

F. マンドル/G. ショー 『場の量子論』
第2巻 素粒子の相互作用

本稿は場の量子論の教科書

F. マンドル/G. ショー, 2013, 場の量子論 第 2 巻 素粒子の相互作用 (樺沢宇紀訳),
丸善プラネット株式会社, 東京.

を, 要点と途中計算の分離した見通しの良い自己完結的テキストへと再構成し, さらに補足・考察を加えたノートである. ただし本稿は教科書の内容をほぼ網羅しているものの, 章末問題をはじめとして内容を多少, 取捨選択してある. さらに本稿には筆者の誤りや勘違いが潜んでいるかもしれないことをあらかじめ断っておく. 言うまでもなく, 原著を当たるに越したことはない.

なお本稿の他にも理論物理の各種ノートを以下のページで公開している (F. マンドル/G. ショー『場の量子論』第 1 巻のノートを含む).

<http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/>

目次

第 11 章 ゲージ理論	2
第 12 章 場の理論の方法	24
第 13 章 径路積分	62
第 14 章 量子色力学	85
第 15 章 漸近的自由性	107
第 16 章 弱い相互作用	132
第 17 章 弱い相互作用のゲージ理論	151
第 18 章 自発的な対称性の破れ	162
第 19 章 電弱標準理論	172
付録 A 教科書全体の要約	190
付録 B Yang-Mills 理論の局所ゲージ不変性	234
付録 C クォークの電弱相互作用	245

第 1 巻における「第 2 版への序」からの引用 本書の構成は次のようになっている. 前半の 10 章は正準形式によって QED を扱っており, この部分は初版からあまり変更を施していない. 後半では, まず簡単にゲージ理論を紹介してから (第 11 章), QCD に関係した話題を扱う部分 (第 12–15 章) と, 電弱統一理論を扱う部分 (第 16–19 章) を与えてある. これらは互いに独立した部分として読むことができる.

注意 本稿の付録は教科書のものとは別内容である.

第 11 章 ゲージ理論

強い/弱い相互作用 …… 古典的対応物がなく，相互作用の形が不明

- 理論的制約
 - Lorentz 不変性，局所性 (\mathcal{L}_I の含む場の値が同じ時空点で評価される)，繰り込み可能性
- 実験的制約
 - 素粒子のスペクトル，対称性と保存則

Yagn(ヤン) と Mills(ミルズ) …… 特に繰り込み可能性とゲージ不変性を重視してゲージ理論を構築
(電磁相互作用，強い/弱い相互作用はその実例)

- 強い相互作用 (第 11–15 章)
 - 相互作用 \mathcal{L}_I は単純だが，摂動論が有効でない
- 電弱統一理論 (第 16–19 章)
 - 相互作用 \mathcal{H}_I は複雑だが，摂動論が有効である

11.1 最も単純なゲージ理論 : QED

ゲージ理論を構築する際の手本として，QED の復習を行う。

自由 Dirac 場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi$ において極小置換

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu$$

を施すと，電磁場との相互作用する Dirac 場のラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I, \quad \mathcal{L}_I \equiv -q\bar{\psi}\not{A}\psi$$

が得られる。このとき電磁場のゲージ変換 $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$ と同時に Dirac 場に局所的な位相変換

$$\psi(x) \rightarrow \psi(x)e^{-iqf(x)}, \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x)e^{iqf(x)}$$

を施せば，ラグランジアン密度 \mathcal{L} は (従って理論は) 不変に留まる。電磁場と Dirac 場の変換を一括してゲージ変換と呼ぶ。逆に言えば，Dirac 場の局所的位相変換に対して不変なラグランジアン密度を得るには $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$ と変換するゲージ場 A_μ を導入して，極小置換 $\partial_\mu \rightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu$ を施せば良い。

ゲージ不変性の観点からは，極小置換によって得られないゲージ不変な項をラグランジアン密度に付け加えた理論も考えられる。しかしながら，そのような“極小でない”相互作用は，繰り込み可能性によって排除される [11.3 節]。

11.1 について

■ $D_\mu\psi$ のゲージ変換 (11.9) の確認

$$\begin{aligned}
 D_\mu\psi &= (\partial_\mu + iqA_\mu)\psi \\
 \rightarrow [\partial_\mu + iq(A_\mu + \partial_\mu f)][\psi e^{-iqf}] \\
 &= (\partial_\mu\psi)e^{-iqf} - iq(\partial_\mu f)e^{-iqf} + iqA_\mu\psi e^{-iqf} + iq(\partial_\mu f)\psi e^{-iqf} \\
 &= e^{-iqf} D_\mu\psi.
 \end{aligned}$$

11.2 量子色力学

量子色力学 (quantum chromodynamics : QCD) は強い相互作用を記述するゲージ理論であり、いわゆる色電荷 (color charge) が中心的な役割を担う。

本節では、まず色の概念を、単純なクォーク模型の文脈において導入する。そして QED からの類推に基づき、ただし通常の電荷の代わりに色電荷の保存から出発して、ゲージ理論としての QCD の定式化を行う。(p.270, 序文より)

11.2.1 色と閉じ込め

クォークはスピン 1/2 の粒子であり、質量と電荷の異なる 6 種類の“香り” (フレーバー) u, d, c, s, t, b が存在する。

	軽い	\longleftrightarrow	重い
電荷 $2e/3$	u : up	c : charm	t : top
電荷 $-e/3$	d : down	s : strange	b : bottom

重粒子 (バリオン) と中間子 (メソン) は以下のようなクォークの束縛状態であり (クォーク q の反クォークを \bar{q} と表記), これらを総称して強粒子 (ハドロン) と呼ぶ [1, pp.5-7].

- 重粒子 (バリオン) $\sim qqq$
 - 例: 陽子 (uud), 中性子 (udd)
- 中間子 (メソン) $\sim q\bar{q}$
 - パイオン: $\pi^+(u\bar{d}), \pi^-(\bar{u}d), \pi^0((u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2})$

さて、単純なクォーク模型では解釈しがたい事実が 2 つある:

- 実験的に自由クォーク q やクォーク対 $q\bar{q}$ [電荷 $4e/3, -2e/3$], その他の分数電荷状態が観測されないこと
- 3 個のクォークから成るバリオンが, そのスピン-統計性 (4.3.1 節) にも関わらずクォーク模型では全体として対称な波動関数によって記述されること
[クォークはスピン 1/2 を持つから, その複合粒子の波動関数は反対称でなければならない]

この問題は, クォークの色と呼ばれる自由度を導入し, 色の閉じ込め条件を課すことで自然に解消・説明される。

色の自由度の導入から始めよう。

- 色の波動関数 χ^c
 - 色状態を表す。
 - 3つの色の固有状態 $\chi^c = r, g, b$ (red, green, blue) には色スピノル

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が充てられる。

- 色 (電荷の) 演算子 \hat{F}_i ($i = 1, 2, \dots, 8$)
 - χ^c に作用する 8種類の 3×3 の Hermite 行列。
(スピン波動関数に作用する, スピン演算子を表す Pauli 行列の類似物。)
 - 慣例として [Gell-Mann (ゲルマン) 行列 [2, p.138]]

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(の 1/2 倍) $\hat{F}_i = \frac{1}{2}\lambda_i$ が用いられる。

- 色演算子の交換関係

$$[\hat{F}_i, \hat{F}_j] = i f_{ijk} \hat{F}_k. \quad (k = 1, 2, \dots, 8 \text{ について和をとる})$$

“構造定数” f_{ijk} は完全反対称であり, ゼロでない独立な成分は以下。

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = \frac{1}{2}, \quad f_{156} = f_{367} = -\frac{1}{2}, \quad f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- \hat{F}_3 と \hat{F}_8 だけが可換な組であり,
3つの色状態 $\chi^c = r, g, b$ は \hat{F}_3 と \hat{F}_8 の同時固有状態である (固有値は表 1)。

- 多クォーク状態 h
 - 各クォークに対する色波動関数 $\chi_1^c = r_1, g_1, b_1, \text{etc.}$ の積

$$\chi_h^c \equiv \chi_1^c \chi_2^c \cdots \chi_n^c$$

で記述される。

- 電荷演算子の作用は分配則

$$\hat{F}_i(\chi_1^c \chi_2^c) = (\hat{F}_i \chi_1^c) \chi_2^c + \chi_1^c (\hat{F}_i \chi_2^c), \quad \text{etc.}$$

で決まる。 → 固有値 F_3, F_8 は表 1 の値の和。

さて, ここで自由な強粒子の色波動関数 χ_h^c は

$$\hat{F}_i \chi_h^c = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 8)$$

表 1 色電荷の固有値 F_3, F_8

	クォーク		反クォーク		
	F_3	F_8	F_3	F_8	
r	1/2	$1/2\sqrt{3}$	\bar{r}	-1/2	$-1/2\sqrt{3}$
g	-1/2	$1/2\sqrt{3}$	\bar{g}	1/2	$-1/2\sqrt{3}$
b	0	$-1/\sqrt{3}$	\bar{b}	0	$1/\sqrt{3}$

を満たすと仮定する．これを色の閉じ込めの仮説という．このとき特に色電荷の固有値は

$$F_3 = F_8 = 0$$

とならなければならない．すると表 1 の値より，

- 自由クォーク q やクォーク対 qq は存在できない．
- クォーク対 $q\bar{q}$ や重粒子 qqq は許容される．

この結果は観測と合っている．さらに重粒子については，閉じ込め条件 $\hat{F}_i \chi_h^c = 0$ を完全に考慮すると，色の波動関数が (規格化因子を除いて)

$$\chi_B^c = \varepsilon_{ijk}(r_i g_j b_k) \quad (1)$$

と定まる (3 つのクォーク $i, j, k = 1, 2, 3$ について和をとる，導出は下記)．色の波動関数 χ_B^c が同種クォークの入れ替えに関する反対称性を担っているので [「11.2.1 について」で補足]，波動関数の空間-スピン部分 ψ が対称であるとき，バリオンの全波動関数 $\Psi = \psi \chi_B^c$ は反対称となることが保証される．こうしてスピン-統計の問題も解決する．

11.2.1 節，式の導出など

■重粒子 (バリオン) の色波動関数 (1) の導出 表 1 の値を見ると，色電荷の固有値が $F_3 = F_8 = 0$ を満たすのは，重粒子を構成する 3 つのクォークの色状態が相異なる場合に限られることが分かる．よって重粒子の波動関数は

$$\chi_B^c = \alpha_1(r_1 g_2 b_3) + \alpha_2(g_1 r_2 b_3) + \alpha_3(b_1 r_2 g_3) + \alpha_4(b_1 g_2 r_3) + \alpha_5(g_1 b_2 r_3) + \alpha_6(r_1 b_2 g_3) \quad (2)$$

という形をとる (α_i は定数) [本稿次節で補足]．さらに例えば閉じ込め条件 $\hat{F}_1 \chi_h^c = 0$ を考慮すると，

$$\alpha_1 = -\alpha_2, \quad \alpha_3 = -\alpha_4, \quad \alpha_5 = -\alpha_6$$

が見出される [本稿次節で補足]．他の閉じ込め条件 $\hat{F}_i \chi_h^c = 0$ から同様の関係が得られ，それらをまとめると波動関数 (1) を得る．

11.2.1 について

■クォークの波動関数 $\Psi = \psi \chi^c$ (p.271 下から 4 行目) や重粒子 (バリオン) の波動関数 $\Psi = \psi \chi_B^c$ (p.274 下から 3 行目) について 空間-スピン波動関数 ψ と色の波動関数 χ^c の行列としての積が定義されている必要はない．異なる状態空間のケットを並べて $|\alpha\rangle |\beta\rangle$ と書くのと同様に，単に波動関数を $\Psi = \psi \chi^c$ と並べているだけと考えられる．多クォーク状態 h の色波動関数 $\chi_h^c \equiv \chi_1^c \chi_2^c \cdots \chi_n^c$ (p.273, 1.11) についても同様である．

なお、全波動関数 Ψ と次節の Dirac 場 (11.19a): $\Psi^f(x)$ の混同に注意する。

■p.272, 1.3 の非相対論的なスピン波動関数 $\chi = \alpha, \beta$ について Pauli の 2 成分 (固有) スピノル

$$\alpha = \begin{pmatrix} \langle +|+ \rangle \\ \langle -|+ \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \langle +|- \rangle \\ \langle -|- \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。スピン演算子を表す Pauli 行列がスピン波動関数 χ に作用することと併せて、例えば文献 [3, pp.220-222] を参照。

■Gell-Mann 行列 (11.11) と構造定数 f_{ijk} について なるほど、Gell-Mann 行列 λ_i は最初の 3 つが、Pauli 行列 σ_i を

$$\lambda_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の形に含んでいるという意味で、Pauli 行列の一般化である。そして

容易に推測できるように、これらの 3×3 行列を同じように含む 4×4 行列を作れるし、さらにそれを含む…、というように続けることができる [4, p.105].

とは言え結局、SU(3) の基底を Gell-Mann 行列 λ_i に選べることは、SU(2) の基底を Pauli 行列 σ_i に選べることと同様に非自明である。SU(N) の生成子 T_i をどのように構成すれば良いかはあくまで数学的な問題であって*1、ひとまずそれらが SU(N) の $(N^2 - 1)$ 個の独立な基底を成す Hermite 行列であることが納得できれば良いとは言える (11.2.2 節のノート、あるいは付録 B.1 を参照)。

次に確認しなければならないのは、SU(3) の生成子 $T_i \equiv \hat{F}_i = \lambda_i/2$ の交換関係 (11.12a): $[T_i, T_j] = if_{ijk}T_k$ における構造定数 f_{ijk} の具体的な値である。一般に規格直交条件 $\text{Tr}(T_i T_j) = \frac{1}{2}\delta_{ij}$ を満たす生成子 T_i に対して、構造定数は

$$if_{ijk} = 2\text{Tr}([T_i, T_j]T_k)$$

で定まる (再び付録 B.1 を参照)。そこで準備として行列の積をいくらか具体的に計算すると、例えば

$$T_4^2 = T_5^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_4 T_5 = -T_5 T_4 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

である。ここから規格直交性 $\text{Tr}(T_i T_j) = \frac{1}{2}\delta_{ij}$ が、少なくとも $i, j = 4, 5$ に対して成り立っていることが見て取れる。また上式を用いて交換子 $[T_4, T_5]$ を評価すると

$$[T_4, T_5]T_8 = \frac{1}{4\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}, \quad \therefore f_{458} = \frac{2}{i}\text{Tr}([T_4, T_5]T_8) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となって、教科書 p.273 の表 11.1 に示された構造定数の値の 1 つが得られる。

■色演算子 (11.11) の添字 $i = 1, 2, \dots, 8$ について 色電荷は r, g, b の 3 種類であるにも関わらず、後に i は色電荷の添字と呼ばれる。(これに対し $a, b, c, \dots = r, g, b$ はクォークの色の添字と呼ばれる。例えば p.370 の脚注を参照。) これは香りの添字 $f = d, u, s, c, b, t$ (11.2.2 節) と区別するための呼び方と考えられる。

*1 文献 [4, pp.194-197] には SU(N) 生成子・一般化 Gell-Mann 行列への言及がある。

■ 「3つの色状態 $\chi^c = r, g, b$ は \hat{F}_3 と \hat{F}_8 の両方の固有状態にあたる」 (p.273, l.5,6) について Gell-Mann 行列 (11.11b) は λ_3, λ_8 のみ非対角成分がゼロとなっていることに注目する。

■ 多クォーク状態 h の色波動関数 $\chi_h^c \equiv \chi_1^c \chi_2^c \cdots \chi_n^c$ (p.273, l.11) について 右辺 $\chi_1^c \chi_2^c \cdots \chi_n^c$ は縦ベクトルの積としては定義されない。異なるクォークの色状態は異なるベクトル空間に属しており、単に対応する色波動関数を並べているだけと考えられる。

なお h は hadron の頭文字と考えられる。

■ 「反クォーク状態 $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$ については、……色電荷の符号が逆転する」 (p.273 下2行) について そのことを「次節において導出する」 (p.273 脚注) 際に、本節における場の量子論に移行する前段階の色スピノル $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$ を具体的に特定しておく必要はない。

■ p.274, l.13 の重粒子 (バリオン) の波動関数 [本稿の式 (2)] について 「 $\chi_1^c = r_1, g_1, b_1$ etc.」 (式 (11.14) の1行上) とあるように、各 χ_i^c は r_i, g_i, b_i のいずれかであり、その線形結合の状態はとらない。

■ 「 $\alpha_1 = -\alpha_3$, etc.」 (p.274 下から10行目) について 式 (11.13):

$$\hat{F}_1 r = \frac{1}{2} g, \quad \hat{F}_1 g = \frac{1}{2} r, \quad \hat{F}_1 b = 0$$

を用いると、

$$\begin{aligned} \hat{F}_1(r_1 g_2 b_3) &= \hat{F}_1(r_2 g_1 b_3) = \frac{1}{2} g_1 g_2 b_3 + \frac{1}{2} r_1 r_2 b_3, \\ \hat{F}_1(r_2 g_3 b_1) &= \hat{F}_1(r_3 g_2 b_1) = \frac{1}{2} b_1 g_2 g_3 + \frac{1}{2} b_1 r_2 r_3, \\ \hat{F}_1(r_3 g_1 b_2) &= \hat{F}_1(r_1 g_3 b_2) = \frac{1}{2} r_1 b_2 r_3 + \frac{1}{2} g_1 b_2 g_3 \end{aligned}$$

となることによる。

■ 重粒子 (バリオン) の色波動関数 (1) の反対称性について

$$\chi_B^c = \varepsilon_{ijk} r_i g_j b_k = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

と書くと、これは行列式の列の入れ替えに、したがってクォーク 1,2,3 の入れ替えに関して反対称となっていることが見て取れる。行列式を展開すると、色波動関数の式 (2) において

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 1, \quad \alpha_4 = -1, \quad \alpha_5 = 1, \quad \alpha_6 = -1$$

と同定される。

11.2.2 大域的な位相不変性と色電荷の保存

香り f , 色 r, g, b のクォークを表す Dirac 場 $\psi_{r,g,b}^f(x)$ を香りごとに

$$\Psi^f = \begin{pmatrix} \psi_r^f \\ \psi_g^f \\ \psi_b^f \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}^f = \left(\bar{\psi}_r^f \quad \bar{\psi}_g^f \quad \bar{\psi}_b^f \right)$$

とまとめると、自由クォークのラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}^f(i\cancel{\partial} - m_f)\Psi^f = \sum_{c=r,g,b} \bar{\psi}_c^f(i\cancel{\partial} - m_f)\psi_c^f$$

で与えられる (繰り返された香りの添字 $f = d, u, s, c, b, t$ について和をとる). これは大域的位相変換

$$\Psi^f(x) \rightarrow e^{i\alpha_i\lambda_i/2}\Psi^f(x), \quad \bar{\Psi}^f(x) \rightarrow \bar{\Psi}^f(x)e^{-i\alpha_i\lambda_i/2}$$

($\alpha \equiv \{\alpha_i\}$ は実パラメーター) の下で不変である.

SU(3) 変換 行列 $U(\alpha) = e^{i\alpha_i\lambda_i/2}$ は $\det U(\alpha) = 1$ を満たす 3×3 のユニタリ行列である [本稿次節を参照]. このため $U(\alpha)$ による上記の大域的位相変換は SU(3) 変換と呼ばれる.

この不変性に付随する、保存するカレントと色電荷は

$$S_i^\mu(x) = \frac{1}{2}\bar{\Psi}^f(x)\gamma^\mu\lambda_i\Psi^f(x),$$

$$\hat{F}_i = \int d^3x S_i^0(x) = \frac{1}{2} \int d^3x \Psi^{f\dagger}(x)\lambda_i\Psi^f(x) \quad (i = 1, 2, \dots, 8)$$

である (2.4 節の一般論を参照). Gell-Mann 行列 λ_i の具体的な表式と場の Fourier 展開を利用すると,

$$\hat{F}_3 = \frac{1}{2} \int d^3x N [\psi_r^{f\dagger}(x)\psi_r^f(x) - \psi_g^{f\dagger}(x)\psi_g^f(x)]$$

$$= \frac{1}{2}(N_r - \bar{N}_r) - \frac{1}{2}(N_g - \bar{N}_g), \quad \text{etc.}$$

が得られる (問題 11.1). この結果は前節の表 1 における色電荷の固有値と整合している.

11.2.2 について

■3 成分場 (11.19a) について 4 成分スピノル $\psi_{r,g,b}^f(x)$ を各成分に持つ、あくまで 3 成分の場であると見なして、 3×3 行列 λ_i との積の計算などを行う (例えばカレントの式 (11.23) において).

■行列 $U(\alpha) = e^{i\alpha_i\lambda_i/2}$ のユニタリー性 (p.275) について 各 λ_i の Hermite 性により $U^\dagger(\alpha) = e^{-i\alpha_i\lambda_i/2}$ となるので, Baker-Hausdorff の補助定理を用いると [3, p.129], ユニタリー性

$$e^{\pm i\alpha_i\lambda_i/2}e^{\mp i\alpha_i\lambda_i/2} = 1$$

が確かめられる. 同じことは次のように理解することもできる. すなわち

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 4[\hat{F}_i, \hat{F}_j] = 4if_{ijk}\hat{F}_k \neq 0$$

ではあるものの,

$$[\alpha_i\lambda_i, \alpha_j\lambda_j] = 4if_{ijk}\alpha_i\alpha_j\hat{F}_k = 0$$

は成り立つので (添字 i, j に関する $\alpha_i\alpha_j$ の対称性と f_{ijk} の反対称性による), 今の場合には “指数法則”

$$e^{\pm i\alpha_i\lambda_i/2}e^{\mp i\alpha_i\lambda_i/2} = 1$$

が成立する.

大域的位相変換 (11.21) に対するラグランジアン密度 (11.20) の不変性はここから理解できる.

■SU(3)Yang-Mills 理論 自由クォークに関するここまでの議論では、3種類の色 r, g, b の自由度に対して色演算子 \hat{F}_i が8種類あることは天下りに説明されている。以下ではこの点に関する背景を簡単に見ておこう [2, pp.137–138, p.145].

N 種類の Dirac 場

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = (\bar{\psi}_1 \quad \bar{\psi}_2 \quad \cdots \quad \bar{\psi}_N)$$

に対するラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\hat{\phi} - m)\psi = \sum_{\alpha=1}^N \bar{\psi}_\alpha(i\hat{\phi} - m)\psi_\alpha$$

は、 $N \times N$ のユニタリー行列 $U = e^{iH}$ (したがって H は Hermite 行列) による大域的位相変換 $\psi \rightarrow U\psi$ の下で不変に留まる。このような対称変換は2回繰り返して行っても、 \mathcal{L} を不変に保つ単一の N 次ユニタリー行列による変換となるから、 $U(N)$ 群と呼ばれる群を成す。ところで一般に $N \times N$ の Hermite 行列 H は N^2 個の独立な実数によって特定できる [1, p.254].

証明 Hermite 性より H の N 個の対角成分は全て実数であり、また下三角成分は上三角成分を与えると完全に定まる。上三角成分は全部で $(N^2 - N)/2$ 個あり、その各々が2つの実数で指定されるので、Hermite 行列 H は合計

$$N + 2 \times \frac{N^2 - N}{2} = N^2 \text{ 個}$$

の実数パラメーターを持つ。

そこで N^2 個の適当な Hermite 行列 T_i と実パラメーター α_i を用いて、一般に

$$H = \sum_i \alpha_i T_i, \quad U = \exp\left(i \sum_i \alpha_i T_i\right)$$

と書くことができる (このとき T_i を変換の生成子と呼ぶ)。

次に QCD を念頭に、 $N = 3$ の場合を考えよう。我々の目的のためには、生成子 T_i の具体的な行列表現に頼って議論を進めれば充分である。このとき $N^2 = 9$ 個の T_i として、Gell-Mann 行列 (11.11b) の $1/2$ 倍 (11.11a):

$$T_i = \frac{1}{2} \lambda_i (\equiv \hat{F}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, 8)$$

と、単位行列 $\mathbf{1}$ に比例した $T_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{1}$ を選ぶことができる。 T_0 を生成子とするユニタリー行列

$$\begin{aligned} \exp(i\alpha_0 T_0) &= \exp\left(i \frac{\alpha_0}{\sqrt{6}} \mathbf{1}\right) = 1 + i \frac{\alpha_0}{\sqrt{6}} \mathbf{1} + \frac{1}{2!} \left(i \frac{\alpha_0}{\sqrt{6}}\right)^2 \mathbf{1}^2 + \cdots = \left[1 + i \frac{\alpha_0}{\sqrt{6}} + \frac{1}{2!} \left(i \frac{\alpha_0}{\sqrt{6}}\right)^2 + \cdots\right] \mathbf{1} \\ &= \exp\left(i \frac{\alpha_0}{\sqrt{6}}\right) \mathbf{1} \end{aligned}$$

による変換

$$\psi \rightarrow \exp(i\alpha_0 T_0)\psi, \quad \text{i.e.} \quad \psi_\alpha \rightarrow \exp\left(i \frac{\alpha_0}{\sqrt{6}}\right) \psi_\alpha$$

は $U(1)$ 部分群を成す。また残りの8個の生成子 \hat{F}_i はいずれもトレースがゼロになっていることに注目すると、 $\exp\left(i \sum_{i=1}^8 \alpha_i \hat{F}_i\right)$ は行列式が1となることが分かる。

証明 一般に α_i を無限小パラメーターとして, 生成子 T_i によるユニタリー変換の演算子を

$$1 + i \sum_i \alpha_i T_i$$

と書くと, 有限の α_i による変換の演算子は無限小変換を合成して

$$U = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + i \sum_i \frac{\alpha_i}{n} T_i \right)^n = \exp \left(i \sum_i \alpha_i T_i \right)$$

と求まる [3, p.64]. また行列式は

$$\begin{aligned} \det U &= \det \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + i \sum_i \frac{\alpha_i}{n} T_i \right)^n \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\det \left(1 + i \sum_i \frac{\alpha_i}{n} T_i \right) \right]^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + i \frac{\alpha_i}{n} \text{Tr}(T_i) + O\left(\left(\frac{\alpha_i}{n}\right)^2\right) \right]^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + i \alpha_i \text{Tr}(T_i) + O\left(\left(\frac{\alpha_i}{n}\right)^2\right) \right] \\ &= 1 + i \alpha_i \text{Tr}(T_i) \end{aligned}$$

と表される. ただし第3の等号では, α_i/n 程度の $N \times N$ 行列 $A = i \sum_i \frac{\alpha_i}{n} T_i$ に対して

$$\begin{aligned} &\det(\mathbf{1} + A) \\ &= \varepsilon^{i_1 \cdots i_N} (\mathbf{1} + A)_{1i_1} \cdots (\mathbf{1} + A)_{Ni_N} \\ &= \varepsilon^{i_1 \cdots i_N} \delta_{1i_1} \cdots \delta_{Ni_N} \\ &\quad + \varepsilon^{i_1 \cdots i_N} \{ (A_{1i_1} \delta_{2i_2} \cdots \delta_{Ni_N}) + (\delta_{1i_1} A_{2i_2} \delta_{3i_3} \cdots \delta_{Ni_N}) + \cdots + (\delta_{1i_1} \cdots \delta_{N-1, i_{N-1}} A_{Ni_N}) \} + O((\alpha_i/n)^2) \\ &= \varepsilon^{1 \cdots N} + (\varepsilon^{i_1 2 \cdots N} A_{1i_1} + \varepsilon^{1 i_2 3 \cdots N} A_{2i_2} + \cdots + \varepsilon^{1 \cdots (N-1) i_N} A_{Ni_N}) + O((\alpha_i/n)^2) \\ &= 1 + \varepsilon^{1 \cdots N} (A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{NN}) + O((\alpha_i/n)^2) \\ &= 1 + \text{Tr} A + O((\alpha_i/n)^2) \\ &= 1 + \sum_i \frac{\alpha_i}{n} \text{Tr}(T_i) + O((\alpha_i/n)^2) \end{aligned}$$

となることを用いた ($\varepsilon^{i_1 \cdots i_N}$ は $\varepsilon^{1 \cdots N} = 1$ を満たす反対称テンソル) [5, pp.70–71]. 以上より

$$\text{Tr}(T_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det \left[\exp \left(i \sum_i \alpha_i T_i \right) \right] = 1.$$

行列式が1のユニタリー行列 $\exp \left(i \sum_{i=1}^8 \alpha_i \hat{F}_i \right)$ による位相変換は特殊ユニタリー群 $SU(3)$ を成す. こうして半ば直観的に述べると, $U(3)$ 群は $U(1)$ 群と $SU(3)$ 群に分解される:

$$U(3) = U(1) \times SU(3).$$

QCD は $SU(3)$ 変換に関してゲージ不変な理論であり, いわゆる $SU(3)$ Yang-Mills 理論の実例にあたる. クォークの各香り $f = d, u, s, c, b, t$ について3種類の色状態 $a = r, g, b$ の Dirac 場 ψ_a^f が定義され, 8種類の色演算子 $\hat{F}_i = \lambda_i/2$ が $SU(3)$ 変換の生成子となる.

11.2.3 SU(3) ゲージ不変性

我々は自由クォーク場に関して、大域的な位相変換の下での不変性から保存する色電荷を見出した。次に QED の場合と同様に、クォーク場と相互作用するゲージ場を導入し、局所的な位相変換の下でゲージ不変な理論を構築する。QED に対する式において

$$\begin{aligned} \text{物質場} \quad \psi(x) &\rightarrow \Psi^f(x), \\ \text{電荷} \quad q &\rightarrow g_s \lambda_j / 2, \quad (g_s : \text{結合定数}) \\ \text{ゲージ関数} \quad f(x) &\rightarrow \omega_j(x), \\ \text{ゲージ場} \quad A^\mu(x) &\rightarrow A_j^\mu(x) : \text{グルーオン場} \end{aligned}$$

(ただし $j = 1, 2, \dots, 8$) と置き換えると、QCD に対する式が得られる：

- 局所的な位相変換

$$\text{式 (11.2b)} : \begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \psi(x)e^{-iqf(x)} \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{-iqf(x)} \end{cases} \rightarrow \text{式 (11.26a)} : \begin{cases} \Psi^f(x) \rightarrow \psi^{f'}(x) = \exp[ig_s \lambda_j \omega_j(x)/2] \Psi^f \\ \bar{\Psi}^f(x) \rightarrow \bar{\psi}^{f'}(x) = \bar{\Psi}^f \exp[ig_s \lambda_j \omega_j(x)/2] \end{cases}$$

- 共変微分

$$\text{式 (11.7)} : D_\mu \psi(x) = [\partial_\mu + iqA_\mu(x)]\psi(x) \rightarrow \text{式 (11.27)} : D^\mu \Psi^f(x) = [\partial^\mu + ig_s \lambda_j A_j^\mu(x)/2] \Psi^f(x).$$

- ラグランジアン密度

$$\text{式 (11.8)} : \begin{cases} \mathcal{L} = \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m)\psi = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi \\ \mathcal{L}_1 = -q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \end{cases} \rightarrow \text{式 (11.28)} : \begin{cases} \mathcal{L}_q = \bar{\Psi}^f(i\mathcal{D} - m_f)\Psi^f = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_0 \equiv \bar{\Psi}^f(i\cancel{\partial} - m_f)\Psi^f \\ \mathcal{L}_1 \equiv -\frac{1}{2}g_s \bar{\Psi}^f \gamma_\mu \lambda_j \Psi^f A_j^\mu \end{cases}$$

- 場の微分のゲージ変換

$$\text{式 (11.9)} : D_\mu \psi(x) \rightarrow e^{-iqf(x)} D_\mu \psi(x) \rightarrow (11.29) : D^\mu \Psi^f(x) \rightarrow \exp[ig_s \lambda_j \omega_j(x)/2] D^\mu \Psi^f(x).$$

これにより QCD における極小置換 $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ が定義され、クォーク場とゲージ場 (グルーオン場) の相互作用が導入されたことになる。ここで得たクォークを記述するラグランジアン密度 (11.28) がゲージ不変となるためには、無限小の $\omega_j(x)$ に対してグルーオン場 $A_j^\mu(x)$ は

$$A_i^\mu(x) \rightarrow A_j^{\mu'}(x) \equiv A_i^\mu(x) - \partial^\mu \omega_i(x) - g_s f_{ijk} \omega_j(x) A_k^\mu(x) \quad (11.26b)$$

と変換しなければならない (証明は 11.4 節)。上式 (11.26a), (11.26b) を合わせて SU(3) ゲージ変換と呼ぶ。

式 (11.26b) 右辺の最後の項 $-g_s f_{ijk} \omega_j(x) A_k^\mu(x)$ のために、ゲージ場のゲージ不変なラグランジアン密度 \mathcal{L}_G を得るには、場の強度 $F_i^{\mu\nu} \equiv \partial^\nu A_i^\mu - \partial^\mu A_i^\nu$ に付加的な項を導入した

$$G_i^{\mu\nu} \equiv F_i^{\mu\nu} + g_s f_{ijk} A_j^\mu A_k^\nu \quad (11.33)$$

を用いて

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} G_{i\mu\nu} G_i^{\mu\nu} \quad (11.34)$$

としなければならない (証明は 11.4 節)。

なお、式 (11.28) の相互作用ラグランジアン \mathcal{L}_1 は図 1(a) のようなクォーク-グルーオンの 3 点結節点を作る。 \mathcal{L}_1 における λ_i は非対角行列を含むので、 r, g, b のうちある色のクォークを 1 つ消滅させ、別の色のクォークを生成し得る。ところが色電荷は保存するから、QED とは対照的に、ゲージ場の量子 (グルーオン) もゼロでない電荷を持たなければならない。

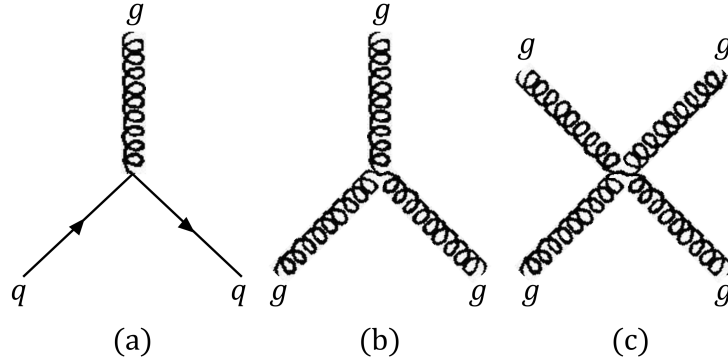


図1 QCDの相互作用

11.2.3 について

■ g_s の添字 s について 強い相互作用 (strong interaction) の頭文字と想像される。

■ 「行列 λ_i には対角行列ではない……あり得る」 (p.277 下から 5~3 行目) について 場の量子化以前のクォークモデル (11.2.1 節) の水準で言うと、色スピノル (11.10) は対角行列の固有ベクトルだから、対角行列は色の状態を変えない。しかし対角行列ではない λ_i は色スピノルに作用して、色状態を変化させることができる (式 (11.13) 参照)。

また場の量子論においても、例えば非対角行列 λ_1 の寄与

$$\mathcal{L}_1 \sim \Psi^{f\dagger}(x)\lambda_1\Psi^f(x) = \psi_r^{f\dagger}(x)\psi_g^f(x) - \psi_g^{f\dagger}(x)\psi_r^f(x)$$

は色状態 g (または r) のクォークを消滅させ、色状態 r (または g) のクォークを生成する作用を持つ。

■ ゲージ場 A_i^μ のゲージ変換 (11.26b) について $D^\mu\Psi^f$ のゲージ変換 (11.29) さえ満たされれば、式 (11.28a) の \mathcal{L}_q はゲージ不変である。11.4 節 (付録) ではその条件としてゲージ場 A_i^μ のゲージ変換 (11.26b) が導かれる。これは電磁場のゲージ変換 (11.2a) の一般化になっており、付加的な項 $-g_s f_{ijk}\omega_j(x)A_k^\mu(x)$ があるのはこれで構わない。

■ 場の強度のゲージ不変性について 電磁場に対してはラグランジアン密度 $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ のみならず、場の強度 $F_{\mu\nu}$ (すなわち \mathbf{E}, \mathbf{B}) そのものがゲージ不変であった。これに対し QCD では、グルーオン場のラグランジアン密度 (11.34): $\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}G_{i\mu\nu}G_i^{\mu\nu}$ はゲージ不変であるものの (式 (11.69) 参照)、“場の強度” $G_i^{\mu\nu}$ は不変ではない。実際、ゲージ変換に伴う変化量を $\delta G_i^{\mu\nu} = 0$ と仮定すると、行列 $G^{\mu\nu} \equiv \lambda_i G_i^{\mu\nu}$ の変化量も $\delta G^{\mu\nu} = 0$ でなければならず、これは式 (11.68):

$$\delta G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}ig_s[\omega, G^{\mu\nu}]$$

に矛盾する。場 $F_i^{\mu\nu}$ もゲージ不変ではない:

$$\begin{aligned} \delta F_i^{\mu\nu} &= \partial^\nu \delta A_i^\mu - \partial^\mu \delta A_i^\nu \\ &= [-\partial^\mu \partial^\nu \omega_i - g_s f_{ijk}\{(\partial^\nu \omega_j)A_k^\mu + \omega_j \partial^\nu A_k^\mu\}] - (\nu \leftrightarrow \mu) \\ &= -g_s f_{ijk}\{(\partial^\nu \omega_j)A_k^\mu - (\partial^\mu \omega_j)A_k^\nu + \omega_j F_k^{\mu\nu}\}. \end{aligned}$$

11.2.4 量子色力学

以上より QCD (量子色力学) の完全なラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}^f (i\not{D} - m_f) \Psi^f - \frac{1}{4} G_{i\mu\nu} G_i^{\mu\nu}$$

である。純粋なグルーオン場の項 (11.34) は, $G_i^{\mu\nu}$ の式 (11.33) を代入して具体的に書くと

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G &= -\frac{1}{4} G_{i\mu\nu} G_i^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4} F_{i\mu\nu} F_i^{\mu\nu} \quad \leftarrow \text{自由グルーオン場} \\ &\quad + g_s f_{ijk} A_{i\mu} A_{j\nu} \partial^\mu A_k^\nu \quad \leftarrow A_i^\mu \text{を 3 つ含む} \\ &\quad - \frac{1}{4} g_s^2 f_{ijk} f_{ilm} A_j^\mu A_k^\nu A_{l\mu} A_{m\nu} \quad \leftarrow A_i^\mu \text{を 4 つ含む} \end{aligned} \quad (11.37)$$

となる [本稿次節で補足].

- 式 (11.37) 最右辺の第 1 項 (自由グルーオン場)
 - グルーオンは色電荷を持つので, 色の閉じ込め効果のために, 孤立状態では観測されない.
- 式 (11.37) 最右辺の第 2 項, 第 3 項
 - それぞれ図 1(b),(c) に示された, 3 本, 4 本のグルーオン線の集まるグルーオン-グルーオン結節点を作る.
 - グルーオンの自己相互作用は, グルーオン自体がゼロでない色電荷を持つことに起因する.
- “香り独立性”

\mathcal{L}_I におけるクォーク-グルーオン相互作用の強さと形は, 香り $f = d, u, s, \dots$ に依らない.

→ u クォークと d クォークの質量が完全に等しければ,

陽子 $p \equiv uud$ と中性子 $n \equiv udd$ は同じ質量を持つ (アイソスピン対称性).
(実際, これは良い近似である.)
- 相互作用 \mathcal{L}_I の形より, クォーク数

$$N_f \equiv N(f) - N(\bar{f}) \quad (f = d, u, s, c, b, t)$$

が保存する (QED においてレプトン数が保存するのと同じ事情である).

- 奇妙さ数 (ストレンジネス) $S \equiv -N_s$, チャーム数 $C \equiv N_c$.

11.2.4 について

■ \mathcal{L}_G の式 (11.37) の右辺第 2 項の確認

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \{ F_{i\mu\nu} (g_s f_{ilm} A_l^\mu A_m^\nu) + (g_s f_{ijk} A_{j\mu} A_{k\nu}) F_i^{\mu\nu} \} \\ &= -\frac{1}{2} g_s f_{ijk} F_i^{\mu\nu} A_{j\mu} A_{k\nu} \\ &= \frac{1}{2} f_{ijk} F_k^{\mu\nu} A_{i\mu} A_{j\nu} \quad (i \rightarrow k \rightarrow j \rightarrow i \text{ と巡回置換し, } f \text{ の反対称性を用いた)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} f_{ijk} (\partial^\nu A_k^\mu - \partial^\mu A_k^\nu) A_{i\mu} A_{j\nu} \\
&= g_s f_{ijk} (\partial^\nu A_k^\mu) A_{i\mu} A_{j\nu}. \quad (\text{第2項で } \mu \leftrightarrow \nu, i \leftrightarrow j \text{ とし, } f \text{ の反対称性を用いた})
\end{aligned}$$

11.3 他の相互作用？

QED と QCD は極小置換 $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ により定式化された極小ゲージ理論である。理論のゲージ不変性を破ることなく、ラグランジアン密度にさらなる項を付け加えることは原理的には可能だが、そのような“極小でない”項は繰り込み可能性の要請によって排除されることを示す。

11.3.1 非極小相互作用

QED の極小相互作用 $\mathcal{L}_I = e \bar{\psi} A \psi$ における結合定数である電荷 e は無次元である。実際、任意の量 α の自然単位系における次元 $[\alpha]$ (を [質量] $^{[\alpha]}$ と書いて、ベキ指数) を $[\alpha]$ と表記し、各量の次元を書き添えると、

$$\mathcal{L}_I = e \begin{array}{cccc} \bar{\psi} & A & \psi & \\ 4 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{array} \frac{3}{2}$$

である。

非極小相互作用は一般に極小相互作用と比べて余計に場の微分や場の因子を含むため、結合定数の次元は $[g_i] < 0$ となる。例えばゲージ不変性を満たす、興味ある次の2つの非極小相互作用に対して、このことを見て取れる(再び次元を書き添えた)。

$$\text{式 (11.39): } \mathcal{L}_I' = \begin{array}{cccc} g_1 & \bar{\psi} & \sigma^{\mu\nu} & \psi & \partial_\nu & A_\mu, \\ 4 & -1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{array} \frac{1}{2}$$

$$\text{式 (11.47): } \mathcal{L}_I'' = \begin{array}{cccc} g_2 & \bar{\psi} & \psi & F_{\mu\nu} & F^{\mu\nu}. \\ 4 & -3 & \frac{3}{2} & 2 & 2 \end{array}$$

QCD においても事情は同じである。実際

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{クォーク場の次元 } [\Psi^f] = 3/2 & (\text{電子場と同じ}) \\ \text{グルーオン場の次元 } [A_i^\mu] = 1 & (\text{電磁場と同じ}) \end{array} \right.$$

であり、

$$\text{極小相互作用 (11.28b): } \mathcal{L}_I = \begin{array}{cccc} -\frac{1}{2} g_s & \bar{\Psi}^f & \gamma^\mu & \lambda_j & \Psi^f & A_j^\mu, \\ 4 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{array}$$

$$\text{非極小相互作用の例 (11.36): } \mathcal{L}_I' = \begin{array}{cccc} i g_s' & \bar{\Psi}^f & \Psi^f & G_{i\mu\nu} & G_i^{\mu\nu}. \\ 4 & -3 & \frac{3}{2} & 2 & 2 \end{array}$$

次項において、結合定数が負の次元を持つ相互作用を含む理論は繰り込み不可能であるという一般的な定理を導く。それに先立ち、準備として非極小相互作用 (11.39):

$$\mathcal{L}_I' = g_1 \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi \partial_\nu A_\mu$$

を含めた理論を調べておく。この場合、S 行列展開

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_n \text{T} \{ \mathcal{L}_I(x_1) \cdots \mathcal{L}_I(x_n) \}$$

補足 ただし行列要素を評価する際、 \mathcal{L}_1 が微分量を含むため、「正準共役な場は自由場でも相互作用する場でも共通となる。(たとえば QED では $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\psi}_\alpha = \partial\mathcal{L}_0/\partial\dot{\psi}_\alpha$, etc)……I.P. の下で相互作用している場の交換関係は、自由場の (H.P. の) 交換関係と同じになる」(6.2 節) という議論を適用できず、自由場の交換関係を用いなければならないことに注意する。

において

$$\mathcal{L}_1 = e(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu)_x + g_1(\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi\partial_\nu A_\mu)_x \quad (11.43)$$

と置き換わり、これを用いて反応 $e^-(\mathbf{p}) \rightarrow e^-(\mathbf{p}') + \gamma(\mathbf{k}')$ の 1 次振幅を計算すると

$$\mathcal{M} = i\bar{u}(\mathbf{p}')[e\gamma^\mu + ig_1\sigma^{\mu\nu}k'_\nu]u(\mathbf{p})\varepsilon_\mu(\mathbf{k}') \quad (11.44)$$

となる。これは結節点の置き換え

$$ie\gamma^\mu \rightarrow ie\gamma^\mu - g_1\sigma^{\mu\nu}k'_\nu \quad (11.45)$$

に対応しており、第 2 項の運動量因子 k'_ν は \mathcal{L}'_1 における電磁場の微分 ∂_ν に由来している [以上、問題 11.2 を参照]。Gordon の恒等式 (A.80) を用いて Feynman 振幅を書き換えると

$$\mathcal{M} = i\bar{u}(\mathbf{p}') \left[\frac{e(p+p')^\mu}{2m} - i \left(\frac{e}{2m} - g_1 \right) \sigma^{\mu\nu} k'_\nu \right] u(\mathbf{p})\varepsilon_\mu(\mathbf{k}')$$

となるので、 g_1 は輻射補正から生じる異常磁気能率 (9.6.1 項) にさらに上乘せされる磁気能率と解釈できる。それで \mathcal{L}'_1 を「磁気相互作用」(p.285, 1.8) と呼べる。

11.3.2 繰り込み可能性

QED において発散の (必要) 条件は、発散次数 K に対する式 (9.109):

$$K = 4d - f_i - 2b_i \geq 0$$

で与えられた。磁気相互作用 (11.39): $\mathcal{L}'_1 = g_1\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi\partial_\nu A_\mu$ を加えた場合、 b_i 本の各光子伝播関数による収束因子 k^{-2} は、それが接続する 2 箇所の結節点に現れる新たな運動量因子 k^μ に打ち消されるので、基本発散グラフの条件は

$$K = 4d - f_i, \quad \therefore K = 4 - \frac{3}{2}f_e - 2b_e + n \geq 0$$

へと修正される*2。このとき摂動次数 n の増加に応じて発散次数 K が増えるので、これらの発散を有限個の物理定数に吸収させることはできず、繰り込み不可能である。

任意の非極小相互作用に対しては

$$K = K_0(b_e, f_e) - \sum_i n_i [g_i]$$

となる。ここに n_i は結合 g_i の摂動次数であり、 $K_0(b_e, f_e)$ は摂動次数に依存しない。これは摂動次数を Δn_i 変更すると、グラフから外線を除いた結節部分の n.u. 次元を不変に保つように運動量因子の数が $-\Delta n_i [g_i]$ 変化すること、そしてこの補償は内部運動量によることを表している。ところが非極小相互作用に対しては $[g_i] < 0$ なので、発散次数 K は摂動次数 n_i とともに増大することになり、繰り込み不可能である。

*2 式 (9.110): $d = f_i + b_i - (n - 1)$, 式 (9.111): $2n = f_e + 2f_i, n = b_e + 2b_i$ を用いた。

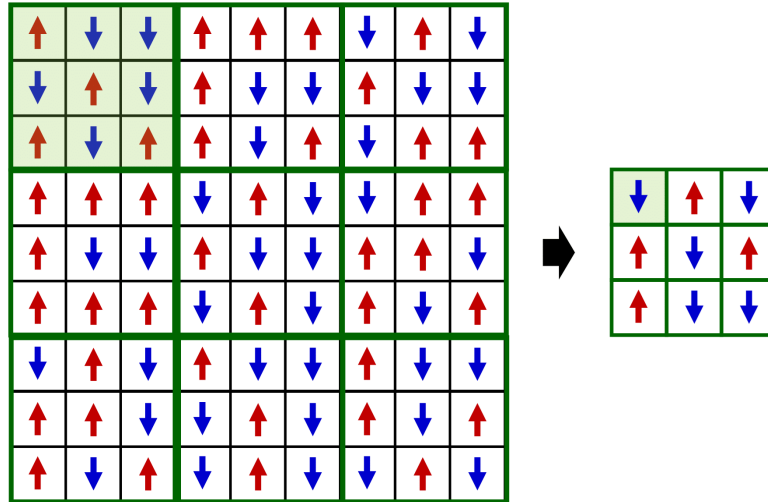


図2 2次元 Ising 模型のブロック化. 緑の枠線で示した 3×3 個のサイトから成るブロック内で, 上向きスピンとした向きスピンの“多数決”をとり (引き分けにはならない), 各ブロックを多数派の向きのスピン1個で代表させる. 次にそれぞれのブロックを相似比 $1/3$ で縮小してサイト1個の面積にすると, 新しいスピンの配置が得られる (ブロック化).

11.3.2 について

■第3段落(「さらに9.9節で……」で始まる段落)について このことは9.9節ではあからさまには述べられていないが, 式(11.49)以降の段落の説明から理解できる.

■繰り込み可能性 (まとめ) 11.3.2節では, 摂動論の次数を上げるにつれて理論から現れる発散が際限なく増えることがなく, それ故それらを有限個の物理定数に吸収できることとして繰り込み可能性を検討した. 他方で我々は繰り込み可能性を, 異なる観点 (繰り込み群の見地) から理解することもできる. 以下ではこの点についてまとめる [6, pp.232–236, pp.239–242, pp.248–249].

例えば2次元 Ising 模型では, 自発磁化を生じる臨界温度において, スピンの空間配置はフラクタルとなる. このときスピン-スピン相関関数は距離のべき関数で表される. 実際, ベキ分布はスケール不変である (フラクタル性に整合). またベキ分布は広いすそ野を持つため, 相関長がサイト間隔に比べて長距離に及ぶ. よって臨界点は格子場の理論の連続極限に対応すると言える. 一般に相関長が巨視的となるパラメーター空間の“臨界点”において, 場 $\varphi(x)$ の典型的な空間分布はフラクタル性を持つ.

フラクタルな場の分布は解像度を下げて見ても——粗視化を施しても——様子が変わらない. 再び2次元 Ising 模型を考えれば, 粗視化の方法の1例として, 図2に示したスピンのブロック化を採用することができる. ところで場の分布の粗視化は長距離 (したがって長波長・低エネルギー) の物理を見ることに対応している. また粗視化の操作は繰り返し行うことができ, “繰り込み群”を成す^{*3}. 一般に1回の繰り込み群変換 (粗視化) はハミルトニアン H を変更することに相当し, 臨界点では例外的に H は不変に留まる. そこで不変な

*3 ここで“群”という術語は操作の繰り返しという意味を強調しているに過ぎない. また粗視化の過程は非可逆なので, 繰り込み群は正確には“半群”である.

ハミルトニアン H^* に対する摂動を V として

$$H = H^* + V$$

と書くと、繰り込み群変換のたびに

- $|V|$ が減少するとき, V は H^* に対して (赤外で) “無効 (irrelevant) な摂動”
- $|V|$ が増大するとき, V は H^* に対して (赤外で) “有効 (relevant) な摂動”

と言われる. 特に質量 m を持つ場は相関長が $1/m$ で表されるため (Compton 波長に対応), 質量ゼロの自由場は相関長が無限遠に及ぶ臨界点にある. そこで $V(\varphi)$ を自由場に対する摂動と見なした場合には,

- V が “無効 (irrelevant) な摂動” $\leftrightarrow V$ は “繰り込み不可能 (nonrenormalizable) な摂動”
- V が “有効 (relevant) な摂動” $\leftrightarrow V$ は “繰り込み可能 (renormalizable) な摂動”

と言い換えられる. 実際, 例えば格子正則化を採用すれば^{*4}, 繰り込み処方を実施した後に, 粗視化の流れを逆に “遡って”, “上流の” 連続理論を回復する必要がある. ところが “無効な摂動” は定義により, 粗視化の流れの下流に影響を及ぼさないため, 上流の理論へ遡ることができなくなり, そのような摂動は “繰り込み不可能” ということになる. 実際このことは繰り込み不可能な相互作用が, 格子間隔 $a \rightarrow 0$, エネルギー切断 $\Lambda = a^{-1} \rightarrow \infty$ の連続極限に対応する上流でよく定義されず^{*5}, 切断依存性をあらわに導入しなければ扱えないという, 伝統的な理解に整合している. もっとも “無効な摂動” が下流に影響しないことは, 裏を返せば低エネルギー領域 (下流) の物理を考える際には, 繰り込み不可能な摂動を無視しても差し支えないことを意味している.

“有効” または “繰り込み可能” な摂動 $O(x)$ の相関関数は, 臨界点においてベキ関数

$$\langle O(x)O(x') \rangle \sim |x - x'|^{-2(d-y)} \quad (y > 0)$$

に従う. ここに d は考えている空間 (時空) の次元であり, y は摂動 O に応じて決まる. ここでは場 $O(x)$ があたかも自然次元 $[M]^{d-y}$ を持つように振舞っていることから, $(d-y)$ を O の “スケーリング次元” と呼ぶ. すると摂動が “有効” である条件は

$$(\text{スケーリング次元}) < (\text{時空次元})$$

と表されることになる. これは発散次数の議論と似たところがある.

なお第 15 章で見ると「繰り込み群方程式」にも, 「繰り込み群」という用語が含まれてはいる. もっとも, これはもとの裸の相関関数が, 繰り込みの際に導入される質量尺度 μ に依存しないことから, 繰り込まれた場の相関関数の μ 依存性を規定する方程式である.

^{*4} 格子点上で場を定義すると, 波数の定義域が Brillouin 領域に制限されるため, 理論から紫外発散が除かれる. これは格子間隔に比べて短い波長を考えることに意味はないという直観と整合している.

^{*5} 一見すると粗視化は, 場の長距離の様子 (ないし長波長成分) を見ることを意味するため, 繰り込み群変換の流れの下流へ行くことが連続極限をとることに対応すると考えたくもなる. しかしながら格子間隔 $a \rightarrow 0$ の意味での連続極限はむしろ, 繰り込み群変換の流れを逆に遡ることである. 実際, 直観的にも場の分布の粗視化は, 例えばより大きなサイズ a の格子の中で場を平均することで達成される. これは切断 a の導入による系の離散化を意味する.

11.4 付録 : SU(3) ゲージ変換の 2 つの性質

11.4.1 節 ゲージ不変性が満たされるためには, 共変微分の (無限小の) ゲージ変換

$$D^\mu \Psi^f = [\partial^\mu + ig_s \lambda_j A_j^\mu / 2] \Psi^f \rightarrow [\partial^\mu + ig_s \lambda_j (A_j^\mu + \delta A_j^\mu) / 2] [1 + ig_s \lambda_j \omega_j / 2] \Psi^f$$

が $D^\mu \Psi^f \rightarrow [1 + ig_s \lambda_j \omega_j / 2] D^\mu \Psi^f$ に一致しなければならない.

このことからゲージ場 A_j^μ の変換則 (11.26b):

$$A_i^\mu(x) \rightarrow A_j^{\mu'}(x) \equiv A_i^\mu(x) - \partial^\mu \omega_i(x) - g_s f_{ijk} \omega_j(x) A_k^\mu(x)$$

を導く.

11.4.2 節 A_j^μ のゲージ変換の下で,

グルーオン場の項 (11.34): $\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} G_{i\mu\nu} G_i^{\mu\nu}$ が不変に保たれることを示す.

証明の見通しを良くするために, 3×3 行列

$$\omega(x) \equiv \lambda_i \omega_i(x), \quad A^\mu(x) \equiv \lambda_i A_i^\mu(x) \quad (11.51)$$

を導入する (電磁場 $A^\mu(x)$ との混同に注意). 式 (11.11): $\hat{F}_i = \lambda_i / 2$ と式 (11.12): $[\hat{F}_i, \hat{F}_j] = if_{ijk} \hat{F}_k$ より, これらは交換関係

$$[\omega, A^\mu] = 2if_{ijk} \lambda_i \omega_j A_k^\mu \quad (11.52)$$

を満たす. また共変微分の式 (11.27) と局所的な位相変換の式 (11.26a) はそれぞれ,

$$D^\mu \Psi^f = [\partial^\mu + ig_s A^\mu / 2] \Psi^f, \quad (11.53)$$

$$\Psi^f \rightarrow \Psi^{f'} = [1 + ig_s \omega / 2] \Psi^f \quad (\text{無限小の } \omega \text{ に対して}) \quad (11.54)$$

と表される.

11.4.1 変換則 (11.26b)

ゲージ不変性の条件として, 共変微分 $D^\mu \Psi^f$ が場 Ψ^f そのものと同じ変換則 (11.54):

$$\begin{aligned} D^\mu \Psi^f &\rightarrow [1 + ig_s \omega / 2] D^\mu \Psi^f \\ &= [1 + ig_s \omega / 2] [\partial^\mu + ig_s A / 2] \Psi^f \end{aligned} \quad (11.56)$$

に従うことを要請しよう. 式 (11.53) に変換 (11.54) および

$$A^\mu \rightarrow A^{\mu'} = A^\mu + \delta A^\mu, \quad \delta A^\mu \equiv \lambda_i \delta A_i^\mu$$

を適用すると

$$D^\mu \Psi^f \rightarrow [\partial^\mu + ig_s A / 2 + ig_s \delta A / 2] [1 + ig_s \omega / 2] \Psi^f \quad (11.57)$$

となる. 上式 (11.56), (11.57) の右辺を比較すると, 微小量の 1 次までの近似で

$$\delta A^\mu = -\partial^\mu \omega + \frac{1}{2} ig_s [\omega, A^\mu] \quad (11.58)$$

が得られる [本稿次節で補足]. ここに交換関係 (11.52) を代入し, 次いで定義式 (11.51) を用いると, 式 (11.26b):

$$\delta A_i^\mu(x) = -\partial^\mu \omega_i(x) - g_s f_{ijk} \omega_j(x) A_k^\mu(x)$$

が得られる [本稿次節で補足].

11.4.1 について

■ $A^\mu \equiv \lambda_i A_i^\mu$ の変換則 (11.58) の導出について 実際の変換則 (11.57) は

$$\begin{aligned}
& [\partial^\mu + ig_s A^\mu/2 + ig_s \delta A^\mu/2][1 + ig_s \omega/2] \Psi^f \\
&= (1 + ig_s \omega/2) \Psi^f + (ig_s \partial^\mu \omega/2) \Psi^f \quad \leftarrow \partial^\mu \text{の Leibniz ルール} \\
&\quad + (1 + ig_s \omega/2)(ig_s A^\mu/2) \Psi^f + [ig_s A^\mu/2, 1 + ig_s \omega/2] \Psi^f \quad \leftarrow \omega \equiv \lambda_i \omega_i \text{と } A^\mu \equiv \lambda_j A_j^\mu \text{は交換しない} \\
&\quad + (ig_s \delta A^\mu/2) \Psi^f + O(\omega \delta A^\mu) \\
&\simeq (\text{式 (11.56) 最右辺}) + \frac{ig_s}{2} \left(\partial^\mu \omega - \frac{ig_s}{2} [\omega, A^\mu] + \delta A^\mu \right) \Psi^f
\end{aligned}$$

となる。ここで $(\partial^\mu \omega - \frac{ig_s}{2} [\omega, A^\mu] + \delta A^\mu) = 0$ を要求すれば良い。

■ A_k^μ の変換則 (11.59) の導出について 式 (11.58) より

$$\lambda_k \delta A_k^\mu = -\lambda_k \partial^\mu \omega_k - g_s f_{ijk} \lambda_k \omega_i A_j^\mu$$

であり、上式の両辺から λ_k を除き $f_{ijk} = f_{kij}$ と書き換えれば良い。

λ_k を取り除く操作は、厳密には次の手順により正当化できる。すなわち上式の両辺に λ_l をかけ (右からでも左からでも良い)、式 (11.62): $\text{Tr}(\lambda_k \lambda_l) = 2\delta_{kl}$ を用いると、 λ_k を除いた関係

$$\delta A_l^\mu = -\partial^\mu \omega_l - g_s f_{ijl} \omega_i A_j^\mu$$

が得られる。

11.4.2 式 (11.34) の SU(3) ゲージ不変性

行列 $G^{\mu\nu} \equiv \lambda_i G_i^{\mu\nu}$ を導入する。Gell-Mann 行列 λ_i は“規格直交条件”

$$\text{Tr}(\lambda_i \lambda_j) = 2\delta_{ij} \tag{11.62}$$

を満たすように選ばれており、このため式 (11.34): $\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} G_{i\mu\nu} G_i^{\mu\nu}$ は

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{8} \text{Tr}(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu})$$

と書ける。そこで \mathcal{L}_G の不変性を示す準備として、 $G^{\mu\nu}$ の変換則を調べよう。

$$G^{\mu\nu} \equiv \lambda_i G_i^{\mu\nu} = \lambda_i (F_i^{\mu\nu} + g_s f_{ijk} A_j^\mu A_k^\nu) = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu + g_s \lambda_i f_{ijk} A_j^\mu A_k^\nu$$

の最右辺において、式 (11.11): $\hat{F}_i = \lambda_i/2$ と式 (11.12): $[\hat{F}_i, \hat{F}_j] = if_{ijk} \hat{F}_k$ より

$$2i\lambda_i f_{ijk} A_j^\mu A_k^\nu = [A^\mu, A^\nu]$$

なので、

$$G^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu - \frac{1}{2} ig_s [A^\mu, A^\nu] \tag{11.65}$$

である。よって SU(3) 変換 (11.58): $\delta A^\mu = -\partial^\mu \omega + \frac{1}{2} i g_s [\omega, A^\mu]$ に伴う $G^{\mu\nu}$ の変化量は,

$$\begin{aligned}
\delta G^{\mu\nu} &= \partial^\nu (\delta A^\mu) - \partial^\mu (\delta A^\nu) - \frac{1}{2} i g_s [\delta A^\mu, A^\nu] - \frac{1}{2} i g_s [A^\mu, \delta A^\nu] \\
&= \frac{1}{2} i g_s [\omega, \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu] + \frac{1}{4} g_s^2 [[\omega, A^\mu], A^\nu] + \frac{1}{4} g_s^2 [[A^\nu, \omega], A^\mu] \\
&= \frac{1}{2} i g_s [\omega, \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu] - \frac{1}{4} g_s^2 [[A^\mu, A^\nu], \omega] \\
&\quad (\because \text{Jacobi 恒等式 } [[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] \equiv 0) \\
&= \frac{1}{2} i g_s [\omega, G^{\mu\nu}] \quad (\because \text{式 (11.65)})
\end{aligned} \tag{11.67}$$

と計算される [式 (11.67) について本稿次節で補足する]。ここから $\mathcal{L}_G = -\frac{1}{8} \text{Tr}(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu})$ の変化量は

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L}_G &= -\frac{1}{8} \text{Tr}(\delta G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + G_{\mu\nu} \delta G^{\mu\nu}) \\
&= -\frac{1}{16} i g_s \text{Tr}\{[\omega, G_{\mu\nu}] G^{\mu\nu} + G_{\mu\nu} [\omega, G^{\mu\nu}]\} \\
&= -\frac{1}{16} i g_s \text{Tr}[\omega, G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}] = 0
\end{aligned} \tag{11.69}$$

となる [第 3 の等号について本稿次節で補足]。ただし最後の等号では $[\text{Tr}(AB) = A_{ij} B_{ji} = \text{Tr}(BA)]$ より] 恒等式 $\text{Tr}[A, B] = 0$ が成り立つことを用いた。上式 (11.69) は \mathcal{L}_G の SU(3) ゲージ不変性を意味する。

11.4.2 について

■式 (11.62): $\text{Tr}(\lambda_i \lambda_j) = 2\delta_{ij}$ について 一般に U(N) 変換の N^2 個の生成子 T_i は, 規格直交条件

$$\text{Tr}(T_i T_j) = \frac{1}{2} \delta_{ij}$$

を満たすようにとるのが慣例となっている。単位行列に比例する T_0 を選ぶと, 残りの $N^2 - 1$ 個の T_i は特に

$$\text{Tr}(T_i) = 0 \quad (i \neq 0)$$

を満たすことになり, SU(N) 変換を生成する (11.2.2 節のノートを併せて参照)。また交換関係 $[T_i, T_j] = i f_{ijk} T_k$ における構造定数 f_{ijk} は

$$i f_{ijk} = 2 \text{Tr}([T_i, T_j], T_k)$$

と書けることになるから, T_i の具体的な行列表現に依らずとも f_{ijk} は添字に関して完全反対称であることが結論される [2, pp.138–139]。

$N = 3$ の場合, SU(3) 変換の生成子 T_i は $\hat{F}_i = \lambda_i/2$ だから, 上式は式 (11.62): $\text{Tr}(\lambda_i \lambda_j) = 2\delta_{ij}$ を意味する。

■交換関係 (11.64) について $[A^\mu, A^\nu] = A_i^\mu A_j^\nu [\lambda_i, \lambda_j]$ による。

■ $\delta G^{\mu\nu}$ の式 (11.67) の確認

$$\delta G^{\mu\nu} = \partial^\nu \left(-\cancel{\partial^\mu \omega} + \frac{i}{2} g_s [\omega, A^\mu] \right) - \partial^\mu \left(-\cancel{\partial^\nu \omega} + \frac{i}{2} g_s [\omega, A^\nu] \right) \leftarrow (i)$$

$$- \frac{i}{2} g_s \left[-\partial^\mu \omega + \frac{i}{2} g_s [\omega, A^\mu], A^\nu \right] - \frac{i}{2} g_s \left[A^\mu, -\partial^\nu \omega + \frac{i}{2} g_s [\omega, A^\nu] \right] \leftarrow (ii)$$

$$= \frac{i}{2} g_s [\omega, \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu] + \frac{i}{2} g_s (\cancel{[\partial^\mu \omega, A^\mu]} - \cancel{[\partial^\nu \omega, A^\nu]}) \leftarrow (i)$$

$$+ \frac{i}{2} g_s (\cancel{[\partial^\mu \omega, A^\nu]} - \cancel{[A^\mu, \partial^\nu \omega]}) - \frac{g_s^2}{4} ([[\omega, A^\mu], A^\nu] + [A^\mu, [\omega, A^\nu]]) \leftarrow (ii)$$

■ 式 (11.69) について 第3の等号は

$$[\omega, G_{\mu\nu}] G^{\mu\nu} + G_{\mu\nu} [\omega, G^{\mu\nu}] = \omega G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} - \cancel{G_{\mu\nu} \omega G^{\mu\nu}} + \cancel{G_{\mu\nu} \omega G^{\mu\nu}} - G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \omega$$

による。

練習問題 (第 11 章)

11.1 場の量子論における色電荷

香り f , 色 $c = r, g, b$ のクォークを記述する Dirac 場は, 式 (4.38) にならって

$$\begin{aligned} \psi_c^f(x) &= \sum_{s, \mathbf{p}} \left(\frac{m_f}{VE_{\mathbf{p}}^f} \right)^{1/2} [c_{sc}^f(\mathbf{p}) u_s^f(\mathbf{p}) e^{-ip_f \cdot x} + d_{sc}^{f\dagger}(\mathbf{p}) v_s^f(\mathbf{p}) e^{ip_f \cdot x}] \\ \psi_c^{f\dagger}(x) &= \sum_{s, \mathbf{p}} \left(\frac{m_f}{VE_{\mathbf{p}}^f} \right)^{1/2} [d_{sc}^f(\mathbf{p}) v_s^{f\dagger}(\mathbf{p}) e^{-ip_f \cdot x} + c_{sc}^{f\dagger}(\mathbf{p}) u_s^{f\dagger}(\mathbf{p}) e^{ip_f \cdot x}] \end{aligned}$$

と Fourier 展開される ($E_{\mathbf{p}}^f = \sqrt{m_f^2 + \mathbf{p}^2}$, $p_f = (E_{\mathbf{p}}^f, \mathbf{p})$). ここで u, v -スピノルは Dirac 方程式 ($\not{p}_f \mp m_f$) $\psi = 0$ の平面波解を表すことを思い出すと, 香り f に依存するものの色 c には依らないと考えられることに注意した。

さて, 色電荷 (11.24) に繰り返し現れる量をあらかじめ評価しておこう. 常套的な計算により

$$\begin{aligned} & \sum_f \int d^3x \mathbb{N} [\psi_c^{f\dagger}(x) \psi_{c'}^f(x)] \\ &= \int d^3x \sum_{s, s', \mathbf{p}, \mathbf{p}'} \sum_f \frac{m_f}{V(E_{\mathbf{p}}^f E_{\mathbf{p}'}^f)^{1/2}} \mathbb{N} \left[\{ d_{sc}^f(\mathbf{p}) v_s^{f\dagger}(\mathbf{p}) e^{-ip_f \cdot x} + c_{sc}^{f\dagger}(\mathbf{p}) u_s^{f\dagger}(\mathbf{p}) e^{ip_f \cdot x} \} \right. \\ & \quad \times \left. \{ c_{s'c'}^f(\mathbf{p}') u_{s'}^f(\mathbf{p}') e^{-ip' \cdot x} + d_{s'c'}^{f\dagger}(\mathbf{p}') v_{s'}^f(\mathbf{p}') e^{ip' \cdot x} \} \right] \\ &= \int d^3x \sum_{s, s', \mathbf{p}, \mathbf{p}'} \sum_f \frac{m_f}{V(E_{\mathbf{p}}^f E_{\mathbf{p}'}^f)^{1/2}} \\ & \quad \times \mathbb{N} \left[d_{sc}^f(\mathbf{p}) c_{s'c'}^f(\mathbf{p}') v_s^{f\dagger}(\mathbf{p}) u_{s'}^f(\mathbf{p}') e^{-i(p+p') \cdot x} \right. \\ & \quad + d_{sc}^f(\mathbf{p}) d_{s'c'}^{f\dagger}(\mathbf{p}') v_s^{f\dagger}(\mathbf{p}) v_{s'}^f(\mathbf{p}') e^{-i(p-p') \cdot x} \\ & \quad + c_{sc}^{f\dagger}(\mathbf{p}) c_{s'c'}^f(\mathbf{p}') u_s^{f\dagger}(\mathbf{p}) u_{s'}^f(\mathbf{p}') e^{i(p-p') \cdot x} \\ & \quad \left. + c_{sc}^{f\dagger}(\mathbf{p}) d_{s'c'}^{f\dagger}(\mathbf{p}') u_s^{f\dagger}(\mathbf{p}) v_{s'}^f(\mathbf{p}') e^{i(p+p') \cdot x} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s,s',\mathbf{p}} \sum_f \frac{m_f}{E_{\mathbf{p}}^f} N \left[d_{sc}^f(\mathbf{p}) c_{s'c'}^f(-\mathbf{p}) v_s^{f\dagger}(\mathbf{p}) u_{s'}^f(-\mathbf{p}) e^{-2iE_{\mathbf{p}}^f t} \right. \\
&\quad + d_{sc}^f(\mathbf{p}) d_{s'c'}^{f\dagger}(\mathbf{p}) v_s^{f\dagger}(\mathbf{p}) v_{s'}^f(\mathbf{p}) \\
&\quad + c_{sc}^{f\dagger}(\mathbf{p}) c_{s'c'}^f(\mathbf{p}) u_s^{f\dagger}(\mathbf{p}) u_{s'}^f(\mathbf{p}) \\
&\quad \left. + c_{sc}^{f\dagger}(\mathbf{p}) d_{s'c'}^{f\dagger}(-\mathbf{p}) u_s^{f\dagger}(\mathbf{p}) v_{s'}^f(-\mathbf{p}) e^{2iE_{\mathbf{p}}^f t} \right] \\
&= \sum_{s,\mathbf{p}} \sum_f \left\{ c_{sc}^{f\dagger}(\mathbf{p}) c_{s'c'}^f(\mathbf{p}) - d_{sc}^{f\dagger}(\mathbf{p}) d_{s'c'}^f(\mathbf{p}) \right\}
\end{aligned}$$

を得る。特に $c = c'$ のとき、これは

$$\sum_{s,\mathbf{p}} \sum_f \{ N_{sc}^f(\mathbf{p}) - \bar{N}_{sc}^f(\mathbf{p}) \} \equiv N_c - \bar{N}_c$$

となる。この結果は QED における電荷の計算

$$Q = q \int d^3x N[\psi^\dagger \psi] : (4.27) \quad \rightarrow \quad Q = q \sum_{s,\mathbf{p}} \{ N_s(\mathbf{p}) - \bar{N}_s(\mathbf{p}) \} : (4.46)$$

との類似性から期待される通りである。

以上より Gell-Mann 行列 (11.11b) の具体的表式を用いると、

$$\begin{aligned}
\hat{F}_3 &= \frac{1}{2} \int d^3x N [\Psi^{f\dagger}(x) \lambda_3 \Psi^f(x)] \\
&= \frac{1}{2} \int d^3x N [\psi_r^{f\dagger}(x) \psi_r^f(x) - \psi_g^{f\dagger}(x) \psi_g^f(x)] \\
&= \frac{1}{2} (N_r - \bar{N}_r) - \frac{1}{2} (N_g - \bar{N}_g) : (11.25), \\
\hat{F}_8 &= \frac{1}{2} \int d^3x N [\Psi^{f\dagger}(x) \lambda_8 \Psi^f(x)] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int d^3x N [\psi_r^{f\dagger}(x) \psi_r^f(x) + \psi_g^{f\dagger}(x) \psi_g^f(x) - 2\psi_b^{f\dagger}(x) \psi_b^f(x)] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} (N_r - \bar{N}_r) + \frac{1}{2\sqrt{3}} (N_g - \bar{N}_g) - \frac{1}{\sqrt{3}} (N_b - \bar{N}_b)
\end{aligned}$$

が得られる。これは 11.2.1 節の表 1 に示された、色電荷 F_3, F_8 の固有値と整合している。さらに

$$\begin{aligned}
\hat{F}_1 &= \frac{1}{2} \int d^3x N [\Psi^{f\dagger}(x) \lambda_1 \Psi^f(x)] \\
&= \frac{1}{2} \int d^3x N [\psi_r^{f\dagger}(x) \psi_g^f(x) - \psi_g^{f\dagger}(x) \psi_r^f(x)] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{s,\mathbf{p},f} \{ c_{sr}^{f\dagger}(\mathbf{p}) c_{sg}^f(\mathbf{p}) - d_{sr}^{f\dagger}(\mathbf{p}) d_{sg}^f(\mathbf{p}) + c_{sg}^{f\dagger}(\mathbf{p}) c_{sr}^f(\mathbf{p}) - d_{sg}^{f\dagger}(\mathbf{p}) d_{sr}^f(\mathbf{p}) \}
\end{aligned}$$

である。これによりクォークモデルの式 (11.13):

$$\hat{F}_1 r = \frac{1}{2} g, \quad \hat{F}_1 g = \frac{1}{2} r, \quad \hat{F}_1 b = 0$$

は、場の量子論に移行すると対応する式

$$\hat{F}_1 |r, \mathbf{p}, s\rangle = \frac{1}{2} |g, \mathbf{p}, s\rangle, \quad \hat{F}_1 |g, \mathbf{p}, s\rangle = \frac{1}{2} |r, \mathbf{p}, s\rangle$$

に置き換わる。ただし例えば $|r, \mathbf{p}, s\rangle$ は、色 r 、運動量 \mathbf{p} 、スピン s の自由クォークが 1 つある状態を表す。

■考察 以上を踏まえると、場の量子論の文脈では多クォーク状態 $|\chi_h^c\rangle$ に対して、色の閉じ込めの条件 (11.15) は

$$\hat{F}_i |\chi_h^c\rangle = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 8)$$

と表現できると考えられる。実際、本問の結果よりこれは固有値に対する条件 (11.16): $F_3 = F_8 = 0$ を含意する。また式 (11.17) の導出過程と同様の手順を踏めば、再び重粒子 (バリオン) の色状態が

$$|\chi_B^c\rangle \sim \varepsilon_{ijk} |r_i, g_j, b_k\rangle$$

という形をとることが導かれる [1, p.200].

11.2 相互作用 (11.43) に対応する結節点因子 (11.45) の導出

Feynman 振幅 (11.44) を導けば十分である。

$$\begin{aligned} \partial_\nu A_\mu^+(x) |\gamma\mathbf{k}\rangle &= \left\{ \sum_{s, \mathbf{k}'} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \varepsilon_{s\mu}(\mathbf{k}') a_s(\mathbf{k}') (\partial_\nu e^{-ik'\cdot x}) \right\} |\gamma\mathbf{k}\rangle \\ &= |0\rangle \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) (-ik_\nu) e^{-ik\cdot x} \end{aligned}$$

の Hermite 共役をとった関係を用いると、式 (11.43) の付加的な項 $g_1(\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi\partial_\nu A_\mu)_x$ の確率振幅への寄与は、7.2 節と同様に

$$\begin{aligned} &\langle e^{-\mathbf{p}'}; \gamma\mathbf{k}' | i g_1 \int d^4x \bar{\psi}^- \sigma^{\mu\nu} (\partial_\nu A_\mu^-) \psi^+ | e^{-\mathbf{p}} \rangle \\ &= i g_1 \int d^4x \left[\left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \bar{u}(\mathbf{p}') e^{ip'\cdot x} \right] \sigma^{\mu\nu} \left[\left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \varepsilon_\mu(\mathbf{k}') (ik'_\nu) e^{ik'\cdot x} \right] \left[\left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} u(\mathbf{p}) e^{-ip\cdot x} \right] \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p) \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \mathcal{M}', \end{aligned}$$

$$\mathcal{M}' \equiv i \bar{u}(\mathbf{p}') i g_1 \sigma^{\mu\nu} k'_\nu u(\mathbf{p}) \varepsilon_\mu(\mathbf{k}')$$

と計算される。この \mathcal{M}' は Feynman 振幅 (11.44) における付加的な項に一致している。

第 12 章 場の理論の方法

手引きとして序文を引用する (強調は本稿筆者, 脚注は省略).

ここからの 4 つの章では, QCD と, これを理解するために必要となるいくつかの技法について論じる. ここで取り上げる概念は, 第 16–19 章において扱う電弱統一理論では不要なので, そちらを優先したい読者は直接, 第 16 章へ進めばよい.

QCD は多くの面で QED と似ているが, 重要な相違点もある. それはグルーオン場のゲージ変換 (11.26b) がより複雑であることに起因している. このためグルーオン場の量子化は, 電磁場の量子化よりも挑戦的な課題であり, ここまで我々が採用してきた正準形式によってこれを達成するには多大な困難が伴う.

我々は正準形式の代わりに, 非 Abel ゲージ理論の議論に適した Feynman の経路積分による定式化を採用することにする. 次章において経路積分を導入し, [第 14 章で] QCD に対してこれを適用する. しかしその前に, 新たな概念——すなわち Green 関数と生成汎関数——を導入しておく. これらは QCD の理論展開において中心的な役割を担うことになる.

12.1 Green 関数

はじめに第 1 段落を引用する.

任意の場の量子論による物理的な予言は, その S 行列要素に含まれている. (中略) しかしここでは S 行列と密接な関係を持つ Green 関数と呼ばれる関数を集中的に論じることにする. (中略) Green 関数は S 行列要素ほど観測可能量と直接的な関係を持つわけではないが, 計算しやすく, そこから S 行列要素を導くことも容易である. その上, いくつかの異なる過程の S 行列要素を単一の Green 関数から導くことも可能であり, そのような諸過程の関係を考察できるようになる. (中略) 本節では QED の文脈において様々な種類の Green 関数を導入し, 続く 12.2 節と 12.3 節において, その性質を調べる.

Green 関数は Heisenberg 描像 (H.P.) において, 複数の場の演算子の時間順序化積の真空期待値

$$G^{\mu\dots}(x, \dots, y, \dots, z, \dots) \equiv {}_{\text{H}}\langle 0 | \text{T} \{ A^{\mu\text{H}}(x) \dots \psi^{\text{H}}(y) \dots \bar{\psi}^{\text{H}}(z) \dots \} | 0 \rangle_{\text{H}} \quad (12.1)$$

として定義される (添字の H は H.P. を表す). これは伝播関数を “脚” に持つダイアグラムに対応付けられ,

- 電磁場演算子 $A^{\mu\text{H}}$ には光子の脚が,
- 電磁場演算子 ψ^{H} には外向きの電子の脚が,
- 電磁場演算子 $\bar{\psi}^{\text{H}}$ には内向きの電子の脚が

充てられる. 例えば Green 関数

$$G^{\mu\nu}(x, y, z, w) = {}_{\text{H}}\langle 0 | \text{T} \{ A^{\mu\text{H}}(x) A^{\nu\text{H}}(y) \psi^{\text{H}}(z) \bar{\psi}^{\text{H}}(w) \} | 0 \rangle_{\text{H}} \quad (12.2)$$

は図 3 のダイアグラムで表される. [グラフとの対応付けは, この後で具体的に見るように, Green 関数もまたグラフに Feynman 規則を適用して求められることから正当化される.] S 行列要素が外線を持つのに対し,

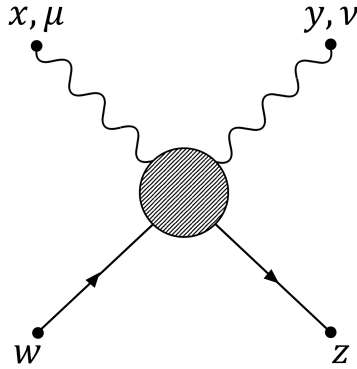


図3 Green 関数 (12.2) を表すダイアグラム

Green 関数の各脚は伝播関数であり，S 行列要素と関係付けるときに始・終状態の粒子のいずれにも対応し得る．また Green 関数の中央の斜線部分には，脚に接続する可能なあらゆるグラフが摂動展開の形で寄与する．

Green 関数の定義式 (12.1) は，相互作用描像 (I.P.) に移行させると

$$G^{\mu\cdots}(x, \cdots, y, \cdots, z, \cdots) = \frac{\langle 0 | T \{ S A^\mu(x) \cdots \psi(y) \cdots \bar{\psi}(z) \cdots \} | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle} \quad (12.8)$$

となる．[本稿次節で教科書を補足しつつ導出する．式 (12.8) を Gell-Mann Low の定理という [6, pp.69–71].]

運動量空間の Green 関数 $G^{\mu\cdots}(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ は，慣例に従って運動量変数 q_i [の正の向き] をダイアグラムの内向きにとり，Fourier 変換

$$\begin{aligned} & \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_n \left(\prod_{i=1}^n e^{-iq_i \cdot x_i} \right) G^{\mu\cdots}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1 + q_2 + \cdots + q_n) G^{\mu\cdots}(q_1, q_2, \cdots, q_n) \end{aligned} \quad (12.10)$$

で定義される．エネルギー-運動量保存を保証する δ 関数は Fourier 変換に伴って必ず現れる．

12.1 について

■I.P. と H.P. の関係 (1.90–92) について

$$\begin{aligned} O^H(x) &= e^{iHt} O^S e^{-iHt} = e^{iHt} (e^{-iH_0 t} O^I e^{iH_0 t}) e^{-iHt}, \\ |A, t\rangle_I &= e^{iH_0 t} |A, t=0\rangle_S = e^{iH_0 t} e^{-iHt} |A\rangle_H \end{aligned}$$

による．一般には H と H_0 は交換しないから，式 (1.92): $U(t) = e^{iH_0 t} e^{-iHt}$ を式 (12.4c): $U(t) = e^{i(H_0 - H)t}$ のようにまとめることはできないと考えられる．ただしこの点は，以降の議論に影響しない．

■Green 関数の I.P. への書き換え (12.6c) が x_0, y_0 の時間順序や場 A, B の種類に依らないことの確認と，式 (12.8) の導出 時空点 x, y の時間成分を x_0, y_0 で表す．H.P. と I.P. を関係付けるユニタリー演算子 $U(t) = e^{iH_0 t} e^{-iHt}$ に対して $U(t_1, t_2) = U(t_1)U^\dagger(t_2)$ を定義すると，

$$|A, t_1\rangle_I = U(t_1, t_2) |A, t_2\rangle_I, \quad U(t_1, t_2)U(t_2, t_3) = U(t_1, t_3)$$

である (添字の I は I.P. を表す).

さて, 2 つの場の Green 関数に対して式 (12.8) を示そう (場が 3 つ以上の場合への一般化は直接的である).

$$\begin{aligned}
& G(x, y) \\
& \equiv_{\text{H}} \langle 0 | \text{T} \{ A^{\text{H}}(x) B^{\text{H}}(y) \} | 0 \rangle_{\text{H}} : (12.3) \\
& = \begin{cases} \text{H} \langle 0 | A^{\text{H}}(x) B^{\text{H}}(y) | 0 \rangle_{\text{H}} & (x_0 > y_0 \text{ のとき}) \\ \pm_{\text{H}} \langle 0 | B^{\text{H}}(y) A^{\text{H}}(x) | 0 \rangle_{\text{H}} & (y_0 > x_0 \text{ のとき. 複号は } A, B \text{ の両方がフェルミオン場のときのみ下側をとる}) \end{cases} \\
& = \begin{cases} \text{I} \langle 0, t_0 | U^\dagger(x_0) A^{\text{I}}(x) U(x_0) U^\dagger(y_0) B^{\text{I}}(y) U(y_0) | 0, t_0 \rangle_{\text{I}} : (12.5) \\ \pm_{\text{I}} \langle 0, t_0 | U^\dagger(y_0) B^{\text{I}}(y) U(y_0) U^\dagger(x_0) A^{\text{I}}(x) U(x_0) | 0, t_0 \rangle_{\text{I}} \end{cases} \\
& = \begin{cases} \text{I} \langle 0, t_0 | U^\dagger(\infty) U(\infty, x_0) A^{\text{I}}(x) U(x_0, y_0) B^{\text{I}}(y) U(y_0, -\infty) U(-\infty) | 0, t_0 \rangle_{\text{I}} : (12.6b), A^\dagger(x) \text{ は } A^{\text{I}}(x) \text{ の誤り} \\ \pm_{\text{I}} \langle 0, t_0 | U^\dagger(\infty) U(\infty, y_0) B^{\text{I}}(y) U(y_0, x_0) A^{\text{I}}(x) U(x_0, -\infty) U(-\infty) | 0, t_0 \rangle_{\text{I}} \end{cases} \\
& = \begin{cases} \text{I} \langle 0, t_0 | U^\dagger(\infty) \text{T} \{ U(\infty, x_0) U(x_0, y_0) U(y_0, -\infty) A^{\text{I}}(x) B^{\text{I}}(y) \} U(-\infty) | 0, t_0 \rangle_{\text{I}} \\ (\pm 1)^2_{\text{I}} \langle 0, t_0 | U^\dagger(\infty) \text{T} \{ U(\infty, y_0) U(y_0, x_0) U(x_0, -\infty) B^{\text{I}}(y) A^{\text{I}}(x) \} U(-\infty) | 0, t_0 \rangle_{\text{I}} \end{cases} \\
& (U(t_1, t_2) = U(t_1) U^\dagger(t_2) \text{ と分解すれば時間順序化を考えられる.}) \\
& \text{各 } U(t_1, t_2) \text{ は } A^{\text{I}}(x), B^{\text{I}}(y) \text{ のいずれとも交換すると仮定した.}) \\
& =_{\text{I}} \langle 0, t_0 | U^\dagger(\infty) \text{T} \{ U(\infty, -\infty) A^{\text{I}}(x) B^{\text{I}}(y) \} U(-\infty) | 0, t_0 \rangle_{\text{I}} : (12.6c) \\
& =_{\text{I}} \langle 0, \infty | \text{T} \{ S A^{\text{I}}(x) B^{\text{I}}(y) \} | 0, -\infty \rangle_{\text{I}} : (12.6e). \quad (\because S = U(\infty, -\infty))
\end{aligned}$$

ここで断熱仮説 (6.2 節) を採用すると, $|0, \pm\infty\rangle_{\text{I}}$ は相互作用のない理論における真空状態に一致する. よって (この状態が縮退しておらず, 一意的に定まるものと仮定すると), 始・終状態の違いは位相因子だけになる.

$${}_{\text{I}} \langle 0, \infty | = e^{-i\phi} {}_{\text{I}} \langle 0, -\infty |.$$

このとき ${}_{\text{I}} \langle 0, -\infty | S | 0, -\infty \rangle_{\text{I}} = {}_{\text{I}} \langle 0, -\infty | 0, \infty \rangle_{\text{I}} = e^{i\phi}$ となるので, 上式 (12.6c) は

$$G(x, y) = \frac{\langle 0 | \text{T} \{ S A(x) B(y) \} | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle} : (12.8)$$

と書き換えられる ($|0, -\infty\rangle_{\text{I}} \equiv |0\rangle, A^{\text{I}}(x) \equiv A(x)$).

■運動量空間の Green 関数の定義式 (12.10) について 指数 $e^{-iq_i \cdot x_i}$ の肩の負号は, 教科書のこれまでの Fourier 展開の流儀と異なっており, 要注意である. この負号は運動量変数 q_i を内向きにとったことに対応していると考えられる. 実際, 式 (12.10) おいて指数を $e^{-iq_i \cdot x_i} \rightarrow e^{+iq_i \cdot x_i}$ と改めて $G^{\mu \dots}(q_1, q_2, \dots, q_n)$ を再定義すると, Green 関数 $G^{\mu \dots}(q_1, q_2, \dots, q_n)$ の計算結果における運動量はすべて符号が逆転することになる. このため指数因子 $e^{-iq_i \cdot x_i}$ を用いた場合の $G^{\mu \dots}(q_1, q_2, \dots, q_n)$ が内向き運動量 q_i のグラフに対応付けられるならば (12.2 節の具体例に対して, これは結果的に正しい), 逆符号の $e^{+iq_i \cdot x_i}$ を用いた場合の $G^{\mu \dots}(q_1, q_2, \dots, q_n)$ は必然的に, 外向き運動量 q_i のグラフに対応付けられなければならない. 14.2.2 節のノートも参照.

12.2 Feynman ダイアグラムと Feynman 規則

12.2.1 摂動展開

Green 関数 (12.8):

$$G^{\mu \dots}(x, \dots) = \frac{\langle 0 | \text{T} \{ S A B \dots \} | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle}$$

に S 行列展開を代入すると、分母と分子はそれぞれ

$$\langle 0|S|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \langle 0|\mathcal{T}\{\mathcal{L}_I(x_1) \cdots \mathcal{L}_I(x_n)\}|0\rangle, \quad (12.11)$$

$$\langle 0|\mathcal{T}\{SAB \cdots\}|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \langle 0|\mathcal{T}\{AB \cdots N(\bar{\psi}A\psi)_{x_1} \cdots N(\bar{\psi}A\psi)_{x_n}\}|0\rangle \quad (12.13)$$

と摂動展開される ($\mathcal{L}_I(x) = eN(\bar{\psi}A\psi)_x$). 上式 (12.13) の真空期待値に Wick の定理を適用すると、全ての場が縮約を作る項だけが生き残る.

ここから直ちに次のことが分かる.

- 電子数の保存

Green 関数において入る電子と出る電子の個数が異なる

→ Green 関数の分子 (12.13) において QED 場 A, B, \dots が同数の $\bar{\psi}, \psi$ を含まない

→ $G^{\mu \cdots \rho}(x, \dots) = 0$

→ 電子数の保存.

- Furry の定理

Green 関数が奇数 n 本の光子の脚だけをもつ

→ $G^{\mu \cdots \rho}(x_1, \dots, x_n) \equiv {}_H\langle 0|\mathcal{T}\{A^{\mu H}(x_1) \cdots A^{\rho H}(x_n)\}|0\rangle_H$

$=({}_H\langle 0|C^{-1}) \cdot \mathcal{T}\{(CA^{\mu H}(x_1)C^{-1}) \cdots (CA^{\rho H}(x_n)C^{-1})\} \cdot (C|0\rangle_H)$

(C は荷電共役変換 (粒子と反粒子を入れ替える変換) を表すユニタリー演算子 (問題 3.5, 5.4))

$=(-1)^n {}_H\langle 0|\mathcal{T}\{A^{\mu H}(x_1) \cdots A^{\rho H}(x_n)\}|0\rangle_H$

$= -G^{\mu \cdots \rho}(x_1, \dots, x_n)$

→ $G^{\mu \cdots \rho}(x_1, \dots, x_n) = 0$. (Furry の定理 (9.1 節を併せて参照))

12.2.1 について

■ 「これと同じ結果が次の形の期待値の展開にも適用される」 (p.300, l.10,11) について

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\{SAB \cdots\} &= \mathcal{T}\{AB \cdots N(\bar{\psi}A\psi)_{x_1} \cdots N(\bar{\psi}A\psi)_{x_n}\} \\ &= \mathcal{T}\{AB \cdots (\bar{\psi}A\psi)_{x_1} \cdots (\bar{\psi}A\psi)_{x_n}\}_{\text{no e.t.c.}} \quad (\text{式 (6.38) の導出と同様}) \\ &= N(AB \cdots (\bar{\psi}A\psi)_{x_1} \cdots (\bar{\psi}A\psi)_{x_n}) + \cdots \\ &\quad + N(\underbrace{AB}_{\square} \cdots (\bar{\psi}A\psi)_{x_1} \cdots (\bar{\psi}A\psi)_{x_n}) + \cdots \quad \leftarrow \text{縮約を 1 つ含む項} \\ &\quad + N(\underbrace{ABCD}_{\square \square} \cdots (\bar{\psi}A\psi)_{x_1} \cdots (\bar{\psi}A\psi)_{x_n}) + \cdots \quad \leftarrow \text{縮約を 2 つ含む項} \\ &(\because \text{Wick の定理 (6.35), 同時刻縮約は除く}) \end{aligned}$$

このうち全ての場が縮約を作る項以外は正規積を含み、真空期待値がゼロになる.

次節 (12.23) における $\langle 0|\mathcal{T}\{A^\mu(x)A^\nu(y)N(\bar{\psi}A\psi)_{x_1}\}|0\rangle$ のように奇数個の電磁場を含み、それゆえ全ての場の縮約を作ると電磁場以外の場と縮約される電磁場が現れ、ゼロになると言えるものもある. この場合、同時刻縮約が除かれるから $\psi, \bar{\psi}$ が $A^\mu(x), A^\nu(y)$ と縮約されてゼロになるとも言える.

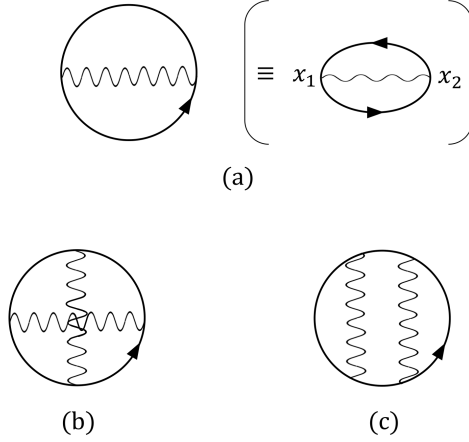


図4 (a) 最も単純な真空ダイアグラム, (b)(c) 高次の真空ダイアグラム.

12.2.2 真空の振幅

Green 関数の分母 (12.11):

$$\langle 0|S|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle 0|S^{(n)}|0\rangle \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \langle 0|\mathbf{T}\{N(\bar{\psi}A\psi)_{x_1} \cdots N(\bar{\psi}A\psi)_{x_n}\}|0\rangle$$

において

$$\langle 0|S^{(0)}|0\rangle = \langle 0|0\rangle = 1, \quad \langle 0|S^{(1)}|0\rangle = ie \int d^4x \langle 0|N(\bar{\psi}A\psi)_x|0\rangle = 0$$

であり, $n = 2$ の項

$$\langle 0|S^{(2)}|0\rangle = \frac{(ie)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \underbrace{(\bar{\psi}A\psi)_{x_1} (\bar{\psi}A\psi)_{x_2}}_{\text{connected}} \quad (12.19)$$

には, (7.1 節で見たように) 図 4(a) の真空ダイアグラムが対応する. この後で示すように, 実は真空ダイアグラムは Green 関数に寄与を持たない.

12.2.3 光子の伝播関数

図 5 の光子伝播関数で表される 2 点 Green 関数

$$G^{\mu\nu}(x, y) = \frac{\langle 0|\mathbf{T}\{A^\mu(x)A^\nu(y)S\}|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle} \quad (12.20)$$

を考える. ゼロ次の摂動論では $S = S^{(0)} = 1$ なので, これは自由な光子の伝播関数 $\langle 0|\mathbf{T}\{A^\mu(x)A^\nu(y)\}|0\rangle$ を与える. 全伝播関数 (12.20) は, 自己エネルギー部分の挿入による寄与を摂動の高次の項として含むことを以下に見る.

2 次の摂動論では, 分子の 2 次の項 $\mathbf{T}\{A^\mu(x)A^\nu(y)S^{(2)}\}$ から, 図 6 の非連結ダイアグラムに対応する量

$$F_a^{(2)} \equiv \frac{(ie)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \underbrace{A^\mu(x)A^\nu(y)}_{\text{connected}} \underbrace{(\bar{\psi}A\psi)_{x_1} (\bar{\psi}A\psi)_{x_2}}_{\text{connected}} = iD_F^{\mu\nu}(x - y) \langle 0|S^{(2)}|0\rangle \quad (12.26)$$

が現れる. 右辺の真空ダイアグラム $\langle 0|S^{(2)}|0\rangle$ は, Green 関数の分母における 2 次の項 $\langle 0|S^{(2)}|0\rangle$ と相殺する.

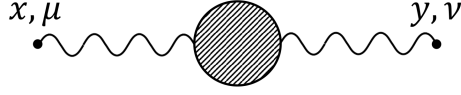


図5 Green 関数 (12.20)

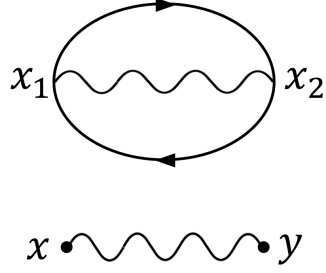


図6 式 (12.26) に対応する非連結ダイアグラム

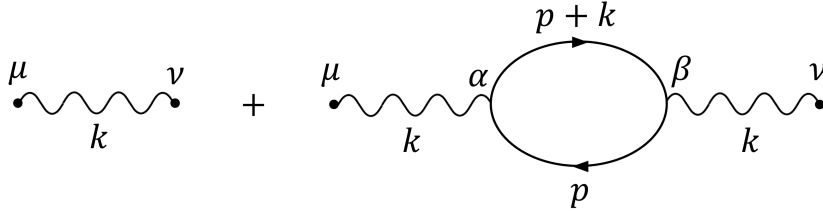


図7 運動量空間における Green 関数 (12.31) に対応する低次項の 2 番目までの寄与

このような事情は Green 関数のすべての摂動次数において一般に成立する. Green 関数 (12.8) の分子の摂動展開において現れる非連結の“真空気泡” (vacuum-bubble) のグラフは, 必ず Green 関数の分母の $\langle 0|S|0\rangle$ の展開から現れる同じグラフによって正確に相殺される. (p.305, 1.1-4)

結局, Green 関数は (2 次の摂動論で)

$$G^{\mu\nu}(x, y) = iD_F^{\mu\nu}(x - y) + \int d^4x_1 d^4x_2 iD_F^{\mu\alpha}(x - x_1)(-1) \times \text{Tr}\{(ie\gamma_\alpha)iS_F(x_1 - x_2)(ie\gamma_\beta)iS_F(x_2 - x_1)\}iD_F^{\beta\nu}(x_2 - y) \quad (12.29)$$

と求まる (以上, 詳しい計算は下記).

対応する運動量空間の Green 関数 $G^{\mu\nu}(q_1, q_2)$ を定義式 (12.10) に基づいて計算すると, $q_1 = -q_2 \equiv k$ とし

$$G^{\mu\nu}(k, -k) = iD_F^{\mu\nu}(k) + iD_F^{\mu\alpha}(k) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr}\{(ie\gamma_\alpha)iS_F(p)(ie\gamma_\beta)iS_F(p + k)\}iD_F^{\beta\nu}(k) \quad (12.31)$$

となる [導出は「12.2.3 について」を参照]. これは図 7 に示す運動量空間のダイアグラムに Feynman 規則を適用した結果に一致している.

12.2.3 節, 式の導出など

■式 (12.29) の導出 Green 関数 (12.20) の分子は

$$F \equiv \langle 0|\text{T}\{A^\mu(x)A^\nu(y)S\}|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}, \quad F^{(n)} \equiv \langle 0|\text{T}\{A^\mu(x)A^\nu(y)S^{(n)}\}|0\rangle$$

と摂動展開される. $n = 0, 1, 2$ の項は

$$\begin{aligned}
 F^{(0)} &= \langle 0 | T \{ A^\mu(x) A^\nu(y) S^{(0)} \} | 0 \rangle = iD_F^{\mu\nu}(x-y), \\
 F^{(1)} &= ie \int d^4x_1 \langle 0 | T \{ A^\mu(x) A^\nu(y) N(\bar{\psi}A\psi)_{x_1} \} | 0 \rangle = 0, \\
 &\quad (\text{奇数個の電磁場演算子を含むため [12.2.1 節参照]}) \\
 F^{(2)} &= \frac{(ie)^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T \{ A^\mu(x) A^\nu(y) N(\bar{\psi}A\psi)_{x_1} N(\bar{\psi}A\psi)_{x_2} \} | 0 \rangle \\
 &= F_a^{(2)} + F_b^{(2)}, \tag{12.4}
 \end{aligned}$$

$$F_a^{(2)} \equiv \frac{(ie)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \underbrace{A^\mu(x) A^\nu(y)}_{\substack{\underbrace{(\bar{\psi}A\psi)_{x_1} (\bar{\psi}A\psi)_{x_2}} \\ \underbrace{\hspace{2cm}}}} \tag{12.25a}$$

$$= iD_F^{\mu\nu}(x-y) \langle 0 | S^{(2)} | 0 \rangle, \quad (\because \text{式 (12.19)}) \tag{12.26}$$

$$\begin{aligned}
 F_b^{(2)} &\equiv \frac{(ie)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \underbrace{A^\mu(x) (\bar{\psi}A\psi)_{x_1}}_{\substack{\underbrace{(\bar{\psi}A\psi)_{x_2} A^\nu(y)} \\ \underbrace{\hspace{2cm}}}} \\
 &\quad + \frac{(ie)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \underbrace{A^\nu(y) (\bar{\psi}A\psi)_{x_1}}_{\substack{\underbrace{(\bar{\psi}A\psi)_{x_2} A^\mu(x)} \\ \underbrace{\hspace{2cm}}}} \tag{12.25b}
 \end{aligned}$$

となる. 式 (12.25b) の 2 つの項は積分変数 x_1, x_2 が入れ替わった関係にあり, 互いに等しい. 光子の自己エネルギー部分の計算 (式 (7.21) と式 (7.22)) と同様にして

$$F_b^{(2)} = \int d^4x_1 d^4x_2 iD_F^{\mu\alpha}(x-x_1) (-1) \text{Tr}\{ (ie\gamma_\alpha) iS_F(x_1-x_2) (ie\gamma_\beta) iS_F(x_2-x_1) \} iD_F^{\beta\nu}(x_2-y) \tag{12.27}$$

を得る [本稿次節を参照].

以上より

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | T \{ A^\mu(x) A^\nu(y) S^{(0)} \} | 0 \rangle &= F^{(0)} + F^{(1)} + F^{(2)} + \dots \\
 &= iD_F^{\mu\nu}(x-y) + iD_F^{\mu\nu}(x-y) \langle 0 | S^{(2)} | 0 \rangle + F_b^{(2)} + \dots \\
 &= \left\{ iD_F^{\mu\nu}(x-y) + F_b^{(2)} + \dots \right\} \left[1 + \langle 0 | S^{(2)} | 0 \rangle + \dots \right] \\
 &= \left\{ iD_F^{\mu\nu}(x-y) + F_b^{(2)} + \dots \right\} \langle 0 | S | 0 \rangle \tag{12.28}
 \end{aligned}$$

となるので, Green 関数 (12.20) は式 (12.29) へと書き換えられる [本稿次節で補足].

12.2.3 について

■ 式 (12.23) 2 行下の $F^{(2)}$ の式について 係数 $(ie)^2/2$ が落ちている (本稿では訂正済み).

