$  に作られる [静電場の] ポテンシャルは\*30

$$\phi = \frac{\sum e}{R} + \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}}{R^3}$$

と近似される [導出は本稿次節]。

ここに  $\mathbf{d} \equiv \sum e \mathbf{r}$  は双極モーメントと呼ばれ、

- $\sum e = 0$  の系で、原点のとり方に依らない。
- 正電荷  $e_a^+$  (位置  $\mathbf{r}_a^+$ ) と負電荷  $-e_a^-$  (位置  $\mathbf{r}_a^-$ ) を区別し、それぞれの電荷中心

$$\mathbf{R}^+ = \frac{\sum e_a^+ \mathbf{r}_a^+}{\sum e_a^+}, \quad \mathbf{R}^- = \frac{\sum e_a^- \mathbf{r}_a^-}{\sum e_a^-}$$

\*30 教科書の記号は  $\mathbf{R}_0$  だが、本稿では添字 0 を省く。第 9 章では電荷から観測点へ向かうベクトル  $\mathbf{R}$  と区別するために、原点を始点とする位置ベクトルを  $\mathbf{R}_0$  と書く措置が有用となる。

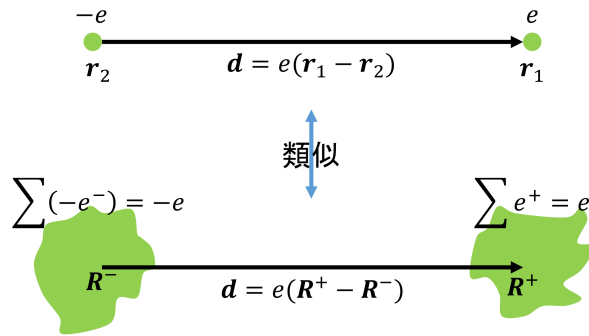


図 30  $d = e\mathbf{R}_{+-}$ :(40.6) の解釈. 正電荷群と負電荷群をそれぞれ 1 つの粒子と見なす.

$$\begin{array}{ccc}
 \phi^{(1)} = -\mathbf{d} \cdot \nabla \frac{1}{R} & \xrightarrow{(40.7)} & \phi^{(1)} = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}}{R^3} \\
 \downarrow -\nabla & & \downarrow -\nabla \text{ p.110 l.7} \\
 \mathbf{E} = (\mathbf{d} \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{R} & \xrightarrow{(40.9)} & \mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{R^3} \quad (40.8)
 \end{array}$$

図 31  $\phi^{(1)}$  と対応する電場

を定義すると

$$\mathbf{d} = \mathbf{R}^+ \sum e_a^+ - \mathbf{R}^- \sum e_a^-$$

と書ける.

- 特に  $\sum e_a^+ = \sum e_a^- = e$  であれば

$$\mathbf{d} = e(\mathbf{R}^+ - \mathbf{R}^-)$$

と書ける (図 30 参照).

全電荷がゼロの系のポテンシャルは (近似的に)1 次の項

$$\phi^{(1)} = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}}{R^3}$$

で表される.  $\phi^{(1)}$  から導かれる電場は  $R^3$  に逆比例する強さを持ち,  $\mathbf{d}$  の方向の周りに軸対称性を持つ (図 31 参照 [計算は本稿次節]).

## § 40 について

■展開 (40.2) について § 41 における 2 次の項 (41.2) の確認も兼ねて導出を補足する.

$$\begin{aligned}
 \phi &= \sum \frac{e}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} \\
 &= \sum \sum_n \frac{1}{n!} \left( \mathbf{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right)^n \frac{e}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} && \mathbf{r} = \mathbf{0} \text{ の周りに展開} \\
 &= \sum \sum_n \frac{1}{n!} \left( -\mathbf{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right)^n \frac{e}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} && \mathbf{R} \text{ の微分に書き換えれば} \\
 &= \sum \sum_n \frac{1}{n!} \left( -\mathbf{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right)^n \frac{e}{R} && \text{先に } \mathbf{r} = \mathbf{0} \text{ を代入できる} \\
 &= \sum \frac{e}{R} + \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}}{R^3} + \frac{D_{\alpha\beta}}{6} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \left( \frac{1}{R} \right) + \dots
 \end{aligned}$$

■ $\phi^{(1)}$  の式 (40.7) と電場の式 (40.8), (40.9) について まず式 (40.7) について,

$$\phi = \sum (-e\mathbf{r} \cdot \nabla) \frac{1}{R} = \left( \sum -e\mathbf{r} \right) \cdot \left( \nabla \frac{1}{R} \right)$$

とできることが,  $\mathbf{r} \cdot \nabla = x_\alpha \partial_\alpha$  と書き換えると分かる ( $\partial_\alpha \equiv \partial / \partial X_\alpha$  は  $\mathbf{R}$  の成分による微分). 次に「(40.9) という形に書けることを示しておくのは有用」(p.110, 1.11) について, 式 (40.9) は  $-\nabla \phi^{(1)}$  を考えると図 31 のように  $-\nabla$  と  $\mathbf{d} \cdot \nabla$  が交換できることから直ちに分かる. それに比べると遠回りだが, 式 (40.9) が式 (40.8) に一致することを次のように確かめられる.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= (\mathbf{d} \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{R} = -(\mathbf{d} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\frac{1}{R^3} d_\alpha \partial_\alpha \mathbf{R} - \mathbf{R} d_\alpha \partial_\alpha \frac{1}{R^3} \\
 &= -\frac{1}{R^3} d_\alpha e_\alpha + 3d_\alpha \frac{X_\alpha}{R} \frac{1}{R^3} \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{R^3}.
 \end{aligned}$$

■ $E_\theta$  の式 (40.11) について  $\theta$  方向が図 32 のように定義されるなら, 場 (40.8) のうち  $\theta$  成分を持つのは  $-\mathbf{d}/R^3$  の部分のみで, その成分は

$$E_\theta = -\frac{-d \sin \theta}{R^3} = \frac{d \sin \theta}{R^3}$$

となる. よって式 (40.11) の  $E_\theta$  の符号は逆と考えられる.  $E_x, E_z$  を分解しても同じ結果

$$E_\theta = E_x \cos \theta - E_z \sin \theta = \frac{d \sin \theta}{R^3}$$

を得る.

## § 41. 多重極モーメント

ポテンシャルの展開における 2 次の項は 4 重極ポテンシャルと呼ばれ,

$$\phi^{(2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R} \right) \sum e x_\alpha x_\beta, \quad X_\alpha : \mathbf{R} \text{ の成分} \quad (41.2)$$

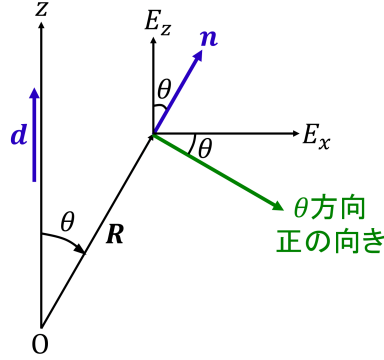


図 32 電場の分解

と表される (§ 40 のノート参照). これは

$$\phi^{(2)} = \frac{D_{\alpha\beta}}{6} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R} = \frac{D_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}{2R^3}, \quad n_\alpha : \mathbf{R}/R \text{ の成分} \quad (41.5-6)$$

と書くこともできる (導出は下記). ここに

$$D_{\alpha\beta} = \sum e(3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \quad (41.3)$$

は 4 重極モーメントであり, トレースレスの条件  $D_{\alpha\alpha} = 0$  を満たす.

また球関数の理論を用いれば, 展開  $\phi = \sum_{l=0}^{\infty} \phi^{(l)}$  の  $l$  次の項の表式

$$\phi^{(l)} = \frac{1}{R^{l+1}} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Q_m^{(l)} Y_{lm}^*(\Theta, \Phi), \quad Q_m^{(l)} = \sum_a e_a r_a^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\theta_a, \phi_a)$$

が見出される ( $\Theta, \Phi$  および  $\theta_a, \phi_a$  はそれぞれ,  $\mathbf{R}$  および  $\mathbf{r}_a$  の座標軸となす角).  $\{Q_m^{(l)}\}$  は  $2^l$  重極モーメントと呼ばれる, 対称な  $l$  階の既約テンソルに対応する. 既約テンソルとは, 添字の任意の 1 対について縮約するとゼロになるテンソルのことである.

### § 41, 式の導出など

■式 (41.5-6) の導出 一見すると, 式 (41.2) の  $\phi^{(2)}$  は 6 つの量  $\sum e x_\alpha x_\beta$  で特徴付けられる. しかしながら  $1/R$  が Laplace 方程式

$$0 = \Delta \left( \frac{1}{R} \right) = \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \left( \frac{1}{R} \right)$$

を満たすことに注意すると,

$$\phi^{(2)} = \frac{1}{2} \left\{ \sum e \left( x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3} r^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \right\} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{D_{\alpha\beta}}{6} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \left( \frac{1}{R} \right) : (41.5)$$

と書き換えられる. これは 5 つの独立成分を持つ, トレースレスの対称テンソル  $D_{\alpha\beta}$  で表されている. 微分を実行すると,

$$\phi^{(2)} = \frac{D_{\alpha\beta}}{6} \left( \frac{3X_\alpha X_\beta}{R^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{R^3} \right) = \frac{D_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}{2R^3} : (41.6) \quad (\because D_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} = D_{\alpha\alpha} = 0)$$

が得られる.

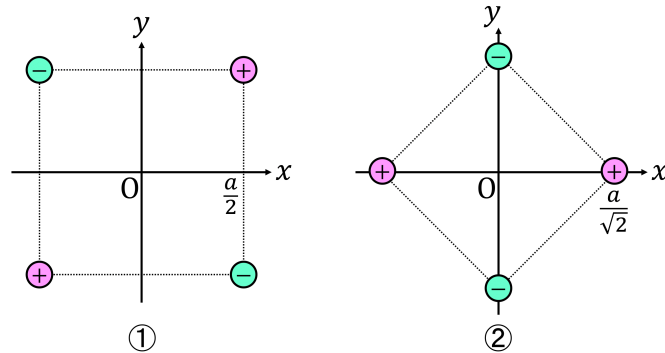


図 33 4重極モーメント

## § 41 について

■「しかしながら，……，5個だけに依存する……このことは……ラプラス方程式……から結論される」(p.111, 1.6~10) について  $1/R_0$  が Laplace 方程式を満たすため， $\phi^{(2)}$  を p.111, 1.11 のように書き換えられ，ここに現れる  $D_{\alpha\beta}$ (式 (41.3)) はトレースレスの条件 (41.4) のために 5 個の独立な成分を持つ．式 (41.6):  $\phi^{(2)} = D_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta / 2R^3$  の右辺に付加的な項が現れないのは式 (41.4):  $D_{\alpha\alpha} = 0$  のおかげであり，p.111, 1.11 の  $\phi^{(2)}$  の式への書き換えのおかげである．

■4重極モーメント (41.3) の意味 2種類の電荷  $e = \pm q$  から成る図 33 ①の電荷分布に対して，4重極モーメント (41.3) は

$$D_{\alpha\beta} = \sum e(3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}),$$

$$\left( 3 \sum e x_\alpha x_\beta \right) = 3 \left\{ q \begin{pmatrix} a'^2 & a'^2 & 0 \\ a'^2 & a'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - q \begin{pmatrix} a'^2 & -a'^2 & 0 \\ -a'^2 & a'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} a'^2 & a'^2 & 0 \\ a'^2 & a'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - q \begin{pmatrix} a'^2 & -a'^2 & 0 \\ -a'^2 & a'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= 3 \cdot qa^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (a' \equiv a/2)$$

$$\left( \sum e r^2 \right) \delta_{\alpha\beta} = 0$$

と計算される． $xy, yz, zx$  面内で図 33 ①の形の電荷分布を考え，各々に対して積  $qa^2$  を独立に選べば，3つの非対角成分  $D_{xy}(=D_{yx}), D_{yz}(=D_{zy}), D_{zx}(=D_{xz})$  を指定できる．逆に言えば， $D_{\alpha\beta}$  の非対角成分は図 33 ①の形の電荷分布からの寄与として理解できる．

次に図 33 ②の電荷分布に対して，4重極モーメント (41.3) は

$$D_{\alpha\beta} = \sum e(3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}),$$

$$\left( 3 \sum e x_\alpha x_\beta \right) = 3 \left\{ q \begin{pmatrix} a''^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a''^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} a''^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a''^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$



$$=3 \cdot qa^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (a'' \equiv a/\sqrt{2})$$

$$\left(\sum er^2\right) \delta_{\alpha\beta} = 0$$

と計算される．よって  $D_{\alpha\beta}$  の対角成分は， $xy, yz, zx$  面内における図 33 ②の形の電荷分布からの寄与に分解できる．

図 33 の電荷分布はいずれも電気双極子モーメントが  $\mathbf{d} = 0$  となっており，4 重極モーメント  $D_{\alpha\beta}$  を用いて初めて捉えられる．

■  $D_{\alpha\beta}$  の主値の関係 (41.7) について 対称性により  $D_{xx} = D_{yy} \equiv D'$  となる時，トレースレスの条件 (41.4) により  $D_{zz} = -2D'$ : (41.7) でなければならない．

系が  $z$  軸周りの回転対称性を持つ場合 (対称性の次数  $n = \infty$ ) に，式 (41.7) を確かめる．電荷  $e$  を各位置での体積要素中の電荷  $\rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$  に置き換え，また電荷密度  $\rho$  が方位角  $\phi$  に依らないことを考慮し  $\phi$  に関する積分だけ実行すると

$$\begin{aligned} D_{xx} &= \sum e \{3(r \sin \theta \cos \phi)^2 - r^2\} = \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \rho r^2 \sin \theta (3 \sin^2 \theta - 2) \pi r^2, \\ D_{yy} &= \sum e \{3(r \sin \theta \sin \phi)^2 - r^2\} = \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \rho r^2 \sin \theta (3 \sin^2 \theta - 2) \pi r^2, \\ D_{zz} &= \sum e \{3(r \cos \theta)^2 - r^2\} = \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \rho r^2 \sin \theta (3 \cos^2 \theta - 1) 2\pi r^2 \\ &= -2 \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \rho r^2 \sin \theta (3 \sin^2 \theta - 2) \pi r^2 \end{aligned}$$

となる．よって式 (41.7):  $D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2}D_{zz}$  が成り立っている．

■ 「四重双極モーメントは座標原点の……証明される」 (p.112, l.7) について 系の全電荷と双極モーメントがゼロのとき，原点の移動により同一の点の位置ベクトルが  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$  となるとすると，

$$D_{\alpha\beta}' = D_{\alpha\beta} + \left(\sum e\right) (3a_\alpha a_\beta - \delta_{\alpha\beta} a^2) + 3 \left(\sum e x_\alpha\right) a_\beta + 3 \left(\sum e x_\beta\right) a_\alpha - \delta_{\alpha\beta} \mathbf{a} \cdot \left(\sum e \mathbf{r}\right) = D_{\alpha\beta}.$$

■ 軸対称な系の  $\phi^{(2)}$  の式 (41.8) について  $\phi^{(2)}$  の式 (41.6) において

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta &= D \left(-\frac{1}{2}n_x^2 - \frac{1}{2}n_y^2 + n_z^2\right) = \frac{D}{2}(-1 + 3n_z^2) \quad (\because n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1) \\ &= \frac{D}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) = DP_2(\cos \theta) \end{aligned}$$

であることによる．

■ 球関数の理論について 展開 (41.9) は Legendre 多項式  $P_l$  を母関数によって定義する式である [12, p.78].

---

ランダウ＝リフシッツ『場の古典論』 文献 [12]

---

式 (41.9) 式 (5.38)

式 (41.10) 式 (5.115)

式 (41.11) 式 (5.141)

---

■  $Q_m^{(1)}$  と双極モーメントの関係 (41.14) について

$$Y_{10}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_{1,\pm 1}(\theta, \phi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}$$

に注意すると, 式 (41.13) より

$$Q_0^{(1)} = \sum_a e_a r_a \cos \theta_a = d_z, \quad Q_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_a e_a r_a \sin \theta_a e^{\pm i\phi_a} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (d_x \pm id_y).$$

ただし式 (41.14) では  $Q_0^{(1)} = id_z$  となっている.

§ 41, 問題 (一様に帯電した楕円体の, その中心に関する 4 重極モーメント)

途中計算を簡単に補足する.

$$\int x'^2 dx' dy' dz' = \int_{-1}^1 x'^2 \cdot \underbrace{\pi(1-x'^2)}_{\text{円の面積}} dx' = \frac{4\pi}{15}, \quad \text{etc.}$$

より, 4 重極モーメントの主値は

$$D_{xx} = (\rho abc) \int (2a^2 x'^2 - b^2 y'^2 - c^2 z'^2) dx' dy' dz' = \frac{4\pi}{15} (\rho abc) (2a^2 - b^2 - c^2) = \frac{e}{5} (2a^2 - b^2 - c^2), \quad \text{etc.}$$

球状の電荷分布 ( $a = b = c$ ) に対しては  $D_{xx} = D_{yy} = D_{zz} = 0$  となる. 電荷分布の形状が球と比べて多少なりとも歪まないことには, 4 重極モーメントは (ゼロでない) 値を持たない.

楕円体の軸が主軸であることは, 直接的には次のように確かめられる.  $z' = (\text{一定})$  の  $x'y'$  面内に極座標  $(r, \phi)$  を導入すると,  $D_{\alpha\beta}$  の非対角成分は

$$D_{xy} = 3\rho \int xy dx dy dz = 3\rho a^2 b^2 c \int x' y' dx' dy' dz' = 3\rho a^2 b^2 c \int_{-1}^1 dz' \int_0^{\sqrt{1-z'^2}} dr r^3 \int_0^{2\pi} d\phi \sin \phi \cos \phi$$

などと計算でき, 最右辺において  $\phi$  に関する積分は確かにゼロである.

§ 42. 外場のなかの電荷の系

ポテンシャル  $\phi$  の外場のなかにおかれた電荷の系を考え, その内部に座標原点をとり, 系のエネルギー

$$U = \sum_a e_a \phi(\mathbf{r}_a) \quad (42.1)$$

を  $\mathbf{r}_a$  のベキに展開する:

$$U = U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} + \dots$$

このとき  $\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$  の原点における値をそれぞれ  $\phi_0, \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha}\right)_0 = -E_{0\alpha}, \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$  と書き, 再び電荷の系のモーメント

$$\mathbf{d} = \sum e \mathbf{r}, \quad D_{\alpha\beta} = \sum e (3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta} r^2)$$

を導入すると,

$$U^{(0)} = \phi_0 \sum e, \quad U^{(1)} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0, \quad U^{(2)} = \frac{D_{\alpha\beta}}{6} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \quad (43)$$

となる (導出は下記).

$U^{(1)}$  までの近似では, 系に働く合力は

$$F_\alpha = E_{0\alpha} \sum e + [\partial_\alpha(d_\beta E_\beta)]_0, \quad \text{または} \quad F_\alpha = E_{0\alpha} \sum e + [d_\beta \partial_\beta E_\alpha]_0 \quad (44)$$

で与えられ [本稿次節で補足], 全電荷がゼロであれば, 力は原点における場の導関数で特徴付けられる. これに対し力のモーメント

$$\mathbf{K} = \sum_a \mathbf{r}_a \times e_a \mathbf{E}_0 = \mathbf{d} \times \mathbf{E}_0 \quad (42.6)$$

は場の強さ自体で表される.

各々の電荷がゼロで, 双極モーメント  $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$  を持つ 2 つの系が, 長距離 (電荷の広がり比べて)  $\mathbf{R}$  を隔てて存在するとき, それらの間の相互作用エネルギーは

$$U = -\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{(\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2)R^2 - 3(\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{R})(\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{R})}{R^5} \quad (\because \mathbf{E}_1 \text{ の表式 (40.8)}) \quad (42.7)$$

と表される [本稿次節で補足]. 一方の系がゼロでない電荷  $e$  を持つ場合には, 同様にして

$$U = e \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}}{R^3} \quad (42.8)$$

が得られる [本稿次節で補足].

## § 42, 式の導出など

■  $U^{(n)}$  の式 (43) の導出 位置エネルギーのベキ展開

$$U = \sum e\phi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)}, \quad U^{(n)} = \frac{1}{n!} \left( \sum e x_{\alpha_1} \cdots x_{\alpha_n} \right) (\partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_n} \phi)_0$$

における  $n = 0, 1, 2$  の項は

$$U^{(0)} = \left( \sum e \right) \phi_0, \quad (42.3)$$

$$U^{(1)} = \left( \sum e \mathbf{r} \right) \cdot (\nabla \phi)_0 = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0, \quad [\text{本稿次節で補足}] \quad (42.4)$$

$$\begin{aligned} U^{(2)} &= \frac{1}{2} \left( \sum e x_\alpha x_\beta \right) \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum e \left( x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} r^2 \right) \right\} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \quad \left( \because \text{Laplace 方程式 } \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0 \right) \\ &= \frac{D_{\alpha\beta}}{6} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \end{aligned} \quad (42.9)$$

と計算される.

## § 42 について

■ 外場のなかの電荷の位置エネルギー (42.1) について エネルギーの式 (16.6) による.

あるいは次のように考えることもできる. 電荷の相互作用エネルギーの式 (37.7) において, 外場のなかの電荷 (添字  $a, b, \dots$  で表す) と外場を作っている電荷 (添字  $a', b', \dots$  で表す) を区別すると

$$U' = \frac{1}{2} \sum_{a,b(\neq a)} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} + \sum_{a,b'} \frac{e_a e_{b'}}{R_{ab'}} + \frac{1}{2} \sum_{a',b'(\neq a')} \frac{e_{a'} e_{b'}}{R_{a'b'}}$$

となる。今、興味のある右辺第2項には係数1/2が現れず、これは式(42.1):

$$\sum_a e_a \phi_a, \quad \phi_a = \sum_{b'} \frac{e_{b'}}{R_{ab'}}$$

に他ならない。

■「 $U$ を $r_a$ のベキに展開することができる」(p.114, 1.6~1.8)について 場が空間的に「ゆるやかに変化する」(p.114, 1.6)とき $r_a$ による展開(42.2)における展開係数 $\partial_\alpha \phi(0), \partial_\alpha \partial_\beta \phi(0), \dots$ が小さくなる。

■ $U^{(1)}$ の式(42.4)について

$$U^{(1)} = \sum e \left( \mathbf{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \phi \right) \Big|_{\mathbf{r}=0} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0 \quad (42.4)$$

とできるのは $\frac{\partial \phi(\mathbf{r}_a)}{\partial \mathbf{r}_a} \Big|_{\mathbf{r}_a=0} = (\text{grad} \phi)_0 = -\mathbf{E}_0$ が全ての粒子に共通で、粒子の和の外に出せるからである。

■ $\mathbf{F} = \mathbf{E}_0 \sum e + (\text{grad} \mathbf{d} \cdot \mathbf{E})_0$ (式(42.4)の3行下, 本稿の式(44))について  $\mathbf{r} = 0$ を代入済みの $U = U^{(0)} + U^{(1)}$ に対して $\sum(-\text{grad})$ を作用させても(すなわち $-\sum_a \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}$ を計算しても)上手くいかない。そこで

$$\mathbf{F} = -\sum_a \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} = -\sum_{a,b} e_a \frac{\partial \phi(\mathbf{r}_b)}{\partial \mathbf{r}_a} = -\sum_a e_a \frac{\partial \phi(\mathbf{r}_a)}{\partial \mathbf{r}_a}$$

としてからこれを $r_a$ のベキに展開すると,

$$F_\alpha = -\sum e \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha} \Big|_{\mathbf{r}=0} - \sum e \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \Big|_{\mathbf{r}=0} x_\beta$$

となる。ここで $\frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$ における $\mathbf{r}, x_\alpha, x_\beta$ は粒子の位置であるけれど、ポテンシャル $\phi$ と電場 $\mathbf{E}$ は各位置で定義されていることに注意すると、これらを単なる空間の位置と見なすことができる。このとき

$$-\frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha} \Big|_{\mathbf{r}=0} = E_{0\alpha}, \quad -\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \Big|_{\mathbf{r}=0} = (\partial_\alpha E_\beta)_0 = (\partial_\beta E_\alpha)_0$$

となり、これらを粒子の和の外に出すと、式(44):

$$F_\alpha = E_{0\alpha} \sum e + [\partial_\alpha (d_\beta E_\beta)]_0, \quad \text{または} \quad F_\alpha = E_{0\alpha} \sum e + [d_\beta \partial_\beta E_\alpha]_0$$

を得る。

「小教程」の巻末注では、「 $\text{grad}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \mathbf{d} \times \text{rot} \mathbf{E}$ として $\text{rot} \mathbf{E} = 0$ を使う」とある[1, p.385].

■式(42.7)について これは丁寧に言えば、第1の系が作る外場 $\mathbf{E}_1$ の中で第2の系が持つポテンシャルである。これは添字1と2の入れ替えについて対称である。

■式(42.8)について 電荷 $e(\neq 0)$ を持つのは第2の系である。第1の系の双極モーメントを $\mathbf{d}$ とし、 $\mathbf{R}$ は系1から系2へ向かうものとする、

$$\phi_0 \equiv (\text{系1が系2の中心に作るポテンシャル}) = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}}{R^3}, \quad (\because \text{式(40.7)})$$

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla(\text{式(40.2)}) = 0, \quad \left( \because \sum_{\text{系1}} e = 0 \right)$$

$$U = \phi_0 \sum_{\text{系2}} e - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_1 = e \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}}{R^3} : (42.8).$$

## § 43. 不変な磁場

静電場の法則 (§ 37) との対応を補足しつつ § 43 の内容をまとめる. 電荷の有限な運動を考えると, それは定常的な性格を持つ [本稿次節で補足]. そこで電荷の作る磁場の時間平均  $\bar{\mathbf{H}}$  を考えると (以下, 時間平均をバーで表す),

$$\begin{aligned}
 \text{静電場} \quad & \text{Maxwell 方程式} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho : (36.1) \\
 & \rightarrow \text{Poisson 方程式} \quad \Delta\phi = -4\pi\rho : (36.4) \\
 & \rightarrow \phi = \int \frac{\rho dV}{R} : (36.8) \\
 & \rightarrow \mathbf{E} = \int \frac{\rho \mathbf{R}}{R^3} dV : \text{Coulomb の法則,} \\
 \text{(静) 磁場} \quad & \text{Maxwell 方程式} \quad \nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{j}} : (43.2) \quad \left( \because \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial t} = 0 \text{ (§ 34 [『力学』 § 10])} \right) \\
 & \rightarrow \text{Poisson 方程式} \quad \Delta \bar{\mathbf{A}} = -\frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{j}} : (43.4) \quad (\text{ただし } \mathbf{A} \text{ に条件 } \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \text{ を課す (§ 18)}) \\
 & \rightarrow \bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \int \frac{\bar{\mathbf{j}} dV}{R} : (43.5) \\
 & \rightarrow \bar{\mathbf{H}} = \frac{1}{c} \int \frac{\bar{\mathbf{j}} \times \mathbf{R}}{R^3} dV : \text{Biot-Savart の法則. [rot の計算は本稿次節]}
 \end{aligned}$$

[源と場が完全に時間的に一定であれば (静磁場), 以上の結果からバーを省いた関係が成り立つ.]

荷電粒子系に対して, 上式 (43.5) は

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \int \frac{\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3x' = \frac{1}{c} \int \frac{\overline{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3x' \\
 &= \frac{1}{c} \sum_a \frac{\overline{e_a \mathbf{v}_a(t)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)|} \quad \left( \because \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) = \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_a(t)) \right) \quad (43.6)
 \end{aligned}$$

と書き換えられる [このように第 3 辺を経由すれば, 最右辺において分母も時間平均の対象となることが自然に理解される].

## § 43 について

■ 静電場・静磁場 このように場が時間変化しないときには, 場の方程式は静電場を決定する式 (36.8) と静磁場を決定する式 (43.7) に分離され [7, pp.220–223], 電場は電荷分布から, 磁場は電流分布から決定されることになる.

Coulomb の法則 (36.8):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \sum_a \frac{e_a(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|^3}$$

は, 電荷素片  $\rho(\mathbf{r}') d^3x'$  または点電荷  $e_a$  が位置  $\mathbf{r}$  に電場  $\frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$  または  $\frac{e_a(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|^3}$  を作ることを表している. これは基となる Maxwell 方程式 (30.4):  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$  が意味するように, 電荷は周りにわき出すような電場を作ることに対応する.

一方, Biot-Savart の法則 (43.7):

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (45)$$

は, 仮に  $\mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 x'$  を電流素片と呼ぶことが許されるならば, これは電流素片  $\mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 x'$  が位置  $\mathbf{r}$  に磁場  $\frac{1}{c} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$  を作ることを表している. これは基となる Maxwell 方程式 (30.3):  $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$  が意味するように ( $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$ ), 電流は周りに渦を巻くような磁場を作ることに対応する.

■電荷の有限な運動 § 43 では有限な運動を行う電荷が作る磁場を考えて Biot-Savart の法則を導いている. Biot-Savart の法則を無限に長い直線電流などに対しても適用できるのは, 電荷の運動が有限か否かに関わらず, 単に定常的な場の仮定だけを用いて Biot-Savart の法則を導けるからだと考えられる.

■「このような運動は定常的な性格をもっており」(p.116, l.2) について 例えば電気回路の電荷・電流分布の変化は通常, 準定常的と見なせる. 実際, 電荷・電流分布の変化の影響は光速で伝わる. そして

- 変化が回路 (典型的な長さ  $a \sim 0.1\text{m}$ ) を伝わる時間  $\tau \sim a/c \sim 10^{-9}\text{s}$
- 交流 (代表的な周波数  $f \sim 10\text{Hz}$ ) の周期  $T = 1/f \sim 0.1\text{s}$

を比べると  $\tau \ll T$  であり, この意味で回路の電荷・電流分布の変化はゆっくりした「準定常的」な変化と見なせる. 電流分布が時間変化する場合にも, 静磁場に対する Biot-Savart の法則 (§ 43) が各瞬間ごとに成り立つと仮定して, ソレノイド・コイルのインダクタンス  $L$  を求めることができるのはこのためである.

このことは § 62 の遅延ポテンシャル

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) d^3 x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) d^3 x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

からも説明・裏付けできる. 電気回路の近くの観測位置  $\mathbf{r}$  に興味がある場合, 回路の位置  $\mathbf{x}'$  における電荷・電流の影響が位置  $\mathbf{r}$  に伝わるのに要する時間 (遅延時間)  $\tau = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$  は (電荷・電流分布の変化を特徴付ける時間スケール  $T$  に比べて) 小さいとして無視することができ, このとき遅延ポテンシャルは静電場・静磁場のポテンシャル (36.8), (43.5) に帰す.

■式 (43.7)2 行上の式について 「+」は正しくは「=」である.

式 (43.7)4 行上の  $\text{rot} \mathbf{a}$  に対応するのはこの場合  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$  である.

$$\left[ \nabla \times \frac{\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]_{\alpha} = e_{\alpha\beta\gamma} \partial_{\beta} \frac{\bar{j}_{\gamma}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -e_{\alpha\beta\gamma} \frac{\bar{j}_{\gamma}(\mathbf{r}') (x_{\beta} - x'_{\beta})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \left[ \frac{\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right]_{\alpha}.$$

■国際単位系との関係 国際 (MKSA) 単位系から Gauss 単位系に移ると係数は, Maxwell 方程式において

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \dots \rightarrow \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \dots$$

と変化したのに対応して, Biot-Savart の法則において

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV(\dots) \rightarrow \mathbf{H} = \frac{1}{c} \int dV(\dots)$$

と変化する. すると直線電流  $I$  が  $r$  隔たった位置に作る磁場 (磁束密度) の強さは  $B = \mu_0 I / 2\pi r \rightarrow H = 2I / cr$  と変化すると結論できる.

■電流が導線を通る場合の Biot-Savart の法則 電流が導線を通る場合、電流密度  $\mathbf{j}$  は導線の外ではゼロになるから、式 (45) における空間積分の範囲は導線の占める領域に限定できる。そこで導線上の任意の点  $\mathbf{r}'$  における直断面を  $\sigma$  とし導線に沿う長さ  $l$  を導入して体積要素を

$$d^3x \rightarrow \sigma dl$$

と置き換えると、導線方向の長さ  $dl$  に関する積分を行えば良い。よって

$$\mathbf{j} d^3x' \rightarrow \mathbf{j} \sigma dl = \mathbf{I} dl, \quad \mathbf{I} \equiv \mathbf{j} \sigma : \text{電流}$$

と置き換わるから、Biot-Savart の法則 (45) は導線に沿う積分

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{I}(\mathbf{r}') dl \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

に書き換えられる。

参考 なお導線方向の単位ベクトル  $\mathbf{e}$  をとると、電流  $\mathbf{I}$  は導線と同じ方向を向くから、さらに

$$\mathbf{I} dl = (I \mathbf{e}) dl = I d\mathbf{l}, \quad d\mathbf{l} \equiv \mathbf{e} dl : \text{線要素ベクトル}$$

と書き換えることもできる。

■Biot-Savart の法則の簡単な応用 Biot-Savart の法則

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dl \quad (\text{国際単位系を採用})$$

を用いると、以下のように具体的な定常電流の作る静磁場を求めることができる。

- 無限に長い直線電流  $I$  が、電流から垂直距離  $r$  の位置に作る磁束密度 (図 34 参照)

- 大きさ:  $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
- 向き: 「電流に対して右回り」
- 導出

$$\mathbf{B} = (0, B, 0), \quad B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{rdz}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

- ★ あらかじめ電流に対して右回りの軸対称な場  $B(r)$  を仮定すれば、

この結果は Ampère-Maxwell の法則  $B \times 2\pi r = \mu_0 I$  に立ち返って直ちに導ける。

- 半径  $a$  の円電流  $I$  がその中心に作る磁束密度 (図 35 参照)

- 大きさ:  $B = \frac{\mu_0 I}{2a}$
- 向き: 「電流に対して右ねじの向き」
- 導出

$$\mathbf{B} = (0, 0, B), \quad B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \int dl = \frac{\mu_0 I}{2a}. \quad \left( \because \int dl = 2\pi a \right)$$

- 無限に長いソレノイド・コイル (単位長さあたりの巻き数  $n$ ) に電流  $I$  を流したとき、

内部に作られる磁束密度 (図 36 参照)

- 大きさ:  $B = \mu_0 n I$

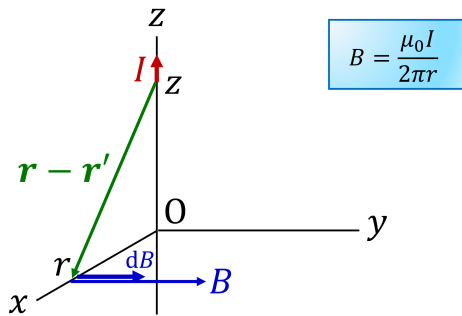


図 34 直線電流

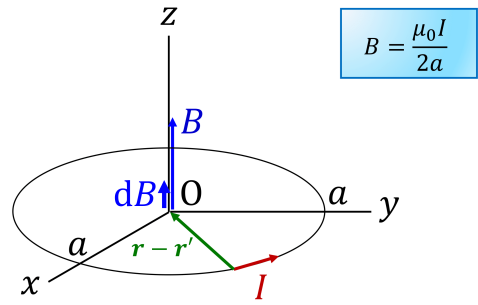


図 35 円形電流

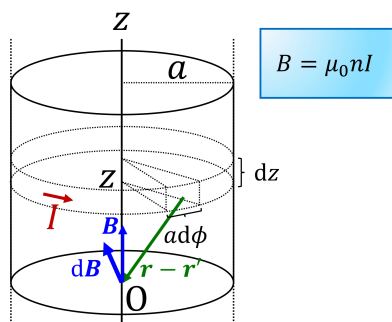


図 36 ソレノイド

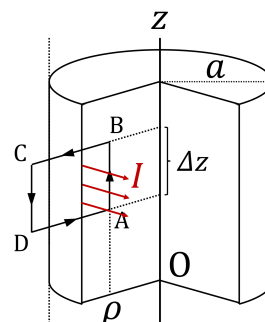


図 37 ソレノイドと Ampère の法則

- 向き： ソレノイドの軸に平行で電流に対して右ねじの向き
- 実際，ソレノイドの中心軸上での磁束密度は，Biot-Savart の法則を用いて

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} n I a \frac{(-z \cos \phi, -z \sin \phi, a) d\phi dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$\therefore \mathbf{B} = (0, 0, B), \quad B = \frac{\mu_0 n I a^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 n I a^2}{2} \frac{1}{a^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \mu_0 n I$$

と計算できる。

実はソレノイドの中心軸から外れた点における磁束密度も中心軸上の値と同じであり，ソレノイド内の磁場は一様である。このことの証明は，Biot-Savart の法則 Biot-Savart の法則に従って磁場またはベクトル・ポテンシャルを求める計算がこの場合，楕円積分に帰着するため，難しい [7, pp.146–148]。

しかしそれに関わらず，Ampère の法則を上手に用いればソレノイド内の任意の位置における磁束密度を調べることができる。実際，図 37 において磁束密度は  $\rho$  だけの関数となり，また  $\phi$  方向成分を持たないと考えられる。対称性の議論だけからは，磁束密度が  $\rho$  方向成分を持つことは許容されると考えられるけれど，Biot-Savart の法則を用いれば実際には磁束密度は  $z$  成分のみを持つことを確かめられる。まとめると， $z$  方向単位ベクトルを  $\hat{z}$  とし磁束密度は

$$\mathbf{B}(\rho) = B(\rho) \hat{z}$$

と表される。

これを踏まえて，図 37 のように電流に垂直な矩形 ABCD に対して Ampère の法則を適用する。辺 AB, CD は  $z$  軸と平行で長さは  $\Delta z$  であり，辺 AB はソレノイドの内部  $\rho (< a)$  にある。まず辺 CD が無限遠にある場合を考えると，Biot-Savart の法則からも理解されるように CD での磁場はゼロになる。よって Ampère の法則は

$$B(\rho) \Delta z = \mu_0 n I \Delta z, \quad \therefore B(\rho) = \mu_0 n I$$



$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathbf{A}} = \nabla \frac{1}{R} \times \bar{\mathbf{m}} & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & \bar{\mathbf{A}} = \frac{\bar{\mathbf{m}} \times \mathbf{R}}{R^3} & (44.3) \\ \downarrow \nabla \times & & \downarrow \nabla \times & \\ \bar{\mathbf{H}} = (\bar{\mathbf{m}} \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{R} & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & \bar{\mathbf{H}} = \frac{3(\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{m}})\mathbf{n} - \bar{\mathbf{m}}}{R^3} & (44.4) \\ \uparrow \text{教科書には載っていない} & & & \end{array}$$

図 38 定常運動している電荷の系が遠方に作る場

を与える。次いで辺 CD がソレノイドの外部  $\rho' (> a)$  の有限の距離にある場合を考えると、再び Ampère の法則より

$$\{B(\rho) - B(\rho')\} \Delta z = \mu_0 n I \Delta z, \quad \therefore B(\rho') = 0$$

を得る。

以上よりソレノイドの内部には一様な磁束密度  $\mathbf{B} = \mu_0 n I \hat{z}$  が実現されており、ソレノイドの外部では磁束密度はゼロである。

#### § 44. 磁気モーメント

定常運動している電荷の系が十分離れた点に作る場を考えて、ベクトル・ポテンシャル (43.6):

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \sum_a \frac{e_a \mathbf{v}_a}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_a|}$$

を  $\mathbf{r}_a$  のベキに展開すると、1 次の項までの近似で図 38 の  $\bar{\mathbf{A}}$  と  $\bar{\mathbf{H}}$  を得る (導出は下記,  $\bar{\mathbf{A}}$  の展開における 0 次の項は時間平均をとると落ちる)。ここに

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum e \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

は磁気モーメントである [係数  $1/2c$  を除けば、これは電流のモーメントと見なせる]。磁場の式 (44.4) は電場を双極モーメントで表した式 (40.8) と比較される。

全粒子の比電荷  $e/m$  が等しいとき、磁気モーメントは非相対論的極限  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  で

$$\mathbf{m} = \frac{e}{2mc} \sum \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \frac{e}{2mc} \mathbf{M} \quad (44.5)$$

のように、角運動量  $\mathbf{M}$  に関係付けられる [和の外の比  $e/m$  は全粒子に共通の値と了解し,  $e, m$  の各々がどの粒子に関する値なのかを問題にしない]。

#### § 44, 式の導出など

##### ■ 図 38 における $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{H}}$ の表式の導出

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \sum \frac{e\mathbf{v}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} = \frac{1}{cR} \sum e\bar{\mathbf{v}} - \frac{1}{c} \sum e\mathbf{v} \left( \mathbf{r} \cdot \nabla \frac{1}{R} \right)$$

において，最右辺の第1項の因子

$$\sum e\bar{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt} \sum e\mathbf{r}$$

は有限な量  $\sum e\mathbf{r}$  の時間微分の時間平均だから，ゼロになる [§ 34 または『力学』§ 10]．よって  $\mathbf{r}$  の1次の項

$$\bar{\mathbf{A}} = -\frac{1}{c} \sum \overline{(\mathbf{r} \cdot \nabla) \frac{e\bar{\mathbf{v}}}{R}} = -\frac{1}{c} \sum \overline{\mathbf{r} \cdot \left(-\frac{\mathbf{R}}{R^3}\right) e\mathbf{v}} = \frac{1}{cR^3} \sum \overline{e\mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R})}. \quad (46)$$

が残る [p.118, 1.8 の式を訂正した]．これが

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{\bar{\mathbf{m}} \times \mathbf{R}}{R^3} = \nabla \frac{1}{R} \times \bar{\mathbf{m}} \quad (44.3)$$

(ただし  $\mathbf{m} \equiv \frac{1}{2c} \sum e\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ ) に等しいことの確認は，本稿次節を参照．

磁場はポテンシャル (44.3) の第2辺の回転

$$\bar{\mathbf{H}} = \nabla \times \left( \frac{\bar{\mathbf{m}} \times \mathbf{R}}{R^3} \right)$$

として求められる．ここで

$$\begin{aligned} \left[ \nabla \times \left( \frac{\bar{\mathbf{m}} \times \mathbf{R}}{R^3} \right) \right]_{\alpha} &= e_{\alpha\beta\gamma} \partial_{\beta} \left( e_{\gamma\delta\epsilon} \bar{m}_{\delta} \frac{X_{\epsilon}}{R^3} \right) \\ &= (\delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\epsilon} \delta_{\beta\delta}) \bar{m}_{\delta} \partial_{\beta} \frac{X_{\epsilon}}{R^3} \quad [\mathbf{m} \text{ は観測位置 } \mathbf{R} \text{ によらない}] \\ &= \bar{m}_{\alpha} \partial_{\beta} \frac{X_{\beta}}{R^3} - \bar{m}_{\beta} \partial_{\beta} \frac{X_{\alpha}}{R^3} = \left[ \bar{\mathbf{m}} \left( \nabla \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) - (\bar{\mathbf{m}} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right]_{\alpha} \end{aligned}$$

であり，最右辺第1項において

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} = X_{\alpha} \partial_{\alpha} \frac{1}{R^3} + \frac{1}{R^3} \partial_{\alpha} X_{\alpha} = X_{\alpha} \left( -\frac{3}{R^4} \frac{X_{\alpha}}{R} \right) + \frac{3}{R^3} = 0$$

となる [このことは静電場  $\mathbf{E} \sim \mathbf{R}/R^3$  が無発散場であることとして既に知っている]．また第2項は

$$(\bar{\mathbf{m}} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}}{R^3} = \frac{1}{R^3} (\bar{\mathbf{m}} \cdot \nabla) \mathbf{R} + \mathbf{R} (\bar{\mathbf{m}} \cdot \nabla) \frac{1}{R^3} = \frac{\bar{\mathbf{m}} - 3(\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{m}})\mathbf{n}}{R^3} \quad (47)$$

と書き換えられる [第2の等号は本稿次節で確認]．以上より磁場の式

$$\bar{\mathbf{H}} = \frac{3(\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{m}})\mathbf{n} - \bar{\mathbf{m}}}{R^3} \quad (44.4)$$

を得る．

参考 図 38 に載せたように，磁場は電気双極子の作る電場の表式 (40.9) と似た形

$$\bar{\mathbf{H}} = (\bar{\mathbf{m}} \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{R}$$

に書くこともできる (教科書には載っていない)．これを得るには，ポテンシャル (44.3) の最右辺の回転をとって

$$\begin{aligned} \left[ \nabla \times \left( \nabla \frac{1}{R} \times \bar{\mathbf{m}} \right) \right]_{\alpha} &= e_{\alpha\beta\gamma} \partial_{\beta} e_{\gamma\delta\epsilon} \left( \partial_{\delta} \frac{1}{R} \right) \bar{m}_{\epsilon} \\ &= (\delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\epsilon} \delta_{\beta\delta}) \bar{m}_{\epsilon} \partial_{\beta} \left( \partial_{\delta} \frac{1}{R} \right) \quad (\mathbf{m} \text{ は観測位置 } \mathbf{R} \text{ によらない}) \\ &= \bar{m}_{\beta} \partial_{\beta} \left( \partial_{\alpha} \frac{1}{R} \right) \quad \left( \because \text{Laplace 方程式 } \partial_{\beta} \partial_{\beta} \frac{1}{R} = 0 \right) \end{aligned}$$

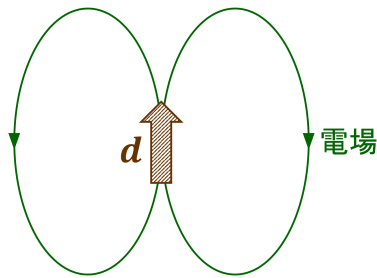


図 39 電気双極子モーメントの作る電場 (§ 40)

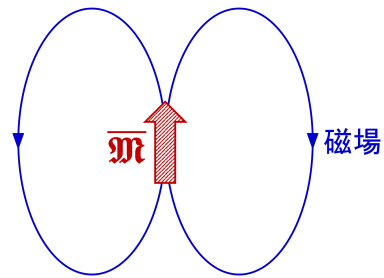


図 40 磁気モーメントの作る磁場 (§ 44)

とすれば良い.

### § 44 について

■式 (44.3) の導出について 結論 (44.3) から

$$\nabla \frac{1}{R} \times \bar{\mathbf{m}} = \frac{1}{2cR^3} \sum e[\overline{\mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R})} - \overline{\mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{R})}] \quad (48)$$

と逆算すれば,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} = (\text{式 (46)}) &= \frac{1}{2}(\text{式 (46)}) + \frac{1}{2}(\text{式 (46)}) = \frac{1}{2}(\text{式 (46)}) + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{1}{cR^3} \sum e \overline{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R})}}_0 - \frac{1}{2} \frac{1}{cR^3} \sum e \overline{\mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{R})} \\ &= (\text{式 (48)}) \end{aligned}$$

を確かめられる (以上は p.118, 1.11 の式の補足にあたる).

■式 (44.4) の導出について  $\bar{\mathbf{m}}$  は  $\mathbf{R}$  に依らないので p.118 下から 3 番目の式で  $(\mathbf{R}/R^3) \cdot \nabla \bar{\mathbf{m}} - (\mathbf{R}/R^3) \nabla \cdot \bar{\mathbf{m}}$  は消えている. p.118 の 1 番下の式 (本稿の式 (47)) について, 第 2 の等号は

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{R^3} (\bar{\mathbf{m}} \cdot \nabla) \mathbf{R} + \mathbf{R} (\bar{\mathbf{m}} \cdot \nabla) \frac{1}{R^3} \right]_{\alpha} &= \frac{1}{R^3} \bar{m}_{\beta} \partial_{\beta} X_{\alpha} + X_{\alpha} \bar{m}_{\beta} \partial_{\beta} \frac{1}{R^3} = \frac{1}{R^3} \bar{m}_{\alpha} + X_{\alpha} \bar{m}_{\beta} \left( -\frac{3R^2}{R^6} \frac{X_{\beta}}{R} \right) \\ &= \left[ \frac{\bar{\mathbf{m}} - 3(\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{m}}) \mathbf{n}}{R^3} \right]_{\alpha} \end{aligned}$$

による.

■磁気モーメントの作る磁場について 式の類似性より, 電気双極子モーメントの作る電場 (§ 40) と同じベクトル場の (従って力線の) 概形を持つ (図 39,40 参照). そこで磁気モーメント  $\mathbf{m}$  を  $\mathbf{d}$  と同様, “磁荷”  $\pm q_m$  の構成する双極子と見ることが動機付けられる. 実際には N 極と S 極を持つ棒磁石では, スピン磁気モーメント  $\mathbf{m}$  が磁場を作っている. すると逆にスピン磁気モーメントの起源を, 通常磁気モーメント  $\mathbf{m}$  と同様, 円形電流としてイメージしたくなる. しかしながら粒子のスピンは量子力学的な内部自由度であって, 古典的な対応物を持たない [7, pp.172–174] [13, p.196].

§ 44, 問題 (非相対論での2粒子系の磁気モーメント  $\mathbf{m}$  と力学的モーメント  $M$  の関係)

相対位置ベクトル  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  を導入し, 運動量は非相対論的表式  $\mathbf{p}_1 = m_1 \mathbf{v}_1$ , etc. を用いる. 2粒子の重心を座標原点に選ぶと

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{p}$$

が成り立ち, 角運動量は

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

と表される (最右辺はシンプルな結果になっている). すると磁気モーメントは

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \frac{1}{2c} (e_1 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1 + e_2 \mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2) = \frac{1}{2c} \left( \frac{e_1 \mathbf{r}_1}{m_1} - \frac{e_2 \mathbf{r}_2}{m_2} \right) \times \mathbf{p} = \frac{1}{2c} \left\{ \frac{e_1 m_2}{m_1 (m_1 + m_2)} + \frac{e_2 m_1}{m_2 (m_1 + m_2)} \right\} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \\ &= \frac{1}{2c} \left( \frac{e_1}{m_1^2} + \frac{e_2}{m_2^2} \right) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{M} \quad (\text{換算質量をくくり出した}) \end{aligned}$$

のように,  $\mathbf{M}$  を用いて表される.  $m_1 \ll m_2$  とすると, 式 (44.5) から期待される値

$$\mathbf{m} = \frac{e_1}{2m_1 c} \mathbf{M}$$

に移行する.

§ 45. ラーマーの定理

- 不変な磁場のなかの電荷の系に働く力とモーメントの時間平均はそれぞれ

$$\bar{\mathbf{F}} = \sum \frac{e}{c} \overline{\mathbf{v} \times \mathbf{H}} = 0, \quad (49)$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \sum \frac{e}{c} \overline{\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H})} = \bar{\mathbf{m}} \times \mathbf{H} \quad (45.1)$$

となる (導出は下記)\*<sup>31</sup>.

– これは電場から受ける力のモーメントの式 (42.6):  $\mathbf{K} = \mathbf{d} \times \mathbf{E}_0$  と比較される.

- 一様な磁場と粒子の相互作用を表すラグランジアンは

$$L_H = \sum \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{H} \quad (45.3)$$

となる (導出は下記, ポテンシャルを  $\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{H} \times \mathbf{r}$ : (19.4) にとった)\*<sup>32</sup>.

– これは一様な電場のなかに置かれた,

全電荷ゼロの電荷の系のラグランジアン (42.4):  $L_E = \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$  と比較される.

[磁気モーメント  $\mathbf{m}$  は磁場と向きがそろった方が, エネルギー ( $-L_H$ ) が低下する.]

ある1つの固定された電荷が作る球対称な電場, および一様な不変な磁場  $\mathbf{H}$  のなかを非相対論的な速度で運動する電荷の系を考える. すべての電荷は共通の比電荷  $e/m$  を持つとする.

\*<sup>31</sup> 磁場が一様である必要はない. なお電場はゼロとしている.

\*<sup>32</sup> 磁場が不変である必要はない.

Lamor の定理 磁場が弱いとき  $H^2$  を無視する近似で系の運動は、電荷の中心を通る磁場方向の軸の周りに Lamor の振動数

$$\Omega = -\frac{e}{2mc}\mathbf{H} \quad (45.4')$$

で回転する基準系において、もとの基準系と同じ電場および粒子間相互作用のみの下での運動 (磁場がない場合の運動) として与えられる (証明は下記). [回転系の Coriolis 力が磁場による Lorentz 力を打ち消す (導出過程を見よ) [22, p.113].]

★  $\Omega$  を教科書の式 (45.4) と逆符号で定義した.

Lamor の歳差運動 電場はゼロとする. 角運動量  $\bar{\mathbf{M}}$  は, 上式 (45.4') の角速度で磁場の周りに歳差運動する:

$$\frac{d\bar{\mathbf{M}}}{dt} = \Omega \times \bar{\mathbf{M}}. \quad (\text{導出は下記}) \quad (45.5')$$

## § 45, 式の導出など

■  $\bar{\mathbf{F}}$  の式 (49),  $\bar{\mathbf{K}}$  の式 (45.1) の導出

$$\bar{\mathbf{F}} = \sum \frac{e}{c} \overline{\mathbf{v} \times \mathbf{H}} = \frac{d}{dt} \sum \frac{e}{c} \overline{\mathbf{r} \times \mathbf{H}}$$

であり, 最右辺において粒子の位置  $\mathbf{r}$  は有限の領域内にある. よって最右辺は有限な量の時間微分の時間平均なので, ゼロになる [§ 34, 『力学』 § 10].

また力のモーメントの平均については

$$\bar{\mathbf{K}} = \sum \frac{e}{c} \overline{\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H})} = \sum \frac{e}{c} \overline{\mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{H}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})} = \sum \frac{e}{c} \overline{\mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{H})} - \frac{1}{2} \mathbf{H} \frac{d}{dt} \overline{r^2}$$

と書き換えられる. 最右辺の第 2 項は再びゼロであり, 第 1 項を式 (44.3) の導出時と同様に変形すると,

$$\bar{\mathbf{K}} = \sum \frac{e}{c} \overline{\mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{H})} = \frac{1}{2c} \sum e \overline{\{\mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{H})\}} = \bar{\mathbf{m}} \times \mathbf{H} : (45.1)$$

を得る.

■ 式 (45.3) の導出 一様な磁場のポテンシャル (19.4):  $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{H} \times \mathbf{r}$  を用いると,

$$L_H = \sum \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \sum \frac{e}{2c} (\mathbf{H} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} = \sum \frac{e}{2c} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{H} = \bar{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{H} : (45.3).$$

■ Lamor の定理の証明 磁場  $\mathbf{H}$  を持つもとの座標系に関する粒子の位置  $\mathbf{r}$  と速度  $\mathbf{v}$  を用いて, 非相対論的なラグランジアンは

$$L = \sum \frac{mv^2}{2} + \bar{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{H} - U = \sum \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2c} \sum e (\mathbf{H} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} - U$$

と表される. ここに  $U$  は電荷間の相互作用 (固定された電荷の作る位置エネルギーを含む) を記述するポテンシャルである. これに対して角速度

$$\Omega = -\frac{e}{2mc}\mathbf{H}$$

で回転する基準系で見た粒子の速度  $\mathbf{v}'$  は,  $\mathbf{v}$  と

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \Omega \times \mathbf{r}$$

で関係付けられる (2つの基準系の原点は共通で,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ ). ラグランジアンの不変性とより, 回転系でのラグランジアンは

$$L = \sum \frac{m}{2} (\mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - \boldsymbol{\Omega} \cdot \sum m \mathbf{r} \times (\mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - U$$

$$\simeq \sum \frac{mv'^2}{2} - U$$

となる (第2項では比電荷  $e/m$  が全粒子に共通であることを考慮し, 第2の等号では  $\boldsymbol{\Omega} \sim \mathbf{H}$  の2次の項を無視した). 最右辺はもとのポテンシャル  $U$  の下での粒子のラグランジアンだから, 示された

■Lamor の歳差運動 (45.5') の導出 角運動量とトルクの関係は, 式 (45.1) より

$$\frac{d\bar{\mathbf{M}}}{dt} = \bar{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{m}} \times \mathbf{H}$$

と書ける. 比電荷  $e/m$  が等しい粒子の非相対論的な運動に対する磁気モーメントの式 (44.5), および  $\boldsymbol{\Omega}$  の定義式 (45.4') を用いて, これを式 (45.5') へと書き換えられる.

## § 45 について

■p.121 下から2行目の誤植 「わまり」 → 「まわり」と訂正する.

■Lamor の定理の前提条件——非相対論的な多粒子系 全粒子の比電荷が等しいのは, 多粒子でも Lamor の振動数がとれる条件になっている. また, p.120 で  $v \ll c$  としたため非相対論的ラグランジアン (p.121, 1.6) を用いている.

新しい座標系の回転軸まわりに古い座標系の静電場 (外場) が回転対称性をもたないと, 新しい座標系では電場が時間変化して  $U$  が変化し得ると考えられる. それで p.120 下から10~14行目では回転軸上に固定された電荷の作る外場を考えると断ったものと考えられる.

■Lamor の歳差運動について 「この振動数」 (p.121, 1.14) とは  $\boldsymbol{\Omega}$  のこと. 「電荷の系の有限運動」 (p.121, 1.15) は例えば原子中の電子を念頭に置いた等方性調和振動子が挙げられる. 「この系に関する量を平均したもの」 (p.121, 1.16) の例はすぐ下の  $\bar{\mathbf{M}}$  のことであり, それゆえ Lamor の歳差運動が結論されるのは磁場が弱いときである. また最終段落で考えているのは  $\overline{d\bar{\mathbf{M}}/dt}$  ではなく短時間の平均  $d\bar{\mathbf{M}}/dt$  ゆえ0にならない.

## 第 6 章 電磁波

### § 46. 波動方程式

Maxwell 方程式によれば、電荷がない場合にも電磁場は存在できる。そのような電磁場は必然的に時間変化するものであり\*33、電磁波と呼ばれる。

条件

$$\phi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (50)$$

を満たすポテンシャルを選ぶことが可能であり [本稿次節で補足]、このとき Maxwell 方程式はポテンシャルに対する波動方程式 (d'Alembert 方程式)

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = 0 \quad (46.7)$$

を与える (導出は下記)。電磁場  $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ ,  $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$  も波動方程式を満たす。

あるいは Lorenz 条件

$$\partial_k A^k = 0 \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (46.9)$$

を満たすポテンシャル  $A^k$  を採用することも、常に可能である [理由は本稿次節]。このとき Maxwell 方程式は、再び  $A^k$  に対する波動方程式に書き換えられる：

$$0 = \partial_k F^{ik} = \partial_k (\partial^i A^k - \partial^k A^i) \Rightarrow \partial_k \partial^k A^i = 0.$$

ここで条件 (50) は特定の基準系でしか成り立たないのに対し、Lorenz 条件 (46.9) は Lorentz 変換に対して共変的であることに注意する。

#### § 46, 式の導出など

##### ■ 輻射ゲージ (50) での場の方程式 (46.7) の導出

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A}, \quad (\because \nabla \cdot \mathbf{A} = 0) \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} \quad (\because \phi = 0) \end{aligned}$$

であり、電荷のない空間での Maxwell 方程式によりこれらを等置して式 (46.7) を得る。

#### § 46 について

■ 輻射ゲージ (50) について これを満たすポテンシャルをとるには § 46 にあるように 2 回ゲージ変換を行い、1 回目で  $\phi = 0$ , 2 回目で  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  となるようにすれば良い (この順でないとうまくいかないだろう)。具体的には 1 回目のゲージ変換  $A_i \rightarrow A_i' = A_i - \partial_i f$  で

$$0 = \phi' = \phi - \frac{1}{c} \partial_t f$$

\*33 第 5 章で見た一定の場に対する Poisson 方程式の [特殊] 解は、電荷がない場合 ( $\rho = 0, \mathbf{j} = 0$ ) にはゼロになるから。[しかし一様不変な電磁場は、電荷のない場合の Maxwell 方程式を満足できる.]

の解  $f$  をとり, 2 回目のゲージ変換  $A_i' \rightarrow A_i'' = A_i' - \partial_i g$  で

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{A}'' = \nabla \cdot \mathbf{A}' + \Delta g$$

の解  $g$  をとれば良い. このとき  $\phi'' = \phi' - \frac{1}{c} \partial_t g = \phi' + \nabla \cdot \mathbf{E} = \phi' = 0$  を言うのに真空中より  $\rho = 0$  であることを用いる.

第 2 式  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  は平面波解  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$  (§ 48) に対して  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = 0$  となる. これは振動方向が波の進行方向  $\mathbf{k}$  に直交することを意味しており, 横波条件と呼ばれる (§ 47 も参照). Lorenz 条件  $\partial_i A^i = 0$  に対してこれは  $k_i A^i = 0$  と一般化される.

#### ■d'Alembert 演算子

$$\square = \partial^2 = \partial_k \partial^k = g^{ik} \partial_i \partial_k = g_{ik} \partial^i \partial^k = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

などと書ける (教科書 p.123 脚注ではこの逆符号を  $\square$  としている). これはベクトルの 4 元内積となっているので, Lorentz スカラーとして変換する.

■Lorenz 条件 (46.9) をとれる理由 与えられた  $A_k$  に対し § 18 のゲージ関数  $f$  を適当に選べば, 新しいポテンシャル  $A'^k = A^k + \partial^k f$  が Lorenz 条件を満たすようにできる. 実際そのためには  $0 = \partial_k A'^k = \partial_k A^k - \partial_k \partial^k f$  より  $f$  を非斉次の波動方程式

$$\partial_k \partial^k f = \partial_k A^k$$

の解にとれば良い. これを満たす  $f$  はなお無数に存在するため, ポテンシャルは Lorenz 条件の下でも一義的には決まらない (p.124 脚注).

■電磁場に対する波動方程式 ここで電磁場に対する波動方程式を, 場の強度  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  で表した Maxwell 方程式から直接導けることを示しておくのが教育的だろう:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E} &= -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \\ \Delta \mathbf{H} &= -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\frac{1}{c} \nabla \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

それぞれ第 1 の等号ではベクトル 3 重積の公式を用い,  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$  を考慮した.

## § 47. 平面波

場  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  がただ 1 つの座標  $x$  (および時間) にだけ依存する場合を考え, その任意の成分を  $f$  とする. 場の方程式

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f = 0$$

は,  $f_1, f_2$  を任意関数として,  $x$  方向に光速度  $\pm c$  で伝播する平面波解

$$f = f_1 \left( t - \frac{x}{c} \right) + f_2 \left( t + \frac{x}{c} \right) \quad (47.2)$$

を持つ [本稿次節で補足].



■ $x$  方向の進行波 特に  $x$  軸正の向き (方向単位ベクトル  $\mathbf{n}$ ) に進行する平面波を考えると,

$$\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E} \quad (47.4)$$

が見出される (導出は下記). これは電場と磁場が等しい絶対値を持ち,  $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{n}$  がこの順に右手直交系を成し, それ故, 電磁波は横波であることを意味する.

Poynting ベクトル [§ 31] は

$$\mathbf{S} = cW\mathbf{n} \quad (47.5)$$

となる (導出は下記). これは密度  $W = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2)$  のエネルギーが  $\mathbf{n}$  方向に光速  $c$  で伝播するという事実と合致している. ここで運動量密度  $S_x/c^2 = W/c$  [§ 32] のエネルギー密度  $W$  との関係が, 光速で運動する粒子に対する運動量とエネルギーの関係 (9.9):  $p = \mathcal{E}/c$  と同じであることに注意する [光子を想起].

Maxwell の応力テンソルの唯一ゼロでない成分は  $\sigma_{xx} = W$  である [本稿次節で補足].

■平面電磁波のエネルギー密度の変換則 平面電磁波 [伝播方向は  $x$  軸方向でなくても良い] の  $K$  系におけるエネルギー密度を  $W$ ,  $K$  系の  $x$  軸方向に速度  $\mathbf{V}$  で運動する  $K'$  系におけるエネルギー密度を  $W'$ , 伝播方向の  $x'$  軸との成す角を  $\alpha'$  とすると, エネルギー・運動量テンソルの変換則は

$$W = W' \frac{\left(1 + \frac{V}{c} \cos \alpha'\right)^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (47.7)$$

を与える (導出は下記). 波の場の強さの絶対値は  $\sqrt{W}$  のように変換する.

## § 47, 式の導出など

■式 (47.4) の導出 § 46 のゲージ条件  $\phi = 0, \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  を課すと, 場  $\mathbf{A}(x, t)$  に対して第 2 の条件は

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = 0$$

を含意する. すると波動方程式より

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = 0, \quad \therefore \frac{\partial A_x}{\partial t} = \text{const}$$

となる. よって縦方向の電場成分  $E_x = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t}$  は [時間的にも空間的にも] 一定である. このような場は電磁波と関係がなく, 興味を惹かない. そこで  $A_x = 0$  とおき, 横方向の場  $\mathbf{A} = (0, A_y, A_z)$  のみを考える [本稿次節で補足].

$x$  軸正の向きに進行する平面波  $\mathbf{A}(t - x/c)$  を考えると,

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \mathbf{A}', \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(t - x/c) \times \mathbf{A}' = -\frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{A}' \quad (47.3)$$

となる (プライムは  $t - x/c$  による微分) [本稿次節で補足]. 第 1 式を第 2 式に代入して, 式 (47.4):  $\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$  を得る.

■式 (47.5) の導出 平面波における関係式 (47.4) より  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0, |\mathbf{E}| = |\mathbf{H}|$  であることに注意すると,

$$\mathbf{S} \equiv \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) = \frac{c}{4\pi} E^2 \mathbf{n} = \frac{c}{4\pi} H^2 \mathbf{n}.$$

これはエネルギー密度

$$W = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) = \frac{E^2}{4\pi}$$

を用いて  $\mathbf{S} = cW\mathbf{n}$ : (47.5) と書ける.

■式 (47.7) の導出 エネルギー密度  $W$  はエネルギー・運動量テンソルの時間-時間成分であり, Lorentz ブーストに対して 2 階テンソルの変換則 (§ 6 問題 1) を書き下すと

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left( W' + 2 \frac{V}{c^2} S'_x + \frac{V^2}{c^2} \sigma'_{xx} \right) \\ &= W' \frac{\left(1 + \frac{V}{c} \cos \alpha'\right)^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} : (47.7) \quad (\because S'_x = vW' \cos \alpha', \sigma'_{xx} = W' \cos^2 \alpha') \end{aligned}$$

が得られる.

## § 47 について

■波動方程式の一般解 (47.2) について

$$X_{\pm} = t \pm \frac{x}{c}, \quad \partial_{\pm} = \frac{\partial}{\partial X_{\pm}}$$

と書くと (教科書の表記との対応は  $\xi = X_-, \eta = X_+$ )

$$\frac{1}{c} \partial_t = \frac{1}{c} (\partial_+ + \partial_-), \quad \partial_x = \frac{1}{c} (\partial_+ - \partial_-)$$

であり,

$$0 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f = \frac{1}{c^2} \{ (\partial_+ - \partial_-)^2 - (\partial_+ + \partial_-)^2 \} f = -\frac{4}{c^2} \partial_+ \partial_- f.$$

これを積分して

$$\partial_+ f = f_0(X_+), \quad \therefore f = \int f_0(X_+) dX_+ + f_1(X_-) \equiv f_1(X_-) + f_2(X_+)$$

を得る ( $f_0(X_+)$  は  $X_-$  に依らない  $X_+$  の任意関数).

逆に  $f(x \mp ct)$  という形の関数が波動方程式を満たすことを, 波動方程式への代入により直接確かめることは容易である. 実際,  $\xi \equiv x \mp ct$  とおくと

$$\frac{\partial}{\partial x} f(\xi) = f'(\xi), \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\xi) = f''(\xi), \quad \frac{\partial}{\partial t} f(\xi) = \mp c f'(\xi), \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\xi) = (\mp c)^2 f''(\xi)$$

なので,

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f(\xi) = 0.$$

なお一般解

$$f(x, t) = f_1(x + ct) + f_2(x - ct)$$

に対して, 与えられた初期条件

$$f(x, t = 0) = f_1(x) + f_2(x) = u(x), \quad \left. \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = c(f_1'(x) - f_2'(x)) = v(x)$$

から  $f_1, f_2$  の関数形を定めることも容易である. 結果は

$$f(x, t) = \frac{1}{2} u(x - ct) + \frac{1}{2} u(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v(x') dx'$$

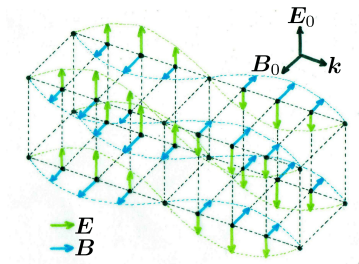


図 41 電磁場の平面波

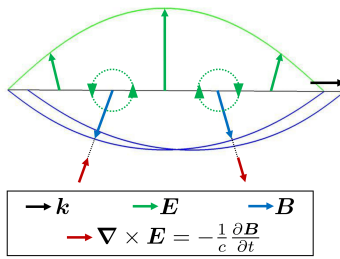


図 42 磁場の時間変化が作る電場の渦

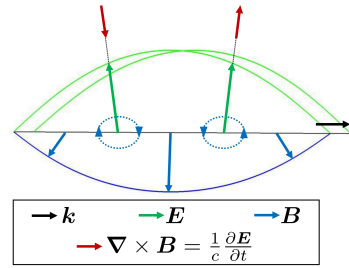


図 43 電場の時間変化が作る磁場の渦

となる (d'Alembert の式). 従って場  $f(x, t)$  として例えば  $x$  軸に沿った弦の  $y$  方向への変位を考え, 初期分布  $f(x, t = 0) = u(x)$  を与えて弦を静かに離したとすると ( $v(x) = 0$ ),  $u(x)$  は  $1/2$  ずつに分かれて一方は  $+x$  方向に速度  $c$  で進行し, 他方は  $-x$  方向に速度  $c$  で後退する.

■「一定な縦方向の電場」(p.125, 1.22,23) について § 46 では時間変化のない電磁場を考えると, 真空中の Maxwell 方程式の解  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  はゼロになると論じられている (p.122, 1.9~14). しかし § 46 のノートにも書いたように, 正確には一様不変な場は真空中の Maxwell 方程式を満たす. これは「公式 (36.8) および (43.5) で与えられるこれらの方程式 [Poisson 方程式] の解」(p.122, 1.13) が最も一般的な解ではないという事情による. ただし「電荷がない真空に現(わ)れる電磁場は電磁波とよばれる」(p.122, 1.7) とあるけれど, 一様不変な場は「電磁波となんの関係もない」(p.125, 1.23) として排除される.

■横波 pp.125-126 で  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$  や  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$  といった表現を用いずとも,  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  が横波条件になっているのを確認できていることや, 進行波の関数形  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t - x/c)$  だけで  $\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$  の直交性 (47.4) を確認できていることに注目する.

■式 (47.3) について

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial \xi}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \xi} \Leftrightarrow \nabla = (\nabla \xi) \partial_\xi$$

を用いる.

■平面波に対する直観 § 47 では電磁波が典型的には図 41 のような横波であることが示された. (ただし図 41 および図 42, 図 43 では磁場  $\mathbf{H}$  の代わりに磁束密度  $\mathbf{B}$  を書いている. またここでは単色平面波として特に直線偏光を考えており,  $\mathbf{k}$  は波動(波数)ベクトルである (§ 48).) この結果は次のように解釈できる. すなわち各時刻に各位置で図 42 のように式 (26.1):  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$  に従って磁場の時間変化から電場の渦が作られ, 図 43 のように式 (30.3):  $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  ( $\mathbf{j} = 0$ ) に従って電場の時間変化から磁場の渦が作られる [14]. これは第 4 章において静電場と静磁場がそれぞれ独立に電荷分布と電流分布から生み出されたのとは対照的に, 物質が存在しない場合にも電場と磁場はお互いを生み出しながら波(電磁波)として空間を伝播することを意味する [7, pp.272-273].

■平面波の Poyning ベクトル (47.5) について 力学的波動を想定して述べると, 媒質は各位置の周りに振動しているだけであって, 波の伝播方向に移動しているわけではない. 同様に電磁波も, 空間の各点で電磁場ベクトルが振動する現象である. ところが(力学的波動と電磁波の双方において), 波のエネルギーは実際に伝播方向に伝えられている.

■Maxwell の応力テンソルの成分 (47.6) について  $\sigma_{\alpha\beta}$  の式 (33.3) を見ると

$$\sigma_{xx} = W, \quad \sigma_{x\alpha} = \sigma_{\alpha x} = 0 \quad (\alpha \neq x)$$

であることが容易に分かる。残りの成分が

$$\sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 0$$

となることも、 $\mathbf{E} = (0, E \cos \theta, E \sin \theta)$ ,  $\mathbf{H} = (0, -E \sin \theta, E \cos \theta)$  とおいて式 (33.3) に代入すれば確かめられる。

式 (47.6): $\sigma_{xx} = W$  の解釈に移ろう。まず応力とエネルギー密度は等しい次元を持つことが次のように分かる。

$$[\text{応力}] = \left[ \frac{\text{力}}{\text{面積}} \right] = \left[ \frac{(\text{エネルギー})/L}{(\text{体積})/L} \right] = \left[ \frac{\text{エネルギー}}{\text{体積}} \right] = [\text{エネルギー密度}].$$

次に応力は隣接する空間領域の運動量変化をもたらすので、「場の運動量の流れはマクスウェルの応力テンソルの成分  $\sigma_{\alpha\beta}$  (33.3) で定められる」(p.126, 1.21)。場の運動量密度は  $x$  成分  $S_x/c^2 = W/c$  を持つので、運動量 (の  $x$  成分) の流れの密度は、これに波の伝播速度  $c$  をかけた  $W$  になると考えられる。式 (47.6): $\sigma_{xx} = W$  はここから期待される通りの結果となっている。

#### § 47, 問題

1 (入射する平面波を (反射率  $R$  で) 反射する壁の受ける力) 図 44 において、「内向き」法単位ベクトル  $\mathbf{N}$  を持つ壁面の単位面積に働く力の  $\alpha$  成分は、

$$f_\alpha = -(\sigma_{\alpha\beta} + \sigma'_{\alpha\beta})(-N_\beta)$$

と表される (§ 32 のノート参照, 反射波も力に寄与することに注意)。入射波 (または反射波) の進行方向  $\mathbf{n}$  (または  $\mathbf{n}'$ ) を  $x$  軸正の向きに選ぶと、ベクトル成分は

$$\sigma_{\alpha\beta} N_\beta = (W \delta_{\alpha x} \delta_{\beta x}) N_\beta = W \delta_{\alpha x} N_x = W n_\alpha (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}), \quad \sigma'_{\alpha\beta} N_\beta = W' n'_\alpha (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}')$$

と計算できるので、

$$\mathbf{f} = W \mathbf{n} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}) + W' \mathbf{n}' (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}') = (W \mathbf{n} - W' \mathbf{n}') \cos \theta.$$

ここで壁面の接単位ベクトル  $\mathbf{t}$  を図 44 のように導入すると、

$$\mathbf{n} = \mathbf{N} \cos \theta + \mathbf{t} \sin \theta, \quad \mathbf{n}' = -\mathbf{N} \cos \theta + \mathbf{t} \sin \theta$$

である。また反射率  $R$  は [エネルギー流束の比として定義され、光に対しては] エネルギー密度の比が  $W' = RW$  であることを意味する。よって

$$\mathbf{f} = f_N \mathbf{N} + f_t \mathbf{t}, \quad f_N = W(1 + R) \cos^2 \theta, \quad f_t = W(1 - R) \sin \theta \cos \theta$$

と分解できる。反射率  $R = 1$  に対して垂直成分 (光圧) は  $f_N = 2W \cos^2 \theta$  である。力  $\mathbf{f}$  が既に  $\cos \theta$  に比例しているため、 $\mathbf{N}$  成分は  $\cos^2 \theta$  に比例することになる。 $f_N$  は  $\theta = 0$  に対して最大となる。水平成分  $f_t$  は  $\theta = \pi/4$  に対して最大であり、 $R = 1$  のときにはゼロになる。

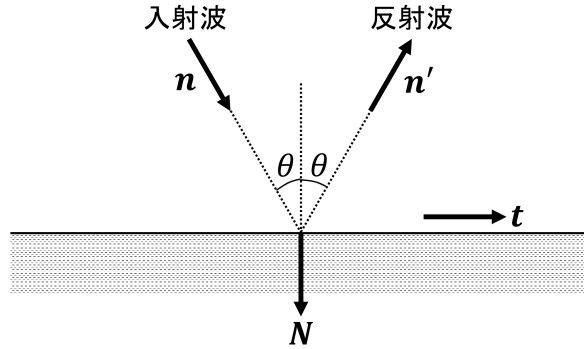


図 44 平面波の反射 (§ 47 問題 1)

2 (平面波の中の電荷の運動) Hamilton-Jacobi (以下 H-J) の方法にて解析する. 平面波の 4 元波数ベクトル (§ 48) を  $k^i$  とすると, 場  $A^i$  は変数  $\xi = k_i x^i$  の関数である. Lorenz 条件  $\partial_i A^i = 0$  を採用すると,  $A^i k_i = 0$  が課される.  $f^i = (f^0, \mathbf{f})$  を自由粒子の 4 元運動量として, H-J 方程式の解を

$$S = -f_i x^i + F(\xi)$$

という形に求める (第 1 項は自由粒子に対する H-J 方程式の解).

$$\partial_i S = -f_i + k_i \frac{dF}{d\xi}$$

であり, 条件

$$k_i k^i = 0, \quad f_i f^i = m^2 c^2, \quad k_i A^i = 0$$

に注意して H-J 方程式を書き下すと

$$\begin{aligned} m^2 c^2 &= \left( \partial_i S + \frac{e}{c} A_i \right) \left( \partial^i S + \frac{e}{c} A^i \right) = \left( -f_i + k_i \frac{dF}{d\xi} + \frac{e}{c} A_i \right) \left( -f^i + k^i \frac{dF}{d\xi} + \frac{e}{c} A^i \right) \\ &= m^2 c^2 + \frac{e^2}{c^2} A_i A^i - 2\gamma \frac{dF}{d\xi} - \frac{2e}{c} f_i A^i, \end{aligned}$$

あるいは

$$\frac{e^2}{c^2} A_i A^i - 2\gamma \frac{dF}{d\xi} - \frac{2e}{c} f_i A^i = 0$$

となる (定数  $\gamma \equiv k_i f^i$  を導入した). ここから  $F$  を決めると,

$$S = -f_i x^i - \frac{e}{c\gamma} \int^\xi f_i A^i d\xi + \frac{e^2}{2\gamma c^2} \int^\xi A_i A^i d\xi \quad (51)$$

が得られる.

ここでゲージ条件

$$\phi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

をとる. これは Lorenz ゲージの特別な場合だから, 上で求めた作用の式 (51) を以降も用いることができる. 波の伝播方向を  $x$  軸に選ぶと, 横波条件  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  は  $\mathbf{A}$  が  $yz$  面内にあることを意味する. また教科書の式は

$$\begin{aligned} \xi \equiv k_i x^i = ct - x &\quad \rightarrow \quad \xi = \frac{\omega}{c}(ct - x), \\ \gamma \equiv k_i f^i = f^0 - f^1 &\quad \rightarrow \quad \gamma = \frac{\omega}{c}(f^0 - f^1) \end{aligned}$$

と訂正される (このとき初めて以下のように次元の正しい関係式が得られる). また 2 次元のベクトル  $\boldsymbol{\kappa} \equiv (f_y, f_z)$  を導入して

$$f^i = (f^0, f^1, \boldsymbol{\kappa})$$

と表すと,

$$m^2 c^2 = f_i f^i = (f^0)^2 - (f^1)^2 - \boldsymbol{\kappa}^2 = \frac{c\gamma}{\omega} (f^0 + f^1) - \boldsymbol{\kappa}^2, \quad \therefore f^0 + f^1 = \frac{\omega}{c\gamma} (m^2 c^2 + \boldsymbol{\kappa}^2).$$

さらに  $ct + x, \xi (\sim ct - x)$  に独立な変数として, 2 次元のベクトル  $\mathbf{r} = (y, z)$  を定義する. すると作用 (51) の第 1 項

$$-f_i x^i = -f^0(ct) + f^1 x + \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}$$

は,

$$f^0 = \frac{f^0 + f^1}{2} + \frac{f^0 - f^1}{2} = \frac{\omega}{2c\gamma} (m^2 c^2 + \boldsymbol{\kappa}^2) + \frac{c\gamma}{2\omega}, \quad f^1 = \frac{f^0 + f^1}{2} - \frac{f^0 - f^1}{2} = \frac{\omega}{2c\gamma} (m^2 c^2 + \boldsymbol{\kappa}^2) - \frac{c\gamma}{2\omega}$$

を代入して

$$\begin{aligned} -f_i x^i &= \frac{\omega}{2c\gamma} (m^2 c^2 + \boldsymbol{\kappa}^2) (-ct + x) - \frac{c\gamma}{2\omega} (ct + x) + \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} \\ &= -\frac{m^2 c^2 + \boldsymbol{\kappa}^2}{2\gamma} \xi - \frac{c\gamma}{2\omega} (ct + x) + \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} \end{aligned}$$

と書き換えられる. また  $\mathbf{A}$  を 2 次元のベクトル  $\mathbf{A} = (A_y, A_z)$  として再定義すると, 作用の式 (51) 全体は

$$S = \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \frac{c\gamma}{2\omega} (ct + x) - \frac{m^2 c^2 + \boldsymbol{\kappa}^2}{2\gamma} \xi + \frac{e}{c\gamma} \int^\xi \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{A} d\xi - \frac{e^2}{2\gamma c^2} \int^\xi \mathbf{A}^2 d\xi$$

となる.

さて, 我々の座標系とゲージの選択では,  $\gamma = \frac{c}{\omega} (f^0 - f^1)$  は  $\boldsymbol{\kappa}$  と独立なパラメータである. そこで H-J の一般的な手順 (『力学』 § 47) にしたがって導関数  $\partial S / \partial \boldsymbol{\kappa}, \partial S / \partial \gamma$  を新しい定数に等しいとおくと,

$$\begin{aligned} \text{const} &= \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\kappa}} = \mathbf{r} - \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\gamma} \xi + \frac{e}{c\gamma} \int^\xi \mathbf{A} d\xi, \\ \text{const} &= \frac{\partial S}{\partial \gamma} = -\frac{c}{2\omega} (ct + x) + \frac{m^2 c^2 + \boldsymbol{\kappa}^2}{2\gamma^2} \xi - \frac{e}{c\gamma^2} \int^\xi \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{A} d\xi + \frac{e^2}{2\gamma^2 c^2} \int^\xi \mathbf{A}^2 d\xi \end{aligned}$$

となる. これらの結果から分かるように, 座標と時間の原点を適当に選べば, 左辺の const はいずれもゼロと置くことができる. 第 2 式に  $ct = \frac{c}{\omega} \xi + x$  を代入し, 第 1 式を  $\mathbf{r}$  について, 第 2 式を  $x$  について解くと,

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\gamma} \kappa_y \xi - \frac{e}{c\gamma} \int^\xi A_y d\xi, & z &= \frac{1}{\gamma} \kappa_z \xi - \frac{e}{c\gamma} \int^\xi A_z d\xi, \\ x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\omega m^2 c^2 + \boldsymbol{\kappa}^2}{c} - \frac{c}{\omega} \right) \xi - \frac{\omega}{c} \frac{e}{c\gamma^2} \int^\xi \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{A} d\xi + \frac{\omega}{c} \frac{e^2}{2\gamma^2 c^2} \int^\xi \mathbf{A}^2 d\xi, & ct &= \frac{c}{\omega} \xi + x \end{aligned}$$

が得られる. これらは粒子の運動の  $\xi$  によるパラメータ表示を与えている.

粒子の力学的運動量  $\mathbf{p}$  は、正準運動量が  $P_x = \partial S / \partial x$ , etc. で与えられるので、

$$\begin{aligned} p_y &= P_y - \frac{e}{c} A_y = \frac{\partial S}{\partial y} - \frac{e}{c} A_y = \kappa_y - \frac{e}{c} A_y, & p_z &= \kappa_z - \frac{e}{c} A_z, \\ p_x &= P_x = \frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{c\gamma}{2\omega} + \underbrace{\frac{\omega}{c} \frac{m^2 c^2 + \kappa^2}{2\gamma} - \frac{\omega}{c} \frac{e}{c\gamma} \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{A}(\xi) + \frac{\omega}{c} \frac{e^2}{2\gamma c^2} \mathbf{A}^2(\xi)}_{\frac{\omega}{c} \frac{\partial S}{\partial \xi}} \end{aligned}$$

と計算される。また  $\phi = 0$  なので、粒子のエネルギーは

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{c^2 \gamma}{2\omega} + \omega \frac{\partial S}{\partial \xi} = \frac{c^2 \gamma}{2\omega} + \left( cp_x + \frac{c^2 \gamma}{2\omega} \right) = c \left( p_x + \frac{c\gamma}{\omega} \right)$$

と表される。

運動量の時間平均  $\bar{\mathbf{p}}$  がゼロになる基準系を選ぶことができる。そこで周期関数  $\mathbf{A}(\xi)$  の時間平均が  $\bar{\mathbf{A}} = 0$  となることに注意して、 $\bar{\mathbf{p}} = 0$  を要求すると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa} &= 0, \\ 0 &= -\frac{c\gamma}{2\omega} + \frac{\omega}{c} \frac{m^2 c^2}{2\gamma} + \frac{\omega}{c} \frac{e^2}{2\gamma c^2} \overline{\mathbf{A}^2}, \quad \therefore \left( \frac{c}{\omega} \right)^2 \gamma^2 = m^2 c^2 + \frac{e^2}{c^2} \overline{\mathbf{A}^2} \end{aligned}$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{c} \frac{m^2 c^2}{\gamma^2} - \frac{c}{\omega} \right) \xi + \frac{\omega}{c} \frac{e^2}{2\gamma^2 c^2} \int^\xi \mathbf{A}^2 d\xi = \frac{\omega}{c} \frac{e^2}{2\gamma^2 c^2} \int^\xi (\mathbf{A}^2 - \overline{\mathbf{A}^2}) d\xi, \\ y &= -\frac{e}{c\gamma} \int^\xi A_y d\xi, & z &= -\frac{e}{c\gamma} \int^\xi A_z d\xi, \\ ct &= \frac{c}{\omega} \xi + x = \frac{c}{\omega} \xi + \frac{\omega}{c} \frac{e^2}{2\gamma^2 c^2} \int^\xi (\mathbf{A}^2 - \overline{\mathbf{A}^2}) d\xi, \\ p_x &= -\frac{c\gamma}{2\omega} + \frac{\omega}{c} \frac{m^2 c^2}{2\gamma} + \frac{\omega}{c} \frac{e^2}{2\gamma c^2} \mathbf{A}^2 = \frac{\omega}{c} \frac{e^2}{2\gamma c^2} (\mathbf{A}^2 - \overline{\mathbf{A}^2}), \\ p_y &= -\frac{e}{c} A_y, & p_z &= -\frac{e}{c} A_z, \\ \mathcal{E} &= c \left( p_x + \frac{c\gamma}{\omega} \right) = \frac{c^2 \gamma}{\omega} + \omega \frac{e^2}{2\gamma c^2} (\mathbf{A}^2 - \overline{\mathbf{A}^2}). \end{aligned}$$

§ 48 の問題 2,3 では、ここで得られた公式を直線偏光や円偏光に適用する。

## § 48. 単色平面波

場が時間の単周期関数 ( $f \sim e^{i\omega t}$ ) である波は単色と呼ばれ、波動方程式は単色波に対しては [Helmholtz 方程式]

$$\Delta f + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0$$

になる。単位ベクトル  $\mathbf{n}$  の向きに伝播する単色平面波は

$$\mathbf{A} = \text{Re}\{\mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}\}, \quad (48.5)$$

$\mathbf{A}_0$ : 複素定ベクトル,  $\omega$ : (角) 振動数,  $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}$ : 波動 [波数] ベクトル

という形をとる [本稿次節で補足]. [ポテンシャルの付加条件 (50) の下で] 電磁場

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = ik\mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A} \quad (48.6)$$

[本稿次節で補足] も同様の形をとる. これらは波長  $\lambda = 2\pi/k$  を持つ.