■ $F^{(2)}$ の式 (12.24), (12.25) の確認

$$\underbrace{\bar{\psi}(x_1)}_{\substack{\underbrace{\psi(x_2)} \\ \underbrace{\hspace{2cm}}}} = -iS_F(x_1-x_2), \quad \underbrace{\psi(x_1)}_{\substack{\underbrace{\bar{\psi}(x_2)} \\ \underbrace{\hspace{2cm}}}} = iS_F(x_1-x_2)$$

をまず作る. 両者の積は $x_1 \leftrightarrow x_2$ の入れ替えで

$$\begin{aligned}
 &\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2) \\
 \rightarrow &\underbrace{\bar{\psi}(x_2)}_{\substack{\underbrace{\psi(x_1)} \\ \underbrace{\hspace{2cm}}}} \underbrace{\psi(x_2)}_{\substack{\underbrace{\bar{\psi}(x_1)} \\ \underbrace{\hspace{2cm}}}} = (-\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2))(-\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)) \quad (\because \text{式 (12.17a)})
 \end{aligned}$$

となり，不変である．残る $A^\mu(x), A^\nu(y), A(x_1), A(x_2)$ の縮約の仕方は，

$$\underbrace{A^\mu(x)A^\nu(y), A(x_1)A(x_2)} \rightarrow \text{式 (12.25a)}$$

$$\underbrace{A^\mu(x)A(x_1), A^\nu(y)A(x_2)} = \underbrace{A(x_2)A^\nu(y)} \rightarrow \text{式 (12.25b) 第 1 項}$$

$$\underbrace{A^\mu(x)A(x_2)} = \underbrace{A(x_2)A^\mu(x), A^\nu(y)A(x_1)} \rightarrow \text{式 (12.25b) 第 2 項}$$

の 3 通りである．

■ $F_b^{(2)}$ の式 (12.27) の導出

$$F_b^{(2)} = (ie)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \underbrace{A^\mu(x) \underbrace{(\bar{\psi}_{\bar{\alpha}}(A^\alpha \gamma_\alpha)_{\bar{\alpha}\beta} \psi_{\bar{\beta}})_{x_1}} \underbrace{(\bar{\psi}_{\bar{\gamma}}(A^\beta \gamma_\beta)_{\bar{\gamma}\delta} \psi_{\bar{\delta}})_{x_2}}}_{A^\nu(y)}$$

において

$$\begin{aligned} \underbrace{A^\mu(x)A^\alpha(x_1)} &= iD_F^{\mu\alpha}(x-x_1), \\ \underbrace{\bar{\psi}_{\bar{\alpha}}(x_1)\psi_{\bar{\delta}}(x_2)} &= -iS_{F\bar{\delta}\bar{\alpha}}(x_2-x_1), \\ \underbrace{\psi_{\bar{\beta}}(x_1)\bar{\psi}_{\bar{\gamma}}(x_2)} &= iS_{F\bar{\beta}\bar{\gamma}}(x_1-x_2), \\ \underbrace{A^\beta(x_2)A^\nu(y)} &= iD_F^{\beta\nu}(x_2-y) \end{aligned}$$

なので，

$$F_b^{(2)} = \int d^4x_1 d^4x_2 iD_F^{\mu\alpha}(x-x_1) (-1) \{ (ie\gamma_\alpha)_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} iS_{F\bar{\beta}\bar{\gamma}}(x_1-x_2) (ie\gamma_\beta)_{\bar{\gamma}\bar{\delta}} iS_{F\bar{\delta}\bar{\alpha}}(x_2-x_1) \} iD_F^{\beta\nu}(x_2-y)$$

を得る．これは式 (12.27) に他ならない．

■ 式 (12.28)，式 (12.29) について 式 (12.28) のように Green 関数の分子から $\langle 0|S|0\rangle$ をくくり出す代わりに，

$$\langle 0|S^{(2)}|0\rangle = O(e^2), \quad F_b^{(2)} = O(e^2)$$

に注意して，

$$G^{\mu\nu}(x, y) = \frac{iD_F^{\mu\nu}(x-y) + iD_F^{\mu\nu}(x-y) \langle 0|S^{(2)}|0\rangle + F_b^{(2)} + O(e^3)}{1 + \langle 0|S^{(2)}|0\rangle + O(e^3)}$$

を $O(e^2)$ までとっても良いと考えられる (2 次の摂動論)．実際，

$$\begin{aligned} \frac{iD_F^{\mu\nu}(x-y)}{1 + \langle 0|S^{(2)}|0\rangle + O(e^3)} &= iD_F^{\mu\nu}(x-y) \left(1 - \langle 0|S^{(2)}|0\rangle + O(e^3) \right), \\ \frac{iD_F^{\mu\nu}(x-y) \langle 0|S^{(2)}|0\rangle}{1 + \langle 0|S^{(2)}|0\rangle + O(e^3)} &= iD_F^{\mu\nu}(x-y) \langle 0|S^{(2)}|0\rangle + O(e^4), \\ \frac{F_b^{(2)} + O(e^3)}{1 + \langle 0|S^{(2)}|0\rangle + O(e^3)} &= F_b^{(2)} + O(e^3) \end{aligned}$$

であり，これら 3 式を足すと

$$G^{\mu\nu}(x, y) = iD_F^{\mu\nu}(x-y) + F_b^{(2)} + O(e^3) : (12.29)$$

を得る．

■運動量空間の Green 関数 (12.31) の導出

$$\begin{aligned}
& \int d^4x d^4y e^{-i(q_1 \cdot x + q_2 \cdot y)} G^{\mu\nu}(x, y) \\
&= i \left[\int d^4x d^4y D_F^{\mu\nu}(x-y) e^{-i(q_1 \cdot x + q_2 \cdot y)} \right] \\
&+ \int d^4x_1 d^4x_2 i \left[\int d^4x D_F^{\mu\alpha}(x-x_1) e^{-iq_1 \cdot x} \right] \\
&\times (-1) \text{Tr}\{(ie\gamma_\alpha) iS_F(x_1-x_2) (ie\gamma_\beta) iS_F(x_2-x_1)\} i \left[\int d^4y D_F^{\beta\nu}(x_2-y) e^{-iq_2 \cdot y} \right] \quad (3)
\end{aligned}$$

において, x, y に関する積分は

$$\begin{aligned}
\int d^4x d^4y D_F^{\mu\nu}(x-y) e^{-i(q_1 \cdot x + q_2 \cdot y)} &= \int d^4y \int d^4x' D_F^{\mu\nu}(x') e^{-i\{q_1 \cdot x' + (q_1+q_2) \cdot y\}} \\
&= \left(\int d^4y e^{-i(q_1+q_2) \cdot y} \right) D_F^{\mu\nu}(-q_1) \\
&= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1+q_2) D_F^{\mu\nu}(k), \quad (\text{式 (7.24) より } D_F^{\mu\nu}(-q_1) = D_F^{\mu\nu}(q_1)) \\
\int d^4x D_F^{\mu\alpha}(x-x_1) e^{-iq_1 \cdot x} &= \int d^4x' D_F^{\mu\alpha}(x') e^{-iq_1 \cdot (x'+x_1)} \\
&= e^{-iq_1 \cdot x_1} D_F^{\mu\alpha}(q_1), \\
\int d^4y D_F^{\beta\nu}(x_2-y) e^{-iq_2 \cdot y} &= \int d^4y' D_F^{\beta\nu}(y') e^{iq_2 \cdot (y'-x_2)} \\
&= e^{-iq_2 \cdot x_2} D_F^{\beta\nu}(q_2) = e^{-iq_2 \cdot x_2} D_F^{\beta\nu}(k) \\
&\left(\because \int_{-\infty}^{\infty} dy^\lambda f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} d(-y'^\lambda) f(x_2-y') = \int_{-\infty}^{\infty} dy'^\lambda f(x_2-y') \right)
\end{aligned}$$

と計算される. よって

$$(\text{上式 (3) 第 1 項}) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1+q_2) i D_F^{\mu\nu}(k),$$

$$\begin{aligned}
(\text{上式 (3) 第 2 項}) &= \int d^4x_1 d^4x_2 e^{-iq_1 \cdot x_1} i D_F^{\mu\alpha}(k) \\
&\times (-1) \text{Tr}\{(ie\gamma_\alpha) iS_F(x_1-x_2) (ie\gamma_\beta) iS_F(x_2-x_1)\} e^{-iq_2 \cdot x_2} i D_F^{\beta\nu}(k) \\
&= \int d^4x_2 d^4X e^{-iq_1 \cdot X} e^{-iq_1 \cdot x_2} e^{-iq_2 \cdot x_2} i D_F^{\mu\alpha}(k) \\
&\times (-1) \text{Tr}\{(ie\gamma_\alpha) iS_F(X) (ie\gamma_\beta) iS_F(-X)\} i D_F^{\beta\nu}(k) \quad (x_1-x_2 \equiv X) \\
&= \left(\int d^4x_2 e^{-i(q_1+q_2) \cdot x_2} \right) i D_F^{\mu\alpha}(k) (-1) \\
&\times \int d^4X e^{-ik \cdot X} \text{Tr} \left\{ (ie\gamma_\alpha) \left[\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot X} iS_F(p) \right] (ie\gamma_\beta) iS_F(-X) \right\} i D_F^{\beta\nu}(k).
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
& \int d^4X e^{-ik \cdot X} \left\{ (ie\gamma_\alpha) \left[\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot X} iS_F(p) \right] (ie\gamma_\beta) iS_F(-X) \right\} \\
&= (ie\gamma_\alpha) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} iS_F(p) (ie\gamma_\beta) \int d^4(-X) e^{i(p+k) \cdot (-X)} iS_F(-X)
\end{aligned}$$

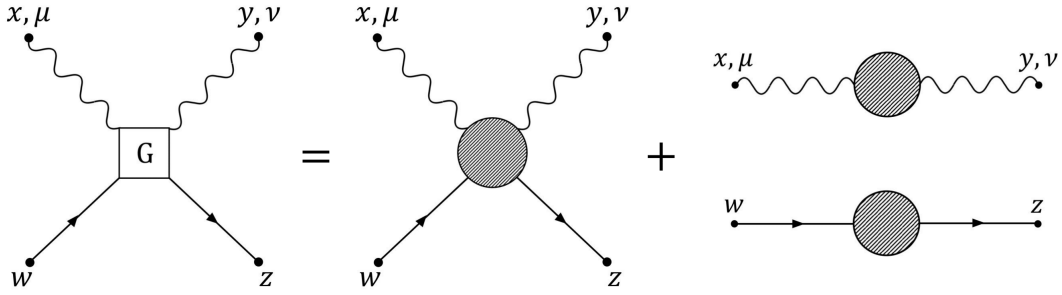


図8 Green 関数 (12.32) の連結部分と非連結部分への分解. 丸い灰色の [斜線] 部分は連結ダイアグラムの和を表す.

だから,

$$\begin{aligned} (\text{上式 (3) 第 2 項}) &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1 + q_2) iD_F^{\mu\alpha}(k) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr}\{ (ie\gamma_\alpha) iS_F(p) (ie\gamma_\beta) iS_F(p+k) \} iD_F^{\beta\nu}(k), \\ \therefore (\text{上式 (3)}) &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1 + q_2) \times (\text{式 (12.31)}). \end{aligned}$$

■運動量空間の Green 関数 (12.31) と Feynman 規則について Feynman 規則を適用して運動量空間の Green 関数 (12.31) を導く際, Feynman グラフに充てる添字の上下は, Green 関数において生きている添字 μ, ν が上付きであることと, ダミー添字 α, β は上下で和をとることとから決まり, Feynman 規則 1,2(p.138) の通りでなくても良い.

運動量空間の Green 関数 (12.31) において, 固定されない内部運動量 p に関する積分 $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$ と, フェルミオン内線のループに関する対角和 $(-1)\text{Tr}$ が施される.

12.2.4 連結 Green 関数

Green 関数

$$G^{\mu\nu}(x, y, z, w) = \frac{\langle 0 | T \{ A^\mu(x) A^\nu(y) \psi(z) \bar{\psi}(w) S \} | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle} \quad (12.32)$$

は図8のように, 連結ダイアグラム (連結 Green 関数 $G_c^{\mu\nu}(x, y, z, w)$) と, 非連結ダイアグラム (の寄与) に分解される. 実際, 図8の非連結ダイアグラムは摂動の0次の項 (自由場の寄与)

$$\begin{aligned} G^{(0)\mu\nu}(x, y, z, w) &= \underbrace{A^\mu(x)} A^\nu(y) \psi(z) \bar{\psi}(w) \underbrace{\psi(z) \bar{\psi}(w)} \\ &= iD_F^{\mu\nu}(x-y) iS_F(z-w) \end{aligned} \quad (12.33)$$

として得られる. また光子や電子の脚を1本だけ持つ1粒子 Green 関数から成る非連結部分は寄与を持たない [12.2.1 節].

非連結ダイアグラムはその構成要素となっている独立な過程のダイアグラム以上の情報を含んではいない. そこで興味のある連結 Green 関数を運動量空間に移すと, 2次までの計算で

$$G_c^{\mu\nu}(k_1, k_2, p_1, p_2) = iD_F^{\mu\alpha}(k_1) iS_F(-p_2) \Gamma_{\alpha\beta}(k_1, k_2, p_1, p_2) iS_F(p_1) iD_F^{\beta\nu}(k_2), \quad (12.35)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}(k_1, k_2, p_1, p_2) \equiv (ie\gamma_\beta) iS_F(p_1 + k_1) (ie\gamma_\alpha) + (ie\gamma_\alpha) iS_F(p_1 + k_2) (ie\gamma_\beta) \quad (12.37)$$

となる [問題 12.1]. これは Green 関数の脚を表す伝播関数と “結節部分関数” $\Gamma_{\alpha\beta}(k_1, k_2, p_1, p_2)$ から構成されており, 図9のダイアグラムに Feynman 規則を適用した結果に一致している [図9の青い字で示した因

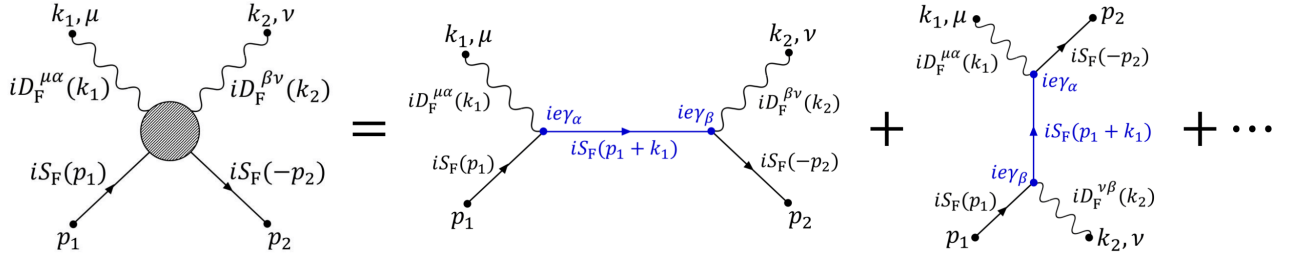


図9 連結 Green 関数 (12.35)

子が結節部分関数 (12.37) に一致する]. Green 関数に付した運動量 p_2 は内向きを基準としているのに対し, 伝播関数 S_F の引数は常にフェルミオン線の矢の向きに一致させる約束だから, $iS_F(-p_2)$ における引数の負号を要する.

12.2.4 について

■Green 関数への $S^{(0)} = 1$ の寄与 (12.33) について

$$G^{(0)\mu\nu}(x, \dots, w) = \langle 0 | T \{ A^\mu(x) A^\nu(y) \psi(x) \bar{\psi}(w) \} | 0 \rangle$$

に対して式 (12.16a) を適用し, 全ての場が縮約された項だけを残す.

摂動の 0 次の項 (12.33) が自由場の寄与を表すことを考えると, これが電子と光子の連結のないダイアグラムに対応するのはもっともである.

■連結 Green 関数 (12.34) について $G_c^{\mu\dots}(x_1, \dots)$ の添字の c は connected の頭文字と想像される.

12.3 Green 関数と Feynman 振幅の関係

[ここまで, いくつかの具体例に対して直接確かめたように,] 運動量空間の Green 関数もまた Feynman 規則に従う. よって任意の過程の Feynman 振幅を得るには, 関係する (連結) Green 関数の脚 (内線) を表す伝播関数を, 外線粒子の因子に適切に置き換えさえすれば良い*6. 例えば図 11 のダイアグラムで表される Compton 散乱

$$\gamma(k, r) + e^-(p, s) \rightarrow \gamma(k', r') + e^-(p', s')$$

の Feynman 振幅を求めるには, 図 10 のダイアグラムで表される Green 関数 (12.35):

$$G_c^{\mu\nu}(k_1, k_2, p_1, p_2) = iD_F^{\mu\alpha}(k_1) iS_F(-p_2) \Gamma_{\alpha\beta}(k_1, k_2, p_1, p_2) iS_F(p_1) iD_F^{\beta\nu}(k_2)$$

において内向き運動量を

$$k_1 = k, \quad p_1 = p, \quad k_2 = -k', \quad p_2 = -p'$$

と同定し, さらに Green 関数の脚 (伝播関数) の外線因子への置き換え

$$\begin{aligned} iD_F^{\mu\alpha}(k_1) &\rightarrow \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}), & iS_F(p_1) &\rightarrow u_s(\mathbf{p}), \\ iD_F^{\beta\nu}(k_2) &\rightarrow \varepsilon_{r'}^\beta(\mathbf{k}'), & iS_F(-p_2) &\rightarrow \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \end{aligned} \quad (12.40a)$$

*6 このような Green 関数と Feynman 振幅 (S 行列要素) の関係は一般に, LSZ 簡約公式としてまとめられる [2, pp.71-76]. LSZ 簡約公式が外線因子の置き換えに対応していることは, 文献 [6, pp.75-76] の説明が見やすい.

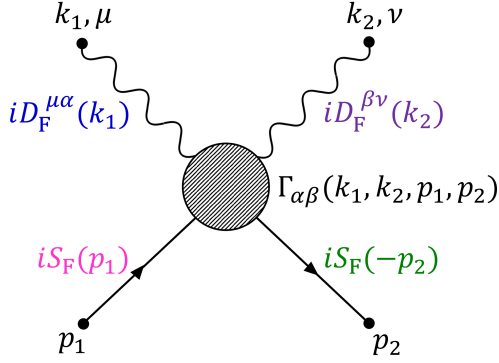


図 10 Green 関数 $G_c^{\mu\nu}(k_1, k_2, p_1, p_2)$

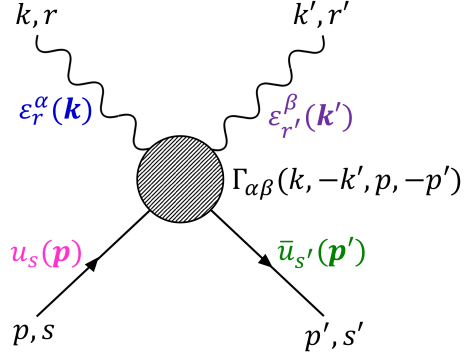


図 11 Compton 散乱の Feynman 振幅

を施せば良い。ただしここでは最低次の摂動論を念頭に、結節部分関数 $\Gamma_{\alpha\beta}$ は 2 次の表式 (12.37) を想定しており、また置き換え (12.40a) では伝播関数と外線に対する輻射補正を考慮していない。このとき得られる Feynman 振幅

$$M(k, k', p, p') = \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \Gamma_{\alpha\beta}(k, -k', p, -p') u_s(\mathbf{p}) \varepsilon_{r'}^\beta(\mathbf{k}')$$

は確かに、以前 2 次の摂動論で求めた Compton 散乱の振幅 (7.38a), (7.38b) に一致している。

最低次の摂動から高次の摂動に進むには

$$\begin{aligned} iD_F^{\mu\alpha}(k_1) &\rightarrow Z_3^{-1/2} \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}), & iS_F(p_1) &\rightarrow Z_2^{-1/2} u_s(\mathbf{p}), \\ iD_F^{\beta\nu}(k_2) &\rightarrow Z_3^{-1/2} \varepsilon_{r'}^\beta(\mathbf{k}'), & iS_F(-p_2) &\rightarrow Z_2^{-1/2} \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \end{aligned} \quad (12.40b)$$

とすれば良い [本稿次節で補足].

12.3 節の序文について

■ Green 関数 (12.36) の Feynman 振幅 (12.41) への置き換えについて

- Green 関数の持っていた添字 μ, ν の情報は失われる。
- Feynman 振幅における入射光子 $\gamma(k, r)$ の因子 $\varepsilon_r(\mathbf{k})$ は、元の Green 関数では $\Gamma_{\alpha\beta}$ と α で和をとられる伝播関数 $iD_F^{\mu\alpha}(k_1)$ だから、Lorentz 添字 α を充てて $\varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k})$ とする。
- 出射粒子の運動量の引数は

$$iD_F^{\beta\nu}(k_2) = iD_F^{\beta\nu}(-k_2) \rightarrow \varepsilon_{r'}^\beta(\mathbf{k}'), \quad iS_F(-p_2) \rightarrow \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}')$$

と置き換わる。

■式 (12.40b) について 輻射補正を考慮すると、両端の電荷を含めた電子の伝播関数は式 (9.103), (9.104), (9.108a) より

$$ie_0^2 S_F(p) = \frac{ie_0^2}{\not{p} - m_{(0)} + i\varepsilon} \rightarrow \frac{ie^2}{(\not{p} - m) + e^2(\not{p} - m)\Sigma_c(p) + i\varepsilon} iZ_2 e_0^2 S_F(p)$$

のように置き換わり、両端の電荷を含めた光子の伝播関数は式 (9.106), (9.107), (9.108b) より

$$ie_0^2 D_{F\alpha\beta}(k) = \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} e_0^2 \rightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon + e^2\Pi_c(k^2)} e^2 = iZ_3 e_0^2 D_{F\alpha\beta}(k)$$

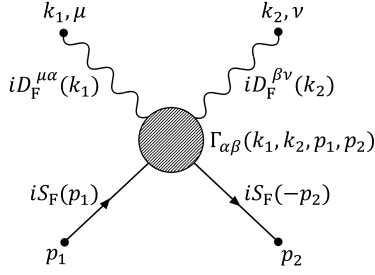


図 12 連結 Green 関数 (12.35)

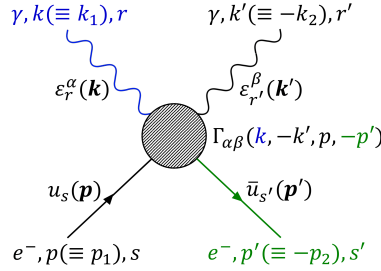


図 13 Compton 散乱 (12.42a)

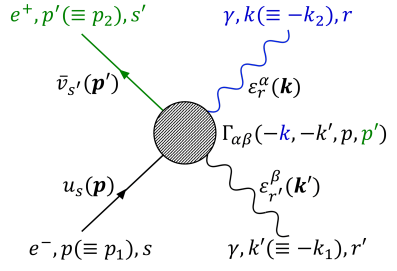


図 14 電子-陽電子消滅 (12.42d)

と置き換わる．そこで繰り込み定数 Z_2, Z_3 を伝播関数に充て，また外線因子の補正は式 (9.45):

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{k}) \rightarrow Z_3^{1/2} \varepsilon^\mu(\mathbf{k}), \text{ etc.}$$

で与えられることを用いると，Green 関数の脚の外線への置き換え (12.40a): $iD_F^{\mu\alpha}(k_1) \rightarrow \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k})$, etc. は，

$$iZ_3 D_F^{\mu\alpha}(k_1) \rightarrow Z_3^{+1/2} \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}), \text{ etc.} \quad \text{i.e.} \quad iD_F^{\mu\alpha}(k_1) \rightarrow Z_3^{-1/2} \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}), \text{ etc.} : (12.40b)$$

へと修正される．

12.3.1 交差関係

Compton 散乱 (12.38):

$$\gamma(\mathbf{k}, r) + e^-(p, s) \rightarrow \gamma(\mathbf{k}', r') + e^-(p', s') \quad (12.42a)$$

および電子-陽電子消滅 (12.43):

$$e^+(p', s') + e^-(p, s) \rightarrow \gamma(\mathbf{k}', r') + \gamma(\mathbf{k}, r) \quad (12.42d)$$

を考える．反応 (12.42d) は反応 (12.42a) の始・終状態の粒子 $\gamma(\mathbf{k}, r), e^-(p', s')$ を終・始状態の反粒子 $\gamma(\mathbf{k}, r), e^+(p', s')$ に置き換えた過程である．これらの Feynman 振幅は以下のように同一の Green 関数から得られ，結節部分関数 $\Gamma_{\alpha\beta}$ の引数は入れ替えた粒子の運動量について逆符号になる (交差関係)．

- 連結 Green 関数 (12.35)(図 12)

$$G_c^{\mu\nu}(k_1, k_2, p_1, p_2) = iD_F^{\mu\alpha}(k_1) iS_F(-p_2) \Gamma_{\alpha\beta}(k_1, k_2, p_1, p_2) iS_F(p_1) iD_F^{\beta\nu}(k_2).$$

- Compton 散乱 (12.42a) の Feynman 振幅 (図 13)

$$\mathcal{M}_a(k, k', p, p') = \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) u_{s'}(\mathbf{p}') \Gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, -\mathbf{k}', p, -p') u_s(\mathbf{p}) \varepsilon_{r'}^\beta(\mathbf{k}').$$

- 電子-陽電子消滅 (12.42d) の Feynman 振幅 (図 14)

$$\mathcal{M}_d(k, k', p, p') = \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) \bar{v}_{s'}(\mathbf{p}') \Gamma_{\alpha\beta}(-\mathbf{k}, -\mathbf{k}', p, p') u_s(\mathbf{p}) \varepsilon_{r'}^\beta(\mathbf{k}').$$

12.3.1 について

■運動量 (12.44): $p_2 = p'$ について 陽電子の外線 (本稿の (図 14) 参照) は陽電子の実際の 4 元運動量 p' が矢と逆向き (内向き) であることを意味することによる (p.134)．

■「式 (12.42b) と式 (12.42c) に関する考察は、読者の練習問題とする」(p.310, l.10,11) について 章末の問題 12.2 を参照.

12.4 汎関数と Grassmann 場

次に生成汎関数の議論に移ろう. 任意の過程の S 行列要素は, 関係する Green 関数から得られる. そして特定の場の理論に対するあらゆる Green 関数は, 生成汎関数から導くことができる.

$$\text{生成汎関数} \rightarrow \text{Green 関数} \rightarrow \text{S 行列要素.}$$

このため理論の予言は全て生成汎関数に集約されることになる.

本節では生成汎関数を導入するための数学的準備として, 汎関数微分と Grassmann 場について説明する.

12.4.1 汎関数

時空座標 x の関数 $\phi(x)$ に対し, 汎関数 $F[\phi]$ とは関数 $\phi(x)$ の“関数”のことである.

$$\text{例 1} \quad F[\phi] \equiv \int d^4x f\{\phi(x)\}, \quad (12.48)$$

$$\text{例 2} \quad [AKB] \equiv \int d^4x d^4y A(x)K(x,y)B(y), \quad e^{[AKB]},$$

$$\text{例 3} \quad G_x[\phi] \equiv \int K(x,y)\phi(y)d^4y. \quad (x \text{ の関数, } \phi \text{ の汎関数})$$

$\phi(x)$ の変化 $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$ に伴う $F[\phi]$ の 1 次の変化を $\delta F[\phi]$ として, 汎関数微分 $\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)}$ を

$$\delta F[\phi] = \int d^4x \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x) \quad (4)$$

で定義する [例 1 の形 (12.48) に限らず, 一般の $F[\phi]$ に対して]. 特に汎関数 F が場 $\phi(x)$ の時空点 y での値 $\phi(y)$ を与えるような“関数”である場合を考えよう. このとき $F[\phi] = \phi(y)$ なので, 上式 (4) から

$$\delta\phi(y) = \int d^4x \frac{\delta\phi(y)}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x) \Rightarrow \frac{\delta\phi(y)}{\delta\phi(x)} = \delta^4(x-y) \quad (5)$$

が得られる. その他の汎関数微分の性質については, 本稿次節で導出と合わせてまとめる.

12.4.1 について

■汎関数微分の次元について 汎関数微分 $\delta F/\delta\phi$ は定義式 (4) より, 通常の微分とは異なり

$$\frac{1}{L^4} \times \frac{[F]}{[\phi]} \quad (L: \text{長さ})$$

の次元を持つ.

■公式 (5) の導出について 教科書では式 (4) を $\delta\phi(y)$ で割って $\delta\phi \rightarrow 0$ とした式 (12.54):

$$\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(y)} = \int d^4x \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} \frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(y)}$$

を根拠として導いている。この場合、上式左辺の $\delta F[\phi]/\delta\phi(y)$ は本来

$$\frac{F[\phi + \delta\phi] - F[\phi]}{\delta\phi(y)}$$

の意味であり、これが $\delta\phi \rightarrow 0$ で汎関数微分の意味になればこそ、公式 (5) を導ける。本稿では説明の仕方を改めた。

■汎関数微分の性質 (12.56) の導出 一連の公式 (12.56a-e) を示す。まず教科書にあるように、式 (12.48) の形の汎関数に対して

$$\begin{aligned} F[\phi + \delta\phi] &= \int d^4x f\{\phi(x) + \delta\phi(x)\} = \int d^4x \left[f\{\phi(x)\} + \frac{\partial f\{\phi(x)\}}{\partial\phi(x)} \delta\phi(x) \right] \\ &= F[\phi] + \int d^4x \frac{\partial f\{\phi(x)\}}{\partial\phi(x)} \delta\phi(x), \\ \therefore \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} &= \frac{\partial f\{\phi(x)\}}{\partial\phi(x)} \end{aligned} \quad (12.56a)$$

を得る。

次に読者に証明が委ねられている、式 (12.56b-e) に移る。これらは「式 (12.48) の形で与えられる汎関数に適用できる一般的な関係」(p.315, 1.6,7) とある。そこでまずは式 (12.48) の形の汎関数を仮定して証明を行うものの、後から見るように、公式 (12.56b-e) に関しては汎関数を式 (12.48) の形に限定せずとも成り立つことを証明できる。まず

$$G[\phi] \equiv \int d^4x g\{\phi(x)\}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\phi(x)} (aF[\phi] + bG[\phi]) &= \frac{\partial}{\partial\phi(x)} (af\{\phi(x)\} + bg\{\phi(x)\}) \quad (\because \text{式 (12.56a)}) \\ &= a \frac{\partial f\{\phi(x)\}}{\partial\phi(x)} + b \frac{\partial g\{\phi(x)\}}{\partial\phi(x)} \\ &= a \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} + b \frac{\delta G[\phi]}{\delta\phi(x)} \quad (\because \text{式 (12.56a)}) \end{aligned} \quad (12.56b)$$

および

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\phi(x)} F[\phi]G[\phi] &= \frac{\partial}{\partial\phi(x)} f\{\phi(x)\}g\{\phi(x)\} \quad (\because \text{式 (12.56a)}) \\ &= \frac{\partial f\{\phi(x)\}}{\partial\phi(x)} g\{\phi(x)\} + \{f\{\phi(x)\}\} \frac{\partial g\{\phi(x)\}}{\partial\phi(x)} \\ &= a \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} G[\phi] + F[\phi] \frac{\delta G[\phi]}{\delta\phi(x)} \quad (\because \text{式 (12.56a)}) \end{aligned} \quad (12.56c)$$

が成立する。

次に式 (12.56d) を示す。式 (12.56d) の f を、汎関数 (12.48) の f と無関係であることを明確にするために、 g に改める。

$$\int d^4y \frac{\delta g(F[\phi])}{\delta\phi(y)} \delta\phi(y) = \delta\{g(F[\phi])\} = \frac{\partial g(F[\phi])}{\partial F[\phi]} \delta F[\phi].$$

これを $\delta\phi(x)$ で割り、 $\delta\phi(x) \rightarrow 0$ とすると

$$\frac{\delta g(F[\phi])}{\delta\phi(x)} = \frac{\partial g}{\partial F} \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} \quad (12.56d)$$

を得る。

最後に連鎖律 (12.56e) を確かめる.

$$\int \frac{\delta F[G_x[\phi]]}{\delta \phi(x)} \delta \phi(x) d^4x = \delta F[G_x[\phi]] = \delta \int f(G_y[\phi]) d^4y = \int \frac{\partial f}{\partial G_y[\phi]} \delta G_y[\phi] d^4y$$

であり (最後の等号では式 (12.56a) を用いた), これを $\delta \phi(z)$ で割って $\delta \phi(z) \rightarrow 0$ とすると

$$\frac{\delta F[G_x[\phi]]}{\delta \phi(z)} = \int \frac{\partial f}{\partial G_y[\phi]} \frac{\delta G_y[\phi]}{\delta \phi(z)} d^4y \quad (12.56e)$$

が見出される.

次に汎関数の具体的な形 (12.48) を仮定せずに, 汎関数微分の定義だけから公式 (12.56b-e) が導かれることを示す.

式 (12.56b) の証明から始めよう. 定数 a, b に対して, 汎関数微分の定義より

$$\begin{aligned} \delta\{aF[\phi] + bG[\phi]\} &= \int d^4x \frac{\delta\{aF[\phi] + bG[\phi]\}}{\delta \phi(x)} \delta \phi(x), \\ a\delta F[\phi] + b\delta G[\phi] &= a \int d^4x \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} \delta \phi(x) + b \int d^4x \frac{\delta G[\phi]}{\delta \phi(x)} \delta \phi(x) \\ &= \int d^4x \left(a \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} + b \frac{\delta G[\phi]}{\delta \phi(x)} \right) \delta \phi(x) \quad (\because \text{積分の線形性}) \end{aligned}$$

であり, 左辺の変分の線形性より 2 式を等置し, 被積分関数における $\delta \phi(x)$ の係数を比較すると, 式 (12.56b) を得る.

続いて式 (12.56c) を示す. 場の変分 $\delta \phi(x)$ に伴う積 $F[\phi]G[\phi]$ の変化は, $\delta \phi(x)$ の 1 次までの近似で

$$\begin{aligned} \delta(F[\phi]G[\phi]) &\equiv F[\phi + \delta \phi]G[\phi + \delta \phi] - F[\phi]G[\phi] \\ &= (F[\phi + \delta \phi] - F[\phi])G[\phi + \delta \phi] + F[\phi](G[\phi + \delta \phi] - G[\phi]) \\ &\simeq G[\phi]\delta F[\phi] + F[\phi]\delta G[\phi] \end{aligned}$$

となる. 両辺にそれぞれ汎関数微分の定義

$$\begin{aligned} \delta(F[\phi]G[\phi]) &= \int d^4x \frac{\delta(F[\phi]G[\phi])}{\delta \phi(x)} \delta \phi(x), \\ G[\phi]\delta F[\phi] + F[\phi]\delta G[\phi] &= G[\phi] \int d^4x \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} \delta \phi(x) + F[\phi] \int d^4x \frac{\delta G[\phi]}{\delta \phi(x)} \delta \phi(x) \\ &= \int d^4x \left(G[\phi] \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} + F[\phi] \frac{\delta G[\phi]}{\delta \phi(x)} \right) \delta \phi(x) \quad (\because F[\phi], G[\phi] \text{ は } x \text{ に依らない}) \end{aligned}$$

を代入し, 再び被積分関数における $\delta \phi(x)$ の係数を比較すると, 式 (12.56c) を得る.

式 (12.56d) の証明も同様に行える. 場の変分 $\delta \phi(x)$ に伴う 1 次の変化量

$$\delta f(F[\phi]) = f(F[\phi + \delta \phi]) - f(F[\phi]) = f(F[\phi] + \delta F[\phi]) - f(F[\phi]) \simeq \frac{\partial f(F[\phi])}{\partial F[\phi]} \delta F[\phi]$$

の両辺に, 汎関数微分の定義

$$\begin{aligned} \delta f(F[\phi]) &= \int d^4x \frac{\delta f(F[\phi])}{\delta \phi(x)} \delta \phi(x), \\ \frac{\partial f}{\partial F} \delta F[\phi] &= \frac{\partial f}{\partial F} \left(\int d^4x \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} \delta \phi(x) \right) = \int d^4x \frac{\partial f}{\partial F} \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} \delta \phi(x) \quad \left(\because \frac{\partial f}{\partial F} \text{ は } x \text{ に依らない} \right) \end{aligned}$$

を代入し、やはり被積分関数における $\delta\phi(x)$ の係数を比較すると、式 (12.56d) を得る。

最後に式 (12.56e) を証明する。通常関数と同じ意味で変数 x (特定の時空点) にも依存する場 ϕ の汎関数 $G_x[\phi]$ を考える。汎関数微分の定義より

$$\begin{aligned}\delta F[G_x[\phi]] &= \int d^4z \frac{\delta F[G_x[\phi]]}{\delta\phi(z)} \delta\phi(z), \\ \delta F[G_x[\phi]] &= \int d^4y \frac{\delta F[G_x[\phi]]}{\delta G_y[\phi]} \delta G_y[\phi] = \int d^4y \frac{\delta F[G_x[\phi]]}{\delta G_y[\phi]} \left(\int d^4z \frac{\delta G_y[\phi]}{\delta\phi(z)} \delta\phi(z) \right) \\ &= \int d^4z \left(\int d^4y \frac{\delta F[G_x[\phi]]}{\delta G_y[\phi]} \frac{\delta G_y[\phi]}{\delta\phi(z)} \right) \delta\phi(z)\end{aligned}$$

であり、2式を比較すると式 (12.56e) が得られる。

なお空間の次元が $D \neq 4$ の場合、複数種類の場 ϕ_r が存在する場合への一般化は直接的である。汎関数微分を定義する式 (4) は

$$\delta F[\phi] = \int d^Dx \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi_r(x)} \delta\phi_r(x) \quad (\phi \equiv \{\phi_r\})$$

に置き換わる (繰り返された添字 r で和をとる)。これに対応して、例えば公式 (5) は自然な一般化

$$\frac{\delta\phi_r(x)}{\delta\phi_s(y)} = \delta_{rs} \delta^D(x-y)$$

を受ける。

12.4.2 Grassmann 代数と Grassmann 場

Grassmann 変数 (生成子) $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ は次の反交換関係を満たすものとして定義される。

$$\{\theta_i, \theta_j\} = 0. \quad (6)$$

よって $\theta_i^2 = 0$ となるから、 n 個の生成子 θ_i の Grassmann 代数における最も一般的な代数要素 (Grassmann 変数 θ_i の“関数”) は次の形を持つ。

$$f(p) = p_0 + \sum p_i \theta_i + \sum p_{ij} \theta_i \theta_j + \dots + p_{12\dots n} \theta_1 \theta_2 \dots \theta_n. \quad (7)$$

ここで \sum は $1 \leq i < j < \dots \leq n$ を満たす添字 i, j, \dots に関する和を表す。また係数 p_0, p_i, p_{ij}, \dots は通常の数であり、我々は代数要素 (7) を θ_i よりもむしろ係数 $p \equiv \{p_0, p_i, p_{ij}, \dots\}$ の関数と見なす。

代数要素の積 $f(p)f(q)$ もまた代数要素であり [説明は下記],

$$\begin{aligned}\text{結合律} \quad f(p)[f(q)f(r)] &= [f(p)f(q)]f(r), \\ \text{分配律} \quad f(p)[f(q) + f(r)] &= f(p)f(q) + f(p)f(r)\end{aligned}$$

が成り立つ。異なる代数要素は一般に交換も反交換もしない。

次に Grassmann 変数 $\{\theta_i\} \equiv \theta$ の任意の関数 $f(\theta)$ の、Grassmann 変数 θ_i による微分 $\partial/\partial\theta_i$ を定義しよう。Grassmann 数は連続変数のようなものではなく、純粋に上述のような操作上の性質だけで定義された抽象的な対象であり、 $\partial/\partial\theta_i$ もまた通常の数とは全く異なるものである (表面的には類似の性質を持つにせよ)。 $f(\theta)$ は式 (7) の形を持つので、 θ_i による微分が線形性を持つものとして式 (7) の各項の微分

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i} (\theta_{j_1} \theta_{j_2} \dots \theta_{j_\omega}) \quad (8)$$

を定義すれば十分である。ここで θ_i による微分は

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial \theta_j} = \delta_{ij} \quad (9)$$

を満たすものとする。また通常の数 θ_i による微分はゼロとする。これを踏まえ、 $\theta_{j_1} \theta_{j_2} \cdots \theta_{j_\omega}$ の θ_i による微分 (8) を定義する。まず $\theta_{j_1} \theta_{j_2} \cdots \theta_{j_\omega}$ が θ_i を含まないとき、式 (8) はゼロとする。次に $\theta_{j_1} \theta_{j_2} \cdots \theta_{j_\omega}$ が θ_i を 2 つ以上含むとき、反交換関係 (6) によりこれはゼロになるので、その θ_i による微分 (8) もゼロである。そこで $\theta_{j_1} \theta_{j_2} \cdots \theta_{j_\omega}$ が θ_i を 1 つだけ含む場合を考える。このとき θ_i による微分 (8) を実行するには、次のように反交換関係 (6) を用いて θ_i を積 $\theta_{j_1} \theta_{j_2} \cdots \theta_{j_\omega}$ の左端まで移動してから、式 (9) を適用すれば良い (左微分の約束)。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_i} (\theta_{j_1} \theta_{j_2} \cdots \theta_{j_{k-1}} \theta_i \theta_{j_{k+1}} \cdots \theta_{j_\omega}) &= (-1)^{k-1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} \theta_i \right) \theta_{j_1} \theta_{j_2} \cdots \theta_{j_{k-1}} \theta_{j_{k+1}} \cdots \theta_{j_\omega} \\ &= (-1)^{k-1} \theta_{j_1} \theta_{j_2} \cdots \theta_{j_{k-1}} \theta_{j_{k+1}} \cdots \theta_{j_\omega}. \end{aligned}$$

なお、微分の定義により反交換関係

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right\} = 0, \quad \left\{ \theta_i, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right\} = \delta_{ij} \quad (12.65)$$

が成立する [本稿「12.4.2 について」の節で補足]。

さらに

$$\theta_i \rightarrow \text{各時空点 } x \text{ に付随する無限個の生成子 } \theta(x) : \text{Grassmann 場}, \quad \{\theta(x), \theta(y)\} = 0$$

とし、Grassmann 汎関数を

$$F[\theta] = f_0 + \int d^4x f_1(x) \theta(x) + \iint d^4x d^4y f_2(x, y) \theta(x) \theta(y) + \cdots$$

によって定義する (f_i は通常関数)。そして Grassmann 場による汎関数微分 $\delta/\delta\theta(x)$ を、 $\partial/\partial\theta_i$ と類似の性質

$$\begin{aligned} &\frac{\delta}{\delta\theta(x)} \{\theta(x_1) \theta(x_2) \theta(x_3) \cdots \theta(x_n)\} \\ &= \delta^{(4)}(x - x_1) \{\theta(x_2) \theta(x_3) \cdots \theta(x_n)\} - \delta^{(4)}(x - x_2) \{\theta(x_1) \theta(x_3) \cdots \theta(x_n)\} \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n-1} \delta^{(4)}(x - x_n) \{\theta(x_1) \theta(x_2) \cdots \theta(x_{n-1})\} \end{aligned} \quad (12.68)$$

を満たす線形演算子として“定義”する。このとき次の関係式が成立する。

- 式 (5) と同様の関係

$$\frac{\delta\theta(x)}{\delta\theta(y)} = \delta^{(4)}(x - y). \quad (12.69)$$

- 微分演算子の反交換関係 [本稿「12.4.2 について」の節で補足]

$$\left\{ \frac{\delta}{\delta\theta(x)}, \frac{\delta}{\delta\theta(y)} \right\} = 0, \quad \left\{ \theta(x), \frac{\delta}{\delta\theta(y)} \right\} = \delta^{(4)}(x - y). \quad (12.70)$$

具体的な応用では,

$$\frac{\delta\theta(x)}{\delta\tilde{\theta}(y)} = 0, \quad \frac{\delta\tilde{\theta}(x)}{\delta\theta(y)} = 0 \quad (12.71)$$

を満たす互いに独立な 2 つの Grassmann 場の組 $\theta(x), \tilde{\theta}(x)$ に興味を持たれる. 2 つの独立な場, もしくはその汎関数微分を含む反交換子はすべてゼロになる.

$$\{\theta(x), \tilde{\theta}(y)\} = 0, \quad \left\{ \frac{\delta}{\delta\theta(x)}, \frac{\delta}{\delta\tilde{\theta}(y)} \right\} = 0, \quad (12.72a)$$

$$\left\{ \theta(x), \frac{\delta}{\delta\tilde{\theta}(y)} \right\} = 0, \quad \left\{ \tilde{\theta}(x), \frac{\delta}{\delta\theta(y)} \right\} = 0. \quad (12.72b)$$

既知の積分核 $K(x, y)$ と独立な Grassmann 場 $\theta, \tilde{\theta}$ から成る汎関数

$$[\theta K \tilde{\theta}] = \int d^4x d^4y \theta(x) K(x, y) \tilde{\theta}(y)$$

に対して, 次の有用な公式が成立する.

$$\frac{\delta[\theta K \tilde{\theta}]}{\delta\tilde{\theta}(z)} = - \int d^4x \theta(x) K(x, z), \quad (12.74)$$

$$\frac{\delta}{\delta\theta(z)} \exp i[\theta K \tilde{\theta}] = i \frac{\delta[\theta K \tilde{\theta}]}{\delta\theta(z)} \exp i[\theta K \tilde{\theta}]. \quad (12.76)$$

[上式 (12.76) の導出については, 本稿「12.4.2 について」の節を参照.]

12.4.2 節, 式の導出など

■積 $f(p)f(q)$ が代数要素であることについて 例えば $n = 2$ の場合,

$$f(p) = p_0 + p_1\theta_1 + p_2\theta_2 + p_{12}\theta_1\theta_2, \quad (12.61a)$$

$$f(q) = q_0 + q_1\theta_1 + q_2\theta_2 + q_{12}\theta_1\theta_2,$$

$$\Rightarrow f(p)f(q) = p_0q_0 + (p_0q_1 + p_1q_0)\theta_1 + (p_0q_2 + p_2q_0)\theta_2 + (p_0q_{12} + p_1q_2 - p_2q_1 + p_{12}q_0)\theta_1\theta_2.$$

[なるほど, $\theta_1\theta_2$ の係数は一般に入れ替え $p \leftrightarrow q$ に関して対称でも反対称でもないため, $f(p)f(q) \neq \pm f(q)f(p)$ である.]

12.4.2 について

■指数関数 なお $f(\theta)$ の指数関数はベキ級数 $e^{f(\theta)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \{f(\theta)\}^n$ として定義される. このとき θ をある Grassmann 数とすると $\theta^2 = 0$ なので, $e^\theta = 1 + \theta$ となることを注意しておく [7, pp.87–88]. 後の式 (13.49) でこの事情を見ることになる.

■反交換関係 (12.65) の確認 「読者は, たとえば $n = 2$ の場合について, 上式を容易に証明できるはずである」(p.318, 1.9) という助言にしたがって, $n = 2$ を仮定する. 代数要素 $f(p)$ は式 (12.61a) の形において,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\theta_j} f(p) &= p_1\delta_{1j} + p_2\delta_{2j} + p_{12}(\delta_{1j}\theta_2 - \delta_{2j}\theta_1), \\ \therefore \frac{\partial}{\partial\theta_i} \frac{\partial}{\partial\theta_j} f(p) &= p_{12}(\delta_{1j}\delta_{2i} - \delta_{2j}\delta_{1i}), \quad \therefore \left\{ \frac{\partial}{\partial\theta_i}, \frac{\partial}{\partial\theta_j} \right\} f(p) = 0 \end{aligned}$$

となるので、第1式 $\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right\} = 0$ が成立する。

第2式の確認に移ろう。

$$\begin{aligned} \theta_i \frac{\partial}{\partial \theta_j} f(p) &= \theta_i \{ p_1 \delta_{1j} + p_2 \delta_{2j} + p_{12} (\delta_{1j} \theta_2 - \delta_{2j} \theta_1) \} \\ &= p_1 \delta_{1j} \theta_1 + p_2 \delta_{2j} \theta_i + p_{12} (\delta_{1j} \delta_{1i} + \delta_{2j} \delta_{2i}) \theta_1 \theta_2 \end{aligned}$$

において $\delta_{1j} \delta_{1i} + \delta_{2j} \delta_{2i} = \delta_{ij}$ に気付くと、

$$\theta_i \frac{\partial}{\partial \theta_j} f(p) = p_1 \delta_{1j} \theta_1 + p_2 \delta_{2j} \theta_i + p_{12} \delta_{ij} \theta_1 \theta_2$$

と書ける。他方、 $\theta_j \theta_1 \theta_2 = 0$ とできることに注意すると

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} \theta_i f(p) = p_0 \delta_{ij} + p_1 (\delta_{ij} \theta_1 - \delta_{1j} \theta_i) + p_2 (\delta_{ij} \theta_2 - \delta_{2j} \theta_i)$$

であり、以上2式を辺々足すと

$$\left\{ \theta_i, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right\} f(p) = \delta_{ij} f(p)$$

となるので、第2式 $\left\{ \theta_i, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right\} = \delta_{ij}$ が成立する。

■反交換関係 (12.70) の確認 式 (12.65) の場合と同様に、汎関数 (12.67) の右辺第3項までとった

$$F[\theta] = f_0 + \int d^4 x' f_1(x') \theta(x') + \int d^4 x' d^4 y' f_2(x', y') \theta(x') \theta(y')$$

に対して反交換関係 (12.70) を確かめる。ただしここでは δ 関数を $\delta^{(4)}(\dots) \rightarrow \delta(\dots)$ と略記する。まず

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \theta(y)} F[\theta] &= \int d^4 x' f_1(x') \delta(x' - y) + \int d^4 x' d^4 y' f_2(x', y') \{ \delta(x' - y) \theta(y') - \theta(x') \delta(y' - y) \} \\ &= f_1(y) + \int d^4 y' f_2(y, y') \theta(y') - \int d^4 x' f_2(x', y) \theta(x'), \\ \therefore \frac{\delta}{\delta \theta(x)} \frac{\delta}{\delta \theta(y)} F[\theta] &= \int d^4 y' f_2(y, y') \delta(y' - x) - \int d^4 x' f_2(x', y) \delta(x' - x) \\ &= f_2(y, x) - f_2(x, y), \end{aligned}$$

$$\therefore \left\{ \frac{\delta}{\delta \theta(x)}, \frac{\delta}{\delta \theta(y)} \right\} F[\theta] = 0$$

となるので、第1式 $\left\{ \frac{\delta}{\delta \theta(x)}, \frac{\delta}{\delta \theta(y)} \right\} = 0$ が成立する。

第2式の確認に移ろう。

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \theta(y)} \theta(x) F[\theta] &= f_0 \delta(x - y) + \int d^4 x' f_1(x') \{ \delta(x - y) \theta(x') - \delta(x' - y) \theta(x) \} \\ &\quad + \int d^4 x' d^4 y' f_2(x', y') \{ \delta(x - y) \theta(x') \theta(y') - \delta(x' - y) \theta(x) \theta(y') - \delta(y - y') \theta(x) \theta(x') \} \end{aligned}$$

において,

$$\begin{aligned}
& \theta(x) \frac{\delta}{\delta\theta(y)} F[\theta] - \int d^4x' f_1(x') \delta(x' - y) \theta(x) - \int d^4x' d^4y' f_2(x', y') \{ \delta(x' - y) \theta(x) \theta(y') + \delta(y - y') \theta(x) \theta(x') \} \\
&= \theta(x) \left[f_1(y) + \int d^4y' f_2(y, y') \theta(y') - \int d^4x' f_2(x', y) \theta(x') \right] \\
&\quad - \theta(x) f_1(y) - \int d^4y' f_2(y, y') \theta(x) \theta(y') + \int d^4x' f_2(x', y) \theta(x) \theta(x') \\
&= 0
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
\left\{ \theta(x), \frac{\delta}{\delta\theta(y)} \right\} F[\theta] &= \delta(x - y) \left[f_0 + \int d^4x' f_1(x') \theta(x') + \int d^4x' d^4y' f_2(x', y') \theta(x') \theta(y') \right] \\
&= \delta(x - y) F[\theta]
\end{aligned}$$

となるので, 第 2 式 $\left\{ \theta(x), \frac{\delta}{\delta\theta(y)} \right\} = \delta(x - y)$ が成立する.

■ 「因子 $[\theta(x_i) K(x_i, y_i) \tilde{\theta}(y_i)]$ の順序は重要ではない…… $\delta/\delta\theta(z)$ や $\delta/\delta\tilde{\theta}(z)$ と可換」 (p.320 上 3 行) について $\theta_1 \equiv \theta(x_1), \tilde{\theta}_1 \equiv \tilde{\theta}(y_1), \theta_2 \equiv \theta(x_2), \tilde{\theta}_2 \equiv \tilde{\theta}(y_2)$ は式 (12.72) よりいずれも反交換するので,

$$\theta_1 \tilde{\theta}_1 \theta_2 \tilde{\theta}_2 = \theta_2 \tilde{\theta}_2 \theta_1 \tilde{\theta}_1. \quad (\text{入れ替え } \theta_1 \leftrightarrow \theta_2, \tilde{\theta}_1 \leftrightarrow \tilde{\theta}_2 \text{ のそれぞれが奇置換})$$

よって因子 $[\theta(x_i) K(x_i, y_i) \tilde{\theta}(y_i)]$ を $[i]$ と略記すると, $[1]$ と $[2]$ は交換する.

$$[1][2] = [2][1].$$

さらに $\delta/\delta\theta(z)$ と $\delta/\delta\tilde{\theta}(z)$ は式 (12.72b) より $\theta(x_i), \tilde{\theta}(y_i)$ と反交換するから, $[i]$ と交換する.

■ 公式 (12.76) の証明 「練習問題として次式 [式 (12.76)] を証明してもらいたい」 (p.320, 1.4) とある. 「これらの結果を利用」 (p.320, 1.4) せずとも, 次のように証明できるだろう. 引き続き $[i] \equiv [\theta(x_i) K(x_i, y_i) \tilde{\theta}(y_i)]$ と略記すると,

$$\exp i[\theta K \tilde{\theta}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \prod_{n=0}^{\infty} \int d^4x_i d^4y_i [i]$$

なので (ただし $\prod_{n=0}^{\infty} \int d^4x_i d^4y_i [i]$ は $n = 1$ に対して 1 と約束する),

$$\frac{\delta}{\delta\theta(z)} \exp i[\theta K \tilde{\theta}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \left(\prod_{n=0}^{\infty} \int d^4x_i d^4y_i \right) \frac{\delta}{\delta\theta(z)} \prod_{i=1}^n [i].$$

ここで $\delta/\delta\theta(z)$ は式 (12.72b) により $\theta(x_i), \tilde{\theta}(y_i)$ と反交換するから,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta\theta(z)} \prod_{i=1}^n [i] &= \left\{ \frac{\delta\theta(x_1)}{\delta\theta(z)} K(x_1, y_1) \tilde{\theta}(y_1) - \theta(x_1) K(x_1, y_1) \frac{\delta\tilde{\theta}(y_1)}{\delta\theta(z)} \right\} [2][3] \cdots \leftarrow \{ \cdots \} \text{内は } \frac{\delta[1]}{\delta\theta(z)} \\
&\quad + [1] \left\{ \frac{\delta\theta(x_2)}{\delta\theta(z)} K(x_2, y_2) \tilde{\theta}(y_2) - \theta(x_2) K(x_2, y_2) \frac{\delta\tilde{\theta}(y_2)}{\delta\theta(z)} \right\} [3] \cdots \leftarrow \{ \cdots \} \text{内は } \frac{\delta[2]}{\delta\theta(z)} \\
&\quad + \cdots \\
&= \sum_{j=1}^n [1] \cdots [j-1] \frac{\delta[j]}{\delta\theta(z)} [j+1] \cdots [n]
\end{aligned}$$

となる (ただし最右辺は $n = 0$ に対してゼロと約束する). よって

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i=1}^n \int d^4x_i d^4y_i \right) \frac{\delta}{\delta\theta(z)} \prod_{i=1}^n [i] &= \sum_{j=1}^n \left\{ \prod' \int d^4x_i d^4y_i [i] \right\} \left(\int d^4x_j d^4y_j \frac{\delta[j]}{\delta\theta(z)} \right) \\ &= n \underbrace{\left\{ \prod_{i=1}^{n-1} \int d^4x_i d^4y_i [i] \right\}}_{j \text{ によらない量だから} \end{aligned}$$

とできる. ここに \prod' は $i = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n$ にわたる積であり, また 2 つの $\{\dots\}$ はいずれも $n = 0$ で 0, $n = 1$ で 1 と約束する. 以上より

$$\frac{\delta}{\delta\theta(z)} \exp i[\theta K \tilde{\theta}] = i \frac{\delta[\theta K \tilde{\theta}]}{\delta\theta(z)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{(n-1)!} \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} \int d^4x_i d^4y_i [i] \right\} = i \frac{\delta[\theta K \tilde{\theta}]}{\delta\theta(z)} \exp i[\theta K \tilde{\theta}] : (12.76)$$

を得る.

12.5 生成汎関数

QED の生成汎関数を構築する準備として, QED の量子場 $A^\kappa, \psi, \bar{\psi}$ に対応 [結合] する虚構的な古典的源 $J_\kappa, \bar{\sigma}, \sigma$ (ただし $\sigma, \bar{\sigma}$ は独立なスピノル Grassmann 場) を導入し, ラグランジアン密度を

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_S, \quad \mathcal{L}'_I \equiv \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_S : \text{源がある場合の相互作用}$$

とする. ここに

- 自由場のラグランジアン密度 (6.9): $\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu)$
- 相互作用ラグランジアン密度 (6.10): $\mathcal{L}_I = -s^\mu A_\mu$
- 源のラグランジアン密度 (12.78b): $\mathcal{L}_S = J_\kappa A^\kappa + \bar{\sigma}\psi + \bar{\psi}\sigma$

である. 源の導入により, 相互作用 \mathcal{L}_I を無視したときの運動方程式は

$$\square A^\mu = -J^\mu, \quad (12.80)$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = -\sigma, \quad (12.81a)$$

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} = +\bar{\sigma} \quad (12.81b)$$

となる (問題 12.3).

さて, 源の項 \mathcal{L}_S を含むラグランジアン密度に対する S 演算子を S' として, 生成汎関数は

$$Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \frac{\langle 0|S'|0 \rangle}{\langle 0|S|0 \rangle} \quad (12.83)$$

で定義される. 源がなければ $S' \rightarrow S$ なので, $Z[0, 0, 0] = 1$ となることに注意しよう. 次式のように生成汎関数を源で汎関数微分すると, Green 関数が得られる (導出は下記).

$$\begin{aligned} G^{\mu \dots} \underbrace{(x_1, \dots, y_1, \dots, \overbrace{z_1, \dots}^{\bar{n} \text{ 個}})}_{n \text{ 個}} &\equiv \frac{\langle 0|T\{SA^\mu(x_1) \dots \psi(y_1) \dots \bar{\psi}(z_1) \dots\}|0 \rangle}{\langle 0|S|0 \rangle} \\ &= (-1)^{\bar{n}} \left(\frac{1}{i} \right)^n \frac{\delta^n Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x_1) \dots \delta \bar{\sigma}(y_1) \dots \delta \sigma(z_1) \dots} \Big|_0. \end{aligned} \quad (12.91)$$

ただし最右辺の添字 0 は汎関数微分の後、虚構的な源の項をゼロとおくことを意味する。σ と $\bar{\sigma}$ を Grassmann 源としたため、Green 関数 (12.91) は y_1, \dots に関して反対称かつ z_1, \dots に関して反対称となり、Pauli 原理に整合する [本稿「12.5 節の序文について」の節で補足]。

12.5 節の序文，式の導出など

■式 (12.91) の導出 3 点 Green 関数

$$G^\mu(x, y, z) = \frac{\langle 0 | T \{ S A^\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) \} | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle}$$

に対して

$$G^\mu(x, y, z) = \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \right) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}(y)} \right) \left(-\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \sigma(z)} \right) Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]|_0 \quad (12.86)$$

を示せば十分である。n 個の場の Green 関数に対する式 (12.91) への一般化は直接的である。

まず $\eta(x)$ を源 $J_\kappa, \sigma(x), \bar{\sigma}(x)$ のいずれかとすると、S 演算子

$$S' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T \{ \mathcal{L}'_1(x_1) \cdots \mathcal{L}'_1(x_n) \}$$

の $\eta(x)$ による汎関数微分は

$$\frac{\delta S'}{\delta \eta(x)} = \cdots = i \int d^4z T \left\{ S' \frac{\delta \mathcal{L}'_1(z)}{\delta \eta(x)} \right\} \quad (12.87)$$

と計算される [本稿次節で補足]。最右辺において

$$\frac{\delta \mathcal{L}'_1(z)}{\delta J_\mu(x)} = A^\mu(x) \delta^{(4)}(x-z), \quad \frac{\delta \mathcal{L}'_1(z)}{\delta \sigma(x)} = -\bar{\psi}(x) \delta^{(4)}(x-z), \quad \frac{\delta \mathcal{L}'_1(z)}{\delta \bar{\sigma}(x)} = \psi(x) \delta^{(4)}(x-z) \quad (12.88)$$

なので [本稿次節で補足]，

$$\frac{\delta S'(z)}{\delta J_\mu(x)} = iT \{ S' A^\mu(x) \}, \quad \frac{\delta S'(z)}{\delta \bar{\sigma}(x)} = iT \{ S' \psi(x) \}, \quad \frac{\delta S'(z)}{\delta \sigma(x)} = -iT \{ S' \bar{\psi}(x) \} \quad (12.89)$$

を得る。生成汎関数 $Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] \equiv \langle 0 | S' | 0 \rangle / \langle 0 | S | 0 \rangle$ の分母は源に依存しないので，上式 (12.89) を用いて

$$\frac{1}{i} \frac{\delta Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x)} = \frac{\left\langle 0 \left| \frac{1}{i} \frac{\delta S'}{\delta J_\mu(x)} \right| 0 \right\rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle} = \frac{\langle 0 | T \{ S' A^\mu(x) \} | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle}$$

と計算でき，これをさらに $\sigma(z)$ と $\bar{\sigma}(y)$ で汎関数微分すると，冒頭の式 (12.86) が導かれる。

12.5 節の序文について

■ S' の汎関数微分 (12.87) の補足

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S'}{\delta \eta(x)} &= \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_n T \{ \mathcal{L}'_I(x_1) \cdots \mathcal{L}'_I(x_n) \} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_n T \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}'_I(x_1)}{\delta \eta(x)} \mathcal{L}'_I(x_2) \cdots \mathcal{L}'_I(x_n) + \cdots + \mathcal{L}'_I(x_1) \cdots \mathcal{L}'_I(x_{n-1}) \frac{\delta \mathcal{L}'_I(x_n)}{\delta \eta(x)} \right\} \\
&\quad (\eta = J_\mu \text{ に対し Leibniz 則 (12.56c) を, Grassmann 源 } \eta = \sigma, \bar{\sigma} \text{ に対し式 (12.68) を適用し,} \\
&\quad \text{各 } \mathcal{L}'_I(x_i) \text{ 同士が交換することをういた)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \times n \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_n T \left\{ \mathcal{L}'_I(x_1) \cdots \mathcal{L}'_I(x_{n-1}) \frac{\delta \mathcal{L}'_I(x_n)}{\delta \eta(x)} \right\} \\
&\quad (\text{T 積中の } n \text{ 個の項は積分変数を入れ替えると, 積分に等しい寄与を与えることが分かる)} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{m+1}}{m!} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_m d^4 z T \left\{ \mathcal{L}'_I(x_1) \cdots \mathcal{L}'_I(x_m) \frac{\delta \mathcal{L}'_I(z)}{\delta \eta(x)} \right\} \quad (m \equiv n-1, x_n \rightarrow z) \\
&= i \int d^4 z T \left\{ \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m}{m!} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_m T \{ \mathcal{L}'_I(x_1) \cdots \mathcal{L}'_I(x_m) \} \right] \frac{\delta \mathcal{L}'_I(z)}{\delta \eta(x)} \right\} \\
&\quad (\text{T 積中に T 積を入れても式は不変)} \\
&= i \int d^4 z T \left\{ S' \frac{\delta \mathcal{L}'_I(z)}{\delta \eta(x)} \right\}.
\end{aligned}$$

■ $\delta \mathcal{L}'_I(z)/\delta \eta(x)$ の式 (12.88) の導出

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{L}'_I(z)}{\delta J_\mu(x)} &= \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} (J_\kappa(z) A^\kappa(z)) = \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} (\delta_{\mu\kappa} J_\mu(z) A^\kappa(z)) \\
&= \delta_{\mu\kappa} A^\kappa(z) \delta^{(4)}(x-z) \quad (\because \text{式 (12.55) (本稿の式 (5))}) \\
&= A^\mu(x) \delta^{(4)}(x-z), \quad (\text{以上, } \kappa \text{ で和をとり, } \mu \text{ では和をとらない}) \\
\frac{\delta \mathcal{L}'_I(z)}{\delta \sigma(x)} &= \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} (\bar{\psi}(z) \sigma(z)) \\
&= - \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} (\sigma(z) \bar{\psi}(z)) \quad \left(\text{これは } - \frac{\delta}{\delta \sigma_\alpha(x)} (\sigma_\beta(z) \bar{\psi}_\beta(z)) \text{ を } \alpha = 1, 2, 3, 4 \text{ についてまとめた式} \right) \\
&= - \bar{\psi}(z) \delta^{(4)}(x-z) \quad (\because \text{式 (12.69)}) \\
&= - \bar{\psi}(x) \delta^{(4)}(x-z), \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

■ 生成汎関数と Green 関数の関係 (12.91) について 生成汎関数 Z を場で (汎関数) 微分すると Green 関数が得られるのは, 統計力学において分配関数 Z を適当なパラメーターで微分すると熱力学的特性関数が得られるのに似ている。

■ 生成汎関数 (12.91) の Pauli 原理との整合性 (p.323) について Green 関数

$$G^{\mu \cdots}(x_1, \cdots, y_1, \cdots, z_1, \cdots) = \frac{\langle 0 | T \{ S A^\mu(x_1) \cdots \psi(y_1) \cdots \bar{\psi}(z_1) \cdots \} | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle}$$

の中の T 積 $T\{\cdots\psi(y_i)\cdots\psi(y_j)\cdots\}$ で y_i と y_j を入れ替えたものは, $\psi(y_i)$ と $\psi(y_j)$ を互換した $T\{\cdots\psi(y_j)\cdots\psi(y_i)\cdots\}$ である. 互換は $\psi(y_j), \dots, \psi(y_i)$ の奇置換である. ここで Pauli 原理より各 $\psi(y_i)$ は反交換するから,

$$T\{\cdots\psi(y_i)\cdots\psi(y_j)\cdots\} = -T\{\cdots\psi(y_j)\cdots\psi(y_i)\cdots\}$$

となり, Green 関数 $G^{\mu\cdots}(x_1, \cdots, y_1, \cdots, z_1, \cdots)$ は y_i, y_j に関して反対称でなければならない. ところが $\delta/\delta\bar{\sigma}(y_i), \delta/\delta\bar{\sigma}(y_j)$ は反交換するから, 式 (12.91) 右辺はこの反対称性を満足する. 同様に

$$\begin{aligned} \text{Pauli 原理} &\rightarrow \bar{\psi}(z_i) \text{ とうしは反交換} \\ \rightarrow G^{\mu\cdots}(x_1, \cdots, y_1, \cdots, z_1, \cdots) &\text{ は } z_i, z_j \text{ に関して反対称} \\ \rightarrow \text{式 (12.91) 右辺も } z_i, z_j \text{ に関して反対称} \\ &\Leftarrow \left\{ \frac{\delta}{\delta\sigma(z_i)}, \frac{\delta}{\delta\sigma(z_j)} \right\} = 0 \text{ より満たされる.} \end{aligned}$$

12.5.1 自由場の場合

自由場に対する生成汎関数

$$Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \langle 0|S'_0|0\rangle \quad (12.94)$$

を考える. これは式 (12.83) において $\mathcal{L}_I = 0$ (したがって $\mathcal{L}'_I = \mathcal{L}_S$, $S \rightarrow S_0 = 1$ [本稿「12.5.1 について」の節で補足]) としたものであり, このとき $S' \rightarrow S'_0$ と表記している. Z_0 の源 $J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}$ 依存性を, 各源についての汎関数微分方程式を作って調べると,

$$\begin{aligned} Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] &= Z_0[J_\kappa]Z_0[\sigma, \bar{\sigma}], \\ \left\{ \begin{aligned} Z_0[J_\kappa] &= \exp\left\{-\frac{i}{2}[J_\mu D_F^{\mu\nu} J_\nu]\right\} \\ Z_0[\sigma, \bar{\sigma}] &= \exp\{-i[\bar{\sigma} S_F \sigma]\} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (12.110)$$

となることが示される (導出は下記). ここに $[\bar{\sigma} S_F \sigma] \equiv \int d^4x' d^4x'' \bar{\sigma}(x') S_F(x' - x'') \sigma(x'')$ である.

12.5.1 節, 式の導出など

■自由場に対する生成汎関数 (12.110) の導出 はじめに生成汎関数 $Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]$ の源 $J_\mu(x)$ への依存性を調べよう. そのために $Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]$ の汎関数微分方程式を作ることを考える. まず

$$\frac{\delta Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x)} = i \langle 0|T\{S'_0 A^\mu(x)\}|0\rangle \quad (12.96)$$

が成り立つことに注目する [本稿次節で補足]. 上式 (12.96) の右辺を H.P. に変換すると

$$\langle 0|T\{S'_0 A^\mu(x)\}|0\rangle = {}_H\langle 0|A^{\mu H}(x)|0\rangle_H \langle 0|S'_0|0\rangle \quad (12.97)$$

となる [本稿次節で補足]. これを Z_0 の定義式 (12.94) と考え合わせると, 式 (12.96) は

$$\frac{\delta Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x)} = i {}_H\langle 0|A^{\mu H}(x)|0\rangle_H Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]$$

と書き換えられる. ここに左から \square_x を作用させよう. 右辺において $Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]$ は x に依存せず, また場の演算子 $A^{\mu H}(x)$ は運動方程式 (12.80):

$$\square_x A^{\mu H}(x) = -J^\mu(x) \quad (12.99)$$

を満たし、古典的な源の真空期待値は $\langle 0|J^\mu(x)|0\rangle = J^\mu(x)$ であることを用いると、必要な汎関数微分方程式

$$\square_x \frac{\delta Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x)} = -iJ^\mu(x)Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] \quad (12.100)$$

が得られる。

この式を解くために、

$$\square_x \Delta^{\mu\nu}(x-x') = g^{\mu\nu} \delta^{(4)}(x-x') \quad (12.101)$$

を満たす [Green 関数] $\Delta^{\mu\nu}(x-x')$ を導入すると (境界条件は後から決める)、

$$\square_x \int d^4x' \Delta^{\mu\nu}(x-x') \{-iJ_\nu(x')Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]\} = -iJ^\mu(x)Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]$$

となる。これを式 (12.100) と比較すると

$$\frac{\delta Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x)} = \left\{ -i \int d^4x' \Delta^{\mu\nu}(x-x') J_\nu(x') \right\} Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] \quad (12.103)$$

が見出される。通常の微分方程式 $\frac{df(x)}{dx} = \Phi(x)f(x)$ が $f(x) = \text{const.}e^{F(x)}$ という形の解を持つことからの類推で、式 (12.103) の解を

$$Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = N[\sigma, \bar{\sigma}]e^{F[J]} \quad (12.104)$$

の形に求めよう。式 (12.104) の Z_0 に対し式 (12.56d) を適用すると

$$\frac{\delta Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x)} = N[\sigma, \bar{\sigma}]e^{F[J]} \frac{\delta F[J]}{\delta J_\mu(x)} \equiv N[\sigma, \bar{\sigma}]e^{F[J]} \Phi \quad (12.105a)$$

であり、これと式 (12.104) を汎関数微分方程式 (12.103) に代入して

$$\begin{aligned} N[\sigma, \bar{\sigma}]e^{F[J]} \Phi &= \left\{ -i \int d^4x' \Delta^{\mu\nu}(x-x') J_\nu(x') \right\} N[\sigma, \bar{\sigma}]e^{F[J]}, \\ \therefore \Phi &= -i \int d^4x' \Delta^{\mu\nu}(x-x') J_\nu(x') \end{aligned}$$

を得る。[このように教科書の式 (12.105a) は「=」と「≡」が逆と考えられる。] これを解いて $F[J]$ を $\Delta^{\mu\nu}$ で表すために、 Φ を

$$\begin{aligned} \Phi &= -i \int d^4x' d^4x'' [\delta^\mu_\sigma \delta^{(4)}(x''-x')] \Delta^{\sigma\nu}(x''-x') J_\nu(x') \\ &= -i \int d^4x' d^4x'' \frac{\delta J_\sigma(x'')}{\delta J_\mu(x)} \Delta^{\sigma\nu}(x''-x') J_\nu(x') \end{aligned}$$

と書き直す。さらに式 (12.101) より $\Delta^{\sigma\nu}(x''-x') = \Delta^{\nu\sigma}(x''-x')$ が成り立つことを用いると

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{-i}{2} \iint d^4x' d^4x'' \left\{ \frac{\delta J_\sigma(x'')}{\delta J_\mu(x)} \Delta^{\sigma\nu}(x''-x') J_\nu(x') + J_\sigma(x'') \Delta^{\sigma\nu}(x''-x') \frac{\delta J_\nu(x')}{\delta J_\mu(x)} \right\} \\ &= \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \left\{ \frac{-i}{2} \iint d^4x' d^4x'' J_\sigma(x'') \Delta^{\sigma\nu}(x''-x') J_\nu(x') \right\} \\ &\equiv \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \left\{ \frac{-i}{2} [J_\sigma \Delta^{\sigma\nu} J_\nu] \right\} \quad (12.105b) \end{aligned}$$

となる [本稿次節で補足]. これを式 (12.105a): $\frac{\delta F[J]}{\delta J_\mu(x)} = \Phi$ と見比べると

$$F[J] = \frac{-i}{2}[J_\sigma \Delta^{\sigma\nu} J_\nu]$$

と同定され,

$$Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = N[\sigma, \bar{\sigma}] \exp \left\{ -\frac{i}{2}[J_\sigma \Delta^{\sigma\nu} J_\nu] \right\} \quad (12.106)$$

が得られる.

最後に式 (12.101) の適切な解 $\Delta^{\mu\nu}(x-x')$ を求めよう. 自由場 ($S \rightarrow S_0 = 1$) に対して 2 点 Green 関数は

$$G_0^{\mu\nu}(x-y) = \langle 0 | T \{ A^\mu(x) A^\nu(y) \} | 0 \rangle = i D_F^{\mu\nu}(x-y) \quad (12.107a)$$

である [本稿次節で補足]. 他方,

$$G_0^{\mu\nu}(x-y) = \left(\frac{1}{i} \right)^2 \frac{\delta^2 Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x) \delta J_\nu(y)} \Big|_0 \quad (\because \text{式 (12.91)}) \quad (12.108)$$

$$= i \Delta^{\mu\nu}(x-y) \quad (\because \text{式 (12.106b)}) \quad (12.107b)$$

なので (上式 (12.107) の導出は問題 12.5),

$$\Delta^{\mu\nu}(x-y) = D_F^{\mu\nu}(x-y)$$

が導かれる. [このため $\Delta^{\mu\nu}$ は $D_F^{\mu\nu}$ と同じ境界条件を満たすことになる.] したがって自由場生成汎関数の源 $J_\mu(x)$ に対する依存性は

$$Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = N[\sigma, \bar{\sigma}] \exp \left\{ -\frac{i}{2}[J_\sigma D_F^{\sigma\nu} J_\nu] \right\} \quad (12.109)$$

と定まる.

同様の手法で Z_0 のスピノル源 $\sigma(x), \bar{\sigma}(x)$ 依存性を求め, 式 (12.110) を証明できる (問題 12.6).

12.5.1 について

■ 「 $S_0 = 1$ 」 (12.5.1 節, l.3) について

$$S_0 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T \{ \mathcal{L}_I(x_1) \cdots \mathcal{L}_I(x_n) \} \Big|_{\mathcal{L}_I=0} = 1$$

による.

■ 微分方程式 (12.96) について

$$\begin{aligned} \frac{\delta Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x)} &= \left\langle 0 \left| \frac{\delta S'_0}{\delta J_\mu(x)} \right| 0 \right\rangle = \left\langle 0 \left| \frac{\delta S'}{\delta J_\mu(x)} \right| 0 \right\rangle \\ &= \langle 0 | i T \{ S'_0 A^\mu(x) \} | 0 \rangle \quad (\because \text{式 (12.89)}) \end{aligned}$$

と導ける. ただし第 2 の等号では, S'_0 において無視される S' 中の \mathcal{L}_I が J_μ を含まないことに注意した.

■H.P. への変換 (12.97) について Green 関数の H.P. における表式 (12.1) の, I.P. での表現 (12.8) への書き換え

$${}_{\text{H}}\langle 0|A^{\text{H}}(x)B^{\text{H}}(y)\cdots|0\rangle_{\text{H}} = \frac{\langle 0|\text{T}\{SA(x)B(y)\cdots\}|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle}$$

で, $S \rightarrow S'_0$, $A(x)B(y)\cdots \rightarrow A^\mu(x)$ とおけば良い.

■ Φ の式 (12.105b) 第 1 の等号について p.325 一番下の式

$$\Phi = -i \int d^4x' d^4x'' \frac{\delta J_\sigma(x'')}{\delta J_\mu(x)} \Delta^{\sigma\nu}(x'' - x') J_\nu(x')$$

の右辺を, ダミー添字 σ, ν に依らないことを承知で説明のために (σ, ν) と書くと,

$$\Phi = (\sigma, \nu) = (\nu, \sigma) = \frac{(\sigma, \nu) + (\nu, \sigma)}{2}$$

と表現できることによる.

■自由場の Green 関数 (12.107a) について

$$G_0^{\mu\nu}(x - y) = \frac{\langle 0|\text{T}\{A^\mu(x)A^\nu(y)S_0\}|0\rangle}{\langle 0|S_0|0\rangle}$$

において $S_0 = 1$ だから.

12.5.2 摂動展開

相互作用 \mathcal{L}_I を $\lambda\mathcal{L}_I$ (ただし λ は実数) で置き換えた生成汎関数

$$Z_\lambda = \frac{\langle 0|S'_\lambda|0\rangle}{\langle 0|S_\lambda|0\rangle}$$

を定義し ($\lambda = 1$ で $Z_\lambda = Z$), これを λ で展開した式を導くと, Z_0 を 12.5.1 節で求めた自由場生成汎関数 (12.110) として, 相互作用がある場合の生成汎関数 Z の摂動展開

$$\langle 0|S|0\rangle Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \exp \left\{ ie \int d^4x I_\delta(x) \right\} Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] \quad (12.121)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} \left[\int d^4x I_\delta(x) \right]^n Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] \quad (12.122)$$

が得られる (導出は下記). ここに

$$I_\delta(x) \equiv \left(-\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} \right) \gamma_\mu \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\bar{\sigma}(x)} \right) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \right) \quad (12.119)$$

である.

式 (12.121) もしくは式 (12.122) を式 (12.91) に代入して Green 関数を計算すると, 分母にも因子 $\langle 0|S|0\rangle$ が現れることが分かる [本稿の「12.5.2 について」の節で補足]. 12.2.3 項で見たように, この因子は Green 関数の分子の展開において現れる非連結真空グラフの部分とちょうど相殺する. 連結 Green 関数を計算する際には, これらを見捨ててよい. (p.329 より)

12.5.2 節, 式の導出など

■生成汎関数の摂動展開 (12.121) の導出 式 (12.114): $\mathcal{L}'_{I\lambda} \equiv \lambda\mathcal{L}_I + \mathcal{L}_S$ に対して $\partial\mathcal{L}'_{I\lambda}/\partial\lambda = \mathcal{L}_I$ なので,

$$S'_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T\{\mathcal{L}'_{I\lambda}(x_1) \cdots \mathcal{L}'_{I\lambda}(x_n)\}$$

の微分は

$$\frac{\partial S'_\lambda}{\partial\lambda} = i \int d^4x T\{S'_\lambda \mathcal{L}_I(x)\} \quad (12.117)$$

と計算される [本稿次節で補足]. ところで式 (12.119) で定義される相互作用演算子 $I_\delta(x)$ に対して,

$$eI_\delta(x)S'_\lambda = T\{S'_\lambda \mathcal{L}_I(x)\} \quad (12.118)$$

となる [本稿次節で補足]. 式 (12.117) と式 (12.118) を組合せると, λ に関する微分方程式

$$\frac{\partial S'_\lambda}{\partial\lambda} = ie \int d^4x I_\delta(x) S'_\lambda, \quad \therefore \frac{\partial}{\partial\lambda} \langle 0|S'_\lambda|0\rangle = ie \int d^4x I_\delta(x) \langle 0|S'_\lambda|0\rangle$$

が得られる. ここで

$$\langle 0|S'_\lambda|0\rangle = \exp\left\{ie\lambda \int d^4x I_\delta(x)\right\} \langle 0|S'_0|0\rangle \quad (12.120)$$

とおくと, これは上式を満たし [本稿次節で補足], さらに $\lambda \rightarrow 0$ での境界条件 $\langle 0|S'_\lambda|0\rangle \rightarrow \langle 0|S'_0|0\rangle$ も満足するので, 上式の適正な解となっている.

$$\text{式 (12.94): } Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \langle 0|S'_0|0\rangle, \quad \text{式 (12.116): } Z_\lambda = \frac{\langle 0|S'_\lambda|0\rangle}{\langle 0|S_\lambda|0\rangle}$$

を用いて式 (12.120) を

$$\langle 0|S_\lambda|0\rangle Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \exp\left\{ie\lambda \int d^4x I_\delta(x)\right\} Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]$$

と書き換え, $\lambda = 1$ とおくと式 (12.121) を得る.

\mathcal{L}_I の正規順序化を無視した措置の正当化 以上を得る際, $\mathcal{L}_I = e\bar{\psi}A\psi$ として場の正規順序化を省いた. すると Wick 展開の真空期待値 (12.16b):

$$\langle 0|T\{AB \cdots N(\bar{\psi}A\psi)_{x_1} \cdots N(\bar{\psi}A\psi)_{x_n}\}|0\rangle = \langle 0|T\{AB \cdots (\bar{\psi}A\psi)_{x_1} \cdots (\bar{\psi}A\psi)_{x_n}\}|0\rangle_{\text{no. e.t.c.}}$$

において本来省かれる同時刻縮約が生き残ることになる. ところが QED では最初から, 一見ゼロにならない可能性のある唯一の同時刻縮約

$$F^\mu A_\mu(x_i) \equiv \underbrace{\bar{\psi}(x_i)A\psi(x_i)}$$

は実際にはゼロになるから [本稿次節で教科書を修正しつつ確認], 正規順序化を無視したことが正当化される.

12.5.2 について

■ラグランジアン of 置き換え (12.114) について 式 (12.114): $\mathcal{L}_I + \mathcal{L}_S \rightarrow \lambda\mathcal{L}_I + \mathcal{L}_S$ は, 非相対論的量子力学の摂動論におけるハミルトニアン of 置き換え $H_I + H_0 \rightarrow \lambda H_I + H_0$ と比較される.

■式 (12.117) について $\delta S'/\delta\eta(x)$ の式 (12.87) の導出と同様に, 式 (12.87) で

$$\mathcal{L}'_I \rightarrow \mathcal{L}'_{I\lambda} \quad (\because S' \rightarrow S'_\lambda), \quad \frac{\delta}{\delta\eta(x)} \rightarrow \frac{\partial}{\partial\lambda}$$

と置き換えた関係

$$\frac{\partial S'_\lambda}{\partial\lambda} = i \int d^4z T \left\{ S'_\lambda, \frac{\partial \mathcal{L}'_{I\lambda}}{\partial\lambda} \right\} \Leftrightarrow \text{式 (12.117)}$$

が成り立つことを確かめられる.

■ S'_λ の汎関数微分 (12.118) の確認 $\delta S'/\delta\eta(x)$ の式 (12.89) で S' を S'_λ に置き換えた関係を逐次用いると,

$$\begin{aligned} eI_\delta(x)S'_\lambda &= e \left(-\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} \right) \gamma_\mu \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\bar{\sigma}(x)} \right) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \right) S'_\lambda \\ &= e \left(-\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} \right) \gamma_\mu \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\bar{\sigma}(x)} \right) T\{S'_\lambda A^\mu(x)\} \\ &= e \left(-\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} \right) \gamma_\mu T \left\{ \left(\frac{1}{i} \frac{\delta S'_\lambda}{\delta\bar{\sigma}(x)} \right) A^\mu(x) \right\} \\ &= e \left(-\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} \right) \gamma_\mu T \{ T\{S'_\lambda \psi(x)\} A^\mu(x) \} \\ &= e T \left\{ \left(-\frac{1}{i} \frac{\delta S'_\lambda}{\delta\sigma(x)} \right) \gamma_\mu \psi(x) A^\mu(x) \right\} \\ &= e T \{ T\{S'_\lambda \bar{\psi}(x)\} \gamma_\mu \psi(x) A^\mu(x) \} \\ &= T\{S'_\lambda e(\bar{\psi} A \psi)_x\} \\ &= T\{S'_\lambda \mathcal{L}'_I(x)\}. \end{aligned}$$

■式 (12.120) や p.328 下から 3 行目の指数 $\exp \{ ie\lambda \int d^4x I_\delta(x) \}$ について これは式 (12.122) の形のベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ie\lambda)^n}{n!} [\int d^4x I_\delta(x)]^n$ で定義され, 汎関数微分演算子 $I_\delta(x)$ が後続の量に作用して作られる x の関数を x で積分する働きを持つと見なせば良い. 実際このとき式 (12.120):

$$\langle 0|S'_\lambda|0\rangle = \exp \left[\lambda \left\{ ie \int d^4x I_\delta(x) \right\} \right] \langle 0|S'_0|0\rangle$$

に対して

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\lambda} \langle 0|S'_\lambda|0\rangle &= \left\{ ie \int d^4x I_\delta(x) \right\} \exp \left[\lambda \left\{ ie \int d^4x I_\delta(x) \right\} \right] \langle 0|S'_0|0\rangle \\ &= \left\{ ie \int d^4x I_\delta(x) \right\} \langle 0|S'_\lambda|0\rangle \end{aligned}$$

となって, 式 (12.120) の 2 行上の微分方程式が満たされる.

■「Green 関数を計算すると, 分母にも因子 $\langle 0|S|0\rangle$ が現れる」(p.329, 1.4.5) について これは式 (12.122) 左辺の $\langle 0|S|0\rangle$ に由来するものと考えられる. 実際,

$$\begin{aligned} &(\text{Green 関数}) \sim (\text{源による汎関数微分演算子}) Z \\ &= (\text{源による汎関数微分演算子}) \frac{(\text{式 (12.122) 右辺})}{\langle 0|S|0\rangle} \\ &= \frac{(\text{源による汎関数微分演算子})(\text{式 (12.122) 右辺})}{\langle 0|S|0\rangle}. \end{aligned}$$

■図 12.14(p.329) のサブグラフについて 点 x_i で生成された e^- または e^+ が同一の点 x_i で消滅している。これは p.79 下から 10-4 行目の伝播関数

$$\underbrace{\psi(x)\bar{\psi}(x')}$$

の解釈で、特に $x = x' \equiv x_i$ として図示したものである。

■p.329 下から 4 行目の F^μ の式について 最右辺の (-1) は正しくは $(-i)$ と考えられる。実際、

$$\begin{aligned} F^\mu &\equiv \underbrace{\bar{\psi}_\alpha(x_i)\gamma_{\alpha\beta}^\mu\psi_\beta(x_i)} \\ &= -iS_F(x_i - x_i)_{\beta\alpha}\gamma_{\alpha\beta}^\mu \quad (\because \text{式 (6.32c)}) \\ &= -i\text{Tr}\{\gamma^\mu S_F(0)\}. \end{aligned}$$

これに伴い p.329 一番下の式は

$$\begin{aligned} F^\mu &= -i\text{Tr}\left\{\gamma^\mu \left[\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot x} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \right]_{x=0} \right\} \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{4p^\mu}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (\because \text{式 (A.16) より } \text{Tr}\{\gamma_\mu\} = 0, \text{ 式 (A.17) より } \text{Tr}\{\gamma^\mu \not{p}\} = 4p^\mu) \end{aligned}$$

と修正される。これは奇関数の積分なので、ゼロになることには変わらない(式 (10.2), あるいは次元正則化を念頭に置いた式 (10.32))。

練習問題 (第 12 章)

12.1 式 (12.35) の導出

「式 (12.32) に対応する連結 Green 関数 $G_c^{\mu\nu}(x, y, z, w)$ を 2 次まで計算し、……次式 [式 (12.35)] となることを、読者各自の練習問題として確認してもらいたい」(p.307, 1.3-5) とある。

Green 関数 (12.32) の分子の摂動展開を再び $F^{(0)} + F^{(1)} + \dots$ と書くと、

$$\begin{aligned} F^{(0)} &= iD_F^{\mu\nu}(x - y)iS_F(z - w) : (12.33) \quad (\text{非連結ダイアグラムに対応}) \\ F^{(1)} &= ie \int d^4x' \langle 0 | T \{ A^\mu(x) A^\nu(y) \psi(z) \bar{\psi}(w) N[(\bar{\psi} A \psi)_{x'}] \} | 0 \rangle \\ &= 0. \quad (\text{奇数個の電磁場を含むため (12.2.1 節)}) \end{aligned}$$

また T 積中の T 積は不要であることと、混合 T 積の式 (6.38) の導出過程とより、

$$F^{(2)} = \frac{(ie)^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T \{ A^\mu(x) A^\nu(y) \psi(z) \bar{\psi}(w) (\bar{\psi} A \psi)_{x_1} (\bar{\psi} A \psi)_{x_2} \}_{\text{no e.t.c.}} | 0 \rangle.$$

ここで 12.2.1 節で説明されているように、真空期待値に対するゼロでない寄与として、Wick の定理 (6.35) で全ての場が縮約された

$$\{N(\underbrace{ABCD} \dots \underbrace{YZ}) + \dots\}_{\text{no e.t.c.}}$$

のような項を考慮すれば充分である。ここでゼロでない縮約は

$$\begin{aligned} \text{式 (6.32c)} : \underbrace{\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)} &= -\underbrace{\bar{\psi}_\beta(x_2)\psi_\alpha(x_1)} = iS_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2), \\ \text{式 (6.32d)} : \underbrace{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)} &= iD_F^{\mu\nu}(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

であることを思い出そう．電磁場どうしの縮約は次の 3 通りがある．

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{12} &\equiv \underbrace{A^\mu(x)A^\nu(y)}_{\mathcal{A}} \underbrace{A(x_1)A(x_2)}_{\mathcal{A}} = [iD_F^{\mu\nu}(x-y)][\gamma_\alpha\gamma_\beta iD_F^{\alpha\beta}(x_1-x_2)], \\ \mathcal{B}_{12} &\equiv \underbrace{A^\mu(x)A(x_1)}_{\mathcal{A}} \underbrace{A^\nu(y)A(x_2)}_{\mathcal{A}} = [\gamma_\alpha iD_F^{\mu\alpha}(x-x_1)][\gamma_\beta iD_F^{\nu\beta}(y-x_2)], \\ \mathcal{C}_{12} &\equiv \underbrace{A^\mu(x)A(x_2)}_{\mathcal{A}} \underbrace{A^\nu(y)A(x_1)}_{\mathcal{A}} \\ &= \mathcal{B}_{21}.\end{aligned}$$

また正規積を外す前後を比べてフェルミオン演算子が偶置換か奇置換かに応じて，符号 ± 1 が生じること (式 (6.33)) を考慮すると，Dirac 場どうしの縮約は次の 3 通りである．

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'_{12} &\equiv (+1)\underbrace{\psi(z)\bar{\psi}(w)}_{\mathcal{A}'} \underbrace{\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)}_{\mathcal{A}'} \underbrace{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)}_{\mathcal{A}'} = [iS_F(z-w)][-iS_F(x_2-x_1)][iS_F(x_1-x_2)], \\ \mathcal{B}'_{12} &\equiv (-1)\underbrace{\psi(z)\bar{\psi}(x_1)}_{\mathcal{A}'} \underbrace{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)}_{\mathcal{A}'} \underbrace{\bar{\psi}(w)\psi(x_2)}_{\mathcal{A}'} = -[iS_F(z-x_1)][iS_F(x_1-x_2)][-iS_F(x_2-w)], \\ \mathcal{C}'_{12} &\equiv (+1)\underbrace{\psi(z)\bar{\psi}(x_2)}_{\mathcal{A}'} \underbrace{\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)}_{\mathcal{A}'} \underbrace{\bar{\psi}(w)\psi(x_1)}_{\mathcal{A}'} = [iS_F(z-x_1)][-iS_F(x_2-x_1)][iS_F(x_1-w)] \\ &= \mathcal{B}'_{21}.\end{aligned}$$

よって

$$F^{(2)} = \frac{(ie)^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 (\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C})_{12} (\mathcal{A}' + \mathcal{B}' + \mathcal{C}')_{12}$$

であり， $\mathcal{A}\mathcal{A}'$ の寄与は

$$F_{\mathcal{A}\mathcal{A}'}^{(2)} \equiv \frac{(ie)^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \mathcal{A}_{12} \mathcal{A}'_{12} = (\text{式 (12.33)}) \times \langle 0|S^{(2)}|0\rangle$$

だから (以前の式 (12.26) と同様である)，それ以外の寄与を $F_*^{(2)}$ とおいて

$$F^{(2)} = F_{\mathcal{A}\mathcal{A}'}^{(2)} + F_*^{(2)} = (\text{式 (12.33)}) \times \langle 0|S^{(2)}|0\rangle + F_*^{(2)}$$

と書くと，式 (12.28) と同様に

$$\begin{aligned}\langle 0|T\{A^\mu(x)\cdots\bar{\psi}(w)S\}|0\rangle &= \{(\text{式 (12.33)}) + F_*^{(2)} + \cdots\} \langle 0|S|0\rangle, \\ \therefore G^{\mu\nu}(x, \cdots, w) &= F_*^{(2)} = \frac{(ie)^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \{ \mathcal{A}(\mathcal{B}' + \mathcal{C}') + \mathcal{A}'(\mathcal{B} + \mathcal{C}) + (\mathcal{B}\mathcal{B}' + \mathcal{C}\mathcal{C}') + (\mathcal{B}\mathcal{C}' + \mathcal{C}\mathcal{B}') \}_{12}\end{aligned}$$

を得る．このうち \mathcal{A} は図 15 のグラフを， \mathcal{A}' は図 16 のグラフを作るから，これらを含む項は連結ダイアグラムに対応しない．

$$(\mathcal{C}\mathcal{C}')_{12} = (\mathcal{B}\mathcal{B}')_{21}, \quad (\mathcal{C}\mathcal{B}')_{12} = (\mathcal{B}\mathcal{C}')_{21}$$

とより結局，

$$\begin{aligned}G_c^{\mu\nu}(x, \cdots, w) &= F_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{(2)} + F_{\mathcal{B}\mathcal{C}'}^{(2)}, \\ F_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{(2)} &\equiv \frac{(ie)^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 (\mathcal{B}\mathcal{B}')_{12} \\ &= \frac{i^7 e^2}{2} \gamma_\alpha \gamma_\beta \int d^4x_1 d^4x_2 D_F^{\mu\alpha}(x-x_1) D_F^{\nu\beta}(y-x_2) S_F(z-x_1) S_F(x_1-x_2) S_F(x_2-w), \\ F_{\mathcal{B}\mathcal{C}'}^{(2)} &\equiv \frac{(ie)^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 (\mathcal{B}\mathcal{C}')_{12} \\ &= \frac{i^7 e^2}{2} \gamma_\alpha \gamma_\beta \int d^4x_1 d^4x_2 D_F^{\mu\alpha}(x-x_1) D_F^{\nu\beta}(y-x_2) S_F(z-x_2) S_F(x_2-x_1) S_F(x_1-w)\end{aligned}$$

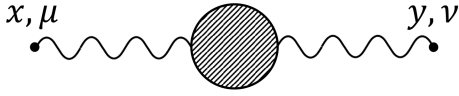


図 15 A

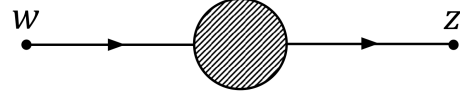


図 16 A'

を得る.

これらを式 (12.9) に従って運動量空間に移そう.

$$\begin{aligned}
 & (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 + p_1 + p_2) G_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{\mu\nu}(k_1, k_2, p_1, p_2) \\
 & \equiv \int d^4x d^4y d^4z d^4w e^{-ik_1 \cdot x} e^{-ik_2 \cdot y} e^{-ip_1 \cdot z} e^{-ip_2 \cdot w} F_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{(2)}
 \end{aligned} \tag{10}$$

の右辺の x, \dots, w に関する積分を実行すると

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x e^{-ik_1 \cdot x} D_{\mathbb{F}}^{\mu\alpha}(x - x_1) = e^{-ik_1 \cdot x_1} D_{\mathbb{F}}^{\mu\alpha}(k_1), \\
 & \int d^4y e^{-ik_2 \cdot y} D_{\mathbb{F}}^{\nu\beta}(y - x_2) = e^{-ik_2 \cdot x_2} D_{\mathbb{F}}^{\nu\beta}(k_2), \\
 & \int d^4z e^{-ip_1 \cdot z} S_{\mathbb{F}}(z - x_1) = e^{-ip_1 \cdot x_1} S_{\mathbb{F}}(p_1), \\
 & \int d^4w e^{-ip_2 \cdot w} S_{\mathbb{F}}(x_2 - w) = \int d^4w' e^{-ip_2 \cdot (x_2 - w')} S_{\mathbb{F}}(w') \\
 & \quad = e^{-ip_2 \cdot x_2} S_{\mathbb{F}}(-p_2)
 \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}
 & (\text{上式 (10) 右辺}) = i^7 e^2 \gamma_\alpha \gamma_\beta D_{\mathbb{F}}^{\mu\alpha}(k_1) D_{\mathbb{F}}^{\nu\beta}(k_2) S_{\mathbb{F}}(p_1) S_{\mathbb{F}}(-p_2) \\
 & \quad \times \int d^4x_1 d^4x_2 e^{-i(p_1+k_1) \cdot x_1} e^{-i(p_2+k_2) \cdot x_2} S_{\mathbb{F}}(x_1 - x_2)
 \end{aligned}$$

を得る. 2 行目の積分は

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x_2 e^{-i(k_1+k_2+p_1+p_2) \cdot x_2} \int d^4x_1 e^{-i(p_1+k_1) \cdot (x_1-x_2)} S_{\mathbb{F}}(x_1 - x_2) \\
 & = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 + p_1 + p_2) S_{\mathbb{F}}(p_1 + k_1)
 \end{aligned}$$

である. こうして得られた

$$G_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{\mu\nu}(k_1, k_2, p_1, p_2) = i^7 e^2 \gamma_\alpha \gamma_\beta D_{\mathbb{F}}^{\mu\alpha}(k_1) D_{\mathbb{F}}^{\nu\beta}(k_2) S_{\mathbb{F}}(p_1) S_{\mathbb{F}}(-p_2) S_{\mathbb{F}}(p_1 + k_1)$$

は式 (12.35) 右辺第 1 項に一致する ($D_{\mathbb{F}}^{\mu\alpha}(x) = D_{\mathbb{F}}^{\alpha\mu}(x)$ より $D_{\mathbb{F}}^{\mu\alpha}(k_1) = D_{\mathbb{F}}^{\alpha\mu}(k_1)$ だから).

参考 光子伝播関数

$$\begin{aligned}
 \underline{A^\mu(x)A^\nu(x')} & = iD_{\mathbb{F}}^{\mu\nu}(x - x') \quad (\text{式 (5.26)}) \\
 & = -ig^{\mu\nu} \lim_{m \rightarrow 0} \Delta(x - x') \quad (\text{式 (5.25)})
 \end{aligned}$$

は最右辺を見ると, $\Delta(x)$ が奇関数なので (式 (3.43))

- μ, ν に関して対称

- x, x' に関して反対称である.

$F_{BC'}^{(2)}$ も同様に運動量空間に移せる. すなわち

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 + p_1 + p_2) G_{BC'}^{\mu\nu}(k_1, k_2, p_1, p_2) \\ \equiv \int d^4x d^4y d^4z d^4w e^{-ik_1 \cdot x} e^{-ik_2 \cdot y} e^{-ip_1 \cdot z} e^{-ip_2 \cdot w} F_{BC'}^{(2)} \quad (11)$$

の右辺における x と y の積分は式 (10) の場合と変わらず, z, w に関する積分は

$$\int d^4z e^{-ip_1 \cdot z} S_F(z - x_2) = e^{-ip_1 \cdot x_2} S_F(p_1), \\ \int d^4w e^{-ip_2 \cdot w} S_F(x_1 - w) = e^{-ip_2 \cdot x_1} S_F(-p_2)$$

となるから,

$$(上式 (11) 右辺) = i^7 e^2 \gamma_\alpha \gamma_\beta D_F^{\mu\alpha}(k_1) D_F^{\nu\beta}(k_2) S_F(p_1) S_F(-p_2) \\ \times \int d^4x_1 d^4x_2 e^{-i(p_2+k_1) \cdot x_1} e^{-i(p_1+k_2) \cdot x_2} S_F(x_2 - x_1)$$

を得る. 2 行目の積分は $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 + p_1 + p_2) S_F(p_1 + k_2)$ だから, $G_{BC'}^{\mu\nu}(k_1, k_2, p_1, p_2)$ は式 (112.35) の右辺第 2 項に一致する.

以上で式 (12.35) が示された.

12.2 式 (12.42b) と式 (12.42c) に関する交差関係の考察

陽電子の Compton 散乱

$$\gamma(k, r) + e^+(p, s) \rightarrow \gamma(k', r') + e^+(p', s') \quad (12.42b)$$

の始・終状態の粒子 $e^+(p, s), \gamma(k', r')$ を終・始状態の反粒子 $e^-(p, s), \gamma(k', r')$ に置き換えると, 電子-陽電子生成

$$\gamma(k, r) + \gamma(k', r') \rightarrow e^-(p, s) + e^+(p', s') \quad (12.42c)$$

になる. それぞれの Feynman 振幅 $\mathcal{M}_b, \mathcal{M}_c$ は以下のように同一の Green 関数から得られ, 交差関係 (12.3 節) を見て取れる.

- 連結 Green 関数 (12.35)(図 17)

$$G_c^{\mu\nu}(k_1, k_2, p_1, p_2) = iD_F^{\mu\alpha}(k_1) iS_F(-p_2) \Gamma_{\alpha\beta}(k_1, k_2, p_1, p_2) iS_F(p_1) iD_F^{\beta\nu}(k_2).$$

ここに結節部分関数は式 (12.37):

$$\Gamma_{\alpha\beta}(k_1, k_2, p_1, p_2) \equiv (ie\gamma_\beta) iS_F(p_1 + k_1) (ie\gamma_\alpha) + (ie\gamma_\alpha) iS_F(p_1 + k_2) (ie\gamma_\beta)$$

で与えられる.

- Compton 散乱 (12.42b) の Feynman 振幅 (図 18)

$$\mathcal{M}_b = \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) v_{s'}(\mathbf{p}') \Gamma_{\alpha\beta}(k, -k', p, -p') \bar{v}_s(\mathbf{p}) \varepsilon_{r'}^\beta(\mathbf{k}').$$

- 電子-陽電子消滅 (12.42c) の Feynman 振幅 (図 19)

$$\mathcal{M}_c = \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) \bar{v}_{s'}(\mathbf{p}') \Gamma_{\alpha\beta}(k, k', -p, -p') \bar{u}_s(\mathbf{p}) \varepsilon_{r'}^\beta(\mathbf{k}').$$

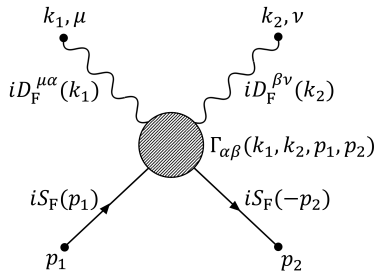


図 17 連結 Green 関数 (12.35)

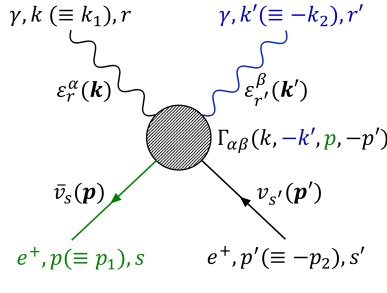


図 18 陽電子の Compton 散乱 (12.42b)

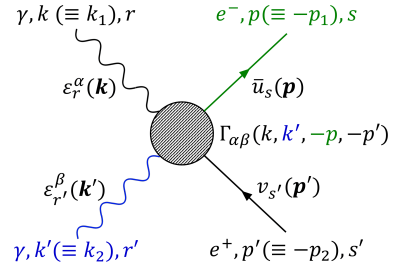


図 19 電子-陽電子生成 (12.42c)

12.3 運動方程式 (12.80), (12.81a,b) の導出

$\mathcal{E}_{A_\alpha} \equiv \partial_\beta \frac{\partial}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} - \frac{\partial}{\partial A_\alpha}$ に対し,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{A_\alpha}[\mathcal{L}_0] &= \partial_\beta \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} (\partial_\nu A_\mu) (\partial^\nu A^\mu) \right\} = -\partial_\beta \partial^\beta A^\alpha = -\square A^\alpha, \\ \mathcal{E}_{A_\alpha}[\mathcal{L}_I] &= -\frac{\partial}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} (-s^\mu A_\mu) = s^\mu, \\ \mathcal{E}_{A_\alpha}[\mathcal{L}_S] &= -\frac{\partial}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} (J^\kappa A_\kappa) = -J^\alpha\end{aligned}$$

なので, Euler-Lagrange 方程式

$$\mathcal{E}_{A_\alpha}[\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I] = 0, \quad \mathcal{E}_{A_\alpha}[\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_S] = 0$$

はそれぞれ運動方程式

$$\square A^\alpha = s^\alpha : (5.12), \quad \square A^\alpha = -J^\alpha : (12.80)$$

を与える.

次に $\mathcal{E}_{\bar{\psi}} \equiv \partial_\lambda \frac{\partial}{\partial(\partial_\lambda \bar{\psi})} - \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}}$ に対し,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\bar{\psi}}[\mathcal{L}_0] &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}} \{ \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - m) \psi \} = -(i\cancel{\partial} - m) \psi, \\ \mathcal{E}_{\bar{\psi}}[\mathcal{L}_S] &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}} (\bar{\psi} \sigma) = -\sigma\end{aligned}$$

なので, Euler-Lagrange 方程式 $\mathcal{E}_{\bar{\psi}}[\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_S] = 0$ から運動方程式 (12.81a):

$$(i\cancel{\partial} - m) \psi = -\sigma$$

が得られる.

さらに $\mathcal{E}_\psi \equiv \partial_\lambda \frac{\partial}{\partial(\partial_\lambda \psi)} - \frac{\partial}{\partial \psi}$ に対し,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\psi[\mathcal{L}_0] &= \partial_\lambda \frac{\partial}{\partial(\partial_\lambda \psi)} (\bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi) - \frac{\partial}{\partial \psi} (-m \bar{\psi} \psi) = i(\partial_\lambda \bar{\psi}) \gamma^\lambda + m \bar{\psi}, \\ \mathcal{E}_\psi[\mathcal{L}_S] &= -\frac{\partial}{\partial \psi} (\bar{\sigma} \psi) = -\bar{\sigma}\end{aligned}$$

なので, Euler-Lagrange 方程式 $\mathcal{E}_\psi[\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_S] = 0$ から運動方程式

$$i(\partial_\lambda \bar{\psi})\gamma^\lambda + m\bar{\psi} = \bar{\sigma}$$

が導かれる. このため式 (12.81b) 右辺の負号は誤植と考えられる (本稿では修正済み). 実際, 式 (12.81a) の両辺の Hermite 共役をとって (-1) 倍したときの右辺を p.321 脚注 11 で定義した $\sigma^\dagger (\equiv \bar{\sigma}\gamma^0)$ と見なしてしまうと,

$$i(\partial_\mu \psi^\dagger)\gamma^{\mu\dagger} + m\psi^\dagger = \sigma^\dagger.$$

右から γ^0 をかけると

$$\begin{aligned} i(\partial_\mu (\psi^\dagger \gamma^0))(\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0) + m(\psi^\dagger \gamma^0) &= \bar{\sigma}(\gamma^0)^2, \\ \therefore i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi} &= \bar{\sigma} \end{aligned}$$

となり, 確かに右辺に負号は現れない.

12.5 式 (12.107b) の導出

式 (12.106): $Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = N[\sigma, \bar{\sigma}] \exp \left\{ -\frac{i}{2} [J_\sigma \Delta^{\sigma\rho} J_\rho] \right\}$ に対して,

$$\left. \frac{\delta^2 Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x) \delta J_\nu(y)} \right|_0 = -i\Delta^{\mu\nu}(x-y)$$

を示せば良い.