単色平面波の表式

$$\mathbf{E} = \text{Re}\{\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}\}$$

は一般に, 波の伝播方向  $\mathbf{k}$  を  $x$  軸にとると

$$E_y = b_1 \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad E_z = \pm b_2 \sin(\omega t - kx + \alpha)$$

となり, これは楕円偏光を意味する (円偏光, 直線偏光を含む). [任意の点における電磁場の方向は, 各瞬間ごとに式 (47.4):  $\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$  を満たしながら時間変化する.] ただしここで複素振幅  $\mathbf{E}_0$  の 2 乗  $\mathbf{E}_0^2 = |\mathbf{E}_0|^2 e^{-2i\alpha}$  によって定義される  $\mathbf{E}_0^2$  の偏角  $-2\alpha$  に対して  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{b} e^{-i\alpha}$  となる複素ベクトル

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2 \quad (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \text{ は実数ベクトル})$$

を導入した<sup>\*34</sup>. このとき  $\mathbf{b}_1$  と  $\mathbf{b}_2$  は直交することに注意して<sup>\*35</sup>,  $\mathbf{b}_1$  の方向を  $y$  軸にとり,  $b_1 = |\mathbf{b}_1|, b_2 = |\mathbf{b}_2|$  と書いた. よって今

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{b} e^{-i\alpha}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2 = (0, b_1, \pm i b_2)$$

となっていることに注意すると, 円偏光が現れる条件  $b_1 = b_2$  は

$$\frac{E_{0z}}{E_{0y}} = \pm i$$

と書ける.

波動 4 元ベクトル

$$k^i = \left( \frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right)$$

を導入 [し, これを反変ベクトルと] すると, 位相  $k_i x^i = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  がスカラーとなることが保証される. 平面波  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{-ik_i x^i}$  が波動方程式を満たす条件

$$k^i k_i = 0$$

は分散関係  $|\mathbf{k}| = \omega/c$  に他ならない.

単色平面波のエネルギー・運動量テンソルは

$$T^{ik} = \frac{W c^2}{\omega^2} k^i k^k$$

と書ける. 実際これは波の伝播方向が  $x$  軸に一致する基準系で,  $k^i = (\omega/c, \omega/c, 0, 0)$  より正しい成分

$$T^{00} = T^{01} = T^{10} = W, \quad \text{その他の } T^{ik} = 0$$

<sup>\*34</sup> 複素ベクトルの 2 乗  $\mathbf{E}_0^2$  は内積であり, 実数ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  に対して

$$(\mathbf{a} + i\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 + 2i\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

のように計算する ( $\mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{E}_0$  ではない).

<sup>\*35</sup>  $|\mathbf{E}_0^2| = \mathbf{b}^2 = |\mathbf{b}_1|^2 - |\mathbf{b}_2|^2 + 2i\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2$  は実数でなければならないから,  $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = 0$ .



を与え (§ 47), 両辺が同じ種類のテンソルから成るから任意の基準系で成立する.

Doppler 効果は波動 4 元ベクトルの変換則として得られる. すなわち光源の静止系での振動数を  $\omega_0$ , 光源が速度  $V$  で運動している基準系  $K$  での振動数を  $\omega$ ,  $K$  系で見た波の方向と光源の運動の方向 ( $x$  軸) の成す角を  $\alpha$  とすると

$$\frac{\omega_0}{c} = \frac{\frac{\omega}{c} - \frac{V}{c}(k \cos \alpha)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\omega}{c} \frac{1 - \frac{V}{c} \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \therefore \omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} \cos \alpha}$$

である. [これは音の Doppler 効果の公式と異なるが (本稿次節で考察),]  $\alpha$  が  $\pi/2$  にあまり近くないときには, 非相対論的極限は

$$\omega \simeq \omega_0 \left( 1 + \frac{V}{c} \cos \alpha \right)$$

であ [り, 音のななめ Doppler 効果の公式と一致す] る.

## § 48 について

■単色平面波の表式 (48.5) について 3次元空間を波数ベクトル  $\mathbf{k}$  の向きに位相速度  $c = \omega/k$  で伝播する平面波

$$f(\mathbf{r}, t) = F(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \mp \omega t + \delta)$$

は波動方程式  $\square f = 0$  を満たす. 実際このことは  $\xi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta$  とおくと

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) f = \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2 \right) \frac{d^2 F}{d\xi^2} = 0$$

となることから確かめられる. この結果は平面波  $F(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \mp \omega t + \delta)$  が波動方程式を満たすためには分散関係 ( $\omega$  と  $\mathbf{k}$  の関係)  $c = \omega/k$  が満たされなければならないことを意味している.

■「線形の演算だけを……複素数の量自体について演算をおこなうことができる」(p.129, 1 番下~p.130, l.1) について 線形の演算を  $L$  によって表すと

$$L(\mathbf{A}) = L(\operatorname{Re}[\mathbf{A}]) + iL(\operatorname{Im}[\mathbf{A}])$$

なので, 実部  $\operatorname{Re}[\mathbf{A}]$  は複素表示の量  $\mathbf{A}$  が満たす式  $L(\mathbf{A}) = 0$  と同じ関係式  $L(\operatorname{Re}[\mathbf{A}]) = 0$  を満たす.

■平面波の式の微分 (48.6) について 一般に平面波の式  $f \equiv a e^{-ik_i x^i}$ ,  $\mathbf{f} \equiv \mathbf{a} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$  を微分した結果は以下のようなになる.

$$\begin{aligned} \partial_i (-ik_k x^k) &= -ik_k \delta_i^k = -k_i, & \therefore \partial_i f &= -ik_i f, & \therefore \partial^i f &= -ik^i f. \\ \partial_\alpha (a^\alpha e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}) &= ik^\alpha a^\alpha e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, & \therefore \nabla \cdot \mathbf{f} &= i\mathbf{k} \cdot \mathbf{f}. \\ e^{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta (a^\gamma e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}) &= e^{\alpha\beta\gamma} (ik^\beta) (a^\gamma e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}), & \therefore \nabla \times \mathbf{f} &= i\mathbf{k} \times \mathbf{f}. \end{aligned}$$

■楕円偏光の式 (48.9) の導出について この部分は 2 種類の単振動が共通の振動数を持つような Lissajous 曲線が楕円となることのエレガントな証明となっている. 初等的な証明は『力学』§ 23 の問題 3 に見られる [3, p.87].

波動方程式からの流れを文献 [15, pp.137-146, pp.161-164] (寺沢徳雄『振動と波動』) と比較しながらまとめると図 45 のようになる.

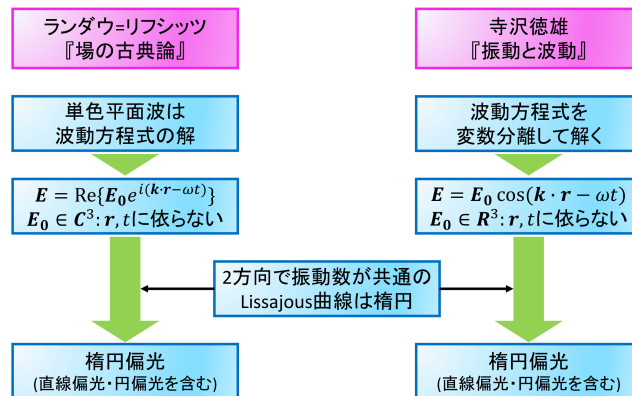


図 45 波動方程式から楕円偏光までの流れ

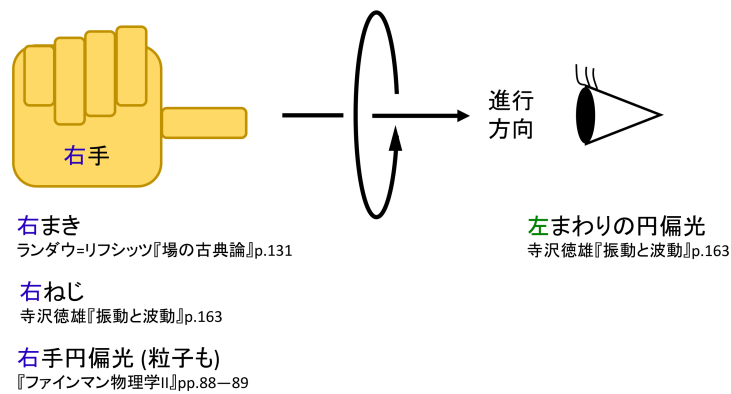


図 46 偏光の回転方向の呼び方

■「右まき」「左まき」(p.131, l.9) について 偏光の回転方向の呼び方には図 46 のようなものがある [15, p.163] [16, pp.88-89].

■円偏光と床屋のサインポールの類似性 円偏光において電場  $\mathbf{E}$  と磁束密度  $\mathbf{H}$  は、座標系 (時間の原点を含めて) を適当に選ぶと

$$\mathbf{E} = a \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t) \\ \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = a \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (52)$$

という形に表される. よって  $z$  軸上の各点に分布する電磁場ベクトル  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  の先端は図 47 のように常螺旋を描く. そしてベクトル  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  は  $z = \text{const}$  の水平面内で回転する. この様子は床屋のサインポールに似ている.

床屋のサインポールでは赤と青の螺旋が中心軸の周りに回転しており, その結果として赤と青の縞模様が上昇していくように見える.  $x$  軸正の方向をサインポールの正面とすると, より正確には図 47 に示した正面の

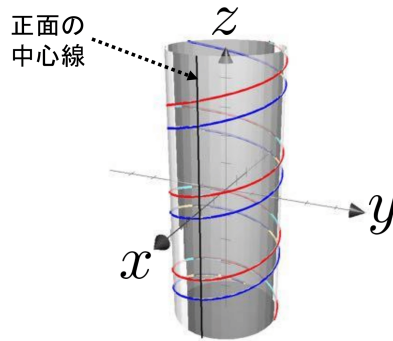


図 47 円偏光と床屋のサインポール

中心線と、螺旋との交点が上昇する。すなわち正面方向の方位角は  $\phi = 0$  であり、常螺旋の式 (52) においてベクトルの指す方向の方位角が

$$kz - \omega t = \text{const}(= 0), \quad kz - \omega t + \frac{\pi}{2} = \text{const}(= 0)$$

を満たすような座標 (高さ)  $z$  が時間とともに増大する。ここで上昇速度は

$$\dot{z} = \frac{\omega}{k}$$

であり、これは式 (52) の位相が一定となる条件から得られたものだから、位相速度と呼ばれるのもっともである。

特に円偏光に対してはその時間発展 (52) が Maxwell 方程式に従うことから、上昇速度は

$$\frac{\omega}{k} = c$$

でなければならない。すなわち電磁波の位相速度は光速  $c$  である。

■ Doppler 効果, 光と音の違い 光源が速度  $\mathbf{V}$  で運動する場合と観測者が速度  $-\mathbf{V}$  で運動する場合とで観測される振動数が同じになるのは、音と違って光にはエーテルのような媒質がないからである。音の場合は音源と観測者の他に空気を合わせた 3 体問題となり、波源と観測者の間のこのような対称性は失われる。光の場合も波源と観測点が近づくと振動数が増加することは音と変わらないから、これを光の Doppler 効果と呼べる。

#### § 48, 問題

1 (偏光の楕円の軸の大きさと向き (任意にとった  $y, z$  軸に対する) を複素振幅  $\mathbf{E}_0$  で表す) 解の 1.5 では、適当な位相因子  $e^{i\varphi}$  を用いて

$$\mathbf{E}_0 = e^{i\varphi}(0, A, Be^{i\delta}), \quad A \equiv |E_{0y}|, \quad B \equiv |E_{0z}|$$

とおいたとき、

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* = A^2 + B^2, \quad \mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^* = -2iAB \sin \delta(1, 0, 0)$$

となることを用いれば良い。解の 1.5 の式より

$$b_1 + b_2 = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \sin \delta}, \quad b_1 - b_2 = \pm \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \sin \delta}$$

となるので, p.133, 1.1 における  $b_{1,2}$  の式を得る.

式 (48.7):  $\mathbf{E}_0 = (\mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2)e^{-i\alpha}$  より

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{b}_1 = b_1^2 e^{-i\alpha}, \quad \mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{b}_2 = -ib_2^2 e^{i\alpha}$$

なので, 積  $(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{b}_1)(\mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{b}_2)$  は純虚数である. そこで  $\mathbf{b}_1$  の  $y$  軸との成す角を  $\theta$  として,

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{b}_1 = e^{i\varphi} b_1 (A \cos \theta + B \sin \theta e^{i\delta}), \quad \mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{b}_2 = \pm e^{-i\varphi} b_2 (-A \sin \theta + B \cos \theta e^{-i\delta})$$

を  $\text{Re}\{(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{b}_1)(\mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{b}_2)\} = 0$  に代入すると,

$$0 = \text{Re}\{(A \cos \theta + B \sin \theta e^{i\delta})(-A \sin \theta + B \cos \theta e^{-i\delta})\} = -\frac{1}{2}(A^2 - B^2) \sin 2\theta + AB \cos \delta \cos 2\theta,$$

$$\therefore \tan 2\theta = \frac{2AB \cos \delta}{A^2 - B^2}.$$

「場の回転の方向はベクトル  $\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2$  の  $x$  成分の符号で与えられる」(p.133, 1.7) について, 楕円偏光の右巻きと左巻きを区別する式 (48.9) の複号  $\pm$  は,  $\mathbf{b}_2$  の  $\mathbf{b}_1$  との成す角  $\pm\pi/2$  に応じていたことを思い出す ( $\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2$  は  $\pm x$  向きであることに注意).

2 (直線偏光の場合における粒子の運動) § 47 の問題 2 で最終的に得た結果を利用する (本稿では係数を訂正した). 電場が

$$\mathbf{E} = (0, E_y, 0), \quad E_y = E_0 \cos \xi, \quad \xi \equiv \frac{\omega}{c}(ct - x)$$

で与えられる直線偏光の場を考えると, 我々のゲージ ( $\phi = 0$ ) では  $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  より, ポテンシャルは

$$\mathbf{A} = (0, A_y, 0), \quad A_y = -\frac{cE_0}{\omega} \sin \xi$$

とできる. すると

$$\mathbf{A}^2 - \overline{\mathbf{A}^2} = \left(\frac{eE_0}{\omega}\right)^2 \left(\sin^2 \xi - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{eE_0}{\omega}\right)^2 \cos 2\xi$$

より, 粒子の位置は, 積分定数がゼロとなるように原点を選べば,

$$x = \frac{\omega}{c} \frac{e^2}{2\gamma^2 c^2} \int^\xi (\mathbf{A}^2 - \overline{\mathbf{A}^2}) d\xi = -\frac{\omega}{c} \frac{e^2 E_0^2}{8\gamma^2 \omega^2} \sin 2\xi,$$

$$y = -\frac{e}{c\gamma} \int^\xi A_y d\xi = -\frac{eE_0}{\gamma\omega} \cos \xi, \quad z = -\frac{e}{c\gamma} \int^\xi A_z d\xi = 0$$

と計算される (これらは確かに長さの次元を持っている<sup>\*36</sup>). これは図 48 のような  $xy$  面内の 8 字型の軌道に沿う運動を表し (1 周期は範囲  $0 \leq \xi \leq 2\pi$  に対応), パラメター  $\gamma$  は関係式

$$\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \gamma^2 = m^2 c^2 + \frac{e^2}{c^2} \overline{\mathbf{A}^2} = m^2 c^2 + \frac{e^2 E_0^2}{2\omega^2}$$

から決まる. 運動量は

$$p_x = \frac{\omega}{c} \frac{e^2}{2\gamma c^2} (\mathbf{A}^2 - \overline{\mathbf{A}^2}) = -\frac{1}{4} \frac{e^2 E_0^2}{c\gamma\omega} \cos 2\xi, \quad p_y = -\frac{e}{c} A_y = \frac{eE_0}{\omega} \sin \xi, \quad p_z = -\frac{e}{c} A_z = 0$$

と求まる (いずれも確かに運動量の次元を持つ).

<sup>\*36</sup> 特に  $[eE_0] = MLT^{-2}$ ,  $[\gamma] = [k_i f^i] = L^{-1} \cdot (MLT^{-1})$  に注意すれば良い.

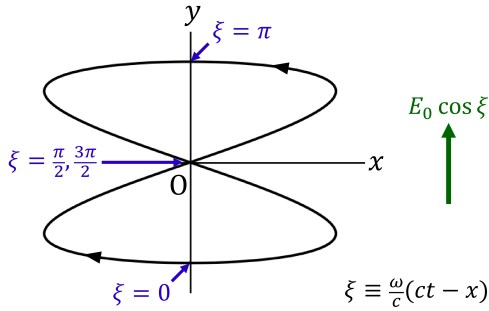


図 48 直線偏光の場における粒子の運動

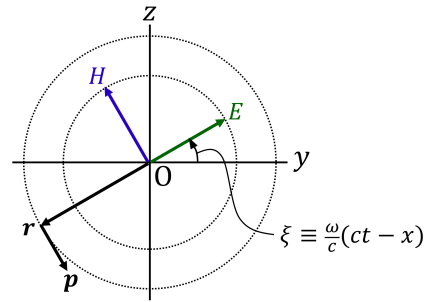


図 49 円偏光の場における粒子の運動

### 3 (円偏光の場における粒子の運動) 同様に円偏光の場

$$\mathbf{E} = E_0(0, \cos \xi, \sin \xi), \quad \mathbf{A} = \frac{cE_0}{\omega}(0, -\sin \xi, \cos \xi), \quad \xi \equiv \frac{\omega}{c}(ct - x)$$

における粒子の運動は

$$\begin{aligned} x &= 0, & y &= -\frac{eE_0}{\gamma\omega} \cos \xi, & z &= -\frac{eE_0}{\gamma\omega} \sin \xi, \\ p_x &= 0, & p_y &= \frac{eE_0}{\omega} \sin \xi, & p_z &= -\frac{eE_0}{\omega} \cos \xi \end{aligned}$$

と求まる。これは図 49 のような  $yz$  面内の 8 字型の軌道に沿う運動を表し、パラメター  $\gamma$  は関係式

$$\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \gamma^2 = m^2 c^2 + \frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2 = m^2 c^2 + \left(\frac{eE_0}{\omega}\right)^2$$

から決まる。

## § 49. スペクトル分解

この節は数学的な準備に充てられている。

- 離散的な振動数の列を含む場  $f(t)$ , 周期  $T$  をもつ

→ Fourier 級数へ展開

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_0 n t} \quad (\omega_0 = 2\pi/T)$$

–  $f(t)$  が実である条件  $f_{-n} = f_n^*$

– 波の平均強度

$$\bar{f}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 \quad (\because f_{-n} = f_n^*, f_0 = \bar{f} \stackrel{\text{仮定}}{=} 0)$$

- 連続的な振動数の列を含む場  $f(t)$ , ふつう  $f(\pm\infty) = 0$  (展開の条件)

→ Fourier 積分へ展開

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

–  $f(t)$  が実である条件  $f_{-\omega} = f_\omega^*$

– 波の全強度 (次式左辺で定義 [§ 66 も参照])

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2 dt = 2 \int_0^{\infty} |f_{\omega}|^2 \frac{d\omega}{2\pi} \quad (\because f_{-\omega} = f_{\omega}^*, \text{ 導出は下記}) \quad (49.8)$$

§ 49, 式の導出など

■式 (49.8) の導出

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \right\} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f e^{-i\omega t} dt \right\} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} f_{-\omega} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (53)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f_{\omega}|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = 2 \int_0^{\infty} |f_{\omega}|^2 \frac{d\omega}{2\pi} : (49.8). \quad (54)$$

[最後の等号を本稿次節で補足.]

§ 49 について

■基本振動数が複数ある場合 (p.134, l.13,14) について 展開に含まれる振動数の列が  $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots, \omega_0', 2\omega_0', 3\omega_0', \dots$  で,  $n\omega_0'/m\omega_0$  が無理数となる場合のこと.

■ $f(t)$  が実となる条件 (49.3):  $f_{-n} = f_n^*$  について 遠回りだが, 三角関数による Fourier 展開における  $\sin, \cos$  を指数関数に書き換えると, Fourier 係数  $f_n$  のもとの係数との対応関係から式 (49.3):  $f_{-n} = f_n^*$  を確かめられる.

■Fourier 積分 (49.5) について  $d\omega/2\pi$  は  $d\omega/\sqrt{2\pi}$  と書く流儀もある. この場合には Fourier 成分の式 (49.6) において  $dt \rightarrow dt/\sqrt{2\pi}$  となる.

Fourier 積分 (49.5) の展開係数  $f_{\omega}$  は Fourier 級数 (49.1) の展開係数  $f_n$  と異なり, (場) × (時間) の次元を持つことを指摘しておく:

$$[f_n] = [f], \quad [f_{\omega}] = \frac{[f]}{[\omega]} = [f] \times T.$$

これは次の事情による. 時間周期  $T$  を持つ場  $f(t)$  の Fourier 展開 (49.1) は,  $T \rightarrow \infty$  の極限で展開係数  $f_n$  から  $d\omega$  がくくり出されて

$$f(t) = \sum_n \left| \begin{array}{c} f_n \\ \downarrow \\ \frac{d\omega}{2\pi} f_{\omega} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} e^{-in\omega t} \\ \downarrow \\ e^{-i\omega t} \end{array} \right|$$

と Fourier 積分 (49.5) に移行する. 実際このことは, 展開係数の式

$$f_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{i\omega_n t} dt : (49.2) \quad \left( \omega_n \equiv n \frac{2\pi}{T} \right)$$

$$f_{\omega} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{i\omega t} dt \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} f_{\omega}^{(T)} : (49.6)$$

を比較すると,

$$f_n = \frac{1}{T} f_{\omega}^{(T)} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} f_{\omega}^{(T)} \quad (\Delta\omega \equiv \omega_{n+1} - \omega_n)$$

$$\rightarrow \frac{d\omega}{2\pi} f_{\omega}$$

となることから分かる。こうして Fourier 積分 (49.5) は「平面波  $f_{\omega}e^{-i\omega t}$  の重ね合せ」ではなく、正確には「平面波  $\frac{d\omega}{2\pi} f_{\omega}e^{-i\omega t}$  の重ね合せ」である。

■波の全強度の計算 (p.135, 1.1~4) について 波の全強度, すなわち  $f^2$  の全時間についての積分は時間に依らない量であり, これを  $\omega$  に関する積分としても表すことができる。そのためには  $f^2$  の  $f$  を (1 つだけ) Fourier 展開し, 次いで時間についての積分を実行すれば良い (教科書 p.135, 1.2 の式, あるいは本稿の式 (53)).

式 (49.8)(本稿ではその導出過程 (54)) の最後の等号は,  $\omega' = -\omega$  と変数変換すると

$$\int_{-\infty}^0 f_{\omega} f_{-\omega} d\omega = \int_0^{\infty} f_{-\omega'} f_{\omega'} d\omega'$$

となることから分かる。

## § 50. 部分偏光

実際の波は完全には単色でなく, 平均の振動数  $\omega$  の周りの小さな区間  $\Delta\omega$  内の, いろいろな振動数を含んでいる。そのような波に対して空間の定まった点における場を

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$$

という形に書くと, 偏光を決定する複素振幅  $\mathbf{E}_0$  は時間のゆるやかに変化する関数  $\mathbf{E}_0(t)$  となる (一定の偏光状態を持つ単色波に対して  $\mathbf{E}_0$  は定数である (§ 48)) [本稿次節で補足]。このように各点での偏りが時間とともに変化する波を部分偏光しているという。

光の偏りの性質は量  $J_{\alpha\beta} = \overline{E_{0\alpha} E_{0\beta}^*}$  (バーは時間平均を表す), あるいはこれを用いて

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{J_{\alpha\beta}}{J}, \quad J = J_{\alpha\alpha}$$

のように定義される偏光テンソル  $\rho_{\alpha\beta}$  によって決定される。ただし波の伝播方向を  $x$  軸にとり, 添字  $\alpha, \beta$  はこれに垂直な 2 方向の成分  $\alpha, \beta = 1, 2$  をとるものとする。偏光テンソル  $\rho_{\alpha\beta}$  はその定義により

$$\rho_{\alpha\beta} = \rho_{\beta\alpha}^* : \text{Hermite 性}, \quad \rho_{\alpha\alpha} = 1$$

の条件を満たす。

- 完全に偏光している光に対して

$$E_{0\alpha} = \text{const.} \Rightarrow J_{\alpha\beta} = E_{0\alpha} E_{0\beta}^* \Rightarrow |\rho_{\alpha\beta}| = 0$$

- 偏光していない光 (自然光) に対して

$$\rho_{\alpha\beta} \propto \delta_{\alpha\beta} \Rightarrow \rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \Rightarrow |\rho_{\alpha\beta}| = \frac{1}{4}$$

であり [本稿次節で補足], 行列式  $|\rho_{\alpha\beta}|$  は 0 と 1/4 との間の値をとる。そこで偏光していない光に対する 0 から偏光している光に対する 1 までの値をとる正の量として,

$$|\rho_{\alpha\beta}| = \frac{1}{4}(1 - P^2)$$

によって定義される偏光度  $P$  を用いることができる。

偏光テンソルを対称部分と反対称部分に分けると,  $S_{\alpha\beta}$  を実数の対称テンソル,  $A$  を実数の擬スカラーとして

$$\rho_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} - \frac{i}{2}e_{\alpha\beta}A \quad (50.9)$$

という形になることが分かる (導出は下記). ここで  $A$  は右回りの円偏光に対して  $+1$ , 直線偏光に対して  $0$ , 左回りの円偏光に対して  $-1$  をとることが確かめられるため (下記参照), これは円偏光の程度と呼ぶことができる。

実対称テンソル  $S_{\alpha\beta}$  の主軸  $\mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}$  に関する成分は

$$(S_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

という形に書ける. ここで主値  $\lambda_1, \lambda_2$  は正で,  $0$  から  $1$  までの値をとり,  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$  を満たす [理由は本稿次節]. 簡単のために  $\rho_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}$  となる場合 ( $A = 0$ ) を考えると,  $\rho_{\alpha\beta}$  の非対角成分はゼロである. これは主軸方向の波  $E_\alpha^{(1)}, E_\beta^{(2)}$  が非干渉である場合

$$\overline{E_\alpha^{(1)} E_\beta^{(2)}} = \overline{E_\alpha^{(1)}} \cdot \overline{E_\beta^{(2)}} = 0$$

を意味する. よって  $A = 0$  のときには部分偏光している波は, 互いに垂直な方向に直線偏光している 2 つの非干渉性の波の重ね合せとして表すことができる。

$\rho_{\alpha\alpha} = 1$  を満たす Hermite テンソル  $\rho_{\alpha\beta}$  は 3 つの実数パラメーターで表される [本稿次節で補足]. それを円偏光度  $A$ , 「最大直線偏光度」 $l \equiv \lambda_1 - \lambda_2$  [本稿次節で補足],  $\mathbf{n}^{(1)}$  と  $y$  軸の成す角  $\phi$  に選ぶことができる. これらの代わりに Stokes のパラメーター

$$\xi_1 = l \sin 2\phi, \quad \xi_2 = A, \quad \xi_3 = l \cos 2\phi$$

を用いると, 任意の軸  $y, z$  に関する偏光テンソルの成分は

$$(\rho_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix} \quad (50.13)$$

と表される [本稿次節で補足]. 3 つのパラメーターはすべて  $-1$  と  $1$  の間の値をとる.

- $\xi_3$  は  $y$  軸および  $z$  軸方向の直線偏光を特徴付ける.
  - $\xi_3 = 1$  は  $y$  軸方向に,  $\xi_3 = -1$  は  $z$  軸方向に直線偏光していることを表す.
- $\xi_1$  は  $y$  軸,  $z$  軸に対して傾き  $45$  度を持つ方向の直線偏光を特徴付ける.
  - $\xi_1 = \pm 1$  は  $y$  軸との成す角  $\phi = \pm\pi/4$  の方向に直線偏光していることを表す.

$$|\rho_{\alpha\beta}| = \frac{1}{4}(1 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2), \quad \therefore P = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$$

であり [本稿次節で補足], 同じ偏光度  $P$  を持つ偏光も  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  の値は異なり得る.

## § 50, 式の導出など

■式 (50.9) の導出  $\rho_{\alpha\beta}$  の Hermite 性より, その対称部分

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\rho_{\alpha\beta} + \rho_{\beta\alpha})$$



は実数, 反対称部分  $\frac{1}{2}(\rho_{\alpha\beta} - \rho_{\beta\alpha})$  は純虚数である. ここで p.20 脚注 2 で (天下りに) 示されている, 次の定理を思い出す.

完全反対称テンソルのうち, それが定義されている空間の次元数に等しい階数のものは, この空間内での座標系の回転に対して不変である.

すると  $A$  を実数の擬スカラー,  $e_{\alpha\beta}$  を反対称な単位テンソル (ただし  $e_{12} = +1$ ) として, 反対称部分は

$$\frac{1}{2}(\rho_{\alpha\beta} - \rho_{\beta\alpha}) = -\frac{i}{2}e_{\alpha\beta}A$$

と表されるので [本稿次節で補足], 式 (50.9) を得る.

### ■円偏光, 直線偏光に対する $A$ の値

円偏光の波に対してはベクトル  $\mathbf{E}_0 = \text{const}$  で,

$$E_{02} = \pm iE_{01}$$

である. このとき,  $S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}$ ,  $A = \pm 1$  であることはすぐわかる [本稿次節で確認]. それに反して, 直線偏光の波に対しては定数ベクトル  $\mathbf{E}_0$  を実数にとることができるから,  $A = 0$  である. (p.137)

## § 50 について

■部分偏光している波の場  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega t}$  (§ 50, 1.5) について 場を  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega t}$  の形に書くこと自体は常に可能である (この式で  $\mathbf{E}_0(t)$  を定義したと考えれば良い). 場の含む振動数の幅  $\Delta\omega$  が狭いとき,  $\mathbf{E}_0(t)$  が時間のゆるやかに変化する関数となることは, § 58 で説明される波動一般の不確定関係  $\Delta t \Delta\omega \gtrsim 1$  から理解できる.

このことを理解するために簡単な例をいくつか考える.

まず教科書にもあるように, 一定の偏光状態を持つ単色波に対して  $\mathbf{E}_0$  は定数である (§ 48).

次に簡単なよく知られている例は, 互いに近い振動数  $\omega_1, \omega_2 (\omega_1 > \omega_2)$  を持つ単色平面波を重ね合得られるうなりである. これは平均の振動数  $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  での振動に関する振幅が, 振動数  $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$  でゆっくりと時間変化するような波である.

さらに平均  $\omega_0$  の周りの  $\sigma$  程度の区間で値を持つような Fourier 係数

$$f_\omega = Ae^{-(\omega - \omega_0)^2 / \sigma^2}$$

に対して,  $x$  方向に伝播する単色平面波の重ね合せ

$$f(x, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} f_\omega e^{-i\omega(t - \frac{x}{c})}$$

を考える. すると

$$\begin{aligned} f(x, t) &= Ae^{-i\omega_0 t} \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp \left[ - \left\{ \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\sigma^2} + i(\omega - \omega_0) \left( t - \frac{x}{c} \right) \right\} \right] \\ &= \frac{A\sigma}{2\sqrt{\pi}} \exp \left\{ - \frac{\sigma^2}{4} \left( t - \frac{x}{c} \right)^2 \right\} e^{-i\omega_0(t - \frac{x}{c})} \end{aligned}$$

となる。これは  $x$  方向に光速  $c$  で運動する Gauss 型の波束を表している。空間の定まった点  $x = 0$  での場は

$$f(x=0, t) = f_0(t)e^{-i\omega_0 t}, \quad f_0(t) = \frac{A\sigma}{2\sqrt{\pi}} e^{-\sigma^2 t^2/4}$$

という形をとる。

■「偏光テンソルは全部で、3つの実数のパラメータで定められる」(p.136, 1.11)について  $a, b, c$  を実数として偏光テンソルは

$$(\rho_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & 1-a \end{pmatrix}$$

という形をとる。3つのパラメータの具体的な選び方は p.138 で論じられる。

■完全に偏光している光に対する式 (50.6) について 以下の例から分かるように、積  $E_{0\alpha}E_{0\beta}^*$  の平均値  $\overline{E_{0\alpha}E_{0\beta}^*}$  は一般に平均値の積  $\overline{E_{0\alpha}} \cdot \overline{E_{0\beta}^*}$  に一致しない (p.137, 下から 3, 2 行目も参照)。

$$\overline{\sin^2 \omega t} \cdot \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad \overline{\sin^2 \omega t \cdot \cos^2 \omega t} = \frac{1}{4} \overline{\sin^2 2\omega t} = \frac{1}{8}.$$

よって一般の  $J_{\alpha\beta}$  (50.1) に対して

$$|\rho_{\alpha\beta}| \propto \overline{E_{01}E_{01}^*} \cdot \overline{E_{02}E_{02}^*} - \overline{E_{01}E_{02}^*} \cdot \overline{E_{02}E_{01}^*}$$

はゼロにならない。光が完全に偏光している場合には時間平均を取り去ることができて、

$$|\rho_{\alpha\beta}| \propto |E_{01}|^2 |E_{02}|^2 - |E_{01}|^2 |E_{02}|^2 = 0: (50.6)$$

となる。

■自然光に対する式 (50.7):  $\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}$  について 係数の 1/2 は条件  $\rho_{\alpha\alpha} = 1$  (p.136, 1.5) による。

■ $\rho_{\alpha\beta}$  の反対称部分の式 (p.137, 1.6) について 反対称部分  $\frac{1}{2}(\rho_{\alpha\beta} - \rho_{\beta\alpha})$  は対角成分がゼロになり、 $\rho_{\alpha\beta}$  の Hermite 性により非対角成分は互いに共役な純虚数となる。よってある基準系での成分は  $A$  を実数として

$$\frac{1}{2}(\rho_{\alpha\beta} - \rho_{\beta\alpha}) = -\frac{iA}{2}(e_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{iA}{2} \\ \frac{iA}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

と書ける。ここで p.20 脚注 2 の定理により、 $\frac{1}{2}(\rho_{\alpha\beta} - \rho_{\beta\alpha})$  は全ての基準系で等しい成分を持つ 2 階テンソルである。一方  $e_{\alpha\beta}$  は全ての基準系で等しい成分を持つ 2 階の擬テンソルであることに注意すると、このことが成り立つためには実数  $A$  が擬スカラーであれば良い。

■円偏光に対して「 $S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}$ ,  $A = \pm 1$  であること」(p.137, 1.14) について  $E_{02} = \pm iE_{01}$  のとき

$$(J_{\alpha\beta}) = E_{01}E_{01}^* \begin{pmatrix} 1 & \mp i \\ \pm i & 1 \end{pmatrix}, \quad J = 2E_{01}E_{01}^*, \quad (\rho_{\alpha\beta}) = \frac{(J_{\alpha\beta})}{J} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \mp i \\ \pm i & 1 \end{pmatrix}$$

である。

■  $S_{\alpha\beta}$  の主値  $\lambda_1, \lambda_2$  について  $\rho_{\alpha\beta}$  の反対称部分是对角成分を持たないので、主軸に関する成分を用いて

$$\lambda_1 = S_{11} = \rho_{11} = \frac{\overline{|E_{01}|^2}}{J} \geq 0, \quad \text{同様に } \lambda_2 \geq 0$$

となる ( $J = \overline{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0} > 0$  を考慮). また

$$1 = \text{tr}(\rho_{\alpha\beta}) = \text{tr}(S_{\alpha\beta}) = \lambda_1 + \lambda_2$$

である. 以上より  $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1$  が言える.

■ 任意の軸  $y, z$  に関する  $S_{\alpha\beta}$  の成分 (50.11), (50.13) について 式 (50.10):

$$S_{\alpha\beta} = \lambda_1 n_\alpha^{(1)} n_\beta^{(1)} + \lambda_2 n_\alpha^{(2)} n_\beta^{(2)}$$

は  $\mathbf{n}^{(1)} = (1, 0)$ ,  $\mathbf{n}^{(2)} = (0, 1)$  となる主軸に関して正しい成分

$$(S_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

を与え, 両辺が同じ種類のテンソルから成るから, 任意の基準系で成り立つ関係である. そこで  $\mathbf{n}^{(1)} = (\cos \phi, \sin \phi)$ ,  $\mathbf{n}^{(2)} = (-\sin \phi, \cos \phi)$  となる基準系をとると,

$$\begin{aligned} S_{11} &= \lambda_1 \cos^2 \phi + \lambda_2 \sin^2 \phi = \lambda_1 \frac{1 + \cos 2\phi}{2} + \lambda_2 \frac{1 - \cos 2\phi}{2} \\ &= \frac{1}{2}(1 + l \cos 2\phi), \text{ etc.} \quad (\because \lambda_1 + \lambda_2 = 1, l \equiv \lambda_1 - \lambda_2) \end{aligned}$$

により

$$(S_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + l \cos 2\phi & l \sin 2\phi \\ l \sin 2\phi & 1 - l \cos 2\phi \end{pmatrix} \quad (50.11)$$

を得る. これは式 (50.13) へと書き換えられる.

■  $l$  が「最大直線偏光度」(p.138, l.13) であることについて  $\mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}$  方向の直線偏光はそれぞれ  $\lambda_1, \lambda_2$  に比例する強度を持ち, 条件  $\lambda_1 > \lambda_2$  (p.138, l.9) の下で最大の強度は  $\lambda_1 = (1 + l)/2$  に対応する.

■ 「パラメータ  $\xi_3$  は, ……表す」(p.138, 下5行) について  $l \equiv \lambda_1 - \lambda_2 = 1$  のとき  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$  とより  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$  なので,  $\mathbf{n}^{(1)}$  方向への完全偏光となる.

$l \equiv \lambda_1 - \lambda_2 \geq 0$  (p.138, l.9) に注意すると,  $\xi_3 \equiv l \cos 2\phi = 1$  のとき  $l = 1, \phi = 0$  より  $\mathbf{n}^{(1)}$  は  $y$  方向であり,  $\xi_3 = -1$  のとき  $l = 1, \phi = \frac{\pi}{2}$  より  $\mathbf{n}^{(1)}$  は  $z$  方向となる. 同様に  $\xi_1 \equiv l \sin 2\phi = \pm 1$  のとき  $l = 1, \phi = \pm \frac{\pi}{4}$  である.

## § 51. 静電場のフーリエ分解

電荷の作る場 [静的な場でなくても良い] を Fourier 展開した場合には, 展開の各項を成す平面波は同次の [源の項がゼロの] 波動方程式を満たさないから, 単色平面波に対する関係  $k^2 = \omega^2/c^2$  が成立しない.

座標原点にある点電荷  $e$  の作る静電場を考え, 場のポテンシャルを

$$\phi = \int \phi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}$$

と Fourier 展開すると, Fourier 成分  $\phi_{\mathbf{k}}$  は

$$\Delta\phi = -4\pi e\delta(\mathbf{r}) \Rightarrow -k^2\phi_{\mathbf{k}} = -4\pi e \Rightarrow \phi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi e}{k^2}$$

と定まる [付録 F ではこれを逆変換して Poisson 方程式の解を求めた]. よって電場は

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = \int (-i\mathbf{k})\phi_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \int \left(-i\frac{4\pi e\mathbf{k}}{k^2}\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

と展開され, 分解された波の場

$$\text{const} \times \frac{\mathbf{k}}{k^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

は波動ベクトル  $\mathbf{k}$  の方向を向いている縦波となる.

## § 52. 場の固有振動

一辺  $L$  の立方体領域における自由な (電荷のない) 電磁場は, [周期境界条件の下で] 許される波動ベクトル  $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}\mathbf{n}$  ( $\mathbf{n}$  の各成分は整数値をとるものとする) を用いて

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (52.1)$$

と Fourier 展開される.

$\mathbf{k}$  空間の体積要素  $d^3k$  には  $\frac{d^3k}{(2\pi/L)^3}$  個の可能な  $\mathbf{k}$  の値が含まれるので,  $L \rightarrow \infty$  の極限で

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

と Fourier 積分に移行する ( $V = L^3$ ). [ただし以下では有限の体積  $V$  における, 離散的な  $\mathbf{k}$  による Fourier 展開を考える.]

$$\begin{aligned} \text{付加条件 } \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 &\Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}} = 0 : \text{横波条件,} \\ \text{波動方程式 } \ddot{\mathbf{A}} - \Delta\mathbf{A} = 0 &\Rightarrow \ddot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} + c^2k^2\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = 0 \end{aligned}$$

であり, 第 2 式により場の展開を

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \{\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*(t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\}, \quad \mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t) \propto e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}, \quad \omega_{\mathbf{k}} = ck \quad (52.9-10)$$

と書くことができる ( $\mathbf{A}$  が実数であることを考慮した) [本稿次節で補足]. このとき場の全エネルギーは

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) dV = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}}, \quad \mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \frac{k^2V}{2\pi} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* \quad (52.11)$$

場の全運動量は

$$\frac{1}{c^2} \int \mathbf{S} dV = \frac{1}{4\pi c} \int \mathbf{E} \times \mathbf{H} dV = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}}{k} \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{k}}}{c} \quad (52.12)$$

と計算される (式 (52.11) の導出は下記) [式 (52.12) の導出は本稿次節]. これらは平面波のエネルギーと運動量の関係 (47.5):  $\mathbf{S}/c^2 = (W/c)\mathbf{n}$  から期待される関係を満たしている.

“正準変数”

$$\mathbf{Q}_k = \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}(\mathbf{a}_k + \mathbf{a}_k^*), \quad \mathbf{P}_k = -i\omega_k \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}(\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_k^*) = \dot{\mathbf{Q}}_k$$

を導入するとこれらは実数であり，場の方程式  $\ddot{\mathbf{a}}_k + c^2 k^2 \mathbf{a}_k = 0$ ,  $\mathbf{a}_k \propto e^{-i\omega_k t}$  より

$$\mathbf{P}_k = \dot{\mathbf{Q}}_k, \quad \ddot{\mathbf{Q}}_k + \omega_k^2 \mathbf{Q}_k = 0 \quad (55)$$

を満たす．場のエネルギー (52.11):  $\mathcal{E} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{k^2 V}{2\pi} \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_k^*$  は正準変数を用いて

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} (\mathbf{P}_k^2 + \omega_k^2 \mathbf{Q}_k^2)$$

と表されるので，場の方程式の帰結 (55) はそれぞれ，Hamilton 方程式

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{P}_k} = \dot{\mathbf{Q}}_k, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{Q}_k} = -\dot{\mathbf{P}}_k$$

に他ならない．横波条件

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{Q}_k = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{P}_k = 0$$

より  $\mathbf{Q}_k, \mathbf{P}_k$  は  $\mathbf{k}$  に垂直な面内にあり，それぞれ 2 個の独立な成分  $Q_{kj}, P_{kj} (j = 1, 2)$  を持つ．このときハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}, j} \mathcal{H}_{\mathbf{k}, j}, \quad \mathcal{H}_{\mathbf{k}, j} = \frac{1}{2} (P_{kj}^2 + \omega_k^2 Q_{kj}^2)$$

と表されるので， $\mathbf{k}, j$  によって指定される正準変数の組  $Q_{kj}, P_{kj}$  は単純調和振動子のハミルトニアン  $\mathcal{H}_{\mathbf{k}, j}$  によって記述されるから，振動子と呼ぶことがある．場を振動子  $\mathbf{Q}_k, \mathbf{P}_k$  による展開の形に書くことができる．

## § 52, 式の導出など

■エネルギーの式 (52.11) の導出 場の全エネルギー

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) dV$$

に電磁場

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} = -\frac{1}{c} \sum_{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{A}}_k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} = i \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \times \mathbf{A}_k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

を代入し， $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$  の項のみが積分に寄与することに注意すると

$$\mathcal{E} = \frac{V}{8\pi} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{A}}_k \cdot \dot{\mathbf{A}}_k^* + (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_k) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_k^*) \right\} \quad (56)$$

となる [本稿次節で補足]．ここで横波条件  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_k = 0$  を用いると

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{A}_k) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_k^*) = k^2 \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{A}_k^* \quad (57)$$

なので [本稿次節で補足]，

$$\mathcal{E} = \frac{V}{8\pi c^2} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \dot{\mathbf{A}}_k \cdot \dot{\mathbf{A}}_k^* + k^2 c^2 \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{A}_k^* \right\} \quad (52.8)$$

が得られる．[和の中身は調和振動子のエネルギーと同じ形をしている.] さらに場の展開 (52.9–10) に対して  $\mathbf{A}_k = \mathbf{a}_k + \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}^*$  であることに注意すると，式 (52.11) が得られる [本稿次節で補足]．

§ 52 について

■場の全エネルギーの式 (p.143, l.12, 本稿の式 (56)) の導出について 計算過程を具体的に書くと

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{8\pi} \int dV \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \left\{ \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}'} - (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}}) \cdot (\mathbf{k}' \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}'}) \right\} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} \\ &= \frac{V}{8\pi} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}^* + (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*) \right\} : (56) \end{aligned}$$

となる。第2の等号は

$$\int dV e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} = V \delta_{\mathbf{k}', -\mathbf{k}}$$

および  $\mathbf{A}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*$  による。

■ $(\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*)$  の式 (p.143, l.14, 本稿の式 (57)) について 恒等式

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= (e_{\lambda\mu\nu} A_{\mu} B_{\nu}) \cdot (e_{\lambda\rho\sigma} C_{\rho} D_{\sigma}) \\ &= (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}) A_{\mu} B_{\nu} C_{\rho} D_{\sigma} \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \end{aligned}$$

および式 (52.3):  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}} = 0$  を用いると

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*) = k^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^* : (56).$$

■Fourier 展開 (52.9), (52.10) について 式 (52.10):  $\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \propto e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}$  はより一般には

$$\mathbf{a}_{\mathbf{k}} = \mathbf{c}_1(\mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} + \mathbf{c}_2(\mathbf{k}) e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}$$

である。しかしこの場合にも展開 (52.9) は

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \mathbf{C}_1(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} + \mathbf{C}_2(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega_{\mathbf{k}} t)} + \mathbf{C}_3(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} + \mathbf{C}_4(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega_{\mathbf{k}} t)} \right\} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \left[ \{ \mathbf{C}_1(\mathbf{k}) + \mathbf{C}_4(-\mathbf{k}) \} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} + \{ \mathbf{C}_2(\mathbf{k}) + \mathbf{C}_3(-\mathbf{k}) \} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega_{\mathbf{k}} t)} \right] \end{aligned}$$

という形をとるため、 $\mathbf{A}$  が実数であることを考慮して

$$\mathbf{C}_1(\mathbf{k}) + \mathbf{C}_4(-\mathbf{k}) = \mathbf{b}_{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{C}_2(\mathbf{k}) + \mathbf{C}_3(-\mathbf{k}) = \mathbf{b}_{-\mathbf{k}}^*$$

とおけば

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \mathbf{b}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} + \mathbf{b}_{-\mathbf{k}}^* e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega_{\mathbf{k}} t)} \right\}$$

と書ける。

■  $\mathbf{A}_k$  と  $\mathbf{a}_k$  の関係 (p.143, 下から 2 行目) について  $\mathbf{a}_k$  を用いた展開 (52.9) の第 2 項に  $k \rightarrow -k$  の置き換えを施すと

$$\mathbf{A} = \sum_k (\mathbf{a}_k + \mathbf{a}_{-k}^*) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

となるから  $\mathbf{A}_k = \mathbf{a}_k + \mathbf{a}_{-k}^*$  を得る. これを  $\mathbf{a}_k$  について逆に解くと

$$\mathbf{a}_k = \frac{\mathbf{A}_k + \mathbf{A}_{-k}^*}{2}$$

となる.  $\mathbf{A}$  が実である条件  $\mathbf{A}_{-k} = \mathbf{A}_k^*$  により,  $\mathbf{a}_k$  もまた同じ関係

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_{-k}^*$$

を満たさなければならないことに注意しよう.

■ 場の全エネルギーの式 (52.11) の導出について

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}}_k \cdot \dot{\mathbf{A}}_k^* &= k^2 c^2 (\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_k^* - \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_{-k} - \mathbf{a}_{-k}^* \cdot \mathbf{a}_k^* + \mathbf{a}_{-k}^* \cdot \mathbf{a}_{-k}), \\ k^2 c^2 \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{A}_k^* &= k^2 c^2 (\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_k^* + \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_{-k} + \mathbf{a}_{-k}^* \cdot \mathbf{a}_k^* + \mathbf{a}_{-k}^* \cdot \mathbf{a}_{-k}) \end{aligned}$$

なので, 「 $\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_{-k}$  および  $\mathbf{a}_k^* \cdot \mathbf{a}_{-k}^*$  という形の項はたがいに相殺する. また, 和  $\sum \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_k^*$  と  $\sum \mathbf{a}_{-k} \cdot \mathbf{a}_{-k}^*$  とは, …… , たがいに等しいことに注意すると」 (p.144, 1.3~5),

$$\sum_k (\dot{\mathbf{A}}_k \cdot \dot{\mathbf{A}}_k^* + k^2 c^2 \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{A}_k^*) = 4 \sum_k k^2 c^2 \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_k^*$$

となるから全エネルギーの式 (52.11) を得る.

■ 場の全運動量の式 (52.12) の導出について 場の全運動量は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi c} \int \mathbf{E} \times \mathbf{H} dV \\ &= \frac{1}{4\pi c} \frac{-i}{c} \int \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \times (\mathbf{k}' \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}'}) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} dV \\ &= \frac{1}{4\pi c} \frac{i}{c} \sum_{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*) \int dV \\ &= \frac{iV}{4\pi c^2} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \mathbf{k} (\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*) - \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^* (\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k}) \right\} \end{aligned}$$

と計算される. ここですでに指摘したように  $\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_{-k}^*$  であることに注意すると, 最右辺において

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^* (\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k}) = -ick (\mathbf{a}_k + \mathbf{a}_{-k}^*) \{ (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_{-k}^*) \cdot \mathbf{k} \} = 0$$

であり,

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} (\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*) &= \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} (-ick) (\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_k^* + \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_{-k} - \mathbf{a}_{-k}^* \cdot \mathbf{a}_k^* - \mathbf{a}_{-k}^* \cdot \mathbf{a}_{-k}) \\ &= -2ic \sum_{\mathbf{k}} k \mathbf{k} \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_k^* \end{aligned}$$

なので, 全運動量は

$$\frac{iV}{4\pi c^2}(-2ic) \sum_{\mathbf{k}} k \mathbf{k} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}}{k} \frac{1}{c} \left( \frac{k^2 V}{2\pi} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* \right) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}}{k} \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{k}}}{c} : (52.12)$$

となる.

■ベクトル・ポテンシャルを振動子  $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}, \mathbf{P}_{\mathbf{k}}$  で展開した式 (52.18) について 式 (52.17) を  $\mathbf{A}$  の式 (52.1) に代入すると

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{i}{k} \sqrt{\frac{\pi}{V}} \{(\mathbf{P}_{\mathbf{k}} - i\omega_{\mathbf{k}} \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}) - (\mathbf{P}_{-\mathbf{k}} + i\omega_{\mathbf{k}} \mathbf{Q}_{-\mathbf{k}})\} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{i}{k} \sqrt{\frac{\pi}{V}} \{ \mathbf{P}_{\mathbf{k}} (e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) - i\omega_{\mathbf{k}} \mathbf{Q}_{-\mathbf{k}} (e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) \} \\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{V}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{k} (-\mathbf{P}_{\mathbf{k}} \sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega_{\mathbf{k}} \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} \cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) : (52.18). \end{aligned}$$

■電磁場を振動子  $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}, \mathbf{P}_{\mathbf{k}}$  で展開した式 (52.19) について  $\mathbf{A}$  の式 (52.18) を時間微分して電場を求める際,

$$\dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}} = \mathbf{P}_{\mathbf{k}}, \quad \dot{\mathbf{P}}_{\mathbf{k}} = \ddot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}} = -\omega_{\mathbf{k}}^2 \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}}$$

に注意する.  $\mathbf{A}$  の式 (52.18) の rot をとって磁場を求める際,  $\mathbf{f}(t)$  を位置に依らないベクトルとすると

$$\begin{aligned} [\nabla \times (\mathbf{f} \cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]_{\alpha} &= e_{\alpha\beta\gamma} \partial_{\beta} (f_{\gamma} \cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = -e_{\alpha\beta\gamma} k_{\beta} (f_{\gamma} \sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = -[\mathbf{k} \times (\mathbf{f} \sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]_{\alpha}, \\ [\nabla \times (\mathbf{f} \sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]_{\alpha} &= e_{\alpha\beta\gamma} \partial_{\beta} (f_{\gamma} \sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = e_{\alpha\beta\gamma} k_{\beta} (f_{\gamma} \cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = [\mathbf{k} \times (\mathbf{f} \cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]_{\alpha} \end{aligned}$$

となることに注意する.



## 第7章 光の伝播

### § 53. 幾何光学

電磁波を空間の小さい領域では平面波と見なせる場合には、波面およびこれに垂直な射線 (光線) を導入することができる、波動的性質を捨象して光を光線として捉える、幾何光学を適用できる。そのためには波の振幅と伝播方向とが、波長程度の領域にわたっては近似的に一定であれば良い。言い換えれば幾何光学は波長  $\lambda \rightarrow 0$  の極限として、波動光学の中に近似的に含まれている [本稿次節で補足]。電磁場  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  の任意の成分を  $f = ae^{i\psi}$  と書くと [任意の複素数  $f$  は、その絶対値を  $a$ 、偏角を  $\psi$  として必ずこのように書ける]、考えている位置と時刻 (原点に選ぶ) のまわりの狭い空間領域と短い時間において位相を

$$\psi = \psi_0 + \mathbf{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} + t \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

と近似できる (微分係数は原点での値)。ここから分かるように、この極限で波数 (と振動数)  $k_i = (\omega/c, -\mathbf{k})$  にあたる量  $\partial_i \psi (= -k_i)$  は大きな量と想定されていることになる [本稿次節で補足]。このとき位相  $\psi$  に対する方程式

$$(\partial_i \psi)(\partial^i \psi) = 0$$

が導かれる (導出は下記) [導出について本稿次節で補足]。位相  $\psi$  はアイコナルと呼ばれ、上式はアイコナル方程式と呼ばれる。これは「一般的な形では」(p.147 下から4行目) [つまり媒質中の波の伝播速度を用いた波動方程式から出発して式を修正すれば] 物質的媒体のなかでの光の伝播にも適用できることに注意する (以降で見る関係式も同様)。

幾何光学におけるアイコナル  $\psi$  を粒子の作用  $S$  に対応させると、光学と力学の間に以下の類似性が見出される\*37。

アイコナル方程式 $(\partial_i \psi)(\partial^i \psi) = 0$ $\mathbf{k} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}}, \quad \omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t}$	$\leftrightarrow$  $\leftrightarrow$	Hamilton-Jacobi 方程式 $(\partial_i S)(\partial^i S) = (mc)^2$ $\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathcal{H} = -\frac{\partial S}{\partial t}$
--	--	---

[よって光を粒子に対応させるには  $m = 0$  とすれば良い。逆に粒子の古典的な運動は作用  $S$  (を適当に無次元化した値  $S/\hbar$ ) を位相とする波動力学の短波長極限として記述されることが示唆される。] 光の波動ベクトル  $\mathbf{k}$  と振動数  $\omega$  をそれぞれ粒子の運動量  $\mathbf{p}$  とエネルギー (ハミルトニアン)  $\mathcal{H}$  に対応させると [これは光子に対する量子力学的関係  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}, E = \hbar \omega$  を想起させる]、

$$k = \omega/c \quad \leftrightarrow \quad p = \mathcal{E}/c \quad (\text{超相対論的粒子に対して})$$

の類似性が見出される。

\*37 アイコナル方程式は自由粒子に対する Hamilton-Jacobi 方程式 (9.20):  $(\partial_i S)(\partial^i S) = (mc)^2$  に比較される。粒子が場と相互作用する場合の Hamilton-Jacobi 方程式は式 (16.11):

$$\left( \nabla S - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial S}{\partial t} + e\phi \right)^2 + m^2 c^2 = 0.$$

そこで

$$\dot{\mathbf{k}} = -\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} \quad \longleftarrow \text{(類推)} \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}} : \text{Hamilton 方程式}$$

と考えると、これは真空中の光線 ( $\omega = ck$ ) に対して正しい結論  $\mathbf{k} = (\text{一定}) \equiv k\mathbf{n}, \mathbf{v} = c\mathbf{n}$  を与える。

波動ベクトル  $k^i$  と粒子の運動量  $p^i$  の類似性は次の事情による。平面波のエネルギー・運動量テンソル (48.15):  $T^{ik} = \frac{Wc^2}{\omega^2} k^i k^k$  によれば、波束 (波動ベクトルの平均値  $k^i$  を持つ、狭い振動数の区間内の単色平面波の重ね合せ) に対する 4 元運動量は

$$\mathbf{P} \propto \mathbf{k}, \quad \mathcal{E} \propto \omega$$

となる。比例定数がスカラーならば、 $k^i$  は運動量  $P^i$  のように変換される。

$\omega = ck$  の光線に対して  $\mathbf{k} \cdot \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} - \omega$  はゼロになるから、これをラグランジアンにとることはできない。これは質量ゼロの粒子に対してラグランジアンを導入できないという事情に似ている。

<p>Fermat の原理</p> $\delta\psi = \delta \int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{l} = 0$ <p>(振動数 <math>\omega</math> が一定の場合)</p>	$\longleftarrow$ (類推)	<p>Mauertuis の原理</p> $\delta S = \delta \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{l} = 0$ <p>(エネルギーが一定の場合).</p>
---	--------------------------	--

### § 53. 式の導出など

■ アイコナル方程式 (53.5) の導出 電磁場成分  $f = ae^{i\psi}$  に対する波動方程式は

$$0 = \partial^i \partial_i f = (\partial^i \partial_i a) e^{i\psi} + 2i(\partial^i a)(\partial_i \psi) e^{i\psi} + if(\partial^i \partial_i) \psi - (\partial^i \psi)(\partial_i \psi) f$$

と書ける [本稿次節で補足]。ここで短波長の極限を考えると  $\psi$  [正確には  $\partial_i \psi$ ] は大きな量なので、最右辺における第 4 項に比べてはじめの 3 つの項を無視することができる。よってアイコナル方程式 (53.5):  $(\partial_i \psi)(\partial^i \psi) = 0$  が得られる。

### § 53 について

■ 「幾何光学は波長の小さな極限  $\lambda \rightarrow 0$  に対応する」(p.146, l.14~15) について 波長が長くなるにつれ、「波の振幅と伝播方向とが、波長程度の領域にわたっては実際上一定である」(p.146, l.4~5) ことが困難となる (厳密な平面波ならばいくらでも波長は長くなり得るけれど)。

■ 「 $\psi$  が大きな量である……。このことは……。明らかである」(p.146 下から 2 行目~p.149, l.1) について  $\lambda \rightarrow 0$  の極限は正確には  $\partial_i \psi$  が大きな量であることに対応すると考えられる。このように訂正しても、 $\partial_i \psi$  が大きな量であることは式 (53.6) からアイコナル方程式が導かれる根拠となる。

もちろんここでの「大きい」とは、興味のある空間スケールを  $a$ 、時間スケールを  $T$  としたとき、 $|\mathbf{k}|a \gg 1, \omega T \gg 1$  という意味である。

■  $\omega$  の式 (53.3) について 正しくは  $\omega = -\partial\psi/\partial t$  と考えられる。直後の式 (53.4):  $k_i = -\partial_i \psi \Leftrightarrow k^i = (-\frac{1}{c}\partial\psi/\partial t, \nabla\psi)$  を式 (48.2):  $k^i = (\omega/c, \mathbf{k})$  と比較しても  $\omega = -\partial\psi/\partial t$  となる。

■アイコナル方程式の導出について アイコナル方程式 (53.5) は波動方程式に基づき、導くことができる (式 (53.6) 参照). これは空間の狭い領域で場を平面波と見なせる場合を考えていることからあらかじめ期待されるように, 平面波に対応する解  $\psi = k_i x^i + \text{const.}$  (ただし  $k_i$  は  $k_i k^i = 0$  を満たす定数ベクトル) を持つ. 教科書ではこれを逆手にとって,  $k_i = \partial_i \psi$  の満たす方程式としてアイコナル方程式 (53.5):  $(\partial_i \psi)(\partial^i \psi) = 0$  を“再導出”していることになり, 図 50 のように見かけ上, 2通りの方法でアイコナル方程式が導かれている.

平面波の解  $\psi = k_i x^i + \text{const.}$  は光線が直線となることを意味する. よって真空中では明らかに Fermat の原理が成り立っている.

波動方程式に基づく導出 (53.6) について 式 (53.6) を確かめるには, Leibniz の公式

$$(uv)^{(n)} = \sum_k {}_n C_k u^{(k)} v^{(n-k)}$$

の  $n = 2$  の場合

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + v''$$

により

$$\begin{aligned} 0 &= \partial^i \partial_i f = \partial^i \partial_i (a e^{i\psi}) = (\partial^i \partial_i a) e^{i\psi} + 2(\partial^i a)(\partial_i e^{i\psi}) + a \partial^i \partial_i e^{i\psi} \\ &= (\partial^i \partial_i a) e^{i\psi} + 2i(\partial^i a)(\partial_i \psi) e^{i\psi} + i f (\partial^i \partial_i \psi) - (\partial^i \psi)(\partial_i \psi) f \quad (i \text{ について和をとらない}) \end{aligned}$$

が成り立つことに注意し, 次いで添字  $i$  について和をとれば良い.

式 (53.6) において結果的に  $\partial_i a$  程度の項が捨てられている. これは振幅が実際上一定であること (p.146, 1.1~1.5) を反映していると見ることができる.

■単色の光に対するアイコナル方程式 角振動数  $\omega$  を持つ単色の電磁波に対して, 電場または磁場の 1 成分のみに注目すると, 場は

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$$

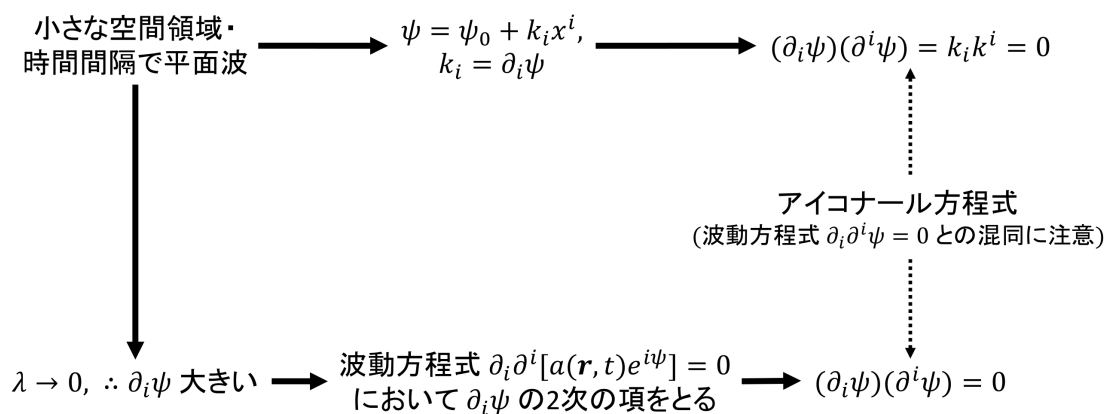


図 50 幾何光学の仮定とアイコナル方程式の導出

という時間依存性を持つ。ここで——教科書の範囲を超えるけれど——媒質中の光の伝播を想定して各位置での媒質の屈折率を  $n(\mathbf{r})$  とすると、光の位相速度は  $u(\mathbf{r}) = c/n(\mathbf{r})$  であり、場  $\Psi$  に対する波動方程式

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \Psi = 0$$

は  $\psi$  に対する Helmholtz 方程式

$$\nabla^2 \psi + \left(\frac{\omega}{u}\right)^2 \psi = 0$$

を意味する。ところで一般に任意の複素数  $\psi(\mathbf{r})$  は、絶対値  $a(\mathbf{r})$  と位相  $\phi(\mathbf{r})$  を用いて

$$\psi(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r})e^{i\phi(\mathbf{r})}$$

と表され、このとき上の Helmholtz 方程式から

$$\nabla^2 a - a\{(\nabla\phi)^2 - (\omega/c)^2\} + ia\nabla^2\phi + 2i(\nabla a) \cdot (\nabla\phi) = 0 \quad (58)$$

が得られる。ここまでは波動光学において常に成り立つ関係である。

上式 (58) の確認

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= \partial_k \partial_k (ae^{i\phi}) = \partial_k \{(\partial_k a + ia\partial_k \phi)e^{i\phi}\} \\ &= \{\partial_k \partial_k a + i(\partial_k a)(\partial_k \phi) + ia\partial_k \partial_k \phi + (\partial_k a + ia\partial_k \phi)i\partial_k \phi\}e^{i\phi} \\ &= \{\nabla^2 a + 2i(\nabla a) \cdot (\nabla \phi) + ia\nabla^2 - a(\nabla \phi)^2\}e^{i\phi} \end{aligned}$$

による。

ここからは幾何光学の極限を考える。繰り返しになるが、もし空間の小さい領域では電磁波を平面波と見なすことができれば、波面に垂直な波の伝播方向を考えることができ、光線を導入することができる。そのためには波の振幅と伝播方向とが、波長程度の距離にわたっては実際上一定であることが必要である。逆に言えば、この意味で幾何光学は波長の短い極限  $\lambda \rightarrow 0$  における近似的な取り扱いであることになる。実際、小さい空間領域では

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}_0) + \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad \mathbf{k} = \nabla\phi$$

と近似できる。そこでこの式によって  $\phi = \text{const.}$  の同位相面 (波面) に垂直な波数ベクトル  $\mathbf{k}$  を導入し、またここから波長  $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$  を定義すると、この  $\lambda$  が考えている空間スケール——スリットの幅や屈折率  $n(\mathbf{r})$  が大きく変化する距離——に比べて十分小さければ良い。さらに波長程度の距離にわたって振幅が大きく変化しないという仮定  $\lambda^2 |\nabla^2 a| \ll |a|$  により、上式 (58) の実部をとると近似的に

$$(\nabla\phi)^2 = \left(\frac{\omega}{u}\right)^2 \quad (59)$$

が得られる。これもアイコナル方程式と呼ばれる [17, pp.370–371].

真空中では上式 (59) は式 (53.11):  $(\text{grad}\psi_0)^2 = \omega^2/c^2$  に帰着する。

■Hamilton 方程式 (p.148, l.11) について Hamilton 方程式が成り立つのは、相対性理論でもラグランジアン の Legendre 変換によってハミルトニアンが定義され、また Lagrange 方程式が成り立つことに変わりないため。実際ハミルトニアン (16.8) に対して Hamilton 方程式が正しい結論を与えることを以下のようにして確かめられる。正準運動量  $\mathbf{P}$  を用いて Hamilton 方程式の 1 つ  $\dot{x}_\alpha = \partial\mathcal{H}/\partial P_\alpha$  (ドットは座標時間  $t$  による微分) は

$$\dot{x}_\alpha = \frac{c^2 (P_\alpha - \frac{e}{c} A_\alpha)}{2\sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A})^2}} = \frac{p_\alpha/m}{\sqrt{1 + \mathbf{u}^2}}$$

となる ( $\mathbf{u} \equiv (u^1, u^2, u^3)$ ,  $u^\alpha \equiv \frac{1}{c} \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ ). 非相対論的力学で対応する式は運動量の定義にすぎなかったように, これは 4 元運動量 (の空間成分) の定義にすぎない. このことは粒子の速度と 4 元速度 (の空間成分) の関係が次のように書き換えられることから分かる.

$$\frac{\mathbf{u}^2}{1 + \mathbf{u}^2} = \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} \quad \text{かつ} \quad \mathbf{u} \parallel \mathbf{v}, \quad \therefore \frac{u_\alpha}{\sqrt{1 + \mathbf{u}^2}} = \frac{v_\alpha}{c}.$$

$\mathbf{u}^2 \rightarrow \infty$  となり得るから  $1/\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$  でなく  $1/\sqrt{1 + \mathbf{u}^2}$  が現れるのはむしろ好ましい. 次にもう一方の Hamilton 方程式  $-\dot{P}_\alpha = \partial \mathcal{H} / \partial x_\alpha$  を書き下す. この際  $\sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A})^2}$  は力学的運動量だけの関数であって正準運動量だけの関数ではないので, 位置で微分すると消えると考えてはいけない. この項の微分を処理するのに上式が有用である.

$$\begin{aligned} -\dot{P}_\alpha &= -\dot{p}_\alpha - \frac{e}{c} \partial_t A_\alpha - \frac{e}{c} \dot{x}_\beta \partial_\beta A_\alpha, \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_\alpha} &= \frac{c^2 (-\frac{e}{c} \partial_\alpha A_\beta) (P_\beta - \frac{e}{c} A_\beta)}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A})^2}} + e \partial_\alpha \phi = \left( -\frac{e}{c} \partial_\alpha A_\beta \right) \times c \frac{u_\beta}{\sqrt{1 + \mathbf{u}^2}} + e \partial_\alpha \phi = -\frac{e}{c} v_\beta \partial_\alpha A_\beta + e \partial_\alpha \phi, \\ \therefore \dot{p}_\alpha &= e \left( -\partial_\alpha \phi - \frac{e}{c} \partial_t A_\alpha \right) + \frac{e}{c} v_\beta (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)_\alpha. \end{aligned}$$

■Maupertuis の原理 (p.149, l.17) について  $\partial S \rightarrow \delta S$  と訂正する. 『力学』 § 44 参照 [3, pp.178–180].

■Fermat の原理 (53.12) について あくまでこれは Maupertuis の原理からの類推として導かれているが, 以下のように波動光学に基づき厳密に証明することも可能である [17, pp.372–373].

アイコナル方程式 (59) は空間変数を

$$(d\xi, d\eta, d\zeta) = \frac{\omega}{u(\mathbf{r})} (dx, dy, dz)$$

とリスケールすると,

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right)^2 = 1$$

となる\*38. この方程式は

$$\phi = \alpha \xi + \beta \eta + \gamma \zeta \quad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1)$$

という形の解を持ち, これは  $\phi$  を一定とおくと,  $(\xi, \eta, \zeta)$  空間において一定値  $\phi$  に応じて得られる互いに平行な一連の平面群を表す. しかるに  $\phi$  が一定の面は波面を表し, それに垂直な方向が波の伝播方向を与えるから,  $(\xi, \eta, \zeta)$  空間における光線は直線となる.

直線は 2 点 P, Q を結ぶ径路の長さ

$$\int_P^Q d\sigma \quad (d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2})$$

が極値 (停留値) をとる曲線として与えられる.  $(\xi, \eta, \zeta)$  空間の長さは対応する実空間の長さ

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

\*38 変数  $(\xi, \eta, \zeta)$  は無次元である.

と  $d\sigma = \frac{\omega}{u(\mathbf{r})} dl$  で関係付けられているので、長さ  $\int_P^Q d\sigma$  は定数係数  $\omega$  の違いを除けば、光が実空間において軌道をたどるのに要する時間

$$\int_P^Q \frac{dl}{u(\mathbf{r})}$$

になっている。よって光は与えられた 2 点を結ぶ径路のうち、所要時間が最小となる径路を通る。これは Fermat の原理に他ならない。こうして Fermat の原理は「原理」の地位を剥奪される。

## § 54. 光の強度

光線自身は各点で光の伝播方向を与えるだけである。そこで § 54 では光の強度の空間的な分布を考える。これについて考察を補いつつまとめよう。以下では光線を直線によって近似できるような短い距離を考える。図 51 のように光線 AB 上の点 O において光線を切る波面を考えると、点 O における主曲率半径  $R_1, R_2$  が定まる。対応する曲率中心  $O_1, O_2$  は波面上の線素 ac, bd を主曲率円に持つ中心であり、それ故  $\vec{O_1O}, \vec{O_2O}$  は点 O において波面と直交するから、曲率中心  $O_1, O_2$  は光線 AB 上にある。また波面上の線素 ac, bd は円弧によって近似されるので、 $\vec{O_1a}, \vec{O_1c}, \vec{O_2b}, \vec{O_2d}$  は波面に直交し、光線を表すことになる。そこで光線を延長し、半直線  $O_1a, O_1c$  上に  $O_1$  から等距離  $R'_1$  にある 2 点  $a'c'$  を、円弧  $a'c'$  が AB 上の点  $O'$  を通るようにとり、半直線  $O_2b, O_2d$  上に  $O_2$  から等距離  $R'_2$  にある 2 点  $b'd'$  を、円弧  $b'd'$  がやはり AB 上の点  $O'$  を通るようにとる。このとき弧  $a'c'$ 、弧  $b'd'$  は光線に直交するから波面上にあり、その作り方から点  $O'$  における曲率中心は元の波面と共通の  $O_1, O_2$  になる。

よって与えられた微小な中心角  $aO_1c, bO_2d$  を成す光線によって限られる波面の面積は、光線に沿って進むにつれて  $R_1R_2$  に比例して変化する。故に強度 (単位面積当たりのエネルギーの流れ) は

$$I = \frac{\text{const}}{R_1R_2}$$

であり、これは場の絶対値の 2 乗によって決まるから、場自体の光線に沿っての変化は

$$f = \frac{\text{const}}{\sqrt{R_1R_2}} e^{ikR_1} = \frac{\text{const}}{\sqrt{R_1R_2}} e^{ikR_2} \quad (60)$$

と書ける (第 2 の等号は曲率中心の間の距離  $R_1 - R_2$  が定数だから)。これは光線上の異なる点 (例えば O と  $O'$ ) での場の強度の比較に用いられるものであり、1 つの波面上での異なった点における強度の比較には用いることができない。

一本の光線 AB について、A から B に向かって光が進むとき、 $R_1 = 0, R_2 = 0$  となる曲率中心  $O_1, O_2$  で強度は無限大になる。このような点のすべての光線に関する集合は一般に 2 つの面を形成する。そのような面を火面と呼ぶ。光が B から A に向かって進み、曲率中心が光線を発する光学系よりも手前にくる場合には、曲率中心の集合として定義される面を虚火面という。

火面上で強度が無限大になることは、確かに実際、火面上では強度が大きくなるけれど、火面の近くでは幾何光学の近似を適用できないことを意味する。このことに関連して、場の式 (60) は火面を含まない部分でしか適用できず、光線が火面を通過するときには場の位相は  $\pi/2$  だけ減少することを § 59 において示す。

## § 54 について

■球面波に対する式 (54.3) について 式 (54.3) を得るまでの議論をまとめると、波面の面積は  $R^2$  に比例して広がるため、波面上で場の持つエネルギーが一定であることを要求すると、単位面積当たりのエネルギーは

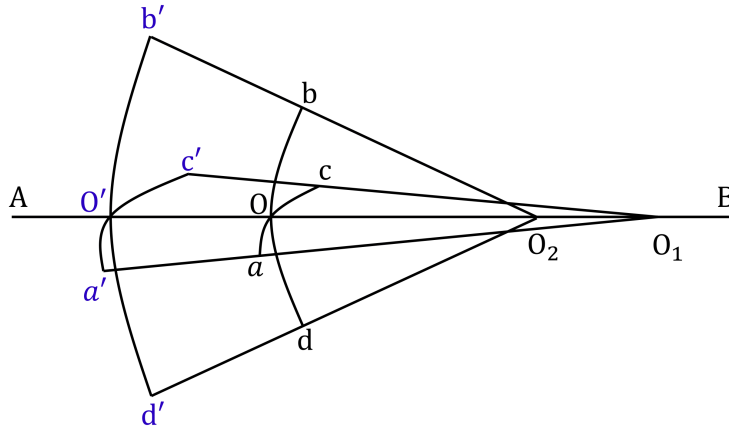


図 51 1本の光線に沿う波面の面積変化 (教科書の図 7(p.150) を改変)

$1/R^2$  に従って薄まり、場の振幅は  $1/R$  の距離依存性を持つことになる。逆に後で見える波動方程式の球面波解 (62.7):  $\phi = \frac{\chi(t \mp R/c)}{R}$  はエネルギー保存則の要請を満たしている。

## § 55. 角アイコナール

光線が任意の透明物体 (光学系と呼ぶ) を通り抜ける場合にも、物体の内部を伝播している光線に対して幾何光学を適用できるということを仮定するだけで、光線の変化に関しては一般的な法則を導くことができる。

決まった振動数  $\omega$  を持つ光のアイコナール  $\psi = -\omega t + \psi_0(\mathbf{r})$  に対してアイコナール方程式は  $(\nabla\psi_0)^2 = \omega^2/c^2$  を与える (§ 53)。よって  $\frac{\psi_0}{\omega/c} \rightarrow \psi$  とアイコナールを再定義すると

$$(\nabla\psi)^2 = 1$$

となる。

次に 2 点  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  を通る光線を考え (図 52 参照)、光線上の点  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  の位相差 (光学距離と呼ぶ [上記のスケール変換により長さの次元を持つ]) として  $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  を導入すると、これも上式と同じ関係を満たさなければならないことから、

$$(\nabla\psi)^2 = 1, \quad (\nabla'\psi)^2 = 1$$

となる ( $\nabla \equiv \partial/\partial\mathbf{r}, \nabla' \equiv \partial/\partial\mathbf{r}'$ )。よって 2 点  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  における光線方向のベクトル  $\mathbf{n} = -\nabla\psi$  [負号の理由は本稿次節],  $\mathbf{n}' = \nabla'\psi$  は単位ベクトルである。

4 つのベクトル  $\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{n}, \mathbf{n}'$  の関係を得るために、 $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{r}'$  の関数  $\psi$  に対する Legendre 変換

$$\chi = \mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}' - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - \psi$$

により  $\mathbf{n}$  と  $\mathbf{n}'$  の関数  $\chi$  を導入する。関数  $\chi(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$  は角アイコナールと呼ばれる。すると

$$\begin{aligned} d\psi &= -\mathbf{n} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{n}' \cdot d\mathbf{r}', & \text{関数 } \psi \text{ に対する付加条件 } & (\nabla\psi)^2 = (\nabla'\psi)^2 = 1 \\ \Rightarrow d\chi &= -\mathbf{r} \cdot d\mathbf{n} + \mathbf{r}' \cdot d\mathbf{n}', & \text{独立変数 } \mathbf{n}, \mathbf{n}' \text{ に対する条件 } & \mathbf{n}^2 = \mathbf{n}'^2 = 1 \end{aligned} \quad (55.5)$$

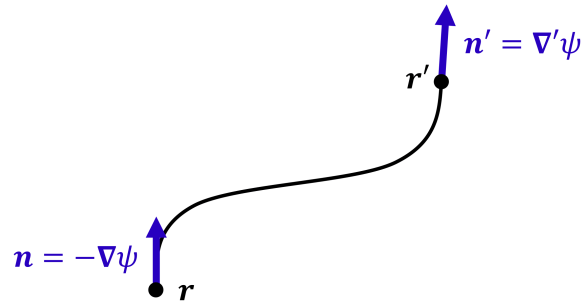


図 52 2点  $r, r'$  を通る光線

となる。いまや条件  $n^2 = n'^2 = 1$  は  $n, n'$  の独立な成分がそれぞれ 2 つであることを表しているにすぎず、関数  $\chi$  には付加条件が課せられない。そこで独立変数を  $n_y, n_z$  および  $n'_y, n'_z$  に選べば、上式 (55.5) は求める  $r, r', n, n'$  の間の関係

$$y - \frac{n_y}{n_x}x = \frac{\partial\chi}{\partial n_y}, \quad z - \frac{n_z}{n_x}x = \frac{\partial\chi}{\partial n_z} \quad (55.6a)$$

$$y' - \frac{n'_y}{n'_x}x' = \frac{\partial\chi}{\partial n'_y}, \quad z' - \frac{n'_z}{n'_x}x' = \frac{\partial\chi}{\partial n'_z} \quad (55.6b)$$

を与える (導出は下記)。与えられた  $n, n'$  に対して式 (55.6a) は光学系を通り抜ける前の、式 (55.6b) は光学系を通り抜けた後の光線を表す。

### § 55, 式の導出など

#### ■式 (55.6ab) の導出

$$n_x = \sqrt{1 - n_y^2 - n_z^2}, \quad n'_x = \sqrt{1 - n'_y{}^2 - n'_z{}^2}$$

を式 (55.5):

$$d\chi = -x dn_x - y dn_y - z dn_z + x' dn'_x + y' dn'_y + z' dn'_z$$

に代入すると,

$$d\chi = -\left(y - \frac{n_y}{n_x}x\right) dn_y - \left(z - \frac{n_z}{n_x}x\right) dn_z + \left(y' - \frac{n'_y}{n'_x}x'\right) dn'_y + \left(z' - \frac{n'_z}{n'_x}x'\right) dn'_z \quad (61)$$

となることによる [本稿次節で補足].

### § 55 について

■「 $n = -\partial\psi/\partial r$ 」(p.152 一番下) の負号について 位置  $r$  を  $n$  方向に移動すると、2点  $r, r'$  間の光学距離  $\psi$  は減少することによる。あるいは

$$\psi(r, r') = \psi(r') - \psi(r) \Rightarrow n = \frac{\partial\psi(r)}{\partial r} = -\frac{\partial\psi(r, r')}{\partial r}.$$



■ $d\chi$  の式 (p.153 下から 4 行目, 本稿の式 (61)) について  $n_y, n_z$  の変化  $dn_y, dn_z$  に伴う  $n_x$  の変化は

$$dn_x = d\sqrt{1 - n_y^2 - n_z^2} = -\frac{n_y dn_y + n_z dn_z}{\sqrt{1 - n_y^2 - n_z^2}} = -\frac{n_y dn_y + n_z dn_z}{n_x}$$

である ( $n^2 = 1$  の両辺を微分しても良い).

## § 56. 細い光線束

1 つの同じ点を通る光線束は共心であると言われる. 共心光線束は光学系を通過した後では一般に共心でなくなる (再び 1 点に集まることはない). しかしある直線 (光軸と呼ぶ) の近くを進むような十分細い (すなわち開きの角度が小さい) 共心光線束は, 近似的に共心光束へ移る.

軸対称な光学系を考える. このとき対称軸は光軸であることが分かる:

光学系が軸対称  $\rightarrow$  対称軸に沿って進む光線束の波面が軸対称  
 $\rightarrow$  波面の主曲率半径  $R_1 = R_2 \rightarrow$  曲率中心  $O_1 = O_2$ : 共心  $\rightarrow$  対称軸は光軸.

光軸を  $x$  軸に選ぶと

$$n_x \simeq 1, \quad n'_x \simeq \begin{cases} +1 & (\text{レンズに対して}) \\ -1 & (\text{鏡に対して}) \end{cases}$$

であり,  $n_y, n_z, n'_y, n'_z$  の大きさは 1 に比べて小さい. 角アイコナルの  $n_y, n_z, n'_y, n'_z$  による展開は, 2 次の項までとると, 光軸周りの回転に対して不変な形

$$\chi = \text{const} + \frac{g}{2}(n_y^2 + n_z^2) + f(n_y n'_y + n_z n'_z) + \frac{h}{2}(n'_y{}^2 + n'_z{}^2)$$

を持つ\*39. このとき角アイコナルに対する式は

$$\text{式 (55.6a)} \Rightarrow n_y(x - g) - f n'_y = y, \quad (62)$$

$$n_z(x - g) - f n'_z = z, \quad (63)$$

$$\text{式 (55.6b)} \Rightarrow f n_y + n'_y(x' + h) = y', \quad (64)$$

$$f n_z + n'_z(x' + h) = z' \quad (65)$$

となる. これら 4 つの式が独立であれば 4 変数  $n_y, n_z, n'_y, n'_z$  が 1 通りに決まるため, 始点と終点を結ぶ光線は 1 本しか得られない. よって光線の始点  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  を共心光線束の発せられた点, 終点  $\mathbf{r}' = (x', y', z')$  をすべての光線の交わる点にとったとき, これらを結ぶ光線束が得られるためには,  $n_y, n'_y$  に対する式 (62) の両辺を定数倍して式 (64) が,  $n_z, n'_z$  に対する式 (63) の両辺を定数倍して式 (65) が得られれば良い. すなわち

$$\frac{x - g}{f} = -\frac{f}{x' + h} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}, \quad \therefore (x - g)(x' + h) = -f^2. \quad (56.3-4)$$

これは像と物体の座標が満たさなければならない関係であり,

$$\begin{array}{ll} \text{像の位置 } x' = -h \text{ (主焦点)} & \Rightarrow \text{光源の位置は } |x| = \infty \text{ (平行光線),} \\ \text{光源の位置 } x = g \text{ (主焦点)} & \Rightarrow \text{像の位置は } |x'| = \infty \text{ (平行光線).} \end{array}$$

\*39  $n_y, n_z$  に比例する 1 次の項は不可能であり, 可能な 2 次の項はスカラー積  $n^2, n'^2, \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'$  だから.

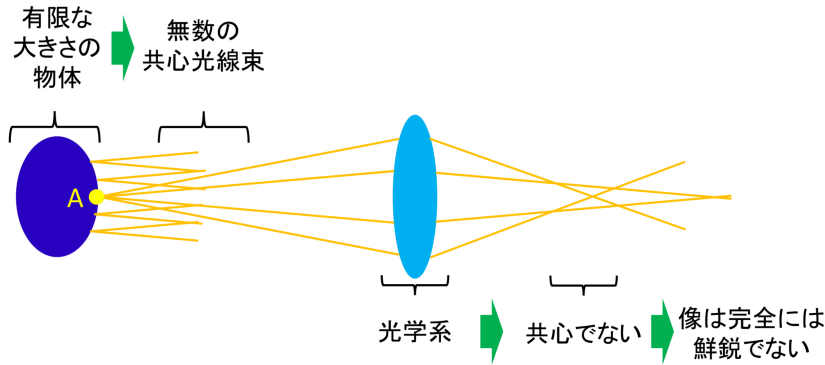


図 53 拡がりのある物体の像

主焦点の位置を原点とした物体と像の座標  $X = x - g, X' = x' + h$  を用いると、式 (56.3-4) は

$$XX' = -f^2, \quad \frac{Y'}{Y} = \frac{Z'}{Z} = \frac{f}{X} = -\frac{X'}{f}$$

となる (ただし  $Y = y, \text{etc.}$ ). ここから縦倍率, すなわち物体の要素  $dX$  と対応する像の要素  $dX'$  の比は

$$\left| \frac{dX'}{dX} \right| = \frac{f^2}{X^2} = \left( \frac{Y'}{Y} \right)^2 \quad (56.7)$$

となり, 横倍率  $Y'/Y$  に一致しない ( $\rightarrow$  幾何学的に相似な像は得られない).