$F[J] \equiv -\frac{i}{2} [J_\sigma D_F^{\sigma\rho} J_\rho]$ とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x) \delta J_\nu(y)} &= N[\sigma, \bar{\sigma}] \frac{\delta^2 e^{F[J]}}{\delta J_\mu(x) \delta J_\nu(y)} \\ &= N[\sigma, \bar{\sigma}] \frac{\delta}{\delta J_\nu(y)} \left(\frac{\delta F[J]}{\delta J_\mu(x)} e^{F[J]} \right) \\ &= N[\sigma, \bar{\sigma}] \left(\frac{\delta^2 F[J]}{\delta J_\mu(x) \delta J_\nu(y)} + \frac{\delta F[J]}{\delta J_\mu(x)} \frac{\delta F[J]}{\delta J_\nu(y)} \right) e^{F[J]}. \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} \frac{\delta F[J]}{\delta J_\mu(x)} &= -\frac{i}{2} \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \int d^4x' d^4x'' J_\sigma(x') \Delta^{\sigma\rho}(x' - x'') J_\rho(x'') \\ &= -\frac{i}{2} \int d^4x' d^4x'' [\{\delta^\mu_\sigma \delta^{(4)}(x' - x)\} \Delta^{\sigma\rho}(x' - x'') J_\rho(x'') + J_\sigma(x') \Delta^{\sigma\rho}(x' - x'') \{\delta^\mu_\rho \delta^{(4)}(x'' - x)\}] \\ &= -\frac{i}{2} \left\{ \int d^4x'' \Delta^{\mu\rho}(x - x'') J_\rho(x'') + \int d^4x' J_\sigma(x') \Delta^{\sigma\mu}(x' - x) \right\} \\ &= -i \int d^4x' J_\sigma(x') \Delta^{\sigma\mu}(x' - x), \\ \therefore \frac{\delta^2 F[J]}{\delta J_\mu(x) \delta J_\nu(y)} &= -i \int d^4x' \{\delta^\nu_\sigma \delta^{(4)}(x' - y)\} \Delta^{\sigma\mu}(x' - x) \\ &= -i\Delta^{\mu\nu}(x-y) \end{aligned}$$

を代入する. さらに上式で源をゼロとおく際, Z_0 の式 (12.106) に式 (12.84): $Z[0, 0, 0] = 1$ を課すと $N[0, 0] = 1$ となることに注意すると, 目標の式

$$\left. \frac{\delta^2 Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x) \delta J_\nu(y)} \right|_0 = -i\Delta^{\mu\nu}(x-y)$$

が得られる.

12.6 $Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]$ の $\sigma, \bar{\sigma}$ 依存性と式 (12.110) の導出の完成

以下, $Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] \equiv Z_0$ と引数を省略する. 式 (12.89) の第 2 式を出発点とすると,

$$\frac{\delta Z_0}{\delta \bar{\sigma}(x)} = \left\langle 0 \left| \frac{\delta S'_0}{\delta \bar{\sigma}(x)} \right| 0 \right\rangle = \langle 0 | iT \{ S'_0 \psi(x) \} | 0 \rangle = i_{\text{H}} \langle 0 | \psi^{\text{H}}(x) | 0 \rangle_{\text{H}} Z_0$$

なので, 両辺 $(i\partial - m)_x \equiv i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m$ を左から作用させ, 運動方程式 (12.81a): $(i\partial - m)\psi = -\sigma$ に注意すると, 汎関数微分方程式

$$(i\partial - m)_x \frac{\delta Z_0}{\delta \bar{\sigma}(x)} = -i\sigma(x)Z_0$$

を得る (式 (12.100) に対応). (式 (12.101) に対応して,) $(i\partial - m)_x \mathcal{S}(x - x') = \delta^{(4)}(x - x')$ を満たす Green 関数 $\mathcal{S}(x - x')$ を導入し, 上式の両辺に $-i\sigma(x')Z_0$ をかけて x' で積分すると

$$(i\partial - m)_x \int d^4x' \mathcal{S}(x - x') \{-i\sigma(x')Z_0\} = -i\sigma(x)Z_0$$

となるので, 汎関数微分方程式は

$$\frac{\delta Z_0}{\delta \bar{\sigma}(x)} = \left\{ -i \int d^4x' \mathcal{S}(x - x') \sigma(x') \right\} Z_0$$

に置き換わる (式 (12.103) に対応). この解は (式 (12.104) に対応して) $Z_0 = N[J_\kappa] e^{F[\sigma, \bar{\sigma}]}$ の形をしており, これに対し

$$\frac{\delta Z_0}{\delta \bar{\sigma}(x)} = N[J_\kappa] e^{F[\sigma, \bar{\sigma}]} \Phi, \quad \Phi \equiv \frac{\delta F}{\delta \bar{\sigma}(x)}$$

だから, これらを上の微分方程式に代入し

$$\begin{aligned} \Phi &= -i \int d^4x' \mathcal{S}(x - x') \sigma(x') \quad (\text{式 (12.105a) に対応}) \\ &= -i \int d^4x' d^4x'' \delta^{(4)}(x'' - x) \mathcal{S}(x'' - x') \sigma(x') \\ &= -i \int d^4x' d^4x'' \frac{\delta \bar{\sigma}(x'')}{\delta \bar{\sigma}(x)} \mathcal{S}(x'' - x') \sigma(x') \\ &= \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}(x)} \{-i[\bar{\sigma} \mathcal{S} \sigma]\} \quad (\text{式 (12.105b) に対応}) \end{aligned}$$

$$\therefore F[\sigma, \bar{\sigma}] = -i[\bar{\sigma} \mathcal{S} \sigma].$$

次に (式 (12.107a), (12.108) に対応して)

$$G_0(x, y) \equiv \frac{\langle 0 | T \{ S_0 \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | 0 \rangle}{\langle 0 | S_0 | 0 \rangle} = \langle 0 | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | 0 \rangle = iS_{\text{F}}(x - y)$$

を考える. この Green 関数は生成汎関数から

$$G_0(x, y) = \left(\frac{1}{i} \right)^2 \frac{\delta^2 Z_0}{\delta \bar{\sigma}(x) \delta \sigma(y)} \Big|_0$$

と導かれる. 上式に

$$Z_0 = N[J_\kappa] e^{F[\sigma, \bar{\sigma}]}, \quad F[\sigma, \bar{\sigma}] \equiv -i[\bar{\sigma} \mathcal{S} \sigma]$$

を代入すると

$$\begin{aligned} G_0(x, y) &= N[J_\kappa] \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}(x)} \left(\frac{\delta F}{\delta \sigma(y)} e^F \right) \Big|_0 \\ &= N[J_\kappa] \left(\frac{\delta F}{\delta \bar{\sigma}(x)} \frac{\delta F}{\delta \sigma(y)} + \frac{\delta^2 F}{\delta \bar{\sigma}(x) \delta \sigma(y)} \right) e^F \Big|_0. \end{aligned}$$

ここで $\frac{\delta F}{\delta \bar{\sigma}(x)} = \Phi = -i \int d^4 x' \mathcal{S}(x-x') \sigma(x')$ を思い出すと

$$\frac{\delta^2 F}{\delta \bar{\sigma}(x) \delta \sigma(y)} = -\frac{\delta^2 F}{\delta \sigma(y) \delta \bar{\sigma}(x)} = i\mathcal{S}(x-y)$$

であり, さらに $Z_0 = N[J_\kappa] e^{F[\sigma, \bar{\sigma}]}$ に式 (12.84): $Z[0, 0, 0] = 1$ を課すと $N[0] = 1$ だから,

$$G_0(x, y) = i\mathcal{S}(x-y)$$

となる. これを $G_0(x, y) = iS_F(x-y)$ と等置すると,

$$\mathcal{S}(x-y) = S_F(x-y), \quad \therefore Z_0 = N[J_\kappa] \exp\{-i[\bar{\sigma} S_F \sigma]\}$$

となる. J_κ 依存性 (12.109) とより

$$Z_0 = \text{const} \times \exp\left\{-\frac{i}{2}[J_\mu D_F^{\mu\nu} J_\nu]\right\} \exp\{-i[\bar{\sigma} S_F \sigma]\}$$

であり, 再び規格化条件 (12.84): $Z[0, 0, 0] = 1$ を考慮すると $\text{const} = 1$ と定まる.

第 13 章 径路積分

序文を引用する (強調は本稿筆者).

ここまで我々は場の量子論を, 場を非可換な演算子によって表す正準形式の定式化の下で利用してきた. このアプローチは非相対論的な量子力学から入りやすい方法であり, その定式化の物理的な意味を単純かつ直接的な方法で把握することができる. しかしこれを非 Abel ゲージ理論に適用することは難しい. 非 Abel ゲージ理論では, 相互作用の源として働く各保存電荷が互いに非可換である. QCD における色電荷 \hat{F}_i はその例にあたる. そこで我々は, このような理論の取扱いに適している“径路積分”(path integral) による定式化を導入する.

本章では最初に汎関数積分の諸性質を考察するが, この知識は本章の後の方で必要となる. それから径路積分による場の量子論の定式化を, QED の文脈において導入する. QCD への応用は, 次の第 14 章で行う.

13.1 汎関数積分

“汎関数積分”は“径路積分”と同義である. 「本節では, 簡潔に汎関数積分を導入し, 後から必要となる重要な力学的性質をいくつか調べておく」(13.1 節序文より).

13.1.1 古典場

汎関数積分の定義 完全正規直交関数系 $\{u_i(x)\}$ で実スカラー場を

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i(x)$$

と展開し, 右辺の級数を第 n 項で打ち切る. このとき ϕ の汎関数 $F[\phi] = F(\alpha)$ はパラメーターの組 $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ で指定される. $F[\phi]$ の汎関数積分は

$$\int \mathcal{D}\phi F[\phi] \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_i}{\sqrt{2\pi}} \right) F(\alpha) \quad (13.4)$$

で定義され, これはあらゆる $\phi(x)$ の関数形 (したがって α) [あらゆる場の時間発展の仕方] についての $F[\phi]$ の“和”を表す.

汎関数積分は等価的に次のように定義することもできる. 時空を微小体積 Δ の胞 (セル) に分割し, 胞の内部における場 ϕ の値を, 胞の中心点 x_i における値 $\phi_i = \phi(x_i)$ で近似する. このとき ϕ の汎関数は $F[\phi] = F(\{\phi_i\})$ と表され,

$$\int \mathcal{D}\phi F[\phi] \equiv \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\prod_i \left(\frac{\Delta}{2\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_i \right) F(\{\phi_i\}). \quad (13.16)$$

以降では定義式 (13.4) を採用して具体的な計算を行う.

“Gauss 型”の汎関数積分 実対称な積分核 $K(x, y) = K(y, x)$ と n 番目までの関数 $u_i(x) (i = 1, \dots, n)$ に対して, n 次元正方行列 $K_n = (K_{ij})$ を

$$K_{ij} = [u_i K u_j] \equiv \int d^4x \int d^4y u_i(x) K(x, y) u_j(y) \quad (13.8)$$

で定義する. このとき “Gauss 型” の汎関数積分の公式

$$I \equiv \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\phi K \phi] \right\} \quad (13.5)$$

$$= (\det K)^{-1/2} \quad (13.12)$$

が導かれる (証明は下記). ここに $\det K \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \det K_n$ であり $[\det(\lim_{n \rightarrow \infty} K_n)]$ と定義するわけにはいかない], 引き続き略記法

$$[AKB] \equiv \int d^4x \int d^4y A(x) K(x, y) B(y)$$

を用いている (以下, 同様). 公式 (13.12) の係数が簡単になるように, 汎関数積分の定義式 (13.4) において “加重因子” を $1/\sqrt{2\pi}$ に選んである [式 (13.12) の導出過程を参照].

汎関数積分の性質

- 線形性

$$\int \mathcal{D}\phi (aF[\phi] + bG[\phi]) = a \int \mathcal{D}\phi F[\phi] + b \int \mathcal{D}\phi G[\phi]. \quad (a, b \text{ は任意の定数})$$

- “並進” 不変性 (導出は下記)

$$\int \mathcal{D}\phi F[\phi + f] = \int \mathcal{D}\phi F[\phi]. \quad (f(x) \text{ は任意の関数}) \quad (13.18)$$

- 変数変換 $\phi \rightarrow \bar{\phi}$ (導出は下記)

$$\bar{\phi}(x) = \int d^4y K(x, y) \phi(y) \quad (13.19)$$

$$\Rightarrow \int \mathcal{D}\bar{\phi} F[\bar{\phi}] = (\det K) \int \mathcal{D}\phi F[\phi]. \quad (13.22)$$

ただしここでも

$$K_{ij} = [u_i K u_j], \quad K_n = (K_{ij}), \quad \det K = \lim_{n \rightarrow \infty} (\det K_n)$$

である $[K(x, y)]$ の対称性は仮定しなくてよい].

場の理論で典型的に現れる汎関数 実スカラー源 $J(x)$ と実対称な積分核 $K(x, y) = K(y, x)$ に対し, 汎関数

$$I[J] = N \int \mathcal{D}\phi \exp(A[J\phi]), \quad A[J, \phi] \equiv -\frac{1}{2} [\phi K \phi] + [J\phi] \quad (13.23)$$

を考える ($[J\phi] \equiv \int d^4x J(x)\phi(x)$).

$$\int d^4x' K(x, x') K^{-1}(x', x'') = \delta^{(4)}(x - x'') \quad (13.26)$$

によって定義される K の “逆演算子” K^{-1} を用いて, $I[J]$ は汎関数積分を含まない Gauss 型の式

$$I[J] = N' \exp \left\{ \frac{1}{2} [J K^{-1} J] \right\} \quad (13.33)$$

に書き換えられる (導出は下記). ただし N, N' は規格化定数であり, 規格化条件 $I[J = 0] = 1$ を課すと $N' = 1$ と定まる.

13.1.1 節, 式の導出など

■ “Gauss 型” の汎関数積分に対する公式 (13.12) の証明 “Gauss 型” の汎関数積分 (13.5) に対して汎関数積分の定義式 (13.4) を適用すると,

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^n \frac{d\alpha_i}{\sqrt{2\pi}} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i(x) \right) K(x, y) \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j u_j(y) \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^n \frac{d\alpha_i}{\sqrt{2\pi}} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha_i K_{ij} \alpha_j \right\} \end{aligned} \quad (13.7)$$

となる. ただし K_{ij} は式 (13.8) で定義されている. $K(x, y)$ の対称性より $K_n = (K_{ij})$ は実対称行列となるから, 適当な n 次元正方行列 $O_n = (O_{ij})$ によって対角化できる. ここで新たな変数 $\beta_i = \sum_{j=1}^n O_{ij} \alpha_j$ を導入すると, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ を K_n の固有値として上式 (13.7) の指数部分は

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_i K_{ij} \alpha_j = \sum_{i,j=1}^n \beta_i \lambda_i \delta_{ij} \beta_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i \beta_i^2 \quad (13.10)$$

と書き換えられる [本稿次節で補足. 2 次形式の主軸変換である]. また式 (13.7) における積分要素の積は

$$\prod_{i=1}^n d\beta_i = (\det O_n) \prod_{i=1}^n d\alpha_i = \prod_{i=1}^n d\alpha_i \quad (13.11)$$

の関係によって変換できる (直交行列の行列式は $\det O_n = 1$ である) [本稿次節で補足]. よって式 (13.7) の積分 I_n は

$$I_n = \prod_{i=1}^n \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\beta_i}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \lambda_i \beta_i^2 \right) \right\} = \prod_{i=1}^n \lambda_i^{-1/2} = (\det K_n)^{-1/2} \quad \left(\because \det K_n = \prod_{i=1}^n \lambda_i \right)$$

と実行できる. 最後に $n \rightarrow \infty$ の極限をとって, 式 (13.12) を得る.

■ “並進” 不変性 (13.18) の確認

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i u_i(x)$$

と展開すると, 定義式 (13.4) より

$$\int \mathcal{D}\phi F[\phi + f] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_i}{\sqrt{2\pi}} \right) F(\alpha_1 + f_1, \dots, \alpha_n + f_n) \right\}$$

であり, 積分変数 $\beta_i = \alpha_i + f_i$ を導入すると式 (13.18) が得られる [本稿次節で補足].

■ 変数変換の公式 (13.22) の導出 $\phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i(x)$, $\bar{\phi}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\alpha}_i u_i(x)$ と展開して正規直交性 $\int d^4x u_i(x) u_j(x) = \delta_{ij}$ を用いると

$$\bar{\alpha}_i = \sum_{j=1}^{\infty} K_{ij} \alpha_j \quad (13.20)$$

を得る [本稿次節で補足]. よって展開を第 n 項までで打ち切ると

$$\prod_{i=1}^n d\bar{\alpha}_i = (\det K_n) \prod_{i=1}^n d\alpha_i$$

となり, これを汎関数積分の定義式 (13.4) と合わせると式 (13.22) が得られる.

■ $I[J]$ の式 (13.33) の導出 「源の項があるために式 (13.23) は Gauss 型 (13.5) ではない. しかし “自乗を形成する” ことで Gauss 型へ移行できる」 (p.338, 1.5,6). 式 (13.26) で定義した逆演算子 K^{-1} に対して “シフトした” スカラー場

$$\phi'(x) = \phi(x) - \int d^4x' K^{-1}(x, x') J(x') \quad (13.27)$$

を導入すると,

$$\begin{aligned} A[J, \phi] = & -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \left\{ \phi'(x) + \int d^4x' K^{-1}(x, x') J(x') \right\} K(x, y) \left\{ \phi'(y) + \int d^4y' K^{-1}(y, y') J(y') \right\} \\ & + \int d^4x \left\{ \phi'(x) + \int d^4x' K^{-1}(x, x') J(x') \right\} \end{aligned} \quad (13.28)$$

$$= \frac{1}{2} [JK^{-1}J] - \frac{1}{2} [\phi'K\phi'] \quad (13.29)$$

と書き換えられる [本稿次節で補足]. 式 (13.29) におけるすべての因子は互いに可換なので,

$$\begin{aligned} \exp(A[J, \phi]) &= \exp\left\{\frac{1}{2}[JK^{-1}J]\right\} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}[\phi'K\phi']\right\}, \\ \therefore I[J] &= N \exp\left\{\frac{1}{2}[JK^{-1}J]\right\} \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{-\frac{1}{2}[\phi'K\phi']\right\} \end{aligned}$$

とできる. 式 (13.27) は $f(x)$ を $\phi(x)$ に依存しない関数として $\phi'(x) = \phi(x) + f(x)$ という形になっているので, 並進不変性 (13.18) を適用して

$$\int \mathcal{D}\phi \exp\left\{-\frac{1}{2}[\phi'K\phi']\right\} = \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{-\frac{1}{2}[\phi K\phi]\right\}$$

とできる. これは定数なので規格化定数 N に吸収させると, 式 (13.33) を得る.

13.1.1 について

■ 2 次形式の書き換え (13.10) について K_n が $(O_n^{-1}K_nO_n)$ ではなく)

$$O_n K_n O_n^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{i.e.} \quad O_{ik} K_{kl} O_{jl} = \lambda_i \delta_{ij}$$

(ただし i で和をとらない) と対角化されるものとする.

$$\beta_i = O_{ij} \alpha_j, \quad \text{i.e.} \quad \beta = O_n \alpha$$

を逆に解くと

$$\alpha = O_n^{-1} \beta, \quad \text{i.e.} \quad \alpha_i = O_{ji} \beta_j$$

だから,

$$\alpha_i K_{ij} \alpha_j = (O_{ki} \beta_k) K_{ij} (O_{lj} \beta_l) = \beta_k \beta_l (O_{ki} K_{ij} O_{lj}) = \beta_k \beta_l (\lambda_k \delta_{kl}) = \lambda_k \beta_k^2.$$

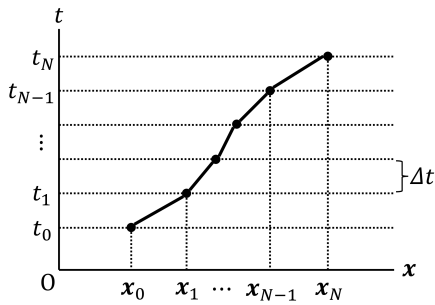


図 20 粒子の径路積分

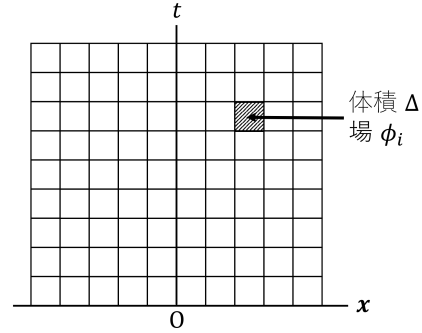


図 21 場の径路積分

■式 (13.11) について 線形変換 (13.9) において $O_{ij} = \partial\beta_i/\partial\alpha_j$ なので, $\det O_n$ は変数変換の Jacobian である. 式 (13.21) についても同様である.

■汎関数積分の等価な定義 (13.16) について 場の汎関数積分 (13.16):

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \int \frac{d\phi_1}{w(\Delta)} \cdots \int \frac{d\phi_N}{w(\Delta)} F[\phi(x)] \quad (\text{図 20 参照})$$

を粒子に対する Feynman の径路積分 [3, p.163]

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{w(\Delta t)} \int \frac{d^3x_1}{w(\Delta t)} \cdots \int \frac{d^3x_{N-1}}{w(\Delta t)} F[\mathbf{x}(t)] \quad (\text{図 21 参照})$$

と比べると,

$$\begin{aligned} \text{パラメーター} & \quad t \rightarrow x, \\ \text{関数 (観測量)} & \quad \mathbf{x}(t) \rightarrow \phi(x) \end{aligned}$$

と置き換わっている.

■定義 (13.16) から Gauss 型に対する公式 (13.14) を導けることの確認

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\phi e^{-[\phi^2]^{1/2}} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=1}^N \left(\frac{\Delta}{2\pi} \right)^{1/2} \int d\phi_i \right) \exp \left(-\frac{\Delta}{2} \sum_{i=1}^N \phi_i^2 \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\left[\left(\frac{\Delta}{2\pi} \right)^{1/2} \int d\phi \exp \left(-\frac{\Delta}{2} \phi^2 \right) \right]^N}_1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

■“並進” 不変性 (13.18) の確認について $\phi(x), \{\alpha_i\}$ が変化し, $f(x), \{f_i\}$ は固定されているから

$$\prod_i d\alpha_i = \prod_i d\beta_i$$

であり,

$$\begin{aligned}\int \mathcal{D}\phi F[\phi + f] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_i}{\sqrt{2\pi}} \right) F(\{\alpha_i + f_i\}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\beta_i}{\sqrt{2\pi}} \right) F(\{\beta_i\}) = \int \mathcal{D}\phi F[\phi]\end{aligned}$$

とできる.

■展開係数の変換 (13.20) の確認

$$\bar{\alpha}_i = \int d^4x u_i(x) \bar{\phi}(x) = \int d^4x u_i(x) \int d^4y K(x, y) \phi(y) = \left[\int d^4x d^4y u_i(x) K(x, y) u_j(y) \right] \alpha_j = K_{ij} \alpha_j.$$

■ $A[J, \phi]$ の式 (13.28) の, 式 (13.29) への書き換えについて まず K^{-1} も実対称と仮定すると, 式 (13.26) と同時に

$$\int d^4x' K^{-1}(x'', x') K(x', x) = \delta^{(4)}(x'' - x)$$

が成り立つ. よって式 (13.28) 右辺第 1 項は

$$\begin{aligned}& -\frac{1}{2} [\phi' K \phi'] \\ & -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y' \phi'(x) J(y') \underbrace{\int d^4y K(x, y) K^{-1}(y, y')}_{\delta^{(4)}(x-y')} \\ & -\frac{1}{2} \int d^4y d^4x' J(x') \phi'(y) \underbrace{\int d^4x K^{-1}(x, x') K(x, y)}_{\delta^{(4)}(x'-y)} \\ & -\frac{1}{2} \int d^4x' d^4y' J(x') \left[\int d^4y K^{-1}(y, y') \underbrace{\int d^4x K(y, x) K^{-1}(x, x')}_{\delta^{(4)}(x'-y)} \right] J(y') \\ & = -\frac{1}{2} [\phi' K \phi'] - [\phi' J] - \frac{1}{2} [JK^{-1}J]\end{aligned}$$

となる. ここに

$$(\text{式 (13.28) 右辺第 2 項}) = [J\phi'] + [JK^{-1}J]$$

を加えて式 (13.29):

$$A[J, \phi] = \frac{1}{2} [JK^{-1}J] - \frac{1}{2} [\phi' K \phi']$$

を得る.

13.1.2 Grassmann 数

Grassmann 変数 $\{\theta_i\} \equiv \theta$ の任意の関数 $f(\theta)$ の, Grassmann 変数 θ_i による積分を定義しよう. $f(\theta)$ は式 (7):

$$f(p) = p_0 + \sum p_i \theta_i + \sum p_{ij} \theta_i \theta_j + \cdots + p_{12 \dots n} \theta_1 \theta_2 \cdots \theta_n$$

の形を持つので、それには θ_i による積分が線形性を持つものとして式 (7) の各項の積分

$$\int d\theta_i(\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_\omega})$$

を定義すれば良い。そしてこれを計算するには、次の規則を与えれば十分である。

$$\begin{aligned} \int d\theta_i 1 &= 0, & \int d\theta_i \theta_i &= 1, \\ \int d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} d\theta_n F(\theta) &= \int d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} \left\{ \int d\theta_n F(\theta) \right\}, \\ \int d\theta_i(\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_{k-1}}\theta_i\theta_{j_{k+1}}\cdots\theta_{j_\omega}) &= (-1)^{k-1} \left(\int d\theta_i \theta_i \right) \theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_{k-1}}\theta_{j_{k+1}}\cdots\theta_{j_\omega} \\ &= (-1)^{k-1} \theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_{k-1}}\theta_{j_{k+1}}\cdots\theta_{j_\omega}. \end{aligned}$$

ただし第 3 式の $F(\theta)$ は Grassmann 変数 $\{\theta_i\} \equiv \theta$ の任意の関数であり、第 4 式の Grassmann 変数 $\theta_{j_1}, \theta_{j_2}, \dots, \theta_{j_{k-1}}, \theta_{j_{k+1}}, \dots, \theta_{j_\omega}$ は θ_i を含まないものとする。以上により、例えば p_0, p_1, p_2, p_{12} を通常の数として

$$\int d\theta_1 d\theta_2 (p_0 + p_1\theta_1 + p_2\theta_2 + p_{12}\theta_1\theta_2) = -p_{12} \int d\theta_1 d\theta_2 \theta_2 \theta_1 = -p_{12}$$

となる。なお、Grassmann 数に関する積分を微分の逆演算として定義することは不可能である。と言うのも、 θ_i についての微分が θ_i となるような Grassmann 代数の要素 (7) は存在しないからである。

2 つの独立な Grassmann 数 (生成子) $\theta_i, \tilde{\theta}_j$ と任意の数 A_{ij} に対して、標準的な積分の公式

$$I_n \equiv \int d\theta_1 d\tilde{\theta}_1 \cdots d\theta_n d\tilde{\theta}_n \exp \left(- \sum_{i,j=1}^n \theta_i A_{ij} \tilde{\theta}_j \right) \quad (13.44)$$

$$= \det A_n \quad (13.53)$$

(ただし $A_n = (A_{ij})$) が成立する (導出は下記)。

13.1.2 節, 式の導出など

■ 積分公式 (13.53) の導出 新たな変数

$$\tilde{\eta}_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \tilde{\theta}_j \quad (13.47)$$

を導入すると、式 (13.44) の被積分関数は

$$\exp \left(- \sum_{i,j=1}^n \theta_i A_{ij} \tilde{\theta}_j \right) = \exp \left(- \sum_{i=1}^n \theta_i \tilde{\eta}_i \right) = \prod_{i=1}^n e^{-\theta_i \tilde{\eta}_i} = \prod_{i=1}^n (1 - \theta_i \tilde{\eta}_i) \quad (13.49)$$

と書き換えられる。ただし第 2 の等号では

$$\{\theta_i, \theta_j\} = \{\tilde{\theta}_i, \tilde{\theta}_j\} = \{\theta_i, \tilde{\theta}_j\} = 0, \quad \therefore \{\tilde{\eta}_i, \tilde{\eta}_j\} = \{\tilde{\eta}_i, \theta_j\} = 0$$

より各 $\theta_i \tilde{\eta}_i$ が交換することを考慮しており [本稿次節で補足], 第 3 の等号では $\theta_i^2 = \tilde{\eta}_i^2 = 0$ を用いた。上式 (13.49) のうちすべての変数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ を含む項だけが積分 (13.44) に寄与するので、

$$I_n = \int d\theta_1 d\tilde{\theta}_1 \cdots d\theta_n d\tilde{\theta}_n (-1)^n (\theta_1 \tilde{\eta}_1) \cdots (\theta_n \tilde{\eta}_n) \quad (13.50)$$

を得る。さらに

$$\begin{aligned}
\tilde{\eta}_1 \tilde{\eta}_2 \cdots \tilde{\eta}_n &= \sum_{\alpha, \beta, \dots} A_{1\alpha} A_{2\beta} \cdots A_{n\nu} \tilde{\theta}_\alpha \tilde{\theta}_\beta \cdots \tilde{\theta}_\nu \quad (\because \text{式 (13.47)}) \\
&= \tilde{\theta}_1 \tilde{\theta}_2 \cdots \tilde{\theta}_n \sum_{\alpha, \beta, \dots} \varepsilon_{\alpha\beta \dots \nu} A_{1\alpha} A_{2\beta} \cdots A_{n\nu} \\
&= \tilde{\theta}_1 \tilde{\theta}_2 \cdots \tilde{\theta}_n \det A_n
\end{aligned} \tag{13.51}$$

を用いると,

$$I_n = \det A_n \int d\theta_1 d\tilde{\theta}_1 \cdots d\theta_n d\tilde{\theta}_n (-1)^n (\theta_1 \tilde{\theta}_1) \cdots (\theta_n \tilde{\theta}_n) \tag{13.52}$$

と書き換えられる [本稿次節で補足]. 被積分関数を

$$(-1)^n (\theta_1 \tilde{\theta}_1) \cdots (\theta_n \tilde{\theta}_n) = (\tilde{\theta}_n \theta_n) \cdots (\tilde{\theta}_1 \theta_1) \tag{12}$$

と並べ替えると [本稿次節を参照], 式 (13.52) の積分は 1 となることが分かる. こうして式 (13.53): $I_n = \det A_n$ に到達する.

13.1.2 について

■ Grassmann 代数の要素 (13.35) について A, B は $\theta_j (\neq \theta_i)$ を含んでよい.

■ 並進不変性 (113.38) について

$$\begin{aligned}
\int d\theta_i F(\theta_1, \dots, \theta_i + \alpha, \dots, \theta_n) &= \int d\theta_i \{A + (\theta_i + \alpha)B\} \\
&= \int d\theta_i (A + \theta_i B) \quad \left(\because \int d\theta_i (\alpha B) = 0 \right) \\
&= \int d\theta_i F(\theta_1, \dots, \theta_i, \dots, \theta_n)
\end{aligned}$$

と示される.

■ 指数 κ の式 (13.42) について $\theta_1 \theta_2 \cdots \theta_n$ を右から順に並べ直すための置換の回数は, 以下に見て取れるように式 (13.42):

$$\kappa = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

で与えられる.

$$\begin{aligned}
&\theta_1 \theta_2 \cdots \theta_{n-2} \theta_{n-1} \theta_n \\
&\quad \downarrow (n-1) \text{ 回} \\
&\theta_n \theta_1 \theta_2 \cdots \theta_{n-2} \theta_{n-1} \\
&\quad \downarrow (n-2) \text{ 回} \\
&\theta_n \theta_{n-1} \theta_1 \theta_2 \cdots \theta_{n-2} \\
&\quad \downarrow \\
&\quad \vdots \\
&\quad \downarrow \\
&\theta_n \theta_{n-1} \theta_{n-2} \cdots \theta_1 \theta_2
\end{aligned}$$

$$\downarrow 1 \text{ 回}$$

$$\theta_n \theta_{n-1} \theta_{n-2} \cdots \theta_2 \theta_1$$

■ 「 $[\tilde{\eta}_i, \tilde{\eta}_j]_+ = [\tilde{\eta}_i, \tilde{\theta}_j]_+ = 0$ を満たすので, $(\theta_i \tilde{\eta}_i)$ と $(\theta_j \tilde{\eta}_j)$ は交換し」(p.341 下から 7,6 行目) について 以下で確かめるように, 直接的な根拠に用いるのは $[\tilde{\eta}_i, \tilde{\eta}_j]_+ = [\tilde{\eta}_i, \theta_j]_+ = 0$ である (つまり $\tilde{\theta}_j \rightarrow \theta_j$ と修正する. 本稿では修正済み).

反交換子 $[\ ,]_+$ (以下ではこれまで通り $\{ \ , \}$ と表記) も線形性

$$\{A, bB + cC\} = b\{A, B\} + c\{A, C\}$$

を満たすので,

$$\begin{aligned} \{\tilde{\eta}_i, \tilde{\eta}_j\} &= A_{ik} A_{jl} \{\tilde{\theta}_k, \tilde{\theta}_l\} = 0, \\ \{\tilde{\eta}_i, \tilde{\theta}_j\} &= A_{ik} \{\tilde{\theta}_k, \tilde{\theta}_j\} = 0, \\ \{\theta_i, \tilde{\eta}_j\} &= A_{jk} \{\theta_i, \tilde{\theta}_k\} = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. よって恒等式 (4.8):

$$[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$$

も思い出すと

$$\begin{aligned} &[\theta_i \tilde{\eta}_i, \theta_j \tilde{\eta}_j] \quad (i, j \text{ について和をとらない}) \\ &= \theta_j [\theta_i \tilde{\eta}_i, \tilde{\eta}_j] + [\theta_i \tilde{\eta}_i, \theta_j] \tilde{\eta}_j \\ &= \theta_j (\theta_i \{\tilde{\eta}_i, \tilde{\eta}_j\} - \{\theta_i, \tilde{\eta}_j\} \tilde{\eta}_i) + (\theta_i \{\tilde{\eta}_i, \theta_j\} - \{\theta_i, \theta_j\} \tilde{\eta}_i) \tilde{\eta}_j \\ &= 0. \end{aligned}$$

■ I_n の式 (13.52) について

$$\begin{aligned} (\theta_1 \tilde{\eta}_1) \cdots (\theta_n \tilde{\eta}_n) &= (-1)^m (\theta_1 \cdots \theta_n) (\tilde{\eta}_1 \cdots \tilde{\eta}_n) \\ &= (\det A_n) (-1)^m (\theta_1 \cdots \theta_n) (\tilde{\theta}_1 \cdots \tilde{\theta}_n) \quad (\because \text{式 (13.51)}) \\ &= (\det A_n) (\theta_1 \tilde{\theta}_1) \cdots (\theta_n \tilde{\theta}_n) \end{aligned}$$

を I_n の式 (13.50) に代入して得られる. ただし上式の第 1, 第 3 の等号における Grassmann 数の置換は等しい回数で行うことができ, その回数を m とおいた.

■ p.342, l.10 の式 (本稿の式 (12)) について $2n$ 個の Grassmann 数 $(\theta_1 \tilde{\theta}_1) \cdots (\theta_n \tilde{\theta}_n)$ を右から順に並べ直すための置換の回数 κ は, 式 (13.42) において n を $2n$ で置き換えた $\kappa = n(2n - 1)$ である. よって $(-1)^\kappa = (-1)^n$.

13.1.3 Grassmann 場

Grassmann 場による汎関数積分の定義 場の量子論において興味を持たれる, 2 つの独立な Grassmann 場 $\theta(x), \tilde{\theta}(x)$ の汎関数 $F[\theta, \tilde{\theta}]$ を考える. Grassmann 場を正規直交関数系で

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i u_i(x), \quad \tilde{\theta}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\theta}_i u_i(x)$$

と展開したときの展開係数 $\theta_i, \tilde{\theta}_i$ は Grassmann 数であり, 展開を第 n 項で打ち切ると $F[\theta, \tilde{\theta}] = F(\theta_i, \tilde{\theta}_i)$ は $2n$ 個の生成子 $\theta_1, \dots, \theta_n, \tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_n$ の関数となる. θ と $\tilde{\theta}$ による 2 重の汎関数積分は

$$\int \mathcal{D}\theta \mathcal{D}\tilde{\theta} F[\theta, \tilde{\theta}] \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{i=1}^n d\theta_i d\tilde{\theta}_i \right) F(\theta_i, \tilde{\theta}_i)$$

で定義される.

一般的な性質

- 線形性

$$\int \mathcal{D}\theta \mathcal{D}\tilde{\theta} (aF[\theta, \tilde{\theta}] + bG[\theta, \tilde{\theta}]) = a \int \mathcal{D}\theta \mathcal{D}\tilde{\theta} F[\theta, \tilde{\theta}] + b \int \mathcal{D}\theta \mathcal{D}\tilde{\theta} G[\theta, \tilde{\theta}]. \quad (a, b \text{ は任意の定数})$$

- “並進 (平行移動)” 不変性

$$\int \mathcal{D}\theta \mathcal{D}\tilde{\theta} F[\theta + \xi, \tilde{\theta} + \tilde{\xi}] = \int \mathcal{D}\theta \mathcal{D}\tilde{\theta} F[\theta, \tilde{\theta}]. \quad (\xi(x), \tilde{\xi}(x) \text{ は } \theta(x), \tilde{\theta}(x) \text{ と独立の Grassmann 場})$$

“Gauss 型” の積分

$$\int \mathcal{D}\theta \mathcal{D}\tilde{\theta} e^{-[\theta A \tilde{\theta}]} = \det A \quad (\text{導出は下記}) \quad (13.61)$$

ただし n 番目までの関数 $u_i(x)$ に対して

$$A_n = (A_{ij}), \quad A_{ij} = [u_i A u_j]$$

とし, 行列式の極限值 $\det A = \lim_{n \rightarrow \infty} \det A_n$ を定義した [$\det A$ は単なる記号であって, $A(x, y)$ の行列式とは関係ない].

13.1.3 節, 式の導出など

■公式 (13.61) の導出 汎関数積分の定義式を適用すると, [式 (13.7) との類似性の助けを借りて]

$$\int \mathcal{D}\theta \mathcal{D}\tilde{\theta} e^{-[\theta A \tilde{\theta}]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{i=1}^n d\theta_i d\tilde{\theta}_i \right) \exp \left(- \sum_{i,j=1}^n \theta_i A_{ij} \tilde{\theta}_j \right)$$

を得る. 極限操作 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ の下の積分は既に式 (13.53) として計算したように $\det A_n$ となるから, 式 (13.61) が導かれる.

13.2 経路積分

正準形式の定式化では, Green 関数と生成汎関数をそれぞれ

$$\text{式 (12.1)} : G^{\mu \dots} (x, \dots, y, \dots, z, \dots) \equiv_{\text{H}} \langle 0 | \text{T} \{ A^{\mu \text{H}}(x) \dots \psi^{\text{H}}(y) \dots \bar{\psi}^{\text{H}}(z) \dots \} | 0 \rangle_{\text{H}},$$

$$\text{式 (12.83)} : Z[J_{\kappa}, \sigma, \bar{\sigma}] \equiv \frac{\langle 0 | S' | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle}$$

によって定義したところ, 生成汎関数から Green 関数を導く式 (12.91):

$$G^{\mu \dots} (x, \dots, y, \dots, z, \dots) = (-1)^{\bar{n}} \left(\frac{1}{i} \right)^{\bar{n}} \frac{\delta^n Z[J_{\kappa}, \sigma, \bar{\sigma}]}{\delta J_{\mu}(x) \dots \delta \bar{\sigma}(y) \dots \delta \sigma(z) \dots} \Big|_0$$

が示された．ところで正準形式の場の量子論から，Feynman による径路積分形式の場の量子論を導くことができる．しかし我々は生成汎関数に対する径路積分の表式を天下一りに引用し，その正準形式との等価性を確認して満足することにする．証明は次の 2 段階構えとなる．

- まず 2 つの形式が自由場の場合に等価であれば，相互作用を含む場合にも等価であることを示す (13.2.2 項)．
- 次に 2 つの形式が自由場の場合に等価であることを示す (13.2.3 項と 13.2.4 項)．

13.2.1 生成汎関数

生成汎関数に対する径路積分の表式は，虚構的な場の項も含めた作用

$$X' = \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_S)$$

を用いて

$$Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX'} \quad (13.63a)$$

と与えられる (ただし $\mathcal{D}A = \prod_{\mu=0}^3 \mathcal{D}A^\mu$) [α をスピノル添字として $\mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi = \prod_\alpha \mathcal{D}\bar{\psi}_\alpha \mathcal{D}\psi_\alpha$ (後の式 (14.36) を参照)]．規格化定数 N は条件 $Z[0, 0, 0] = 1$ から

$$N = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX}, \quad X \equiv \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I) : \text{QED の作用}$$

と定まる．これを式 (12.91):

$$G^{\mu\dots}(x_1, \dots, y_1, \dots, z_1, \dots) = (-1)^{\bar{n}} \left(\frac{1}{i} \right)^n \frac{\delta^n Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x_1) \dots \delta \bar{\sigma}(y_1) \dots \delta \sigma(z_1) \dots} \Big|_0$$

に代入すると，Green 関数に対する径路積分の表式

$$G^{\mu\dots}(x_1, \dots, y_1, \dots, z_1, \dots) = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \{ e^{iX} A^\mu(x_1) \dots \psi(y_1) \dots \bar{\psi}(z_1) \dots \} \quad (13.70)$$

が得られる [本稿次節で補足]．

13.2.1 について

■Green 関数の定義について 径路積分形式では生成汎関数から Green 関数を導く式 (12.91) を Green 関数の定義と見なす*7．このとき生成汎関数を径路積分で表した式 (13.63a) が，式 (13.28) で定義される正準形式での生成汎関数と一致すれば，2 つの形式で Green 関数は一致することになる．したがって理論の予言もまた一致する．

■Green 関数の径路積分表式 (13.70) について 汎関数微分の性質 (12.56d) および式 (12.88a) を用いると

$$\frac{\delta}{\delta J_\mu(x_1)} e^{iX'} = i e^{iX'} \int d^4x \frac{\delta J_\kappa(x)}{\delta J_\mu(x_1)} A^\kappa(x) = i e^{iX'} A^\mu(x_1)$$

*7 あるいは等価的に，ここに経路積分で表した生成汎関数 (13.63) を代入した式 (13.70)，式 (13.111) を Green 関数の定義と見ても良い．実際，QCD での Green 関数 (14.38) の箇所には，「Green 関数も，QED の場合の式 (13.111) と同様に定義される」とある．

を得る．同様に Grassmann 場による微分に対しても汎関数微分の性質 (12.56d) が成立すると仮定し，同様に式 (12.88b) を用いると

$$\frac{\delta}{\delta\bar{\sigma}(y_1)} e^{iX'} = ie^{iX'} \psi(y_1), \quad \frac{\delta}{\delta\sigma(z_1)} e^{iX'} = -ie^{iX'} \bar{\psi}(z_1)$$

となる．以上より

$$\begin{aligned} G^{\mu\dots}(x_1, \dots, y_1, \dots, z_1, \dots) &= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi (-1)^{\bar{n}} \left(\frac{1}{i}\right)^n \frac{\delta^n}{\delta J_\mu(x_1) \dots \delta\bar{\sigma}(y_1) \dots \delta\sigma(z_1) \dots} e^{iX'} \Big|_0 \\ &= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \{e^{iX} A^\mu(x_1) \dots \psi(y_1) \dots \bar{\psi}(z_1) \dots\} : (13.70) \end{aligned}$$

を得る．以上で用いた公式 (12.56d), (12.88) の導出では，正準形式に特有の事情を仮定していないことに注意しよう．

■生成汎関数と分配関数 ラグランジアン密度 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - V(\varphi)$ で記述されるスカラー場 $\varphi(x)$ に対しても，Heisenberg 描像において Green 関数は式 (13.70) と類似の径路積分

$$\langle 0 | T \{ \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n) \} | 0 \rangle = \frac{1}{Z} \int_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} d[\varphi(x)] \{ \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \} e^{-S[\varphi]}, \quad (13)$$

$$S[\varphi] = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + V(\varphi) \right\},$$

$$Z = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} d[\varphi(x)] e^{-S[\varphi]}, \quad (14)$$

で与えられる (d は時空の次元)．ただし，ここでは Euclid 時間 (虚時間) $\tau = it$ を用いており，それ故，式 (13) は統計力学における変数の熱平均の式

$$\langle X_1 X_2 \dots X_N \rangle = \frac{1}{Z} \sum \{ X_1 X_2 \dots X_N \} e^{-\beta H}$$

と同じ形を持つ (β は逆温度， H はハミルトニアン， Z は分配関数)．これらを比較すると，“生成汎関数” (14) は分配関数に相当することが見て取れる (どちらも文字 Z で表される) [6, pp.168–169]．

分配関数 $Z = \text{Tr}\{e^{-\beta\hat{H}}\}$ は生成汎関数と同じ形の径路積分で表すことができる．ポイントは， β を Euclid 時間と見なすと径路積分の手法を導入でき，また対角和 (トレース) により始・終状態が繋がっているという解釈に導かれるということである [6, pp.200–202]．

13.2.2 自由場と相互作用をする場

径路積分形式の枠組みの中で，自由場の生成汎関数 Z_0 の径路積分表式

$$Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \frac{1}{N_0} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX_0'}, \quad N_0 = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp\left(i \int d^4x \mathcal{L}_0\right) \quad (13.75)$$

(ただし $X_0' \equiv \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_S)$) に対して

$$Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \frac{1}{N_I} \exp\left\{ie \int d^4x I_\delta(x)\right\} Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] \quad (13.74)$$

が示される (導出は下記)．ただし

$$I_\delta(x) = \left(-\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\right) \gamma_\mu \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\bar{\sigma}(x)}\right) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\right) : (12.119), \quad N_I = \frac{N}{N_0}$$

である。よって経路積分表式の Z_0 が正準形式と同じであれば，上式は正準形式の生成汎関数 (12.121):

$$Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \frac{1}{\langle 0|S|0\rangle} \exp \left\{ ie \int d^4x I_\delta(x) \right\} Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]$$

と同じものである (どちらも $Z[0, 0, 0] = 1$ となるように規格化されている)。

そこで次節以降で自由場の生成汎関数について，2つの形式の等価性を証明する。ここでは準備として，経路積分表式 (13.75) より自由場の生成汎関数 Z_0 が，自由な電磁場の生成汎関数

$$Z_0[J_\kappa] = \frac{1}{N_1} \int \mathcal{D}A \exp(iX[J_\kappa]), \quad X[J_\kappa] = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu) + J_\kappa A^\kappa \right\}$$

(ただし $Z_0[J_\kappa = 0] = 1$ となるように規格化定数 N_1 を選ぶ) と，自由スピノル場の生成汎関数

$$Z_0[\sigma, \bar{\sigma}] = \frac{1}{N_2} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp(iX[\sigma, \bar{\sigma}]), \quad X[\sigma, \bar{\sigma}] = \int d^4x \{ \bar{\psi}(i\rlap{/}\partial - m)\psi + \bar{\sigma}\psi + \bar{\psi}\sigma \}$$

(ただし $Z_0[\sigma = 0, \bar{\sigma} = 0] = 1$ となるように規格化定数 N_2 を選ぶ) に分解できることに注意を促しておく：

$$Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = Z_0[J_\kappa] Z_0[\sigma, \bar{\sigma}].$$

正準形式においてもこのように分解できるため (式 (12.110a) 参照)，後は自由電磁場と自由スピノル場のそれぞれに対して，生成汎関数が2つの形式において同一であることを示せば良い。

13.2.2 節，式の導出など

■式 (13.74) の導出 まず直接証明できるように，式 (12.119) の“相互作用演算子” $I_\delta(x)$ に対して

$$eI_\delta(x) \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_S) \right\} = \mathcal{L}_I(x) \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_S) \right\} \quad (13.71)$$

が成り立つ [本稿次節で確認する]。ここから

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ ie \int d^4x I_\delta(x) \right\} \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_S) \right\} \\ &= \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right\} \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_S) \right\} \\ &= \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_S) \right\} = e^{iX'} \end{aligned}$$

が得られるので (第2の等号は $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_I, \mathcal{L}_S$ が古典場と Grassmann 場の双1次量のみを含み，互いに可換であることによる)，

$$\begin{aligned} Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] &= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_S) \right\} \\ &= \frac{1}{N} \exp \left\{ ie \int d^4x I_\delta(x) \right\} \underbrace{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_S) \right\}}_{N_0 Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]} \\ &= \frac{1}{N_I} \exp \left\{ ie \int d^4x I_\delta(x) \right\} Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] : (13.74), \quad N_I \equiv \frac{N}{N_0} \end{aligned}$$

となる。

13.2.2 について

■式 (13.71) について $X_0' \equiv \int d^4x' \{\mathcal{L}_0(x') + \mathcal{L}_S(x')\}$: (13.76b) に対して式 (13.70) の導出の際に用いた関係

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} e^{iX_0'} = e^{iX_0'} A^\mu(x), \quad \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}(x)} e^{iX_0'} = i e^{iX_0'} \psi(x), \quad -\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} e^{iX_0'} = -i e^{iX_0'} \bar{\psi}(x)$$

を再び利用すると,

$$e I_\delta e^{iX_0'} = (e \bar{\psi} \gamma_\mu A^\mu \psi) e^{iX_0'} = \mathcal{L}_I e^{iX_0'} : (13.71)$$

を得る。(汎関数) 微分は1つずつ実行しなければならず, 3つの微分 I_δ に対して一気に

$$I_\delta e^{iX_0'} = (i e^{iX_0'}) (I_\delta X_0')$$

としてはいけないことに注意する.

13.2.3 自由な電磁場

自由電磁場の生成汎関数に対する経路積分表式 (13.79a):

$$Z_0[J_\kappa] = \frac{1}{N_1} \int \mathcal{D}A \exp(iX[J_\kappa])$$

が, 正準形式における表式 (12.110b):

$$Z_0[J_\kappa] = \exp\left(-\frac{i}{2} [J^\kappa D_{\text{F}\kappa\lambda} J^\lambda]\right)$$

に一致することを示した.

証明の概略は以下のようなものである. まず生成汎関数の経路積分表式における作用を

$$X[J_\kappa] = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' A_\mu(x) K^{\mu\nu}(x, x') A_\nu(x') + \int d^4x J_\kappa(x) A^\kappa(x), \quad (13.85)$$

$$K^{\mu\nu}(x, x') \equiv -g^{\mu\nu} \delta^{(4)}(x - x') \square_{x'} : \text{波動演算子} \quad (13.83)$$

と書き換える (計算は下記). すると式 (13.24):

$$A[J, \phi] \equiv -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \phi(x) K(x, x') \phi(x') + \int d^4x J_\kappa(x) \phi(x)$$

に対する公式 (13.33):

$$I[J] \equiv N \int \mathcal{D}\phi \exp(A[J, \phi]) = \exp\left(\frac{1}{2} [J K^{-1} J]\right)$$

の導出と同様の計算により, これを

$$Z_0[J_\kappa] = \exp\left(\frac{i}{2} [J^\kappa K_{\kappa\lambda}^{-1} J^\lambda]\right) \quad (13.90)$$

と変形できる (導出は下記). ここに

$$K_{\mu\nu}^{-1}(x, x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{k^2} e^{-ik \cdot (x-x')} \quad (15)$$

であり、これは極 $k^0 = |\mathbf{k}|$ の扱い方に関する曖昧さを持つ。そこで式 (12.106) のときと同様に、生成汎関数から導かれる 2 点 Green 関数が光子伝播関数にならなければならないことを要求すると、 $k^2 \rightarrow k^2 + i\varepsilon$ と修正して

$$Z_0[J_\kappa] = \exp\left(-\frac{i}{2}[J^\kappa D_{\text{F}\kappa\lambda} J^\lambda]\right)$$

とすれば良いことが分かる (詳細は下記)。

13.2.3 節, 式の導出など

■ $X[J_\kappa]$ の式 (13.85) の導出

$$X[J_\kappa] = -\frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\nu A_\mu(x)) (\partial^\nu A^\mu(x)) + \int d^4x J_\kappa(x) A^\kappa(x)$$

の第 1 項を次のように書き換えれば良い。

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\nu A_\mu(x)) (\partial^\nu A^\mu(x)) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu(x) \square_x A^\mu(x) \quad (\text{部分積分した}) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x A_\mu(x) \int d^4x' \{-g^{\mu\nu} \delta^{(4)}(x-x') \square_{x'}\} A_\nu(x') \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' A_\mu(x) K^{\mu\nu}(x, x') A_\nu(x'). \end{aligned}$$

■ 式 (13.90) の導出 波動演算子の逆演算子 $K_{\nu\tau}^{-1}(x', x'')$ を

$$\int d^4x' K^{\mu\nu}(x, x') K_{\nu\tau}^{-1}(x', x'') = \delta^\mu_\tau \delta^{(4)}(x - x'') \quad (13.86)$$

で定義し、シフトした場

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \int d^4x' K_{\mu\nu}^{-1}(x, x') J^\nu(x')$$

を導入すると、 $X[J_\kappa]$ の式 (13.85) は

$$X[J_\kappa] = \frac{1}{2} [J^\kappa K_{\kappa\lambda}^{-1} J^\lambda] - \frac{1}{2} [A'_\mu K^{\mu\nu} A'_\nu] \quad (13.88)$$

と書き換えられる [本稿次節で確認する]。この結果は式 (13.29) に対応する。よって自由場の生成汎関数は

$$\begin{aligned} Z_0[J_\kappa] &= \frac{1}{N_1} \int \mathcal{D}A \exp\{iX[J_\kappa]\} = \frac{1}{N_1} \int \mathcal{D}A \exp\left\{\frac{i}{2}[J^\kappa K_{\kappa\lambda}^{-1} J^\lambda] - \frac{i}{2}[A'_\mu K^{\mu\nu} A'_\nu]\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{i}{2}[J^\kappa K_{\kappa\lambda}^{-1} J^\lambda]\right\} : (13.90) \quad (\because Z_0[J_\kappa = 0] = 1) \end{aligned}$$

と表される。この結果は式 (13.33) に対応する。

■ 式 (15) の周辺について 式 (13.86) において

$$K_{\nu\tau}^{-1}(x', x'') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_{\nu\tau}(k) e^{-ik \cdot (x' - x'')}$$

と Fourier 展開すると, Fourier 成分は

$$D_{\nu\tau}(k) = \frac{g^{\mu\nu}}{k^2} \quad (13.92)$$

と求まる [本稿次節で補足]. これは極 $k^0 = \omega_{\mathbf{k}} \equiv |\mathbf{k}|$ に特異性を持つ. 適正な解を得るには,

$$D^{\mu\nu}(k) = \frac{g^{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon}, \quad \therefore K_{\mu\nu}^{-1}(x, x') = -D_{\text{F}\mu\nu}(x - x'), \quad \therefore Z_0[J_\kappa] = \exp \left\{ \frac{-i}{2} [J^\kappa D_{\text{F}\kappa\lambda} J^\lambda] \right\}$$

とすれば良い. 実際このとき, 生成汎関数から導かれる 2 点 Green 関数が光子伝播関数となること

$$\left(\frac{1}{i} \right)^2 \frac{\delta^2 Z_0[J_\kappa]}{\delta J_\mu(x) \delta J_\nu(y)} \Big|_0 = i D_{\text{F}}^{\mu\nu}(x - y)$$

が保証される.

13.2.3 について

■式 (13.88) について

$$\begin{aligned} X[J_\kappa] &= -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \left\{ A'_\mu(x) + \int d^4y K_{\mu\lambda}^{-1}(x, y) J^\lambda(y) \right\} \\ &\quad \times K^{\mu\nu}(x, x') \left\{ A'_\nu(x') + \int d^4y' K_{\nu\rho}^{-1}(x', y') J^\rho(y') \right\} \\ &\quad + \int d^4x J_\kappa(x) \left\{ A'^\kappa(x) + \int d^4y K^{-1\kappa}_\lambda(x, y) J^\lambda(y) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} [A'_\mu K^{\mu\nu} A'_\nu] \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^4x d^4x' d^4y' K^{\mu\nu}(x, x') K_{\nu\rho}^{-1}(x', y') A'_\mu(x) J^\rho(y') \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^4x d^4x' d^4y K_{\mu\lambda}^{-1} K^{\mu\nu}(x, x') A'_\nu(x') J^\lambda(y) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^4x d^4x' d^4y d^4y' K_{\mu\lambda}^{-1}(x, y) K^{\mu\nu}(x, x') K_{\nu\rho}^{-1}(x', y') J^\lambda(y) J^\rho(y') \\ &\quad + \int d^4x J_\kappa(x) A'^\kappa(x) + [J^\kappa K_{\kappa\lambda}^{-1} J^\lambda] \end{aligned}$$

において式 (13.86) を用いると, 最右辺の 2,3 行目はいずれも $\frac{1}{2} \int d^4x J_\kappa(x) A'^\kappa(x)$ となるので, 5 行目の第 1 項と相殺する. また最右辺の 4 行目は $-\frac{1}{2} [J^\kappa K_{\kappa\lambda}^{-1} J^\lambda]$ となるので, 式 (13.88):

$$X[J_\kappa] = \frac{1}{2} [J^\kappa K_{\kappa\lambda}^{-1} J^\lambda] - \frac{1}{2} [A'_\mu K^{\mu\nu} A'_\nu]$$

を得る.

■式 (13.92) について 指示に従い式 (13.86) を

$$\begin{aligned} \delta^\mu_\tau \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-x'')} &= \int d^4x' \{ -g^{\mu\nu} \delta^{(4)}(x - x') \square_{x'} \} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_{\nu\tau}(k) e^{-ik \cdot (x' - x'')} \\ &= -g^{\mu\nu} \square_x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_{\nu\tau}(k) e^{-ik \cdot (x - x'')} \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D^\mu_\tau(k) k^2 e^{-ik \cdot (x - x'')} \end{aligned}$$

と書き換えると, 式 (13.92): $D^{\mu\nu}(k) = g^{\mu\nu}/k^2$ を得る.

13.2.4 自由なスピノル場

自由電磁場の生成汎関数の場合と同様の方法により，自由なスピノル場に対する経路積分表式 (13.80a):

$$Z_0[\sigma, \bar{\sigma}] = \frac{1}{N_2} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp(iX[\sigma, \bar{\sigma}])$$

が，正準形式における表式 (12.110c):

$$Z_0[\sigma, \bar{\sigma}] = \exp(-i[\bar{\sigma} S_F \sigma])$$

に一致することを示した (証明は下記).

13.2.4 節 (証明)

対称な波動演算子

$$K(x, x') = \delta^{(4)}(x - x') (i\cancel{\partial}_{x'} - m)$$

を用いると

$$X[\sigma, \bar{\sigma}] = \int d^4x d^4x' \bar{\psi}(x) K(x, x') \psi(x) + \int d^4x \{ \bar{\psi}(x) \sigma(x) + \bar{\sigma}(x) \psi(x) \} \quad (13.96)$$

と書ける. 逆演算子 $K^{-1}(x', x'')$ を

$$\int d^4x' K(x, x') K^{-1}(x', x'') = -\delta^{(4)}(x - x'') \quad (13.98)$$

で定義し，シフトした場

$$\psi'(x) = \psi(x) - \int d^4x' K^{-1}(x, x') \sigma(x'), \quad (13.99a)$$

$$\bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) - \int d^4x' \bar{\sigma}(x') K^{-1}(x', x) \quad (13.99b)$$

を導入して $Z_0[J_\kappa]$ の場合と同様の計算を繰り返すと，

$$Z_0[\sigma, \bar{\sigma}] = \exp \{ i[\bar{\sigma} K^{-1} \sigma] \} \quad (13.100)$$

を得る [本稿次節で確認]. K^{-1} を定めるために

$$K^{-1}(x', x'') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S(p) e^{-ip \cdot (x' - x'')}$$

と Fourier 展開し，これを上式 (13.98) に代入すると，Fourier 成分は

$$S(p) = -\frac{\cancel{p} + m}{p^2 - m^2} \quad (13.102)$$

と求まる [本稿次節で補足]. これは $p^0 = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ に特異点を持ち，適正な解を得るには

$$S(p) = -\frac{\cancel{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad \therefore K^{-1}(x, x') = -S_F(x - x'), \quad \therefore Z_0[\sigma, \bar{\sigma}] = \exp \{ -i[\bar{\sigma} S_F \sigma] \}$$

とすれば良い. 実際，このとき生成汎関数から導かれる 2 点 Green 関数は自由フェルミオン伝播関数になること

$$(-1) \left(\frac{1}{i} \right)^2 \left. \frac{\delta^2 Z[\sigma, \bar{\sigma}]}{\delta \bar{\sigma}(y) \delta \sigma(z)} \right|_0 = i S_F(y^z)$$

が保証される.

13.2.4 について

■式 (13.100) について 式 (13.96) 右辺第 1 項の被積分関数における ψ の引数 x は x' としても構わない。そのように式 (13.96) を修正した後、式 (13.99) を代入すると

$$\begin{aligned}
X[\sigma, \bar{\sigma}] &= \int d^4x d^4x' \left\{ \bar{\psi}'(x) + \int d^4y \bar{\sigma}(y) K^{-1}(y, x) \right\} \\
&\quad \times K(x, x') \left\{ \psi'(x') + \int d^4y' K^{-1}(x', y') \sigma(y') \right\} \\
&\quad + \int d^4x \left[\left\{ \bar{\psi}'(x) + \int d^4y \bar{\sigma}(y) K^{-1}(y, x) \right\} \sigma(x) + \bar{\sigma}(x) \left\{ \bar{\psi}'(x') + \int d^4y' K^{-1}(x', y') \sigma(y') \right\} \right] \\
&= [\bar{\psi}' K \psi'] \\
&\quad + \int d^4x d^4x' d^4y' \bar{\psi}'(x) K(x, x') K^{-1}(x', y') \sigma(y') \\
&\quad + \int d^4x d^4x' d^4y \bar{\sigma}(y) K^{-1}(y, x) K(x, x') \psi'(x') \\
&\quad + \int d^4x d^4x' d^4y d^4y' \bar{\sigma}(y) K^{-1}(y, x) K(x, x') K^{-1}(x', y') \sigma(y') \\
&\quad + \int d^4x \bar{\psi}'(x) \sigma(x) + [\bar{\sigma} K^{-1} \sigma] + \int d^4x \bar{\sigma}(x) \psi'(x) + [\bar{\sigma} K^{-1} \sigma]
\end{aligned}$$

となる。ここで式 (13.98) を用いると、最右辺の 2,3 行目はそれぞれ $-\int d^4x \bar{\psi}'(x) \sigma(x)$, $-\int d^4x' \bar{\sigma}(x') \psi'(x')$ となり、4 行目は $-\int d^4x \bar{\sigma}(x) \psi'(x)$ となるので

$$X[\sigma, \bar{\sigma}] = [\bar{\psi}' K \psi'] + [\bar{\sigma} K^{-1} \sigma]$$

を得る。これを生成汎関数の式 (13.80a) に代入すると

$$Z_0[\sigma, \bar{\sigma}] = \exp(i[\bar{\sigma} K^{-1} \sigma]) \frac{1}{N_2} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp(i[\bar{\psi}' K \psi'])$$

となる。規格化条件 (13.80c): $Z_0[\sigma = 0, \bar{\sigma} = 0] = 1$ を考慮して式 (13.100):

$$Z_0[\sigma, \bar{\sigma}] = \exp(i[\bar{\sigma} K^{-1} \sigma])$$

を得る。

■式 (13.102) について 指示に従い式 (13.98) を

$$\begin{aligned}
-\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-x'')} &= \int d^4x' \{ \delta^{(4)}(x-x') (i\cancel{\partial}_{x'} - m) \} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S(p) e^{-ip \cdot (x'-x'')} \\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S(p) (i\cancel{\partial}_x - m) e^{-ip \cdot (x-x'')} \\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S(p) (\cancel{p} - m) e^{-ip \cdot (x-x'')}
\end{aligned}$$

と書き換えると、式 (13.102): $S(p) = -1/(\cancel{p} - m)$ を得る。

13.3 摂動論

通常の応用のためには，生成汎関数の式 (13.74):

$$Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \frac{1}{N_I} \exp \left\{ ie \int d^4x I_\delta(x) \right\} Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}], \quad Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \frac{1}{N_0} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp(iX_0')$$

に基づき，指数関数を級数展開して e のべきによる摂動展開を得るよりも，以下で見るように直接，相互作用を持つ系の Green 関数を対象とし，これを自由場の Green 関数に關係付けて級数に展開する方が容易である．

13.3.1 Wick の定理

相互作用する場の Green 関数を

$$\langle A^\mu(x_1) \cdots \psi(y_1) \cdots \bar{\psi}(z_1) \cdots \rangle \equiv G^{\mu \cdots}(x_1, \cdots, y_1, \cdots, z_1, \cdots)$$

と表記し，自由場の[すなわち相互作用項 \mathcal{L}_I をゼロとした場合の]Green 関数を $\langle A^\mu(x_1) \cdots \psi(y_1) \cdots \bar{\psi}(z_1) \cdots \rangle_0$ と表す．これは自由場の生成汎関数

$$Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = Z_0[J_\kappa] Z_0[\sigma, \bar{\sigma}], \quad Z_0[J_\kappa] = \exp \left(-\frac{i}{2} [J_\mu D_F^{\mu\nu} J_\nu] \right), \quad Z_0[\sigma, \bar{\sigma}] = \exp(-i[\bar{\sigma} S_F \sigma])$$

の汎関数微分

$$\langle A^\mu(x_1) \cdots \psi(y_1) \cdots \bar{\psi}(z_1) \cdots \rangle_0 = (-1)^{\bar{n}} \left(\frac{1}{i} \right)^{\bar{n}} \frac{\delta^{(\bar{n})} Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x_1) \cdots \delta \bar{\sigma}(y_1) \cdots \delta \sigma(z_1) \cdots} \Big|_0$$

によって評価でき，例えば容易に確かめられるように

$$\langle A^\mu(x) \rangle_0 = 0, \quad \langle \psi(x) \rangle_0 = 0, \quad \langle \bar{\psi}(x) \rangle_0 = 0 \quad (16)$$

である (下記参照)．また 2 点 Green 関数については

$$\langle AB \rangle_0 = \underbrace{AB} \quad (13.107)$$

となる (下記参照)．ただし場 A, B, \dots は電磁場 A^μ またはスピノル場 $\psi, \bar{\psi}$ のいずれかである (以下同じ)．QED においてゼロにならない縮約は，光子伝播関数 $iD_F^{\mu\nu}(x)$ とフェルミオン伝播関数 $iS_F(x)$ だけである．

一般に自由場 Green 関数 $\langle ABCD \cdots WXYZ \rangle_0$ は，場 A, \dots, Z が奇数個ならばゼロになり，偶数個ならば

$$\langle ABCD \cdots WXYZ \rangle_0 = \underbrace{ABCD} \cdots \underbrace{WXYZ} + \underbrace{ABCD} \cdots \underbrace{WXYZ} + \cdots$$

となることを帰納的に証明し得る．ただし右辺は全ての場が縮約された全ての可能な項の和であり，任意の自由場 Green 関数は，光子伝播関数 $iD_F^{\mu\nu}(x)$ とフェルミオン伝播関数 $iS_F(x)$ だけで表されることになる．これは T 積の真空期待値 $\langle 0|T(ABCD \cdots WXYZ)|0 \rangle$ に Wick の定理を適用した結果 (12.16a) と一致している．上の結果は経路積分形式の自由場 Green 関数

$$\langle ABC \cdots \rangle_0 = \frac{1}{N_0} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX_0}(ABC \cdots), \quad X_0 = \int d^4x \mathcal{L}_0(x)$$

に対する Wick の定理と見なされる．

13.3.1 節, 式の導出など

■式 (16) について 例えば $\langle A^\nu(y) \rangle_0$ について,

$$\begin{aligned} Z_0[J_\kappa] &= \exp \left\{ -\frac{i}{2} [J^\kappa D_{\text{F}\kappa\lambda} J^\lambda] \right\}, \\ \frac{\delta Z_0[J_\kappa]}{\delta J_\nu(y)} &= \exp \left\{ -\frac{i}{2} [J^\kappa D_{\text{F}\kappa\lambda} J^\lambda] \right\} \left(\frac{-i}{2} \right) \frac{\delta}{\delta J_\nu(y)} [J^\kappa D_{\text{F}\kappa\lambda} J^\lambda] \end{aligned} \quad (17)$$

であり, 第 2 式 右辺は汎関数微分の後には源 J が残るので

$$\langle A^\nu(y) \rangle_0 = \frac{1}{i} Z_0[\sigma, \bar{\sigma}] \left. \frac{\delta Z_0[J_\kappa]}{\delta J_\nu(y)} \right|_0 = 0$$

となる.

■2 点 Green 関数 (13.107) について 例えば A, B がともに電磁場の場合には

$$\begin{aligned} \langle A^\mu(x) A^\nu(y) \rangle_0 &= \left(\frac{1}{i} \right)^2 \left. \frac{\delta^2 Z_0[J_\kappa]}{\delta J_\mu(x) \delta J_\nu(y)} \right|_0 \\ &= \left(\frac{1}{i} \right)^2 \left(\frac{-i}{2} \right) \left. \frac{\delta^2}{\delta J_\mu(x) \delta J_\nu(y)} [J^\kappa D_{\text{F}\kappa\lambda} J^\lambda] \right|_0 \\ &= i D_{\text{F}}^{\mu\nu}(x-y) = \underbrace{A^\mu(x) A^\nu(y)} \end{aligned}$$

と計算できる [本稿次節で補足].

13.3.1 について

■2 点 Green 関数 $\langle A^\mu(x) A^\nu(y) \rangle_0$ の式 (p.353, 1.9~11) について $\delta Z_0[J_\kappa]/\delta J_\nu(y)$ の式 (17) (教科書 p.353, 1.6 の式) をさらに $J_\mu(x)$ について汎関数微分する際, $\exp \left\{ -\frac{i}{2} [J^\kappa D_{\text{F}\kappa\lambda} J^\lambda] \right\}$ を微分した項は最後に源をゼロにすると消えることを考慮している.

13.3.2 相互作用

相互作用する場の Green 関数 $\langle ABC \dots \rangle$ は, 以下のように自由場 Green 関数に関係付けて評価できる.

$$\begin{aligned} \langle ABC \dots \rangle &= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX} (ABC \dots) \quad (\because \text{式 (13.70)}) \\ &= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX_0} \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right\} (ABC \dots) \quad \left(\because X_0 = \int d^4x' \mathcal{L}_0(x') \text{ と } \mathcal{L}_I(x) \text{ は交換} \right) \\ &\equiv \frac{N_0}{N} \left\langle \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right\} (ABC \dots) \right\rangle_0, \\ N &\equiv \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX} \quad (13.2.1 \text{ 節}) \\ &= N_0 \left\langle \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right\} \right\rangle_0, \quad \left(N_0 \equiv \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX_0} : (13.76) \right) \\ \therefore \langle ABC \dots \rangle &= \frac{\left\langle \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right\} (ABC \dots) \right\rangle_0}{\left\langle \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right\} \right\rangle_0}. \end{aligned}$$

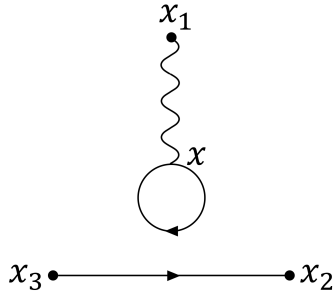


図 22 Green 関数 $\langle A^\mu(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3) \rangle$ に関わる非連結ダイアグラム

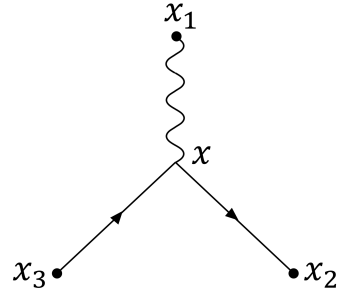


図 23 Green 関数 $\langle A^\mu(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3) \rangle$ への 1 次寄与

指数関数を級数展開すれば、Green 関数の摂動展開が得られる。上式は正準形式における式 (12.8):

$$G^{\mu\dots}(x, \dots, y, \dots, z, \dots) = \frac{\langle 0|T\{SA^\mu(x)\dots\psi(y)\dots\bar{\psi}(z)\dots\}|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle}$$

と似た関係であり、それと同様に分母は分子の摂動展開から現れる非連結の真空ダイアグラムと正確に相殺するため、“連結 Green 関数”を計算する際はそれらを見捨てて良い。

例として Green 関数 $\langle A^\mu(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3) \rangle$ を \mathcal{L}_1 の 1 次までの近似で計算すると、

$$\begin{aligned} \langle A^\mu(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3) \rangle &= \left\langle \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_1(x) \right\} A^\mu(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3) \right\rangle_0 \quad (\text{分母を見捨てた}) \\ &\simeq i \int d^4x \langle \mathcal{L}_1(x) A^\mu(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3) \rangle_0 \quad (\mathcal{L}_1 \text{ のゼロ次の項はゼロ [本稿次節で補足]}) \\ &= ie \int d^4x \langle A^\mu(x_1) A^\nu(x) \psi(x_2) [\bar{\psi}(x) \gamma_\nu \psi(x)] \bar{\psi}(x_3) \rangle_0 \\ &= ie \int d^4x \underbrace{A^\mu(x_1) A^\nu(x)} \underbrace{\psi(x_2) \bar{\psi}(x) \gamma_\nu \psi(x)} \bar{\psi}(x_3) \\ &\quad + ie \int d^4x \underbrace{A^\mu(x_1) A^\nu(x) \psi(x_2) \bar{\psi}(x) \gamma_\nu \psi(x)} \bar{\psi}(x_3) \quad (\text{Wick の定理}) \end{aligned}$$

となる。最右辺第 1 項は図 22 の非連結ダイアグラムに対応するため、省くことができる。最右辺第 2 項、すなわち

$$ie \int d^4x i D_F^{\mu\nu}(x_1 - x) i S_F(x_2 - x) \gamma_\nu i S_F(x - x_3) \quad (13.118)$$

は図 23 のダイアグラムで表され、正準形式における結果に一致している。

13.3.2 について

■p.355, 1 番下の式 $\langle A^\mu(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3) \rangle_0 = \langle A^\mu(x_1) \rangle_0 \langle \psi(x_2)\bar{\psi}(x_3) \rangle_0 = 0$ について

$$\begin{aligned} &\langle A^\mu(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3) \rangle_0 \\ &= \frac{1}{N_0} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX_0} A^\mu(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3) \\ &= \left[\frac{1}{N_1} \int \mathcal{D}A \exp \left\{ -\frac{i}{2} (\partial_\lambda A_\nu) (\partial^\lambda A^\nu) \right\} A^\mu(x_1) \right] \left[\frac{1}{N_2} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \{ i\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi \} \psi(x_2)\bar{\psi}(x_3) \right] \end{aligned}$$

と分解したとき、電磁場に関する部分は

$$\langle A^\mu(x_1) \rangle_0 = \frac{1}{N_0} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX_0} A^\mu(x_1) = 0$$

ではなく、

$$\left. \frac{1}{i} \frac{\delta Z_0[J_\kappa]}{\delta J_\mu(x_1)} \right|_0 = 0$$

であると考えられる。いずれにせよ上式はゼロとなる。

13.4 ゲージ独立な量子化？

ここまでは電磁場の Lagrangian 密度 $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ の代わりに、Lorentz ゲージ $\partial_\mu A^\mu = 0$ の下で正準量子化に適した形 $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu)$ を考えてきた。ここではゲージ不変な Lagrangian 密度 $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ [電磁場の強度 $F_{\mu\nu}$ はゲージ不変] に対して、生成汎関数の経路積分表式

$$Z_0[J_\kappa] = \frac{1}{N_Z} \int \mathcal{D}A \exp(iX[J_\kappa]), \quad X[J_\kappa] = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + J_\lambda A^\lambda \right)$$

(ただし $Z_0[J_\kappa = 0] = 1$) を考える。これは自由電磁場の生成汎関数に対する 13.2.3 項の計算と同様の手法により、

$$Z_0[J_\kappa] = \exp\left(\frac{i}{2}[J^\nu K_{\nu\tau}^{-1} J^\tau]\right) \quad (13.122)$$

と書き換えられる (導出は下記)。ただし

$$K_{\nu\tau}^{-1}(x, x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_{\nu\tau}(k) e^{-ik \cdot (x-x')}, \quad (g^{\mu\nu}k^2 - k^\mu k^\nu) D_{\nu\tau}(k) = \delta^\mu_\tau \quad (13.123)$$

である [本稿次節で補足]。[この関係が Lorentz 変換に対して共変的であるためには、] $D_{\nu\tau}(k)$ は 4 元ベクトル k^μ だけに依存する [2 階共変] Lorentz テンソルでなければならないが、その一般的な形

$$D_{\nu\tau}(k) = a(k^2)g_{\nu\tau} + b(k^2)k_\nu k_\tau$$

(ただし $a(k^2)$ と $b(k^2)$ は任意のスカラー関数) は上式を満たさない [本稿次節で補足]。これは“ゲージ固定”を行わない限り生成汎関数を定義できず、経路積分法により電磁場を矛盾なく量子化することはできないことを意味している。

13.4 節、式の導出など

■式 (13.122) の導出

$$K^{\mu\nu}(x, x') = -\delta^{(4)}(x-x') [g^{\mu\nu}\square_{x'} - \partial'^\mu \partial'^\nu]$$

を定義すると、作用は

$$\begin{aligned} X[J_\kappa] &= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + J_\kappa(x)A^\kappa(x) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x A^\mu(x) [g_{\mu\nu}\square_x - \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu(x) + \int d^4x J_\kappa(x)A^\kappa(x) \quad [\text{本稿次節で補足}] \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' A_\mu(x) K^{\mu\nu}(x, x') A_\nu(x') + \int d^4x J_\kappa(x)A^\kappa(x) \end{aligned}$$

と書き換えられる。ここから式 (13.122) を導く流れは、式 (13.85) から式 (13.90) を導く議論と同じである。

13.4 について

■p.357 下から 2 行目の式について

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) \\ &= 2\{(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu) - (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu)\} \end{aligned}$$

において、最右辺第 1 項の積分を部分積分した結果は式 (13.81) に与えられており、第 2 項を部分積分すると

$$-(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu) \rightarrow A^\mu \partial^\nu \partial_\mu A_\nu = A^\mu \partial_\nu \partial_\mu A^\nu$$

と置き換わる。

■p.358 の訂正 1 行目の式の右辺第 2 項において、 $J_\kappa A^\nu \rightarrow J_\kappa A^\kappa$ と訂正する。

積分核 $K^{\mu\nu}$ の式 (13.121) 右辺の添字 μ, ν を上付きに訂正する。

(いずれも本稿では修正済み。)

■式 (13.123) の導出 今考えている式 (13.121)(上記のように訂正) の積分核 $K^{\mu\nu}$ に対して、式 (13.86) は

$$\begin{aligned} \delta^\mu_\tau \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-x'')} &= \int d^4x' \{-\delta^{(4)}(x-x') [g^{\mu\nu} \square_{x'} - \partial'^\mu \partial'^\nu]\} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_{\nu\tau}(k) e^{-ik \cdot (x'-x'')} \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_{\nu\tau}(k) \{-[g^{\mu\nu} \square_x - \partial^\mu \partial^\nu]\} e^{-ik \cdot (x-x'')} \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_{\nu\tau}(k) (g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu) e^{-ik \cdot (x-x'')} \end{aligned}$$

を与えるので、式 (13.123):

$$(g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu) D_{\nu\tau}(k) = \delta^\mu_\tau$$

を得る。

■「式 (13.124) が解になり得ず」(p.358, l.18) について 式 (13.124) を式 (13.123) に代入すると

$$(g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu) D_{\nu\tau}(k) = \delta^\mu_\tau k^2 a(k^2) + (k^2)^2 b(k^2) - k^\mu k_\tau a(k^2) - k^2 k^\mu k_\tau b(k^2)$$

となる。これが δ^μ_τ となるように $a(k^2), b(k^2)$ を選ぶことはできない。

第 14 章 量子色力学

QED の場合 (13.4 節) と同様, グルーオン場のゲージ不変な Lagrangian 密度 (11.34):

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}G_{i\mu\nu}G_i^{\mu\nu}$$

は量子化に適していない. 量子化に適した Lagrangian 密度の形は de Witt(ド・ウィット) によって見出され, 後に Faddeev(ファデエフ) と Popov(ポポフ) が径路積分法により同じ結果を再現した. ここでは径路積分による量子化を取り上げる.

- 14.1 節 グルーオン場だけの力学に対して Faddeev-Popov の手続きを適用
 - QCD の量子化の困難はもっぱらグルーオン場由来
- 14.2 節 クォークを含む理論へと一般化
- 14.3 節 QCD の摂動論
- 14.4 節 QCD の Feynman 規則
- 14.5 節 QCD の理論の繰り込み可能性

14.1 グルーオン場

14.1.1 生成汎関数

8 つのグルーオン場 $A_i^\kappa(x)$ に関する源を表す古典場 $J_{i\kappa}(x)$ を導入し, グルーオン場の生成汎関数

$$Z[J_{i\kappa}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A e^{iX[J_{i\kappa}]}, \quad X[J_{i\kappa}] = \int d^4x (\mathcal{L}_G + J_{i\kappa} A_i^\kappa) \quad (14.3)$$

(ただし $\mathcal{D}A \equiv \prod_{i=1}^8 \prod_{\mu=0}^3 \mathcal{D}A_i^\mu(x)$, 規格化条件 $Z[J_{i\kappa} = 0] = 1$) を考えると, 自由場に対しては

$$G_i^{\mu\nu} = F_i^{\mu\nu}, \quad \mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}F_{i\mu\nu}F_i^{\mu\nu}$$

であり [本稿次節で補足], QED の場合 (13.4 節) と同様, 上式 (14.3) は適正に定義された量とならない.

ここでも何らかのゲージ固定を行わなければ, 生成汎関数 (14.3) を適正に定義することはできない. このことは次のように自然に説明できる. すなわち電磁場については 4 成分のうち 2 つの横波成分だけが独立であった [のと同様に, グルーオン場も全ての成分が独立ではない] にも関わらず, 上記の積分は場の 4 成分 $\mu = 0, 1, 2, 3$ の全てに対して施される. よって余分の自由度に関する積分を取り除く措置が必要である.

しかしながらグルーオン場に対してはゲージ変換 (11.26b) が電磁場の場合よりも複雑であるために, 一般に Lorenz 条件

$$\partial_\mu A_i^\mu(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 8)$$

を課すことはできない. また無理に Lorenz 条件を課したとしても, 相互作用を考える際に矛盾が生じてくることが知られている. そこで $h_i(x)$ を任意関数として, より一般的なゲージ条件

$$f_i(A_i^\mu(x)) \equiv \partial_\mu A_i^\mu(x) - h_i(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \quad (14.7)$$

を課すことを考える. このような制約を与えると, 生成汎関数において Lagrangian 密度が適切に修正された形に置き換わる [14.1.4 節の式 (14.20) 参照]. その厳密な証明は行わず, 我々は最終的な結果の主要な特徴がもっともらしいことを確かめるに留めることにする.

14.1.1 について

■「相互作用がない場合には、 $G_i^{\mu\nu}(x)$ が $F_i^{\mu\nu}(x)$ に帰着し」(p.362, 1.12) について 相互作用 Lagrangian 密度 (11.28b) は結合 g_s に比例することに注意し、 $G_i^{\mu\nu}(x)$ の式 (14.2) において $g_s = 0$ と置けば良い。

14.1.2 数学的な類推

ここでは Faddeev-Popov の手続きの [完全な説明を与える代わりに、その] 雛形となる議論を行う。[生成汎関数 (14.3) の代わりに] n 変数 z_{k+1}, \dots, z_{k+n} にのみ依存する“作用” X に対して、積分

$$Z = \int \left(\prod_{i=1}^{k+n} dz_i \right) e^{-X}$$

を考える。これを、余計な自由度に関する積分を取り除いた

$$Z = \int \left(\prod_{i=n+1}^{k+n} dz_i \right) e^{-X}$$

に置き換えた上で、再び元と同じ $(k+n)$ 変数に関する等価な積分として表したい。そのためには、 n 変数 z_{k+1}, \dots, z_{k+n} の値から z_1, \dots, z_k を定める条件

$$f_i(z_1, z_2, \dots, z_{k+n}) = 0 \quad (i = 1, \dots, k)$$

を導入し、

$$\begin{aligned} Z &= \int \left(\prod_{i=n+1}^{k+n} dz_i \right) e^{-X} = \int \left\{ \prod_{i=1}^k \int df_i \delta(f_i) \right\} \left(\prod_{i=n+1}^{k+n} dz_i \right) e^{-X} \\ &= \int \left(\prod_{i=1}^{k+n} dz_i \right) e^{-X} \det \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \prod_{i=1}^k \delta(f_i) \end{aligned} \quad (18)$$

と書き換えれば良い [($\partial f / \partial z$) は ($\partial f_i / \partial z_j$) を (i, j) 成分に持つ Jacobi 行列]。Grassmann 変数 $\theta_i, \tilde{\theta}_i$ に対して最右辺の Jacobi 行列式 $\det(\partial f / \partial z)$ を公式 (13.53):

$$\det \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \int \left(\prod_{i=1}^k d\theta_i d\tilde{\theta}_i \right) \exp \left(- \sum_{i,j} \theta_i \frac{\partial f_i}{\partial z_j} \tilde{\theta}_j \right)$$

のように表せば (指数関数において $\sum_{i,j}$ は添字 i, j それぞれの $1, \dots, k$ についての和)、最終的な結果として

$$Z = \int \left(\prod_{i=1}^{k+n} dz_i \right) \int \left(\prod_{i=1}^k d\theta_i d\tilde{\theta}_i \right) e^{-\tilde{X}} \prod_{i=1}^k \delta(f_i), \quad \tilde{X} = X + \sum_{i,j} \theta_i \frac{\partial f_i}{\partial z_j} \tilde{\theta}_j$$

を得る。

14.1.2 について

$(k+n)$ 変数に関する積分 (14.9) がゲージ条件の制約を与える前の積分 (14.3) に対応すると考えられる。そして本節の最終的な結果 (14.12) は元の形 (14.3) に対応する式 (14.9) ではなく、むしろ独立な自由度に関する積分 (14.8) と等価である。このことから「生成汎関数が元の形 (14.3) と等価な内容を持つ」(p.363 下から 3,2 行目) たなければならないというのは、正確にはむしろ「同じ変数を用いるけれども」(14.1.3 項, 1.1) これを適正な積分へと積極的に置き換えることを意味すると考えられる。

14.1.3 Faddeev-Popov の方法

生成汎関数を式 (18) に類似の

$$Z[J_{i\mu}] \propto \int \mathcal{D}A e^{iX} \det \left(\frac{\delta f_i}{\delta \omega_j} \right) \left(\prod_{i=1}^8 \delta[f_i] \right) \quad (14.14a)$$

に置き換え, さらに Grassmann 場 $\eta_i(x), \tilde{\eta}_i(x)$ を導入して右辺の“汎関数行列式”を公式 (13.61) の一般化にあたる関係

$$\det \left(\frac{\delta f_i}{\delta \omega_j} \right) \propto \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} \left\{ i \int d^4x d^4x' \eta_i(x) \frac{\delta f_i}{\delta \omega_j} \tilde{\eta}_j(x') \right\} \quad (14.14b)$$

(ただし $\mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} \equiv \prod_{i=1}^8 \mathcal{D}\eta_i \mathcal{D}\tilde{\eta}_i$) [右辺の量は後述の汎関数微分 $\delta f_i / \delta \omega_j$ に対する解釈の下で, 曖昧さなしに理解できる] によって与える. こうすれば少なくとも S 行列要素の計算に関して, 適正な生成汎関数が得られることを Faddeev と Popov は示した. ここに $\delta[f_i]$ は任意の汎関数 $F[f_i]$ に対して, δ 関数と類似の性質

$$\int \mathcal{D}f_i F[f_i] \delta[f_i] = F[0] \quad (19)$$

を満たすように定義された δ 汎関数である. この δ 汎関数があるため, ゲージ場 $A_{i\mu}(x)$ に関する汎関数積分 (14.14a) には, ゲージ条件 $f_i = 0$ を満たす場 $A_{i\mu}^{(0)}(x)$ のみが寄与する. したがって場 $A_{i\mu}^{(0)}(x)$ から任意の場 $A_{i\mu}(x)$ へのゲージ変換に対するゲージ関数 $\omega \equiv [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_8]$ がゼロになる極限を考えれば十分である. そこで汎関数微分を

$$\frac{\delta f_i}{\delta \omega_j} \equiv \left. \frac{\delta f_i(A_{i\mu}(x))}{\delta \omega_j(x')} \right|_{\omega=0} \quad (14.16)$$

と解釈する. 以上の結果は前節の公式と似ているとは言え完全に正確な類推関係は成り立たず, 導出は容易ではないので, 我々はこれを仮定として受け容れることにする. 問題の難しさの一因として, 今の場合, 作用 (14.3b): $X[J_{i\kappa}] = \int d^4x (\mathcal{L}_G + J_{i\kappa} A_i^\kappa)$ がゲージ不変ではないということを強調しておく.

14.1.3 について

■「ここで導入している場 $\eta_i(x), \tilde{\eta}_i(x)$ はスカラー Grassmann 場なので」(p.366, l.22) について これは (汎関数) 行列式の書き換えに, 通常の汎関数積分に関する公式 (13.12):

$$\int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\phi K \phi] \right\} = (\det K)^{-1/2}$$

ではなく Grassmann 場に関する汎関数積分 (13.61) に対応する式 (14.14b):

$$\int \mathcal{D}\theta \mathcal{D}\tilde{\theta} e^{-[\theta A \tilde{\theta}]} = \det A$$

を用いたことによる. そうしなければならない必然性はおそらく, 通常の場合 ϕ に関する対応する式 (13.12) では Gauss 型の汎関数積分と“行列式”の分母・分子が逆になるため不都合であるという点に求められる.

14.1.4 ゲージ固定とゴースト場

生成汎関数における汎関数行列式を評価して、目障りな δ 汎関数があからさまには現れない、摂動論に適した形

$$Z[J_{i\kappa}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L} + J_{i\kappa} A_i^\kappa) \right\}, \quad (14.20)$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{G'} + \mathcal{L}_g,$$

$$\mathcal{L}_{G'} = -\frac{1}{4} G_{i\mu\nu} G_i^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A_i^\mu)^2, \quad (14.22)$$

$$\mathcal{L}_g = (\partial_\mu \eta_i) [\partial^\mu \tilde{\eta}_i + g_s f_{ijk} \tilde{\eta}_j A_k^\mu] : \text{ゴースト項} \quad (14.17)$$

(ただし $Z[J_{i\mu} = 0] = 1$) に書き換えることができる (導出は下記). [これが 14.1.1 節で予告した, Lagrangian 密度を修正した式である.] $\mathcal{L}_{G'}$ における付加的な項 $-\frac{1}{2} (\partial_\mu A_i^\mu)^2$ は “ゲージ固定項” と呼ばれる (14.1.5 節). ここでゴースト場と呼ばれる場 $\eta_i(x), \tilde{\eta}_i(x)$ とグルーオン場の相互作用に関する項 \mathcal{L}_g が現れていることに注目する. ゴースト場 $\eta_i(x), \tilde{\eta}_i(x)$ はスカラーの Grassmann 場であり, それ故スピン 0 のフェルミオンを記述する. スピンが半整数値をとらないフェルミオンはスピン-統計定理 (4.3 節) を破るのでそのようなゴースト粒子は許されないけれど, 14.3 節で見るようにゴースト粒子は中間状態における仮想的な粒子の伝播関数という形で寄与を持つ. ゴースト粒子はあくまで都合の良い人工的な概念であって, 現実的な概念ではない. 実際このことを反映して, ゲージを適当に選べばゴースト粒子は理論から完全に排除することができる.

14.1.4 節, 式の導出など

■式 (14.20) の導出 まず汎関数行列式 (14.14b) を評価しよう. 無限小の ω に対するゲージ変換は式 (11.26b):

$$A_{i\mu}(x) = A_{i\mu}^{(0)}(x) - \partial_\mu \omega_i(x) - g_s f_{ijk} \omega_j(x) A_{k\mu}^{(0)}(x)$$

なので,

$$\left. \frac{\delta A_i^\mu(x)}{\delta \omega_j(x')} \right|_{\omega=0} = -[\delta_{ij} \partial_{x'}^\mu + g_s f_{ijk} A_k^\mu(x')] \delta^{(4)}(x - x') \quad (20)$$

が得られる [本稿次節で補足]. すると式 (14.7), 式 (14.16) とより

$$\frac{\delta f_i}{\delta \omega_j} = -\partial_{\mu x'} [\delta_{ij} \partial_{x'}^\mu + g_s f_{ijk} A_k^\mu(x')] \delta^{(4)}(x - x') \quad (21)$$

となる. 式 (14.14b) は上式 (21) を代入して部分積分を行うと,

$$\det \left(\frac{\delta f_i}{\delta \omega_j} \right) \propto \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_g \right\} \quad (22)$$

と書き換えられる [本稿次節で補足]. これを式 (14.14a) に代入すると, 生成汎関数は

$$Z[J_{i\mu}] \propto \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_g + J_{i\kappa} A_i^\kappa) \right\} \quad (14.18)$$

と表される.

次に δ 汎関数を含まない形に上式 (14.18) を書き換える. そのために, 定数

$$C \equiv \int \left(\prod_i \mathcal{D}h_i \right) \exp \left\{ -\frac{i}{2} \sum_i (h_i(x))^2 \right\}$$

を生成汎関数に掛けて

$$Z[J_{i\mu}] \propto CZ[J_{i\mu}] \propto \int \left(\prod_i \mathcal{D}h_i \right) Z \exp \left\{ -\frac{i}{2} \sum_i (h_i(x))^2 \right\} \quad (14.19)$$

としても良いことに注目する．ただし $Z[J_{i\mu}]$ はゲージ不変であり，関数 $h_i(x)$ の選び方に依存してはならないことに注意して，最右辺において Z を $h_i(x)$ に関する汎関数積分の中に入れた．上式 (14.19) に式 (14.18) を代入し，

$$\begin{aligned} & \int \left(\prod_i \mathcal{D}h_i \right) \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x \sum_i (h_i(x))^2 \right\} \left(\prod_i \delta [\partial_\mu A_i^\mu(x) - h_i(x)] \right) \\ &= \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x \sum_i (\partial_\mu A_i^\mu(x))^2 \right\} \quad (i \text{ について和をとる}) \end{aligned} \quad (23)$$

[本稿次節で補足] を用いて δ 汎関数 $\delta[f_i]$ を消すと式 (14.20) が導かれる [本稿次節で補足]．

14.1.4 について

■汎関数微分の式 (20)(教科書 14.1.4 節, 1.5) について

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\omega_j(x')} g_s f_{ilk} \omega_l(x) A_k^{(0)\mu}(x) \Big|_{\omega=0} &= g_s f_{ilk} \delta_{lj} \delta^{(4)}(x-x') [A_k^{(0)\mu}(x')]_{\omega=0} \\ &= g_s f_{ijk} A_k^\mu(x') \delta^{(4)}(x-x'). \end{aligned}$$

■汎関数行列式 (22)(教科書 14.1.4 節, 1.10) について 微分演算子が δ 関数にかかっているため，

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{\delta f_i}{\delta\omega_j} \right) &\propto \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} \exp \left[i \int d^4x d^4x' \eta_i(x) \{ -\partial_{\mu x'} [\delta_{ij} \partial_x^\mu + g_s f_{ijk} A_k^\mu(x')] \delta^{(4)}(x-x') \} \tilde{\eta}_j(x') \right] \\ &= \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} \exp \left[i \int d^4x \eta_i \{ \partial_\mu (\delta_{ij} \partial^\mu + g_s f_{ijk} A_k^\mu) \} \tilde{\eta}_j \right] \\ &= \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} \exp \left[i \int d^4x \{ (\partial^\mu \eta_i) \tilde{\eta}_i + g_s f_{ijk} A_k^\mu \partial_\mu (\eta_i \tilde{\eta}_j) \} \right] \end{aligned}$$

としてはいけないことに注意する．

14.1.4 節, 1.5, 1.7 の式 (それぞれ, 本稿の式 (20), 式 (21)) の代わりに

$$\begin{aligned} \frac{\delta A_i^\mu(x)}{\delta\omega_j(x')} &= - \{ \delta_{ij} \partial^\mu + g_s f_{ijk} A_k^\mu(x) \} \delta^{(4)}(x-x'), \\ \therefore \frac{\delta f_i}{\delta\omega_j} &= - \partial_\mu [\{ \delta_{ij} \partial^\mu + g_s f_{ijk} A_k^\mu(x) \} \delta^{(4)}(x-x')] \end{aligned}$$

と書いた方が便利である． δ 関数にかかる微分を取り除くように x について 2 回部分積分すると，式 (14.14b)

の指数は次のように計算できる.

$$\begin{aligned}
& -i \int d^4x d^4x' \eta_i(x) [\partial_\mu \{\delta_{ij} \partial^\mu + g_s f_{ijk} A_k^\mu(x)\} \delta^{(4)}(x-x')] \tilde{\eta}_j(x') \\
& = i \int d^4x d^4x' (\partial_\mu \eta_i(x)) [\{\delta_{ij} \partial^\mu + g_s f_{ijk} A_k^\mu(x)\} \delta^{(4)}(x-x')] \tilde{\eta}_j(x') \\
& = i \int d^4x d^4x' \{(-\partial_\mu \partial^\mu \eta_i(x)) \tilde{\eta}_i(x') + (\partial_\mu \eta_i(x)) g_s f_{ijk} \tilde{\eta}_j(x') A_k^\mu(x)\} \delta^{(4)}(x-x') \\
& = i \int d^4x \{(-\partial_\mu \partial^\mu \eta_i) \tilde{\eta}_i + (\partial_\mu \eta_i) g_s f_{ijk} \tilde{\eta}_j A_k^\mu\}.
\end{aligned}$$

最後に最右辺の被積分関数第 1 項を再び部分積分すると (この手順は 2 度手間ではなく, 必要な措置である),

$$i \int d^4x (\partial_\mu \eta_i) (\partial^\mu \tilde{\eta}_i + g_s f_{ijk} \tilde{\eta}_j A_k^\mu)$$

となるので, 汎関数行列式 (p.367, 1.10) およびゴースト項 (14.17) を得る.

■ δ 汎関数 $\delta[f_i]$ を消去するための式 (23)(教科書 p.368, 1.10,11) について 14.1.3 節の δ 汎関数を定義する式 (19)(教科書 p.366, 1.4) による.

■ 式 (14.20) について 式 (14.19) に式 (14.18) を代入すると

$$\begin{aligned}
Z[J_{i\kappa}] & \propto \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_g + J_{i\kappa} A_i^\kappa) \right\} \int \left(\prod_i \mathcal{D}h_i \right) \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x \sum_i h_i^2 \right\} \left(\prod_i \delta[f_i] \right) \\
& = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} \exp \left[i \int d^4x \left\{ \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_g + J_{i\kappa} A_i^\kappa - \frac{1}{2} (\partial_\mu A_i^\mu)^2 \right\} \right] : (14.20)
\end{aligned}$$

を得る.

14.1.5 電磁場の再検討

[最後になるが, Faddeev-Popov の方法の試金石としてこれを電磁場に適用し, すでに得られている結果を再現できるかを検討しよう.] Faddeev-Popov の手続きを電磁場に適用した場合の生成汎関数は, $\eta(x), \tilde{\eta}(x)$ をゴースト場としてグルーオン場の生成汎関数と類似の式 (f_{ijk} に比例する項は不要となる)

$$\begin{aligned}
Z[J_\mu] & = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L} + \mathcal{L}_g + J_\kappa A^\kappa) \right\} \\
& \quad \left(\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2, \quad \mathcal{L}_g = (\partial_\mu \eta) (\partial^\mu \tilde{\eta}) \right) \\
& = \frac{1}{N'} \int \mathcal{D}A \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L} + J_\kappa A^\kappa) \right\} \\
& \quad \left(\frac{1}{N'} = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L}_g \right) \right)
\end{aligned}$$

で与えられる. これを通常の Lorentz ゲージを用いた場合の生成汎関数 (13.79):

$$Z[J_\kappa] = \frac{1}{N_1} \int \mathcal{D}A e^{iX[J_\kappa]}, \quad X[J_\kappa] = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu) (\partial^\nu A^\mu) + J_\kappa A^\kappa \right\}$$

と比べると, Lagrangian 密度は作用に寄与を持たない 4 元発散だけ異なるので, 両者は同じものであることが分かる.

14.2 クォークの導入

クォークを含むようにこれまでの理論を拡張しよう。QED においてはじめに荷電レプトンのうち電子-陽電子だけを考えたのと同様に、簡単のために全体を通じて対象とするクォークの香りを 1 種類に限定し、香りの添字 f を省くことにする。

14.2.1 QCD のラグランジアン

- グルーオン場と相互作用するクォークの Lagrangian 密度 (11.28):

$$\mathcal{L}_q = \bar{\psi}_a (i\not{D}_{ab} - m\delta_{ab})\psi_b, \quad D_{ab}^\mu = \delta_{ab}\partial^\mu + \frac{i}{2}g_s(\lambda_j)_{ab}A_j^\mu.$$

- 繰り返されたクォークの色の添字 $a, b, \dots = r, g, b$ について和をとる。
 $i, j, \dots = 1, 2, \dots, 8$ はグルーオンの色電荷の添字。

- 純粋なグルーオン場の Lagrangian 密度 (14.22):

$$\mathcal{L}_{G'} = -\frac{1}{4}G_{i\mu\nu}G_i^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A_i^\mu)^2.$$

- 等価的に

$$-\frac{1}{4}F_{i\mu\nu}F_i^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A_i^\mu)^2 \rightarrow -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_{i\mu})(\partial^\nu A_i^\mu). \quad (\text{問題 5.1})$$

- ゴースト場の Lagrangian 密度 (14.17):

$$\mathcal{L}_g = (\partial_\mu \eta_i)(\partial^\mu \tilde{\eta}_i + g_s f_{ijk} \tilde{\eta}_j A_k^\mu).$$

これらを足し合わせた全 Lagrangian 密度は

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{G'} + \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_g \\ &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \\ \mathcal{L}_0 &= -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_{i\mu})(\partial^\nu A_i^\mu) + \bar{\psi}_a (i\not{\partial} - m)\psi_a + (\partial_\mu \eta_i)(\partial^\mu \tilde{\eta}_i), \\ \mathcal{L}_1 &= -\frac{1}{2}g_s \bar{\psi}_a \gamma_\mu (\lambda_j)_{ab} \psi_b A_j^\mu + g_s f_{ijk} A_{i\mu} A_{j\nu} \partial^\mu A_k^\nu - \frac{1}{4}g_s^2 f_{ijk} f_{ilm} A_j^\mu A_k^\nu A_{l\mu} A_{m\nu} + g_s f_{ijk} (\partial_\mu \eta_i) \tilde{\eta}_j A_k^\mu \end{aligned} \quad (14.32)$$

である ($g_s = 0$ とおくと $\mathcal{L}_1 = 0$).

14.2.1 について

■クォークの Lagrangian 密度

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q &= \sum_f \bar{\Psi}^f (i\not{D} - m_f)\Psi^f = \sum_f \sum_{a,b=r,g,b} \bar{\psi}_a^f (i\not{D} - m_f)_{ab} \psi_b^f : (11.28a) \\ &\rightarrow \sum_{a,b=r,g,b} \bar{\psi}_a (i\not{D} - m)_{ab} \psi_b : (14.27). \end{aligned}$$

■Lagrangian 密度の自由場項 (14.30) と相互作用項 (14.31) への分解について

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{G'} &= -\frac{1}{4}G_{i\mu\nu}G_i^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A_i^\mu)^2 \\ &= -\frac{1}{4}F_{i\mu\nu}F_i^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A_i^\mu)^2 + g_s f_{ijk} A_{i\mu} A_{j\nu} \partial^\mu A_k^\nu - \frac{1}{4}g_s^2 f_{ijk} f_{ilm} A_j^\mu A_k^\nu A_{l\mu} A_{m\nu}, \quad (\because \mathcal{L}_G \text{の式 (11.37)}) \\ \mathcal{L}_q &= \bar{\psi}_a (i\not{D}_{ab} - m\delta_{ab})\psi_b \\ &= \bar{\psi}_a (i\not{\partial} - m)\psi_a - \frac{1}{2}g_s \bar{\psi}_a \gamma_\mu (\lambda_j)_{ab} \psi_b A_j^\mu, \\ \mathcal{L}_g &= (\partial_\mu \eta_i)(\partial^\mu \tilde{\eta}_i + g_s f_{ijk} \tilde{\eta}_j A_k^\mu)\end{aligned}$$

において青字で示した項が p.371, 1.9,10 の自由場項 \mathcal{L}_0 を成し, g_s を含む残りの項が式 (14.31) の相互作用項 \mathcal{L}_I を形成する.

14.2.2 生成汎関数

生成汎関数 クォーク場 $\bar{\psi}_a, \psi_a$ に対応する Grassmann 源 $\sigma_a, \bar{\sigma}_a$ に加え,
ゴースト場 $\eta, \tilde{\eta}$ に対応する Grassmann 源 S_i, \tilde{S}_i を導入し, 源による作用

$$\mathcal{L}_S = J_{i\kappa} A_i^\kappa + \bar{\sigma}_a \psi_a + \bar{\psi}_a \sigma_a + S_i \eta_i + \tilde{S}_i \tilde{\eta}_i$$

を定義する. 生成汎関数は径路積分

$$Z[J_{i\kappa}, \sigma_a, \bar{\sigma}_a, S_i, \tilde{S}_i] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} e^{iX'}, \quad X' = \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_S)$$

によって与えられる.

- $a = r, g, b$ を色の添字, $\alpha = 0, \dots, 3$ をスピノル添字として,
クォーク場の積分は $\mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \equiv \prod_a \prod_\alpha \mathcal{D}\bar{\psi}_{a,\alpha} \mathcal{D}\psi_{a,\alpha}$.
- 規格化条件 $Z[0, 0, 0, 0, 0] = 1$.