2点  $X = f, X' = -f$  を主点と呼ぶ. 上式より  $X = f \Leftrightarrow X' = -f$  なので, 一方の主点から発した光線束は他方の主点に再び収束する.

さらに主点から計った物体と像の座標  $\xi = X - f, \xi' = X' + f$  を導入すると, 上式  $XX' = -f^2$  は

$$\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi'} = -\frac{1}{f} \quad (56.8)$$

と書き換えられる [本稿次節で補足].

$f, g, h$  が無限大であり, 物体と像は光学系から有限の距離にとどまる場合を考える. この極限は上式 (56.8) に含まれないので, 式 (56.4) に戻って改めて考えると,

$$X' = \alpha^2 X, \quad Y' = \pm \alpha Y, \quad Z' = \pm \alpha Z \quad (56.9)$$

のように縦および横倍率は一定となる (望遠鏡的) [本稿次節で補足].

以上の式は座標を適当に定義すれば, 鏡や軸対称でない光学系に対しても同様に適用できる.

## § 56 について

■ 「……拡がりのある物体の像は近似的で, 完全には鮮鋭でない」 (§ 56, l.11,12) について 図 53 の点 A の像はどこにスクリーンを置いても広がりを持つ. これは像がぼやけることに他ならない.

■ 「そのような光線でさえ……ことをみた」 (p.154 下から 5 行目) について p.150 の図 7 における A から B に進む光線束について,  $aO_1, cO_1$  および  $bO_2, dO_2$  はそれぞれ光線であり, 異なる点  $O_1, O_2$  で交わる.

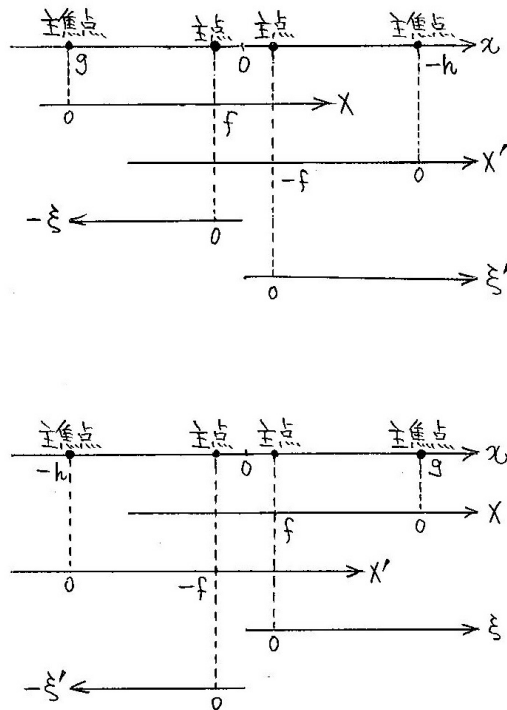


図 54 主焦点, 主点から計った物体と像の座標. 上段は  $f > 0$  ( $g, h < 0$ ), 下段は  $f < 0$  ( $g, h > 0$ ) の場合.

■式 (56.8) について  $f < 0$  の場合には図 54 下段と,  $f > 0$  の場合にはこれを

$$\frac{1}{-\xi} + \frac{1}{\xi'} = \frac{1}{f}$$

と書き換えて図 54 上段と見比べると, これがいわゆるレンズの公式と同じ形になっていることが分かる.

- ただし右辺の  $f$  は主焦点ではなく主点の座標である.
- レンズの公式は具体的なレンズの材質と形状が与えられれば, その界面での屈折に Snell の法則を適用して導くことができる. 一方, 式 (56.8) は光学系の軸対称性のみを仮定しており, その詳細に依らずに導かれていることに注意する.
  - Snell の法則は Fermat の原理 (§ 53) から導かれる.
  - 波動論における Huygens の原理に立ち戻って導くこともできる.

■  $f, g, h$  が無限大の極限の式 (p.157, l.20), 式 (56.9) について 式 (56.4) より

$$x' = -\frac{f^2}{x-g} - h = \frac{f^2}{g} \frac{1}{1-x/g} - h \simeq \frac{f^2}{g} \left(1 + \frac{x}{g}\right) - h = \frac{f^2}{g^2}x + \frac{f^2 - gh}{g}$$

となるので,  $x$  の係数は  $f^2/g^2$  になると考えられる. これを  $\alpha^2$  と置く場合,  $\alpha = \pm f/g$  である. (この  $\alpha$  に対して原点を改めれば  $X' = \alpha^2 X$  であり, これを一般公式 (56.7) に代入すると式 (56.9) の残りの 2 式  $Y' = \pm \alpha Y, Z' = \pm \alpha Z$  が得られる.)

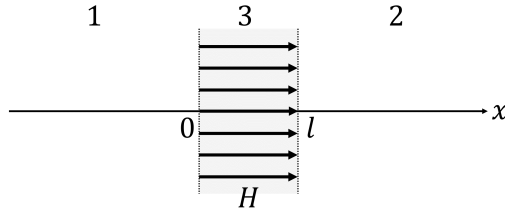


図 55 磁気レンズ (§ 58 問題 2)

§ 58, 問題

2 (磁気レンズ)  $x$  軸上の位置  $x = x_1 < 0$  を発した荷電粒子は,  $x$  方向の一様な磁場領域に突入するとらせん運動を行い, 磁場がゼロの領域  $x > l$  に放出される (図 55). この粒子が再び  $x$  軸上の位置  $x_2 (> l)$  に戻るものと仮定して,  $x_1$  と  $x_2$  を関係付ける磁気レンズの公式を求めよ<sup>\*40</sup>.

系の  $x$  軸周りの対称性を考慮して, 円筒座標  $(r, \varphi, x)$  を導入する ( $r$  は  $x$  軸からの距離). 磁場中では粒子のエネルギー  $\mathcal{E}$  が保存し, 作用は  $S = S_0(x, r) - \mathcal{E}t$  と変数分離される. Hamilton-Jacobi 方程式は

$$m^2 c^2 = \left( P^i - \frac{e}{c} A^i \right) \left( P_i - \frac{e}{c} A_i \right) = \left( \frac{\mathcal{E}}{c} \right)^2 - \left( \nabla S_0 - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2, \quad \therefore \left( \nabla S_0 - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 = \left( \frac{\mathcal{E}}{c} \right)^2 - m^2 c^2 \equiv p^2$$

と書ける. ここで

$$\nabla S_0 = \frac{\partial S_0}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial S_0}{\partial r} \hat{r}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{H} \times \mathbf{r} = \frac{1}{2} H r \hat{\varphi}$$

とすると ( $\hat{x}$ , etc. は方向単位ベクトル, 位置ベクトル  $\mathbf{r}$  と円筒座標  $r$  の混同に注意),

$$\left( \frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S_0}{\partial r} \right)^2 + \frac{e^2}{4c^2} H^2 r^2 = p^2 \quad (66)$$

を得る.

さて, 光軸 ( $x$  軸) の近くを進む粒子ビームを考え, 簡約された作用  $S_0$  を  $r$  の 2 次までの近似で求める. 明らかに粒子の  $x$  軸上 ( $r = 0$ ) の等速直線運動が実現可能であり, 対応する作用は

$$S_0(x, r = 0) = px$$

である. そこで Hamilton-Jacobi 方程式 (66) に  $r = 0$  を代入して  $\frac{\partial S_0}{\partial x} = p$  とおくと,  $r$  の 1 次項の係数は

$$\left( \frac{\partial S_0}{\partial r} \right)_{r=0} = 0$$

と定まる. よって  $r$  の 2 次近似の一般的な形は

$$S_0 = px + \frac{1}{2} \sigma(x) r^2$$

であり, 再びこれを式 (66) に代入して  $r = 0$  とおくと,  $\sigma(x)$  に対する変数分離形の微分方程式

$$p \frac{d\sigma}{dx} + \sigma^2 + \frac{e^2}{4c^2} H^2 = 0$$

<sup>\*40</sup> 文献 [8, p.585, pp.613–614] では幅  $l$  がらせんのピッチに満たない薄い磁気レンズに対して解析を行っている.

が得られる.

領域 1 ( $x < 0$ ) の解は,  $H = 0$  より

$$\sigma^{(1)} = \frac{p}{x - x_1}$$

と書ける. これを  $x = x_1$  から発射された運動量  $p$  の自由粒子の作用

$$S_0 = p\sqrt{r^2 + (x - x_1)^2} \simeq p(x - x_1) + \frac{pr^2}{2(x - x_1)}$$

と比較すると,  $\sigma^{(1)}$  の積分定数  $x_1$  は光軸上の粒子の出発点を表すことが分かる. 同様に  $x_2$  に結像するビームを想定すると, 領域 2 ( $x > l$ ) の解は

$$\sigma^{(2)} = \frac{p}{x - x_2}$$

と書かれる.

磁場  $H \neq 0$  の領域 3 ( $0 < x < l$ ) での積分

$$\int^{\sigma^{(3)}} \frac{d\sigma}{\sigma^2 + \frac{e^2}{4c^2} H^2} = -\frac{x}{p} + \text{const}$$

は,  $\sigma = \frac{eH}{2c} \cot \theta$  と変数変換すれば教科書のように実行できる. 代わりに  $\sigma = \frac{eH}{2c} \tan \theta$  と置換しても害はない ( $\sigma$  の定義域は制限されないから). このとき

$$\frac{2c}{eH} \theta = -\frac{x}{p} + \text{const}, \quad \therefore \sigma^{(3)} = \frac{eH}{2c} \tan \left( -\frac{eH}{2cp} x + C \right)$$

となる ( $C$  は積分定数). 境界  $x = 0, l$  で  $\sigma$  が連続となることを要求すると

$$-\frac{p}{x_1} = \frac{eH}{2c} \tan C, \quad \frac{p}{l - x_2} = \frac{eH}{2c} \tan \left( -\frac{eH}{2cp} l + C \right)$$

であり, ここから  $C$  を消去すると,  $x_1$  と  $x_2$  の関係が求まる. 具体的には

$$\begin{aligned} \frac{p}{l - x_2} &= \frac{eH}{2c} \frac{\tan C - \left( \tan \frac{eHl}{2cp} \right)}{1 + \left( \tan \frac{eHl}{2cp} \right) \tan C} = \frac{eH}{2c} \frac{p + \frac{eH}{2c} \left( \tan \frac{eHl}{2cp} \right) x_1}{p \left( \tan \frac{eHl}{2cp} \right) - \frac{eH}{2c} x_1}, \\ \therefore \frac{eH}{2c} \left( \tan \frac{eHl}{2cp} \right) x_1 x_2 - \left\{ \frac{eHl}{2c} \left( \tan \frac{eHl}{2cp} \right) + p \right\} x_1 + p x_2 + \left\{ \frac{2cp^2}{eH} \left( \tan \frac{eHl}{2cp} \right) - lp \right\} &= 0 \end{aligned}$$

とすれば良い. これは一般公式 (56.4):

$$(x_1 - g)(x_2 + h) = -f^2$$

と同じ形をしており, 係数を比較すると

$$\begin{aligned} g &= -\frac{2cp}{eH} \cot \left( \frac{eHl}{2cp} \right), \quad h = -\frac{2cp}{eH} \cot \left( \frac{eHl}{2cp} \right) - l = g - l, \\ f^2 - gh &= \left( \frac{2cp}{eH} \right)^2 - \frac{2cp}{eH} l \cot \left( \frac{eHl}{2cp} \right), \\ \therefore f^2 &= \left( \frac{2cp}{eH} \right)^2 \left\{ 1 + \cot^2 \left( \frac{eHl}{2cp} \right) \right\} = \left\{ \frac{2cp}{eH \sin \left( \frac{eHl}{2cp} \right)} \right\}^2 \end{aligned}$$

と同定される ( $g$  は教科書と逆符号<sup>\*41</sup>).

<sup>\*41</sup> このとき  $g, h < 0$  であり, 図 54 の状況を得るには  $f > 0$  とすれば良い (p.160 脚注も参照).

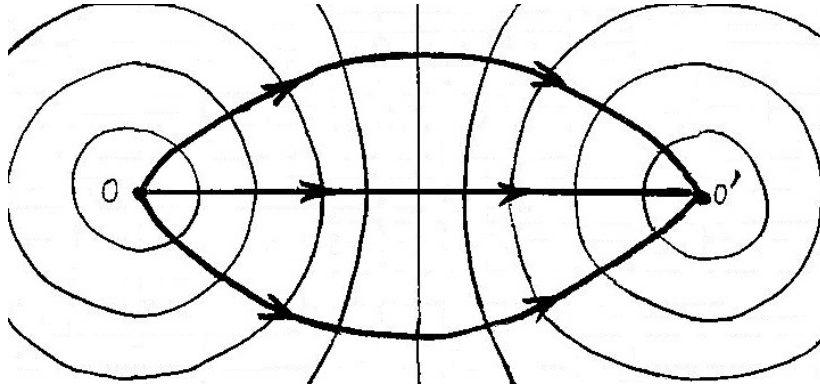


図 56 点 O から点 O' に至る各光線と、その位相変化

### § 57. 広い光線束による結像

広い光線束によって小さな直線の切片の像が結ばれるための条件を考える。

まず、次のことに注目する。点 O から発した光線がすべて光学系を通過した後点 O' で結ばれるとすると、波面は点 O, O' の近くではこれらを中心とする球面であり、波面は位相が一定の面だから、図 56 のように位相の変化 (光学距離)  $\psi$  はすべての光線について等しくなる。

次に切片に沿って座標  $\xi$  を導入し、切片の像 (これも切片) 上に座標  $\xi'$  を、点  $\xi$  から発せられた光の像の位置として導入する。このとき出発点の変化  $d\xi$  に伴う光学距離の変化は

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial\psi}{\partial\xi'}d\xi' = -n_\xi d\xi + n'_\xi d\xi' = (\alpha_\xi n'_\xi - n_\xi)d\xi$$

と書ける。ここに  $\alpha_\xi \equiv d\xi'/d\xi$  は倍率であり、小さな切片に沿って一定と見なされる。[一方、例えば  $\partial\psi/\partial\xi$  は方向微分であり、よく知られているように  $\xi$  方向の単位ベクトルを  $\hat{\xi}$  と書くと

$$(\nabla\psi) \cdot \hat{\xi} = -\mathbf{n} \cdot \hat{\xi} \equiv -n_\xi$$

と書けるので (このとき  $n_\xi \equiv \mathbf{n} \cdot \hat{\xi}$  は光線の方向  $\mathbf{n}$  と  $\xi$  軸の間の角の余弦である)、最右辺の  $\alpha_\xi n'_\xi - n_\xi$  は点  $\xi + d\xi$  から点  $\xi' + d\xi'$  に向かう光線ごとに定まる量となる。] よって点  $\xi + d\xi$  から点  $\xi' + d\xi'$  に向かう各光線に対して光学距離  $\psi + d\psi$  が同じでなければならないことから、条件

$$\alpha_\xi n'_\xi - n_\xi = \text{const.} \tag{57.1}$$

を得る。

ここで  $x$  軸対称な光学系による結像を考える。物体および像のある点で光線が光軸との間に張る角度をそれぞれ  $\theta, \theta'$  と書くと、上の結像の条件は

- 光軸上の線分に対して (対称性より像も光軸上)

$$\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta'}{2}} = \text{const} = \sqrt{\alpha_x} \tag{57.2}$$

- 光軸に垂直な線分 (その方向を  $r$  と書く) に対して (対称性より像も光軸に垂直)

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \text{const} = \alpha_r \quad (57.3)$$

となる (導出は下記). 2つの条件は両立しないから, 広い光線束を使って3次元的な物体の像を結ばせることは, 小さな体積に対してさえ不可能である.

## § 57, 式の導出など

■式 (57.2) の導出 本稿次節で補足する式  $\frac{1-n_x}{1-n'_x} = \alpha_x$  に

$$1 - n_x = 1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad 1 - n'_x = 2 \sin^2 \frac{\theta'}{2}$$

を代入すれば良い.

■式 (57.3) の導出 式 (57.1) は

$$\alpha_r \sin \theta' - \sin \theta = \text{const.}$$

となる [本稿次節で補足]. 光軸と物体面の交点から  $\theta = 0$  の方向に発する光に対しては, 対称性から  $\theta' = 0$  でなければならない. そこでこの光線に対して上式の値を評価すると,  $\text{const} = 0$  となるから, 式 (57.3) を得る.

## § 57 について

■結像の条件 (57.2), (57.3) について まず式 (57.2) について, 線分の方方向単位ベクトル  $\hat{\xi}$  は  $x$  軸に沿っているから, 任意の光線方向  $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$  に対して

$$n_\xi \equiv \mathbf{n} \cdot \hat{\xi} = n_x, \text{ etc.} \quad \therefore \alpha_x n'_\xi - n_\xi = \alpha_x n'_x - n_x$$

である. これが全ての光線に対して等しい値をとらねばならず (式 (57.1)), 特に  $x$  軸に沿う光線 ( $n_x = 1, n'_x = 1$ ) に対して

$$\alpha_x n'_x - n_x = \alpha_x - 1$$

だから

$$\frac{1 - n_x}{1 - n'_x} = \alpha_x$$

を得る.

式 (57.3) についても同様に考えれば良い. この場合には線分の方方向単位ベクトル  $\hat{\xi}$  は  $x$  軸に垂直なので,  $n_\xi \equiv \mathbf{n} \cdot \hat{\xi} = \sin \theta, \text{ etc.}$  となる.

## § 58. 幾何光学の限界

平均振動数  $\omega_0$  を持つ, 厳密には単色でない波を考え, 与えられた点での場 (例えば電場) を  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega_0 t}$  という形に書こう. すると場の振動数  $\omega$  の Fourier 成分

$$\mathbf{E}_\omega = \int \mathbf{E}(t)e^{i\omega t} dt = \int \mathbf{E}_0(t)e^{i(\omega - \omega_0)t} dt$$

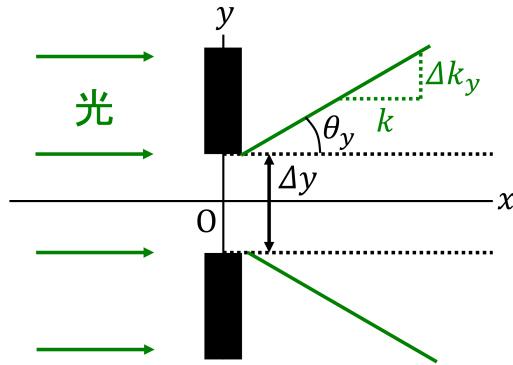


図 57 有限幅  $\Delta y$  を持つ光のビームの回折

は,  $1/|\omega - \omega_0|$  程度の時間のうちに  $\mathbf{E}_0(t)$  がほとんど変化しなければ, 打ち消しあってゼロに近づく. よって  $\mathbf{E}_\omega$  がゼロとかなり異なる値をとるためには,  $1/|\omega - \omega_0|$  の時間範囲の間に振幅  $\mathbf{E}_0(t)$  が際立って変化しなければならない. すなわち  $\mathbf{E}_0(t)$  が際立って変化する時間の長さを  $\Delta t$ , また  $|\omega - \omega_0| \equiv \Delta\omega$  と書いたとき,

$$\frac{1}{\Delta\omega} \gtrsim \Delta t, \quad \therefore \Delta\omega\Delta t \lesssim 1$$

であれば良い. [これは十分条件であって, この範囲  $\Delta\omega \lesssim 1/\Delta t$  の外の  $\omega$  に対しても  $\mathbf{E}_\omega$  がゼロと大きく異なる値を持つことはあり得る. すなわちそのような  $\omega$  の範囲を改めて  $\Delta\omega$  と書くと]「波の“非単色度”  $\Delta\omega$  は, いずれにせよ  $1/\Delta t$  より小さくはありえない(それより大きいことは, もちろんありうる)」(p.163, 1.7,8):

$$\Delta\omega \gtrsim \frac{1}{\Delta t}.$$

同様に与えられた時刻に, 各軸の方向に波の振幅が目立って変化する距離の大きさを  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  とすると, 波動ベクトルは

$$\Delta k_x \gtrsim \frac{1}{\Delta x}, \quad \Delta k_y \gtrsim \frac{1}{\Delta y}, \quad \Delta k_z \gtrsim \frac{1}{\Delta z}$$

程度の幅を持つ. よって  $x$  軸に沿って進む光のビーム(波長  $\lambda$ , 波数  $k = 2\pi/\lambda$ )が  $\Delta y$  程度の幅を持つとき, 実際にはビームは角度

$$\theta_y \sim \frac{\Delta k_y}{k} \gtrsim \frac{1}{k\Delta y} \sim \frac{\lambda}{\Delta y}$$

だけ平均方向からそれる(図 57 参照). [幾何光学の極限  $\lambda \rightarrow 0$  では  $\theta_y \rightarrow 0$  となって光は直進するのに対し, 図 57 のスリットが波長程度に短くなると, 光の回折が著しくなる (§ 59).]

## § 58 について

■「…… $\mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega_0 t}$  という形をもつ」 (§ 58, 1.7,8) について § 50 のノートで指摘したように, 場を  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega t}$  の形に書くこと自体は常に可能である(この式で  $\mathbf{E}_0(t)$  を定義したと考えれば良い). 場の含む振動数の幅  $\Delta\omega$  が狭いとき,  $\mathbf{E}_0(t)$  が時間のゆるやかに変化する関数となることが § 58 で説明される(式 (58.1) 参照).



■不確定関係 (58.4) について 式 (58.4):  $\Delta x \Delta k_x \gtrsim 1$  の導出には場が電磁波であることをあからさまには用いていないから、これは波動一般に当てはまる数学的な関係である。そこで場を粒子の波動関数と解釈すると、量子力学によればその Fourier 成分は波数空間 (運動量空間) の波動関数となるから、これは位置と運動量の不確定関係に他ならない [13, pp.70-71].

## § 58. 問題

図 57 のように幅  $d(= \Delta y)$  の孔を通った平行な光のビームが、障壁から距離  $l$  だけ隔たるスクリーンに作るスポットを考える。スポットを小さくするために孔の大きさ  $d$  を狭めると、回折の角度  $\sim \lambda/d$  が広がってしまうというジレンマがある。スポットの幅は

$$d + \frac{\lambda l}{d}$$

の程度であり、これは  $d = \sqrt{\lambda l}$  に対して最小値  $\sim \sqrt{\lambda l}$  をとる。

関連——昆虫の目の解像度 昆虫の複眼の解像度を上げるには、レンズを小さくして個眼を増やせば良い。ところがレンズを小さくすると光の回折が著しくなり、鮮明な像が得られなくなる。このような観点から、Feynman はミツバチの個眼が実際にほぼ最適なサイズとなっていることを示している。

複眼の半径を  $r$ 、個眼のレンズの直径を  $\delta$  とすると、レンズを小さくするにつれて隣り合う個眼の間の角度は  $\theta_1 = \delta/r$  に従って減少する (すなわち解像度が増す) のに対し、レンズに入る光 (波長  $\lambda$ ) の回折による開きの角度は  $\theta_2 = \lambda/\delta$  に従って増大する。

そこでレンズの最適なサイズ  $\delta$  を、和  $\theta_1 + \theta_2$  が最小になるような  $\delta$  の値  $\delta = \sqrt{\lambda r}$  と考えると、これは  $\lambda = 4 \times 10^{-7} \text{m}$ ,  $r = 3 \text{mm}$  に対して  $\delta = 35 \mu\text{m}$  を与え、文献値  $30 \mu\text{m}$  とよく一致する [16, pp.141-142].

## § 59. 回折

光が不透明なスクリーンにあけた孔を通り抜けるとき、開口に比べて波長が大きいほど幾何光学からのずれ (回折現象) は強く生じ、光と影の鋭い境界の代わりに複雑な光の強度分布が現れる。

幾何光学からのずれが小さい場合、すなわち

- すべての長さ (開口や光の経路) が波長に比べて大きい場合
- 光の方向が幾何光学によって与えられる方向からわずかしかずれない場合

[の両方が満たされる場合] について、全空間における電磁場を決定することを考えよう。

電磁場  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  の成分のいずれか 1 つに注目し、時間依存性  $e^{-i\omega t}$  を除いてこれを座標だけの関数  $u$  と書く。[§ 58 の議論より、決まった振動数  $\omega$  を持つ厳密に単色な波も、光が有限の幅を持つ限り波動ベクトルは幅  $\Delta \mathbf{k}$  を持つ。] 幾何光学からのずれの小さい近似の下で、開口部分での場は幾何光学によって与えられる値をとり、スクリーンのすぐ背後での場の値はゼロとおくことができる。このときスクリーンに関しては、開口の周縁の形だけが問題となる。

開口の周縁を端とする曲面で開口を覆い、曲面の切片  $df$  の各々を光源と見なす (図 58 参照)。そして観測点 P における場は、すべての切片  $df$  が作る場の重ね合せによって得られると考える (Huygens の原理)。切片  $df$  が点 P に生ずる場は、切片の位置における場  $u$  と、切片の位置での光線方向  $\mathbf{n}$  に垂直な平面への切片の射影  $df_n$  に比例する。また切片から点 P までの距離を  $R$  とすると、式 (54.3) より場は  $e^{ikR}/R$  という距離

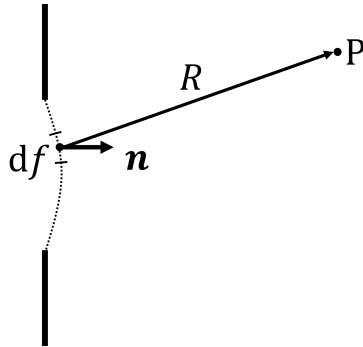


図 58 スクリーンの孔を通る光の回折

$R$  依存性を持つ. 以上より切片  $df$  の作る場は  $u \frac{e^{ikR}}{R} df_n$  に比例し, 点 P における場は

$$u_P = a \int \frac{u e^{ikR}}{R} df_n \quad (59.1)$$

と書ける.  $x$  軸に沿って進む平面波に対して上式を適用した結果を  $u_P = u e^{ikx}$  と比較すると, 定数  $a$  は  $a = k/2\pi i$  と定まり (計算は下記), 結局

$$u_P = \int \frac{ku}{2\pi i R} e^{ikR} df_n \quad (59.2)$$

となる. これは点状の光源からの単色光に対して適用される式である. ただし各点光源から発せられる光および光の各スペクトルは非干渉だから, 光源が拡がりを持ち非単色光を発する場合にも, 各光源・各スペクトルの光が作る強度分布を加え合わせれば求める強度分布が得られる.

ここで § 54 において予告したように, 光線が火面上の点を通過するときの場の位相の変化を調べよう. 原点  $O$  を通る光線に沿って  $x$  軸をとると, 光線と原点で交わる光線の波面は, 主曲率半径を  $R_1, R_2 (< R_1)$  として, 原点付近で

$$x = X \equiv \frac{y^2}{2R_1} + \frac{z^2}{2R_2}$$

と近似される. よって光線上の点  $(x, 0, 0)$  における場を求める際, 今得た  $u_P$  の式において積分領域を波面 (近似的に  $yz$  平面に一致) にとると,  $u$  と  $1/R$  は波面上で一定となり, また

$$e^{ikR} \simeq e^{ik\sqrt{(x-X)^2 + y^2 + z^2}}$$

となるので,

$$u_P = \frac{ku}{2\pi R} \frac{e^{ikx}}{i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik \frac{y^2}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_1}\right)} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik \frac{z^2}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_2}\right)} dz \quad (59.3)$$

を得る. この式の全体の位相は, 点  $P(x, 0, 0)$  の位置が

$$\begin{aligned} x < R_2 \quad (\text{第1の火面を通り過ぎる前}) &\rightarrow R_2 < x < R_1 \quad (\text{2つの火面の間}) \\ &\rightarrow R_1 < x \quad (\text{第2の火面を通り過ぎた後}) \end{aligned}$$

と変化するのに伴って,

$$e^{ikx} \rightarrow e^{i(kx - \pi/2)} \rightarrow e^{i(kx - \pi)}$$

と変化する [本稿次節で補足]. 手短かに言えば, これは各領域ごとに指数関数における  $\frac{1}{x} - \frac{1}{R_1}, \frac{1}{x} - \frac{1}{R_2}$  の符号が異なることに由来する.

§ 59, 式の導出など

■式 (59.1) の係数  $a$  の決定  $x$  軸に沿って進む平面波に対して公式 (59.1) を適用し, 積分領域を  $yz$  面に選んで  $x$  軸上の位置  $P(x, 0, 0)$  における場を計算しよう.  $yz$  面は波面なので, その上での場の値  $u$  は一定である. また回折角が小さいので, 積分領域のうち  $y, z \ll x$  が重要である. そこで

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \simeq x + \frac{y^2 + z^2}{2x}$$

とすると,

$$u_P = au \frac{e^{ikx}}{x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\frac{y^2}{2x}} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\frac{z^2}{2x}} dz \quad (67)$$

となる [本稿次節で補足]. 因子  $1/R$  では  $R \simeq x = \text{const}$  とおくことができ,  $y = \xi\sqrt{2x/k}$  と変数変換すると

$$u_P = au \frac{e^{ikx}}{x} \left( \sqrt{\frac{2x}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi^2} d\xi \right)^2 = au \frac{e^{ikx}}{x} \left\{ \sqrt{\frac{2x}{k}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1+i) \right\}^2 = aue^{ikx} \frac{2\pi i}{k}$$

となる [本稿次節で補足]. これを平面波の式  $u_P = ue^{ikx}$  と比較すると, 定数  $a$  は  $a = k/2\pi i$  と定まる.

§ 59 について

■「幾何光学からのずれが小さい場合」(p.164 下から 8,7 行目) について 例えば 2 スリットによる光の回折においてスリットから観測点に至る 2 本の直線状の径路を考えると, 径路はスリットを中心とする球面 (円) に垂直であり, 我々は幾何光学に基づく光線軌道を考えていることになる.

■ $df$  は「光の波長に比べれば大きいとする」(p.165, l.13) について これにより切片  $df$  を発する光を光線と見なすことが可能となり, 1 本の光線に沿う振幅と位相の変化の式 (54.3) を 2 段落後で用いることができるものと考えられる.

■「ホイヘンスの原理」(p.165, l.16) について これが成り立つことは波動光学から導出できる [15, p.167].

§ 53 の補足では波動光学から Fermat の原理を導いた. さらに文献 [17, pp.373-374] では Fermat の原理から波面の空間移動を規定する Huygens の原理を導いている. この導出は Fermat の原理を前提に用いる以上, 幾何光学の近似が成り立つ場合に限定され, 一見すると一般的でない印象を受ける. しかし幾何光学は我々が注目している空間スケールに比べて波長が短い場合の近似であって, その近似が妥当か否かはスリット幅や開口の代表的な長さに関する我々の人為的な選択に左右されているに過ぎない. 言い換えれば, スリットのような障害物とは無関係に十分小さい空間領域に注目すれば, その中で光が平面波として振舞い, それ故, 波を Fermat の原理に従う光線として記述できるような空間サイズは必ず存在する. このため Huygens の原理の導出に Fermat の原理を用いることは, 実際には何ら波動光学に対して制約を設け, 一般性を損なうものではないと考えられる. さらにその導き方により, Huygens の原理は光に限らず任意の波に対して成立することが分かる. そこで以下では文献 [17, pp.373-374] における証明をほぼそのまま載せる.

Huygens の原理は次のように言い表される :

波源  $P$  から出た波の時間  $t$  後の波面を  $\Phi_P(t)$ , またこの波面上の任意の点  $Q$  から出た波の時刻  $s$  後の波面を  $\Phi_Q(s)$  とすると, 波源  $P$  からの波の時間  $t+s$  後の波面  $\Phi_P(t+s)$  は, すべての  $\{\Phi_Q(s) | Q \in \Phi_P(t)\}$  の包絡面である (図 59).

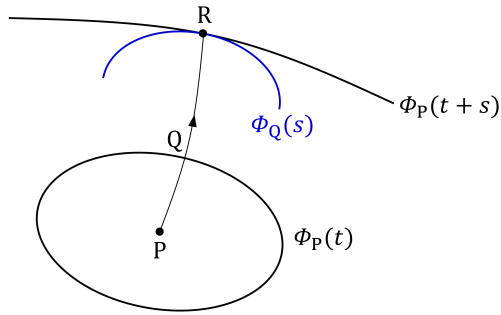


図 59 Huygens の原理の表現

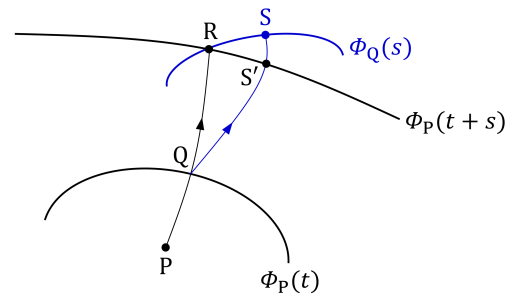


図 60 Huygens の原理と背理法

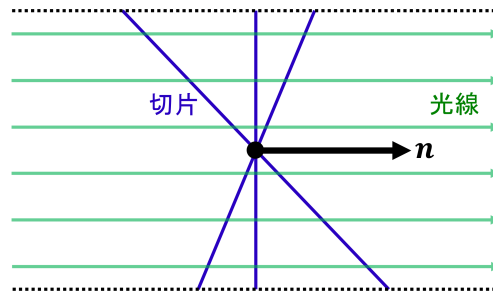


図 61 共通の射影  $df_n$  を持つ切片  $df$  は同じ光線に貫かれる。

図 59 で波面  $\Phi_P(t+s)$  上の 1 点  $R$  を考える。仮定より  $P$  から出て  $R$  に達する光線は  $PR$  間を所要時間  $t+s$  で伝わる。そして Fermat の原理によれば、 $PR$  の近くには  $PR$  を通りそれより短い時間で伝わる経路はない。今、この光線と  $\Phi_P(t)$  の交点を  $Q$  とすると、この光線は  $PQ$  間を時間  $t$  で、 $QR$  間を時間  $s$  で伝わるから、 $\Phi_P(t+s)$  上の点  $R$  は必ず  $\Phi_Q(s)$  上にある。そこで 2 つの波面  $\Phi_Q(s)$  と  $\Phi_P(t+s)$  が  $R$  で接していることを言えば良い。今、仮にこの 2 つの波面が  $R$  で接することなく図 60 のように交わっているとすれば、波面  $\Phi_Q(s)$  上には  $P$  から見て  $\Phi_P(t+s)$  より外側にある点  $S$  が必ず存在する。そこで、点  $Q$  から出てこの点  $S$  に達する光線の経路  $QS$  を考えると、その経路と  $\Phi_P(t+s)$  の交点  $S'$  は  $QS$  間にあり、しかも光は  $QS$  間を伝わるのに時間  $s$  にかかるから、 $S'$  にはそれより短い時間で到達する。とすると  $P$  から出た光線が経路  $PQS'$  を通って行けば、 $t+s$  以下の時間で  $\Phi_P(t+s)$  上の点  $S'$  に着くことになり、これは仮定に反する。[この  $P$  から  $S'$  に向かう光線は所要時間  $t+s$  で伝わるという仮定には、上記のようにそれより短い時間で  $PS'$  間をつなぐ経路が(近くに)存在しないという Fermat の原理が含まれており、ここで Fermat の原理が用いられている。] したがって波面  $\Phi_Q(s)$  と  $\Phi_P(t+s)$  は点  $R$  で接していなければならない。

■「これは、……射影  $df_n$  さえ同じであれば……影響は同じになることから結論される」(p.165, l.21~23) について 図 61 には共通の射影  $df_n$  を持つ切片  $df$  をいくつか描いている。これらは同じ光線によって貫かれている。

■平面波の作る場  $u_P$  の近似式 (67) (教科書 p.166, l.15) について

$$e^{ikR} \simeq \exp \left[ ik \left( x + \frac{y^2 + z^2}{2x} \right) \right]$$

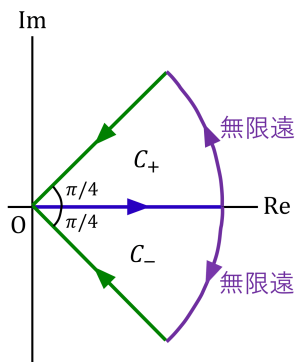


図 62 Fresnel 積分の公式を証明するための積分路  $C_{\pm}$

において  $\frac{y^2+z^2}{2x}$  が考慮されているのに対し、

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{y^2+z^2}{2x^2} + \dots \right) \simeq \frac{1}{x}$$

において無視されているのは  $\frac{y^2+z^2}{2x^2}$  であって、分母の  $x$  の次数が異なることに注意する。

式 (67) の積分を実効する際に用いた関係  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i)$  は、Gauss 積分の公式と同じ形

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{-i}}$$

に書くことができる。より一般に  $\alpha > 0$  に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\mp i\alpha}}$$

は Fresnel 積分と呼ばれる。この公式は複号  $\pm$  に応じた図 62 の経路  $C_{\pm}$  に沿う  $e^{\pm i\alpha z^2}$  の周回積分を考えて、これを Gauss 積分に関係付けることにより証明される。

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{C_{\pm}} e^{\pm i\alpha z^2} dz = \int_0^{\infty} e^{\pm i\alpha x^2} dx - e^{\pm i\pi/4} \int_0^{\infty} e^{-\alpha r^2} dr, \\ \therefore \int_0^{\infty} e^{\pm i\alpha x^2} dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\pm i} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\mp i\alpha}}, \\ \therefore \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\alpha x^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{\mp i\alpha}}. \end{aligned}$$

■波面の方程式 (p.167, l.7) について 光の進行方向  $x > 0$  上に火面が、従って曲率中心がある場合を考えているので、波面の方程式

$$x = \pm X, \quad X \equiv \frac{y^2}{2R_1} + \frac{z^2}{2R_2}$$

における複号は正号を選ばなければならない。

■場 (59.3) の位相について 例えば  $R_2 < x < R_1$  の場合について詳しく述べると次のようになる。 $R_2 < x < R_1$  のとき  $\frac{1}{x} - \frac{1}{R_1} > 0$ ,  $\frac{1}{x} - \frac{1}{R_2} < 0$  であることに注意して

$$y = \sqrt{\frac{2}{k} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{R_1} \right)^{-1}} \eta, \quad z = \sqrt{\frac{2}{k} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{x} \right)^{-1}} \zeta$$

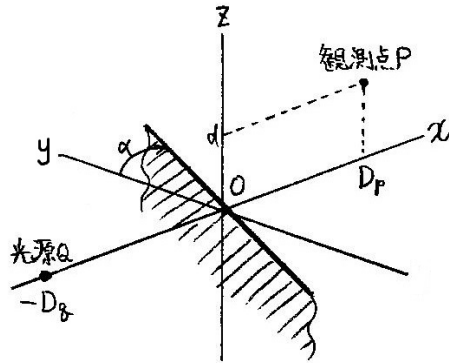


図 63 スクリーンによる Fresnel 回折

と変数変換すると、式 (59.3) に現れる積分は実の係数を落とせば

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R_1}\right)} dy \sim \int_{-\infty}^{\infty} e^{in^2} d\eta \sim (1+i),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R_2}\right)} dz \sim \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\zeta^2} d\zeta \sim (1-i)$$

となるので、 $u_P$  の式 (59.3) 全体の位相を調べると

$$u_P \sim \frac{1}{i} e^{ikx} (1+i)(1-i) \sim e^{i(kx-\pi/2)}$$

となる。

## § 60. フレネル回折

光源  $Q$  と観測点  $P$  が有限の距離にあり、点  $P$  における強度  $u_P = \int \frac{ku}{2\pi i R} e^{ikR} df_n$  への寄与が直線  $QP$  の近くから来るような回折現象は Fresnel 回折と呼ばれる。

スクリーンによる Fresnel 回折を考えると、[幾何光学において影となる領域 (幾何学的影の領域) の縁の近くでの光の強度分布を調べるにあたって、スクリーンの縁を含むように積分面を選べば] スクリーンの縁の近くだけが重要となるから、以降はスクリーンの縁を線分と見なす。

一般性を失うことなく  $Q(-D_q, 0, 0)$ ,  $P(D_p, 0, d)$  となり、スクリーンが  $z \leq 0$  の領域に位置し、その縁が  $xy$  面内の直線  $x = y \tan \alpha$  に一致するような座標系を導入できる (図 63 参照)。点  $P$  は  $d > 0$  に対して幾何学的影の外にあり、 $d < 0$  に対して幾何学的影の中にある。

積分面にスクリーンの縁を通る半平面  $x = y \tan \alpha, z \geq 0$  をとり、その上の点での光源  $Q$  との距離を  $R_q$ 、観測点  $P$  との距離を  $R$ 、場の値を  $u$  と書き、

- $u = Ae^{ikR_q}/R_q$
- 積分面上で  $1/R$  [および  $1/R_q$ ] は近似的に一定
- $df_n \rightarrow dydz$

とすると

$$u_P = \int \frac{ku}{2\pi i R} e^{ikR} df_n \simeq \frac{Ak}{2\pi i R_q R} \int e^{ik(R_q+R)} dydz$$

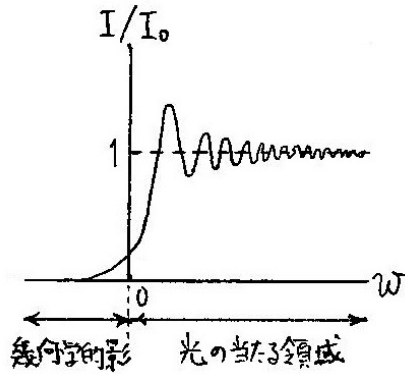


図 64 Fresnel 回折による光の強度分布

となる。積分にとって重要な原点付近では

$$e^{ik(R_q+R)} \simeq \exp \left[ ik \left\{ (D_p + D_q) + \frac{y^2}{2} \sec^2 \alpha \left( \frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q} \right) + \frac{1}{2D_q} z^2 + \frac{1}{2D_p} (z - d)^2 \right\} \right] \quad (68)$$

と近似されるから (計算は下記), 興味のある, 幾何学的影の縁からの観測点の距離  $d$  への依存性を持つ部分だけを取り出して

$$u_P \sim \int_0^\infty \exp \left\{ ik \left( \frac{1}{2D_q} z^2 + \frac{2}{2D_p} (z - d)^2 \right) \right\} dz \quad (69)$$

$$= \exp \left\{ ik \frac{d^2}{2(D_p + D_q)} \right\} \int_0^\infty \exp \left[ ik \frac{\frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q} \right) z - \frac{d}{D_p} \right\}^2}{\frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q}} \right] dz \quad (60.2)$$

とできる [本稿次節で補足].

光の強度  $I$  は  $|u_P|^2$  に比例する。そこで距離  $d$  を

$$w = d \sqrt{\frac{kD_q}{2D_p(D_q + D_p)}}$$

と無次元化し, 積分の適当な変数変換を行うと, 光の強度は

$$I = \frac{I_0}{2} \left\{ \left( C(w^2) + \frac{1}{2} \right)^2 + \left( S(w^2) + \frac{1}{2} \right)^2 \right\} \quad (60.5)$$

と表される [本稿次節で補足]. ここに  $I_0$  は光の当たる領域のうち影の縁の遠方  $w \gg 1$  での強度であり, また

$$C(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{z}} \cos \eta^2 d\eta, \quad S(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{z}} \sin \eta^2 d\eta$$

は Fresnel 積分と呼ばれる。強度分布の概形は図 64 のようであり,

$$w \rightarrow -\infty \text{ での漸近形 } I = \frac{I_0}{4\pi w^2}, \quad w \rightarrow +\infty \text{ での漸近形 } I = I_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin(w^2 - \frac{\pi}{4})}{w} \right\}$$

が見出される [本稿次節で補足].

§ 60, 式の導出など

■式 (68) について  $|y|, |z| \ll D_q, D_p$  に対して

$$R_q = \sqrt{(D_q + y \tan \alpha)^2 + y^2 + z^2} \simeq D_q + \frac{y^2 \sec^2 \alpha + z^2}{2D_q} + y \tan \alpha,$$

$$R = \sqrt{(D_p - y \tan \alpha)^2 + y^2 + (z - d)^2} \simeq D_p + \frac{y^2 \sec^2 \alpha + (z - d)^2}{2D_p} - y \tan \alpha$$

となることによる.

§ 60 について

■式 (60.2) について 教科書 p.171, 1.3 の  $u_P$  の式 (本稿の式 (69)) における指数関数の中身を平方完成すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2D_q} z^2 + \frac{1}{2D_p} (z - d)^2 &= \frac{\frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q} \right) z - \frac{d}{D_p} \right\}^2}{\frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q}} - \frac{d^2}{2D_p} \left( \frac{1/D_p}{\frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q}} - 1 \right) \\ &= \frac{\frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q} \right) z - \frac{d}{D_p} \right\}^2}{\frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q}} + \frac{d^2}{2(D_p + D_q)} \end{aligned}$$

となる.

■光の強度の式 (60.5) について

光の強度は, 場の平方, すなわち絶対値の 2 乗  $|u_P|^2$  によってきまる. したがって, [式 (60.2) における] 積分のまえの因子は, それと複素共役との積が 1 になるから重要でない. 自明なおきかえをする  
と, 積分は

$$u_P \sim \int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta \quad (60.3)$$

となる [式 (60.2) 被積分関数の位相を  $\eta^2$  で置換した].

さて, 強度  $I$  は  $u_P$  の式 (60.3) の絶対値の 2 乗に比例するので

$$I \sim \left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \int_{-w}^0 + \int_0^{\infty} \right) e^{i\eta^2} d\eta \right|^2$$

と書ける. ここで  $-\eta \rightarrow \eta$  の変数変換により

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-w}^0 e^{i\eta^2} d\eta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^w e^{i\eta^2} d\eta = C(w^2) + iS(w^2)$$

となり, また  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta = \frac{1+i}{2}$  (教科書 p.166, 1.19(または § 59 のノート)) なので

$$\begin{aligned} I &= \text{const} \times \left| \left( C(w^2) + \frac{1}{2} \right) + i \left( S(w^2) + \frac{1}{2} \right) \right|^2 \\ &= \text{const} \times \left\{ \left( C(w^2) + \frac{1}{2} \right)^2 + \left( S(w^2) + \frac{1}{2} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$



を得る.  $w \rightarrow \infty$  のとき  $I \rightarrow I_0$  となることから  $\text{const} = I_0/2$  と定まり, 式 (60.5) が導かれる.

■ベキ級数 (60.6) について

$$e^{i\eta^2} = \frac{1}{2i\eta} \frac{d}{d\eta} e^{i\eta^2}$$

と書き換えて部分積分を実行すれば良い. 具体的に書くと, まず p.171 下から 4 行目の式を得るには

$$\begin{aligned} \int_{|w|}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta &= \frac{1}{2i} \int_{|w|}^{\infty} \frac{1}{\eta} \left( \frac{d}{d\eta} e^{i\eta^2} \right) d\eta \\ &= \frac{1}{2i} \left\{ \left[ \frac{1}{\eta} e^{i\eta^2} \right]_{|w|}^{\infty} - \int_{|w|}^{\infty} \left( -\frac{1}{\eta^2} \right) e^{i\eta^2} d\eta \right\} \\ &= -\frac{1}{2i|w|} e^{iw^2} + \frac{1}{2i} \int_{|w|}^{\infty} \frac{1}{\eta^2} e^{i\eta^2} d\eta \end{aligned}$$

とすれば良い. 最右辺第 2 項について同様に計算すると

$$\begin{aligned} \int_{|w|}^{\infty} \frac{1}{\eta^2} e^{i\eta^2} d\eta &= \frac{1}{2i} \int_{|w|}^{\infty} \frac{1}{\eta^3} \left( \frac{d}{d\eta} e^{i\eta^2} \right) d\eta \\ &= \frac{1}{2i} \left\{ \left[ \frac{1}{\eta^3} e^{i\eta^2} \right]_{|w|}^{\infty} - \int_{|w|}^{\infty} \left( -\frac{3}{\eta^4} \right) e^{i\eta^2} d\eta \right\} \\ &= -\frac{1}{2i|w|^3} + \frac{3}{2i} \int_{|w|}^{\infty} \frac{1}{\eta^4} e^{i\eta^2} d\eta \end{aligned}$$

となるので式 (60.6) を得る.

■ $w \gg 1$  における強度分布の式 (60.9) について

$$\begin{aligned} I &= \frac{I_0}{2} \left| (1+i) \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2iw} e^{iw^2} \right|^2 \\ &= \frac{I_0}{2} \left| \left( 1 + \frac{1}{2w} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin w^2 \right) + i \left( 1 - \frac{1}{2w} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos w^2 \right) \right|^2 \\ &= \frac{I_0}{2} \left\{ 2 + \frac{1}{4w^2} \cdot \frac{2}{\pi} + \frac{1}{w} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\sin w^2 - \cos w^2) \right\} \end{aligned}$$

において,  $1/w$  までを考慮する近似の下では  $1/w^2$  程度の項を無視することができ, 式 (60.9):

$$I = I_0 \left\{ 1 + \frac{1}{w\sqrt{\pi}} \sin \left( w^2 - \frac{\pi}{4} \right) \right\}$$

を得る.

■Fresnel 回折による光の強度分布の概形 (教科書の図 12(p.172) について)  $w \rightarrow \pm\infty$  での漸近形 (60.7), (60.9) を計算せずとも, 強度分布の式 (60.5) における Fresnel 積分に対する定性的な考察から, 強度分布の概形をある程度把握することができる. 以下に述べる方法の着想は Feynman による [16, pp.53-55].

Fresnel 積分

$$f(w) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^w e^{i\eta^2} d\eta$$

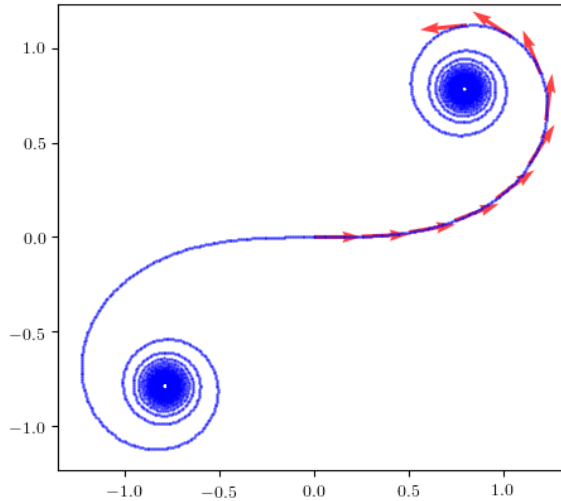


図 65 Cornu のらせん

は  $w$  の関数であり,  $w$  の各値に対して  $f(w)$  の値を複素平面上にプロットすると, 1つの曲線が描かれる. この曲線の形を調べることから始めよう.  $f(0) = 0$  なので  $f(w)$  の定義式は, 点  $f(w)$  の原点からの変位が複素数  $e^{i\eta^2} d\eta$  に対応する無限小ベクトルの和 (の  $\sqrt{2/\pi}$  倍) として与えられることを意味している. 無限小ベクトルは長さが  $d\eta$  で実軸との成す角が  $\eta^2$  であることに注意すると, 大まかには図 65 のような曲線が描かれると想像される ( $f(-w) = -f(w)$  より曲線は原点对称となることに注意する). これは Cornu のらせんと呼ばれるものである. 渦巻の中心に対応する点の座標は

$$f(\pm\infty) = \pm \frac{1}{2}(1 + i)$$

によって与えられる (p.166, 1.19).

以上を踏まえて光の強度 (60.5) を考えよう. これは  $f(-w)$  と  $f(\infty)$  に対応する 2 点間の距離の 2 乗に比例している. よってその値は  $w$  が  $-\infty$  から 0 まで増大する間に単調に増大していく. そして  $w$  が 0 から  $\infty$  まで増大する間に振動し, その振幅は減少していくことが図 65 から読み取れる.

## § 61. フラウンホーファー回折

平面波の平行光線がスクリーンの後方の遠距離に作る光の強度分布を求めよう. これから考える回折は Fraunhofer 回折と呼ばれる. ただし以下では, 幾何光学からのずれ (回折角) が小さい場合を仮定する.

Fraunhofer 回折では Fresnel 回折の場合とは対照的に, 一般公式 (59.2):  $u_P = \int \frac{ku}{2\pi iR} e^{ikR} df_n$  において積分面の全体からの寄与が重要となる. しかし光の強度分布を求めるには, 一般公式 (59.2) から出発する代わりに, 改めて次のように考える方が容易である.

幾何光学が厳密に成り立つとしたときのスクリーン後方の場  $u_0$  を考えると, これは横断面 (平面波の波面に一致) から幾何学的影の領域を除いた部分  $S$  でゼロと異なる値を持つ. ただし場  $u_0$  は断面積  $S$  が限られてい

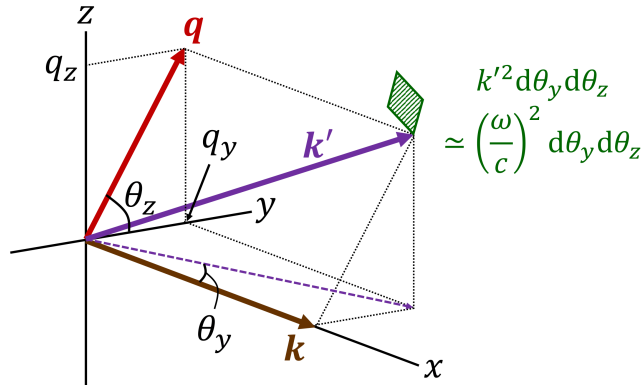


図 66 回折した光の波動ベクトル  $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{q}$  と,  $xy, xz$  面内の小さな回折角  $\theta_y, \theta_z$

るため, § 58 の議論により, 光に入射方向 ( $x$  軸にとる) に垂直な波動ベクトル  $\mathbf{q}$  ( $yz$  面内のベクトル) 成分

$$u_{\mathbf{q}} = \int_S u_0 e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} dy dz \quad (61.1)$$

を持つ. その平方  $|u_{\mathbf{q}}|^2$  が小さな回折角

$$\theta_y = \frac{q_y}{\omega/c}, \quad \theta_z = \frac{q_z}{\omega/c}$$

の方向に散乱された光の強度分布を与えるものと見て良い [図 66 参照].

教科書の説明を補足しつつ, ここから回折光の強度分布の公式を具体的に求めよう. まず, 式 (49.8):

$$\iint u_0^2 dy dz = \iint |u_{\mathbf{q}}|^2 \frac{dq_y dq_z}{(2\pi)^2} \quad (61.3)$$

に注目する. 左辺の積分は事実上 “開口” (の後方)  $S$  に限られるため, 開口を通る光の全強度

$$I_0 = A \iint_S u_0^2 dy dz (= Au_0^2 S)$$

に比例する [比例定数  $A$  を導入した]. すると式 (61.3) 右辺の被積分関数 (の  $A$  倍)

$$dI = A |u_{\mathbf{q}}|^2 \frac{dq_y dq_z}{(2\pi)^2} = A |u_{\mathbf{q}}|^2 \frac{(\omega/c)^2 do}{(2\pi)^2}$$

は, 立体角

$$do = d\theta_y d\theta_z = \frac{dq_y dq_z}{(\omega/c)^2}$$

の範囲に回折される光の強度を表すと考えるのが理に合っている. その相対的な強さ [入射光の単位面積あたりの強度  $I_0/S = Au_0^2$  との比] は

$$\frac{dI}{I_0/S} = \left( \frac{\omega}{2\pi c} \right)^2 \left| \frac{u_{\mathbf{q}}}{u_0} \right|^2 do \quad (61.4)$$

で与えられる.

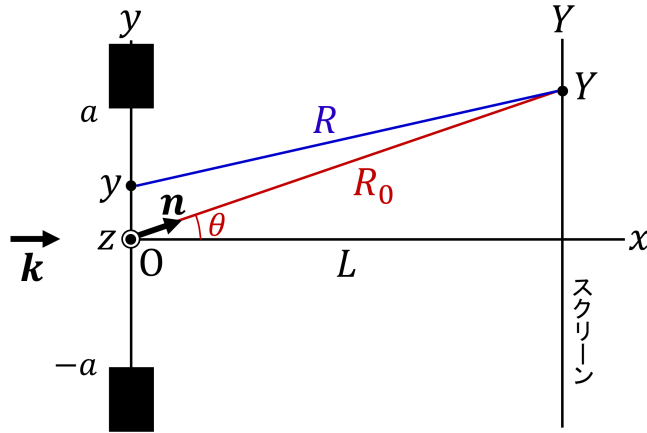


図 67 スリットによる回折 (§ 61 問題 1)

次にスクリーン 1 と、これに“相補的な”，すなわち開口と不透明な部分を反転したスクリーン 2 を考え、それぞれの後方の場を  $u^{(1)}$  および  $u^{(2)}$  と書く。入射光はどちらの場合にも同一とし、以下ではそれを  $u^{(0)}$  と書く。このとき

$$u_{\mathbf{q}}^{(1)} + u_{\mathbf{q}}^{(2)} = \int_{S_1} u^{(0)} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} dydz + \int_{S_2} u^{(0)} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} dydz = \int u^{(0)} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} dydz$$

であり ( $S_1 + S_2$  は  $yz$  平面全体)，最右辺は厳密な平面波の Fourier 成分だから， $\mathbf{q} \neq 0$  に対してゼロとなる。ここから Babinet の原理と呼ばれる関係

$$|u_{\mathbf{q}}^{(1)}|^2 = |u_{\mathbf{q}}^{(2)}|^2 \quad (\mathbf{q} \neq 0 \text{ に対して})$$

が得られる。これは相補的なスクリーンによる回折光が同一の強度分布を持つということの意味している。

最後にスクリーン 1 が黒体の場合を考えると、

$$\begin{aligned} & \text{(黒体によって散乱される光の総量)} \\ & = \text{(黒体に当たらずに通過する光の総量)} \\ & = \text{const} \times \int |u_{\mathbf{q}}^{(1)}|^2 dq_y dq_z \\ & = \text{const} \times \int |u_{\mathbf{q}}^{(2)}|^2 dq_y dq_z \quad (\text{Babinet の原理}) \\ & = \text{(相補的なスクリーンの開口を通る光の総量)} \\ & = \text{(黒体に当たる光の総量)} \\ & = \text{(黒体に吸収される光の総量)} \end{aligned}$$

という関係が見出される。ただし第 1 の等号は Fraunhofer 回折において開口を通る光はすべて曲げられることにより，最後の (第 6 の) 等号は黒体の定義，すなわち黒体はその上に当たる光を全て完全に吸収することによる。

§ 61, 問題

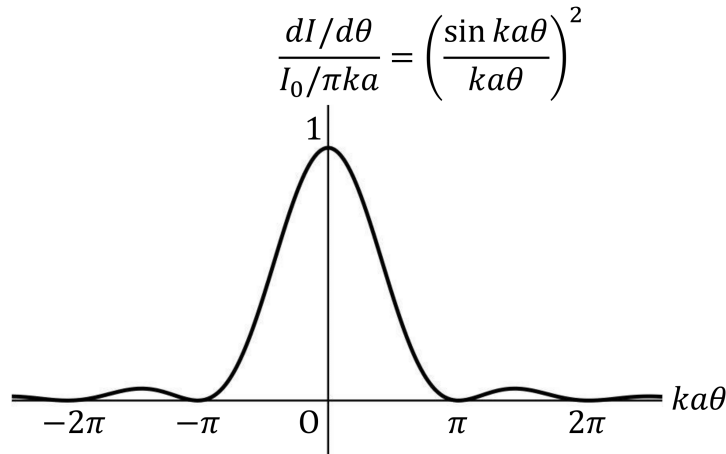


図 68 スリットにより回折した光の強度分布は  $y = (\sin x/x)^2$  の形になる

1 (スリットによる回折) 図 67 のように  $z$  方向に伸びた、幅  $2a$  の無限に長いスリットに、平面波 (波動ベクトル  $\mathbf{k}$ ) が垂直に入射する場合を考える.  $z$  方向の並進対称性より、回折は  $xy$  面内で起きる. よって波数の変化は  $y$  成分 ( $q$  とおく) のみを持ち、対応する場の Fourier 成分は

$$u_q = u_0 \int_{-a}^a e^{-iqy} dy = \frac{2u_0}{q} \sin qa$$

と計算される ( $z$  方向の単位厚みを考えた). よって角度  $d\theta$  の範囲に回折される光の強度  $dI$  は、これを公式 (61.4) に代入して

$$\begin{aligned} \frac{dI}{I_0/2a} &= \frac{k}{2\pi} \left| \frac{u_q}{u_0} \right|^2 d\theta = \frac{2}{\pi k} \frac{\sin^2 ka\theta}{\theta^2} d\theta, \quad (\because q \simeq k\theta) \\ \therefore dI &= \frac{I_0}{\pi ak} \frac{\sin^2 ka\theta}{\theta^2} d\theta \end{aligned}$$

と求まる. 強度分布の概形は図 68 のようである\*42.

別解 この結果はまた、Huygens の原理 (59.1):

$$u_P \sim \int_S \frac{ue^{ikR}}{R} df_n$$

に基づいて導くこともできる. スリット (波面に一致) における積分面  $S$  を原点周りの微小な高さ  $\Delta z$  に選ぶと、その上での場の値  $u = u_0$  は一定である. また  $S$  上の点  $\mathbf{r} = (0, y, z)$  から場の観測位置  $P$  までの距離を  $R$ , 開口の中心  $O$  から  $P$  までの距離を  $R_0$ ,  $\overrightarrow{OP}$  向きの単位ベクトルを  $\mathbf{n}$  とすると (図 67 参照),  $|\mathbf{r}| (\ll R_0)$  に関する 1 次近似では

$$R \simeq R_0 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = R_0 - n_y y = R_0 - y \sin \theta \simeq R_0 - y\theta$$

である. ただし

\*42  $y = \sin x/x$  のグラフは  $y = \pm 1/x$  のグラフの間で振動し,  $x \rightarrow 0$  のとき  $y \rightarrow 1$  となる.

- 第 1 の等号は，端点 O の微小変位  $\mathbf{r}$  に伴う動径  $\overrightarrow{PO} \equiv -\mathbf{R}_0$  の長さの変化が

$$R - R_0 = \left( \frac{\partial}{\partial(-\mathbf{R}_0)} R_0 \right) \cdot \mathbf{r} = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$$

と表されることによる．この関係は幾何学的にも確かめられる．

- 第 2 の等号では観測点 P の高さを  $z = 0$  に選び， $n_z = 0$  とした．  
( $z$  方向の並進対称性より，一般性を失わない．)

またここでも分母の  $R$  に関しては

$$\frac{1}{R} \simeq \frac{1}{R_0 - y\theta} \simeq \frac{1}{R_0} \left( 1 + \frac{y\theta}{R_0} \right) \simeq \frac{1}{R_0}$$

とする (最後の等号では 2 次の微小量を捨てており，近似は一貫している)．すると興味のある場の散乱角  $\theta$  依存性は

$$u_P \sim \int_{-a}^a e^{-iky\theta} \sim \frac{\sin ka\theta}{\theta}$$

と求まる．

- これは Fourier 成分  $u_q$  の計算と同じ形である．
- また，この合成波の計算では，各区間  $dy$  から遠方の観測点へ向かう直線 (波の伝播方向に一致) を近似的に  $\theta$  方向の平行線と見なし，波の位相において径路差  $dy \cdot \theta$  を考慮したものとなっている．

回折光の強度は

$$dI \sim |u_P|^2 d\theta \sim \frac{\sin^2(ka\theta)}{\theta^2} d\theta, \quad \text{i.e.} \quad dI = C \frac{\sin^2(ka\theta)}{\theta^2} d\theta$$

と表される．ここで導入した比例係数  $C$  は，規格化条件

$$I_0 = \int_{\theta=-\pi/2}^{\theta=+\pi/2} dI$$

から定まる．ところが強度分布は  $|\theta| \gg 1$  ではほぼゼロなので (図 68 参照)，積分範囲を  $\theta \rightarrow \pm\infty$  まで拡げることが許される．あるいはスリット面と距離  $L$  だけ隔たる， $yz$  に平行なスクリーン上の位置  $Y \simeq L\theta$  を考え (図 67 参照)，同じ理由で積分範囲を  $Y: -\infty \rightarrow \infty$  にとったと考えても良い．すると数学公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} d\alpha = \pi \tag{70}$$

より (導出は下記)，

$$I_0 = C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(ka\theta)}{\theta^2} d\theta = \pi ka C, \quad \therefore C = \frac{I_0}{\pi ka}$$

となるので，再び

$$dI = \frac{I_0}{\pi a k} \frac{\sin^2 ka\theta}{\theta^2} d\theta$$

が得られる．

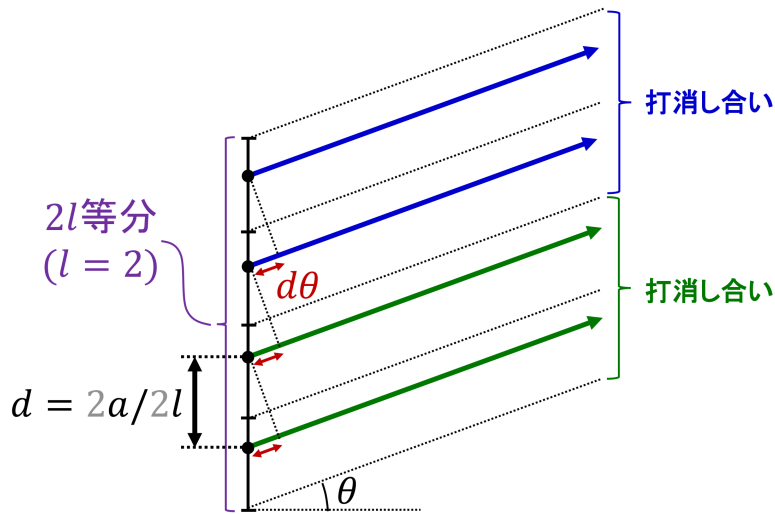


図 69 光の強度がゼロになる方向  $\theta$

上式 (70) の証明 偶関数のパルス

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{2} & (|x| \leq 2) \\ 0 & (|x| > 2) \end{cases}$$

は, Fourier 成分 (余弦 Fourier 変換)

$$C(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos \alpha x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}$$

を用いて

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty C(\alpha) \cos \alpha x d\alpha$$

と展開される. ここで  $x=0$  とおくと, 有用な公式

$$1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty C(\alpha) d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} d\alpha, \quad \therefore \int_0^\infty \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} d\alpha = \frac{\pi}{2} : (70)$$

が得られる [18, p.242, p.270].

議論 図 67 に示した光の強度分布は,  $dI/d\theta$  の分子の  $\sin(\dots)$  がゼロになる

$$ka\theta = n\pi, \quad \text{i.e.} \quad \theta = n \frac{\lambda}{2a} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

(ただし  $\lambda = 2\pi/k$  は波数  $k$  に対応する波長) の方向  $\theta$  ではゼロになる ( $n=0$  は除外される). すなわち図 69 のようにスリットを偶数 ( $2l$  とおく) に等分割したとき, 隣り合う区間を通る光の束が打ち消しあう条件

$$\begin{aligned} \frac{2a}{2l}\theta &= \pm \frac{1}{2}\lambda(2m+1), & (l=1, 2, \dots, m=0, 1, 2, \dots) \\ 2a\theta &= n\lambda & n \equiv \pm l(2m+1) \end{aligned}$$

を満たす方向  $\theta$  では光の強度はゼロになる. ここで  $n \equiv \pm l(2m+1)$  は  $m=0$  の場合に限っても全ての整数  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$  をとり得る.

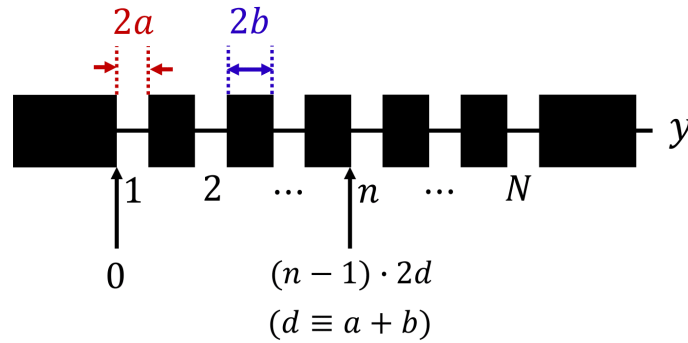


図 70 回折格子 (§ 61 問題 2). ここでも各スリットは  $z$  方向に無限に長く,  $+x$  向きに平面波が入射する.

図 67 のように, 光はほとんど

$$|\theta| \leq \frac{\lambda}{2a}$$

の範囲にしか来ない. 実際,  $\theta = 0$  の隣の極大の高さは  $\theta = 0$  のピークの約  $1/22$  に過ぎない.

注意  $f(x) = \sin x/x$  の極値を与える  $x$  は

$\sin x = \pm 1$  となる位置  $x = x_n \equiv (\frac{1}{2} + n)\pi$  と正確には一致しない:

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}, \quad \therefore \begin{cases} f'(x) \geq 0 & \Leftrightarrow x \geq \tan x & (\cos x > 0) \\ f'(x) \leq 0 & \Leftrightarrow x \leq \tan x & (\cos x < 0) \\ f'(x_n) = (-1)^{n+1}/x_n^2 & (\cos x_n = 0) \end{cases}$$

よって

- スリットが波長に比べて広いとき ( $a \gg \lambda$ )  
光の広がる範囲は  $|\theta| \ll 1$  となる. すなわち光はほとんど直進する.  
- 雨戸の隙間 ( $a \gg \lambda$ ) から差し込む朝日は直進する.
- スリットが波長に比べて狭いとき ( $a \lesssim \lambda$ )  
光は  $\theta = \pm\pi/2$  まで広がり得る (回折).  
- 狭いスリットは球面波を発する単一の点波源として振舞う.
- ★ これは波動に対する不確定関係の一般論 (§ 58) と合致している.

音の回折 音波は光に比べて桁違いに波長が長いので, 障害物の背後にもまわりこむ.

光の回折 目を細めるとまぶたの奥で, それに垂直な方向に光の筋が伸びて見える.

2 (回折格子 (図 70 で定義される)) 小問 1 における場の Fourier 成分ないし合成波の式

$$u_q = u_0 \int e^{-iqy} dy, \quad u_P \sim \int e^{-iky\theta} dy$$

において, 積分範囲が  $N$  個のスリット部分

$$(n-1)2d \leq y \leq (n-1)2d + 2a \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$



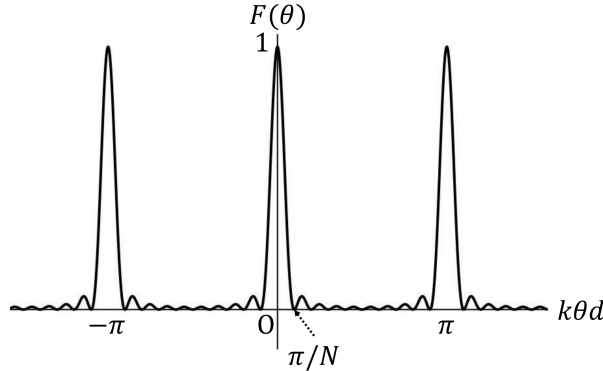


図 71 幅を持たない  $N (= 10)$  個の理想的な点光源による光の強度分布 ( $\sim F(\theta)$ )

に限定される。どちらの式も同じ形をしており、それ故、同じ場の強度を導く (小問 1 と同様)。そこで Fourier 成分

$$u_q = u_0 \sum_{n=1}^N \int_{(n-1)2d}^{(n-1)2d+2a} e^{-iqy} dy \equiv u'_q \sum_{n=1}^N e^{iq(n-1)2d}$$

を考えることにしよう。ここに 1 個のスリットについての積分の値

$$u'_q \equiv u_0 \int_0^{2a} e^{-iqy} dy = e^{-iqa} \times \frac{2u_0}{q} \sin qa$$

は当然ながら、座標原点の変更に伴うつまらない位相因子  $e^{-iqa}$  の違いを除き、小問 1 で求めた  $u_q$  に一致している。残りの等比級数和の項は

$$\sum_{n=1}^N e^{iq(n-1)2d} = \frac{1 - e^{2iNqd}}{1 - e^{2iqd}} = \frac{e^{iNqd}(e^{-iNqd} - e^{iNqd})}{e^{iqd}(e^{-iqd} - e^{iqd})} = e^{i(N-1)qd} \frac{\sin Nqd}{\sin qd}$$

と計算されるので、回折光の強度分布

$$\frac{dI}{I_0/2Na} = \frac{k}{2\pi} \left| \frac{u_q}{u_0} \right|^2 d\theta = \frac{k}{2\pi} \left( \frac{\sin Nkd\theta}{\sin kd\theta} \right)^2 \left( \frac{2 \sin ka\theta}{k\theta} \right)^2 d\theta, \quad \therefore dI = \frac{1}{N} \underbrace{\left( \frac{\sin Nkd\theta}{\sin kd\theta} \right)^2}_{\equiv F(\theta)} \times \underbrace{\frac{I_0 \sin^2 ka\theta}{\pi ak \theta^2}}_{\equiv \mathcal{I}(\theta)} d\theta$$

が得られる。

ここで結果を吟味しよう。まず上式における  $\mathcal{I}(\theta)$  は、小問 1 の単一のスリット (幅  $2a$ ) による強度分布  $dI/d\theta$  と完全に同じである。  $F(\theta)$  は図 71 のような干渉縞の微細な構造を表し、実際の強度分布はこれを包絡線  $\sim \mathcal{I}(\theta)$  で変調した形をとる。したがって光はやはり、ほとんど  $|\theta| \lesssim \lambda/a$  の範囲にしか届かない。

ここで新たに現れた因子  $F(\theta)$  の特徴は次のように理解できる。隣り合うスリットの間隔は  $2d$  であることに注意しよう。すると  $m$  を整数、 $\nu$  を  $N$  の倍数でない整数として、

- $2d\theta = m\lambda$  で  $F(\theta) = F(0)$  : 強め合い ( $\Leftrightarrow k\theta d = m\pi$ )  
 - これは径路差が波長の整数倍となる条件に他ならない。
- $2d\theta = \frac{\nu}{N}\lambda$  で  $F(\theta) = 0$  : 打ち消し合い ( $\Leftrightarrow k\theta d = \frac{\nu}{N}\pi$ )
- $2d\theta = \frac{\nu+1/2}{N}\lambda$  ( $\Leftrightarrow k\theta d = \frac{\nu+1/2}{N}\pi$ )

$$- \nu = 1 \text{ で } F(\theta) \simeq \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 F(0)$$

$$- \nu \simeq N/2 \text{ で } F(\theta) \simeq \frac{F(0)}{N^2}$$

計算方法  $2d\theta = \frac{\nu+1/2}{N}\lambda$  のとき

$$F(\theta) = \frac{1}{\left|\sin\left(\pi\frac{\nu+1/2}{N}\right)\right|^2}$$

となる.  $N \gg 1$  を想定すると,  $\nu = 1$  に対しては

$$\sin\left(\pi\frac{\nu+1/2}{N}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2N}\right) \simeq \frac{3\pi}{2N},$$

$\nu \simeq N/2$  に対しては  $\nu + 1/2 \simeq N/2$  より

$$\sin\left(\pi\frac{\nu+1/2}{N}\right) \simeq 1$$

と計算できる.

よって  $m$  次の明線の範囲は  $(m - \frac{1}{N})\lambda < 2d\theta < (m + \frac{1}{N})\lambda$  であり,  $N \rightarrow \infty$  のとき

$$(\text{明線の幅}) = \frac{2\lambda}{N} \rightarrow 0,$$

$$(\text{明線と明線の間}) \text{の強度 } |F(\theta)^2| \sim \frac{F(0)}{N^2} \rightarrow 0$$

となってシャープな線状のスペクトルに移行する. [ $\nu = 1$  の極大は高さ  $F(\theta) \simeq \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 F(0)$  を変えないけれど, その位置は隣接する  $\theta = 0$  の明線に近づく.] これは径路差が厳密に波長の整数倍でない限り, 位相の異なる波は  $N \rightarrow \infty$  で打ち消し合う傾向を強めるためであると解釈できる.

さらにいくらか考察を加えておく.

$a \rightarrow 0$  の極限 便宜的に  $\theta = 0$  における強度分布の値

$$\left(\frac{dI}{d\theta}\right)_0 = \frac{I_0 N k a}{\pi}$$

を一定に保ってスリット幅  $2a \rightarrow 0$  とすると,

$$\frac{dI}{d\theta} = \left(\frac{dI}{d\theta}\right)_0 \left(\frac{\sin Nkd\theta}{N \sin kd\theta}\right)^2 \left(\frac{\sin ka\theta}{ka\theta}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{dI}{d\theta}\right)_0 \left(\frac{\sin Nkb\theta}{N \sin kb\theta}\right)^2$$

となる. よって理想的な  $N$  個の点光源による光の強度分布は図 71 と同じ概形を持つ. 裏を返せば, 光がほとんど  $|\theta| \lesssim \lambda/a$  にしか届かないのは, スリットが有限の幅  $2a$  を持つことによる. (我々は球面波の減衰を無視してもいる.)

$b \rightarrow 0$  の極限 幅  $2Nd = 2N(a+b) \equiv 2a'$  を一定に保って格子の不透明部分を  $2b \rightarrow 0$  とすると (したがって  $Na \rightarrow a'$ ),

$$dI \rightarrow \frac{I_0}{\pi a' k} \left(\frac{\sin ka'\theta}{\sin ka\theta}\right)^2 \frac{\sin^2 ka\theta}{\theta^2} d\theta$$

となって, 期待されるように小問 1 の結果が再現される.

すると回折格子を通して干渉した光の強度分布 (小問 2) から, 単一のスリットによる回折 (小問 1) が得られることになる. このような事情により, 「回折」と「干渉」という用語を必ずしも明確に区別することは困難となる. 実際 Feynman はこの点について次のように述べている [16, p.43].

誰(れ)だって干渉と回折との区別を満足いくように定義したためしはない。これはいわば慣用の問題で、両者の間に特有の重要な物理的な差異は存在しないのである。強いていえば、大まかに、波源の数がごく僅かで、たとえば二つで、それらが互いに強め合ったり弱め合ったりしているとき、結果は干渉と呼ばれ、一方その数が多くなると、回折という言葉の使われることが多くなる、といった具合なのである。

**Babinet の原理の検証** 開口と不透明な部分を反転した相補的なスクリーンによる回折光の強度分布は、上で得た強度分布において  $a$  と  $b$  を入れ替えた式で与えられる。ところが強度分布には  $a$  と  $b$  は和  $d = a + b$  の形でのみ含まれ、それ故、強度分布は  $a$  と  $b$  に関して対称だから、Babinet の原理が成り立っている。

なお教科書では多スリットの極限  $N \rightarrow \infty$  を調べるのに、公式

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 Nx}{\pi Nx^2} = \delta(x)$$

を利用している(小問1の公式(70)とも整合)。その数学的な周辺についてまとめておく。

参考——デルタ関数の2乗の公式 [19, pp.246-247]

大きな有限時間  $T$  に対して直観的に、デルタ関数の2乗の公式

$$[\delta(\omega)]^2 = \delta(\omega) \int_{-T/2}^{T/2} \frac{dt}{2\pi} e^{i\omega t} = \delta(\omega) \int_{-T/2}^{T/2} \frac{dt}{2\pi} = \frac{T}{2\pi} \delta(\omega)$$

を導くことができる(第2の等号では  $\delta(\omega)$  の下で被積分関数の  $\omega$  をゼロとおいた)。同様に大きな空間体積  $V$  に対して

$$[\delta(\mathbf{k})]^2 = \frac{V}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k})$$

である。なるほど、デルタ関数の2乗もまたデルタ関数であり、両辺の次元を合わせるのに必要な時間  $T$  (ないし空間の体積  $V$ ) が係数として現れる。他方、指数関数の積分を実行すると

$$[\delta(\omega)]^2 = \left| \int_{-T/2}^{T/2} \frac{dt}{2\pi} e^{i\omega t} \right|^2 = \left( \frac{\sin(\omega t/2)}{\pi \omega} \right)^2 = \frac{T}{2\pi} \delta(\omega)$$

とも表されるため、数学公式

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 \alpha x}{\alpha x^2} = \delta(x)$$

が見出される。(このように  $y = (\sin x/x)^2$  のグラフからデルタ関数を作ることが<sup>43</sup>できる。)ただし正確には、逆にこの公式を用いてデルタ関数の2乗の公式を導く方が厳密である。

**3 (半径  $a$  の円形の開口に垂直に入射した光の回折)** 開口面内の指定されたベクトル  $\mathbf{q}$  方向を始線として、図72のように円筒座標  $(r, \phi, z)$  を導入すると、式(61.1)の積分は

$$\begin{aligned} u_q &= u_0 \int_{\text{開口}} e^{-iqr \cos \phi} r dr d\phi = 2\pi u_0 \int_0^a J_0(qr) r dr \quad \left( J_0(qr) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iqr \cos \phi} d\phi \right) \\ &= \frac{2\pi u_0 a}{q} J_1(aq) \quad \left( \because \int_0^a J_0(qr) r dr = \frac{a}{q} J_1(aq) \right) \end{aligned}$$

となる。ここに  $J_0, J_1$  は Bessel 関数である。すると立体角  $d\omega$  (軸対称性より  $d\omega = 2\pi \sin \theta d\theta \simeq 2\pi \theta d\theta$  を考えれば良い)の中へ回折される光の強度  $dI$  は、一般公式(61.4):

$$\frac{dI}{I_0/(\pi a^2)} = \left( \frac{k}{2\pi} \right)^2 \left| \frac{u_q}{u_0} \right|^2 d\omega$$

<sup>43</sup> 同じく

$$\delta(x) = \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-K/2}^{K/2} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{e^{iKx/2} - e^{-iKx/2}}{2\pi ix} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sin Kx}{\pi x}$$

もまた、 $y = \sin x/x$  のグラフからデルタ関数を作る方法として有名である。

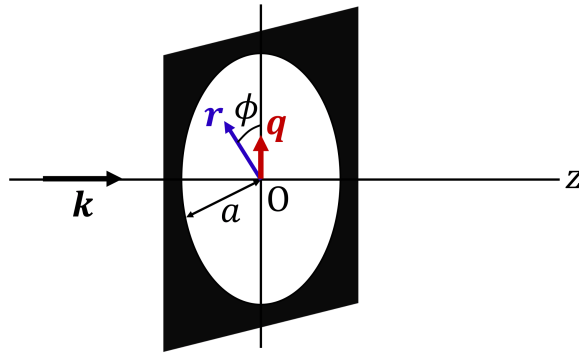


図 72 円形の開口による光の回折 (§ 61 問題 3)

より,

$$dI = I_0 \frac{J_1^2(ak\theta)}{\pi\theta^2} do \quad \text{i.e.} \quad \frac{dI/do}{I_0/(ak)^2} = \left\{ \frac{J_1(ak\theta)}{ak\theta} \right\}^2$$

で与えられる ( $q \simeq k\theta$  を考慮した).

Bessel 関数についてのノート 文献 [12, p.148](小野寺嘉孝『物理のための応用数学』) の式 (8.6):

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \sin \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ix \sin \theta} + e^{-ix \sin \theta}}{2} d\theta$$

は, 最右辺の第 1 項で  $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$ , 第 2 項で  $\theta' = \theta - \frac{\pi}{2}$  と変数変換し, いずれも被積分関数が周期  $2\pi$  の周期関数であることに注意すると, 本問に適した形

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix \cos \theta'} d\theta'$$

に書き換えられる. また同文献 [12, p.150] の公式 (8.17):  $\int_0^x x' J_0(x') dx' = x J_1(x)$  を,  $x' = qr, x = qa$  として用いる. 円形開口による光の回折への Bessel 関数の応用も見られる [12, pp.158-160].

## 第 8 章 運動している電荷の場

### § 62. 遅延ポテンシャル

任意の運動をする電荷の系を作る場は、場の方程式

$$-\frac{4\pi}{c}j^i = \partial_k F^{ik} = \partial_k(\partial^i A^k - \partial^k A^i) = -\partial_k \partial^k A^i \quad (\because \text{Lorenz 条件 } \partial_k A^k = 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi = -4\pi\rho \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A} = -4\pi\mathbf{j} \end{cases} \leftarrow \begin{cases} \text{電荷なし} \rightarrow \text{波動方程式} \\ \text{一定(静的)な場} \rightarrow \text{Poisson 方程式} \end{cases}$$

の解

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3x' + \phi_0(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3x' + \mathbf{A}_0(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

$\uparrow$  遅延ポテンシャル (特殊解) 系の作る場       $\uparrow$  源をゼロとした同次方程式の解 系に入射する放射・外場

における遅延ポテンシャルで記述される。

### § 62 について

■遅延ポテンシャルの導出について 教科書における遅延ポテンシャルの導出は図 73 のようにまとめられる。物理的な直観・考察を前面に押し出したものとなっていることが目を引く。これに対し本稿の付録 G には、数学的により手堅い証明を載せてある。

導出過程 (p.179) では、球対称な場  $\phi(R, t)$  に対する波動方程式

$$0 = \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi = \frac{(R^2 \phi)'}{R^2} - \frac{1}{c^2} \ddot{\phi} \quad (\text{p.179, 1.10})$$

(プライムは原点からの距離  $R$  による微分, ドットは  $t$  による微分) の解が球面波

$$\phi(R, t) = \frac{\chi(t \mp R/c)}{R} \quad (\text{p.179, 1.16})$$

であることを示したことになる。証明には  $\phi \equiv \chi/R$  とおいて、 $\chi$  に対する通常の (1次元) 波動方程式を導けば良く、その導出過程は途中計算を補足しつつ以下のようにまとめられる。 $\phi \equiv \chi/R$  に対し、

$$\phi' = \frac{\chi'}{R} - \frac{\chi}{R^2}, \quad \therefore (R^2 \phi)' = (R\chi' - \chi)' = R\chi'', \quad \therefore 0 = \frac{(R^2 \phi)'}{R^2} - \frac{1}{c^2} \ddot{\phi} = \frac{1}{R} \left(\chi'' - \frac{1}{c^2} \ddot{\chi}\right).$$

なお 1.16 の式で内向き球面波  $\chi(t + R/c)/R$  をとると、特殊解は先進ポテンシャルになる。

導出は  $\phi$  に対して行われているが、これを  $\mathbf{A}$  に対する結果に読み替えることができる。場の方程式 (62.3), (62.4) を比べれば、 $\phi$  の遅延ポテンシャル (62.9) で  $\phi \rightarrow \mathbf{A}, \rho \rightarrow \mathbf{j}/c$  と置き換えて、 $\mathbf{A}$  の遅延ポテンシャルを式 (62.10) とすれば良いのが分かる。

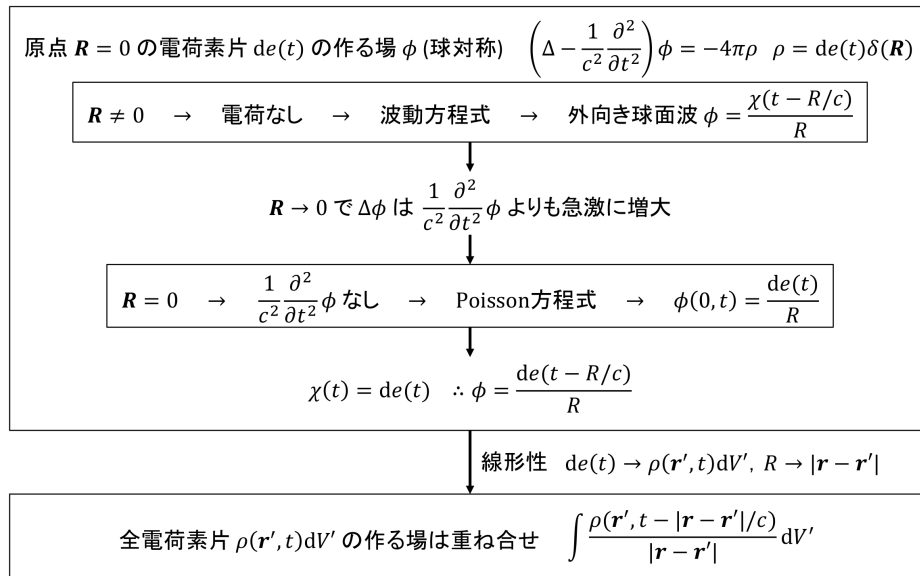


図 73 教科書における遅延ポテンシャルの導出

■遅延ポテンシャルの解釈 定常的な電荷分布・電流分布が式 (36.8), 式 (43.5) の電磁ポテンシャル

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')d^3x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')d^3x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

を作ったのに対し、電荷分布・電流分布が時間変化するときの電磁ポテンシャル  $A^i$  は、場の方程式 (62.2):  $\partial_k \partial^k A^i = \frac{4\pi}{c} j^i$  の特殊解 (遅延ポテンシャル)

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)d^3x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)d^3x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

で与えられ、ある意味で第 6 章の波動的な性格を兼ね備えたものとなる (そのことは § 62 の導出過程にも見て取れる。) 遅延ポテンシャルは、電荷分布・電流分布の時間変化に伴って時刻  $t' \equiv t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$  に位置  $\mathbf{r}'$  の電荷素片  $\rho(\mathbf{r}', t')d^3x'$ 、"電流素片"  $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')d^3x'$  から発生した電磁波が光速  $c$  で伝わり、時刻  $t$  で位置  $\mathbf{r}$  に電磁ポテンシャル  $\frac{\rho(\mathbf{r}', t')d^3x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ 、 $\frac{1}{c} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')d^3x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  を作ることを示唆している [7, pp.287-288]. 距離依存性  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  は球面波一般に対するエネルギー保存則の要請から期待されるものである。実際、源 (電荷) から発せられる球面波を考えると、源からの距離を  $R_0$  として場が  $1/R_0$  に比例するとき、エネルギーの流れの密度は  $1/R_0^2$  に比例する (§ 31). すると立体角要素  $d\Omega$  の方向にある半径  $R_0$  の球面上の要素  $R_0^2 d\Omega$  を、単位時間に通過するエネルギーは、距離  $R_0$  に依らない。これはエネルギーが (源の外側の真空中で) 生成・消滅することなく、光速  $c$  で広がっていくため、どこにも溜まらないという事実を表している (§ 66)\*44. 遅延ポテンシャルに基づき、具体的に与えられた運動を行う電荷の放射する電磁波を調べれば、ここに述べた事情はより明瞭に理解できる (第 9 章).

\*44 平たく言えば、波のエネルギーは球の表面積 ( $\sim R_0^2$ ) に反比例して薄まっていくため、波の振幅は  $1/R_0$  に従って減衰する。

■「ところで、遅延ポテンシャルの形の解はこの条件を満たしている」(p.181, 1.2.3) について 十分遠方からは電荷の系が1点(原点)に縮まって見えるという極端な場合に、遅延ポテンシャルが複数の電荷の寄与を重ね合わせる前の外向き球面波 (62.7): $\chi(t - R/c)/R$  になることから分かる。

### § 63. リエナール-ヴィーヘルトのポテンシャル

1つの点電荷  $e$  (軌道  $\mathbf{r}_0(t)$ ) から成る系に対して

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))$$

であり、これに対する遅延ポテンシャルは

$$(\phi(\mathbf{r}, t), \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) = \frac{e \left(1, \frac{\mathbf{v}(t')}{c}\right)}{R(t') - \frac{\mathbf{v}(t')}{c} \cdot \mathbf{R}(t')} \quad (63.5)$$

となる(導出は§ 63の問題)。ただし  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$  であり、また時刻  $t'$  は条件

$$t' + \frac{R(t')}{c} = t$$

すなわち  $t'$  に電荷の位置を發した光が  $R(t')$  隔たる位置  $\mathbf{r}$  にちょうど時刻  $t$  で到達することから定まる。上式(63.5)を Liénard-Wiechert (リエナール-ヴィーヘルト) のポテンシャルという。

ここで4元ベクトル

$$R^i(t') \equiv (ct, \mathbf{r}) - (ct', \mathbf{r}_0(t')) [= (c(t-t'), \mathbf{R}(t'))]$$

を導入する。  $c(t-t') = R(t')$  にも注意すると、Liénard-Wiechert のポテンシャル(63.5)は共変性が明白な形

$$A^i(\mathbf{r}, t) = \frac{u^i(t')}{R_k(t')u^k(t')} \left( = \frac{\text{反変ベクトル}}{\text{スカラー}} \right) \quad (63.3)$$

に書ける。特に  $\mathbf{v}(t') = 0$  となる座標系では、Coulomb の法則

$$(\phi, \mathbf{A}) = \left( \frac{e}{R(t')}, \mathbf{0} \right)$$

が再現される。(教科書の本文では逆にこのことから式(63.5)を導いた。)

ポテンシャル(63.5)から導かれる電磁場は

$$\mathbf{E} = e \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)^3} \left( \mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R \right) + \frac{e}{c^2} \frac{1}{\left(R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)^3} \mathbf{R} \times \left\{ \left( \mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R \right) \times \dot{\mathbf{v}} \right\}, \quad (63.8)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{cR} \mathbf{R} \times \mathbf{E} \quad (63.9)$$

となる ( $t'$  を通した  $t, \mathbf{r}$  による微分を行わねばならない) [本稿次節で導出]。ただし右辺の全ての量は時刻  $t'$  において評価するものとする。

- 電荷の加速度は電場の第2項にのみ含まれる。  
この項は球面波と同様に電荷の遠方で  $1/R$  のように振舞い、粒子の放射する電磁波に対応する。  
逆に言えば放射が起きるのは電荷が加速度を持つときだけである。

- 一方、電場の第1項は Coulomb 電場と同様、遠方で  $1/R^2$  のように振舞うため、遠方では第2項の輻射場が支配的となる (放射は遠方まで届く).  
電荷が等速度運動を行っているときの電場は第1項だけで表され、これは§ 38で場を Lorentz 変換して得た、“電荷の運動方向に潰れる電場”に一致する (確認は下記).
- 電場と磁場の関係は、 $\mathbf{n} \equiv \mathbf{R}/R$  方向 (電荷から観測位置を見る方向) に伝播する平面波に対する関係と同じである [球面波が電荷の遠方で平面波に移行することから期待される結果].

### § 63, 式の導出など

■ $t'$ の導関数 電磁場の式(63.8),(63.9)の導出は本稿次節で行うものの、教科書ではその準備として次の公式が示されている. まず  $R(t') = c(t - t')$  の両辺を  $t$  で微分し,

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R} \frac{\partial t'}{\partial t} = c \left( 1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right) \quad (71)$$

が得られる [本稿次節で補足]. 第3の等号に着目して、これを  $\partial t'/\partial t$  について解くと,

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{cR}} \quad (63.6)$$

が得られる. 同様に、同じ関係を座標について微分すると

$$\text{grad } t' = -\frac{1}{c} \text{grad } R(t') = -\frac{1}{c} \left( \frac{\partial R}{\partial t'} \text{grad } t' + \frac{\mathbf{R}}{R} \right), \quad (72)$$

$$\therefore \text{grad } t' = -\frac{\mathbf{R}}{c(R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c})} \quad (63.7)$$

となる [本稿次節で補足].

■電場の式(63.8)が§ 38の、等速度運動を行う電荷の作る電場を再現することの確認 電荷が等速度運動を行う場合、電場の式(63.8)は第1項のみが生き残る. ここで差

$$\mathbf{R}_{t'} - \frac{\mathbf{v}}{c} R_{t'} = \mathbf{R}_{t'} - \mathbf{v}(t - t') \quad (\text{p.183, 1.15})$$

は、観測の時刻における電荷から観測点を見るベクトル  $\mathbf{R}_t$  である [ただし  $\mathbf{R}_{t'} \equiv \mathbf{R}(t')$ , 図74参照]. また  $\theta_t$  を  $\mathbf{R}_t$  と  $\mathbf{v}$  のなす角とすると、直接の計算により

$$R_{t'} - \frac{1}{c} \mathbf{R}_{t'} \cdot \mathbf{v} = \sqrt{R_t^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{R}_t)^2} = R_t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta_t} \quad (73)$$

が確かめられる [第1の等号を本稿次節で確認]. よって電場の式(63.8)は§ 38の結果を再現する.

### § 63 について

■p.181脚注1について 図75において粒子の世界線  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)$  と光すいの下半分との交点 A から O まで信号が伝播する速度は、AO がすい体上なので光速になる. よって A は遅延時間  $t'$  で電荷が  $\mathbf{r}_0(t')$  から信号を発するという事件の起きた点である. なお  $R^i = \overrightarrow{AO}$  であり、これはヌル・ベクトルである.



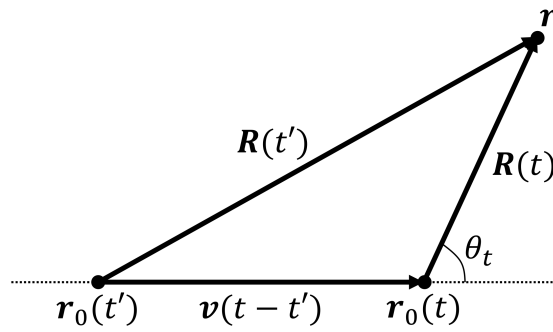


図 74 電荷が等速度運動を行う場合

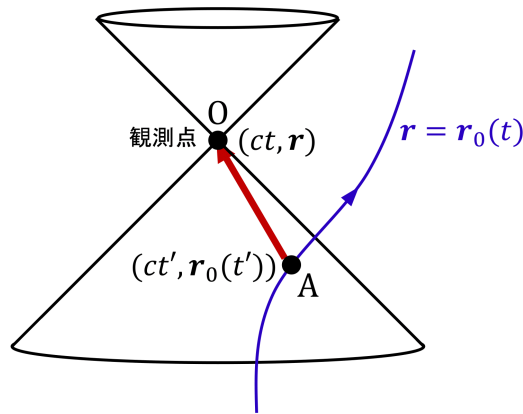


図 75 一意的な時刻  $t'$  が存在することの直接的確認

■ 「 $R^k = [c(t-t'), \mathbf{r} - \mathbf{r}']$ 」(p.182, l.1,2) および式 (63.3) について  $\mathbf{r}' \equiv \mathbf{r}_0(t')$  と略記されており, したがって  $R^k(t') = [c(t-t'), \mathbf{R}(t')]$  である. (このときヌル・ベクトルの条件 (63.4):  $R_k R^k = \{c(t-t')\}^2 - \mathbf{R}(t')^2 = 0$  が満たされる.) 同時にポテンシャル (63.3) における  $u^i, u^k$  は  $t'$  での値

$$u^i(t') = \frac{(c, \mathbf{v}(t'))}{\sqrt{1 - v^2(t')/c^2}}$$

とすれば良いことが, § 63 の問題から分かる.

■  $\partial R / \partial t$  の式 (71)(教科書では p.182 下から 9 行目) について まず教科書 p.182 下から 9 行目における公式 (71):

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R} \frac{\partial t'}{\partial t} = c \left( 1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right)$$

について,  $\mathbf{R}, \mathbf{v}$  は  $t'$  での値である. すると

$$\frac{\partial R(t')}{\partial t} = \frac{\partial R(t')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t}$$

において,

$$\begin{cases} R^2 = \mathbf{R}^2, & \therefore 2R \frac{\partial R}{\partial t'} = 2\mathbf{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t'} = 2\mathbf{R} \cdot (-\mathbf{v}) \quad (\text{p.182 下から 6-8 行目}) \\ \mathbf{R} \equiv (X, Y, Z), & \dot{\mathbf{R}} \equiv \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t'} = \frac{X\dot{X} + Y\dot{Y} + Z\dot{Z}}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} = \frac{\mathbf{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t'}}{R} = \frac{\mathbf{R} \cdot (-\mathbf{v})}{R} \end{cases}$$

などとすれば,

$$\frac{\partial R(t')}{\partial t'} = -\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (74)$$

となるので, 第3辺

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \mathbf{v} \frac{\partial t'}{\partial t}$$

を得る. これを, ( $t'$  での値)  $R(t') = c(t - t')$  を微分して得られる

$$\frac{\partial R}{\partial t} = c \left( 1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right)$$

と等置すれば, 第3の等号

$$-\frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \mathbf{v} \frac{\partial t'}{\partial t} = c \left( 1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right)$$

が確認される.

■grad  $t'$  の式 (72),(63.7) について まず教科書 p.182 下から 3 行目の式 (72):

$$\text{grad } t' = -\frac{1}{c} \text{grad } R(t') = -\frac{1}{c} \left( \frac{\partial R}{\partial t'} \text{grad } t' + \frac{\mathbf{R}}{R} \right)$$

について,

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}{c}$$

(の関数) の空間微分は, 陽に含まれる  $\mathbf{r}$  の微分  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}^*}$  と,  $t'$  を通した微分  $\frac{\partial t'}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial t'}$  に分けて

$$\text{grad} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}^*} + \frac{\partial t'}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial t'} \quad (75)$$

とする.

今の場合, 第2の等号が

$$\text{grad } R(t') = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')| = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} + \frac{\partial t'}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}{\partial t'} = \frac{\mathbf{R}}{R} + (\text{grad } t') \frac{\partial R}{\partial t'}$$

と示される. 最右辺に式 (74) を代入して移行すると, 式 (63.7) を得る.

■電磁場の Liénard-Wiechert 型の表式 (63.8),(63.9) の導出 まず電場  $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \phi$  を考える. 第1項について,

$$\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{e}{c} \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\mathbf{v}(t')}{R(t') - \frac{\mathbf{v}(t')}{c} \cdot \mathbf{R}(t')}$$

である. これ以降, 全ての量に共通の引数  $t'$  を省略し, 分母の因子を

$$(\dots) \equiv R - \mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c}$$

と略記する.  $\dot{R} = -\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R}$ : (74),  $\dot{\mathbf{R}} = -\mathbf{v}$  より,

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R}{(\dots)} : (63.6),$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} \frac{\mathbf{v}}{R - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{R}} = \frac{\dot{\mathbf{v}}}{(\dots)} - \mathbf{v} \frac{\dot{R} - \frac{1}{c}(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{R}})}{(\dots)^2} = \frac{\dot{\mathbf{v}}}{(\dots)} - \mathbf{v} \frac{\left(-\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} + \frac{v^2}{c}\right) - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{R}}{(\dots)^2} \quad (76)$$

なので,

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{e}{c^2} \left\{ \underbrace{\mathbf{v} R \frac{\left(\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{v^2}{c}\right)}{(\dots)^3}}_{(イ)} + \underbrace{\frac{\dot{\mathbf{v}} R}{(\dots)^2}}_{(ロ)} + \underbrace{\mathbf{v} R \frac{\frac{1}{c} \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{R}}{(\dots)^3}}_{(ハ)} \right\}.$$

また第2項について, 式 (75) より

$$-\text{grad} \phi = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}^*} \frac{e}{(\dots)} - (\text{grad} t') \frac{\partial}{\partial t'} \frac{e}{(\dots)}$$

であり, ここで

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}^*} \frac{1}{(\dots)} = -\frac{\frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{v}}{c}}{(\dots)^2} = -\frac{(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R) \left(1 - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R}\right)}{(\dots)^3}, \quad (77)$$

$$\text{grad} t' = -\frac{\mathbf{R}}{c} \frac{1}{(\dots)} : (63.7),$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} \frac{e}{(\dots)} = -\frac{\left(-\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} + \frac{v^2}{c}\right) - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{R}}{(\dots)^2} \quad (\text{式 (76) 最右辺の第2項で } \mathbf{v} \text{ を除いたもの})$$

なので,

$$\begin{aligned} -\text{grad} \phi &= e \frac{(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R) \left(1 - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R}\right)}{(\dots)^3} - \left(-\frac{\mathbf{R}}{c} \frac{1}{(\dots)}\right) e \left(-\frac{\left(-\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} + \frac{v^2}{c}\right) - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{R}}{(\dots)^2}\right) \\ &= e \underbrace{\frac{(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R) \left(1 - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R}\right)}{(\dots)^3}}_{(ニ)} + \frac{e}{c} \mathbf{R} \left\{ \underbrace{\frac{\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{v^2}{c}}{(\dots)^3}}_{(ホ)} + \underbrace{\frac{\frac{1}{c} \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{R}}{(\dots)^3}}_{(ヘ)} \right\}. \end{aligned}$$

以上の項 (イ)-(ヘ) を組み替えよう.

$$(イ) + (ホ) = e \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R\right) \frac{\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{v^2}{c}}{(\dots)^3}, \quad \therefore (ニ) + ((イ) + (ホ)) = e \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R\right) \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{(\dots)^3}$$

であり, これが電場の式 (63.8) で  $\dot{\mathbf{v}}$  を含まない項である. 残りの  $\dot{\mathbf{v}}$  を含む項は

$$\begin{aligned} ((ロ) + (ハ)) + (ヘ) &= \frac{e}{c^2 (\dots)^3} \left\{ -\dot{\mathbf{v}} R \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R\right) + \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R\right) (\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{R}) \right\} \\ &= \frac{e}{c^2 (\dots)^3} \mathbf{R} \times \left\{ \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R\right) \times \dot{\mathbf{v}} \right\} \end{aligned} \quad (78)$$

と得られる.

次に磁場の式 (63.9) の確認に移る. 右辺  $\frac{\mathbf{R}}{R} \times \mathbf{E}$  において

$$\frac{\mathbf{R}}{R} \times e \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{(\dots)^3} \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R\right) = -\frac{e}{c} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{(\dots)^3} \mathbf{R} \times \mathbf{v}. \quad (\because \mathbf{R} \times \mathbf{R} = 0) \quad (79)$$

また  $\mathbf{E}$  の式 (63.8) 第 2 項の寄与は, ベクトル 3 重積を式 (78) の形に戻すと

$$\frac{\mathbf{R}}{R} \times (\text{式 (78)}) = -\frac{e}{c^2(\dots)^3} \left\{ \left( \mathbf{R} \times \frac{\mathbf{v}}{c} \right) (\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{R}) + (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{v}}) \left( R - \mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \right\} \quad (80)$$

となる. まとめて  $\frac{\mathbf{R}}{R} \times \mathbf{E} = (\text{式 (79)}) + (\text{式 (80)})$ .

他方  $H_\alpha = (\nabla \times \mathbf{A})_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta A_\gamma$  において, 式 (75) より

$$\partial_\beta A_\gamma = \partial_\beta^* \frac{ev_\gamma}{c(\dots)} + \frac{\partial t'}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial t'} \frac{ev_\gamma}{c(\dots)}$$

であり,

$$\begin{aligned} \partial_\beta^* \frac{1}{c(\dots)} &= (\text{式 (77)})_\beta = -\frac{(R_\beta - \frac{v_\beta}{c} R) (1 - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R})}{(\dots)^3}, \\ \frac{\partial t'}{\partial x_\beta} &= -\frac{R_\beta}{c} \frac{1}{(\dots)} : (63.7), \\ \frac{\partial}{\partial t'} \frac{v_\gamma}{(\dots)} &= (\text{式 (76)})_\gamma = v_\gamma \frac{\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{v^2}{c}}{(\dots)^2} + \frac{\dot{v}_\gamma}{(\dots)} + \frac{v_\gamma}{c} \frac{\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{R}}{(\dots)^2} \end{aligned}$$

なので,

$$e_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta A_\gamma = -e_{\alpha\beta\gamma} \left[ \underbrace{\frac{e}{c} v_\gamma \frac{(R_\beta - \frac{v_\beta}{c} R) (1 - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R})}{(\dots)^3}}_{(\text{ト})} + \frac{e}{c} R_\beta \left\{ \underbrace{v_\gamma \frac{\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{v^2}{c^2}}{(\dots)^3}}_{(\text{チ})} + \underbrace{\frac{1}{c} \frac{\dot{v}_\gamma}{(\dots)^2}}_{(\text{リ})} + \underbrace{\frac{v_\gamma}{c^2} \frac{\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{R}}{(\dots)^3}}_{(\text{ヌ})} \right\} \right],$$

$$(\text{ト}) + (\text{チ}) = -e_{\alpha\beta\gamma} \frac{e}{c} v_\gamma \frac{R_\beta \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{v_\beta}{c} (R - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{R})}{(\dots)^3} = (\text{式 (79)})_\alpha,$$

( $\beta, \gamma$  について対称な項  $v_\beta v_\gamma$  と反対称な  $e_{\alpha\beta\gamma}$  の縮約が消えるから)

$$(\text{リ}) + (\text{ヌ}) = (\text{式 (80)})_\alpha.$$

以上より式 (63.9):  $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{R}}{R} \times \mathbf{E}$  が示された.

■教科書 p.183, 1.18 の式 (本稿の式 (73)) 第 1 の等号の確認  $\mathbf{R}_t \equiv \mathbf{R}(t)$  とすると

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{R}_t)^2 = (v R_t \sin \theta_t)^2 = (v R_t)^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}_t)^2$$

なので,

$$R_t^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{R}_t)^2 = R_t^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}_t)^2.$$

ここに教科書 p.183, 1.15 の箇所で見た関係  $\mathbf{R}_t = \mathbf{R}_{t'} - \frac{v}{c} R_{t'}$  を代入すると,

$$\begin{aligned} (\text{上式}) &= \left( R_{t'}^2 - 2 \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{R}_{t'} R_{t'} + \frac{v^2}{c^2} R_{t'}^2 \right) \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{1}{c^2} \left( \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}_{t'} - \frac{v^2}{c} R_{t'} \right)^2 \\ &= R_{t'}^2 - 2 \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{R}_{t'} R_{t'} + \frac{v^2}{c^2} R_{t'}^2 \\ &\quad - \frac{v^2}{c^2} R_{t'}^2 + 2 \frac{v^2}{c^2} \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{R}_{t'} R_{t'} - \frac{v^4}{c^4} R_{t'}^2 \\ &\quad + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}_{t'})^2 - 2 \frac{v^2}{c^2} \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{R}_{t'} R_{t'} + \frac{v^4}{c^4} R_{t'}^2 \\ &= \left( R_{t'} - \frac{1}{c} \mathbf{R}_{t'} \cdot \mathbf{v} \right)^2 \end{aligned}$$

となるから示された.

■電荷が複数ある場合 場の方程式の線形性により、複数の電荷が作る一般の放射場は Liénard-Wiechert 型の表式の重ね合せによって得られる。

### § 63, 問題 (Liénard-Wiechert のポテンシャルの導出)

遅延ポテンシャルを

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}', \tau)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(\tau - t + \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right) d\tau dV'$$

という形に書き、1 粒子系の密度の表式  $\rho(\mathbf{r}', \tau) = e\delta[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(\tau)]$  を代入して体積積分を行うと、

$$\phi(\mathbf{r}, t) = e \int \frac{d\tau}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)|} \delta\left(\tau - t + \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)|\right) = e \int \frac{d\tau}{R(\tau)} \delta\left(\tau - t + \frac{1}{c}R(\tau)\right).$$

右辺のデルタ関数の引数を  $F(\tau)$  とおくと、 $F(\tau) = 0$  の根は信号が電荷から発した時刻  $\tau = t'$  である ( $F(t') = 0$  だから)。

$$F(\tau) = 1 + \frac{1}{c} \frac{\partial R(\tau)}{\partial \tau} = 1 - \frac{\mathbf{v}(\tau)}{c} \cdot \frac{\mathbf{R}(\tau)}{R(\tau)} \quad (\because \text{式 (74)})$$

に注意して公式

$$\delta[F(\tau)] = \frac{\delta(\tau - t')}{F'(t')}$$

を適用すると、

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{R(t') - \mathbf{R}(t') \cdot \frac{\mathbf{v}(t')}{c}} : (63.5)$$

を得る ( $\mathbf{A}$  についても同様)。

### § 64. 遅延ポテンシャルのスペクトル分解

図 76 のように要約される (詳細は本稿次節で導出と併せてまとめる)。特に電荷が 1 個だけの場合には

$$\begin{aligned} \phi_\omega &= \int \rho_\omega \frac{e^{ikR}}{R} dV = \iint \frac{\rho}{R} e^{i(\omega t + kR)} dV dt \\ &= e \int \frac{1}{R(t)} e^{i\omega[t + R(t)/c]} dt. \quad (\because \rho = e[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)]) \end{aligned} \quad (64.5)$$

### § 64 について

■スペクトル成分  $\phi_\omega$ , etc. の定義と、 $\phi_\omega, \mathbf{A}_\omega$  の満たす式 (64.1), (64.2) について 「 $\phi$  および  $\rho$  のかわりにそれぞれ  $\phi_\omega e^{-i\omega t}$  および  $\rho_\omega e^{-i\omega t}$  を代入する」 (p.64, 1.6) とし、遅延ポテンシャルの式 (62.9) において  $\phi, \rho$  を

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \phi_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad \rho(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \rho_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$$

と展開することを考えている (このように  $\phi_\omega, \rho_\omega$  は位置  $\mathbf{r}$  の関数である)。すると、

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \phi_\omega(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3x' = \int \frac{d^3x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \int \frac{d\omega}{2\pi} \rho_\omega(\mathbf{r}') e^{-i\omega(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}, \quad \text{etc.}$$

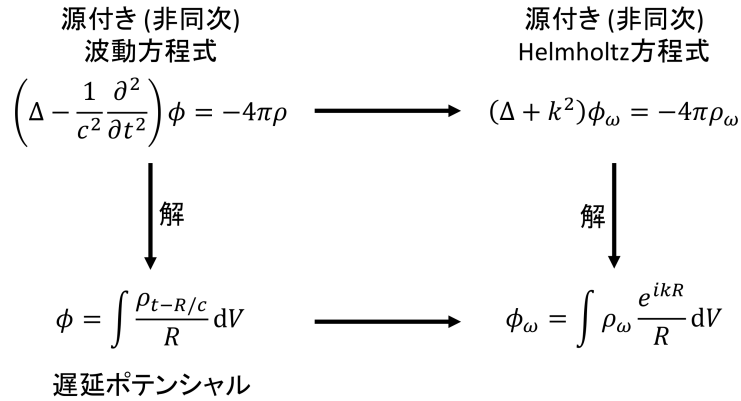


図 76 遅延ポテンシャルのスペクトル成分  $\phi_\omega$  に対する方程式

であり, 両辺を比較して

$$\phi_\omega(\mathbf{r}) = \int \rho_\omega(\mathbf{r}') \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3x', \quad (64.1)$$

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}')}{c} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3x' \quad (64.2)$$

を得る.

離散な振動数に対する一般論 振動数が  $\omega = n\omega_0$  と離散化され,

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(\mathbf{r}) e^{-in\omega_0 t}, \quad \rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_n(\mathbf{r}) e^{-in\omega_0 t} \quad (81)$$

と展開される場合には, 式 (64.1), (64.2) は形式的に  $k = \omega/c \rightarrow n\omega_0/c$  とした

$$\phi_n(\mathbf{r}) = \int \rho_n(\mathbf{r}') \frac{e^{i\frac{n\omega_0}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3x', \quad (64.1')$$

$$\mathbf{A}_n(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathbf{j}_n(\mathbf{r}')}{c} \frac{e^{i\frac{n\omega_0}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3x' \quad (64.2')$$

に置き換わることが, 次のように分かる.

$$\sum_n \phi_n(\mathbf{r}) e^{-in\omega_0 t} = \phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3x' = \int \frac{d^3x'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \sum_n \rho_n(\mathbf{r}') e^{-in\omega_0(t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}, \quad \text{etc.}$$

■源付きの Helmholtz 方程式 (64.3):  $(\Delta + k^2)\phi_\omega = -4\pi\rho_\omega$  の確認 式 (64.1), (64.2) の導出と同様に,

$$\begin{aligned} \int \frac{d\omega}{2\pi} (-4\pi\rho_\omega(\mathbf{r}')) e^{-i\omega t} &= -4\pi\rho(\mathbf{r}, t) = \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi(\mathbf{r}, t) = \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \int \frac{d\omega}{2\pi} \phi_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \\ &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \left\{ \left(\Delta - \frac{(-i\omega)^2}{c^2}\right) \rho_\omega(\mathbf{r}') \right\} e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

■1 個の電荷から成る系に対する  $A_\omega$  の式 (64.6) の確認

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \int \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}') \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3x' \\ &= \frac{1}{c} \int \left[ \int \{e\mathbf{v}(t)\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)]\} e^{i\omega t} dt \right] \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3x' \\ &= \frac{e}{c} \iint \frac{\mathbf{v}(t)\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)] e^{i\omega(t+\frac{1}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3x' dt \\ &= \frac{e}{c} \int \frac{\mathbf{v}(t) e^{i\omega(t+\frac{1}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)|)}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)|} dt : (64.6). \end{aligned}$$

■1 粒子が周期運動する場合の、離散的な振動数での展開 (81) に対する  $\phi_n$  や  $\mathbf{A}_n = (64.7)$  の確認

$$\rho_n(\mathbf{r}) = \int_0^T \rho(\mathbf{r}, t) e^{in\omega_0 t} \frac{dt}{T}, \quad \rho(\mathbf{r}, t) = e\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)]$$

を式 (64.1)' に代入し,

$$\begin{aligned} \phi_n(\mathbf{r}) &= \int \left\{ \int_0^T e\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)] e^{in\omega_0 t} \frac{dt}{T} \right\} \frac{e^{i\frac{n\omega_0}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3x' \\ &= e \int_0^T \frac{dt}{T} \frac{e^{in\omega_0(t+\frac{R(t)})}}{R(t)}. \quad (R(t) \equiv |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)|) \end{aligned}$$

同様に,

$$\mathbf{j}_n(\mathbf{r}) = \int_0^T \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) e^{in\omega_0 t} \frac{dt}{T}, \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = e\mathbf{v}(t)\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)]$$

を式 (64.2)' に代入し,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_n(\mathbf{r}) &= \int \left\{ \frac{1}{c} \int_0^T e\mathbf{v}(t)\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)] e^{in\omega_0 t} \frac{dt}{T} \right\} \frac{e^{i\frac{n\omega_0}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3x' \\ &= \frac{e}{c} \int_0^T \frac{dt}{T} \frac{\mathbf{v}(t) e^{in\omega_0(t+\frac{R(t)})}}{R(t)} : (64.7). \quad (R(t) \equiv |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)|) \end{aligned}$$

## § 64, 問題 (等速度運動する電荷の作る場のスペクトル)

ここでは場の位置  $\mathbf{r}$  に関する Fourier 展開

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \phi_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

を考える. 1 個の電荷が一定の速度  $\mathbf{v}$  で直線運動を行う場合, 座標と時間の原点を適当に選べば  $\rho = e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)$  とおける. 場の方程式

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(\mathbf{r}, t) = -4\pi e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}t) \left( = -4\pi e \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)} \right)$$

の Fourier 成分をとると

$$\left( -k^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi_{\mathbf{k}}(t) = -4\pi e e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}t}, \quad \therefore \ddot{\phi}_{\mathbf{k}} + \omega^2 \phi_{\mathbf{k}} = 4\pi e c^2 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}t}$$

となる ( $\omega = ck$ ). 電荷の作る場を考えているので, 特殊解を調べれば十分であり, それは  $\phi_{\mathbf{k}} = Ae^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}t}$  という形をとる. 上式に代入して係数  $A$  を定めると,

$$\phi_{\mathbf{k}}(t) = 4\pi e \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}t}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)^2}$$

が得られる.  $\mathbf{v} = 0$  とおくと, これは静電場のスペクトル (51.3):  $\phi_{\mathbf{k}} = 4\pi e/k^2$  にもどる. ここでの新たな特徴は, 波数  $\mathbf{k}$  の場のスペクトルが, 振動数  $\Omega = \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}$  で時間とともに振動することである.

p.186 における電場のスペクトル  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$  の式では, 電場の式  $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$  を波数空間に移した関係

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\phi_{\mathbf{k}} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}_{\mathbf{k}}}{\partial t}$$

において,  $\frac{\partial\mathbf{A}_{\mathbf{k}}}{\partial t} = -i\Omega\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$  を考慮すれば良い ( $\Omega = \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}$ ). 再び  $\mathbf{v} = 0$  とすると,  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$  の式は静電場のスペクトル (51.5) にもどり,  $\mathbf{H}_{\mathbf{k}}$  はゼロになる.

## § 65. 2 次の項までとったラグランジアン

非相対論的力学において, 粒子の (同一時刻における) 位置と速度だけに依存するラグランジアン  $L$  を用いる際, 粒子の相互作用が瞬間的に伝わると暗に仮定している [§ 1, 『力学』 § 5].

実際には電荷どうしの相互作用は場を介して行われるため, 場の“内部自由度”を持たない  $L$  で系を記述することは本来できない. しかし  $(v/c)^2$  までの近似では,  $L$  は場の“内部自由度”を持たない形になる.

実際, 電荷  $a$  のラグランジアン

$$L_a = -m_a c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v_a}{c}\right)^2} - e_a \phi + \frac{e_a}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_a \quad (66.2)$$

において, 場  $\phi, \mathbf{A}$  は他の電荷  $b (\neq a)$  が電荷  $a$  の位置に作る遅延ポテンシャルとして与えられる. ところが各電荷の速度が  $v \ll c$  であれば, 遅延ポテンシャルにおける源の分布は時間  $R/c$  のうちに著しく変わることはない. そこで

$$\begin{aligned} \phi &= \int \frac{\rho_{t-R/c}}{R} dV \\ &\simeq \int \frac{\rho dV}{R} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R \rho dV \quad (R/c \text{ で展開し, } (v/c)^2 \text{ 程度の項まで考慮}) \\ &= \int \frac{\rho dV}{R} + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R \rho dV \quad \left( \text{全電荷} \int \rho dV \text{ は一定} \right) \end{aligned} \quad (65.3)$$

$$= \sum_{b(\neq a)} \left( \frac{e_b}{R_{ab}} + \frac{e_b}{2c^2} \frac{\partial^2 R_{ab}}{\partial t^2} \right), \quad (65.5a)$$

$$\mathbf{A} = \int \frac{\mathbf{j}_{t-R/c}}{cR} dV \simeq \int \frac{\mathbf{j}}{cR} dV \quad (R/c \text{ で展開し, } (v/c) \text{ 程度の項まで考慮}) \quad (65.4)$$

$$= \sum_{b(\neq a)} \frac{e_b \mathbf{v}_b}{cR_{ab}} \quad (65.5b)$$

とする. [展開 (65.3), (65.4) を本稿次節で補足. 静電場の自己エネルギーと同様,  $b = a$  の項は興味がないため省略.] このとき  $\frac{e_a}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_a$  は  $-e_a \phi$  と同じく  $(v/c)^2$  程度となる. これらの代わりに, [ $\phi$  の第 2 項を消すような] 適当なゲージ変換を施して得られる, 新しいポテンシャル

$$\phi' = \sum_{b(\neq a)} \frac{e_a}{R_{ab}}, \quad \mathbf{A}' = \sum_{b(\neq a)} \frac{e_b [\mathbf{v}_b + (\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_{ab}) \mathbf{n}_{ab}]}{2cR_{ab}} \quad (65.6)$$



(ただし  $\mathbf{R}_{ab} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b, \mathbf{n}_{ab} = \mathbf{R}_{ab}/R_{ab}$ ) をとることができる (導出は下記). これを  $L_a$  の式 (66.2) に代入し, その第 1 項  $-m_a c^2 \sqrt{1 - (v_a/c)^2}$  も  $v_a/c$  のべきに展開すると [本稿次節で補足],

$$L_a = \frac{m_a v_a^2}{2} + \frac{1}{8} \frac{m_a v_a^4}{c^2} - e_a \sum_{b(\neq a)} \frac{e_b}{R_{ab}} + \frac{e_a}{2c^2} \sum_{b(\neq a)} \frac{e_b}{R_{ab}} [\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_b + (\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n}_{ab})(\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_{ab})] \quad (82)$$

を得る ( $\mathbf{n}_{ab} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$ ). これは場の量を含まない.

系の全ラグランジアンは

$$\begin{aligned} L &= L^{(0)} + L', \quad (|L'| \ll |L_0|) \quad (65.7) \\ L^{(0)} &\equiv \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}}, \quad (\text{第ゼロ近似 (時間の遅延 } R/c \text{ を完全に無視した場合)}) \\ L' &\equiv \sum_a \frac{1}{8} \frac{m_a v_a^4}{c^2} + \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{2c^2 R_{ab}} [\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_b + (\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n}_{ab})(\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_{ab})] \end{aligned}$$

となる. これは単なる和  $\sum_a L_a$  ではなく, 第 3, 第 4 項が粒子対についての和となっていることに注意せよ [この点については § 37 のノートを参照].  $L^{(0)}$  から作ったハミルトニアン

$$\mathcal{H}^{(0)} = \sum_a \frac{p_a^2}{2m_a} + \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}}$$

に対して全ハミルトニアンを  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}'$  と書くと, 第 1 近似の関係  $\mathbf{v}_a = \mathbf{p}_a/m_a$  を用いて  $\mathcal{H}' = -L'|_{\mathbf{v}_a=\mathbf{p}_a/m_a}$  だから,

$$\mathcal{H}^{(0)} = \sum_a \frac{p_a^2}{2m_a} + \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} - \sum_a \frac{p_a^4}{8c^2 m_a^3} - \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{2c^2 m_a m_b R_{ab}} [\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b + (\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{n}_{ab})(\mathbf{p}_b \cdot \mathbf{n}_{ab})]. \quad (65.8)$$

## § 65, 式の導出など

■新しいポテンシャル (65.6) の導出 [粒子が複数ある場合へ一般化しつつまとめる.] ゲージ関数

$$f = \sum_{b(\neq a)} \frac{e_b}{2c} \frac{\partial R_b}{\partial t} \quad (\mathbf{R}_b \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}_b)$$

を用いてゲージ変換を行えば良い. 実際このとき, 粒子  $a$  の位置で評価された場  $\phi$  に関しては

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{b(\neq a)} \left( \frac{e_b}{R_{ab}} + \frac{e_b}{2c^2} \frac{\partial^2 R_{ab}}{\partial t^2} \right) - \sum_{b(\neq a)} \frac{e_b}{2c^2} \frac{\partial^2 R_{ab}}{\partial t^2} = \sum_{b(\neq a)} \frac{e_b}{R_{ab}}$$

となる.

また任意の観測点  $\mathbf{r}$  において,

$$\begin{aligned}
 \text{grad } f &= \nabla \sum_{b(\neq a)} \frac{e_b}{2c} \frac{\partial R_b}{\partial t} = \sum_{b(\neq a)} \frac{e_b}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)| \\
 &= \sum_{b(\neq a)} \frac{e_b}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{R}_b}{R_b} = \sum_{b(\neq a)} \frac{e_b}{2c} \left( \frac{\dot{\mathbf{R}}_b}{R_b} + \frac{\mathbf{R}_b \dot{R}_b}{R_b^2} \right) \\
 &= \sum_{b(\neq a)} \frac{e_b}{2c} \left\{ \frac{-\mathbf{v}_b}{R_b} + \frac{\mathbf{R}_b(\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{R}_b)}{R_b^3} \right\} \quad \left( \because \mathbf{R}_b \equiv (X_b, \dots), \dot{R}_b = \frac{\dot{X}_b X_b + \dots}{\sqrt{\dot{X}_b^2 + \dots}} = \frac{-\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{R}_b}{R_b} \right) \\
 &= \sum_{b(\neq a)} \frac{e_b[-\mathbf{v}_b + \mathbf{n}_b(\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_b)]}{2cR_b} \quad (\mathbf{n}_b \equiv \mathbf{R}_b/R_b)
 \end{aligned}$$

なので, 粒子の位置  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_a$  における場  $\mathbf{A}$  のゲージ変換は

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } f = \sum_{b(\neq a)} \frac{e_b \mathbf{v}_b}{cR_{ab}} + \sum_{b(\neq a)} \frac{e_b[-\mathbf{v}_b + \mathbf{n}_{ab}(\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_{ab})]}{2cR_{ab}} = \sum_{b(\neq a)} \frac{e_b[\mathbf{v}_b + (\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_{ab})\mathbf{n}_{ab}]}{2cR_{ab}}$$

となる.

なお式 (65.6) のポテンシャル  $\phi', \mathbf{A}'$  は Lorenz 条件  $\partial_k A^k = 0$  を満たさないから, 場の方程式  $\partial_k \partial^k A^i = \frac{4\pi}{c} j^i$  も満たさない.

## § 65 について

■遅延ポテンシャルの源を  $R/c$  で展開した式 (65.3),(65.4) について 丁寧に書けば,

$$\begin{aligned}
 \rho \left( \mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) &\simeq \rho(\mathbf{r}', t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t)}{\partial t} \left( -\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho(\mathbf{r}', t)}{\partial t^2} \left( -\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right)^2, \\
 \mathbf{j} \left( \mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) &\simeq \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)
 \end{aligned}$$

として得られる. 連続体に対する表式  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  に書き換えてあるのは,  $\mathbf{A}$  の式 (65.4) が  $v/c$  程度であるのを見やすくするための想像される.

■p.189, 1.7 の  $L_a$  の式 (本稿の式 (82)) について

$$-m_a c^2 \sqrt{1 - \left( \frac{v_a}{c} \right)^2} \simeq -m_a c^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{v_a}{c} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\left( \frac{1}{2} - 1 \right)}{2} \left( \frac{v_a}{c} \right)^4 \right\} \rightarrow \frac{1}{2} m_a v_a^2 + \frac{1}{8} \frac{m_a v_a^4}{c^2}$$

としている. ここで静止エネルギーの項  $-m_a c^2$  は定数なので落とした. また一見  $(v_a/c)^4$  程度に見える項

$$\frac{1}{8} m_a c^2 \left( \frac{v_a}{c} \right)^4 = \frac{1}{8} \frac{m_a v_a^4}{c^2}$$

も  $O(1/c^2)$  として残した. このことは, 式 (82) の第 1 項 (非相対論的な運動エネルギー) と第 3 項 (Coulomb 相互作用のエネルギー) が同程度であるという仮定

$$m_a v_a^2 \sim \frac{e_a^2}{R_{ab}}$$

の下で, 問題の項  $\frac{1}{8} \frac{m_a v_a^4}{c^2}$  が式 (82) 第 4 項 ( $\sim \frac{e_a^2 v_a^2}{c^2 R_{ab}}$ ) と同程度であることから正当化できる.

■ § 65 の結果について

Coulomb 相互作用

場を介した粒子間相互作用では、粒子間を影響が伝わるのに有限の時間を要する。また運動している電荷が作る場は一般に、Coulomb の法則に従う静電場とは異なっている。しかしながら非相対論的な近似 ( $v/c$  の 1 次まで) では粒子間相互作用を、馴染みのある同時刻の Coulomb 相互作用として扱うことが正当化される。そして  $v/c$  の 2 次の近似に進んでも、補正項は場を含まない同時刻の相互作用という結果が得られた。

電気回路の準定常的な変化

抵抗とコンデンサーでの電圧降下がそれぞれ  $RI, Q/C$  となることや、ソレノイド・コイルのインダクタンス  $L$  の公式は静電場・静磁場を仮定して導かれる。それにも関わらず、電荷分布・電流分布が時間変化する場合にも、変化を準定常的と見なせる限りで、これら結果を適用できる。この点について、§ 43 のノートで既に、遅延ポテンシャルの表式に基づいて考察を行った。

§ 65, 問題

1 慣性中心 § 14 で導入した慣性中心 (“エネルギー中心”)

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_a \mathcal{E}_a \mathbf{r}_a}{\mathcal{E}}$$

における粒子のエネルギー  $\mathcal{E}_a = p_a^0$  には場の寄与も含まれる (p.47 脚注 1)。§ 65 と同じ 2 次までの近似では、

$$\mathcal{E}_a = m_a c^2 + \frac{p_a^2}{2m_a} + \sum_{b(\neq a)} \frac{e_a e_b}{R_{ab}}, \quad \mathcal{E} = \sum_a \left( m_a c^2 + \frac{p_a^2}{2m_a} + \sum_{b(>a)} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} \right)$$

として良いことを示した。なるほど、ここでは静止エネルギー  $m_a c^2$  を捨てずに考慮したため (このとき第ゼロ近似で  $\mathbf{R}$  は質量中心に帰す)、そこにハミルトニアン (65.8) における 1 次近似の項までを付け加えれば十分という結果になっている。

なお解の 1.8,9 における部分積分は次のように実行できる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi} \int (\nabla\phi)^2 \mathbf{r} dV &= \frac{1}{8\pi} \int (\partial_\alpha\phi)(\partial_\alpha\phi) \mathbf{r} dV \\ &= \frac{1}{8\pi} \int [\partial_\alpha\{\phi(\partial_\alpha\phi)\mathbf{r}\} - \phi(\partial_\alpha\phi)\partial_\alpha\mathbf{r} - \phi(\partial_\alpha\partial_\alpha\phi)\mathbf{r}] dV \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \phi(\partial_\alpha\phi)\mathbf{r} df_\alpha - \frac{1}{8\pi} \int \nabla \frac{\phi^2}{2} dV - \frac{1}{8\pi} \int \phi(\Delta\phi)\mathbf{r} dV. \end{aligned}$$

ただし最後の等号では第 1 項に発散定理を適用し、第 2 項では、

$$\phi(\partial_\alpha\phi) = \partial_\alpha \frac{\phi^2}{2}, \quad \partial_\alpha \mathbf{r} = \mathbf{e}_\alpha : \text{方向単位ベクトル}$$

を考慮した。

1 2 粒子系のハミルトニアン 単に全運動量  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$  がゼロとなる座標系 ( $C$  系) を採用して、ハミルトニアン (65.8) に  $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{p}$  を代入しさえすれば良い。「 $\mathbf{p} = \partial S / \partial \mathbf{r}$  は粒子の相対運動量」とあるが、正確には相対運動量は  $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = 2\mathbf{p}$  である。(§ 44 の問題には正しく「 $\mathbf{p}$  は相対運動の運動量」とある。)

換算質量を  $m$  として、ハミルトニアン第 1 項は  $p^2/2m$  と書き換えられる。実際、非相対論的極限において、 $C$  系では 2 粒子の速度は  $v_1 = p/m_1, v_2 = p/m_2$  と表されるため、相対速度  $v$  は、通常速度と運動量の関係

$$v = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p = \frac{p}{m}$$

を満たすことになり、相対運動のエネルギーは  $mv^2/2 = p^2/2m$  と書ける。

小問 1,2 を合わせて、系の全体としての運動 (慣性中心の運動) とその周りの相対運動を調べたことになる。

## 第9章 電磁波の放射

### § 66. 電荷の系から遠く離れたところの場

運動している電荷の系が遠方に作る場を考察する. すなわち図 77 のように記号を定義すると  $R_0 \gg r$  であり, このとき

$$R = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}| \simeq R_0 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \quad (83)$$

と近似される [本稿次節で補足]. 遅延ポテンシャルは

$$\phi = \int \frac{\rho_{t-R/c}}{R} dV \simeq \frac{1}{R_0} \int \rho_{t-\frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c}} dV, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{t-R/c}}{R} dV \simeq \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t-\frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c}} dV$$

となる. ここで被積分関数分母の  $R$  における  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$  を無視したのに対し, 電荷密度  $\rho$  と電流密度  $\mathbf{j}$  の引数における  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$  を無視することは一般には許されない. この項を無視できるかどうかは,  $\rho$  と  $\mathbf{j}$  が時間  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}/c$  の間にどれだけ変化するかによって決まる. [この点については § 67 で改めて再論する. 本稿次節でも補足.]

電荷の系から十分離れたところでは, 空間の狭い領域で場を平面波と見なすことができる. そのためには電荷の系からの距離が系の大きさに比べて大きいだけでなく, 電磁波の波長に比べても大きいことが必要である. このような領域は波動帯と呼ばれる. 平面波に対して電磁場は

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{c} (\dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \quad (66.3)$$

のように, ベクトル・ポテンシャルから求められる. (式 (47.3) を参照. ただし  $\phi = 0$  を仮定した電場の式  $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}/c$  はここでは適用できない.) 時刻  $t$  は常に  $t - R_0/c$  という組合せで場の中に現れる.

1つの電荷 (位置  $\mathbf{r}_0$ ) からの放射は Liénard-Wiechert のポテンシャル (63.5):

$$\mathbf{A} = \frac{ev(t')}{c \left( R(t') - \frac{\mathbf{v}(t') \cdot \mathbf{R}(t')}{c} \right)} \simeq \frac{ev(t')}{cR_0 \left( 1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}(t')}{c} \right)} \quad (66.4)$$

によって与えられる. ただし時刻  $t'$  は式 (63.1):

$$t = t' + \frac{R(t')}{c} \simeq t' + \frac{R_0 - \mathbf{r}_0(t') \cdot \mathbf{n}}{c}$$

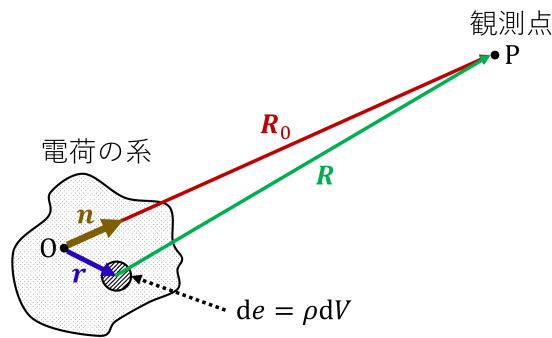


図 77 位置  $\mathbf{r}$  の電荷要素と遠方  $\mathbf{R}_0$  の隔たりのベクトル  $\mathbf{R}$

から定まる.

立体角要素  $d\Omega$  の方向にある半径  $R_0$  の球面上の要素  $R_0^2 d\Omega$  を, 単位時間に通過するエネルギー

$$dI = c \frac{H^2}{4\pi} R_0^2 d\Omega \quad \left( \because \mathbf{S} = c \frac{H^2}{4\pi} \mathbf{n} \right) \quad (66.6)$$

として, この方向に入る放射の強度  $dI$  を定義する. 場は  $1/R_0$  に比例するため, 面要素を貫くエネルギー  $dI$  は各瞬間において, 面要素の原点からの距離  $R_0$  に依らない. これはエネルギーが (電荷の系の外側で) 生成・消滅することなく, 速度  $c$  で広がっていくため, どこにも溜まらないという事実を表している.

場の Fourier 成分

$$\mathbf{A}_\omega = \int \mathbf{j}_\omega \frac{e^{ikR}}{cR} dV \simeq \frac{e^{ikR_0}}{cR_0} \int \mathbf{j}_\omega e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dV, \quad \text{etc.} \quad (\because \mathbf{k} = k\mathbf{n}) \quad (66.7)$$

に対して,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{c} (\dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \quad \rightarrow \quad \mathbf{H}_\omega = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_\omega, \quad \mathbf{E}_\omega = \frac{ic}{\omega} \mathbf{k} \times (\mathbf{A}_\omega \times \mathbf{k}). \quad (66.8)$$

● 荷電粒子の衝突に伴う放射  $\rightarrow$  Fourier 積分への展開.

– 衝突時間  $-\infty \leq t \leq \infty$  のうちに,

区間  $d\omega$  の中の振動数を持つ波の形で立体角要素  $d\Omega$  (方向  $\mathbf{n}$ ) へ放射されるエネルギー

$$d\mathcal{E}_{n\omega} = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{H}_\omega|^2 R_0^2 d\Omega \frac{d\omega}{2\pi}. \quad [\text{本稿次節で補足}] \quad (66.9)$$

– 与えられた電荷の運動  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t)$  から, 放射場の Fourier 成分は

$$\mathbf{A}_\omega = \int \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{j} e^{i\omega t} dt \right\} \frac{e^{ikR}}{cR} dV = \frac{e^{ikR_0}}{cR_0} \int dt e^{i\omega t} \mathbf{v}(t) e^{i[\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0(t)]} \quad (66.11)$$

$$= e \frac{e^{ikR_0}}{cR_0} \int d\mathbf{r}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0)}, \quad (66.12)$$

$$\mathbf{H}_\omega = e \frac{i\omega e^{ikR_0}}{c^2 R_0} \int e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0)} \mathbf{n} \times d\mathbf{r}_0$$

と定まる. [簡単のために 1 個の電荷が作る場を考えた.]

● 電荷の有限な周期的運動 (周期  $T$ )  $\rightarrow$  Fourier 級数への展開.

– 振動数  $\omega = n\omega_0$  (ただし  $\omega_0 = 2\pi/T$ ) の波の形で単位時間に

立体角要素  $d\Omega$  (方向  $\mathbf{n}$ ) へ放射されるエネルギーの, 周期  $T$  における時間平均

$$dI_n = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{H}_n|^2 R_0^2 d\Omega. \quad (66.10)$$

– 与えられた電荷の運動  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t)$  から, 放射場の Fourier 成分は

$$\mathbf{A}_n = \int \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{j} e^{i\omega t} dt \right\} \frac{e^{ikR}}{cR} dV,$$

$$\mathbf{H}_n = e \frac{i\omega e^{ikR_0}}{c^2 R_0} \frac{1}{T} \oint e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0)} \mathbf{n} \times d\mathbf{r}_0 = e \frac{2\pi i n e^{ikR_0}}{c^2 T^2 R_0} \oint e^{i(n\omega_0 t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0)} \mathbf{n} \times d\mathbf{r}_0$$

と定まる. [簡単のために 1 個の電荷が作る場を考えた.]

[最後に荷電粒子の衝突に伴う, Fourier 積分へと展開される放射を想定して, 本章で考察の対象となる様々な意味での放射のエネルギーの関係を図 78 にまとめておく.]

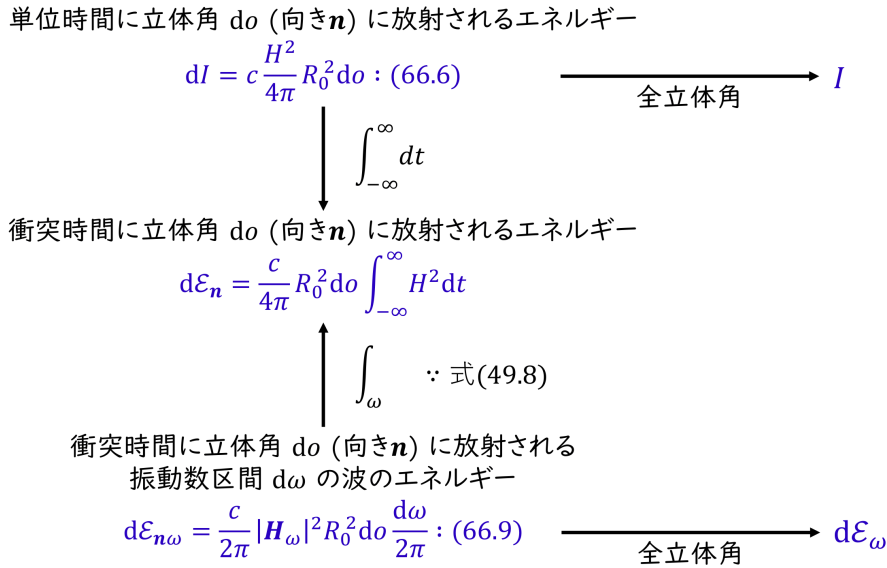


図 78 Fourier 積分へと展開される放射の、様々な意味でのエネルギーの関係

## § 66 について

■ § 66, 1.8 における  $R$  の近似式 (本稿の式 (83)) について  $R \simeq R_0 + \mathbf{r} \cdot \left( \frac{\partial R}{\partial \mathbf{r}} \right)_{\mathbf{r}=0}$  において

$$\left( \frac{\partial R}{\partial \mathbf{r}} \right)_{\mathbf{r}=0} = \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}| \right)_{\mathbf{r}=0} = - \left( \frac{\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}|} \right)_{\mathbf{r}=0} = \frac{\mathbf{R}_0}{R_0} = \mathbf{n}$$

である。

■ 「 $\rho$  および  $\mathbf{j}$  という量が時間  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}/c$  のあいだにどれだけ変化するかによってきまる」 (§ 66, 1.12~13) について

$$\rho_{t-R/c} = \rho_{t-(R_0-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})/c} = \rho_{t-R_0/c} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{c} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{t-R_0/c}$$

における微分係数  $(\partial \rho / \partial t)$  が大きな値をとる場合,  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}/c$  の項を無視できない。したがって Fourier 成分の式 (66.7) においても, 分母では  $R = R_0$  と置けるのに対し, 分子では  $\mathbf{r}$  の項を無視できない。

■ p.192 脚注 1 について

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{c}} dV, \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{1}{cR_0^2} \mathbf{n} \times \int \mathbf{j}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{c}} dV + \frac{1}{cR_0} \int \nabla \times \mathbf{j}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{c}} dV$$

(ただし  $\nabla = \partial / \partial \mathbf{R}$ ) において

$$\begin{aligned} \left[ \nabla \times \mathbf{j}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{c}} \right]_{\alpha} &= e_{\alpha\beta\gamma} \partial_{\beta} \left[ \mathbf{j}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{c}} \right]_{\gamma} = e_{\alpha\beta\gamma} \left\{ \partial_{\beta} \left( t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{c} \right) \right\} \left[ \mathbf{j}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{c}} \right]_{\gamma} \\ &= -\frac{1}{c} e_{\alpha\beta\gamma} n_{\beta} \left[ \dot{\mathbf{j}}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{c}} \right]_{\gamma} \end{aligned}$$

なので,  $1/R_0^2$  の項を  $1/R_0$  の項に比べて無視すると

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{c} \mathbf{n} \times \frac{1}{cR_0} \int \dot{\mathbf{j}}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{c}} dV = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}$$

を得る.

■放射されるエネルギー  $d\mathcal{E}_{n\omega}$  の式 (66.9) について 荷電粒子の衝突時間  $-\infty \leq t \leq \infty$  に放射される全エネルギーは, 単位時間に放射されるエネルギーの式 (66.6) の時間積分

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}} = \frac{c}{4\pi} R_0^2 d\Omega \int_{-\infty}^{\infty} H^2 dt$$

によって与えられる. 磁場  $\mathbf{H}$  の任意の成分を  $f$  と書くと, 右辺の時間積分 (に対する成分  $f$  の寄与) は, 波の全強度の式 (49.8):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2 dt = 2 \int_0^{\infty} |f_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi}$$

によって表される. よって区間  $d\omega$  の中の振動数を持つ波の寄与は

$$2|f_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi}$$

となるので, 放射されるエネルギーの式 (66.9):

$$d\mathcal{E}_{n\omega} = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{H}_\omega|^2 R_0^2 d\Omega \frac{d\omega}{2\pi}$$

を得る.

## § 67. 双極放射

時間  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}/c$  における電荷分布の変化が小さく, 遅延ポテンシャルの中の電荷密度・電流密度の引数における  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}/c$  を無視できる条件を考える.

$T$ : 電荷分布が著しく変化するのに要する時間,

$a$ : 電荷の系の大きさの程度

とすると,  $T$  は放射される波の周期の目安となるので, 対応する波長を  $\lambda = cT$  と書くと求める条件は

$$\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{c} \sim \frac{a}{c} \ll T, \quad \therefore a \ll \lambda$$

と表される. すなわち電荷の系の大きさは放射される波の波長に比べて小さくなければならない. これは場の Fourier 成分 (66.7):

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e^{ikR_0}}{cR_0} \int \mathbf{j}_\omega e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dV$$

において, 電荷の位置  $\mathbf{r}$  を無視できる条件  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \sim ka \ll 1$  としても得られる. これは電荷の速度の代表的な速度  $v$  に対する条件

$$v \ll c$$

に書き換えられる ( $T \sim a/v$  による). すなわち電荷の運動は非相対論的な速度で行われなければならない.



この条件の下で、波動帯  $R_0 \gg \lambda (\gg a)$  における場を考察しよう。このとき場は近似的に平面波と見なすことができ、ベクトル・ポテンシャルのみから決定される (§ 66)。この近似では遅延ポテンシャルの被積分関数における電流密度の引数の時刻  $t' = t - R_0/c$  はもはや電荷の位置  $\mathbf{r}$  に依存しておらず、場は双極子モーメント

$$\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r}$$

を用いて

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t'} dV = \frac{1}{cR_0} \sum e\mathbf{v}(t') = \frac{1}{cR_0} \dot{\mathbf{d}}(t'), \quad (67.4)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n} = \frac{1}{c^2 R_0} \ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{c} (\dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} = \frac{1}{c^2 R_0} (\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \quad (67.5-6)$$

と表される (電磁場の表式では引数  $t'$  を省略した)。このような放射を双極放射と呼ぶ。

■電荷の加速運動と放射 この結果によれば一様な運動をしている電荷の系に対しては  $\ddot{\mathbf{d}} = 0$  となるので放射は起こらず、放射は電荷の加速運動によってもたらされることが分かる。このことは、一様な運動をしている電荷の静止系では放射が存在しないことから期待される結果である [§ 38, § 63 も参照]。

■双極放射の強度とそのスペクトル分解 放射の強度 (66.6) は双極放射に対して

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} (\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) d\omega = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta d\omega \quad (67.7)$$

となる。ここに  $\theta$  は  $\ddot{\mathbf{d}}$  と  $\mathbf{n}$  の成す角である。これを全立体角で積分すると、単位時間に放射される全エネルギー

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2 \quad (67.8)$$

を得る [本稿次節で補足]。特に1個の電荷に対しては  $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$  なので、全放射は加速度  $\mathbf{w} = \ddot{\mathbf{r}}$  を用いて

$$I = \frac{2e^2 w^2}{3c^3} \quad (67.9)$$

と表される。

- 衝突に伴う放射に対して、  
衝突時間  $-\infty \leq t \leq \infty$  に区間  $d\omega$  の中の振動数を持つ波の形で放射されるエネルギー

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{4\omega^4}{3c^3} |\mathbf{d}_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \quad [\text{本稿次節で補足}] \quad (67.10)$$

- 粒子の周期的な運動に伴う放射に対して、  
振動数  $\omega = n\omega_0$  の波が単位時間に持ち去るエネルギーの1周期にわたる平均

$$I_n = \frac{4\omega_0^4 n^4}{3c^3} |\mathbf{d}_n|^2. \quad [\text{本稿次節で補足}] \quad (67.11)$$

■電荷と質量の比  $e/m$  が全ての粒子に共通の系は双極放射を起こさないこと 実際、そのような系に対して双極子モーメント

$$\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r} = \frac{e}{m} \sum m\mathbf{r}$$

は慣性中心  $\mathbf{R} = \sum m\mathbf{r} / \sum m$  に比例する。ここで双極放射の条件として荷電粒子の非相対論的運動を仮定していたことに注意して非相対論的を適用すると、慣性中心は一樣な運動をするから  $\dot{\mathbf{d}} = 0$  となる。[相対論において慣性中心に対応する、一樣な並進を行う位置は式 (14.6):  $\mathbf{R} = \sum \mathcal{E}\mathbf{r} / \sum \mathcal{E}$  である.] よって双極放射は起こらない。

## § 67 について

■電気双極子近似におけるスカラー・ポテンシャル ここではベクトル・ポテンシャル  $\mathbf{A}$  において、 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}/c$  によるベキ展開の最低次の項のみを考えたことになる (§ 71 を参照)。他方、ここでは  $\phi = 0$  のゲージを採用しているわけではないけれども、平面波の公式 (66.3) を用いて電場が求まるため、スカラー・ポテンシャルの展開を調べる必要はない。あえてスカラー・ポテンシャルを考えれば、静電場と同様 (§ 40, § 41),  $\phi$  の展開の最初の項は全電荷に比例し、これは時間的に一定だから放射に寄与しない [7, pp.294–297] [20, p.304]。

■全方向に放射されるエネルギーの式 (67.8) について  $d\omega = 2\pi \sin\theta d\theta$  とおき、

$$\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \int_{-1}^1 (1 - \cos^2\theta) d(\cos\theta) = \left[ \cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}$$

を利用する。

■「したがって非相対論的力学が適用できることを思い起こそう」(p.197, l.7,8) について § 67 の要約でも述べたように、相対論において慣性中心に対応する、一樣な並進を行う位置は式 (14.6):  $\mathbf{R} = \sum \mathcal{E}\mathbf{r} / \sum \mathcal{E}$  である。

■「(67.8) のベクトル  $\ddot{\mathbf{d}}$  をそのフーリエ成分  $\ddot{\mathbf{d}}_\omega$  でおきかえ、2 をかけることによって得られる」(p.197, l.12,13) について 単位時間に放射されるエネルギーの式 (67.8):  $I = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2$  を時間積分し ( $\mathcal{E}$  とおく), § 66 と同様に式 (49.8) を考慮して振動数の区間  $d\omega$  からの寄与を取り出すと

$$\mathcal{E} = \frac{2}{3c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{\mathbf{d}}^2 dt \rightarrow d\mathcal{E}_\omega = \frac{2}{3c^3} \times 2\ddot{\mathbf{d}}_\omega \frac{d\omega}{2\pi}$$

を得る。

■フーリエ成分  $\ddot{\mathbf{d}}_\omega$  について  $\ddot{\mathbf{d}}_\omega$  は  $\ddot{\mathbf{d}}$  の Fourier 成分 ( $\ddot{\mathbf{d}}_\omega$ ) の意味であり、

$$\mathbf{d} \sim \mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t} \rightarrow \ddot{\mathbf{d}} \sim -\omega^2 \mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t} \equiv \ddot{\mathbf{d}}_\omega e^{-i\omega t}$$

より  $\ddot{\mathbf{d}}_\omega = -\omega^2 \mathbf{d}_\omega$  (p.197, l.17 の式) を得る。

■粒子が周期運動する場合の式 (67.11) について 式 (67.8):  $I = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2$  の 1 周期にわたる時間平均をとり、一般公式 (49.4):

$$\bar{f}^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2$$

を考慮して振動数  $\omega = n\omega_0$  の寄与を取り出すと

$$\bar{I} = \frac{2}{3c^3} \bar{\ddot{\mathbf{d}}^2} \rightarrow \frac{4}{3c^3} |\ddot{\mathbf{d}}_n|^2 = \frac{4\omega_0^4 n^4}{3c^3} |\mathbf{d}_n|^2 : (67.11)$$

を得る ( $\ddot{\mathbf{d}}_n = -(n\omega_0)^2 \mathbf{d}_n$ )。

## § 68. 衝突のあいだの双極放射

衝突の間の放射 (制動放射と呼ぶ) に関して, 互いに平行に運動する粒子から成るビーム全体の散乱に興味を持たれる. [ビームの散乱による放射はビームの粒子数密度に, したがって流れの密度に比例すると考えられる. そこで] 単位の流れの密度あたりの全放射を考える. 散乱中心を通り, ビームに平行な直線を  $x$  軸に選ぼう.  $x$  軸からの距離, すなわち衝突径数が  $\rho$  の粒子からの双極放射の強度は, 粒子の散乱中心に関する双極モーメントを  $\mathbf{d}$  として式 (67.7):

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} (\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n})^2 d\omega$$

によって与えられる. 散乱の軸対称性を仮定してこれをビームに垂直な  $yz$  面内で平均する (この平均操作をバーで表す). 単位の流れの密度を考えているので, 衝突径数の幅  $d\rho$  を単位時間に通過する粒子数は, 円環の面積  $2\pi\rho d\rho$  に一致する. よって衝突の全時間に (立体角  $d\omega$  の方向に) 放射されるエネルギーは

$$d\kappa_{\mathbf{n}} = \frac{d\omega}{4\pi c^3} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \overline{(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n})^2} dt 2\pi\rho d\rho = \int_0^\infty \Delta \mathcal{E} \cdot 2\pi\rho d\rho, \quad (68.1)$$

$$\Delta \mathcal{E} \equiv \frac{d\omega}{4\pi c^3} \int_{-\infty}^\infty \overline{(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n})^2} dt : 1 \text{ 粒子からの全放射}$$

と表される. この量  $d\kappa_{\mathbf{n}}$  を有効放射と呼ぶ. さらにこれは

$$d\kappa_{\mathbf{n}} = \frac{d\omega}{4\pi c^3} \left[ A + B \frac{3\cos^2\theta - 1}{2} \right], \quad (68.2)$$

$$A \equiv \frac{2}{3} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \ddot{\mathbf{d}}^2 dt 2\pi\rho d\rho, \quad B \equiv \frac{1}{3} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\ddot{\mathbf{d}}^2 - 3\ddot{d}_x^2) dt 2\pi\rho d\rho \quad (68.3)$$

と書き換えられる (導出は下記). ここでは全有効放射を計算する際に全立体角に関する積分に寄与する項 ( $A$  に比例する項) を分離してあり (第 2 項の  $d\omega$  についての積分はゼロ [本稿次節参照]), 全有効放射は  $\kappa = A/c^3$  となる. 放射の角度分布は,  $\theta$  を  $\pi - \theta$  に置き換えても不変となるような, ビームの“上流”と“下流”に関する対称性を有している. この性質は双極放射の近似に特有である.

有効放射  $d\kappa_{\mathbf{n}}$  は,  $x$  軸と  $\mathbf{n}$  を含む面内に電場ベクトルを持つような偏光した放射に対する値  $d\kappa_{\mathbf{n}}^\perp$  と, 電場ベクトルがこの面に垂直に偏光した放射に対する値  $d\kappa_{\mathbf{n}}^\parallel$  に分解でき,

$$d\kappa_{\mathbf{n}}^\perp = \frac{d\omega}{4\pi c^3} \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\ddot{\mathbf{d}}^2 - \ddot{d}_x^2) dt 2\pi\rho d\rho \quad (68.4)$$

と計算される (導出は下記,  $d\kappa_{\mathbf{n}}^\parallel = d\kappa_{\mathbf{n}} - d\kappa_{\mathbf{n}}^\perp$ ). (添字  $\perp, \parallel$  は, 考えている偏光の磁場方向と面の関係を表す.)

§ 66 と同様に一般公式 (49.8) に注意して, 有効放射  $d\kappa_{\mathbf{n}}$  から区間  $d\omega$  の振動数を持つ波の寄与を取り出すと

$$d\kappa_{\mathbf{n}\omega} = \frac{d\omega}{2\pi c^3} \left[ A(\omega) + B(\omega) \frac{3\cos^2\theta - 1}{2} \right] \frac{d\omega}{2\pi},$$

$$A(\omega) \equiv \frac{2\omega^4}{3} \int_0^\infty \ddot{\mathbf{d}}_\omega^2 2\pi\rho d\rho, \quad B(\omega) \equiv \frac{\omega^4}{3} \int_0^\infty (\ddot{\mathbf{d}}_\omega^2 - 3\ddot{d}_{x\omega}^2) dt 2\pi\rho d\rho$$

である.

§ 68, 式の導出など

■有効放射の公式 (68.2),(68.3) の導出  $x$  軸周りの軸対称性より

$$\overline{\ddot{d}_y} = \overline{\ddot{d}_z} = 0, \quad \overline{\ddot{d}_x \ddot{d}_y} = \overline{\ddot{d}_x \ddot{d}_z} = 0, \quad \overline{\ddot{d}_y^2} = \overline{\ddot{d}_z^2} = \frac{1}{2}[(\ddot{\mathbf{d}})^2 - \ddot{d}_x^2]$$

であり [第 2 式を本稿次節で補足], これらを用いると

$$\overline{(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n})} = \overline{\ddot{\mathbf{d}}^2 - (\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{d}})^2} = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{d}}^2 + \ddot{d}_x^2) + \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{d}}^2 - 3\ddot{d}_x^2) \cos^2 \theta \quad (84)$$

が得られる [本稿次節で補足]. これを有効放射の式 (68.1) に代入して, 式 (68.2),(68.3) を得る [本稿次節で補足].

■式 (68.4) の導出

電場のベクトルは, ベクトル

$$(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{d}}) - \ddot{\mathbf{d}}$$

の方向をもっている ((67.6) をみよ). このベクトルの  $xy$  平面に垂直な方向の成分は,  $-\ddot{d}_z$  であり, その  $xy$  平面への射影は  $\sin \theta \ddot{d}_x - \cos \theta \ddot{d}_y$  である (後者は, 磁場の  $z$  成分に等しく, それによってもっと簡単にきめられる. 磁場は  $\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}$  の方向を持つ) [本稿次節で補足].

$\mathbf{E}$  を 2 乗し,  $yz$  平面におけるベクトル  $\ddot{\mathbf{d}}$  のあらゆる方向について平均すると, まず第 1 に  $xy$  平面への場の射影とそれに垂直な平面への射影との積が消えることがわかる. このことは, 強度を 2 つの独立な部分——2 つのたがいに垂直な平面内に偏光した放射の強度——の和として表 [わ] すことが実際可能であることを意味する. [この段落を本稿次節で補足する.]

$xy$  平面内に電場のベクトルをもつ放射の強度は, 2 乗平均  $\ddot{d}_z^2 = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{d}}^2 - \ddot{d}_x^2)$  によって定められる. 有効放射のうち対応する部分に対して (…… [式 (68.4)] ) という表式が得られる [本稿次節で補足].

§ 68 について

■「平均は  $\ddot{d}_x$  に関係ないから」(p.199, l.23) について

$$\overline{\ddot{d}_x \ddot{d}_y} = \overline{\ddot{d}_x} \cdot \overline{\ddot{d}_y}, \quad \overline{\ddot{d}_x \ddot{d}_z} = \overline{\ddot{d}_x} \cdot \overline{\ddot{d}_z}$$

とできることを述べていると考えられる.

■p.200, l.1 の式 (本稿の式 (84)) について

$$\overline{(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n})^2} = \overline{\ddot{\mathbf{d}}^2} - \overline{(\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{d}})^2}$$

において

$$\begin{aligned}
 \overline{(\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{d}})^2} &= n_\alpha n_\beta \overline{\ddot{d}_\alpha \ddot{d}_\beta} \\
 &= n_x^2 \overline{\ddot{d}_x^2} + n_y^2 \overline{\ddot{d}_y^2} + n_z^2 \overline{\ddot{d}_z^2} \\
 &= \ddot{d}_x^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} (\ddot{\mathbf{d}}^2 - \ddot{d}_x^2) \sin^2 \theta \quad (\because n_x = \cos \theta, n_y^2 + n_z^2 = \sin^2 \theta) \\
 &= \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{d}}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \ddot{d}_x^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \\
 &= \frac{1}{2} (\ddot{\mathbf{d}}^2 - \ddot{d}_x^2) - \frac{1}{2} (\ddot{\mathbf{d}}^2 - 3 \ddot{d}_x^2) \cos^2 \theta
 \end{aligned}$$

なので,

$$\overline{(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n})^2} = \frac{1}{2} (\ddot{\mathbf{d}}^2 + \ddot{d}_x^2) + \frac{1}{2} (\ddot{\mathbf{d}}^2 - 3 \ddot{d}_x^2) \cos^2 \theta$$

を得る.

■  $d\kappa_{\mathbf{n}}$  の式 (68.2) について

$$\begin{aligned}
 \overline{(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n})^2} &= \frac{1}{2} (\ddot{\mathbf{d}}^2 + \ddot{d}_x^2) + \frac{1}{2} (\ddot{\mathbf{d}}^2 - 3 \ddot{d}_x^2) \cos^2 \theta \\
 &= \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) \ddot{\mathbf{d}}^2 - 3 \frac{1}{3} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \ddot{d}_x^2
 \end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}
 d\kappa_{\mathbf{n}} &= \frac{do}{4\pi c^3} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \overline{(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n})^2} dt 2\pi \rho d\rho = \frac{do}{4\pi c^3} \left[ A + B \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right] : (68.2), \\
 A &\equiv \frac{2}{3} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \ddot{\mathbf{d}}^2 dt 2\pi \rho d\rho, \quad B \equiv \frac{1}{3} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\ddot{\mathbf{d}}^2 - 3 \ddot{d}_x^2) dt 2\pi \rho d\rho
 \end{aligned}$$

を得る.

■ 「(68.2) の第 2 項は,  $do$  について積分するとゼロになるような形に書かれている」 (p.200, 1.8) について  $\mathbf{d}$  と  $\mathbf{n}$  の成す角  $\theta$  を積分変数にとると,  $do = 2\pi \sin \theta d\theta$  なので

$$\int \frac{do}{4\pi} (3 \cos^2 \theta - 1) = \frac{3}{2} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta - 1 = \frac{1}{2} [\cos^3 \theta]_0^\pi - 1 = 0$$

である.

■ 「このベクトルの…… $\ddot{d}_x$  であり, …… $\sin \theta \ddot{d}_x - \cos \theta \ddot{d}_y$  である」 (p.200, 1.18,19) について 図 79 より

$$\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{d}}) = (\cos \theta \ddot{d}_x + \sin \theta \ddot{d}_y)(\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

なので, 電場方向のベクトルは

$$\tilde{\mathbf{E}} \equiv \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{d}}) - \ddot{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} -\sin^2 \theta \ddot{d}_x + \sin \theta \cos \theta \ddot{d}_y \\ \sin \theta \cos \theta \ddot{d}_x - \cos^2 \theta \ddot{d}_y \\ -\ddot{d}_z \end{pmatrix}$$

と成分計算される. その  $xy$  面への射影は

$$\tilde{E}_{\parallel}^2 \equiv \tilde{E}_x^2 + \tilde{E}_y^2 = (\sin \theta \ddot{d}_x - \cos \theta \ddot{d}_y)^2$$

から定まる.

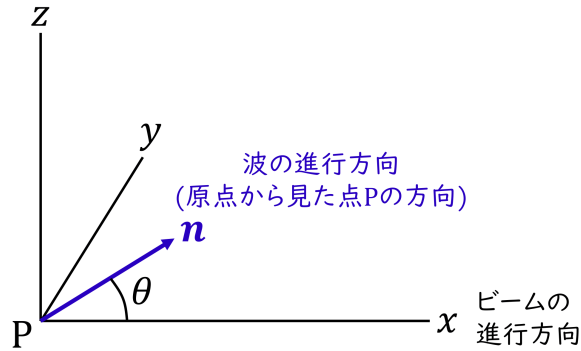


図 79  $x$  軸と  $\mathbf{n}$  を含む平面を  $xy$  面に選ぶ

■ 「 $\mathbf{E}$  を 2 乗し, ……」 の段落 (p.200, 1.21~) について  $\overline{\tilde{E}_{\parallel}\tilde{E}_z} = 0$  より

$$\overline{\tilde{E}^2} = \overline{\tilde{E}_{\parallel}^2} + \overline{\tilde{E}_z^2}$$

のように, 場の強度を  $\tilde{E}_{\parallel}$  方向と  $z$  方向の偏光を持つ放射の強度に分解できる.

■  $xy$  面内に電場ベクトルを持つ放射の強度 (68.4) について 対応する磁場は  $z$  軸に平行であり, その  $z$  成分は  $H = \frac{1}{c^2 R_0} \ddot{d}_z$  である. これを  $yz$  面内で平均して放射強度の式 (66.6):  $dI = c \frac{H^2}{4\pi} R_0^2 d\Omega$  に代入し, 時間と衝突径数についての積分を施すと式 (68.4):

$$d\kappa_{\mathbf{n}}^{\perp} = \frac{d\Omega}{4\pi c^3} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\ddot{d}_z^2} dt 2\pi \rho d\rho$$

を得る.

## § 69. 低振動数の制動放射

制動放射における主要な振動数  $\omega_0$  に比べて小さい振動数の “すそ”  $\omega \ll \omega_0$  を考える. 本節では粒子の速度が非相対論的であるという, 双極放射の条件を用いない. Fourier 成分の式

$$\mathbf{H}_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H} e^{i\omega t} dt$$

において積分に寄与する, 放射場  $\mathbf{H}$  がゼロと著しく異なる時間は  $1/\omega_0$  程度であり [§ 58 参照],  $\omega \ll \omega_0$  に対してはその間,  $\omega t \ll 1, e^{i\omega t} \simeq 1$  となるので,

$$\mathbf{H}_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H} dt$$

とできる. これに  $\mathbf{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}$  を代入し, Liénard-Wiechert のポテンシャルの式 (66.4) を用いて衝突前後のベクトル・ポテンシャルをそれぞれ

$$\mathbf{A}_1 = \sum \frac{e\mathbf{v}_1}{cR_0(1 - \frac{1}{c}\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_1)}, \quad \mathbf{A}_2 = \sum \frac{e\mathbf{v}_2}{cR_0(1 - \frac{1}{c}\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_2)}$$

と書く ( $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  は衝突前後の粒子の速度であり,  $\sum$  は衝突する 2 粒子に関する和を表す),

$$\mathbf{H}_\omega = \frac{1}{c}(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \times \mathbf{n}$$

となる. よって全放射の式 (66.9):  $d\mathcal{E}_{n\omega} = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{H}_\omega|^2 R_0^2 d\omega \frac{d\omega}{2\pi}$  は

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_{n\omega} &= \frac{c}{2\pi} \left\{ \frac{1}{c}(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \times \mathbf{n} \right\}^2 R_0^2 d\omega \frac{d\omega}{2\pi} \\ &= \frac{1}{4\pi^2 c^3} \left\{ \sum e \left( \frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{n}}{1 - \frac{1}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_2} - \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{n}}{1 - \frac{1}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_1} \right) \right\}^2 d\omega d\omega \end{aligned}$$

を与える. このように低い振動数  $\omega \ll \omega_0$  では, 放射のスペクトル分解  $d\mathcal{E}_{n\omega}/d\omega$  が振動数  $\omega$  に依らない.

非相対論的極限をとると

$$d\mathcal{E}_{n\omega} = \frac{1}{4\pi^2 c^3} \left\{ \sum e(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \times \mathbf{n} \right\}^2 d\omega d\omega$$

となる. これは双極放射に対するベクトル・ポテンシャルが式 (67.4):  $\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \dot{\mathbf{d}}$  であることから期待される結果である.

ここで核からの  $\beta$  粒子の放出のような, 新しい荷電粒子の発生を考える. このとき粒子は初速ゼロから与えられた値まで瞬間的に変化すると考えなければならず, 衝突の時間の程度は  $\tau \rightarrow 0$  だから,  $\omega_0 \sim 1/\tau \rightarrow \infty$  である. よってどのような振動数  $\omega$  に対しても条件  $\omega \ll \omega_0$  が満たされ, 以上の結果を適用できることになる (古典論による取り扱いが有効な限りでは).

## § 70. クーロン相互作用がある場合の放射

2つの荷電粒子が Coulomb 力により相互作用している場合の双極放射を考える. [すなわち電荷はもう一方の電荷が作る, Coulomb の法則に従う電場のみから力を受けると考える (非相対論的な近似, § 65 参照).] 系の全体としての一様な並進運動は放射を起ささないから, 慣性中心系において放射を考えれば十分である. このとき放射を決める系の双極モーメント  $\mathbf{d} = e_1 \mathbf{r}_1 + e_2 \mathbf{r}_2$  は, 2 粒子の相対位置ベクトル  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  を用いて

$$\mathbf{d} = \mu \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \mathbf{r} \quad (70.1)$$

と表される ( $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  は換算質量) [本稿次節で補足].  $\mathbf{r}$  の時間発展は換算質量  $\mu$  を持ち  $\mathbf{r}$  を位置ベクトルとする仮想的な 1 粒子の, Coulomb 場  $U = \pm \alpha / r$  (ただし  $\alpha \equiv |e_1 e_2|$  であり, 複号は引力に対して負号を, 斥力に対して正号をとる) の下での運動として与えられる (第 1 巻『力学』§ 13 参照).

■ 引力相互作用の下での楕円運動 周期  $T = 2\pi \sqrt{\mu a^3 / \alpha}$  の楕円運動

$$x = a(\cos \xi - \varepsilon), \quad y = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \xi, \quad \omega_0 t = \xi - \varepsilon \sin \xi \quad (70.5)$$

(ただし  $a$  は楕円の長半径,  $\varepsilon (< 1)$  は離心率,  $\omega_0 \equiv 2\pi/T$ , 第 1 巻『力学』§ 15 参照) の, 振動数  $\omega = n\omega_0$  に関する Fourier 成分は, Bessel 関数

$$J_n(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n\xi - x \sin \xi)} d\xi \quad (70.6')$$

を用いて

$$x_n = \frac{a}{n} J'_n(n\varepsilon), \quad y_n = \frac{ia\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{n\varepsilon} J_n(n\varepsilon) \quad (70.7)$$

と計算される (プライムは引数による微分, 導出は下記). よって振動数  $\omega = n\omega_0$  の放射強度の式 (67.11):

$$I_n = \frac{4\omega_0^4 n^4}{3c^3} |\mathbf{d}_n|^2 = \frac{4\omega_0^4 n^4}{3c^3} \mu^2 \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 (|x_n|^2 + |y_n|^2) \quad (85)$$

は

$$I_n = \frac{64n^2 \mathcal{E}^4}{3c^3 \alpha^2} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \left[ J_n'^2(n\varepsilon) + \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2} J_n^2(n\varepsilon) \right] \quad (70.8)$$

となる ( $\mathcal{E}$  は (静止エネルギーを除く) 全エネルギー, 係数の計算は下記).

特に離心率が  $\varepsilon \simeq 1$  のときの漸近形は, Airy 関数

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos\left(\frac{\xi^3}{3} + \xi t\right) d\xi$$

を用いて

$$I_n = \frac{64 \cdot 2^{2/3} n^{4/3} \mathcal{E}^4}{3\pi c^3 \alpha^2} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \left\{ (1-\varepsilon^2) \Phi^2 \left[ \left(\frac{n}{2}\right)^{2/3} (1-\varepsilon^2) \right] + \left(\frac{2}{n}\right)^{2/3} \Phi'^2 \left[ \left(\frac{n}{2}\right)^{2/3} (1-\varepsilon^2) \right] \right\} \quad (70.10)$$

と表される (導出は下記) [本稿次節で補足, プライムは  $n\varepsilon$  による微分]. この結果は Airy 関数と

$$\Phi(t) = \sqrt{\frac{t}{3\pi}} K_{1/3} \left( \frac{2}{3} t^{3/2} \right), \quad \Phi'(t) = -\frac{t}{\sqrt{3\pi}} K_{2/3} \left( \frac{2}{3} t^{3/2} \right)$$

によって関係付けられる Macdonald 関数  $K_\nu$  を用いて

$$I_n = \frac{64}{9\pi^2} \frac{n^2 \mathcal{E}^4}{c^3 \alpha^2} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \left\{ K_{1/3}^2 \left[ \frac{n}{3} (1-\varepsilon^2)^{3/2} \right] + K_{2/3}^2 \left[ \frac{n}{3} (1-\varepsilon^2)^{3/2} \right] \right\} (1-\varepsilon^2)^2$$

と表すこともできる.