Green 関数 QED の場合と同様,

- ゴースト場を除くクォーク場とグルーオン場の Green 関数

$$\begin{aligned}\langle A_i^\mu(x_1) \cdots \psi_a(y_1) \cdots \bar{\psi}_b(z_1) \cdots \rangle &= (-1)^{\bar{n}} \left(\frac{1}{i}\right)^n \frac{\delta^n Z}{\delta J_{i\mu}(x_1) \cdots \delta \bar{\sigma}_a(y_1) \cdots \delta \sigma_b(z_1) \cdots} \Big|_0 \\ &\quad (n \text{ は全ての場の数, } \bar{n} \text{ は随伴クォーク場 } \bar{\psi}_b \text{ の数}) \\ &= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} \{ e^{iX} A_i^\mu(x_1) \cdots \psi_a(y_1) \cdots \bar{\psi}_b(z_1) \cdots \}.\end{aligned}$$

- ゴースト場を含む Green 関数
(物理的な過程にゴースト粒子は現れないが, 摂動論を構築するとき有用)

$$\langle A_i^\mu(x_1) \cdots \tilde{\eta}_j(y_1) \cdots \eta_k(z_1) \cdots \rangle = \left(\frac{1}{i}\right)^n \frac{\delta^n Z}{\delta J_{i\mu}(x_1) \cdots \delta \tilde{S}_j(y_1) \cdots \delta S_k(z_1) \cdots} \Big|_0.$$

- 運動量空間の Green 関数 $\langle A_1(q_1) \cdots A_n(q_n) \rangle$
($A_1(x_1), \dots, A_n(x_n)$ は任意のクォーク場やグルーオン場の組合せ [ゴースト場も含めて良い])

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1 + \cdots + q_n) \langle A_1(q_1) \cdots A_n(q_n) \rangle = \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \left(\prod_{i=1}^n e^{-iq_i \cdot x_i} \right) \langle A_1(x_1) \cdots A_n(x_n) \rangle.$$

これは各運動量変数を内向きに定義したことになる。

[実際このように解釈すれば、例えば図 14.2(p.378) のダイヤグラムに対して δ 関数 $\delta(k + p + p')$ は正しい保存則 $p + k = -p'$ を表す。12.1 節のノートも参照。]

14.2.3 自由場

相互作用項 \mathcal{L}_I をゼロと置いた自由場の生成汎関数

$$Z_0[J_{i\kappa}, \sigma_a, \bar{\sigma}_a, S_i, \tilde{S}_i] = \frac{1}{N_0} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} e^{iX_0'}, \quad X_0' = \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_S)$$

(ただし $Z_0[0, 0, 0, 0, 0] = 1$) は、

- 自由なグルーオン場の生成汎関数

$$Z_0[J_{i\kappa}] = \frac{1}{N_1} \int \mathcal{D}A e^{iX[J_{i\kappa}]}, \quad X[J_{i\kappa}] = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2} (\partial_\nu A_{i\mu}) (\partial^\nu A_i^\mu) + J_{i\kappa} A_i^\kappa \right\}$$

- 自由なクォーク場の生成汎関数

$$Z_0[\sigma_a, \bar{\sigma}_a] = \frac{1}{N_2} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX[\sigma_a, \bar{\sigma}_a]}, \quad X[\sigma_a, \bar{\sigma}_a] = \int d^4x \{ \bar{\psi}_a (i\cancel{\partial} - m) \psi_a + \bar{\sigma}_a \psi_a + \bar{\psi}_a \sigma_a \}$$

- 自由なゴースト場の生成汎関数

$$Z_0[S_i, \tilde{S}_i] = \frac{1}{N_3} \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} e^{iX[S_i, \tilde{S}_i]}, \quad X[S_i, \tilde{S}_i] = \int d^4x \left\{ (\partial_\mu \eta_i) (\partial^\mu \tilde{\eta}_i) + S_i \eta_i + \tilde{S}_i \tilde{\eta}_i \right\}$$

(ただし $Z_0[J_{i\kappa} = 0] = 1$, $Z_0[\sigma_a = 0, \bar{\sigma}_a = 0] = 1$, $Z_0[S_i = 0, \tilde{S}_i = 0] = 1$) として、

$$Z_0[J_{i\kappa}, \sigma_a, \bar{\sigma}_a, S_i, \tilde{S}_i] = Z_0[J_{i\kappa}] Z_0[\sigma_a, \bar{\sigma}_a] Z_0[S_i, \tilde{S}_i]$$

と分解される。

各自由場の生成汎関数は QED の場合と同様、次のように評価される。

- 自由なグルーオン場の生成汎関数

$$Z_0[J_{i\kappa}] = \exp \left(-\frac{i}{2} [J_{i\kappa} D_{\mathbb{F}}^{\kappa\lambda} J_{j\lambda}] \right), \quad D_{\mathbb{F}ij}^{\kappa\lambda}(x) = \delta_{ij} D_{\mathbb{F}}^{\kappa\lambda}(x) : \text{グルーオンの伝播関数.}$$

- 自由なクォーク場の生成汎関数

$$Z_0[\sigma_a, \bar{\sigma}_a] = \exp(-i[\bar{\sigma}_a S_{\mathbb{F}ab} \sigma_b]), \quad S_{\mathbb{F}ab}(x) = \delta_{ab} S_{\mathbb{F}}(x) : \text{クォークの伝播関数.}$$

- 自由なゴースト場の生成汎関数

$$Z_0[S_i, \tilde{S}_i] = \exp \left(-i[S_i \Delta_{\mathbb{F}ij} \tilde{S}_j] \right), \quad \Delta_{\mathbb{F}ij}(x) = \delta_{ij} \Delta_{\mathbb{F}}(x) : \text{ゴースト (粒子) の伝播関数.}$$

– ただし $\Delta_{\mathbb{F}}(x)$ は中間子伝播関数 (3.59) において質量をゼロとおいたものである。

[ゴーストの伝播関数の導出は問題 14.3.]

14.3 摂動論

[強い相互作用では摂動論が良い近似にならない (第 11 章の序文) という事情はあれど, 理論的に摂動展開を考えることは可能である. 特に短距離の相互作用に関しては, 漸近的自由性により摂動論を利用することが可能となる (15.4 節).]

14.3.1 Wick の定理と伝播関数

A, B, C, \dots をクォーク場, グルーオン場, ゴースト場の任意の組合せとすると, QED の場合と同様, 自由場の Green 関数 $\langle ABC \dots \rangle_0$ は場 A, B, C, \dots が奇数個のときゼロになり, 偶数個のとき Wick の定理

$$\langle ABCD \dots WXYZ \rangle_0 = \underbrace{ABCD} \dots \underbrace{WXYZ} + \underbrace{ABCD} \dots \underbrace{WXYZ} + \dots$$

から評価される. ここでゼロにならない縮約は

$$\underbrace{A_i^\mu(x) A_j^\nu(y)} = \underbrace{A_j^\nu(y) A_i^\mu(x)} = iD_{Fij}^{\mu\nu}(x-y) : \text{グルーオン場の伝播関数}, \quad (14.52a)$$

$$\underbrace{\psi_a(x) \bar{\psi}_b(y)} = -\underbrace{\bar{\psi}_b(y) \psi_a(x)} = iS_{Fab}(x-y) : \text{クォーク場の伝播関数}, \quad (14.52b)$$

$$\underbrace{\tilde{\eta}_i(x) \eta_j(y)} = -\underbrace{\eta_j(y) \tilde{\eta}_i(x)} = i\Delta_{Fij}(x-y) : \text{ゴーストの伝播関数} \quad (14.52c)$$

に限られる.

14.3.2 摂動展開

QED の場合と同様, [14.2.2 節, 14.2.3 節の結果により] QCD の相互作用 Lagrangian 密度 \mathcal{L}_I に対して Green 関数は

$$\langle ABC \dots \rangle = \frac{\left\langle \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right\} (ABC \dots) \right\rangle_0}{\left\langle \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right\} \right\rangle_0}$$

と表される. 指数関数を級数展開して Wick の定理を適用すると, 摂動展開が得られる. ここでも分母の非連結ダイアグラムは分子から現れる非連結ダイアグラムと相殺するため, 連結 Green 関数を計算する際には分母を無視して良い.

14.3.3 結節点因子

1 次の摂動論では

$$\langle ABC \dots \rangle = i \int d^4x \langle \mathcal{L}_I(x) (ABC \dots) \rangle_0 \quad (14.54)$$

となる [QED の場合と同様, \mathcal{L}_I のゼロ次の項はゼロとなる]. Wick の定理を適用したときに $\langle \mathcal{L}_I(x) (ABC \dots) \rangle_0$ がゼロにならない場の組合せ A, B, C, \dots を持つ Green 関数を計算すると, 以下のように関連する結節点因子が得られる. [単一種類の結節点に因子 $ie\gamma^\mu$ を充てれば良い QED と違って, 以下に見るように QCD では, 異なる結節点に応じて異なる因子を充てなければならない.]

■クォーク-グルーオン結節点 Green 関数 $\langle A_i^\nu(x_1) \psi_c(x_2) \bar{\psi}_d(x_3) \rangle$ は 1 次の摂動論において

$$\langle A_i^\nu(x_1) \psi_c(x_2) \bar{\psi}_d(x_3) \rangle = -\frac{i}{2} g_s \int d^4x iD_F^{\mu\nu}(x_1-x) iS_F(x_2-x) \gamma_\mu(\lambda_i)_{cd} iS_F(x-x_3) \quad (14.56)$$

と計算され (導出は下記), 対応する運動量空間の Green 関数は

$$\langle A_i^\nu(k) \psi_c(p') \bar{\psi}_d(p) \rangle = iD_F^{\mu\nu}(k) iS_F(p+k) [-ig_s(T_i)_{cd} \gamma_\mu] iS_F(p), \quad T_i \equiv \frac{\lambda_i}{2} \quad (14.57)$$

となる [本稿「14.3.3 について」の節を参照]. これは図 24 の Feynman グラフにおいて, Green 関数の脚に光子伝播関数 $iD_F^{\mu\nu}(k)$ とフェルミオン伝播関数 $iS_F(p+k), iS_F(p)$ を充て [グルーオンとクォークの伝播関数ではない], 結節点因子として

$$-ig_s(T_i)_{cd} \gamma_\mu$$

を充てれば得られる.

■3 グルーオン結節点 Green 関数 $\langle A_l^\alpha(x_1) A_m^\beta(x_2) A_n^\gamma(x_3) \rangle$ は 1 次の摂動論において

$$\langle A_l^\alpha(x_1) A_m^\beta(x_2) A_n^\gamma(x_3) \rangle = ig_s g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} f_{lmn} \int d^4x iD_F^{\sigma\alpha}(x-x_1) iD_F^{\tau\beta}(x-x_2) \partial_x^\mu iD_F^{\nu\gamma}(x-x_3) + \dots$$

と計算される. ただし \dots は添字と引数の組 $(l, \alpha, x_1), (m, \beta, x_2), (n, \gamma, x_3)$ を入れ替えて得られる項を表す. 対応する運動量空間の Green 関数は

$$\langle A_l^\alpha(k_1) A_m^\beta(k_2) A_n^\gamma(k_3) \rangle = g_s f_{lmn} V_{\sigma\tau\nu} iD_F^{\sigma\alpha}(k_1) iD_F^{\tau\beta}(k_2) iD_F^{\nu\gamma}(k_3), \quad (14.67)$$

$$V_{\sigma\tau\nu} \equiv [g_{\nu\tau}(k_3 - k_2)_\sigma + g_{\sigma\nu}(k_1 - k_3)_\tau + g_{\tau\sigma}(k_2 - k_1)_\nu]$$

となる (以上の導出は下記). これは図 25 の Feynman グラフにおいて, Green 関数の脚に光子伝播関数

$$iD_F^{\sigma\alpha}(k_1), \quad iD_F^{\tau\beta}(k_2), \quad iD_F^{\nu\gamma}(k_3)$$

を充て [グルーオンの伝播関数ではない], 結節点因子として

$$g_s f_{lmn} V_{\sigma\tau\nu}$$

を充てれば得られる.

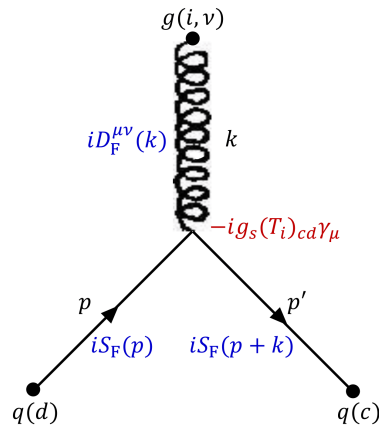


図 24 クォーク-グルーオン結節点

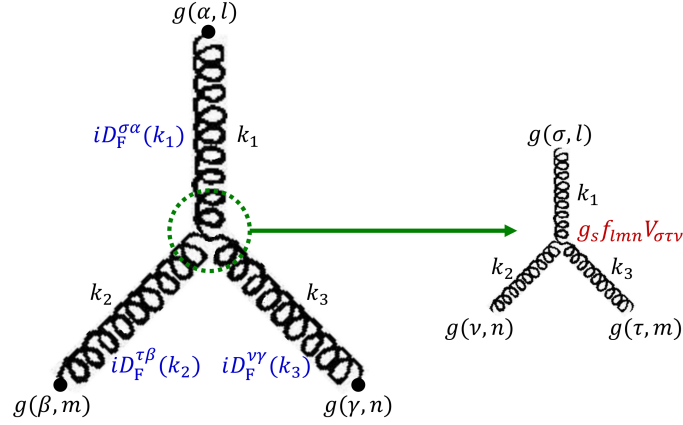


図 25 3 グルーオン結節点

■4 グルーオン結節点 1 次の摂動論における Green 関数 $\langle A_l^\alpha(x_1)A_m^\beta(x_2)A_n^\gamma(x_3)A_o^\delta(x_4) \rangle$ に対応する運動量空間の Green 関数は

$$\begin{aligned}
 & \langle A_l^\alpha(k_1)A_m^\beta(k_2)A_n^\gamma(k_3)A_o^\delta(k_4) \rangle \\
 &= -ig_s^2 F_{lmno} V_{\lambda\mu\nu\sigma} iD_F^{\lambda\alpha}(k_1) iD_F^{\mu\beta}(k_2) iD_F^{\nu\gamma}(k_3) iD_F^{\sigma\delta}(k_4), \quad (14.69) \\
 & \quad F_{lmno} V_{\lambda\mu\nu\sigma} \\
 & \equiv f_{ilm} f_{ino} (g_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma}) + f_{inm} f_{ilo} (g_{\nu\lambda} g_{\mu\sigma} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma}) + f_{iln} f_{imo} (g_{\lambda\mu} g_{\nu\sigma} - g_{\nu\mu} g_{\lambda\sigma})
 \end{aligned}$$

と計算される [本稿「14.3.3 について」の節で補足]. これは図 26 の Feynman グラフにおいて, Green 関数の脚に光子伝播関数

$$iD_F^{\lambda\alpha}(k_1), \quad iD_F^{\mu\beta}(k_2), \quad iD_F^{\nu\gamma}(k_3), \quad iD_F^{\sigma\delta}(k_4)$$

を充て [グルーオンの伝播関数ではない], 結節点因子として

$$-ig_s^2 F_{lmno} V_{\lambda\mu\nu\sigma}$$

を充てれば得られる.

■ゴースト-グルーオン結節点 1 次の摂動論における Green 関数 $\langle A_l^\alpha(x_1)\tilde{\eta}_m(x_2)\eta_n(x_3) \rangle$ に対応する運動量空間の Green 関数は

$$\langle A_l^\alpha(k_1)\tilde{\eta}_m(k_2)\eta_n(k_3) \rangle = g_s f_{lmn} k_{2\mu} iD_F^{\mu\alpha}(k_1) i\Delta_F(k_2) i\Delta_F(k_3) \quad (14.71)$$

と計算される [本稿「14.3.3 について」の節で補足]. これは図 27 の Feynman グラフにおいて, Green 関数の脚に光子伝播関数 $iD_F^{\mu\alpha}(k_1)$ [グルーオンの伝播関数ではなく] とゴーストの伝播関数 $i\Delta_F(k_2), i\Delta_F(k_3)$ を充て. 結節点因子として

$$g_s f_{lmn} k_{2\mu}$$

を充てれば得られる.

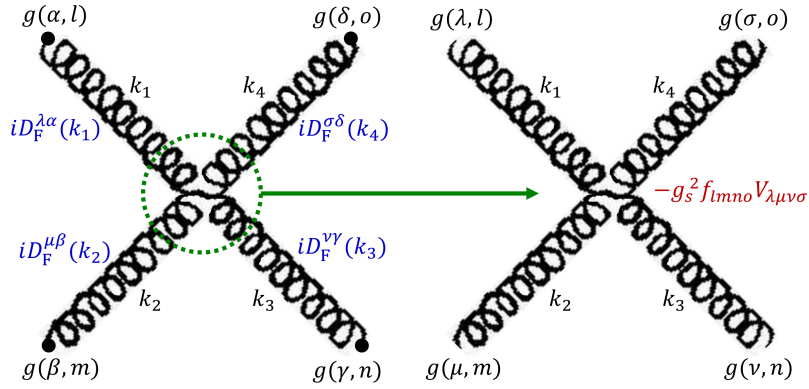


図 26 4 グルーオン結節点

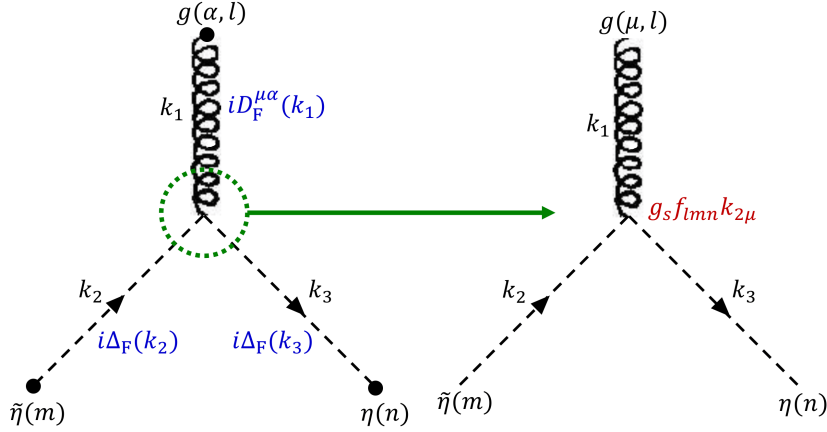


図 27 ゴースト-グルーオン結節点

14.3.3 節, 式の導出など

■式 (14.56) の導出 場の演算子を $ABC \cdots = A_i^\nu(x_1)\psi_c(x_2)\bar{\psi}_d(x_3)$ と選ぶと, 1 次 Green 関数 (14.54) には, 相互作用 Lagrangian(14.32) の最初の項だけが寄与を持つので [本稿次節で補足],

$$\begin{aligned} \langle A_i^\nu(x_1)\psi_c(x_2)\bar{\psi}_d(x_3) \rangle &= -\frac{i}{2}g_s \int d^4x F, \\ F &= \langle [\bar{\psi}_a(x)\gamma_\mu(\lambda_j)_{ab}\psi_b(x)]A_j^\mu(x)A_i^\nu(x_1)\psi_c(x_2)\bar{\psi}_d(x_3) \rangle_0 \\ &= \langle A_j^\mu(x)A_i^\nu(x_1)\psi_c(x_2)[\bar{\psi}_a(x)\gamma_\mu(\lambda_j)_{ab}\psi_b(x)]\bar{\psi}_d(x_3) \rangle_0 \end{aligned}$$

となる. ここから QED における連結 Green 関数 (13.118) [13.3.2 節] の導出と全く同様の計算を行うと, 式 (14.56) を得る [本稿次節で補足].

■式 (14.67) の導出 場の演算子を $ABC \cdots = A_l^\alpha(x_1)A_m^\beta(x_2)A_n^\gamma(x_3)$ と選ぶと、1 次 Green 関数 (14.54) には、相互作用 Lagrangian(14.32) の第 2 項だけが寄与を持ち、

$$\langle A_l^\alpha(x_1)A_m^\beta(x_2)A_n^\gamma(x_3) \rangle = ig_s f_{ijk} g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} \int d^4 x F, \quad (14.60a)$$

$$F = \langle A_i^\sigma(x) A_j^\tau(x) \partial_x^\mu A_k^\nu(x) A_l^\alpha(x_1) A_m^\beta(x_2) A_n^\gamma(x_3) \rangle_0 \quad (14.60b)$$

となる。上式 (14.60b) に Wick の定理を適用すると、場 $A_l^\alpha(x_1), A_m^\beta(x_2), A_n^\gamma(x_3)$ を相互作用項の中の場 $A_i^\sigma(x), A_j^\tau(x), A_k^\nu(x)$ と縮約する方法に応じて $3! = 6$ 通りの寄与が生じる [本稿次節で補足]。これらは変数 (添字と引数) の組

$$(l, \alpha, x_1), \quad (m, \beta, x_2), \quad (n, \gamma, x_3) \quad (14.61)$$

を入れ替えた違いしかないので、例えば 1 つの項

$$F_1 = \underbrace{A_i^\sigma(x)} A_l^\alpha(x_1) \underbrace{A_j^\tau(x)} A_m^\beta(x_2) \partial_x^\mu \underbrace{A_k^\nu(x)} A_n^\gamma(x_3)$$

を評価すれば充分である。対応する Green 関数 (14.60a) への寄与は、伝播関数因子 (14.52a) を用いて

$$\langle A_l^\alpha(x_1) A_m^\beta(x_2) A_n^\gamma(x_3) \rangle_1 = ig_s g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} f_{lmn} \int d^4 x i D_F^{\sigma\alpha}(x - x_1) i D_F^{\tau\beta}(x - x_2) \partial_x^\mu i D_F^{\nu\gamma}(x - x_3) \quad (24)$$

と表される [本稿次節で補足]。これを運動量空間に移すと

$$\langle A_l^\alpha(k_1) A_m^\beta(k_2) A_n^\gamma(k_3) \rangle_1 = g_s g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} f_{lmn} k_3^\mu i D_F^{\sigma\alpha}(k_1) i D_F^{\tau\beta}(k_2) i D_F^{\nu\gamma}(k_3) \quad (14.64)$$

となる ($k_1 + k_2 + k_3 = 0$) [本稿次節で補足]。運動量空間では上式 (14.64) において、式 (14.61) に対応して変数の組

$$(l, \alpha, k_1), \quad (m, \beta, k_2), \quad (n, \gamma, k_3) \quad (14.65)$$

を入れ替えた項を合わせれば、Green 関数 (14.67) が得られる [本稿次節で補足]。

14.3.3 について

■「式 (14.32) の最初の項だけが式 (14.54) へ寄与を持ち」(p.377 下から 6 行目) について 同時刻縮約の項は非連結ダイアグラムを作るため、ここでも除かれる。このことは一般化された Wick の定理 (6.38) の径路積分形式における表現と見なせるかもしれない。同じ理由により式 (14.55b) において、 $\bar{\psi}_a(x)$ と $\psi_b(x)$ を縮約した項も省略して良い。

■連結 Green 関数の式 (14.56) について

$$\begin{aligned} F &= \underbrace{A_j^\mu(x)} A_i^\nu(x_1) \underbrace{\psi_c(x_2) \bar{\psi}_a(x)} \gamma_\mu(\lambda_j)_{ab} \underbrace{\psi_b(x) \bar{\psi}_d(x_3)} \\ &= \{i\delta_{ij} D_F^{\mu\nu}(x - x_1)\} \{i\delta_{ca} S_F(x_2 - x)\} \gamma_\mu(\lambda_j)_{ab} \{i\delta_{bd} S_F(x - x_3)\} \\ &= i D_F^{\mu\nu}(x - x_1) i S_F(x_2 - x) \gamma_\mu(\lambda_j)_{cd} i S_F(x - x_3). \end{aligned}$$

「 $i S_{Fab}(p) = i S_F(p) \delta_{ab}$ や $i D_{Fij}^{\mu\nu}(k) = i \delta_{ij} D_F^{\mu\nu}(k)$ のような伝播関数因子を充てるときには、我々は常套的に $a = b, i = j$ と置いて Kronecker のデルタを省く」(p.378, 1.13~15) とあるが、ここで行った計算のように Kronecker のデルタを消費してしまえば、既に Kronecker のデルタは不要であり、グルーオンやクォークの伝播関数の代わりに光子伝播関数 $D_F^{\mu\nu}$ とフェルミオン伝播関数 S_F を充てれば良い。あるいは Kronecker のデルタは色や色電荷の保存を表しており、あらかじめ保存則を満たす過程のみを考えて Kronecker のデルタを省いたと考えても良い。

■運動量空間の Green 関数 (14.57) について

$$\begin{aligned}
& \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 e^{-ik \cdot x_1} e^{-ip' \cdot x_2} e^{-ip \cdot x_3} \langle A_i^\nu(x_1) \psi_c(x_2) \bar{\psi}_d(x_3) \rangle \\
&= -\frac{i}{2} g_s \int d^4x \left[\int d^4x_1 e^{-ik \cdot x_1} iD_F^{\mu\nu}(x_1 - x) \right] \left[\int d^4x_2 e^{-ip' \cdot x_2} iS_F(x_2 - x) \right] \gamma_\mu(\lambda_i)_{cd} \left[\int d^4x_3 e^{-ip \cdot x_3} iS_F(x - x_3) \right] \\
&= -\frac{i}{2} g_s \int d^4x e^{-i(k+p'+p) \cdot x} \left[iD_F^{\mu\nu}(-k) iS_F(-p') \gamma_\mu(\lambda_i)_{cd} iS_F(p) \right] \\
&= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k+p+p') iD_F^{\mu\nu}(k) iS_F(p+k) \left[-\frac{ig_s}{2} (\lambda_i)_{cd} \gamma_\mu \right] iS_F(p)
\end{aligned}$$

より, 運動量空間の Green 関数は式 (14.57) のように同定される.

■ T_i の式 (14.58d) について 色演算子 (11.11a): $\hat{F}_i = \frac{1}{2} \lambda_i$ と同一である.

■「……縮約をつくる 3! 通りの方法」(p.380, l.4,5) について 連結 Green 関数を得るには, 引数が x の 3 つの場を, いずれも引数の異なる場 $A_l^\alpha(x_1), A_m^\beta(x_2), A_n^\gamma(x_3)$ のいずれかと縮約しなければならない.

■Green 関数への F_1 の寄与 (24)(教科書の p.380, l.13,14) について

$$\begin{aligned}
F_1 &= \{ \delta_{il} iD_F^{\sigma\alpha}(x-x_1) \} \{ \delta_{jm} iD_F^{\tau\beta}(x-x_2) \} \partial_x^\mu \{ \delta_{kn} iD_F^{\nu\gamma}(x-x_3) \}, \\
\therefore ig_s f_{ijk} g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} \int d^4x F_1 &= ig_s g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} f_{lmn} \int d^4x iD_F^{\sigma\alpha}(x-x_1) iD_F^{\tau\beta}(x-x_2) \partial_x^\mu iD_F^{\nu\gamma}(x-x_3).
\end{aligned}$$

■運動量空間の Green 関数への F_1 の寄与 (14.64) について

$$\begin{aligned}
& \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 e^{-ik_1 \cdot x_1} e^{-ik_2 \cdot x_2} e^{-ik_3 \cdot x_3} \langle A_l^\alpha(x_1) A_m^\beta(x_2) A_n^\gamma(x_3) \rangle_1 \\
&= ig_s g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} f_{lmn} \\
& \quad \times \int d^4x \left[\int d^4x_1 e^{-ik_1 \cdot x_1} iD_F^{\sigma\alpha}(x-x_1) \right] \left[\int d^4x_2 e^{-ik_2 \cdot x_2} iD_F^{\tau\beta}(x-x_2) \right] \left[\int d^4x_3 e^{-ik_3 \cdot x_3} \partial_x^\mu iD_F^{\nu\gamma}(x-x_3) \right] \\
&= ig_s g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} f_{lmn} \int d^4x e^{-i(k_1+k_2+k_3) \cdot x} \left[iD_F^{\sigma\alpha}(k_1) iD_F^{\tau\beta}(k_2) (-ik_3^\mu) iD_F^{\nu\gamma}(k_3) \right] \\
&= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1+k_2+k_3) g_s g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} f_{lmn} k_3^\mu iD_F^{\sigma\alpha}(k_1) iD_F^{\tau\beta}(k_2) iD_F^{\nu\gamma}(k_3)
\end{aligned}$$

なので, 運動量空間の Green 関数への寄与 $\langle A_l^\alpha(k_1) A_m^\beta(k_2) A_n^\gamma(k_3) \rangle_1$ は式 (14.64) のように同定される.

■3 グルーオン結節点を持つ運動量空間の Green 関数 (14.67) について 式 (14.64) において添字と引数の組 (14.65) を入れ替えて得られる 3! 通りの項を表 2 にまとめる.

■4 グルーオン結節点を持つ運動量空間の Green 関数 (14.69) について

$$\begin{aligned}
\langle A_l^\alpha(x_1) A_m^\beta(x_2) A_n^\gamma(x_3) A_o^\delta(x_4) \rangle &= -\frac{i}{4} g_s^2 f_{ipr} f_{ist} g_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma} \int d^4x F, \\
F &\equiv \langle A_p^\lambda(x) A_r^\mu(x) A_s^\nu(x) A_t^\sigma(x) A_l^\alpha(x_1) A_m^\beta(x_2) A_n^\gamma(x_3) A_o^\delta(x_4) \rangle_0.
\end{aligned}$$

ここで上式の F に対して Wick の定理を適用する際に, 連結ダイアグラムに関係する, 異なる引数の場どうしの縮約を作る方法は 4! 通りあり, それらは

$$F_1 \equiv \underbrace{A_p^\lambda(x) A_l^\alpha(x_1)} A_r^\mu(x) \underbrace{A_t^\sigma(x) A_l^\beta(x_2)} A_s^\nu(x) \underbrace{A_l^\gamma(x_3) A_s^\sigma(x)} A_t^\delta(x_4)$$

表2 式 (14.64) において添字と引数の組 (14.65) を入れ替えて得られる 3! 通りの項

(l, α, k_1)	(m, β, k_2)	(n, γ, k_3)	$g_s f_{lmn} g_{\nu\tau} k_{3\sigma} i D_F^{\sigma\alpha}(k_1) i D_F^{\tau\beta}(k_2) i D_F^{\nu\gamma}(k_3)$
(l, α, k_1)	(n, γ, k_3)	(m, β, k_2)	$g_s f_{lnm} g_{\nu\tau} k_{2\sigma} i D_F^{\sigma\alpha}(k_1) i D_F^{\tau\gamma}(k_3) i D_F^{\nu\beta}(k_2)$ $= -g_s f_{lmn} g_{\nu\tau} k_{2\sigma} i D_F^{\sigma\alpha}(k_1) i D_F^{\tau\beta}(k_2) i D_F^{\nu\gamma}(k_3)$
(m, β, k_2)	(l, α, k_1)	(n, γ, k_3)	$g_s f_{nml} g_{\nu\tau} k_{3\sigma} i D_F^{\sigma\beta}(k_2) i D_F^{\tau\alpha}(k_1) i D_F^{\nu\gamma}(k_3)$ $= -g_s f_{lmn} g_{\sigma\nu} k_{3\tau} i D_F^{\sigma\alpha}(k_1) i D_F^{\tau\beta}(k_2) i D_F^{\nu\gamma}(k_3)$
(m, β, k_2)	(n, γ, k_3)	(l, α, k_1)	$g_s f_{mnl} g_{\nu\tau} k_{1\sigma} i D_F^{\sigma\beta}(k_2) i D_F^{\tau\gamma}(k_3) i D_F^{\nu\alpha}(k_1)$ $= g_s f_{lmn} g_{\sigma\nu} k_{1\tau} i D_F^{\sigma\alpha}(k_1) i D_F^{\tau\beta}(k_2) i D_F^{\nu\gamma}(k_3)$
(n, γ, k_3)	(l, α, k_1)	(m, β, k_2)	$g_s f_{nlm} g_{\nu\tau} k_{2\sigma} i D_F^{\sigma\gamma}(k_3) i D_F^{\tau\alpha}(k_1) i D_F^{\nu\beta}(k_2)$ $= g_s f_{lmn} g_{\tau\sigma} k_{2\nu} i D_F^{\sigma\alpha}(k_1) i D_F^{\tau\beta}(k_2) i D_F^{\nu\gamma}(k_3)$
(n, γ, k_3)	(m, β, k_2)	(l, α, k_1)	$g_s f_{nml} g_{\nu\tau} k_{1\sigma} i D_F^{\sigma\gamma}(k_3) i D_F^{\tau\beta}(k_2) i D_F^{\nu\alpha}(k_1)$ $= -g_s f_{lmn} g_{\tau\sigma} k_{1\nu} i D_F^{\sigma\alpha}(k_1) i D_F^{\tau\beta}(k_2) i D_F^{\nu\gamma}(k_3)$

において添字と引数の組

$$(l, \alpha, x_1), \quad (m, \beta, x_2), \quad (n, \gamma, x_3), \quad (o, \delta, x_4)$$

を入れ替えて得られる。 F_1 の Green 関数への寄与は

$$\begin{aligned} & \langle A_l^\alpha(x_1) A_m^\beta(x_2) A_n^\gamma(x_3) A_o^\delta(x_4) \rangle_1 \\ &= -\frac{i}{4} g_s^2 f_{ipr} f_{ist} g_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma} \int d^4 x F_1 \\ &= -\frac{i}{4} g_s^2 f_{ilm} f_{ino} g_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma} i D_F^{\lambda\alpha}(x-x_1) i D_F^{\mu\beta}(x-x_2) i D_F^{\nu\gamma}(x-x_3) i D_F^{\sigma\delta}(x-x_4) \end{aligned}$$

と評価される。これを運動量空間に移すと

$$\langle A_l^\alpha(k_1) A_m^\beta(k_2) A_n^\gamma(k_3) A_o^\delta(k_4) \rangle_1 = -\frac{i}{4} g_s^2 f_{ilm} f_{ino} g_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma} i D_F^{\lambda\alpha}(k_1) i D_F^{\mu\beta}(k_2) i D_F^{\nu\gamma}(k_3) i D_F^{\sigma\delta}(k_4)$$

となることは、式 (14.57) や式 (14.64) の導出との類似性から容易に推察される。これと添字および引数の組

$$(l, \alpha, k_1), \quad (m, \beta, k_2), \quad (n, \gamma, k_3), \quad (o, \delta, k_4)$$

の入れ替えを行った 4! 個の項を合わせて式 (14.69) が得られれば良いが³、その確認を省略する。

■ゴースト-グルーオン結節点を持つ運動量空間の Green 関数 (14.71) について

$$\begin{aligned} \langle A_l^\alpha(x_1) \tilde{\eta}_m(x_2) \eta_n(x_3) \rangle &= i g_s f_{ijk} \int d^4 x F, \\ F &\equiv \langle (\partial_\mu \eta_i(x)) \tilde{\eta}_j(x) A_k^\mu(x) A_l^\alpha(x_1) \tilde{\eta}_m(x_2) \eta_n(x_3) \rangle_0 \\ &= -\underbrace{A_k^\mu(x)} A_l^\alpha(x_1) (\partial_\mu \eta_i(x)) \tilde{\eta}_m(x_2) \tilde{\eta}_j(x) \eta_n(x_3) \\ &= -\delta_{kl} \delta_{im} \delta_{jn} i D_F^{\mu\alpha}(x-x_1) \{-\partial_\mu i \Delta_F(x_2-x)\} i \Delta_F(x-x_3) \end{aligned}$$

であり、これに対応する運動量空間の Green 関数 (14.71) は以下の計算から見出される。

$$\begin{aligned}
& \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 e^{-ik_1 \cdot x_1} e^{-ik_2 \cdot x_2} e^{-ik_3 \cdot x_3} \langle A_1^\alpha(x_1) \tilde{\eta}_m(x_2) \eta_n(x_3) \rangle \\
&= i g_s f_{lmn} \int d^4x \left[\int d^4x_1 e^{-ik_1 \cdot x_1} i D_F^{\mu\alpha}(x-x_1) \right] \left[\int d^4x_2 e^{-ik_2 \cdot x_2} \partial_{x\mu} i \Delta_F(x_2-x) \right] \left[\int d^4x_3 e^{-ik_3 \cdot x_3} i \Delta_F(x-x_3) \right] \\
&= i g_s f_{lmn} \left[\int d^4x e^{-i(k_1+k_2+k_3) \cdot x} \right] i D_F^{\mu\alpha}(k_1) (-ik_{2\mu}) i \Delta_F(-k_2) i \Delta_F(k_3) \\
&= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1+k_2+k_3) g_s f_{lmn} k_{2\mu} i D_F^{\mu\alpha}(k_1) i \Delta_F(k_2) i \Delta_F(k_3).
\end{aligned}$$

14.4 QCD の Feynman 規則

我々は QCD に対する Feynman 規則を理解できる段階に達した。まずは QED の場合と類似した、以下の規則 1-7 が成立する。

1. 結節点に応じた因子

$$-i g_s (T_i)_{cd} \gamma_\mu, \quad g_s f_{lmn} V_{\sigma\tau\nu}, \quad -i g_s^2 F_{lmno} V_{\lambda\mu\nu\sigma}, \quad g_s f_{lmn} k_{2\mu}$$

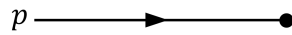
を充てる (図 24, 図 25, 図 26, 図 27 参照)。

2. グルーオン, クォーク, ゴーストの内線に, それぞれの伝播関数

$$i D_{F\mu\nu}(k) \delta_{ij}, \quad i S_F(p) \delta_{ab}, \quad i \Delta_F(k) \delta_{ij}$$

を充てる [14.3 節で述べた事情により Kronecker のデルタを省くと, 代わりに光子, フェルミオン, 中間子の伝播関数を充てることになる]。

3. (a) 始状態のクォークの外線



に因子 $u_{ar}(\mathbf{p})$ を充てる。

- (b) 終状態のクォークの外線



に因子 $\bar{u}_{ar}(\mathbf{p})$ を充てる。

- (c) 始状態の反クォークの外線



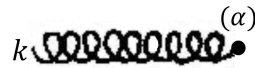
に因子 $\bar{v}_{ar}(\mathbf{p})$ を充てる。

(d) 終状態の反クォークの外線



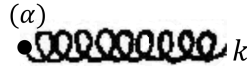
に因子 $v_{ar}(\mathbf{p})$ を充てる.

(e) 始状態のグルーオンの外線



に因子 $\varepsilon_{ir\alpha}(\mathbf{k})$ を充てる.

(f) 終状態のグルーオンの外線



に因子 $\varepsilon_{ir\alpha}^*(\mathbf{k})$ を充てる.

ここに

- \mathbf{p} と \mathbf{k} は外線粒子の 3 次元運動量を表し,
 $r(=1,2)$ はクォークのスピン状態もしくはグルーオンの偏極状態を表す.
 自由グルーオン場は自由電磁場と同じ方程式に従うため,
 グルーオンの偏極としても横波 $r(=1,2)$ だけが許容される.
 - $a(=r, g, b)$ はクォークの色状態を表し, $i(=1,2,\dots,8)$ はグルーオンの色電荷を表す.
4. 各クォーク線と, それらを接続する各結節点に付随するスピノル因子を,
 相互に接続している一連のクォーク線を矢印の向きに辿る順序で右から左に並べる.
 5. 閉じたクォーク線それぞれに関して対角和をとり, 因子 (-1) を掛ける.
 6. 結節点においてエネルギー・運動量の保存を成立させる.
 エネルギー・運動量保存の要請の下でも固定されないパラメーターとして残る
 内部 4 元運動量 q それぞれに関して積分 $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ を施す.
 このような内部運動量変数 q に関する積分は, 閉じたループそれぞれにおいて生じる.
 7. 位相因子 δ_P として $+1$ または -1 を掛ける.
 これは外線 Grassmann 場の順序を外線指数 (引数) の順序が適正になるように
 並べ直すときに, Grassmann 場同士の置換が必要な回数が偶数回ならば $+1$,
 奇数回ならば -1 とする.

★ これは QED に対する Feynman 規則 (7.3 節) の規則 8 に対応する.

さらに QCD に特有の次の規則が加わる.

8. 閉じたゴースト線それぞれに対して, 因子 (-1) を掛ける.
 ★ これはクォークのループに対する規則 5 の因子 (-1) と同じ起源を持つ.

9. グルーオンの閉ループの各々に対して、適切な“対称性因子” S を掛ける。

ここでグルーオンのループを持つ図 28 のグラフを取り上げ、規則 9 の対称性因子について説明する。3 グルーオン結節点に因子 $g_s f_{lmn} V_{\sigma\tau\nu}$ を充てると自動的に、3 グルーオン結節点を生じる Green 関数

$$\langle \mathcal{L}_3(x) A_l^\alpha(x_1) A_m^\beta(x_2) A_n^\gamma(x_3) \rangle, \quad \mathcal{L}_3(x) \equiv g_s f_{ijk} A_{i\mu}(x) A_{j\nu}(x) \partial^\mu A_k^\nu(x)$$

において \mathcal{L}_3 に含まれる 3 つの場を $A_l^\alpha(x_1), A_m^\beta(x_2), A_n^\gamma(x_3)$ と縮約する $3!$ 通りの方法を考慮したことになる (14.3 節)。図 28 のグラフは 3 グルーオン結節点を 2 つ持つので、規則 1-8 に従ってグラフに対応する因子を充てると、 $(3!)^2$ 通りの組合せを考慮したことになる。ところがこれから説明するように、これは組合せを余分に重複して考慮していることになる。実際、図 28 に対応する項は、2 点 Green 関数 $\langle A_l^\alpha(x) A_m^\beta(y) \rangle$ に由来する

$$\langle \mathcal{L}_3(x_1) \mathcal{L}_3(x_2) A_l^\alpha(x) A_m^\beta(y) \rangle_0$$

から現れる。図 28 のように時空点 x_1 を伝播関数によって点 x と繋ぎ、時空点 x_2 を伝播関数によって点 y と繋ぐには、 $\mathcal{L}_3(x_1)$ に含まれる 3 つの場から 1 つを選んで $A_l^\alpha(x)$ と縮約し、 $\mathcal{L}_3(x_2)$ に含まれる 3 つの場から 1 つを選んで $A_m^\beta(y)$ と縮約しなければならない。 $\mathcal{L}_3(x_1)$ の残り 2 つの場は $\mathcal{L}_3(x_2)$ の残り 2 つの場のいずれかと縮約しなければならない。その方法は 2 通りである。よって正しい縮約の組合せの総数は $3 \times 3 \times 2 = 18$ 通りである。これは $(3!)^2 = 36$ の $1/2$ 倍なので、この場合は対称性因子として $S = 1/2$ を掛けなければならない。

14.5 QCD の繰り込み可能性

QCD のグラフの発散次数 K は、クォーク外線の本数 f_e 、グルーオン外線の本数 b_e 、ゴースト外線の本数 η_e のみを用いて

$$K = 4 - b_e - \frac{3}{2}(f_e + \eta_e) \quad (14.79)$$

と表される (導出は下記)。基本発散グラフは $K \geq 0$ を満たす必要があるため、その外線数 (f_e, b_e, η_e) は限られ、基本発散グラフの種類は有限個となる。よって QCD は繰り込み可能な理論である。[有限個の発散ならば有限個の物理定数に吸収させることができるから (11.3.2 節).]

14.5 節、式の導出など

■発散次数の式 (14.79) の導出

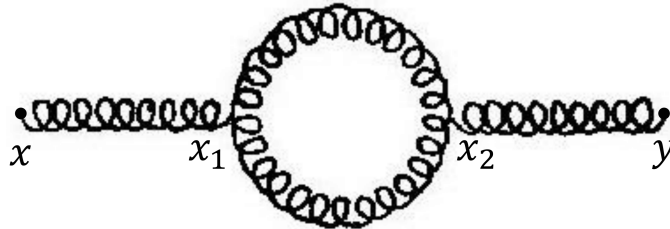


図 28 グルーオンの自己エネルギーを表すループダイアグラム

- クォーク内線 (外線) の本数 $f_i(f_e)$
- グルーオン内線 (外線) の本数 $b_i(b_e)$
- ゴースト内線 (外線) の本数 $\eta_i(\eta_e)$
- クォーク-グルーオン結節点の個数 n_a
- 3-グルーオン結節点の個数 n_b
- 4 グルーオン結節点の個数 n_c
- ゴースト-グルーオン結節点の個数 n_d
- 結節点の総数 $n = n_a + n_b + n_c + n_d$
- エネルギー-運動量保存によって固定されない内部運動量の数 d

運動量因子の冪を勘定すると、発散次数は

$$K = \underbrace{4d - f_i - 2b_i - 2\eta_i}_{\text{伝播関数に由来}} + \underbrace{n_b + (n_d - \eta_e/2)}_{\text{結節点因子に由来}} \quad (14.75)$$

と表される。

ゴースト-グルーオン結節点は、注意深い取扱いが必要である。図 14.4(d)(p.379) [本稿の図 27] と式 (14.72) により、それぞれのゴースト-グルーオン結節点は“入射する”ゴースト線を 1 本ずつ持ち、それは Feynman 振幅に対してひとつの運動量因子の寄与を持つ。しかし n_d 個あるゴースト-グルーオン結節点の中で、 $\eta_e/2$ 個はそこから“出射する”ゴースト線が外線となっているので、その結節点は運動量因子の寄与を生じない。したがってゴースト-グルーオン結節点からの運動量因子への寄与は $(n_d - \eta_e/2)$ 個分だけになる。これが式 (14.75) の最後の項である。(p.387 より)

また各結節点から現れる n 個の δ 関数のうち 1 つは、単に全体のエネルギー-運動量保存を保証するものなので、 $(f_i + b_i + \eta_i)$ 個の内部運動量のうち独立な変数の個数は

$$d = f_i + b_i + \eta_i - (n - 1) \quad (14.77)$$

で与えられる。さらに [QED の式 (9.111) と同様の関係]

$$\begin{cases} 2f_i + f_e = 2n_a \\ 2b_i + b_e = n_a + 3n_b + 4n_c + n_d \\ 2\eta_i + \eta_e = 2n_d \end{cases} \quad (14.78)$$

が成立する。式 (14.77)、発散次数 (14.75) から d を消去し、次いで式 (14.78) を用いて外線本数 f_i, b_i, η_i を消去すると、式 (14.79) を得る。

練習問題 (第 14 章)

14.1 ゴーストの伝播関数 (14.2.3 節) の導出

多少、試行錯誤すると、次のようにすればこれまで学んだ手法をゴースト場に応用できることが分かる。作用 (14.45b):

$$X[S_i, \tilde{S}_i] = \int d^4x \left\{ (\partial_\mu \eta_i(x)) (\partial^\mu \tilde{\eta}_i(x)) + S_i(x) \eta_i(x) + \tilde{S}_i(x) \tilde{\eta}_i(x) \right\}$$

の第 1 項は部分積分により

$$\begin{aligned} \int d^4x (\partial_\mu \eta_i(x)) (\partial^\mu \tilde{\eta}_i(x)) &= - \int d^4x \eta_i(x) \square_x \tilde{\eta}_i(x) \\ &= \int d^4x d^4x' \eta_i(x) \{-\delta_{ij} \delta^{(4)}(x-x') \square_{x'}\} \tilde{\eta}_j(x') \end{aligned}$$

と書き換えられる。よって対称な演算子

$$K_{ij}(x, x') \equiv -\delta_{ij} \delta^{(4)}(x-x') \square_{x'}$$

を用いると,

$$X[S_i, \tilde{S}_i] = [\eta_i K_{ij} \tilde{\eta}_j] + \int d^4x \left\{ S_i(x) \eta_i(x) + \tilde{S}_i(x) \tilde{\eta}_i(x) \right\}.$$

次に逆演算子 $K_{jk}^{-1}(x', x'')$ を

$$\int d^4x' K_{ij}(x, x') K_{jk}^{-1}(x', x'') = -\delta_{ik} \delta^{(4)}(x-x'') \quad (25)$$

で定義し, シフトした場

$$\begin{aligned} \eta'_i(x) &= \eta_i(x) - \int d^4x' K_{ij}^{-1}(x, x') \tilde{S}_j(x'), \\ \tilde{\eta}'_i(x) &= \tilde{\eta}_i(x) - \int d^4x' K_{ij}^{-1}(x, x') S_j(x') \end{aligned}$$

を導入すると, 作用の第 1 項は

$$[\eta_i K_{ij} \tilde{\eta}_j] = [\eta'_i K_{ij} \tilde{\eta}'_j] - [\eta'_i, S_i] - [\tilde{S}_i, \tilde{\eta}'_i] - [S_i K_{ij}^{-1} \tilde{S}_j],$$

第 2 項は

$$\int d^4x \left\{ S_i(x) \eta_i(x) + \tilde{S}_i(x) \tilde{\eta}_i(x) \right\} = [S_i, \eta'_i] + [\tilde{S}_i, \tilde{\eta}'_i] + [S_i K_{ij}^{-1} \tilde{S}_j] + [\tilde{S}_i K_{ij}^{-1} S_j]$$

と書き換えられる。これらを足すと

$$X[S_i, \tilde{S}_i] = [\eta'_i K_{ij} \tilde{\eta}'_j] + [S_i K_{ij}^{-1} \tilde{S}_j]$$

となるので, ゴースト場の生成汎関数は

$$\begin{aligned} Z_0[S_i, \tilde{S}_i] &= \frac{1}{N_3} \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} \exp \left\{ iX[S_i, \tilde{S}_i] \right\} : (14.45a) \\ &= \exp \left\{ iX[S_i K_{ij}^{-1} \tilde{S}_j] \right\} \end{aligned}$$

と表される。ただし規格化条件 $Z_0[0, 0] = 1$ を考慮した。

逆演算子 $K_{ij}^{-1}(x, x')$ を決めるために, 上式 (25) において

$$K_{ij}^{-1}(x, x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Delta_{ij}(k) e^{-ik \cdot (x-x')}$$

と Fourier 展開すると,

$$\Delta_{ij}(k) = -\frac{\delta_{ij}}{k^2}$$

が見出される。 $k^2 \rightarrow k^2 + i\varepsilon$ として解

$$K_{ij}^{-1}(x, x') = -\Delta_{\mathbb{F}ij}(x - x') \equiv -\delta_{ij}\Delta_{\mathbb{F}}(x - x') : (14.51)$$

を選び取ると，生成汎関数から導かれる 2 点 Green 関数がゴーストの伝播関数 (14.52c):

$$\tilde{\eta}_i(x)\eta_j(y) = -\eta_j(y)\tilde{\eta}_i(x) = i\Delta_{\mathbb{F}ij}(x - y)$$

となることが保証される。以上よりゴースト場の伝播関数は式 (14.50):

$$Z_0[S_i, \tilde{S}_i] = \exp \left\{ -i[S_i\Delta_{\mathbb{F}ij}\tilde{S}_j] \right\}$$

で与えられる。

第 15 章 漸近的自由性

強い相互作用は $1f(= 10^{-15}\text{m})$ 程度よりも短距離になると、距離が短くなるにつれて弱くなる。この性質は“漸近的自由性”と呼ばれる。漸近的自由性は“繰り込み群”の方法を用いて理論的に確認された。

- 15.1 節 漸近的自由性の実験的証拠となった、高エネルギー過程における強粒子噴射 (ハドロンジェット) の簡単な説明。
- 15.2 節, 15.3 節 QED の文脈において繰り込み群の理論を導入。短距離 (高エネルギー) 極限の挙動を調べる方法を示す。
- 15.4 節 QCD への拡張, 漸近的自由性の証明。
- 15.5 節 QCD の応用。

15.1 電子-陽電子消滅による強粒子の生成

本節では高エネルギーにおいて電子-陽電子消滅から強粒子 (ハドロン) の噴射 (ジェット) が生成する過程

$$e^+ + e^- \rightarrow \text{強粒子 (ハドロン) 群}$$

を考察する。

15.1.1 2-ジェット事象

電子-陽電子消滅による強粒子の生成において、重心系エネルギーが 15–40GeV の範囲では図 29 のように表される過程が支配的である。これは電子-陽電子消滅によるクォークと反クォークの生成と、それに続く、強い相互作用によるクォーク・反クォークのハドロンジェットへの“破碎”から成る。[重心系では] クォークと反クォークは同大逆向きの運動量を持つ。短距離における強い力が極めて小さければ (漸近的自由性), 1つのジェットを構成するハドロンの全運動量

$$\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i$$

(和はジェットを構成する全ハドロン i についてとる) は、もとのクォークまたは反クォークの生成時の運動量にほぼ一致する。[このときハドロンは重心系において互いに逆向きの 2 方向へと噴射されるため、これは 2-ジェット事象と呼べる。] よって十分多くのジェットを観測したときに得られるジェット生成の角度分布は、クォーク・反クォーク生成の角度分布に一致するはずである。そして [ある方向に散乱される粒子数は対応する断面積に比例するから、] クォーク・反クォーク生成の角度分布はその断面積に比例する。断面積は $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ の断面積 (8.46) と同様、

$$\frac{d\sigma}{d(\cos\theta)} = 3e_f^2 \left[\frac{\pi\alpha^2}{8E^2} (1 + \cos^2\theta) \right]$$

によって与えられる。ただし生成するクォークの香りを f に固定してその電荷を e_f (色状態 r, g, b に共通) と書き、 θ を電子とクォークの向きの成す角とし、生成するクォーク・反クォークの色状態として r, g, b の全てを考えるために式全体を 3 倍した。ジェット生成の角度分布は確かに漸近的自由性から期待されるように、これと同じ角度依存性を持つことが実験的に確かめられている。

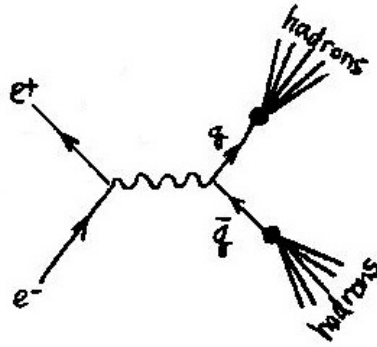


図 29 電子-陽電子消滅によって 2-ジェット生成を起こす基本的な機構

15.1.2 3-ジェット事象

電子-陽電子消滅による強粒子の生成過程には図 30(a) のような 2-ジェット事象だけでなく，図 30(b) のようなグルーオンの放射を伴う 3-ジェット事象もあり得る．3-ジェット事象の第 1 段階

$$e^+ + e^- \rightarrow q + \bar{q} + g$$

に寄与する最低次の過程は，図 31 の 2 つの Feynman グラフで表される．3-ジェットを重心系におけるエネルギーの大きい順にジェット 1，ジェット 2，ジェット 3 と名付けると，ジェット 1 はクォークと反クォークのうちグルーオンを生成していない方から生じていると考えられる．そしてジェット 2 とジェット 3 の重心系でジェット 1 の噴射方向を，ジェット 2 とジェット 3 の同一直線に対する角度 ϕ として表示した結果は，[おそらく 2-ジェット事象の場合と同様，漸近的自由性の仮定の下で，] グルーオンのスピンを 1 とする QCD の理論予想とよく一致する．(計算結果はグルーオンのスピんに敏感であり，これを仮説的にゼロと置くと実験結果と一致しなくなる．) 断面積の大きさは [図 31 の Feynman ダイアグラムに現れる] クォーク-グルーオン結節点における相互作用の強さ

$$\alpha_s \equiv \frac{g_s^2}{4\pi}$$

に比例しており [結節点因子 ($\sim g_s$) の 2 乗が現れるのは，断面積が確率振幅の絶対値の 2 乗に比例していることによる]，この値は実験的に $\alpha_s \simeq 0.14$ と見積もられている．[これは電磁気力に関する微細構造定数 $\alpha = 1/137$ と比べると 1 桁大きい．とは言え] 結合強度は比較的小さく見積もられており，1f 程度の距離に見られる非常に強い力との齟齬を説明するには，次節以降の議論を俟たなければならない．

15.2 繰り込みの体系：修正極小減算法

クォークは常にハドロンに閉じ込められており“自由なクォーク”としては存在しないので，QED に対して第 9 章と第 10 章で行った，自由電子の性質をパラメーターとする繰り込みの議論 (これを“質量殻上の体系”と呼ぼう [自由粒子の運動量は $p^2 = m^2$ を満たす質量殻上にあるから]) は QCD に関しては不便である．そこで別の繰り込みの枠組みとして，“修正された極小減算の体系” ($\overline{\text{MS}}$) を QED の文脈において導入する (15.2 節)．この体系では質量尺度の選択の任意性に関係して，“繰り込み群方程式”が導かれる (15.3 節)．15.4 節では $\overline{\text{MS}}$ を QCD に適用し，このとき QED の場合と違って漸近的自由性が導かれることを示す．

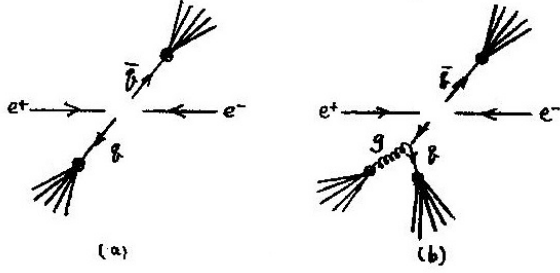


図 30 電子-陽電子消滅による (a)2-ジェット事象と (b)3-ジェット事象 (重心系)

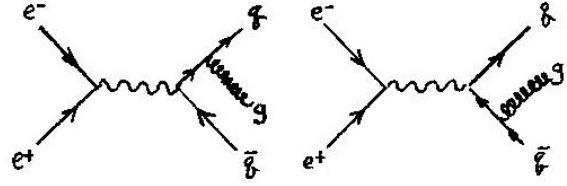


図 31 3-ジェット事象の第 1 段階に寄与する最低次の Feynman ダイアグラム

15.2.1 電子の伝播関数

輻射補正を考慮した電子の伝播関数 (9.24):

$$\begin{aligned} & \frac{i}{\not{p} - m_0 + i\varepsilon} + \frac{i}{\not{p} - m_0 + i\varepsilon} i e_0^2 \Sigma(p) \frac{i}{\not{p} - m_0 + i\varepsilon} \\ &= \frac{i}{\not{p} - m_0 + e_0^2 \Sigma(p) + i\varepsilon} + O(e_0^4) \equiv G(p) \end{aligned}$$

における自己エネルギー項 $e_0^2 \Sigma(p)$ を, $D = 4 - \eta$ 次元における式 (10.73):

$$\begin{aligned} e_0^2 \Sigma(p) &= \frac{\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} (\not{p} - 4m) \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right] + \tilde{e}_0^2 \Sigma_r(p), \\ 16\pi^2 \Sigma_r(p) &= 2m_0 - \not{p} - 2 \int_0^1 dz [\not{p}(1-z) - 2m_0] \ln \left[\frac{m_0^2 z - p^2 z(1-z)}{\mu^2} \right] \end{aligned}$$

に拡張する. ただし任意の質量尺度 μ に対し $\tilde{e}_0 = \mu^{-\eta/2} e_0$ であり, また $\eta \rightarrow 0$ のときに消える項はあらかじめ省いた. “修正された極小減算の体系” ($\overline{\text{MS}}$) においては, 発散定数を $1/\eta$ の項だけでなく $-\gamma + \ln(4\pi)$ の項も含めて

$$A' = \frac{-m_0}{4\pi^2} \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right], \quad B' = \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right]$$

と選ぶ. [この意味で発散定数の選び方が“極小”でなく, “極小減算の体系” MS の修正に当たる.] このとき $Z_2 = 1 - e_r^2 B'$ の関係を通して繰り込まれた質量と電荷

$$m_r = Z_2(m_0 - e_r^2 A'), \quad e_r = \tilde{e}_0 Z_2^{1/2}$$

を定義すると, 伝播関数は

$$G(p) = \frac{iZ_2}{\not{p} - m_r + e_r^2 \Sigma_r(p) + i\varepsilon} + O(e_r^4)$$

と表される. 分子の Z_2 を伝播関数に接続する 2 つの結節点に吸収させ, 繰り込まれた伝播関数を

$$G_r(p) = \frac{i}{\not{p} - m_r + e_r^2 \Sigma_r(p) + i\varepsilon} + O(e_r^4)$$

とする. $\Sigma_r(p)$ は, したがって $G_r(p)$ は $\eta \rightarrow 0$ の極限でもよく定義された有限な量となっているけれど, 質量尺度 μ 依存性を持っている.

なお摂動の高次項を考慮する場合 Z_2 の表式は変わるけれど,

$$e_r \equiv \tilde{e}_0 Z_2^{1/2}, \quad G_r(p) \equiv Z_2^{-1} G(p)$$

の関係は保持するものとする. また繰り込まれた質量 m_r は伝播関数 $G_r(p)$ の分母をゼロにする極 $\not{p} = m$ で与えられる物理的な質量 m とは異なっており, 両者は

$$m - m_r + e_r^2 \Sigma_r(\not{p} = m) = 0$$

によって関係付けられる. ここから m_r が有限で質量尺度 μ に依存することが見て取れる.

15.2.1 について

■式 (15.8) について $\mu^2 \rightarrow \mu^\eta, d^4k \rightarrow d^Dk$ と訂正されると考えられる (式 (10.71) 参照).

■式 (15.10) について 問題 10.2 を解き (解答は第 1 巻のノートにも載せてある), 自己エネルギー項 $e_0^2 \Sigma(p)$ の式 (10.73) あるいは式 (15.10) を示そう. 式 (10.71):

$$ie_0^2 \Sigma(p) = \frac{-\tilde{e}_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int d^Dk \frac{\gamma^\alpha (\not{p} - \not{k} + m) \gamma^\beta}{(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{g_{\alpha\beta}}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon}$$

において, 縮約の公式 (10.37) より

$$g_{\alpha\beta} \gamma^\alpha (\not{p} - \not{k} + m) \gamma^\beta = Dm - (D-2)(\not{p} - \not{k})$$

である. ここで

$$a = (p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon, \quad b = k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon$$

とにおいて Feynman のパラメーター積分 (10.10):

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dz \frac{1}{[b + (a-b)z]^2}$$

を利用しよう. すると

$$\int d^Dk \frac{\gamma^\alpha (\not{p} - \not{k} + m) \gamma^\beta}{(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{g_{\alpha\beta}}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} = \int_0^1 dz \int d^Dk \frac{Dm - (D-2)(\not{p} - \not{k})}{[b + (a-b)z]^2}$$

となる. 次に $q = k - pz$ と変数変換すると

$$\begin{aligned} b + (a-b)z &= (k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon) + (p^2 - 2p \cdot k - m^2 + \lambda^2)z \\ &= q^2 - s + i\varepsilon, \\ s &\equiv m^2 z + \lambda^2(1-z) - p^2 z(1-z) \end{aligned}$$

なので式 (10.72):

$$ie_0^2 \Sigma(p) = \frac{-\tilde{e}_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int_0^1 dz \int d^Dq \frac{Dm - (D-2)(\not{p} - \not{q} - \not{p}z)}{(q^2 - s + i\varepsilon)^2}$$

を得る. 公式 (10.27), (10.32) を用いて q に関する積分を評価すると

$$\begin{aligned} &\int d^Dq \frac{Dm - (D-2)(\not{p} - \not{q} - \not{p}z)}{(q^2 - s + i\varepsilon)^2} \\ &= \{Dm - (D-2)(1-z)\not{p}\} i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(2)} \frac{1}{s^{2-D/2}} \\ &= [\{4m - 2(1-z)\not{p}\} - \eta\{m - (1-z)\not{p}\}] i\pi^{D/2} \Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right) \frac{1}{\{m^2 z - p^2 z(1-z)\}^{\eta/2}} \quad (\lambda = 0 \text{ とした}) \end{aligned}$$

なので,

$$e_0^2 \Sigma(p) = \frac{-\tilde{e}_0^2}{16\pi^2 \cdot (4\pi)^{-\eta/2}} \Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right) \int_0^1 dz [\{4m - 2(1-z)\not{p}\} - \eta\{m - (1-z)\not{p}\}] \left\{ \frac{m^2 z - p^2 z(1-z)}{\mu^2} \right\}^{-\eta/2}$$

となる. 公式 (10.28), (10.29) を用いてこれを η について展開し, $\eta \rightarrow 0$ において重要となる $1/\eta$ の項と定数項だけを残すと

$$\begin{aligned} e_0^2 \Sigma(p) &= \frac{-\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\eta} - \gamma + \dots \right) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \eta \ln(4\pi) + \dots \right\} \\ &\quad \times \int_0^1 dz [\{4m - 2(1-z)\not{p}\} - \eta\{m - (1-z)\not{p}\}] \left[1 - \frac{1}{2} \eta \ln \left\{ \frac{m^2 z - p^2 z(1-z)}{\mu^2} \right\} + \dots \right] \\ &= \frac{-\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right] \int_0^1 dz \{4m - 2(1-z)\not{p}\} \\ &\quad + \frac{\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} 2 \int_0^1 dz \{m - (1-z)\not{p}\} \\ &\quad - \frac{\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} 2 \int_0^1 dz \{\not{p}(1-z) - 2m\} \ln \left\{ \frac{m^2 z - p^2 z(1-z)}{\mu^2} \right\} \\ &= \frac{\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} (\not{p} - 4m) \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right] + \tilde{e}_0^2 \Sigma_c(p) : (10.73a), \\ 16\pi^2 \Sigma_c(p) &= (2m - \not{p}) - 2 \int_0^1 dz \{\not{p}(1-z) - 2m\} \ln \left\{ \frac{m^2 z - p^2 z(1-z)}{\mu^2} \right\} \end{aligned}$$

を得る. よって $\Sigma_c(p)$ の式 (10.73b) では被積分関数において $4m \rightarrow 2m$ と訂正する必要があると考えられる ($\Sigma_r(p)$ の式 (15.10b) ではそうになっている).

■式 (15.14) について

$$\begin{aligned} G(p) &= \frac{i}{\not{p} - m_0 + e_0^2 \{A' + B'\not{p} + \Sigma_r(p)\} + i\varepsilon} \\ &= \frac{1Z_2}{Z_2 \{ (1 + e_0^2 B')\not{p} - (m_0 - e_0^2 A') + e_0^2 \Sigma_r(p) + i\varepsilon \}} \end{aligned}$$

の最右辺分母において, あらかじめ $\eta \rightarrow 0$ の極限を考えて e_0 と \tilde{e}_0 を同一視し

$$\begin{aligned} Z_2(1 + e_0^2 B') &= Z_2(1 + e_r^2 B') + O(e_r^4) = 1 + O(e_r^4), \\ Z_2(m_0 - e_0^2 A') &= Z_2(m_0 - e_r^2 A') + O(e_r^4) = m_r + O(e_r^4), \\ Z_2 e_0^2 &= e_r^2, \quad Z_2 i\varepsilon \rightarrow i\varepsilon \end{aligned}$$

とすると, 式 (15.14):

$$G(p) = \frac{iZ_2}{\not{p} - m_r + e_r^2 \Sigma_r(p) + i\varepsilon} + O(e_r^4)$$

を得る.

15.2.2 光子の伝播関数

輻射補正を考慮した光子の伝播関数 (9.13):

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} + \frac{-ig_{\alpha\mu}}{k^2 + i\varepsilon} i e_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) \frac{-ig_{\nu\beta}}{k^2 + i\varepsilon} = \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon + e_0^2 A(k^2)} + O(e_0^4) \equiv G_{\alpha\beta}(k^2)$$

(ただし $\Pi^{\mu\nu}(k) = -g^{\mu\nu}A(k) + k^\mu k^\nu B(k^2)$) における自己エネルギー項 $ie_0^2\Pi^{\mu\nu}(k)$ を $D = 4 - \eta$ 次元における式へと拡張した結果 (10.4 節) は

$$e_0^2 A(k^2) = \tilde{e}_0^2 \frac{k^2}{12\pi^2} \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right] + \tilde{e}_0^2 k^2 \Pi_r(k^2),$$

$$\Pi_r(k^2) = \frac{-1}{2\pi^2} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left[\frac{m^2 - k^2 z(1-z)}{\mu^2} \right]$$

と表される. ここでも任意の質量尺度 μ に対し $\tilde{e}_0 = \mu^{-\eta/2} e_0$ であり, また $\eta \rightarrow 0$ のときに消える項はあらかじめ省いた.

$\overline{\text{MS}}$ 体系では,

$$Z_3 = 1 - \frac{\tilde{e}_0^2}{12\pi^2} \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right]$$

に対して繰り込まれた電荷を $e_r = Z_3^{1/2} \tilde{e}_0$ と定義し, 再び因子 $\left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right]$ を含む発散定数を再定義する物理パラメーター e_r に吸収させる. すると伝播関数は

$$G^{\alpha\beta}(k^2) = \frac{-iZ_3 g^{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon + e_r^2 k^2 \Pi_r(k^2)} + O(e_r^4)$$

となる. 最後に分子の Z_3 を伝播関数に接続する 2 つの結節点に吸収させ, 繰り込まれた伝播関数を

$$G_r^{\alpha\beta}(k^2) = \frac{-ig^{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon + e_r^2 k^2 \Pi_r(k^2)} + O(e_r^4)$$

とする. $\Pi_r(k^2)$ は, したがって $G_r^{\alpha\beta}(k^2)$ は $\eta \rightarrow 0$ の極限でもよく定義された有限な量となっているけれど, 質量尺度 μ 依存性を持っている.

15.2.2 について

■ D 次元における $A(k^2)$ の式 (15.23) について 式 (10.48), 式 (10.52b) により

$$e_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \tilde{e}_0^2 \left[\frac{1}{12\pi} \left\{ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right\} + \Pi_r(k^2) \right]$$

である ($\Pi_r(k^2)$ は式 (15.24) で定義される). これを式 (9.11):

$$e_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = e_0^2 \{-g^{\mu\nu} A(k) + k^\mu k^\nu B(k^2)\}$$

と比較すると式 (15.23):

$$e_0^2 A(k^2) = k^2 \tilde{e}_0^2 \left[\frac{1}{12\pi} \left\{ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right\} + \Pi_r(k^2) \right]$$

が見出される.

15.2.3 電荷の繰り込み

輻射補正を考慮した結節点因子 (9.47):

$$i\Gamma^\mu(p', p) = ie_0[\gamma^\mu + e_0^2 \Lambda^\mu(p', p)]$$

における自己エネルギー部分 $e_0^2 \Lambda^\mu(p', p)$ は, $\Lambda_r^\mu(p', p)$ を質量尺度 μ に依存する有限な量として $D = 4 - \eta$ 次元においては

$$e_0^2 \Lambda^\mu(p', p) = \frac{\tilde{e}_0^2 \gamma^\mu}{16\pi^2} \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right] + \tilde{e}_0^2 \Lambda_r^\mu(p', p)$$

という形に一般化される (10.5 節). $\overline{\text{MS}}$ 体系では

$$Z_1 = 1 - \frac{e_r^2}{16\pi^2} \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right]$$

という関係を通して, 繰り込まれた電荷 $e_r = \tilde{e}_0/Z_1$ を定義する. すると結節点因子は

$$i\Gamma^\mu(p', p) = ie_r \mu^{\eta/2} [\gamma^\mu + e_r^2 \Lambda_r^\mu(p', p)] + O(e_r^5)$$

という [よく定義された有限な] 形に書き換えられる.

ここで行った結節点補正に伴う電荷の繰り込みを, 15.2.1 節と 15.2.2 節における電子と光子の自己エネルギー部分による電荷の繰り込みと併せて考える. [ここで電子と光子の伝播関数がそれぞれ式 (15.17) の $G_r(p)$ や式 (15.28) の $G^{\alpha\beta}(k^2)$ に修正されたのと同時に, 接続する結節点の各々に因子 $Z_2^{1/2}, Z_3^{1/2}$ が吸収されたことを思い出そう.] 各結節点には 2 本のフェルミオン線と 1 本の光子線が接続しているので, 繰り込まれた結節部分は

$$\begin{aligned} i\Gamma_r^\mu(p', p) &\equiv iZ_2 Z_3^{1/2} \Gamma^\mu(p', p) \\ &= ie_r \mu^{\eta/2} [\gamma^\mu + e_r^2 \Lambda_r^\mu(p', p)] + O(e_r^5) \end{aligned}$$

となる. ここに

$$e_r \equiv \tilde{e}_0 \frac{Z_3^{1/2} Z_2}{Z_1} = e_0 \mu^{-\eta/2} \frac{Z_3^{1/2} Z_2}{Z_1}$$

は完全に繰り込まれた電荷である. $\overline{\text{MS}}$ 体系においても Ward 恒等式として $Z_1 = Z_2$ が成り立つので, e_r の定義式は

$$e_r = e_0 \mu^{-\eta/2} Z_3^{1/2}$$

と簡略化される.

繰り込まれた質量と電荷 $m_r = m_r(\mu), e_r = e_r(\mu)$ はいずれも質量尺度 μ に依存し, それぞれ “走行質量” “走行電荷” と呼ばれる. 物理的な観測量は質量尺度 μ に依存してはならないことから繰り込み群方程式が導かれ, そこから走行電荷 $e_r(\mu)$ は μ が大きいほどより短距離において相互作用の強さを計ることが示される (15.3 節). 完全に繰り込まれた電荷 e_r は

$$\mu \frac{\partial e_r}{\partial \mu} = \frac{e_r^3}{24\pi^2} + O(e_r^5) \quad (\eta = 0 \text{ のとき})$$

を満たし, μ とともに増大する. このような QED における電荷の μ 依存性は顕著に現れないのに対し (15.3.3 節), QCD では結合は μ の増大に伴って減少し, その効果は顕著に現れる. 漸近的自由性が QCD では導かれるのに対し QED では導かれないという違いは, このような事情に由来している (15.4 節).

15.2.3 について

■結節点因子の式 (15.34) について

$$e_0 = e_r + O(e_0^3), \quad \therefore e_0^2 = e_r^2 + O(e_r^4)$$

なので

$$\begin{aligned} i\Gamma^\mu(p', p) &= i\tilde{e}_0\mu^{\eta/2} \left[\gamma^\mu \left\{ 1 + \frac{\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\eta} - \gamma \ln(4\pi) \right) \right\} + \tilde{e}_0^2 \Lambda_r^\mu(p', p) \right] \\ &= ie_r\mu^{\eta/2} Z_1 \left[\gamma^\mu \left\{ 1 + \frac{e_r^2}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\eta} - \gamma \ln(4\pi) \right) \right\} + e_r^2 \Lambda_r^\mu(p', p) \right] + O(e_r^5) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$Z_1 \left\{ 1 + \frac{e_r^2}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\eta} - \gamma \ln(4\pi) \right) \right\} = 1 + O(e_r^4), \quad Z_1 e_r^2 = e_r^2 + O(e_r^4)$$

なので式 (15.34):

$$i\Gamma^\mu(p', p) = ie_r\mu^{\eta/2} [\gamma^\mu + e_r^2 \Lambda_r^\mu(p', p)] + O(e_r^5)$$

を得る。

■電荷の繰り込みへの3つの寄与を考慮した式 (15.36) について $\overline{\text{MS}}$ 体系での外線繰り込みは論じられていないけれど、9.4節で見たように伝播関数の場合と同じ補正 (9.46):

$$e_0 \rightarrow e = Z_3^{1/2} e_0, \quad e_0 \rightarrow e = Z_2^{1/2} e_0$$

を行えば良いものとするれば、式 (15.36) を正当化できる。

■完全に繰り込まれた電荷 (15.38), (15.40) について これらは空間次元の違いを除けば、それぞれ質量殻上の体系における式 (9.59), 式 (9.64) と同じものである。

■Ward 恒等式 (15.39) について 質量殻上の体系では

- 2次のフェルミオン自己エネルギーループ (Z_2 に関係)
- ゼロエネルギー光子を持つ結節点補正 (Z_1 に関係)

を関係付ける恒等式 (9.60): $\partial\Sigma(p)/\partial p_\mu = \Lambda^\mu(p, p)$ から式 (9.63): $Z_2 = Z_1$ が得られた。

これに対し $\overline{\text{MS}}$ 体系では、式 (15.39): $Z_1 = Z_2$ の起源は異なるようである:

$$\begin{aligned} Z_2 &= 1 - e_r^2 B' \quad (\because \text{式 (15.15)}) \\ &= 1 - \frac{e_r^2}{16\pi^2} \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right] \quad (\because \text{式 (15.12b)}) \\ &= Z_1. \quad (\because \text{式 (15.33)}) \end{aligned}$$

■式 (15.41) について

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial e_r}{\partial \mu} &= \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \mu^{-\eta/2} \right) e_0 \left[1 - \frac{e_0^2}{24\pi^2} \left\{ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right\} \right] + O(e_0^5) \\ &\rightarrow \frac{e_0^3}{24\pi^2} \quad (\eta \rightarrow 0 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

であり、最右辺において e_0^3 を e_r^3 に置き換えたときの誤差も $O(e_0^5)$ である。

15.3 繰り込み群

15.3.1 繰り込み群方程式

f 本のフェルミオン外線と b 本の光子外線を持つ固有結節部分関数を、各外線の運動量を $p_i (i = 1, 2, \dots, b+f \equiv n)$ として $\Gamma^{fb}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ と表す。ここで結節部分関数は $n > 2$ の場合、連結 Green 関数から“脚”にあたる伝播関数因子を除いた関数であり、我々はその 1 例を既に 12.2.4 節において見ている (式 (12.36))。固有結節部分関数とは与えられた結節部分関数に寄与を持つすべての 1 粒子既約なグラフの和であり、“1 粒子既約”とは線分を 1 本だけ切断することで 2 つの部分に分割できないことを意味する。例えば

$$\Gamma^{20}(p) = e_0^2 \Sigma(p), \quad \Gamma^{02}(k) = e_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k), \quad \Gamma^{21}(p', p) = ie_0[\gamma^\mu + e_0^2 \Lambda^\mu(p', p)]$$

である。これらの結節部分関数は一般に裸の量 m_0, e_0 で表されており、 $\eta \rightarrow 0$ の極限でよく定義されていない。一方、繰り込みの後には結節部分関数は伝播関数から因子 $Z_2^{1/2}, Z_3^{1/2}$ を吸収し、繰り込まれた結節部分関数

$$\Gamma_r^{fb}(p_i, m_r, e_r, \mu) = Z_2^{f/2} Z_3^{b/2} \Gamma^{fb}(p_i, m_0, e_0)$$

になる。これは繰り込まれた質量と電荷 m_r, e_r によって表され、 $\eta \rightarrow 0$ の極限で有限の値に留まるけれど、質量尺度 μ に依存する。元の結節部分関数 Γ^{fb} は μ に依らないこと

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Gamma^{fb}(p_i, m_0, e_0) = 0$$

を、繰り込まれた結節部分関数 Γ_r^{fb} に対する条件式として書き下すと、't Hooft-Weinberg (ト・フーフト-ワインバーグ) 方程式と呼ばれる繰り込み群方程式

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial e_r} - f\gamma_2 - b\gamma_3 + m_r \gamma_m \frac{\partial}{\partial m_r} \right] \Gamma_r^{fb}(p_i, m_r, e_r, \mu) = 0,$$

$$\beta \equiv \mu \frac{\partial e_r}{\partial \mu}, \quad \gamma_2 \equiv \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} (\ln Z_2), \quad \gamma_3 \equiv \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} (\ln Z_3), \quad m_r \gamma_m \equiv \mu \frac{\partial m_r}{\partial \mu}$$

が得られる。

15.3.1 について

■繰り込み群方程式 (15.45) について

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} \Gamma^{fb} = Z_2^{-f/2} Z_3^{-b/2} \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial e_r} + m_r \gamma_m \frac{\partial}{\partial m_r} \right) \Gamma_r^{fb}$$

$$- \mu \left(\frac{f}{2} Z_2^{-\frac{f}{2}-1} \frac{\partial Z_2}{\partial \mu} + \frac{b}{2} Z_3^{-\frac{b}{2}-1} \frac{\partial Z_3}{\partial \mu} \right) \Gamma_r^{fb}$$

において

$$\mu \frac{f}{2} Z_2^{-\frac{f}{2}-1} \frac{\partial Z_2}{\partial \mu} = f Z_2^{-f/2} \mu \frac{\partial Z_2 / \partial \mu}{Z_2} = f Z_2^{-f/2} \gamma_2, \quad \gamma_2 \equiv \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} (\ln Z_2),$$

$$\mu \frac{b}{2} Z_3^{-\frac{b}{2}-1} \frac{\partial Z_3}{\partial \mu} = b Z_3^{-b/2} \mu \frac{\partial Z_3 / \partial \mu}{Z_3} = b Z_3^{-b/2} \gamma_3, \quad \gamma_3 \equiv \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} (\ln Z_3)$$

なので、上式を両辺 $Z_2^{f/2} Z_3^{b/2}$ 倍して式 (15.45) を得る。

15.3.2 スケール変換

t を無次元のスケール変数として、次元を持つ引数をすべて t 倍するスケール変換

$$p_i, t^{-1}m_r, t^{-1}\mu \rightarrow tp_i, m_r, \mu$$

を行うと、結節部分はその自然次元を d として t^d 倍になると考えられる：

$$\Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu) = t^d \Gamma_r^{fb}(p_i, t^{-1}m_r, e_r, t^{-1}\mu).$$

ここに結節部分 Γ_r^{fb} の自然次元は

$$d = 4 - \frac{3}{2}f - b$$

と表されることが分かる．このことを前節の繰り込み群方程式と合わせると、運動量だけにスケール変換を施した結節部分関数 $\Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu)$ に対する方程式

$$\left[t \frac{\partial}{\partial t} - \beta \frac{\partial}{\partial e_r} - m_r(\gamma_m - 1) \frac{\partial}{\partial m_r} + f\gamma_2 + b\gamma_3 - d \right] \Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu) = 0 \quad (15.53)$$

が得られる．質量尺度 μ の値を μ_0 に固定してこの式を解いてみよう．このとき上式はスケール変数 t の微小変化が m_r と e_r の微小変化に係数の掛かった量によって保証されることを意味し、それ故、解を

$$\Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu) = \Lambda(t) \Gamma_r^{fb}(p_i, \tilde{m}(t), \tilde{e}(t), \mu_0) \quad (15.54)$$

という形に仮定することができる．具体的に解を求めると

$$\Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu) = t^d \exp \left[- \int_1^t \frac{f\gamma_2 + b\gamma_3}{t} dt \right] \Gamma_r^{fb}(p_i, t^{-1}m_r(\mu = t\mu_0), e_r(\mu = t\mu_0), \mu_0) \quad (15.61)$$

となる（導出は下記）． $[t = 1$ とおくと、これは正しい関係を与えることが見て取れる ($m_r = m_r(\mu_0), e_r = e_r(\mu_0)$).]

最後に電子質量がゼロの極限 $m_r = 0$ を考えよう．この場合にも上の結果によれば、結節部分関数は単純な次元スケールリング

$$\Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r = 0, e_r, \mu) = t^d \Gamma_r^{fb}(p_i, m_r = 0, e_r, \mu)$$

には従わない．これは繰り込みの際、理論に質量尺度 μ が導入されたことと関係している．実際、繰り込みを行う前の（質量ゼロの）理論には次元を持つパラメーターが存在しないため（電荷は無次元）、Lagrangian はエネルギー尺度の変更の下で不変になる．この場合には結節部分関数はスケールリング則

$$\Gamma_r^{fb}(tp_i, e_r) = t^d \Gamma_r^{fb}(p_i, e_r)$$

に従うと考えられる．

15.3.2 節、式の導出など

■式 (15.61) の導出 結節部分関数 (15.54) に対し

$$\begin{aligned} t \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu_0) &= \left(t \frac{d\Lambda}{dt} + t\Lambda \frac{\partial \tilde{m}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{m}} + t\Lambda \frac{\partial \tilde{e}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{e}} \right) \Gamma_r^{fb}(p_i, \tilde{m}(t), \tilde{e}(t), \mu_0) \\ &= \left(\frac{t}{\Lambda} \frac{d\Lambda}{dt} + t \frac{\partial \tilde{m}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{m}} + t \frac{\partial \tilde{e}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{e}} \right) \Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu_0). \end{aligned}$$

ここに

$$m_r \equiv m_r(\mu_0) = \tilde{m}(1), \quad e_r \equiv e_r(\mu_0) = \tilde{e}(1).$$

これを式 (15.53) と比較すると,

$$t \frac{\partial \tilde{m}}{\partial t} = m_r(\gamma_m - 1), \quad t \frac{\partial \tilde{e}}{\partial t} = \beta, \quad (15.57)$$

$$\frac{t}{\Lambda} \frac{d\Lambda}{dt} = d - f\gamma_2 - b\gamma_3 \quad (15.58)$$

であれば良い.

$$\tilde{m}(t) = t^{-1} m_r(\mu = t\mu_0), \quad \tilde{e}(t) = e_r(\mu = t\mu_0) \quad (15.59)$$

とすれば, 上式 (15.57) と境界条件

$$\Lambda(1) = 1, \quad \tilde{m}(1) = m_r(\mu_0), \quad \tilde{e}(1) = e_r(\mu_0) \quad (15.55)$$

が満たされる [本稿次節で補足]. また式 (15.58) を積分すると

$$\Lambda(t) = t^d \exp \left[- \int_1^t \frac{(f\gamma_2 + b\gamma_3) dt}{t} \right] \quad (15.60)$$

となる [本稿次節で補足]. 式 (15.59), 式 (15.60) を式 (15.54) に代入すると式 (15.61) が導かれる.

15.3.2 について

■式 (15.50) について

$$\frac{d(t^{-1}m_r)}{dt} \frac{\partial}{\partial(t^{-1}m_r)} = -\frac{1}{t} m_r \frac{\partial}{\partial m_r}, \text{ etc.}$$

なので, 15.3.2 節 1.12 の式は右辺全体を $1/t$ 倍する必要があると考えられる. 実際このとき, スケーリング則 (15.49) の両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu) &= \left(dt^{d-1} + t^d \frac{\partial}{\partial t} \right) \Gamma_r^{fb}(p_i, t^{-1}m_r, e_r, t^{-1}\mu) \\ &= t^{d-1} \left(d - m_r \frac{\partial}{\partial m_r} - \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \Gamma_r^{fb}(p_i, t^{-1}m_r, e_r, t^{-1}\mu) \\ &= \frac{1}{t} \left(d - m_r \frac{\partial}{\partial m_r} - \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu) \end{aligned}$$

となって式 (15.50) を得る.

■結節部分 Γ_r^{fb} の自然次元の式 (15.52) について $n = b + f$ に対して式 (12.10) の各項の自然次元は

$$[\delta^{(4)}(q_1 + \cdots + q_n)] = -4, \quad [d^4 x_1 \cdots d^4 x_n] = -4n$$

なので, 運動量空間の Green 関数の自然次元は p.408, 1.9 の式

$$\begin{aligned} [G^{\mu \cdots}(q_1, \cdots, q_n)] &= [G^{\mu \cdots}(x_1, \cdots, x_n)] - 4n + 4 \\ &= \left(b + \frac{3}{2}f \right) - 4(b + f) + 4 \\ &= 4 - \frac{5}{2}f - 3b \end{aligned}$$

で与えられる.

光子伝播関数とフェルミオン伝播関数の自然次元はそれぞれ $-2, -1$ なので, 結節部分 Γ_r^{fb} の自然次元は

$$\left(4 - \frac{5}{2}f - 3b\right) - f(-1) - b(-2) = 4 - \frac{3}{2}f - b: (15.52)$$

と計算される.

■走行質量と走行電荷の式 (15.59) について 式 (15.53) と式 (15.56) を比較する際, 係数だけでなく微分演算子まで含めた関係

$$t \frac{\partial \tilde{m}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{m}} = m_r(\gamma_m - 1) \frac{\partial}{\partial m_r} = \left(\mu \frac{\partial m_r}{\partial \mu} - m_r\right) \frac{\partial}{\partial m_r}$$

が成り立つことを要求しよう. 式 (15.59) の $\tilde{m}(t)$ に対して $\frac{\partial}{\partial m_r} = \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial \tilde{m}}$ なので, 式 (15.57a) の代わりに

$$\frac{1}{t} \left(\mu \frac{\partial m_r}{\partial \mu} - m_r\right) = t \frac{\partial \tilde{m}}{\partial t}$$

が成り立てば良い. 実際

$$t \frac{\partial \tilde{m}}{\partial t} = -\frac{1}{t} m_r(\mu = t\mu_0) + \frac{\partial}{\partial t} m_r(\mu = t\mu_0)$$

において

$$\frac{\partial}{\partial t} m_r(\mu = t\mu_0) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial \mu} m_r(\mu = t\mu_0) = \frac{1}{t} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} m_r(\mu = t\mu_0)$$

なので, 満たされている.

一方, 式 (15.59) の $\tilde{e}(t)$ に対しては $\frac{\partial}{\partial \tilde{e}} = \frac{\partial}{\partial e_r}$ なので, この場合には係数の関係として式 (15.57b) が成立していれば良い. 実際

$$t \frac{\partial}{\partial t} e_r(\mu = t\mu_0) = (t\mu_0) \frac{\partial}{\partial \mu} e_r(\mu = t\mu_0) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} e_r(\mu = t\mu_0)$$

なので, 満たされている.

■式 (15.60) について

$$\Lambda(t) = \text{const} \times \exp \left[\int_1^t \frac{d - f\gamma_2 - b\gamma_3}{t'} dt' \right]$$

において境界条件 (15.55): $\Lambda(1) = 1$ を考慮すると $\text{const} = 1$ であり, d は積分の外に出せるので

$$\exp \left[d \int_1^t \frac{1}{t'} dt' \right] = \exp [\ln(t^d)] = t^d$$

とすれば式 (15.60) を得る.

γ_2, γ_3 は 15.3.1 節の定義式を通じて $\mu(t)$ に依存するので, t -積分の外に出せないことに注意する [6, pp.257-259].

15.3.3 走行電荷

最低次の輻射補正による式 (15.26): $Z_3 = 1 - \frac{\tilde{e}_r^2}{12\pi^2} \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi \right]$ を用いると,

$$\mu \frac{\partial e_r}{\partial \mu} = \beta_0 e_r^3 + O(e_r^5), \quad \therefore e_r^2(\mu) = \frac{e_r^2(\mu_0)}{1 - \beta_0 e_r^2(\mu_0) \ln(\mu^2/\mu_0^2)}, \quad \beta_0 \equiv \frac{1}{24\pi^2}$$

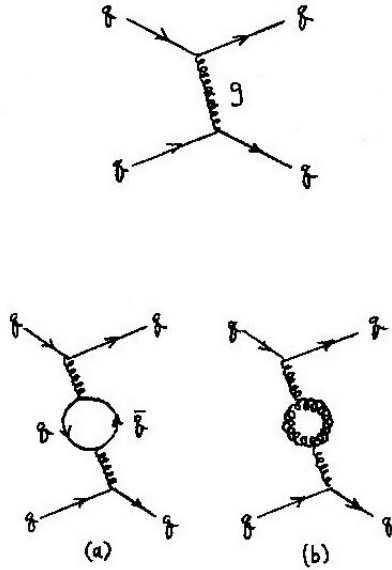


図 32 1-グルーオン交換によるクォーク-クォーク散乱 (上段) と, 最低次の補正を表す真空偏極グラフ (下段)

となる. よって [すでに式 (15.41) の箇所で述べたように,] 走行電荷 e_r は μ に対して増加する. (ただし $t = \mu/\mu_0$ がある程度大きくなければ, この走行電荷の増加は目立たない.) ところで質量尺度をより大きな値 $\mu = t\mu_0$ に設定することは, [前節の結節部分関数 $\Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu)$ の表式 (15.61) によれば] 移行運動量 tp_i の大きい場合 [結節部分の運動量 p_i は移行する運動量に当たる], したがって短距離を考えることに相当する. [したがってこの結果は, 短距離において走行電荷 $e_r(\mu)$ が大きくなることを意味している.] これは真空が量子ゆらぎによって生じる電子-陽電子対で満たされているため, 誘電媒質中の電荷と同様に電荷は遮蔽され, 遠方では実効的に電荷が弱まるのに対し, 短距離では遮蔽が効かなくなって実効的な電荷が増加することを表していると解釈できる.

QCD では例えば, 図 32 上段のダイアグラムで表される 1-グルーオン交換によるクォーク-クォーク散乱を考えると, これに対する最低次の補正には図 32 下段の 2 通りのダイアグラムが考えられる. (a) のダイアグラムは通常の見かけの遮蔽効果を持つのに対し, (b) のダイアグラムではグルーオン-グルーオン対が生じ, これは次節で見るように短距離になるほど相互作用が弱くなるような“反遮蔽”の効果を持つ. 補正 (a)(b) の正味の結果として, 短距離になるほど相互作用が弱くなる漸近的自由性がもたらされる. [遮蔽のない, 湯川ポテンシャルによる核子間の強い力との権藤に注意.]

15.3.3 について

■式 (15.62) について 式 (15.26), 式 (15.40) により

$$e_r = e_0 \mu^{-\eta/2} Z_3^{1/2} = e_0 \left[1 - \frac{1}{2} \eta \ln \mu + \dots \right] \left[1 - \frac{e_r^2}{24\pi^2} \left\{ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right\} \right] + O(e_r^5)$$

なので, 式 (15.62):

$$\beta \equiv \mu \frac{\partial e_r}{\partial \mu} = \frac{e_r^3}{24\pi^2} + O(e_r^5)$$

を得る。以上の計算過程において、真数が次元を持つ量 $\ln \mu$ が現れていることは大きな問題ではない。望むならいつでも、真数が無次元化された形だけを用いて計算を行うことができる。

■式 (15.63) について 微分方程式 (15.62) を変数分離して解くと

$$\frac{de_r}{e_r^3} = \beta_0 \frac{d\mu}{\mu}, \quad \therefore -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{e_r^2(\mu)} - \frac{1}{e_r^2(\mu_0)} \right\} = \beta_0 \ln \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right), \quad \therefore \frac{1}{e_r^2(\mu)} - \frac{1}{e_r^2(\mu_0)} = \beta_0 \ln \left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2} \right)$$

なので式 (15.63) を得る。

15.4 強い相互作用の結合定数

強い相互作用の結合 g_s について、裸の結合と繰り込まれた結合を区別してそれぞれ g_0, g_r と書く。このときグルーオン伝播関数、クォーク伝播関数、クォーク-グルーオン結節部分に関わる繰り込み定数 Z_3, Z_2, Z_1 に対して、QED の場合と同様の式

$$g_r = g_0 \mu^{-\eta/2} \frac{Z_3^{1/2} Z_2}{Z_1}$$

が成り立つことを本節で示す。

15.4.1 色因子

準備として色因子、すなわち構造係数 f_{ijk} と色行列 $T_i = \lambda_i/2$ [既に指摘したように、これは式 (11.11a): $\hat{F}_i = \lambda_i/2$ と同じもの] に関する必要最小限の性質を列挙する。これらの具体的な成分は全て 11.2 節に与えられている。

- 構造係数 f_{ijk}
添字に関する完全反対称性に加えて、次の性質がある。

$$f_{ijk} f_{ljk} = 3\delta_{il}. \quad (15.67)$$

- 色行列 $T^i = \lambda_i/2$
[式 (15.65) では下付き添字を用いた表記 T_i となっている.]
交換関係 (11.12a): $[T^i, T^j] = i f_{ijk} T^k$ に加えて、次の性質がある。

$$\begin{aligned} \text{Tr}(T^i) &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\lambda_i) = 0, \\ \text{Tr}(T^i T^j) &= \frac{1}{4} \text{Tr}(\lambda_i \lambda_j) = \frac{1}{2} \delta_{ij}, \\ T^i T^j &= \frac{1}{4} \lambda_i \lambda_j = \frac{4}{3}. \end{aligned} \quad (15.71)$$

[第 3 式の最右辺には単位行列が掛かっているものと見なす.]

さらに以上の関係式から、次の恒等式が導かれる (導出は下記)。

$$i f_{ijk} T^j T^k = -\frac{3}{2} T^i, \quad (15.72)$$

$$T^j T^i T^j = -\frac{1}{6} T^i. \quad (15.73)$$

15.4.1 節, 式の導出など

■式 (15.72) の導出

$$\begin{aligned}
 if_{ijk}T^jT^k &= if_{ijk}[T^j, T^k] + if_{ijk}T^kT^j \\
 &= -if_{ijk}f_{jkl}T^l - if_{ikj}T^kT^j \\
 &= -if_{ijk}f_{ljk}T^l - if_{ijk}T^jT^k \\
 &= -3T^i - if_{ijk}T^jT^k, \quad (\because \text{式 (15.67)}) \\
 \therefore if_{ijk}T^jT^k &= -\frac{3}{2}T^i : (15.72).
 \end{aligned}$$

■式 (15.73) の導出

$$\begin{aligned}
 T^jT^iT^j &= T^j[T^i, T^j] + T^jT^jT^i \\
 &= if_{ijk}T^jT^k + \frac{4}{3}T^i \quad (\because \text{式 (15.71)}) \\
 &= -\frac{3}{2}T^i + \frac{4}{3}T^i \quad (\because \text{式 (15.72)}) \\
 &= -\frac{1}{6}T^i : (15.73).
 \end{aligned}$$

15.4.2 無効ダイアグラム

図 33 に示したループダイアグラムに Feynman 規則を適用するとゼロになる。(正規順序化を利用する正準形式では, Wick の定理において同時刻縮約が除かれることから, これらのダイアグラムが省かれる.)

15.4.2 について

■図 15.12(p.415) のグラフ (a),(b) に関する因子 δ_{jk} について 14.3 節で見たように, 伝播関数に由来する Kronecker のデルタを計算で消費してしまえば(あるいは等価的に, あらかじめ色や色電荷の保存する過程のみを考えて Kronecker のデルタを省けば), グラフの内線に Kronecker のデルタを充てる必要はなくなるけれど, 本来的には伝播関数因子は Kronecker のデルタを含んでいる.

■図 15.12(p.415) のグラフ (d) に関する, p.414 下から 2 行目の式について 計量テンソル $g^{\mu\nu}$ はグルーオン伝播関数に由来しており, 正しくは $g^{\nu\sigma}$ と考えられる.

15.4.3 結合定数の繰り込み

本節ではクォークとグルーオンの伝播関数とクォーク-グルーオン結節部分の繰り込みを, 2 次の摂動論の範囲で考える.

■クォークの自己エネルギー クォークの自己エネルギー部分は図 34 のダイアグラム [ただし教科書の図 15.13(p.416) に対して, グルーオンの色電荷の添字 i, j とクォークの色の添字 a, a', c, c' の付け方を修正した] に Feynman 規則を適用すると

$$\begin{aligned}
 ig_0^2 \Sigma_{ac}(p) &= (ig_0)^2 C_{ac} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iD_{F\alpha\beta}(k) \gamma^\alpha iS_F(p-k) \gamma^\beta, \\
 C_{ac} &\equiv T_{ab}^i T_{bc}^i = \frac{4}{3} \delta_{ac}
 \end{aligned}$$

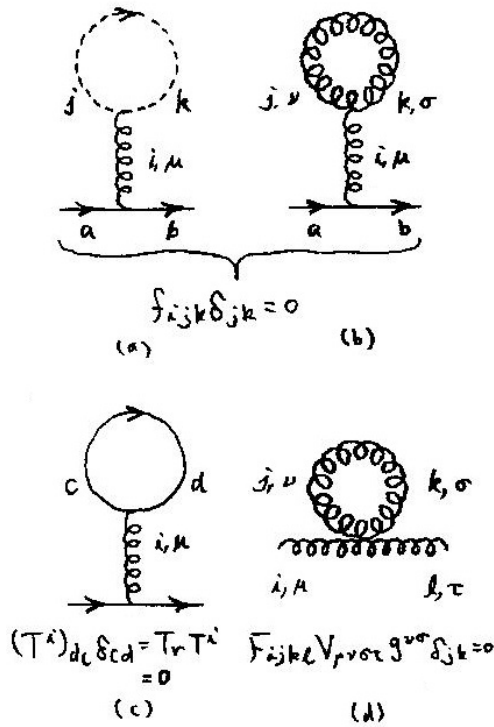


図33 無効ダイアグラム

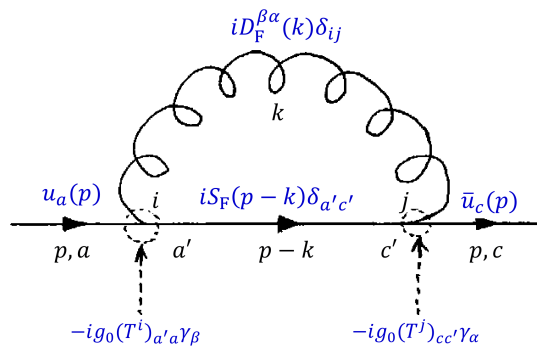


図34 2次のクォーク自己エネルギー

となる。[Kronecker のデルタ δ_{ac} により色の保存しない過程 $a \neq c$ の確率はゼロになる。そこで] 色の保存する場合 $a = c$ を考えると、これは単に電子の自己エネルギー部分 (15.7b) において $e_0^2 \rightarrow 4g_0^2/3$ と置き換えたものになっている。よってクォーク伝播関数の繰り込みは、繰り込み定数 (15.15): $Z_2 = 1 - \frac{e_r^2}{16\pi^2} \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right]$ を

$$Z_2 = 1 - \frac{g_r^2}{12\pi^2} \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right] \quad (15.77)$$

に置き換えさえすれば、電子伝播関数の場合 (15.2.1 節) と全く同様に行われる。

■グルーオンの自己エネルギー グルーオンの伝播関数に対する 2 次の補正には、図 35 の 3 種類の自己エネルギーダイアグラムがある。これらは Feynman 規則に基づいて式 (15.80) のように評価されるので (15.6.1 節)、クォークループに関して n_f 種類のクォークの香り考慮すると (標準理論では $n_f = 6$)、自己エネルギー部分は正味で

$$i g_0^2 \Pi_{ij}^{\mu\nu}(k) = i \delta_{ij} g_0^2 \tilde{\Pi}^{\mu\nu}(k),$$

$$g_0^2 \tilde{\Pi}^{\mu\nu}(k) = (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \frac{\tilde{g}_0^2}{16\pi^2} \left(\frac{2n_f}{3} - 5 \right) \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right] + \dots$$

となる。ここに「…」は有限な項を表す。[Kronecker のデルタ δ_{ij} により色電荷の保存しない過程 $i \neq j$ の確率はゼロになる。そこで] 色電荷の保存する場合 $i = j$ を考えると、これは光子の自己エネルギー部分 (式 (10.48), 式 (10.52b)) において

$$\frac{\tilde{e}_0^2}{12\pi^2} \rightarrow \frac{\tilde{g}_0^2}{16\pi^2} \left(\frac{2n_f}{3} - 5 \right)$$

と置き換えたものになっている。よってグルーオン伝播関数の繰り込みは、繰り込み定数 (15.26) : $Z_3 = 1 - \frac{\tilde{e}_r^2}{12\pi^2} \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right]$ を

$$Z_3 = 1 - \frac{\tilde{g}_0^2}{16\pi^2} \left(\frac{2n_f}{3} - 5 \right) \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right] \quad (15.86)$$

に置き換えさえすれば、電子伝播関数の場合 (15.2.2 節) と全く同様に行われる。

■クォーク-グルーオン結節点補正 クォーク-グルーオン結節点に対する 2 次の補正 $g_0^2 \Lambda^{i,\mu}(p', p)$ は図 36 の 2 つのダイアグラムで表され、Feynman 規則に基づいて式 (15.90) によって与えられる (15.6.2 節)。このとき繰り込み定数の表式

$$Z_1 = 1 - \frac{13g_r^2}{48\pi^2} \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right]$$

を通して繰り込まれた結合

$$g_r = \frac{\tilde{g}_0}{Z_1} \quad (15.94)$$

を定義すると、2 次の輻射補正を含めたクォーク-グルーオン結節部分は

$$i\Gamma^{i,\mu}(p', p) = i g_0 [\gamma^\mu T^i + g_0^2 \Lambda^{i,\mu}(p', p)]$$

$$= i g_r \mu^{\eta/2} [T^i \gamma^\mu + \tilde{g}_0^2 \Lambda_r^{i,\mu}(p', p)]$$

となる。ただし $\Lambda_r^{i,\mu}(p', p)$ は有限な部分である。

QED の場合と同様に、結節点に接続する伝播関数に由来する因子 $Z_2^{1/2}, Z_3^{1/2}$ を吸収して、繰り込まれた結節部分を

$$i\Gamma_r^{i,\mu}(p', p) = Z_2 Z_3^{1/2} i\Gamma^{i,\mu}(p', p) = i g_r \mu^{\eta/2} [T^i \gamma^\mu + g_r^2 \Lambda_r^{i,\mu}(p', p) + O(g_r^5)]$$

とする。ここに

$$g_r \equiv \tilde{g}_0 \frac{Z_3^{1/2} Z_2}{Z_1} = g_0 \mu^{-\eta/2} \frac{Z_3^{1/2} Z_2}{Z_1}$$

は完全に繰り込まれた電荷であり、QCD の場合 $Z_1 = Z_2$ としてさらにこの式を簡略化することはできない。

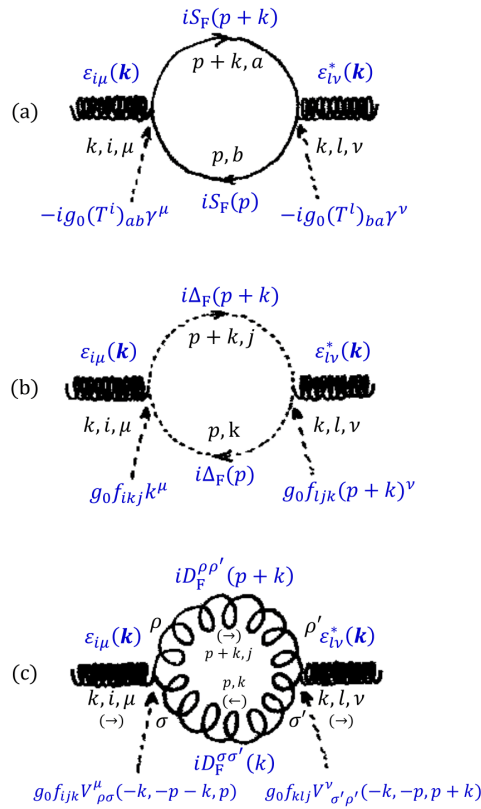


図 35 グルーオンの自己エネルギーへの 2 次の寄与

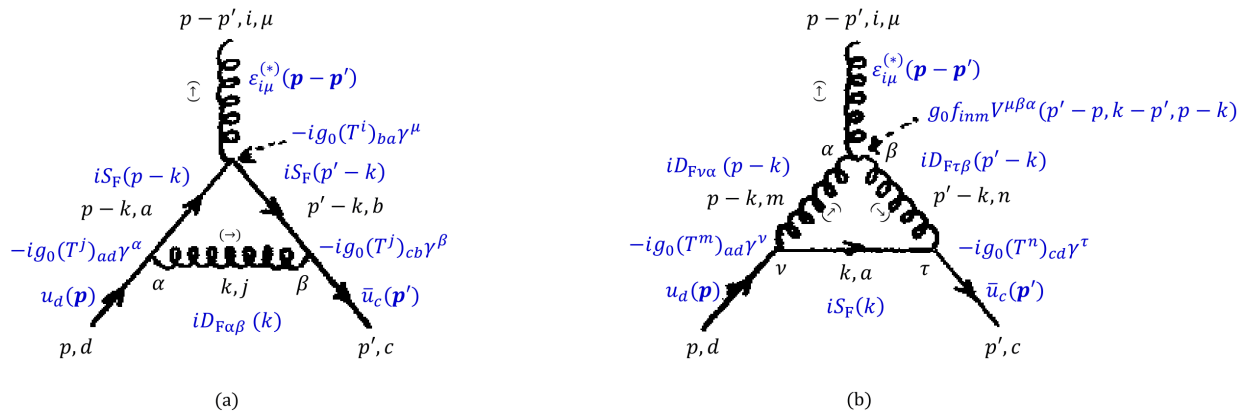


図 36 2 次のクォーク-グルーオン結節点補正

15.4.3 について

■自己エネルギーの式 (15.74a) について 図 34 のダイアグラムに 14.4 節の Feynman 規則を適用して Feynman 振幅の式 $\bar{u}_c(p)\{ig_0^2\Sigma_{ac}(p)\}u_a(p)$ に翻訳すると,

$$\begin{aligned} ig_0^2\Sigma_{ac}(p) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \{iD_F^{\beta\alpha}(k)\delta_{ij}\} \{-ig_0(T^j)_{cc'}\gamma_\alpha\} \{iS_F(p-k)\delta_{a'c'}\} \{-ig_0(T^i)_{a'a}\gamma_\beta\} \\ &= (ig_0)^2 (T^i)_{cb} (T^i)_{ba} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iD_{F\alpha\beta}(k) \gamma^\alpha iS_F(p-k) \gamma^\beta : (15.74) \end{aligned}$$

となる.

■式 (15.81) について

$$\begin{aligned} &\frac{n_f}{24\pi^2} (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) + \frac{1}{32\pi^2} \left(k^\mu k^\nu + \frac{k^2 g^{\mu\nu}}{2} \right) - \frac{1}{32\pi^2} \left(11k^\mu k^\nu - \frac{19}{2} k^2 g^{\mu\nu} \right) \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{2}{3} n_f + \frac{1}{2} - \frac{11}{2} \right) k^\mu k^\nu + \frac{1}{16\pi^2} \left(-\frac{2}{3} n_f + \frac{1}{4} + \frac{19}{4} \right) k^2 g^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{2n_f}{3} - 5 \right) (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \end{aligned}$$

による.

■ Z_3 の式 (15.86) について $2n_f - 5$ の箇所は $\left(\frac{2n_f}{3} - 5\right)$ と考えられる. 実際このときはじめて式 (15.98) を正しく導ける.

■式 (15.88) について QED における対応する式 (15.28) とともに, $\Pi_r(k^2)$ の項には係数 k^2 を補う必要があると考えられる. 実際, 式 (15.24) の $\Pi_r(k^2)$ は無次元量なので, k^2 を補って初めて次元の正しい式となる.

■式 (15.93) について

$$\begin{aligned} i\Gamma^{i,\mu}(p', p) &= ig_0 T^i \gamma^\mu \left[1 + \frac{13g_r^2}{48\pi^2} \left\{ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right\} \right] + \dots \\ &= ig_r \mu^{\eta/2} T^i \gamma^\mu Z_1 \left[1 + \frac{13g_r^2}{48\pi^2} \left\{ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right\} \right] + \dots \\ &= ig_r \mu^{\eta/2} [T^i \gamma^\mu + O(\tilde{g}_0^2)] + \dots \end{aligned}$$

において, $O(\tilde{g}_0^2)$ を有限な項「 \dots 」と合わせて $\tilde{g}_0^2 \Lambda_r^{i,\mu}(p', p)$ と書けば, 式 (15.93) を得る.

なお色電荷の添字が省かれているけれど, T_i は行列要素を表していると考えられ, それ故 γ 行列と順序交換するのは何ら問題ない.

■“輻射補正”として可能なグラフ (図 15.13(p.416), 図 15.15(p.417), 図 15.17(p.420)) について これらは QCD の結節点が図 14.4(p.379) の 4 種類であることを考慮して得られる.

15.4.4 走行電荷

完全に繰り込まれた結合 (15.97): $g_r = g_0 \mu^{-\eta/2} \frac{Z_3^{1/2} Z_2}{Z_1}$ に対して

$$\mu \frac{\partial g_r}{\partial \mu} = -\frac{\beta_0 g_r^3}{16\pi^2}, \quad \beta_0 = 11 - \frac{2}{3} n_f \quad (15.99)$$

なので (導出は下記), 17 未満の香りの種類の数 n_f に対して [したがって標準理論の値 $n_f = 6$ に対して, QED の場合とは対照的に] 結合 g_r は μ の増加に対して減少する [漸近的自由性 (15.5 節の第 1 段落を参照)]. 微細構造定数と同様に定義される結合の強さ $\alpha_s(\mu) \equiv g_r^2(\mu)/4\pi$ に関する上式の解として, 結合 g_r の具体的な μ 依存性を以下の 2 通りに表すことができる [本稿「15.4.4 について」の節参照].

$$\alpha_s(\mu) = \begin{cases} \frac{4\pi}{\beta_0 \ln(\mu^2/\Lambda^2)} : (15.102) & (\Lambda \text{ は積分定数}) \\ \frac{\alpha_s(\mu_0)}{1 + (\beta_0/4\pi)\alpha_s(\mu_0) \ln(\mu^2/\mu_0^2)} : (15.103) & (\mu \text{ は積分定数}) \end{cases}$$

15.4.4 節, 式の導出など

■式 (15.99) の導出 式 (15.97): $g_r = g_0 \mu^{-\eta/2} \frac{Z_3^{1/2} Z_2}{Z_1}$ に式 (15.77), (15.86), (15.94) を代入すると

$$g_r = g_0 \mu^{-\eta/2} \left[1 + \frac{g_r^2}{32\pi^2} \left(11 - \frac{2n_f}{3} \right) \left\{ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right\} + O(g_r^4) \right] \quad (15.98)$$

となる [本稿次節で補足] ことによる.

15.4.4 について

■完全に繰り込まれた結合 g_r の式 (15.98) について

$$\begin{aligned} \frac{Z_3^{1/2} Z_2}{Z_1} &= 1 + \frac{g_r^2}{32\pi^2} \left\{ - \left(\frac{2n_f}{3} - 5 \right) - \frac{8}{3} + \frac{26}{3} \right\} \left\{ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right\} + O(g_r^4) \\ &= 1 + \frac{g_r^2}{32\pi^2} \left(11 - \frac{2n_f}{3} \right) \left\{ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right\} + O(g_r^4) \end{aligned}$$

による.

■ α_s に対する式 (p.421 下から 3 行目) とその解 (15.102) について

$$\mu \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu} = \frac{\mu}{2\pi} g_r \frac{\partial g_r}{\partial \mu} = \frac{g_r}{2\pi} \left(-\frac{\beta_0 g_r^3}{16\pi^2} \right) = -\beta_0 \frac{\alpha_s^2}{2\pi}.$$

これを変数分離して解くと

$$-\frac{1}{\alpha_s} = -\frac{\beta_0}{2\pi} \ln \mu + \text{const.} = -\frac{\beta_0}{4\pi} \ln \left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2} \right)$$

となるので式 (15.102) を得る. 積分定数 Λ は真数を無次元化する意味でも必要である.

■ α_s^{-1} に対する式 (p.422, l.3) とその解 (15.103) について

$$\mu \frac{\partial \alpha_s^{-1}}{\partial \mu} = 4\pi \mu \left(-\frac{2}{g_r^3} \frac{\partial g_r}{\partial \mu} \right) = \left(-\frac{8\pi}{g_r^3} \right) \left(-\frac{\beta_0 g_r^3}{16\pi^2} \right) = \frac{\beta_0}{2\pi}.$$

これを解くと

$$\frac{1}{\alpha_s(\mu)} - \frac{1}{\alpha_s(\mu_0)} = \frac{\beta_0}{2\pi} \ln \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)$$

となるので式 (15.103) を得る.

■漸近的自由性 QED に対する 15.3.3 節の説明を踏まえると, 結合 g_r が μ の増加に対して減少すること (式 (15.99), 式 (15.102), 式 (15.103)) が漸近的自由性に他ならない. そのことの丁寧な説明が 15.5 節の第 1 段落にある.

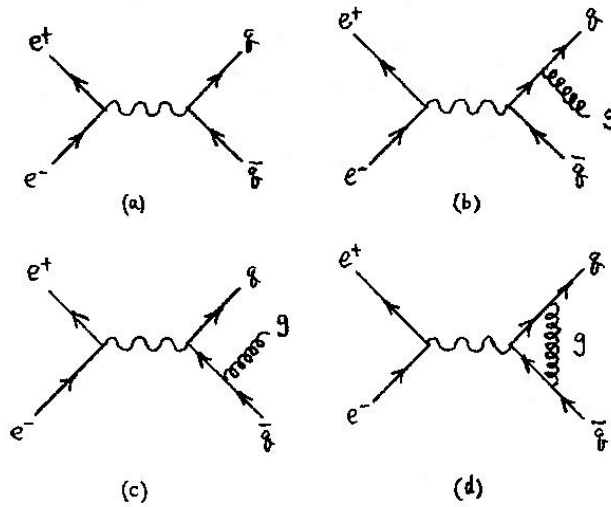


図 37 反応 $e^+e^- \rightarrow$ ハドロン群に寄与するダイアグラム

■尺度 μ に Z^0 ボゾンの質量 m_Z を用いること (最終段落) について m_Z は比較的大きな質量なので $\alpha_s(m_Z)$ は 1 に比べて小さな値をとる. このため $\mu = Z^0$ と選ぶことは摂動論に適していると考えられる (15.5 節も参照).

15.5 応用

質量尺度に対する走行結合の減少 (15.4.4 節)

↔ 漸近的自由性 (第 1 段落)

→ 短距離の相互作用に関しては摂動論を利用可能.

そこで [摂動論から得られた] 反応 $e^+e^- \rightarrow$ ハドロン群の全断面積 (15.5):

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{ハドロン群}) = \left(3 \sum_f e_f^2 \right) \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$$

を考え, これを比

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{ハドロン群})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 3 \sum_f e_f^2 = \frac{11}{3} \equiv R_0$$

の形に表す [電荷の値は素電荷を単位として表記してある]. ただしこれはハドロン群の生成に対する主要な寄与として, 重心系エネルギーが 15–40 GeV の場合に支配的となる図 37(a) のダイアグラムの過程を考えたものであり, ここではこのエネルギー範囲において生成し得るクォークの 5 種類の香り $f = d, u, s, c, b$ について和をとっている. [クォークの質量 (静止エネルギー) は 6 種類の香りのうち t (トップ) が最大である.]

これに対する α_s のオーダーの補正として図 37(b)(c)(d) のダイアグラムからの寄与を考慮すると

$$R = R_0 \left[1 + \frac{\alpha_s(\mu)}{\pi} \right]$$

となり (証明は行わない), この値は尺度 μ の選択に大きく依存する. しかし物理量の正確な値は人為的に導入した尺度 μ に依らないということから期待されるように, 摂動の高い近似に進めばこの尺度 μ 依存性は抑制される.

しばしば尺度 μ は特定の値 μ_0 に固定せずに, 考えている過程に特徴的な運動量尺度に選ぶことが有用となる. 例えば今の場合 μ として, 電子-陽電子対の不変質量 (重心系における全エネルギー) Q を選ばば良い. その利点を以下に述べる. $\overline{\text{MS}}$ 体系では

$$R = R_0 \left\{ 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + 1.41 \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2 - 12.8 \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^3 + \dots \right\}, \quad \alpha_s = \alpha_s(\mu = Q; \mu_0) \equiv \alpha_s(Q)$$

となる [式 (15.103) の $\alpha_s(\mu; \mu_0)$ は μ^2 の関数なので, $\alpha_s = \alpha_s(\mu^2 = Q^2)$: (15.109b) とも書ける]. (証明は行わない. 別の繰り込みの体系では結果は異なる.) $\alpha_s(\mu; \mu_0)$ の式 (15.103):

$$\alpha_s(Q) = \alpha_s(\mu_0) - \frac{\beta_0}{2\pi} \ln \left(\frac{Q}{\mu_0} \right) \alpha_s(\mu_0)^2 + \dots$$

を代入すると, 固定した尺度 μ_0 を用いた場合の $\alpha_s(\mu_0)$ による展開の形

$$R = R_0 \left[1 + \frac{\alpha_s(\mu_0)}{\pi} + \left\{ 1.41 - \frac{\beta_0}{2} \ln \left(\frac{Q}{\mu_0} \right) \right\} \left(\frac{\alpha_s(\mu_0)}{\pi} \right)^2 + \dots \right]$$

が得られる. このとき尺度 $\mu = Q$ を採用した場合の展開における最初の項 $1 + \frac{\alpha_s(Q)}{\pi}$ は, $\alpha_s(\mu_0)$ による展開の各次数における係数から, “最初に現れる” 対数 $\ln(Q/\mu_0)$ の項だけを取り出した

$$1 + \frac{\alpha_s(\mu_0)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{\beta_0}{2\pi} \ln \left(\frac{Q}{\mu_0} \right) \alpha_s(\mu_0) \right]^n$$

に一致する. さらに $\alpha_s^2(Q)$ の項は次の対数の項を, $\alpha_s^3(Q)$ の項はその次の対数の項を含み, 以下同様に続く.

充分大きな $\mu = Q$ の値に対しては $\alpha_s(Q)$ による展開は速く収束し, ゼロ次の結果 $R = R_0$ に対する補正の Q 依存性は実験結果とよく合う. これは QCD 理論の成功を示す 1 例である.

15.6 付録: QCD におけるループダイアグラムの例

15.6.1 グルーオン自己エネルギー部分のグラフ

15.4.3 節で予告したように, 図 35 のダイアグラム (a),(b),(c) に対応する最低次でのグルーオンの自己エネルギー部分はそれぞれ, Feynman 規則に基づき式 (15.80):

$$\begin{aligned} ig_0^2 \Pi_{ij}^{\mu\nu}(a) &= \delta_{il} (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \frac{i\tilde{g}_0^2}{24\pi^2} \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right] + \dots, \\ ig_0^2 \Pi_{ij}^{\mu\nu}(b) &= \delta_{il} \left(k^\mu k^\nu + \frac{k^2 g^{\mu\nu}}{2} \right) \frac{i\tilde{g}_0^2}{32\pi^2} \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right] + \dots, \\ ig_0^2 \Pi_{ij}^{\mu\nu}(c) &= \delta_{il} \left(11k^\mu k^\nu - \frac{19}{2} k^2 g^{\mu\nu} \right) \frac{-i\tilde{g}_0^2}{32\pi^2} \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right] + \dots \end{aligned}$$

によって与えられることを証明した. ただし「 \dots 」は $\eta \rightarrow 0$ の極限で発散せず有限に留まる量である.

15.6.1 について

■クォークループの寄与 (15.110) について 図 35(a) のダイアグラムに Feynman 規則を適用して対応する Feynman 振幅を $\varepsilon_{i\mu}(\mathbf{k})ig_0^2\Pi_{il}^{\mu\nu}(a)\varepsilon_{l\nu}^*(\mathbf{k})$ と書くと,

$$\begin{aligned} ig_0^2\Pi_{il}^{\mu\nu}(a) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (-1)\text{Tr}[\{-ig_0(T^i)_{ab}\gamma^\mu\}iS_F(p+k)\{-ig_0(T^l)_{ba}\gamma^\nu\}iS_F(p)] \\ &= C_{il}^{(a)}(-1)(-ig_0)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\gamma^\mu iS_F(p+k)\gamma^\nu iS_F(p)] : (15.110), \\ C_{il}^{(a)} &= T_{ab}^i T_{ba}^l = \text{Tr}(T^i T^l) = \frac{1}{2}\delta_{il} : (15.111) \end{aligned}$$

となる。(トレースの中のスピノル因子の順序が, フェルミオン線の矢の向きをたどる順序と同じ順序で右から並んではいないが, クォークのループに対してトレースをとって (-1) を掛ける Feynman 規則 (14.4 節の規則 5) を適用できるのはこのときである (QED の場合の式 (7.22) 参照). 光子の自己エネルギー部分の式 (9.8) も同様である.)

■ゴーストループの寄与 (15.113) について 図 35(b) のダイアグラムに Feynman 規則を適用して対応する Feynman 振幅を $\varepsilon_{i\mu}(\mathbf{k})ig_0^2\Pi_{il}^{\mu\nu}(b)\varepsilon_{l\nu}^*(\mathbf{k})$ と書くと,

$$\begin{aligned} ig_0^2\Pi_{il}^{\mu\nu}(b) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (-1)(g_0 f_{ikj} p^\mu) i\Delta_F(p+k) \{g_0 f_{ljk} (p+k)^\nu\} i\Delta_F(p) \\ &= C_{il}^{(b)}(-1)g_0^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (p+k)^\nu p^\mu i\Delta_F(p+k) i\Delta_F(p), \\ C_{il}^{(b)} &= f_{ikj} f_{ljk} = -f_{ijk} f_{ljk} = -3\delta_{il} : (15.113b) \end{aligned}$$

となる. よって式 (15.113a) は添字 μ, ν が逆であると考えられる. ただし最終的な結果 (15.80b) は添字 μ, ν に関して対称であり, 結論に変わりはない. そこで本稿では以降の計算において, 混乱を避けるため式の中の添字 μ, ν の付け方は教科書に合わせることにする. いずれにせよ式 (15.113a) の k^ν は p^ν に, また $i\Delta_F(k)$ の引数 k は p に訂正しなければならない.

■式 (15.115), 式 (15.116) の訂正 式 (15.113a) の訂正を反映して, 式 (15.115) 右辺の被積分関数分母において $k^2 + i\varepsilon \rightarrow p^2 + i\varepsilon$ と訂正し, 式 (15.116) 右辺において $k^\nu \rightarrow p^\nu$ と訂正する. すると p.429, 1.3 以降の式が正しく得られる.

■式 (15.80b) 導出過程の最後 (式 (15.119) 以降) について η による展開を行うにあたって, まず次のことに注意する.

- 公式 (10.28):

$$x^{-\eta/2} = 1 - \frac{\eta}{2} \ln x + \dots$$

は $x < 0$ の場合にも, 右辺において $x \rightarrow |x|$ と置き換えれば成立する.

- ガンマ関数の性質 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ より

$$\Gamma\left(\frac{\eta}{2} - 1\right) = \frac{\Gamma(\eta/2)}{\frac{\eta}{2} - 1}$$

と書き換えれば, 右辺の $\Gamma(\eta/2)$ は公式 (10.29) を用いて評価できる.

すると $I_1^{\mu\nu}$ の項は

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu^\eta}{(2\pi)^D} \int_0^1 dz I_1^{\mu\nu}(k, z) \\
&= \frac{\mu^\eta}{(2\pi)^{4-\eta}} (-i) \frac{\pi^{2-\eta/2} \Gamma(\frac{\eta}{2}-1)}{2} g^{\mu\nu} \int_0^1 dz \frac{1}{[-k^2 z(1-z)]^{(\eta/2)-1}} \\
&= \frac{ig^{\mu\nu}}{32\pi^2} \left[1 + \frac{\eta}{2} \ln(4\pi^2) + \dots \right] \left[1 - \frac{\eta}{2} \ln \pi + \dots \right] \left[1 + \frac{\eta}{2} + \dots \right] \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \dots \right] \\
&\quad \times \int_0^1 dz [-k^2 z(1-z)] \left[1 - \frac{\eta}{2} \ln \left(\frac{k^2 z(1-z)}{\mu^2} \right) + \dots \right] \\
&= \frac{ig^{\mu\nu}}{32\pi^2} \times \int_0^1 dz [-k^2 z(1-z)] \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi^2) - \ln \pi + 1 - \ln \left(\frac{k^2 z(1-z)}{\mu^2} \right) \right] + \dots \\
&= -\frac{i}{32\pi^2} \frac{k^2 g^{\mu\nu}}{6} \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right] \\
&\quad - \frac{ig^{\mu\nu}}{32\pi^2} k^2 \int_0^1 dz z(1-z) \left[1 - \ln \left(\frac{k^2 z(1-z)}{\mu^2} \right) \right] + \dots
\end{aligned}$$

となる。最右辺の 2 行目は $\eta \rightarrow 0$ のときに発散せずに有限に留まる量であり、特に「 \dots 」の部分は $\eta \rightarrow 0$ とすると消える。

$I_2^{\mu\nu}$ の項に関しても同様に

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu^\eta}{(2\pi)^D} \int_0^1 dz I_2^{\mu\nu}(k, z) \\
&= \frac{\mu^\eta}{(2\pi)^{4-\eta}} \int_0^1 dz \pi^{2-\eta/2} \Gamma(\eta/2) \frac{k^\mu k^\nu}{[-k^2 z(1-z)]^{\eta/2}} \\
&= \frac{-ik^\mu k^\nu}{16\pi^2} \left[1 + \frac{\eta}{2} \ln(4\pi^2) + \dots \right] \left[1 - \frac{\eta}{2} \ln \pi + \dots \right] \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \dots \right] \\
&\quad \times \int_0^1 dz z(1-z) \left[1 - \frac{\eta}{2} \ln \left(\frac{k^2 z(1-z)}{\mu^2} \right) + \dots \right] \\
&= \frac{-ik^\mu k^\nu}{16\pi^2} \int_0^1 dz z(1-z) \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi^2) - \ln \pi - \ln \left(\frac{k^2 z(1-z)}{\mu^2} \right) \right] + \dots \\
&= -\frac{i}{32\pi^2} \frac{k^\mu k^\nu}{3} \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right] \\
&\quad + \frac{ik^\mu k^\nu}{16\pi^2} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left(\frac{k^2 z(1-z)}{\mu^2} \right) + \dots
\end{aligned}$$

と計算できる。再び最右辺の 2 行目は $\eta \rightarrow 0$ のときに発散せずに有限に留まる量であり、特に「 \dots 」の部分は $\eta \rightarrow 0$ とすると消える。

以上の 2 式を足して全体に $-3\tilde{g}_0^2 \delta_{il}$ を掛ければ、式 (15.80b) が得られる。

■グルーオンループの寄与 (15.121) について 図 35(c) のダイヤグラム (ただし教科書の図 15.15(c)(p.417) の Lorentz 添字 ρ, σ に加えて ρ', σ' を導入し、また運動量の向きを表す矢印を付記した) に Feynman 規則を適用して対応する Feynman 振幅を $\varepsilon_{i\mu}(\mathbf{k}) i g_0^2 \Pi_{il}^{\mu\nu}(c) \varepsilon_{\nu}^*(\mathbf{k})$ と書くと、

$$i g_0^2 \Pi_{il}^{\mu\nu}(c) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \{g_0 f_{ijk} V_{\rho\sigma}^\mu(k, -p-k, p)\} \{g_0 f_{lkj} V_{\rho'\sigma'}^\nu(-k, -p, p+k)\} \{i D_{\mathbf{F}}^{\rho\rho'}(p+k)\} \{i D_{\mathbf{F}}^{\sigma\sigma'}(k)\}$$

$$= 3\delta_{il} \frac{1}{2} g_0^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{V_{\rho\sigma}^\mu(k, -p-k, p) V^{\nu\sigma\rho}(-k, -p, p+k)}{[(p+k)^2 + i\varepsilon][k^2 + i\varepsilon]} : (15.121)$$

($\because -f_{ijk} f_{lkj} = f_{ijk} f_{ljk} = 3\delta_{il}$)

となる。

15.6.2 クォーク-グルーオン結節点補正

15.4.3 節で予告したように、図 36 のダイアグラム (a), (b) に対応する最低次でのクォーク-グルーオン結節点補正はそれぞれ、Feynman 規則に基づき式 (15.90):

$$g_0^2 \Lambda_{(a)}^{i,\mu} = -\gamma^\mu (T^i)_{cd} \frac{\tilde{g}_0^2}{96\pi^2} \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right] + \dots,$$

$$g_0^2 \Lambda_{(b)}^{i,\mu} = \gamma^\mu (T^i)_{cd} \frac{9\tilde{g}_0^2}{32\pi^2} \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right] + \dots$$

によって与えられることを証明した。ただし「 \dots 」は $\eta \rightarrow 0$ の極限で発散せず有限に留まる量である。

15.6.2 について

■式 (15.123) について 図 36(a) のダイアグラム (ただし教科書の図 15.17(a)(p.420) に Lorentz 添字 α, β を補い、また運動量の向きを表す矢印を付記した) に Feynman 規則を適用して対応する Feynman 振幅を $\bar{u}_c(\mathbf{p}') i g_0^3 \Lambda_{(a)}^{i,\mu} u_d(\mathbf{p}) \varepsilon_{i\mu}^*(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ と書くと、

$$i g_0^3 \Lambda_{(a)}^{i,\mu} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} i D_{F\alpha\beta}(k) \{-i g_0 (T^j)_{cb} \gamma^\beta\} i S_F(p' - k) \{-i g_0 (T^i)_{ba} \gamma^\mu\} i S_F(p - k) \{-i g_0 (T^j)_{ad} \gamma^\alpha\}$$

$$= i g_0^3 C_{(a)} \Lambda^\mu(p', p) : (15.123),$$

$$C_{(a)} = (T^j)_{cb} (T^i)_{ba} (T^j)_{ad} = -\frac{1}{6} (T^i)_{cd} : (15.124),$$

$$\Lambda^\mu(p', p) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 + i\varepsilon} \gamma_\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m + i\varepsilon} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\varepsilon} \gamma^\alpha : (9.48)$$

となる。

■式 (15.125) について 図 36(b) のダイアグラム (ただし教科書の図 15.17(b)(p.420) に Lorentz 添字 α, β を補い、2 つある色電荷の添字 n の一方を m に訂正し、また運動量の向きを表す矢印を付記した) に Feynman 規則を適用して対応する Feynman 振幅を $\bar{u}_c(\mathbf{p}') i g_0^3 \Lambda_{(b)}^{i,\mu} u_d(\mathbf{p}) \varepsilon_{i\mu}^*(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ と書くと、

$$i g_0^3 \Lambda_{(b)}^{i,\mu} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \{g_0 f_{inm} V^{\mu\beta\alpha}(p' - p, k - p', p - k)\} i D_{F\nu\alpha}(p - k) i D_{F\tau\beta}(p' - k)$$

$$\times \{-i g_0 (T^n)_{ca} \gamma^\tau\} i S_F(k) \{-i g_0 (T^m)_{ad} \gamma^\nu\} : (15.125)$$

となる。ただし式 (15.125) のフェルミオン伝播関数 $i S_F(k)$ の部分において、 $k \rightarrow \not{k}, m^2 \rightarrow m_0^2$ と訂正する。

第 16 章 弱い相互作用

16.1 緒論

弱い相互作用を媒介する粒子はスピン 1 の“仲介ベクトルボゾン” (intermediate vector boson : IVB) W^\pm, Z^0 であり, これらは大きな質量

$$M_W = 80.40\text{GeV}, \quad M_Z = 91.19\text{GeV}$$

を持つ. このため

- 弱い相互作用の到達距離を決める IVB の Compton 波長 [質量の逆数に比例] は 10^{-3}f 程度に過ぎず, 弱い相互作用は到達距離がゼロの点接触型相互作用のように近似できる (16.6.1 節).
- W^\pm, Z^0 ボゾン生成には非常に高いエネルギーを要し, 実験的に発見されるまで時間がかかった.

当初の観測事実は, 弱い相互作用が荷電ボゾン W^\pm のみによって媒介されるという仮説を支持していた. しかし Glashow (グラシヨウ), Salam (サラム), Weinberg (ワインバーグ) による電磁相互作用と弱い相互作用の統一理論からは, 弱い相互作用を媒介する中性ベクトルボゾン Z^0 の存在が予言され, 後に Z^0 ボゾンの交換が関与する“中性カレント反応”として,

$$\nu_\mu + N \rightarrow \nu_\mu + X, \quad N : \text{核子}, \quad X : \text{ハドロン群}$$

という反応が観測された.

電磁相互作用と弱い相互作用は“電弱相互作用”として統一的に理解されるようになったけれど, 低エネルギーにおいては両者は明確に分離している (後で [19.4 節にて] 詳しく説明する).

本章では基本となる理論として, W^\pm の交換だけを考慮する IVB 理論を扱う. この理論の困難は第 17–19 章の統一理論によって解消される.

弱い相互作用による過程は

- 純粋なレプトンの過程 (レプトン, すなわち荷電レプトンと (反) ニュートリノのみを含む)
- 半レプトンの過程 (レプトンとハドロンを両方とも含む)
- 純粋なハドロンの過程 (ハドロンのみを含む)

に分類できる. ここでは電磁相互作用と弱い相互作用に関する摂動論を用いて記述できる, ハドロンの関与しない純粋なレプトンの過程に話を限定する. [クォークの弱い相互作用については, 他の文献で補う必要がある (訳者あとがき). 本稿の付録 C も参照.]

16.2 レプトンの弱い相互作用

弱い相互作用における相互作用 Hamiltonian 密度 \mathcal{H}_I は, QED の場合

$$\mathcal{H}_{\text{QED}} = s^\mu A_\mu, \quad s^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi : \text{電磁カレント}$$

と同様に, レプトン場演算子に関して双一次のレプトン (荷電) カレント

$$J_\alpha = \sum_l \bar{\psi}_l \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \psi_l, \quad J_\alpha^\dagger = \sum_l \bar{\psi}_l \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \psi_l$$

を用いて

$$\mathcal{H}_I = g_W (J^{\alpha\dagger} W_\alpha + J^\alpha W_\alpha^\dagger) \quad (16.7)$$

と表される。ただし ψ_l と ψ_{ν_l} はそれぞれレプトン $l = e, \mu, \tau$ と対応するニュートリノ $\nu_l, \bar{\nu}_l$ を表す量子場であり、

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$$

(式 (A.7), 式 (A.13)) である。 [ψ_l は l^- の消滅演算子と l^+ の生成演算子を含み, ψ_{ν_l} はニュートリノ ν_l の消滅演算子と反ニュートリノ $\bar{\nu}_l$ の生成演算子を含む.] また $W_\alpha(x)$ は W ボゾンを記述する場であり, g_W は無次元の結合定数である。 [ここでは結合 g_W はカレント $J_\alpha, J_\alpha^\dagger$ からくり出されている。また 16.1 節の予告通り, 弱い力を媒介する粒子として W ボゾンだけが考慮されている.]

付録の式 (A.53) によりレプトンカレント J^α は

$$\begin{aligned} \text{ベクトルカレント} \quad J_V^\alpha &= \sum_l \bar{\psi}_l \gamma^\alpha \psi_{\nu_l}, \\ \text{軸性ベクトルカレント} \quad J_A^\alpha &= \sum_l \bar{\psi}_l \gamma^\alpha \gamma_5 \psi_{\nu_l} \end{aligned}$$

の差 $J^\alpha = J_V^\alpha - J_A^\alpha$ で与えられる。ここではこのため, J^α は空間反転を考えなければ Lorentz 変換に対してベクトルとして変換されることにまず注意を促しておく。

- [J^α がベクトルなので, \mathcal{H}_I が Lorentz スカラーとなるためには] $W_\alpha(x)$ は [共変] ベクトル場でなければならず, したがって W ボゾンはスピン 1 のベクトルボゾンとなる。
- \mathcal{H}_I の作る結節点には荷電レプトン, 中性レプトン, W ボゾンが 1 つずつ接続するので, [電荷保存則を満たすには] W ボゾンは電荷を持たねばならず, したがって場 $W_\alpha(x)$ は非 Hermite である。 [このことを考慮して, \mathcal{H}_I の式において既に W_α と W_α^\dagger を区別してある.]
- ニュートリノを考慮してレプトン数を

$$N(l) = N(l^-) - N(l^+) + N(\nu_l) - N(\bar{\nu}_l), \quad l = e, \mu, \tau$$

と再定義すると, \mathcal{H}_I は

- l^- を生成して (消滅させて) ν_l を消滅させ (生成し)
- l^+ を生成して (消滅させて) $\bar{\nu}_l$ を消滅させる (生成する)

ので, レプトン数 $N(l)$ を保存する (観測事実にも整合)。

レプトンカレント $J^\alpha = J_V^\alpha - J_A^\alpha$ は, したがって相互作用 Hamiltonian はパリティ変換 $(\mathbf{x}, t) \rightarrow (-\mathbf{x}, t)$ の下で不変ではないため, パリティは保存されない。実際, 質量がゼロに極めて近いニュートリノに対してはカレントにおける $P_L = (1 - \gamma_5)/2$ を近似的にヘリシティ射影演算子と見なせるので, 相互作用 Hamiltonian には

- ヘリシティが負の ($r = 2$) ニュートリノ
- ヘリシティが正の ($r = 1$) 反ニュートリノ

の生成・消滅演算子のみが含まれることになり, それ故, 弱い相互作用にはこれらの (反) ニュートリノしか関与しない [パリティの非保存に対応するカイラル対称性の破れ, 本稿次節で補足]。

ここで“左手型の”場 $\psi_l^L = P_L \psi_l, \psi_{\nu_l}^L = P_L \psi_{\nu_l}$ を定義すると、レプトンカレントは左手型の場のみを用いて

$$J_\alpha = 2 \sum_l \bar{\psi}_l^L \gamma_\alpha \psi_{\nu_l}^L \quad (16.16)$$

と表される [本稿次節で補足]. ところで荷電レプトンについても粒子のエネルギーが質量 m に比べて非常に高い極限では, 近似的に P_L をヘリシティ射影演算子と見なせる. このため弱い相互作用によって生成した電子 (陽電子) は負 (正) のヘリシティを持つことになる.

16.2 について

■レプトンカレント (16.6a), (16.6b) の関係について γ_5 の性質 (A.8): $\gamma_5^\dagger = \gamma_5, [\gamma^\mu, \gamma_5]_+ = 0$ に注意すると

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}_l \gamma_\alpha \psi_{\nu_l})^\dagger &= \psi_{\nu_l}^\dagger (\gamma^0 \gamma_\alpha \gamma^0) (\gamma_0 \psi_l) = \bar{\psi}_{\nu_l} \gamma_\alpha \psi_l, \\ (\bar{\psi}_l \gamma_\alpha \gamma_5 \psi_{\nu_l})^\dagger &= \psi_{\nu_l}^\dagger \gamma_5 (\gamma^0 \gamma_\alpha \gamma^0) (\gamma_0 \psi_l) = \psi_{\nu_l}^\dagger (\gamma^0 \gamma_\alpha \gamma_5) (\gamma^0)^2 \psi_l = \bar{\psi}_{\nu_l} \gamma_\alpha \gamma_5 \psi_l \end{aligned}$$

なので, 確かに式 (16.6) の J_α と J_α^\dagger は互いに Hermite 共役となっている.

■演算子 (16.13) は「ヘリシティが負の……生成する」(p.439, l.13,14) について 式 (16.6b) の J_α^\dagger においてニュートリノに関係する部分は $(\psi_{\nu_l}^L)^\dagger$ なので, J_α の項と合わせてニュートリノに関しては

- ヘリシティが負の ($r = 2$) ニュートリノ
- ヘリシティが正の ($r = 1$) 反ニュートリノ

の生成・消滅演算子のみが含まれることになる. よって「これらの状態だけが役割を担っており, ……関わることはない」(p.439, l.14~16).

なおレプトンに関してはふつう質量をゼロと近似できないので, $(1 - \gamma_5)/2$ をヘリシティ演算子と見なすこの議論は一般には適用できない (式 (16.14) の段落参照).

■レプトンカレントの式 (16.16) について 任意の Dirac スピノル ψ に対して

$$\bar{\psi}^{L,R} \equiv (\psi^{L,R})^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2} \{ (1 \mp \gamma_5) \psi \}^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger \frac{1}{2} (1 \mp \gamma_5) \gamma^0 = \bar{\psi} \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5) = \bar{\psi} P_{R,L}$$

(ただし式 (A.8): $(\gamma_5)^\dagger = \gamma_5, [\gamma_5, \gamma^0]_+ = 0$ を考慮した) と考える. すると再び γ_5 の性質 (A.8): $[\gamma_5, \gamma^0]_+ = 0$ により

$$2\bar{\psi}_l^L \gamma_\alpha \psi_{\nu_l}^L = 2(\bar{\psi}_l P_R) \gamma_\alpha (P_L \psi_{\nu_l}) = 2\bar{\psi}_l \gamma_\alpha P_L^2 \psi_{\nu_l} = \bar{\psi}_l \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l}$$

と計算できる. ただし最後の等号では, γ_5 の性質 (A.8): $(\gamma_5)^2 = 1$ により射影演算子に対して期待される性質

$$P_L^2 = \left\{ \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \right\}^2 = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) = P_L$$

が満たされていることを用いた.

なお ψ^L の代わりに ψ^R を用いて, 同様にレプトンカレントを表すことはできない.

16.3 自由なベクトルボゾン場

[前節ではレプトンとニュートリノの量子場 ψ_l, ψ_{ν_l} と, W ボゾンの場 W_α が導入された. このうち Dirac 場 ψ_l は QED において既に馴染みの概念であり, ニュートリノの場 ψ_{ν_l} もこれと同様の概念である. そこで本節では残るベクトルボゾン場 $W_\alpha(x)$ の性質について議論する.]

■場の方程式 自由なスピン 1 のベクトルボゾン場 W^α に対する場の方程式は, 質量を m_W として Proca 方程式

$$\square W^\alpha - \partial^\alpha(\partial_\beta W^\beta) + m_W^2 W^\alpha = 0 \quad (16.18)$$

によって与えられ, これは Lagrangian 密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F_{W\alpha\beta}^\dagger F_W^{\alpha\beta} + m_W^2 W_\alpha^\dagger W^\alpha, \quad F_W^{\alpha\beta} = \partial^\beta W^\alpha - \partial^\alpha W^\beta$$

から導かれる. [確認は本稿次節. これを古典場の理論と見なせば, Hermite 共役 (\dagger) は複素共役 ($*$) に置き換わる.] Proca 方程式 (16.18) は $m_W \neq 0$ に対して自動的に Lorenz 条件

$$\partial_\alpha W^\alpha = 0 \quad (16.19)$$

を含意し (これは式 (16.18) の 4 元発散をとれば直ちに導かれる),

$$\square W^\alpha + m_W^2 W^\alpha = 0$$

と簡略化される [Klein-Gordon 方程式と同じ形].

■平面波展開と偏極ベクトル 場の方程式から得られる分散関係 $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{m_W^2 + \mathbf{k}^2}$ を考慮して, 波数 $k = (\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$ によって特徴付けられる平面波を用いて場を次のように展開する.

$$\begin{aligned} W^\alpha(x) &= W^{\alpha+}(x) + W^{\alpha-}(x), \\ W^{\alpha+}(x) &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^3 \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x}, \\ W^{\alpha-}(x) &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^3 \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) b_r^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x}. \end{aligned}$$

[$W^{\alpha\dagger}$ に関しては $W^{\alpha\pm\dagger} = (W^{\alpha\mp})^\dagger$ とする. すなわち消滅演算子 $b_r(\mathbf{k})$ を含む正振動数部分を $W^{\alpha+\dagger}$ とおき, 生成演算子 $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ を含む負振動数部分を $W^{\alpha-\dagger}$ とおく.] ここに $\varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) (r = 1, 2, 3)$ は偏極ベクトルであり, Lorenz 条件により

$$k_\alpha \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) = 0$$

を満たす. $k = (\omega_{\mathbf{k}}, 0, 0, |\mathbf{k}|)$ となる座標系では偏極ベクトルを

$$\begin{cases} \varepsilon_1^\alpha(\mathbf{k}) = (0, 1, 0, 0), \\ \varepsilon_2^\alpha(\mathbf{k}) = (0, 0, 1, 0), \\ \varepsilon_3^\alpha(\mathbf{k}) = (|\mathbf{k}|, 0, 0, \omega_{\mathbf{k}})/m_W \end{cases} \quad (26)$$

と選ぶのが便利である. これらは

$$\varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) \varepsilon_s^\alpha(\mathbf{k}) = -\delta_{rs}, \quad \sum_{r=1}^3 \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\beta(\mathbf{k}) = -g^{\alpha\beta} + \frac{k^\alpha k^\beta}{m_W^2} \quad (27)$$

という性質を満たす [導出は本稿次節]. [電磁場の場合 (5.1 節) と同様に式 (26) は特定の座標系でしか成り立たないのに対し, 性質 (27) は相対論的に不変な式となっているので, $k = (\omega_{\mathbf{k}}, 0, 0, |\mathbf{k}|)$ となる座標系において成分が式 (26) で与えられる偏極ベクトルを考える限り任意の座標系で成立する. したがって式 (27) の性質だけを要求すれば十分であると考えられる.]

■正準量子化 正準形式での量子化により

- $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ と $a_r(\mathbf{k})$ をそれぞれモード (r, \mathbf{k}) の W^+ の消滅・生成演算子
- $b_r^\dagger(\mathbf{k})$ と $b_r(\mathbf{k})$ をそれぞれモード (r, \mathbf{k}) の W^- の消滅・生成演算子

と見なすことが可能となる.

■ W ボゾンの伝播関数

$$iD_F^{\alpha\beta}(x-y, m_W) = \langle 0 | T \{ W^\alpha(x) W^{\beta\dagger}(y) \} | 0 \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} iD_F^{\alpha\beta}(k, m_W),$$

$$iD_F^{\alpha\beta}(k, m_W) = \frac{i(-g^{\alpha\beta} + k^\alpha k^\beta / m_W^2)}{k^2 - m_W^2 + i\varepsilon}. \quad [\text{導出は下記}] \quad (16.30)$$

16.3 について

■自由なベクトルボゾン場 $W_\alpha(x)$ の Lagrangian 密度 (16.21) について $W_\alpha(x)$ と $W_\alpha^\dagger(x)$ を独立な場と見なすと,

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\beta W_\alpha^\dagger)} (F_{W\mu\nu}^\dagger F_W^{\mu\nu}) = F_W^{\alpha\beta} - F_W^{\beta\alpha} = 2F_W^{\alpha\beta}$$

なので, 場 $W_\alpha^\dagger(x)$ に対する Euler-Lagrange 方程式

$$0 = \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta W_\alpha^\dagger)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_\alpha^\dagger} = -\partial_\beta F_W^{\alpha\beta} - m_W^2 W^\alpha$$

は Proca 方程式 (16.18) を与える.

■偏極ベクトル $\varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})$ について 光子の場合とは異なり, $r=0$ の偏極ベクトル $\varepsilon_0^\mu(\mathbf{k})$ は導入されていない. 古典電磁場の自由度は 2 であり, 場の量子論においてもゲージ条件を適切に考慮すると, 2 つの横波成分だけが観測量に寄与を持つことが説明された (5.1 節, 5.2 節). これに対して質量 $m_W \neq 0$ を持つベクトルボゾン場 W^α はゲージとは無関係に常に式 (16.19): $\partial_\alpha W^\alpha = 0$ を満たすため, 最初から電磁場よりも自由度が 1 だけ少ない ($m_W = 0$ では関係 $\partial_\alpha W^\alpha = 0$ が場の方程式から導かれられないため, この論法は適用されない). 3 つの偏極ベクトルを用いて W^α を展開しなければならないのはこのためである [6, p.93] [8, p.211].

式 (16.26) の偏極ベクトルに対して

$$\sum_{r=1}^3 \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\beta(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} |\mathbf{k}|^2/m_W^2 & 0 & 0 & |\mathbf{k}|\omega_{\mathbf{k}}/m_W^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ |\mathbf{k}|\omega_{\mathbf{k}}/m_W^2 & 0 & 0 & \omega_{\mathbf{k}}^2/m_W^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_{\mathbf{k}}^2/m_W^2 & 0 & 0 & |\mathbf{k}|\omega_{\mathbf{k}}/m_W^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ |\mathbf{k}|\omega_{\mathbf{k}}/m_W^2 & 0 & 0 & |\mathbf{k}|^2/m_W^2 \end{pmatrix} \quad \left(\because \omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{m_W^2 + \mathbf{k}^2} \right)$$

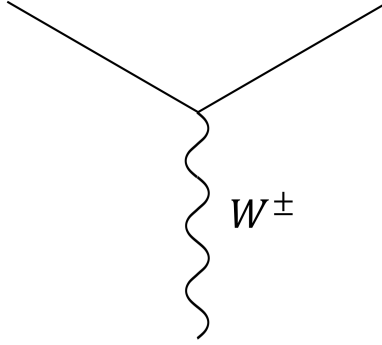


図 38 IVB 相互作用の基本結節点

$$= -g^{\alpha\beta} + k^\alpha k^\beta / m_W^2 : (16.27) \quad (\because k = (\omega_{\mathbf{k}}, 0, 0, |\mathbf{k}|))$$

が成立する.

■ W ボゾンの伝播関数 (16.30) について 式 (16.27): $\sum_{r=1}^3 \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\beta(\mathbf{k}) = -g^{\alpha\beta} + k^\alpha k^\beta / m_W^2$ を用いると, Klein-Gordon 場に対する第 3 章の計算と同様に

$$\begin{aligned} iD_{\mathbf{F}}^{\alpha\beta}(x-y, m_W) &= \langle 0 | T \{ W^\alpha(x) W^{\beta\dagger}(y) \} | 0 \rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | W^\alpha(x) W^{\beta\dagger}(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | W^{\beta\dagger}(y) W^\alpha(x) | 0 \rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [W^{\alpha+}(x), W^{\beta-\dagger}(y)] | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | [W^{\beta+\dagger}(y), W^{\alpha-}(x)] | 0 \rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0) \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \sum_{\mathbf{k}, r} \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\beta(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot (x-y)} + \theta(y^0 - x^0) \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \sum_{\mathbf{k}, r} \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\beta(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot (y-x)} \\ &= \left(-g^{\alpha\beta} + \frac{k^\alpha k^\beta}{m_W^2} \right) \{ \theta(x^0 - y^0) i\Delta^+(x-y) - \theta(y^0 - x^0) i\Delta^-(x-y) \}, \\ i\Delta^\pm(x-y) &\equiv \pm \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{\pm ik \cdot (x-y)} \end{aligned}$$

とできる. 最右辺の $\{\dots\}$ の部分は式 (3.56) の Feynman 伝播関数 $\Delta_{\mathbf{F}}(x-y)$ (の i 倍) に他ならないので, 式 (3.57) のように Fourier 展開される. よって W ボゾンの運動量空間の伝播関数は式 (16.30) で与えられる.

16.4 IVB 理論に対する Feynman 規則

16.2 節で導入した IVB 理論における相互作用 Hamiltonian 密度 (16.7) が作る基本結節点は図 38 のようである. ここではレプトン数の保存と電荷保存を満たす可能なレプトン線の組を代表して描いている. この場合の Feynman 規則は QED の規則を, 電子と同様の規則をすべてのレプトン (ニュートリノ・反ニュートリノを含む) に適用してレプトンを含むように拡張した上で, 次のように修正して得られる.

- 結節点 因子 $-ig_W \gamma^\alpha (1 - \gamma_5)$ を充てる.
- ボゾンの内線 W ボゾンの内線と見なして, その伝播関数 $iD_{\mathbf{F}\alpha\beta}(k, m_W)$ を充てる.
- ボゾンの外線 W ボゾンの外線と見なして, その偏極ベクトル $\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k})$ を充てる.

16.4 について

■結節点因子 (16.31) について QED と IVB 理論の相互作用

$$\mathcal{H}_I = -eN[\bar{\psi}A\psi] : (6.23), \quad \mathcal{H}_I = g_W \sum_l N [\bar{\psi}_l W(1 - \gamma_5)\psi_{\nu_l} + \bar{\psi}_{\nu_l} W(1 - \gamma_5)\psi_l] : (16.7)$$

を比較すると、結節点因子は $ie\gamma^\alpha \rightarrow -ig_W\gamma^\alpha(1 - \gamma_5)$ と置き換わることが予想できる。

16.5 崩壊頻度

ミュー粒子の崩壊頻度の計算 [16.6.1 節] に先立ち、任意の崩壊過程の頻度を Feynman 振幅から求める公式を調べておこう。粒子 P の N 粒子への崩壊過程

$$P \rightarrow P'_1 + P'_2 + \cdots + P'_N \quad (28)$$

(粒子 P の運動量 $p = (E, \mathbf{p})$, 粒子 P'_f の運動量 $p'_f = (E'_f, \mathbf{p}'_f)$, $f = 1, 2, \dots, N$)

を考える。終状態の各粒子を指定したスピン状態と運動量 \mathbf{p}'_f の与えられた範囲 $d^3p'_f$ に見出すような崩壊頻度は、単位時間当たりの遷移確率 w の式 (8.6) に状態数 $\prod_f V d^3p'_f / (2\pi)^3$ を掛けた

$$d\Gamma = w \prod_f \frac{V d^3p'_f}{(2\pi)^3} = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_f p'_f - p \right) \frac{1}{2E} \left(\prod_l (2m_l) \right) \left(\prod_f \frac{d^3p'_f}{(2\pi)^3 2E'_f} \right) |\mathcal{M}|^2 \quad (16.36)$$

によって与えられる。[レプトン l として (反) ニュートリノも考慮する。] さらに終状態のスピンについて和をとり、終状態の運動量に関する積分を行うと、全崩壊頻度 Γ が得られる。

粒子 P の崩壊には式 (28) の形の様々な反応過程 (崩壊モード) が考えられる。特定のモード (28) への分岐比 B は

$$B = \frac{\Gamma}{\sum \Gamma}$$

で定義される。ただし右辺分母の和は全ての崩壊モードについてとる。このとき粒子 P の寿命は

$$\tau = \frac{1}{\sum \Gamma} = \frac{1}{B \Gamma}$$

と表される。

16.6 IVB 理論の応用

本稿では詳しい解析が与えられているミュー粒子崩壊 (16.6.1 節) のみをまとめ、簡単な言及で済まされている

- ニュートリノ散乱 $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_e + \mu^-$ (16.6.2 節)
- W ボゾンのレプトン化崩壊 $W^+ \rightarrow l^+ + \nu_l$ (16.6.3 節)

については省略することにする。いずれの過程についても、IVB 理論の予想は実験結果と良く一致する。

16.6.1 ミュー粒子の崩壊

レプトンの過程の重要な例として、ミュー粒子の崩壊過程

$$\mu^-(p, r) \rightarrow e^-(p', r') + \bar{\nu}_e(q_1, r_1) + \nu_\mu(q_2, r_2) \quad (16.39)$$

を取り上げよう。最低次の Feynman ダイアグラムは図 39 で表され、対応する Feynman 振幅は Feynman 規則に基づき

$$\mathcal{M} = -g_W^2 [\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma^\alpha(1 - \gamma_5)v(\mathbf{q}_1)] \frac{i(-g_{\alpha\beta} + k_\alpha k_\beta/m_W^2)}{k^2 - m_W^2 + i\varepsilon} [\bar{u}(\mathbf{q}_2)\gamma^\beta(1 - \gamma_5)u(\mathbf{p})], \quad k = p - q_2 = p' + q_1 \quad (16.40)$$

と与えられる。(ただしここではレプトンの種類の指標やスピン添字を省いた。)

W ボゾンの質量 m_W は m_μ に比べて大きいので、[現実的な状況として m_W^2 が $k_\alpha k_\beta$ に比べて大きい場合を考えると、] 伝播関数は近似的に

$$iD_{F\alpha\beta}(k, m_W) = \frac{i(-g_{\alpha\beta} + k_\alpha k_\beta/m_W^2)}{k^2 - m_W^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{ig_{\alpha\beta}}{m_W^2}$$

に置き換わり、Feynman 振幅は

$$\mathcal{M} = -\frac{iG}{\sqrt{2}} [\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma^\alpha(1 - \gamma_5)v(\mathbf{q}_1)] [\bar{u}(\mathbf{q}_2)\gamma^\beta(1 - \gamma_5)u(\mathbf{p})]$$

となる。ここに G は

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \left(\frac{g_W}{m_W} \right)^2$$

で定義される Fermi の結合定数である [無次元の結合 g_W とは対照的に、これは自然次元 -2 を持つ]。[ところで 16.1 節で説明されたように、 W ボゾンの質量 m_W が大きいことは弱い相互作用を点接触型相互作用のように扱うことを可能にする。実際、] この置き換えはあらかじめ、Fermi の提案した点接触型相互作用

$$\mathcal{H}_1^{(F)}(x) = \frac{G}{\sqrt{2}} J^\alpha(x) J_\alpha^\dagger(x) \quad (16.44)$$

を考えると等価である [本稿「16.6.1 について」の節で補足]。このときの Feynman ダイアグラムは図 40 のように、 W ボゾンの内線を 1 点に縮めたゼロ距離の相互作用となる。

一般公式 (16.36) より、崩壊頻度は Feynman 振幅を用いて

$$d\Gamma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + q_1 + q_2 - p) \frac{m_\mu m_e m_{\nu_e} n_{\nu_\mu}}{E} \frac{1}{(2\pi)^9} \frac{d^3 p'}{E'} \frac{d^3 q_1}{E_1} \frac{d^3 q_2}{E_2} |\mathcal{M}|^2 \quad (16.45)$$

と表される。

- 終状態のスピンについて和をとり (\sum_{r', r_1, r_2})、始状態のスピンについて平均をとると ($\frac{1}{2} \sum_r$)、

$$d\Gamma = \frac{4G^2}{(2\pi)^5 E} (p \cdot q_1)(p' \cdot q_2) \delta^{(4)}(p' + q_1 + q_2 - p) \frac{d^3 p'}{E'} \frac{d^3 q_1}{E_1} \frac{d^3 q_2}{E_2} \quad (16.53)$$

が得られる (導出は下記)。

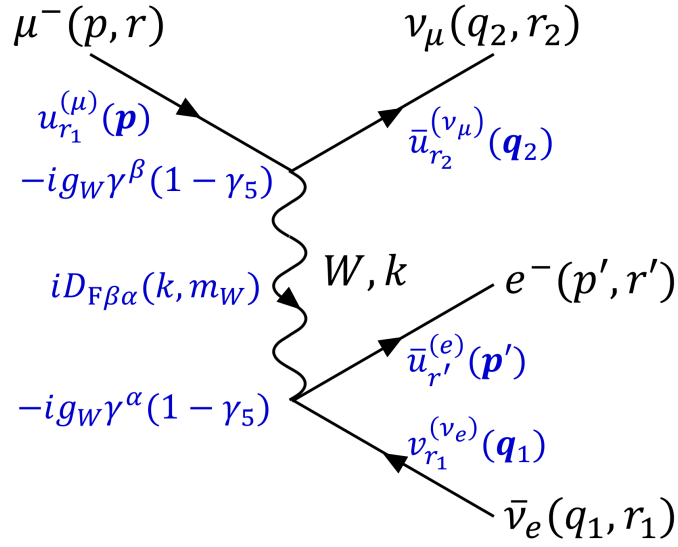


図 39 ミュー粒子の崩壊

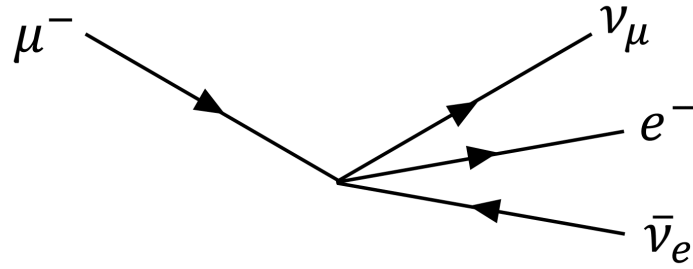


図 40 ミュー粒子の崩壊の点接触型相互作用による表現

- 次いでニュートリノの質量をゼロと見なして、
ニュートリノの運動量 q_1, q_2 に関する積分を行うと、

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} d\Gamma = \frac{2\pi}{3} \frac{G^2}{(2\pi)^5 E} \frac{d^3 p'}{E'} [(p \cdot p')q^2 + 2(p \cdot q)(p' \cdot q)] \quad (16.64)$$

になる (導出は下記).

- 最後に始状態のミュー粒子の静止系を採用し、 m_e^2/m_μ^2 を無視する近似の下で
電子の運動量 p' に関する積分を行うと、全崩壊頻度

$$\Gamma = \frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} \int_{q_1, q_2, p'} d\Gamma = \frac{G^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \quad (16.68)$$

が導かれる (導出は下記).

ここで扱った反応 $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ の実験的な分岐比は 98.6 % である. そこでこれをミュー粒子の唯一の崩壊

モードと見なすと、ミュー粒子の寿命は

$$\tau_\mu = \frac{1}{\Gamma} = \frac{192\pi^3}{G^2 m_\mu^5}$$

と表される。この結果はミュー粒子の質量 m_μ と寿命 τ_μ に対する実験的な値から Fermi 結合定数を、したがって結合の強さ $g_W^2/4\pi$ を求めるのに用いることができ、その結果は

$$\frac{g_W^2}{4\pi} \simeq 4 \times 10^{-3}$$

となる。これは 1 に比べて小さい値となっているので、弱い相互作用においても摂動論による近似が有効であると期待される。

- ミュー粒子の寿命に関する予言からは、実験との比較により結合定数 G が決まるだけである。そこで理論のさらなる検証を行う意味でも
 - ミュー粒子の崩壊により生成した電子のエネルギースペクトル
 - 偏極したミュー粒子の崩壊により生成した電子のエネルギースペクトルと角度分布
 - 非偏極のミュー粒子の崩壊により生成した電子のヘリシティ
 に関して理論的な予測を立てると、実験と良く一致する。
- 同様に τ 粒子の寿命に関しても同様の解析を適用すると、理論と実験が良く一致することから、弱い相互作用が共通の結合 g_W を用いて記述されることが裏付けられる。

16.6.1 節、式の導出など

■式 (16.53) の導出 8.2 節で示した、スピン状態についての和と平均を計算する手法を適用すると、

$$\begin{aligned} & m_\mu m_e m_{\nu_e} m_{\nu_\mu} \frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{G^2}{64} \text{Tr}[(\not{p}' + m_e) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) (\not{q}_1 - m_{\nu_e}) \gamma^\beta (1 - \gamma_5)] \\ & \quad \times \text{Tr}[(\not{q}_2 + m_{\nu_\mu}) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) (\not{p} - m_\mu) \gamma_\beta (1 - \gamma_5)] \\ &= \frac{G^2}{64} \text{Tr}[\not{p}' \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \not{q}_1 \gamma^\beta (1 - \gamma_5)] \text{Tr}[\not{q}_2 \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \not{p} \gamma_\beta (1 - \gamma_5)] \end{aligned} \quad (16.46)$$

を得る [本稿次節で補足]。ただし最右辺では $m_{\nu_e}, m_{\nu_\mu} \rightarrow 0$ を想定しており、第 1 の対角和は

$$\begin{aligned} E^{\alpha\beta} &\equiv \text{Tr}[\not{p}' \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \not{q}_1 \gamma^\beta (1 - \gamma_5)] \\ &= 2p'_\mu q_{1\nu} \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta (1 - \gamma_5)] \quad (\because \{\gamma_5, \gamma^\alpha\} = 0, (1 - \gamma_5)^2 = 2(1 - \gamma_5)) \\ &= 8p'_\mu q_{1\nu} x^{\mu\alpha\nu\beta} \quad (\because \text{対角和の公式 (A.17), (A.21)}) \\ x^{\mu\alpha\nu\beta} &\equiv g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\alpha\nu} + i\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta} \end{aligned}$$

と評価される。同様に

$$M_{\alpha\beta} \equiv \text{Tr}[\not{q}_2 \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \not{p} \gamma_\beta (1 - \gamma_5)] = 8q_2^\sigma p^\tau x_{\sigma\alpha\tau\beta}$$

と計算でき、これらを上式 (16.46) に代入すると

$$m_\mu m_e m_{\nu_e} m_{\nu_\mu} \frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = G^2 p'_\mu q_{1\nu} x^{\mu\alpha\nu\beta} q_2^\sigma p^\tau x_{\sigma\alpha\tau\beta}$$

を得る。右辺において

$$x^{\mu\alpha\nu\beta}x_{\sigma\alpha\tau\beta} = 4\delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\tau \quad (16.51)$$

なので [本稿次節で補足],

$$m_\mu m_e m_{\nu_e} m_{\nu_\mu} \frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = 4G^2(p \cdot q_1)(p' \cdot q_2)$$

である。よって微分崩壊頻度 (16.45) はスピン状態について和と平均をとると、式 (16.53) になる。

■式 (16.64) の導出 ニュートリノの運動量に関する積分は

$$I^{\mu\nu}(q) \equiv \int d^3q_1 d^3q_2 \frac{q_1^\mu q_2^\nu}{E_1 E_2} \delta^{(4)}(q_1 + q_2 - q), \quad (16.54)$$

$$q \equiv p - p'$$

という形をしている。式 (16.54) はその Lorentz 共変性により [q から作られる 2 階反変テンソルとなっているから (理由は本稿次節), その] 最も一般的な形として

$$I^{\mu\nu}(q) = g^{\mu\nu} A(q^2) + q^\mu q^\nu B(q^2) \quad (16.56)$$

と表せる。このとき

$$g_{\mu\nu} I^{\mu\nu}(q) = 4A(q^2) + q^2 B(q^2), \quad (16.57a)$$

$$q_\mu q_\nu I^{\mu\nu}(q) = q^2 A(q^2) + (q^2)^2 B(q^2) \quad (16.57b)$$

となる。これ以降、ニュートリノの質量をゼロと置くことにすると $q_1^2 = q_2^2 = 0$ なので、式 (16.54) のデルタ関数の下で

$$q = q_1 + q_2, \quad \therefore q^2 = 2q_1 \cdot q_2$$

を仮定して良い。式 (16.57) の左辺を計算し、 $A(q^2)$ と $B(q^2)$ を求めよう。まず式 (16.57a) の左辺を

$$g_{\mu\nu} I^{\mu\nu}(q) = \frac{q^2}{2} \int \frac{d^3q_1}{E_1} \frac{d^3q_2}{E_2} \delta^{(4)}(q_1 + q_2 - q) \equiv \frac{q^2}{2} I(q^2)$$

と書いて $I(q^2)$ を定義すると、 $I(q^2)$ は不変量となっているので [理由は本稿次節] その値を 2 つのニュートリノの重心系 ($\mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_2, \mathbf{q} = 0$) で評価すれば充分である。この系では 2 つのニュートリノのエネルギーは等しく、

$$\omega \equiv E_1 = |\mathbf{q}_1| = E_2 = |\mathbf{q}_2|$$

なので、

$$I(q^2) = \int d^3q_1 \frac{\delta(2\omega - q_0)}{\omega^2} = 2\pi, \quad [\text{本稿次節で計算}] \quad (16.61)$$

$$\therefore g_{\mu\nu} I^{\mu\nu}(q) = \pi q^2. \quad (16.62a)$$

同様に

$$q_\mu q_\nu I^{\mu\nu}(q^2) = \left(\frac{q^2}{2}\right)^2 I = \frac{1}{2}\pi(q^2)^2 \quad (16.62b)$$

を得る [第 1 の等号を本稿次節で確認]。式 (16.62) を式 (16.57) に代入して $A(q^2)$ と $B(q^2)$ を定めると、式 (16.56) の $I^{\mu\nu}$ は

$$I^{\mu\nu}(q) = \frac{1}{6}\pi(g^{\mu\nu} q^2 + 2q^\mu q^\nu) \quad (16.63)$$

となる。ここから微分崩壊頻度 (16.64) を得る [本稿次節で補足]。

■式 (16.68) の導出 始状態のミュー粒子の静止系では

$$p = (m_\mu, \mathbf{0}), \quad q_0 = m_\mu - E', \quad \mathbf{q} = -\mathbf{p}'$$

なので、微分崩壊頻度 (16.64) は

$$d\Gamma = \frac{2\pi}{3} \frac{G^2}{(2\pi)^5 m_\mu} |\mathbf{p}'| dE' d\Omega' [(m_\mu^2 + m_e^2 - 2m_\mu E') m_\mu E' + 2m_\mu (m_\mu - E')(m_\mu E' - m_e^2)] \quad (16.66)$$

$$(d^3 p' = |\mathbf{p}'| E' dE' d\Omega')$$

$$= \frac{2\pi}{3} \frac{G^2}{(2\pi)^5} m_\mu E'^2 dE' d\Omega' (3m_\mu - 4E') \quad (m_e^2/m_\mu^2 \text{の項を無視}) \quad (16.67)$$

となる [本稿次節で補足]. これを電子の放射範囲 $d\Omega'$ の全方向と全エネルギー範囲 $0 \leq E' \leq m_\mu/2$ にわたって積分すると、全崩壊頻度 (16.68) が導かれる [本稿次節で補足].

16.6.1 について

■ミュー粒子の崩壊過程 (16.39) について レプトン数 $N(e), N(\mu)$ と電荷の保存則を満たしていることが見て取れる.

■Feynman 振幅 (16.40) について ここではレプトンの種類をスピノルの上付き添字として明記すると、図 39 のダイアグラムは Feynman 規則に基づき

$$\mathcal{M} = [\bar{u}_{r'}^{(e)}(\mathbf{p}') \{-ig_W \gamma^\alpha (1 - \gamma_5)\} v_{r_1}^{(\nu_e)}(\mathbf{q}_1)] iD_{F\beta\alpha}(k, m_W) [\bar{u}_{r_2}^{(\nu_\mu)}(\mathbf{q}_2) \{-ig_W \gamma^\beta (1 - \gamma_5)\} u_r^{(\mu)}(\mathbf{p})] : (16.40)$$

に翻訳される.

IVB 理論に対する Feynman 規則 (16.4 節) の起源を明確に理解するために、この Feynman 振幅を直接導こう. これは S 行列展開の 2 次の項

$$S^{(2)} = \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x d^4y T \{ \mathcal{H}_I(x) \mathcal{H}_I(y) \}$$

$$= \frac{(-ig_W)^2}{2} \sum_{l, l'} \int d^4x d^4y T \left[\{ \bar{\psi}_{\nu_l} W (1 - \gamma_5) \psi_l + \bar{\psi}_l W^\dagger (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l} \}_x \{ \bar{\psi}_{\nu_{l'}} W (1 - \gamma_5) \psi_{l'} + \bar{\psi}_{l'} W^\dagger (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_{l'}} \}_y \right]$$

から現れる. ミュー粒子の崩壊過程 (16.39) を始・終状態 i, f に選ぶと、反応の確率振幅は

$$\langle f | S^{(2)} | i \rangle = \frac{(-ig_W)^2}{2} \int d^4x d^4y \left[\langle f | N \left\{ \bar{\psi}_{\nu_\mu}(x) \underline{W}(x) (1 - \gamma_5) \psi_\mu(x) \bar{\psi}_e(y) \underline{W}^\dagger(y) (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e}(y) \right\} | i \rangle \right.$$

$$\left. + \langle f | N \left\{ \bar{\psi}_e(x) \underline{W}^\dagger(x) (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e}(x) \bar{\psi}_{\nu_\mu}(y) \underline{W}(y) (1 - \gamma_5) \psi_\mu(y) \right\} | i \rangle \right]$$

$$= \frac{(-ig_W)^2}{2} \int d^4x d^4y \left\{ \left(\frac{m_{\nu_\mu}}{VE_{\mathbf{q}_2}} \right)^{1/2} \bar{u}_{r_2}^{(\nu_\mu)}(\mathbf{q}_2) e^{iq_2 \cdot x} \right\} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \left\{ \left(\frac{m_\mu}{VE_{\mathbf{p}}}} \right)^{1/2} \bar{u}_r^{(\mu)}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} \right\}$$

$$\times iD_{F\alpha\beta}(x - y, m_W) \left\{ \left(\frac{m_e}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \bar{u}_{r'}^{(e)}(\mathbf{p}') e^{ip' \cdot y} \right\} \gamma^\beta (1 - \gamma_5) \left\{ \left(\frac{m_{\nu_e}}{VE_{\mathbf{p}_1}} \right)^{1/2} \bar{v}_{r_1}^{(\nu_e)}(\mathbf{q}_1) e^{iq_1 \cdot y} \right\}$$

$$+ \dots$$

と計算される。ここで最右辺の「…」の部分は積分変数の入れ替え $x \leftrightarrow y$ により第 1 項に一致することに注意し、また

$$iD_{\text{F}\alpha\beta}(x-y, m_W) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot (x-y)} iD_{\text{F}\alpha\beta}(k, m_W) \quad (\because iD_{\text{F}\alpha\beta}(-k, m_W) = iD_{\text{F}\alpha\beta}(k, m_W))$$

と Fourier 展開した上で x と y に関する積分を実行すると、

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(2)} | i \rangle &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + q_1 + q_2 - p) \left(\frac{m_\mu}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \left(\frac{m_e}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \left(\frac{m_{\nu_e}}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \left(\frac{m_{\nu_\mu}}{VE_{\mathbf{q}_2}} \right)^{1/2} \mathcal{M}, \\ \mathcal{M} &= [\bar{u}_{r'}^{(e)}(\mathbf{p}') \{-ig_W \gamma^\alpha (1 - \gamma_5)\} v_{r_1}^{(\nu_e)}(\mathbf{q}_1)] iD_{\text{F}\alpha\beta}(k, m_W) [\bar{u}_{r_2}^{(\nu_\mu)}(\mathbf{q}_2) \{-ig_W \gamma^\beta (1 - \gamma_5)\} u_r^{(\mu)}(\mathbf{p})] : (16.40) \end{aligned}$$

が得られる。

■点接触型相互作用 (16.44) について 式 (16.44) の相互作用 Hamiltonian 密度は g_W の 2 次の量であり、これに対してミュー粒子崩壊 (16.39) の最低次の Feynman 振幅は S 行列展開の 1 次の項

$$S^{(1)} = -i \int d^4x \mathcal{H}_1^{(\text{F})}(x) = -i \frac{G}{\sqrt{2}} \sum_{l,l'} \int d^4x \{ \bar{\psi}_l \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l} \bar{\psi}_{\nu_{l'}} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{l'} \}_x$$

から現れる。確率振幅は

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(1)} | i \rangle &= -i \frac{G}{\sqrt{2}} \int d^4x \left[\langle f | \bar{\psi}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_\mu} \bar{\psi}_{\nu_e} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \psi_e | i \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle f | \bar{\psi}_e \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e} \bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \psi_\mu | i \rangle \right] \end{aligned}$$

であり、これを元の IVB 理論における表式 (上記) と比較すると、確かにこれは $m_W^2 \gg k_\alpha k_\beta$ の場合の伝播関数の置き換え

$$(-ig_W)^2 iD_{\text{F}\alpha\beta}(x-y, m_W) \rightarrow -i \frac{G}{\sqrt{2}} g_{\alpha\beta}, \quad \therefore iD_{\text{F}\alpha\beta}(x-y, m_W) \rightarrow \frac{ig_{\alpha\beta}}{m_W^2}$$

を行った結果に相当していることが分かる。

■スピンの和と平均をとった式 (16.46) について

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha &\equiv \gamma^\alpha (1 - \gamma_5), & \tilde{\Gamma}^\alpha &\equiv \gamma^0 \Gamma^{\alpha\dagger} \gamma^0 = \gamma^0 (1 - \gamma_5) (\gamma^0 \gamma^\alpha \gamma^0) \gamma^0 \\ & & &= \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \end{aligned}$$

と書き、

$$[\bar{u}_{r'}(\mathbf{p}') \Gamma^\alpha v_{r_1}(\mathbf{q}_1)]^* = [\bar{u}_{r'}(\mathbf{p}') \Gamma^\alpha v_{r_1}(\mathbf{q}_1)]^\dagger = v_{r_1}^\dagger(\mathbf{q}_1) \Gamma^{\alpha\dagger} u_{r'}(\mathbf{p}') = \bar{v}_{r_1}(\mathbf{q}_1) \tilde{\Gamma}^\alpha u_{r'}(\mathbf{p}'), \quad \text{etc.}$$

に注意すると,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{G^2}{4} \sum_{r,r',r_1,r_2} [[\bar{u}_{r'}(\mathbf{p}')\Gamma^\alpha v_{r_1}(\mathbf{q}_1)][\bar{u}_{r_2}(\mathbf{q}_2)\Gamma_\alpha u_r(\mathbf{p})]]^2 \\
&= \frac{G^2}{4} \left(\sum_{r',r_1} [\bar{v}_{r_1}(\mathbf{q}_1)\tilde{\Gamma}^\beta u_{r'}(\mathbf{p})][\bar{u}_{r'}(\mathbf{p}')\Gamma^\alpha v_{r_1}(\mathbf{q}_1)] \right) \left(\sum_{r_2,r} [\bar{u}_r(\mathbf{p})\tilde{\Gamma}_\beta u_{r_2}(\mathbf{q}_2)][\bar{u}_{r_2}(\mathbf{q}_2)\Gamma_\alpha u_r(\mathbf{p})] \right) \\
&= \frac{G^2}{4} \left(\sum_{r'} u_{r'\nu}(\mathbf{p})\bar{u}_{r'\rho}(\mathbf{p}') \right) \left(\sum_{r_1} \bar{v}_{r_1\sigma}(\mathbf{q}_1)v_{r_1\mu}(\mathbf{q}_1) \right) \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha \\
&\quad \times \left(\sum_{r_2} u_{r_2\nu'}(\mathbf{q}_2)\bar{u}_{r_2\rho'}(\mathbf{q}_2) \right) \left(\sum_r \bar{u}_{r\sigma'}(\mathbf{p})u_{r\mu'}(\mathbf{p}) \right) \tilde{\Gamma}_{\beta\mu'\nu'} \Gamma_{\alpha\rho'\sigma'} \\
&\quad (\mu, \nu, \rho, \sigma \text{ および } \mu', \nu', \rho', \sigma' \text{ はスピノル添字}) \\
&= \frac{G^2}{4} \text{Tr} \left[\frac{\not{p}' + m_e}{2m_e} \Gamma^\alpha \left(-\frac{\not{q}_1 + m_{\nu_e}}{2m_{\nu_e}} \right) \tilde{\Gamma}^\beta \right] \text{Tr} \left[\frac{\not{q}_2 + m_{\nu_\mu}}{2m_\mu} \Gamma_\alpha \frac{\not{p} + m_\mu}{2m_\mu} \tilde{\Gamma}_\beta \right] : (16.46)
\end{aligned}$$

を得る.

■縮約公式 (16.51) について 次のような単純計算により確かめられる.

$$\begin{aligned}
x^{\mu\alpha\nu\beta} x_{\sigma\alpha\tau\beta} &= (g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu} + i\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta})(g_{\sigma\alpha}g_{\tau\beta} - g_{\sigma\tau}g_{\alpha\beta} + g_{\sigma\beta}g_{\alpha\tau} + i\varepsilon_{\sigma\alpha\tau\beta}) \\
&= \delta_\sigma^\mu \delta_\tau^\nu - g_{\sigma\tau}g^{\mu\nu} + \delta_\sigma^\nu \delta_\tau^\mu + i\varepsilon_\sigma^{\mu\nu\tau} \\
&\quad - g^{\mu\nu}g_{\sigma\tau} + 4g^{\mu\nu}g_{\sigma\tau} - g^{\mu\nu}g_{\sigma\tau} + 0 \\
&\quad + \delta_\sigma^\nu \delta_\tau^\mu - g_{\sigma\tau}g^{\mu\nu} + \delta_\sigma^\mu \delta_\tau^\nu + i\varepsilon_\sigma^{\nu\mu\tau} \\
&\quad + i\varepsilon_\sigma^{\mu\nu\tau} + 0 + i\varepsilon_\tau^{\mu\nu\sigma} - \{-2(\delta_\sigma^\mu \delta_\tau^\nu - \delta_\tau^\mu \delta_\sigma^\nu)\} \\
&= 4\delta_\sigma^\mu \delta_\tau^\nu : (16.51).
\end{aligned}$$

■「積分 (16.54) の Lorentz 共変性」(p.448 下から 2 行目), 「積分 $I(q^2)$ は不変量」(p.449, l.10) について $d^3q_1/E_1, d^3q_2/E_2$ が Lorentz スカラーであること (式 (8.11)) による. デルタ関数はスカラー (密度) として変換する.

■ $I(q^2)$ の式 (16.61) について

$$\begin{aligned}
I(q^2) &= \int \frac{d^3q_1}{E_1} \frac{d^3q_2}{E_2} \delta^{(4)}(q_1 + q_2 - q) \\
&= \int d^3q_1 d^3q_2 \frac{\delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{q})\delta(2\omega - q_0)}{\omega^2} \\
&= \int d^3q_1 \frac{\delta(2\omega - q_0)}{\omega^2} \\
&= \int_0^\infty \frac{\delta(\omega - q_0/2)}{2\omega^2} 4\pi\omega^2 d\omega \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

■式 (16.62b) について

$$\begin{aligned}
 q_\mu q_\nu I^{\mu\nu}(q) &= \int \frac{d^3q_1}{E_1} \frac{d^3q_2}{E_2} (q \cdot q_1)(q \cdot q_2) \delta^{(4)}(q_1 + q_2 - q) \\
 &= \int \frac{d^3q_1}{E_1} \frac{d^3q_2}{E_2} (q_1^2 + q_1 \cdot q_2)(q_2^2 + q_1 \cdot q_2) \delta^{(4)}(q_1 + q_2 - q) \\
 &= \left(\frac{q^2}{2}\right)^2 I. \quad (\because q_1^2 = q_2^2 = 0, q_1 \cdot q_2 = q^2/2)
 \end{aligned}$$

■ニュートリノの運動量に関する積分を行った式 (16.64) について

$$d\Gamma \rightarrow \frac{4G^2}{(2\pi)^5 E} p_\mu p'_\nu \frac{d^3p'}{E'} I^{\mu\nu}(q)$$

に $I^{\mu\nu}(q)$ の式 (16.63) を代入する.

■ミュー粒子の静止系における式 (16.66) について $|\mathbf{p}'|^2 = E'^2 - m_e^2$ により $|\mathbf{p}'|d|\mathbf{p}'| = E'dE'$ であり, また

$$\begin{aligned}
 q^2 &= (m_\mu - E')^2 - |\mathbf{p}'|^2 = m_\mu^2 - 2m_\mu E' + m_e^2, \\
 p \cdot p' &= m_\mu E', \\
 p \cdot q &= m_\mu(m_\mu - E'), \\
 p' \cdot q &= E'(m_\mu - E') + |\mathbf{p}'|^2 = m_\mu E' - m_e^2
 \end{aligned}$$

となる.

■式 (16.67) について m_e^2 を無視する近似では $|\mathbf{p}'| = E'$ である. 右辺において $E'^2 \rightarrow E'^2$ と訂正する (本稿では訂正済み).

■全エネルギー範囲 $0 \leq E' \leq m_\mu$ にわたる積分 (16.68) について ニュートリノの質量をゼロと置いたため $|\mathbf{q}_1| = E_1, |\mathbf{q}_2| = E_2$ であり, また電子に対しても m_e^2 を無視する近似の下では同様に $|\mathbf{p}'| = E'$ である. よって始状態のミュー粒子の静止系におけるエネルギー・運動量保存則は

$$m_\mu = |\mathbf{p}'| + |\mathbf{q}_1| + |\mathbf{q}_2|, \quad 0 = \mathbf{p}' + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2$$

と表され, ここから $E' = |\mathbf{p}'|$ の取り得る値の範囲

$$|\mathbf{p}'| = |\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2| \leq |\mathbf{q}_1| + |\mathbf{q}_2| = m_\mu - |\mathbf{p}'|, \quad \therefore |\mathbf{p}'| \leq m_\mu/2$$

が見出される.

$$\int_0^{m_\mu} E'^2 (3m_\mu - 4E') dE' = m_\mu \left(\frac{m_\mu}{2}\right)^3 - \left(\frac{m_\mu}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} m_\mu^2, \quad \int d\Omega = 4\pi.$$

■「式 (11.16) のところで」 (p.451, l.20) について 正しくは「式 (16.16) のところ」と考えられる.

16.7 ニュートリノの質量

ここではニュートリノの質量が正確にはゼロでないことに起因する現象として、

- ニュートリノ振動
- レプトン数保存の破れ

を取り上げる。

16.7.1 ニュートリノ振動

ニュートリノがゼロでない質量を持つ場合、ニュートリノ状態は質量固有状態 ν_1, ν_2, ν_3 の混合状態

$$\nu_l = \sum_{i=1}^3 U_{li} \nu_i, \quad l = e, \mu, \tau$$

と考えることができる [U_{li} は定数]。各成分 ν_i は質量の異なる固有値を持つため、付随する量子力学的波動は異なる振動数 (エネルギー) を持つことになり、ニュートリノのビームに沿って成分 $\{\nu_i\}$ の組成は変動する。このような現象はニュートリノ振動と呼ばれ、その存在が実験的に確かめられたことから、ニュートリノがゼロでない質量を持つことが明らかになった。

16.7.1 について

■ニュートリノの Lagrangian 密度 (16.90a) について U は

$$\sum_l U_{li}^\dagger U_{lj} = \delta_{ij}, \quad \sum_j U_{lj} U_{l'j}^\dagger = \delta_{ll'}$$

を満たすユニタリー行列であると仮定すると、

$$\psi_i = \sum_l U_{li}^\dagger \psi_{\nu_l}, \quad \bar{\psi}_i = \sum_l \bar{\psi}_{\nu_l} U_{li}$$

なので

$$\begin{aligned} \sum_j \bar{\psi}_j i \not{\partial} \psi_j &= \sum_{l,l'} \left(\sum_j U_{lj} U_{l'j}^\dagger \right) \bar{\psi}_{\nu_l} i \not{\partial} \psi_{\nu_{l'}} = \sum_l \bar{\psi}_{\nu_l} i \not{\partial} \psi_{\nu_l}, \\ \sum_j \bar{\psi}_j m_j \psi_j &= \sum_{l,l'} \bar{\psi}_{\nu_l} G_{ll'} \psi_{\nu_{l'}}, \quad G_{ll'} \equiv \sum_j U_{lj} m_j U_{l'j}^\dagger : (16.90b) \end{aligned}$$

となる。

16.7.2 Dirac ニュートリノか Majorana ニュートリノか？

γ 行列が純虚数となる Majorana 表示の下で、ニュートリノに対して次の 2 通りの記述が可能である。

- Dirac ニュートリノ

ニュートリノと反ニュートリノを区別し、それぞれの生成演算子 $c_r^\dagger(\mathbf{p}), d_r^\dagger(\mathbf{p})$ を用いて式 (4.51):

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_{r,\mathbf{p}} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \{ c_r(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x} + d_r^\dagger(\mathbf{p})u_r^*(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} \}, \\ \psi^{\dagger T}(x) &= \sum_{r,\mathbf{p}} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \{ d_r(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x} + c_r^\dagger(\mathbf{p})u_r^*(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} \}\end{aligned}$$

のようにニュートリノ場を展開する.

- Majorana ニュートリノ

ニュートリノ場が実数の場となるように

$$\psi(x) = \sum_{r,\mathbf{p}} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \{ c_r(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x} + c_r^\dagger(\mathbf{p})u_r^*(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} \}$$

と展開する.

このとき ψ に共役な場 ψ^\dagger は存在せず,

また展開にはニュートリノに関する生成・消滅演算子 $c_r(\mathbf{p}), c_r^\dagger(\mathbf{p})$ のみが現れ,

ニュートリノは自身と区別されるような反粒子を持たない.

さて、ニュートリノの質量をゼロとする場合、 $P_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5)$ はヘリシティ演算子となり、 $\psi^{L,R} = P_{L,R}\psi$ を定義すると

- 自由場の ψ^L に対する方程式に ψ^R は関与しない (式 (16.93)).
- ボゾン場との相互作用には ψ^L だけが現れる (式 (16.16)).

そしてこの極限で弱い相互作用には、Dirac ニュートリノのうち

- ヘリシティが負のニュートリノ (ν_{l-} と書く)
- ヘリシティが正の反ニュートリノ ($\bar{\nu}_{l+}$ と書く)

だけが関与することになる (16.2 節). [よってレプトン数を

$$N(l) = N(l^-) - N(l^+) + N(\nu_{l-}) - N(\bar{\nu}_{l+})$$

と再定義すれば、これは保存する.] 反ニュートリノの存在しない Majorana 表示では、

$$N(l) = N(l^-) - N(l^+) + N(\nu_{l-}) - N(\nu_{l+})$$

によって定義されるレプトン数が保存する (ν_{l+} はヘリシティが正のニュートリノ). 質量ゼロの極限では Majorana の記述によるニュートリノ状態 ν_{l-}, ν_{l+} と、Dirac の記述による 2 つの状態 $\nu_{l-}, \bar{\nu}_{l+}$ を実験的に区別できず、これらの保存則は等価となる.

しかしながらニュートリノの質量がゼロでない場合、2 通りの記述の違いが検証可能となる. 実際、ニュートリノが生じない二重 β 崩壊

$$(Z, A) \rightarrow (Z+2, A) + 2e^- \quad (2n \rightarrow 2p^+ + 2e^-)$$

は Dirac ニュートリノでは禁じられるのに対し、Majorana ニュートリノでは可能である. ただし我々は以降も Dirac ニュートリノを仮定する.

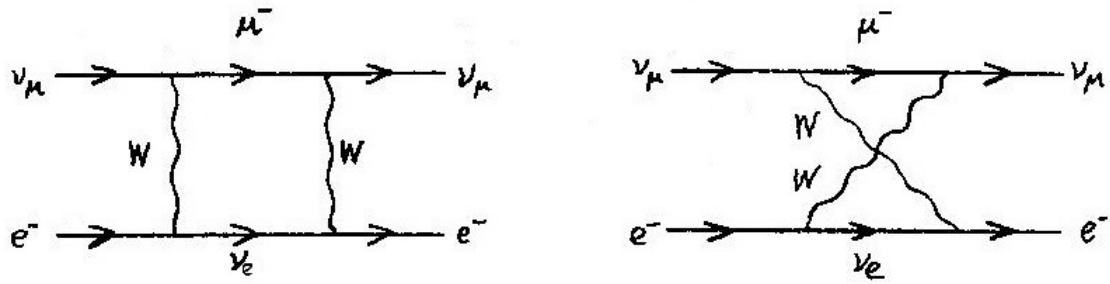


図 41 ν_μ - e^- 散乱の IVB 理論における最低次のダイアグラム

16.7.2 について

■ ψ^L と ψ^R に対する式 (16.93) について $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$: (A.8) により $P_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5)$: (16.14) に対して $P_{L,R}\gamma^\mu = \gamma^\mu P_{R,L}$ なので

$$0 = P_{L,R}(i\cancel{\partial} - m)\psi = (i\cancel{\partial}P_{R,L} - mP_{L,R})\psi = i\cancel{\partial}\psi^{R,L} - m\psi^{L,R}$$

となる。第 1 巻の問題 4.5(とそのノート) を併せて参照。

■ニュートリノの質量がゼロでない場合のレプトン数の保存について ニュートリノの質量がゼロでないとした場合に、二重 β 崩壊 (16.96) が Dirac ニュートリノに対して許容されず、Majorana ニュートリノに対して可能であること (p.458) は、式 (16.94) のような質量ゼロの極限におけるレプトン数の定義式からは判断できないと考えられる。

16.8 IVB 理論の困難

ν_μ - e^- 散乱

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$$

は如何なる保存則によっても禁じられていないにも関わらず、IVB 理論によって記述することはできない。実際、レプトンカレントにおいてミュー・ニュートリノを消滅させる項は μ^- を生成するため、図 41 のような 2 つの W ボゾンの交換を伴うグラフがこの反応の最低次の過程となる。ところがこの Feynman グラフから生じるループ積分は発散する。実は IVB 理論では繰り込み可能な理論ではないため、 ν_μ - e^- 散乱を評価することはできない。

また 2-ボゾン交換過程は 1-ボゾン交換過程よりも結合 g_W を余分に含んでいる。[ところが ν_μ - e^- 散乱の断面積の観測値は、1-ボゾン交換過程のそれと同程度である。] 電弱統一理論においては ν_μ - e^- 散乱は、1 つの中性ベクトルボゾン Z^0 の交換によって記述され [、それ故この問題は解消され] る。また Z^0 ボゾンの導入により初めて理論は繰り込み可能となる。

IVB 理論における発散の困難は、 W ボゾンの伝播関数

$$iD_{F\alpha\beta}(k, m_W) = \frac{i(-g_{\alpha\beta} + k_\alpha k_\beta / m_W^2)}{k^2 - m_W^2 + i\varepsilon}$$

における $k_\alpha k_\beta / m_W^2$ の項に由来する。実際この項のために、大きな k に対して伝播関数は定数のように振舞

い，ループ積分の発散が生じる．QEDにおいてゲージ不変性を利用して $k_\alpha k_\beta$ の項を避けることができたのと同様に [9.2 節]，弱い相互作用の理論もゲージ理論として定式化することで，繰り込み可能性を実現できる．

16.8 について

■ ν_μ - e^- 散乱の最低次の過程が 2 回の W ボゾンの交換を伴うこと (pp.459–460) について S 行列展開の 0 次の項は行列要素に δ_{fi} の寄与をする (式 (8.1))．ただし始・終状態の粒子が共通でも，一般に粒子のスピン・偏極状態や運動量が異なれば ($f \neq i$)，これはゼロとなる．

第 17 章 弱い相互作用のゲージ理論

本章では弱い相互作用をゲージ理論として定式化する。その際、中性ベクトルボゾンと中性のレプトンカレントが導入され、さらに弱い相互作用は電磁相互作用と自然に統一される。ところが理論のゲージ不変性は、全てのレプトンとベクトルボゾンが質量を持たないという困難へと導く。この問題は次章において解消される。

17.1 QED の復習

弱い相互作用をゲージ理論として定式化するための準備として、QED において理論の形を決定した方法を復習すると、それは以下のようにまとめられる。すなわち「基本的な考え方として、最初に自由場のラグランジアンを不変に保つような大域的位相変換の組を見出し、それに付随する適切な電荷-電流保存則を導く。これらの変換を、局所的な位相変換 (局所的ゲージ変換) へと一般化して、この局所変換における理論の不変性を仮定し、そこから相互作用の形を推定する」(17.1 節, 第 2 段落)。

17.2 大域的な位相変換と保存する弱カレント

前節の基本方針に従い、弱い相互作用のゲージ理論を構築しよう。[本節では「自由場のラグランジアンを不変に保つような大域的位相変換の組を見出し、それに付随する適切な電荷-電流保存則を導く」所までの作業を行う。]

手始めに全てのレプトン [ニュートリノを含む] は質量を持たないと仮定し、自由レプトン系の Lagrangian 密度を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= i(\bar{\psi}_l \not{\partial} \psi_l + \bar{\psi}_{\nu_l} \not{\partial} \psi_{\nu_l}) \\ &= i(\bar{\Psi}_l^L \not{\partial} \Psi_l^L + \bar{\psi}_l^R \not{\partial} \psi_l^R + \bar{\psi}_{\nu_l}^R \not{\partial} \psi_{\nu_l}^R), \quad \Psi_l^L \equiv \begin{pmatrix} \psi_l^L \\ \psi_{\nu_l}^L \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}_l^L \equiv (\bar{\psi}_{\nu_l}^L \quad \bar{\psi}_l^L) \end{aligned}$$

と書く [第 2 の等号については本稿次節を参照]。ただしこれ以降、繰り返されたレプトンの添字 l については全ての世代 $l = e, \mu, \tau$ にわたって和をとるものと約束する。また任意の Dirac スピノル ψ に対して左手型と右手型の場を

$$\psi^{L,R} = P_{L,R} \psi = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5) \psi$$

と定義しており、最右辺では Lagrangian 密度を敢えて右手型と左手型に関して非対称な形に書いている。なお 17.5 節以降において、実際のレプトンは質量を持つという問題に立ち戻る。

この自由場の Lagrangian 密度を不変に保つような大域的位相変換は、Pauli 行列 τ_1, τ_2, τ_3 に対してユニタリ行列

$$U(\alpha) \equiv \exp(i\alpha_j \tau_j / 2)$$

を用いて

$$\Psi_l^L \rightarrow U(\alpha) \Psi_l^L, \quad \bar{\Psi}_l^L \rightarrow \bar{\Psi}_l^L U^\dagger(\alpha)$$

と行われる。実際このとき左手型の場に関する項 $i\bar{\Psi}_l^L \not{\partial} \Psi_l^L$ は不変に保たれる。よって右手型の場 ψ^R の各々をこの変換に対して不変と見なせば、Lagrangian 密度 \mathcal{L}_0 の不変性が保証される。

- 2次元のユニタリ一行列 $U(\alpha) \equiv \exp(i\alpha_j \tau_j/2)$ によるこの変換を SU(2) 変換と呼ぶ。
[$\Psi_l^L \rightarrow U(\alpha)\Psi_l^L$ は SU(2) 変換の最も一般的な形である.]
 - S は条件 $\det U(\alpha) = +1$ を表す “特殊 (special)” を意味する [3, p.230].
 - Pauli 行列が非可換であることから, この変換は非 Abel 群を作ると言われる.
 - “SU(2)” や “非 Abel” などの術語は群論から引用しているが,
これ以降の議論において群論の予備知識は必要ではない」(p.468 脚注) に注目する.
- SU(2) 変換に対する変換性から
 - 2成分場 Ψ_l^L は弱アイソスピノル
 - 右手型の場 ψ^R の各々は弱アイソスカラー
と呼ばれる.

この SU(2) 変換に対する Lagrangian の不変性から, 保存する電荷-電流密度として

$$J_i^\alpha = \frac{1}{2} \bar{\Psi}_l^L \gamma^\alpha \tau_i \Psi_l^L \quad (i = 1, 2, 3) \quad (17.20)$$

と弱アイソスピン電荷

$$I_i^W = \int d^3x J_i^0 = \frac{1}{2} \int d^3x \Psi_l^{L\dagger} \tau_i \Psi_l^L$$

が導かれる [カレント (17.20) の導出は本稿次節を参照]. これは IVB 理論におけるレプトン (荷電) カレント

$$\begin{aligned} J^\alpha &= \bar{\psi}_l \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l} = 2(J_1^\alpha - J_2^\alpha), \\ J^{\alpha\dagger} &= \bar{\psi}_{\nu_l} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_l = 2(J_1^\alpha + J_2^\alpha) \end{aligned} \quad (17.22)$$

が保存するカレントであること [確認は本稿次節を参照] に加え, “中性カレント”

$$J_3^\alpha = \frac{1}{2} \bar{\Psi}_l^L \gamma^\alpha \tau_3 \Psi_l^L = \frac{1}{2} (\bar{\psi}_{\nu_l}^L \gamma^\alpha \psi_{\nu_l}^L + \bar{\psi}_l^L \gamma^\alpha \psi_l^L)$$

が保存することを意味する. さらに電磁カレントを $s^\alpha = -e \bar{\psi}_l \gamma^\alpha \psi_l$ として, 弱超電荷カレント

$$J_Y^\alpha = \frac{1}{e} s^\alpha - J_3^\alpha$$

を定義する. このとき弱アイソスピン電荷 I_3^W の保存は通常電荷 Q の保存則と合わせると, 弱超電荷

$$Y \equiv \int d^3x J_Y^3 = \frac{Q}{e} - I_3^W$$

が保存することを意味する. [今一度確認すると, 正確には保存するのはカレントではなく電荷であり, 保存するカレントとは保存する電荷に対するカレントのことである.]

ここで左手型の [すなわちヘリシティが負の] レプトン l^- が 1 個だけ存在している状態を $|l^-, L\rangle$ 等と書き, レプトンの 1 粒子状態について各種電荷の固有値を調べると, その結果は表 3 のようにまとめられる [I_3^W の固有値の計算は本稿次節を参照].

なお ψ を $\psi_{\nu_l}^L, \psi_l^L, \psi_{\nu_l}^R, \psi_l^R$ のいずれかとし, Y を場 ψ によって消滅する粒子の弱超電荷とすると, 弱超電荷 Y の保存は変換

$$\psi \rightarrow e^{i\beta Y} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-i\beta Y} \quad (17.30)$$

(U(1) 変換と呼ばれる) に対する Lagrangian の不変性から直接導かれる [本稿次節で確認]. したがって弱い相互作用の理論では, 対称性から弱アイソスピン電荷と弱超電荷の保存が独立に導かれ, 逆に通常電荷保存則が保証されることになる.

表3 レプトンの1粒子状態における各種電荷の固有値

	$ l^-, L\rangle$	$ \nu_l, L\rangle$	$ l^-, R\rangle$	$ \nu_l, R\rangle$
Q/e	-1	0	-1	0
I_3^W	-1/2	+1/2	0	0
Y	-1/2	-1/2	-1	0

17.2 について

■自由レプトン系の Lagrangian 密度 (17.12) について 射影演算子の性質 $P_L + P_R = 1$ により, 任意の Dirac スピノル ψ に対して $\psi = \psi^L + \psi^R$ である. また式 (16.16) のところの議論と同様に

$$\bar{\psi}^{L,R} \equiv (\psi^{L,R})^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2} \{ (1 \mp \gamma_5) \psi \}^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger \frac{1}{2} (1 \mp \gamma_5) \gamma^0 = \bar{\psi} \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5) = \bar{\psi} P_{R,L}$$

(ただし式 (A.8): $(\gamma_5)^\dagger = \gamma_5$, $[\gamma_5, \gamma^0]_+ = 0$ を考慮した) と考える. すると $\bar{\psi} = \bar{\psi}^L + \bar{\psi}^R$ であり, さらに射影演算子に対して期待される性質

$$P_L P_R = P_R P_L = \frac{1}{4} \{ 1 - (\gamma_5)^2 \} = 0$$

により

$$\bar{\psi}^L i \not{\partial} \psi^R = \bar{\psi} P_R i \not{\partial} P_R \psi = \bar{\psi} i \not{\partial} P_L P_R \psi = 0, \quad \bar{\psi}^R i \not{\partial} \psi^L = \bar{\psi} P_L i \not{\partial} P_L \psi = \bar{\psi} i \not{\partial} P_R P_L \psi = 0$$

となることに注意すると,

$$\bar{\psi} i \not{\partial} \psi = (\bar{\psi}^L + \bar{\psi}^R) i \not{\partial} (\psi^L + \psi^R) = \bar{\psi}^L i \not{\partial} \psi^L + \bar{\psi}^R i \not{\partial} \psi^R$$

と書き換えられる.

■自由レプトン系の Lagrangian 密度 (17.14) について 2成分スピノル $\Psi_l^L, \bar{\Psi}_l^L$ と 4×4 の γ 行列との積が定義されていないことに対する疑義が生じ得るけれど, 式 (17.14) の導き方から分かるように, これ以降 γ 行列はスピノルの2成分に分配されるものと解す:

$$\bar{\Psi}_l^L i \not{\partial} \Psi_l^L = \bar{\psi}_{\nu_l}^L i \not{\partial} \psi_{\nu_l}^L + \bar{\psi}_l^L i \not{\partial} \psi_l^L.$$

■Pauli 行列と SU(2) 変換について Pauli 行列 (17.15) に対する交換関係 (17.16) や, 演算子 (17.17): $U(\alpha) \equiv \exp(i\alpha_j \tau_j / 2)$ がユニタリーであって $\det U(\alpha) = +1$ を満たすこと (p.468) については, 文献 [3, pp.222–224, pp.228–229] を参照.

SU(3) 変換に関する 11.2.2 節のノートのまとめから分かるように, 一般に SU(N) 変換では生成子 T_i , 保存する電荷, 導入されるゲージ場はそれぞれ $N^2 - 1$ 種類である. 今考えている $N = 2$ の場合, Pauli 行列 τ_i , 弱アイソスピン電荷 I_i^W , ゲージ場 $W_i^\mu(x)$ (17.3 節) はそれぞれ3種類である ($i = 1, 2, 3$).

■弱アイソスピノルカレント (17.20) について

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\alpha \Psi_l^L)} = i \bar{\Psi}_l^L \gamma^\alpha, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\alpha \bar{\Psi}_l^L)} = 0$$

なので、カレントの一般的な表式 $f^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \delta \phi_r$ (p.38, 1.2) は今の場合

$$(i\bar{\Psi}_l^L \gamma^\alpha) \left(\frac{i\alpha_i \tau_i}{2} \Psi_l^L \right) = -\alpha_i J_i^\alpha, \quad J_i^\alpha \equiv \frac{1}{2} \bar{\Psi}_l^L \gamma^\alpha \tau_i \Psi_l^L : (17.20)$$

を与える。3つの変換のパラメーター α_i を独立に選べることから、各 $J_i^\alpha (i = 1, 2, 3)$ が保存するカレントとなる。

■弱アイソスピнкаレントとレプトンカレントの関係 (17.22) について 式 (17.15) の Pauli 行列 τ_i に対して

$$\tau_1 - i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_1 + i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので、

$$2(J_1^\alpha - iJ_2^\alpha) = (\bar{\psi}_{\nu_l}^L \quad \bar{\psi}_l^L) \gamma^\alpha (\tau_1 - i\tau_2) \begin{pmatrix} \psi_{\nu_l}^L \\ \psi_l^L \end{pmatrix} = 2\bar{\psi}_l^L \gamma^\alpha \psi_{\nu_l}^L,$$

$$2(J_1^\alpha + iJ_2^\alpha) = (\bar{\psi}_{\nu_l}^L \quad \bar{\psi}_l^L) \gamma^\alpha (\tau_1 + i\tau_2) \begin{pmatrix} \psi_{\nu_l}^L \\ \psi_l^L \end{pmatrix} = 2\bar{\psi}_{\nu_l}^L \gamma^\alpha \psi_l^L$$

となる。これらは式 (16.16) の導出と同様の計算により、それぞれ

$$\bar{\psi}_l \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l}, \quad \bar{\psi}_{\nu_l} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_l$$

と書き換えられる。

■弱超電荷カレントの式 (17.25) について \mathcal{L}_0 の式 (17.12) の導出と同様の計算により

$$\frac{1}{e} s^\alpha = -\bar{\psi}_l \gamma^\alpha \psi_l = -\bar{\psi}_l^L \gamma^\alpha \psi_l^L - \bar{\psi}_l^R \gamma^\alpha \psi_l^R$$

となるので、

$$J_Y^\alpha \equiv \frac{1}{e} s^\alpha - J_3^\alpha$$

$$= -\frac{1}{2} (\bar{\psi}_l^L \gamma^\alpha \psi_l^L + \bar{\psi}_{\nu_l}^L \gamma^\alpha \psi_{\nu_l}^L) - \bar{\psi}_l^R \gamma^\alpha \psi_l^R$$

$$= -\frac{1}{2} \bar{\Psi}_l^L \gamma^\alpha \Psi_l^L - \bar{\psi}_l^R \gamma^\alpha \psi_l^R : (17.25)$$

を得る。

■「これらの結果を、より正當的に導出するには、……代入すればよい」(p.471, 1.2.3) について

$$I_3^W = \frac{1}{2} \int d^3x (\psi_{\nu_l}^{L\dagger} \psi_{\nu_l}^L - \psi_l^{L\dagger} \psi_l^L)$$

において、場の展開には

- ヘリシティが負の ($r = 2$) 粒子 l^-, ν_l
- ヘリシティが正の ($r = 1$) 反粒子 $l^+, \bar{\nu}_l$

の生成・消滅演算子のみが含まれる。そこで 1 粒子状態 $|l^-, L\rangle, |\nu_l, L\rangle$ のいずれかを $|\dots\rangle$ と書くと, $I_3^W |\dots\rangle$ への寄与は, 考えている粒子の生成・消滅演算子 c_2^\dagger, c_2 を含む項から現れる:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int d^3x \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} u_2^\dagger(\mathbf{p}') u_2(\mathbf{p}) e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} c_2^\dagger(\mathbf{p}') c_2(\mathbf{p}) |\dots\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \frac{m}{V(E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}'})^{1/2}} u_2^\dagger(\mathbf{p}') u_2(\mathbf{p}) (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') c_2^\dagger(\mathbf{p}') c_2(\mathbf{p}) |\dots\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} c_2^\dagger(\mathbf{p}) c_2(\mathbf{p}) |\dots\rangle \quad \left(\because \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}'} \rightarrow \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} : (1.48), \quad u_r^\dagger(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) = \frac{E_{\mathbf{p}}}{m} \delta_{rs} : (4.37) \right) \\ &= \frac{1}{2} |\dots\rangle. \end{aligned}$$

なお以上の計算において

$$u_2 \rightarrow v_1, \quad u_2^\dagger \rightarrow v_1^\dagger, \quad c_2^\dagger \rightarrow d_1, \quad c_2 \rightarrow d_1^\dagger$$

と置き換えれば, ヘリシティが正の反粒子に対しても弱アイソスピン電荷 I_3^W の固有値を調べることができ, 同様に

$$I_3^W |l^+, R\rangle = -\frac{1}{2} |l^+, R\rangle, \quad I_3^W |\bar{\nu}_l, R\rangle = +\frac{1}{2} |\bar{\nu}_l, R\rangle$$

となると考えられる。このとき「場 ψ によって消滅する粒子の弱超電荷」(p.472, 1.2) は同時に, 場 ψ によって生成する粒子の弱超電荷でもあることになる。

ここでの議論は QCD において, 色スピノルの持つ色演算子 \hat{F}_i の固有値を, 場の量子論に移行して再び導いたことに対応している (11.2 節)。

■大域的 U(1) 変換 (17.30) から弱超電荷の保存が導かれることについて 各レプトン場 $\psi = \psi_{\nu_l}^L, \psi_l^L, \psi_{\nu_l}^R, \psi_l^R$ に対して

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\alpha \psi)} = i\bar{\psi}\gamma^\alpha, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\alpha \bar{\psi})} = 0$$

なので, カレントの一般的な表式 $f^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \delta \phi_r$ (p.38, 1.2) は今の場合

$$\sum_{\psi} (i\bar{\psi}\gamma^\alpha) (i\beta Y \psi) = \beta \left(\frac{1}{2} \bar{\Psi}_l^L \gamma^\alpha + \bar{\psi}_l^R \gamma^\alpha \psi_l^R \right) = -\beta J_Y^\alpha$$

を与える。

■大域的な位相変換と保存する電荷 (まとめ) 図 42 参照。ただし図 42 では文献 [8, pp.460–461] にならって, QED における U(1) 電磁ゲージ変換と本節の U(1) 弱超電荷変換 (17.30) をそれぞれ $U(1)_{\text{em}}, U(1)_Y$ と書いて区別した。

17.3 ゲージ不変な電弱相互作用

17.1 節で述べたように, 前節の大域的な位相変換としての SU(2) 変換と U(1) 変換 [式 (17.30) の変換を指す] を「局所的な位相変換 (局所的ゲージ変換) へと一般化して, この局所変換における理論の不変性を仮定し, そこから相互作用の形を推定する」作業に移る。

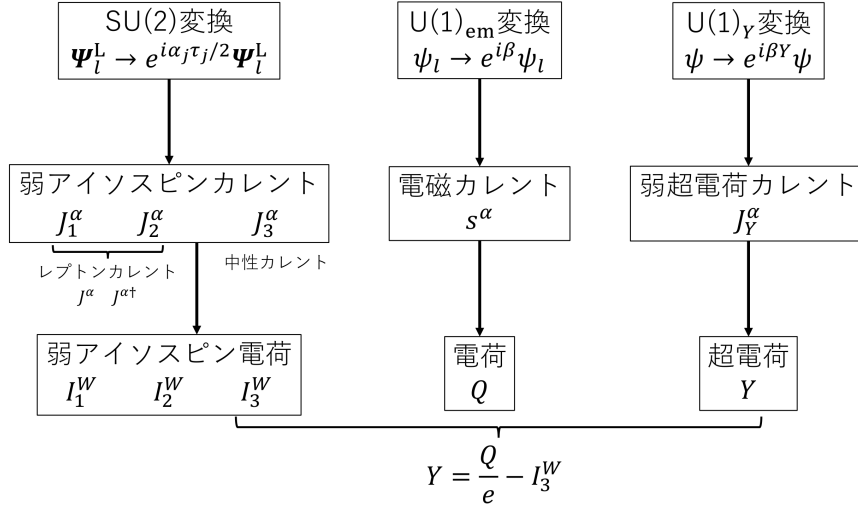


図 42 大域的な位相変換と保存する電荷 (17.2 節のまとめ)

まず SU(2) 変換において $\alpha_j \rightarrow g\omega_j(x)$ と置き換えた局所的位相変換を考える。ただし g は定数であり、後から [相互作用 Lagrangian 密度における] 結合定数に同定される。すると自由場 Lagrangian 密度 \mathcal{L}_0 において $\not{\partial}$ が関数 $\omega_j(x)$ に作用するため、 \mathcal{L}_0 は変換に対する不変性を失う。ゲージ不変性を回復するには、QCD の場合と同様に、無限小の $\omega_j(x)$ に対して

$$W_i^\mu \rightarrow W_i'^\mu = W_i^\mu - \partial^\mu \omega_i - g\varepsilon_{ijk}\omega_j W_k^\mu \quad (17.32b)$$

と変換する 3 つの実数のゲージ場 $W_i^\mu (i = 1, 2, 3)$ を導入し、Lagrangian 密度において微分の共変微分への置き換え

$$\partial^\mu \Psi_l^L \rightarrow D^\mu \Psi_l^L = [\partial^\mu + ig\tau_j W_j^\mu / 2] \Psi_l^L$$

を行えば良い。

次に U(1) 変換において $\beta \rightarrow g'f(x)$ と置き換えた局所的位相変換を考えると (g' は実定数)、レプトン場の変換と同時に

$$B^\mu \rightarrow B'^\mu = B^\mu - \partial^\mu f \quad (17.37b)$$

と変換される実ゲージ場 $B^\mu(x)$ を導入し、各レプトン場 $\psi = \psi_l^L, \psi_{\nu_l}^L, \psi_l^R, \psi_{\nu_l}^R$ に対して微分の共変微分への置き換え

$$\partial^\mu \psi \rightarrow D^\mu \psi = [\partial^\mu + ig'YB^\mu] \psi$$

を行えば、Lagrangian 密度のゲージ不変性が保証される。

以上により正味の共変微分は

$$\begin{aligned} D^\mu \Psi_l^L &= \left[\partial^\mu + \frac{i}{2} g\tau_j W_j^\mu - \frac{i}{2} g' B^\mu \right] \Psi_l^L, \\ D^\mu \psi_l^R &= [\partial^\mu - ig' B^\mu] \psi_l^R, \\ D^\mu \psi_{\nu_l}^R &= \partial^\mu \psi_{\nu_l}^R \end{aligned}$$

となる。そして場 $W_i^\mu(x)$ は U(1) ゲージ変換の下で不変であり、 $B^\mu(x)$ は SU(2) ゲージ変換の下で不変であるものと考えれば、ここで定義した共変微分に対して、レプトン系の Lagrangian 密度

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^L &= i(\bar{\Psi}_l^L \not{D}\Psi_l^L + \bar{\psi}_l^R \not{D}\psi_l^R + \bar{\psi}_{\nu_l}^R \not{D}\psi_{\nu_l}^R) \\ &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \\ \mathcal{L}_1 &= -gJ_i^\mu W_{i\mu} - g'J_Y^\mu B_\mu\end{aligned}\quad (17.42)$$

は U(1) ゲージ変換と SU(2) ゲージ変換の下で不変となる (SU(2)×U(1) ゲージ不変)．[式 (17.42) の導出は本稿「17.3 について」の節を参照.]