#### ■ 引力相互作用の下での衝突 双曲線運動

$$x = a(\varepsilon - \cosh \xi), \quad y = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \sinh \xi, \quad t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}} (\varepsilon \sinh \xi - \xi)$$

を考える. ここに  $\varepsilon (> 1)$  は離心率,  $a = \alpha/2\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}$  は (静止エネルギーを含まない) 全エネルギーである (第 1 巻『力学』§ 15 参照). Fourier 成分は Hankel 関数

$$H_p^{(1)}(ix) \equiv -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{p\xi - ix \sinh \xi} d\xi \quad (70.17)$$

を用いて,

$$x_\omega = \frac{\pi a}{\omega} H_{i\nu}^{(1)'}(i\nu\varepsilon), \quad y_\omega = -\frac{\pi a \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\omega \varepsilon} H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon) \quad (70.15)$$

と計算される [本稿次節で導出]. これに対し放射強度の式 (67.10):

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{4\omega^4}{3c^3} |\mathbf{d}_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{4\omega^4 \mu^2}{3c^3} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 (|x_\omega|^2 + |y_\omega|^2)^2 \frac{d\omega}{2\pi}$$

は

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{\pi \mu^2 \alpha^2 \omega^2}{6c^3 \mathcal{E}^2} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \left\{ [H_{i\nu}^{(1)'}(i\nu\varepsilon)]^2 - \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2} [H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon)]^2 \right\} d\omega$$



を与え、有効放射 (§ 68) は

$$d\kappa_\omega = \int_{\rho=0}^{\rho=\infty} d\mathcal{E}_\omega 2\pi\rho d\rho = \frac{4\pi^4}{3c^3} \frac{\alpha^3\omega}{\mu v_0^5} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 |H_{i\nu}^{(1)}(i\nu)| |H_{i\nu}^{(1)'}(i\nu)| d\omega \quad (70.19)$$

となる (導出は下記). ここに  $v_0$  は仮想的な 1 粒子の無限速での速度である.

振動数の高い極限と低い極限を調べると

$$d\kappa_\omega = \begin{cases} \frac{16\alpha^2}{3v_0^2 c^3} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \ln \left( \frac{2\mu v_0^3}{\gamma\omega\alpha} \right) d\omega & \left( \omega \ll \frac{\mu v_0^3}{\alpha} \text{ のとき} \right) \\ \frac{16\pi\alpha^2}{3^{3/2} v_0^2 c^3} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 d\omega & \left( \omega \gg \frac{\mu v_0^3}{\alpha} \text{ のとき} \right) \end{cases} \quad (70.21-22)$$

が得られる (導出は下記). ただし  $\gamma$  は Euler の定数  $C = 0.5772\dots$  に対して  $\gamma = e^C = 1.781\dots$  と定義される.  $\omega \rightarrow 0$  において放射強度  $d\mathcal{E}_\omega/d\omega$  は振動数  $\omega$  に依らない一定値に近づくことを § 69 におい見たが,  $d\mathcal{E}_\omega$  を衝突径数について積分した有効放射はこのように, Coulomb 相互作用の場合には対数的に発散する. また高振動数での  $d\kappa_\omega/d\omega$  の表式は振動数に無関係となっている.

■斥力相互作用の下での衝突 粒子は双曲線運動

$$x = a(\varepsilon + \cosh \xi), \quad y = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \sinh \xi, \quad t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}} (\varepsilon \sinh \xi + \xi)$$

を行う (第 1 巻『力学』§ 15 参照, 以降記号は引力相互作用の場合に定義したのと同じものを用いる). Fourier 成分  $x_\omega, y_\omega$  は引力相互作用の場合の表式の  $e^{-\pi\nu}$  倍となる [本稿次節で確認]. よって放射  $d\mathcal{E}_\omega$ , 有効放射  $d\kappa_\omega$  の表式は引力相互作用の場合の  $e^{-2\pi\nu}$  倍となる. 特に低い振動数  $\nu \ll 1$  に対しては  $e^{-2\pi\nu} \simeq 1$  なので,  $d\kappa_\omega$  の近似式は引力相互作用の場合と変わらないのに対し, 高い振動数では  $e^{-2\pi\nu}$  に従って指数関数的に減少する.

§ 70, 式の導出など

■ $x_n, y_n$  の式 (70.7) の導出 座標 (70.5) の Fourier 級数展開

$$x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-i\omega_0 n t}, \quad x_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{in\omega_0 t} dt$$

を考える [§ 49]. その際, [第 1 式を時間微分して得られる] 関係  $\dot{x}_n = -i\omega_0 n x_n$  を用いるのが便利である. [ここで  $\dot{x}_n$  は  $\dot{x}$  の Fourier 係数であり,  $x_n$  の時間微分ではない ( $x_n$  は時間の関数ではない).] すると

$$x_n = \frac{\dot{x}_n}{-i\omega_0 n} = \frac{i}{\omega_0 n T} \int_0^T e^{i\omega_0 n t} \dot{x} dt = -\frac{ia}{2\pi n} \int_0^{2\pi} e^{in(\xi - \varepsilon \sin \xi)} \sin \xi d\xi$$

(最後の等号は  $\omega_0 T = 2\pi$  および式 (70.5), 特に  $\dot{x} dt = dx = -a \sin \xi d\xi$  による)

が得られる。同様に

$$\begin{aligned}
 y_n &= \frac{i}{\omega_0 n T} \int_0^T e^{i\omega_0 n t} \dot{y} dt = \frac{ia\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\pi n} \int_0^{2\pi} e^{in(\xi-\varepsilon \sin \xi)} \cos \xi d\xi \\
 &= \frac{ia\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\pi n} \int_0^{2\pi} e^{in(\xi-\varepsilon \sin \xi)} \left\{ \left( \cos \xi - \frac{1}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \right\} d\xi \\
 &= \frac{ia\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\pi n} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{e^{in\xi} d\xi}{-\varepsilon} + \int_0^{2\pi} e^{in(\xi-\varepsilon \sin \xi)} \frac{d\xi}{\varepsilon} \right\} \\
 &= \frac{ia\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\pi n \varepsilon} \int_0^{2\pi} e^{in(\xi-\varepsilon \sin \xi)} d\xi.
 \end{aligned}$$

これらは Bessel 関数 (70.6') を用いて式 (70.7) のように書き換えられる。

■式 (70.8) の係数の計算  $I_n$  の式 (85) に  $x_n, y_n$  の式 (70.7) を代入すると,

$$I_n = \frac{4\omega_0^4 n^2 a^2 \mu^2}{3c^3} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \left[ J_n'^2(n\varepsilon) + \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2} J_n^2(n\varepsilon) \right]$$

を得る。係数は、楕円運動における長半径と振動数の公式

$$a = \frac{\alpha}{2|\mathcal{E}|}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\alpha}{\mu a^3}} = \frac{(2|\mathcal{E}|)^{3/2}}{a\mu^{1/2}}$$

を用いて

$$\frac{4\omega_0^4 n^2 a^2 \mu^2}{3c^3} = \frac{64n^2 \mathcal{E}^4}{3c^3 \alpha^2}$$

と書き換えられるので、式 (70.8) を得る。

■式 (70.10) の導出 漸近公式

$$J_n(n\varepsilon) \cong \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2}{n} \right)^{1/3} \Phi \left[ \left( \frac{n}{2} \right)^{2/3} (1-\varepsilon^2) \right], \quad n \gg 1, \quad 1-\varepsilon \ll 1 \quad (70.9)$$

[本稿次節で補足] を利用する。

■有効放射の式 (70.19) の導出 § 68 の有効放射の公式

$$d\kappa_\omega = \int_{\rho=0}^{\rho=\infty} d\mathcal{E}_\omega 2\pi\rho d\rho$$

において、 $2\pi\rho d\rho = 2\pi a^2 \varepsilon d\varepsilon$  [本稿次節で補足] を利用すると、変数  $\varepsilon$  についての (1 から  $\infty$  までの) 積分に書き換えられる。次に  $p$  次の Bessel 方程式

$$Z'' + \frac{1}{z} Z' + \left( 1 - \frac{p^2}{z^2} \right) Z = 0$$

の直接の帰結として、その任意の解  $Z_p(z)$  が公式

$$z \left[ Z_p'^2 + \left( \frac{p^2}{z^2} - 1 \right) Z_p^2 \right] = \frac{d}{dz} (z Z_p Z_p') \quad (86)$$

を満たすことを用いて積分を実行する。 $\varepsilon \rightarrow \infty$  のとき Hankel 関数  $H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon)$  がゼロに向かうことに留意すると、式 (70.19) に達する [具体的な計算は本稿次節を参照]。

■低振動数, 高振動数の放射の式 (7.21),(7.22) の導出 pp.207-208 から必要な箇所を引用する.

ハンケル関数を定義する積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu(\xi - \sinh \xi)} d\xi = i\pi H_{i\nu}^{(1)}(i\nu) \quad (70.20)$$

において, 積分変数  $\xi$  の変わりうる範囲のうち重要なのは, 指数が 1 の程度の大きさになる領域だけである. 低い振動数 ( $\nu \ll 1$ ) に対しては, 大きな  $\xi$  の領域だけが重要である. ところが大きな  $\xi$  に対しては,  $\sinh \xi \gg \xi$  であり, したがって近似的に

$$H_{i\nu}^{(1)}(i\nu) \cong -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\nu \sinh \xi} d\xi = H_0^{(1)}(i\nu)$$

となる. 同様に

$$H_{i\nu}^{(1)'}(i\nu) \cong H_0^{(1)'}(i\nu)$$

が得られる. ベッセル関数の理論による (小さな  $x$  に対する) 近似的な表式

$$iH_0^{(1)}(ix) \cong \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x}$$

( $\gamma = e^C$ , ここで  $C$  はオイラーの定数;  $\gamma = 1.781 \dots$ ) を使って, 低い振動数の有効放射に対して,

式 (70.21) を得る.

他方, 高い振動数 ( $\nu \gg 1$ ) に対しては小さな  $\xi$  の領域が積分 (70.20) で重要である. このことに応じて, 被積分関数の指数を  $\xi$  のべきに展開する. そうすると近似的に

$$H_{i\nu}^{(1)}(i\nu) \cong -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i\nu}{6}\xi^3} d\xi = -\frac{2i}{\pi} \operatorname{Re} \left( \int_0^{\infty} e^{-\frac{i\nu}{6}\xi^3} d\xi \right)$$

が得られる.  $i\nu\xi^3/6 = \eta$  という代入によって, 積分は  $\Gamma$  関数に移行し, その結果つきが得られる:

$$H_{i\nu}^{(1)}(i\nu) \cong -\frac{i}{\pi\sqrt{3}} \left(\frac{6}{\nu}\right)^{1/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

同様にして

$$H_{i\nu}^{(1)'}(i\nu) \cong \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \left(\frac{6}{\nu}\right)^{2/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$$

が得られる. つぎに,  $\Gamma$  関数の理論の公式

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

を用いて, 高い振動数における有効放射に対して

式 (70.22) を得る.

## § 70 について

■双極モーメントの式 (70.1) について 双極モーメント  $\mathbf{d} = e_1\mathbf{r}_1 + e_2\mathbf{r}_2$  を式 (70.1) に書き換えたときのおつりの項は、慣性中心系の条件

$$\frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = 0$$

により消える。実際、

$$\begin{aligned} e_1\mathbf{r}_1 &= \left( \frac{e_1m_2 - e_2m_1}{m_1 + m_2} + e_1\frac{m_1}{m_1 + m_2} + e_2\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) \mathbf{r}_1, \\ e_2\mathbf{r}_2 &= \left( -\frac{e_1m_2 - e_2m_1}{m_1 + m_2} + e_2\frac{m_2}{m_1 + m_2} + e_1\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) \mathbf{r}_2 \end{aligned}$$

を辺々足すと、

$$\mathbf{d} = \frac{e_1m_2 - e_2m_1}{m_1 + m_2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + (e_1 + e_2)\frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{e_1m_2 - e_2m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r} : (70.1)$$

を得る。

■Bessel 関数の式 (70.6) 第 1 の等号について  $\xi' = 2\pi - \xi$  と変数変換すると、

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{2\pi} \cos(n\xi - x \sin \xi) d\xi &= \int_0^{\pi} \cos(n\xi' - x \sin \xi') d\xi', \\ \int_{\pi}^{2\pi} \sin(n\xi - x \sin \xi) d\xi &= - \int_0^{\pi} \sin(n\xi' - x \sin \xi') d\xi' \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(n\xi - x \sin \xi) d\xi &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} \right) \{ \cos(n\xi - x \sin \xi) + i \sin(n\xi - x \sin \xi) \} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\xi - x \sin \xi) d\xi \end{aligned}$$

である。

■漸近公式 (70.9) の説明 (p.205 脚注) について  $\xi$  による展開

$$\xi - \varepsilon \sin \xi \simeq (1 - \varepsilon)\xi + \frac{1}{3!}\varepsilon\xi^3$$

において  $\varepsilon \simeq 1$  に注意して

$$1 - \varepsilon \simeq \frac{1 + \varepsilon}{2}(1 - \varepsilon) = \frac{1 - \varepsilon^2}{2}$$

と書き換える.

$$\begin{aligned}
 J_n(n\varepsilon) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \left[ n \left( \frac{1-\varepsilon^2}{2} \xi + \frac{\xi^3}{6} \right) \right] d\xi \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{2}{n} \right)^{1/3} \int_0^\infty \cos \left[ \left( \frac{n}{2} \right)^{2/3} (1-\varepsilon^2) \xi' + \frac{\xi'^3}{3} \right] d\xi' \quad \left( \xi' = \left( \frac{n}{2} \right)^{1/3} \xi \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2}{n} \right)^{1/3} \Phi \left[ \left( \frac{n}{2} \right)^{2/3} (1-\varepsilon^2) \right] : (70.9), \\
 \Phi(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos \left( \frac{\xi'^3}{3} + \xi' t \right) d\xi' : \text{Airy関数.}
 \end{aligned}$$

■式 (70.10) について

$$\frac{d}{d(n\varepsilon)} \Phi \left[ \left( \frac{n}{2} \right)^{2/3} (1-\varepsilon^2) \right] = \Phi' \left[ \left( \frac{n}{2} \right)^{2/3} (1-\varepsilon^2) \right]$$

と表記されている. また  $\Phi^2$  の係数を

$$\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \simeq 1-\varepsilon^2$$

と書き換えてある.

■Fourier 成分 (70.15) について

$$\dot{x}_\omega = \int_{-\infty}^\infty \dot{x} e^{i\omega t} dt = -i\omega \int_{-\infty}^\infty x e^{i\omega t} dt = -i\omega x_\omega$$

(第 2 の等号では部分積分した) より

$$x_\omega = \frac{\dot{x}_\omega}{-i\omega} = \frac{i}{\omega} \int_{-\infty}^\infty \dot{x} e^{i\omega t} dt$$

である. 式 (70.3) および

$$\text{式 (70.14)} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} dt = dx = -a \sinh \xi d\xi$$

であることに注意すると,

$$x_\omega = -\frac{ia}{\omega} \int_{-\infty}^\infty e^{\nu(\varepsilon \sinh \xi - \xi)} \sinh \xi d\xi, \quad \nu \equiv \omega \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}$$

と書き換えられる. ここで公式 (70.17):

$$\begin{aligned}
 H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon) &= -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{\nu(\xi - \varepsilon \sinh \xi)} d\xi \\
 &= -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{\nu(\varepsilon \sinh \xi - \xi)} d\xi \quad (-\xi \rightarrow \xi)
 \end{aligned}$$

より

$$H_{i\nu}^{(1)'}(i\nu\varepsilon) = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{\nu(\varepsilon \sinh \xi - \xi)} \sinh \xi d\xi$$

なので, 第 1 式

$$x_\omega = \frac{\pi a}{\omega} H_{i\nu}^{(1)'}(i\nu\varepsilon)$$

を得る.

同様に

$$y_\omega = \frac{i}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{y} e^{i\omega t} dt = \frac{ia\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu(\varepsilon \sinh \xi - \xi)} \cosh \xi d\xi$$

を得る. 最右辺の積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu(\varepsilon \sinh \xi - \xi)} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} (\varepsilon \cosh \xi - 1) + \frac{1}{\varepsilon} \right\} d\xi = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu X} dX + \frac{i\pi}{\varepsilon} H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon)$$

と変形できる. 右辺第1項は不定であるが, 物理的な観点からこれをゼロと置くと [16, pp.57-58], 第2式

$$y_\omega = -\frac{\pi a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\omega\varepsilon} H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon)$$

が導かれる.

■ 「 $2\pi\rho d\rho = 2\pi a^2 \varepsilon d\varepsilon$ 」 (p.206 下から3行目) について 引力相互作用の下での双曲線運動の公式

$$a = \frac{\alpha}{2\mathcal{E}}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}M^2}{\mu\alpha^2}} \quad (70.12)$$

から  $\alpha$  を消去すると,

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2\mathcal{E}M^2}{\mu\alpha^2} = 1 + \frac{M^2}{2\mu a^2 \mathcal{E}}$$

となる. ここに  $M = \mu\rho v_0$ ,  $\mathcal{E} = \mu v_0^2/2$  を代入して

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{\rho^2}{a^2}, \quad \therefore \rho d\rho = a^2 \varepsilon d\varepsilon$$

を得る.

■ 有効放射の式 (70.19) について 次の積分を計算する必要がある.

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left\{ [H_{i\nu}^{(1)'}(i\nu\varepsilon)]^2 - \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2} [H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon)]^2 \right\} 2\pi\rho d\rho \\ &= 2\pi a^2 \int_1^\infty \left\{ [H_{i\nu}^{(1)'}(i\nu\varepsilon)]^2 - \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2} [H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon)]^2 \right\} \varepsilon d\varepsilon \\ &= \frac{2\pi a^2}{(i\nu)^2} \int_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=\infty} z \left\{ H_p^{(1)'}{}^2 + \left( \frac{p^2}{z^2} - 1 \right) H_p^{(1)2} \right\} dz. \quad (z \equiv i\nu\varepsilon, p \equiv i\nu) \end{aligned}$$

p.207, 1.3 の公式 (本稿の式 (86)) を用いると, これは

$$\frac{2\pi a^2}{(i\nu)^2} \left[ z H_p^{(1)} H_p^{(1)'} \right]_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=\infty} = -\frac{2\pi a^2}{i\nu} H_{i\nu}^{(1)}(i\nu) H_{i\nu}^{(1)'}(i\nu) = -\frac{2\pi a^2}{\nu} \text{Im}[H_{i\nu}^{(1)}(i\nu)] H_{i\nu}^{(1)'}(i\nu)$$

となる (p.206 脚注にあるように,  $H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon)$  は純虚数). よって

$$\begin{aligned} d\kappa_\omega &= \frac{\pi\mu^2\alpha^2\omega^2}{6c^3\mathcal{E}^2} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \left[ \int_0^\infty \left\{ [H_{i\nu}^{(1)'}(i\nu\varepsilon)]^2 - \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2} [H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon)]^2 \right\} 2\pi\rho d\rho \right] d\omega \\ &= \frac{2\pi^2\mu^2\alpha^2\omega^2}{6c^3\mathcal{E}^2} \frac{a^2}{\nu} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \text{Im}[H_{i\nu}^{(1)}(i\nu)] H_{i\nu}^{(1)'}(i\nu) d\omega \end{aligned}$$

であり, ここに

$$a = \frac{\alpha}{2\mathcal{E}} = \frac{\alpha}{\mu v_0^2} : (70.12), \quad \nu = \frac{\omega\alpha}{\mu v_0^3} : (70.16), \quad \mathcal{E} = \frac{\mu v_0^2}{2}$$

を代入し,  $-\text{Im}[H_{i\nu}^{(1)}(i\nu)] = |H_{i\nu}^{(1)}(i\nu)|$  とすれば式 (70.19):

$$d\kappa_\omega = \frac{4\pi^4}{3c^3} \frac{\alpha^3 \omega}{\mu v_0^5} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 |H_{i\nu}^{(1)}(i\nu)| |H_{i\nu}^{(1)'}(i\nu)| d\omega$$

を得る.

■斥力相互作用の場合の Fourier 成分  $x_\omega, y_\omega$  について

$$\begin{aligned} x_\omega &= \frac{i}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x} e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{ia}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu(\varepsilon \sinh \xi + \xi)} \sinh \xi d\xi \\ &= -e^{-\pi\nu} \frac{ia}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu(\varepsilon \sinh \xi' - \xi')} \sinh \xi' d\xi' \quad (\xi' = i\pi - \xi, \sinh \xi = \sinh \xi'), \\ y_\omega &= \frac{i}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{y} e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{ia\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu(\varepsilon \sinh \xi + \xi)} \cosh \xi d\xi \\ &= e^{-\pi\nu} \frac{ia\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu(\varepsilon \sinh \xi' - \xi')} \cosh \xi' d\xi' \quad (\xi' = i\pi - \xi, \cosh \xi = -\cosh \xi') \end{aligned}$$

はいずれも引力相互作用の場合の表式の  $e^{-\pi\nu}$  倍である.

## § 71. 4 重極放射および磁気双極放射

ベクトル・ポテンシャルにおいて  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}/c$  の 1 次の項までを考慮する.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \dot{\mathbf{j}}_{t'+\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}/c} dV = \frac{1}{cR_0} \int \dot{\mathbf{j}}_{t'} dV + \frac{1}{c^2 R_0} \frac{\partial}{\partial t'} \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \dot{\mathbf{j}}_{t'} dV, \quad t' \equiv t - \frac{R_0}{c}.$$

最右辺の第 1 項はもちろん, 電気双極子近似の式 (67.4):  $\dot{\mathbf{d}}/cR_0$  を与える. 遠方の平面波 (66.3):

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{c} (\dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}$$

に関しては,  $\mathbf{n}$  に比例するベクトルをベクトル・ポテンシャルに付け加えても場が変わらないという任意性を利用すると,

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0} + \frac{1}{6c^2 R_0} \ddot{\mathbf{D}} + \frac{1}{cR_0} \dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n} \quad (71.3)$$

と書くことができる (導出は下記). ただし右辺の量の値は全て時刻  $t'$  で評価される. ここに  $\mathbf{D}$  は 4 重極モーメント・テンソル  $D_{\alpha\beta} = \sum e(3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta} r^2)$  に対して  $D_\alpha = D_{\alpha\beta} n_\beta$  を第  $\alpha$  成分に持つベクトルであり, また  $\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum e \mathbf{r} \times \mathbf{v}$  は磁気モーメントである.

これに対して放射の強度は

$$I = cR_0^2 \int H^2 \frac{d\omega}{4\pi} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2 + \frac{1}{180c^5} \ddot{D}_{\alpha\beta}^2 + \frac{2}{3c^3} \dot{\mathbf{m}}^2 \quad (71.5)$$

と計算される (求め方は下記 [計算の詳細は本稿次節]). (最右辺第 2 項については添字  $\alpha, \beta$  について和をとる.) 最右辺の 3 つの項に対応する放射は順番にそれぞれ双極放射, 4 重極放射, 磁気双極放射と呼ばれる. 双極放射と同様, 電荷と質量の比が全ての粒子に共通であるような系では磁気双極放射は起こらない.

## § 71, 式の導出など

■ポテンシャル (71.3) の導出 ベクトル・ポテンシャルの展開

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}' dV + \frac{1}{c^2 R_0} \frac{\partial}{\partial t'} \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{j}' dV = \frac{\sum e \mathbf{v}}{cR_0} + \frac{1}{c^2 R_0} \frac{\partial}{\partial t} \sum e \mathbf{v} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \quad (71.1)$$

において, 最右辺の第 1 項は電気双極子近似の式 (67.4):  $\dot{\mathbf{d}}/cR_0$  を与える. 新たに得られた第 2 項において

$$\mathbf{v} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) + \frac{1}{2} \mathbf{v} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) - \frac{1}{2} \mathbf{v} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) + \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{n}$$

と書き換えられるので,

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0} + \frac{1}{2c^2 R_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum e \mathbf{r} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) + \frac{1}{cR_0} (\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}) \quad (71.2)$$

を得る ( $\mathbf{m} \equiv \frac{1}{2c} \sum e \mathbf{r} \times \mathbf{v}$  は磁気モーメント).

次に遠方の平面波 (66.3):

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{c} (\dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}$$

に関しては,  $\mathbf{n}$  に比例するベクトルをベクトル・ポテンシャルに付け加えても場が変わらないという任意性を利用すると, 式 (71.2) の代わりにポテンシャル

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0} + \frac{1}{6c^2 R_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum e [3\mathbf{r} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{n} r^2] + \frac{1}{cR_0} (\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}) \\ &= \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0} + \frac{1}{6c^2 R_0} \ddot{\mathbf{D}} + \frac{1}{cR_0} (\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}) : (71.3) \\ &\quad (4 \text{重極モーメント } D_{\alpha\beta} \equiv \sum e (3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta} r^2) \text{ に対して } D_\alpha \equiv D_{\alpha\beta} n_\beta) \end{aligned}$$

を用いることができる.

■放射の強度 (71.5) の求め方 ポテンシャル (71.3) に対する電磁場 (66.3) は

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{c^2 R_0} \left\{ \ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n} + \frac{1}{6c} \ddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n} + (\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \right\}, \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{c^2 R_0} \left\{ (\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} + \frac{1}{6c} (\ddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} + \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{m}} \right\} \quad (71.4) \end{aligned}$$

となる. ひとまず, これに続く方針引用する [具体的な計算過程は本稿次節で詳しく示す].

立体角  $d\Omega$  内の放射の強度  $dI$  は一般式 (66.6) によって与えられる. ここでは, 全放射, つまり単位時間にあらゆる方向へ系が放射するエネルギーを計算する. このために,  $dI$  を  $\mathbf{n}$  のあらゆる方向について平均する: 全放射はこの平均に  $4\pi$  をかけたものに等しい. 磁場の 2 乗を平均すると,  $\mathbf{H}$  を表 [わ] す 3 つの項のうち異なったものどうしをかけた積は消え, 結局 3 つの項の 2 乗平均だけが残る.

次いで計算に必要な公式 (pp.211–212) を引用する [本稿次節で補足].



単位ベクトルの成分の積を計算するための便利な方法を与えておこう。  $\mathbf{n}$  は単位ベクトルであるから、対称テンソルである  $\overline{n_\alpha n_\beta}$  を単位テンソル  $\delta_{\alpha\beta}$  で表すことができる。またその縮約は 1 であるから、

$$\overline{n_\alpha n_\beta} = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta}$$

が得られる。

4 個の成分の積の平均値は、同様に

$$\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta} = \frac{1}{15} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma})$$

と書かれる。右辺は、すべての添字について対称な 4 階テンソルとして、単位テンソルから作られる。全体の係数は、添字の対 2 つについて縮約したとき、1 になるようにきめる。

## § 71 について

■「系の大きさと波長との比  $a/\lambda$  のベキにベクトル・ポテンシャルを展開」 (§ 71, l.1) について 電流密度の  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}/c$  による展開は

$$\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{a}{cT} = \frac{a}{\lambda}$$

により比  $a/\lambda$  による展開と見なせる。

■p.211 脚注の公式について

$$\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta} = C (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma})$$

とおき、 $\alpha = \beta, \gamma = \delta$  として添字  $\alpha, \gamma$  について和をとると、

$$1 = C \left\{ 3^2 + 2 \sum_{\alpha, \gamma} (\delta_{\alpha\gamma})^2 \right\} = 15C, \quad \therefore C = \frac{1}{15}$$

と定まる。

■ $\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma} = 0$  の証明  $\mathbf{n}$  の 3 成分の (一般に奇数個の成分の) 積  $n_\alpha n_\beta n_\gamma$  は、 $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$  と置き換えると符号が入れ替わる。よって全方向の  $\mathbf{n}$  に関するその平均

$$\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma} = \int n_\alpha n_\beta n_\gamma \frac{d\Omega}{4\pi}$$

は、逆方向からの寄与と相殺してゼロになる。

■放射強度の式 (71.5) について

$$\begin{aligned} \overline{(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) \cdot (\ddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n})} &= \overline{(e_{\alpha\lambda\mu} n_\lambda \ddot{d}_\mu)(e_{\alpha\nu\rho} n_\nu \ddot{D}_{\rho\sigma} n_\sigma)} \\ &= (\delta_{\lambda\nu} \delta_{\mu\rho} - \delta_{\lambda\rho} \delta_{\mu\nu}) \overline{\ddot{d}_\mu \ddot{D}_{\rho\sigma} n_\lambda n_\nu n_\sigma} \\ &= \overline{\ddot{d}_\mu \ddot{D}_{\mu\sigma} n_\lambda^2 n_\sigma} - \overline{\ddot{d}_\mu \ddot{D}_{\lambda\sigma} n_\lambda n_\mu n_\sigma} \end{aligned}$$

において

$$\overline{n_\lambda^2 n_\sigma} = \overline{n_\sigma} = 0, \quad \overline{n_\lambda n_\mu n_\sigma} = 0$$

なので

$$\overline{(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) \cdot (\ddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n})} = 0$$

である。

また

$$\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma} = 0, \quad \therefore \overline{(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) \cdot \{(\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}\}} = 0$$

である。

さらに

$$\begin{aligned} \overline{(\ddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n}) \cdot \{(\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}\}} &= \overline{(e_{\alpha\beta\gamma} n_\beta D_{\gamma\delta} n_\delta) \{e_{\alpha\lambda\mu} n_\lambda (\varepsilon_{\mu\nu\rho} n_\nu \ddot{\mathbf{m}}_\rho)\}} \\ &= (\delta_{\beta\lambda} \delta_{\gamma\mu} - \delta_{\beta\mu} \delta_{\gamma\lambda}) e_{\mu\nu\rho} D_{\gamma\delta} \ddot{\mathbf{m}}_\rho \overline{n_\beta n_\delta n_\lambda n_\nu} \\ &= \frac{1}{3} e_{\gamma\nu\rho} D_{\gamma\nu} \ddot{\mathbf{m}}_\rho - e_{\beta\nu\rho} \ddot{\mathbf{m}}_\rho \overline{D_{\gamma\delta} n_\beta n_\delta n_\gamma n_\nu} \end{aligned}$$

は第1項が添字  $\gamma, \nu$  に関して対称な量と反対称な量の縮約, 第2項が添字  $\gamma, \delta$  に関して対称な量と反対称な量の縮約となっているので消える。

以上より「磁場の2乗を平均すると,  $\mathbf{H}$  を表(わ)す3つの項のうち異なったものどうしをかけた積は消え, 結局3つの項の2乗平均だけが残る」(p.211 下から3,2行)。

$$\begin{aligned} \overline{(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n})^2} &= \overline{(e_{\alpha\lambda\mu} n_\lambda \ddot{d}_\mu)(e_{\alpha\nu\rho} n_\nu \ddot{d}_\rho)} \\ &= (\delta_{\lambda\nu} \delta_{\mu\rho} - \delta_{\lambda\rho} \delta_{\mu\nu}) \ddot{d}_\mu \ddot{d}_\rho \overline{n_\lambda n_\nu} \\ &= \ddot{\mathbf{d}} - \frac{1}{3} \ddot{\mathbf{d}} \\ &= \frac{2}{3} \ddot{\mathbf{d}}, \\ \overline{(\ddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n})^2} &= \overline{(e_{\alpha\beta\gamma} n_\beta \ddot{D}_{\gamma\delta} n_\delta)(e_{\alpha\lambda\mu} n_\lambda \ddot{D}_{\mu\nu} n_\nu)} \\ &= (\delta_{\beta\lambda} \delta_{\gamma\mu} - \delta_{\beta\mu} \delta_{\gamma\lambda}) \ddot{D}_{\gamma\delta} \ddot{D}_{\mu\nu} \overline{n_\beta n_\delta n_\lambda n_\nu} \\ &= \ddot{D}_{\gamma\delta} \ddot{D}_{\gamma\nu} \overline{n_\delta n_\nu} - \ddot{D}_{\gamma\delta} \ddot{D}_{\beta\nu} \overline{n_\beta n_\delta n_\gamma n_\nu} \\ &= \frac{1}{3} \ddot{D}_{\gamma\delta} \ddot{D}_{\gamma\nu} \delta_{\delta\nu} - \frac{1}{15} (\delta_{\beta\delta} \delta_{\gamma\nu} + \delta_{\beta\gamma} \delta_{\delta\nu} + \delta_{\beta\nu} \delta_{\delta\gamma}) \ddot{D}_{\gamma\delta} \ddot{D}_{\beta\nu} \\ &= \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{15} (1+1+0) \right\} \ddot{D}_{\alpha\beta}^2 \\ &= \frac{1}{5} \ddot{D}_{\alpha\beta}^2 \quad (\text{添字 } \alpha, \beta \text{ について和をとる}) \end{aligned}$$

である。また

$$\begin{aligned} \overline{\{(\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}\}^2} &= \overline{(e_{\alpha\beta\gamma} n_\beta \varepsilon_{\gamma\delta\lambda} n_\delta \ddot{\mathbf{m}}_\lambda)(e_{\alpha\mu\nu} n_\mu e_{\nu\rho\sigma} n_\rho \ddot{\mathbf{m}}_\sigma)} \\ &= (\delta_{\beta\mu} \delta_{\gamma\nu} - \delta_{\beta\nu} \delta_{\gamma\mu}) e_{\gamma\delta\lambda} e_{\nu\rho\sigma} \ddot{\mathbf{m}}_\lambda \ddot{\mathbf{m}}_\sigma \overline{n_\beta n_\delta n_\mu n_\rho} \\ &= \frac{1}{3} (\delta_{\delta\rho} \delta_{\lambda\sigma} - \delta_{\delta\sigma} \delta_{\lambda\rho}) \ddot{\mathbf{m}}_\lambda \ddot{\mathbf{m}}_\sigma \delta_{\delta\rho} - \frac{1}{15} e_{\gamma\delta\lambda} e_{\beta\rho\sigma} \ddot{\mathbf{m}}_\lambda \ddot{\mathbf{m}}_\sigma (\delta_{\beta\delta} \delta_{\gamma\rho} + \delta_{\beta\gamma} \delta_{\delta\rho} + \delta_{\beta\rho} \delta_{\delta\gamma}) \end{aligned}$$

であり，最右辺の係数 1/15 以降の各項について

$$\begin{aligned}
 e_{\gamma\delta\lambda}e_{\beta\rho\sigma}\delta_{\beta\delta}\delta_{\gamma\rho} &= -(\delta_{\gamma\rho}\delta_{\lambda\sigma} - \delta_{\gamma\sigma}\delta_{\lambda\rho})\delta_{\gamma\rho} \\
 &= -3\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\lambda\sigma} \\
 &= -2\delta_{\lambda\sigma}, \\
 e_{\gamma\delta\lambda}e_{\beta\rho\sigma}\delta_{\beta\gamma}\delta_{\delta\rho} &= (\delta_{\delta\rho}\delta_{\lambda\sigma} - \delta_{\delta\sigma}\delta_{\lambda\rho})\delta_{\delta\rho} \\
 &= 3\delta_{\lambda\sigma} - \delta_{\lambda\sigma} \\
 &= 2\delta_{\lambda\sigma}, \\
 e_{\gamma\delta\lambda}e_{\beta\rho\sigma}\delta_{\beta\rho}\delta_{\delta\gamma} &= e_{\gamma\lambda}e_{\beta\beta\sigma} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

なので，

$$\overline{\{(\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}\}^2} = \ddot{\mathbf{m}}^2 - \frac{1}{3}\ddot{\mathbf{m}}^2 = \frac{2}{3}\ddot{\mathbf{m}}^2$$

となる。

以上より

$$\begin{aligned}
 I &= cR_0^2 \int H^2 \frac{d\omega}{4\pi} \\
 &= cR_0^2 \overline{H^2} \\
 &= \frac{1}{c^3} \left[ \overline{(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n})^2} + \frac{1}{36c^2} \overline{(\ddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n})^2} + \overline{\{(\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}\}^2} \right] \\
 &= \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2 + \frac{1}{180c^5} \ddot{\mathbf{D}}_{\alpha\beta}^2 + \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{m}}^2 : (71.5)
 \end{aligned}$$

を得る。

## § 72. 近距離における放射の場

$R_0 \gg a$  および  $\lambda \gg a$  であり，それ故，電気双極子近似 (67.4):

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \dot{\mathbf{d}} \quad (72.1)$$

を用いることができるけれど，

$$R_0 \sim \lambda$$

なので場を平面波と見なして式 (67.5-6):

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{c} (\dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}$$

で計算することが許されない場合を考えよう [まとめると  $R_0 \sim \lambda \gg a$ ].

この場合には上記ベクトル・ポテンシャル (72.1) と Lorenz 条件から，スカラー・ポテンシャルを

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \therefore \phi = -\nabla \cdot \frac{\mathbf{d}}{R_0}$$

と定め，電磁場を

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{c} \nabla \times \frac{\dot{\mathbf{d}}}{R_0}, \quad (72.3)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla \nabla \cdot \frac{\mathbf{d}}{R_0} - \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{\mathbf{d}}}{R_0} \quad (72.4)$$

と求めれば良い。電場 (72.4) の最右辺の表式は、球面波  $\frac{d(t-R_0/c)}{R_0}$  が波動方程式

$$\frac{1}{c^2} \frac{\ddot{\mathbf{d}}}{R_0} = \Delta \frac{\mathbf{d}}{R_0}$$

を満たすことを用いて第 2 項を書き換え、

$$\mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times \frac{\mathbf{d}}{R_0} \quad (72.5)$$

と表すこともできる。[なるほど、波長に比べて遠方を想定して、 $R_0$  を微分の外に出せば、電磁場 (72.3),(72.5) は平面波の式 (67.5-6) に戻る (本稿次節も参照).]

Fourier 成分に対する式は

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \nabla \times \frac{\dot{\mathbf{d}}}{R_0} \rightarrow \mathbf{H}_\omega = ik(\mathbf{d}_\omega \times \mathbf{n}) \left( \frac{ik}{R_0} - \frac{1}{R_0^2} \right) e^{ikR_0}, \quad (72.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \nabla \nabla \cdot \frac{\mathbf{d}}{R_0} - \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{\mathbf{d}}}{R_0} &\rightarrow \mathbf{E}_\omega = \mathbf{d}_\omega \left( \frac{k^2}{R_0} + \frac{ik}{R_0^2} - \frac{1}{R_0^3} \right) e^{ikR_0} \\ &+ \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}_\omega) \left( -\frac{k^2}{R_0} - \frac{3ik}{R_0^2} + \frac{3}{R_0^3} \right) e^{ikR_0} \end{aligned} \quad (72.7)$$

となる [導出は本稿次節].

- 波長に比べて大きな距離 ( $kR_0 \gg 1$ )  
 $\rightarrow \mathbf{H}_\omega$  の式で  $ik/R_0$  の項を残し,  $\mathbf{E}_\omega$  の式で  $k^2/R_0$  の項を残す.  
 “波動帯” の場

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{k^2}{R_0} [\mathbf{n} \times (\mathbf{d}_\omega \times \mathbf{n})] e^{ikR_0}, \quad \mathbf{H}_\omega = -\frac{k^2}{R_0} (\mathbf{d}_\omega \times \mathbf{n}) e^{ikR_0}$$

に戻る。 [ $R_0 \sim \lambda$  を想定した式は、その一般的な導き方より  $R_0 \gg \lambda$  の場合を含んでいる.]

- 波長に比べて小さい距離 ( $kR_0 \ll 1$ )  
 $\rightarrow e^{ikR_0} \simeq 1$  とおき,  $\mathbf{H}_\omega$  の式で  $R_0^2$  の項を残し,  $\mathbf{E}_\omega$  の式で  $R_0^3$  の項を残す.

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{1}{R_0^3} \{3\mathbf{n}(\mathbf{d}_\omega \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{d}_\omega\} : \text{双極子の電場 (§ 40)}, \quad \mathbf{H}_\omega = 0.$$

## § 72 について

■ 「…… $1/R_0$  を微分記号の外にとり出すことは許されない……. というのは……」 (p.214 下 3 行) について  
 例えば

$$\partial_\alpha \frac{\mathbf{d}}{R_0} = -\frac{n_\alpha}{R_0^2} \mathbf{d} + \frac{1}{R_0} \partial_\alpha \mathbf{d}$$

における右辺第 2 項は

$$\left| \frac{1}{R_0} \partial_\alpha \mathbf{d} \right| = \left| -\frac{n_\alpha}{c} \frac{\dot{\mathbf{d}}}{R_0} \right| \sim \frac{1}{cT} \left| \frac{\dot{\mathbf{d}}}{R_0} \right| = \frac{1}{\lambda} \left| \frac{\dot{\mathbf{d}}}{R_0} \right| \quad (\because \mathbf{d} = \mathbf{d}(t - R_0/c))$$

であり、第 1 項はその  $\lambda/R_0 \sim 1$  倍程度なので、これを第 2 項に比べて無視する (すなわち  $1/R_0$  を空間微分の外に出す) ことはできない。

■ Fourier 成分に対する式 (72.6),(72.7) の導出

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(t - R_0/c) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \mathbf{d}_\omega e^{-i\omega(t-R_0/c)} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t + ikR_0}, \\ \dot{\mathbf{d}}(t - R_0/c) &= \dot{\mathbf{d}}(t')|_{t'=t-R_0/c} = -i\omega \int \frac{d\omega}{2\pi} \mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t + ikR_0} \end{aligned}$$

に注意して  $\mathbf{H} \sim \mathbf{H}_\omega e^{-i\omega t}$ ,  $\dot{\mathbf{d}} \sim -i\omega \mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t + ikR_0}$  を磁場の式 (72.3) に代入すると, p.215, 1.7 の式

$$\mathbf{H}_\omega = \frac{-i\omega}{c} \nabla \times \left( \mathbf{d}_\omega \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \right) = ik \mathbf{d}_\omega \times \nabla \frac{e^{ikR_0}}{R_0}$$

を得る.

同様に

$$\mathbf{E} \sim \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{d} \sim \mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t + ikR_0}, \quad \ddot{\mathbf{d}} \sim -\omega^2 \mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t + ikR_0}$$

を電場の式 (72.4) に代入すると,

$$\mathbf{E}_\omega = \nabla \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{d}_\omega e^{ikR_0}}{R_0} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\mathbf{d}_\omega e^{ikR_0}}{R_0}$$

となる. 右辺第 1 項について

$$\left[ \nabla \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{d}_\omega e^{ikR_0}}{R_0} \right) \right]_\alpha = \partial_\alpha \partial_\beta \left( d_{\omega\beta} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \right) = (d_{\omega\beta} \partial_\beta) \left( \partial_\alpha \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \right) = \left[ (\mathbf{d}_\omega \cdot \nabla) \left( \nabla \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \right) \right]_\alpha$$

なので, p.215, 1.12 の式

$$\mathbf{E}_\omega = k^2 \mathbf{d}_\omega \frac{e^{ikR_0}}{R_0} + (\mathbf{d}_\omega \cdot \nabla) \nabla \frac{e^{ikR_0}}{R_0}$$

を得る. ここで

$$\partial_\beta n_\alpha = \partial_\beta \frac{X_\alpha}{R_0} = -\frac{X_\alpha}{R_0^2} n_\beta + \frac{\delta_{\alpha\beta}}{R_0} = -\frac{n_\alpha n_\beta}{R_0} + \frac{\delta_{\alpha\beta}}{R_0}$$

に注意して微分を実行すると,

$$\begin{aligned} (d_{\omega\beta} \partial_\beta) \left( \partial_\alpha \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \right) &= (d_{\omega\beta} \partial_\beta) \left( -\frac{1}{R_0^2} + \frac{ik}{R_0} \right) n_\alpha e^{ikR_0} \\ &= d_{\omega\beta} \left[ \left( \frac{2}{R_0^3} - \frac{ik}{R_0^2} \right) n_\alpha n_\beta + \left( -\frac{1}{R_0^2} + \frac{ik}{R_0} \right) \left\{ \left( -\frac{n_\alpha n_\beta}{R_0} + \frac{\delta_{\alpha\beta}}{R_0} \right) + ik n_\alpha n_\beta \right\} \right] e^{ikR_0} \\ &= \left[ \left( -\frac{1}{R_0^3} + \frac{ik}{R_0^2} \right) d_{\omega\alpha} + \left( -\frac{k^2}{R_0} - \frac{3ik}{R_0^2} + \frac{3}{R_0^3} \right) \{ n_\alpha (n_\beta d_{\omega\beta}) \} \right] e^{ikR_0} \end{aligned}$$

となるので式 (72.7) を得る.

■ 「波長にくらべて大きな距離 ( $kR_0 \gg 1$ ) においては, …… $1/R_0$  および  $1/R_0^3$  の項を無視することができ」 (p.215, 1.16,17) について 正しくは磁場の Fourier 成分の式 (72.6) において

$$\frac{ik}{R_0} - \frac{1}{R_0^2} = \frac{ikR_0 - 1}{R_0^2}$$

なので  $ik/R_0$  の項を残し,

$$\mathbf{H}_\omega = -\frac{k^2}{R_0} (\mathbf{d}_\omega \times \mathbf{n}) e^{ikR_0}$$

とする。これは双極近似のポテンシャル (67.4):

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \dot{\mathbf{d}}, \quad \therefore \mathbf{A}_\omega = \frac{-i\omega}{cR_0} \mathbf{d}_\omega e^{ikR_0}$$

に対する“波動帯” の場 (66.8):

$$\mathbf{H}_\omega = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_\omega = -\frac{k^2}{R_0} (\mathbf{d}_\omega \times \mathbf{n}) e^{ikR_0}$$

に一致している。

また電場の Fourier 成分の式 (72.7) において  $k^2/R_0$  の項を残すと,

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{k^2}{R_0} \{\mathbf{d}_\omega - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}_\omega)\} e^{ikR_0} = \frac{k^2}{R_0} \{\mathbf{n} \times (\mathbf{d}_\omega \times \mathbf{n})\} e^{ikR_0}$$

となる。これは“波動帯” の場 (66.8):

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{ic}{\omega} \mathbf{k} \times (\mathbf{A}_\omega \times \mathbf{k}) = i\mathbf{n} \times \left\{ \left( \frac{-ik}{R_0} \mathbf{d}_\omega e^{ikR_0} \right) \times k\mathbf{n} \right\}$$

に一致している。

### § 73. 高速度で運動する電荷からの放射

双極放射の公式 (§ 67) の前提である, 粒子の非相対論的な速度  $v \ll c$  の仮定を外そう。この場合にも, 粒子が 1 個であればその瞬間的な静止系をとることができる。この系では双極放射の公式を適用でき, 微小時間  $dt$  に粒子が放出する全エネルギー・運動量は

$$d\mathcal{E} = \frac{2e^2}{3c^3} w^2 dt, \quad d\mathbf{P} = 0 \quad (73.1-2)$$

である ( $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}}$  は粒子の加速度, 第 1 式は式 (67.9) による [第 2 式を本稿次節で補足] )。そこで

$$dP^i = -\frac{2e^2}{3c} \frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} dx^i$$

と書くと, これは静止系で  $\frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} = -\frac{w^2}{c^4}$  なので [本稿次節で補足], 上記の関係式 (73.1-2) を再現する。そして, 4 次元形式の [両辺が同じ種類のテンソル (今の場合, 反変ベクトル) から成る共変的な] 関係式であるため, 任意の基準系で成立する。よって任意の系での 4 元運動量の全放射は

$$\begin{aligned} \Delta P^i &= -\frac{2e^2}{3c} \int \frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} dx^i \\ &= -\frac{2e^4}{3m^2 c^5} \int (F_{kl} u^l) (F^{km} u_m) dx^i \quad \left( \text{運動方程式 } mc \frac{du_k}{ds} = \frac{e}{c} F_{kl} u^l \right) \end{aligned} \quad (73.4)$$

と表される。その時間成分  $i = 0$  をとると, 放射される全エネルギーの式

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{2e^2}{3c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{w}^2 - \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{w})^2}{c^2}}{\{1 - (v/c)^2\}^3} dt = \int_{-\infty}^{\infty} I dt, \quad (73.6)$$

$$I = \frac{2e^4}{3m^2 c^3} \frac{\{\mathbf{E} - (\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H})\}^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})^2}{1 - (v/c)^2} \quad (73.7)$$

が得られる。[本稿次節で導出。非相対論的極限で式 (67.9) に戻ることが見て取れる。] 粒子の速度が光速に近い場合、単位時間に放射される全エネルギー  $I$  は一般には速度に  $(1 - (v/c)^2)^{-1}$  のように依存する。すなわち粒子のエネルギー  $mc^2/\sqrt{1 - (v/c)^2}$  の 2 乗に比例する。唯一の例外は電場の中を場の方向に沿って粒子が運動する場合 ( $\mathbf{H} = 0, \mathbf{E} \parallel \mathbf{v}$ ) であり、このとき放射は粒子のエネルギーに依存しない。

単位時間当たりの放射強度の角度分布を知るには、Liénard-Wiechert のポテンシャルから導かれる場の表式 (63.8), (63.9) において、遠方で重要となる  $1/R$  の項を残して

$$\mathbf{E} = \frac{e}{c^2 R} \frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}) \times \mathbf{w}\}}{(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c})^3}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E} \quad (73.8)$$

と書き [本稿次節で補足],

$$dI = \frac{c}{4\pi} E^2 R^2 d\Omega = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left\{ \frac{2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})}{c(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c})^5} + \frac{\mathbf{w}^2}{(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c})^4} - \frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})}{(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c})^6} \right\} d\Omega \quad (73.9)$$

とすれば良い [本稿次節で導出].

全放射の角度分布はこれを時間積分した量であり、上式が時刻  $t'$  で評価されていることに注意して、それを  $t'$  に関する積分として表すと、

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_{\mathbf{n}} &= \int dI dt = \int dI \frac{\partial t}{\partial t'} dt' \quad (\text{立体角 } d\Omega \text{ に関しては積分しない}) \\ &= \frac{e^2}{4\pi c^3} d\Omega \int \left\{ \frac{2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})}{c(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c})^4} + \frac{\mathbf{w}^2}{(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c})^3} - \frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})}{(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c})^5} \right\} dt' \quad \left( \because \frac{\partial t}{\partial t'} = 1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \right) \end{aligned} \quad (73.11)$$

となる。

これ以降、 $\theta$  を  $\mathbf{v}$  と  $\mathbf{n}$  の成す角とする。粒子の超相対論的な運動  $v/c \simeq 1$  に対して強度分布  $dI$  は、速度  $\mathbf{v}$  と同じ方向  $\mathbf{n}$  の周りの角度

$$\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (73.12)$$

の範囲で分母  $1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}$  が小さくなるため、大きな値をとる [本稿次節で補足]。また  $\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}$  と  $\mathbf{w}$  が平行または反平行となる 2 方向  $\mathbf{n}$  では場がゼロとなるため、放射の強度は必ずゼロとなる。

- 粒子の速度  $\mathbf{v}$  と加速度  $\mathbf{w}$  が平行なとき

$$dI = \frac{c}{4\pi} H^2 R^2 d\Omega = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{w^2 \sin^2 \theta}{(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)^6}. \quad \left( \because \mathbf{H} = \frac{e}{c^2 R} \frac{\mathbf{w} \times \mathbf{n}}{(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c})^3} \text{ [本稿次節で補足]} \right)$$

この強度分布は  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  の方向に関して軸対称であり、軸方向  $\theta = 0, \pi$  でゼロとなる。

超相対論的な場合 ( $v/c \simeq 1$ ) には、強度分布は  $\theta = 0$  での値 0 から急激に立ち上がり、

$\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  に鋭いピークを持つ。

[非相対論的な極限では強度は横方向  $\theta = \pi/2$  で最大となる。]

- 粒子の速度  $\mathbf{v}$  と加速度  $\mathbf{w}$  が垂直なとき [例：等速円運動]

図 80 のように方位角  $\phi$  を導入すると、

$$dI = \frac{e^2 w^2}{4\pi c^3} \left\{ \frac{1}{(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)^4} - \frac{(1 - \frac{v^2}{c^2}) \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)^6} \right\} d\Omega. \quad \text{[本稿次節で補足]} \quad (73.14)$$

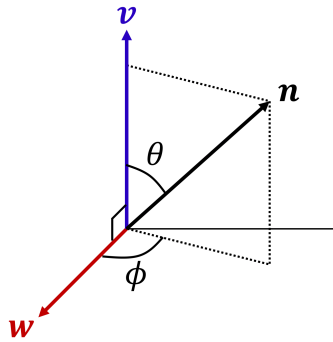


図 80 「 $\phi$  は,  $v$  と  $w$  とを含む平面とベクトル  $n$  の方位角である」 (p.220, 1.17,18)

これは  $v$  と  $w$  を含む平面に関して対称であり [置き換え  $\phi \rightarrow -\phi$  に対する不変性],  
この平面  $\phi = 0$  内の,  $\cos \theta = v/c$  (したがって  $\sin^2 \theta = 1 - (v/c)^2$ ) となる 2 方向でゼロとなる.

### § 73 について

■放射される総運動量がゼロであること (式 (73.2)) の説明について 半径  $R_0$  の球面から単位時間に流出する運動量の第  $\alpha$  成分は, 運動量の流れの密度 (33.3):

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left\{ -E_\alpha E_\beta - H_\alpha H_\beta + \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (E^2 + H^2) \right\}$$

を用いて

$$\int \sigma_{\alpha\beta} n_\beta R_0^2 d\omega$$

と計算される. 双極放射の場合

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c^2 R_0} \ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n} : (67.5), \quad \mathbf{E} = \frac{1}{c^2 R_0} (\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} : (67.6)$$

に対して被積分関数の各項は  $\mathbf{n}$  の成分を奇数個含むため,  $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$  と置き換えると符号が反転する. よって全立体角にわたる積分はゼロになる. ただしこのことを, 「反対方向に運ばれる運動量は, 絶対値が等しく方向が反対である」 (p.217 下 2 行) とすることはできない. もしそうならば, 正味で球面から運動量が流出することになる.

■ 「 $\frac{du^k}{ds} = -\frac{w^k}{c^4}$ 」 (p.218, 1.6) について 静止系では

$$ds = c dt, \quad \frac{du^k}{ds} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^k}{dt^2} = (0, \mathbf{w})$$

である.

■式 (73.6) の導出

$$v^k \equiv \frac{dx^k}{dt} = (c, \mathbf{v}), \quad w^k \equiv \frac{d^2 x^k}{dt^2} = (0, \mathbf{w})$$



を導入する。(これらはベクトルではない.)

$$\begin{aligned}
\frac{du^k}{ds} &= \frac{1}{c\sqrt{1-(v/c)^2}} \frac{du^k}{dt} \\
&= \frac{1}{c\sqrt{1-(v/c)^2}} \frac{d}{dt} \left( \frac{dx^k/dt}{c\sqrt{1-(v/c)^2}} \right) \\
&= \frac{w^k}{c^2\{1-(v/c)^2\}} + \frac{v^k(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})}{c^4\{1-(v/c)^2\}^2}, \\
\frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} &= \frac{w^k w_k}{c^4\{1-(v/c)^2\}^2} + \frac{2w^k v_k(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})}{c^6\{1-(v/c)^2\}^3} + \frac{v^k v_k(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2}{c^8\{1-(v/c)^2\}^4} \\
&= \frac{-\mathbf{w}^2 + \frac{\mathbf{v}^2 \mathbf{w}^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2}{c^2}}{c^4\{1-(v/c)^2\}^3} \\
&\quad (\because w^k w_k = -\mathbf{w}^2, w^k v_k = -(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}), v^k v_k = c^2 - \mathbf{v}^2) \\
&= -\frac{\mathbf{w}^2 - \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{w})^2}{c^2}}{c^4\{1-(v/c)^2\}^3}.
\end{aligned}$$

これを式 (73.4) に代入して時間成分  $i = 0$  をとると, 式 (73.6) を得る.

■式 (73.7) の導出

$$\begin{aligned}
F_{kl} u^l &= \begin{cases} E_\alpha u^\alpha & (k=0) \\ -E_\alpha u^0 + F_{\alpha\beta} u^\beta & (k=\alpha) \end{cases} \\
F^{km} u_m &= \begin{cases} -E_\alpha u_\alpha & (k=0) \\ E_\alpha u_0 + F^{\alpha\beta} u_\beta & (k=\alpha) \end{cases} \\
&= \begin{cases} E_\alpha u^\alpha & (k=0) \\ E_\alpha u^0 - F_{\alpha\beta} u^\beta & (k=\alpha) \end{cases}
\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}
(F_{kl} u^l)(F^{km} u_m) &= (E_\alpha u^\alpha)^2 - (E_\alpha u^0 + F_{\alpha\beta} u^\beta)^2 \\
&= (E_\alpha u^\alpha)^2 - (E_\alpha u^0)^2 - 2E_\alpha F_{\alpha\beta} u^0 u^\beta - (F_{\alpha\beta} u^\beta)^2
\end{aligned}$$

である. これは

$$F_{\alpha\beta} = -e_{\alpha\beta\gamma} H_\gamma, \quad \therefore F_{\alpha\beta} u^\beta = -e_{\alpha\beta\gamma} u^\beta H_\gamma = -\frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{H})_\alpha}{c\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

を用いると,

$$\frac{1}{1-(v/c)^2} \left[ \frac{1}{c^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})^2 - \left\{ \mathbf{E} - \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) \right\}^2 \right]$$

と書き換えられる. よって式 (73.7) の代わりに, 磁場の項の係数  $1/c^2$  を  $-1/c$  に置き換えた

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{2e^4}{3m^2 c^3} \int dt \frac{\left\{ \mathbf{E} - \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) \right\}^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})^2}{1-(v/c)^2}$$

が得られると考えられる. (負号の正否はともかく, 分母の  $c$  のべきは次元を考えれば, 1 乗でなければならない. 本稿では訂正済み.)

■式 (73.8) について  $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$  がこれまでの定義  $\mathbf{n} = \mathbf{R}_0/R_0$  と異なり、電荷から見た観測点の方向であることに注意する。

■式 (73.9) における電場の 2 乗の計算

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \left\{ \left( \mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \mathbf{w} \right\} &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) \left( \mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) - \mathbf{w} \left( 1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \right), \\ \left[ \mathbf{n} \times \left\{ \left( \mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \mathbf{w} \right\} \right]^2 &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})^2 \left( \mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right)^2 - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) \left\{ \mathbf{w} \cdot \left( \mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \right\} \left( 1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \right) + \mathbf{w}^2 \left( 1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \right)^2 \\ &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) \left( 1 - \frac{2\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} + \frac{v^2}{c^2} \right) \\ &\quad + \left\{ -2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})^2 \left( 1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \right) + \frac{2}{c} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \left( 1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \right) \right\} + \mathbf{w}^2 \left( 1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \right)^2 \\ &= -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{2}{c} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \left( 1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \right) + \mathbf{w}^2 \left( 1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \right)^2. \end{aligned}$$

■角度の範囲 (73.12) について

$$0 \sim 1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} = 1 - \frac{v}{c} \cos \theta \simeq 1 - \frac{v}{c} \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \simeq 1 - \frac{v}{c} + \frac{\theta^2}{2}, \quad \therefore \theta \sim \sqrt{1 - \frac{v}{c}}.$$

ところが

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 + \frac{v}{c}} \sqrt{1 - \frac{v}{c}} \simeq \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{v}{c}} \sim \sqrt{1 - \frac{v}{c}}$$

なので、 $\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ :(73.12) と書いても良い。この結果はもちろん、 $v/c \simeq 1$  により 1 に比べて小さい。

「小教程」の巻末注では次のように説明されている [1, p.386].  $\frac{v}{c} = \beta$ ,  $1 - \beta = \epsilon (\ll 1)$  と記すと、

$$\epsilon^2 = 1 - 2\beta + \beta^2 \quad \text{i.e.} \quad \beta = \frac{1}{2}(1 + \beta^2 - \epsilon^2).$$

$|\theta| \ll 1$  に対して  $\cos \theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$ . したがって

$$1 - \beta \cos \theta = 1 - \beta \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) = \frac{1}{2}(1 - \beta^2 + \epsilon^2) + (1 - \epsilon) \frac{\theta^2}{2}.$$

ここで  $\epsilon^2, \epsilon\theta^2$  を高次の微小量として無視すれば、

$$1 - \frac{v}{c} \cos \theta \simeq 1 - \frac{v}{c} + \frac{\theta^2}{2} \simeq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} + \theta^2 \right)$$

となる。この差は、 $\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ :(73.12) のときには小さい。

■速度と加速度が平行な場合の磁場の式 (p.220, l.9) について

$$\mathbf{n} \times \{ \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{w}) \} = \mathbf{n} \times \{ \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{w} \} = -\mathbf{n} \times \mathbf{w}$$

である。この関係は幾何学的にも確かめられる。

■速度と加速度が垂直な場合の強度分布の式 (73.14) について 図 80 より  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = w \sin \theta \cos \phi$  である。

## § 74. 磁気制動放射

磁気制動放射 (シンクロトロン放射), すなわち一様不変な磁場中を円運動する電荷からの放射を考えよう. はじめに準備として, § 21 で求めた円運動の半径と角振動数を書いておく.

$$r = \frac{mcv}{eH\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \omega_H = \frac{v}{r} = \frac{eH}{mc}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \quad (74.1)$$

放射全強度, すなわち単位時間に全方向に放射されるエネルギー (73.7):

$$I = \frac{2e^4}{3m^2c^3} \frac{\{\mathbf{E} - (\frac{v}{c} \times \mathbf{H})\}^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})^2}{1 - (v/c)^2}$$

は今の場合 ( $\mathbf{E} = 0, \mathbf{H} \perp \mathbf{v}$ ),

$$I = \frac{2e^4 H^2 v^2}{3m^2 c^5 \{1 - (v/c)^2\}} \quad (74.2)$$

となる. これは粒子の運動量  $mv/\sqrt{1 - (v/c)^2}$  の 2 乗に比例している.

円運動の 1 周期における放射の角分布の平均を求めるには, 全時間における放射の角分布の式 (73.11):

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}} = \frac{e^2}{4\pi c^3} d\omega \int \left\{ \frac{2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})}{c(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c})^4} + \frac{w^2}{(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c})^3} - \frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})}{(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c})^5} \right\} dt'$$

の積分範囲を運動の 1 周期に限定し, 周期  $T$  で割れば良い. 放射の方向  $\theta$  を図 81 のように定義すると, その計算結果は

$$dI = d\omega \frac{e^4 H^2 v^2 (1 - \frac{v^2}{c^2})}{8\pi m^2 c^5} \left\{ \frac{2 - \cos^2 \theta - \frac{v^2}{4c^2} (1 + \frac{3v^2}{c^2}) \cos^4 \theta}{(1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta)^{7/2}} \right\} \quad (74.4)$$

となる [本稿次節の途中式 (74.3) 参照]. 比

$$\frac{(dI/d\omega)_{\theta=0}}{(dI/d\omega)_{\theta=\pi/2}} = \frac{4 + 3\frac{v^2}{c^2}}{8(1 - \frac{v^2}{c^2})^{5/2}} \quad (74.5)$$

[本稿次節で補足] は非相対論的な運動  $v \ll c$  に対しては  $1/2$  に近づくのに対し, 超相対論的な場合  $v \simeq c$  には大きな値となる. これは超相対論的な場合には, 主として放射が円運動の面を含む狭い範囲内で行われることと関係している. 実際このとき, 強度分布  $dI$  の分母が  $1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta \sim 0$  となり, それ故, 大きな強度を持つ方向は,  $\theta = 0$  の周りの幅

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \quad (74.11)$$

の範囲である. これは超相対論的な場合の放射が, 主に速度  $\mathbf{v}$  と  $\Delta\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  程度の角を成す方向  $\mathbf{n}$  のうちに行われるという, 前節§ 73 の結果と整合している. (そうであるならば, 図 81 の  $\theta$  もまた同じ条件を満たさなければならないから.) なお粒子の超相対論的な運動に対して上記の全強度  $I$  は, 分子において  $v = c$  とおくと, 粒子の運動量ではなくエネルギー  $\mathcal{E} = mc^2/\sqrt{1 - (v/c)^2}$  の 2 乗に比例するようになる:

$$I = \frac{2e^4 H^2}{3m^2 c^3} \left( \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^2. \quad (74.10)$$

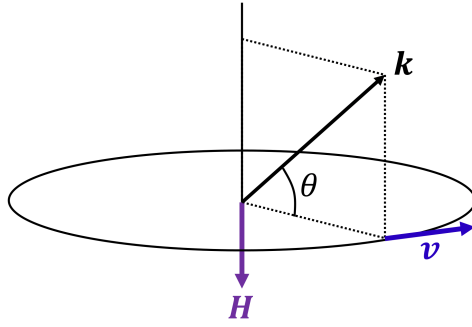


図 81 シンクロトロン放射

粒子の運動から場の Fourier 係数を求める公式 (66.12):

$$\mathbf{A}_n = e \frac{e^{ikR_0}}{cR_0T} \oint e^{i(\omega_H nt - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{r}$$

( $\omega_H$  は円運動の角振動数 (74.1)) を用いて, 振動数  $\omega = n\omega_H$  の波の強度 (66.10):

$$dI_n = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{H}_n|^2 R_0^2 d\omega$$

を計算すると,

$$dI_n = \frac{n^2 e^4 H^2}{2\pi c^3 m^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left[ \tan^2 \theta J_n^2 \left(\frac{nv}{c} \cos \theta\right) + \frac{v^2}{c^2} J_n'^2 \left(\frac{nv}{c} \cos \theta\right) \right] d\omega, \quad (74.8)$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\text{全立体角}} dI_n \\ &= \frac{2e^4 H^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{m^2 c^2 v} \left[ \frac{nv^2}{c^2} J_{2n}' \left(\frac{2nv}{c}\right) - n^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \int_0^{v/c} J_{2n}(2n\xi) d\xi \right] \end{aligned} \quad (74.9)$$

となる (式 (74.8) の導出は下記). ただし

$$J_n \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n\xi - x \sin \xi)} d\xi$$

は Bessel 関数である (§ 70).

これ以降, 粒子の超相対論的な運動  $v \simeq c$  を仮定する.  $n$  の大きな範囲  $n \gg 1$  に対する  $I_n$  の漸近形を調べると,

$$I_n = \begin{cases} 0.52 \frac{e^4 H^2}{m^2 c^3} \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}}\right) n^{1/3}, & \left(1 \ll n \ll \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^3\right) \\ \frac{e^4 H^2 n^{1/2}}{2\sqrt{\pi} m^2 c^3} \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}}\right)^{5/2} \exp\left\{-\frac{2}{3} n \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}}\right)^3\right\} & \left(n \gg \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^3\right) \end{cases} \quad (74.14-15)$$

となる (導出は下記).  $n$  依存性に注目すると,  $1 \ll n \ll \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^3$  では  $I_n$  は  $n^{1/3}$  に従って増大し,  $n \gg \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^3$  では  $I_n$  は指数関数的に減少する. よってスペクトル  $I_n$  は

$$n \sim \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^3, \quad \therefore \omega = n\omega_H \sim \omega_H \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^3 \quad (74.16)$$

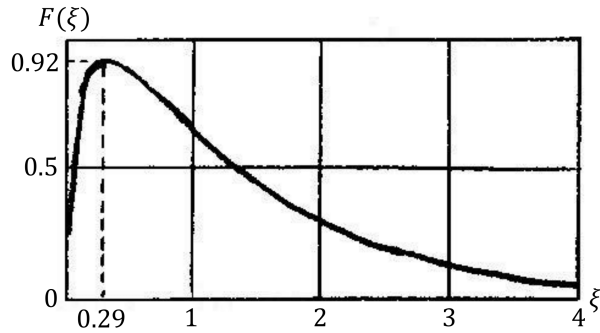


図 82 振動数  $\omega \sim \xi$  と放射の強度分布  $dI/d\omega \sim F(\xi)$  の関係

に極大を持つ。この近くの振動数は  $[I_n$  がゼロと著しくことなる値を持つ  $\omega$  の範囲の目安でもあり、その幅は] 隣り合う振動数の間隔  $\omega_H$  に比べて大きい。このことはスペクトルが準連続的であることを意味している。そこで振動数の幅  $d\omega$  に含まれる  $d\omega/\omega_H$  個の振動数に関する強度  $I_n$  の和として

$$dI = I_n \frac{d\omega}{\omega_H}$$

を導入すると、これは

$$dI = d\omega \frac{\sqrt{3} e^3 H}{2\pi mc^2} F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right), \quad F(\xi) \equiv \xi \int_{\xi}^{\infty} K_{5/3}(\xi) d\xi, \quad \omega_c \equiv \frac{3eH}{2mc} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^2 \quad (74.17-18)$$

と表される ( $K_\nu$  は Hankel 関数, 図 82 参照)。

もし粒子の速度が磁場と平行な成分を持つような等速らせん運動をするならば、放射の全強度  $I$  において磁場が  $(\mathbf{v} \times \mathbf{H})^2$  の形でのみ現れることに注意し、

$$H \rightarrow H_{\perp} = H \sin \chi$$

の置き換えを施せば良い。ただし  $\chi$  は速度  $\mathbf{v}$  の磁場との成す角である。

## § 74, 式の導出など

### ■式 (74.8) の導出 粒子の円運動

$$x = r \cos \omega_H t, \quad y = r \sin \omega_H t \quad (r, \omega_H \text{ は式 (74.1)})$$

に対して、ベクトル・ポテンシャルの Fourier 係数 (66.12):

$$\mathbf{A}_n = e \frac{e^{ikR_0}}{cR_0 T} \oint e^{i(\omega_H n t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{r}$$

を計算する。積分変数を角度  $\phi = \omega_H t$  に選び、

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos \theta \sin \phi = \frac{nv}{c} \cos \theta \sin \phi \quad \left(k = \frac{n\omega_H}{c} = \frac{nv}{cr}\right)$$

に注意すれば、例えば  $x$  成分として

$$A_{xn} = -\frac{ev}{2\pi c R_0} e^{ikR_0} \int_0^{2\pi} e^{in(\phi - \frac{v}{c} \cos \theta \sin \phi)} \sin \phi d\phi \quad (87)$$

が得られる [本稿次節で補足]. § 70 で扱った Bessel 関数を用いて, これは

$$A_{xn} = \frac{iev}{cR_0} e^{ikR_0} J'_n \left( \frac{nv}{c} \cos \theta \right) \quad (74.6)$$

と表される [本稿次節で補足]. 同様に  $y$  成分は

$$A_{yn} = \frac{e}{R_0 \cos \theta} e^{ikR_0} J_n \left( \frac{nv}{c} \cos \theta \right) \quad (74.7)$$

となり [本稿次節で補足], また  $z$  成分は明らかに消える.

放射の強度 (66.10):

$$dI_n = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{H}_n|^2 R_0^2 d\Omega = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{k} \times \mathbf{A}_n|^2 R_0^2 d\Omega$$

において

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{k}|^2 = A_x^2 k^2 + A_y^2 k^2 \sin^2 \theta$$

に注意し, 式 (74.6), (74.7) を代入すると式 (74.8) が導かれる [本稿次節で補足].

■式 (74.14–15) の導出 漸近公式 (70.9) によると

$$J_{2n}(2n\xi) \cong \frac{1}{\sqrt{\pi n^{1/3}}} \Phi[n^{2/3}(1 - \xi^2)]. \quad (74.12)$$

これを式 (74.9) に代入すると, 大きな  $n$  に対する放射のスペクトル分布

$$I_n = \frac{2e^4 H^2}{\sqrt{\pi} m^2 c^3} \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \sqrt{u} \left\{ -\Phi'(u) - \frac{u}{2} \int_u^\infty \Phi(u) du \right\}, \quad u = n^{2/3} \left( \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \quad (74.13)$$

が得られる [本稿次節で補足].

(p.224 脚注 2 を引用) 代入ののち, 求めている精度では, 積分の限界 ( $n^{2/3}$ ) を無限大でおきかえ, また可能なところではすべて  $v = c$  とおく. (74.9) の積分には, 1 に近くない  $\xi$  の値もはいつてくるけれども, 積分が下限の方で急速に収束するから, 公式 (74.12) を使うことが許される.

- $u \rightarrow 0$  のとき

式 (74.13) の  $\{\dots\}$  部分は一定値  $\Phi'(0) = -0.4587\dots$  に近づく.

(p.225 脚注 1 を引用) エアリー関数の定義によって

$$\Phi'(0) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \xi \sin \frac{\xi^3}{3} d\xi = -\frac{1}{\sqrt{\pi} 3^{1/3}} \int_0^\infty x^{-1/3} \sin x dx = -\frac{3^{1/6}}{2} \frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}}$$

が得られる.

したがって  $u \ll 1$  に対して式 (74.14) が得られる.

- $u \gg 1$  のとき

エアリー関数  $\Phi(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos \left( \frac{\xi^3}{3} + \xi t \right) d\xi$  の, 大きな正の値  $t$  に対する漸近公式

$$\Phi(t) \approx \frac{1}{2t^{1/4}} e^{-(2/3)t^{3/2}}$$

(教科書では p.168 の脚注) を用いて式 (74.15) を導く.

§ 74 について

■ 「 $\mathbf{k}$  と速度  $\mathbf{v}$  とのあいだの角度の余弦は  $\cos \theta \cos \phi$  である」 (p.222, 1.17,18) について

$$\mathbf{n} = \frac{\hat{\mathbf{k}}}{|\mathbf{k}|} = (0, \cos \theta, \sin \theta), \quad \hat{\mathbf{v}} = \frac{\hat{\mathbf{v}}}{|\mathbf{v}|} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$$

より  $\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{v}} = \cos \theta \cos \phi$  を得る.

■ 式 (74.3) について  $dI$  の式 (73.9) の 1 周期の平均を改めて  $dI$  と再定義する.

$$\begin{aligned} dI &= d\omega \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \frac{2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})}{c(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c})^5} + \frac{\mathbf{w}^2}{(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c})^4} - \frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})}{(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c})^6} \right\} dt \\ &= d\omega \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{1}{T} \int_{t=0}^{t=T} \left\{ \frac{2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})}{c(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c})^5} + \frac{\mathbf{w}^2}{(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c})^4} - \frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})}{(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c})^6} \right\} \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right) dt' \\ &= d\omega \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})}{c(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c})^5} + \frac{\mathbf{w}^2}{(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c})^4} - \frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})}{(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c})^6} \right\} \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right) \frac{d\phi}{\omega_H}. \end{aligned}$$

ただし被積分関数の全ての量は時刻  $t'$  で評価されているため,  $\phi = \omega_H t', dt' = \frac{d\phi}{\omega_H}$  であることに注意した.  
ここで p.222, 1.21 の運動方程式

$$\mathbf{w} = \frac{e}{mc} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \quad (\text{式 (21.1) を見よ})$$

より

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &\propto \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) = 0, \\ \mathbf{w}^2 &= \left(\frac{e}{mc}\right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2 (vH)^2, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} &= \frac{e}{mc} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) = -\frac{evH}{mc} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cos \theta \sin \phi \\ &\quad (\because \mathbf{n} = (0, \cos \theta, \sin \theta), \mathbf{v} \times \mathbf{H} = -vH(\cos \phi, \sin \phi, 0)) \end{aligned}$$

であり, さらに既に調べたように  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v \cos \theta \cos \phi$  なので,

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})}{c(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c})^5} + \frac{\mathbf{w}^2}{(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c})^4} - \frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})}{(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c})^6} \right\} \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right) \\ &= \frac{e^2 v^2 H^2}{m^2 c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \cos \phi\right)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cos^2 \theta \sin^2 \phi}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \cos \phi\right)^5} \end{aligned}$$

を得る. 右辺の分子は

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \sin^2 \theta + \left(\frac{v}{c} - \cos \theta \cos \phi\right)^2 = 1 - \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta - 2\frac{v}{c} \cos \theta \cos \phi$$

に一致するため,

$$dI = do \frac{e^4 H^2 v^2}{8\pi^2 m^2 c^5} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \int_0^{2\pi} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \sin^2 \theta + \left(\frac{v}{c} - \cos \theta \cos \phi\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \cos \phi\right)^5} d\phi \quad (74.3)$$

を得る.

■式 (74.5) について

$$1 - \frac{v^2}{4c^2} \left(1 + \frac{3v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(4 + \frac{3v^2}{c^2}\right).$$

■Fourier 成分  $A_n$  の式 (87), (74.6), (74.7) について

$$\frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r}, \quad d\mathbf{r} = r d\phi (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$$

を用いて, 教科書 p.223, 1.15 における  $A_{xn}$  の式 (本稿の式 (87)) を得る. Bessel 関数の式 (70.6) より

$$J'_n \left(\frac{nv}{c} \cos \theta\right) = -\frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in(\phi - \frac{v}{c} \cos \theta \sin \phi)} \sin \phi d\phi$$

なので,  $A_{xn}$  の式 (74.6) における負号は不要と考えられる (本稿では訂正済み). ただしこのことは放射強度の結果に影響しない. 一方  $y$  成分に関しては

$$A_{yn} = \frac{ev}{2\pi c R_0} e^{ikR_0} \int_0^{2\pi} e^{in(\phi - \frac{v}{c} \cos \theta \sin \phi)} \cos \phi d\phi$$

であり, § 70 の計算手順と同様に

$$\cos \phi = \left(\cos \phi - \frac{1}{(v/c) \cos \theta}\right) + \frac{1}{(v/c) \cos \theta}$$

と書くと, 右辺の第 1 項の寄与はゼロになる. すると  $A_{yn}$  の式 (74.7) において, 右辺の係数分母の  $\sin \theta$  は  $\cos \theta$  に訂正されると考えられる (本稿では訂正済み). 実際このように訂正すれば, 強度の式 (74.8) が得られる.

■式 (74.8) について

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, 0), \quad \mathbf{k} = k(0, \cos \theta, \sin \theta), \quad \therefore \mathbf{A} \times \mathbf{k} = k(A_y \sin \theta, A_x \sin \theta, A_x \cos \theta)$$

なので  $|\mathbf{A} \times \mathbf{k}|^2 = A_x^2 k^2 + A_y^2 k^2 \sin^2 \theta$  (p.223, 1.22 の式) を得る. 他方, 複素ベクトル  $\mathbf{A}_n \times \mathbf{k}$  の絶対値の 2 乗は

$$|\mathbf{A}_n \times \mathbf{k}|^2 = |A_{xn}|^2 k^2 + |A_{ny}|^2 k^2 \sin^2 \theta$$

であることに注意して, これを強度  $dI_n$  の式 (p.223, 1.20) に代入すると

$$\begin{aligned} dI_n &= \frac{c}{2\pi} R_0^2 k^2 \left\{ \frac{e^2 v^2}{c^2} J_n'^2 \left(\frac{nv}{c} \cos \theta\right) + \frac{e^2}{\cos^2 \theta} J_n^2 \left(\frac{nv}{c} \cos \theta\right) \sin^2 \theta \right\} \frac{|e^{2ikR_0}|}{R_0^2} do \\ &= \frac{ce^2}{2\pi} k^2 \left[ \tan^2 \theta J_n^2 \left(\frac{nv}{c} \cos \theta\right) + \frac{v^2}{c^2} J_n'^2 \left(\frac{nv}{c} \cos \theta\right) \right] do \end{aligned}$$

となる.  $\omega_H$  の式 (74.1) を用いて係数を

$$k^2 = \frac{(n\omega_H)^2}{c^2} = \frac{n^2 e^2 H^2}{m^2 c^4} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

と書き換えると, 式 (74.8) を得る.



■式 (74.13) について

$$I_n = \frac{2e^4 H^2}{m^2 c^3} \left( \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \left[ n J'_{2n} \left( \frac{2nv}{c} \right) - n^2 \left( \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \int_0^{v/c} J_{2n}(2n\xi) d\xi \right]$$

と書いておき, [...] 内第 1 項を考える.  $\xi = v/c$  とおいて式 (74.12) を適用すると, 右辺の Airy 関数  $\Phi$  の引数  $n^{2/3}(1 - \xi^2)$  が  $u = n^{2/3} \left( \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2$  となる. 両辺を  $J_{2n}$  の引数  $2nv/c (\equiv \Xi)$  で微分しよう. 右辺の微分を

$$\frac{d}{d\Xi} = \frac{du}{d\Xi} \frac{d}{du}$$

のように  $u$  による微分に書き換えたときに現れる因子  $\frac{du}{d\Xi}$  が  $-1/n^{1/3}$  であれば,

$$\left( \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 n J'_{2n} \left( \frac{2nv}{c} \right) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 n^{1/3} \Phi'(u) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \sqrt{u} \Phi'(u)$$

となる. 次に [...] 内第 2 項に対して再び式 (74.12) を用いると,

$$\begin{aligned} \int_0^{v/c} J_{2n}(2n\xi) d\xi &= \frac{1}{\sqrt{\pi} n^{1/3}} \int_0^{v/c} \Phi[n^{2/3}(1 - \xi^2)] d\xi \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi} n} \int_{n^{2/3}}^u \Phi(u') \frac{du'}{\sqrt{1 - (u'/n^{2/3})}} \\ &\quad (u \equiv n^{2/3}(1 - (v/c)^2), u' \equiv n^{2/3}(1 - \xi^2)) \end{aligned}$$

を得る. ここで  $n \gg 1$  に注意して積分範囲における  $n^{2/3}$  を  $\infty$  に置き換える. またこのとき  $u' \rightarrow \infty$  となるけれど  $\sqrt{1 - (u'/n^{2/3})}$  を 1 としてしまえば,

$$\begin{aligned} \int_0^{v/c} J_{2n}(2n\xi) d\xi &= \frac{1}{2\sqrt{\pi} n} \int_u^\infty \Phi(u') du', \\ -n^2 \left( \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^4 \int_0^{v/c} J_{2n}(2n\xi) d\xi &= -\frac{n}{2\sqrt{\pi}} \left( \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^4 \int_u^\infty \Phi(u') du' \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right) \sqrt{u} \left( -\frac{u}{2} \right) \int_u^\infty \Phi(u') du' \end{aligned}$$

と書き換えられ, 式 (74.13) が得られる.

■ $dt/dt_{\text{ob}}$  の式 (p.226, l.20) について 図 83 のように粒子の磁場と平行な速度成分を  $v_{\parallel}$  とすると, 任意の点とそこから  $v_{\parallel} dt$  だけ進んだ位置からの放射の光路差は

$$dl = v_{\parallel} dt \cos \vartheta$$

である. よって 2 点からの放射が観測点に到達する時間差は

$$dt_{\text{ob}} = dt - \frac{dl}{c} = dt \left( 1 - \frac{v_{\parallel} \cos \vartheta}{c} \right)$$

である.

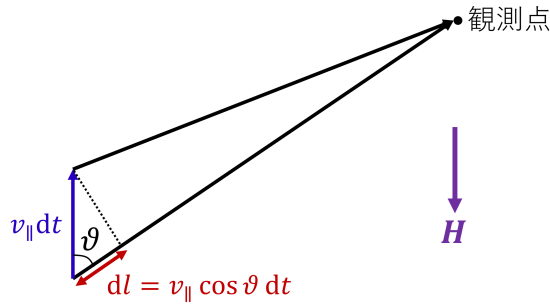


図 83 粒子が観測点に近づく様子

## § 75. 放射減衰

§ 65 では遅延ポテンシャルの展開

$$\phi = \int \frac{\rho_{t-R/c}}{R} dV - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R \rho dV + \dots, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{t-R/c}}{R} dV + \dots$$

において、 $v/c$  の 2 次まで正確なラグランジアンを得るのに必要な項までを考慮した。ここではさらに高い近似に進んだときに現れる付加的な項

$$\phi^{(3)} = -\frac{1}{6c^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int R^2 \rho dV, \quad \mathbf{A}^{(2)} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{j} dV \quad (75.1-2)$$

を考えると、これらの電磁場への寄与は

$$\mathbf{E} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}, \quad \mathbf{H} = 0 \quad (75.4)$$

と計算される。(導出は下記。このことは  $\phi^{(3)} = 0$  となるゲージを用いて証明される。)

厳密には放射により減衰していくけれど、放射を無視すれば定常的であるような電荷の系の運動を考える。[定常運動に関しては、物理量の時間平均に興味を持たれる。そこで] この付加的な電場 (75.4) による力

$$\mathbf{f} = e\mathbf{E} = \frac{2e}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}} \quad (75.5)$$

が単位時間にする仕事の時間平均を計算すると、

$$\overline{\sum \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}} = -\frac{2}{3c^3} \overline{\dot{\mathbf{d}}^2} \quad (75.6)$$

となる (導出は下記)。これは単位時間の双極放射のエネルギー (67.8) とちょうど符号が逆になっているため、これは放射の電荷に対する反作用と見なせる。[場がエネルギーを獲得し、電荷がエネルギーを失う。] この力  $\mathbf{f}$  を放射減衰、あるいは Lorentz 摩擦力と呼ぶ。

放射により電荷の系はエネルギーだけでなく、角運動量も失う。角運動量と力のモーメントの関係  $\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f}$  に基づき、角運動量の平均損失として

$$\overline{\frac{d\mathbf{M}}{dt}} = -\frac{2}{3c^3} \overline{\dot{\mathbf{d}} \times \ddot{\mathbf{d}}} \quad (75.7)$$

を得る (導出は下記).

[減衰力は粒子が電場から受ける力として導かれているため, 電荷が 1 個だけのときの減衰力は自己力を表すことになり, 解釈に注意を要する.] 電荷が 1 個の場合にも減衰力の式を適用して,

$$\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} \quad (75.8)$$

と書いてみると, 運動方程式は

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}$$

となる. これは自明な解  $\mathbf{v} = \text{const.}$  を除けば, 一般に加速度が  $\dot{\mathbf{v}} \sim \exp\left(\frac{3mc^3 t}{2e^2}\right)$  に従って指数関数的に増大することを意味する. この困難は素粒子の無限大の電磁的“固有質量”に関係している. 有限の質量を考えるとき, 我々は無限大の電磁的“固有質量”を負の無限大の“固有質量”で相殺していることになる (§ 37). しかし無限大から無限大を引くことは数学的に完全に正しい操作ではないから, そのような措置によっても避けることのできない困難が生じ得る. ここでの電荷の“自己加速”によるエネルギーの発散は, その 1 例である.

[放射による減衰力は  $v/c$  のベキの第 3 次近似で得られたものだから, これを用いるには非相対論的な運動を仮定しなければならない. そこで] 放射減衰を含めた非相対論的な運動方程式

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H} + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\mathbf{v}}$$

を考えると, これを適用するには減衰力は外場からの力に比べて小さくなければならない. [これは定常運動のための条件でもある.] 減衰力  $\mathbf{f} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\mathbf{v}}$  を評価するために, 減衰力を無視した場合の  $\ddot{\mathbf{v}}$  の式

$$\ddot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\dot{\mathbf{E}} + \frac{e}{mc}\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{H} = \frac{e}{m}\dot{\mathbf{E}} + \frac{e^2}{m^2c}\mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

を用いると

$$\mathbf{f} = \frac{2e^3}{3mc^3}\dot{\mathbf{E}} + \frac{2e^4}{3m^2c^4}\mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (75.10)$$

を得る. 振動数  $\omega$  の運動を考えると,

- 第 1 項  $\frac{2e^3}{3mc^3}\dot{\mathbf{E}}$  が外場の力  $e\mathbf{E}$  に比べて小さい条件

$$\lambda \gg \frac{e^2}{mc^2}. \quad (\lambda \sim c/\omega)$$

すなわち古典電磁気学の適用限界を電磁気学自身が定める電荷の“半径”  $e^2/mc^2$  (§ 37) に比べて, 放射の波長が長いこと.

- 第 2 項  $\frac{2e^4}{3m^2c^4}\mathbf{E} \times \mathbf{H}$  が外場の力  $e\mathbf{E}$  に比べて小さい条件

$$H \ll \frac{m^2c^4}{e^3}.$$

すなわち場それ自身があまり大きくないこと.

ただし減衰力の表式  $\mathbf{f} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\mathbf{v}}$  は, 電荷の瞬間的静止系において放射の反作用の正しい表式となるため, この評価における波長  $\lambda$  と場  $H$  も粒子の瞬間的静止系における値と見なさなければならない.

§ 75, 式の導出など

■式 (75.4) の導出  $\phi^{(3)} = 0$  となるように, ポテンシャル (75.1-2) にゲージ変換

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$$

を施す. そのためにはゲージ関数を

$$f = -\frac{1}{6c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R^2 \rho dV$$

と選べば良く, このとき新しいベクトル・ポテンシャルは

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'^{(2)} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{j} dV - \frac{1}{6c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \int R^2 \rho dV \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{j} dV - \frac{1}{3c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \mathbf{R} \rho dV \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \sum e \mathbf{v} - \frac{1}{3c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum e (\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}) \\ &= -\frac{2}{3c^2} \sum e \dot{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (75.3)$$

となる. これは座標をあからさまに含まないから, 磁場への寄与は  $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}'^{(2)} = 0$  であり, 対応する電場は

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}'^{(2)} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}} \quad (75.4)$$

となる ( $\mathbf{d}$  は系の双極モーメント).

■式 (75.6) の導出 力 (75.5) による仕事率の, 全電荷に関する和は

$$\sum \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}} \cdot \sum e \mathbf{v} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}} \cdot \dot{\mathbf{d}} = \frac{2}{3c^3} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{d}} \cdot \dot{\mathbf{d}}) - \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2$$

となる. 時間平均をとると第 1 項は消えるから [本稿次節で補足], 式 (75.6) が得られる.

■式 (75.7) の導出

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \frac{2}{3c^3} \sum e \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{d}} = \frac{2}{3c^3} \mathbf{d} \times \ddot{\mathbf{d}}.$$

最右辺において

$$\mathbf{d} \times \ddot{\mathbf{d}} = \frac{d}{dt} (\mathbf{d} \times \dot{\mathbf{d}}) - \dot{\mathbf{d}} \times \dot{\mathbf{d}}$$

と書き, 時間平均をとると第 1 項が消えるので, 式 (75.7) を得る.

§ 75 について

■「時間について平均すると, 第 1 項は消えるから」(p.229, l.8) について 第 1 巻『力学』§ 10 で説明されているように, 有界な時間の関数  $F(t)$  の導関数  $f(t) = dF(t)/dt$  に対する時間平均はゼロになる.

$$\bar{f} \equiv \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0.$$

## § 76. 相対論的な場合の放射減衰

前節の放射減衰の表式は、粒子の非相対論的な運動を前提としたものであった。ここでは相対論的な放射減衰を考えよう。

$$g^i = \frac{2e^2}{3c} \left( \frac{d^2 u^i}{ds^2} - u^i u^k \frac{d^2 u_k}{ds^2} \right) \quad (76.2)$$

とすると、これは  $g^i u_i = 0$  を満たすような 4 元反変ベクトルであり、非相対論的な極限  $v/c \rightarrow 0$  において空間成分は

$$g^\alpha \rightarrow \frac{f^\alpha}{c}, \quad f^\alpha = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{v}^\alpha$$

のように放射減衰  $\mathbf{f}$  の式 (75.8) に移行するので、放射減衰を表す力の 4 元ベクトル  $g^i$  と見なせる ( $g^i = \left( \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{c^2 \sqrt{1-(v/c)^2}}, \frac{\mathbf{f}}{c \sqrt{1-(v/c)^2}} \right)$ : (9.18)). 運動方程式

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k + g^i$$

における放射減衰  $g^i$  を 4 元力  $\frac{e}{c} F^{ik} u_k$  に比べて無視した関係  $mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k$  を用いてこれを書き換えると、

$$g^i = \frac{2e^3}{3mc^3} (\partial_l F^{ik}) u_k u^l - \frac{2e^4}{3m^2 c^5} F^{il} F_{kl} u^k + \frac{2e^4}{3m^2 c^5} (F_{kl} u^l) (F^{km} u_m) u^i \quad (76.3)$$

を得る [導出は本稿次節].

粒子の世界線に沿う 4 元力  $g^i$  の積分

$$\int g^i ds = \frac{2e^2}{3c} \int \left( \frac{d^2 u^i}{ds^2} - u^i u^k \frac{d^2 u_k}{ds^2} \right) ds$$

は、4 元運動量の全放射 (73.4):

$$\Delta P^i = -\frac{2e^2}{3c} \int \frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} dx^i$$

の符号を入れ替えたものにちょうど一致することを直接確かめられる (証明は下記). これは非相対論的な場合に、減衰力の仕事の時間平均が双極放射の強度の符号を入れ替えたものに一致したことに対応している (§ 75).

ここからは超相対論的な場合  $v \simeq c$  を考える. このとき  $g^i$  を場で表した上式 (76.3) において、4 元速度成分の 3 重積を含む項が主要となるので、速度  $\mathbf{v}$  の方向を  $\mathbf{n}$  として放射減衰の 3 次元的な力は

$$\mathbf{f} = \frac{2e^4}{3m^2 c^5} (F_{kl} u^l) (F^{km} u_m) \mathbf{n}$$

と表される. これは速度の方向  $\mathbf{n}$  を  $x$  軸に選ぶと

$$f_x = -\frac{2e^4}{3m^2 c^4} \frac{(E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (76.4)$$

となり [本稿次節で補足], 粒子のエネルギー  $\mathcal{E}_{\text{kin}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$  の 2 乗に比例する.

粒子が速度  $v$  で動いている系における場の大きさの程度を  $F$  とすると、粒子の静止系における場は  $F/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  程度である (§ 24). 粒子の静止系において場は  $m^2 e^4/e^3$  より小さくなければならないという、放射減衰の式が成り立つ条件 (§ 76) は

$$\frac{F/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{m^2 e^4/e^3} = \frac{e^3 F}{m^2 c^4 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \ll 1 \quad (76.5)$$

と表される. この条件は、超相対論的な場合の減衰力  $f_x \sim e^4 F^2/m^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$  が外場の力 ( $\sim eF$ ) に比べて大きいとき

$$\frac{f_x}{eF} \sim \frac{e^3 F}{m^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \gg 1$$

にも満たされ得る [ $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \ll \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  による]. 一見するとこのことは、放射減衰の相対論的な表式を導く際に用いた、放射減衰は 4 元力  $\frac{e}{c} F^{ik} u_k$  に比べて小さいという仮定に抵触するように思われるかもしれない. しかしこの条件は 1 つの基準系で成立していれば十分であり、運動方程式の相対論的な不変性 [それは両辺が 4 元反変ベクトルであることから保証されている] により放射減衰が外場の力に比べて大きいような座標系でもその表式は正しい.

そこで放射減衰が粒子に働く主要な力である場合を考え、減衰力

$$f_x = -k(x) \mathcal{E}_{\text{kin}}^2, \quad k(x) \equiv \frac{2}{3m^2 c^4} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 [(E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2]$$

によるエネルギー損失

$$-\frac{d\mathcal{E}_{\text{kin}}}{dx} = k(x) \mathcal{E}_{\text{kin}}^2 \quad (88)$$

[本稿次節で補足] を考えると、

$$\frac{1}{\mathcal{E}_1} = \frac{1}{\mathcal{E}_0} + \int_{-\infty}^{\infty} k(x) dx$$

となる. ここに  $\mathcal{E}_0$  は初期 ( $x \rightarrow -\infty$ ) のエネルギーであり、 $\mathcal{E}_1$  は終状態 ( $x \rightarrow \infty$ ) のエネルギーである. これは場を通過した後の粒子のエネルギー  $\mathcal{E}_1$  が、 $\mathcal{E}_0$  に無関係な一定値

$$\mathcal{E}_{\text{crit}} \equiv \left[ \int_{-\infty}^{\infty} k(x) dx \right]^{-1}$$

を超えることはできないことを意味している.

## § 76, 式の導出など

■  $\int g^i ds = -\Delta P^i$  の証明  $g^i$  の式 (76.2) の第 1 項の積分は、無限遠で粒子の加速度が  $du^i/ds = 0$  であることからゼロになる. そこで第 2 項を部分積分すると

$$-\int g^i ds = \frac{2e^2}{3c} \int u^i u^k \frac{d^2 u_k}{ds^2} ds = -\frac{2e^2}{3c} \int \frac{du_k}{ds} \frac{du^k}{ds} dx^i = \Delta P^i.$$

## § 76 について

■  $g^i$  の式 (76.3) について ( $g^i$  を無視した) 運動方程式

$$\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{mc^2} F^{ik} u_k, \quad \therefore \frac{d^2 u^i}{ds^2} = \frac{e}{mc^2} (\partial_l F^{ik}) u_k u^l + \frac{e^2}{m^2 c^4} F^{ik} F_{kl} u^l$$

を式 (76.2) に代入し, 添字  $i, k$  に関して反対称なテンソル  $\partial_l F^{ik}$  と対称なテンソル  $u_i u_k$  の縮約は消えることに注意すると,

$$\begin{aligned} g^i &= \frac{2e^2}{3c} \left[ \left\{ \frac{e}{mc^2} (\partial_l F^{ik}) u_k u^l + \frac{e^2}{m^2 c^4} F^{ik} F_{kl} u^l \right\} - u^i u^k \left\{ \frac{e}{mc^2} (\partial_m F_{kl}) u^l u^m + \frac{e^2}{m^2 c^4} F_{kl} F^{lm} u_m \right\} \right] \\ &= \frac{2e^3}{3mc^3} (\partial_l F^{ik}) u_k u^l + \frac{2e^4}{3m^2 c^5} F^{ik} F_{kl} u^l - \frac{2e^4}{3m^2 c^5} (F_{kl} u^k) (F^{lm} u_m) u^i. \end{aligned}$$

次いで最右辺の第 2 項と第 3 項でダミー添字  $k, l$  を入れ替え,

$$F^{ik} F_{kl} u^l = F^{il} F_{lk} u^k = -F^{il} F_{kl} u^k, \quad (F_{kl} u^k) (F^{lm} u_m) = (F_{lk} u^l) (F^{km} u_m) = -(F_{kl} u^l) (F^{km} u_m)$$

とすれば良い. すると式 (76.3) 右辺第 3 項の負号は正号に訂正しなければならないと考えられる (本稿では訂正済み). 実際, 後で見るように, この訂正の下では式 (76.4) を正しく得ることができる.

■ 式 (76.4) について 式 (73.7) の導出において計算したように,

$$(F_{kl} u^l) (F^{km} u_m) = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[ \frac{1}{c^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})^2 - \left\{ \mathbf{E} + \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) \right\}^2 \right]$$

である. ここで  $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$  とおくと

$$\mathbf{E} + \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) = (E_x, E_y - H_z, E_z + H_y), \quad \frac{1}{c^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})^2 - \left\{ \mathbf{E} + \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) \right\}^2 = (E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2$$

なので, 既に予告したように式 (76.3) 右辺第 3 項の負号は正号に訂正すれば式 (76.4) が得られる.

■ 教科書 p.236, 1.7 におけるエネルギー損失の式 (本稿の式 (88)) について 式 (9.17):  $g^i = dp^i/ds$  の時間成分をとると, 相対論的な場合にも仕事とエネルギーの関係は

$$\frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{c^2 \sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{1}{c^2 \sqrt{1 - (v/c)^2}} \frac{d\mathcal{E}_{\text{kin}}}{dt}, \quad \therefore \frac{d\mathcal{E}_{\text{kin}}}{dt} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$$

と書けることが分かる.

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{kin}}}{dx} = f_x$$

と書き換えると, これは減衰力 (76.4):

$$f_x = -k(x) \mathcal{E}_{\text{kin}}^2, \quad k(x) \equiv \frac{2}{3m^2 c^4} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 [(E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2]$$

に対して p.236, 1.7 の式を与える.

■  $1/\mathcal{E}_{\text{crit}}$  の式 (76.6) について 右辺では § 37 で導入した粒子の半径 ( $e^2/mc^2$ ) がくり出されている。これに注意して右辺の次元を計算すると、確かに  $1/E$  となっていることが分かる。実際、長さの次元を  $L$ 、エネルギーの次元を  $E$ 、電磁場の次元を  $F$  とすると、右辺の次元は

$$\frac{1}{E^2} \cdot L^2 \cdot F^2 \cdot L = \frac{1}{E} \quad \left( \because \frac{E}{L^3} = F^2 \right)$$

である。

## § 77. 超相対論的な場合における放射のスペクトル分解

超相対論的な粒子 ( $v \simeq c$ ) からの放射を考える。このとき放射のほとんどは粒子の進行方向 (速度の前方) の狭い範囲  $\theta \lesssim \Delta\theta = \sqrt{1 - (v/c)^2}$  に含まれる (§ 73)。一方、粒子が外部電磁場 ( $\sim F$ , 幅  $a$  程度の広がりを持つ) を通過するときの散乱角は

$$\alpha \sim \frac{(eF) \times (a/c)}{mc/\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{eFa}{mc^2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

と見積もられるので、

$$\frac{\alpha}{\Delta\theta} \sim \frac{eFa}{mc^2}$$

である。

- $\alpha \gg \Delta\theta$ , すなわち  $eFa \gg mc^2$  のとき

与えられた方向への放射は主に、粒子の速度がその方向と平行になる軌道から生じ、この軌道の小部分の長さは  $a$  に比べて小さい。

- 放射の主要な振動数領域

$$\omega \sim \frac{eF}{mc \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}.$$

(軌道の小部分からの放射を磁気制動放射と見て、式 (74.16) を  $H \rightarrow F$  と置き換えて適用。)

- $\alpha \ll \Delta\theta$ , すなわち  $eFa \ll mc^2$  のとき

放射は軌道全体を通してほとんど一定の運動方向の周り  $\Delta\theta$  にのみ発射され、軌道の全体がその方向への放射に寄与する。

- 全放射の角度分布

電場に対する Liénard-Wiechert の式 (73.8) を用いてその Fourier 成分を計算すると、

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{e}{c^2} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2 \left[ \mathbf{n} \times \left\{ \left( \mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \mathbf{w}_{\omega'} \right\} \right], \quad (89)$$

$$\mathbf{w}_{\omega'} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{w} e^{i\omega' t} dt, \quad \omega' \equiv \omega \left( 1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \right) \quad (77.5)$$

を得る (導出は下記)。

区間  $d\omega$  の中の振動数を持つ波として

立体角  $d\omega$  に放射される全エネルギー (66.9):  $d\mathcal{E}_{n\omega} = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{E}_\omega|^2 R_0^2 d\omega \frac{d\omega}{2\pi}$  は

$$d\mathcal{E}_{n\omega} = \frac{e^2}{2\pi c^3} \left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^4 \left| \mathbf{n} \times \left\{ \left( \mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \mathbf{w}_{\omega'} \right\} \right|^2 d\omega \frac{d\omega}{2\pi}$$

となる。



– 放射の主要な振動数領域

$$\omega \sim \frac{c}{a \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}.$$

(加速度  $\mathbf{w}$  がゼロと著しく異なる時間  $a/c$  を  $1/\omega'$  と等置.)

粒子のエネルギー損失

$$af \sim \frac{e^4 F^2 a}{m^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

( $f_x$  の式 (76.4) を見よ) が粒子の最初のエネルギー  $mc^2/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  と同程度である場合, すなわち

$$aeF \sim \frac{m^3 c^6}{e^3 F} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

となる場合にも, 電磁気学が有効である条件 (76.5):  $e^3 F/m^2 c^4 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \ll 1$  の下でこれは第 1 の場合  $eFa \gg mc^2$  に帰着する.

## § 77, 式の導出など

■ $\mathbf{E}_\omega$  の式 (89) の導出 Liénard-Wiechert 型の電場の表式 (73.8) における遅れた時刻  $t'$  は, 「ほとんど一定の速度  $\mathbf{v}$ 」 (p.238 下から 6 行目) 粒子 [場  $F$  が式 (77.4) の意味で弱いことから, そのように見なし得る] の遠方では

$$t' \cong t - \frac{R_0}{c} + \frac{1}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t') \cong t - \frac{R_0}{c} + \frac{1}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} t'$$

となる. ここに「 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \cong \mathbf{v}t$  は粒子の動径ベクトル」 (p.238 下から 4 行目) である [時間と空間座標の原点を適当に選べば, こう書ける]. ここから

$$t = t' \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right) + \frac{R_0}{c}, \quad \therefore dt = \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right) dt'$$

であり, これを用いて電場 (73.8) の Fourier 成分

$$\mathbf{E}_\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E} e^{i\omega t} dt$$

を  $t'$  に関する積分に書き換えると,

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{e}{c^2} \frac{e^{ikR_0}}{R_0 \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{n} \times \left\{ \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right) \times \mathbf{w}(t') \right\} e^{i\omega t' \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)} dt' \quad (90)$$

となる [本稿次節で補足]. ただし  $\mathbf{v}$  は一定であり, ただ加速度  $\mathbf{w}(t')$  のみが変わるものと見なす. ここから  $\mathbf{E}_\omega$  の式 (89) が得られる.

## § 77 について

■教科書 p.239, 1.2 における  $\mathbf{E}_\omega$  の式 (本稿の式 (90)) について 電荷の位置  $\mathbf{r} = \mathbf{v}t$  は無限遠まで動くけれど, 無限遠では電場がゼロになるため,  $\mathbf{E}_\omega$  を表す積分にとって重要となる, 原点付近の  $\mathbf{r}$  に対して正確な式を与えれば良いと考えられる. このことに注意して  $R \cong R_0 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$  を使い (ただし式 (73.8) において指摘したように, ここで  $\mathbf{n}$  は原点ではなく電荷から見た観測点の方向  $\mathbf{R}_0/R_0$  である), § 66 と同様に分母では  $R = R_0$  とおく.

## § 78. 自由電荷による散乱

電磁波の散乱：

電荷の系への電磁波の入射 → 電荷の運動 → 電磁波の放射.

散乱有効断面積を，単位時間に与えられた方向  $d\Omega$  に放射されるエネルギー  $dI$  と，入射波のエネルギーに関する流れの密度 (Poynting ベクトル)  $S$  の比

$$d\sigma = \frac{dI}{S}$$

として定義する (バーは時間平均). [これはエネルギーを粒子数と読み替えれば，粒子の散乱に対する断面積の定義に一致する.]

静止している 1 個の自由電荷に，直線偏光した単色平面波

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha)$$

が入射する場合を考えよう. あらかじめ教科書の記号をまとめておこう.

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k} : & \text{波の入射方向,} & \mathbf{n}' : & \text{波の散乱方向,} & \mathbf{e} = \frac{\mathbf{E}_0}{E_0} : & \text{電場の方向,} \\ \theta : & \mathbf{n}' \text{ と } \mathbf{e} \text{ の成す角,} & \vartheta : & \mathbf{n}' \text{ と } \mathbf{k} \text{ の成す角.} \end{aligned}$$

入射波の影響で電荷の得る速度は光速度に比べて小さいものとする. このとき磁場による力  $\frac{v}{c} \times \mathbf{H}$  を電場から受ける力  $e\mathbf{E}$  に比べて無視することができ，また放射に関しては双極放射を適用できる. そこで電荷の非相対論的な運動方程式  $m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}$  を双極子モーメント  $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$  に対する式

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{e^2}{m} \mathbf{E}$$

に書き換えて双極放射の強度の式 (67.7):  $dI = \frac{1}{4\pi c^3} (\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}')^2 d\Omega$  に代入すると，

$$dI = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3} (\mathbf{E} \times \mathbf{n}')^2 d\Omega$$

となる. ただし電荷が原点付近で振動することから，電場の値は  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \alpha)$  のように原点で評価して良い. よって有効断面積

$$d\sigma = \frac{dI}{S} = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3} \frac{(\mathbf{E} \times \mathbf{n}')^2 d\Omega}{\frac{c}{4\pi} E^2} = \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega \quad (78.4)$$

を得る. [これは電荷の“半径”  $e^2/mc^2$  の 2 乗に比例している (§ 37).] これを全立体角について積分すると，全有効断面積  $\sigma$  に対する Thomson の公式

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2$$

が導かれる.

自然光に対しては有効断面積の表式を，入射方向  $\mathbf{k}$  に垂直な面内のあらゆる偏光方向  $\mathbf{e}$  について平均して

$$d\sigma = \frac{1}{2} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) d\Omega \quad (78.7)$$

とする (導出は下記).

波の散乱は, それに伴って粒子にある種の力が働くことを含意している. 実際波は単位時間に  $\overline{W} \times c\sigma$  のエネルギーを失い ( $\overline{W}$  は入射波の平均エネルギー密度), 場の運動量はエネルギーの  $1/c$  倍だから (§ 47),  $\overline{W}\sigma$  の運動量を失う. ところが静止した電荷からの双極放射では運動量は放射されないから (§ 73), 場の失った運動量は粒子に“吸収”されなければならない. これは荷電粒子に平均

$$\overline{\mathbf{f}} = \sigma \overline{W} \mathbf{n}$$

の力が働くことを意味している. この力は電荷に各瞬間に働く力 ( $\simeq e\mathbf{E}$ ) と違って, 場の 2 次の量となっている.

この力は減衰力に対する近似的な表式 (75.10):

$$\mathbf{f} = \frac{2e^3}{3mc^3} \dot{\mathbf{E}} + \frac{2e^4}{3m^2c^4} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

の時間平均

$$\overline{\mathbf{f}} = \frac{2e^4}{3m^2c^4} \overline{\mathbf{E} \times \mathbf{H}} = \frac{2e^4}{3m^2c^4} \overline{E^2} \mathbf{n} = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\overline{E^2}}{4\pi} \mathbf{n} = \sigma \overline{W} \mathbf{n}$$

としても理解できる. [それ故やはり, 外場から受ける力  $e\mathbf{E}$  とは明確に区別される.]

## § 78, 式の導出など

■式 (78.7) の導出 ここでは入射方向  $\mathbf{k}$  に垂直な面内のあらゆる偏光方向  $\mathbf{e}$  に関する平均をバーで表す. 微分断面積 (78.4) における  $\sin^2 \theta$  の平均は

$$\overline{\sin^2 \theta} = 1 - \overline{(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{e})^2} = 1 - n'_\alpha n'_\beta \overline{e_\alpha e_\beta}$$

となる. ここで最右辺における  $\overline{e_\alpha e_\beta}$  は対角和が 1 に等しい対称テンソルであり, また  $\mathbf{e}$  と  $\mathbf{k}$  とが直交するから  $k_\alpha$  をかけるとゼロになるので,

$$\overline{e_\alpha e_\beta} = \frac{1}{2} \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right)$$

と書ける. すると

$$\overline{\sin^2 \theta} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{k})^2}{k^2} \right) = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \vartheta)$$

であり, これを式 (78.4) に代入して式 (78.7) を得る.

## § 78 について

電荷が束縛されており, 固有振動数  $\omega_0$  の調和振動子と見なせる場合, 断面積は

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}$$

と修正される ( $r_0 \equiv e^2/mc^2$ , 節末の問題 2). これは自由電荷の極限  $\omega_0 = 0$  で Thomson 散乱の断面積 (78.5):  $\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2$  を再現する. 他方, 空気中の光の散乱を想定すると  $\omega \ll \omega_0$  なので,

$$\sigma \simeq \frac{8\pi}{3} r_0^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \sim \omega^4$$

となる (Rayleigh 散乱). 空が青く見える理由である [16, pp.81-84].

## § 79. 低振動数の波の散乱

電荷が複数ある場合には、電荷の系の内部運動があるために、散乱された波の振動数は入射波の振動数と異なり得る。振動数の変化しない散乱を干渉性散乱、振動数の変化する散乱を非干渉性（または結合）散乱と呼ぶ。

入射波の場が弱いと仮定して電流密度を、外場（入射波）のないときの値  $\mathbf{j}_0$  [電荷の系の内部運動に対応する非干渉性の部分] と外場の影響  $\mathbf{j}'$  [干渉性の部分] に分解し、それぞれに対応するベクトル・ポテンシャルを順に  $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}'$  とする。以下では干渉性散乱を考える。[ $\mathbf{j}'$  を干渉性の部分と解釈したため、]  $\mathbf{j}'$  が目立って変化する時間は外場の振動数  $\omega$  の逆数に一致する。よって外場の振動数  $\omega$  が十分小さい場合を考察すれば、遅延ポテンシャル

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}'_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}'}{c}} dV$$

(ただし  $\mathbf{n}'$  は散乱方向、すなわち原点から見た観測点の方向) を時間  $\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}'}{c}$  について展開して近似できる条件

$$\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}'}{c} \sim \frac{a}{c} \ll \frac{1}{\omega}$$

(§ 67) が満たされる。このとき場は式 (71.4) に対応して

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{c^2 R_0} \{ \ddot{\mathbf{d}}' \times \mathbf{n}' + (\ddot{\mathbf{m}}' \times \mathbf{n}') \times \mathbf{n}' \} \quad (91)$$

と書ける。ただし  $\mathbf{d}', \mathbf{m}'$  はそれぞれ双極子モーメントと磁気モーメントへの入射波の寄与 [したがって干渉性の部分] であり、4重極モーメント  $\ddot{\mathbf{J}}$  の項は時間による高階の微分を含んでいる [ことに関係して  $1/c$  のべきを余分に含む] ため、捨てた。場の外場と同じ振動数  $\omega$  の Fourier 成分は

$$\mathbf{H}'_{\omega} = \frac{\omega^2}{c^2 R_0} \{ \mathbf{n}' \times \mathbf{d}'_{\omega} + \mathbf{n}' \times (\mathbf{m}'_{\omega} \times \mathbf{n}') \} e^{ikR_0} \quad (79.2)$$

である [本稿次節で補足]。(粒子の非相対論的な運動  $v/c \ll 1$  に対して磁気モーメント ( $\sim v/c$ ) の項は相対的に小さくなり、落とせる。)

系の総電荷がゼロならば、 $\omega \rightarrow 0$  の極限 (不変な外場) で系の全体としての運動はなくなり、 $\mathbf{d}'_{\omega}, \mathbf{m}'_{\omega}$  は一定値に近づくと考えられる。そこで低振動数に対して  $\mathbf{d}'_{\omega}, \mathbf{m}'_{\omega}$  の振動数  $\omega$  依存性を無視すると、散乱された波の Fourier 成分は  $\omega^2$  に比例し、対応する有効断面積は  $\omega^4$  に比例することになる。

## § 79 について

■分解  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}', \mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}'$  について これは § 62 のように入射波を表す場と放射の場に場を分解しているのではなく、むしろ § 79 の要約において既に解釈したように、遅延ポテンシャルによって表される放射の場を、電荷の系の内部運動による非干渉性の部分  $\mathbf{j}_0, \mathbf{A}_0$  と、外場の影響に対応する干渉性の部分  $\mathbf{j}', \mathbf{A}'$  へと分解しているものと考えられる。 $\mathbf{j}'$  を干渉性の部分と解釈するからこそ、 $\mathbf{j}'$  が目立って変化する時間を外場の振動数  $\omega$  の逆数程度と見て、十分小さい外場の振動数  $\omega$  に対して遅延ポテンシャルを時間  $\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}'}{c}$  について展開して近似できる。

■「十分低い振動数  $\omega \ll c/a$  に対しては、この条件は系の粒子の速度と無関係にみたされるのである」(p.246, l.20,21) について これは条件  $a/c \ll T$  における、電荷分布が目立った変化をする時間  $T$  を、必ずしも § 67 のように  $a/v$  として評価しなくても良いという事情による。あるいは次節 (§ 80) の式 (80.1) の説明を踏まえれば、これは干渉性散乱として、電荷の運動が系の固有振動数  $\omega_0 \sim v/a$  ではなく、外場の振動数  $\omega$  で行われる場合を考えていることによる。

■場の Fourier 成分の式 (79.2), (79.3) について モーメント  $\mathbf{d}', \mathbf{m}'$  の値が時刻  $t'$  で評価されていることに注意すれば、§ 72 と同様、磁場の式 (p.246 下から 5 行目、本稿の式 (91)) の右辺には

$$\ddot{\mathbf{d}}' \sim -\omega^2 \mathbf{d}'_{\omega} e^{-i\omega t + ikR_0}, \quad \ddot{\mathbf{m}}' \sim -\omega^2 \mathbf{m}'_{\omega} e^{-i\omega t + ikR_0}$$

を代入しなければならず、式 (79.2), 式 (79.3) の右辺にはいずれも因子  $e^{-ikR_0}$  をかけなければならないと考えられる。ただしこの修正は、断面積の振動数依存性には影響を与えない。

## § 80. 高振動数の波の散乱

今度は入射波の振動数  $\omega$  が電荷の系の固有振動数  $\omega_0 \sim v/a$  に比べて大きい場合を考える。また粒子の非相対論的な速度  $v \ll c$  での運動を仮定する。入射波の素早い振動の間では粒子間相互作用を無視することができるので、入射波の影響によって粒子が得る速度  $\mathbf{v}'$  は非相対論的な運動方程式から

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = e\mathbf{E} = e\mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad \therefore \mathbf{v}' = -\frac{e}{i\omega m} \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

と計算される。[§ 78 と同様、磁場による Lorentz 力 ( $\sim v/c$ ) は無視した。] ( $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  の時間変化率は  $kv \sim \frac{v}{c}\omega \ll \omega$  なので、 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  を定数と見なして時間積分した。) よってベクトル・ポテンシャルは

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}'_{t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}'}{c}} dV = \frac{1}{cR_0} \sum (e\mathbf{v}')_{t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}'}{c}} = -\frac{1}{icR_0\omega} e^{-i\omega(t - \frac{R_0}{c})} \mathbf{E}_0 \sum \frac{e^2}{m} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \quad (80.3)$$

となる [本稿次節で補足]。ここに  $\mathbf{k}' \equiv \frac{\omega}{c} \mathbf{n}'$  に対して  $\mathbf{q} \equiv \mathbf{k}' - \mathbf{k}$  であり、(散乱波の振動数  $\omega'$  の  $\omega$  との差は  $\omega' - \omega \sim \omega_0 \ll \omega$  により無視することができるので、)  $\mathbf{k}'$  は散乱波の波動ベクトルと見なして差し支えない。また  $\mathbf{r}$  の引数は  $t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}'}{c}$  であるけれど、粒子の速度が小さいという仮定により  $\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}'}{c}$  の間の位置  $\mathbf{r}$  の変化を無視し、これを  $t' = t - R_0/c$  にすり替えることができる。

これ以降は原子 (や分子) による散乱を考える。この場合、原子核に比べて軽い電子の運動が重要になる。そこで  $e$  と  $m$  をそれぞれ電子の電荷と質量とし、粒子に関する和の外に出す。この下でベクトル・ポテンシャル (80.3) から散乱波の場を求め、さらに有効散乱断面積を計算すると

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}' \times \mathbf{n}' = \frac{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{n}'}{c^2 R_0} e^{-i\omega(t - \frac{R_0}{c})} \frac{e^2}{m} \sum e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}, \quad (80.5)$$

$$d\sigma = \frac{c|\mathbf{H}'|^2 R_0^2 d\Omega / 4\pi}{c|\mathbf{E}_0|^2 / 4\pi} = \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \overline{\left| \sum e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \right|^2} \sin^2 \theta d\Omega \quad (80.6)$$

となる ( $\theta$  は入射する電場の方向  $\mathbf{E}_0$  と散乱方向  $\mathbf{n}'$  の成す角) [本稿次節で補足]。

入射波の振動数が大きい場合

$$\omega \gg \omega_0 \sim \frac{v}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \ll \frac{ac}{v}$$

(ただし  $\lambda$  は入射波の波長) を考えているとは言え、なお  $\lambda$  が  $a$  に比べて大きい場合と小さい場合を考えることができる。

- $\lambda \gg a$  のとき

$$|\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}| \ll 1, \quad \therefore \overline{\left| \sum e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \right|^2} = \left| \sum 1 \right|^2 = Z^2, \quad Z \equiv \sum 1: \text{電子数 (原子番号)}$$

なので

$$d\sigma = Z^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega. \quad (Z^2 \text{に比例}) \quad (80.7)$$

- $\lambda \ll a$  のとき

$$\overline{\left| \sum e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \right|^2} = \sum |e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}|^2 = \sum 1 = Z$$

(クロスターム  $e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}$  は激しく振動し、時間平均をとると消える) なので

$$d\sigma = Z \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega. \quad (Z \text{に比例})$$

[これは Thomson 散乱の断面積 (78.4) の  $Z$  倍.] 散乱角がある程度小さくなると  $q$  が小さくなるので、この結果を適用できなくなる (散乱角  $\theta \gg \lambda/a$  が必要).

場の式 (80.5) は  $\sum e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$  が時間依存性を持つため、これを振動数  $\omega$  の干渉性散乱と見なすことはできないことに注意しよう. 干渉性散乱における有効断面積  $d\sigma_{\text{coh}}$  を求めるには、 $\sum e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$  を時間について平均すれば良いので、

$$d\sigma_{\text{coh}} = \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \overline{\left| \sum e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \right|^2} \sin^2 \theta d\Omega$$

を得る. (一般公式 (80.6) における絶対値の 2 乗の平均値が、平均値の絶対値の 2 乗に置き換わっている.) [ $\overline{\sum e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}} = \sum \overline{e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}}$  と書き直した方が見やすい.] この和の平均値は、電荷密度の平均値  $\rho(\mathbf{r})$  の Fourier 成分に関係している:

$$\overline{\sum e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}} = \int \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} dV = \rho_{\mathbf{q}}.$$

- $\lambda \gg a$  のとき

$$d\sigma_{\text{coh}} = Z^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega \quad (e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \simeq 1)$$

は式 (80.7) に一致  $\rightarrow$  散乱は全て干渉性.

- $\lambda \ll a$  のとき

$$d\sigma_{\text{coh}} = 0 \quad (e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} = 0)$$

$\rightarrow$  散乱は完全に非干渉性.

## § 80 について

■式 (80.3) について 指数部分は

$$-i \left\{ \omega \left( t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}'}{c} \right) - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \right\} = -i\omega \left( t - \frac{R_0}{c} \right) - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}, \quad \mathbf{q} \equiv \mathbf{k}' - \mathbf{k}, \quad \mathbf{k}' \equiv \frac{\omega}{c} \mathbf{n}'$$

と計算される.

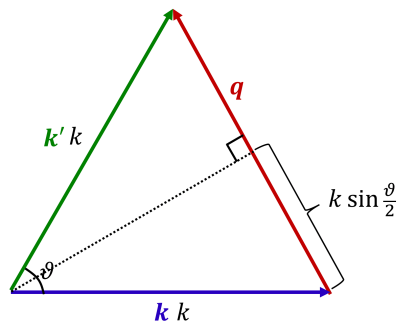


図 84 散乱前後の波動ベクトル  $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$  の差  $\mathbf{q}$

■  $q$  の式 (80.4) について 図 84 参照.

■ 散乱された波の場  $H'$  の式 (80.5) について ベクトル・ポテンシャルの時間微分をとる際、粒子の速度が小さいという仮定により再び  $\mathbf{r}$  の微分を無視した.

■ 有効散乱断面積 (80.6) の計算 (p.248 下 3 行) について 散乱されるエネルギーの式と入射波のエネルギー流束の式のいずれも、分母において  $8\pi \rightarrow 4\pi$  と置き換える (本稿では修正済み). 得られる結果 (80.6) は変わらない.

■ 「原子のなかの電荷密度  $\rho(\mathbf{r})$  の平均の分布」 (p.250, 1.2) について 正確には電荷密度  $\rho(\mathbf{r}, t)$  の時間平均が  $\rho(\mathbf{r})$  であると考えられる.

## 第 9 章の全体像 (まとめ)

- § 66. 電荷の系から遠く離れたところの場合
  - 電荷の系 (サイズ  $a$ ) の遠方  $R_0 \gg a$ , 波長  $\lambda$  に比べても長距離を隔てた波動帯  $R_0 \gg \lambda$ .
- § 67. 双極放射
  - § 66 の条件に加えて,  $a \ll \lambda$  ( $\Leftrightarrow$  電荷の速度  $v \ll c$ ) のとき. まとめると  $R_0 \gg \lambda \gg a$ .  
→ 双極放射
- § 68. 衝突のあいだの双極放射
  - 双極放射の制動放射への応用.
- § 69. 低振動数の制動放射
  - 双極放射の仮定  $v \ll c$  を用いず, 低振動数の制動放射を調べた.  
(非相対論的極限で双極放射の結果に整合.)
  - 新しい荷電粒子の発生 ( $\beta$  粒子の放出など) に伴う放射に適用できる.
- § 70. Coulomb 相互作用がある場合の放射
  - 双極放射として扱った. (Coulomb 相互作用自体が非相対論的な記述である.)
- § 71. 4 重極放射および磁気双極放射
  - 比  $a/\lambda$  での展開における, 双極放射への高次の補正.

- § 72. 近距離における場の放射

- $R_0 \gg a$  および  $\lambda \gg a$  であり, それ故, 電気双極子近似を用いることができるけれど,

$$R_0 \sim \lambda$$

なので場を平面波と見なせない場合 [まとめると  $R_0 \sim \lambda \gg a$ ].

- 遠方に対する双極子近似の結果を含んでいる.

- § 73. 高速度で運動する電荷からの放射

- 双極放射の前提である非相対論的な速度  $v \ll c$  の仮定を外した (非相対論的極限も含む).

- 後半では特に遠方の場を調べた.

- § 74. 磁気制動放射 (= 一様不変な磁場中を円運動する電荷からの放射)

- 前半では § 73 の結果 ( $v \ll c$  と遠方を仮定しない) を用いた.

- 後半では § 66 の結果 (遠方の場) を用いた ( $v \sim c$  にも適用可).

- § 75. 放射減衰

- ラグランジアンを  $v/c$  のべきに展開したときの 3 次の項から, 放射減衰が得られる.

- 1 粒子系の放射減衰の表式  $\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}$  を適用できる条件は,

- \* 放射の波長  $\lambda$  が電荷の古典的半径  $e^2/mc^2$  に比べて非常に長いこと.

- \* かつ, (ここでは定性的に述べれば) 場それ自体があまり大きくないこと.

- § 76. 相対論的な場合の放射減衰

- 非相対論的な極限 (§ 75) も含んでいる. 後半では超相対論的極限  $v \simeq c$  を調べた.

- § 77. 超相対論的な場合における放射のスペクトル分解

- § 73 (ただし遠方), § 74, § 76 における超相対論的な場合の結果を利用.

- § 78. 自由電荷による散乱

- 電荷の非相対論的運動を仮定し, 双極放射を適用. 断面積に対する Thomson の公式を導出.

- § 79. 低振動数の波の散乱

放射の振動数  $\omega$  が入射波のそれと異なるような非干渉性の散乱

- 弱い入射波を仮定し, ベクトル・ポテンシャルを外場 (入射波) のないときの電流密度  $\mathbf{j}_0$  [電荷の系の内部運動に対応する非干渉性の部分] と外場の影響  $\mathbf{j}'$  [干渉性の部分] の寄与  $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}'$  に分解 (§ 80 も同様).

- $\omega$  が電荷の固有振動数に比べて小さい場合には多重極展開を適用できる ( $v \ll c$  は仮定しない).

- § 80. 高振動数の波の散乱

- 入射波の振動数  $\omega$  が電荷の系の固有振動数  $\omega_0 \sim v/a$  に比べて大きい場合を仮定.

- また粒子の非相対論的な速度  $v \ll c$  での運動を仮定し, 遠方の放射場を調べた.





## 付録 B テンソルと物理法則の共変性

この付録は§ 6 の補足である。ここでは教科書と異なり、時空の 4 成分 0, 1, 2, 3 をとり得る添字をギリシア文字で、空間成分 1, 2, 3 のみを取り得る添字をラテン文字で表す。

### B.1 テンソル

物理学の指導原理として、どのような座標系を用いても物理法則は同じ形の方程式で記述されることが要請される (共変性の要請)。そこで物理量が座標変換に対してどのように変化するかを調べるのが有用となる。

■テンソルの定義 座標変換に伴い時空に固定した点の座標が

$$x \equiv (x^0, \dots, x^3) \rightarrow x' \equiv (x'^0, \dots, x'^3)$$

と変わるとき、値が

$$T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} \rightarrow T'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} T^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q} \quad (92)$$

と変化する量  $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$  を  $p$  階反変  $q$  階共変テンソルまたは  $(p, q)$  テンソル (の成分) と呼ぶ。

Einstein の規約 テンソルを定義する変換則 (92) 右辺の  $\rho_1, \dots, \sigma_1, \dots$  ように 2 度以上現れる添字については 0 から 3 までの和をとる。例えば

$$A^\mu{}_\nu B^\nu \equiv \sum_{\nu=0}^3 A^\mu{}_\nu B^\nu = \sum_{\rho=0}^3 A^\mu{}_\rho B^\rho \equiv A^\mu{}_\rho B^\rho$$

である。添字  $\mu$  と違って和をとられる添字  $\nu$  は式変形の途中で ( $\mu$  以外の) 別の文字  $\rho$  に置き換えても式の意味が変わらない。このような添字をダミー添字と呼ぶ。

特に

$$\begin{aligned} (0, 0) \text{ テンソル} &= \text{スカラー} \\ (1, 0) \text{ テンソル} &= \text{反変ベクトル} \\ (0, 1) \text{ テンソル} &= \text{共変ベクトル} \end{aligned}$$

である (pp.256–257) [2, pp.126–127]。以下の量は数学的に変換則が定まっている [22, pp.26–27]。

$$\begin{aligned} \text{座標の微分 } dx^\mu \text{ は反変ベクトル: } dx'^\mu &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \leftarrow \text{全微分} \\ \text{微分演算子 } \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \text{ は共変ベクトル: } \partial'_\mu &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu \leftarrow \text{合成関数の微分} \end{aligned}$$

Kronecker の記号  $\delta^\mu{}_\nu$  を混合テンソル ((1, 1) テンソル) とすれば、その成分が任意の座標系で同じ値を持つことが保証される [2, p.51] :

$$\delta^{\mu'}{}_{\nu'} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^{\nu'}} \delta^\rho{}_\sigma = \delta^{\mu'}{}_{\nu'}$$

また線形変換  $x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu$  は、係数  $a^\mu{}_\nu$  が座標に依らなければ反変ベクトルの変換則  $x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} x^\nu$  に他ならない (実際  $x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu$  を両辺  $x^\lambda$  で微分すると  $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} = a^\mu{}_\nu \delta^\nu{}_\lambda = a^\mu{}_\lambda$  となる)。ただし一般には座標  $x^\mu$  そのものが常にベクトルを形成するとは限らない。

ここで (反変) ベクトル  $\vec{V}$  の成分は座標系に依るけれども  $\vec{V}$  自体は座標系に依らない幾何学的な対象である。  $\vec{V}$  の成分  $V^\alpha$  に対する上記の変換則  $V'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} V^\beta$  はこのことと整合している。これは次のように理解できる。各位置での座標系の基底  $\vec{e}_\alpha$  は、座標  $x^\alpha$  が増大する方向のベクトルである。特に (時空の内部に横たわる) 位置ベクトル  $\vec{x}$  に対して  $\partial_\alpha \vec{x}$  を基底  $\vec{e}_\alpha$  に用いると、これは共変ベクトルの変換則

$$\vec{e}'_\alpha = \partial'_\alpha \vec{x} = \left( \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \partial_\beta \right) \vec{x} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \vec{e}_\beta$$

に従う。よって  $V^\alpha$  が反変ベクトル成分として変換されれば

$$V'^\alpha \vec{e}'_\alpha = \left( \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} V^\beta \right) \left( \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \vec{e}_\gamma \right) = \delta^\gamma_\beta V^\beta \vec{e}_\gamma = V^\alpha \vec{e}_\alpha = \vec{V}$$

となり、どのような座標系を用いても  $V^\alpha \vec{e}_\alpha$  は同一のベクトル  $\vec{V}$  を与える [22, pp.25–26]。

最後に、上式 (92) の右辺に Jacobian が掛かった変換則

$$\mathbf{T}^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} \rightarrow \mathbf{T}'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} \mathbf{T}^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q}$$

に従う量  $\mathbf{T}^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$  を  $p$  階反変  $q$  階共変テンソル密度 (または擬テンソル) と呼ぶ [2, pp.60–62, pp.127–128]。 「密度」という名前の由来は、B.1.1 節で説明する。

■物理法則の共変性 両辺が同じ種類のテンソルで書かれた方程式  $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = U^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$  の形に物理法則を表せば、テンソルの定義によりこれは両辺が同じように変換されるので、座標変換に対して形を変えず共変性の要請を満たす [2, pp.53–54]:

$$\begin{aligned} T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} T^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q} \\ &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} U^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q} = U^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}. \end{aligned}$$

■テンソルの和、積、縮約から新たなテンソルが作られること テンソルを定義する変換則 (92) から、以下が容易に示される (付録 B.2 参照)。

- 同じ種類のテンソルに対しては和が定義される。

( $p, q$ ) テンソル  $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}, U^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$  の和

$$A^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} \equiv T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} + U^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} \quad (93)$$

は ( $p, q$ ) テンソルである。

- ( $p, q$ ) テンソル  $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$  と ( $r, s$ ) テンソル  $U^{\rho_1 \dots \rho_r}_{\sigma_1 \dots \sigma_s}$  の積

$$B^{\mu_1 \dots \mu_p \rho_1 \dots \rho_r}_{\nu_1 \dots \nu_q \sigma_1 \dots \sigma_s} \equiv T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} U^{\rho_1 \dots \rho_r}_{\sigma_1 \dots \sigma_s} \quad (94)$$

は ( $p+r, q+s$ ) テンソルである。

- ( $p, q$ ) テンソル  $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$  の添字  $\mu_i, \nu_j$  をダミー添字  $\lambda$  にして和をとる操作を縮約という。これにより ( $p-1, q-1$ ) テンソル

$$C^{\mu_1 \dots \mu_{i-1} \mu_{i+1} \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_{j-1} \nu_{j+1} \dots \nu_q} \equiv T^{\mu_1 \dots \mu_{i-1} \lambda \mu_{i+1} \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_{j-1} \lambda \nu_{j+1} \dots \nu_q} \quad (95)$$

が得られる。

このため以上の方法で新たに作られたテンソルの種類は上下の添字の個数から期待される通りのものとなる。しかし逆に、複数の添字を持つ量がテンソルであるとは限らない。なお  $\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$  が座標  $x$  に依る場合、反変ベクトル  $V^{\alpha}$  に対して  $\partial_{\beta} V^{\alpha}$  を単に共変ベクトル  $\partial_{\beta}$  との積と見てこれを (1, 1) テンソルであると結論することができなくなる。実際、 $\partial_{\beta} V^{\alpha}$  は

$$\partial_{\beta}' V'^{\alpha} = \left( \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \partial_{\mu} \right) \left( \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu} \right) = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \partial_{\mu} V^{\nu} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \left( \partial_{\mu} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \right) V^{\nu} \quad (96)$$

と変換する (pp.264–265)。

■商の定理 反変ベクトル  $A^{\lambda}$  に対して  $Q_{\mu\nu} = A^{\lambda} P_{\lambda\mu\nu}$  が 2 階共変テンソルとなるためには、 $P_{\lambda\mu\nu}$  が 3 階共変テンソルであれば良いことを我々は学んだ。実はこのとき、 $P_{\lambda\mu\nu}$  は 3 階共変テンソルでなければならないことまで言うことができる (証明は B.2 節)。 $A, Q$  が他の勝手な種類のテンソルである場合にも、同様の論法を適用できる (商の定理) [23, p.24]。

■対称な量と反対称な量の“縮約” 一般に添字  $\alpha, \beta$  について対称な量  $A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}$  と反対称な量  $B_{\alpha\beta} = -B_{\beta\alpha}$  (テンソルでなくても良い) に対して  $A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}$  は

$$\begin{aligned} A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} &= \sum_{\alpha>\beta} (A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} + A^{\beta\alpha} B_{\beta\alpha}) \quad (\because \alpha = \beta \Rightarrow B_{\alpha\beta} = 0) \\ &= \sum_{\alpha>\beta} A^{\alpha\beta} (B_{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta}) = 0 \end{aligned}$$

となって消える。

### B.1.1 固有体積要素

一般に任意の座標系で各座標が  $dx^{\mu}$  変化して作られる時空の体積要素は  $d^4x (\equiv dx^0 dx^1 dx^2 dx^3)$  とならない。実際  $d^4x$  は時空の体積要素の次元を持つ保証すらない。しかし局所慣性系  $\{X^{\mu}\} \equiv \{cT, X, Y, Z\}$  では体積要素の表式は  $d^4X (\equiv cdXdYdZ)$  であり、 $J \equiv \frac{\partial(X)}{\partial(x)}$  を Jacobian として任意の座標系での体積要素の表式は  $Jd^4x$  となる。

ここで計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  は局所慣性系での成分が式 (4) の  $\eta_{\mu\nu}$  で与えられ、2 階共変テンソルの変換則に従うことから、行列  $(g_{\mu\nu})$  の行列式を  $g$  として

$$g = -J^2 < 0, \quad \therefore J = \sqrt{-g}$$

が帰結される (B.2.1 節参照)。

以上より任意の座標系で各座標が  $dx^{\mu}$  変化して作られる時空の体積要素の真の体積は

$$\sqrt{-g} d^4x$$

である。これを固有体積要素と呼ぶ [20, pp.188–190]。

なお上式  $J = \sqrt{-g}$  は、因子  $\sqrt{-g(x)} \left( = \frac{\partial(X)}{\partial(x)} \right)$  がスカラー密度の変換則  $\sqrt{-g'} = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \sqrt{-g}$  に従うことを含意している (B.1 節)。したがってスカラー場  $S$  との積  $S\sqrt{-g}$  もまたスカラー密度である。これをスカラー密度と呼ぶのは、積分

$$\int S\sqrt{-g} d^4x$$

が不変量となるからである。任意のテンソル場  $T^{\mu\nu\dots}$  に対して  $T^{\mu\nu\dots}\sqrt{-g}$  と同じ変換則に従う量を同様にテンソル密度と呼ぶけれど (B.1 節), 積分

$$\int T^{\mu\nu\dots}\sqrt{-g}d^4x$$

をテンソルと見なせるのは, 積分範囲が小さい場合に限られることに注意しなければならない。と言うのもテンソルの変換則 (変換係数の値) は時空点ごとに異なるので, 異なる時空点でのテンソルの和は一般にテンソルとはならないからである [2, p.130] [23, p.82].

### B.1.2 完全反対称テンソル $E^{\lambda\mu\nu\rho}$ , 完全反対称テンソル密度 $\mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\rho}$

$\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$  を局所慣性系  $\{X^\mu\}$  で  $\varepsilon^{0123} = 1$  となる添字に関して完全反対称な量とする。

このときこれを 4 階反変テンソルの変換則

$$E^{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\gamma} \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

に従って任意の座標系  $\{x^\mu\}$  に変換した量は  $E^{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}}{\sqrt{-g}}$  である (pp.258–259)。

一方, これを 4 階反変テンソル密度の変換則

$$\mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{\partial(X)}{\partial(x)} \frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\gamma} \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

に従って任意の座標系  $\{x^\mu\}$  に変換した量は  $\mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\rho} = \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$  となり, 座標系に依らず  $\mathbf{E}^{0123} = 1$  となる [2, pp.62–63]. 以上の証明は B.2.2 節で行う。

### B.1.3 デルタ関数

座標変換  $x \rightarrow x'$  に伴うデルタ関数の変換則を調べると,

$$1 = \int \delta^4(x')d^4x' = \int \delta^4(x)d^4x = \int \delta^4(x) \frac{\partial(x)}{\partial(x')} d^4x', \quad \therefore \delta^4(x') = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \delta^4(x)$$

となるので, デルタ関数はスカラー密度である。

## B.2 テンソル (補足)

付録 B.1 で述べたように, テンソルの和  $A^{\mu_1\dots\mu_p}_{\nu_1\dots\nu_q}$  (式 (93)), 積  $B^{\mu_1\dots\mu_p\rho_1\dots\rho_r}_{\nu_1\dots\nu_q\sigma_1\dots\sigma_s}$  (式 (94)), 縮約  $C^{\mu_1\dots\mu_{i-1}\mu_{i+1}\dots\mu_p}_{\nu_1\dots\nu_{j-1}\nu_{j+1}\dots\nu_q}$  (式 (95)) がそれぞれ  $(p, q)$  テンソル,  $(p+r, q+s)$  テンソル,  $(p-1, q-1)$  テンソルであることが, テンソルを定義する変換則 (92) から示される。実際これらの新しい座標系での成分をそれぞれ  $A'^{\mu_1\dots\mu_p}_{\nu_1\dots\nu_q}$ ,  $B'^{\mu_1\dots\mu_p\rho_1\dots\rho_r}_{\nu_1\dots\nu_q\sigma_1\dots\sigma_s}$ ,  $C'^{\mu_1\dots\mu_{i-1}\mu_{i+1}\dots\mu_p}_{\nu_1\dots\nu_{j-1}\nu_{j+1}\dots\nu_q}$  と書くと,

$$\begin{aligned} & A'^{\mu_1\dots\mu_p}_{\nu_1\dots\nu_q} \\ &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} T^{\rho_1\dots\rho_p}_{\sigma_1\dots\sigma_q} + \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} U^{\rho_1\dots\rho_p}_{\sigma_1\dots\sigma_q} \\ &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} A^{\rho_1\dots\rho_p}_{\sigma_1\dots\sigma_q}, \\ & B'^{\mu_1\dots\mu_p\rho_1\dots\rho_r}_{\nu_1\dots\nu_q\sigma_1\dots\sigma_s} \\ &= \left( \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\alpha_p}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_q}}{\partial x'^{\nu_q}} T^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_q} \right) \left( \frac{\partial x'^{\rho_1}}{\partial x^{\gamma_1}} \dots \frac{\partial x'^{\rho_r}}{\partial x^{\gamma_r}} \frac{\partial x^{\delta_1}}{\partial x'^{\sigma_1}} \dots \frac{\partial x^{\delta_s}}{\partial x'^{\sigma_s}} U^{\gamma_1\dots\gamma_r}_{\delta_1\dots\delta_s} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\alpha_p}} \frac{\partial x'^{\rho_1}}{\partial x^{\gamma_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\rho_r}}{\partial x^{\gamma_r}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_q}}{\partial x'^{\nu_q}} \frac{\partial x^{\delta_1}}{\partial x'^{\sigma_1}} \cdots \frac{\partial x^{\delta_s}}{\partial x'^{\sigma_s}} B^{\alpha_1 \cdots \alpha_p \gamma_1 \cdots \gamma_r}_{\beta_1 \cdots \beta_q \delta_1 \cdots \delta_s} \\
&= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_{i-1}}}{\partial x^{\rho_{i-1}}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\mu_{i+1}}}{\partial x^{\rho_{i+1}}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \\
&\times \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma_{j-1}}}{\partial x'^{\nu_{j-1}}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\sigma_{j+1}}}{\partial x'^{\nu_{j+1}}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} T^{\rho_1 \cdots \rho_{i-1} \alpha \rho_{i+1} \cdots \rho_p}_{\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1} \beta \sigma_{j+1} \cdots \sigma_q} \\
&= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_{i-1}}}{\partial x^{\rho_{i-1}}} \frac{\partial x'^{\mu_{i+1}}}{\partial x^{\rho_{i+1}}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma_{j-1}}}{\partial x'^{\nu_{j-1}}} \frac{\partial x^{\sigma_{j+1}}}{\partial x'^{\nu_{j+1}}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} C^{\rho_1 \cdots \rho_{i-1} \rho_{i+1} \cdots \rho_p}_{\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1} \sigma_{j+1} \cdots \sigma_q} \\
&\left( \because \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} = \delta^{\beta}_{\alpha}, \quad \delta^{\beta}_{\alpha} T^{\rho_1 \cdots \rho_{i-1} \alpha \rho_{i+1} \cdots \rho_p}_{\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1} \beta \sigma_{j+1} \cdots \sigma_q} = C^{\rho_1 \cdots \rho_{i-1} \rho_{i+1} \cdots \rho_p}_{\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1} \sigma_{j+1} \cdots \sigma_q} \right)
\end{aligned}$$

となる。これらはそれぞれ  $(p, q)$  テンソル,  $(p+r, q+s)$  テンソル,  $(p-1, q-1)$  テンソルの変換則である。

■商の定理 (補足) B.1 節で商の定理の具体例として述べたように, 反変ベクトル  $A^{\lambda}$  に対して  $Q_{\mu\nu} = A^{\lambda} P_{\lambda\mu\nu}$  が 2 階共変テンソルとなるとき,  $P_{\lambda\mu\nu}$  は 3 階共変テンソルであることが次のように示される [23, p.24]. すなわち仮定により

$$\begin{aligned}
A^{\alpha} P_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\gamma}} A'^{\lambda} P'_{\lambda\mu\nu} \quad (\because Q_{\beta\gamma} \text{ の変換則}) \\
&= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\gamma}} \left( \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha} \right) P'_{\lambda\mu\nu} \quad (\because A^{\lambda} \text{ の変換則})
\end{aligned}$$

である。これが  $A^{\alpha}$  のすべての値に対して成り立たなければならないから, 最左辺と最右辺の  $A^{\alpha}$  を等置して

$$P_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\gamma}} P'_{\lambda\mu\nu}.$$

これは  $P_{\lambda\mu\nu}$  が 3 階共変テンソルであることを意味している。

### B.2.1 固有体積要素 (補足)

■極座標における体積要素の表式とのアナロジー B.1.1 節における固有体積要素の議論は, 極座標を用いた空間の体積要素の表式のことを考えると分かりやすい。極座標  $r, \theta, \phi$  の増大する 3 方向は直交するから, 極座標が  $dr, d\theta, d\phi$  だけ変化して作られる領域は図 86 のように 3 辺が  $dr, r d\theta, r \sin \theta d\phi$  の直方体となる。よってこの要素の体積は  $r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$  である。(体積要素は  $dr d\theta d\phi$  ではない。  $dr d\theta d\phi$  は体積の次元を持たない。)  $dr d\theta d\phi$  の前の係数  $r^2 \sin \theta$  は Descartes 座標から極座標への変数変換における Jacobian として得られることから, 以上の直観的な議論が正当化される。

■  $g = -J^2 < 0, J = \sqrt{-g}$  の証明 B.1.1 節で述べたように Jacobian を  $J = \sqrt{-g}$  と書けることが以下のように示される [20, pp.188–189]. 共変ベクトルの変換則は行列の形を借りて

$$(g_{\mu\nu}) = \left( \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \right)^T (\eta_{\alpha\beta}) \left( \frac{\partial X^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \right)$$

と書ける (例えば  $\left( \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \right)$  は  $\frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}$  を  $(\alpha, \mu)$  成分に持つ行列であり, その転置行列  $\left( \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \right)^T$  は  $\frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}$  を  $(\mu, \alpha)$  成分に持つ). 両辺の行列式をとり  $|\eta_{\alpha\beta}| = 1 \times (-1)^3 = -1$  を用いると

$$g = -J^2, \quad J = \sqrt{-g}$$

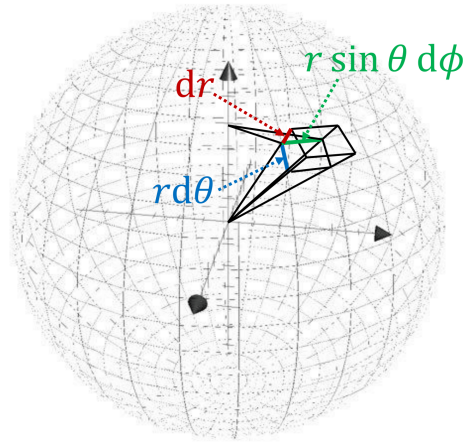


図 86 極座標が  $dr, d\theta, d\phi$  だけ変化して作られる体積要素

を得る。ここで  $\left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}\right)$  は逆行列を持つからその行列式は  $J \neq 0$  である。こうして時空の任意の点で局所慣性系がとれることから  $g < 0$  が要請されることが分かる。

なお計量テンソルの代わりに任意の 2 階共変テンソル  $A_{\mu\nu}$  に対して同様の議論を繰り返せば、 $\sqrt{\det(A_{\mu\nu})}$  がスカラー密度の変換則に従うという一般的な事実の証明になる [2, p.128].

### B.2.2 完全反対称テンソル $E^{\lambda\mu\nu\rho}$ , 完全反対称テンソル密度 $\mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\rho}$ (補足)

B.1.2 節の  $E^{\lambda\mu\nu\rho}$ ,  $\mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\rho}$  の表式を確認する。  $\frac{\partial x^\mu}{\partial X^\nu} \equiv \Lambda^\mu_\nu$  と略記すると 4 階反変テンソルの変換則は

$$E^{\lambda\mu\nu\rho} = \Lambda^\lambda_\alpha \Lambda^\mu_\beta \Lambda^\nu_\gamma \Lambda^\rho_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{vmatrix} \Lambda^\lambda_0 & \cdots & \Lambda^\lambda_3 \\ \Lambda^\mu_0 & \cdots & \Lambda^\mu_3 \\ \Lambda^\nu_0 & \cdots & \Lambda^\nu_3 \\ \Lambda^\rho_0 & \cdots & \Lambda^\rho_3 \end{vmatrix}$$

と書ける。最右辺は行列式  $|\Lambda^\mu_\nu| = \frac{\partial(x)}{\partial(X)}$  の行を入れ換えたものである。行列式は行を入れ換えると符号が変わるから

$$E^{\lambda\mu\nu\rho} = \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \frac{\partial(x)}{\partial(X)} = \frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}}{\sqrt{-g}}, \quad \therefore \mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{\partial(X)}{\partial(x)} E^{\lambda\mu\nu\rho} = \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$$

を得る ( $\frac{\partial(X)}{\partial(x)} = \sqrt{-g}$  を用いた (B.1.1 節参照))。

## 付録 C 微分形式に対する Stokes の定理の使い方

まず付録 C.1 で、微分形式と呼ばれる写像  $\omega$  に対する Stokes の定理

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$$

の内容を理解するための説明を行う [22, pp.37–46, pp.67–76, pp.79–99]. そこで微分形式の積分

$$\int_A \omega \equiv \int_{\bar{A}} \left\langle \omega \left| \frac{\partial}{\partial \xi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi^p} \right. \right\rangle d\xi^1 \cdots d\xi^p$$

から、どのようにして無限小ベクトル  $d^{(1)}q, \dots, d^{(p)}q$  の張る面積要素

$$\begin{vmatrix} d^{(1)}q^{i_1} & \cdots & d^{(p)}q^{i_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d^{(1)}q^{i_p} & \cdots & d^{(p)}q^{i_p} \end{vmatrix}$$

が得られるかを明らかにする。Stokes の定理の証明は行わない。

続く節では Stokes の定理を用いて、以下に列挙する定理 (主に § 6, pp.22–24) [2, pp.79–99] の証明を行う。なお本章ではこれ以降、教科書の表記と異なりギリシア文字は時空座標の 4 成分  $0, 1, 2, 3$  を、ラテン文字は空間座標の 3 成分  $1, 2, 3$  をとるものとする。

- Gauss の定理 [10, p.14]

3 次元空間の領域  $V$  と、面積素ベクトル  $d\mathbf{f}$  を持つその表面  $\partial V$  に対して

$$\int_{\partial V} p d\mathbf{f} = \int_V \nabla p dV. \quad (97)$$

- 4 次元空間における Stokes の定理

4 次元空間に横たわる 2 次元の超曲面  $S$  とその境界  $C = \partial S$  を考える。4 元ベクトル  $A_\mu$  に対して

$$f_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

を定義し、 $S$  を  $(\xi, \xi')$  でパラメトライズしたときの

$$dx^\alpha \equiv \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi} d\xi, \quad dx'^\alpha \equiv \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi'} d\xi'$$

に対して

$$d\sigma^{\mu\nu} \equiv \begin{vmatrix} dx^\mu & dx'^\mu \\ dx^\nu & dx'^\nu \end{vmatrix}$$

とおくと、 $\sum'$  を  $\mu < \nu$  の和として

$$\int_S \sum' f_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} = \int_C A_\mu dx^\mu. \quad (98)$$

- 4 次元空間における 3 次元的 Gauss の定理

4 次元空間に横たわる 3 次元の超曲面  $V$  とその境界  $S = \partial V$  を考える。反対称テンソル  $A_{\mu\nu}$  に対して

$$F_{\lambda\mu\nu} \equiv \partial_\lambda A_{\mu\nu} + \partial_\mu A_{\nu\lambda} + \partial_\nu A_{\lambda\mu}$$



を定義し,  $V$  を  $(\xi, \xi', \xi'')$  でパラメトライズしたときの

$$dx^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi} d\xi, \quad dx'^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi'} d\xi', \quad dx''^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi''} d\xi''$$

に対して

$$dv^{\lambda\mu\nu} \equiv \begin{vmatrix} dx^\lambda & dx'^\lambda & dx''^\lambda \\ dx^\mu & dx'^\mu & dx''^\mu \\ dx^\nu & dx'^\nu & dx''^\nu \end{vmatrix}$$

とおくと,  $\sum''$  を  $\lambda < \mu < \nu$  の和として

$$\int_V \sum'' F_{\lambda\mu\nu} dv^{\lambda\mu\nu} = \int_S \sum' A_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu}. \quad (99)$$

– これはデュアルテンソル

$$dS_\mu \equiv -\frac{1}{3!} e_{\mu\nu\lambda\rho} dv^{\nu\lambda\rho}, \quad df_{\mu\nu}^* \equiv \frac{1}{2!} e_{\mu\nu\lambda\rho} d\sigma^{\lambda\rho}, \quad A^{*\lambda\rho} \equiv \frac{1}{2!} e^{\lambda\rho\mu\nu} A_{\mu\nu}$$

を用いて

$$\frac{1}{2} \int_S A^{*\lambda\rho} df_{\lambda\rho}^* = \int_V \partial_\lambda A^{*\rho\lambda} dS_\rho \quad (100)$$

と書き換えられる.

● 4 次元的 Gauss の定理

4 次元空間の領域  $\Omega$  とその境界  $V = \partial\Omega$  を考える. 完全反対称テンソル  $T_{\lambda\mu\nu}$  に対して

$$W_{\rho\lambda\mu\nu} \equiv \partial_\rho T_{\lambda\mu\nu} - \partial_\lambda T_{\mu\nu\rho} + \partial_\mu T_{\nu\rho\lambda} - \partial_\nu T_{\rho\lambda\mu}$$

を定義すると, これも添字に関して完全反対称であり, 4 次元空間の体積要素を  $d\Omega \equiv dx^0 \cdots dx^3$  と書くと  $\sum'$  を  $\lambda < \mu < \nu$  の和として

$$\int_\Omega W_{0123} d\Omega = \int_V \sum' T_{\lambda\mu\nu} dv^{\lambda\mu\nu}. \quad (101)$$

– これはデュアルテンソル

$$T^{*\rho} \equiv \frac{1}{3!} e^{\rho\lambda\mu\nu} T_{\lambda\mu\nu}, \quad dS_\rho \equiv -\frac{1}{3!} e_{\rho\lambda\mu\nu} dv^{\lambda\mu\nu}$$

を用いて

$$\int_V T^{*\rho} dS_\rho = \int_\Omega \partial_\rho T^{*\rho} d\Omega \quad (102)$$

と書き換えられる.

### C.1 微分形式に対する Stokes の定理

接ベクトル 多様体  $M$  の各点における微分作用素  $v = v^i \partial_i$ .

$$\text{図 87 の曲線 } c \text{ に沿った方向微分 } \frac{df(q(t))}{dt} = \dot{q}^i \partial_i \quad (\partial_i \equiv \partial/\partial q^i)$$

$$\rightarrow \text{方向微分作用素 } v = \dot{q}^i \partial_i$$

$c(t)$  に応じて (つまり動点の運動に応じて)  $\{\partial_i\}$  を基底とする様々な速度  $\{\dot{q}^i\}$  を持つ作用素  $v$  が得られる. その全体が接空間を張る.

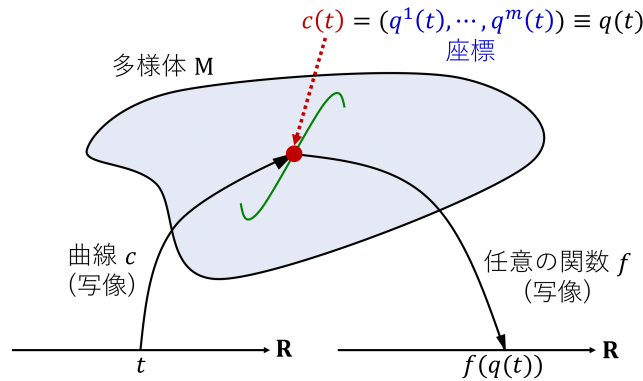


図 87 合成写像  $t \in \mathbf{R} \mapsto c(t) \in M \mapsto f \circ c(t) \equiv f(c(t)) \in \mathbf{R}$

次に多様体の接空間に限らず，抽象的ベクトル空間  $V$  を考える．その基底を  $\{e_i\}$ ，元を  $u_{(i)} = u_{(i)}^j e_j$  と書く．

$p$  ベクトル  $p$  個のベクトル  $u_{(1)}, \dots, u_{(p)}$  を実数に対応させる写像のうち，引数となるベクトルについて

$$p \text{ 重線形: } \omega^p[u_{(1)}, \dots, au_{(i)} + bv_{(i)}, \dots, u_{(p)}] = a\omega^p[u_{(1)}, \dots, u_{(i)}, \dots, u_{(p)}] + b\omega^p[u_{(1)}, \dots, v_{(i)}, \dots, u_{(p)}]$$

$$\text{歪対称: } \omega^p[u_{(1)}, \dots, u_{(i)}, \dots, u_{(j)}, \dots, u_{(p)}] = -\omega^p[u_{(1)}, \dots, u_{(j)}, \dots, u_{(i)}, \dots, u_{(p)}]$$

となる  $\omega^p$  のこと．

- 例えば 1 ベクトル  $\omega$  は

$$\omega : V \rightarrow \mathbf{R} : u \in V \mapsto \omega[u] \in \mathbf{R}$$

という線形写像．

- 特に 1 ベクトル  $\mathcal{E}^i$  を，

$$\mathcal{E}^i[u^j e_j] = u^i$$

で定義しておく．これはベクトル  $u = u^j e_j$  の第  $i$  成分  $u^i$  を取り出す写像である．

1 ベクトル  $\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(p)}$  から  $p$  ベクトルを構成することを考える．

**テンソル積**  $\omega_{(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{(p)}$

テンソル積  $\omega_{(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{(p)}$  を

$$(\omega_{(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{(p)})[u_{(1)}, \dots, u_{(p)}] = \omega_{(1)}[u_{(1)}] \cdots \omega_{(p)}[u_{(p)}]$$

で定義する．

**外積**  $\omega_{(1)} \wedge \dots \wedge \omega_{(p)}$

テンソル積  $\omega_{(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{(p)}$  を用いて外積  $\omega_{(1)} \wedge \dots \wedge \omega_{(p)}$  を

$$(\omega_{(1)} \wedge \dots \wedge \omega_{(p)})[u_{(1)}, \dots, u_{(p)}] = \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) (\omega_{(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{(p)})[u_{(\pi_1)}, \dots, u_{(\pi_p)}]$$

で定義する．ここに

$$\text{置換 } \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_p \end{pmatrix}, \quad \text{その符号 } \text{sgn}(\pi) = \begin{cases} +1 & (\text{偶置換}) \\ -1 & (\text{奇置換}) \end{cases}$$

である.

これは行列式

$$\begin{vmatrix} \omega_{(1)}[u_{(1)}] & \cdots & \omega_{(1)}[u_{(p)}] \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{(p)}[u_{(1)}] & \cdots & \omega_{(p)}[u_{(p)}] \end{vmatrix}$$

であり,  $u_{(1)}, \dots, u_{(p)}$  について歪対称だから  $p$  ベクトルである.

また, ここから外積は  $\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(p)}$  についても歪対称であることが分かる.

さらにこれは転置行列の行列式にも一致するから

$$\sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) (\omega_{(\pi_1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{(\pi_p)}) [u_{(1)}, \dots, u_{(p)}]$$

とも書け,

$$\omega_{(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{(p)} = \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) (\omega_{(\pi_1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{(\pi_p)}).$$

$p$  ベクトル  $\omega^p$  が

$$\omega^p = \sum' a_{i_1 \dots i_p} \mathcal{E}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathcal{E}^{i_p} \quad (103)$$

と展開されることを示す (ただし  $\sum'$  は  $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq \dim V$  の和).  $a_{i_1 \dots i_p} \equiv \omega^p[e_{i_1}, \dots, e_{i_p}]$  とおくと, これは添字に関して反対称である.

$$\begin{aligned} \omega^p[u_{(1)}, \dots, u_{(p)}] &= \omega^p[e_{i_1}, \dots, e_{i_p}] u_{(1)}^{i_1} \cdots u_{(p)}^{i_p} \quad (\omega^p \text{ の線形性}) \\ &= a_{i_1 \dots i_p} \mathcal{E}^{i_1}[u_{(1)}] \cdots \mathcal{E}^{i_p}[u_{(p)}] \\ &= a_{i_1 \dots i_p} \mathcal{E}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}^{i_p}[u_{(1)}, \dots, u_{(p)}] \end{aligned}$$

なので,

$$\omega^p = a_{i_1 \dots i_p} \mathcal{E}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}^{i_p}$$

と書ける. よって

$$\begin{aligned} \omega^p &= \sum' \sum_{\pi} a_{\pi i_1 \dots \pi i_p} \mathcal{E}^{\pi i_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}^{\pi i_p} \\ &\quad (\text{ここで } \sum' \text{ で } 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq \dim V \text{ と大小関係を指定する代わりに,} \\ &\quad \text{置換 } \pi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ \pi i_1 & \pi i_2 & \cdots & \pi i_p \end{pmatrix} \text{ で順序を混ぜている}) \\ &= \sum' \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) a_{i_1 \dots i_p} \mathcal{E}^{\pi i_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}^{\pi i_p} \quad (a_{i_1 \dots i_p} \text{ の反対称性}) \\ &= \sum' a_{i_1 \dots i_p} \mathcal{E}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathcal{E}^{i_p}. \end{aligned}$$

$V$  として多様体の接空間をとり  $p$  ベクトル  $\omega^p = \sum' a_{i_1 \dots i_p} \mathcal{E}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathcal{E}^{i_p}$  を考える.

微分  $df$  接ベクトル  $v = v^i \partial_i$  に作用して方向微分  $v^i \partial_i f$  を与える 1 ベクトル (従って写像)

$$df[v] = v^i \partial_i f = (\partial_i f) \mathcal{E}^i[v], \quad \therefore df = (\partial_i f) \mathcal{E}^i \quad (104)$$

を導入する.

$$q^j(q) = q^j$$

で定義される座標関数  $q^j$  を  $f$  にとると、微分  $df$  の式 (104) に現れる  $\partial_i f$  における  $f(q) = q^j(q) = q^j$  は座標関数ではなく座標成分となることに注意して

$$\partial_i f = \delta_i^j, \quad \therefore dq^j = \mathcal{E}^j$$

を得る.

よって  $p$  ベクトルは

$$\omega^p = \sum' a_{i_1 \dots i_p} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p}$$

と表される.  $\omega^p$  は多様体のある点  $Q$  の接ベクトルに作用する (点  $Q$  の接ベクトルを引数とする) 写像であることを明記するため, これを  $(\omega^p)_Q$  と書く.

$p$ (次微分) 形式  $\omega^p$  多様体の各点で  $p$  ベクトル  $(\omega^p)_Q$  を与える “場”

$$\omega^p = \sum' a_{i_1 \dots i_p} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p}.$$

全微分  $df$  微分  $(df)_Q$  の “場” である 1 形式  $df = (\partial_i f) dq^i$ .

座標関数の全微分は  $dq^i = \frac{\partial q^i}{\partial q^j} dq^j$  より反変ベクトル成分の変換則に従うため,  $p$  形式  $\sum' a_{i_1 \dots i_p} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p}$  が座標系に依らない意味を持つには  $a_{i_1 \dots i_p}$  は  $p$  階共変テンソルの変換則に従わなければならない.

外微分  $p$  形式

$$\omega = \sum' f_{i_1 \dots i_p} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p}$$

を外微分すると,  $df_{i_1 \dots i_p}$  を  $f_{i_1 \dots i_p}$  の全微分 (従って 1 形式) として  $p+1$  形式

$$d\omega = \sum' df_{i_1 \dots i_p} \wedge dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p}$$

を得る.

■微分形式の積分 以下では  $\omega^p[u_{(1)}, \dots, u_{(p)}] \equiv \langle \omega^p | u_{(1)}, \dots, u_{(p)} \rangle$  という記法を用いる. 多様体上の積分領域  $A$  を  $(\xi^1, \dots, \xi^p)$  でパラメトライズし, 領域  $A$  に対応する  $(\xi^1, \dots, \xi^p)$  の範囲を  $\bar{A}$  とする. このとき  $p$  形式  $\omega^p$  の積分は

$$\int_A \omega^p \equiv \int_{\bar{A}} \left\langle \omega^p \left| \frac{\partial}{\partial \xi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi^p} \right. \right\rangle d\xi^1 \dots d\xi^p$$

で定義される. ここで

$$\frac{\partial}{\partial \xi^j} = \frac{\partial q^k}{\partial \xi^j} \frac{\partial}{\partial q^k}, \quad \therefore dq^i \left[ \frac{\partial}{\partial \xi^j} \right] = \mathcal{E}^i \left[ \frac{\partial q^k}{\partial \xi^j} \frac{\partial}{\partial q^k} \right] = \frac{\partial q^i}{\partial \xi^j}$$

なので

$$\begin{aligned}
 \left\langle \omega^p \left| \frac{\partial}{\partial \xi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi^p} \right. \right\rangle &= \sum' f_{i_1 \dots i_p} \left\langle dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p} \left| \frac{\partial}{\partial \xi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi^p} \right. \right\rangle \\
 &= \sum' f_{i_1 \dots i_p} \begin{vmatrix} dq^{i_1} [\partial/\partial \xi^1] & \dots & dq^{i_1} [\partial/\partial \xi^p] \\ \dots & \dots & \dots \\ dq^{i_p} [\partial/\partial \xi^1] & \dots & dq^{i_p} [\partial/\partial \xi^p] \end{vmatrix} \\
 &= \sum' f_{i_1 \dots i_p} \frac{\partial(q^{i_1}, \dots, q^{i_p})}{\partial(\xi^1, \dots, \xi^p)}, \\
 \therefore \int_A \omega^p &= \int_A \sum' f_{i_1 \dots i_p} \frac{\partial(q^{i_1}, \dots, q^{i_p})}{\partial(\xi^1, \dots, \xi^p)} d\xi^1 \dots d\xi^p \tag{105}
 \end{aligned}$$

と書き換えられる。なお

$$\frac{\partial(q^{i_1}, \dots, q^{i_p})}{\partial(\xi^1, \dots, \xi^p)} d\xi^1 \dots d\xi^p \equiv \frac{\partial(q)}{\partial(\xi)} d^p \xi = \frac{\partial(q)}{\partial(\xi)} \frac{\partial(\xi)}{\partial(\bar{\xi})} d^p \bar{\xi} = \frac{\partial(q)}{\partial(\bar{\xi})} d^p \bar{\xi}$$

より、この積分はパラメータ  $(\xi^1, \dots, \xi^p)$  の取り方に依らない。

■Stokes の定理  $n$  次元の領域  $D$  と境界  $\partial D$  に向きのつけられるとき、任意の  $p \equiv (n-1)$  形式  $\omega$  に対して

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega \tag{106}$$

が成り立つ。

■面積要素を構成する 領域  $D$  の境界  $\partial D$  を  $(\xi^1, \dots, \xi^p)$  でパラメトライズする。1つのパラメータ  $\xi^j$  が動いてできる座標曲線上の2点  $q(\xi^j), q(\xi^j + d\xi^j)$  を結ぶ  $\partial D$  の接ベクトルを  $d^{(j)}q$  とすると、その第  $i$  成分は  $d^{(j)}q^i = \frac{\partial q^i}{\partial \xi^j} d\xi^j$  ( $j$  について和をとらない) なので、 $\partial D$  にわたる  $\omega^p$  の積分から

$$\frac{\partial(q^{i_1}, \dots, q^{i_p})}{\partial(\xi^1, \dots, \xi^p)} d\xi^1 \dots d\xi^p = \begin{vmatrix} \frac{\partial q^{i_1}}{\partial \xi^1} d\xi^1 & \dots & \frac{\partial q^{i_1}}{\partial \xi^p} d\xi^p \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial q^{i_p}}{\partial \xi^1} d\xi^1 & \dots & \frac{\partial q^{i_p}}{\partial \xi^p} d\xi^p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d^{(1)}q^{i_1} & \dots & d^{(p)}q^{i_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ d^{(1)}q^{i_p} & \dots & d^{(p)}q^{i_p} \end{vmatrix}$$

が現れる。これは無限小ベクトル  $d^{(1)}q, \dots, d^{(p)}q$  の張る面積要素を与える。

## C.2 Gauss の定理 (97): $\int_{\partial V} p d\mathbf{f} = \int_V \nabla p dV$

領域  $V$  の流体に働く総圧力は

$$- \int_{\partial V} p d\mathbf{f} = - \int_V \nabla p dV$$

で与えられる。この積分公式は Gauss の定理と呼ばれる [10, p.14]。これは通常の発散定理と同様、以下で示すように2形式に対する Stokes の定理から導かれる。

直感的には次のように考えられるだろう。図 88 の位置  $x$  のブロックに働く圧力の  $x$  成分は

$$\{p(x) - p(x+dx)\} dydz = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz$$

だからブロック列の両端にかかる圧力の  $x$  成分は

$$- \left( \int_a^b \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dydz$$

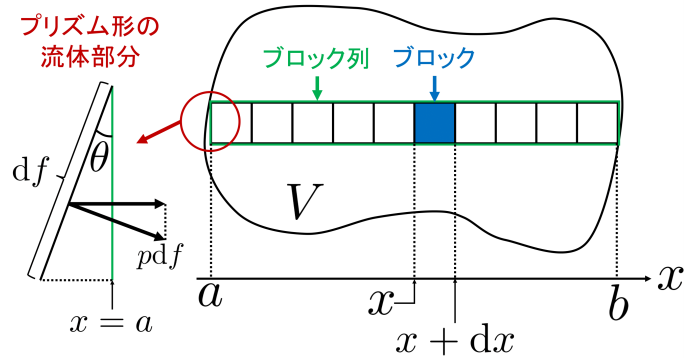


図 88 領域  $V$  の流体をブロックに分ける

である。図 88 の微小なプリズム形の流体部分に働く面積力はつり合わなければならないから [10, pp.7-8], ブロック列の端  $x = a$  にかかる圧力の  $x$  成分  $p(x = a)dydz$  は表面  $df$  にかかる圧力の  $x$  成分  $pd f \cos \theta$  に等しい。よって総圧力の  $x$  成分は  $-\int_V \frac{\partial p}{\partial x} dV$  で与えられることが分かる。

### C.3 4次元空間における Stokes の定理 (98)

1 形式  $\omega = A_\mu dx^\mu$  に対して外微分は

$$\begin{aligned} d\omega &= \partial_\nu A^\mu dx^\nu \wedge dx^\mu = \sum' (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &\equiv \sum' f_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad \left( \sum' \text{は } \mu < \nu \text{ の和} \right) \end{aligned}$$

となる。  $\omega, d\omega$  の積分を定義式 (105) に従って通常の積分に書き換えよう。

4次元空間に横たわる 2次元の超曲面  $S$  を  $(\xi, \xi')$  でパラメトライズする。ここで  $\xi$  (または  $\xi'$ ) が動いてできる座標曲線上で座標が  $\xi$  と  $\xi + d\xi$  (または  $\xi'$  と  $\xi' + d\xi'$ ) の 2 点を結ぶ 4 元ベクトル  $dx$  (または  $dx'$ ) を定義すると、その第  $\alpha$  成分は

$$dx^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi} d\xi, \quad dx'^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi'} d\xi'$$

なので

$$\begin{aligned} \sum' \int_S f_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu &= \sum' \int_S f_{\mu\nu} \begin{vmatrix} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi} & \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi'} \\ \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi} & \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi'} \end{vmatrix} d\xi d\xi' = \sum' \int_S f_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu}, \\ d\sigma^{\mu\nu} &\equiv \begin{vmatrix} dx^\mu & dx'^\mu \\ dx^\nu & dx'^\nu \end{vmatrix} \end{aligned}$$

を得る。

一方、 $S$  の境界  $C = \partial S$  を  $\eta$  でパラメトライズしたとき、  $\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  に注意すると

$$\left\langle dx^\mu \left| \frac{\partial}{\partial \eta} \right. \right\rangle d\eta = \frac{\partial x^\mu}{\partial \eta} d\eta = dx^\mu$$

なので (最左辺の  $dx^\mu$  は 1 形式ではなく、通常の線要素),

$$\int_{\partial S} \omega = \int_C A_\mu dx^\mu$$

を得る.

以上より Stokes の定理 (106) は 4 次元空間における Stokes の定理 (98):

$$\int_S \sum' f_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} = \int_C A_\mu dx^\mu$$

を与える.

#### C.4 4 次元空間における 3 次元的 Gauss の定理 (99)

2 形式

$$\omega = \sum' A_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad \left( \sum' \text{は } \mu < \nu \text{ の和} \right)$$

の外微分は,

$$F_{\lambda\mu\nu} \equiv \partial_\lambda A_{\mu\nu} + \partial_\mu A_{\nu\lambda} + \partial_\nu A_{\lambda\mu}$$

とおくと

$$\begin{aligned} d\omega &= \left( \sum_{\lambda < \mu < \nu} + \sum_{\mu < \lambda < \nu} + \sum_{\mu < \nu < \lambda} \right) \partial_\lambda A_{\mu\nu} dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \sum'' (\partial_\lambda A_{\mu\nu} dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu + \partial_\mu A_{\lambda\nu} dx^\mu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\nu + \partial_\nu A_{\lambda\mu} dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\mu) \\ &= \sum'' \{ \partial_\lambda A_{\mu\nu} dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu + (-\partial_\mu A_{\nu\lambda})(-dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu) + \partial_\nu A_{\lambda\mu} dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \} \\ &= \sum'' F_{\lambda\mu\nu} dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \quad \left( \sum'' \text{は } \lambda < \mu < \nu \text{ の和} \right) \end{aligned}$$

となる.  $\omega, d\omega$  の積分を定義式 (105) に従って通常の積分に書き換えよう.