ここで $W_{1\mu}$ と $W_{2\mu}$ の代わりに非 Hermite なゲージ場

$$W_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_{1\mu} - iW_{2\mu}), \quad W_\mu^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_{1\mu} + iW_{2\mu})$$

を導入し、また $W_{3\mu}$ と B_μ の代わりにこれらの 1 次結合

$$\begin{aligned}Z_\mu &= \cos\theta_W W_{3\mu} - \sin\theta_W B_\mu, \\ A_\mu &= \sin\theta_W W_{3\mu} + \cos\theta_W B_\mu\end{aligned}\quad (17.45)$$

(θ_W は弱混合角または Weinberg 角と呼ばれる) を用いて相互作用 Lagrangian 密度を表すことを考える．その際、場 A_μ を電磁場と見なして、これが相互作用 Lagrangian 密度に $-s^\mu A_\mu$ という形でのみ現れることを要求すると、弱混合角 θ_W は条件

$$g \sin\theta_W = g' \cos\theta_W = e \quad (17.47)$$

から定まり、

$$\mathcal{L}_1 = -s^\mu A_\mu - \frac{g}{2\sqrt{2}}(J^{\mu\dagger}W_\mu + J^\mu W_\mu^\dagger) - \frac{g}{\cos\theta_W}(J_3^\mu - \sin^2\theta_W s^\mu/e)Z_\mu \quad (17.48)$$

となる (導出は下記) [式 (17.47) が一見すると条件過剰であることについて、本稿「17.3 について」の節で考察].

- 第 1 項 $-s^\mu A_\mu$ は QED の相互作用である [電磁相互作用と弱い相互作用の統一].
- 第 2 項 $-\frac{g}{2\sqrt{2}}(J^{\mu\dagger}W_\mu + J^\mu W_\mu^\dagger)$ は、
 $g_W = \frac{g}{2\sqrt{2}}$ とおき、場 $W_\mu(x)$ を W ボゾンの量子場と見なせば、IVB 理論の相互作用に他ならない.
- 第 3 項は中性カレント

$$J_3^\mu - \sin^2\theta_W s^\mu/e = \frac{1}{4}\bar{\psi}_{\nu_l}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_{\nu_l} - \frac{1}{4}\bar{\psi}_l\gamma^\mu\{(1-4\sin^2\theta_W) - \gamma_5\}\psi_l \quad (17.50)$$

と場 Z_μ の相互作用を表し、実ベクトル場 Z_μ は中性ベクトルボゾン Z^0 の量子場と解釈される.

実験と整合する弱混合角の値は

$$\sin^2\theta_W = 0.23122 \pm 0.00015 \quad (17.51)$$

であり、これは中性カレントの右辺第 2 項がほとんど純粋な軸性カレントであることを意味している [$1 - 4\sin^2\theta_W \simeq 0$, 付録の式 (A.53) 参照].

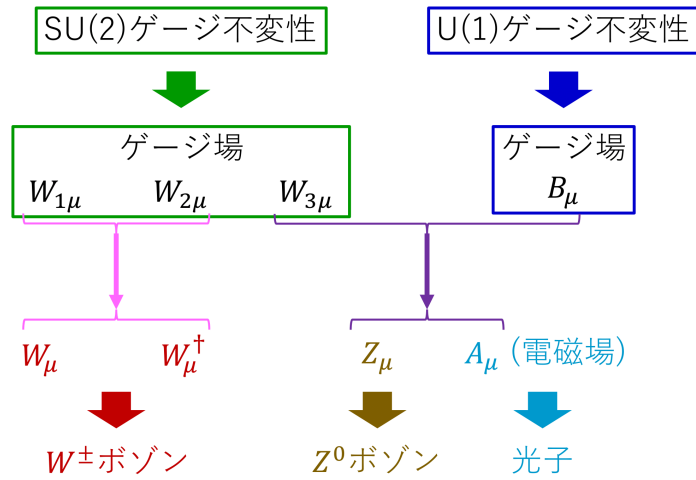


図 43 電弱相互作用を媒介するゲージボゾン

17.3 節, 式の導出など

■式 (17.47), 式 (17.48) の導出 \mathcal{L}_I の式 (17.42) の初めの 2 項は

$$-g \sum_{i=1}^2 J_i^{\mu} W_{i\mu} = \frac{-g}{2\sqrt{2}} (J^{\mu\dagger} W_{\mu} + J^{\mu} W_{\mu}^{\dagger}) \quad (17.44)$$

と書き換えられる [本稿次節で確認]. 残りの 2 項は

$$\begin{aligned} & -g J_3^{\mu} W_{3\mu} - g' J_Y^{\mu} B_{\mu} \\ &= -\frac{g'}{e} s^{\mu} (-\sin \theta_W Z_{\mu} + \cos \theta_W A_{\mu}) \\ & - J_3^{\mu} \{g(\cos \theta_W Z_{\mu} + \sin \theta_W A_{\mu}) - g'(-\sin \theta_W Z_{\mu} + \cos \theta_W A_{\mu})\} \end{aligned} \quad (17.46)$$

となる. ここでゲージ場 A_{μ} を電磁場と見なし, A_{μ} が \mathcal{L}_I の中に $-s^{\mu} A_{\mu}$ という形でのみ含まれることを要求する. そのためには上式 (17.46) において $J_3^{\mu} A_{\mu}$ の係数がゼロになり, $s^{\mu} A_{\mu}$ の係数が (-1) となれば良いから, 条件 (17.47) を得る. 式 (17.44), 式 (17.46) を \mathcal{L}_I の式 (17.42) に代入し, 式 (17.47) を用いて g' を消去すると式 (17.48) を得る [本稿次節で補足].

17.3 について

■相互作用 Lagrangian 密度 (17.42) について

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I &= \bar{\Psi}_l^L \left(-\frac{g}{2} \tau_i W_i + \frac{g'}{2} B \right) \Psi_l^L + \bar{\psi}_l^R g' B \psi_l^R \\ &= -g J_i^{\mu} W_{i\mu} - g' J_Y^{\mu} B_{\mu} : (17.42), \\ J_i^{\mu} &= \frac{1}{2} \bar{\Psi}_l^L \gamma^{\mu} \tau_i \Psi_l^L, \quad J_Y^{\mu} = -\frac{1}{2} \bar{\Psi}_l^L \gamma^{\mu} \Psi_l^L - \bar{\psi}_l^R \gamma^{\mu} \psi_l^R. \end{aligned}$$

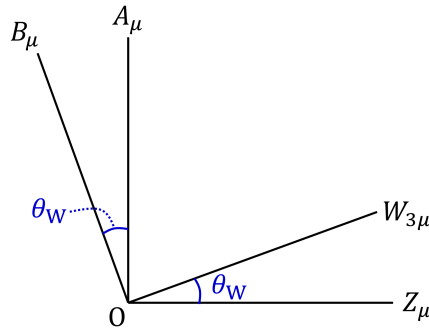


図 44 弱混合角 (Weinberg 角) θ_W

■式 (17.44) について

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{2}}(J^{\mu\dagger}W_\mu + J^\mu W_\mu^\dagger) &= \frac{1}{2}\{(J_1^\mu + iJ_2^\mu)(W_{1\mu} - iW_{2\mu}) + (J_1^\mu - iJ_2^\mu)(W_{1\mu} + iW_{2\mu})\} \\ &= J_1^\mu W_{1\mu} + J_2^\mu W_{2\mu}. \end{aligned}$$

■弱混合角 θ_W を定義する式 (17.45) と決定する式 (17.47) について 図 44 において, 同一の点を表す座標 $(W_{3\mu}, B_\mu)$, (Z_μ, A_μ) の間の関係は式 (17.45) によって与えられる.

式 (17.47):

$$g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W = e$$

は第 1 義的には弱混合角 θ_W を決定する式であるけれど, これは実質 2 つの条件式なので, 1 つの未知数 θ_W を定めるものと見なすと条件過剰である. 実際には式 (17.51) のような実験に合う θ_W の値を与えると, 式 (17.47) の関係を通して未知の結合定数 $g_W = \frac{g}{2\sqrt{2}}$: (17.49), g' の値が決まるものと考えられる.

■電弱相互作用の Lagrangian 密度 (17.48) について 式 (17.47): $g' = g \sin \theta_W / \cos \theta_W$ により, Z_μ の係数は

$$\frac{g'}{e} s^\mu \sin \theta_W - J_3^\mu (g \cos \theta_W + g' \sin \theta_W) = \frac{g}{\cos \theta_W} \left(J_3^\mu - \sin^2 \theta_W \frac{s^\mu}{e} \right)$$

と計算される.

■中性カレント (17.50) について 式 (17.23):

$$J_3^\alpha = \frac{1}{2} \bar{\Psi}_l^L \gamma^\alpha \tau_3 \Psi_l^L = \frac{1}{2} (\bar{\psi}_{\nu_l}^L \gamma^\alpha \psi_{\nu_l}^L - \bar{\psi}_l^L \gamma^\alpha \psi_l^L)$$

による.

17.4 ゲージボゾンの性質

完全な Lagrangian 密度を得るには, レプトン系の Lagrangian 密度 $\mathcal{L}^L = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$ に純粋なゲージボゾンの Lagrangian 密度 \mathcal{L}^B を加えて

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}^B$$

としなければならない．ここでは全てのゲージボゾンの質量をゼロとして，レプトンがない場合のゲージボゾンの項 \mathcal{L}^B を考える．実際には光子以外のゲージボゾンがゼロでない質量を持つことについては，次節以降で考察する．

- 場 $B^\mu(x)$ の Lagrangian 密度

場 $B^\mu(x)$ は電磁場と同様のゲージ変換 (17.37b) を受けるため，電磁場と同様に Lagrangian 密度を

$$-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \quad (\text{ただし } B^{\mu\nu} \equiv \partial^\nu B^\mu - \partial^\mu B^\nu)$$

とすれば，これは U(1) ゲージ不変となる．

Lagrangian 密度の SU(2) ゲージ不変性は，場 $B^\mu(x)$ の不変性から明らかである．

- 場 $W_i^\mu(x)$ の Lagrangian 密度

場 $W_i^\mu(x)$ はグルーオン場と同様のゲージ変換 (17.32b) を受けるため，

グルーオン場と同様に Lagrangian 密度を

$$-\frac{1}{4}G_{i\mu\nu}G_i^{\mu\nu} \quad (\text{ただし } G_i^{\mu\nu} \equiv F_i^{\mu\nu} + g\varepsilon_{ijk}W_j^\mu W_k^\nu, F_i^{\mu\nu} \equiv \partial^\nu W_i^\mu - \partial^\mu W_i^\nu)$$

とすれば，これは SU(2) ゲージ不変となる．

Lagrangian 密度の U(1) ゲージ不変性は，場 $W_i^\mu(x)$ の不変性から明らかである．

以上より SU(2)×U(1) 不変なゲージボゾンの Lagrangian 密度

$$\mathcal{L}^B = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{i\mu\nu}G_i^{\mu\nu}$$

を得る．これは電磁場， W^\pm ボゾン場， Z^0 ボゾン場に対する自由場 Lagrangian 密度の項

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^B &\equiv -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{i\mu\nu}F_i^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}F_{W\mu\nu}^\dagger F_{W\mu\nu}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu}, \\ Z^{\mu\nu} &\equiv \partial^\nu Z^\mu - \partial^\mu Z^\nu \end{aligned} \quad (17.59)$$

と，ゲージボゾン同士の相互作用を表す付加的な項

$$g\varepsilon_{ijk}W_{i\mu}W_{j\nu}\partial^\mu W_k^\nu - \frac{1}{4}g^2\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}W_j^\mu W_k^\nu W_{l\mu}W_{m\nu}$$

から成る．[式 (17.59) の導出は本稿次節．場 $W_{1\mu}, W_{2\mu}$ は W^\pm ボゾン場に，場 $W_{3\mu}$ は電磁場 A_μ と Z^0 ボゾン場 Z_μ に関係付けられていたことを思い出そう (図 43 参照).] このゲージボゾン同士の相互作用はゲージボゾンが弱アイソスピン電荷を持つことによるものであり，これは QCD においてグルーオンが色電荷を持つことに対応してグルーオン同士の相互作用を表す 3 グルーオン結節点や 4 グルーオン結節点が現れたのと同じ事情である．

17.4 について

■自由なゲージ場の Lagrangian 密度 (17.59) について 式 (17.45): $B_\mu = -\sin\theta_W Z_\mu + \cos\theta_W A_\mu$ より

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} &= \partial_\nu B_\mu - \partial_\mu B_\nu = -\sin\theta_W Z_{\mu\nu} + \cos\theta_W F_{\mu\nu}, \quad (Z_{\mu\nu} \equiv \partial_\nu Z_\mu - \partial_\mu Z_\nu) \\ \therefore B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} &= \sin^2\theta_W Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} + \cos^2\theta_W F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - 2\sin\theta_W \cos\theta_W Z_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

である。また式 (17.43): $W_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_{1\mu} - iW_{2\mu})$ より

$$\begin{aligned} F_{1\mu\nu}F_1^{\mu\nu} + F_{2\mu\nu}F_2^{\mu\nu} &= (\partial_\nu W_{1\mu} - \partial_\mu W_{1\nu})(\partial^\nu W_1^\mu - \partial^\mu W_1^\nu) + (\partial_\nu W_{2\mu} - \partial_\mu W_{2\nu})(\partial^\nu W_2^\mu - \partial^\mu W_2^\nu) \\ &= \{\partial_\nu(W_{1\mu} + iW_{2\mu}) - \partial_\mu(W_{1\nu} + iW_{2\nu})\}\{\partial^\nu(W_1^\mu + iW_2^\mu) - \partial^\mu(W_1^\nu + iW_2^\nu)\} \\ &= 2(\partial_\nu W_\mu^\dagger - \partial_\mu W_\nu^\dagger)(\partial^\nu W^\mu - \partial^\mu W^\nu) \\ &= 2F_{W\mu\nu}^\dagger F_W^{\mu\nu} \end{aligned}$$

である。さらに式 (17.45): $W_{3\mu} = \cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu$ より

$$\begin{aligned} F_{3\mu\nu} &= \partial_\nu W_{3\mu} - \partial_\mu W_{3\nu} = \cos\theta_W Z_{\mu\nu} + \sin\theta_W F_{\mu\nu}, \\ \therefore F_{3\mu\nu}F_3^{\mu\nu} &= \cos^2\theta_W Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} + \sin^2\theta_W F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2\sin\theta_W \cos\theta_W Z_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^B &\equiv -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{i\mu\nu}F_i^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}F_{W\mu\nu}^\dagger F_W^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} : (17.59) \end{aligned}$$

を得る。

17.5 レプトンとゲージボゾンの質量

ここまでは全てのレプトンとゲージボゾンの質量をゼロと扱ってきたけれど、実際には光子を除き、これらの粒子はゼロでない質量を持つ。ところがゲージボゾンの質量を考慮して Lagrangian 密度に質量項

$$m_W^2 W_\mu^\dagger W^\mu + \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu$$

を加えると、理論の $SU(2)\times U(1)$ 不変性が失われてしまう。同様にレプトンの質量を考慮して、例えば電子 (場 $\psi = \psi_e$, 質量 $m = m_e$) について Lagrangian 密度に質量項

$$-m\bar{\psi}\psi = -m\bar{\psi}(P_R + P_L)\psi = -m(\bar{\psi}^L\psi^R + \bar{\psi}^R\psi^L)$$

を加えることが考えられるけれど、最右辺を見れば明らかのようにこれは $SU(2)\times U(1)$ 不変性を持たない。[これは左手型の場と右手型の場とで変換則が異なるためであり、電磁的なゲージ変換や QCD におけるゲージ変換に対してこの項が不変であったのとは対照的である。] そして実はこれらの理論は繰り込み不能となる。そこで理論のゲージ不変性・繰り込み可能性を壊すことなくゼロでない質量を導入する方法として、自発的な対称性の破れについて次章で議論する。

17.5 について

■「そうすると 16.7 節で論じたような、質量を持つベクトルボゾンに付随する繰り込みの障害の問題が現れる」(p.479) について 正しくは 16.8 節のことと考えられる。この部分はゲージ不変性と繰り込み可能性の間に因果関係があるような印象を与えるが、ひとまずそれらを並列的に捉え、単純に「ゲージ不変性だけでなく繰り込み可能性も失われる」という意味にとって良からう。しかしながら第 18 章の序文には「繰り込み可能な理論を得るためには、ラグランジアン密度のゲージ不変性を保持したままで質量を導入することが不可欠である」とある。例えば 18.2 節で説明されている、自発的対称性を破っているゲージ理論は繰り込み可能である (pp.489-491)。

第 18 章 自発的な対称性の破れ

本章では自発的な対称性の破れの機構により, Lagrangian 密度のゲージ不変性を (したがって理論の繰り込み可能性を) 損なうことなく質量が導入されることを説明する.

- 18.1 節

Goldstone モデル (U(1) 位相変換の下で不変な場の理論のモデル) において, 自発的な対称性の破れの概念を導入する.

Goldstone モデルからは自然界で観測されない質量ゼロの (光子以外の) ボゾンが生じる.

- 18.2 節

この問題は全域的な位相変換を局所的な位相変換に改めてゲージ不変な理論を構築し, 自発的な対称性の破れを導入することによって解消すること (Higgs 機構) を説明する.

- 18.3 節

以上を SU(2)×U(1) ゲージ不変な電弱理論へと一般化

→ Weinberg と Salam による電弱標準理論

ゲージ不変・繰り込み可能であり, Lagrangian 密度が W^\pm, Z^0 ボゾンの質量項を含む.

18.1 Goldstone モデル

まず初めに自発的な対称性の破れの身近な例として, 強磁性を取り上げよう. 磁性体の系の Hamiltonian は回転に対して不変であるにも関わらず, 基底状態では磁性体全体として特定の方向を向いたゼロでない磁化 \mathbf{M} が生じており, \mathbf{M} の方向の異なる状態が縮退している. このように縮退した状態から任意の状態が選ばれると, その基底状態は一般に系の Lagrangian や Hamiltonian と同じ対称性を持たず, 非対称な基底状態が現れる (自発的な対称性の破れ).

場の理論においても基底状態 (真空) が縮退していれば, 自発的な対称性の破れが起こり得る. このことを最も簡単な理論モデルである, Goldstone モデルを用いて説明する. Goldstone モデルでは複素スカラー場

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\phi_1(x) + i\phi_2(x)\}$$

[$\phi_1(x), \phi_2(x)$ は実スカラー場] を Lagrangian 密度

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) - \mu^2 |\phi|^2 - \lambda |\phi|^4, \quad \lambda > 0$$

によって記述する. 古典的に考えた “基底状態” は Hamiltonian 密度

$$\mathcal{H} = (\partial^0 \phi^*)(\partial_0 \phi) + (\nabla \phi^*) \cdot (\nabla \phi) + \mathcal{V}(\phi), \quad \mathcal{V}(\phi) \equiv \mu^2 |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4 \quad (18.6)$$

[導出は本稿次節] が最小の状態であり, したがって場 $\phi(x)$ がポテンシャルエネルギー密度 $\mathcal{V}(\phi)$ を最小にするような定数値をとる状態である. (Hamiltonian 密度 (18.6) の最初の 2 項は正定値であり, $\phi(x)$ が定数のときゼロになるから.) 以下のように μ^2 の符号に応じて, “基底状態” の性格は異なる.

1. $\mu^2 > 0$ のとき.

Lagrangian 密度や Hamiltonian 密度は, Klein-Gordon 場に対する表式に

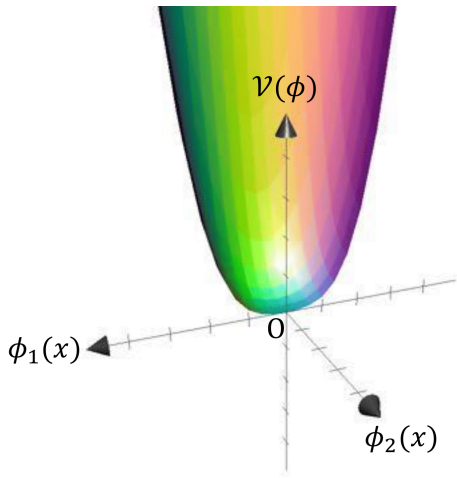


図 45 $\mu^2 > 0$ のとき

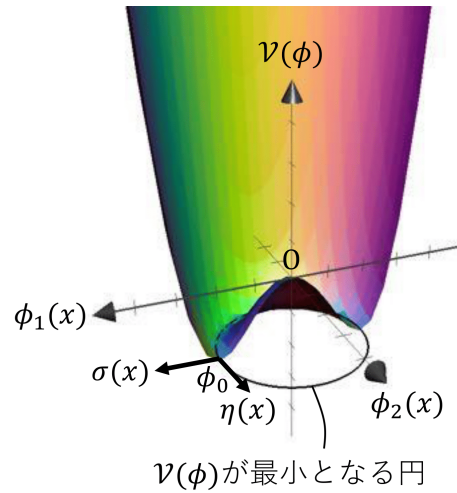


図 46 $\mu^2 < 0$ のとき

摂動項 $\lambda|\phi|^4$ を加えたものと見なせるようになる。

ポテンシャル $\mathcal{V}(\phi)$ の概形は図 45 のようであり、古典的な“基底状態”は $\phi = 0$ である。

2. $\mu^2 < 0$ のとき。

ポテンシャル $\mathcal{V}(\phi)$ の概形は図 46 のようであり [回転 4 次曲面]、

古典的な“基底状態”はその最低値を与える円周

$$\phi(x) = \phi_0 \equiv \left(\frac{-\mu^2}{2\lambda} \right)^{1/2} e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

において実現される。

位相角 θ の任意性に応じた異なる“基底状態”が“縮退”しており、

もとの Lagrangian 密度自体は U(1) 位相変換

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi e^{i\alpha}, \quad \phi^* \rightarrow \phi'^* = \phi^* e^{-i\alpha}$$

に対して不変であるにも関わらず、特定の θ で指定される“基底状態”は対称性を自発的に破っている。

$\mu^2 < 0$ の場合に対して例えば $\theta = 0$ の安定な平衡値

$$\phi_0 = \left(\frac{-\mu^2}{2\lambda} \right)^{1/2} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} v (> 0) \quad (18.9)$$

を考え、

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{v + \sigma(x) + i\eta(x)\} \quad (18.10)$$

によってその周りの摂動 $\sigma(x), \eta(x)$ (ともに実場) を導入すると、Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \lambda v \sigma(\sigma^2 + \eta^2) - \frac{1}{4} \lambda (\sigma^2 + \eta^2)^2, \quad \mathcal{L}_0 \equiv \frac{1}{2} (\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) - \frac{1}{2} (2\lambda v^2) \sigma^2 - \frac{1}{2} (\partial^\mu \eta)(\partial_\mu \eta) \quad (18.11)$$

と書き換えられる (定数項は省いた) [本稿次節で確認]。これは ϕ_1 軸方向の変位 σ に対してポテンシャルが 2 次の変化をするのに対し、 ϕ_2 軸方向の、したがって円周方向の変位 η に対して、2 次までの近似ではポテン

シャルは変化しないことを表している (図 46 参照) [3 つの項 $-\frac{1}{2}(2\lambda v^2)\sigma^2, -\lambda v\sigma(\sigma^2 + \eta^2), -\frac{1}{4}\lambda(\sigma^2 + \eta^2)^2$ がポテンシャル $\mathcal{V}(\phi)$ に由来している]. ところで相互作用項を除いた自由場項と見なされる \mathcal{L}_0 の部分は, $\sigma(x), \eta(x)$ が Klein-Gordon 場であることを意味しており, 場の 2 次の項の係数が質量に対応するため, 場の量子化によって生じる σ ボゾンはゼロでない質量 $\sqrt{2\lambda v^2}$ を持つのに対し, η ボゾンの質量はゼロとなる.

18.1 について

■第 1 段落について Lagrangian や Hamiltonian の不変性は系の対称性にとっての十分条件である.

G を対称操作の生成演算子, ε を無限小パラメーターとして, 系の対称性を対称演算子 $\mathcal{S} = 1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar}G$ に関する Hamiltonian の不変性

$$\mathcal{S}^\dagger H \mathcal{S} = H \quad \Leftrightarrow \quad [G, H] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\mathcal{S}, H] = 0$$

として表すと, エネルギー固有状態 $|n\rangle$ (固有値 E_n) に対して

$$H(\mathcal{S}|n\rangle) = \mathcal{S}H|n\rangle = E_n(\mathcal{S}|n\rangle)$$

となるので, $\mathcal{S}|n\rangle$ もまた固有値 E_n のエネルギー固有状態である [9, pp.342–344]. よって「第 1 に, 着目する準位が縮退していなければ, それに対応するエネルギー固有状態は一意的で, L の対称操作の下で不変である」(p.482, 1.2~4).

「第 2 に, 着目する準位が縮退していなければ, それに対応する一連の固有状態は L の対称変換の下で一般に不変ではないが, それらは相互に 1 次変換する関係を持つ」(p.482, 1.4~6) ことについて, ここでは具体例として回転対称性

$$[\mathcal{D}(R), H] = 0 \quad (\mathcal{D}(R) = e^{-i\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}/\hbar} \text{は回転演算子})$$

を持つ系を考えよう. このとき

$$[\mathbf{J}, H] = 0, \quad [\mathbf{J}^2, H] = 0$$

より H, \mathbf{J}^2, J_z の同時固有ケット $|n; j, m\rangle$ が存在し, これは m の異なる値に応じて $(2j+1)$ 重に縮退したエネルギー固有状態となる. これらは回転によって, 1 次変換

$$\mathcal{D}(R)|n; j, m\rangle = \sum_{m'} |n; j, m'\rangle \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R)$$

を受ける [9, pp.344–345].

■Hamiltonian 密度 (18.6) について

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^*, & \pi^* &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*} = \dot{\phi}, & \mathcal{L} &= \dot{\phi}^* \dot{\phi} - (\nabla \phi^*) \cdot (\nabla \phi) - \mathcal{V}(\phi), \\ \therefore \mathcal{H} &= \pi \dot{\phi} + \pi^* \dot{\phi}^* - \mathcal{L} = \dot{\phi}^* \dot{\phi} + (\nabla \phi^*) \cdot (\nabla \phi) + \mathcal{V}(\phi) : (18.6). \end{aligned}$$

なお Goldstone モデルのハミルトニアン密度 (18.6) は, 時間微分の項を除けば Ginzburg-Landau の自由エネルギーと同じ形をしている. 例えば磁性体を考えると, 単位体積当たりの磁化を m として Ginzburg-Landau の自由エネルギーは

$$F = \int dV \left[f(m) + \frac{K}{2} (\nabla m)^2 \right], \quad f(m) = am^2 + \frac{b}{4} m^4 - \mathcal{H}m, \quad a = \frac{T - T_c}{C}$$

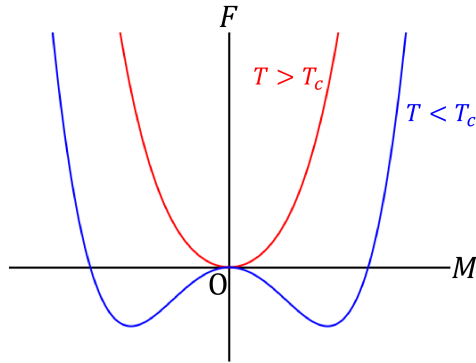


図 47 磁性体の自由エネルギー

と表される (\mathcal{H} は外部磁場, $b, C > 0$). m の空間勾配があると自由エネルギーが増大することを表す簡単なモデルとして, $(\nabla m)^2$ に比例する項を導入してある ($K > 0$). 特に磁化の空間分布 m が一様な場合には, 磁性体の全磁化 M を用いて, 自由エネルギーを

$$F = -\mathcal{H}M + \frac{a}{2}M^2 + \frac{b}{4}M^4$$

と書けば十分である. $T \geq T_c$ に応じて係数 a の符号の変化するため, 磁場 $\mathcal{H} = 0$ に対して F - M グラフの概形は図 47 のようになる. 自由エネルギーの極小を与える平衡状態の磁化の値は, $T > T_c$ では $M = 0$ であり, $T < T_c$ では $M \neq 0$ に移ることが見て取れる (常磁性-強磁性状態の相転移) [10, pp.199-203] [11, pp.133-135].

■ σ と η で表した Lagrangian 密度 (18.11) について

$$\begin{aligned} (\partial^\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) &= \frac{1}{2} \{ \partial^\mu (\sigma + i\eta) \} \{ \partial_\mu (\sigma - i\eta) \} \\ &= \frac{1}{2} (\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) + \frac{1}{2} (\partial^\mu \eta)(\partial_\mu \eta), \\ \mathcal{V}(\phi) &= \frac{1}{2} \{ (v + \sigma)^2 + \eta^2 \} \left[\mu^2 + \frac{1}{2} \lambda \{ (v + \sigma)^2 + \eta^2 \} \right] \quad (\because |\phi|^2 = (v + \sigma)^2 + \eta^2) \\ &= \frac{1}{2} \{ (v + \sigma)^2 + \eta^2 \} \frac{1}{2} \lambda \{ (v + \sigma)^2 + \eta^2 - 2v^2 \} \quad (\because \mu^2 = -\lambda v^2) \\ &= \frac{1}{4} \lambda (v^2 + 2v\sigma + \sigma^2 + \eta^2) (-v^2 + 2v\sigma + \sigma^2 + \eta^2) \\ &= \frac{1}{4} \lambda \{ (2v\sigma + \sigma^2 + \eta^2)^2 - v^4 \} \\ &= \frac{1}{2} (2\lambda v^2) \sigma^2 - \lambda v \sigma (\sigma^2 + \eta^2) + \frac{1}{4} \lambda (\sigma^2 + \eta^2)^2 - \frac{1}{4} \lambda v^4 \end{aligned}$$

と変形し, $\mathcal{V}(\phi)$ の計算の最右辺において定数項 $-\frac{1}{4}\lambda v^4$ を落とせば, Lagrangian 密度の式 (18.11) を得る.

18.2 Higgs モデル

Goldstone モデルから質量ゼロのボゾンが生じる問題は, 局所的なゲージ変換へと一般化した U(1) 変換

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x)e^{-iqf(x)}, \quad \phi^*(x) \rightarrow \phi'^*(x) = \phi^*(x)e^{iqf(x)} \quad (18.16)$$

に対して不変な理論において解消される。理論のゲージ不変性を回復するには、これと同時に

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu f(x)$$

というゲージ変換を受けるゲージ場 $A_\mu(x)$ を導入し、微分の共変微分への置き換え

$$\partial_\mu \phi \rightarrow D_\mu \phi \equiv [\partial_\mu + iqA_\mu]\phi$$

を行えば良い。Higgs モデルはさらに自由ゲージ場項

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (\text{ただし } F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)$$

を付け加えた、ゲージ不変な Lagrangian 密度

$$\mathcal{L} = (D^\mu \phi)^*(D_\mu \phi) - \mu^2 |\phi|^2 - \lambda |\phi|^4 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (18.15)$$

によって定義される。Higgs モデルは Goldstone モデルと同様の機構により、 $\mu^2 < 0$ に対して自発的な対称性の破れを起こす。

再び $\mu^2 < 0$ の場合に対して安定な平衡値 (18.9):

$$\phi_0 = \left(\frac{-\mu^2}{2\lambda} \right)^{1/2} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}v (> 0)$$

を考え、式 (18.10):

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{v + \sigma(x) + i\eta(x)\}$$

によってその周りの摂動 $\sigma(x), \eta(x)$ (ともに実場) を導入すると、Higgs モデルの Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\sigma^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(qv)^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial^\mu \eta)(\partial_\mu \eta) + qvA^\mu \partial_\mu \eta + (\text{相互作用項}) \quad (18.17)$$

と書き換えられる [本稿「18.2 について」の節で確認]。ただし定数項は省いた。また場の 2 次の項を自由場項と見なし、場の 3 次以上の項を相互作用項に含めた。この結果を解釈する前に、次の問題を解消しなければならない。すなわち

- 自由場項に双 1 次項 $A^\mu \partial_\mu \eta$ が現れることは、 A_μ と η が独立な場ではないことを示唆している。
- 初めは質量のないベクトル場 A_μ を考えており、その独立な自由度は光子と同様に 2 であるのに対し、書き換えられた Lagrangian 密度には質量項 $\frac{1}{2}(qv)^2 A_\mu A^\mu$ が現れるので、ゲージ場は 3 つの偏極状態を持つ (16.3 節)。このように自由度が見かけ上 1 つ増えていることは、書き換えられた Lagrangian 密度が非物理的な場を余計に 1 つ含んでいることを意味している。

実際スカラー場 $\eta(x)$ は非現実的なゴースト場であり、[そのことを反映して、] 局所的な U(1) ゲージ変換を利用して場

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{v + \sigma(x) + i\eta(x)\}$$

の位相を調節すれば、その虚部 $\eta(x)$ を消去することができる。このような場 $\eta(x)$ の現れないゲージは“ユニタリーゲージ”と呼ばれ、このゲージにおいて Higgs モデルの Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\sigma^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(qv)^2 A_\mu A^\mu + (\text{相互作用項})$$

と表される。これが本節の最終的な結果である。

以上で見たことは次のようにまとめられる。すなわち理論のゲージ不変性を損なうことなくゲージ場 A_μ は質量を獲得し、これに伴ってゲージ場の自由度は2から3に増大する。このような現象を“Higgs 機構”と呼ぶ。一方 Goldstone モデルにおける、目障りな質量ゼロの η 粒子は、Higgs モデルにおいてはゲージ不変性を根拠に消し去ることができる。ゲージ場 A_μ の獲得した第3の自由度は、もともとはこの場 $\eta(x)$ が持っていた自由度に他ならない：

$$\begin{aligned}
 & \text{“複素” スカラー場 } \phi(x), \phi^*(x) \quad (\leftrightarrow \sigma(x), \eta(x)) \quad (\text{自由度 } 2) \\
 + & \text{ “質量のない” 実ベクトル場 } A_\mu(x) \quad (\text{自由度 } 2) \\
 & \quad \downarrow \\
 & \text{“実” スカラー場 } \sigma(x) \quad (\leftrightarrow \text{Higgs ボゾン}) \quad (\text{自由度 } 1) \\
 + & \text{ “質量を持つ” 実ベクトル場 } A_\mu(x) \quad (\text{自由度 } 3).
 \end{aligned}$$

最後にこの理論の繰り込み可能性について言及する。質量を持つ中性ベクトルボゾン場の伝播関数は W ボゾンの伝播関数 (16.30) と同じ形

$$iD_F^{\alpha\beta}(k, m) = \frac{i(-g^{\alpha\beta} + k^\alpha k^\beta / m^2)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

を持ち、これは $k^\alpha k^\beta / m^2$ の項のために見かけ上、ループ積分の発散を引き起こす。ところが実際には自発的に対称性を破っているゲージ理論では、実際の発散は見かけの次数よりも弱まり、理論は繰り込み可能となる(下記の詳しい説明に続く)。

18.2 節、繰り込み可能性について

このことを簡単に理解するには、't Hooft [ト・フーフト, p.407 参照] ゲージ

$$\partial_\mu A^\mu - m\eta = 0$$

の下で Lagrangian 密度 (18.17) に

$$-\frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu - m\eta)^2$$

を付け加えれば良い。(したがって再び $\eta(x)$ 場が導入されることになる。)すると Lagrangian 密度から $\eta(x)$ と $A_\mu(x)$ の結合した双1次項が除かれる。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\sigma^2 \\
 & - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \\
 & + \frac{1}{2}(\partial^\mu \eta)(\partial_\mu \eta) - \frac{1}{2}m^2 \eta^2 \\
 & + (\text{相互作用項}).
 \end{aligned} \tag{18.26}$$

このため、 $\sigma(x), \eta(x), A_\mu(x)$ のそれぞれを独立な自由場と見なして量子化を行うことが許される。そしてこのとき場 $A^\mu(x)$ の運動方程式が

$$(\square + m^2)A^\mu(x) = 0 \tag{18.27}$$

となることから予想されるように [上式 (18.27) の導出は本稿次節], 場 $A_\mu(x)$ を量子化すると, 伝播関数として

$$iD_F^{\alpha\beta}(k, m) = \frac{-ig^{\alpha\beta}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

が得られることを証明し得る. この't Hooft の結果では伝播関数に発散を起こす項 $k^\alpha k^\beta / m^2$ が現れないため, 理論の繰り込み可能性が明白である.

18.2 について

■ Lagrangian 密度 (18.17) について Lagrangian 密度 (18.15) において, 共変微分は $D^\mu \phi^*$ ではなく $(D^\mu \phi)^*$ として含まれていることに注意する.

$$\begin{aligned} (D^\mu \phi)^*(D_\mu \phi) &= \frac{1}{2} \{(\partial^\mu - iqA^\mu)(v + \sigma - i\eta)\} \{(\partial_\mu + iqA_\mu)(v + \sigma + i\eta)\} \\ &= \frac{1}{2} [\{\partial^\mu(\sigma - i\eta)\} \{\partial_\mu(\sigma + i\eta)\} \\ &\quad + \{\partial^\mu(\sigma - i\eta)\} iqA_\mu(v + \sigma + i\eta) \\ &\quad - iqA^\mu(v + \sigma - i\eta) \partial_\mu(\sigma + i\eta) \\ &\quad - (iq)^2 A^\mu A_\mu \{(v + \sigma)^2 + \eta^2\}] \\ &= \frac{1}{2} \{(\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) + (\partial^\mu \eta)(\partial_\mu \eta)\} + qvA^\mu \partial_\mu \eta + \frac{1}{2} (qv)^2 A_\mu A^\mu + (\text{相互作用項}) \end{aligned}$$

なので, 微分の共変部分への置き換えに伴う, Goldstone モデルの Lagrangian 密度 (18.11) に対する付加的な自由場項は

$$qvA^\mu \partial_\mu \eta + \frac{1}{2} (qv)^2 A_\mu A^\mu$$

である.

■ 「質量を持つ実ベクトル場 $A^\mu(x)$ 」 (p.488, l.3), 「 $A_\mu(x)$ は質量 $|qv|$ 」 (p.488 下から 2 行目) について Lagrangian 密度の自由場項の表式 (18.17), (18.19b) を, 質量を持つ自由な複素ベクトル場の Lagrangian 密度 (16.21) と比較する. 「式 (17.19b) [正しくは式 (18.19b)] の 2 行目は, 質量を持つ中性ベクトルボゾン場のラグランジアン密度と同じである」 (p.489, l.22,23) する.

■ 場 A^μ の運動方程式 (18.27) について Lagrangian 密度 (18.26) において場 A^μ を記述する項は

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2$$

であり, 第 1 項と第 3 項は QED の Lagrangian 密度 (5.10): $-\frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu)$ と等価である (p.490 脚注 4). よってこれは全体として, Klein-Gordon 場の Lagrangian 密度と類似の形

$$\frac{1}{2} \{(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu) - m^2 A_\mu A^\mu\}$$

と等価である. なお, 場の方程式 (18.27) 自体は Proca 方程式 (16.18) と変わらない.

■ η 場に対応する “幽霊粒子” と縦波・スカラー光子の類似性 (最終段落) について このような幽霊 (ゴースト) 粒子を我々は QCD においても見ている. (QCD のゴーストへの言及がないのは, QCD に関する章が第 2 版において後から追加されたためであると想像される (訳者あとがき参照).)

18.3 電弱標準理論

ここでは質量のないレプトンとゲージボソンを想定した，第 17 章における電弱統一理論モデルに Higgs 機構を適用する．まず元の理論が SU(2) ゲージ不変性を持つことを踏まえて，Goldstone モデルや Higgs モデルにおけるスカラー場 $\phi(x)$ の代わりに弱アイソスピン 2 重項

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_a(x) \\ \phi_b(x) \end{pmatrix}$$

を考える．ただし $\phi_a(x)$ と $\phi_b(x)$ は Lorentz スカラーである．これは [変換則に基づく定義 (17.2 節) により,] アイソスピン 2 重項 $\Psi_L^I(x)$ と同様の変換則

$$\begin{aligned} \Phi(x) &\rightarrow \Phi'(x) = \exp[ig\tau_j\omega_j(x)/2]\Phi(x), & (\text{SU}(2) \text{ 変換に対して}) \\ \Phi(x) &\rightarrow \Phi'(x) = \exp[ig'Yf(x)/2]\Phi(x), & (\text{U}(1) \text{ 弱超電荷変換に対して}) \end{aligned}$$

に従う．ただし Y は場 $\Phi(x)$ の弱超電荷であり，その値はすぐ後で決める．

元の理論における Lagrangian 密度 $\mathcal{L}^L + \mathcal{L}^B$ は既に見たように SU(2)×U(1) ゲージ不変性を持つ．そこで $\Psi_L^I(x)$ の共変微分と同様に Higgs 場 $\Phi(x)$ の共変微分

$$D^\mu\Phi = \left(\partial^\mu + \frac{1}{2}ig\tau_jW_j^\mu + ig'YB^\mu \right) \Phi$$

を定義し，Higgs 場 $\Phi(x)$ の Lagrangian 密度を

$$\mathcal{L}^H = (D^\mu\Phi)^\dagger(D_\mu\Phi) - \mu^2\Phi^\dagger\Phi - \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2$$

とすれば，全 Lagrangian 密度 $\mathcal{L} = \mathcal{L}^L + \mathcal{L}^B + \mathcal{L}^H$ の SU(2)×U(1) ゲージ不変性が保証される．

Higgs モデルの場合と同様， $\lambda > 0, \mu^2 < 0$ に対して古典的なエネルギー密度が最低値をとるのは，Higgs 場 $\Phi(x)$ が

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} \phi_a^0 \\ \phi_b^0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_0^\dagger\Phi_0 = |\phi_a^0|^2 + |\phi_b^0|^2 = \frac{-\mu^2}{2\lambda}$$

の条件を満たす定数値 Φ_0 をとるときであり，自発的な対称性の破れはこのうち特定の Φ_0 が“基底状態”に選ばれることに対応する．ここで大域的な位相変換の自由度を利用して

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad v \equiv \left(\frac{-\mu^2}{\lambda} \right)^{1/2} (> 0)$$

と選んでも一般性を失わない．

Higgs 機構の導入の後にも通常の電荷保存則が成り立つためには，基底状態は U(1) 電磁ゲージ変換 [式 (18.16) と同様の変換 $\Phi(x) \rightarrow e^{-iQf(x)}\Phi(x)$, etc.] の下で不変でなければならない．ここでは Φ_0 を下側の成分 ϕ_b^0 だけがゼロでないように選んだので，成分 ϕ_b^0 の電荷が中性 $Q = 0$ であれば，この変換に対する不変性が満たされる．[しかるに $\Psi_L^I(x)$ の下側の成分 $\psi_L^I(x)$ の弱アイソスピン I_3^W が $-1/2$ であったのと同様に (17.2 節)，Higgs 場 $\Phi(x)$ の下側の成分 ϕ_b^0 の弱アイソスピン I_3^W もまた $-1/2$ であると考えれば，] 成分 ϕ_b^0 の電荷が $Q = 0$ となるためには，式 (17.27):

$$Y = \frac{Q}{e} - I_3^W$$

において Higgs 場の弱超電荷を $Y = 1/2$ とすれば良い。このとき Higgs 機構の導入の後にも電磁的なゲージ不変性は自発的な対称性の破れを起こさないで、光子の質量はゼロに保たれる。

再び Higgs 場を真空場 Φ_0 [“基底状態”の場] とそこからのズレに分けて

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \eta_1 + i\eta_2 \\ v + \sigma + i\eta_3 \end{pmatrix}$$

と書くと、実は 3 つの場 $\eta_1(x), \eta_2(x), \eta_3(x)$ を非物理的な場に同定することができる。実際これらは適当なユニタリーゲージにおいて消去することができ、失われた自由度は 3 つのボゾン W^\pm, Z^0 の場に吸収され、 W^\pm, Z^0 ボゾンは質量を獲得する。一方、場 $\sigma(x)$ はユニタリーゲージにおいても残り、Higgs スカラーボゾン (ゼロでない質量を持つ、電氣的に中性なスピン 0 の粒子) を生じる。

レプトンに質量を与えるために、レプトンと Higgs ボゾンの相互作用として“標準模型”(standard model) では Lagrangian 密度

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{LH}} &= -g_l [\bar{\Psi}_l^L \psi_l^R \Phi + \Phi^\dagger \bar{\psi}_l^R \Psi_l^L] - g_{\nu_l} [\bar{\Psi}_l^L \psi_{\nu_l}^R \tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}^\dagger \bar{\psi}_{\nu_l}^R \Psi_l^L], \\ \tilde{\Phi} &\equiv -i[\Phi^\dagger \tau_2]^T = \begin{pmatrix} \phi_b^* \\ -\phi_a^* \end{pmatrix} \quad (\tau_2: \text{Pauli 行列}, T: \text{転置}) \end{aligned} \quad (18.45)$$

を考える (レプトンの世代 l について和をとる) [上式 (18.45) を本稿「18.3 について」の節で補足]。これはスカラー場 ϕ をスピノル場 ψ で挟んだ $\bar{\psi}\phi\psi$ という形をしており [例えば $\bar{\Psi}_l^L \psi_l^R \Phi = \bar{\psi}_{\nu_l}^L \phi_a \psi_l^R + \bar{\psi}_l^L \phi_b \psi_{\nu_l}^R$]、このような項は一般に湯川型相互作用と呼ばれる。この Lagrangian 密度 \mathcal{L}^{LH} は $SU(2) \times U(1)$ ゲージ不変であることを確認できる (下記)。次章でこの項がゼロでないレプトンの質量を生じることを見る。

- 相互作用項 \mathcal{L}^{LH} における g_{ν_l} の項について
 - ニュートリノの質量をゼロとする取り扱いは、 $g_{\nu_l} = 0$ と置くことに対応する。
 - ニュートリノ振動 (16.7.1 節) を記述するには、この項をより正確な表現

$$-G_{ll'} \bar{\Psi}_l^L \psi_{\nu_l}^R \tilde{\Phi} - G_{ll'}^* \tilde{\Phi}^\dagger \bar{\psi}_{\nu_l}^R \Psi_l^L, \quad G_{ll'} \equiv \sum_j U_{lj} m_j U_{j l'}^\dagger : (16.90b)$$

に置き換えなければならない。

- クォーク・ハドロンを含む半レプトン過程 (16.1 節) を扱えるように理論を拡張して初めて、理論は繰り込み可能となる [拡張は本稿の付録 C を参照]。

18.3 節, 式の導出など

■ \mathcal{L}^{LH} の $SU(2) \times U(1)$ ゲージ不変性の確認 \mathcal{L}^{LH} の第 1 項が不変であることの確認は直接的である [本稿次節を参照]。そこで第 2 項の不変性を示そう。U(1) 変換 $\Phi'(x) = \exp[ig'Yf(x)]\Phi(x)$ (ただし $Y = 1/2$) に際して式 (18.45) の $\tilde{\Phi}(x)$ は

$$\tilde{\Phi}(x) \rightarrow \tilde{\Phi}'(x) = \exp[-ig'f(x)/2]\tilde{\Phi}(x)$$

と変換する。[よって $\Psi_l^L(x) \rightarrow e^{-ig'f(x)/2}\Psi_l^L(x), \psi_{\nu_l}^R \rightarrow \psi_{\nu_l}^R$ と合わせると、 \mathcal{L}^{LH} の第 2 項は U(1) 不変である。] また \mathcal{L}^{LH} の第 2 項が SU(2) 不変であるためには、 $\tilde{\Phi}(x)$ が $\Phi(x)$ と同じように変換すれば良い。 $\Phi(x)$ の無限小変換に伴う変化量は

$$\delta\Phi(x) = i\frac{1}{2}g\tau_j\omega_j(x)\Phi(x) \quad (18.47)$$

である。よって $\tilde{\Phi}(x)$ の SU(2) 変換性は

$$\delta\Phi^\dagger(x) = -i\frac{1}{2}g\omega_j(x)\Phi^\dagger(x)\tau_j, \quad \therefore \delta\tilde{\Phi}(x) = -i[\delta\Phi^\dagger(x)\tau_2]^\text{T} = -i\left[-i\frac{1}{2}g\omega_j(x)\Phi^\dagger(x)\tau_j\tau_2\right]^\text{T} \quad (18.48)$$

となる。Pauli 行列が満たす関係 $\tau_j\tau_2 = -\tau_2\tau_j^\text{T}$ を用いると、これは

$$\delta\tilde{\Phi}(x) = i\frac{1}{2}g\omega_j(x)\tau_j[-i\Phi^\dagger(x)\tau_2]^\text{T} = i\frac{1}{2}g\omega_j(x)\tau_j\tilde{\Phi}(x) \quad (18.49)$$

と書き換えられる [本稿次節で補足]。これは $\Phi(x)$ の変換性 (18.47) に一致しているから、示された。

18.3 について

■ユニタリゲージにおいて場 $\eta_i(x)$ を消去できること (p.494) について 19.1 節の第 1 段落に詳しい説明が与えられている。場 $\Phi(x)$ が条件 (18.37) を満たす一定値 Φ_0 をとる場合に、大域的な位相変換を利用してこれを式 (18.38) に書き換えられることも同様に理解できる。

■ $\tilde{\Phi}$ の式 (18.45) について

$$\Phi^\dagger\tau_2 = \begin{pmatrix} \phi_a^* & \phi_b^* \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\phi_b^* & -i\phi_a^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \therefore [\Phi^\dagger\tau_2]^\text{T} = \begin{pmatrix} i\phi_b^* \\ -i\phi_a^* \end{pmatrix}$$

による。

■「式 (18.44) の 1 行目の不変性」(p.495, l.3) について 例えば \mathcal{L}^{LH} の第 1 項について、U(1) 変換に対して

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_l^\text{L}(x) &\rightarrow \bar{\Psi}_l^\text{L}(x)e^{-ig'Yf(x)} = \bar{\Psi}_l^\text{L}(x)e^{ig'f(x)/2}, \\ \Phi(x) &\rightarrow \Phi(x)e^{ig'Yf(x)} = \Phi(x)e^{ig'f(x)/2}, \\ \psi_l^\text{R}(x) &\rightarrow \psi_l^\text{R}(x)e^{ig'Yf(x)} = \psi_l^\text{R}(x)e^{-ig'f(x)} \end{aligned}$$

であり、SU(2) 変換に対して

$$\bar{\Psi}_l^\text{L}(x) \rightarrow \bar{\Psi}_l^\text{L}(x)e^{-ig\tau_j\omega_j(x)/2}, \quad \Phi(x) \rightarrow \Phi(x)e^{ig\tau_j\omega_j(x)/2}, \quad \psi_l^\text{R}(x) \rightarrow \psi_l^\text{R}(x)$$

である。

■式 (18.49) について まず式 (17.15) の Pauli 行列について、直接の成分計算により

$$\tau_1\tau_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \tau_2\tau_1^\text{T} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \tau_3\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2\tau_3^\text{T} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

を確かめられる。また $\tau_2^\text{T} = -\tau_2$ より $\tau_2^2 = -\tau_2\tau_2^\text{T}$ なので、以上と合わせて「 $\tau_j\tau_2 = -\tau_2\tau_j^\text{T}$ が成立する」(p.495, l.20)。これを式 (18.48) に代入すると

$$\delta\tilde{\Phi} = i\frac{1}{2}g\omega_j[-i\Phi^\dagger\tau_2\tau_j^\text{T}]^\text{T}$$

となり、これは転置行列に関する一般的な性質 $(AB)^\text{T} = B^\text{T}A^\text{T}$ により

$$[-i\Phi^\dagger\tau_2\tau_j^\text{T}]^\text{T} = \tau_j[-i\Phi^\dagger\tau_2]^\text{T} = \tau_j\tilde{\Phi}$$

と書き換えられるので式 (18.49) を得る。

第 19 章 電弱標準理論

- 19.1 節 ユニタリーゲージにおける Lagrangian 密度
 - 系は光子, 荷電レプトン, 中性レプトン, W^\pm ボゾン, Z^0 ボゾン, Higgs ボゾンから成る
- 19.2 節 (電弱理論に対する)Feynman 規則
- 応用例 (最低次の計算)
 - 19.3 節 ニュートリノ-電子弾性散乱
 - 19.4 節 電子-陽電子消滅の電弱過程
- 19.5 節 Higgs ボゾン (の存在について)

19.1 ユニタリーゲージにおけるラグランジアン密度

ここで第 18 章までに導入した, Higgs 機構を含む電弱標準理論の全 Lagrangian 密度 \mathcal{L} を改めてまとめると以下ようになる.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^L + \mathcal{L}^B + \mathcal{L}^H + \mathcal{L}^{LH}.$$

- レプトン系の Lagrangian 密度 \mathcal{L}^L

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^L &= i(\bar{\Psi}_l^L \not{D}\Psi_l^L + \bar{\psi}_l^R \not{D}\psi_l^R + \bar{\psi}_{\nu_l}^R \not{D}\psi_{\nu_l}^R) : (17.39) \\ &= \mathcal{L}_0^L + \mathcal{L}_1^{LB}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^L &= \bar{\psi}_l^L i \not{\partial} \psi_l^L + \bar{\psi}_{\nu_l}^L i \not{\partial} \psi_{\nu_l}^L + \bar{\psi}_l^R i \not{\partial} \psi_l^R + \bar{\psi}_{\nu_l}^R i \not{\partial} \psi_{\nu_l}^R : (17.12) \\ &= \bar{\psi}_l i \not{\partial} \psi_l + \bar{\psi}_{\nu_l} i \not{\partial} \psi_{\nu_l} : (17.10), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^{LB} &= -gJ_i^\mu W_{i\mu} - g'J_Y^\mu B_\mu : (17.42) \\ &= -s^\mu A_\mu - \frac{g}{2\sqrt{2}}(J^{\mu\dagger}W_\mu + J^\mu W_\mu^\dagger) - \frac{g}{\cos\theta_W} \left(J_3^\mu - \sin^2\theta_W \frac{s^\mu}{e} \right) Z_\mu : (17.48). \end{aligned}$$

- ゲージボゾンの Lagrangian 密度 \mathcal{L}^B

$$\mathcal{L}^B = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{i\mu\nu}G_i^{\mu\nu} : (17.58a)$$

$$= \mathcal{L}_0^B + g\varepsilon_{ijk}W_{i\mu}W_{j\nu}\partial^\mu W_k^\nu - \frac{1}{4}g^2\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}W_j^\mu W_k^\nu W_{l\mu}W_{m\nu} : (17.58b),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^B &= -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{i\mu\nu}F_i^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}F_{W\mu\nu}^\dagger F_W^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} : (17.59). \end{aligned}$$

- Higgs 場の Lagrangian 密度 \mathcal{L}^H

$$\mathcal{L}^H = (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda(\Phi^\dagger \Phi)^2 : (18.34).$$

- レプトンと Higgs 場の相互作用項 \mathcal{L}^{LH}

$$\mathcal{L}^{LH} = -g_l(\bar{\Psi}_l^L \psi_l^R \Phi + \Phi^\dagger \bar{\psi}_l^R \Psi_l^L) - g_{\nu_l}(\bar{\Psi}_l^L \psi_{\nu_l}^R \tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}^\dagger \bar{\psi}_{\nu_l}^R \Psi_l^L) : (18.44).$$

Lagrangian 密度 \mathcal{L} の物理的な意味を解釈するために、ゲージ場 W_i^μ, B^μ を W^\pm ボゾン場 $W^\mu, W^{\mu\dagger}$, Z^0 ボゾン場 Z^μ , 電磁場 A^μ によって表す。さらに非現実的な場 η_i を理論から取り除くためにユニタリーゲージを採用し、Higgs 場を

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \sigma(x) \end{pmatrix}$$

と表す。すると Lagrangian 密度は

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I, \\ \mathcal{L}_0 &= \bar{\psi}_l(i\cancel{\partial} - m_l)\psi_l + \bar{\psi}_{\nu_l}(i\cancel{\partial} - m_{\nu_l})\psi_{\nu_l} \quad \Leftarrow \quad \text{荷電レプトン (質量 } m_l), \text{ ニュートリノ (質量 } m_{\nu_l}) \\ &\quad - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad \Leftarrow \quad \text{光子} \\ &\quad - \frac{1}{2}F_{W\mu\nu}^\dagger F_W^{\mu\nu} + m_W^2 W_\mu^\dagger W^\mu \quad \Leftarrow \quad W^\pm \text{ボゾン (質量 } m_W) \\ &\quad - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu \quad \Leftarrow \quad Z^0 \text{ボゾン (質量 } m_Z) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) - \frac{1}{2}m_H^2 \sigma^2, \quad \Leftarrow \quad \text{Higgs スカラーボゾン (質量 } m_H) \\ \mathcal{L}_I &= \mathcal{L}_I^{\text{LB}} + \mathcal{L}_I^{\text{BB}} + \mathcal{L}_I^{\text{HH}} + \mathcal{L}_I^{\text{HB}} + \mathcal{L}_I^{\text{HL}} \end{aligned}$$

と書き換えられる。ただし各ボゾンと各レプトンの質量は

$$\begin{aligned} m_W &= \frac{1}{2}vg, & m_Z &= \frac{m_W}{\cos \theta_W}, & m_H &= \sqrt{-2\mu^2}, \\ m_l &= \frac{vg_l}{\sqrt{2}}, & m_{\nu_l} &= \frac{vg_{\nu_l}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

である。自由場項 \mathcal{L}_0 の表式を見ると、系は光子、荷電レプトン、中性レプトン、 W^\pm ボゾン、 Z^0 ボゾン、Higgs ボゾンから成ることが明白である [目論見通り]。ボゾンの質量項は $SU(2) \times U(1)$ ゲージ不変性の自発的な破れを生じる Higgs 場の Lagrangian 密度 \mathcal{L}^H に由来しており [本稿次節における導出 (式 (30)) 参照]、またレプトンの質量項はレプトンと Higgs 場の相互作用項 \mathcal{L}^{LH} に由来している [本稿次節における導出 (式 (32)) 参照]。なお各相互作用項は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I^{\text{BB}} &= ig \cos \theta_W [(W_\mu^\dagger W_\nu - W_\nu^\dagger W_\mu) \partial^\mu Z^\nu + (\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu) W^{\mu\dagger} Z^\nu - (\partial_\mu W_\nu^\dagger - \partial_\nu W_\mu^\dagger) W^\nu Z^\mu] \\ &\quad + ie [(W_\mu^\dagger W_\nu - W_\nu^\dagger W_\mu) \partial^\mu Z^\nu + (\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu) W^{\mu\dagger} Z^\nu - (\partial_\mu W_\nu^\dagger - \partial_\nu W_\mu^\dagger) W^\nu Z^\mu] \\ &\quad + g^2 \cos^2 \theta_W (W_\mu W_\nu^\dagger Z^\mu Z^\nu - W_\mu W^{\mu\dagger} Z_\nu Z^\nu) \\ &\quad + e^2 (W_\mu W_\nu^\dagger A^\mu A^\nu - W_\mu W^{\mu\dagger} A_\nu A^\nu) \\ &\quad + eg \cos \theta_W \{ W_\mu W_\nu^\dagger (Z^\mu A^\nu + A^\mu Z^\nu) - 2W_\mu W^{\mu\dagger} A_\nu Z^\nu \} \\ &\quad + \frac{1}{2}g^2 W_\mu^\dagger W_\nu (W^{\mu\dagger} W^\nu - W^\mu W^{\nu\dagger}), \\ \mathcal{L}_I^{\text{HH}} &= -\lambda v \sigma^3 - \frac{1}{4}\lambda \sigma^4, \\ \mathcal{L}_I^{\text{HB}} &= \frac{1}{2}vg^2 W_\mu^\dagger W^\mu \sigma + \frac{1}{4}g^2 W_\mu^\dagger W^\mu \sigma^2 + \frac{vg^2}{4 \cos^2 \theta_W} Z_\mu Z^\mu \sigma + \frac{g^2}{8 \cos^2 \theta_W} Z_\mu Z^\mu \sigma^2, \\ \mathcal{L}_I^{\text{LB}} &= e \bar{\psi}_l A \psi_l \\ &\quad - \frac{g}{2\sqrt{2}} \{ \bar{\psi}_{\nu_l} W (1 - \gamma_5) \psi_l + \bar{\psi}_l W^\dagger (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l} \} \\ &\quad - \frac{g}{4 \cos \theta_W} \bar{\psi}_{\nu_l} \cancel{Z} (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l} \end{aligned}$$

$$+ \frac{g}{4 \cos \theta_W} \bar{\psi}_l Z (1 - 4 \sin^2 \theta_W - \gamma_5) \psi_l,$$

$$\mathcal{L}_I^{\text{HL}} = -\frac{1}{v} m_l \bar{\psi}_l \psi_l \sigma - \frac{1}{v} m_{\nu_l} \bar{\psi}_{\nu_l} \psi_{\nu_l} \sigma. \quad [\mathcal{L}^{\text{LH}} \text{との混同に注意}]$$

以上により

- W^\pm, Z^0 ボゾンの質量は,
実験的に値の知られている微細構造定数 α , Fermi 結合定数 G , 弱混合角 θ_W を用いて

$$m_W = \left(\frac{\alpha \pi}{G \sqrt{2}} \right)^{1/2} \frac{1}{\sin \theta_W} = 77.5 \text{ GeV}, \quad m_Z = \left(\frac{\alpha \pi}{G \sqrt{2}} \right)^{1/2} \frac{2}{\sin 2\theta_W} = 88.4 \text{ GeV}$$

と表される (輻射補正・繰り込みを無視した場合).

- 理論に含まれるパラメーターは

$$g, \quad g', \quad v, \quad \lambda, \quad g_l, \quad g_{\nu_l}$$

の 6 つであり [$-\mu^2 = \lambda v^2$ は λ と v から決定される],

– v は

$$v = \frac{1}{(G/\sqrt{2})^{1/2}}$$

と表されるので, その値を実験的に知ることができる.

– 結合 g, g' は

$$g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W = e$$

の関係を用いて値を実験的に知ることができる.

– 結合 g_l, g_{ν_l} の値は, 質量 m_l, m_{ν_l} の実験的な値と

$$m_l = \frac{v g_l}{\sqrt{2}}, \quad m_{\nu_l} = \frac{v g_{\nu_l}}{\sqrt{2}}$$

の関係を用いて知ることができる.

– λ の値は決まっておらず, Higgs ボゾンの質量 m_H が分かれば,

$$m_H = \sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{2\lambda v^2}$$

の関係から値を知ることができる.

19.1 について

■ $\mathcal{L}^{\text{B}} + \mathcal{L}^{\text{H}}$ の式 (19.2) について まず式 (17.43):

$$W_{1\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu + W_\mu^\dagger), \quad W_{2\mu} = \frac{i}{\sqrt{2}}(W_\mu - W_\mu^\dagger)$$

および式 (17.45):

$$W_{3\mu} = \cos \theta_W Z_\mu + \sin \theta_W A_\mu$$

を用いて, ゲージボゾンの Lagrangian 密度 (17.58b):

$$\mathcal{L}^{\text{B}} = \mathcal{L}_0^{\text{B}} + g \varepsilon_{ijk} W_{i\mu} W_{j\nu} \partial^\mu W_k^\nu - \frac{1}{4} g^2 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} W_j^\mu W_k^\nu W_{l\mu} W_{m\nu}$$

を書き換えよう。右辺第 2 項は

$$\begin{aligned}
& g\varepsilon_{ijk}W_{i\mu}W_{j\nu}\partial^\mu W_k^\nu \\
& =g(W_{1\mu}W_{2\nu}-W_{2\mu}W_{1\nu})\partial^\mu W_3^\nu+g(W_{2\mu}W_{3\nu}-W_{3\mu}W_{2\nu})\partial^\mu W_1^\nu+g(W_{3\mu}W_{1\nu}-W_{1\mu}W_{3\nu})\partial^\mu W_2^\nu \\
& =g(W_{1\mu}W_{2\nu}-W_{2\mu}W_{1\nu})\partial^\mu W_3^\nu+g(W_{2\mu}\partial^\mu W_1^\nu-W_{1\mu}\partial^\mu W_2^\nu)W_{3\nu}+g(W_{1\nu}\partial^\mu W_2^\nu-W_{2\nu}\partial^\mu W_1^\nu)W_{3\mu} \\
& =g\{i(W_\mu^\dagger W_\nu-W_\mu W_\nu^\dagger)\}(\cos\theta_W\partial^\mu Z^\nu+\sin\theta_W\partial^\mu A^\nu) \\
& \quad +g\{i(W_\mu\partial^\mu W^{\nu\dagger}-W_\mu^\dagger\partial^\mu W^\nu)\}(\cos\theta_W Z_\nu+\sin\theta_W A_\nu) \\
& \quad +g\{-i(W_\nu\partial^\mu W^{\nu\dagger}-W_\nu^\dagger\partial^\mu W^\nu)\}(\cos\theta_W Z_\mu+\sin\theta_W A_\mu) \\
& =ig\cos\theta_W[(W_\mu^\dagger W_\nu-W_\nu^\dagger W_\mu)\partial^\mu Z^\nu+(\partial_\mu W_\nu-\partial_\nu W_\mu)W^{\mu\dagger}Z^\nu-(\partial_\mu W_\nu^\dagger-\partial_\nu W_\mu^\dagger)W^\nu Z^\mu] \\
& \quad +ie[(W_\mu^\dagger W_\nu-W_\nu^\dagger W_\mu)\partial^\mu Z^\nu+(\partial_\mu W_\nu-\partial_\nu W_\mu)W^{\mu\dagger}Z^\nu-(\partial_\mu W_\nu^\dagger-\partial_\nu W_\mu^\dagger)W^\nu Z^\mu] \\
& (\because g\sin\theta_W=e:(17.47))
\end{aligned}$$

と変形でき、右辺第 3 項は

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}g^2\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}W_j^\mu W_k^\nu W_{l\mu}W_{m\nu} \\
& =-\frac{1}{4}g^2(\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl})W_j^\mu W_k^\nu W_{l\mu}W_{m\nu} \\
& =-\frac{1}{4}g^2W_j^\mu W_k^\nu(W_{j\mu}W_{k\nu}-W_{k\mu}W_{j\nu}) \\
& =-\frac{1}{4}g^2(W_1^\mu W_2^\nu-W_2^\mu W_1^\nu)(W_{1\mu}W_{2\nu}-W_{2\mu}W_{1\nu}) \\
& \quad -\frac{1}{4}g^2(W_2^\mu W_3^\nu-W_3^\mu W_2^\nu)(W_{2\mu}W_{3\nu}-W_{3\mu}W_{2\nu}) \\
& \quad -\frac{1}{4}g^2(W_3^\mu W_1^\nu-W_1^\mu W_3^\nu)(W_{3\mu}W_{1\nu}-W_{1\mu}W_{3\nu}) \\
& (a_{jk,\mu\nu}\equiv W_{j\mu}W_{k\nu}-W_{k\mu}W_{j\nu}\text{は添字 }j,k\text{ について反対称なので,} \\
& \quad W_1^\mu W_2^\nu a_{12,\mu\nu}+W_2^\mu W_1^\nu a_{21,\mu\nu}=(W_1^\mu W_2^\nu-W_2^\mu W_1^\nu)a_{12,\mu\nu},\text{etc.}) \\
& =-\frac{1}{4}g^2(W_1^\mu W_2^\nu-W_2^\mu W_1^\nu)(W_{1\mu}W_{2\nu}-W_{2\mu}W_{1\nu}) \\
& \quad -\frac{1}{4}g^2\cdot 2W_3^\nu W_{3\nu}(W_1^\mu W_{1\mu}+W_2^\mu W_{2\mu}) \\
& \quad -\frac{1}{4}g^2\cdot(-2W_3^\mu W_{3\mu})(W_1^\nu W_{1\nu}+W_2^\nu W_{2\nu}) \\
& =-\frac{1}{4}g^2\{i(W^{\mu\dagger}W^\nu-W^\mu W^{\nu\dagger})\}\{i(W_\mu^\dagger W_\nu-W_\mu W_\nu^\dagger)\} \\
& \quad -\frac{1}{4}g^2\{2(\cos^2\theta_W Z^\nu Z_\nu+2\sin\theta_W\cos\theta_W Z^\nu A_\nu+\sin^2\theta_W A^\nu A_\nu)\}2W_\mu W^{\mu\dagger} \\
& \quad -\frac{1}{4}g^2\{-2(\cos^2\theta_W Z^\mu Z_\mu+2\sin\theta_W\cos\theta_W Z^\mu A_\mu+\sin^2\theta_W A^\mu A_\mu)\}(W^\nu W_\mu^\dagger+W^{\nu\dagger}W_\mu) \\
& =\frac{1}{2}g^2W_\mu^\dagger W_\nu(W^{\mu\dagger}W^\nu-W^\mu W^{\nu\dagger}) \\
& \quad +g^2\cos^2\theta_W(W_\mu W_\nu^\dagger Z^\mu Z^\nu-W_\mu W^{\mu\dagger}Z_\nu Z^\nu) \\
& \quad +e^2(W_\mu W_\nu^\dagger A^\mu A^\nu-W_\mu W^{\mu\dagger}A_\nu A^\nu) \\
& \quad +eg\cos\theta_W\{W_\mu W_\nu^\dagger(Z^\mu A^\nu+A^\mu Z^\nu)-2W_\mu W^{\mu\dagger}A_\nu Z^\nu\} \\
& (\because g\sin\theta_W=e:(17.47))
\end{aligned}$$

と計算できるので、ゲージボゾンの自己相互作用に関する項 $\mathcal{L}_1^{\text{BB}}$ を式 (19.3a) で定義すれば

$$\begin{aligned} g\varepsilon_{ijk}W_{i\mu}W_{j\nu}\partial^\mu W_k^\nu - \frac{1}{4}g^2\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}W_j^\mu W_k^\nu W_{l\mu}W_{m\nu} &= \mathcal{L}_1^{\text{BB}}, \\ \mathcal{L}^{\text{B}} &= \mathcal{L}_0^{\text{B}} + \mathcal{L}_1^{\text{BB}} \end{aligned} \quad (29)$$

となる。

次にユニタリーゲージ (19.1):

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \sigma(x) \end{pmatrix}$$

において、Higgs 場の Lagrangian 密度 (18.34):

$$\mathcal{L}^{\text{H}} = (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$$

を考える。共変微分の式 (18.35) は

$$\begin{aligned} D^\mu \Phi &= \left[\partial^\mu + \frac{i}{2}g \left\{ W_1^\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + W_2^\mu \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + W_3^\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} + \frac{i}{2}g'B^\mu \right] \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \sigma \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{i}{2}g(W_1^\mu - iW_2^\mu)(v + \sigma) \\ \partial^\mu \sigma + \frac{i}{2}(gW_3^\mu - g'B^\mu)(v + \sigma) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{i}{2}gW^\mu(v + \sigma) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\partial^\mu \sigma + \frac{i}{2\sqrt{2}}\{(g \cos \theta_W + g' \sin \theta_W)Z^\mu + (g \sin \theta_W - g' \cos \theta_W)A^\mu\}(v + \sigma) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を与える。上式最右辺において、式 (17.47) より

$$g \cos \theta_W + g' \sin \theta_W = \frac{g}{\cos \theta_W}, \quad g \sin \theta_W - g' \cos \theta_W = 0$$

となることに注意すると、

$$\begin{aligned} (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) &= \frac{1}{4}g^2 W^\mu{}^\dagger W_\mu (v + \sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) + \frac{1}{8} \frac{g^2}{\cos^2 \theta_W} Z^\mu Z_\mu (v + \sigma)^2 \\ &= m_W^2 W^\mu{}^\dagger W_\mu + \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) + \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu + \mathcal{L}_1^{\text{HB}}, \\ m_W &= \frac{1}{2}vg, \quad m_Z = \frac{vg}{2 \cos \theta_W} = \frac{m_W}{\cos \theta_W} : (19.4), \\ \mathcal{L}_1^{\text{HB}} &= \frac{1}{2}vg^2 W^\mu{}^\dagger W_\mu \sigma + \frac{1}{4}g^2 W^\mu{}^\dagger W_\mu \sigma^2 + \frac{vg^2}{4 \cos^2 \theta_W} Z_\mu Z^\mu \sigma + \frac{g^2}{8 \cos^2 \theta_W} Z_\mu Z^\mu \sigma^2 : (19.3c) \end{aligned}$$

となる。これを

$$\begin{aligned} -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 &= -\frac{1}{2}\mu^2(v + \sigma)^2 - \frac{1}{4}\lambda(v + \sigma)^4 \\ &= -v(\mu^2 + \lambda v^2)\sigma - \frac{1}{2}(\mu^2 + 3\lambda v^2)\sigma^2 - \lambda v\sigma^3 - \frac{1}{4}\lambda\sigma^4 + \text{const} \\ &= -\frac{1}{2}m_H^2\sigma^2 + \mathcal{L}_1^{\text{HH}} + \text{const}, \\ m_H &= \sqrt{-2\mu^2} : (19.4), \\ \mathcal{L}_1^{\text{HH}} &= -\lambda v\sigma^3 - \frac{1}{4}\lambda\sigma^4 : (19.3b) \quad (\because v = (-\mu^2/\lambda)^{1/2} : (18.59)) \end{aligned}$$

と辺々足して定数項を落とすと、

$$\mathcal{L}^{\text{H}} = m_W^2 W^\mu{}^\dagger W_\mu + \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu + \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) - \frac{1}{2}m_H^2\sigma^2 + \mathcal{L}_1^{\text{HH}} + \mathcal{L}_1^{\text{HB}} \quad (30)$$

を得る。 \mathcal{L}^B の式 (29) と \mathcal{L}^H の式 (30) を辺々足して、 \mathcal{L}_0^B の具体的な表式 (17.59) を代入すると、レプトンを除いた Lagrangian 密度 $\mathcal{L}^B + \mathcal{L}^H$ の式 (19.2) が導かれる。

■ $\mathcal{L}^L + \mathcal{L}^{LB}$ の式 (19.7) について 共変微分の式 (17.40a) は具体的には

$$\begin{aligned} D^\mu \Psi_l^L &= \left[\partial^\mu + \frac{i}{2} g \left\{ W_1^\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + W_2^\mu \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + W_3^\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} - \frac{i}{2} g' B^\mu \right] \begin{pmatrix} \psi_{\nu_l}^L \\ \psi_l^L \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial^\mu \psi_{\nu_l}^L + \frac{i}{2} g (W_1^\mu \psi_l^L - i W_2^\mu \psi_l^L + W_3^\mu \psi_{\nu_l}^L) - \frac{i}{2} g' B^\mu \psi_{\nu_l}^L \\ \partial^\mu \psi_l^L + \frac{i}{2} g (W_1^\mu \psi_{\nu_l}^L + i W_2^\mu \psi_{\nu_l}^L - W_3^\mu \psi_l^L) - \frac{i}{2} g' B^\mu \psi_l^L \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を与えるので、レプトン系の Lagrangian 密度 \mathcal{L}^L は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^L &= i(\bar{\Psi}_l^L \not{D} \Psi_l^L + \bar{\psi}_{\nu_l}^R \not{D} \psi_{\nu_l}^R + \bar{\psi}_{\nu_l}^R \not{D} \psi_{\nu_l}^R) : (17.39) \\ &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I^{LB}, \\ \mathcal{L}_0 &= \bar{\psi}_l^L i \not{\partial} \psi_l^L + \bar{\psi}_{\nu_l}^L i \not{\partial} \psi_{\nu_l}^L + \bar{\psi}_l^R i \not{\partial} \psi_l^R + \bar{\psi}_{\nu_l}^R i \not{\partial} \psi_{\nu_l}^R : (17.12) \\ &= \bar{\psi}_l i \not{\partial} \psi_l + \bar{\psi}_{\nu_l} i \not{\partial} \psi_{\nu_l} : (17.10), \\ \mathcal{L}_I^{LB} &= i \left\{ \frac{i}{2} g \bar{\psi}_{\nu_l}^L (W_1 - i W_2) \psi_l^L + \frac{i}{2} \bar{\psi}_{\nu_l}^L (g W_3 - g' B) \psi_{\nu_l}^L \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{2} g \bar{\psi}_l^L (W_1 + i W_2) \psi_{\nu_l}^L - \frac{i}{2} \bar{\psi}_l^L (g W_3 + g' B) \psi_l^L - i g' \bar{\psi}_l^R B \psi_l^R \right\} \end{aligned}$$

となる。ここで上式で定義したレプトンとゲージボゾンの相互作用項 \mathcal{L}_I^{LB} (これは相互作用項 (17.42), (17.48) に他ならない) が、式 (19.3d) に一致することを確かめよう。Higgs 場の共変微分 $D^\mu \Phi$ を計算した際に示したように、

$$g W_3^\mu - g' B^\mu = \frac{g}{\cos \theta_W} Z^\mu$$

である。同様に式 (17.45) と式 (17.47): $g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W = e$ を用いると

$$\begin{aligned} g W_3^\mu + g' B^\mu &= (g \cos \theta_W - g' \sin \theta_W) Z^\mu + (g \sin \theta_W + g' \cos \theta_W) A^\mu \\ &= \frac{g}{\cos \theta_W} (1 - 2 \sin^2 \theta_W) Z^\mu + 2e A^\mu \end{aligned}$$

であり、また式 (16.16) の箇所で見たように、任意のレプトン場 ψ に対して

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^L \gamma_\alpha \psi^L &= \bar{\psi} P_R \gamma_\alpha P_L \psi = \bar{\psi} \gamma_\alpha P_L^2 \psi = \bar{\psi} \gamma_\alpha P_L \psi = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \psi, \\ \bar{\psi}^R \gamma_\alpha \psi^R &= \bar{\psi} P_L \gamma_\alpha P_R \psi = \bar{\psi} \gamma_\alpha P_R^2 \psi = \bar{\psi} \gamma_\alpha P_R \psi = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I^{LB} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} g \bar{\psi}_{\nu_l} W (1 - \gamma_5) \psi_l - \frac{1}{4 \cos \theta_W} g \bar{\psi}_{\nu_l} Z (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l} \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{2}} g \bar{\psi}_l W^\dagger (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l} + \left\{ \frac{g}{4 \cos \theta_W} \bar{\psi}_l Z (1 - 2 \sin^2 \theta_W) \psi_l + \frac{e}{2} \bar{\psi}_l A (1 - \gamma_5) \psi_l \right\} \\ &\quad + \frac{g \sin \theta_W}{2 \cos \theta_W} \bar{\psi}_l (-\sin \theta_W Z + \cos \theta_W A) (1 + \gamma_5) \psi_l \\ &= e \bar{\psi}_l A \psi_l \\ &\quad - \frac{g}{2\sqrt{2}} \{ \bar{\psi}_{\nu_l} W (1 - \gamma_5) \psi_l + \bar{\psi}_l W^\dagger (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{g}{4 \cos \theta_W} \bar{\psi}_{\nu_l} \not{Z} (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l} \\
& + \frac{g}{4 \cos \theta_W} \bar{\psi}_l \not{Z} (1 - 4 \sin^2 \theta_W - \gamma_5) \psi_l : (19.3d)
\end{aligned}$$

を得る。以上をまとめると，式 (19.3d) の相互作用項 $\mathcal{L}_1^{\text{LB}}$ を用いてレプトン系の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}^{\text{L}} = \bar{\psi}_l i \not{\partial} \psi_l + \bar{\psi}_{\nu_l} i \not{\partial} \psi_{\nu_l} + \mathcal{L}_1^{\text{LB}} \quad (31)$$

と表される。

次にレプトンと Higgs 場の相互作用項 (18.44):

$$\mathcal{L}^{\text{LH}} = -g_l (\bar{\Psi}_l^{\text{L}} \psi_l^{\text{R}} \Phi + \Phi^\dagger \bar{\psi}_l^{\text{R}} \Psi_l^{\text{L}}) - g_{\nu_l} (\bar{\Psi}_l^{\text{L}} \psi_{\nu_l}^{\text{R}} \tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}^\dagger \bar{\psi}_l^{\text{R}} \Psi_l^{\text{L}})$$

は，ユニタリーゲージの Higgs 場

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \sigma \end{pmatrix} : (19.1), \quad \therefore \tilde{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + \sigma \\ 0 \end{pmatrix}$$

に対して

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{\text{LH}} &= - \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \sigma) \{ g_l (\bar{\psi}_l^{\text{L}} \psi_l^{\text{R}} + \bar{\psi}_l^{\text{R}} \psi_l^{\text{L}}) + g_{\nu_l} (\bar{\psi}_{\nu_l}^{\text{L}} \psi_{\nu_l}^{\text{R}} + \bar{\psi}_{\nu_l}^{\text{R}} \psi_{\nu_l}^{\text{L}}) \} \\
&= - \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \sigma) (g_l \bar{\psi}_l \psi_l + g_{\nu_l} \bar{\psi}_{\nu_l} \psi_{\nu_l}) \\
&= \mathcal{L}_1^{\text{HL}} - \bar{\psi}_l m_l \psi_l - \bar{\psi}_{\nu_l} m_{\nu_l} \psi_{\nu_l} \quad (32) \\
\mathcal{L}_1^{\text{HL}} &= - \frac{1}{v} m_l \bar{\psi}_l \psi_l \sigma - \frac{1}{v} m_{\nu_l} \bar{\psi}_{\nu_l} \psi_{\nu_l} \sigma : (19.3e), \\
m_l &= \frac{v g_l}{\sqrt{2}}, \quad m_{\nu_l} = \frac{v g_{\nu_l}}{\sqrt{2}} : (19.8)
\end{aligned}$$

と計算される。ただし第 2 の等号では任意のレプトン場 ψ に対して

$$\bar{\psi}^{\text{L}} \psi^{\text{R}} + \bar{\psi}^{\text{R}} \psi^{\text{L}} = \bar{\psi} P_{\text{R}}^2 \psi + \bar{\psi} P_{\text{L}}^2 \psi = \bar{\psi} (P_{\text{R}} + P_{\text{L}}) \psi = \bar{\psi} \psi$$

となることを用いた。

最後に \mathcal{L}^{L} の式 (31) と \mathcal{L}^{LH} の式 (32) を辺々足すと，レプトンを含む項 $\mathcal{L}^{\text{L}} + \mathcal{L}^{\text{LH}}$ の式 (19.7) を得る。

■ Higgs 機構について 17.5 節で見たように，Lagrangian 密度の質量項はゲージ不変ではない。Higgs 機構ではもとの Lagrangian 密度がゲージ不変であり，系が自発的に対称性を破る，すなわち Higgs 場が特定の基底状態 (の近く) に選ばれると，Lagrangian 密度の質量項が得られる。

■ 式 (19.14)，式 (19.15) について 式 (19.4): $m_W = v g / 2$ ，式 (17.49): $g_W = g / 2 \sqrt{2}$ ，式 (16.43): $G / \sqrt{2} = (g_W / m_W)^2$ を順次使い，式 (19.14):

$$v = \frac{2 m_W}{g} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{m_W}{g_W} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(G / \sqrt{2})^{1/2}} = \frac{1}{(G \sqrt{2})^{1/2}}$$

を得る。これと式 (19.6): $g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W = e$ を再び式 (19.4) に代入すると，式 (19.15):

$$m_W = \frac{1}{2} v g = \frac{1}{2} \frac{1}{(G \sqrt{2})^{1/2}} \frac{e}{\sin \theta_W} = \left(\frac{\alpha \pi}{G \sqrt{2}} \right)^{1/2} \frac{1}{\sin \theta_W}, \quad m_Z = \frac{m_W}{\cos \theta_W} = \left(\frac{\alpha \pi}{G \sqrt{2}} \right)^{1/2} \frac{2}{\sin 2 \theta_W}$$

を得る。

19.2 Feynman 規則

本節では電弱標準理論における Feynman 規則の説明を行う。ただし

- 最低次の Feynman 振幅の計算に必要な規則だけを考える。
- ユニタリーゲージにおける Lagrangian 密度 (19.1 節) に基づく。
- 場の演算子としての Lagrangian 密度には正規順序化を施す。
- 自由な電磁場の Lagrangian 密度 \mathcal{L}_0 を Feynman ゲージにおける表式

$$\mathcal{L}_0^{\text{Feynman}} = \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$$

に置き換え、改めてこれを \mathcal{L}_0 と表記する。

- これは自由な電磁場の Lagrangian 密度として、Feynman による表式 (5.10):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu)$$

を採用する措置と等価である (p.490 脚注 4)。

- 電弱理論では相互作用 Lagrangian 密度が場の微分を含んでいるため、相互作用する場が自由場と同じ運動方程式と交換関係を満たすことは保証されない。しかしながら S 行列要素を評価する際に自由場の交換関係を用いるものと約束すれば、S 行列展開を QED と同様に

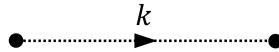
$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T\{\mathcal{L}_I(x_1) \cdots \mathcal{L}_I(x_n)\}$$

として良い。

- QCD においても同様の指摘がなされている (pp.281–282)。

このとき QED の Feynman 規則はそのまま引き継がれ、16.4 節の IVB 理論における規則に加えて次の規則が追加される。

- Z^0 ボゾンの内線に伝播関数 (の i 倍) を充てる。
 Z^0 ボゾンの伝播関数は W ボゾンの伝播関数において $m_W \rightarrow m_Z$ と置き換えて得られる。
- Higgs ボゾンの内線



に伝播関数因子

$$i\Delta_F(k, m_H) = \frac{i}{k^2 - m_H^2 + i\epsilon}$$

を充てる。

さらに相互作用 Lagrangian 密度が 18 個の項を含んでいることに対応して (19.1 節), 18 種類の基本結節点が生じる。各々の結節点因子は QED の場合と同様に導くことができる。各相互作用項が含む場の組合せ (し

表 4 電弱標準理論における 18 種類の基本相互作用

相互作用項	相互作用の種類	結節点因子
$\mathcal{L}_1^{\text{BB}}$	$W^\dagger W Z$	$ig \cos \theta_W \{g^{\alpha\beta} (k_1 - k_2)^\gamma + g^{\beta\gamma} (k_2 - k_3)^\alpha + g^{\gamma\alpha} (k_3 - k_1)^\beta\}$
	$W^\dagger W A$	$ie \{g^{\alpha\beta} (k_1 - k_2)^\gamma + g^{\beta\gamma} (k_2 - k_3)^\alpha + g^{\gamma\alpha} (k_3 - k_1)^\beta\}$
	$W^\dagger W Z^2$	$ig^2 \cos^2 \theta_W (g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} + g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - 2g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta})$
	$W^\dagger W A^2$	$ie^2 (g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} + g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - 2g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta})$
	$W^\dagger W A Z$	$ieg \cos \theta_W (g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} + g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - 2g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta})$
	$(W^\dagger W)^2$	$ig^2 (2g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma})$
$\mathcal{L}_1^{\text{HH}}$	σ^4	$-6i\lambda$
	σ^3	$-6i\lambda v$
$\mathcal{L}_1^{\text{HB}}$	$W^\dagger W \sigma$	$(ivg^2/2)g^{\alpha\beta}$
	$W^\dagger W \sigma^2$	$(ig^2/2)g^{\alpha\beta}$
	$Z^2 \sigma$	$(ivg^2/2 \cos^2 \theta_W)g^{\alpha\beta}$
	$Z^2 \sigma^2$	$(ig^2/2 \cos^2 \theta_W)g^{\alpha\beta}$
$\mathcal{L}_1^{\text{LB}}$	$\bar{l}l A$	$ie\gamma^\alpha$
	$\bar{\nu}_l l W + \text{h.c.}$	$(-ig/2\sqrt{2})\gamma^\alpha(1 - \gamma_5)$
	$\bar{\nu}_l \nu_l Z$	$(-ig/4 \cos \theta_W)\gamma^\alpha(1 - \gamma_5)$
	$\bar{l}l Z$	$(-ig\gamma^\alpha/4 \cos \theta_W)(1 - 4 \sin^2 \theta_W - \gamma_5)$
$\mathcal{L}_1^{\text{HL}}$	$\bar{l}l \sigma$	$(-i/v)m_l$
	$\bar{\nu}_l \nu_l \sigma$	$(-i/v)m_{\nu_l}$

たがって基本結節点・相互作用の種類) と, 対応する結節点因子を表 4 にまとめる. ただし場を

$$\psi_l \rightarrow l, \quad \bar{\psi}_l \rightarrow \bar{l}, \quad \psi_{\nu_l} \rightarrow \nu_l, \quad \bar{\psi}_{\nu_l} \rightarrow \bar{\nu}_l$$

と略記してある. [ここには QED の基本結節点 (因子 $ie\gamma^\alpha$) も含まれている. h.c. は Hermite 共役を意味している. 本稿では図 48 を除き, 結節点因子における運動量や Lorentz 添字を定義する結節点のダイアグラムを示していない.]

電弱理論の結節点に関する新たな注意事項を以下にまとめる.

1. 組合せ因子

結節点因子の導出は QED の場合と同様に行うことができる.

結果的に QED に関しては, 結節点因子を簡単に推定するには,

S 行列展開の 1 次の項 $S^{(1)} = i \int d^4x \mathcal{L}_1$ における

$$i\mathcal{L}_1 = ie\bar{\psi}A\psi$$

から場を取り除いて $ie\gamma^\alpha$ とすれば良い.

これに対して例えば電弱理論における相互作用項

$$\frac{vg^2}{4 \cos^2 \theta_W} g^{\alpha\beta} Z_\alpha Z_\beta \sigma$$

は同種の間 Z_α を 2 つ含んでおり,

結節点に接続する 2 本の Z^0 ボゾン線に 2 つの間 Z_α を充てる方法は 2! 通りある.

このため結節点因子は $\frac{ivg^2}{4\cos^2\theta_W}g^{\alpha\beta}$ ではなく, これに組合せ因子 2! をかけた

$$\frac{ivg^2}{2\cos^2\theta_W}g^{\alpha\beta}$$

となる.

2. テンソル添字の順序

例えば $W^\dagger W Z^2$ 相互作用項

$$g^2 \cos^2 \theta_W (W_\alpha W_\beta^\dagger Z^\alpha Z^\beta - W_\beta W^{\beta\dagger} Z_\alpha Z^\alpha)$$

の結節点因子が

$$ig^2 \cos^2 \theta_W (g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} + g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - 2g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta})$$

となるのは, 各ボゾン線に付随するテンソル添字を図 48 のように定義したときである.

すなわち例えばボゾン線を外線と見なす場合,

テンソル添字 α を付した Z^0 ボゾン線には偏極ベクトル $\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k})$ を充てる.

3. 微分に由来する運動量因子

$W^\dagger W Z$ と $W^\dagger W A$ の項は場の微分を含んでいるため, 運動量因子を生じる.

例えば $W^\dagger W Z$ 相互作用項

$$ig \cos \theta_W \{ (W_\alpha^\dagger W_\beta - W_\beta^\dagger W_\alpha) \partial^\alpha Z^\beta + (\partial_\alpha W_\beta - \partial_\beta W_\alpha) W^{\beta\dagger} Z^\alpha - (\partial_\alpha W_\beta^\dagger - \partial_\beta W_\alpha^\dagger) W^\beta Z^\alpha \}$$

は, 図 48 のように各運動量を結節点に向かう向きに定義したとき, 結節点因子

$$ig \cos \theta_W \{ g^{\alpha\beta} (k_1 - k_2)^\gamma + g^{\beta\gamma} (k_2 - k_3)^\alpha + g^{\gamma\alpha} (k_3 - k_1)^\beta \}$$

を生じる.

4. $(W^\dagger W)^2$ 相互作用項

$$\frac{1}{2} g^2 W_\alpha^\dagger W_\beta (W^{\alpha\dagger} W^\beta - W^\alpha W^{\beta\dagger})$$

の結節点因子が

$$ig^2 (2g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma})$$

となるのは, 図 48 のように運動量の向きとテンソル添字を定義したときである.

19.2 について

■ Higgs ボゾン線の修正に対する組合せ因子 (p.510) について 14.4 節において, グルーオンの自己エネルギーグラフ (図 14.9(a)(p.385)) に関して同様の説明が成されている. Feynman 規則に従うと $(3!)^2$ 通りの場の組合せを考えることになるけれど, 正しい組合せの総数はその 1/2 倍であるため, 対称性因子として $S = 1/2$ を掛けなければならないことが説明された.

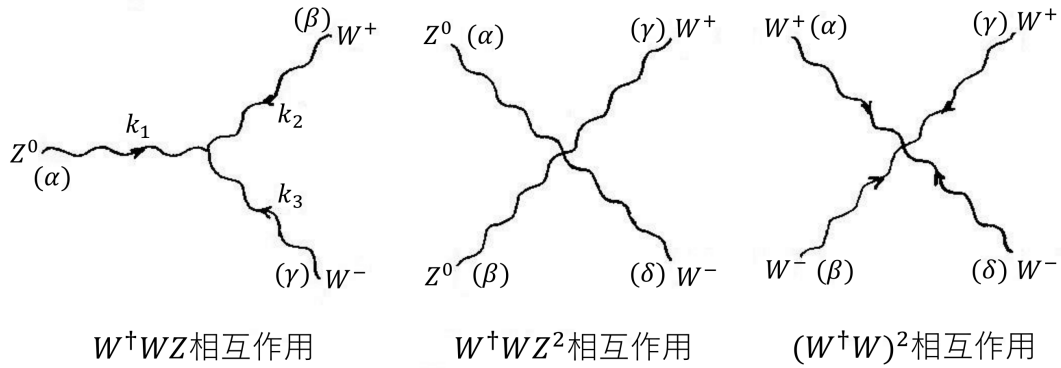


図 48 W^+WZ , W^+WZ^2 , $(W^+W)^2$ 相互作用を表す結節点

■ 「したがって、この結節点因子は W^\pm 電荷が結節点に入射する向きを持つか出射する向きを持つかに依存する」(p.514, 1.2,3) について W^\pm ボゾン運動量の向きは「それぞれの電荷の向きでもあ」(p.512, 1.10) り、これを入れ換えることは「 W^+ と W^- を入れ換える」(p.513 下から 6 行目) ことに対応するので、結節点のダイアグラム (B.6)(p.543) における Lorentz 添字を入れ換えることに相当すると考えられる。

19.3 ニュートリノ-電子弾性散乱

4 種類のニュートリノ-電子弾性散乱

$$\nu + e^- \rightarrow \nu + e^-, \quad \nu = \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu, \nu_e, \bar{\nu}_e$$

に関する断面積の説明が成されている。本稿では $(\nu_\mu e)$ 散乱

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$$

のみを取り上げる。レプトン数の保存を考慮すると、この過程に寄与する最低次の Feynman ダイアグラムは図 49, 図 50 のグラフで表され、対応する Feynman 振幅は Feynman 規則に基づき、それぞれ

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_Z &= \frac{-g^2}{8 \cos^2 \theta_W} [\bar{u}'_{\nu_\mu} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_{\nu_\mu}] i D_{F\alpha\beta}(k, m_Z) [\bar{u}'_e \gamma^\beta (g_V - g_A \gamma_5) u_e] \\ &\simeq \frac{-iG}{\sqrt{2}} [\bar{u}'_{\nu_\mu} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_{\nu_\mu}] [\bar{u}'_e \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma_5) u_e], \\ \mathcal{M}_H &= \frac{-1}{v^2} m_{\nu_\mu} m_e (\bar{u}'_{\nu_\mu} u_{\nu_\mu}) i \Delta_F(k, m_H) (\bar{u}'_e u_e) \\ &\simeq iG \sqrt{2} \frac{1}{m_H^2} m_{\nu_\mu} m_e (\bar{u}'_{\nu_\mu} u_{\nu_\mu}) (\bar{u}'_e u_e) \end{aligned}$$

と書き下せる。ただし

$$g_V \equiv 2 \sin^2 \theta_W - \frac{1}{2}, \quad g_A \equiv -\frac{1}{2}, \quad k = q - q' = p' - p$$

であり、各々の第 2 の等号では $k^2 \ll m_Z^2, m_H^2$ を想定して伝播関数を

$$i D_{F\alpha\beta}(k, m_Z) \equiv \frac{i(-g_{\alpha\beta} + k_\alpha k_\beta / m_Z^2)}{k^2 - m_Z^2 + i\varepsilon} \simeq \frac{i g_{\alpha\beta}}{m_Z^2}, \quad i \Delta_F(k, m_H) \equiv \frac{i}{k^2 - m_H^2 + i\varepsilon} \simeq -\frac{i}{m_H^2}$$

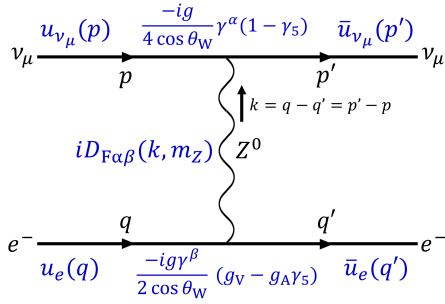


図 49 Z^0 ボゾンの交換を伴う $(\nu_\mu e)$ 散乱のグラフ

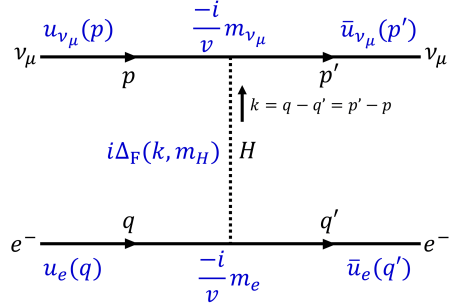


図 50 Higgs ボゾンの交換を伴う $(\nu_\mu e)$ 散乱のグラフ

と書き換えた．これを見ると \mathcal{M}_H は \mathcal{M}_Z の $m_{\nu_\mu} m_e / m_H^2$ 倍程度なので無視して良い．さらに運動量に比べて質量 m_{ν_μ}, m_e を無視する近似 [超相対論的極限] を考えると，ここから [終状態スピンに関する和と始状態スピンに関する平均をとった] 全断面積は

$$\sigma = \frac{G^2 s}{3\pi} (g_V^2 + g_V g_A + g_A^2) \quad (19.44a)$$

となる ($s \equiv (p+q)^2$) [問題 19.3].

この結果は歴史的に，弱混合角 θ_W を実験的に決定し，そこから W^\pm, Z^0 ボゾンの質量を導くのに用いられた [断面積の式における g_V が弱混合角 θ_W に依存している]．今日では実験精度の向上と輻射補正を考慮した理論的解析から，弱混合角とボゾンの質量のより正確な値が見出されている．

19.3 について

■式 (19.39) の g_V, g_A について これらは Feynman 振幅 (19.38b) における結節点因子と同様に，中性カレント J_3^μ の式 (17.50) において $g_V - g_A \gamma_5$ という組合せで現れている．式 (17.50) において g_V の項はベクトルカレント (V) を作り， g_A の項は軸性カレント (A) を作っている．

■ $k^2 \ll m_Z^2$ を考慮した式 (19.42a) について Feynman 振幅 (19.38b) に伝播関数の近似式 $i D_{F\alpha\beta}(k, m_Z) = i g_{\alpha\beta} / m_Z^2$ を代入し，次いで式 (16.43)，式 (17.49)，式 (19.4) を用いて

$$\frac{g^2}{8m_Z^2 \cos^2 \theta_W} = \left(\frac{g/2\sqrt{2}}{m_Z \cos \theta_W} \right)^2 = \left(\frac{g_W}{m_W} \right)^2 = \frac{G}{\sqrt{2}}$$

と書き換えれば良い．

■重心系運動量の自乗 s の式 (19.43) について 式 (19.41b): $s = (p+q)^2$ は Lorentz スカラーである．そこでこれを重心系 ($\mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$) で評価すると，質量を無視する近似 (超相対論的極限)

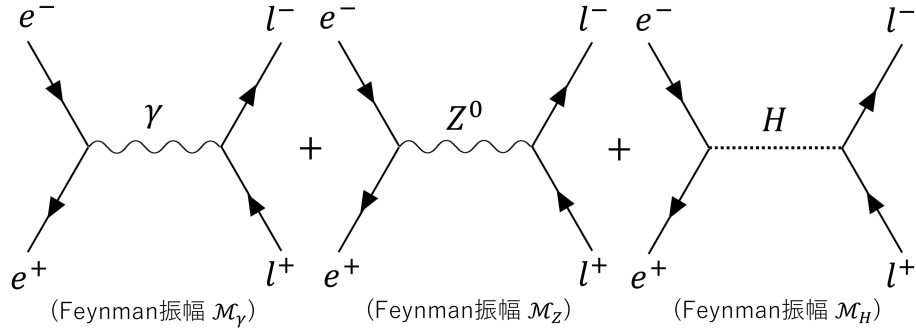
$$E_{\text{CoM}} \equiv E_{\mathbf{p}} = |\mathbf{p}|, \quad E_{\mathbf{q}} = |\mathbf{q}| = |\mathbf{p}|$$

の下で

$$s = (E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}})^2 = 4|\mathbf{p}|^2 = 4E_{\text{CoM}}^2$$

となる．一方これを始状態の電子の静止系 (実験室系， $\mathbf{q} = 0$) で評価すると

$$s = p^2 + 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + q^2 = m_{\nu_\mu}^2 + 2E_{\text{Lab}} m_e + m_e^2 \simeq 2E_{\text{Lab}} m_e + m_e^2$$



$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_\gamma &= ie^2(\bar{u}_l\gamma^\alpha v_l)\frac{1}{k^2+i\epsilon}(\bar{v}_e\gamma_\alpha u_e), \\
 \mathcal{M}_Z &= \frac{ig^2}{4\cos^2\theta_W}[\bar{u}_l\gamma^\alpha(g_V-g_A\gamma_5)v_l]\frac{1}{k^2-m_Z^2+i\epsilon}[\bar{v}_e\gamma_\alpha(g_V-g_A\gamma_5)u_e], \\
 \mathcal{M}_H &= \frac{-i}{v^2}m_em_l(\bar{u}_l v_l)\frac{1}{k^2-m_H^2+i\epsilon}(\bar{v}_e u_e).
 \end{aligned}$$

図 51 $e^+ + e^- \rightarrow l^+ + l^-$ への最低次の寄与

となる。

■式 (19.49) の置き換えについて これにより Feynman 振幅 (19.42a) において

$$g_V - g_A\gamma_5 \rightarrow (1 - \gamma_5) + (g_V - g_A\gamma_5)$$

と置き換わり、第 1 項は \mathcal{M}_W を、第 2 項は \mathcal{M}_Z を作る。

19.4 電子-陽電子消滅の電弱過程

電弱理論では電子-陽電子消滅過程

$$e^+ + e^- \rightarrow l^+ + l^- \quad (l = \mu, \tau)$$

への最低次のダイアグラムは図 51 の Feynman グラフで表される。(各々のグラフに対応する Feynman 振幅を順に $\mathcal{M}_\gamma, \mathcal{M}_Z, \mathcal{M}_H$ とする。) ここで以下の近似を採用する。

- Z^0 ボゾン伝播関数における $k_\alpha k_\beta / m_Z^2$ ($\sim m_e m_l / m_Z^2$, p.518 脚注 9 参照) の項を無視する。
- Feynman 振幅の具体的な表式により、 \mathcal{M}_H は \mathcal{M}_Z に比べて小さいと考え無視する。
- 重心系における電子のエネルギー E は十分に高いと仮定して、全てのレプトンの質量を無視する [超相対論的極限]。

このとき重心系において始状態の e^+ と終状態の l^+ の向きの成す角を θ とすると、

$$s \equiv k^2 = 4E^2$$

に対して (重心系における) 微分断面積は

$$\begin{aligned}\sigma(\theta) &= F(s)(1 + \cos^2 \theta) + G(s) \cos \theta, \\ F(s) &\equiv \frac{\alpha^2}{4s} \left\{ 1 + \frac{g_V^2}{\pi\sqrt{2}} \frac{m_Z^2}{s - m_Z^2} \left(\frac{sG}{\alpha} \right) + \frac{(g_V^2 + g_A^2)^2}{8\pi^2} \left(\frac{m_Z^2}{s - m_Z^2} \right)^2 \left(\frac{sG}{\alpha} \right)^2 \right\}, \\ G(s) &\equiv \frac{\alpha^2}{4s} \left\{ \frac{\sqrt{2}g_A^2}{\pi} \frac{m_Z^2}{s - m_Z^2} \left(\frac{sG}{\alpha} \right) + \frac{g_V^2 g_A^2}{\pi^2} \left(\frac{m_Z^2}{s - m_Z^2} \right)^2 \left(\frac{sG}{\alpha} \right)^2 \right\}\end{aligned}$$

となる. 各項の起源は

$$\alpha^2 \text{の項} \leftarrow |\mathcal{M}_\gamma|^2, \quad \alpha G \text{の項} \leftarrow \mathcal{M}_\gamma \text{-}\mathcal{M}_Z \text{干渉項}, \quad G^2 \text{の項} \leftarrow |\mathcal{M}_Z|^2$$

となっている.