4 次元空間に横たわる 3 次元の超曲面  $V$  を  $(\xi, \xi', \xi'')$  でパラメトライズする. ここで  $\xi$  (または  $\xi', \xi''$ ) が動いてできる座標曲線上で座標が  $\xi$  と  $\xi + d\xi$  (または  $\xi'$  と  $\xi' + d\xi'$ ,  $\xi''$  と  $\xi'' + d\xi''$ ) の 2 点を結ぶ 4 元ベクトル  $dx$  (または  $dx', dx''$ ) を定義すると, その第  $\alpha$  成分は

$$dx^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi} d\xi, \quad dx'^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi'} d\xi', \quad dx''^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi''} d\xi''$$

なので

$$\begin{aligned} \left\langle dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \left| \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \xi'}, \frac{\partial}{\partial \xi''} \right. \right\rangle d\xi d\xi' d\xi'' &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi} & \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi'} & \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi''} \\ \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi} & \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi'} & \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi''} \\ \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi} & \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi'} & \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi''} \end{vmatrix} d\xi d\xi' d\xi'' = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi'} d\xi' & \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi''} d\xi'' \\ \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi'} d\xi' & \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi''} d\xi'' \\ \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi'} d\xi' & \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi''} d\xi'' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} dx^\lambda & dx'^\lambda & dx''^\lambda \\ dx^\mu & dx'^\mu & dx''^\mu \\ dx^\nu & dx'^\nu & dx''^\nu \end{vmatrix} \equiv dv^{\lambda\mu\nu} \end{aligned}$$

となるから

$$\int_V d\omega = \int_V \sum'' F_{\lambda\mu\nu} dv^{\lambda\mu\nu}$$

を得る.

一方, 超曲面  $S = \partial V$  を  $(\eta, \eta')$  でパラメトライズすると同様に

$$\left\langle dx^\mu \wedge dx^\nu \left| \frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial \eta'} \right. \right\rangle = \begin{vmatrix} dx^\mu & dx'^\mu \\ dx^\nu & dx'^\nu \end{vmatrix} \equiv d\sigma^{\mu\nu}, \quad \therefore \int_{\partial V} \omega = \int_S \sum' A_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu}$$

を得る.

以上より Stokes の定理 (106) は 4 次元空間における 3 次元的 Gauss の定理 (99):

$$\int_V \sum'' F_{\lambda\mu\nu} dv^{\lambda\mu\nu} = \int_S \sum' A_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu}$$

を与える.

■ 3 次元的 Gauss の定理の式 (100) への書き換え 3 次元的 Gauss の定理 (99) を, デュアルテンソル

$$dS_\mu \equiv -\frac{1}{3!} e_{\mu\nu\lambda\rho} dv^{\nu\lambda\rho}, \quad df_{\mu\nu}^* \equiv \frac{1}{2!} e_{\mu\nu\lambda\rho} d\sigma^{\lambda\rho}$$

を導入して書き換える ( $e^{\lambda\mu\nu\rho}$  は完全反対称テンソルであり,  $e^{0123} = 1, \therefore e_{0123} = -1$ ). これらを元のテンソルについて逆に解くと

$$\begin{aligned} e_{nkml} dS^n &= -\frac{1}{6} e_{nkml} e^{nprs} dv_{prs} \\ &= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \delta^p_k & \delta^p_l & \delta^p_m \\ \delta^r_k & \delta^r_l & \delta^r_m \\ \delta^s_k & \delta^s_l & \delta^s_m \end{vmatrix} dv_{prs} \\ &= \frac{1}{6} (dv_{klm} - dv_{kml} - dv_{lkm} + dv_{mkl} + dv_{lmk} - dv_{mlk}) \quad (\text{行列式を 1 行目で展開した}) \\ &= dv_{klm}, \\ \therefore dv^{\lambda\mu\nu} &= e^{\rho\lambda\mu\nu} dS_\rho \end{aligned}$$

および

$$-\frac{1}{2} e^{\mu\nu\lambda\rho} df_{\lambda\rho}^* = -\frac{1}{4} e^{\mu\nu\lambda\rho} e_{\lambda\rho\alpha\beta} d\sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta \delta^\nu_\alpha) d\sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (d\sigma^{\mu\nu} - d\sigma^{\nu\mu}) = d\sigma^{\mu\nu}$$

なので

$$\begin{aligned} \sum' A_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} &= \frac{1}{2!} A_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2!} A_{\mu\nu} \left( -\frac{1}{2} e^{\mu\nu\lambda\rho} df_{\lambda\rho}^* \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2!} e^{\lambda\rho\mu\nu} A_{\mu\nu} \right) df_{\lambda\rho}^* \equiv -\frac{1}{2} A_{\lambda\rho}^* df_{\lambda\rho}^*, \\ \sum'' F_{\lambda\mu\nu} dv^{\lambda\mu\nu} &= \frac{1}{3!} F_{\lambda\mu\nu} dv^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{3!} F_{\lambda\mu\nu} (e^{\rho\lambda\mu\nu} dS_\rho) = \left( \frac{1}{3!} e^{\rho\lambda\mu\nu} F_{\lambda\mu\nu} \right) dS_\rho \equiv -F^{*\rho} dS_\rho \end{aligned}$$

であり, ここで

$$\begin{aligned} F^{*\rho} &= -\frac{1}{3!} e^{\rho\lambda\mu\nu} F_{\lambda\mu\nu} = -\frac{1}{3} \left\{ \partial_\lambda \left( \frac{1}{2!} e^{\rho\lambda\mu\nu} A_{\mu\nu} \right) + \partial_\mu \left( \frac{1}{2!} e^{\rho\lambda\mu\nu} A_{\nu\lambda} \right) + \partial_\nu \left( \frac{1}{2!} e^{\rho\lambda\mu\nu} A_{\lambda\mu} \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{3} (\partial_\lambda A^{*\rho\lambda} + \partial_\mu A^{*\rho\mu} + \partial_\nu A^{*\rho\nu}) = -\partial_\lambda A^{*\rho\lambda} \end{aligned}$$

なので 3 次元的 Gauss の定理 (99) は式 (100):

$$\frac{1}{2} \int_S A^{*\lambda\rho} df_{\lambda\rho}^* = \int_V \partial_\lambda A^{*\rho\lambda} dS_\rho$$

と書き換えられる.



### C.5 4 次元 Gauss の定理 (101)

3 形式

$$\omega = \sum' T_{\lambda\mu\nu} dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \quad \left( \sum' \text{は } 0 \leq \lambda < \mu < \nu \leq 3 \text{ の和} \right)$$

に対して外微分は

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum' \partial_\rho T_{\lambda\mu\nu} dx^\rho \wedge dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \partial_0 T_{123} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad \Leftarrow \quad \rho = 0 \text{ の項, } dx^0 \wedge dx^0 = 0 \\ &\quad + \partial_1 T_{023} dx^1 \wedge dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad \Leftarrow \quad \rho = 1 \text{ の項, } dx^1 \wedge dx^1 = 0 \\ &\quad + \partial_2 T_{013} dx^2 \wedge dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \quad \Leftarrow \quad \rho = 2 \text{ の項, } dx^2 \wedge dx^2 = 0 \\ &\quad + \partial_3 T_{012} dx^3 \wedge dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \quad \Leftarrow \quad \rho = 3 \text{ の項, } dx^3 \wedge dx^3 = 0 \\ &= (\partial_0 T_{123} - \partial_1 T_{023} + \partial_2 T_{013} - \partial_3 T_{012}) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= W_{0123} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned}$$

となる.  $\omega, d\omega$  の積分を定義式 (105) に従って通常の積分に書き換えよう.

積分変数に空間座標  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  そのものをとれば

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{\Omega} W_{0123} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3 = \int_{\Omega} W_{0123} \frac{\partial(x^0, \dots, x^3)}{\partial(x^0, \dots, x^3)} dx^0 \cdots dx^3 = \int_{\Omega} W_{0123} d\Omega$$

となる.

次に 4 次元空間に横たわる 3 次元の超曲面  $\partial\Omega = V$  を  $(\xi, \xi', \xi'')$  でパラメトライズする. ここで  $\xi$  (または  $\xi', \xi''$ ) が動いてできる座標曲線上で座標が  $\xi$  と  $\xi + d\xi$  (または  $\xi'$  と  $\xi' + d\xi'$ ,  $\xi''$  と  $\xi'' + d\xi''$ ) の 2 点を結ぶ 4 元ベクトル  $dx$  (または  $dx', dx''$ ) を定義すると, その第  $\alpha$  成分は

$$dx^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi} d\xi, \quad dx'^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi'} d\xi', \quad dx''^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi''} d\xi''$$

なので

$$\begin{aligned} \left\langle dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \left| \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \xi'}, \frac{\partial}{\partial \xi''} \right. \right\rangle d\xi d\xi' d\xi'' &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi} & \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi'} & \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi''} \\ \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi} & \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi'} & \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi''} \\ \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi} & \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi'} & \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi''} \end{vmatrix} d\xi d\xi' d\xi'' = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi'} d\xi' & \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi''} d\xi'' \\ \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi'} d\xi' & \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi''} d\xi'' \\ \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi'} d\xi' & \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi''} d\xi'' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} dx^\lambda & dx'^\lambda & dx''^\lambda \\ dx^\mu & dx'^\mu & dx''^\mu \\ dx^\nu & dx'^\nu & dx''^\nu \end{vmatrix} \equiv dv^{\lambda\mu\nu} \end{aligned}$$

となるから

$$\int_V \omega = \int_V \sum' T_{\lambda\mu\nu} dv^{\lambda\mu\nu}$$

を得る.

以上より Stokes の定理は 4 次元 Gauss の定理 (101):

$$\int_{\Omega} W_{0123} d\Omega = \int_V \sum' T_{\lambda\mu\nu} dv^{\lambda\mu\nu}$$

を与える.

■4 次元的 Gauss の定理の式 (102) への書き換え 4 次元的 Gauss の定理 (101) を, デュアルテンソル

$$W^* \equiv \frac{1}{4!} e^{\rho\lambda\mu\nu} W_{\rho\lambda\mu\nu}, \quad T^{*\rho} \equiv \frac{1}{3!} e^{\rho\lambda\mu\nu} T_{\lambda\mu\nu}$$

を導入して書き換える ( $e^{\lambda\mu\nu\rho}$  は完全反対称テンソルであり,  $e^{0123} = 1, \therefore e_{0123} = -1$ ).

$$\begin{aligned} W_{0123} = W^* &= \frac{1}{4!} e^{\rho\lambda\mu\nu} (\partial_\rho T_{\lambda\mu\nu} - \partial_\lambda T_{\mu\nu\rho} + \partial_\mu T_{\nu\rho\lambda} - \partial_\nu T_{\rho\lambda\mu}) \\ &= \frac{1}{4!} \{ e^{\rho\lambda\mu\nu} \partial_\rho T_{\lambda\mu\nu} - (-e^{\lambda\mu\nu\rho}) \partial_\lambda T_{\mu\nu\rho} + (+e^{\mu\nu\rho\lambda}) \partial_\mu T_{\nu\rho\lambda} - (-e^{\nu\rho\lambda\mu}) \partial_\nu T_{\rho\lambda\mu} \} \\ &= \frac{1}{4!} \times 4 e^{\rho\lambda\mu\nu} \partial_\rho T_{\lambda\mu\nu} \\ &= \partial_\rho T^{*\rho} \end{aligned}$$

であり, さらに

$$\begin{aligned} \sum' T_{\lambda\mu\nu} dv^{\lambda\mu\nu} &= T_{123} dv^{123} + T_{023} dv^{023} + T_{013} dv^{013} + T_{012} dv^{012} \\ &= T^{*0} dv^{123} + (-T^{*1}) dv^{023} + T^{*2} dv^{013} + (-T^{*3}) dv^{012} \\ &= -\frac{1}{3!} e_{\rho\lambda\mu\nu} T^{*\rho} dv^{\lambda\mu\nu} \\ &\equiv T^{*\rho} dS_\rho \end{aligned}$$

なので 4 次元的 Gauss の定理 (101) は式 (102):

$$\int_V T^{*\rho} dS_\rho = \int_\Omega \partial_\rho T^{*\rho} d\Omega$$

と書き換えられる.

## 付録 D 古典的統一理論

§ 9, § 23, § 30 では特殊相対性理論の範囲で、最小作用原理から粒子と場の運動方程式を導いている。しかしながら教科書では、一般相対性理論において対応する議論を行ってはいない。そこで本章では、重力がある場合へと最小作用原理を一般化する方法を示す。

古典論において自然は粒子と場 (電磁場と重力場) から成る。それらの時間発展は最小作用原理の下で、作用の表式の中に完全に含まれており、この意味である種の古典的統一理論と呼べる体系を提示することができる。

特殊相対性理論における結果を得るには、 $g_{\mu\nu}$  を Minkowski 計量  $\eta_{\mu\nu}$  とすれば良い。(したがって行列式  $g = |g_{\mu\nu}|$  は  $-1$  になり、Christoffel 記号はゼロになり、共変微分 (§ 85) は通常の微分に戻る。) ただし以下では教科書と異なり、時空の 4 成分  $0, 1, 2, 3$  をとり得る添字をギリシア文字で、空間成分  $1, 2, 3$  のみを取り得る添字をラテン文字で表す。

### D.1 古典的統一理論

#### D.1.1 エネルギー・運動量テンソル (§ 94)

§ 32 では特殊相対性理論の範囲で、エネルギー・運動量テンソルの一般公式 (32.5)

$$T_{\alpha}{}^{\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\beta}\phi_r)} \partial_{\alpha}\phi_r - \delta_{\alpha}{}^{\beta} \mathcal{L} \quad (107)$$

を導いた ( $\mathcal{L}$  はラグランジアン密度、場  $\phi_r$  の種類  $r$  について和をとる)。一般相対性理論では、作用は

$$S = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x$$

という形をとる ( $\sqrt{-g} d^4x$  は固有体積要素 (B.1.1 節)、慣性系で  $\sqrt{-g} = 1$ )。ただしここでの作用  $S$  は、力学変数  $g^{\mu\nu}(x)$  を記述する項 (重力場項) を含まないものとしておく。ここで作用がスカラーであり、無限小の座標変換

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu} \quad (108)$$

に対して不変であることを要求すると<sup>\*45</sup>、保存則

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad (109)$$

が導かれる (導出は D.3.1 節)。ここに  $T^{\mu\nu}$  は、計量テンソル  $g^{\mu\nu}$  の変分  $\delta g^{\mu\nu}$  に伴う作用の変化

$$\delta S = \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_{\lambda} g^{\mu\nu})} \delta(\partial_{\lambda} g^{\mu\nu}) \right\} d^4x = \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_{\lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_{\lambda} g^{\mu\nu})} \right\} (\delta g^{\mu\nu}) d^4x$$

(ただし  $\Lambda \equiv \mathcal{L} \sqrt{-g}$ ) において

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_{\lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_{\lambda} g^{\mu\nu})} \right\} \quad (110)$$

で定義される対称テンソルである。従ってこれは  $g^{\mu\nu}, \partial_{\lambda} g^{\mu\nu}$  による微分が  $g^{\nu\mu}, \partial_{\lambda} g^{\nu\mu}$  を固定して行われることを意味する。

<sup>\*45</sup> この条件は最小作用原理から導かれる運動方程式が、任意の座標系で成り立つことを保証する (十分条件, D.1.4 節)。

保存則 (109) は一般座標変換 (108) に関する対称性から導かれていることを踏まえると、上式 (110) の  $T_{\mu\nu}$  は (重力場を含まない物理系の) エネルギー・運動量テンソルを与えると期待できる (定数係数の違いはあり得るにしても). この解釈を正当化するために、D.1.5 節では電磁場の系に対して上式 (110) に基づいて計算したエネルギー・運動量テンソルが、平坦な時空において § 32 の一般公式 (107) と等価な結果を与えることを示す. (上式 (110) の  $T_{\mu\nu}$  はエネルギー・運動量テンソルそのものであり、定数係数は 1 であることが同時に分かる.)

公式 (110) には最初から対称なエネルギー・運動量テンソルが得られるという利点がある. 重力がない場合にもエネルギー・運動量テンソルを計算するのに、形式的に公式 (110) を利用できる.

**注意** 上式 (109):  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$  は厳密な意味での保存則ではない. と言うのも、 $\int T^{\mu 0} \sqrt{-g} d^3x$  が保存するための連続の式は  $\partial_\nu(\sqrt{-g}T^{\mu\nu}) = 0$  であって、式 (109) ではない (発散公式 (86.9) による). これは重力場もエネルギーと運動量を担うため、重力場を除く物理系のエネルギー・運動量保存則は近似的にしか成り立たないことに関係している (p.313) [23, p.95].

### D.1.2 電磁場

古典的には自然は粒子と電磁場、重力場から成る. 重力場の強度は Christoffel 記号に対応することが、まもなく示される (D.2.1 節). 本節では電磁場を導入する (§ 90 の問題).

電磁ポテンシャル  $A^\mu$  (反変 4 元ベクトル) から電磁場テンソル

$$F_{\mu\nu} \equiv A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

が作られる (第 2 の等号は共変微分の式 (86.12) による). これは添字に関して反対称であり ( $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ ), 以下のように電磁場の成分を与える. すなわち電場  $\mathbf{E} = (E^1, E^2, E^3)$  と磁束密度  $\mathbf{B} = (B^1, B^2, B^3)$  はそれぞれ

$$E^i = \gamma^{ij} E_j, \quad E_i = F_{0i}, \quad (111)$$

$$B^i = -\frac{1}{2} E^{ijk} B_{jk}, \quad B_{ij} = F_{ij} \quad (112)$$

で定義される. ここに  $\gamma^{ij}$  は § 84 の 3 次元計量テンソル  $\gamma_{ij}$  の逆テンソルで  $\gamma^{ij}\gamma_{jk} = \delta^i_k$  を満たし、行列式  $\gamma \equiv |\gamma_{ij}|$  に対し  $E^{ijk} \equiv \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \varepsilon^{ijk}$  は 3 次元の反対称テンソルである (ただし  $\varepsilon^{123} = 1$ , B.1.2 節参照).

### D.1.3 4 元電流 (密度)

電流密度の 4 元ベクトルを

$$j^\mu(x) = \sum_a \frac{e_a c}{\sqrt{-g(x)}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \frac{dx_a^\mu}{dx^0} \quad (113)$$

で定義する ( $a$  は粒子の番号). ただしここでは空間座標をまとめて  $\mathbf{r} \equiv (x^1, x^2, x^3)$  と表し、デルタ関数を  $\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3) \equiv \delta(\mathbf{r})$  と書いている (曲線座標系において  $\mathbf{r}$  は位置ベクトルではない). (以上, § 90.)

D.3.2 節では 4 元電流密度 (113) を

$$j^\mu(x) = \sum_a \frac{e_a c}{\sqrt{-g(x)}} \int \delta(x - x_a) \frac{dx_a^\mu}{d\tau_a} d\tau_a \quad (114)$$

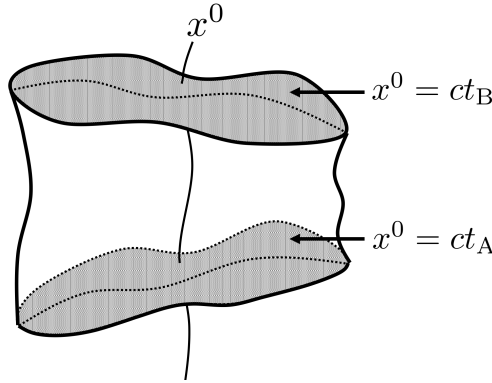


図 89 作用の積分範囲

と書き換え, 実際にこれが反変ベクトルとして変換することを証明する. 平坦な時空を想定して慣性系をとると, 電流密度の定義式 (113) は § 28 の表式

$$j^\mu = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \frac{dx_a^\mu}{dt}$$

へと簡略化される. ひるがえって電流密度の定義式 (113) は, その重力がある場合への自然な一般化と理解できる.

#### D.1.4 最小作用原理

古典物理学において自然界は粒子と場 (電磁場と重力場) から成り, 粒子と場は相互作用しながら決定論的に時間発展する. 時間発展は最小作用原理から決定され, 原理的には古典物理学における自然界の振舞いは, 作用  $S$  の表式に完全に含まれていると言える. 作用  $S$  は次式で与えられる (p.304, pp.306–308) [23, pp.115–116] [24, pp.261–262, pp.266–267].

$$S = - \sum mc \int ds - \sum \frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu - \frac{1}{16\pi c} \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x - \frac{c^3}{16\pi k} \int G \sqrt{-g} d^4x. \quad (115)$$

ここに

$$m : \text{粒子の質量}, \quad e : \text{粒子の電荷}, \quad k : \text{万有引力定数}, \\ G \equiv g^{\mu\nu} (\Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\sigma\rho}), \quad \Gamma^\mu_{\nu\rho} : \text{Christoffel 記号}$$

である. ただし電磁気学の単位系として Gauss 単位系を用いている. 作用 (115) 右辺第 1,2 項の積分は与えられた座標時間  $t = t_A, t_B$  の間の粒子の軌道に沿って行う.  $\sum$  は粒子ごとに値の異なる表式の全粒子についての和を表し, 右辺第 2 項の  $A_\mu$  は粒子の位置で評価する. 右辺第 3,4 項の積分は図 89 の時刻  $t = t_A, t_B$  に挟まれた“円柱状”の領域に渡って行う.“円柱”の“側面”は空間の無限遠にあり, ここでは場の値はゼロになるものと仮定する. 作用 (115) は特殊相対性理論での完全な作用 (27.7) と比較される.

式 (113) で定義した電流密度の 4 元ベクトルを用い ( $a$  は粒子の番号), 電磁場と粒子の相互作用項

$S_{\text{mf}} \equiv -\sum \frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu$  は場を基調とした表現

$$S_{\text{mf}} = -\frac{1}{c^2} \int j^\mu(x) A_\mu(x) \sqrt{-g(x)} d^4x \quad (116)$$

に書き換えられる (D.3.3 節参照).

作用  $S$  の表式 (115) の段階で理論の共変性を考察することができる. 作用における  $ds, A_\mu dx^\mu, F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$  はスカラーである. また固有体積要素  $\sqrt{-g} d^4x$  は不変量である (B.1.1 節). さらに第 4 項  $S_g \equiv -\frac{c^3}{16\pi k} \int G \sqrt{-g} d^4x$  における  $G$  そのものはスカラーではないけれど, 計量テンソルの変化に伴う変分は

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \delta \int R \sqrt{-g} d^4x$$

となるので ( $R$  はスカラー曲率, D.4.3 節), スカラーである (粒子の座標や電磁場の変化に伴う変分はもちろん,  $\delta S_g = 0$ ). 以上より作用の変分は座標系に依らない量なので, 作用が極値 (停留値) をとる条件に他ならない運動方程式も座標系の変更によって形を変えない. 実際, D.2 節で導く場と粒子の運動方程式は両辺が同じ種類のテンソルから成り, 座標変換に対して共変的であることが明白に見て取れる.

重力場項  $S_g$  について  $S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \int G \sqrt{-g} d^4x$  の変分を  $\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \delta \int R \sqrt{-g} d^4x$  と計算できることは, 重力場の作用を  $S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \int R \sqrt{-g} d^4x$  としても良いことを意味する. (そうすれば, 作用そのものがスカラーとなる.) ただし  $R$  は  $g_{\mu\nu}$  の 2 階導関数を含む. これに対し  $S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \int G \sqrt{-g} d^4x$  とすれば  $G$  は場  $g_{\mu\nu}$  とその 1 階導関数だけを含むことになり, 自由電磁場の Lagrangian 密度  $-\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$  が場  $A_\mu$  の 1 階導関数だけを含むこととの類似性が確保される. このとき場の方程式は時間に関して 2 階の微分方程式となり, 場とその時間変化率の初期値が与えられればその後の場の時間発展が完全に決まるといふ, 古典的因果律の保証されることが明瞭である.

#### D.1.5 電磁場を含めた物質の系のエネルギー・運動量テンソル

本節では  $a$  番目の粒子の質量を  $m_a$ , 電荷を  $e_a$ , 座標を  $x^\mu(a)$ , 固有時間を  $\tau_a$ ,  $\dot{x}^\mu(a) \equiv \frac{dx^\mu(a)}{d\tau_a}$  と表記する. 作用 (115) の重力場項  $S_g$  を除いた右辺第 1,2,3 項の和を,

$$S'_m = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x$$

と書いたときの Lagrangian 密度  $\mathcal{L}$  は

$$\Lambda(x) \equiv \mathcal{L}(x) \sqrt{-g(x)} = \int \left\{ -\sum_a \left( m_a c^2 \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu(a) \dot{x}^\nu(a)} + e_a A_\mu(x) \dot{x}^\mu(a) \right) \delta^4(x - x(a)) \right\} d\tau_a - \frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta}(x) F_{\gamma\delta}(x) g^{\alpha\gamma}(x) g^{\beta\delta}(x) \sqrt{-g(x)} \quad (117)$$

で与えられる (D.3.4 節参照) [2, p.163] [25, p.116].

重力場を除く物理系のエネルギー・運動量テンソルの一般公式 (110) は, この  $\Lambda$  に対して具体的には

$$T_{\mu\nu}(x) = \sum_a \frac{m_a c}{\sqrt{-g(x)}} \int \dot{x}_\mu(a) \dot{x}_\nu(a) \delta^4(x - x(a)) d\tau_a + \frac{1}{4\pi} \left( -F_{\mu\alpha}(x) F_\nu{}^\alpha(x) + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta}(x) F^{\alpha\beta}(x) g_{\mu\nu}(x) \right) \quad (118)$$

となる (D.3.4 節参照) [2, p.165] [25, p.113, p.118]. これが粒子と電磁場のエネルギー・運動量テンソルである.

平坦な時空では第2項は、§ 33の一般公式(107)から求めた電磁場のエネルギー・運動量テンソル(33.1):

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( -F_{\mu\alpha} F_{\nu}{}^{\alpha} + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} \right)$$

に一致している。

■物質のエネルギー・運動量テンソル 特に電磁場がないときの物質のエネルギー・運動量テンソルは

$$T^{(m)\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \sum_a m_a c \int \dot{x}^\mu(a) \dot{x}^\nu(a) \delta^4(x - x(a)) d\tau_a \quad (119)$$

である。4元電流密度(113)が反変ベクトルになっていることの証明(D.3.2節)で見たように、 $1/\sqrt{-g}$ はデルタ関数の変換性を打ち消すので、上式(119)右辺は確かに2階共変テンソルとなっていることが分かる。上式(119)は

$$T^{(m)\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \sum_a m_a \dot{x}^\mu(a) \dot{x}^\nu(a) \sqrt{1 - \left(\frac{v_a}{c}\right)^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \quad (120)$$

と書き換えられる(導出はD.3.4節)<sup>\*46</sup>。§ 33のノートでは、特殊相対性理論の文脈において、この表式の解釈を行った。

ここで粒子の系を連続体(流体)と見なせる場合に、上式(119)を簡略化することを考える[2, pp.107–110, pp.165–166, p.169]。まず粒子が狭い範囲に局在しているとき、各粒子の4元速度 $\dot{x}^\mu(a)$ を共通の流体要素の4元速度 $\dot{x}^\mu$ に置き換え、粒子の和の外に出すことができる。

$$T^{(m)\mu\nu}(x) = \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \varrho(x), \quad \varrho(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \sum_a m_a c \int \delta^4(x - x(a)) d\tau_a. \quad (121)$$

再び $1/\sqrt{-g}$ はデルタ関数の変換性を打ち消すので、ここで定義した $\varrho(x)$ はスカラーである。流体とともに運動する( $v_a = 0$ )局所慣性系( $\sqrt{-g} = 1, d\tau_a = dx^0(a)/c$ )では、 $\dot{x}^\mu = (c, \mathbf{0})$ より

$$T^{(m)\mu\nu} = \begin{cases} \varrho c^2: & \mu = \nu = 0 \\ 0: & \text{その他の成分} \end{cases}, \quad \varrho(x) = \sum_a m_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \quad (122)$$

となる。したがって $\varrho(x)$ はスカラー量であって、 $x$ における局所慣性系のうち特に静止系を採用したとき、 $x$ における質量密度を与える<sup>\*47</sup>。粒子系が流体要素として振舞ういくつかの部分集団に分かれている場合には、その各集団ごとに上式(121)が成り立つことになる。4元速度 $\dot{x}^\mu$ は部分集団ごとに異なることを踏まえると、系全体のエネルギー・運動量密度を得るには、単に式(121)の $\dot{x}^\mu$ を空間の各位置で定義された速度場と読み替えれば良い。

## D.2 粒子と場の運動方程式

最小作用原理から導かれる運動方程式を列挙する[23, pp.115–116]。導出はD.4節を見よ。

<sup>\*46</sup> ここではD.1.3節と同様、空間座標をまとめて $\mathbf{r} \equiv (x^1, x^2, x^3)$ と表し、デルタ関数を $\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3) \equiv \delta(\mathbf{r})$ と書いている。

<sup>\*47</sup> この“質量密度” $\varrho(x)$ の定義はやや特殊である。空間の与えられた体積に含まれる質量は不変量であるけれど、座標で測った空間の体積は、したがって質量密度は本来、不変量ではない。

### D.2.1 粒子の運動方程式

実際の粒子の軌道が作用を極小にすることから、粒子の運動方程式

$$mc \frac{Du^\mu}{ds} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu \quad (123)$$

が導かれる (式 (90.7)). ここに  $Du^\mu$  は粒子が世界線に沿って  $ds$  変位したときの 4 元速度  $\vec{u}$  の変化  $d\vec{u}$  の、変位前の点での  $\mu$  番目の成分である. (重力がないとき, これは式 (23.4) に戻る.)

■重力場中の粒子の運動方程式 粒子の運動方程式 (123) は

$$Du^\mu = u^\mu{}_{;\nu} dx^\nu = (\partial_\nu u^\mu + u^\rho \Gamma^\mu{}_{\rho\nu}) dx^\nu, \quad u^\nu \partial_\nu u^\mu = \frac{du^\mu}{ds}$$

を用いて

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -m \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} + \frac{e}{c} F^{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{d\tau}$$

と書き換えられる. 簡単のために電磁場がない場合を考えると  $F^{\mu\nu} = 0$  なので,

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -m \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} \quad (124)$$

となる. 右辺を粒子に働く重力と見なせば, これは重力が粒子の 4 元速度  $\frac{1}{c} \frac{dx^\mu}{d\tau}$  を変化させることを表していると解釈できる. また両辺に質量  $m$  が共通だから, 重力場の中の粒子の運動は粒子の質量に依らないことが見て取れる. ここで Christoffel 記号は計量テンソルの導関数で決まるから (式 (86.2) 参照), Christoffel 記号が重力場の“強さ”に相当し, 計量テンソルは重力ポテンシャルと見なせる (pp.273–274) [2, p.122].

このことは重力場の弱い場合の非相対論的な運動方程式との対応を考えるとより明確になる. 重力場がないときには時空の各点で Christoffel 記号が消え, 計量テンソルが Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  となるような慣性系がとれる. よって重力場が弱いとき時空の各点で計量テンソルが  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, |h_{\mu\nu}| \ll 1$  を満たすような座標系をとれる [20, p.244]. この座標系  $(ct, \mathbf{r})$  で測った粒子の速度  $\dot{\mathbf{r}}$  を  $\mathbf{v}$  と書くと (ドットは  $t$  による微分), 重力場が弱いとき粒子は速度が小さい範囲  $v/c \ll 1$  に留まることが可能である. このような非相対論的極限では重力ポテンシャル  $\phi$  が定義されて, 粒子の運動方程式は

$$\dot{\mathbf{v}} = -\nabla\phi \quad (125)$$

と表される (p.252). 粒子の運動方程式 (124) を導く作用  $S = S_m = -\sum mc \int ds$  が非相対論的極限  $\phi/c^2 \ll 1, v/c \ll 1$  で, 運動方程式 (125) を導く作用の 1 つ

$$S = \sum \int dt \left( -mc^2 + \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - m\phi \right) \quad (126)$$

に移行することを要求すると\*48,

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} \quad (127)$$

が見いだされる (D.4.1 節参照, p.275). こうして計量テンソルが重力ポテンシャル  $\phi$  と具体的に関係づけられる.

\*48 作用 (126) は場  $\phi$  の項を度外視すれば, 自由粒子の作用  $S = -\sum mc^2 \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$  の非相対論的極限に一致する.



## D.2.2 電磁場の方程式すなわち Maxwell 方程式

実際の電磁ポテンシャル  $A^\mu$  の時間変化が作用を極小にすることから、重力場中の電磁場に対する Maxwell 方程式

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -\frac{4\pi}{c}j^\mu \quad (128)$$

が導かれる (式 (90.6)). (重力がないとき, これは通常の Maxwell 方程式 (30.2) に戻る.)

■電荷保存則 § 29 では特殊相対性理論の水準で, 荷電粒子系の電荷密度・電流密度が自動的に連続の式を満たすことを見た. 一方で電荷密度・電流密度の具体的な表式とは無関係に, Maxwell 方程式 (128) の中には連続の式

$$\partial_\mu(j^\mu\sqrt{-g}) = 0 \quad (129)$$

が含まれている (導出は D.4.2 節) [23, p.93]. これは平坦な時空では, 通常の連続の式

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

に帰着する.

## D.2.3 重力場の方程式すなわち Einstein 方程式 (§ 95)

実際の計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  の時間変化が作用を極小にすることから, 重力場に対する Einstein 方程式

$$(G_{\mu\nu} \equiv) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi k}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (130)$$

が導かれる (式 (95.5)). ただし右辺の  $T_{\mu\nu}$  は物質と電磁場のエネルギー・運動量テンソルである (D.1.5 節).

■物質粒子と電磁場の運動方程式との関係 Bianchi の恒等式 (92.10):  $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$  によれば, Einstein 方程式は物質と電磁場のエネルギー・運動量保存則

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

を含意することになる\*49. そしてエネルギー・運動量保存則には, 物質粒子の運動方程式と電磁場の方程式 (Maxwell 方程式) が含まれている (§ 33). したがって重力場の方程式 (Einstein 方程式) は, 物質粒子と電磁場の運動方程式をも含んでいることになる (p.309).

## D.3 古典的統一理論 (導出編)

### D.3.1 エネルギー・運動量テンソル (補足)

D.1.1 節における保存則 (109) を導く (§ 94).

まず無限小変換 (108):  $x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha$  に対する計量テンソルの変換則を調べる.  $\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta^\alpha_\mu + \partial_\mu \xi^\alpha$  に注意すると,  $\xi^\alpha$  の 1 次までの近似で

$$g'^{\alpha\beta} = (\delta^\alpha_\mu + \partial_\mu \xi^\alpha)(\delta^\beta_\nu + \partial_\nu \xi^\beta)g^{\mu\nu} \simeq g^{\alpha\beta} + \partial^\alpha \xi^\beta + \partial^\beta \xi^\alpha$$

\*49 この保存則は近似的である (D.1.1 節).

となる。ここで一般にテンソル場に対して変換則 (92) は、与えられた時空点における場の値の変化を規定していることを思い出そう。上式の右辺は座標  $x$  の関数であるのに対し、左辺は同一の点を表す新しい座標  $x'$  の関数  $g'^{\alpha\beta}(x')$  である。引数を  $x$  にそろえるために、左辺を

$$g'^{\alpha\beta}(x') = g'^{\alpha\beta}(x + \xi) \simeq g'^{\alpha\beta}(x) + \xi^\gamma \partial_\gamma g'^{\alpha\beta}(x) \simeq g'^{\alpha\beta}(x) + \xi^\gamma \partial_\gamma g^{\alpha\beta}(x)$$

と書き直す (最後の等号では第 2 項において、 $g'^{\alpha\beta}$  を  $g^{\alpha\beta}$  に置き換えたときの差が  $\xi^\alpha$  の 2 次の微小量であることを考慮した)。すると

$$g'^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - \xi^\gamma \partial_\gamma g^{\alpha\beta} + \partial^\alpha \xi^\beta + \partial^\beta \xi^\alpha$$

を得る (両辺の各項の引数はいずれも  $x$ )。右辺の後ろ 3 つの項は  $\xi^{\alpha;\beta} + \xi^{\beta;\alpha}$  とまとめられる。実際、

$$\begin{aligned} & \xi^{\alpha;\beta} + \xi^{\beta;\alpha} \\ &= g^{\beta\delta} \xi^\alpha_{;\delta} + g^{\alpha\delta} \xi^\beta_{;\delta} \quad (\because \text{反変導関数の定義 (§ 85)}) \\ &= g^{\beta\delta} (\partial_\delta \xi^\alpha + \Gamma^\alpha_{\gamma\delta} \xi^\gamma) + g^{\alpha\delta} (\partial_\delta \xi^\beta + \Gamma^\beta_{\gamma\delta} \xi^\gamma) \quad (\because \text{共変微分の公式 (§ 85)}) \\ &= \partial^\beta \xi^\alpha + \partial^\alpha \xi^\beta + (g^{\beta\delta} \Gamma^\alpha_{\gamma\delta} + g^{\alpha\delta} \Gamma^\beta_{\gamma\delta}) \xi^\gamma \\ &= \partial^\beta \xi^\alpha + \partial^\alpha \xi^\beta - (\partial_\gamma g^{\alpha\beta}) \xi^\gamma. \quad (\because \text{式 (86.8)}) \end{aligned}$$

以上より計量テンソルは

$$g'^{\alpha\beta}(x) = g^{\alpha\beta}(x) + \delta g^{\alpha\beta}(x), \quad \delta g^{\alpha\beta} = \xi^{\alpha;\beta} + \xi^{\beta;\alpha} \quad (131)$$

に従って変換する。これは共変成分の変換則

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}, \quad \delta g_{\alpha\beta} = -\xi_{\alpha;\beta} - \xi_{\beta;\alpha}$$

を含意する (このとき今考えている  $\xi^\alpha$  の 1 次までの近似で、 $g'^{\alpha\gamma} g'_{\gamma\beta} = \delta^\alpha_\beta$  が満たされる)。

さて、無限小の一般座標変換 (108) に対する作用  $S$  の不変性を要求しよう。座標変換に伴って、計量テンソル  $g^{\mu\nu}$  とそれ以外の力学変数  $q$  はともに変化する。これによる  $S$  の変分は微小変化の 1 次近似で、 $g^{\mu\nu}$  だけが変化したときの変分  $\delta_g S$  と  $q$  だけが変化したときの変分  $\delta_q S$  の和  $\delta S = \delta_g S + \delta_q S$  である。ところが変数  $q$  に関する運動方程式により  $\delta_q S$  はゼロになるから<sup>\*50</sup>、作用の不変性として  $\delta_g S = 0$  を要求すれば充分である。

$$\begin{aligned} 0 = \delta_g S &= \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \delta (\partial_\lambda g^{\mu\nu}) \right\} d^4 x = \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right\} (\delta g^{\mu\nu}) d^4 x \\ &= \frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4 x. \end{aligned}$$

既に D.1.1 節で述べたように、ここで  $g^{\mu\nu}, \partial_\lambda g^{\mu\nu}$  による微分は  $g^{\nu\mu}, \partial_\lambda g^{\nu\mu}$  を固定して行っていることになる。

<sup>\*50</sup> 作用  $S$  が力学変数  $g^{\mu\nu}(x)$  を記述する項 (重力場項) を含んでいるとすると、同じ理由で  $\delta_q S = 0$  となり、非自明な結果は得られない。

変分  $\delta g^{\mu\nu}$  として座標変換に伴う変化 (131) を考えているから、上式はさらに

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu}(\xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu})\sqrt{-g}d^4x \\
&= \frac{1}{c} \int T_{\nu\mu}\xi^{\mu;\nu}\sqrt{-g}d^4x \quad (T_{\mu\nu}の対称性) \\
&= \frac{1}{c} \int T^\nu{}_\mu\xi^\mu{}_{;\nu}\sqrt{-g}d^4x \\
&= \frac{1}{c} \int (T^\nu{}_\mu\xi^\mu)_{;\nu}\sqrt{-g}d^4x - \frac{1}{c} \int T^\nu{}_{\mu;\nu}\xi^\mu\sqrt{-g}d^4x \\
&= \frac{1}{c} \int \partial_\nu(\sqrt{-g}T^\nu{}_\mu\xi^\mu)d^4x - \frac{1}{c} \int T^\nu{}_{\mu;\nu}\xi^\mu\sqrt{-g}d^4x \quad (\because \text{公式 (86.9)}) \\
&= -\frac{1}{c} \int T^\nu{}_{\mu;\nu}\xi^\mu\sqrt{-g}d^4x
\end{aligned}$$

と書き換えられる。最右辺において  $\xi^\mu$  は任意なので、 $T^\nu{}_{\mu;\nu} = 0$  を得る。計量テンソルの共変微分はゼロになること (§ 85) に注意して添字を上げると、式 (109):

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

が導かれる。

### D.3.2 4元電流 (密度)(補足)

■4元電流密度 (113) が反変ベクトルであることの証明 [2, p.164]  $a$  番目の粒子の座標を  $x_a^\mu = (x_a^0, \mathbf{r}_a)$  (またはシンボリックに  $x_a$ )、固有時間を  $\tau_a$  と書くと、電流密度の4元ベクトル (113) は

$$\begin{aligned}
j^\mu(x) &= \sum_a \frac{e_a c}{\sqrt{-g(x)}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \frac{dx_a^\mu}{dx^0} \\
&= \sum_a \frac{e_a c}{\sqrt{-g(x)}} \int \delta(x - x_a) \frac{dx_a^\mu}{dx_a^0} dx_a^0 \\
&= \sum_a \frac{e_a c}{\sqrt{-g(x)}} \int \delta(x - x_a) \frac{dx_a^\mu}{d\tau_a} d\tau_a : (114)
\end{aligned}$$

と書き換えられる。最右辺において  $d\tau_a$  はスカラーであり、 $dx_a^\mu/d\tau_a$  は4元反変ベクトルである。また座標変換  $x \rightarrow x'$  に伴うデルタ関数の変換則を調べると、

$$1 = \int \delta^4(x') d^4x' = \int \delta^4(x) d^4x = \int \delta^4(x) \frac{\partial(x)}{\partial(x')} d^4x', \quad \therefore \delta^4(x') = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \delta^4(x)$$

となるので、デルタ関数はスカラー密度である。さらに因子  $\sqrt{-g(x)} = \partial(X)/\partial(x)$  (B.1.1 節参照) もまたスカラー密度の変換則

$$\sqrt{-g'} = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \sqrt{-g}$$

に従うから、分母の  $\sqrt{-g}$  はデルタ関数の変換性を打ち消す。以上より4元電流密度 (113) は全体として反変ベクトルになっていることが分かる。

§ 28 のノートには以上の議論の特殊相対論版を載せた。

### D.3.3 最小作用原理 (補足)

■場を基調とした電磁場と粒子の相互作用項 (116) の導出

$$\begin{aligned} S_{\text{mf}} &= - \sum_a \frac{e_a}{c} \int A_\mu(x_a^\mu) \frac{dx_a^\mu}{dx^0} dx^0 \\ &= - \frac{1}{c^2} \int \left( \sum_a \frac{e_a c}{\sqrt{-g(x)}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \frac{dx_a^\mu}{dx^0} \right) A_\mu(x) \sqrt{-g(x)} d^4x \\ &= - \frac{1}{c^2} \int j^\mu(x) A_\mu(x) \sqrt{-g(x)} d^4x. \end{aligned}$$

### D.3.4 電磁場を含めた物質の系のエネルギー・運動量テンソル (補足)

■電磁場を含めた物質の系の Lagrangian 密度 D.1.5 節における電磁場を含めた物質の系の Lagrangian 密度を与える式 (117) を確かめよう。

$a$  番目の粒子の世界線に沿う線要素の世界間隔は

$$ds_a = \sqrt{g_{\mu\nu}(x(a)) dx^\mu(a) dx^\nu(a)} = \sqrt{g_{\mu\nu}(x(a)) \dot{x}^\mu(a) \dot{x}^\nu(a)} d\tau_a$$

なので作用 (115) における粒子の項は

$$S_m \equiv - \sum_a m_a c \int ds_a = \frac{1}{c} \int \Lambda_m d^4x, \quad \Lambda_m \equiv - \sum_a m_a c^2 \int \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu(a) \dot{x}^\nu(a)} \delta^4(x - x(a)) d\tau_a$$

となる。

次に電磁ポテンシャルについて、共変ベクトル  $A_\mu$  を基本的な量と考える。このとき  $A_\mu dx^\mu$  を計量テンソルに依存する量  $g_{\mu\nu} A^\mu dx^\nu$  と見なす必要はなく、作用 (115) における粒子と電磁場の相互作用項は

$$S_{\text{mf}} \equiv - \sum_a \frac{e_a}{c} \int A_\mu(x(a)) dx^\mu(a) = \frac{1}{c} \int \Lambda_{\text{mf}} d^4x, \quad \Lambda_{\text{mf}} \equiv - \sum_a e_a \int A_\mu(x) \dot{x}^\mu(a) \delta^4(x - x(a)) d\tau_a$$

となる。

さらに共変ベクトル  $A_\mu$  を基本的な量と見なしたことを踏まえて  $F^{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} F_{\gamma\delta}$  と書くと、作用 (115) における電磁場の項は

$$S_f \equiv - \frac{1}{16\pi c} \int F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x = \frac{1}{c} \int \Lambda_f d^4x, \quad \Lambda_f \equiv - \frac{1}{16\pi} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \sqrt{-g}$$

となる。

以上の  $\Lambda_m, \Lambda_{\text{mf}}, \Lambda_f$  を用いて

$$S'_m \equiv S_m + S_{\text{mf}} + S_f = \frac{1}{c} \int \Lambda d^4x, \quad \Lambda \equiv \Lambda_m + \Lambda_{\text{mf}} + \Lambda_f : (117)$$

と書ける。

■計量テンソルの変分に対する公式

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda, \quad \therefore g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\lambda} = -g_{\nu\lambda} \delta g^{\mu\nu}$$

の両辺に  $g_{\mu\alpha}$  をかけて  $\mu$  で和をとると

$$\delta g_{\alpha\lambda} = -g_{\nu\lambda}g_{\mu\alpha}\delta g^{\mu\nu}, \quad \therefore \delta g_{\mu\nu} = -g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\delta g^{\alpha\beta}$$

を得る. ここで  $\alpha \rightarrow \mu, \lambda \rightarrow \nu$  とし, ダミ-添字を  $\mu \rightarrow \alpha, \nu \rightarrow \beta$  と改めた [2, p.146] [25, pp.42-43].

ここで計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  の任意の関数  $f(g_{\mu\nu})$  を考えると, これは上式より  $g_{\mu\nu}$  の変分  $\delta g_{\mu\nu}$  に伴い

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = \frac{\partial f}{\partial g_{\mu\nu}} (-g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}) \delta g^{\alpha\beta}$$

だけ変化する. 一方  $g_{\mu\nu}$  の変分  $\delta g_{\mu\nu}$  に伴い  $g^{\alpha\beta}$  が  $\delta g^{\alpha\beta}$  だけ変化したとすると, これは  $\delta f = \frac{\partial f}{\partial g^{\alpha\beta}} \delta g^{\alpha\beta}$  と書けるので, これらを等置して

$$\frac{\partial f}{\partial g^{\alpha\beta}} = -g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} \frac{\partial f}{\partial g_{\mu\nu}} \quad (132)$$

を得る.

■粒子と電磁場に対するエネルギー・運動量テンソル (110) の導出 以上を踏まえ, 式 (117) で与えられる  $\Lambda$  に対して粒子と電磁場のエネルギー・運動量テンソル (110) を計算しよう. まず

$$T_{(m)\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial \Lambda_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \Lambda_m}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right\} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \Lambda_m}{\partial g^{\mu\nu}}$$

を考える.  $g_{\alpha\beta}$  による微分が  $g_{\beta\alpha}$  を固定して行われることに注意すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda_m}{\partial g_{\alpha\beta}} &= - \sum_a m_a c^2 \int \frac{\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu \dot{x}^\mu(a) \dot{x}^\nu(a)}{2\sqrt{g_{\rho\sigma}(x) \dot{x}^\rho(a) \dot{x}^\sigma(a)}} \delta^4(x - x(a)) d\tau_a = -\frac{1}{2} \sum_a m_a c \int \dot{x}^\alpha(a) \dot{x}^\beta(a) \delta^4(x - x(a)) d\tau_a \\ &\quad (\delta^4(x - x(a)) \text{ があるので } \sqrt{g_{\rho\sigma}(x) \dot{x}^\rho(a) \dot{x}^\sigma(a)} \rightarrow \sqrt{g_{\rho\sigma}(x(a)) \dot{x}^\rho(a) \dot{x}^\sigma(a)} = c \text{ とできる}), \\ \therefore \frac{\partial \Lambda_m}{\partial g^{\mu\nu}} &= -g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} \frac{\partial \Lambda_m}{\partial g_{\alpha\beta}} \quad (\because \text{式 (132)}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_a m_a c \int \dot{x}_\mu(a) \dot{x}_\nu(a) \delta^4(x - x(a)) d\tau_a \end{aligned}$$

なので

$$T_{(m)\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \Lambda_m}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_a m_a c \int \dot{x}_\mu(a) \dot{x}_\nu(a) \delta^4(x - x(a)) d\tau_a$$

となる.

次に  $\Lambda_{mf}$  は計量テンソルとその微分に依らないので

$$T_{(mf)\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial \Lambda_{mf}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \Lambda_{mf}}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right\} = 0$$

となる.

さらに

$$T_{(f)\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial \Lambda_f}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \Lambda_f}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right\} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \Lambda_f}{\partial g^{\mu\nu}}$$

を考える．再び  $g^{\mu\nu}$  による微分が  $g^{\nu\mu}$  を固定して行われることに注意すると

$$\begin{aligned}
F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}\sqrt{-g}\frac{\partial g^{\alpha\gamma}}{\partial g^{\mu\nu}}g^{\beta\delta} &= F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}\sqrt{-g}\delta^\alpha_\mu\delta^\gamma_\nu g^{\beta\delta} = F_{\mu\beta}F_\nu{}^\beta\sqrt{-g}, \\
F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}\sqrt{-g}g^{\alpha\gamma}\frac{\partial g^{\beta\delta}}{\partial g^{\mu\nu}} &= F_{\alpha\mu}F_\nu{}^\alpha\sqrt{-g} = F_{\mu\alpha}F_\nu{}^\alpha\sqrt{-g} \\
&\quad (\because F_{\alpha\mu} = -F_{\mu\alpha}, F_\nu{}^\alpha = g^{\alpha\beta}F_{\beta\nu} = -g^{\alpha\beta}F_{\nu\beta} = -F_\nu{}^\alpha), \\
F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} &= F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\left(-\frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}}\right) \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{-g}}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}(-gg_{\lambda\rho}\delta^\lambda_\mu\delta^\rho_\nu) \quad (\because \text{式 (86.4)} : dg = -gg_{\lambda\rho}dg^{\lambda\rho}) \\
&= -\frac{\sqrt{-g}}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

なので

$$T_{(\text{f})\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(-F_{\mu\alpha}F_\nu{}^\alpha + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}\right)$$

となる．

以上の  $T_{(\text{m})\mu\nu}, T_{(\text{f})\mu\nu}$  を用いて

$$T_{\mu\nu} = T_{(\text{m})\mu\nu} + T_{(\text{f})\mu\nu} : (118)$$

と書ける ( $T_{\mu\nu(\text{mf})} = 0$ )．

■物質のエネルギー・運動量テンソル (120) の導出 物質のエネルギー・運動量テンソル (119) は

$$\begin{aligned}
T^{(\text{m})\mu\nu}(x) &= \frac{1}{\sqrt{-g(x)}}\sum_a m_a c \int \dot{x}^\mu(a)\dot{x}^\nu(a)\delta^4(x-x(a))d\tau_a \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g(x)}}\sum_a m_a c \int \dot{x}^\mu(a)\frac{dx^\nu(a)}{dx^0(a)}\delta^4(x-x(a))dx^0(a) \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g(x)}}\sum_a m_a \dot{x}^\mu(a)\frac{dx^\nu(a)}{dt}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a) \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g(x)}}\sum_a m_a \dot{x}^\mu(a)\dot{x}^\nu(a)\sqrt{1-\left(\frac{v_a}{c}\right)^2}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a) : (120)
\end{aligned}$$

と書き換えられる．

#### D.4 粒子と場の運動方程式 (導出編)

D.2 節に挙げた運動方程式を最小作用原理から導く．ここではその際，Euler-Lagrange 方程式を用いるのではなく，作用 (115) の変分を直接計算する方法をとることにする．

$$\begin{aligned}
S_m &\equiv - \sum mc \int ds, \\
S_{mf} &\equiv - \sum \frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu, \\
S_f &\equiv - \frac{1}{16\pi c} \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \\
S_g &\equiv - \frac{c^3}{16\pi k} \int G \sqrt{-g} d^4x
\end{aligned}$$

とおき、作用 (115) を  $S = S_m + S_{mf} + S_f + S_g$  と書く。  $S'_m \equiv S_m + S_{mf} + S_f$  とおく。

#### D.4.1 粒子の運動方程式 (補足)

時空における粒子の実際の軌道は作用の停留値 (極値) を与えることから、粒子の軌道の変分に伴い

$$0 = \delta S = \delta S_m + \delta S_{mf}.$$

ここで変分  $\delta S_m$  は次のように書き表せる (p.276).

$$\begin{aligned}
2ds\delta(ds) &= \delta(ds^2) = \delta(g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu) = dx^\mu dx^\nu (\partial_\lambda g_{\mu\nu}) \delta x^\lambda + 2g_{\mu\nu} dx^\mu \delta(dx^\nu) \\
& \quad (\because g_{\mu\nu} \text{ は時空における粒子の位置で評価している。 } g_{\mu\nu} dx^\nu \delta(dx^\mu) = g_{\nu\mu} dx^\mu \delta(dx^\nu) = g_{\mu\nu} dx^\mu \delta(dx^\nu)), \\
\therefore \delta S_m &= - \sum mc \int \delta(ds) \\
&= - \sum mc \int \left\{ \frac{1}{2} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} (\partial_\lambda g_{\mu\nu}) \delta x^\lambda + g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \delta \left( \frac{dx^\nu}{ds} \right) \right\} ds \\
&= - \sum mc \int \left\{ \frac{1}{2} u^\mu u^\nu (\partial_\lambda g_{\mu\nu}) - \frac{d}{ds} (g_{\mu\lambda} u^\mu) \right\} \delta x^\lambda ds \\
& \quad \left( \frac{dx^\mu}{ds} \equiv u^\mu \text{ と改め、境界で } \delta x^\nu = 0 \text{ に注意して部分積分し、第 2 項のダミー添字を } \nu \rightarrow \lambda \text{ と改めた} \right) \\
&= \sum mc \int \left\{ g_{\mu\lambda} \frac{du^\mu}{ds} + \frac{1}{2} u^\mu u^\nu (\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \right\} \delta x^\lambda ds \\
& \quad \left( \because u^\mu \frac{d}{ds} g_{\mu\lambda} = u^\mu u^\nu \partial_\nu g_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} u^\mu u^\nu (\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\nu\lambda}) \right) \\
&= \sum mc \int \left( g_{\mu\lambda} \frac{du^\mu}{ds} + u^\mu u^\nu \Gamma_{\lambda,\mu\nu} \right) \delta x^\lambda ds \equiv \sum mc \int \frac{Du_\lambda}{ds} \delta x^\lambda ds. \quad (\because \text{式 (86.2)})
\end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}
Du_\lambda &\equiv \left( g_{\mu\lambda} \frac{du^\mu}{ds} + u^\alpha u^\beta \Gamma_{\lambda,\alpha\beta} \right) ds \\
&= g_{\mu\lambda} (\partial_\beta u^\mu + u^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\mu) u^\beta ds \quad \left( \because \Gamma_{\lambda,\alpha\beta} = g_{\mu\lambda} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu, \quad \frac{du^\mu}{ds} = u^\beta \partial_\beta u^\mu \right) \\
&= g_{\mu\lambda} u^\mu{}_{;\beta} dx^\beta = g_{\mu\lambda} Du^\mu
\end{aligned}$$

は  $Du^\mu$  を共変ベクトルにしたものである。  $Du^\mu$  は粒子が世界線に沿って  $ds$  変位したときの 4 元速度  $\vec{u}$  の変化  $d\vec{u}$  の、変位前の点での  $\mu$  番目の成分である。

また特殊相対性理論における計算 (pp.67-68) を一般化して, 変分  $\delta S_{\text{mf}}$  を次のように書き表せる.

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{mf}} &= - \sum \frac{e}{c} \int \{A_\mu \delta(dx^\mu) + (\delta A_\mu) dx^\mu\} \\ &= - \sum \frac{e}{c} \int \{(-dA_\mu) \delta x^\mu + (\delta A_\nu) dx^\nu\} \\ &\quad (\text{境界で } \delta x^\mu = 0 \text{ に注意して部分積分した}) \\ &= - \sum \frac{e}{c} \int \{(-\partial_\nu A_\mu) dx^\nu \delta x^\mu + (\partial_\mu A_\nu) \delta x^\mu dx^\nu\} \\ &\quad (\text{場 } A_\mu \text{ は時空における粒子の位置で評価している}) \\ &= - \sum \frac{e}{c} \int F_{\mu\nu} u^\nu \delta x^\mu ds. \end{aligned}$$

以上より

$$\sum \int \left( mc \frac{Du_\mu}{ds} - \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu \right) \delta x^\mu ds = 0$$

となり, これが任意の変分  $\delta x^\mu$  に対して成り立つことから粒子の運動方程式 (123):

$$mc \frac{Du^\mu}{ds} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu$$

を得る.

■重力場の中の粒子 (補足) 作用 (126):

$$S = \int L dt, \quad L \equiv \sum \left( -mc^2 + \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - m\phi \right)$$

は非相対論的な粒子の運動方程式 (125):  $\dot{\mathbf{v}} = -\nabla\phi$  を再現する. 実際  $L = \sum (-mc^2 + \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - m\phi)$  に対して Lagrange 方程式を書き下すと

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = m\dot{\mathbf{v}} + m\nabla\phi, \quad \therefore (125): \dot{\mathbf{v}} = -\nabla\phi$$

となる.

非相対論的極限  $\phi/c^2 \ll 1, v/c \ll 1$  で作用  $S = S_{\text{m}} = -\sum mc \int ds$  が作用 (126) に移行するためには

$$\begin{aligned} ds &= c dt \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \right)^2 + \frac{\phi}{c^2} \right\}, \\ \therefore ds^2 &= (c dt)^2 \left\{ 1 - \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \right)^2 + \frac{2\phi}{c^2} + O \left( \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \right)^4, \left( \frac{\phi}{c^2} \right)^2, \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \right)^2 \frac{\phi}{c^2} \right) \right\} \\ &\simeq \left( 1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) (c dt)^2 - d\mathbf{r}^2 \end{aligned}$$

であれば良いから式 (127):  $g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$  を得る (p.275).

#### D.4.2 電磁場の方程式すなわち Maxwell 方程式 (補足)

場  $j^\mu(x)$  を用いると,

$$S_{\text{mf}} = -\frac{1}{c^2} \int j^\mu(x) A_\mu(x) \sqrt{-g(x)} d^4x : (116)$$



と表されることを思い出そう。また場  $A_\mu$  の変分に伴う  $g_{\mu\nu}$  の変分は  $\delta g_{\mu\nu} = 0$  なので

$$F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} = F^{\mu\nu}\delta(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}F^{\rho\sigma}) = (F^{\mu\nu}g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma})\delta F^{\rho\sigma} = F_{\rho\sigma}\delta F^{\rho\sigma} = F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu}$$

となる。

以上のことに注意すると、実際の場合  $A_\mu$  の時間変化は作用の停留値 (極値) を与えることから、場  $A_\mu$  の変分に伴う作用の変分は次式で表される。

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \delta(S_{\text{mf}} + S_{\text{f}}) = -\frac{1}{c} \int \left( \frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} d^4x \\ &= -\frac{1}{c} \int \left\{ \frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) \right\} \sqrt{-g} d^4x \\ &= -\frac{1}{c} \int \left\{ \left( \frac{1}{c} j^\mu - \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \partial_\nu \right) \delta A_\mu \right\} \sqrt{-g} d^4x \\ &\quad (\because F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu = F^{\nu\mu} \partial_\nu \delta A_\mu = -F^{\mu\nu} \partial_\nu \delta A_\mu) \\ &= -\frac{1}{c} \int \left\{ \frac{1}{c} j^\mu \sqrt{-g} + \frac{1}{4\pi} \partial_\nu (F^{\mu\nu} \sqrt{-g}) \right\} \delta A_\mu d^4x \\ &\quad (\text{境界で } \delta A_\mu = 0 \text{ に注意して部分積分した}) \\ &= -\frac{1}{c} \int \left( \frac{1}{c} j^\mu + \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu}{}_{;\nu} \right) \delta A_\mu \sqrt{-g} d^4x \\ &\quad (\because \text{式 (86.10)} : \partial_\nu (F^{\mu\nu} \sqrt{-g}) = \sqrt{-g} F^{\mu\nu}{}_{;\nu}). \end{aligned}$$

ここでの計算は特殊相対性理論における計算 (p.83) を参考にした。これが任意の変分  $\delta A_\mu$  に対して成り立つことから、重力場中の Maxwell 方程式 (128):

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$$

を得る。

■ Maxwell 方程式から連続の式 (129) の導出 Maxwell 方程式 (128):  $F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$ , および反対称テンソル  $A_{\mu\nu}$  の 4 元発散に対する一般公式 (86.10):

$$A^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (A^{\mu\nu} \sqrt{-g})$$

を用いると,

$$\partial_\mu (j^\mu \sqrt{-g}) = -\frac{c}{4\pi} \partial_\mu (F^{\mu\nu}{}_{;\nu} \sqrt{-g}) = -\frac{c}{4\pi} \partial_\mu \partial_\nu (F^{\mu\nu} \sqrt{-g}) = 0 : (129)$$

となる。最後の等号では添字  $\mu, \nu$  について  $\partial_\mu \partial_\nu$  は対称,  $F^{\mu\nu} \sqrt{-g}$  は反対称なので  $\partial_\mu \partial_\nu (F^{\mu\nu} \sqrt{-g}) = 0$  となることを用いた。

#### D.4.3 重力場の方程式すなわち Einstein 方程式 (補足)

実際の場合  $g_{\mu\nu}$  の時間変化は作用の停留値 (極値) を与えることから、場  $g_{\mu\nu}$  の変分に伴い

$$0 = \delta S = \delta(S'_m + S_g), \quad S'_m \equiv S_m + S_{\text{mf}} + S_{\text{f}}.$$

ここで D.1.4 節で述べたように,  $S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \int G\sqrt{-g}d^4x$  の変分を  $\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \delta \int R\sqrt{-g}d^4x$  と計算できることを示す.

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}R &= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\partial_\rho\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\rho} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\sigma}) \quad (\because \text{定義式 (92.6, 7), (92.9)}) \\ &= \partial_\rho(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\nu}) - \partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\rho}) - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\partial_\rho(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) + \Gamma^\rho_{\mu\rho}\partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) \\ &\quad + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\sigma})\end{aligned}$$

において

$$\begin{aligned}\Gamma^\rho_{\mu\nu}\partial_\rho(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) &= \Gamma^\rho_{\mu\nu} \left( \frac{-\partial_\rho g}{2\sqrt{-g}}g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\partial_\rho g^{\mu\nu} \right) \\ &= \Gamma^\rho_{\mu\nu}\sqrt{-g}(\Gamma^\sigma_{\rho\sigma}g^{\mu\nu} - \Gamma^\mu_{\sigma\rho}g^{\sigma\nu} - \Gamma^\nu_{\sigma\rho}g^{\mu\sigma}) \\ &\quad (\text{第 1 項に対して式 (86.5) を, 第 2 項に対して式 (86.8) を用いた}) \\ &= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} - 2\Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\sigma\nu}) \\ &\quad (\text{第 2 項でダミ一添字を } \mu \leftrightarrow \sigma \text{ と入れ換え,} \\ &\quad \text{第 3 項でダミ一添字を } \rho \rightarrow \sigma, \sigma \rightarrow \nu, \nu \rightarrow \rho \text{ と巡回置換した}), \\ \Gamma^\rho_{\mu\rho}\partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) &= -\sqrt{-g}g^{\nu\sigma}\Gamma^\mu_{\nu\sigma}\Gamma^\rho_{\mu\rho} \quad (\because \text{式 (86.6)}) \\ &= -\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} \\ &\quad (\text{ダミ一添字を } \mu \rightarrow \rho, \rho \rightarrow \sigma, \sigma \rightarrow \nu, \nu \rightarrow \mu \text{ と巡回置換した})\end{aligned}$$

なので,

$$\sqrt{-g}R = \partial_\mu(\sqrt{-g}W^\mu) + \sqrt{-g}G, \quad \begin{cases} W^\mu \equiv g^{\nu\rho}\Gamma^\mu_{\nu\rho} - g^{\rho\mu}\Gamma^\nu_{\rho\nu} \\ G \equiv g^{\mu\nu}(\Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma}) \end{cases}$$

を得る.

4 元発散  $\partial_\mu(\sqrt{-g}W^\mu)$  の積分は境界上の積分に置き換わる. 最小作用原理において境界での場の値は与えられているため, これは変分をとると落ちる. 以上より

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \delta \int G\sqrt{-g}d^4x = -\frac{c^3}{16\pi k} \delta \int R\sqrt{-g}d^4x$$

が示された.

そこで  $\delta S_g$  を次のように計算する.

$$\begin{aligned}&\delta \int R\sqrt{-g}d^4x \\ &= \int (R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} + R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\delta\sqrt{-g} + g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu})d^4x \\ &\quad (\because R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) \\ &= \int \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) \delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x + \int g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\nu})\sqrt{-g}d^4x \\ &\quad \left( \because \text{式 (86.4) : } dg = -gg_{\mu\nu}dg^{\mu\nu} \text{ より } \delta\sqrt{-g} = -\frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \right).\end{aligned}$$

最右辺第 2 項を考える．局所慣性系では  $\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = 0, \partial_\lambda g^{\mu\nu} = 0$  だから (§ 86),

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} (\partial_\lambda \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda}) \\ &= \partial_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma^\nu_{\mu\nu}) \\ &\quad (\text{第 2 項でダミー添字を } \nu \leftrightarrow \lambda \text{ と入れ換えた}) \\ &\equiv \partial_\lambda w^\lambda. \end{aligned}$$

ここで  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$  はテンソルではないけれども，変分  $\delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$  は (1,2) テンソルであることに注意すると [25, p.69],  $w^\lambda$  は反変ベクトルとなることが分かる (B.1 節参照)．局所慣性系で  $\partial_\lambda w^\lambda = w^\lambda_{;\lambda}$  なので  $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = w^\lambda_{;\lambda}$  となる．これは両辺がどちらもスカラーだから他の任意の座標系でも成り立つ関係式である (B.1 節参照)．式 (86.9):  $w^\mu_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} w^\mu)$  より

$$\int g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4x = \int \partial_\mu (\sqrt{-g} w^\mu) d^4x$$

となり，これは境界上の積分に置き換わる．ここで  $w^\mu$  は場の変分を含んでおり，場の変分は境界上でゼロだから，この境界上の積分は消える．

一方  $S'_m = \frac{1}{c} \int \Lambda d^4x$  と書くと，変分  $g^{\mu\nu}$  に伴う  $S'_m$  の変化は

$$\begin{aligned} \delta S'_m &= \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \delta (\partial_\lambda g^{\mu\nu}) \right\} d^4x \\ &= \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right\} \delta g^{\mu\nu} d^4x \\ &\quad (\text{境界で } \delta g^{\mu\nu} = 0 \text{ に注意して部分積分した}) \\ &\equiv \frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (\because \text{式 (110)}) \end{aligned}$$

以上より

$$0 = \delta S_g + \delta S'_m = -\frac{c^3}{16\pi k} \int \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \frac{8\pi k}{c^4} T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x$$

となり，これが任意の変分  $\delta g^{\mu\nu}$  に対して成り立つことから Einstein 方程式 (130):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi k}{c^4} T_{\mu\nu}$$

を得る．

## 付録 E 場の理論における対称性と保存則

主に § 32 の補足として、場の Lorentz 変換に関する対称性から導かれる保存則についてまとめる。ただし以下では教科書と異なり、時空の 4 成分 0, 1, 2, 3 をとり得る添字をギリシア文字で、空間成分 1, 2, 3 のみをとり得る添字をラテン文字で表す。

### E.1 対称性と保存則 (要約)

場の Lorentz 変換の形を具体的に指定して、系の Lorentz 対称性に付随する保存量を調べよう [5, pp.39–43]. 原点の時空内並進も含めた無限小の Lorentz 変換は

$$x_\alpha \rightarrow x'_\alpha = x_\alpha + \delta x_\alpha = x_\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta} x^\beta + \delta_\alpha \quad (133)$$

と書ける ( $\varepsilon_{\alpha\beta}$  は反対称, § 14 を参照). これに伴う場の変換が, 次のように表されるものと仮定する (文献 [26, pp.4–5] 参照).

$$\phi_r(x) \rightarrow \phi'_r(x') = \phi_r(x) + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} S_{rs}^{\alpha\beta} \phi_s(x).$$

これは同一の時空点における場の値の変化が

$$\delta_T \phi_r(x) \equiv \phi'_r(x') - \phi_r(x) = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} S_{rs}^{\alpha\beta} \phi_s(x) \quad (134)$$

で与えられることを意味しており, 引数における場を評価する時空点の座標も変換により  $x \rightarrow x'$  と変化している.  $S_{rs}^{\alpha\beta}$  の添字  $\alpha\beta$  に関する反対称性を仮定しても一般性を失わない ( $S_{rs}^{\alpha\beta}$  の対称部分は  $\varepsilon_{\alpha\beta} S_{rs}^{\alpha\beta}$  に寄与を持たないから). 理論の不変性として, Lagrangian 密度の不変性

$$\mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\alpha \phi_r(x)) = \mathcal{L}(\phi'_r(x'), \partial'_\alpha \phi'_r(x'))$$

(ただし  $\partial'_\alpha \equiv \partial/\partial x'^\alpha$ ) を要求すると (十分条件), 連続の式

$$\partial_\alpha f^\alpha = 0, \quad f^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)} \delta_T \phi_r - \mathcal{T}^{\alpha\beta} \delta x_\beta \quad (135)$$

が導かれる (導出は E.2 節). ただしここではエネルギー・運動量テンソルを, 式 (32.5) の  $T^{\alpha\beta}$  と比べて

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)} \partial_\beta \phi_r - \mathcal{L} \eta^{\alpha\beta} \quad (136)$$

と再定義している ( $\eta^{\alpha\beta}$  は Minkowski 計量).

まず並進操作 ( $\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$ ) を考えると, 上式 (133), (134) において  $\delta x_\beta = \delta_\beta$ ,  $\delta_T \phi_r = 0$  となるので, カレントの式 (135) は  $f^\alpha = -\mathcal{T}^{\alpha\beta} \delta_\beta$  と簡略化される. 変位  $\delta_\beta$  の 4 成分は独立にとれるので, 連続の式はエネルギー・運動量保存則 (32.4–5):

$$\partial_\alpha \mathcal{T}^{\alpha\beta} = 0$$

を再現する.

次に時空内の回転操作 ( $\delta_\alpha = 0$ ) を考えると, カレントの式 (135) は

$$f^\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon_{\beta\gamma} \mathcal{M}^{\alpha\beta\gamma}, \quad \mathcal{M}^{\alpha\beta\gamma} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)} S_{rs}^{\beta\gamma} \phi_s + (x^\beta \mathcal{T}^{\alpha\gamma} - x^\gamma \mathcal{T}^{\alpha\beta}) (= -\mathcal{M}^{\alpha\gamma\beta}) \quad (137)$$

を与える (導出は E.2 節). 回転操作  $\varepsilon_{\beta\gamma}$  は (反対称性を有する点を除けば) 互いに独立なので, 連続の式  $\partial_\alpha f^\alpha = 0$  は  $\partial_\alpha M^{\alpha\beta\gamma} = 0$  に帰着する. ここから保存するチャージ

$$\begin{aligned} cM^{\alpha\beta} &= \int d^3x \mathcal{M}^{0\alpha\beta} \\ &= \int d^3x \{ (x^\alpha \mathcal{T}^{0\beta} - x^\beta \mathcal{T}^{0\alpha}) + c\pi_r S_{rs}^{\alpha\beta} \phi_s \} (= -cM^{\beta\alpha}) \end{aligned} \quad (138)$$

が得られる. これは回転対称性に付随する保存量なので, 角運動量と見なされる.  $T^{i0}/c = \mathcal{T}^{0i}/c$  は運動量密度であり,  $dP^i \equiv \frac{T^{0i}}{c} dV$  は 3 次元空間の体積  $dV$  が持つ運動量なので,  $M^{ik}$  の第 1 項

$$\int (x^i dP^k - x^k dP^i)$$

は場全体の持つ軌道角運動量となっていることが見て取れる.  $S_{rs}^{\alpha\beta}$  の項は固有スピン角運動量を表すものと解釈できる. ここでスピン角運動量とは量子力学において想定される粒子 (場) の内部自由度である.

なお § 18, § 29 ではゲージ対称性と電荷保存則の関係を, 電磁気学に関して古典論の水準で見た.

#### ■対称性と保存則, まとめ 無限小の Lorentz 変換

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^{\mu\nu} x_\nu + \delta^\mu$$

に関する対称性と保存則の関係は, 粒子系と場の系を併せて以下のようにまとめられる.

- 時空内の推進 (並進) 操作 ( $\delta^\mu$ ) に関する対称性
  - 空間並進  $\rightarrow$  運動量の保存
  - 時間並進  $\rightarrow$  エネルギーの保存
- 回転操作 ( $\varepsilon^{\mu\nu}$ ) に関する対称性
  - 空間内の回転  $\rightarrow$  角運動量の保存
  - 時空内の回転, すなわち等速推進 (Lorentz ブースト)
    - $\rightarrow$  (粒子系の) 重心 (エネルギー中心) の等速度運動 (エネルギー・運動量保存則の下で)
- (ある種の) ゲージ対称性  $\rightarrow$  電荷保存則

## E.2 対称性と保存則 (式の導出)

■場の理論の Lorentz 不変性から導かれる保存則 (135) の式 場の変分 (134) は微小量の 1 次までの近似で

$$\begin{aligned} \delta_T \phi_r(x) &\equiv \phi'_r(x') - \phi_r(x) \\ &= [\phi'_r(x') - \phi_r(x')] + [\phi_r(x') - \phi_r(x)] \\ &= \delta\phi_r(x') + \frac{\partial\phi_r}{\partial x_\beta} (\delta x_\beta = x'_\beta - x_\beta) \\ &= \delta\phi_r(x) + \frac{\partial\phi_r}{\partial x_\beta} \end{aligned}$$

と書き直される. 同様に Lagrangian 密度の不変性は

$$0 = \mathcal{L}(\phi'_r(x'), \partial'_\alpha \phi'_r(x')) - \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\alpha \phi_r(x)) = \delta\mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\alpha} \delta x^\alpha$$

と表される。最右辺第 1 項  $\delta\mathcal{L}$  は場の変更  $\phi_r(x) \rightarrow \phi_r(x) + \delta\phi_r(x)$  に伴う Lagrangian 密度の変分であり、Euler-Lagrange 方程式を用いると

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} \delta\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)} \delta(\partial_\alpha\phi_r) \\ &= \left( \partial_\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)} \right) \delta\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)} \partial_\alpha \delta\phi_r \\ &= \partial_\alpha \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)} \delta\phi_r \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)} \left( \delta_T\phi_r(x) - \frac{\partial\phi_r}{\partial x^\beta} \right) \right\}\end{aligned}$$

と計算される。これを上式に代入すると、連続の式 (135):

$$\partial_\alpha f^\alpha = 0, \quad f^\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)} \delta_T\phi_r - \mathcal{T}^{\alpha\beta} \delta x_\beta$$

が得られる。

■時空内の回転対称性に付随するカレント (137) の導出 回転操作  $\delta x_\beta = \varepsilon_{\beta\gamma} \delta x^\gamma$  を考え、カレント  $f^\alpha$  の式 (135):

$$f^\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)} \delta_T\phi_r - \mathcal{T}^{\alpha\beta} \delta x_\beta$$

に  $\delta_T\phi_r(x) = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} S_{rs}^{\alpha\beta} \phi_s(x)$  および

$$-\mathcal{T}^{\alpha\beta} \delta x_\beta = -\mathcal{T}^{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta\gamma} \delta x^\gamma = -\frac{1}{2} (\mathcal{T}^{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta\gamma} \delta x^\gamma + \mathcal{T}^{\alpha\gamma} \varepsilon_{\gamma\beta} \delta x^\beta) = \frac{1}{2} \varepsilon_{\beta\gamma} (x^\beta \mathcal{T}^{\alpha\beta} - x^\gamma \mathcal{T}^{\alpha\beta})$$

を代入すると、式 (137):

$$f^\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon_{\beta\gamma} \mathcal{M}^{\alpha\beta\gamma}, \quad \mathcal{M}^{\alpha\beta\gamma} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)} S_{rs}^{\beta\gamma} \phi_s + (x^\beta \mathcal{T}^{\alpha\gamma} - x^\gamma \mathcal{T}^{\alpha\beta}) (= -\mathcal{M}^{\alpha\gamma\beta})$$

が得られる。

## 付録 F Poisson 方程式

§ 36 と § 43 の補足として, Poisson 方程式の解を調べる.

■文献 [7, pp.57–60] における説明 位置  $\mathbf{x}$  を中心とする半径  $\varepsilon$  の球状の無限小領域を  $V_\varepsilon$ ,  $V_\varepsilon$  の表面を  $S$ ,  $V_\varepsilon$  の外部領域を  $V - V_\varepsilon$  と書くと, スカラーポテンシャル (36.8):  $\phi(\mathbf{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$  に対し

$$\Delta\phi(\mathbf{x}) = \left( \int_{V - V_\varepsilon} + \int_{V_\varepsilon} \right) \rho(\mathbf{x}') \Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'.$$

ここで領域  $V - V_\varepsilon$  では  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \neq 0$  であり, 距離  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  の ( $\mathbf{x}$  による) 微分は  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$  方向の単位ベクトルになること

$$\partial_i |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \partial_i \sqrt{(x^1 - x'^1)^2 + \dots} = \frac{x^i - x'^i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad \therefore \partial_i \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -\frac{x^i - x'^i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (139)$$

に注意すると

$$\begin{aligned} \Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \partial_i \left( -\frac{x^i - x'^i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right) = -\frac{\partial_i (x^i - x'^i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} - (x^i - x'^i) \left( -\frac{3|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^6} \right) \partial_i |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \\ &= -\frac{3}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} + \frac{3}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = 0 \end{aligned}$$

となる. よって

$$\begin{aligned} \Delta\phi(\mathbf{x}) &= \int_{V_\varepsilon} \rho(\mathbf{x}') \Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \simeq \rho(\mathbf{x}) \int_{V_\varepsilon} \Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \\ &= \rho(\mathbf{x}) \int_{V_\varepsilon} \nabla' \cdot \left( \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3x' \quad (\nabla' \text{ は } \mathbf{x}' \text{ による微分}) \\ &= \rho(\mathbf{x}) \int_S \left( \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \cdot \mathbf{n} dS \\ &\quad (\mathbf{n}, dS \text{ はそれぞれ表面 } S \text{ 上の外向き単位法線ベクトルと面積要素}) \\ &= \rho(\mathbf{x}) \left( -\frac{\mathbf{n}}{\varepsilon^2} \right) \cdot \mathbf{n} \times 4\pi\varepsilon^2 \quad (\because \text{式 (139)}) \\ &= -4\pi\rho(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

となり, スカラーポテンシャル (36.8):

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}') d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

は Poisson 方程式  $\Delta\phi = -4\pi\rho$  を満たす.

以上の証明では  $\phi, \rho$  の物理的な意味を用いなかったから, 置き換え  $\phi \rightarrow \mathbf{A}, \rho \rightarrow \mathbf{j}/c$  によりベクトルポテンシャル (43.5):

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

が Poisson 方程式  $\Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$  を満たすことが分かる.

■Green 関数法 Poisson 方程式  $\Delta\psi(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})$  の解は  $\Delta G(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$  を満たす Green 関数  $G(\mathbf{x})$  を用いて  $\psi(\mathbf{x}) = \int d^3x' \sigma(\mathbf{x}') G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  と書ける. 実際, このとき

$$\Delta\psi(\mathbf{x}) = \int d^3x' \sigma(\mathbf{x}') \Delta G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int d^3x' \sigma(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \sigma(\mathbf{x})$$

となる. そこで  $G(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}$  であることを示せば良い.

$$G(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} G(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

と Fourier 展開すると

$$\Delta G(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) \Rightarrow -k^2 G(\mathbf{k}) = 1 \Rightarrow G(\mathbf{k}) = -\frac{1}{k^2}$$

なので

$$G(\mathbf{x}) = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{k^2}$$

となる. ここで  $\mathbf{x}$  を極軸とする  $\mathbf{k}$  の極座標  $(k, \theta, \phi)$  を積分変数に選ぶと  $\mathbf{k}$  空間の体積要素は  $k^2 \sin\theta dk d\theta d\phi$  であり, この積分を実行する上で被積分関数が  $k \rightarrow 0$  のとき発散することは次のように問題にならない:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 d(\cos\theta) k^2 \frac{e^{ikx \cos\theta}}{k^2} \quad (x \equiv |\mathbf{x}|) \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{ikx} \\ &= -\frac{2}{(2\pi)^2 x} \int_0^\infty d\xi \frac{\sin\xi}{\xi}. \quad (\xi \equiv kx) \end{aligned}$$

最右辺の積分を評価しよう. 図 90 に示した複素  $z$  平面上の半径  $r$  の半円  $C_1$ , 半径  $R$  の半円  $C_2$ , 閉曲線  $C$  に対して

$$0 = \oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{i\xi}}{\xi} d\xi + \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{i\xi}}{\xi} d\xi + \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

であり, この式の最右辺において

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{-r} \frac{e^{i\xi}}{\xi} d\xi &= -\int_r^R \frac{e^{-i\xi'}}{\xi'} d\xi', \quad (\xi' \equiv -\xi) \\ \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz &= i \int_\pi^0 \exp(re^{i\theta}) d\theta \quad (z \equiv re^{i\theta}) \\ &\rightarrow -i\pi, \quad (r \rightarrow 0) \\ \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz &\rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty, \text{Jordan の補助定理}) \end{aligned}$$

なので

$$0 = 2i \int_0^\infty \frac{\sin\xi}{\xi} d\xi - i\pi, \quad \therefore \int_0^\infty \frac{\sin\xi}{\xi} d\xi = \frac{\pi}{2}$$

を得る. よって Green 関数が

$$G(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi x} \quad (x \equiv |\mathbf{x}|)$$

と求まる.



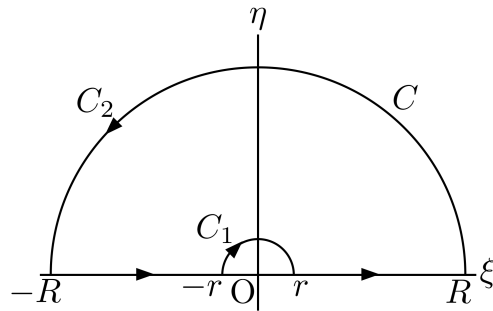


図 90 複素  $z$  平面上の積分路  $C_1, C_2, C$

検算 Green 関数の球対称性  $G(\mathbf{R}) = G(R)$  を仮定し,  $R > 0$  で

$$0 = \Delta G(\mathbf{R}) = \frac{(R^2 G')'}{R^2} \quad (\text{プライムは } R \text{ による微分})$$

を解くと,  $A$  を積分定数として  $G(R) = \frac{A}{R} + G(\infty)$  となる (逆に  $\Delta \frac{1}{R} = 0$ ). また半径  $a$  の球における体積積分は

$$\int \Delta \left( \frac{1}{R} \right) dV = \int \nabla \cdot \left( \nabla \frac{1}{R} \right) dV = - \int \frac{\mathbf{n}}{R^2} \cdot \mathbf{n} dS = - \frac{1}{a^2} \cdot 4\pi a^2 = -4\pi \quad \left( \mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R} \right)$$

となるので,  $G(R) = -\frac{1}{4\pi R}$  は Green 関数に対する式  $\Delta G(\mathbf{R}) = \delta(\mathbf{R})$  から要求される性質を満たしている.

## 付録 G 遅延ポテンシャルの導出

§ 62 における遅延ポテンシャル

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c) d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c) d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (140)$$

の導出は多少数学的な厳密性を犠牲にしつつも、物理的な直観・考察に基づき、それを前面に押し出したものとなっている印象を受ける(そこが教科書の説明の見所と言える)。一方、本稿ではより数学的に手堅い証明を以下にまとめておく。これにより安心して§ 62の説明を、その物理的な解釈と見なすことができる。

■文献 [7, pp.288–291] における証明 位置  $\mathbf{x}$  を中心とする半径  $\varepsilon$  の球状の無限小領域を  $V_\varepsilon$ 、 $V_\varepsilon$  の外部領域を  $V - V_\varepsilon$  と書くと、遅延ポテンシャル (140):  $\phi(\mathbf{x}, t) = \phi_{V - V_\varepsilon}(\mathbf{x}, t) + \phi_{V_\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$ ,

$$\begin{aligned} \phi_{V_\varepsilon}(\mathbf{x}, t) &\equiv \int_{V_\varepsilon} \frac{\rho(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c) d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \simeq \int_{V_\varepsilon} \frac{\rho(\mathbf{x}', t) d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \\ \phi_{V - V_\varepsilon}(\mathbf{x}, t) &\equiv \int_{V - V_\varepsilon} \frac{\rho(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c) d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \end{aligned}$$

に対して

$$\begin{aligned} \Delta \phi_{V_\varepsilon}(\mathbf{x}, t) &= -4\pi\rho(\mathbf{x}, t), \\ \Delta \phi_{V - V_\varepsilon}(\mathbf{x}, t) &= \int_{V - V_\varepsilon} \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} \left( R \times \frac{\rho(\mathbf{x}', t - R/c)}{R} \right) d^3 x' \quad (R \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{V - V_\varepsilon} \frac{\rho(\mathbf{x}', t - R/c) d^3 x'}{R} \simeq \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\mathbf{x}, t), \\ \therefore \Delta \phi &= \Delta(\phi_{V_\varepsilon} + \phi_{V - V_\varepsilon}) = -4\pi\rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi \end{aligned}$$

となるので、遅延ポテンシャル (140):

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c) d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

は場の方程式 (62.4):  $(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta) \phi = 4\pi\rho$  を満たす。

以上の証明では  $\phi, \rho$  の物理的な意味を用いなかったから、置き換え  $\phi \rightarrow \mathbf{A}, \rho \rightarrow \mathbf{j}/c$  によりベクトルポテンシャル (140):

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c) d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

が場の方程式 (62.3):  $(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta) \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$  を満たすことが分かる。

なお以上の計算により、遅延時間  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$  の前の負号を正号に置き換えたポテンシャルも場の方程式の解となることが分かる。そのようなポテンシャルは先進ポテンシャルと呼ばれる。我々は場の方程式の解として遅延ポテンシャルを選んだとき、電荷の場に対する影響は未来に伝播するという境界条件を考慮していることになる。

■ Green 関数法による証明 場の方程式

$$\square\psi(x) = \sigma(x), \quad x \equiv (ct, \mathbf{x}), \quad \square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

に対して,  $\square G(x) = \delta^4(x)$  を満たす Green 関数  $G(x)$  を定義する. これは Green 関数が単位の源  $\sigma(x) = \delta^4(x)$  に対する場の応答であることを意味する. ここで電荷の影響は未来に伝わることを考慮すると, Green 関数  $G(x) = G(\mathbf{x}, t)$  には境界条件

$$G(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (t < 0 \text{ に対して})$$

が課せられる.

場の方程式の解は Green 関数を用いて

$$\psi(x) = \int d^4x' \sigma(x') G(x - x')$$

と書ける. 実際, このとき

$$\square\psi(x) = \int d^4x' \sigma(x') \square G(x - x') = \int d^4x' \sigma(x') \delta^4(x - x') = \sigma(x)$$

となる. そこで上記の境界条件を満たす Green 関数が  $G(x) = \frac{c}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta(|\mathbf{x}| - ct)$  であることを示せば良い.

$$G(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} G(k) e^{-ik \cdot x}, \quad k \equiv (\omega/c, \mathbf{k}) \quad (141)$$

と Fourier 展開すると

$$\square e^{-ik \cdot x} = \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} = \left( -\frac{\omega^2}{c^2} + \mathbf{k}^2 \right) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} = -k^2 e^{-ik \cdot x}$$

により

$$\square G(x) = \delta^4(x) \Rightarrow \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-k^2) G(k) e^{-ik \cdot x} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \quad (142)$$

を得る. ここで  $A, B$  を任意定数として

$$G(k) = -P \frac{1}{k^2} + A\delta(k^0 - |\mathbf{k}|) + B\delta(k^0 + |\mathbf{k}|)$$

ととれば, 右辺第 2 項, 第 3 項は式 (142) 左辺の積分に寄与しないので式 (142) が満たされる. 右辺第 1 項の  $P$  は Fourier 展開 (141):

$$G(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \int \frac{dk^0}{2\pi} G(k) e^{-ik^0 x^0} \right\} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

における  $k^0$  の積分を実行する際,

$$\begin{aligned} & \int \frac{dk^0}{2\pi} G(k) e^{-ik^0 x^0} \\ &= -P \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{1}{(k^0)^2 - \mathbf{k}^2} e^{-ik^0 x^0} + \int \frac{dk^0}{2\pi} \{A\delta(k^0 - |\mathbf{k}|) + B\delta(k^0 + |\mathbf{k}|)\} e^{-ik^0 x^0} \\ &= c \left[ -P \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} e^{-i\omega t} + \int \frac{d\omega}{2\pi} \{A\delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) + B\delta(\omega + \omega_{\mathbf{k}})\} e^{-i\omega t} \right], \quad \omega_{\mathbf{k}} \equiv c|\mathbf{k}| \quad (143) \end{aligned}$$

のように Cauchy の主値をとることを意味する。ここで図 91 のように、実軸上の極  $\omega = \pm\omega_{\mathbf{k}}$  を無限小の半径  $\varepsilon$  の半円に沿って迂回する複素  $\omega$  平面上の経路  $R_{\pm}$  をとると、Cauchy の主値は  $R_{\pm}$  に沿う積分の平均

$$P \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} \equiv \frac{1}{2} \left( \int_{R_+} + \int_{R_-} \right) \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}$$

である。

積分路の選択に応じて、異なる境界条件を満たす Green 関数が得られる。ここからは文献 [27] を参考にし、 $\omega$  による積分 (143) は  $A = \frac{\pi i}{2\omega_{\mathbf{k}}}, B = -\frac{\pi i}{2\omega_{\mathbf{k}}}$  ととると

$$-c \int_{R_+} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}$$

となることを確かめる。まず図 91 のように、極  $\omega = \pm\omega_{\mathbf{k}}$  を中心とする半径  $\varepsilon$  の円を反時計回りに回る経路をそれぞれ  $C_{\pm}$  とすると

$$\begin{aligned} \int_{R_{\pm}} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} &= \frac{1}{2} \left( \int_{R_+} + \int_{R_-} \right) \mp \frac{1}{2} \left( -\int_{R_+} + \int_{R_-} \right) \\ &= P \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} \mp \frac{1}{2} \left( \oint_{C_+} + \oint_{C_-} \right) \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} \end{aligned}$$

である。ここで

$$\oint_{C_{\pm}} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{-i(\pm\omega_{\mathbf{k}})t}}{2(\pm\omega_{\mathbf{k}})} \cdot 2\pi i = \pm \frac{\pi i}{\omega_{\mathbf{k}}} \int \frac{d\omega}{2\pi} \delta(\omega \mp \omega_{\mathbf{k}}) e^{-i\omega t}$$

なので

$$\int_{R_{\pm}} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} = P \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} \mp \frac{\pi i}{2\omega_{\mathbf{k}}} \int \frac{d\omega}{2\pi} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) e^{-i\omega t} \pm \frac{\pi i}{2\omega_{\mathbf{k}}} \int \frac{d\omega}{2\pi} \delta(\omega + \omega_{\mathbf{k}}) e^{-i\omega t}$$

を得る。よって  $\omega$  による積分 (143) は  $A = \frac{\pi i}{2\omega_{\mathbf{k}}}, B = -\frac{\pi i}{2\omega_{\mathbf{k}}}$  ととると

$$-c \int_{R_+} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}$$

となる。

最後にこれを計算し、適切な境界条件を満たす Green 関数が得られることを確かめよう。 $t < 0$  のとき図 91 に示した原点の無限遠にある半円  $\Gamma_+$  に沿う積分

$$-c \int_{\Gamma_+} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}$$

はゼロになるから、

$$-c \int_{R_+} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} = -c \oint_{R_+ + \Gamma_+} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} = 0$$

を得る。よって  $t < t'$  のとき  $G(x - x') = 0$  となる。これは時刻  $t'$  での源  $\sigma(x')$  の状態が過去の時刻  $t (< t')$  における場の値  $\psi(x) = \int d^4x' \sigma(x') G(x - x')$  に影響しないことを意味する。一方、 $t > 0$  のとき図 91 に示

した原点の無限遠にある半円  $\Gamma_-$  に沿う積分

$$-c \int_{\Gamma_-} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}$$

はゼロになるから,

$$\begin{aligned} -c \int_{R_+} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} &= -c \oint_{R_+ + \Gamma_-} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} \\ &= (-c)(-2\pi i)(\text{Res}[-\omega_{\mathbf{k}}] + \text{Res}[\omega_{\mathbf{k}}]) \\ &\quad (\text{ここで周回積分が時計回りであることを注意した}) \\ &= (-c)(-2\pi i) \left( \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}}{2\omega_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}}{2\omega_{\mathbf{k}}} \right) \\ &= \frac{c}{\omega_{\mathbf{k}}} \sin(\omega_{\mathbf{k}} t) \end{aligned}$$

を得る. よって,  $x \equiv |\mathbf{x}|, k \equiv |\mathbf{k}|$  と書くことにすると (以降では  $x, k$  は 4 元ベクトルではない), Green 関数 (141) が

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \theta(t) \frac{c}{\omega_{\mathbf{k}}} \sin(\omega_{\mathbf{k}} t) \right\} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ &= \frac{\theta(t)}{(2\pi)^3} \cdot 2\pi \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 d(\cos \theta) k^2 \frac{\sin(ckt)}{k} e^{ikx \cos \theta} \quad (\theta \text{ は } \mathbf{k} \text{ の } \mathbf{x} \text{ となす角}) \\ &= \frac{\theta(t)}{(2\pi)^2 ix} \int_0^\infty dk \sin(ckt) (e^{ikx} - e^{-ikx}) \\ &= \frac{\theta(t)}{(2\pi)^2 ix} \int_{-\infty}^\infty dk \sin(ckt) e^{ikx} \\ &= -\frac{\theta(t)}{2(2\pi)^2 x} \int_{-\infty}^\infty dk (e^{ickt} - e^{-ickt}) e^{ikx} \\ &= -\frac{\theta(t)}{4\pi x} \{ \delta(x + ct) - \delta(x - ct) \} \\ &= \frac{1}{4\pi x} \delta(x - ct) \quad (x \equiv |\mathbf{x}|) \end{aligned}$$

と求まる (これは  $t < 0$  に対する境界条件  $G(\mathbf{x}, t) = 0$  を満たしている).

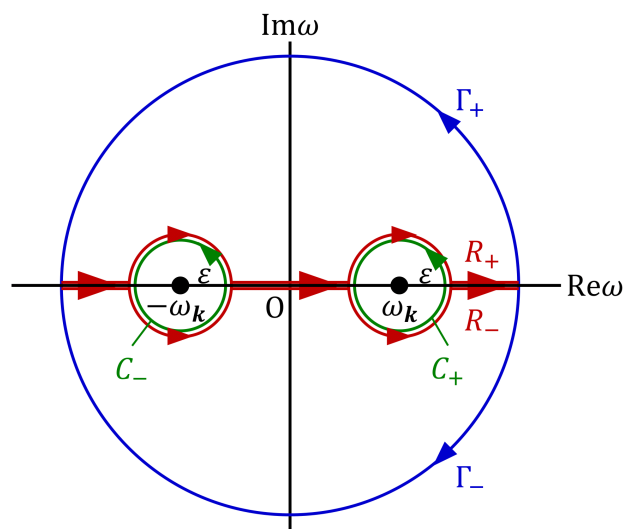


図 91 複素  $\omega$  平面上の積分路  $R_{\pm}, C_{\pm}, \Gamma_{\pm}$

## 付録 H 媒質中の電磁気学の基礎方程式

媒質中の電磁気学に関して，Jackson『電磁気学』の§ 4.3, § 5.8, § 6.10の内容をそれぞれ，以下の H.1 節，H.2 節，H.3 節にまとめる．ただし

- § 4.3, § 5.8における， $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{D}, \mathbf{J}$ ，および  $\mathbf{B}$  と  $\mathbf{H}$  の現象論的な関係
- § 6.10における媒質中での Poynting の理論

は割愛する．

### H.1 媒質中の静電気学

“微視的な”電荷密度と電場をそれぞれ  $\rho', \epsilon$  と書くと，静電気学の基礎方程式は [Gauss 単位系で]

$$\nabla \cdot \epsilon = 4\pi\rho', \quad \nabla \times \epsilon = 0 \quad (144)$$

で与えられる．[ここで“微視的な”場とは原理的に定まる場であり，以降で導入する，それを微小領域で平均した“巨視的な”場と対比されている．] 小数の荷電粒子から成る理想的な系では上式 (144) を適用すれば十分である．

しかし現実の物質は膨大な数の荷電粒子を含んでおり，しかもそれらは熱運動や零点振動によって多かれ少なかれ運動している．そこで巨視的には微小と見なせるものの，なおその中に多数の原子を含んでいる体積要素  $\Delta V$  にわたる， $\rho'$  と  $\epsilon$  の平均値  $\langle \rho' \rangle, \langle \epsilon \rangle$  を考える．このとき電荷の微視的なゆらぎは平均されて消えるため，平均値に関しては静電気学を適用できる [もちろん巨視的な場の時間変動がない限り]．

ここで位置の任意の関数  $f(\mathbf{x})$  に対して，平均操作の定義をあらわに書くと

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) d^3\xi \quad (145)$$

である．

note 1 積分は常に変数  $\boldsymbol{\xi}$  に関する原点  $\boldsymbol{\xi} = 0$  周りの微小体積にわたって行われ，積分範囲の記号  $\Delta V$  には実際の空間における体積要素の中心位置の情報に含まれていない．実際の中心位置は式 (145) 右辺の引数の  $\mathbf{x}$  によって指定されており，これが別の値  $\mathbf{x}'$  に置き換われば，上式 (145) は自動的に新しい位置  $\mathbf{x}'$  周りの空間平均を表すことになる．

note 2 このとき  $\mathbf{x}$  による微分と平均操作は順序交換できる：

$$\partial_i \langle f(\mathbf{x}) \rangle = \partial_i \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) d^3\xi = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \partial_i f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) d^3\xi = \langle \partial_i f(\mathbf{x}) \rangle.$$

さて，巨視的な静電気学では平均の電荷密度  $\langle \rho'(\mathbf{x}) \rangle$  を

- 原子・分子のイオンや，巨視的な物体の過剰な電荷の寄与
- 誘導電荷・分極電荷 (induced or polarization charge) の寄与

に分けるのが便利である．以下，この作業に取り組もう．[それは式 (150):  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho - 4\pi\nabla \cdot \mathbf{P}$  (および定義式 (153)) において達成されていることが，微視的方程式 (144) の平均  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \langle \rho' \rangle$  と比較すると納得できる．]

個々の分子  $j$  (重心  $\mathbf{x}_j$ ) を電荷の拡がりとして、その全電荷と双極子モーメント

$$e_j = \int_{\text{mol}} \rho'_j(\mathbf{x}') d^3x', \quad \mathbf{p}_j = \int_{\text{mol}} \mathbf{x}' \rho'_j(\mathbf{x}') d^3x'$$

を定義する (以降, mol は分子を表す).

note ここで一般に荷電粒子系の双極子モーメント  $\mathbf{p} = \sum e\mathbf{x}'$  (『場の古典論』 § 40) は, 連続体に対する表現

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') d^3x'$$

に移行できることに注意する.

各々の分子が作る静電ポテンシャルを双極子展開し (『場の古典論』 § 40), 次いで全ての分子からの寄与を重合せると, 対応する電場は

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = -\nabla \sum_j \left[ \frac{e_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} + \mathbf{p}_j \cdot \nabla_j \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} \right) \right] \quad (146)$$

と表される. 巨視的な場の空間変化が分子スケールより長い距離で起きる限り, 4重極モーメント以降の項は無視できる.

次に定義式 (145) に従って電場 (146) の平均をとると,

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \rangle = -\nabla \int N(\mathbf{x}') \left\{ \frac{\langle e_{\text{mol}}(\mathbf{x}') \rangle}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \langle \mathbf{p}_{\text{mol}}(\mathbf{x}') \rangle \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \right\} d^3x' \quad (147)$$

となる (導出は下記). ここに

- $N(\mathbf{x}')$  は位置  $\mathbf{x}'$  における分子の数密度
- $\langle e_{\text{mol}}(\mathbf{x}') \rangle$  は位置  $\mathbf{x}'$  における分子の平均の電荷
- $\langle \mathbf{p}_{\text{mol}}(\mathbf{x}') \rangle$  は位置  $\mathbf{x}'$  における分子の平均の双極子モーメント

である.

平均の電場 (147) の導出 巨視的な物質に対する連続的な表現に移行するために, 電荷密度と分極密度 (polarization density) [単位体積当たりの双極子モーメント]

$$\rho_{\text{mol}}(\mathbf{x}) = \sum_j e_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j), \quad \boldsymbol{\pi}_{\text{mol}}(\mathbf{x}) = \sum_j \mathbf{p}_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$$

を導入して電場 (146) を

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = -\nabla \int d^3x' \left[ \frac{\rho_{\text{mol}}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \boldsymbol{\pi}_{\text{mol}}(\mathbf{x}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \right] \quad (148)$$

と書いておく.

すると

$$\begin{aligned} \langle \text{(式 (148) 第 1 項)} \rangle &= -\nabla \left\langle \int d^3x' \frac{\rho_{\text{mol}}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right\rangle \quad (\text{微分と平均の順序を入れ替えた}) \\ &= -\nabla \left[ \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3\xi \int d^3x' \frac{\rho_{\text{mol}}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}'|} \right] \\ &= -\nabla \int d^3x'' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} \left[ \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3\xi \rho_{\text{mol}}(\mathbf{x}'' + \boldsymbol{\xi}) \right] \quad (\mathbf{x}'' = \mathbf{x}' - \boldsymbol{\xi}) \end{aligned}$$



であり，最右辺の  $\xi$  に関する積分 [...] は位置  $\mathbf{x}''$  における平均の電荷密度

$$\langle \rho_{\text{mol}}(\mathbf{x}'') \rangle = N(\mathbf{x}'') \langle e_{\text{mol}}(\mathbf{x}'') \rangle$$

に他ならない．よって

$$\langle (\text{式 (148) 第 1 項}) \rangle = -\nabla \int d^3x'' N(\mathbf{x}'') \frac{\langle e_{\text{mol}}(\mathbf{x}'') \rangle}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|}.$$

同様に

$$\begin{aligned} \langle (\text{式 (148) 第 2 項}) \rangle &= -\nabla \left\langle \int d^3x' \boldsymbol{\pi}_{\text{mol}}(\mathbf{x}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \right\rangle \\ &= -\nabla \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3\xi \int d^3x' \boldsymbol{\pi}_{\text{mol}}(\mathbf{x}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}'|} \right) \\ &= -\nabla \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3\xi \int d^3x'' \boldsymbol{\pi}_{\text{mol}}(\mathbf{x}'' + \boldsymbol{\xi}) \cdot \nabla'' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} \right) \\ &\quad (\text{任意に固定した } \boldsymbol{\xi} \text{ に対して } \mathbf{x}'' = \mathbf{x}' - \boldsymbol{\xi}, \nabla'' = \nabla') \\ &= -\nabla \int d^3x'' \left[ \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3\xi \boldsymbol{\pi}_{\text{mol}}(\mathbf{x}'' + \boldsymbol{\xi}) \right] \cdot \nabla'' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} \right) \end{aligned}$$

であり，最右辺の  $\xi$  に関する積分 [...] は位置  $\mathbf{x}''$  における分極密度 [単位体積当たりの双極子モーメント] の平均

$$\langle \boldsymbol{\pi}_{\text{mol}}(\mathbf{x}'') \rangle = N(\mathbf{x}'') \langle \mathbf{p}_{\text{mol}}(\mathbf{x}'') \rangle$$

に他ならない．よって

$$\langle (\text{式 (148) 第 2 項}) \rangle = -\nabla \int d^3x'' N(\mathbf{x}'') \langle \mathbf{p}_{\text{mol}}(\mathbf{x}'') \rangle \cdot \nabla'' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} \right).$$

以上より平均の電場 (147):

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \rangle = -\nabla \int N(\mathbf{x}') \left\{ \frac{\langle e_{\text{mol}}(\mathbf{x}') \rangle}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \langle \mathbf{p}_{\text{mol}}(\mathbf{x}') \rangle \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \right\} d^3x'$$

を得る．

冒頭の式 (144):  $\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 4\pi\rho'$  を巨視的な式に焼き直すために，巨視的な電場

$$\mathbf{E} \equiv \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = (\text{式 (147)})$$

の発散をとる．

$$\nabla^2(1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

に注意すると，

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \int N(\mathbf{x}') \{ \langle e_{\text{mol}}(\mathbf{x}') \rangle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \langle \mathbf{p}_{\text{mol}}(\mathbf{x}') \rangle \cdot \nabla' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \} d^3x' \quad (149)$$

$$= 4\pi \underbrace{N(\mathbf{x}) \langle e_{\text{mol}}(\mathbf{x}) \rangle}_{\equiv \rho} - 4\pi \nabla \cdot \underbrace{N(\mathbf{x}) \langle \mathbf{p}_{\text{mol}}(\mathbf{x}) \rangle}_{\equiv \mathbf{P}} \quad (150)$$

となる (第 2 項の計算は下記)．ここで巨視的な量として，

- 電荷密度  $\rho \equiv N \langle e_{\text{mol}} \rangle$
- 分極 (polarization, 単位体積当たりの電気双極子モーメント)  $\mathbf{P} = N \langle \mathbf{p}_{\text{mol}} \rangle$  [=  $\langle \boldsymbol{\pi}_{\text{mol}} \rangle$ ]

を導入した。

式 (149) 第 2 項について

$$\partial_i \left\{ -\partial_i \langle \mathbf{p}_{\text{mol}}(\mathbf{x}') \rangle_j \partial_j' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \right\} = -\langle \mathbf{p}_{\text{mol}}(\mathbf{x}') \rangle_j \partial_j' \partial_i \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = 4\pi \langle \mathbf{p}_{\text{mol}}(\mathbf{x}') \rangle_j \partial_j' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

とすれば良い。

式 (150) 第 2 項について 部分積分

$$\int N(\mathbf{x}') \langle \mathbf{p}_{\text{mol}}(\mathbf{x}') \rangle_j \partial_j' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3 x' = - \int \partial_j' \{ N(\mathbf{x}') \langle \mathbf{p}_{\text{mol}}(\mathbf{x}') \rangle_j \} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3 x' = -\nabla' \cdot (N(\mathbf{x}') \langle \mathbf{p}_{\text{mol}}(\mathbf{x}') \rangle)$$

による。

式 (150):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho - 4\pi\nabla \cdot \mathbf{P}$$

の第 2 項は、分極の非一様性により与えられた体積要素から電荷が逃げ出すことに起源を持つ。ここで電気変位 (displacement) [電束密度]

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$$

を導入して発散の項をまとめると、巨視的な方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad (151)$$

が得られる。

冒頭の式 (144): のもう一方  $\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} = 0$  に対応する式は、平均の電場 (147):  $\mathbf{E} = -\nabla \langle \phi \rangle$  の回転をとることにより

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (152)$$

と書ける [あるいは  $\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} = 0$  の平均をとっても良い]。

平均の電場 (147) 自身は、巨視的な量  $\rho, \mathbf{P}$  を用いて

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla \int d^3 x' \left[ \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \right]$$

と表される。

なお原子・分子が複数種類ある場合や、余分な (extra) 電荷が加えられた場合には、定義式は自明な一般化

$$\mathbf{P} = \sum_i N_i \langle \mathbf{p}_i \rangle, \quad \rho = \sum_i N_i \langle e_i \rangle + \rho_{\text{ex}} \quad (153)$$

を受ける。ただし添字  $i$  は分子の種類を表し、また  $\rho_{\text{ex}}$  は余分な (あるいは自由な) 電荷の密度である。

## H.2 媒質中の静磁気学

$\beta$  を磁束密度 (magnetic flux density) として, 静磁気学の基礎方程式は

$$\nabla \cdot \beta = 0, \quad \nabla \times \beta = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (154)$$

で与えられる. [ただしここでは巨視的な磁束密度  $\mathbf{B}$  や電流密度  $\mathbf{J}$  と区別するため, 小文字  $\beta, \mathbf{j}$  を用いた.] 巨視的な問題では電流密度  $\mathbf{j}$  を位置の関数として知ることはできない. 実際,

- 物質中の原子は電子を持ち,  
電流密度が素早くゆらいでいるような実効的な原子電流 (effective atomic current) を生じさせる.  
→ 巨視的な体積におけるその平均のみが意味を持つ.
- 電子は電流密度によって表すことができないような,  
固有の磁気モーメント [スピン磁気モーメント] を持っている.

これらの原子的な寄与を扱うにあたり, H.1 節と同様に話を進める. ただしここでは巨視的な方程式の導出を簡単にスケッチするに留め, 完全な議論は H.3 節で与えることにする. というのも, 一般には分極  $\mathbf{P}$  の時間変化も電流に寄与するため, 時間に依存する問題においてはじめて, 電流への全ての寄与が現れるからである.

電流密度を

- 伝導電流密度 (conduction-current density)  $\mathbf{J}$ : 実際の電荷の輸送を表す
- 原子電流密度 (atomic-current density)  $\mathbf{J}_a$ : 原子・分子内をめぐる電流を表す

に分ける.

“微視的な” ベクトル・ポテンシャル

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}_a(\mathbf{x}') d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

に対する 1 個の分子 (位置  $\mathbf{x}_j$ ) の寄与は

$$\mathbf{a}_{\text{mol}}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{m}_{\text{mol}} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|^3} \quad (155)$$

で与えられる (『場の古典論』の式 (44.3)). ただしここでは  $\mathbf{m}_{\text{mol}}$  は電子の固有 [スピン] 磁気モーメントも含めた, 分子の“全”磁気モーメントと見なす.

上式の全分子にわたる和をとり, H.1 節と同様に場の平均をとると

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' + \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x' \quad (156)$$

を得る [導出は H.3 節]. ここで  $N$  を分子数密度として, 巨視的な磁気モーメント (単位体積当たりの磁気モーメント)

$$\mathbf{M} = N \langle \mathbf{m}_{\text{mol}} \rangle \quad (157)$$

を導入した.

上式 (156) は

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') + c \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \quad (158)$$

と書き換えられ (導出は下記), 磁化のベクトル・ポテンシャルへの寄与は実効的な電流密度

$$\mathbf{J}_M = c \nabla \times \mathbf{M} \quad (159)$$

と見なせる [これが  $\mathbf{J}_a$  にあたる (静磁場では)].

式 (158) の導出 ベクトル・ポテンシャル (156) の第 2 項は

$$\begin{aligned} \int \mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x' &= \int \mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \quad (\text{『場の古典論』の式 (44.3)}) \\ &= \int \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' - \int \nabla' \times \left( \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3 x' \end{aligned} \quad (160)$$

と書き換えられる. さらに上式 (160) の第 2 項は無遠慮での表面積分に書き換えられるので, ゼロになる:

$$\begin{aligned} \int \nabla' \times \left( \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3 x' &= \hat{\mathbf{x}}_i \varepsilon_{ijk} \int \partial_j' \frac{M_k(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \quad (\hat{\mathbf{x}}_i \text{ は第 } i \text{ 軸の方向単位ベクトル}) \\ &= \hat{\mathbf{x}}_i \varepsilon_{ijk} \int \frac{M_k(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} n_j dS \quad (n_j \text{ と } dS \text{ は境界の外向き法単位ベクトルと面積要素}) \\ &= \int \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS \\ &= 0. \quad (\text{無限遠で } \mathbf{M} \rightarrow 0) \end{aligned}$$

ここで第 2 の等号で用いた発散定理は, 例えば流体の有限の体積  $V$  に作用する圧力 (の第  $i$  成分)

$$\int_V (-\partial_i p) dV = - \int_{\partial V} p n_i dS$$

を表すのに用いられる形であり, 詳しくは付録 C における式 (97) の導出を参照せよ. 以上より式 (158) が得られる.

ここで双極子近似 (155) の妥当性について言及しておく. 磁気モーメント  $\mathbf{M}$  の著しい空間変化が認められる距離を  $L$  程度とする. このときベクトル・ポテンシャル (158) への  $\mathbf{M}$  の寄与は, 近似の妥当性が疑わしい, 観測位置  $\mathbf{x}$  から数分子程度の距離  $d$  において

$$\frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \sim \frac{\langle M \rangle / L}{d} \cdot d^3 = \frac{\langle M \rangle}{L} d^2$$

のオーダーである. これは巨視的な距離  $L$  からの寄与

$$\frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \sim \frac{\langle M \rangle / L}{L} \cdot L^3 = \langle M \rangle L$$

の  $d^2/L^2$  倍程度に過ぎないので, 近距離での誤差は相対的に無視できる ( $L \gg d$  である限り). こうして双極子近似 (155) が正当化される.

さて, ベクトル・ポテンシャル (158) により基礎方程式 (154):  $\nabla \times \boldsymbol{\beta} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$  における電流密度は  $\mathbf{J} + \mathbf{J}_M$  に置き換わる:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + 4\pi \nabla \times \mathbf{M}. \quad (161)$$

[ここに  $\mathbf{B} \equiv \langle \boldsymbol{\beta} \rangle$  は平均の磁束密度.] ここで磁場

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$$

を定義すると ( $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$  との類似性に注意), 基礎方程式 (154) は巨視的な方程式

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (162)$$

へと修正される. [第 2 式を得るには式 (154):  $\nabla \cdot \boldsymbol{\beta} = 0$  の空間平均をとるか, ベクトル・ポテンシャル (158) の発散をとって電荷保存則  $0 = \nabla \cdot \mathbf{j} = \nabla \cdot \mathbf{J}$  を考慮すれば良い.] これは静電気学における対応物 (151),(152):

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (163)$$

を持つ.

基本的な量は  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  であることを強調しておく. それらは式 (162),(163) における斉次の [すなわち源の項がない] 方程式を満たす. これに対し導かれた場  $\mathbf{D}, \mathbf{H}$  はあくまで, 原子の電荷と電流への寄与を平均の手法で考慮する際, 便宜的に導入された量に過ぎない.

### H.3 媒質中の電磁気学

ここでは巨視的な場が時間変動する一般的な場合に対して, 媒質中の Maxwell 方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

を導出する. ここでも基本的な量は斉次方程式を満たす巨視的な場  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  であり, それらに対応する微視的な場  $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\beta}$  の平均

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle, \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \langle \boldsymbol{\beta} \rangle$$

として定義される. ただしここでは平均は微小体積  $\Delta V$  と微小時間  $\Delta T$  にわたってとる:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{\Delta V \Delta T} \int d^3\xi \int d\tau \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t + \tau), \quad \text{etc.}$$

対応して巨視的なポテンシャルもまた

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \langle \phi \rangle, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{a} \rangle.$$

平均のポテンシャルを求める H.1 節と H.2 節の議論は, 場の方程式の解として遅延ポテンシャルを用いなければならないという点で修正が必要である. 例えば式 (147) におけるスカラー・ポテンシャルは

$$\langle \phi \rangle = \int N(\mathbf{x}', t') \left[ \frac{\langle \epsilon_{\text{mol}}(\mathbf{x}', t') \rangle}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \langle \mathbf{p}_{\text{mol}}(\mathbf{x}', t') \rangle \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \right] d^3x' \quad (164)$$

に置き換わる (確認は下記). ただし引数  $t'$  には遅延時間  $t' = t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$  を代入しなければならない [本稿では分子数密度  $N$  にも引数  $t'$  を補った].

式 (164) の確認 はじめに原点において長さ  $a$  程度の拡がりを持つ分子が, 距離  $r \equiv |\mathbf{x}| \gg a$  隔たる位置  $\mathbf{x}$  に作る遅延ポテンシャル

$$\phi_{\text{mol}}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

を,  $a/r$  のべきに展開しよう.

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \simeq r \left( 1 - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{r^2} \right), \quad \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \simeq \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{r^2} \right),$$

$$\rho \left( \mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \right) \simeq \rho(\mathbf{x}', t_0) + \frac{\partial \rho(\mathbf{x}', t_0)}{\partial t_0} \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{cr} \quad (t_0 \equiv t - r/c)$$

を代入して  $a/r$  の 1 次まで考慮すると,

$$\begin{aligned} \phi_{\text{mol}}(\mathbf{x}, t) &\simeq \int d^3x' \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{r^2} \right) \left( \rho(\mathbf{x}', t_0) + \frac{\partial \rho(\mathbf{x}', t_0)}{\partial t_0} \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{cr} \right) \\ &\simeq \frac{1}{r} \underbrace{\int d^3x' \rho(\mathbf{x}', t_0)}_{\text{分子の電荷 } e \text{ (一定)}} + \frac{\mathbf{x}}{r^3} \cdot \underbrace{\int d^3x' \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}', t_0)}_{\text{分子の双極子 } \mathbf{p}(t_0)} + \frac{\mathbf{x}}{cr^2} \cdot \underbrace{\int d^3x' \mathbf{x}' \frac{\partial \rho(\mathbf{x}', t_0)}{\partial t_0}}_{\dot{\mathbf{p}}(t_0)} \\ &= \frac{e}{r} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}(t_0)}{r^3} + \frac{\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t_0)}{cr^2} \end{aligned} \quad (165)$$

となる [7, pp.294–296]. ここで電荷からの放射の波数を  $k = \omega/c$  として, 最右辺の第 3 項は第 2 項の  $kr$  倍程度なので, 波動帯  $r \gg \lambda \equiv 2\pi/k$  を仮定すれば無視できる. このとき全ての分子からの寄与の重合せは, H.1 節と同様に電荷密度と分極密度

$$\rho_{\text{mol}}(\mathbf{x}, t) = \sum_j e_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t)), \quad \boldsymbol{\pi}_{\text{mol}}(\mathbf{x}, t) = \sum_j \mathbf{p}_j(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t))$$

を導入して連続的な表現に移行すると

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= \int d^3x' \left( \frac{\rho_{\text{mol}}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \boldsymbol{\pi}_{\text{mol}}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right) \quad (t' = t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c) \\ &= \int d^3x' \left( \frac{\rho_{\text{mol}}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \boldsymbol{\pi}_{\text{mol}}(\mathbf{x}', t') \cdot \boldsymbol{\nabla}' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right). \end{aligned}$$

(各分子の中心  $\mathbf{x}_j$  は一定と仮定しており, 連続体の表現では電荷の要素との相対位置ベクトル  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$  における  $\mathbf{x}'$  は, 単なる固定されたパラメーターである.)

次にこのポテンシャルを平均する. ここでは時間についての平均もとらねばならないものの, その計算は H.1 節で行ったのとほぼ同様である. 例えば第 1 項について, 平均操作をあらわに書くと

$$\begin{aligned} \left\langle \int d^3x' \frac{\rho_{\text{mol}}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right\rangle &= \frac{1}{\Delta V \Delta T} \int d^3\xi \int d\tau \int d^3x' \frac{\rho_{\text{mol}}(\mathbf{x}', t + \tau - |\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}'|} \\ &= \frac{1}{\Delta V \Delta T} \int d^3\xi \int d\tau \int d^3x'' \frac{\rho_{\text{mol}}(\mathbf{x}'' + \boldsymbol{\xi}, t + \tau - |\mathbf{x} - \mathbf{x}''|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} \quad (\mathbf{x}'' = \mathbf{x}' - \boldsymbol{\xi}) \\ &= \int d^3x'' \frac{\langle \rho_{\text{mol}}(\mathbf{x}'', t'') \rangle}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} \quad (t'' = t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}''|/c) \\ &= \int d^3x' \frac{N(\mathbf{x}', t') \langle e_{\text{mol}}(\mathbf{x}', t') \rangle}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \end{aligned}$$

第 2 項の平均も同様に計算すると式 (164) を得る.

式 (164) を部分積分すると

$$\langle \phi \rangle = \int \frac{N(\mathbf{x}', t') \langle e_{\text{mol}}(\mathbf{x}', t') \rangle - \boldsymbol{\nabla}' \cdot (N(\mathbf{x}', t') \langle \mathbf{p}_{\text{mol}}(\mathbf{x}', t') \rangle)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' = \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t') - \boldsymbol{\nabla}' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

となるので、これを

$$\langle \phi(\mathbf{x}, t) \rangle = \int \frac{\langle \rho'(\mathbf{x}', t') \rangle}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (166)$$

と書いたときの、巨視的な平均の電荷密度は

$$\langle \rho' \rangle = \rho - \nabla \cdot \mathbf{P} \quad (167)$$

と同定される。ただしここまでは(単一種類の)分子の寄与のみを考慮しており、もし過剰な自由電荷がある場合には、定義式(153)にしたがってその寄与  $\rho_{\text{ex}}$  を  $\rho$  に含めなければならない。

同様にベクトル・ポテンシャルの平均を計算すると、H.2節のように分子電流からの寄与を

$$\langle \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{1}{c} \int \frac{\langle \mathbf{J}_a(\mathbf{x}', t') \rangle}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

と書いたときの平均の分子電流密度には、静磁場に対する式(159):  $\mathbf{J}_M = c\nabla \times \mathbf{M}$  に比べて分極  $\mathbf{P}$  の時間変化の寄与が加わることが見出される：

$$\langle \mathbf{J}_a \rangle = c(\nabla \times \mathbf{M}) + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (\text{導出は下記}) \quad (168)$$

磁化  $\mathbf{M}$  は(時間依存性を持つという点を除けば)、H.2節の式(157)と同様に定義される。

⟨ $\mathbf{J}_a$ ⟩の式(168)の導出 再び原点における1個の分子が遠方の位置  $\mathbf{x}$  に作る遅延ポテンシャル  $\mathbf{a}_{\text{mol}}$  を、 $a/r$  のべきに展開すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\text{mol}}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \simeq \int d^3x' \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{r^2} \right) \left( \rho(\mathbf{x}', t_0) + \frac{\partial \rho(\mathbf{x}', t_0)}{\partial t_0} \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{cr} \right) \\ &\simeq \frac{1}{cr} \int d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}', t_0) + \frac{1}{cr^3} \int d^3x' (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{j}(\mathbf{x}', t_0) + \frac{1}{c^2 r^2} \int d^3x' (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{x}', t_0)}{\partial t_0}. \end{aligned}$$

最右辺の第1項は『場の古典論』(67.4)で見たように、電気双極子近似の場  $\dot{\mathbf{p}}(t_0)/cr$  である<sup>\*51</sup>。第2項は『場の古典論』(44.3)における、磁気モーメントの作る静的な場と同じ形

$$\frac{1}{c} \sum e v(\mathbf{x}' \cdot \nabla) \frac{1}{r} = \frac{\mathbf{m}(t_0) \times \mathbf{x}}{r^3} = -\mathbf{m}(t_0) \times \nabla \frac{1}{r}$$

をしており、ここでは時刻  $t_0 = t - r/c$  で評価される“準定常的な”場を表す。第3項は『場の古典論』(71.3)で導いた4重極放射(と磁気双極放射)の項

$$\frac{1}{6c^2 r} \ddot{\mathbf{D}} + \frac{1}{cr} \dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}$$

なので、省略する( $\phi_{\text{mol}}$ の式(165)で第3項( $\sim \dot{\mathbf{p}}$ )を落としたことに対応)。以上をまとめると

$$\mathbf{a}_{\text{mol}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\dot{\mathbf{p}}(t_0)}{cr} - \mathbf{m}(t_0) \times \nabla \frac{1}{r}$$

<sup>\*51</sup> これを連続体の表現のまま確認するには、連続の式を用いて

$$\dot{p}_i = \int x_i \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x = - \int x_i \partial_k j_k d^3x = \int (\partial_k x_i) j_k d^3x = \int j_i d^3x$$

とすれば良い。

なので、全分子からの寄与の時間・空間平均は

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \rangle &= \frac{1}{c} \int \left( \frac{\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + c\mathbf{M}(\mathbf{x}', t') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3x' \\ &= \frac{1}{c} \int \frac{\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{x}', t') + \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'\end{aligned}$$

と表される。第2項の変形は式(158)の箇所で確認済みである。よって

$$\langle \mathbf{J}_a \rangle = c(\nabla \times \mathbf{M}) + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} : (168)$$

と同定される。

さらに  $\langle \mathbf{a} \rangle$  には、通常の巨視的な伝導電流密度  $\mathbf{J}$  の寄与を加えなければならない。よってその結果を

$$\langle \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{1}{c} \int \frac{\langle \mathbf{j}(\mathbf{x}', t') \rangle}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (169)$$

と書いたときの平均の電流密度は、

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \mathbf{J} + \langle \mathbf{J}_a \rangle = \mathbf{J} + c(\nabla \times \mathbf{M}) + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (170)$$

と同定される。

巨視的な電荷密度(167)と電流密度(170)が定まったことで、我々は巨視的な Maxwell 方程式を導出できる段階に達した。齊次方程式の組

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

はもとより、対応する微視的な方程式の平均をとれば直ちに得られる。次に Ampère-Maxwell の法則

$$\nabla \times \boldsymbol{\beta} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t}$$

の平均をとると、式(170)の  $\langle \mathbf{j} \rangle$  に対して

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \left( \mathbf{J} + c(\nabla \times \mathbf{M}) + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

となる。よってここでも  $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$  と定義すれば、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

が得られる。さらに微視的な方程式  $\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 4\pi\rho'$  の平均をとって  $\langle \rho' \rangle$  の式(167)を用いると、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \langle \rho' \rangle = 4\pi(\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}), \quad \therefore \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$$

が導かれる。[実際、巨視的な源(167),(170)に対するポテンシャル(166),(169)から導かれる場の強度は、これらの方程式を満たすことが期待できる。]



## 付録 I Schwarzschild 解の導出過程

Schwarzschild 解は中心対称な重力場を表す Einstein 方程式の解である．本章では § 100 における Schwarzschild 解の導出について，省略された計算過程の詳細を示す．

中心対称な重力場に対して， $ds^2$  の表式が

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - e^\lambda dr^2, \quad \lambda = \lambda(r, t), \quad \nu = \nu(r, t) \quad (100.2)$$

という形になるような極座標  $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \phi)$  をとれる．このとき計量テンソルの全成分は

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad \therefore (g^{ik}) = \begin{pmatrix} e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

で与えられる．ここで  $\lambda, \nu$  は無次元量であることに注意する．このことは以降の計算を進めていく上で，検算に役立つ．

さて，未知関数  $\lambda(r, t), \nu(r, t)$  を Einstein 方程式から定めれば，時空の幾何学が決定される．そこで Einstein 方程式に現れる Ricci テンソルやスカラー曲率を，未知関数  $\lambda(r, t), \nu(r, t)$  を用いて表すことを考える．

### Christoffel 記号の計算

まず  $\lambda(r, t), \nu(r, t)$  を用いて Christoffel 記号を表そう． $(g_{ik})$  の非対角成分はゼロだから，Christoffel 記号

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} (\partial_k g_{lm} + \partial_l g_{mk} - \partial_m g_{kl}) \quad (86.3)$$

の  $i, k, l$  が相異なるものはゼロになる．よってゼロでない Christoffel 記号  $\Gamma^i_{kl}$  は，対称な添字  $k, l$  が等しいものと異なるものに分類すると

$$\text{対称な添字が等しいもの} \quad \Gamma^i_{kk} = -\frac{1}{2} g^{ii} \partial_i g_{kk} \quad (i, k \text{ について和をとらない}) \quad (171)$$

$$\text{対称な添字が異なるもの} \quad \Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} g^{ii} \partial_k g_{ii} (= \Gamma^i_{ik}) \quad (i \neq k, i \text{ について和をとらない}) \quad (172)$$

に限られる．以下， $x^1 = r$  による微分をプライムで， $x^0 = ct$  による微分をドットで表す．

式 (171) の形の Christoffel 記号は以下の 16 個である．

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2} e^{-\nu} \partial_0 e^\nu = \frac{\dot{\nu}}{2}, & \Gamma^0_{11} &= \frac{1}{2} e^{-\nu} \partial_0 e^\lambda = \frac{1}{2} \dot{\lambda} e^{\lambda-\nu}, \\ \Gamma^0_{22} &= \frac{1}{2} e^{-\nu} \partial_0 r^2 = 0, & \Gamma^0_{33} &= \frac{1}{2} e^{-\nu} \partial_0 (r^2 \sin^2 \theta) = 0, \\ \Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2} (-e^{-\lambda}) (-e^{-\nu})' = \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda}, & \Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2} (-e^{-\lambda}) (e^{-\lambda})' = \frac{\lambda'}{2}, \\ \Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2} (-e^{-\lambda}) (-r^2)' = -r e^{-\lambda}, & \Gamma^1_{33} &= \frac{1}{2} (-e^{-\lambda}) (-r^2 \sin^2 \theta)' = -r e^{-\lambda} \sin^2 \theta, \\ \Gamma^2_{00} &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{r^2} \right) \partial_\theta e^\nu = 0, & \Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{r^2} \right) \partial_\theta e^{-\lambda} = 0, \\ \Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{r^2} \right) \partial_\theta (-r^2) = 0, & \Gamma^2_{33} &= -\frac{1}{2} \left( -\frac{1}{r^2} \right) \partial_\theta (-r^2 \sin^2 \theta) = -\sin \theta \cos \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^3_{00} &= -\frac{1}{2} \left( -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_\phi e^\nu = 0, & \Gamma^3_{11} &= -\frac{1}{2} \left( -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_\phi (-e^\lambda) = 0, \\ \Gamma^3_{22} &= -\frac{1}{2} \left( -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_\phi (-r^2) = 0, & \Gamma^3_{33} &= -\frac{1}{2} \left( -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_\phi (-r^2 \sin^2 \theta) = 0.\end{aligned}$$

式 (172) 左辺の形の Christoffel 記号は以下の 12 個である。

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{10} &= \frac{1}{2} e^{-\nu} \partial_r e^\nu = \frac{\nu'}{2}, & \Gamma^0_{20} &= \frac{1}{2} e^{-\nu} \partial_\theta e^\nu = 0, \\ \Gamma^0_{30} &= \frac{1}{2} e^{-\nu} \partial_\phi e^\nu = 0, & \Gamma^1_{01} &= \frac{1}{2} (-e^{-\lambda}) \partial_0 (-e^\lambda) = \frac{\dot{\lambda}}{2}, \\ \Gamma^1_{21} &= \frac{1}{2} (-e^{-\lambda}) \partial_\theta (-e^\lambda) = 0, & \Gamma^1_{31} &= \frac{1}{2} (-e^{-\lambda}) \partial_\phi (-e^\lambda) = 0, \\ \Gamma^2_{02} &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{r^2} \right) \partial_\theta (-r^2) = 0, & \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{r^2} \right) \partial_r (-r^2) = \frac{1}{r}, \\ \Gamma^2_{32} &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{r^2} \right) \partial_\phi (-r^2) = 0, & \Gamma^3_{03} &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_0 (-r^2 \sin^2 \theta) = 0, \\ \Gamma^3_{13} &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_r (-r^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{r}, & \Gamma^3_{23} &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_\theta (-r^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{\tan \theta}.\end{aligned}$$

以上で教科書の式 (100.3) に与えられている、ゼロでない Christoffel 記号の全成分が網羅されている。

## Ricci テンソル, スカラー曲率の計算

曲率テンソル

$$R^i_{klm} \equiv \partial_l \Gamma^i_{km} - \partial_m \Gamma^i_{kl} + \Gamma^i_{nl} \Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm} \Gamma^n_{kl} \quad (91.4)$$

に対して, Ricci テンソルとスカラー曲率はそれぞれ

$$R_{ik} \equiv R^l_{ilk}, \quad (92.6)$$

$$R \equiv g^{ik} R_{ik} \quad (92.9)$$

で定義される。先に求めた Christoffel 記号の表式を用いて, Ricci テンソルとスカラー曲率は以下のように計算される。その際,

$$\text{対称性} \quad R_{ik} = R_{ki} \quad \Rightarrow \quad R^i_k = g^{il} R_{lk} = g^{il} R_{kl} = R_k^i$$

にも注意する。

■  $R_{00}$  の計算  $R_{00} = R^l_{0l0} = \partial_l \Gamma^l_{00} - \partial_0 \Gamma^l_{0l} + \Gamma^l_{ln} \Gamma^n_{00} - \Gamma^l_{0n} \Gamma^n_{0l}$  の最右辺について,

- 第 1 項の  $\Gamma^l_{00}$ , 第 2 項の  $\Gamma^l_{0l}$  がゼロでない値を持つのはいずれも  $l = 0, 1$  のときである。
- 第 3 項の  $\Gamma^n_{00}$  がゼロでない値を持つのは  $n = 0, 1$  のときであり,
  - $n = 0$  に対して  $\Gamma^l_{ln}$  がゼロでない値を持つのは  $l = 0, 1$  のとき,
  - $n = 1$  に対して  $\Gamma^l_{ln}$  がゼロでない値を持つのは  $l = 0, 1, 2, 3$  のときである。
- 第 4 項の  $\Gamma^l_{0n}$  がゼロでない値を持つのは  $(l, n) = (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$  のときである。

よって

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \cancel{\partial_0 \frac{\nu'}{2}} + \partial_1 \left( \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} \right) \Leftarrow \partial_l \Gamma^l_{00} \\
&\quad - \cancel{\partial_0 \frac{\dot{\nu}}{2}} - \partial_0 \frac{\dot{\lambda}}{2} \Leftarrow -\partial_0 \Gamma^l_{0l} \\
&\quad + \left( \frac{\dot{\nu}}{2} \right)^2 + \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{2} + \left( \frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} \times 2 \right) \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} \Leftarrow \Gamma^l_{ln} \Gamma^n_{00} \\
&\quad - 2 \times \frac{\nu'}{2} \cdot \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} - \left( \frac{\dot{\nu}}{2} \right)^2 - \left( \frac{\dot{\lambda}}{2} \right)^2 \Leftarrow -\Gamma^l_{0n} \Gamma^n_{0l} \\
&= \left( \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} \right)' - \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{4} - \frac{\nu'^2}{4} e^{\nu-\lambda} + \left( \frac{\lambda'}{2} + \frac{2}{r} \right) \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \\
&= \left( \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu' \lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right) e^{\nu-\lambda} - \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4}.
\end{aligned}$$

■  $R_{01}$  の計算  $R_{01} = R^l_{0l1} = \partial_l \Gamma^l_{01} - \partial_1 \Gamma^l_{0l} + \Gamma^l_{ln} \Gamma^n_{01} - \Gamma^l_{1n} \Gamma^n_{0l}$  の最右辺について,

- 第1項の  $\Gamma^l_{01}$ , 第2項の  $\Gamma^l_{0l}$  がゼロでない値を持つのはいずれも  $l = 0, 1$  のときである.
- 第3項の  $\Gamma^n_{01}$  がゼロでない値を持つのは  $n = 0, 1$  のときであり,
  - $n = 0$  に対して  $\Gamma^l_{ln}$  がゼロでない値を持つのは  $l = 0, 1$  のとき,
  - $n = 1$  に対して  $\Gamma^l_{ln}$  がゼロでない値を持つのは  $l = 0, 1, 2, 3$  のときである.
- 第4項の  $\Gamma^n_{0l}$  がゼロでない値を持つのは  $(l, n) = (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$  のときである.

よって

$$\begin{aligned}
R_{01} &= \cancel{\partial_0 \frac{\nu'}{2}} + \partial_1 \frac{\dot{\lambda}}{2} \Leftarrow \partial_l \Gamma^l_{01} \\
&\quad - \cancel{\partial_1 \frac{\dot{\nu}}{2}} - \partial_1 \frac{\dot{\lambda}}{2} \Leftarrow -\partial_1 \Gamma^l_{0l} \\
&\quad + \left( \frac{\dot{\nu}}{2} + \frac{\dot{\lambda}}{2} \right) \frac{\nu'}{2} + \left( \frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} \times 2 \right) \frac{\dot{\lambda}}{2} \Leftarrow \Gamma^l_{ln} \Gamma^n_{01} \\
&\quad - \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} - \frac{\nu' \dot{\nu}}{2} - \frac{\dot{\lambda} \nu'}{2} - \frac{\lambda' \dot{\lambda}}{2} \Leftarrow -\Gamma^l_{1n} \Gamma^n_{0l} \\
&= \frac{\dot{\lambda}}{r} (= R_{10}).
\end{aligned}$$

■  $R_{02}$  の計算  $R_{02} = R^l_{0l2} = \partial_l \Gamma^l_{02} - \partial_2 \Gamma^l_{0l} + \Gamma^l_{ln} \Gamma^n_{02} - \Gamma^l_{2n} \Gamma^n_{0l}$  の最右辺について,

- 第1項における  $\Gamma^l_{02}$ , 第3項における  $\Gamma^n_{02}$  の形の Christoffel 記号は全てゼロである.
- 第2項について,  $x^2 = \theta$  依存性を持つ Christoffel 記号は  $\Gamma^2_{33}, \Gamma^3_{23}, \Gamma^1_{33}$  のみであり, いずれも  $\Gamma^l_{0l}$  の形ではない.
- 第4項の  $\Gamma^l_{2n}$  がゼロでない値を持つのは  $(l, n) = (1, 2), (2, 1), (3, 3)$  のときであり, いずれに対しても  $\Gamma^n_{0l} = 0$  となる.

よって

$$R_{02} = 0 (= R_{20}).$$

■ $R_{03}$  の計算  $R_{03} = R^l_{0l3} = \partial_l \Gamma^l_{03} - \partial_3 \Gamma^l_{0l} + \Gamma^l_{ln} \Gamma^n_{03} - \Gamma^l_{3n} \Gamma^n_{0l}$  の最右辺について,

- 第1項における  $\Gamma^l_{03}$ , 第3項における  $\Gamma^n_{03}$  の形の Christoffel 記号は全てゼロである.
- 第2項は,  $x^3 = \phi$  依存性を持つ Christoffel 記号が存在しないからゼロになる.
- 第4項の  $\Gamma^l_{3n}$  がゼロでない値を持つのは  $(l, n) = (1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2)$  のときであり, いずれに対しても  $\Gamma^n_{0l} = 0$  となる.

よって

$$R_{03} = 0 (= R_{30}).$$

■ $R_{11}$  の計算  $R_{11} = R^l_{1l1} = \partial_l \Gamma^l_{11} - \partial_1 \Gamma^l_{1l} + \Gamma^l_{ln} \Gamma^n_{11} - \Gamma^l_{1n} \Gamma^n_{1l}$  の最右辺について,

- 第1項の  $\Gamma^l_{11}$  がゼロでない値を持つのは  $l = 0, 1$  のときである.
- 第3項の  $\Gamma^n_{11}$  がゼロでない値を持つのは  $n = 0, 1$  のときであり,
  - $n = 0$  に対して  $\Gamma^l_{ln}$  がゼロでない値を持つのは  $l = 0, 1$  のとき,
  - $n = 1$  に対して  $\Gamma^l_{ln}$  がゼロでない値を持つのは  $l = 0, 1, 2, 3$  のときである.
- 第4項の  $\Gamma^l_{1n}$  がゼロでない値を持つのは  $(l, n) = (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)$  のときである.

よって

$$\begin{aligned} R_{11} &= \partial_0 \left( \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} \right) + \cancel{\partial_1 \frac{\lambda'}{2}} \Leftarrow \partial_l \Gamma^l_{11} \\ &\quad - \partial_1 \left( \frac{\nu'}{2} + \frac{1}{r} \times 2 \right) \Leftarrow -\partial_1 \Gamma^l_{1l} \\ &\quad + \left( \frac{\dot{\nu}}{2} + \frac{\dot{\lambda}}{2} \right) \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} + \left( \frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} \times 2 \right) \frac{\lambda'}{2} \Leftarrow \Gamma^l_{ln} \Gamma^n_{11} \\ &\quad - \left( \frac{\lambda'}{2} \right)^2 - \left( \frac{\nu'}{2} \right)^2 - \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} \frac{\dot{\lambda}}{2} \times 2 - \left( \frac{1}{r} \right)^2 \times 2 \Leftarrow -\Gamma^l_{1n} \Gamma^n_{1l} \\ &= \partial_0 \left( \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} \right) - \frac{\nu''}{2} + \frac{\dot{\nu} \dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} + \frac{\left( \frac{\dot{\lambda}}{2} \right)^2 e^{\lambda-\nu} + \frac{\lambda' \nu'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \left( \frac{\nu'}{2} \right)^2}{\cancel{\frac{2}{r^2}} - 2} \frac{\left( \frac{\dot{\lambda}}{2} \right)^2 e^{\lambda-\nu}}{\cancel{\frac{2}{r^2}} - 2} \\ &= \partial_0 \left( \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} \right) + \frac{\dot{\lambda}}{2} \left( \frac{\dot{\nu}}{2} - \frac{\dot{\lambda}}{2} \right) e^{\lambda-\nu} - \frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda' \nu'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'^2}{4} \\ &= \left\{ \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}}{4} (\dot{\lambda} - \dot{\nu}) \right\} e^{\lambda-\nu} - \frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda' \nu'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'^2}{4}. \end{aligned}$$

■ $R_{12}$  の計算  $R_{12} = R^l_{1l2} = \partial_l \Gamma^l_{12} - \partial_2 \Gamma^l_{1l} + \Gamma^l_{ln} \Gamma^n_{12} - \Gamma^l_{2n} \Gamma^n_{1l}$  の最右辺について,

- 第1項の  $\Gamma^l_{12}$  がゼロでない値を持つのは  $l = 2$  のときである.  
ところが  $l = 2$  のとき,  $\partial_l \Gamma^l_{12} = \partial_2 \frac{1}{r} = 0$  となる.
- 第2項について,  $x^2 = \theta$  依存性を持つ Christoffel 記号は  $\Gamma^2_{33}, \Gamma^3_{23}, \Gamma^1_{33}$  のみであり, いずれも  $\Gamma^l_{1l}$  の形ではない.

- 第3項の  $\Gamma_{12}^n$  がゼロでない値を持つのは  $n = 2$  のときであり,  
 $n = 2$  に対して  $\Gamma_{ln}^l$  がゼロでない値を持つのは  $l = 3$  のときである.  
 $(l, n) = (3, 2)$  のとき,  $\Gamma_{ln}^l \Gamma_{12}^n = \frac{\cot \theta}{r}$  となる.
- 第4項の  $\Gamma_{2n}^l$  がゼロでない値を持つのは  $(l, n) = (1, 2), (2, 1), (3, 3)$  のときであり,  
 $(l, n) = (1, 2), (2, 1)$  に対しては  $\Gamma_{1l}^n = 0$  となる.  $(l, n) = (3, 3)$  のとき,  $-\Gamma_{2n}^l \Gamma_{1l}^n = -\frac{\cot \theta}{r}$  となる.

よって

$$R_{12} = \frac{\cot \theta}{r} - \frac{\cot \theta}{r} = 0 (= R_{21}).$$

■  $R_{13}$  の計算  $R_{13} = R_{1l3}^l = \partial_l \Gamma_{13}^l - \partial_3 \Gamma_{1l}^l + \Gamma_{ln}^l \Gamma_{13}^n - \Gamma_{3n}^l \Gamma_{1l}^n$  の最右辺について,

- 第1項の  $\Gamma_{13}^l$  がゼロでない値を持つのは  $l = 3$  のときである.  
 ところが  $l = 3$  のとき,  $\partial_l \Gamma_{13}^l = \partial_3 \frac{1}{r} = 0$  となる.
- 第2項は,  $x^3 = \phi$  依存性を持つ Christoffel 記号が存在しないからゼロになる.
- 第3項の  $\Gamma_{13}^n$  がゼロでない値を持つのは  $n = 3$  のときであり,  $n = 3$  に対して  $\Gamma_{ln}^l = 0$  となる.
- 第4項の  $\Gamma_{3n}^l$  がゼロでない値を持つのは  $(l, n) = (1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2)$  のときであり,  
 いずれに対しても  $\Gamma_{1l}^n = 0$  となる.

よって

$$R_{13} = 0 (= R_{31}).$$

■  $R_{22}$  の計算  $R_{22} = R_{2l2}^l = \partial_l \Gamma_{22}^l - \partial_2 \Gamma_{2l}^l + \Gamma_{ln}^l \Gamma_{22}^n - \Gamma_{2n}^l \Gamma_{2l}^n$  の最右辺について,

- 第1項の  $\Gamma_{22}^l$  がゼロでない値を持つのは  $l = 1$  のときである.
- 第2項の  $\Gamma_{2l}^l$  がゼロでない値を持つのは  $l = 3$  のときである.
- 第3項の  $\Gamma_{22}^n$  がゼロでない値を持つのは  $n = 1$  のときである.
- 第4項の  $\Gamma_{2n}^l$  がゼロでない値を持つのは  $(l, n) = (1, 2), (2, 1), (3, 3)$  のときである.

よって

$$\begin{aligned} R_{22} &= \partial_1(-re^{-\lambda}) \Leftarrow \partial_l \Gamma_{22}^l \\ &\quad - \partial_2(\cot \theta) \Leftarrow -\partial_2 \Gamma_{2l}^l \\ &\quad + \left( \frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} \times 2 \right) (-re^{-\lambda}) \Leftarrow \Gamma_{ln}^l \Gamma_{22}^n \\ &\quad - \frac{1}{r} (-re^{-\lambda}) - \frac{1}{r} (-re^{-\lambda}) - \cot^2 \theta \Leftarrow -\Gamma_{2n}^l \Gamma_{2l}^n \\ &= \partial_1(-re^{-\lambda}) + \left( \frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} \right) (-re^{-\lambda}) - \partial_2(\cot \theta) - \cot^2 \theta \\ &= \left\{ -1 + r \left( \frac{\lambda'}{2} - \frac{\nu'}{2} \right) \right\} e^{-\lambda} + 1. \quad \left( \because -\partial_2(\cot \theta) - \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = 1 \right) \end{aligned}$$

■  $R_{23}$  の計算  $R_{23} = R_{2l3}^l = \partial_l \Gamma_{23}^l - \partial_3 \Gamma_{2l}^l + \Gamma_{ln}^l \Gamma_{23}^n - \Gamma_{3n}^l \Gamma_{2l}^n$  の最右辺について,

- 第1項の  $\Gamma_{23}^l$  がゼロでない値を持つのは  $l = 3$  のときである.  
 ところが  $l = 3$  のとき,  $\partial_l \Gamma_{23}^l = \partial_3 \cot \theta = 0$  となる.

- 第2項は,  $x^3 = \phi$  依存性を持つ Christoffel 記号が存在しないからゼロになる.
- 第3項の  $\Gamma^n_{23}$  がゼロでない値を持つのは  $n = 3$  のときであり,  $n = 3$  に対して  $\Gamma^l_{ln} = 0$  となる.
- 第4項の  $\Gamma^n_{2l}$  がゼロでない値を持つのは  $(l, n) = (1, 2), (2, 1), (3, 3)$  のときであり, いずれに対しても  $\Gamma^l_{3n} = 0$  となる.

よって

$$R_{23} = 0 (= R_{32}).$$

■  $R_{33}$  の計算  $R_{33} = R^l_{3l3} = \partial_l \Gamma^l_{33} - \partial_3 \Gamma^l_{3l} + \Gamma^l_{ln} \Gamma^n_{33} - \Gamma^l_{3n} \Gamma^n_{3l}$  の最右辺について,

- 第1項の  $\Gamma^l_{33}$  がゼロでない値を持つのは  $l = 1, 2$  のときである.
- 第2項は,  $x^3 = \phi$  依存性を持つ Christoffel 記号が存在しないからゼロになる.
- 第3項の  $\Gamma^n_{33}$  がゼロでない値を持つのは  $n = 1, 2$  のときであり,
  - $n = 1$  に対して  $\Gamma^l_{ln}$  がゼロでない値を持つのは  $l = 0, 1, 2, 3$  のとき,
  - $n = 2$  に対して  $\Gamma^l_{ln}$  がゼロでない値を持つのは  $l = 3$  のときである.
- 第4項の  $\Gamma^l_{3n}$  がゼロでない値を持つのは  $(l, n) = (1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2)$  のときである.

よって

$$\begin{aligned} R_{33} &= \partial_1(-r \sin^2 \theta e^{-\lambda}) + \partial_2(-\sin \theta \cos \theta) \Leftarrow \partial_l \Gamma^l_{33} \\ &\quad + \left( \frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} \times 2 \right) (-r \sin^2 \theta e^{-\lambda}) + \underbrace{\cot \theta (-\sin \theta \cos \theta)}_{-\cos^2 \theta} \Leftarrow \Gamma^l_{ln} \Gamma^n_{33} \\ &\quad - \underbrace{(-\sin \theta \cos \theta) \cot \theta \times 2}_{2 \cos^2 \theta} - \cancel{(-r \sin^2 \theta e^{-\lambda}) \frac{1}{r} \times 2} \Leftarrow -\Gamma^l_{3n} \Gamma^n_{3l} \\ &= \partial_1(-r \sin^2 \theta e^{-\lambda}) + \partial_2(-\sin \theta \cos \theta) + \left( \frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} \right) (-r \sin^2 \theta e^{-\lambda}) + \cos^2 \theta \\ &= -e^{-\lambda} \sin^2 \theta \left\{ 1 + r \left( \frac{\nu'}{2} - \frac{\lambda'}{2} \right) \right\} + \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

■ Ricci テンソルの全成分 以上で Ricci テンソルの全成分が得られたことになる. これを混合テンソル  $R^i_k$  の形に書き換え, 以下にまとめる. その際  $(g^{ik})$  は対角的なので, 例えば

$$R^0_0 = g^{0i} R_{i0} = g^{00} R_{00}$$

のように計算できることに注意すれば良い.

$$\begin{aligned} R^0_0 &= g^{00} R_{00} = e^{-\nu} R_{00}, & R_{00} &= \left( \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu' \lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right) e^{\nu-\lambda} - \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4}, \\ R^0_1 &= g^{00} R_{01} = e^{-\nu} \frac{\dot{\lambda}}{r}, \\ R^0_2 &= g^{00} R_{02} = 0, \\ R^0_3 &= g^{00} R_{03} = 0, \\ R^1_0 &= g^{11} R_{10} = -e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^1_{\ 1} &= g^{11} R_{11} = -e^{-\lambda} R_{11}, & R_{11} &= \left\{ \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}}{4}(\dot{\lambda} - \dot{\nu}) \right\} e^{\lambda - \nu} - \frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda' \nu'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'^2}{4}, \\
R^1_{\ 2} &= g^{11} R_{12} = 0, \\
R^1_{\ 3} &= g^{11} R_{13} = 0, \\
R^2_{\ 0} &= g^{22} R_{20} = 0, \\
R^2_{\ 1} &= g^{22} R_{21} = 0, \\
R^2_{\ 2} &= g^{22} R_{22} = -\frac{1}{r^2} R_{22}, & R_{22} &= \left\{ -1 + r \left( \frac{\lambda'}{2} - \frac{\nu'}{2} \right) \right\} e^{-\lambda} + 1, \\
R^2_{\ 3} &= g^{22} R_{23} = 0, \\
R^3_{\ 0} &= g^{33} R_{30} = 0, \\
R^3_{\ 1} &= g^{33} R_{31} = 0, \\
R^3_{\ 2} &= g^{33} R_{32} = 0, \\
R^3_{\ 3} &= g^{33} R_{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} R_{33}, & R_{33} &= -e^{-\lambda} \sin^2 \theta \left\{ 1 + r \left( \frac{\nu'}{2} - \frac{\lambda'}{2} \right) \right\} + \sin^2 \theta.
\end{aligned}$$

■スカラー曲率  $R$  の計算 以上よりスカラー曲率  $R$  は

$$\begin{aligned}
R &= g^{ik} R_{ik} = \sum_{i=0}^3 g^{ii} R_{ii} \\
&= e^{-\lambda} \left( \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu' \lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right) + e^{-\nu} \left( -\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \right) \Leftarrow g^{00} R_{00} \\
&+ e^{-\lambda} \left( \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu' \lambda'}{4} - \frac{\lambda'}{r} \right) + e^{-\nu} \left( -\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \right) \Leftarrow g^{11} R_{11} \\
&\quad + e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{2r} - \frac{\lambda'}{2r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \Leftarrow g^{22} R_{22} \\
&\quad + e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{2r} - \frac{\lambda'}{2r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \Leftarrow g^{33} R_{33} \\
&= e^{-\lambda} \left( \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu' \lambda'}{2} + 2 \frac{\nu'}{r} - 2 \frac{\lambda'}{r} + \frac{2}{r^2} \right) + e^{-\nu} \left( -\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{2} \right) - \frac{2}{r^2}
\end{aligned}$$

と求まる。

■Einstein テンソル Einstein 方程式の左辺 (Einstein テンソル)

$$R^i_{\ k} - \frac{1}{2} \delta^i_{\ k} R \equiv G^i_{\ k}$$

は  $i \neq k$  に対して  $G^i_{\ k} = R^i_{\ k}$  となる。このうちゼロでない成分は、上記のように  $R^0_{\ 1}$  と  $R^1_{\ 0}$  がある。これ以外のゼロでない Einstein テンソル  $G^i_{\ k}$  の成分として、 $i = k$  の成分を計算する。まず、

$$\begin{aligned}
G^0_{\ 0} &= e^{-\lambda} \left( \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu' \lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right) + e^{-\nu} \left( -\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \right) \Leftarrow R^0_{\ 0} \\
&+ e^{-\lambda} \left( -\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' \lambda'}{4} - \frac{\nu'}{r} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + e^{-\nu} \left( \frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{4} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \right) + \frac{1}{r^2} \Leftarrow -\frac{1}{2} \delta^0_{\ 0} R
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \\
G^1_1 &= e^{-\lambda} \left( \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\lambda'}{r} \right) + e^{-\nu} \left( -\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \right) \Leftarrow R^1_1 \\
&\quad + e^{-\lambda} \left( -\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + e^{-\nu} \left( \frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \right) + \frac{1}{r^2} \Leftarrow -\frac{1}{2}\delta^1_1 R \\
&= -e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}
\end{aligned}$$

である。次に

$$R^2_2 = -\frac{1}{r^2} \left[ \left\{ -1 + r \left( \frac{\lambda'}{2} - \frac{\nu'}{2} \right) \right\} e^{-\lambda} + 1 \right] = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left[ \left\{ -1 + r \left( \frac{\lambda'}{2} - \frac{\nu'}{2} \right) \right\} e^{-\lambda} \sin^2 \theta + \sin^2 \theta \right] = R^3_3$$

に注意すると,

$$\begin{aligned}
G^2_2 &= G^3_3 \\
&= e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{2r} - \frac{\lambda'}{2r} + \frac{\nu'}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \Leftarrow R^2_2 = R^3_3 \\
&\quad + e^{-\lambda} \left( -\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{r^2} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'}{r} + \frac{\nu'\lambda'}{4} \right) + e^{-\nu} \left( \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} \right) + \frac{1}{r^2} \Leftarrow -\frac{1}{2}\delta^2_2 R = -\frac{1}{2}\delta^3_3 R \\
&= -\frac{1}{2}e^{-\lambda} \left( \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2} \right) + \frac{1}{2}e^{-\nu} \left( \ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2} \right)
\end{aligned}$$

を得る。

## Einstein 方程式, Schwarzschild 解

以上より Einstein 方程式 (95.6):  $R^i_k - \frac{1}{2}\delta^i_k R = \frac{8\pi k}{c^4} T^i_k$  は, 未知関数  $\lambda(r, t), \nu(r, t)$  に対する式

$$\frac{8\pi k}{c^4} T^1_1 = -e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (100.4)$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T^2_2 = \frac{8\pi k}{c^4} T^3_3 = -\frac{1}{2}e^{-\lambda} \left( \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2} \right) + \frac{1}{2}e^{-\nu} \left( \ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2} \right), \quad (100.5)$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T^0_0 = -e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (100.6)$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T^1_0 = -e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r} \quad (100.7)$$

になる。真空中, すなわち, 場を生ずる質量の外側での中心対称な場を考え  $T^i_k = 0$  とおくと,

$$\text{式 (100.4)} \Rightarrow e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0, \quad (100.8)$$

$$\text{式 (100.6)} \Rightarrow e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (100.9)$$

$$\text{式 (100.7)} \Rightarrow \dot{\lambda} = 0 \quad (100.10)$$



が得られる。式 (100.8) と式 (100.9) を辺々足すと,  $f(t)$  を時間だけの関数として

$$\lambda' + \nu' = 0, \quad \therefore \lambda + \nu = f(t) \quad (100.11)$$

となる。

ところで  $ds^2$  の表式 (100.2) の形を壊すことなく, 時間に  $t = f(t')$  という形の任意の変換を施すことができる。これは  $\nu$  に任意の時間の関数を加えることと同等である。この任意性を利用すると, 一般性を失うことなく

$$\lambda + \nu = 0$$

とおくことができる。ここで式 (100.10) より  $\lambda$  は時間に依らないから  $\nu = -\lambda$  も時間に依らず, 真空中の中心対称な重力場は静的な場となることが結論される。

式 (100.9) は

$$1 = e^{-\lambda}(1 - r\lambda') = (re^{-\lambda})', \quad \therefore e^{-\lambda} = 1 - \frac{r_g}{r}$$

と積分される ( $r_g$  は積分定数)。重力源となる星の質量を  $m$  とすると, 重力場が弱いときの式 (87.12):  $g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$  における重力ポテンシャル  $\phi$  に対して Newton の万有引力の法則 (99.4):  $\phi = -\frac{km}{r}$  が満たされるためには  $r_g = \frac{2km}{c^2}$  ととれば良い\*52。定数  $r_g$  は重力半径と呼ばれる。こうして Schwarzschild 解

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (cdt)^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} \quad (100.14)$$

が得られる ( $r > r_g$ )。

## あらかじめ静的な場を仮定した場合

本章では Schwarzschild 解 (100.14):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (cdt)^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}$$

を導くにあたって, 真空中の中心対称な重力場としてあらかじめ静的な場を考える。すなわち適当な球座標  $(ct, r, \theta, \phi)$  を用いたときの世界間隔の表式 (100.2):

$$ds^2 = e^\nu (cdt)^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - e^\lambda dr^2$$

において,  $\nu, \lambda$  が  $t$  に依らないような座標系  $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, r, \theta, \phi)$  をとれると仮定する:

$$\nu = \nu(r), \quad \lambda = \lambda(r).$$

これにより計算は大幅に簡略化される。そこでこれまでの内容との重複を厭わずに, 未知関数  $\nu(r), \lambda(r)$  を真空中の Einstein 方程式  $G^i_k \equiv R^i_k - \frac{1}{2}\delta^i_k R = 0$  から定める計算を以下で行う。その際, 以降で明らかになるように, Schwarzschild 解を導くには  $G^0_0 = 0, G^1_1 = 0$  だけ用いれば十分であることにも注意する。

計量テンソル

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} e^{\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad \therefore (g^{ik}) = \begin{pmatrix} e^{-\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

\*52 ここで  $ds^2$  の表式 (100.2) における極座標  $r$  を, Newton の万有引力の法則 (99.4):  $\phi = -\frac{km}{r}$  における  $r$  と同一視した。

の非対角成分はゼロだから、Christoffel 記号 (86.3):

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{im}(\partial_k g_{lm} + \partial_l g_{mk} - \partial_m g_{kl})$$

の  $i, k, l$  が相異なるものはゼロになる。よってゼロでない Christoffel 記号  $\Gamma^i_{kl}$  は、対称な添字  $k, l$  が等しいものと異なるものに分類すると

$$\text{対称な添字が等しいもの} \quad \Gamma^i_{kk} = -\frac{1}{2}g^{ii}\partial_i g_{kk} \quad (i, k \text{ について和をとらない}) \quad (173)$$

$$\text{対称な添字が異なるもの} \quad \Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2}g^{ii}\partial_k g_{ii} (= \Gamma^i_{ik}) \quad (i \neq k, i \text{ について和をとらない}) \quad (174)$$

に限られる。以下、 $r$  による微分をプライムで表す。

式 (173) の形の Christoffel 記号は以下の 16 個である。

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2}e^{-\nu}\partial_0 e^\nu = 0, & \Gamma^0_{11} &= \frac{1}{2}e^{-\nu}\partial_0 e^\lambda = 0, \\ \Gamma^0_{22} &= \frac{1}{2}e^{-\nu}\partial_0 r^2 = 0, & \Gamma^0_{33} &= \frac{1}{2}e^{-\nu}\partial_0(r^2 \sin^2 \theta) = 0, \\ \Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2}(-e^{-\lambda})(-e^\nu)' = \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}, & \Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}(-e^{-\lambda})(e^{-\lambda})' = \frac{\lambda'}{2}, \\ \Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}(-e^{-\lambda})(-r^2)' = -re^{-\lambda}, & \Gamma^1_{33} &= \frac{1}{2}(-e^{-\lambda})(-r^2 \sin^2 \theta)' = -re^{-\lambda} \sin^2 \theta, \\ \Gamma^2_{00} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\partial_\theta e^\nu = 0, & \Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\partial_\theta e^{-\lambda} = 0, \\ \Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\partial_\theta(-r^2) = 0, & \Gamma^2_{33} &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\partial_\theta(-r^2 \sin^2 \theta) = -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma^3_{00} &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right)\partial_\phi e^\nu = 0, & \Gamma^3_{11} &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right)\partial_\phi(-e^\lambda) = 0, \\ \Gamma^3_{22} &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right)\partial_\phi(-r^2) = 0, & \Gamma^3_{33} &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right)\partial_\phi(-r^2 \sin^2 \theta) = 0. \end{aligned}$$

式 (174) 左辺の形の Christoffel 記号は以下の 12 個である。

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{10} &= \frac{1}{2}e^{-\nu}\partial_r e^\nu = \frac{\nu'}{2}, & \Gamma^0_{20} &= \frac{1}{2}e^{-\nu}\partial_\theta e^\nu = 0, \\ \Gamma^0_{30} &= \frac{1}{2}e^{-\nu}\partial_\phi e^\nu = 0, & \Gamma^1_{01} &= \frac{1}{2}(-e^{-\lambda})\partial_0(-e^\lambda) = 0, \\ \Gamma^1_{21} &= \frac{1}{2}(-e^{-\lambda})\partial_\theta(-e^\lambda) = 0, & \Gamma^1_{31} &= \frac{1}{2}(-e^{-\lambda})\partial_\phi(-e^\lambda) = 0, \\ \Gamma^2_{02} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\partial_\theta(-r^2) = 0, & \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\partial_r(-r^2) = \frac{1}{r}, \\ \Gamma^2_{32} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\partial_\phi(-r^2) = 0, & \Gamma^3_{03} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right)\partial_0(-r^2 \sin^2 \theta) = 0, \\ \Gamma^3_{13} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right)\partial_r(-r^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{r}, & \Gamma^3_{23} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right)\partial_\theta(-r^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{\tan \theta}. \end{aligned}$$

ここから  $G^0_0, G^1_1$  を求めるのに必要な Ricci テンソル  $R_{ik}$  を定義式

$$R_{ik} \equiv R^l_{ilk}, \quad R^i_{klm} \equiv \partial_l \Gamma^i_{km} - \partial_m \Gamma^i_{kl} + \Gamma^i_{nl} \Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm} \Gamma^n_{kl}$$

に従って計算すると以下のようになる.

$$\begin{aligned}
R_{00} &= R^i_{0i0} \\
&= \partial_i \Gamma^i_{00} - \partial_0 \Gamma^i_{0i} + \Gamma^i_{ik} \Gamma^k_{00} - \Gamma^i_{0k} \Gamma^k_{0i} \\
&= \partial_1 \Gamma^1_{00} - 0 + \Gamma^i_{i1} \Gamma^1_{00} - \sum \Gamma^i_{0k} \Gamma^k_{0i} \quad \left( \sum \text{は } (i, k) = (0, 1), (1, 0) \text{ の和} \right) \\
&= \left( \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} \right)' + \left( \frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} \times 2 \right) \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} - 2 \times \frac{\nu'}{2} \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} \\
&= \left( \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu' \lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right) e^{\nu-\lambda},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= R^i_{1i1} \\
&= \partial_i \Gamma^i_{11} - \partial_1 \Gamma^i_{1i} + \Gamma^i_{ik} \Gamma^k_{11} - \Gamma^i_{1k} \Gamma^k_{1i} \\
&= \partial_1 \Gamma^1_{11} - \partial_1 \Gamma^i_{1i} + \Gamma^i_{i1} \Gamma^1_{11} - \Gamma^i_{1i} \Gamma^i_{1i} \\
&= \left( \frac{\lambda'}{2} \right)' - \left( \frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} \times 2 \right)' + \left( \frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} \times 2 \right) \frac{\lambda'}{2} - \left( \frac{\nu'}{2} \right)^2 - \left( \frac{\lambda'}{2} \right)^2 - \left( \frac{1}{r} \right)^2 \times 2 \\
&= -\frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda' \nu'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'^2}{4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{22} &= R^i_{2i2} \\
&= \partial_i \Gamma^i_{22} - \partial_2 \Gamma^i_{2i} + \Gamma^i_{ik} \Gamma^k_{22} - \Gamma^i_{2k} \Gamma^k_{2i} \\
&= \partial_1 \Gamma^1_{22} - \partial_2 \Gamma^3_{23} + \Gamma^i_{i3} \Gamma^3_{22} - \sum \Gamma^i_{2k} \Gamma^k_{2i} \quad \left( \sum \text{は } (i, k) = (1, 2), (2, 1), (3, 3) \text{ の和} \right) \\
&= (-r e^{-\lambda})' - \partial_\theta (\cot \theta) + \left( \frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} \times 2 \right) (-r e^{-\lambda}) - \frac{1}{r} \times 2 - \cot^2 \theta \\
&= \left\{ -1 + r \left( \frac{\lambda'}{2} - \frac{\nu'}{2} \right) \right\} e^{-\lambda} + 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{33} &= R^i_{3i3} \\
&= \partial_i \Gamma^i_{33} - \partial_3 \Gamma^i_{3i} + \Gamma^i_{ik} \Gamma^k_{33} - \Gamma^i_{3k} \Gamma^k_{3i} \\
&= \sum_{i=1,2} \partial_i \Gamma^i_{33} - 0 + (\Gamma^i_{i1} \Gamma^1_{33} + \Gamma^3_{32} \Gamma^2_{33}) - \sum \Gamma^i_{3k} \Gamma^k_{3i} \quad \left( \sum \text{は } (i, k) = (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2) \text{ の和} \right) \\
&= (-r \sin^2 \theta e^{-\lambda})' + \partial_\theta (-\sin \theta \cos \theta) + \left( \frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} \times 2 \right) (-r \sin^2 \theta e^{-\lambda}) \\
&\quad + \cot \theta (-\sin \theta \cos \theta) - (-\sin \theta \cos \theta) \cot \theta \times 2 - \frac{1}{r} \times 2 \\
&= - \left\{ 1 + r \left( \frac{\lambda'}{2} - \frac{\nu'}{2} \right) \right\} e^{-\lambda} \sin^2 \theta + \sin^2 \theta
\end{aligned}$$

さらに  $R^i_k = g^{il} R_{lk}$  やスカラー曲率  $R = g^{ik} R_{ik}$  において  $(g_{ik})$  の非対角成分がゼロであることに注意すると

$$\begin{aligned}
R^0_0 &= g^{00} R_{00} = e^{-\nu} R_{00}, & R^1_1 &= g^{11} R_{11} = -e^{-\lambda} R_{11}, \\
R^2_2 &= g^{22} R_{22} = -\frac{1}{r^2} R_{22}, & R^3_3 &= g^{33} R_{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} R_{33}, \\
R &= e^{-\lambda} \left( \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu' \lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right) \Leftarrow g^{00} R_{00}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +e^{-\lambda} \left( \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\lambda'}{r} \right) \Leftarrow g^{11}R_{11} \\
& \qquad + e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{2r} - \frac{\lambda'}{2r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \Leftarrow g^{22}R_{22} \\
& \qquad + e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{2r} - \frac{\lambda'}{2r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \Leftarrow g^{33}R_{33} \\
& = e^{-\lambda} \left( \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + 2\frac{\nu'}{r} - 2\frac{\lambda'}{r} + \frac{2}{r^2} \right) - \frac{2}{r^2}
\end{aligned}$$

を得るから, Einstein 方程式を書き下すと

$$\begin{aligned}
0 = G^0_0 &= e^{-\lambda} \left( \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right) \Leftarrow R^0_0 \\
& + e^{-\lambda} \left( -\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'}{r} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \Leftarrow -\frac{1}{2}\delta^0_0 R \\
& = -e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \tag{175}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = G^1_1 &= e^{-\lambda} \left( \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\lambda'}{r} + \frac{\nu'^2}{4} \right) \Leftarrow R^1_1 \\
& + e^{-\lambda} \left( -\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \Leftarrow -\frac{1}{2}\delta^1_1 R \\
& = -e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \tag{176}
\end{aligned}$$

となる.

$$\text{式 (175)} \Leftrightarrow 1 = e^{-\lambda}(1 - r\lambda') = (re^{-\lambda})', \quad \therefore e^{-\lambda} = 1 - \frac{r_g}{r} \quad (r_g \text{は積分定数}).$$

さらに式 (175), 式 (176) を辺々引くと

$$(\lambda + \nu)' = 0, \quad \therefore \lambda + \nu = \text{const}, \quad \therefore e^\nu = \text{const} \times e^{-\lambda} = \text{const} \times \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$$

となる. 第 3 式の const に対して  $\sqrt{\text{const}} \times t \rightarrow t$  と時間の尺度を改めると

$$e^{\nu(r)} c^2 dt^2 = \text{const} \times \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2$$

となり, Schwarzschild 解 (100.14):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (cdt)^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}$$

を得る.

## 参考文献

- [1] L.D. ランダウ, E.M. リフシッツ, 2009, ランダウ＝リフシッツ物理学小教程 力学・場の理論 (水戸巖, 恒藤敏彦, 廣重徹訳), 株式会社筑摩書房, 東京.
- [2] 内山龍雄, 2014, 相対性理論 物理テキストシリーズ 8, 株式会社岩波書店, 東京.
- [3] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, 2013, ランダウ＝リフシッツ理論物理学教程 力学 (増訂第 3 版)(広重徹, 水戸巖訳), 東京図書株式会社, 東京.
- [4] ファインマンほか, 2014, ファインマン物理学 I (坪井忠二訳), 株式会社岩波書店, 東京.
- [5] F. マンドル, G. ショー, 2011, 場の量子論 第 1 巻 量子電磁力学 (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [6] B. ツヴィーバハ, 2013, 初級講座 弦理論《基礎編》(樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [7] 砂川重信, 2014, 電磁気学 物理テキストシリーズ 4, 株式会社岩波書店, 東京.
- [8] 江沢洋, 中村孔一, 山本義隆, 2022, 演習詳解 力学 [第 2 版], 株式会社 筑摩書房, 東京.
- [9] B. ツヴィーバハ, 2018, 初級講座 弦理論《発展編》(樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [10] 今井功, 2003, 流体力学 物理テキストシリーズ 9, 株式会社岩波書店, 東京.
- [11] 大栗博司, 2013, 大栗先生の超弦理論入門 九次元世界にあった究極の理論, 株式会社講談社, 東京.
- [12] 小野寺嘉孝, 2014, 物理のための応用数学, 株式会社裳華房, 東京.
- [13] L.D. ランダウ, E.M. リフシッツ, 2019, 量子力学ランダウ＝リフシッツ物理学小教程 (好村滋洋, 井上健男訳), 株式会社筑摩書房, 東京.
- [14] 長沼伸一郎, 2013, 物理数学の直観的方法〈普及版〉理工系で学ぶ数学「難所突破」の特効薬, 株式会社講談社, 東京, 75–76.
- [15] 寺沢徳雄, 2013, 振動と波動 物理テキストシリーズ 7, 株式会社岩波書店, 東京.
- [16] ファインマンほか, 2012, ファインマン物理学 II (富山小太郎訳), 株式会社岩波書店, 東京.
- [17] 山本義隆, 中村孔一, 2012, 朝倉物理学大系 2 解析力学 II, 株式会社朝倉書店, 東京.
- [18] 矢野健太郎, 石原繁, 2013, 基礎解析学 (改訂版), 株式会社裳華房, 東京.
- [19] J.J. サクライ, 2010, 上級量子力学 第 II 巻 共変な摂動論 (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [20] シュッツ, 2010, 第 2 版シュッツ 相対論入門 (江里口良治, 二間瀬敏史訳), 丸善株式会社, 東京.
- [21] 佐武一郎, 2017, 数学選書 1 線型代数学 (新装版), 株式会社裳華房, 東京.
- [22] 山本義隆, 中村孔一, 2013, 朝倉物理学大系 1 解析力学 I, 株式会社朝倉書店, 東京.
- [23] P.A.M. デイラック, 2012, 一般相対性理論 (江沢洋訳), 株式会社筑摩書房, 東京.
- [24] パウリ, 1980, 相対性理論 (内山龍雄訳), 株式会社講談社, 東京.
- [25] 内山龍雄, 2016, 一般相対性理論, 裳華房, 東京.
- [26] 九後汰一郎, 2018, 新物理学シリーズ 23 ゲージ場の量子論, 株式会社培風館.
- [27] 今村勤, 1978, 物理とグリーン関数, 株式会社岩波書店, 東京, 197–198, 235–236.