以下のようにエネルギー s の異なる 3 つの領域を考えられる.

- “低エネルギー領域” $s \ll m_Z^2, sG/\alpha \ll 1$
 G を含む項を無視 \rightarrow QED の断面積 (8.46) を再現.
- “中間エネルギー領域”
 G の 1 次の項まで考慮 \rightarrow 前方-後方の非対称性 $\sigma(\theta) \neq \sigma(\pi - \theta)$.
- “ Z^0 共鳴領域” $s \simeq m_Z^2$
 G^2 に比例する項のみを残す. このとき全断面積は

$$\sigma_T = \frac{12\pi\Gamma(Z^0 \rightarrow e^+e^-)\Gamma(Z^0 \rightarrow l^+l^-)}{(s - m_Z^2)^2 + \varepsilon^2} \quad (s \simeq m_Z^2)$$

となる. ただし

$$\Gamma(Z^0 \rightarrow l^+l^-) \simeq \frac{1}{\pi 6\sqrt{2}} G m_Z^3 (g_V^2 + g_A^2) \quad (\text{レプトンの種類 } l \text{ に依らない})$$

は $Z^0 \rightarrow l^+ + l^-$ の崩壊幅 (\rightarrow 16.5 節) である.

Z^0 伝播関数に対する高次の修正を考慮した結果

$$\sigma_T = \frac{12\pi\Gamma(Z^0 \rightarrow e^+e^-)\Gamma(Z^0 \rightarrow l^+l^-)}{(s - m_Z^2)^2 + m_Z^2\Gamma_t^2} \quad (s \simeq m_Z^2) \quad (\text{cf.1 準位 Breit-Wigner 公式})$$

は $s \simeq m_Z^2$ 付近において, 不確定性原理から期待されるように,

Z^0 ボゾンの崩壊幅 Γ_t 程度のピーク幅を持つ.

- 低次過程のみを考慮した Z^0 ボゾンの崩壊幅

$$\Gamma_t = \Gamma(Z^0 \rightarrow \text{hadrons}) + 3\Gamma(Z^0 \rightarrow l^+l^-) + N_\nu \Gamma(Z^0 \rightarrow \nu_l \bar{\nu}_l).$$

質量が非常に重い未知のニュートリノという可能性を考えない限り,

実験データはニュートリノの種類を既知の $N_l = 3$ に制約.

- ボゾンの自己結合を表す γW^+W^- 結節点と $Z^0 W^+W^-$ 結節点の関係する過程

$$e^+ + e^- \rightarrow W^+ + W^-$$

においても, 断面積の理論予測と実験結果が良く一致.

19.4 について

微分断面積の導出は問題 19.4 となっている.

■2つの条件 $s \ll m_Z^2, sG/\alpha \ll 1$ (p.519) について 式 (16.1): $m_Z = 91.19\text{GeV}$, 式 (19.13a): $\alpha = 1/137.04$, 式 (19.13b): $G = 1.166 \times 10^{-5}\text{GeV}^{-2}$ より

$$m_Z^2 = 8316\text{GeV}^2, \quad \alpha/G = 625.8\text{GeV}^2$$

なので, s の増大に伴って第2の条件が先に破られる. “ Z^0 共鳴領域” $s \simeq m_Z^2$ において「 sG/α が1のオーダーにな」 (p.521, 1.5,6) ることもここから理解できる.

■「 G^2 に比例する項を無視すると」 (p.520, 1.10,11) について 正しくは G に比例する項である.

19.5 Higgs ボゾン

Higgs ボゾンとフェルミオン $f = l, \nu_l, q$ (ここではクォーク q も考える) を結合する結節点の因子

$$\frac{-i}{v} m_f = \frac{-ie}{2 \sin \theta_W} \frac{m_f}{m_W}$$

は QED 結合に対して m_f/m_W のオーダーであり, Higgs ボゾンと軽いフェルミオン ($m_f \ll m_W$) の結合は強く抑制されている.

19.5.1 Higgs ボゾンの崩壊

- $m_H < 2m_W$ の場合

最低次の電弱相互作用によって起こり得る Higgs ボゾンの崩壊はフェルミオン対への崩壊

$$H \rightarrow f + \bar{f}$$

だけであり, その全崩壊幅

$$\Gamma_t \simeq \frac{3Gm_H m_b^2}{4\sqrt{2}\pi} \simeq 10^{-5} m_H$$

(m_b は b クォークの質量) は考えている質量領域 $m_H < 2m_W$ に対して極めて小さくなる.

- $m_H > 2m_W, 2m_Z$ の場合

崩壊モード

$$H \rightarrow W^+ + W^-, \quad H \rightarrow Z^0 + Z^0$$

が支配的となる.

19.5.2 Higgs ボゾンの探索

Higgs ボゾンの生成頻度が極めて低く Higgs ボゾンを発見できないのは, 必ずしも Higgs ボゾンの質量が重いだけでなく, むしろ 19.5 節冒頭で述べたように, Higgs ボゾンと軽いフェルミオン ($m_f \ll m_W$) の相互作用が弱いことによる.

そこで Higgs ボゾンと強く結合する W^\pm, Z^0 ボゾン, t クォークなどを生成することが肝要となる. 例えば CERN の LHC では反応

$$p + \bar{p} \rightarrow H + X, \quad X: \text{ハドロン}$$

を利用して Higgs ボゾンの探索を試みており, この反応の主要な機構として想定される “グルーオン融合” のダイアグラムは Higgs 粒子と t クォークを接続する結節点を含んでいる.

Higgs ボゾンの質量は $113.5\text{GeV} < m_H \lesssim 160\text{GeV}$ の範囲に含まれている可能性が高く, この範囲における主要な崩壊モードは $H \rightarrow b\bar{b}$ である. しかしこの過程で生成するクォークのハドロンジェットへの破碎は, 他の過程で生成するハドロンジェットと区別することが困難であり, Higgs 粒子の探索にはむしろ分岐比の低い $H \rightarrow \gamma\gamma$ のような過程の方が適しているかもしれない.

19.5 について

19 章冒頭でも Higgs 粒子は「今のところ発見されていない」(p.499) とあるが, Higgs 粒子は 2012 年に発見された.

練習問題 (第 19 章)

19.3 $\nu_\mu e^-$ 散乱と $\bar{\nu}_\mu e^-$ の全断面積 (19.44a),(19.44b) の導出

本稿では弾性 ($\nu_\mu e$) 散乱の全断面積 (19.44a) のみを導出する.

ニュートリノ ν_μ の始・終状態のスピンをそれぞれ r, r' , 電子 e^- の始・終状態のスピンをそれぞれ s, s' と書くと, Feynman 振幅の絶対値の 2 乗は

$$|\mathcal{M}|^2 \simeq |\mathcal{M}_Z|^2 = \frac{G^2}{2} |[\bar{u}_{r'} \Gamma^\alpha u_r][\bar{u}_{s'} \Gamma_\alpha^{(g)} u_s]|^2$$

となる. ただしここでは各スピノルにおいてスピン状態を明記する代わりに, レプトンの種類を表す指標と引数の運動量を省いた. (このように略記しても, 例えば r は始状態ニュートリノ ν_μ のスピンの指標であったことから, $u_r = u_{\nu_\mu r}(\mathbf{p})$ と判断できる.) また

$$\Gamma^\alpha \equiv \gamma^\alpha(1 - \gamma_5), \quad \Gamma_\alpha^{(g)} \equiv \gamma_\alpha(g_V - g_A \gamma_5)$$

と表記した.

ここで終状態スピンに関する和と始状態スピンに関する平均をとることを考える.

$$\tilde{\Gamma}^\alpha \equiv \gamma^0 \Gamma^{\alpha\dagger} \gamma^0 = \gamma^\alpha(1 - \gamma_5)(= \Gamma^\alpha), \quad \tilde{\Gamma}_\alpha^{(g)} \equiv \gamma^0 \Gamma_\alpha^{(g)\dagger} \gamma^0 = \gamma_\alpha(g_V - g_A \gamma_5)(= \Gamma_\alpha^{(g)})$$

を定義すると (γ 行列の性質 (A.2-3), (A.6), (A.8) を参照), 8.2 節や 16.6.1 節と同様の技法により, 終状態スピンに関する和と始状態スピンに関する平均は

$$\begin{aligned} X &\equiv \frac{1}{4} \sum_{r,r',s,s'} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{1}{4} \frac{G^2}{2} \sum_{r,r',s,s'} [\bar{u}_{r'} \Gamma^\alpha u_r][\bar{u}_r \tilde{\Gamma}^\beta u_{r'}][\bar{u}_{s'} \Gamma_\alpha^{(g)} u_s][\bar{u}_s \tilde{\Gamma}_\beta^{(g)} u_{s'}] \\ &= \frac{1}{4} \frac{G^2}{2} \text{Tr} \left[\frac{\not{p}' + m_{\nu_\mu}}{2m_{\nu_\mu}} \Gamma^\alpha \not{p} + m_{\nu_\mu} \tilde{\Gamma}^\beta \right] \text{Tr} \left[\frac{\not{q}' + m_e}{2m_e} \Gamma_\alpha^{(g)} \not{q} + m_e \tilde{\Gamma}_\beta^{(g)} \right] \end{aligned}$$

と計算される．再び運動量に対して質量を無視する近似 (超相対論的極限) $\boldsymbol{p}' + m_{\nu_\mu} \simeq \boldsymbol{p}'$, etc. を採用すると

$$\begin{aligned}
& \text{Tr} \left[\frac{\boldsymbol{p}' + m_{\nu_\mu} \Gamma^\alpha \boldsymbol{p} + m_{\nu_\mu} \tilde{\Gamma}^\beta}{2m_{\nu_\mu}} \right] \\
&= \frac{p'_\mu p_\nu}{(2m_{\nu_\mu})^2} \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \gamma^\nu \gamma^\beta (1 - \gamma_5)] \\
&= 2 \frac{p'_\mu p_\nu}{m_{\nu_\mu}^2} x^{\mu\alpha\nu\beta}, \quad (\because (1 - \gamma_5)^2 = 2(1 - \gamma_5), \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta (1 - \gamma_5)] = 4x^{\mu\alpha\nu\beta} : (16.49)) \\
& \text{Tr} \left[\frac{\boldsymbol{q}' + m_e \Gamma_\alpha^{(g)} \boldsymbol{q} + m_e \tilde{\Gamma}_\beta^{(g)}}{2m_e} \right] \\
&= \frac{1}{(2m_e)^2} [g_V^2 \text{Tr} (\boldsymbol{q}' \gamma_\alpha \boldsymbol{q} \gamma_\beta) - g_V g_A \{ \text{Tr} (\boldsymbol{q}' \gamma_\alpha \gamma_5 \boldsymbol{q} \gamma_\beta) + \text{Tr} (\boldsymbol{q}' \gamma_\alpha \boldsymbol{q} \gamma_\beta \gamma_5) \} + g_A^2 \text{Tr} (\boldsymbol{q}' \gamma_\alpha \gamma_5 \boldsymbol{q} \gamma_\beta \gamma_5)] \\
&= \frac{1}{(2m_e)^2} \{ (g_V^2 + g_A^2) \text{Tr} (\boldsymbol{q}' \gamma_\alpha \boldsymbol{q} \gamma_\beta) - 2g_V g_A \text{Tr} (\gamma_5 \boldsymbol{q}' \gamma_\alpha \boldsymbol{q} \gamma_\beta) \} \\
&= \frac{2}{m_e^2} [(g_V^2 + g_A^2) \{ q'_\alpha q_\beta - (\boldsymbol{q}' \cdot \boldsymbol{q}) g_{\alpha\beta} + q'_\beta q_\alpha \} + 2ig_V g_A q'^\rho q^\sigma \varepsilon_{\rho\alpha\sigma\beta}] \quad (\because \text{対角和の公式 (A.17), (A.21)})
\end{aligned}$$

となる．これらと式 (16.49): $x^{\mu\alpha\nu\beta} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\alpha\nu} + i\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta}$ を上の X の式に代入し,

$$\begin{aligned}
& (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\alpha\nu}) \varepsilon_{\rho\alpha\sigma\beta} = 0, \\
& \varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta} \{ q'_\alpha q_\beta - (\boldsymbol{q}' \cdot \boldsymbol{q}) g_{\alpha\beta} + q'_\beta q_\alpha \} = 0
\end{aligned}$$

(いずれも第1項と第3項が相殺し, 第2項はそれ自体がゼロになる), および式 (A.14c):

$$\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta} \varepsilon_{\rho\alpha\sigma\beta} = -2(\delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\rho)$$

に注意すると,

$$X = \frac{G^2}{2m_{\nu_\mu}^2 m_e^2} [(g_V^2 + g_A^2) \{ (\boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{q}') (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}) + (\boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{q}) (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}') \} + 2g_V g_A \{ (\boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{q}') (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}) - (\boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{q}) (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}') \}]$$

を得る．

以上を踏まえて断面積の計算に移る．全断面積は不変量であることに注意し, 重心系を用いてこれを計算しよう．重心系において (終状態スピンに関する和と始状態スピンに関する平均をとった) 断面積は, 式 (8.18) より今の場合

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CoM}} = \frac{m_{\nu_\mu}^2 m_e^2}{4\pi^2 (E_{\boldsymbol{p}} + E_{\boldsymbol{q}})^2} \frac{|\boldsymbol{p}'|}{|\boldsymbol{p}|} X$$

と表される ($d\Omega$ はニュートリノ ν_μ の散乱方向の立体角)．ここで重心系での運動量は

$$\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{q}' = -\boldsymbol{p}'$$

を満たす．また ($\nu_\mu e$) 散乱では始・終状態が同種粒子を含んでいるため, エネルギー保存則は

$$|\boldsymbol{p}'| = |\boldsymbol{p}|, \quad |\boldsymbol{q}'| = |\boldsymbol{q}|$$

を意味する．以上より

$$|\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{q}| = |\boldsymbol{p}'| = |\boldsymbol{q}'|$$

である。さらにニュートリノ ν_μ の散乱角，すなわち \mathbf{p}' の \mathbf{p} との成す角を θ とすると，今考えている，運動量に対して質量を無視する近似 (超相対論的極限) $E_{\mathbf{p}} \simeq |\mathbf{p}|$, etc. の下では，

$$p \cdot q = p' \cdot q' = 2|\mathbf{p}|^2, \quad p' \cdot q = p \cdot q' = |\mathbf{p}|^2(1 + \cos \theta)$$

なので，

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CoM}} &= \frac{G^2 |\mathbf{p}|^2}{16 \cdot 2\pi^2} [(g_V^2 + g_A^2) \{4 + (1 + \cos \theta)^2\} + 2g_V g_A \{4 - (1 + \cos \theta)^2\}], \\ \therefore \sigma &= \int_0^\pi \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CoM}} 2\pi \sin \theta d\theta \\ &= \frac{G^2 |\mathbf{p}|^2}{16\pi} \int_{-1}^1 \{(g_V^2 + g_A^2)(5 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta) + 2g_V g_A(3 - 2\cos \theta - \cos^2 \theta)\} d(\cos \theta) \\ &= \frac{G^2 s}{3\pi} (g_V^2 + g_V g_A + g_A^2) : (19.44a) \quad (\because s = 4|\mathbf{p}|^2) \end{aligned}$$

が導かれる。

付録 A 教科書全体の要約

ノート本編との内容の重複を厭わずに、教科書で学んだことの大筋をまとめてみよう。

- 強い相互作用 (第 11–15 章)
- 電弱統一理論 (第 16–19 章)

第 11 章 ゲージ理論

量子色力学 (quantum chromodynamics : QCD) は強い相互作用を記述するゲージ理論であり、いわゆる色電荷が中心的な役割を担う。

まず強い相互作用を行う物質粒子として、クォークの説明をする。クォークはスピン 1/2 の粒子であり、質量と電荷の異なる 6 種類の “香り” (フレーバー) u, d, c, s, t, b が存在する。

	軽い	↔	重い
電荷 $2e/3$	u : up	c : charm	t : top
電荷 $-e/3$	d : down	s : strange	b : bottom

重粒子 (バリオン) と中間子 (メソン) は以下のようなクォークの束縛状態であり (クォーク q の反クォークを \bar{q} と表記), これらを総称して強粒子 (ハドロン) と呼ぶ [1, pp.5–7].

- 重粒子 (バリオン) $\sim qq\bar{q}$
 - 例 : 陽子 (uud), 中性子 (udd)
- 中間子 (メソン) $\sim q\bar{q}$
 - パイオン : $\pi^+(u\bar{d}), \pi^-(\bar{u}d), \pi^0((u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2})$

さて, 強い/弱い相互作用には古典的対応物がなく, 相互作用の形は前もって明らかではない。しかしながら理論の形は, 主に繰り込み可能性とゲージ不変性によって強い制約を受けることになる。Yagn (ヤン) と Mills (ミルズ) はこれらを指導原理として一般的なゲージ理論を構築した。今では電磁相互作用や強い/弱い相互作用はその実例にあたるのが理解されている。そこで QCD の背景として, Yang-Mills 理論の初歩を簡単に一瞥するところから始めよう [2, pp.137–138,p.145].

N 種類の Dirac 場

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = (\bar{\psi}_1 \quad \bar{\psi}_2 \quad \cdots \quad \bar{\psi}_N)$$

に対するラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = \sum_{i=1}^N \bar{\psi}_i(i\partial\!\!\!/ - m)\psi_i$$

は, $N \times N$ のユニタリ行列 $U = e^{iH}$ (したがって H は Hermite 行列) による大域的位相変換 $\psi \rightarrow U\psi$ の下で不変に留まる。このような対称変換は 2 回繰り返し行っても, \mathcal{L} を不変に保つ単一の N 次ユニタリ行列による変換となるから, $U(N)$ 群と呼ばれる群を成す。ところで一般に $N \times N$ の Hermite 行列 H は N^2

個の独立な実数によって特定できる [1, p.254]. そこで N^2 個の適当な Hermite 行列 T_i と実パラメーター α_i を用いて, 一般に

$$H = \sum_i \alpha_i T_i, \quad U = \exp \left(i \sum_i \alpha_i T_i \right)$$

と書くことができる (このとき T_i を変換の生成子と呼ぶ).

次に QCD を念頭に, $N = 3$ の場合を考えよう. 我々の目的のためには, 生成子 T_i の具体的な行列表現に頼って議論を進めれば充分である. このとき $N^2 = 9$ 個の T_i として, Gell-Mann (ゲルマン) 行列

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

の 1/2 倍

$$T_i = \frac{1}{2} \lambda_i (\equiv \hat{F}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, 8)$$

と, 単位行列 $\mathbf{1}$ に比例した $T_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{1}$ を選ぶことができる. T_0 を生成子とするユニタリー行列 $\exp(i\alpha_0 T_0) = \exp\left(i\frac{\alpha_0}{\sqrt{6}}\right) \mathbf{1}$ による変換

$$\psi \rightarrow \exp(i\alpha_0 T_0) \psi, \quad \text{i.e.} \quad \psi_i \rightarrow \exp\left(i\frac{\alpha_0}{\sqrt{6}}\right) \psi_i$$

は U(1) 部分群を成す. また残りの 8 個の生成子 \hat{F}_i はいずれもトレースがゼロになっていることに注目すると*8, $\exp\left(i\sum_{i=1}^8 \alpha_i \hat{F}_i\right)$ は行列式が 1 となることが分かる. こうして $\exp\left(i\sum_{i=1}^8 \alpha_i \hat{F}_i\right)$ による位相変換は特殊ユニタリー群 SU(3) を成し, 半ば直観的に述べると, U(3) 群は U(1) 群と SU(3) 群に分解される:

$$U(3) = U(1) \times SU(3).$$

QCD は SU(3) 変換に関してゲージ不変な理論であり, いわゆる SU(3) Yang-Mills 理論の実例にあたる. クォークの各香り $f = d, u, s, c, b, t$ について 3 種類の色状態 $c = r, g, b$ の Dirac 場 ψ_c^f が定義され, 8 種類の色演算子 $\hat{F}_i = \lambda_i/2$ が SU(3) 変換の生成子となる. 改めて Dirac 場を

$$\Psi^f = \begin{pmatrix} \psi_r^f \\ \psi_g^f \\ \psi_b^f \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}^f = \left(\bar{\psi}_r^f \quad \bar{\psi}_g^f \quad \bar{\psi}_b^f \right)$$

とまとめると, 自由クォークのラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}^f (i\partial\!\!\!/ - m_f) \Psi^f = \sum_{c=r,g,b} \bar{\psi}_c^f (i\partial\!\!\!/ - m_f) \psi_c^f$$

*8 一般に U(N) 変換の N^2 個の生成子 T_i は, 規格直交条件

$$\text{Tr}(T_i T_j) = \frac{1}{2} \delta_{ij}$$

を満たすようにとるのが慣例となっている. このとき T_0 を除く $N^2 - 1$ 個の T_i は特に

$$\text{Tr}(T_i) = 0 \quad (i \neq 0)$$

を満たすことになる.

表5 色電荷の固有値 F_3, F_8

	クォーク		反クォーク		
	F_3	F_8	F_3	F_8	
r	1/2	$1/2\sqrt{3}$	\bar{r}	-1/2	$-1/2\sqrt{3}$
g	-1/2	$1/2\sqrt{3}$	\bar{g}	1/2	$-1/2\sqrt{3}$
b	0	$-1/\sqrt{3}$	\bar{b}	0	$1/\sqrt{3}$

で与えられる (繰り返された香りの添字 $f = d, u, s, c, b, t$ について和をとる). 大域的位相変換 $\Psi^f(x) \rightarrow e^{i\alpha_i \lambda_i/2} \Psi^f(x)$ の下での \mathcal{L} の不変性から導かれる, 保存するカレントと色電荷は

$$S_i^\mu(x) = \frac{1}{2} \bar{\Psi}^f(x) \gamma^\mu \lambda_i \Psi^f(x),$$

$$\hat{F}_i = \int d^3x S_i^0(x) = \frac{1}{2} \int d^3x \Psi^{f\dagger}(x) \lambda_i \Psi^f(x) \quad (i = 1, 2, \dots, 8)$$

である. 演算子を正規順序化し, Gell-Mann 行列 λ_i の具体的な表式と場の Fourier 展開を利用すると,

$$\begin{aligned} \hat{F}_3 &= \frac{1}{2} \int d^3x N [\psi_r^{f\dagger}(x) \psi_r^f(x) - \psi_g^{f\dagger}(x) \psi_g^f(x)] \\ &= \frac{1}{2} (N_r - \bar{N}_r) - \frac{1}{2} (N_g - \bar{N}_g), \\ \hat{F}_8 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int d^3x N [\psi_r^{f\dagger}(x) \psi_r^f(x) + \psi_g^{f\dagger}(x) \psi_g^f(x) - 2\psi_b^{f\dagger}(x) \psi_b^f(x)] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} (N_r - \bar{N}_r) + \frac{1}{2\sqrt{3}} (N_g - \bar{N}_g) - \frac{1}{\sqrt{3}} (N_b - \bar{N}_b), \\ \hat{F}_1 &= \frac{1}{2} \int d^3x N [\psi_r^{f\dagger}(x) \psi_g^f(x) - \psi_g^{f\dagger}(x) \psi_r^f(x)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s, \mathbf{p}, f} \{ c_{sr}^{f\dagger}(\mathbf{p}) c_{sg}^f(\mathbf{p}) - d_{sr}^{f\dagger}(\mathbf{p}) d_{sg}^f(\mathbf{p}) + c_{sg}^{f\dagger}(\mathbf{p}) c_{sr}^f(\mathbf{p}) - d_{sg}^{f\dagger}(\mathbf{p}) d_{sr}^f(\mathbf{p}) \}, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

が得られる (上記の \hat{F}_i との混同に注意). ただし例えば $c_{sr}^{f\dagger}(\mathbf{p}), d_{sr}^{f\dagger}(\mathbf{p})$ はそれぞれ, 色 r , 運動量 \mathbf{p} , スピン s のクォークと反クォークの生成演算子を表す. またクォークと反クォークの数演算子はそれぞれ $N_r \equiv \sum_{s, \mathbf{p}, f} c_{sr}^{f\dagger}(\mathbf{p}) c_{sr}^f(\mathbf{p}), \bar{N}_r \equiv \sum_{s, \mathbf{p}, f} d_{sr}^{f\dagger}(\mathbf{p}) d_{sr}^f(\mathbf{p})$ のように定義されている. クォークの色状態 r, g, b は \hat{F}_3, \hat{F}_8 の同時固有状態であり, 色電荷の固有値は表5のようにまとめられる (反クォークの固有状態は $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$ で表す).

ここでクォークが色の自由度を持つことの含意を見ておこう. 色の閉じ込めの仮説によれば, 一般に多クォーク状態 $|\chi_h^c\rangle$ には条件

$$\hat{F}_i |\chi_h^c\rangle = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 8)$$

が課される. これは固有値に対する条件 $F_3 = F_8 = 0$ を含意する. すると表5の値より,

- 自由クォーク q やクォーク対 qq は存在できない.
- クォーク対 $q\bar{q}$ や重粒子 qqq は許容される.

この結果は観測と合っている．さらに閉じ込め条件を完全に考慮すると，重粒子（バリオン）の色状態が

$$|\chi_B^c\rangle \sim \varepsilon_{ijk} |r_i, g_j, b_k\rangle = \begin{vmatrix} |r_1\rangle & |r_2\rangle & |r_3\rangle \\ |g_1\rangle & |g_2\rangle & |g_3\rangle \\ |b_1\rangle & |b_2\rangle & |b_3\rangle \end{vmatrix}$$

という形をとることが導かれる．ただし例えば $|r_1, g_2, b_3\rangle = |r_1\rangle |g_2\rangle |b_3\rangle$ は，重粒子を構成するクォーク 1,2,3 の色がそれぞれ r, g, b となる状態であり，添字 $i, j, k = 1, 2, 3$ について和をとる．このように色状態が同種クォークの入れ替えに関する反対称性を担っており，このときクォークの位置，スピン，香りの自由度を含めた重粒子の状態が，スピン-統計定理から期待される適正な反対称性を持つことが保証される [1, p.200]．

我々は自由クォーク場に関して，大域的な位相変換の下での不変性から保存する色電荷を見出した．次に QED の場合と同様に，クォーク場と相互作用するゲージ場を導入し，局所的な位相変換の下でゲージ不変な理論を構築する．QED に対する式において

$$\begin{aligned} \text{物質場} \quad \psi(x) &\rightarrow \Psi^f(x), \\ \text{電荷} \quad q &\rightarrow g_s \lambda_j / 2, \quad (g_s : \text{結合定数}) \\ \text{ゲージ関数} \quad f(x) &\rightarrow \omega_j(x), \\ \text{ゲージ場} \quad A^\mu(x) &\rightarrow A_j^\mu(x) : \text{グルーオン場} \end{aligned}$$

(ただし $j = 1, 2, \dots, 8$) と置き換えると，QCD に対する式が得られる：

- 局所的な位相変換

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \psi(x) e^{-iqf(x)} \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{-iqf(x)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Psi^f(x) \rightarrow \psi^{f'}(x) = \exp[ig_s \lambda_j \omega_j(x)/2] \Psi^f \\ \bar{\Psi}^f(x) \rightarrow \bar{\psi}^{f'}(x) = \bar{\Psi}^f \exp[ig_s \lambda_j \omega_j(x)/2] \end{cases} \quad (33)$$

- 共変微分

$$D_\mu \psi(x) = [\partial_\mu + iqA_\mu(x)]\psi(x) \rightarrow D^\mu \Psi^f(x) = [\partial^\mu + ig_s \lambda_j A_j^\mu(x)/2] \Psi^f(x).$$

- ラグランジアン密度

$$\begin{cases} \mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi \\ \mathcal{L}_1 = -q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}_q = \bar{\Psi}^f(i\not{D} - m_f)\Psi^f = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_0 \equiv \bar{\Psi}^f(i\not{\partial} - m_f)\Psi^f \\ \mathcal{L}_1 \equiv -\frac{1}{2}g_s \bar{\Psi}^f \gamma_\mu \lambda_j \Psi^f A_j^\mu \end{cases} \quad (34)$$

これにより QCD における極小置換 $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ が定義され，クォーク場とゲージ場（グルーオン場）の相互作用が導入されたことになる．ここで得たクォークを記述するラグランジアン密度 (34) がゲージ不変となるためには，無限小の $\omega_j(x)$ に対してグルーオン場 $A_j^\mu(x)$ は

$$A_i^\mu(x) \rightarrow A_j^{\mu'}(x) \equiv A_i^\mu(x) - \partial^\mu \omega_i(x) - g_s f_{ijk} \omega_j(x) A_k^\mu(x) \quad (35)$$

と変換しなければならない．ここに f_{ijk} は交換関係 $[\hat{F}_i, \hat{F}_j] = if_{ijk} \hat{F}_k$ で定義される構造定数である．上式 (33), (35) を合わせて SU(3) ゲージ変換と呼ぶ．

式 (35) 右辺の最後の項 $-g_s f_{ijk} \omega_j(x) A_k^\mu(x)$ は電磁場のゲージ変換と比べて新たな特徴である．この項のために，ゲージ場のゲージ不変なラグランジアン密度 \mathcal{L}_G を得るには，場の強度 $F_i^{\mu\nu} \equiv \partial^\nu A_i^\mu - \partial^\mu A_i^\nu$ に付加的な項を導入した

$$G_i^{\mu\nu} \equiv F_i^{\mu\nu} + g_s f_{ijk} A_j^\mu A_k^\nu$$

を用いて

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}G_{i\mu\nu}G_i^{\mu\nu}$$

としなければならない*9.

以上より QCD (量子色力学) の完全なラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}^f(i\not{D} - m_f)\Psi^f - \frac{1}{4}G_{i\mu\nu}G_i^{\mu\nu} \quad (36)$$

である。純粋なグルーオン場の項を具体的に書くと

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}G_{i\mu\nu}G_i^{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}F_{i\mu\nu}F_i^{\mu\nu} \quad \leftarrow \text{自由グルーオン場} \\ &+ g_s f_{ijk} A_{i\mu} A_{j\nu} \partial^\mu A_k^\nu \quad \leftarrow A_i^\mu \text{を3つ含む} \\ &- \frac{1}{4}g_s^2 f_{ijk} f_{ilm} A_j^\mu A_k^\nu A_{l\mu} A_{m\nu} \quad \leftarrow A_i^\mu \text{を4つ含む} \end{aligned} \quad (37)$$

となる。

- 式 (34) の相互作用ラグランジアン \mathcal{L}_I

– 図 52(a) のようなクォーク-グルーオンの 3 点結節点を作る。 \mathcal{L}_I における

$$\bar{\Psi}^{f\dagger}(x)\lambda_1\Psi^f(x) = \psi_r^{f\dagger}(x)\psi_g^f(x) - \psi_g^{f\dagger}(x)\psi_r^f(x)$$

のような項はクォークの色状態を変化させる。ところが色電荷は保存するから、

QED とは対照的に、ゲージ場の量子 (グルーオン) もゼロでない電荷を持たなければならない。

- 式 (37) 最右辺の第 1 項 (自由グルーオン場)

– グルーオンは色電荷を持つので、色の閉じ込め効果のために、孤立状態では観測されない。

- 式 (37) 最右辺の第 2 項, 第 3 項

– それぞれ図 52(b),(c) に示された、

3 本, 4 本のグルーオン線の集まるグルーオン-グルーオン結節点を作る。

– グルーオンの自己相互作用は、グルーオン自体がゼロでない色電荷を持つことに起因する。

- “香り独立性”

\mathcal{L}_I の式 (34) におけるクォーク-グルーオン相互作用の強さと形は、香り $f = d, u, s, \dots$ に依らない。

- 相互作用 \mathcal{L}_I の形 (34) より、クォーク数

$$N_f \equiv N(f) - N(\bar{f}) \quad (f = d, u, s, c, b, t)$$

が保存する (QED においてレプトン数が保存するのと同じ事情である)。

最後に、ゲージ不変性の観点からは、極小置換によって得られないゲージ不変な項をラグランジアン密度に付け加えた理論も考えられる。しかしながら、そのような“極小でない”相互作用は、繰り込み可能性によって排除される。

*9 ここでは電磁テンソルを $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ で定義する流儀と比べて、添字 μ, ν を逆に付けてある。

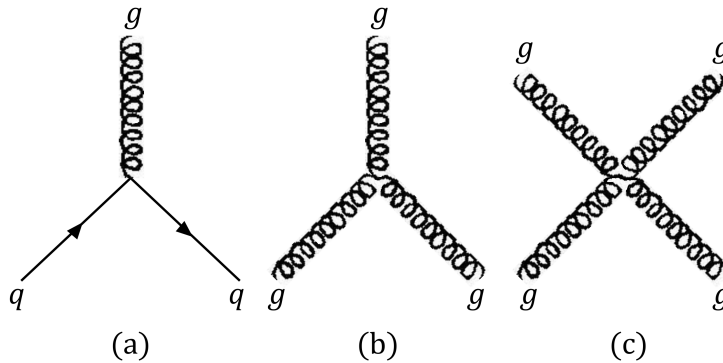


図 52 QCD の相互作用

第 12 章 場の理論の方法

QCD はグルーオン場のゲージ変換 (35) が電磁場よりも複雑であるために (言い換えれば構造定数 f_{ijk} がゼロでなく生成子 \hat{F}_i が交換しない, 非 Abel ゲージ理論であるために [2, p.144]), 実は量子化を行うには正準形式よりも径路積分形式の方が適している. 第 12 章と続く第 13 章では QED の文脈において, 径路積分を用いた定式化のために必要となる新たな概念——すなわち Green 関数と生成汎関数——を導入する.

Green 関数の定義からはじめよう. 任意の場の量子論による物理的な予言はその S 行列要素に含まれている. これに対して Green 関数は S 行列要素ほど観測可能量と直接的な関係を持つわけではないものの, 計算しやすく, いくつかの異なる過程の S 行列要素を単一の Green 関数から導くことが可能である. Green 関数は Heisenberg 描像 (添字 H で表す) において, 複数の場の演算子の時間順序化積の真空期待値

$$G^{\mu\dots}(x, \dots y, \dots z, \dots) \equiv {}_{\text{H}}\langle 0 | \text{T} \{ A^{\mu\text{H}}(x) \dots \psi^{\text{H}}(y) \dots \bar{\psi}^{\text{H}}(z) \dots \} | 0 \rangle_{\text{H}} \quad (38)$$

として定義される. これは伝播関数を“脚”に持つダイアグラムに対応付けられ,

- 電磁場演算子 $A^{\mu\text{H}}$ には光子の脚が,
- 電磁場演算子 ψ^{H} には外向きの電子の脚が,
- 電磁場演算子 $\bar{\psi}^{\text{H}}$ には内向きの電子の脚が

充てられる. 例えば Green 関数

$$G^{\mu\nu}(x, y, z, w) = {}_{\text{H}}\langle 0 | \text{T} \{ A^{\mu\text{H}}(x) A^{\nu\text{H}}(y) \psi^{\text{H}}(z) \bar{\psi}^{\text{H}}(w) \} | 0 \rangle_{\text{H}} \quad (39)$$

は図 53 のダイアグラムで表される. (グラフとの対応付けは, この後で述べるように, Green 関数もまたグラフに Feynman 規則を適用して求められることから正当化される.) S 行列要素が外線を持つのに対し, Green 関数の各脚は伝播関数であり, S 行列要素と関係付けるときに始・終状態の粒子のいずれにも対応し得る. また Green 関数の中央の斜線部分には, 脚に接続する可能なあらゆるグラフが摂動展開の形で寄与する. Green 関数の定義式 (38) は, 相互作用描像に移行させると

$$G^{\mu\dots}(x, \dots y, \dots z, \dots) = \frac{\langle 0 | \text{T} \{ S A^{\mu}(x) \dots \psi(y) \dots \bar{\psi}(z) \dots \} | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle} \quad (40)$$

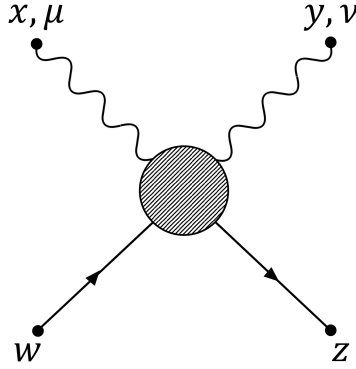


図 53 Green 関数 (39) を表すダイアグラム

となる (Gell-Mann Low の定理 [6, pp.69–71]). 運動量空間の Green 関数 $G^{\mu\cdots}(q_1, q_2, \dots, q_n)$ は, 慣例に従って運動量変数 q_i をダイアグラムの内向きにとり, Fourier 変換

$$\int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_n \left(\prod_{i=1}^n e^{-iq_i \cdot x_i} \right) G^{\mu\cdots}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1 + q_2 + \cdots + q_n) G^{\mu\cdots}(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

で定義される. エネルギー-運動量保存を保証する δ 関数は Fourier 変換に伴って必ず現れる.

Green 関数 (40) に S 行列展開を代入すると, 分母と分子はそれぞれ

$$\langle 0|S|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \langle 0|\mathcal{T}\{\mathcal{L}_I(x_1) \cdots \mathcal{L}_I(x_n)\}|0\rangle, \\ \langle 0|\mathcal{T}\{SAB \cdots\}|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \langle 0|\mathcal{T}\{AB \cdots N(\bar{\psi}A\psi)_{x_1} \cdots N(\bar{\psi}A\psi)_{x_n}\}|0\rangle$$

と摂動展開される ($\mathcal{L}_I(x) = eN(\bar{\psi}A\psi)_x$). 上式に Wick の定理を適用し, S 行列要素の計算と同様の手法で Green 関数を評価できる.

例えば Green 関数

$$G^{\mu\nu}(x, y, z, w) = \frac{\langle 0|\mathcal{T}\{A^\mu(x)A^\nu(y)\psi(z)\bar{\psi}(w)S\}|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle} \quad (41)$$

は図 54 のように, 連結ダイアグラム (連結 Green 関数 $G_c^{\mu\nu}(x, y, z, w)$) と, 非連結ダイアグラム (の寄与) に分解される. 非連結ダイアグラムはその構成要素となっている独立な過程のダイアグラム以上の情報を含んではいない. そこで興味のある連結 Green 関数を運動量空間に移すと, 2 次までの計算で

$$G_c^{\mu\nu}(k_1, k_2, p_1, p_2) = iD_F^{\mu\alpha}(k_1)iS_F(-p_2)\Gamma_{\alpha\beta}(k_1, k_2, p_1, p_2)iS_F(p_1)iD_F^{\beta\nu}(k_2), \quad (42)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}(k_1, k_2, p_1, p_2) \equiv (ie\gamma_\beta)iS_F(p_1 + k_1)(ie\gamma_\alpha) + (ie\gamma_\alpha)iS_F(p_1 + k_2)(ie\gamma_\beta) \quad (43)$$

となる. これは Green 関数の脚を表す伝播関数と “結節部分関数” $\Gamma_{\alpha\beta}(k_1, k_2, p_1, p_2)$ から構成されており, 図 55 のダイアグラムに Feynman 規則を適用した結果に一致している. Green 関数に付した運動量 p_2 は内向きを基準としているのに対し, 伝播関数 S_F の引数は常にフェルミオン線の矢の向きに一致させる約束だから, $iS_F(-p_2)$ における引数の負号を要する.

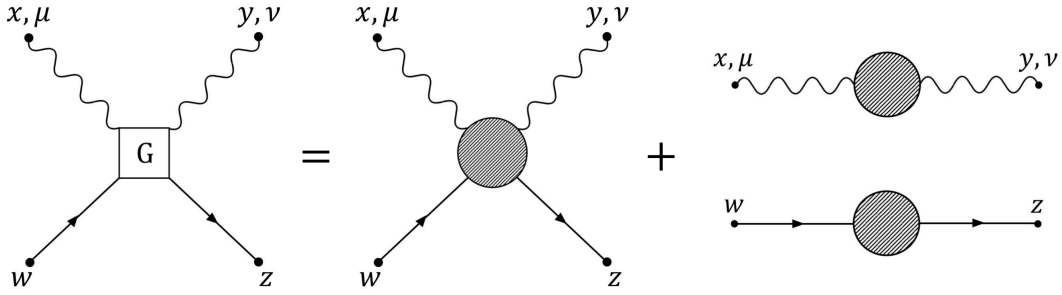


図 54 Green 関数 (41) の連結部分と非連結部分への分解. 丸い灰色 (斜線) の部分は連結ダイアグラムの和を表す.

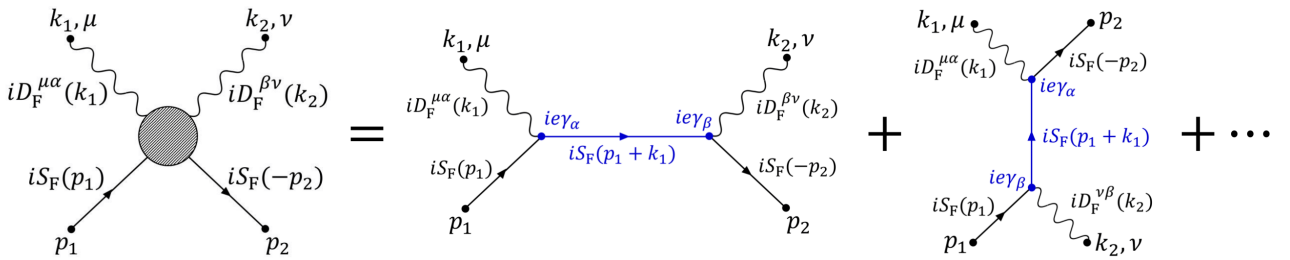


図 55 連結 Green 関数 (42)(図 55 の青い字で示した因子が結節部分関数 (43) に対応)

このように、一般に運動量空間の Green 関数もまた Feynman 規則に従う。よって任意の過程の Feynman 振幅を得るには、関係する (連結) Green 関数の脚 (内線) を表す伝播関数を、外線粒子の因子に適切に置き換えさえすれば良い^{*10}。例えば図 57 のダイアグラムで表される Compton 散乱

$$\gamma(k, r) + e^-(p, s) \rightarrow \gamma(k', r') + e^-(p', s')$$

の Feynman 振幅 \mathcal{M} を求めるには、図 56 のダイアグラムで表される Green 関数 (42) において内向き運動量を

$$k_1 = k, \quad p_1 = p, \quad k_2 = -k', \quad p_2 = -p'$$

と同定し、さらに Green 関数の脚 (伝播関数) の外線因子への置き換え

$$\begin{aligned} iD_F^{\mu\alpha}(k_1) &\rightarrow \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}), & iS_F(p_1) &\rightarrow u_s(\mathbf{p}), \\ iD_F^{\beta\nu}(k_2) &\rightarrow \varepsilon_{r'}^\beta(\mathbf{k}'), & iS_F(-p_2) &\rightarrow \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \end{aligned} \quad (44)$$

を施せば良い：

$$\mathcal{M}(k, k', p, p') = \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \Gamma_{\alpha\beta}(k, -k', p, -p') u_s(\mathbf{p}) \varepsilon_{r'}^\beta(\mathbf{k}').$$

ただしここでは最低次の摂動論を念頭に、結節部分関数 $\Gamma_{\alpha\beta}$ は 2 次の表式 (43) を想定しており、また置き換え (44) では伝播関数と外線に対する輻射補正を考慮していない。

次に生成汎関数の議論に移ろう。任意の過程の S 行列要素は、関係する Green 関数から得られる。そして特定の場の理論に対するあらゆる Green 関数は、生成汎関数から導くことができる。

^{*10} このような Green 関数と Feynman 振幅 (S 行列要素) の関係は一般に、LSZ 簡約公式としてまとめられる [2, pp.71-76]。LSZ 簡約公式が外線因子の置き換えに対応していることは、文献 [6, pp.75-76] の説明が見やすい。

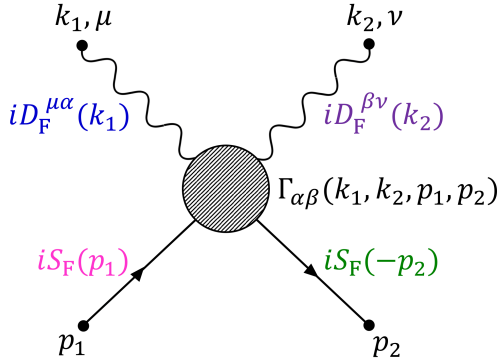


図 56 Green 関数 $G_c^{\mu\nu}(k_1, k_2, p_1, p_2)$

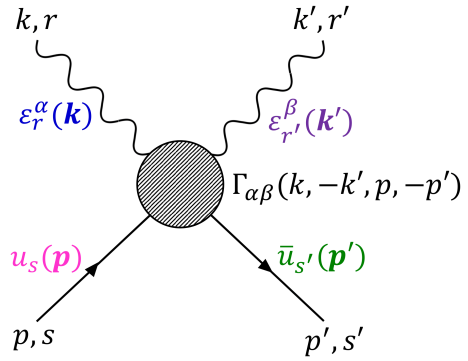


図 57 Compton 散乱の Feynman 振幅

生成汎関数 → Green 関数 → S 行列要素.

このため理論の予言は全て生成汎関数に集約されることになる。

生成汎関数を導入するための数学的準備として、汎関数微分と Grassmann 場について述べておく必要がある。もっともこの付録では具体的な計算を行わないため、以下の内容は完全を期するための形式的な、最低限の説明にすぎない。

汎関数 時空座標 x の関数 $\phi(x)$ に対し、汎関数 $F[\phi]$ とは関数 $\phi(x)$ の“関数”のことである。 $\phi(x)$ の変化 $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$ に伴う $F[\phi]$ の 1 次の変化を $\delta F[\phi]$ として、汎関数微分 $\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)}$ を

$$\delta F[\phi] = \int d^4x \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x) \quad (45)$$

で定義する^{*11}。

Grassmann 代数と Grassmann 場 Grassmann 変数 (生成子) $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ は次の反交換関係を満たすものとして定義される。

$$\{\theta_i, \theta_j\} = 0. \quad (46)$$

よって $\theta_i^2 = 0$ となるから、 n 個の生成子 θ_i の Grassmann 代数における最も一般的な代数要素 (Grassmann 変数 θ_i の“関数”) は次の形を持つ。

$$f(p) = p_0 + \sum p_i \theta_i + \sum p_{ij} \theta_i \theta_j + \dots + p_{12\dots n} \theta_1 \theta_2 \dots \theta_n. \quad (47)$$

ここで \sum は $1 \leq i < j < \dots < n$ を満たす添字 i, j, \dots に関する和を表す。また係数 p_0, p_i, p_{ij}, \dots は通常の数であり、我々は代数要素 (47) を θ_i よりもむしろ係数 $p \equiv \{p_0, p_i, p_{ij}, \dots\}$ の関数と見なす。

次に Grassmann 変数 $\{\theta_i\} \equiv \theta$ の任意の関数 $f(\theta)$ の、Grassmann 変数 θ_i による微分 $\partial/\partial\theta_i$ を定義しよう。Grassmann 数は連続変数のようなものではなく、純粋に上述のような操作上の性質だけで定義された抽象的な対象であり、 $\partial/\partial\theta_i$ もまた通常の微分とは全く異なるものである (表面的には類似の性質を持つにせよ)。 $f(\theta)$ は式 (47) の形を持つので、 θ_i による微分が線形性を持つものとして式 (47) の各項の微分

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i} (\theta_{j_1} \theta_{j_2} \dots \theta_{j_\omega}) \quad (48)$$

を定義すれば十分である。ここで θ_i による微分は

$$\frac{\partial\theta_i}{\partial\theta_j} = \delta_{ij} \quad (49)$$

^{*11} 汎関数微分 $\delta F/\delta\phi$ は定義式 (45) より、通常の微分とは異なり $\frac{1}{L^4} \times \frac{[F]}{[\phi]}$ の次元を持つ (L は長さの次元を表す)。

を満たすものとする。また通常の数の θ_i による微分はゼロとする。これを踏まえ、 $\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_\omega}$ の θ_i による微分 (48) を定義する。まず $\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_\omega}$ が θ_i を含まないとき、式 (48) はゼロとする。次に $\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_\omega}$ が θ_i を 2 つ以上含むとき、反交換関係 (46) によりこれはゼロになるので、その θ_i による微分 (48) もゼロである。そこで $\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_\omega}$ が θ_i を 1 つだけ含む場合を考える。このとき θ_i による微分 (48) を実行するには、次のように反交換関係 (46) を用いて θ_i を積 $\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_\omega}$ の左端まで移動してから、式 (49) を適用すれば良い (左微分の約束)。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta_i}(\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_{k-1}}\theta_i\theta_{j_{k+1}}\cdots\theta_{j_\omega}) &= (-1)^{k-1} \left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}\theta_i \right) \theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_{k-1}}\theta_{j_{k+1}}\cdots\theta_{j_\omega} \\ &= (-1)^{k-1}\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_{k-1}}\theta_{j_{k+1}}\cdots\theta_{j_\omega}.\end{aligned}$$

さらに

$$\theta_i \rightarrow \text{各時空点 } x \text{ に付随する無限個の生成子 } \theta(x) : \text{Grassmann 場}, \quad \{\theta(x), \theta(y)\} = 0$$

とし、Grassmann 汎関数を

$$F[\theta] = f_0 + \int d^4x f_1(x)\theta(x) + \iint d^4x d^4y f_2(x, y)\theta(x)\theta(y) + \cdots$$

によって定義する (f_i は通常の関数)。そして Grassmann 場による汎関数微分 $\delta/\delta\theta(x)$ を、 $\partial/\partial\theta_i$ と類似の性質

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta\theta(x)}\{\theta(x_1)\theta(x_2)\theta(x_3)\cdots\theta(x_n)\} \\ = \delta^{(4)}(x-x_1)\{\theta(x_2)\theta(x_3)\cdots\theta(x_n)\} - \delta^{(4)}(x-x_2)\{\theta(x_1)\theta(x_3)\cdots\theta(x_n)\} \\ + \cdots + (-1)^{n-1}\delta^{(4)}(x-x_n)\{\theta(x_1)\theta(x_2)\cdots\theta(x_{n-1})\}\end{aligned}$$

を満たす線形演算子として“定義”する。

さて、QED の生成汎関数を構築するにあたり、QED の量子場 $A^\kappa, \psi, \bar{\psi}$ に対応 (結合) する虚構的な古典的源 $J_\kappa, \bar{\sigma}, \sigma$ (ただし $\sigma, \bar{\sigma}$ は独立なスピノル Grassmann 場) を導入し、ラグランジアン密度を

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_S, \quad \mathcal{L}'_I \equiv \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_S : \text{源がある場合の相互作用}$$

とする。ここに

- 自由場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu)$
- 相互作用ラグランジアン密度 $\mathcal{L}_I = -s^\mu A_\mu$
- 源のラグランジアン密度 $\mathcal{L}_S = J_\kappa A^\kappa + \bar{\sigma}\psi + \bar{\psi}\sigma$

である。源の項 \mathcal{L}_S を含むラグランジアン密度に対する S 演算子を S' として、生成汎関数は

$$Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \frac{\langle 0|S'|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle} \quad (50)$$

で定義される (したがって $Z[0, 0, 0] = 1$)。このとき次式のように生成汎関数を源で汎関数微分すると、Green 関数が得られることが示される。

$$\begin{aligned}G^{\mu\cdots}(\underbrace{x_1, \cdots, y_1, \cdots, z_1, \cdots}_{n \text{ 個}}) &\equiv \frac{\langle 0|T\{SA^\mu(x_1)\cdots\psi(y_1)\cdots\bar{\psi}(z_1)\cdots\}|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle} \\ &= (-1)^{\bar{n}} \left(\frac{1}{i} \right)^n \frac{\delta^n Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x_1)\cdots\delta\bar{\sigma}(y_1)\cdots\delta\sigma(z_1)\cdots} \Big|_0.\end{aligned} \quad (51)$$

ただし最右辺の添字 0 は汎関数微分の後、虚構的な源の項をゼロとおくことを意味する。σ と $\bar{\sigma}$ を Grassmann 源としたため、Green 関数 (51) は y_1, \dots に関して反対称かつ z_1, \dots に関して反対称となり、Pauli 原理に整合する。

さらに以上の定式化の下で、次のことが見出される。

- 相互作用のない ($\mathcal{L}_I = 0$) 自由場の生成汎関数は具体的に

$$Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = Z_0[J_\kappa] Z_0[\sigma, \bar{\sigma}], \quad \begin{cases} Z_0[J_\kappa] = \exp \left\{ -\frac{i}{2} [J_\mu D_F^{\mu\nu} J_\nu] \right\} \\ Z_0[\sigma, \bar{\sigma}] = \exp \{ -i [\bar{\sigma} S_F \sigma] \} \end{cases} \quad (52)$$

と求まる。ここに

$$\begin{aligned} [J_\mu D_F^{\mu\nu} J_\nu] &\equiv \int d^4x' d^4x'' J_\mu(x') D_F^{\mu\nu}(x' - x'') J_\nu(x''), \\ [\bar{\sigma} S_F \sigma] &\equiv \int d^4x' d^4x'' \bar{\sigma}(x') S_F(x' - x'') \sigma(x'') \end{aligned}$$

である。

- 一般の (すなわち相互作用がある場合の) 生成汎関数は、自由場の生成汎関数 (52) に対して摂動展開

$$\begin{aligned} \langle 0|S|0 \rangle Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] &= \exp \left\{ i e \int d^4x I_\delta(x) \right\} Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} \left[\int d^4x I_\delta(x) \right]^n Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] \end{aligned} \quad (53)$$

で与えられる。ここに

$$I_\delta(x) \equiv \left(-\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} \right) \gamma_\mu \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}(x)} \right) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \right)$$

である。

第 13 章 経路積分

第 13 章では経路積分による場の量子論の定式化を、QED の文脈において導入する。QCD への応用は、次の第 14 章で行う。この付録では具体的な計算を行わないものの、はじめに最低限、汎関数積分 (経路積分と同義) の定義をまとめておく。

汎関数積分の定義 時空を微小体積 Δ の胞 (セル) に分割し、胞の内部における実スカラー場 ϕ の値を、胞の中心点 x_i における値 $\phi_i = \phi(x_i)$ で近似する。このとき ϕ の汎関数は $F[\phi] = F(\{\phi_i\})$ と表され、 $F[\phi]$ の汎関数積分は

$$\int \mathcal{D}\phi F[\phi] \equiv \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\prod_i \left(\frac{\Delta}{2\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_i \right) F(\{\phi_i\}) \quad (54)$$

で定義される。上式 (54) にはあらゆる $\phi(x)$ の関数形 (したがって場のあらゆる時間発展の仕方) に対する $F[\phi]$ が寄与する^{*12}。

汎関数積分は等価的に次のように定義することもできる。完全正規直交関数系 $\{u_i(x)\}$ で場を

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i(x)$$

^{*12} 粗く言えば、汎関数積分 (54) はあらゆる $\phi(x)$ にわたる $F[\phi]$ のある種の “和” である。

と展開し、右辺の級数を第 n 項で打ち切る。このとき ϕ の汎関数 $F[\phi] = F(\alpha)$ はパラメーターの組 $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ で指定され、 $F[\phi]$ の汎関数積分は

$$\int \mathcal{D}\phi F[\phi] \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_i}{\sqrt{2\pi}} \right) F(\alpha). \quad (55)$$

なお式 (54) と式 (55) における $(\Delta/2\pi)^{1/2}$ や $1/\sqrt{2\pi}$ の“加重因子”はいずれも、場の理論において特に興味を持たれる“Gauss 型”の積分公式が簡単になるように選んである。

Grassmann 数による積分の定義 Grassmann 変数 $\{\theta_i\} \equiv \theta$ の任意の関数 $f(\theta)$ の、Grassmann 変数 θ_i による積分を定義しよう。 $f(\theta)$ は式 (47):

$$f(p) = p_0 + \sum p_i \theta_i + \sum p_{ij} \theta_i \theta_j + \dots + p_{12\dots n} \theta_1 \theta_2 \dots \theta_n$$

の形を持つので、それには θ_i による積分が線形性を持つものとして式 (47) の各項の積分

$$\int d\theta_i (\theta_{j_1} \theta_{j_2} \dots \theta_{j_\omega})$$

を定義すれば良い。そしてこれを計算するには、次の規則を与えれば十分である。

$$\begin{aligned} \int d\theta_i 1 &= 0, & \int d\theta_i \theta_i &= 1, \\ \int d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} d\theta_n F(\theta) &= \int d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \left\{ \int d\theta_n F(\theta) \right\}, \\ \int d\theta_i (\theta_{j_1} \theta_{j_2} \dots \theta_{j_{k-1}} \theta_i \theta_{j_{k+1}} \dots \theta_{j_\omega}) &= (-1)^{k-1} \left(\int d\theta_i \theta_i \right) \theta_{j_1} \theta_{j_2} \dots \theta_{j_{k-1}} \theta_{j_{k+1}} \dots \theta_{j_\omega} \\ &= (-1)^{k-1} \theta_{j_1} \theta_{j_2} \dots \theta_{j_{k-1}} \theta_{j_{k+1}} \dots \theta_{j_\omega}. \end{aligned}$$

ただし第 3 式の $F(\theta)$ は Grassmann 変数 $\{\theta_i\} \equiv \theta$ の任意の関数であり、第 4 式の Grassmann 変数 $\theta_{j_1}, \theta_{j_2}, \dots, \theta_{j_{k-1}}, \theta_{j_{k+1}}, \dots, \theta_{j_\omega}$ は θ_i を含まないものとする。以上により、例えば p_0, p_1, p_2, p_{12} を通常の数として

$$\int d\theta_1 d\theta_2 (p_0 + p_1 \theta_1 + p_2 \theta_2 + p_{12} \theta_1 \theta_2) = -p_{12} \int d\theta_1 d\theta_2 \theta_2 \theta_1 = -p_{12}$$

となる。なお、Grassmann 数に関する積分を微分の逆演算として定義することは不可能である。と言うのも、 θ_i についての微分が θ_i となるような Grassmann 代数の要素 (47) は存在しないからである。

Grassmann 場による汎関数積分の定義 場の量子論において興味を持たれる、2 つの独立な Grassmann 場 $\theta(x), \tilde{\theta}(x)$ の汎関数 $F[\theta, \tilde{\theta}]$ を考える。Grassmann 場を正規直交関数系で

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i u_i(x), \quad \tilde{\theta}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\theta}_i u_i(x)$$

と展開したときの展開係数 $\theta_i, \tilde{\theta}_i$ は Grassmann 数であり、展開を第 n 項で打ち切ると $F[\theta, \tilde{\theta}] = F(\theta_i, \tilde{\theta}_i)$ は $2n$ 個の生成子 $\theta_1, \dots, \theta_n, \tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_n$ の関数となる。 θ と $\tilde{\theta}$ による 2 重の汎関数積分は

$$\int \mathcal{D}\theta \mathcal{D}\tilde{\theta} F[\theta, \tilde{\theta}] \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{i=1}^n d\theta_i d\tilde{\theta}_i \right) F(\theta_i, \tilde{\theta}_i)$$

で定義される。

さて、正準形式の場の量子論では、Green 関数と生成汎関数をそれぞれ

$$\text{式 (38)} : G^{\mu\dots}(x, \dots, y, \dots, z, \dots) \equiv_{\text{H}} \langle 0 | T \{ A^{\mu\text{H}}(x) \dots \psi^{\text{H}}(y) \dots \bar{\psi}^{\text{H}}(z) \dots \} | 0 \rangle_{\text{H}},$$

$$\text{式 (50)} : Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] \equiv \frac{\langle 0 | S' | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle}$$

によって定義したところ、生成汎関数から Green 関数を導く式 (51):

$$G^{\mu\dots}(x, \dots, y, \dots, z, \dots) = (-1)^{\bar{n}} \left(\frac{1}{i} \right)^n \frac{\delta^n Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x) \cdots \delta \bar{\sigma}(y) \cdots \delta \sigma(z) \cdots} \Big|_0$$

が示された。ところで正準形式の場の量子論から、Feynman による経路積分形式の場の量子論を導くことができる。この点を納得するために、代わりに生成汎関数に対する経路積分の表式を天下りに引用し、その正準形式との等価性を確認することも可能である。生成汎関数に対する経路積分の表式は、

$$Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX'}, \quad X' = \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_S) : \text{源を含む作用} \quad (56)$$

と与えられる。ただし $\mathcal{D}A = \prod_{\mu=0}^3 \mathcal{D}A^\mu$, $\mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi = \prod_\alpha \mathcal{D}\bar{\psi}_\alpha \mathcal{D}\psi_\alpha$ (α はスピノル添字)。規格化定数 N は条件 $Z[0, 0, 0] = 1$ から

$$N = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX}, \quad X \equiv \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1) : \text{QED の作用}$$

と定まる。相互作用を $\mathcal{L}_1 = 0$ とおくと、自由場の生成汎関数 Z_0 の経路積分表式

$$Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \frac{1}{N_0} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX'_0}, \quad N_0 = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L}_0 \right) \quad (57)$$

(ただし $X'_0 \equiv \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_S)$) が得られる。まず式 (56) が正準形式において定義した生成汎関数 (50) に一致することを、次の手順で証明できる。

1. 生成汎関数 (56) もまた正準形式の式 (53) と同様に

$$Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \text{const} \times \exp \left\{ ie \int d^4x I_\delta(x) \right\} Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]$$

と摂動展開されることを証明できる (どちらも $Z[0, 0, 0] = 1$ となるように規格化されている)。

このため 2 つの形式で自由場の生成汎関数 Z_0 が一致すれば、相互作用を含む場合の生成汎関数 Z も一致する。

2. ところが実際に経路積分表式 (57) より、自由場の生成汎関数 Z_0 は正準形式の場合 (式 (52)) と同様、自由な電磁場の生成汎関数

$$Z_0[J_\kappa] = \frac{1}{N_1} \int \mathcal{D}A \exp(iX[J_\kappa]), \quad X[J_\kappa] = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu) (\partial^\nu A^\mu) + J_\kappa A^\kappa \right\}$$

(ただし $Z_0[J_\kappa = 0] = 1$ となるように規格化定数 N_1 を選ぶ) と、自由スピノル場の生成汎関数

$$Z_0[\sigma, \bar{\sigma}] = \frac{1}{N_2} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp(iX[\sigma, \bar{\sigma}]), \quad X[\sigma, \bar{\sigma}] = \int d^4x \{ \bar{\psi} (i\rlap{/}\partial - m) \psi + \bar{\sigma} \psi + \bar{\psi} \sigma \}$$

(ただし $Z_0[\sigma = 0, \bar{\sigma} = 0] = 1$ となるように規格化定数 N_2 を選ぶ) に分解できる :

$$Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = Z_0[J_\kappa] Z_0[\sigma, \bar{\sigma}].$$

そして自由電磁場と自由スピノル場の生成汎関数それぞれが、正準形式の場合と同様の表式 (52):

$$Z_0[J_\kappa] = \exp \left(-\frac{i}{2} [J^\kappa D_{F\kappa\lambda} J^\lambda] \right), \quad Z_0[\sigma, \bar{\sigma}] = \exp(-i[\bar{\sigma} S_F \sigma])$$

に書き換えられることを証明できる。

よって2つの形式で生成汎関数が一致するので、生成汎関数を源で(汎関数)微分してGreen関数を得る式(51)を経路積分形式でのGreen関数の定義と見れば、2つの形式でGreen関数は一致し、したがって理論の予言もまた一致することになる。あるいは等価的に、式(56)を式(51)に代入して得られる経路積分の表式

$$G^{\mu\dots}(x_1, \dots, y_1, \dots, z_1, \dots) = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \{ e^{iX} A^\mu(x_1) \dots \psi(y_1) \dots \bar{\psi}(z_1) \dots \} \quad (58)$$

でGreen関数を定義しても良い。

最後にGreen関数について議論する。以下では相互作用する場のGreen関数を

$$\langle A^\mu(x_1) \dots \psi(y_1) \dots \bar{\psi}(z_1) \dots \rangle \equiv G^{\mu\dots}(x_1, \dots, y_1, \dots, z_1, \dots)$$

と表記し、自由場の(すなわち相互作用項 \mathcal{L}_I をゼロとした場合の)Green関数を $\langle A^\mu(x_1) \dots \psi(y_1) \dots \bar{\psi}(z_1) \dots \rangle_0$ と表す。

Wickの定理 自由場に関しては生成汎関数が具体的に得られているので(式(52))、これを汎関数微分してGreen関数を求めることができる。すると一般に自由場Green関数 $\langle ABCD \dots WXYZ \rangle_0$ は、場 A, \dots, Z が奇数個ならばゼロになり、偶数個ならば

$$\langle ABCD \dots WXYZ \rangle_0 = \underbrace{ABCD \dots WXYZ}_{\text{1}} + \underbrace{ABCD \dots WXYZ}_{\text{2}} + \dots$$

となることを帰納的に証明し得る。ただし右辺は全ての場が縮約された全ての可能な項の和であり、任意の自由場Green関数は、光子伝播関数 $iD_F^{\mu\nu}(x)$ とフェルミオン伝播関数 $iS_F(x)$ だけで表されることになる。この結果はT積の真空期待値 $\langle 0|T(ABCD \dots WXYZ)|0 \rangle$ にWickの定理を適用した結果と一致しており、経路積分形式の自由場Green関数

$$\langle ABC \dots \rangle_0 = \frac{1}{N_0} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iX_0} (ABC \dots), \quad X_0 = \int d^4x \mathcal{L}_0(x)$$

に対するWickの定理と見なされる。

相互作用 相互作用する場のGreen関数 $\langle ABC \dots \rangle$ は、式(58)より

$$\langle ABC \dots \rangle = \frac{\left\langle \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right\} (ABC \dots) \right\rangle_0}{\left\langle \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right\} \right\rangle_0}$$

のように自由場Green関数に関係付けて評価できる。指数関数を級数展開すれば、Green関数の摂動展開が得られる。上式は正準形式における式(40)と似た関係である。

第14章 量子色力学

- 14.1節 グルーオン場だけの力学に対してFaddeev-Popov(ファデエフ-ポポフ)の手続きを適用
- 14.2節 クォークを含む理論へと一般化
- 14.3節 QCDの摂動論^{*13}

^{*13} 強い相互作用では最低次の摂動論が有効な近似を与えない(第11章の序文)という事情はあれど、理論的に摂動展開を考えることは可能である。特に短距離の相互作用に関しては、漸近的自由性により摂動論を利用することが可能となる(15.4節)。

- 14.4 節 QCD の Feynman 規則
- 14.5 節 QCD の理論の繰り込み可能性 (この付録では省略)
 - 14.4 節までの議論を踏まえ、QCD は繰り込み可能な理論であることが確かめられる。

14.1 グルーオン場

経路積分法により QCD の定式化を行う際の困難は、もっぱらグルーオン場の量子化に由来する。そこで最初にグルーオン場だけの力学を考える。8つのグルーオン場 $A_i^\kappa(x)$ に関する源を表す古典場 $J_{i\kappa}(x)$ を導入し、グルーオン場の生成汎関数

$$Z[J_{i\kappa}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A e^{iX[J_{i\kappa}]}, \quad X[J_{i\kappa}] = \int d^4x (\mathcal{L}_G + J_{i\kappa} A_i^\kappa) \quad (59)$$

(ただし $\mathcal{D}A \equiv \prod_{i=1}^8 \prod_{\mu=0}^3 \mathcal{D}A_i^\mu(x)$, 規格化条件 $Z[J_{i\kappa} = 0] = 1$) を考えると, 自由場 ($g_s = 0$) に対しては

$$G_i^{\mu\nu} = F_i^{\mu\nu}, \quad \mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} F_{i\mu\nu} F_i^{\mu\nu}$$

である。実は何らかのゲージ固定を行わなければ, 上式 (59) の生成汎関数を適正に定義することはできない。このことは次のように自然に説明できる。すなわち電磁場については4成分のうち2つの横波成分だけが独立であったのと同様に, グルーオン場も全ての成分が独立ではないにも関わらず, 上記の積分は場の4成分 $\mu = 0, 1, 2, 3$ の全てに対して施される。よって余分の自由度に関する積分を取り除く措置が必要である。しかしながらグルーオン場に対してはゲージ変換 (35) が電磁場の場合よりも複雑であるために, 一般に Lorenz 条件

$$\partial_\mu A_i^\mu(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 8)$$

を課することはできない。また無理に Lorenz 条件を課したとしても, 相互作用を考える際に矛盾が生じてくることが知られている。そこで $h_i(x)$ を任意関数として, より一般的なゲージ条件

$$f_i(A_i^\mu(x)) \equiv \partial_\mu A_i^\mu(x) - h_i(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \quad (60)$$

を課し, 生成汎関数を修正する (Faddeev-Popov の方法)。まず生成汎関数 (59) の代わりに, n 変数 z_{k+1}, \dots, z_{k+n} にのみ依存する“作用” X に対して, 積分

$$Z = \int \left(\prod_{i=1}^{k+n} dz_i \right) e^{-X}$$

を考える。これを, 余計な自由度に関する積分を取り除いた

$$Z = \int \left(\prod_{i=n+1}^{k+n} dz_i \right) e^{-X}$$

に置き換えた上で, 再び元と同じように $(k+n)$ 変数に関する等価な積分として表したい。そのためには, n 変数 z_{k+1}, \dots, z_{k+n} の値から z_1, \dots, z_k を定める条件

$$f_i(z_1, z_2, \dots, z_{k+n}) = 0 \quad (i = 1, \dots, k)$$

を導入し,

$$\begin{aligned} Z &= \int \left(\prod_{i=n+1}^{k+n} dz_i \right) e^{-X} = \int \left\{ \prod_{i=1}^k \int df_i \delta(f_i) \right\} \left(\prod_{i=n+1}^{k+n} dz_i \right) e^{-X} \\ &= \int \left(\prod_{i=1}^{k+n} dz_i \right) e^{-X} \det \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \prod_{i=1}^k \delta(f_i) \end{aligned} \quad (61)$$

と書き換えれば良い ($\partial f/\partial z$) は ($\partial f_i/\partial z_j$) を (i, j) 成分に持つ Jacobi 行列). そこで生成汎関数を式 (61) に類似の

$$Z[J_{i\mu}] \propto \int \mathcal{D}A e^{iX} \det \left(\frac{\delta f_i}{\delta \omega_j} \right) \left(\prod_{i=1}^8 \delta[f_i] \right) \quad (62)$$

に置き換え, さらに Grassmann 場 $\eta_i(x), \tilde{\eta}_i(x)$ を導入して右辺の“汎関数行列式”を“Gauss 型”の積分公式

$$\det \left(\frac{\delta f_i}{\delta \omega_j} \right) \propto \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} \left\{ i \int d^4x d^4x' \eta_i(x) \frac{\delta f_i}{\delta \omega_j} \tilde{\eta}_j(x') \right\} \quad (63)$$

(ただし $\mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} \equiv \prod_{i=1}^8 \mathcal{D}\eta_i \mathcal{D}\tilde{\eta}_i$) によって与える. こうすれば少なくとも S 行列要素の計算に関して, 適正な生成汎関数が得られることを Faddeev と Popov は示した^{*14}. ここに $\delta[f_i]$ は任意の汎関数 $F[f_i]$ に対して, δ 関数と類似の性質

$$\int \mathcal{D}f_i F[f_i] \delta[f_i] = F[0] \quad (64)$$

を満たすように定義された δ 汎関数である. この δ 汎関数があるため, ゲージ場 $A_{i\mu}(x)$ に関する汎関数積分 (62) には, ゲージ条件 (60) を満たす場 $A_{i\mu}^{(0)}(x)$ のみが寄与する. したがって場 $A_{i\mu}^{(0)}(x)$ から任意の場 $A_{i\mu}(x)$ へのゲージ変換に対するゲージ関数 $\omega \equiv [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_8]$ がゼロになる極限を考えれば十分である. そこで汎関数微分を

$$\frac{\delta f_i}{\delta \omega_j} \equiv \left. \frac{\delta f_i(A_{i\mu}(x))}{\delta \omega_j(x')} \right|_{\omega=0}$$

と解釈する^{*15}. 最後に生成汎関数における汎関数行列式を評価して, 目障りな δ 汎関数があからさまには現れない, 摂動論に適した形

$$\begin{aligned} Z[J_{i\kappa}] &= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L} + J_{i\kappa} A_i^\kappa) \right\}, \\ \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{G'} + \mathcal{L}_g, \\ \mathcal{L}_{G'} &= -\frac{1}{4} G_{i\mu\nu} G_i^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A_i^\mu)^2, \\ \mathcal{L}_g &= (\partial_\mu \eta_i) [\partial^\mu \tilde{\eta}_i + g_s f_{ijk} \tilde{\eta}_j A_k^\mu] : \text{ゴースト項} \end{aligned} \quad (65)$$

(ただし $Z[J_{i\mu} = 0] = 1$) に書き換えることができる. $\mathcal{L}_{G'}$ における付加的な項 $-\frac{1}{2} (\partial_\mu A_i^\mu)^2$ は“ゲージ固定項”と呼ばれる. ここで Grassmann 場 $\eta_i(x), \tilde{\eta}_i(x)$ に関する項 \mathcal{L}_g が現れていることに注目する. 場 $\eta_i(x), \tilde{\eta}_i(x)$ はゴースト場と呼ばれる. ゴーストはあくまで都合の良い人工的な概念であって, 実在の場 (ないし粒子) ではない. 結局 Faddeev-Popov の手続きによりゲージ固定を行うと, 生成汎関数において Lagrangian 密度が修正され, ゴースト場に関する経路積分が現れる.

^{*14} ただし生成汎関数の雛形 (61) との類推関係は正確には成り立たず, 以上の説明は厳密なものではない.

^{*15} これにより式 (63) 右辺の量を曖昧さなしに理解できる.

14.2 クォークの導入

クォークを含むようにこれまでの理論を拡張しよう。QED においてははじめに荷電レプトンのうち電子-陽電子だけを考えたのと同様に、簡単のために全体を通じて対象とするクォークの香りを 1 種類に限定し、香りの添字 f を省くことにする。

- グルーオン場と相互作用するクォークの Lagrangian 密度 (34):

$$\mathcal{L}_q = \bar{\psi}_a(i\not{D}_{ab} - m\delta_{ab})\psi_b, \quad D_{ab}^\mu = \delta_{ab}\partial^\mu + \frac{i}{2}g_s(\lambda_j)_{ab}A_j^\mu.$$

- 繰り返されたクォークの色の添字 $a, b, \dots = r, g, b$ について和をとる。
 $i, j, \dots = 1, 2, \dots, 8$ はグルーオンの色電荷の添字。

- 純粋なグルーオン場の Lagrangian 密度 (65):

$$\mathcal{L}_{G'} = -\frac{1}{4}G_{i\mu\nu}G_i^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A_i^\mu)^2.$$

- 等価的に

$$-\frac{1}{4}F_{i\mu\nu}F_i^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A_i^\mu)^2 \rightarrow -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_{i\mu})(\partial^\nu A_i^\mu).$$

- ゴースト場の Lagrangian 密度 (66):

$$\mathcal{L}_g = (\partial_\mu \eta_i)(\partial^\mu \tilde{\eta}_i + g_s f_{ijk} \tilde{\eta}_j A_k^\mu).$$

これらを足し合わせた全 Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{G'} + \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_g$$

$$= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1,$$

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_{i\mu})(\partial^\nu A_i^\mu) + \bar{\psi}_a(i\not{\partial} - m)\psi_a + (\partial_\mu \eta_i)(\partial^\mu \tilde{\eta}_i),$$

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2}g_s \bar{\psi}_a \gamma_\mu (\lambda_j)_{ab} \psi_b A_j^\mu + g_s f_{ijk} A_{i\mu} A_{j\nu} \partial^\mu A_k^\nu - \frac{1}{4}g_s^2 f_{ijk} f_{ilm} A_j^\mu A_k^\nu A_{l\mu} A_{m\nu} + g_s f_{ijk} (\partial_\mu \eta_i) \tilde{\eta}_j A_k^\mu$$

である ($g_s = 0$ とおくと $\mathcal{L}_1 = 0$)。

生成汎関数 クォーク場 $\bar{\psi}_a, \psi_a$ に対応する Grassmann 源 $\sigma_a, \bar{\sigma}_a$ に加え、ゴースト場 $\eta, \tilde{\eta}$ に対応する Grassmann 源 S_i, \tilde{S}_i を導入し、源による作用

$$\mathcal{L}_S = J_{i\kappa} A_i^\kappa + \bar{\sigma}_a \psi_a + \bar{\psi}_a \sigma_a + S_i \eta_i + \tilde{S}_i \tilde{\eta}_i$$

を定義する。生成汎関数は径路積分

$$Z[J_{i\kappa}, \sigma_a, \bar{\sigma}_a, S_i, \tilde{S}_i] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} e^{iX'}, \quad X' = \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_S)$$

によって与えられる。ただし $a = r, g, b$ を色の添字, $\alpha = 0, \dots, 3$ をスピノル添字として、クォーク場の積分は $\mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \equiv \prod_a \prod_\alpha \mathcal{D}\bar{\psi}_{a,\alpha} \mathcal{D}\psi_{a,\alpha}$ を表す。また規格化条件は $Z[0, 0, 0, 0, 0] = 1$ である。

Green 関数 QED の場合と同様, Green 関数は

$$\begin{aligned}\langle A_1(x_1) \cdots A_n(x_n) \rangle &= (-1)^{\bar{n}} \left(\frac{1}{i} \right)^n \frac{\delta^n Z}{\delta s_1(x_1) \cdots \delta s_n(x_n)} \Big|_0 \\ &= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \{ e^{iX} A_1(x_1) \cdots A_n(x_n) \}\end{aligned}$$

と定義される. ここに $A_1(x_1), \dots, A_n(x_n)$ はクォーク場, グルーオン場, ゴースト場の任意の組合せであり^{*16}, $s_1(x_1), \dots, s_n(x_n)$ は対応する虚構的な場である. また \bar{n} は随伴クォーク場 $\bar{\psi}_a$ の数を表す.

14.3 摂動論

QED の場合と同様, Green 関数は

$$\langle ABC \cdots \rangle = \frac{\left\langle \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right\} (ABC \cdots) \right\rangle_0}{\left\langle \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right\} \right\rangle_0}$$

のように自由場 Green 関数に関係付けられる. 指数関数を級数展開すると摂動展開が得られる. A, B, C, \dots をクォーク場, グルーオン場, ゴースト場の任意の組合せとすると, 自由場の Green 関数 $\langle ABC \cdots \rangle_0$ は場 A, B, C, \dots が奇数個のときゼロになり, 偶数個のとき Wick の定理

$$\langle ABCD \cdots WXYZ \rangle_0 = \underbrace{ABCD}_{\square} \cdots \underbrace{WXYZ}_{\square} + \underbrace{ABCD}_{\square} \cdots \underbrace{WXYZ}_{\square} + \cdots$$

から評価される. ここでゼロにならない縮約は

$$\begin{aligned}\underbrace{A_i^\mu(x) A_j^\nu(y)}_{\square} &= \underbrace{A_j^\nu(y) A_i^\mu(x)}_{\square} = i D_{Fij}^{\mu\nu}(x-y) = i \delta_{ij} D_F^{\mu\nu}(x-y) : \text{グルーオン場の伝播関数,} \\ \underbrace{\psi_a(x) \bar{\psi}_b(y)}_{\square} &= - \underbrace{\bar{\psi}_b(y) \psi_a(x)}_{\square} = i S_{Fab}(x-y) = i \delta_{ab} S_F(x-y) : \text{クォーク場の伝播関数,} \\ \underbrace{\tilde{\eta}_i(x) \eta_j(y)}_{\square} &= - \underbrace{\eta_j(y) \tilde{\eta}_i(x)}_{\square} = i \Delta_{Fij}(x-y) = i \delta_{ij} \Delta_F(x-y) : \text{ゴーストの伝播関数}\end{aligned}$$

に限られる.

14.4 QCD の Feynman 規則

まずは QED の場合と類似した, 以下の規則 1-7 が成立する.

1. 結節点に応じた因子

$$-ig_s(T_i)_{cd}\gamma_\mu, \quad g_s f_{lmn} V_{\sigma\tau\nu}, \quad -ig_s^2 F_{lmno} V_{\lambda\mu\nu\sigma}, \quad g_s f_{lmn} k_{2\mu}$$

を充てる (図 58, 図 59, 図 60, 図 61 参照)^{*17}. ここに

$$T_i \equiv \frac{\lambda_i}{2} (= \hat{F}_i), \quad V_{\sigma\tau\nu} \equiv [g_{\nu\tau}(k_3 - k_2)_\sigma + g_{\sigma\nu}(k_1 - k_3)_\tau + g_{\tau\sigma}(k_2 - k_1)_\nu],$$

$$F_{lmno} V_{\lambda\mu\nu\sigma} \equiv f_{ilm} f_{ino} (g_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma}) + f_{inm} f_{ilo} (g_{\nu\lambda} g_{\mu\sigma} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma}) + f_{iln} f_{imo} (g_{\lambda\mu} g_{\nu\sigma} - g_{\nu\mu} g_{\lambda\sigma}).$$

^{*16} 物理的な状態はゴースト粒子を含まないものの, 摂動論を構築するにはゴースト場を含む Green 関数が有用となる.

^{*17} 単一種類の結節点に因子 $ie\gamma^\mu$ を充てれば良い QED と違って, このように QCD では, 異なる結節点に応じて異なる因子を充てなければならない.

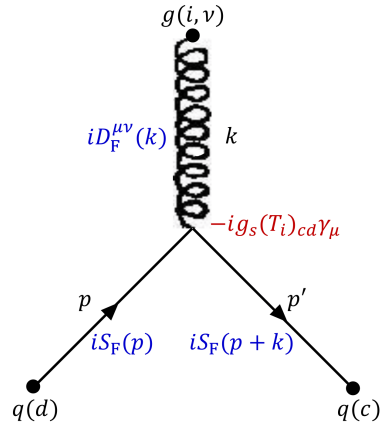


図 58 クォーク-グルーオン結節点

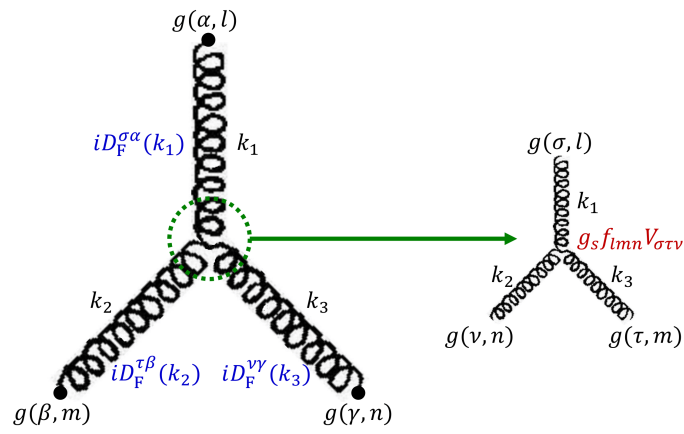


図 59 3 グルーオン結節点

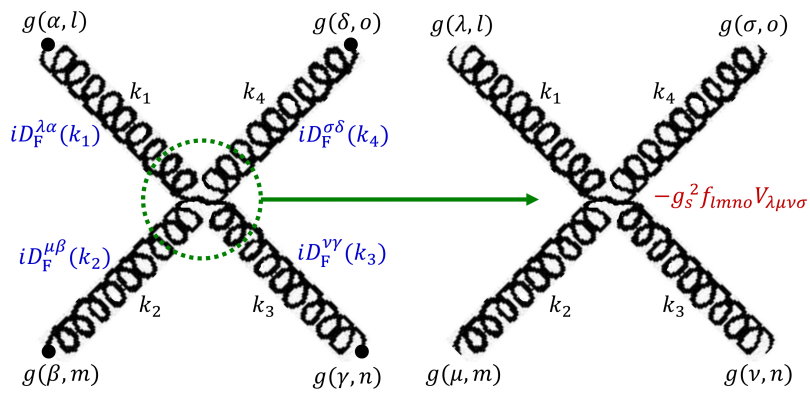


図 60 4 グルーオン結節点

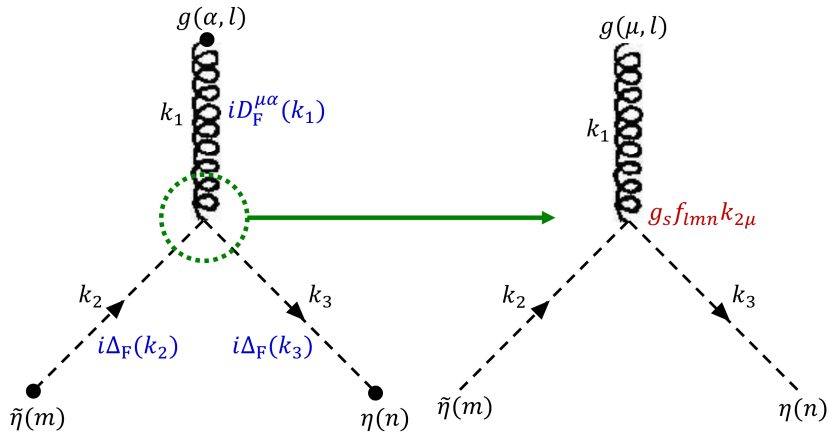


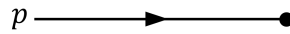
図 61 ゴースト-グルーオン結節点

2. グルーオン, クォーク, ゴーストの内線に, それぞれの伝播関数

$$iD_{F\mu\nu}(k)\delta_{ij}, \quad iS_F(p)\delta_{ab}, \quad i\Delta_F(k)\delta_{ij}$$

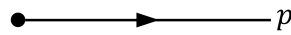
を充てる*18.

3. (a) 始状態のクォークの外線



に因子 $u_{ar}(\mathbf{p})$ を充てる.

(b) 終状態のクォークの外線



に因子 $\bar{u}_{ar}(\mathbf{p})$ を充てる.

(c) 始状態の反クォークの外線



に因子 $\bar{v}_{ar}(\mathbf{p})$ を充てる.

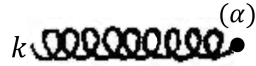
(d) 終状態の反クォークの外線

*18 伝播関数因子における Kronecker のデルタは, Green 関数の中で添字に関する和をとる際に消費されるため, $a = b, i = j$ と置いてあらかじめ省いて良い. あるいは Kronecker のデルタは色や色電荷の保存を表しており, はじめから保存則を満たす過程のみを考えて Kronecker のデルタを省いたと考えても良い. このとき結果的に各内線には, グルーオンやクォーク, ゴーストの伝播関数の代わりに光子伝播関数 $iD_F^{\mu\nu}(k)$ とフェルミオン伝播関数 $iS_F(p)$, 中間子伝播関数 $i\Delta_F(k)$ を充てれば良い.



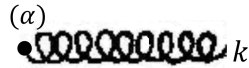
に因子 $v_{ar}(\mathbf{p})$ を充てる.

(e) 始状態のグルーオンの外線



に因子 $\varepsilon_{ir\alpha}(\mathbf{k})$ を充てる.

(f) 終状態のグルーオンの外線



に因子 $\varepsilon_{ir\alpha}^*(\mathbf{k})$ を充てる.

ここに

- \mathbf{p} と \mathbf{k} は外線粒子の 3 次元運動量を表し,
 $r(=1,2)$ はクォークのスピン状態もしくはグルーオンの偏極状態を表す.
 自由グルーオン場は自由電磁場と同じ方程式に従うため,
 グルーオンの偏極としても横波 $r(=1,2)$ だけが許容される.
 - $a(=r, g, b)$ はクォークの色状態を表し, $i(=1,2,\dots,8)$ はグルーオンの色電荷を表す.
4. 各クォーク線と, それらを接続する各結節点に付随するスピノル因子を,
 相互に接続している一連のクォーク線を矢印の向きに辿る順序で右から左に並べる.
 5. 閉じたクォーク線それぞれに関して対角和をとり, 因子 (-1) を掛ける.
 6. 結節点においてエネルギー・運動量の保存を成立させる.
 エネルギー・運動量保存の要請の下でも固定されないパラメーターとして残る
 内部 4 元運動量 q それぞれに関して積分 $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ を施す.
 このような内部運動量変数 q に関する積分は, 閉じたループそれぞれにおいて生じる.
 7. 位相因子 δ_P として $+1$ または -1 を掛ける.
 これは外線 Grassmann 場の順序を外線指数 (引数) の順序が適正になるように
 並べ直すときに, Grassmann 場同士の置換が必要な回数が偶数回ならば $+1$,
 奇数回ならば -1 とする.
- ★ これは QED に対する Feynman 規則 (7.3 節) の規則 8 に対応する.

さらに QCD に特有の次の規則が加わる.

8. 閉じたゴースト線それぞれに対して, 因子 (-1) を掛ける.
 ★ これはクォークのループに対する規則 5 の因子 (-1) と同じ起源を持つ.
9. グルーオンの閉ループの各々に対して, 適切な“対称性因子” S を掛ける.

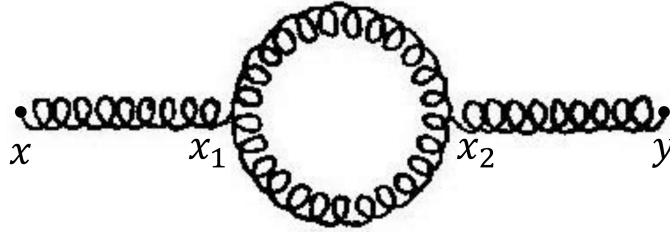


図 62 グルーオンの自己エネルギーを表すループダイアグラム

ここでグルーオンのループを持つ図 62 のグラフを取り上げ、規則 9 の対称性因子について説明する。3 グルーオン結節点に因子 $g_s f_{lmn} V_{\sigma\tau\nu}$ を充てると自動的に、3 グルーオン結節点を生じる Green 関数

$$\langle \mathcal{L}_3(x) A_l^\alpha(x_1) A_m^\beta(x_2) A_n^\gamma(x_3) \rangle, \quad \mathcal{L}_3(x) \equiv g_s f_{ijk} A_{i\mu}(x) A_{j\nu}(x) \partial^\mu A_k^\nu(x)$$

において \mathcal{L}_3 に含まれる 3 つの場を $A_l^\alpha(x_1), A_m^\beta(x_2), A_n^\gamma(x_3)$ と縮約する 3! 通りの方法を考慮したことになる。図 62 のグラフは 3 グルーオン結節点を 2 つ持つので、規則 1-8 に従ってグラフに対応する因子を充てると、 $(3!)^2$ 通りの組合せを考慮したことになる。ところがこれから説明するように、これは組合せを余分に重複して考慮していることになる。実際、図 62 に対応する項は、2 点 Green 関数 $\langle A_l^\alpha(x) A_m^\beta(y) \rangle$ に由来する

$$\langle \mathcal{L}_3(x_1) \mathcal{L}_3(x_2) A_l^\alpha(x) A_m^\beta(y) \rangle_0$$

から現れる。図 62 のように時空点 x_1 を伝播関数によって点 x と繋ぎ、時空点 x_2 を伝播関数によって点 y と繋ぐには、 $\mathcal{L}_3(x_1)$ に含まれる 3 つの場から 1 つを選んで $A_l^\alpha(x)$ と縮約し、 $\mathcal{L}_3(x_2)$ に含まれる 3 つの場から 1 つを選んで $A_m^\beta(y)$ と縮約しなければならない。 $\mathcal{L}_3(x_1)$ の残り 2 つの場は $\mathcal{L}_3(x_2)$ の残り 2 つの場のいずれかと縮約しなければならない。その方法は 2 通りである。よって正しい縮約の組合せの総数は $3 \times 3 \times 2 = 18$ 通りである。これは $(3!)^2 = 36$ の $1/2$ 倍なので、この場合は対称性因子として $S = 1/2$ を掛けなければならない。

第 15 章 漸近的自由性

強い相互作用は $1f (= 10^{-15}\text{m})$ 程度よりも短距離になると、距離が短くなるにつれて弱くなる。この性質は“漸近的自由性”と呼ばれる。漸近的自由性は“繰り込み群”の方法を用いて理論的に導出された。

説明の準備として、まず“修正極小減算法” (以下 $\overline{\text{MS}}$) と呼ばれる繰り込みの枠組みを QED に対して導入する。これは次元正則化の文脈の下で因子 $\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi)$ を含むように繰り込み定数 Z_1, Z_2, Z_3 を選ぶ手法である。すると繰り込まれた電荷 (15.38): $e_r = e_0 \mu^{-\eta/2} Z_3^{1/2} Z_2/Z_1$ は μ に対して増大することが示される (e_0 は裸の電荷)。ただし μ は次元正則化の際に必然的に導入される質量尺度である (以上, 15.2 節)。

次に結節部分関数を定義する。 f 本のフェルミオン外線と b 本の光子外線を持つ固有結節部分関数を、各外線の運動量を $p_i (i = 1, 2, \dots, b+f \equiv n)$ として $\Gamma^{fb}(p_i, m_0, e_0)$ と表す (m_0 は裸の質量)。ここで結節部分関数は $n > 2$ の場合、連結 Green 関数から“脚”にあたる伝播関数因子を除いた関数である。固有結節部分関数とは与えられた結節部分関数に寄与を持つすべての 1 粒子既約なグラフの和であり、“1 粒子既約”とは線を 1 本だけ切断することで 2 つの部分に分割できないことを意味する。結節部分関数 $\Gamma^{fb}(p_i, m_0, e_0)$ は繰

り込みの後に、伝播関数から因子 $Z_2^{1/2}, Z_3^{1/2}$ を吸収し、繰り込まれた結節部分関数

$$\Gamma_r^{fb}(p_i, m_r, e_r, \mu) = Z_2^{f/2} Z_3^{b/2} \Gamma_r^{fb}(p_i, m_0, e_0)$$

になる。ここに $m_r = m_r(\mu), e_r = e_r(\mu)$ は繰り込まれた質量と電荷であり、いずれも質量尺度 μ に依存するため、それぞれ“走行質量”“走行電荷”と呼ばれる。

物理的な観測量は、したがって結節部分関数 $\Gamma_r^{fb}(p_i, m_0, e_0)$ は質量尺度 μ に依存してはならない。このことは't Hooft-Weinberg (ト・フーフト-ワインバーグ) 方程式と呼ばれる、繰り込まれた結節部分関数 $\Gamma_r^{fb}(p_i, m_r, e_r, \mu)$ (こちらは μ に依る) に対する繰り込み群方程式 (15.45):

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial e_r} - f\gamma_2 - b\gamma_3 + m_r \gamma_m \frac{\partial}{\partial m_r} \right] \Gamma_r^{fb}(p_i, m_r, e_r, \mu) = 0,$$

$$\beta \equiv \mu \frac{\partial e_r}{\partial \mu}, \quad \gamma_2 \equiv \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} (\ln Z_2), \quad \gamma_3 \equiv \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} (\ln Z_3), \quad m_r \gamma_m \equiv \mu \frac{\partial m_r}{\partial \mu}$$

として表現できる。これを期待される次元スケーリング (15.49):

$$\Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu) = t^d \Gamma_r^{fb}(p_i, t^{-1}m_r, e_r, t^{-1}\mu).$$

(ただし d は結節部分の自然次元 (質量の何乗か)) と組み合わせると、任意に固定した μ の値 μ_0 に対して式 (15.61):

$$\Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu) = t^d \exp \left[- \int_1^t \frac{f\gamma_2 + b\gamma_3}{t} dt \right] \Gamma_r^{fb}(p_i, t^{-1}m_r(\mu = t\mu_0), e_r(\mu = t\mu_0), \mu_0)$$

が得られる。この結果によれば質量尺度 $\mu = t\mu_0$ を増大させることは、結節部分において移行する運動量 tp_i を増大させることに、したがって短距離の相互作用を考えることに対応する。ところで既に述べたように電荷 $e_r(\mu)$ は μ に対して増大するから、QED では電荷 $e_r(\mu)$ は短距離になるほど増大することになる。逆に言えば、長距離の相互作用ほど $e_r(\mu)$ は減少する。これは定性的には、電荷の遠方ほど量子揺らぎで生じる真空偏極によって、電荷が著しく遮蔽されることとして理解できる (以上、15.3 節)。

これとは対照的に QCD では、“輻射補正”を考慮したクォークとグルーオンの伝播関数、クォーク-グルーオン結節点の繰り込み (関係する繰り込み定数を順に Z_2, Z_3, Z_1 とする) を再び $\overline{\text{MS}}$ 体系において行くと、繰り込まれた結合 (15.97):

$$g_r = g_0 \mu^{-\eta/2} \frac{Z_3^{1/2} Z_2}{Z_1}$$

は質量尺度 μ の増大に対して減少することが示される (標準理論で想定される、香りの種類の数 $n_f = 6$ に対して)。ここに g_0, g_r はそれぞれ強い相互作用における結合 g_s の、裸の値と繰り込まれた値である。このため QCD では、短距離になるほど結合 $g_r(\mu)$ が減少することになり、漸近的自由性が成立する (以上、15.4 節)。

漸近的自由性により、短距離の相互作用に関しては摂動論を利用することが可能となる。15.4 節ではこれに基づく QCD の成功事例が簡単に紹介された。

第 16 章 弱い相互作用

16.1 緒論

弱い相互作用を媒介する粒子はスピン 1 の“仲介ベクトルボゾン” (intermediate vector boson : IVB) W^\pm, Z^0 である。本章では基本となる理論として、 W^\pm の交換だけを考慮する IVB 理論を扱う。またこれ以降、ハドロンの関与しない純粋なレプトンの過程に話を限定する。

16.2 レプトンの弱い相互作用

弱い相互作用における相互作用 Hamiltonian 密度 \mathcal{H}_I は, QED の場合

$$\mathcal{H}_{\text{QED}} = s^\mu A_\mu, \quad s^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi : \text{電磁カレント}$$

と同様に, レプトン場演算子に関して双一次のレプトン (荷電) カレント

$$J_\alpha = \sum_l \bar{\psi}_l \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l}, \quad J_\alpha^\dagger = \sum_l \bar{\psi}_{\nu_l} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \psi_l$$

を用いて

$$\mathcal{H}_I = g_W (J^{\alpha\dagger} W_\alpha + J^\alpha W_\alpha^\dagger) \quad (67)$$

と表される. ただし ψ_l と ψ_{ν_l} はそれぞれレプトン $l = e, \mu, \tau$ と対応するニュートリノ $\nu_l, \bar{\nu}_l$ を表す量子場 (Dirac 場) である*19. また $W_\alpha(x)$ は W ボゾンを記述する場であり (次節参照), g_W は無次元の結合定数である*20.

レプトンカレント J^α は

$$\begin{aligned} \text{ベクトルカレント} \quad J_V^\alpha &= \sum_l \bar{\psi}_l \gamma^\alpha \psi_{\nu_l}, \\ \text{軸性ベクトルカレント} \quad J_A^\alpha &= \sum_l \bar{\psi}_l \gamma^\alpha \gamma_5 \psi_{\nu_l} \end{aligned}$$

の差 $J^\alpha = J_V^\alpha - J_A^\alpha$ で与えられる. ここではこのため, J^α は空間反転を考えなければ Lorentz 変換に対してベクトルとして変換されることにまず注意を促しておく.

- J^α がベクトルなので, \mathcal{H}_I が Lorentz スカラーとなるためには $W_\alpha(x)$ は (共変) ベクトル場でなければならず, したがって W ボゾンはスピン 1 のベクトルボゾンとなる.
- \mathcal{H}_I の作る結節点には荷電レプトン, 中性レプトン, W ボゾンが 1 つずつ接続するので, (電荷保存則を満たすには) W ボゾンは電荷を持たねばならず, したがって場 $W_\alpha(x)$ は非 Hermite である*21.
- ニュートリノを考慮してレプトン数を

$$N(l) = N(l^-) - N(l^+) + N(\nu_l) - N(\bar{\nu}_l), \quad l = e, \mu, \tau$$

と再定義すると, \mathcal{H}_I は

- l^- を生成して (消滅させて) ν_l を消滅させ (生成し)
- l^+ を生成して (消滅させて) $\bar{\nu}_l$ を消滅させる (生成する)

ので, レプトン数 $N(l)$ を保存する (観測事実にも整合).

レプトンカレント $J^\alpha = J_V^\alpha - J_A^\alpha$ は, したがって相互作用 Hamiltonian はパリティ変換 $(\mathbf{x}, t) \rightarrow (-\mathbf{x}, t)$ の下で不変ではないため, パリティは保存されない. 実際, 質量がゼロに極めて近いニュートリノに対してはカレントにおける $P_L = (1 - \gamma_5)/2$ を近似的にヘリシティ射影演算子と見なせるので, 相互作用 Hamiltonian には

*19 ψ_l は l^- の消滅演算子と l^+ の生成演算子を含み, ψ_{ν_l} はニュートリノ ν_l の消滅演算子と反ニュートリノ $\bar{\nu}_l$ の生成演算子を含む.

*20 ここでは結合 g_W はカレント $J_\alpha, J_\alpha^\dagger$ からくり出されている. また 16.1 節の予告通り, 弱い力を媒介する粒子として W ボゾンだけが考慮されている.

*21 このことを考慮して, \mathcal{H}_I の式において既に W_α と W_α^\dagger を区別してある.

- ヘリシティが負の ($r = 2$) ニュートリノ
- ヘリシティが正の ($r = 1$) 反ニュートリノ

の生成・消滅演算子のみが含まれることになり、それ故、弱い相互作用にはこれらの(反)ニュートリノしか関与しない(パリティの非保存に対応するカイラル対称性の破れ).

ここで“左手型の”場 $\psi_l^L = P_L \psi_l, \psi_{\nu_l}^L = P_L \psi_{\nu_l}$ を定義すると、レプトンカレントは左手型の場のみを用いて

$$J_\alpha = 2 \sum_l \bar{\psi}_l^L \gamma_\alpha \psi_{\nu_l}^L$$

と表される. ところで荷電レプトンについても粒子のエネルギーが質量 m に比べて非常に高い極限では、近似的に P_L をヘリシティ射影演算子と見なせる. このため弱い相互作用によって生成した電子(陽電子)は負(正)のヘリシティを持つことになる.

16.3 自由なベクトルボゾン場

本節ではベクトルボゾン場 $W_\alpha(x)$ について説明する.

■場の方程式 自由なスピン 1 のベクトルボゾン場 W^α に対する場の方程式は、質量を m_W として Proca 方程式

$$\square W^\alpha - \partial^\alpha (\partial_\beta W^\beta) + m_W^2 W^\alpha = 0 \quad (68)$$

によって与えられ、これは Lagrangian 密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F_{W\alpha\beta}^\dagger F_W^{\alpha\beta} + m_W^2 W_\alpha^\dagger W^\alpha, \quad F_W^{\alpha\beta} = \partial^\beta W^\alpha - \partial^\alpha W^\beta$$

から導かれる^{*22}. Proca 方程式 (68) は(その 4 元発散をとれば直ちに導かれるように), $m_W \neq 0$ に対して自動的に Lorenz 条件

$$\partial_\alpha W^\alpha = 0 \quad (69)$$

を含意し、

$$(\square + m_W^2) W^\alpha = 0$$

と簡略化される (Klein-Gordon 方程式の形).

■平面波展開と偏極ベクトル 場の方程式から得られる分散関係 $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{m_W^2 + \mathbf{k}^2}$ を考慮して、波数 $k = (\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$ によって特徴付けられる平面波を用いて場を次のように展開する^{*23*24}.

$$W^\alpha(x) = W^{\alpha+}(x) + W^{\alpha-}(x),$$

$$W^{\alpha+}(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^3 \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x},$$

^{*22} これを古典場の理論と見なせば、Hermite 共役 (\dagger) は複素共役 ($*$) に置き換わる.

^{*23} $W^{\alpha\dagger}$ に関しては $W^{\alpha\pm\dagger} = (W^{\alpha\mp})^\dagger$ とする. すなわち消滅演算子 $b_r(\mathbf{k})$ を含む正振動数部分を $W^{\alpha+\dagger}$ とおき、生成演算子 $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ を含む負振動数部分を $W^{\alpha-\dagger}$ とおく.

^{*24} 光子の場合とは異なり、 $r = 0$ の偏極ベクトル $\varepsilon_0^\mu(\mathbf{k})$ は導入されていない. 古典電磁場の自由度は 2 であり、場の量子論においてもゲージ条件を適切に考慮すると、2 つの横波成分だけが観測量に寄与を持つことが説明された (5.1 節, 5.2 節). これに対して質量 $m_W \neq 0$ を持つベクトルボゾン場 W^α はゲージとは無関係に常に式 (69): $\partial_\alpha W^\alpha = 0$ を満たすため、最初から電磁場よりも自由度が 1 だけ少ない ($m_W = 0$ では関係 $\partial_\alpha W^\alpha = 0$ が場の方程式から導かれないため、この論法は適用されない). 3 つの偏極ベクトルを用いて W^α を展開しなければならないのはこのためである [6, p.93] [8, p.211].

$$W^{\alpha-}(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^3 \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) b_r^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x}.$$

ここに $\varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) (r=1, 2, 3)$ は偏極ベクトルであり, Lorenz 条件により

$$k_\alpha \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) = 0$$

を満たす. $k = (\omega_{\mathbf{k}}, 0, 0, |\mathbf{k}|)$ となる座標系では偏極ベクトルを

$$\begin{cases} \varepsilon_1^\alpha(\mathbf{k}) = (0, 1, 0, 0), \\ \varepsilon_2^\alpha(\mathbf{k}) = (0, 0, 1, 0), \\ \varepsilon_3^\alpha(\mathbf{k}) = (|\mathbf{k}|, 0, 0, \omega_{\mathbf{k}})/m_W \end{cases} \quad (70)$$

と選ぶのが便利である. これらは

$$\varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) \varepsilon_s^\alpha(\mathbf{k}) = -\delta_{rs}, \quad \sum_{r=1}^3 \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\beta(\mathbf{k}) = -g^{\alpha\beta} + \frac{k^\alpha k^\beta}{m_W^2} \quad (71)$$

という性質を満たす*25.

■正準量子化 正準形式での量子化により

- $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ と $a_r(\mathbf{k})$ をそれぞれモード (r, \mathbf{k}) の W^+ の消滅・生成演算子
- $b_r^\dagger(\mathbf{k})$ と $b_r(\mathbf{k})$ をそれぞれモード (r, \mathbf{k}) の W^- の消滅・生成演算子

と見なすことが可能となる.

■W ボゾンの伝播関数

$$\begin{aligned} iD_F^{\alpha\beta}(x-y, m_W) &= \langle 0 | T \{ W^\alpha(x) W^{\beta\dagger}(y) \} | 0 \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} iD_F^{\alpha\beta}(k, m_W), \\ iD_F^{\alpha\beta}(k, m_W) &= \frac{i(-g^{\alpha\beta} + k^\alpha k^\beta / m_W^2)}{k^2 - m_W^2 + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (72)$$

16.4 IVB 理論に対する Feynman 規則

16.2 節で導入した IVB 理論における相互作用 Hamiltonian 密度 (67) が作る基本結節点は図 63 のようである. ここではレプトン数の保存と電荷保存を満たす可能なレプトン線の組を代表して描いている. この場合の Feynman 規則は QED の規則を, 電子と同様の規則をすべてのレプトン (ニュートリノ・反ニュートリノを含む) に適用してレプトンを含むように拡張した上で, 次のように修正して得られる.

- 結節点 因子 $-ig_W \gamma^\alpha (1 - \gamma_5)$ を充てる.
- ボゾンの内線 W ボゾンの内線と見なして, その伝播関数 $iD_{F\alpha\beta}(k, m_W)$ を充てる.
- ボゾンの外線 W ボゾンの外線と見なして, その偏極ベクトル $\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k})$ を充てる.

*25 電磁場の場合 (5.1 節) と同様に式 (70) は特定の座標系でしか成り立たないのに対し, 性質 (71) は相対論的に不変な式となっているので, $k = (\omega_{\mathbf{k}}, 0, 0, |\mathbf{k}|)$ となる座標系において成分が式 (70) で与えられる偏極ベクトルを考える限り任意の座標系で成立する. したがって式 (71) の性質だけを要求すれば十分であると考えられる.

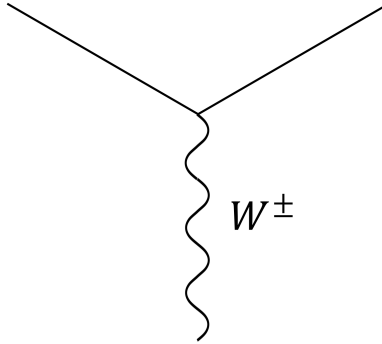


図 63 IVB 相互作用の基本結節点

第 17 章 弱い相互作用のゲージ理論

本章では弱い相互作用をゲージ理論として定式化する。その際、IVB 理論に対して中性ベクトルボゾンと中性のレプトンカレントが追加され、さらに弱い相互作用は電磁相互作用と自然に統一される。ところが理論のゲージ不変性は、全てのレプトンとベクトルボゾンが質量を持たないという困難へと導く。この問題は次章において解消される。

17.1 QED の復習

ゲージ理論を構築するには、QED(や QCD) の場合と同様に以下の手順を踏めば良い。

1. 自由場のラグランジアンを不変に保つような大域的位相変換の組を見出し、それに付随する適切な電荷-電流保存則を導く (17.2 節)。
2. 局所的な位相変換 (局所的ゲージ変換) へと一般化して、この局所の変換における理論の不変性を仮定し、そこから相互作用の形を推定する (17.3 節)。

17.2 大域的な位相変換と保存する弱カレント

手始めに全てのレプトン (ニュートリノを含むは質量を持たないと仮定し、自由レプトン系の Lagrangian 密度を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= i(\bar{\psi}_l \not{\partial} \psi_l + \bar{\psi}_{\nu_l} \not{\partial} \psi_{\nu_l}) \\ &= i(\bar{\Psi}_l^L \not{\partial} \Psi_l^L + \bar{\psi}_l^R \not{\partial} \psi_l^R + \bar{\psi}_{\nu_l}^R \not{\partial} \psi_{\nu_l}^R), \quad \Psi_l^L \equiv \begin{pmatrix} \psi_{\nu_l}^L \\ \psi_l^L \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}_l^L \equiv (\bar{\psi}_{\nu_l}^L \quad \bar{\psi}_l^L) \end{aligned}$$

と書く。ただしこれ以降、繰り返されたレプトンの添字 l については全ての世代 $l = e, \mu, \tau$ にわたって和をとるものと約束する。また任意の Dirac スピノル ψ に対して左手型と右手型の場を

$$\psi^{L,R} = P_{L,R} \psi = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5) \psi$$

と定義しており、最右辺では Lagrangian 密度を敢えて右手型と左手型に関して非対称な形に書いている。なお 17.5 節以降において、実際のレプトンは質量を持つという問題に立ち戻る。

この自由場の Lagrangian 密度 \mathcal{L}_0 は、大域的 SU(2) 変換

$$\Psi_l^L \rightarrow U(\alpha)\Psi_l^L, \quad \bar{\Psi}_l^L \rightarrow \bar{\Psi}_l^L U^\dagger(\alpha)$$

(ただし $U(\alpha) \equiv \exp(i\alpha_j \tau_j/2)$, τ_1, τ_2, τ_3 : Pauli 行列) の下で不変である*26. ただし右手型の場 ψ^R の各々はこの変換に対して不変と見なす. SU(2) 変換に対する変換性から

- 2成分場 Ψ_l^L は弱アイソスピノル
- 右手型の場 ψ^R の各々は弱アイソスカラー

と呼ばれる.

SU(2) 変換に対する Lagrangian 密度の不変性から、保存する電荷-電流密度として弱アイソスピンカレント

$$J_i^\alpha = \frac{1}{2} \bar{\Psi}_l^L \gamma^\alpha \tau_i \Psi_l^L \quad (i = 1, 2, 3)$$

と弱アイソスピン電荷

$$I_i^W = \int d^3x J_i^0 = \frac{1}{2} \int d^3x \bar{\Psi}_l^L \tau_i \Psi_l^L$$

が導かれる*27. これは IVB 理論におけるレプトン (荷電) カレント

$$\begin{aligned} J^\alpha &= \bar{\psi}_l \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l} = 2(J_1^\alpha - J_2^\alpha), \\ J^{\alpha\dagger} &= \bar{\psi}_{\nu_l} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_l = 2(J_1^\alpha + J_2^\alpha) \end{aligned}$$

が保存するカレントであることに加え, “中性カレント”

$$J_3^\alpha = \frac{1}{2} \bar{\Psi}_l^L \gamma^\alpha \tau_3 \Psi_l^L = \frac{1}{2} (\bar{\psi}_{\nu_l}^L \gamma^\alpha \psi_{\nu_l}^L + \bar{\psi}_l^L \gamma^\alpha \psi_l^L)$$

が保存することを意味する. さらに電磁カレントを $s^\alpha = -e \bar{\psi}_l \gamma^\alpha \psi_l$ として, 弱超電荷カレント

$$J_Y^\alpha = \frac{1}{e} s^\alpha - J_3^\alpha$$

を定義する. このとき弱アイソスピン電荷 I_3^W の保存は通常電荷 Q の保存則と合わせると, 弱超電荷

$$Y \equiv \int d^3x J_Y^3 = \frac{Q}{e} - I_3^W \quad (73)$$

が保存することを意味する.

ここで左手型の (すなわちヘリシティが負の) レプトン l^- が 1 個だけ存在している状態を $|l^-, L\rangle$ 等と書き, レプトンの 1 粒子状態について各種電荷の固有値を調べると, その結果は表 6 のようにまとめられる.

なお ψ を $\psi_{\nu_l}^L, \psi_l^L, \psi_{\nu_l}^R, \psi_l^R$ のいずれかとし, Y を場 ψ によって消滅する粒子の弱超電荷とすると, 弱超電荷 Y の保存は変換

$$\psi \rightarrow e^{i\beta Y} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-i\beta Y} \quad (74)$$

(U(1) 変換と呼ばれる) に対する Lagrangian の不変性から直接導かれる. したがって弱い相互作用の理論では, 対称性から弱アイソスピン電荷と弱超電荷の保存が独立に導かれ, 逆に通常電荷保存則が保証されることになる. 以上の大域的な位相変換と保存する電荷の関係は図 64 のようにまとめられる*28.

*26 SU(N) 変換に関するまとめ (付録の第 11 章) を併せて参照. 一般に SU(N) 変換では生成子 T_i , 保存する電荷, 導入される

表6 レプトンの1粒子状態における各種電荷の固有値

	$ l^-, L\rangle$	$ \nu_l, L\rangle$	$ l^-, R\rangle$	$ \nu_l, R\rangle$
Q/e	-1	0	-1	0
I_3^W	-1/2	+1/2	0	0
Y	-1/2	-1/2	-1	0

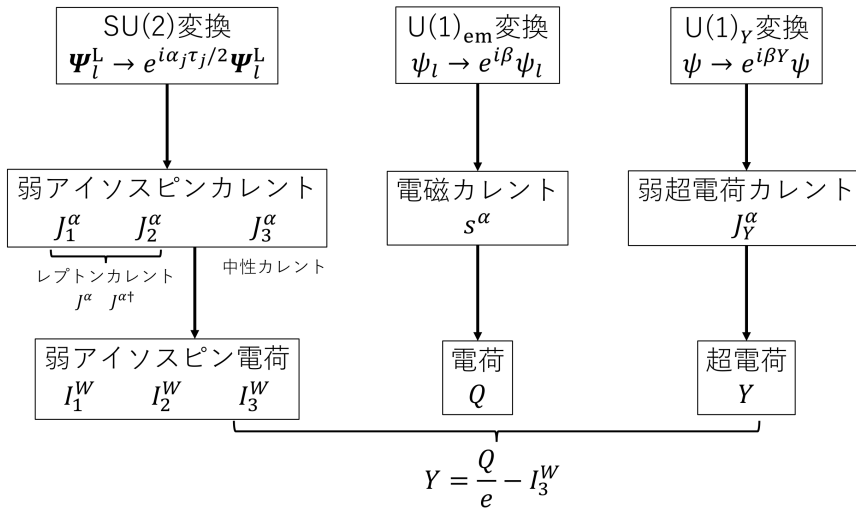


図64 大域的な位相変換と保存する電荷 (17.2節のまとめ)

17.3 ゲージ不変な電弱相互作用

SU(2) 変換と U(1) 変換^{*29}において $\alpha_j \rightarrow g\omega_j(x)$, $\beta \rightarrow g'f(x)$ と置き換えた局所的位相変換を考える (g, g' は定数). Lagrangian 密度のゲージ不変性を回復するために, QED や QCD の場合と同様に, 微分の共変微分への置き換え

$$\begin{aligned} \partial^\mu \Psi_l^L &\rightarrow D^\mu \Psi_l^L = \left[\partial^\mu + \frac{i}{2} g \tau_j W_j^\mu - \frac{i}{2} g' B^\mu \right] \Psi_l^L, \\ \partial^\mu \psi_l^R &\rightarrow D^\mu \psi_l^R = [\partial^\mu - i g' B^\mu] \psi_l^R, \\ \partial^\mu \psi_{\nu_l}^R &\rightarrow D^\mu \psi_{\nu_l}^R = \partial^\mu \psi_{\nu_l}^R \end{aligned}$$

を通して実ゲージ場 $W_i^\mu (i = 1, 2, 3)$, $B^\mu(x)$ を導入する. ただしゲージ場は

$$W_i^\mu \rightarrow W'^\mu_i = W_i^\mu - \partial^\mu \omega_i - g \varepsilon_{ijk} \omega_j W_k^\mu, \quad (\text{SU}(2) \text{ 変換, } \omega_j(x) : \text{無限小})$$

ゲージ場はそれぞれ $(N^2 - 1)$ 種類である. 今考えている $N = 2$ の場合, Pauli 行列 τ_i , 弱アイソスピン電荷 I_i^W , ゲージ場 $W_i^\mu(x)$ (17.3節) はそれぞれ3種類である ($i = 1, 2, 3$).

*27 今一度確認すると, 正確には保存するのはカレントではなく電荷であり, 保存するカレントとは保存する電荷に対するカレントのことである.

*28 文献 [8, pp.460–461] にならって, QED における U(1) 電磁ゲージ変換と本節の U(1) 弱超電荷変換 (74) をそれぞれ $U(1)_{em}, U(1)_Y$ と書いて区別した.

*29 式 (74) の変換を指す.

$$B^\mu \rightarrow B'^\mu = B^\mu - \partial^\mu f \quad (\text{U(1) 変換})$$

と変換する. また場 $W_i^\mu(x)$ は U(1) ゲージ変換の下で不変であり, $B^\mu(x)$ は SU(2) ゲージ変換の下で不変であるものとする. すると共変微分への置き換えによって得られるレプトン系の Lagrangian 密度

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^L &= i(\bar{\Psi}_l^L \not{D}\Psi_l^L + \bar{\psi}_l^R \not{D}\psi_l^R + \bar{\psi}_{\nu_l}^R \not{D}\psi_{\nu_l}^R) \\ &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \\ \mathcal{L}_1 &= -gJ_i^\mu W_{i\mu} - g'J_Y^\mu B_\mu \end{aligned}$$

は U(1) ゲージ変換と SU(2) ゲージ変換の下で不変となる (SU(2)×U(1) ゲージ不変). ここで g, g' は \mathcal{L}_1 における結合定数に同定される.

ここで $W_{1\mu}$ と $W_{2\mu}$ の代わりに非 Hermite なゲージ場

$$W_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_{1\mu} - iW_{2\mu}), \quad W_\mu^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_{1\mu} + iW_{2\mu})$$

を導入し, また $W_{3\mu}$ と B_μ の代わりにこれらの 1 次結合

$$\begin{aligned} Z_\mu &= \cos \theta_W W_{3\mu} - \sin \theta_W B_\mu, \\ A_\mu &= \sin \theta_W W_{3\mu} + \cos \theta_W B_\mu \end{aligned} \quad (75)$$

(θ_W は弱混合角または Weinberg 角と呼ばれる) を用いて相互作用 Lagrangian 密度を表すことを考える*30. その際, 場 A_μ を電磁場と見なして, これが相互作用 Lagrangian 密度に $-s^\mu A_\mu$ という形でのみ現れることを要求すると, 弱混合角 θ_W は条件

$$g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W = e \quad (76)$$

から定まり*31,

$$\mathcal{L}_1 = -s^\mu A_\mu - \frac{g}{2\sqrt{2}}(J^{\mu\dagger} W_\mu + J^\mu W_\mu^\dagger) - \frac{g}{\cos \theta_W}(J_3^\mu - \sin^2 \theta_W s^\mu / e) Z_\mu \quad (77)$$

となる.

- 第 1 項 $-s^\mu A_\mu$ は QED の相互作用である (電磁相互作用と弱い相互作用の統一)*32.
- 第 2 項 $-\frac{g}{2\sqrt{2}}(J^{\mu\dagger} W_\mu + J^\mu W_\mu^\dagger)$ は,
 $g_W = \frac{g}{2\sqrt{2}}$ とおき, 場 $W_\mu(x)$ を W ボゾンの量子場と見なせば, IVB 理論の相互作用に他ならない.
- 第 3 項は中性カレント

$$J_3^\mu - \sin^2 \theta_W s^\mu / e = \frac{1}{4} \bar{\psi}_{\nu_l} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l} - \frac{1}{4} \bar{\psi}_l \gamma^\mu \{(1 - 4 \sin^2 \theta_W) - \gamma_5\} \psi_l$$

と場 Z_μ の相互作用を表し, 実ベクトル場 Z_μ は中性ベクトルボゾン Z^0 の量子場と解釈される.

実験と整合する弱混合角の値は

$$\sin^2 \theta_W = 0.23122 \pm 0.00015 \quad (78)$$

であり, これは中性カレントの右辺第 2 項がほとんど純粋な軸性カレントであることを意味している ($1 - 4 \sin^2 \theta_W \simeq 0$, 付録の式 (A.53) 参照).

最後に本節で導入されたゲージ場は図 66 のようにまとめられる.

*30 図 65 において, 同一の点を表す座標 ($W_{3\mu}, B_\mu$), (Z_μ, A_μ) の間の関係は式 (75) によって与えられる.

*31 もっとも式 (76) は実質 2 つの条件式なので, 1 つの未知数 θ_W を定めるものと見なすと条件过剩である. 実際には式 (78) のような実験に合う θ_W の値を与えると, 式 (76) の関係を通して未知の結合定数 $g_W = \frac{g}{2\sqrt{2}}$, g' の値が決まるものと考えられる.

*32 低エネルギーにおいては, 電磁相互作用と弱い相互作用は明確に分離している.

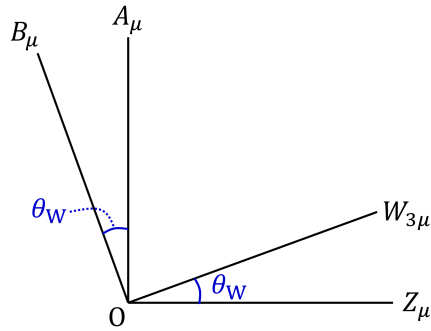


図 65 弱混合角 (Weinberg 角) θ_W

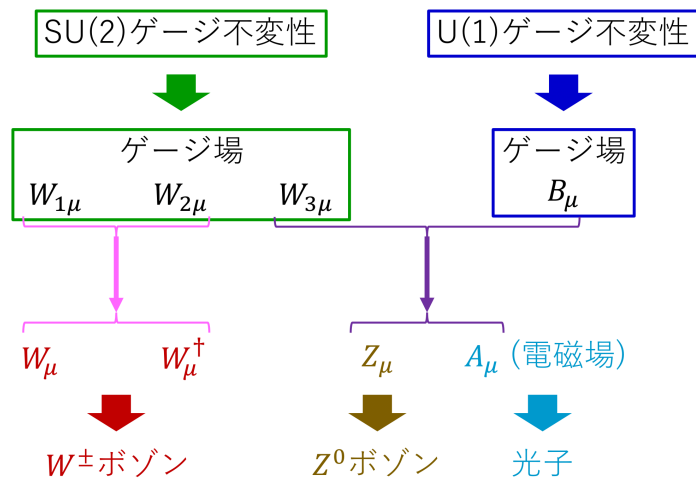


図 66 電弱相互作用を媒介するゲージボゾン (17.3 節で導入)

17.4 ゲージボゾンの性質

完全な Lagrangian 密度を得るには、レプトン系の Lagrangian 密度 $\mathcal{L}^L = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ に純粋なゲージボゾンの Lagrangian 密度 \mathcal{L}^B を加えて

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}^B$$

としなければならない。ここでは全てのゲージボゾンの質量をゼロとして、レプトンがない場合のゲージボゾンの項 \mathcal{L}^B を考える。実際には光子以外のゲージボゾンがゼロでない質量を持つことについては、次節以降で考察する。

電磁場テンソル $F^{\mu\nu}$ に類似の場

$$B^{\mu\nu} \equiv \partial^\nu B^\mu - \partial^\mu B^\nu, \quad G_i^{\mu\nu} \equiv F_i^{\mu\nu} + g\epsilon_{ijk}W_j^\mu W_k^\nu, \quad F_i^{\mu\nu} \equiv \partial^\nu W_i^\mu - \partial^\mu W_i^\nu$$

を定義してゲージボゾンの Lagrangian 密度を

$$\mathcal{L}^B = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{i\mu\nu}G_i^{\mu\nu}$$

とすると、これは $SU(2) \times U(1)$ 不変となる。 \mathcal{L}^B は電磁場、 W^\pm ボゾン場、 Z^0 ボゾン場に対する自由場 Lagrangian 密度の項

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0^B &\equiv -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{i\mu\nu}F_i^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}F_{W\mu\nu}^\dagger F_W^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu}, \\ Z^{\mu\nu} &\equiv \partial^\nu Z^\mu - \partial^\mu Z^\nu\end{aligned}$$

と、ゲージボゾン同士の相互作用を表す付加的な項

$$g\varepsilon_{ijk}W_{i\mu}W_{j\nu}\partial^\mu W_k^\nu - \frac{1}{4}g^2\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}W_j^\mu W_k^\nu W_{l\mu}W_{m\nu}$$

から成っている^{*33}。このゲージボゾン同士の相互作用はゲージボゾンが弱アイソスピン電荷を持つことによるものである^{*34}。

17.5 レプトンとゲージボゾンの質量

ここまでは全てのレプトンとゲージボゾンの質量をゼロと扱ってきたけれど、実際には光子を除き、これらの粒子はゼロでない質量を持つ。ところがゲージボゾン W^\pm, Z^0 の質量 m_W, m_Z を考慮して Lagrangian 密度に質量項

$$m_W^2 W_\mu^\dagger W^\mu + \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu$$

を加えると、理論の $SU(2) \times U(1)$ 不変性が失われてしまう。同様にレプトンの質量を考慮して、例えば電子 (場 $\psi = \psi_e$, 質量 $m = m_e$) について Lagrangian 密度に質量項

$$-m\bar{\psi}\psi = -m\bar{\psi}(P_R + P_L)\psi = -m(\bar{\psi}^L\psi^R + \bar{\psi}^R\psi^L)$$

を加えることが考えられるけれど、最右辺を見れば明らかなようにこれは $SU(2) \times U(1)$ 不変性を持たない^{*35}。そして実はこれらの理論は繰り込み不能となる。そこで理論のゲージ不変性・繰り込み可能性を壊すことなくゼロでない質量を導入する方法として、自発的な対称性の破れについて次章で議論する。

第 18 章 自発的な対称性の破れ

本章では自発的な対称性の破れの機構により、Lagrangian 密度のゲージ不変性を (そして理論の繰り込み可能性を) 損なうことなく質量が導入されることを説明する。

● 18.1 節

Goldstone モデル ($U(1)$ 位相変換の下で不変な場の理論のモデル) において、自発的な対称性の破れの概念を導入する。

Goldstone モデルからは自然界で観測されない質量ゼロの (光子以外の) ボゾンが生じる。

^{*33} 場 $W_{1\mu}, W_{2\mu}$ は W^\pm ボゾン場に、場 $W_{3\mu}$ は電磁場 A_μ と Z^0 ボゾン場 Z_μ に関係付けられていたことを思い出そう (図 66 参照)。

^{*34} これは QCD においてグルーオンが色電荷を持つことに対応してグルーオン同士の相互作用を表す 3 グルーオン結節点や 4 グルーオン結節点が現れたのと同じ事情である。

^{*35} これは左手型の場と右手型の場とで変換則が異なるためであり、電磁的なゲージ変換や QCD におけるゲージ変換に対してこの項が不変であったのとは対照的である。

- 18.2 節

この問題は全域的な位相変換を局所的な位相変換に改めてゲージ不変な理論を構築し、自発的な対称性の破れを導入することによって解消すること (Higgs 機構) を説明する。

- 18.3 節

以上を $SU(2) \times U(1)$ ゲージ不変な電弱理論へと一般化

→ Weinberg と Salam による電弱標準理論

ゲージ不変・繰り込み可能であり, Lagrangian 密度が W^\pm, Z^0 ボゾンの質量項を含む。

18.1 Goldstone モデル

まず初めに自発的な対称性の破れの身近な例として, 強磁性を取り上げよう。磁性体の系の Hamiltonian は回転に対して不変であるにも関わらず, 基底状態では磁性体全体として特定の方向を向いたゼロでない磁化 \mathbf{M} が生じており, \mathbf{M} の方向の異なる状態が縮退している。このように縮退した状態から任意の状態が選ばれると, その基底状態は一般に系の Lagrangian や Hamiltonian と同じ対称性を持たず, 非対称な基底状態が現れる (自発的な対称性の破れ)。

場の理論においても基底状態 (真空) が縮退していれば, 自発的な対称性の破れが起こり得る。このことを最も簡単な理論モデルである, Goldstone モデルを用いて説明する。Goldstone モデルでは複素スカラー場

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \phi_1(x) + i\phi_2(x) \}$$

($\phi_1(x), \phi_2(x)$ は実スカラー場) を Lagrangian 密度

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) - \mu^2 |\phi|^2 - \lambda |\phi|^4, \quad \lambda > 0$$

によって記述する。古典的に考えた“基底状態”は Hamiltonian 密度

$$\mathcal{H} = (\partial^0 \phi^*)(\partial_0 \phi) + (\nabla \phi^*) \cdot (\nabla \phi) + \mathcal{V}(\phi), \quad \mathcal{V}(\phi) \equiv \mu^2 |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4 \quad (79)$$

が最小の状態であり, したがって場 $\phi(x)$ がポテンシャルエネルギー密度 $\mathcal{V}(\phi)$ を最小にするような定数値をとる状態である。(Hamiltonian 密度 (79) の最初の 2 項は正定値であり, $\phi(x)$ が定数のときゼロになるから。) 以下のように μ^2 の符号に応じて, “基底状態”の性格は異なる。

1. $\mu^2 > 0$ のとき。

Lagrangian 密度や Hamiltonian 密度は, Klein-Gordon 場に対する表式に摂動項 $\lambda |\phi|^4$ を加えたものと見なせるようになる。

ポテンシャル $\mathcal{V}(\phi)$ の概形は図 67 のようであり, 古典的な“基底状態”は $\phi = 0$ である。

2. $\mu^2 < 0$ のとき。

ポテンシャル $\mathcal{V}(\phi)$ の概形は図 68 のようであり (回転 4 次曲面),

古典的な“基底状態”はその最低値を与える円周

$$\phi(x) = \phi_0 \equiv \left(\frac{-\mu^2}{2\lambda} \right)^{1/2} e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

において実現される。

位相角 θ の任意性に応じた異なる“基底状態”が“縮退”しており,

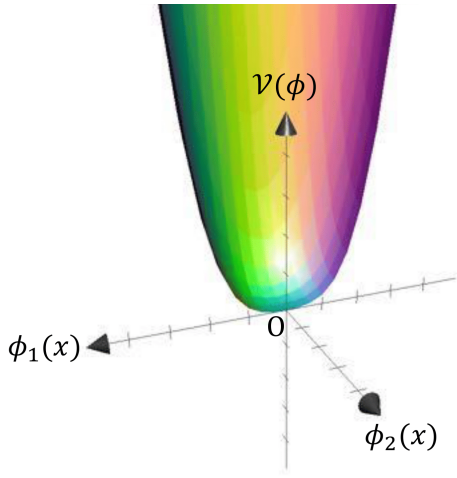


図 67 $\mu^2 > 0$ のとき

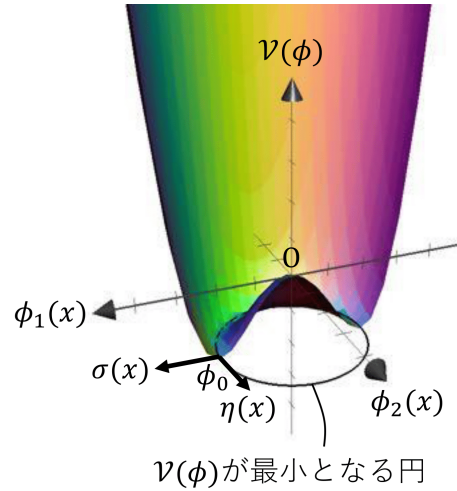


図 68 $\mu^2 < 0$ のとき

もとの Lagrangian 密度自体は U(1) 位相変換

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi e^{i\alpha}, \quad \phi^* \rightarrow \phi'^* = \phi^* e^{-i\alpha}$$

に対して不変であるにも関わらず、特定の θ で指定される“基底状態”は対称性を自発的に破っている。

$\mu^2 < 0$ の場合に対して例えば $\theta = 0$ の安定な平衡値

$$\phi_0 = \left(\frac{-\mu^2}{2\lambda} \right)^{1/2} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} v (> 0) \quad (80)$$

を考え、

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{v + \sigma(x) + i\eta(x)\} \quad (81)$$

によってその周りの摂動 $\sigma(x), \eta(x)$ (ともに実場) を導入すると、Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \lambda v \sigma (\sigma^2 + \eta^2) - \frac{1}{4} \lambda (\sigma^2 + \eta^2)^2, \quad \mathcal{L}_0 \equiv \frac{1}{2} (\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) - \frac{1}{2} (2\lambda v^2) \sigma^2 - \frac{1}{2} (\partial^\mu \eta)(\partial_\mu \eta) \quad (82)$$

と書き換えられる (定数項は省いた). 3つの項 $-\frac{1}{2}(2\lambda v^2)\sigma^2, -\lambda v\sigma(\sigma^2 + \eta^2), -\frac{1}{4}\lambda(\sigma^2 + \eta^2)^2$ がポテンシャル $\mathcal{V}(\phi)$ に由来しており、これは ϕ_1 軸方向の変位 σ に対してポテンシャルが 2 次の変化をするのに対し、 ϕ_2 軸方向の、したがって円周方向の変位 η に対して、2 次までの近似ではポテンシャルは変化しないことを表している (図 68 参照). ところで相互作用項を除いた自由場項と見なされる \mathcal{L}_0 の部分は、 $\sigma(x), \eta(x)$ が Klein-Gordon 場であることを意味しており、場の 2 次の項の係数が質量に対応するため、場の量子化によって生じる σ ボゾンはゼロでない質量 $\sqrt{2\lambda v^2}$ を持つのに対し、 η ボゾンの質量はゼロとなる。

18.2 Higgs モデル

Goldstone モデルから質量ゼロのボゾンが生じる問題は、局所的なゲージ変換へと一般化した U(1) 変換

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) e^{-iqf(x)}, \quad \phi^*(x) \rightarrow \phi'^*(x) = \phi^*(x) e^{iqf(x)} \quad (83)$$

に対して不変な理論において解消される。理論のゲージ不変性を回復するには、これと同時に

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu f(x)$$

というゲージ変換を受けるゲージ場 $A_\mu(x)$ を導入し、微分の共変微分への置き換え

$$\partial_\mu \phi \rightarrow D_\mu \phi \equiv [\partial_\mu + iqA_\mu]\phi$$

を行えば良い。Higgs モデルはさらに自由ゲージ場項

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (\text{ただし } F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)$$

を付け加えた、ゲージ不変な Lagrangian 密度

$$\mathcal{L} = (D^\mu \phi)^*(D_\mu \phi) - \mu^2 |\phi|^2 - \lambda |\phi|^4 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

によって定義される。Higgs モデルは Goldstone モデルと同様の機構により、 $\mu^2 < 0$ に対して自発的な対称性の破れを起こす。

再び $\mu^2 < 0$ の場合に対して安定な平衡値 (80):

$$\phi_0 = \left(\frac{-\mu^2}{2\lambda} \right)^{1/2} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}v (> 0)$$

を考え、式 (81):

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{v + \sigma(x) + i\eta(x)\}$$

によってその周りの摂動 $\sigma(x), \eta(x)$ (ともに実場) を導入すると、Higgs モデルの Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\sigma^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(qv)^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial^\mu \eta)(\partial_\mu \eta) + qv A^\mu \partial_\mu \eta + (\text{相互作用項}) \quad (84)$$

と書き換えられる^{*36}。ただし定数項は省いた。また場の 2 次の項を自由場項と見なし、場の 3 次以上の項を相互作用項に含めた。この結果を解釈する前に、次の問題を解消しなければならない。すなわち

- 自由場項に双 1 次項 $A^\mu \partial_\mu \eta$ が現れることは、 A_μ と η が独立な場ではないことを示唆している。
- 初めは質量のないベクトル場 A_μ を考えており、その独立な自由度は光子と同様に 2 であるのに対し、書き換えられた Lagrangian 密度には質量項 $\frac{1}{2}(qv)^2 A_\mu A^\mu$ が現れるので、ゲージ場は 3 つの偏極状態を持つ (16.3 節)。このように自由度が見かけ上 1 つ増えていることは、書き換えられた Lagrangian 密度が非物理的な場を余計に 1 つ含んでいることを意味している。

実際スカラー場 $\eta(x)$ は非現実的なゴースト場であり、局所的な U(1) ゲージ変換を利用して場

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{v + \sigma(x) + i\eta(x)\}$$

^{*36} Goldstone モデルの Lagrangian 密度 (82) に対する付加的な自由場項は

$$qv A^\mu \partial_\mu \eta + \frac{1}{2}(qv)^2 A_\mu A^\mu$$

である。

の位相を調節すれば、その虚部 $\eta(x)$ を消去することができる。このような場 $\eta(x)$ の現れないゲージは“ユニタリゲージ”と呼ばれ、このゲージにおいて Higgs モデルの Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\sigma^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(qv)^2 A_\mu A^\mu + (\text{相互作用項})$$

と表される。これが本節の最終的な結果である。

以上で見たことは次のようにまとめられる。すなわち理論のゲージ不変性を損なうことなくゲージ場 A_μ は質量を獲得し、これに伴ってゲージ場の自由度は 2 から 3 に増大する。このような現象を“Higgs 機構”と呼ぶ。一方 Goldstone モデルにおける、目障りな質量ゼロの η 粒子は、Higgs モデルにおいてはゲージ不変性を根拠に消し去ることができる。ゲージ場 A_μ の獲得した第 3 の自由度は、もともとはこの場 $\eta(x)$ が持っていた自由度に他ならない：

$$\begin{aligned} & \text{“複素” スカラー場 } \phi(x), \phi^*(x) \quad (\leftrightarrow \sigma(x), \eta(x)) \quad (\text{自由度 } 2) \\ + & \text{ “質量のない” 実ベクトル場 } A_\mu(x) \quad (\text{自由度 } 2) \\ & \quad \downarrow \\ & \text{“実” スカラー場 } \sigma(x) \quad (\leftrightarrow \text{Higgs ボゾン}) \quad (\text{自由度 } 1) \\ + & \text{ “質量を持つ” 実ベクトル場 } A_\mu(x) \quad (\text{自由度 } 3). \end{aligned}$$

最後にこの理論の繰り込み可能性について言及する。質量を持つ中性ベクトルボゾン場の伝播関数は W ボゾンの伝播関数 (72) と同じ形

$$iD_F^{\alpha\beta}(k, m) = \frac{i(-g^{\alpha\beta} + k^\alpha k^\beta / m^2)}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

を持ち、これは $k^\alpha k^\beta / m^2$ の項のために見かけ上、ループ積分の発散を引き起こす。ところが実際には自発的に対称性を破っているゲージ理論では、実際の発散は見かけの次数よりも弱まり、理論は繰り込み可能となる。このことを簡単に理解するには、't Hooft (ト・フーフト) ゲージ

$$\partial_\mu A^\mu - m\eta = 0$$

の下で Lagrangian 密度 (84) に

$$-\frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu - m\eta)^2$$

を付け加えれば良い。(したがって再び $\eta(x)$ 場が導入されることになる。)すると Lagrangian 密度から $\eta(x)$ と $A_\mu(x)$ の結合した双 1 次項が除かれる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\sigma^2 \\ & - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \\ & + \frac{1}{2}(\partial^\mu \eta)(\partial_\mu \eta) - \frac{1}{2}m^2 \eta^2 \\ & + (\text{相互作用項}). \end{aligned}$$

このため、 $\sigma(x), \eta(x), A_\mu(x)$ のそれぞれを独立な自由場と見なして量子化を行うことが許される。そしてこのとき場 $A^\mu(x)$ の運動方程式が

$$(\square + m^2)A^\mu(x) = 0$$

となることから予想されるように、場 $A_\mu(x)$ を量子化すると、伝播関数として

$$iD_F^{\alpha\beta}(k, m) = \frac{-ig^{\alpha\beta}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

が得られることを証明し得る。この't Hooft の結果では伝播関数に発散を起こす項 $k^\alpha k^\beta / m^2$ が現れないため、理論の繰り込み可能性が明白である。

18.3 電弱標準理論

ここでは質量のないレプトンとゲージボソンを想定した、第 17 章における電弱統一理論モデルに Higgs 機構を適用する。まず元の理論が SU(2) ゲージ不変性を持つことを踏まえて、Goldstone モデルや Higgs モデルにおけるスカラー場 $\phi(x)$ の代わりに弱アイソスピン 2 重項

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_a(x) \\ \phi_b(x) \end{pmatrix}$$

を考える。ただし $\phi_a(x)$ と $\phi_b(x)$ は Lorentz スカラーである。これは (変換則に基づく定義 (17.2 節) により、) アイソスピン 2 重項 $\Psi_L^I(x)$ と同様の変換則

$$\begin{aligned} \Phi(x) &\rightarrow \Phi'(x) = \exp[ig\tau_j\omega_j(x)/2]\Phi(x), & (\text{SU}(2) \text{ 変換に対して}) \\ \Phi(x) &\rightarrow \Phi'(x) = \exp[ig'Yf(x)/2]\Phi(x), & (\text{U}(1) \text{ 弱超電荷変換に対して}) \end{aligned}$$

に従う。ただし Y は場 $\Phi(x)$ の弱超電荷であり、その値はすぐ後で決める。

元の理論における Lagrangian 密度 $\mathcal{L}^L + \mathcal{L}^B$ は既に見たように SU(2)×U(1) ゲージ不変性を持つ。そこで $\Psi_L^I(x)$ の共変微分と同様に Higgs 場 $\Phi(x)$ の共変微分

$$D^\mu\Phi = \left(\partial^\mu + \frac{1}{2}ig\tau_jW_j^\mu + ig'YB^\mu \right) \Phi$$

を定義し、Higgs 場 $\Phi(x)$ の Lagrangian 密度を

$$\mathcal{L}^H = (D^\mu\Phi)^\dagger(D_\mu\Phi) - \mu^2\Phi^\dagger\Phi - \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2$$

とすれば、全 Lagrangian 密度 $\mathcal{L} = \mathcal{L}^L + \mathcal{L}^B + \mathcal{L}^H$ の SU(2)×U(1) ゲージ不変性が保証される。

Higgs モデルの場合と同様、 $\lambda > 0, \mu^2 < 0$ に対して古典的なエネルギー密度が最低値をとるのは、Higgs 場 $\Phi(x)$ が

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} \phi_a^0 \\ \phi_b^0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_0^\dagger\Phi_0 = |\phi_a^0|^2 + |\phi_b^0|^2 = \frac{-\mu^2}{2\lambda}$$

の条件を満たす定数値 Φ_0 をとるときであり、自発的な対称性の破れはこのうち特定の Φ_0 が“基底状態”に選ばれることに対応する。ここで大域的な位相変換の自由度を利用して

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad v \equiv \left(\frac{-\mu^2}{\lambda} \right)^{1/2} (> 0)$$

と選んでも一般性を失わない。

Higgs 機構の導入の後にも通常の電荷保存則が成り立つためには、基底状態は U(1) 電磁ゲージ変換 (式 (83) と同様の変換 $\Phi(x) \rightarrow e^{-iQf(x)}\Phi(x)$, etc.) の下で不変でなければならない。ここでは Φ_0 を下側の成分 ϕ_b^0 だけがゼロでないように選んだので、成分 ϕ_b^0 の電荷が中性 $Q = 0$ であれば、この変換に対する不変性が

満たされる。(しかるに $\Psi_l^L(x)$ の下側の成分 $\psi_l^L(x)$ の弱アイソスピン I_3^W が $-1/2$ であったのと同様に (17.2 節), Higgs 場 $\Phi(x)$ の下側の成分 ϕ_b^0 の弱アイソスピン I_3^W もまた $-1/2$ であると考えれば,) 成分 ϕ_b^0 の電荷が $Q = 0$ となるためには, 式 (73):

$$Y = \frac{Q}{e} - I_3^W$$

において Higgs 場の弱超電荷を $Y = 1/2$ とすれば良い. このとき Higgs 機構の導入の後にも電磁的なゲージ不変性は自発的な対称性の破れを起こさないで, 光子の質量はゼロに保たれる.

再び Higgs 場を真空場 Φ_0 (“基底状態” の場) とそこからのズレに分けて

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \eta_1 + i\eta_2 \\ v + \sigma + i\eta_3 \end{pmatrix}$$

と書くと, 実は 3 つの場 $\eta_1(x), \eta_2(x), \eta_3(x)$ を非物理的な場に同定することができる. 実際これらは適当なユニタリーゲージにおいて消去することができ, 失われた自由度は 3 つのボゾン W^\pm, Z^0 の場に吸収され, W^\pm, Z^0 ボゾンは質量を獲得する. 一方, 場 $\sigma(x)$ はユニタリーゲージにおいても残り, Higgs スカラーボゾン (ゼロでない質量を持つ, 電氣的に中性なスピン 0 の粒子) を生じる.

レプトンに質量を与えるために, レプトンと Higgs ボゾンの相互作用として “標準模型” (standard model) では Lagrangian 密度

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{LH}} &= -g_l [\bar{\Psi}_l^L \psi_l^R \Phi + \Phi^\dagger \bar{\psi}_l^R \Psi_l^L] - g_{\nu_l} [\bar{\Psi}_l^L \psi_{\nu_l}^R \tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}^\dagger \bar{\psi}_{\nu_l}^R \Psi_l^L], \\ \tilde{\Phi} &\equiv -i[\Phi^\dagger \tau_2]^T = \begin{pmatrix} \phi_b^* \\ -\phi_a^* \end{pmatrix} \quad (\tau_2: \text{Pauli 行列}, T: \text{転置}) \end{aligned}$$

を考える (レプトンの世代 l について和をとる). これはスカラー場 ϕ をスピノル場 ψ で挟んだ $\bar{\psi}\phi\psi$ という形をしており (例えば $\bar{\Psi}_l^L \psi_l^R \Phi = \bar{\psi}_{\nu_l}^L \phi_a \psi_l^R + \bar{\psi}_l^L \phi_b \psi_{\nu_l}^R$), このような項は一般に湯川型相互作用と呼ばれる. この Lagrangian 密度 \mathcal{L}^{LH} は $SU(2) \times U(1)$ ゲージ不変であることを確認できる. 次章でこの項がゼロでないレプトンの質量を生じることを見る.

- ニュートリノの質量をゼロとする取り扱いは, 相互作用項 \mathcal{L}^{LH} における g_{ν_l} の項において $g_{\nu_l} = 0$ と置くことに対応する.
- クォーク・ハドロンを含む半レプトン過程を扱えるように理論を拡張して初めて, 理論は繰り込み可能となる*37.

第 19 章 電弱標準理論

19.1 ユニタリーゲージにおけるラグランジアン密度

ここで第 18 章までに導入した, Higgs 機構を含む電弱標準理論の全 Lagrangian 密度 \mathcal{L} を改めてまとめると以下ようになる.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\text{L}} + \mathcal{L}^{\text{B}} + \mathcal{L}^{\text{H}} + \mathcal{L}^{\text{LH}}. \quad (85)$$

*37 拡張は本稿の付録 C を参照.

- レプトン系の Lagrangian 密度 \mathcal{L}^L

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^L &= i(\bar{\Psi}_l^L \not{D}\Psi_l^L + \bar{\psi}_l^R \not{D}\psi_l^R + \bar{\psi}_{\nu_l}^R \not{D}\psi_{\nu_l}^R) \\
&= \mathcal{L}_0^L + \mathcal{L}_1^{\text{LB}}, \\
\mathcal{L}_0^L &= \bar{\psi}_l^L i\not{\partial}\psi_l^L + \bar{\psi}_{\nu_l}^L i\not{\partial}\psi_{\nu_l}^L + \bar{\psi}_l^R i\not{\partial}\psi_l^R + \bar{\psi}_{\nu_l}^R i\not{\partial}\psi_{\nu_l}^R \\
&= \bar{\psi}_l i\not{\partial}\psi_l + \bar{\psi}_{\nu_l} i\not{\partial}\psi_{\nu_l}, \\
\mathcal{L}_1^{\text{LB}} &= -gJ_i^\mu W_{i\mu} - g'J_Y^\mu B_\mu \\
&= -s^\mu A_\mu - \frac{g}{2\sqrt{2}}(J^\mu \dagger W_\mu + J^\mu W_\mu^\dagger) - \frac{g}{\cos\theta_W} \left(J_3^\mu - \sin^2\theta_W \frac{s^\mu}{e} \right) Z_\mu.
\end{aligned}$$

- ゲージボゾンの Lagrangian 密度 \mathcal{L}^B

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^B &= -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{i\mu\nu}G_i^{\mu\nu} \\
&= \mathcal{L}_0^B + g\varepsilon_{ijk}W_{i\mu}W_{j\nu}\partial^\mu W_k^\nu - \frac{1}{4}g^2\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}W_j^\mu W_k^\nu W_{l\mu}W_{m\nu}, \\
\mathcal{L}_0^B &= -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{i\mu\nu}F_i^{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}F_{W\mu\nu}^\dagger F_W^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

- Higgs 場の Lagrangian 密度 \mathcal{L}^H

$$\mathcal{L}^H = (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda(\Phi^\dagger \Phi)^2.$$

- レプトンと Higgs 場の相互作用項 \mathcal{L}^{LH}

$$\mathcal{L}^{\text{LH}} = -g_l(\bar{\Psi}_l^L \psi_l^R \Phi + \Phi^\dagger \bar{\psi}_l^R \Psi_l^L) - g_{\nu_l}(\bar{\Psi}_l^L \psi_{\nu_l}^R \tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}^\dagger \bar{\psi}_{\nu_l}^R \Psi_l^L).$$

Lagrangian 密度 \mathcal{L} の物理的な意味を解釈するために、ゲージ場 W_i^μ, B^μ を W^\pm ボゾン場 $W^\mu, W^{\mu\dagger}$, Z^0 ボゾン場 Z^μ , 電磁場 A^μ によって表す。さらに非現実的な場 η_i を理論から取り除くためにユニタリーゲージを採用し、Higgs 場を

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \sigma(x) \end{pmatrix}$$

と表す。すると Lagrangian 密度は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \\
\mathcal{L}_0 &= \bar{\psi}_l(i\not{\partial} - m_l)\psi_l + \bar{\psi}_{\nu_l}(i\not{\partial} - m_{\nu_l})\psi_{\nu_l} \quad \Leftarrow \quad \text{荷電レプトン (質量 } m_l), \text{ ニュートリノ (質量 } m_{\nu_l}) \\
&\quad - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad \Leftarrow \quad \text{光子} \\
&\quad - \frac{1}{2}F_{W\mu\nu}^\dagger F_W^{\mu\nu} + m_W^2 W_\mu^\dagger W^\mu \quad \Leftarrow \quad W^\pm \text{ボゾン (質量 } m_W) \\
&\quad - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu \quad \Leftarrow \quad Z^0 \text{ボゾン (質量 } m_Z) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) - \frac{1}{2}m_H^2 \sigma^2, \quad \Leftarrow \quad \text{Higgs スカラーボゾン (質量 } m_H) \\
\mathcal{L}_1 &= \mathcal{L}_1^{\text{LB}} + \mathcal{L}_1^{\text{BB}} + \mathcal{L}_1^{\text{HH}} + \mathcal{L}_1^{\text{HB}} + \mathcal{L}_1^{\text{HL}}
\end{aligned}$$

と書き換えられる。ただし各ボゾンと各レプトンの質量は

$$m_W = \frac{1}{2}vg, \quad m_Z = \frac{m_W}{\cos\theta_W}, \quad m_H = \sqrt{-2\mu^2},$$

$$m_l = \frac{vg_l}{\sqrt{2}}, \quad m_{\nu_l} = \frac{vg_{\nu_l}}{\sqrt{2}}$$

である。自由場項 \mathcal{L}_0 の表式を見ると、系は光子、荷電レプトン、中性レプトン、 W^\pm ボゾン、 Z^0 ボゾン、Higgs ボゾンから成ることが明白である。ボゾンの質量項は $SU(2)\times U(1)$ ゲージ不変性の自発的な破れを生じる Higgs 場の Lagrangian 密度 \mathcal{L}^H に由来しており、またレプトンの質量項はレプトンと Higgs 場の相互作用項 \mathcal{L}^{LH} に由来している*38。なお各相互作用項は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I^{\text{BB}} &= ig \cos\theta_W [(W_\mu^\dagger W_\nu - W_\nu^\dagger W_\mu) \partial^\mu Z^\nu + (\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu) W^{\mu\dagger} Z^\nu - (\partial_\mu W_\nu^\dagger - \partial_\nu W_\mu^\dagger) W^\nu Z^\mu] \\ &\quad + ie [(W_\mu^\dagger W_\nu - W_\nu^\dagger W_\mu) \partial^\mu Z^\nu + (\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu) W^{\mu\dagger} Z^\nu - (\partial_\mu W_\nu^\dagger - \partial_\nu W_\mu^\dagger) W^\nu Z^\mu] \\ &\quad + g^2 \cos^2\theta_W (W_\mu W_\nu^\dagger Z^\mu Z^\nu - W_\mu W^{\mu\dagger} Z_\nu Z^\nu) \\ &\quad + e^2 (W_\mu W_\nu^\dagger A^\mu A^\nu - W_\mu W^{\mu\dagger} A_\nu A^\nu) \\ &\quad + eg \cos\theta_W \{ W_\mu W_\nu^\dagger (Z^\mu A^\nu + A^\mu Z^\nu) - 2W_\mu W^{\mu\dagger} A_\nu Z^\nu \} \\ &\quad + \frac{1}{2} g^2 W_\mu^\dagger W_\nu (W^{\mu\dagger} W^\nu - W^\mu W^{\nu\dagger}), \\ \mathcal{L}_I^{\text{HH}} &= -\lambda v \sigma^3 - \frac{1}{4} \lambda \sigma^4, \\ \mathcal{L}_I^{\text{HB}} &= \frac{1}{2} v g^2 W_\mu^\dagger W^\mu \sigma + \frac{1}{4} g^2 W_\mu^\dagger W^\mu \sigma^2 + \frac{v g^2}{4 \cos^2\theta_W} Z_\mu Z^\mu \sigma + \frac{g^2}{8 \cos^2\theta_W} Z_\mu Z^\mu \sigma^2, \\ \mathcal{L}_I^{\text{LB}} &= e \bar{\psi}_l A \psi_l \\ &\quad - \frac{g}{2\sqrt{2}} \{ \bar{\psi}_{\nu_l} W (1 - \gamma_5) \psi_l + \bar{\psi}_l W^\dagger (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l} \} \\ &\quad - \frac{g}{4 \cos\theta_W} \bar{\psi}_{\nu_l} Z (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l} \\ &\quad + \frac{g}{4 \cos\theta_W} \bar{\psi}_l Z (1 - 4 \sin^2\theta_W - \gamma_5) \psi_l, \\ \mathcal{L}_I^{\text{HL}} &= -\frac{1}{v} m_l \bar{\psi}_l \psi_l \sigma - \frac{1}{v} m_{\nu_l} \bar{\psi}_{\nu_l} \psi_{\nu_l} \sigma. \quad (\mathcal{L}^{\text{LH}} \text{ との混同に注意}) \end{aligned}$$

以上により

- W^\pm, Z^0 ボゾンの質量は、
実験的に値の知られている微細構造定数 α , Fermi 結合定数 G , 弱混合角 θ_W を用いて

$$m_W = \left(\frac{\alpha\pi}{G\sqrt{2}} \right)^{1/2} \frac{1}{\sin\theta_W} = 77.5 \text{ GeV}, \quad m_Z = \left(\frac{\alpha\pi}{G\sqrt{2}} \right)^{1/2} \frac{2}{\sin 2\theta_W} = 88.4 \text{ GeV}$$

と表される (輻射補正・繰り込みを無視した場合)。

- 理論に含まれるパラメーターは

$$g, \quad g', \quad v, \quad \lambda, \quad g_l, \quad g_{\nu_l}$$

の 6 つであり ($-\mu^2 = \lambda v^2$ は λ と v から決定される),

- v は

$$v = \frac{1}{(G/\sqrt{2})^{1/2}}$$

*38 まとめよう。17.5 節で見たように、Lagrangian 密度の質量項はゲージ不変ではない。Higgs 機構ではもとの Lagrangian 密度がゲージ不変であり、系が自発的に対称性を破る、すなわち Higgs 場が特定の基底状態 (の近く) に選ばれると、Lagrangian 密度の質量項が得られる。

と表されるので、その値を実験的に知ることができる。

- 結合 g, g' は

$$g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W = e$$

の関係を用いて値を実験的に知ることができる。

- 結合 g_l, g_{ν_l} の値は、質量 m_l, m_{ν_l} の実験的な値と

$$m_l = \frac{vg_l}{\sqrt{2}}, \quad m_{\nu_l} = \frac{vg_{\nu_l}}{\sqrt{2}}$$

の関係を用いて知ることができる。

- λ の値は決まっておらず、Higgs ボゾンの質量 m_H が分かれば、

$$m_H = \sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{2\lambda v^2}$$

の関係から値を知ることができる。

19.2 Feynman 規則

本節では電弱標準理論における Feynman 規則の説明を行う。

ただし

- 最低次の Feynman 振幅の計算に必要な規則だけを考える。
- ユニタリーゲージにおける Lagrangian 密度 (19.1 節) に基づく。
- 場の演算子としての Lagrangian 密度には正規順序化を施す。
- 自由場の Lagrangian 密度 \mathcal{L}_0 を Feynman ゲージにおける表式

$$\mathcal{L}_0^{\text{Feynman}} = \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$$

に置き換え、改めてこれを \mathcal{L}_0 と表記する。

- これは自由な電磁場の Lagrangian 密度として、Fermi による表式

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu)$$

を採用する措置と等価である。

- 電弱理論では相互作用 Lagrangian 密度が場の微分を含んでいるため、相互作用する場が自由場と同じ運動方程式と交換関係を満たすことは保証されない。しかしながら S 行列要素を評価する際に自由場の交換関係を用いるものと約束すれば、S 行列展開を QED と同様に

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T\{\mathcal{L}_I(x_1) \cdots \mathcal{L}_I(x_n)\}$$

として良い。

このとき QED の Feynman 規則はそのまま引き継がれ、16.4 節の IVB 理論における規則に加えて次の規則が追加される。

- Z^0 ボゾンの内線に伝播関数 (の i 倍) を充てる。
 Z^0 ボゾンの伝播関数は W ボゾンの伝播関数において $m_W \rightarrow m_Z$ と置き換えて得られる。
- Higgs ボゾンの内線

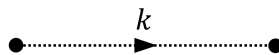


表 7 電弱標準理論における 18 種類の基本相互作用

相互作用項	相互作用の種類	結節点因子
$\mathcal{L}_1^{\text{BB}}$	$W^\dagger W Z$	$ig \cos \theta_W \{g^{\alpha\beta}(k_1 - k_2)^\gamma + g^{\beta\gamma}(k_2 - k_3)^\alpha + g^{\gamma\alpha}(k_3 - k_1)^\beta\}$
	$W^\dagger W A$	$ie \{g^{\alpha\beta}(k_1 - k_2)^\gamma + g^{\beta\gamma}(k_2 - k_3)^\alpha + g^{\gamma\alpha}(k_3 - k_1)^\beta\}$
	$W^\dagger W Z^2$	$ig^2 \cos^2 \theta_W (g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} + g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - 2g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta})$
	$W^\dagger W A^2$	$ie^2 (g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} + g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - 2g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta})$
	$W^\dagger W A Z$	$ieg \cos \theta_W (g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} + g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - 2g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta})$
	$(W^\dagger W)^2$	$ig^2 (2g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma})$
$\mathcal{L}_1^{\text{HH}}$	σ^4	$-6i\lambda$
	σ^3	$-6i\lambda v$
$\mathcal{L}_1^{\text{HB}}$	$W^\dagger W \sigma$	$(ivg^2/2)g^{\alpha\beta}$
	$W^\dagger W \sigma^2$	$(ig^2/2)g^{\alpha\beta}$
	$Z^2 \sigma$	$(ivg^2/2 \cos^2 \theta_W)g^{\alpha\beta}$
	$Z^2 \sigma^2$	$(ig^2/2 \cos^2 \theta_W)g^{\alpha\beta}$
$\mathcal{L}_1^{\text{LB}}$	$\bar{l}l A$	$ie\gamma^\alpha$
	$\bar{\nu}_l l W + \text{h.c.}$	$(-ig/2\sqrt{2})\gamma^\alpha(1 - \gamma_5)$
	$\bar{\nu}_l \nu_l Z$	$(-ig/4 \cos \theta_W)\gamma^\alpha(1 - \gamma_5)$
	$\bar{l}l Z$	$(-ig\gamma^\alpha/4 \cos \theta_W)(1 - 4 \sin^2 \theta_W - \gamma_5)$
$\mathcal{L}_1^{\text{HL}}$	$\bar{l}l \sigma$	$(-i/v)m_l$
	$\bar{\nu}_l \nu_l \sigma$	$(-i/v)m_{\nu_l}$

に伝播関数因子

$$i\Delta_F(k, m_H) = \frac{i}{k^2 - m_H^2 + i\varepsilon}$$

を充てる.

さらに相互作用 Lagrangian 密度が 18 個の項を含んでいることに対応して (19.1 節), 18 種類の基本結節点が生じる. 各々の結節点因子は QED の場合と同様に導くことができる. 各相互作用項が含む場の組合せ (したがって基本結節点・相互作用の種類) と, 対応する結節点因子を表 7 にまとめる. ただし場を

$$\psi_l \rightarrow l, \quad \bar{\psi}_l \rightarrow \bar{l}, \quad \psi_{\nu_l} \rightarrow \nu_l, \quad \bar{\psi}_{\nu_l} \rightarrow \bar{\nu}_l$$

と略記してある*39.

電弱理論の結節点に関する新たな注意事項を以下にまとめる.

1. 組合せ因子

結節点因子の導出は QED の場合と同様に行うことができる.

結果的に QED に関しては, 結節点因子を簡単に推定するには,

S 行列展開の 1 次の項 $S^{(1)} = i \int d^4x \mathcal{L}_I$ における

$$i\mathcal{L}_I = ie\bar{\psi}A\psi$$

*39 ここには QED の基本結節点 (因子 $ie\gamma^\alpha$) も含まれている. h.c. は Hermite 共役を意味している. 本稿では図 69 を除き, 結節点因子における運動量や Lorentz 添字を定義する結節点のダイアグラムを示していない.

から場を取り除いて $ie\gamma^\alpha$ とすれば良い。
これに対して例えば電弱理論における相互作用項

$$\frac{vg^2}{4\cos^2\theta_W}g^{\alpha\beta}Z_\alpha Z_\beta\sigma$$

は同種の場 Z_α を 2 つ含んでおり、
結節点に接続する 2 本の Z^0 ボゾン線に 2 つの場 Z_α を充てる方法は 2! 通りある。
このため結節点因子は $\frac{ivg^2}{4\cos^2\theta_W}g^{\alpha\beta}$ ではなく、これに組合せ因子 2! をかけた

$$\frac{ivg^2}{2\cos^2\theta_W}g^{\alpha\beta}$$

となる。

2. テンソル添字の順序

例えば $W^\dagger W Z^2$ 相互作用項

$$g^2\cos^2\theta_W(W_\alpha W_\beta^\dagger Z^\alpha Z^\beta - W_\beta W^\beta{}^\dagger Z_\alpha Z^\alpha)$$

の結節点因子が

$$ig^2\cos^2\theta_W(g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma} + g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} - 2g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta})$$

となるのは、各ボゾン線に付随するテンソル添字を図 69 のように定義したときである。
すなわち例えばボゾン線を外線と見なす場合、
テンソル添字 α を付した Z^0 ボゾン線には偏極ベクトル $\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k})$ を充てる。

3. 微分に由来する運動量因子

$W^\dagger W Z$ と $W^\dagger W A$ の項は場の微分を含んでいるため、運動量因子を生じる。

例えば $W^\dagger W Z$ 相互作用項

$$ig\cos\theta_W\{(W_\alpha^\dagger W_\beta - W_\beta^\dagger W_\alpha)\partial^\alpha Z^\beta + (\partial_\alpha W_\beta - \partial_\beta W_\alpha)W^{\beta\dagger}Z^\alpha - (\partial_\alpha W_\beta^\dagger - \partial_\beta W_\alpha^\dagger)W^\beta Z^\alpha\}$$

は、図 69 のように各運動量を結節点に向かう向きに定義したとき、結節点因子

$$ig\cos\theta_W\{g^{\alpha\beta}(k_1 - k_2)^\gamma + g^{\beta\gamma}(k_2 - k_3)^\alpha + g^{\gamma\alpha}(k_3 - k_1)^\beta\}$$

を生じる。

4. $(W^\dagger W)^2$ 相互作用項

$$\frac{1}{2}g^2W_\alpha^\dagger W_\beta(W^{\alpha\dagger}W^\beta - W^\alpha W^{\beta\dagger})$$

の結節点因子が

$$ig^2(2g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} - g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma})$$

となるのは、図 69 のように運動量の向きとテンソル添字を定義したときである。

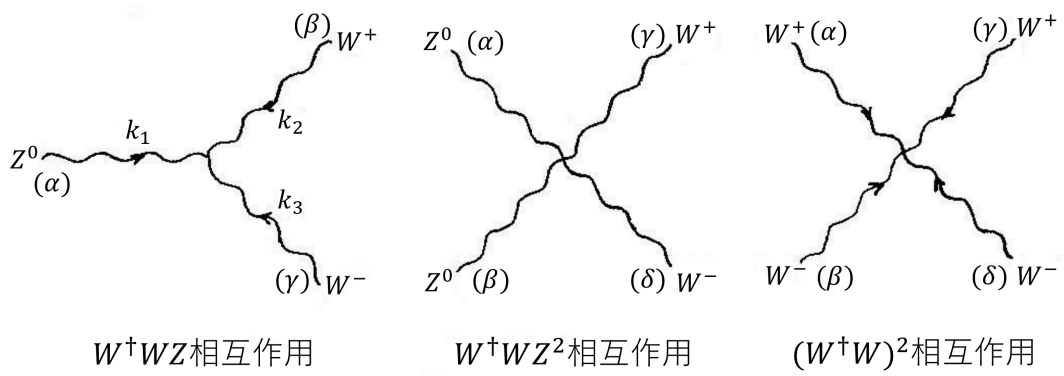


図 69 W^+WZ , W^+WZ^2 , $(W^+W)^2$ 相互作用を表す結節点

付録 B Yang-Mills 理論の局所ゲージ不変性

ここでは Yang-Mills 理論の一般論をまとめる。B.1 節では重複を厭わずに、11.2.2 節と 11.2.4 節のノートを再構成するところから始める (添字の表記も改めてある)。

B.1 内部対称性と群 [2, pp.137–140]

N 種類の Dirac 場

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = (\bar{\psi}_1 \quad \bar{\psi}_2 \quad \cdots \quad \bar{\psi}_N)$$

に対するラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi = \sum_{i=1}^N \bar{\psi}_i(i\cancel{\partial} - m)\psi_i$$

は、 $N \times N$ のユニタリー行列 $U = e^{iH}$ (したがって H は Hermite 行列) による大域的位相変換 $\psi \rightarrow U\psi$ の下で不変に留まる。このような対称変換は 2 回繰り返し行っても、 \mathcal{L} を不変に保つ単一の N 次ユニタリー行列による変換となるから、 $U(N)$ 群と呼ばれる群を成す。ところで一般に $N \times N$ の Hermite 行列 H は N^2 個の独立な実数によって特定できる [1, p.254]。

証明 Hermite 性より H の N 個の対角成分は全て実数であり、また下三角成分は上三角成分を与えると完全に定まる。上三角成分は全部で $(N^2 - N)/2$ 個あり、その各々が 2 つの実数で指定されるので、Hermite 行列 H は合計

$$N + 2 \times \frac{N^2 - N}{2} = N^2 \text{ 個}$$

の実数パラメーターを持つ。

そこで N^2 個の適当な Hermite 行列 T_a と実パラメーター θ_a を用いて、一般に

$$H = \sum_a \theta_a T_a, \quad U = \exp\left(i \sum_a \theta_a T_a\right)$$

と書くことができる (このとき T_a を変換の生成子と呼ぶ)。

$U(N)$ 変換の N^2 個の生成子 T_a は、規格直交条件

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab} \tag{86}$$

を満たすようにとるのが慣例となっている。単位行列 $\mathbf{1}$ に比例する $T_0 = k\mathbf{1}$ を選ぶと、 T_0 を生成子とするユニタリー行列

$$\begin{aligned} \exp(i\theta_0 T_0) &= \exp(i\theta_0 k \mathbf{1}) = 1 + (i\theta_0 k) \mathbf{1} + \frac{1}{2!} (i\theta_0 k)^2 \mathbf{1}^2 + \cdots = \left[1 + (i\theta_0 k) + \frac{1}{2!} (i\theta_0 k)^2 + \cdots \right] \mathbf{1} \\ &= \exp(i\theta_0 k) \mathbf{1} \end{aligned}$$

による変換

$$\psi \rightarrow \exp(i\theta_0 T_0) \psi, \quad \text{i.e.} \quad \psi_i \rightarrow \exp(i\theta_0 k) \psi_i$$

は $U(1)$ 部分群を成す. 式 (86) より, 残りの $N^2 - 1$ 個の T_a ($a = 1, \dots, N^2 - 1$) は特に

$$\text{Tr}(T_a) = 0 \quad (a \neq 0)$$

を満たすため, $\exp\left(i \sum_{a=1}^{N^2-1} \theta_a T_a\right)$ は行列式が 1 となることが分かる.

証明 一般に θ_a を無限小パラメーターとして, 生成子 T_a によるユニタリー変換の演算子を

$$1 + i \sum_a \theta_a T_a$$

と書くと, 有限の θ_a による変換の演算子は無限小変換を合成して

$$U = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + i \sum_a \frac{\theta_a}{n} T_a \right)^n = \exp\left(i \sum_a \theta_a T_a\right)$$

と求まる [3, p.64]. また行列式は

$$\begin{aligned} \det U &= \det \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + i \sum_a \frac{\theta_a}{n} T_a \right)^n \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\det \left(1 + i \sum_a \frac{\theta_a}{n} T_a \right) \right]^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + i \frac{\theta_a}{n} \text{Tr}(T_a) + O\left(\left(\frac{\theta_a}{n}\right)^2\right) \right]^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + i \theta_a \text{Tr}(T_a) + O\left(\left(\frac{\theta_a}{n}\right)^2\right) \right] \\ &= 1 + i \theta_a \text{Tr}(T_a) \end{aligned}$$

と表される. ただし第 3 の等号では, θ_a/n 程度の $N \times N$ 行列 $A = i \sum_a \frac{\theta_a}{n} T_a$ に対して

$$\begin{aligned} &\det(\mathbf{1} + A) \\ &= \varepsilon^{i_1 \dots i_N} (\mathbf{1} + A)_{1i_1} \dots (\mathbf{1} + A)_{Ni_N} \\ &= \varepsilon^{i_1 \dots i_N} \delta_{1i_1} \dots \delta_{Ni_N} \\ &\quad + \varepsilon^{i_1 \dots i_N} \{ (A_{1i_1} \delta_{2i_2} \dots \delta_{Ni_N}) + (\delta_{1i_1} A_{2i_2} \delta_{3i_3} \dots \delta_{Ni_N}) + \dots + (\delta_{1i_1} \dots \delta_{N-1, i_{N-1}} A_{Ni_N}) \} + O((\theta_a/n)^2) \\ &= \varepsilon^{1 \dots N} + (\varepsilon^{i_1 2 \dots N} A_{1i_1} + \varepsilon^{1 i_2 3 \dots N} A_{2i_2} + \dots + \varepsilon^{1 \dots (N-1) i_N} A_{Ni_N}) + O((\theta_a/n)^2) \\ &= 1 + \varepsilon^{1 \dots N} (A_{11} + A_{22} + \dots + A_{NN}) + O((\theta_a/n)^2) \\ &= 1 + \text{Tr} A + O((\theta_a/n)^2) \\ &= 1 + \sum_a \frac{\theta_a}{n} \text{Tr}(T_a) + O((\theta_a/n)^2) \end{aligned}$$

となることを用いた ($\varepsilon^{i_1 \dots i_N}$ は $\varepsilon^{1 \dots N} = 1$ を満たす反対称テンソル) [5, pp.70–71]. 以上より

$$\text{Tr}(T_a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det \left[\exp \left(i \sum_a \theta_a T_a \right) \right] = 1.$$

したがって $N^2 - 1$ 個の T_a ($i \neq 0$) は $SU(N)$ 変換を生成する. こうして半ば直観的に述べると, $U(N)$ 群は $U(1)$ 群と $SU(N)$ 群に分解される:

$$U(N) = U(1) \times SU(N).$$

また $N^2 - 1$ 個の T_a は交換関係

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \tag{87}$$

を満たし, 上式 (87) で定義される構造定数 f_{abc} は

$$if_{abc} = 2\text{Tr}([T_a, T_b]T_c)$$

と書けることになるから*40, トレースの巡回対称性 (と交換子の反対称性) より, f_{abc} は添字に関して完全対称であることが結論される.

例 1 $N = 2$ のとき Pauli 行列 σ_a ($a = 1, 2, 3$) を用いて

$$T_1 = \frac{1}{2}\sigma_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{1}{2}\sigma_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \frac{1}{2}\sigma_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad T_0 = \frac{1}{2}\mathbf{1}.$$

角運動量代数でよく知られているように, 構造定数は ε_{abc} .

例 2 $N = 3$ のとき このとき $N^2 = 9$ 個の T_a として, Gell-Mann 行列

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

の $1/2$ 倍

$$T_a = \frac{1}{2}\lambda_a (\equiv \hat{F}_a) \quad (i = 1, 2, \dots, 8)$$

と, 単位行列 $\mathbf{1}$ に比例した $T_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{1}$ を選ぶことができる. 残りの 8 個の生成子 \hat{F}_a はいずれもトレースがゼロになっているため, $\exp\left(i\sum_{a=1}^8\theta_a\hat{F}_a\right)$ は行列式が 1 となり, 行列 $\exp\left(i\sum_{a=1}^8\theta_a\hat{F}_a\right)$ による位相変換は特殊ユニタリー群 $SU(3)$ を成す. QCD (量子色力学) は $SU(3)$ 変換に関してゲージ不変な理論であり, いわゆる $SU(3)$ Yang-Mills 理論の実例にあたる. クォークの各香り $f = d, u, s, c, b, t$ について 3 種類の色状態 $i = r, g, b$ の Dirac 場 ψ_i^f が定義され, 8 種類の色演算子 $\hat{F}_a = \lambda_a/2$ が $SU(3)$ 変換の生成子となる [2, p.145].

交換関係 (87) より交換子は群 $G = SU(N)$ の元 T_a, T_b を G の元 $[T_a, T_b]$ に対応付ける. ところが任意の行列 A, B, \dots に対して交換子 $[A, B]$ は

- 双線形性 $[aA + bB, C] = a[A, C] + b[B, C], [C, aA + bB] = a[C, A] + b[C, B]$
- 反対称性 (歪対称性) $[A, B] = -[B, A]$
- Jacobi 恒等式 $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$

を満たすから, G は交換子を積演算として Lie 代数を構成する*41. そこで特に T_a の交換子が Jacobi の恒等式

$$[T_a, [T_b, T_c]] + [T_b, [T_c, T_a]] + [T_c, [T_a, T_b]] = 0$$

*40 右辺に式 (87) を代入し, 式 (86) を用いれば確かめられる.

*41 一般にベクトル空間 V の任意の 2 個の要素 $x, y \in V$ を要素 $x \times y \in V$ に対応付ける双線形・歪対称な写像 (演算) が, Jacobi の恒等式

$$(x \times (y \times z)) + (y \times (z \times x)) + (z \times (x \times y)) = 0$$

を満たすとき, ベクトル空間 V はこの演算を演算積として Lie 代数を構成するという [12, p.56].

が成り立つことを要求し、ここに交換関係 (87) を代入すると、

$$f_{bcd}f_{ade} + f_{cad}f_{bde} + f_{abd}f_{cde} = 0 \quad (88)$$

が満たされなければならないことが見出される。

上式 (88) の証明 式 (87) より

$$[T_a, [T_b, T_c]] = if_{bcd}[T_a, T_d] = -f_{bcd}f_{ade}T_e$$

となるので、Jacobi の恒等式は

$$\begin{aligned} 0 &= [T_a, [T_b, T_c]] + [T_b, [T_c, T_a]] + [T_c, [T_a, T_b]] \\ &= -(f_{bcd}f_{ade} + f_{cad}f_{bde} + f_{abd}f_{cde})T_e \end{aligned}$$

と書き換えられる。ここに $T_{e'}$ を掛けてトレースをとり、規格直交条件 (86) を用いれば最右辺の T_e を取り除くことができるので、その係数 (\dots) ($e \rightarrow e'$ と改めたもの) がゼロにならなければならない。こうして式 (88) を得る。

[本節のこれ以降の随伴表現に関する議論は抽象的であるが、それは表面的には、B.2 節で後半の補足説明程度に用いるだけである.]

ここで生成子の表現行列として、 T_a の代わりに

$$[\text{ad}(T_a)]_b^c \equiv if_{bac}$$

で定義される行列 $\text{ad}(T_a)$ を用いる、随伴表現 (adjoint representation) を導入する。このとき式 (88) により $\text{ad}(T_a)$ もまた式 (87) と同じ交換関係を満たすため、 $\text{ad}(T_a)$ も Lie 代数の 1 つの表現となる^{*42}。

証明 式 (88) の左辺第 1 項の 2 つの f と第 2 項の後ろの f を反対称性によって書き換え、第 3 項を移項して

$$f_{cbd}f_{dae} - f_{cad}f_{dbe} = -f_{abd}f_{cde}$$

と書こう。両辺を i^2 倍し $\text{ad}(T_a)$ の定義を用いると

$$[\text{ad}(T_b)]_c^d [\text{ad}(T_a)]_d^e - [\text{ad}(T_a)]_c^d [\text{ad}(T_b)]_d^e = -if_{abd}[\text{ad}(T_d)]_c^e,$$

すなわち $[\text{ad}(T_a), \text{ad}(T_b)]_c^e = if_{abd}[\text{ad}(T_d)]_c^e$ を得る。

[T_a が N 次正方行列であるのに対し、 $\text{ad}(T_a)$ は N^2 次正方行列であることに注意すると、] 随伴表現 $\text{ad}(T_a)$ での表現ベクトルは添字 a を持つ量 ϕ_a で、群 $G = \text{SU}(N)$ の変換で

$$\phi'_b = \exp[i\theta^a \text{ad}(T_a)]_b^c \phi_c \quad (89)$$

と変換する。このように ϕ_a を縦に並べた“ベクトル表示”を用いる代わりに、生成子の任意の表現行列 $(T_a)_i^j$ に対して、

$$(\phi)_i^j = \sum_{a=1}^{\dim G} \phi^a (T_a)_i^j \quad (90)$$

なる $N \times N$ 行列 ϕ を用いることもできる^{*43}。そのような“行列記法”では、式 (89) の変換は

$$\phi' = U\phi U^\dagger, \quad U_i^j \equiv [\exp(i\theta^a T_a)]_i^j \quad (91)$$

と書ける (ただし U における T_a は式 (90) で考えた表現行列 $(T_a)_i^j$)。

^{*42} 構造定数は群の掛け算則から決まっています。全ての表現で同じであり、逆に構造定数は実質的に群の掛け算則を規定しているから [2, p.139] [4, p.48]。

^{*43} ただし随伴表現ベクトル ϕ_a の添字の上下は区別しない：すなわち $\phi_a = \phi^a, T_a = T^a$ 。

上式 (91) の証明 式 (90): $\phi = \phi^a T_a$ より式 (91) の左辺は

$$\begin{aligned}\phi' &= \phi'^a T_a = \exp[i\theta^b \text{ad}(T_b)]_a^c \phi_c T_a \\ &= \left[1 + i\theta^b \text{ad}(T_b) + \frac{(i\theta^b \text{ad}(T_b))^2}{2!} + \cdots \right]_a^c \phi_c T_a \\ &= \left[\delta_a^c + i\theta^b (if_{abc}) + \frac{1}{2!} (i\theta^b)(i\theta^{b'}) (if_{abc'}) (if_{c'b'c}) + \cdots \right] \phi_c T_a\end{aligned}\quad (92)$$

となる。他方, Baker-Hausdorff の公式

$$e^Y X e^{-Y} = X + [Y, X] + \frac{1}{2!} [Y, [Y, X]] + \cdots$$

(X, Y は任意の行列) より式 (91) の右辺は

$$U\phi U^\dagger = \phi + [i\theta^b T_b, \phi] + \frac{1}{2!} [i\theta^{b'} T_{b'}, [i\theta^b T_b, \phi]] + \cdots\quad (93)$$

と展開される。式 (90): $\phi = \phi^a T_a$ より式 (92),(93) それぞれの (最) 右辺第 1 項は等しい。そこで式 (92) における $n(\geq 1)$ 次の項 (の $n!$ 倍)

$$\begin{aligned}[(i\theta^b \text{ad}(T_b))^n]_a^c \phi_c T_a &= (i\theta^{b_1})(i\theta^{b_2}) \cdots (i\theta^{b_n}) [\text{ad}(T_{b_1})]_a^{c_1} [\text{ad}(T_{b_2})]_{c_1}^{c_2} \cdots [\text{ad}(T_{b_n})]_{c_{n-1}}^c \phi_c T_a \\ &= (i\theta^{b_1})(i\theta^{b_2}) \cdots (i\theta^{b_n}) (if_{ab_1 c_1}) (if_{c_1 b_1 c_2}) \cdots (if_{c_{n-1} b_n c}) \phi_c T_a\end{aligned}\quad (94)$$

と, 式 (93) における $n(\geq 1)$ 次の項 (の $n!$ 倍)

$$[i\theta^{b_n} T_{b_n}, \cdots, [i\theta^{b_2} T_{b_2}, [i\theta^{b_1} T_{b_1}, \phi]] \cdots]\quad (95)$$

が一致していれば良い。このことを数学的帰納法にて証明しよう。 $n = 1$ のとき式 (94) は $i\theta^b \cdot if_{abc} \phi_c T_a$ である。他方, 式 (95) は

$$[i\theta^b T_b, \phi] = i\theta^b \phi^c [T_b, T_c] = i\theta^b \phi^c \cdot if_{bca} T_a = i\theta^b \cdot if_{abc} \phi_c T_a$$

となるので, これらは一致する。次にある n に対して式 (94),(95) が等しいと仮定すると, 式 (95) で $n \rightarrow n+1$ と置き換えた量は

$$\begin{aligned}& (i\theta^{b_1}) \cdots (i\theta^{b_n}) (if_{ab_1 c_1}) \cdots (if_{c_{n-1} b_n c}) \phi_c \times i\theta^{b_{n+1}} [T_{b_{n+1}}, T_a] \\ &= (i\theta^{b_1}) \cdots (i\theta^{b_n}) (i\theta^{b_{n+1}}) (if_{ab_1 c_1}) \cdots (if_{c_{n-1} b_n c}) (if_{bb_{n+1} a}) \phi_c T_a \quad (\because [T_{b_{n+1}}, T_a] = if_{b_{n+1} a b} T_b = if_{bb_{n+1} a} T_b) \\ &= (i\theta^{b_1}) \cdots (i\theta^{b_n}) (i\theta^{b_{n+1}}) (if_{ab_{n+1} b}) (if_{ab_1 c_1}) \cdots (if_{c_{n-1} b_n c}) \quad (\because \text{ダミー添字の入れ替え } a \leftrightarrow b)\end{aligned}$$

と計算される。最右辺でさらにダミー添字の置き換え

$$b_{n+1} \rightarrow b_1 \rightarrow b_2 \rightarrow \cdots \rightarrow b_n \rightarrow b_{n+1} : \text{巡回置換}, \quad b \rightarrow c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow \cdots \rightarrow c_{n-1} \rightarrow c_n$$

を施せば, これは式 (94) で $n \rightarrow n+1$ と置き換えた量に等しいことが判明する。以上より示された。

B.2 局所ゲージ変換 [2, pp.140–144]

ここまでは Dirac 場の大局的位相変換を考えてきた。次に考えている場 $\varphi_i(x)$ の大域の変換

$$\varphi'_i(x) = U_i^j \varphi_j(x) = [\exp(i\theta^a T_a)]_i^j \varphi_j(x)$$

を局所的位相変換

$$\varphi'_i(x) = U_i^j(x) \varphi_j(x) = [\exp(ig\theta^a(x) T_a)]_i^j \varphi_j(x)\quad (96)$$

に一般化したとき (後の都合上, θ^a から結合定数 g をくくり出した), 理論のゲージ不変性を回復するには, 極小置換 (微分の共変微分への置き換え) により物質場と相互作用する $N^2 - 1$ 種類のゲージ場を導入すれば良い

ことを、本節と B.3 節で説明する。これ以降、 φ_i を縦に並べたベクトルを φ , U_i^j を並べた行列を $U = (U_i^j)$ と書く。

まず、点 x におけるベクトル $\varphi_i(x)$ を近接する点 $x + dx$ に平行移動したベクトル

$$\varphi_{\parallel i}(x + dx) = \varphi_i(x) + ig(A_\mu)_i^j(x)\varphi_j(x)dx^\mu \quad (97)$$

を定義すると、これは点 $x+dx$ での変換行列 $U(x+dx)$ で変換するベクトルであって、右辺の行列 $A_\mu = (A_\mu)_i^j$ は接続場と呼ばれる。

物理的には A_μ はゲージ場であり、 T_a を基底として

$$(A_\mu)_i^j(x) = \sum_{a=1}^{\dim G} A_\mu^a(x)(T_a)_i^j \quad (98)$$

と展開できる。これにより ($G = \text{SU}(N)$ では) $\dim G = N^2 - 1$ 種類のゲージ場 $A_\mu^a(x)$ ($a = 1, \dots, N^2 - 1$) が導入されたことになる。

さて、 $x + dx$ におけるベクトル $\varphi(x + dx), \varphi_{\parallel}(x + dx)$ は、したがってその差

$$\begin{aligned} \varphi(x + dx) - \varphi_{\parallel}(x + dx) &= (\partial_\mu \varphi(x) - igA_\mu(x)\varphi(x))dx^\mu \\ &\equiv D_\mu \varphi(x)dx^\mu \end{aligned} \quad (99)$$

は $U(x + dx)$ で変換する：

$$\begin{aligned} (D_\mu \varphi)'(x)dx^\mu &= U(x + dx)D_\mu \varphi(x)dx^\mu \simeq U(x)D_\mu \varphi(x)dx^\mu, \quad (\text{dx の 1 次まで}) \\ \therefore (D_\mu \varphi)'(x) &= U(x)D_\mu \varphi(x). \end{aligned} \quad (100)$$

実際、上式 (100): $D_\mu'(U\varphi) = UD_\mu\varphi$ が任意の場 φ に対して成り立つためには

$$D_\mu' = UD_\mu U^{-1}$$

であれば良く [ただし右辺の D_μ は U^{-1} の右側の因子にも作用する]、これは

$$\begin{aligned} \partial_\mu - igA_\mu' &= U(\partial_\mu - igA_\mu)U^{-1} \\ &= \partial_\mu + U\partial_\mu U^{-1} - igUA_\mu U^{-1} \end{aligned}$$

[ただし最右辺第 2 項 $U\partial_\mu U^{-1}$ の ∂_μ はすぐ右隣の U^{-1} のみに作用する] よりゲージ場が

$$A_\mu \rightarrow A_\mu' = \frac{i}{g}U\partial_\mu U^{-1} + UA_\mu U^{-1} \quad (101)$$

と変換することを意味する。物質場とゲージ場の変換 (96),(101) を合わせて局所ゲージ変換と呼ぶ。

note [12, pp.30–35] [13, pp.140–144] [14, pp.27–37]

曲がった空間においてベクトル $V^\mu(x)$ を位置 $x + dx$ に平行移動したベクトル

$$V_{\parallel}^\mu(x + dx) = V^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\nu\rho}(x)V^\rho(x)dx^\nu$$

と、式 (97) を比較すると、 $(A_\mu)_i^j$ は接続係数 (Christoffel 記号) $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ に対応していることが見て取れる。

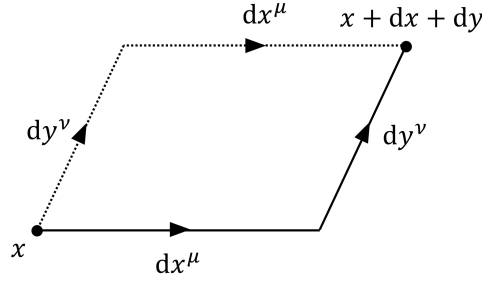


図 70 2つの無限小の経路

位置 $x + dx$ にもとからあるベクトル $V^\mu(x + dx)$ との差

$$\begin{aligned} V^\mu(x + dx) - V^\mu_{\parallel}(x + dx) &= V^\mu(x + dx) - \{V^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\nu\rho} V^\rho dx^\nu\} \\ &= (\partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} V^\rho) dx^\nu \\ &\equiv (\nabla_\nu V^\mu) dx^\nu \end{aligned}$$

がベクトルとして変換するのと同様、平行移動した場との差 (99) も $U(x + dx)$ によって“ベクトル”として変換するように、式 (97) で導入した接続場 A_μ の変換則 (101) を決定できる。場の平行移動 (97) の意味はこの中に含まれている。

上式の最右辺 $(\nabla_\nu V^\mu) dx^\nu$ を式 (99) の最右辺 (の第 i 成分) $D_\nu \varphi_i(x) dx^\nu$ と比較すると、ここで定義した共変微分 D_ν は通常のテンソルの共変微分 ∇_ν に対応していることが分かる。

次に場の強さ $F_{\mu\nu}(x)$ を導入しよう。それは数学的には曲率テンソルと呼ばれ、場 $\varphi(x)$ を図 70 の 2つの経路に沿って平行移動した結果の差

$$\Delta\varphi(x) = [D_\mu, D_\nu]\varphi(x) dx^\mu dy^\nu \quad (102)$$

(文字定義と導出は下記) において

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \quad (103)$$

で定義される (第 2 の等号の確認は下記)。このように交換子 $[D_\mu, D_\nu]$ は見かけと違って、もはや微分演算子ではない [行列 A_μ, A_ν は交換しないことにも注意]。

note これは曲がった空間の曲率テンソル R_{\dots} が³、ベクトルの平行移動の経路による差、したがって共変微分の順序による差と

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\lambda = R^\lambda_{\rho\mu\nu} V^\rho$$

のように関係することと比較される。

また式 (103) は曲率テンソルの定義式

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} \equiv \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho} + \Gamma^\mu_{\alpha\rho} \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} \Gamma^\alpha_{\nu\rho}$$

に対応していることが見て取れる。

ここまでの曲がった空間の幾何学とゲージ理論の対応関係は次のようにまとめられる。

$$\begin{aligned}
 \text{座標変換} &\leftrightarrow \text{ゲージ変換,} \\
 \text{ベクトル } V^\mu &\leftrightarrow \text{物質場 } \varphi_i, \\
 \text{接続 } \Gamma^\mu_{\nu\rho} &\leftrightarrow \text{ゲージ場 } (A_\mu)_i^j, \\
 \text{共変微分 } \nabla_\mu &\leftrightarrow \text{共変微分 } D_\mu, \\
 \text{曲率 } R^\mu_{\nu\rho\sigma} &\leftrightarrow \text{場の強さ } (F_{\mu\nu})_i^j.
 \end{aligned}$$

式 (102) の導出 図 70 の実線の経路に沿って場 $\varphi(x)$ を点 $x + dx$ に移すと、式 (88) より

$$\varphi_{\parallel}(x + dx) = \varphi(x + dx) - D_\mu(x)\varphi(x)dx^\mu \quad (104)$$

が得られる [本稿では共変微分 $D_\mu(x)$ の引数を明示して計算を進める]。次いでこれを点 $x + dx + dy$ に移した結果は

$$\varphi_{\parallel\parallel}(x + dx + dy) = \varphi_{\parallel}(x + dx + dy) - D_\nu(x + dx)\varphi_{\parallel}(x + dx)dy^\nu$$

である (下付きの \parallel は線要素 dx に沿う, 上付きの \parallel は線要素 dy に沿う平行移動を表す)。右辺に式 (104) を代入すると、

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\parallel\parallel}(x + dx + dy) &= \varphi(x + dx + dy) - D_\mu(x + dy)\varphi_{\parallel}(x + dy)dx^\mu - D_\nu(x + dx)\varphi_{\parallel}(x + dx)dy^\nu \\
 &\quad + D_\nu(x + dx)D_\mu(x)\varphi(x)dx^\mu dy^\nu
 \end{aligned} \quad (105)$$

と書き換えられる。他方、図 70 の破線の経路に沿って場 $\varphi(x)$ を点 $x + dx + dy$ に移した結果は、式 (105) で置き換え $dx \leftrightarrow dy$ を行った式で与えられ、ダミー添字の入れ替え $\mu \leftrightarrow \nu$ も施せば

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\parallel\parallel}(x + dx + dy) &= \varphi(x + dx + dy) - D_\mu(x + dy)\varphi_{\parallel}(x + dy)dx^\mu - D_\nu(x + dx)\varphi_{\parallel}(x + dx)dy^\nu \\
 &\quad + D_\mu(x + dy)D_\nu(x)\varphi(x)dx^\mu dy^\nu
 \end{aligned}$$

と書ける。よってこれらの差は

$$\begin{aligned}
 \Delta\varphi(x) &\equiv \varphi_{\parallel\parallel}(x + dx + dy) - \varphi_{\parallel\parallel}(x + dx + dy) \\
 &= \{D_\mu(x + dy)D_\nu(x) - D_\nu(x + dx)D_\mu(x)\}\varphi(x)dx^\mu dy^\nu
 \end{aligned}$$

となる。曲率にとって重要な微小量 dx, dy の 2 次までの近似では、最右辺において共変微分の引数をすべて x に置き換えて良いので、式 (102) を得る。

式 (103) の導出

$$\begin{aligned}
 D_\mu D_\nu \varphi &= (\partial_\mu - igA_\mu)(\partial_\nu - igA_\nu)\varphi \\
 &= \partial_\mu \partial_\nu \varphi - ig(\partial_\mu A_\nu)\varphi - ig\{A_\nu \partial_\mu + A_\mu \partial_\nu\}\varphi + (ig)^2 A_\mu A_\nu \varphi, \\
 \therefore [D_\mu, D_\nu]\varphi &= -ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu])\varphi
 \end{aligned}$$

による。

さて、平行移動した場 $\varphi_{\parallel\parallel}(x + dx + dy), \varphi_{\parallel\parallel}(x + dx + dy)$ は、したがってその差

$$\Delta\varphi(x) = \frac{g}{i} F_{\mu\nu}(x)\varphi(x)dx^\mu dy^\nu$$

は $U(x + dx + dy)$ で変換される :

$$\begin{aligned} (\Delta\varphi')(x) &= U(x + dx + dy)\Delta\varphi(x) \simeq U(x)\Delta\varphi(x), & (dx, dy \text{ の 2 次までの近似}) \\ \therefore F'_{\mu\nu}\varphi' &= F'_{\mu\nu}(U\varphi) = U(F_{\mu\nu}\varphi). \end{aligned}$$

これが任意の場 φ に対して成り立つことから, 場の強さの変換則

$$F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^{-1} \quad (106)$$

が見出される.

ところで電磁場では, ポテンシャルから導かれる場の強さ $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ は恒等式として, Maxwell 方程式の自明な組 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0$ を満たした. 一般のゲージ場で, これに対応する式は

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}D_\nu F_{\rho\sigma} \equiv \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\nu F_{\rho\sigma} - ig[A_\nu, F_{\rho\sigma}]) = 0 \quad (107)$$

となる (導出は下記). これは Bianchi (ビアンキ) 恒等式と呼ばれ, Jacobi 恒等式

$$[D_\nu, [D_\rho, D_\sigma]] + [D_\rho, [D_\sigma, D_\nu]] + [D_\sigma, [D_\nu, D_\rho]] = 0 \quad \text{i.e.} \quad \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}[D_\nu, [D_\rho, D_\sigma]] = 0 \quad (108)$$

から導かれる.

Bianchi 恒等式 (107) の導出

$$0 = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}[D_\nu, [D_\rho, D_\sigma]] = \frac{g}{i}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}[D_\nu, F_{\rho\sigma}] = \frac{g}{i}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}[\partial_\nu - igA_\nu, F_{\rho\sigma}].$$

ところで Jacobi 恒等式 (108) は演算子の関係である. そこで演算子が作用するベクトル φ (ないし行列) を明記すると, 上式最右辺において

$$[\partial_\nu, F_{\rho\sigma}]\varphi = \partial_\nu(F_{\rho\sigma}\varphi) - F_{\rho\sigma}\partial_\nu\varphi = (\partial_\nu F_{\rho\sigma})\varphi + F_{\rho\sigma}\partial_\nu\varphi - F_{\rho\sigma}\partial_\nu\varphi = (\partial_\nu F_{\rho\sigma})\varphi$$

となるので, 式 (107):

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\nu F_{\rho\sigma} - ig[A_\nu, F_{\rho\sigma}]) = 0$$

を得る.

場の強さ $F_{\mu\nu}$ もゲージ場 A_μ と同様,

$$(F_{\mu\nu})_i^j = \sum_{a=1}^{\dim G} F_{\mu\nu}^a (T_a)_i^j \quad (109)$$

と展開される. 式 (98),(109) は式 (90) と比較される式である. そこで変換則 (101),(106) を式 (91) と比べると, $F_{\mu\nu}^a$ は群 G の随伴表現として変換するのに対し, ゲージ場 A_μ^a 自身の変換則には付加的な項が伴っている.

ここで変換パラメータ $\theta^a(x)$ が無限小の場合を想定して, 変換則 (96),(101) を $\theta^a(x)$ の 1 次までの近似で書き下しておこう. まず $U(x) \simeq 1 + ig\theta^a(x)T_a$ より, 物質場の変換則 (96) は

$$\delta\varphi_i(x) = ig\theta^a(x)(T_a)_i^j\varphi_j(x)$$

となる. またゲージ場の変換則 (101) は, 行列表記で

$$\delta A_\mu = \partial_\mu(\theta^b T_b) + ig[(\theta^b T_b), A_\mu] \quad (110)$$

となる.

上式 (110) の導出 式 (101) の第 1 項は

$$\frac{i}{g}U\partial_\mu U^{-1} = \frac{i}{g}(1 + ig\theta^a T_a)\{-ig(\partial_\mu\theta^b)T_b\} \simeq (\partial_\mu\theta^b)T_b,$$

第 2 項は

$$UA_\mu U^{-1} = (1 + ig\theta^a T_a)A_\mu(1 - ig\theta^b T_b) \simeq A_\mu + ig[(\theta^b T_b), A_\mu]$$

となることによる.

式 (110) を成分 A_μ^a に対する変換則として書けば,

$$\delta A_\mu^a = \partial_\mu\theta^a + gf_{abc}A_\mu^b\theta^c \quad (111)$$

となる.

上式 (111) の導出 式 (110) に式 (98): $A_\mu = A_\mu^c T_c$ を代入し, 左から T_a を掛けると

$$\begin{aligned} (\delta A_\mu^c)T_a T_c &= (\partial_\mu\theta^b)T_a T_b + ig\theta^b A_\mu^c T_a [T_b, T_c] \\ &= (\partial_\mu\theta^b)T_a T_b - gf_{bcd}\theta^b A_\mu^c T_a T_d. \end{aligned}$$

トレースをとると

$$\delta A_\mu^a = \partial_\mu\theta^a - gf_{bca}\theta^b A_\mu^c = \partial_\mu\theta^a + gf_{abc}A_\mu^b\theta^c : (111).$$

式 (111) の右辺は $D_\mu = \partial_\mu - ig(A_\mu^b T_b)$ の随伴表現

$$(D_\mu)^{ac} = \partial_\mu\delta^{ac} - igA_\mu^b [\text{ad}(T_b)]^{ac}$$

による共変微分 $(D_\mu)^{ac}\theta^c$ となっている.

B.3 ゲージ不変なラグランジアン密度 [2, pp.144–145]

ゲージ場 A_μ と相互作用する物質場 φ のラグランジアン密度は, 自由な物質場のそれにおいて, 微分の共変微分への置き換え [極小置換] $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ を施して得られる:

$$\mathcal{L}_{\text{matter}} = \begin{cases} (D_\mu\varphi)^\dagger D_\mu\varphi - V(\varphi^\dagger\varphi) & \text{スカラー場} \\ \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi & \text{Dirac 場} \end{cases} \quad (112)$$

実際, 局所ゲージ変換 (96),(101) の下で物質場の共変微分 $D_\mu\varphi$ は, 式 (100) のように場 φ と同様に変換されるので, ラグランジアン密度 (112) はゲージ不変である. また局所ゲージ変換に際して, 場の強さは式 (106) に従って変換するから, ゲージ場のラグランジアン密度を

$$\mathcal{L}_{\text{gauge field}} = -\frac{1}{4}N^{-1}\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \quad (113)$$

とすると, これはゲージ不変である [トレースの巡回対称性に注意]. ここに N は行列 T_a の規格直交性を $\text{Tr}(T_a T_b) = N\delta_{ab}$ と書いて定義される規格化因子であり, 我々の定式化 (式 (86)) では $N = 1/2$ である. ラグランジアン密度 (113) は

$$\mathcal{L}_{\text{gauge field}} \left[= -\frac{1}{4}N^{-1}F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu}\text{Tr}(T_a T_b) \right] = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (114)$$

と書き換えられる.

ここで場の強さ $F_{\mu\nu}$ の展開 (109) における成分 $F_{\mu\nu}^a$ を具体的に調べると

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (115)$$

が見出される.

上式 (115) の導出 展開 (109): $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^b T_b$ から成分 $F_{\mu\nu}^a$ をとり出すには,

$$N^{-1}\text{Tr}(T_a F_{\mu\nu}) = N^{-1}F_{\mu\nu}^b \text{Tr}(T_a T_b) = F_{\mu\nu}^a$$

とすれば良い. そこでこの公式 $F_{\mu\nu}^a = N^{-1}\text{Tr}(T_a F_{\mu\nu})$ に式 (103):

$$F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu^b - \partial_\nu A_\mu^b)T_b - igA_\mu^b A_\nu^c [T_b, T_c] = (\partial_\mu A_\nu^b - \partial_\nu A_\mu^b)T_b + gf_{bcd}A_\mu^b A_\nu^c T_d$$

を代入すると,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= N^{-1} \{ (\partial_\mu A_\nu^b - \partial_\nu A_\mu^b) \text{Tr}(T_a T_b) + gf_{bcd}A_\mu^b A_\nu^c \text{Tr}(T_a T_d) \} \\ &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c : (115) \end{aligned}$$

を得る.

note 構造定数 f_{abc} の添字に関する完全反対称性から, 反対称性

$$F_{\mu\nu}^a = -F_{\nu\mu}^a$$

が従う.

一般には生成子 T_a は非可換なので, a 種類目のゲージ場の強さ (115) における構造定数 f_{abc} の項はゼロでなく, ラグランジアン密度 (114) は A_μ の 3 次と 4 次の自己相互作用項を持つことになる (係数 g はこれらの項を特徴付けるため, 結合定数と呼ばれる). この場合のゲージ理論を Yang-Mills 理論という.

なお, ゲージ場は式 (101) のように変換するため, ゲージ不変性を破ることなくラグランジアン密度にゲージ場の質量項

$$\frac{1}{2}m^2 A_\mu^a A^{a\mu} = \frac{1}{2}m^2 N^{-1}\text{Tr}(A_\mu A^\mu)$$

を付け加えることはできないことに注意する.

付録 C クォークの電弱相互作用

我々はこれまで、QCD と電弱理論を別々に論じてきた。QCD では Lagrangian 密度 (36):

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\Psi}^f (i\not{D} - m_f) \Psi^f - \frac{1}{4} G_{i\mu\nu} G_i^{\mu\nu}$$

を用いてクォークの強い相互作用を記述し、また電弱理論では Lagrangian 密度 (85):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^L + \mathcal{L}^B + \mathcal{L}^H + \mathcal{L}^{\text{LH}},$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}^L = i(\bar{\Psi}_l^L \not{D} \Psi_l^L + \bar{\psi}_l^R \not{D} \psi_l^R + \bar{\psi}_{\nu_l}^R \not{D} \psi_{\nu_l}^R) \\ \mathcal{L}^B = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{i\mu\nu} W_i^{\mu\nu} \\ \mathcal{L}^H = (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \\ \mathcal{L}^{\text{LH}} = -g_l (\bar{\Psi}_l^L \psi_l^R \Phi + \Phi^\dagger \bar{\psi}_l^R \Psi_l^L) - g_{\nu_l} (\bar{\Psi}_l^L \psi_{\nu_l}^R \tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}^\dagger \bar{\psi}_l^R \Psi_l^L) \end{cases}$$

を用いてレプトンの電弱相互作用を記述した。(ここではグルーオン場 A_i^μ に対して定義したテンソル場 $G_i^{\mu\nu}$ と区別するために、ゲージ場 W_i^μ に対する類似の量 $G_i^{\mu\nu}$ を $W_i^{\mu\nu}$ と書き改めた。) しながら現実には、クォークは強い力だけでなく弱い力も感じる。そこでクォークの電弱相互作用を扱うために、理論を拡張する必要がある。その方法は既に見たレプトンの電弱理論の定式化と似たものになるので、結果だけを記そう [1, pp.177–183].

まずクォークの Lagrangian 密度を、レプトンの項 \mathcal{L}^L と類似の形

$$\mathcal{L}^q = \bar{\Psi}_{q_k}^L i\not{D} \Psi_{q_k}^L + \bar{\psi}_{u_k}^R i\not{D} \psi_{u_k}^R + \bar{\psi}_{d_k}^R i\not{D} \psi_{d_k}^R \quad (116)$$

で与える。ただしここではクォークの香りを $(u_1, u_2, u_3) = (u, c, t), (d_1, d_2, d_3) = (d, s, b)$ と表記しており、例えば $\psi_{u_k}^R$ は香り u_k の右手型クォーク場、

$$\Psi_{q_k}^L = \begin{pmatrix} \psi_{u_k}^L \\ \psi_{d_k}^L \end{pmatrix}$$

は第 k 世代の左手型クォーク場の SU(2)2 重項である。上式 (116) の \mathcal{L}^q では世代 $k = 1, 2, 3$ に関する和が含意されている。また式 (116) 各項の共変微分はそれぞれ順に

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{2} i g \tau_j W_j^\mu + \frac{1}{6} i g' B_\mu, \quad D_\mu = \partial_\mu + \frac{2}{3} i g' B_\mu, \quad D_\mu = \partial_\mu - \frac{1}{3} i g' B_\mu$$

で定義されており、これによりクォークの W^\pm, Z^0 ボゾン、光子との相互作用が導入される。QCD における SU(3) 変換に対しても不変な理論を得るには、これら各クォーク場の共変微分 D_μ に付加的なグルーオンとの結合項

$$\frac{1}{2} i g_s \lambda_j A_j^\mu$$

を含めれば良い。このときクォークの Lagrangian 密度 (116) は \mathcal{L}_{QCD} における第 1 項 $\bar{\Psi}^f i\not{D} \Psi^f$ を含むことになる。

次にクォークに質量を与えるために、クォークを \mathcal{L}^{LH} と類似の形

$$\mathcal{L}^q = - \left[G_{ij}^u \bar{\Psi}_{q_i}^L \tilde{\Phi} \psi_{u_j}^R + G_{ij}^d \bar{\Psi}_{q_i}^L \Phi \psi_{d_j}^R \right] + \text{h.c.}$$

によって Higgs 場と結合する。ここに G_{ij}^u, G_{ij}^d は定係数, h.c. は Hermite 共役であり, 世代の添字 $i, j = 1, 2, 3$ について和をとるものとする。系が自発的に対称性を破ると, \mathcal{L}^{qH} は \mathcal{L}_{QCD} における質量項 $-m_f \bar{\Psi}^f \Psi^f$ を生じる。

最後に \mathcal{L}_{QCD} における純粋なグルーオン場の項 $-\frac{1}{4}G_{i\mu\nu}G_i^{\mu\nu}$ を含めてボゾン場の Lagrangian 密度を

$$\mathcal{L}^B = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{i\mu\nu}W_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{i\mu\nu}G_i^{\mu\nu}$$

と再定義する。

以上より標準理論の完全な Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^L + \mathcal{L}^q + \mathcal{L}^B + \mathcal{L}^H + \mathcal{L}^{\text{LH}} + \mathcal{L}^{qH}$$

で与えられる。

参考文献

- [1] W.N. コッティングラム, D.A. グリーンウッド, 2013, 素粒子標準模型入門 (樺沢宇紀訳), 丸善出版株式会社, 東京.
- [2] 九後汰一郎, 2018, 新物理学シリーズ 23 ゲージ場の量子論 I, 株式会社培風館.
- [3] J.J.Sakurai, 2017, 現代の量子力学 (上)(桜井明夫訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [4] H. ジョージアイ, 2010, 物理学におけるリー代数——アイソスピンから統一理論へ—— (原著第 2 版) (九後汰一郎訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [5] 香取眞理, 2016, 裳華房テキストシリーズ-物理学, 非平衡統計力学, 株式会社裳華房, 東京.
- [6] M. ストーン, 2012, 量子場の物理 [新装版] (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [7] 杉田勝実ほか, 2005, 経路積分と量子電磁力学 [POD 版], 森北出版株式会社, 東京.
- [8] B. ツヴィーバッハ, 2018, 初級講座 弦理論《発展編》(樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [9] J.J.Sakurai, 2014, 現代の量子力学 (下)(桜井明夫訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [10] 北原和夫, 1997, 非平衡系の統計力学 岩波基礎物理シリーズ 8, 株式会社岩波書店, 東京.
- [11] 北原和夫, 吉川研一, 1994, 非平衡系の科学 I 反応・拡散・対流の現象論, 講談社サイエンティフィク, 東京.
- [12] 山本義隆, 中村孔一, 2013, 朝倉物理学大系 1 解析力学 I, 株式会社朝倉書店, 東京.
- [13] 内山龍雄, 2014, 相対性理論 物理テキストシリーズ 8, 株式会社岩波書店, 東京.
- [14] P.A.M. ディラック, 2012, 一般相対性理論 (江沢洋訳), 株式会社筑摩書房, 東京.